# ΜΑΘΗΜΑΤΑ
# ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ,

ΕΡΑΝΙΣΘΕΝΤΑ

ΥΠΟ

ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΥΝΤΑΓΜΑΤΑΡΧΟΥ ΤΟΥ ΠΥΡΟΒΟΛΙΚΟΥ

**ΜΙΧΑΗΛ ΣΟΦΙΑΝΟΥ,**

ΑΡΧΑΙΟΥ ΜΑΘΗΤΟΥ ΤΗΣ ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ
ΣΧΟΛΗΣ, ΝΥΝ ΔΕ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΝ ΤΗι ΑΥΤΗι ΣΧΟΛΗι.

*Πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν αὐτοῦ.*

**ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ,**
ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ Κ. ΑΝΤΩΝΙΑΔΟΥ,
ΟΔΟΣ ΕΡΜΟΥ, ΑΝΩ ΤΗΣ ΚΑΠΝΙΚΑΡΕΑΣ, ΑΡΙΘ. 211.

1857.

# ΜΑΘΗΜΑΤΑ
# ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

## ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ.

---

## ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ.

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

### ΠΕΡΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΩΡΙΣΜΕΝΩΝ.

#### ΠΕΡΙ ΜΟΡΦΩΣΕΩΣ ΤΗΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ.

1. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, ἡ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ, καλεῖται τὸ μέρος τῶν Μαθηματικῶν τὸ πραγματευόμενον περὶ χρήσεως τῆς Ἀλγέβρας ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς ἐρεύναις.

Ὁ ΟΥΪΕΤΟΣ πρῶτος ἔκαμε χρῆσιν τῆς Ἀλγέβρας πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀγνώστων μερῶν σχήματός τινος, ἐκφράσας δι' ἐξισώσεων τὰς σχέσεις τῶν μερῶν τούτου πρὸς ἄλληλα. Πλὴν ὁ ΚΑΡΤΕΣΙΟΣ, οὐχὶ μόνον ἐτελειοποίησε τὰ ἔργα τοῦ ΟΥΪΕΤΟΥ, ἀλλὰ καὶ ἐπενόησε μεθόδους ἁπλᾶς καὶ γενικάς, δι' ὧν ἡ θεωρία τῶν καμπύλων ὑποβάλλεται εἰς τὸν ἀλγεβραϊκὸν λογισμόν. Αἱ μέθοδοι αὗται ἐφαρμόζονται εἰς γραμμὰς καὶ εἰς ἐπιφανείας οἱασδήποτε· ἕνεκα δὲ τούτου προῆλθεν ἡ διάκρισις, *Ἀναλυτικὴ Γεωμετρία δύο ἢ τριῶν διαστάσεων.*

2. Ἵνα δὲ ἀκολουθήσωμεν τάξιν φυσικωτέραν, ἀρξόμεθα πραγματευόμενοι τὴν μέθοδον καθ' ἣν ἐπιλύονται τὰ ὡρισμένα προβλήματα. Ἐν αὐτῇ φαίνεται ὅτι λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν μόνον τὰ ἀφορῶντα σχήματα ἐπίπεδα προβλήματα· ἀλλ' ἐννοήσωμεν εὐκόλως ὅτι συμπεριλαμβάνει καὶ τὰς ἐπιφανείας καὶ τὰ στερεά.

3. Τὰ διάφορα μεγέθη, γραμμαί, ἐπιφάνειαι, στερεά, ἵνα ἐκτιμηθῶσιν εἰς ἀριθμούς, συγκρίνονται πρός τινα μονάδα ὁμοειδῆ μετρικήν. Πρὸς πλειοτέραν γενικότητα, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι παριστῶνται διὰ γραμμάτων· οὕτως ἐννοοῦμεν τίνι τρόπῳ τὰ γεωμετρικὰ μεγέθη ὑποβάλλονται εἰς τοὺς ἀλγεβραϊκοὺς λογισμούς.

4. Πολλάκις ἡ ἐξίσωσις προβλήματός τινος γεωμετρικοῦ μορφοῦται τοσοῦτον εὐκόλως, ὥστε πᾶς πρὸς τοῦτο κανὼν καθίσταται περιττός. Ἔστω π. χ. τὸ ἑξῆς·

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Εὐθεῖαν δεδομένην κατ' ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.*

Καλοῦμεν $\alpha$ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν· $\chi$ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα· τὸ ἔλαττον ἔσεται $\alpha-\chi$. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, μορφοῦμεν ἀμέσως τὴν ἐξίσωσιν

$$\chi^2=\alpha(\alpha-\chi), \tag{1}$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν

$$\chi=-\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\alpha^2+\frac{\alpha^2}{4}}.$$

Ἡ δευτέρα τιμή, ὡς ἀρνητικὴ καὶ μείζων τοῦ $\alpha$, δὲν ἁρμόζει εἰς τὸ ζήτημα· διότι, φανερὸν ὅτι τὸ ζητούμενον τμῆμα ἀδύνατον νὰ ἦναι ποσότης ἀρνητική, ἢ μεῖζον τῆς ὅλης εὐθείας $\alpha$. Λοιπόν, ἔχομεν μίαν λύσιν, τὴν θετικήν. Ἀφοῦ ἐκτιμήσωμεν εἰς ἀριθμὸν τὴν δοθεῖσαν γραμμὴν διά τινος μονάδος μήκους, ἀρκεῖ νὰ ἐκτελέσωμεν τοὺς ἐν τῷ τύπῳ δηλουμένους λογισμούς, ἵνα γνωρίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐν τῷ ζητουμένῳ τμήματι περιεχομένων μονάδων γραμμικῶν.

Ὁ αὐτὸς τύπος δεικνύει ἁπλουστάτην τινὰ γνωστὴν γεωμετρικὴν κατασκευὴν δι' ἧς ὁρίζεται τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος τμῆμα.



(Σχ. 1). Κατὰ τὸ ἄκρον τῆς δεδομένης γραμμῆς ΑΒ$=\alpha$, ἄγομεν πρὸς ὀρθὰς τὴν ΒΓ$=\frac{1}{2}$ΑΒ, ἐπιζευγνύομεν τὴν ΑΓ, ἥτις ὡς ὑποτείνουσα ἰσοῦται $\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{4}\alpha^2}$. Κέντρῳ τῷ Γ καὶ ἀκτῖνι ΒΓ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, τέμνουσαν τὴν ΑΓ εἰς Δ. Ἔχομεν

$$\text{ΑΔ}=\chi=\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{4}\alpha^2}-\frac{\alpha}{2}.$$

Λοιπόν, τὸ περὶ οὗ λόγος πρόβλημα ἐπιλύεται μεταφερομένης τῆς ΑΔ εἰς ΑΜ ἐπὶ τῆς ΑΒ.

Ἡ αὐτὴ περιφέρεια κύκλου τέμνει τὴν προαγωγὴν τῆς ΑΓ καὶ κατὰ τὸ σημεῖον Δ'. Μεταφέρομεν ΑΔ' εἰς ΑΜ' ἐπὶ τῆς ΑΒ προαγομένης, καὶ ἔχομεν·

$$\text{ΑΜ}'=\text{ΑΔ}'=\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{4}\alpha^2}+\frac{1}{2}\alpha.$$

Ἄρα, ἡ δευτέρα τιμὴ τοῦ $\chi$ εἶναι $-$ ΑΜ'.

ΣΗΜ. Μετ' οὐ πολὺ πραγματευσόμεθα περὶ τῶν ἀρνητικῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων καὶ περὶ κατασκευῆς τῶν ἀλγεβραϊκῶν ἐκφράσεων.

5. Τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἦτον ἁπλούστατον· ἀλλ' ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, αἱ συνδέουσαι τὰς γραμμὰς πρὸς ἀλλήλας σχέσεις μεγέθους καὶ θέσεως, περιπλέκουσι τοσοῦτον τὰς γεωμετρικὰς προτάσεις, ὥστε ἔχομεν χρείαν ἰδιαιτέρων μεθόδων καὶ τεχνασμάτων πρὸς τὸ μορφῶσαι τὰς ἐξισώσεις ἀφ' ὧν οἱ ἄγνωστοι ἐξαρτῶνται. Τότε, ὁ πρῶτος κανὼν ὃν πρέπει νὰ τηρῶμεν συνίσταται, εἰς τὸ νὰ κατανοήσωμεν καλῶς τὰς σχέσεις ἃς τὸ πρόβλημα τίθησι μεταξὺ τῶν γραμμῶν, τῶν γωνιῶν, τῶν ἐπιφανειῶν ἢ τῶν στερεῶν, ἄνευ διακρίσεως γνωστῶν ἀπὸ ἀγνώστων· ἑπομένως καθίσταται εὔκολος ἡ δι' ἐξισώσεων ἔκφρασις τῶν σχέσεων τούτων. Τέλος, ἐκ τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν πορίζόμεθα, κατὰ τὸ δυνατόν, τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων.

Π: Χ: (Σχ. 2). Θεωρήσωμεν τρίγωνον ἰσοσκελές, τὸ ΒΓΔ, κύκλῳ ἐγγεγραμμένον. Φανερὸν ὅτι, μεταξὺ τῆς πλευρᾶς, τῆς βάσεως καὶ τῆς διαμέτρου ὑπάρχει σχέσις τοιαύτη, ὥστε δεδομένων δύο τῶν τριῶν τούτων γραμμῶν, ἡ τρίτη παράγεται ἀναγκαίως ἀπ' αὐτῶν. Ἄρα, τὸ ζήτημα δυνατὸν νὰ ἦναι τριπλοῦν. Ἀλλ᾽ οἱονδήποτε τῶν τριῶν τούτων ἦναι τὸ ἐπιλυθησόμενον, κατ᾽ ἀρχὰς οὐδεμίαν ποιοῦμεν διάκρισιν τῶν δεδομένων ἀπὸ τοῦ ἀγνώστου, ἀλλὰ μορφοῦμεν τὴν ἐξίσωσιν ἥτις ἐμφαίνει τὴν πρὸς ἀλλήλας σχέσιν τῶν τριῶν ποσοτήτων, εἶτα πορίζόμεθα ἐκ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως τὴν τιμὴν τῆς ἀγνώστου γραμμῆς.

Καλοῦμεν $\beta$ τὴν βάσιν ΓΑ, $\gamma$ τὴν πλευρὰν ΒΓ, καὶ $\delta$ τὴν διάμετρον. Ἄγομεν τὴν διχοτομοῦσαν γωνίαν ΓΒΔ διάμετρον, ἥτις ἔσεται κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς Ε. Κατὰ γνωστὸν θεώρημα ἔχομεν,

$$\gamma^2 = \delta \times \mathrm{BE}, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \mathrm{BE} = \frac{\gamma^2}{\delta}.$$

Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΒΕ δίδει $\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2 - \overline{\mathrm{BE}}^2 = \overline{\mathrm{\Gamma E}}^2$. ἑπομένως

$$(2) \qquad \gamma^2 - \frac{\gamma^4}{\delta^2} = \tfrac{1}{4}\beta^2.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εὐκόλως ἐπιλύεται οἱοσδήποτε εἶναι ὁ ἄγνωστος. Καὶ εἰ μὲν ζητοῦμεν τὴν διάμετρον, ἔχομεν

$$\delta = \frac{\gamma^2}{\sqrt{\gamma^2 - \frac{1}{4}\beta^2}}.$$

Εἰ δὲ τὴν βάσιν,

$$\beta = \frac{2\gamma\sqrt{\delta^2 - \gamma^2}}{\delta}.$$

Καὶ τέλος, ἐὰν ἄγνωστος ἦναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, εὑρίσκομεν

$$\gamma = \sqrt{\tfrac{1}{2}\delta^2 \pm \tfrac{1}{2}\delta\sqrt{\delta^2 - \beta^2}}.$$

Ἐν ἑκάστῃ τῶν τριῶν τούτων περιπτώσεων παρελίπομεν τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς ὡς μὴν ἁρμοζούσας τῷ ζητήματι. Ἑκάστη τῶν δύω πρώτων μίαν μόνην λύσιν ἐπιδέχεται, ἀλλ᾽ ἡ τρίτη δύω. Τῷ ὄντι, δῆλον ὅτι, τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ καὶ τῇ αὐτῇ βάσει ἀντιστοιχοῦσι δύω τρίγωνα ΑΓΔ, ΒΓΔ, ἐκπληροῦντα τὸ ζήτημα.



**6.** Παρατηρήσωμεν ἤδη τὸν τρόπον δι᾽ οὗ ἐμορφώσαμεν τὴν ἐξίσωσιν (2). Ἡ θεωρία τοῦ σχήματος ἔδειξεν ἀμέσως ὅτι διὰ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, δυνατὸν ἦτο λογῆσαι πρῶτον τὴν ΒΕ, εἶτα τὴν ἡμίσειαν βάσιν ΓΕ· τοῦτο δὲ ἤρκεσε πρὸς μόρφωσιν τῆς ἐξισώσεως. Ἐντεῦθεν προέκυψεν ὁ ἑξῆς ὑπὸ τοῦ ΝΕΥΤΟΝΟΣ τεθεὶς κανών.

*Δοθέντος προβλήματός τινος, θεωροῦμεν αὐτὸ ὡς λελυμένον, καὶ συγκρίνομεν πρὸς ἄλληλα πάντα τὰ ἐν αὐτῷ περιλαμβανόμενα ποσά, ἄνευ διακρίσεως γνωστῶν ἢ ἀγνώστων· εἶτα ἐξετάζομεν πῶς ταῦτα ἀπ᾽ ἀλλήλων ἐξαρτῶνται, ἵνα γνωρίσωμεν διὰ τῆς γνώσεως τινων ἐξ αὐτῶν ὁδηγούμεθα εἰς τὸν ὁρισμὸν τῶν ἑτέρων. Εὔκολος ἔσεται τότε ἡ μόρφωσις τῆς τοῦ προβλήματος ἐξισώσεως.*

**7.** Πολλάκις ὅμως εἶναι δύσκολον ἢ καὶ ἀδύνατον ν᾽ ἀκολουθήσωμεν ἀκριβῶς τὴν ὁδὸν ταύτην. Ἐν πλείσταις περιπτώσεσιν ἀναγκαζόμεθα νὰ χαράξωμεν ἐπὶ τοῦ σχήματος γραμμὰς βοηθητικάς, ὧν τὰς τιμὰς πρέπει πρῶτον νὰ ἐκφράσωμεν διὰ γνωστῶν γραμμῶν, ἵνα εἰσάξωμεν αὐτὰς ἀκολούθως εἰς τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων. Φανερὸν ὅτι οἱ λογισμοὶ καθίστανται δυσχερέστατοι ὅταν αἱ ἐκφράσεις τῶν βοηθητικῶν γραμμῶν ὦσι πολυσύνθετοι. Ἀλλ᾽ αἱ δυσκολίαι αὗται ὁμαλύνονται τῇ ὡς ἑξῆς τροποποιήσει τοῦ ἀνωτέρω κανόνος.

*Ἀφοῦ χαράξωμεν ἐπὶ τοῦ σχήματος πάσας τὰς γνωστὰς ἢ ἀγνώστους γραμμάς, περιλαμβανομένας ἐν τῷ προτεθέντι προβλήματι, ἄγομεν γραμμὰς βοηθητικάς, οἵας νομίσωμεν ἐπιτηδείας πρὸς εὐκολωτέραν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος διὰ μέσου θεωρημάτων γεωμετρικῶν. Αἱ βοηθητικαὶ αὗται γραμμαὶ ἔσονται νέοι ἄγνωστοι, οὓς θεωρήσομεν ὡς ἀνήκοντας εἰς τὴν ἔκφρασιν αὐτὴν τοῦ προβλήματος. Τότε μορφοῦμεν τὰς ἐξισώσεις αἵτινες συνδέουσι πρὸς ἀλλήλας πάσας τὰς γραμμὰς τοῦ σχήματος. Ὅταν τὸ πρόβλημα ἦναι ὡρισμένον, καταντῶμεν πάντοτε εἰς ἀριθμὸν ἐξισώσεων ἴσον τῷ τῶν ἀγνώστων γραμμῶν. Οὕτω, τὸ γεωμετρικὸν πρόβλημα ἄγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν ἐξισώσεων τούτων.*

8. Τὰ προεκτεθέντα ἐφαρμόσωμεν μετ᾽ οὐ πολὺ εἰς τὴν ἐπίλυσιν διαφόρων προβλημάτων γεωμετρικῶν διὰ τῆς Ἀλγέβρας. Ἐννοεῖται δὲ ὅτι, τοῖς καλῶς ἐξοικειωμένοις πρὸς τὰ γεωμετρικὰ θεωρήματα εὐκολώτερον ἔσεται τὸ μορφώνειν τὰς τῶν προβλημάτων ἐξισώσεις.

9. Ὅταν ἐν προβλήματί τινι περιέχωνται γωνίαι, ἀναγκαζόμεθα νὰ ἄγωμεν εὐθείας μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῶν· σχηματίζομεν οὕτω τρίγωνα καὶ εἰσάγομεν εἰς τοὺς λογισμούς, ἀντὶ τῶν γωνιῶν, τὰς πλευρὰς τῶν τριγώνων, ἢ μᾶλλον τοὺς λόγους τῶν πλευρῶν τούτων. Πρὸς τούτοις ποιοῦμεν χρῆσιν τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν, ὅπερ εἶναι τὸ αὐτό, διότι αἱ γραμμαὶ αὗται εἰσὶν αἱ πλευραί, ἢ μᾶλλον οἱ λόγοι τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.

Εἰ θεωροῦμεν ἐπιφανείας, ἀντικαθιστῶμεν αὐτὰς διὰ τετραγώνων ἢ δι᾽ ὀρθογωνίων, ἅτινα δηλοῦμεν δι᾽ ἐκφράσεων τοιούτων, $\alpha^2$, $\alpha\beta$. Ἐὰν τὸ πρόβλημα περιέχῃ στερεά, ἀντικαθιστῶμεν αὐτὰ δι᾽ ἰσοδυνάμων κύβων ἢ παραλληλεπιπέδων ὀρθογωνίων, δηλουμένων ἐκφράσεσι τοιαύταις, $\alpha^3$, $\alpha^2\beta$, $\alpha\beta\gamma$.

10. Τὰ ἑξῆς γεωμετρικὰ προβλήματα, ἀλγεβραϊκῶς ἐπιλυόμενα, χρησιμεύουσι πρὸς προκαταρκτικὴν ἄσκησιν τῶν πρωτοπείρων.

11. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Καταμετρῆσαι τὸ ἀπόστημα τοῦ προσιτοῦ σημείου Α, ἀπὸ ἑτέρου Δ ἀπροσίτου.*

(Σχ. 3). Ἐπὶ τῆς ΑΔ λαμβάνομεν μέρος τι, τὸ ΑΓ. Ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἄγομεν τυχαίως εὐθεῖαν, τὴν ΑΒ, καὶ σχηματίζομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ οὗτινος καταμετροῦμεν τὰς πλευράς. Εἶτα ἀπὸ σημείου, τοῦ Ε, τῆς ΒΓ κατευθύνομεν τὴν ὀπτικὴν ἀκτῖνα ΖΔ. Καλοῦμεν, $ΑΔ=\chi$, $ΕΓ=\eta$, $ΖΑ=\delta$, $ΑΒ=\gamma$, $ΑΓ=\beta$, $ΒΓ=\alpha$. Ἄγομεν ΕΗ παράλληλον τῇ ΑΒ, καὶ ἔχομεν,

$$\frac{ΒΓ}{ΕΓ}=\frac{ΑΓ}{ΓΗ}=\frac{ΑΒ}{ΕΗ}, \quad ἢ \quad \frac{\alpha}{\eta}=\frac{\beta}{ΓΗ}=\frac{\gamma}{ΕΗ},$$

ὅθεν συνάγομεν



$$ΓΗ=\frac{\beta\eta}{\alpha}, \qquad ΕΗ=\frac{\gamma\eta}{\alpha}.$$

Ἔχομεν προσέτι

$$\frac{ΑΔ}{ΑΖ}=\frac{ΔΗ}{ΗΕ}, \; ἢ \; \frac{\chi}{\delta}=\frac{ΔΗ}{ΕΗ}, \qquad καὶ \qquad ΔΗ=\frac{\gamma\eta\chi}{\alpha\delta}.$$

Ἀλλὰ $$ΔΗ=ΑΔ-(ΑΓ-ΓΗ)=\chi-\beta+\frac{\beta\eta}{\alpha}.$$

Ἐξισοῦντες ἀλλήλαις τὰς ἀνωτέρω δύω τιμὰς τῆς ΔΗ, μορφοῦμεν τὴν ἑξῆς ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος·

$$\frac{\gamma\eta\chi}{\alpha\delta}=\chi-\beta+\frac{\beta\eta}{\alpha},$$

ἣν ἐπιλύοντες λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ ζητουμένου ἀποστήματος, ἤτοι

$$\chi=\beta\delta\left(\frac{\eta-\alpha}{\gamma\eta-\alpha\delta}\right).$$

Ἐὰν ἤδη, ἀντὶ τῶν γραμμῶν θέσωμεν τὰς ἀριθμητικὰς αὐτῶν τιμάς, εὑρήσομεν ἀριθμὸν ἴσον τῷ ζητουμένῳ ἀποστήματι ΑΔ.

12. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ ἀγαγεῖν τὴν πρὸς ὀρθὰς ΕΖ ἐπὶ τὴν βάσιν, ὥστε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΕΖ, νὰ ὦσι πρὸς ἄλληλα ὡς ν : μ.*

(Σχ. 4). Λαμβάνομεν ὡς ἀγνώστους τὰ ἀποστήματα ΑΕ καὶ ΕΖ. Καλοῦμεν, $ΑΕ=\chi$, $ΖΕ=\psi$, $ΒΔ=\upsilon$ (ὕψος τοῦ δεδομένου τριγώνου) καὶ $ΑΔ=\kappa$. Ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν·

$$\beta\upsilon : \chi\psi :: \nu : \mu, \quad ἐξ\ ἧς, \quad \beta\upsilon\mu=\nu\chi\psi.$$

Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΕΖ, ΑΒΔ, δίδουσι τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος,

$$\kappa\psi=\upsilon\chi.$$

Τῇ ἀπαλοιφῇ λαμβάνομεν

$$\chi=\sqrt{\frac{\beta\kappa\mu}{\nu}}.$$

Ὅταν τὸ σημεῖον Ε κεῖται πέραν τοῦ Δ, ἡ κάθετος συνιστᾷ τρίγωνον μὴ περιεχόμενον ἐν τῷ ΑΒΓ. Ἡ περίπτωσις αὕτη ὑπάρχει ὅταν

$$\chi=\sqrt{\frac{\beta\kappa\mu}{\nu}}>\kappa,\quad \text{ἤτοι,}\quad \frac{\mu}{\nu}>\frac{\kappa}{\beta}=\frac{ΑΔ}{ΑΓ}.$$

13. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Γραμμὴν εὐθεῖαν τεμεῖν οὕτως ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν δύω τμημάτων αὐτῆς συγκροτούμενον ὀρθογώνιον νὰ ἰσοῦται τετραγώνῳ δεδομένῳ.*

(Σχ. 5). Καλοῦμεν, γ τὴν τοῦ τετραγώνου πλευράν· τὴν δοθεῖσαν γραμμὴν ΑΒ=α· χ τὸ ἓν τμῆμα αὐτῆς· τὸ ἕτερον ἔσεται α—χ. Ἐπομένως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(\alpha-\chi)\chi=\gamma^2,$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν

$$\chi=\tfrac{1}{2}\alpha\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}\alpha^2-\gamma^2}.$$

Ἀμφότεραι αἱ τιμαὶ αὗται εἰσὶ προφανῶς θετικαί.

Ἐὰν προσθέσωμεν τὰς τιμὰς ταύτας, λαμβάνομεν τὴν ὅλην εὐθεῖαν α, ὅπερ δεικνύει ὅτι αὗται παριστῶσιν ἑκάστη τὴν μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου. Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ οὐδεμία τῶν πλευρῶν τούτων διεκρίθη διά τινος ἰδιαιτέρας συνθήκης, φανερὸν ὅτι χ ἁρμόζει εἰς ἀμφοτέρας.

Τὸ ὑπόρριζον ποσὸν καθίσταται φανταστικὸν ὅταν γ ἦναι μείζων τοῦ α. Ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι, ἵνα ᾖ δυνατὸν τὸ πρόβλημα, ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου δὲν πρέπει νὰ ἦναι μείζων τοῦ ἡμίσεως τῆς δοθείσης γραμμῆς.

14. Αἱ ἀνωτέρω τιμαὶ τοῦ χ κατασκευάζονται εὐκόλως διὰ τῆς γεωμετρίας ὡς ἑξῆς.

Ἐπὶ τὴν ΕΒ=½α γράφομεν ἡμικύκλιον· λαμβάνομεν τὴν χορδὴν ΒΜ=γ. Ἡ χορδὴ ΕΜ ἔσεται ἡ τιμὴ τοῦ ῥιζικοῦ, διότι ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΕΜΒ συνάγομεν

$$ΕΜ=\sqrt{\tfrac{1}{4}\alpha^2-\gamma^2}.$$

Διὰ ταύτης ἔχομεν ἀκολούθως, φέροντες ΕΝ=ΕΜ,

$$\chi=\tfrac{1}{2}\alpha+ΕΝ=ΑΝ,\qquad \chi=\tfrac{1}{2}\alpha-ΕΝ=ΝΒ.$$

### ΠΕΡΙ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ.

15. Ἡ ἀλγεβραϊκὴ ἐπίλυσις τῶν προβλημάτων δίδει πολλάκις τιμὰς τῶν ἀγνώστων ἀρνητικάς. Γινώσκομεν ὅτι αἱ



τιμαὶ αὗται δὲν ἁρμόζουσιν εἰς τὸ πρόβλημα ἐκλαμβανόμενον ἀκριβῶς κατὰ τοὺς ἐν τῇ ἐκφράσει αὐτοῦ ὅρους, ἢ κατὰ τοὺς εἰσαγομένους ἐν αὐτῷ πολλάκις δι' ὑποθέσεων γινομένων ἐν ἀρχῇ εἴτε ἐν μέσῳ τοῦ λογισμοῦ. Γινώσκομεν προσέτι τίνι τρόπῳ, ἀλλάσσοντες εἰς τὰς ἐξισώσεις τὸ σημεῖον τῶν ἀγνώστων, ἀφαιροῦμεν πᾶν εἶδος περιορισμοῦ. Αἱ αὗται παρατηρήσεις ἐφαρμόζονται καὶ εἰς τὰ ἀλγεβραϊκῶς ἐπιλυόμενα γεωμετρικὰ προβλήματα, ὡς ἀναπτύξομεν τοῦτο ἐφεξῆς.

16. Ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ πρόβλημα, § 4, ἐνῷ πρόκειται *τεμεῖν εὐθεῖαν κατ' ἄκρον καὶ μέσον λόγον*. Φανερὸν ὅτι ἡ ἔκφρασις αὕτη ἄγεται εἰς τὴν ἑξῆς.

(Σχ. 6). Τὴν εὐθεῖαν ΑΒ τεμεῖν εἰς δύο, οὕτως ὥστε τὸ ἓν τμῆμα ΑΜ νὰ ἦναι μέσον ἀνάλογον πρὸς τὴν ὅλην εὐθεῖαν καὶ τὸ ἕτερον τμῆμα ΜΒ.

Καλοῦμεν ΑΒ=α, ΑΜ=χ, ΒΜ=α—χ,

καὶ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος

(1) $$\chi^2=\alpha(\alpha-\chi),$$

ἐξ ἧς πορίζόμεθα τὰς δύω τιμὰς

$$\chi=-\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\alpha^2+\tfrac{1}{4}\alpha^2}.$$

Ἡ πρώτη εἶναι θετικὴ καὶ ἐλάσσων τοῦ α· ἄρα ἀνήκει εἴς τι σημεῖον Μ κείμενον μεταξὺ Α καὶ Β, ἀκριβῶς κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ προβλήματος. Ἀλλ' ἡ δευτέρα τιμὴ εἶναι ἀρνητική, δι' ὃ δὲν ἁρμόζει εἰς τὸ ζήτημα.

Τῇ ἀλλαγῇ τοῦ σημείου τοῦ χ, ἡ ἐξίσωσις (1) καθίσταται

(2) $$\chi^2=\alpha(\alpha+\chi)\cdot$$

λαμβάνοντες δὲ θετικῶς τὴν τιμὴν τοῦ χ, ἥτις ἀνωτέρω ἦτον ἀρνητική, ἔχομεν

$$\chi=\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\alpha^2+\tfrac{1}{4}\alpha^2},$$

τιμὴν ἐτυμοποιοῦσαν τὴν ἐξίσωσιν (2). Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἀκριβῶς ἐκείνη ἣν εὑρήσομεν ἐὰν ζητήσωμεν ἐπὶ τῆς προαγωγῆς τῆς εὐθείας ΑΒ, πέραν τοῦ Α, σημεῖόν τι Μ', ὥστε τὸ ἀπόστημα ΑΜ' νὰ ἦναι μέσον ἀνάλογον τοῦ ἀποστήματος ΒΜʹ καὶ τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ. Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι, ἄγοντες τὴν μὲν θετικὴν τιμὴν τοῦ $\chi$ πρὸς τὸ μέρος ΑΒ, δεξιὰ τοῦ Α, τὴν δὲ ἀρνητικὴν πρὸς τὸ μέρος ΑΧ, ἀριστερὰ τοῦ Α, ἔξομεν πάσας τὰς λύσεις τοῦ προβλήματος, ὅπερ ἐκφωνεῖται γενικῶς ὡς ἑξῆς.

*Ἐπ' εὐθείας ἀπεριορίστου, ἐφ' ἧς δίδονται δύω σημεῖα* Α, Β, *εὑρεῖν σημεῖον, οὗτινος τὸ ἀπόστημα ἀπὸ τοῦ* Α *νὰ ἦναι μέσον ἀνάλογον πρὸς τὸ αὐτοῦ ἀπόστημα ἀπὸ τοῦ* Β *καὶ τὸ ὅλον μῆκος* ΑΒ.

Ἡ ἔκφρασις αὕτη φανερὸν ὅτι εἶναι ἀπηλλαγμένη τοῦ περιορισμοῦ τοῦ νὰ κεῖται τὸ ζητούμενον σημεῖον μεταξὺ τῶν Α καὶ Β καὶ οὐχὶ ἀλλαχοῦ.

**17.** Ἠδυνάμεθα προτεῖναι ἀρχῆθεν τὸ πρόβλημα κατὰ τὴν τελευταίαν ταύτην ἔκφρασιν. Τότε, θεωροῦντες αὐτὸ ὡς λελυμένον καὶ ὑποθέτοντες τὸ σημεῖον Μ ὡς ἐκπληροῦν πάσας τὰς συνθήκας, καλοῦντες καὶ αὖθις $\mathrm{AM}=\chi$, εὑρίσκομεν τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν (1) καὶ τὰς αὐτὰς τιμὰς τοῦ $\chi$· φανερὸν ὅμως ὅτι εἰσάγομεν οὕτως εἰς τὴν ἔκφρασιν, εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς, περιορισμόν τινα ξένον, διότι ὑποτάσσομεν τοὺς λογισμοὺς τῇ ὑποθέσει ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ κεῖται μεταξὺ Α καὶ Β. Ἡ θετικὴ τιμὴ μόνη ἀντιστοιχεῖ τῇ ὑποθέσει ταύτῃ· ἡ ἀρνητικὴ λαμβανομένη θετικῶς καὶ ἀγομένη πρὸς τὸ μέρος ΑΧ, ἀντίθετον τοῦ πρὸς ὃ ἐζητήθη τὸ σημεῖον Μ, προσδιορίζει τὴν δευτέραν λύσιν τοῦ γενικοῦ προβλήματος.

**18.** Λοιπὸν, ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ, ποτὲ μὲν συμπληροῖ τὴν ἐπίλυσιν προβλήματος οὗτινος τὸ προτεινόμενον εἶναι μερικὴ περίπτωσις, ποτὲ δὲ ἀφαιρεῖ περιορισμὸν εἰσαχθέντα πρὸς ἐκτέλεσιν τῶν συλλογισμῶν καὶ τῶν λογισμῶν. Ἀλλ' ἐν πάσει περιπτώσει, ἄξιον παρατηρήσεως εἶναι ὅτι, ἡ τιμὴ αὕτη, λαμβανομένη ἀπολύτως, ἄγεται πρὸς τὸ μέρος τὸ ἀντίθετον ἐκείνου πρὸς ὃ ἔπρεπε νὰ κεῖται τὸ ζητούμενον ἀπόστημα. Δι' ὃ ἐτέθη ἡ ἑξῆς ἀρχή.

*Ὅταν ἐπιλύωμεν πρόβλημα γεωμετρικὸν διὰ τῆς Ἀλγέβρας, καὶ λαμβάνωμεν ὡς ἄγνωστον ἀπόστημά τι ἐπὶ*



*γραμμῆς εὐθείας δεδομένης καὶ ἀπὸ σημείου μονίμου ἐπὶ ταύτης, αἱ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τοῦ ἀγνώστου πρέπει νὰ φέρωνται κατὰ διεύθυνσιν ἀντίθετον ἐκείνης καθ' ἣν ὑπεθέσαμεν κείμενον τὸ ῥηθὲν ἀπόστημα.*

Ἡ ἀρχὴ αὕτη, ἀκριβῶς θεωρουμένη, οὐδόλως διαφέρει τῆς περὶ ἧς λόγος ἐν § 7. Τριγωνομ. Λέγομεν καὶ αὖθις ὅτι δὲν εἶναι ἐκ τῶν ἐπιδεκτικῶν ἀρχικῆς ἀποδείξεως, ἀλλὰ διὰ τῶν ἐφαρμογῶν κατανοήσομεν τὴν ὕπαρξιν αὐτῆς.

**19.** Διὰ τοῦ αὐτοῦ προβλήματος δηλώσωμεν ἀπάτην τινὰ εἰς ἣν δυνατὸν ἐνίοτε νὰ ὑποπέσῃ τις.

Δὲν ὑπεθέσαμεν τὸ ζητούμενον σημεῖον πρὸς τὸ μέρος ΒΨ, διότι, διὰ πᾶν σημεῖον Ν κείμενον πρὸς τὸ μέρος τοῦτο, τὸ ἀπόστημα ΑΝ μεῖζον εἶναι τοῦ ΑΒ καὶ τοῦ ΒΝ, καὶ ἀδύνατον νὰ ὑπάρξῃ ἡ σχέσις $\overline{\mathrm{AN}}^2=\mathrm{AB}\times\mathrm{BN}$, ἣν τὸ πρόβλημα ἀπαιτεῖ. Ὑποθέσωμεν ὅμως ὅτι μᾶς διέφυγεν ἡ παρατήρησις αὕτη, καὶ ὅτι ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ σημεῖον Ν διὰ τῆς ῥηθείσης σχέσεως. Λαμβάνομεν ὡς ἄγνωστον τὸ ἀπόστημα ΒΝ. Καλοῦμεν $\mathrm{BN}=\chi$, $\mathrm{AN}=\alpha+\chi$. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος ἔσεται

$$(\alpha+\chi)^2=\alpha\chi,$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν

$$\chi=-\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}\alpha^2}\,,$$

Τιμὰς φανταστικὰς τὸ *ἀδύνατον* δεικνυούσας. Ἀλλ' ἠθέλομεν τὰ μέγιστα ἀπατηθῆ εἰ ἐξελαμβάνομεν τὸ πρόβλημα ὡς ἀδύνατον, διότι προηγουμένως ἀπεδείχθη τὸ ἐναντίον. Τὸ *ἀδύνατον* ὑπάρχει ἐνταῦθα ἐν τῇ ὑποθέσει ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον εὑρίσκεται πρὸς τὸ μέρος ΒΨ. Ἵνα βεβαιωθῶμεν περὶ τούτου, ζητήσωμεν εἰ ὑπάρχει πρὸς τὸ ἕτερον μέρος ΒΧ σημεῖον ἐκπληροῦν τὸ πρόβλημα. Ἔστω καὶ αὖθις $\chi$ τὸ ἀπόστημα τοῦ Β ἀπὸ τοῦ ἀγνώστου σημείου τούτου· τὸ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἔσεται $\alpha-\chi$ ἢ $\chi-\alpha$ κατὰ τὴν θέσιν τοῦ ἀγνώστου τούτου σημείου πρὸς τὸ Α. Κατ' ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\chi^2-3\alpha\chi+\alpha^2=0,$$

ἥτις χορηγήσει συγχρόνως τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′. Τῷ ὄντι, ἡ ἐπίλυσις αὐτῆς δίδει τὰς ἑξῆς δύω τιμὰς πραγματικὰς καὶ θετικάς,

$$\chi = \frac{3\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{5\alpha^2}{2}}\,.$$

Λοιπὸν, βλέπομεν ὅτι· *ὅταν ζητῶμεν ἄγνωστόν τι ἀπόστημα εἰς μέρος ἀντίθετον ἐκείνου πρὸς ὃ πρέπει νὰ κεῖται, ἡ σφαλερὰ ὑπόθεσις δὲν διορθοῦται πάντοτε διὰ τῶν ἀρνητικῶν τιμῶν, ὡς τυχὸν ἠθέλομεν νομίσει.* Τῷ ὄντι, τὸ σφάλμα τοῦτο, ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι, κατεδείχθη διὰ τιμῶν φανταστικῶν.

20. Ἄξιον παρατηρήσεως εἶναι, ὅτι τιμή τις θετικὴ τοῦ ἀγνώστου δὲν εἶναι πάντοτε ἀπάντησις εἰς τὸ πρόβλημα ὅπερ ἐχορήγησε τὴν τιμὴν ταύτην. Ἔστω, π. χ. τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

*(Σχ. 7.) Προσδιορίσαι τρίγωνον ὀρθογώνιον, οὗτινος δίδονται ἡ ὑποτείνουσα καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ.*

Καλοῦμεν $ΒΓ = \alpha$, $ΑΒ + ΑΓ + ΑΔ = \beta$, $ΑΔ = \chi$, $ΑΒ = \psi$, ὅθεν καὶ $ΑΓ = \beta - \chi - \psi$.

Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ δίδει.

$$(1) \qquad 2\psi^2 + \chi^2 + 2\chi\psi - 2\beta\chi - 2\beta\psi + \beta^2 + \alpha^2 = 0.$$

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΓ, ΑΓΔ, συνάγομεν

$$(2) \qquad \psi^2 + \chi\psi - \beta\psi + \alpha\chi = 0.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) ἀφαιροῦμεν τὸ διπλοῦν τῆς (2) καὶ λαμβάνομεν, ἐπιλύοντες,

$$\chi = \alpha + \beta \pm \sqrt{2\alpha^2 + 2\alpha\beta}\,.$$

Ἀμφότεραι αἱ τιμαὶ αὗται εἰσὶ θετικαί. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι προφανῶς ἔλαττον τοῦ $\beta$ καὶ ἔτι μᾶλλον τοῦ $\alpha + \beta$, ἡ πρώτη τιμὴ τοῦ $\chi$ δὲν δύναται νὰ ἦναι ἀπάντησις εἰς τὸ πρόβλημα.



### ΠΕΡΙ ΟΜΟΓΕΝΕΙΑΣ.

21. Ἐν τοῖς ἀλγεβραϊκοῖς λογισμοῖς τὰ γράμματα θεωροῦνται ὡς παριστάνοντα ἀριθμοὺς ἢ λόγους· ἑπομένως, εἰς τοὺς τύπους καὶ εἰς τὰς ἐξισώσεις τῶν ἀλγεβραϊκῶς ἐπιλυομένων γεωμετρικῶν προβλημάτων, αἱ γραμμαὶ, αἱ ἐπιφάνειαι, καὶ τὰ στερεὰ πρέπει νὰ θεωρῶνται ὡς διατιμώμενα εἰς ἀριθμούς.

Π. χ. ὁ τύπος $\chi = 2 + \frac{\beta}{\alpha}$, ἐν ᾧ τὰ γράμματα $\alpha$, $\beta$, $\chi$, ἐμφαίνουσι γραμμὰς, δεικνύει ὅτι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν διὰ $\beta$ δηλούμενον ἀριθμὸν μονάδων γραμμικῶν, διὰ τοῦ ἀριθμοῦ μονάδων γραμμικῶν $\alpha$· εἶτα νὰ προσθέσωμεν 2 μονάδας εἰς τὸ πηλίκον. Οὕτω λαμβάνομεν τὸν περιεχόμενον ἀριθμὸν μονάδων γραμμικῶν εἰς τὴν ἄγνωστον γραμμὴν $\chi$.

22. Ἀλλ᾽ ἐπὶ τῆς μορφῆς τῶν ἐξισώσεων, ἐν αἷς εἰσέρχονται μεγέθη γεωμετρικά, ὑπάρχει ἀρχή τις ἀξία λόγου, ἣν καλοῦσι ΝΟΜΟΝ ΟΜΟΓΕΝΕΙΑΣ. Ἰδοὺ αὕτη·

*Ἐὰν τὰ γράμματα, ἅτινα περιέχονται ἔν τινι ἐξισώσει, ἐμφαίνουσι γραμμάς, οὐδεμία δὲ ἰδιαιτέρα γραμμὴ ἐλήφθη ὡς μονάς, ἡ ἐξίσωσις ἔσεται ὁμογενὴς ὡς πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα, ἢ τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἐκφράσεων ὁμογενῶν.*

Ἡ ἀρχὴ αὕτη ἐπαληθεύεται δι᾽ ἁπάσας τὰς ἰσότητας τὰς διὰ γεωμετρικῶν θεωρημάτων συντιθεμένας· φανερὸν δὲ ὅτι ἐπίσης εἶναι ἀληθὴς καὶ δι᾽ ἁπάσας τὰς ἐξ αὐτῶν παραγομένας ἰσότητας διὰ τῶν ἀλγεβραϊκῶν λογισμῶν.

23. *Ἔκφρασις ἢ ἐξίσωσις ὁμογενὴς* καλεῖται ἐκείνη ἧς ἅπαντες οἱ ὅροι εἰσὶν ἰσοβάθμιοι.

Ὁ βαθμὸς ὅρου ὁλοσχεροῦς ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ τῶν ἀλγεβραϊκῶν παραγόντων ἐν τῷ αὐτῷ ὅρῳ περιεχομένων. Οὕτως, $8\alpha^2\beta^3\gamma$ εἶναι τοῦ ἕκτου βαθμοῦ.

Ὅταν ὁ ὅρος περὶ οὗ πρόκειται ἦναι κλασματικός, ὁ βαθμὸς αὐτοῦ εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ βαθμοῦ τοῦ ἀριθμητοῦ ἀπὸ τοῦ βαθμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ. Οὕτως $\frac{8\alpha^3\beta^2\gamma}{5\delta\zeta}$ εἶναι τοῦ τετάρτου βαθμοῦ.

Τῶν ἐκμέτρων ὅρων τὸν βαθμὸν εὑρίσκομεν διαιροῦντες διὰ τοῦ δείκτου τοῦ ῥιζικοῦ τὸν βαθμὸν τῆς ὑποῤῥίζου ποσότητος. Οὕτω, $\sqrt[3]{\frac{3\alpha^5\beta^2\gamma^4}{5\delta\zeta}}$ εἶναι τοῦ τρίτου βαθμοῦ. Ἐκ τῶν ὁρισμῶν τούτων προκύπτει ὅτι, ἡ ἑξῆς ἐξίσωσις, ἐν ᾗ τὰ γράμματα ἐμφαίνουσι γραμμάς,

$$3\beta\chi + \frac{4\gamma^2\delta^2}{\zeta\eta} - \sqrt[3]{\frac{2\alpha^4\beta^2\chi^2}{3\theta\lambda}} = 3\gamma^{\frac{4}{2}} - \frac{\beta\gamma\delta}{\chi},$$

εἶναι ὁμογενής, καὶ πάντες οἱ ὅροι αὐτῆς εἰσὶ δευτεροβάθμιοι.

ΣΗΜ. Παρατηρητέον, ὅτι αἱ τριγωνομετρικαὶ συνεκθέσεις θεωροῦνται ὡς παράγοντες ἀριθμητικοί, καὶ ἐπομένως δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν εἰς τὴν ἐκτίμησιν τοῦ βαθμοῦ τῶν ὅρων. Οὕτως, οἱ ὅροι γ συν τ, $\alpha^2$ ἡμ.$^2$ τ, $\frac{\beta^3\gamma}{\epsilon\varphi\,\tau}$, εἰσὶν ἀμοιβαίως πρώτου, δευτέρου, τρίτου βαθμοῦ.

24. Ἀλλ' ἐάν, ἵνα κατασταθῶσιν οἱ λογισμοὶ ἁπλούστεροι, ὑποθέσωμεν γραμμήν τινα τῶν τοῦ σχήματος ἴσην τῇ μονάδι, τότε φανερὸν ὅτι ἐν τῷ τύπῳ δὲν θέλει ὑπάρχει ὁμογένεια. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ κατασκευὴ τῆς ζητουμένης γραμμῆς ἐξαρτᾶται ἀφ' ὅλων τῶν δεδομένων γραμμῶν καὶ ἰδίως ἀπὸ τῆς ληφθείσης ἴσης τῇ μονάδι, πρέπει προηγουμένως νὰ εἰσάξωμεν τὴν τελευταίαν ταύτην ἐν τῇ τιμῇ τοῦ ἀγνώστου. Τοῦτο ἐκτελεῖται εὐκόλως, *ἐὰν παραστήσωμεν τὴν γραμμὴν ταύτην διά τινος γράμματος, καὶ εἰσάξωμεν αὐτὴν ὡς παράγοντα εἰς τοὺς διαφόρους ὅρους τοῦ τύπου, ἵνα οὗτος κατασταθῇ ὁμογενής.*

Ἐπὶ τῇ βάσει ὁμοίων ἀρχῶν ἐτέθη ὁ κανὼν δι' οὗ εἰσάγεται ἡ ἀκτὶς ἐν τοῖς τριγωνομετρικοῖς τύποις (Τριγωνομετρ. § 24).

## ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΑΪΚΩΝ ἘΚΦΡΑΣΕΩΝ.

25. Ἡ Ἄλγεβρα, οὐχὶ μόνον ἀντικαθιστᾷ τὰς γραφικὰς μεθόδους διὰ μεθόδων λογισμοῦ, ἐπιτρεπουσῶν τὴν ἐπ' ἄπειρον προαγωγὴν τῶν προσεγγίσεων, ἀλλ' ἡ αὐτὴ εἶναι καὶ τὸ ἀσφαλέστερον μέσον δι' οὗ ἀνακαλύπτομεν τὰς κατασκευὰς ὧν γεωμετρικόν τι πρόβλημα εἶναι ἐπιδεκτικόν.



Τοῦτο ἐννοήσομεν διὰ τῶν σχετικῶν κατασκευῶν ἑκάστου προβλήματος, καὶ περὶ τούτου ἰδίως πραγματευσόμεθα ἐφεξῆς.

26. Κατὰ πρῶτον δείξομεν πῶς κατασκευάζομεν διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου ἄγνωστον γραμμὴν ἐκφραζομένην, ἄνευ ῥιζικῶν, συνεκθέσει γραμμῶν γνωστῶν.

Τὰ ἑξῆς παραδείγματα λαμβάνομεν ὁμογενῆ· ἄλλως, γινώσκομεν πῶς καθιστῶμεν ὁμογενῆ τὰ μὴ ὄντα τοιαῦτα.

27. Ἔστω ἡ ἔκφρασις

$$\chi = \alpha - \beta + \gamma - \delta + \epsilon - \zeta + \eta - \theta + \ldots\ldots,$$

ἐμφαίνουσα τὴν ἀπ' ἀλλήλων διαφορὰν τοῦ ἀθροίσματος τῶν γραμμῶν α, γ, ε, . . . . , καὶ τοῦ τῶν γραμμῶν β, δ, ζ, . . . Ἐπομένως κατασκευάζεται εὐκόλως ἐπὶ γραμμῆς εὐθείας ἀπεριορίστου.

Ἐπίσης εὐχερῶς κατασκευάζονται καὶ ἐκφράσεις τοιαῦται,

$$\chi = 3\alpha, \quad \chi = 8\beta, \quad \chi = 10\gamma, \quad \text{κ. τ. ἑ.}$$

Πρὸς τοῦτο, ἄγομεν τὴν γραμμὴν α, ἢ β, ἢ γ, . . . . πολλάκις κατὰ συνέχειαν ἐπὶ ἀπεριορίστου εὐθείας.

Ἐκ τῆς Γεωμετρίας γινώσκομεν πῶς τέμνομεν δεδομένην γραμμὴν εὐθεῖαν εἰς οἱονδήποτε ἀριθμὸν μερῶν ἴσων· οὐδόλως ἄρα δύσκολος ἔσεται ἡ κατασκευὴ ἐκφράσεων τοιούτων,

$$\chi = \frac{\alpha}{3}, \quad \chi = \frac{5\alpha}{3}, \quad \chi = \frac{12\gamma}{7}, \quad \text{κ. τ. ἑ.}$$

28. Ἔστω $\chi = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$.

Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ χ ἰσοῦται τῷ $4^{\text{ῳ}}$ ὅρῳ τῆς ἀναλογίας γ : α : : β : χ. Ἄρα, εὑρίσκομεν αὐτὴν διὰ τῆς κατασκευῆς $4^{\text{ης}}$ ἀναλόγου τριῶν εὐθειῶν, τῶν γ, α, β.

Ὁμοία τῇ προηγουμένῃ κατασκευῇ εἶναι καὶ ἡ τῆς ἐκφράσεως $\chi = \frac{\alpha^2}{\gamma}$· ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν $3^{\text{ην}}$ ἀνάλογον τῶν γραμμῶν γ καὶ α.

29. Ἔστω ἤδη ἡ ἔκφρασις $\chi = \frac{2\alpha\beta\gamma\delta}{\epsilon\zeta\eta}$.

Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς, $\chi = \frac{2\alpha\beta}{\varepsilon} \times \frac{\gamma\delta}{\zeta\eta}$.

Ἐκ τῆς κατασκευῆς τοῦ $\frac{2\alpha\beta}{\varepsilon}$ προκύπτει $4^\eta$ ἀνάλογος ἣν καλοῦμεν μ· ἔχομεν δὲ $\chi = \frac{\mu\gamma\delta}{\zeta\eta}$.

Τὸν τελευταῖον τοῦτον τύπον γράφομεν ὡς ἑξῆς,

$$\chi = \frac{\mu\gamma}{\zeta} \times \frac{\delta}{\eta}.$$

Ζητοῦμεν ἑτέραν $4^{\eta\nu}$ ἀνάλογον ἴσην $\frac{\mu\gamma}{\zeta}$, ἣν καλοῦμεν ν, καὶ ἔχομεν

$$\chi = \frac{\nu\delta}{\eta},$$

ἔκφρασιν κατασκευαζομένην ἐπίσης διὰ $4^{\eta\varsigma}$ ἀναλόγου.

Ὁμοιοτρόπως κατασκευάζεται καὶ ἡ ἔκφρασις

$$\chi = \frac{2\alpha^3\beta^2\gamma}{3\delta^2\zeta^2\eta}.$$

Ἀναλύομεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς,

$$\chi = \frac{2\alpha^2}{3\delta} \times \frac{\alpha}{\delta} \times \frac{\beta}{\zeta} \times \frac{\beta}{\zeta} \times \frac{\gamma}{\eta}.$$

λαμβάνομεν δὲ τὴν τιμὴν τοῦ χ διὰ πέντε διαδοχικῶν τετάρτων ἀναλόγων.

ΣΗΜ. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ζητητέων τετάρτων ἀναλόγων, πρὸς κατασκευὴν τῶν τοιουτομόρφων ἐκφράσεων, δείκνυται πάντοτε ὑπὸ τοῦ βαθμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ, ὑποθέτοντες, ὡς ἐν τοῖς προηγουμένοις, ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ ὑπερβαίνει κατὰ μονάδα τὸν τοῦ παρονομαστοῦ, ὅπερ ὑπάρχει ὅταν χ ἐμφαίνῃ γραμμὴν εὐθεῖαν.

30. Κατασκευάσωμεν ἤδη τὸν τύπον

$$\chi = \frac{\alpha\beta\gamma - \delta^3}{\mu\nu + \pi^2}.$$

Θέτομεν αὐτὸν ὑπὸ τὴν μορφὴν ταύτην,



$$\chi = \frac{\delta^2\left(\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta^2} - \delta\right)}{\delta\left(\frac{\mu\nu}{\delta} + \frac{\pi^2}{\delta}\right)} = \frac{\delta\left(\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta^2} - \delta\right)}{\frac{\mu\nu}{\delta} + \frac{\pi^2}{\delta}}.$$

Καλοῦμεν $\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta^2} = \rho$, $\frac{\mu\nu}{\delta} = \sigma$, $\frac{\pi^2}{\delta} = \kappa$,

καὶ ἔχομεν $\chi = \frac{\delta(\rho - \delta)}{\sigma + \kappa}$.

Εὑρίσκομεν τέλος χ, κατασκευάζοντες $4^{\eta\nu}$ ἀνάλογον τῶν τριῶν γραμμῶν $\sigma + \kappa$, $\rho - \delta$, $\delta$. Ὅσον ἀφορᾷ τὰς ἀγνώστους γραμμὰς ρ, σ, κ, λαμβάνομεν αὐτὰς προηγουμένως κατασκευάζοντες τὰ ἴσα αὐταῖς μονώνυμα κατὰ τὰ προειρημένα.

Ἡ ἐπιτηδειότης τῆς προηγουμένης μεθόδου συνίσταται, ὡς εἶναι σαφὲς, εἰς τὴν τροπὴν ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος εἰς γινόμενα παραγόντων πρωτοβαθμίων. Πρέπει ὅμως νὰ προσέχωμεν, κατὰ τὸ δυνατὸν, νὰ θέτωμεν ἐκτὸς τὸ γράμμα τὸ ὁποῖον εἰσέρχεται πλεονάκις εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τῆς κλασματικῆς ἐκφράσεως, διότι οὕτω παρουσιάζονται ὀλιγώτεραι μερικαὶ κατασκευαὶ ἕνεκα τῶν ἀναγωγῶν. Εἰς τὰς τοιαύτας ἁπλοποιήσεις ἀπαιτεῖται μεγίστη ἄσκησις.

Εὑρίσκομεν ὡσαύτως ὅτι ἡ ἔκφρασις

$$\chi = \frac{\alpha^4 - 2\alpha^3\beta + 2\alpha\beta^2\gamma - \beta^2\gamma\delta}{2\alpha\beta^2 - 3\beta^3 - 4\beta\gamma^2 + \gamma^2\delta},$$

ἄγεται εἰς ταύτην

$$\chi = \frac{\alpha(\mu - \nu + 2\gamma - \pi)}{2\alpha - 3\beta - \kappa + \rho},$$

τιθεμένων ἐκτὸς, ἐν μὲν τῷ ἀριθμητῇ τοῦ παράγοντος $\alpha\beta^2$, ἐν δὲ τῷ παρονομαστῇ τοῦ $\beta^2$, καὶ καλουμένων

$$\mu = \frac{\alpha^3}{\beta^2},\ \nu = \frac{2\alpha^2}{\beta},\ \pi = \frac{\gamma\delta}{\alpha},\ \kappa = \frac{4\gamma^2}{\beta},\ \rho = \frac{\gamma^2\delta}{\beta^2}.$$

Πρῶτον κατασκευάζομεν τὰς τελευταίας ταύτας γραμμάς, εἶτα τὴν τιμὴν τοῦ χ διὰ 4ης ἀναλόγου τῶν τριῶν γραμμῶν

$$2\alpha - 3\beta - \kappa + \rho, \quad \alpha, \quad \mu - \nu + 2\gamma - \pi.$$

31. Οἱ ἔχοντες ἕξιν τῶν λογισμῶν ἐπινοοῦσιν ἐνίοτε ἀναλύσεις δι' ὧν εὐκολύνεται τὰ μέγιστα ἡ κατασκευὴ τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων, ὡς ἐκ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος πληροφορούμεθα. Ἔστω ἡ ἔκφρασις

$$\chi = \frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2}{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+2\alpha\beta\gamma},$$

ἥτις ἀναλυομένη ὡς ἑξῆς, εὐκολώτερον κατασκευάζεται.

$$\chi = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha-\beta-\gamma)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}$$

32. Μεταβῶμεν ἤδη εἰς τὰς δευτεροβαθμίους ῥιζικὰς ἐκφράσεις, ὧν ἁπλούστεραι εἰσὶν αἱ ἑξῆς·

$$\chi=\sqrt{\alpha\beta}, \quad \chi=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad \chi=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}.$$

Ἡ πρώτη εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν α, β, καὶ ἡ Γεωμετρία δίδει πολλὰς κατασκευὰς αὐτῆς. Ἡ δευτέρα εἶναι ὑποτείνουσα τριγώνου ὀρθογωνίου, οὗτινος αἱ πλευραὶ εἰσὶν α, β. Τέλος, ἡ τρίτη εἶναι πλευρὰ τριγώνου ὀρθογωνίου, οὗτινος α εἶναι ἡ ὑποτείνουσα καὶ β ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν. Τὴν τελευταίαν ταύτην ἔκφρασιν ἀναλυομένην οὕτω

$$\chi=\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)},$$

κατασκευάζομεν διὰ μέσης ἀναλόγου τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν γραμμῶν α, β.

33. Ἔστω ἀκόμη ἡ ἔκφρασις

$$\chi=\sqrt{\alpha^2+\tfrac{1}{4}\mu^2\pm\alpha\sqrt{\alpha^2+\mu^2}}.$$

Ἐπὶ τῶν πλευρῶν α καὶ μ, καὶ ἐπὶ τῶν α καὶ $\frac{1}{2}$ μ, κατασκευάζομεν ἀνὰ ἓν τρίγωνον ὀρθογώνιον· καλοῦμεν π καὶ κ τὰς ὑποτεινούσας αὐτῶν. Ὅθεν, αἱ τιμαὶ τοῦ χ ἄγονται εἰς ταύτας

$$\chi=\sqrt{\kappa^2\pm\alpha\pi}.$$



ἵνα τρέψωμεν απ εἰς τετράγωνον, λαμβάνομεν τὴν μέσην ἀνάλογον γ τῶν γραμμῶν α, π, καὶ ἔχομεν οὕτω·

$$\chi=\sqrt{\kappa^2\pm\gamma^2},$$

τιμὰς κατασκευαζομένας, ὡς γνωστόν, διὰ τριγώνων ὀρθογωνίων.

34. Ἐκ τῶν προειρημένων συνάγομεν τὴν κατασκευὴν τῆς ἐκφράσεως,

$$\chi=\sqrt{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2+\varepsilon^2-\zeta^2+\eta^2-\dots}$$

Κατασκευάζομεν τὴν πλευρὰν τετραγώνου, $\mu^2$, ἰσοδυνάμου τῷ ἀθροίσματι τῶν προσθετέων ὑποῤῥίζων τετραγώνων $\alpha^2$, $\gamma^2$, κ.τ.έ. Εἶτα τὴν πλευρὰν ἑτέρου τετραγώνου, $\nu^2$, ἰσοδυναμοῦντος τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀφαιρετέων ὑποῤῥίζων τετραγώνων $\beta^2$, $\delta^2$, κ.τ.έ. Οὕτως ἡ τιμὴ τοῦ χ ἄγεται εἰς

$$\chi=\sqrt{\mu^2-\nu^2}.$$

Τὴν αὐτὴν ἔκφρασιν κατασκευάζομεν καὶ διαδοχικῶς, εὑρίσκοντες τὰς πλευρὰς τετραγώνων ἰσοδυναμούντων ἐναλλὰξ τῷ ἀθροίσματι ἢ τῇ διαφορᾷ ἀνὰ δύο τῶν ὑποῤῥίζων. Ἐξακολουθοῦμεν δὲ τὴν σειρὰν τῶν κατασκευῶν μέχρι τοῦ τελευταίου τούτων.

Ἡ περὶ ἧς πρόκειται κατασκευὴ χρησιμεύει κυρίως πρὸς ἐκτίμησιν εἰς γραμμὰς τῶν ἀριθμητικῶν ῥιζικῶν.

Ἔστω, π. χ. $\chi=\sqrt{15}$.

Ἡ τιμὴ αὕτη γράφεται καὶ οὕτω, $\chi=\sqrt{3\times5}$ παριστᾷ δὲ μέσην ἀνάλογον. Ἁπλούστερον εἶναι νὰ μεταμορφώσωμεν αὐτὴν οὕτω $\chi=\sqrt{16-1}=\sqrt{(4)^2-(1)^2}$, καὶ τότε κατασκευάζεται ὡς ἡ $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$.

Ἔχομεν ἐπίσης

$$\sqrt{7}=\sqrt{4+4-1}=\sqrt{(2)^2+(2)^2-(1)}.$$

Ἡ μέθοδος τῶν τοιούτων μετασχηματισμῶν οὐ χρήζει ἐξηγήσεως, ὡς σαφεστάτη.

35. Ἔστω προσέτι ἡ ῥιζικὴ ἔκφρασις

$$\chi = \frac{\alpha\gamma}{\beta} - \sqrt{\frac{\alpha^2\beta^2 - \alpha\beta\gamma^2 + \gamma^4}{\alpha\gamma + \beta^2}}.$$

Μετασχηματίζομεν πρῶτον τὴν ὑπόρριζον ποσότητα εἰς κλάσμα, οὗτινος οἱ ὅροι νὰ ὦσι γινόμενα γραμμῶν. Πρὸς τοῦτο γράφομεν

$$\chi = \frac{\alpha\gamma}{\beta} + \sqrt{\left\{\frac{\gamma^3\left(\frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^3} - \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \gamma\right)}{\gamma\left(\alpha + \frac{\beta^2}{\gamma}\right)}\right\}}$$

$$= \frac{\alpha\gamma}{\beta} + \sqrt{\frac{\gamma^2(\pi - \rho + \gamma)}{\alpha + \varkappa}},$$

καλοῦντες $\frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^3} = \pi, \quad \frac{\alpha\beta}{\gamma} = \rho, \quad \frac{\beta^2}{\gamma} = \varkappa.$

Ζητοῦμεν διὰ τετάρτων ἀναλόγων δύο γραμμὰς $\mu$, $\nu$, ἴσας $\frac{\alpha\gamma}{\beta}$, $\frac{\gamma(\pi - \rho + \gamma)}{\alpha + \varkappa}$, καὶ ἔχομεν

$$\chi = \mu + \sqrt{\gamma\nu}.$$

Ἔστω $\sigma$ ἡ μέση ἀνάλογος τῶν $\gamma$ καὶ $\nu$. Ἔχομεν

$$\chi = \mu + \sigma.$$

Ὑπολείπεται ἤδη ἡ πρόσθεσις δύο γραμμῶν. Ὅσον διὰ τὰς $\pi$, $\rho$, $\varkappa$, αὗται εὑρίσκονται ἰδιαιτέρως διὰ τετάρτων ἀναλόγων.

36. Αἱ ῥιζικαὶ ποσότητες βαθμῶν ὑπερτέρων τοῦ δευτέρου, ἐπίσης εὐκόλως κατασκευάζονται ὅταν ὁ δείκτης τοῦ ῥιζικοῦ ἦναι δύναμις τοῦ 2. π. χ. ἔστω ἡ ἔκφρασις

$$\chi = \sqrt[4]{\frac{\alpha^3\beta^2\gamma - \delta^2\zeta^2\eta\theta + \lambda^3\mu^3}{\pi^2 + \varkappa\rho}}.$$

Θέτομεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν



$$\chi = \sqrt[4]{\left\{\frac{\alpha^3\beta^2\left(\gamma - \frac{\delta^2\zeta^2\eta\theta}{\alpha^3\beta^2} + \frac{\lambda^3\mu^3}{\alpha^3\beta^2}\right)}{\pi\left(\pi + \frac{\varkappa\rho}{\pi}\right)}\right\}}.$$

Καλοῦμεν $\frac{\delta^2\zeta^2\eta\theta}{\alpha^3\beta^2} = \nu, \quad \frac{\lambda^3\mu^3}{\alpha^3\beta^2} = \tau, \quad \frac{\varkappa\rho}{\pi} = \sigma,$

καὶ ἔχομεν

$$\chi = \sqrt[4]{\frac{\alpha^3\beta^2(\gamma - \nu + \tau)}{\pi(\pi + \sigma)}}.$$

Καλοῦμεν $\gamma - \nu + \tau = \delta, \quad \pi + \sigma = \upsilon,$ καὶ οὕτως ἔχομεν

$$\chi = \sqrt[4]{\frac{\alpha^3\beta^2\delta}{\pi\upsilon}} = \sqrt{\sqrt{\frac{\alpha^3\beta^2\delta}{\pi\upsilon}}} = \sqrt{\alpha\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\pi} \times \frac{\beta\delta}{\upsilon}}}.$$

Ἀντὶ τοῦ γινομένου $\frac{\alpha\beta}{\pi} \times \frac{\beta\delta}{\upsilon}$ δύο γραμμῶν, καθιστῶμεν τετράγωνον ἰσοδύναμον, $\varphi^2$,

$$\chi = \sqrt{\alpha\varphi}.$$

Τέλος, ἡ τιμὴ τοῦ $\chi$ δίδεται διὰ μέσης ἀναλόγου τῶν γραμμῶν $\alpha$, $\varphi$.

37. *Κατασκευὴ τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων.* Αἱ ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἄγονται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\chi^2 + \alpha\chi + \varkappa = 0$. Ὅταν $\alpha$ καὶ $\chi$ δηλοῦσι γραμμάς, ἡ ὁμογένεια ἀπαιτεῖ καὶ τὸ γνωστὸν μέρος $\varkappa$, ἀπολύτως θεωρούμενον, νὰ ἐμφαίνῃ ἐπιφάνειαν, ἢ γινόμενον δύο γραμμῶν. Ἔστω $\beta^2$ τὸ ἰσοδύναμον αὐτῇ τετράγωνον. Οἱ διάφοροι συνδυασμοὶ τῶν ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ σημείων δίδουσι τὰς τέσσαρας ἀκολούθους

(1) $\chi^2 - \alpha\chi + \beta^2 = 0,$ (2) $\chi^2 + \alpha\chi + \beta^2 = 0,$

(3) $\chi^2 - \alpha\chi - \beta^2 = 0,$ (4) $\chi^2 + \alpha\chi - \beta^2 = 0.$

Αἱ ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων τιμαὶ τοῦ $\chi$ εἰσὶ ῥιζικὰ δευτεροβάθμια. Ἀλλὰ δείξομεν πῶς κατασκευάζονται αἱ ῥίζαι χωρὶς νὰ ἐπιλύσωμεν τὰς ἐξισώσεις.

38. Ἡ ἐξίσωσις (1) τιθεμένη ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\chi(\alpha-\chi)=\beta^2,$$

δεικνύει ὅτι, $\chi$ καὶ $\alpha-\chi$ εἰσὶ δύο γραμμαὶ ὧν, τὸ μὲν ἄθροισμα ἰσοῦται τῷ δεδομένῳ μήκει $\alpha$, τὸ δὲ ὀρθογώνιον τῷ ἐπίσης δεδομένῳ τετραγώνῳ $\beta^2$. Λοιπὸν, (Σχ. 8) ἐπὶ τὴν $\mathrm{AB}=\alpha$ γράφομεν ἡμικύκλιον· καθέτως ἐπὶ τὴν ΑΒ ἄγομεν $\mathrm{B\Gamma}=\beta$, καὶ παραλλήλως τῇ ΑΒ τὴν ΓΖ συμπίπτουσαν τῇ ἡμιπεριφερείᾳ κατὰ τὸ σημεῖον Δ. Τέλος ἄγομεν ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Τὰ τμήματα ΒΕ, ΑΕ εἰσὶν αἱ τιμαὶ τοῦ ἀγνώστου. Τῷ ὄντι, $\chi$ ὄντος τοῦ ἑνὸς τμήματος, τὸ ἕτερον ἔσεται $\alpha-\chi$. Ἔχομεν δὲ $\mathrm{BE}\times\mathrm{AE}=\overline{\mathrm{\Delta E}}^2$, ἄρα,

$$\chi(\chi-\alpha)=\beta^2.$$

Αὕτη εἶναι ἡ τεθεῖσα ἐξίσωσις.

Ὅταν $\mathrm{B\Gamma}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}$, ἢ $\beta^2=\frac{1}{4}\alpha^2$, ἡ μὲν γραμμὴ ΓΖ καθίσταται ἐφαπτομένη, ἀμφότερα δὲ τὰ ἐπὶ τῆς διαμέτρου τμήματα ἰσοῦνται $\frac{1}{2}\alpha$. Ἡ περίπτωσις αὕτη ἀντιστοιχεῖ ἐκείνῃ ἐν ᾗ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως εἰσὶν ἴσαι. Ἀλλ' ὅταν ΒΓ μείζων ἦναι $\frac{1}{2}$ ΑΒ, ἡ γραμμὴ ΓΖ δὲν τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν. Ἡ περίπτωσις αὕτη ἀντιστοιχεῖ ἐκείνῃ ἐν ᾗ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως εἰσὶ φανταστικαί.

39. Ἡ ἐξίσωσις (2) δὲν ἔχει ῥίζας θετικάς. Τροπῇ τοῦ $\chi$ εἰς $-\chi$, καθίσταται ὁμοία τῇ (1). Ἄρα, εἰς τὰς ῥίζας ταύτης ἀρκεῖ νὰ δώσωμεν τὸ σημεῖον $-$.

40. Θεωρήσωμεν ἤδη τὴν ἐξίσωσιν (3), ἣν γράφομεν οὕτω·

$$\chi(\chi-\alpha)=\beta^2.$$

Ὑπὸ τὴν μορφὴν ταύτην, φανερὸν ὅτι $\chi$ καὶ $\chi-\alpha$ εἰσὶ δύο γραμμαὶ ὧν, ἡ μὲν διαφορὰ ἰσοῦται $\alpha$, τὸ δὲ ὀρθογώνιον ἰσοῦται $\beta^2$. Πρὸς εὕρεσιν αὐτῶν, (Σχ. 9) γράφομεν ἡμικύκλιον ἐπὶ διαμέτρου $\mathrm{AB}=\alpha$· ἄγομεν τὴν ἐφαπτομένην $\mathrm{B\Gamma}=\beta$ καὶ τὴν τέμνουσαν ΓΔΕ διὰ τοῦ σημείου Γ καὶ τοῦ κέντρου. Αἱ τιμαὶ τοῦ $\chi$ ἔσονται $\chi=\mathrm{\Gamma E}$, καὶ $\chi=-\mathrm{\Gamma\Delta}$. Διότι, τῇ ἀντεισαγωγῇ ἑκατέρας τούτων ἐν τῇ ἐξισώσει, λαμβάνομεν τὴν ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωστὴν σχέσιν

$$\mathrm{\Gamma\Delta}\times\mathrm{\Gamma E}=\overline{\mathrm{B\Gamma}}^2.$$



41. Αἱ τῆς ἐξισώσεως (4) ῥίζαι εἰσὶν αἱ αὐταὶ τῆς (3), πλὴν μὲ σημεῖα ἐναντία· ἑπομένως αἱ τιμαὶ τοῦ $\chi$ εἰσὶ $\chi=-\mathrm{\Gamma E}$, καὶ $\chi=\mathrm{\Gamma\Delta}$.

42. Οὐδόλως ὁμιλήσομεν ἐνταῦθα περὶ ἐκφράσεων ἐκμέτρων μὴ τρεπομένων εἰς ῥιζικὰ δευτεροβάθμια, διότι *τὰ τοιαῦτα ἀδύνατον νὰ κατασκευασθῶσι διὰ τῆς εὐθείας καὶ τοῦ κύκλου*, μόνας γραμμὰς ἃς σπουδάζομεν ἐν τῇ στοιχειώδῃ Γεωμετρίᾳ

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΑΛΓΕΒΡΑΪΚΩΣ ΕΠΙΛΥΟΜΕΝΑ.

43. Ἀνακεφαλαιοῦντες τὰ μέχρι τοῦδε ἐκτεθέντα, συνάγομεν ὅτι, ἡ ἐπίλυσις παντὸς προβλήματος γεωμετρικοῦ διὰ τῆς Ἀλγέβρας περιλαμβάνει τρία κυριώτερα μέρη. 1ον. Τὴν μόρφωσιν τῶν τοῦ προβλήματος ἐξισώσεων. 2ον. Τὴν ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως ἢ τῶν ἐξισώσεων τοῦ προβλήματος. 3ον. Τὴν κατασκευὴν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων. Περὶ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου μέρους ἐπραγματεύθημεν ἤδη. Τὸ δεύτερον ἀνήκει εἰς τὴν Ἄλγεβραν. Ὑπολείπεται ἤδη νὰ θέσωμεν προβλήματά τινα πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν προεκτεθέντων.

44. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Τριγώνῳ δεδομένῳ τετράγωνον ἐγγράψαι.*

(Σχ. 10). Ἔστω ΑΒΓ τὸ δοθὲν τρίγωνον. Ζητεῖται ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς, τῆς ΑΒ, εὑρεῖν σημεῖον, τὸ Ε, τοιοῦτον ὥστε ἡ ἀγομένη παράλληλος ΕΖ τῇ ΒΓ, καὶ αἱ ἐπ' αὐτὴν κάθετοι ΕΗ, ΖΘ, νὰ συγκροτῶσι τετράγωνον.

Ὑποτεθείσθω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστω ΕΖΗΘ τὸ ζητούμενον τετράγωνον. Ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἄγομεν τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ. Φανερὸν ὅτι, προσδιοριζομένου τοῦ σημείου Ι, προσδιορίζεται ἡ ΕΖ, ἑπομένως καὶ ἡ θέσις τοῦ τετραγώνου.

Καλοῦμεν $\mathrm{I\Delta}=\mathrm{EZ}=\chi$, $\mathrm{A\Delta}=\upsilon$, $\mathrm{B\Gamma}=\alpha$.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΕΖ, δίδουσι τὴν ἀναλογίαν

$$\alpha : \chi :: \upsilon : \upsilon-\chi, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \chi=\frac{\alpha\upsilon}{\alpha+\upsilon}.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ $\chi$ παριστᾷ 4ην ἀνάλογον, ἣν κατασκευάσομεν ἐν τῇ γωνίᾳ ΑΔΓ. Λαμβάνομεν $\Delta K = \alpha$, καὶ κατὰ συνέχειαν $K\Lambda = \upsilon$. Ζευγνύομεν τὴν ΛΑ, ἄγομεν παράλληλον ταύτης τὴν ΚΙ, καὶ προσδιορίζομεν οὕτω τὸ σημεῖον Ι. Διότι

$$\Delta\Lambda : A\Delta :: \Delta K : \Delta I, \quad \text{ἢ} \quad \alpha + \upsilon : \upsilon :: \alpha : \Delta I$$

ἐντεῦθεν δὲ $$\Delta I = \chi = \frac{\alpha\upsilon}{\alpha + \upsilon}.$$

45. Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον δυνατὸν νὰ ὑποτεθῇ στηριζόμενον ἐφ' ἑκάστης τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ζητήσωμεν ἐν τίνι περιπτώσει τὸ ἐγγεγραμμένον τοῦτο σχῆμα εἶναι τὸ *μέγιστον*. Ἐκ τῆς μορφῆς τῆς τιμῆς τοῦ $\chi$ δῆλον ὅτι, οἱαδήποτε εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τριγώνου, ὁ μὲν ἀριθμητὴς μενεῖ ἄτρεπτος ὡς ἰσούμενος τῷ διπλασίῳ τῆς τοῦ τριγώνου ἐπιφανείας, ὁ δὲ παρονομαστὴς ἔσεται πάντοτε τὸ ἄθροισμα τῆς περὶ ἧς πρόκειται πλευρᾶς καὶ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος ὕψους. Ἄρα, τὸ μέγιστον τετράγωνον ἀντιστοιχεῖ τῇ περιπτώσει ἐν ᾗ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι τὸ ἐλάχιστον.

Ὑποτεθείσθω ἡ πλευρὰ ΒΓ ἢ $\alpha$ ἐλάσσων τῆς ΑΓ ἢ $\beta$. Ἔστω $\upsilon'$ τὸ ἐπὶ τὴν $\beta$ ὕψος ΒΔ'. Ἔχομεν

$$\alpha + \upsilon < \beta + \upsilon'.$$

Τῷ ὄντι, ἡ ἰσότης $\alpha\upsilon = \beta\upsilon'$ δίδει

$\alpha : \beta :: \upsilon' : \upsilon$. Ὅθεν, $\beta - \alpha : \upsilon - \upsilon' :: \alpha : \upsilon'$

Ἀλλὰ $\alpha > \upsilon'$· ἄρα $\beta - \alpha > \upsilon - \upsilon'$, ἢ $\alpha + \upsilon < \beta + \upsilon'$.

Λοιπὸν, *τὸ μέγιστον τετράγωνον εἶναι τὸ ἐπὶ τῆς ἐλάσσονος τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου στηριζόμενον.*

*Παρατήρησις.* Ἐὰν $\alpha = \beta$, ἡ ἰσότης $\alpha\upsilon = \beta\upsilon'$ δίδει $\upsilon = \upsilon'$, καὶ ἑπομένως $\alpha + \upsilon = \beta + \upsilon'$· ἄρα, ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, τὰ ἐπὶ τῶν πλευρῶν $\alpha$, $\beta$, στηριζόμενα τετράγωνα εἰσὶν ἰσάλληλα.

Ὅταν δύο πλευραὶ, αἱ $\alpha$, $\beta$, π. χ., τέμνονται πρὸς ὀρθὰς, καὶ τότε δύο τετράγωνα ἔσονται ἴσα· διότι, ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, $\upsilon = \beta$, $\upsilon' = \alpha$, ὅθεν $\alpha + \upsilon = \beta + \upsilon'$.

Αἱ δύο προηγούμεναι ὑποθέσεις εἰσὶν αἱ μόναι καθ' ἃς δύο τῶν περὶ ὧν λόγος τετραγώνων εἰσὶν ἴσα. Τῷ ὄντι, φανερὸν ὅτι, μὴ ὑπαρχούσης οὐδεμιᾶς τῶν ὑποθέσεων τούτων,



ἕξομεν $\alpha < \beta$, καὶ $\alpha > \upsilon'$, καὶ ἑπομένως, ὡς ἀπεδείξαμεν ἤδη, $\alpha + \upsilon < \beta + \upsilon'$.

46. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Σφαῖραν δεδομένην τεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ προκῦπτον σφαιρικὸν τμῆμα εἶναι ἰσοδύναμον κώνῳ τῷ ἔχοντι βάσιν τὴν αὐτὴν τοῦ τμήματος, καὶ κορυφὴν τὸ τῆς σφαίρας κέντρον.*

(Σχ. 11). Ἔστω Θ τὸ σημεῖον τῆς ἀκτῖνος ἀφ' οὗ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἀχθήσεται. Καλοῦμεν $\alpha$ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας καὶ $\chi$ τὸ ἀπόστημα ΓΘ. Ἐπειδὴ τὰ δύο στερεὰ πρέπει νὰ ὦσιν ἰσοδύναμα, ὁ κῶνος ἔσεται τὸ ἥμισυ τοῦ τομέως ΓΑΜΒ.

Ἀλλὰ, ἡ ἔκφρασις τῆς τοῦ κώνου στερεότητος εἶναι

$$\tfrac{1}{3}\pi\overline{\Lambda\Theta}^2\chi = \tfrac{1}{3}\pi(\alpha^2 - \chi^2)\chi\cdot$$

τῆς τοῦ τομέως

$$\tfrac{2}{3}\pi\alpha^2 M\Theta = \tfrac{2}{3}\pi\alpha^2(\alpha^2 - \chi^2)\cdot$$

ἄρα,

$$\tfrac{1}{3}\pi(\alpha^2 - \chi^2)\chi = \tfrac{1}{3}\pi\alpha^2(\alpha - \chi),$$

ἥτις ἄγεται εἰς ταύτην

$$\chi^2 = \alpha(\alpha - \chi).$$

Λοιπὸν, τὸ σημεῖον Θ ὁρίζεται τομῇ τῆς ἀκτῖνος κατ' ἄκρον καὶ μέσον λόγον.

47. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. (Σχ. 12). *Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ τριγώνου δεδομένου, τοῦ ΑΒΓ, εὑρεῖν σημεῖον, τὸ Δ, ἀφ' οὗ ἄγοντες παράλληλον ΔΕ τῇ ΑΒ, νὰ ἰσοῦται αὕτη τῷ δεδομένῳ μήκει μ.*

Ὑποτεθείσθω τὸ πρόβλημα λελυμένον. Λαμβάνομεν ὡς ἄγνωστον τὸ ἀπόστημα $A\Delta = \chi$· καλοῦμεν $A\Gamma = \beta$, $AB = \gamma$. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ, ΓΔΕ, δίδουσι τὴν ἀναλογίαν,

$$\beta : \gamma :: \beta - \chi : \mu, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \chi = \frac{\beta(\gamma - \mu)}{\gamma}.$$

Τὴν 4ην ταύτην ἀνάλογον κατασκευάζομεν λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς ΑΒ, $BH = \mu$, καὶ ἄγοντες ΑΗ παράλληλον τῇ ΓΒ. Οὕτως ὁρίζεται τὸ ζητούμενον σημεῖον Δ.

48. Ὅταν $\mu < \gamma$, ἡ τιμὴ τοῦ $\chi$ ἔσεται θετικὴ καὶ κατασκευάζεται ὡς ἀνωτέρω. Ὅταν $\mu = \gamma$, τότε $\chi = o$, τὸ

δὲ σημεῖον Δ συμπίπτει τῷ Α. Ὅταν $\mu > \gamma$, ἡ τιμὴ τοῦ $\chi$ ἔσεται ἀρνητική, ἤτοι θέλομεν ἔχει

$$\chi = \frac{\beta(\mu - \gamma)}{\gamma}.$$

Ἵνα ἐξηγήσωμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο, ἐπανέλθωμεν εἰς τὴν ἀναλογίαν, ἐξ ἧς ἐμορφώσαμεν τὴν τοῦ προβλήματος ἐξίσωσιν· τρέπομεν $\chi$ εἰς $-\chi$ καὶ λαμβάνομεν

$$\beta : \gamma : : \beta + \chi : \mu.$$

Λοιπόν, τὸ ἀπόστημα $\Gamma\Delta = \beta - \chi$, ἐτράπη ἤδη εἰς $\beta + \chi$ καὶ παριστᾷ τὸ ἄθροισμα δύο γραμμῶν, ὅπερ ἔχει χώραν ὅταν τὸ ζητούμενον σημεῖον κεῖται εἰς Δ΄ ἐπὶ τῆς προαγωγῆς τῆς ΑΓ, ἤτοι εἰς θέσιν ἀντίθετον ἐκείνης ἐν ᾗ πρότερον ἐτέθη. Ἐκ τῆς τροποποιηθείσης ἀναλογίας λαμβάνομεν

$$\chi = \frac{\beta(\mu - \gamma)}{\gamma}.$$

ἡ τιμὴ δὲ αὕτη εὐκόλως κατασκευάζεται καὶ προσδιορίζει τὸ σημεῖον Δ΄, καὶ τὴν παράλληλον τῇ ΑΒ, $\Delta'E' = \mu$.

49. Ἡ ἀρνητικὴ λύσις ἣν ἐν τῇ περιπτώσει $\mu > \gamma$ ἐλάβομεν, δὲν δεικνύει διόρθωσιν τῆς ἐκφράσεως τοῦ προβλήματος, (διότι εἶναι σαφὲς ὅτι, οἱονδήποτε εἶναι τὸ μέγεθος $\mu$, πάντοτε τίθεται ἰσομήκης γραμμὴ ἐν τῇ γωνίᾳ ΑΓΒ παραλλήλως τῇ ΑΒ, προεκβαλλομένων, εἰ δέον, τῶν πλευρῶν), ἀλλὰ διαφορὰν θέσεως τοῦ σημείου Δ πρὸς τὸ μόνιμον σημεῖον Α. Ὅθεν, ἐάν, πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος, τὸ σημεῖον Δ ὑποτεθῇ ἄνω τοῦ Α, ἡ θέσις αὕτη εἶναι μὲν ὀρθὴ ὅταν $\mu < \gamma$, ἐσφαλμένη δὲ ὅταν $\mu > \gamma$. Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον ἐπιδιορθοῖ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην, δεικνῦον ὅτι τὸ ἀπόστημα τοῦ ἀγνώστου σημείου ἀπὸ τοῦ δεδομένου πρέπει νὰ ληφθῇ εἰς θέσιν ἀντίθετον ἐκείνης εἰς ἣν ἐν ἀρχῇ ἐτέθη.

Τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα γίνονται σαφῆ καὶ ἐκ τοῦ ὅτι ἀποφεύγομεν τὰς ἀρνητικὰς λύσεις, ἐὰν λάβωμεν ἁρμοδίως ἕτερον σημεῖον ἀναχωρήσεως· π. χ. ἐὰν λάβωμεν ὡς ἄγνωστον τὸ ἀπόστημα ΓΔ. Τῷ ὄντι, τότε ἔχομεν

$$\beta : \gamma : : \chi : \mu, \quad \text{ὅθεν} \quad \chi = \frac{\beta\mu}{\gamma}.$$



Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ $\chi$ ἔσεται ἐλάσσων ἢ μείζων $\beta$, καθ' ὅσον $\mu$ ἔσεται ἐλάσσων ἢ μείζων $\gamma$.

ΣΗΜ. Εἰς τὴν ἐπίλυσιν παντὸς προβλήματος γεωμετρικοῦ διὰ τῆς Ἀλγέβρας, πρέπει νὰ προσέχῃ τις εἰς τὴν ἐκλογὴν τῆς ἀγνώστου, ἵνα λαμβάνῃ ἐξαγόμενα ὅσον ἔνεστιν ἁπλούστερα. Ἡ ἐκλογὴ αὕτη πολλάκις εἶναι τοσοῦτον δύσκολος, ὥστε δύναταί τις νὰ εἴπῃ ὅτι ἡ τύχη μᾶλλον ἢ ἡ ὀξύνοια συντείνει πρὸς τοῦτο.

50. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. (Σχ. 13). *Τραπέζιον δεδομένον, τὸ ΑΒΓΔ, διελεῖν δι' εὐθείας παραλλήλου ταῖς βάσεσιν αὐτοῦ, εἰς δύο, ὄντα πρὸς ἄλληλα ἐν λόγῳ γνωστῷ,* $\mu : \nu$.

Ἔστω ΑΗ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα. Λαμβάνομεν ὡς ἄγνωστον τὸ ἀπόστημα ΕΙ ἐπὶ τοῦ ὕψους τοῦ τραπεζίου, καὶ καλοῦμεν,

$$EI = \chi, \quad \Gamma\Delta = \alpha, \quad AB = \beta, \quad EZ = \upsilon.$$

Ἐκ τῆς ἀναλογίας

$$AB\Delta H : AH\Delta\Gamma : : \mu : \nu,$$

συνάγομεν

$$AB\Gamma\Delta : AB\Delta H : : \mu + \nu : \mu,$$

ὅθεν

$$AB\Delta H = \frac{\mu}{\mu + \nu} \times AB\Gamma\Delta.$$

Ἀλλὰ

$$AB\Gamma\Delta = \frac{(\alpha + \beta)\upsilon}{2}, \quad AB\Delta H = \frac{(AH + \beta)\chi}{2}.$$

Ἄρα,

$$(1) \qquad \frac{(AH + \beta)\chi}{2} = \frac{\mu\upsilon(\alpha + \beta)}{2(\mu + \nu)}.$$

Ἵνα δὲ προσδιορίσωμεν τὴν ΑΗ συνεκθέσει τοῦ $\chi$ καὶ τῶν δεδομένων, ἄγομεν ΑΘ παράλληλον τῇ ΒΔ, καὶ ΑΜ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΓΘ, ΑΛΚ δίδουσι

$$\Gamma\Theta : AK : : AM : AN : : \upsilon : \chi, \quad \text{ἢ} \quad AK = \frac{(\alpha - \beta)\chi}{\upsilon},$$

καὶ ἑπομένως

$$AH = AK + KH = \frac{(\alpha - \beta)\chi + \beta\upsilon}{\upsilon}.$$

Ἀντεισάγομεν τὴν τιμὴν ταύτην τῆς ΑΗ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), καὶ ἔχομεν οὕτω τὴν τοῦ προτεθέντος προβλήματος,

$$(\alpha - \beta)\chi^2 + 2\beta\upsilon\chi = \frac{\mu\upsilon^2(\alpha + \beta)}{\mu + \nu}.$$

Ἐξ ἧς συνάγομεν

$$(2) \quad \chi = -\frac{\beta\upsilon}{\alpha-\beta} \pm \sqrt{\frac{\beta^2\upsilon^2}{(\alpha-\beta)^2} + \frac{\mu\upsilon}{\mu+\nu} \times \frac{(\alpha+\beta)\upsilon}{\alpha-\beta}},$$

ἤ, μετὰ τὰς ἀναγωγάς,

$$\chi = -\frac{\beta\upsilon}{\alpha-\beta} \pm \frac{\upsilon}{\alpha-\beta}\sqrt{\frac{\alpha^2\mu+\beta^2\nu}{\mu+\nu}}.$$

Αἱ τιμαὶ αὗται τοῦ $\chi$ φανερὸν ὅτι πάντοτε ἔσονται πραγματικαί. Ὡς πρὸς τὰ σημεῖα αὐτῶν, δύο κυριώτεραι περιπτώσεις δυνατὸν νὰ παρουσιασθῶσι, καθ' ὅσον $\alpha$ εἶναι μείζων ἢ ἐλάσσων $\beta$. Ἐν τῇ πρώτῃ, δῆλον ἐκ τῆς ἐκφράσεως αὐτῆς (2), ὅτι τῶν τιμῶν τοῦ $\chi$ ἡ μὲν ἔσεται θετική, ἡ δὲ ἀρνητική. Ἐν τῇ δευτέρᾳ, ἐπειδὴ ὁ ὅρος $-\frac{\beta\upsilon}{\alpha-\beta}$ τρέπεται εἰς $\frac{\beta\upsilon}{\beta-\alpha}$, τὸ δὲ ῥιζικὸν καθίσταται ἔλαττον αὐτοῦ, ἀμφότεραι αἱ τιμαὶ ἔσονται θετικαί.

Ἐξετάσωμεν διαδοχικῶς τὰς περιπτώσεις ταύτας, ἐν ἑκάστῃ τῶν ὁποίων ἐκτελέσομεν τὴν κατασκευὴν τῶν τιμῶν τοῦ ἀγνώστου.

51. Ἔστω, (Σχ. 14) $\alpha > \beta$.

Πρέπει πρῶτον νὰ ἐκτιμήσωμεν εἰς γραμμὰς τὰ μέρη τῶν ὑπὸ τὴν μορφὴν (2) τιμῶν τοῦ $\chi$. Προάγομεν τὰς πλευρὰς ΓΑ, ΔΒ μέχρις οὗ συμπέσωσιν εἰς Ο· ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου ἄγομεν τὴν κάθετον ΟΖ ἐπὶ τὴν ΓΔ. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΓΔ, ΟΑΒ, δίδουσι

$\alpha : \beta : : \mathrm{OZ} : \mathrm{OE}$, ἐξ ἧς, $\alpha-\beta : \beta : : \upsilon : \mathrm{OE}$.

Ὅθεν

$$\mathrm{OE} = \frac{\beta\upsilon}{\alpha-\beta}, \qquad \mathrm{OZ} = \frac{\beta\upsilon}{\alpha-\beta} + \upsilon = \frac{\alpha\upsilon}{\alpha-\beta}.$$

Ἐπὶ τῆς ΟΖ προαγομένης λαμβάνομεν $\mathrm{OZ}' = \mathrm{OZ}$, καὶ ἔχομεν

$$\mathrm{EZ}' = \mathrm{OE} + \mathrm{OZ}' = \mathrm{OE} + \mathrm{OZ} = \frac{(\alpha+\beta)\upsilon}{\alpha-\beta}.$$



Τέμνομεν τὴν ΕΖ κατὰ τὸ σημεῖον Κ εἰς δύο τμήματα ὄντα πρὸς ἄλληλα ὡς $\mu : \nu$, καὶ ἐκ τῆς ἀναλογίας

$$\mathrm{EK} : \mathrm{KZ} : : \mu : \nu,$$

συνάγομεν

$$\mathrm{EK} : \upsilon : : \mu : \mu+\nu, \qquad \text{καὶ} \qquad \mathrm{EK} = \frac{\mu\upsilon}{\mu+\nu}.$$

Ἄρα, αἱ τιμαὶ (2) καθίστανται

$$\chi = -\mathrm{OE} \pm \sqrt{\mathrm{OE}^2 + \mathrm{EK} \times \mathrm{EZ}'}.$$

Ἐπὶ τῆς ΚΖ′ γράφομεν ἡμικύκλιον, προάγομεν τὴν ΕΒ μέχρι τοῦ Θ, καὶ ἔχομεν,

$\overline{\mathrm{E\Theta}}^2 = \mathrm{EK} \times \mathrm{KZ}'$. Ἄρα $\chi = -\mathrm{OE} \pm \sqrt{\mathrm{OE}^2 + \mathrm{E\Theta}^2}$.

Ζευγνύομεν τὴν ΟΘ, καὶ ἔχομεν $\chi = -\mathrm{OE} \pm \mathrm{O\Theta}$.

Τέλος, κέντρῳ τῷ Ο καὶ ἀκτῖνι ΟΘ γράφομεν τόξον, ὅπερ τέμνει τὴν ΖΖ′ κατὰ τὰ σημεῖα Ι καὶ Ι′, καὶ λαμβάνομεν οὕτω τὰς τιμὰς τοῦ $\chi$, ἤτοι

$$\chi = \mathrm{EI}, \qquad \text{καὶ} \quad \chi = -\mathrm{EI}'.$$

ΣΗΜ. Ἡ δευτέρα λύσις ἀντιστοιχεῖ προφανῶς εἰς τραπέζιον, τὸ Α′Β′Γ′Δ′, ἴσον καὶ ἀντίθετον τῷ ΑΒΓΔ.

52. *Παρατηρήσεις.* Ἐξετάσωμεν ἰδιαιτέρας τινὰς περιπτώσεις.

Ὅταν $\mu = \nu$, τὰ μὲν δύο ζητούμενα τμήματα τοῦ δοθέντος τραπεζίου πρέπει νὰ ὦσιν ἰσοδύναμα, αἱ δὲ τιμαὶ τοῦ $\chi$ καθίστανται

$$\chi = -\frac{\beta\upsilon}{\alpha-\beta} \pm \sqrt{\frac{\beta^2\upsilon^2}{(\alpha-\beta)^2} + \frac{\upsilon}{2} \times \frac{(\alpha+\beta)\upsilon}{\alpha-\beta}}.$$

Μόνη διαφορὰ ἐν τῇ κατασκευῇ εἶναι ὅτι ἡ ΕΚ ἰσοῦται $\frac{\upsilon}{2}$.

Ὅταν $\beta = 0$, τότε τὸ τραπέζιον τρέπεται εἰς τρίγωνον, (Σχ. 15), αἱ δὲ τιμαὶ τοῦ $\chi$ καθίστανται αἱ ἑξῆς·

$$\chi = \pm\sqrt{\frac{\mu\upsilon^2}{\mu+\nu}}.$$

Ἵνα κατασκευάσωμεν αὐτὰς τέμνομεν τὸ τοῦ τριγώνου ὕψος ΟΖ εἰς δύο τμήματα ὄντα πρὸς ἄλληλα ὡς $\mu : \nu$. Ἐπὶ τὴν

ΟΖ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν, καὶ ἄγομεν τὴν κάθετον ΚΘ. Μεταφέρομεν τὴν χορδὴν ΟΘ ἀπὸ Ο εἰς Ι καὶ Ι', καὶ λαμβάνομεν οὕτω τὰς τιμὰς

$$\chi = OI, \qquad \chi = -OI',$$

διότι ἡ κατασκευὴ αὕτη δίδει

$$\overline{OI}^2 = \overline{O\Theta}^2 = OK \times OZ, \quad \text{ὅθεν} \quad OI = \pm\sqrt{\frac{\mu\upsilon}{\mu+\nu}\times\upsilon}.$$

53. Ἔστω ἤδη (Σχ. 16) $\alpha < \beta$.

Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ τραπέζιον εἶναι ἐν ἀντιστρόφῳ θέσει. Αἱ τιμαὶ τοῦ $\chi$ ἔσονται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\chi = \frac{\beta\upsilon}{\beta-\alpha} \pm \sqrt{\frac{\beta^2\upsilon^2}{(\beta-\alpha)^2} - \frac{\mu\upsilon}{\mu+\nu}\times\frac{(\beta+\alpha)\upsilon}{\beta-\alpha}}.$$

Προάγομεν ΑΓ καὶ ΒΔ, μεχρισοῦ ταυτισθῶσιν εἰς Ο, καὶ ἄγομεν τὴν κάθετον ΕΘΕ'.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ δίδουσιν

$$OE : OZ :: \beta : \alpha, \quad \text{ὅθεν} \quad OE : \upsilon :: \beta : \beta-\alpha.$$

Λοιπόν,

$$OE = \frac{\beta\upsilon}{\beta-\alpha}, \quad OZ = \frac{\beta\upsilon}{\beta-\alpha} - \upsilon = \frac{\alpha\upsilon}{\beta-\alpha}.$$

Λαμβάνομεν $OZ' = OZ$, καὶ ἔχομεν

$$EZ' = OZ' + OE = \frac{(\beta+\alpha)\upsilon}{\beta-\alpha}.$$

Τέμνομεν τὴν ΕΖ, κατὰ τὸ σημεῖον Κ, ὡς $\mu : \nu$ καὶ ἔχομεν

$$EK = \frac{\mu\upsilon}{\mu+\nu}.$$

Τούτων τεθέντων, ἐπὶ τὴν ΕΖ' γράφομεν ἡμικύκλιον· ἄγομεν τὴν κάθετον ΚΘ, καὶ ζευγνύομεν τὴν ΕΘ. Ἔχομεν

$$\overline{E\Theta}^2 = EK \times EZ' = \frac{\mu\upsilon}{\mu+\nu}\times\frac{(\beta+\alpha)\upsilon}{\beta-\alpha}.$$

Ἐπὶ τὴν ΟΕ γράφομεν ἡμικύκλιον, ἄγομεν τὴν χορδὴν

$$E\Theta' = E\Theta, \qquad \text{ἄρα} \qquad \overline{O\Theta'}^2 = \overline{OE}^2 - \overline{E\Theta'}^2,$$

ἑπομένως



$$O\Theta' = \sqrt{\overline{OE}^2 - \overline{E\Theta'}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\beta^2\upsilon^2}{(\beta-\alpha)^2} - \frac{\mu\upsilon}{\mu+\nu}\times\frac{(\beta+\alpha)\upsilon}{\beta-\alpha}}.$$

Τέλος, κέντρῳ τῷ Ο καὶ ἀκτῖνι ΟΘ' γράφομεν τόξον τέμνον τὴν ΕΖ' κατὰ τὰ σημεῖα Ι καὶ Ι'. Οὕτως, αἱ ζητούμεναι λύσεις εἰσί

$$\chi = EI = \frac{\beta\upsilon}{\beta-\alpha} - \sqrt{\frac{\beta^2\upsilon^2}{(\beta-\alpha)^2} - \frac{\mu\upsilon}{\mu+\nu}\times\frac{(\beta+\alpha)\upsilon}{\beta-\alpha}},$$

$$\chi = EI' = \frac{\beta\upsilon}{\beta-\alpha} + \sqrt{\frac{\beta^2\upsilon^2}{(\beta-\alpha)^2} - \frac{\mu\upsilon}{\mu+\nu}\times\frac{(\beta+\alpha)\upsilon}{\beta-\alpha}}.$$

54. *Παρατήρησις.* Ὅταν $\alpha = \beta$, τὸ μὲν τραπέζιον καθίσταται παραλληλόγραμμον, αἱ δὲ τιμαὶ (2) τοῦ $\chi$ ἔσονται

$$\chi = \frac{-\alpha\upsilon \pm \alpha\upsilon}{0}, \qquad \text{ἤτοι} \qquad \chi = \frac{0}{0}, \qquad \text{καὶ} \qquad \chi = \frac{-A}{0}.$$

Ἀλλά, κατὰ τὰς ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ ἀρχάς, ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος

$$(\alpha-\beta)\chi^2 + 2\beta\upsilon\chi - \frac{\mu\upsilon^2}{\mu+\nu}(\alpha+\beta) = 0,$$

τρέπεται, ἐν τῇ περὶ ἧς ὁ λόγος περιπτώσει, εἰς τὴν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν ταύτην,

$$2\alpha\upsilon\chi = \frac{2\alpha\mu\upsilon^2}{\mu+\nu}, \qquad \text{ἐξ ἧς} \qquad \chi = \frac{\mu\upsilon}{\mu+\nu}.$$

Λοιπόν, ἀρκεῖ τεμεῖν τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου εἰς δύο, ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν $\mu$, $\nu$. Κ.τ.ἑ.

55. Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) *Τρίγωνον κατασκευάσαι ἰσοδύναμον τριγώνῳ καὶ ὅμοιον ἑτέρῳ, ἀμφοτέροις δεδομένοις.*
*($\beta$, $\beta'$, $\chi$, εἰσὶν αἱ βάσεις· $\upsilon$, $\upsilon'$, $\psi$, τὰ ὕψη τῶν τριῶν τριγώνων).*

Ἀπ. $\chi = \pm\sqrt{\dfrac{\beta\upsilon\beta'}{\upsilon'}}, \qquad \psi = \dfrac{\upsilon'}{\beta'}\chi.$

2) *Ἐν γωνίᾳ ὀρθῇ ὑπάρχουσι γεγραμμένα δύο τόξα κύκλων, ὧν ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας εἶναι κοινὸν κέντρον, καὶ αἱ ἀκτῖνες εἰσὶν α καὶ α′. Ζητεῖται ἡ ἀκτὶς χ ἑτέρου τόξου ὁμοκέντρου, διχοτομοῦντος τὸ ὑπὸ τῶν δύο πρώτων περιεχόμενον χωρίον.*

Ἀπ. $$\chi = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 + \alpha'^2}{2}}.$$

3) *Γραπτέον περιφέρειαν κύκλου διερχομένην δύο σημείων δεδομένων καὶ ἀπτομένην εὐθείας δεδομένης.*

4) *Ἐπὶ εὐθείας ζευγνυούσης δύο σημεῖα κείμενα ἐν ἀποστάσει ἀπ᾿ ἀλλήλων δεδομένῃ α, τρίτον σημεῖον εὑρεῖν, τοιοῦτον ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τοῦ πρώτου ἀποστήματος αὐτοῦ χ, νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ συγκροτούμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τοῦ ἀποστήματος αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου σημείου καὶ γραμμῆς δεδομένης λ, ὡς μ : ν.*

Ἀπ. $$\chi = -\frac{\mu\lambda}{2\nu} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu\lambda}{2\nu} + \alpha\right)^2 - \alpha^2}.$$

5) *Ἀπὸ σημείου δεδομένου εὐθεῖαν ἀγαγεῖν συγκροτοῦσαν μετὰ δύο ἑτέρων γνωστῆς οὐσῶν θέσεως, τρίγωνον, οὗτινος τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται τετραγώνῳ δεδομένῳ.*

6) *Γνωστῶν οὐσῶν δύο πλευρῶν τριγώνου, καὶ τῆς διχοτομούσης εὐθείας τὴν ὑπὸ τῶν αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν, κατασκευάσαι τὸ τρίγωνον.*

7) *Δοθεισῶν, τῆς περιμέτρου, μιᾶς γωνίας, καὶ τῆς ἐπιφανείας τριγώνου, προσδιορίσαι τὰς τρεῖς αὐτοῦ πλευράς.*

8) *Δοθέντος κώνου κολούρου, μετὰ βάσεων παραλλήλων, ἀγαγεῖν ἐπίπεδον παράλληλον ταῖς βάσεσι, καὶ τέμνον τὸν κόλουρον κῶνον εἰς δύο τμήματα ὄντα πρὸς ἄλληλα ἐν λόγῳ δεδομένῳ.*

9) *Δοθέντος ἐπὶ σφαίρας κύκλου, ζητεῖται ἕτερος κύκλος παράλληλος τούτου, καὶ περιλαμβάνων μετ᾿ αὐτοῦ τμῆμα σφαιρικὸν ἔχον λόγον δεδομένον πρὸς τὸν κῶνον, οὗτινος, ἡ μὲν κορυφὴ κεῖται εἰς τὸ κέντρον τοῦ πρώτου κύκλου, βάσις δὲ εἶναι ὁ δεύτερος κύκλος.*



**10) (Σχ. 17).** *Δίδονται δύο παράλληλοι* ΒΓ, ΔΕ, *καὶ ἓν σημεῖον* Α, *καὶ ζητεῖται διὰ τούτου ἀγαγεῖν πλαγίαν τοιαύτην, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων περιεχόμενον αὐτῆς μέρος* ΚΙ *νὰ ἰσοῦται δεδομένῳ μήκει, τῷ γ.*

(ΑΗ = α, ΖΗ = β, ΗΙ = χ).

Ἀπ. $$\chi = \pm \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}.$$

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β′.

## ΠΕΡΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΟΠΩΝ.

### ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ. — ΔΗΛΩΣΙΣ ΑΥΤΩΝ ΔΙ᾿ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

56. Ἔν τινι γεωμετρικῷ προβλήματι, δι᾿ οὗ ζητεῖται ὁ προσδιορισμὸς σημείου τινος, δυνατὸν νὰ συμβῇ, αἱ συνθῆκαι τῆς ἐκφωνήσεως ν᾿ ἁρμόζωσιν εἰς ἅπαντα τὰ σημεῖα μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς. Τὸ πρόβλημα τότε εἶναι *ἀόριστον*; ἡ Ἄλγεβρα δὲ καθιστᾷ γνωστὴν τὴν γραμμὴν ταύτην.

Ἔστω, π. χ. τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

*Ζητεῖται σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἐὰν ληφθῇ ὡς κορυφὴ τριγώνου οὗτινος ἡ βάσις εἶναι δεδομένη, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τούτου νὰ ἰσοῦται τῷ τῆς βάσεως τετραγώνῳ.*

Φανερὸν ὅτι ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς γραφομένης περιφερείας κύκλου ἐπὶ τὴν βάσιν, ἐκπληροῦσι τὸ ζήτημα. Ἐφαρμόσωμεν τὸν λογισμὸν εἰς τὸ ἁπλούστατον τοῦτο πρόβλημα. Τεθείσθω ὅτι ἀπὸ τοῦ ζητουμένου σημείου Μ (Σχ. 18) ἤχθη κάθετος ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν βάσιν ΑΒ. Τὰ ἀποστήματα ΑΠ καὶ ΜΠ ἔσονται δύο ἄγνωστοι οὓς πρέπει νὰ ὁρίσωμεν ἵνα γίνῃ γνωστὸν τὸ σημεῖον Μ.

Καλοῦμεν, $А\Pi = \chi$, $M\Pi = \psi$, $AB = \alpha$.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΜΠ, ΒΜΠ, δίδουσιν,

$$\overline{AM}^2 = \overline{M\Pi}^2 + \overline{A\Pi}^2 = \psi^2 + \chi^2,$$
$$\overline{BM}^2 = \overline{M\Pi}^2 + \overline{\Pi B}^2 = \psi^2 + (\alpha - \chi)^2.$$

Ἀλλά, κατὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος, δίδεται μόνη ἡ σχέσις

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{AB}^2.$$

Λοιπόν, καθιστῶμεν ἀντὶ τῶν γραμμῶν τὰς τιμὰς αὐτῶν, καὶ ἔχομεν, πρὸς ὁρισμὸν τῶν χ, ψ, τὴν μόνην ἐξίσωσιν.

$$\psi^2 + \chi^2 + \psi^2 + (\alpha - \chi)^2 = \alpha^2, \quad \text{ἢ} \quad \psi^2 = \alpha\chi - \chi^2.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη μένει ἀναλλοίωτος, εἴτε ἄνω εἴτε κάτω τῆς ΑΒ τεθῇ τὸ σημεῖον Μ· ἐπειδὴ δὲ περιέχει δύο ἀγνώστους, δυνάμεθα δοῦναι τῷ ἑτέρῳ τούτων, π. χ. τῷ χ, τιμὴν κατ' ἀρέσκειαν ΑΠ, τότε ὁ ἕτερος ἄγνωστος ψ προσδιορίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως, καὶ οὕτω καθίσταται γνωστὸν τὸ ὕψος ΜΠ ἀντιστοιχοῦν τῷ ἀποστήματι ΑΠ. Δίδοντες τῷ χ διαφόρους τιμάς, εὑρήσομεν ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς τὸ πρόβλημα ἐπιλυούσης περιφερείας κύκλου.

Παρατηρητέον ὅτι, ἐπειδὴ ψ ἔχει δύο τιμάς, ἄγομεν τὰς ἀρνητικάς, ὡς ΠΜ', ὑπὸ τὴν ΑΒ· τοῦτο δὲ πράττομεν κατὰ συνθήκην.

57. Τὰ προλεχθέντα ἀρκοῦσιν ἵνα ἐννοήσωμεν τίνι τρόπῳ ἀόριστά τινα προβλήματα συμβαίνει νὰ ἄγωσιν εἰς τὴν ἔρευναν γραμμῶν ὧν ἅπαντα τὰ σημεῖα ἐτυμοποιοῦσι τὴν αὐτὴν ἰδιότητα, τὴν ὑπὸ τῆς προτάσεως ἐκφωνουμένην. Αἱ γραμμαὶ οὕτω θεωρούμεναι, ὡς συγκείμεναι δηλ. ἐκ σημείων ἐχόντων ἰδιότητά τινα κοινήν, καλοῦνται *τόποι γεωμετρικοί*.

58. Ἡ ἁπλουστέρα ἐπίλυσις προβλήματος, δι' οὗ ζητεῖται ἄγνωστόν τι σημεῖον, συνίσταται πολλάκις εἰς τὸν ὁρισμὸν δύο τόπων γεωμετρικῶν, οἵτινες, τῇ συνδρομῇ αὐτῶν, δίδουσι τὸ ζητούμενον σημεῖον. Ἡ Ἄλγεβρα χρησιμεύει εἰς τὸ νὰ γνωρίσωμεν κάλλιστα τοὺς γεωμετρικοὺς τόπους καὶ νὰ ἐξιχνιάσωμεν τὰς ἰδιότητας αὐτῶν. Τὰ ἐφεξῆς μαθήματα πραγμα-



τεύονται κυρίως περὶ τῶν καταλλήλων εἰς τὰς τοιούτου εἴδους ἐρεύνας μεθόδων.

59. (Σχ. 19). Ἵνα ὁρίσωμεν τὴν θέσιν ἑνὸς σημείου ἐπί τινος εὐθείας Χ'Χ, λαμβάνομεν ὡς δεδομένον τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ἀπό τινος μονίμου σημείου Α τῆς γραμμῆς ταύτης. Ἵνα δείξωμεν δὲ πρὸς ποῖον μέρος εὑρίσκεται ὡς πρὸς τὸ Α, προτάσσομεν τοῦ ῥηθέντος ἀποστήματος τὸ $+$ ἢ τὸ $-$, καθ' ὅσον τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος σημεῖον κεῖται πρὸς τὸ μέρος ΑΧ ἢ πρὸς τὸ μέρος ΑΧ'. Κατὰ τὴν συνθήκην ταύτην, ἐὰν παραστήσωμεν γενικῶς διὰ χ τὸ ἀπόστημα τοῦτο λαμβανόμενον πρὸς τὸ ἁρμόζον σημεῖον, ἡ μὲν ἐξίσωσις $\chi = +\alpha$ προσδιορίσει σημεῖόν τι, Μ, κείμενον πρὸς τὸ μέρος ΑΧ, ἐν ἀποστάσει ΑΜ ἴσῃ μονάσι μήκους α· ἡ δὲ ἐξίσωσις $\chi = -\alpha$ δώσει σημεῖόν τι, Μ', κείμενον πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος, πλὴν πάντοτε ἐν τῇ αὐτῇ ἀποστάσει.

Λοιπόν, *τὸ σημεῖον $-$, ὃ προτάσσεται τῆς τιμῆς τοῦ χ, χρησιμεύει μόνον ἵνα δείξῃ τὸ μέρος πρὸς ὃ πρέπει νὰ λαμβάνωμεν τὸ ἀπόστημα τοῦτο.*

60. (Σχ. 20). Ἵνα ὁρίσωμεν τὴν θέσιν ἑνὸς σημείου ἐπί τινος ἐπιπέδου, ἄγομεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ δύο εὐθείας Χ'Χ, ΨΨ', τεμνομένας πρὸς γωνίαν γνωστήν, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου, παραλλήλως τῶν μονίμων γραμμῶν τούτων, τὰς εὐθείας ΜΠ, ΜΚ, αἵτινες τέμνουσιν αὐτὰς κατὰ τὰ σημεῖα Π, Κ. Φανερὸν ὅτι τὸ σημεῖον Μ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένον, ὅταν γνωρίζωμεν τὰ σημεῖα Π, Κ· διότι, ἄγοντες δι' αὐτῶν τὰς ΠΜ, ΚΜ, ἀμοιβαίως παραλλήλους ταῖς ΑΨ, ΑΧ, αὗται τεμοῦσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ σημεῖον Μ. Ἀλλὰ τὸ σημεῖον Π εἶναι ὡρισμένον ὅταν δίδεται τὸ ἀπόστημα ΑΠ, προσλαμβάνον τὸ $+$ ἢ τὸ $-$, κατὰ τὴν θέσιν τοῦ σημείου Π πρὸς τὸ Α· ἐπίσης τὸ σημεῖον Κ ὁρίζεται διὰ τοῦ ἀποστήματος ΑΚ προσλαμβάνοντος τὸ ἁρμόζον σημεῖον. Ἄρα, διὰ τῶν δεδομένων τούτων, τὸ σημεῖον Μ ὁρίζεται ἀκριβῶς.

61. Τὰ ἀποστήματα, ὡς τὸ ΑΠ ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ ΜΚ, καλοῦνται *τετμημέναι*. Τὰ ἀποστήματα, ὡς τὸ ΑΚ ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ ΜΠ, καλοῦνται *τεταγμέναι*. Ἡ γραμμὴ Χ'Χ, ἐφ' ἧς

μετροῦνται αἱ τετμημέναι, καλεῖται *ἄξων τῶν τετμημένων*. Ἡ γραμμὴ ΨΨ′ καλεῖται *ἄξων τῶν τεταγμένων*. Αἱ τετμημέναι καὶ αἱ τεταγμέναι καλοῦνται προσέτι κοινῇ *συντεταγμέναι*, καὶ αἱ εὐθεῖαι Χ′Χ, ΨΨ′, *ἄξονες τῶν συντεταγμένων*. Τὸ σημεῖον Α, καθ᾽ ὃ συμπίπτουσιν οἱ δύο ἄξονες, καλεῖται *ἡ ἀρχὴ* τῶν συντεταγμένων. Πολλάκις ἀκόμη δηλοῦσι γενικῶς, τὰς μὲν τετμημένας διὰ $\chi$, τὰς δὲ τεταγμένας διὰ $\psi$. Προσέτι συντόμως καλοῦσι, τὴν μὲν Χ′Χ ἄξονα τῶν $\chi$, τὴν δὲ ΨΨ′ ἄξονα τῶν $\psi$.

62. Αἱ συντεταγμέναι πρέπει νὰ θεωρῶνται ὡς ποσότητες μεταβληταί, λαμβάνουσαι πᾶσαν τιμὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικήν. Τὸ μέρος τῶν ἀρνητικῶν συντεταγμένων εἶναι ὅλως κατ᾽ ἀρέσκειαν, συνήθως ὅμως λαμβάνουσι πάντοτε τὰς μὲν θετικὰς τετμημένας δεξιά, ἤτοι πρὸς τὸ μέρος ΑΧ, τὰς δὲ ἀρνητικὰς ἀριστερά· τὰς θετικὰς τεταγμένας ἄνω τῆς ἀρχῆς καὶ τὰς ἀρνητικὰς ὑποκάτω.

Κατὰ τὰς συνθήκας ταύτας ἔχομεν·

$$\left.\begin{array}{llll} \chi & \text{θετικὸν} & \text{καὶ} \ \psi & \text{θετικὸν} \\ \chi & \text{ἀρνητικὸν} & \text{καὶ} \ \psi & \text{θετικὸν} \\ \chi & \text{ἀρνητικὸν} & \text{καὶ} \ \psi & \text{ἀρνητικὸν} \\ \chi & \text{θετικὸν} & \text{καὶ} \ \psi & \text{ἀρνητικὸν} \end{array}\right\} \text{ἐν τῇ γωνίᾳ} \left\{\begin{array}{l} \text{ΨΑΧ}, \\ \text{ΨΑΧ}', \\ \text{Ψ}'\text{ΑΧ}', \\ \text{Ψ}'\text{ΑΧ}. \end{array}\right.$$

Ὑπὸ τῶν μερικῶν τιμῶν ἃς λαμβάνουσιν αἱ συντεταγμέναι, δηλοῦται ἀμέσως ἡ γωνία ἐν ᾗ κεῖται τὸ δι᾽ αὐτῶν ὁριζόμενον σημεῖον. Π. χ. δι᾽ ἅπαντα τὰ ἐν τῇ γωνίᾳ Χ′ΑΨ′ κείμενα σημεῖα, ὡς τὸ Μ′, αἱ τιμαὶ τῶν συντεταγμένων ἔσονται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\chi=-\alpha$, $\psi=-\beta$. Κ. τ. ἑ. Πάντων τῶν τοῦ ἄξονος τῶν $\chi$ σημείων ἡ τεταγμένη εἶναι 0· ἑπομένως αἱ τιμαὶ $\chi=-\alpha$, $\psi=0$, ὁρίζουσι σημεῖόν τι, ὡς τὸ Π′. Ὡσαύτως, πάντων τῶν σημείων τοῦ ἄξονος τῶν $\psi$ ἡ τετμημένη εἶναι 0, αἱ δὲ τιμαὶ $\chi=0$, $\psi=-\beta$, ὁρίζουσι σημεῖόν τι, ὡς τὸ Κ′. Τέλος, αἱ συντεταγμέναι τῆς ἀρχῆς εἰσὶ $\chi=0$, $\psi=0$.

63. Ἀφοῦ ἐμάθομεν πῶς ὁρίζεται ἡ θέσις ἑνὸς σημείου, ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι, γραμμῆς οἱασδήποτε γεγραμμένης ἐπὶ ἐπιπέδου, ἕκαστον σημεῖον ἀναφέρεται πρὸς δύο ἄξονας θέ-



σεως γνωστῆς, καὶ ὅτι ὑπάρχει σχέσις τις ἀμετάβλητος τῶν συντεταγμένων ἑκάστου σημείου πρὸς ἀλλήλας, ἤτοι ἀμοιβαῖός τις σύνδεσμος ἄτρεπτος μένων δι᾽ ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης. Ἐν πλείσταις περιπτώσεσι συμβαίνει ἡ τῶν συντεταγμένων πρὸς ἀλλήλας σχέσις αὕτη, νὰ ἦναι φύσεως τοιαύτης, ὥστε νὰ ἐμφαίνηται ὑπὸ ἐξισώσεως. Διὰ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, εὑρεθείσης ἅπαξ, ὁρίζομεν τὴν ἑτέραν τῶν ποσοτήτων τούτων διὰ τῆς ἑτέρας. Π. χ., δίδοντες τῇ τετμημένῃ τιμὰς οἱασδήποτε, συνάγομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τῇ τεταγμένῃ, καὶ ὁρίζομεν οὕτως ὁσαδήποτε σημεῖα τῆς καμπύλης.

(Σχ. 21). Ἐὰν πρόκειται περὶ τῆς Β′Β γραμμῆς εὐθείας, διχοτομούσης τὴν γωνίαν ΨΑΧ τῶν ἀξόνων, παρατηροῦμεν ὅτι, ἑκάστου σημείου τῆς γραμμῆς ταύτης, ἡ τετμημένη ἰσοῦται τῇ τεταγμένῃ· ἄρα, ἡ σχέσις τῶν δύο τούτων συντεταγμένων πρὸς ἀλλήλας, δηλοῦται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\psi=\chi,$$

δι᾽ ἧς εὑρίσκομεν ὁσαδήποτε σημεῖα τῆς εὐθείας δίδοντες τῇ $\chi$ τιμὰς μερικάς. Αἱ θετικαὶ τιμαὶ τῆς $\chi$ δίδουσι τιμὰς θετικὰς τῆς $\psi$, καὶ αἱ ἀρνητικαὶ ἀρνητικάς. Ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει λαμβάνομεν τὰ ἐν τῇ γωνίᾳ ΨΑΧ κείμενα σημεῖα τῆς εὐθείας, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ, τὰ ἐν τῇ γωνίᾳ Ψ′ΑΧ′, ὡς κατάδηλον εἶναι.

64. Ἡ μὲν ἐξίσωσις ἥτις ἐμφαίνει, γενικῷ τῷ τρόπῳ, τὴν σταθερὰν σχέσιν τῶν συντεταγμένων γραμμῆς πρὸς ἀλλήλας, καλεῖται *ἡ ἐξίσωσις τῆς γραμμῆς ταύτης*, ἡ δὲ γραμμὴ *ὁ τόπος τῆς ἐξισώσεως*.

65. Γραμμὴ δεδομένη δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν, πάρεξ ὅταν ἦναι γνωστὸς ὁ ὁρισμός, ἢ ἡ γέννησις, ἢ καί τις ἰδιότης αὐτῆς. Ἄρα, ἀδύνατον παραστῆσαι δι᾽ ἐξισώσεως γραμμὴν τυχαίως γεγραμμένην, ἧς εἶναι ὅλως ἄγνωστος ὁ νόμος τῆς κατασκευῆς. Ἀλλ᾽ εὑρίσκομεν εὐκόλως, π. χ. τὴν ἐξίσωσιν τοῦ κύκλου ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὁρισμοῦ αὐτοῦ, δηλ. ὅτι ἅπαντα αὐτοῦ τὰ σημεῖα ἐξ ἴσου ἀπέχουσι τοῦ κέντρου. Ὅσον ἀφορᾷ τὸν τόπον ἐξισώσεώς τινος,

εὐκόλως ὁρίζομεν αὐτὸν, ἢ τουλάχιστον δὲν ὑπάρχει πρὸς τοῦτο ἑτέρα δυσκολία ἢ ἡ τῆς ἐπιλύσεως τῆς ἐξισώσεως.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΟΠΩΝ.

66. Ἕπονται κατὰ πρῶτον παραδείγματά τινα, ἐν οἷς πρόκειται κατασκευάσαι γεωμετρικοὺς τόπους ἐξισώσεων δεδομένων.

67. (Σχ. 22). Ἔστω ἡ ἐξίσωσις ἣν ζητεῖται νὰ κατασκευάσωμεν $\alpha\psi=\chi^2$, ἐν ᾗ $\alpha$ παριστᾷ μῆκος δεδομένον. Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ὁμογενὴς, ἡ μονὰς εἶναι κατ' ἀρέσκειαν· ἄρα, λάβωμεν $\alpha=1$. Ἵνα εὕρωμεν τὴν καμπύλην, δίδομεν τῇ $\chi$ διαφόρους τιμὰς θετικὰς καὶ ἀρνητικὰς, καὶ λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τῆς $\psi$, οὔσας πάσας πραγματικάς. Ἑκάστη λύσις τῆς ἐξισώσεως ὁρίζει ἓν σημεῖον τῆς ζητουμένης γραμμῆς. Οὕτω, $\chi=2$, δίδει $\psi=4$. Λαμβάνομεν ΑΠ$=2$ πρὸς τὸ μέρος ΑΧ, πρὸς δὲ τὸ μέρος τῶν θετικῶν $\psi$ ἄγομεν ΠΜ παράλληλον τῇ ΑΨ ἴσην 4, καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον Μ ἀνῆκον τῷ γεωμετρικῷ τόπῳ τῆς ἐξισώσεως. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν ὁσαδήποτε σημεῖα κατ' ἀποστήματα ἀνάλογα τῶν τιμῶν τῆς $\chi$.

Καθιστῶντες $\chi=0$, ἔχομεν $\psi=0$. Λοιπὸν, ἡ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi=\chi^2$ ἐμφαινομένη καμπύλη διέρχεται τῆς ἀρχῆς.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Διὰ | $\chi=1$, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | κ. τ. ἑ. |
| εὑρίσκομεν | $\psi=1$, | 4, | 9, | 16, | 25, | 36, | κ. τ. ἑ. |

Τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τούτων δίδει σημεῖα ἐν τῇ γωνίᾳ ΨΑΧ.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Διὰ | $\chi=-1$, | $-2$, | $-3$, | $-4$, | κ. τ. ἑ. |
| εὑρίσκομεν | $\psi=1$, | 4, | 9, | 16, | κ. τ. ἑ. |

Αἱ συντεταγμέναι αὗται ὁρίζουσι σημεῖα ἐν τῇ γωνίᾳ ΨΑΧ'.

Βλέπομεν ὅτι ἡ τεταγμένη, ἀπὸ $\chi=1$, αὐξάνει πολὺ ταχύτερον ἢ ἡ τετμημένη· τοῦτο ἐμφαίνει καὶ ἡ ἐξίσωσις τιθεμένη ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\psi}{\chi}=\chi$.



Πρὸς ἀκριβῆ ὁρισμὸν τοῦ σχήματος τῆς καμπύλης περὶ τὴν ἀρχὴν, ἀνάγκη νὰ ἔχωμεν, πρὸς τὸ μέρος τοῦτο, σημεῖα ὅσον ἔνεστιν ἐγγύτερον ἀλλήλοις· ἕνεκα τούτου πρέπει νὰ λογίσωμεν τὰς ἀντιστοιχούσας τεταγμένας εἰς τετμημένας κλασματικάς. Οὕτω

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| διὰ | $\chi=0,10$, | 0,20, | 0,30, | 0,40, | κ. τ. ἑ. |
| ἔχομεν | $\psi=0,01$, | 0,04, | 0,09, | 0,16, | κ. τ. ἑ. |

Ὁ πίναξ οὗτος τῶν τιμῶν δεικνύει ὅτι, ἡ τεταγμένη ἐλαττοῦται πολὺ ταχύτερον ἢ ἡ τετμημένη, καθ' ὅσον ἡ καμπύλη προσεγγίζει τῇ ἀρχῇ. Τῷ ὄντι, ὁ λόγος $\frac{\psi}{\chi}=\chi$ εἶναι τότε σμικρότατος.

Ἀφοῦ κατασκευάσωμεν ἱκανὰ σημεῖα, ζευγνύομεν αὐτὰ διὰ γραμμῆς συνεχοῦς, καὶ λαμβάνομεν τὸν τόπον τῆς τεθείσης ἐξισώσεως, τοσοῦτον ἀκριβέστερον καθ' ὅσον τὰ σημεῖα ἔσονται πολυάριθμα. Ἐννοοῦμεν δὲ τὸ ἀδύνατον τοῦ εὑρεῖν πραγματικῶς ἅπαντα τὰ σημεῖα ὧν αἱ συντεταγμέναι ταυτοποιοῦσι τὴν ἐξίσωσιν $\psi=\chi^2$. Ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι σαφὲς ὅτι, μεταβαλλομένης τῆς $\chi$ μὲ τρόπον συνεχῆ, $\psi$ μεταβάλλεται ὁμοιοτρόπως, ἕπεται ὅτι ὑπάρχει συνέχεια ἐν τῇ σειρᾷ ἁπάντων τῶν σημείων τῶν διὰ τῆς ἐξισώσεως ὁριζομένων. Περὶ τούτου ἀφαιρεῖται πᾶσα ἀμφιβολία, ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι, ἀσυνέχεια δυνατὸν νὰ ὑπάρξῃ τότε μόνον, ὅταν ὑπάρχωσι τετμημέναι ἄνευ ἀντιστοιχουσῶν τεταγμένων· τοῦτο δὲ δὲν συμβαίνει, διότι ἑκάστη τιμὴ πραγματικὴ τῆς $\chi$ δίδει τοιαύτην τῇ $\psi$.

68. (Σχ. 23) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\alpha\psi^2=\chi^3, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \psi=\pm\sqrt{\frac{\chi^3}{\alpha}}.$$

Τὸ διπλοῦν σημεῖον δείκνυσιν ὅτι, ἑκάστῃ τετμημένῃ ἀντιστοιχοῦσι δύο τεταγμέναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι. Λοιπὸν φανερὸν ὅτι, εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους, τὸ κατώτερον μέρος τῆς καμπύλης, στρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονα τῶν $\chi$, ταυτίζεται τῷ ἀνωτέρῳ, ἐπομένως τὰ μέρη ταῦτα εἰσὶν ἰσάλληλα.

Ἡ καμπύλη οὐδὲν σημεῖον ἔχει πρὸς τὸ μέρος ΑΧ'· διότι, δι' ἀρνητικὰς τιμὰς τῆς $\chi$, ἡ $\psi$ εἶναι φανταστική.

Ἡ καμπύλη διέρχεται τῆς ἀρχῆς, διότι $\chi = 0$ καὶ $\psi = 0$, ἐτυμοποιοῦσι τὴν ἐξίσωσιν αὐτῆς.

Καθόσον $\chi$ αὐξάνει θετικῶς, $\psi$ εἶναι πραγματικὴ καὶ αὐξάνει ὁλονέν, ἀμφότεραι δὲ αὐξάνουσιν ἐπ' ἄπειρον. Ὅθεν ἕπεται ὅτι ἡ καμπύλη ἀπὸ τῆς ἀρχῆς διαχωρίζεται εἰς δύο κλάδους ἀποχωροῦντας ἐπ' ἄπειρον ἀπὸ τῶν ἀξόνων, πρὸς τὸ μέρος τῶν θετικῶν τετμημένων, ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος τούτων.

Ἵνα δὲ λάβωμεν ἀκριβεστέραν γνῶσιν τῆς καμπύλης, κατασκευάσωμεν διάφορα αὐτῆς σημεῖα, ὡς ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι. Τῆς ἐξισώσεως οὔσης ὁμογενοῦς, ἡ μονὰς εἶναι κατ' ἀρέσκειαν, δι' ὃ ὑποθέσομεν $\alpha = 1$.

Διδόντες τῇ $\chi$ τιμὰς ἀκεραίας, καὶ λογίζοντες τὰς τῆς $\psi$, μορφοῦμεν τὸν ἑξῆς πίνακα·

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi = 0,$ | $1,$ | $2,$ | $3,$ | $4,$ | $5,$ | κ.τ.ἑ. |
| $\psi = 0,$ | $\pm 1,$ | $\pm 2{,}82,$ | $\pm 5{,}19,$ | $\pm 8,$ | $\pm 11{,}18,$ | κ.τ.ἑ. |

Διδόντες τῇ $\chi$ τιμὰς κλασματικάς, μορφοῦμεν τὸν ἕτερον τοῦτον,

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi = 0,$ | $10,$ | $0{,}20,$ | $0{,}30,$ | $0{,}40,$ | $0{,}50,$ | κ.τ.ἑ. |
| $\psi = 0,$ | $20,$ | $\pm 0{,}09,$ | $\pm 0{,}16,$ | $\pm 0{,}25,$ | $\pm 0{,}35,$ | κ.τ.ἑ. |

Ἡ ἐξίσωσις δίδει $\frac{\psi}{\chi} = \sqrt{\chi}$· λοιπὸν ὁ λόγος οὗτος εἶναι μέγιστος ὅταν $\chi$ ἦναι μεγίστη, καὶ ἐλάχιστος ὅταν $\chi$ ἦναι ἐλαχίστη, ἐξ οὗ ἀποδείκνυται ἀκριβὴς ἡ ἐπὶ τοῦ σχήματος μορφὴ τῆς καμπύλης.

69. Προσθέσομεν ἤδη καί τινα προβλήματα ἐν οἷς ζητοῦνται ἐξισώσεις γεωμετρικῶν τόπων.

70. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. (Σχ. 24). *Ἔστω ΑΛΒ κύκλος, καὶ ΒΓ κάθετος ἐπὶ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ΑΒ. Ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἄγομεν ἀπείρους γραμμάς, ὡς ΑΔ τέμνουσαν τὴν ΒΓ κατὰ τὸ Δ καὶ τὴν περιφέρειαν κατὰ τὸ Λ· ἐφ' ἑκάστης τῶν γραμμῶν τούτων λαμβάνομεν ΑΜ = ΛΔ. Ὁ τόπος τῶν σημείων Μ, οὕτως ὁριζομένων, ἔσεται καμπύλη ἧς ζητεῖται ἡ ἐξίσωσις.* Ἡ γραμμὴ αὕτη εἶναι ἡ *κισσοειδὴς* ὑπὸ ΔΙΟΚΛΕΟΥΣ ἐφευρεθεῖσα.



Λαμβάνομεν τὴν διάμετρον ΑΒ ὡς ἄξονα τῶν τετμημένων, καὶ τὴν κάθετον ΑΨ ὡς ἄξονα τῶν τεταγμένων. Ἄγομεν ΜΠ, ΛΚ, καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ ΛΡ ἐπὶ τὴν ΒΓ.

Καλοῦμεν ΑΠ $= \chi$, ΜΠ $= \psi$, ΑΒ $= \alpha$.

Ἵνα εὕρωμεν σχέσιν τινα τῶν ποσοτήτων τούτων πρὸς ἀλλήλας, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΜΠ, ΛΔΡ, εἰσὶν ἴσα· ἄρα ΚΒ = ΛΡ = ΑΠ $= \chi$, καὶ ΑΚ $= \alpha - \chi$.

Ἡ γραμμὴ ΛΚ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΑΚ καὶ ΚΒ· ἄρα

$$ΛΚ = \sqrt{\chi(\alpha - \chi)}.$$

Προσέτι τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΜΠ, ΑΚΛ δίδουσι

ΜΠ : ΑΠ :: ΛΚ : ΑΚ, ἢ $\psi : \chi :: \sqrt{\chi(\chi - \alpha)} : \alpha - \chi$

Ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης συνάγομεν μετὰ τὰς ἀναγωγάς,

$$\psi = \chi \sqrt{\frac{\chi}{\alpha - \chi}}.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη δίδει τὸν ἀνώτερον κλάδον τῆς καμπύλης. Ἵνα λάβωμεν ὁλόκληρον ταύτην, προτάσσομεν τῆς ἄνωθι τιμῆς τὸ διπλοῦν σημεῖον $\pm$, ἢ τετραγωνίζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως. Ἔχομεν οὕτω τὴν ἐξίσωσιν τῆς κισσοειδοῦς

$$\psi^3 = \frac{\chi^3}{\alpha - \chi}.$$

Τὸ σχῆμα αὐτῆς εὑρίσκομεν κατὰ τὴν ἐν τοῖς προηγουμένοις παραδείγμασι μέθοδον, ἢ ἁπλούστερον, κατασκευάζοντες τὴν καμπύλην κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος.

71. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. (Σχ. 25). *Ἔστωσαν Χ'Χ ΨΨ' δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς τεμνόμεναι, καὶ Ο σημεῖον διδόμενον ἐπὶ τῆς Χ'Χ. Κινοῦμεν γωνίαν ὀρθήν, τὴν ΚΕΘ, οὕτως ὥστε ἡ μέν, ἀπεριόριστος οὖσα, πλευρὰ αὐτῆς ΕΚ νὰ διέρχηται πάντοτε τοῦ Ο, ἡ δ' ἑτέρα ΕΘ, ὑποτιθεμένη ἴση ΟΑ, νὰ στηρίζῃ πάντοτε τὸ αὐτῆς πέρας Θ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΨΨ'. Τὸ σημεῖον Μ, μέσον τῆς ΕΘ, καταγράψει καμπύλην, ἧς ζητεῖται ἡ ἐξίσωσις.*

Λαμβάνομεν Χ'Χ, Ψ'Ψ, ὡς ἄξονας τῶν συντεταγμένων. Ἔστω Μ ἓν σημεῖον τῆς καμπύλης ἀντιστοιχοῦν εἴς τινα θέσιν τῆς ὀρθῆς γωνίας ΚΕΘ. Ἄγομεν ΜΠ, ΕΡ, καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΧ, καὶ ΕΚ' παράλληλον τῇ ΑΧ.

Καλοῦμεν, $\text{ΑΠ} = \chi$, $\text{ΜΠ} = \psi$, $\text{ΕΘ} = \text{ΑΟ} = 2\alpha$.

Ἔχομεν δέ, $\text{ΜΕ} = \alpha$, $\text{Κ'Ε} = \text{ΠΡ} = \text{ΑΠ} = \chi$.

Ἄρα τὸ τρίγωνον ΜΚ'Ε δίδει $\text{ΜΚ'} = \sqrt{\alpha^2 - \chi^2}$.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΕΡ, ΜΚ'Ε, δίδουσιν

$\text{ΕΡ} : \text{ΟΡ} :: \text{Κ'Ε} : \text{ΜΚ'}$, ἢ $\text{ΕΡ} : 2\alpha + 2\chi :: \chi : \sqrt{\alpha^2 - \chi^2}$.

Ἄρα
$$\text{ΕΡ} = \frac{2\chi(\alpha + \chi)}{\sqrt{\alpha^2 - \chi^2}}.$$

Ἀλλὰ $\text{ΜΠ} = \psi = \text{ΕΡ} + \text{ΜΚ'}$. Λοιπὸν
$$\psi = \frac{2\chi(\alpha + \chi)}{\sqrt{\alpha^2 - \chi^2}} + \sqrt{\alpha^2 - \chi^2}.$$

Ἐκτελοῦμεν τοὺς λογισμοὺς καὶ τὰς ἀναγωγάς, εἶτα τετραγωνίζομεν, καὶ λαμβάνομεν τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν,
$$\psi^2 = \frac{(\alpha + \chi)^3}{\alpha - \chi}.$$

$\chi = 0$, δίδει $\psi = \pm \alpha$· λοιπόν, λαμβάνοντες $\text{ΑΒ'} = \text{ΑΒ} = \alpha$, τὰ σημεῖα Β καὶ Β' ἔσονται ἐπὶ τῆς καμπύλης· $\psi = 0$, δίδει $\chi = -\alpha$· λοιπόν, λαμβάνοντες $\text{ΑΓ} = \alpha$, πρὸς τὰς ἀρνητικὰς τετμημένας, τὸ σημεῖον Γ ἔσεται ἐπὶ τῆς καμπύλης. Ἐξακολουθοῦντες τὴν διασκόπησιν ταύτην, εὑρήσομεν ὅλην τὴν καμπύλην, ἥτις φαίνεται ὁμοία τῇ τοῦ προηγουμένου προβλήματος· ἀποδεικνύεται μάλιστα ὅτι αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο καμπύλων διαφέρουσιν ἀλλήλων διότι, τῆς μὲν αἱ τετμημέναι ἄρχονται ἀπὸ τοῦ σημείου Α, τῆς δὲ ἀπὸ τοῦ Γ. Τῷ ὄντι, ἐὰν ἀντὶ ΑΠ λάβωμεν ΓΠ ὡς τετμημένην, δηλώσωμεν δὲ ταύτην $\chi'$, φανερὸν ὅτι $\chi = \chi' - \alpha$. Ἡ ἀντεισαγωγὴ ἐν τῇ ἀνωτέρῳ ἐξισώσει δίδει τὴν
$$\psi^2 = \frac{\chi'^3}{2\alpha - \chi'},$$



ἐξίσωσιν κισσοειδοῦς πρὸς τοὺς ἄξονας ΓΧ, ΓΨ, κατασκευαζομένης κύκλῳ ἔχοντι διάμετρον $2\alpha$.

72. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. (Σχ. 26). *Ἐπὶ βάσεως δεδομένης* ΑΒ, *κατασκευάσαι τρίγωνον* ΑΜΒ, *τοιοῦτον, ὥστε ἀγομένων ἐπὶ τῶν* ΑΜ, ΒΜ, *πρὸς ὀρθὰς τῶν* ΒΓ, ΑΔ, *συμπιπτουσῶν κατὰ τὸ σημεῖον* Ν, *τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων* ΑΜΒ, ΑΝΒ, *νὰ ἰσοῦται τῷ δεδομένῳ τετραγώνῳ* $\tau^2$.

Πρόκειται εὑρεῖν τὴν κορυφὴν Μ. Πρὸς τοῦτο, ἄγομεν τὴν κάθετον ΜΠ, ἥτις, κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα, διελεύσεται τοῦ σημείου Ν.

Καλοῦμεν $\text{ΑΠ} = \chi$, $\text{ΜΠ} = \psi$, $\text{ΝΠ} = \psi'$, $\text{ΑΒ} = \alpha$.

Τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν τριγώνων ΑΜΒ, ΑΝΒ, ἰσοῦται ἀμοιβαίως $\frac{1}{2}\alpha\psi$, $\frac{1}{2}\alpha\psi'$· ἄρα, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν,
$$\tfrac{1}{2}\alpha(\psi + \psi') = \tau^2.$$

Πρέπει ἤδη νὰ ἐκφράσωμεν $\psi'$ διὰ τῶν συντεταγμένων τοῦ σημείου Μ. Τὰ τρίγωνα ΑΜΠ, ΒΝΠ, ἑκάτερον ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΑΓΒ, εἰσὶν ὅμοια ἀλλήλοις καὶ δίδουσι
$$\psi' : \alpha - \chi :: \chi : \psi, \quad \text{ὅθεν} \quad \psi' = \frac{\chi(\alpha - \chi)}{\psi}.$$

Τῇ ἀντεισαγωγῇ τῆς τιμῆς ταύτης ἐν τῇ ἀνωτέρῳ ἐξισώσει, λαμβάνομεν
$$\tfrac{1}{2}\alpha\left(\psi + \frac{\chi(\alpha - \chi)}{\psi}\right) = \tau^2,$$

ἤ, καθιστῶντες $\frac{\tau^2}{\alpha} = \beta$ καὶ ἁπλοποιοῦντες,
$$\psi^2 - 2\beta\psi - \chi^2 + \alpha\chi = 0.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου τῶν κορυφῶν ὅλων τῶν ἐκπληρούντων τὸ πρόβλημα τριγώνων. Τὴν διασκόπησιν αὐτῆς παραλείπομεν τοῖς μαθηταῖς.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

### ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ.

#### ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΝ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ.

73. Ἡ ἐξίσωσις πάσης γραμμῆς ἀλλοιοῦται ὅταν μεταβληθῶσιν οἱ ἄξονες πρὸς οὓς ἀναφέρεται. Ἵνα ἐννοήσωμεν τοῦτο, ἔστω ὡς παράδειγμα ὁ κύκλος. Ἐὰν λάβωμεν (Σχ. 27) ὡς ἄξονας δύο διαμέτρους τεμνομένας πρὸς ὀρθάς, καὶ καλέσωμεν α τὴν ἀκτῖνα, διὰ πᾶν σημεῖον τῆς περιφερείας ἕξομεν τὴν σχέσιν

$$\chi^2+\psi^2=\alpha^2,$$

ἐμφαίνουσαν ὅτι, τὸ ἀπόστημα παντὸς σημείου τῆς καμπύλης ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ἰσοῦται τῇ σταθερᾷ ποσότητι α.

(Σχ. 28). Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι οἱ ὀρθογώνιοι ἄξονες δὲν διέρχονται τοῦ κέντρου. Ἔστωσαν π καὶ κ αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου, καὶ Μ σημεῖον οἱονδήποτε τῆς περιφερείας. Ἄγομεν ΟΒ, ΜΠ, καθέτους ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν χ, καὶ ΟΚ ἐπὶ τὴν ΜΠ. Τὸ τρίγωνον ΟΜΚ δίδει

$$\overline{\mathrm{OK}}^2+\overline{\mathrm{MK}}^2=\overline{\mathrm{OM}}^2.$$

Ἀλλά,

$$\mathrm{OK}=\mathrm{A\Pi}-\mathrm{AB}=\chi-\pi,\quad \mathrm{MK}=\mathrm{M\Pi}-\mathrm{OB}=\psi-\kappa,\quad \mathrm{OM}=\alpha.$$

Λοιπόν, ἡ ἐξίσωσις τοῦ κύκλου εἶναι

$$(\chi-\pi)^2+(\psi-\kappa)^2=\alpha^2$$

ἤ, ἀναπτυσσομένων τῶν τετραγώνων,

$$\chi^2-2\pi\chi+\psi^2-2\kappa\psi+\pi^2+\kappa^2=\alpha^2.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἧττον ἁπλουστέρα τῆς προηγουμένης· ἔσεται δὲ ἔτι πολυπλοκωτέρα πρὸς ἄξονας μὴ τεμνομένους πρὸς ὀρθάς.



74. Λοιπὸν βλέπομεν ὅτι, ἡ ἐξίσωσις καμπύλης τινὸς καθίσταται μᾶλλον ἢ ἧττον πολύπλοκος, κατὰ τοὺς ἄξονας πρὸς οὓς ἀναφέρεται· ἄρα ἕπεται ὅτι πρέπει νὰ προσέχωμεν ὅταν ζητῶμεν τὴν ἐξίσωσιν καμπύλης, νὰ ἐκλέγωμεν σύστημα ἀξόνων τοιοῦτον, οἷον δίδει χώραν εἰς ὅσον ἔνεστιν ἁπλουστέρους λογισμούς, καὶ πρὸς ὃ ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης παρουσιάζεται ὑπὸ μορφὴν ὅσον ἔνεστι καταλληλοτέραν πρὸς τὸ δηλῶσαι τὸ σχῆμα καὶ τὰς ἰδιότητας αὐτῆς.

75. Οὐχ ἧττον ὅμως οὐσιῶδες εἶναι, γνωρίζοντες τὴν ἐξίσωσιν γραμμῆς τινος πρὸς σύστημα ἀξόνων ὡρισμένον, νὰ εὑρίσκωμεν τὴν ἐξίσωσιν, τὴν αὐτὴν καμπύλην ἐμφαίνουσαν, πρὸς ἕτερον σύστημα. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπιλύεται ὅταν γνωρίζωμεν τὰς τιμὰς τῶν παλαιῶν συντεταγμένων οἱουδήποτε σημείου συνεκθέσει τῶν νέων· διότι τότε, τῇ ἀντεισαγωγῇ τῶν τιμῶν τούτων ἐν τῇ προτεθείσῃ ἐξισώσει, ἕξομεν σχέσιν τινὰ πρὸς ἀλλήλας τῶν νέων συντεταγμένων ἑκάστου σημείου τῆς καμπύλης περὶ ἧς πρόκειται. Ἐν τούτῳ δὲ συνίσταται τὸ πρόβλημα *τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν συντεταγμένων*.

#### ΤΥΠΟΙ ΠΡΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΝ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ.

76. Κατὰ τὰ προλεχθέντα, πρόκειται ἐπιλῦσαι τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

*Ἐκφράσαι τὰς πρώτας συντεταγμένας σημείου οἱουδήποτε συνεκθέσει συντεταγμένων νέων.*

Πρῶτον ὑποθέσομεν ὅτι, ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων μόνη μεταβάλλεται, οὐχὶ δὲ ἡ διεύθυνσις αὐτῶν.

(Σχ. 29). Ἔστω Α′ ἡ νέα ἀρχή, καὶ Α′Χ′, Α′Ψ′, οἱ νέοι ἄξονες πρὸς οὓς πρόκειται ν᾽ ἀναφέρωμεν τὰ σημεῖα πρότερον ὁρισθέντα πρὸς τοὺς παραλλήλους ἄξονας ΑΧ, ΑΨ. Ἔστω σημεῖον, Μ, κείμενον ἐν τῇ γωνίᾳ Ψ′Α′Χ′. Ἄγομεν τὴν τεταγμένην ΜΠ, τέμνουσαν εἰς Π′ τὸν ἄξονα Α′Χ′. Ἔχομεν

$$\mathrm{A\Pi}=\mathrm{AB}+\mathrm{B\Pi},\qquad \mathrm{M\Pi}=\mathrm{A'B}+\mathrm{M\Pi'}.$$

Καλοῦμεν χ, ψ, τὰς παλαιὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου

M, καὶ $\chi'$, $\psi'$, τὰς νέας· ἔστωσαν δὲ $\alpha$, $\beta$, αἱ τῆς νέας ἀρχῆς, AB, A'B, ὁρίζουσαι τὴν θέσιν αὐτῆς πρὸς τοὺς παλαιοὺς ἄξονας. Οὕτως ἔχομεν

(1) $$\chi = \alpha + \chi', \qquad \psi = \beta + \psi'.$$

Οἱ τύποι οὗτοι χρησιμεύουσι πρὸς ἀντικατάστασιν δύο ἀξόνων δι' ἑτέρων παραλλήλων αὐτοῖς.

**77.** Θεωρήσωμεν ἤδη τὴν γενικὴν περίπτωσιν, ἐν ᾗ συγχρόνως μεταβάλλονται ἡ ἀρχὴ καὶ ἡ διεύθυνσις τῶν ἀξόνων.

(Σχ. 30). Ἔστωσαν, AX, AΨ, οἱ πρῶτοι ἄξονες σχηματίζοντες πρὸς ἀλλήλους τὴν γωνίαν $\Psi AX = \theta$· καὶ $A'X'$, $A'\Psi'$, οἱ νέοι. Ἄγομεν A'E παράλληλον τῇ AX, καὶ A'Z τῇ AΨ. Ἵνα ὦσιν ὡρισμένοι οἱ τελευταῖοι ἄξονες, ἀρκεῖ νὰ ὦσι γνωσταὶ αἱ συντεταγμέναι AB, A'B, τῆς ἀρχῆς A', καὶ αἱ γωνίαι X'A'E, Ψ'A'E, ὑπὸ τῶν ἀξόνων τούτων καὶ τῆς εὐθείας A'E περιεχόμεναι. Καλοῦμεν, τὰς μὲν συντεταγμένας ταύτας $\alpha$ καὶ $\beta$, τὰς δὲ γωνίας $\varphi$ καὶ $\varphi'$.

Ἔστω M σημεῖον οἱονδήποτε. Ἄγομεν MΠ παράλληλον τῇ AΨ, καὶ MK τῇ A'Ψ'. Αἱ μὲν παλαιαὶ συντεταγμέναι τοῦ σημείου M εἰσὶν $A\Pi = \chi$, $M\Pi = \psi$· αἱ δὲ νέαι

$$A'K = \chi', \quad MK = \psi'.$$

Ἀπὸ τοῦ σημείου K ἄγομεν KP παράλληλον τῇ AΨ, καὶ KT τῇ AX. Ἔχομεν

$$\chi = A\Pi = \alpha + A'\Sigma + KT, \qquad \psi = M\Pi = \beta + K\Sigma + MT.$$

Τὸ τρίγωνον A'KΣ δίδει,

$$\frac{A'\Sigma}{\text{ημ}\, A'K\Sigma} = \frac{K\Sigma}{\text{ημ}\, KA'\Sigma} = \frac{A'K}{\text{ημ}\, A'\Sigma K}.$$

ἀλλά,

$$A'K = \chi',$$
$$\text{ημ}\, A'K\Sigma = \text{ημ}\, ZA'X' = \text{ημ}(\theta - \varphi),$$
$$\text{ημ}\, KA'\Sigma = \text{ημ}\, \varphi,$$
$$\text{ημ}\, A'\Sigma K = \text{ημ}(180^\circ - \theta) = \text{ημ}\, \theta\cdot$$

λοιπὸν $$\frac{A'\Sigma}{\text{ημ}(\theta - \varphi)} = \frac{K\Sigma}{\text{ημ}\, \varphi} = \frac{\chi'}{\text{ημ}\, \theta}.$$



ὅθεν, $$A'\Sigma = \frac{\chi'\, \text{ημ}(\theta - \varphi)}{\text{ημ}\, \theta}, \qquad K\Sigma = \frac{\chi'\, \text{ημ}\, \varphi}{\text{ημ}\, \theta}.$$

Ὡσαύτως τὸ τρίγωνον MKT δίδει

$$\frac{KT}{\text{ημ}\, KMT} = \frac{MT}{\text{ημ}\, MKT} = \frac{MK}{\text{ημ}\, MTK}.$$

Ἀλλὰ

$$MK = \psi',$$
$$\text{ημ}\, KMT = \text{ημ}\, \Psi'A'Z = \text{ημ}(\theta - \varphi'),$$
$$\text{ημ}\, MKT = \text{ημ}\, \Psi'A'E = \text{ημ}\, \varphi',$$
$$\text{ημ}\, MTK = \text{ημ}(180^\circ - \theta) = \text{ημ}\, \theta.$$

Ἄρα $$\frac{KT}{\text{ημ}(\theta - \varphi')} = \frac{MT}{\text{ημ}\, \varphi'} = \frac{\psi'}{\text{ημ}\, \theta}.$$

ἐπομένως $$KT = \frac{\psi'\, \text{ημ}(\theta - \varphi')}{\text{ημ}\, \theta}, \qquad MT = \frac{\psi'\, \text{ημ}\, \varphi'}{\text{ημ}\, \theta}.$$

Καθιστῶμεν ἤδη ἀντὶ A'Σ, KT, KΣ, MT, τὰς τιμὰς αὐτῶν καὶ λαμβάνομεν τοὺς ζητουμένους τύπους,

(2) $$\left\{ \begin{aligned} \chi &= \alpha + \frac{\chi'\, \text{ημ}(\theta - \varphi) + \psi'\, \text{ημ}(\theta - \varphi')}{\text{ημ}\, \theta}, \\ \psi &= \beta + \frac{\chi'\, \text{ημ}\, \varphi + \psi'\, \text{ημ}\, \varphi'}{\text{ημ}\, \theta}. \end{aligned} \right.$$

Οἱ τύποι οὗτοι σπανίως εἰσὶν ἐν χρήσει ὑπὸ τὴν γενικωτάτην ταύτην μορφήν· ἐξ αὐτῶν ὅμως ποριζόμεθα ὡς ἐφεξῆς τοὺς τῶν μερικῶν περιπτώσεων, ὧν ἡ χρῆσις εἶναι συνεχεστέρα.

**78.** Ἵνα μεταβῶμεν *ἀπὸ συστήματος συντεταγμένων ὀρθογωνίων εἰς ἕτερον συντεταγμένων πλαγιογωνίων*, καθιστῶμεν ἐν τοῖς τύποις (2) $\theta = 90^\circ$, καὶ ἔχομεν τοὺς ἑξῆς·

(3) $$\left\{ \begin{aligned} \chi &= \alpha + \chi'\, \text{συν}\, \varphi + \psi'\, \text{συν}\, \varphi', \\ \psi &= \beta + \chi'\, \text{ημ}\, \varphi + \psi'\, \text{ημ}\, \varphi'. \end{aligned} \right.$$

**79.** Ἵνα μεταβῶμεν *ἀπὸ συστήματος συντεταγμένων ὀρθογωνίων εἰς ἕτερον ὅμοιον*, καθιστῶμεν εἰς τοὺς τύπους (3) $\varphi' = 90^\circ + \varphi$. Παρατηρητέον δὲ ὅτι,

$$\text{ημ}\, \varphi' = \text{ημ}\,(90^\circ + \varphi) = \text{ημ}\,(90^\circ - \varphi) = \text{συν}\, \varphi,$$
$$\text{συν}\, \varphi' = \text{συν}\,(90^\circ + \varphi) = -\text{συν}(90^\circ - \varphi) = -\text{ημ}\, \varphi.$$

Ἐπομένως ἔχομεν

$$(4)\qquad \begin{cases} \chi = \alpha + \chi'\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi - \psi'\,\eta\mu\,\varphi, \\ \psi = \beta + \chi'\,\eta\mu\,\varphi + \psi'\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi. \end{cases}$$

**80.** Τέλος, ἵνα μεταβῶμεν ἀπὸ *συστήματος ἀξόνων πλαγιογωνίων εἰς ἕτερον ἀξόνων ὀρθογωνίων*, καθιστῶμεν ἐν τοῖς γενικοῖς τύποις $\varphi' = 90^\circ + \varphi$. Παρατηρητέον δὲ ὅτι,

$$\eta\mu\,\varphi' = \eta\mu\,(90^\circ + \varphi) = \eta\mu\,(90^\circ - \varphi) = \sigma\upsilon\nu\,\varphi,$$

$$\eta\mu\,(\theta - \varphi') = \eta\mu\,(\theta - 90^\circ - \varphi) = -\eta\mu\,[90^\circ - (\theta - \varphi)]. \\ = -\sigma\upsilon\nu\,(\theta - \varphi).$$

Ἐπομένως οἱ τύποι καθίστανται

$$(5)\qquad \begin{cases} \chi = \alpha + \dfrac{\chi'\,\eta\mu\,(\theta - \varphi) - \psi'\,\sigma\upsilon\nu\,(\theta - \varphi)}{\eta\mu\,\theta}, \\ \psi = \beta + \dfrac{\chi'\,\eta\mu\,\varphi + \psi'\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi}{\eta\mu\,\theta}. \end{cases}$$

### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ.

**81.** Ἵνα ἔχωσιν οἱ προηγούμενοι τύποι πλήρη γενικότητα, ἀπαιτεῖται αἱ μὲν διάφοροι συντεταγμέναι νὰ λαμβάνωσι τὰ κατάλληλα πρὸς τὴν θέσιν αὐτῶν σημεῖα, αἱ δὲ γωνίαι τὴν ἀναγκαίαν ἔκτασιν, ὥστε οἱ νέοι ἄξονες νὰ κατέχωσι πᾶσαν θέσιν πρὸς τοὺς παλαιούς.

**82.** Ὅταν πρόκηται περὶ τῶν τύπων (1) οὓς ἐπορίσθημεν ἐκ τοῦ Σχ. 29, ὑποθέτομεν $\chi$ καὶ $\chi'$ θετικὰς μὲν κατὰ τὰς διευθύνσεις ΑΧ, Α'Χ', ἀρνητικὰς δὲ κατὰ τὰς ἀντιθέτους· ἐπίσης $\psi$ καὶ $\psi'$ θετικὰς κατὰ τὰς διευθύνσεις ΑΨ, Α'Ψ', καὶ ἀρνητικὰς ὑποκάτω. Π. χ. διὰ σημεῖον κείμενον ὡς τὸ Ν, λαμβάνομεν

$$\chi = \mathrm{AK}, \quad \chi' = -\mathrm{A'K'}, \quad \psi = -\mathrm{KN}, \quad \psi' = -\mathrm{K'N}.$$

Τῷ ὄντι, αἱ τιμαὶ αὗται ταυτοποιοῦσι τοὺς τύπους (1); διότι τῇ ἀντεισαγωγῇ εὑρίσκομεν,

$$\mathrm{AK} = \alpha - \mathrm{A'K'} = \mathrm{AB} - \mathrm{BK} = \mathrm{AK},$$

$$-\mathrm{KN} = \beta - \mathrm{K'N} = \mathrm{A'B} - \mathrm{K'N} = \mathrm{K'K} - \mathrm{K'N} = -\mathrm{KN}.$$



Παρατηρητέον προσέτι ὅτι, τὸ σχῆμα ὑποθέτει τὴν νέαν ἀρχὴν ἐν τῇ γωνίᾳ ΨΑΧ. Ἐὰν τοποθετήσωμεν αὐτὴν ἀλλαχοῦ, προτάττομεν τῶν συντεταγμένων αὐτῆς εἰς τοὺς τύπους (1), τ' ἁρμόζοντα αὐταῖς σημεῖα κατὰ τὴν θέσιν τῆς ἀρχῆς Α'. Περὶ τούτου βεβαιούμεθα ζητοῦντες ἀμέσως τὰς τιμὰς τῶν $\chi$, $\psi$, κατὰ τὴν νέαν θέσιν τῆς ἀρχῆς Α'.

**83.** Ὅταν μεταχειριζώμεθα τοὺς τύπους (2), ἢ τοὺς ἐξ αὐτῶν παραγομένους, ἀναμνηστέον τὰ ἑξῆς·

1ον. θ δηλοῖ τὴν γωνίαν ΨΑΧ τῶν παλαιῶν ἀξόνων, ἐν ᾗ αἱ συντεταγμέναι εἰσὶ θετικαί. Τὴν γωνίαν ταύτην δυνάμεθα θεωρεῖν πάντοτε ὡς ἐλάσσονα 180°.

2ον. $\varphi$ καὶ $\varphi'$ εἰσὶν αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι, πρὸς τὸ μέρος τῶν θετικῶν $\chi$, ὑπὸ τῶν μερῶν Α'Χ', Α'Ψ', τῶν νέων ἀξόνων, ἐφ' ὧν μετροῦνται αἱ θετικαὶ $\chi'$ καὶ $\psi'$. Αἱ γωνίαι αὗται αὐξάνουσι μέχρι 360°. Ἵνα διατιμήσωμεν αὐτὰς εὐκολώτερον, ἄγομεν διὰ τῆς ἀρχῆς Α' κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν θετικῶν $\chi$ καὶ $\psi$, τὰς εὐθείας Α'Ε, Α'Ζ, παραλλήλους τῶν συντεταγμένων τούτων· εἶτα ὑποθέτομεν ὅτι, αἱ Α'Χ', Α'Ψ', κατ' ἀρχὰς ταυτιζόμεναι τῇ γραμμῇ Α'Ε, ἀφίστανται ταύτης προσεγγίζουσαι τῇ Α'Ζ, ἵνα καθέξωσι τὰς παρούσας θέσεις αὐτῶν. Τὰ τόξα ἅτινα γράφει τὸ τυχὸν σημεῖον τῶν γραμμῶν τούτων, λαμβάνομεν ὡς μέτρον τῶν γωνιῶν $\varphi$ καὶ $\varphi'$.

**84.** Τὸ ἑξῆς παράδειγμα σαφηνίσει ἀρκούντως τὰ προλεχθέντα. Τὴν θέσιν ἀμφοτέρων τῶν συστημάτων τῶν ἀξόνων παριστᾷ τὸ Σχ. 31. Ἔστω

$$\mathrm{AB} = 3, \quad \mathrm{A'B} = 3, \quad \tau\acute{o}\xi.\ \lambda\mu = 87^\circ, \quad \tau\acute{o}\xi.\ \lambda\mu\nu = 240^\circ, \\ \kappa\alpha\grave{\iota}\ \tau\acute{o}\xi.\ \lambda\mu\nu\rho = 315^\circ.$$

Καθιστῶμεν εἰς τοὺς γενικοὺς τύπους,

$$\alpha = 3, \quad \beta = -3, \quad \theta = 87^\circ, \quad \varphi = 240^\circ, \quad \varphi' = 315^\circ.$$

Λαμβάνομεν

$$\chi = +3 + \frac{\chi'\,\eta\mu\,(87^\circ - 240^\circ) + \psi'\,\eta\mu\,(87^\circ - 315^\circ)}{\eta\mu\,87^\circ},$$

$$\psi = -3 + \frac{\chi'\,\eta\mu\,240^\circ + \psi'\,\eta\mu\,315^\circ}{\eta\mu\,87^\circ}.$$

Μετὰ δὲ τὰς τριγωνομετρικὰς ἀναγωγάς,

$$\chi = +3 + \frac{-\chi'\,\acute{\eta}\mu\,27^\circ + \psi'\,\acute{\eta}\mu\,48^\circ}{\acute{\eta}\mu\,87^\circ},$$

$$\psi = -3 - \frac{\chi'\,\acute{\eta}\mu\,60^\circ + \psi'\,\acute{\eta}\mu\,45^\circ}{\acute{\eta}\mu\,87^\circ}.$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

### ΓΕΝΙΚΗ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ ΚΑΤΑΤΑΞΙΣ.

85. Αἱ γραμμαί, ὡς εἴδομεν ἤδη, δηλοῦνται ὑπὸ ἐξισώσεων. Αἱ ἐξισώσεις αὗται εἰσὶν ἢ ἀλγεβραϊκαὶ ἢ ὑπερβατικαί, ὅθεν προκύπτει ἡ διάκρισις τῶν γραμμῶν εἰς *ἀλγεβραϊκὰς* καὶ εἰς *ὑπερβατικάς*, κατὰ τὸ εἶδος τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν.

Αἱ ἀλγεβραϊκαὶ γραμμαὶ κατατάσσονται κατὰ τὸν βαθμὸν τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν πρὸς τὰς συντεταγμένας $\chi$, $\psi$. Τὴν *τάξιν* τῆς γραμμῆς ἐμφαίνει ὁ δείκτης τοῦ βαθμοῦ τούτου. Οὕτω, γραμμὴ εἶναι τῆς πρώτης, ἢ τῆς δευτέρας, κ.τ.ἑ. τάξεως, καθ' ὅσον ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς εἶναι τοῦ πρώτου, ἢ τοῦ δευτέρου, κ.τ.ἑ. βαθμοῦ.

86. Ἡ τῶν γραμμῶν κατάταξις, κατὰ τοὺς διαφόρους βαθμοὺς τῶν ἐξισώσεων, ἤθελεν εἶσθαι ἐλαττωματική, εἰ, μεταβαλλομένου τοῦ συστήματος τῶν συντεταγμένων, μετεβάλλετο καὶ ὁ βαθμὸς τῆς ἐξισώσεως. Ἀλλὰ τὸ τοιοῦτον οὐδόλως συμβαίνει. Τῷ ὄντι, δεδομένης οὔσης τῆς ἐξισώσεως, περιεκτικῆς $\chi$ καὶ $\psi$, γραμμῆς τινος πρός τι σύστημα ἀξόνων, ἵνα λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς αὐτῆς γραμμῆς πρὸς ἑτέρους ἄξονας, πρέπει νὰ καταστήσωμεν ἐν τῇ πρώτῃ ἀντὶ $\chi$ καὶ $\psi$, τὰς εὑρεθείσας τιμὰς αὐτῶν ἐν Κεφ. Γ'.



Ἀλλ' αἱ τιμαὶ αὗται εἰσὶ τοῦ πρώτου βαθμοῦ εἰς $\chi'$ καὶ $\psi'$· ἄρα, ὁ βαθμὸς τῆς ἐξισώσεως δὲν ὑψοῦται συνεπείᾳ τῆς ἀντεισαγωγῆς ταύτης. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον οὔτε καταβιβάζεται· διότι, ἐν περιπτώσει τοιαύτῃ, πρέπει, διὰ τοῦ ἐναλλὰξ μετασχηματισμοῦ τῶν συντεταγμένων, ὁ βαθμὸς νὰ ὑψωθῇ.

87. Ἐν τῇ γενικῇ ἐξισώσει παντὸς βαθμοῦ περιέχονται, οὐ μόνον αἱ γραμμαὶ ὧν ἡ τάξις δηλοῦται ὑπὸ τοῦ βαθμοῦ τούτου, ἀλλὰ προσέτι ἅπασαι αἱ κατωτέρου βαθμοῦ. Π. χ.

Ἔστω ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις,

$$(\psi - \alpha\chi - \beta)\ (\psi - \alpha'\chi - \beta') = 0.$$

Δῆλον ὅτι αὕτη ἐτυμοποιεῖται ἐὰν καταστήσωμεν, εἴτε $\psi = \alpha\chi + \beta$, εἴτε $\psi = \alpha'\chi + \beta'$. Αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις δηλοῦσι γραμμὰς τῆς πρώτης τάξεως· ἄρα, κατ' ἀκρίβειαν, ἡ τεθεῖσα ἐξίσωσις δὲν ἐμφαίνει γραμμὴν τῆς δευτέρας τάξεως, ἀλλὰ δύο γραμμὰς τῆς πρώτης. Ἤθελεν ἐμφαίνει μίαν μόνην, ἐὰν $\alpha = \alpha'$ καὶ $\beta = \beta'$.

Ἐπίσης, ἡ τριτοβάθμιος ἐξίσωσις,

$$(\psi - \alpha\chi - \beta)\ (\gamma\psi - \chi^3) = 0,$$

ἐμφαίνει μίαν γραμμὴν τῆς πρώτης τάξεως διδομένην ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \alpha\chi + \beta$, καὶ ἑτέραν τῆς δευτέρας τάξεως διδομένην ὑπὸ τῆς $\gamma\psi = \chi^3$.

88. *Εὐθεῖα οὐδέποτε συμπίπτει γραμμῇ $\mu^{\tilde{\eta}\varsigma}$ τάξεως κατὰ σημεῖα πλείονα τῶν μ.* Τῷ ὄντι, τεθείσθω ὅτι λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν ταύτην ὡς ἄξονα τῶν $\chi$· ἔστω δὲ $\Phi = 0$ ἡ ἐξίσωσις τῆς περὶ ἧς λόγος γραμμῆς. Ἵνα γνωσθῶσι τὰ σημεῖα καθ' ἃ αὕτη τέμνεται ὑπὸ τῆς εὐθείας, καθιστῶμεν $\psi = 0$ ἐν τῇ ἐξισώσει $\Phi = 0$· αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τῆς $\chi$ ἔσονται αἱ τετμημέναι τῶν ζητουμένων σημείων. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις $\Phi = 0$ εἶναι $\mu^{o\tilde{v}}$ βαθμοῦ, ἡ προκύπτουσα εἰς $\chi$ ἔσεται τὸ πλεῖστον $\mu^{o\tilde{v}}$ βαθμοῦ. Ἄρα, ἡ $\chi$ ἀδύνατον νὰ ἔχῃ τιμὰς πλείονας τῶν μ, ἤτοι ἀδύνατον νὰ ὑπάρξωσι σημεῖα κοινῆς τομῆς πλείονα τῶν μ. Παρατηρητέον ὅμως ὅτι, ὁ ἀριθμὸς τῶν σημείων τούτων δυνατὸν νὰ ἦναι ἐλάσσων τοῦ μ, ἐὰν ἡ ἐξίσωσις ἔχῃ ῥίζας ἴσας ἢ φανταστικάς.

89. Λοιπὸν, αἱ γραμμαὶ τῆς πρώτης τάξεως ἀδύνατον νὰ ἔχωσι σημεῖα κοινὰ μετ' εὐθείας πλέον ἑνός. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι σαφὲς ὅτι, οὐδεμία γραμμὴ καμπύλη ἔχει τὸ τοιοῦτον ἰδίωμα, συνάγομεν ἀμέσως ὅτι, *αἱ γραμμαὶ τῆς πρώτης τάξεως εἰσὶν εὐθεῖαι.*

90. Πλὴν τῆς διανομῆς τῶν ἀλγεβραϊκῶν γραμμῶν εἰς *τάξεις*, κατὰ τὸν βαθμὸν τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν, οἱ Μαθηματικοὶ διακρίνουσι καὶ τὰ διάφορα *γένη* γραμμῶν συμπεριλαμβανομένων τῇ αὐτῇ τάξει· προσέτι, εἰ δέον, καὶ τὰ διάφορα εἴδη ἑκάστου γένους. Εἶτα διακρίνουσι πάσας τὰς γραμμὰς ταύτας ἀπ' ἀλλήλων ἔκ τινων χαρακτήρων ἰδιαιτέρων ἑκάστῃ. Τέλος, ὁρίζουσι τὸ σχῆμα καὶ τὰς ἰδιότητας ἑκάστης αὐτῶν. Τοῦτο ἐφεξῆς πράξομεν διὰ τοὺς δύο πρώτους βαθμούς.

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

### ΓΡΑΜΜΑΙ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ.

#### ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

91. Ἐγνωρίσαμεν ἤδη [89] ὅτι, ἡ πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις γραμμὰς εὐθείας μόνον δίδει. Τὴν πρότασιν ταύτην ἀποδείξομεν καὶ ἀμέσως ὡς ἑξῆς.

Ἅπασαι αἱ πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις συμπεριλαμβάνονται ἐν τῇ γενικῇ μορφῇ

$$A\psi + B\chi = \Gamma.$$

Κατασκευάσωμεν πρῶτον τὴν ἁπλουστέραν ἐξίσωσιν

$$\psi = \alpha\chi,$$

ἐν ᾗ ὑποθέσομεν α ποσότητα θετικήν. (Σχ. 32).

Δίδοντες τῇ χ τιμὰς θετικὰς, λαμβάνομεν διὰ ψ θετικὰς, καὶ δίδοντες τῇ χ τιμὰς ἀρνητικὰς, ψ ἔσεται ἀρνητική. Ἄρα, τὰ ὁριζόμενα σημεῖα διὰ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \alpha\chi$, κεῖνται ἅπαντα ἐντὸς τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν ΨΑΧ, Ψ'ΑΧ'.



Ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις δίδει

$$\frac{\psi}{\chi} = \alpha.$$

Λοιπὸν, δι' ἅπαντα τὰ σημεῖα ταῦτα, ὁ λόγος τῆς τεταγμένης πρὸς τὴν τετμημένην ἰσοῦται τῇ σταθερᾷ α· ἑπομένως, Μ καὶ Μ' ὄντων δύο τῶν σημείων τούτων, τὰ συγκροτούμενα τρίγωνα ΜΠΑ, Μ'Π'Α, ὑπὸ τῶν τεταγμένων ΜΠ, Μ'Π', καὶ τῶν εὐθειῶν ΑΜ, ΑΜ', ἔσονται ὅμοια, καὶ αἱ γωνίαι ΜΑΠ, Μ'ΑΠ', ἴσαι. Ἄρα, αἱ εὐθεῖαι ΑΜ, ΑΜ', ταυτίζονται, ὡς ἐπίσης καὶ ὅσαι ἀχθῶσιν ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὰ διάφορα σημεῖα τὰ διὰ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \alpha\chi$ ὁριζόμενα. Ἐν ἄλλαις λέξεσι, *τὰ σημεῖα ταῦτα εἰσὶν ἅπαντα ἐπὶ γραμμῆς εὐθείας ΔΑΔ', ἀγομένης διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ διὰ τοῦ τυχόντος τῶν σημείων τούτων.*

Ἀντιστρόφως, *ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ταύτης ὁρίζονται διὰ τῆς ἐξισώσεως* $\psi = \alpha\chi$. Τῷ ὄντι, ἔστω Μ σημεῖον ὁρισθὲν διὰ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἀφ' οὗ ἤχθη ἡ εὐθεῖα ΔΑΔ'· ἔστω Μ' σημεῖον οἱονδήποτε τῆς αὐτῆς εὐθείας. Καταβιβάζομεν τὰς τεταγμένας ΜΠ, Μ'Π'. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΜΠ, ΑΜ'Π', δίδουσι

$$\frac{M'\Pi'}{A\Pi'} = \frac{M\Pi}{A\Pi}.$$

Ἀλλὰ τὸ σημεῖον Μ ὡρίσθη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \alpha\chi$· ἄρα $\frac{M\Pi}{A\Pi} = \alpha$, καὶ ἑπομένως $\frac{M'\Pi'}{A\Pi'} = \alpha$. Λοιπὸν, δηλοῦντες χ καὶ ψ τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου Μ', ἔχομεν $\psi = \alpha\chi$. Ὅθεν συνάγομεν ὅτι, πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας ΔΑΔ' δύναται θεωρηθῆναι ὡς ὁριζόμενον διὰ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \alpha\chi$.

92. Ὅταν α ἦναι ποσότης ἀρνητικὴ, ἡ ἐξίσωσις ἔσεται

$$\psi = -\alpha\chi.$$

Τότε, αἱ μὲν θετικαὶ τιμαὶ τῆς χ δίδουσι τιμὰς ἀρνητικὰς τῇ ψ, αἱ δὲ ἀρνητικαὶ θετικάς. Λοιπὸν, ἅπαντα τὰ ὁριζόμενα διὰ τῆς ἐξισώσεως ταύτης σημεῖα κεῖνται ἐν ταῖς γωνίαις ΨΑΧ′, Ψ′ΑΧ. Διὰ συλλογισμῶν ὁμοίων τοῖς προηγουμένοις καταντῶμεν εἰς τὰς αὐτὰς συνεπείας· δηλ. ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\psi = -\alpha\chi$ ἐμφαίνει καὶ αὖθις γραμμὴν εὐθεῖαν, ὡς τὴν δΑδ′, τῆς ἀρχῆς διερχομένην.

93. Λοιπὸν, *οἱοσδήποτε εἶναι ὁ συντελεστὴς α, ἡ ἐξίσωσις $\psi = \alpha\chi$ ἐμφαίνει πάντοτε γραμμὴν εὐθεῖαν τῆς ἀρχῆς διερχομένην.*

Ἵνα λάβωμεν ἕτερον σημεῖον τῆς γραμμῆς ταύτης, καθιστῶμεν $\chi = 1$, καὶ ἔχομεν $\psi = \alpha$. Κατασκευάζομεν τὸ τὰς συντεταγμένας $\chi = 1$, $\psi = \alpha$, ἔχον σημεῖον Α· ἡ ζευγνύουσα τοῦτο τῇ ἀρχῇ εὐθεῖα ἔσεται ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς ἐξισώσεως $\psi = \alpha\chi$.

94. Κατασκευάσωμεν ἤδη τὴν ἐξίσωσιν

$$\psi = \alpha\chi + \beta,$$

ἐν ᾗ πρῶτον ὑποθέσομεν α καὶ β ποσότητας θετικάς. Παρατηρητέον ὅτι, ἐὰν δώσωμεν τῇ χ τὰς αὐτὰς τιμὰς εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις

$$\psi = \alpha\chi, \qquad \psi = \alpha\chi + \beta,$$

ἡ διαφορὰ τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τῆς ψ ἔσεται ἀμετάβλητος καὶ ἴση β. Λοιπὸν, ὁ τόπος τῆς δευτέρας ἐξισώσεως εἶναι εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΑΔ′ (Σχ. 33), τόπῳ τῆς πρώτης. Ἵνα κατασκευάσωμεν αὐτὸν, λαμβάνομεν τὸ ἀπόστημα $\mathrm{AB} = \beta$, ἐπὶ τῆς ΑΨ, καὶ ἄγομεν ΒΕ παράλληλον τῇ ΑΔ εὐθεῖᾳ.

Περὶ τοῦ ἐξαγομένου τούτου πληροφορούμεθα καὶ ἀκριβέστερον, λαμβάνοντες διάφορα σημεῖα τῆς εὐθείας, ἐν ἑκάστῃ τῶν γωνιῶν ὧν αὕτη διαβαίνει, καὶ δεικνύοντες ὅτι, δι' ἅπαντα τὰ σημεῖα ταῦτα ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\psi = \alpha\chi + \beta.$$

Θεωρήσωμεν, π. χ. τὸ Μ σημεῖον κείμενον ἐν τῇ γωνίᾳ ΨΑΧ′. Ἄγομεν ΜΠ παράλληλον τῇ ΑΨ καὶ προάγομεν αὐτὴν μέχρις οὗ ταυτισθῇ τῇ ΑΔ′ κατὰ τὸ Ν. Ἔχομεν

$$\mathrm{M\Pi} = \mathrm{MN} - \Pi\mathrm{N} = \beta - \Pi\mathrm{N}.$$



Ἡ τεταγμένη τῶν σημείων Μ, Ν, ἰσοῦται $-\mathrm{A\Pi}$· ἄρα, ἡ ἀντιστοιχοῦσα τεταγμένη τοῦ σημείου Ν, ἐπὶ τῆς ΑΔ′ κειμένου, ἔσεται ἴση $-\alpha \times \mathrm{A\Pi}$. Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι ἀρνητικὴ, διότι τὸ Ν εὑρίσκεται ὑπὸ τὴν Χ′Χ. Λαμβάνοντες αὐτὴν ἀπολύτως, ἔχομεν

$\Pi\mathrm{N} = \alpha \times \mathrm{A\Pi}$, καὶ ἑπομένως $\mathrm{M\Pi} = \beta - \alpha \times \mathrm{A\Pi}$,

τιμὴν ἴσην τῇ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \alpha\chi + \beta$ ληφθησομένῃ, ἐὰν θέσωμεν ἐν αὐτῇ $-\mathrm{A\Pi}$ ἀντὶ χ.

95. Κατεσκευάσαμεν τὴν ἐξίσωσιν $\psi = \alpha\chi + \beta$, τῇ ὑποθέσει ὅτι α καὶ β εἰσὶ ποσότητες θετικαί. Ἀλλ' ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις παρουσιάζεται καὶ ὑπὸ τρεῖς ἑτέρας μορφὰς, κατὰ τὰ σημεῖα τῶν σταθερῶν τούτων, ἤτοι

$$\psi = \alpha\chi - \beta, \qquad \psi = -\alpha\chi + \beta, \qquad \psi = -\alpha\chi - \beta.$$

Ἐὰν εἰς ἑκάστην τῶν ἐξισώσεων τούτων ἐφαρμόσωμεν συλλογισμοὺς ὁμοίους τοῖς προηγουμένοις, εὑρήσομεν πάντοτε γραμμὴν εὐθεῖαν, διαφέρουσαν κατὰ τὴν θέσιν. Ἕπονται αἱ ἀφορῶσαι ἑκάστην τῶν τριῶν τούτων περιπτώσεων κατασκευαί.

96. $\psi = \alpha\chi - \beta.$

(Σχ. 34). Κατασκευάζομεν, ὡς ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει, τὴν εὐθεῖαν ΑΔ, ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \alpha\chi$ δηλουμένην. Λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ψ, $\mathrm{AB} = \beta$, πρὸς τὸ μέρος ΑΨ′, καὶ ἄγομεν ΒΕ παράλληλον τῇ ΑΔ.

97. $\psi = -\alpha\chi + \beta.$

(Σχ. 35). Κατασκευάζομεν τὴν ΑΔ εὐθεῖαν, δηλουμένην ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi = -\alpha\chi$. Λαμβάνομεν $\mathrm{AB} = \beta$ πρὸς τὸ μέρος ΑΨ, καὶ ἄγομεν ΒΕ παράλληλον τῇ ΑΔ.

98. $\psi = -\alpha\chi - \beta.$

(Σχ. 36). Μόνη διαφορὰ ἀπὸ τῆς προηγουμένης περιπτώσεως εἶναι, ὅτι λαμβάνομεν $\mathrm{AB} = \beta$ πρὸς τὸ μέρος ΑΨ′.

99. Ὅταν Α διαφέρῃ μηδενὸς, τρέπομεν τὴν ἐξίσωσιν $\mathrm{A}\psi + \mathrm{B}\chi = \Gamma$, ὑπὸ τὴν μορφὴν $\psi = \alpha\chi + \beta$· ὡς δὲ ἀπεδείχθη ἤδη, τῆς τελευταίας ταύτης ὁ γεωμετρικὸς τόπος εἶναι πάντοτε γραμμὴ εὐθεῖα.

Ὅταν $A=0$, ἡ ἐξίσωσις ἄγεται εἰς

$$B\chi=\Gamma, \qquad \text{ἢ} \qquad \chi=\frac{\Gamma}{B}.$$

Φανερὸν δὲ ὅτι, ὁ γεωμετρικὸς τόπος ταύτης εἶναι (Σχ. 37) εὐθεῖα ΓΖ παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν $\psi$, συμπίπτουσα τῷ τῶν $\chi$ ἐν ἀποστάσει ἀπὸ τῆς ἀρχῆς $A\Gamma=\frac{\Gamma}{B}$, πρὸς τὸ μέρος ΑΧ, ἢ πρὸς τὸ ΑΧ′, κατὰ τὸ σημεῖον τῆς ποσότητος ταύτης.

100. Λοιπὸν, *ὁ γεωμετρικὸς τόπος πάσης ἐξισώσεως πρωτοβαθμίου εἶναι, ἐν πάσῃ περιπτώσει, γραμμὴ εὐθεῖα.*

101. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἐξάγεται ὅτι, ἵνα κατασκευάσωμεν ἐξίσωσιν πρωτοβάθμιον, πρῶτον τρέπομεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\psi=\alpha\chi+\beta$, εἶτα κατασκευάζομεν τὴν ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi=\alpha\chi$ δηλουμένην εὐθεῖαν· λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν $\psi$, ἄνω ἢ κάτω τῆς ἀρχῆς, ἀπόστημα ἴσον $\beta$, καὶ ἄγομεν παράλληλον τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ.

Ἀλλ' ἁπλούστερον εἶναι νὰ προσδιορίζωμεν τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα τέμνει τοὺς ἄξονας, ὅπερ ἐκτελοῦμεν καθιστῶντες διαδοχικῶς $\chi=0$, $\psi=0$, εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτῆς.

Ἔστω, π. χ. ἡ ἐξίσωσις (Σχ. 38),

$$6\psi-5\chi+3=0.$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ σημείου καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα ἣν ἐμφαίνει συμπίπτει τῷ ἄξονι τῶν τεταγμένων, παρατηρητέον ὅτι τοῦ σημείου τούτου ἡ τετμημένη εἶναι 0. Ὅθεν καθιστῶμεν ἐν τῇ ἐξισώσει $\chi=0$ καὶ λαμβάνομεν $\psi=-\frac{1}{2}$. Φέρομεν πρὸς τὰς ἀρνητικὰς $\psi$, τὸ ἀπόστημα ΑΒ ἴσον $\frac{1}{2}$ μονάδι μήκους. Τὸ σημεῖον Β ἔσεται τῆς ζητουμένης εὐθείας. Ὡσαύτως, ἡ τεταγμένη τοῦ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων κειμένου σημείου τῆς εὐθείας ταύτης εἶναι 0. Ὅθεν καθιστῶμεν $\psi=0$ καὶ λαμβάνομεν, πρὸς τὰς θετικὰς $\chi$, $A\Gamma=\frac{3}{5}$. Τὸ Γ ἔσεται σημεῖον τῆς ζητουμένης εὐθείας. Λοιπὸν, ἡ εὐθεῖα αὕτη ὡρίσθη.



102. Μέχρι τοῦδε ἀπεδείξαμεν μόνον ὅτι, ἡ πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις ἐμφαίνει πάντοτε γραμμὴν εὐθεῖαν. Δείξομεν ἤδη καὶ ὅτι, *οὐδεμία γραμμὴ εὐθεῖα ὑπάρχει μὴ διδομένη ὑπὸ ἐξισώσεως πρωτοβαθμίου.*

1ον. Εἴδομεν ἐν § 91 πῶς κατασκευάζεται ἡ εὐθεῖα τῆς ἐξισώσεως $\psi=\alpha\chi$. Διὰ τῆς κατασκευῆς ταύτης φανερὸν ὅτι, διδομένων διαφόρων τιμῶν τῇ $\alpha$, τὸ σημεῖον Η ὅπερ ὑποθέτομεν ἀντιστοιχοῦν (Σχ. 32) τῇ τετμημένῃ $\chi=AZ=1$, ἀλλάσσει θέσιν, ἑπομένως καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΔ′. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ποσότης $\alpha$ δυνατὸν εἶναι νὰ λάβῃ πᾶν μέγεθος, τὸ σημεῖον Η ἐπίσης λαμβάνει πᾶσαν θέσιν ἐπὶ τῆς ΚΚ′, ἑπομένως καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΔ′ λαμβάνει οἱανδήποτε θέσιν περὶ τὴν ἀρχὴν Α.

Λοιπὸν, *ἅπασαι αἱ τῆς ἀρχῆς διερχόμεναι εὐθεῖαι δίδονται ὑπὸ ἐξισώσεως τοιουτομόρφου,* $\psi=\alpha\chi$.

2ον. Εἴδομεν ἐν § 94 πῶς κατασκευάζεται ἡ εὐθεῖα τῆς ἐξισώσεως $\psi=\alpha\chi+\beta$. Ἐκ τῆς κατασκευῆς ταύτης δῆλον ὅτι, λαμβάνοντος τοῦ $\beta$ διάφορα μεγέθη θετικὰ ἢ ἀρνητικά, τὸ σημεῖον $\beta$ (Σχ. 33) λαμβάνει πᾶσαν θέσιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΨΨ′. Ἀλλά, μεταβαλλομένου τοῦ συντελεστοῦ $\alpha$, ἡ εὐθεῖα ΑΔ′, ἢ παράλληλος ἡ ΒΕ, λαμβάνει πρὸς τὴν ΑΧ πᾶσαν κλίσιν.

Λοιπὸν, *ἅπασαι αἱ μὴ παράλληλοι τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων εὐθεῖαι δίδονται ὑπὸ ἐξισώσεως τῆς μορφῆς*

$$\psi=\alpha\chi+\beta.$$

3ον. Τέλος, (Σχ. 37) πᾶσα εὐθεῖα ΓΖ, παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν τεταγμένων, δηλοῦται ὑπὸ ἐξισώσεως ὡς τὴν $\chi=\sigma$· διότι, πάντων τῶν σημείων τῆς εὐθείας ταύτης ἡ τετμημένη εἶναι μόνιμος. Ἐπίσης, $\psi=\sigma'$ εἶναι ἐξίσωσις εὐθείας παραλλήλου τῷ ἄξονι τῶν τετμημένων. Ἀλλ' αἱ ἐξισώσεις $\chi=\sigma$, $\psi=\sigma'$ εἰσὶ μερικαὶ περιπτώσεις τῆς $A\psi+B\chi=\Gamma$.

Λοιπὸν, *πᾶσα γραμμὴ εὐθεῖα, οἱανδήποτε θέσιν ἔχῃ, δίδεται ὑπὸ ἐξισώσεως πρωτοβαθμίου.*

### ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΓΡΑΜΜΗΣ.

103. Εἴδομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας εἶναι ἐν γένει ὑπὸ τὴν μορφὴν $\psi=\alpha\chi+\beta$. Ὅταν λέγωμεν ὅτι εὐθεῖά τις

δίδεται, ἐννοοῦμεν ὅτι αἱ ποσότητες $\alpha$, $\beta$, εἰσὶ γνωσταί. Ὅταν δὲ πρόκειται ὁρίσαι εὐθεῖαν, σκοπὸν ἔχομεν εὑρεῖν τὰς ποσότητας ταύτας. Ἡ ἀνάλυσις συμφωνεῖ τῇ Γεωμετρίᾳ δεικνυούσῃ ὅτι, δύο συνθῆκαι εἰσὶν ἀναγκαῖαι καὶ ἱκαναὶ πρὸς ὁρισμὸν τῆς θέσεως πάσης εὐθείας.

104. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. (Σχ. 39). *Γνωστῆς οὔσης τῆς γωνίας* ΕΓΧ *εὐθείας πρὸς τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων, καὶ τῆς ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τεταγμένης* ΑΒ, *εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας.*

Ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις ἔσεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\psi = \alpha\chi + \beta.$$

Ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ $\beta$ εἶναι ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου Β καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα συμπίπτει τῷ ἄξονι ΑΨ. Τὴν τεταγμένην ταύτην, θετικὴν οὖσαν ἢ ἀρνητικὴν κατὰ τὴν θέσιν τοῦ σημείου Β, καλοῦσι *τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχήν*. Λοιπὸν, ἡ ποσότης αὕτη δίδεται ἀμέσως ὑπὸ τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος.

Ὁ συντελεστὴς $\alpha$ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τῆς γωνίας τῆς εὐθείας πρὸς τὸν ἄξονα τῶν $\chi$. Ἄγομεν διὰ τῆς ἀρχῆς ΑΔ παράλληλον τῇ ΓΕ· ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς ἔσεται $\psi = \alpha\chi$. Ἔστω ΜΠ ἡ τεταγμένη σημείου οἱουδήποτε τῆς γραμμῆς ταύτης· ἔχομεν $\frac{\text{ΜΠ}}{\text{ΑΠ}} = \alpha$. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΜΠ δίδει

$$\alpha = \frac{\text{ΜΠ}}{\text{ΑΠ}} = \frac{\text{ἡμ.}\,\text{ΔΑΧ}}{\text{ἡμ.}\,\text{ΑΜΠ}}.$$

Καλοῦμεν $\varphi$ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ΕΓΧ, ἤτοι τὴν γωνίαν ἣν πρὸς τὰς θετικὰς τετμημένας σχηματίζει τὸ ἄνω τοῦ ἄξονος τούτου κείμενον μέρος τῆς εὐθείας· $\theta$ τὴν γωνίαν ΨΑΧ τῶν ἀξόνων, ἤτοι τὴν περιεχομένην γωνίαν ὑπὸ τῶν μερῶν τῶν γραμμῶν τούτων ἐφ' ὧν αἱ συντεταγμέναι λογίζονται θετικαί. Ἐπομένως ἡ τιμὴ τοῦ $\alpha$ καθίσταται

$$\alpha = \frac{\text{ἡμ.}\,\varphi}{\text{ἡμ.}(\theta - \varphi)}.$$



Λοιπὸν, ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας ΓΕ ἔσεται

$$\psi = \frac{\text{ἡμ.}\,\varphi}{\text{ἡμ.}(\theta - \varphi)}\,\chi + \beta. \tag{1}$$

105. Ὑπεθέσαμεν σιωπηλῶς ὅτι ἡ γωνία ΕΓΧ ἦτον ἐλάσσων τῆς ΨΑΧ· ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις (1) ἣν ἐμορφώσαμεν, οὐχ ἧττον ἁρμόζει καὶ ὅταν ἡ γωνία αὕτη ΕΓΧ μείζων ἦναι τῆς ΨΑΧ. Τῷ ὄντι, ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἡ παράλληλος ΑΔ κεῖται ὡς ἐν Σχ. 40, τὸ δὲ τρίγωνον ΑΜΠ δίδει

$$\frac{\text{ΜΠ}}{\text{ΑΠ}} = \frac{\text{ἡμ.}\,\text{ΜΑΠ}}{\text{ἡμ.}\,\text{ΑΜΠ}} = \frac{\text{ἡμ.}\,\text{ΔΑΧ}}{\text{ἡμ.}\,\text{ΔΑΨ}} = \frac{\text{ἡμ.}\,\varphi}{\text{ἡμ.}(\varphi - \theta)}.$$

Ἀλλ' ἐν τῇ ἐξισώσει $\psi = \alpha\chi$, $\alpha$ εἶναι πάντοτε ὁ λόγος τῆς τεταγμένης πρὸς τὴν τετμημένην, ἐνταῦθα δὲ ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Μ εἶναι $-$ΑΠ· ἄρα $\alpha = \frac{\text{ΜΠ}}{-\text{ΑΠ}}$.

Ἐπομένως, παρατηροῦντες ὅτι, $\text{ἡμ.}(\varphi - \theta) = -\,\text{ἡμ.}(\theta - \varphi)$, ἔχομεν

$$\alpha = -\frac{\text{ἡμ.}\,\varphi}{\text{ἡμ.}(\varphi - \theta)} = \frac{\text{ἡμ.}\,\varphi}{\text{ἡμ.}(\theta - \varphi)}.$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι πάντοτε ἡ τῆς εὐθείας ΓΕ.

106. Ὅταν αἱ συντεταγμέναι τέμνωνται πρὸς ὀρθὰς, ἔχομεν

$$\theta = 90^\circ, \quad \text{ἡμ.}(\theta - \varphi) = \text{συν}\,\varphi \cdot \quad \text{ἄρα} \quad \frac{\text{ἡμ.}\,\varphi}{\text{συν}\,\varphi} = \text{ἐφ}\,\varphi = \alpha.$$

Λοιπὸν, ὁ *συντελεστὴς* $\alpha$ *παριστᾷ τὴν τριγωνομετρικὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας ἣν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα σχηματίζει πρὸς τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων.*

107. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Δοθείσης τῆς ἐξισώσεως* $\psi = \alpha\chi + \beta$ *εὐθείας, ὁρίσαι τὴν γωνίαν ἣν αὕτη σχηματίζει πρὸς τὸν ἄξονα τῶν* $\chi$.

(Σχ. 39). Ἔστω ΑΔ ἡ εὐθεῖα τῆς ἐξισώσεως $\psi = \alpha\chi$, ἢ παράλληλος εἶναι ἡ τῆς δοθείσης. Ἄγομεν τὴν τεταγμένην ΜΠ· καλοῦμεν $\varphi$ τὴν ζητουμένην γωνίαν ΕΓΧ, καὶ $\theta$

τὴν τῶν ἀξόνων ΨΑΧ. Εὑρίσκομεν, ὡς προλαβόντως, διὰ τοῦ τριγώνου ΑΜΠ,

$$\frac{\text{ἡμ}\,\varphi}{\text{ἡμ}(\theta-\varphi)} = \alpha.$$

Ἵνα ἐξάξωμεν φ ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἀκεραιοῦμεν, θέτομεν ἀντὶ ἡμ$(\theta-\varphi)$ τὴν ἀνεπτυγμένην τιμὴν αὐτοῦ, καὶ λαμβάνομεν εὐκόλως·

$$(2)\qquad \text{ἐφ}\,\varphi = \frac{\alpha\,\text{ἡμ}\,\theta}{1+\alpha\,\text{συν}\,\theta}.$$

Λοιπόν, γνωστῆς οὔσης ἐφ φ εἶναι γνωστὴ καὶ ἡ γωνία φ.

108. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν τῆς δύο δεδομένα σημεῖα ἐπιζευγνυούσης εὐθείας.*

Ἔστωσαν $\chi'$, $\psi'$, καὶ $\chi''$, $\psi''$, αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τούτων. Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἣν ὑποθέτομεν συμπίπτουσαν τῷ ἄξονι τῶν ψ, ἔσεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\psi=\alpha\chi+\beta$. Ἄγνωστοι εἰσὶν α καὶ β.

Ἵνα διέρχηται ἡ εὐθεῖα τοῦ σημείου $\chi'$, $\psi'$, πρέπει ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς νὰ ἐτυμοποιῆται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων τούτων· ἄρα

$$\psi'=\alpha\chi'+\beta.$$

Διὰ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἀπαλείφομεν τὴν ἑτέραν τῶν δύο ἀγνώστων. Πρὸς τοῦτο, ἀφαιροῦμεν αὐτὴν ἀπὸ τῆς $\psi=\alpha\chi+\beta$, καὶ λαμβάνομεν

$$\psi-\psi'=\alpha(\chi-\chi').$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐμφαίνει πᾶσαν εὐθεῖαν διερχομένην τοῦ σημείου οὗτινος αἱ συντεταγμέναι εἰσὶ $\chi'$, $\psi'$. Ἀλλὰ α μένει εἰσέτι ἀόριστος, διότι ἀπείρους εὐθείας δυνατὸν ἀγαγεῖν ἀφ' ἑνὸς σημείου.

Ἵνα διέρχηται ἡ εὐθεῖα καὶ τοῦ δευτέρου σημείου δεδομένου, πρέπει ἡ τελευταία ἐξίσωσις νὰ ἐτυμοποιῆται ὑπὸ $\chi''$, $\psi''$· ἄρα

$$\psi''-\psi'=\alpha(\chi''-\chi'),\qquad \text{ὅθεν}\qquad \alpha=\frac{\psi''-\psi'}{\chi''-\chi'}.$$

Καθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην ἀντὶ α, λαμβάνομεν τὴν



ἐξίσωσιν τῆς ὑπὸ τῶν δύο δεδομένων σημείων ὁριζομένης εὐθείας,

$$(3)\qquad \psi-\psi'=\frac{\psi''-\psi'}{\chi''-\chi'}(\chi-\chi').$$

Εὐκόλως δὲ βεβαιούμεθα ὅτι οἱ ὅροι τοῦ προβλήματος ἐκπληροῦνται, διότι $\chi=\chi'$ δίδει $\psi=\psi'$, καὶ $\chi=\chi''$ δίδει $\psi=\psi''$.

109. Ἡ ἐξίσωσις (3) δίδει πάσας τὰς μερικὰς θέσεις εὐθείας τινος, διότι αἱ συντεταγμέναι $\chi'$, $\psi'$, $\chi''$, $\psi''$, εἰσὶν οἱαιδήποτε. Θέλομεν ἰδεῖ μάλιστα ὅτι δίδει καὶ τὰς παραλλήλους τῷ ἄξονι τῶν ψ, ἂν καὶ ἀνεχωρήσαμεν ἀπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi=\alpha\chi+\beta$ μὴν ἁρμοζούσης εἰς τὰς τοιαύτας εὐθείας.

(Σχ. 41.) Ὅταν $\psi''=\psi'$, ἡ ἐξίσωσις (3) καθίσταται $\psi=\psi'$· δηλ. τότε ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν χ. Σαφὲς δὲ τοῦτο, διότι τότε διέρχεται διὰ τῶν περάτων δύο τεταγμένων ἴσων, τῶν ΜΠ, Μ'Π'.

(Σχ. 42). Ὅταν $\chi''=\chi'$, ὁ συντελεστὴς τοῦ $(\chi-\chi')$ εἰς τὸ δεύτερον μέλος καθίσταται ἄπειρος. Ἀλλ' ἐὰν ἐπιλύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν πρὸς $(\chi-\chi')$, εἶτα ὑποθέσωμεν $\chi''=\chi'$, ἕξομεν $\chi=\chi'$. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δεικνυσιν ὅτι ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν ψ. Τῷ ὄντι, τότε διέρχεται διὰ τῶν περάτων δύο τετμημένων ἴσων, τῶν ΜΚ, Μ'Κ'.

Ὑποθέσωμεν συγχρόνως $\chi''=\chi'$, $\psi''=\psi'$· ἡ ἐξίσωσις (3) καθίσταται

$$\psi-\psi'=\frac{0}{0}(\chi-\chi').$$

Ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι ἀόριστος, ἡ εὐθεῖα λαμβάνει τὴν τυχοῦσαν θέσιν περὶ τὸ σημεῖον οὗτινος αἱ συντεταγμέναι εἰσὶ $\chi'$, $\psi'$. Δῆλον δὲ τὸ τοιοῦτον, διότι τὰ δύο δοθέντα σημεῖα ταυτίζονται, ἀφ' ἑνὸς δὲ σημείου ἄπειραι εὐθεῖαι ἄγονται.

110. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν εὐθείας γραμμῆς, ἀγομένης ἀπὸ σημείου δεδομένου παραλλήλως εὐθείᾳ δεδομένῃ.*

Ἔστωσαν, $\chi'$, $\psi'$, αἱ συντεταγμέναι τοῦ δοθέντος σημείου· τῆς δοθείσης εὐθείας ἡ ἐξίσωσις $\psi=\alpha\chi+\beta$,
καὶ τῆς ζητουμένης $\psi=\alpha'\chi+\beta'$·
$\alpha'$ καὶ $\beta'$ ὄντων ἀγνώστων ἐν τῇ τελευταίᾳ.

Ἵνα ὦσιν αἱ εὐθεῖαι αὗται παράλληλοι, πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$\alpha'=\alpha.$$

Τῷ ὄντι, ἡ μὲν εἶναι παράλληλος εὐθεῖα τῆς ἀρχῆς διερχομένη καὶ ἔχουσα δι' ἐξίσωσιν $\psi=\alpha\chi$· ἡ ἑτέρα εἶναι παράλληλος εὐθεῖα ἧς ἡ ἐξίσωσις εἶναι $\psi=\alpha'\chi$. Ἀλλ' αἱ δύο τελευταῖαι εὐθεῖαι, ἔχουσαι ἓν σημεῖον κοινόν, τὴν ἀρχήν, ταυτίζονται ὅταν αἱ δύο πρῶται ὑποτεθῶσι παράλληλοι. Ἄρα, $\alpha'=\alpha$. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς παραλλήλου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καθίσταται

$$\psi=\alpha\chi+\beta'.$$

Ἐν ταύτῃ $\beta'$ εἶναι εἰσέτι ἀόριστος, διότι ὑπάρχουσιν ἄπειραι εὐθεῖαι παράλληλοι τῇ δοθείσῃ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ζητουμένη διελεύσεται τοῦ σημείου $(\chi', \psi')$, ἔχομεν,

$$\psi'=\alpha\chi'+\beta'.$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ $\beta'$, ἣν ἀντεισάγομεν ἐν τῇ προηγουμένῃ, καὶ μορφοῦμεν οὕτω τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐκπληρούσης τὸ πρόβλημα εὐθείας,

$$\psi-\psi'=\alpha(\chi-\chi').$$

**111. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** *Προσδιορίσαι τὸ σημεῖον τῆς συνδρομῆς δύο εὐθειῶν δεδομένων.*

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν,

$$\psi=\alpha\chi+\beta, \qquad \psi=\alpha'\chi+\beta'.$$

Κατὰ τὸ σημεῖον τῆς συνδρομῆς αὐτῶν, αἱ εὐθεῖαι ἔχουσι τὰς αὐτὰς συντεταγμένας· ἀντιστρόφως, αἱ συντεταγμέναι τῶν εὐθειῶν τούτων εἰσὶν ἴσαι μόνον εἰς τὸ σημεῖον καθ' ὃ συμπίπτουσιν· ἄρα, διὰ μόνον τὸ σημεῖον τοῦτο ἔχομεν

$$\alpha\chi+\beta=\alpha'\chi+\beta', \qquad \text{ὅθεν} \qquad \chi=\frac{\beta-\beta'}{\alpha'-\alpha}.$$



Θέτομεν τὴν τιμὴν ταύτην ἀντὶ $\chi$ ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς ἑτέρας τῶν εὐθειῶν, καὶ λαμβάνομεν

$$\psi=\frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha'-\alpha}.$$

**112.** Ὅταν $\alpha'=\alpha$, αἱ τιμαὶ αὗται καθίστανται ἄπειροι· ἄρα, τότε δὲν ὑπάρχει τομή. Γνωστὸν τῷ ὄντι ὅτι, ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, αἱ εὐθεῖαι εἰσὶ παράλληλοι [110].

Ὅταν συγχρόνως $\alpha'=\alpha$ καὶ $\beta'=\beta$, αἱ αὐταὶ τιμαὶ καθίστανται ἀμφότεραι $\frac{0}{0}$, ἤτοι ἀόριστοι. Λοιπόν, συνάγομεν ὅτι αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος εὐθεῖαι ταυτίζονται καθ' ὁλοκληρίαν. Τῷ ὄντι, ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει, αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο εὐθειῶν καθίστανται ἰσομερεῖς, ἤτοι ἐμφαίνουσιν ἀμφότεραι τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

**113. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** *Εὑρεῖν τὸ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστημα δύο σημείων δεδομένων.*

1ον. Ὑποθέσωμεν τοὺς ἄξονας ὀρθογωνίους (Σχ. 43).

Ἔστωσαν Μ, Ν, τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος σημεῖα· $\chi'$, $\psi'$, καὶ $\chi''$, $\psi''$, αἱ συντεταγμέναι αὐτῶν. Ἄγομεν τὰς τεταγμένας ΜΠ, ΝΚ, καὶ ΝΡ παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν $\chi$. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΜΝΡ δίδει

$$\mathrm{MN}=\sqrt{\overline{\mathrm{NP}}^2+\overline{\mathrm{MP}}^2}.$$

Ἀλλά, $\mathrm{NP}=\chi'-\chi''$, καὶ $\mathrm{MP}=\psi'-\psi''$.
Ἄρα, τὸ ζητούμενον ἀπόστημα, ὃ καλοῦμεν $\delta$, εἶναι

$$\delta=\sqrt{(\chi'-\chi'')^2+(\psi'-\psi'')^2}.$$

Ὁ γενικὸς οὗτος τύπος ἁρμόζει ἀνεξαιρέτως εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς τὰ δύο δοθέντα σημεῖα κατέχουσι θέσεις τὰς τυχούσας σχετικῶς πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, ἀρκεῖ νὰ προτάττωμεν τῶν ἐν αὐτῷ συντεταγμένων τὰ κατάλληλα πρὸς τὰς θέσεις αὐτῶν σημεῖα.

Π. χ. Ὅταν τὸ ἕτερον τῶν σημείων, Ν, ᾖναι ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων, τότε $\chi''=0$ καὶ $\psi''=0$, ὁ δὲ τύπος καθίσταται (Σχ. 39).

$$\text{ΑΜ} = \delta = \sqrt{\chi'^2+\psi'^2},$$

ὡς δῆλον ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΜΠ.

2ον. Ὑποθέσωμεν ἤδη τοὺς ἄξονας πλαγιογωνίους. (Σχ. 44).

Ἐκτελοῦντες τὰς αὐτὰς κατασκευὰς ὡς ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει, ἔχομεν ἐνταῦθα τὸ πλαγιογώνιον τρίγωνον ΜΝΡ, ὅπερ, κατὰ γνωστὸν θεώρημα, δίδει

$$\text{ΜΝ} = \sqrt{\overline{\text{ΝΡ}}^2+\overline{\text{ΜΡ}}^2-2\text{ΝΡ}\times\text{ΜΡ}\times\text{συν}\,\text{ΜΡΝ}}.$$

Ἡ γωνία ΜΡΝ εἶναι τὸ παραπλήρωμα τῆς ΨΑΧ, ἣν καλοῦμεν θ. Ἀντεισάγοντες ἀντὶ τῶν γραμμῶν τὰς αὐτὰς ὡς ἀνωτέρω τιμὰς λαμβάνομεν

$$\delta = \sqrt{(\chi'-\chi'')^2+(\psi'-\psi'')^2+2(\chi'-\chi'')(\psi'-\psi'')\,\text{συν}\theta}.$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου, τῇ ὑποθέσει $\theta=90^\circ$, προκύπτει ὁ τῆς προηγουμένης περιπτώσεως.

**114 ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** *Εὑρεῖν τὴν ὑπὸ δύο εὐθειῶν δεδομένων περιεχομένην γωνίαν.*

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν

$$\psi=\alpha\chi+\beta, \qquad \psi=\alpha'\chi+\beta'.$$

(Σχ. 45). Διὰ τῆς ἀρχῆς ἄγομεν ΑΔ, ΑΔ', παραλλήλους τῶν εὐθειῶν τούτων. Ἡ μὲν γωνία ΔΑΔ' ἰσοῦται τῇ ζητουμένῃ, αἱ δὲ ΔΑΧ, Δ'ΑΧ, ἰσοῦνται ταῖς γωνίαις ἃς αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι σχηματίζουσι πρὸς τὸν ἄξονα ΑΧ.

Καλοῦμεν ΔΑΔ'$=\Phi$, ΔΑΧ$=\varphi$, Δ'ΑΧ$=\varphi'$, καὶ ἔχομεν $\Phi=\varphi'-\varphi$. Ἄρα

$$\text{εφ}\,\Phi=\text{εφ}(\varphi'-\varphi)=\frac{\text{εφ}\,\varphi'-\text{εφ}\,\varphi}{1+\text{εφ}\,\varphi\,\text{εφ}\,\varphi'}.$$

1ον. Ὑποθέσωμεν τοὺς ἄξονας ὀρθογωνίους.

Κατὰ § 106, ἔχομεν $\text{εφ}\,\varphi=\alpha$, $\text{εφ}\,\varphi'=\alpha'$. Ἄρα

$$\text{εφ}\,\Phi=\frac{\alpha'-\alpha}{1+\alpha\alpha'}.$$



Ὁ τύπος οὗτος καθιστᾷ γνωστὴν τὴν ἐφαπτομένην τῆς ζητουμένης γωνίας.

Παρατηρητέον ὅτι, αἱ δύο δοθεῖσαι εὐθεῖαι σχηματίζουσι πρὸς ἀλλήλας δύο γωνίας διαφόρους, ἀλλὰ παραπληρωματικάς· ἐπομένως ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τῆς εφΦ, λαμβανομένη μετὰ σημείου ἐναντίου, δίδει τὴν τιμὴν τῆς ἐφαπτομένης τοῦ παραπληρώματος τῆς γωνίας ΔΑΔ'.

Ὅταν αἱ δύο εὐθεῖαι ὦσι παράλληλοι, ἔχομεν $\Phi=0$, ἐπομένως

$$\frac{\alpha'-\alpha}{1+\alpha\alpha'}=0, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \alpha'=\alpha \qquad [110].$$

Τεθείσθω ὅτι οὐδεμία τῶν ποσοτήτων $\alpha$, $\alpha'$, εἶναι ἄπειρος· πρέπει νὰ ἔχωμεν $\alpha'-\alpha=0$, καὶ $1+\alpha\alpha'$ διάφορον 0. Ἀλλ' ἡ δευτέρα αὕτη συνθήκη εἶναι συνέπεια τῆς πρώτης, διότι $1+\alpha\alpha'$ καθίσταται $1+\alpha^2$.

Ἐὰν ἡ ἑτέρα τῶν ποσοτήτων $\alpha$, $\alpha'$, ἦναι ἄπειρος, π. χ. $\alpha'$, τῇ διαιρέσει διὰ ταύτης ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τῆς τιμῆς τῆς εφΦ, λαμβάνομεν

$$\frac{1-\dfrac{\alpha}{\alpha'}}{\dfrac{1}{\alpha'}+\alpha}=0,$$

ἤ, διότι $\alpha'$ εἶναι ἄπειρος, $\dfrac{1}{\alpha}=0$, δι' ὃ ἀπαιτεῖται καὶ $\alpha$ νὰ ἦναι ἐπίσης ἄπειρος. Ἄρα ἔχομεν καὶ αὖθις

$$\alpha'=\alpha.$$

Ὅταν αἱ δύο εὐθεῖαι τέμνωνται πρὸς ὀρθάς, ἡ τιμὴ τῆς εφΦ πρέπει νὰ ἦναι ἄπειρος· ὅθεν ἡ σχέσις

$$1+\alpha\alpha'=0.$$

Διότι, ἐὰν $\alpha$ καὶ $\alpha'$ ἔχωσι τιμὰς πεπερασμένας, πρέπει νὰ ἔχωμεν $1+\alpha\alpha'=0$, οὐχὶ δὲ καὶ $\alpha'-\alpha=0$· ἡ δευτέρα δὲ αὕτη συνθήκη εἶναι, ὡς εἴδομεν, συνέπεια τῆς πρώτης.

Ἐὰν ἡ ἑτέρα τῶν ποσοτήτων $\alpha$, $\alpha'$, ἦναι ἄπειρος, π. χ. $\alpha'$, τῇ διαιρέσει διὰ ταύτης ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τῆς τιμῆς τῆς ἐφΦ, λαμβάνομεν,

$$\frac{1-\dfrac{\alpha}{\alpha'}}{\dfrac{1}{\alpha'}-\alpha}=\infty$$

ἢ, διότι $\alpha'$ εἶναι ἄπειρος, $\dfrac{1}{\alpha}=\infty$, ὅπερ ἀπαιτεῖ καὶ $\alpha=0$. Αἱ τιμαὶ αὗται τῶν $\alpha$, $\alpha'$, ἐπαληθεύουσι τὴν σχέσιν $1+\alpha\alpha'=0$, γραφομένην οὕτω $\dfrac{1}{\alpha'}+\alpha=0$.

115. 2ον. Ὑποθέσωμεν τοὺς ἄξονας τεμνομένους ὑπὸ τὴν τυχοῦσαν γωνίαν $\theta$.

Κατὰ § 107 ἔχομεν

$$\text{ἐφ}\varphi=\frac{\alpha\,\text{ημ}\,\theta}{1+\alpha\,\text{συν}\,\theta}, \qquad \text{ἐφ}\varphi'=\frac{\alpha'\,\text{ημ}\,\theta}{1+\alpha'\,\text{συν}\,\theta}.$$

Θέτομεν τὰς τιμὰς ταύτας ἀντὶ ἐφφ, ἐφφ', καὶ λαμβάνομεν, μετὰ τὰς ἀναγωγάς,

$$\text{ἐφ}\Phi=\frac{(\alpha'-\alpha)\,\text{ημ}\,\theta}{1+\alpha\alpha'+(\alpha+\alpha')\,\text{συν}\,\theta}.$$

Ἀποδεικνύομεν καὶ αὖθις ὅτι, ὅταν αἱ εὐθεῖαι ὦσι παράλληλοι, $\alpha'=\alpha$, ὅταν δὲ κάθετοι, πάντοτε ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$1+\alpha\alpha'+(\alpha+\alpha')\,\text{συν}\,\theta=0.$$

Ἡ τοῦ παραλληλισμοῦ συνθήκη ἐκπληροῦται ὅταν $\alpha'-\alpha=0$, τοῦ παρονομαστοῦ διαφέροντος μηδενός, ἢ ἀκόμη, ὅταν ὁ παρονομαστὴς ἦναι ἄπειρος, τοῦ ἀριθμητοῦ ἔχοντος τιμὴν πεπερασμένην.

Ἡ συνθήκη $\alpha'-\alpha=0$, καθιστᾷ τὸν παρονομαστὴν

$$1+\alpha^2+2\alpha\,\text{συν}\,\theta,$$

ὅστις ἀδύνατον νὰ ἦναι μηδέν, διότι

$$1+\alpha^2+2\alpha\,\text{συν}\,\theta=(\alpha+\text{συν}\,\theta)^2+\text{ημ}^2\theta.$$



Ὅπως ᾖ ὁ παρονομαστὴς ἄπειρος, πρέπει ἡ ἑτέρα τῶν ποσοτήτων $\alpha$ ἢ $\alpha'$ νὰ ἦναι καὶ αὐτὴ ἄπειρος· ἔστω π. χ. ἡ $\alpha'$. Τῇ διαιρέσει διὰ ταύτης ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τῆς τιμῆς τῆς ἐφΦ, ἔχομεν

$$\text{ἐφ}\Phi=\frac{\left(1-\dfrac{\alpha}{\alpha'}\right)\text{ημ}\,\theta}{\dfrac{1}{\alpha'}+\alpha+\left(\dfrac{\alpha}{\alpha'}+1\right)\text{συν}\,\theta}.$$

ἢ, ἐπειδὴ $\alpha'=\infty$

$$\text{ἐφ}\Phi=\frac{\text{ημ}\,\theta}{\alpha+\text{συν}\,\theta}.$$

Ὅπως ᾖ ἡ ἐφαπτομένη αὕτη μηδέν, πρέπει $\alpha=\infty$· ἄρα ἔχομεν καὶ αὖθις $\alpha=\alpha'$.

Ὅταν αἱ δύο εὐθεῖαι τέμνωνται πρὸς ὀρθάς, πρέπει νὰ ἔχωμεν ἐφΦ $=\infty$.

Ἵνα δὲ ὑπάρχῃ τοῦτο, πρέπει ὁ παρονομαστὴς νὰ ἦναι 0, οὐχὶ δὲ καὶ ὁ ἀριθμητής· ἢ ὁ ἀριθμητὴς ἄπειρος, τοῦ παρονομαστοῦ ἔχοντος τιμὴν πεπερασμένην.

Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει,

$$1+\alpha\alpha'+(\alpha+\alpha')\,\text{συν}\,\theta=0,$$

γινώσκομεν δὲ ὅτι, τότε ὁ ἀριθμητὴς ἀδύνατον νὰ ἦναι μηδέν.

Ἐν τῇ δευτέρᾳ, ἡ ἑτέρα τῶν ποσοτήτων $\alpha$, $\alpha'$, πρέπει νὰ ἦναι ἄπειρος· ἔστω ἡ $\alpha'$. Τῇ διαιρέσει διὰ $\alpha'$ ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τῆς τιμῆς ἐφΦ, λαμβάνομεν,

$$\text{ἐφ}\Phi=\frac{\left(1-\dfrac{\alpha}{\alpha'}\right)\text{ημ}\,\theta}{\dfrac{1}{\alpha'}+\alpha+\left(\dfrac{\alpha}{\alpha'}+1\right)\text{συν}\,\theta}=\frac{\text{ημ}\,\theta}{\alpha+\text{συν}\,\theta},$$

ὅταν $\alpha'=\infty$. Ἡ συνθήκη $\alpha'=\infty$ δὲν ἐπαρκεῖ ἵνα καταστασταθῇ ἄπειρος ἡ τιμὴ τῆς ἐφΦ· πρέπει νὰ ἔχωμεν προσέτι $\alpha = -\sigma\upsilon\nu\theta$. Ἀλλ' αἱ τιμαὶ αὗται τῶν $\alpha'$, $\alpha$, ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν,

$$1+\alpha\alpha'+(\alpha+\alpha')\sigma\upsilon\nu\theta=0,$$

τιθεμένην ὑπὸ τὴν μορφὴν,

$$\frac{1}{\alpha'}+\alpha+\left(\frac{\alpha}{\alpha'}+1\right)\sigma\upsilon\nu\theta=0.$$

116. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Ἀπὸ σημείου δεδομένου ἀγαγεῖν κάθετον ἐπ' εὐθεῖαν δεδομένην· εὑρεῖν τὸ μῆκος τοῦ περιεχομένου μέρους τῆς καθέτου ταύτης μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς εὐθείας.*

Ἔστωσαν, $\chi'$, $\psi'$, αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου καὶ $\psi=\alpha\chi+\beta$ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας. Ἡ τῆς ζητουμένης εὐθείας ἐξίσωσις, κατὰ § 108, ἔσεται

$$\psi-\psi'=\alpha'(\chi-\chi'),$$

$\alpha'$ ὄντος ἀγνώστου. Ἀλλ' ἡ συνθήκη τοῦ νὰ ἦναι κάθετος ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν, ἀπαιτεῖ τὴν ὕπαρξιν, πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους, τῆς σχέσεως [114]

$$1+\alpha\alpha'=0, \qquad \text{ἐξ ἧς} \qquad \alpha'=-\frac{1}{\alpha}.$$

Ἄρα, ἡ ἐξίσωσις τῆς ζητουμένης καθέτου εἶναι

$$\psi-\psi'=-\frac{1}{\alpha}(\chi-\chi').$$

Ἵνα εὕρωμεν τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου καθ' ὃ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ ἡ ἐπ' αὐτὴν κάθετος συμπίπτουσιν, ἐξάγομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν τὰς τιμὰς τῶν $\chi$, $\psi$, [111]. Πρὸς εὐχερεστέραν ἐκτέλεσιν τῆς ἀπαλοιφῆς, δίδομεν τῇ πρώτῃ τὴν μορφὴν

$$\psi-\psi'=\alpha(\chi-\chi')+\beta+\alpha\chi'-\psi'.$$

Συνδυάζομεν ταύτην τῇ ἐξισώσει τῆς καθέτου, λαμβάνοντες ὡς ἀγνώστους τὰς διαφορὰς $\chi-\chi'$, $\psi-\psi'$ εὑρίσκομεν



$$\chi-\chi'=\frac{\alpha(\psi'-\alpha\chi'-\beta)}{1+\alpha^2}, \qquad \psi-\psi'=\frac{\psi'-\alpha\chi'-\beta}{1+\alpha^2}.$$

Ἐκ τῶν τύπων τούτων πορίζόμεθα τὰς συντεταγμένας τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου.

Καλέσωμεν ἤδη $\kappa$ τὸ ζητούμενον μῆκος ἐπὶ τῆς καθέτου. Ἡ ἔκφρασις αὐτοῦ ἔσεται [113],

$$\kappa=\sqrt{(\chi-\chi')^2+(\psi-\psi')^2}.$$

Καθιστῶμεν ἐν αὐτῇ, ἀντὶ $\chi-\chi'$ καὶ $\psi-\psi'$, τὰς τιμὰς αὐτῶν, καὶ λαμβάνομεν

$$\kappa=\pm\frac{\psi'-\alpha\chi'-\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τοῦ $\kappa$ πρέπει νὰ ἦναι θετικὴ, λαμβάνομεν τὸ ἀνώτερον μὲν σημεῖον ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἦναι θετικὸς, τὸ κατώτερον δὲ ὅταν ἦναι ἀρνητικός. Τὸ σημεῖον τοῦ ἀριθμητοῦ τούτου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τῆς θέσεως τοῦ δοθέντος σημείου σχετικῶς πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Ὅταν τὸ δοθὲν σημεῖον ἦναι ἐν τῇ ἀρχῇ τῶν συντεταγμένων, τότε $\chi'=0$, $\psi'=0$, ἡ δ' ἔκφρασις τοῦ $\kappa$ καθίσταται

$$\kappa=\frac{\pm\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

Ὅταν τὸ αὐτὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας, τότε ἡ τιμὴ τοῦ $\kappa$ μηδενίζεται, διότι $\psi'=\alpha\chi'+\beta$.

117. Ὅταν οἱ ἄξονες ὦσι πλαγιογώνιοι, τότε, κατὰ § 115,

$$\alpha'=\frac{-1-\alpha\,\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha+\sigma\upsilon\nu\theta},$$

ἡ δ' ἐξίσωσις τῆς καθέτου ἔσεται

$$\psi-\psi'=\frac{-1-\alpha\,\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha+\sigma\upsilon\nu\theta}(\chi-\chi').$$

Συνδυάζοντες αὐτὴν τῇ τῆς δοθείσης εὐθείας, τιθεμένῃ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\psi - \psi' = \alpha(\chi - \chi') + \beta + \alpha\chi' - \psi',$$

εὑρίσκομεν

$$\chi - \chi' = \frac{(\alpha + \sigma\upsilon\nu\,\theta)\,(\psi' - \alpha\chi' - \beta)}{1 + \alpha^2 + 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\theta},$$

$$\psi - \psi' = \frac{-(1 + \alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\theta)\,(\psi' - \alpha\chi' - \beta)}{1 + \alpha^2 + 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\theta}.$$

Ἵνα εὕρωμεν τὸ μῆκος κ τῆς καθέτου, καθιστῶμεν τὰς τιμὰς ταύτας ἐν τῷ τύπῳ τοῦ § 113 [2ον]. Μετὰ τὰς ἀναγωγὰς ἔξομεν,

$$\kappa = \pm \frac{(\psi' - \alpha\chi' - \beta)\,\eta\mu\,\theta}{\sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\theta}}.$$

148. Πρὸς ἄσκησιν προσθέσομεν προτάσεις τινὰς ὧν ἡ ἐπίλυσις εἶναι ζητητέα.

1) *Ἐν παντὶ τριγώνῳ, αἱ ζευγνύουσαι εὐθεῖαι τὰς κορυφὰς ἐπὶ τὰ μέσα τῶν ἀπεναντίον πλευρῶν, συμπίπτουσι κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον.* (Κέντρον βαρύτητος).

2) *Ἐν παντὶ τριγώνῳ, αἱ ἀγόμεναι κάθετοι ἀπὸ τῶν κορυφῶν ἐπὶ τὰς ἀπεναντίον πλευράς, συμπίπτουσι κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον.*

3) *Ἐν παντὶ τριγώνῳ, αἱ ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰ μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν, συμπίπτουσι κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον.* (Κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου).

4) *Ἐν παντὶ τριγώνῳ, αἱ διχοτομοῦσαι τὰς τρεῖς γωνίας εὐθεῖαι συμπίπτουσι κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον.* (Κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου).

5) *Ἐν παντὶ τριγώνῳ εὐθυγράμμῳ, τὸ κέντρον βαρύτητος, τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τὸ σημεῖον συνδρομῆς τῶν τριῶν ὕψεων εἰσὶ πάντοτε ἐν εὐθυγραμμίᾳ· τὸ ἀπόστημα δὲ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τελευταίου ἀπ' ἀλλήλων εἶναι διπλοῦν τοῦ ἀπ' ἀλλήλων ἀποστήματος τῶν δύο πρώτων σημείων.*



6) *Γνωστῶν οὐσῶν τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν τριγώνου εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.*

7) *Τὴν ἐξίσωσιν εὑρεῖν τῆς εὐθείας διχοτομούσης τὴν ὑπὸ δύο εὐθειῶν δεδομένων περιεχομένην γωνίαν.*

8) *Ἐν παντὶ τετραπλεύρῳ, αἱ ζευγνύουσαι σύνδυο τὰ μέσα τῶν πλευρῶν εὐθεῖαι συγκροτοῦσι παραλληλόγραμμον.*

9) *Ἀπὸ σημείου δεδομένου ἀγαγεῖν εὐθεῖαν τέμνουσαν πρὸς ἴσας γωνίας δύο εὐθείας δεδομένας.*

10) *Αἱ διαγώνιοι παντὸς παραλληλογράμμου δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.*

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

### ΓΡΑΜΜΑΙ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ.

#### ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ ΕΙΣ ΤΡΙΑ ΓΕΝΗ.

149. Ἡ γενικὴ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις, περιεκτικὴ χ καὶ ψ, εἶναι

$$\text{(A)} \qquad \mathrm{A}\psi^2 + \mathrm{B}\chi\psi + \Gamma\chi^2 + \Delta\psi + \mathrm{E}\chi + \mathrm{Z} = 0.$$

Ὅταν ὁ συντελεστὴς Α διαφέρῃ μηδενός, ἐπιλυομένη πρὸς ψ δίδει,

$$\psi = -\frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{A}}\chi - \frac{\Delta}{2\mathrm{A}}$$

$$\pm \frac{1}{2\mathrm{A}}\sqrt{(\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{A}\Gamma)\chi^2 + 2(\mathrm{B}\Delta - 2\mathrm{AE})\chi + \Delta^2 - 4\mathrm{AZ}}.$$

Πρὸς συντομίαν καθιστῶμεν,

$$\alpha = \frac{-B}{2A},\qquad \beta = \frac{-\Delta}{2A},\qquad \nu = B^2 - 4A\Gamma,$$

$$\pi = B\Delta - 2AE,\qquad \kappa = \Delta^2 - 4AZ,$$

καὶ ἔχομεν

$$\psi = \alpha\chi + \beta \pm \frac{1}{2A}\sqrt{\nu\chi^2 + 2\pi\chi + \kappa}\,.$$

Αἱ δύο τιμαὶ αὗται ἔχουσιν ἓν μέρος ἔμμετρον κοινόν, $\alpha\chi + \beta$, ὅπερ εἶναι ἡ τεταγμένη γραμμῆς εὐθείας δηλουμένης ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \alpha\chi + \beta$· ὑποθέσωμεν ταύτην κατασκευασθεῖσαν, καὶ ἔστω ἡ ΘΘ′ (Σχ. 46). Ἵνα λάβωμεν τὰ διὰ τῆς ἐξισώσεως (Λ) ὁριζόμενα σημεῖα ἐπί τινα τετμημένην ΑΠ, ἄγομεν πρῶτον τὴν τεταγμένην ΠΚ τῆς εὐθείας ΘΘ′, εἶτα λαμβάνομεν κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΠΚ, ἄνω καὶ κάτω τῆς ΘΘ′, δύο μήκη ΚΜ, ΚΝ, ἴσα ἕκαστον τῇ ἀντιστοιχούσῃ τιμῇ τοῦ ἐκμέτρου μέρους

$$\frac{1}{2A}\sqrt{\nu\chi^2 + 2\pi\chi + \kappa}\,.$$

Δῆλον ὅτι, κατὰ τὴν κατασκευὴν ταύτην, ἔχομεν,

$$\Pi M = \Pi K + KM = \alpha\chi + \beta + \frac{1}{2A}\sqrt{\nu\chi^2 + 2\pi\chi + \kappa}\,,$$

$$\Pi N = \Pi K - KN = \alpha\chi + \beta - \frac{1}{2A}\sqrt{\nu\chi^2 + 2\pi\chi + \kappa}\,.$$

Ἐπαναλαμβανομένης τῆς αὐτῆς διὰ πάσας τὰς τῆς χ τιμάς, τὰς καθιστώσας τὸ ῥιζικὸν πραγματικόν, εὑρήσομεν ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (Λ) ἐμφαινομένης γραμμῆς.

120. Ἡ εὐθεῖα ΘΘ′ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \alpha\chi + \beta$, διχοτομεῖ ἁπάσας τὰς ἀγομένας παραλλήλους τῷ ἄξονι τῶν τεταγμένων, μεταξὺ δύο σημείων τῆς καμπύλης· ἕνεκα τοῦ ἰδιώματος τούτου καλεῖται *διάμετρος*.

Πρὸς συντομίαν, καλέσομεν *τεταγμένην ἀπὸ τῆς διαμέ-*



*τρου* τὴν ποσότητα ἣν λαμβάνομεν ἄνω καὶ κάτω τῆς ΘΘ′, παριστήσομεν δὲ αὐτὴν τῷ Ψ.

121. Ἵνα γνωσθῶσιν ἡ ἔκτασις καὶ τὰ ὅρια τῆς καμπύλης, ζητητέον τὴν ἔκτασιν καὶ τὰ ὅρια τῶν τιμῶν τῆς χ αἵτινες καθιστῶσι πραγματικήν, μηδέν, ἢ φανταστικὴν τὴν ἀπὸ τῆς διαμέτρου τεταγμένην Ψ, ἤ, ὅπερ εἶναι τὸ αὐτό, καθιστῶσι τὴν ὑπόῤῥιζον ποσότητα $\nu\chi^2 + 2\pi\chi + \kappa$ θετικήν, μηδέν, ἢ ἀρνητικήν.

Ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ δεικνύεται ὅτι, διὰ πᾶν πολυώνυμον

$$\zeta\chi^{\mu} + \eta\chi^{\mu-1} + \theta\chi^{\mu-2} + \dots$$

εὑρίσκομεν πάντοτε δύο τιμὰς τοῦ χ, τὴν μὲν θετικήν, τὴν δὲ ἀρνητικήν, τοιαύτας ὥστε πᾶσαι αἱ μείζονες αὐτῶν θετικαὶ καὶ ἀρνητικαί, δίδουσι τῷ πολυωνύμῳ τιμὰς ἐχούσας σημεῖον τὸ αὐτὸ τοῦ πρώτου ὅρου. Ἀποδεικνύεται προσέτι ὅτι, αὐξανομένου τοῦ χ ἐπ' ἄπειρον, αἱ τιμαὶ τοῦ πολυωνύμου αὐξάνουσι καὶ αὗται ἐπ' ἄπειρον. Οὕτως, ἀπό τινων τιμῶν τοῦ χ, θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν, ἡ ποσότης $\nu\chi^2 + 2\pi\chi + \kappa$ ἕξει τιμὰς αὐξανούσας ἐπ' ἄπειρον καὶ ἐχούσας τὸ αὐτὸ τοῦ πρώτου ὅρου $\nu\chi^2$ σημεῖον. Ἐπειδὴ δὲ $\chi^2$ εἶναι πάντοτε θετικόν, τὸ σημεῖον τοῦτο ἔσεται τὸ τοῦ ν, ἤτοι τοῦ $B^2 - 4A\Gamma$.

Ἐντεῦθεν προκύπτουσιν αἱ ἑξῆς συνέπειαι.

122. Ὅταν ὁ συντελεστὴς $B^2 - 4A\Gamma$ ἦναι ἀρνητικός, ὑπάρχουσι τιμαὶ τῆς χ πέραν τῶν ὁποίων ἡ τεταγμένη Ψ ἔσεται πάντοτε φανταστική, οἱονδήποτε εἶναι τὸ σημεῖον τῆς χ. Ἀλλά, διὰ τιμὰς τῆς χ μεταξὺ τῶν ὁποίων Ψ μένει πραγματική, ἡ τεταγμένη αὕτη οὐ καθίσταται ἄπειρος. Ἄρα, ἡ καμπύλη, ἣν ἡ ἐξίσωσις (Λ) ἐμφαίνει τότε, εἶναι περιωρισμένη κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν τετμημένων, θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν, ἄνω καὶ κάτω τῆς διαμέτρου.

Ἡ καμπύλη αὕτη καλεῖται ΕΛΛΕΙΨΙΣ.

123. Ὅταν ὁ συντελεστὴς $B^2 - 4A\Gamma$ ἦναι θετικός, ὑπάρχουσι τιμαὶ τῆς χ, θετικαὶ καὶ ἀρνητικαί, πέραν τῶν ὁποίων ἡ τεταγμένη Ψ ἔσεται πάντοτε πραγματική. Ἀλλ' ἡ τεταγμένη αὕτη αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον. Λοιπόν, ἡ καμπύλη,

ἣν ἐμφαίνει τότε ἡ ἐξίσωσις (Α), ἐκτείνεται ἀπεριορίστως κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν τετμημένων, θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν, ἄνω καὶ κάτω τῆς διαμέτρου· ἤτοι, ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον κατὰ τέσσαρα διάφορα μέρη.

Ἡ καμπύλη αὕτη καλεῖται ΥΠΕΡΒΟΛΗ.

124. Ὅταν $B^2 - 4A\Gamma = 0$, ἔχομεν ἁπλῶς,

$$\Psi = \frac{1}{2A}\sqrt{2\pi\chi + \kappa}\,.$$

Τότε, εἰ $\pi$ ἦναι θετικός, $\chi$ αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον θετικῶς· $\Psi$ ἔσεται πραγματικὴ αὐξάνουσα ἐπίσης ἐπ' ἄπειρον. Ἀλλά, διὰ τιμὰς τῆς $\chi$ ἀρνητικάς, $\Psi$ ἔσεται φανταστική, ἢ καταστάθήσεται τοιαύτη ὅταν $\chi$ ὑπερβῇ ὡρισμένον μέγεθος. Ἄρα, ἡ καμπύλη εἶναι περιωρισμένη πρὸς τὸ μέρος τῶν ἀρνητικῶν $\chi$. Τὸ ἐναντίον συμβαίνει ὅταν $\pi$ ἦναι ποσότης ἀρνητική. Οὕτως, ἐν ἀμφοτέραις ταῖς ῥηθείσαις περιπτώσεσιν, ἡ καμπύλη εἶναι μὲν ἀπεριόριστος ἄνω καὶ κάτω τῆς διαμέτρου, ἀλλὰ πρὸς ἓν μόνον μέρος τῆς ἀρχῆς· ὥστε ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον κατὰ δύο μόνον διευθύνσεις.

Ἡ καμπύλη αὕτη καλεῖται ΠΑΡΑΒΟΛΗ.

ΣΗΜ. Ἀκολούθως θεωρήσομεν τὴν μερικὴν περίπτωσιν ἐν ᾗ ἔχομεν συγχρόνως $B^2 - 4A\Gamma = 0$, καὶ $\pi = 0$, διότι τότε ἡ $\Psi$ μένει ἄτρεπτος, ἡ δὲ προτεθεῖσα ἐξίσωσις οὐκ ἐμφαίνει γραμμὴν καμπύλην.

125. Κατὰ τὰ προλεχθέντα, τρία γένη καμπύλων τῆς δευτέρας τάξεως διακρίνονται. Ἡ διάκρισις αὕτη, καὶ μὲν φαίνεται ἀπαιτοῦσα νὰ ἦναι δευτεροβάθμιος εἰς $\psi$ ἡ ἐξίσωσις, ἀλλὰ δείξομεν ὅτι συμπεριλαμβάνει καὶ τὰς λοιπὰς περιπτώσεις.

Ὅταν ὁ συντελεστὴς Α ἦναι μηδέν, οὐχὶ δὲ καὶ ὁ Γ, ἡ ἐξίσωσις (Α) εἶναι δευτεροβάθμιος εἰς $\chi$. Ἐπιλύσωμεν αὐτὴν πρὸς τὴν μεταβλητὴν ταύτην·

$$\chi = -\frac{B}{2\Gamma}\psi - \frac{E}{2\Gamma} \pm \frac{1}{2\Gamma}\sqrt{B^2\psi^2 + 2(BE - 2\Gamma\Delta)\psi - E^2 - 4\Gamma Z}\,.$$



Ὁ ὅρος $B^2\psi^2$, εἰ Β διαφέρει μηδενός, εἶναι θετικός. Συλλογιζόμενοι δὲ ὡς ἀνωτέρω, θέτοντες πανταχοῦ $\psi$ ἀντὶ $\chi$, πληροφορούμεθα ὅτι ἡ καμπύλη εἶναι ἀπεριόριστος πρὸς τέσσαρα μέρη, οὗ ἕνεκα ἀνήκει εἰς τὸ γένος τῶν ὑπερβολῶν· ἀνήκει δὲ εἰς τὸ γένος τοῦτο καὶ συνεπείᾳ τοῦ ἀναλυτικοῦ χαρακτῆρος, διότι ἡ ποσότης $B^2 - 4A\Gamma$, ἥτις ἐνταῦθα ἄγεται εἰς $B^2$, εἶναι θετική.

Ὅταν $B = 0$, $\psi$ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν εἶναι τοῦ πρώτου βαθμοῦ μόνον, εὐκόλως δ' ἐξιχνιάζομεν ὅτι ἡ ἐμφαινομένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως καμπύλη συγκαταλέγεται ταῖς παραβολαῖς. Τὸ αὐτὸ δείκνυσι καὶ ὁ ἀναλυτικὸς χαρακτήρ, διότι, ἕνεκα τῶν ὑποθέσεων $A = 0$, $B = 0$, ἔχομεν $B^2 - 4A\Gamma = 0$.

126. Συμβαίνει νὰ ἔχομεν ὁμοῦ $A = 0$, καὶ $\Gamma = 0$. Τότε ἡ ἐξίσωσις (Α) ἔσεται

$$B\chi\psi + \Delta\psi + E\chi + Z = 0,$$

ἐπιλύεται δὲ ὡς πρωτοβάθμιος δίδουσα,

$$\psi = \frac{-E\chi - Z}{B\chi + \Delta} = \frac{-E - \frac{Z}{\chi}}{B + \frac{\Delta}{\chi}},$$

ἢ

$$\chi = \frac{-\Delta\psi - Z}{B\psi + E} = \frac{-\Delta - \frac{Z}{\psi}}{B + \frac{E}{\psi}}.$$

Ἡ τιμὴ τοῦ $\psi$ δεικνυσιν ὅτι, καθιστῶντες $\chi$ ἴσον $+\infty$ ἢ $-\infty$, ἔχομεν $\psi = \frac{-E}{B}$. Λοιπόν, ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν $\psi$, (Σχ. 47), κατὰ διεύθυνσιν κατάλληλον, μῆκος $AB = \frac{-E}{B}$, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου Β ἄξωμεν Θ'Θ παράλληλον τῷ ἄξονι ΑΧ, ἡ γραμμὴ τῆς δευτέρας τάξεως συμπεσεῖται τῇ παραλλήλῳ ταύτῃ ἐν ἀποστάσει ἀπείρῳ ἀπὸ τοῦ σημείου Β, πρὸς ἀμφότερα τὰ μέρη ΒΘ, ΒΘ'·

ἄρα, ἐκτείνεται ἀπεριορίστως κατ' ἀμφοτέρας τὰς διευθύνσεις.

Ἡ τιμὴ τοῦ χ δείκνυσιν ὅτι, καθιστῶντες ψ ἴσον $+\infty$ ἢ $-\infty$, ἔχομεν $\chi = \frac{-\Delta}{B}$. Λοιπὸν, ἐὰν ἄξωμεν ΚΚ παράλληλον τῷ ἄξονι ΑΨ, πρὸς τὸ κατάλληλον μέρος, καὶ ἐν ἀποστάσει ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ΑΓ ἴση τῇ τετμημένῃ $\frac{-\Delta}{B}$, ἡ καμπύλη συμπεσεῖται τῇ παραλλήλῳ ταύτῃ εἰς τὸ ἄπειρον, ἤτοι ἐκτείνεται ἀπεριορίστως πρὸς ἀμφότερα τὰ μέρη ΓΚ, ΓΚ'. Ἄρα ἡ καμπύλη ἔχει τέσσαρα μέρη ἀπεριόριστα, καὶ ἕνεκα τούτου συγκαταλέγεται ταῖς ὑπερβολαῖς.

Παρατηρητέον προσέτι ὅτι, ἡ ποσότης $B^2-4A\Gamma$ εἶναι καὶ αὖθις θετική, ὡς καθισταμένη $B^2$, Β δὲ διαφέρει μηδενὸς, διότι ἄλλως ἡ ἐξίσωσις δὲν ἤθελεν εἶσθαι δευτεβάθμιος.

127. Πρόδηλον ἔγινεν ἤδη ὅτι, τρία γένη καμπύλων τῆς δευτέρας τάξεως μόνον διακριτέα εἰσίν, ἤτοι·

1ον. Αἱ ΕΛΛΕΙΨΕΙΣ, καμπύλαι περιωρισμέναι πανταχόθεν, δι' ἃς ἔχομεν

$$B^2-4A\Gamma<0.$$

2ον. Αἱ ΥΠΕΡΒΟΛΑΙ, καμπύλαι ἀπεριόριστοι πανταχόθεν δι' ἃς ἔχομεν

$$B^2-4A\Gamma>0.$$

3ον. Αἱ ΠΑΡΑΒΟΛΑΙ, καμπύλαι ἀπεριόριστοι ἀφ' ἑνὸς μέρους, περιωρισμέναι δὲ ἀφ' ἑτέρου, δι' ἃς ἔχομεν

$$B^2-4A\Gamma=0.$$

Ὅταν τὸ τριώνυμον $A\psi^2+B\chi\psi+\Gamma\chi^2$ ἦναι ἐντελὲς τετράγωνον, ὑπάρχει ἡ σχέσις $B^2-4A\Gamma=0$. Λοιπὸν, λέγομεν ὅτι, *ἐν αἷς περιπτώσεσιν ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ἐμφαίνει παραβολὴν, οἱ τρεῖς ὅροι τοῦ δευτέρου βαθμοῦ συγκροτοῦσι τετράγωνον.*

Ἡ ἀντίστροφος πρότασις εἶναι ἀληθής.

Ἐξετάσωμεν ἤδη ἰδίᾳ ἕκαστον τῶν τριῶν γενῶν τῶν καμπύλων.



ΔΙΑΣΚΟΠΗΣΙΣ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΨΕΩΣ. $B^2-4A\Gamma<0$.

128. Καλοῦμεν $-\delta^2$ τὴν ἀρνητικὴν ποσότητα $B^2-4A\Gamma$, καὶ γράφομεν τὰς ἐκ τῆς ἐξισώσεως (Α) τιμὰς, [119], ὡς ἑξῆς.

$$\psi=\alpha\chi+\beta\pm\frac{\delta}{2A}\sqrt{-\left(\chi^2-\frac{2\pi}{\delta^2}\chi-\frac{\kappa}{\delta^2}\right)}.$$

(Σχ. 48). Ἔστω Θ'Θ ἡ διάμετρος ἧς ἡ ἐξίσωσις $\psi=\alpha\chi+\beta$. Ζητήσωμεν τὰ σημεῖα καθ' ἃ αὕτη τέμνει τὴν καμπύλην. Εἰς τὰ σημεῖα ἐκεῖνα ἡ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τεταγμένη Ψ εἶναι μηδὲν, ἑπομένως αἱ τετμημέναι τῶν αὐτῶν δίδονται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\chi^2-\frac{2\pi}{\delta^2}\chi-\frac{\kappa}{\delta^2}=0. \tag{1}$$

Καλοῦμεν χ', χ'', τὰς ῥίζας αὐτῆς, αἵτινες συμβαίνει νὰ ὦσι πραγματικαὶ καὶ ἄνισαι, ἢ πραγματικαὶ καὶ ἴσαι, ἢ φανταστικαί. Ἐξετάσωμεν διαδοχικῶς τὰς τρεῖς ταύτας περιπτώσεις.

129. 1η. Τεθείσθωσαν χ' καὶ χ'' ποσότητες πραγματικαὶ καὶ ἄνισαι. Ἡ καμπύλη τότε ἔχει δύο σημεῖα ἐπὶ τῆς διαμέτρου. Ἵνα δὲ ἐξηγηθῶμεν σαφέστερα, ὑποθέσωμεν χ', χ'', θετικὰς καὶ χ' ἐλάσσονα χ''. Κατασκευάζομεν τὰ ἐπὶ τῆς διαμέτρου σημεῖα· πρὸς τοῦτο, λαμβάνομεν ΑΒ=χ', ΑΒ'=χ''· ἀπὸ τῶν σημείων Β καὶ Β' ἄγομεν ΓΔ, Γ'Δ', παραλλήλους τῷ ἄξονι τῶν ψ· τὰ σημεῖα Θ καὶ Θ' καθ' ἃ αὗται τέμνουσι τὴν διάμετρον Θ'Θ εἰσὶ κοινὰ τῇ καμπύλῃ.

Κατὰ § 120, ἔχομεν

$$\Psi=\frac{\delta}{2A}\sqrt{-\left(\chi^2-\frac{2\pi}{\delta^2}\chi-\frac{\kappa}{\delta^2}\right)}.$$

Ἵνα δὲ ἐννοήσωμεν εὐκολώτερον τὴν πρόοδον τῆς τεταγμένης ταύτης, πρὸς πᾶν μέγεθος τῆς χ, ἀναλύσωμεν εἰς παράγοντας τὸ ὑπόρριζον πολυώνυμον·

$$\Psi = \frac{\delta}{2\Lambda}\sqrt{(\chi - \chi')\,(\chi'' - \chi)}\,.$$

Τούτου τεθέντος, δῆλον ὅτι ἀπὸ Α ἕως Β ἡ τετμημένη χ εἶναι ἐλάσσων χ΄ καὶ χ΄΄· ἄρα, ὁ μὲν παράγων $(\chi - \chi')$ εἶναι ἀρνητικὸς, ὁ δὲ $(\chi'' - \chi)$ θετικός· ἄρα Ψ εἶναι φανταστικὴ, καὶ ἑπομένως οὐδὲν σημεῖον τῆς καμπύλης ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ ἄξονος ΑΨ καὶ τῆς παραλλήλου ΓΔ ἀπὸ τοῦ σημείου Β ἀγομένης.

Ἀπὸ Β ἕως Β΄, χ εἶναι μείζων χ΄ καὶ ἐλάσσων χ΄΄· ἄρα οἱ παράγοντες $(\chi - \chi')$, $(\chi'' - \chi)$, εἰσὶ θετικοὶ, ἑπομένως ἡ Ψ πραγματική. Λοιπὸν, ἑκάστη τετμημένη ΑΠ, ἀπολαμβανομένη ἐντὸς τῶν ὁρίων τούτων, ἀντιστοιχοῦσι δύο σημεῖα τῆς ἐλλείψεως.

Πέραν τοῦ Β΄, ἐπ᾽ ἄπειρον, χ εἶναι μείζων χ΄ καὶ χ΄΄· ὁ μὲν παράγων $(\chi - \chi')$ θετικὸς, ὁ δὲ $(\chi'' - \chi)$ ἀρνητικός· ἄρα, ἡ Ψ φανταστικὴ, ἡ δ᾽ ἔλλειψις οὐδὲν σημεῖον ἔχει πέραν τῆς γραμμῆς Γ΄Δ΄, ἀγομένης παραλλήλως τῷ ἄξονι ΑΨ ἀπὸ τοῦ σημείου Β΄.

Πρὸς τὸ μέρος ΑΧ΄, ἡ τετμημένη χ εἶναι ἀρνητική· ἄρα, ὁ μὲν παράγων $(\chi - \chi')$ εἶναι ἀρνητικὸς, ὁ δὲ $(\chi'' - \chi)$ θετικός. Λοιπὸν, ἡ Ψ εἶναι φανταστικὴ, ἡ δ᾽ ἔλλειψις οὐδὲν σημεῖον ἔχει πρὸς τὸ μέρος τῶν ἀρνητικῶν τετμημένων.

Λοιπὸν, ἡ ἔλλειψις κεῖται ὁλόκληρος μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΓΔ, Γ΄Δ΄. Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τῆς χ, δι᾽ ἃς Ψ εἶναι πραγματικὴ, περιλαμβάνονται μεταξὺ χ΄ καὶ χ΄΄, οὐδεμία δὲ τῶν τιμῶν τούτων καθιστᾷ Ψ ἄπειρον, ἕπεται ὅτι ἡ ἔλλειψις εἶναι πανταχόθεν περιωρισμένη, ὅπερ γνωστὸν [122].

Ὁρίσωμεν προσέτι ἀκριβῶς τὰ ὅρια τῆς ἐλλείψεως παραλλήλως πρὸς τὴν διάμετρον. Παρατηρητέον ὅτι, τὸ ἄθροισμα $\chi'' - \chi'$ τῶν δύο ὑποῤῥίζων παραγόντων μένει ἄτρεπτον οἱανδήποτε τιμὴν ἔχει ἡ χ· ἑπομένως τὸ μέγιστον γινόμενον λαμβάνομεν ὅταν ἑκάτερος τῶν παραγόντων ἰσοῦται τῷ ἡμίσει τοῦ ἀθροίσματος τούτου. Λοιπὸν θέτομεν

$$\chi - \chi' = \tfrac{1}{2}(\chi'' - \chi'),\quad \text{ὅθεν}\quad \chi = \chi' + \tfrac{1}{2}(\chi'' - \chi') = \tfrac{1}{2}(\chi'' + \chi').$$



Ἡ τιμὴ αὕτη τῆς χ εἶναι ἡ τετμημένη ἐφ᾽ ἣν Ψ εἶναι μεγίστη· δῆλον δὲ ὅτι ἀντιστοιχεῖ ἐπὶ τὸ μέσον Ε τοῦ ἀποστήματος ΒΒ΄· διότι

$$\mathrm{AE} = \mathrm{AB} + \mathrm{BE} = \chi' + \tfrac{1}{2}(\chi'' - \chi') = \tfrac{1}{2}(\chi'' + \chi').$$

Ἡ τιμὴ τοῦ μεγίστου τούτου εἶναι

$$\Psi = \frac{\delta}{2\Lambda}\sqrt{\tfrac{1}{2}(\chi'' - \chi')\,\tfrac{1}{2}(\chi'' - \chi')} = \frac{\delta(\chi'' - \chi')}{4\Lambda}\,.$$

Ἵνα δὲ ὁρίσωμεν τ᾽ ἀντιστοιχοῦντα σημεῖα τῆς καμπύλης, ἄγομεν ΕΟ παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν τεταγμένων, καὶ λαμβάνομεν ἐπ᾽ αὐτῆς, ἑκατέρωθεν τῆς διαμέτρου, ΟΗ, ΟΗ΄, ἴσας ἑκάστην $\dfrac{\delta(\chi'' - \chi')}{4\Lambda}$. Τὰ σημεῖα Η, Η΄, εἰσὶν ἐκεῖνα καθ᾽ ἃ ἡ ἔλλειψις μᾶλλον ἀφίσταται τῆς ΘΘ΄, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΗΚ΄, Η΄Κ΄΄, παράλληλοι τῇ ΘΘ΄, εἰσὶ τὰ ὅρια τῆς καμπύλης. Λοιπὸν, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ΓΔ, Γ΄Δ΄, ΗΚ΄, Η΄Κ΄΄, συγκροτοῦσι παραλληλόγραμμον ἐμπεριλαμβάνον ὅλην τὴν καμπύλην καὶ οὗτινος αἱ πλευραὶ διχοτομοῦνται ἐπ᾽ αὐτῆς.

ΣΗΜ. Γράφοντες τὴν Ψ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\Psi = \frac{\delta}{2\Lambda}\sqrt{\left(\frac{\pi^2}{\delta^4} + \frac{\kappa}{\delta^2}\right) - \left(\chi - \frac{\pi}{\delta^2}\right)^2}\,,$$

βλέπομεν ἀμέσως ὅτι ἡ μεγίστη αὐτῆς τιμὴ ἀντιστοιχεῖ τῇ $\chi = \frac{\pi}{\delta^2}$. Ἡ τιμὴ αὕτη ἰσοῦται $\frac{1}{2}(\chi'' + \chi')$, ὡς δῆλον ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1).

Λαμβάνομεν ΕΠ = ΕΠ΄ = ρ· ἔχομεν ΑΠ $= \frac{\pi}{\delta^2} - \rho$, ΑΠ΄ $= \frac{\pi}{\delta^2} + \rho$. Αἱ τετμημέναι αὗται τιθέμεναι ἀντὶ χ, δίδουσι τὴν αὐτὴν τιμὴν τῇ Ψ· ἄρα, ἐπὶ τὰς τετμημένας ταύτας, αἱ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τεταγμέναι ΚΜ, ΚΝ, Κ΄Μ΄, Κ΄Ν΄, εἰσὶν ἴσαι· τὰ τρίγωνα ΟΚΜ, ΟΚ΄Ν΄, εἰσὶν ἴσα, ἑπομένως ἡ ΜΟΝ΄ εἶναι γραμμὴ εὐθεῖα δίχα τεμνομένη κατὰ τὸ σημεῖον Ο. Λοιπὸν, τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ μέσον πασῶν τῶν δι᾽ αὐτοῦ γραφομένων ἐν τῇ ἐλλείψει χορδῶν. Ἕνεκα τῆς ἰδιότητος ταύτης τὸ σημεῖον Ο καλεῖται *κέντρον*.

Τῶν αὐτῶν τριγώνων ἡ ἰσότης δεικνύουσιν ὅτι, ἡ χορδὴ ΜΜ΄, παράλληλος τῇ ΘΘ΄, συμπίπτει κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς τῇ γραμμῇ ΗΗ΄. Ἐπειδὴ δὲ τὸ αὐτὸ ὑπάρχει καὶ πρὸς πάσας τὰς παραλλήλους τῇ ΘΘ΄ χορδὰς, ἕπεται ὅτι

ΗΗ′ εἶναι *διάμετρος*. Οὕτως, αἱ δύο διάμετροι ΘΘ′, ΗΗ′, εἰσὶν οὕτω πως διατεθειμέναι, ὥστε ἑκατέρα διέρχεται τῶν μέσων τῶν παραλλήλων τῇ ἑτέρᾳ χορδῶν. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον καλοῦνται *διάμετροι συζυγεῖς*.

**130.** Ἐὰν ὁρίσωμεν τὴν θέσιν τῆς διαμέτρου, λάβωμεν τιμὰς ἀριθμητικὰς ἀντὶ $\delta$, $\Delta$, $\chi'$, $\chi''$, καὶ κατασκευάσωμεν τὴν καμπύλην διὰ σημείων, εὑρήσομεν ὅτι αὕτη ἔχει τὴν ἐν τῷ Σχ. 48 μορφήν. Φανερὸν δὲ ὅτι εἶναι πανταχόθεν κοίλη πρὸς τὴν διάμετρον, διότι ἄλλως ἤθελε τέμνεσθαι ὑπὸ εὐθείας κατὰ σημεῖα πλείονα τῶν δύο, ὅπερ ἀδύνατον ἐν ταῖς δευτέρας τάξεως γραμμαῖς [88].

**131.** 2α. Ἔστωσαν αἱ ῥίζαι $\chi'$, $\chi''$, πραγματικαὶ καὶ ἴσαι. Ἡ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τεταγμένη καθίσταται

$$\Psi = \frac{\delta}{2A}\sqrt{-(\chi-\chi')^2} = \frac{\delta(\chi-\chi')}{2A}\sqrt{-1}\,.$$

Ἡ μόνη τετμημένη καθιστῶσα Ψ πραγματικὴν εἶναι $\chi = \chi'$· ἑπομένως ἡ ἔλλειψις καθίσταται ἓν μόνον σημεῖον οὗτινος αἱ συντεταγμέναι εἰσὶ $\chi = \chi'$, $\psi = \alpha\chi' + \beta$.

Εὐκόλως πληροφορούμεθα ὅτι, ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει, τὸ πρῶτον μέλος τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως (A) εἶναι τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἤτοι ἄγεται ὑπὸ τὴν μορφήν,

$$(2A\psi + B\chi + \Delta)^2 + \delta^2(\chi - \chi')^2 = 0.$$

**132.** 3α. Τέλος τεθείσθωσαν $\chi'$, $\chi''$, φανταστικαί. Γινώσκομεν ὅτι τοῦ ὑποῤῥίζου πολυωνύμου $\nu\chi^2 + 2\pi\chi + \kappa$ τὸ σημεῖον, οἱανδήποτε τιμὴν δώσωμεν τῇ $\chi$, μένει πάντοτε ὅμοιον τῷ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ πρώτου ὅρου, ἤτοι ἀρνητικόν. Λοιπὸν Ψ εἶναι φανταστική. Ἑπομένως, οὐδὲν σημεῖον ὑπάρχει οὗτινος αἱ συντεταγμέναι ταυτοποιοῦσι τὴν ἐξίσωσιν (A). Ἡ ἐξίσωσις τότε λέγεται *ἀδύνατος*, ἢ ὅτι ἐμφαίνει *ἔλλειψιν φανταστικήν*.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως (A) εἶναι, ἐν τῇδε τῇ περιπτώσει, ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων, ὧν τὸ ἓν δὲν περιέχει $\chi$ καὶ $\psi$· ἤτοι ἡ προτεθεῖσα ἐξίσωσις ἄγεται ὑπὸ τὴν μορφήν,



$$(2A\psi + B\chi + \Delta)^2 + \delta^2\left(\chi - \frac{\pi}{\delta^2}\right)^2 + \delta^2K^2 = 0\ ,$$

συνεπείᾳ τῆς σχέσεως $-\frac{\kappa}{\delta^2} = \frac{\pi^2}{\delta^4} + K^2$, ἥτις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἵνα ὦσι φανταστικαὶ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\chi^2 - \frac{2\pi}{\delta^2}\chi - \frac{\kappa}{\delta^2} = 0.$$

**133.** Ὁ κύκλος εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῆς ἐλλείψεως· διότι ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἶναι δευτεροβάθμιος [73], μόναι δὲ καμπύλαι τῆς δευτέρας τάξεως περιωρισμέναι πανταχόθεν εὕρομεν ὅτι εἰσὶν αἱ ἐλλείψεις.

### ΔΙΑΣΚΟΠΗΣΙΣ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ. $B^2 - 4A\Gamma > 0$.

**134.** Ἐπειδὴ ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει ἡ ποσότης $\nu$ ἢ $B^2 - 4A\Gamma$ εἶναι θετική, καθιστῶμεν $\delta^2$ ἀντ' αὐτῆς εἰς τὰς γενικὰς τιμὰς τῆς $\psi$, [119], καὶ ἔχομεν

$$\psi = \alpha\chi + \beta \pm \frac{\delta}{2A}\sqrt{\chi^2 + \frac{2\pi}{\delta^2}\chi + \frac{\kappa}{\delta^2}}\,.$$

Θέτομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\chi^2 + \frac{2\pi}{\delta^2}\chi + \frac{\kappa}{\delta^2} = 0\,.$$

Καλοῦμεν $\chi'$ καὶ $\chi''$ τὰς δύο αὐτῆς ῥίζας. Τρεῖς περιπτώσεις εἰσὶ καὶ ἐνταῦθα διακριτέαι, καθ' ὅσον αἱ ῥίζαι αὗται εἰσὶ πραγματικαὶ καὶ ἄνισαι, ἢ πραγματικαὶ καὶ ἴσαι, ἢ φανταστικαί.

**135.** 1α (Σχ. 49). Ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι $\chi'$, $\chi''$, εἰσὶ πραγματικαὶ καὶ ἄνισαι, ἡ καμπύλη συμπίπτει τῇ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \alpha\chi + \beta$ διδομένῃ διαμέτρῳ κατὰ δύο σημεῖα Θ, Θ′, ἀντιστοιχοῦντα ἐπὶ τὰς τετμημένας $AB = \chi'$, $AB' = \chi''$. Ὑποθέσωμεν $\chi'$ καὶ $\chi''$ θετικάς, τὴν πρώτην δὲ ἐλάσσονα τῆς δευτέρας.

Αναλύομεν εἰς παράγοντας τὸ ὑπόῤῥιζον τριώνυμον. Ἡ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τεταγμένη ἔσεται

$$\Psi = \frac{\delta}{2\Lambda} \pm\sqrt{(\chi - \chi')\,(\chi - \chi'')}\,.$$

Ἀπὸ Α ἕως Β, χ εἶναι θετικὴ καὶ ἐλάσσων ἑκατέρας τῶν ῥιζῶν $\chi'$, $\chi''$· οἱ παράγοντες $(\chi - \chi')$, $(\chi - \chi'')$, εἰσὶν ἀρνητικοί, ἡ δὲ Ψ πραγματική. Ἵνα ἐξιχνεύσωμεν ἐάν, αὐξανομένης τῆς χ, ἡ Ψ αὐξάνῃ ἢ ἐλαττοῦται, καθιστῶμεν τοὺς παράγοντας τούτους θετικούς, ἤτοι γράφομεν

$$\Psi = \frac{\delta}{2\Lambda} \pm\sqrt{(\chi' - \chi)\,(\chi'' - \chi)}\,.$$

Βλέπομεν ὅτι, αὐξανομένης τῆς χ ἀπὸ 0 ἕως $\chi'$, ἡ τιμὴ τῆς Ψ ἐλαττοῦται ἀπὸ $\frac{\delta}{2\Lambda}\sqrt{\chi'\chi''}$ μέχρι 0. Λοιπόν, ἔστω $\mathrm{IZ} = \mathrm{IZ}' = \frac{\delta}{2\Lambda}\sqrt{\chi'\chi''}$· τὸ τμῆμα ὑπερβολῆς τὸ ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ ΑΨ καὶ ΒΘ, περατοῦται κατὰ τὰ σημεῖα Ζ καὶ Ζ′, ἔχον ὡς ἔγγιστα τὸ σχῆμα ΖΘΖ′.

Ἀπὸ Β ἕως Β′, χ μείζων εἶναι $\chi'$ καὶ ἐλάσσων $\chi''$· ἄρα, Ψ φανταστική, καὶ δὲν ὑπάρχει καμπύλη μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΒΘ, Β′Θ′.

Πέραν τοῦ Β′, χ εἶναι μείζων $\chi'$ καὶ $\chi''$· ἄρα ἡ Ψ πραγματική. Προσέτι, φανερὸν ὅτι αὐξανομένης τῆς χ, ἀμφότεροι οἱ παράγοντες αὐξάνουσιν ἐπ' ἄπειρον. Οὕτως ὁρίζεται εἷς κλάδος καμπύλης ΣΘ′Σ′, προχωρῶν ἐπ' ἄπειρον πρὸς τὰς θετικὰς χ, ἄνω καὶ κάτω τῆς διαμέτρου.

Ἀπὸ τῆς ἀρχῆς Α, πρὸς τὸ μέρος ΑΧ′, χ οὔσης ἀρνητικῆς, καθιστῶμεν $\chi = -\zeta$, καὶ ἔχομεν,

$$\Psi = \frac{\delta}{2\Lambda} \pm\sqrt{(\zeta + \chi')\,(\zeta + \chi'')}\,.$$

Ἑκάστη τιμὴ θετικὴ τῆς ζ δίδει τιμὴν πραγματικὴν τῇ Ψ· αὐξανομένης δὲ ζ ἐπ' ἄπειρον, ἡ τεταγμένη αὕτη



ἐπίσης αὐξήσει ἐπ' ἄπειρον. Οὕτως ἔχομεν δύο τόξα ὑπερβολῆς, ΖΡ, Ζ′Ρ′, προχωροῦντα ἐπ' ἄπειρον πρὸς τὸ μέρος τῶν ἀρνητικῶν χ, καὶ ἀφιστάμενα μᾶλλον καὶ μᾶλλον τῆς διαμέτρου.

**136.** 2α· Τεθείσθωσαν αἱ ῥίζαι $\chi'$, $\chi''$, ἴσαι καὶ πραγματικαί· αἱ τιμαὶ τῆς ψ ἔσονται,

$$\psi = \alpha\chi + 6 \pm \frac{\delta}{2\Lambda}(\chi - \chi')\cdot$$

προσδιορίζουσι δὲ δύο εὐθείας ΖΟ, Ζ′Ο, (Σχ. 50), συμπιπτούσας τῇ διαμέτρῳ κατὰ τὸ Ο σημεῖον, οὗτινος ἡ τεταγμένη ἰσοῦται $\chi'$· διότι, ὅταν $\chi = \chi'$, αἱ τεταγμέναι ἀμφοτέρων τῶν εὐθειῶν ἰσοῦνται $\psi = \alpha\chi' + 6$.

Ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει, εὐκόλως πληροφορούμεθα ὅτι τὸ πρῶτον μέλος τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, αναλύεται εἰς δύο παράγοντας ἐμμέτρους καὶ πρωτοβαθμίους πρὸς τὰς μεταβλητὰς χ, ψ.

**137.** 3η· Ἔστωσαν αἱ ῥίζαι $\chi'$, $\chi''$, φανταστικαί. Τότε ἡ ὑπερβολὴ δὲν τέμνει τὴν διάμετρον. Ἐπειδὴ τὸ τριώνυμον

$$\delta^2\chi^2 + 2\pi\chi + \kappa$$

μένει πάντοτε θετικόν, ἑκάστη τιμὴ τῆς χ δίδει τῇ Ψ τιμὴν πραγματικήν, καί, ἑπομένως, δύο σημεῖα τῆς ὑπερβολῆς, τὸ μὲν ἄνω τὸ δὲ κάτω τῆς διαμέτρου. Ἡ καμπύλη καὶ αὖθις συντίθεται ἐκ δύο κλάδων ἀπεριορίστων, ὑπὸ τῆς διαμέτρου διαχωριζομένων. Ἑκάτερος τῶν κλάδων τούτων στρέφει τὰ κυρτὰ αὐτοῦ πρὸς τὴν διάμετρον, καὶ ἔχει τὴν ἐν τῷ Σχ. 51 παρισταμένην μορφήν, ὡς πληροφορούμεθα δίδοντες τῇ διαμέτρῳ θέσιν μερικὴν καὶ λαμβάνοντες ἀντὶ δ, Λ, $\chi'$, $\chi''$, τιμὰς ἀριθμητικάς.

Ὁρίσωμεν τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἡ ὑπερβολὴ μᾶλλον προσεγγίζει τῇ διαμέτρῳ αὐτῆς, πρὸς τοῦτο γράφομεν πρῶτον τὴν τιμὴν τῆς Ψ ὡς ἑξῆς·

$$\Psi = \frac{\delta}{2\Lambda} \pm\sqrt{\left(\chi + \frac{\pi}{\delta^2}\right)^2 + \left(\frac{\kappa}{\delta^2} - \frac{\pi^2}{\delta^4}\right)}\,.$$

Εἶτα παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ ποσότης $\left(\frac{\varkappa}{\delta^2} - \frac{\pi^2}{\delta^4}\right)$ πρέπει νὰ ἦναι θετική, ἄλλως ἐξισουμένης τῷ 0 τῆς ὑποῤῥίζου, ἠθέλομεν εὑρεῖ διὰ χ τιμὰς πραγματικάς, ὅπερ ἀντίκειται τῇ ὑποθέσει. Συνεπείᾳ τῆς παρατηρήσεως ταύτης ψ ἔσεται *ἐλάχιστον* ἐὰν ἐκλείψῃ τὸ τετράγωνον $\left(\chi + \frac{\pi}{\delta^2}\right)^2$, ὅπερ συμβαίνει μόνον ὅταν $\chi = -\frac{\pi}{\delta^2}$. Ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς Ψ εἶναι

$$\Psi = \frac{1}{2\Lambda} \sqrt{\varkappa - \frac{\pi^2}{\delta^2}}.$$

Λοιπόν, λαμβάνομεν τὴν τετμημένην ΑΕ ἴσην τῇ τιμῇ τῆς χ, ἄγομεν ΕΟ παράλληλον ταῖς τεταγμέναις, εἶτα λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τῆς διαμέτρου τὰ μήκη ΟΗ, ΟΗ′, ἴσα τῇ τιμῇ τῆς Ψ. Τὰ σημεῖα Η, Η′, εἶσὶν ἐκεῖνα καθ' ἃ οἱ κλάδοι τῆς ὑπερβολῆς προσεγγίζουσι μᾶλλον πρὸς τὴν διάμετρον.

ΣΗΜ. Διὰ συλλογισμῶν ὁμοίων τοῖς ἐν Σημ. σελ. 81 δεικνύεται ὅτι, εἰς τὰ Σχ. 40 καὶ 51, τὸ σημεῖον Ο εἶναι κέντρον, ἡ γραμμὴ ΗΗ′ διάμετρος καὶ αἱ ΘΘ′, ΗΗ′, εἰσὶ δύο διάμετροι συζυγεῖς.

**138.** Κατὰ § 125, ὅταν Α = 0, οὐχὶ δὲ Β καὶ Γ, ἡ ἐξίσωσις (Α) δίδει καμπύλας κατατασσομένας ἐν ταῖς ὑπερβολαῖς. Ὡς ἐν τῷ αὐτῷ χωρίῳ εἴρηται, ἐπιλύομεν τὴν ἐξίσωσιν εἰς χ, καὶ ποιοῦμεν ὁμοίαν διασκέπησιν τῇ προηγουμένῃ, ἄνευ ἑτέρας μεταβολῆς ἢ χ εἰς ψ καὶ ψ εἰς χ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις εἶναι πρωτοβάθμιος εἰς ψ, ἁπλούστερον ἐπιλῦσαι αὐτὴν πρὸς τὴν μεταβλητὴν ταύτην.

Ἡ ἐξίσωσις ἣν πρόκειται κατασκευάσαι εἶναι

(Β) $$\mathrm{B}\chi\psi + \Gamma\chi^2 + \Delta\psi + \mathrm{E}\chi + \mathrm{Z} = 0,$$

ἐξ ἧς

$$\psi = \frac{-\Gamma\chi^2 - \mathrm{E}\chi - \mathrm{Z}}{\mathrm{B}\chi + \Delta}.$$



Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν ἔχομεν

$$\psi = \rho\chi + \sigma + \frac{\tau}{\mathrm{B}\chi + \Delta},$$

καλοῦντες $\rho\chi + \sigma$ τοὺς δύο πρώτους ὅρους τοῦ πηλίκου, καὶ τ τὸ κατάλοιπον ἐν ᾧ δὲν περιέχεται ἡ μεταβλητὴ χ.

(Σχ. 52). Κατασκευάζομεν πρῶτον τὴν εὐθεῖαν ΘΘ′ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \rho\chi + \sigma$. Φανερὸν ὅτι, πρὸς εὕρεσιν σημείων τῆς καμπύλης, πρέπει νὰ λάβωμεν, κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν τεταγμένων τῆς εὐθείας ταύτης, ἀποςήματα ἴσα $\frac{\tau}{\mathrm{B}\chi + \Delta}$, οὐχὶ ὅμως ἄνω καὶ κάτω, ἀλλὰ μόνον ἄνω ἢ μόνον κάτω καθ' ὅσον ἡ ποσότης αὕτη ἔσεται θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἤτοι καθ' ὅσον προστίθεται τῇ τεταγμένῃ τῆς εὐθείας, ἢ ἀφαιρεῖται ἀπ' αὐτῆς.

Πρὸς συντομίαν, καλέσωμεν $\Upsilon = \frac{\tau}{\mathrm{B}\chi + \Delta}$. ὑποθέτοντες δὲ Β, Δ, τ, ποσότητας θετικάς, ἐξετάσωμεν τὴν πρόοδον τῶν τιμῶν τοῦ Υ διὰ διαφόρους τιμὰς τῆς χ.

Ὅταν $\chi = 0$, ἔχομεν $\Upsilon = \frac{\tau}{\Delta}$. Λοιπόν, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΨ, ἄνω τῆς ΘΘ′, μέρος, τὸ ΗΓ, ἴσον τῇ τιμῇ ταύτῃ· τὸ σημεῖον Γ ἀνήκει εἰς τὴν καμπύλην. Αὐξανομένης χ θετικῶς ἐπ' ἄπειρον, Υ μένει θετική, ἀλλ' ἐλαττοῦται μέχρι 0. Τοῦτο δείκνυσιν ὅτι, ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἡ καμπύλη προσεγγίζει ἐπ' ἄπειρον τῇ εὐθείᾳ ΘΘ′, χωρὶς νὰ ἦναι δυνατὸν νὰ ὁρισθῇ ὅριον εἰς τὴν προσέγγισιν ταύτην. Λαμβάνομεν οὕτω τόξον ἀπεριόριστον, ὡς τὸ ΓΡ.

Ἵνα ἄξωμεν τὴν ἀντεισαγωγὴν τῶν ἀρνητικῶν τιμῶν εἰς τὴν τῶν θετικῶν, καθιστῶμεν $\chi = -\zeta$,

$$\Upsilon = \frac{\tau}{\Delta - \mathrm{B}\zeta}.$$

Ὁ παρονομαστὴς μηδενίζεται, καὶ Υ καθίσταται ἄπειρον ὅταν $\zeta = \frac{\Delta}{\mathrm{B}}$. Λοιπόν, ἐὰν λάβωμεν τὴν τιμὴν ταύτην ἀπὸ

Λ εἰς Κ, πρὸς τὸ μέρος τῶν ἀρνητικῶν χ, καὶ ἄξωμεν ΑΚΛ′ παράλληλον τῇ ΑΨ, ἡ παράλληλος αὕτη συναπαντήσει εἰς τὸ ἄπειρον τὴν καμπύλην· ἐὰν δώσωμεν τῇ ζ τιμὰς αὐξανούσας ἀπὸ Ο μέχρι ΑΚ, Υ ἔσεται πάντοτε θετικὸν καὶ αὐξήσει ἀπὸ ΗΓ μέχρι ἀπείρου. Οὕτως ὁρίζεται νέον τόξον ὑπερβολικόν, τὸ ΓΡ′, ὅπερ εἶναι ἐπέκτασις τοῦ ΓΡ καὶ προσεγγίζει ἀδιακόπως τῇ γραμμῇ ΚΛ, καθ᾽ ὅσον ἀφίσταται τῆς ΘΘ′, χωρὶς νὰ ἦναι δυνατὸν νὰ ὁρισθῇ ὅριον εἰς τὴν προσέγγισιν ταύτην.

Ἐὰν δώσωμεν τῇ ζ τιμὴν ΑΕ μείζονα τῆς ΑΚ, ἡ ποσότης Υ ἔσεται ἀρνητική· λοιπὸν τὸ σημεῖον Ζ, ἀντιστοιχοῦν ἐπὶ τὴν τετμημένην ταύτην, κεῖται ὑπὸ τὴν ΘΘ′. Ἐλαττουμένης τῆς ζ ἀπὸ ΑΕ μέχρι ΑΚ, Υ αὐξάνει ἀρνητικῶς ἀπὸ ΑΖ μέχρι ἀπείρου· καὶ αὐξανομένης τῆς ζ ἀπὸ ΑΕ μέχρι ἀπείρου, Υ μειοῦται μέχρι Ο μένον πάντοτε ἀρνητικόν. Λοιπόν, ἑκατέρωθεν τοῦ Ζ ὑπάρχουσι δύο τόξα ὑπερβολικὰ ἀπεριόριστα, ΖΣ′ καὶ ΖΣ, ὧν τὸ μὲν προσεγγίζει ἐπ᾽ ἄπειρον τῇ εὐθείᾳ ΚΛ′, τὸ δὲ τῇ ΗΘ′.

Αἱ ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων $\psi = \rho\chi + \sigma$ καὶ $\chi = -\frac{\Delta}{B}$ διδόμεναι εὐθεῖαι ΘΘ′, ΛΛ′, προσεγγίζουσιν ἐπ᾽ ἄπειρον τῇ ὑπερβολῇ οὐδέποτε δὲ συμπίπτουσιν αὐτῇ. Ἕνεκα τοῦ ἀξιοπαρατηρήτου ἰδιώματος τούτου, αἱ εὐθεῖαι αὗται καλοῦνται *ἀσύμπτωτοι*.

139. Ἐν τῷ προηγουμένῳ § ὑπεθέσαμεν ὅτι, ἐκτελέσαντες τὴν διαίρεσιν εἰς τὴν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (Β) τιμὴν τῆς ψ, τὸ κατάλοιπον τ διέφερε μηδενός· ὑποθέσωμεν ἤδη $\tau = 0$. Τότε ἔχομεν

$$-\Gamma\chi^2 - E\chi - Z = (\rho\chi + \sigma)(B\chi + \Delta).$$

Ἑπομένως, ἡ ἐξίσωσις (Β) γράφεται οὕτω,

$$(B\chi + \Delta)\psi - (\rho\chi + \sigma)(B\chi + \Delta) = 0,$$

ἢ καὶ οὕτω,

$$(B\chi + \Delta)(\psi - \rho\chi - \sigma) = 0.$$

Φανερὸν δὲ ὅτι ἐτυμοποιεῖται καθισταμένου



εἴτε $B\chi + \Delta = 0$, ὅθεν $\chi = -\frac{\Delta}{B}$,

εἴτε $\psi - \rho\chi - \sigma = 0$, ὅθεν $\psi = \rho\chi + \sigma$.

Λοιπὸν συνάγομεν ὅτι, ἐν τῇ περὶ ἧς λόγος περιπτώσει, ἡ ἐξίσωσις (Β) ἐμφαίνει δύο εὐθείας, ὧν ἡ ἑτέρα εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν ψ.

140. Ἐκ τῆς προηγουμένης διασκοπήσεως ἐξάγεται ὅτι, ἐν περιπτώσει καθ᾽ ἣν ἐξίσωσίς τις δευτεροβάθμιος στερεῖται τοῦ τετραγώνου $\psi^2$, οὐχὶ δὲ καὶ τοῦ ὀρθογωνίου $\chi\psi$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐμφαίνει, ἢ ὑπερβολὴν ἔχουσαν δύο ἀσυμπτώτους, ὧν ἡ ἑτέρα εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν ψ, ἢ δύο εὐθείας ὧν ἡ ἑτέρα εἶναι παράλληλος τῷ αὐτῷ ἄξονι.

Δῆλον ὅτι, ὅταν ἀντὶ $\psi^2$ ἡ ἐξίσωσις στερεῖται τοῦ τετραγώνου $\chi^2$, αὕτη ἐμφαίνει, ἢ ὑπερβολὴν ἔχουσαν μίαν ἀσύμπτωτον παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν χ, ἢ δύο εὐθείας, ὧν ἡ ἑτέρα παράλληλος εἶναι τῷ αὐτῷ ἄξονι.

Ὅταν ἀμφότερα τὰ τετράγωνα δὲν ὑπάρχωσιν, ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ἐμφαίνει, ἢ ὑπερβολὴν ἔχουσαν δύο ἀσυμπτώτους ἀμοιβαίως παραλλήλους τῶν δύο ἀξόνων, ἢ δύο εὐθείας ἀμοιβαίως παραλλήλους τῶν αὐτῶν ἀξόνων. Ἄλλως, τοῦτο ἐξάγεται καὶ ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$B\chi\psi + \Delta\psi + E\chi + Z = 0,$$

ἐὰν ἐφαρμοσθῶσιν ἐπ᾽ αὐτὴν οἱ ἐν τοῖς προηγουμένοις §§ συλλογισμοί.

### ΑΣΥΜΠΤΩΤΟΙ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ ΕΝ ΓΕΝΕΙ.

141. *Καμπύλης ἐπ᾽ ἄπειρον ἐκτεινομένης ἀσύμπτωτος ἐν γένει καλεῖται εὐθεῖα ἐπ᾽ ἄπειρον αὐτῇ προσεγγίζουσα, μηδέποτε δὲ συμπίπτουσα.*

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον εὐκόλως ὁρίζονται αἱ ἀσύμπτωτοι.

(Σχ. 53). Ἔστω ΓΡ κλάδος καμπύλης, καὶ ΗΘ ἡ ἀσύμπτωτος αὐτοῦ, ἣν ὑποθέτομεν μὴ οὖσαν παράλληλον τῷ ἄξονι ΑΨ. Ἔστωσαν ΜΠ, ΝΠ, δύο τεταγμέναι οἱαιδήποτε τῶν γραμμῶν τούτων ἐπὶ τὴν αὐτὴν τετμημένην ΑΠ. Πρέπει τὸ ἀπόστημα ΜΝ νὰ καθίσταται ἐλάχιστον διὰ τιμὰς τῆς $\chi$ μεγίστας, νὰ μηδενίζηται δὲ ὅταν $\chi$ κατασταθῇ ἄπειρον. Λοιπὸν, τῆς ἐξισώσεως τῆς ἀσυμπτώτου οὔσης

$$\psi = \gamma\chi + \lambda\,,$$

πρέπει νὰ ἦναι δυνατὸν νὰ ἐξάγωμεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης τιμήν τινὰ τῆς $\psi$, ἧς ἡ διαφορὰ ἀπὸ τῆς $\gamma\chi+\lambda$ νὰ μηδενίζηται ὅταν $\chi$ καθίσταται ἄπειρον. Λοιπὸν, ἡ τιμὴ αὕτη λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\psi = \gamma\chi + \lambda + \Phi.$$

$\Phi$ δηλοῦντος συνέθεσίν τινα τῆς $\chi$ μηδενιζομένην ὅταν $\chi = +\infty$, ἢ ὅταν $\chi = -\infty$, καθ' ὅσον ὁ κλάδος τῆς καμπύλης, περὶ ἧς πρόκειται, ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον πρὸς τὸ μέρος τῶν θετικῶν $\chi$, ἢ πρὸς τὸ τῶν ἀρνητικῶν. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν,

$$\gamma = \frac{\psi}{\chi} - \frac{\lambda+\Phi}{\chi}\,, \qquad \lambda = \psi - \gamma\chi - \Phi\,.$$

Ἀλλ' ὅταν $\chi$ κατασταθῇ ἄπειρον, $\Phi$ καὶ $\dfrac{\lambda+\Phi}{\chi}$ μηδενίζονται. Ἄρα, εὑρίσκομεν $\gamma$ ζητοῦντες τὸ ὅριον τοῦ πρὸς ἀλλήλας λόγου $\dfrac{\psi}{\chi}$ τῶν συντεταγμένων τῆς καμπύλης. Μετὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ $\gamma$ λαμβάνομεν τὴν ποσότητα $\lambda$ ζητοῦντες τὸ ὅριον τῆς ἐκφράσεως $\psi - \gamma\chi$, συστοιχοῦν τῇ αὐτῇ τιμῇ $\chi =$ *ἄπειρον*. Οὕτω, γνωστῶν ὄντων $\gamma$ καὶ $\lambda$, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀσυμπτώτου ἔσεται ἐπίσης γνωστή.

Ἐὰν, κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον, ὁρισθῶσι πολλὰ συστήματα τιμῶν πραγματικῶν καὶ πεπερασμένων διὰ $\gamma$ καὶ $\lambda$, δῆλον ὅτι ἡ καμπύλη ἔχει πλείονας κλάδους ἀπεριορίστους ἔχοντας ἀσυμπτώτους μὴ οὔσας παραλλήλους ταῖς τεταγμέναις. Παρατηρητέον δὲ ὅτι, καθιστῶντες $\chi = +\infty$ λαμβάνομεν τὰς ἀσυμπτώτους τῶν ἐπ' ἄπειρον ἐκτεινομένων κλάδων πρὸς τὸ μέρος τῶν θετικῶν $\chi$· καθιστῶντες δὲ



$\chi = -\infty$, λαμβάνομεν τὰς ἀσυμπτώτους τῶν πρὸς τὸ μέρος τῶν ἀρνητικῶν $\chi$ ἐκτεινομένων ἀπεριορίστως κλάδων.

142. Ἵνα μὴ παραλείψωμεν οὐδεμίαν ἀσύμπτωτον, ζητήσωμεν καὶ τὰς παραλλήλους ταῖς τεταγμέναις. Πρὸς τοῦτο, παρατηροῦμεν ὅτι, αὗται προκύπτουσιν ἐκ τιμῶν τῆς $\chi$ πεπερασμένων αἵτινες καθιστῶσιν ἄπειρον τὴν τεταγμένην τῆς καμπύλης.

Ἄλλως, ἐὰν ἐν τοῖς προλεχθεῖσι τρέψωμεν πανταχοῦ $\chi$ εἰς $\psi$ καὶ $\psi$ εἰς $\chi$, εὑρήσομεν τὰς μὴ παραλλήλους ταῖς τετμημέναις ἀσυμπτώτους· εἰς τρόπον ὥστε ὁρίσομεν ἐκ νέου πάσας τὰς ἤδη εὑρεθείσας, προσέτι δὲ τὰς παραλλήλους ταῖς τεταγμέναις, μόνας εἰσέτι ἀγνώστους.

143. Ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τὴν ὑπερβολὴν τοὺς προηγουμένους κανόνας. Διὰ τὴν καμπύλην ταύτην αἱ γενικαὶ τιμαὶ τῆς $\psi$ εἰσὶ [134],

$$\psi = \alpha\chi + 6 + \frac{1}{2\Lambda}\sqrt{\delta^2\chi^2 + 2\pi\chi + \varkappa}\,,$$

$$\psi = \alpha\chi + 6 - \frac{1}{2\Lambda}\sqrt{\delta^2\chi^2 + 2\pi\chi + \varkappa}\,.$$

Τεθείσθω ὅτι πρόκειται περὶ τῆς ὑπερβολῆς Σχ. 40. Καθ' ὅσον $\chi$ αὐξάνει μέχρι τοῦ $+\infty$ ἢ μέχρι τοῦ $-\infty$, ἡ μὲν πρώτη τιμὴ τῆς $\psi$ δίδει τὸ τόξον Θ'Σ ἢ τὸ ΘΡ, ἡ δὲ δευτέρα τὸ τόξον Θ'Σ' ἢ τὸ ΘΡ'.

Ἵνα λάβωμεν τὴν ἀσύμπτωτον τοῦ πρώτου τόξου Θ'Σ, ζητητέον πρῶτον τὴν τιμὴν τοῦ λόγου $\dfrac{\psi}{\chi}$ ἀντιστοιχοῦσαν τῇ $\chi = +\infty$. Ἔχομεν,

$$\frac{\psi}{\chi} = \alpha + \frac{6}{\chi} + \frac{1}{2\Lambda}\sqrt{\delta^2 + \frac{2\pi}{\chi} + \frac{\varkappa}{\chi^2}}\,.$$

Καθιστῶντες $\chi = +\infty$, λαμβάνομεν

$$\gamma = \textit{ὅριον}\ \frac{\psi}{\chi} = \alpha + \frac{\delta}{2\Lambda}\,.$$

Ζητήσωμεν ἤδη τὴν τιμὴν τοῦ λ, ἥτις εἶναι τὸ ὅριον τῆς ποσότητος $\psi-\gamma\chi$. Ἔχομεν,

$$\psi-\gamma\chi=\alpha\chi+\beta+\frac{1}{2\Lambda}\sqrt{\delta^2\chi^2+2\pi\chi+\kappa}-\left(\alpha+\frac{\delta}{2\Lambda}\right)\chi$$

$$=\beta+\frac{1}{2\Lambda}\left(\sqrt{\delta^2\chi^2+2\pi\chi+\kappa}-\delta\chi\right).$$

Ἀλλ' ἄδηλον τί γίνεται ἡ ποσότης αὕτη ὅταν χ αὐξάνῃ θετικῶς ἐπ' ἄπειρον, διότι τὸ θετικὸν καὶ τὸ ἀρνητικὸν μέρος τῆς ἐν παρενθέσει ἐκφράσεως καθίστανται συγχρόνως ἄπειρα. Ἵν' ἀφαιρέσωμεν τὴν δυσκολίαν ταύτην, προστρέχομεν εἴς τινα γνωστὸν μετασχηματισμόν, ἐξ οὗ προκύπτει·

$$\psi-\gamma\chi=\beta+\frac{\left(\sqrt{\delta^2\chi^2+2\pi\chi+\kappa}-\delta\chi\right)\left(\sqrt{\delta^2\chi^2+2\pi\chi+\kappa}+\delta\chi\right)}{2\Lambda\left(\sqrt{\delta^2\chi^2+2\pi\chi+\kappa}+\delta\chi\right)}$$

$$=\beta+\frac{2\pi\chi+\kappa}{2\Lambda\left(\sqrt{\delta^2\chi^2+2\pi\chi+\kappa}+\delta\chi\right)}$$

$$=\beta+\frac{2\pi+\frac{\kappa}{\chi}}{2\Lambda\left(\sqrt{\delta^2+\frac{2\pi}{\chi}+\frac{\kappa}{\chi^2}}+\delta\right)}.$$

Ὑπὸ τὴν μορφὴν ταύτην δῆλον ὅτι, ὅταν $\chi=+\infty$,

$$\lambda=\text{ὅριον}\,(\psi-\gamma\chi)=\beta+\frac{\pi}{2\Lambda\delta}.$$

Καθιστῶμεν ἐν τῇ ἐξισώσει $\psi=\gamma\chi+\lambda$ ἀντὶ γ καὶ λ τὰς τιμὰς αὐτῶν, καὶ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἀσυμπτώτου τοῦ τόξου Θ'Σ,

(1) $$\psi=\left(\alpha+\frac{\delta}{2\Lambda}\right)\chi+\beta+\frac{\pi}{2\Lambda\delta}.$$

Ζητήσωμεν ἤδη τὴν ἀσύμπτωτον τοῦ τόξου ΘΡ'. Παρα-



τηρητέον ὅτι, τὸ τόξον τοῦτο δίδεται ἐκ τῆς δευτέρας τιμῆς τῆς ψ, αὐξανομένης ἐν αὐτῇ τῆς χ μέχρι $-\infty$. Λοιπόν, ἔχομεν,

$$\frac{\psi}{\chi}=\alpha+\frac{\beta}{\chi}-\frac{1}{2\Lambda\chi}\sqrt{\delta^2\chi^2+2\pi\chi+\kappa}.$$

Τρέπομεν χ εἰς $-\zeta$, εἶτα καθιστῶμεν $\zeta=+\infty$.

$$\frac{\psi}{\chi}=\alpha-\frac{\beta}{\zeta}+\frac{1}{2\Lambda\zeta}\sqrt{\delta^2\zeta^2-2\pi\zeta+\kappa}$$

$$=\alpha-\frac{\beta}{\zeta}+\frac{1}{2\Lambda}\sqrt{\delta^2-\frac{2\pi}{\zeta}+\frac{\kappa}{\zeta^2}}.$$

Λοιπόν, διὰ $\zeta=\infty$, γ ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν οἵαν ἐν τῇ προηγουμένῃ περιπτώσει, ἤτοι

$$\gamma=\text{ὅριον}\,\frac{\psi}{\chi}=\alpha+\frac{\delta}{2\Lambda}.$$

Εὑρίσκομεν ὡσαύτως·

$$\psi-\gamma\chi=\alpha\chi+\beta-\frac{1}{2\Lambda}\sqrt{\delta^2\chi^2+2\pi\chi+\kappa}-\left(\alpha+\frac{\delta}{2\Lambda}\right)\chi$$

$$=\beta-\frac{1}{2\Lambda}\left(\sqrt{\delta^2\chi^2+2\pi\chi+\kappa}+\delta\chi\right)$$

$$=\beta-\frac{1}{2\Lambda}\left(\sqrt{\delta^2\zeta^2-2\pi\zeta+\kappa}-\delta\zeta\right).$$

Ἐπομένως, διὰ τοῦ αὐτοῦ ὡς ἀνωτέρω μετασχηματισμοῦ, καθιστῶντες καὶ αὖθις $\zeta=+\infty$, εὑρίσκομεν τὴν αὐτὴν τιμὴν διὰ λ, οἵαν ἐν τῷ πρώτῳ τόξῳ· ἤτοι

$$\lambda=\text{ὅριον}\,(\psi-\gamma\chi)=\beta+\frac{\pi}{2\Lambda\delta}.$$

Ἄρα, ἀμφότερα τὰ τόξα Θ'Σ, ΘΡ', ἔχουσι τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς εὐθείας, δηλουμένης ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (1) ἣν ἀνωτέρω εὕρομεν.

Συλλογιζόμενοι ἀπαραλλάκτως εὑρίσκομεν ὅτι τὰ ἕτερα δύο τόξα Θ′Σ′ καὶ ΘΡ ἔχουσιν ὡσαύτως τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δηλουμένης ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$(2) \qquad \psi=\left(\alpha-\frac{\delta}{2A}\right)\chi+\beta-\frac{\pi}{2A\delta}.$$

Αἱ ἐξισώσεις (1), (2), γράφονται συνάμα οὕτω·

$$(3) \qquad \psi=\alpha\chi+\beta\pm\frac{1}{2A}\left(\delta\chi+\frac{\pi}{\delta}\right).$$

Ἡ μορφὴ δὲ αὕτη δείκνυσιν ὅτι, *τὰς τῶν ἀσυμπτώτων ἐξισώσεις μορφοῦμεν ἀμέσως ἐκ τῶν γενικῶν τιμῶν τῆς τεταγμένης τῆς καμπύλης, διατηροῦντες ἐν αὐταῖς τὸ μεταβλητὸν μέρος μόνον τῆς ὑπορρίζου ποσότητος, συμπληροῦντες τὸ τετράγωνον καὶ ἐκριζοῦντες αὐτό.* Εὑρίσκομεν οὕτως ἀκριβῶς τὴν ἐξίσωσιν (3).

144. Αἱ ἀσύμπτωτοι τέμνουσιν ἀλλήλας ἐπὶ τῆς διαμέτρου τῆς ὑπερβολῆς, διότι αἱ τεταγμέναι τῶν τριῶν τούτων εὐθειῶν ἰσοῦνται ἀλλήλαις ὅταν

$$\delta\chi+\frac{\pi}{\delta}=0, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \chi=-\frac{\pi}{\delta^2}.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι ἡ καθιστῶσα Ψ ἐλάχιστον [137] ἐν τῇ περιπτώσει τοῦ Σχ. 51· λοιπόν, αἱ ἀσύμπτωτοι διέρχονται τότε τοῦ σημείου Ο. Κατὰ § 135 (Σχ. 49), ἐὰν ἄξωμεν τὴν τεταγμένην ΟΕ τοῦ μέσου τοῦ ΘΘ′ ἀποστήματος, ἔξομεν

$$AE=AB+\tfrac{1}{2}BB'=\chi+\tfrac{1}{2}(\chi''-\chi')=\tfrac{1}{2}(\chi'+\chi'').$$

Ἀλλά, συνεπείᾳ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\frac{2\pi}{\delta^2}\chi+\frac{\varkappa}{\delta^2}=0$, ἧς ῥίζαι εἰσὶ $\chi'$, $\chi''$, ἔχομεν

$$AE=\tfrac{1}{2}(\chi'+\chi'')=-\frac{\pi}{\delta^2}.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δείκνυσιν ὅτι, ἐν τῇ περιπτώσει τοῦ



§ 135, αἱ ἀσύμπτωτοι τῆς ὑπερβολῆς συμπίπτουσι τῷ μέσῳ Ο τῆς ΘΘ′.

Γνωστοῦ ὄντος τοῦ σημείου Ο, κοινοῦ ταῖς ἀσυμπτώτοις, ἵνα ὁρίσωμεν αὐτὰς ἐντελῶς καθιστῶμεν $\chi=0$ εἰς τὰς ἐξισώσεις αὐτῶν καὶ ἔχομεν, $\psi=\beta\pm\frac{\pi}{2A\delta}$. Λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων (Σχ. 49 καὶ 51) τὰ ἀποστήματα ΙΤ, ΙΤ′, ἴσα $\frac{\pi}{2A\delta}$, καὶ γράφομεν τὰς ἀσυμπτώτους ΟΤ, ΟΤ′.

145. Ὅταν, ἐν τῇ γενικῇ δευτεροβαθμίῳ ἐξισώσει, ὁ συντελεστὴς τοῦ $\psi^2$ διαφέρῃ μηδενός, αἱ τιμαὶ τῆς ψ δὲν περιέχουσι χ ὡς διαιρέτην· ἄρα, ἀδύνατον νὰ καταστῶσιν ἄπειροι, ἢ διὰ τιμῆς ἀπείρου τῆς χ. Ἑπομένως τότε δὲν ὑπάρχει ἀσύμπτωτος παράλληλος ταῖς τεταγμέναις [142].

Ὅταν $A=0$, ἡ ἐξίσωσις εἶναι

$$B\chi\psi+\Gamma\chi^2+\Delta\psi+E\chi+Z=0.$$

Λαμβάνομεν δέ, ὡς ἐν § 138, τιμήν τινα τῆς ψ ὑπὸ τὴν μορφήν,

$$\psi=\rho\chi+\sigma+\frac{\tau}{B\chi+\Delta}.$$

Διὰ τῆς γενικῆς μεθόδου εὑρίσκομεν μίαν ἀσύμπτωτον μὴ οὖσαν παράλληλον ταῖς ψ, ἐμφαινομένην ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi=\rho\chi+\sigma$. Τὴν ἑτέραν ἀσύμπτωτον εὑρίσκομεν, κατὰ § 142, ζητοῦντες εἰ ὑπάρχῃ τιμὴ πεπερασμένη τῆς χ καθιστῶσα ψ ἄπειρον. Ἀλλὰ τοιοῦτον ἰδίωμα ἔχει ἡ τιμὴ $\chi=-\frac{\Delta}{B}$. Ἄρα, ὑπάρχει μία ἀσύμπτωτος παράλληλος ταῖς ψ, ἧς ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι ἡ τετμημένη. Τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα συμφωνοῦσι τοῖς ἐν § 138.

Τὴν τελευταίαν ταύτην ἀσύμπτωτον εὑρίσκομεν καὶ διὰ τῆς γενικῆς μεθόδου, τρέποντες ἐν ἅπασι τοῖς λογισμοῖς χ εἰς ψ καὶ ψ εἰς χ.

### ΔΙΑΣΚΟΠΗΣΙΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ. $B^2 - 4 A \Gamma = 0.$

146. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἔχομεν

$$\Psi = \frac{1}{2\mathrm{A}}\sqrt{2\pi\chi + \kappa}.$$

Ὅταν $\pi$ καὶ $\kappa$ ὦσι θετικοί, ἑκάστη τιμὴ θετικὴ τῆς $\chi$ δίδει τῇ $\Psi$ τιμὴν πραγματικήν· αὐξανομένης δὲ τῆς $\chi$ ἀπὸ 0 ἐπ' ἄπειρον, $\Psi$ αὐξάνει ἀπὸ $\frac{\sqrt{\kappa}}{2\mathrm{A}}$ ἐπ' ἄπειρον. Ὅθεν ἕπεται ὅτι, ἐὰν λάβωμεν (Σχ. 54) ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΨ, ἄνω καὶ κάτω τῆς διαμέτρου, $\mathrm{IZ} = \mathrm{IZ}' = \frac{\sqrt{\kappa}}{2\mathrm{A}}$, ἡ παραβολή, διερχομένη τῶν σημείων Ζ, Ζ′, ἕξει, πρὸς τὸ μέρος τῶν θετικῶν $\chi$, δύο τόξα προχωροῦντα ἐπ' ἄπειρον, ὡς τὰ ΖΣ, Ζ′Σ′. Ἵνα λάβωμεν τὰ πρὸς τὸ μέρος τῶν ἀρνητικῶν $\chi$ σημεῖα, καθιστῶμεν $\chi = -\zeta$, καὶ ἔχομεν

$$\Psi = \frac{1}{2\mathrm{A}}\sqrt{\kappa - 2\pi\zeta} = \frac{1}{2\mathrm{A}}\sqrt{2\pi\left(\frac{\kappa}{2\pi} - \zeta\right)}.$$

Δῆλον ὅτι, αὐξανομένης τῆς $\zeta$ ἀπὸ 0 μέχρι $\frac{\kappa}{2\pi}$, $\Psi$ μένει πραγματικὴ καὶ ἐλαττοῦται μέχρι 0· ἀλλά, διὰ μείζονας τιμὰς τῆς $\zeta$, $\Psi$ ἔσεται φανταστική. Ἄρα, λαμβάνομεν $\mathrm{AB} = \frac{\kappa}{2\pi}$, πρὸς τὸ μέρος ΑΧ′, καὶ ἄγομεν ΒΓ παράλληλον τῇ ΑΨ, συμπίπτουσαν τῇ διαμέτρῳ κατὰ τὸ Γ· ἡ παραβολὴ περατοῦται πρὸς τὸ μέρος τῶν ἀρνητικῶν $\chi$ διὰ τόξου ὡς τὸ ΖΓΖ′. Λοιπόν, ἡ παραβολὴ ἔχει ἕνα μόνον κλῶνα ΣΓΣ′ συγκροτούμενον ἐκ δύο μερῶν ἀπεριορίστων πρὸς τὸ μέρος τῶν θετικῶν τετμημένων, ἀποχωρούντων μᾶλλον καὶ μᾶλλον τῆς διαμέτρου, ἀλλὰ κοίλων πρὸς ταύτην· διότι εὐθεῖα ἀδύνατον ἔχειν μετὰ τῆς καμπύλης σημεῖα κοινὰ πλείονα τῶν δύο.



Ὅταν, $\pi$ ὄντος θετικοῦ, $\kappa$ ἦναι μηδέν, ἡ παραβολὴ ἔχει τὴν θέσιν ΡΙΡ′. Ὅταν, $\pi$ ὄντος θετικοῦ, $\kappa$ ἦναι ἀρνητικός, ἡ παραβολὴ λαμβάνει τὴν θέσιν ΤΑΤ′.

147. Ὅταν $\pi$ ἦναι ἀρνητικός, ἡ καμπύλη ἔχει θέσιν ἀντίστροφον, ἤτοι ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον πρὸς τὸ μέρος τῶν ἀρνητικῶν $\chi$. Τὸ Σχ. 55 παριστᾷ τὰς θέσεις τῆς καμπύλης, καθ' ὅσον $\kappa$ εἶναι θετικός, μηδέν, ἢ ἀρνητικός.

148. Τέλος, ὅταν $\pi = 0$, ἔχομεν $\Psi = \frac{\sqrt{\kappa}}{2\mathrm{A}}$, ὅπερ δίδει δύο εὐθείας παραλλήλους τῇ διαμέτρῳ, ἐξίσου ἀφισταμένας ταύτης, ὅταν $\kappa$ ἦναι θετικός. Αἱ εὐθεῖαι αὗται ταυτίζονται τῇ διαμέτρῳ ὅταν $\kappa = 0$· εἰσὶ φανταστικαί, ἢ ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος, ὅταν $\kappa$ ἦναι ἀρνητικός.

149. Ὅταν συγχρόνως $\mathrm{A} = 0$ καὶ $\mathrm{B} = 0$, ἡ γενικὴ ἐξίσωσις (Α) ἄγεται εἰς ταύτην,

$$\Gamma\chi^2 + \Delta\psi + \mathrm{E}\chi + \mathrm{Z} = 0,$$

ἥτις συμπεριλαμβάνεται τῇ περιπτώσει τῶν παραβολῶν [126]. Ἐπιλύοντες αὐτὴν πρὸς $\chi$, ἔχομεν

$$\chi = -\frac{\mathrm{E}}{2\Gamma} \pm \frac{1}{2\Gamma}\sqrt{-4\Gamma\Delta\psi + \mathrm{E}^2 - 4\Gamma\mathrm{Z}}.$$

Λαμβάνοντες τὸ λογικὸν μέρος μόνον $\chi = -\frac{\mathrm{E}}{2\Gamma}$, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν διαμέτρου παραλλήλου τῷ ἄξονι τῶν $\psi$. Ἀλλ' ἐφαρμόζονται καὶ ἐνταῦθα οἱ προηγούμενοι συλλογισμοί, τρεπομένων πανταχοῦ $\chi$ εἰς $\psi$ καὶ $\psi$ εἰς $\chi$.

Δυνάμεθα ἐπίσης ἐπιλύσαι τὴν ἐξίσωσιν πρὸς $\psi$· τῆς δὲ τιμῆς

$$\psi = -\frac{\Gamma}{\Delta}\left(\chi^2 + \frac{\mathrm{E}}{\Gamma}\chi + \frac{\mathrm{Z}}{\Gamma}\right),$$

ἡ διασκόπησις εἶναι εὔκολος.

150. Ἐπειδὴ ἡ παραβολὴ ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον, ἐξετάσωμεν ἐὰν ἔχῃ ἀσυμπτώτους. Κατὰ πρῶτον, δῆλον ὅτι δὲν ἔχει ἀσυμπτώτους παραλλήλους τῷ ἄξονι τῶν τεταγμένων,

διότι οὐδεμία τιμὴ πεπερασμένη τῆς χ καθιστᾷ ἀπείρους τὰς τιμὰς [142]·

$$\psi=\alpha\chi+\beta\pm\frac{1}{2A}\sqrt{2\pi\chi+\kappa}\,.$$

Ἵνα δὲ ἐξιχνεύσωμεν ἐὰν ὑπάρχωσιν ἕτεραι ἀσύμπτωτοι, ἐφαρμόσωμεν τὴν ἐν § 141 γενικὴν μέθοδον. Ἔχομεν

$$\frac{\psi}{\chi}=\alpha+\frac{\beta}{\chi}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{\frac{2\pi}{\chi}+\frac{\kappa}{\chi^2}}\,,$$

Καθιστῶντες $\chi=\pm\infty$, λαμβάνομεν

$$\text{ὅριον}\ \frac{\psi}{\chi}=\alpha.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη δείκνυσιν ὅτι, ἐὰν ἡ παραβολὴ ἔχῃ ἀσυμπτώτους, αὗται ἔσονται παράλληλοι τῇ διαμέτρῳ.

Ἔχομεν ἤδη

$$\psi-\alpha\chi=\beta\pm\frac{1}{2A}\sqrt{2\pi\chi+\kappa}.$$

ἄρα, $\text{ὅριον}\ (\psi-\alpha\chi)=\pm\infty$ .

Λοιπόν, ἵνα λάβωμεν τὰς ἀσυμπτώτους τῆς παραβολῆς, πρέπει νὰ ἄξωμεν παραλλήλους τῇ διαμέτρῳ ἐν ἀποστάσει ἀπείρῳ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς.

*Ἄρα, ἡ παραβολὴ δὲν ἔχει ἀσυμπτώτους.*

### ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΠΡΟΕΚΤΕΘΕΝΤΩΝ ΕΠΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ.

**151.** *Παραδείγματα ἐν οἷς* $B^2-4A\Gamma<0$ .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ον. $\psi^2-\frac{1}{2}\chi\psi+\frac{17}{16}\chi^2-4\psi+4\chi-6=0.$

Συγκρίσει τῆς ἐξισώσεως ταύτης πρὸς τὴν γενικὴν (A), εὑρίσκομεν $B^2-4A\Gamma=-4$ . Λοιπόν, ἐὰν ἐμφαίνῃ καμπύλην, αὕτη εἶναι ἔλλειψις [127]. Ἀλλὰ πιθανὸν νὰ δηλοῖ σημεῖον [131], ἢ νὰ ἦναι ἀδύνατος [132]. Ἵν' ἀνακαλύψω-



μεν ὁποία τῶν τριῶν τούτων περιπτώσεων ὑπάρχει, ἐπιλύομεν πρὸς ψ,

$$\psi=\tfrac{1}{4}\chi+2\pm\sqrt{-\chi^2-3\chi+10}\,.$$

εἶτα καθιστῶμεν

$$-\chi^2-3\chi+10=0\,,\quad \text{ὅθεν},\quad \chi=2\ \text{καὶ}\ \chi=-5\,.$$

Ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι αὗται εἰσὶ πραγματικαὶ καὶ ἄνισαι, συνάγομεν [129] ὅτι ἡ καμπύλη εἶναι ἔλλειψις ἔχουσα διάμετρον τὴν εὐθεῖαν τῆς ἐξισώσεως $\psi=\frac{1}{4}\chi+2$ , ἣ συμπίπτει κατὰ δύο σημεῖα ὧν αἱ τετμημέναι εἰσὶ $+2$ καὶ $-5$ . (Σχ. 56). Καθιστῶμεν ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς διαμέτρου $\chi=0$ καὶ $\psi=0$, ὅθεν $\psi=2$ καὶ $\chi=-8$ . Λοιπόν, ἐπὶ τῶν ἀξόνων λαμβάνομεν $AI=2$ , $AI'=8$ , ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν II′ ἥτις εἶναι ἡ διάμετρος. Προσέτι, λαμβάνομεν $AB=2$ , $AB'=5$ , ἄγομεν παραλλήλως ταῖς τεταγμέναις εὐθείας, τεμνούσας τὴν διάμετρον κατὰ τὰ σημεῖα Θ καὶ Θ′· τὰ σημεῖα ταῦτα εἰσὶν αἱ τομαὶ τῆς καμπύλης πρὸς τὴν διάμετρον ταύτην. Τὸ ὑπόρριζον ποσὸν ἀναλύεται εἰς $-(\chi-2)(\chi+5)$ , ἢ $(2-\chi)(\chi+5)$ . Λοιπόν, ἔχομεν τὴν ἀπὸ τῆς διαμέτρου τεταγμένην.

$$\Psi=\sqrt{(2-\chi)(\chi+5)}\,.$$

Ἀπὸ A μέχρι B ἡ τετμημένη χ εἶναι θετικὴ καὶ ἐλάσσων 2· ἄρα Ψ πραγματική. Ἡ τετμημένη $\chi=0$ δίδει $\Psi=\sqrt{10}$ , καὶ $\chi=2$ δίδει $\Psi=0$ . Λοιπόν, ἐὰν λάβωμεν $IZ=IZ'=\sqrt{10}$ , ἡ ἔλλειψις ἕξει τόξον τὸ ZΘZ′. Πέραν τοῦ B, ἡ τετμημένη χ μείζων εἶναι 2, ἡ δὲ Ψ φανταστική· ἐπομένως ἡ καμπύλη δὲν προβαίνει τῆς γραμμῆς ΘB.

Ἵνα λάβωμεν τὰ πρὸς τὸ μέρος τῶν ἀρνητικῶν χ σημεῖα, καθιστῶμεν $\chi=-\zeta$ . Τότε

$$\Psi=\sqrt{(2+\zeta)(5-\zeta)}.$$

Φανερὸν ὅτι, ἐν τῷ διαστήματι AB′, ἐπειδὴ ζ ἐλάσσων εἶναι 5, Ψ εἶναι πραγματική· ἀλλὰ πέραν τοῦ B′, ζ εἶναι μείζων 5 καὶ κατὰ συνέπειαν Ψ φανταστική· ἐντεῦθεν προκύπτει ἕτερον τόξον, τὸ ΖΘΖ', ὅπερ δὲν προχωρεῖ πέραν τῆς εὐθείας Β'Θ', καὶ δι' οὗ ἀποπερατοῦται ἡ καμπύλη.

Ἵνα ὁρίσωμεν τὰ σημεῖα καθ' ἃ αὕτη συμπίπτει τῷ ἄξονι ΑΧ, καθιστῶμεν $\psi = 0$ ἐν τῇ προτεθείσῃ ἐξισώσει καὶ ἔχομεν,

$$\tfrac{17}{16}\chi^2 + 4\chi - 6 = 0\cdot$$

ὅθεν πορίζόμεθα τὰς τετμημένας τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος σημείων.

Ἵνα γνωρίσωμεν τὰ ὅρια τῆς ἐλλείψεως παραλλήλως τῇ διαμέτρῳ ΘΘ', παρατηρητέον [129] ὅτι, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν τῇ τιμῇ τῆς Ψ παραγόντων ἰσοῦται 7, ἄρα, ἡ μεγίστη αὐτῆς εἶναι

$$\Psi = \sqrt{\tfrac{7}{2} \times \tfrac{7}{2}} = \tfrac{7}{2}\cdot$$

ἡ δὲ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς $\chi$ δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως,

$$2 - \chi = \tfrac{7}{2}, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \chi = -\tfrac{3}{2}\,.$$

Ἡ τετμημένη αὕτη εἶναι τοῦ μέσου Ε τῆς ΒΒ'· ὥστε εὑρίσκομεν τὰ ζητούμενα ὅρια λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς ΕΟ, παραλλήλου ταῖς τεταγμέναις, ἄνω καὶ κάτω τῆς διαμέτρου, τὰ μήκη $OH = OH' = \frac{7}{2}$, καὶ ἄγοντες τὰς εὐθείας ΗΚ, Η'Κ', παραλλήλους τῇ διαμέτρῳ.

Ἐὰν ἐπιλύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης εἰς $\chi$, εὑρήσομεν ἑτέραν διάμετρον καὶ ἕτερα ὅρια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ον. $\quad \psi^2 + 2\chi\psi + 5\chi^2 - 4\chi = 0.$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δίδει

$$\psi = -\chi \pm 2\sqrt{\chi - \chi^2} = -\chi \pm 2\sqrt{\chi(1-\chi)}.$$

Τὸ ὑπόρριζον $\chi^2$ ἔχει τὸ σημεῖον $-$· καθιστῶντες δὲ

$$\chi - \chi^2 = 0, \qquad \text{ἔχομεν} \qquad \chi = 0, \text{ καὶ } \chi = 1.$$

Ἄρα, ἡ ἐξίσωσις ἐμφαίνει ἔλλειψιν. (Σχ. 57). Ἡ τῆς διαμέτρου ἐξίσωσις εἶναι $\psi = -\chi$, ἡ εὐθεῖα δὲ αὕτη διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΧΑΨ'. Αἱ τετμημέναι $\chi = 0$, $\chi = AB = 1$ ὁρίζουσι τὰ σημεῖα Α, Θ, καθ' ἃ ἡ καμπύλη συμπίπτει τῇ διαμέτρῳ.



Ἀπὸ $\chi = 0$ μέχρι $\chi = 1$, τὸ ῥιζικὸν εἶναι πραγματικόν· πέραν τοῦ Β φανταστικόν, ὡς καὶ πρὸς τὰς ἀρνητικὰς τετμημένας. Λοιπόν, ἡ ἔλλειψις κεῖται μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΑΨ, ΒΘ.

Καθιστῶντες ἐν τῇ ἐξισώσει $\psi = 0$, ἔχομεν, $\chi = 0$ καὶ $\chi = \frac{4}{5}$, τὰς τετμημένας τῶν σημείων καθ' ἃ ἡ καμπύλη συμπίπτει τῷ τῶν $\chi$ ἄξονι.

Ἡ καθιστῶσα μέγιστον τὴν Ψ τιμὴ τῆς $\chi$ ἰσοῦται $\frac{1}{2}$, τὸ μέγιστον δὲ τοῦτο εἶναι $\Psi = 2\sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 1$, δι' οὗ δίδονται τὰ ὅρια τῆς ἐλλείψεως ἑκατέρωθεν καὶ παραλλήλως τῆς διαμέτρου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ον. $\quad \psi^2 - 2\chi\psi + 6\chi^2 - 2\psi - 28\chi + 46 = 0.$

Ἔχομεν $\qquad \psi = \chi + 1 \pm \sqrt{-5\chi^2 + 30\chi - 45}.$

Καθιστῶντες $-5\chi^2 + 30\chi - 45 = 0$, εὑρίσκομεν δύο ῥίζας ἴσας 3. Ἐπειδὴ δὲ ὁ συντελεστὴς τοῦ $\chi^2$ εἶναι ἀρνητικός, ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ τεθεῖσα ἐξίσωσις δηλοῖ σημεῖον [131]. (Σχ. 58). Τῷ ὄντι, αἱ τιμαὶ τῆς $\psi$ γράφονται καὶ οὕτω

$$\psi = \chi + 1 \pm (\chi - 3)\sqrt{-5}\cdot$$

φανερὸν δὲ ὅτι, μόναι αἱ συντεταγμέναι $\chi = 3$, $\psi = 4$, καθιστῶσιν αὐτὰς πραγματικάς.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἡ τεθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, διότι ἄγεται ὑπὸ τὴν μορφήν·

$$[\psi - \chi - 1 - (\chi - 3)\sqrt{-5}]\,[\psi - \chi - 1 + (\chi - 3)\sqrt{-5}]$$
$$= (\psi - \chi - 1)^2 + 5(\chi - 3)^2 = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ον. $\quad \psi^2 - 2\chi\psi + 2\chi^2 - 2\psi + 3 = 0.$

Ἔχομεν $\qquad \psi = \chi + 1 \pm \sqrt{-\chi^2 + 2\chi - 2}\cdot$

Αἱ φανταστικαὶ ῥίζαι $\chi = 1 \pm \sqrt{-1}$ τῆς ἐξισώσεως $-\chi^2 + 2\chi - 2 = 0$, δεικνύουσιν ὅτι [132] ἡ τεθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος.

Ἵνα δὲ καταστήσωμεν καταφανὲς τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἐν τῇ ἐξισώσει αὐτῇ, παρατηροῦμεν ὅτι,

$$-\chi^2+2\chi-2=-(\chi-1-\sqrt{-1})(\chi-1+\sqrt{-1})$$
$$=-(\chi-1)^2-1.$$

Ἐπομένως ἡ προτεθεῖσα ἄγεται εἰς,

$$[\psi-\chi-1-\sqrt{-(\chi-1)^2-1}]\,[\psi-\chi-1+\sqrt{-(\chi-1)^2-1}]=0,$$

ἢ $$(\psi-\chi-1)^2+(\chi-1)^2+1=0.$$

Ἐξίσωσις προδήλως ἀδύνατος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5ον. $\psi^2+\chi^2-4\psi+2\chi=0.$

Οἱ ἄξονες ὑποτίθενται ὀρθογώνιοι. (Σχ. 59). Τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὐκόλως μεταμορφοῦμεν εἰς τὴν ἑξῆς·

$$(\psi-2)^2+(\chi+1)^2=5.$$

Κατὰ § 113 [1ον.], τὸ πρῶτον μέλος ἐμφαίνει τὸ ἀπόστημα σημείου οἱουδήποτε τῆς καμπύλης ἀπὸ τοῦ Ο οὗτινος αἱ συντεταγμέναι εἰσὶ $\psi=2$ καὶ $\chi=-1$. Ἄρα, τὸ ἀπόστημα τοῦτο ἰσοῦται $\sqrt{5}$ δι' ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης· ἐπομένως αὕτη εἶναι περιφέρεια κύκλου, ἧς τὸ μὲν κέντρον εἶναι Ο, ἡ δὲ ἀκτὶς ἴση $\sqrt{5}$. Ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας ταύτης εἶναι ΑΟ, διότι ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΟΕ, ἔχομεν

$$\mathrm{AO}=\sqrt{\overline{\mathrm{AE}}^2+\overline{\mathrm{OE}}^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}.$$

*Παρατήρησις.* Ὁσάκις πρόκειται κατασκευάσαι ἐξίσωσιν δευτεροβάθμιον ἐν ἄξοσιν ὀρθογωνίοις, ἐὰν μὲν δὲν περιέχῃ τὸ ὀρθογώνιον $\chi\psi$, τὰ δὲ τετράγωνα $\chi^2$, $\psi^2$, ἔχωσι τὸν αὐτὸν συντελεστήν, ἡ διασκόπησις αὐτῆς ἐκτελεῖται ὡς ἡ τοῦ προηγουμένου παραδείγματος· ἐμφαίνει δὲ περιφέρειαν κύκλου, ἢ σημεῖον, ἢ εἶναι ἀδύνατος, καθόσον τὸ δεύτερον μέλος, τῇ συμπληρώσει τῶν τετραγώνων, καθίσταται θετικόν, μηδὲν ἢ ἀρνητικόν.

152. *Παραδείγματα ἐν οἷς* $\mathrm{B}^2-4\mathrm{A}\Gamma>0.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ον. $\psi^2+\chi\psi-2\chi^2-2\psi-2\chi+3=0.$



Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δίδει $\psi=-\frac{1}{2}\chi+1\pm\sqrt{\frac{9}{4}\chi^2+\chi-2}.$

Κατασκευάζομεν πρῶτον τὴν διάμετρον (Σχ. 60),

$$\psi=-\tfrac{1}{2}\chi+1\cdot$$

εἶτα θέτομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\tfrac{9}{4}\chi^2+\chi-2=0,\qquad \text{ἐξ ἧς}\qquad \chi=-\tfrac{2}{9}\pm\tfrac{1}{9}\sqrt{76}.$$

Ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι αὗται εἰσὶ πραγματικαὶ καὶ ἄνισαι, ὁ δὲ συντελεστὴς τοῦ $\chi^2$ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν θετικός, εἴμεθα βέβαιοι [135] ὅτι ἡ τεθεῖσα ἐξίσωσις ἀνήκει εἰς ὑπερβολὴν συμπίπτουσαν τῇ διαμέτρῳ.

Λαμβάνομεν πρὸς τὸ μέρος τῶν ἀρνητικῶν χ, $\mathrm{AE}=\frac{2}{9}$, ἄγομεν ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Ε ἀπόστημα ἴσον $\frac{1}{9}\sqrt{76}$, καὶ εὑρίσκομεν τὰ δύο σημεῖα Β, Β', ὧν τετμημέναι εἰσὶν αἱ ἄνωθι τιμαὶ τῆς χ. Ἀπὸ τῶν σημείων τούτων ἄγοντες παραλλήλους τῷ ἄξονι ΑΨ, ὁρίζομεν τὰς τομὰς Θ, Θ', τῆς καμπύλης πρὸς τὴν διάμετρον.

Ἡ πρώτη τιμὴ τῆς χ εἶναι θετική, ἡ δευτέρα ἀρνητική· καλοῦμεν τὴν μὲν $\chi'$ τὴν δὲ $-\chi''$. Οὕτως ἔχομεν τὴν ἀπὸ τῆς διαμέτρου τεταγμένην

$$\Psi=\sqrt{\tfrac{9}{4}\chi^2+\chi-2}=\tfrac{3}{2}\sqrt{\chi^2+\tfrac{4}{9}\chi-\tfrac{8}{9}}=\tfrac{3}{2}\sqrt{(\chi-\chi')(\chi+\chi'')}.$$

Ἀπὸ Α ἕως Β, χ εἶναι θετικὴ καὶ ἐλάσσων $\chi'$· ἄρα, Ψ φανταστική. Πέραν τοῦ σημείου Β, αὐξανομένης τῆς χ ἀπὸ $\chi'$ ἐπ' ἄπειρον, Ψ εἶναι πραγματικὴ καὶ αὐξάνει ἀπὸ 0 ἐπ' ἄπειρον, ὅπερ δίδει τὸν κλάδον ΡΘΡ' τῆς ὑπερβολῆς.

Ἔστω $\chi=-\zeta$· ἔχομεν,

$$\Psi=\tfrac{3}{2}\sqrt{(\zeta+\chi')(\zeta-\chi'')}.$$

ὅταν ἡ ζ περιέχηται μεταξὺ 0 καὶ $\chi''$, Ψ εἶναι φανταστική. Ἀλλ' ἐὰν ζ αὐξήσῃ ἀπὸ $\chi''$ ἐπ' ἄπειρον, Ψ ἔσεται πραγματική, καὶ αὐξήσει ἐπίσης ἀπὸ 0 ἐπ' ἄπειρον, ὅπερ δίδει τὸν δεύτερον κλάδον ΣΘ'Σ'.

Ἵνα ὁρίσωμεν τὰς ἀσυμπτώτους τῆς ὑπερβολῆς ταύτης, πρέπει, κατὰ τὸν ἐν τέλει τοῦ § 143 κανόνα, νὰ λάβωμεν τὸ δυώνυμον $\frac{3}{2}\chi+\frac{1}{3}$, οὗτινος τὸ τετράγωνον δίδει τοὺς δύο πρώτους ὑποῤῥίζους ὅρους τῶν τιμῶν τῆς $\psi$· οὕτω μορφοῦμεν τὰς ἐξισώσεις τῶν δύο ἀσυμπτώτων,

$$\psi=-\frac{1}{2}\chi+1\pm\left(\frac{3}{2}\chi+\frac{1}{3}\right).$$

Αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνονται ἐπὶ τῆς διαμέτρου εἰς τὸ σημεῖον O, δι' ὃ $\chi=-\frac{2}{9}$. Ἵνα δὲ εὕρωμεν καὶ ἕτερον σημεῖον ἑκάστης αὐτῶν, καθιστῶμεν $\chi=0$· τὸ μέρος $\frac{3}{2}\chi+\frac{1}{3}$, τὸ ἔχον πρὸ αὐτοῦ $\pm$, ἄγεται εἰς $\pm\frac{1}{3}$. Λοιπὸν, λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τῆς διαμέτρου $IT=IT'=\frac{1}{3}$, ἄγομεν τὰς εὐθείας ΚΚ', ΛΛ', τὴν μὲν διὰ τῶν σημείων Ο καὶ Τ, τὴν δὲ διὰ τῶν Ο καὶ Τ'. Αἱ εὐθεῖαι αὗται εἰσὶ τῆς ὑπερβολῆς αἱ ἀσύμπτωτοι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ον. $\psi^2-2\chi\psi-2\psi-2\chi-4=0$·

ὅθεν, $$\psi=\chi+1\pm\sqrt{\chi^2+4\chi+5}.$$

Θέτομεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2+4\chi+5=0$, καὶ εὑρίσκομεν ῥίζας φανταστικάς. Ἐπειδὴ δὲ πρὸ τοῦ ὑποῤῥίζου $\chi^2$ ὑπάρχει τὸ σημεῖον $+$, ἕπεται ὅτι, ἡ τεθεῖσα ἐξίσωσις ἐμφαίνει ὑπερβολὴν μὴ συμπίπτουσαν τῇ διαμέτρῳ [137]. (Σχ. 61).

Ἔστω ΘΘ' ἡ διάμετρος· ἡ ἀπὸ ταύτης τεταγμένη

$$\Psi=\sqrt{\chi^2+4\chi+5}=\sqrt{(\chi+2)^2+1},$$

δῆλον ὅτι καθίσταται ἐλαχίστη ὅταν $\chi=-2$, ὅθεν $\Psi=1$. Λοιπὸν, λαμβάνομεν ΑΕ$=2$, καὶ ἄγομεν τὴν τεταγμένην ΕΟ τῆς διαμέτρου, ἐφ' ἧς λαμβάνομεν ΟΗ $=$ ΟΕ $=1$. Τὰ σημεῖα Η, Ε, τῆς ὑπερβολῆς εἰσὶ τὰ μᾶλλον προσεγγίζοντα τῇ διαμέτρῳ· ὥστε ἐὰν ἄξωμεν ΕΚ, ΗΚ', παραλλήλους τῇ ΘΘ', ἡ καμπύλη ἔσεται ὁλόκληρος ἐκτὸς τῶν παραλλήλων τούτων. $\Psi$ αὐξάνει ἀπὸ $\chi=-2$ μέχρι $\chi=0$, καὶ ἀπὸ $\chi=0$ μέχρι $\chi=+\infty$. Αὐξάνει προσέτι ἀπὸ $\chi=-2$ μέχρι $\chi=-\infty$. Λοιπὸν, ἀπὸ τῶν σημείων Ε, Η, οἱ δύο κλῶνες τῆς ὑπερβολῆς ἀφίστανται μᾶλλον καὶ μᾶλλον τῆς διαμέτρου, δεξιὰ καὶ ἀριστερά.

Ὅταν $\chi=0$, ἔχομεν $\Psi=\sqrt{5}$· οὕτω δίδονται τὰ σημεῖα Ζ, Ζ', καθ' ἃ ἡ καμπύλη συμπίπτει τῷ ἄξονι τῶν $\psi$. Ἐὰν



κάμωμεν $\psi=0$ ἐν τῇ προτεθείσῃ ἐξισώσει, λαμβάνομεν $\chi=-2$· ὅθεν ἔχομεν τὸ μοναδικὸν σημεῖον Ε, εὑρεθὲν ἤδη, καθ' ὃ ἡ καμπύλη συμπίπτει τῷ ἄξονι τῶν $\chi$.

Τῶν ἀσυμπτώτων αἱ ἐξισώσεις εἰσὶ

$$\psi=\chi+1\pm(\chi+2),\ \text{ἢ}\ \psi=2\chi+3\ \text{καὶ}\ \psi=-1.$$

Ἡ μὲν ὁρίζει εὐθεῖαν, τὴν ΥΥ', τέμνουσαν ἀμφοτέρους τοὺς ἄξονας, ἡ δὲ τὴν Φ'Φ παράλληλον τῷ τῶν $\chi$. Ἄλλως, δηλοῦται ἀμέσως ἐξ αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως, ὅτι ἡ ὑπερβολὴ ἔχει μίαν ἀσύμπτωτον παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν $\chi$ [140].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ον. $\psi^2-2\chi\psi-2\psi+4\chi=0$.

Εὑρίσκομεν $$\psi=\chi+1\pm\sqrt{\chi^2-2\chi+1}.$$

Καθιστῶντες $\chi^2-2\chi+1=0$, λαμβάνομεν δύο ῥίζας ἴσας 1. Λοιπὸν, ἔχομεν δύο εὐθείας τεμνομένας ὑπ' ἀλλήλων [136], ὧν αἱ ἐξισώσεις εἰσὶ

$$\psi=2\chi,\qquad \psi=2.$$

Ἄρα, ἡ τεθεῖσα ἐξίσωσις ἀναλύεται εἰς παράγοντας λογικοὺς ὡς ἑξῆς·

$$(\psi-2\chi)\ (\psi-2)=0.$$

Ἐκ τῆς μορφῆς δὲ ταύτης δηλοῦται διατὶ ἐμφαίνει δύο γραμμὰς εὐθείας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ον. $\chi^2-2\psi\chi-2\chi+4\psi-1=0$.

Ἐπειδὴ τὸ $\psi^2$ λείπει, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ὑπάγεται εἰς τὴν ἐν § 138 περίπτωσιν. Λοιπὸν, συνάγομεν

$$\psi=\frac{\chi^2-2\chi-1}{2\chi-4}=\frac{1}{2}\chi+\frac{1}{2(2-\chi)}.$$

(Σχ. 62). Κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν Θ'Θ τῆς ἐξισώσεως $\psi=\frac{1}{2}\chi$, καὶ καθιστῶμεν

$$\Upsilon=\frac{1}{2(2-\chi)}.$$

Τῇ $\chi=0$ ἀντιστοιχεῖ $\Upsilon=\frac{1}{4}$· ἄρα, ληπτέον ἄνω τῆς εὐθείας ΘΘ' ἀπόστημα ΑΓ$=\frac{1}{4}$. Αὐξανομένης $\chi$ ἀπὸ 0 μέχρι 2, Υ αυξάνει θετικώς επ' άπειρον. Λοιπόν, εάν λάβωμεν $AB=2$, άξωμεν δε από του σημείου Β την παράλληλον ΑΛ' τῷ άξονι των ψ, η καμπύλη έξει τόξον απεριόριστον, το ΓΡ, ούτινος η ΟΛ είναι ασύμπτωτος.

Όταν χ ἦναι μείζων 2, γράφομεν το Υ ούτως,

$$\Upsilon = -\frac{1}{2(\chi-2)}.$$

Δῆλον ότι, ελαττουμένης της τετμημένης μέχρι $\chi=2$, Υ αυξάνει μέχρι $-\infty$· αυξανομένης δε της χ επ' άπειρον, Υ ελαττούται μέχρι 0. Λοιπόν, η καμπύλη έχει κλῶνα, ως τον ΤΤ', ούτινος ΟΛ' και ΟΘ είσιν ασύμπτωτοι.

Καθιστῶμεν $\chi=-\zeta$, και έχομεν

$$\Upsilon = \frac{1}{2(2+\zeta)}.$$

η ποσότης αύτη μένει θετική ελαττουμένη από $\Upsilon=\frac{1}{4}$ μέχρι $\Upsilon=0$, όταν ζ αυξάνη από 0 μέχρι απείρου. Εντεύθεν προκύπτει το απεριόριστον τόξον ΓΡ', ὃ είναι επέκτασις του ΓΡ, έχον ασύμπτωτον την ΟΘ'.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5ον. $\chi^2+3\chi\psi+2\psi+2\chi+\frac{8}{9}=0.$

Η εξίσωσις αύτη δίδει

$$\psi = \frac{-\chi^2-2\chi-\frac{8}{9}}{3\chi+2} = -\frac{1}{3}\chi-\frac{4}{9}.$$

(Σχ. 63). Η τιμή αύτη δηλοῖ εὐθεῖαν, την ΒΓ, τέμνουσαν αμφοτέρους τους άξονας. Αλλ' η τεθεῖσα εξίσωσις ορίζει και ετέραν εὐθεῖαν, ΔΕ, παράλληλον τῷ άξονι των ψ. Τῷ όντι, επειδή η διαίρεσις έγινεν ακριβῶς, έπεται ότι $3\chi+2$ είναι παράγων της εξισώσεως· αύτη λοιπόν ετυμοποιεῖται τῇ υποθέσει

$$3\chi+2=0, \qquad \text{ἐξ ἧς} \qquad \chi=-\tfrac{2}{3},$$

όθεν προκύπτει παράλληλός τις των τεταγμένων.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6ον. $\chi\psi+2\psi+3\chi-2=0.$

Λαμβάνομεν $$\psi = \frac{-3\chi+2}{\chi+2} = -3+\frac{8}{\chi+2}.$$

Δι' ευκόλου διασκοπήσεως ευρήσομεν υπερβολήν, ως την του Σχ. 64, συν ταις ασυμπτώτοις αυτής Θ'Θ, ΚΚ', αίτινες εισί παράλληλοι τοις άξοσι δηλούμεναι υπό των εξισώσεων

$$\psi=-3, \quad \chi=-2.$$

153. *Παραδείγματα εν οἷς* $B^2-4A\Gamma=0.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ον. $\psi^2+2\chi\psi+\chi^2+4\psi+3\chi+3=0.$

Η εξίσωσις αύτη δίδει $\psi=-\chi-2\pm\sqrt{\chi+1}.$

Επειδή υπό το ριζικόν υπάρχει χ εἰς μόνην την πρώτην δύναμιν [146], έχομεν παραβολήν (Σχ. 65). Η διάμετρος δίδεται υπό της εξισώσεως $\psi=-\chi-2$· συμπίπτει δε τοις άξοσι κατά τα σημεῖα Ι και Ι', εν αποστάσεσι $AI=2$, $AI'=2$.

Αυξανομένης της χ θετικώς από 0 επ' άπειρον, το ριζικόν $\sqrt{\chi+1}$ μένει πραγματικόν, αυξάνον από της μονάδος επ' άπειρον. Ούτως ορίζονται τα τόξα ΖΣ, Ζ'Σ', άτινα συμπίπτουσι τῷ άξονι των ψ κατά τα σημεῖα Ζ, Ζ', κατασκευαζόμενα λαμβανομένων $IZ=IZ'=1$.

Όταν χ αυξάνη αρνητικώς μέχρι μονάδος, $\sqrt{\chi+1}$ μειοῦται μέχρι 0· λοιπόν, λαμβάνοντες $AB=1$, και άγοντες ΒΓ παράλληλον τῇ ΑΨ, η παράλληλος αύτη τεμεῖ την διάμετρον κατά το σημεῖον Γ, καθ' ὃ συνάπτονται τα δύο τόξα της παραβολής, άτινα δεν υπερβαίνουσι την ΒΓ, διότι αι αρνητικαί τετμημέναι, μείζονες μονάδος, καθιστῶσι το ριζικόν φανταστικόν.

Η παραβολή περί ἧς πρόκειται ου συμπίπτει τῷ άξονι των χ, διότι η τιμή $\psi=0$, εν τῇ προτεθείσῃ εξισώσει, δίδει $\chi^2+3\chi+3=0$, όθεν συνάγομεν διά χ τας φανταστικάς τιμάς $\chi=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}.$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ον.** $\psi^2 + 2\chi\psi + \chi^2 - 4\psi - 3\chi + 4 = 0.$

Ἐκ ταύτης ἔχομεν $\psi = -\chi + 2 \pm \sqrt{-\chi}.$

Ἡ παραβολὴ καὶ ἡ διάμετρος αὐτῆς κεῖνται ὡς ἐν Σχ. 66.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ον.** $\chi^2 - 3\chi + 2\psi + 1 = 0.$

Ἐπιλυτέον τὴν ἐξίσωσιν ταύτην πρὸς ψ. Ἀλλ' οὐχ ἧττον ἐκτελοῦμεν τὴν διασκόπησιν αὐτῆς ὡς ἐν τοῖς προλαβοῦσι παραδείγμασι, τρέποντες ἐν τοῖς συλλογισμοῖς χ εἰς ψ καὶ ψ εἰς χ. Εὑρήσομεν τὴν διάμετρον ΘΘ' καὶ τὴν παραβολὴν ΣΓΣ'. (Σχ. 67).

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ον.** $\psi^2 - 2\chi\psi + \chi^2 + 2\psi - 2\chi - 3 = 0.$

Λαμβάνομεν, $\psi = \chi - 1 \pm \sqrt{4} = \chi - 1 \pm 2,$

ἤτοι $\psi = \chi + 1$ καὶ $\psi = \chi - 3.$

Αἱ τιμαὶ αὗται ὁρίζουσι δύο εὐθείας παραλλήλους. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως εἶναι γινόμενον δύο παραγόντων, ἤτοι τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν.

$$(\psi - \chi - 1)\,(\psi - \chi + 3) = 0.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5ον.** $\psi^2 - 2\chi\psi + \chi^2 - 2\psi + 2\chi + 1 = 0.$

Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις αὕτη δίδει διὰ ψ δύο τιμὰς ἴσας $\chi + 1$, τὸ πρῶτον αὐτῆς μέλος εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ $(\psi - \chi - 1)$, ὁρίζει δὲ τὴν μοναδικὴν εὐθεῖαν ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \chi + 1$ δηλουμένην.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6ον.** $\psi^2 + 2\chi\psi + \chi^2 + \psi + \chi + 1 = 0.$

Ἔχομεν $\psi = -\chi - \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}.$

Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ αὗται εἰσὶ φανταστικαί, συνάγομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος. Τῷ ὄντι, ἡ αὐτὴ ἄγεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(\psi + \chi + \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4} = 0,$$

ὑφ' ἣν πρόδηλον ὑπάρχει τὸ ἀδύνατον αὐτῆς.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

## ΑΝΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΟΥ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΕΦ' ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΑΝ ΜΟΡΦΗΝ.

### ΕΞΑΛΕΙΨΙΣ ΤΩΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΟΡΩΝ.

**154.** Πρὸς εὐκολωτέραν διασκόπησιν τῶν ἰδιωμάτων τῶν καμπύλων δευτέρας τάξεως, ἀπαιτεῖται καταστῆσαι ὅσον ἔνεστιν ἁπλουστέραν τὴν ἐξίσωσιν αὐτῶν. Ἡ τοιαύτη ἁπλοποίησις ἐκτελεῖται διὰ μετασχηματισμοῦ τοῦ συστήματος τῶν συντεταγμένων, ἄνευ ὑποθέσεως μερικῆς τιμῆς εἰς τὰ τὴν θέσιν τῶν νέων ἀξόνων ὁρίζοντα ποσά. Τῷ τρόπῳ τούτῳ εἰσάγονται ἐν τῇ μετασχηματισθείσῃ ἐξισώσει ποσὰ ἀόριστα, ὧν διαθέτομεν ἀκολούθως πρὸς ἐξάλειψιν τινῶν ἐκ τῶν ὅρων αὐτῆς.

Ὁ γενικώτερος μετασχηματισμὸς εἶναι νὰ μεταβάλλωμεν συγχρόνως τὴν ἀρχὴν καὶ τὴν τῶν ἀξόνων διεύθυνσιν· ἀλλ' ἐπιτυγχάνομεν τοῦ αὐτοῦ ἀποτελέσματος ἐκτελοῦντες τὰς μεταβολὰς ταύτας διαδοχικῶς. Τοιουτοτρόπως, οὐ μόνον διακρίνεται κάλλιον ἡ ἰδία ἑκάστης ἐπιῤῥοή, ἀλλὰ καὶ οἱ λογισμοὶ καθίστανται ἁπλούστεροι.

**155.** Ἔστω ἡ γενικὴ ἐξίσωσις

$$(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{A}\psi^2 + \mathrm{B}\chi\psi + \Gamma\chi^2 + \Delta\psi + \mathrm{E}\chi + \mathrm{Z} = 0.$$

Λάβωμεν ἑτέρους ἄξονας παραλλήλους μὲν τοῖς ὑπάρχουσιν, ἔχοντας δὲ ἀρχὴν τὴν τυχοῦσαν. Πρὸς τοῦτο καθιστῶμεν

$$\chi = \chi' + \alpha \qquad \psi = \psi' + \beta\,,$$

ἐν τῇ ἐξισώσει (Α), καὶ λαμβάνομεν τὴν ἑξῆς

$$(\mathrm{B}) \qquad \mathrm{A}\psi'^2 + \mathrm{B}\chi'\psi' + \Gamma\chi'^2 + \Delta'\psi' + \mathrm{E}'\chi' + \mathrm{Z}' = 0,$$

Ἐν ᾗ πρὸς συντομίαν ἐκαλέσαμεν.

$$\Delta' = 2A\beta + B\alpha + \Delta\,, \qquad E' = 2\Gamma\alpha + B\beta + E\,,$$
$$Z' = A\beta^2 + B\alpha\beta + \Gamma\alpha^2 + \Delta\beta + E\alpha + Z.$$

Ἐν τῇ συνθέσει τῆς μετασχηματισθείσης (B) παρατηρητέον ὅτι· 1ον. οἱ συντελεσταὶ τῶν δευτεροβαθμίων ὅρων ἔμειναν οἱ αὐτοί· 2ον. οἱ συντελεσταὶ $\Delta'$, $E'$, τῶν πρωτοβαθμίων ὅρων εἰσὶ τὰ παραγόμενα πολυώνυμα πρὸς $\psi$ καὶ πρὸς $\chi$ τοῦ πρώτου μέλους τῆς (A), ἐν οἷς $\chi$ καὶ $\psi$ ἀντικατεστάθησαν ὑπὸ τῶν συντεταγμένων $\alpha$ καὶ $\beta$ τῆς νέας ἀρχῆς. 3ον. τέλος, τὸ ἄτρεπτον μέρος $Z'$ μορφοῦμεν καθιστῶντες $\alpha$ καὶ $\beta$ ἀντὶ $\chi$ καὶ $\psi$ εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως (A).

Προσδιορίσωμεν ἤδη τὰς ἐν τῇ ἐξισώσει (B) ἀορίστους $\alpha$ καὶ $\beta$, ὅπως ἀφανισθῶσιν οἱ πρωτοβάθμιοι ὅροι. Καθιστῶμεν

$$(1) \qquad 2A\beta + B\alpha + \Delta = 0, \qquad 2\Gamma\alpha + B\beta + E = 0.$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἐξάγομεν

$$\alpha = \frac{2AE - B\Delta}{B^2 - 4A\Gamma}\,, \qquad \beta = \frac{2\Gamma\Delta - BE}{B^2 - 4A\Gamma}\,.$$

Ἐν τῇ περιπτώσει τῶν ἐλλείψεων καὶ τῶν ὑπερβολῶν, ὁ παρονομαστὴς $B^2 - 4A\Gamma$ διαφέρει μηδενὸς [127]· ἄρα, αἱ τιμαὶ αὗται εἰσὶ πεπερασμέναι καὶ ὡρισμέναι. Ὅθεν προκύπτει ὅτι, μετατιθεμένης τῆς ἀρχῆς εἰς τὸ σημεῖον ὃ ὁρίζουσιν, ἡ ἐξίσωσις (B) στερεῖται τῶν πρωτοβαθμίων ὅρων εἰς $\chi'$ καὶ $\psi'$. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ μόνον ἔχον τὸ ἰδίωμα τοῦτο· διότι αἱ ἐξισώσεις (1) μίαν μόνην λύσιν ἐπιδέχονται.

Διὰ τὰς παραβολὰς ἡ ἁπλοποίησις αὕτη εἶναι ἀδύνατος· διότι τότε αἱ τιμαὶ τῶν $\alpha$, $\beta$, εἰσὶν ἄπειροι.

Εἰ δὲ καὶ ὁ ἕτερος τῶν ἀριθμητῶν, π. χ. $2AE - B\Delta$, εἶναι μηδὲν σὺν τῷ παρονομαστῇ, αἱ δύο αὗται ὑποθέσεις μηδενίζουσι καὶ τὸν ἕτερον ἀριθμητήν, αἱ δὲ τιμαὶ τῶν $\alpha$, $\beta$, καθίστανται ἀόριστοι. Τότε, ὡς γνωστόν, αἱ ἐξισώσεις (1) ταυτίζονται, ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, αἱ δύο εὐθεῖαι ἃς ἐμφαίνουσιν ἄγονται εἰς μίαν. Ἑπομένως ὑπάρχουσιν ἄπειροι ἀρχαὶ ἅπασαι κείμεναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης, δι' ὧν ἀφανίζονται



οἱ πρωτοβάθμιοι ὅροι. Τότε ἡ ἐξίσωσις (A) δὲν ἐμφαίνει καμπύλην. Τῷ ὄντι, αἱ ἐξ αὐτῆς διδόμεναι γενικαὶ τιμαὶ [119] τῇ διττῇ ὑποθέσει $B^2 - 4A\Gamma = 0$, $2AE - B\Delta = 0$; καθίστανται,

$$\psi = \frac{-B\chi - \Delta}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{\Delta^2 - 4AZ}\,\cdot$$

δηλοῦσι δὲ δύο εὐθείας παραλλήλους, αἵτινες, ἔν τισι περιπτώσεσι, συμβαίνει νὰ ταυτισθῶσιν, ἢ νὰ ὦσι φανταστικαί.

Λοιπόν, αἱ ἐλλείψεις καὶ αἱ ὑπερβολαὶ εἰσὶν αἱ μόναι καμπύλαι τῆς δευτέρας τάξεως ὧν ἡ ἐξίσωσις ἄγεται ὑπὸ τὴν μορφήν,

$$(\Gamma) \qquad A\psi'^2 + B\chi'\psi' + \Gamma\chi'^2 + Z' = 0\,.$$

ΣΗΜ. Παρατηρητέον ὅτι, ἐν αἷς περιπτώσεσι μόνη ἡ ἀλλαγὴ τῆς ἀρχῆς δὲν ἐπαρκεῖ πρὸς ἐξάλειψιν τῶν πρωτοβαθμίων ὅρων, ἡ ἁπλοποίησις αὕτη ἐπίσης εἶναι ἀδύνατον γενέσθαι μεταβαλλομένης, σὺν τῇ ἀρχῇ, καὶ τῆς διευθύνσεως τῶν ἀξόνων. Ὑποθέσωμεν, τῷ ὄντι, ὅτι ὁ τελευταῖος οὗτος μετασχηματισμὸς ἔδωκε τὴν ἐξίσωσιν (Γ). Ἀντικαταστήσωμεν τοὺς τελευταίους ἄξονας δι' ἑτέρων ἐχόντων τὴν αὐτὴν ἀρχήν, ἀλλὰ παραλλήλων ταῖς προτέραις συντεταγμέναις $\chi$ καὶ $\psi$. Αἱ τιμαὶ ἃς πρέπει νὰ ἀντεισάξωμεν ἐν τῇ τελευταίᾳ ἐξισώσει (Γ) ἔσονται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\chi' = \mu\chi'' + \nu\psi''$, $\psi' = \mu'\chi'' + \nu'\psi''$· φανερὸν δὲ ὅτι ἡ ἀντεισαγωγὴ αὕτη οὐδένα ὅρον πρωτοβάθμιον παράξει. Λοιπόν, συνάγομεν ὅτι, εἰ ἀμέσως μετεβαίνομεν ἀπὸ τῆς πρώτης ἀρχῆς εἰς τὴν δευτέραν, χωρὶς νὰ μεταβάλλωμεν τὴν διεύθυνσιν τῶν προτέρων ἀξόνων, οἱ πρωτοβάθμιοι ὅροι ἤθελον ἐπίσης ἀφανισθῆ. Ἄρα, ἡ διεύθυνσις τῶν ἀξόνων οὐδεμίαν ἔχει ἐπιρροὴν ἐπὶ τῆς ἐξαλείψεως τῶν ὅρων τούτων.

### ΕΞΑΛΕΙΨΙΣ ΤΟΥ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ.

**156.** Ἐν τοῖς προηγουμένοις αἱ συντεταγμέναι τῆς ἐξισώσεως (A) εἶχον διεύθυνσιν τὴν τυχοῦσαν. Ἐφεξῆς ὑποθέσομεν αὐτὰς ὀρθογωνίους. Εἰ δὲν ἦσαν τοιαῦται, γινώσκομεν πῶς καθίστανται ὀρθογώνιοι διὰ μετασχηματισμοῦ τῶν ἀξόνων.

Τούτου τεθέντος, ζητήσωμεν ἐξαλεῖψαι τὸ γινόμενον τῶν μεταβλητῶν, λαμβάνοντες ἑτέρους ἄξονας ἐπίσης ὀρθογωνίους. Περιττὸν μεταθέσαι τὴν ἀρχήν· διότι, εἰ μετατιθεμένης ταύτης εἴς τι σημεῖον, τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο ἀφανίζεται, ἡ αὐτὴ ἁπλοποποίησις ὑπάρξει καὶ πρὸς πᾶσαν ἑτέραν ἀρχήν· διότι, μετατιθεμένων εἰς ταύτην τῶν νέων ἀξόνων παραλλήλως ἑαυτοῖς, οἱ δευτεροβάθμιοι ὅροι μένουσιν ἀναλλοίωτοι [155], ἑπομένως τὸ ὀρθογώνιον δὲν ἀναφαίνεται.

Λαμβάνομεν τοὺς τύπους δι' ὧν μεταβαίνομεν ἀπὸ ἀξόνων ὀρθογωνίων εἰς ἑτέρους ὁμοίους [79]· καθιστῶμεν ἐν αὐτοῖς $\alpha = 0$, $\beta = 0$, καὶ ἔχομεν,

$$\chi = \chi' \,\text{συν}\,\varphi - \psi' \,\text{ἡμ}\,\varphi, \qquad \psi = \chi' \,\text{ἡμ}\,\varphi + \psi' \,\text{συν}\,\varphi.$$

Αἱ τιμαὶ αὗται εἰσαγόμεναι ἐν τῇ ἐξισώσει (Α) τρέπουσιν αὐτὴν εἰς

$$(\Delta) \qquad \mathrm{M}\psi'^2 + \mathrm{K}\chi'\psi' + \mathrm{N}\chi'^2 + \mathrm{P}\psi' + \Sigma\chi' + \mathrm{Z} = 0,$$

Ἐν ᾗ οἱ συντελεσταὶ Μ, Κ, Ν, Ρ, Σ, περιέχουσι τὴν ἀόριστον γωνίαν φ.

Ἵνα ἀφανισθῇ ὁ τοῦ ὀρθογωνίου $\chi'\psi'$ ὅρος, πρέπει διὰ τῆς ἐξισώσεως $\mathrm{K} = 0$ νὰ ὁρίζηται τιμὴ πραγματικὴ τῇ φ. Ἄρα, πρόκειται ἐπιλῦσαι τὴν ἐξίσωσιν

$$2(\mathrm{A} - \Gamma)\,\text{ἡμ}\,\varphi\,\text{συν}\,\varphi + \mathrm{B}(\text{συν}^2\varphi - \text{ἡμ}^2\varphi) = 0,$$

ἥτις ἄγεται εἰς ταύτην,

$$(\mathrm{A} - \Gamma)\,\text{ἡμ}\,2\varphi + \mathrm{B}\,\text{συν}\,2\varphi = 0,$$

ἐξ ἧς συνάγομεν $\quad \text{ἐφ}\,2\varphi = \dfrac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A} - \Gamma}$.

Ἐπειδὴ ἡ ἐφαπτομένη λαμβάνει πᾶν μέγεθος ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία $2\varphi$ εἶναι πάντοτε πραγματική· δυνατὸν δὲ νὰ ἔχῃ τέσσαρας τιμάς. Τῷ ὄντι, φ πρέπει νὰ περιέχηται μεταξὺ $0^\circ$ καὶ $360^\circ$ [83]· ἄρα, $2\varphi$ περιέχεται μεταξὺ $0^\circ$ καὶ $2 \times 360^\circ$. Καλοῦντες $2\varphi'$ τὸ ἔλαττον $180^\circ$ τόξον, ὅπερ συστοιχεῖ τῇ ἀνωτέρω ἐφαπτομένῃ, ἔχομεν μεταξὺ τῶν ὁρίων τούτων τὰ ἑξῆς τέσσαρα τόξα τὴν αὐτὴν ἔχοντα ἐφαπτομένην,

$$2\varphi', \quad 2\varphi' + 180^\circ, \quad 2\varphi' + 2 \times 180^\circ, \quad 2\varphi' + 3 \times 180^\circ.$$



Ἄρα, φ ἔχει ἐπίσης τέσσαρας τιμάς,

$$\varphi', \quad \varphi' + 90^\circ, \quad \varphi' + 2 \times 90^\circ, \quad \varphi' + 3 \times 90^\circ.$$

Αἱ μὲν δύο πρῶται ὁρίζουσι δύο εὐθείας τεμνομένας πρὸς ὀρθάς, αἱ δὲ δύο τελευταῖαι τὰς προεκβολὰς τῶν αὐτῶν εὐθειῶν.

Φανερὸν ὅτι, ἐὰν λάβωμεν τὴν ἑτέραν τῶν εὐθειῶν τούτων ὡς ἄξονα τῶν $\chi'$, ἡ ἑτέρα ἔσεται ἄξων τῶν $\psi'$. Ἀναμνηστέον ὅτι ἡ ἀρχὴ δὲν ἤλλαξε καὶ ὅτι ἔκειτο ὁπωσδήποτε. Λοιπόν, συνάγομεν ὅτι, περὶ ἑκάστην ἀρχὴν ὑπάρχει σύστημά τι ἀξόνων ὀρθογωνίων κατάλληλον πρὸς ἐξάλειψιν τοῦ ὀρθογωνίου $\chi'\psi'$· ἤτοι, ἐν ᾧ ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις τρέπεται ὑπὸ τὴν ἑξῆς μορφήν,

$$(\mathrm{E}) \qquad \mathrm{M}\psi'^2 + \mathrm{N}\chi'^2 + \mathrm{P}\psi' + \Sigma\chi' + \mathrm{Z} = 0.$$

Ἐν γένει δὲ ἓν μόνον σύστημα τοιοῦτον ὑπάρχει.

**157.** Παρατηρητέον ἐνταῦθα τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν συγχρόνως $\mathrm{A} = \Gamma$, $\mathrm{B} = 0$. Τότε, ἡ ἐξίσωσις (Α) γράφεται οὕτω,

$$\psi^2 + \chi^2 + \frac{\Delta}{\mathrm{A}}\psi + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{A}}\chi + \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{A}} = 0\cdot$$

φανερὸν δὲ ὅτι ἐμφαίνει κύκλον [151]. Παράδ. 5ον. Τότε καὶ ἐφ $2\varphi$ εἶναι ἀόριστος, ἢ μᾶλλον ὁ συντελεστὴς Κ μηδενίζεται ἀφ' ἑαυτοῦ. Μανθάνομεν ἐντεῦθεν ὅτι, οἱουσδήποτε ἄξονας ὀρθογωνίους λάβωμεν, τὸ ὀρθογώνιον τῶν συντεταγμένων δὲν ἀναφαίνεται ἐν τῇ ἐξισώσει. Τῷ ὄντι, εἴδομεν ἐν § 73, ὅτι ἐν τῇ γενικῇ ἐξισώσει τοῦ κύκλου, πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους, δὲν περιέχεται τὸ ὀθογώνιον $\chi\psi$.

**158.** Καθόσον ἡ γενικὴ ἐξίσωσις (Α) ἐμφαίνει ἔλλειψιν, ὑπερβολήν, ἢ παραβολήν, ἡ ποσότης $\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{A}\Gamma$ εἶναι ἀρνητική, θετική, ἢ μηδέν. Ἡ ἀνάλογος αὐτῆς ἐκ τῆς ἐξισώσεως (Ε) μορφουμένη εἶναι $-4\mathrm{MN}$. Λοιπόν, οἱ συντελεσταὶ Μ, Ν, ἔχουσι τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐν τῇ περιπτώσει τῆς ἐλλείψεως, διάφορον δὲ σημεῖον ἐν τῇ τῆς ὑπερβολῆς. Ἐν τῇ περιπτώσει τῆς παραβολῆς, ὁ ἕτερος τῶν συντελεστῶν τούτων εἶναι μηδέν· ἀδύνατον ὅμως νὰ ὦσιν ἀμφότεροι μηδὲν, διότι τότε ἡ ἐξίσωσις (E) δὲν ἤθελεν εἶσθαι δευτεροβάθμιος.

### ΑΝΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ.

**159.** Ὅταν πρόκειται μόνον περὶ ἐλλείψεων καὶ ὑπερβολῶν, δυνατὸν, κατὰ τὰ προεκτεθέντα, ἐξαλεῖψαι πρῶτον τοὺς πρωτοβαθμίους ὅρους τῇ μεταθέσει τῆς ἀρχῆς, εἶτα δὲ τὸ ὀρθογώνιον τῶν μεταβλητῶν τῇ ἐκλογῇ νέων ἀξόνων ὀρθογωνίων. Ἀλλὰ δυνάμεθα ἀντιστρέψαι τὴν τάξιν τῶν μετασχηματισμῶν. Οὕτω καταντῶμεν εἰς ἐξίσωσιν τοιουτόμορφον.

(Z) $$M\psi^2 + N\chi^2 = \Pi,$$

ἐν ᾗ χ καὶ ψ εἰσὶν αἱ τελευταῖαι μεταβληταί.

Ἐν τῇ περιπτώσει τῆς ἐλλείψεως οἱ συντελεσταὶ M, N, ἔχουσι τὸ αὐτὸ σημεῖον. Καλοῦμεν

$$\frac{N}{M} = \mu^2, \quad \frac{\Pi}{M} = \pi,$$

καὶ γράφομεν οὕτω τὴν ἐξίσωσιν·

$$\psi^2 + \mu^2\chi^2 = \pi.$$

Ἐν τῇ περιπτώσει τῆς ὑπερβολῆς M καὶ N ἔχουσι σημεῖα ἐναντία· τότε καλοῦμεν

$$\frac{N}{M} = -\mu^2, \quad \frac{\Pi}{M} = \pi,$$

καὶ ἔχομεν

$$\psi^2 - \mu^2\chi^2 = \pi.$$

**160.** Ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς ὑπ' οὐδεμίαν τῶν τοιούτων μορφῶν ἄγεται, διότι ἀδύνατον νὰ στερηθῇ ἀμφοτέρων τῶν πρωτοβαθμίων ὅρων [155]. Ἀλλὰ δυνάμεθα ἐξαλεῖψαι τὸ ὀρθογώνιον, καὶ τότε συνεξαλείφεται τὸ ἕτερον τῶν τετραγώνων [158]. Τεθείσθω ἐξαλειφθὲν τὸ $\chi'^2$. ἡ ἐξίσωσις τῶν παραβολῶν ἔσεται

(H) $$M\psi'^2 + P\psi' + \Sigma\chi' + Z = 0.$$



Λάβωμεν ἤδη νέους ἄξονας παραλλήλους τῶν χ' καὶ τῶν ψ', καὶ ἀναφέρωμεν πρὸς αὐτοὺς τὴν καμπύλην. Πρὸς τοῦτο, καθιστῶμεν ἐν τῇ ἐξισώσει (H),

$$\chi' = \chi'' + \alpha, \qquad \psi' = \psi'' + \beta.$$

Εἰσάγομεν οὕτω δύο ἀορίστους ποσότητας, α, β, δι' ὧν ἐξαλειφθήσονται δύο νέοι ὅροι. Ἡ ἀντεισαγωγὴ δίδει,

(Θ) $$M\psi''^2 + \Sigma\chi'' + (2M\beta + P)\psi'' + M\beta^2 + P\beta + \Sigma\alpha + Z = 0.$$

Ἐν ταύτῃ τὸ περιεκτικὸν ψ'' καὶ τὸ ἀνεξάρτητον μεταβλητῶν εἰσὶ τὰ μόνα μέρη περιέχοντα τὰς ἀορίστους α, β. Ἐξαλείψωμεν τὰ μέρη ταῦτα καθιστῶντες,

$$2M\beta + P = 0, \qquad M\beta^2 + P\beta + \Sigma\alpha + Z = 0,$$

ὅθεν $$\beta = \frac{-P}{2M}, \quad \alpha = \frac{-M\beta^2 - P\beta - Z}{\Sigma}.$$

Ἡ τιμὴ τῆς β δὲν εἶναι ἄπειρος, διότι M διαφέρει μηδενός. Ἡ τιμὴ τῆς α εἶναι ἐπίσης πεπερασμένη, ἀρκεῖ ὁ συντελεστὴς Σ νὰ διαφέρῃ μηδενός. Τῷ ὄντι, ὅταν $\Sigma = 0$, ἡ ἐξίσωσις (H) δὲν περιέχει χ' ἐπιλυομένη δὲ πρὸς ψ' δίδει τιμὰς ἀτρέπτους· ἄρα, τότε ἡ τεθεῖσα ἐξίσωσις ἐμφαίνει, οὐχὶ καμπύλην, ἀλλὰ δύο εὐθείας παραλλήλους ταῖς τετμημέναις, ἢ μίαν εὐθεῖαν, ἢ δύο εὐθείας φανταστικάς. Λοιπὸν, ἕνεκα τούτου παραλείψομεν τὴν ὑπόθεσιν $\Sigma = 0$.

Φανερὸν ἤδη ἔγινεν ὅτι, τιθεμένης τῆς ἀρχῆς ἐν τῷ σημείῳ οὗτινος συντεταγμέναι εἰσὶν αἱ προηγούμεναι τιμαὶ τῶν α, β, ὁ τελευταῖος μετασχηματισμὸς (Θ) ἄγει εἰς τὴν ἐξίσωσιν

(I) $$M\psi''^2 + \Sigma\chi'' = 0\cdot$$

ἢ, καλοῦντες $-\dfrac{\Sigma}{M} = 2\pi$, καὶ παραλείποντες τοὺς τόνους,

$$\psi^2 = 2\pi\chi,$$

ἥτις εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῶν παραβολῶν ὑπὸ τὴν ἁπλουστέραν μορφήν.

161. Ἀνακεφαλαιοῦντες τὰ προεκτεθέντα συνάγομεν ὅτι, τῇ καταλλήλῳ ἐκλογῇ τῆς τε ἀρχῆς καὶ τῆς διευθύνσεως τῶν ἀξόνων, αἱ ἐλλείψεις, αἱ ὑπερβολαὶ καὶ αἱ παραβολαὶ δηλοῦνται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων,

(α) $$\psi^2 + \mu^2\chi^2 = \pi ,$$

(β) $$\psi^2 - \mu^2\chi^2 = \pi ,$$

(γ) $$\psi^2 = 2\pi\chi .$$

Αἱ τοιουτόμορφοι δὲ ἐξισώσεις δι' ἓν μόνον σύστημα ἀξόνων ὀρθογωνίων ὑπάρχουσιν, ἐξαιρέσει τῆς περιπτώσεως τοῦ κύκλου.

## ΠΕΡΙ ΚΕΝΤΡΟΥ ΚΑΙ ΑΞΟΝΩΝ.

162. ΚΕΝΤΡΟΝ *καμπύλης ὀνομάζεται σημεῖον ἐν ᾧ διχοτομοῦνται πᾶσαι αἱ ἀπ' αὐτοῦ ἀγόμεναι εὐθεῖαι καὶ περατούμεναι ἐπὶ τῆς καμπύλης.*

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου προκύπτει τὸ ἑξῆς θεώρημα·

*Ὅταν ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων ἦναι ἐν τῷ κέντρῳ γραμμῆς τῆς δευτέρας τάξεως, οἱ πρὸς τὰς συντεταγμένας πρωτοβάθμιοι ὅροι, δὲν ὑπάρχουσιν ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς γραμμῆς ταύτης. Ἀντιστρόφως· ὅταν οἱ πρωτοβάθμιοι ὅροι δὲν ὑπάρχωσιν ἐν τῇ ἐξισώσει γραμμῆς τῆς δευτέρας τάξεως, ἡ ἀρχὴ εἶναι τὸ κέντρον τῆς καμπύλης ταύτης.*

Πρὸς δεῖξιν, λάβωμεν τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν,

(Α) $$A\psi^2 + B\chi\psi + \Gamma\chi^2 + \Delta\psi + E\chi + Z = 0 \cdot$$

Ὑποθέσωμεν ὅτι, ἡ ὑπὸ ταύτης ἐμφαινομένη καμπύλη ἔχει κέντρον, ὅπερ ἔστω ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων. Πάσης εὐθείας ἀγομένης ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου ἡ ἐξίσωσις ἔσεται $\psi = \alpha\chi$. Ἵνα δὲ λάβωμεν τὰς τετμημένας τῆς κοινῆς τομῆς τῆς εὐθείας πρὸς τὴν καμπύλην, φέρομεν τὴν τιμὴν τῆς ψ ἐν τῇ ἐξισώσει (Α), καὶ ἔχομεν τὴν ἑξῆς,

$$(A\alpha^2 + B\alpha + \Gamma)\chi^2 + (\Delta\alpha + E)\chi + Z = 0 ,$$

ἧς αἱ ῥίζαι εἰσὶν αἱ ζητούμεναι τετμημέναι (Σχ. 68). Ἔστω



ΜΝ τὸ ἀπολαμβανόμενον ἐν τῇ καμπύλῃ μέρος τῆς εὐθείας· πρέπει νὰ ἔχωμεν $AM = AN$· ἄγοντες δὲ τὰς τεταγμένας ΜΠ, ΝΚ, τὰ τρίγωνα ΑΜΠ, ΑΝΚ, ἔσονται ἰσάλληλα· ἄρα, $AK = A\Pi$· ἤτοι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως, ἥτις δίδει τὰς τετμημένας ταύτας, πρέπει νὰ ὦσιν ἴσαι μετὰ σημείων ἐναντίων. Λοιπὸν, πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$\Delta\alpha + E = 0 .$$

Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη πρέπει νὰ ταυτοποιῆται ἀνεξαρτήτως πάσης τιμῆς τοῦ α· ἄρα, $\Delta = 0$ καὶ $E = 0$· ἐπομένως, οἱ πρωτοβάθμιοι ὅροι δὲν ὑπάρχουσιν ἐν τῇ ἐξισώσει (Α).

Ἀντιστρόφως· ὅταν $\Delta = 0$, $E = 0$, ἡ δίδουσα τὰς χ ἐξίσωσις ἔχῃ τὰς δύο αὐτῆς ῥίζας ἴσας μετὰ σημείων ἐναντίων· ὅθεν συνάγομεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΜΠ, ΑΝΚ, εἰσὶν ἴσα· ἐπομένως δὲ πᾶσα χορδὴ ΜΝ, ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ἀγομένη, διχοτομεῖται κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο· ἤτοι, ἡ ἀρχὴ εἶναι κέντρον.

Λοιπὸν, ἵνα ὑπάρχῃ ἐν καμπύλῃ τινὶ τῆς δευτέρας τάξεως κέντρον, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἀρχή τις ἐν ᾗ, μεταφερομένων τῶν ἀξόνων παραλλήλως ἑαυτοῖς, νὰ ἀφανίζωνται οἱ πρωτοβάθμιοι ὅροι· τότε ἡ ἀρχὴ αὕτη ἔσεται τὸ κέντρον. Ἀλλ' ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος εἶναι ἀδύνατος διὰ τὰς παραβολάς· δυνατὸς δὲ, κατὰ μοναδικὸν τρόπον, διὰ τὰς ἐλλείψεις καὶ ὑπερβολὰς [155]· ἄρα, *αἱ μὲν ἐλλείψεις καὶ ὑπερβολαὶ ἔχουσιν ἓν μόνον κέντρον, αἱ δὲ παραβολαὶ στεροῦνται κέντρου.*

163. Κατὰ τὸν ἐν § 120 ὁρισμὸν, *διάμετρος* καλεῖται εὐθεῖα διχοτομοῦσα σειρὰν χορδῶν παραλλήλων. Λοιπὸν, ἕπεται ὅτι εἰ τῆς ἑτέρας τῶν συντεταγμένων, π. χ. ψ, τὸ τετράγωνον μόνον εἰσέρχεται ἐν τῇ ἐξισώσει καμπύλης τῆς δευτέρας τάξεως, ὁ ἄξων οὗτινος παράλληλος εἶναι ἡ ἑτέρα συντεταγμένη, εἶναι διάμετρος. Δῆλον, τῷ ὄντι, ὅτι ἐφ' ἑκάστην τετμημένην αἱ τιμαὶ τῆς ψ εἰσὶν ἴσαι μετὰ σημείων ἐναντίων· ἄρα, ὁ ἄξων τῶν χ διχοτομεῖ τὰς παραλλήλους τῇ γραμμῇ τῶν ψ χορδὰς, ἐπομένως εἶναι διάμετρος.

*Ἄξων καμπύλης* καλεῖται ἡ διάμετρος, ἡ πρὸς ὀρθὰς οὖσα τῇ διευθύνσει τῶν χορδῶν ἃς διχοτομεῖ. Τὸ περιεχόμενον μέρος ἐν τῇ καμπύλῃ εἶναι *τὸ μῆκος τοῦ ἄξονος*· τὰ δὲ σημεῖα καθ' ἃ συμπίπτει αὐτῇ καλοῦνται *κορυφαί*.

Λοιπὸν, συνάγομεν ὅτι, ἡ γραμμὴ ἐφ' ἧς μετροῦνται αἱ τετμημέναι τῶν ἐν § 161 ἐξισώσεων (α), (β), (γ), εἶναι *διάμετρος*, μάλιστα δὲ ἄξων τῆς καμπύλης. Ὡσαύτως, ἡ γραμμὴ τῶν τεταγμένων εἶναι ἄξων τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς ὑπερβολῆς τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων, οὐχὶ δὲ τῆς παραβολῆς ὑπὸ τῆς τρίτης δηλουμένης· διότι ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ χ εἶναι τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

Θέλομεν ἰδεῖ βραδύτερον ὅτι οἱ ἄξονες, περὶ ὧν ὁ λόγος, εἰσὶν οἱ μόνοι ὑπάρχοντες ἐν ταῖς καμπύλαις δευτέρας τάξεως.

### ΑΝΑΠΤΥΞΕΙΣ ΤΩΝ ΛΟΓΙΣΜΩΝ ΔΙ' ΩΝ ΜΟΡΦΟΥΜΕΝ ΤΑΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΘΕΙΣΑΣ (Ζ), (Ι).

**164.** Ἀντικείμενον τοῦ κεφαλαίου τούτου ἦτον ἡ ἀνίχνευσις τῆς ἁπλουστέρας μορφῆς τῶν ἐξισώσεων ἐμφαινουσῶν τὰς δευτέρας τάξεως καμπύλας. Ὅθεν, ἐνομίσαμεν οὐσιωδέτερον δεῖξαι τὸ δυνατὸν τῶν τοιούτων μετασχηματισμῶν, ἢ ἐκτελέσαι αὐτούς. Ἤδη ἀναπληρώσομεν τὴν ἔλλειψιν ταύτην.

**165.** Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις

(Α) $$A\psi^2 + B\chi\psi + \Gamma\chi^2 + \Delta\psi + E\chi + Z = 0,$$

ἐμφαίνει ἔλλειψιν ἢ ὑπερβολὴν, καὶ ἀναπτύξωμεν τοὺς λογισμοὺς δι' ὧν ἄγεται ὑπὸ τὴν ἁπλουστάτην μορφὴν [159. (Ζ)].

ΠΡΩΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ. [155]. Τοὺς πρωτοβαθμίους ὅρους ἀφανίζομεν τῇ μεταθέσει τῆς ἀρχῆς. Λαμβάνομεν οὕτω τὴν μετασχηματισθεῖσαν

(Γ) $$A\psi^2 + B\chi\psi + \Gamma\chi^2 + Z' = 0.$$

Οἱ συντελεσταὶ Α, Β, Γ, εἰσὶν οἱ αὐτοὶ τῆς (Α)· αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου ὁρίζονται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

(1) $$2A\beta + B\alpha + \Delta = 0, \qquad 2\Gamma\alpha + B\beta + E = 0\cdot$$

ἔχομεν δὲ $$Z' = A\beta^2 + B\alpha\beta + \Gamma\alpha^2 + \Delta\beta + E\alpha + Z,$$



Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ Ζ' ἁπλοποιεῖται ὡς ἑξῆς. Πολυπλασιάζομεν τὰς ἐξισώσεις (1), τὴν μὲν ἐπὶ β τὴν δὲ ἐπὶ α, προσθέτομεν καὶ ἔχομεν

$$2A\beta^2 + 2B\alpha\beta + 2\Gamma\alpha^2 + \Delta\beta + E\alpha = 0,$$

ὅθεν $$A\beta^2 + B\alpha\beta + \Gamma\alpha^2 = -\frac{\Delta\beta + E\alpha}{2}.$$

ἐπομένως $$Z' = Z + \frac{\Delta\beta + E\alpha}{2}.$$

Λοιπὸν, οἱ ἀφορῶντες τὸν πρῶτον μετασχηματισμὸν τύποι εἰσὶν,

$$\alpha = \frac{2AE - B\Delta}{B^2 - 4A\Gamma}, \quad \beta = \frac{2\Gamma\Delta - BE}{B^2 - 4A\Gamma}, \quad Z' = Z + \frac{\Delta\beta + EA}{2}.$$

ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ. Διὰ τὸν πρῶτον μετασχηματισμὸν αἱ συντεταγμέναι ἦσαν αἱ τυχοῦσαι· ἀλλὰ διὰ τὸν δεύτερον, ὑποθέσομεν αὐτὰς ὀρθογωνίους εἰς τὴν ἐξίσωσιν (Γ) ἀφ' ἧς πρόκειται ἀφανίσαι τὸ ὀρθογώνιον χψ, ὅπως αὕτη λάβῃ τὴν μορφὴν

(Ζ) $$M\psi^2 + N\chi^2 = \Pi.$$

Καθιστῶμεν ἐν τῇ ἐξισώσει (Γ) ἀντὶ χ καὶ ψ, τὰς τιμὰς

$$\chi\,\text{συν}\,\varphi - \psi\,\text{ημ}\,\varphi, \qquad \chi\,\text{ημ}\,\varphi + \psi\,\text{συν}\,\varphi.$$

Προσδιορίζομεν τὴν γωνίαν φ τῇ συνθήκῃ τοῦ μηδενισθῆναι τὸν συντελεστὴν τοῦ χψ. Εὕρομεν ἤδη [156] τὴν τιμὴν

$$\text{εφ}\,2\varphi = \frac{-B}{A - \Gamma},$$

ἐξ ἧς συνάγομεν

$$\text{συν}\,2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{εφ}^2 2\varphi}} = \frac{A - \Gamma}{\sqrt{B^2 + (A - \Gamma)^2}},$$

$$\text{ημ}\,2\varphi = \frac{\text{εφ}\,2\varphi}{\sqrt{1 + \text{εφ}^2 2\varphi}} = \frac{-B}{\sqrt{B^2 + (A - \Gamma)^2}}.$$

Αἱ δύο τιμαὶ τοῦ ἡμ $2\varphi$ καὶ τοῦ συν $2\varphi$, εἰσὶν ἴσαι πλὴν μετὰ σημείων ἐναντίων, διότι πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ ὑπάρχει τὸ διπλοῦν σημεῖον $\pm$· ἀντιστοιχοῦσι δὲ εἰς δύο εὐθείας καθέτους πρὸς ἀλλήλας, ὧν ἑκάστη δύναται ληφθῆναι ὡς ἄξων τῶν $\chi$. Ἀλλά, πρὸς ἀποφυγὴν πάσης ἀμφιβολίας, δώσομεν τῷ ῥιζικῷ πανταχοῦ τὸ $+$, ὅπερ τὸ αὐτὸ λαμβάνειν τὸ ἡμ $2\varphi$ μετὰ σημείου ἐναντίου τοῦ Β.

Λογίσωμεν ἤδη τοὺς συντελεστὰς Μ, Ν, Π, τῆς ἐξισώσεως (Ζ). Ἡ εἰσαγωγὴ τῶν τύπων $\chi\,\text{συν}\,\varphi - \psi\,\text{ἡμ}\,\varphi$, $\chi\,\text{ἡμ}\,\varphi + \psi\,\text{συν}\,\varphi$, ἐν τῇ ἐξισώσει (Γ), δίδει,

$$M = A\,\text{συν}^2\varphi - B\,\text{ἡμ}\,\varphi\,\text{συν}\,\varphi + \Gamma\,\text{ἡμ}^2\varphi,$$

$$N = A\,\text{ἡμ}^2\varphi + B\,\text{ἡμ}\,\varphi\,\text{συν}\,\varphi + \Gamma\,\text{συν}^2\varphi,$$

$$\Pi = -Z'.$$

Ἐκ τῶν δύο πρώτων λαμβάνομεν,

$$M + N = A + \Gamma,$$

$$\begin{aligned} M - N &= (A - \Gamma)(\text{συν}^2\varphi - \text{ἡμ}^2\varphi) - 2B\,\text{ἡμ}\,\varphi\,\text{συν}\,\varphi \\ &= (A - \Gamma)\,\text{συν}\,2\varphi - B\,\text{ἡμ}\,2\varphi \\ &= \frac{B^2 + (A - \Gamma)^2}{\sqrt{B^2 + (A - \Gamma)^2}} = \sqrt{B^2 + (A - \Gamma)^2}. \end{aligned}$$

Ἑπομένως συνάγομεν τὰς τιμὰς τῶν Μ, Ν. Λοιπόν, οἱ τύποι τοῦ δευτέρου μετασχηματισμοῦ εἰσὶν οἱ ἑξῆς·

$$\text{εφ}\,2\varphi = \frac{-B}{A - \Gamma},$$

$$M = \tfrac{1}{2}(A + \Gamma) + \tfrac{1}{2}\sqrt{B^2 + (A - \Gamma)^2},$$

$$N = \tfrac{1}{2}(A + \Gamma) - \tfrac{1}{2}\sqrt{B^2 + (A - \Gamma)^2}.$$

$$\Pi = -Z'.$$

Ἀναμνηστέον ὅτι, τὸ ἡμ $2\varphi$ ἔχει σημεῖον ἐναντίον τοῦ σημείου τοῦ Β.



**166.** Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ἡ ἐξίσωσις (Α) ἐμφαίνει παραβολήν· διατηροῦντες δὲ πάντοτε τοὺς ἄξονας ὀρθογωνίους, ἄξωμεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν ἁπλουστάτην μορφὴν [160. (I)]. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἐξαλείφομεν πρῶτον τὸ ὀρθογώνιον, τῇ ἀλλαγῇ διευθύνσεως τῶν ἀξόνων, κατόπιν δὲ μεταθέτομεν τὴν ἀρχήν.

ΠΡΩΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ. Δι' αὐτοῦ καταντῶμεν [160] εἰς τὴν ἐξίσωσιν,

$$(\text{H}) \qquad M\psi^2 + P\psi + \Sigma\chi + Z = 0.$$

Οἱ πρῶτοι ἄξονες εἰσὶν ὀρθογώνιοι· οἱ νέοι εἰσὶν ἐπίσης τοιοῦτοι· ἡ δὲ γωνία $\varphi$, ἡ τὴν θέσιν αὐτῶν ὁρίζουσα, δίδεται ἐκ τοῦ αὐτοῦ τύπου τοῦ προηγουμένου §. Τοὺς αὐτοὺς τύπους ἔχομεν καὶ διὰ Μ, Ν· ἀλλ' ἐπειδὴ ἐνταῦθα ἔχομεν $B^2 - 4A\Gamma = 0$, οἱ τύποι εἰσὶν ἐπιδεκτικοὶ ἁπλοποιήσεων.

Ἐν πρώτοις $\sqrt{B^2 + (A - \Gamma)^2} = \pm(A + \Gamma)$.

Ὡς πρὸς τὸ σημεῖον $\pm$, παρατηροῦμεν ὅτι δυνάμεθα πάντοτε καταστῆσαι Α θετικὸν ἐν τῇ γενικῇ ἐξισώσει (Α)· τότε, συνεπείᾳ τῆς σχέσεως $B^2 = 4A\Gamma$, Γ ἔσεται ἐπίσης θετικός. Λοιπόν, ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν λαμβάνειν τὸ ῥιζικὸν θετικῶς, ἕξομεν

$$\sqrt{B^2 + (A - \Gamma)^2} = A + \Gamma\cdot$$

ἑπομένως

$$\text{εφ}\,2\varphi = \frac{-B}{A - \Gamma}, \qquad \text{συν}\,2\varphi = \frac{A - \Gamma}{A + \Gamma},$$

$$\text{ἡμ}\,2\varphi = \frac{-B}{A + \Gamma}, \qquad M = A + \Gamma, \qquad N = 0.$$

Βλέπομεν, κατὰ § 158, ὅτι σὺν τῷ ὀρθογωνίῳ ἀφανίζεται καὶ τὸ ἕτερον τῶν τετραγώνων.

Λογίσωμεν προσέτι Ρ, Σ. Καθιστῶμεν ἐν τῇ (Α) ἀντὶ $\chi$, $\psi$, τὰς τιμὰς $\chi\,\text{συν}\,\varphi - \psi\,\text{ἡμ}\,\varphi$, $\chi\,\text{ἡμ}\,\varphi + \psi\,\text{συν}\,\varphi$, καὶ ἔχομεν,

$$P = \Delta\,\text{συν}\,\varphi - E\,\text{ἡμ}\,\varphi, \qquad \Sigma = \Delta\,\text{ἡμ}\,\varphi + E\,\text{συν}\,\varphi.$$

Ἀλλὰ, κατὰ τὴν Τριγωνομετρίαν,

$$\eta\mu\,\varphi = \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\,2\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{\Gamma}{\mathrm{A}+\Gamma}},$$

$$\sigma\upsilon\nu\,\varphi = \frac{\eta\mu\,2\varphi}{2\,\eta\mu\,\varphi} = \frac{-\mathrm{B}}{2\sqrt{\Gamma(\mathrm{A}+\Gamma)}}.$$

ἄρα, $$\mathrm{P} = \frac{-2\Gamma\mathrm{E} - \mathrm{B}\Delta}{2\sqrt{\Gamma(\mathrm{A}+\Gamma)}}, \qquad \Sigma = \frac{2\Gamma\Delta - \mathrm{B}\mathrm{E}}{2\sqrt{\Gamma(\mathrm{A}+\Gamma)}}.$$

Ἐλάβομεν τὸ ἡμφ θετικῶς, διότι ἐπιτρέπεται ἡ ἐκλογὴ τοῦ μέρους τῶν θετικῶν χ ὅπως φ ἦ ἐλάσσων $180^{\circ}$. Τὸ συνφ ἔχει σημεῖον ἐναντίον τοῦ Β, ὡς ἀνωτέρω δείκνυται.

ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ. Πρόκειται μεταθέσαι τὴν ἀρχήν. Καθιστῶμεν ἐν τῇ ἐξισώσει (Π), ἀντὶ χ καὶ ψ, $\chi+\alpha$ καὶ $\psi+\beta$, εἶτα ἰσοῦμεν μηδενὶ τὸν πολυπλασιαστὴν τῆς ψ καὶ τὸ ἄτρεπτον μέρος, καὶ λαμβάνομεν

$$2\mathrm{M}\beta + \mathrm{P} = 0, \qquad \mathrm{M}\beta^2 + \mathrm{P}\beta + \Sigma\alpha + \mathrm{Z} = 0,$$

ὅθεν $$\beta = \frac{-\mathrm{P}}{2\mathrm{M}}, \qquad \alpha = \frac{\mathrm{P}^2 - 4\mathrm{M}\mathrm{Z}}{4\mathrm{M}\Sigma}.$$

Οἱ συντελεσταὶ τῶν $\psi^2$, χ, μένουσιν οἱ αὐτοὶ ὡς ἐν τῇ (Π). Οὕτως ἡ τελευταία μετασχηματισθεῖσα εἶναι

(1) $$\mathrm{M}\psi^2 + \Sigma\chi = 0.$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'.

## ΠΕΡΙ ΚΥΚΛΟΥ.

### ΜΟΡΦΑΙ ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΤΗΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ.

**167.** Ἐὰν ἐν τῇ ἐξισώσει (α), § 161, ὑποθέσωμεν $\mu=1$ καὶ $\pi=\alpha^2$, ἕξομεν τὴν ἐν § 73 εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν

(1) $$\psi^2 + \chi^2 = \alpha^2,$$

δηλοῦσαν ὅτι, ἐν τῇ μερικῇ περὶ ἧς λόγος περιπτώσει, ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης εἰσὶν ἐν ἀποστάσει ἀπὸ τῆς ἀρχῆς μονίμῳ καὶ ἴσῃ α. Ἄρα, ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι περιφέρεια κύκλου. Μανθάνομεν καὶ αὖθις [133], ὅτι ὁ κύκλος εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῆς ἐλλείψεως.

**168.** Ἡ γενικωτέρα ἐξίσωσις τοῦ κύκλου, πρὸς συντεταγμένας ὀρθογωνίους, εἶναι [73],

(2) $$(\chi-\pi)^2 + (\psi-\varkappa)^2 = \alpha^2.$$

Ἐξ ἧς προκύπτει ἡ (1) ταῖς ὑποθέσεσι $\pi=0$ καὶ $\varkappa=0$.

Ἵνα θέσωμεν τὴν ἀρχὴν ἐν τῷ πέρατι διαμέτρου τινὸς, λαμβάνοντες ταύτην ὡς ἄξονα τῶν χ, (Σχ. 69), καθιστῶμεν ἐν τῇ (2) $\pi=\alpha$, $\varkappa=0$, καὶ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

(3) $$\psi^2 = 2\alpha\chi - \chi^2.$$

Εἰ μὲν λάβομεν μόνον $\varkappa=0$, τὸ κέντρον ἔσεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ (Σχ. 70), ἀλλ' ἡ περιφέρεια δὲν διέρχεται πλέον τῆς ἀρχῆς. Εἰ δὲ μόνον $\pi=0$, τὸ κέντρον (Σχ. 71) ἔσεται ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῶν ψ. Κατὰ τὰς δύο ταύτας θέσεις αἱ ἐξισώσεις τοῦ κύκλου εἰσὶ,

(4) $$\psi^2 + (\chi-\pi)^2 = \alpha^2,$$

(5) $$\chi^2 + (\psi-\varkappa)^2 = \alpha^2.$$

**169.** Σπανίως μεταχειρίζονται τὴν πρὸς ἄξονας πλαγίους ἐξίσωσιν τοῦ κύκλου. Μορφοῦμεν αὐτὴν ἀμέσως ἐκθέτοντες ὅτι, τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ παντὸς σημείου τῆς καμπύλης, ἰσοῦται τῇ ἀκτῖνι. Τὸ ἀπόστημα τοῦτο, κατὰ § 113, δηλοῦται ὑπὸ τοῦ τύπου,

$$(6)\quad (\chi-\pi)^2+(\psi-\kappa)^2+2(\chi-\pi)(\psi-\kappa)\,\text{συν}\,\theta=\alpha^2,$$

ἐν ᾧ θ, π, κ, δηλοῦσιν ἀμοιβαίως τὴν γωνίαν τῶν ἀξόνων καὶ τὰς τοῦ κέντρου συντεταγμένας.

**170.** Ἡ ἐξίσωσις (2) ἀναπτυσσομένη ἔχει, ἐν γένει, μορφὴν τοιαύτην,

$$\psi^2+\chi^2+\nu\psi+\mu\chi+\gamma=0\cdot$$

ἤτοι, δὲν περιέχει τὸ ὀρθογώνιον χψ, οἱ δὲ συντελεσταὶ τῶν τετραγώνων εἰσὶν ἴσοι. Πᾶσα ἐξίσωσις ἀγομένη ὑπὸ μορφὴν τοιαύτην (ἐν ἄξοσιν ὀρθογωνίοις πάντοτε), δὲν ἐμφαίνει ἑτέραν καμπύλην ἢ περιφέρειαν κύκλου. Τῷ ὄντι, ἀφοῦ διαιρέσωμεν αὐτὴν διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ $\psi^2$, εἰ ὁ συντελεστὴς οὗτος οὐκ ἰσοῦται μονάδι, τῇ δίδομεν τὴν ἀνωτέρω μορφήν· εἶτα, συμπληρώσει τῶν τετραγώνων, ταύτην,

$$\left(\psi+\frac{\nu}{2}\right)^2+\left(\chi+\frac{\mu}{2}\right)^2=\frac{\mu^2+\nu^2}{4}-\gamma\,.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐμφαίνει προφανῶς κύκλον οὗτινος, τοῦ μὲν κέντρου αἱ συντεταγμέναι εἰσὶ $-\frac{1}{2}\mu$, $-\frac{1}{2}\nu$, ἡ δὲ ἀκτὶς ἴση $\sqrt{\frac{1}{4}\mu^2+\frac{1}{4}\nu^2-\gamma}$. Ἡ ἐξίσωσις ὅμως αὕτη τότε ἐμφαίνει ἀληθῶς κύκλον, ὅταν ἡ ὑπόρριζος ποσότης ἦναι θετική· διότι, εἰ μὲν εἶναι μηδὲν, ὁ κύκλος ἄγεται εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ· εἰ δὲ ἀρνητική, ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος.

### ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ.

**171.** Ἀποδείξομεν διὰ τοῦ λογισμοῦ διάφορα γεωμετρικὰ θεωρήματα ἐπὶ τοῦ κύκλου καὶ τῶν ἐν αὐτῷ ἢ ἐκτὸς αὐτοῦ τεμνομένων εὐθειῶν.



Ἡ ἐξίσωσις $\qquad \psi^2+\chi^2=\alpha^2,$

δίδει $\qquad \psi=\pm\sqrt{\alpha^2-\chi^2}.$

(Σχ. 72). Λοιπὸν, ἐφ' ἑκάστην τετμημένην ΑΠ ἀντιστοιχοῦσι δύο τεταγμέναι ΠΜ, ΠΝ, ἴσαι καὶ ἀντίθετοι. Ἐπειδὴ ΜΝ κάθετος εἶναι ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸ κατώτερον μέρος τοῦ κύκλου ἐπὶ τὸ ἀνώτερον, τὸ σημεῖον Ν ταυτισθήσεται τῷ Μ, καθὼς καὶ ἅπαντα τὰ σημεῖα τοῦ μέρους ΒΝΓ, ταυτισθήσονται πρὸς τὰ τοῦ ἀνωτέρου ΒΜΓ. Λοιπὸν, συνάγομεν ὅτι,

1ον. *Πᾶσα διάμετρος διχοτομεῖ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ.*

2ον. *Ἡ πρὸς ὀρθὰς τέμνουσα χορδὴν διάμετρος, διχοτομεῖ ταύτην καὶ τὸ ὑποτεινόμενον τόξον.*

**172.** Δῆλον ὅτι, ἐπὶ τοῦ σχήματος,

$$\Gamma\Pi=\alpha+\chi,\qquad B\Pi=\alpha-\chi\cdot$$

ἄρα $\qquad \Gamma\Pi\times B\Pi=(\alpha+\chi)(\alpha-\chi)=\alpha^2-\chi^2.$

Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει $\qquad \overline{M\Pi}^2=\psi^2=\alpha^2-\chi^2.$

Ἄρα $\qquad \overline{M\Pi}^2=\Gamma\Pi\times B\Pi.$

Ἤτοι, *ἡ πρὸς ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ τεταγμένη εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων τῆς διαμέτρου ταύτης.*

**173.** Ζευγνύομεν τὴν χορδὴν ΓΜ· καλοῦμεν χ, ψ, τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου Μ, καὶ ἔχομεν,

$$\Gamma M^2=\psi^2+(\chi+\alpha)^2=\psi^2+\chi^2+2\alpha\chi+\alpha^2.$$

Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις τοῦ κύκλου δίδει $\qquad \psi^2+\chi^2=\alpha^2\cdot$

ἄρα, $\qquad \overline{\Gamma M}^2=2\alpha^2+2\alpha\chi=2\alpha(\alpha+\chi),$

ἤ, ἐπειδὴ $\qquad \Gamma B=2\alpha,\quad \Gamma\Pi=\alpha+\chi,$

$$\overline{\Gamma M}^2=B\Gamma\times\Gamma\Pi.$$

Λοιπὸν, *ἡ χορδὴ* ΓΜ *εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς διαμέτρου καὶ τοῦ τμήματος* ΓΠ.

**174.** Ζευγνύομεν τὸ σημεῖον Γ, δι' ὃ $\psi=0$ καὶ $\chi=-\alpha$, τῷ Μ, οὗτινος αἱ συντεταγμέναι ἔστωσαν $\chi$, $\psi$· καλοῦμεν $\delta$ τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας ΜΓΧ καὶ ἔχομεν,

$$\delta=\frac{\psi}{\chi+\alpha}.$$

Τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ ζευγνύομεν τῷ Β, δι' ὃ $\psi=0$ καὶ $\chi=+\alpha$· καλοῦμεν $\delta'$ τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας ΜΒΧ· ἔχομεν

$$\delta'=\frac{\psi}{\chi-\alpha}.$$

Πολυπλασιάζομεν $\delta$ ἐπὶ $\delta'$· ἐπειδὴ δὲ $\psi^2=\alpha^2-\chi^2$, λαμβάνομεν,

$$\delta\delta'=\frac{\psi^2}{\chi^2-\alpha^2}=\frac{\alpha^2-\chi^2}{\chi^2-\alpha^2}=-1.$$

Ἡ σχέσεις αὕτη $\delta\delta'+1=0$ δείκνυσιν ὅτι [114] αἱ εὐθεῖαι ΓΜ, ΜΒ, τέμνουσιν ἀλλήλας πρὸς ὀρθάς. Λοιπὸν,

*Αἱ τῇ ἡμιπεριφερείᾳ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἰσὶν ὀρθαί.*

**175.** Ἐν γένει, *αἱ τῷ αὐτῷ τόξῳ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις.* (Σχ. 73). Πρὸς ἀπόδειξιν, λάβωμεν ὡς ἄξονα τῶν $\chi$ τὴν ὑποτείνουσαν τὸ περὶ οὗ λόγος τόξον χορδὴν ΕΔ· ὡς ἄξονα δὲ τῶν $\psi$ τὴν πρὸς ὀρθὰς διάμετρον. Καλοῦμεν $\beta$ τὸ ἀπὸ τῆς χορδῆς ΕΔ ἀπόστημα τοῦ κέντρου, καὶ $\gamma$ τὴν ἡμίσειαν χορδὴν ΑΔ. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ κύκλου ἔσεται

$$(\psi-\beta)^2+\chi^2=\gamma^2+\beta^2.$$

Ζευγνύομεν τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ τόξου ΕΜΔ τοῖς Ε, Δ, καλοῦμεν $\chi$, $\psi$, τὰς συντεταγμένας τοῦ Μ, καὶ $\delta$, $\delta'$, τὰς ἐφαπτομένας τῶν γωνιῶν ΜΕΧ, ΜΔΧ. Ἔχομεν

$$\delta=\frac{\psi}{\chi+\gamma},\qquad \delta'=\frac{\psi}{\chi-\gamma}.$$



Ἀλλὰ, κατὰ § 114, $\text{ἐφ ΕΜΔ}=\frac{\delta'-\delta}{1+\delta\delta'}$. Λοιπὸν, τῇ ἀντεισαγωγῇ λαμβάνομεν,

$$\text{ἐφ ΕΜΔ}=\frac{\psi(\chi+\gamma)-\psi(\chi-\gamma)}{\chi^2-\gamma^2+\psi^2}=\frac{2\gamma\psi}{\chi^2-\gamma^2+\psi^2}.$$

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Μ ἀνήκει εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$(\psi-\beta)^2+\chi^2=\gamma^2+\beta^2,\qquad \text{ἐξ ἧς}\qquad \chi^2-\gamma^2+\psi^2=2\beta\psi\cdot$$

ἑπομένως, $\text{ἐφ ΕΜΔ}=\frac{\gamma}{\beta}.$

Ἡ τιμὴ αὕτη μένει ἄτρεπτος, οἱανδήποτε θέσιν ἔχει τὸ σημεῖον Μ ἐπὶ τῆς περιφερείας. Προσέτι ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΟΔ συνάγομεν

$$\text{ἐφ ΑΟΔ}=\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΟ}}=\frac{\gamma}{\beta}.$$

Λοιπὸν, *αἱ τῷ αὐτῷ τμήματι κύκλου ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ἰσοῦνται τῷ ἡμίσει τῆς κεντρικῆς γωνίας, τῆς ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ τμήματος βαινούσης.*

**176.** (Σχ. 74). Ἔστω Α σημεῖον οἱονδήποτε τοῦ ἐπιπέδου κύκλου τινός. Ζευγνύομεν τὸ κέντρον ἐπὶ τὸ σημεῖον Α, καὶ ἄγομεν ΑΨ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΧ. Λάβωμεν τὰς γραμμὰς ταύτας ὡς ἄξονας συντεταγμένων. Καλοῦμεν $\alpha$ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου καὶ $\pi$ τὸ ἀπόστημα ΑΟ. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ κύκλου ἔσεται [168].

$$(\chi-\pi)^2+\psi^2=\alpha^2.$$

Ἡ ἐξίσωσις εὐθείας ἀπὸ τοῦ Α ἀγομένης ἔχει τὴν μορφήν,

$$\psi=\delta\chi.$$

Τῇ ἀπαλοιφῇ τῆς $\psi$, μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων λαμβάνομεν τὴν ἑξῆς,

$$(\alpha)\qquad \chi^2-\frac{2\pi}{1+\delta^2}\chi+\frac{\pi^2-\alpha^2}{1+\delta^2}=0,$$

δίδουσαν τὰς τετμημένας τῶν σημείων M, N, καθ' ἃ ἡ εὐθεῖα συμπίπτει τῷ κύκλῳ. Ἔστωσαν $\chi'$, $\psi'$ καὶ $\chi''$, $\psi''$, αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τούτων· ἔχομεν

$$\overline{AM}^2 = \chi'^2 + \psi'^2, \qquad \overline{AN}^2 = \chi''^2 + \psi''^2 \cdot$$

προσέτι, ἐπειδὴ τὰ σημεῖα ταῦτα ἀνήκουσι καὶ εἰς τὴν εὐθεῖαν,

$$\psi' = \delta\chi' \qquad \psi'' = \delta\chi''.$$

Ἄρα,

$$\overline{AM}^2 = (1+\delta^2)\chi'^2, \qquad \overline{AN}^2 = (1+\delta^2)\chi''^2.$$

Πολυπλασιάζομεν ἀλλήλας τὰς δύο ταύτας ἰσότητας καὶ λαμβάνομεν

$$\overline{AM}^2 \times \overline{AN}^2 = (1+\delta^2)^2 \chi'^2 \chi''^2.$$

Παρατηρητέον ἤδη ὅτι, $\chi'$, $\chi''$, εἰσὶν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (α)· ἑπομένως ἔχομεν $\chi'\chi'' = \dfrac{\pi^2 - \alpha^2}{1+\delta^2}$.

Ἄρα,

$$\overline{AM}^2 \times \overline{AN}^2 = (\pi^2 - \alpha^2)^2.$$

Ἐντεῦθεν συνάγομεν, καθ' ὅσον $\pi$ εἶναι μείζων ἢ ἐλάσσων τῆς $\alpha$,

$$AM \times AN = \pi^2 - \alpha^2, \qquad \text{ἢ} \qquad AM \times AN = \alpha^2 - \pi^2.$$

Ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει, τὸ σημεῖον ἐκτὸς τοῦ κύκλου κεῖται, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἐντός· ἀλλ' ἐν οὐδεμιᾷ τὸ γινόμενον $AM \times AN$ περιέχει $\delta$· ἄρα, τὸ γινόμενον τοῦτο μένει ἄτρεπτον οἱαδήποτε εἶναι ἡ θέσις τῆς τεμνούσης. Ἄρα, ἐὰν ἄξωμεν ἑτέραν τέμνουσαν $AM'N'$, ἕξομεν τὴν ἰσότητα

$$AM \times AN = AM' \times AN', \quad \text{ἐξ ἧς} \quad AM : AM' :: AN' : AN.$$

Λοιπόν, *ἐὰν ἀπὸ σημείου A, ἐξωτερικοῦ ἢ ἐσωτερικοῦ, ἄξωμεν δύο εὐθείας συμπιπτούσας τῷ κύκλῳ, τὰ μεταξὺ τοῦ σημείου A καὶ τοῦ κύκλου ἀποστήματα ἐπὶ τῆς μιᾶς εὐθείας, εἰσὶν ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἐπὶ τῆς ἑτέρας ὁμοίων ἀποστημάτων.*

Ἐν τῇ ἐκφωνήσει ταύτῃ περιλαμβάνονται προφανῶς τὰ ἑξῆς δύο γεωμετρικὰ θεωρήματα.



*Ὅταν δύο χορδαὶ τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰ τῆς ἑτέρας τμήματα ἀντιπεπονθότα λόγον ἔχουσι πρὸς τὰ τῆς ἑτέρας.*

*Ἐὰν ἀπὸ σημείου ἐξωτερικοῦ, ἄξωμεν δύο τεμνούσας πρὸς τὴν περιφέρειαν, αἱ ὅλαι τέμνουσαι ἀντιπεπονθότα λόγον ἔχουσι πρὸς τὰ ἐκτὸς αὐτῶν τμήματα.*

Σὺν τούτοις ἔχομεν καὶ τὸ ἑξῆς·

*Ἐάν, ἀπὸ σημείου ἐξωτερικοῦ, ἀχθῶσι τέμνουσα καὶ ἐφαπτομένη κύκλου, ἡ ἐφαπτομένη ἔσεται μέση ἀνάλογος τῆς ὅλης τεμνούσης καὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ τμήματος αὐτῆς.*

Τὸ τελευταῖον τοῦτο θεώρημα κυρίως εἶναι μερικὴ περίπτωσις τοῦ προηγουμένου, ἀφ' οὗ παράγεται τῇ ὑποθέσει, ὅτι ἡ ἑτέρα τῶν εὐθειῶν στρέφεται περὶ τὸ σημεῖον A, μέχρισοῦ, τῶν δύο σημείων M', N', ταυτιζομένων, ἡ τέμνουσα κατασταθῇ ἐφαπτομένη. Τότε ἡ ὅλη τέμνουσα καὶ τὸ ἐξωτερικὸν αὐτῆς τμῆμα ἀποτελοῦσι τὸ αὐτὸ ἀπόστημα ἴσον τῇ ἐφαπτομένῃ.

177. Ζητήσωμεν ἤδη τὰς ἀναφερομένας σχέσεις πρὸς τὴν τομὴν καὶ τὴν ἐπαφὴν δύο κύκλων. (Σχ. 75) Διὰ τὸ ἁπλούστερον, λάβωμεν ὡς ἄξονα τῶν $\chi$ τὴν ζευγνύουσαν τὰ κέντρα A, B, εὐθεῖαν· ὡς ἀρχὴν δὲ τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων τὸ κέντρον A. Καλοῦμεν $\pi$ τὸ ἀπόστημα AB, καὶ $\alpha$, $\alpha'$, τὰς ἀκτῖνας. Αἱ ἐξισώσεις τῶν κύκλων ἔσονται,

$$\psi^2 + \chi^2 = \alpha^2, \qquad (\chi - \pi)^2 + \psi^2 = \alpha'^2.$$

Πρὸς εὕρεσιν τῶν κοινῶν εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιφερείας σημείων, ζητήσομεν τὰς κοινὰς πραγματικὰς λύσεις τῶν ἐξισώσεων τούτων. Πρὸς τοῦτο, ἀφαιροῦμεν τὴν δευτέραν ἀπὸ τῆς πρώτης·

$$2\pi\chi - \pi^2 = \alpha^2 - \alpha'^2, \quad \text{ὅθεν} \quad \chi = \frac{\pi^2 + \alpha^2 - \alpha'^2}{2\pi}.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη φερομένη ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει, δίδει

$$\psi = \pm \frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2\alpha^2 - (\pi^2 + \alpha^2 - \alpha'^2)^2}.$$

Ἐκ τοῦ ὅ,τι εὑρίσκομεν δύο μόνον λύσεις, συνάγομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα·

*Δύο περιφέρειαι κύκλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ σημεῖα πλείονα τῶν δύο, ἐκτὸς εἰ ταυτίζονται.*

Ἐκ τοῦ ὅ,τι τὰ δύο σημεῖα τομῆς ἔχουσι τὴν αὐτὴν τετμημένην ΑΠ, τεταγμένας δὲ ΜΠ, ΝΠ, ἴσας καὶ ἀντιθέτους, συνάγομεν τὸ ἑξῆς·

*Ὅταν δύο περιφέρειαι κύκλων τέμνωσιν ἀλλήλας, ἡ γραμμὴ τῶν κέντρων διχοτομεῖ πρὸς ὀρθὰς τὴν ζευγνύουσαν τὰ σημεῖα τῆς τομῆς χορδήν.*

Ἵνα πραγματικῶς τέμνωσιν ἀλλήλας αἱ δύο περιφέρειαι, πρέπει ἡ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν ποσότης τῶν τιμῶν τῆς $\psi$ νὰ ἦναι θετική. Ἐξιχνεύσωμεν τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς ἡ συνθήκη αὕτη ἐκπληροῦται. Αἱ τιμαὶ αὗται ἄγονται εὐκόλως ὑπὸ τὴν μορφήν,

$$\psi = \pm \frac{1}{2\pi} \sqrt{(\pi+\alpha+\alpha')(\pi+\alpha-\alpha')(\alpha+\alpha'-\pi)(\pi+\alpha'-\alpha)}.$$

Ἐπιτετραμμένον εἶναι λαμβάνειν ὡς ἀρχὴν τὸ κέντρον τοῦ μείζονος κύκλου, καὶ λογίζειν τὰς τετμημένας θετικὰς πρὸς τὸ μέρος τοῦ κέντρου τοῦ ἑτέρου κύκλου. Ἑπομένως, λαμβάνομεν $\pi$ θετικὸν καὶ $\alpha >$ ἢ τὸ πλεῖστον $= \alpha'$. Τότε, οἱ δύο πρῶτοι παράγοντες εἰσὶ θετικοί· ὅπως δὲ $\psi$ ᾖ πραγματική, ἀπαιτεῖται συγχρόνως

$$\pi < \alpha + \alpha' \qquad \text{καὶ} \qquad \alpha < \pi + \alpha',$$

ἢ

$$\pi > \alpha + \alpha' \qquad \text{καὶ} \qquad \alpha > \pi + \alpha'.$$

Αἱ δύο τελευταῖαι συνθῆκαι εἰσὶν ἀντιφατικαί· διότι, ἐκ τῆς μὲν προκύπτει ὅτι $\pi$ εἶναι μείζων $\alpha$, ἐκ τῆς δὲ ὅτι $\alpha$ εἶναι μείζων $\pi$. Λοιπὸν, αἱ δύο πρῶται εἰσὶ παραδεκταὶ καὶ δεικνύουσιν ὅτι·

*Ὅταν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων ἀπ' ἀλλήλων ἔλαττον εἶναι τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων· ἡ μείζων δὲ ἀκτὶς ἐλάσσων τοῦ ἀθροίσματος τοῦ αὐτοῦ ἀποστήματος καὶ τῆς ἐλάσσονος ἀκτῖνος.*

Ἵνα ὑπάρχῃ ἐπαφὴ, πρέπει αἱ δύο τιμαὶ τῆς $\psi$ νὰ ταυτισθῶσιν, ὅπερ συμβαίνει μηδενιζομένης τῆς ὑποῤῥίζου ποσότητος. Ἀλλ' οἱ δύο πρῶτοι παράγοντες ἀδύνατον νὰ μηδενισθῶσιν· ἄρα, πρέπει νὰ ἔχωμεν



$$\alpha + \alpha' - \pi = 0, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \pi = \alpha + \alpha',$$

ἢ

$$\pi + \alpha' - \alpha = 0, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \pi = \alpha - \alpha'.$$

Λοιπὸν, *ἵνα ἅπτωνται ἀλλήλων δύο κύκλοι, πρέπει τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων ἀπ' ἀλλήλων νὰ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι ἢ τῇ διαφορᾷ τῶν ἀκτίνων. Ἐν ἀμφοτέραις ταῖς περιπτώσεσι, τὸ τῆς ἐπαφῆς σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ζευγνυούσης τὰ κέντρα εὐθείας. Δῆλον δὲ ὅτι, ἐν μὲν τῇ πρώτῃ, ἡ ἐπαφὴ εἶναι ἐκτὸς, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἐντός.*

Τέλος, ὅταν $\pi > \alpha + \alpha'$, ἢ ὅταν $\alpha > \pi + \alpha'$ αἱ τιμαὶ τῆς $\psi$ εἰσὶ φανταστικαὶ, αἱ δὲ περιφέρειαι οὐδὲν σημεῖον κοινὸν ἔχουσι.

Λοιπὸν, *ὅταν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων μεῖζον ἦναι τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, ἢ ὅταν ἡ μείζων ἀκτὶς ὑπερβαίνῃ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων καὶ τῆς ἐλάσσονος ἀκτῖνος, αἱ περιφέρειαι τῶν κύκλων οὐδὲν σημεῖον κοινὸν ἔχουσιν.*

Ὅταν συγχρόνως $\alpha = \alpha'$, $\pi = 0$, αἱ τιμαὶ τῆς $\psi$ παρουσιάζονται ὑπὸ τὸ σύμβολον $\frac{0}{0}$ τοῦ ἀορίστου. Τῷ ὄντι, ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, φανερὸν ὅτι οἱ κύκλοι ταυτίζονται.

### ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΚΑΘΕΤΟΥ.

**178.** Κατὰ τὸν γεωμετρικὸν ὁρισμὸν, *ἐφαπτομένη* καλεῖται εὐθεῖα ἐπιψαύουσα καθ' ἓν μόνον σημεῖον τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπεται ὅτι, ἐὰν διὰ δύο σημείων Μ, Μ', κυκλικῆς περιφερείας (Σχ. 76) ἄξωμεν τὴν ἀπεριόριστον τέμνουσαν ΜΣ, στρέψωμεν δὲ αὐτὴν περὶ τὸ σημεῖον Μ μέχρισοῦ τὸ Μ' ταυτισθῇ τῷ Μ, τότε ἡ τέμνουσα κατασταθήσεται ἐφαπτομένη, διότι ἓν μόνον σημεῖον κοινὸν ἕξει μετὰ τῆς περιφερείας. Ἐντεῦθεν ὁδηγούμενοι ὁρίσομεν τὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας, κατὰ σημεῖον δεδομένον ἐπ' αὐτῆς.

Ἔστω ἡ τέμνουσα ΜΜ΄Σ. Καλοῦμεν $\chi'$, $\psi'$ καὶ $\chi''$, $\psi''$, τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων Μ, Μ΄. Κατὰ § 108, ἡ ἐξίσωσις τῆς τεμνούσης εἶναι

$$\psi - \psi' = \frac{\psi' - \psi''}{\chi' - \chi''}(\chi - \chi').$$

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Μ, Μ΄, κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἧς ἡ ἐξίσωσις ἔστω

$$\psi^2 + \chi^2 = \alpha^2,$$

ἔχομεν τὰς σχέσεις

$$\psi'^2 + \chi'^2 = \alpha^2, \qquad \psi''^2 + \chi''^2 = \alpha^2 \cdot$$

ἐξ ὧν, τῇ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρέσει, λαμβάνομεν

$$\psi'^2 - \psi''^2 + \chi'^2 - \chi''^2 = 0,$$

ἢ $$(\psi' - \psi'')(\psi' + \psi'') + (\chi' - \chi'')(\chi' + \chi'') = 0 \cdot$$

ἑπομένως $$\frac{\psi' - \psi''}{\chi' - \chi''} = -\frac{\chi' + \chi''}{\psi' + \psi''}.$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς τεμνούσης εἶναι οὕτω

$$\psi - \psi' = -\frac{\chi' + \chi''}{\psi' + \psi''}(\chi - \chi').$$

Ὅταν τὸ σημεῖον Μ΄ ταυτισθῇ τῷ Μ, τότε $\chi'' = \chi'$ καὶ $\psi'' = \psi'$, ἡ τέμνουσα δὲ λαμβάνει τὴν θέσιν τῆς ἐφαπτομένης ΜΤ· ἄρα ἔχομεν δι' ἐξίσωσιν τῆς κατὰ τὸ σημεῖον Μ ἐφαπτομένης τῆς περιφερείας

$$\psi - \psi' = -\frac{\chi'}{\psi'}(\chi - \chi'),$$

ἥτις, ἀκεραιουμένη καὶ ἁπλοποιουμένη, ἄγεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

(ε) $$\psi'\psi + \chi'\chi = \alpha^2.$$

**179.** Εὐκόλως βεβαιούμεθα ὅτι, ἡ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (ε) δηλουμένη εὐθεῖα εἶναι τῷ ὄντι ἐφαπτομένη τοῦ κύ-



κλου. Πρὸς τοῦτο, ἀρκεῖ δεῖξαι ὅτι κεῖται ὁλόκληρος ἐκτὸς τοῦ κύκλου, πλὴν κατὰ τὸ σημεῖον Μ καθ' ὃ ἐπιψαύει τῆς περιφερείας αὐτοῦ.

Λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\psi'\psi + \chi'\chi = \alpha^2, \qquad \psi'^2 + \chi'^2 = \alpha^2.$$

Ἀφαιροῦμεν τὸ διπλοῦν τῆς πρώτης ἀπὸ τῆς δευτέρας, προσθέτομεν $\chi^2 + \psi^2$ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς διαφορᾶς, καὶ ἔχομεν,

$$(\psi - \psi')^2 + (\chi - \chi')^2 = \psi^2 + \chi^2 - \alpha^2.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δεικνυσιν ὅτι, δι' οὐδὲν σημεῖον τῆς ἐφαπτομένης τὸ δεύτερον μέλος καθίσταται ἀρνητικόν· διότι τὸ πρῶτον εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων. Ἀλλὰ $\chi^2 + \psi^2$ εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ ἀποστήματος τῆς ἀρχῆς, ἥτις εἶναι καὶ κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς ἐφαπτομένης· ἄρα, τὸ ἀπόστημα τοῦτο μεῖζον εἶναι τῆς ἀκτῖνος· ἰσοῦται δὲ ταύτῃ ὅταν $\chi = \chi'$ καὶ $\psi = \psi'$. Λοιπὸν, ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς ἐφαπτομένης, πλὴν τοῦ τῆς ἐπαφῆς, κεῖνται ἐκτὸς τοῦ κύκλου.

**180.** Ἡ προηγουμένη μέθοδος ἐφαρμόζεται καὶ ὅταν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου δὲν ἦναι εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων· π. χ. ὅταν ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ εἶναι ὑπὸ τὴν γενικὴν μορφὴν

$$(\psi - \kappa)^2 + (\chi - \pi)^2 = \alpha^2.$$

Εὑρίσκομεν δι' ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης τὴν ἑξῆς·

$$(\psi' - \kappa)(\psi - \kappa) + (\chi' - \pi)(\chi - \pi) = \alpha^2.$$

Ὡσαύτως, ἐν ἄξοσι πλαγιογωνίοις, τῆς ἐξισώσεως τοῦ κύκλου οὔσης,

$$(\psi - \kappa)^2 + (\chi - \pi)^2 + 2(\psi - \kappa)(\chi - \pi)\,\text{συν}\,\theta = \alpha$$

ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης ἔσεται

$$\psi - \psi' = -\frac{\chi' - \pi + \text{συν}\,\theta(\psi' - \kappa)}{\psi' - \kappa + \text{συν}\,\theta(\chi' - \pi)}(\chi - \chi'),$$

Τὰς λεπτομερείας τῶν περιπτώσεων τούτων παραλείπομεν πρὸς ἄσκησιν τῶν μαθητῶν.

**181.** Ζητήσωμεν ἤδη τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης, ἀγομένης ἀπὸ σημείου ἐκτὸς τοῦ κύκλου δοθέντος.

Ἔστωσαν $\chi''$, $\psi''$, αἱ συντεταγμέναι τοῦ δοθέντος σημείου, καὶ $\chi'$, $\psi'$, αἱ τοῦ ἀγνώστου σημείου ἐπαφῆς. Ἐπειδὴ ἡ ἐφαπτομένη περιέχει τὸ δοθὲν σημεῖον, ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς ἐτυμοποιεῖται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων αὐτοῦ· ἄρα,

$$(1) \qquad \psi'\psi'' + \chi'\chi'' = \alpha^2 .$$

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἔχομεν προσέτι,

$$(2) \qquad \chi'^2 + \psi'^2 = \alpha^2 .$$

Διὰ τῶν δύο ἐξισώσεων τούτων ὁρίζονται τῇ ἀπαλοιφῇ αἱ ἄγνωστοι συντεταγμέναι $\chi'$, $\psi'$· ἤτοι

$$\chi' = \frac{\alpha^2\chi'' \pm \alpha\psi''\sqrt{\psi''^2 + \chi''^2 - \alpha^2}}{\chi''^2 + \psi''^2},$$

$$\psi' = \frac{\alpha^2\psi'' \pm \alpha\chi''\sqrt{\psi''^2 + \chi''^2 - \alpha^2}}{\chi''^2 + \psi''^2}.$$

Ὅταν τὸ δοθὲν σημεῖον ἦναι ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἔχομεν $\psi''^2 + \chi''^2 > \alpha^2$· ἄρα, τότε αἱ προηγούμεναι τιμαὶ εἰσὶ πραγματικαὶ καὶ ὑπάρχουσι δύο ἐφαπτόμεναι. Ὅταν τὸ δοθὲν σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, τότε ἐπειδὴ $\psi''^2 + \chi''^2 = \alpha^2$, αἱ δύο τιμαὶ τῆς $\chi'$ ταυτίζονται, ὡς καὶ αἱ τῆς $\psi'$, μία δὲ ἐφαπτομένη ὑπάρχει. Τέλος, ὅταν τὸ αὐτὸ σημεῖον ἦναι ἐντὸς τοῦ κύκλου, $\psi''^2 + \chi''^2 < \alpha^2$, αἱ δὲ τιμαὶ τῶν $\chi'$, $\psi'$, εἰσὶ φανταστικαί· ἄρα, ἀδύνατον ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου ἐφαπτομένην.

**182.** Ἡ κατασκευὴ τῶν ἀνωτέρω τιμῶν τῶν $\chi'$, $\psi'$, ἐκτὸς τοῦ ὅτι εἶναι λίαν πολύπλοκος, δὲν παρέχει καί τι ἄξιον λόγου. Ὅπως ὁρίσωμεν τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς, λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις (1), (2), καὶ θεωροῦμεν ἐν ἑκάστῃ ὡς ἀορίστους τὰς συντεταγμένας $\chi'$, $\psi'$· ἔχομεν οὕτω τὰς ἐξισώσεις δύο γεωμετρικῶν τόπων ἐν οἷς περιέχονται τὰ ζητούμενα σημεῖα. Ἡ μὲν (2) εἶναι ἡ ἐξίσωσις τοῦ δοθέντος κύκλου· ἡ δὲ (1) ἐμφαίνει εὐθεῖαν ἣν κατασκευάζομεν καθιστῶντες διαδοχικῶς $\psi' = 0$ καὶ $\chi' = 0$. Οὕτω λαμβάνομεν τὰ ἀποστήματα ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν σημείων καθ' ἃ ἡ εὐθεῖα αὕτη τέμνει τοὺς ἄξονας (Σχ. 76)· ἤτοι



$$\mathrm{AT} = \frac{\alpha^2}{\chi''}, \qquad \mathrm{AT'} = \frac{\alpha^2}{\psi''}.$$

Αἱ ἐκφράσεις αὗται κατασκευάζονται διὰ τρίτων ἀναλόγων. Οὕτως ὁρίζεται ἡ εὐθεῖα ΤΤ', ἧς αἱ τομαὶ πρὸς τὴν περιφέρειαν ἔσονται τὰ σημεῖα Μ, Μ', ἐπαφῆς

**183.** Ἐν γένει, ὅταν ἐκ προτάσεώς τινος προκύπτωσι δύο ἐξισώσεις περιεκτικαὶ τῶν συντεταγμένων $\chi$, $\psi$, ἀγνώστου σημείου, ἑκατέρα τῶν ἐξισώσεων τούτων, μόνη θεωρουμένη, ἐμφαίνει γεωμετρικὸν τόπον ἐφ' οὗ τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται· ἐπομένως, αἱ ὑπ' ἀλλήλων τομαὶ ἀμφοτέρων τῶν γεωμετρικῶν τόπων κατασκευαζομένων, ἔσονται τὰ ζητούμενα σημεῖα.

Σπανίως ὅμως εἶναι εὔκολος ἡ κατασκευὴ τῶν γραμμῶν τούτων· τότε ζητοῦμεν ἑτέρας ἐχούσας τὸ αὐτὸ ἰδίωμα. Προσθέτομεν τὰς δύο ἐξισώσεις, ἢ ἀφαιροῦμεν αὐτὰς ἀπ' ἀλλήλων, ἢ συνδυάζομεν κατά τινα ἕτερον τρόπον, καὶ λαμβάνομεν νέαν ἐξίσωσιν ταυτοποιουμένην ὑπὸ τῶν αὐτῶν τιμῶν τῶν $\chi$, $\psi$, ὑφ' ὧν καὶ αἱ δύο πρῶται. Ἐπομένως, ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς ἐξισώσεως ταύτης θέλει περιέχει ἐπίσης τὰ ζητούμενα σημεῖα. Ἀπαιτεῖται ἕξις καὶ ἐπιτηδειότης πρὸς ἐκτέλεσιν συνδυασμῶν καταλλήλων νὰ δίδωσι γραμμὰς εὐκόλως κατασκευαζομένας, οἷαι εἰσὶν αἱ εὐθεῖαι καὶ οἱ κύκλοι.

**184.** Ἡ ἐν § 182 κατασκευὴ τῶν σημείων ἐπαφῆς εἶναι μὲν ἁπλῆ, οὐχὶ ὅμως ὅσον ἡ ἑξῆς, ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωστή.

Λάβωμεν καὶ αὖθις τὰς ἐξισώσεις

$$\psi''\psi'+\chi''\chi'=\alpha^2, \qquad \psi'^2+\chi'^2=\alpha^2,$$

ἐν αἷς ἄγνωστοι εἰσὶν αἱ συντεταγμέναι $\chi'$, $\psi'$, τοῦ σημείου ἐπαφῆς. Ἀφαιροῦμεν τὴν πρώτην ἀπὸ τῆς δευτέρας, καὶ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν,

$$\psi'^2-\psi''\psi'+\chi'^2-\chi''\chi'=0,$$

ἣν, τῇ συμπληρώσει τῶν τετραγώνων, γράφομεν οὕτω,

$$(\psi'-\tfrac{1}{2}\psi'')^2+(\chi'-\tfrac{1}{2}\chi'')^2=\tfrac{1}{4}\psi''^2+\tfrac{1}{4}\chi''^2.$$

Ὑπὸ τὴν μορφὴν ταύτην φανερὸν ὅτι [168] ἐμφαίνει περιφέρειαν κύκλου, ἧς, τοῦ μὲν κέντρου αἱ συντεταγμέναι εἰσὶν $\frac{1}{2}\chi''$ καὶ $\frac{1}{2}\psi''$, ἡ δὲ ἀκτὶς $\sqrt{\frac{1}{4}\psi''^2+\frac{1}{4}\chi''^2}$ (Σχ. 76). Λοιπὸν, ἔστω Ν τὸ σημεῖον ἀφ' οὗ ζητεῖται ἀγαγεῖν τὰς ἐφαπτομένας. Ζευγνύομεν τὴν ΑΝ, ἧς λαμβάνομεν τὸ μέσον Ο. Δῆλον ὅτι, εἰ $\chi''$, $\psi''$, εἰσὶν αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Ν, αἱ τοῦ Ο ἔσονται $\frac{1}{2}\chi''$, $\frac{1}{2}\psi''$, καὶ $\mathrm{AO}=\sqrt{\frac{1}{4}\psi''^2+\frac{1}{4}\chi''^2}$. Λοιπὸν, ὁ νέος κύκλος, οὗτινος ἡ περιφέρεια περιέχει τὰ ζητούμενα σημεῖα, εἶναι ὁ ἐπὶ τῆς ΑΝ ὡς διαμέτρου γραφόμενος.

Τὰ τῆς κατασκευῆς ταύτης ἐξαγόμενα συμφωνοῦσιν ἐντελῶς ταῖς ἐν § 181 παρατηρήσεσι. Τῷ ὄντι, φανερὸν ὅτι, ὅταν τὸ σημεῖον Ν ἦναι ἐκτὸς τοῦ δοθέντος κύκλου, ἡ ἐπὶ τῆς ΑΝ περιφέρεια τέμνει τὴν πρώτην κατὰ δύο σημεῖα· ὅτι τὰ δύο ταῦτα σημεῖα ταυτίζονται ἑνὶ, ἤτοι τῷ αὐτῷ σημείῳ Ν, ὅταν τὸ τελευταῖον τοῦτο κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας ταύτης· ὅτι δὲν ὑπάρχει τομὴ ὅταν τὸ σημεῖον Ν εἶναι ἐντὸς τοῦ δοθέντος κύκλου· διότι τότε ἡ μία περιφέρεια κεῖται ἐντὸς τῆς ἑτέρας.

**185.** Ἐκ τῆς ἐν § 182 τιμῆς $\mathrm{AT}=\frac{\alpha^2}{\chi''}$, πορίζόμεθα ἀξιοπαρατήρητόν τινα συνέπειαν. Ἐπειδὴ δὲν περιέχει τὴν τεταγμένην $\psi''$ τοῦ σημείου Ν, ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Τ δὲν μεταβάλλεται ἐὰν μεταβληθῇ ἡ θέσις τοῦ σημείου Ν, ὑπὸ



τὸν ὅρον ὅμως τοῦ νὰ μένῃ ἀείποτε ἐπὶ τῆς εὐθείας ΝΑ καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΧ· διότι τότε $\chi''$ διατηρεῖ πάντοτε τὴν αὐτὴν τιμήν. Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα, οὗτινος ὅμοιον ἀπαντήσομεν ἐν πάσαις ταῖς δευτέρας τάξεως γραμμαῖς.

*Ἐὰν ἀφ' ἑκάστου σημείου εὐθείας δοθείσης ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κύκλου, ἄξωμεν δύο ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας καὶ ἑνώσωμεν τὰ δύο σημεῖα ἐπαφῆς, λαμβάνομεν τεμνούσας αἵτινες ἅπασαι συμπίπτουσι κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον.*

Πρόδηλον ὅτι, μὴ μεταβαλλομένης $\chi''$, τὸ ἀπόστημα ΑΤ μενεῖ ἄτρεπτον. Λοιπὸν συνάγομεν τὴν ἑξῆς ἀντίστροφον πρότασιν.

*Ἐὰν ἀπὸ σημείου δοθέντος ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κύκλου, ἄξωμεν διαφόρους εὐθείας τεμνούσας τὸν κύκλον τοῦτον, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων καθ' ἃ ἑκάστη τέμνει τὴν περιφέρειαν ἄξωμεν δύο ἐφαπτομένας, ὁ τόπος τῶν σημείων τῆς συνδρομῆς ἑκάστου ζεύγους τῶν ἐφαπτομένων τούτων ἔσεται γραμμὴ εὐθεῖα.*

**186.** *Κάθετος* ἐπὶ καμπύλην ὀνομάζεται ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς ἀγομένη εὐθεῖα γραμμὴ πρὸς ὀρθὰς τῇ ἐφαπτομένῃ. Ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου εἶναι ὑπὸ τὴν μορφὴν,

$$\psi-\psi'=\delta'(\chi-\chi').$$

Ἵνα δὲ τέμνῃ πρὸς ὀρθὰς τὴν ἐφαπτομένην ἀπαιτεῖται ἡ σχέσις [114],

$$\delta'=-\frac{1}{\delta}=\frac{\psi'}{\chi'}.$$

Ἄρα, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπὶ τὸν κύκλον καθέτου εἶναι,

$$(\psi-\psi')=\frac{\psi'}{\chi'}(\chi-\chi'). \qquad (\varkappa)$$

Ἥτις μετὰ τὰς ἀναγωγὰς ἄγεται εἰς

$$\psi=\frac{\psi'}{\chi'}\chi.$$

Ἡ γραμμὴ αὕτη διέρχεται τῆς ἀρχῆς, οὔσης ἐνταῦθα τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. Ὅθεν συνάγομεν τὴν ἑξῆς γνωστὴν πρότασιν·

*Ἐν τῷ κύκλῳ ἡ ἐφαπτομένη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν πρὸς τὴν ἐπαφὴν ἀγομένην ἀκτῖνα.*

187. Τὰ ἑξῆς προβλήματα προτείνομεν ἀσκήσεως χάριν.

1) *Ἀπὸ σημείου δεδομένου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κύκλου τέμνουσαν ἀγαγεῖν ἧς τὸ ἀπολαμβανόμενον ἐν τῷ κύκλῳ μέρος εἴη ἴσον μήκει δοθέντι.*

2). *Εὐθεῖαν ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην δύο κύκλων δεδομένων.*

3). *Εὑρεῖν τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων ὧν ἡ διαφορὰ (ἢ τὸ ἄθροισμα) τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστημάτων ἀπὸ δύο σημείων μονίμων ἰσοῦται τετραγώνῳ δεδομένῳ.*

4). *Εὑρεῖν τὸν τόπον τῶν σημείων, ἀφ' ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι δύο περιφερειῶν δεδομένων εἴησαν ἴσαι.*

5). *Ἀπὸ τριῶν σημείων δεδομένων κύκλον καταγράψαι.*

6) *Εὑρεῖν τὴν καταγραφομένην γραμμὴν ὑπὸ τῆς κορυφῆς γωνίας ὀρθῆς, ἧς αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται πάντοτε περιφερείας κύκλου δοθείσης.*

7). *Εὑρεῖν τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων ἀφ' ὧν αἱ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι κύκλου δοθέντος σχηματίζουσι μονίμως πρὸς ἀλλήλας, ἐν ἑκάστῳ ζεύγει, γωνίαν δοθεῖσαν.*

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ'.

## ΠΕΡΙ ΕΛΛΕΙΨΕΩΣ.

### Η ΕΛΛΕΙΨΙΣ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΗ ΠΡΟΣ ΤΟ ΚΕΝΤΡΟΝ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΑΞΟΝΑΣ ΑΥΤΗΣ.

188. Εἴδομεν [161] ὅτι ὑπάρχει ἓν μόνον σύστημα συντεταγμένων ὀρθογωνίων, ἐν ᾧ τῆς ἐλλείψεως ἡ ἐξίσωσις λαμβάνει τὴν μορφήν,

$$(\alpha) \qquad \psi^2 + \mu^2 \chi^2 = \pi.$$

Ὅταν π ἦναι ποσότης ἀρνητική, ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος. Ὅταν $\pi = 0$, ἡ ἐξίσωσις δηλοῖ τὴν ἀρχήν· διότι ὑπὸ μόνων τῶν τιμῶν $\chi = 0$, $\psi = 0$, συγχρόνως ἐτυμοποιεῖται. Ἄρα, ἡ ἐξίσωσις αὕτη, τότε μόνον ἐμφαίνει πραγματικῶς ἔλλειψιν, ὅταν π ἦναι ἀριθμὸς θετικός. Δι' ὃ καθιστῶμεν $\beta^2$ ἀντὶ π, καὶ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐλλείψεως,

$$\psi^2 + \mu^2 \chi^2 = \beta^2.$$

189. Ἐκ τῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως ταύτης δῆλον, ὅτι ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων εἶναι τὸ κέντρον τῆς καμπύλης [162], ὅτι οἱ ἄξονες τῶν συντεταγμένων εἰσὶ διάμετροι καὶ ἄξονες τῆς καμπύλης [163] (Σχ. 78). Θέλομεν ἰδεῖ βραδύτερον ὅτι ἡ ἔλλειψις τούτους τοὺς ἄξονας μόνον ἔχει.

190. Ἵνα λάβωμεν τὸ μέγεθος τῶν ἀξόνων τούτων, ἢ τὸ ἀπολαμβανόμενον μέρος ἑκάστου αὐτῶν ἐν τῇ καμπύλῃ, καθιστῶμεν ἐκ διαδοχῆς, $\psi = 0$, $\chi = 0$, ἐν τῇ ἐξισώσει αὐτῆς καὶ ἔχομεν $\chi = \pm \frac{\beta}{\mu}$, $\psi = \pm \beta$.

Λαμβάνομεν $AB = A\Gamma = \frac{\beta}{\mu}$, ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῶν χ·

$A\Delta = AE = \beta$ ἐπὶ τῆς τῶν $\psi$· $B\Gamma$ καὶ $\Delta E$ εἰσὶ τὰ μήκη τῶν ἀξόνων.

Καλεῖται *πρῶτος ἢ μείζων ἄξων* τὸ μεῖζον τῶν ἀποστημάτων τούτων· *δεύτερος ἢ ἐλάσσων ἄξων* τὸ ἔλαττον. Τὰ σημεῖα B, Γ, Δ, E, εἰσὶν *αἱ κορυφαὶ* τῆς ἐλλείψεως· ἰδίως ὅμως *κορυφαὶ* λέγονται τὰ τοῦ μείζονος ἄξονος πέρατα.

**191.** Καλοῦμεν $AB = \frac{\beta}{\mu} = \alpha$, ὅθεν $\mu = \frac{\beta}{\alpha}$. Καθιστῶμεν τὴν τιμὴν ταύτην ἀντὶ $\mu$ ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς ἐλλείψεως, ἀκεραιοῦμεν καὶ λαμβάνομεν.

$$(\varepsilon) \qquad \alpha^2\psi^2 + \beta^2\chi^2 = \alpha^2\beta^2.$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως ὑπὸ τὴν μορφὴν ταύτην, εἶναι ἡ μᾶλλον ἐν χρήσει. Λέγομεν τότε ὅτι, *ἡ ἔλλειψις ἀναφέρεται πρὸς τὸ κέντρον αὐτῆς ὡς ἀρχήν, καὶ τοὺς ἄξονας αὐτῆς ὡς ἄξονας τῶν συντεταγμένων.*

**192.** Ἵνα μεταφέρωμεν τὴν ἀρχὴν ἐν τῇ κορυφῇ Γ, τρέπομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (ε) $\chi$ εἰς $\chi - \alpha$, καὶ λαμβάνομεν

$$(\varepsilon') \qquad \psi^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(2\alpha\chi - \chi^2).$$

**193.** Ὅταν $\beta = \alpha$, αἱ ἐξισώσεις (ε), (ε′), καθίστανται,

$$\psi^2 + \chi^2 = \alpha^2, \qquad \psi^2 = 2\alpha\chi - \chi^2\cdot$$

τότε δὲ ἐμφαίνουσι κύκλον. Ἄρα, *ὁ κύκλος εἶναι ἔλλειψις, ἧς οἱ ἄξονες εἰσὶν ἰσάλληλοι.*

**194.** Ὁρίσωμεν τὴν μορφὴν τῆς ἐλλείψεως διὰ τῆς ἐξισώσεως (ε), διδούσης

$$\psi = \pm \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - \chi^2}.$$

Δῆλον ὅτι, αὐξανομένης $\chi$ θετικῶς ἀπὸ O μέχρις $\alpha$, αἱ τιμαὶ τῆς $\psi$ εἰσὶ πραγματικαὶ ἐλαττούμεναι ἀπὸ $\beta$ μέχρι O. Διὰ τιμὰς τῆς $\chi$ μείζονας τῆς $\alpha$, αἱ τιμαὶ τῆς $\psi$ εἰσὶ φανταστικαί. Λοιπόν, πρὸς τὸ μέρος AB (Σχ. 78) ἡ ἔλλειψις



ἔχει τόξον, ὡς τὸ ΔBE. Μεταβαλλομένου τοῦ σημείου τῆς $\chi$, αἱ τιμαὶ τῆς $\psi$ μένουσιν ἄτρεπτοι· ἄρα, τῆς καμπύλης τὸ σχῆμα εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς ἀμφότερα τὰ μέρη ΑΓ, AB. Παρατηρητέον προσέτι, ὅτι πανταχοῦ ἡ κοιλότης τῆς καμπύλης στρέφεται πρὸς τὸ κέντρον ταύτης· ἄλλως ἤθελεν εἶσθαι δυνατὸν εὐθεῖα ἔχειν μετ᾽ αὐτῆς σημεῖα κοινὰ πλείονα τῶν δύο, ὅπερ ἀδύνατον ἐν ταῖς γραμμαῖς δευτέρας τάξεως [88].

Εὐκόλως προσέτι δεικνύεται, κατὰ § 163, ὡς καὶ διὰ περιστροφῆς περὶ ἕκαστον ἄξονα τοῦ ἑνὸς μέρους τῆς καμπύλης καὶ ἐφαρμογῆς αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου ὅτι, *ἑκάτερος τῶν ἀξόνων δίχα τέμνει τὴν ἔλλειψιν.*

**195.** Τὸ τρίγωνον ΑΜΠ δίδει,

$$AM = \sqrt{\chi^2 + \psi^2} = \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}\right)\chi^2 + \beta^2}.$$

Ἐπιτετραμμένον εἶναι λαμβάνειν τὰς τετμημένας ἐπὶ τοῦ μείζονος ἄξονος· οὕτω δυνάμεθα, οὐδόλως προσβάλλοντες τὴν γενικότητα τῶν ἐξαγομένων, ὑποθέσαι $\alpha > \beta$. Φανερὸν ὅτι, περιαγομένου τοῦ σημείου M εἰς πάσας τὰς θέσεις ἀπὸ Δ εἰς B, τῆς δὲ $\chi$ αὐξανομένης ἀπὸ O μέχρις $\alpha$, AM αὐξήσει ἀπὸ $\Delta A = \beta$ μέχρις $AB = \alpha$. Λοιπόν, *ἐν τῇ ἐλλείψει, πασῶν τῶν ἀκτίνων, ἢ εὐθειῶν ζευγνυμένων ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὰ διάφορα σημεῖα τῆς καμπύλης, ἡ μὲν βραχυτέρα ἰσοῦται τῷ ἐλάσσονι ἡμιάξονι, ἡ δὲ μείζων τῷ μείζονι ἡμιάξονι.*

Ὅταν $\beta = \alpha$, τότε $AM = \alpha$· ἤτοι, ἅπασαι αἱ ἀκτῖνες εἰσὶν ἴσαι· σύμπτωμα τοῦ κύκλου.

**196.** Λάβωμεν δύο σημεῖα M, M′, τῆς καμπύλης. Συνεπείᾳ τῆς ἐξισώσεως (ε) ἔχομεν τὰς σχέσεις,

$$\overline{M\Pi}^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - \overline{A\Pi}^2), \qquad \overline{M'\Pi'}^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - \overline{A\Pi'}^2),$$

ἐξ ὧν συνάγομεν

$$\frac{\overline{M\Pi}^2}{\overline{M'\Pi'}^2} = \frac{\alpha^2 - \overline{A\Pi}^2}{\alpha^2 - \overline{A\Pi'}^2} = \frac{(\alpha + A\Pi)(\alpha - A\Pi)}{(\alpha + A\Pi')(\alpha - A\Pi')} = \frac{\Pi B \times \Pi\Gamma}{\Pi' B \times \Pi'\Gamma}.$$

*Ἄρα, ἐν τῇ ἐλλείψει, τὰ τετράγωνα τῶν τεταγμένων τῶν πρὸς ὀρθὰς τῷ ἑτέρῳ τῶν ἀξόνων, λόγον ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὃν τὰ γινόμενα τῶν ἀντιστοιχούντων τμημάτων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος.*

197. Διὰ πᾶν σημεῖον τῆς ἐλλείψεως ὑπάρχει ἡ σχέσις $\alpha^2\psi^2+6^2\chi^2-\alpha^2 6^2=0$. Θεωρήσωμεν σημεῖον, τὸ Κ, ἐξωτερικόν, ὃ ἐπιζευγνύομεν τῷ κέντρῳ Α. Ἡ εὐθεῖα ΑΚ τεμεῖ τὴν ἔλλειψιν κατὰ τὸ σημεῖον Μ, οὗτινος αἱ συντεταγμέναι εἰσὶν ἐλάσσονες τῶν τοῦ Κ. Ἄρα διὰ τὸ σημεῖον Κ ἔχομεν, $\alpha^2\psi^2+6^2\chi^2-\alpha^2 6^2>0$. Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ εὑρίσκομεν ὅτι, διὰ σημεῖον, τὸ Κ', ἐντός, ἔχομεν τὴν σχέσιν $\alpha^2\psi^2+6^2\chi^2-\alpha^2 6^2<0$.

Λοιπόν, *ἔχομεν πάντοτε,*

$\alpha^2\psi^2+6^2\chi^2-\alpha^2 6^2=0$, *διὰ πᾶν σημεῖον τῆς ἐλλείψεως.*

$\alpha^2\psi^2+6^2\chi^2-\alpha^2 6^2>0$, *διὰ πᾶν σημεῖον ἐξωτερικόν*

$\alpha^2\psi^2+6^2\chi^2-\alpha^2 6^2<0$, *διὰ πᾶν σημεῖον ἐσωτερικόν.*

Αἱ ἀντίστροφοι τῶν προτάσεων τούτων εἰσὶ καταφανεῖς.

### ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΨΕΩΣ ΔΙΑ ΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ ΑΥΤΗΣ.

198. Ἡ ἐξίσωσις (ε) τῆς ἐλλείψεως δίδει,

$$\psi^2=\frac{6^2}{\alpha^2}(\alpha^2-\chi^2).$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπὶ τὸν μείζονα ἄξονα (Σχ. 79) γραφομένου κύκλου εἶναι

$$\psi^2=\alpha^2-\chi^2.$$

Παραστήσωμεν ψ καὶ Ψ, τὰς τεταγμένας ΠΝ, ΠΜ, αἵτινες ἐν τῇ ἐλλείψει καὶ ἐν τῷ κύκλῳ ἀντιστοιχοῦσιν ἐπὶ τὴν αὐτὴν τετμημένην.

Ἔχομεν ἐν γένει,

$$\psi=\frac{6}{\alpha}\Psi,\qquad \text{ἢ}\qquad \frac{\psi}{\Psi}=\frac{6}{\alpha}.$$



Ἄρα συνάγομεν ὅτι, *ἐν τῇ ἐλλείψει, αἱ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸν μείζονα ἄξονα τεταγμέναι εἰσὶ πρὸς τὰς ἐν τῷ κύκλῳ, τῷ ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦτον ὡς διάμετρον γραφομένῳ, ὡς ὁ ἐλάσσων ἄξων πρὸς τὸν μείζονα· ἤτοι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἄτρεπτον.*

199. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ 1η. Ἐφ' ἑκάστου τῶν ἀξόνων, ὡς διαμέτρων, γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Ἔστω ΜΠ τεταγμένη τις τῆς μείζονος περιφερείας. Ζευγνύομεν τὴν ἀκτῖνα ΑΜ ἥτις τέμνει κατὰ τὸ Η τὴν ἑτέραν περιφέρειαν· ἄγομεν ΗΝ παράλληλον τῷ πρώτῳ ἄξονι. Τὸ σημεῖον Ν καθ' ὃ ἡ παράλληλος αὕτη τεμεῖ τὴν τεταγμένην ΜΠ, ἀνήκει εἰς τὴν ἔλλειψιν.

Τῷ ὄντι, ἕνεκα τῶν παραλλήλων, ἔχομεν,

$$\frac{\text{ΝΠ}}{\text{ΜΠ}}=\frac{\text{ΑΗ}}{\text{ΑΜ}}=\frac{6}{\alpha},\quad \text{ὅθεν}\quad \text{ΝΠ}=\frac{6}{\alpha}\times\text{ΜΠ}.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι ἡ τῆς τεταγμένης τῆς ἐλλείψεως, ἀντιστοιχούσης τῇ τεταγμένῃ ΜΠ τοῦ κύκλου. Ἐπαναλαμβάνοντες τὴν αὐτὴν ἐργασίαν, εὑρίσκομεν ὁσαδήποτε βουλόμεθα σημεῖα τῆς καμπύλης.

Παρατηρητέον ὅτι, ἕνεκα τῆς πρὸς τοὺς ἄξονας συμμετρίας τῆς ἐλλείψεως, εὑρίσκομεν μιᾷ ἀκτῖνι ΑΜ τέσσαρα σημεῖα τῆς καμπύλης.

200. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ 2α. (Σχ. 80). Κέντρῳ σημείῳ τινὶ Ζ τοῦ ἑτέρου τῶν ἀξόνων, π. χ. τοῦ ἴσου 26, ἀκτῖνι δὲ ἴσῃ τῷ ἀθροίσματι $\alpha+6$ τῶν ἡμιαξόνων, γράφομεν τόξον κύκλου, ὅπερ τέμνει τὸν ἕτερον ἄξονα κατὰ τὸ Ε. Ζευγνύομεν ΖΕ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς ΖΜ$=\alpha$. Τὸ σημεῖον Μ ἀνήκει εἰς τὴν ἔλλειψιν.

Τῷ ὄντι, ἀπὸ τοῦ Μ ἄγομεν ΜΡ καὶ ΜΠ παραλλήλους τοῖς ἄξοσι. Ἐκ μὲν τοῦ τριγώνου ΜΡΖ ἔχομεν

$$\text{ΖΡ}=\sqrt{\overline{\text{ΖΜ}}^2-\overline{\text{ΜΡ}}^2}=\sqrt{\alpha^2-\chi^2},$$

ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΜΡΖ, ΕΜΠ,

ΜΠ : ΖΡ : : ΜΕ : ΜΖ, ἢ $\psi : \sqrt{\alpha^2-\chi^2} :: \beta : \alpha$;

καὶ $$\psi = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-\chi^2}.$$

Ἄρα, τὸ σημεῖον Μ ἀνήκει εἰς τὴν ἔλλειψιν.

Ἡ ΕΖ δύναται εἶναι κανὼν μήκους ἴσου $\alpha+\beta$, ἐφ' οὗ χαράσσομεν τὸ σημεῖον Μ, ὅπως ΜΖ$=\alpha$. Κινουμένου τοῦ κανόνος ἐν τῇ γωνίᾳ ΨΑΧ, τὸ σημεῖον Μ καταγράφει τὸ τεταρτημόριον τῆς ζητουμένης ἐλλείψεως. Τὰ λοιπὰ μέρη αὐτῆς καταγράφονται τιθεμένου τοῦ αὐτοῦ κανόνος ἐν ταῖς λοιπαῖς γωνίαις.

201. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ 3η. (Σχ. 81). Κέντρῳ σημείῳ τινὶ Ζ τοῦ ἐλάσσονος ἄξονος, ἀκτῖνι δὲ ἴσῃ τῇ διαφορᾷ $\alpha-\beta$ τῶν ἡμιαξόνων, γράφομεν τόξον κύκλου τέμνον τὸν ἄξονα ΒΓ κατὰ τὸ Ε. Ζευγνύομεν ΖΕΜ, καὶ λαμβάνομεν ΖΜ$=\alpha$. Τὸ σημεῖον Μ ἀνήκει εἰς τὴν ἔλλειψιν.

Διότι, ἐὰν ἄξωμεν ΖΡ παράλληλον τῇ ΓΒ, τέμνουσαν δὲ τὴν προαγωγὴν τῆς τεταγμένης ΜΠ κατὰ τὸ Ρ, ἕξομεν, ἐκ μὲν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΖΜΡ, ΜΡ$=\sqrt{\alpha^2-\chi^2}$· ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΜΕΠ, ΜΖΡ,

ΜΠ : ΜΡ : : ΜΕ : ΜΖ, ἢ $\psi : \sqrt{\alpha^2-\chi^2} :: \beta : \alpha$,

καὶ $$\psi = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-\chi^2}.$$

Ἄρα, τὸ σημεῖον Μ ἀνήκει εἰς τὴν ἔλλειψιν.

Ἡ ΖΜ δύναται εἶναι κανὼν μήκους ἴσου $\alpha$, ἐφ' οὗ χαράσσομεν τὸ σημεῖον Ε, ὅπως ΕΜ$=\beta$. Κινουμένης τῆς γραμμῆς ΕΜ πρῶτον ἐν τῇ γωνίᾳ ΨΑΧ, εἶτα ἐν ταῖς λοιπαῖς, ἕξομεν ἅπαντα τὰ μέρη τῆς ἐλλείψεως.

### ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΣΤΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΙΕΥΘΕΤΟΥΣΩΝ.

202. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Προσδιορίσαι τὰ σημεῖα ὧν τὰ ἀποστήματα ἀπὸ παντὸς σημείου τῆς ἐλλείψεως, ἀναφερομένης πρὸς τὸ κέντρον καὶ τοὺς ἄξονας αὐτῆς, ἐκφράζονται λογικῶς συνεκθέσει τῆς τετμημένης τοῦ αὐτοῦ σημείου.*

Τὰ ζητούμενα σημεῖα καλοῦνται *ἑστίαι* τῆς ἐλλείψεως.



(Σχ. 82). Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς καμπύλης λαμβάνομεν σημεῖον, τὸ Η, οὗτινος ἔστωσαν $\chi'$, $\psi'$, αἱ συντεταγμέναι. Παριστῶμεν $\chi$, $\psi$, τὰς συντεταγμένας οἱουδήποτε σημείου Μ τῆς καμπύλης· καλοῦμεν $\delta$ τὸ ἀπόστημα ΗΜ. Ἔχομεν ἐν γένει,

$$\delta^2=(\chi-\chi')^2+(\psi-\psi')^2=\chi^2-2\chi\chi'+\chi'^2+\psi^2-2\psi\psi'+\psi'^2$$

Ἀλλὰ διὰ τὸ σημεῖον Μ τῆς ἐλλείψεως ὑπάρχει ἡ σχέσις,

$$\psi=\sqrt{\beta^2-\frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2}}.$$

Ἄρα,

$$\delta^2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}\chi^2-2\chi'\chi+\chi'^2+\psi'^2+\beta^2-2\psi'\sqrt{\beta^2-\frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2}}$$

Ἐπειδὴ $\delta$ πρέπει νὰ ἦναι συνέκθεσις λογικὴ τῆς $\chi$, πρέπει νὰ ἦναι τοιαύτη καὶ τὸ $\delta^2$· ὁ ὅρος δὲ οὗτος πρέπει νὰ ἐκπληροῦται ἀνεξαρτήτως πάσης τιμῆς διδομένης τῇ $\chi$, ὅπερ τότε δυνατὸν μόνον ὅταν τὸ ῥιζικὸν ἐκλείψῃ. Ἀλλὰ τὸ ῥιζικὸν τοῦτο ἀφανίζεται μόνον ὅταν $\psi'=0$. Λοιπόν, τὸ σημεῖον Η, ὅπως ᾖ ἑστία τῆς ἐλλείψεως, πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν $\chi$.

Τῇ ὑποθέσει $\psi'=0$, λαμβάνομεν,

$$\delta^2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}\chi^2-2\chi\chi'+\beta^2+\chi'^2.$$

Ὁ μόνος τρόπος δι' οὗ καθίσταται $\delta$ ἔμμετρον εἰς $\chi$, εἶναι τὸ δοῦναι τιμὴν τῇ $\chi'$, ὅπως τὸ δεύτερον μέλος εἴη τετράγωνον ἐντελές. Ἄρα, πρέπει νὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν,

$$4(\beta^2+\chi'^2)\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}\right)=4\chi'^2,$$

ἐξ ἧς συνάγομεν, μετὰ τὰς ἀναγωγάς,

$$\chi'=\pm\sqrt{\alpha^2-\beta^2}.$$

Αἱ τιμαὶ αὗται τότε εἰσὶ πραγματικαὶ ὅταν α ἦναι μείζων β· ὅπερ δεικνυσιν ὅτι, αἱ τετμημέναι πρέπει νὰ λογίζωνται ἐπὶ τοῦ μείζονος ἄξονος καὶ οὐχὶ ἐπὶ τοῦ ἐλάσσονος. Τούτου γινομένου, ἔχομεν δύο ἑστίας κειμένας ἐπὶ τοῦ μείζονος ἄξονος, ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου, ἐν ἀποστάσει ἀπὸ τούτου ἴσῃ $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$.

Αἱ ἑστίαι Ε, Ε', εὐκόλως κατασκευάζονται· εἰσὶν αἱ τομαὶ τοῦ μείζονος ἄξονος ΒΓ ὑπὸ τόξου γραφομένου κέντρῳ τῷ ἑτέρῳ τῶν περάτων τοῦ ἐλάσσονος ἄξονος καὶ ἀκτῖνι ἴσῃ α. Ἔχομεν οὕτως·

$$AE = AE' = \sqrt{\alpha^2-\beta^2}.$$

Τὸ ἀπόστημα ΕΕ' καλεῖται *ἐκκεντρότης* τῆς ἐλλείψεως.

203. Ζητήσωμεν ἤδη τὰς τιμὰς τῶν ἀποστημάτων ΕΜ, Ε'Μ, ἅτινα συνήθως ὀνομάζουσιν *ἀκτῖνας διαβατικάς*.

Ἵνα λάβωμεν ΕΜ, θέτομεν ἐν τῇ ἐκφράσει τοῦ $\delta^2$ ἀντὶ χ' τὴν θετικὴν τιμὴν $+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$. Ἵνα λάβωμεν Ε'Μ, καθιστῶμεν ἀντὶ χ' τὴν ἀρνητικὴν τιμὴν $-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$. Πρὸς συντομίαν, ἔστω $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\gamma$. Εὑρίσκομεν,

$$\overline{EM}^2 = \frac{\gamma^2\chi^2}{\alpha^2} - 2\gamma\chi + \alpha^2, \quad \text{καὶ} \quad EM = \pm\left(\alpha - \frac{\gamma\chi}{\alpha}\right),$$

$$\overline{E'M}^2 = \frac{\gamma^2\chi^2}{\alpha^2} + 2\gamma\chi + \alpha^2, \quad \text{καὶ} \quad E'M = \pm\left(\alpha + \frac{\gamma\chi}{\alpha}\right).$$

Τὰ μήκη ταῦτα πρέπει νὰ ὦσι θετικά. Ἐπειδὴ χ ἐλάσσων εἶναι α δι' ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς ἐλλείψεως, καὶ γ ἐπίσης ἐλάσσων α, πρέπει νὰ λαμβάνωμεν τὰς πρώτας τῶν ἀνωτέρω τιμῶν.

204. Ἡ πρόσθεσις τῶν τιμῶν τῶν διαβατικῶν ἀκτίνων δίδει

$$EM + E'M = 2\alpha.$$

ὅθεν συνάγομεν τὸ ἀξιοπαρατήρητον ἑξῆς θεώρημα.

*Ἐν τῇ ἐλλείψει, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀποστημάτων παντὸς σημείου τῆς καμπύλης ἀφ' ἑκατέρας τῶν ἑστιῶν, εἶναι ἄτρεπτον καὶ ἴσον τῷ μείζονι ἄξονι.*



205. (Σχ. 83). Ἔστω Ν σημεῖον ἐκτὸς τῆς ἐλλείψεως· ἄγομεν ΝΕ, ΝΕ', ὧν ἡ τελευταία τέμνει τὴν καμπύλην κατὰ τὸ σημεῖον Μ, ὃ ζευγνύομεν τῇ ἑστίᾳ Ε. Ἔχομεν,

$$EN + E'N > EM + E'M \quad \text{ἀλλὰ} \quad EM + E'M = 2\alpha\cdot$$

ἄρα

$$EN + E'N > 2\alpha.$$

Διὰ σημεῖον Ν' ἐντὸς τῆς ἐλλείψεως, ἔχομεν

$$EN' + E'N' < EM + E'M\cdot \quad \text{ἄρα} \quad EN' + E'N' < 2\alpha.$$

Λοιπόν, *τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀποστημάτων παντὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἐλλείψεως ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ἑστιῶν, ἰσοῦται τῷ μείζονι ἄξονι, ἢ εἶναι μεῖζον, ἢ ἔλαττον τοῦ αὐτοῦ ἄξονος, καθ' ὅσον τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἐπὶ τῆς καμπύλης, ἢ ἐκτός, ἢ ἐντὸς αὐτῆς.*

Αἱ ἀντίστροφοι τῶν προτάσεων τούτων εἰσὶν εὐαπόδεικτοι.

206. Ἐντεῦθεν πορίζόμεθα ἁπλουστάτην κατασκευὴν ἐλλείψεως, ἧς γνωστὰ εἰσὶν ὁ μείζων ἄξων ΒΓ καὶ αἱ ἑστίαι Ε, Ε'.

(Σχ. 83). Ἐπὶ τῆς ΒΓ λαμβάνομεν σημεῖον, τὸ Κ, μεταξὺ τῶν ἑστιῶν. Κέντρῳ τῇ ἑστίᾳ Ε καὶ ἀκτῖνι ΒΚ, γράφομεν τόξον κύκλου· κέντρῳ τῇ ἑτέρᾳ ἑστίᾳ Ε', καὶ ἀκτῖνι ΓΚ γράφομεν ἕτερον τόξον. Τὸ σημεῖον Μ καθ' ὃ διατέμνονται τὰ τόξα ταῦτα ἀνήκει εἰς τὴν ἔλλειψιν· διότι

$$EM + E'M = B\Gamma.$$

Προαγομένων τῶν τόξων ἄνω καὶ κάτω τοῦ ἄξονος, ἀγ μένου δὲ διαδοχικῶς τοῦ αὐτοῦ ἀποστήματος διαβήτου ἑκατέραν τῶν ἑστιῶν, ὁρίζονται ἐν ἑκάστῃ ἐργασίᾳ τέσσαρα σημεῖα τῆς καμπύλης.

Ἵνα γράψωμεν μεγίστην ἔλλειψιν, ὡς συμβαίνει κατὰ τὰς ἐπὶ ἐδάφους ἐργασίας, πηγνύομεν ἐφ' ἑκατέραν τῶν ἑστιῶν τὰ πέρατα νήματος ἴσου τῷ μείζονι ἄξονι· τείνομεν τὸ νῆμα διά τινος ἥλου, ὃν περιάγομεν ὀρθὸν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον. Ἡ ἀκμὴ τοῦ ἥλου καταγράφει τὴν καμπύλην.

207. Τῇ ἐπιλύσει τοῦ ἑξῆς προβλήματος, θέτ
ὅτι ἡ ἐν § 204 ἰδιότης χαρακτηρίζει τὴν ἔλλειψιν

*Καμπύλην εὑρεῖν, ἐν ᾗ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστημάτων παντὸς σημείου αὐτῆς ἀπὸ δύο μονίμων σημείων, ἰσοῦται τῷ δεδομένῳ μήκει* 2α. (Σχ. 82)

Ζευγνύομεν τὰ μόνιμα σημεῖα Ε, Ε΄, τῇ εὐθείᾳ Χ΄Χ· ἐπὶ τὸ μέσον Α τοῦ ἀποστήματος Ε΄Ε ἄγομεν τὴν πρὸς ὀρθὰς ΨΨ΄. Ἔστω Μ ἓν σημεῖον τῆς ζητουμένης καμπύλης· ἄγομεν ΜΠ κάθετον ἐπὶ τὴν Χ΄Χ, καὶ λαμβάνομεν Μ΄Π=ΜΠ. Τὸ σημεῖον Μ΄ εἶναι ἐπίσης ἓν τῶν ζητουμένων· διότι ΕΜ΄+Ε΄Μ΄=ΕΜ+Ε΄Μ=2α. Ἄρα, ἡ εὐθεῖα Χ΄Χ διαιρεῖ συμμετρικῶς τὴν καμπύλην. Ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς ἐφαρμόζεται καὶ πρὸς τὴν ΨΨ΄. Τούτου ἕνεκα ἐκλέγομεν ὡς ἄξονας τῶν συντεταγμένων τὰς Χ΄Χ, ΨΨ΄.

Τούτων τεθέντων, ἐπειδὴ ΕΜ+Ε΄Μ=2α, καθιστῶμεν τὰς ἑξῆς ἰσότητας,

$$\mathrm{EM}=\alpha-\zeta, \qquad \mathrm{E'M}=\alpha+\zeta,$$

ζ οὔσης ποσότητος μεταβλητῆς. Καλοῦμεν, τὸ ἀπόστημα Ε΄Ε=2γ· χ, ψ, τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου Μ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΕΠ, ΜΕ΄Π, δίδουσι,

$$\psi^2+(\gamma-\chi)^2=(\alpha-\zeta)^2, \qquad \psi^2+(\gamma+\chi)^2=(\alpha+\zeta)^2.$$

Μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τούτων πρέπει ν' ἀπαλείψωμεν ζ. Πρὸς τοῦτο, ἀφαιροῦμεν ἀπ' ἀλλήλων αὐτὰς καὶ ἔχομεν,

$$4\alpha\zeta=4\gamma\chi, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \zeta=\frac{\gamma\chi}{\alpha}.$$

Θέτομεν τὴν τιμὴν ταύτην ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἐξισώσεων, καὶ οὕτω προκύπτει ἡ ἐμφαίνουσα τὴν ζητουμένην καμπύλην ἐξίσωσις,

$$\alpha^2\psi^2+(\alpha^2-\gamma^2)\chi^2=\alpha^2(\alpha^2-\gamma^2).$$

Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, δῆλον ὅτι ΕΜ+Ε΄Μ > ΕΕ΄ ἤτοι 2α > 2γ· ἄρα, ἡ διαφορὰ $\alpha^2-\gamma^2$ εἶναι θετική. Τῇ συγκρίσει τῆς εὑρεθείσης ἐξισώσεως πρὸς τὴν τῆς ἐλλείψεως $\alpha^2\psi^2+\beta^2\chi^2=\alpha^2\beta^2$, συνάγομεν ὅτι, αἱ ἐξισώσεις αὗται, κατὰ συνέπειαν δὲ αἱ καμπύλαι ἃς ἐμφαίνουσι, ταυτίζονται ὅταν $\alpha^2-\gamma^2=\beta^2$, ἢ $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$. Ἄρα, ἡ ζητουμένη καμπύλη εἶναι ἔλλειψις, ἧς ὁ μὲν μείζων ἄξων ἰσοῦται 2α, ὁ δὲ ἐλάσσων $2\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$.



208. Θέτοντες εἰς α−ζ καὶ α+ζ, ἀντὶ ζ τὴν τιμὴν αὐτῆς $\frac{\gamma\chi}{\alpha}$, εὑρίσκομεν καὶ αὖθις [203]

$$\mathrm{EM}=\alpha-\frac{\gamma\chi}{\alpha}, \qquad \mathrm{E'M}=\alpha+\frac{\gamma\chi}{\alpha}.$$

209. Ἑκάστη ἑστία διαιρεῖ τὸν μείζονα ἄξονα εἰς δύο τμήματα, τὸ μὲν ἴσον $\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$, τὸ δὲ ἴσον $\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$, ὧν τὸ ὀρθογώνιον ἰσοῦται $\beta^2$· ἤτοι τῷ τετραγώνῳ τοῦ ἐλάσσονος ἡμιάξονος.

210. Εἰς τὰς ἑστίας ἀντιστοιχοῦσι δύο εὐθεῖαι λίαν ἀξιοπαρατήρητοι, ἃς ἐφεξῆς ζητήσομεν. (Σχ. 84).

Πρὸς τὴν ἑστίαν Ε λαμβάνομεν μῆκος ΑΘ=δ οἱονδήποτε· ἄγομεν ΘΛ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸν πρῶτον ἄξονα. Τὸ ἀπόστημα ΜΡ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς ἐλλείψεως ἀπὸ τῆς ΘΛ, ἔσεται δ−χ· ἀλλὰ $\mathrm{EM}=\alpha-\frac{\gamma\chi}{\alpha}$, ἄρα,

$$\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{MP}}=\frac{\alpha^2-\gamma\chi}{\alpha(\delta-\chi)}=\frac{\alpha^2-\gamma\chi}{\gamma\delta-\gamma\chi}\times\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Φανερὸν ὅτι, ὁ λόγος οὗτος ἔσεται μονίμως ἴσος $\frac{\gamma}{\alpha}$, ἐὰν τὸ σημεῖον Θ ληφθῇ ὅπως $\gamma\delta=\alpha^2$· ἤτοι, *ὁ μείζων ἡμιάξων ᾖ μέσος ἀνάλογος τῶν* ΑΕ, ΑΘ·

Ἐὰν λάβωμεν, ἀφ' ἑτέρου μέρους τοῦ κέντρου, $\mathrm{A\Theta'}=\delta=\frac{\alpha^2}{\gamma}$, καὶ ἄξωμεν τὴν κάθετον Λ΄Θ΄, ἕξομεν ὡσαύτως,

$$\frac{\mathrm{ME'}}{\mathrm{MP'}}=\frac{\alpha^2+\gamma\chi}{\alpha(\delta+\chi)}=\frac{\alpha^2+\gamma\chi}{\gamma\delta+\gamma\chi}\times\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Αἱ κάθετοι ΑΘ, Λ΄Θ΄, καλοῦνται *διευθετοῦσαι* τῆς ἐλλείψεως. Αἱ χαρακτηρίζουσαι τὰς γραμμὰς ταύτας προηγούμεναι ἰδιότητες ἐκφωνοῦνται ὡς ἑξῆς. *Τὰ ἀποστήματα παντὸς σημείου τῆς ἐλλείψεως ἀπὸ τῆς ἑτέρας τῶν ἑστιῶν καὶ ἀπὸ τῆς ἐγγυτέρας ταύτῃ διευθετούσης, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ἐν λόγῳ ἀτρέπτῳ, ἴσῳ τῷ τῆς ἐκκεντρότητος πρὸς τὸν μείζονα ἄξονα.*

### ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΚΑΘΕΤΟΥ.

211. Ἵνα δώσωμεν ὁρισμὸν τῆς ἐφαπτομένης ἁρμόζοντα εἰς ἁπάσας τὰς καμπύλας, καὶ ἐφ' ὃν νὰ ἐφαρμόζωνται εὐκόλως οἱ λογισμοί, θεωρήσομεν αὐτὴν ὡς τὸ *ὅριον τῶν θέσεων ἃς λαμβάνει τέμνουσα στρεφομένη περὶ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς, μέχρισοῦ ἕτερον σημεῖον ταυτισθῇ τούτῳ.*

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον, ζητήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἐλλείψεως. Ἔστωσαν $\chi'$, $\psi'$ καὶ $\chi''$, $\psi''$, αἱ συντεταγμέναι δύο σημείων τῆς καμπύλης. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ζευγνυούσης αὐτὰ τεμνούσης εἶναι,

$$\psi-\psi'=\frac{\psi'-\psi''}{\chi'-\chi''}(\chi-\chi').$$

Αἱ συντεταγμέναι τῶν δύο ληφθέντων σημείων τῆς ἐλλείψεως ἐτυμοποιοῦσι τὴν ἐξίσωσιν αὐτῆς· ἄρα ἔχομεν,

$$\alpha^2\psi'^2+\beta^2\chi'^2=\alpha^2\beta^2,\qquad \alpha^2\psi''^2+\beta^2\chi''^2=\alpha^2\beta^2.$$

Ἀφαιρέσει δὲ τῆς πρώτης ἀπὸ τῆς δευτέρας,

$$\alpha^2(\psi'^2-\psi''^2)+\beta^2(\chi'^2-\chi''^2)=0,$$

ἢ

$$\alpha^2(\psi'-\psi'')(\psi'+\psi'')+\beta^2(\chi'-\chi'')(\chi'+\chi'')=0,$$

ὅθεν συνάγομεν

$$\frac{\psi'-\psi''}{\chi'-\chi''}=-\frac{\beta^2(\chi'+\chi'')}{\alpha^2(\psi'+\psi'')}=\varepsilon\varphi\,\Sigma,$$

καλοῦντες Σ τὴν γωνίαν τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος τεμνούσης πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ.

Ὑποθέσωμεν ἤδη τὰ δύο σημεῖα ταυτισθέντα· τότε $\chi''=\chi'$ καὶ $\psi''=\psi'$. Ἡ τέμνουσα καθίσταται ἐφαπτο-



μένη· ἑπομένως, ἡ ἀνωτέρω ἔκθεσις, τῇ ὑποθέσει ταύτῃ, δίδει τὴν τριγωνομετρικὴν ἐφαπτομένην τῆς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ σχηματιζομένης γωνίας ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἐλλείψεως, ἀγομένης κατὰ τὸ σημεῖον οὗτινος αἱ συντεταγμέναι εἰσὶ $\chi'$, $\psi'$. Καλοῦμεν σ τὴν τριγωνομετρικὴν ταύτην ἐφαπτομένην, καὶ ἔχομεν,

$$\sigma=-\frac{\beta^2\chi'}{\alpha^2\psi'}.$$

Ἑπομένως, ἡ ἐμφαίνουσα τὴν ἐφαπτομένην ἐξίσωσις ἔσεται

$$\psi-\psi'=-\frac{\beta^2\chi'}{\alpha^2\psi'}(\chi-\chi'),$$

ἥτις ἄγεται ὑπὸ τὴν ἁπλουστέραν μορφὴν ταύτην,

$$(\varepsilon)\qquad \alpha^2\psi'\psi+\beta^2\chi'\chi=\alpha^2\beta^2.$$

Ἐπειδὴ σ μίαν μόνην τιμὴν ἔχει, συνάγομεν ὅτι, *καθ' ἕκαστον σημεῖον τῆς ἐλλείψεως, μία ἐφαπτομένη ἄγεται.*

212. Ἀποδεικνύεται, ὡς ἐν τῷ κύκλῳ, ὅτι ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (ε) δηλουμένης εὐθείας κεῖνται ἐκτὸς τῆς ἐλλείψεως, πλὴν τοῦ σημείου $(\chi', \psi')$. Λογισμοὶ ἀνάλογοι τοῖς ἐν § 179 ἐφαρμοζόμενοι ἐπὶ τῶν ἐξισώσεων

$$\alpha^2\psi'\psi+\beta^2\chi'\chi=\alpha^2\beta^2,\qquad \alpha^2\psi'^2+\beta^2\chi'^2=\alpha^2\beta^2,$$

δίδουσι τὴν σχέσιν

$$\alpha^2(\psi-\psi')^2+\beta^2(\chi-\chi')^2=\alpha^2\psi^2+\beta^2\chi^2-\alpha^2\beta^2.$$

Τὸ δεύτερον μέλος εἶναι θετικὸν δι' ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας, πλὴν τοῦ ἔχοντος συντεταγμένας $\psi'$, $\chi'$. Ἄρα, ἅπαντα τὰ σημεῖα ταῦτα, πλὴν τοῦ τῆς ἐπαφῆς, εὑρίσκονται ἐκτὸς τῆς ἐλλείψεως [197].

213. Ὁ ἀνωτέρω εὑρεθεὶς τύπος $\sigma=-\frac{\beta^2\chi'}{\alpha^2\psi'}$, δεικνυσιν ὅτι, (Σχ. 85)· *Ἐὰν διὰ τοῦ κέντρου ἄξωμεν εὐθεῖαν συμπίπτουσαν τῇ ἐλλείψει κατὰ τὰ σημεῖα* Μ, Μ',

*αἱ κατὰ τὰ σημεῖα ταῦτα ἐφαπτόμεναι παράλληλοι ἔσονται.* Διότι, αἱ συντεταγμέναι τῶν Μ, Μ′, διαφέρουσιν ἀλλήλων μόνον κατὰ τὰ σημεῖα, οὐχὶ δὲ καὶ κατὰ μέγεθος· ἐπομένως ἡ τιμὴ τῆς σ οὐδόλως ἀλλοιοῦται.

214. Ὁ αὐτὸς τύπος δεικνύει προσέτι τὰς κλίσεις τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὸν ἄξονα ΒΓ, κατὰ τὰς διαφόρους θέσεις τοῦ σημείου Μ. Κατὰ τὰς κορυφὰς Β, Γ, ἔχομεν $\chi' = \pm\alpha$ καὶ $\psi' = 0$· ἄρα, $\sigma = \infty$· ἡ δὲ ἐφαπτομένη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΒΓ. Κατὰ τὰ Δ, Ε, ἔχομεν $\chi' = 0$ καὶ $\psi' = \pm\beta$ ἄρα, $\sigma = 0$· ἡ δὲ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος τοῦ μείζονος ἄξονος. Κατὰ τὰ ἔμμεσα σημεῖα, ἀπὸ Β πρὸς Δ, $\chi'$ ἐλαττοῦται καὶ $\psi'$ αὐξάνει· ἄρα, σ ἐλαττοῦται ἀρνητικῶς. Τοῦτο δεικνύει ὅτι ἡ γωνία ΜΤΧ εἶναι ἀμβλεῖα, αὐξάνουσα μᾶλλον καὶ μᾶλλον, μεχρισοῦ ἡ ἐφαπτομένη κατασταθῇ παράλληλος τῇ ΒΓ. Κ. τ. ἑ.

215. Καθιστῶντες ἐν τῇ ἐξισώσει (ε,) $\psi = 0$, εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ ἐφαπτομένη συμπίπτει τῷ ἄξονι ΒΓ, ἤτοι

$$\chi = \mathrm{AT} = \frac{\alpha^2}{\chi'}.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη, ἀνεξάρτητος οὖσα τοῦ δευτέρου ἄξονος, εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς ἁπάσας τὰς ἐπὶ τὸν αὐτὸν πρῶτον ἄξονα γραφομένας ἐλλείψεις· ἄρα, ὑπάρχει καὶ πρὸς τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον τὸν ἄξονα τοῦτον. Ἐντεῦθεν συνάγομεν τρόπον γεωμετρικὸν ἁπλούστατον δι' οὗ ἄγομεν ἐφαπτομένην τῆς ἐλλείψεως κατὰ σημεῖον διδόμενον ἐπὶ τῆς καμπύλης ταύτης, ὃν παρίστησι τὸ Σχ. 86.

Ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ἐφαρμόζεται καὶ ἐπὶ τὸν δεύτερον ἄξονα· διότι ἡ ἔκθεσις τοῦ ἀποστήματος ΑΡ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ α.

216. *Ὑφαπτομένην* (Σχ. 8 ) καλοῦσι τὸ μέρος ΠΤ, ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων, ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς τεταγμένης τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς. Ἐν



τῇ ἐλλείψει εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς ὑφαπτομένης, ἀφαιρέσει τῆς ΑΠ ἢ $\chi'$ ἀπὸ ΑΤ· ἤτοι,

$$\Pi\mathrm{T} = \frac{\alpha^2 - \chi'^2}{\chi'}.$$

Ἡ ἔκφρασις τῆς ὑφαπτομένης ἐπὶ τὸν δεύτερον ἄξονα, εὑρίσκεται ἀναλόγως οὖσα,

$$\mathrm{KP} = \frac{\beta^2 - \psi'^2}{\psi'}.$$

Ἡ ὑφαπτομένη ΠΤ εἶναι ἐπιδεκτικὴ αὐξήσεως ἀπὸ 0 ἐπ' ἄπειρον, ὡς δηλοῦται ὑπὸ τῆς ἐκθέσεως αὐτῆς. Τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ περὶ τῆς πρὸς τὸν δεύτερον ἄξονα ὑφαπτομένης.

217. Ζευγνύομεν τὸ κέντρον τῆς ἐλλείψεως τῷ σημείῳ τῆς ἐπαφῆς (Σχ. 85). Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀκτῖνος ΑΜ ἔσεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\psi = \sigma'\chi.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\chi'$, $\psi'$, εἰσὶν αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ,

$$\psi' = \sigma'\chi', \qquad \text{ὅθεν} \qquad \sigma' = \frac{\psi'}{\chi'}.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐφαπτομένης ἔχομεν $\sigma = -\frac{\beta^2\chi'}{\alpha^2\psi'}$.

Πολυπλασιάζοντες τὰς τιμὰς ταύτας λαμβάνομεν

$$\sigma\sigma' = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

Λοιπὸν, *τὸ γινόμενον τῶν τριγωνομετρικῶν ἐφαπτομένων σ, σ′, μένει ἄτρεπτον, οἱανδήποτε θέσιν ἔχει τὸ τῆς ἐπαφῆς σημεῖον.*

218. Ἵνα εὕρωμεν τὴν τριγωνομετρικὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας ΑΜΤ, ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος ΑΜ καὶ τῆς ἐφαπτομένης περιεχομένης, ἀρκεῖ καταστῆσαι ἐν τῷ γνωστῷ τύπῳ [114]

$$\text{ἐφ}\,\mathrm{AMT} = \frac{\sigma - \sigma'}{1 + \sigma\sigma'},$$

ἀντὶ σ καὶ σ′ τὰς τιμὰς αὐτῶν. Εὑρίσκομεν δὲ, διὰ τῆς σχέσεως $\alpha^2\psi'^2+\beta^2\chi'^2=\alpha^2\beta^2$ ἁπλοποιοῦντες,

$$\acute{\epsilon}\varphi\,\mathrm{AMT}=\frac{-\alpha^2\beta^2}{(\alpha^2-\beta^2)\chi'\psi'}.$$

Ἐπιτρέπεται λαμβάνειν τὰς τετμημένας ἐπὶ τοῦ μείζονος ἄξονος· τότε ἔχομεν $\alpha>\beta$. Ἐὰν προσέτι ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐν τῇ γωνίᾳ τῶν θετικῶν συντεταγμένων, ἡ προηγουμένη τιμὴ ἔσεται ἀρνητική· ἄρα, ἡ γωνία ΑΜΤ ἀμβλεῖα. Ὅταν ἦναι ὀρθὴ, ἐφ ΑΜΤ ἦναι ἄπειρος· ἤτοι ἔχομεν $\chi'=0$, ἢ $\psi'=0$. Λοιπὸν, *τὰ πέρατα τῶν ἀξόνων εἰσὶ τὰ μόνα σημεῖα τῆς ἐλλείψεως, καθ' ἃ ἡ ἐφαπτομένη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα.*

Εὐκόλως βλέπομεν τί συμβαίνει ὅταν αἱ συντεταγμέναι $\chi'$, $\psi'$, ἔχωσι σημεῖα ἐναντία.

219. Ζητήσωμεν ἤδη τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης ἀγομένης ἀπὸ δεδομένου σημείου $(\chi'', \psi'')$ ἐκτὸς τῆς ἐλλείψεως. Ἄγνωστοι εἰσὶν αἱ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς συντεταγμέναι $\chi'$, $\psi'$· πρέπει δὲ νὰ ὦσι τοιαῦται, ὥστε ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης νὰ ταυτοποιῆται ὅταν ἐν αὐτῇ θέσωμεν $\chi''$ καὶ $\psi''$, ἀντὶ $\chi$ καὶ $\psi$. Ἄρα προκύπτει ἡ πρώτη ἐξίσωσις αὕτη

$$(1)\qquad \alpha^2\psi'\psi''+\beta^2\chi'\chi''=\alpha^2\beta^2.$$

Ἀλλ' ἔχομεν προσέτι τὴν ἑξῆς, δηλοῦσαν ὅτι τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς κεῖται ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως,

$$(2)\qquad \alpha^2\psi'^2+\beta^2\chi'^2=\alpha^2\beta^2.$$

Αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις ἀρκοῦσι πρὸς ὁρισμὸν τῶν ἀγνώστων, ὧν τὰς τιμὰς μετὰ ταῦτα ἀντεισακτέον ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς ἐφαπτομένης.

Δι' ἀπαλοιφῆς ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2), λαμβάνομεν

$$\chi'=\frac{\alpha^2(\beta^2\chi''\pm\psi''\sqrt{\alpha^2\psi''^2+\beta^2\chi''^2-\alpha^2\beta^2})}{\alpha^2\psi''^2+\beta^2\chi''^2},$$

$$\psi'=\frac{\beta^2(\alpha^2\psi''\mp\chi''\sqrt{\alpha^2\psi''^2+\beta^2\chi''^2-\alpha^2\beta^2})}{\alpha^2\psi''^2+\beta^2\chi''^2}.$$



Ὅταν τὸ δοθὲν σημεῖον ἦναι ἐκτὸς τῆς ἐλλείψεως, ἡ ὑπόρριζος ποσότης εἶναι θετικὴ [197], αἱ δὲ τιμαὶ αὗται εἰσὶ πραγματικαὶ καὶ ἄνισαι· ἄρα, τότε ὑπάρχουσι δύο ἐφαπτόμεναι. Ὅταν τὸ σημεῖον ἦναι ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως, ἡ ὑπόρριζος ποσότης μηδενίζεται· τότε, τῇ μοναδικῇ λύσει $\chi'=\chi''$, $\psi'=\psi''$, συστοιχεῖ μία ἐφαπτομένη. Τέλος, ὅταν τὸ δοθὲν σημεῖον ἦναι ἐντὸς τῆς ἐλλείψεως, αἱ $\chi'$, $\psi'$, εἰσὶ φανταστικαί· διότι ἡ ποσότης $\alpha^2\psi''^2+\beta^2\chi''^2-\alpha^2\beta^2$ εἶναι ἀρνητική· ἄρα, ἀδύνατον τότε ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς ἐλλείψεως.

220. Ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου ἔχει τὴν μορφὴν

$$\psi-\psi'=\sigma'(\chi-\chi').$$

Ἐπειδὴ ἡ κάθετος ἵσταται πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην, ἔχομεν,

$$\sigma'=-\frac{1}{\sigma}=\frac{\alpha^2\psi'}{\beta^2\chi'}.$$

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου εἶναι

$$(\kappa)\qquad \psi-\psi'=\frac{\alpha^2\psi'}{\beta^2\chi'}(\chi-\chi').$$

221. Ἵνα λάβωμεν τὸ σημεῖον Σ (Σχ. 87), καθ' ὃ ἡ κάθετος συμπίπτει τῷ ἄξονι τῶν $\chi$, καθιστῶμεν $\psi=0$ ἐν τῇ ἐξισώσει (κ). Εὑρίσκομεν

$$\mathrm{A\Sigma}=\chi=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}\chi'.$$

Ὑποθέτοντες πάντοτε ὅτι ΒΓ εἶναι ὁ μείζων ἄξων τῆς ἐλλείψεως, ἡ τιμὴ αὕτη τῆς ΑΣ ἔχει τὸ αὐτὸ τοῦ $\chi'$ σημεῖον, ὅπερ δείκνυσιν ὅτι ἀμφότερα τὰ σημεῖα Π, Σ, κεῖνται ἀείποτε πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου.

Διὰ $\chi'=0$, ἔχομεν $\mathrm{A\Sigma}=0$· ἄρα, ἡ κάθετος διέρχεται τοῦ κέντρου. Αὐξανομένης $\chi'$ θετικῶς, ἐπίσης ΑΣ αὐξάνει, τὸ δὲ σημεῖον Σ ἀφίσταται τοῦ κέντρου. Τέλος, ὅταν $\chi'=\alpha$, τὸ ἀπόστημα ΑΣ φθάνει εἰς τὸ μέγιστον αὐτοῦ, ὅπερ εἶναι ἴσον $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha}$. Λάβωμεν ΑΝ ἴσον τῇ τιμῇ ταύτῃ. Τὸ σημεῖον Ν εἶναι τὸ ὅριον, ᾧ αἱ κάθετοι προσεγγίζουσιν ἀπείρως, καθόσον τὸ σημεῖον Μ προσεγγίζει τῷ Β. Ἄρα δυνατὸν λαβεῖν τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Μ, τοσοῦτον ἐγγὺς τῷ Β, ὅπως τὸ ἀπόστημα ΣΝ κατασταθῇ ἔλαττον πάσης ποσότητος δοθείσης.

222. Ἡ τιμὴ τοῦ ἀποστήματος ΠΣ, ὃ καλοῦσιν *ὑποκάθετον*, εἶναι

$$ΠΣ = \frac{\beta^2\chi'}{\alpha^2}.$$

223. Μεταξὺ τῆς διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τῶν ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν διαβατικῶν ἀκτίνων, ὑπάρχουσι σχέσεις τινες ἀξιοπαρατήρητοι, ὡς ἐφεξῆς δείξομεν.

(Σχ. 88.) Ἔστω ΡΤ ἐφαπτομένη τις· ζευγνύομεν τὰς διαβατικὰς ἀκτῖνας ΕΜ, Ε'Μ, ἐπὶ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Μ, οὗτινος αἱ συντεταγμέναι εἰσὶ $\chi'$, $\psi'$. Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας ΕΜ, εἶναι τοιουτόμορφος,

$$\psi-\psi'=\sigma'(\chi-\chi').$$

Ἐπειδὴ διέρχεται τῆς ἑστίας Ε, ἔχομεν τὴν σχέσιν,

$$-\psi'=\sigma'(\gamma-\chi'), \qquad \text{ἐξ ἧς} \qquad \sigma'=-\frac{\psi'}{\gamma-\chi'}.$$

Ἔχομεν προσέτι, κατὰ § 211, $\sigma=-\frac{\beta^2\chi'}{\alpha^2\psi'}$,
Ἄρα,

$$\text{ἐφ}\,EMT=\frac{\sigma-\sigma'}{1+\sigma\sigma'}=\frac{-\frac{\beta^2\chi'}{\alpha^2\psi'}+\frac{\psi'}{\gamma-\chi'}}{1+\frac{\beta^2\chi'\psi'}{\alpha^2\psi'(\gamma-\chi')}}.$$



Ἐκτελοῦντες τοὺς λογισμοὺς καὶ τινας ἁπλοποιήσεις εὐδιακρίτους, λαμβάνομεν διαδοχικῶς

$$\text{ἐφ}\,EMT=\frac{\alpha^2\psi'^2+\beta^2\chi'^2-\beta\gamma\chi'}{\alpha^2\gamma\psi'-(\alpha^2-\beta^2)\chi'\psi'}=\frac{\alpha^2\beta^2-\beta^2\gamma\chi'}{\alpha^2\gamma\psi'-\gamma^2\chi'\psi'}$$
$$=\frac{\beta^2(\alpha^2-\gamma\chi')}{\gamma\psi'(\alpha^2-\gamma\chi')}=\frac{\beta^2}{\gamma\psi'}.$$

Δι' ὁμοίων λογισμῶν, ἢ τρέποντες $\gamma$ εἰς $-\gamma$, εὑρίσκομεν,

$$\text{ἐφ}\,E'MT=-\frac{\beta^2}{\gamma\psi'}.$$

Λοιπόν, αἱ γωνίαι ΕΜΤ, Ε'ΜΤ, εἰσὶ παραπληρωματικαί· διότι ἔχουσιν ἐφαπτομένας ἴσας μετὰ σημείων ἐναντίων. Ἀλλ' αἱ γωνίαι Ε'ΜΤ, Ε'ΜΡ, εἰσὶν ἐπίσης παραπληρωματικαί. Ἄρα,

$$EMT = E'MP.$$

Τῆς καθέτου οὔσης ΜΣ, δῆλον ὅτι, ἡ γωνία ΕΜΣ ἰσοῦται τῇ Ε'ΜΣ.

Λοιπὸν, *ἐν τῇ ἐλλείψει, αἱ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν ζευγνύμεναι διαβατικαὶ ἀκτῖνες, σχηματίζουσι μετὰ τῆς ἐφαπτομένης ἐκ διαφόρων μερῶν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις· ἡ δὲ κάθετος δίχα τέμνει τὴν ὑπὸ τῶν διαβατικῶν τούτων ἀκτίνων περιεχομένην γωνίαν.*

ΣΗΜ. Ἀποδεικνύομεν καὶ ἀπ' εὐθείας τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν ΕΜΣ, Ε'ΜΣ, διὰ λογισμῶν ἀναλόγων τοῖς προηγουμένοις. Ἡ αὐτὴ ἰσότης ἀποδεικνύεται προσέτι δεικνυομένης τῆς ὑπάρξεως τῆς ἀναλογίας

ΕΣ : Ε'Σ : : ΕΜ : Ε'Μ.

224. Αἱ προηγούμεναι ἰδιότητες δεικνύουσι μέθοδον ἁπλουστάτην δι' ἧς ἄγομεν ἐφαπτομένην τῆς ἐλλείψεως ἀπὸ σημείου δεδομένου.

(Σχ. 89). Πρῶτον ὑποθέσωμεν τὸ δοθὲν σημεῖον Μ ἐπὶ τῆς καμπύλης. Ἐπιζευγνύομεν τὰς διαβατικὰς ἀκτῖνας ΕΜ, Ε'Μ· προεκβάλλομεν τὴν ἑτέραν τούτων, π. χ. Ε'Μ, κατὰ τὸ μῆκος ΜΚ ἴσον τῇ ἑτέρᾳ ΕΜ· ἐπιζευγνύομεν ΕΚ.

Ἡ πρὸς ὀρθὰς ΜΤ ἐπὶ τὴν ΕΚ εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη. Τῷ ὄντι, τὸ τρίγωνον ΕΜΚ εἶναι ἰσοσκελὲς, αἱ δὲ γωνίαι ΚΜΤ, ΤΜΕ εἰσὶν ἴσαι ἀλλήλαις. Ἀλλ' ἡ ΚΜΤ ἰσοῦται τῇ ΡΜΕ'· ἄρα ΤΜΕ$=$ΡΜΕ'. Λοιπὸν, ἡ ΡΤ εἶναι ἐφαπτομένη.

Ἄλλως, εὐκόλως βεβαιούμεθα ὅτι τῆς εὐθείας ταύτης ἅπαντα τὰ σημεῖα εἰσὶν ἐκτὸς τῆς ἐλλείψεως, πλὴν τοῦ Μ. Τῷ ὄντι, διὰ τὸ τυχὸν σημεῖον Ρ ἔχομεν,

$$E'P + PK > E'M + MK\cdot \quad \text{ἀλλὰ} \quad E'M + MK = 2\alpha.$$

Ἄρα, τὸ σημεῖον Ρ εἶναι ἐκτὸς τῆς ἐλλείψεως [205].

225. Ἐκ τῆς κατασκευῆς δῆλον ὅτι τὸ σημεῖον Ο, καθ' ὃ ΜΤ συμπίπτει τῇ ΕΚ, εἶναι μέσον τῆς ΕΚ· ἀλλὰ καὶ Α εἶναι τὸ μέσον τοῦ ἀποστήματος Ε'Ε· ἄρα ἡ εὐθεῖα ΑΟ εἶναι παράλληλος τῆς Ε'Κ καὶ ἴση $\frac{1}{2}$ Ε'Κ· ἤτοι ἴση α' διότι ΕΚ$=2\alpha$. Λοιπὸν, ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι·

*Ἐν τῇ ἐλλείψει, ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, τῶν ἀγομένων ἀπὸ τῶν ἑστιῶν ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας τῆς καμπύλης, εἶναι ἡ ἐπὶ τοῦ μείζονος ἄξονος ὡς διαμέτρου γραφομένη περιφέρεια κύκλου.*

226. (Σχ. 90). Τεθείσθω ἤδη τὸ δοθὲν σημεῖον Τ ἐκτὸς τῆς ἐλλείψεως. Ἔστω, καθ' ὑπόθεσιν, ΜΤ ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη. Ἐπιζευγνύομεν τὴν ἑστίαν Ε' τῷ τῆς ἐπαφῆς σημείῳ Μ διὰ τῆς Ε'ΜΚ ἴσης τῷ μείζονι ἄξονι λαμβανομένης. Ἀπὸ τῆς ἑστίας Ε ἄγομεν τὴν ΕΚ· ἡ ἐφαπτομένη ΜΤ δίχα τέμνει καὶ πρὸς ὀρθὰς τὴν ΕΚ, τὰ δὲ ἀποστήματα ΤΕ, ΤΚ, εἰσὶν ἰσάλληλα. Λοιπὸν τὸ σημεῖον Κ ὁρίζεται τῇ συνδρομῇ δύο περιφερειῶν γραφομένων, τῆς μὲν κέντρῳ τῷ Ε' καὶ ἀκτῖνι ἴσῃ $2\alpha$, τῆς δὲ κέντρῳ τῷ Τ καὶ ἀκτῖνι ἴσῃ ΤΕ. Τοῦ Κ εὑρεθέντος, ἐπιζευγνύομεν τὰς Ε'Κ, ΕΚ, εἶτα ἄγομεν ΤΡ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ΚΕ. Ἡ κάθετος αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη τῆς ἐλλείψεως, τὸ δὲ σημεῖον Μ καθ' ὃ τέμνει τὴν Ε'Κ, τὸ τῆς ἐπαφῆς σημεῖον.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ ΤΚ$=$ΤΕ, ἡ ΡΤ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ μέσον τῆς ΕΚ· ἄρα ΜΚ$=$ΜΕ· ἑπομένως, Ε'Μ$+$ΕΜ$=2\alpha$. Οὕτω δεικνύεται ὅτι τὸ Μ εἶναι σημεῖον τῆς ἐλλείψεως.



Προσέτι, ἡ γωνία ΕΜΤ$=$ΤΜΚ$=$ΡΜΕ'· ἄρα ΤΜ εἶναι ἐφαπτομένη.

227. Ἐπειδὴ δύο κύκλοι, ἐν γένει, τέμνουσιν ἀλλήλους κατὰ δύο σημεῖα, δυνατὸν νὰ ὑπάρξωσι δύο ἐφαπτόμεναι. Τοῦτο συμβαίνει ὅταν τὸ δοθὲν σημεῖον Τ ἦναι ἐκτὸς τῆς ἐλλείψεως· διότι τότε αἱ πρὸς τομὴν τῶν κύκλων ἀπαιτούμεναι συνθῆκαι ἐκπληροῦνται. Τῷ ὄντι, ἐὰν ἄξωμεν τὴν Ε'Τ, τὸ τρίγωνον Ε'ΤΕ δίδει,

$$E'T < E'E + ET, \quad \text{καὶ ἔτι μᾶλλον} \quad E'T < 2\alpha + ET.$$

Λοιπὸν, τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων ἔλαττον εἶναι τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων. Τὸ αὐτὸ τρίγωνον δίδει προσέτι

$$ET < E'E + E'T, \quad \text{καὶ ἔτι μᾶλλον} \quad ET < 2\alpha + E'T\cdot$$

ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Τ εἶναι ἐκτὸς τῆς ἐλλείψεως, $2\alpha <$ Ε'Τ $+$ ΕΤ. Λοιπὸν, ἑκάστη ἀκτὶς εἶναι ἐλάσσων τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων πλέον τῆς ἑτέρας ἀκτῖνος. Ἄρα, οἱ κύκλοι τέμνονται καὶ ὑπάρχουσι δύο ἐφαπτόμεναι.

Ὅταν τὸ σημεῖον Τ δίδηται ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως (Σχ. 91), τότε ἡ μείζων ἀκτὶς $2\alpha$ ἰσοῦται τῷ ἀποστήματι τῶν κέντρων Ε'Τ σὺν τῇ ἐλάσσονι ἀκτῖνι ΕΤ. Ἄρα, οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐσωτερικῶς, μία δὲ ἐφαπτομένη ὑπάρχει.

Ὅταν τὸ σημεῖον Τ ἦναι ἐντὸς (Σχ. 92), ἡ μείζων ἀκτὶς $2\alpha$ μείζων εἶναι τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων Ε'Τ, αὐξανομένου κατὰ τὴν ἑτέραν ἀκτῖνα ΕΤ. Ἄρα, ὁ εἷς κύκλος εἶναι ὅλος ἐντὸς τοῦ ἑτέρου καὶ δὲν ὑπάρχει ἐφαπτομένη.

### ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΙΑΜΕΤΡΩΝ.

228. Ἐν ταῖς δευτέρας τάξεως γραμμαῖς, *διάμετρος καλεῖται εὐθεῖα δίχα τέμνουσα πάσας τὰς κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν παραλλήλους χορδάς.* Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον, ζητητέον τὴν ἐξίσωσιν οἱασδήποτε διαμέτρου. Πρὸς τοῦτο, ἀρκεῖ λαβεῖν τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν χορδῆς τινος, καὶ προσδιορίσαι τὸν γεωμετρικὸν τόπον ἐν ᾧ περιέχεται ἀείποτε τὸ μέσον τῆς χορδῆς ταύτης, κινουμένης παραλλήλως ἑαυτῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς καμπύλης.

(Σχ. 93). Ἔστω $\psi = \delta\chi + \beta$, ἡ ἐξίσωσις χορδῆς οἱαςδήποτε, ΖΗ. Συνδυάζοντες αὐτὴν τῇ ἐξισώσει (ε) τῆς ἐλλείψεως, πορίζόμεθα τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων Ζ, Η, καθ᾽ ἃ ἡ εὐθεῖα τέμνει τὴν καμπύλην. Ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ ψ δίδει

$$\chi^2 + \frac{2\delta\beta\alpha^2}{\text{ϐ}^2 + \alpha^2\delta^2}\chi + \frac{(\beta^2 - \text{ϐ}^2)\alpha^2}{\text{ϐ}^2 + \alpha^2\delta^2} = 0 .$$

Τῆς ἐξισώσεως ταύτης αἱ ῥίζαι εἰσὶν αἱ τετμημέναι ΛΘ, ΑΚ, τῶν περάτων τῆς χορδῆς. Φανερὸν ὅτι ἡ τετμημένη ΑΠ τοῦ Ι, μέσου τῆς ΖΗ, εἶναι, κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῆς γενικῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως,

$$(1) \qquad \chi = \text{ΛΠ} = \tfrac{1}{2}(\text{ΛΘ} + \text{ΑΚ}) = -\frac{\delta\beta\alpha^2}{\text{ϐ}^2 + \alpha^2\delta^2} .$$

Καθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς χορδῆς, εὑρίσκομεν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τεταγμένην·

$$(2) \qquad \psi = \text{ΙΠ} = \frac{\beta\,\text{ϐ}^2}{\text{ϐ}^2 + \alpha^2\delta^2} .$$

Ἐὰν λάβωμεν ἑτέραν χορδὴν παράλληλον τῇ ΖΗ, ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς κατὰ τὴν ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τεταγμένην μόνον θέλει διαφέρει τῆς πρώτης. Ἄρα, ἀπαλείφοντες β μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1), (2), λαμβάνομεν σχέσιν ἁρμόζουσαν εἰς τὰς συντεταγμένας τῶν μέσων πασῶν τῶν χορδῶν. Ἡ ἀπαλοιφὴ αὕτη γίνεται τῇ διαιρέσει τῆς ἐξισώσεως (2) διὰ τῆς (1)· τὸ δ᾽ ἐξαγόμενον εἶναι,

$$(3) \qquad \psi = -\frac{\text{ϐ}^2}{\alpha^2\delta}\chi .$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη, ἥτις περιέχει ἀκόμη δ, ἐμφαίνει τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν μέσων πασῶν τῶν χορδῶν ἐν αἷς ὁ συντελεστὴς δ εἶναι ὁ αὐτός· ἤτοι, πασῶν τῶν κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν χορδῶν παραλλήλων· ἄρα, ἐμφαίνει διάμετρον.

Ἐκ τῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως (3) δηλοῦται ὅτι, *ἐν τῇ ἐλλείψει πᾶσαι αἱ διάμετροι εἰσὶ γραμμαὶ εὐθεῖαι διερχόμεναι τοῦ κέντρου.*



Ἀντιστρόφως· *ἐν τῇ ἐλλείψει, πᾶσα ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγομένη γραμμὴ εὐθεῖα εἶναι διάμετρος.* Διότι, λαμβάνοντος τοῦ δ πᾶν μέγεθος, ὁ συντελεστὴς τῆς χ, ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς διαμέτρου, ἕξει καὶ οὗτος πᾶσαν τιμὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικήν.

**229.** Μεταξὺ τῆς διευθύνσεως διαμέτρου τινος καὶ τῆς τῶν χορδῶν τῶν ὑπὸ ταύτης δίχα τεμνομένων, ὑπάρχει σχέσις ἀξία παρατηρήσεως, ἐφεξῆς δεικνυομένη.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις, χορδῆς μὲν τῆς τυχούσης, διαμέτρου δὲ τῆς ταύτῃ συστοιχούσης,

$$\psi = \delta\chi + \beta, \qquad\qquad \psi = \delta'\chi .$$

Εὕρομεν ἀνωτέρω $\qquad \delta' = -\dfrac{\text{ϐ}^2}{\alpha^2\delta} .$

Ὅθεν πορίζόμεθα τὴν τῶν ἐφαπτομένων δ, δ′, πρὸς ἀλλήλας ἁπλουστάτην σχέσιν,

$$(4) \qquad \delta\delta' = -\frac{\text{ϐ}^2}{\alpha^2\delta},$$

δι᾽ ἧς ὁρίζεται ἡ ἑτέρα διὰ τῆς ἑτέρας

**230.** Ἐκ τῆς σχέσεως (4) συνάγομεν διαφόρους συνεπείας.

1ον. (Σχ. 93). Κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ἄγομεν ΜΤ ἐφαπτομένην τῆς ἐλλείψεως· καλοῦμεν σ τὴν τριγωνομετρικὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας ΜΤΧ. Ἐν § 217 εὕρομεν τὴν σχέσιν

$$\sigma\delta' = -\frac{\text{ϐ}^2}{\alpha^2} . \quad \text{Ἄρα} \quad \sigma\delta' = \delta\delta' \cdot \quad \text{ὅθεν} \quad \sigma = \delta .$$

Λοιπὸν, *ἐν τῇ ἐλλείψει, αἱ χορδαί, ἃς διάμετρός τις διχοτομεῖ, παράλληλοι εἰσὶ τῆς κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ταύτης ἐφαπτομένης.*

2ον. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον δδ′ εἶναι ἄτρεπτον καὶ ἴσον $-\dfrac{\text{ϐ}^2}{\alpha^2}$, οὐδέποτε ἰσοῦται $-1$, ἢ ἐν τῇ τοῦ κύκλου περιπτώσει, ἐν ᾗ $\alpha = \beta$. Ἄρα, οἱ παρόντες ἄξονες τῶν συντεταγμένων εἰσὶν *οἱ μόνοι ἄξονες ἐν τῇ ἐλλείψει*· διότι οὐδεμία, πλὴν τούτων, διάμετρος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς χορδὰς ἃς διχοτομεῖ.

3ον. Ἄγομεν ἑτέραν διάμετρον, ἧς ἡ ἐξίσωσις ἔστω $\psi = \delta\chi$. Αἱ ὑπὸ ταύτης δίχα τεμνόμεναι χορδαὶ εἰσὶ παράλληλοι τῇ πρώτῃ. Διότι, τῆς ἐξισώσεως $\psi = \delta''\chi + \beta$ δηλούσης ἐν γένει τὰς χορδὰς ταύτας, ἔχομεν $\delta\delta'' = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}$.

ἐπομένως $\delta\delta' = \delta\delta''$· ὅθεν καὶ $\delta' = \delta''$.

Λοιπόν, δύο διάμετροι δηλούμεναι ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$\psi = \delta\chi, \qquad \psi = \delta'\chi,$$

πρὸς ἃς δὲ ὑπάρχει ἡ σχέσις (4), εἰσὶ τοιαῦται, ὥστε ἑκατέρα διχοτομεῖ τὰς τῇ ἑτέρᾳ παραλλήλους χορδάς. Ἕνεκα τοῦ ἰδιώματος τούτου καλοῦνται *διάμετροι συζυγεῖς*.

### ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΧΟΡΔΩΝ.

231. Ἐν τῇ ἐλλείψει καλοῦσι *χορδὰς παραπληρωματικὰς τὰς ἀπὸ σημείου οἱουδήποτε τῆς καμπύλης ἀγομένας εὐθείας πρὸς τὰ πέρατα διαμέτρου τινός*. Τοιαῦται εἰσὶν αἱ ΗΜ, Η'Μ, (Σχ. 94).

232. Ἔστωσαν $\chi'$, $\psi'$, αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Η· ἐπομένως $-\chi'$, $-\psi'$, αἱ τοῦ Η'. Ἔστωσαν προσέτι $\chi$, $\psi$, αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ, καὶ $\zeta$, $\zeta'$, αἱ τριγωνομετρικαὶ ἐφαπτόμεναι τῶν γωνιῶν ΜΘΧ, ΜΑΧ, ὑπὸ τῶν παραπληρωματικῶν χορδῶν καὶ τοῦ ἄξονος ΓΒ περιεχομένων. Κατὰ § 108 ἔχομεν,

$$\zeta = \frac{\psi - \psi'}{\chi - \chi'}, \qquad \zeta' = \frac{\psi + \psi'}{\chi + \chi'}.$$

ὅθεν

$$\zeta\zeta' = \frac{\psi^2 - \psi'^2}{\chi^2 - \chi'^2}.$$



Ἐπειδὴ Μ καὶ Η, εἰσὶ σημεῖα τῆς ἐλλείψεως, ἔχομεν τὰς σχέσεις,

$$\alpha^2\psi^2 + \beta^2\chi^2 = \alpha^2\beta^2, \qquad \alpha^2\psi'^2 + \beta^2\chi'^2 = \alpha^2\beta^2,$$

ἐξ ὧν, τῇ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρέσει λαμβάνομεν,

$$\psi^2 - \psi'^2 = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}(\chi^2 - \chi'^2).$$

Ἄρα

$$\zeta\zeta' = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}. \tag{1}$$

Λοιπόν, συνάγομεν ὅτι· *ἐν τῇ ἐλλείψει, τὸ γινόμενον τῶν ἐφαπτομένων τῶν γωνιῶν, τῶν ὑπὸ δύο χορδῶν παραπληρωματικῶν καὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων περιεχομένων, ἰσοῦται τῇ ἀτρέπτῳ ποσότητι* $-\frac{\beta^2}{\alpha^2}$. Ἀντιστρόφως· ὁσάκις ἡ σχέσις (1) ὑπάρχει διὰ δύο χορδὰς διερχομένας τῶν περάτων διαμέτρου, ἢ διὰ δύο χορδὰς ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῆς ἐλλείψεως ἀγομένας, αἱ χορδαὶ αὗται εἰσὶ παραπληρωματικαί.

1ον. Ὑποθέσωμεν ὅτι, διέρχονται μὲν τῶν περάτων Η καὶ Η' διαμέτρου τινος, ἡ συνδρομὴ δὲ αὐτῶν Ν δὲν πίπτει ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως. Ἔστω Μ τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ Η'Ν τέμνει τὴν ἔλλειψιν· ζευγνύομεν ΜΗ. Ἐπειδὴ ΜΗ, ΜΗ', εἰσὶ χορδαὶ παραπληρωματικαί, ἔχομεν

$$\text{ἐφ}\,\text{ΜΑΧ} \times \text{ἐφ}\,\text{ΜΘΧ} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

ἀλλά, καθ' ὑπόθεσιν,

$$\text{ἐφ}\,\text{ΜΑΧ} \times \text{ἐφ}\,\text{ΝΚΧ} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

ἄρα, ἐφ ΜΘΧ = ἐφ ΝΚΧ. Λοιπὸν ΝΗ καὶ ΜΗ ταυτίζονται.

2ον. Τεθείσθω ἤδη ὅτι

$$\text{ἐφ}\,\text{ΜΑΧ} \times \text{ἐφ}\,\text{ΜΘΧ} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

λέγω ὅτι, τὰ σημεῖα Η, Λ, Η', εἰσὶν ἐν εὐθυγραμμίᾳ. Εἰ τὸ ἐναντίον, ἔστω ΛΟ ἡ προεκβολὴ τῆς Η'Λ. Ἄγομεν ΜΟ καὶ ἔχομεν,

$$\varepsilon\varphi\,\mathrm{MAX} \times \varepsilon\varphi\,\mathrm{MIX} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot$$

Ἄρα, συνεπείᾳ τῆς ὑποθέσεως, $\varepsilon\varphi\,\mathrm{M\Theta X} = \varepsilon\varphi\,\mathrm{MIX}$· ἤτοι ΜΟ ταυτίζεται τῇ ΜΗ, καὶ ΛΟ τῇ ΛΗ.

233. Ἀξιοσημείωτος εἶναι ἡ σχέσις (1), ὡς δεικνύουσα ὅτι, τὸ γινόμενον $\zeta\zeta'$ μένει ἄτρεπον, οὐχὶ μόνον μεταβαλλομένης τῆς διευθύνσεως τῶν ἀπὸ τῶν περάτων διαμέτρου τινὸς ἀγομένων παραπληρωματικῶν χορδῶν, ἀλλὰ προσέτι ὅταν αἱ χορδαὶ αὗται ἄγονται ἀπὸ τῶν περάτων ἑτέρας διαμέτρου. Ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι, *ἐὰν ἀπὸ τῶν περάτων διαμέτρου, π. χ. τοῦ μείζονος ἄξονος, ἐπιζευχθῶσι δύο χορδαὶ παραπληρωματικαὶ* ΒΝ, ΓΝ, *αἱ παράλληλοι τούτων ἀπὸ τῶν περάτων πάσης ἑτέρας διαμέτρου* ΗΗ' *ἀγόμεναι, εἰσὶν ἐπίσης παραπληρωματικαὶ σχετικῶς πρὸς τὴν τελευταίαν ταύτην. Προσέτι, αἱ νέαι αὗται χορδαὶ* ΗΜ, Η'Μ, *προεκβαλλόμεναι, περιέχουσι πρὸς ἀλλήλας γωνίας ἴσας ταῖς ὑπὸ τῶν πρώτων περιεχομέναις*. (Σχ. 95).

234. Κατὰ § 217, τὸ γινόμενον $\sigma\sigma'$ τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν πρὸς τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΜΤ καὶ τῆς ἀκτῖνος ΑΜ, (Σχ. 96), ἰσοῦται τῷ γινομένῳ $\zeta\zeta'$· ἤτοι, $\sigma\sigma' = \zeta\zeta'$. Λοιπὸν, ἐὰν $\sigma' = \zeta'$, ἔξομεν καὶ $\sigma = \zeta$· ἤτοι, ἐν ἄλλοις λόγοις· *ἐὰν ἄξωμεν τὴν ἡμιδιάμετρον* ΑΜ *ἐπὶ τὸ τῆς ἐπαφῆς σημεῖον, ἀπὸ τοῦ πέρατος δὲ διαμέτρου οἱασδήποτε τὴν χορδὴν* ΓΝ *παράλληλον τῇ* ΑΜ, *καὶ τὴν παραπληρωματικὴν* ΒΝ, *ἡ ἐφαπτομένη* ΜΤ *παράλληλος ἔσεται τῇ τελευταίᾳ ταύτῃ χορδῇ*.

Διὰ τῆς ἰδιότητος ταύτης εὐκόλως κατασκευάζομεν ἐφαπτομένην τῆς ἐλλείψεως, κατὰ σημεῖον δοθὲν τῆς καμπύλης, ἢ παράλληλον εὐθείᾳ δοθείσῃ ΘΚ. Ἐν τῇ τελευταίᾳ περιπτώσει, *ἄγομεν* ΒΝ *παράλληλον τῇ* ΘΚ, *εἶτα τὴν παραπληρωματικὴν χορδὴν* ΓΝ, *καὶ τὴν ἀκτῖνα* ΑΜ *παράλληλον τῇ* ΓΝ· *τέλος*, ΜΤ *παράλληλον τῇ* ΒΝ· ΜΤ ἔσεται ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.



235. Ὅταν δύο διάμετροι δηλούμεναι ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$\psi = \delta\chi, \qquad \psi = \delta'\chi,$$

ὦσι συζυγεῖς, ἔχομεν τὴν αὐτὴν σχέσιν τῶν $\delta$, $\delta'$, πρὸς ἀλλήλας [230], ἣν εὕρομεν καὶ μεταξὺ $\zeta$, $\zeta'$. Ἄρα συνάγομεν ὅτι, *ἐν τῇ ἐλλείψει, δύο διάμετροι παράλληλοι χορδῶν παραπληρωματικῶν, εἰσὶν ἀείποτε συζυγεῖς*. Ἀντιστρόφως· *δύο διάμετροι συζυγεῖς, εἰσὶν ἀείποτε παράλληλοι δύο χορδῶν παραπληρωματικῶν*.

Ἐπομένως εὐκόλως εὑρίσκομεν ἐν τῇ ἐλλείψει δύο διαμέτρους συζυγεῖς περιεχούσας γωνίαν δοθεῖσαν (Σχ. 97). Ἄγομεν τὴν τυχοῦσαν διάμετρον ΑΒ, ἐφ' ἧς γράφομεν τόξον κύκλου ΑΓΒ ἱκανὸν τῆς δοθείσης γωνίας. Ἀπὸ τοῦ σημείου καθ' ὃ τὸ τόξον τοῦτο τέμνει τὴν ἔλλειψιν, ἄγομεν τὰς παραπληρωματικὰς χορδὰς ΑΓ, ΓΒ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου παραλλήλους τῶν χορδῶν τούτων τὰς ΕΕ', ΖΖ', αἵτινες ἔσονται αἱ ἐκπληροῦσαι τὸ ζήτημα διάμετροι συζυγεῖς.

Τὸ ῥηθὲν τόξον προεκβαλλόμενον τέμνει τὴν ἔλλειψιν καὶ καθ' ἕτερον σημεῖον Δ (μὴ λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν Α, Β), ὅπερ δίδει καὶ δευτέραν λύσιν τοῦ προβλήματος, εἰ καὶ ἡ γωνία ΑΔΒ οὐκ ἰσοῦται τῇ δοθείσῃ ἀλλὰ τῷ παραπληρώματι αὐτῆς. Διότι δύο διάμετροι παράλληλοι ταῖς χορδαῖς ΑΔ, ΒΔ, περιέχουσι τέσσαρας γωνίας, ὧν αἱ μὲν δύο ἰσοῦνται τῇ ΑΔΒ, αἱ δ' ἕτεραι δύο τῇ παραπληρωματικῇ αὐτῆς.

236. Ἐν τῇ ἐλλείψει, αἱ γωνίαι τῶν παραπληρωματικῶν χορδῶν, καὶ ἐπομένως αἱ γωνίαι τῶν συζυγῶν διαμέτρων, περιλαμβάνονται ἐντὸς ὁρίων, ἅτινα ἐφεξῆς ὁρίσομεν. Ὅπως καταστήσωμεν τοὺς λογισμοὺς ἁπλουστέρους, ὑποθέσομεν, ὅπερ ἐπιτετραμμένον [233], τὰς χορδὰς ἀχθείσας ἀπὸ τῶν περάτων τοῦ μείζονος ἄξονος (Σχ. 98).

Ἔστωσαν ΓΜ, ΜΒ, δύο χορδαὶ παραπληρωματικαί. Καλοῦντες ψ, χ, τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου Μ, ἔχομεν

$$\varepsilon\varphi\, MBX = \frac{\psi}{\chi-\alpha}, \qquad \varepsilon\varphi\, M\Gamma X = \frac{\psi}{\chi+\alpha}\cdot$$

ἑπομένως

$$\varepsilon\varphi\, \Gamma MB = \frac{\dfrac{\psi}{\chi-\alpha}-\dfrac{\psi}{\chi+\alpha}}{1+\dfrac{\psi^2}{\chi^2-\alpha^2}} = \frac{2\alpha\psi}{\psi^2+\chi^2-\alpha^2}\cdot$$

Ἐπειδὴ δὲ Μ εἶναι σημεῖον τῆς ἐλλείψεως, ἔχομεν

$$\alpha^2\psi^2+\beta^2\chi^2=\alpha^2\beta^2, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \chi^2-\alpha^2=-\frac{\alpha^2\psi^2}{\beta^2}\cdot$$

Ἄρα

$$\varepsilon\varphi\, \Gamma MB = \frac{-2\alpha\beta^2}{(\alpha^2-\beta^2)\psi}\cdot$$

Ἐπειδὴ ὑπεθέσαμεν ὅτι ΒΓ εἶναι ὁ μείζων ἄξων, ἐλάβομεν δὲ τὸ σημεῖον Μ ἄνω αὐτοῦ, ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι ἀρνητική· ἤτοι ἡ γωνία ΓΜΒ ἀμβλεῖα. Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι ἡ ἐλαχίστη (τοῦ σημείου μὴ θεωρουμένου) ὅταν $\psi=\beta$. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἡ μὲν κορυφὴ τῆς γωνίας συμπίπτει τῷ πέρατι Δ τοῦ ἐλάσσονος ἄξονος, αἱ δὲ παραπληρωματικαὶ χορδαὶ εἰσὶ ΒΔ, ΓΔ. Λοιπόν, ἡ μὲν ἀμβλεῖα γωνία ΓΔΒ εἶναι ἡ μεγίστη, ἡ δὲ παραπληρωματικὴ αὐτῆς ΒΔΚ ἡ ἐλαχίστη τῶν γωνιῶν ἃς δύνανται σχηματίσαι πρὸς ἀλλήλας δύο χορδαὶ παραπληρωματικαί. Διὰ τὴν μεγίστην γωνίαν ἔχομεν

$$\varepsilon\varphi\, \Gamma\Delta B = \frac{-2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}\cdot$$

Εὐκόλως παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐλαχίστη γωνία τῶν τῆς ἐλλείψεως παραπληρωματικῶν χορδῶν ἰσοῦται τῇ ΔΒΔ'.

Ἑκατέρωθεν τοῦ ἐλάσσονος ἄξονος ὑπάρχουσι δύο σημεῖα ὧν ἡ ψ ἔχει τὴν αὐτὴν τιμήν· ἄρα, ὑπάρχουσιν ἐπίσης δύο σημεῖα καθ' ἃ αἱ ὑπὸ τῶν παραπληρωματικῶν χορδῶν περιε-



χόμεναι γωνίαι ΓΜΒ, ΓΝΒ, εἰσὶν ἴσαι. Λοιπόν, ἄνω τοῦ μείζονος ἄξονος, δύο μόνον ζεύγη ὑπάρχουσι χορδῶν παραπληρωματικῶν τεμνομένων ὑπὸ γωνίαν δοθεῖσαν.

Οὕτω, δύο μόνον συστήματα διαμέτρων συζυγῶν εὑρίσκομεν περιεχουσῶν γωνίαν δοθεῖσαν. Τὰ δύο ταῦτα συστήματα ταυτίζονται· 1ον ὅταν αἱ διάμετροι ὦσι παράλληλοι τῶν χορδῶν ΒΔ, ΓΔ· 2ον ὅταν ὦσιν οἱ ἄξονες τῆς καμπύλης.

Τέλος, δὲν ὑπάρχουσι διάμετροι συζυγεῖς περιέχουσαι γωνίαν μείζονα τῆς ἀμβλείας ΒΔΓ, ἢ ἐλάσσονα τῆς ὀξείας ΒΔΚ.

**237.** Ἐπειδὴ οἱ ἄξονες τῆς ἐλλείψεως εἰσὶ διάμετροι συζυγεῖς τεμνόμεναι πρὸς ὀρθάς, ἵνα κατασκευάσωμεν αὐτούς, ὅταν τὸ κέντρον τῆς ἐλλείψεως ἦναι γνωστόν, γράφομεν περιφέρειαν κύκλου ἐπὶ τὴν τυχοῦσαν διάμετρον· ἄγομεν ἀφ' ἑνὸς τῶν σημείων καθ' ἃ ὁ κύκλος τέμνει τὴν ἔλλειψιν, χορδὰς ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς διαμέτρου, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου παραλλήλους ταῖς χορδαῖς ταύταις. Αἱ παράλληλοι αὗται εἰσὶν οἱ ἄξονες τῆς ἐλλείψεως. (Σχ. 99).

Συνεπείᾳ τῆς συμμετρικῆς θέσεως τῆς ἐλλείψεως πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς, ἡ κέντρῳ τῷ Α γραφομένη περιφέρεια κύκλου, ἀκτῖνι οἱαδήποτε, τεμεῖ τὴν καμπύλην κατὰ τέσσαρα σημεῖα κείμενα σύνδυο συμμετρικῶς πρὸς ἑκάτερον τῶν ἀξόνων. Ἐπομένως τὸ σχῆμα ΜΝΚΠ εἶναι ὀρθογώνιον οὗτινος αἱ πλευραὶ παράλληλοι εἰσὶ τοῖς ἄξοσι. Λοιπόν, λαμβάνομεν τοὺς ἄξονας ἄγοντες ἀπὸ τοῦ κέντρου παραλλήλους ταῖς πλευραῖς τοῦ ὀρθογωνίου τούτου.

**238.** Ἐν ταῖς προηγουμέναις κατασκευαῖς ὑπεθέσαμεν τὸ κέντρον τῆς ἐλλείψεως γνωστόν. Τὸ σημεῖον τοῦτο εὐκόλως εὑρίσκεται ὅταν ἔχωμεν τὴν καμπύλην (Σχ. 100). Πρὸς τοῦτο, ἄγομεν δύο χορδὰς παραλλήλους ΕΖ, ΗΘ· ζευγνύομεν τὰ μέσα αὐτῶν τῇ εὐθείᾳ ΙΚ, ἧς τὸ μέσον Α εἶναι τὸ ζητούμενον κέντρον. Διότι, ΙΚ εἶναι διάμετρος καθὸ ζευγνύουσα τὰ μέσα δύο χορδῶν παραλλήλων· πᾶσα δὲ διάμετρος διέρχεται τοῦ κέντρου, δίχα τεμνομένη ἐν αὐτῷ.

Η ΕΛΛΕΙΨΙΣ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΗ ΠΡΟΣ ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥΣ ΑΥΤΗΣ.

239. Μέχρι τοῦδε μετεχειρίσθημεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(\varepsilon) \qquad \alpha^2\psi^2 + 6^2\chi^2 = \alpha^2 6^2,$$

ἐμφαίνουσαν ἔλλειψιν ἀναφερομένην πρὸς τὸ κέντρον καὶ τοὺς ἄξονας αὐτῆς. Ἐὰν ἀναφέρωμεν τὴν καμπύλην ταύτην πρὸς συντεταγμένας πλαγιογωνίους, ἡ ἐξίσωσις δὲ αὐτῆς διατηρήσῃ τὴν αὐτὴν μορφήν· ἤτοι, ἐὰν περιέχῃ τὰ τετράγωνα μόνον τῶν μεταβλητῶν σὺν μέρει τινὶ ἀτρέπτῳ, οἱ νέοι ἄξονες ἔσονται διάμετροι συζυγεῖς· διότι ἑκάστη τιμὴ τῆς ἑτέρας τῶν συντεταγμένων δώσει διὰ τὴν ἑτέραν δύο τιμὰς ἴσας μετὰ σημείων ἐναντίων. Ἡ τοιαύτη περίπτωσις ἀδύνατον ὑπάρξαι πρὸς ἐξίσωσιν μορφῆς διαφόρου. Λοιπόν, μεταβαίνομεν ἀπὸ τῆς (ε) ἐξισώσεως εἰς τὴν πρὸς τὰς συζυγεῖς διαμέτρους, ζητοῦντες, διὰ μετασχηματισμοῦ τῶν συντεταγμένων, ἅπαντα τὰ συστήματα ἀξόνων, ἐν οἷς ἡ τῆς ἐλλείψεως ἐξίσωσις διατηρεῖ τὴν αὐτὴν περὶ ἧς λόγος μορφήν.

Λαμβάνομεν τοὺς ἐν § 78 τύπους (3), δι' ὧν μετασχηματίζεται σύστημα συντεταγμένων ὀρθογώνιον εἰς ἕτερον πλαγιογώνιον, τὴν αὐτὴν διατηροῦν ἀρχήν,

$$\chi = \chi'\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi + \psi'\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi', \qquad \psi = \chi'\,\eta\mu\,\varphi + \psi'\,\eta\mu\,\varphi'.$$

Ἀντεισάγομεν αὐτοὺς ἐν τῇ (ε), καὶ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(1) \qquad A\psi'^2 + B\chi'^2 + 2\Gamma\chi'\psi' = \alpha^2 6^2,$$

ἐν ᾗ, πρὸς συντομίαν, ἐκαλέσαμεν

$$A = \alpha^2\eta\mu^2\varphi' + 6^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi',$$
$$B = \alpha^2\eta\mu^2\varphi + 6^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi,$$
$$\Gamma = \alpha^2\eta\mu\,\varphi\,\eta\mu\,\varphi' + 6^2\sigma\upsilon\nu\,\varphi\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi'.$$

Ἵνα ἐκλείψῃ ἀπὸ τῆς ἐξισώσεως (1) τὸ ὀρθογώνιον τῶν μεταβλητῶν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ἀόριστοι φ, φ', νὰ ἐπαληθεύωσι τὴν σχέσιν,

$$(2) \qquad \alpha^2\eta\mu\,\varphi\,\eta\mu\,\varphi' + 6^2\sigma\upsilon\nu\,\varphi\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi' = 0.$$



Τότε ἡ ἐξίσωσις (1) λαμβάνει τὴν μορφήν

$$(3) \qquad A\psi'^2 + B\chi'^2 = \alpha^2 6^2.$$

240. Ἡ ἔλλειψις ἀνεφέρθη ἤδη πρὸς διαμέτρους συζυγεῖς, ὧν τὰ μήκει ΖΗ, ΘΚ, (Σχ. 104) εὑρίσκομεν καθιστῶντες διαδοχικῶς ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ $\psi' = 0$, $\chi' = 0$. Οὕτως ἔχομεν

$$(4) \qquad \alpha'^2 = \frac{\alpha^2 6^2}{B} = \frac{\alpha^2 6^2}{\alpha^2\eta\mu^2\varphi + 6^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi},$$

$$(5) \qquad 6'^2 = \frac{\alpha^2 6^2}{A} = \frac{\alpha^2 6^2}{\alpha^2\eta\mu^2\varphi' + 6^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi'}.$$

Ἐπομένως, τῇ ἀντεισαγωγῇ τῶν τιμῶν $\dfrac{\alpha^2 6^2}{6'^2}$, $\dfrac{\alpha^2 6^2}{\alpha'^2}$, τῶν Α, Β, ἐν τῇ ἐξισώσει (3), αὕτη μορφοῦται ὡς ἑξῆς·

$$(\varepsilon_{,,}) \qquad \alpha'^2\psi'^2 + 6'^2\chi'^2 = \alpha'^2 6'^2.$$

241. Ἡ ἐξίσωσις (2) δίδει

$$(6) \qquad \varepsilon\varphi\,\varphi\,\varepsilon\varphi\,\varphi' = -\frac{6^2}{\alpha^2}.$$

Φανερὸν ὅτι διδόντες τῷ ἄξονι ΑΧ' θέσιν οἱανδήποτε· ἤτοι ὁριζομένης τῇ φ τιμῆς κατ' ἀρέσκειαν, ἔχομεν διὰ φ' τιμὴν πραγματικήν. Ἄρα, *πᾶσα διάμετρος ἔχει τὴν συζυγῆ αὐτῆς.*

Ἐπειδὴ ἡ προηγουμένη σχέσις ὁμοία ἐστὶ τῇ συνδεούσῃ πρὸς ἀλλήλας τὰς διευθύνσεις δύο χορδῶν παραπληρωματικῶν [232], ἕπεται ὅτι, ἐὰν ἡ ἑτέρα τῶν χορδῶν τούτων ἦναι παράλληλος τῇ πρώτῃ διαμέτρῳ, ἡ ἑτέρα ἔσεται παράλληλος τῇ δευτέρᾳ. Λοιπόν, ἐν γένει, *δύο διάμετροι συζυγεῖς εἰσὶν ἀείποτε παράλληλοι χορδῶν παραπληρωματικῶν.* Ἀντιστρόφως· *δύο διάμετροι παράλληλοι χορδῶν παραπληρωματικῶν εἰσὶν ἀείποτε συζυγεῖς.* Αἱ ἰδιότητες αὗται ἔγιναν ἤδη γνωσταὶ [235].

**242.** Ἡ ἐξίσωσις (2) ἐτυμοποιεῖται καὶ ὑπὸ τῶν συστημάτων τῶν τιμῶν,

$$\text{ἡμ}\,\varphi = 0, \quad \text{συν}\,\varphi' = 0, \quad \text{ἢ} \quad \text{ἡμ}\,\varphi' = 0, \quad \text{συν}\,\varphi = 0.$$

Ἐν ἀμφοτέραις ταῖς ὑποθέσεσι ταύταις, εὑρίσκομεν τοὺς ἄξονας τῆς καμπύλης· σαφὲς δὲ τὸ τοιοῦτον, διότι οἱ ἄξονες τῆς ἐλλείψεως εἰσὶν ἐπίσης διάμετροι συζυγεῖς. Προσέτι, ἐν § 230 ἐδείχθη ὅτι οὗτοι συγκροτοῦσι τὸ μοναδικὸν σύστημα διαμέτρων συζυγῶν ὀρθογωνίων ἐν τῇ ἐλλείψει. Τὴν πρότασιν ταύτην ἀποδείξομεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Τεθείσθω ὑπάρχον καὶ ἕτερον σύστημα διαμέτρων συζυγῶν τεμνομένων πρὸς ὀρθάς. Τότε ἔχομεν $\varphi' = 90^0 + \varphi$ ἐπομένως

$$\text{ἡμ}\,\varphi' = \text{ἡμ}(90^0 + \varphi) = \text{ἡμ}(90^0 - \varphi) = \text{συν}\,\varphi,$$

$$\text{συν}\,\varphi' = \text{συν}(90^0 + \varphi) = -\,\text{συν}(90^0 - \varphi) = -\,\text{ἡμ}\,\varphi.$$

Αἱ τιμαὶ αὗται φερόμεναι ἐν τῇ ἐξισώσει (2) δίδουσιν,

$$(\alpha^2 - \beta^2)\,\text{ἡμ}\,\varphi\,\text{συν}\,\varphi = 0.$$

Ἐπειδὴ α διαφέρει β, ἡ ἰσότης αὕτη ἐτυμοποιεῖται μόνον ὅταν

$$\text{ἡμ}\,\varphi = 0\,, \quad \text{ἢ} \quad \text{συν}\,\varphi = 0.$$

Ἄρα, αἱ ὑποθέσεις αὗται δίδουσιν ἀκριβῶς τοὺς δύο ἄξονας τῆς ἐλλείψεως.

Ὅταν $\alpha = \beta$, ἡ τελευταία ἰσότης ὑπάρχει διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς φ. Ἄρα, ἐν τῷ κύκλῳ πᾶσαι αἱ συζυγεῖς διάμετροι εἰσὶν ὀρθογώνιοι.

**243** Ἐξετάσωμεν εἰ ἐν τῇ ἐλλείψει ὑπάρχωσι διάμετροι συζυγεῖς ἴσαι. Πρὸς τοῦτο ἐξισοῦμεν ἀλλήλαις τὰς τιμὰς τῶν $\alpha'^2$, $\beta'^2$.

$$\alpha^2\,\text{ἡμ}^2\varphi + \beta^2\,\text{συν}^2\varphi = \alpha^2\,\text{ἡμ}^2\varphi' + \beta^2\,\text{συν}^2\varphi'.$$

Διὰ τῶν σχέσεων $\text{συν}^2\varphi = 1 - \text{ἡμ}^2\varphi$, $\text{συν}^2\varphi' = 1 - \text{ἡμ}^2\varphi'$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη μεταμορφοῦται ὡς ἑξῆς·

$$(\alpha^2 - \beta^2)\,(\text{ἡμ}^2\varphi - \text{ἡμ}^2\varphi') = 0\,.$$



Ἐπομένως συνάγομεν,

$$\text{ἡμ}^2\varphi' = \text{ἡμ}^2\varphi\,, \qquad \text{συν}^2\varphi' = \text{συν}^2\varphi\,,$$

$$\text{ἐφ}^2\varphi' = \text{ἐφ}^2\varphi\,, \qquad \text{ἐφ}\,\varphi' = \pm\,\text{ἐφ}\,\varphi\,,$$

Ἀλλ' ἡ σχέσις (6) ἀπαιτεῖ αἱ ἐφφ, ἐφφ', νὰ ἔχωσι σημεῖα ἐναντία· ἄρα, πρέπει νὰ λάβωμεν

$$\text{ἐφ}\,\varphi = -\,\text{ἐφ}\,\varphi'\,.$$

Τότε ἡ ἐξίσωσις (6) καθίσταται

$$\text{ἐφ}^2\varphi = \frac{\beta^2}{\alpha^2}, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \text{ἐφ}\,\varphi = \pm\frac{\beta}{\alpha}.$$

Τὸ μὲν κατώτερον σημεῖον ἀντιστοιχεῖ τῇ ἑτέρᾳ τῶν διαμέτρων, τὸ δὲ ἀνώτερον τῇ συζυγεῖ αὐτῆς. Λοιπὸν (Σχ. 102) ζευγνύοντες τὰ πέρατα τῶν ἀξόνων ταῖς χορδαῖς ΒΔ, ΓΔ, ἔχομεν,

$$\text{ἐφ}\,\Delta\Gamma\text{X} = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \text{ἐφ}\,\Delta\text{BX} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Αἱ παράλληλοι τῶν χορδῶν τούτων διάμετροι, εἰσὶ διάμετροι συζυγεῖς ἴσαι.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως. πρὸς τὰς ἴσας διαμέτρους συζυγεῖς ἀναφερομένη εἶναι

$$\psi'^2 + \chi'^2 = \alpha'^2\,.$$

ἀναλογεῖ δὲ τῇ τοῦ κύκλου ἐν δυσὶ διαμέτροις αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς τεμνομέναις.

**244.** Ἐπὶ τῶν συζυγῶν διαμέτρων τῆς ἐλλείψεως ὑπάρχουσι δύο ἄξια λόγου θεωρήματα, ἐφεξῆς δεικνυόμενα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1ον.** *Ἐν τῇ ἐλλείψει, τὸ κατασκευαζόμενον παραλληλόγραμμον ἐπὶ δύο διαμέτρων συζυγῶν ἰσοδυναμεῖ τῷ ἐπὶ τῶν ἀξόνων κατασκευαζομένῳ ὀρθογωνίῳ.*

Πολυπλασιάζομεν ἐπ' ἀλλήλας τὰς ἐν § 240 τιμὰς τῶν $\alpha'^2$, $\beta'^2$·

$$\alpha'^2\beta'^2 = \frac{\alpha^4\beta^4}{\alpha^4\,\text{ἡμ}^2\varphi\,\text{ἡμ}^2\varphi' + \beta^4\,\text{συν}^2\varphi\,\text{συν}^2\varphi' + \alpha^2\beta^2(\text{ἡμ}^2\varphi'\,\text{συν}^2\varphi + \text{συν}^2\varphi'\,\text{ἡμ}^2\varphi)}.$$

Τετραγωνιζομένων ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς τῶν φ, φ′, πρὸς ἀλλήλας σχέσεως (2), λαμβάνομεν

$$\alpha^4 \eta\mu^2\varphi\, \eta\mu^2\varphi' + \beta^4 \sigma\upsilon\nu^2\varphi\, \sigma\upsilon\nu^2\varphi' = -2\alpha^2\beta^2\, \eta\mu\varphi\, \eta\mu\varphi'\, \sigma\upsilon\nu\varphi\, \sigma\upsilon\nu\varphi'.$$

Ἐπομένως, τὸ γινόμενον $\alpha'^2\beta'^2$ καθίσταται,

$$\alpha'^2\beta'^2 = \frac{\alpha^4\beta^4}{\alpha^2\beta^2(\eta\mu^2\varphi'\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi'\eta\mu^2\varphi) - 2\alpha^2\beta^2\eta\mu\varphi\,\eta\mu\varphi'\,\sigma\upsilon\nu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\varphi'}$$

$$= \frac{\alpha^2\beta^2}{(\eta\mu\varphi'\sigma\upsilon\nu\varphi - \eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\varphi')^2} = \frac{\alpha^2\beta^2}{\eta\mu^2(\varphi'-\varphi)}.$$

Ἐντεῦθεν συνάγομεν

$$\alpha'\beta'\eta\mu(\varphi'-\varphi) = \alpha\beta.$$

Ἡ γωνία $(\varphi'-\varphi)$ εἶναι ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν συζυγῶν διαμέτρων. Ἐπομένως, $\alpha'\beta'\eta\mu(\varphi'-\varphi)$ ἐμφαίνει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὑπὸ τῶν ἡμιδιαμέτρων συζυγῶν συγκροτουμένου παραλληλογράμμου. Ἄρα, τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο εἶναι ἄτρεπτον· ἰσοῦται δὲ τῷ ὀρθογωνίῳ $\alpha\beta$ τῶν ἡμιαξόνων.

245. ΘΕΩΡΗΜΑ 2ον. *Ἐν τῇ ἐλλείψει, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο διαμέτρων συζυγῶν εἶναι ἄτρεπτον· ἰσοῦται δὲ τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν ἀξόνων.*

Λάβωμεν ἐκ νέου τὰς ἐν §§ 239, 240, ἐξισώσεις.

$$(2) \qquad \alpha^2\eta\mu\varphi\,\eta\mu\varphi' + \beta^2\sigma\upsilon\nu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\varphi' = 0,$$

$$(4) \qquad \alpha'^2 = \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\eta\mu^2\varphi + \beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi},$$

$$(5) \qquad \beta'^2 = \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\eta\mu^2\varphi' + \beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi'}.$$

Ἐξ αὐτῶν, τῇ ἀπαλοιφῇ τῶν γωνιῶν φ, φ′, μορφοῦμεν τὴν δεικνύουσαν τὸ περὶ οὗ λόγος θεώρημα σχέσιν. Ἰδοὺ τίνι τρόπῳ ἐκτελεῖται ἡ ἀπαλοιφὴ αὕτη.

Ἐκ τῆς (4), συνδυαζομένης τῇ σχέσει $\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1$, λαμβάνομεν·

$$\eta\mu^2\varphi = \frac{\beta^2(\alpha^2-\alpha'^2)}{\alpha'^2(\alpha^2-\beta^2)}, \qquad \sigma\upsilon\nu^2\varphi = \frac{\alpha^2(\alpha'^2-\beta^2)}{\alpha'^2(\alpha^2-\beta^2)}.$$



Ἐπειδὴ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (4) λαμβάνομεν τὴν (5), τροπῇ τῶν α′ εἰς β′, φ εἰς φ′, φανερὸν ὅτι, ἐκ τῶν προηγουμένων τιμῶν, τροπῇ ὁμοίᾳ, συνάγομεν

$$\eta\mu^2\varphi' = \frac{\beta^2(\alpha^2-\beta'^2)}{\beta'^2(\alpha^2-\beta^2)}, \qquad \sigma\upsilon\nu^2\varphi' = \frac{\alpha^2(\beta'^2-\beta^2)}{\beta'^2(\alpha^2-\beta^2)}.$$

Ἐν τῇ ἐξισώσει (2), μεταθέτομεν τὸν δεύτερον ὅρον, εἶτα τετραγωνίζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη, καὶ ἔχομεν·

$$\alpha^4\eta\mu^2\varphi\,\eta\mu^2\varphi' = \beta^4\sigma\upsilon\nu^2\varphi\,\sigma\upsilon\nu^2\varphi'.$$

Ἀντὶ τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν καθιστῶμεν τὰς ἀνωτέρω τιμὰς αὐτῶν, καὶ λαμβάνομεν διαδοχικῶς·

$$(\alpha^2-\alpha'^2)(\alpha^2-\beta'^2) = (\alpha'^2-\beta^2)(\beta'^2-\beta^2),$$

$$\alpha^4-\alpha^2\alpha'^2-\alpha^2\beta'^2 = -\alpha'^2\beta^2-\beta'^2\beta^2+\beta^4,$$

$$\alpha^4-\beta^4 = \alpha'^2(\alpha^2-\beta^2) + \beta'^2(\alpha^2-\beta^2),$$

$$\alpha^2+\beta^2 = \alpha'^2+\beta'^2.$$

246. Αἱ τρεῖς ἐξισώσεις (2), (4), (5), ἐπαρκοῦσι πρὸς ὁρισμὸν τριῶν τῶν ἓξ ποσοτήτων, α, β, α′, β′, φ, φ′, ὅταν αἱ τρεῖς ἕτεραι ὦσι γνωσταί. Ἀλλὰ πολλάκις προτιμητέα ἡ χρῆσις τῶν ἑξῆς ἐξ αὐτῶν παραχθεισῶν,

$$\varepsilon\varphi\varphi\,\varepsilon\varphi\varphi' = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}, \quad \alpha'\beta'\eta\mu(\varphi'-\varphi) = \alpha\beta, \quad \alpha'^2+\beta'^2 = \alpha^2+\beta^2.$$

Οὕτω δυνάμεθα ἐπιλύσαι πλεῖστα προβλήματα σχέσιν ἔχοντα πρὸς διαμέτρους συζυγεῖς. Π. χ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Ἐλλείψεως, γνωστῶν οὐσῶν δύο διαμέτρων συζυγῶν σὺν τῇ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένῃ γωνίᾳ, εὑρεῖν τὰ μήκη καὶ τὴν θέσιν τῶν ἀξόνων.*

Πολυπλασιάζομεν τὴν δευτέραν τῶν ἄνωθι ἐξισώσεων ἐπὶ $\pm 2$, προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα διαδοχικῶς τῇ τρίτῃ, καὶ λαμβάνομεν

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha'^2+\beta'^2+2\alpha'\beta'\eta\mu(\varphi'-\varphi),$$

$$(\alpha-\beta)^2 = \alpha'^2+\beta'^2-2\alpha'\beta'\eta\mu(\varphi'-\varphi).$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων ὁρίζονται α καὶ β.

Τὴν γεωμετρικὴν κατασκευὴν τῶν ζητουμένων ἀξόνων ἐκτελοῦμεν εὐκόλως. Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, κατὰ τὴν Τριγωνομετρίαν, ἡ μὲν ποσότης $(\alpha+6)$ εἶναι πλευρὰ τριγώνου, ἐν ᾧ ἡ ὑπὸ τὴν αὐτὴν ὑποτεινομένη γωνία ἰσοῦται $90^\circ+(\varphi'-\varphi)$· ἡ δὲ $(\alpha-6)$ εἶναι ἐπίσης πλευρὰ ἑτέρου τριγώνου, ἐν ᾧ ἡ ὑπὸ τὴν πλευρὰν ταύτην ὑποτεινομένη γωνία ἰσοῦται $90^\circ-(\varphi'-\varphi)$. Αἱ ἕτεραι δύο πλευραὶ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων τούτων εἰσὶν $\alpha'$ καὶ $6'$. Τὰς περαιτέρω λεπτομερείας ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου παραλείπομεν τοῖς ἀρχαρίοις πρὸς ἄσκησιν.

**247.** Ἐπανέλθωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν [240],

$$(\varepsilon_{,,})\qquad \alpha'^2\psi^2+6'^2\chi^2=\alpha'^2 6'^2,$$

παραλείψωμεν δὲ, συντομίας χάριν, τοὺς τόνους τῶν μεταβλητῶν.

Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ὅλως ὁμοιόμορφος τῇ ἐν τοῖς ἄξοσιν, ἅπασαι αἱ ἰδιότητες, αἱ ἀνεξάρτητοι τῆς κλίσεως τῶν συντεταγμένων, πρέπει νὰ ὦσι κοιναὶ πρός τε τοὺς ἄξονας τῆς ἐλλείψεως καὶ πρὸς τὰς συζυγεῖς αὐτῆς διαμέτρους. Ἄρα, θεωρήσομεν ὡς ἀποδεδειγμένας τὰς ἑξῆς προτάσεις.

1ον. Τὰ τετράγωνα τῶν παραλλήλων διαμέτρῳ τινὶ τεταγμένων, εἰσὶν ἀνάλογα τῶν ὀρθογωνίων τῶν τμημάτων καθ' ἃ διαιροῦσι τὴν συζυγῆ αὐτῆς [196].

2ον. Καθ' ὅσον σημεῖόν τι κεῖται ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως, ἢ ἐκτὸς, ἢ ἐντὸς αὐτῆς, ἡ ποσότης $\alpha'^2\psi^2+6'^2\chi^2-\alpha'^2 6'^2$, εἶναι μηδὲν, θετικὴ, ἢ ἀρνητικὴ [197].

3ον. Ἔστω $\sigma$ ὁ λόγος ἡμιτόνων, ἴσος τῷ συντελεστῇ τῆς $\chi$ ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἐλλείψεως, ἀγομένης κατὰ τὸ σημεῖον οὗτινος συντεταγμέναι εἰσὶ $\chi'$, $\psi'$. Ἕξομεν [211]

$$\sigma=-\frac{6'^2\chi'}{\alpha'^2\psi'}\,.$$

καὶ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης,

$$\alpha'^2\psi'\psi+6'^2\chi'\chi=\alpha'^2 6'^2\,.$$



Ἡ ὑφαπτομένη [216] ἰσοῦται $\dfrac{\alpha'^2-\chi'^2}{\chi'}$.

Ἕξομεν δὲ ἀείποτε [217], $\qquad \sigma\sigma'=-\dfrac{6'^2}{\alpha'^2}$,

σχέσιν πρὸς ἀλλήλας τῶν τιμῶν τῶν $\sigma$, $\sigma'$, σχετικῶν πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἐλλείψεως καὶ πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν ζευγνυομένην διάμετρον.

4ον. $\psi=\delta\chi+\beta$ οὔσης ἐξισώσεως χορδῆς οἱασδήποτε, καὶ $\psi=\delta'\chi$ ἐξισώσεως τῆς ζευγνυούσης διαμέτρου τὰ μέσα πασῶν τῶν παραλλήλων χορδῶν, εὑρήσομεν [229] τὴν σχέσιν $\delta\delta'=-\dfrac{6'^2}{\alpha'^2}$, ὑπάρχουσαν καὶ πρὸς δύο διαμέτρους συζυγεῖς ὧν αἱ ἐξισώσεις ἤθελον εἶσθαι $\psi=\delta\chi$, $\psi=\delta'\chi$, [230], ὡς καὶ πρὸς δύο χορδὰς παραπληρωματικὰς ἀγομένας ἐπὶ τὰ πέρατα διαμέτρου τῆς τυχούσης [231].

**248.** Ἵνα ἄξωμεν ἐφαπτομένας τῆς ἐλλείψεως, ἀναφερομένης πρὸς διαμέτρους συζυγεῖς, ἀπὸ σημείου Ν ἐξωτερικοῦ, οὗτινος αἱ συντεταγμέναι εἰσὶ $\chi''$, $\psi''$, ἔχομεν [219] μεταξὺ τῶν ἀγνώστων συντεταγμένων ἑκάστου σημείου ἐπαφῆς, τὰς ἐξισώσεις

$$\alpha'^2\psi'^2+6'^2\chi'^2=\alpha'^2 6'^2,\qquad \alpha'^2\psi''\psi'+6'^2\chi''\chi'=\alpha'^2 6'^2.$$

(Σχ. 103). Θεωροῦντες $\chi'$, $\psi'$, ὡς μεταβλητὰς, ἡ μὲν πρώτη ἐξίσωσις ἐμφαίνει τὴν δοθεῖσαν ἔλλειψιν, ἡ δὲ δευτέρα, εὐθεῖαν τῶν σημείων ἐπαφῆς διερχομένην. Ἵνα κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν ταύτην, καθιστῶμεν διαδοχικῶς ἐν τῇ ἐξισώσει αὐτῆς $\psi'=0$, $\chi'=0$, καὶ λαμβάνομεν τὰ ἀποστήματα τῆς ἀρχῆς ἀπὸ τῶν σημείων καθ' ἃ τέμνει τὰς δύο διαμέτρους· ἤτοι

$$\chi'=\mathrm{AT}=\frac{\alpha'^2}{\chi''}\,,\qquad \psi'=\mathrm{AP}=\frac{6'^2}{\psi''}\,.$$

Θεωροῦντες τὸ ἕτερον τῶν ἀποστημάτων τούτων, π.χ. ΑΤ, βλέπομεν ὅτι δὲν περιέχει $\psi''$. Ἑπομένως, ἐὰν ἄξωμεν ἀπὸ τοῦ Ν εὐθεῖαν παράλληλον τῇ ΑΨ, ἀπὸ σημείου δὲ οἱουδήποτε τῆς αὐτῆς ἄξωμεν δύο ἐφαπτομένας τῆς ἐλλείψεως, ἡ ζευγνύουσα τὰ δύο ταῦτα νέα σημεῖα ἐπαφῆς εὐθεῖα τεμεῖ τὴν διάμετρον ΑΧ κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον Τ. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι μόνιμον ἐνόσῳ $\chi''$ μένει ἀμετάϐλητος. Λοιπὸν συνάγομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα.

*Ἐὰν ἀφ' ἑκάστου σημείου εὐθείας δοθείσης ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐλλείψεως, ἄξωμεν ἐφαπτομένας τῆς καμπύλης, καὶ ἑνώσωμεν τὰ δύο σημεῖα τῆς ἐπαφῆς, λαμϐάνομεν τεμνούσας αἵτινες ἅπασαι συμπίπτουσι κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τῇ διαμέτρῳ συζυγεῖ οὔσῃ τῆς παραλλήλου διαμέτρου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.*

Ἀντιστρόφως· *ἐὰν ἀπὸ σημείου δοθέντος ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐλλείψεως, ἄξωμεν διαφόρους τεμνούσας, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων καθ' ἃ ἑκάστη τούτων τέμνει τὴν καμπύλην, ἄξωμεν δύο ἐφαπτομένας, ὁ τόπος τῶν σημείων συνδρομῆς ἑκάστου ζεύγους τῶν ἐφαπτομένων τούτων ἔσεται εὐθεῖα παράλληλος τῆς διαμέτρου, συζυγοῦς τῆς ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου διερχομένης.*

249. Ἐκ τοῦ ὁμοιομόρφου τῶν ἐξισώσεων (ε), ($\varepsilon_{,,}$) πορίζόμεθα ἁπλουστάτην κατασκευὴν τῆς ἐλλείψεως, γνωστῶν οὐσῶν δύο διαμέτρων συζυγῶν $2\alpha'$, $2\beta'$, σὺν τῇ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένῃ γωνίᾳ. (Σχ. 104). Πρῶτον κατασκευάζομεν ἔλλειψιν ἔχουσαν ἄξονας $2\alpha'$, $2\beta'$· εἶτα κλίνομεν τὰς τεταγμένας ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν, διατηροῦντες τὰ μήκη αὐτῶν. Τὰ σημεῖα Ν, Ν', κ. τ. ἑ., διὰ τῆς μεθόδου ταύτης ὁριζόμενα, συγκροτοῦσι τὴν ζητουμένην ἔλλειψιν.

### ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΨΕΩΣ.

250. (Σχ. 105). Ἐπὶ τὸν μείζονα ἄξονα τῆς ἐλλείψεως, ὡς διάμετρον, γράφομεν κύκλον. Κατὰ § 198, δύο τεταγμέναι, $\mathrm{M\Pi} = \Psi$ καὶ $\mathrm{N\Pi} = \psi$, ἐπὶ τὴν αὐτὴν τετμημένην ΑΠ συστοιχοῦσαι, συνδέονται ἀλλήλαις τῇ σχέσει $\frac{\psi}{\Psi} = \frac{\beta}{\alpha}$. Δείξομεν ὅτι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ πρὸς ἄλληλα καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου.



Ἐγγράφομεν τῷ κύκλῳ πολύγωνον οἱονδήποτε, ΓΜΜ'Β, ἀφ' ἑκάστης τῶν κορυφῶν τοῦ ὁποίου ἄγομεν καθέτους ἐπὶ τὸν ἄξονα ΒΓ· ζευγνύομεν τὰ σημεῖα καθ' ἃ αἱ κάθετοι τέμνουσι τὴν ἔλλειψιν· οὕτω συγκροτεῖται πολύγωνον, τὸ ΓΝΝ'Β, ἐγγεγραμμένον τῇ καμπύλῃ ταύτῃ. Ἓν οἱονδήποτε τραπέζιον, ΠΝΝ'Π', ἐν τῷ τελευταίῳ πολυγώνῳ, ἰσοῦται $\frac{1}{2}(\mathrm{\Pi N} + \mathrm{\Pi' N'}) \times \mathrm{\Pi\Pi'}$· τὸ ἀντιστοιχοῦν ἐν τῷ κύκλῳ τραπέζιον ΠΜΜ'Π', ἰσοῦται $\frac{1}{2}(\mathrm{\Pi M} + \mathrm{\Pi' M'}) \times \mathrm{\Pi\Pi'}$. Λοιπὸν, τὰ δύο ταῦτα τραπέζια εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς $\mathrm{\Pi N} + \mathrm{\Pi' N'} : \mathrm{\Pi M} + \mathrm{\Pi' M'}$. Ἀλλὰ $\mathrm{\Pi N} : \mathrm{\Pi M} :: \mathrm{\Pi' N'} : \mathrm{\Pi' M'} :: \beta : \alpha$· ἄρα, $\mathrm{\Pi N} + \mathrm{\Pi' N'} : \mathrm{\Pi M} + \mathrm{\Pi' M'} :: \beta : \alpha$.
Βλέπομεν ὅτι, τὰ ἀντιστοιχούμενα τραπέζια εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ἐν τῷ ἀτρέπτῳ λόγῳ, $\beta : \alpha$. Λοιπὸν, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ $\tau$, $\tau'$, $\tau''$, κ. τ. ἑ., τὰ ἐν τῇ ἐλλείψει τραπέζια, καὶ διὰ Τ, Τ', Τ'', κ. τ. ἑ., τὰ ἐν τῷ κύκλῳ, ἕξομεν τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων,

$$\tau : \mathrm{T} :: \tau' : \mathrm{T'} :: \tau'' : \mathrm{T''} :: \ldots :: \beta : \alpha,$$

ὅθεν συνάγομεν,

$$(\tau + \tau' + \tau'' + \ldots) : (\mathrm{T} + \mathrm{T'} + \mathrm{T''} + \ldots) :: \beta : \alpha.$$

Ἐπειδὴ ἡ τελευταία αὕτη ἀναλογία εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ τε ἀριθμοῦ καὶ τοῦ μεγέθους τῶν τραπεζίων, συνάγομεν ὅτι· *τὸ ἐμϐαδὸν τῆς ἐλλείψεως, εἶναι πρὸς τὸ ἐμϐαδὸν τοῦ ἐπὶ τὸν μείζονα ἄξονα γραφομένου κύκλου, ὡς ὁ δεύτερος ἄξων πρὸς τὸν πρῶτον.* Λοιπὸν, καλοῦντες Ε τὸ ἐμϐαδὸν τῆς ἐλλείψεως, καὶ Κ τὸ τοῦ κύκλου, ἔχομεν

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Ἀλλὰ $\mathrm{K} = \pi\alpha^2$· ἄρα $\mathrm{E} = \pi\alpha\beta$.

Ἤτοι, *τὸ ἐμϐαδὸν τῆς ἐλλείψεως ἰσοῦται κύκλῳ οὗτινος ἡ ἀκτὶς εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἡμιαξόνων τῆς ἐλλείψεως.*

251. Ἔστωσαν $\alpha'$, $\beta'$, δύο ἡμιδιάμετροι συζυγεῖς περιέχουσαι γωνίαν τινα θ. Κατὰ § 244, ἔχομεν $\alpha\beta = \alpha'\beta'\,\text{ἡμ}\,\theta$.

Ἄρα, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως συνεκθέσει διαμέτρων συζυγῶν εἶναι,

$$\mathrm{E} = \pi \alpha' \beta' \, \eta\mu \, 0.$$

252. Ἐάν, ἀντὶ τῆς ὅλης ἐλλείψεως, θεωρήσωμεν χωρίον ΠΠ′Ν′Ν, ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ δύο τεταγμένων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸν ἄξονα ΒΓ, διὰ συλλογισμῶν ὁμοίων τοῖς προηγουμένοις εὑρήσομεν, καλοῦντες Τ καὶ Τ′ τὰ ἀντιστοιχοῦμενα τμήματα ἔν τε τῇ ἐλλείψει καὶ τῷ κύκλῳ,

$$\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}'} = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \mathrm{T} = \frac{\beta}{\alpha}\mathrm{T}'.$$

Ἄρα, ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ πρώτου τμήματος ἄγεται εἰς τὸν τοῦ δευτέρου, γνωστὸν ἐκ τῆς Γεωμετρίας.

253. (Σχ. 106). Τεθείσθω ὅτι πρόκειται περὶ χωρίου ἐλλειπτικοῦ, ἀπολαμβανομένου ὑπὸ διαμέτρου τῆς τυχούσης ΒΓ καὶ δύο τεταγμένων ΠΝ, Π′Ν′, παραλλήλων τῇ συζυγεῖ αὐτῆς. Ἐπὶ τὴν ΒΓ γράφομεν κύκλον· ἐγγράφομεν τῷ ἐλλειπτικῷ τμήματι τμῆμα πολυγώνου ΝΡΡ′Ν′· εἶτα ἄγομεν τὰς τεταγμένας ΡΣ, Ρ′Σ′, . . . παραλλήλους τῇ ΠΝ· ἐπὶ δὲ τὴν ΒΓ τὰς καθέτους ΠΜ, ΘΣ, . . . αἵτινες δίδουσιν ἐπὶ τοῦ κύκλου τὰ σημεῖα Μ, Θ, Θ′, . . . Ζευγνύομεν τὰ σημεῖα ταῦτα ἀλλήλοις δι᾽ εὐθειῶν, καὶ συγκρίνομεν τὰ πλάγια τραπέζια, ὡς τὸ ΠΣΡΝ, πρὸς τ᾽ ἀντιστοιχοῦντα ὀρθογώνια τραπέζια. Ἄγομεν ΣΙ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ΝΠ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πλαγίου τραπεζίου ΠΝΡΣ ἰσοῦται

$$\tfrac{1}{2}(\Pi\mathrm{N} + \mathrm{P}\Sigma) \times \Sigma\mathrm{I} = \tfrac{1}{2}(\Pi\mathrm{N} + \mathrm{P}\Sigma) \times \Pi\Sigma \, \eta\mu \, \mathrm{I}\Pi\Sigma.$$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀντιστοιχοῦντος ὀρθοῦ τραπεζίου ΠΣΘΜ ἰσοῦται $\tfrac{1}{2}(\Pi\mathrm{M} + \Theta\Sigma) \times \Sigma\Pi$.

Λοιπόν, ὁ λόγος τῶν δύο τούτων τραπεζίων εἶναι

$$\frac{(\Pi\mathrm{N} + \mathrm{P}\Sigma)\,\eta\mu\,\mathrm{I}\Pi\Sigma}{\Pi\mathrm{M} + \Theta\Sigma}.$$

Αἱ ἐξισώσεις, τῆς ἐλλείψεως πρὸς διαμέτρους συζυγεῖς, καὶ τοῦ κύκλου τοῦ ἐπὶ τὴν ΒΓ διάμετρον γραφομένου ἐν συντεταγμέναις ὀρθογωνίοις, εἰσὶν ἀμοιβαίως



$$\psi^2 = \frac{\beta'^2}{\alpha'^2}(\alpha'^2 - \chi^2), \qquad \psi^2 = \alpha'^2 - \chi^2.$$

Ἄρα, ΠΝ : ΠΜ : : ΡΣ : ΘΣ : : β′ : α′. Ἑπομένως, καλοῦντες 0 τὴν γωνίαν ΙΠΣ ὑπὸ τῶν συζυγῶν διαμέτρων περιεχομένην, ἔχομεν

$$\frac{(\Pi\mathrm{N} + \mathrm{P}\Sigma)\,\eta\mu\,\mathrm{I}\Pi\Sigma}{\Pi\mathrm{M} + \Theta\Sigma} = \frac{\beta'}{\alpha'}\,\eta\mu\,0.$$

Ἐπειδὴ ὁ λόγος τῶν ἀντιστοιχουμένων τραπεζίων πρὸς ἄλληλα εἶναι ἀείποτε ὁ αὐτός, ἕπεται ὅτι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσεται τὸ ἐλλειπτικὸν τμῆμα πρὸς τὸ κυκλικόν. Ἄρα, δηλοῦντες Τ, Τ′, τὰ τμήματα ταῦτα, ἔχομεν

$$\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}'} = \frac{\beta'}{\alpha'}\,\eta\mu\,0, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \mathrm{T} = \frac{\beta'}{\alpha'}\mathrm{T}'\,\eta\mu\,0.$$

Ἵνα λάβωμεν τὴν ὅλην ἔλλειψιν, καθιστῶμεν $\mathrm{T}' = \pi\alpha'^2$, καὶ ἔχομεν, ὡς ἐν § 251,

$$\mathrm{T} = \mathrm{E} = \pi\alpha'\beta'\,\eta\mu\,0.$$

254. Πρὸς ἄσκησιν προσθέσομεν προτάσεις τινὰς ἀφορώσας τὴν ἔλλειψιν.

1). *Καμπύλην εὑρεῖν, ἐν ᾗ τὰ ἀποστήματα ἑκάστου αὐτῆς σημείου ἀπὸ σημείου καὶ ἀπὸ εὐθείας δεδομένων, τὰ ὦσι πρὸς ἄλληλα ὡς* μ : ν. [210].

Ἀπ. $$\nu^2\psi^2 + (\nu^2 - \mu^2)\chi^2 = \frac{\mu^2\nu^2(\nu+\mu)}{\nu-\mu}.$$

2). *Ἐν τῇ ἐλλείψει, τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἀπὸ τῶν ἑστιῶν ἐπὶ ἐφαπτομένης οἱασδήποτε ἀγομένων καθέτων, ἰσοῦται τῷ τετραγώνῳ τοῦ ἐλάσσονος ἡμιάξονος.*

3). *Ἀπὸ σημείου δοθέντος ἐκτὸς ἐλλείψεως, κάθετον ἀγαγεῖν ἐπὶ τὴν καμπύλην ταύτην.*

Τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἐν γένει, ἔχει τέσσαρας λύσεις, ἢ καὶ ἔλαττον, κατὰ τὴν θέσιν τοῦ δοθέντος σημείου.

4). *Ἐν τῇ ἐλλείψει, τὸ ἐπὶ δύο ἡμιδιαμέτρων μὴ συζυγῶν κατασκευαζόμενον παραλληλόγραμμον, ἔλαττον εἶναι τοῦ ὀρθογωνίου τῶν ἡμιαξόνων.*

Τοῦ θεωρήματος τούτου ἄμεσος συνέπεια εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ ἐν § 244 πρώτου θεωρήματος.

5). *Ἀποδεῖξαι ὅτι τὸ ἀντίστροφον τοῦ ἐν § 245 δευτέρου θεωρήματος δὲν εἶναι ἀληθές· διότι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο διαμέτρων, καί τοι μὴ οὐσῶν συζυγῶν, δυνατὸν εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν ἐπὶ τῶν ἀξόνων τετραγώνων.*

6). *Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τετμημένων τῶν περάτων δύο οἱωνδήποτε ἡμιδιαμέτρων συζυγῶν, ἰσοῦται $\alpha^2$, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεταγμένων τῶν αὐτῶν σημείων ἰσοῦται $\beta^2$.*

Τὸ ἐν § 245 δεύτερον θεώρημα εἶναι ἄμεσος συνέπεια τοῦ θεωρήματος τούτου.

7). *Ἐν τῇ ἐλλείψει, τὸ γινόμενον τῶν τμημάτων ἐφαπτομένης τινος, ἀπολαμβανομένων ὑπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς καὶ δύο διαμέτρων συζυγῶν, ἰσοῦται τῷ τετραγώνῳ τῆς παραλλήλου τῇ ἐφαπτομένῃ ἡμιδιαμέτρου.*

8). *Γνωστῶν ὄντων τῶν ἀξόνων ἐλλείψεως, σὺν τῇ ὑπὸ δύο διαμέτρων συζυγῶν περιεχομένῃ γωνίᾳ, εὑρεῖν τὸ μῆκος καὶ τὴν θέσιν τῶν διαμέτρων τούτων [246].*

Ἀπ. $$\alpha' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\frac{2\alpha\beta}{\eta\mu(\varphi'-\varphi)}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\frac{2\alpha\beta}{\eta\mu(\varphi'-\varphi)}}$$

$$\beta' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\frac{2\alpha\beta}{\eta\mu(\varphi'-\varphi)}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\frac{2\alpha\beta}{\eta\mu(\varphi'-\varphi)}}$$

$$\varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{-(\alpha^2-\beta^2)\,\varepsilon\varphi(\varphi'-\varphi) \pm \sqrt{(\alpha^2-\beta^2)^2\,\varepsilon\varphi^2(\varphi'-\varphi) - 4\alpha^2\beta^2}}{2\alpha^2}.$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι′.

## ΠΕΡΙ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ.

### Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΗ ΠΡΟΣ ΤΟ ΚΕΝΤΡΟΝ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΑΞΟΝΑΣ ΑΥΤΗΣ.

255. Ὅταν ἡ ἀρχὴ ἦναι εἰς τὸ κέντρον, ἓν μόνον σύστημα [161] συντεταγμένων ὀρθογωνίων ὑπάρχει, ἐν ᾧ ἡ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς ἔχει τὴν μορφήν,

(6) $$\psi^2 - \mu^2\chi^2 = \pi.$$

Ὅταν $\pi = 0$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐμφαίνει δύο εὐθείας. Πλὴν τῆς περιπτώσεως ταύτης, ὑπάρχουσι προσέτι αἱ ἑξῆς δύο, καθ' ὅσον $\pi$ εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικός,

(1) $$\psi^2 - \mu^2\chi^2 = \beta^2,$$

(2) $$\psi^2 - \mu^2\chi^2 = -\beta^2.$$

Ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων τούτων μεταμορφοῦται εἰς τὴν δευτέραν, τῇ ἀμοιβαίᾳ ἀλλαγῇ τῶν συντεταγμένων, διαιρέσει διὰ $\mu^2$ καὶ μεταλλαγῇ τῶν σημείων· ἔχομεν τότε τὴν ἐξίσωσιν

$$\psi^2 - \frac{1}{\mu^2}\chi^2 = -\frac{\beta^2}{\mu^2},$$

ἥτις εἶναι ὅλως ὁμοία τῇ (2), καὶ παράγεται ἐκ ταύτης τροπῇ $\mu^2$ εἰς $\frac{1}{\mu^2}$, καὶ $\beta^2$ εἰς $\frac{\beta^2}{\mu^2}$. Λοιπόν, ἡ ἐξίσωσις (2) μόνη ἐπαρκεῖ πρὸς ἀνακάλυψιν τῶν τῆς ὑπερβολῆς ἰδιωμάτων.

256. Ἐκ τῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως ταύτης δηλοῦται ἀμέσως, ὅτι ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων εἶναι τὸ κέντρον τῆς

καμπύλης, καὶ ὅτι οἱ ἄξονες αὐτῶν εἰσὶν ἄξονες τῆς ὑπερβολῆς. Οἱ ἄξονες οὐ τέμνουσιν ἀμφότεροι τὴν καμπύλην· διότι $\psi=0$, δίδει $\chi=\pm\frac{\beta}{\mu}$. καὶ $\chi=0$, δίδει $\psi=\pm\beta\sqrt{-1}$.

Λοιπὸν, (Σχ. 107), ὁ μὲν ἄξων τῶν $\chi$ συμπίπτει τῇ καμπύλῃ κατὰ δύο σημεῖα Β, Γ, κείμενα ἐν ἀποστάσει $AB=A\Gamma=\frac{\beta}{\mu}$ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς, ὁ δὲ ἄξων τῶν $\psi$ οὐδαμῶς· διότι $\chi=0$ δίδει τῇ $\psi$ τιμὰς φανταστικάς.

Καλοῦμεν $\frac{\beta}{\mu}=\alpha$, ὅθεν $\mu=\frac{\beta}{\alpha}$. Τῇ ἀντεισαγωγῇ τῆς τιμῆς ταύτης ἡ ἐξίσωσις (2) τρέπεται εἰς τὴν

(υ) $$\alpha^2\psi^2-\beta^2\chi^2=-\alpha^2\beta^2.$$

Ὁ ἄξων ΒΓ, ἴσος 2α, καλεῖται *πρῶτος ἄξων* ἢ *ἄξων πλάγιος*. Εἰ καὶ ὁ ἄξων τῶν $\psi$ δὲν τέμνῃ τὴν καμπύλην, λαμβάνουσιν ὅμως ἐπ' αὐτοῦ τὰ μήκη $A\Delta=AE=\beta$· κατὰ συνθήκην δὲ θεωροῦσιν ὡς *δεύτερον ἄξονα* τὸ ἀπόστημα ΔΕ ἢ 2β. Τὰ τοῦ πρώτου ἄξονος πέρατα εἰσὶν *αἱ κορυφαὶ* τῆς ὑπερβολῆς.

257. Ὅπως μεταθέσωμεν τὴν ἀρχὴν ἐν τῇ κορυφῇ Β, τρέπομεν $\chi$ εἰς $\chi+\alpha$· οὕτως ἡ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς λαμβάνει τὴν μορφὴν

(υ′) $$\psi^2=\frac{\beta^2}{\alpha^2}(2\alpha\chi+\chi^2).$$

258. Ὅταν $\beta=\alpha$, αἱ ἐξισώσεις (υ), (υ′), καθίστανται,

$$\psi^2-\chi^2=-\alpha^2, \qquad \psi^2=2\alpha\chi+\chi^2.$$

Ἡ ὑπερβολὴ τότε λέγεται *ἰσοσκελής*. Αὕτη εἶναι πρὸς τὰς κοινὰς ὑπερβολὰς ὅ,τι ὁ κύκλος πρὸς τὰς ἐλλείψεις.

259. Ἐπιλυομένη ἡ ἐξίσωσις (υ), δίδει,

$$\psi=\pm\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\chi^2-\alpha^2}.$$



Ἐνόσῳ $\chi$ ἐλάσσων εἶναι $\alpha$, $\psi$ εἶναι φανταστική· $\chi=AB=\alpha$, δίδει $\psi=0$. Αὐξανομένης $\chi$ μέχρι $+\infty$, $\psi$ ἔχει δύο τιμὰς πραγματικὰς, ἴσας μετὰ σημείων ἐναντίων, αὐξανούσας ἐπ' ἄπειρον. Ἄρα, αἱ θετικαὶ τιμαὶ τῆς $\chi$ ὁρίζουσι κλάδον, ὡς τὸν ΡΒΣ, προχωροῦντα ἐπ' ἄπειρον πρὸς τὸ μέρος ΑΧ, συμμετρικῶς ἄνω καὶ κάτω τοῦ ἄξονος τούτου. Αἱ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τῆς $\chi$ δίδουσιν ἕτερον κλάδον, τὸν Ρ′ΓΣ′, ὅλως ὅμοιον, πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τοῦ ἄξονος ΑΨ. Φανερὸν ὅτι, ἀμφότεροι οἱ συνιστῶντες τὴν ὑπερβολὴν κλάδοι προτείνουσι τὰ κυρτὰ αὐτῶν πρὸς τὸν ἄξονα τῶν $\psi$· ἄλλως ἤθελεν εἶσθαι δυνατὸν νὰ τέμνηται ἡ καμπύλη αὕτη τῆς δευτέρας τάξεως ὑπὸ εὐθείας κατὰ σημεῖα πλείονα τῶν δύο, ὅπερ ἀδύνατον [88].

260. Ἔστω ΜΠ τεταγμένη οἱαδήποτε τῆς ὑπερβολῆς. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΜΠ δίδει

$$AM=\sqrt{\chi^2+\psi^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}\chi^2-\beta^2}.$$

Ἐπειδὴ ἡ τετμημένη $\chi$ αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον, ἐπίσης ἡ ΑΜ αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον. Ἀλλ' ἐν τῇ ὑπερβολῇ, ἡ ἐλάσσων τιμὴ τῆς $\chi$ εἶναι α· ἄρα, ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς ΑΜ εἶναι $AB=\alpha$. Λοιπὸν, *ἐν τῇ ὑπερβολῇ, βραχυτέρα ἁπασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὰ διάφορα σημεῖα τῆς καμπύλης ζευγνυμένων εὐθειῶν, εἶναι ὁ πρῶτος ἡμιάξων.*

261. Ἡ ἐξίσωσις (υ) δίδει,

$$\psi^2=\frac{\beta^2}{\alpha^2}(\chi^2-\alpha^2)=\frac{\beta^2}{\alpha^2}(\chi-\alpha)(\chi+\alpha).$$

Ἀλλ' ἐὰν ὑποθέσωμεν $\psi=M\Pi$, ἔχομεν $B\Pi=\chi-\alpha$, $\Gamma\Pi=\chi+\alpha$, καὶ ἑπομένως $\overline{M\Pi}^2=\frac{\beta^2}{\alpha^2}\times B\Pi\times\Gamma\Pi$.

Δι' ἑτέραν τεταγμένην Μ′Π′ εὑρίσκομεν ἐπίσης,

$$\overline{M'\Pi'}^2=\frac{\beta^2}{\alpha^2}\times B\Pi'\times\Gamma\Pi'.$$

Ἄρα $$\frac{\overline{M\Pi}^2}{\overline{M'\Pi'}^2}=\frac{B\Pi\times\Gamma\Pi}{B\Pi'\times\Gamma\Pi'}.$$

*Λοιπόν, ἐν τῇ ὑπερβολῇ, τὰ τετράγωνα τῶν πρὸς ὀρθὰς τεταγμένων ἐπὶ τὸν πρῶτον ἄξονα, λόγον ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὃν τὰ γινόμενα τῶν ἀπολαμβανομένων ἀποστημάτων ὑπὸ τῶν περάτων τοῦ ἄξονος τούτου καὶ τῶν ποδῶν τῶν τεταγμένων.*

262. Διὰ πᾶν σημεῖον τῆς ὑπερβολῆς ὑπάρχει ἡ σχέσις $\alpha^2\psi^2-\beta^2\chi^2+\alpha^2\beta^2=0$. Θεωρήσωμεν σημεῖον Ν, ἐκτὸς κείμενον μεταξὺ τῶν δύο κλάδων· ἄξωμεν πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ΑΨ τὴν ΚΝ, ἧς ἡ προεκβολὴ τέμνει τὴν ὑπερβολὴν κατὰ τὸ σημεῖον Μ. Φανερὸν ὅτι, ἡ τετμημένη τοῦ Ν ἐλάσσων εἶναι τῆς τοῦ Μ, αἱ δὲ τεταγμέναι ἀμφοτέρων τῶν σημείων τούτων εἰσὶν ἴσαι· ἄρα, ἡ ποσότης $\alpha^2\psi^2-\beta^2\chi^2+\alpha^2\beta^2$, ἥτις ἰσοῦται 0 διὰ τὸ σημεῖον Μ, εἶναι θετικὴ διὰ τὸ Ν. Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ δεικνύεται ὅτι, ἡ αὐτὴ ποσότης εἶναι ἀρνητικὴ διὰ σημεῖον Ν', κείμενον ἐντὸς τοῦ ἑτέρου τῶν κλάδων.

263. Συγκρίνοντες πρὸς ἀλλήλας τὰς ἐξισώσεις,

τῆς ἐλλείψεως $\alpha^2\psi^2+\beta^2\chi^2=\alpha^2\beta^2$,

καὶ τῆς ὑπερβολῆς $\alpha^2\psi^2-\beta^2\chi^2=-\alpha^2\beta^2$,

συνάγομεν ὅτι, μεταβαίνομεν ἀπὸ τῆς πρώτης εἰς τὴν δευτέραν τρεπῇ $\beta^2$ εἰς $-\beta^2$, ἢ $\beta$ εἰς $\beta\sqrt{-1}$. Ἡ παρατήρησις αὕτη χρησιμεύει πολλάκις πρὸς δεῖξιν συμπτωμάτων τῆς ὑπερβολῆς ἐχόντων ἀναλογίαν τινὰ πρὸς τὰ τῆς ἐλλείψεως.

### ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΣΤΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΙΕΥΘΕΤΟΥΣΩΝ.

264. Τὰ περὶ *ἑστιῶν* ἐν τῇ ἐλλείψει ἐκτεθέντα [202], ἐφαρμόζονται ἐπὶ τὴν ὑπερβολὴν σχεδὸν ἀπαραλλάκτως. Ἔστω ἡ τῆς ὑπερβολῆς ἐξίσωσις,

(υ) $$\alpha^2\psi^2-\beta^2\chi^2=-\alpha^2\beta^2.$$

*Ἐν τῇ ὑπερβολῇ, ἑστίαι λέγονται τὰ σημεῖα, ὧν τὰ ἀποστήματα ἀπὸ παντὸς σημείου τῆς καμπύλης, ἀναφερομένης πρὸς τὸ κέντρον καὶ τοὺς ἄξονας αὐτῆς, ἐκφράζονται λογικῶς συνεκθέσει τῆς τετμημένης τοῦ σημείου τούτου.*



Ἔστωσαν, χ', ψ', αἱ συντεταγμέναι ἑστίας τινός· χ, ψ, αἱ συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου τῆς ὑπερβολῆς, καὶ δ τὸ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστημα τῶν σημείων τούτων. Ἔχομεν,

$$\delta^2=(\chi-\chi')^2+(\psi-\psi')^2=\chi^2-2\chi'\chi+\chi'^2+\psi^2-2\psi'\psi+\psi'^2.$$

Ἀλλά, $\psi=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\chi^2-\alpha^2}$· ἄρα $\delta^2$, καὶ ἔτι μᾶλλον δ, τότε ἐκφράζεται λογικῶς εἰς χ, ὅταν ὁ ὅρος $2\psi'\psi$ ἐκλείψῃ, ὅπερ ἀπαιτεῖ $\psi'=0$. Οὕτως, ἡ ἀνωτέρω τιμὴ τοῦ $\delta^2$ καθίσταται,

$$\delta^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}\chi^2-2\chi'\chi+\chi'^2-\beta^2.$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ἥτις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ὅπως ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ $\delta^2$ ᾖ τετράγωνον ἐντελές, συνάγομεν

$$\chi'=\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Λοιπόν, καὶ ἐν τῇ ὑπερβολῇ ὑπάρχουσι δύο ἑστίαι κείμεναι ἐπὶ τοῦ πρώτου ἄξονος αὐτῆς, ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου, ἐν ἀποστάσει ἀπὸ τούτου ἴσῃ $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

(Σχ. 108). Ἵνα κατασκευάσωμεν αὐτάς, ἄγομεν ΒΘ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸ πέρας τοῦ πρώτου ἄξονος, ἣν λαμβάνομεν ἴσην τῷ δευτέρῳ ἡμιάξονι. Κέντρῳ Α καὶ ἀκτῖνι ΑΘ, γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὸν πρῶτον ἄξονα κατὰ δύο σημεῖα Ε, Ε', ἅτινα εἰσὶν αἱ ἑστίαι τῆς ὑπερβολῆς.

Τὸ ἀπόστημα ΕΕ' καλεῖται *ἐκκεντρότης* τῆς ὑπερβολῆς.

265. Ἔστω $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\gamma$. Τὰς *διαβατικὰς ἀκτῖνας* ΕΜ, Ε'Μ, λαμβάνομεν θέτοντες ἐν τῇ τιμῇ τοῦ $\delta^2$, ἀντὶ χ', ἀλληλοδιαδόχως $+\gamma$ καὶ $-\gamma$. Εὑρίσκομεν οὕτως,

$$\overline{EM}^2=\frac{\gamma^2\chi^2}{\alpha^2}-2\gamma\chi+\alpha^2,\quad \text{καὶ}\quad EM=\pm\left(\frac{\gamma\chi}{\alpha}-\alpha\right),$$

$$\overline{E'M}^2=\frac{\gamma^2\chi^2}{\alpha^2}+2\gamma\chi+\alpha^2,\quad \text{καὶ}\quad E'M=\pm\left(\frac{\gamma\chi}{\alpha}+\alpha\right).$$

Αἱ διαβατικαὶ ἀκτῖνες πρέπει νὰ ὦσι θετικαί. Ἐνόσῳ τὸ σημεῖον Μ διαμένει ἐπὶ τοῦ πρὸς τὰς θετικὰς χ κλάδου τῆς καμπύλης, ὁ ὅρος $\frac{\gamma\chi}{\alpha}$ εἶναι θετικὸς καὶ μείζων α· ἄρα, τότε ληπτέον τ' ἀνώτερα σημεῖα. Ὁ ὅρος ὅμως οὗτος εἶναι ἀρνητικός, ἀείποτε δὲ μείζων α, ὅταν τὸ σημεῖον Μ ἦναι ἐπὶ τοῦ ἑτέρου κλάδου· ἄρα, τότε ληπτέον τὰ κατώτερα σημεῖα, ὅπως ὦσι τ' ἀποστήματα ΕΜ, Ε'Μ, θετικά.

266. Ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαίρεσις τῶν διαβατικῶν ἀκτίνων δίδει

$E'M - EM = 2\alpha$, διὰ τὸν πρῶτον κλάδον,

$EM' - E'M' = 2\alpha$, διὰ τὸν δεύτερον κλάδον.

Λοιπόν, *ἐν τῇ ὑπερβολῇ, ἡ διαφορὰ τῶν διαβατικῶν ἀκτίνων εἶναι ἄτρεπτος καὶ ἴση τῷ πρώτῳ ἄξονι.*

(Σχ. 109). Διὰ σημεῖόν τι, Ν, ἐκτὸς τῆς ὑπερβολῆς, ἔχομεν $E'N - EN < 2\alpha$. Τῷ ὄντι, ἔστω Μ τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ ΕΝ τέμνει τὴν καμπύλην· ἔχομεν, $E'N < E'M + MN$· ἀλλά, $EN = EM + MN$· ἄρα, τῇ ἀφαιρέσει, $E'N - EN < E'M - EM$· καὶ ἐπειδὴ $E'M - EM = 2\alpha$, συνάγομεν ὅτι $E'N - EN < 2\alpha$.

Ὑπεθέσαμεν τὸ σημεῖον Ν δεξιὰ τοῦ δευτέρου ἄξονος· ἐὰν ἦτον ἀριστερὰ ἠθέλομεν ἔχει $EN - E'N < 2\alpha$.

Διὰ σημεῖον Ν', ἐντὸς τοῦ ἑτέρου τῶν κλάδων, ἔχομεν $E'N' - EN' > 2\alpha$. Τῷ ὄντι, δῆλον ὅτι $EN' < EM + MN'$, καὶ $E'N' = EM + MN'$· ἄρα, τῇ ἀφαιρέσει, συνάγομεν

$$E'N' - EN' > E'M - EM, \quad ἢ \quad E'N' - EN' > 2\alpha.$$

Λοιπόν, *ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστημάτων παντὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου τῆς ὑπερβολῆς ἀφ' ἑκατέρας τῶν ἑστιῶν, ἰσοῦται τῷ πρώτῳ ἄξονι, ἢ εἶναι ἐλάσσων, ἢ μείζων τοῦ ἄξονος τούτου, καθ' ὅσον τὸ σημεῖον εἶναι ἐπὶ τῆς καμπύλης, ἢ ἐκτός, ἢ ἐντὸς αὐτῆς.*

267. Εὐκόλως ἤδη γράφομεν ὑπερβολὴν (Σχ. 109), ἧς δίδονται ὁ πρῶτος ἄξων ΒΓ καὶ αἱ ἑστίαι Ε, Ε'. Κέντρῳ τῇ ἑστίᾳ Ε, καὶ ἀκτῖνι οἱᾳδήποτε ΒΚ, γράφομεν περιφέ-



ρειαν κύκλου. Κέντρῳ τῇ ἑτέρᾳ ἑστίᾳ Ε', καὶ ἀκτῖνι ἴσῃ $B\Gamma + BK$ γράφομεν ἕτερον κύκλον. Τὰ σημεῖα, ὡς τὸ Μ, καθ' ἃ τέμνουσιν ἀλλήλας αἱ δύο περιφέρειαι, ἀνήκουσιν εἰς τὴν ὑπερβολήν· διότι ἔχομεν πάντοτε $E'M - EM = \Gamma B$.

Τὴν ὑπερβολὴν γράφομεν καὶ διὰ συνεχοῦς κινήσεως. Στερεοῦμεν ἐπὶ τὴν ἑστίαν Ε' κανόνα Ε'Μ, στρεπτὸν περὶ τὸ σημεῖον τοῦτο. Ἐπὶ τὴν ἑτέραν ἑστίαν Ε καὶ ἐπὶ τὸ ἄκρον Μ στερεοῦμεν τὰ πέρατα νήματος μήκους ΕΜ τοιούτου, ὥστε ἡ διαφορὰ $E'M - EM$ νὰ ἰσοῦται τῷ πρώτῳ ἄξονι ΓΒ. Τείνομεν τὸ νῆμα διά τινος ἥλου, ὃν κινοῦμεν κατὰ μῆκος τοῦ κανόνος ὥστε μέρος τοῦ νήματος νὰ διατηρῆται ἀείποτε ἐφηρμοσμένον ἐπ' αὐτοῦ. Τῇ κινήσει ταύτῃ, ἡ ἀκμὴ τοῦ ἥλου καταγράφει τμῆμα ὑπερβολικόν.

268. Ἐπιλυθήτω καὶ ἐνταῦθα τὸ πρόβλημα·

*Καμπύλην εὑρεῖν, ἐν ᾗ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστημάτων παντὸς σημείου αὐτῆς ἀπὸ δύο μονίμων σημείων ἰσοῦται τῷ δοθέντι μήκει 2α.*

(Σχ. 110). Ἔστωσαν Ε, Ε', τὰ δύο δοθέντα σημεῖα. Ζευγνύομεν αὐτὰ τῇ εὐθείᾳ Χ'Χ, καὶ ἄγομεν ΨΨ' πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸ μέσον Α τοῦ ἀποστήματος ΕΕ'. Εὐκόλως πληροφορούμεθα ὅτι ἡ ζητουμένη καμπύλη κεῖται συμμετρικῶς πρὸς τὰς εὐθείας ΕΕ', ΨΨ'· δι' ὃ λαμβάνομεν ὡς ἄξονας τῶν συντεταγμένων τὰς γραμμὰς ταύτας. Καλοῦμεν χ, ψ, τὰς συντεταγμένας ΑΠ, ΜΠ, σημείου οἱουδήποτε Μ τῆς καμπύλης, καὶ 2γ τὸ ἀπόστημα ΕΕ'. Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστημάτων Ε'Μ, ΕΜ, ἰσοῦται 2α, παριστῶμεν τὸ μὲν Ε'Μ διὰ $\zeta + \alpha$, τὸ δὲ ΕΜ διὰ $\zeta - \alpha$. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα Ε'ΜΠ, ΕΜΠ, δίδουσι,

$$(\zeta + \alpha)^2 = \psi^2 + (\chi + \gamma)^2, \qquad (\zeta - \alpha)^2 = \psi^2 + (\chi - \gamma)^2.$$

Τῇ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρέσει τῶν ἐξισώσεων τούτων λαμβάνομεν·

$$4\alpha\zeta = 4\gamma\chi, \qquad ὅθεν \qquad \zeta = \frac{\gamma\chi}{\alpha}.$$

Φέροντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἐξισώσεων, λαμβάνομεν τὴν ζητουμένην,

$$\alpha^2\psi^2-(\gamma^2-\alpha^2)\chi^2=-\alpha^2(\gamma^2-\alpha^2)\,.$$

Λοιπόν, βλέπομεν ὅτι, ἡ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐμφαινομένη καμπύλη εἶναι ὑπερβολή, ἧς $2\alpha$ εἶναι πρῶτος ἄξων καὶ $2\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$ δεύτερος.

269. Ὡς ἐν τῇ ἐλλείψει, εὑρίσκομεν καὶ ἐν τῇ ὑπερβολῇ τὸ σύμπτωμα, ὅτι τὰ ὀρθογώνια $E'\Gamma\times E'B$, $EB\times E\Gamma$, ἰσοῦνται τῷ τετραγώνῳ $\beta^2$.

270. Ἡ ὑπερβολὴ ἔχει ἐπίσης δύο διευθετούσας (Σχ. 110). Πρὸς τὸ μέρος ΑΕ λαμβάνομεν $A\Theta=\delta$· ἄγομεν ἐπὶ τὸν πρῶτον ἄξονα τὴν κάθετον ΘΛ. Ἀπὸ σημείου οἱουδήποτε τῆς καμπύλης ἄγομεν ΜΡ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ΘΛ, ζευγνύομεν ΜΕ, καὶ ἔχομεν·

$$\frac{ME}{MP}=\frac{\dfrac{\gamma\chi}{\alpha}-\alpha}{\chi-\delta}=\frac{\gamma\chi-\alpha^2}{\gamma\chi-\gamma\delta}\times\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Ὁ λόγος οὗτος ἔσεται ἄτρεπτος καὶ ἴσος $\frac{\gamma}{\alpha}$, ἐὰν τὸ σημεῖον Θ ληφθῇ ὅπως $\gamma\delta=\alpha^2$. Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον καταντῶμεν εἰς ὅν τινα δήποτε κλάδον τῆς ὑπερβολῆς κεῖται τὸ σημεῖον Μ. Λοιπόν, ὡς ἐν τῇ ἐλλείψει, ὁ *ἡμιάξων* ΑΒ *πρέπει νὰ ἦναι μέσος ἀνάλογος* τῶν ΑΕ, ΑΘ.

Ὁρισθείσης τῆς ΑΘ, λαμβάνομεν καὶ πρὸς τὸ μέρος ΑΕ', $A\Theta'=A\Theta$· ἄγομεν τὴν κάθετον Θ'Λ'. Δεικνύομεν καὶ ἤδη εὐκόλως ὅτι, διὰ πᾶν σημεῖον τῆς ὑπερβολῆς, τὰ ἀποστήματα ΜΕ', ΜΡ', εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς $\gamma:\alpha$.

Λοιπόν, καλοῦντες *διευθετούσας* τὰς δύο εὐθείας ΘΛ, Θ'Λ', λέγομεν ὅτι, *τὰ ἀποστήματα παντὸς σημείου τῆς ὑπερβολῆς ἀπὸ τῆς ἑτέρας τῶν ἑστιῶν καὶ ἀπὸ τῆς ἐγγυτέρας ταύτῃ διευθετούσης, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς τὸ τῶν ἑστιῶν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστημα πρὸς τὸν πλάγιον ἄξονα.*



## ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΚΑΘΕΤΟΥ.

271. Λάβωμεν τὴν τῆς ὑπερβολῆς ἐξίσωσιν

$$(\upsilon)\qquad \alpha^2\psi^2-\beta^2\chi^2=-\alpha^2\beta^2\,.$$

Οἱ λογισμοὶ δι' ὧν εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης εἰσὶν ὅμοιοι τοῖς ἐν τῇ ἐλλείψει, πλὴν τοῦ ὅτι $\beta^2$ ἀντικατασταθήσεται ἐνταῦθα πανταχοῦ διὰ $-\beta^2$. Λοιπόν, δηλοῦντες $\chi'$, $\psi'$, τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς, καλοῦντες δὲ $\sigma$ τὴν τριγωνομετρικὴν ἐφαπτομένην τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης καὶ τοῦ ἄξονος τῶν $\chi$, εὑρίσκομεν

$$\sigma=\frac{\beta^2\chi'}{\alpha^2\psi'}\,.$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης, ὑπὸ τὴν ἁπλουστέραν αὐτῆς μορφήν, εἶναι,

$$(\varepsilon)\qquad \alpha^2\psi'\psi-\beta^2\chi'\chi=-\alpha^2\beta^2\,.$$

Ἵνα βεβαιωθῶμεν ἀμέσως ὅτι ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς ἐφαπτομένης, πλὴν τοῦ τῆς ἐπαφῆς, κεῖνται ἐκτὸς τῆς ὑπερβολῆς, δεικτέον, ὡς ἐν § 262, ὅτι δι' ἅπαντα τὰ σημεῖα ταῦτα ἡ ποσότης $\alpha^2\psi^2-\beta^2\chi^2+\alpha^2\beta^2$ εἶναι θετική.

Πρὸς τοῦτο, λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (ε) τὴν τιμὴν τῆς $\psi$,

$$\psi=\frac{\beta^2(\chi'\chi-\alpha^2)}{\alpha^2\psi'}\,.$$

Ἀντεισάγομεν αὐτὴν εἰς τὴν ἔκθεσιν $\alpha^2\psi^2-\beta^2\chi^2+\alpha^2\beta^2$, καὶ ἀντὶ $\alpha^2\psi'^2$ θέτομεν τὴν τιμὴν αὐτοῦ $\beta^2\chi'^2-\alpha^2\beta^2$, ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς ὑπερβολῆς, καὶ λαμβάνομεν,

$$\alpha^2\psi^2-\beta^2\chi^2+\alpha^2\beta^2=\frac{\beta^4(\chi'\chi-\alpha^2)^2}{\alpha^2\psi'^2}-\beta^2\chi^2+\alpha^2\beta^2$$

$$=\frac{\beta^4(\chi'\chi-\alpha^2)^2+(\alpha^2\beta^2-\beta^2\chi^2)(\beta^2\chi'^2-\alpha^2\beta^2)}{\alpha^2\psi'^2}=\frac{\beta^4(\chi-\chi')^2}{\psi'^2}\,.$$

Τὸ δεύτερον μέλος εἶναι πραγματικῶς θετικόν· ἑπομένως, ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης, ἔχομεν ἀείποτε $\alpha^2\psi^2-\beta^2\chi^2+\alpha^2\beta^2>0$;

ὅθεν δείκνυται ὅτι, ἅπαντα τὰ σημεῖα αὐτῆς εἰσὶν ἐκτὸς τῆς καμπύλης. Μόνη ἐξαίρεσις ὑπάρχει πρὸς τὴν τιμὴν $\chi=\chi'$, τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς, διδουσαν $\alpha^2\psi^2-\beta^2\chi^2+\alpha^2\beta^2=0$.

272. Ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ $\sigma=\frac{\beta^2\chi'}{\alpha^2\psi'}$ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα τῶν $\chi'$, $\psi'$, ἡ τιμὴ τοῦ σ μενεῖ ἡ αὐτή. Ἐπομένως, *ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἄξωμεν εὐθεῖαν συμπίπτουσαν τῇ ὑπερβολῇ, αἱ κατὰ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς ἐφαπτόμεναι παράλληλοι ἔσονται.*

273. Ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ τύπῳ καταστήσωμεν $\chi'=\alpha$ καὶ $\psi'=0$, λαμβάνομεν $\sigma=\infty$. Λοιπὸν, ἡ ἐφαπτομένη κατὰ τὴν κορυφὴν Β εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα. Τὸ αὐτὸ σύμπτωμα ὑπάρχει καὶ κατὰ τὴν κορυφὴν Γ. (Σχ. 111).

Τεθείσθω ὅτι τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς λαμβάνει πᾶσαν θέσιν ἐν τῇ γωνίᾳ ΨΑΧ. Ἐπειδὴ αἱ συντεταγμέναι $\chi'$, $\psi'$, αὐξάνουσι συγχρόνως, δὲν φαίνεται ἀμέσως ἡ πρόοδος τῶν τιμῶν τοῦ σ. Ὅπως καταστήσωμεν αὐτὴν ἐπαισθητήν, ἀντεισάγομεν τὴν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (υ) τιμὴν τῆς $\chi'$, $\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\psi'^2+\beta^2}$, καὶ ἔχομεν

$$\sigma=\frac{\beta\sqrt{\psi'^2+\beta^2}}{\alpha\psi'}=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{1+\frac{\beta^2}{\psi'^2}}.$$

Φανερὸν ἤδη ὅτι, αὐξανομένης τῆς $\psi'$ ἀπὸ 0 μέχρι $+\infty$, σ ἐλαττοῦται ἀπὸ τοῦ ἀπείρου μέχρι $\frac{\beta}{\alpha}$. Ἄρα, ἡ ἐφαπτομένη ΜΤ προοδεύει κλίνουσα ἀδιακόπως μέχρι τοῦ ὁρίου τούτου. Ἵνα πληροφορηθῶμεν τί τότε καταντᾷ ἡ ἐφαπτομένη, ζητήσωμεν τί γίνεται τὸ ἀπόστημα ΑΤ τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ σημείου καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα αὕτη συμπίπτει τῷ πλαγίῳ ἄξονι. Τῇ ὑποθέσει $\psi=0$, ἡ ἐξίσωσις (ε) δίδει

$$\mathrm{AT}=\frac{\alpha^2}{\chi'}.$$



Ἡ τιμὴ αὕτη, διατηροῦσα ἀείποτε τὸ τῆς $\chi'$ σημεῖον, ἐλαττοῦται τείνουσα πρὸς τὸ μηδὲν καθ' ὅσον $\chi'$ αὐξάνει. Ἄρα, καθ' ὅσον τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς προβαίνει ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς, τὸ σημεῖον Τ προσεγγίζει τῷ κέντρῳ, ἀλλ' οὐδέποτε μεταβαίνει πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος· συμπίπτει δὲ τῷ κέντρῳ ὅταν ἡ ἐπαφὴ ὑποτεθῇ εἰς τὸ ἄπειρον. Οὕτως, εἰς τὸ ὅριον τοῦτο, ἡ ἐφαπτομένη τῆς ὑπερβολῆς διέρχεται τοῦ κέντρου, σχηματίζουσα πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ γωνίαν ἧς ἡ ἐφαπτομένη ἰσοῦται $\frac{\beta}{\alpha}$.

Πρὸς κατασκευὴν τῆς ἐφαπτομένης ταύτης, σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον ΘΚ'Θ'Κ ἐπὶ τῶν ἀξόνων $2\alpha$, $2\beta$, καὶ ἄγομεν τὴν διαγώνιον ΘΘ' ἀπεριορίστως· ἔχομεν

$$\text{εφ}\,\Theta\mathrm{AB}=\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ἕνεκα τῆς πρὸς τοὺς ἄξονας συμμετρίας τῆς ὑπερβολῆς, ἡ διαγώνιος αὕτη εἶναι ἐπίσης τὸ ὅριον τῶν θέσεων τῶν ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης, τῆς ἐν τῇ ἀντικειμένῃ γωνίᾳ Ψ'ΑΧ'. Ὁμοίως, ἡ ἑτέρα διαγώνιος ΚΚ' εἶναι τὸ ὅριον τῶν ἐφαπτομένων τῶν ἑτέρων δύο μερῶν τῆς ὑπερβολῆς. Αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο τούτων ὁρίων εἰσὶ

$$\psi=\pm\frac{\beta}{\alpha}\chi.$$

Ἐν τῇ ἰσοσκελῇ ὑπερβολῇ, ἐν ᾗ $\alpha=\beta$, αἱ εὐθεῖαι αὗται δίχα τέμνουσι τὴν γωνίαν τῶν ἀξόνων, τέμνουσι δὲ ἀλλήλας πρὸς ὀρθάς.

274. Τῇ ἀφαιρέσει ΑΤ ἀπὸ ΑΠ, λαμβάνομεν τὴν ὑφαπτομένην,

$$\Pi\mathrm{T}=\frac{\chi'^2-\alpha^2}{\chi'}.$$

Ἡ ἔκφρασις αὕτη δείκνυσιν ὅτι, ἡ ὑφαπτομένη λαμβάνει πᾶσαν τιμὴν ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ ἀπείρου. Παρατηρητέον ὅτι, αἱ τιμαὶ τῶν ΑΤ, ΠΤ, εἰσὶν ἀνεξάρτητοι τοῦ δευτέρου ἄξονος 2β· ἑπομένως εἶσὶν αἱ αὐταὶ διὰ πάσας τὰς ἐπὶ τὸν αὐτὸν πρῶτον ἄξονα γραφομένας ὑπερβολάς.

275. (Σχ. 112). Ζευγνύομεν τὸ κέντρον τῷ σημείῳ τῆς ἐπαφῆς διὰ τῆς εὐθείας ΑΜ, ἧς ἡ ἐξίσωσις εἶναι ὑπὸ τὴν μορφὴν $\psi = \sigma'\chi$. Ἐπειδὴ δὲ διέρχεται τῆς ἐπαφῆς, ἔχομεν

$$\psi' = \sigma'\chi', \qquad \text{ὅθεν} \qquad \sigma' = \frac{\psi'}{\chi'}.$$

Πρὸ ὀλίγου ἐλάβομεν [271] $\qquad \sigma = \dfrac{6^2\chi'}{\alpha^2\psi'}.$

Πολυπλασιάζοντες τὰς τιμὰς ταύτας εὑρίσκομεν,

$$\sigma\sigma' = \frac{6^2}{\alpha^2}.$$

Λοιπόν, *καὶ ἐν τῇ ὑπερβολῇ, τὸ γινόμενον τῶν ἐφαπτομένων* σ, σ', *μένει ἄτρεπτον.*

276. Κατὰ τὰ προηγούμενα εὐκόλως εὑρίσκομεν

$$\text{ἐφ ΑΜΤ} = \frac{\alpha^2 6^2}{(\alpha^2+6^2)\chi'\psi'}.$$

Κατὰ τὰ πέρατα τοῦ πρώτου ἄξονος, ὅπου $\psi' = 0$, ἡ ἐφΑΜΤ εἶναι ἄπειρος. Ἄρα, κατὰ τὰ σημεῖα ταῦτα, ἡ ἐφαπτομένη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ζευγνύουσαν τὸ κέντρον ἐπὶ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς εὐθεῖαν. Εἰς οὐδὲν ἕτερον σημεῖον ὑπάρχει τὸ τοιοῦτον σύμπτωμα· διότι ἀλλαχοῦ οὐδεμία τῶν συντεταγμένων εἶναι μηδέν· ἑπομένως ἐφΑΜΤ δὲν εἶναι ἄπειρος.

Καθ' ὅσον τὸ σημεῖον Μ προχωρεῖ ἐπὶ τῆς καμπύλης, ἐν τῇ γωνίᾳ ΨΑΧ, αἱ χ', ψ', αὐξάνουσι θετικῶς, δύνανται δὲ ὑπερβῆναι πᾶν ὅριον· ἄρα, ἡ ἐφΑΜΤ ἐλαττοῦται θετικῶς μέχρι μηδενός· ἑπομένως ἡ γωνία ΑΜΤ εἶναι ἀείποτε ὀξεῖα ἐλαττουμένη μέχρι μηδενός· ἤτοι, εἰς τὸ ἄπειρον ἡ ἐφαπτομένη ΜΤ ταυτίζεται τῇ εὐθείᾳ ΑΜ, τῇ ἐπιζευγνυούσῃ τὸ κέντρον τῇ ἐπαφῇ.



277. Ζητήσωμεν ἤδη τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης ἀγομένης ἀπὸ σημείου δοθέντος ἐκτὸς τῆς ὑπερβολῆς. Ἔστωσαν χ'', ψ'', αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τούτου· αὗται πρέπει νὰ ἐτυμοποιῶσι τὴν ἐξίσωσιν (ε) τῆς ἐφαπτομένης· ἄρα

$$\alpha^2\psi''\psi' - 6^2\chi''\chi' = -\alpha^2 6^2.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ ἄγνωστον σημεῖον τῆς ἐπαφῆς (χ', ψ') ἀνήκει εἰς τὴν ὑπερβολήν, ἔχομεν προσέτι

$$\alpha^2\psi'^2 - 6^2\chi'^2 = -\alpha^2 6^2.$$

Διὰ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων ὁρίζονται αἱ τιμαὶ τῶν χ', ψ'. Ἐν τῇ ἐκθέσει αὐτῶν ὑπάρχει ῥιζικόν, ὑφ' ὃ εὑρίσκεται ἡ ποσότης $\alpha^2\psi''^2 - 6^2\chi''^2 + \alpha^2 6^2$. Ἄρα, εὐκόλως συνάγομεν, ὡς ἐν τῇ ἐλλείψει, ὅτι ἀπὸ σημείου ἐξωτερικοῦ δύο ἐφαπτομένας δυνατὸν ἀγαγεῖν τῆς ὑπερβολῆς· ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται ταυτίζονται ὅταν τὸ δοθὲν σημεῖον ἦναι σημεῖον τῆς καμπύλης· τέλος, ὅτι δὲν ὑπάρχει ἐφαπτομένη ὅταν τὸ δοθὲν σημεῖον ἦναι ἐντὸς τῆς καμπύλης.

278. *Κάθετος* ἐπὶ τὴν ὑπερβολὴν λέγεται ἡ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην ταύτης ἀγομένη πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα κατὰ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Μ (Σχ. 112). Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον, ἡ ἐξίσωσις τῆς καθέτου εἶναι

$$(\kappa) \qquad \psi - \psi' = -\frac{\alpha^2\psi'}{6^2\chi'}(\chi - \chi').$$

Τὸ ἀπόστημα ΑΣ, καθ' ὃ ἡ κάθετος συμπίπτει τῷ τῶν χ ἄξονι, εἶναι

$$\text{ΑΣ} = \frac{\alpha^2+6^2}{\alpha^2}\chi'.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη ἐλαττοῦται σὺν τῇ χ'. Λοιπόν, τὸ σημεῖον Σ προσεγγίζει τῷ κέντρῳ Α, καθ' ὅσον τὸ Μ προσεγγίζει τῇ κορυφῇ Β, ἀλλ' οὐδέποτε μεταβαίνει πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος· διότι ΑΣ ἔχει τὸ αὐτὸ τῆς χ' σημεῖον. Προσέτι, διὰ τὴν ἐλαχίστην τιμὴν $\chi' = \alpha$, ΑΣ εἶναι ἐπίσης ἡ ἐλαχίστη.

Ἄρα συνάγομεν ὅτι, ὁ ποὺς τῆς καθέτου οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸ σημεῖον Ν, δι' ὅ

$$\mathrm{AN} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha}.$$

Ἡ αὐτὴ ΑΣ δὲν ἔχει μέγιστον· διότι χ' αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον.

279. *Ἐν τῇ ὑπερβολῇ, αἱ ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν ζευγνύμεναι διαβατικαὶ ἀκτῖνες, σχηματίζουσι πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, ἐκ διαφόρων μερῶν ταύτης, γωνίας ἴσας.* Ἤτοι, αἱ γωνίαι ΕΜΤ, Ε'ΜΤ, εἰσὶν ἴσαι. (Σχ. 113).

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς ἐν τῇ ἐλλείψει [223].

Διὰ μέσου τῆς ἰδιότητος ταύτης εὐκόλως ἄγομεν ἐφαπτομένην τῆς ὑπερβολῆς ἀπὸ σημείου δοθέντος ἐπὶ τῆς καμπύλης ἢ ἐκτὸς αὐτῆς.

(Σχ. 114). Ἔστω Μ τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τῆς καμπύλης. Ἐπιζευγνύομεν τὰς διαβατικὰς ἀκτῖνας Ε'Μ, ΕΜ· λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἑτέρας τούτων ΜΚ = ΕΜ· ζευγνύομεν ΚΕ, καὶ ἄγομεν ΜΟ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ΚΕ. Ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη εἶναι ΜΟ. Διότι, τὸ τρίγωνον ΜΚΕ εἶναι ἰσοσκελές, ἡ δὲ κάθετος ΜΟ δίχα τέμνει τὴν γωνίαν Ε'ΜΕ.

Ἄλλως εὐκόλως βεβαιούμεθα ὅτι, πραγματικῶς τῆς εὐθείας ταύτης ἅπαντα τὰ σημεῖα εἰσὶν ἐκτὸς τῆς ὑπερβολῆς, πλὴν τοῦ Μ. Διότι, δι' ἕτερον σημεῖον, Ρ, ἔχομεν $PE' - PK < E'K$· ἀλλὰ $PK = PE$, $E'K = 2\alpha$· ἄρα $PE' - PE < 2\alpha$. Λοιπὸν, τὸ σημεῖον Ρ εἶναι ἐκτὸς τῆς ὑπερβολῆς [266].

Τοῦ σημείου Ο ὄντος μέσου τῆς ΕΚ, τοῦ δὲ κέντρου Α μέσου τῆς ΕΕ', ἡ εὐθεῖα ΑΟ εἶναι παράλληλος τῇ Ε'Κ καὶ ἴση $\frac{1}{2}$ Ε'Κ· ἀλλὰ $E'K = 2\alpha$· ἄρα $AO = \alpha$.

*Λοιπὸν, ἐν τῇ ὑπερβολῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ποδῶν τῶν ἀπὸ τῶν ἑστιῶν ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας τῆς καμπύλης ἀγομένων καθέτων, εἶναι περιφέρεια κύκλου γραφομένη κέντρῳ μὲν τῷ τῆς ὑπερβολῆς, ἀκτῖνι δὲ ἴσῃ τῷ πλαγίῳ ἡμιάξονι ταύτης.*



280. Τεθείσθω ἤδη ὅτι πρόκειται ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς ὑπερβολῆς ἀπὸ σημείου Τ ἐκτὸς (Σχ. 115). Ἔστω ΤΡ ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη, καὶ Μ τὸ τῆς ἐπαφῆς σημεῖον. Ζευγνύομεν τὰς διαβατικὰς ἀκτῖνας ΕΜ, Ε'Μ· λαμβάνομεν $E'K = 2\alpha$ καὶ ἐπιζευγνύομεν τὸ σημεῖον Κ τῇ ἑστίᾳ Ε· ἡ ἐφαπτομένη ΤΜ ἔσεται κάθετος ἐπὶ τὸ μέσον τῆς ΕΚ· ἄρα $TK = TE$. Λοιπὸν, τὸ σημεῖον Κ ὁρίζεται τῇ συνδρομῇ δύο περιφερειῶν γραφομένων, τῆς μὲν κέντρῳ τῇ ἑστίᾳ Ε' καὶ ἀκτῖνι 2α, τῆς δὲ κέντρῳ τῷ Τ καὶ ἀκτῖνι ΕΤ. Τοῦ Κ σημείου εὑρεθέντος, ἐπιζευγνύομεν τὰς Ε'Κ, ΕΚ· εἶτα ἄγομεν ΤΡ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ΕΚ. Ἡ κάθετος αὕτη ΡΤ εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη τῆς ὑπερβολῆς, τὸ δὲ σημεῖον Μ, καθ' ὃ τέμνει τὴν προεκβολὴν τῆς Ε'Κ, εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς. Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ $MK = ME$, ἕπεται ὅτι $E'M - EM = E'K = 2\alpha$· ἄρα, τὸ σημεῖον Μ εἶναι τῆς ὑπερβολῆς. Πρὸς τούτοις, αἱ γωνίαι ΚΜΤ, ΕΜΤ, εἰσὶν ἴσαι· ἄρα ΤΡ εἶναι ἐφαπτομένη.

281. Ὅταν τὸ σημεῖον Τ ἦναι ἐκτὸς τῆς ὑπερβολῆς, οἱ ὡς ἀνωτέρω γραφόμενοι κύκλοι τέμνουσιν ἀλλήλους κατὰ δύο σημεῖα· διότι ἐκπληροῦνται αἱ ἀπαιτούμεναι πρὸς τομὴν αὐτῶν συνθῆκαι. Τῷ ὄντι, ἄγοντες Ε'Τ ἔχομεν [266].

$$E'T - TE < 2\alpha, \qquad \text{ὅθεν} \qquad E'T < TE + 2\alpha.$$

Λοιπὸν, τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων ἔλαττον εἶναι τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων. Προσέτι, τὸ τρίγωνον Ε'ΤΕ δίδει

$$E'E < E'T + ET, \qquad \text{ἔτι δὲ μᾶλλον} \qquad 2\alpha < E'T + ET\cdot$$

ἀλλὰ τὸ σημεῖον Τ ὑπετέθη ἐγγύτερον τῇ ἑστίᾳ Ε ἢ τῇ Ε'· ἄρα,

$$ET < E'T, \qquad \text{ἔτι δὲ μᾶλλον} \qquad ET < E'T + 2\alpha.$$

Λοιπὸν, ἑκάστη ἀκτὶς εἶναι ἐλάσσων τοῦ ἀθροίσματος τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων καὶ τῆς ἑτέρας ἀκτῖνος.

Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις εὐκόλως τροποποιεῖται ἐν περιπτώσει καθ' ἣν τὸ σημεῖον Τ εἶναι ἐγγύτερον τῇ ἑστίᾳ Ε' ἢ τῇ Ε.

Ὅταν τὸ σημεῖον Τ δίδηται ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως (Σχ. 116), τὸ τῶν κέντρων ἀπόστημα Ε'Τ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀκτίνων· ἄρα, οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐξωτερικῶς· ἑπομένως μία ἐφαπτομένη ὑπάρχει.

Ὅταν τὸ σημεῖον Τ ἦναι ἐντὸς τῆς ὑπερβολῆς (Σχ. 117), ἡ διαφορὰ Ε'Τ — ΕΤ μείζων εἶναι τοῦ πρώτου ἄξονος $2\alpha$ [266]· ἑπομένως, τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων μεῖζον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἀκτίνων. Τότε οἱ κύκλοι οὐδὲν σημεῖον κοινὸν ἔχουσιν· ἀδύνατον ὅθεν ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ σημείου Τ ἐφαπτομένην τῆς ὑπερβολῆς.

## ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΙΑΜΕΤΡΩΝ.

282. Ἔστω,

$$(1)\qquad \psi=\delta\chi+\beta,$$

ἡ ἐξίσωσις εὐθείας τεμνούσης τὴν ὑπερβολὴν κατὰ τὰ σημεῖα Ζ, Η, (Σχ. 118). Συνδυάζοντες αὐτὴν τῇ ἐξισώσει (υ) τῆς ὑπερβολῆς, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(2)\qquad \chi^2+\frac{2\delta\beta\alpha^2}{\alpha^2\delta^2-ϐ^2}\chi+\frac{(\beta^2+ϐ^2)\alpha^2}{\alpha^2\delta^2-ϐ^2}=0,$$

ἧς αἱ ῥίζαι εἰσὶν αἱ τετμημέναι ΑΘ, ΑΚ, τῶν σημείων Ζ, Η. Ἡ τετμημένη τοῦ μέσου Ι τῆς χορδῆς ΖΗ, ἰσοῦται τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης. Λοιπὸν ἔχομεν,

$$\mathrm{A\Pi}=\chi=\frac{-\delta\beta\alpha^2}{\alpha^2\delta^2-ϐ^2}.$$

Φέρομεν τὴν τιμὴν ταύτην ἐν τῇ ἐξισώσει (1), καὶ λαμβάνομεν τὴν τῆς τεταγμένης ΠΙ· ἤτοι

$$\mathrm{\Pi I}=\psi=\frac{-\beta ϐ^2}{\alpha^2\delta^2-ϐ^2}.$$

Τεθείσθω ὅτι, δ μένει ἄτρεπτος, β δὲ λαμβάνει ἐκ διαδοχῆς πᾶν μέγεθος. Ἡ εὐθεῖα ΖΗ μετατεθήσεται παραλλήλως ἑαυτῇ, οἱ δὲ προηγούμενοι τύποι δίδουσιν ἀείποτε



τὰς συντεταγμένας τῶν μέσων τῶν χορδῶν τούτων. Λοιπόν, ἀπαλειφομένης β τῇ διαιρέσει ψ διὰ χ, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις

$$\frac{\psi}{\chi}=\frac{ϐ^2}{\alpha^2\delta},\qquad ἢ\qquad \psi=\frac{ϐ^2}{\alpha^2\delta}\chi,$$

ἐμφαίνει διάμετρον. Συνάγομεν, ὡς ἐν τῇ ἐλλείψει, ὅτι, *πᾶσαι αἱ διάμετροι τῆς ὑπερβολῆς εἰσὶ γραμμαὶ εὐθεῖαι τοῦ κέντρου διερχόμεναι.* Ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς δ τῆς χ λαμβάνει πᾶσαν τιμὴν ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$, συνάγομεν προσέτι ὅτι, *πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγόμεναι εὐθεῖαι θεωροῦνται ὡς διάμετροι τῆς ὑπερβολῆς.*

Παρατηρητέον ὅτι, ἡ ἀντίστροφος αὕτη πρότασις ἐστὶν ἐπιδεκτικὴ δύο ἐξαιρέσεων, ἤτοι ὅταν $\delta=\pm\frac{ϐ}{\alpha}$. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις καθίσταται

$$\psi=\pm\frac{ϐ}{\alpha}\chi,$$

ἐμφαίνει δὲ τὰς δύο εὐθείας θεωρηθείσας ἤδη [273] ὡς ὅρια τῶν ἐφαπτομένων. Αἱ εὐθεῖαι αὗται ἀδύνατον νὰ ὦσι διάμετροι· διότι αἱ τιμαὶ αὗται τοῦ δ μεταμορφοῦσιν εἰς πρωτοβάθμιον τὴν ἐξίσωσιν (2), αἱ δὲ παράλληλοι γραμμαὶ ὑπὸ τῆς (1) δηλούμεναι, καθ' ἓν μόνον σημεῖον συμπίπτουσι τῇ ὑπερβολῇ· δὲν δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς χορδαί, ἑπομένως δὲν ὑπάρχει διάμετρος ἀντιστοιχοῦσα.

283. Λαμβάνοντες $\psi=\delta'\chi$ ὡς ἐξίσωσιν διαμέτρου, ὑποθέτομεν ὑπάρχουσαν τὴν σχέσιν τῶν ἐφαπτομένων δ', δ, πρὸς ἀλλήλας

$$\delta'=\frac{ϐ^2}{\alpha^2\delta},\qquad ἢ\qquad \delta'\delta=\frac{ϐ^2}{\alpha^2}.$$

284. Τὴν τελευταίαν σχέσιν ταύτην συνάγομεν καὶ ἐκ τῆς ἀναλόγου αὐτῇ ἐν τῇ ἐλλείψει [229], τροπῇ $ϐ^2$ εἰς $-ϐ^2$. Ἡ αὐτὴ δίδει ἐπίσης ὁμοίας συνεπείας.

1ον. Καλοῦντες σ τὴν τριγωνομετρικὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας, ἣν ἡ κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ἐφαπτομένη σχηματίζει μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν $\chi$, ἔχομεν τὴν σχέσιν [275] μεταξὺ σ καὶ δ', $\sigma\delta' = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$. Ἄρα $\sigma\delta' = \delta\delta'$· ὅθεν $\sigma = \delta$. Λοιπὸν, *αἱ χορδαὶ, ἃς διάμετρός τις διχοτομεῖ, παράλληλοι εἰσὶ τῇ κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ταύτης ἐφαπτομένῃ τῆς ὑπερβολῆς.*

2ον. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $\delta\delta'$ ἔχει τιμὴν ἄτρεπτον $\frac{\beta^2}{\alpha^2}$, οὐδέποτε καθίσταται ἴσον $-1$. Ἄρα, *οἱ παρόντες ἄξονες συντεταγμένων εἰσὶν οἱ μόνοι ἄξονες ἐν τῇ ὑπερβολῇ*· διότι οὐδεμία διάμετρος ἑτέρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς χορδὰς ἃς διχοτομεῖ.

3ον. Ἡ σχέσις $\delta\delta' = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ δεικνύει ὅτι, ἐὰν ἡ διάμετρος τῆς ἐξισώσεως $\psi = \delta'\chi$ διχοτομῇ τὰς παραλλήλους χορδὰς τῆς ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \delta\chi$ δηλουμένης, ἀμοιβαίως, ἡ δευτέρα δίχα τέμνει τὰς παραλλήλους τῇ πρώτῃ χορδάς. Λοιπὸν, *ἡ ἀπαιτουμένη συνθήκη ὅπως ὦσι δύο διάμετροι συζυγεῖς, εἶναι* $\delta\delta' = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$.

285. *Ἀποδείξομεν ὅτι, ἐκ δύο διαμέτρων συζυγῶν ἡ ἑτέρα μόνη συμπίπτει τῇ ὑπερβολῇ.* Ἔστω $\psi = \delta\chi$ ἡ ἐξίσωσις διαμέτρου τινος. Αἱ τετμημέναι τῶν σημείων καθ' ἃ αὕτη τέμνει τὴν καμπύλην εἰσὶ

$$\chi = \pm\sqrt{\frac{\alpha^2\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2\delta^2}} = \pm\sqrt{\left\{\frac{\beta^2}{\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \delta^2}\right\}}.$$

Ἵνα ὦσιν αἱ τιμαὶ αὗται πραγματικαὶ, πρέπει δ νὰ ἦναι ἀριθμητικῶς ἐλάσσων $\frac{\beta}{\alpha}$· τὸ ἐναντίον δὲ, εἰσὶ φανταστικαί. Ἐν μόνῃ τῇ πρώτῃ περιπτώσει ἡ διάμετρος συμπίπτει



τῇ ὑπερβολῇ. Ἀλλ' ἐκ τῆς σχέσεως $\delta\delta' = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$, δῆλον ὅτι, ὅταν $\delta < \frac{\beta}{\alpha}$, ἐπάναγκες εἶναι $\delta' > \frac{\beta}{\alpha}$. Λοιπὸν, *πᾶσαι αἱ τέμνουσαι τὴν ὑπερβολὴν διάμετροι ἔχουσι τὰς συζυγεῖς αὐτῶν ἐν ταῖς μὴ τεμνούσαις τὴν καμπύλην ταύτην.*

(Σχ. 119). Ἐὰν ἐπὶ τοὺς ἄξονας τῆς ὑπερβολῆς κατασκευάσωμεν τὸ ὀρθογώνιον ΘΚΘ'Κ', πᾶσαι αἱ ἐν ταῖς γωνίαις ΘΑΚ, Θ'ΑΚ', διάμετροι σχηματίζουσι μετὰ τοῦ ἄξονος ΒΓ γωνίας ὧν αἱ ἐφαπτόμεναι εἰσὶν ἀριθμητικῶς ἐλάσσονες $\frac{\beta}{\alpha}$, ἐνῷ αἱ ἐν ταῖς γωνίαις ΘΑΚ', Θ'ΑΚ, διάμετροι, σχηματίζουσι μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος, γωνίας ὧν αἱ ἐφαπτόμεναι μείζονες εἰσὶ $\frac{\beta}{\alpha}$. Ἄρα, αἱ μὲν πρῶται εἰσὶν αἱ τῇ καμπύλῃ συμπίπτουσαι, αἱ δὲ δεύτεραι αἱ μὴ συμπίπτουσαι αὐτῇ.

Ἐν τῇ μερικῇ περιπτώσει καθ' ἣν $\delta = \frac{\beta}{\alpha}$, ἔχομεν καὶ $\delta' = \frac{\beta}{\alpha}$. Τότε αἱ δύο διάμετροι συζυγεῖς ταυτίζονται πρὸς τὴν διαγώνιον ΘΘ'. Ἐπίσης, ὅταν $\delta = -\frac{\beta}{\alpha}$, ἔχομεν καὶ $\delta' = -\frac{\beta}{\alpha}$. Τότε ἀμφότεραι αἱ διάμετροι ταυτίζονται τῇ ἑτέρᾳ διαγωνίῳ Κ'Κ. Κατ' ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ταύτας, αἱ διάμετροι εἰς τὸ ἄπειρον συμπίπτουσι τῇ ὑπερβολῇ.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΧΟΡΔΩΝ.

286. *Χορδὰς παραπληρωματικὰς ἐπίσης ἐν τῇ ὑπερβολῇ καλοῦσι, τὰς ἀπὸ σημείου τῆς καμπύλης*

*ἀγομένας εὐθείας ἐπὶ τὰ πέρατα διαμέτρου συμπιπτούσης αὐτῇ.*

Ἐπαναλαμβάνοντες τοὺς ἐν τῇ ἐλλείψει λογισμούς, εὑρίσκομεν ὅτι, (Σχ. 120) ἵνα ὦσι παραπληρωματικαὶ δύο χορδαὶ ΗΜ, Η′Μ, ἀπαιτεῖται ἡ σχέσις

$$\zeta\zeta' = \frac{\beta^2}{\alpha^2},$$

ἐν ᾗ ζ, ζ′, δηλοῦσι τὰς ἐφαπτομένας τῶν γωνιῶν ΜΗΧ, ΜΑΧ. Ἀντιστρόφως, ὁσάκις ἡ σχέσις αὕτη ὑπάρχει διὰ δύο χορδὰς διερχομένας τῶν περάτων διαμέτρου, ἢ διὰ δύο χορδὰς ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῆς ὑπερβολῆς ἀγομένας, αἱ χορδαὶ αὗται εἰσὶ παραπληρωματικαί.

Ἐν τῇ ἰσοσκελεῖ ὑπερβολῇ, ἐν ᾗ $\alpha = \beta$, ἔχομεν ἁπλῶς

$$\zeta\zeta' = 1.$$

*Ἄρα, συνάγομεν ὅτι, αἱ ὑπὸ τῶν παραπληρωματικῶν χορδῶν καὶ τοῦ πλαγίου ἄξονος περιεχόμεναι γωνίαι, εἰσὶ συμπληρώματα ἀλλήλων.*

287. Ἡ σχέσις $\zeta\zeta' = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ ἄγει εἰς συνεπείας ὁμοίας ταῖς ἐκ τῆς ἀναλόγου αὐτῇ ἐν τῇ ἐλλείψει πορισθείσαις. Ἐκφωνήσομεν αὐτὰς μόνον.

1ον. *Ἐὰν δύο χορδαὶ ὦσι παραπληρωματικαὶ σχετικῶς πρός τινα διάμετρον, αἱ παράλληλοι τούτων, ἀπὸ τῶν περάτων πάσης ἑτέρας διαμέτρου ἀγόμεναι, εἰσὶν ἐπίσης παραπληρωματικαὶ σχετικῶς πρὸς τὴν τελευταίαν ταύτην. Προσέτι, αἱ νέαι αὗται χορδαὶ προεκβαλλόμεναι, περιέχουσι πρὸς ἀλλήλας γωνίας ἴσας ταῖς ὑπὸ τῶν πρώτων περιεχομέναις.*

2ον. (Σχ. 121). *Ἔστω ΒΓ διάμετρος συμπίπτουσα τῇ ὑπερβολῇ, καὶ ἔστω ΜΤ ἐφαπτομένη τις. Ἐὰν ἄξωμεν τὴν ἡμιδιάμετρον ΑΜ ἐπὶ τὴν ἐπαφήν, τὴν χορδὴν ΒΝ παράλληλον τῇ ΑΜ καὶ τὴν παραπληρωματικὴν χορδὴν ΓΝ, ἡ ἐφαπτομένη ἔσεται παράλληλος τῇ ΓΝ.*



Διὰ τῆς ἰδιότητος ταύτης κατασκευάζομεν τὴν ἐφαπτομένην κατὰ σημεῖον τῆς ὑπερβολῆς δοθέν, ἢ παράλληλον εὐθείᾳ ΘΚ δοθείσῃ. Τὸ πρόβλημα ὅμως, ἐν τῇ τελευταίᾳ ταύτῃ περιπτώσει, τότε μόνον δυνατόν, ὅταν ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγομένη παράλληλος τῇ ΘΚ εὑρίσκεται ἄνω τῶν ὁρίων τῶν ἐφαπτομένων [273].

3ον. *Δύο διάμετροι παράλληλοι χορδῶν παραπληρωματικῶν εἰσὶν ἀείποτε συζυγεῖς. Ἀντιστρόφως· δύο διάμετροι συζυγεῖς εἰσὶν ἀείποτε παράλληλοι δύο χορδῶν παραπληρωματικῶν.*

Ἐντεῦθεν συνάγομεν μέθοδον ἁπλουστάτην τοῦ εὑρίσκειν δύο διαμέτρους συζυγεῖς περιεχούσας γωνίαν δοθεῖσαν. Τὴν κατασκευὴν ταύτην παρίστησι τὸ Σχ. 122.

Ἀλλ᾽ ἐνταῦθα ἡ δοθεῖσα γωνία δὲν εἶναι, ὡς ἐν τῇ ἐλλείψει, ἐντὸς ὁρίων ὡρισμένων. Ἡ ὀξεῖα γωνία τῶν παραπληρωματικῶν χορδῶν δύναται ἔχειν πᾶν μέγεθος, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς μέχρι μηδενός. Περὶ τούτου πληροφορούμεθα ζητοῦντες τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας ΓΜΒ (Σχ. 123). Εὑρίσκομεν εὐκόλως

$$\text{ἐφ}\,\Gamma M B = \frac{2\alpha\beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)\,\psi}.$$

Δῆλον ὅτι, αὐξανομένης τῆς ψ ἀπὸ 0 ἐπ᾽ ἄπειρον, ἡ ἐφ ΓΜΒ ἐλαττοῦται ἀπὸ τοῦ ἀπείρου μέχρι 0· ἤτοι ἡ γωνία μειοῦται ἀπὸ $90^0$ μέχρι $0^0$.

Ἐπειδὴ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς ὑπάρχουσι δύο σημεῖα Μ, Ν, ἄνω τοῦ ἄξονος ΒΓ, καθ᾽ ἃ ψ ἔχει τὴν αὐτὴν τιμήν, ἕπεται ὅτι ὑπάρχουσι δύο συστήματα διαμέτρων συζυγῶν περιεχουσῶν γωνίαν δοθεῖσαν, οὐχὶ δὲ πλείονα.

4ον. Ἐπειδὴ οἱ ἄξονες τῆς ὑπερβολῆς εἰσὶ διάμετροι συζυγεῖς πρὸς ὀρθὰς τεμνόμεναι, εὑρίσκομεν αὐτοὺς ὡς ἐν τῇ ἐλλείψει [237], διὰ κατασκευῆς ἣν θεωροῦμεν ὡς συνέπειαν τῆς συμμετρικῆς θέσεως τῆς ὑπερβολῆς σχετικῶς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῆς (Σχ. 124).

5ον. Τέλος, τὸ κέντρον τῆς ὑπερβολῆς εὑρίσκομεν δι᾽ ὁμοίας τῇ ἐν τῇ ἐλλείψει κατασκευῆς [238]. (Σχ. 125).

Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΗ ΠΡΟΣ ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥΣ ΑΥΤΗΣ.

288. Ἀπὸ τῆς ἐξισώσεως τῆς ὑπερβολῆς ἐν τοῖς ἄξοσιν αὐτῆς

(υ) $$\alpha^2\psi^2 - \beta^2\chi^2 = -\alpha^2\beta^2,$$

μεταβαίνομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς αὐτῆς καμπύλης πρὸς διαμέτρους συζυγεῖς, ζητοῦντες, ὡς ἐν τῇ ἐλλείψει, τὰ συστήματα συντεταγμένων ἐν οἷς ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης περιέχει τὰ τετράγωνα μόνα τῶν μεταβλητῶν. Λοιπὸν, ἀντεισάγομεν ἐν τῇ (υ) τὰς τιμὰς

$$\chi = \chi'\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi + \psi'\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi', \qquad \psi = \chi'\,\eta\mu\,\varphi + \psi'\,\eta\mu\,\varphi',$$

Καλοῦμεν πρὸς συντομίαν,

$$A = \alpha^2\eta\mu^2\varphi' - \beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi',$$
$$B = \alpha^2\eta\mu^2\varphi - \beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi,$$
$$\Gamma = \alpha^2\eta\mu\,\varphi\,\eta\mu\,\varphi' - \beta^2\sigma\upsilon\nu\,\varphi\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi',$$

καὶ λαμβάνομεν τὴν μετασχηματισθεῖσαν,

(1) $$A\psi'^2 + B\chi'^2 + 2\Gamma\chi'\psi' = -\alpha^2\beta^2.$$

Ἵνα ἔχῃ αὕτη τὴν ζητουμένην μορφὴν, καθιστῶμεν,

(2) $$\Gamma, \quad \text{ἢ} \quad \alpha^2\eta\mu\,\varphi\,\eta\mu\,\varphi' - \beta^2\sigma\upsilon\nu\,\varphi\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi' = 0.$$

Τότε ἡ ἐξίσωσις (1) λαμβάνει τὴν μορφὴν,

(3) $$A\psi'^2 + B\chi'^2 = -\alpha^2\beta^2.$$

289. Καθιστῶμεν $\psi' = 0$, $\chi' = 0$, καὶ λαμβάνομεν ἀμοιβαίως,

$$\chi'^2 = -\frac{\alpha^2\beta^2}{B} = \frac{-\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\eta\mu^2\varphi - \beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi},$$

$$\psi'^2 = -\frac{\alpha^2\beta^2}{A} = \frac{-\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\eta\mu^2\varphi' - \beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi'}.$$

Αἱ τιμαὶ αὗται ἔχουσι σημεῖα ἐναντία· διότι ἡ σχέσις (2) δίδει,

$$\alpha^2\eta\mu^2\varphi \times \alpha^2\eta\mu^2\varphi' = \beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi \times \beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi'.$$



δῆλον δὲ ὅτι, ἐὰν $\alpha^2\eta\mu^2\varphi$ ἦναι ἐλάσσων $\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi$, πρέπει πρὸς ἐξίσωσιν, $\alpha^2\eta\mu^2\varphi'$ νὰ ἦναι μείζων $\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi'$, καὶ ἀντιστρόφως. Λοιπὸν, ἐκ τῶν νέων ἀξόνων ὁ ἕτερος μόνον συμπίπτει τῇ ὑπερβολῇ, ὅπερ γνωστὸν [285].

Ληφθείτω ὡς ἄξων τῶν $\chi'$ ὁ τέμνων τὴν καμπύλην· ἔστω $2\alpha'$ τὸ ἐν τῇ αὐτῇ ἀπολαμβανόμενον μέρος αὐτοῦ· ἔχομεν,

(4) $$\alpha'^2 = \frac{-\alpha^2\beta^2}{B} = \frac{-\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\eta\mu^2\varphi - \beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi}.$$

Ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ τῶν $\psi'$ δὲν τέμνει τὴν καμπύλην, καλοῦμεν $-\beta'^2$ τὴν ἀρνητικὴν τιμὴν τοῦ $\psi'^2$, καὶ ἔχομεν,

(5) $$\beta'^2 = \frac{\alpha^2\beta^2}{A} = \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\eta\mu^2\varphi' - \beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi'}.$$

Τῇ ἀντεισαγωγῇ τῶν τιμῶν $\frac{\alpha^2\beta^2}{\beta'^2}$, $\frac{-\alpha^2\beta^2}{\alpha'^2}$, τῶν $A, B$, ἡ ἐξίσωσις (3) μορφοῦται ὡς ἑξῆς,

(υ,) $$\alpha'^2\psi'^2 - \beta'^2\chi'^2 = -\alpha'^2\beta'^2.$$

Καλεῖται *διάμετρος πρώτη*, ἢ *διάμετρος πλαγία*, ἡ συμπίπτουσα τῇ ὑπερβολῇ· τὸ μῆκος αὐτῆς εἶναι $2\alpha'$, ἐπ' αὐτῆς δὲ λαμβάνονται αἱ $\chi'$. Ἡ ἑτέρα διάμετρος, ἐφ' ἧς λαμβάνονται αἱ $\psi'$, καλεῖται *διάμετρος δευτέρα*. Εἰ καὶ αὕτη δὲν τέμνει τὴν καμπύλην, δίδουσιν ὅμως αὐτῇ, ἐκ συνηθείας, τὸ μῆκος $2\beta'$.

290. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) συνάγομεν

(6) $$\varepsilon\varphi\,\varphi\,\varepsilon\varphi\,\varphi' = \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

Δῆλον ὅτι, δίδοντες τῷ ἄξονι τῶν $\chi'$ θέσιν ἰδικωτέραν, ἤτοι ὁρίζοντες τῇ $\varphi$ τιμὴν κατὰ βούλησιν, λαμβάνομεν τιμὴν πραγματικὴν διὰ $\varepsilon\varphi\,\varphi'$. Λοιπὸν, *ἑκάστη διάμετρος ἔχει τὴν συζυγῆ αὐτῆς*. Ἐξαιρετέον ὅμως τὴν ὑπόθεσιν $\varepsilon\varphi\,\varphi = \pm\frac{\beta}{\alpha}$

διότι τότε δὲν λαμβάνομεν πραγματικὰς διαμέτρους [282].

Ἄλλως δὲ, αἱ ὑποθέσεις αὗται δίδουσιν $\text{ἐφ}\,\varphi' = \pm \frac{\beta}{\alpha}$.

ἄρα κατ' ἀμφοτέρας, ὁ ἄξων τῶν ψ' ταυτίζεται τῷ τῶν χ'· ὅθεν δείκνυται σαφέστατα ὅτι αἱ γραμμαὶ αὗται οὐκ εἰσὶ διάμετροι συζυγεῖς.

Ἐπειδὴ ἡ σχέσις (6) εἶναι ὁμοία τῇ συνδεούσῃ πρὸς ἀλλήλας τὰς διευθύνσεις τῶν παραπληρωματικῶν χορδῶν [286], ἕπεται ὅτι, εἰ ἡ ἑτέρα τῶν χορδῶν τούτων εἶναι παράλληλος τῇ πρώτῃ διαμέτρῳ, ἡ ἑτέρα ἔσεται παράλληλος τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ. Οὕτω συνάγομεν τὰ ἑξῆς γνωστὰ ἤδη [287] συμπτώματα· *δύο διάμετροι συζυγεῖς εἰσὶν ἀείποτε παράλληλοι δύο χορδῶν παραπληρωματικῶν*. Ἀντιστρόφως· *δύο διάμετροι παράλληλοι χορδῶν παραπληρωματικῶν εἰσὶν ἀείποτε συζυγεῖς.*

Ἐν τῇ ἰσοσκελεῖ ὑπερβολῇ $\alpha = \beta$· ἄρα $\text{ἐφ}\,\varphi\,\text{ἐφ}\,\varphi' = 1$· λοιπὸν, *αἱ γωνίαι φ, φ', εἰσὶ συμπληρώματα ἀλλήλων.*

291. Ζητήσωμεν ἐὰν ὑπάρχωσι, πλὴν τῶν ἀξόνων, διάμετροι συζυγεῖς πρὸς ὀρθὰς τεμνόμεναι. Καθιστῶμεν $\varphi' = 90^\circ + \varphi$· ὅθεν $\text{ἡμ}\,\varphi' = \text{συν}\,\varphi$, καὶ $\text{συν}\,\varphi' = -\text{ἡμ}\,\varphi$. Ἡ ἐξίσωσις (2) γίνεται

$$(\alpha^2 + \beta^2)\,\text{ἡμ}\,\varphi\,\text{συν}\,\varphi = 0\cdot$$

ἐτυμοποιεῖται δὲ μόνον ὅταν $\text{ἡμ}\,\varphi = 0$, ἢ $\text{συν}\,\varphi = 0$· ἀλλ' αἱ ὑποθέσεις αὗται ἄγουσιν εἰς τοὺς προτέρους ἄξονας.

292. Ἵνα εὕρωμεν ἐν τῇ ὑπερβολῇ διαμέτρους συζυγεῖς ἴσας, ἐξισοῦμεν ἀλλήλαις τὰς τιμὰς (4), (5), τῶν $\alpha'^2$, $\beta'^2$,

$$\alpha^2\,\text{ἡμ}^2\varphi - \beta^2\,\text{συν}^2\varphi = -\alpha^2\,\text{ἡμ}^2\varphi' + \beta^2\,\text{συν}^2\varphi'.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη, διὰ γνωστῶν μετασχηματισμῶν, μορφοῦται ὡς ἑξῆς;

$$\text{ἡμ}^2\varphi + \text{ἡμ}^2\varphi' = \frac{2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{7}$$

Μεταθέτομεν τὸν δεύτερον ὅρον τῆς ἐξισώσεως (2), τετραγωνίζομεν τὸ ὅλον· δι' ὁμοίων δὲ μετασχηματισμῶν εὑρίσκομεν,



$$\text{ἡμ}^2\varphi\,\text{ἡμ}^2\varphi' = \frac{\beta^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}. \tag{8}$$

Ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ἐξισώσεως (7) ἀφαιροῦμεν τὸ τετραπλοῦν τῆς (8) καὶ ἔχομεν

$$(\text{ἡμ}^2\varphi - \text{ἡμ}^2\varphi')^2 = 0.$$

Ἄρα,

$$\text{ἡμ}^2\varphi' = \text{ἡμ}^2\varphi, \quad \text{συν}^2\varphi' = \text{συν}^2\varphi, \quad \text{ἐφ}\,\varphi' = \pm\,\text{ἐφ}\,\varphi.$$

Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις (6) δείκνυσιν ὅτι, αἱ δύο ἐφαπτόμεναι ἔχουσι τὸ αὐτὸ σημεῖον· ἄρα $\text{ἐφ}\,\varphi' = \text{ἐφ}\,\varphi$· ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις (6) δίδει

$$\text{ἐφ}\,\varphi = \text{ἐφ}\,\varphi' = \pm\frac{\beta}{\alpha}.$$

Λοιπὸν, ὁ λογισμὸς δείκνυσιν ἐν τῇ ὑπερβολῇ ὡς διαμέτρους συζυγεῖς ἴσας, δύο εὐθείας ταυτιζομένας καὶ διευθυνομένας κατὰ τὴν ἑτέραν τῶν διαγωνίων τοῦ ἐπὶ τοὺς ἄξονας κατασκευαζομένου ὀρθογωνίου.

293. Ἐν τῇ ὑπερβολῇ ὑπάρχουσι δύο θεωρήματα ὅλως ἀνάλογα τοῖς ἐν §§ 244, 245, καὶ καθ' ὅμοιον τρόπον δεικνυόμενα· δι' ὃ ἀρκούμεθα ἐκφωνῆσαι αὐτά.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ον. *Τὸ κατασκευαζόμενον παραλληλόγραμμον ἐπὶ δύο διαμέτρων συζυγῶν ἰσοδύναμον ἐστὶ τῷ ἐπὶ τῶν ἀξόνων κατασκευαζομένῳ ὀρθογωνίῳ.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ον. *Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο διαμέτρων συζυγῶν εἶναι ἄτρεπτος· ἰσοῦται δὲ τῇ διαφορᾷ τῶν τετραγώνων τῶν ἀξόνων.*

Ἡ τελευταία αὕτη σχέσις δείκνυσιν, ὅτι ἡ κοινὴ ὑπερβολὴ στερεῖται διαμέτρων συζυγῶν ἴσων· ὅτι ἐν τῇ ἰσοσκελῇ ὑπερβολῇ, ἐν ᾗ $\alpha = \beta$, ἅπαντα τὰ συστήματα διαμέτρων συζυγῶν εἰσὶ συστήματα διαμέτρων ἴσων. Τὸ ἰδίωμα τοῦτο ὑπάρχει καὶ ἐν τῷ κύκλῳ· ἀλλ' ἐν τούτῳ αἱ συζυγεῖς διάμετροι τέμνονται πρὸς ὀρθὰς, ἐνῷ ἐν τῇ ἰσοσκελεῖ ὑπερβολῇ σχηματίζουσι μετὰ τοῦ πλαγίου ἄξονος γωνίας συμπληρωματικάς.

294. Ἐν ταῖς προβλήμασι τῆς ὑπερβολῆς δυνάμεθα, ἀντὶ τῶν ἐξισώσεων (2), (4), (5), ποιεῖσαι χρῆσιν τῶν ἑξῆς ἐκ τούτων παραχθεισῶν·

$$\dot{\varepsilon}\varphi\varphi\ \dot{\varepsilon}\varphi\varphi' = \frac{\beta^2}{\alpha^2}, \quad \alpha'\beta'\,\eta\mu(\varphi'-\varphi) = \alpha\beta, \quad \alpha'^2 - \beta'^2 = \alpha^2 - \beta^2.$$

295. Παραλειπομένων τῶν τόνων τῶν μεταβλητῶν, ἡ ἐξίσωσις $(\upsilon_{,})$ καθίσταται ὅλως ὁμοία τῇ $(\upsilon)$· ἄρα, αἱ ἀνεξάρτητοι τῆς κλίσεως τῶν συντεταγμένων ἰδιότητες εἰσὶν αἱ αὐταὶ πρός τε τοὺς ἄξονας τῆς ὑπερβολῆς καὶ πρὸς τὰς συζυγεῖς αὐτῆς διαμέτρους. Λοιπόν·

1ον. Τὰ τετράγωνα τῶν παραλλήλων τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ τεταγμένων, εἰσὶν ἀνάλογα τῶν γινομένων τῶν τμημάτων καθ' ἃ διαιροῦσι τὴν πρώτην [261].

2ον. Καθ' ὅσον σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς, ἢ ἐκτός, ἢ ἐντὸς αὐτῆς, ἡ ποσότης $\alpha'^2\psi^2 - \beta'^2\chi^2 + \alpha'^2\beta'^2$, εἶναι μηδὲν, θετική, ἢ ἀρνητική [262].

3ον. Ἔστω σ ὁ λόγος ἡμιτόνων, ἴσος τῷ συντελεστῇ τῆς χ ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς ἐφαπτομένης· ἔχομεν [271].

$$\sigma = \frac{\beta'^2\chi'}{\alpha'^2\psi'}\,.$$

δι' ἐξίσωσιν δὲ τῆς ἐφαπτομένης

$$\alpha'^2\psi'\psi - \beta'^2\chi'\chi = -\alpha'^2\beta'^2\,.$$

Ἡ ἐξίσωσις τῶν ὁρίων τῶν ἐφαπτομένων ἔσεται

$$\psi = \pm\frac{\beta'}{\alpha'}\chi\,.$$

ἐξ ἧς συνάγομεν, ὅτι αὗται ταυτίζονται ταῖς διαγωνίοις τοῦ κατασκευαζομένου παραλληλογράμμου ἐπὶ τῶν συζυγῶν διαμέτρων. (Σχ. 126).

Ἡ ὑφαπτομένη [274] εἶναι $\quad \Pi T = \dfrac{\chi'^2 - \alpha'^2}{\chi'}\,.$



Ἔχομεν δὲ ἀείποτε μεταξὺ σ, σ', σχετικῶν πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ὑπερβολῆς καὶ τὴν ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν διάμετρον, τὴν σχέσιν

$$\sigma\sigma' = \frac{\beta^2}{\alpha^2}\,.$$

4ον. Ἐὰν $\psi = \delta\chi + \beta$ ἦναι ἐξίσωσις χορδῆς τῆς ὑπερβολῆς, καὶ $\psi = \delta'\chi$ ἐξίσωσις τῆς ζευγνυούσης διαμέτρου τὰ μέσα πασῶν τῶν παραλλήλων χορδῶν, ἔχομεν [283] τὴν σχέσιν

$$\delta\delta' = \frac{\beta'^2}{\alpha'^2},$$

ὑπάρχουσαν καὶ πρὸς δύο διαμέτρους συζυγεῖς ὧν αἱ ἐξισώσεις ἤθελον εἶσθαι $\psi = \delta\chi$, $\psi = \delta'\chi$, [284], ὡς καὶ πρὸς δύο χορδὰς παραπληρωματικὰς ἀγομένας ἐπὶ τὰ πέρατα διαμέτρου οἱασδήποτε. [286].

296. Ἀναφερομένης τῆς ὑπερβολῆς πρὸς διαμέτρους συζυγεῖς, ἐὰν ἄξωμεν δύο ἐφαπτομένας αὐτῆς ἀπὸ σημείου ἐξωτερικοῦ, καὶ ἐπαναλάβωμεν συλλογισμοὺς ὁμοίους τοῖς ἐν τῇ ἐλλείψει [248], συνάγομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα.

*Ἐάν, ἀφ' ἑκάστου σημείου εὐθείας δοθείσης, ἄξωμεν ἐφαπτομένας ὑπερβολῆς, καὶ ἑνώσωμεν τὰ δύο σημεῖα ἐπαφῆς, λαμβάνομεν τεμνούσας αἵτινες ἅπασαι συμπίπτουσι κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τῇ διαμέτρῳ συζυγεῖ οὔσῃ τῆς παραλλήλου διαμέτρου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.*

Ἀντιστρόφως· *ἐάν, ἀπὸ σημείου δοθέντος ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ὑπερβολῆς, ἄξωμεν διαφόρους τεμνούσας, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων καθ' ἃ ἑκάστη τούτων τέμνει τὴν καμπύλην, ἄξωμεν δύο ἐφαπτομένας, ὁ τόπος τῶν σημείων συνδρομῆς ἑκάστου ζεύγους τῶν ἐφαπτομένων τούτων ἔσεται εὐθεῖα παράλληλος τῇ διαμέτρῳ τῇ συζυγεῖ τῆς διερχομένης ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου.*

297. Ἡ ἐξίσωσις $(\upsilon_{,})$ δείκνυσι προσέτι ὅτι, ἵνα γράφωμεν ὑπερβολὴν ἧς γνωρίζομεν δύο διαμέτρους συζυγεῖς καὶ

τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν, γράφομεν πρῶτον ὑπερβολὴν ἐπὶ τῶν διαμέτρων τούτων, ὡς ἀξόνων λαμβανομένων, εἶτα κλίνομεν καταλλήλως τὰς τεταγμένας, διατηροῦντες τὰ μήκη αὐτῶν.

### ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΑΣΥΜΠΤΩΤΩΝ.

298. Ἔστω
$$\alpha^2\psi^2-\beta^2\chi^2=-\alpha^2\beta^2,$$
ἡ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς πρὸς διαμέτρους συζυγεῖς· ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν
$$\psi=\pm\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\chi^2-\alpha^2}.$$
Ἐάν, κατὰ τὸν ἐν τέλει τοῦ § 143 κανόνα, παραλείψωμεν τὸν ὑπόρριζον ὅρον $-\alpha^2$, λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις τῶν ἀσυμπτώτων,
$$\psi=+\frac{\beta}{\alpha}\chi,\qquad \psi=-\frac{\beta}{\alpha}\chi.$$

Τὸ τοιοῦτον δείξομεν καὶ ἀμέσως (Σχ. 127). Μείζονος σαφηνείας χάριν, θεωρήσομεν μόνον τὰ μέρη τῆς καμπύλης καὶ τῆς εὐθείας τὰ ἐν τῇ γωνίᾳ ΨΑΧ. Ἡ διαφορὰ τῶν ἐπὶ τὴν αὐτὴν τετμημένην τεταγμένων εἶναι,
$$MN=\frac{\beta}{\alpha}\left(\chi-\sqrt{\chi^2-\alpha^2}\right).$$
Ἐπειδὴ ἀμφότερα τὰ μέρη, θετικόν τε καὶ ἀρνητικόν, αὐξάνουσιν ἐπ' ἄπειρον συγχρόνως, δὲν γνωρίζομεν ἀμέσως εἰ ἡ διαφορὰ αὕτη προσδεύει μειουμένη. Ἀλλὰ τῷ ἑξῆς γνωστῷ μετασχηματισμῷ λαμβάνομεν,
$$MN=\frac{\beta}{\alpha}\times\frac{(\chi-\sqrt{\chi^2-\alpha^2})\,(\chi+\sqrt{\chi^2-\alpha^2})}{\chi+\sqrt{\chi^2-\alpha^2}}=\frac{\alpha\beta}{\chi+\sqrt{\chi^2-\alpha^2}}.$$
Οὕτω δὲ δῆλον καθίσταται ὅτι, καθ' ὅσον χ αὐξάνει μέχρι ἀπείρου, MN μειοῦται μέχρι μηδενός.



Ὅμοιοι συλλογισμοὶ ἐφαρμοζόμενοι ἐπὶ τῶν ἐν ταῖς λοιπαῖς γωνίαις μερῶν τῆς ὑπερβολῆς, δεικνύουσιν ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι, περὶ ὧν ὁ λόγος, εἰσὶν αἱ ἀσύμπτωτοι τῆς καμπύλης.

299. (Σχ. 127). Κατασκευάζομεν ἐπὶ τῶν συζυγῶν διαμέτρων τὸ παραλληλόγραμμον ΘΚΘ'Κ'· αἱ ἐξισώσεις τῶν διαγωνίων αὐτοῦ ΘΘ', ΚΚ', εἰσὶ
$$\psi=\pm\frac{\beta'}{\alpha'}\chi.$$
Λοιπόν, *αἱ ἀσύμπτωτοι τῆς ὑπερβολῆς ταυτίζονται ταῖς διαγωνίοις τοῦ ὑπὸ δύο διαμέτρων συζυγῶν συγκροτουμένου παραλληλογράμμου.*

Τῇ συγκρίσει τῆς συνεπείας ταύτης πρὸς τὴν ἐν § 295, συνάγομεν ὅτι, αἱ ἀσύμπτωτοι εἰσὶ τὰ ὅρια τῶν ἐφαπτομένων.

300. Αἱ ἀπὸ τῶν περάτων τῆς πρώτης διαμέτρου ΒΓ ἀγόμεναι πλευραὶ ΘΚ, Θ'Κ', εἰσὶν ἐφαπτόμεναι τῆς ὑπερβολῆς καὶ διχοτομοῦνται κατὰ τὰ σημεῖα Β, Γ· ὥστε ἔχομεν ΒΘ $=$ ΒΚ $=\beta'$. Ἄρα, *πάσης ἐφαπτομένης τὸ ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων μέρος δίχα τέμνεται κατὰ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς· εἶναι δὲ ἴσον καὶ παράλληλον τῇ διαμέτρῳ, τῇ συζυγεῖ τῆς κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο ἀποληγούσης.*

Ἡ ἰδιότης αὕτη χορηγεῖ μέσον τοῦ ἄγειν ἐφαπτομένην κατὰ σημεῖον, Β, τῆς ὑπερβολῆς, γνωστῶν οὐσῶν τῶν ἀσυμπτώτων. Ἄγομεν ΒΛ παράλληλον τῇ ἑτέρᾳ τῶν εὐθειῶν τούτων, π. χ. ΑΘ, καὶ λαμβάνομεν ΑΚ $=$ ΑΛ· ἐπιζευγνύομεν τὴν εὐθεῖαν ΚΒΘ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη. Διότι ἕνεκα τῶν παραλλήλων, ΒΛ, ΑΘ, ἔχομεν ΒΘ $=$ ΒΚ.

Προσέτι, δοθείσης διαμέτρου τεμνούσης τὴν καμπύλην, εὑρίσκομεν τὴν συζυγῆ αὐτῆς. Πρὸς τοῦτο, ἄγομεν τὴν ἐφαπτομένην ΘΚ κατὰ τὸ ἕτερον τῶν περάτων τῆς διαμέτρου ταύτης, εἶτα ἀπὸ τοῦ κέντρου τὴν ΔΕ παράλληλον τῇ ΘΚ, καὶ λαμβάνομεν ΑΔ $=$ ΑΕ $=$ ΒΘ.

301. Ἡ προηγουμένη ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης πρότασις, εἶναι μερικὴ περίπτωσις τοῦ ἑξῆς γενικοῦ θεωρήματος.

*Ἐν τῇ ὑπερβολῇ, τὰ ἀπολαμβανόμενα μέρη πάσης τεμνούσης ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῆς καμπύλης, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.*

(Σχ. 128). Ἔστω ἡ τυχοῦσα τέμνουσα ΝΝ΄. Πρόκειται δεῖξαι ὅτι, ΜΝ = Μ΄Ν΄. Ζευγνύομεν τὸ μέσον Π τῆς χορδῆς ΜΜ΄ ἐπὶ τὸ κέντρον Α τῇ διαμέτρῳ ΑΧ, ἣν ὑποθέτομεν τέμνουσαν τὴν ὑπερβολὴν κατὰ τὸ Β. Ἡ συζυγὴς ΑΨ εἶναι παράλληλος τῇ ΜΜ΄. Ἀπὸ τοῦ σημείου Β ἄγομεν, μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων, ΘΚ παράλληλον τῇ ΑΨ, καὶ ἔχομεν ΒΘ = ΒΚ· ἄρα ἡ ΑΧ διχοτομεῖ πάσας τὰς παραλλήλους τῇ ΘΚ εὐθείας, ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων ἀπολαμβανομένας. Λοιπόν,

ΝΠ = Ν΄Π, καὶ ΝΠ − ΜΠ = Ν΄Π − Μ΄Π, ἢ ΜΝ = Μ΄Ν΄.

Ἡ ἀπόδειξις οὐχ ἧττον εὔκολος εἶναι ὅταν ἡ διάμετρος ΑΧ δὲν τέμνῃ τὴν ὑπερβολήν.

Ἔχομεν ἐντεῦθεν νέον μέσον ἁπλούστατον τοῦ γράφειν ὑπερβολήν, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς ἀσυμπτώτους καὶ ἓν σημεῖον αὐτῆς Μ. Ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου ἄγομεν τὴν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ΝΜΝ΄, περατουμένην ἐπὶ τὰς ἀσυμπτώτους· λαμβάνομεν ΜΝ = Μ΄Ν΄. Τὸ σημεῖον Μ΄ ἀνήκει τῇ καμπύλῃ. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς εὑρίσκομεν ὁσαδήποτε βουλόμεθα σημεῖα. Πρὸς ἀποφυγὴν δὲ τῆς συγχύσεως γραμμῶν πολλῶν διερχομένων τοῦ αὐτοῦ σημείου, ποιοῦμεν χρῆσιν ἑτέρων σημείων ἐκ τῶν διὰ τοῦ Μ ὁρισθέντων.

Τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ποιοῦμεν προσέτι χρῆσιν ὅταν γνωρίζωμεν τὸ μέγεθος καὶ τὴν γωνίαν δύο διαμέτρων συζυγῶν· διότι τότε προσδιορίζομεν τὰς ἀσυμπτώτους, καὶ ἔχομεν δύο σημεῖα τῆς καμπύλης.

302. Ἔστωσαν

$$\alpha^2\psi^2 - \beta^2\chi^2 = -\alpha^2\beta^2, \qquad \psi = \frac{\beta}{\alpha}\chi,$$

ἡ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς ἀναφερομένης πρὸς τὰς συζυγεῖς διαμέτρους ΑΒ, ΑΔ, (Σχ. 128), καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀσυμπτώτου ΑΘ. Καλοῦμεν ψ καὶ Ψ τὰς ἐπὶ τὴν αὐτὴν



τετμημένην ΑΠ τεταγμένας τῆς καμπύλης καὶ τῆς εὐθείας, καὶ ἔχομεν,

$$\Psi^2 - \psi^2 = \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\chi^2 - \alpha^2) = \beta^2.$$

Ἀλλά, Ψ − ψ = ΜΝ, Ψ + ψ = ΠΜ + ΠΝ = ΠΜ + ΠΝ΄ = ΜΝ΄.

Λοιπόν, τὰ μέρη ΜΝ, ΜΝ΄, τῆς τεμνούσης ΝΝ΄, συνδέονται τῇ σχέσει

$$MN \times MN' = \Psi^2 - \psi^2 = \beta^2.$$

Ἐὰν ἡ τέμνουσα ἦτο παράλληλος τῇ διαμέτρῳ 2α, ἠθέλομεν ἔχει ἐπίσης

$$M\Phi \times M\Phi' = \alpha^2.$$

Λοιπόν, *ἐν τῇ ὑπερβολῇ, τεμνούσης τινὸς οὔσης παραλλήλου διαμέτρῳ, τὸ ὀρθογώνιον τῶν μερῶν τῆς τεμνούσης ταύτης, τῶν ἀπολαμβανομένων μεταξὺ ἑνὸς σημείου τῆς καμπύλης καὶ τῶν ἀσυμπτώτων, ἰσοῦται τῷ τετραγώνῳ τοῦ ἡμίσεως τῆς διαμέτρου ταύτης.*

303. Ἐντεῦθεν πορίζόμεθα, μέθοδον τοῦ εὑρίσκειν δύο διαμέτρους συζυγεῖς, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν διεύθυνσιν τῆς ἑτέρας αὐτῶν, ΑΨ, τὰς ἀσυμπτώτους καὶ ἓν σημεῖον τῆς καμπύλης. Ἀπὸ τοῦ γνωστοῦ σημείου Μ ἄγομεν, μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων, ΝΜΝ΄ παράλληλον τῇ ΑΨ· ἡ ἡμιδιάμετρος ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΜΝ΄, ΜΝ. Μετὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ΑΔ, ζευγνύομεν τὸ κέντρον ἐπὶ τὸ μέσον Π τῆς ΝΝ΄ τῇ εὐθείᾳ ΑΧ, παραλλήλως δὲ ταύτῃ ἄγομεν ΔΘ, τέμνουσαν τὴν ἀσύμπτωτον κατὰ τὸ Θ· τέλος, ἄγομεν ΘΒ παράλληλον τῇ ΑΔ, ἣν περατοῦμεν ἐπὶ τὴν ΑΧ κατὰ τὸ Β. Ἡ συζυγὴς διάμετρος τῆς ΑΔ εἶναι ΑΒ.

Ἡ αὐτὴ ἰδιότης χρησιμεύει πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀξόνων γνωστῶν οὐσῶν δύο διαμέτρων συζυγῶν. Τῷ ὄντι, τότε γνωρίζομεν ἓν σημεῖον τῆς ὑπερβολῆς, κατασκευάζομεν τὰς ἀσυμπτώτους, καὶ εὑρίσκομεν τὴν διεύθυνσιν τῶν ἀξόνων διχοτομοῦντες τὰς τῶν ἀσυμπτώτων γωνίας, κ. τ. ἑ.

304. (Σχ. 127). Ἀγομένων ἀπὸ τοῦ σημείου Β τῶν ΒΛ, ΒΡ, παραλλήλων ταῖς ἀσυμπτώτοις, τὰ τρίγωνα ΑΒΡ, ΑΒΛ, ἔσονται ἴσα· ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΛ, ΒΛΚ, εἰσὶν ἰσοδύναμα, διότι ΑΛ$=$ΛΚ· ἄρα, τὸ παραλληλόγραμμον ΛΑΒΡ ἰσοδύναμον εἶναι τῷ ΑΒΚ τριγώνῳ. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι τὸ ὄγδοον τοῦ παραλληλογράμμου ΘΚΘ'Κ', οὗτινος τὸ ἐμβαδὸν εἶναι μόνιμον, οἱανδήποτε θέσιν ἔχῃ τὸ σημεῖον Β, [293]. Λοιπόν, *ἐν τῇ ὑπερβολῇ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ συγκροτουμένου παραλληλογράμμου ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῶν παραλλήλων αὐταῖς ἀγομένων ἀπὸ σημείου οἱουδήποτε τῆς καμπύλης, εἶναι ἄτρεπτον· ἰσοῦται δὲ τῷ ὀγδόῳ μέρει τοῦ ὀρθογωνίου τῶν ἀξόνων, ἢ τοῦ κατασκευαζομένου παραλληλογράμμου ἐπὶ δύο διαμέτρων συζυγῶν.*

### Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΗ ΠΡΟΣ ΤΑΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΟΥΣ ΑΥΤΗΣ.

305. (Σχ. 129). Λαμβάνομεν τὴν μὲν κατωτέραν ἀσύμπτωτον ὡς ἄξονα τῶν τετμημένων, τὴν δὲ ἀνωτέραν ὡς ἄξονα τῶν τεταγμένων. Ἄγομεν τὰς συντεταγμένας ΜΠ, ΜΚ, σημείου τινὸς τῆς ὑπερβολῆς καὶ καλοῦμεν β τὴν γωνίαν τῶν ἀσυμπτώτων. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΠΜΚ ἰσοῦται $\chi\psi\,\acute{\eta}\mu\,\beta$. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο εἶναι ἄτρεπτον, ἴσον δὲ τῷ ὀγδόῳ μέρει τοῦ ὀρθογωνίου τῶν ἀξόνων. Λοιπόν, γνωστῶν ὄντων τῶν ἀξόνων $2\alpha$, $2ϐ$, ἡ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις αὐτῆς εἶναι

$$\chi\psi\,\acute{\eta}\mu\,\beta = \frac{\alpha ϐ}{2}, \qquad \text{ἢ} \qquad \chi\psi = \frac{\alpha ϐ}{2\,\acute{\eta}\mu\,\beta}.$$

Τὸ ἡμ β ἐκφράζεται καὶ συνεκθέσει α, ϐ. Τῷ ὄντι, ἐπὶ τὸ πέρας τοῦ πλαγίου ἄξονος ἄγομεν πρὸς ὀρθὰς ΒΘ περατουμένην ἐπὶ τὴν ἀσύμπτωτον ΑΨ. Ἡ κάθετος αὕτη ἰσοῦται ϐ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΘ δίδει

$$\acute{\eta}\mu\,\tfrac{1}{2}\beta = \frac{ϐ}{\sqrt{\alpha^2+ϐ^2}}, \qquad \sigma\upsilon\nu\,\tfrac{1}{2}\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+ϐ^2}}.$$



Ἐπειδὴ δὲ $\qquad \acute{\eta}\mu\,\beta = 2\,\acute{\eta}\mu\,\tfrac{1}{2}\beta\,\sigma\upsilon\nu\,\tfrac{1}{2}\beta$,

ἔχομεν $\qquad \acute{\eta}\mu\,\beta = \dfrac{2\alpha ϐ}{\alpha^2+ϐ^2}$.

ἐπομένως λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις

$$(\upsilon_{,,}) \qquad \chi\psi = \frac{\alpha^2+ϐ^2}{4}.$$

Ἐκ τῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως ταύτης δηλοῦται ὅτι αἱ ἀσύμπτωτοι ἐλήφθησαν ὡς ἄξονες τῶν συντεταγμένων.

306. Τὴν ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ἐξίσωσιν τῆς ὑπερβολῆς εὑρίσκομεν καὶ διὰ τῆς πρὸς τοὺς ἄξονας ἐξισώσεως, προστρέχοντες εἰς τοὺς τύπους [78]

$$\chi = \chi'\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi + \psi'\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi', \qquad \psi = \chi'\,\acute{\eta}\mu\,\varphi + \psi'\,\acute{\eta}\mu\,\varphi'.$$

Ἐν οἷς πρῶτον θετέον ἀντὶ τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν τὰς καταλλήλους πρὸς τοὺς νέους ἄξονας τιμὰς αὐτῶν. (Σχ. 130). Λάβωμεν καὶ αὖθις τὴν μὲν κατωτέραν ἀσύμπτωτον ὡς γραμμὴν τῶν $\chi'$, τὴν δὲ ἀνωτέραν ὡς τῶν $\psi'$. Ἔχομεν $\varphi' = \Psi'\mathrm{A}\mathrm{X}$· καὶ $\varphi = 360^\circ - \mathrm{X}'\mathrm{A}\mathrm{X}$. Ἐπὶ τὸ πέρας τοῦ πρώτου ἄξονος ἄγομεν κάθετον $\mathrm{B}\Theta = ϐ$· τὸ σημεῖον Θ ἔσεται ἐπὶ τῆς ἀσυμπτώτου [299]· ἔχομεν δὲ

$$\acute{\eta}\mu\,\varphi' = \frac{ϐ}{\sqrt{\alpha^2+ϐ^2}}, \qquad \sigma\upsilon\nu\,\varphi' = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+ϐ^2}},$$

$$\acute{\eta}\mu\,\varphi = -\acute{\eta}\mu\,\varphi' = \frac{-ϐ}{\sqrt{\alpha^2+ϐ^2}}, \qquad \sigma\upsilon\nu\,\varphi = \sigma\upsilon\nu\,\varphi' = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+ϐ^2}}.$$

Ἐπομένως, οἱ τύποι δι' ὧν μεταβαίνομεν ἀπὸ τῶν ἀξόνων εἰς τὰς ἀσυμπτώτους καθίστανται,

$$\chi = \frac{\alpha(\psi'+\chi')}{\sqrt{\alpha^2+ϐ^2}}, \qquad \psi = \frac{ϐ(\psi'-\chi')}{\sqrt{\alpha^2+ϐ^2}}.$$

Θέτοντες ἤδη τὰς τιμὰς ταύτας, παραλειπομένων τῶν τόνων ὡς περιττῶν, ἐν τῇ ἐξισώσει

(υ) $$\alpha^2\psi^2 - \beta^2\chi^2 = -\alpha^2\beta^2 .$$

Λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις,

(υ,,) $$\chi\psi = \tfrac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2).$$

Τὸ τετράγωνον, ἴσον $\tfrac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2)$, καλεῖται (ἄγνωστος ὁ λόγος) *δύναμις ὑπερβολική*. Παραστήσωμεν αὐτὸ τῷ $\mu^2$· οὕτως ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις καθίσταται

$$\chi\psi = \mu^2 .$$

ΣΗΜ. Προτείνομεν τοῖς μαθηταῖς πρὸς ἄσκησιν ἐπανελθεῖν ἀπὸ τῆς ἐξισώσεως (υ,,) εἰς τὴν ἐν τοῖς ἄξοσιν (υ), μεταχειριζόμενοι τοὺς καταλλήλους τύπους.

307. Ἔστωσαν $\chi'$, $\psi'$ καὶ $\chi''$, $\psi''$, αἱ συντεταγμέναι δύο σημείων τῆς ὑπερβολῆς. Ἡ ἐμφαίνουσα τὴν ἐπιζευγνύουσαν εὐθεῖαν τὰ σημεῖα ταῦτα ἐξίσωσις εἶναι,

$$\psi - \psi' = \frac{\psi' - \psi''}{\chi' - \chi''}(\chi - \chi') .$$

Ἀλλ᾽ ἔχομεν προσέτι τὰς σχέσεις,

$$\chi'\psi' = \mu^2 , \qquad \chi''\psi'' = \mu^2 \cdot$$

τῇ δ᾽ ἀφαιρέσει ἀπ᾽ ἀλλήλων

$$\chi'\psi' - \chi''\psi'' = 0 , \quad \text{ἢ} \quad \chi'(\psi' - \psi'') + \psi''(\chi' - \chi'') = 0 \cdot$$

ὅθεν $$\frac{\psi' - \psi''}{\chi' - \chi''} = -\frac{\psi''}{\chi'} .$$

Ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς τεμνούσης τρέπεται εἰς

(1) $$\psi - \psi' = -\frac{\psi''}{\chi'}(\chi - \chi') .$$



ἵνα κατασταθῇ ἡ εὐθεῖα αὕτη ἐφαπτομένη, καθιστῶμεν $\psi' = \psi''$ καὶ $\chi' = \chi''$· λαμβάνομεν

$$\psi - \psi' = -\frac{\psi'}{\chi'}(\chi - \chi') ,$$

ἐξίσωσιν τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις ἐξαλείψει τοῦ παρονομαστοῦ καὶ ἀντεισαγωγῇ $2\mu^2$ ἀντὶ $2\chi'\psi'$, μεταμορφοῦται ὡς ἑξῆς

(2) $$\chi'\psi + \psi'\chi = 2\mu^2 .$$

308. Καθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τῆς ἐφαπτομένης, $\psi = 0$, εὑρίσκομεν (Σχ. 131).

$$\chi = \text{ΑΤ} = 2\chi' = 2\,\text{ΑΠ} \cdot \quad \text{ἐπομένως} \quad \text{ΜΤ} = \text{ΜΡ} \cdot$$

Συνάγομεν καὶ αὖθις τὰς γνωστὰς προτάσεις· 1ον. *ἡ ὑφαπτομένη* ΠΤ *ἰσοῦται τῇ τετμημένῃ* ΑΠ *τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς*· 2ον. *τὸ ἀπολαμβανόμενον μέρος* ΡΤ *τῆς ἐφαπτομένης ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων δίχα τέμνεται κατὰ τὴν ἐπαφήν* [300].

309. Ἐν τῇ ἐξισώσει (1) τῆς τεμνούσης καθιστῶμεν $\psi = 0$, καὶ ἔχομεν

$$\chi - \chi' = \text{ΠΣ} = \frac{\psi'\chi'}{\psi''} = \frac{\psi'\chi''}{\psi''} = \chi'' = \text{ΑΠ}'.$$

Ἐὰν δὲ ἄξωμεν Μ′Κ παράλληλον τῇ ΑΧ′, τὰ τρίγωνα ΜΠΣ, Μ′ΚΦ, ὡς ἴσα, δίδουσι τὸ ἐπίσης γνωστὸν θεώρημα [301]

$$\text{ΜΣ} = \text{Μ}'\text{Φ}.$$

### ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ.

310. Θεωρήσωμεν πρῶτον τὴν ἰσοσκελῆ ὑπερβολήν, ἧς ἡ δύναμις ἰσοῦται μονάδι. Ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις εἶναι $\chi\psi = 1$ .

(Σχ. 132). Λαμβάνομεν τὴν τετμημένην ΑΓ $=1$, καὶ ἑτέραν τὴν τυχοῦσαν ΑΠ $=\chi$. Λογίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν ΒΓΠΜ, ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τῆς καμπύλης, τῆς ἀσυμπτώτου ΑΧ, καὶ τῶν τεταγμένων ΒΓ, ΜΠ.

Διαιροῦμεν τὸ ἀπόστημα ΓΠ εἰς ἀριθμὸν μερῶν οἱονδήποτε, ἔστω καὶ ἀνίσων· κατὰ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἄγομεν τὰς τεταγμένας Β'Γ', Β''Γ'', κ.τ.ἑ., καὶ κατασκευάζομεν τὰ ὀρθογώνια ΒΓΓ'Δ, Β'Γ'Γ''Δ', κ.τ.ἑ. Καθ' ὅσον τὰ ἀποστήματα ΓΓ', Γ'Γ'', κ.τ.ἑ., μειοῦνται, τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων μειοῦται ἐπίσης, προσεγγίζον τῇ ἐπιφανείᾳ ΒΓΠΜ· ὅταν τὰ αὐτὰ ἀποστήματα σμικρυνθῶσιν ἐπ' ἄπειρον μεχρισοῦ κατασταθῶσιν ἐλάσσονα πάσης ποσότητος δοθείσης, ὅπερ ἀπαιτεῖ ν' αὐξηνθῇ ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν ἐπ' ἄπειρον, τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων κατασταθήσεται ἐπὶ τέλους ἴσον τῷ ὑπερβολικῷ ἐμβαδῷ, ὅπερ εἶναι τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τούτου. Τοῦτο δὲ τὸ ὅριον πρόκειται εὑρεῖν.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Τῶν τετμημένων, | ΑΓ, | ΑΓ', | ΑΓ'', | ΑΓ''', | . . . . , | ΑΠ, |
| δηλουμένων ὑπὸ | 1, | $\chi'$, | $\chi''$, | $\chi'''$, | . . . . , | $\chi$, |
| αἱ τεταγμέναι εἰσί, | 1, | $\frac{1}{\chi'}$, | $\frac{1}{\chi''}$, | $\frac{1}{\chi'''}$, | . . . . , | $\frac{1}{\chi}$. |

Λοιπόν,

τὸ ὀρθογώνιον ΒΓΓ'Δ = ΓΓ' × ΒΓ $= (\chi' - 1) \times 1 = \chi' - 1$,

τὸ ὀρθογώνιον Β'Γ'Γ''Δ' = Γ'Γ'' × Β'Γ' $= (\chi'' - \chi') \times \frac{1}{\chi'} = \frac{\chi''}{\chi'} - 1$,

τὸ ὀρθογώνιον Β''Γ''Γ'''Δ'' = Γ''Γ''' × Β''Γ'' $= (\chi''' - \chi'') \times \frac{1}{\chi''} = \frac{\chi'''}{\chi''} - 1$,

κ. τ. ἑ.

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Γ', Γ'', κ.τ.ἑ. λαμβάνονται τυχαίως, ὑποθέσωμεν τὰς τετμημένας 1, $\chi'$, $\chi''$, κ.τ.ἑ. ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ. Τοῦ πρώτου ὅρου ὄντος 1 καὶ τοῦ δευτέρου $\chi'$, ὁ λόγος ἔσεται $\chi'$· οὕτως ἕξομεν

$$\chi'' = \chi'^2, \quad \chi''' = \chi'^3, \quad \chi'''' = \chi'^4, \quad \text{κ.τ.ἑ.}$$

Ὥστε, ὑποθέτοντες ὅτι ὑπάρχουσι ν διαιρέσεις ἀπὸ Γ μέχρι Π, ἡ τελευταία τετμημένη εἶναι $\chi = \chi'^{\nu}$· τότε δὲ ἅπαντα τὰ ὀρθογώνια εἰσὶν ἴσα, ἕκαστον $(\chi' - 1)$.

Ἀθροίσωμεν ἤδη τὰ δύο πρῶτα ὀρθογώνια, εἶτα



τὰ τρία πρῶτα, τὰ τέσσαρα πρῶτα, κ. τ. ἑ. Τὰ ἀθροίσματα εἰσὶ

$$2(\chi' - 1), \quad 3(\chi' - 1), \quad 4(\chi' - 1), \quad \text{κ.τ.ἑ.}$$

Τότε, αἱ μὲν τετμημέναι εἰσίν,

$$1, \quad \chi', \quad \chi'^2, \quad \chi'^3, \quad \ldots\ldots \quad \chi'^{\nu} \text{ ἢ } \chi\cdot$$

τὰ δὲ ὀρθογώνια ἐμβαδὰ ἀπολαμβανόμενα ὑπὸ τῆς πρώτης τεταγμένης ΒΓ καὶ ἑκάστης τῶν ἐφεξῆς διαδοχικῶν τεταγμένων ΒΓ, Β'Γ', κ.τ.ἑ.

$$0, \ (\chi' - 1), \ 2(\chi' - 1), \ 3(\chi' - 1), \ \ldots\ldots \ \nu(\chi' - 1).$$

Γράφομεν 0, διότι θεωροῦμεν τὴν ἐπιφάνειαν ὑπὸ τῆς τεταγμένης ΒΓ καὶ τοῦ ἑαυτοῦ της περιεχομένην.

Βλέπομεν ὅτι, αἱ μὲν τετμημέναι συνιστῶσι πρόοδον γεωμετρικὴν ἀπὸ τῆς μονάδος ἀρχομένην, τὰ δὲ ἐμβαδὰ πρόοδον ἀριθμητικὴν ἀπὸ τοῦ μηδενὸς ἀρχομένην. Ἄρα, τὰ ὀρθογώνια ἐμβαδά, ἀπολαμβανόμενα ὑπὸ τῆς ΒΓ καὶ τῶν διαδοχικῶν τεταγμένων, εἰσὶν οἱ λογάριθμοι τῶν τετμημένων αἷς συστοιχοῦσιν αἱ τεταγμέναι αὗται.

Ἡ πρότασις αὕτη, ἀνεξάρτητος οὖσα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν διαιρέσεων τῆς ΓΠ, ἐφαρμόζεται κατὰ συνέπειαν ἐπὶ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν καθίσταται ἄπειρος· ἤ, ἐν ἄλλοις λόγοις, ἐπὶ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἀντὶ νὰ μεταβῶμεν ἀπὸ τοῦ σημείου Γ εἰς τὸ Π δι' ἀριθμοῦ ὡρισμένου τετμημένων ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ, μεταβῶμεν ἀλληλοδιαδόχως δι' ἁπασῶν τῶν ἐμμέσων τετμημένων. Ἀλλὰ τότε, τὰ ὀρθογώνια ἐμβαδὰ ταυτίζονται ἀκριβῶς τοῖς ὑπερβολικοῖς, ὑπὸ τῆς ΒΓ καὶ τῶν συστοιχουσῶν ἐπὶ τὰς τετμημένας ταύτας τεταγμένων περιεχομένοις. Λοιπὸν συνάγομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα.

*Τὰ ὑπερβολικὰ ἐμβαδά, ὡς ΓΒΜΠ, εἰσὶν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀντιστοιχουσῶν τετμημένων*, ΑΠ.

Ὑπολείπεται εἰσέτι ὁρίσαι τὴν βάσιν τοῦ συστήματος τούτου τῶν λογαρίθμων· ἐν ἄλλοις λόγοις, εὑρεῖν ἀριθμόν, ὃν ὑψοῦντες εἰς τὴν δεικνυομένην δύναμιν ὑφ' ἑνὸς τῶν ἐμβαδῶν τούτων, λαμβάνομεν ἐξαγόμενον τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τετμημένην.

Ἐν ταῖς ἀνωτέρω προόδοις λάβωμεν τοὺς ἀντιστοιχουμένους ὅρους $\chi$ καὶ $\nu(\chi'-1)$, ὧν ὁ δεύτερος ἐμφαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολαμβανομένων ὀρθογωνίων μεταξὺ ΒΓ καὶ ΜΠ. Τὸ ἄθροισμα τοῦτο καθίσταται ἴσον τῇ ὑπερβολικῇ ἐπιφανείᾳ ΓΒΜΠ, ὅταν $\nu=\infty$. Λοιπὸν μορφοῦμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(1)\qquad E^{\nu(\chi'-1)}=\chi,\qquad \text{ἢ}\qquad E^{\nu(\sqrt[\nu]{\chi}-1)}=\chi\cdot$$

πρόκειται δὲ εὑρεῖν τὴν τιμὴν τοῦ Ε ἀντιστοιχοῦσαν $\nu=\infty$· οὕτως ὁρισθήσεται ἡ ζητουμένη βάσις.

Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ Ε μένει ἄτρεπτος, οἱαδήποτε εἶναι ἡ $\chi$, ἐκλέξωμεν διὰ $\chi$ τὴν τιμὴν ἥτις καθιστᾷ τὸν δείκτην τοῦ Ε ἴσον μονάδι, ὅταν $\nu=\infty$.

Ἡ ἐξίσωσις $\nu(\sqrt[\nu]{\chi}-1)=1$, δίδει

$$(2)\qquad \chi=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}.$$

Ἀναπτύξωμεν τὴν δύναμιν ταύτην·

$$\chi=1+\frac{\nu}{1}\left(\frac{1}{\nu}\right)+\left(\frac{\nu}{1}\right)\left(\frac{\nu-1}{2}\right)\left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\left(\frac{\nu}{1}\right)\left(\frac{\nu-1}{2}\right)\left(\frac{\nu-2}{3}\right)\left(\frac{1}{\nu}\right)^3+\dots$$

$$=2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\nu}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\nu}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3\nu}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\nu}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3\nu}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4\nu}\right)+\dots$$

ὑποθέτοντες δὲ $\nu=\infty$, λαμβάνομεν

$$\chi=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\dots\dots+\frac{1}{2.3.4\dots\nu}.$$

Ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ δεικνύεται ὅτι ἡ ἀκριβὴς τιμὴ τῆς σειρᾶς ταύτης εἶναι ἔκμετρος, καὶ περιλαμβάνεται μεταξὺ 2 καὶ 3. Ἀλλὰ λαμβάνομεν τὴν τιμὴν ταύτην, ἣν συνήθως δηλοῦσι τῷ $e$, καθ' οἱανδήποτε βουλόμεθα προσέγγισιν. Οὕτως ἔχομεν

$$e=2,718\ 281\ 828\ 459\ 045\ \dots\dots$$



Δώσωμεν ἤδη τῇ ἀορίστῳ $\chi$ τὴν μερικὴν ταύτην τιμήν· ἡ ἐξίσωσις (1) καθίσταται

$$(3)\qquad E^{\nu(\sqrt[\nu]{e}-1)}=e.$$

Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις (2) πρέπει νὰ ἐνυμοποιῆται ὅταν $\chi=e$ καὶ $\nu=\infty$· ἄρα, ὁ δείκτης τοῦ Ε, ἐν τῇ ἐξισώσει (3), ἰσοῦται 1 ὅταν $\nu=\infty$. Ἄρα $E=e$.

Λοιπόν, $e$ *εἶναι ἡ βάσις τοῦ συστήματος ἐν ᾧ πρέπει νὰ λαμβάνωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν τετμημένων* ΑΠ, *ἵνα ἔχωμεν τὰ ὑπερβολικὰ ἐμβαδὰ ὡς τὸ* ΓΒΠΜ.

Οἱ λογάριθμοι οὗτοι εἰσὶν οἱ ὑπὸ τοῦ ΝΕΠΕΡΟΥ, ἐφευρετοῦ τῶν λογαρίθμων, λογισθέντες τὸ πρῶτον, οὗ ἕνεκα καλοῦνται *νεπεριανοί*. Δηλοῦμεν αὐτοὺς τῷ γράμματι $\lambda$, καὶ κατὰ συνέπειαν γράφομεν

$$\textit{ἐμβαδὸν}\ \Gamma B M \Pi=\lambda\chi.$$

311. Ὁ τύπος οὗτος δίδει καὶ τὰ εἰς ἐλάσσονας τῆς ΑΓ τετμημένας συστοιχοῦντα ἐμβαδά, ἀρκεῖ θεωρεῖν ὡς ἀρνητικὰ τὰ ἐμβαδὰ ἅτινα, ὡς τὸ ΒΓΚΝ, κεῖνται πρὸς τ' ἀριστερὰ τῆς ΒΓ. Τῷ ὄντι, ἄγομεν ΒΗ καὶ ΝΘ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ΑΨ, καὶ ἔχομεν $ΒΗΘΝ=\lambda\psi$· διότι πάντοθεν ὁμοιότης ὑπάρχει πρὸς ἑκατέραν τῶν ἀσυμπτώτων. Ἀλλὰ

$$ΒΓΚΝ=ΒΓΑΗ+ΒΗΘΝ-ΝΚΑΘ\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ $\chi\psi=1$, ἔχομεν $ΒΓΑΗ=ΝΚΑΘ=1$. Ἄρα

$$ΒΓΚΝ=ΒΗΘΝ=\lambda\psi=\lambda\frac{1}{\chi}=-\lambda\chi.$$

312. Ἐν τοῖς προηγουμένοις ἐθεωρήσαμεν μόνον τὴν ἰσοσκελῆ ὑπερβολήν, ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\chi\psi=1$ ἐμφαινομένην. Ὑποθέσωμεν ἤδη, ἐν γένει, ὅτι αἱ ἀσύμπτωτοι περιέχουσι γωνίαν Ψ'ΑΧ' ἴσην $\beta$ (Σχ. 133), καὶ ὅτι ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi\psi=\mu^2$.

Ἄξωμεν ΑΨ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ΑΧ' καὶ ὑποθέσωμεν γραφεῖσαν ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις ἄξοσιν ΑΧ', ΑΨ, τὴν ἰσοσκελῆ ὑπερβολὴν ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\chi\psi=1$ δηλουμένην.

Ἔστωσαν $ΑΓ=1$ καὶ $ΑΠ=\chi$. Ἐὰν ἄξωμεν τὰς ἀντιστοιχουμένας τεταγμένας ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπερβολῶν, καλέσωμεν δὲ Τ, τ, τὰ ἐμβαδὰ ΒΓΜΠ, Β′ΓΠΜ′, εὐκόλως δεικνύομεν, διὰ συλλογισμῶν ὁμοίων τοῖς ἐν § 253, ὅτι

$$\frac{Τ}{τ}=\frac{\mu^2\, ἡμ\, \beta}{1}, \quad \text{ὅθεν} \quad Τ=\mu^2\, ἡμ\, \beta . \lambda\chi.$$

ΣΗΜ. Δυνάμεθα θεωρῆσαι καὶ τὸ ἐμβαδὸν Τ ὡς λογάριθμον τῆς χ· ἀλλὰ τότε ληπτέον τοὺς λογαρίθμους ἐν τῷ συστήματι ἔχοντι διαστολέα $\mu^2 ἡμ\beta$.

313. Πρὸς ἄσκησιν ἕπονται προτάσεις τινὲς ἀφορῶσαι τὴν ὑπερβολὴν, ὧν ἡ ἐπίλυσις καὶ ἡ διασκόπησις εἰσὶ ζητητέαι.

1) *Ὁμοίαν πρότασιν τῇ (1) [254] ἐν τῇ ἐλλείψει.*

2) *Ἀπὸ σημείου δοθέντος ἐκτὸς τῆς ὑπερβολῆς, κάθετον ἀγαγεῖν ἐπὶ τὴν καμπύλην ταύτην.*

Οἱ λογισμοὶ καὶ ἡ διασκόπησις ἐκτελοῦνται ὡς ἐν τῇ ἐλλείψει [254 (3)]. Ἡ διὰ τῶν γεωμετρικῶν τόπων ἐπίλυσις τοῦ προβλήματος ἄγει εἰς τὴν κατασκευὴν ὑπερβολῆς, ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς πρώτης καὶ τοῦ δοθέντος σημείου διερχομένης, καὶ ἐχούσης τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς παραλλήλους τοῖς ἄξοσι τῆς προτεθείσης.

3) *Ἐν τῇ ὑπερβολῇ, ἀναφερομένῃ πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους, οἱ δηλοῦντες τὴν κλίσιν δύο χορδῶν παραπληρωματικῶν συντελεσταὶ εἰσὶν ἴσοι μετὰ σημείων ἐναντίων.*

4) *Ἐν τῇ ὑπερβολῇ ἀναφερομένῃ πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους, εὑρεῖν τὴν περιεχομένην γωνίαν ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς πρὸς τὴν ἐπαφὴν διαμέτρου.*

5) *Ἐν τῇ ὑπερβολῇ ἀναφερομένῃ πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους, δεῖξαι ὅτι, καθ' ὅσον σημεῖον εἶναι ἐπὶ τῆς καμπύλης, ἢ ἐκτὸς, ἢ ἐντὸς αὐτῆς, ἡ ποσότης* $\mu^2-\chi\psi$, *εἶναι μηδὲν, θετικὴ, ἢ ἀρνητική.*

6) *Ἀπὸ σημείου ἐξωτερικοῦ κάθετον ἀγαγεῖν ἐπὶ ὑπερβολὴν πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους ἀναφερομένην.*

7) *Ἀπὸ σημείου ἐξωτερικοῦ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην ὑπερβολῆς πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους ἀναφερομένης.*

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ′.

## ΠΕΡΙ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ.

### Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΗ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ ΑΥΤΗΣ.

314. Εἴδομεν [161] ὅτι, τῇ καταλλήλῳ ἐκλογῇ συντεταγμένων ὀρθογωνίων, ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς ἄγεται ὑπὸ τὴν μορφὴν,

$$(\pi) \qquad \psi^2=2\pi\chi .$$

Ἐν τῇ ἐρεύνῃ τῶν συμπτωμάτων τῆς καμπύλης ταύτης, ὑποθέσομεν π θετικόν· διότι, ὅταν $\psi^2=-2\pi\chi$, ἀρκεῖ μεταβάλλειν τὴν διεύθυνσιν τῶν θετικῶν χ, ὅπως τραπῇ ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἰς τὴν προηγουμένην.

Ἡ μορφὴ αὐτὴ τῆς ἐξισώσεως (π) δείκνυσιν ἀμέσως ὅτι, ἡ ἀρχὴ εἶναι σημεῖον τῆς καμπύλης, καὶ ὅτι ἡ γραμμὴ τῶν χ εἶναι ἄξων τῆς καμπύλης. Ὁ ἄξων οὗτος μοναδικὸς ὑπάρχει ἐν τῇ παραβολῇ, ὡς δειχθήσεται μετ' οὐ πολύ.

315. Ἡ ἐξίσωσις (π) δίδει $\psi=\pm\sqrt{2\pi\chi}$.

Βλέπομεν ὅτι ἡ καμπύλη δὲν προχωρεῖ πρὸς τὰς ἀρνητικὰς τετμημένας. Ἀλλ' αὐξανομένης τῆς χ ἀπὸ 0 ἐπ' ἄπειρον θετικῶς, ψ αὐξάνει μέχρι $\pm\infty$. Ἄρα, ἡ παραβολὴ προχωρεῖ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ἐπ' ἄπειρον, συμμετρικῶς ἄνω καὶ κάτω τοῦ ἄξονος τῶν χ, πρὸς ὃν στρέφει ἀείποτε τὰ κοῖλα αὐτῆς (Σχ. 134), ἄλλως ἤθελεν εἶσθαι δυνατὸν ταυτισθῆναι εὐθεῖα κατὰ σημεῖα πλείονα τῶν δύω [88].

Ἡ παραβολὴ μίαν κορυφὴν ἔχει, τὸ σημεῖον Α καθ' ὃ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἄξονος αὐτῆς. Ὁ συντελεστὴς 2π τῆς χ ἐν τῇ ἐξισώσει (π), δι' οὗ αἱ παραβολαὶ διαφέρουσιν ἀλλήλων, καλεῖται *παράμετρος*.

316. Ἐκ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως δηλοῦται ὅτι, ὁ λόγος τοῦ τετραγώνου τῆς τεταγμένης πρὸς τὴν τετμημένην εἶναι ἄτρεπτος. Λοιπόν, *ἐν τῇ παραβολῇ, τὰ τετράγωνα τῶν πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸν ἄξονα τεταγμένων εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ἀποστήματα τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῶν ποδῶν τῶν τεταγμένων τούτων.*

317. Διὰ πᾶν σημεῖον τῆς παραβολῆς ἔχομεν τὴν σχέσιν $\psi^2 - 2\pi\chi = 0$. Θεωρήσωμεν σημεῖον ἐξωτερικόν, τὸ K, ἄξωμεν δὲ ἐπὶ τὴν Αψ πρὸς ὀρθὰς τὴν ΛΚ, ἧς ἡ προαγωγὴ τέμνει κατὰ τὸ Μ τὴν καμπύλην. Ἡ μὲν τετμημένη τοῦ σημείου Κ ἐλάσσων εἶναι τῆς τοῦ Μ, ἡ δὲ τεταγμένη ἡ αὐτή. Ἄρα, διὰ τὸ σημεῖον Κ ἔχομεν $\psi^2 - 2\pi\chi > 0$. Ὁμοίως συλλογιζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι, διὰ σημεῖον Κ′, ἐσωτερικόν, ἔχομεν $\psi^2 - 2\pi\chi < 0$.

Λοιπόν, *ἔχομεν πάντοτε·*

| | |
|---|---|
| *ἐπὶ τῆς παραβολῆς* | $\psi^2 - 2\pi\chi = 0$, |
| *ἐκτὸς τῆς παραβολῆς* | $\psi^2 - 2\pi\chi > 0$, |
| *ἐντὸς τῆς παραβολῆς* | $\psi^2 - 2\pi\chi < 0$. |

318. Ἡ ἐξίσωσις (π) ὁδηγεῖ εἰς ἁπλουστάτην μέθοδον τοῦ γράφειν παραβολήν. (Σχ. 134). Ἔστω τετμημένη τις ΑΠ. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΧ, ἀριστερὰ τῆς κορυφῆς, λαμβάνομεν τὸ ἀπόστημα ΑΒ ἴσον τῇ παραμέτρῳ $2\pi$. Ἐπὶ τὴν ΒΠ, ὡς διάμετρον, γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν κατὰ τὸ Ρ τὴν ΑΨ. Τέλος, ἄγομεν τὴν τεταγμένην ΝΠ, ἣν περατοῦμεν ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΡΝ παράλληλον τῇ ΑΧ. Τὸ Ν εἶναι σημεῖον τῆς παραβολῆς. Τῷ ὄντι, ἐκ τῆς κατασκευῆς προκύπτει

$$\Pi N = A P, \quad \overline{AP}^2 = AB \times A\Pi \cdot \quad \text{ἄρα}, \quad \overline{\Pi N}^2 = 2\pi \times A\Pi.$$

319. Κατὰ § 155, ἐν τῇ περιπτώσει τῆς παραβολῆς, αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου εἰσὶν ἄπειροι· ἕνεκα τούτου ἡ καμπύλη αὕτη θεωρεῖται ὡς ἔλλειψις, ἢ ὑπερβολή, ἧς ὁ μείζων, ἢ πλάγιος ἄξων, εἶναι ἀπείρως ἐπιμήκης. Ἀποδείξωμεν τῷ λογισμῷ τὴν προσομοίωσιν ταύτην, χρησιμεύουσαν



πολλάκις πρὸς εὔκολον ἐξίχνευσιν τῶν ἰδιωμάτων τῆς παραβολῆς.

Λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(\varepsilon') \qquad \psi^2 = \frac{6^2}{\alpha^2}(2\alpha\chi - \chi^2)$$

ἐλλείψεως, ἧς ἡ ἑτέρα τῶν κορυφῶν κεῖται ἐν τῇ ἀρχῇ Α (Σχ. 135). Τὸ ἀπόστημα ΟΕ τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς ἑστίας Ε ἰσοῦται $\sqrt{\alpha^2 - 6^2}$· ἀφαιρέσει δὲ ἀπὸ α ἔχομεν

$$AE = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 6^2}.$$

Εἰσάγομεν τὴν ποσότητα ταύτην ἐν τῇ ἐξισώσει (ἑ), ὡς ἄτρεπτον ἣν καλοῦμεν $\frac{1}{2}\pi$, καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς,

$$\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 6^2} = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \text{ὅθεν} \quad 6^2 = \alpha\pi - \tfrac{1}{4}\pi^2.$$

$$\psi^2 = \frac{\alpha\pi - \frac{1}{4}\pi^2}{\alpha^2}(2\alpha\chi - \chi^2), \text{ ἢ } \psi^2 = 2\pi\chi - \frac{\pi\chi(\pi + 2\chi)}{2\alpha} + \frac{\pi^2\chi^2}{4\alpha^2}.$$

Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι, ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ, δίδομεν τῷ α διαδοχικῶς διαφόρους τιμάς, τοῦ π διατηρουμένου ἀτρέπτου· ἕξομεν σειρὰν ἐλλείψεων ὧν οἱ μὲν μείζονες ἄξονες εἰσὶ διάφοροι, ἡ δὲ κορυφὴ Α καὶ ἡ ἑστία Ε μόνιμοι. Αὐξανομένου ἐπ' ἄπειρον τοῦ μείζονος ἄξονος, ἐκλείψουσιν οἱ περιέχοντες αὐτὸν ὡς διαιρέτην ὅροι· οὕτως ἡ τελευταία ἐξίσωσις τραπήσεται εἰς ταύτην,

$$\psi^2 = 2\pi\chi$$

ἐμφαίνουσαν παραβολήν. Ἄρα, δυνάμεθα λαβεῖν τὸν α τοσούτῳ μέγαν, ὅπως ἡ διαφορὰ τῶν τεταγμένων τῆς ἐλλείψεως ἀπὸ τῶν τῆς παραβολῆς εἴη ὅσον ἔνεστιν ἐλαχίστη. Λοιπόν, *ἡ παραβολὴ εἶναι ἔλλειψις ἧς ὁ μείζων ἄξων εἶναι ἄπειρος.*

Ἐὰν ὁμοίους συλλογισμοὺς ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ σειρὰν ὑπερβολῶν ἐχουσῶν Α κορυφὴν καὶ Ε ἑστίαν, κοινάς, καὶ ὧν τὸ κέντρον, κείμενον πρὸς τὰς ἀρνητικὰς τετμημένας, ἀφίσταται μᾶλλον καὶ μᾶλλον τῆς ἀρχῆς, εὑρήσομεν ὅτι, αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος ὑπερβολαὶ ἔχουσιν ὅριον τὴν παραβολήν. Λοιπόν, λέγομεν ἐπίσης ὅτι, *ἡ παραβολὴ εἶναι ὑπερβολὴ ἧς ὁ πλάγιος ἄξων εἶναι ἄπειρος.*

## ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΕΣΤΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΕΥΘΕΤΟΥΣΗΣ.

320. Ἐν ἄξοσιν ὀρθογωνίοις, *ἑστία καλεῖται τὸ σημεῖον, οὗτινος τὸ ἀπόστημα ἀπὸ παντὸς σημείου τῆς παραβολῆς, ἐκφράζεται λογικῶς συνεκθέσει τῆς τετμημένης τοῦ τελευταίου σημείου τούτου.*

(Σχ. 135). Θεωρήσωμεν τὴν σειρὰν τῶν ἐλλείψεων, αἷς κοιναὶ εἰσὶν ἡ κορυφὴ Α καὶ ἡ ἑστία Ε. Τὸ ἀπόστημα τῆς τελευταίας ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου Μ ἑκάστης τῶν καμπύλων τούτων, εἶναι συνέκθεσις λογικὴ τῆς τετμημένης ΟΠ ἀπὸ τοῦ κέντρου λογιζομένης. Λοιπὸν, τὸ αὐτὸ ἀπόστημα ἔσεται ἐπίσης συνέκθεσις λογικὴ τῆς τετμημένης ΑΠ ἀπὸ τῆς κορυφῆς λογιζομένης· διότι $ΟΠ = ΑΠ - ΑΟ$. Ἀλλ' ἡ παραβολὴ εἶναι τὸ ὅριον τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος ἐλλείψεων· ἄρα, τὸ ἀπόστημα τοῦ σημείου Ε ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς καμπύλης ταύτης, εἶναι ἐπίσης συνέκθεσις λογικὴ τῆς τετμημένης τοῦ αὐτοῦ σημείου. Προσέτι, ΑΕ δηλοῦται $\frac{1}{2}\pi$, ἡ δὲ τῆς παραβολῆς παράμετρος ἰσοῦται $2\pi$. Ἄρα, ἡ καμπύλη αὕτη ἔχει μίαν ἑστίαν κειμένην ἐπὶ τοῦ ἄξονος αὐτῆς, ἐν ἀποστάσει ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἴσῃ τῷ τεταρτημορίῳ τῆς παραμέτρου.

321. Ἐν τῇ ἐλλείψει, τὸ ἄθροισμα τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς καμπύλης ἀγομένων διαβατικῶν ἀκτίνων ἰσοῦται τῷ μείζονι ἄξονι. Ζητήσωμεν τὸ ἀνάλογον ἐν τῇ παραβολῇ ἰδίωμα.

(Σχ. 135). Ἔστω ἔλλειψις, ἧς ΑΑ′ εἶναι ὁ μείζων ἄξων καὶ Ε, Ε′, εἰσὶν αἱ ἑστίαι. Κέντρῳ τῷ Ε′ καὶ ἀκτῖνι ΑΑ′ γράφομεν περιφέρειαν ΘΒΘ′ τέμνουσαν τὸν ἄξονα κατὰ τὸ σημεῖον Β, ἐν ἀποστάσει $ΑΒ = ΑΕ$· ζευγνύομεν τὰς διαβατικὰς ἀκτῖνας ΕΝ, Ε′Ν, ἐπὶ τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς ἐλλείψεως καὶ προεκβάλλομεν Ε′Ν μεχρισοῦ ταυτισθῇ τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Κ· δῆλον ὅτι $ΕΝ = ΝΚ$. Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι, τῆς ἐλλείψεως, διατηρούσης μονίμως τὴν αὐτὴν κορυφὴν Α καὶ τὴν αὐτὴν ἑστίαν Ε, ὁ μείζων ἄξων αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον. Ἐν τῷ ὁρίῳ τούτῳ, ἡ ἔλλειψις καθίσταται παραβολὴ, ἡ περιφέρεια ΘΘ′ ταυτίζεται τῇ ΛΛ′, πρὸς ὀρθὰς εὐθείᾳ ἐπὶ τὸν ἄξονα κατὰ τὸ σημεῖον Β, ἡ δὲ ΝΚ λαμβάνει θέσιν πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ΛΛ′, διατηρουμένη ἀείποτε ἴση τῇ διαβατικῇ ἀκτῖνι ΝΕ. Ἡ κάθετος ΛΛ′, ἐν ἀποστάσει οὖσα ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἴσῃ ΑΕ, ἤτοι τῷ τεταρτημορίῳ τῆς παραμέτρου, καλεῖται *διευθετοῦσα*. Οὕτως ἔχομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα· *Τὸ ἀπὸ τῆς ἑστίας παντὸς σημείου τῆς παραβολῆς ἀπόστημα, ἰσοῦται τῷ ἀπὸ τῆς διευθετούσης ἀποστήματι αὐτοῦ.*



Ἄλλως, εὐκόλως δεικνύεται ὅτι, ἐν τῷ ὁρίῳ $\alpha = \infty$, ἡ ἑτέρα τῶν τῆς ἐλλείψεως διευθετουσῶν καθίσταται ΛΛ′. Τῷ ὄντι, κατὰ § 210, γ καὶ δ ὄντων ἀμοιβαίως τῶν ἀποστημάτων τοῦ κέντρου τῆς ἐλλείψεως ἀπὸ τῶν ἑστιῶν καὶ ἀπὸ τῶν διευθετουσῶν, ἔχομεν $\gamma\delta = \alpha^2$. Καλέσωμεν δ′ τὸ ἀπόστημα τῆς κορυφῆς Α ἀπὸ τῆς ἐγγυτέρας αὐτῇ διευθετούσης. Ἔχομεν, $\gamma = \alpha - \frac{1}{2}\pi$, $\delta = \alpha + \delta'$· ἐπομένως

$$(\alpha - \tfrac{1}{2}\pi)(\alpha + \delta') = \alpha^2, \quad \text{ὅθεν} \quad \delta' = \frac{\alpha\pi}{2\alpha - \pi} = \frac{\pi}{2 - \frac{\pi}{\alpha}}.$$

ὅταν $\alpha = \infty$, λαμβάνομεν $\delta' = \frac{1}{2}\pi$, ὅπερ δίδει τὴν εὐθεῖαν ΛΛ′.

322. Τὴν ἑστίαν τῆς παραβολῆς εὑρίσκομεν καὶ ἀμέσως, ἀναχωροῦντες ἀπὸ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτῆς [320], διὰ μεθόδου ὁμοίας τῇ ἐν ταῖς προλαβούσαις δύο καμπύλαις. Ἔστωσαν χ′, ψ′, αἱ συντεταγμέναι τῆς ζητουμένης ἑστίας· χ, ψ, αἱ συντεταγμέναι σημείου τινος τῆς παραβολῆς. Καλοῦμεν δ τὸ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστημα τῶν σημείων τούτων, καὶ ἔχομεν

$$\delta^2 = (\chi - \chi')^2 + (\psi - \psi')^2 = \chi^2 - 2\chi\chi' + \chi'^2 + \psi^2 - 2\psi\psi' + \psi'^2.$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς δίδει $\psi = \sqrt{2\pi\chi}$. Λοιπὸν, ἵνα $\delta^2$ ᾖ συνέκθεσις λογικὴ τῆς χ, πρέπει $\psi' = 0$. Ἡ ὑπόθεσις αὕτη δίδει

$$\delta^2 = \chi^2 - 2\chi\chi' + \chi'^2 + 2\pi\chi = \chi^2 + 2(\pi - \chi')\chi + \chi'^2.$$

Ἐπειδὴ καὶ δ πρέπει νὰ ἦναι συνέκθεσις λογικὴ τῆς χ, ἀπαιτεῖται νὰ ἔχωμεν

$$(\pi - \chi')^2 = \chi'^2, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \chi' = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Λοιπόν, συνάγομεν ὅτι, *ἐν τῇ παραβολῇ μία ἑστία μόνη ὑπάρχει, κειμένη ἐπὶ τοῦ ἄξονος, ἐν ἀποστάσει* ἀπὸ τῆς *κορυφῆς ἴση τῷ τεταρτημορίῳ τῆς παραμέτρου.*

323. Καθιστῶντες $\frac{1}{2}\pi$ ἀντὶ $\chi'$ λαμβάνομεν

$$\delta = \chi + \frac{\pi}{2}.$$

(Σχ. 136). Ἐὰν λάβωμεν $\mathrm{AB} = \mathrm{AE} = \frac{1}{2}\pi$, καὶ ἄξωμεν ΒΛ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΧ, τὸ σημεῖον Ε ἔσεται ἡ τῆς παραβολῆς ἑστία, καὶ ΒΛ ἡ διευθετοῦσα. Ἐὰν δὲ ἄξωμεν ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου, Μ, τῆς καμπύλης τὴν διαβατικὴν ἀκτῖνα ΕΜ, καὶ τὰς εὐθείας ΜΠ, ΜΚ, πρὸς ὀρθὰς ἀμοιβαίως ἐπὶ ΑΧ, ΒΛ, ἕξομεν,

$$\mathrm{EM} = \chi + \tfrac{1}{2}\pi = \mathrm{A\Pi} + \mathrm{AB} = \mathrm{MK}.$$

Λοιπόν, εὑρίσκομεν ἐκ νέου τὸ ἐν § 321 θεώρημα.

324. Ἔστω σημεῖον τὸ Ν, ἐκτὸς τῆς παραβολῆς· ἄγομεν ἀπ' αὐτοῦ ΝΚ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν διευθετοῦσαν, καὶ προεκβάλλομεν αὐτὴν μέχρισοῦ συμπέσει τῇ καμπύλῃ κατὰ τὸ Μ· ἐπιζευγνύομεν τὴν ἑστίαν Ε πρὸς τὰ σημεῖα Μ, Ν. Ἔχομεν

$$\mathrm{EN} + \mathrm{MN} > \mathrm{EM}, \qquad \text{καὶ} \qquad \mathrm{EM} = \mathrm{KM} = \mathrm{KN} + \mathrm{MN}\cdot$$

ἄρα,

$$\mathrm{EN} + \mathrm{MN} > \mathrm{KN} + \mathrm{MN}, \qquad \text{ἢ} \qquad \mathrm{EN} > \mathrm{KN}.$$

Διὰ σημεῖον, Ν', ἐντὸς ἔχομεν,

$\mathrm{EN'} < \mathrm{MN'} + \mathrm{EM}$. Ἀλλὰ $\mathrm{MN'} + \mathrm{EM} = \mathrm{MN'} + \mathrm{MK} = \mathrm{KN'}\cdot$

ἐπομένως $\mathrm{EN'} < \mathrm{KN'}$.

Λοιπόν, *τὸ ἀπόστημα παντὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου τῆς παραβολῆς ἀπὸ τῆς ἑστίας, ἰσοῦται τῷ ἀποστήματι αὐτοῦ ἀπὸ τῆς διευθετούσης, ἢ εἶναι μεῖζον, ἢ ἔλαττον αὐτοῦ, καθ' ὅσον τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἐπὶ τῆς καμπύλης, ἢ ἐκτός, ἢ ἐντὸς αὐτῆς.*



325. Εὐκόλως κατασκευάζομεν παραβολὴν γνωστῆς οὔσης τῆς παραμέτρου αὐτῆς 2π. (Σχ. 137) Λαμβάνομεν $\mathrm{AB} = \mathrm{AE} = \frac{1}{2}\pi$, γράφομεν τὴν διευθετοῦσαν ΑΑ', ἀπὸ δὲ σημείου τινος Π ἄγομεν ΠΘ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸν ἄξονα· εἶτα, κέντρῳ Ε καὶ ἀκτῖνι ΒΠ, γράφομεν τόξον κύκλου τέμνον τὴν ΠΘ κατὰ τὰ σημεῖα Μ, Ν. Τὰ σημεῖα ταῦτα ἀνήκουσι τῇ παραβολῇ· διότι ἐξίσου ἀφίστανται τῆς ἑστίας Ε καὶ τῆς διευθετούσης ΑΑ'.

Ἡ παραβολὴ γράφεται καὶ διὰ συνεχοῦς κινήσεως. Παρὰ τῇ διευθετούσῃ ΒΑ θέτομεν τρίγωνον ὀρθογώνιον κινητόν, τὸ ΖΚΡ· λαμβάνομεν νῆμα ἴσον ΚΡ, οὗτινος στερεοῦμεν τὰ δύο πέρατα, τὸ μὲν ἐπὶ τὸ σημεῖον Ρ, τὸ δὲ ἐπὶ τὴν ἑστίαν. Τείνομεν τὸ νῆμα διά τινος ἥλου προσαρμοζομένου ὀρθῶς παρὰ τῇ ΚΡ· κινοῦμεν τὸ τρίγωνον κατὰ μῆκος τῆς διευθετούσης. Ἡ ἀκμὴ τοῦ ἥλου καταγράφει οὕτω τὴν παραβολήν. Τῷ ὄντι, ἔχομεν ἀείποτε,

$$\mathrm{EM} + \mathrm{MP} = \mathrm{KM} + \mathrm{MP}, \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathrm{EM} = \mathrm{KM}.$$

Λοιπόν, τὸ Μ εἶναι σημεῖον τῆς παραβολῆς.

326. Ἡ ἐν § 321 ἰδιότης τῆς παραβολῆς χαρακτηρίζει τὴν καμπύλην ταύτην, ὡς δείξομεν τῇ ἐπιλύσει τοῦ ἑξῆς προβλήματος.

*Καμπύλην εὑρεῖν, ἧς ἕκαστον σημεῖον ἀπέχει ἐξίσου ἀπὸ σημείου δοθέντος Ε καὶ ἀπὸ εὐθείας δοθείσης ΑΑ'.*

(Σχ. 137). Ἄγομεν ΒΕΧ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΑ', ἀπὸ δὲ τοῦ μέσου Α τοῦ ἀποστήματος ΒΕ, τὴν ΑΨ κάθετον ἐπὶ ΑΧ. Λαμβάνομεν τὰς γραμμὰς ΑΧ, ΑΨ, ὡς ἄξονας τῶν συντεταγμένων· διὰ τὸν λόγον ὅτι ἡ καμπύλη ἔσεται συμμετρικὴ πρὸς τὴν ΑΧ, μεθ' ἧς ἕξει κοινὸν τὸ σημεῖον Α. Ἔστω Μ σημεῖόν τι τῆς καμπύλης, ΑΠ ἡ τετμημένη αὐτοῦ καὶ ΜΠ ἡ τεταγμένη. Ἄγομεν ΜΚ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ΑΑ'. Καλοῦμεν

$$\mathrm{AE} = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad \mathrm{A\Pi} = \chi, \qquad \mathrm{M\Pi} = \psi.$$

Ἔχομεν

$$\overline{\mathrm{EM}}^2 = \psi^2 + (\chi - \tfrac{1}{2}\pi)^2, \qquad \mathrm{MK} = \chi + \tfrac{1}{2}\pi.$$

Ἀλλὰ ΕΜ = ΜΚ· ἄρα,

$$\psi^2+(\chi-\tfrac{1}{2}\pi)^2=(\chi+\tfrac{1}{2}\pi)^2.$$

ὅθεν συνάγομεν, μετὰ τὰς ἀναγωγάς,

$$\psi^2=2\pi\chi.$$

## ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΚΑΘΕΤΟΥ.

327. Ἔστωσαν $\chi', \psi'$ καὶ $\chi'', \psi''$, αἱ συντεταγμέναι δύο σημείων τῆς παραβολῆς. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰ σημεῖα ταῦτα εὐθείας ἔσεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\psi-\psi'=\frac{\psi'-\psi''}{\chi'-\chi''}(\chi-\chi').$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ σημεῖα εἰσὶν ἐπὶ τῆς παραβολῆς, ἔχομεν

$$\psi'^2=2\pi\chi', \qquad \psi''^2=2\pi\chi''.$$

Κατὰ πρῶτον λαμβάνομεν

$$\psi'^2-\psi''^2=2\pi(\chi'-\chi''), \quad \text{ὅθεν} \quad \frac{\psi'-\psi''}{\chi'-\chi''}=\frac{2\pi}{\psi'+\psi''}.$$

Ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς τεμνούσης καθίσταται

$$\psi-\psi'=\frac{2\pi}{\psi'+\psi''}(\chi-\chi').$$

Ὅταν τὸ δεύτερον σημεῖον ταυτισθῇ τῷ πρώτῳ, τότε $\chi''=\chi'$, καὶ $\psi''=\psi'$, ἡ δὲ τέμνουσα καθίσταται ἐφαπτομένη. Οὕτως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν ἐμφαίνουσαν τὴν τελευταίαν ταύτην εὐθεῖαν

$$\psi-\psi'=\frac{\pi}{\psi'}(\chi-\chi'),$$

ἢ ἁπλοποιοῦντες τῇ σχέσει $\psi'^2=2\pi\chi'$,

(ε) $$\psi'\psi=\pi(\chi+\chi').$$



328. Ἀφαιροῦντες τὸ διπλάσιον τῆς ἐξισώσεως (ε) ἀπὸ τῆς $\psi'^2=2\pi\chi'$, καὶ προσθέτοντες $\psi^2$ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ ἐξαγομένου, λαμβάνομεν

$$(\psi-\psi')^2=\psi^2-2\pi\chi.$$

Λοιπόν, ἡ ποσότης $\psi^2-2\pi\chi$, μένει θετικὴ δι' ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς ἐφαπτομένης, πλὴν τοῦ ἔχοντος τεταγμένην $\psi'$· ἄρα ἅπαντα τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται ἐκτὸς τῆς παραβολῆς [317].

329. Καλοῦντες $\sigma$ τὴν τριγωνομετρικὴν ἐφαπτομένην τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης τῆς παραβολῆς καὶ τοῦ ἄξονος τῶν $\chi$, ἔχομεν

$$\sigma=\frac{\pi}{\psi'}.$$

Ἡ ὑπόθεσις $\psi'=0$, δίδει $\sigma=\infty$. Ἄρα, ἡ κατὰ τὴν κορυφὴν τῆς παραβολῆς ἐφαπτομένη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα. Αὐξανομένης $\psi'$ θετικῶς ἐπ' ἄπειρον, $\sigma$ ἐλαττοῦται μέχρι μηδενός. Λοιπόν, ἡ ἐφαπτομένη τείνει ἀδιακόπως πρὸς τὸ κατασταθῆναι παράλληλος τῷ ἄξονι.

330. (Σχ. 138). Ἵνα ὁρίσωμεν τὸ σημεῖον Τ καθ' ὃ ἡ ἐφαπτομένη συμπίπτει τῷ ἄξονι τῶν $\chi$, καθιστῶμεν $\psi=0$ ἐν τῇ ἐξισώσει (ε), καὶ ἔχομεν

$$\chi=-\chi'.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δείκνυσιν, ὅτι τὸ σημεῖον Τ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῶν ἀρνητικῶν $\chi$, ἐν ἀποστάσει ΑΤ ἴσῃ τῇ τετμημένῃ ΑΠ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς.

Ἔχομεν προσέτι τὴν ὑφαπτομένην

$$\Pi T=2\chi'.$$

Λοιπόν, *ἐν τῇ παραβολῇ, ἡ ὑφαπτομένη διπλασία ἐστὶ τῆς τετμημένης τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς.*

Ἡ τελευταία αὕτη ἰδιότης δείκνυσιν ἁπλουστάτην κατασκευὴν τῆς ἐφαπτομένης.

331. Εὐκόλως ἄγομεν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς ἀπὸ σημείου ἐξωτερικοῦ ($\chi''$, $\psi''$). Ἡ ἐξίσωσις τῆς ζητουμένης ἐφαπτομένης εἶναι

$$(\varepsilon) \qquad \psi'\psi = \pi(\chi + \chi'),$$

ἄγνωστοι δὲ εἰσὶν αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς $\chi'$, $\psi'$. Ἵνα ὁρίσωμεν αὐτάς, μορφοῦμεν τὰς ἑξῆς ἐξισώσεις, ὧν ἡ μὲν ἐμφαίνει ὅτι τὸ σημεῖον $\chi'$, $\psi'$, εἶναι ἐπὶ τῆς καμπύλης, ἡ δὲ ὅτι ἡ ἐφαπτομένη διέρχεται τοῦ δοθέντος σημείου,

$$\psi'^2 = 2\pi\chi', \qquad \psi''\psi' = \pi(\chi' + \chi'').$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἐξάγομεν,

$$\psi' = \psi'' \pm \sqrt{\psi''^2 - 2\pi\chi''}, \qquad \chi' = \frac{\psi''^2 - \pi\chi'' \pm \psi''\sqrt{\psi''^2 - 2\pi\chi''}}{\pi}.$$

Τῇ ἀντεισαγωγῇ τῶν τιμῶν τούτων ἐν τῇ ἐξισώσει ($\varepsilon$) ἐπιλύεται τὸ προκείμενον πρόβλημα.

Ὅταν τὸ σημεῖον δίδηται ἐκτὸς τῆς παραβολῆς, ἡ ὑπόρριζος ποσότης εἶναι θετική, αἱ δὲ δύο τιμαὶ τῆς $\chi'$ καὶ τῆς $\psi'$ εἰσὶ πραγματικαὶ καὶ ἄνισαι. Τότε ὑπάρχουσι δύο ἐφαπτόμεναι.

Ὅταν τὸ δοθὲν σημεῖον ἦναι ἐπὶ τῆς καμπύλης, αἱ δύο τιμαὶ αὗται ἄγονται εἰς μίαν. Τότε ἔχομεν μίαν ἐφαπτομένην.

Τέλος, ὅταν τὸ δοθὲν σημεῖον ἦναι ἐσωτερικόν, αἱ τιμαὶ τῆς $\chi'$ καὶ τῆς $\psi'$ εἰσὶ φανταστικαί. Ἄρα δὲν ὑπάρχει ἐφαπτομένη.

332. Ζητήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπὶ τὴν παραβολὴν καθέτου κατὰ τὸ σημεῖον οὗτινος αἱ συντεταγμέναι εἰσὶ $\chi'$, $\psi'$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔσεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\psi - \psi' = \sigma'(\chi - \chi').$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ κάθετος καὶ ἡ ἐφαπτομένη τέμνονται πρὸς ὀρθάς, ἔχομεν

$$\sigma' = -\frac{1}{\sigma} = -\frac{\psi'}{\pi}.$$



Ἑπομένως λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς καθέτου

$$(\kappa) \qquad \psi - \psi' = -\frac{\psi'}{\pi}(\chi - \chi').$$

Ἐκ ταύτης συνάγομεν τὴν τιμὴν τῆς ὑποκαθέτου (Σχ. 138),

$$\Pi\Sigma = \chi - \chi' = \pi.$$

Λοιπόν, *ἐν τῇ παραβολῇ ἡ ὑποκάθετος εἶναι ἄτρεπτος καὶ ἴση τῇ ἡμιπαραμέτρῳ.*

333. (Σχ. 138), Ε οὔσης τῆς ἑστίας τῆς παραβολῆς, εἴδομεν ὅτι $\mathrm{AE} = \frac{\pi}{2}$, καὶ $\mathrm{EM} = \chi + \frac{1}{2}\pi$. Διὰ τὴν κατὰ τὸ σημεῖον Μ ἐφαπτομένην ΜΤ, ἔχομεν $\mathrm{AT} = \chi$. Ἑπομένως $\mathrm{TE} = \chi + \frac{1}{2}\pi$· ἄρα, $\mathrm{EM} = \mathrm{ET}$, καί, κατὰ συνέπειαν, ἡ γωνία ΤΜΕ ἰσοῦται τῇ ΕΤΜ. Λοιπόν, *ἐν τῇ παραβολῇ, ἡ ἐφαπτομένη σχηματίζει πρὸς τὸν ἄξονα καὶ πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν διαβατικὴν ἀκτῖνα γωνίας ἴσας.*

Ἄγομεν ΜΗ παράλληλον τῷ ἄξονι· ἡ γωνία ΡΜΗ ἰσοῦται τῇ ΕΤΜ. Ἄρα λέγομεν καὶ ὅτι, *ἡ ἐφαπτομένη σχηματίζει γωνίας ἴσας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς ἀγομένην παράλληλον τῷ ἄξονι, καὶ πρὸς τὴν διαβατικὴν ἀκτῖνα.*

Ἐνταῦθα διακρίνομεν θεώρημα σύστοιχον τῷ ἐν § 223, ὅπερ συνέπεια ἐστὶ τοῦ ὅτι, ἡ παραβολὴ εἶναι ἔλλειψις ἧς ἡ ἑτέρα τῶν ἑστιῶν κεῖται εἰς τὸ ἄπειρον.

334. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν μέθοδον τοῦ γράφειν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς ἀπὸ σημείου δοθέντος.

Πρῶτον ὑποθέσομεν δοθὲν τὸ σημεῖον Μ (Σχ. 139) ἐπὶ τῆς καμπύλης. Ἐπιζευγνύομεν τὴν διαβατικὴν ἀκτῖνα ΕΜ, λαμβάνομεν $\mathrm{ET} = \mathrm{EM}$, καὶ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΜΤ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.

Πρὸς δεῖξιν, ἄγομεν τὴν διευθετοῦσαν ΒΑ ἐν ἀποστάσει $\mathrm{AB} = \mathrm{AE} = \frac{1}{2}\pi$, καὶ ΚΜ παράλληλον τῷ ἄξονι μέχρι τοῦ Κ ἐπὶ τῆς διευθετούσης· εἶτα ἐπιζευγνύομεν τὸ σημεῖον τοῦτο τῇ ἑστίᾳ. Ἐκ τῆς φύσεως τῆς καμπύλης δῆλον ὅτι $\mathrm{KM} = \mathrm{EM}$, καὶ ἐκ τῆς κατασκευῆς ὅτι ἡ γωνία ΚΜΤ = ΤΜΕ· ἄρα ΜΤ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ μέσον τῆς ΕΚ. Ζευγνύομεν τὸ τυχὸν σημεῖον Ρ τῆς ΜΤ τῇ ἑστίᾳ, ἄγομεν ΑΡ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ ΒΑ, καὶ ζευγνύομεν τὴν ΚΡ. Ἔχομεν

$$ΕΡ = ΚΡ' \quad ἀλλὰ \quad ΚΡ > ΑΡ, \quad ἄρα \quad ΕΡ > ΑΡ.$$

Λοιπόν, πᾶν σημεῖον τῆς ΜΤ, πλὴν τοῦ Μ, εἶναι ἐκτὸς τῆς παραβολῆς [324].

*Παρατήρησις.* Τὸ σημεῖον Α εἶναι μέσον τῆς ΒΕ· ἄρα, ἡ ΑΥ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, διέρχεται τοῦ σημείου Ο μέσου τῆς ΕΚ. Ἀλλ' ἡ ἐφαπτομένη ΡΤ διέρχεται τοῦ σημείου τούτου κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν ΕΟ. Ἄρα, *ἐν τῇ παραβολῇ, ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ποδῶν, τῶν ἀπὸ τῆς ἑστίας ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας τῆς καμπύλης ἀγομένων καθέτων, εἶναι ἡ ἀγομένη εὐθεῖα ἀπὸ τῆς κορυφῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸν ἄξονα.*

335. Τεθείσθω ἤδη ὅτι τὸ δοθὲν σημεῖον Τ (Σχ. 140) εἶναι ἐκτὸς τῆς παραβολῆς. Ἔστω Μ τὸ τῆς ἐπαφῆς σημεῖον, καὶ ΜΤ ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη. Ζευγνύομεν τὸ σημεῖον Μ τῇ ἑστίᾳ, καὶ ἄγομεν ΜΚ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ΑΑ'· ἡ ἐφαπτομένη ἔσεται κάθετος ἐπὶ τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΕΚ. Τὰ ἀποστήματα ΕΤ, ΚΤ, εἰσὶν ἴσα. Λοιπόν, τὸ σημεῖον Κ ὁρίζεται τῇ τομῇ τῆς διευθετούσης ὑπὸ τοῦ γραφομένου κύκλου κέντρῳ μὲν τῷ Τ ἀκτῖνι δὲ ΕΡ. Τότε ζευγνύομεν τὴν ΕΚ, καὶ ἄγομεν ΤΡ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ΕΚ· ἡ γραμμὴ αὕτη εἶναι ἐφαπτομένη, τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς ἡ τομὴ τῆς ἐφαπτομένης ταύτης ὑπὸ τῆς παραλλήλου ΚΜ τῷ ἄξονι.

Ὅταν τὸ σημεῖον Τ ἦναι ἐκτὸς τῆς παραβολῆς, τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ ΤΕ ἀπὸ τῆς ἑστίας, μεῖζον εἶναι τοῦ ἀποστήματος αὐτοῦ ἀπὸ τῆς διευθετούσης· ἄρα, ἡ περιφέρεια τέμνει τὴν τελευταίαν ταύτην κατὰ δύο σημεῖα Κ, Κ', ὑπάρχουσι δὲ δύο ἐφαπτόμεναι.

Ὅταν τὸ σημεῖον Τ ἦναι ἐπὶ τῆς παραβολῆς, τὸ ἀπὸ τῆς ἑστίας ἀπόστημα αὐτοῦ ἰσοῦται τῷ ἀποστήματι ἀπὸ τῆς διευθετούσης· λοιπόν, ὁ κύκλος ἐφάπτεται τῆς εὐθείας ταύτης, μίαν δὲ ἐφαπτομένην ἔχομεν.



Τέλος, ὅταν τὸ σημεῖον Τ ἦναι ἐσωτερικόν, τὸ πρῶτον ἀπόστημα ἔλαττον εἶναι τοῦ δευτέρου· ὁ κύκλος δὲν προχωρεῖ μέχρι τῆς διευθετούσης· ἐπομένως δὲν ὑπάρχει ἐφαπτομένη.

336. Τὴν προηγουμένην κατασκευὴν δυνάμεθα θεωρῆσαι ὡς τροποποίησιν τῆς ἐν τῇ ἐλλείψει δοθείσης [226]. (Σχ. 141) Ἐν τῇ ἐλλείψει, γράφομεν περιφέρειαν, τὴν ΑΒΑ', κέντρῳ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἑστιῶν, Ε', ἀκτῖνι δὲ ἴσῃ τῷ μείζονι ἄξονι ΑΑ'· εἶτα γράφομεν ἑτέραν περιφέρειαν, κέντρῳ τῷ δοθέντι σημείῳ Τ, ἀκτῖνι δὲ ἴσῃ τῷ ἀποστήματι ΤΕ τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τῆς ἑτέρας ἑστίας Ε. Τὸ σημεῖον Κ εἶναι ἡ μία τομὴ τῶν δύο τούτων περιφερειῶν. Ζευγνύομεν τὴν ΚΕ, ἄγομεν ΤΡ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ΕΚ, καὶ ζευγνύομεν τὴν ΚΕ' τέμνουσαν τὴν ΡΤ κατὰ τὸ σημεῖον Μ. ΤΡ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη καὶ Μ τὸ τῆς ἐπαφῆς σημεῖον.

Φαντασθῶμεν ἤδη, ὅτι ἡ ἔλλειψις ἐξακολουθεῖ ἔχουσα τὸ σημεῖον Α κορυφὴν καὶ τὸ Ε ἑστίαν, καὶ ὅτι ὁ μείζων αὐτῆς ἄξων καθίσταται ἄπειρος. Τὰ σημεῖα Α', Ε', θέλουσιν ἀπομακρυνθῇ ἐπ' ἄπειρον· ἀλλ' ἐπειδὴ ΑΒ = Α'Ε' = ΑΕ, ἡ περιφέρεια ΑΒΑ' ἐξακολουθήσει μονίμως τέμνουσα τὸν ἄξονα κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον Β. Ἐν τῷ ὁρίῳ, ἡ μὲν ἔλλειψις καθίσταται παραβολή, ἡ δὲ περιφέρεια καθίσταται ἡ διευθετοῦσα τῆς παραβολῆς, καὶ ἡ γραμμὴ ΚΕ' παράλληλος τῷ ἄξονι· οὕτω καταντῶμεν εἰς τὴν ἁρμόζουσαν τῇ παραβολῇ κατασκευήν.

337. Ἀξία λόγου εἶναι ἡ περίπτωσις ἐν ᾗ αἱ ἐφαπτόμεναι ἀναχωροῦσιν ἀπὸ σημείου τῆς διευθετούσης. (Σχ. 142) Ἔστω Τ τὸ σημεῖον τοῦτο, καὶ ΤΜ, ΤΜ', αἱ ἐφαπτόμεναι. Ζευγνύομεν τὰς εὐθείας ΕΤ, ΕΜ, ΕΜ', καὶ ἄγομεν ΜΚ, Μ'Κ', πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν διευθετοῦσαν. Τὰ τρίγωνα ΤΚΜ, ΤΕΜ, εἰσὶν ἰσάλληλα· ἄρα ἡ γωνία ΤΕΜ, ἴση τῇ ΜΚΤ, εἶναι ὀρθή, καὶ ἡ γωνία ΚΤΜ = ΕΤΜ. Ἐπίσης τὰ τρίγωνα ΤΜ'Κ', ΤΜ'Ε, εἰσὶν ἴσα, δεικνύοντα ὅτι ἡ γωνία ΤΕΜ' εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ Κ'ΤΜ' ἴση τῇ ΕΤΜ'.

Ἐκ τοῦ ὅτι αἱ γωνίαι ΤΕΜ, ΤΕΜ', εἰσὶν ὀρθαί, ἕπεται ὅτι τὰ σημεῖα Μ, Ε, Μ', εἰσὶν ἐν εὐθυγραμμίᾳ. Ἐπειδὴ προσέτι αἱ γωνίαι ΕΤΜ, ΕΤΜ', ἰσοῦνται ταῖς ΚΤΜ, Κ'ΤΜ', συνάγομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται ὀρθῇ· ἄρα, καὶ ἡ γωνία ΜΤΜ' εἶναι ὀρθή. Λοιπὸν, ἔχομεν τὸ ἀξιοπαρατήρητον ἑξῆς θεώρημα.

*Ἐν τῇ παραβολῇ, αἱ ἀπὸ σημείου τῆς διευθετούσης ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι τέμνονται πρὸς ὀρθάς· ἡ δὲ ἐπιζευγνύουσα τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς εὐθεῖα διέρχεται τῆς ἑστίας τέμνουσα πρὸς ὀρθὰς τὴν ἐπιζευγνύουσαν τὴν ἑστίαν τῷ σημείῳ ἀφ' οὗ ἀναχωροῦσιν αἱ ἐφαπτόμεναι.*

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΙΑΜΕΤΡΩΝ.

338. Ἔστω $\psi = \delta\chi + \beta$ ἡ ἐξίσωσις εὐθείας οἱασδήποτε. Συνδυάζοντες αὐτὴν τῇ ἐξισώσει $\psi^2 = 2\pi\chi$ τῆς παραβολῆς, πρὸς ἀπαλοιφὴν τῆς χ, λαμβάνομεν

$$\psi^2 - \frac{2\pi}{\delta}\psi + \frac{2\pi\beta}{\delta} = 0 .$$

Αἱ ῥίζαι τῆς τελευταίας ταύτης εἰσὶν αἱ τεταγμέναι τῶν σημείων καθ' ἃ ἡ εὐθεῖα συμπίπτει τῇ καμπύλῃ, ἡ δὲ τεταγμένη τοῦ μέσου τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰ σημεῖα ταῦτα χορδῆς, ἰσοῦται τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν δύο τούτων ῥιζῶν. Λοιπὸν, καλοῦντες ψ τὴν τεταγμένην ταύτην, ἔχομεν

$$\psi = \frac{\pi}{\delta} .$$

Ἡ τιμὴ αὕτη δὲν περιέχει β, μένει δὲ ἄτρεπτος ἐνόσῳ δ δὲν μεταβάλλεται. Ἄρα, *ἐν τῇ παραβολῇ, ἅπασαι αἱ διάμετροι παράλληλοι εἰσὶ τῷ ἄξονι αὐτῆς.*

Ἀντιστρόφως· *πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος τῷ ἄξονι διάμετρος ἐστὶ τῆς παραβολῆς.* Διότι, δίδοντες τῷ δ τιμὴν ἁρμόζουσαν, καθιστῶμεν ψ ἴσην οἱαδήποτε ποσότητι.

339. (Σχ. 143) ἔστω Α'Χ' διάμετρος, ἐν ἀποστάσει ψ' ἀπὸ τοῦ ἄξονος. Διὰ τὴν διάμετρον ταύτην ἔχομεν

$$\frac{\pi}{\delta} = \psi' , \qquad \text{ὅθεν} \qquad \delta = \frac{\pi}{\psi'} .$$



Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι ἡ τῆς τριγωνομετρικῆς ἐφαπτομένης τῆς γωνίας ἣν σχηματίζουσι πρὸς τὸν ἄξονα αἱ ὑπὸ τῆς διαμέτρου δίχα τεμνόμεναι χορδαί. Ἡ αὐτὴ τιμὴ εἶναι προσέτι ἡ τῆς τριγωνομετρικῆς ἐφαπτομένης τῆς γωνίας ἣν σχηματίζει πρὸς τὸν ἄξονα ἡ κατὰ τὸ σημεῖον Α' ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς [327]. Λοιπὸν, *ἐν τῇ παραβολῇ αἱ ὑπὸ διαμέτρου τινὸς δίχα τεμνόμεναι χορδαί, παράλληλοι εἰσὶ τῇ κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ταύτης ἐφαπτομένῃ τῆς καμπύλης.*

Ὅπως κατασταθῇ ἄπειρος ἡ ἐφαπτομένη δ, πρέπει $\psi' = 0$. Ἄρα, *ἡ γραμμὴ τῶν χ εἶναι μοναδικὸς ἄξων ἐν τῇ παραβολῇ.*

Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΗ ΠΡΟΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥΣ ΑΥΤΗΣ.

340. Ζητήσωμεν τὰ πλαγιογώνια συστήματα συντεταγμένων ἐν οἷς ἡ τῆς παραβολῆς ἐξίσωσις διατηρεῖ τὴν μορφὴν (π) $\qquad \psi^2 = 2\pi\chi .$

Πρὸς τοῦτο, λαμβάνομεν τοὺς τύπους [78],

$$\chi = \chi'\,\text{συν}\,\varphi + \psi'\,\text{συν}\,\varphi' + \alpha , \qquad \psi = \chi'\,\text{ἡμ}\,\varphi + \psi'\,\text{ἡμ}\,\varphi' + 6 ,$$

οὓς καθιστῶμεν ἀντὶ χ, ψ, ἐν τῇ ἐξισώσει (π). Προκύπτει ἡ μετασχηματισθεῖσα

$$(1) \qquad \text{ἡμ}^2\varphi'.\,\psi'^2 + \text{ἡμ}^2\varphi.\,\chi'^2 + 2\,\text{ἡμ}\,\varphi\,\text{ἡμ}\,\varphi'.\,\chi'\psi'$$
$$+ (2\,6\,\text{ἡμ}\varphi' - 2\pi\,\text{συν}\varphi')\,\psi' + (2\,6\,\text{ἡμ}\varphi - 2\pi\,\text{συν}\varphi)\,\chi' + 6^2 - 2\alpha\pi = 0 .$$

Ἵνα ἔχῃ ἡ ἐξίσωσις αὕτη τὴν ζητουμένην μορφὴν, πρέπει αἱ ἀόριστοι φ, φ', α, 6, νὰ ἐκπληρῶσι τὰς ἑξῆς σχέσεις·

$$(2) \qquad \begin{cases} \text{ἡμ}\,\varphi = 0 , & \text{ἡμ}\,\varphi\,\text{ἡμ}\,\varphi' = 0 , \\ 6\,\text{ἡμ}\,\varphi' - \pi\,\text{συν}\,\varphi' = 0 , & 6^2 - 2\pi\alpha = 0 . \end{cases}$$

Ἐπειδὴ ἡ δευτέρα εἶναι συνέπεια τῆς πρώτης, ἔχομεν μόνον τρεῖς σχέσεις μεταξὺ φ, φ', α, 6. Λοιπὸν, ὑπάρχουσι μυρία συστήματα ἀξόνων πλαγιογωνίων ἐν οἷς ἡ τῆς παραβολῆς ἐξίσωσις διατηρεῖ τὴν μορφὴν (π).

Ἡ σχέσις $\eta\mu\varphi = 0$ δείκνυσιν ὅτι, ὁ ἄξων τῶν $\chi$ ἑκάστου συστήματος εἶναι διάμετρος τῆς καμπύλης. Ἐκ τῆς $\beta^2 - 2\pi\alpha = 0$, συνάγομεν ὅτι, ἡ ἀρχὴ ἑκάστου συστήματος εἶναι σημεῖον τῆς παραβολῆς. Ἡ τιμὴ $\epsilon\varphi\varphi' = \frac{\pi}{\beta}$, ἐκ τῆς $\beta\eta\mu\varphi' - \pi\sigma\upsilon\nu\varphi' = 0$ ἐξαγομένη, δείκνυσιν ὅτι, ὁ ἄξων τῶν $\psi$ ἑκάστου συστήματος ἐφάπτεται τῆς καμπύλης.

Λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν σχέσεων (2), ἡ ἐξίσωσις (1) ἄγεται εἰς $\eta\mu^2\varphi'.\psi'^2 - 2\pi\chi' = 0$.
Παραλειπομένων τῶν τόνων τῶν $\chi$, $\psi$, καὶ διαιρουμένη διὰ $\eta\mu^2\varphi'$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη καθίσταται

$$\psi^2 = \frac{2\pi}{\eta\mu^2\varphi'}\chi.$$

ἤ, καλοῦντες

$$\frac{\pi}{\eta\mu^2\varphi'} = \pi',$$

$$(\pi,) \qquad \psi^2 = 2\pi'\chi.$$

Τὸν συντελεστὴν $2\pi'$ καλοῦσι *παράμετρον* τῆς διαμέτρου πρὸς ἣν ἡ παραβολὴ ἀναφέρεται.

Ἡ τιμὴ $\epsilon\varphi\,\varphi' = \frac{\pi}{\beta}$, δίδει,

$$\eta\mu^2\varphi' = \frac{\pi^2}{\beta^2 + \pi^2} = \frac{\pi^2}{2\pi\alpha + \pi^2} = \frac{\pi}{2\alpha + \pi},$$

ἐξ ἧς $\pi' = 2\alpha + \pi$· ἑπομένως $2\pi' = 4\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

Ἐπειδὴ $\alpha + \frac{1}{2}\pi$ εἶναι τὸ ἀπόστημα τῆς ἑστίας ἀπὸ τοῦ Α', συνάγομεν ὅτι· *ἐν τῇ παραβολῇ, ἡ παράμετρος πάσης διαμέτρου τετραπλασία ἐστὶ τοῦ ἀποστήματος τῆς ἑστίας ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς διαμέτρου ταύτης.*

341. Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς εἶναι ἡ αὐτὴ ἔν τε τῷ ἄξονι καὶ ἐν ταῖς διαμέτροις τῆς καμπύλης, ἕπεται



ὅτι αἱ ἀνεξάρτητοι ἀπὸ τῆς κλίσεως τῶν συντεταγμένων ἰδιότητες κοιναὶ εἰσὶ πρὸς τὰ διάφορα ταῦτα συστήματα. Λοιπόν·

1ον. Τὰ τετράγωνα τῶν πρός τινα διάμετρον τεταγμένων εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τετμημέναι [316].

2ον. Καθ' ὅσον σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς παραβολῆς, ἢ ἐκτὸς, ἢ ἐντὸς αὐτῆς, ἡ ποσότης $\psi^2 - 2\pi'\chi$ εἶναι μηδὲν, θετική, ἢ ἀρνητική [317].

3ον. Ἔστω σ ὁ λόγος ἡμιτόνων, ἴσος τῷ συντελεστῇ τῆς $\chi$ ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς ἐφαπτομένης· ἔχομεν [327],

$$\sigma = \frac{\pi'}{\psi'}.$$

Ἡ ἐξίσωσις δὲ τῆς ἐφαπτομένης εἶναι

$$\psi'\psi = \pi'(\chi + \chi'),$$

καὶ ἡ τιμὴ τῆς ὑφαπτομένης [330] $\Pi'T' = 2\chi'$.

Λοιπὸν, *ἡ ὑφαπτομένη ἀείποτε ἐστὶ διπλασία τῆς τετμημένης τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς.*

342. Εὐθείας δοθείσης ἐν τῷ τῆς παραβολῆς ἐπιπέδῳ, ἐὰν ἄξωμεν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης παράλληλον τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ, καὶ τὴν διάμετρον ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς, ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ἐν τῷ δε τῷ συστήματι ἀξόνων ἔσεται $\psi^2 = 2\pi'\chi$.

Ἄξωμεν, ἀπὸ σημείου τῆς δοθείσης εὐθείας, δύο ἐφαπτομένας τῆς παραβολῆς. Ἔστωσαν $\chi''$, $\psi''$, αἱ τοῦ σημείου τούτου συντεταγμέναι· ἔχομεν [331] πρὸς ὁρισμὸν τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων τῆς ἐπαφῆς, τὰς ἐξισώσεις,

$$\psi'^2 = 2\pi'\chi', \qquad \psi''\psi' = \pi'(\chi' + \chi'').$$

Ἡ δευτέρα ἐμφαίνει τὴν ἐπιζευγνύουσαν τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς εὐθεῖαν. Ἡ ὑπόθεσις ἐν αὐτῇ $\psi' = 0$, δίδει $\chi' = -\chi''$, ἐξαγόμενον μὴ ἐξαρτώμενον ἀπὸ τῆς $\psi''$, δεικνῦον δὲ ὑπάρχον ἐν τῇ παραβολῇ τὸ εὑρεθὲν ἤδη θεώρημα ἔν τε τῇ ἐλλείψει καὶ τῇ ὑπερβολῇ [248, 296.] Λοιπὸν, ἐν γένει·

*Ἐὰν, ἀφ' ἑκάστου σημείου εὐθείας δοθείσης ἄξωμεν ἐφαπτομένας καμπύλης τινος δευτέρας τάξεως, καὶ ἑνώσωμεν τὰ δύο σημεῖα ἐπαφῆς, λαμβάνομεν τεμνούσας, αἵτινες ἅπασαι συμπίπτουσι κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τῇ διαμέτρῳ διχοτομούσῃ τὰς παραλλήλους τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ χορδάς.*

Ἀντιστρόφως· *ἐὰν ἀπὸ σημείου δοθέντος ἐν τῷ ἐπιπέδῳ καμπύλης τῆς δευτέρας τάξεως, ἄξωμεν διαφόρους τεμνούσας, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων καθ' ἃ ἑκάστη τούτων τέμνει τὴν καμπύλην, ἄξωμεν ἐφαπτομένας, ὁ τόπος τῶν σημείων συνδρομῆς ἑκάστου ζεύγους τῶν ἐφαπτομένων τούτων, ἔσεται εὐθεῖα παράλληλος τῶν χορδῶν ἃς διχοτομεῖ ἡ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου ἀγομένη διάμετρος.*

343. Τῇ πρὸς ἀλλήλας συγκρίσει τῶν ἐξισώσεων $(\pi)$, $(\pi_{,})$, συνάγομεν ὅτι, ἵνα γράψωμεν παραβολὴν, ἧς γνωσταί εἰσὶν ἡ παράμετρος διαμέτρου τινος καὶ ἡ κλίσις τῶν ἀντιστοιχουσῶν χορδῶν, γράφομεν πρῶτον παραβολὴν ἐπὶ τὴν διάμετρον ταύτην, ὡς ἄξονα λαμβανομένην, τῇ δοθείσῃ παραμέτρῳ· εἶτα κλίνομεν κατὰ τὴν γνωστὴν γωνίαν τὰς τεταγμένας τῆς καμπύλης ταύτης, διατηροῦντες ἀναλλοίωτα τὰ μήκη αὐτῶν.

Δυνάμεθα προσέτι ὁρίσαι πρῶτον τὴν ἑστίαν καὶ τὴν διευθετοῦσαν. (Σχ. 144) Ἔστω Α΄Χ΄ ἡ δοθεῖσα διάμετρος, καὶ Α΄ τὸ ἐπὶ τὴν καμπύλην πέρας αὐτῆς· ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν Ψ΄Α΄Τ ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν κλίσιν· ἡ γραμμὴ αὕτη ἔσεται ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς [339] κατὰ τὸ σημεῖον Α΄. Κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ΤΑ΄Ε = Ψ΄Α΄Χ΄· ἡ γραμμὴ Α΄Ε διέρχεται τῆς ἑστίας [333]. Λαμβάνομεν Α΄Ε ἴσην τῷ τεταρτημορίῳ τῆς δοθείσης παραμέτρου· τὸ σημεῖον Ε ἔσεται ἡ ἑστία [340]. Ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς Α΄Χ΄ λαμβάνομεν τὸ ἀπόστημα Α΄Γ = Α΄Ε· ἄγομεν ΓΛ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν Α΄Χ΄· ἡ εὐθεῖα αὕτη ἔσεται ἡ διευθετοῦσα [323].



ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ.

344. (Σχ. 145). Ἔστω ΑΠΜ χωρίον παραβολικὸν, ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τῆς διαμέτρου ΑΧ΄ καὶ τῆς τεταγμένης ΜΠ παραλλήλου τῆς ἐφαπτομένης ΑΦ. Ζητεῖται εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

Ἐγγράφομεν τῷ τόξῳ τῆς παραβολῆς πολύγωνον, ἀπὸ τῶν κορυφῶν τοῦ ὁποίου ἄγομεν τὰς τεταγμένας Μ΄Π΄, Π΄΄Μ΄΄, κ.τ.ἑ., καὶ τὰς ἐφαπτομμένας ΜΤ, Μ΄Τ΄, Μ΄΄Τ΄΄, . . . . Αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται συγκροτοῦσι, διὰ τῶν διαδοχικῶν τομῶν αὐτῶν ὑπ' ἀλλήλων, τρίγωνα ΤΡΤ΄, Τ΄Ρ΄Τ΄΄, . . . . ἅτινα συγκρινοῦμεν τοῖς συστοίχοις τραπεζίοις ΠΜΜ΄Π΄, Π΄Μ΄Μ΄΄Π΄΄, . . . .

Ἀπὸ τοῦ σημείου Ρ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ι μέσου τῆς χορδῆς ΜΜ΄, ἄγομεν ΡΛ καὶ ΙΚ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ΑΧ΄· ἔχομεν

*ἐμβαδὸν* ΤΡΤ΄ $=\frac{1}{2}$ΤΤ΄ $\times$ ΡΛ· *ἐμβαδὸν* ΠΜΜ΄Π΄ = ΠΠ΄ $\times$ ΙΚ.

Ἐκ τοῦ ὅτι ΜΤ εἶναι ἐφαπτομένη, [341] συνάγομεν ὅτι ΑΤ = ΑΠ· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΑΤ΄ = ΑΠ΄· ἄρα, ΤΤ΄ = ΠΠ΄. Προσέτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ σημείου Ι ἄξωμεν ΙΗ παράλληλον τῇ ΑΧ΄, ἡ παράλληλος αὕτη ἔσεται διάμετρος [338], αἱ δὲ κατὰ τὰ σημεῖα Μ, Μ΄, ἐφαπτόμεναι τεμοῦσιν αὐτὴν κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ἄρα, τὸ σημεῖον Ρ κεῖται ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΙΗ, ἡ δὲ ΡΛ ἰσοῦται ΙΚ. Ἄρα, τὸ τραπέζιον διπλοῦν ἐστὶ τοῦ τριγώνου. Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι καὶ τὸ τραπέζιον Π΄Μ΄Μ΄΄Π΄΄ εἶναι διπλοῦν τοῦ τριγώνου Τ΄Ρ΄Τ΄΄· κ.τ.ἑ. Ἄρα, τὸ ἄθροισμα τῶν τραπεζίων εἶναι διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριγώνων. Ἡ πρότασις αὕτη, ἀνεξάρτητος οὖσα τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τοῦ μεγέθους τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, εἶναι ἀληθὴς καὶ ὅταν ὁ ἀριθμὸς οὗτος κατασταθῇ μείζων παντὸς μεγέθους δεδομένου. Λοιπὸν, συνάγομεν ὅτι, τὸ παραβολικὸν χωρίον ΑΠΜ, ὅπερ εἶναι τὸ ὅριον τοῦ πρώτου ἀθροίσματος, εἶναι διπλοῦν τοῦ ἐξωτερικοῦ χωρίου ΑΜΤ, ὅριον τοῦ δευτέρου ἀθροίσματος. Ἄρα, τὸ χωρίον ΑΠΜ, διπλοῦν τοῦ ΑΜΤ, ἰσοῦται δυσὶ τριτημορίοις τοῦ εὐθυγράμμου τριγώνου ΤΜΠ. Τὸ τρίγωνον ΤΜΠ ἰσοδυναμεῖ τῷ παραλληλογράμμῳ ΑΠΜΦ, οὗτινος τὸ μὲν ὕψος εἶναι τὸ αὐτὸ, ἡ δὲ βάσις ΑΠ τὸ ἥμισυ τῆς ΤΠ.

Λοιπὸν, *τὸ παραβολικὸν χωρίον* ΑΠΜ *ἰσοῦται δυσὶ τριτημορίοις τοῦ κατασκευαζομένου παραλληλογράμμου ἐπὶ τὰς συντεταγμένας* ΑΠ, ΜΠ.

ΣΗΜ. Τὸ παραβολικὸν χωρίον ΑΜ''Μ'ΜΑ, ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τοῦ παραβολικοῦ τόξου ΑΜ καὶ τῆς χορδῆς τούτου, (παραλειφθείσης ἐπὶ τοῦ Σχ. 145), εἶναι τὸ ἑκτημόριον τοῦ παραλληλογράμμου ΑΠΜΦ.

345. Ἕπονται προβλήματά τινα πρὸς ἄσκησιν.

1) *Ἀπὸ σημείου δοθέντος ἐκτὸς, κάθετον ἐπὶ τὴν παραβολὴν ἀγαγεῖν.*

2) *Τίνι τρόπῳ ἡ* (1) *ἐν* §§ 254 *καὶ* 313, *πρότασις, ἐφαρμόζεται ἐν τῇ περιπτώσει τῆς παραβολῆς.*

3) *Τόξου παραβολικοῦ δοθέντος, εὑρεῖν γεωμετρικῶς τὸν ἄξονα, τὴν ἑστίαν, καὶ τὴν τοῦ ἄξονος παράμετρον.*

4) *Τόξου καμπύλης δευτεροταγοῦς δοθέντος, ὁρίσαι τὸ γένος αὐτῆς.*

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ'.

## ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΤΟΥ ΚΩΝΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΤΟΜΩΝ.

### ΤΟΜΑΙ ΚΩΝΙΚΑΙ — ΤΑΥΤΟΤΗΣ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΤΟΥΤΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ.

346. Αἱ καμπύλαι τῆς δευτέρας τάξεως καλοῦνται προσέτι *τομαὶ κωνικαί*· διότι τοιαῦται καμπύλαι προκύπτουσιν ἐπὶ κώνου ἐπιπέδῳ τεμνομένου, ὡς ἑξῆς δειχθήσεται.

(Σχ. 146) Ὑποθέτομεν τὸν κῶνον ὀρθὸν, βάσιν κυκλικὴν ἔχοντα. Ἔστω ΜΑΝ ἡ περὶ ἧς λόγος καμπύλη· Ἀπὸ τοῦ ἄξονος Φ'Φ τοῦ κώνου ἄγομεν ἐπίπεδον ὀρθὸν ἐπὶ τὸ τῆς τομῆς. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τεμεῖ τὴν μὲν κωνικὴν ἐπιφάνειαν κατὰ δύο γεννητρίας ἀντιθέτους Ρ'Ρ, ΤΤ', τὸ δὲ τῆς τομῆς ἐπίπεδον κατὰ εὐθεῖαν, τὴν ΑΧ, ἣν λαμβάνομεν ὡς ἄξονα τῶν τετμημένων. Τὴν κάθετον ΑΨ, ἀγομένην ἐπὶ τὴν ΑΧ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΜΑΝ, λαμβάνομεν ὡς ἄξονα τῶν τεταγμένων. Ἀπὸ σημείου, Μ, τῆς τομῆς ἄγομεν τὴν τεταγμένην ΜΠ. Καλοῦμεν $ΑΠ = χ$, $ΜΠ = ψ$. Πρόκειται εὑρεῖν τὴν γενικὴν σχέσιν χ καὶ ψ πρὸς ἀλλήλας συνδέουσαν.

Τρεῖς περιπτώσεις διακριτέαι εἰσὶν, ἐφ' ὅσον τὸ ἴχνος ΑΧ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου συμπίπτει τῇ γεννητρίᾳ Τ'Τ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κορυφῆς Σ πρὸς ὃ καὶ τῇ Ρ'Ρ, ἢ κατὰ τὸ ἀντίθετον μέρος, ἢ εἶναι παράλληλον αὐτῇ.

347. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 1η· (Σχ. 146) Ἀπὸ τῶν σημείων Α, Β, καθ' ἃ τὸ ἴχνος ΑΧ τέμνει τὰς γεννητρίας ΣΡ, ΣΤ, ἄγομεν ΑΓ, ΒΔ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸν ἄξονα ΣΦ τοῦ κώνου. Ἀπὸ τοῦ σημείου Π ἄγομεν τὸ ἐπίπεδον ΕΖ κάθετον ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα, ὅπερ τέμνει τὸν κῶνον κατὰ κύκλον ΕΜΖ, διάμετρον ἔχοντα ΕΖ.

Καλοῦμεν, $ΑΒ = 2\alpha$, $ΒΔ = 2\zeta$, $ΑΓ = 2\eta$.

Η τεταγμένη ΜΠ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΣΒ (διότι τέμνει πρὸς ὀρθὰς τὴν ΑΧ, κεῖται δὲ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΑΝ ὀρθῷ ὄντι τῷ ΑΣΒ)· ἄρα τέμνει πρὸς ὀρθὰς τὴν διάμετρον ΕΖ. Ἔχομεν

$$\psi^2 = ΕΠ \times ΠΖ.$$

Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΕΠ, ΑΔΒ, καὶ ΒΖΠ, ΒΓΑ, δίδουσιν,

$$ΕΠ : \chi :: 2\zeta : 2\alpha, \qquad \text{ὅθεν} \qquad ΕΠ = \frac{\zeta\chi}{\alpha}.$$

$$ΠΖ : 2\alpha - \chi :: 2\eta : 2\alpha, \quad \text{ὅθεν} \quad ΠΖ = \frac{\eta(2\alpha - \chi)}{\alpha}.$$

Ἐπομένως, ἡ ἐμφαίνουσα τὴν κωνικὴν τομὴν ἐξίσωσις εἶναι

$$\psi^2 = \frac{\zeta\eta}{\alpha^2}(2\alpha\chi - \chi^2).$$

Λοιπόν, *ἡ κωνικὴ αὕτη τομὴ εἶναι ἔλλειψις.*

**348.** Τῇ συγκρίσει τῆς εὑρεθείσης ἐξισώσεως πρὸς τὴν ἐν § 192 τῆς ἐλλείψεως (ε΄), συνάγομεν ὅτι, τῆς κωνικῆς τομῆς ὁ μὲν μείζων ἄξων ἰσοῦται $2\alpha$, ὁ δ' ἐλάσσων $2\sqrt{\zeta\eta}$· ἐπομένως τὸ τῶν ἑστιῶν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστημα ἰσοῦται

$$2\sqrt{\alpha^2 - \zeta\eta}.$$

Ἄγομεν τὴν ΑΗ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ΒΔ, καὶ ἔχομεν $ΒΗ = \zeta + \eta$. Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ δίδει

$$\overline{ΑΔ}^2 = 4\alpha^2 + 4\zeta^2 - 4\zeta(\zeta + \eta) = 4\alpha^2 - 4\zeta\eta.$$

ὅθεν ἔχομεν τὸ τῶν ἑστιῶν ἀπόστημα $ΑΔ = 2\sqrt{\alpha^2 - \zeta\eta}$. Λοιπόν, *ἐν τῇ προκυπτούσῃ ἐλλείψει, τομῇ τοῦ κώνου, ὁ μείζων ἄξων εἶναι* ΑΒ, *ὁ ἐλάσσων μέσος ἀνάλογος τῶν* ΑΓ, ΒΔ, *καὶ ἡ ἐκκεντρότης ἴση* ΑΔ.

**349.** Τῷ τριγώνῳ ΑΣΒ ἐγγράφομεν κύκλον. Ἔστωσαν Θ, Ι, Κ, αἱ ἐπαφαὶ τῶν τριῶν πλευρῶν. Δῆλον ὅτι,

$$ΑΘ = ΑΙ, \qquad ΒΘ = ΒΚ, \qquad ΣΙ = ΣΚ;$$



Ἐπομένως $ΓΚ = ΑΙ = ΑΘ$. Ἀλλὰ $ΒΚ - ΓΚ = ΒΓ$· ἄρα, $ΒΘ - ΑΘ = ΒΓ$· προσέτι δέ, λαμβάνοντες $ΒΘ' = ΑΘ$, ἔχομεν $ΒΘ - ΒΘ' = ΘΘ' = ΒΓ$. Εἴδομεν ὅτι τὸ τῶν ἑστιῶν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστημα ἰσοῦται ΒΓ ἢ ΑΔ. Ἄρα, *τὰ σημεῖα* Θ, Θ΄, *εἰσὶν αἱ ἑστίαι.*

Ἡ ἑστία Θ΄ ὁρίζεται προσέτι διὰ τοῦ γραφομένου κύκλου, ἀφ' ἑτέρου μέρους τῆς ΑΒ, ἐφαπτομένου τῶν αὐτῶν τριῶν γραμμῶν ΑΒ, ΑΡ, ΒΤ. Τῷ ὄντι, τεθείσθω ὅτι, Θ΄, Ι΄, Κ΄, εἰσὶν αἱ τρεῖς ἐπαφαί. Ἔχομεν $ΒΘ' = ΒΚ' = ΔΙ'$. Ἐπομένως $ΑΘ' - ΒΘ' = ΑΙ' - ΔΙ' = ΑΔ$. Ἄρα, Θ΄ εἶναι ἡ ἑτέρα ἑστία.

**350.** Ἄγομεν ΙΛ παράλληλον τῇ ΑΓ. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΙΛ, ΑΒΔ, δίδουσιν

$$ΑΛ : ΑΒ :: ΑΙ : ΑΔ.$$

Ἔστω Ο τὸ μέσον τῆς ΑΒ· ἔχομεν

$$ΑΒ = 2ΟΑ, \quad ΑΔ = 2ΟΘ, \quad ΑΙ = ΑΘ·$$

ἐπομένως, ἀντὶ τῆς προηγουμένης ἀναλογίας, γράφομεν·

$$ΑΛ : ΟΑ :: ΑΘ : ΟΘ,$$

ἤ, τῇ συνθέσει,

$$ΟΛ : ΟΑ :: ΟΑ : ΟΘ, \qquad \text{ὅθεν} \qquad ΟΛ \times ΟΘ = \overline{ΟΑ}^2.$$

Ὁμοίως, ἄγοντες Κ΄Λ΄ παράλληλον τῇ ΒΔ, λαμβάνομεν

$$ΟΛ' \times ΟΘ' = \overline{ΟΑ}^2.$$

Συγκρίνοντες τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα τοῖς ἐν § 210, συνάγομεν ὅτι, *τὰ σημεῖα* Λ, Λ΄, *εἰσὶν οἱ πόδες τῶν δύο διευθετουσῶν.*

**351.** Κινουμένου τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου παραλλήλως ἑαυτῷ, τὰ τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΓΒ, διατηροῦσι τὰς αὐτὰς γωνίας· ἄρα, ὁ λόγος $\dfrac{\sqrt{\zeta\eta}}{\alpha}$ τῶν ἀξόνων τῆς ἐλλείψεως διαμένει ἄτρεπτος. Ἐν τούτῳ δὲ συνίστανται *αἱ ὅμοιαι ἐλλείψεις.*

16

352. Ὅταν ὁ κῶνος καὶ ἡ ἔλλειψις δοθῶσι χωριστά, ἔσονται γνωσταὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΔ, καὶ ἡ γωνία Δ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ· διότι, ΑΒ εἶναι ὁ μείζων ἄξων τῆς ἐλλείψεως, ΑΔ τὸ τῶν ἑστιῶν ἀπόστημα, ἡ δὲ γωνία Δ τὸ συμπλήρωμα τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς γεννητρίας καὶ τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου. Λοιπὸν, κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, εἶτα εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον Σ, ἄγοντες πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸ μέσον τῆς ΒΔ τὴν ΣΦ. Δῆλον ὅτι, ὁ μὲν ὀρθὸς κῶνος, τῇ κινήσει τῆς ΣΡ περὶ τὴν ΣΦ παραγόμενος, ἔσεται ἴσος τῷ δοθέντι, τὸ δὲ ἀγόμενον διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον, πρὸς ὀρθὰς τῷ ΡΣΦ, τεμεῖ τὸν κῶνον κατὰ τὴν δοθεῖσαν ἔλλειψιν. Λοιπὸν, *πᾶσα ἔλλειψις ἐφαρμόζεται ἐπὶ κώνου δοθέντος.*

Ἐκ τῆς φύσεως τῆς ἐλλείψεως, ΑΔ ἐλάσσων εἶναι ΑΒ· προσέτι ἡ γωνία ΑΔΒ ὀξεῖα. Ἄρα, τὸ τρίγωνον ΑΔΒ εἶναι ἀείποτε δυνατόν· ἑπομένως, τὸ προηγούμενον ἐξαγόμενον οὐδεμίαν ἐξαίρεσιν ἐπιδέχεται.

353. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 2α. (Σχ. 147) Ἐκτελοῦντες τὰς αὐτὰς κατασκευὰς, λαμβάνομεν καὶ αὖθις

$$\psi^2 = \overline{\mathrm{M\Pi}}^2 = \mathrm{E\Pi} \times \mathrm{\Pi Z}.$$

Τῇ συγκρίσει τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΕΠ, ΑΔΒ, καὶ τῶν ΒΖΠ, ΒΓΔ, λαμβάνομεν

$$\mathrm{E\Pi} = \frac{\zeta\chi}{\alpha}, \qquad \mathrm{\Pi Z} = \frac{\eta(2\alpha+\chi)}{\alpha}.$$

ἑπομένως

$$\psi^2 = \frac{\zeta\eta}{\alpha^2}(2\alpha\chi + \chi^2).$$

Λοιπὸν, *ἡ κωνικὴ τομὴ εἶναι ὑπερβολή.*

354. Τῇ συγκρίσει τῆς εὑρεθείσης ἐξισώσεως πρὸς τὴν ἐν § 257 (υ′) τῆς ὑπερβολῆς, συνάγομεν ὅτι, ὁ πρῶτος ἄξων τῆς ἐπὶ τοῦ κώνου ὑπερβολῆς εἶναι $2\alpha$, ὁ δεύτερος $2\sqrt{\zeta\eta}$, καὶ ἡ ἐκκεντρότης ἴση $2\sqrt{\alpha^2+\zeta\eta}$.

Ἄγοντες ΑΠ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΔ, εὑρίσκομεν εὐκόλως,

$$\overline{\mathrm{A\Delta}}^2 = 4\alpha^2 + 4\zeta^2 - 4\zeta(\zeta-\eta) = 4\alpha^2 + 4\zeta\eta.$$



Ἄρα, τὸ ἀπόστημα $\mathrm{A\Delta} = 2\sqrt{\alpha^2+\zeta\eta}$, ἰσοῦται τῇ ἐκκεντρότητι.

355. Ἔστωσαν Θ, Ι, Κ, καὶ Θ′, Ι′, Κ′, τὰ σημεῖα καθ᾽ ἃ αἱ γραμμαὶ Χ′Χ, Ρ′Ρ, Τ′Τ, ἐφάπτονται δύο κύκλων μεταξὺ τῶν γεννητριῶν Ρ′Ρ, Τ′Τ, γραφομένων· ἔχομεν

$\mathrm{A\Theta} = \mathrm{AI} = \mathrm{\Gamma K}$· ἑπομένως $\mathrm{B\Theta} + \mathrm{A\Theta} = \mathrm{BK} + \mathrm{\Gamma K} = \mathrm{B\Gamma}$.

Ἀλλ᾽ ἡ γραμμὴ ΑΔ, ἢ ΒΓ, ἰσοῦται τῷ τῶν ἑστιῶν τῆς καμπύλης ἀποστήματι· ἄρα, τὸ *σημεῖον Θ εἶναι ἑστία.* Ἔχομεν προσέτι,

$\mathrm{B\Theta'} = \mathrm{BK'} = \mathrm{\Delta I'}$· ἑπομένως $\mathrm{A\Theta'} + \mathrm{B\Theta'} = \mathrm{AI'} + \mathrm{\Delta I'} = \mathrm{A\Delta}$.

Ἄρα, τὸ *σημεῖον Θ′ εἶναι ἡ ἑτέρα ἑστία.*

356. Ἄγομεν ΙΛ καὶ Κ′Λ′ παραλλήλους τῇ ΒΔ. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΙΛ, ΑΔΒ, δίδουσιν,

$$\mathrm{A\Lambda} : \mathrm{AB} :: \mathrm{AI} \text{ ἢ } \mathrm{A\Theta} : \mathrm{A\Delta} \text{ ἢ } \mathrm{\Theta\Theta'}.$$

Ἔστω Ο τὸ μέσον τῆς ΑΒ· ἡ ἀναλογία αὕτη ἄγεται εἰς τὴν ἑξῆς·

$$\mathrm{A\Lambda} : \mathrm{OA} :: \mathrm{A\Theta} : \mathrm{O\Theta}\cdot$$

ἢ, τῇ συνθέσει,

$\mathrm{O\Lambda} : \mathrm{OA} :: \mathrm{OA} : \mathrm{O\Theta}$, ὅθεν $\mathrm{O\Theta} \times \mathrm{O\Lambda} = \overline{\mathrm{OA}}^2$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ $\mathrm{O\Theta'} \times \mathrm{O\Lambda'} = \overline{\mathrm{OA}}^2$.

Λοιπὸν [270], *τὰ σημεῖα Λ, Λ′, εἰσὶν οἱ πόδες τῶν δύο διευθετουσῶν.*

357. Εἰς τὰς παραλλήλους τομὰς, ὁ λόγος τῶν ἀξόνων $\dfrac{\sqrt{\zeta\eta}}{\alpha}$ μένει ἄτρεπτος· ἕνεκα τούτου αἱ ὑπερβολαὶ λέγονται *ὅμοιαι.*

Ἐκ τοῦ ὅ,τι ὁ λόγος οὗτος μένει ἄτρεπτος, συνάγομεν ὅτι, αἱ προκύπτουσαι ὑπερβολαὶ ἔχουσι τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῶν παραλλήλους. Εὐκόλως ἐννοοῦμεν προσέτι, ὅτι ἡ διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου παράλληλος τομὴ, δίδει δύο γεννητρίας παραλλήλους τῶν ἀσυμπτώτων τούτων.

358. Προκειμένου λόγου ἐφαρμόσαι ὑπερβολὴν ἐπὶ κώνου δοθέντος, κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΑΔΒ, οὗτινος γνωσταὶ εἰσὶν ἡ ὀξεῖα γωνία Δ, ἡ πλευρὰ ΑΔ, ἴση τῷ τῶν ἑστιῶν τῆς ὑπερβολῆς ἀποστήματι, καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ ἴση τῷ πλαγίῳ ἄξονι· εἶτα ἄγομεν ΣΦ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸ μέσον τῆς ΒΔ. Ὁ μὲν ὀρθὸς κῶνος, ἔχων ΣΦ ὡς ἄξονα καὶ ΑΣ γεννήτριαν, ἰσοῦται τῷ δοθέντι, τὸ δὲ διὰ τῆς ΑΒ ἀγόμενον ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς τῷ ΑΣΦ, τεμεῖ τὸν κῶνον τοῦτον κατὰ τὴν δοθεῖσαν ὑπερβολήν.

Ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ ΑΒ ἐλάσσων εἶναι ΑΔ, τὸ τρίγωνον ΑΔΒ τότε μόνον εἶναι δυνατὸν, ὅταν ἡ ΑΒ δὲν ἦναι ἐλάσσων τῆς καθέτου ΑΗ. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΔΗ δίδει

$$\mathrm{AH} = \mathrm{A\Delta} \times \text{ἡμ}\,\mathrm{A\Delta H} = \mathrm{A\Delta} \times \text{συν}\,\mathrm{A\Sigma\Phi}\cdot$$

ἄρα, πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$\mathrm{A\Delta} \times \text{συν}\,\mathrm{A\Sigma\Phi} < \mathrm{AB}\cdot \qquad \text{ὅθεν} \qquad \text{συν}\,\mathrm{A\Sigma\Phi} < \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Delta}},$$

τοῦ σημείου $<$ μὴν ἀποβάλλοντος τὴν ἰσότητα. Ἀλλ' ἐν τῇ δοθείσῃ ὑπερβολῇ, ὁ λόγος $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Delta}}$ ἰσοῦται τῷ συνημιτόνῳ τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπὸ τῆς ἀσυμπτώτου καὶ τοῦ πρώτου ἄξονος [305]· ἄρα, καλοῦντες $\theta$ τὴν γωνίαν ταύτην, ἔχομεν,

$$\text{συν}\,\mathrm{A\Sigma\Phi} < \text{συν}\,\theta, \qquad \text{ὅθεν} \quad \mathrm{A\Sigma\Phi} > \theta \quad \text{καὶ} \quad 2\mathrm{A\Sigma\Phi} > 2\theta.$$

Λοιπὸν, *ὑπερβολή τις ἐφαρμόζεται ἐπὶ κώνου δοθέντος, ἐὰν ἡ ὑπὸ δύο ἀντικειμένων γεννητριῶν περιεχομένη γωνία δὲν ἦναι ἐλάσσων τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης.*

359. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 3η (Σχ. 148) Συνεπείᾳ τῶν αὐτῶν κατασκευῶν λαμβάνομεν καὶ αὖθις

$$\psi^2 = \mathrm{E\Pi} \times \mathrm{\Pi Z}.$$

Ἐπειδὴ ἡ ΑΧ παράλληλος ἐστὶ τῇ ΣΤ, ἔχομεν ΠΖ = ΑΓ = 2η· τὰ δὲ ὅμοια τρίγωνα ΑΕΠ, ΣΑΓ, δίδουσι τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν, ἐν ᾗ ἐκαλέσαμεν ΑΣ = δ,



$$\mathrm{E\Pi} : \chi :: 2\eta : \delta, \qquad \text{ἐξ ἧς} \qquad \mathrm{E\Pi} = \frac{2\eta}{\delta}\chi\cdot$$

ἐπομένως, ἡ τὴν τομὴν ἐμφαίνουσα ἐξίσωσις εἶναι

$$\psi^2 = \frac{4\eta^2}{\delta}\chi.$$

Λοιπὸν, *ἡ κωνικὴ τομὴ εἶναι παραβολή.*

360. Ἡ παράμετρος τῆς παραβολῆς ταύτης ἰσοῦται $\frac{4\eta^2}{\delta}$. Ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ΑΓ ἄγομεν ΗΘ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ΑΧ. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΗΘ, ΑΗΣ, δίδουσιν·

$$\mathrm{A\Theta} : \eta :: \eta : \delta, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \mathrm{A\Theta} = \frac{\eta^2}{\delta}\cdot$$

Ἄρα, ΑΘ εἶναι τὸ τεταρτημόριον τῆς παραμέτρου· ἐπομένως, *τὸ σημεῖον Θ εἶναι ἡ ἑστία τῆς παραβολῆς.*

Φανερὸν ὅτι, ἡ ἑστία αὕτη εἶναι ἀκριβῶς τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἐφάπτεται τῆς γραμμῆς Χ′Χ ὁ μεταξὺ τῶν γεννητριῶν ΡΡ′, ΤΤ′, γραφόμενος κύκλος, ἐφαπτόμενος τῶν τε γεννητριῶν τούτων καὶ τῆς Χ′Χ.

361. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ Ι, σημείου ἐπαφῆς τῆς ΡΡ′, ἄξωμεν ΙΛ παράλληλον τῇ ΑΓ, ἕξομεν, ΑΛ = ΑΘ. Λοιπὸν, *τῆς διευθετούσης ὁ ποῦς εἶναι τὸ σημεῖον Λ.*

362. Ἐνταῦθα δὲν χωρεῖ ἡ παρατήρησις ὅτι, αἱ διδόμεναι παραβολαὶ ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων εἰσὶν ὅμοιαι, διὰ τὸν λόγον ὅτι, *ἅπασαι αἱ παραβολαὶ θεωροῦνται ὡς ὅμοιαι.* Τοῦτο στηρίζεται εἰς τὸ ὅ,τι, ἐν δυσὶ παραβολαῖς οἱαισδήποτε, αἱ ἀπὸ τῶν κορυφῶν ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἐξίσου κλίνουσαι ἐπὶ τοὺς ἄξονας, εἰσὶν ἀείποτε ἀνάλογοι. Τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως ταύτης παρελείπομεν ὡς μὴ οὖσαν ἀναγκαίαν ἐνταῦθα.

363. Ἵνα θέσωμεν παραβολὴν δοθεῖσαν ἐπὶ κώνου δοθέντος, κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΗΑΘ, οὗτινος γνωσταὶ εἰσὶν ἡ πλευρὰ ΑΘ καὶ ἡ γωνία ΗΑΘ· εἶτα ἄγομεν ΗΣ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ΑΗ, καὶ κατασκευάζομεν

τὴν γωνίαν ΠΑΣ = ΠΑΘ. Ἡ μὲν παραγομένη ἐπιφάνεια τῇ περιστροφῇ τῆς ΣΑ περὶ τὴν ΣΠ, ἔσεται ἡ τοῦ δοθέντος κώνου, τὸ δὲ ἀγόμενον ἐπίπεδον διὰ τῆς ΑΘ, πρὸς ὀρθὰς τῷ ἐπιπέδῳ ΑΣΠ, τεμεῖ τὸν κῶνον τοῦτον κατὰ τὴν δοθεῖσαν παραβολήν. Λοιπόν, *ἅπασαι αἱ παραβολαὶ τίθενται ἐπὶ κώνου δοθέντος.*

364. Ἀνακεφαλαιοῦντες τὰ προεκτεθέντα, συνάγομεν κυρίως ὅτι, *αἱ κωνικαὶ τομαὶ εἰσὶ καμπύλαι δευτέρας τάξεως.* Ἀντιστρόφως· *αἱ δευτέρας τάξεως καμπύλαι εἰσὶ τομαὶ κωνικαί.*

### ΤΟΜΗ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗ.

365. (Σχ. 149) Ἔστω ΑΜΒ ἡ γινομένη τομὴ κυλίνδρου ὀρθοῦ ἐπιπέδῳ τινι. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν κατασκευὰς ὁμοίας ταῖς ἐν τῷ κώνῳ, καὶ καλέσωμεν, Α τὴν τοῦ κυλίνδρου ἀκτῖνα, καὶ ΑΒ = 2α, λαμβάνομεν εὐκόλως τὴν τῆς τομῆς ΑΜΒ ἐξίσωσιν, ἔλλειψιν ἐμφαίνουσαν,

$$\psi^2 = \frac{A^2}{\alpha^2}(2\alpha\chi - \chi^2) \; ,$$

### ΤΟΜΑΙ ΑΝΤΙΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΤΟΥ ΠΛΑΓΙΟΥ ΚΩΝΟΥ.

366. Ὁ πλάγιος κῶνος, βάσιν ἔχων κύκλον, τεμνόμενος ἐπιπέδῳ δίδει ἐπίσης τὰς τρεῖς καμπύλας τῆς δευτέρας τάξεως. Ἀλλ' ἐν τῷ τοιούτῳ κώνῳ ὑπάρχει σύμπτωμα μὴ ὑπάρχον ἐν τῷ ὀρθῷ· εἶναι δὲ ὅτι, τέμνεται κατὰ περιφερείας κύκλων ὑπὸ ἐπιπέδων ἀγομένων οὐχὶ μόνον παραλλήλως τῇ βάσει, ἀλλὰ καὶ κατὰ ἑτέραν διεύθυνσιν.

(Σχ. 150) Ἔστω ΑΣΒ ἡ τομὴ πλαγίου κώνου, διὰ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει γινομένη. Ἔστω ΔΜΓ ἡ καμπύλη διδομένη τῇ τομῇ τοῦ αὐτοῦ κώνου ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΣΒ. Ἄγομεν ΜΠ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ΓΔ, καὶ ΕΠΖ παράλληλον τῇ ΑΒ. Ἀπὸ τῶν ΕΖ καὶ ΜΠ ἄγομεν ἐπίπεδον ὅπερ ἔσεται παράλληλον τῇ βάσει τοῦ



κώνου καὶ τεμεῖ αὐτὸν κατὰ κύκλον ΕΜΖ. Φανερὸν ὅτι ΜΠ τέμνει πρὸς ὀρθὰς τὴν διάμετρον ΕΖ· ἄρα,

$$\overline{\text{ΜΠ}}^2 = \text{ΕΠ} \times \text{ΠΖ} \; .$$

Τεθείσθω ὅτι ἡ καμπύλη ΔΜΓ εἶναι κύκλος· ἡ εὐθεῖα ΔΓ ἔσεται διάμετρος αὐτοῦ, καὶ ἔξομεν,

$$\overline{\text{ΜΠ}}^2 = \text{ΔΠ} \times \text{ΠΓ} \cdot \quad \text{λοιπὸν} \quad \text{ΕΠ} \times \text{ΠΖ} = \text{ΔΠ} \times \text{ΠΓ} \; .$$

ἢ
$$\text{ΕΠ} : \text{ΔΠ} :: \text{ΠΓ} : \text{ΠΖ} \; .$$

Ἄρα τὰ τρίγωνα ΕΠΔ, ΓΠΖ, ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην ὑπὸ πλευρῶν ἀναλόγων περιεχομένην· ἑπομένως εἰσὶν ὅμοια· ἡ δὲ γωνία ΣΓΔ = ΣΕΖ = ΣΑΒ. Ὅταν ἡ συνθήκη αὕτη ἐκπληροῦται, δῆλον ὅτι ἡ τομὴ εἶναι κύκλος.

Γνωρίζομεν οὕτω τὴν νέαν διεύθυνσιν ἣν πρέπει νὰ ἔχωσι τὰ τέμνοντα ἐπίπεδα, ὅπως ὦσιν αἱ τομαὶ τοῦ πλαγίου κώνου κύκλοι. Αἱ τομαὶ αὗται διακρίνονται τῇ ὀνομασίᾳ *ἀντιπαράλληλοι.*

367. Ἐν τῷ πλαγίῳ κυλίνδρῳ, βάσιν κυκλικὴν ἔχοντι, ὑπάρχουσιν ἐπίσης τομαὶ ἀντιπαράλληλοι.

*Παρατήρησις.* Οἱανδήποτε θέσιν ἔχουσιν αἱ γραμμαὶ ΓΔ, ΕΖ, ἀρκεῖ νὰ ὦσι παράλληλοι ταῖς συστοίχοις ἐν ταῖς δύο σειραῖς τῶν κυκλικῶν τομῶν, φανερὸν ὅτι τὰ τρίγωνα ΕΠΔ, ΓΠΖ, ἔσονται ἀείποτε ὅμοια· καὶ ἔξομεν ΕΠ × ΠΖ = ΔΠ × ΠΓ. Ὅθεν συνάγομεν, ὅτι ΓΔ, ΕΖ, εἰσὶ χορδαὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ὅτι αἱ δύο κυκλικαὶ τομαί, ὧν διάμετροι εἰσὶν αἱ γραμμαὶ αὗται, κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἧς μέγιστος κύκλος εἶναι ἀκριβῶς ὁ τὰς χορδὰς ΓΔ καὶ ΕΖ περιέχων.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ'.

## ΠΕΡΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΠΟΛΙΚΩΝ.

### ΟΡΙΣΜΟΙ — ΤΥΠΟΙ ΓΕΝΙΚΟΙ.

368. Ἀντὶ νὰ ὁρίζωμεν τὴν θέσιν τῶν διαφόρων σημείων ἐπιπέδου τινος, σχετίζοντες αὐτὰ, ὡς ἄχρι τοῦδε ἐπράξαμεν, πρὸς δύο ἄξονας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, δυνάμεθα προσέτι ὁρίσαι τὴν θέσιν τῶν αὐτῶν σημείων διὰ τοῦ ἀποστήματος ἑκάστου αὐτῶν ΟΜ ἀπὸ σημείου μονίμου, τοῦ Ο, καὶ διὰ τῆς γωνίας ΜΟΡ, περιεχομένης ὑπὸ τῆς ΟΜ καὶ εὐθείας τινος μονίμου, τῆς ΟΡ, (Σχ. 151).

Τὸ μόνιμον σημεῖον Ο καλεῖται *πόλος* ἢ *ἀρχή*· ἡ εὐθεῖα ΟΡ *ἄξων πολικός*· τὸ ἀπόστημα ΟΜ *ἀκτὶς ἐπιβατικὴ* τοῦ σημείου Μ· ΜΟΡ εἶναι ἡ *περιγραφομένη γωνία* ὑπὸ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος. Ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς σὺν τῇ συστοιχούσῃ περιγραφομένῃ γωνίᾳ καλοῦνται ὁμοῦ *συντεταγμέναι πολικαὶ* τοῦ σημείου Μ.

369. Ἵνα ἐννοήσωμεν τίνι τρόπῳ ἡ γωνία καὶ ἡ σύστοιχος ἀκτὶς σχετίζονται πρὸς ἀλλήλας, φαντασθῶμεν ὅτι εὐθεῖά τις ΟΣ, περατουμένη ἀφ' ἑνὸς τῷ Ο, ἀπεριόριστος δὲ οὖσα ἀφ' ἑτέρου μέρους, κατ' ἀρχὰς κεῖται ἐπὶ τῆς ΟΡ, καὶ ὅτι ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ΟΣ στρέφεται περὶ τὸν πόλον Ο κατὰ τὴν αὐτὴν ἀείποτε ἔννοιαν. Τότε, σημεῖον λ, τὸ τυχὸν τῆς γραμμῆς ταύτης, γράφει τόξον δυνάμενον αὐξῆσαι μέχρι $+\infty$· ἐὰν δὲ ἡ ΟΣ περιστραφῇ κατὰ τὴν ἀντίστροφον ἔννοιαν, τὸ γραφόμενον τόξον ἔσεται ἀρνητικὸν δυνάμενον αὐξῆσαι μέχρι $-\infty$. Τούτῳ τῷ τόξῳ μετροῦσι τὴν ὑπὸ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος περιγραφομένην γωνίαν, ἣν καλέσομεν $\omega$.



Ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς, ἣν καλέσομεν $\rho$, λαμβάνει πᾶσαν τιμὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικήν. Αἱ μὲν θετικαὶ τιμαὶ ὁρίζουσι τὰ ἐπὶ τῆς ἐπιβατικῆς αὐτῆς ἀκτῖνος κείμενα σημεῖα, αἱ δὲ ἀρνητικαὶ τὰ ἐπὶ τῆς προαγωγῆς αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἑτέρου μέρους τοῦ πόλου.

Κατὰ τὰς παρατηρήσεις ταύτας, διδόντες ταῖς μεταβληταῖς ἢ πολικαῖς συντεταγμέναις $\omega$ καὶ $\rho$ τιμὰς μερικὰς, ὁρίζομεν τὴν θέσιν τοῦ σημείου πρὸς ὃ ἀναφέρονται αἱ συντεταγμέναι αὗται. Ἔστωσαν, π. χ., $\omega = 346^{\circ}$ καὶ $\rho = 17^{\mu}$. Λαμβάνομεν τὸ τόξον $\lambda\mu\nu = 346^{\circ}$, καὶ ἐπιζευγνύομεν τὴν εὐθεῖαν ΟνΝ, ἐφ' ἧς λαμβάνομεν, κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΟνΝ, τὸ ἀπόστημα $\mathrm{ON} = 17^{\mu}$.

Ἐὰν $\omega = 346^{\circ}$ καὶ $\rho = -10^{\mu}$ ληπτέον $\mathrm{ON}' = 10^{\mu}$ ἐπὶ τῆς ἐπεκτάσεως τῆς Ον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου μέρους τοῦ πόλου.

370. Ζητήσωμεν ἤδη τοὺς γενικοὺς τύπους δι' ὧν μεταβαίνομεν ἀπὸ συστήματος συντεταγμένων εὐθυγράμμων εἰς σύστημα συντεταγμένων πολικῶν.

(Σχ. 152) Ἔστωσαν $\chi = \mathrm{A\Pi}$, $\psi = \mathrm{M\Pi}$, αἱ γραμμικαὶ συντεταγμέναι σημείου τινος Μ ἐν τοῖς ἄξοσιν ΑΧ, ΑΨ. Ο ὁ πόλος καὶ ΟΡ ὁ πολικὸς ἄξων. Αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι τοῦ αὐτοῦ σημείου εἰσὶν ἡ γωνία $\mathrm{MOP} = \omega$, καὶ ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς $\mathrm{OM} = \rho$. Ἄγομεν παραλλήλως τοῖς προτέροις ἄξοσι τὰς ΟΧ', ΟΨ', αἵτινες συμπίπτουσι ταῖς ΜΠ, ΑΧ, κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Β. Καλοῦμεν $\alpha$, $\beta$, τὰς συντεταγμένας ΑΒ, ΒΟ, τοῦ πόλου Ο, $\sigma$ τὴν γωνίαν ΡΟΧ', καὶ $\theta$ τὴν γωνίαν ΨΑΧ ἢ Ψ'ΟΧ'. Τούτων τεθέντων, ἔχομεν

$$\chi = \alpha + \mathrm{OK}, \qquad \psi = \beta + \mathrm{MK}.$$

Τὸ τρίγωνον ΜΟΚ δίδει

$$\frac{\mathrm{OM}}{\eta\mu.\,\mathrm{MKO}} = \frac{\mathrm{OK}}{\eta\mu.\,\mathrm{OMK}} = \frac{\mathrm{MK}}{\eta\mu.\,\mathrm{MOK}}.$$

ἀλλὰ, $\mathrm{OM} = \rho$, $\eta\mu.\,\mathrm{MKO} = \eta\mu\,\theta$, $\eta\mu.\,\mathrm{MOK} = \eta\mu(\sigma + \omega)$,

$$\eta\mu.\,\mathrm{OMK} = \eta\mu.\,\Psi'\mathrm{OM} = \eta\mu(\theta - \sigma - \omega).$$

Λοιπόν, $\frac{\rho}{\eta\mu\,\theta} = \frac{OK}{\eta\mu\,(\theta - \sigma - \omega)} = \frac{MK}{\eta\mu\,(\sigma + \omega)}$.

ὅθεν $OK = \frac{\rho\,\eta\mu\,(\theta - \sigma - \omega)}{\eta\mu\,\theta}$, $MK = \frac{\rho\,\eta\mu\,(\sigma + \omega)}{\eta\mu\,\theta}$.

Καθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας τῶν OK, MK, ἐν ταῖς τῶν $\chi$, $\psi$, λαμβάνομεν

(1) $\chi = \alpha + \frac{\rho\,\eta\mu\,(\theta - \sigma - \omega)}{\eta\mu\,\theta}$, $\psi = \beta + \frac{\rho\,\eta\mu\,(\sigma + \omega)}{\eta\mu\,\theta}$.

371. Ὅταν αἱ συντεταγμέναι $\chi$, $\psi$, ὦσιν ὀρθογώνιοι, τότε $\theta = 90^\circ$· ἐπομένως,

(2) $\chi = \alpha + \rho\,\sigma\upsilon\nu\,(\sigma + \omega)$, $\psi = \beta + \rho\,\eta\mu\,(\sigma + \omega)$.

Τοὺς τύπους τούτους καὶ ἀπ' εὐθείας μορφοῦμεν.

Ὅταν προσέτι ὁ πολικὸς ἄξων ἦναι παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν $\chi$, τότε $\sigma = 0$· ἐπομένως ἔχομεν

(3) $\chi = \alpha + \rho\,\sigma\upsilon\nu\,\omega$, $\psi = \beta + \rho\,\eta\mu\,\omega$.

372. Ἡ τῶν τύπων (1) χρῆσις εἶναι σπανία· συνεχέστερον μεταχειρίζονται τοὺς (2). Δείξομεν τίνι τρόπῳ διὰ τῶν τελευταίων τούτων μετασχηματίζομεν τὰς πολικὰς συντεταγμένας εἰς συντεταγμένας γραμμικάς. Πρὸς τοῦτο, παρατηρητέον ὅτι, ἐκ τῶν τύπων (2) λαμβάνομεν διαδοχικῶς·

$$\chi - \alpha = \rho\,\sigma\upsilon\nu\,(\omega + \sigma), \qquad \psi - \beta = \rho\,\eta\mu\,(\omega + \sigma),$$

$$\varepsilon\varphi(\omega + \sigma) = \frac{\psi - \beta}{\chi - \alpha}, \qquad (\chi - \alpha)^2 + (\psi - \beta)^2 = \rho^2,$$

$$\rho = \sqrt{(\chi - \alpha)^2 + (\psi - \beta)^2}.$$

Λοιπόν, οἱ ζητούμενοι τύποι εἰσὶν

$$\varepsilon\varphi(\omega + \sigma) = \frac{\psi - \beta}{\chi - \alpha}, \qquad \rho = \sqrt{(\chi - \alpha)^2 + (\psi - \beta)^2}.$$

Ἐὰν λάβωμεν τὸν πολικὸν ἄξονα ὡς ἄξονα τῶν $\chi$, καὶ τὸν πόλον ὡς ἀρχήν, ἔχομεν

$$\varepsilon\varphi\,\omega = \frac{\psi}{\chi}, \qquad \rho = \sqrt{\psi^2 + \chi^2}.$$



## ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΠΟΛΙΚΗ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΓΡΑΜΜΗΣ.

373. Πάσης εὐθείας ἡ θέσις εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν $\sigma$, περιεχομένην ὑπ' αὐτῆς καὶ τοῦ πολικοῦ ἄξονος, καὶ τὸ μῆκος $\pi$ τῆς πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἀπὸ τοῦ πόλου ἀγομένης. Ὅθεν εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ πολικὴ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας εἶναι

(1) $$\rho = \frac{\pi}{\eta\mu\,(\omega - \sigma)}.$$

Ὅταν ἡ εὐθεῖα διέρχεται τοῦ πόλου, ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς εἶναι

$$\omega = \sigma.$$

Ὅταν ἡ εὐθεῖα ἦναι παράλληλος τῷ πολικῷ ἄξονι, ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς εἶναι

$$\rho = \frac{\pi}{\eta\mu\,\omega}.$$

Ὅταν δὲ ἦναι κάθετος ἐπὶ τὸν πολικὸν ἄξονα,

$$\rho = -\frac{\pi}{\sigma\upsilon\nu\,\omega}, \qquad \text{ἢ} \qquad \rho = \frac{\pi}{\sigma\upsilon\nu\,\omega},$$

ὑποθέτοντες $\pi$ ἀρνητικόν.

374. Ἀναπτύσσοντες $\eta\mu\,(\omega - \sigma)$, καὶ καλοῦντες $\eta = \sigma\upsilon\nu\sigma$, $\kappa = -\eta\mu\,\sigma$, ἡ ἐξίσωσις (1) λαμβάνει τὴν μορφήν,

$$\rho = \frac{\pi}{\eta\,\eta\mu\,\omega + \kappa\,\sigma\upsilon\nu\,\omega}.$$

τῶν $\eta$, $\kappa$, συνδεομένων τῇ σχέσει $\eta^2 + \kappa^2 = 1$.

Ἵνα κατασκευάσωμεν εὐθεῖαν δοθεῖσαν διὰ τῆς πολικῆς αὐτῆς ἐξισώσεως, ὁρίζομεν δύο οἱαδήποτε σημεῖα αὐτῆς· π.χ. τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς $\omega = 0$ καὶ $\omega = 90^\circ$.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\rho = \frac{5}{2\,\eta\mu\,\omega + 3\,\sigma\upsilon\nu\,\omega}.$$

Καθιστῶμεν διαδοχικῶς $\omega = 0$, $\omega = 90^\circ$, καὶ ἔχομεν $\rho = \frac{5}{3}$, $\rho = \frac{5}{2}$. Ἐπομένως οὐδόλως δύσκολος εἶναι ἡ κατασκευὴ τῆς ὑπὸ τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως δηλουμένης εὐθείας.

### ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΠΟΛΙΚΗ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ.

**375.** (Σχ. 153) Ἔστωσαν, $\alpha$ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, $\rho'$, $\omega'$, αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου Γ, καὶ $\rho$, $\omega$, αἱ συντεταγμέναι σημείου τινος Μ τῆς περιφερείας. Τὸ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστημα ΓΜ τῶν σημείων $(\rho, \omega)$, $(\rho', \omega')$, δηλοῦται τῷ ἑξῆς τύπῳ, γνωστῷ ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας,

$$\sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\,\sigma\upsilon\nu(\omega-\omega')}\,.$$

Ἰσοῦμεν $\alpha$ τὸν τύπον τοῦτον, τετραγωνίζομεν, καὶ ἔχομεν τὴν πολικὴν ἐξίσωσιν τοῦ κύκλου

$$(1)\qquad \rho^2-2\rho'\rho\,\sigma\upsilon\nu(\omega-\omega')+\rho'^2-\alpha^2=0\,.$$

ΣΗΜ. Τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν (1) λαμβάνομεν καὶ τῇ ἀντεισαγωγῇ ἐν τῇ γενικῇ ἐξισώσει τοῦ κύκλου, ἐν συντεταγμέναις γραμμικαῖς, τῶν τιμῶν τῶν $\chi$, $\psi$, καὶ τῶν συντεταγμένων τοῦ κέντρου εἰς συντεταγμένας πολικάς, ὑποθέτοντες ὅτι, ὁ μὲν πόλος εἶναι ἐν τῇ ἀρχῇ τῶν γραμμικῶν συντεταγμένων, ὁ δὲ πολικὸς ἄξων ταυτίζεται τῷ ἄξονι τῶν $\chi$.

Οἱανδήποτε τιμὴν δώσωμεν τῇ $\omega$ λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως δύο τιμὰς τῆς $\rho$, ὧν τὸ γινόμενον ἰσοῦται $\rho'^2-\alpha^2$. Ὅθεν συνάγομεν εὐκόλως τὰ ἐν § 176 δειχθέντα Θεωρήματα ἐπὶ τῶν τεμνουσῶν.

**376.** Ὅταν ὁ πόλος ἦναι ἐντὸς τοῦ κύκλου, ἔχομεν $\rho'<\alpha$· ἄρα, αἱ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) τιμαὶ τῆς $\rho$ εἰσὶ πραγματικαί, οἱαδήποτε τιμὴ δοθῇ τῇ $\omega$.

Ὅταν ὁ πόλος ἦναι ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἡ τιμὴ

$$\rho=\rho'\,\sigma\upsilon\nu(\omega-\omega')\pm\sqrt{\alpha^2-\rho'^2\,\eta\mu^2(\omega-\omega')}\,,$$

ἣν λαμβάνομεν ἐπιλύοντες τὴν ἐξίσωσιν (1), εἰσὶ πραγματικαὶ ἐνόσῳ αἱ τῇ $\omega$ διδόμεναι τιμαὶ καθιστῶσιν

$$\alpha > \;\text{ἢ}\; = \rho'\,\eta\mu(\omega-\omega').$$

Ἡ ἔκφρασις $\rho'\,\eta\mu(\omega-\omega')$ ἐμφαίνει τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγομένην ΓΚ πρὸς ὀρθὰς τῇ ἐπιβατικῇ ἀκτῖνι ΟΜ. Ἐντεῦθεν δηλοῦται ὅτι, αἱ ἀγόμεναι ἀπὸ τοῦ πόλου ἐφαπτόμεναι



τῆς περιφερείας εἰσὶ τὰ ὅρια τῶν θέσεων τῶν ἐπιβατικῶν ἀκτίνων.

**377.** Θέτοντες τὸν πόλον ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἔχομεν $\rho'=\alpha$· ἡ ἐξίσωσις (1) τότε καθίσταται

$$\rho=2\alpha\,\sigma\upsilon\nu(\omega-\omega').$$

Ὅταν ὁ πολικὸς ἄξων διέρχεται τοῦ κέντρου, τοῦ πόλου κειμένου ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ ἐξίσωσις εἶναι

$$\rho=2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\omega.$$

Τέλος, ἐὰν λάβωμεν ὡς πόλον τὸ κέντρον αὐτὸ τοῦ κύκλου, ἡ ἐμφαίνουσα τοῦτον ἐξίσωσις εἶναι

$$\rho=\alpha.$$

### ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΠΟΛΙΚΗ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΨΕΩΣ.

**378.** (Σχ. 154) Λαμβάνομεν ὡς πόλον τὴν πρὸς τὰς ἀρνητικὰς τετμημένας ἑστίαν Ε τῆς ἐλλείψεως, ἀναφερομένης πρὸς τὸ κέντρον καὶ τοὺς ἄξονας αὐτῆς· ὡς ἄξονα δὲ πολικὸν τὸν μείζονα ἄξονα τῆς καμπύλης.

Κατὰ § 203 ἔχομεν, ἄγοντες τὴν ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα ἐπὶ τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς καμπύλης·

$$(1)\qquad \text{ΕΜ}\;\;\text{ἢ}\;\; \rho=\alpha+\frac{\gamma\chi}{\alpha}\,.$$

Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΕΜΠ δίδει

$$\text{ΕΠ}=\rho\,\sigma\upsilon\nu\,\omega\text{· ἑπομένως }\;\chi=\rho\,\sigma\upsilon\nu\,\omega-\gamma.$$

Ἀντεισάγομεν τὴν τιμὴν ταύτην τῆς $\chi$ εἰς τὴν (1) καὶ ἔχομεν μετά τινας εὐδιακρίτους ἀναγωγάς,

$$\rho=\frac{6^2}{\alpha-\gamma\,\sigma\upsilon\nu\,\omega}\,.$$

Καθιστῶμεν $\dfrac{\gamma}{\alpha}=\varepsilon$, $\dfrac{6^2}{\alpha}=\pi$, καὶ λαμβάνομεν

$$(\text{Ε})\qquad \rho=\frac{\pi}{1-\varepsilon\,\sigma\upsilon\nu\,\omega}\,.$$

Τοιαύτη εἶναι ἡ τῆς ἐλλείψεως πολικὴ ἐξίσωσις.

Διδοντες τῇ ω πᾶσαν τιμὴν, ἀπὸ $0^{\circ}$ μέχρι $360^{\circ}$, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος ρ, ἡ ΕΜ, ὁρίσουσιν ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης.

379. Ἡ ποσότης $\frac{2\beta^2}{\alpha}$, τρίτη οὖσα ἀνάλογος τοῦ μείζονος ἄξονος καὶ τοῦ ἐλάσσονος, καλεῖται *παράμετρος* τῆς ἐλλείψεως. Λοιπὸν, ἐν τῇ ἐξισώσει (Ε), ε δηλοῖ τὸν λόγον τῆς ἐκκεντρότητος πρὸς τὸν μείζονα ἄξονα, καὶ π τὴν ἡμιπαράμετρον. Μὴ συγχέωμεν τὴν παράμετρον τῆς ἐλλείψεως τῇ παραμέτρῳ διαμέτρου τινος. Ἡ τελευταία αὕτη εἶναι τρίτη ἀνάλογος τῆς διαμέτρου καὶ τῆς συζυγοῦς αὐτῆς.

*Παρατηρητέον* ὅτι, ἐν τῇ ἐλλείψει ὁ λόγος ε εἶναι ἐλάσσων μονάδος.

ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΠΟΛΙΚΗ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ.

380. (Σχ. 155) Λαμβάνομεν ὡς πόλον τὴν πρὸς τὰς θετικὰς τετμημένας ἑστίαν Ε τῆς ὑπερβολῆς ἀναφερομένης πρὸς τὸ κέντρον καὶ τοὺς ἄξονας αὐτῆς· ὡς ἄξονα δὲ πολικὸν τὸν πλάγιον ἄξονα τῆς καμπύλης. Κατὰ § 265 ἔχομεν·

$$(2) \qquad \rho = \frac{\gamma\chi}{\alpha} - \alpha \qquad \text{καὶ} \qquad \rho = -\frac{\gamma\chi}{\alpha} + \alpha,$$

καθ' ὅσον τὸ σημεῖον Μ εἶναι ἐπὶ τοῦ περιέχοντος τὴν ἑστίαν Ε κλάδου ἢ ἐπὶ τοῦ ἀντιθέτου. Οἱαδήποτε ἦναι ἡ θέσις τοῦ σημείου Μ, ἔχομεν

$$\chi = \gamma + \rho\, \text{συν}\, \omega\,.$$

Ἀντεισάγομεν τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὰς ἐξισώσεις (2)· καλοῦντες δὲ $\frac{\gamma}{\alpha} = \varepsilon$, $\frac{\beta^2}{\alpha} = \pi$, λαμβάνομεν·

$$(\Upsilon) \qquad \rho = \frac{\pi}{1 - \varepsilon\, \text{συν}\, \omega}, \qquad (\Upsilon') \qquad \rho = \frac{-\pi}{1 + \varepsilon\, \text{συν}\, \omega}.$$

Ἡ ποσότης ε, ἥτις ἐνταῦθα εἶναι μείζων μονάδος, εἶναι ὁ λόγος τῆς ἐκκεντρότητος πρὸς τὸν πρῶτον ἄξονα, καὶ 2π εἶναι ἡ παράμετρος τῆς ὑπερβολῆς· ἤτοι τρίτη ἀνάλογος τῶν ἀξόνων αὐτῆς.



381. *Παρατηρητέον* ὅτι, κατὰ § 265, ρ ἐν ταῖς ἐξισώσεσι (2) πρέπει νὰ ἦναι θετική· ἑπομένως ἡ ὑπόθεσις αὕτη πρέπει νὰ διατηρῆται καὶ εἰς τὰς ἐξ αὐτῶν παραχθείσας (Υ), (Υ'). Οὕτω, πρέπει ν' ἀποβάλλωμεν τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς τῆς ρ ὡς ἂν ἦσαν φανταστικαί. Τότε, ἑκατέρα τῶν ἐξισώσεων (Υ), (Υ'), δίδει ἕνα κλάδον τῆς ὑπερβολῆς. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἐξετάσομεν διαδοχικῶς ἑκάστην τῶν δύο ἐξισώσεων.

Ὑποθέτοντες κατ' ἀρχὰς τὴν ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα ταυτιζομένην τῷ πολικῷ ἄξονι ΕΧ, καθιστῶμεν $\omega = 0$ ἐν τῇ ἐξισώσει (Υ) καὶ λαμβάνομεν

$$\rho = \frac{\pi}{1 - \varepsilon}.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι ἀρνητική, διότι $1 < \varepsilon$· ἄρα, οὐδὲν σημεῖον τῆς καμπύλης ὁρίζεται. Ἐν γένει, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς π εἶναι θετικὸς, τὸ σημεῖον τῆς ρ ἔσεται τὸ αὐτὸ τοῦ παρονομαστοῦ $1 - \varepsilon\, \text{συν}\, \omega$. Ἀλλ' ὁ παρονομαστὴς οὗτος μενεῖ ἀρνητικὸς μέχρισοῦ

$$1 - \varepsilon\, \text{συν}\, \omega = 0, \qquad \text{ὅθεν} \qquad \text{συν}\, \omega = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Λοιπὸν, ἀπὸ $\omega = 0$, μέχρι τοῦ ὁρίου τούτου, οὐδὲν σημεῖον τῆς ὑπερβολῆς λαμβάνομεν. Ἐξετάσωμεν τί δηλοῖ τὸ ὅριον τοῦτο.

Ἐν τῇ τελευταίᾳ τιμῇ θέτομεν $\frac{\gamma}{\alpha}$ ἀντὶ ε, καὶ ἔχομεν

$$\text{συν}\, \omega = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ συν ω εἶναι ἡ ἁρμόζουσα τῇ περιεχομένῃ γωνίᾳ ὑπὸ τῆς ἀσυμπτώτου ΑΙ καὶ τοῦ πλαγίου ἄξονος. Ἄρα, ἡ παράλληλος τῇ ἀσυμπτώτῳ εὐθεῖα ΕΘ, ἀπὸ τοῦ πόλου ἀγομένη, εἶναι τὸ ὅριον μέχρις οὗ ὑψοῦται ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς οὖσα ἀείποτε ἀρνητική. Καλοῦμεν υ τὴν γωνίαν ΘΕΧ. Ἅμα ἡ γωνία ω ὑπερβῇ υ, ὁ παρονομαστὴς $1 - \varepsilon\,\text{συν}\,\omega$ καθίσταται θετικός· $\omega = \upsilon$ δίδει $\rho = \infty$· $\omega = 90^\circ$ δίδει $\rho = \pi$· αἱ μεταξὺ τῶν δύο τούτων τιμῶν τῆς ω περιεχόμεναι τιμαὶ τῆς ρ, προβαίνουσιν ἐλαττούμεναι. Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν τὸ τόξον ΚΣ.

Πέραν τῆς ΕΚ, τῆς ω ὁλονὲν αὐξανούσης, συν ω καθίσταται ἀρνητικόν, ἡ δὲ ρ ἐξακολουθεῖ μειουμένη μέχρις $\omega = 180^\circ$. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἔχομεν

$$\text{συν}\,\omega = -1 \cdot \qquad \text{ἐπομένως} \qquad \rho = \frac{\pi}{1 + \varepsilon}.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι ἡ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος ΕΒ, ὡς βεβαιούμεθα εὐκόλως θέτοντες ἀντὶ π καὶ ε τὰς τιμὰς αὐτῶν. Ἡ ὑπερβολὴ ὡρίσθη οὕτω μέχρι τῆς κορυφῆς Β.

Ἀπὸ $180^\circ$ μέχρι $360^\circ$, τὸ συν ω λαμβάνει τὰς αὐτὰς τιμάς, πλὴν κατὰ τάξιν ἀντίστροφον τῶν ἀπὸ $0^\circ$ μέχρι $180^\circ$ τιμῶν. Ἄρα, ἐὰν κάμωμεν τὴν γωνίαν Θ΄ΕΧ ἴσην τῇ ΘΕΧ· ἤτοι ἐὰν ἄξωμεν ΕΘ΄ παράλληλον τῇ δευτέρᾳ ἀσυμπτώτῳ, εὑρήσομεν ἐν τῇ γωνίᾳ ΑΕΘ΄ ἓν τόξον, τὸ ΒΚ΄Σ΄, συμμετρικὸν τῷ ΒΚΣ. Ἐν τῇ γωνίᾳ Θ΄ΕΧ, ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς εἶναι ἀρνητική, ὡς ἦτον ἐν τῇ γωνίᾳ ΘΕΧ· ἄρα, αἱ τιμαὶ αὗται εἰσὶν ἀποῤῥιπτέαι.

Περιττὸν αὐξῆσαι τὴν γωνίαν ω ὑπὲρ τὰς $360^\circ$· διότι ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς λαμβανει τὰς αὐτὰς θέσεις καὶ τιμὰς ἃς προλαβόντως· ἐπομένως δὲν δίδονται νέα σημεῖα τῆς καμπύλης.

Εἴδομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (Υ) ἔδωκε τὸν πρῶτον μόνον κλάδον τῆς ὑπερβολῆς. Συλλογιζόμενοι ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως (Υ΄), εὑρήσομεν τὸν δεύτερον κλάδον.

382. Ἕνεκα τοῦ ἐπιβληθέντος ὅρου τῇ ἐπιβατικῇ ἀκτῖνι τοῦ εἶναι ἀείποτε θετική, ἦσαν ἀναγκαῖαι ἀμφότεραι αἱ ἐξισώσεις (Υ), (Υ΄), πρὸς ὁρισμὸν ἀμφοτέρων τῶν κλάδων τῆς ὑπερβολῆς. Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸν περιορισμὸν τοῦτον καί, κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα [369], φέρωμεν τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς ταύτης ἐπὶ τῆς ἐπεκτάσεως τῆς



ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος, ἡ ἐξίσωσις (Υ) ἐπαρκεῖ πρὸς ὁρισμὸν καὶ τοῦ δευτέρου κλάδου τῆς ὑπερβολῆς.

Τῷ ὄντι, ἔστω ΕΡ θέσις τις τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος ἀντιστοιχοῦσα τῇ τιμῇ $\omega = \omega'$· ἡ ἐξίσωσις (Υ) δίδει

$$\rho = \frac{\pi}{1 - \varepsilon\,\text{συν}\,\omega'}.$$

Ὑποτεθείσθω ἀρνητικὴ ἡ τιμὴ αὕτη. Διὰ τὴν προεκβολὴν ΕΡ΄ τῆς ΕΡ ἔχομεν $\omega = \omega' + 180^\circ$. Ἡ τιμὴ αὕτη φερομένη ἐν τῇ ἐξισώσει (Υ΄), δίδει

$$\rho = \frac{-\pi}{1 - \varepsilon\,\text{συν}\,\omega'},$$

ποσότητα θετικήν· διότι ἡ ἑτέρα εἶναι, καθ᾽ ὑπόθεσιν, ἀρνητική. Λοιπόν, αὕτη ὁρίζει ἐπὶ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος ΕΡ΄ σημεῖον, τὸ Ν, τοῦ κλάδου ΤΓΤ΄. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ αὐτὸ ὅπερ εὑρίσκομεν ἐὰν φέρωμεν τὴν ἀρνητικὴν τιμὴν τῆς ρ, ὑπὸ τῆς (Υ) διδομένην, ἐπὶ τῆς προαγωγῆς τῆς ΕΡ. Ἄρα, παραδεχόμενοι τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος, φέροντες δὲ αὐτὰς ἐπὶ τῆς ἁρμοζούσης θέσεως τῆς γραμμῆς ταύτης, ὁρίζομεν ἅπασαν τὴν ὑπερβολὴν τῇ ἐξισώσει (Υ).

Τὰς αὐτὰς συνθήκας ἐκπληροῖ καὶ ἡ ἐξίσωσις (Υ΄).

### ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΠΟΛΙΚΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ.

383. (Σχ. 156) Λαμβάνομεν ὡς πόλον τὴν ἑστίαν Ε τῆς παραβολῆς, ἀναφερομένης πρὸς τὸν ἄξονα αὐτῆς· ὡς ἄξονα δὲ πολικὸν τὸν τῆς καμπύλης. Κατὰ § 323, ἔχομεν

$$\rho = \tfrac{1}{2}\pi + \chi.$$

Ἀλλά, καλοῦντες τὴν γωνίαν $\text{ΜΕΧ} = \omega$, $\chi = \frac{1}{2}\pi + \rho\,\text{συν}\,\omega$. Λοιπόν, ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην τῆς χ ἐν τῇ τῆς ρ, λαμβάνομεν τὴν πολικὴν ἐξίσωσιν τῆς παραβολῆς·

$$(\Pi) \qquad \rho = \frac{\pi}{1 - \text{συν}\,\omega}.$$

Εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὕτη δίδει ἅπασαν τὴν καμπύλην.

384. Τῇ πρὸς ἀλλήλας συγκρίσει τῶν πολικῶν ἐξισώσεων τῶν τριῶν καμπύλων δευτέρας τάξεως, συνάγομεν ὅτι αἱ γραμμαὶ αὗται δίδονται ὑπὸ μόνης τῆς ἐξισώσεως

$$\rho = \frac{\pi}{1 - \varepsilon\,\text{συν}\,\omega},$$

ἐν ᾗ π δηλοῖ τὴν ἡμιπαράμετρον. Ἕξομεν τὴν ἔλλειψιν, τὴν ὑπερβολὴν, ἢ τὴν παραβολὴν, καθ᾽ ὅσον ὁ λόγος ε ἔσεται $<1$, ἢ $>1$, ἢ $=1$.

Ὅταν $\omega = 90^\circ$, ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς εἶναι πρὸς ὀρθὰς τῷ ἄξονι· τότε εὑρίσκομεν $\rho = \pi$. Λοιπὸν, *ἐν ταῖς καμπύλαις τῆς δευτέρας τάξεως, ἡ κατὰ τὴν ἑστίαν πρὸς ὀρθὰς τῷ ἄξονι χορδὴ ἰσοῦται τῇ παραμέτρῳ.* Τὸ σύμπτωμα τοῦτο ἀνῆκον ἀποκλειστικῶς ταῖς ἑστίαις, δύναται χρησιμεῦσαι πρὸς ὁρισμὸν αὐτῶν.

385. Τὰ ἑξῆς προβλήματα, ἐν συντεταγμέναις πολικαῖς, χρησιμεύσουσι πρὸς ἄσκησιν.

1) *Εὑρεῖν τὸ ἀπ᾽ ἀλλήλων ἀπόστημα δύο σημείων* $(\omega', \rho')$ καὶ $(\omega'', \rho'')$.

Απ. $$\delta = \sqrt{\rho'^2 + \rho''^2 - 2\rho'\rho''\,\text{συν}(\omega'' - \omega')}.$$

2) *Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιζευγνυούσης εὐθείας δύο σημεῖα δοθέντα* $(\omega', \rho')$, $(\omega'', \rho'')$.

Απ. $$\rho = \frac{\rho'\rho''\,\text{ἡμ}(\omega'' - \omega')}{\rho'\,\text{ἡμ}(\omega - \omega') - \rho''\,\text{ἡμ}(\omega - \omega'')}.$$

3) *Προσδιορίσαι τὸ σημεῖον καθ᾽ ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας δύο εὐθεῖαι δοθεῖσαι, καὶ τὴν ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν* Φ.

Απ. $$\rho = \frac{\sqrt{(\kappa\pi' - \kappa'\pi)^2 + (\eta\pi' - \pi\eta')}}{(\eta\kappa' - \eta'\kappa)},$$

$$\text{ἐφ}\,\omega = -\frac{\kappa\pi' - \kappa'\pi}{\eta\pi' - \eta'\pi}, \qquad \text{ἐφ}\,\Phi = \frac{\eta\kappa' - \eta'\kappa}{\eta\eta' + \kappa\kappa'}.$$

4) *Προσδιορίσαι τὰς ἀπαιτουμένας συνθήκας πρὸς τομὴν καὶ ἐπαφὴν δύο κύκλων ὑπ᾽ ἀλλήλων.*

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΔ΄.

## ΧΡΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ.

### ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΩΡΙΣΜΕΝΩΝ.

386. Τεθείσθω τὸ ζήτημα. *Κατασκευάσαι ἐξίσωσιν ἕνα ἄγνωστον περιέχουσαν.*

Τῇ ἐκφωνήσει ταύτῃ ἐννοοῦμεν ὅτι, ὁ ἄγνωστος εἶναι μῆκος ὁριστέον τῇ συνδρομῇ γραμμῶν, μὴν ἐπιλυομένης τῆς ἐξισώσεως. Ὁ ἄγνωστος δύναται ἐμφαίνειν πᾶν εἶδος μεγέθους, ἢ καὶ ἀφῃρημένον ἀριθμὸν, χωρὶς τούτου ἕνεκα νὰ μεταβάλληται τὸ πρόβλημα· διότι, φανερὸν ὅτι δυνάμεθα ἀείποτε θεωρεῖν τὸν ἄγνωστον τοῦτον ὡς γραμμὴν, ἧς ὁ λόγος πρός τινα μονάδα γραμμικὴν ἰσοῦται τῷ τῆς ζητουμένης ποσότητος πρὸς τὴν ὁμοειδῆ ταύτης μονάδα.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $$\Sigma(\chi) = 0,$$

ἐν ᾗ χ εἶναι γραμμὴ ἄγνωστος. Ἐὰν κατασκευάσωμεν, ᾧ τινι δήποτε τρόπῳ, τὴν ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \Sigma(\chi)$ ἐμφαινομένην καμπύλην, δῆλον ὅτι αἱ τετμημέναι τῶν σημείων καθ᾽ ἃ ἡ καμπύλη αὕτη τεμεῖ τὸν ἄξονα τῶν χ, ἔσονται αἱ πραγματικαὶ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\Sigma(\chi) = 0$. Οὕτως, ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος καμπύλη εἶναι ἡ ἐν τῷ Σχ. 157· αἱ ζητούμεναι ῥίζαι εἰσὶ

$$\chi = \text{ΑΡ}, \quad \chi = \text{ΑΡ}', \quad \chi = -\text{ΑΡ}''.$$

Δυνάμεθα προσέτι μεταθέσαι εἰς τὸ δεύτερον μέλος ὅρους τινὰς τῆς ἐξισώσεως $\Sigma(\chi) = 0$· τότε λαμβάνομεν ἑτέραν, μορφὴν ἔχουσαν τοιαύτην, $\Phi(\chi) = \Psi(\chi)$.

Κατασκευάζομεν τὰς ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων $\psi = \Phi(\chi)$, $\psi = \Psi(\chi)$ δηλουμένας γραμμάς. Αἱ τετμημέναι τῶν σημείων καθ' ἃ αἱ γραμμαὶ αὗται τέμνουσιν ἀλλήλας, εἰσὶν αἱ ζητούμεναι τιμαί. Τῷ ὄντι, διὰ τὰ σημεῖα ταῦτα, ἔχομεν

$$\Phi(\chi) = \Psi(\chi).$$

Ἐν γένει, μυρίοις τρόποις διαφόροις ἐκλέγομεν δύο γραμμὰς ὧν αἱ τομαὶ καθιστῶσι γνωστὰς τὰς ῥίζας ἐξισώσεώς τινος. Μόνη οὐσιώδης συνθήκη ἐκπληρωτέα εἶναι τὸ νὰ προκύπτῃ ἡ προτεθεῖσα ἐξίσωσις τῇ ἀπαλοιφῇ τοῦ $\psi$ ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῶν γραμμῶν τούτων, ἢ τοὐλάχιστον νὰ προκύπτῃ ἐξίσωσις περιέχουσα ἁπάσας τὰς πραγματικὰς ῥίζας τῆς προτεθείσης. Ἐννοεῖται ὅτι, ἐν ᾗ περιπτώσει ἡ προκύπτουσα αὕτη ἐξίσωσις περιέχει καὶ ἑτέρας ῥίζας, πλὴν τῶν τῆς προτεθείσης, αἱ ξέναι αὗται τιμαὶ πως δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν μετὰ τὰς κατασκευάς.

387. Ὅταν θεωρῶμεν γραμμὰς εἴδους ὡρισμένου, εὐκόλως γνωρίζομεν εἰς τὴν ἐπίλυσιν τίνων ἐξισώσεων δύνανται αὗται νὰ χρησιμεύσωσιν. Ἀρκεῖ νὰ ἐξετάσωμεν τὸν βαθμὸν τῆς τελικῆς ἐξισώσεως προκυπτούσης τῇ ἀπαλοιφῇ τοῦ $\psi$ ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῶν γραμμῶν τούτων. Οὕτως, ἡ τοῦ $\psi$ ἀπαλοιφὴ ἐν ταῖς ἐξισώσεσι τῆς εὐθείας καὶ τοῦ κύκλου δίδει προκύπτουσαν δευτεροβάθμιον· ἄρα, τῇ εὐθείᾳ γραμμῇ καὶ τῷ κύκλῳ ἀδύνατον ἐπιλῦσαι ἕτερα ζητήματα ἢ ἐκεῖνα ὧν ἡ ἐξίσωσις ἄγεται εἰς τὸν δεύτερον βαθμόν. Δύο καμπύλαι δευτέρας τάξεως δίδουσιν ἐξίσωσιν τελικὴν τεταρτοβάθμιον· λοιπὸν, δὲν πρέπει νὰ ζητῶμεν εἰς τὰς τομὰς τῶν γραμμῶν τούτων τὴν κατασκευὴν ἐξισώσεως βαθμοῦ ὑπερτέρου τοῦ τετάρτου. Καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἕπονται ἐφαρμογαί τινες.

388. Κατασκευάσωμεν τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν

$$\chi^2 + \alpha\chi + \beta = 0. \tag{1}$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν αὐτὴν ὡς προκύψασαν τῇ ἀπαλοιφῇ τοῦ $\psi$ ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$\psi = 0, \qquad \psi = \chi^2 + \alpha\chi + \beta,$$



πρέπει νὰ κατασκευάσωμεν, ἐν ἄξοσιν οἱοισδήποτε, τὴν παραβολὴν ἣν ἡ δευτέρα ἐμφαίνει. Τὰ ἀπολαμβανόμενα ἀποστήματα ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν $\chi$, μεταξὺ τῆς ἀρχῆς καὶ τῆς καμπύλης, ἔσονται αἱ ζητούμεναι ῥίζαι.

Δυνάμεθα ποιῆσαι χρῆσιν παραβολῆς δοθείσης. Τῷ ὄντι, ἡ ἐξίσωσις (1) προκύπτει ἐπίσης ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$\chi^2 = k\psi, \qquad k\psi + \alpha\chi + \beta = 0\cdot$$

ἡ δὲ παράμετρος k λαμβάνει τὸ τυχὸν μέγεθος.

Ἀλλ' ὁ συνδυασμὸς τοῦ κύκλου καὶ τῆς εὐθείας εἶναι προτιμότερος. Καθιστῶμεν τὰς ἐξισώσεις

$$\psi = 0, \qquad (\chi - \pi)^2 + (\psi - \varkappa)^2 = A^2.$$

Ἀπαλοιφομένης $\psi$ λαμβάνομεν

$$\chi^2 - 2\pi\chi + \pi^2 + \varkappa^2 - A^2 = 0.$$

Ὅπως ἡ ἐξίσωσις αὕτη ᾖ ἰσομερὴς τῇ (1), ἀπαιτεῖται νὰ ἔχωμεν

$$-2\pi = \alpha, \qquad \pi^2 + \varkappa^2 - A^2 = \beta,$$

ὅθεν

$$\pi = -\tfrac{1}{2}\alpha, \qquad A^2 = \tfrac{1}{4}\alpha^2 - \beta + \varkappa^2.$$

Λοιπὸν, δίδομεν τιμὴν τῇ $\varkappa$ κατὰ βούλησιν, ὑπὸ τὸν ὅρον τοῦ εἶναι $A^2$ θετικόν· οὕτως ἔξομεν κύκλον οὗτινος ἡ τομὴ πρὸς τὴν γραμμὴν τῶν $\chi$ ὁρίσει τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως (1).

389. Κατασκευάσωμεν ἤδη τὴν τριτοβάθμιον ἐξίσωσιν,

$$\chi^3 + \alpha\chi + \beta = 0. \tag{2}$$

Κατὰ πρῶτον καθιστῶμεν ἀντ' αὐτῆς τὰς ἑξῆς,

$$\psi = \chi^3, \qquad \psi + \alpha\chi + \beta = 0,$$

ἐμφαινούσας, τῆς μὲν καμπύλην, τῆς δὲ εὐθεῖαν ἃς κατασκευάζομεν. Παρατηρητέον δὲ ὅτι, ἡ αὐτὴ καμπύλη χρησιμεύει οἱοιδήποτε ἂν ὦσιν οἱ συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως (2).

Εὐκόλως ὅμως ἀποφεύγομεν τὰς γραμμὰς τάξεων ὑπερτέρων τῆς δευτέρας. Π. χ., ἀντὶ τῆς ἐξισώσεως (2), θέτομεν τὰς ἑξῆς,

$$k\psi = \chi^2, \qquad k\chi\psi + \alpha\chi + \beta = 0,$$

ἐμφαινούσας παραβολὴν καὶ ὑπερβολήν. Ἐπειδὴ ἡ παράμετρος τῆς παραβολῆς εἶναι κατὰ βούλησιν, ποιοῦμεν ἀείποτε χρῆσιν τῆς αὐτῆς παραβολῆς. Ἀλλ' ἡ ὑπερβολὴ διαφέρει ἐν ἑκάστῃ μερικῇ περιπτώσει τῆς ἐξισώσεως (2).

Θέλομεν ἰδεῖ, ἐν τέλει τοῦ ἑπομένου §, ὅτι δύναταί τις ποιῆσαι χρῆσιν τῆς παραβολῆς καὶ τοῦ κύκλου, ὅπερ ἁπλούστερον.

390. Θεωρήσωμεν ἤδη τὴν τεταρτοβάθμιον ἐξίσωσιν,

(3) $$\chi^4+\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0\,.$$

Ἀντ' αὐτῆς καθιστῶμεν τὰς ἑξῆς,

$$k\psi=\chi^2\,,\qquad k^2\psi^2+\alpha k\psi+\beta\chi+\gamma=0\,,$$

αἵτινες ἀμφότεραι ἐμφαίνουσι παραβολάς.

Ἀλλά, παραλείποντες τὴν χρῆσιν παντὸς ἑτέρου συστήματος γραμμῶν, ὁρίσωμεν τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως (3) διὰ τῶν τομῶν παραβολῆς καὶ κύκλου. Πρὸς τοῦτο, λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις,

$$k\psi=\chi^2\,,\qquad (\chi-\pi)^2+(\psi-\varkappa)^2=\Lambda^2\,,$$

ἐξ ὧν, τῇ ἀπαλοιφῇ τοῦ ψ, συνάγομεν,

$$\chi^4+k(k-2\varkappa)\chi^2-2k^2\pi\chi+(\pi^2+\varkappa^2-\Lambda^2)k^2=0\,.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη καθίσταται ἰσομερὴς τῇ (3), ὅταν

$$k(k-2\varkappa)=\alpha,\qquad 2k^2\pi=-\beta,\qquad (\pi^2+\varkappa^2-\Lambda^2)k^2=\gamma.$$

Λοιπόν, ἔχομεν τρεῖς ἐξισώσεις περιεκτικὰς τεσσάρων κατὰ βούλησιν ποσοτήτων, τῶν $k$, $\pi$, $\varkappa$, $\Lambda$· ἑπομένως, ὁρίζομεν τὰς τρεῖς, δίδοντες τῇ μιᾷ τιμὴν κατ' ἀρέσκειαν. Τότε ἕξομεν παραβολὴν καὶ κύκλον. Αἱ τετμημέναι τῶν πρὸς ἀλλήλας τομῶν τῶν γραμμῶν τούτων ἔσονται αἱ πραγματικαὶ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (3).

Ἡ προηγουμένη ἐπίλυσις περιλαμβάνει, ὡς μερικὴν περίπτωσιν, τὴν τῆς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως. Τῷ ὄντι, τῇ ὑποθέσει $\gamma=0$, ἡ ἐξίσωσις (3) καθίσταται

$$\chi^4+\alpha\chi^2+\beta\chi=0\,,\qquad \text{ἢ}\qquad \chi^3+\alpha\chi+\beta=0\,,$$



παραλειπομένης τῆς ἴσης μηδενὶ ῥίζης. Τότε, ἡ τελευταία τῶν ἄνω τριῶν σχέσεων δίδει $\Lambda^2=\pi^2+\varkappa^2$· ὅθεν δηλοῦται ὅτι ἡ ἀρχὴ εἶναι σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου· ἐπειδὴ δὲ ἡ αὐτὴ εἶναι σημεῖον καὶ τῆς παραβολῆς, φανερὸν ὅτι τῇ τομῇ ταύτῃ συστοιχεῖ ἡ ὡς ἄχρηστος παραλειπτέα ῥίζα $\chi=0$.

### ΠΕΡΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΙΝΩΝ ΠΕΡΙΦΗΜΩΝ ΠΑΡΑ ΤΟΙΣ ΑΡΧΑΙΟΙΣ.

Ἐκθέσομεν τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων τινῶν, περὶ ἃ λίαν ἐνησχολήθησαν οἱ ἀρχαῖοι Μαθηματικοί, ἅτινα ὅμως παρὰ τοῖς νεωτέροις ὡς ἁπλούστατα θεωροῦνται.

391. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Δύο εὐθειῶν δοθεισῶν, εὑρεῖν δύο μέσας ἀναλόγους αὐτῶν, ἐν ἀναλογίᾳ συνεχεῖ.*

Ἔστωσαν, $\alpha$ καὶ $\beta$ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι· $\chi$ καὶ $\psi$ αἱ ἄγνωστοι μέσαι ἀνάλογοι. Πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$\alpha:\chi::\chi:\psi\,,\qquad \chi:\psi::\psi:\beta\,.$$

Ἐκ τῶν ἀναλογιῶν τούτων μορφοῦμεν τὰς ἐξισώσεις,

(1) $$\chi^2=\alpha\psi\,,\qquad \psi^2=\beta\chi\,,$$

αἵτινες ἐμφαίνουσι παραβολὰς (Σχ. 158). Αἱ τιμαὶ τῶν $\chi$, $\psi$, εἰσί,

$$\chi=\text{ΑΠ},\qquad \psi=\text{ΜΠ}.$$

Ἡ κατασκευὴ αὕτη ἐδόθη ὑπὸ ΜΕΝΑΙΧΜΟΥ.

392. Πολυπλασιάζοντες τὰς ἐξισώσεις (1) μέλος ἐπὶ μέλος, καὶ ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν παράγοντα $\chi\psi$, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi\psi=\alpha\beta$, ὑπερβολὴν ἐμφαίνουσαν. Ἀντὶ τῆς ἑτέρας τῶν παραβολῶν ποιοῦμεν χρῆσιν τῆς ὑπερβολῆς ταύτης, καὶ λαμβάνομεν οὕτω τὴν ἐν Σχ. 159 παρισταμένην κατασκευήν, ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ Γεωμέτρου δοθεῖσαν.

393. Ἡ ἑξῆς ἐπίλυσις εἶναι ἁπλουστέρα τῶν προηγουμένων, ὡς ἐκτελουμένη τῷ συνδυασμῷ μιᾶς κωνικῆς τομῆς, ἀντὶ δύο, καὶ κύκλου.

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις (1), καὶ λαμβάνομεν

$$\chi^2+\psi^2=\alpha\psi+\beta\chi\,.$$

Κατασκευάζομεν, ἐν ἄξοσιν ὀρθογωνίοις, τὴν ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως ταύτης δηλουμένην περιφέρειαν κύκλου· τὰ σημεῖα καθ᾽ ἃ αὕτη συμπίπτει τῇ ἑτέρᾳ τῶν παραβολῶν (1) ὁρίζουσι τὰς ζητουμένας δύο μέσας ἀναλόγους (Σχ. 160).

394. *Ἐπίλυσις κατὰ ΔΙΟΚΛΕΑ.* Πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τῶν δύο μέσων ἀναλόγων ὁ Γεωμέτρης οὗτος ἐφεῦρε τὴν κισσοειδῆ. Ἔστω (Σχ. 161) κισσοειδὴς γραφεῖσα διὰ κύκλου, τοῦ ΑΛΒ. Κατὰ τὴν ἐν § 70 κατασκευὴν τῆς καμπύλης ταύτης, ἔχομεν ΛΜ = ΛΔ· ἄρα, τὰ τρίγωνα ΛΜΠ, ΛΔΡ, εἰσὶν ἰσάλληλα, καὶ ἔχομεν

$$\text{ΑΠ} = \text{ΚΒ} = \text{ΛΡ}, \quad \text{ΜΠ} = \text{ΔΡ}, \quad \text{ΛΚ} = \text{ΒΠ}, \quad \text{ΠΝ} = \text{ΚΛ}.$$

Αἱ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ἰδιότητες δίδουσιν,

$$\text{ΛΚ} : \text{ΚΑ} :: \text{ΚΑ} : \text{ΚΒ}, \quad \text{ΒΡ} : \text{ΑΡ} :: \text{ΑΡ} : \text{ΔΡ},$$

ἢ, συνεπείᾳ τῶν ἰσαλλήλων γραμμῶν,

$$\text{ΒΠ} : \text{ΠΝ} :: \text{ΠΝ} : \text{ΑΠ}, \quad \text{ΠΝ} : \text{ΑΠ} :: \text{ΑΠ} : \text{ΜΠ},$$

ἢ

$$\div\!\div\ \text{ΒΠ} : \text{ΠΝ} : \text{ΑΠ} : \text{ΜΠ},$$

Λοιπὸν ΠΝ καὶ ΑΠ, ἤθελον εἶσθαι αἱ ζητούμεναι μέσαι ἀνάλογοι, ἐὰν αἱ δοθεῖσαι γραμμαὶ α, β, ἦσαν αἱ ΒΠ, ΜΠ. Ὁρίσωμεν πρῶτον τὸ σημεῖον Μ τῆς κισσοειδοῦς, δι᾽ ὃ ἔχομεν

$$\text{ΒΠ} : \text{ΜΠ} :: \alpha : \beta.$$

Πρὸς τοῦτο, λαμβάνομεν πρὸς ὀρθὰς ΒΕ = α, ΕΖ = β· ἐπιζευγνύομεν ΒΖ, συμπίπτουσαν τῇ καμπύλῃ κατὰ τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ. Τότε $\alpha = \frac{\text{ΒΠ} \times \beta}{\text{ΜΠ}}$· πολυπλασιάζοντες δὲ τοὺς ὅρους τῆς ἄνωθι προόδου ἐπὶ β, εἶτα διαιροῦντες διὰ ΜΠ, λαμβάνομεν

$$\div\!\div\ \alpha : \frac{\text{ΠΝ} \times \beta}{\text{ΜΠ}} : \frac{\text{ΑΠ} \times \beta}{\text{ΜΠ}} : \beta.$$

Ἄρα, αἱ ζητούμεναι δύο μέσαι ἀνάλογοι εἰσί,

$$\chi = \frac{\text{ΠΝ} \times \beta}{\text{ΜΠ}}, \qquad \psi = \frac{\text{ΑΠ} \times \beta}{\text{ΜΠ}}.$$



Τὰς γραμμὰς δὲ ταύτας λαμβάνομεν τῇ κατασκευῇ δύο τετάρτων ἀναλόγων.

395. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Εὑρεῖν κύβον διπλάσιον κύβου δοθέντος.*

Ἔστω α ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος κύβου, καὶ χ ἡ τοῦ ζητουμένου. Μορφοῦμεν τὴν ἑξῆς ἐξίσωσιν, ἣν πρόκειται κατασκευάσαι,

(2) $$\chi^3 = 2\alpha^3.$$

Αὕτη προκύπτει ἀπαλοιφῇ τοῦ ψ, ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$\alpha^2\psi = \chi^3, \qquad \psi = 2\alpha\,;$$

ὧν ἡ μὲν ἐμφαίνει καμπύλην κατασκευαζομένην διὰ σημείων, ἡ δὲ εὐθεῖαν παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν τετμημένων. Ἄρα, ἡ τετμημένη τῆς συνδρομῆς $\chi = \text{ΑΠ}$, εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἀγνώστου κύβου (Σχ. 162).

396. Ἡ ἐξίσωσις (2), τιθεμένη ὑπὸ τὴν μορφὴν $\chi^2 \times \chi = 2\alpha^3$, δείκνυσιν ὅτι προκύπτει ἐπίσης ἐκ τῶν

$$\chi^2 = 2\alpha\psi, \qquad \chi\psi = \alpha^2.$$

Λοιπὸν, τὸ πρόβλημα ἐπιλύεται προσέτι τῇ συνδρομῇ παραβολῆς καὶ ὑπερβολῆς.

397. Εἰσάγοντες τὴν ῥίζαν $\chi = 0$, ἣν ἀποῤῥίψομεν κατόπιν, ἡ ἐξίσωσις (2) καθίσταται $\chi^4 = 2\alpha^3\chi$. Θέτοντες $\chi^2 = \alpha\psi$, ἡ τελευταία αὕτη τρέπεται εἰς $\psi^2 = 2\alpha\chi$. Ἄρα, τὸ πρόβλημα ἐπιλύεται καὶ δυσὶ παραβολαῖς.

398. Ἐὰν προσθέσωμεν τὰς ἐξισώσεις τῶν δύο τούτων παραβολῶν, λαμβάνομεν,

$$\psi^2 + \chi^2 = \alpha\psi + 2\alpha\chi\,.$$

Λοιπὸν, πρὸς ἁπλουστέραν ἐπίλυσιν τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος προβλήματος, ποιοῦμεν χρῆσιν παραβολῆς καὶ κύκλου.

399. Ἀξία παρατηρήσεως εἶναι ἡ σχέσις τοῦ προβλήματος τούτου πρὸς τὸ προηγούμενον. Τῷ ὄντι, θέτομεν τὰς ἀναλογίας

$$\alpha : \chi :: \chi : \frac{\chi^2}{\alpha}, \qquad \chi : \frac{\chi^2}{\alpha} :: \frac{\chi^2}{\alpha} : 2\alpha\,.$$

Ἐξ ὧν πορίζόμεθα τὴν ἐξίσωσιν (2) $\chi^3 = 2\alpha^3$. Λοιπὸν, συνάγομεν ὅτι, *ἡ πλευρὰ τοῦ διπλασίου κύβου χ ἰσοῦται τῇ πρώτῃ τῶν δύο μέσων ἀναλόγων μεταξὺ α καὶ 2α.*

400. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον εἰς τρεῖς ἴσας γωνίας διελεῖν.*

(Σχ. 163) Ἔστω ΒΑΓ ἡ δοθεῖσα γωνία. Τῷ Α κέντρῳ, ἀκτῖνι δὲ τῇ τυχούσῃ, γράφομεν τόξον, τὸ ΒΓ· εἶτα ἄγομεν ΓΔ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ. Λαμβάνομεν ΑΒ ὡς μονάδα, καὶ ΑΔ ὡς τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου ΒΓ. Τὸ πρόβλημα ἐπιλύεται ὁριζομένου τοῦ συν$\frac{1}{3}$ΒΓ. Καλοῦμεν, συνΒΓ$=\alpha$, συν$\frac{1}{3}$ΒΓ$=\chi$. Ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας γινώσκομεν ὅτι, ὁ ἄγνωστος χ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἐξισώσεως

(3) $$\chi^3-\tfrac{3}{4}\chi-\tfrac{1}{4}\alpha=0\,,$$

κατὰ διαφόρους τρόπους κατασκευαζομένης.

1ον. Ἀντ' αὐτῆς λαμβάνομεν τὰς ἑξῆς, καμπύλην καὶ εὐθεῖαν ἐμφαινούσας (Σχ. 164)· $\psi=\chi^3$, $\psi=\frac{3}{4}\chi+\frac{1}{4}\alpha$,

2ον. Λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις $k\chi\psi-\frac{3}{4}\chi-\frac{1}{4}\alpha=0$, $\chi^2=k\psi$· $k$ οὔσης παραμέτρου τῆς τυχούσης. Ἔχομεν οὕτως ὑπερβολὴν καὶ παραβολήν.

3ον. Πολυπλασιαζομένη ἡ ἐξίσωσις (3) ἐπὶ χ, καθίσταται

$$\chi^4-\tfrac{3}{4}\chi^2-\tfrac{1}{4}\alpha\chi=0\,.$$

Αὕτη δὲ προκύπτει ἐκ τῶν ἑξῆς δύο,

$$\psi^2-\tfrac{3}{4}\psi-\tfrac{1}{4}\alpha\chi=0\,,\qquad \chi^2=\psi\,.$$

Λοιπόν, τὸ πρόβλημα ἐπιλύεται δυσὶ παραβολαῖς. Ἀναμνηστέον δὲ ἐν τέλει, ὅτι ἡ ῥίζα $\chi=0$ εἶναι ἀποῤῥιπτέα.

4ον. Προσθέτομεν τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις καὶ θεωροῦμεν τὸ σύστημα, παραβολὴν καὶ κύκλον ἐμφαῖνον·

$$\chi^2=\psi\,,\quad \chi^2+\psi^2-\tfrac{7}{4}\psi-\tfrac{1}{4}\alpha\chi=0\,.$$

ΣΗΜ. Ἄπειρα τόξα ὑπάρχουσιν ἔχοντα τὸ αὐτὸ τοῦ τόξου ΒΓ συνημίτονον α· ἄρα, ἡ ἐξίσωσις (3) πρέπει νὰ δίδῃ τὸ συνημίτονον τοῦ τριτημορίου ἑκάστου αὐτῶν. Γινώσκομεν ὅτι τρία τόξα ὑπάρχουσιν ὧν τὰ τριτημόρια ἔχουσιν ἡμίτονα διάφορα. Ἄρα, αἱ τρεῖς ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (3) εἰσὶ πραγματικαὶ καὶ ἐλάσσονες μονάδος. Τὸ Σχ. 164 ἐχαράχθη τῇ ὑποθέσει τοῦ $\alpha=4/9$. Αἱ τῆς χ τιμαί, παραλειπομένης τῆς ἴσης 0, εἰσὶ $\chi=$ ΑΗ, $\chi=-$ΑΗ′, $\chi=-$ΑΗ″. Εὐκόλως διακρίνομεν ὅτι ἡ πρώτη μόνη ἁρμόζει εἰς τὸ πρόβλημα. Ὑποθέτοντες ἤδη (Σχ. 163) ΑΔ $=4/9$ ΑΒ, λαμβάνομεν ΑΕ $=$ ΑΗ, ἄγομεν ΕΖ κάθετον τῇ ΑΒ. Τὸ μὲν τόξον ΒΖ ἔσεται τὸ τριτημόριον τοῦ ΒΓ, ἡ δὲ γωνία ΒΑΖ τὸ τριτημόριον τῆς ΒΑΓ.

# ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

## ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

## ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ.

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α′.

### ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΕΝ ΤΩ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΙ.

#### ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ, ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ, ΚΑΙ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΕΝ ΤΩ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΙ.

401. ΤΗΝ θέσιν τῶν διαφόρων σημείων τοῦ διαστήματος ὁρίζομεν σχετίζοντες αὐτὰ πρὸς τρία ἐπίπεδα μόνιμα συνιστῶντα γωνίαν στερεάν. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον τέμνονται πρὸς ὀρθάς. Ἐπὶ τοῦ παρόντος ὅμως οὐδεμίαν μερικὴν ποιήσομεν ὑπόθεσιν.

(Σχ. 165) Ἔστωσαν, ΧΑΧ′, ΨΑΨ′, ΖΑΖ′, τῶν ἐπιπέδων τούτων σύνδυο αἱ τομαί, καὶ Μ σημεῖον τὸ τυχὸν ἐν τῷ διαστήματι. Ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου, παραλλήλως πρὸς τὰ τρία μόνιμα ἐπίπεδα, ἄγομεν τρία ἐπίπεδα ὡς ἑξῆς· ΜΜ′ΠΜ″ παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΨΑΖ, τέμνον τὴν γραμμὴν Χ′Χ κατὰ τὸ Π· ΜΜ′ΚΜ‴ παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΧΑΖ καὶ τέμνον τὴν Ψ′Ψ κατὰ τὸ Κ· καὶ ΜΜ″ΡΜ‴

παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΧΑΨ, τέμνον τὴν ΖΖ′ εἰς Ρ. Τὸ σημεῖον Μ ἔσεται ὡρισμένον ἐντελῶς, ὅταν ὦσι γνωστὰ τὰ σημεῖα Π, Κ, Ρ. Διότι, ἀγομένων ἀπὸ τῶν σημείων τούτων, τριῶν ἐπιπέδων παραλλήλων τοῖς μονίμοις ἐπιπέδοις, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ἔσεται τὸ σημεῖον Μ. Ἀφ᾽ ἑτέρου μέρους, τὰ σημεῖα Π, Κ, Ρ, ὁρίζονται καὶ ταῦτα διὰ τῶν ἀποστημάτων ΑΠ, ΑΚ, ΑΡ, προσλαμβανόντων τὸ $+$ ἢ τὸ $-$, κατὰ τὴν θέσιν αὐτῶν σχετικῶς πρὸς τὸ σημεῖον Α.

402. Τ᾽ ἀποστήματα ΑΠ, ΑΚ, ΑΡ, λαμβανόμενα πρὸς τὰ ἁρμόζοντα αὐτοῖς σημεῖα, καλοῦνται *αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου* Μ. Αἱ εὐθεῖαι ΧΧ′, ΨΨ′, ΖΖ′, εἰσὶν *αἱ γραμμαὶ ἢ οἱ ἄξονες* τῶν συντεταγμένων τούτων· τὸ σημεῖον Α τῆς συνδρομῆς αὐτῶν εἶναι *ἡ ἀρχὴ* τῶν συντεταγμένων, καὶ τὰ ἐπίπεδα ΧΑΨ, ΧΑΖ, ΨΑΖ, καλοῦνται *ἐπίπεδα τῶν συντεταγμένων*, ἢ ἁπλῶς *ἐπίπεδα συντεταγμένα*. Πολλάκις αἱ συντεταγμέναι δηλοῦνται γενικῶς $\chi$, $\psi$, $z$· τότε λέγομεν ὅτι, ΧΧ′ εἶναι ὁ ἄξων τῶν $\chi$· ΧΑΨ εἶναι τὸ ἐπίπεδον τῶν $\chi\psi$, κ. τ. ἑ. Τὰ ἐπίπεδα καὶ οἱ ἄξονες τῶν συντεταγμένων θεωροῦνται ὡς ἀπεριόριστα· ἀλλὰ πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεως, εἰς τὰ σχήματα συνήθως παριστάνουσι μόνα τὰ μέρη τῶν ἀξόνων ἐφ᾽ ὧν λογίζονται αἱ θετικαὶ συντεταγμέναι.

403. Τὰ ἀπὸ τοῦ σημείου Μ ἀχθέντα τρία ἐπίπεδα συγκροτοῦσι μετὰ τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων παραλληλεπίπεδον. Ἄρα, λαμβάνομεν ὡς συντεταγμένας τοῦ σημείου Μ· ἢ τὰ ἐπὶ τῶν ἀξόνων ἀποστήματα ΑΠ, ΑΚ, ΑΡ· ἢ τὰ ΜΜ‴, ΜΜ″, ΜΜ′, ἀπὸ τοῦ σημείου Μ ἀναχωροῦντα καὶ ὄντα παράλληλα τοῖς ἄξοσι· ἢ τὰ ΑΠ, ΠΜ′, Μ′Μ, τὴν γωνιώδη γραμμὴν ΑΠΜ′Μ συνιστῶντα.

404. Κατὰ τὰ προλεχθέντα, ἐὰν καλέσωμεν $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, τρία μήκη θετικὰ ἢ ἀρνητικά, καὶ λάβωμεν $\chi=\alpha$, $\psi=\beta$, $z=\gamma$, αἱ τιμαὶ αὗται ὁρίσουσι τὴν θέσιν ἑνὸς σημείου. Ἀλλὰ τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα, ἅτινα ὑποτίθενται ἐκτεινόμενα ἐπ᾽ ἄπειρον, συνιστῶσι προφανῶς ὀκτὼ γωνίας τριέδρους. Ἐὰν θεωρῶμεν ὡς θετικὰς μὲν τὰς συντεταγμένας ἐπὶ



τῶν ἀξόνων ΑΧ, ΑΨ, ΑΖ, λογιζομένας, ὡς ἀρνητικὰς δὲ τὰς λογιζομένας ἐπὶ τῶν προεκβολῶν ΑΧ′, ΑΨ′, ΑΖ′· τὸ διὰ τῶν ἄνωθι τιμῶν $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ὁριζόμενον σημεῖον Μ δύναται νὰ εὑρεθῇ ἐν μιᾷ τῶν ἐν τῷ ἑξῆς πίνακι θέσεων, κατὰ τὰ σημεῖα τῶν αὐτῶν τιμῶν· ἤτοι

$$\text{Ἐν τῇ γωνίᾳ}\quad \left\{\begin{array}{llll}
\mathrm{AX\Psi Z}, & \chi=+\alpha, & \psi=+\beta, & z=+\gamma,\\
\mathrm{AX'\Psi Z}, & \chi=-\alpha, & \psi=+\beta, & z=+\gamma,\\
\mathrm{AX\Psi' Z}, & \chi=+\alpha, & \psi=-\beta, & z=+\gamma,\\
\mathrm{AX\Psi Z'}, & \chi=+\alpha, & \psi=+\beta, & z=-\gamma,\\
\mathrm{AX'\Psi' Z}, & \chi=-\alpha, & \psi=-\beta, & z=+\gamma,\\
\mathrm{AX'\Psi Z'}, & \chi=-\alpha, & \psi=+\beta, & z=-\gamma,\\
\mathrm{AX\Psi' Z'}, & \chi=+\alpha, & \psi=-\beta, & z=-\gamma,\\
\mathrm{AX'\Psi' Z'}, & \chi=-\alpha, & \psi=-\beta, & z=-\gamma.
\end{array}\right.$$

Ὅταν ἡ μία τῶν συντεταγμένων ἦναι μηδὲν, τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο ἑτέρων. Π. χ. ὅταν ἔχωμεν

$$\chi=\alpha,\quad \psi=\beta,\quad z=0,$$

τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν $\chi\psi$.

Ὅταν δύο συντεταγμέναι ἰσοῦνται μηδενί, τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς τρίτης· οὕτω,

$$\chi=\alpha,\quad \psi=0,\quad z=0,$$

δηλοῦσι σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν $\chi$ κείμενον.

Τέλος, τὸ σημεῖον συμπίπτει τῇ ἀρχῇ ὅταν συγχρόνως

$$\chi=0,\quad \psi=0,\quad z=0.$$

405. Τὰ σημεῖα Μ′, Μ″, Μ‴, καθ᾽ ἃ αἱ ἀπὸ τοῦ σημείου Μ ἀγόμεναι παράλληλοι τοῖς ἄξοσι, τρυποῦσι τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα, καλοῦνται *αἱ προβολαὶ* τοῦ σημείου τούτου. Αἱ προβολαὶ εἰσὶν *ὀρθογώνιοι ἢ πλάγιαι*, καθ᾽ ὅσον δίδονται ὑπὸ γραμμῶν καθέτων ἢ πλαγίων. Οὕτω, καλοῦντες καὶ αὖθις $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου Μ, φανερὸν ὅτι

$$\chi=\alpha,\quad \psi=\beta,\quad z=0,$$

δηλοῦσι τὴν προβολὴν Μ′ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν $\chi\psi$·

$$\chi=\alpha,\quad \psi=0,\quad z=\gamma,$$

δηλοῦσι τὴν προβολὴν Μ″ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν $\chi z$·

$$\chi=0,\quad \psi=\beta,\quad z=\gamma,$$

δηλοῦσι τὴν προβολὴν Μ‴ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν $\psi z$.

ὅπως δηλώσωσι μίαν τῶν προβολῶν τούτων, τὴν Μ′, ἐκφωνοῦσιν ἐνίοτε τὰς δύο ἰσότητας $\chi = \alpha$, $\psi = \beta$· ἀλλὰ τότε, ἡ τρίτη $z = 0$, ὑπεννοεῖται καὶ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἐν τοῖς λογισμοῖς.

406. Μεταβῶμεν ἤδη εἰς τὸν ὁρισμὸν τῶν ἐπιφανειῶν. Θεωρήσωμεν ἐπιφάνειαν οἱανδήποτε· ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι ἐλάβομεν τυχαίως δύο συντεταγμένας $\chi = \mathrm{AH}$, $\psi = \mathrm{HM}'$, (Σχ. 165). Ἄξωμεν τὴν εὐθεῖαν, Μ′Μ παράλληλον τῷ ἄξονι ΑΖ, ἥτις τρυπήσει τὴν ἐπιφάνειαν καθ' ἓν σημεῖον Μ, ἢ κατὰ πλείονα σημεῖα, ἅτινα ἔσονται ἐντελῶς ὡρισμένα. Ὅθεν ἕπεται, ὅτι πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ χ, ψ, z, σχέσις τοιαύτη, ὥστε δοθεισῶν δύο τῶν γραμμῶν τούτων, αἱ τῆς τρίτης τιμαὶ πάράγονται ἀπ' αὐτῶν. Ἡ τὴν τοιαύτην σχέσιν ἐμφαίνουσα ἐξίσωσις καλεῖται *ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας*· ἀμοιβαίως, ἡ ἐπιφάνεια εἶναι *ὁ τόπος τῆς ἐξισώσεως*. Τούτου ἕνεκα, ἐξίσωσις περιεκτικὴ χ, ψ, z, θεωρεῖται ὡς ἐμφαίνουσα ἐπιφάνειαν. Ἀποδείξομεν καὶ ἄλλως τὴν ἀξίαν λόγου πρότασιν ταύτην.

Ἔστω $$\Sigma(\chi, \psi, z) = 0,$$

ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος ἐξίσωσις. (Σχ. 166) Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν z λαμβάνομεν ἀπόστημα οἱονδήποτε, $\mathrm{AA}' = \gamma$, καὶ ἄγομεν τὸ ἐπίπεδον Χ′Α′Ψ′ παράλληλον τῷ ΧΑΨ· αὐτὸ τεμεῖ τὰ ἐπίπεδα ΧΑΖ, ΨΑΖ, κατὰ τὰς εὐθείας Α′Χ′, Α′Ψ′, παραλλήλους τοῖς ἄξοσιν ΑΧ, ΑΨ. Ἐκ τῶν σημείων ἅτινα ἐτυμοποιοῦσι τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν $\Sigma(\chi, \psi, z) = 0$, θεωρήσωμεν μόνον τὰ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Χ′Α′Ψ′ περιεχόμενα· ἔστω Μ ἓν ἐξ αὐτῶν. Ἐὰν ἄξωμεν ΜΝ παράλληλον τῇ Α′Ψ′, καὶ λάβωμεν $\mathrm{A}'\mathrm{N} = \chi'$, $\mathrm{NM} = \psi'$, αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ, ἀναφερομένου πρὸς τὰς γραμμὰς Α′Χ′, Α′Ψ′, ἔσονται $\chi'$, $\psi'$. Αἱ τρεῖς συντεταγμέναι τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ, ἀναφερομένου πρὸς τοὺς τρεῖς ἄξονας ΑΧ, ΑΨ, ΑΖ, εἰσὶ

$$\chi = \mathrm{A}'\mathrm{N} = \chi', \qquad \psi = \mathrm{MN} = \psi', \qquad z = \mathrm{AA}' = \gamma.$$

Ἀλλ' αἱ ποσότητες αὗται πρέπει νὰ ἐτυμοποιῶσι τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν· λοιπὸν, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς ἀντεισαγωγὰς,



προκύψει ἐξίσωσις ἡ $\Sigma(\chi', \psi', \gamma) = 0$, περιεκτικὴ τῶν δύο μόνον μεταβλητῶν $\chi'$, $\psi'$, ἐμφαίνουσα γραμμὴν σχετικῶς πρὸς τοὺς ἄξονας Α′Χ′, Α′Ψ′. Ἄρα, οἱοσδήποτε εἶναι ὁ τόπος τῆς ἐξισώσεως $\Sigma(\chi, \psi, z) = 0$, αἱ τομαὶ αὐτοῦ ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων τῷ τῶν χψ, ἔσονται γραμμαί. Τὸ σύμπτωμα τοῦτο οὐδὲν ἕτερον χαρακτηρίζει ἢ ἐπιφάνειαν. Λοιπὸν, *ἐξίσωσις περιεκτικὴ χ, ψ, z, ἐμφαίνει ἐπιφάνειαν*.

407. *Καὶ ὅμως, ἐπειδὴ συμβαίνει ἡ περιέχουσα χ′ καὶ ψ′* ἐξίσωσις νὰ ἐμφαίνῃ ἓν ἢ πλείονα σημεῖα, ἢ καὶ νὰ ἦναι ἀδύνατος, συμβαίνει ἐπίσης, ἔν τισι περιπτώσεσιν, ἡ περιεκτικὴ χ, ψ, z, ἐξίσωσις νὰ δίδῃ γραμμὴν μόνον, ἓν ἢ πλείονα σημεῖα ἀποκεχωρισμένα, ἢ ἀκόμη νὰ ἦναι ἀδύνατος.

408. Ὅταν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις περιέχῃ δύο μόνον μεταβλητὰς, ὡς $\Sigma(\chi, \psi) = 0$, θεωρουμένων μόνον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου τῶν χψ, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ὁρίζει, ἐν γένει, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, γραμμήν τινα ΓΒ (Σχ. 167). Ἐὰν δ' ἀφ' ἑκάστου σημείου τῆς γραμμῆς ταύτης ἄξωμεν εὐθεῖαν, ὡς π. χ. τὴν ΜΜ′, παράλληλον τοῦ ἄξονος ΑΖ, λαμβάνομεν ἐπιφάνειαν κυλινδρικὴν, κατὰ τὴν γενικὴν ἔννοιαν τῆς ὀνομασίας ταύτης. Φανερὸν ὅτι, αἱ τιμαὶ τῶν χ, ψ, ἔσονται, δι' ἅπαντα τὰ σημεῖα τῶν εὐθειῶν τούτων, αἱ αὐταὶ τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τῆς ΓΜ· μόνη διαφορὰ ὑπάρξει πρὸς τὴν τρίτην συντεταγμένην z. Ἐπειδὴ ὅμως z δὲν περιέχεται ἐν τῇ προτεθείσῃ ἐξισώσει, ἕπεται ὅτι ἅπαντα τὰ σημεῖα, π. χ. τῆς ΜΜ′, ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν ταύτην.

Ὁμοία συνέπεια ἐφαρμόζεται καὶ ἐπὶ τὰς ἐξισώσεις

$$\Sigma(\chi, z) = 0, \qquad \Sigma(\psi, z) = 0.$$

Λοιπὸν, *πᾶσα ἐξίσωσις, δύο μεταβλητῶν περιεκτικὴ, ἐμφαίνει ἐπιφάνειαν κυλινδρικὴν, ἧς αἱ μὲν γεννήτριαι εἰσὶ παράλληλοι τῷ ἄξονι ἐφ' οὗ λογίζονται αἱ μὴ περιεχόμεναι ἐν τῇ ἐξισώσει συντεταγμέναι, τὸ δὲ ἴχνος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἑτέρων δηλοῦται ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως.*

Παρατηρητέον ὅμως ὅτι, προκειμένου λόγου ὁρίσαι ἀναλυτικῶς τὴν καμπύλην ΓΒ, πρέπει νὰ συμπεριλάβωμεν ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις

$$\Sigma(\chi, \psi) = 0, \qquad \text{καὶ} \qquad z = 0\cdot$$

διότι οὕτως ἐκ τοῦ κυλίνδρου ὁλοκλήρου, μόνα τὰ σημεῖα τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐτυμοποιοῦσιν ἀμφοτέρας τὰς σχέσεις.

409. Ὅταν ἐξίσωσίς τις περιέχῃ μίαν μεταβλητήν, ὡς

$$\Sigma(\chi) = 0,$$

λαμβάνομεν ἐξ αὐτῆς, διὰ τὴν συντεταγμένην ταύτην, τιμὰς σταθεράς, ὧν ἑκάστη, ἐὰν ἦναι πραγματική, ὁρίζει ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ τῶν δύο ἑτέρων συντεταγμένων. Τῷ ὄντι, ἔστω $\chi = \alpha$ μία τῶν τιμῶν τούτων. Ἐὰν ἄξωμεν παραλλήλως τῷ τῶν $\psi z$ ἐπίπεδον τέμνον τὸν ἄξονα τῶν $\chi$ ἐν ἀποστάσει $\alpha$ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς, δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ $\alpha$, δῆλον ὅτι, δι' ἅπαντα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τούτου, $\chi$ ἰσοῦται $\alpha$, διαφέρει δὲ διὰ τὰ ἐκτὸς αὐτοῦ σημεῖα.

Λοιπόν, *πᾶσα ἐξίσωσις, μίαν μεταβλητὴν περιέχουσα, ἐμφαίνει σύστημα ἐπιπέδων παραλλήλων τῷ τῶν δύο ἀξόνων ὧν αἱ συντεταγμέναι δὲν περιέχονται ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ.* Ἄρα, δῆλον ὅτι αἱ ἐξισώσεις

$$z = 0, \qquad \psi = 0, \qquad \chi = 0,$$

χαρακτηρίζουσιν ἑκάστη ἓν τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων.

Ἐκ τῶν προεκτεθέντων ἕπεται ὅτι αἱ ἰσότητες

$$\chi = \alpha, \qquad \psi = \beta, \qquad z = \gamma,$$

ἰδίᾳ ἑκάστη θεωρουμένη, δηλοῦσι τρία ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς συντεταγμένοις· ὁμοῦ δὲ θεωρούμεναι, ὁρίζουσι τὸ σημεῖον τῆς συνδρομῆς τῶν αὐτῶν τριῶν ἐπιπέδων. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἀκριβῶς ἐκεῖνο οὗτινος αἱ συντεταγμέναι εἰσὶν $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον λέγομεν ὅτι,

$$\chi = \alpha, \qquad \psi = \beta, \qquad z = \gamma,$$

εἰσὶν *αἱ ἐξισώσεις τοῦ σημείου τούτου.*



410. Ἐξίσωσις περιεκτικὴ μιᾶς, δύο, ἢ τριῶν μεταβλητῶν δύναται ἐμφαίνειν σύστημα γραμμῶν, ἢ σημείων ἀποκεχωρισμένων, ἢ μηδὲν ἐμφαίνειν, καθ' ὅσον ἀναλύεται εἰς δύο ἢ τρεῖς ἑτέρας, ἢ δὲν εἶναι ἐπιδεκτικὴ συστήματος τιμῶν πραγματικῶν. Π. χ. αἱ ἐξισώσεις

$$\chi^2 + \alpha^2 = 0, \quad \chi^2 + \psi^2 + \alpha^2 = 0, \quad \chi^2 + \psi^2 + z^2 + \alpha^2 = 0,$$

οὐδὲν ἐμφαίνουσιν.

Ἡ ἐξίσωσις $\quad (\chi - \alpha)^2 + (\psi - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = 0,$

δηλοῖ τὸ σημεῖον $(\alpha, \beta, \gamma)$· διότι ὑπὸ μόνων τῶν τιμῶν $\chi = \alpha$, $\psi = \beta$, $z = \gamma$, συγχρόνως ἀντεισαγομένων, ἐτυμοποιεῖται. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἑνὸς μόνου συστήματος τιμῶν πραγματικῶν εἶναι ἐπιδεκτική.

Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις $\quad (\chi - \alpha)^2 + (\psi - \beta)^2 = 0,$

ἐτυμοποιεῖται ὑπὸ τοῦ συστήματος $\chi = \alpha$, $\psi = \beta$, οἱαδήποτε εἶναι ἡ $z$· ἑπομένως ἐμφαίνει ἅπαντα τὰ σημεῖα τὰ ἔχοντα τὸ σημεῖον $(\alpha, \beta)$ προβολὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν $\chi\psi$· ἤτοι τὴν τομὴν τῶν ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων $\chi = \alpha$, $\psi = \beta$, δηλουμένων ἐπιπέδων.

411. Τέλος, ὁμιλήσωμεν περὶ γραμμῶν. Ὁ ἁπλούστερος τρόπος δι' οὗ γραμμή τις ὁρίζεται ἐν τῷ διαστήματι, συνίσταται εἰς τὸ θεωρῆσαι αὐτὴν ὡς τομὴν δύο ἐπιφανειῶν ὑπ' ἀλλήλων. Οὕτως, ἡ εὐθεῖα δίδεται τῇ κοινῇ τομῇ δύο ἐπιπέδων· ὁ κύκλος τῇ τομῇ σφαίρας ἐπιπέδῳ, ἢ ἀκόμη τῇ κοινῇ τομῇ δύο σφαιρῶν· κ. τ. ἑ. Αἱ ἐξισώσεις δύο ἐπιφανειῶν περιεκτικῶν γραμμῆς, ὁμοῦ λαμβανόμεναι, καλοῦνται *αἱ ἐξισώσεις τῆς γραμμῆς ταύτης.*

Ἐπειδὴ ὑπάρχουσι μυρίαι ἐπιφάνειαι τῆς αὐτῆς γραμμῆς διερχόμεναι, ὑπάρχουσιν ἐπίσης μυρίαι ἐξισώσεις αἵτινες, σύνδυο λαμβανόμεναι, δύνανται δηλῶσαι τὴν γραμμὴν ταύτην. Τὸ ἀόριστον τοῦτο ἐκλείπει, ἐὰν ἐκλέξωμεν, ἀντὶ τῶν δύο ἐπιφανειῶν, κυλίνδρους παραλλήλους πρὸς δύο ἄξονας συντεταγμένους. Ἐὰν ὁ ἕτερος τῶν κυλίνδρων ἦναι παράλληλος τῇ γραμμῇ τῶν ψ, ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ δὲν περιέχει ψ [408]· ἐὰν δὲ ὁ ἕτερος κύλινδρος ἦναι παράλληλος τῇ γραμμῇ τῶν χ, ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ δὲν περιέχει τὴν μεταβλητὴν ταύτην. Ἐπομένως, δηλοῦντες $\Sigma(\chi, z)$ συνέκθεσίν τινα τῶν χ, z, ἄνευ ψ, καὶ $\Sigma_1(\psi, z)$, συνέκθεσίν τινα τῶν ψ, z, ἄνευ χ, δυνάμεθα λαβεῖν ὡς ἐξισώσεις τῆς τυχούσης γραμμῆς,

$$(1) \qquad \Sigma(\chi, z) = 0, \qquad\qquad (2) \qquad \Sigma_1(\psi, z) = 0.$$

412. (Σχ. 168) Ἔστω ΓΒ, ἡ γραμμὴ περὶ ἧς λόγος. Ἐὰν ἀφ' ἁπάντων τῶν σημείων αὐτῆς Μ, Μ', Μ'', . . . . ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΑΨ, τὰ σημεῖα μ, μ', μ'', . . . . καθ' ἃ τρυπήσωσι τὸ ἐπίπεδον ΧΑΖ, εἶσιν αἱ προβολαὶ τῶν σημείων Μ, Μ', Μ'', . . . . Ἡ μὲν γραμμὴ Γ'Β', τόπος οὖσα πασῶν τῶν προβολῶν τούτων, καλεῖται ἡ *προβολὴ* τῆς γραμμῆς ΓΒ, ὁ δὲ κύλινδρος ΓΒΒ'Γ', ὁ *προβάλλων* κύλινδρος. Φανερὸν ὅτι, ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἡ τὸν κύλινδρον τοῦτον ἐμφαίνουσα· περιοριζομένη δὲ εἰς μόνα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ΧΑΖ, δίδει τὴν προβολὴν Γ'Β'. Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις (2), περιοριζομένη εἰς μόνα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ΨΑΖ, δίδει τὴν προβολὴν τῆς ΓΒ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἄρα, *αἱ ἐξισώσεις* (1), (2), *εἶσιν αἱ* τὰς προβολὰς γραμμῆς δηλοῦσαι ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων ΧΖ, ΨΖ.

413. Ἐὰν μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1), (2), ἀπαλείψωμεν, z, εὑρήσομεν ἐξίσωσιν περιεκτικὴν χ καὶ ψ, ἀνήκουσαν τῇ αὐτῇ γραμμῇ ΓΒ. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐμφαίνει κύλινδρον παράλληλον ταῖς z· περιοριζομένη δὲ εἰς μόνα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ΨΑΧ, ἐμφαίνει τὴν προβολὴν τῆς ΓΒ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

414. Ἐν γένει, ὅταν ὦσι γνωσταὶ αἱ ἐξισώσεις δύο ἐπιφανειῶν οἱωνδήποτε, περιεχουσῶν γραμμήν τινα,

$$\Sigma(\chi, \psi, z) = 0, \qquad \Sigma_1(\chi, \psi, z) = 0,$$

ἡ ἀπαλοιφή, ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων, μιᾶς τῶν συντεταγμένων, δίδει ἐξίσωσιν ἐμφαίνουσαν ἐπιφάνειαν κυλινδρικὴν



παράλληλον τῇ συντεταγμένῃ ταύτῃ. Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ταύτῃ πρέπει νὰ περιέχηται ἡ δοθεῖσα γραμμή, ἕπεται ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα ἐξίσωσις, ἐφαρμοζομένη ἐπὶ μόνων τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου τῶν μεταβλητῶν ἃς περιέχει, ὁρίζει, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, γραμμὴν ἀκριβῶς οὖσαν προβολὴν τῆς δοθείσης. Λοιπόν, ἡ ἐκ διαδοχῆς ἀπαλοιφὴ ἑκάστης τῶν συντεταγμένων, δίδει τὰς προβολὰς τῆς ἐν τῷ διαστήματι καμπύλης ἐπὶ τῶν τριῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων.

## ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

415. Πρῶτον δείξομεν ὅτι, *ἡ πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις περιεκτικὴ τριῶν μεταβλητῶν* χ, ψ, z, *ἐμφαίνει ἀείποτε ἐπίπεδον*. Πρὸς τοῦτο ἀκολουθήσομεν τὴν ἐν § 406 μέθοδον.

Ἔστω ἡ γενικὴ πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις,

$$(\mathrm{E}) \qquad A\chi + B\psi + \Gamma z + \Delta = 0.$$

Καθιστῶμεν ἐν αὐτῇ $\psi = 0$, καὶ ἔχομεν,

$$A\chi + \Gamma z + \Delta = 0, \qquad \text{ἢ} \qquad z = -\frac{A}{\Gamma}\chi - \frac{\Delta}{\Gamma}.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δίδει τὸ ἴχνος (Σχ. 169) ΟΒ τῆς ἐπιφανείας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΧΖ· ἄρα, τὸ ἴχνος τοῦτο εἶναι γραμμὴ εὐθεῖα.

Καθιστῶμεν $\chi = 0$ ἐν τῇ ἐξισώσει (Ε) καὶ ἔχομεν,

$$B\psi + \Gamma z + \Delta = 0, \qquad \text{ἢ} \qquad z = -\frac{B}{\Gamma}\psi - \frac{\Delta}{\Gamma}.$$

Λοιπόν, καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΨΖ τὸ ἴχνος τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας εἶναι γραμμὴ εὐθεῖα ΟΓ, συμπίπτουσα τῷ προηγουμένῳ ἴχνει κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο τοῦ ἄξονος τῶν z.

Ἄξωμεν ἤδη κατ' ἀρέσκειαν ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ΧΖ· ὑποθέσωμεν ὅτι τέμνει τὸν μὲν ἄξονα τῶν ψ ἐν ἀποστάσει $AA' = \beta$, τὰ δὲ ἐπίπεδα ΨΑΧ, ΨΑΖ, κατὰ τὰς γραμμὰς Α'Χ', Α'Ζ', παραλλήλους ταῖς ΑΧ, ΑΖ. Ἔστω Μ σημεῖόν τι τῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου τούτου ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς ἐξισώσεως (Ε). Αναφέρομεν τὸ σημεῖον τοῦτο πρὸς τοὺς ἄξονας Α'Χ', Α'Ζ' καλοῦμεν χ', ζ', τὰς συντεταγμένας αὐτοῦ Α'Π, ΜΠ, λογιζομένας ἐπὶ τῶν ἀξόνων τούτων, ἐνῷ ἐξακολουθήσομεν καλεῖν χ, ψ, ζ, τὰς συντεταγμένας αὐτοῦ Α'Π, ΑΑ', ΜΠ, σχετικῶς πρὸς τοὺς ἄξονας ΑΧ, ΑΨ, ΑΖ. Φανερὸν ὅτι, $\chi = \chi'$, $\psi = \beta$, $z = z'$. Ἀλλ' αἱ τιμαὶ αὗται ἐτυμοποιοῦσιν ἀναγκαίως τὴν ἐξίσωσιν (Ε)· ἄρα ἔχομεν,

$$A\chi' + B\beta + \Gamma z' + \Delta = 0\ , \qquad \text{ἢ} \qquad z' = -\frac{A}{\Gamma}\chi' - \frac{\Delta + B\beta}{\Gamma}.$$

Ἡ σχέσις αὕτη, μεταξὺ χ', ζ', εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς τομῆς τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ζ'Α'Χ'· ἐπειδὴ δὲ εἶναι πρωτοβάθμιος, ἕπεται ὅτι ἡ τομὴ αὕτη εἶναι γραμμὴ εὐθεῖα. Προσέτι, ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς τῆς χ' εἶναι ὁ αὐτὸς τῆς χ ἐν τῇ ἐξισώσει τοῦ ἴχνους ΟΒ, συνάγομεν ὅτι, ἡ Ο'Β' σχηματίζει πρὸς τὴν Α'Ζ' γωνίαν ἴσην τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ΟΒ καὶ ΑΖ. Ἀλλὰ τὸ ἀγόμενον ἐπίπεδον διὰ τῶν δύο ἴχνων ΟΒ, ΟΓ, τέμνεται ὑπὸ τοῦ Ζ'Α'Χ' κατὰ εὐθεῖαν διερχομένην τοῦ σημείου Ο', καὶ σχηματίζουσαν τὴν αὐτὴν γωνίαν πρὸς τὴν Α'Ζ'· ἄρα, εἶναι ἡ αὐτὴ Ο'Β'. Λοιπόν, ἡ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (Ε) δηλουμένη ἐπιφάνεια, τέμνεται ὑφ' ἁπάντων τῶν ἐπιπέδων, παραλλήλων τῷ ΖΑΧ, κατὰ εὐθείας ἁπάσας περιεχομένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΒΟΓ. Ἄρα, ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶναι τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

**416.** ΜΕΡΙΚΑΙ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ. Συμβαίνει πολλάκις ἡ ἐξίσωσις (Ε) νὰ μὴν ἦναι πλήρης· τότε τὸ ἐπίπεδον ὅπερ ἐμφαίνει κατέχει θέσεις ἰδιαζούσας σχετικῶς πρὸς τοὺς ἄξονας. Ἐξετάσωμεν τὰς μερικὰς ταύτας περιπτώσεις.

1ον. Ἔστω $\Delta = 0$, ἡ ἐξίσωσις (Ε) καθίσταται

$$A\chi + B\psi + \Gamma z = 0\,\cdot$$

ἐμφαίνει δὲ, ὡς σαφὲς, ἐπίπεδον τῆς ἀρχῆς διερχόμενον.

2ον. Ἔστω $A = 0$, ἡ ἐξίσωσις (Ε) καθίσταται

$$B\psi + \Gamma z + \Delta = 0\,.$$



Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, τὸ ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ τῶν χζ, εἶναι παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν χ· διότι $\psi = 0$, δίδει τὴν δηλοῦσαν τὸ ἴχνος τοῦτο τιμὴν $z = -\frac{\Delta}{\Gamma}$. Ἄρα, καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ εἶναι παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν χ. Λοιπόν, *ἐν γένει, πᾶσα ἐξίσωσις πρωτοβάθμιος δύο περιέχουσα μεταβλητὰς, ἐμφαίνει ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἄξονι τῆς τρίτης συντεταγμένης.*

3ον. Ἔστωσαν συγχρόνως $A = 0$, $B = 0$. Ἡ ἐξίσωσις (Ε) ἔσεται

$$\Gamma z + \Delta = 0.$$

Τότε τὰ ἴχνη ΟΒ, ΟΓ, εἰσὶν ἀμοιβαίως παράλληλα τοῖς ΑΧ, ΑΨ· τὸ δ' ἐπίπεδον ΒΟΓ παράλληλον τῷ ΧΑΨ· Σαφὲς δὲ τὸ τοιοῦτον ἐξαγόμενον· διότι ἡ ἐξίσωσις δίδει, δι' ἅπαντα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τιμὴν ἄτρεπτον τῇ ζ· ἤτοι $z = -\frac{\Delta}{\Gamma}$. Λοιπόν, συνάγομεν ὅτι, *πᾶσα ἐξίσωσις πρωτοβάθμιος περιεκτικὴ μιᾶς συντεταγμένης, ἐμφαίνει ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ τῶν ἑτέρων δύο συντεταγμένων.*

**417.** Ἀποδείξωμεν ἤδη καὶ τὴν ἀντίστροφον τῆς ἐν § 415 πρότασιν· ἤτοι, *πᾶν οἱονδήποτε ἐπίπεδον δηλοῦται ὑπὸ ἐξισώσεως πρωτοβαθμίου.*

*Πρῶτον*, ὅταν ἡ ἐξίσωσις περιέχῃ τὴν μεταβλητὴν ζ, εὕρομεν ὅτι τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τῶν ΧΖ, ΨΖ, εἰσὶ

$$z = -\frac{A}{\Gamma}\chi - \frac{\Delta}{\Gamma}\,, \qquad z = -\frac{B}{\Gamma}\psi - \frac{\Delta}{\Gamma}.$$

Ἀμφότερα τὰ ἴχνη ταῦτα συμπίπτουσι τῷ ἄξονι τῶν ζ ἐν ἀποστάσει ἴσῃ $-\frac{\Delta}{\Gamma}$ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς· μεταβαλλομένου δὲ τοῦ Δ, δύνανται νὰ διέλθωσιν ἀφ' οἱουδήποτε σημείου τοῦ ἄξονος τῶν ζ. Ἐὰν δὲ μεταβληθῶσιν οἱ Α, Β, τὰ αὐτὰ ἴχνη λαμβάνουσι πᾶσαν διεύθυνσιν. Λοιπόν, *ἡ ἐξίσωσις* (E) *δίδει ἅπαντα τὰ συμπίπτοντα τῇ γραμμῇ τῶν z ἐπίπεδα.*

*Δεύτερον*, ἐὰν $Γ=0$, ἡ ἐξίσωσις (E), ἤτοι $Α\chi+Β\psi+Δ=0$, ἐμφαίνει ἐπίπεδον παράλληλον ταῖς z, οὗτινος τὸ ἴχνος ἐπὶ τοῦ ΧΨ ὑπὸ τῆς αὐτῆς δηλοῦται ἐξισώσεως. Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις αὕτη δίδει ἁπάσας τὰς εὐθείας τὰς γραφομένας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΧΨ· ἄρα, ἐπίσης *ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως* (E) *δίδονται ἅπαντα τὰ παράλληλα ταῖς z ἐπίπεδα.* Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Λοιπόν, ἡ τεθεῖσα πρότασις ἀπεδείχθη.

418. Παρατηρητέον ὅτι, ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις (E) δυνατὸν εἶναι πάντοτε νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ συντελεστοῦ τινος τῶν ὅρων αὐτῆς, τρεῖς μόνον ἀόριστοι ὑπάρχουσιν ἐν αὐτῇ πραγματικῶς, δι' ὧν τὸ ἐπίπεδον ὑποβάλλεται εἰς συνθήκας δεδομένας. Καὶ ὅμως, προτιμότερον εἶναι ἐν γένει νὰ διατηρῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐπιπέδου τὴν ἀνωτέρω συμμετρικὴν μορφήν· διότι οὕτως ἁρμόζει πρὸς ἁπάσας τὰς μερικὰς περιπτώσεις. Τῷ ὄντι, ἐὰν διαιρέσωμεν αὐτὴν τῷ Γ, καὶ γράψωμεν

$$z = \mu\chi + \nu\psi + 0,$$

βλέπομεν ὅτι ἡ μορφὴ αὕτη δὲν ἁρμόζει εἰς ἐπίπεδα παράλληλα τῷ ἄξονι τῶν z.

419. Ἐπιπέδου τέμνοντος τοὺς τρεῖς ἄξονας, ἡ ἐξίσωσις λαμβάνει μορφὴν κομψοτάτην τῇ ἐν αὐτῇ εἰσαγωγῇ τῶν ἀποστημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, τῆς ἀρχῆς ἀπὸ τῶν τριῶν σημείων τομῆς (Σχ. 170). Τὰ ἀποστήματα ταῦτα λαμβάνομεν καθιστῶντες ἐν τῇ ἐξισώσει (E) ἴσας τῷ μηδενὶ σύνδυο τὰς μεταβλητάς. Ἔχομεν οὕτως·

$$ΑΔ = -\frac{Δ}{Α}, \qquad ΑΒ = -\frac{Δ}{Β}, \qquad ΑΓ = -\frac{Δ}{Γ}.$$

Καλοῦμεν τὰ τρία ταῦτα μήκη,

$$\alpha = -\frac{Δ}{Α}, \qquad ϐ = -\frac{Δ}{Β}, \qquad \gamma = -\frac{Δ}{Γ},$$

ὅθεν $$Α = -\frac{Δ}{\alpha}, \qquad Β = -\frac{Δ}{ϐ}, \qquad Γ = -\frac{Δ}{\gamma}.$$



Θέτοντες τὰς τιμὰς ταύτας ἐν τῇ ἐξισώσει (E), εἶτα διαιροῦντες διὰ Δ, λαμβάνομεν

$$\frac{\chi}{\alpha} + \frac{\psi}{ϐ} + \frac{z}{\gamma} = 1, \quad ἢ \quad ϐ\gamma\chi + \alpha\gamma\psi + \alpha ϐ z = \alpha ϐ\gamma.$$

### ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΓΡΑΜΜΗΣ.

**420.** Κατὰ § 411, λαμβάνομεν ὡς ἐξισώσεις εὐθείας δοθείσης τὰς ἐξισώσεις δύο ἐπιπέδων περιεχόντων τὴν εὐθεῖαν ταύτην. Ἀλλ' ἁπλούστερον ὁρίζεται ἡ εὐθεῖα διὰ τῶν προβολῶν αὐτῆς ἐπὶ δύο τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων. (Σχ. 171) Ἐὰν ἀφ' ὅλων τῶν σημείων τῆς περὶ ἧς λόγος εὐθείας, ἄξωμεν παραλλήλους τῷ ἄξονι τῶν ψ, αὗται μὲν ἔσονται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου ἅπασαι, οἱ πόδες δὲ αὐτῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΖΧ ἔσονται ἐν εὐθυγραμμίᾳ. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ αὕτη εἶναι ἡ προβολὴ τῆς ἐν τῷ διαστήματι εὐθείας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΧΖ. Ἡ προβολὴ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΨΖ εἶναι ἐπίσης γραμμὴ εὐθεῖα. Λοιπόν, *πᾶσα εὐθεῖα ἐν τῷ διαστήματι δηλοῦται ὑπὸ δύο ἐξισώσεων τὴν ἑξῆς μορφὴν ἐχουσῶν·*

$$(1) \qquad \chi = \alpha z + a, \qquad \psi = ϐ z + \beta.$$

Εἰς τὰς ἐξισώσεις ταύτας, a καὶ β εἰσὶ τὰ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ἀποστήματα τῶν σημείων καθ' ἃ αἱ προβολαὶ τῆς δοθείσης εὐθείας συμπίπτουσιν ἀμοιβαίως τῷ ἄξονι τῶν χ καὶ τῷ τῶν ψ· α, ϐ, εἰσὶν αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν περιεχομένων γωνιῶν ὑπὸ τῶν δύο προβολῶν καὶ τοῦ ἄξονος τῶν z. Πρὸς συντεταγμένας πλαγίας, α καὶ ϐ, δηλοῦσι λόγους ἡμιτόνων.

421. Ἀναμνηστέον ὅτι, αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις, ἑκάστη ἰδίᾳ θεωρουμένη καὶ ἐν πλήρει γενικότητι, ἐμφαίνουσιν, οὐ μόνον τὰς προβολὰς τῆς εὐθείας, ἀλλὰ δύο ἐπίπεδα ἀμοιβαίως παράλληλα ταῖς ψ καὶ ταῖς χ, ἅτινα εἰσὶ *τὰ προβάλλοντα* τὴν εὐθεῖαν ἐπίπεδα. Διότι δὲ ἀμφότερα περιέχουσι τὴν εὐθεῖαν ταύτην, τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) ὁρίζει αὐτήν.

422. Ἡ ἀπαλοιφὴ τῆς z ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), δίδει

$$\psi - \beta = \frac{ϐ}{\alpha}(\chi - a).$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐμφαίνει ἐπίπεδον παράλληλον ταῖς $z$, ἐν ᾧ περιέχεται ἡ εὐθεῖα· ἄρα, ἐμφαίνει τὸ τρίτον προβάλλον ἐπίπεδον, ἢ ἀκόμη τὴν προβολὴν τῆς εὐθείας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΧΨ [414].

423. ΜΕΡΙΚΑΙ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ. 1ον. Ὅταν ἡ εὐθεῖα διέρχηται τῆς ἀρχῆς, αἱ προβολαὶ αὐτῆς ἐπίσης συμπίπτουσι τῷ σημείῳ τούτῳ. Τότε, αἱ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας εἰσὶν ἁπλῶς,

$$\chi = \alpha z, \qquad \psi = \beta z.$$

2ον. Εἰ διέρχεται σημείου τινος τῶν ἀξόνων, π. χ. τοῦ τῶν $\psi$, μόνη ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΧΖ διέρχεται τῆς ἀρχῆς. Τότε αἱ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας εἰσὶ

$$\chi = \alpha z, \qquad \psi = \beta z + \beta.$$

3ον. Ὅταν ἡ ἐν τῷ διαστήματι εὐθεῖα ἦναι παράλληλος τινὶ τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων, π. χ. τῷ ΧΨ, τὰ προβάλλοντα αὐτὴν ἐπίπεδα ἐπὶ τῶν δύο ἑτέρων ταυτίζονται καὶ ἔχουσι τὴν μόνην ἐξίσωσιν $z = \delta$· $\delta$ οὔσης ποσότητος ἀτρέπτου. Τότε προστρέχομεν εἰς τὴν τρίτην προβολήν, καὶ λαμβάνομεν τὰς τὴν εὐθεῖαν δηλούσας ἐξισώσεις,

$$z = \delta, \qquad \psi = \gamma\chi + \varepsilon.$$

4ον. Ὅταν ἡ εὐθεῖα ἦναι παράλληλός τινι τῶν ἀξόνων, π. χ. τῷ τῶν $z$, αἱ ἐξισώσεις αὐτῆς εἰσί,

$$\chi = a, \qquad \psi = \beta.$$

Αἱ αὐταὶ εἰσὶ $\chi = a$, $z = \varepsilon$, ἢ $\psi = \beta$, $z = \varepsilon$, καθ' ὅσον ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλος ταῖς $\psi$, ἢ ταῖς $\chi$.

424. Ἵνα πορισθῶμεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) τὴν τομὴν τῆς εὐθείας πρὸς τὸ ἐπίπεδον δύο συντεταγμένων, παρατηρητέον ὅτι, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ ἡ τρίτη συντεταγμένη εἶναι μηδέν. Ἄρα, ἔχομεν

$z=0$, $\chi=a$, $\psi=\beta$, διὰ τομὴν πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΧΨ.

$\psi=0$, $z=-\dfrac{\beta}{\mathsf{6}}$, $\chi=a-\dfrac{\alpha\beta}{\mathsf{6}}$, διὰ τομὴν πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΧΖ.

$\chi=0$, $z=-\dfrac{a}{\alpha}$, $\psi=\beta-\dfrac{\mathsf{6}a}{\alpha}$, διὰ τομὴν πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΨΖ.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΤΑ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΚΑΙ ΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑΝ ΓΡΑΜΜΗΝ.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΩΝ Η ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΕΙΝΑΙ Η ΑΥΤΗ ΕΝ ΟΙΩΔΗΠΟΤΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΙ ΑΞΟΝΩΝ.

425. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Εὑρεῖν τὰς ἐξισώσεις τῆς εὐθείας ἐπιζευγνυούσης δύο σημεῖα δοθέντα.*

Ἔστωσαν $\chi', \psi', z'$, καὶ $\chi'', \psi'', z''$, αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων. Αἱ ζητούμεναι ἐξισώσεις ἔσονται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\chi = \alpha z + a, \qquad \psi = \mathsf{6}z + \beta.$$

Ἐπειδὴ τὰ δοθέντα σημεῖα κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας, αἱ συντεταγμέναι αὐτῶν ἐπαληθεύουσι τὰς ἐξισώσεις ταύτας. Λοιπόν, ἀντεισάγοντες λαμβάνομεν τέσσαρας ἐξισώσεις δι' ὧν ὁρίζομεν τὰς τέσσαρας ἀγνώστους σταθερὰς $\alpha$, $\mathsf{6}$, $a$, $\beta$. Ἀλλ' εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον καταντῶμεν καὶ διὰ τοῦ ἑξῆς ἁπλουστέρου τρόπου.

Ἵνα διέρχηται ἡ εὐθεῖα τοῦ πρώτου σημείου, πρέπει νὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις

$$\chi' = \alpha z' + a, \qquad \psi' = \mathsf{6}z' + \beta.$$

Τῇ ἀφαιρέσει τῶν ἐξισώσεων τούτων ἀπὸ τῶν δύο προηγουμένων, λαμβάνομεν

$$\chi - \chi' = \alpha(z - z'), \qquad \psi - \psi' = \mathsf{6}(z - z').$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται ἐμφαίνουσι πᾶσαν εὐθεῖαν τοῦ σημείου $(\chi', \psi', z')$ διερχομένην· διότι ἐτυμοποιοῦνται ὑπὸ τοῦ συστήματος τῶν τιμῶν $\chi = \chi'$, $\psi = \psi'$, $z = z'$. Αἱ σταθεραὶ α, ϐ, μένουσιν ἀόριστοι· διότι ἀφ' ἑνὸς σημείου μυρίας εὐθείας δυνατὸν ἀγαγεῖν. Ἵνα διέρχηται ἡ περὶ ἧς πρόκειται εὐθεῖα καὶ τοῦ δευτέρου σημείου, πρέπει αἱ τελευταῖαι ἐξισώσεις νὰ ἐτυμοποιῶνται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων αὐτοῦ. Ἄρα, ἔχομεν

$$\chi''-\chi'=\alpha(z''-z'),\qquad \psi''-\psi'=\text{ϐ}(z''-z').$$

Ὅθεν συνάγομεν

$$\alpha=\frac{\chi'-\chi''}{z'-z''},\qquad \text{ϐ}=\frac{\psi'-\psi''}{z'-z''}.$$

Ἐπομένως, μορφοῦμεν τὰς ἐξισώσεις τῆς ζητουμένης εὐθείας,

$$\chi-\chi'=\frac{\chi'-\chi''}{z'-z''}(z-z'),\qquad \psi-\psi'=\frac{\psi'-\psi''}{z'-z''}(z-z').$$

426. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Εὑρεῖν τὰς ἐξισώσεις γραμμῆς εὐθείας, ἀπὸ σημείου δοθέντος ἀγομένης παραλλήλως εὐθείᾳ δοθείσῃ.*

Ἔστωσαν, $\chi'$, $\psi'$, $z'$, αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου, καὶ

$$\chi=\alpha z+a,\qquad \psi=\text{ϐ}z+\beta,$$

αἱ ἐξισώσεις τῆς δοθείσης εὐθείας.

Ἐπειδὴ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα διελεύσεται τοῦ δοθέντος σημείου, αἱ ἐξισώσεις αὐτῆς τίθενται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\chi-\chi'=\alpha'(z-z'),\qquad \psi-\psi'=\text{ϐ}'(z-z')\cdot$$

$\alpha'$, καὶ $\text{ϐ}'$, οὐσῶν ἀγνώστων εἰσέτι. Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι εἰσὶ παράλληλοι, τὰ προβάλλοντα αὐτὰς ἐπίπεδα καί, κατὰ συνέπειαν, αἱ προβολαὶ αὐτῶν ἐφ' ἑκάστου τῶν ἐπιπέδων τῶν χz καὶ τῶν ψz, εἰσὶ παράλληλοι. Ἄρα, ἔχομεν ἀναγκαίως

$$\alpha'=\alpha,\qquad \text{ϐ}'=\text{ϐ}.$$

Λοιπόν, αἱ ἐξισώσεις τῆς ζητουμένης παραλλήλου εἰσὶ

$$\chi-\chi'=\alpha(z-z'),\qquad \psi-\psi'=\text{ϐ}(z-z').$$



427. Ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον ἦτον ἡ ἀρχή, αἱ ἐξισώσεις αὗται ἤθελον εἶσθαι ἁπλῶς·

$$\chi=\alpha z,\qquad \psi=\text{ϐ}z.$$

428. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Προσδιορίσαι τὸ σημεῖον τῆς συνδρομῆς δύο εὐθειῶν δεδομένων.*

Ἐν γένει, δύο γραμμαὶ δὲν τέμνονται ὑπ' ἀλλήλων· ὅπως ὑπάρχῃ τὸ τοιοῦτον, πρέπει νὰ ὑπάρχωσι τιμαὶ τῶν συντεταγμένων ἐτυμοποιοῦσαι συγχρόνως τὰς τέσσαρας ἐξισώσεις τῶν γραμμῶν. Φανερὸν δὲ ὅτι, τῇ ἀπαλοιφῇ τριῶν συντεταγμένων μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἐξισώσεων, καταντῶμεν εἰς ἐξίσωσιν ἐμφαίνουσαν τὴν συνθήκην ἄνευ τῆς ὁποίας αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος δύο γραμμαὶ οὐδὲν σημεῖον κοινὸν δύνανται ἔχειν.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν·

$$\begin{array}{ll} (1) & \chi=\alpha z+a,\\ (2) & \psi=\text{ϐ}z+\beta. \end{array}\Bigg\}\qquad \begin{array}{ll} (3) & \chi=\alpha' z+a',\\ (4) & \psi=\text{ϐ}'z+\beta'. \end{array}\Bigg\}$$

Ἐκ μὲν τῶν (1), (3), λαμβάνομεν

$$(5)\qquad z=\frac{a'-a}{\alpha-\alpha'},\qquad \chi=\frac{\alpha a'-\alpha' a}{\alpha-\alpha'}.$$

Ἐκ δὲ τῶν (2), (4),

$$(6)\qquad z=\frac{\beta'-\beta}{\text{ϐ}-\text{ϐ}'},\qquad \psi=\frac{\text{ϐ}\beta'-\text{ϐ}'\beta}{\text{ϐ}-\text{ϐ}'}.$$

Ἵνα ταυτοποιῶνται αἱ τέσσαρες ἐξισώσεις ὑπὸ τῶν αὐτῶν συντεταγμένων, πρέπει αἱ δύο τιμαὶ τῆς z νὰ ὦσιν ἴσαι. Ἄρα, πρέπει νὰ ἔχωμεν,

$$\frac{a'-a}{\alpha-\alpha'}=\frac{\beta'-\beta}{\text{ϐ}-\text{ϐ}'}.$$

ἢ

$$(a'-a)(\text{ϐ}-\text{ϐ}')-(\beta'-\beta)(\alpha-\alpha')=0.$$

Τοιαύτη σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν σταθερῶν ἵνα συμπίπτωσιν ἀλλήλαις αἱ δύο εὐθεῖαι. Ὑπαρχούσης δέ, τὸ ζητούμενον σημεῖον συνδρομῆς ὁρίζεται ὑπὸ τῶν τύπων (5), (6).

429. Ὅταν $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, αἱ εὐθεῖαι εἰσὶ παράλληλοι [426]. Τότε ἡ ἐξίσωσις τῆς συνθήκης ἐπαληθεύεται· αἱ δὲ τιμαὶ τῶν συντεταγμένων καθίστανται ἄπειροι.

430. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Ἀπὸ τριῶν σημείων δοθέντων ἐπίπεδον ἀγαγεῖν.*

Ἔστωσαν $\chi', \psi', z'$· $\chi'', \psi'', z''$· $\chi''', \psi''', z'''$, αἱ συντεταγμέναι τῶν τριῶν σημείων. Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου

$$(\mathrm{E}) \qquad \mathrm{A}\chi + \mathrm{B}\psi + \Gamma z + \Delta = 0,$$

πρέπει νὰ ἐτυμοποιῆται τῇ ἀντεισαγωγῇ τῶν συντεταγμένων ἑκάστου σημείου· ὅθεν προκύπτουσιν αἱ σχέσεις·

$$\mathrm{A}\chi' + \mathrm{B}\psi' + \Gamma z' + \Delta = 0,$$
$$\mathrm{A}\chi'' + \mathrm{B}\psi'' + \Gamma z'' + \Delta = 0,$$
$$\mathrm{A}\chi''' + \mathrm{B}\psi''' + \Gamma z''' + \Delta = 0.$$

Λαμβάνομεν ὡς ἀγνώστους τοὺς λόγους $\frac{\mathrm{A}}{\Delta}$, $\frac{\mathrm{B}}{\Delta}$, $\frac{\Gamma}{\Delta}$, καὶ εὑρίσκομεν

$$\Delta = \chi'\psi''z''' - \chi'z''\psi''' + z'\chi''\psi''' - \psi'\chi''z''' + \psi'z''\chi''' - z'\psi''\chi''',$$
$$\mathrm{A} = -\psi''z''' + z''\psi''' - z'\psi''' + \psi'z''' - \psi'z'' + z'\psi'',$$
$$\mathrm{B} = -\chi'z''' + \chi'z'' - z'\chi'' + \chi''z''' - z''\chi''' + z'\chi''',$$
$$\Gamma = -\chi'\psi'' + \chi'\psi''' - \chi''\psi''' + \psi'\chi'' - \psi'\chi''' + \psi''\chi'''.$$

Ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις (E) καθίσταται

$$\mathrm{A}'\chi + \mathrm{B}'\psi + \Gamma'z = 1,$$

$\mathrm{A}'$, $\mathrm{B}'$, $\Gamma'$, δηλοῦσι τοὺς λόγους $\frac{\mathrm{A}}{\Delta}$, $\frac{\mathrm{B}}{\Delta}$, $\frac{\Gamma}{\Delta}$.

431. Εἶναι σαφὲς ὅτι, εἰ ἓν μόνον σημεῖον ἐδίδετο ἀφ᾽ οὗ τὸ ἐπίπεδον νὰ διέλθῃ, ἠθέλομεν ἔχει μόνην τὴν σχέσιν

$$\mathrm{A}\chi' + \mathrm{B}\psi' + \Gamma z' + \Delta = 0,$$



ἥτις τότε χρησιμεύει πρὸς ἀπαλοιφὴν τῆς ἀτρέπτου Δ· ἡ δ᾽ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου λαμβάνει τὴν μορφήν,

$$\mathrm{A}(\chi - \chi') + \mathrm{B}(\psi - \psi') + \Gamma(z - z') = 0,$$

ἐν ᾗ πραγματικῶς μένουσι δύο ἄγνωστοι.

432. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Ἀπὸ σημείου δοθέντος ἐπίπεδον ἀγαγεῖν παράλληλον ἑτέρῳ δοθέντι.*

Ἔστωσαν

$$(1) \qquad \mathrm{A}\chi + \mathrm{B}\psi + \Gamma z + \Delta = 0,$$

ἡ ἐξίσωσις τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, καὶ

$$(2) \qquad \mathrm{A}'\chi + \mathrm{B}'\psi + \Gamma'z + \Delta = 0,$$

ἡ ἐξίσωσις τοῦ ζητουμένου παραλλήλου αὐτῷ.

Τὰ ἴχνη τῶν δύο ἐπιπέδων ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων ἔσονται παράλληλα. Αἱ ἐξισώσεις τῶν ἴχνεων τούτων εἰσὶ

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{A}\chi + \Gamma z + \Delta = 0,\\ \mathrm{A}'\chi + \Gamma'z + \Delta' = 0,\end{array}\right\} \quad \text{ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν } \chi z.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{B}\psi + \Gamma z + \Delta = 0,\\ \mathrm{B}'\psi + \Gamma'z + \Delta' = 0,\end{array}\right\} \quad \text{ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν } \psi z.$$

Ἵνα ὦσι τὰ δύο πρῶτα ἴχνη παράλληλα ἀλλήλοις, ἐπίσης καὶ τὰ δύο τελευταῖα, πρέπει νὰ ἔχωμεν,

$$\frac{\mathrm{A}'}{\Gamma'} = \frac{\mathrm{A}}{\Gamma}, \quad \frac{\mathrm{B}'}{\Gamma'} = \frac{\mathrm{B}}{\Gamma}, \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{B}} = \frac{\Gamma'}{\Gamma}.$$

Ὅταν τὰ ἐπίπεδα συμπίπτωσι τῷ ἄξονι τῶν z, αἱ συνθῆκαι αὗται ἀρκοῦσιν ὅπως ὦσι παράλληλα· διότι τὰ ἴχνη τοῦ πρώτου συμπίπτουσιν ἀλλήλοις ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν z, παράλληλα δὲ εἰσὶ τοῖς ἴχνεσι τοῦ δευτέρου, συμπιπτούσοις ἐπίσης ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος τούτου. Ἀλλ᾽ ὅταν δύο γωνίαι ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους, γνωστὸν ὅτι τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἰσὶ παράλληλα.

Ὅταν τὰ δύο ἐπίπεδα εἰσὶ παράλληλα τῷ ἄξονι τῶν z, ὅπερ τὸ αὐτὸ ὑποθέσαι $\Gamma = 0$ καὶ $\Gamma' = 0$, μόνος ἐκπληρωτέος ὅρος ἔσεται νὰ ὦσι παράλληλα τὰ ἴχνη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν χψ, ὅπερ δίδει

$$\frac{A'}{B'}=\frac{A}{B}, \qquad ἢ \qquad \frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}.$$

Λοιπὸν, ἐν πάσῃ περιπτώσει, *ὅπως ὦσι παράλληλα δύο ἐπίπεδα, πρέπει καὶ ἐπαρκεῖ, οἱ ἐν ταῖς ἐξισώσεσιν αὐτῶν συντελεσταὶ τῶν μεταβλητῶν νὰ ὦσιν ἀνάλογοι.*

Ὑποθέσωμεν τὰς συνθήκας ταύτας ἐκπληρουμένας. Καθιστῶμεν

$\frac{A'}{A}=k$, καὶ ἔχομεν $A'=Ak$; $B'=Bk$, $\Gamma'=\Gamma k$.

Εἶτα φέρομεν τὰς τιμὰς ταύτας ἐν τῇ ἐξισώσει (2), διαιροῦμεν διὰ k, καὶ λαμβάνομεν, καλοῦντες $\Delta''k=\Delta'$,

$$A\chi+B\psi+\Gamma z+\Delta''=0.$$

Ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις ἐμφαίνει ἅπαντα τὰ ἐπίπεδα παράλληλα τῷ τῆς ἐξισώσεως (1), διαφέρει δὲ ταύτης κατὰ τὸν ἄτρεπτον ὅρον $\Delta''$, μείναντα μέχρι τοῦδε ἀόριστον.

Ἀλλ' ἐὰν πρόκηται τὸ παράλληλον ἐπίπεδον νὰ διέλθῃ σημείου δοθέντος $(\chi', \psi', z')$, πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$A\chi'+B\psi'+\Gamma z'+\Delta''=0.$$

Ἀφαιρέσει τῆς τελευταίας ταύτης ἐξισώσεως ἀπὸ τῆς προηγουμένης, λαμβάνομεν τὴν τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου,

$$A(\chi-\chi')+B(\psi-\psi')+\Gamma(z-z')=0.$$

433. Ὅταν τὸ δοθὲν σημεῖον ἦναι ἡ ἀρχὴ, ἡ τοῦ παραλλήλου ἐπιπέδου προηγουμένη ἐξίσωσις ἄγεται εἰς ταύτην,

$$A\chi+B\psi+\Gamma z=0.$$

434. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Ἀπὸ εὐθείας καὶ σημείου δεδομένων, ἐπίπεδον ἀγαγεῖν.*

Ἔστωσαν $\chi'$, $\psi'$, $z'$, αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου, καὶ

(1) $$\chi=\alpha z+a, \qquad \psi=ϐz+\beta,$$



αἱ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου ἕξει μορφὴν τοιαύτην,

(2) $$A\chi+B\psi+\Gamma z+\Delta=0.$$

Ἡ μὲν συνθήκη τοῦ νὰ κῆται ἐπ' αὐτοῦ τὸ δοθὲν σημεῖον δηλοῦται ὑπὸ

(3) $$A\chi'+B\psi'+\Gamma z'+\Delta=0.$$

Ἡ δὲ συνθήκη τοῦ νὰ περιέχῃ τὴν εὐθεῖαν ἀπαιτεῖ, ἐὰν θέσωμεν ἐν τῇ ἐξισώσει τοῦ ἐπιπέδου τὰς τιμὰς τῶν χ, ψ, λαμβανομένας ἐκ τῶν τῆς εὐθείας ἐξισώσεων, ἡ προκύπτουσα νὰ ἐτυμοποιῆται οἱαδήποτε εἶναι ἡ συντεταγμένη z. Ἡ ἀντεισαγωγὴ αὕτη δίδει·

$$(A\alpha+Bϐ+\Gamma)z+Aa+B\beta+\Delta=0\cdot$$

ἵνα δὲ ὑπάρχῃ ἡ ἰσότης αὕτη, ἄνευ ἰδιαιτέρου ὁρισμοῦ τῆς z, πρέπει νὰ καταστήσωμεν

(4) $$A\alpha+Bϐ+\Gamma=0,$$

(5) $$Aa+B\beta+\Delta=0.$$

Λοιπὸν, αἱ συνθῆκαι τοῦ προβλήματος ἅπασαι συμπεριλαμβάνονται ἐν ταῖς ἐξισώσεσι (3), (4), (5).

Ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ Δ ἐκ τῶν (3), (5), δίδει

$$A(\chi'-a)+B(\psi'-\beta)+\Gamma z'=0\cdot$$

συνδυαζομένης δὲ τῆς ἐξισώσεως ταύτης τῇ (4), λαμβάνομεν

$$A=\frac{(\psi'-ϐz'-\beta)\Gamma}{ϐ(\chi'-a)-\alpha(\psi'-\beta)}, \qquad B=-\frac{(\chi'-\alpha z'-a)\Gamma}{ϐ(\chi'-a)-\alpha(\psi'-\beta)}.$$

Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις (2), τῇ ἀπ' αὐτῆς ἀφαιρέσει τῆς (3), καθίσταται

$$A(\chi-\chi')+B(\psi-\psi')+\Gamma(z-z')=0.$$

Ἀντεισάγοντες ἤδη ἀντὶ A, B, τὰς τιμὰς αὐτῶν, λαμβάνομεν, μετὰ τὰς ἀναγωγάς, τὴν τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου ἐξίσωσιν,

(6) $$(\psi'-ϐz'-\beta)(\chi-\chi')-(\chi'-\alpha z'-a)(\psi-\psi') + [ϐ(\chi'-a)-\alpha(\psi'-\beta)](z-z')=0.$$

435. *Παρατήρησις.* Προσθέσωμεν τὰς ἐξισώσεις (4), (5), ἀφοῦ πολυπλασιάσωμεν τὴν πρώτην ἐπὶ z· λαμβάνομεν

$$A(\alpha z+a)+B(6z+\beta)+\Gamma z+\Delta=0.$$

Ἀφαιρέσωμεν τὴν τελευταίαν ταύτην ἀπὸ τῆς (2),

$$A(\chi-\alpha z-a)+B(\psi-6z-\beta)=0\cdot$$

ἢ καλοῦντες k τὸν ἀόριστον λόγον $\frac{B}{A}$,

$$\chi-\alpha z-a+k(\psi-6z-\beta)=0.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐμφαίνει ἅπαντα τὰ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἀγόμενα ἐπίπεδα. Τῷ ὄντι, φανερὸν ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐτυμοποιεῖται, οἱαδήποτε εἶναι ἡ z, ταῖς ὑποθέσεσι

$$\chi=\alpha z+a, \qquad \psi=6z+\beta.$$

436. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Δύο εὐθειῶν δοθεισῶν, ἀγαγεῖν ἀπὸ τῆς πρώτης ἐπίπεδον παράλληλον τῇ ἑτέρᾳ.*

Ἔστωσαν, αἱ μὲν ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν

$$(1)\quad \begin{cases}\chi=\alpha z+a,\\ \psi=6z+\beta,\end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases}\chi=\alpha' z+a',\\ \psi=6'z+\beta'.\end{cases}$$

Ἡ δὲ τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου

$$A\chi+B\psi+\Gamma z+\Delta=0.$$

Ἵνα τὸ ἐπίπεδον ᾖ παράλληλον τῇ δευτέρᾳ εὐθείᾳ, πρέπει, μεταφερομένων παραλλήλως ἑαυτοῖς καὶ ἐκείνου καὶ ταύτης εἰς τὴν ἀρχὴν, ἡ εὐθεῖα νὰ ταυτισθῇ καθ' ὁλοκληρίαν τῷ ἐπιπέδῳ. Τότε αἱ ἐξισώσεις ἔσονται [423, 433],

$$(3)\qquad \chi=\alpha' z, \qquad \psi=6'z,$$

$$(4)\qquad A\chi+B\psi+\Gamma z=0.$$

Θέτομεν τὰς τιμὰς (3) ἐν τῇ ἐξισώσει (4), ἐξαλείφομεν τὸν παράγοντα z, ἀόριστον μείναντα, καὶ λαμβάνομεν

$$(5)\qquad A\alpha'+B6'+\Gamma=0.$$

Τοιαύτη εἶναι ἡ συνθήκη τοῦ παραλληλισμοῦ.



Ἵνα περιέχῃ τὸ ἐπίπεδον τὴν πρώτην εὐθεῖαν, πρέπει [434] νὰ ἔχωμεν

$$(6)\qquad A\alpha+B6+\Gamma=0,$$

$$(7)\qquad Aa+B\beta+\Delta=0.$$

Ἡ μὲν ἐξίσωσις (6), ὁμοία τῇ (5), δηλοῖ ὅτι τὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον τῇ πρώτῃ εὐθείᾳ· ἡ δὲ (7), ὅτι τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον διέρχεται τοῦ σημείου καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα τρυπᾷ τὸ ἐπίπεδον τῶν χψ· διότι, κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο ἔχομεν

$$z=0, \qquad \chi=a, \qquad \psi=\beta.$$

Αἱ ἐξισώσεις (5), (6), δίδουσιν

$$B=-\frac{A(\alpha'-\alpha)}{6'-6}, \qquad \Gamma=-\frac{A(\alpha 6'-6\alpha')}{6'-6}.$$

Ἀντεισάγοντες τὰς τιμὰς ταύτας ἐν τῇ ἐξισώσει τοῦ ἐπιπέδου, καὶ καλοῦντες $\frac{\Delta(6'-6)}{A}=\Delta'$, λαμβάνομεν,

$$(6'-6)\chi-(\alpha'-\alpha)\psi-(\alpha 6'-6\alpha')z+\Delta'=0,$$

Δ' ὄντος ἀορίστου. Ἐπειδὴ ὑπ' ὄψιν ἐλήφθησαν μόναι αἱ συνθῆκαι (5), (6), ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐμφαίνει ἅπαντα τὰ παράλληλα ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ἐπίπεδα. Προσέτι, ἐπειδὴ οἱ συντελεσταὶ τῶν χ, ψ, z, δὲν περιέχουσι Δ', μενοῦσιν ἀμετάβλητοι. Λοιπὸν, ἅπαντα τὰ ἐπίπεδα ταῦτα παράλληλα ἀλλήλοις εἰσὶ [432]. Ἀλλ' ἐὰν ἀπαλείψωμεν Δ, ἀφαιρέσει τῆς ἐξισώσεως (7) ἀπὸ τῆς τοῦ ἐπιπέδου, ἕξομεν

$$A(\chi-a)+B(\psi-\beta)+\Gamma z=0.$$

Τέλος, ἀντεισάγοντες ἀντὶ B καὶ Γ τὰς τιμὰς αὐτῶν, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐκπληροῦντος ὅλους τοὺς ὑπὸ τοῦ προβλήματος αἰτουμένους ὅρους· ἤτοι

$$(6'-6)(\chi-a)-(\alpha'-\alpha)(\psi-\beta)-(\alpha 6'-6\alpha')z=0.$$

437. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Εὑρεῖν τὰς προβολὰς τῆς ὑπ' ἀλλήλων τομῆς δύο ἐπιπέδων δεδομένων.*

Κατὰ τοὺς ἐν § 414 γενικοὺς συλλογισμούς, δῆλον ὅτι ἔξομεν τὰς ἐξισώσεις τῶν ζητουμένων προβολῶν τῇ διαδοχικῇ ἀπαλοιφῇ τῶν μεταβλητῶν ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῶν δοθέντων ἐπιπέδων. Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις τούτων

$$Α\chi + Β\psi + Γz + Δ = 0, \qquad Α'\chi + Β'\psi + Γ'z + Δ' = 0.$$

Εὑρίσκομεν δὲ τὰς ἑξῆς, δηλούσας τὰς προβολὰς τῆς ζητουμένης τομῆς ἐφ' ἑκάστου τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων,

$$(ΑΓ' - ΓΑ')\chi + (ΒΓ' - ΓΒ')\psi + ΔΓ' - ΓΔ' = 0,$$
$$(ΒΑ' - ΑΒ')\psi + (ΓΑ' - ΑΓ')z + ΔΑ' - ΑΔ' = 0,$$
$$(ΓΒ' - ΒΓ')z + (ΑΒ' - ΒΑ')\chi + ΑΒ' - ΒΑ' = 0.$$

438. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Εὑρεῖν τὴν κοινὴν τομὴν εὐθείας καὶ ἐπιπέδου, δεδομένων ἀμφοτέρων.*

Ἔστωσαν, ἡ μὲν ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου

$$Α\chi + Β\psi + Γz + Δ = 0,$$

αἱ δὲ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας

$$\chi = \alpha z + a, \qquad \psi = ϐ z + \beta.$$

Τὴν ζητουμένην τομὴν λαμβάνομεν ζητοῦντες τὰς τιμὰς τῶν χ, ψ, z, συγχρόνως ἐτυμοποιούσας τὰς ἀνωτέρω τρεῖς ἐξισώσεις. Ἐκτελοῦντες τοὺς λογισμοὺς εὑρίσκομεν·

$$\chi = -\frac{Αa + Β\beta + Δ}{Α\alpha + Βϐ + Γ},$$

$$\psi = a - \frac{\alpha(Αa + Β\beta + Δ)}{Α\alpha + Βϐ + Γ},$$

$$z = \beta - \frac{ϐ(Αa + Β\beta + Δ)}{Α\alpha + Βϐ + Γ}.$$

439. Ὅταν $Α\alpha + Βϐ + Γ = 0$, αἱ τιμαὶ αὗται εἰσὶν ἄπειροι. Τότε ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλος τοῦ ἐπιπέδου [436]. Ὅταν συγχρόνως $Αa + Β\beta + Δ = 0$, αἱ τιμαὶ αὗται εἰσὶν ἀόριστοι. Σαφὲς δὲ τὸ τοιοῦτον σύμπτωμα· διότι τότε ἡ εὐθεῖα κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ [434].



## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΩΝ Η ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΕΙΝΑΙ ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΑ ΕΝ ΑΞΟΣΙΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙΣ.

440. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Εὑρεῖν τὸ μῆκος τῆς δύο σημεῖα δοθέντα ἐπιζευγνυούσης εὐθείας.*

Ἔστωσαν $\chi', \psi', z'$ καὶ $\chi'', \psi'', z''$,

αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων Μ, Μ', (Σχ. 172). Ζητεῖται τὸ ἀπόστημα ΜΜ'. Ἀφ' ἑκατέρου τῶν σημείων τούτων ἄγομεν ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς συντεταγμένοις. Τὰ ἓξ ἐπίπεδα ταῦτα συνιστῶσι παραλληλεπίπεδον. Καλοῦμεν δ τὴν διαγώνιον αὐτοῦ ΜΜ', καὶ ζ, η, θ, τὰς παρακειμένας πλευράς, αἵτινες εἰσὶν αἱ διαφοραὶ τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων Μ, Μ' ἤτοι,

$$\chi' - \chi'' = \zeta, \qquad \psi' - \psi'' = \eta, \qquad z' - z'' = \theta.$$

1ον. Ὅταν αἱ συντεταγμέναι ὦσιν ὀρθογώνιοι, τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθόν· κατὰ γνωστὸν δὲ θεώρημα γεωμετρικόν, ἔχομεν,

$$\delta^2 = \zeta^2 + \eta^2 + \theta^2, \text{ ἢ } \delta = \sqrt{(\chi' - \chi'')^2 + (\psi' - \psi'')^2 + (z' - z'')^2}.$$

Ὅταν τὸ ἕτερον τῶν σημείων, τὸ Μ', συμπίπτῃ τῇ ἀρχῇ, τότε ἔχομεν ἁπλῶς

$$\delta = \sqrt{\chi'^2 + \psi'^2 + z'^2}.$$

2ον. Ὅταν αἱ συντεταγμέναι ὦσι πλαγιογώνιοι, ἡ τιμὴ τοῦ ζητουμένου ἀποστήματος εἶναι πολυπλοκωτέρα· εὑρίσκεται δὲ ὡς ἑξῆς.

Καλοῦμεν, γ, γ', γ'', τὰς ὑπὸ τῶν ἀξόνων σύνδυο περιεχομένας γωνίας· δ, δ', δ'', τὰς διαγωνίους ΜΜ', ΖΚ, ΙΘ, τοῦ παραλληλεπιπέδου. Ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου Μ'ΖΜΚ, κατὰ γνωστὸν θεώρημα, ἔχομεν

$$\delta^2 + \delta'^2 = 2\overline{M'Z}^2 + 2\overline{M'K}^2.$$

Ἀλλά, $M'Z = \zeta$· τὸ δὲ τρίγωνον ΗΜ'Κ δίδει,

$$\overline{M'K}^2 = \eta^2 + \theta^2 + 2\eta\theta\,\text{συν}\,\gamma''\cdot$$

ἄρα,

(1) $$\delta^2 + \delta'^2 = 2\zeta^2 + 2\eta^2 + 2\theta^2 + 4\eta\theta\,\text{συν}\,\gamma''.$$

Ὁμοίως συνάγομεν ἀπὸ τῶν παραλληλογράμμων Μ'ΙΜΘ, ΖΙΚΘ, τοὺς ἑξῆς τύπους·

(2) $$\delta^2 + \delta''^2 = 2\zeta^2 + 2\eta^2 + 2\theta^2 + 4\zeta\eta\,\text{συν}\,\gamma,$$

(3) $$\delta'^2 + \delta''^2 = 2\zeta^2 + 2\eta^2 + 2\theta^2 - 4\zeta\theta\,\text{συν}\,\gamma'.$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1), (2), εἶτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τὴν (3), καὶ λαμβάνομεν

$$\delta^2 = \zeta^2 + \eta^2 + \theta^2 + 2\zeta\eta\,\text{συν}\,\gamma' + 2\zeta\theta\,\text{συν}\,\gamma' + 2\eta\theta\,\text{συν}\,\gamma'',$$

ἤ, τῇ ἀντεισαγωγῇ τῶν τιμῶν τῶν $\zeta$, $\eta$, $\theta$,

$$\delta^2 = (\chi'-\chi'')^2 + (\psi'-\psi'')^2 + (z'-z'')^2 + 2(\chi'-\chi'')(\psi'-\psi'')\,\text{συν}\,\gamma + 2(\chi'-\chi'')(z'-z'')\,\text{συν}\,\gamma' + 2(\psi'-\psi'')(z'-z'')\,\text{συν}\,\gamma'',$$

ΣΗΜ. Ὅπως καταστήσωμεν τὰ ἐξαγόμενα ἁπλούστερα, ὑποθέσωμεν ἐν ἅπασι τοῖς ἑπομένοις προβλήμασι τοὺς ἄξονας ὀρθογωνίους.

441. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Ἀπὸ σημείου δοθέντος εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς ἀγαγεῖν ἐπὶ ἐπίπεδον δοθέν· εὑρεῖν τὸ μῆκος καὶ τὸν πόδα αὐτῆς.*

Ἔστωσαν, $\chi'$, $\psi'$, $z'$, αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου, καὶ

(1) $$A\chi + B\psi + \Gamma z + \Delta = 0,$$

ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου.

Αἱ ἐξισώσεις τῆς ζητουμένης καθέτου ἔσονται ὑπὸ τὴν μορφήν

(2) $$\chi - \chi' = \alpha\,(z - z'), \qquad \psi - \psi' = \beta\,(z - z'),$$

$\alpha$, $\beta$, ὄντων ἀγνώστων. Αἱ ἐξισώσεις τῶν ἰχνῶν τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων ΧΖ, ΨΖ, εἰσὶν

$$A\chi + \Gamma z + \Delta = 0, \qquad B\psi + \Gamma z + \Delta = 0.$$

Γινώσκομεν ὅτι, *ἐν γένει, αἱ προβολαὶ εὐθείας καθέτου ἐπὶ ἐπίπεδον, τέμνουσι πρὸς ὀρθὰς τὰ ἴχνη τούτου.* Ἄρα, ἔχομεν τὰς σχέσεις

$$-\frac{\Gamma}{A}\times\alpha + 1 = 0, \qquad -\frac{\Gamma}{B}\times\beta + 1 = 0\cdot$$

ἐξ ὧν συνάγομεν

(3) $$\alpha = \frac{A}{\Gamma}, \quad \beta = \frac{B}{\Gamma}, \quad \text{ἢ} \quad A = \alpha\Gamma, \quad B = \beta\Gamma.$$

Τὰς τιμὰς ταύτας τῶν $\alpha$, $\beta$, φέροντες ἐν ταῖς ἐξισώσεσι (2), λαμβάνομεν τὰς τῆς ζητουμένης εὐθείας,

(4) $$\chi - \chi' = \frac{A}{\Gamma}(z - z'), \qquad \psi - \psi' = \frac{B}{\Gamma}(z - z').$$

442. Πρὸς εὕρεσιν τῶν συντεταγμένων τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ταύτης, ἀρκεῖ ἐπιλῦσαι τὰς ἐξισώσεις (1), (4), εἰς $\chi$, $\psi$, $z$. Τὸ μῆκος δὲ αὐτῆς εὑρίσκομεν θέτοντες, ἀντὶ τῶν συντεταγμένων τούτων, τὰς τιμὰς αὐτῶν ἐν τῷ τύπῳ

(5) $$\delta = \sqrt{(\chi - \chi')^2 + (\psi - \psi')^2 + (z - z')^2}.$$

Ἀλλ' ἁπλούστερον εἶναι νὰ ὁρίσωμεν ἀμέσως τὰς διαφορὰς $\chi - \chi'$, $\psi - \psi'$, $z - z'$. Πρὸς τοῦτο, δίδομεν τῇ ἐξισώσει (1) τὴν μορφήν

$$A(\chi - \chi') + B(\psi - \psi') + \Gamma(z - z') + A\chi' + B\psi' + \Gamma z' + \Delta = 0\cdot$$

ἤ, καλοῦντες $A\chi' + B\psi' + \Gamma z' + \Delta = \Delta'$, τὴν ἑξῆς,

$$A\,(\chi - \chi') + B\,(\psi - \psi') + \Gamma\,(z - z') + \Delta' = 0.$$

Ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ καθιστῶμεν ἀντὶ $\chi - \chi'$ καὶ $\psi - \psi'$, τὰς τιμὰς (4), καὶ λαμβάνομεν ἐξίσωσιν δίδουσαν $z - z'$· εἶτα λογίζομεν $\chi - \chi'$, $\psi - \psi'$. Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν,

$$\chi - \chi' = \frac{-A\Delta'}{A^2 + B^2 + \Gamma^2}, \quad \psi - \psi' = \frac{-B\Delta'}{A^2 + B^2 + \Gamma^2}, \quad z - z' = \frac{-\Gamma\Delta'}{A^2 + B^2 + \Gamma^2}.$$

Ἀκολούθως, δηλοῦντες Κ τὴν κάθετον, ὁ τύπος (5) δίδει

$$K = \frac{\Delta'}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} = \frac{A\chi'+B\psi'+\Gamma z'+\Delta}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}.$$

Ἡ τιμὴ τῆς Κ πρέπει οὐσιωδῶς νὰ ἦναι θετική· τούτου ἕνεκα λαμβάνομεν ἀείποτε τὸν ἀριθμητὴν ἀπολύτως.

443. Ὅταν τὸ δοθὲν σημεῖον ἦναι ἡ ἀρχή, ἔχομεν

$$K = \frac{\Delta}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}.$$

Ὅταν τὸ αὐτὸ σημεῖον κῆται ἐν τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ, τότε $K=0$· διότι $A\chi'+B\psi'+\Gamma z'+\Delta=0$, ὡς σαφές.

444. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Ἀπὸ σημείου δοθέντος ἐπίπεδον ἀγαγεῖν πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ εὐθεῖαν δοθεῖσαν.*

Ἔστωσαν $\chi'$, $\psi'$, $z'$, αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου, καὶ

(1) $$\chi = \alpha z + a, \qquad \psi = \beta z + b,$$

αἱ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας. Τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου ἡ ἐξίσωσις, διερχομένου ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ἔσεται ὑπὸ τὴν μορφὴν [431]·

$$A(\chi-\chi')+B(\psi-\psi')+\Gamma(z-z')=0.$$

Ἐπειδὴ δὲ πρέπει νὰ ἦναι κάθετον ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ἔχομεν [441] $A=\alpha\Gamma$, $B=\beta\Gamma$. Ἄρα ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ

(2) $$\alpha(\chi-\chi')+\beta(\psi-\psi')+(z-z')=0.$$

445. Αἱ ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2), ἐξαγόμεναι τιμαί, εἰσὶν αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα συμπίπτει τῷ ἐπιπέδῳ. Καλοῦντες πρὸς συντομίαν

$$\nu = \frac{\alpha(\chi'-a)+\beta(\psi'-b)+z'}{\alpha^2+\beta^2+1},$$

εὑρίσκομεν

$$\chi = \alpha\nu + a, \qquad \psi = \beta\nu + b, \qquad z = \nu.$$



446. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Ἀπὸ σημείου δοθέντος εὐθεῖαν ἀγαγεῖν τέμνουσαν πρὸς ὀρθὰς ἑτέραν δοθεῖσαν· εὑρεῖν δὲ τὸν πόδα καὶ τὸ μέγεθος αὐτῆς.*

Ἔστωσαν $\chi'$, $\psi'$, $z'$, αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου, καὶ

(1) $$\chi = \alpha z + a, \qquad \psi = \beta z + b,$$

αἱ ἐξισώσεις τῆς δοθείσης εὐθείας. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ σημείου ἀχθῶσι δύο ἐπίπεδα, τὸ μὲν πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τὸ δὲ διερχόμενον αὐτῆς, φανερὸν ὅτι ἡ ὑπ' ἀλλήλων τομὴ αὐτῶν ἔσεται ἡ ζητουμένη κάθετος. Λοιπόν, αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐπιπέδων τούτων, ὁμοῦ λαμβανόμεναι, θεωροῦνται ὡς αἱ ἐξισώσεις τῆς τελευταίας ταύτης. Κατὰ §§ 444, 434, αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος ἐξισώσεις εἰσίν,

(2) $$\alpha(\chi-\chi')+\beta(\psi-\psi')+(z-z')=0,$$

(3) $$(\psi'-\beta z'-b)(\chi-\chi')-(\chi'-\alpha z'-a)(\psi-\psi') + [\beta(\chi'-a)-\alpha(\psi'-b)](z-z')=0.$$

Αἱ συντεταγμέναι τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου εἰσὶν αἱ ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι εὑρεθεῖσαι τιμαὶ

$$\chi = \alpha\nu + a, \qquad \psi = \beta\nu + b, \qquad z = \nu.$$

Ἑπομένως τὸ μέγεθος αὐτῆς, δηλούμενον κ, ἔσεται

$$\kappa = \sqrt{(\chi'-a-\alpha\nu)^2+(\psi'-b-\beta\nu)^2+(z'-\nu)^2}.$$

Ἡ ὑπόρριζος ποσότης γράφεται καὶ οὕτω·

$$(\chi'-a)^2+(\psi'-b)^2+z'^2-2[\alpha(\chi'-a)+\beta(\psi'-b)+z']\nu+(\alpha^2+\beta^2+1)\nu^2.$$

Ἀλλά, κατὰ τὴν τιμὴν τοῦ ν, τὸ μέρος τῆς ἐκθέσεως ταύτης, τὸ τὰ διπλᾶ γινόμενα περιέχον, ἰσοῦται

$$-2(\alpha^2+\beta^2+1)\nu^2. \quad \text{Ἄρα}$$

$$\kappa = \sqrt{(\chi'-a)^2+(\psi'-b)^2+z'^2-(\alpha^2+\beta^2+1)\nu^2}.$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου, ὑπὸ τῆς πρώτης δοθείσης εὐθείας καὶ τῆς πρώτης καθέτου ὁριζομένου, ἔσεται ὑπὸ τὴν μορφήν,

$$(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{A}'(\chi - \mathrm{a}) + \mathrm{B}'(\psi - \beta) + z = 0 \cdot$$

τῶν Α΄, Β΄, ὁριζομένων ἐκ τῶν σχέσεων

$$(4) \qquad \mathrm{AA}' + \mathrm{BB}' + 1 = 0, \qquad \alpha\mathrm{A}' + ϐ\mathrm{B}' + 1 = 0.$$

Ὡσαύτως, ἡ ἐξίσωσις τοῦ ὑπὸ τῆς δευτέρας δοθείσης εὐθείας καὶ τῆς δευτέρας καθέτου ἀγομένου ἐπιπέδου, εἶναι

$$(\mathrm{A}') \qquad \mathrm{A}''(\chi - \mathrm{a}') + \mathrm{B}''(\psi - \beta') + z = 0 \cdot$$

τῶν Α΄΄, Β΄΄, διδομένων ὑπὸ τῶν σχέσεων,

$$(5) \quad \mathrm{AA}'' + \mathrm{BB}'' + 1 = 0, \qquad \alpha'\mathrm{A}'' + ϐ'\mathrm{B}' + 1 = 0.$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (4), (5), ἐξάγομεν τὰς τιμὰς τῶν Α΄, Β΄ καὶ Α΄΄, Β΄΄· εἶτα ἀντεισάγομεν τὰς τιμὰς τῶν Α, Β, καὶ ἔχομεν,

$$\mathrm{A}' = \frac{\alpha - \alpha' + ϐ(\alpha ϐ' - ϐ\alpha')}{\alpha(\alpha' - \alpha) + ϐ(ϐ' - ϐ)}, \qquad \mathrm{B}' = \frac{ϐ - ϐ' - \alpha(\alpha ϐ' - ϐ\alpha')}{\alpha(\alpha' - \alpha) + ϐ(ϐ' - ϐ)},$$

$$\mathrm{A}'' = \frac{\alpha - \alpha' + ϐ'(\alpha ϐ' - ϐ\alpha')}{\alpha'(\alpha' - \alpha) + ϐ'(ϐ' - ϐ)}, \qquad \mathrm{B}'' = \frac{ϐ - ϐ' - \alpha'(\alpha ϐ' - ϐ\alpha')}{\alpha'(\alpha' - \alpha) + ϐ'(ϐ' - ϐ)}.$$

Φέρομεν τὰς τιμὰς ταύτας ἐν ταῖς ἐξισώσεσιν (Α), (Α΄), καὶ λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις τῆς εὐθείας ἐφ᾽ ἧς μετρᾶται τὸ ζητούμενον βραχύτερον ἀπόστημα. Εὑρίσκομεν οὕτως,

$$[\alpha - \alpha' + ϐ(\alpha ϐ' - ϐ\alpha')](\chi - \mathrm{a}) + [ϐ - ϐ' - \alpha(\alpha ϐ' - ϐ\alpha')](\psi - \beta)$$
$$+ [\alpha(\alpha' - \alpha) + ϐ(ϐ' - ϐ)]z = 0,$$

$$[\alpha - \alpha' + ϐ'(\alpha ϐ' - ϐ\alpha')](\chi - \mathrm{a}') + [ϐ - ϐ' - \alpha'(\alpha ϐ' - ϐ\alpha')](\psi - \beta')$$
$$+ [\alpha'(\alpha' - \alpha) + ϐ'(ϐ' - ϐ)]z = 0.$$

*Παρατηρητέον*, ὅτι ἡ δευτέρα ἐξίσωσις μορφοῦται ἐκ τῆς πρώτης, τροπῇ τῶν $\alpha$, $ϐ$, $\mathrm{a}$, $\beta$ εἰς $\alpha'$, $ϐ'$, $\mathrm{a}'$, $\beta'$, καὶ $\alpha'$, $ϐ'$, εἰς $\alpha$, $ϐ$.



Ὑπολείπεται ἡ εὕρεσις τοῦ μήκους τοῦ βραχυτέρου ἀποστήματος. Κατὰ τὰ προλεχθέντα, ἄγομεν ἀπὸ σημείου τῆς δευτέρας δοθείσης εὐθείας, ἑτέραν πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐξισώσεως (3). Διὰ τὸ ἁπλούστερον, ἐκλέγομεν τὸ σημεῖον Τ΄, οὗτινος ἔχομεν τὰς συντεταγμένας. Τότε, ὁ γενικὸς τύπος, ὁ ἐκφράζων τὸ ἀπόστημα σημείου ἀπὸ ἐπιπέδου [442], δίδει

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{A}(\mathrm{a}' - \mathrm{a}) + \mathrm{B}(\beta' - \beta)}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + 1}}.$$

ἤ, τῇ ἀντεισαγωγῇ τῶν τιμῶν τῶν Α, Β,

$$\mathrm{K} = \frac{(\mathrm{a}' - \mathrm{a})(ϐ - ϐ') - (\beta' - \beta)(\alpha - \alpha')}{\sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (ϐ' - ϐ)^2 + (\alpha ϐ' - ϐ\alpha')^2}} \cdot$$

Τοιαύτη εἶναι ἡ ἔκφρασις τοῦ βραχυτέρου ἀποστήματος δύο εὐθειῶν ἀπ᾽ ἀλλήλων.

449. Ὅταν δύο εὐθεῖαι συμπίπτωσι, τὸ ἐν αὐταῖς ἀπολαμβανόμενον μέρος τῆς κοινῆς καθέτου εἶναι μηδέν· ἄρα, συνάγομεν καὶ αὖθις τὴν σχέσιν [428],

$$(\mathrm{a}' - \mathrm{a})(ϐ - ϐ') - (\beta' - \beta)(\alpha - \alpha') = 0,$$

δηλοῦσαν ὅτι δύο εὐθεῖαι τέμνουσιν ἀλλήλας.

450. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Εὑρεῖν τὰς ὑπὸ εὐθείας δοθείσης καὶ τῶν τριῶν συντεταγμένων ἀξόνων περιεχομένας γωνίας.*

(Σχ. 174). Ἔστωσαν

$$\chi = \alpha z + \mathrm{a}, \qquad \psi = ϐz + \beta,$$

αἱ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας. Ἐπειδὴ αὕτη ἐν γένει δὲν τέμνει τοὺς ἄξονας, αἱ γωνίαι, περὶ ὧν ὁ λόγος, εἰσὶν αἱ περιεχόμεναι ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἀξόνων καὶ τῆς εὐθείας ΑΔ ἀγομένης ἀπὸ τῆς ἀρχῆς παραλλήλως τῇ δοθείσῃ. Αἱ ἐξισώσεις τῆς ΑΔ εἰσὶν

$$\chi = \alpha z, \qquad \psi = ϐz.$$

Ἐπὶ τῆς γραμμῆς ταύτης λαμβάνομεν τὸ τυχὸν μῆκος $\text{ΑΜ} = \rho$, καὶ καλοῦμεν $\chi'$, $\psi'$, $z'$, τὰς συντεταγμένας τοῦ πέρατος Μ; πρὸς ὁρισμὸν τῶν ὁποίων ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις,

$$\chi' = \alpha z', \quad \psi' = \text{ϐ} z', \quad \chi'^2 + \psi'^2 + z'^2 = \rho^2 \cdot$$

ὅθεν λαμβάνομεν

$$\chi' = \frac{\alpha\rho}{\sqrt{\alpha^2+\text{ϐ}^2+1}}, \quad \psi' = \frac{\text{ϐ}\rho}{\sqrt{\alpha^2+\text{ϐ}^2+1}}, \quad z' = \frac{\rho}{\sqrt{\alpha^2+\text{ϐ}^2+1}}.$$

Τούτων τεθέντων, ἀποπερατοῦμεν τὸ συγκροτούμενον παραλληλεπίπεδον ὑπὸ τῶν τριῶν συντεταγμένων τοῦ σημείου Μ· καλοῦμεν $a$, $\beta$, $\gamma$, τὰς ζητουμένας γωνίας ΜΑΧ, ΜΑΨ, ΜΑΖ. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΜΑΠ, ΜΑΡ, ΜΑΚ, συνάγομεν τὰς σχέσεις,

$$\text{συν}\, a = \frac{\text{ΑΠ}}{\text{ΑΜ}} = \frac{\chi'}{\rho}, \quad \text{συν}\, \beta = \frac{\text{ΑΡ}}{\text{ΑΜ}} = \frac{\psi'}{\rho}, \quad \text{συν}\, \gamma = \frac{\text{ΑΚ}}{\text{ΑΜ}} = \frac{z'}{\rho}.$$

Καθιστῶμεν τὰς ἀνωτέρω τιμὰς τῶν συντεταγμένων, καὶ λαμβάνομεν

$$(\delta) \quad \text{συν}\, a = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\text{ϐ}^2+1}}, \quad \text{συν}\, \beta = \frac{\text{ϐ}}{\sqrt{\alpha^2+\text{ϐ}^2+1}}, \quad \text{συν}\, \gamma = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\text{ϐ}^2+1}}.$$

451. *Παρατηρήσεις.* 1ον. Τὰ συνημίτονα ταῦτα περιέχουσι ῥιζικὸν ἐπιδεκτικὸν τοῦ διπλοῦ σημείου $\pm$. Ἀλλὰ πρέπει πάντοτε νὰ προτάττωμεν αὐτοῦ τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ εἰς τὰ τρία συνημίτονα. Ἔχομεν οὕτω δύο συστήματα τιμῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὰς δύο παραπληρωματικὰς γωνίας ὑπὸ τοῦ μέρους ΑΔ, τῆς προεκβολῆς αὐτοῦ ΑΕ, καὶ τῶν τριῶν θετικῶν ἡμιαξόνων περιεχομένας· διότι οὕτω μετροῦμεν τὰς γωνίας εὐθείας τινὸς πρὸς τοὺς συντεταγμένους ἄξονας.

2ον. Τὸ ῥιζικὸν τοῦτο θετικῶς λαμβανόμενον, ἀναφέρεται ἀείποτε εἰς τὰς τρεῖς γωνίας ἃς σχηματίζει πρὸς τοὺς ἄξονας τὸ μέρος ΑΔ, τὸ ἄνω τοῦ ἐπιπέδου ΧΨ, ἢ τὸ ὁποῖον σχηματίζει γωνίαν ὀξεῖαν πρὸς τὴν ΑΖ· διότι τότε, ἐν τοῖς τύποις (δ) ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τοῦ συν$\gamma$ εἶναι θετική, ἡ γωνία $\gamma$ εἶναι ὀξεῖα. Φανερὸν ὅτι, κατὰ τὰ σημεῖα τῶν $\alpha$, ϐ, αἱ ἕτεραι γωνίαι $a$, $\beta$, ἔσονται ὀξεῖαι ἢ ἀμβλεῖαι.



452. Προσθέτοντες τὰς ἐξισώσεις (δ), ἀφοῦ τετραγωνίσωμεν αὐτάς, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\text{συν}^2 a + \text{συν}^2 \beta + \text{συν}^2 \gamma = 1.$$

453. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Εὑρεῖν τὴν ὑπὸ δύο εὐθειῶν δοθεισῶν περιεχομένην γωνίαν.*

Ἔστωσαν

$$\chi = \alpha z + a, \qquad \psi = \text{ϐ} z + \beta,$$
$$\chi = \alpha' z + a', \qquad \psi = \text{ϐ}' z + \beta',$$

αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν. Ἐπειδὴ αὗται ἐν γένει δὲν συμπίπτουσιν (Σχ. 175), ἄγομεν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου, π. χ. ἀπὸ τῆς ἀρχῆς, παραλλήλους αὐταῖς τὰς ΑΔ, ΑΔ′, ἐφ' ὧν λαμβάνομεν ἀμοιβαίως τὰ μήκη $\text{ΑΜ} = \text{ΑΜ}' = 1$. Αἱ ἐξισώσεις τῶν παραλλήλων τούτων εἰσὶν

$$\chi = \alpha z, \qquad \psi = \text{ϐ} z,$$
$$\chi = \alpha' z, \qquad \psi = \text{ϐ}' z.$$

Ἐπιζευγνύομεν ΜΜ′, καὶ καλοῦμεν Φ τὴν ζητουμένην γωνίαν ΜΑΜ′. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΜΑΜ′ συνάγομεν

$$\text{συν}\, \Phi = \frac{\overline{\text{ΑΜ}}^2 + \overline{\text{ΑΜ}'}^2 - \overline{\text{ΜΜ}'}^2}{2\text{ΑΜ} \times \text{ΑΜ}'} = \frac{2 - \overline{\text{ΜΜ}'}^2}{2}.$$

Ἔστωσαν $\chi'$, $\psi'$, $z'$, αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ, καὶ $\chi''$, $\psi''$, $z''$, αἱ τοῦ Μ′. Ἔχομεν

$$\overline{\text{ΜΜ}'}^2 = (\chi' - \chi'')^2 + (\psi' - \psi'')^2 + (z' - z'')^2.$$

Ἀναπτύσσομεν τὰ τετράγωνα· συνεπείᾳ δὲ τῶν σχέσεων

$$\chi'^2 + \psi'^2 + z'^2 = 1, \qquad \chi''^2 + \psi''^2 + z''^2 = 1.$$

ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις ἄγεται ὑπὸ τὴν ἑξῆς μορφήν·

$$\overline{\text{MM}'}^2 = 2 - 2(\chi'\chi'' + \psi'\psi'' + z'z'').$$

Ἑπομένως ἔχομεν

$$(\gamma)\qquad \text{συν}\,\Phi = \chi'\chi'' + \psi'\psi'' + z'z''.$$

Εὐκόλως ἤδη λαμβάνομεν τὰς τιμὰς τῶν $\chi', \psi', z'$, καὶ $\chi'', \psi'', z''$. Ἐπειδὴ τὸ M εἶναι σημεῖον τῆς πρώτης παραλλήλου AM, ἔχομεν τὰς σχέσεις,

$$\chi' = \alpha z', \qquad \psi' = \alpha z', \qquad \chi'^2 + \psi'^2 + z'^2 = 1;$$

αἵτινες δίδουσιν

$$\chi' = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+6^2+1}}, \quad \psi' = \frac{6}{\sqrt{\alpha^2+6^2+1}}, \quad z' = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+6^2+1}}.$$

Ὡσαύτως εὑρίσκομεν

$$\chi'' = \frac{\alpha'}{\sqrt{\alpha'^2+6'^2+1}}, \quad \psi'' = \frac{6'}{\sqrt{\alpha'^2+6'^2+1}}, \quad z'' = \frac{1}{\sqrt{\alpha'^2+6'^2+1}}.$$

Φέροντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν ἐξίσωσιν (γ), λαμβάνομεν

$$(\delta)\qquad \text{συν}\,\Phi = \frac{\alpha\alpha' + 66' + 1}{\sqrt{\alpha^2+6^2+1}\ \sqrt{\alpha'^2+6'^2+1}}.$$

Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τῶν $z', z''$, ἐλήφθησαν θετικαί, ἕπεται ὅτι ὁ τύπος οὗτος δίδει τὴν περιεχομένην γωνίαν ὑπὸ τῶν ἀνωτέρων μερῶν τῶν παραλλήλων ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, ἥτις ἔσεται ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα, κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ ἀριθμητοῦ $\alpha\alpha' + 66' + 1$.

454. Τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας Φ λογίζομεν, εἰ δέον, τῇ χρήσει τοῦ τύπου $\sqrt{1 - \text{συν}^2\Phi}$· λαμβάνομεν δὲ

$$\text{ημ}\,\Phi = \frac{\sqrt{(\alpha-\alpha')^2 + (6-6')^2 + (\alpha6' - 6\alpha')^2}}{\sqrt{\alpha^2+6^2+1}\ \sqrt{\alpha'^2+6'^2+1}}.$$



455. Ὅταν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι περιέχωσι γωνίαν ὀρθήν, τότε $\text{συν}\,\Phi = 0$· ἄρα

$$\alpha\alpha' + 66' + 1 = 0.$$

Παρατηρητέον ὅμως ὅτι, τῇ σχέσει ταύτῃ οὐδόλως ἑπόμενον εἶναι ὅτι αἱ εὐθεῖαι συμπίπτουσιν ἀλλήλαις ἐν τῷ διαστήματι· αὐτὴ ἐμφαίνει ἁπλῶς ὅτι, αἱ παράλληλοι αὐτῶν τέμνονται πρὸς ὀρθάς. Τοῦτο δὲ ἐννοοῦμεν λέγοντες ὅτι δύο εὐθεῖαι, ἐν τῷ διαστήματι, εἰσὶ κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

Προσθετέον ὅτι ἡ σχέσις αὕτη, ἀναφερομένη πρὸς τὰς εὐθείας AM, AM′, ἀφήνει τὴν δευτέραν ἐν μέρει ἀόριστον, καὶ ὅταν ἡ πρώτη ἦναι ἐντελῶς ὡρισμένη ὑπὸ τῶν τιμῶν τῶν $\alpha$, $6$· διότι ἐνταῦθα μίαν μόνην σχέσιν ἔχομεν μεταξὺ $\alpha'$ καὶ $6'$· τὸ τοιοῦτον δὲ εἶναι ὀρθόν· διότι, ἐν τῷ διαστήματι, ὑπάρχει ἀπειρία εὐθειῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου A ἀγομένων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν AM. Λοιπόν, ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι, προκειμένου λόγου ἀγαγεῖν εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ ἑτέραν δοθεῖσαν, σὺν τῇ προηγουμένῃ σχέσει, προσληπτέον καὶ τὴν ἐμφαίνουσαν τὴν ὑπ' ἀλλήλων τομὴν δύο εὐθειῶν [428].

456. Ἵνα ὦσιν αἱ εὐθεῖαι παράλληλοι, πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$\Phi = 0^\circ \quad \text{ἢ} \quad = 180^\circ, \quad \text{ὅθεν} \quad \text{συν}\,\Phi = \pm 1.$$

Ἑπομένως

$$\pm\sqrt{\alpha^2+6^2+1}\ \sqrt{\alpha'^2+6'^2+1} = \alpha\alpha' + 66' + 1.$$

Τετραγωνίζοντες καὶ μεταθέτοντες λαμβάνομεν

$$(\alpha'-\alpha)^2 + (6'-6)^2 + (\alpha6' - 6\alpha')^2 = 0.$$

Αἱ ποσότητες $\alpha$, $6$, $\alpha'$, $6'$, εἰσὶ πραγματικαί· ἄρα, οὐδὲν τῶν περιεχομένων ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ τετραγώνων εἶναι ἀρνητικόν, οὐδὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν καθίσταται μηδέν. Λοιπὸν πρέπει νὰ ἔχωμεν συγχρόνως

$$\alpha' = \alpha, \qquad 6' = 6, \qquad \alpha6' = 6\alpha'.$$

Αἱ συνθῆκαι αὗται, ὧν ἡ τρίτη συνέπεια ἐστὶ τῶν δύο πρώτων, δηλοῦσι τῷ ὄντι, κατὰ § 426, τὸν παραλληλισμὸν εὐθειῶν.

457. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γραμμὴ AM′ ταυτίζεται ἐκ διαδοχῆς ἑνὶ ἑκάστῳ τῶν ἀξόνων. Ὁ γενικὸς τύπος (δ) δώσει τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν a, β, γ, ὑπὸ τῆς εὐθείας AM καὶ τῶν τριῶν ἀξόνων περιεχομένων. Αἱ μὲν ἐξισώσεις τοῦ ἄξονος τῶν χ εἰσὶ $z = 0$, $\psi = 0$, αἱ δὲ τῆς γραμμῆς AM′ τίθενται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$z = \frac{1}{\alpha'}\chi, \qquad \psi = \frac{\beta'}{\alpha'}\chi.$$

Λοιπὸν, ὅπως δηλώσωμεν ὅτι αὕτη ταυτίζεται τῷ ἄξονι τῶν χ, θετέον

$$\frac{1}{\alpha'} = 0, \qquad \frac{\beta'}{\alpha'} = 0.$$

Πρὶν εἰσάξωμεν τὰς ὑποθέσεις ταύτας ἐν τῇ γενικῇ ἐκθέσει τοῦ συν Φ, γράφομεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\text{συν}\,\Phi = \frac{\alpha + \beta\dfrac{\beta'}{\alpha'} + \dfrac{1}{\alpha'}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}\,\sqrt{1 + \dfrac{\beta'^2}{\alpha'^2} + \dfrac{1}{\alpha'^2}}}.$$

Οὕτω δὲ, συνεπείᾳ τῶν προηγουμένων ὑποθέσεων, λαμβάνομεν

$$\text{συν}\,a = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}}.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν καὶ τὰς τιμὰς τῶν συν β, συν γ, ὁμοίας ταῖς τοῦ ἐν § 450 προβλήματος, ὅπερ εἶναι μερικὴ περίπτωσις τοῦ περὶ οὗ λόγος.



458. Ἡ ὑπὸ δύο εὐθειῶν περιεχομένη γωνία ἐκφράζεται καὶ συνεκθέσει τῶν γωνιῶν, ὑπὸ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν καὶ τῶν ἀξόνων περιεχομένων. Τῷ ὄντι, ἔστωσαν καὶ αὖθις a, β, γ, αἱ γωνίαι τῆς πρώτης εὐθείας πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν χ, τῶν ψ, καὶ τῶν z, καὶ a′, β′, γ′, αἱ γωνίαι τῆς δευτέρας. Ἔχομεν τὴν ἐν § 453 σχέσιν

$$\text{συν}\,\Phi = \chi'\chi'' + \psi'\psi'' + z'z''.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ $AM = AM' = 1$, ἔχομεν

$$\chi' = \text{συν}\,a, \quad \psi' = \text{συν}\,\beta, \quad z' = \text{συν}\,\gamma,$$

$$\chi'' = \text{συν}\,a', \quad \psi'' = \text{συν}\,\beta', \quad z'' = \text{συν}\,\gamma'.$$

Ἑπομένως

$$\text{συν}\,\Phi = \text{συν}\,a\,\text{συν}\,a' + \text{συν}\,\beta\,\text{συν}\,\beta' + \text{συν}\,\gamma\,\text{συν}\,\gamma'.$$

459. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Εὑρεῖν τὰς ὑπὸ ἐπιπέδου δοθέντος καὶ τῶν τριῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων περιεχομένας γωνίας.*

Ἔστω $$A\chi + B\psi + \Gamma z + \Delta = 0.$$

ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου. Καλοῦμεν a, β, γ, τὰς γωνίας αὐτοῦ πρὸς τὰ ἐπίπεδα τῶν ψz, τῶν χz καὶ τῶν χψ. Ἡ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ἀγομένη γραμμὴ εὐθεῖα, πρὸς ὀρθὰς τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ καὶ ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων δηλουμένη

$$\chi = \frac{A}{\Gamma}z, \qquad \psi = \frac{B}{\Gamma}z,$$

σχηματίζει προφανῶς τὰς γωνίας a, β, γ, μετὰ τῶν ἀξόνων τῶν χ, τῶν ψ καὶ τῶν z. Ἄρα ἔχομεν

$$\text{συν}\,a = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}, \quad \text{συν}\,\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}, \quad \text{συν}\,\gamma = \frac{\Gamma}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}.$$

Ἔχομεν ἐπίσης ὡς ἐν τῇ εὐθείᾳ

$$\text{συν}^2 a + \text{συν}^2\beta + \text{συν}^2\gamma = 1.$$

460. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Εὑρεῖν τὴν ὑπὸ δύο ἐπιπέδων δοθέντων περιεχομένην γωνίαν.*

Ἔστωσαν

$$A\chi + B\psi + \Gamma z + \Delta = 0\,, \qquad A'\chi + B'\psi + \Gamma' z + \Delta' = 0\,.$$

αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐπιπέδων, καὶ $\Phi$ ἡ ὑπ' ἀλλήλων περιεχομένη γωνία. Ἡ γωνία αὕτη ἰσοῦται τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ δύο εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ταῦτα, ἀγομένων ἀπὸ τῆς ἀρχῆς. Αἱ ἐξισώσεις τῶν καθέτων τούτων εἰσὶ

$$\chi = \frac{A}{\Gamma}z, \quad \psi = \frac{B}{\Gamma}z. \qquad \chi = \frac{A'}{\Gamma'}z, \quad \psi = \frac{B'}{\Gamma'}z.$$

Διὰ τοῦ διδόντος τύπου τὴν πρὸς ἀλλήλας γωνίαν δύο εὐθειῶν [453], λαμβάνομεν τὸ ζητούμενον,

$$\text{συν}\ \Phi = \frac{AA' + BB' + \Gamma\Gamma'}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}\ \sqrt{A'^2 + B'^2 + \Gamma'^2}}.$$

461. Ὅπως ὦσι τὰ δοθέντα ἐπίπεδα ὀρθὰ ἀλλήλοις, ἀπαιτεῖται νὰ ἔχωμεν

$$\text{συν}\ \Phi = 0, \qquad \text{ἤτοι} \qquad AA' + BB' + \Gamma\Gamma' = 0\,.$$

462. Ἵνα δηλώσωμεν ὅτι τὰ ἐπίπεδα παράλληλα εἰσὶ, καθιστῶμεν $\text{συν}\ \Phi = 1$, ὅπερ δίδει

$$AA' + BB' + \Gamma\Gamma' = \sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}\ \sqrt{A'^2 + B'^2 + \Gamma'^2}\cdot$$

ὅθεν συνάγομεν, συλλογιζόμενοι ὡς ἐν § 456,

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{\Gamma}{\Gamma'}.$$

463. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ἐπιπέδου πρὸς τὰ συντεταγμένα ἰσοῦνται ταῖς περιεχομέναις γωνίαις ὑπὸ εὐθείας πρὸς ὀρθὰς τῷ ἐπιπέδῳ, καὶ τῶν τριῶν ἀξόνων, ἔχομεν διὰ τὴν γωνίαν δύο ἐπιπέδων, ὥσπερ διὰ τὴν τῶν δύο εὐθειῶν,

$$\text{συν}\ \Phi = \text{συν}\ a\ \text{συν}\ a' + \text{συν}\ \beta\ \text{συν}\ \beta' + \text{συν}\,\gamma\ \text{συν}\,\gamma'.$$



$a, \beta, \gamma$, καὶ $a', \beta', \gamma'$, εἰσὶν αἱ γωνίαι τῶν δύο ἐπιπέδων πρὸς τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα. Ἐπίσης ἔχομεν καὶ μεταξὺ τῶν γωνιῶν τούτων τὰς σχέσεις·

$$\text{συν}^2 a + \text{συν}^2 \beta + \text{συν}^2 \gamma = 1, \quad \text{συν}^2 a' + \text{συν}^2 \beta' + \text{συν}^2 \gamma' = 1.$$

464. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Εὑρεῖν τὴν περιεχομένην γωνίαν ὑπὸ εὐθείας καὶ ἐπιπέδου, δεδομένων ἀμφοτέρων.*

Ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι τὸ συμπλήρωμα τῆς γωνίας ἣν σχηματίζει ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα μετὰ τῆς πρὸς ὀρθὰς ἀγομένης τῷ ἐπιπέδῳ, ἀπὸ σημείου ἐν τῷ διαστήματι.

Ἔστωσαν, ἡ μὲν ἐξίσωσις τοῦ ἐπιπέδου

$$A\chi + B\psi + \Gamma z + \Delta = 0\cdot$$

αἱ δὲ τῆς δοθείσης εὐθείας

$$\chi = az + a, \qquad \psi = \beta z + \beta.$$

Ἐὰν ἡ κάθετος ἀχθῇ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς, αἱ ἐξισώσεις αὐτῆς ἔσονται

$$\chi = \frac{A}{\Gamma}z, \qquad \psi = \frac{B}{\Gamma}z.$$

Λοιπὸν, καλοῦντες $\Upsilon$ τὴν ζητουμένην γωνίαν, λαμβάνομεν ἐκ τοῦ διδόντος τὴν γωνίαν δύο εὐθειῶν τύπου [453]·

$$\text{ημ}\ \Upsilon = \frac{A\alpha + B\beta + \Gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}\ \sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}.$$

465. Ὅταν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἦναι παράλληλος τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἔχομεν ὡς ἐν § 436,

$$\text{ημ}\ \Upsilon = 0\cdot \qquad \text{ἄρα} \qquad A\alpha + B\beta + \Gamma = 0.$$

466. Ὅταν ἡ εὐθεῖα ἦναι πρὸς ὀρθὰς τῷ ἐπιπέδῳ, ἔχομεν $\text{ημ}\ \Upsilon = 1$. Συλλογιζόμενοι καὶ αὖθις ὡς ἐν § 456, εὑρίσκομεν [441].

$$A = \alpha\Gamma, \qquad B = \beta\Gamma.$$

447. Τὰς προβολὰς τῆς καθέτου λαμβάνομεν εὐκόλως ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2), (3). Ἀλλ' εὐκολώτερον ὁρίζομεν αὐτὰς παρατηροῦντες, ὅτι γνωρίζομεν δύο σημεῖα τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος γραμμῆς, τὸ δοθὲν καὶ τὸν πόδα τῆς καθέτου. Ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις τῶν προβολῶν τούτων εἰσί,

$$\chi - \chi' = \frac{\chi' - a - \alpha\nu}{z' - \nu}(z - z'),$$

$$\psi - \psi' = \frac{\psi' - \beta - \beta\nu}{z' - \nu}(z - z').$$

448. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Δύο εὐθειῶν δοθεισῶν, εὑρεῖν· 1ον. Τὰς ἐξισώσεις τῆς εὐθείας ἐφ' ἧς μετρᾶται τὸ βραχύτερον ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστημα αὐτῶν.*

*2ον. Τὴν ἔκφρασιν τοῦ βραχυτέρου τούτου ἀποστήματος.*

(Σχ. 173). Ἔστωσαν ΑΒ, ΓΔ, αἱ δύο εὐθεῖαι, καὶ ΠΚ τὸ ζητούμενον βραχύτερον αὐτῶν ἀπόστημα. Φανερὸν ὅτι ἡ γραμμὴ ΠΚ εἶναι εὐθεῖα καὶ κάθετος ἐπὶ ἀμφοτέρας τὰς δοθείσας. Λοιπὸν, ἐὰν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀχθῇ ἐπίπεδον, τὸ ΥΦ, παράλληλον τῇ εὐθείᾳ ΓΔ, ἡ εὐθεῖα ΠΚ ἔσεται κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο· ἄρα, κεῖται ἐπὶ ἀμφοτέρων τῶν ἐπιπέδων ΑΒΡ, ΓΔΣ, ἀγομένων πρὸς ὀρθὰς τῷ ΥΦ, τοῦ μὲν διὰ τῆς ΑΒ, τὸ δὲ διὰ τῆς ΓΔ· ἐν ἄλλοις λόγοις, ΠΚ εἶναι ἡ ὑπ' ἀλλήλων τομὴ τῶν ἐπιπέδων τούτων, αἱ δ' ἐξισώσεις αὐτῆς εἰσὶν αἱ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων.

Τὸ μέγεθος τῆς ΠΚ ἰσοῦται τῇ ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς εὐθείας ΓΔ ἀγομένῃ πρὸς ὀρθὰς εὐθείᾳ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΥΦ.

Ἀκολουθήσωμεν τὴν ὁδὸν ταύτην πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ προτεθέντος προβλήματος.

Ἔστωσαν

(1) $\qquad \chi = \alpha z + a, \qquad \psi = \beta z + \beta,$

(2) $\qquad \chi = \alpha' z + a', \qquad \psi = \beta' z + \beta',$



αἱ ἐξισώσεις τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν. Αἱ εὐθεῖαι αὗται τρυποῦσι τὸ ἐπίπεδον τῶν χψ κατὰ σημεῖα, Τ καὶ Τ', ὧν αἱ συντεταγμέναι εἰσὶ

τοῦ μὲν Τ, $\qquad z = 0, \quad \chi = a, \quad \psi = \beta,$

τοῦ δὲ Τ', $\qquad z = 0, \quad \chi = a', \quad \psi = \beta'.$

Ζητήσωμεν πρῶτον τὴν ἐξίσωσιν τοῦ περιέχοντος τὴν πρώτην εὐθεῖαν ἐπιπέδου, καὶ παραλλήλου ὄντος τῇ δευτέρᾳ. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο διελεύσεται τοῦ Τ, ἄρα, ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ ἔχει τὴν μορφὴν

(3) $\qquad A(\chi - a) + B(\psi - \beta) + z = 0.$

Α καὶ Β ὄντων ἀγνώστων. Ἵνα περιέχῃ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον τὴν πρώτην εὐθεῖαν, πρέπει αἱ τιμαὶ (1) τῶν χ, ψ, νὰ ἐπαληθεύωσι τὴν ἐξίσωσιν (3), οἱαδήποτε ἦναι ἡ συντεταγμένη z· ὅθεν ἕπεται ἡ σχέσις

$$A\alpha + B\beta + 1 = 0.$$

Ἵνα δὲ ᾖ παράλληλον τῇ δευτέρᾳ εὐθείᾳ, πρέπει νὰ θέσωμεν [436]·

$$A\alpha' + B\beta' + 1 = 0.$$

Αἱ δύο αὗται σχέσεις ὁρίζουσι τοὺς συντελεστὰς Α καὶ Β· ἤτοι

$$A = \frac{\beta - \beta'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}, \qquad B = \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}.$$

Ἄξωμεν ἤδη ἀπὸ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς τῷ τῆς ἐξισώσεως (3). Πρὸς τοῦτο, πρέπει ἑκάτερον αὐτῶν νὰ περιέχῃ κάθετόν τινα ἐπὶ τὸ τελευταῖον τοῦτο ἐπίπεδον. Αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο καθέτων ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, ἀπὸ τῶν σημείων Τ, Τ', ἀγομένων, εἰσὶ [441]·

τῆς μὲν $\qquad \chi = Az + a, \qquad \psi = Bz + \beta,$

τῆς δὲ $\qquad \chi = Az + a', \qquad \psi = Bz + \beta'.$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ′.

## ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΕΝ ΤΩ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΙ.

### ΤΥΠΟΙ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ.

467. *Τύποι δι' ὧν μεταβαίνομεν εἰς ἄξονας παραλλήλους.* — Ἔστωσαν (Σχ. 176) ΑΧ, ΑΨ, ΑΖ, οἱ παλαιοὶ ἄξονες, καὶ Α′Χ′, Α′Ψ′, Α′Ζ′, οἱ νέοι παράλληλοι κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν. Καλοῦμεν, $\chi$, $\psi$, $z$, τὰς συντεταγμένας σημείου τινὸς Μ, πρὸς τοὺς παλαιοὺς ἄξονας· $\chi'$, $\psi'$, $z'$, τὰς συντεταγμένας τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς τοὺς νέους· $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, τὰς συντεταγμένας τῆς νέας ἀρχῆς ἐν τῷ πρώτῳ συστήματι. Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον Ζ′Α′Ψ′ τέμνει τὸν ἄξονα ΑΧ κατὰ τὸ σημεῖον Ο, καὶ ὅτι ἐπίπεδον παράλληλον, ἀπὸ τοῦ σημείου Μ ἀγόμενον, τέμνει τὸν αὐτὸν ἄξονα κατὰ τὸ Π, καὶ τὸν παράλληλον τούτου κατὰ τὸ Π′. Ἔχομεν

$\mathrm{AO}=\alpha,\quad \mathrm{A\Pi}=\chi,\quad \mathrm{A'\Pi'}=\mathrm{O\Pi}=\chi'.\quad$ Ἄρα $\quad \chi=\chi'+\alpha.$

Ἐπίσης εὑρίσκομεν καὶ $\psi=\psi'+\beta,\quad z=z'+\gamma.$

Λοιπὸν, πρὸς μετάβασιν εἰς ἄξονας παραλλήλους, ἔχομεν τοὺς τύπους

$$(1)\qquad \chi=\chi'+\alpha,\quad \psi=\psi'+\beta,\quad z=z'+\gamma.$$

Ἑκάστην συντεταγμένην λαμβάνομεν πρὸς τὸ ἁρμόζον τῇ θέσει αὐτῆς σημεῖον.

468. *Παρατήρησις.* Ἐὰν ἀπὸ τοῦ σημείου Α′ ἄξωμεν τρεῖς ἄξονας ἔχοντας νέας διευθύνσεις, καὶ θελήσωμεν ἐκφράσαι $\chi$, $\psi$, $z$, εἰς συντεταγμένας $\chi''$, $\psi''$, $z''$, λογιζομένας ἐπὶ τῶν τελευταίων τούτων ἀξόνων, φανερὸν ὅτι ἀρκεῖ



νὰ λάβωμεν τὰς τιμὰς τῶν $\chi'$, $\psi'$, $z'$, συνεκθέσει τῶν $\chi''$, $\psi''$, $z''$, εἶτα δὲ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰς τιμὰς ταύτας τὰς ποσότητας $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Λοιπὸν, ἕνεκα τούτου ὑποθέσομεν ἐν τοῖς ἑξῆς ὅτι ἡ ἀρχὴ εἶναι μόνιμος.

469. *Τύποι γενικοὶ δι' ὧν μεταβάλλεται ἡ διεύθυνσις τῶν ἀξόνων* (*) — Ἔστωσαν (Σχ. 178) ΑΧ, ΑΨ, ΑΖ, τρεῖς ἄξονες οἱοιδήποτε· ΑΧ′, ΑΨ′, ΑΖ′, τρεῖς ἕτεροι ἄξονες· $\chi$, $\psi$, $z$, αἱ συντεταγμέναι σημείου τινος, Μ, πρὸς τοὺς πρώτους· $\chi'$, $\psi'$, $z'$, αἱ τοῦ αὐτοῦ σημείου συντεταγμέναι πρὸς τοὺς τελευταίους. Ἔχομεν, ἐν τῇ περιπτώσει τοῦ σχήματος,

$$\chi=\mathrm{AK},\qquad \psi=\mathrm{\Pi K},\qquad z=\mathrm{\Pi M},$$
$$\chi'=\mathrm{AK'},\qquad \psi'=\mathrm{\Pi'K'},\qquad z'=\mathrm{\Pi'M}.$$

Ἀπὸ τῆς κοινῆς ἀρχῆς Α, ἄγομεν τὴν πρὸς ὀρθὰς ἀπεριόριστον ΑΝ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν $\psi z$, εἶτα προβάλλομεν ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης τὰς δύο γωνιώδεις γραμμὰς $\chi+\psi+z$ καὶ $\chi'+\psi'+z'$. Ἐπειδὴ αἱ συντεταγμέναι $\psi$, $z$, εἰσὶ κάθετοι τῇ ΑΝ, αἱ ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης προβολαὶ αὐτῶν εἰσὶ μηδὲν, ὥστε ἡ προβολὴ τῆς πρώτης γωνιώδους γραμμῆς ἄγεται εἰς $\chi$ συν(Ν, Χ). Ἡ προβολὴ τῆς δευτέρας γωνιώδους γραμμὴ εἶναι

$$\chi'\ \text{συν}\,(\mathrm{N},\mathrm{X}')+\psi'\ \text{συν}\,(\mathrm{N},\Psi')+z'\ \text{σὺν}\,(\mathrm{N},\mathrm{Z}').$$

(*) Ἔστωσαν (Σχ. 177) ΟΧ ἄξων ἡ εὐθεῖα ἀπεριόριστος, καὶ ΑΒ ἑτέρα εὐθεῖα μήκους ὡρισμένου, κειμένη ἢ μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ σὺν τῇ πρώτῃ. Ἄγομεν ΑΡ παράλληλον τῇ ΟΧ, ἐπὶ τὸν ἄξονα δὲ τὰς πρὸς ὀρθὰς ΑΑ′, ΒΒ′. Τὸ ἀπόστημα Α′Β′ καλεῖται ἡ **προβολὴ** τῆς ΑΒ ἐπὶ τῆς ΟΧ. Καλοῦμεν, γων. $\mathrm{BAP}=\sigma$, $\mathrm{AB}=\mu$, $\mathrm{A'B'}=\pi$. Παραλλήλως τῇ ΑΑ′ ἄγομεν Β′Δ συμπίπτουσαν τῇ ΑΡ κατὰ τὸ σημεῖον Δ, καὶ ἐπιζευγνύομεν ΒΔ. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΔ δίδει

$$\pi=\mu\ \text{συν}\ \sigma.$$

Λοιπὸν, ἡ προβολὴ εὐθείας ἐπὶ ἄξονά τινα ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς εὐθείας ταύτης ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας ἣν σχηματίζει μετὰ τοῦ ἄξονος.

Ἐπειδὴ αἱ δύο αὗται γραμμαὶ ἔχουσι τὰ αὐτὰ πέρατα, αἱ προβολαὶ αὐτῶν εἰσὶν ἴσαι. Ἄρα

$$\chi\,\text{συν}(N, X) = \chi'\,\text{συν}(N, X') + \psi'\,\text{συν}(N, \Psi') + z'\,\text{συν}(N, Z').$$

Ὁ τύπος οὗτος δίδει τὴν τιμὴν τῆς $\chi$ συνεκθέσει $\chi'$, $\psi'$, $z'$, καὶ τῶν γωνιῶν αἵτινες ὁρίζουσι τὴν θέσιν τῶν νέων ἀξόνων σχετικῶς πρὸς τοὺς παλαιούς. Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῆς $\psi$ καὶ τῆς $z$, προβάλλοντες τὰς γωνιώδεις γραμμὰς $\chi+\psi+z$, $\chi'+\psi'+z'$, ἐπὶ δύο καθέτων $AN'$, $AN''$, ἀγομένων ἀμοιβαίως ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν $\chi z$ καὶ τῶν $\chi\psi$. Ἔχομεν οὕτω τοὺς τρεῖς τύπους.

$$(2)\begin{cases}\chi\,\text{συν}(N, X)=\chi'\,\text{συν}(N, X')+\psi'\,\text{συν}(N, \Psi')+z'\,\text{συν}(N, Z'),\\ \psi\,\text{συν}(N', \Psi)=\chi'\,\text{συν}(N', X')+\psi'\,\text{συν}(N', \Psi')+z'\,\text{συν}(N', Z'),\\ z\,\text{συν}(N'', Z)=\chi'\,\text{συν}(N'', X')+\psi'\,\text{συν}(N'', \Psi')+z'\,\text{συν}(N'', Z').\end{cases}$$

470. Οἱ προηγούμενοι τύποι ὀλίγον χρησιμεύουσι· διότι σπανίως τρέπομεν πλάγιον σύστημα εἰς ἕτερον πλάγιον.

471. Ὅταν οἱ πρῶτοι ἄξονες ὦσιν ὀρθογώνιοι, αἱ τρεῖς κάθετοι $AN$, $AN'$, $AN''$, ταυτίζονται τοῖς ἄξοσι τούτοις. Ἑπομένως *οἱ τύποι δι᾽ ὧν μεταβαίνομεν ἀπὸ συστήματος συντεταγμένων ὀρθογωνίων εἰς ἕτερον σύστημα πλαγιογώνιον*. εἰσὶ

$$(3)\quad\begin{cases}\chi = \chi'\,\text{συν}(X', X) + \psi'\,\text{συν}(\Psi', X) + z'\,\text{συν}(Z', X),\\ \psi = \psi'\,\text{συν}(X', \Psi) + \psi'\,\text{συν}(\Psi', \Psi) + z'\,\text{συν}(Z', \Psi),\\ z = \chi'\,\text{συν}(X', Z) + \psi'\,\text{συν}(\Psi', Z) + z'\,\text{συν}(Z', Z).\end{cases}$$

Αἱ ἐννέα σταθεραί, ἐν τοῖς τύποις (3) περιεχόμεναι, δὲν λαμβάνουσιν ἅπασαι τιμὰς κατ᾽ ἀρέσκειαν· διότι τὰ συνημίτονα τῶν τριῶν γωνιῶν ἃς ἡ αὐτὴ εὐθεῖα σχηματίζει πρὸς τρεῖς ἄξονας ὀρθογωνίους, ὑπόκεινται τῇ ἐν § 452 σχέσει. Ἑπομένως προσληπτέον ἀείποτε τοὺς τύπους

$$\text{συν}^2(X', X) + \text{συν}^2(X', \Psi) + \text{συν}^2(X', Z) = 1,$$
$$\text{συν}^2(\Psi', X) + \text{συν}^2(\Psi', \Psi) + \text{συν}^2(\Psi', Z) = 1,$$
$$\text{συν}^2(Z', X) + \text{συν}^2(Z', \Psi) + \text{συν}^2(Z', Z) = 1,$$



δεικνύοντας ὅτι μένουσιν ἓξ σταθεραὶ λαμβάνουσαι τιμὰς κατὰ βούλησιν.

472. *Ἵνα μεταβῶμεν ἀπὸ συστήματος ἀξόνων ὀρθογωνίων εἰς ἕτερον ὅμοιον*, μεταχειριζόμεθα τοὺς αὐτοὺς ἀνωτέρω τύπους (3). Ἀλλὰ πρέπει νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι οἱ νέοι ἄξονες τέμνουσιν ἀλλήλους πρὸς ὀρθάς. Πρὸς τοῦτο, ἐξισοῦμεν μηδενὶ τὰς ἐκθέσεις τῶν $\text{συν}(X', \Psi')$, $\text{συν}(X', Z')$ $\text{συν}(\Psi', Z')$, συνεκθέσει τῶν $\text{συν}(X', X)$, $\text{συν}(\Psi', X)$, $\text{συν}(\Psi', Z')$, κ.τ.ἑ. [458] Πρὸς τὰς τρεῖς ἀνωτέρω σχέσεις προσληπτέον καὶ τὰς ἑξῆς τρεῖς· ἤτοι, σὺν ταῖς προηγουμέναις, ἓξ σχέσεις τὸ ὅλον·

$$\text{συν}(X', X)\,\text{συν}(\Psi', X) + \text{συν}(X', \Psi)\,\text{συν}(\Psi', \Psi) + \text{συν}(X', Z)\,\text{συν}(\Psi', Z) = 0,$$
$$\text{συν}(X', X)\,\text{συν}(Z', X) + \text{συν}(X', \Psi)\,\text{συν}(Z', \Psi) + \text{συν}(X', Z)\,\text{συν}(Z', Z) = 0,$$
$$\text{συν}(\Psi', X)\,\text{συν}(Z', X) + \text{συν}(\Psi', \Psi)\,\text{συν}(Z', \Psi) + \text{συν}(\Psi', Z)\,\text{συν}(Z', Z) = 0.$$

Λοιπὸν, ἐν τῇ περὶ ἧς λόγος περιπτώσει, τρεῖς μόνον ἄτρεπτοι μένουσι κατὰ βούλησιν.

473. *Παρατήρησις*. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (3) ἐπιλυομένων πρὸς $\chi'$, $\psi'$, $z'$, πορίζόμεθα τοὺς καταλλήλους τύπους τῇ περιπτώσει ἐν ᾗ πρόκειται *μετασχηματίσαι ἄξονας πλαγιογωνίους εἰς ὀρθογωνίους*· εἶτα, οἱ νέοι οὗτοι τύποι, συνδυαζόμενοι τοῖς προηγουμένοις (3), χρησιμεύουσιν ἵνα μεταβῶμεν ἀπὸ ἀξόνων πλαγιογωνίων εἰς ἑτέρους ἄξονας πλαγιογωνίους. Πρὸς τοῦτο ἔσεται χρεία δύο διαδοχικῶν μετασχηματισμῶν· τοῦ μὲν, ὅπως ἀντικατασταθῇ τὸ πλάγιον σύστημα ὑπὸ συστήματος ὀρθογωνίου· τοῦ δὲ, ὅπως ἀντικατασταθῇ τὸ τελευταῖον τοῦτο ὑφ᾽ ἑτέρου πλαγιογωνίου.

### ΤΥΠΟΙ ΑΦ' ΩΝ ΕΥΡΙΣΚΕΤΑΙ Η ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΤΟΜΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ.

474. Ἡ εὐκολωτέρα διασκόπησις ἐπιφανείας τινὸς καμπύλης εἶναι, ὡς θέλομεν ἰδεῖ ἐφεξῆς, τὸ ζητῆσαι τὰς τομὰς τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδων κατὰ διαφόρους κλίσεις ἀγομένων. Ὁ συνδυασμὸς τῆς ἐξισώσεως ἐπιφανείας τῇ τοῦ ἐπιπέδου, δίδει [414] τὴν προβολὴν τῆς κοινῆς τομῆς ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων. Ἀλλ᾽, ἐν γένει, αἱ

προβολαὶ δὲν δίδουσιν ἰδέαν ἀκριβῆ τοῦ εἴδους τῆς περὶ ἧς λόγος καμπύλης. Τὸ φυσικώτερον μέσον τοῦ γνωρίσαι τὸ εἶδος ταύτης εἶναι ν' ἀναφέρωμεν αὐτὴν πρὸς δύο ἄξονας κειμένους ἐπ' αὐτοῦ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου. Τοῦτο δὲ ἐκτελεῖται τῷ ἑξῆς μετασχηματισμῷ, ἐν ᾧ ὑποθέσομεν τοὺς ἄξονας ὀρθογωνίους.

(Σχ. 179). Λαμβάνομεν ὡς ἐπίπεδον τῶν $\chi'$, $\psi'$, τὸ τέμνον τὴν ἐπιφάνειαν· ὡς ἄξονα τῶν $\chi'$ τὸ ἴχνος ΑΓ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἐπὶ τοῦ τῶν $\chi\psi$· ἄξων τῶν $\psi'$ ἔστω ἡ πρὸς ὀρθὰς ΑΔ ἐπὶ τὸ ἴχνος τοῦτο ἀγομένη ἐν αὐτῷ τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ· ἄξων τῶν $z'$ κάθετός τις ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Καλοῦμεν $\varphi$ τὴν γωνίαν ΓΑΧ, καὶ $\theta$ τὴν περιεχομένην γωνίαν ὑπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, ἢ τοῦ τῶν $\chi'\psi'$, καὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν $\chi\psi$.

Ἵν' ἀναφέρωμεν τὴν καμπύλην ἐπιφάνειαν πρὸς τὸ νέον σύστημα ἀξόνων, πρέπει νὰ θέσωμεν ἐν τῇ ἐξισώσει αὐτῆς τοὺς ἐν § 472 τύπους (3), εἶτα δὲ νὰ καταστήσωμεν $z'=0$, ἐν τῇ προκυπτούσῃ ἐξισώσει· διότι ζητοῦμεν τὴν τομὴν τῆς ἐπιφανείας τῷ ἐπιπέδῳ τῶν $\chi'\psi'$. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ἐστὶ καταστῆσαι ἀμέσως $z'=0$, ἐν τοῖς εἰρημένοις τύποις, οἵτινες ἄγονται, τῇ ὑποθέσει ταύτῃ, εἰς τοὺς ἑξῆς

$$(\tau)\qquad \begin{cases} \chi = \chi'\,\text{συν}(X',X) + \psi'\,\text{συν}(\Psi',X), \\ \psi = \chi'\,\text{συν}(X',\Psi) + \psi'\,\text{συν}(\Psi',\Psi), \\ z = \chi'\,\text{συν}(X',Z) + \psi'\,\text{συν}(\Psi',Z), \end{cases}$$

εἶτα δὲ ἐκτελέσαι τὴν ῥηθεῖσαν ἀντεισαγωγήν. Ἀπαιτεῖται ὅμως νὰ ἐκθέσωμεν τὰς ἀτρέπτους τῶν τύπων τούτων συνεκθέσει τῶν μόνων γωνιῶν $\varphi$, $\theta$. Πρὸς τοῦτο, θεωροῦμεν τὴν ἀρχὴν ὡς κέντρον σφαίρας, ἧς αἱ τομαὶ τοῖς ἐπιπέδοις Ψ'ΑΨ, ΧΑΨ, Ψ'ΑΧ', Ψ'ΑΧ, συγκροτοῦσι τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ΔΒΓ, ΔΓΕ, ἐν οἷς

1ον. $\Delta\Gamma = 90^\circ$, $B\Gamma = (X',X) = \varphi$, $\Delta B = (\Psi',X)$, $\Delta\Gamma B = \theta$.

2ον. $\begin{cases} \Delta\Gamma = 90^\circ, \quad \Gamma E = (X',\Psi) = 90^\circ - \varphi, \\ \Delta E = (\Psi',\Psi), \quad \Delta\Gamma E = 180^\circ - \theta. \end{cases}$



Τὰ αὐτὰ τρίγωνα, κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῆς σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας, δίδουσι

$$\text{συν}\,\Delta B = \text{συν}\,\Delta\Gamma\,\text{συν}\,\Gamma B + \text{ἡμ}\,\Delta\Gamma\,\text{ἡμ}\,\Gamma B\,\text{συν}\,\Delta\Gamma B,$$

ἤ, $$\text{συν}(\Psi',X) = \text{ἡμ}\,\varphi\,\text{συν}\,\theta\,\cdot$$

καὶ $$\text{συν}\,\Delta E = \text{συν}\,\Delta\Gamma\,\text{συν}\,\Gamma E + \text{ἡμ}\,\Delta\Gamma\,\text{ἡμ}\,\Gamma E\,\text{συν}\,\Delta\Gamma E,$$

ἢ $$\text{συν}(\Psi',\Psi) = -\,\text{συν}\,\varphi\,\text{συν}\,\theta.$$

Τέλος, ἐπειδὴ ὁ ἄξων τῶν z εἶναι πρὸς ὀρθὰς τῷ τῶν $\chi'$, καὶ σχηματίζει πρὸς τὸν ἄξονα τῶν $\psi'$ γωνίαν ἴσην τῷ συμπληρώματι τῆς $\theta$, ἔχομεν προσέτι

$$\text{συν}(X',Z) = 0, \qquad \text{συν}(\Psi',Z) = \text{ἡμ}\,\theta.$$

Λοιπὸν, ἀντεισάγοντες τὰς διαφόρους ταύτας τιμὰς εἰς τοὺς τύπους (τ) καὶ προσθέτοντες, εἰ δέον, τὰς συντεταγμένας τῆς νέας ἀρχῆς $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, λαμβάνομεν τοὺς ἑξῆς τύπους, χρησιμεύοντας εἰς ὁρισμὸν τοῦ εἴδους τῆς τομῆς ἐπιφανείας καμπύλης ἐπιπέδῳ οἱῳδήποτε.

$$(4)\qquad \begin{cases} \chi = \alpha + \chi'\,\text{συν}\,\varphi + \psi'\,\text{ἡμ}\,\varphi\,\text{συν}\,\theta, \\ \psi = \beta + \chi'\,\text{ἡμ}\,\varphi - \psi'\,\text{συν}\,\varphi\,\text{συν}\,\theta, \\ z = \gamma + \psi'\,\text{ἡμ}\,\theta. \end{cases}$$

475. *Παρατήρησις*. Ὅταν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου δοθῇ ἡ ἐξίσωσις,

$$A\chi + B\psi + \Gamma z + \Delta = 0,$$

εὐκόλως λογίζονται αἱ γωνίαι $\varphi$, $\theta$. Τῷ ὄντι, καθιστῶντες $z=0$, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἴχνους αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ΧΨ,

$$A\chi + B\psi + \Delta = 0, \qquad \text{ἐξ ἧς} \qquad \text{ἐφ}\,\varphi = -\frac{A}{B}.$$

Διὰ δὲ τῶν ἐν § 459 τύπων λαμβάνομεν

$$\text{συν}\,\theta = \frac{\Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}.$$

476. Ὅταν τὸ τέμνον ἐπίπεδον κῆται πρὸς ὀρθὰς τῷ ΧΨ, ἡ γωνία θ εἶναι ὀρθή, οἱ δὲ τύποι (4) τρέπονται εἰς τοὺς ἑξῆς·

$$\chi = \alpha + \chi' \,\text{συν}\, \varphi, \quad \psi = \beta + \chi' \,\text{ἡμ}\, \varphi, \quad z = \gamma + \psi'.$$

ΠΕΡΙ ΠΟΛΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ.

477. Ὑπάρχει προσέτι ἐν χρήσει ἕτερον εἶδος μετασχηματισμοῦ· ἤτοι, τὸ *τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων εἰς πολικάς.*

(Σχ. 180). Ἔστω σημεῖον Ο, *πόλος* καλούμενον, οὗτινος ἡ ἐν τῷ διαστήματι θέσις ὁρίζεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων αὐτοῦ α, β, γ, πρὸς τρεῖς ἄξονας ὀρθογωνίους. Ἔστω ΟΜ=ρ, *ἐπιβατικὴ τις ἀκτίς*, ἢ γραμμὴ εὐθεῖα ἐπιζευγνύουσα τὸν πόλον τῷ τυχόντι σημείῳ, Μ, καμπύλης ἐπιφανείας ἐμφαινομένης ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\Sigma(\chi,\psi,z)=0$, πρὸς τοὺς αὐτοὺς ἄξονας. Δηλοῦμεν, ἐν γένει, χ, ψ, z, τὰς τοῦ σημείου Μ συντεταγμένας, καὶ (ρ, Χ), (ρ, Ψ), (ρ, Ζ), τὰς περιεχομένας γωνίας ὑπὸ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος καὶ ἑκάστου τῶν τριῶν ἀξόνων.

Ἐκ τοῦ σχήματος δῆλον ὅτι,

$$\text{ΑΚ}, \quad \text{ἢ} \quad \chi = \text{ΑΓ} + \text{ΓΚ} = \alpha + \text{ΓΚ}.$$

Ἀλλά, κατὰ § 469, $\quad \text{ΓΚ} = \text{ΟΜ}\,\text{συν}(\rho,\text{Χ}) = \rho\,\text{συν}(\rho,\text{Χ})\cdot$

ἄρα $\quad \chi = \alpha + \rho\,\text{συν}(\rho,\text{Χ}).$

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν λοιπῶν συντεταγμένων·

$$\psi = \beta + \rho\,\text{συν}(\rho,\Psi), \qquad z = \gamma + \rho\,\text{συν}(\rho,\text{Ζ}).$$

Τῇ ἀντεισαγωγῇ τῶν τιμῶν τούτων τῶν χ, ψ, z, ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς ἐπιφανείας, λαμβάνομεν σχέσιν πρὸς ἀλλήλας τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος καὶ τῶν γωνιῶν αὐτῆς μετὰ τῶν τριῶν ἀξόνων. Ἡ σχέσις αὕτη καλεῖται *ἐξίσωσις πολικὴ*



τῆς ἐπιφανείας. Αἱ γωνίαι (ρ, Χ), (ρ, Ψ), (ρ, Ζ), συνδέονται ἀλλήλαις τῇ σχέσει [452],

$$\text{συν}^2(\rho,\text{Χ}) + \text{συν}^2(\rho,\Psi) + \text{συν}^2(\rho,\text{Ζ}) = 1.$$

478. Ὑπάρχουσι καὶ ἕτεροι τύποι χρήσιμοι, ἀντὶ τῶν ἀνωτέρω, δύο μόνον γωνίας περιέχοντες ἀνεξαρτήτους ἀπ' ἀλλήλων· ἤτοι, τὴν γωνίαν θ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος ΟΜ πρὸς τὴν προβολὴν αὐτῆς ΒΠ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν χψ, καὶ τὴν γωνίαν φ τῆς προβολῆς ταύτης πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ.

Τῷ ὄντι, ἄγοντες ΟΘ παράλληλον τῇ ΒΠ, καὶ ΒΡ τῇ ΑΧ, ἔχομεν·

$$\text{ΑΚ} = \alpha + \text{ΒΡ}, \quad \text{ΚΠ} = \beta + \text{ΠΡ}, \quad \text{ΜΠ} = \gamma + \text{ΜΘ}.$$

Ἀλλά,

$$\text{ΒΡ} = \text{ΒΠ}\,\text{συν}\,\varphi = \text{ΟΘ}\,\text{συν}\,\varphi = \rho\,\text{συν}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi,$$
$$\text{ΡΠ} = \text{ΒΠ}\,\text{ἡμ}\,\varphi = \text{ΟΘ}\,\text{ἡμ}\,\varphi = \rho\,\text{συν}\,\theta\,\text{ἡμ}\,\varphi,$$
$$\text{ΜΘ} = \text{ΟΜ}\,\text{ἡμ}\,\text{ΜΟΘ} = \rho\,\text{ἡμ}\,\theta.$$

Λοιπόν,

$$\text{ΑΚ}, \quad \text{ἢ} \quad \chi = \alpha + \rho\,\text{συν}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi,$$
$$\text{ΚΠ}, \quad \text{ἢ} \quad \psi = \beta + \rho\,\text{συν}\,\theta\,\text{ἡμ}\,\varphi,$$
$$\text{ΜΠ}, \quad \text{ἢ} \quad z = \gamma + \rho\,\text{ἡμ}\,\theta.$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

### ΠΕΡΙ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΕΙΔΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ.

ΣΗΜ. Πρὸ τῆς γενικῆς θεωρίας τῶν δευτέρας τάξεως ἐπιφανειῶν, ἤτοι τῶν ὑπὸ ἐξισώσεων δευτεροβαθμίων ἐμφαινομένων, ἐνομίσαμεν ἀναγκαῖον ἐκθέσαι λεπτομερείας τινας περί τινων ἐπιφανειῶν ἁπλουστάτων, παραγομένων τῇ κινήσει γραμμῶν, εἰς ἃς ἄγει πολλάκις ἡ ἐπίλυσις προβλημάτων ἀορίστων, ἐν τρισὶ διαστάσεσι· διότι, ἐν τῇ διασκοπήσει τῆς γενικῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, δοθήσεται ἀφορμὴ πρὸς ἀνεύρεσιν τῶν χαρακτήρων ἀνηκόντων ταῖς τοιούτου εἴδους ἐπιφανείαις.

### ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ.

479. Ἔστωσαν $\pi$, $\kappa$, $\rho$, αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου καὶ $\alpha$ ἡ ἀκτὶς σφαῖράς τινος. Ἡ γενικωτέρα ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας ταύτης εἶναι, κατὰ § 440,

$$\left.\begin{array}{l}(\chi-\pi)^2+(\psi-\kappa)^2+(z-\rho)^2+2(\chi-\pi)(\psi-\kappa)\,\text{συν}(X,\Psi)\\ +2(\chi-\pi)(z-\rho)\,\text{συν}(X,Z)+2(\psi-\kappa)(z-\rho)\,\text{συν}(\Psi,Z)\end{array}\right\}=\alpha^2.$$

Ἐν ἄξοσιν ὀρθογωνίοις ἡ ἐξίσωσις αὕτη καθίσταται,

$$(1)\qquad (\chi-\pi)^2+(\psi-\kappa)^2+(z-\rho)^2=\alpha^2.$$

480. ΜΕΡΙΚΑΙ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ. — Ὅταν τὸ κέντρον κῆται ἐφ' ἑνὸς τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων, π. χ. τοῦ τῶν $\chi\psi$, τότε $\rho=0$· ἑπομένως

$$(\chi-\pi)^2+(\psi-\kappa)^2+z^2=\alpha^2.$$

Ὅταν τὸ κέντρον κῆται ἐφ' ἑνὸς τῶν ἀξόνων, π. χ. τοῦ τῶν $\chi$, τότε $\kappa=0$, $\rho=0$· ἡ δ' ἐξίσωσις ἔσεται

$$(\chi-\pi)^2+\psi^2+z^2=\alpha^2.$$



Τέλος, ὅταν τὸ κέντρον ᾖναι ἐν τῇ ἀρχῇ, ἡ ἐξίσωσις (1) καθίσταται

$$(2)\qquad \chi^2+\psi^2+z^2=\alpha^2.$$

481. Ἡ ἐξίσωσις (1) ἀναπτυσσομένη δίδει ἐξαγόμενον ὑπὸ τὴν ἑξῆς μορφήν,

$$\chi^2+\psi^2+z^2+A\chi+B\psi+\Gamma z+\Delta=0.$$

*Ἀντιστρόφως*· πᾶσα ἐξίσωσις τοιαύτην ἔχουσα μορφήν, ἐν ἄξοσιν ὀρθογωνίοις, ἐμφαίνει σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν, ἧς τοῦ μὲν κέντρου αἱ συντεταγμέναι εἰσὶ

$$\pi=-\frac{A}{2},\qquad \kappa=-\frac{B}{2},\qquad \rho=-\frac{\Gamma}{2},$$

ἡ δὲ ἀκτὶς

$$\alpha=\sqrt{\frac{A^2+B^2+\Gamma^2}{4}-\Delta}.$$

Ἡ πρότασις αὕτη δεικνύεται ὡς ἡ ἐν § 170.

482. Πρὸς εὕρεσιν τῆς τομῆς σφαίρας ἐπιπέδῳ, συνδυάζομεν τὴν ἐξίσωσιν (2) τοῖς ἐν § 474 τύποις (4). Ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις ἐμφαίνει τὴν ζητουμένην τομήν. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τοὺς λογισμοὺς εὑρήσομεν· 1ον· ὅτι ὁ συντελεστὴς τοῦ $\chi'\psi'$ εἶναι μηδέν· 2ον· ὅτι οἱ συντελεσταὶ τῶν $\chi'^2$ καὶ $\psi'^2$ ἰσοῦνται μονάδι. Ἄρα, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐμφαίνει κύκλον [170].

483. *Παρατήρησις.* Τῇ ἀπαλοιφῇ μιᾶς τῶν μεταβλητῶν μεταξὺ τῆς ἐξισώσεως (2) τῆς σφαίρας καὶ τῆς γενικῆς ἐξισώσεως τοῦ ἐπιπέδου, προκύπτει ἐξίσωσις ἔλλειψιν ἐμφαίνουσα. Ἄρα, *ἡ προβολὴ κύκλου ἐπὶ ἐπιπέδου εἶναι, ἐν γένει, ἔλλειψις.*

484. *Ζητήσωμεν ἤδη τὴν ἐξίσωσιν ἐπιπέδου ἐφαπτομένου τῆς σφαίρας, κατὰ τὸ σημεῖον* $(\chi', \psi', z')$ *τῆς ἐπιφανείας ταύτης ἐν ἄξοσιν ὀρθογωνίοις.*

Ἔστωσαν, ἡ μὲν ἐξίσωσις τῆς σφαίρας,

$$(1)\qquad (\chi-\pi)^2+(\psi-\kappa)^2+(z-\rho)^2=\alpha^2,$$

ἡ δὲ ἐξίσωσις ἐπιπέδου, τοῦ σημείου ($\chi'$, $\psi'$, $z'$) διερχομένου [431],

$$(2) \qquad \mathrm{A}(\chi - \chi') + \mathrm{B}(\psi - \psi') + \Gamma(z - z') = 0.$$

Γνωστὸν ὅτι, ἡ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς ἐπιζευγνύουσα ἀκτὶς δηλοῦται ταῖς ἐξισώσεσι

$$\chi - \chi' = \frac{\chi' - \pi}{z' - \rho}(z - z'), \qquad \psi - \psi' = \frac{\psi' - \kappa}{z' - \rho}(z - z').$$

Ἀλλὰ τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα· ἄρα [441], ἔχομεν τὰς σχέσεις

$$\mathrm{A} = \frac{\chi' - \pi}{z' - \rho}\,\Gamma, \qquad \mathrm{B} = \frac{\psi' - \kappa}{z' - \rho}\,\Gamma.$$

Φέροντες τὰς τιμὰς ταύτας ἐν τῇ ἐξισώσει (2), λαμβάνομεν τὴν ἑξῆς τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου·

$$(\alpha) \qquad (\chi' - \pi)(\chi - \chi') + (\psi' - \kappa)(\psi - \psi') + (z' - \rho)(z - z') = 0.$$

485. Ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις γράφεται ὑπὸ ἑτέραν μορφήν, συνεπείᾳ τῆς σχέσεως

$$(\chi' - \pi)^2 + (\psi' - \kappa)^2 + (z' - \rho)^2 = \alpha^2,$$

δηλοῦσαν ὅτι τὸ ($\chi'$, $\psi'$, $z'$) εἶναι σημεῖον τῆς σφαίρας. Τῷ ὄντι, ἡ σχέσις αὕτη γράφεται ὡς ἑξῆς,

$$(\chi' - \pi)(\chi' - \pi) + (\psi' - \kappa)(\psi' - \kappa) + (z' - \rho)(z' - \rho) = \alpha^2,$$

προστιθεμένη δὲ τῇ ἐξισώσει ($\alpha$), δίδει,

$$(\beta) \qquad (\chi' - \pi)(\chi - \pi) + (\psi' - \kappa)(\psi - \kappa) + (z' - \rho)(z - \rho) = \alpha^2.$$

Ὅταν ἡ ἀρχὴ ἦναι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἡ ἐξίσωσις ($\beta$) καθίσταται

$$\chi'\chi + \psi'\psi + z'z = \alpha^2.$$



## ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ.

486. **ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗ** *καλεῖται ἡ παραγομένη ὑπὸ εὐθείας κινουμένης μὲν παραλλήλως ἑτέρᾳ εὐθείᾳ ὡρισμένῃ, διατρεχούσης δὲ γραμμὴν μόνιμον.* Ἡ μόνιμος γραμμὴ καλεῖται *ὁδηγήτρια*· ἡ κινητὴ εὐθεῖα *γεννήτρια.*

Ἐκθέσωμεν ἀναλυτικῶς τὸν γενικὸν χαρακτῆρα τοῦτον.

Ἔστωσαν

$$(1) \qquad \Sigma(\chi, \psi, z) = 0, \qquad \Sigma_1(\chi, \psi, z) = 0,$$

αἱ ἐξισώσεις τῆς ὁδηγητρίας, καὶ

$$(2) \qquad \chi = \alpha z + \mathrm{a}, \qquad \psi = \beta z + \beta,$$

αἱ τῆς γεννητρίας θεωρουμένης ἐν τῇ τυχούσῃ θέσει. Ἐπειδὴ ἡ γεννήτρια περιαγομένη τηρεῖται ἀείποτε παράλληλος ἑαυτῇ, δῆλον ὅτι [426] αἱ ποσότητες $\alpha$, $\beta$, μένουσιν ἄτρεπτοι δι' ἁπάσας τὰς θέσεις τῆς γραμμῆς ταύτης· ἀλλ' αἱ $\mathrm{a}$, $\beta$, δηλοῦσαι τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου καθ' ὃ ἡ γεννήτρια τρυπᾷ τὸ ἐπίπεδον τῶν $\chi\psi$, μένουσι μὲν ἄτρεπτοι δι' ἅπαντα τὰ σημεῖα μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς θέσεως τῆς γεννητρίας, μεταϐάλλονται δὲ ἀπὸ ἑτέρας εἰς ἑτέραν θέσιν κατεχομένην ὑπὸ τῆς εὐθείας ταύτης. Ἄρα, ἀναγκαίως ὑπάρχει σχέσις τις μεταξὺ τῶν ποσοτήτων $\mathrm{a}$, $\beta$, οὐσῶν ἀτρέπτων συγχρόνως καὶ συγχρόνως μεταϐλητῶν. Τὴν σχέσιν ταύτην εὑρίσκομεν συλλογιζόμενοι ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ ἡ γεννήτρια συμπίπτει τῇ ὁδηγητρίᾳ καθ' ἁπάσας τὰς θέσεις αὐτῆς, ἀπαιτεῖται αἱ ἐξισώσεις (1), (2), νὰ ἔχωσι λύσεις κοινάς. Λοιπόν, τῇ ἀπαλοιφῇ τῶν $\chi$, $\psi$, $z$, μεταξὺ τῶν (1), (2), καταντῶμεν εἰς σχέσιν

$$(3) \qquad \sigma(\mathrm{a}, \beta) = 0,$$

περιέχουσαν $\mathrm{a}$, $\beta$, καὶ ποσότητας γνωστάς· αὕτη δὲ εἶναι ἡ ζητουμένη. Ἐπειδὴ ἐτυμοποιεῖται ὑπὸ πασῶν τῶν τιμῶν ἃς λαμβάνουσιν αἱ ἀόριστοι $\mathrm{a}$, $\beta$, κατὰ τὰς διαφόρους θέσεις τῆς γεννητρίας, συνάγομεν ὅτι, ἐὰν δώσωμεν τιμὴν κατ' ἀρέσκειαν τῇ $\mathrm{a}$, καὶ λογίσωμεν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τῇ ψ, αἱ τιμαὶ αὗται, φερόμεναι ἐν ταῖς ἐξισώσεσι (2), καταστήσωσι γνωστὴν μίαν μερικὴν θέσιν τῆς γεννητρίας. Ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις

$$(4)\qquad \sigma(\chi - \alpha z,\ \psi - 6 z) = 0,$$

ἣν λαμβάνομεν τῇ ἀπαλοιφῇ τῶν α, β, ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2), (3), εἶναι ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν.

487. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον εἰς τὸν κύλινδρον τὸν ἔχοντα ὁδηγήτριαν τὸν κύκλον

$$(1)\qquad z = 0,\qquad (\chi - \pi)^2 + (\psi - \varkappa)^2 = A^2.$$

Ἔστωσαν καὶ αὖθις αἱ τῆς γεννητρίας ἐξισώσεις

$$(2)\qquad \chi = \alpha z + a,\qquad \psi = 6 z + \beta.$$

Τῇ ἀπαλοιφῇ τῶν χ, ψ, z, ἐκ τῶν τεσσάρων προηγουμένων ἐξισώσεων προκύπτει ἡ σχέσις

$$(3)\qquad (a - \pi)^2 + (\beta - \varkappa)^2 = A^2.$$

Καθιστῶντες ἐν αὐτῇ τὰς τιμὰς τῶν a, β, ἐκ τῶν (2), λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ πλαγίου κυλίνδρου κυκλοτερῆ βάσιν ἔχοντος,

$$(\chi - \alpha z - \pi)^2 + (\psi - 6 z - \varkappa)^2 = A^2.$$

Ἐὰν ἀρχὴ ἦτο τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἤθελεν εἶσθαι

$$(\chi - \alpha z)^2 + (\psi - 6 z)^2 = A^2.$$

488. Ὅταν, ἀντὶ κύκλου, δίδηται ὡς ὁδηγήτρια ἡ ἔλλειψις

$$z = 0,\qquad A^2\psi^2 + B^2\chi^2 = A^2B^2,$$

ἡ ἐξίσωσις τοῦ ζητουμένου κυλίνδρου ἔσεται

$$A^2(\psi - 6 z)^2 + B^2(\chi - \alpha z)^2 = A^2B^2.$$

489. Πρὸς ἄσκησιν τῶν πρωτοπείρων προτείνομεν, *εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐπιπέδου, θεωρουμένου ὡς τόπου τῶν*



*διαφόρων θέσεων ἃς κατέχει εὐθεῖα κινουμένη ἀείποτε παραλλήλως διευθύνσει ὡρισμένῃ, καὶ διατρέχουσα ἑτέραν εὐθεῖαν μόνιμον.*

Ἔστωσαν

$$\chi = \alpha z + a,\qquad \psi = 6 z + \beta,$$

αἱ ἐξισώσεις τῆς ὁδηγητρίας, καὶ

$$\chi = \alpha' z,\qquad \psi = 6' z,$$

αἱ τῆς εὐθείας δηλούσης τὴν τῆς γεννητρίας διεύθυνσιν. Ἕπεται ὅτι τῆς τελευταίας ταύτης αἱ ἐξισώσεις ἔσονται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\chi = \alpha' z + a',\qquad \psi = 6' z + \beta'.$$

Καταντῶμεν εἰς τὸ ἐξαγόμενον

$$(6 - 6')\chi + (\alpha' - \alpha)\psi + (\alpha 6' - 6\alpha')z + a(6' - 6) + \beta(\alpha - \alpha') = 0.$$

Βλέπομεν καὶ αὖθις ὅτι ἡ τοῦ ἐπιπέδου ἐξίσωσις εἶναι πρωτοβάθμιος.

490. Οἱῳδήποτε μεθόδῳ ὁρισθῇ κύλινδρός τις, δυνάμεθα ἀείποτε θεωρῆσαι αὐτὸν ὡς παραγόμενον ὑπὸ εὐθείας κινουμένης παραλλήλως ἑαυτῇ καὶ διατρεχούσης καμπύλην ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου τούτου γεγραμμένην. Ὅθεν ἕπεται, ὅτι ἅπασαι αἱ κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι συμπεριλαμβάνονται ἐν τῇ ἐξισώσει (4), § 486. Ἐννοεῖται ὅτι, εἰς διαφόρους κυλίνδρους, αἱ τιμαὶ τῶν α, 6, δύνανται νὰ ὦσι διάφοροι, ὡς καὶ ἡ μορφὴ τῆς τῷ στοιχείῳ σ δηλουμένης συνεκθέσεως.

Ἄλλως εὐκόλως πληροφορούμεθα *ἀμέσως*, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (4), ἢ ἀκόμη ἡ ἑξῆς γενικωτέρα,

$$(5)\qquad \Sigma(\alpha\chi + 6\psi + \gamma z + \delta,\ \alpha'\chi + 6'\psi + \gamma' z + \delta') = 0,$$

οὐδὲν ἕτερον ἐμφαίνει ἢ ἐπιφανείας κυλινδρικάς. Τῷ ὄντι, ἡ τελευταία αὕτη ἐτυμοποιεῖται ὅταν ἔχωμεν συγχρόνως·

$$(6)\qquad \alpha\chi + 6\psi + \gamma z + \delta = a,\quad \alpha'\chi + 6'\psi + \gamma' z + \delta' = \beta$$

α, β, οὐσῶν ποσοτήτων οἱωνδήποτε ὑποκειμένων τῇ μόνῃ σχέσει $\sigma(\alpha, \beta) = 0$. Οἱαιδήποτε τιμαὶ δοθῶσι ταῖς α, β, φανερὸν ὅτι αἱ ἐξισώσεις (6) ὁρίζουσιν εὐθείας παραλλήλους. Λοιπὸν, ἡ ἐπιφάνεια παράγεται εὐθείᾳ κινουμένῃ παραλλήλως ἑαυτῇ· ἑπομένως εἶναι κυλινδρική.

## ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ.

491. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΚΩΝΙΚΗ *καλεῖται ἡ παραγομένη ὑπὸ εὐθείας ἥτις κινεῖται διερχομένη μονίμως ἀπὸ σημείου δοθέντος καὶ διατρέχουσα γραμμὴν ἐπίσης δοθεῖσαν.* Τὸ μόνιμον σημεῖον καλεῖται *κορυφὴ ἢ κέντρον*· ἡ δοθεῖσα γραμμὴ *ὁδηγήτρια* καὶ ἡ κινητὴ εὐθεῖα *γεννήτρια.*

Ἔστωσαν $\chi'$, $\psi'$, $z'$, αἱ συντεταγμέναι τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, καὶ

$$(1) \qquad \Sigma(\chi, \psi, z) = 0, \qquad \Sigma_1(\chi, \psi, z) = 0,$$

αἱ τῆς ὁδηγητρίας ἐξισώσεις. Αἱ ἐξισώσεις τῆς γεννητρίας ἔσονται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(2) \qquad \chi - \chi' = \alpha(z - z'), \qquad \psi - \psi' = \beta(z - z').$$

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα αὕτη συμπίπτει ἀναγκαίως τῇ καμπύλῃ, πρέπει αἱ ἐξισώσεις (1), (2), νὰ ἔχωσι λύσιν κοινήν· ἑπομένως ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις

$$(3) \qquad \sigma(\alpha, \beta) = 0,$$

ἐπαληθεύεται ὑπὸ πασῶν τῶν τιμῶν ἃς λαμβάνουσιν αἱ ἀόριστοι α, β, κατὰ τὰς διαφόρους θέσεις τῆς γεννητρίας. Ὅθεν ἕπεται ὅτι, ἐὰν δώσωμεν τιμὴν κατὰ βούλησιν τῇ α, λογίσωμεν δὲ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν τῇ β, αἱ τιμαὶ αὗται φερόμεναι ἐν ταῖς ἐξισώσεσι (2), καταστήσουσι γνωστὴν μίαν θέσιν μερικὴν τῆς γεννητρίας. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις

$$(4) \qquad \sigma\left(\frac{\chi - \chi'}{z - z'}, \quad \frac{\psi - \psi'}{z - z'}\right) = 0,$$



ἣν λαμβάνομεν τῇ ἀπαλοιφῇ τῶν α, β, ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2), (3), εἶναι ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν.

492. Ὑποτιθεμένης τῆς κορυφῆς τῆς ἐπιφανείας ἐν τῇ ἀρχῇ τῶν συντεταγμένων, αἱ $\chi'$, $\psi'$, $z'$, εἰσὶ μηδὲν, ἡ δ' ἐξίσωσις (4) ἄγεται εἰς

$$\sigma\left(\frac{\chi}{z}, \quad \frac{\psi}{z}\right) = 0 \cdot$$

αὕτη δὲ εἶναι ἡ γενικὴ μορφὴ τῶν ὁμογενῶν ἐξισώσεων. Λοιπὸν, *ἡ ἐξίσωσις πάσης ἐπιφανείας κωνικῆς εἶναι ὁμογενής, ὅταν ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων ἦναι ἐν τῇ κορυφῇ τῆς ἐπιφανείας ταύτης.*

Ἡ ἀντίστροφος πρότασις εἶναι ἀληθής· διότι, ἐὰν ἐπιφάνεια, ἧς ἡ ἐξίσωσις εἶναι συνέχθεσίς τις ὁμογενὴς τῶν τριῶν μεταβλητῶν χ, ψ, z, τμηθῇ ἐπιπέδῳ, τῷ

$$z = \alpha\chi + \beta\psi,$$

ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ἀγομένῳ, ἡ ἐξίσωσις τῆς προβολῆς τῆς τομῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν χψ, π. χ., ἔσεται ὁμογενὴς εἰς χ, ψ· ἡ ἐξίσωσις δὲ αὕτη παραστήσει τότε σύστημα γραμμῶν εὐθειῶν (*). Ἄρα, ἐπειδὴ πᾶν ἐπίπεδον διὰ τῆς ἀρχῆς ἀγό-

(*) Ἡ ὁμογενὴς ἐξίσωσις

$$\psi^{\mu} + \alpha_1 \chi \psi^{\mu-1} + \alpha_2 \chi^2 \psi^{\mu-2} + \cdots\cdots + \alpha_{\mu} \chi^{\mu} = 0,$$

ἐμφαίνει τὸ σύστημα τοσούτων γραμμῶν τῆς πρώτης τάξεως, τῆς ἀρχῆς διερχομένων, ὅσας ἡ ἀριθμητικὴ ἐξίσωσις

$$z^{\mu} + \alpha_1 z^{\mu-1} + \alpha_2 z^{\mu-2} + \cdots\cdots + \alpha_{\mu} = 0,$$

ἣν μορφοῦμεν καθιστῶντες $\psi = z\chi$, περιέχει ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσας. Διότι, δηλοῦντες $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, ......, $\alpha_{\mu}$, τὰς ῥίζας τῆς εἰς z ἐξισώσεως, θέτομεν τὴν προτεθεῖσαν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(\psi - \alpha_1 \chi)(\psi - \alpha_2 \chi)(\psi - \alpha_3 \chi) \cdots\cdots\cdots (\psi - \alpha_{\mu} \chi) = 0.$$

μενον τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν καθ' ἓν σύστημα γραμμῶν εὐθειῶν, ἔπεται ὅτι *ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶναι κωνική*.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι, ἵνα γνωρίσωμεν ἐὰν ἐπιφάνειά τις, ἧς ἡ ἐξίσωσις εἶναι γνωστή, ἀνήκῃ τῷ γένει τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν, πρέπει νὰ μεταθέσωμεν τὴν ἀρχὴν καὶ νὰ ἐξισώσωμεν μηδενὶ τοὺς συντελεστὰς ὅλων τῶν ὅρων ὧν ὁ βαθμὸς εἶναι κατώτερος τοῦ βαθμοῦ τῆς μετασχηματισθείσης ἐξισώσεως, ὅπερ καθιστᾷ ταύτην ὁμογενῆ. Ἐὰν αἱ τῆς συνθήκης ἐξισώσεις χορηγῶσι τιμὰς πραγματικὰς καὶ πεπερασμένας διὰ α, β, γ, [467], δῆλον ὅτι ἡ ἐπιφάνεια εἶναι κωνική. Τοὐναντίον δέ, δὲν εἶναι τοιαύτη.

**493. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.** Ἐφαρμόσωμεν τὰ προεκτεθέντα εἰς εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως, πρὸς συντεταγμένας ὀρθογωνίους, τοῦ πλαγίου κώνου βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον

$$(1)\qquad z = 0, \qquad \chi^2 + \psi^2 = \Lambda^2 .$$

Αἱ τῆς γεννητρίας ἐξισώσεις ἔσονται

$$(2)\qquad \chi - \chi' = \alpha(z - z'), \qquad \psi - \psi' = \beta(z - z'),$$

δηλουμένων $\chi'$, $\psi'$, $z'$, τῶν συντεταγμένων τῆς κορυφῆς. Ἡ ὑπόθεσις $z = 0$, εἰσαγομένη ἐν ταῖς ἐξισώσεσι (2) δίδει

$$\chi = \chi' - \alpha z', \qquad \psi = \psi' - \beta z'.$$

Φέροντες τὰς τιμὰς ταύτας ἐν τῇ δευτέρᾳ τῶν ἐξισώσεων (1), λαμβάνομεν

$$(3)\qquad (\chi' - \alpha z')^2 + (\psi' - \beta z')^2 = \Lambda^2,$$

σχέσιν ὑπάρχουσαν μεταξὺ τῶν παραμέτρων α, β. Τέλος, ἀπαλείφοντες α καὶ β μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (2), (3), εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$[\chi'(z - z') - z'(\chi - \chi')]^2 + [\psi'(z - z') - z'(\psi - \psi')]^2 = \Lambda^2 (z - z')^2,$$

ἢ

$$(\chi' z - z'\chi)^2 + (\psi' z - z'\psi)^2 = \Lambda^2 (z - z')^2,$$

ἥτις εἶναι ἡ τοῦ ζητουμένου κώνου.

Ἐν τῇ περιπτώσει τοῦ *ὀρθοῦ κώνου*, ἤτοι ὅταν ἡ κορυφὴ



ἦναι ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν z, ἔχομεν συγχρόνως $\chi' = 0$, $\psi' = 0$· ἡ δὲ προηγουμένη ἐξίσωσις καθίσταται

$$z'^2 \chi^2 + z'^2 \psi^2 = \Lambda^2 (z - z')^2.$$

**494.** Ἐὰν ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι τοῦ πλαγίου κώνου κυκλοτερῆ βάσιν ἔχοντος, ληφθῇ ἡ κορυφὴ ὡς ἀρχή, ἐπίπεδον δὲ παράλληλον τῷ τῆς ὁδηγητρίας ὡς ἐπίπεδον τῶν χψ, αἱ μὲν ἐξισώσεις τῆς καμπύλης ταύτης ἔσονται

$$z = \delta, \qquad (\chi - \pi)^2 + (\psi - \kappa)^2 = \Lambda^2.$$

αἱ δὲ τῆς γεννητρίας

$$\chi = \alpha z, \qquad \psi = \beta z.$$

Ἔξομεν δὲ ὡς ἐξίσωσιν συνθήκης τὴν

$$(\alpha\delta - \pi)^2 + (\beta\delta - \kappa)^2 = \Lambda^2·$$

καὶ ἐπομένως δι' ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας

$$(\delta\chi - \pi z)^2 + (\delta\psi - \kappa z)^2 - \Lambda^2 z^2 = 0.$$

**495.** Πᾶσα ἐπιφάνεια περιεχομένη ἐν τῇ ἐξισώσει (4) [491] εἶναι κωνική. Τῷ ὄντι, ἐὰν θέσωμεν

$$(5)\qquad \chi - \chi' = \alpha(z - z'), \qquad \psi - \psi' = \beta(z - z'),$$

ἕξομεν $\sigma(\alpha, \beta) = 0$· ἄρα, αἱ συντεταγμέναι χ, ψ, z, τῆς ἐπιφανείας πρέπει νὰ ἐτυμοποιῶσι τὰς δύο ἐξισώσεις (5)· ἀρκεῖ α καὶ β, νὰ ὑπόκηνται τῇ σχέσει $\sigma(\alpha, \beta) = 0$. Ἀλλ' αἱ ἐξισώσεις (5) ἐμφαίνουσιν εὐθεῖαν διερχομένην μονίμως τοῦ σημείου $(\chi', \psi', z')$. Ἄρα, ἡ περὶ ἧς λόγος ἐπιφάνεια εἶναι κωνική.

### ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΩΝΟΕΙΔΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ.

**496. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΚΩΝΟΕΙΔΗΣ** *καλεῖται ἡ παραγομένη τῇ κινήσει γραμμῆς εὐθείας μενούσης ἀείποτε παραλλήλου ἐπιπέδῳ δοθέντι, καὶ διατρεχούσης εὐθεῖαν ὁμοῦ καὶ καμπύλην ἀμφοτέρας ὡρισμένας ἐν τῷ διαστήματι.* Ἡ καμπύλη αὕτη καλεῖται *ὁδηγήτρια*.

Ὅπως καταστήσωμεν καταληπτὴν τὴν τοιούτου εἴδους γέννησιν, φαντασθῶμεν ἐν τῷ διαστήματι ἀπειρίαν ἐπιπέδων παραλλήλων τῷ δοθέντι. Ἕκαστον αὐτῶν τεμεῖ τὴν μὲν μόνιμον εὐθεῖαν καθ' ἓν σημεῖον, τὴν δὲ καμπύλην ὁδηγήτριαν καθ' ἓν ἢ πλείονα σημεῖα. Ζευγνύοντες τὰ τελευταῖα ταῦτα τῷ τῆς μονίμου εὐθείας, ἐκτελοῦντες δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς ἅπαντα τὰ παράλληλα ἐπίπεδα, λαμβάνομεν μυρίας εὐθείας, ὧν τὸ σύνολον συγκροτεῖ τὴν *κωνοειδῆ* ἐπιφάνειαν. Ἡ ὀνομασία αὕτη ἐδόθη συνεπείᾳ τῆς ἀναλογίας τῶν τοιούτου εἴδους ἐπιφανειῶν πρὸς τὰς κωνικάς. Τὸ κέντρον τοῦ κώνου ἀντικαθιστᾷ ἐνταῦθα γραμμὴ εὐθεῖα χρησιμεύουσα τρόπον τινὰ ὡς *πρώτη ὁδηγήτρια*.

Ζητήσωμεν ἤδη τὴν ἐξίσωσιν τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος ἐπιφανειῶν. Ἵνα καταστήσωμεν ἁπλουστέρας τὰς ἐργασίας, λάβωμεν ὡς ἄξονα τῶν $z$ τὴν εὐθεῖαν χρησιμεύουσαν ἀντὶ πρώτης ὁδηγητρίας· ὡς ἐπίπεδον τῶν $\chi\psi$, τὸ ἐπίπεδον ᾧ παραλλήλως κινεῖται ἡ γεννήτρια εὐθεῖα τῆς ἐπιφανείας· ὡς ἄξονας δὲ τῶν $\chi$ καὶ τῶν $\psi$ δύο εὐθείας ἀγομένας τυχαίως ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ ποδὸς τοῦ ἄξονος τῶν $z$. Ἐκ τῆς κατασκευῆς ταύτης δῆλον ὅτι ἡ ἐπιφάνεια, ἐν γένει, ἀναφέρεται πρὸς ἄξονας πλαγιογωνίους.

Ἔστωσαν

$$(1) \qquad \Sigma(\chi, \psi, z) = 0, \qquad \Sigma_1(\chi, \psi, z) = 0,$$

αἱ ἐξισώσεις τῆς καμπύλης, ἡ δευτέρας ὁδηγητρίας. Αἱ τῆς κινουμένης εὐθείας, θεωρουμένης ἐν τῇ τυχούσῃ θέσει αὐτῆς, ἔχουσι τὴν μορφὴν

$$(2) \qquad \psi = \mu\chi, \qquad z = \nu.$$

Φανερὸν ὅτι, δι' ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς γεννητρίας, ἐν τῇ αὐτῇ θέσει θεωρουμένης, αἱ ποσότητες $\mu$, $\nu$, μένουσιν ἄτρεπτοι, ἀλλὰ μεταβάλλονται ἀπὸ ἑτέρας εἰς ἑτέραν θέσιν αὐτῆς. Ἄρα, αἱ ποσότητες αὗται, συγχρόνως μένουσαι ἄτρεπτοι καὶ συγχρόνως μεταβαλλόμεναι, ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλ-



λήλων. Λοιπόν, ἡ γενικὴ μορφὴ τῆς ἐξισώσεως τῶν κωνοειδῶν ἐπιφανειῶν εἶναι

$$\sigma\left(\frac{\psi}{\chi}, \quad z\right) = 0.$$

Ἵνα ὁρίσωμεν τὴν φύσιν τῆς συνεκθέσεως ταύτης ἐν ἑκάστῃ μερικῇ περιπτώσει, παρατηρητέον ὅτι, αἱ ἐξισώσεις (1), (2), συνυπάρχουσι διὰ τὰ κοινὰ τῇ τε γεννητρίᾳ καὶ τῇ πρώτῃ ὁδηγητρίᾳ σημεῖα. Λοιπόν, ἐὰν ἀπαλείψωμεν $\chi$, $\psi$, $z$, ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων, ἕξομεν τὴν σχέσιν τῶν $\mu$, $\nu$, πρὸς ἀλλήλας,

$$\sigma(\mu, \nu) = 0.$$

Ἐὰν ἤδη θέσωμεν ἐν ταύτῃ τὰς τιμὰς τῶν $\mu$, $\nu$, ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2), εὑρήσομεν τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν.

**497. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.** Λαμβάνοντες πάντοτε τὴν πρώτην ὁδηγήτριαν ὡς ἄξονα τῶν $z$, ὑποθέσωμεν τὴν ἑτέραν γραμμὴν εὐθεῖαν δηλουμένην ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$(1) \qquad \chi = \alpha z + a, \qquad \psi = ϐ z + \beta.$$

Τῇ ἀπαλοιφῇ $\chi$, $\psi$, $z$, ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων καὶ τῶν τῆς γεννητρίας,

$$(2) \qquad \psi = \mu\chi, \qquad z = \nu,$$

λαμβάνομεν

$$ϐ\nu + \beta = \alpha\nu\mu + a\mu\cdot$$

ἐπομένως

$$(3) \qquad ϐ\chi z - \alpha\psi z + \beta\chi - a\psi = 0.$$

*Αὕτη εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς παραγομένης ἐπιφανείας ὑπὸ εὐθείας κινουμένης παραλλήλως ἐπιπέδῳ καὶ διατρεχούσης δύο ἑτέρας εὐθείας.*

498. Τὴν τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας ἐξίσωσιν καθιστῶμεν ἁπλουστέραν ἐκλέγοντες καταλληλοτέρους πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον ἄξονας.

(Σχ. 181) Ἔστωσαν ΓΓ', ΔΔ', αἱ δύο ὁδηγήτριαι. Φαντασθῶμεν ἀπὸ τῆς πρώτης ἐπίπεδον παράλληλον τῇ δευτέρᾳ, ὃ λαμβάνομεν ὡς τῶν $\psi z$. Ἐν τῶν ἐπιπέδων οἷς παραλλήλως κινεῖται ἡ γεννήτρια, τεμεῖ τὰς ὁδηγητρίας κατὰ σημεῖα, π. χ. Α, Β. Ἐπιτρέπεται λαβεῖν ὡς ἄξονα τῶν χ τὴν γραμμὴν ΑΒ, θέσιν τινὰ παριστῶσαν τῆς γεννητρίας. Τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον τεμεῖ τὸ πρῶτον κατὰ γραμμὴν εὐθεῖαν, ἣν λαμβάνομεν ὡς ἄξονα τῶν ψ. Ἄξων τῶν z μένει, ὡς προλαβόντως, ἡ πρώτη ὁδηγήτρια.

Συνεπείᾳ τῆς θέσεως τῶν ὁδηγητριῶν σχετικῶς πρὸς τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα, αἱ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας ΑΔ' εἰσὶ

$$(1) \qquad \chi = a, \qquad \psi = \beta z.$$

Ἔχομεν προσέτι τὰς τῆς γεννητρίας

$$(2) \qquad \psi = \mu\chi, \qquad z = \nu.$$

Ἐφαρμόζοντες εἰς τὰς ἐξισώσεις (1), (2), τὴν μέθοδον, εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν

$$\mu a = \beta\nu\cdot$$

ἀπαλείφοντες δὲ μ, ν, μεταξὺ ταύτης καὶ τῶν ἐξισώσεων (2), λαμβάνομεν τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας·

$$a\frac{\psi}{\chi} - \beta z = 0, \qquad \text{ἢ} \qquad \beta\chi z - a\psi = 0\,.$$

Εὐκόλως βεβαιούμεθα ὅτι, ἀμφότεροι οἱ ἄξονες τῶν χ καὶ τῶν z ἀνήκουσι τῇ ἐπιφανείᾳ, ὡς ἑπόμενον εἶναι.

### ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ.

**499. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ** *καλεῖται συνήθως ἡ παραγομένη ὑπὸ γραμμῆς περιαγομένης περὶ εὐθεῖαν μόνιμον, ὥστε ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς καταγράφει περιφέρειαν κύκλου, οὗτινος τὸ μὲν κέντρον κεῖται ἐπὶ τῆς μονίμου εὐθείας, τὸ δ' ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν αὐτήν.* Ἡ μὲν περιαγομένη γραμμὴ καλεῖται *γεννήτρια*, ἡ δὲ μόνιμος εὐθεῖα *ἄξων* τῆς ἐπιφανείας. Ἡ γεννήτρια τότε μόνον ταυτίζεται τῷ *μεσημβρινῷ* τῆς ἐπιφανείας, ὅταν κῆται ὁλόκληρος ἐπὶ ἐπιπέδου ἀπὸ τοῦ ἄξονος διερχομένου.



Ἀλλά, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον, αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος ἐπιφάνειαι δὲν ἔχουσι γεννήτριαν εἴδους μονίμου· ἐνῷ, *ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν ὡς παραγομένην ὑπὸ κύκλου, οὗτινος τὸ μὲν κέντρον κινεῖται ἐπὶ μονίμου εὐθείας, ἐνῷ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ διατηρεῖται πρὸς ὀρθὰς τῷ ἄξονι τούτῳ, ἡ δὲ ἀκτὶς αὐξάνει ἢ ἐλαττοῦται τοσοῦτον ὥστε ἡ περιφέρεια νὰ συμπίπτῃ ἀείποτε τῇ καμπύλῃ*, τότε ὁ μὲν κινητὸς κύκλος καθίσταται γεννήτρια εἴδους μονίμου καὶ κοινοῦ ἁπάσαις ταῖς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείαις, ἡ δὲ καμπύλη, ἡ κατὰ τὸν πρῶτον ὁρισμὸν θεωρουμένη γεννήτρια, εἶναι ἐνταῦθα ὁδηγήτριά τις μεταβλητὴ διακρίνουσα ἑκάστην ἐπιφάνειαν μερικήν.

Ἔστωσαν,

$$(1) \qquad \Sigma(\chi, \psi, z) = 0, \qquad \Sigma_1(\chi, \psi, z) = 0,$$

αἱ ἐξισώσεις τῆς ὁδηγητρίας, καὶ

$$(2) \qquad \chi - a = \alpha(z - \gamma), \qquad \psi - \beta = \beta(z - \gamma),$$

αἱ τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς, ἐν αἷς a, β, γ, δηλοῦσι τὰς συντεταγμένας σημείου τυχαίως ἐπ' αὐτοῦ ληφθέντος. Πᾶς *παράλληλος* τῆς ἐπιφανείας, δύναται θεωρηθῆναι ὡς ἡ κοινὴ τομὴ σφαίρας, ἧς τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος, καὶ ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς τῷ αὐτῷ ἄξονι. Ἑπομένως αἱ ἐμφαίνουσαι τὸν κύκλον τοῦτον ἐξισώσεις ἔσονται,

$$(3) \qquad \alpha\chi + \beta\psi + z = k, \qquad (\chi - a)^2 + (\psi - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = \Lambda^2.$$

Ἀλλ' ὅπως ἡ ἀληθῶς *παράλληλος* τῆς ἐπιφανείας, ἀπαιτεῖται συνάμα ἡ σχέσις

$$(4) \qquad \sigma(k, \Lambda^2) = 0,$$

ἐκφράζουσα ὅτι ὁ κύκλος οὗτος, καθ' ἁπάσας τὰς θέσεις αὐτοῦ, ἔχει ἓν σημεῖον κοινὸν τῇ ὁδηγητρίᾳ (1). Τὴν σχέσιν ταύτην λαμβάνομεν, ἐν ἑκάστῳ παραδείγματι, τῇ ἀπαλοιφῇ τῶν χ, ψ, z, ἐκ τῶν τεσσάρων ἐξισώσεων (1), (3). Κατόπιν ὑπολείπεται ἀπαλεῖψαι k καὶ Λ², μεταξὺ τῶν τριῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4). Λαμβάνομεν οὕτω τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας·

$$(5) \qquad \sigma[\alpha\chi + \beta\psi + z,\ (\chi - a)^2 + (\psi - \beta)^2 + (z - \gamma)^2] = 0.$$

500. Ἐὰν ὁ τῆς περιστροφῆς ἄξων ληφθῇ ὡς ἄξων τῶν z, ἔχομεν $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Ἐπειδὴ προσέτι δυνάμεθα λαβεῖν ὡς κέντρον τῆς σφαίρας τὴν ἀρχὴν, ἡ ἐξίσωσις (5) ἄγεται εἰς ταύτην

$$z = \sigma(\chi^2 + \psi^2 + z^2),$$

ἥτις πάντοτε τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$z = \sigma(\chi^2 + \psi^2).$$

Ἀλλ' ἐν τῇ μερικῇ ταύτῃ περιπτώσει, συχνάκις ἀπαντωμένῃ, ἁπλούστερον εἶναι θεωρεῖν ἀμέσως ἕκαστον *παράλληλον* ὡς τομὴν κυλίνδρου ὀρθοῦ ὑπὸ ἐπιπέδου πρὸς ὀρθάς· ἐν ἄλλοις λόγοις, λαμβάνομεν, ἀντὶ τῶν ἐξισώσεων (3) τὰς ἑξῆς·

$$z = k, \qquad \chi^2 + \psi^2 = A^2,$$

θεωροῦντες συνάμα τὴν σχέσιν (4), μορφουμένην ὡς ἀνωτέρω. Οὕτω φθάνομεν ἀμέσως εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$z = \sigma(\chi^2 + \psi^2).$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὰς

$$\chi = \sigma(\psi^2 + z^2), \qquad \psi = \sigma(\chi^2 + z^2),$$

ἐξισώσεις ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς περὶ τὸν ἄξονα τῶν χ, ἢ περὶ τὸν ἄξονα τῶν ψ.

501. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1ον. *Ζητήσωμεν τὴν καταγραφομένην ἐπιφάνειαν ὑπὸ εὐθείας περὶ τὸν ἄξονα τῶν z.*

Ἔστωσαν

$$\chi = \alpha z + a, \qquad \psi = \beta z + \beta,$$

αἱ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας, τόπον ἐπέχουσαι ἐνταῦθα τῶν ἐν τῇ γενικῇ θεωρίᾳ (1). Συνδυαζόμεναι αὗται ταῖς τοῦ παραλλήλου

$$z = k, \qquad \chi^2 + \psi^2 = A^2,$$



διδοῦσι, τῇ ἀπαλοιφῇ τῶν συντεταγμένων, τὴν σχέσιν

$$(\alpha k + a)^2 + (\beta k + \beta)^2 = A^2.$$

Ἀπαλείφομεν ἤδη k καὶ $A^2$ μεταξὺ τῶν τριῶν τελευταίων ἐξισώσεων, καὶ εὑρίσκομεν τὴν τῆς ζητουμένης ἐπιφανείας·

$$(\alpha z + a)^2 + (\beta z + \beta)^2 = \chi^2 + \psi^2.$$

Τεθείσθω, ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ, ὅτι λαμβάνομεν ὡς ἄξονα τῶν χ τὸ βραχύτερον ἀπόστημα τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς ἀπὸ τῆς κινητῆς εὐθείας. Αὕτη καθίσταται τότε παράλληλος τοῦ ἐπιπέδου τῶν ψz, πρέπει δὲ νὰ κάμωμεν ἐν ταῖς ἐξισώσεσιν αὐτῆς $\alpha = 0$, καὶ $\beta = 0$. Οὕτως ἡ τῆς ἐπιφανείας ἐξίσωσις ἔσεται

$$(\upsilon) \qquad \chi^2 + \psi^2 - \beta^2 z^2 = a^2.$$

502. 2ον. *Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας παραγομένης ὑπὸ ὑπερβολῆς περὶ τὸν δεύτερον αὐτῆς ἄξονα.*

Ἔστωσαν, αἱ μὲν ἐξισώσεις τῆς ὑπερβολῆς,

$$\psi = 0, \qquad B^2\chi^2 - \Gamma^2 z^2 = \Gamma^2 B^2,$$

αἱ δὲ τῆς γεννητρίας,

$$z = k, \qquad \chi^2 + \psi^2 = A^2.$$

Ἐφαρμόζοντες τὴν αὐτὴν μέθοδον εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν

$$B^2(\chi^2 + \psi^2) - \Gamma^2 z^2 = \Gamma^2 B^2, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Gamma^2}{B^2} z^2 + \Gamma^2 = \chi^2 + \psi^2,$$

ὁμοιόμορφον οὖσαν τῇ (υ) τοῦ προηγουμένου παραδείγματος. Λοιπὸν, *ἡ ὑπὸ εὐθείας παραγομένη ἐπιφάνεια περὶ ἑτέραν εὐθεῖαν, εἶναι ὁμοία τῇ παραγομένῃ ὑπὸ ὑπερβολῆς περὶ τὸν δεύτερον αὐτῆς ἄξονα.* Τὴν ἐπιφάνειαν ταύτην καλοῦσιν *ὑπερβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς μετὰ μιᾶς χώνης.* Περὶ τῶν τοιούτου εἴδους ἐπιφανειῶν πραγματευσόμεθα βραδύτερον.

503. Πρὸς ἄσκησιν τῶν μαθητῶν προτείνομεν τὰ ἑξῆς προβλήματα, τῇ αὐτῇ μεθόδῳ ἐπιλυόμενα.

1). *Εὑρεῖν τὴν ὑπὸ παραβολῆς, κειμένης ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν χz, παραγομένην ἐπιφάνειαν περὶ τὸν ἄξονα τῶν z· ἤτοι τὸ παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς. Δεῖξαι ὅτι, ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ταύτης τῷ τυχόντι ἐπιπέδῳ, προβάλλεται ἀείποτε ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν χψ κατὰ κύκλον.*

Ἀπ. $\chi^2 + \psi^2 = 2\pi z$, ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας.

$\chi^2 + \psi^2 = 2\pi(\mathrm{A}\chi + \mathrm{B}\psi + \Gamma)$, ἐξίσωσις τῆς προβολῆς.

2). *Εὑρεῖν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐπιφανείας παραγομένης τῇ περιστροφῇ κύκλου, κειμένου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν χz, περὶ τὸν ἄξονα τῶν χ.* (Σχ. 182).

Ἔστωσαν, αἱ μὲν ἐξισώσεις τοῦ κύκλου,

$$\psi = 0, \qquad (\chi - \pi)^2 + (z - \kappa)^2 = \Lambda^2,$$

αἱ δὲ τῆς γεννητρίας,

$$\chi = \delta, \qquad \psi^2 + z^2 = \rho^2 .$$

Εὑρίσκομεν

$$[\kappa \pm \sqrt{\Lambda^2 - (\chi - \pi)^2}\,]^2 = \psi^2 + z^2 ,$$

ἐξίσωσιν τῆς ζητουμένης *δακτυλιοειδοῦς ἐπιφανείας.*

Τὸ μὲν σημεῖον + ἀνήκει τῇ καταγραφομένῃ ἐπιφανείᾳ ὑπὸ τοῦ ἀνωτέρου ἡμικυκλίου, τὸ δὲ — τῇ ὑπὸ τοῦ κατωτέρου.

Εὐκόλως ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης πορίζομεθα τὴν τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

## ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ.

### ΓΕΝΙΚΗ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΚΑΤΑΤΑΞΙΣ.

504. Ὅταν, ἐπιφάνειαν ἐμφαινομένην ὑπὸ ἐξισώσεως περιεκτικῆς συντεταγμένων χ, ψ, z, παραλλήλων πρὸς τρεῖς ἄξονας, θέλωμεν ν' ἀναφέρωμεν πρὸς ἑτέρους ἄξονας, καθιστῶμεν ἐν τῇ ἐξισώσει τὰς τιμὰς τῶν παλαιῶν συντεταγμένων συνεκθέσει τῶν νέων. Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ αὗται εἰσὶ γραμμικαί, ἕπεται ὅτι ἡ μετασχηματισθεῖσα ἐξίσωσις μενεῖ ἀλγεβραϊκὴ ἢ ὑπερβατικὴ καθ' ὅσον καὶ ἡ πρώτη εἶναι ἀλγεβραϊκὴ ἢ ὑπερβατική. Ἀλλὰ κυρίως ἄξιον παρατηρήσεως εἶναι ὅτι, ὁ βαθμὸς ἀλγεβραϊκῆς τινος ἐξισώσεως δὲν μεταβάλλεται διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν ἀξόνων. Τῷ ὄντι, φανερὸν ὅτι ὁ βαθμὸς οὗτος δὲν αὐξάνει· διότι χ, ψ, z, ἀντικαθίστανται ὑπὸ τιμῶν πρωτοβαθμίων εἰς χ', ψ', z'. Ἄρα, οὔτε ἐλαττοῦται· διότι, τῇ ἐκ νέου μεταβάσει ἐν τοῖς παλαιοῖς ἄξοσιν, ὁ βαθμὸς τῆς νέας ἐξισώσεως ἤθελεν αὐξάνει. Ἐπὶ ταύτης τῆς παρατηρήσεως στηρίζεται ἡ *διανομὴ τῶν ἀλγεβραϊκῶν ἐπιφανειῶν εἰς τάξεις διαφόρους, κατὰ τὸν βαθμὸν τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν.* Τὸ ἐπίπεδον εἶναι τὸ μόνον εἶδος ἐπιφανείας ἐν τῇ πρώτῃ τάξει περιεχόμενον. Μετ' οὐ πολὺ θέλομεν ἰδεῖ ὅτι, ἐν τῇ δευτέρᾳ τάξει περιέχονται πέντε εἴδη ἐπιφανειῶν.

505. Ἑκάστῃ τάξει ἐνυπάρχει γεωμετρική τις ἰδιότης ὡς ἑξῆς ἐκφωνουμένη· *ἐπιφάνεια τάξεως μ^ης^ οὐδέποτε συμπίπτει ἐπιπέδῳ κατὰ γραμμὴν ὑπερτέραν τάξεως μ^ης^, ἢ γραμμῇ εὐθείᾳ κατὰ σημεῖα πλείονα τῶν μ.*

1ον. Ἐὰν λάβωμεν τὸ τέμνον ἐπίπεδον ὡς τῶν χψ, π. χ., καταστήσωμεν δὲ $z = 0$ ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς ἐπιφανείας ἀναφερομένης πρὸς τοὺς νέους ἄξονας, εὑρήσομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς τομῆς. Λοιπὸν, ὁ βαθμὸς τῆς τομῆς ἔσεται, ἐν γένει, ἴσος μ. Ἀλλὰ δύναται εἶναι ἐλάσσων μου ἔν τισι περιπτώσεσι μερικαῖς· διότι ἡ ὑπόθεσις $z = 0$ συμβαίνει νὰ ἐξαλείφῃ ἅπαντας τοὺς βαθμοῦ μου ὅρους. Συμβαίνει προσέτι νὰ ἐξαλείφωνται ἅπαντες οἱ ὅροι τῆς ἐξισώσεως· τότε τὸ ἐπίπεδον $z = 0$ ἀποτελεῖ μέρος τῆς θεωρουμένης ἐπιφανείας, ἡ ἐξίσωσις δὲ ταύτης ἀποσυντίθεται εἰς παράγοντας.

2ον. Ἐὰν λάβωμεν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ὡς ἄξονα τῶν χ, εἶτα καταστήσωμεν $\psi = 0$, $z = 0$, ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς ἐπιφανείας, ἕξομεν ἐξίσωσιν οὖσαν, τὸ πλεῖστον, βαθμοῦ μου, καὶ δίδουσαν, ὡς τιμὰς τῆς χ, τὰ ἀποστήματα τῆς ἀρχῆς ἀπὸ τῶν διαφόρων σημείων τομῆς τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τῆς εὐθείας. Ἄρα, ἡ περὶ ἧς λόγος πρότασις εἶναι ἀληθής.

Συμβαίνει αἱ ὑποθέσεις $\psi = 0$, $z = 0$, νὰ ταυτοποιῶσι τὴν ἐξίσωσιν, ἀνεξαρτήτως πάσης τιμῆς διδομένης τῇ χ. Ἐν τῇ τοιαύτῃ περιπτώσει, ἡ εὐθεῖα κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

**506.** *Ὅσον ἀφορᾷ τὰς γραμμὰς ἐν τῷ διαστήματι θεωρουμένας*, ἡ κυριωτέρα αὐτῶν διάκρισις εἶναι εἰς *γραμμὰς ἐπιπέδους* καὶ εἰς *γραμμὰς διττῆς καμπυλότητος*. Αἱ μὲν πρῶται ἐφαρμόζονται ὁλόκληροι ἐπὶ ἐπιπέδου, αἱ δεύτεραι δὲ οὐχί. Αἱ διττῆς καμπυλότητος γραμμαὶ δίδονται, ἐν γένει, τῇ τομῇ ἐπιφανειῶν ὑπ' ἀλλήλων, ἀλλ' ἐν οὐδεμιᾷ ὑποβάλλονται κατατάξει στηριζομένῃ ἐπὶ τῆς τάξεως τῶν ἐπιφανειῶν· διότι, δύο ἐπιφάνειαι κατὰ μυρίους τρόπους μεταβάλλονται, τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς μενούσης ἀμεταβλήτου. Δυνάμεθα μὲν θεωρῆσαι τὰς καμπύλας εἰς τὰς προβολὰς αὐτῶν [411], ἀλλὰ συμβαίνει καὶ αὖθις, μεταβαλλομένων τῶν συντεταγμένων, αἱ προβολαὶ νὰ μὴ δηλοῦνται ὑπὸ ἐξισώσεων τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ. Ἐπομένως, κατάταξις στηριζομένη τῇ τάξει τῶν προβολῶν ἤθελεν εἶσθαι ἐλαττωματική.



## ΑΝΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΟΥ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΕΦ' ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΑΝ ΜΟΡΦΗΝ.

**507.** Διὰ μεθόδου ὁμοίας τῇ ἐν ταῖς γραμμαῖς τῆς δευτέρας τάξεως, ἐξιχνεύομεν καὶ τὰς ἐπιφανείας ἐν τῇ δευτεροβαθμίῳ ἐξισώσει περιεχομένας. *Ἀλλὰ συντομώτερον καταντῶμεν* εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, ἁπλοποιοῦντες πρῶτον τὴν ἐξίσωσιν.

Ἄξωμεν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ σειρὰν χορδῶν παραλλήλων, λάβωμεν δὲ τὰς z παραλλήλους ταύταις, ἀφήνοντες κατ' ἀρέσκειαν τὴν ἀρχὴν καὶ τὴν διεύθυνσιν τῶν χ καὶ τῶν ψ. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας λαμβάνει τὴν ἑξῆς μορφήν·

$$(\text{A})\quad A\chi^2 + A'\psi^2 + A''z^2 + 2B\chi\psi + 2B'\chi z + 2B''\psi z + 2\Gamma\chi + 2\Gamma'\psi + 2\Gamma''z + Z = 0.$$

Ἐξ αὐτῆς συνάγομεν

$$z = \frac{-B'\chi - B''\psi - \Gamma''}{A''} \pm \sqrt{P}.$$

Πρὸς συντομίαν, καλοῦμεν P τὴν ὑπόῤῥιζον ποσότητα, συνέκθεσιν οὖσαν τῶν χ καὶ τῶν ψ. Φανερὸν ὅτι τὸ δηλούμενον ἐπίπεδον ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$z = \frac{-B'\chi - B''\psi - \Gamma''}{A''},$$

δίχα τέμνει ἁπάσας τὰς παραλλήλους ταῖς z χορδάς. Λοιπὸν, εἰ ἀρχῆθεν ἐλαμβάνομεν τὸ ἐπίπεδον τῶν χψ παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ, ἠθέλομεν εὕρει, πρὸς δήλωσιν τοῦ τελευταίου τούτου,

$$z = \textit{ἀτρέπτῳ}.$$

Ὅθεν δηλοῦται ὅτι, τότε ἔχομεν $B' = 0$, $B'' = 0$, καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας ἄγεται εἰς

$$(\text{B})\quad A\chi^2 + A'\psi^2 + A''z^2 + 2B\chi\psi + 2\Gamma\chi + 2\Gamma'\psi + 2\Gamma''z + Z = 0.$$

Ὅπως καταστήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἁπλουστέραν, τρέψωμεν τὴν διεύθυνσιν τῶν χ καὶ τῶν ψ, διατηροῦντες τὴν αὐτὴν ἀρχήν, τὸν αὐτὸν ἄξονα τῶν z καὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον τῶν χψ. Ἐν τῇ ἐξισώσει (Β) μόνοι οἱ ὅροι, συνεκθέσεις ὄντες τῶν χ καὶ τῶν ψ, μεταβληθήσονται· φανερὸν δὲ ὅτι ἔσονται, μετὰ τὸν μετασχηματισμόν, οἱ αὐτοὶ ὡς εἰ ἐθεωροῦμεν μόνον τὸ ἴχνος τῆς ἐπιφανείας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν χψ, οὗτινος ἴχνους τὴν ἐξίσωσιν

$$\Lambda\chi^2+\Lambda'\psi^2+2B\chi\psi+2\Gamma\chi+2\Gamma'\psi+Z=0,$$

λαμβάνομεν καθιστῶντες ἐν τῇ (Β) $z=0$. Ἀλλὰ τρέποντες τὴν διεύθυνσιν τῶν χ καὶ τῶν ψ, ἐξαλείφομεν ἀείποτε ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἐξισώσεως τὸ ὀρθογώνιον τῶν μεταβλητῶν· ἄρα, ἐκτελοῦμεν ἐπίσης τὴν αὐτὴν ἁπλοποίησιν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (Β), ἣν ἑπομένως ἄγομεν ὑπὸ τὴν ἁπλουστέραν μορφὴν

$$(\Gamma)\quad \Pi\chi^2+\Pi'\psi^2+\Pi''z^2-2K\chi-2K'\psi-2K''z+Z=0,$$

συμπεριλαμβάνουσαν καὶ ταύτην ἁπάσας τὰς τῆς δευτέρας τάξεως ἐπιφανείας.

Παρατηρητέον ὅτι ὑπάρχουσι μυρία συστήματα ἀξόνων πλαγιογωνίων διδόντα μορφὴν τοιαύτην ἐξισώσεως. Πρῶτον μέν, δίδομεν μυρίας διευθύνσεις διαφόρους εἰς τὰς παραλλήλους χορδὰς τῆς ἐπιφανείας, ὅπερ μεταβάλλει τὸν ἄξονα τῶν z. Δεύτερον δέ, μετὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐπιπέδου τῶν χψ, ἐξαλείφομεν τὸ ὀρθογώνιον χψ, μεταβάλλοντες κατὰ μυρίους τρόπους τοὺς ἄξονας τῶν χ καὶ τῶν ψ. Παρατηρητέον προσέτι ὅτι ἅπασαι αἱ μεταβολαὶ αὗται ἐκτελοῦνται μὴ μετατιθεμένης τῆς προτέρας ἀρχῆς ἀλλ᾽ οὔσης ὅλως κατ᾽ ἀρέσκειαν.

508. Ἐξετάσωμεν ἤδη εἰ δυνατὸν καταστῆσαι ἁπλουστέραν τὴν ἐξίσωσιν (Γ) τῇ μεταθέσει τῆς ἀρχῆς. Πρὸς τοῦτο, καθιστῶμεν ἐν αὐτῇ $\chi+\alpha$, $\psi+\beta$, $z+\gamma$, ἀντὶ $\chi, \psi, z$.

$$(\Delta)\quad \Pi\chi^2+\Pi'\psi^2+\Pi''z^2+2(\Pi\alpha-K)\chi+2(\Pi'\beta-K')\psi+2(\Pi''\gamma-K'')z$$
$$+\Pi\alpha^2+\Pi'\beta^2+\Pi''\gamma^2-2K\alpha-2K'\beta-2K''\gamma+Z=\Theta.$$



1ον. Ἐὰν σὺν τοῖς ὀρθογωνίοις οὐδὲν τῶν τριῶν τετραγώνων ἠφανίσθη ἐν τῇ ἐξισώσει (Γ), οἱ συντελεσταὶ $\Pi, \Pi', \Pi''$, διαφέρουσι μηδενός· οὕτως ἐξαλείφομεν ἀπὸ τῆς ἐξισώσεως (Δ) τοὺς τρεῖς πρωτοβαθμίους ὅρους, καθιστῶντες

$$\Pi\alpha-K=0,\quad \Pi'\beta-K'=0,\qquad \Pi''\gamma-K''=0,$$

ὅθεν

$$\alpha=\frac{K}{\Pi},\qquad \beta=\frac{K'}{\Pi'},\qquad \gamma=\frac{K''}{\Pi''}.$$

Τότε ἡ μετασχηματισθεῖσα (Δ) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$(E)\qquad \Pi\chi^2+\Pi'\psi^2+\Pi''z^2=\Theta.$$

2ον. Τεθείσθω ὅτι ἓν τῶν τετραγώνων δὲν ὑπάρχει ἐν τῇ (Γ)· π. χ., ἔστω $\Pi=0$. Ἡ ἀνωτέρω τιμὴ τῆς α καθίσταται ἄπειρος· τότε ὁ τῆς χ ὅρος τῆς μετασχηματισθείσης (Δ) δὲν περιέχει τὴν ἀόριστον α, καὶ ἑπομένως ἀδύνατον νὰ ἀφανισθῇ. Ἀλλ᾽ ἐξαλείφομεν τὴν πρώτην δύναμιν τῆς ψ καὶ τῆς z, καὶ τὸ ἄτρεπτον μέρος, λαμβάνοντες

$$\beta=\frac{K'}{\Pi'},\quad \gamma=\frac{K''}{\Pi''},\quad \alpha=\frac{\Pi'\beta^2+\Pi''\gamma^2-2K'\beta-2K''\gamma+Z}{2K}.$$

ἡ δ᾽ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας ἔσεται

$$(Z)\qquad \Pi'\psi^2+\Pi''z^2=2K\chi.$$

Ὑποθέτομεν K ποσότητα διαφέρουσαν μηδενός, ὥστε ἡ τιμὴ τῆς α δὲν γίνεται ἄπειρος. Τῷ ὄντι, ὅταν σὺν $\Pi=0$ ἔχωμεν καὶ $K=0$, ἡ ἐξίσωσις (Γ) δὲν περιέχει χ. Λοιπόν, λαμβάνοντες ἀντὶ β καὶ γ τὰς ἀνωτέρω τιμάς, ἡ μετασχηματισθεῖσα ἄγεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\Pi'\psi^2+\Pi''z^2=\Theta$, συμπεριλαμβανομένην ἐν τῇ ἐξισώσει (Ε).

3ον. Τέλος, θεωρήσωμεν τὴν περίπτωσιν καθ᾽ ἣν ἡ ἐξίσωσις (Γ) στερεῖται δύο τετραγώνων συγχρόνως· π. χ., ἔστω αὕτη $\Pi''z^2-2K\chi-2K'\psi-2K''z+Z=0$. Τότε, ἀδύνατον ἐξαλεῖψαι τοὺς εἰς χ καὶ εἰς ψ ὅρους· ἀλλὰ λαμβανομένου $\gamma=\frac{K''}{\Pi''}$, ὁ τῆς z ὅρος ἀφανίζεται καὶ αὖθις, ἡ δ' ἐξίσωσις (Λ), καλουμένου $Z'$ τοῦ ἀτρέπτου μέρους, καθίσταται

$$\Pi''z^2 - 2K\chi - 2K'\psi + Z' = 0.$$

Ὑποθέσωμεν $z=0$· ἡ ἐξίσωσις αὕτη δίδει $2K\chi + 2K'\psi = Z'$· ὅπερ δεικνύει ὅτι τὸ ἐπίπεδον τῶν $\chi\psi$ τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ γραμμὴν εὐθεῖαν. Λάβωμεν τὴν εὐθεῖαν ταύτην ὡς γραμμὴν τῶν $\psi$. Ἡ μεταβολὴ αὕτη οὐδόλως ἀλλοιώσει τὸν ὅρον $\Pi''z^2$· ἀλλ' οἱ ὅροι $-2K\chi - 2K'\psi + Z'$, ἀντικατασταθήσονται ὑφ' ἑνὸς μόνου, τοῦ σχήματος $\Sigma\chi$· διότι ἡ ὑπόθεσις $z=0$ πρέπει νὰ δίδῃ $\chi=0$. Λοιπόν, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας ἔσεται $\Pi''z^2 + \Sigma\chi = 0$· εἶναι δὲ μερικὴ περίπτωσις τῆς ἐξισώσεως (Z).

509. Ἐκ τῶν προεκτεθέντων συνάγομεν ὅτι, ἅπασαι αἱ ἐπιφάνειαι τῆς δευτέρας τάξεως, ἀνεξαιρέτως, δίδονται ὑπὸ τῶν δύω ἐξισώσεων,

(E) $$\Pi\chi^2 + \Pi'\psi^2 + \Pi''z^2 = \Theta,$$

(Z) $$\Pi'\psi^2 + \Pi''z^2 = 2K\chi.$$

Ἀληθῶς, αἱ συντεταγμέναι οὐκ εἰσὶν ὀρθογώνιοι, ἀλλ' ἐπὶ τοῦ παρόντος ὁ ὅρος οὗτος εἶναι περιττός.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ (E), (Z). — ΔΙΑΚΡΙΣΙΣ ΤΩΝ ΕΧΟΥΣΩΝ ΚΕΝΤΡΟΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΑΠΟ ΤΩΝ ΣΤΕΡΟΥΜΕΝΩΝ ΚΕΝΤΡΟΥ.

510. Ὁ διακριτικὸς χαρακτὴρ τῶν ἐν ταῖς ἐξισώσεσι (E), (Z), περιεχομένων ἐπιφανειῶν, ὅστις καὶ ἐκ τῆς μορφῆς αὐτῆς τῶν ἐξισώσεων προκύπτει, εἶναι ὅτι αἱ μὲν ἔχουσι *κέντρον* αἱ δὲ στεροῦνται κέντρου.

Τῷ ὄντι, αἱ ἐξισώσεις (Σχ. 183),

$$\chi = \alpha z, \qquad \psi = \beta z,$$

εὐθείας τῆς ἀρχῆς διερχομένης, συνδυαζόμεναι τῇ (E), διδοῦσι διὰ τὰ δύο σημεῖα M, M', καθ' ἃ ἡ εὐθεῖα τρυπᾷ τὴν ἐπιφάνειαν, συντεταγμένας ἴσας μετὰ σημείων ἐναντίων. Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι, *ἡ ἀρχὴ διχοτομεῖ ἁπάσας τὰς*



*δι' αὐτῆς διερχομένας χορδὰς ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ*. Ἡ ἰδιότης αὕτη εἶναι ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς τοῦ *κέντρου*.

Ὅσον ἀφορᾷ τὰς ἐπιφανείας τῆς ἐξισώσεως (Z), ἐὰν αὗται εἶχον κέντρον, ἤθελεν εἶσθαι δυνατὸν νὰ τεθῇ ἐν αὐτῷ ἡ ἀρχή· ἀγομένης δὲ ἀπὸ ταύτης οἱασδήποτε χορδῆς, αἱ συντεταγμέναι τῶν δύο περάτων τῆς χορδῆς ταύτης ἤθελον διαφέρει κατὰ τὰ σημεῖα μόνον. Ἵνα ὑπάρχῃ τὸ τοιοῦτον, δῆλον ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας δὲν πρέπει νὰ περιέχῃ οὐδένα ὅρον πρωτοβάθμιον. Ἀλλ' ὅτε μετεθέσαμεν τὴν ἀρχὴν [508], ὅπως μεταβῶμεν ἀπὸ τῆς ἐξισώσεως (Γ) εἰς τὴν μετασχηματισθεῖσαν (Z), διετηρήσαμεν τὸν εἰς $\chi$ ὅρον, διότι ἦτον ἀδύνατος ἡ ἀφάνισις αὐτοῦ. Ἄρα, ἡ ἐξίσωσις (Z) ἐμφαίνει ἐπιφανείας στερουμένας κέντρου. Ἐννοεῖται ὅτι K διαφέρει μηδενός· ἄλλως ἡ ἐξίσωσις (Z) ἤθελεν εἶσθαι μερικὴ περίπτωσις τῆς (E).

511. Παρατηρητέον ὅμως, ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι αὗται στεροῦνται κέντρου, διότι αἱ συντεταγμέναι δι' ὧν ἐν γένει ὁρίζεται ἡ θέσις τοῦ σημείου τούτου, καθίστανται ἄπειροι, ἢ τοὐλάχιστον μία ἐξ αὐτῶν. Οὕτως, ἀκριβῶς ὁμιλοῦντες, αἱ ἐπιφάνειαι, περὶ ὧν ὁ λόγος, θεωροῦνται ὡς ἔχουσαι ἐν κέντρον κείμενον εἰς τὸ ἄπειρον· ἑπομένως, διὰ μετασχηματισμῶν καταλλήλων, δυνάμεθα ἐφαρμόσαι εἰς ταύτας τὰς τῶν πρώτων ἰδιότητας. Τοιουτοτρόπως αἱ παραβολαὶ εἰσὶν ἐλλείψεις ὧν οἱ ἄξονες εἰσὶν ἄπειροι.

512. Ἐκ τῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως (E) καταφαίνονται καὶ ἕτερα συμπτώματα. Ἐπειδὴ ἐν αὐτῇ περιέχονται μόνα τὰ τετράγωνα τῶν μεταβλητῶν, αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας, γινόμεναι ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων τῷ τῶν δύο ἀξόνων συντεταγμένων, εἰσὶ καμπύλαι ἔχουσαι τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπὶ τοῦ τρίτου ἄξονος. Τὸ ἰδίωμα τοῦτο λαμβάνουσιν ὡς ὁρισμὸν *τῶν διαμέτρων*. Λοιπόν, *οἱ παρόντες ἄξονες τῶν συντεταγμένων εἰσὶ διάμετροι τῆς ἐπιφανείας*.

*Ὅταν ἡ διάμετρος ἵσταται πρὸς ὀρθὰς* ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν παραλλήλων τομῶν, καλεῖται *ἄξων* τῆς ἐπιφανείας.

Φανερὸν προσέτι ὅτι, ἡ ἐξίσωσις (E) δίδει ἑκάστῃ μεταβλητῇ δύο τιμὰς ἴσας σημεῖα ἐναντία ἐχούσας. Ἄρα, ἕκαστον ἐπίπεδον συντεταγμένον δίχα τέμνει σειρὰν χορδῶν παραλλήλων· τούτου ἕνεκα καλεῖται *ἐπίπεδον διαμετρικόν*.

513. Ἐν ἐπιφανείᾳ τινι δευτέρας τάξεως, τρεῖς διάμετροι οὖσαι οὕτω πως διατεθειμέναι, ὥστε ἑκάστη περιέχει τὰ κέντρα τῶν γινομένων τομῶν παραλλήλως τῷ ἐπιπέδῳ τῶν ἑτέρων δύο, καλοῦνται *διάμετροι συζυγεῖς*. Ὡσαύτως, τρία ἐπίπεδα διαμετρικὰ καλοῦνται *συζυγῆ*, ὅταν αἱ χορδαί, ἃς ἕκαστον δίχα τέμνει, ὦσι παράλληλοι τῇ τομῇ τῶν δύο ἑτέρων.

514. Ἐκ τῶν προηγουμένων ὁρισμῶν προκύπτει ὅτι, εἰς τὴν ἐξίσωσιν (E) *οἱ μὲν ἄξονες τῶν συντεταγμένων εἰσὶ διάμετροι συζυγεῖς, τὰ δὲ συντεταγμένα ἐπίπεδα εἰσὶν ἐπίπεδα διαμετρικὰ συζυγῆ*. Ἐν γένει, οἱαιδήποτε ἂν ὦσιν αἱ συζυγεῖς διάμετροι, ἢ τὰ συζυγῆ διαμετρικὰ ἐπίπεδα, πρὸς ἃ ἀναφέρεται ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ἐξίσωσις ταύτης διατηρεῖ τὴν μορφὴν (E)· διότι, ἐὰν εἶχεν ἄλλως, αἱ χαρακτηριστικαὶ ἰδιότητες τῶν διαμέτρων καὶ τῶν ἐπιπέδων τούτων δὲν ἤθελον ἐκπληροῦσθαι.

515. Ἐν τῇ ἐξισώσει (Z), μόνος ὁ τῶν $\chi$ ἄξων εἶναι διάμετρος, καὶ μόνα τὰ ἐπίπεδα τῶν $\chi\psi$ καὶ τῶν $\chi z$ εἰσὶ διαμετρικά. Τὰ δύο ταῦτα ἐπίπεδα καλοῦνται προσέτι συζυγῆ· διότι αἱ χορδαὶ ἃς ἕκαστον διχοτομεῖ παράλληλοι εἰσὶ τῷ ἑτέρῳ.

### ΔΙΑΣΚΟΠΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΧΟΥΣΩΝ ΚΕΝΤΡΟΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ.

516. Ἅπασαι αἱ κέντρον ἔχουσαι ἐπιφάνειαι συμπεριλαμβάνονται ἐν τῇ ἐξισώσει

$$(\mathrm{E}) \qquad \Pi\chi^2 + \Pi'\psi^2 + \Pi''z^2 = \Theta.$$

Ἐπὶ τοῦ παρόντος ὑποθέσομεν ὅτι οὐδεὶς τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἰσοῦται μηδενί. Τῇ ἀλλαγῇ, εἰ δέον, τῶν σημείων, καθιστῶμεν ἐν τῷ πρώτῳ μέλει αὐτῆς



δύο τῶν συντελεστῶν θετικούς. Ἔστωσαν τοιοῦτοι οἱ Π, Π′. Τότε ἡ ἐξίσωσις παρουσιάζει τρεῖς περιπτώσεις· ἤτοι

$$(\Pi) \qquad \Pi\chi^2 + \Pi'\psi^2 + \Pi''z^2 = +\Theta,$$

$$(\Pi_1) \qquad \Pi\chi^2 + \Pi'\psi^2 - \Pi''z^2 = +\Theta,$$

$$(\Pi_{11}) \qquad \Pi\chi^2 + \Pi'\psi^2 - \Pi''z^2 = -\Theta.$$

Παραλείπομεν τὴν μορφὴν $\Pi\chi^2 + \Pi'\psi^2 + \Pi''z^2 = -\Theta$, ὡς ἀσυμβίβαστον.

517. Διασκοπήσωμεν πρῶτον τὴν ἐξίσωσιν

$$(\Pi) \qquad \Pi\chi^2 + \Pi'\psi^2 + \Pi''z^2 = \Theta.$$

Ὁ ἁπλούστερος τρόπος δι' οὗ διαγινώσκομεν τὸ σχῆμα ἐπιφανείας τινος, συνίσταται εἰς τὸ ζητῆσαι τὰς τομὰς αὐτῆς πρὸς τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα καὶ πρὸς τὰ παράλληλα τούτοις. Λοιπόν, καθιστῶμεν διαδοχικῶς ἐν τῇ (Π), $\chi=0$, $\psi=0$, $z=0$, καὶ λαμβάνομεν

$$\Pi\chi^2 + \Pi'\psi^2 = \Theta, \quad \Pi\chi^2 + \Pi''z^2 = \Theta, \quad \Pi'\psi^2 + \Pi''z^2 = \Theta.$$

Βλέπομεν δὲ ὅτι τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα τέμνουσι τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ ἐλλείψεις (Σχ. 184).

Ἵνα λάβωμεν τομὰς παραλλήλους τῷ ἐπιπέδῳ τῶν $\chi\psi$, καθιστῶμεν $z=\gamma$, καὶ ἔχομεν

$$\Pi\chi^2 + \Pi'\psi^2 = \Theta - \Pi''\gamma^2,$$

ἐξίσωσιν ἐπίσης ἐμφαίνουσαν ἔλλειψιν. Ἡ ἔλλειψις αὕτη, εἶναι μὲν ἡ προβολὴ τῆς τομῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν $\chi\psi$, ἀλλ' ἐνταῦθα ἰσοῦται τῇ τομῇ αὐτῇ. Λοιπόν, ἐὰν λάβωμεν $\mathrm{AO}=\gamma$, ἄξωμεν δὲ ἐπίπεδον ΚΟΕ παράλληλον τῷ ΧΨ, ἡ τομὴ Ε′ΚΕ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἔσεται ἡ ὑπὸ τῆς ἄνωθι ἐξισώσεως ἐμφαινομένη ἔλλειψις. Τὰ μήκη τῶν ἡμιδιαμέτρων αὐτῆς, παραλλήλων ταῖς $\chi$ καὶ $\psi$, εἰσὶ

$$\mathrm{OE} = \sqrt{\frac{\Theta - \Pi''\gamma^2}{\Pi}}, \qquad \mathrm{OK} = \sqrt{\frac{\Theta - \Pi''\gamma^2}{\Pi'}}.$$

Αἱ τιμαὶ αὗται μεταβάλλονται μεταβαλλομένου τοῦ $\gamma$· προοδεύουσιν ἐλαττούμεναι ἀπὸ $\gamma=0$, μέχρι $\gamma=\sqrt{\frac{\Theta}{\Pi''}}$. Εἰς τὸ ὅριον τοῦτο μηδενίζονται, πέραν δ' αὐτοῦ εἰσὶ φανταστικαί. Ἄρα, ἐὰν λάβωμεν $\mathrm{A\Gamma}=\sqrt{\frac{\Theta}{\Pi''}}$, ἡ ἐπιφάνεια ἕξει τὸ μοναδικὸν σημεῖον Γ, κοινὸν τῷ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀγομένῳ ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῷ ΧΑΨ, μὴ προχωροῦσα ἄνω αὐτοῦ.

Τρεπομένου $\gamma$ εἰς $-\gamma$, λαμβάνομεν τομὰς κειμένας πρὸς τὰς ἀρνητικὰς $z$. Φανερὸν ὅτι αὗται εἰσὶν ἴσαι ταῖς κατὰ τὰ αὐτὰ ἀποστήματα γινομέναις πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος τῆς ἀρχῆς. Λαμβανομένου $\mathrm{A\Gamma'}=\mathrm{A\Gamma}$, καὶ ἀγομένου ἐπιπέδου ἀπὸ τοῦ σημείου Γ' παραλλήλου τῷ ΧΑΨ, ἡ ἐπιφάνεια δὲν ὑπερβαίνει τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, ἀλλ' ἔχει κοινὸν μετ' αὐτοῦ τὸ σημεῖον Γ'.

Ἀνάλογα ἐξαγόμενα τοῖς προηγουμένοις εὑρίσκομεν καὶ διὰ τὰς παραλλήλους τομὰς τοῖς ἐπιπέδοις τῶν $\chi z$ καὶ τῶν $\psi z$. Ἀλλὰ τὰ προεκτεθέντα ἐπαρκοῦσιν ὅπως λάβωμεν ἰδέαν ἀκριβῆ τῆς ἐπιφανείας, καὶ δεικνύουσιν ὅτι αὕτη εἶναι πανταχόθεν περιωρισμένη καὶ κεκλεισμένη. Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη καλεῖται ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ.

518. Ἡ ἐξίσωσις (Π) λαμβάνει μορφὴν ἀξιοπαρατήρητον τῇ ἐν αὐτῇ εἰσαγωγῇ τῶν διαμέτρων ἐφ' ὧν λογίζονται αἱ συντεταγμέναι. Διαιροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν διὰ Θ· καλοῦμεν

$$\alpha=\sqrt{\frac{\Theta}{\Pi}},\qquad \beta=\sqrt{\frac{\Theta}{\Pi'}},\qquad \gamma=\sqrt{\frac{\Theta}{\Pi''}};$$

καὶ λαμβάνομεν

$$(\pi)\qquad \frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1,$$

ἢ

$$\beta^2\gamma^2\chi^2+\alpha^2\gamma^2\psi^2+\alpha^2\beta^2z^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2.$$



Φανερὸν ὅτι, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, εἰσὶν αἱ ἡμιδιάμετροι περὶ ὧν ὁ λόγος.

519. Ὅταν αἱ συντεταγμέναι ὦσιν ὀρθογώνιοι, καὶ ὑποθέσωμεν $\alpha=\beta$, ἡ ἐξίσωσις ($\pi$) καθίσταται

$$\chi^2+\psi^2+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}z^2=\alpha^2.$$

Τότε πᾶσα τομὴ γινομένη πρὸς ὀρθὰς τῇ γραμμῇ τῶν $z$, εἶναι κύκλος ἔχων τὸ κέντρον αὐτοῦ ἐπὶ τῆς γραμμῆς ταύτης. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐπίπεδον τῶν $\chi z$ τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ ἔλλειψιν ἧς ὁ ἕτερος τῶν ἀξόνων εἶναι ἡ αὐτὴ γραμμή, συνάγομεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια παράγεται τῇ περιαγωγῇ ἐλλείψεως περὶ τὸν ἕτερον τῶν ἀξόνων αὐτῆς. Εἶναι τὸ *ἐλλειψοειδὲς ἐκ περιστροφῆς*.

Ἐὰν προσέτι ὑποθέσωμεν $\gamma=\alpha$, ἡ ἐξίσωσις καθίσταται

$$\chi^2+\psi^2+z^2=\alpha^2.$$

ἐμφαίνει δὲ σφαῖραν ἧς τὸ κέντρον εἶναι ἡ ἀρχή.

520. Θεωρήσωμεν ἤδη τὴν ἐξίσωσιν

$$(\Pi_1)\qquad \Pi\chi^2+\Pi'\psi^2-\Pi''z^2=\Theta.$$

Αἱ ἐξισώσεις τῶν τομῶν τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων εἰσὶ (Σχ. 185),

$$\Pi\chi^2+\Pi'\psi^2=\Theta,\quad \Pi\chi^2-\Pi''z^2=\Theta,\quad \Pi'\psi^2-\Pi''z^2=\Theta.$$

Ἡ μὲν πρώτη ἐμφαίνει ἔλλειψιν, τὴν Γ'ΒΓΒ' αἱ δ' ἕτεραι δύο ὑπερβολάς.

Καθιστῶντες $z=\pm\gamma$, λαμβάνομεν

$$\Pi\chi^2+\Pi'\psi^2=\Theta+\Pi''\gamma^2.$$

Λοιπόν, αἱ παράλληλοι τῷ ἐπιπέδῳ ΧΨ τομαί, ἐν οἱαδήποτε ἀποστάσει γίνωσιν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς, εἰσὶν ἐλλείψεις ἔχουσαι δύο ἡμιδιαμέτρους συζυγεῖς παραλλήλους τῶν χ καὶ τῶν ψ· ἤτοι

$$O\alpha = \sqrt{\frac{\Theta + \Pi''\gamma^2}{\Pi}}, \qquad O\beta = \sqrt{\frac{\Theta + \Pi''\gamma^2}{\Pi'}}.$$

φανερὸν δὲ ὅτι αὐξάνουσιν ἐπ' ἄπειρον. Ἄρα, ἡ ἐπιφάνεια ἀνοίγει ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον καθ' ὅσον ἀφίσταται τοῦ τῶν χψ ἐπιπέδου.

Αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας γινόμεναι ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων τοῖς XZ, ΨZ, δίδουσιν ἐξαγόμενα διάφορα.

Ἔστω $\psi = \pm \beta$, ἔχομεν

$$\Pi\chi^2 - \Pi''z^2 = \Theta - \Pi'\beta^2.$$

Λοιπόν, ἡ ἐπιφάνεια τέμνεται κατὰ ὑπερβολὰς ὑφ' ἁπάντων τῶν παραλλήλων τῷ XZ ἐπιπέδων. Ἀλλ' αἱ καμπύλαι αὗται δὲν στρέφουσι πάντοτε τοὺς κλάδους αὐτῶν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος. Ἐνόσῳ β ἐλάσσων εἶναι AB ἢ $\sqrt{\frac{\Theta}{\Pi'}}$ (Σχ. 186), ἡ πλαγία διάμετρος τῶν τομῶν εἶναι παράλληλος ταῖς χ. Ὅταν β μείζων ἦναι τοῦ αὐτοῦ ἀποστήματος, ἡ διάμετρος αὕτη εἶναι παράλληλος ταῖς z. Μεταξὺ τῶν δύο τούτων εἰδῶν ὑπερβολῶν, εὑρίσκομεν δύο εὐθείας τεμνομένας ὑπ' ἀλλήλων· διότι $\beta = AB$ δίδει

$$\Pi\chi^2 - \Pi''z^2 = 0, \quad \text{ὅθεν} \quad \chi\sqrt{\Pi} = \pm z\sqrt{\Pi''}.$$

Αἱ προβολαὶ τῶν εὐθειῶν τούτων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν χz, εἰσὶ προφανῶς αἱ κοιναὶ ἀσύμπτωτοι τῶν προβολῶν τῶν δύο εἰδῶν ὑπερβολῶν (Σχ. 187).

Αἱ παράλληλοι τῷ ἐπιπέδῳ τῶν ψz τομαὶ δίδουσιν ἐξαγόμενα ἀνάλογα τοῖς προηγουμένοις.

Ἐκ τῶν προεκτεθέντων λαμβάνομεν εὐκρινῆ ἰδέαν τῆς ἐξεταζομένης ἐπιφανείας, ἥτις καλεῖται ΥΠΕΡΒΟΛΟΕΙΔΕΣ ΜΕΤΑ ΜΙΑΣ ΧΩΝΗΣ.

521. Ὅπως καταστήσωμεν καταφανεῖς τὰς διαμέτρους τῆς ἐπιφανείας περὶ ἧς ὁ λόγος, διαιροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν (Πι) διὰ Θ, καθιστῶμεν, ὡς ἐν § 518,

$$\alpha = \sqrt{\frac{\Theta}{\Pi}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\Theta}{\Pi'}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\Theta}{\Pi''}},$$

καὶ λαμβάνομεν

$$(\pi\iota) \qquad \frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

$$\text{ἢ} \qquad \beta^2\gamma^2\chi^2 + \alpha^2\gamma^2\psi^2 - \alpha^2\beta^2z^2 = \alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

Ἡ ἐπιφάνεια τέμνει τοὺς ἄξονας τῶν χ καὶ τῶν ψ ἐν ταῖς ἀποστάσεσιν α καὶ β, ἀλλὰ δὲν συμπίπτει τῷ τῶν z· διότι $\chi = 0$ καὶ $\psi = 0$ δίδουσιν ἐξαγόμενον φανταστικὸν $z = \pm\gamma\sqrt{-1}$. Ἄρα, δύο τῶν διαμέτρων εἰσὶ πραγματικαὶ καὶ μία φανταστική.

522. Πρὸς συντεταγμένας ὀρθογωνίους, ἡ ὑπόθεσις $\beta = \alpha$, ἄγει τὴν ἐξίσωσιν (πι) εἰς ταύτην

$$\chi^2 + \psi^2 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2}z^2 = \alpha^2.$$

Τότε ἡ ἐπιφάνεια παράγεται τῇ περιαγωγῇ ὑπερβολῆς περὶ τὸν δεύτερον αὐτῆς ἄξονα. Εἶναι τὸ *ὑπερβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς μετὰ μιᾶς χώνης.*

523. Ἡ τελευταία περίπτωσις τῶν ἐχουσῶν κέντρον ἐπιφανειῶν εἶναι

$$(\Pi\iota\iota) \qquad \Pi\chi^2 + \Pi'\psi^2 - \Pi''z^2 = -\Theta.$$

Διὰ τὰς τομὰς τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων εὑρίσκομεν,

$$\Pi\chi^2 + \Pi'\psi^2 = -\Theta, \quad \Pi\chi^2 - \Pi''z^2 = -\Theta, \quad \Pi'\psi^2 - \Pi''z^2 = -\Theta.$$

Ἡ πρώτη ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος, δεικνύουσα ὅτι τὸ ἐπίπεδον τῶν χψ δὲν τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν. Αἱ ἕτεραι δύο ἐμφαίνουσιν ὑπερβολὰς (Σχ. 188).

Ἡ ἐξίσωσις (Πιι) δίδει

$$\Pi\chi^2 + \Pi'\psi^2 = \Pi''z^2 - \Theta.$$

Ὅθεν συνάγομεν ὅτι, ἀπὸ $z=0$ μέχρι $z=\pm\sqrt{\frac{\Theta}{\Pi''}}$, ἡ ἐπιφάνεια δὲν τέμνεται ὑπ' οὐδενὸς ἐπιπέδου παραλλήλου τῷ τῶν χψ. Λοιπὸν, ἐὰν λάβωμεν $\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{A\Gamma}'=\sqrt{\frac{\Theta}{\Pi''}}$, καὶ ἄξωμεν ἐπίπεδα ΡΓΣ, Ρ'Γ'Σ', παράλληλα τῷ ΧΨ, ἡ ἐπιφάνεια οὐδὲν σημεῖον ἕξει μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τούτων. Ὅταν $z=\pm\mathrm{A\Gamma}$, ἡ τομὴ εἶναι ἓν σημεῖον, Γ ἢ Γ'. Αὐξανομένης $z$ μέχρι $\pm\infty$, λαμβάνομεν ἐλλείψεις πραγματικὰς, ὡς τὴν αβα'β', ὧν αἱ διάμετροι αὐξάνουσιν ἐπ' ἄπειρον.

Αἱ παράλληλοι τῷ ἐπιπέδῳ τῶν χz τομαὶ, ἢ τῷ τῶν ψz, εἰσὶν ἀείποτε ὑπερβολαὶ ὅμοιαι καὶ ὁμοίως τοποθετημέναι.

Εὐκόλως φανταζόμεθα τὸ σχῆμα τῆς ἐπιφανείας. Αὕτη διαφέρει τοῦ μὲν ἐλλειψοειδοῦς, καθ' ὅ,τι ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον, τοῦ δὲ ὑπερβολοειδοῦς μετὰ μιᾶς χώνης, καθ' ὅ,τι συγκροτεῖται ἐκ δύο χωνῶν ἀποκεχωρισμένων. Καλεῖται ΥΠΕΡΒΟΛΟΕΙΔΕΣ ΜΕΤΑ ΔΥΟ ΧΩΝΩΝ.

524. Ἡ ἐξίσωσις (Πιι), τῇ ἐν αὐτῇ εἰσαγωγῇ τῶν διαμέτρων, μεταμορφοῦται ὡς ἑξῆς·

(πιι) $$\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=-1,$$

ἢ $$\beta^2\gamma^2\chi^2+\alpha^2\gamma^2\psi^2-\alpha^2\beta^2z^2=-\alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

Αἱ μὲν δύο διάμετροι $2\alpha$, $2\beta$, εἰσὶ φανταστικαὶ, ἡ δὲ $2\gamma$ μόνη εἶναι πραγματική.

525. Ἡ ὑπόθεσις $\beta=\alpha$, καθιστᾷ τὴν ἐξίσωσιν (πιι),

$$\chi^2+\psi^2-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}z^2=-\alpha^2.$$

Ἐμφαίνει δὲ τὸ *ὑπερβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς μετὰ δύο χωνῶν*.



ΔΙΑΣΚΟΠΗΣΙΣ ΤΩΝ ΣΤΕΡΟΥΜΕΝΩΝ ΚΕΝΤΡΟΥ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ.

526. Ἅπασαι αἱ στερούμεναι κέντρου ἐπιφάνειαι συμπεριλαμβάνονται ἐν τῇ ἐξισώσει

(Ζ) $$\Pi'\psi^2+\Pi''z^2=2\mathrm{K}\chi.$$

Τῇ ἀλλαγῇ τῶν σημείων καὶ τῆς διευθύνσεως τῶν θετικῶν χ, καθιστῶμεν, εἰ δέον, θετικοὺς τοὺς συντελεστὰς τῶν $\psi^2$, χ. Ἄρα, ἡ ἐξίσωσις παρουσιάζει δύο μόνον γενικὰς περιπτώσεις· ἤτοι

(Κ) $$\Pi'\psi^2+\Pi''z^2=2\mathrm{K}\chi,$$

(Κ₁) $$\Pi'\psi^2-\Pi''z^2=2\mathrm{K}\chi.$$

527. Θεωρήσωμεν πρῶτον τὴν ἐμφαινομένην ἐπιφάνειαν ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

(Κ) $$\Pi'\psi^2+\Pi''z^2=2\mathrm{K}\chi.$$

Τὰς ὑπὸ τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων τομὰς δηλοῦσιν αἱ ἐξισώσεις (Σχ. 189)·

$$\Pi'\psi^2+\Pi''z^2=0,\quad \Pi'\psi^2=2\mathrm{K}\chi,\quad \Pi''z^2=2\mathrm{K}\chi.$$

Ἡ μὲν πρώτη δίδει τὴν ἀρχὴν, αἱ δὲ δύο τελευταῖαι ἐμφαίνουσι παραβολὰς, τὰς ΡΑΡ', ΣΑΣ'.

Αἱ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τῆς χ καθιστῶσι τὴν ἐξίσωσιν (Κ) ἀδύνατον· ἀλλ' αἱ θετικαὶ δίδουσιν ἐλλείψεις, ὡς τὴν ΒΓΒ'Γ', τοσοῦτον μείζονας ὅσον χ αὐξάνει.

Αἱ παράλληλοι τομαὶ πρὸς τὰ δύο ἕτερα συντεταγμένα ἐπίπεδα, εἰσὶ παραβολαὶ ἀμοιβαίως ἴσαι ταῖς ΡΑΡ', ΣΑΣ'. Π. χ., ὅταν $z=\gamma$, ἔχομεν

$$\Pi'\psi^2=2\mathrm{K}\chi-\Pi''\gamma^2.$$

ἡ ἐξίσωσις δὲ αὕτη ἐμφαίνει παραβολὴν, τὴν ρδρ', κατὰ τὴν θέσιν μόνον διαφέρουσαν τῆς ΡΑΡ'.

Ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος ἐπιφάνεια καλεῖται ΠΑΡΑΒΟΛΟΕΙΔΕΣ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΝ.

528. Αἱ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ΧΨ, ΧΖ, παραβολαὶ κοινὴν ἔχουσι διάμετρον τὴν γραμμὴν τῶν $\chi$. Αἱ παράμετροι αὐτῶν, πρὸς τὴν διάμετρον ταύτην, εἰσὶ $\frac{2K}{\Pi'}$, $\frac{2K}{\Pi''}$. Εἰσάγοντες ταύτας ἐν τῇ ἐξισώσει (Κ), καὶ καλοῦντες $\frac{K}{\Pi'}=\kappa$, $\frac{K}{\Pi''}=\kappa'$, λαμβάνομεν

$$(\kappa) \qquad \kappa'\psi^2+\kappa z^2=2\kappa\kappa'\chi.$$

529. Πρὸς συντεταγμένας ὀρθογωνίους, ὅταν $\Pi''=\Pi$, ἢ $\kappa'=\kappa$, ἡ ἐπιφάνεια ἀπογεννᾶται τῇ περιαγωγῇ παραβολῆς περὶ τὸν ἄξονα αὐτῆς· εἶναι δὲ τὸ *παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς*.

530. Ὑπολείπεται ἡ διασκόπησις τῆς ἐξισώσεως

$$(K_1) \qquad \Pi'\psi^2-\Pi''z^2=2K\chi.$$

Αἱ τομαὶ διὰ τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων δηλοῦνται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων (Σχ. 190)·

$$\Pi'\psi^2-\Pi''z^2=0,\quad \Pi'\psi^2=2K\chi,\quad \Pi''z^2=-2K\chi.$$

Ἡ πρώτη δίδει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν $\psi z$, δύο εὐθείας ΑΔ, ΑΔ'· ἡ δευτέρα, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΨΧ, παραβολήν, τὴν ΡΑΡ', ἐστραμμένην πρὸς τὰς θετικὰς $\chi$· καὶ ἡ τρίτη δίδει, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΧΖ, παραβολήν, τὴν ΣΑΣ', ἐστραμμένην πρὸς τὰς ἀρνητικὰς $\chi$.

Ἵνα λάβωμεν τομὰς παραλλήλους τῷ ἐπιπέδῳ τῶν $\psi z$, καθιστῶμεν $\chi=\pm\alpha$, καὶ ἔχομεν

$$\Pi'\psi^2-\Pi''z^2=\pm 2K\alpha\cdot$$

ἤτοι ὑπερβολὰς ὧν οἱ κλάδοι εἰσὶν ἐστραμμένοι διαφόρως, κατὰ τὸ σημεῖον τῆς $\alpha$. Παρατηρητέον ὅτι πασῶν τῶν ὑπερβολῶν τούτων τὰ μὲν κέντρα κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν $\chi$, αἱ δὲ ἀσύμπτωτοι εἰσὶ παράλληλοι ταῖς εὐθείαις ΑΔ, ΑΔ'· ἑπομένως, αἱ αὐταὶ ἀσύμπτωτοι κεῖνται ἐπὶ τῶν δύο ἐπιπέδων



ἀγομένων ἀφ' ἑκάστης τῶν εὐθειῶν τούτων καὶ τοῦ ἄξονος τῶν $\chi$.

Ἔστω ἤδη $z=\gamma$· λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\Pi'\psi^2=2K\chi+\Pi''\gamma^2,$$

ἐμφαίνουσαν τὰς παραλλήλους τῷ ἐπιπέδῳ τῶν $\chi\psi$ τομάς. Αὗται συγκροτοῦσι σειρὰν παραβολῶν, ὧν ἑκάστη ἀκριβῶς εἶναι ἡ παραβολὴ ΡΑΡ', τιθεμένη διαδοχικῶς εἰς τὰς διαφόρους θέσεις ἃς ἤθελε καθέξει ἐὰν ἐκινεῖτο οὕτως, ὥστε τὸ μὲν ἐπίπεδον αὐτῆς νὰ μένῃ ἀείποτε παράλληλον τῇ γραμμῇ τῶν $\chi$, τὸ δὲ σημεῖον Α ἀείποτε ἐπὶ τῆς παραβολῆς ΣΑΣ'. Εἶναι σαφὲς ὅτι, τῇ κινήσει ταύτῃ, ἡ παραβολὴ ΡΑΡ' ἀπογεννᾷ τὴν ἐπιφάνειαν. Αἱ παράλληλοι τῷ ἐπιπέδῳ τῶν $\chi z$ τομαὶ δεικνύουσιν ὅτι, ἡ ἐπιφάνεια ἀπογεννᾶται ἐπίσης τῇ κινήσει τῆς δευτέρας παραβολῆς διατρεχούσης τὴν πρώτην.

Ὁ τρόπος οὗτος παραγωγῆς κατάδηλον καθιστᾷ τὸ σχῆμα τῆς ἐπιφανείας, ὅπερ ὅμοιον ἐστὶ τῷ σχήματι κυλίνδρου βάσιν παραβολικὴν ἔχοντος, οὗτινος αἱ γεννήτριαι ἐκαμπυλώθησαν παραβολοειδῶς (Σχ. 191).

Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη, οὐσιωδῶς διαφέρουσα τῆς προηγουμένης ἕνεκα τῶν ὑπερβολικῶν τομῶν ἃς ἐν αὐτῇ λαμβάνομεν, καλεῖται ΠΑΡΑΒΟΛΟΕΙΔΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΟΝ. Σύγκειται ἐκ μιᾶς χώνης συνεχοῦς ἐπ' ἄπειρον ἐκτεινομένης πρός τε τὰς θετικὰς καὶ τὰς ἀρνητικὰς $\chi$· ἀλλ' ἡ καμπυλότης αὐτῆς παρουσιάζει σχῆμα ἀντίθετον κατὰ τὰ δύο ταῦτα χωρία.

531. Εἰσάγοντες τὰς παραμέτρους τῆς διαμέτρου ΟΧ, ἀνηκούσας ταῖς παραβολαῖς ΡΟΡ', ΣΟΣ', ἡ ἐξίσωσις (Κ₁) καθίσταται

$$(\kappa_1) \qquad \kappa'\psi^2-\kappa z^2=2\kappa\kappa'\chi.$$

532. Τὰς ἐξισώσεις ἀμφοτέρων τῶν παραβολοειδῶν εὑρίσκομεν ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς ἰδιότητος ἣν ἀνωτέρω εἴδομεν, ὅτι ἑκάστη τῶν ἐπιφανειῶν τούτων ἀπογεννᾶται τῇ παραλλήλῳ ἑαυτῇ κινήσει τῆς ἑτέρας τῶν δύο παραβολῶν, ὥστε ἡ κορυφὴ τῆς καθ' ἣν ἀναφέρεται διαμέτρου νὰ διατρέχῃ μονίμως τὴν ἑτέραν παραβολήν.

Θεωρήσωμεν τὸ παραβολοειδὲς ἐλλειπτικὸν ἐν ᾧ αἱ ἐξισώσεις τῶν καμπύλων τούτων εἰσὶ (Σχ. 192)·

τῆς μὲν PAP′, $z=0$, $\psi^2=2\kappa\chi$,

τῆς δὲ ΣΑΣ′, $\psi=0$, $z^2=2\kappa'\chi$.

Ὅταν ἡ γεννήτρια ΣΑΣ′ φθάσῃ εἰς θέσιν τινά, ἡ κορυφὴ αὐτῆς Δ, ἧς τὰς συντεταγμένας καλέσομεν $AO=\gamma$, $O\Delta=\delta$ ἕξει τὴν προβολὴν αὐτῆς εἰς Ο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΖΧ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ κινητὴ καμπύλη κεῖται ἐν ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῷ τελευταίῳ τούτῳ, αὕτη διατηρήσει ἐν προβολῇ τὴν αὐτὴν παράμετρον $2\kappa'$· ἄρα αἱ ἐξισώσεις αὐτῆς ἔσονται τότε

(1) $\psi=\delta$, $z^2=2\kappa'(\chi-\gamma)$.

Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ἡ κορυφὴ Δ κεῖται πάντοτε ἐπὶ τῆς ὁδηγητρίας PAP′, αἱ συντεταγμέναι αὐτῆς $\chi=\gamma$, $\psi=\delta$, $z=0$, ἐπαληθεύουσι τὰς ἐξισώσεις τῆς τελευταίας ταύτης καμπύλης. Ὅθεν συνάγομεν τὴν σχέσιν

(2) $\delta^2=2\kappa\gamma$.

Αἱ ποσότητες γ καὶ δ μεταβάλλονται ἀπὸ ἑτέρας εἰς ἑτέραν θέσιν τῆς γεννητρίας· λοιπόν, ἐὰν ἀπαλείψωμεν γ καὶ δ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1), (2), ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις ἔσεται ἡ τῆς παραγομένης ἐπιφανείας. Πρὸς τοῦτο, φέρομεν ἐν τῇ (2) τὰς τιμὰς τῶν δ, γ, ἀπὸ τῶν (1) ἐξαγομένας, καὶ εὑρίσκομεν

$$\psi^2=2\kappa\frac{(2\kappa'\chi-z^2)}{2\kappa'},\quad \text{ἢ}\quad \frac{\psi^2}{\kappa}+\frac{z^2}{\kappa'}=2\chi.$$

Ἄρα, ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια εἶναι πραγματικῶς παραβολοειδὲς ἐλλειπτικόν.

Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον ἐργαζόμεθα καὶ πρὸς τὸ παραβολοειδὲς ὑπερβολικόν, ἀναχωροῦντες ἀπὸ τῶν δύο παραβολῶν δηλουμένων ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων (Σχ. 190)·

τῆς μὲν PAP′, $z=0$, $\psi^2=2\kappa\chi$,

τῆς δὲ ΣΑΣ′, $\psi=0$, $z^2=-2\kappa'\chi$.



ΜΕΡΙΚΑΙ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ.

533. Πρὸς συμπλήρωσιν τῆς τῶν δευτεροταγῶν ἐπιφανειῶν διασκοπήσεως, ὑπολείπεται ἡ ἔρευνα τῶν μερικῶν περιπτώσεων τῶν ἐξισώσεων,

(E) $\Pi\chi^2+\Pi'\psi^2+\Pi''z^2=\Theta$, (Z) $\Pi'\psi^2+\Pi''z^2=2K\chi$.

1ον. Ἔστω $\Theta=0$. Ἡ ἐξίσωσις (Ε) καθίσταται

$$\Pi\chi^2+\Pi'\psi^2+\Pi''z^2=0.$$

Ἐπειδὴ δυνάμεθα ὑποθέσαι ἀείποτε δύο τῶν συντελεστῶν θετικούς, δύο μόνον διακεκριμμέναι περιπτώσεις εἰσὶν ἐξεταστέαι· ἤτοι,

(1) $\Pi\chi^2+\Pi'\psi^2+\Pi''z^2=0$, (2) $\Pi\chi^2+\Pi'\psi^2-\Pi''z^2=0$.

Ἡ ἐξίσωσις (1) ἐτυμοποιεῖται ὑπὸ μόνον τῶν τιμῶν $\chi=0$, $\psi=0$, $z=0$, συγχρόνως λαμβανομένων· ἄρα, δηλοῖ *σημεῖον μοναδικόν*, τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων· εἶναι ἐλλειψοειδὲς οὗτινος αἱ διαστάσεις εἰσὶ μηδέν.

Ἡ ἐξίσωσις (2) ἐμφαίνει *κῶνον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ*. Τῷ ὄντι, ἔστω $\psi=\mu\chi$ ἡ ἐξίσωσις ἐπιπέδου οἱουδήποτε διὰ τοῦ ἄξονος τῶν z διερχομένου. Καθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τῆς ψ ἐν τῇ ἐξισώσει (2) εὑρίσκομεν·

$$(\Pi+\Pi'\mu^2)\chi^2-\Pi''z^2=0,\quad \text{ὅθεν}\quad \chi=\pm z\sqrt{\frac{\Pi''}{\Pi+\Pi'\mu^2}}.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δείκνυσιν ὅτι, ἡ τῷ ἐπιπέδῳ τομὴ τῆς ἐπιφανείας προβάλλεται ἐπὶ τοῦ τῶν χz κατὰ δύο εὐθείας τῆς ἀρχῆς διερχομένας. Λοιπόν, ἅπαντα τὰ ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῶν z ἀγόμενα ἐπίπεδα τέμνουσι τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ γραμμὰς εὐθείας τῆς ἀρχῆς διερχομένας· ὅθεν συνάγομεν ὅτι, ἡ ἐξίσωσις (2) ἐμφαίνει κῶνον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, μερικὴν ὄντα περίπτωσιν ἀμφοτέρων τῶν ὑπερβολοειδῶν. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ὁ κῶνος οὗτος εἶναι ὑπερβολοειδὲς μετὰ μιᾶς χώνης, ἐν ᾧ ἡ τοῦ λαιμοῦ ἔλλειψις εἶναι ἓν σημεῖον, ἢ ὑπερβολοειδὲς μετὰ δύο χωνῶν, οὗτινος ἡ πραγματικὴ διάμετρος ἐμηδενίσθη.

2ον. Ἔστω $\Pi''=0$. Ἡ ἐξίσωσις (Ε) καθίσταται

$$\Pi\chi^2+\Pi'\psi^2=\Theta.$$

Θεωρήσωμεν Π θετικὸν καὶ Π′ ἐναλλὰξ θετικὸν καὶ ἀρνητικόν· ἔχομεν

$$(3)\quad \Pi\chi^2+\Pi'\psi^2=\Theta, \qquad (4)\quad \Pi\chi^2-\Pi'\psi^2=\Theta.$$

Ἡ ἐξίσωσις (3) δίδει *κύλινδρον* βάσιν ἐλλειπτικὴν ἔχοντα, παράλληλον τοῦ ἄξονος τῶν z ὅταν Θ ἦναι θετικὸς [408]. Ἐμφαίνει *γραμμὴν εὐθεῖαν*, τὸν ἄξονα τῶν z, ὅταν $\Theta=0$· διότι τότε ἡ ἐξίσωσις ἐτυμοποιεῖται ὑπὸ μόνον τῶν τιμῶν $\chi=0$ καὶ $\psi=0$. Εἶναι *φανταστικὴ* ὅταν Θ ἦναι ἀρνητικός.

Ἡ ἐξίσωσις (4) δίδει *κύλινδρον* βάσιν ὑπερβολικὴν ἔχοντα, παράλληλον τοῦ ἄξονος τῶν z, οἱονδήποτε σημεῖον ἔχει ὁ Θ. Ὅταν $\Theta=0$, ἐμφαίνει *δύο ἐπίπεδα* τεμνόμενα ὑπ' ἀλλήλων.

3ον. Ἔσωσαν $\Pi''=0$, $\Pi'=0$. Ἡ ἐξίσωσις (Ε) καθίσαται

$$(5)\qquad \Pi\chi^2=\Theta.$$

Ἐμφαίνει δὲ τότε *δύο ἐπίπεδα παράλληλα*, ἢ *ἓν ἐπίπεδον*, ἢ εἶναι *ἀδύνατος*, καθ' ὅσον ἡ ποσότης Θ εἶναι θετική, μηδέν, ἢ ἀρνητική.

4ον. Παραλειπομένων τῶν ὁμοίων ταῖς προηγουμέναις περιπτώσεων, ἔχομεν τὴν ἑξῆς μόνην ἀφορῶσαν τὴν ἐξίσωσιν (Ζ),

$$\Pi'\psi^2=2\mathrm{K}\chi.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐμφαίνει *κύλινδρον* βάσιν παραβολικὴν ἔχοντα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν χψ.

### ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΙΣ.

Ἐκ τοῦ κεφαλαίου τούτου συνάγομεν ὅτι, *πέντε γένη ἐπιφανειῶν τῆς δευτέρας τάξεως διακρίνονται*· ἤτοι, τὸ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ, τὸ ΥΠΕΡΒΟΛΟΕΙΔΕΣ ΜΕΤΑ ΜΙΑΣ ΧΩΝΗΣ, τὸ ΥΠΕΡΒΟΛΟΕΙΔΕΣ ΜΕΤΑ ΔΥΟ ΧΩΝΩΝ, τὸ ΠΑΡΑΒΟΛΟΕΙΔΕΣ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΝ, *καὶ τὸ* ΠΑΡΑΒΟΛΟΕΙΔΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΟΝ.

Ἀλλά, πρὸς συμπλήρωσιν τῆς κατατάξεως ταύτης, προσληπτέον οὖν ταῖς ἀνωτέρω ἐπιφανείαις, *τοὺς κώνους* καὶ *τοὺς κυλίνδρους*. Παρατηρητέον προσέτι, ὅτι ἐξίσωσίς τις δευτεροβάθμιος δυνατὸν ἐπίσης νὰ δίδῃ *δύο ἐπίπεδα τεμνόμενα ὑπ' ἀλλήλων, δύο ἐπίπεδα παράλληλα, ἓν ἐπίπεδον, μίαν εὐθεῖαν, ἓν σημεῖον*. Τέλος, δηλοῖ καὶ *περιπτώσεις ἀδυνάτους*.

---

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ′.

## ΤΟΜΑΙ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ ΔΙ' ΕΠΙΠΕΔΩΝ.

### ΠΕΡΙ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΤΟΜΩΝ.

**534.** Εἴδομεν [505] ὅτι πᾶσα ἐπίπεδος τομὴ ἐπιφανείας τῆς δευτέρας τάξεως εἶναι καμπύλη δευτεροβάθμιος. Ἐφεξῆς ὁρίσομεν ὁποίου γένους εἰσὶν αἱ καμπύλαι δευτέρας τάξεως ἃς λαμβάνομεν τέμνοντες ἐπιπέδῳ τὰς διαφόρους ἐπιφανείας, ὧν ἡ διασκόπησις ἦτο τὸ ἀντικείμενον τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου.

**535.** Προηγουμένως δείξομεν ὅτι, *ἡ προβολὴ καμπύλης δευτεροβαθμίου ἐπὶ ἐπιπέδου εἶναι καὶ αὕτη καμπύλη δευτεροβάθμιος ὁμοειδής.*

Ἔστωσαν, (Σχ. 193) ΓΜΙΔ ἡ περὶ ἧς πρόκειται καμπύλη· ΡΣ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς· ΡΣ′ τὸ τῆς προβολῆς ἐπίπεδον. Λαμβάνομεν ἐν ἑκάστῳ τούτων τὴν τομὴν ΡΧ ὡς ἄξονα τῶν χ· εἶτα ἐκλέγομεν ὡς ἄξονας τῶν ψ, τὴν μὲν ΑΨ πρὸς ὀρθάς, καθ' οἱονδήποτε σημεῖον, τῇ ΡΧ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς καμπύλης, τὴν δὲ ΑΨ′, προβολὴν τῆς ΑΨ, ἐν τῷ ΡΣ′.

Θεωρήσωμεν τὸ τυχὸν σημεῖον Μ ἔχον συντεταγμένας ΑΠ καὶ ΠΜ· φανερὸν ὅτι, ἡ προβολὴ αὐτοῦ Μ′ ὁρίζεται ὑπὸ τῶν ΑΠ καὶ ΠΜ′· ἀμφότερα τὰ σημεῖα ἔχουσι τὴν αὐτὴν τετμημένην· ἐπειδὴ δὲ ἡ τεταγμένη $\mathrm{M'\Pi}=\mathrm{M\Pi}\,\text{συν}\,a$ ($a$ οὔσης τῆς γωνίας τῶν ἐπιπέδων ΡΣ, ΡΣ′), ἕπεται ὅτι, ἵνα μεταβῶμεν ἀπὸ τῆς ἐξισώσεως τῆς προβολῆς εἰς τὴν τῆς καμπύλης, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν $\psi\,\text{συν}\,a$ ἀντὶ ψ ἐν τῇ πρώτη. Βλέπομεν τότε ὅτι, ἐὰν ἡ ἐξίσωσις τῆς προβολῆς ἦναι ἐν γένει

$$A\psi^2 + B\chi\psi + \Gamma\chi^2 + \ldots\ldots = 0,$$

ἡ τῆς καμπύλης ἔσεται

$$A\,\text{συν}^2 a\,\psi^2 + B\,\text{συν}\,a\,\chi\psi + \Gamma\chi^2 + \ldots\ldots = 0.$$

Ἀλλά, $B^2 - 4A\Gamma$ καὶ $(B^2 - 4A\Gamma)\text{συν}^2 a$ ἔχουσι τὸ αὐτὸ σημεῖον· ἄρα, *ἡ καμπύλη καὶ ἡ προβολὴ αὐτῆς εἰσὶν ὁμοειδεῖς.*

Ἐκ τῶν προλεχθέντων συνάγομεν ὅτι, ἵνα γνωρίσωμεν τὴν φύσιν καμπύλης τῆς δευτέρας τάξεως ἐν τῷ διαστήματι, ἀρκεῖ νὰ ἴδωμεν ὁποίας φύσεως εἶναι ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐφ' ἑνὸς τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων.

536. Ἀσχοληθῶμεν ἤδη περὶ τὰ διάφορα γένη ἐπιπέδων τομῶν τῶν ἐπιφανειῶν δευτέρας τάξεως.

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ ΕΧΟΥΣΑΙ ΚΕΝΤΡΟΝ. Λαμβάνομεν τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν αὐτῶν,

$$(E)\qquad \Pi\chi^2 + \Pi'\psi^2 + \Pi''z^2 = \Theta.$$

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου

$$(1)\qquad \chi = \alpha\psi + \beta z + \rho.$$

Τῇ τῆς $\chi$ ἀπαλοιφῇ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τούτων μορφοῦμεν τὴν ἑξῆς·

$$(2)\qquad \left.\begin{array}{r}(\Pi\alpha^2 + \Pi')\psi^2 + (\Pi\beta^2 + \Pi'')z^2 + 2\,\Pi\alpha\beta\psi z\\ + 2\,\Pi\alpha\rho\psi + 2\,\Pi\beta\rho z + \Pi\rho^2 - \Theta\end{array}\right\} = 0,$$

ἐξίσωσιν τῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν $\psi z$ προβολῆς τῆς τομῆς. Καθ' ὅσον ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐμφαίνει ἔλλειψιν, ὑπερβολήν, ἢ παραβολήν, ἡ τομὴ ἔσεται ἐπίσης ἔλλειψις, ὑπερβολή, ἢ παραβολή.

Τῇ συγκρίσει τῆς ἐξισώσεως (2) πρὸς τὴν γενικὴν $A\psi^2 + Bz\psi + \Gamma z^2 + \ldots\ldots = 0$, συνάγομεν

$$B^2 - 4A\Gamma = -4(\Pi'\Pi'' + \Pi\Pi''\alpha^2 + \Pi\Pi'\beta^2).$$



Οἱανδήποτε τιμὴν δώσωμεν ταῖς $\alpha$, $\beta$, ἡ ποσότης αὕτη μενεῖ ἀρνητική, ὅταν ἡ τεμνομένη ἐπιφάνεια ἦναι ἐλλειψοειδής· διότι τότε οἱ συντελεσταὶ $\Pi$, $\Pi'$, $\Pi''$, εἰσὶ θετικοί. Ἀλλά, διὰ τὰ ὑπερβολοειδῆ, $\Pi''$ ὄντος ἀρνητικοῦ, ἡ ἄνω σχέσις δυνατὸν νὰ ἦναι θετική, ἀρνητική, ἢ μηδέν.

Λοιπόν, *τοῦ μὲν ἐλλειψοειδοῦς ἅπασαι αἱ ἐπίπεδοι τομαὶ εἰσὶν ἐλλείψεις, τῶν δὲ ὑπερβολοειδῶν δυνατὸν νὰ ὦσιν ἐλλείψεις, ὑπερβολαί, ἢ παραβολαί.*

537. Ἡ μορφὴ τῆς ἐξισώσεως (1) ἣν παρεδέχθημεν, δὲν ἁρμόζει πρὸς τὰ παράλληλα ταῖς $\chi$ ἐπίπεδα. Ἐὰν θεωρήσωμεν ταῦτα ἰδιαιτέρως, λάβωμεν δὲ τὴν ἁρμόζουσαν ἐξίσωσιν $\psi = \gamma z + \rho$, καταντήσομεν εἰς τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα.

538. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ ΣΤΕΡΟΥΜΕΝΑΙ ΚΕΝΤΡΟΥ. Συνδυάσωμεν ἀλλήλαις τὰς ἐξισώσεις

$$(E)\quad \Pi'\psi^2 + \Pi''z^2 = 2K\chi, \qquad (1)\quad \chi = \alpha\psi + \beta z + \rho.$$

Λαμβάνομεν

$$\Pi'\psi^2 + \Pi''z^2 - 2K\alpha\psi - 2K\beta z - 2K\rho = 0.$$

Λοιπόν, *ἡ τομὴ εἶναι ἔλλειψις ἢ ὑπερβολή*, ἐφ' ὅσον $\Pi''$ εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικός· ἤτοι, *ἐφ' ὅσον τὸ παραβολοειδὲς εἶναι ἐλλειπτικὸν ἢ ὑπερβολικόν.*

Ὅταν τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἦναι παράλληλον τῷ ἄξονι τῶν $\chi$, τότε διὰ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \gamma z + \rho$, λαμβάνομεν τὴν τῆς προβολῆς τῆς τομῆς,

$$(\Pi'\gamma^2 + \Pi'')z^2 + 2\Pi'\gamma\rho z + \Pi'\rho^2 = 2K\chi,$$

ἐμφαίνουσαν παραβολὰς οἱονδήποτε εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ $\Pi''$. Λοιπόν, *αἱ παραλλήλως τῷ ἄξονι ἀμφοτέρων τῶν παραβολοειδῶν γινόμεναι ἐπίπεδοι τομαί, εἰσὶ παραβολαί.*

539. Ὅμοια τοῖς προηγουμένοις ἐξαγόμενα λαμβάνομεν ἐὰν ζητήσωμεν τὰς ἐπιπέδους τομὰς τῶν ἐπιφανειῶν τῆς δευτέρας τάξεως ἐν αὐτῷ τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ, διὰ τῆς μεθόδου περὶ ἧς λόγος ἐν § 474, μεταχειριζόμενοι τοὺς ἁρμοδίους τύπους. Δύνανται οἱ μαθηταί, ἀσκήσεως χάριν, ἐκτελέσαι τὰς ἀπαιτουμένας πρὸς τοῦτο ἐργασίας.

## ΤΟΜΑΙ ΚΥΚΛΙΚΑΙ.

540. Ἐν τοῖς προηγουμένοις ἐξητάσαμεν, γενικῷ τῷ τρόπῳ, τίνας καμπύλας λαμβάνομεν τέμνοντες ἐπιπέδῳ τὰς ἐπιφανείας τῆς δευτέρας τάξεως. Ἐρευνήσωμεν ἤδη, πῶς πρέπει νὰ διατεθῶσι τὰ ἐπίπεδα ὥστε αἱ τομαὶ νὰ ὦσιν, εἰ δυνατὸν, κύκλοι.

Οἱαδήποτε εἶναι ἡ ἐπιφάνεια περὶ ἧς πρόκειται, ὑποθέσωμεν αὐτὴν ἀναφερομένην πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους (Σχ. 194), τεμνομένην δὲ ἐπιπέδῳ οἱῳδήποτε. Λαμβάνομεν τὸ τυχὸν σημεῖον Α′ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, καὶ ἄγομεν Α′Ρ, Α′Σ, Α′Τ, παραλλήλους ταῖς ΑΧ, ΑΨ, ΑΖ. Ἔστω $\mathrm{P}\mathrm{A}'\mathrm{X}' = \varphi$ ἡ ὑπὸ τῆς Α′Ρ καὶ τοῦ ἴχνους τοῦ ἐπιπέδου τούτου, ἐπὶ τοῦ ΡΑ′Σ, περιεχομένη γωνία, καὶ $\theta$ ἡ γωνία τοῦ πρώτου ἐπιπέδου ἐπὶ τὸ δεύτερον. Ἄγομεν ἐν τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ τὴν γραμμὴν Α′Ψ′ πρὸς ὀρθὰς τῇ Α′Χ′. Καλοῦμεν $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου Α′ πρὸς τοὺς ἄξονας ΑΧ, ΑΨ, ΑΖ· $\chi$, $\psi$, $z$, τὰς συντεταγμένας τοῦ τυχόντος σημείου τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου σχετικῶς πρὸς τοὺς αὐτοὺς ἄξονας, καὶ $\chi'$, $\psi'$, τὰς τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς τοὺς ἄξονας Α′Χ′, Α′Ψ′.

Ἔχομεν τοὺς τύπους [474]

$$(1)\qquad \begin{cases} \chi = \chi' \,\text{συν}\, \varphi + \psi' \,\text{ἡμ}\, \varphi \,\text{συν}\, \theta + \alpha, \\ \psi = \chi' \,\text{ἡμ}\, \varphi - \psi' \,\text{συν}\, \varphi \,\text{συν}\, \theta + \beta, \\ z = \psi' \,\text{ἡμ}\, \theta + \gamma \cdot \end{cases}$$

οὓς καθιστῶντες ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς περὶ ἧς λόγος ἐπιφανείας, λαμβάνομεν τὴν τομὴν ταύτης διὰ τοῦ ἐπιπέδου.

541. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ ΕΧΟΥΣΑΙ ΚΕΝΤΡΟΝ. Ἐκτελοῦμεν τὰς ἀντεισαγωγὰς ταύτας ἐν τῇ ἐξισώσει

$$(\mathrm{E})\qquad \Pi\chi^2 + \Pi'\psi^2 + \Pi''z^2 = \Theta,$$



ἧς τὰς συντεταγμένας ὑποθέτομεν ὀρθογωνίους. Εὑρίσκομεν δὲ ἐξαγόμενον ὑπὸ μορφὴν τοιαύτην·

$$(\mathrm{A})\qquad \mathrm{A}\psi'^2 + \mathrm{B}\chi'\psi' + \Gamma\chi'^2 + \Delta\psi' + \mathrm{E}\chi' + \mathrm{Z} = 0,$$

ἐν ᾧ,

$$\mathrm{A} = \Pi \,\text{ἡμ}^2\varphi \,\text{συν}^2\theta + \Pi' \text{συν}^2\varphi \,\text{συν}^2\theta + \Pi'' \text{ἡμ}^2\theta,$$

$$\mathrm{B} = 2\,(\Pi - \Pi')\,\text{ἡμ}\,\varphi \,\text{συν}\,\varphi \,\text{συν}\,\theta,$$

$$\Gamma = \Pi \,\text{συν}^2\varphi + \Pi' \,\text{ἡμ}^2\varphi.$$

Ἵνα δὲ λάβωμεν κύκλον πρέπει νὰ καταστήσωμεν $\mathrm{B} = 0$ καὶ $\mathrm{A} = \Gamma$· ἤτοι

$$(2)\qquad (\Pi - \Pi')\,\text{ἡμ}\,\varphi \,\text{συν}\,\varphi \,\text{συν}\,\theta = 0,$$

$$(3)\qquad \Pi \text{ἡμ}^2\varphi \text{συν}^2\theta + \Pi' \text{συν}^2\varphi \text{συν}^2\theta + \Pi'' \text{ἡμ}^2\theta = \Pi \text{συν}^2\varphi + \Pi' \text{ἡμ}^2\varphi.$$

Ἐπειδὴ, ἐν γένει, Π′ διαφέρει τοῦ Π, ἡ ἐξίσωσις (2) ἀδύνατον νὰ ὑπάρξῃ πλὴν ὅταν,

$$\text{ἢ}\quad \text{συν}\,\theta = 0, \quad \text{ἢ}\quad \text{ἡμ}\,\varphi = 0, \quad \text{ἢ}\quad \text{συν}\,\varphi = 0.$$

Ἡ πρώτη ὑπόθεσις, $\text{συν}\,\theta = 0$, τρέπει τὴν ἐξίσωσιν (3) εἰς

$$\Pi \,\text{συν}^2\varphi + \Pi' \,\text{ἡμ}^2\varphi = \Pi''.$$

Ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει γράφομεν $\Pi''(\text{συν}^2\varphi + \text{ἡμ}^2\varphi)$ ἀντὶ $\Pi''$, καὶ λαμβάνομεν διαδοχικῶς·

$$\Pi \,\text{συν}^2\varphi + \Pi' \,\text{ἡμ}^2\varphi = \Pi'' \,\text{συν}^2\varphi + \Pi'' \,\text{ἡμ}^2\varphi,$$

$$(\Pi' - \Pi'')\,\text{ἡμ}^2\varphi = (\Pi'' - \Pi)\,\text{συν}^2\varphi,$$

$$\text{εφ}\,\varphi = \pm \sqrt{\frac{\Pi'' - \Pi}{\Pi' - \Pi''}}.$$

Ἡ δευτέρα ὑπόθεσις, $\text{ἡμ}\,\varphi = 0$, τρέπει τὴν ἐξίσωσιν (3) εἰς

$$\Pi' \,\text{συν}^2\theta + \Pi'' \,\text{ἡμ}^2\theta = \Pi.$$

Ἐπομένως ἔχομεν

$$\Pi' \,\text{συν}^2\theta + \Pi'' \,\text{ἡμ}^2\theta = \Pi \,\text{συν}^2\theta + \Pi \,\text{ἡμ}^2\theta,$$

$$(\Pi'' - \Pi)\,\text{ἡμ}^2\theta = (\Pi - \Pi')\,\text{συν}^2\theta,$$

$$\text{ἐφ}\,\theta = \pm \sqrt{\frac{\Pi - \Pi'}{\Pi'' - \Pi}}.$$

Τέλος, ἡ τρίτη ὑπόθεσις, $\text{συν}\,\varphi = 0$, δίδει

$$\Pi \,\text{συν}^2\theta + \Pi'' \,\text{ἡμ}^2\theta = \Pi',$$

καὶ ἐπομένως,

$$\Pi \,\text{συν}^2\theta + \Pi'' \,\text{ἡμ}^2\theta = \Pi' \,\text{συν}^2\theta + \Pi' \,\text{ἡμ}^2\theta,$$

$$(\Pi'' - \Pi')\,\text{ἡμ}^2\theta = (\Pi' - \Pi)\,\text{συν}^2\theta,$$

$$\text{ἐφ}\,\theta = \pm \sqrt{\frac{\Pi' - \Pi}{\Pi'' - \Pi'}}.$$

Οἱαδήποτε εἰσὶ τὰ σημεῖα τῆς ἐξισώσεως (E), ἐνόσῳ ἡ ἐπιφάνεια δὲν εἶναι ἐκ περιστροφῆς, μία τῶν ποσοτήτων $\Pi$, $\Pi'$, $\Pi''$, περιέχεται πάντοτε μεταξὺ τῶν δύο ἑτέρων. Ἔστω τοιαύτη ἡ $\Pi'$· τὰ μὲν δύο πρῶτα ῥιζικὰ ἔσονται φανταστικά, τὸ δὲ τρίτον μόνον πραγματικόν. Λοιπόν, ἵνα ἔχωμεν τομὰς κυκλικάς, ληπτέον

$$\text{συν}\,\varphi = 0, \quad \text{ἐφ}\,\theta = \pm \sqrt{\frac{\Pi' - \Pi}{\Pi'' - \Pi'}}.$$

Αἱ τιμαὶ αὗται ἐμφαίνουσι δύο σειρὰς ἐπιπέδων παραλλήλων τῷ ἄξονι τῶν ψ.



Ὁμοίως συλλογιζόμενοι πρὸς ἀναλόγους ὑποθέσεις, εὑρίσκομεν ὅτι, τὸ μὲν σύστημα τῶν τιμῶν

$$\text{ἡμ}\,\varphi = 0, \quad \text{ἐφ}\,\theta = \pm \sqrt{\frac{\Pi - \Pi'}{\Pi'' - \Pi}},$$

ἐμφαίνει σειρὰν ἐπιπέδων παραλλήλων τῷ ἄξονι τῶν χ· τὸ δὲ σύστημα τῶν τιμῶν

$$\text{συν}\,\theta = 0, \quad \text{ἐφ}\,\varphi = \pm \sqrt{\frac{\Pi'' - \Pi}{\Pi' - \Pi''}},$$

ἐμφαίνει σειρὰν ἐπιπέδων παραλλήλων τῷ ἄξονι τῶν z.

Λοιπόν, συνάγομεν ὅτι, ἐκ τῶν τριῶν συστημάτων τιμῶν ἅτινα ἐλάβομεν, ἓν μόνον εἶναι πάντοτε πραγματικόν. Ἐπειδὴ δὲ ἑκάστῃ ὑποθέσει $\text{συν}\theta=0$, $\text{ἡμ}\varphi=0$, $\text{συν}\varphi=0$, ἀντιστοιχοῦσι δύο τιμαὶ τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἑτέρας γωνίας, ἕπεται ὅτι, *ἀφ' ἑκάστου σημείου πάσης κέντρον ἐχούσης ἐπιφανείας δυνατὸν ἀγαγεῖν πάντοτε δύο ἐπίπεδα τέμνοντα τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ κύκλους.*

542. Ὅταν ἡ ἐπιφάνεια ἦναι ἐκ περιστροφῆς, δύο τῶν ποσοτήτων $\Pi$, $\Pi'$, $\Pi''$, ἰσοῦνται ἀλλήλαις. Ἔστω $\Pi''=\Pi'$. Αἱ λύσεις τῶν ἐξισώσεων (2), (3), καθίστανται·

$$\text{συν}\,\theta = 0, \quad \text{ἐφ}\,\varphi = \infty, \quad \text{ἢ} \quad \text{συν}\,\varphi = 0,$$

$$\text{ἡμ}\,\varphi = 0, \quad \text{ἐφ}\,\theta = \pm\sqrt{-1},$$

$$\text{συν}\,\varphi = 0, \quad \text{ἐφ}\,\theta = \infty, \quad \text{ἢ} \quad \text{συν}\,\theta = 0.$$

Τὰς δύο πραγματικὰς λύσεις συνιστῶσιν αἱ αὐταὶ τιμαὶ $\text{συν}\theta=0$, $\text{συν}\varphi=0$· δεικνύουσι δὲ ὅτι, αἱ κυκλικαὶ τομαὶ πρέπει νὰ ὦσι πρὸς ὀρθὰς τῷ ἄξονι τῶν χ, ὅστις ἐνταῦθα εἶναι ὁ τῆς περιστροφῆς.

543. Ὅταν $\Pi=\Pi'=\Pi''$, αἱ ἐξισώσεις (2), (3), ἀφ' ἑαυτῶν ἐπαληθεύονται, οἱαιδήποτε ἂν ὦσιν αἱ γωνίαι φ καὶ θ. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἡ σφαῖρα, ἐπιπέδῳ τεμνομένη, δίδει ἀείποτε κύκλον.

**544. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ ΣΤΕΡΟΥΜΕΝΑΙ ΚΕΝΤΡΟΥ.** Ἐφαρμόσωμεν τὴν προηγουμένην ἀνάλυσιν καὶ ἐπὶ τῶν τοιούτων ἐπιφανειῶν. Ἡ ἐμφαίνουσα αὐτὰς ἐξίσωσις, ἐν ἄξοσιν ὀρθογωνίοις, εἶναι

$$(\mathrm{Z}) \qquad \Pi'\psi^2 + \Pi''z^2 = 2\mathrm{K}\chi.$$

Ἡ ἀντεισαγωγὴ τῶν τιμῶν (4) δίδει ἐξαγόμενον ἔχον καὶ αὖθις τὴν μορφὴν (Α). Ἀλλ' ἐνταῦθα ἔχομεν

$$\mathrm{A} = \Pi''\,\text{ημ}^2\theta + \Pi'\,\text{συν}^2\theta\,\text{συν}^2\varphi, \qquad \mathrm{B} = -2\,\Pi'\,\text{συν}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi\,\text{συν}\,\varphi,$$

$$\Gamma = \Pi'\,\text{ημ}^2\varphi.$$

Ἵνα δὲ ᾖ κύκλος ἡ τομὴ, πρέπει νὰ ἔχωμεν,

$$\text{συν}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi\,\text{συν}\,\varphi = 0,$$

$$\Pi''\,\text{ημ}^2\theta + \Pi'\,\text{συν}^2\theta\,\text{συν}^2\varphi = \Pi'\,\text{ημ}^2\varphi.$$

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τρία συστήματα τιμῶν· ἤτοι

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{ημ}\,\varphi = 0, \\ \text{ἐφ}\,\theta = \pm\sqrt{-\dfrac{\Pi'}{\Pi''}}, \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \text{συν}\,\varphi = 0, \\ \text{ημ}\,\theta = \pm\sqrt{\dfrac{\Pi'}{\Pi''}}, \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} \text{συν}\,\theta = 0, \\ \text{ημ}\,\varphi = \pm\sqrt{\dfrac{\Pi''}{\Pi'}}. \end{cases}$$

Ὅταν τὸ παραβολοειδὲς ᾖναι ἐλλειπτικὸν, Π′ καὶ Π″ ἔχουσι τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ἐὰν τότε Π′ μείζων ᾖναι Π″, τοῦ τρίτου μόνου συστήματος αἱ τιμαὶ τῶν φ καὶ θ εἰσὶ πραγματικαί· ἀλλ' ὅταν Π′ ἐλάσσων ᾖναι Π″, μόναι τοῦ δευτέρου συστήματος αἱ τιμαὶ εἰσὶ πραγματικαί. Ἔχομεν οὕτω δύο σειρὰς ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς τῷ ΧΨ ἢ τῷ ΧΖ. Ὅταν $\Pi' = \Pi''$, τὰ δύο συστήματα ταυτίζονται, καὶ δεικνύουσιν ὅτι ἡ σειρὰ



τῶν τεμνόντων ἐπιπέδων τέμνει πρὸς ὀρθὰς τὸν ἄξονα τοῦ παραβολοειδοῦς.

Ὅταν τὸ παραβολοειδὲς ᾖναι ὑπερβολικὸν, τὰ σημεῖα τῶν συντελεστῶν Π′, Π″, διαφέρουσιν ἀλλήλων, μόνον δὲ τὸ πρῶτον σύστημα δίδει διὰ φ καὶ θ τιμὰς πραγματικάς. Ἀλλ' ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, οἱ συντελεσταὶ Α, Γ, μηδενίζονται σὺν Β, ἡ δ' ἐξίσωσις (Α) [541] καθίσταται πρωτοβάθμιος, ἐμφαίνουσα γραμμὰς εὐθείας.

545. Λοιπὸν, ἀπεδείχθη ὅτι, *ἅπασαι τῆς δευτέρας τάξεως αἱ ἐπιφάνειαι, πλὴν τοῦ παραβολοειδοῦς ὑπερβολικοῦ, τέμνονται κατὰ κύκλους διὰ σειρᾶς ἐπιπέδων παραλλήλων κατὰ δύο διευθύνσεις διαφόρους ἀγομένων.* Οὐδεμία δὲ ἐξαίρεσις ὑπάρξει, ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς ἐπὶ τοῦ παραβολοειδοῦς ὑπερβολικοῦ εὐθείας, ὡς κύκλους ὧν αἱ ἀκτῖνές εἰσιν ἄπειροι.

Παρατηρητέον ὅτι, ἡ ἰδιότης τῆς ἀντιπαραλλήλου τομῆς ἐν τῷ πλαγίῳ κώνῳ [366] εἶναι μερικὴ περίπτωσις τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

546. Τὸ ὅ,τι ἐν ἑκάστῃ ἐπιφανείᾳ τῆς δευτέρας τάξεως, τὰ δύο συστήματα ἐπιπέδων παραλλήλων, διδόντων τομὰς κυκλικὰς, εἰσὶν ἄπειρα τὸν ἀριθμὸν, συνάγομεν καὶ ἐκ τῆς ἁπλῆς παρατηρήσεως τοῦ ὅ,τι, αἱ συνθῆκαι $\mathrm{B} = 0$, $\mathrm{A} = \Gamma$, ὁρίζουσι μόνον τὰς γωνίας φ, θ, οὐχὶ δὲ καὶ τὰς συντεταγμένας α, β, γ.

Δυνάμεθα, π. χ., προσδιορίσαι οὕτω τὰς ἀτρέπτους α, β, γ, ὥστε ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων νὰ ᾖναι εἰς τὸ κέντρον τῆς τομῆς. Πρὸς τοῦτο, ἀπαιτεῖται νὰ ἔχωμεν

$$\Delta = 2\Pi''\gamma\,\text{ημ}\,\theta - 2\Pi'\beta\,\text{συν}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi + 2\Pi\alpha\,\text{συν}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi = 0,$$

$$\mathrm{E} = 2\Pi'\beta\,\text{ημ}\,\varphi + 2\Pi\alpha\,\text{συν}\,\varphi = 0.$$

Λαμβάνομεν οὕτω δύο ἐξισώσεις γραμμικὰς εἰς α, β, γ, ὅθεν συνάγομεν ὅτι· *ἐν ἑκάστῳ συστήματι τεμνόντων ἐπιπέδων, τὰ κέντρα τῶν κύκλων εἰσὶν ἅπαντα ἐν εὐθυγραμμίᾳ.* Ἐν ἄλλοις λόγοις, *ἅπασαι αἱ ἐπιφάνειαι τῆς* *δευτέρας τάξεως, πλὴν τοῦ παραβολοειδοῦς ὑπερβολικοῦ, ἀπογεννῶνται διχῶς τῇ παραλλήλῳ ἑαυτῷ κινήσει κύκλου μεταβάλλοντος ἀκτῖνα.*

## ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΔΥΟ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ.

547. 1ον. *Ὅταν δύο ἐπιφάνειαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐὰν ἡ τῆς εἰσόδου καμπύλη ἦναι ἐπίπεδος καὶ ἡ τῆς ἐξόδου εἶναι τοιαύτη.*

Λαμβάνομεν ὡς ἐπίπεδον τῶν χψ τὸ ἐπίπεδον τῆς πρώτης καμπύλης κοινῆς ἀμφοτέραις ταῖς ἐπιφανείαις. Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις τῶν δύο ἐπιφανειῶν·

(1) $A\chi^2 + A'\psi^2 + A''z^2 + B\chi\psi + B'\chi z + B''\psi z + \Gamma\chi + \Gamma'\psi + \Gamma''z + Z = 0,$

(2) $\alpha\chi^2 + \alpha'\psi^2 + \alpha''z^2 + \beta\chi\psi + \beta'\chi z + \beta''\psi z + \gamma\chi + \gamma'\psi + \gamma''z + \zeta = 0,$

Μεταξὺ τῶν συντελεστῶν πρέπει νὰ ὑπάρχωσι σχέσεις τινὲς πηγάζουσαι ἐκ τοῦ ὅτι, αἱ δύο ἐπιφάνειαι ἔχουσι μίαν καμπύλην κοινὴν κειμένην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν χψ. Τῷ ὄντι, καθιστῶντες $z = 0$, αἱ προκύπτουσαι ἐξισώσεις·

$$A\chi^2 + A'\psi^2 + B\chi\psi + \Gamma\chi + \Gamma'\psi + Z = 0,$$

$$\alpha\chi^2 + \alpha'\psi^2 + \beta\chi\psi + \gamma\chi + \gamma'\psi + \zeta = 0,$$

πρέπει νὰ ἐμφαίνωσι τὴν αὐτὴν γραμμήν, καὶ ἐπομένως οἱ συντελεσταὶ τῆς ἑτέρας δὲν πρέπει νὰ διαφέρωσι τῶν τῆς ἑτέρας, ἢ κατὰ παράγοντά τινα κοινὸν λ. Ἄρα, ἔχομεν ἀναγκαίως τὰς σχέσεις

$$A = \alpha\lambda, \quad A' = \alpha'\lambda, \quad B = \beta\lambda, \quad \Gamma = \gamma\lambda, \quad \Gamma' = \gamma'\lambda, \quad Z = \zeta\lambda.$$

Τούτου τεθέντος, ἵνα λάβωμεν πλήρη τὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιφανειῶν, συνδυάζομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτῶν (1), (2), πολυπλασιάζοντες τὴν δευτέραν ἐπὶ λ καὶ ἀφαιροῦντες αὐτὴν ἀπὸ τῆς πρώτης. Λαμβάνομεν

(3) $(A'' - \alpha''\lambda)z^2 + (B' - \beta'\lambda)\chi z + (B'' - \beta''\lambda)\psi z + (\Gamma'' - \gamma''\lambda)z = 0,$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐμφαίνει νέαν ἐπιφάνειαν περιέχουσαν ἅπαντα τὰ κοινὰ ταῖς προτεθείσαις σημεῖα· συνδυαζομένη δὲ τῇ ἑτέρα



τούτων, καταστήσει γνωστοὺς τοὺς διαφόρους κλάδους τῆς ζητουμένης τομῆς. Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις (3) ἀποσυντίθεται εἰς τὰς ἑξῆς δύο·

$$z = 0,$$

$$(A'' - \alpha''\lambda)z + (B' - \beta'\lambda)\chi + (B'' - \beta''\lambda)\psi + (\Gamma'' - \gamma''\lambda) = 0,$$

ὧν ἡ μὲν πρώτη δηλοῖ καὶ αὖθις τὴν γνωστὴν καμπύλην τῆς εἰσόδου, ἡ δὲ δευτέρα, ἐμφαίνουσα προδήλως ἐπίπεδον, οὐ δύναται, συνδυαζομένη τῇ (2), δοῦναι ἢ καμπύλην τινὰ τῆς ἐξόδου ἐπίπεδον.

Ἔν τισι περιπτώσεσιν, ἡ δευτέρα γραμμὴ ταυτίζεται τῇ πρώτῃ, ἢ ἄγεται εἰς γραμμὴν εὐθεῖαν, ἢ εἰς ἓν σημεῖον, ἢ ἀκόμη εἶναι φανταστική.

548. 2ον. *Ἐν ἐπιφανείᾳ τινὶ τῆς δευτέρας τάξεως, δύο κύκλοι οἱοιδήποτε, ἀνήκοντες εἰς δύο σειρὰς διαφόρους, κεῖνται πάντοτε ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας.*

Ἡ ἰδιότης αὕτη εἶναι ἐπέκτασις τῆς περὶ ἧς λόγος ἐν § 367, ἐπὶ τῶν ἀντιπαραλλήλων τομῶν τοῦ πλαγίου κώνου· δεικνύεται δὲ ὡς ἑξῆς.

(Σχ. 195) Ἔστω ΜΝΠΚ τὸ προτεθὲν ἐπίπεδον ἐπιφανείας τινὸς τῆς δευτέρας τάξεως, ἐφ' ὃ πρὸς ὀρθὰς εἰσὶν αἱ δύο σειραὶ ἐπιπέδων τεμνόντων τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ κύκλους. Ἔστωσαν ΜΝ, ΠΚ, αἱ διάμετροι δύο τῶν κύκλων τούτων ληφθέντων ἐν ταῖς δυσὶ σειραῖς. Φαντασθῶμεν σφαῖραν γεγραμμένην τῷ αὐτῷ κέντρῳ καὶ τῇ αὐτῇ ἀκτῖνι τοῦ ἀπὸ τῶν τριῶν σημείων Μ, Ν, Π, γραφομένου κύκλου. Φανερὸν ὅτι, ὁ κύκλος ΜΝ κεῖται ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ταύτης, ἐπομένως εἶναι μία τομὴ τῆς σφαίρας πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἐπιφάνειαν. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἡ ἑτέρα τομὴ εἶναι ἐπίπεδος καὶ ἐπομένως κύκλος· διότι ἐπὶ τῆς σφαίρας, ἅπασαι αἱ ἐπίπεδοι καμπύλαι εἰσὶ κύκλοι. Ὁ κύκλος οὗτος, ἐπειδὴ κεῖται ἐπὶ τῆς δοθείσης ἐπιφανείας καὶ διέρχεται τοῦ σημείου Π, περιλαμβάνεται ἐν μιᾷ τῶν δύο σειρῶν τῶν κυκλικῶν τομῶν. Δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι ὁ κύκλος

ΠΡ, παράλληλος τῷ κύκλῳ ΜΝ,· διότι, εἰ οὕτως εἶχεν, οἱ δύο οὗτοι κύκλοι, ὡς ἀνήκοντες τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ, ἔπρεπε νὰ ἔχωσι τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπὶ διαμέτρου καθέτου ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν, καὶ τότε αἱ χορδαὶ ΜΝ, ΠΡ, ἤθελον τέμνει πρὸς ὀρθὰς τὴν συζυγῆ αὐτῶν διάμετρον. Ἀλλὰ τοῦτο ἀδύνατον, ἐκτὸς ὅταν ἡ ἐπιφάνεια ἦναι ἐκ περιστροφῆς· ἐν τῇ περιπτώσει δὲ ταύτῃ, οἱ κύκλοι ΠΚ, ΠΡ, ἤθελον ταυτίζεσθαι. Λοιπὸν, συνάγομεν ὅτι, ἡ δευτέρα καμπύλη τῆς τομῆς εἶναι ὁ κύκλος ΠΚ.

Οὕτως ἀπεδείχθη τὸ θεώρημα.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

### ΕΠΙΠΕΔΑ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ.

549. Ἐὰν ἀπὸ σημείου δεδομένου οἱασδήποτε ἐπιφανείας, χαράξωμεν ἐπὶ ταύτης διαφόρους καμπύλας κατ' ἀρέσκειαν, καὶ ἄξωμεν ἐφαπτομένας τῶν καμπύλων τούτων κατὰ τὸ ῥηθὲν σημεῖον, *ἅπασαι αἱ εὐθεῖαι αὗται εὑρεθήσονται*, ἐν γένει, *ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου*, ὃ καλεῖται *τὸ ἐφαπτόμενον τῆς ἐπιφανείας ἐπίπεδον*. Ἡ πρότασις αὕτη δεῖται ἰδίας ἀποδείξεως· διότι δὲν ἐννοοῦμεν ἀμέσως πῶς αἱ διάφοροι ἐφαπτόμεναι δὲν σχηματίζουσι κῶνον, ὡς τῷ ὄντι συμβαίνει πρός τινα σημεῖα εἰδικὰ τινῶν ἐπιφανειῶν.

550. Θεωρήσωμεν μόνον τὰς δευτέρας τάξεως ἐπιφανείας περὶ ἃς ἰδίως ἀσχολούμεθα. Πρὸς συντομίαν τῶν λογισμῶν, λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτῶν ὑπὸ τὴν ἑξῆς μορφὴν, οὐχ ἧττον περιέχουσαν ἁπάσας,

$$(1)\qquad \mathrm{A}\chi^2+\mathrm{A}'\psi^2+\mathrm{A}''z^2+2\Gamma\chi+2\Gamma'\psi+2\Gamma''z+\mathrm{E}=0.$$

Ἔστωσαν $\chi'$, $\psi'$, $z'$, αἱ συντεταγμέναι τοῦ δοθέντος σημείου τῆς ἐπιφανείας, αἵτινες ταυτοποιοῦσι τὴν σχέσιν

$$(2)\qquad \mathrm{A}\chi'^2+\mathrm{A}'\psi'^2+\mathrm{A}''z'^2+2\Gamma\chi'+2\Gamma'\psi'+2\Gamma''z'+\mathrm{E}=0.$$

Τῇ δ' ἀφαιρέσει ἀπὸ τῆς (1) λαμβάνομεν

$$(3)\qquad \left.\begin{array}{l}\mathrm{A}(\chi^2-\chi'^2)+\mathrm{A}'(\psi^2-\psi'^2)+\mathrm{A}''(z^2-z'^2)\\ +2\Gamma(\chi-\chi')+2\Gamma'(\psi-\psi')+2\Gamma''(z-z')\end{array}\right\}=0.$$

Ἔστωσαν ἤδη

$$(4)\qquad \chi-\chi'=\alpha(z-z'),\qquad \psi-\psi'=\beta(z-z'),$$

αἱ ἐξισώσεις τεμνούσης τινὸς ἀπὸ τοῦ σημείου $(\chi', \psi', z')$ ἀγομένης. Ἵνα λάβωμεν τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἡ τέμνουσα αὕτη συμπίπτει τῇ ἐπιφανείᾳ, πρέπει νὰ συνδυάσωμεν τὰς ἐξισώσεις (3), (4). Πρὸς τοῦτο καθιστῶμεν ἐν τῇ (3) τὰς τιμὰς τῶν $\chi - \chi'$, $\psi - \psi'$, καὶ λαμβάνομεν·

$$(5) \quad (z - z') \left\{ \begin{array}{r} A\alpha(\chi + \chi') + A'\beta(\psi + \psi') + A''(z + z') \\ + 2\Gamma\alpha + 2\Gamma'\beta + 2\Gamma'' \end{array} \right\} = 0.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη, ὅσον ἀφορᾷ τὰ κοινὰ σημεῖα, ἀντικαθιστᾷ τὴν (3), ὁρίζει δὲ τὰ σημεῖα ταῦτα συνδρομῇ πάντοτε τῶν (4). Ὁ πρῶτος παράγων $z - z' = 0$, δίδει $\chi = \chi'$, $\psi = \psi'$· εὑρίσκομεν οὕτως ἐκ νέου τὸ σημεῖον ἀναχωρήσεως τῆς τεμνούσης. Τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς δίδεται ὑπὸ τοῦ συστήματος (4), καὶ

$$(6) \quad A\alpha(\chi + \chi') + A'\beta(\psi + \psi') + A''(z + z') + 2\Gamma\alpha + 2\Gamma'\beta + 2\Gamma'' = 0,$$

ἐὰν ἡ διεύθυνσις τῆς τεμνούσης ταύτης ἦτον ὡρισμένη ὑπὸ τιμῶν δεδομένων τῶν $\alpha$, $\beta$. Ἀλλ' ἐπειδὴ, ἀπ' ἐναντίας πρόκειται ὁρίσαι τὰς ἀτρέπτους ταύτας οὕτως, ὥστε ἡ εὐθεῖα νὰ ἦναι ἐφαπτομένη τῆς ἐπιφανείας, ἤτοι, ὥστε τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς νὰ συμπίπτῃ τῷ πρώτῳ, πρέπει νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι τὸ σύστημα (4), (6), ταυτοποιεῖται προσέτι ὑπὸ τῶν τιμῶν $\chi = \chi'$, $\psi = \psi'$, $z = z'$· ὅθεν προκύπτει μεταξὺ $\alpha$ καὶ $\beta$ ἡ μοναδικὴ σχέσις

$$(7) \quad A\alpha\chi' + A'\beta\psi' + A''z' + \Gamma\alpha + \Gamma'\beta + \Gamma'' = 0,$$

συνεπείᾳ τῆς ὁποίας ἡ ἑτέρα τῶν σταθερῶν $\alpha$, $\beta$, μένει κατὰ βούλησιν. Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι, δίδοντες τῇ $\alpha$ διαφόρους τιμὰς διαδοχικῶς, καὶ λογίζοντες τὰς τῇ $\beta$ συστοιχούσας ἐκ τῆς σχέσεως (7), ἕξομεν, τῇ ἀντεισαγωγῇ αὐτῶν εἰς τὰς (4), τὰς ἐξισώσεις ἀπείρου ἀριθμοῦ εὐθειῶν ἐφαπτομένων τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος σημεῖον. Ἑπομένως λαμβάνομεν τὸν γεωμετρικὸν τόπον πασῶν τῶν ἐφαπτομένων



τούτων, ἀπαλείφοντες $\alpha$ καὶ $\beta$ μεταξὺ (4) καὶ (7). Ἡ ἐργασία αὕτη δίδει τὴν ἐξίσωσιν

$$(8) \quad (A\chi' + \Gamma)(\chi - \chi') + (A'\psi' + \Gamma')(\psi - \psi') + (A''z' + \Gamma'')(z - z') = 0;$$

ἐμφαίνουσαν προδήλως ἐπίπεδον. Λοιπὸν, *καθ' ἕκαστον σημεῖον πάσης ἐπιφανείας δευτέρας τάξεως ὑπάρχει ἓν ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον.*

**551.** Παρατηρητέον ὅτι, ἐν τῇ ἐξισώσει (8) οἱ συντελεσταὶ τῶν μεταβλητῶν εἰσὶν ἀκριβῶς τὰ μερικὰ παραγόμενα τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1), ἐν οἷς αἱ μεταβληταὶ ἀντεκατεστάθησαν ὑπὸ τῶν συντεταγμένων τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς. Ἐὰν ἀναπτύξωμεν τὴν ἐξίσωσιν (8), λάβωμεν δὲ ὑπ' ὄψιν τὴν σχέσιν (2) δίδομεν τῇ ἐξισώσει τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τὴν μορφὴν

$$(9) \quad \left. \begin{array}{r} (A\chi' + \Gamma)\chi + (A'\psi' + \Gamma')\psi + (A''z' + \Gamma'')z \\ + \Gamma\chi' + \Gamma'\psi' + \Gamma''z' + E \end{array} \right\} = 0.$$

**552.** Ἐφαρμόζοντες τὴν προηγουμένην θεωρίαν ἐπὶ τὰς ἐπιφανείας, τὰς δηλουμένας ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$(E) \qquad \Pi\chi^2 + \Pi'\psi^2 + \Pi''z^2 = \Theta,$$

εὑρίσκομεν δι' ἐξίσωσιν τοῦ ἐφαπτομένου αὐτῶν ἐπιπέδου,

$$\Pi\chi'\chi + \Pi'\psi'\psi + \Pi''z'z = \Theta.$$

Ἐπίσης, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\Pi'\psi'\psi + \Pi''z'z = K(\chi + \chi'),$$

δηλοῦσαν ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον τῶν ἐπιφανειῶν ἐμφαινομένων ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$(Z) \qquad \Pi'\psi^2 + \Pi''z^2 = 2K\chi.$$

**553.** ΚΑΘΕΤΟΣ *ἐπιφανείας καλεῖται ἡ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἐφαπτομένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς ἀγομένη εὐθεῖα.* Αἱ ἐξισώσεις τῆς καθέτου ἔχουσι τὴν μορφὴν

$$\chi - \chi' = \alpha(z - z'), \qquad \psi - \psi' = \beta(z - z').$$

Ἐν ἄξοσιν ὀρθογωνίοις, ἔχομεν [441] τὰς σχέσεις

$$\alpha = \frac{X'}{Z'}, \qquad \beta = \frac{\Psi'}{Z'}.$$

ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις τῆς καθέτου, ἐν γένει, εἰσὶ

$$Z'(\chi - \chi') = X'(z - z'), \qquad Z'(\psi - \psi') = \Psi'(z - z').$$

$X'$, $\Psi'$, $Z'$, δηλοῦσι τὰ μερικὰ παραγόμενα περὶ ὧν ὁ λόγος ἐν § 551.

554. Τεθείσθω ἤδη ὅτι ζητεῖται, *ἀπὸ σημείου ἐξωτερικοῦ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην ἐπιφανείας δευτέρας τάξεως.*

Ἔστωσαν, αἱ μὲν συντεταγμέναι τοῦ δοθέντος σημείου $\chi''$, $\psi''$, $z''$, αἱ δὲ τῆς ἀγνώστου ἐπαφῆς $\chi'$, $\psi'$, $z'$. Ἐάν, π. χ., πρόκηται περὶ ἐπιφανείας ἐχούσης κέντρον, ἔχομεν, ἵνα ὁρίσωμεν τὰς τρεῖς ταύτας ἀγνώστους, τὰς δύο ἐξισώσεις·

$$\Pi\chi'^2 + \Pi'\psi'^2 + \Pi''z'^2 = \Theta, \quad \Pi\chi''\chi' + \Pi'\psi''\psi' + \Pi''z''z' = \Theta,$$

ὧν ἡ μὲν ἐμφαίνει ὅτι τὸ ἄγνωστον τῆς ἐπαφῆς σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἡ δὲ ὅτι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον διέρχεται τοῦ δοθέντος σημείου. Ἄρα, ἐν γένει, τὸ *πρόβλημα εἶναι ἀόριστον.*

Θεωροῦντες $\chi'$, $\psi'$, $z'$, ὡς μεταβλητάς, ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἐμφαίνει ἐπίπεδον, οὗτινος ἡ τομὴ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν εἶναι ὁ τόπος ὅλων τῶν σημείων ἐπαφῆς. Ἐὰν ἀπαλείψωμεν διαδοχικῶς $\psi'$ καὶ $\chi'$, μεταξὺ τῶν αὐτῶν ἐξισώσεων, ἕξομεν τὰς ἐξισώσεις τῶν προβολῶν τοῦ τόπου τούτου, ὅστις δύναται ἐπίσης νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ βάσις τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν ἐπιφάνειαν κώνου, οὗ τινος κορυφὴ εἶναι τὸ δοθὲν ἐξωτερικὸν σημεῖον. Λοιπὸν [505], *ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος καμπύλη τῆς ἐπαφῆς εἶναι ἐπίπεδος, προσέτι δευτεροβάθμιος,* ὡς ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια.

ΤΕΛΟΣ.

# ΠΙΝΑΞ
# ΤΩΝ ΕΜΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

## ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ.

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

*Περὶ προβλημάτων ὡρισμένων.*



### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

*Περὶ γεωμετρικῶν τόπων.*



### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

*Μετασχηματισμὸς τῶν συντεταγμένων.*

## ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

*Ἐπιφάνειαι τῆς δευτέρας τάξεως.*



## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄.

*Τομαὶ τῶν ἐπιφανειῶν δευτέρας τάξεως δι' ἐπιπέδων.*

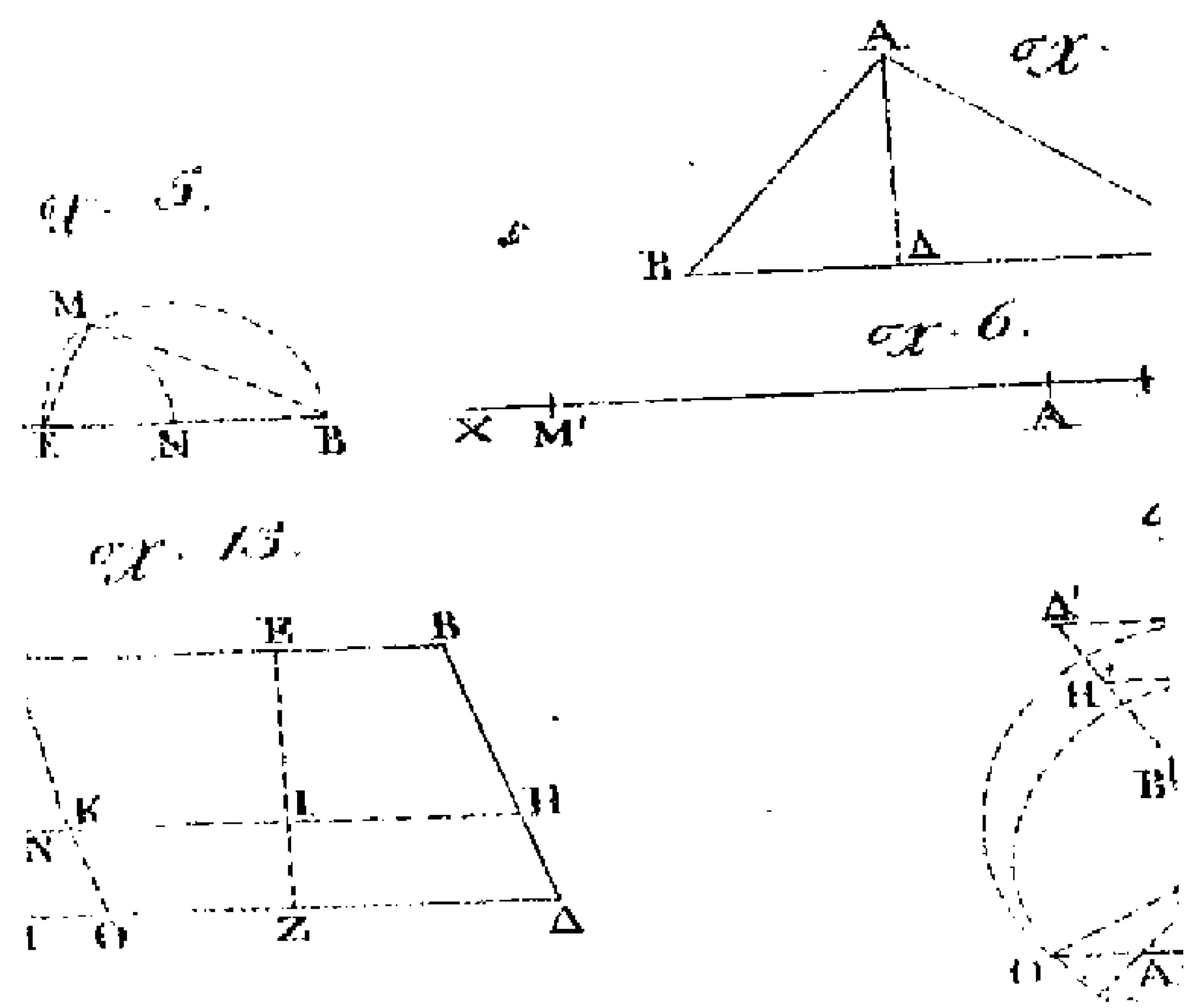


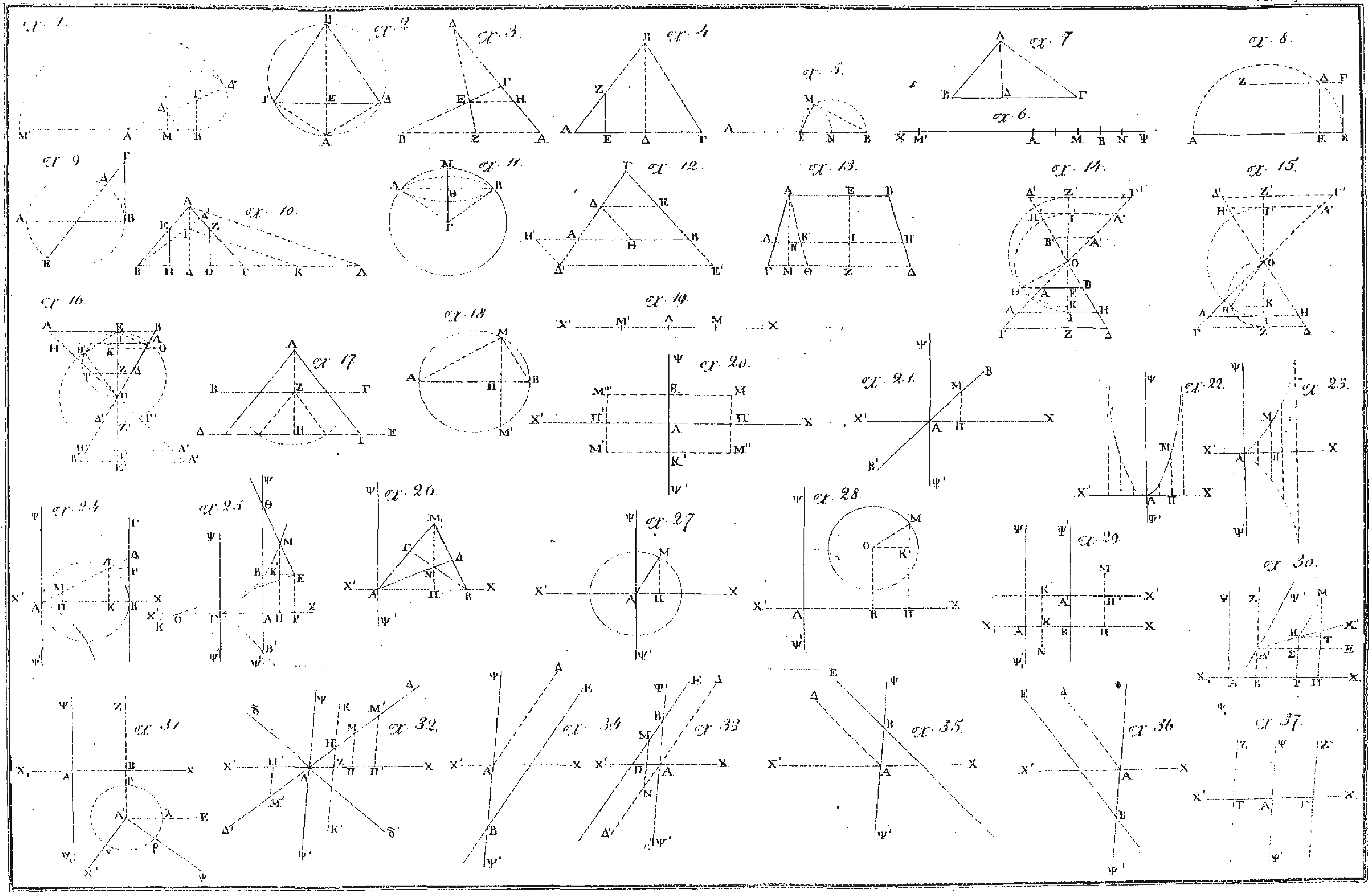
## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

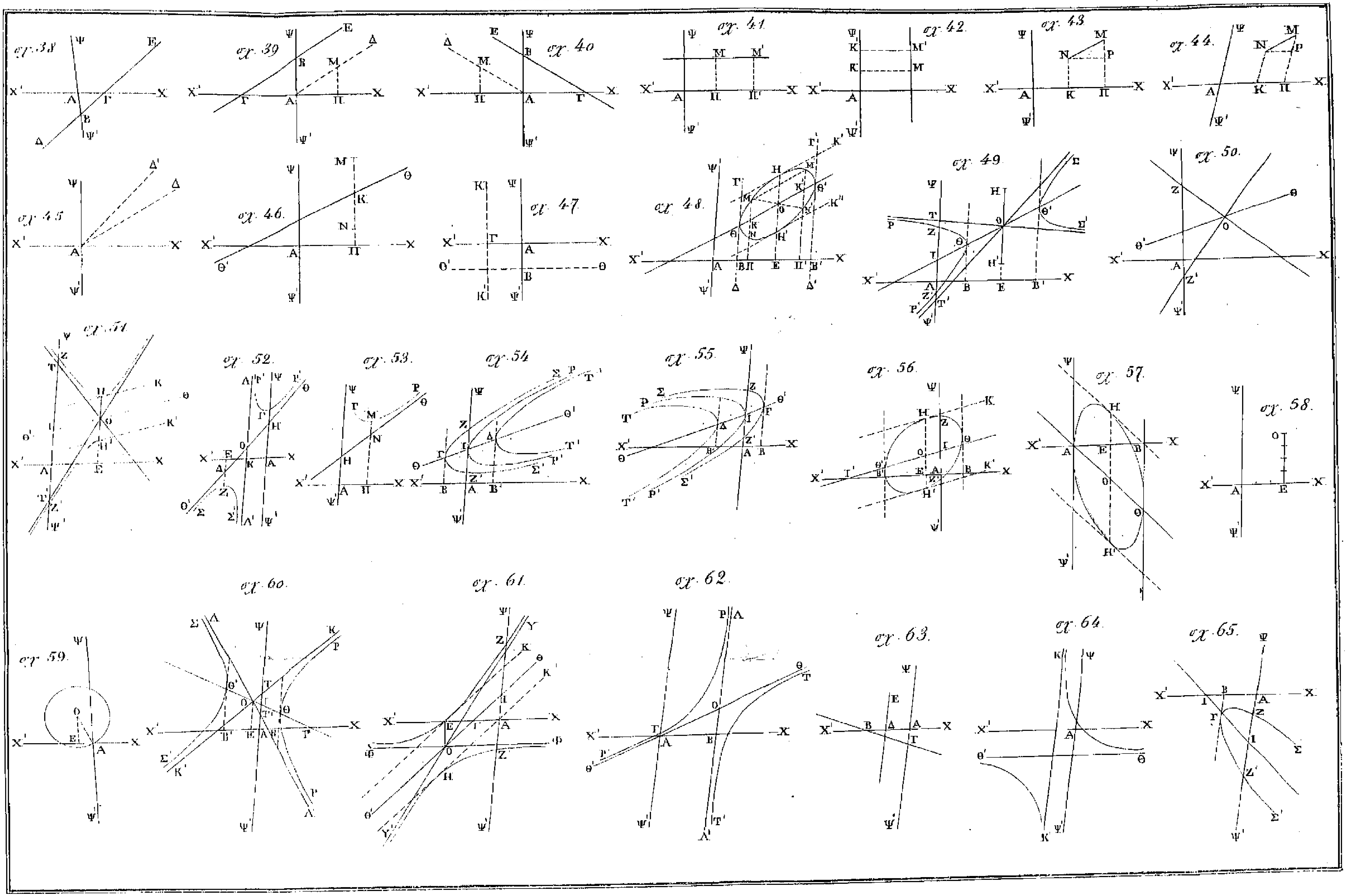


---

Πίνακες ἕξ.

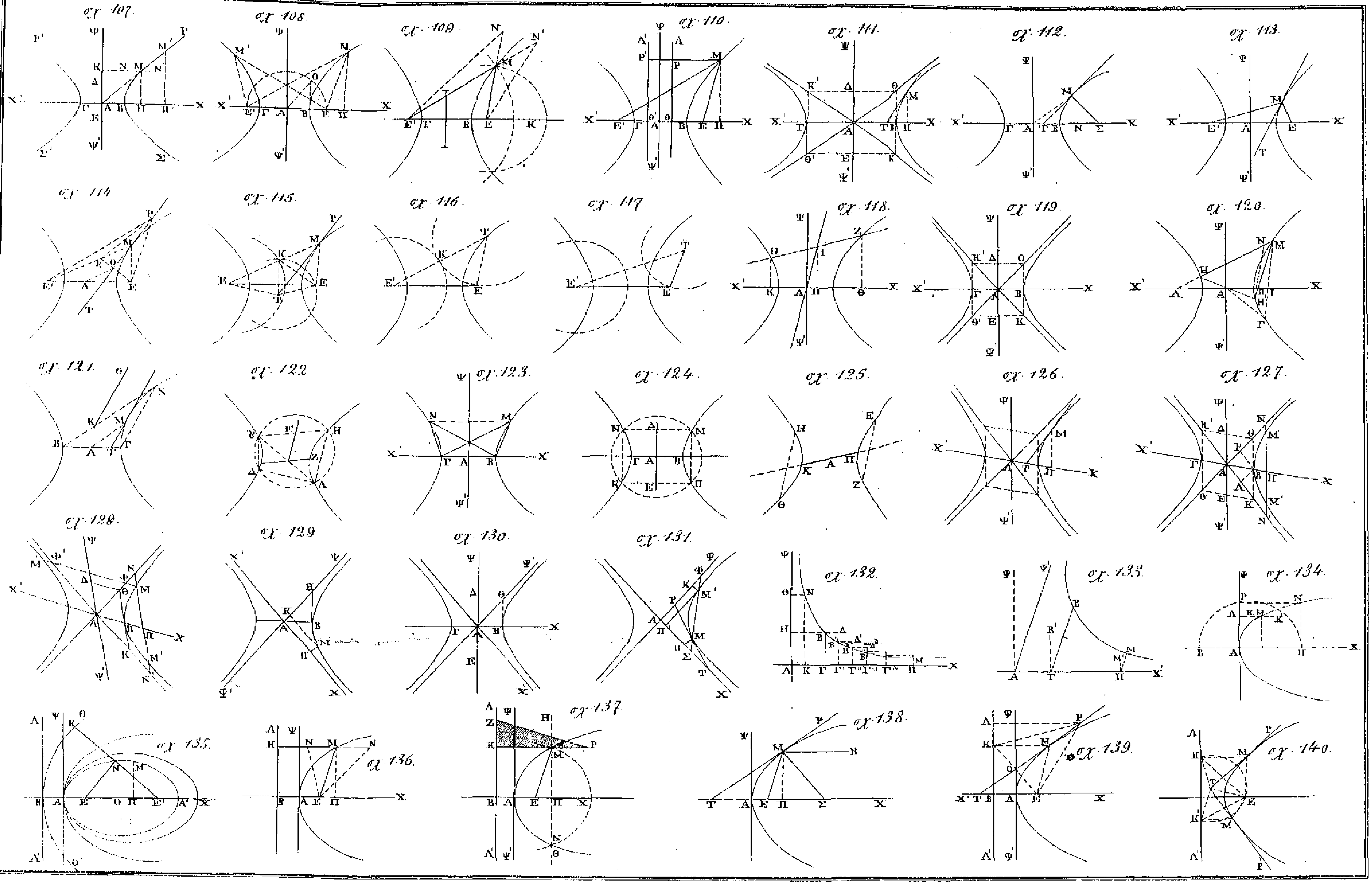


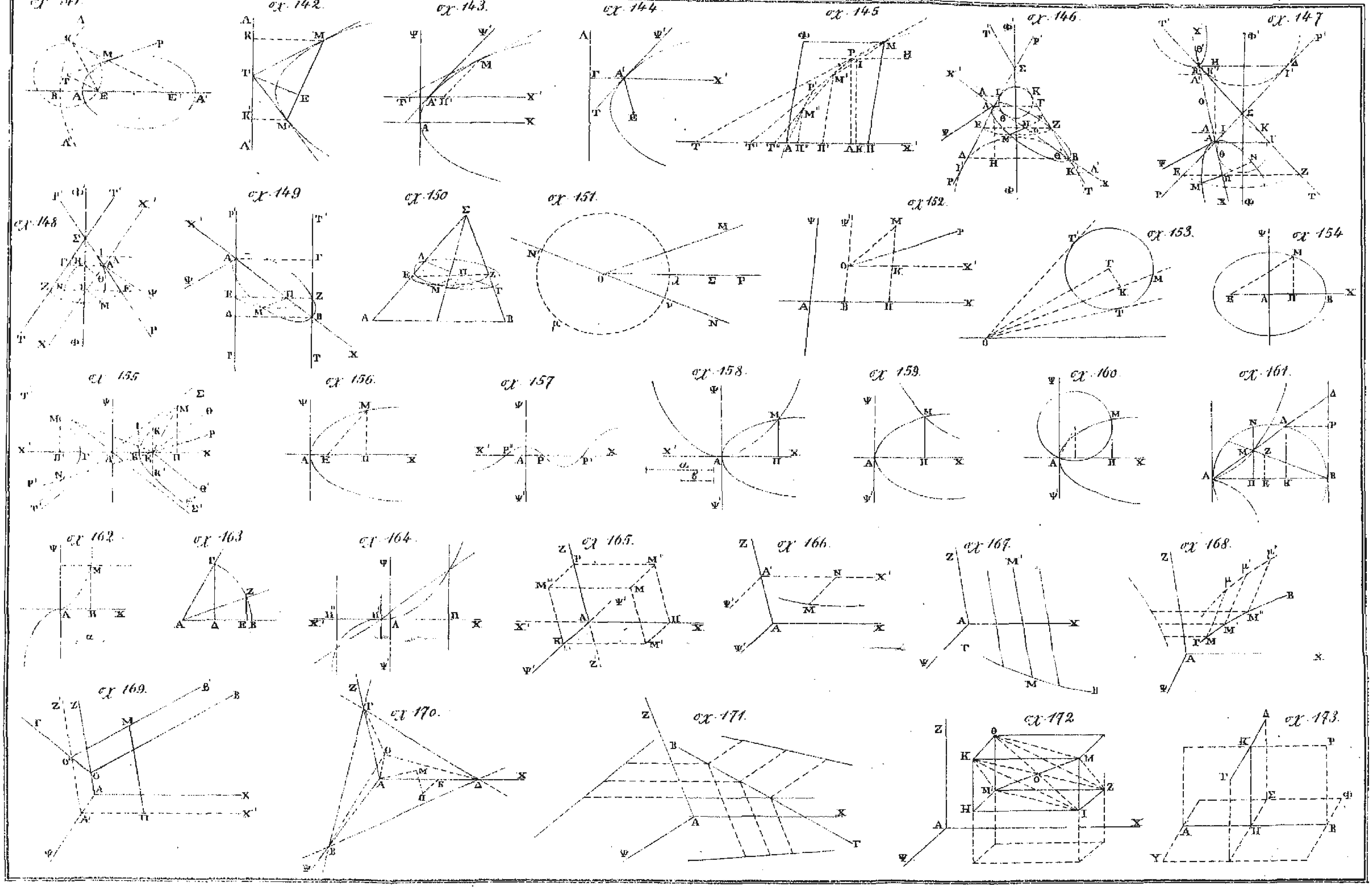

σχ. 1
σχ. 2
σχ. 3
σχ. 4
σχ. 5
σχ. 6
σχ. 7
σχ. 8
σχ. 9
σχ. 10
σχ. 11
σχ. 12
σχ. 13
σχ. 14
σχ. 15
σχ. 16
σχ. 17
σχ. 18
σχ. 19
σχ. 20
σχ. 21
σχ. 22
σχ. 23
σχ. 24
σχ. 25
σχ. 26
σχ. 27
σχ. 28
σχ. 29
σχ. 30
σχ. 31
σχ. 32
σχ. 34
σχ. 33
σχ. 35
σχ. 36
σχ. 37

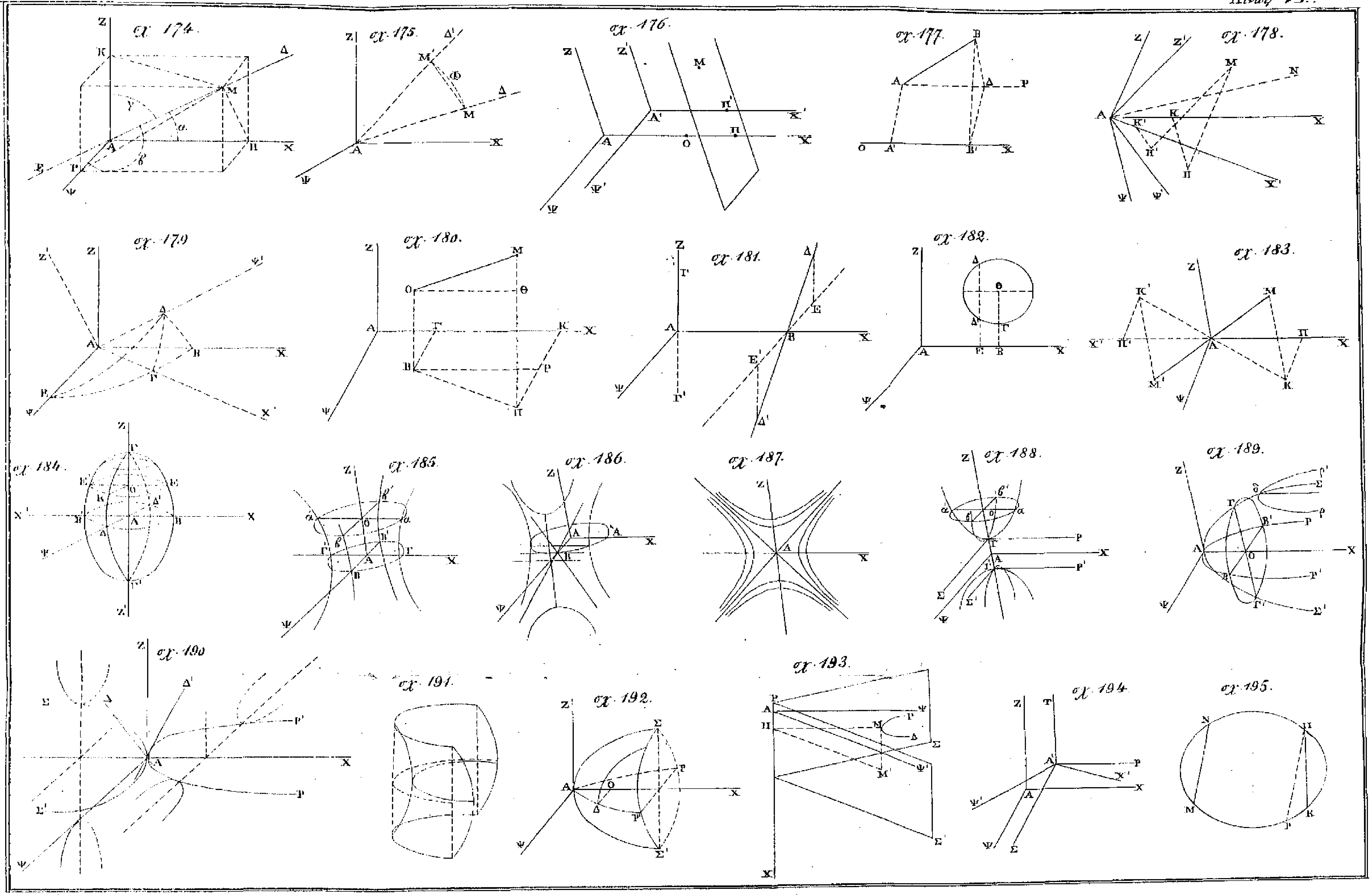

σχ. 38
σχ. 39
σχ. 40
σχ. 41
σχ. 42
σχ. 43
σχ. 44
σχ. 45
σχ. 46
σχ. 47
σχ. 48
σχ. 49
σχ. 50
σχ. 51
σχ. 52
σχ. 53
σχ. 54
σχ. 55
σχ. 56
σχ. 57
σχ. 58
σχ. 59
σχ. 60
σχ. 61
σχ. 62
σχ. 63
σχ. 64
σχ. 65

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

Πίναξ III.


σχ. 107
σχ. 108
σχ. 109
σχ. 110
σχ. 111
σχ. 112
σχ. 113
σχ. 114
σχ. 115
σχ. 116
σχ. 117
σχ. 118
σχ. 119
σχ. 120
σχ. 121
σχ. 122
σχ. 123
σχ. 124
σχ. 125
σχ. 126
σχ. 127
σχ. 128
σχ. 129
σχ. 130
σχ. 131
σχ. 132
σχ. 133
σχ. 134
σχ. 135
σχ. 136
σχ. 137
σχ. 138
σχ. 139
σχ. 140


σχ. 141.
σχ. 142.
σχ. 143.
σχ. 144.
σχ. 145.
σχ. 146.
σχ. 147.
σχ. 148.
σχ. 149.
σχ. 150.
σχ. 151.
σχ. 152.
σχ. 153.
σχ. 154.
σχ. 155.
σχ. 156.
σχ. 157.
σχ. 158.
σχ. 159.
σχ. 160.
σχ. 161.
σχ. 162.
σχ. 163.
σχ. 164.
σχ. 165.
σχ. 166.
σχ. 167.
σχ. 168.
σχ. 169.
σχ. 170.
σχ. 171.
σχ. 172.
σχ. 173.


σχ. 174.
σχ. 175.
σχ. 176.
σχ. 177.
σχ. 178.
σχ. 179.
σχ. 180.
σχ. 181.
σχ. 182.
σχ. 183.
σχ. 184.
σχ. 185.
σχ. 186.
σχ. 187.
σχ. 188.
σχ. 189.
σχ. 190.
σχ. 191.
σχ. 192.
σχ. 193.
σχ. 194.
σχ. 195.