ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ἈΡΙΘΜΗΤΙΚΗ͂Σ καὶ ἈΛΓΈΒΡΑΣ

Συνταχθέντα μὲν κατά τινα νεωτέραν, ἀξιόλογον, καὶ ἀκατάληπτον Μέθοδον

ὑπὸ τοῦ ποτὲ

... ΜΕΤΖΒΟΥΡΓ

Περιφήμου Διδασκάλου τῆς Μαθηματικῆς ἐν Βιέννῃ

Νῦν δὲ πρῶτον

Εἰς τὴν κανονικωτέραν καθ' ἡμᾶς ἁπλοελληνίδα μετενεχθέντα

μετὰ προσθήκης καί τινος μεταβολῆς

ΠΑΡΑ'

ΜΙΧΑΗ'Λ ΧΡΗΣΤΑΡΗ

Τοῦ ἐξ Ἰωαννίνων

Εἰς χρῆσιν τῶν ἐν τῇ Ἑλλάδι καὶ ἀλλαχοῦ

ἙΛΛΗΝΙΚΩ͂Ν ΣΧΟΛΕΙ͂ΩΝ,

Καὶ πρὸς κοινὴν τοῦ Γένους ὠφέλειαν.

Φιλοτίμῳ δὲ δαπάνῃ τοῦ τιμιωτάτου καὶ φιλογενοῦς

Κυρίου Κυρίου

ΕΥΣΤΑΘΕΊΟΥ ΜΙ'ΤΖΗ.

ἜΚΔΟΣΙΣ ΠΡΩ'ΤΗ

ἘΝ ΠΑΤΑΒΙΟΙΣ κατὰ τὸ 1804. ἔτος.
Ἐν τῇ Τυπογραφίᾳ τοῦ Σεμιναρίου.
Con regia approvazione.

ΤΩ͂ ΣΟΦΟΛΟΓΙΩΤΑ'ΤΩ ΔΙΔΑΣΚΑ'ΛΩ ΤΟΥ͂ Ε'Ν ΒΟΥΚΟΥΡΕΣΤΙ'ΟΙΣ

ἩΓΕΜΟΝΙΚΟΥ͂ ΓΥΜΝΑΣΙ'ΟΥ

Κυρίῳ μοι Κυρίῳ

Λ Α'Μ Π Ρ Ω Φ Ω Τ Ι Α' Δ ΗΙ

Τῷ ἐξ Ἰωαννίνων, Ἐμῷ Εὐεργέτῃ.

Ἄγε δὴ ἄγε θυμέ! μηκέτι νῦν πάπταινε, μηδ' ἔπεχε σαυτόν, ἀλλ' εἴτις σοί ποτε καθήκοντος νόμος εὐγνωμοσύνης,

νόον ὑπὸ γλυκυτά-
ταις ἔθηκε φροντίσιν,

ἀπόθου ἤδη πᾶσαν ἀναβολὴν, καὶ σπεῦσον τελέσαι ὅλῳ ποδὶ, ἣν καὶ πάλαι προεῖλου ὁμολογίαν εὐγνώμονα· ὅτι πολὺς ἤδη γενόμενος ὁ μεταξὺ χρόνος, ἴσως

ἀμὸν κατῄσχυνε βαθὺ χρέος.

σπεῦσον, φημι, ἀγαθῇ τύχῃ, καὶ οἷς ἔχεις καὶ δύνασαι, τούτοις γοῦν τὸ εὔγνωμον ἐνδεῖξαι, πρὸς ὃν πάντως οὐκ ἔλαθες σαυτὸν πολλῶν καὶ μεγάλων ἕνεκα εὐποιϊῶν κατάχρεως ὅλως γενόμενος.

Ἦ ἄρ' ἔδει με εὐεργέτα, ϗ μοι πρόξενε τῶν καλῶν! κατὰ τοὺς ἀσυντελεῖς, ἵν' οὕτως εἴπω, κηφῆνας τὸν βίον διατελεῖν, ϗ ταυτὰ πεπονθέναι τοῖς ἐν ἀμελοῦς, ὃ δὴ λέγεται, τυχὸν δὲ ϗ ἀγνώμονος, γωνίᾳ καθεύδειν προελομένοις· ἀλλὰ μὴ ϗ αὐτὸν, ἧ φασὶ, τὸν ἀπὸ γραμμῆς λίθον κινῆσαι, ὥστε μάλιστα μὲν ξυνωφελῆσαί τι κἀμὲ ἑλλήνων γένει ϗ προγόνων ἐμῶν· μάλιστα δὲ ϗ τῷ θεσπεσίῳ σου ὌΝΤΙ ὡς ἀπαρχὰς τὴν πρώτην ταυτηνὶ τῶν ἐμῶν καμάτων ἐπικαρπίαν προσενεγκεῖν· πῶς γάρ; ὅτε ϗ κατ' εὐήθειαν ἐπὶ τῆς ἱερᾶς σου ψυχῆς ὡς ἐπί τινος κρηπῖδος ἅπαξ τὴν ἐμαυτοῦ πηξάμενος καλιὰν, θαυμάσια ἡλίκα τῆς σῆς κοινωνίας ἀπολέλαυκα ἀγαθὰ, οὐ μὰ Δία μόνον ὄψα τε ϗ σίτους ϗ τράπεζαν Ἀλκινόου καλήν, οὔτε μὴν ὅσα μέχρι λαιμοῦ, τυχὸν ϗ καρδίας παρέχειν πεφύκασι τὸ ἡδύ. μόνα γὰρ τὰ τοιαῦτα μικρὰ ἄττ' ἂν εἴη, μᾶλλον δὲ μηδὲ τοῦ τυχόντος λόγου ἄξια παρὰ σοί· ἀλλὰ ϗ οἷα Μουσῶν ϗ Ἀπόλλωνος λειμῶνες ἀεννάως βρύειν εἰώθασι, ϗ ὅσα ψυχὴν ἐξημεροῖ, ϗ τρόπων ἤθη διακοσμεῖ, ϗ σωφροσύνην ἐντίθησι, ϗ ἔρωτα τῶν καλῶν ἐμποιεῖ, τὴν ἐν λόγοις λέγω παιδείαν, ὑπερτάτης ϗ θειοτάτης δυνάμεως θειότατον ϗ ὑπέρτατον δώρημα. Τοιούτων ἄρα ϗ τηλικούτων ϗ ἑτέρων ἀγαθῶν οὐκ εὐαριθμήτων προεῖλου φιλοφρόνως ποιῆσαι κἀμὲ κοινωνόν· καθάπερ ἔτι ϗ νῦν οὐ διαλείπεις πλείστην ὅσην τῶν κατ' ἐμὲ

ποιού-

ποιούμενος πρόνοιαν· εἰ δέ μοι δίδως ϗ κοινότερον ἀποτεῖναι λόγον τῆς σῆς ἀρετῆς, οὐ μόνον ἐμοὶ τοιούτου σμήνους ἀγαθῶν γέγονας πρόξενος, ἀλλὰ ϗ ἑτέροις οὐκ ὀλίγοις τῶν σῶν. Οὕτως τὴν ἀπόλαυσιν ἀφῆκας ἀκώλυτον κομιδῇ. ϗ νῦν ἔτι ἐπ' οὐδενὶ οὕτω χαίρεις, ὡς μὲν εὐποιῶν ϗ παρέχων τῶν ἐνόντων σοι ἀγαθῶν δαψιλῶς· ἀμοιβὰς δ' ἀντὶ τούτου δεχόμενος, οὐχ ὅσα φιλοῦσι ψυχαί τινες ἀγεννεῖς, ϗ τὸ αὐταῖς συμφέρον μόνον διώκουσαι, ἀλλ' ὅσα ἀρετῆς ϗ παιδείας ἐχόμενα, πρὸς τὴν κοινὴν τοῦ γένους ἀφορῶσι βελτίωσιν· τῷ δὲ σεμνῷ τοῦ Σοῦ πολιτεύματος, ϗ τῇ τοῦ λόγου δυνάμει ῥυθμίζεις ϗ βίον ϗ λόγον τῶν περὶ Σὲ σπουδαζόντων, ξύμπαντας πρὸς τοῦ ὄντως ἐφετοῦ τὴν ἐπίτευξιν τὸν ἐνόντα τρόπον παρακαλῶν. Ταύτῃ τοι τύπος μὲν ϗ ὑπογραμμὸς τῆς κατὰ τὸν βίον κοσμιότητος ἀκριβὴς, εὐδαιμονία δὲ μεγίστη τῷ γένει τυγχάνεις προκείμενος· κἀντεῦθεν ἄρα εὐδαίμονες ϗ εὐτυχεῖς ἐς τὰ μάλιστα, ὅσοι τῶν Δακῶν ϗ τῶν καθ' ἡμᾶς ἑλλήνων παῖδες χρηστῷ χρησάμενοι δαίμονι, ὡμιλήκασί Σοι, μαθητιῶντες, ϗ ὁμιλοῦντες, ὁσημέραι τῆς θαυμαστῆς τῶν λόγων Σου αὐδῆς προσακούουσι. ΣΟΙ' τοιγαροῦν φίλτατε πάτερ! (δὸς δὲ κἀμοὶ οὕτω σε διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους προσαγορεῦσαι) δικαίως προσανῆκεν ἡ τῆς βίβλου αὕτη ἀνάθεσις· ϗ ἰδοὺ ἀπέχεις μὲν ὡς τεκμήριον τῆς ἐμῆς διὰ βίου εὐγνωμοσύνης ταυτασὶ τῶν ἐμῶν πόνων τὰς

ἀπαρ-

ἀπαρχάς, χρῆμα λιτὸν μὲν ϗ πλεῖστον ὅσον τῆς ἀξίας ἀπολειπόμενον, ἀγνωμοσύνης ὅμως ἀνάμεστον ϗ ἀποδοχῆς ἴσως ὐκ ἀνάξιον, τὸ μὲν, ὅτι πρὸς διδάσκαλον εὐεργέτην, οἷος ΑΥ'ΤΟ'Σ εἶ, τὸ δὲ, ὅτι παρὰ μαθητοῦ εὐγνώμονος ἐς τὰ μάλιστα τοῦτὶ τὸ δῶρον προσάγεται· χαίροις δέ μοι διαμπερὲς, εἰς γῆρας λιπαρὸν ϗ βαθύτατον ὑπὸ τῆς πανσθενοῦς τοῦ κρείττονος δεξιᾶς περιφρουρούμενος πρὸς ἀγαλλίασιν ϗ θυμηδίαν τῶν Σῶν, ϗ πρὸς κοινὴν τοῦ γένους ὠφέλειαν!

Ἐν Παταυΐοις αωδ'.
κατὰ μῆνα ὀκτώβρ.

Ὁ ἐν μαθηταῖς εὐγνώμων
ΜΙΧΑΗ'Λ ΧΡΗΣΤΑΡΗ'Σ.

ΚΕΦΑΛΑΙΩ'ΔΗΣ ΠΙ'ΝΑΞ

Τῶν ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ περιεχομένων Κεφαλαίων.

Τῶν ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ Κεφαλαίων.

Ἐὰν ᾖς φιλομαθὴς, ἔσῃ καὶ Πολυμαθής·

Ἰσοκρ. Παραίν. πρὸς Δημόνικ.

60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69,
70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79,
80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89,
90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99.

Ἀπὸ δὲ τῶν ἑκατὸν μέχρι τῶν ἐννεακοσίων ἐννενήκοντα ἐννέα δηλοῦνται μόνον διὰ τριῶν χαρακτήρων, οἷον 100 ἑκατὸν, 101 ἑκατὸν ἕν, 102 ἑκατὸν δύω, κ. τ. ἀπὸ δὲ τῶν χιλίων μέχρι τῶν ἐννέα χιλιάδων ἐννεακοσίων ἐννενήκοντα ἐννέα ἐμφαίνονται μόνον διὰ τεσσάρων χαρακτήρων· οἷον 1000 χίλια, 1001 χίλια ἕν, 1002 χίλια δύω. κ. τ. ἀπὸ δὲ τῶν δέκα χιλιάδων μέχρι τῶν ἐννενήκοντα ἐννέα χιλιάδων ἐννεακοσίων ἐννενήκοντα ἐννέα γράφονται μὲ πέντε χαρακτῆρας· οἷον 10000 δέκα χιλιάδες, 10001 δέκα χιλιάδες καὶ ἕν, 1000, δέκα χιλιάδες καὶ δύω. κ. τ. καὶ ἐν ἑνὶ λόγῳ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον χωροῦσιν οἱ ἀριθμοὶ ἐφεξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ β'.

§. 14. Ἕκαστος ἄρα χαρακτὴρ δύναται νὰ λάβῃ ἐκ τῆς κατὰ τόπον θέσεως δεκαπλασίαν αὔξησιν, τουτέστιν ὁ αὐτὸς χαρακτὴρ ἐν τῷ δευτέρῳ τόπῳ ἐπὶ τὰ ἀριστερὰ τεθειμένος, γίνεται σημαντικὸς τοσούτων Δεκάδων, ὅσας Μονάδας ἐμφαίνει ἐν τῷ πρώτῳ ὑποκείμενος, τεθειμένος δὲ ἐν τῷ τρίτῳ τόπῳ, γίνεται σημαντικὸς τοσούτων Ἑκατοντάδων, ὅσας Δεκάδας σημαίνει ἐν τῷ δευτέρῳ τόπῳ ὤν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ γ'.

§. 15. Τὰ Ἑκατὸν ἄρα, ἢ ἡ Ἑκατοντὰς εἶναι δεκάκις δέκα Μονάδες· τὰ δὲ χίλια, ἢ ἡ χιλιὰς εἶναι δεκάκις Ἑκατὸν, ἢ ἑκατοντάκις δέκα· τὸ δὲ Μιλλιόνιον εἶναι δεκάκις ἑκατὸν χιλιάδες, ἢ χιλιάκις χίλια. τὸ δὲ Διλλιόνιον εἶναι δεκάκις ἑκατὸν χιλιάδες Μιλλιονίων, ἢ χιλιάκις χίλια Μιλλιόνια. τὸ δὲ Τριλλιόνιον εἶναι δεκάκις ἑκατὸν χιλιάδες Διλλιονίων, ἢ χιλιάκις χίλια Διλλιόνια, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΠΡΟ´ΒΛΗΜΑ ά.

§. 16. Νὰ ἀπαγγέλλωμεν, ἢ νὰ προφέρωμεν ὁποιονδήποτε ἀριθμὸν κατὰ τὴν προσταχθεῖσαν τοπικὴν Σημασίαν τῶν χαρακτήρων.

ΠΡΑΚΤΕ´Α.

Α᾽ν μὲν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ δύω, ἢ τρεῖς χαρακτῆρας μόνον, καὶ ἑπομένως σημαίνῃ ἔλαττον χιλιάδος, ἀρχόμεθα εὐθὺς ἀπὸ τοῦ μείζονος χαρακτῆρος, τουτέστιν ἀριστερόθεν, καὶ χωροῦμεν ἐπὶ τὰ δεξιὰ, ἐπαριθμοῦντες, καὶ ἐκφράζοντες τὴν δύναμιν ἑκάστου χαρακτῆρος κατὰ τὰ προδιδαχθέντα (§. 11.). π. χ. ἐπὶ μὲν τοῦ 28. λέγομεν „ εἴκοσι ὀκτὼ, ἐπὶ δὲ τοῦ 428 λέγομεν „ τετρακόσια εἴκοσι ὀκτώ. κ. τ.

Ο῞τε δὲ τις ἀριθμὸς συνίσταται ἐκ πλειόνων χαρακτήρων, ἀρχόμεθα πρῶτον ἀπὸ τῶν δεξιῶν, καὶ διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς (,) χωρίζομεν εἰς Κλάσεις ὅλον τὸν ἀριθμὸν ἀνὰ τρεῖς χαρακτῆρας, καθὼς προείρηται (§. 11.), καὶ καθὼς κατωτέρω ἐν τοῖς Παραδείγμασιν ὁρᾶται τοῦτο σαφέστερον. ἔπειτα ἐπάνω μὲν τοῦ τετάρτου χαρακτῆρος (ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἄρχεται καὶ ἡ δευτέρα Κλάσις, τουτέστιν ἡ Κλάσις τῶν χιλιάδων) γράφομεν πρὸς διάγνωσιν μίαν στιγμὴν, οἷον (.)· ἐπὶ δὲ τοῦ ἑβδόμου χαρακτῆρος (ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἄρχεται ἡ τρίτη Κλάσις, τουτέστιν ἡ Κλάσις τῶν Μιλλιονίων) γράφομεν ἓν Γραμμικὸν Σημεῖον· οἷον (´), ἐπάνω δὲ τοῦ δεκάτου χαρακτῆρος (ἐκ τοῦ ὁποίου ἄρχεται καὶ ἡ τετάρτη Κλάσις, τουτέστιν ἡ Κλάσις τῶν χιλιάδων Μιλλιονίων) θέτομεν αὖθις μίαν στιγμὴν (·) ἐπὶ δὲ τοῦ δεκάτου τρίτου χαρακτῆρος (ἀφ᾽ οὗ ἄρχεται καὶ ἡ πέμπτη Κλάσις, τουτέστιν ἡ Κλάσις τῶν Διλλιονίων) γράφομεν δύο Γραμμικὰ Σημεῖα (´´). ἐπάνω δὲ τοῦ δεκάτου ἕκτου χαρακτῆρος. (ἐκ τοῦ ὁποίου ἄρχεται ἡ Κλάσις τῶν χιλιάδων Διλλιονίων) γράφομεν πάλιν μίαν στιγμὴν, καὶ οὕτω περαιτέρω ἀκολουθοῦμεν, διακρίνοντες, καὶ διαγινώσκοντες τὰς Κλάσεις διὰ τῆς στιγμῆς, καὶ διὰ τῶν Γραμμικῶν Σημείων, ὥστε ὅπου εἶναι χιλιάδες, ἐπιγράφομεν μίαν στιγμὴν, ὅπου δὲ εἶναι Μιλλιόνια, ἐπιγράφομεν μόνον ἓν Γραμμικὸν Σημεῖον, ὅπου δὲ ἐννοοῦνται Διλλιόνια, ἐπιθέτομεν δύω Γραμμικὰ Σημεῖα· ὅπου δὲ εἰσὶν Τριλλιόνια, ἐπιγράφομεν τρία, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. τέλος δὲ ἀριθμοῦμεν τὸν ἀριθμὸν, κάμνοντες ἀρχὴν ἀριστερόθεν, τουτέστιν ἀπὸ τοῦ μείζονος χαρακτῆρος, καὶ προφέροντες τὴν δύναμιν ἑκάστου χαρακτῆρος κατὰ τὰ ἐν τῷ (§. 11.) προτεθέντα.

Πρὸς Παράδειγμα ἔστω ὁ ἀριθμὸς 4134685427325. ὅθεν χωρίζομεν πρῶτον εἰς Κλάσεις τοὺς χαρακτῆρας ἀνὰ τρεῖς, καὶ ἐπιγράφομεν ἑκάστῃ Κλάσει τὰ προσήκοντα Σημεῖα· οἷον 4´´, 134·, 685´, 427·, 325.

Ε᾽πειτα ἀρξάμενοι ἀπὸ τοῦ μείζονος χαρακτῆρος, τουτέστιν ἀπὸ τοῦ 4´´, ἀριθμοῦμεν οὕτως „ τέσσαρα Διλλιόνια, ἑκατὸν τριάκοντα τέσσαρες χιλιάδες, ἑξακόσια ὀγδοήκοντα πέντε Μιλλιόνια, τετρακόσιαι εἴκοσι ἑπτὰ χιλιάδες καὶ τριακόσια εἴκοσι πέντε.

Κατὰ τοὺς Ι᾽δίους Κανόνας ἀριθμοῦμεν καὶ τοὺς ἀκολούθους ἀριθμοὺς, οἷον τὸν

8568437659284327 94

ὁμοίως καὶ τὸν

745386427943 69845.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ α'.

§. 17. Ἡ τελευταία πρὸς τὰ ἀριστερὰ Κλάσις δύναται νὰ περιέχῃ ϗ ἕνα μόνον χαρακτῆρα, ἢ δύω, καθὼς ϗ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ Παραδείγματι ἔτυχε.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ β'.

§. 18. Πρέπει ἔτι νὰ προσέχωμεν ϗ τὰ ἑξῆς, ὅτι ἐν τοῖς ἀριθμοῖς τυγχάνουσι πολλάκις μεταξὺ καὶ τινες τόποι κενοὶ χαρακτήρων, τοὺς ὁποίους σημειοῦμεν διὰ τῶν Μηδενικῶν, ϗ ἐν τῇ ἀριθμήσει δὲν τοὺς ἀπαγγέλλομεν· οἷον 307 τριακόσια ἑπτά. 4003 τέσσαρες χιλιάδες ϗ τρία. κ. τ.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ γ'.

§. 19. Γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, καθ' ὃν ἀριθμοῦμεν αὐτούς, ἀπαγγέλλοντες τὴν δύναμιν τῶν χαρακτήρων, ἤτοι γράφομεν ἕκαστον ἀριθμόν, ἀρχόμενοι ἀριστερόθεν ἀπὸ τοῦ μείζονος χαρακτῆρος, ϗ χωροῦντες ἐπὶ τὰ δεξιά. οἷον ἂν ἔχωμεν νὰ γράψωμεν ἕνα ἀριθμόν, ὅστις σημαίνει, φέρ' εἰπεῖν, δύω Μιλλιόνια, πεντακοσίας ἐννενήκοντα τρεῖς χιλιάδας, καὶ ἑπτακόσια τεσσαράκοντα ὀκτώ, ἀρχόμεθα ἀπὸ τοῦ χαρακτῆρος 2, ϗ ἐκθέτομεν τοῦτον τὸν ἀριθμὸν οὕτως· 2', 593', 748, κ. τ. Ὅταν δὲ εἰς τινὰ Κλάσιν ἐλλείπῃ ἀριθμὸς τῆς Μονάδων, ἢ Δεκάδων, ἢ Ἑκατοντάδων, ἀναπληροῦμεν τότε τὴν ἔλλειψιν μὲ Μηδενικά, ὡς ϗ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ Σχολίῳ εἴρηται, οἷον ἂν ἔχωμεν νὰ γράψωμεν ἑκατὸν Μιλλιόνια, τετρακοσίας πέντε χιλιάδας, ϗ ἑπτακόσια δύω, γράφομεν πρῶτον τὴν Κλάσιν τῶν Μιλλιονίων οὕτως 100', ἔπειτα γράφομεν τὴν Κλάσιν τῶν χιλιάδων οὕτως 405, καὶ τελευταῖον γράφομεν τὴν Κλάσιν τῶν Μονάδων οὕτως 702, ὥστε προκύπτει οὕτως ὁ ἀριθμὸς 100', 405', 702. κ. τ.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ δ'.

§. 20. Ἡ μετ' ἀλλήλων ἕνωσις τῶν Μονάδων, ἢ ἀριθμῶν ἀποτελεῖται κατὰ δύω τρόπους, τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος ὀνομάζεται Σύναψις, ὁ δεύτερος λέγεται Πολλαπλασιασμός, καθὼς δὴ ϗ ἡ ἀπ' ἀλλήλων διαχώρισις αὐτῶν γίνεται κατ' ἄλλους δύω τρόπους, τῶν ὁποίων ὁ μὲν πρῶτος ὀνομάζεται Ἀφαίρεσις, ὁ δὲ δεύτερος καλεῖται Διαίρεσις. ὥστε οἱ ἀριθμοὶ ὑπόκεινται εἰς τέσσαρα εἴδη Ἐργασίας, ἢ Πράξεως, τὰ ὁποῖα ϗ Πάθη ὀνομάζουσί τινες τῶν περὶ τὴν ἀριθμητικὴν πραγματείαν ἐνασχολουμένων, περὶ ἑκάστου τούτων ἀρχόμεθα ἤδη ϗ ἡμεῖς νὰ πραγματευθῶμεν πλατύτερον, ϗ νὰ δώσωμεν ἰδίους Κανόνας.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ β'.

Περὶ τῶν ἀριθμητικῶν Πράξεων, ἢ λογισμῶν.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ α'.

§. 21. Σύναψις, ἢ Πρόσθεσις ἐστὶν ἕνωσις δύω, ἢ πλειόνων ἀριθμῶν εἰς ἓν ὅλον ἴσον τοῖς συναπτομένοις.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ β'.

§. 22. Οἱ συναπτόμενοι ἀριθμοὶ ὀνομάζονται Συναπτέοι, ἢ Προσθετέοι· ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις προκύπτει ἐκ τῆς Συνάψεως τούτων, καλεῖται Συμποσούμενον, ἢ Κεφάλαιον, ἢ ἄθροισμα.

ΠΡΟ´ΒΛΗΜΑ ά.

§. 23. Νὰ συνάπτωμεν τοὺς διδομένους ἀριθμούς.

ΠΡΑΚΤΕ´Α ἢ ΛΥ´ΣΙΣ.

Καν. ά.) Γράφομεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς σχεδὸν οὕτως, ὥστε οἱ μὲν τῶν Μονάδων Σημαντικοὶ χαρακτῆρες νὰ εἶναι ὑπὸ τοὺς χαρακτῆρας τῶν Μονάδων, οἱ δὲ τῶν Δεκάδων ὡσαύτως ὑπὸ τοὺς χαρακτῆρας τῶν Δεκάδων, οἱ δὲ τῶν Ἑκατοντάδων ὑπὸ τοὺς Ἑκατοντάδων χαρακτῆρας, ϗ οὕτως ἐφεξῆς.

Καν. β´.) Ἄγομεν ὑποκάτω αὐτῶν μίαν Εὐθεῖαν Γραμμήν, διὰ νὰ γράφωμεν τὸ Συμποσούμενον ὑπ᾽ αὐτὴν ἄνευ συγχύσεως.

Καν. γ´.) Ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς πρώτης στήλης, τῶν Μονάδων, ἀθροίζομεν ὁμοῦ τοὺς χαρακτῆρας αὐτῶν, ϗ ἂν μὲν τὸ ἐκ τῶν Μονάδων ἀθροισθὲν δύναται νὰ ἐκφραστῇ δι᾽ ἑνὸς μόνου χαρακτῆρος, τουτέστιν ἂν τὸ ἀθροιζόμενον εἶναι ἔλαττον τῶν δέκα, γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Μονάδων κάτωθεν τῆς Γραμμῆς· ὅτι ὅμως εἶναι μεῖζον τοῦ δέκα, ϗ ἑπομένως πρέπει νὰ ἐκτεθῇ μὲ δύο, ἢ ϗ μὲ πλείονας χαρακτῆρας, τότε ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Μονάδων γράφομεν μόνον τὸ ὑπερεκπίπτον τῶν Δεκάδων, λέγω τὸν χαρακτῆρα τὸν σημαίνοντα μόνον ἁπλᾶς Μονάδας, τὸ δὲ λοιπὸν, τὸ ὁποῖον ἔσται Δεκάδων σημαντικὸν, μεταφέρομεν εἰς τὴν δευτέραν στήλην, ὅπου εἰσὶν γεγραμμένοι οἱ χαρακτῆρες οἱ τῶν Δεκάδων σημαντικοί, ϗ τότε ἀθροίζομεν αὐτὸ μετὰ τούτων, ϗ ἂν τὸ ἐκ τῶν Δεκάδων ἀθροισθὲν δύναται νὰ ἐκδηλωθῇ δι᾽ ἑνὸς μόνου

χαρακτῆρος, γράφομεν αὐτὸ ὡσαύτως ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Δεκάδων· ὅταν ὅμως ἄλλως ἔχῃ, τότε γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Δεκάδων μόνον τὸν χαρακτῆρα τὸν σημαίνοντα τὸ ὑπερεκπίπτον, τὸν δὲ χαρακτῆρα τὸν σημαντικὸν τοῦ λοιποῦ, ἐπειδὴ ἐπέχει τόπον Ἑκατοντάδων, μεταφέρομεν εἰς τὴν τρίτην στήλην, ὅπου εἰσὶν γεγραμμένοι οἱ χαρακτῆρες τῶν Ἑκατοντάδων, ϗ συνάπτομεν αὐτὸν μετὰ τούτων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὁ ὁποῖος ϗ περὶ τῶν Μονάδων, ϗ Δεκάδων εἴρηται, οὕτω δὲ ποιοῦμεν ϗ περὶ τῶν χιλιάδων, ϗ περὶ τῶν ἑξῆς. καθὼς ϗ ἐν τοῖς ἑπομένοις Παραδείγμασι καθορᾶται ὁ τρόπος σαφέστατα.

ΠΑΡΑ´ΔΕΙΓΜΑ ά.

Ἔστωσαν συναπτέοι οὗτοι οἱ ἀριθμοὶ 242, 2423, 1214. ὅθεν ποιοῦμεν

242	4, 3, ϗ 2 εἰσὶν 9 Μονάδες. 1 δὲ
2423	ϗ 2, ϗ 4 εἰσὶν 7 Δεκάδες. 2 δὲ
1214	ϗ 4, ϗ 2 εἰσὶν 8 Ἑκατοντάδες. 1 δὲ
———	ϗ 2, εἰσὶν μόνον 3 χιλιάδες.
3879	τὸ Συμποσούμενον, ἢ τὸ Κεφάλαιον.

ΠΑΡΑ´ΔΕΙΓΜΑ β´.

Ἔστωσαν Συναπτέοι οὗτοι οἱ ἀριθμοὶ 3564, 4878, 7345, ϗ 8596. ὅθεν

3564	6 ϗ 5 γίνονται 11, ϗ 8 σὺν αὐτοῖς, γίνονται
4878	19 ϗ 4 γίνονται 23. ἀλλ᾽ ἐπειδὴ οὗτος ὁ 23
7345	σύγκειται ἐκ δύω χαρακτήρων, τῶν ὁποίων ὁ μὲν
8596	3 σημαίνει ἐνταῦθα Τρεῖς Μονάδας, ὁ δὲ 2 εἶναι
	δύω Δεκάδων σημαντικός, διὰ τοῦτο τὸν μὲν 3
———	γράφομεν μόνον ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Μονάδων,
24383	τὸν δὲ 2 ἀριθμοῦμεν εἰς τὴν τάξιν τῶν Δεκάδων,

ὥστε 2 ϗ 9, ϗ 4, ϗ 7, ϗ 6 ὁμοῦ ἀθροισθέντα παρέχουσιν 28. ἀλλ' ἐπειδὴ ϗ οὗτος ὁ 28 σύγκειται ἐκ δύο χαρακτήρων, τῶν ὁποίων ὁ μὲν 8 σημαίνει ὀκτὼ Δεκάδας, ὁ δὲ 2 ἐμφαίνει δύο Ἑκατοντάδας, διά τοι τοῦτο μόνον τὸν 8 γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Δεκάδων, τὸν δὲ 2 ἀριθμοῦμεν μὲ τοὺς χαρακτῆρας τοὺς Ἑκατοντάδων Σημαντικούς· ὥστε 2 ϗ 5 ϗ 3 ϗ 8 ϗ 5 ὁμοῦ ληφθέντες ποιοῦσιν 23. ὅθεν διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸν μὲν 3 γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Ἑκατοντάδων, τὸν δὲ 2, ἐπειδὴ ἐπέχει τόπον χιλιάδων, ἀριθμοῦμεν μετὰ τῶν χιλιάδων κ. τ. ὥστε ὅλον τὸ συμποσούμενον εἶναι 24383.

ἈΠΌΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ Σύναψις εἶναι μία ἕνωσις, ἢ Συνάθροισις πολλῶν ἀριθμῶν εἰς ἓν ὅλον Ἴσον τοῖς δοθεῖσιν (§. 21.). ἀλλὰ μὴν ἐνταῦθα ἡ Σύναψις τῶν Μονάδων, Δεκάδων, Ἑκατοντάδων κ. τ. γέγονε κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἔστι δὲ ϗ τὸ εὑρεθὲν συμποσούμενον Ἴσον μὲ τοὺς δοθέντας ἀριθμούς. τὸ πραχθὲν ἄρα γέγονε κατὰ τὸ δέον.

ΣΧΌΛΙΟΝ ά.

§. 24. Ὅταν τύχωσι πολλαὶ αἱ Σειραὶ τῶν συναπτέων ἀριθμῶν, ϗ θέλῃ τις νὰ συνάψῃ αὐτὰς μεθοδικώτερον ϗ εὐκολώτερον ἄνευ συγχύσεως, ἀθροίζει πρῶτον τὰς Σειρὰς ἀνὰ τέσσαρας, ἢ ἀνὰ πέντε, κατὰ τὸν ἐν τῷ Προβλήματι (§. 23.) προτεθέντα τρίτον Κανόνα, ϗ τὰ ἐκ τούτων μερικὰ Συμποσούμενα καταγράφει ἐπὶ τὰ δεξιὰ σχεδὸν, ἔπειτα ἀθροίζει αὐτὰ εἰς ἓν γενικώτερον Κεφάλαιον, ὡς ἐν τῷ ἀκολούθῳ καθορᾶται Παραδείγματι

29		
57		
118		
49		
. . . . .	253	τὰ μερικὰ Συμποσούμενα
79		
88		
109		
58		
. . . . .	334	
28		
99		
19		
59		
. . . . .	205	
	792	τὸ ἐξ αὐτῶν Συμποσούμενον, ἢ Κεφάλαιον.

ΣΧΌΛΙΟΝ β.

§. 25. Ὅταν οἱ χαρακτῆρες οἱ τῶν Μονάδων Σημαντικοὶ ἀθροισθέντες ὁμοῦ, ποιῶσι τὸν 10, ἢ 20, ἢ 30, ἢ ἄλλον τοιοῦτον ἀριθμόν, τότε γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Μονάδων μόνον τὸ Μηδενικὸν 0, τὸν δὲ λοιπὸν χαρακτῆρα ὡς Δεκάδων Σημαντικὸν ἀριθμοῦμεν μετὰ τῶν χαρακτήρων τῶν Δεκάδων, ϗ αὐτὸ τοῦτο ποιοῦμεν ϗ περὶ τῶν λοιπῶν, ὡς

$$\begin{array}{r} 38542 \\ 19653 \\ 96475 \\ \hline 15670. \end{array}$$

ΣΧΌ-

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ γ'.

§. 26. Ὅταν δὲ ἀθροίζοντες [illegible] Μηδενικὰ [illegible] Μηδενικὸν [illegible] Μηδενικὰ [illegible] Μηδενικὸν [illegible] Μηδενικὸν [illegible] Μηδενικῶν, ὡς

30706
40502
10300
———
81508

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ δ'.

§. 27. Πολλοὶ [illegible] Βάσανον [illegible] Βάσανον [illegible] Συνάψεως [illegible] Βάσανος [illegible] Συνάψεως [illegible] ἀριθμὸς [illegible] Βάσανος [illegible] πρόβλημα προάγωμεν.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ ε'.

§. 28. Ὁ λόγος ἕως ὧδε περὶ τῶν Ὁμοειδῶν μόνον ἐγένετο· περὶ δὲ τῆς προσαθροίσεως τῶν Ἑτεροειδῶν θέλομεν ὁμιλήσει μετὰ μικρὸν ὕστερον, ὅτε καὶ περὶ τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις ἔχομεν ἐντελέστερον.

ΟΡΙΣΜΟ'Σ γ'.

§. 29. Ἀφαίρεσις καλεῖται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας μεταξὺ δύω ἀριθμῶν εὑρίσκεται ἕτερος ἀριθμὸς δεικνύων τὴν ὑπεροχὴν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ μείζων ἀριθμὸς ὑπερέχει τοῦ ἐλάττονος. τούτων ὁ μὲν μείζων καλεῖται ἀριθμὸς ἐλαττούμενος, ἢ ἐλαττωτέος, ὁ δὲ ἐλάττων λέγεται ἀφαιρούμενος, ἢ ἀφαιρετέος, ἡ δὲ μεταξὺ τούτων θεωρουμένη ὑπεροχὴ καλεῖται Διαφορά.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ β'.

§. 30. Νὰ ἀφαιρῶμεν τινὰ ἐλάσσονα ἀριθμὸν ἀφ' ἑτέρου τινὸς μείζονος.

ΠΡΑΚΤΕ'Α ἢ ΛΥ'ΣΙΣ.

α'.) Γράφομεν τὸν ἐλάττονα ὑποκάτω τοῦ μείζονος οὕτως, ὥστε αἱ μὲν Μονάδες νὰ ὑπάρχωσιν ὑπὸ τὰς Μονάδας, αἱ δὲ Δεκάδες ὑπὸ τὰς Δεκάδας, καὶ ἐν ἑνὶ λόγῳ θέτομεν τοὺς χαρακτῆρας κατὰ τὴν περὶ Συνάψεως εἰρημένην τάξιν.

β'.) Ἀρχόμενοι ἐκ τῶν δεξιῶν, ἀφαιροῦμεν τὰς Μονάδας τοῦ ἐλάττονος ἀπὸ τῶν Μονάδων τοῦ μείζονος, τὴν

τὴν δὲ τοιαύτην Διαφορὰν γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Μονάδων ὑποκάτω τῆς Γραμμῆς. ἀφαιρῶμεν ὡσαύτως τὰς Δεκάδας ἀπὸ τῶν Δεκάδων, καὶ τὰς Ἑκατοντάδας ἀπὸ τῶν Ἑκατοντάδων καὶ ἐφεξῆς, γράφοντες τὰ ἐναπομενόμενα καταλλήλως, καθὼς κατωτέρω ἐν τῷ α΄. Παραδείγματι. Ὅταν δὲ τις χαρακτὴρ τοῦ κατωτέρου ἀριθμοῦ εἶναι Ἰσοδύναμος μὲ ἕτερον (κείμενον ὅμως ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ) χαρακτῆρα τοῦ ἀνωτέρου, τότε ἡ τούτων Διαφορὰ εἶναι ἴση μὲ 0, ἤγουν μηδέν, ὅθεν ἐν τῇ ἀφαιρέσει γράφομεν ὑπὸ τὴν Γραμμὴν ἓν Μηδενικόν, καθὼς καὶ κατωτέρω ἐν τῷ β΄. Παραδείγματι δείκνυται. Ὅταν δὲ πάλιν τύχῃ ὁ χαρακτὴρ τοῦ κατωτέρου νὰ εἶναι μείζων τοῦ χαρακτῆρος τοῦ ἀνωτέρου, λαμβάνομεν τότε κατ' ἐπίνοιαν μίαν Μονάδα ἀπὸ τὸν χαρακτῆρα τὸν ἐγγὺς κείμενον τοῦ ἐλάττονος, καὶ ὡς Δεκάδα αὐτὴν λογιζόμενοι, τὴν προστίθεμεν δυνάμει εἰς τοῦτον τὸν ἐλάσσονα χαρακτῆρα, καὶ οὕτως ἀπ' αὐτοῦ τοῦ προσαυξηθέντος χαρακτῆρος ποιοῦμεν τὴν προσήκουσαν ἀφαίρεσιν τοῦ κατωτέρου χαρακτῆρος· ἐπ' ἐκείνου δὲ τοῦ χαρακτῆρος, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλήφθη ἡ Μονάς, γράφομεν μίαν στιγμὴν πρὸς διάκρισιν, ὅτι οὗτος ὁ χαρακτὴρ ἠλαττώθη κατὰ μίαν Μονάδα, καθὼς καὶ κατωτέρω ἐν τῷ γ΄. [illegible] Ὅταν δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρου καὶ ἐπὶ τῆς κατωτέρου Σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν τύχωσιν ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ μόνον Μηδενικά, γράφομεν τότε ὑπὸ τὴν Γραμμὴν ὡς Διαφορὰν πάλιν Μηδενικόν. Ὅταν δὲ πάλιν ὁ μὲν ἀνωτέρου χαρακτὴρ εἶναι Σημαντικὸς ἀριθμός, ὁ δὲ κατωτέρου εἶναι Μηδενικόν, γράφομεν τότε ὑποκάτω τῆς Γραμμῆς Διαφορὰν αὐτὸν τὸν ἀνωτέρου χαρακτῆρα, ὡς ἐν τῷ δ΄. Παραδείγματι. Ὅταν δὲ τύχῃ τὸ ἐναντίον, ἤγουν ὁ μὲν

ἀνω-

ἀνωτέρου χαρακτὴρ νὰ εἶναι Μηδενικόν, ὁ δὲ κατωτέρου νὰ εἶναι Σημαντικὸς ἀριθμός, πρῶτον προσαυξάνομεν δυνάμει τὸ Μηδενικόν, λαμβάνοντες μίαν Μονάδα ἐκ τοῦ χαρακτῆρος, ὅστις κεῖται πλησίον τούτου τοῦ Μηδενικοῦ, καθὼς καὶ πρὸ ὀλίγου πρότερον εἴρηται. ἂν ὅμως τύχῃ καὶ αὐτὸς ὁ πλησίον χαρακτὴρ νὰ εἶναι Μηδενικόν, λαμβάνομεν τότε μίαν Μονάδα ἀπὸ τοῦ ποῤῥωτέρω κειμένου χαρακτῆρος, καὶ τὴν προσθέτομεν Δυνάμει εἰς τὸ πρῶτον Μηδενικόν, καὶ ἔπειτα ποιοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν· ἀλλὰ πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι τότε τὸ δεύτερον, καὶ τρίτον Μηδενικὸν (ἂν τύχωσι δηλονότι) δύναται ἕκαστον ἴσον μὲ 9, μὲ ἐννέα ὅμως Ἑκατοντάδας, ἢ χιλιάδας, καὶ ἐν ἑνὶ λόγῳ κατὰ τὴν τοπικὴν ἑκάστου Δύναμιν. ἐπάνω δὲ τοῦ χαρακτῆρος, ἐκ τοῦ ὁποίου ἐλήφθη ἡ Μονάς, γράφομεν μίαν στιγμήν, διὰ νὰ γνωρίζηται, ὅτι ἠλαττώθη οὗτος μίαν Μονάδα, Μονάδα ὅμως σημαντικὴν κατὰ τὸν τόπον, εἰς τὸν ὁποῖον αὐτὸς ὁ χαρακτὴρ τυγχάνει τεθειμένος· διὰ τοῦ ε΄. Παραδείγματος γίνεται καταφανὲς τὸ λεγόμενον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ α΄.

ὁ ἐλαττωτέος 6795 „ 4 ἀφαιρεθέντων ἀπὸ τῶν 5, μένει 1 Μονάς.

ὁ ἀφαιρετέος 1324 „ 2 ἀφαιρ. ἀπὸ τῶν 9, μένουσι 7 Δεκάδες.

——— „ 3 ἀφαιρ. ἀπὸ τῶν 7, μένουσι 4 Ἑκατοντάδες.

ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμός, ὅστις καὶ Διαφορὰ καλεῖται. 5471 „ 1 ἀφαιρ. ἀπὸ τῶν 6, μένουσι 5 χιλιάδες.

ΠΑΡΑ-

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ β΄.

ὁ ἐλατ. 4685 ,, 5 ἀφαιρεθέντων ἀπὸ τῶν 5, μένει 0.
ὁ ἀφαιρ. 1675 ,, 7 ἀφαιρεθ. ἀπὸ τῶν 8, μένει 1 Δεκάς.
——— ,, 6 ἀφαιρεθ. ἀπὸ τῶν 6, μένει 0.
ἡ Διαφορά 3010 ,, 1 ἀφαιρεθ. ἀπὸ τῶν 4, μένουσι 3 χιλιάδες.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ γ΄.

ὁ ἐλατ. 35421 ,, 1 ἀφαιρεθ. ἀπὸ τῆς 1, μένει 0.
ὁ ἀφαιρ. 25761 ,, 6 ἀφαιρεθ. ἀπὸ τῶν 12, μένουσι 6 Δεκάδ.
——— 7 ἀφαιρεθ. ἀπὸ τῶν 13, μένουσι 6 Ἑκατοντ.
ἡ Διαφ. 9660 ,, 5 ἀφαιρεθ. ἀπὸ τῶν 14, μένουσι 9 χιλιάδ.
,, 2 ἀφαιρεθ. ἀπὸ τῶν 2, μένει Μηδενικόν, 0.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ δ΄.

6840
3500
———
3340

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ ε΄.

90000 ,, 0 ἀπὸ 0, μένει 0.
2340 ,, 4 ἀπὸ 10, μένουσι 6 Δεκάδες,
——— ,, 3 ἀπὸ 9, μένουσι 6 Ἑκατοντάδες,
87660 ,, 2 ἀπὸ 9, μένουσι 7 χιλιάδες.
,, Μηδὲν ἀπὸ 8, μένουσι 8 Δεκάδ. χιλιάδ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ σκοπούμενον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι ἡ εὕρεσις ἑνὸς τρίτου ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος ἐμφαίνει τὴν Διαφορὰν μεταξὺ δύω

δύω δοθέντων ἀριθμῶν. ἀλλὰ μὴν ἕκαστος τῶν ἐν τοῖς ἀνωτέρω Παραδείγμασιν εὑρεθέντων ἀριθμῶν δεικνύει ἀληθῶς τὴν Διαφοράν, καθ' ἣν διαφέρει ὁ ἕτερος τοῦ ἑτέρου. γέγονεν ἄρα ἡ πρᾶξις ὀρθῶς καὶ κατὰ τοὺς προσήκοντας Κανόνας.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ α΄.

§. 31. Ἡ κατὰ ἀφαίρεσιν Βάσανος γίνεται διὰ τῆς Συνάψεως· συνάπτεται δηλαδὴ ἡ εὑρισκομένη Διαφορὰ μετὰ τοῦ ἐλάττονος ἀριθμοῦ, τὸ δὲ ἐκ τῆς Συνάψεως Συμποσούμενον ἔσται ἴσον μὲ τὸν μείζονα ἀριθμόν, ὅταν ἡ ἀφαίρεσις ὑπάρχῃ τετελεσμένη ὀρθῶς. καὶ ἂς βασανίσωμεν τὰ τοῦ πρώτου Παραδείγματος.

συνάπτονται 1248 ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς
5547 ἡ εὑρεθεῖσα Διαφορά
———
6795 τὸ ἐξ αὐτῶν Συμποσούμενον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸν μείζονα ἀριθμόν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ πρὸς ΓΥΜΝΑΣΙΝ.

α΄.) Ἐδανείσθη τις πραγματευτὴς ἄλλου Γρόσια, φέρ' εἰπεῖν 1795[illegible] ἐκ τῶν ὁποίων ἀπέδωκεν εἰς ἐκεῖνον μόνον Γρόσια 1741. Πόσα ἀκόμη μένει χρεώστης ἔτι;

β΄.) Ἔχωντας 51935, ἐδαπάνησεν ἐξ αὐτῶν τὰ 34060. Πόσα ἀκόμη ἔχει ἔτι λοιπά;

γ΄.) Συνίστατο πρὸ τῆς μάχης ἓν σῶμα Στρατιωτῶν ἀπὸ 51094, εἰς τὴν μάχην ὅμως ἐξ αὐτῶν ἐφονεύθησαν 3004. Γίνεται λοιπὸν ἐρώτησις πόσοι Στρατιῶται ἔμειναν ἔτι;

ΟΡΙΣΜΟ'Σ δ΄.

§. 32. Πολλαπλασίασις, ἢ Πολλαπλασιασμὸς ὀνομάζεται ἡ Πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας Πολ-

πολλαπλασιασθέντων τῶν ἀριθμῶν, γίνεται ἕ-ται τις τρίτος, ὅστις περιέχει τὸν ἕνα τόσον τοσάκις, ὁσάκις περιέχεται ἡ Μονὰς εἰς τὸν ἕτερον.

ΟΡΙΣΜΟΣ ε.

§. 33. Τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὁ πρῶτος ὀνομάζεται Πολλαπλασιαζόμενος, ἢ Πολλαπλασιαστέος, ὁ δὲ δεύτερος καλεῖται Πολλαπλασιάζων, ἢ Πολλαπλασιαστής, ἀμφότεροι δὲ λέγονται Παράγοντες· ὁ δὲ ἐκ τῆς Πολλαπλασιάσεως αὐτῶν προκύπτων ἀριθμὸς καλεῖται Παραγόμενον, ἢ Γινόμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 34. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἕπεται, ὅτι ἕκαστος Πολλαπλασιαζόμενος δύναται νὰ ληφθῇ ὡς Πολλαπλασιάζων, καὶ αὖθις καθε Πολλαπλασιάζων δύναται νὰ εἶναι Πολλαπλασιαζόμενος· ἐπειδὴ εἴτε τὸ 3 λάβωμεν τετράκις, εἴτε τὸ 4 λάβωμεν τρὶς, Παραγόμενον προκύπτει τὸ αὐτὸ ὁ 12. Ὅταν δὲ ὁ εἷς τῶν Παραγόντων ὑπάρχῃ Μονὰς, τότε ὁ ἄλλος Παράγων λαμβάνεται ἅπαξ, καὶ δὲν γίνεται, καθὼς εἶναι, διὰ τοῦτο καὶ λέγεται, ὅτι ἡ Μονὰς δὲν πολλαπλασιάζει.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 35. Διὰ νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως ἀκοπώτερον, καὶ εὐκολώτερον, προσθέτομεν τὸν ἀκόλουθον Πυθαγορικὸν Πίνακα, εἰς τὸν ὁποῖον εὑρίσκονται τὰ Παραγόμενα τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς Μονάδος μέχρι τῶν ἐννέα πρὸς ἀλλήλους πολλαπλασιαζομένων, καὶ εἶναι λίαν ἐπωφελὲς νὰ ἔχωμεν αὐτὸν πάντοτε διὰ μνήμης.

ΠΥΘΑ-

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΣ ΠΙΝΑΞ.

α' β'

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

γ'

Εἰς μὲν τὰς δύω πλευρὰς α β' καὶ α γ' εὑρίσκονται γεγραμμένοι οἱ χαρακτῆρες, οἱ ἀπὸ τῆς μονάδος ἕως τῶν ἐννέα, καὶ ἤγουν εἶσιν οἱ Παράγοντες· τὸ δὲ Παραγόμενον δύω Παραγόντων εὑρίσκεται ἐν ἐκείνῳ τῷ τετραγώνῳ, ὅπου συνέρχονται οἱ δύω οὗτοι Παράγοντες, ὁ Πολλαπλασιάζων δηλονότι καὶ ὁ Πολλαπλασιαζόμενος. οἷον τὸ Παραγόμενον τῶν 2, καὶ 3 (Παραγόντων) εἶναι ὁ 6, τὸ δὲ Παραγόμενον τῶν 3, καὶ 3 (Παραγόντων) εἶναι ὁ 9. τὸ δὲ Παραγόμενον τῶν 4 καὶ 5 Παραγόντων εἶναι ὁ 20. κ. τ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ γ'

§. 36. Νὰ πολλαπλασιάζωμεν πρὸς ἀλλήλους τοὺς διδομένους ἀριθμούς.

ΠΡΑΚΤΕΑ,

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Καν. α΄.) Γράφομεν τὸν μικρότερον Παράγοντα ὑποκάτω τοῦ μείζονος οὕτως, ὥστε αἱ Μονάδες τοῦ ἑνὸς νὰ ὑπάρχωσιν ὑπὸ τὰς Μονάδας τοῦ ἑτέρου, αἱ δὲ Δεκάδες ὑπὸ τὰς Δεκάδας, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Καν. β΄.) Ὑποκάτω τῶν Παραγόντων φέρομεν μίαν Γραμμήν.

Καν. γ΄.) Κάθε χαρακτῆρα τοῦ μείζονος Παράγοντος, τουτέστι τοῦ Πολλαπλασιαζομένου, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον μετὰ μόνου τοῦ πρώτου χαρακτῆρος τοῦ μικροτέρου Παράγοντος, τουτέστι τοῦ Πολλαπλασιάζοντος, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν δεξιῶν, καὶ προχωροῦντες ἐπὶ τὰ ἀριστερά· τὰ δὲ ἐκ τούτων Παραγόμενα γράφομεν ὑπὸ τὴν Γραμμὴν οὕτως, ὥστε τὸ μὲν Γινόμενον τῶν Μονάδων νὰ εἶναι ὑποκάτω τῆς στήλης τῶν Μονάδων, τὸ δὲ Γινόμενον τῶν Δεκάδων νὰ ὑπάρχῃ ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Δεκάδων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, καθὼς καὶ ἐν τῷ πρώτῳ Παραδείγματι καθορᾶται πραγματικώτερον. ἐνταῦθα ὅμως πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν ὅτι ὅταν τὸ μερικώτερον Γινόμενόν τινος χαρακτῆρος ὑπερέχῃ τοῦ 10, καὶ ἑπομένως πρέπει νὰ ἐκτιθῇ μὲ δύο χαρακτῆρας, γράφομεν τότε ὑπὸ τὴν Γραμμὴν ἐν τῷ προσήκοντι τόπῳ μόνον τὸν πρῶτον χαρακτῆρα, λέγω τὸν σημαντικὸν τῶν Μονάδων, τὸν δὲ δεύτερον χαρακτῆρα συνάπτομεν μετὰ τοῦ Παραγομένου τοῦ ἀκολούθου χαρακτῆρος, καὶ αὐτὸν τὸν τρόπον μεταχειριζόμεθα, ὁσάκις ἂν ταύτην τὴν περίστασιν ἀπαντήσωμεν, καθὼς καὶ κατωτέρω ἐν τῷ δευτέρῳ Παραδείγματι ἐκθέτομεν αὐτὴν τὴν περίστασιν. ἀφ' οὗ λοιπὸν πληρώσωμεν ταύτην τὴν πρώτην Πολ-

λαπλασίασιν κατὰ τὸν εἰρημένον τρόπον, μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὸν δεύτερον, ἐπειδὴ ὁ Πολλαπλασιάζων σύγκειται ἐκ δύο, ἢ πλειόνων χαρακτήρων· πολλαπλασιάζομεν πάλιν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἅπαντας τοὺς χαρακτῆρας τοῦ Πολλαπλασιαζομένου μετὰ μόνου τοῦ δευτέρου χαρακτῆρος τοῦ Πολλαπλασιάζοντος, λέγω μετὰ τοῦ ἐν τῇ στήλῃ τῶν Δεκάδων κειμένου χαρακτῆρος, τὸ δὲ ἐκ τούτων Παραγόμενον ἐκθέτομεν ὑποκάτω τοῦ ἐκ τῆς πρώτης Πολλαπλασιάσεως Παραγομένου. ἡ ἀρχὴ ὅμως τῆς ἐκθέσεως αὐτοῦ τοῦ δευτέρου Γινομένου γίνεται τότε ἀπὸ τῆς δευτέρας στήλης, εἰς τὴν ὁποίαν ἵσταται καὶ αὐτὸς ὁ Πολλαπλασιάζων χαρακτήρ. κατ' αὐτὴν δὲ τὴν τάξιν ἀποπληροῦμεν καὶ τὴν τρίτην, καὶ τετάρτην, καὶ πέμπτην, ἂν τύχῃ, Πολλαπλασίασιν, καθὼς καὶ κατωτέρω ἐν τῷ τρίτῳ Παραδείγματι γίνεται σαφέστερος οὗτος ὁ τρόπος τῆς Πολλαπλασιάσεως.

δ΄.) Συνάπτομεν ὁμοῦ πάντα ταῦτα τὰ μερικὰ Παραγόμενα κατὰ τοὺς Κανόνας τῆς Συνάψεως, καὶ οὕτως ἀπαρτίζεται ἓν γενικώτερον Παραγόμενον, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓ. α΄.

1342 ὁ Πολλαπλασιαζόμενος, ἢ ὁ μείζων Παράγων,
2. ὁ Πολλαπλασιάζων, ἢ ὁ ἐλάττων Παράγων

2684 τὸ ἐξ αὐτῶν Παραγόμενον, ἢ Γινόμενον. Ποιοῦμεν τὴν Πολλαπλασίασιν λέγοντες οὕτως· ὁ 2 ληφθεὶς δὶς, παρέχει 4 Μονάδας· ὁ 4 ληφθεὶς δὶς, ποιεῖ 8 Δεκάδας. ὁ 3 ληφθεὶς δὶς, παρέχει 6 Ἑκατοντάδας. ὁ 1 ληφθεὶς δὶς, ποιεῖ αὖθις 2 χιλιάδας. ὥστε ὅλον τὸ Παραγόμενον εἶναι 2684.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ β'.

986	ὁ Πολλαπλασιαζόμενος.
3	ὁ Πολλαπλασιάζων.
2958	τὸ ἐξ αὐτῶν Παραγόμενον.

Πολλαπλασιάζοντες, δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ἢ ἔτω κοινότερον, 3 φοραῖς 6 Ἴσον 18, ὅθεν τὸν μὲν 8 γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Μονάδων, τὸν δὲ 1, ὅστις εἶναι Σημαντικὸς μιᾶς Δεκάδος, συνάπτομεν μετὰ τοῦ προσεχοῦς Παραγομένου, λέγοντες ἔτω 3 φοραῖς 8 Ἴσον 24, καὶ ἕν, τὸ ὁποῖον ἔχομεν ἐκ τῆς προτέρας στήλης γίνεται Ἴσον 25. ὅθεν τὸν 5 γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Δεκάδων, τὸν δὲ 2, ὅστις εἶναι Σημαντικὸς δύω Ἑκατοντάδων, συνάπτομεν μετὰ τοῦ ἑξῆς Παραγομένου, λέγοντες ἔτως 3 φοραῖς 9 Ἴσον 27, καὶ 2 πρότερον, Ἴσον 29.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ γ'.

53684	ὁ Πολλαπλασιαζόμενος.
325	ὁ Πολλαπλασιάζων.
268420	τὸ ἐκ τῆς πρώτης Πολλαπλασιάσεως Παραγ.
107368	τὸ ἐκ τῆς δευτέρας Πολλαπ. Παραγόμενον.
161052	τὸ ἐκ τῆς τρίτης Πολλαπ. Παραγόμενον.
17447300	τὸ γενικὸν αὐτῶν Παραγόμενον.

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

Ἕκαστον τῶν ἐν τοῖς ἀνωτέρω Παραδείγμασιν εὑρεθέντων Παραγομένων περιέχει τὸν αὐτὸν Πολλαπλασιαζόμενον

νον τοσάκις, ὁσάκις ὁ Πολλαπλασιάζων περιέχει τὴν Μονάδα, ἀλλὰ μὴν τοῦτο ἔχει τὴν αὐτοῦ Σύστασιν ἐκ τοῦ Ὁρισμοῦ τῆς Πολλαπλασιάσεως· ἄρα ἡ πρᾶξις κατὰ τοὺς προτεθέντας Κανόνας γίνεται ὀρθῶς.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ α'.

§. 37. Ἡ πλέον ἀσφαλὴς Βάσανος τῆς Πολλαπλασιάσεως εἶναι ἡ κατὰ Διαίρεσιν πρᾶξις, τουτέστι τὸ ἐκ τῆς Πολλαπλασιάσεως Παραγόμενον διαιροῦμεν δι' ἑνὸς τῶν Παραγόντων, καὶ ὅταν μὲν ἐκ τῆς Διαιρέσεως προκύπτῃ ἀριθμὸς Ἴσος μὲ τὸν ἄλλον Παράγοντα, τότε ἡ πρᾶξις τῆς Πολλαπλασιάσεως εἶναι τετελεσμένη ἄνευ τινὸς σφάλματος· ὅταν ὅμως ἄλλως προκύπτῃ, πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν πάλιν τὴν Πολλαπλασίασιν ἀκριβέστερον, ἐπειδὴ πρότερον ἐγένομεν ἐσφαλμένως.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ β'.

§. 38. Ὅταν ὁ ἕνας τῶν Παραγόντων, ἢ καὶ οἱ δύω ἔχωσιν ἐπὶ τὰ δεξιὰ ἐν τῷ τέλει μόνον Μηδενικά, δυνάμεθα νὰ διαχωρίζωμεν τὰ Μηδενικὰ χωρὶς, καὶ νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἀλλήλους μόνον τοὺς Σημαντικοὺς χαρακτῆρας τῶν Παραγόντων κατὰ τοὺς ἤδη γνωστοὺς ἡμῖν Κανόνας, ἔπειτα νὰ προσθέτωμεν εἰς τὸ γενικὸν Παραγόμενον ὅσα Μηδενικὰ διεχωρίσαμεν, π. χ. ἔδωσαν εἰς Πολλαπλασίασιν οἱ ἀριθμοὶ $\left\{ \begin{array}{l} 24000 \\ 300 \end{array} \right.$ ὅθεν πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς Σημαντικοὺς χαρακτῆρας ἔτω

24
3
72

ἔπειτα προσθέτομεν εἰς τοῦτον τὸν 72 τὰ πέντε Μηδενικὰ, ὅπου ἀπὸ τῶν Παραγόντων ἐχωρίσαμεν, ὥστε ὅλον τὸ Παραγόμενον εἶναι 7200000.

ΣΧΟΛΙΟΝ [illegible]

§. 39. Εἰσὶ καὶ ἕτεραι παρατηρήσεις [illegible] Πολλαπλασιασμοῦ, [illegible] πέρας τοῦ ἀναγκαίου ὥστε λογιζόμενοι [illegible] παρὰ [illegible] Ἔκθεσιν· περὶ δὲ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ [illegible] μὸν θέλομεν ὁμιλήσει κατὰ [illegible].

ΟΡΙΣΜΟΣ ϛ'.

§. 40. Διαίρεσις καλεῖται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας διαιρεῖται μείζων τις ἀριθμὸς δι' ἑτέρου ἐλάττονος, καὶ προκύπτει ἐκ τούτου τρίτος τις ἀριθμὸς, ἐν τῷ ὁποίῳ περιέχεται ἡ Μονὰς τοσάκις, ὁσάκις ὁ ἐλάττων περιέχεται ἐν τῷ μείζονι. τούτων ὁ μὲν μείζων ἀριθμὸς λέγεται Διαιρούμενος, ἢ Διαιρετέος, ὁ δὲ ἐλάττων ὀνομάζεται Διαιρῶν, ἢ Διαιρέτης· ὁ δὲ διὰ τῆς Διαιρέσεως προκύπτων ἀριθμὸς καλεῖται Πηλίκον, ἢ Πηλικότης.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 41. Ὁ μὲν μείζων ἀριθμὸς ἐμφαίνει τὸ ὅλον, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ διαιρεθῇ, ὁ δὲ ἐλάττων δεικνύει, εἰς πόσα μέρη πρέπει νὰ μερισθῇ τοῦτο τὸ ὅλον, ὁ δὲ τρίτος, ἤγουν τὸ Πηλίκον, δηλοῖ, πόσα μέρη ἐκ τοῦ ὅλου πίπτουσιν ἕκαστῳ. π. χ. ἂν μερισθῶσι 40. Γρόσια, εἰς 10 πτωχοὺς, λαμβάνει ἕκαστος τούτων 4 Γρόσια.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 42. Ὅταν ὁ Διαιρέτης εἶναι Μονὰς, τότε καὶ τὸ Πηλίκον εἶναι ἴσον μὲ τὸν Διαιρετέον ἀριθμὸν. διότι ἐπειδὴ τὸ Πηλίκον πρέπει

νὰ περιέχῃ τὴν Μονάδα τοσάκις, ὁσάκις ὁ Διαιρέτης περιέχεται ἐν τῷ Διαιρετέῳ, ὁ δὲ Διαιρέτης ὅταν τυγχάνῃ Μονὰς, περιέχεται τοσάκις, ὅσας ὁ Διαιρετέος περιέχει Μονάδας, διὰ τοῦτο ἄρα ἐν τοιαύτῃ [illegible] δὲν δύναται νὰ προκύψῃ ἄλλο Πηλίκον, παρὰ μόνον αὐτὸς ὁ Διαιρετέος ἀριθμὸς. ἐντεῦθεν λέγεται, ὅτι ἡ Μονὰς δὲν διαιρεῖ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ δ'.

§. 43. Νὰ Διαιρῶμεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν δι' ἑνὸς Διαιροῦντος ἁπλοῦ, τουτέστι δι' ἑνὸς Διαιρέτου συνισταμένου ἐξ ἑνὸς μόνου χαρακτῆρος.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Καν. α'.) Ἐκθέτομεν τὸν Διαιρεθησόμενον ἀριθμὸν εἰς ἓν μέρος, καὶ μετ' αὐτὸν ἄγομεν δύω Γραμμὰς ἐπὶ τὰ δεξιὰ τὴν μίαν κατὰ κάθετον, τὴν δὲ ἄλλην Ὁριζόντιον.

Καν. β'.) Γράφομεν πρῶτον τὸν Διαιρέτην μεταξὺ τῶν δύω Γραμμῶν πλησίον τῆς γωνίας, ἔπειτα παρατηροῦμεν, ἂν ὁ ἐν τοῖς ἀριστεροῖς πρῶτος χαρακτὴρ τοῦ Διαιρεθησομένου ὑπάρχῃ μείζων, ἢ ἐλάττων αὐτοῦ τοῦ Διαιρέτου. καὶ ὅταν μὲν ὑπάρχῃ μείζων, παρεξετάζομεν ποσάκις αὐτὸς ὁ χαρακτὴρ μόνος περιέχει τὸν Διαιρέτην· ὅταν δὲ ὑπάρχῃ ἐλάττων, καὶ ἑπομένως δὲν δύναται νὰ μετρηθῇ οὐδὲ ἅπαξ ὑπὸ τοῦ Διαιρέτου, τότε λαμβάνομεν [illegible] τῷ πρώτῳ καὶ τὸν ἐγγὺς αὐτοῦ δεύτερον χαρακτῆρα, [illegible] θεωροῦμεν, ποσάκις οὗτοι οἱ δύω χαρακτῆρες περιέχουσιν αὐτὸν τὸν Διαιρέτην, τὸ δὲ εὑρεθὲν Πηλίκον γράφομεν ὑποκάτω τῆς ὁριζοντίου Γραμμῆς.

Καν. γ'.) Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν Πηλίκον

λίκον μετὰ τῦ Διαιρέτυ, τὸ δὲ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον θέτομεν ὑποκάτω τῶν προδιαιρεθέντων χαρακτήρων τῦ Διαιρετέυ, καὶ μετὰ τῦτο τραβᾶμεν μίαν Γραμμὴν, καὶ ἀφαιρᾶμεν αὐτὸ τὸ Γινόμενον ἀπὸ τῶν Διαιρεθέντων χαρακτήρων, γράφοντες ὑπὸ τὴν Γραμμὴν τὴν εὑρισκομένην Διαφορὰν, ἢ τὸ ἐναπολειπόμενον.

Καν. δ'.) Καταβιβάζομεν τὸν ἀκόλουθον χαρακτῆρα τῦ Διαιρετέυ, καὶ τὸν γράφομεν πλησίον τῆς εὑρεθείσης Διαφορᾶς, καὶ ποιᾶμεν αὖθις τὴν προσήκουσαν Διαίρεσιν, καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον μεταχειριζόμεθα, ἕως ὅ καὶ διαιρεθῶσιν ἅπαντες οἱ χαρακτῆρες τῦ Διαιρετέυ.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ α'.

Ἔστω Διαιρετέος ὁ ἀριθμὸς 7638, καὶ Διαιρέτης 3. ὅθεν ποιᾶμεν

	7638	3
πρῶτον Γινόμενον	6	2546 ὅλον τὸ ἐκ τῆς Διαιρέσεως προκύψαν Πηλίκον
	16	τὸ ἐναπολειπόμενον μετὰ τῦ 6.
δεύτερον Γινόμενον	15	
	13	τὸ ἐναπολειπ. μετὰ τῦ καταβιβασθέντος 3,
τρίτον Γινόμενον	12	
	18	τὸ ἐναπολειπ. μετὰ τῦ καταβιβασθέντος 8.
τέταρτον Γινόμενον	18	
	00	ἐναπολείπεται Μηδέν.

Πραγματευόμεθα δηλονότι τὴν πρᾶξιν οὕτως· ἐπειδὴ ὁ 7 μετρεῖται ὑπὸ τῦ Διαιρέτυ, ὅστις περιέχει τὸν 3 δύο φορὰς, τὸ Πηλίκον ἄρα ὑπάρχει 2, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὴν Γραμμὴν, καὶ

μετ'

μετ' αὐτῦ πολλαπλασιάζομεν τὸν Διαιρέτην 3, τὸ δὲ ἐξ αὐτῶν Παραγόμενον 6 γράφομεν ὑποκάτω τῦ διαιρεθέντος χαρακτῆρος 7, καὶ ἀφαιρᾶντες τὸν 6 ἀπὸ τῦ 7, γράφομεν τὴν εὑρεθεῖσαν Διαφορὰν 1 ὑποκάτω μιᾶς μικρᾶς Γραμμῆς, ἔπειτα καταβιβάζοντες τὸν ἑπόμενον χαρακτῆρα 6, θέτομεν αὐτὸν πλησίον τῆς Διαφορᾶς, ὅθεν γίνεται ὁ ἀριθμὸς 16. καὶ ἐπειδὴ αὐτὸς ὁ 16 περιέχει τὸν Διαιρέτην 3 μόνον πέντε φορὰς, τὸ Πηλίκον ἄρα εἶναι 5, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὸν τόπον τῦ Πηλίκυ πλησίον τῦ προκύψαντος 2, καὶ μετ' αὐτῦ τῦ 5 πολλαπλασιάζομεν αὖθις τὸν Διαιρέτην 3, τὸ δὲ ἐξ αὐτῶν Παραγόμενον 15 θέτομεν ὑποκάτω τῶν προδιαιρεθέντων χαρακτήρων 16, καὶ ἀφαιρᾶντες τὸν 15 ἀπὸ τῦ 16, σημειᾶμεν τὴν Διαφορὰν 1 ὑπὸ μίαν μικρὰν Γραμμήν· ἔπειτα καταβιβάζομεν πάλιν πλησίον ταύτης τῆς Διαφορᾶς τὸν ἀκόλουθον χαρακτῆρα τῦ Διαιρετέυ, τουτέστι τὸν 3, καὶ ἀπ' αὐτῶν ποιᾶμεν, καθὼς ἀνωτέρω, τὴν προσήκουσαν Διαίρεσιν. Καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον διαιρᾶμεν ἅπαντας τοὺς χαρακτῆρας τῦ δοθέντος, ὥστε γενικὸν Πηλίκον προκύπτει ὁ 2546 ἀριθμός.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ β'.

ὁ Διαιρετέος	1576	4 ὁ Διαιρέτης
τὸ Γινόμενον	12	394 τὸ Πηλίκον
	037	τὸ ἐναπολειπ. μετὰ τῦ καταβιβασθέντος 7.
τὸ δεύτερον Γινόμ.	36	
	16	τὸ ἐναπολειπόμενον μετὰ τῦ 6
τὸ τρίτον Γινόμ.	16	
	00	δὲν ἐναπολείπεταί τι.

Ἐνταῦθα ἐπειδὴ ὁ Διαιρέτης 4 εἶναι μείζων τῦ πρώτυ χαρακτῆρος 1, καὶ ἐπομένως δὲν δύναται νὰ μετρήσῃ αὐτὸν οὐδ' ἅπαξ,

διὰ

διὰ τοῦτο λαμβάνομεν μετ' αὐτοῦ ϗ τὸν ἐγγὺς χαρακτῆρα 5, ϗ λέγομεν οὕτως, ὁ 15 διαιρεθεὶς διὰ τοῦ 4, παρέχει Πηλίκον 3, ϗ μένει ἔτι λειπόμενον 3, ϗ οὕτω ποιοῦμεν ἅπασαν τὴν Διαίρεσιν, καθὼς ϗ ἀνωτέρω.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ σκοπούμενον τῆς Διαιρέσεως εἶναι νὰ εὑρεθῇ τις ἀριθμός, πρὸς τὸν ὁποῖον νὰ ἔχῃ ἡ Μονὰς οὕτω, καθὼς ὁ Διαιρέτης πρὸς τὸν Διαιρούμενον ἀριθμόν. ἀλλὰ μὴν πρὸς ἕκαστον τῶν ἐν τοῖς ἀνωτέρω Παραδείγμασιν εὑρεθέντων Πηλίκων ἔχει ἡ Μονὰς οὕτως, ὡς ὁ Διαιρέτης πρὸς τὸν Διαιρετέον· ἄρα τὰ ἄνω εὑρεθέντα Πηλίκα εἰσὶν ἀληθῶς τὰ ζητούμενα, ϗ ἡ πρᾶξις κατὰ τοὺς προτεθέντας Κανόνας γίνεται ὀρθῶς ϗ κατὰ τὸ δέον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ε΄.

§. 44. Νὰ διαιρῶμεν τινὰ διδόμενον ἀριθμὸν δι' ἑνὸς Διαιροῦντος Συνθέτου, τουτέστι διά τινος Διαιρέτου συγκειμένου ἐκ πολλῶν χαρακτήρων.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Καν. α΄. Ἀφ' οὗ ἐκθέσωμεν τὸν Διαιρεθησόμενον ἀριθμόν, ἄγομεν δύω Γραμμὰς ἐπὶ τὰ δεξιά, ὡς ϗ πρότερον, ϗ ἐντὸς αὐτῶν γράφομεν τὸν Διαιρέτην.

Καν. β΄.) Παρατηροῦμεν, ἂν ὁ πρῶτος χαρακτὴρ τοῦ Διαιρουμένου εἶναι μείζων, ἢ ἐλάσσων τοῦ πρώτου χαρακτῆρος τοῦ Διαιρέτου. ϗ ὅταν μὲν μείζων ὑπάρχῃ, ποιοῦμεν

μεν

μεν τὴν πρώτην Διαίρεσιν, λαμβάνοντες ἀπὸ τοῦ Διαιρουμένου τόσους χαρακτῆρας, ὅσους ἂν ἔχῃ ὁ Διαιρέτης, ϗ παρεξετάζοντες, ποσάκις οἱ ληφθέντες χαρακτῆρες τοῦ Διαιρουμένου περιέχουσι ὅλον τὸν Διαιρέτην· τὸ δὲ εὑρεθὲν Πηλίκον γράφομεν εἰς τὸν τόπον τῶν Πηλίκων, ὡς ϗ ἐν τῷ προτεθέντι Προβλήματι γέγονεν. ὅταν δὲ ὁ πρῶτος χαρακτὴρ τοῦ Διαιρουμένου εἶναι ἐλάσσων τοῦ πρώτου χαρακτῆρος τοῦ Διαιρέτου, τότε λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ Διαιρουμένου ἕνα χαρακτῆρα περισσότερον, τουτέστιν ἂν ὁ Διαιρέτης ἔχῃ δύω χαρακτῆρας, λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ Διαιρουμένου τρεῖς χαρακτῆρας, ἂν ὅμως ἐκεῖνος ἔχῃ τρεῖς, λαμβάνομεν τότε τέσσαρας, κ. τ., ϗ ποιοῦμεν τὴν πρώτην Διαίρεσιν κατὰ τὸν εἰρημένον τρόπον.

Καν. γ΄.) Πολλαπλασιάζομεν τὸ εὑρεθὲν Πηλίκον μεθ' ὅλου τοῦ Διαιρέτου, τὸ δὲ ἐξ αὐτῶν Παραγόμενον κατατάττομεν ὑποκάτω τῶν προδιαιρεθέντων χαρακτήρων τοῦ Διαιρουμένου, ϗ ὑπ' αὐτὸ ἄγομεν μίαν μικρὰν γραμμήν, ϗ ἀφαιροῦμεν αὐτὸ τὸ Παραγόμενον ἀπὸ τῶν διαιρεθέντων χαρακτήρων· τὴν δὲ Διαφορὰν γράφομεν ὑπὸ τὴν Γραμμὴν ἐν τῷ προσήκοντι τόπῳ. πρέπει ὅμως νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι ἂν τὸ Παραγόμενον ὑπερέχῃ ποτὲ τῶν Διαιρεθέντων χαρακτήρων, τότε τὸ Πηλίκον ἐτέθη πλέον τοῦ δέοντος, ϗ ἀνάγκη νὰ ἐλαττωθῇ αὐτὸ τὸ Πηλίκον κατὰ μίαν, ἢ δύω Μονάδας.

Καν. δ΄.) Πλησίον τῆς Διαφορᾶς (ἂν τύχῃ νὰ εἶναι) καταβιβάζομεν ἀπὸ τοῦ Διαιρουμένου τὸν ἀκόλουθον χαρακτῆρα, ἐκεῖνον δηλαδή, ἀπὸ τοῦ ὁποίου δὲν ἐγένετο ἔτι καμμία ἀφαίρεσις, ϗ ἐπ' αὐτῶν ποιοῦμεν τὴν προσήκουσαν Διαίρεσιν διὰ τοῦ Διαιρέτου, ϗ οὕτως ἐφεξῆς, ἕως οὗ διέλθωμεν ἅπαντας τοὺς χαρακτῆρας τοῦ Διαιρουμένου.

ΠΑΡΑ-

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ α'.

Ἔστω ὁ μὲν Διαιρέμενος ἔτος 36448, ὁ δὲ Διαιρέτης 68, καὶ ζητηθήτω τὸ Πηλίκον· ὅθεν

36448	68	
340	536	τὸ εὑρεθὲν Πηλίκον.
244		
204		
0408		
408		
000		

Ἐνταῦθα ἐπειδὴ ὁ πρῶτος χαρακτὴρ τοῦ Διαιρουμένου, τουτέστιν ὁ 3 εἶναι ἐλάσσων τοῦ πρώτου χαρακτῆρος τοῦ Διαιρέτου, τουτέστιν τοῦ 6, καὶ ἐπειδὴ ὅλος ὁ Διαιρέτης συνίσταται ἐκ δύο χαρακτήρων, διὰ τοῦτο κατὰ πρώτην Διαίρεσιν πρέπει νὰ λάβωμεν ἀπὸ τοῦ Διαιρετέου τρεῖς χαρακτῆρας ὁμοῦ, τουτέστιν 364. ὅθεν ἐπεὶ ὁ 364 περιέχει τὸν 68 πεντάκις, καὶ ἐναπολείπονται ἔτι 24, γράφομεν τὸ Πηλίκον 5 εἰς τὸν οἰκεῖον αὐτοῦ τόπον, καὶ ἔπειτα πλησίον τοῦ ἐναπολειφθέντος 24 καταβιβάζομεν τὸν ἀκόλουθον χαρακτῆρα τοῦ Διαιρετέου ὅστις γίνεται 244, καὶ διαιροῦμεν τοῦτον διὰ τοῦ Διαιρέτου 68, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ β'.

ὁ Διαιρετέος	861	21	ὁ Διαιρέτης
τὸ πρῶτον Γινόμ.	84	41	τὸ Πηλίκον
	21		τὸ ἐναπολειπ. μετὰ τοῦ καταβιβασθέντος 1.
τὸ δεύτερον Γινομ.	21		
	00		

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ γ'.

ὁ Διαιρετέος	1 7448	82	ὁ Διαιρέτης
τὸ πρῶτον Γινόμ.	164	2164	τὸ Πηλίκον
	134		τὸ ἐναπολειπ. μετὰ τοῦ καταβιβασθέντος 4.
τὸ δεύτερον Γινόμ.	82		
	524		τὸ ἐναπολειπ. μετὰ τοῦ 4.
τὸ τρίτον Γινόμ.	492		
	328		τὸ ἐναπολειπ. μετὰ τοῦ 8.
τὸ τέταρτον Γινόμ.	328		
	000		

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ α'.

§. 45. Ὅταν ἐν τῷ τέλει μετὰ τὴν τελευταίαν ἀφαίρεσιν μείνῃ τι λείψανον, τὸ ὁποῖον ἔλαττον ὂν τοῦ Διαιρέτου, δὲν δύναται πλέον νὰ διαιρεθῇ, γράφομεν αὐτὸ πλησίον τοῦ Πηλίκου ἐν τοῖς δεξιοῖς, καὶ ἄγοντες ὑπ' αὐτὸ μίαν Γραμμὴν, γράφομεν ὑποκάτω καὶ τὸν Διαιρέτην. π. χ.

22	5
20	$4\frac{2}{5}$
2	λείψανον.

ΕΤΕΡΟΝ ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ.

1165	4
8	$291\frac{1}{4}$
36	
36	
05	
4	
1	ἐναπολειπόμενον.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

§. 46. Ὅταν ἀρχῇ τύχῃ νὰ εἶναι ὁ Διαιρούμενος ἀριθμὸς ἐλάσσων τοῦ Διαιρέτου, δὲν δύναται τότε νὰ γένῃ ἡ Διαίρεσις ἐπ' αὐτοῦ

κατὰ

κατὰ τοὺς προτεθέντας Κανόνας. π. χ. ὁ 5 νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 6 δὲν δύναται, ὅθεν ἐκθέτομεν αὐτοὺς οὕτως $\frac{5}{6}$, τὸ ὁποῖον σημαίνει, ὅτι ὁ 5 πρέπει νὰ διαιρεθῇ εἰς 6 μέρη, καθὼς περὶ τούτου θέλομεν ὁμιλήσει πλατύτερον καὶ σαφέστερον ἐν τῷ περὶ Κλασμάτων.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ β'.

§. 47. Ὅταν μεταξὺ τῆς πράξεως τύχῃ περίστασις, ὥστε μετά τινα ἀφαίρεσιν ὁ καταβιβασθεὶς χαρακτὴρ μόνος ὢν ἢ μετά τινος ἐναπολειφθέντος, ὑπάρχει ἐλάττων τοῦ Διαιρέτου καὶ ἑπομένως δὲν ἐπιδέχεται τινὰ Διαίρεσιν, τότε γράφομεν πρῶτον ἀντὶ Πηλίκου ἓν Μηδενικὸν, ἔπειτα καταβιβάζομεν ἀπὸ τοῦ Διαιρουμένου τὸν ἀκόλουθον χαρακτῆρα, καὶ ἂν πάλιν δὲν ἐγχωρῇ νὰ γένῃ Διαίρεσις, γράφομεν ἔτι ἀντὶ τοῦ Πηλίκου ἓν Μηδενικὸν, καὶ μετὰ τοῦτο καταβιβάζομεν ἀπὸ τοῦ Διαιρετέου ἕτερον χαρακτῆρα, καὶ οὕτω ποιοῦμεν τὴν συνήθη Διαίρεσιν. π. χ.

ὁ Διαιρετέος	812	2	ὁ Διαιρέτης
	8	406	τὸ Πηλίκον
	012		
	12		
	00		

Ἐνταῦθα μετὰ τὴν Διαίρεσιν τοῦ 8, καταβιβάζεται ὁ 1, ἀλλ' ἐπειδὴ οὗτος, μόνος μάλιστα ὢν, ὑπάρχει ἐλάσσων τοῦ Διαιρέτου, καὶ δὲν δύναται νὰ διαιρεθῇ δι' αὐτοῦ, διὰ τοῦτο γράφομεν πρῶτον ὡς Πηλίκον ἓν Μηδενικὸν, καὶ ἔπειτα καταβιβάζομεν τὸν 2, καὶ γράφοντες αὐτὸν πλησίον τοῦ 1, ποιοῦμεν τὴν Διαίρεσιν.

ΕΤΕ-

ΕΤΕΡΟΝ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

```
92115 | 23
92      4005
-----
00115
  115
-----
  000
```

ΣΧΟΛΙΟΝ γ΄.

§. 48. Ὅταν τύχῃ νὰ ἔχῃ καὶ ὁ Διαιρέτης καὶ ὁ Διαιρετέος ἐν τῷ τέλει Μηδενικὰ, δυνάμεθα τότε νὰ τελειῶμεν τὴν Διαίρεσιν εὐκολώτερον, καὶ συντομώτερον κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

Διακόπτομεν δηλονότι καὶ ἀπὸ τοῦ Διαιρέτου καὶ ἀπὸ τοῦ Διαιρετέου ἕνα ἴσον ἀριθμὸν Μηδενικῶν, καὶ ἀφίνοντες αὐτὰ τὰ Μηδενικὰ εἰς ἓν μέρος, ποιοῦμεν τὴν συνήθη Διαίρεσιν μόνον ἐπὶ τῶν λοιπῶν χαρακτήρων. π. χ. Ἔστω Διαιρούμενος ὁ 84900 διὰ τοῦ 3000, ὅθεν διαχωρίζομεν καὶ ἀπὸ τοῦ Διαιρουμένου καὶ ἀπὸ τοῦ Διαιρέτου τὰ Μηδενικὰ, καὶ διαιροῦμεν μόνον 849 διὰ τοῦ 3 ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει τὸ ζητούμενον Πηλίκον 283.

ΕΤΕΡΟΝ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Ἔστω ὁ Διαιρετέος 60, ὁ δὲ Διαιρέτης 20. ὅθεν ποιοῦμεν

```
ὁ Διαιρούμενος   6 | 2   ὁ Διαιρέτης
                 6   3   τὸ Πηλίκον
                 -
                 0
```

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ δ΄.

§. 49. Ὅταν δὲ τύχῃ ἔχων μόνον ὁ Διαιρέτης ἐν τῷ τέλει Μηδενικὰ, τότε διακόπτομεν δεξιόθεν καὶ ἀπὸ τοῦ Διαιρετέου τόσους χαρακτῆρας, ὅσα Μηδενικὰ ἔχει ὁ Διαιρέτης. καὶ μετὰ τοῦτο ποιοῦμεν τὴν Διαίρεσιν τοῖς λοιποῖς, καὶ ἐὰν μὲν εἰς τὸ τέλος τῆς Διαιρέσεως ἐναπολειφθῇ τι λείψανον, προστίθεμεν αὐτὸ εἰς ἐκείνους τοὺς κεχωρισμένους χαρακτῆρας τοῦ Διαιρετέου, καὶ ἀγαγόντες μίαν Γραμμὴν ὑποκάτω αὐτῶν, γράφομεν ὅλον τὸν Διαιρέτην, καὶ τέλος προσθέτομεν τοῦτο τὸ Κλάσμα πλησίον τοῦ εὑρεθέντος Πηλίκου, ἐὰν δὲ μετὰ τὴν Διαίρεσιν δὲν ἐναπολειφθῇ τι, τότε πλησίον τοῦ Πηλίκου γράφομεν ἐν Κλάσματι μόνον τοὺς κεχωρισμένους χαρακτῆρας, καὶ ὅλον τὸν Διαιρέτην. π. χ.

Ἔστω Διαιρούμενος ὁ 563874 διὰ τοῦ 2300, ὅθεν διαχωρίζομεν ἀπὸ μὲν τοῦ Διαιρέτου τὰ δύω Μηδενικὰ, ἀπὸ δὲ τοῦ Διαιρουμένου ὡσαύτως δύω χαρακτῆρας τουτέστι τὸν 74, ὥστε διαιροῦμεν μόνον τὸν 5638 διὰ τοῦ 23 οὕτως

```
5638 | 23
          374
       244 ----   τὸ Πηλίκον
          2300
46
--
103
 92
---
118
115
---   λείψανον.
003
```

Ἔστω αὖθις Διαιρούμενος ὁ 7245 διὰ τοῦ 600, ὥστε διακόπτομεν ἀπὸ μὲν τοῦ Διαιρουμένου τὸν 45, ἀπὸ δὲ τοῦ Διαιρέτου τὰ δύω Μηδενικὰ, καὶ διαιροῦμεν μόνον τὸν 72 διὰ τοῦ 6 οὕτω.

d 72

72 | 6 $\frac{45}{600}$

12

6

12

12

00

Ἐντεῦθα δὲν ἐναπελείφθη τι λείψανον, ὅθεν γράφομεν πλησίον τῷ Πηλίκῳ μόνον τὰς δύω κεχωρισμένας χαρακτῆρας τουτέστι τὸν 45 καὶ ὅλον τὸν Διαιρέτην ἐν Κλάσματι.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ έ.

§. 50. Ὅταν δὲ ὁ Διαιρέτης ἔχῃ ἀριστερόθεν τὸν πρῶτον χαρακτῆρα 1 μόνον, τὰς δὲ λοιπὰς χαρακτῆρας Μηδενικὰ, οἷον 10, 100, 1000, κ. τ. διαστέλλομεν δεξιόθεν ἀπὸ τῷ Διαιρημένῳ τόσας χαρακτῆρας, ὅσα Μηδενικὰ ἔχει αὐτὸς ὁ Διαιρέτης, καὶ τότε οἱ μὲν ἐπὶ τὰ ἀριστερὰ καταλειφθέντες χαρακτῆρές εἰσιν αὐτὸ τὸ ζητούμενον Πηλίκον. ἐπειδὴ διὰ τῆς Μονάδος, ὡς εἴρηται, Διαίρεσις δὲν γίνεται. τὰς δὲ κεχωρισμένας Ἰσοπληθεῖς τοῖς Μηδενικοῖς χαρακτῆρας καὶ ὅλον τὸν Διαιρέτην γράφομεν ἐν Κλάσματι πλησίον τῷ Πηλίκῳ. π. χ. ἐὰν διαιρεθῇ ὁ 684375 διὰ τῷ 1000, τὸ Πηλίκον ἔσει

$684 \frac{375}{1000}$.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ ς'.

§. 51. Ἡ δὲ κατὰ Διαίρεσιν Βάσανος γίνεται διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως. τουτέστι πολλαπλασιάζομεν μετὰ τὴν Διαίρεσιν τὸ ἀρτιαστὸν(?) Πηλίκον μετὰ τῷ Διαιρέτῳ, καὶ ἂν ἡ Διαίρεσις εἶναι τετελεσμένη ἀκριβῶς (ἄνευ τινὸς ὑπολείμματος) προκύπτει πάντως αὐτὸς ὁ Διαιρετέος ἀριθμός.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ γ'.

Περὶ λογισμῶν τῶν Ἑτεροειδῶν Ποσοτήτων, ἢ Μεγεθῶν.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ α'.

§. 52. Ἑτεροειδεῖς Ποσότητες, ἢ Ἑτεροειδῆ Μεγέθη καλοῦνται ἐν τῇ ἀριθμητικῇ μόνον τὰ διαφέροντα ἀλλήλων κατά τινα ἀξίαν ἢ δύναμιν, τουτέστι θεωρούμενον τὸ ἓν πρὸς τὸ ἄλλο δύναται μεῖζον, ἢ ἔλαττον· καὶ τὸ μὲν ἔλαττον εἶναι μέρος τοῦ μείζονος, καὶ περιέχεται ἐν αὐτῷ πλέον, ἢ ἅπαξ. οἷον τὰ διάφορα εἴδη τῶν Νομισμάτων, τὰ διάφορα εἴδη τῶν Γεωγραφικῶν Μέτρων κ. τ. τὰ δὲ ἄλλως ἔχοντα κληθήτωσαν Ἑτερογενῆ.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 53. Ὅταν ἔχωμεν νὰ συνάπτωμεν, νὰ ἀφαιρῶμεν, νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἢ νὰ διαιρῶμεν διαφόρου εἴδους Ποσὰ, πρέπει πρῶτον νὰ ἠξεύρωμεν, πόσαι Μονάδες τῷ μικροτέρου εἴδους Ἰσοδυναμοῦσι μὲ μίαν Μονάδα τοῦ μείζονος. ὅθεν δὴ καὶ πρὸς βοήθειαν ... σχηματίσομεν συντόμως τοὺς ἑξῆς Πίνακας, ἐν τοῖς ὁποίοις ὁρίζεται, πόσαι Μονάδες ἑνὸς ἐλάττονος Ποσοῦ συμπληροῦσι μίαν Μονάδα ἑτέρου μείζονος.

Χρῆσις τῶν Νομισμάτων, ἢ τῶν κοινότερον λεγομένων Μονέδων.

3 Ἄσπρα (*) δύνανται ἴσον μὲ ἕνα Παρᾶν.
10 Παράδες συνισῶσιν ἓν Δεκάρικον.
20 Παράδες, ἢ 2 Δεκάρικα ποιῦσιν ἓν εἰκοσάρικον.
40 Παράδες, ἢ 4 Δεκάρικα ποιῦσιν ἓν Γρόσιον. κ. τ.

Χρῆσις τῶν Γεωγραφικῶν Μέτρων.

4 Δάκτυλοι συνισῶσι μίαν Παλάμην.
4 Παλάμαι συμπληρῦσιν ἕνα Πόδα.
5 Πόδες ποιῦσιν ἓν Βῆμα.
4000 Βήματα συμπληρῦσιν ἓν Μίλλιον Γερμανικόν.

Χρῆσις τῶν Μέτρων τῦ χρόνυ.

60 Δεύτερα λεπτὰ δύνανται ἴσον μὲ ἓν λεπτὸν πρῶτον.
60 Πρῶτα λεπτὰ ποιῦσι μίαν ὥραν.
24 Ὧραι συνισῶσι μίαν ἡμέραν.
30 Ἡμέραι συμπληρῦσιν ἕνα Μῆνα (**).
12 Μῆνες ἢ 365 ¼ ἡμέραι συνισῶσιν ἓν ἔτος.

ΥΠΟ-

(*) Τὸ ἄσπρον λαμβάνεται ἐνταῦθα ὡς ἓν Τριτημόριον τῦ Τυρκικῦ Παρᾶ. εἰς Ἔκθεσιν ἔτι τῶν Νομισμάτων ἀναγκάζομαι νὰ μεταχειρισθῶ καὶ λέξεις Βαρβαρικωτέρας, ἐπειδὴ εἰς τὴν Ἑλλάδα καὶ εἰς ὅλον σχεδὸν τὸ Ὀθωμανικὸν κράτος τοιαῦται λέξεις εἰσὶν ἤδη γνωσταὶ, καὶ εἰς χρῆσιν.

(**) Ἐκτὸς τῶν Μηνῶν, οἵτινες ἔχυσιν ἡμέρας 31, καὶ τῦ Φεβρυαρίυ ἔτι, ὅστις κατὰ μὲν τὸ κοινὸν ἔτος ἔχει ἡμέρας 28· κατὰ δὲ τὸ καλύμενον δίσεκτον ἔχει 29.

ΥΠΟΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Δὲν παραθέτομεν ἐνταῦθα Πίνακά τινα περὶ τῶν Σηκωμάτων καὶ Σταθμῶν, ἢ τῶν κοινότερον λεγομένων Ζυγίων. ἐπειδὴ τὸ νὰ διορίσωμεν γενικῶς τὴν χρῆσιν αὐτῶν εἶναι δύσκολον, διότι δὲν εἶναι πανταχῦ εἰς τὸ γένος μας ἡ αὐτὴ χρῆσις. ὅθεν πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν πρῶτον τὴν κατὰ τόπυς τοπικὴν χρῆσιν, καὶ πόσα μέρη τῦ ἐλάττονος ὑπόκεινται εἰς τὸ μεῖζον, ἔπειτα δυνάμεθα ἀκόλως νὰ τελέσωμεν ἐπὶ τύτων τὸν τυχόντα λογισμὸν κατὰ τὴν ἑξῆς Μέθοδον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ α.

§. 54. Νὰ συνάπτωμεν πλέονας Ποσότητας διαφόρων εἰδῶν ὄσας.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἢ ΛΥΣΙΣ.

Καν. α.) Γράφομεν τὰς ὁμοειδεῖς Ποσότητας ὑπ' ἀλλήλας. τυτέστι τὰ ἄσπρα ὑπὸ τὰ ἄσπρα, τὺς Παράδας ὑπὸ τὺς Παράδας, τὰ Γρόσια ὑπὸ τὰ Γρόσια. κ. τ.

Καν. β.) Ἀφ' ὗ κατατάξωμεν τὰ Ποσὰ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, ἀρχόμεθα πρῶτον ἀπὸ τῦ μικροτέρυ εἴδυς, καὶ κατὰ τὺς Κανόνας τῆς Συνάψεως ἀθροίζομεν τὺς χαρακτῆρας τύτυ τῦ εἴδυς εἰς ἓν γενικώτερον Κεφάλαιον, καὶ μετὰ τῦτο ἐξετάζομεν, πόσαι Μονάδες ἐκ τύτυ τῦ ἐλάττονος εἴδυς δύνανται νὰ συςήσωσι μίαν Μονάδα τῦ ἐγγὺς μείζονος εἴδυς. καὶ τότε ἀφαιρῦμεν ἐξ αὐτῦ τῦ ἀθροισθέντος Κεφαλαίυ τόσας Μονάδας, ὅσαι ἀπαιτῦνται διὰ νὰ προκύψωσιν ἐξ αὐτῶν ἄλλαι Μονάδες μείζονες καὶ ὁμοειδεῖς μὲ τὰς Μονάδας αὐτῦ τῦ ἐγγὺς μείζονος

νος εἴδους, ϗ τότε συνάπτομεν ταύτας τὰς νεοφανεῖς Μονάδας μετὰ τῶν χαρακτήρων αὐτοῦ τοῦ ἐγγὺς μείζονος εἴδους εἰς ἓν γενικὸν Κεφάλαιον, ἐκ τοῦ ὁποίου ἀφαιροῦμεν ὡσαύτως τὰς ἀναπαιτουμένας Μονάδας, ϗ ἀποκαθιστῶμεν ἐξ αὐτῶν πάλιν ἑτέρας Μονάδας μείζονας ϗ ὁμοειδεῖς μὲ τὰς Μονάδας τοῦ παρακειμένου μείζονος εἴδους, ϗ οὕτως ἐφεξῆς.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ α'.

Γρόσια		Παράδες		Ἄσπρα
20	:	16	:	2
35	:	18	:	1
6	:	18	:	2
62	:	13	:	2

Τὸ Κεφάλαιον τῶν ἄσπρων εἶναι 5, ϗ ἐπειδὴ πέντε ἄσπρα κάνουσι μόνον ἕνα Παρᾶν, ϗ μένουσιν ἔτι ἐξ αὐτῶν δύο, γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν ἄσπρων μόνον τὰ 2 ἄσπρα, τὸν δὲ Παρᾶν συνάπτομεν μετὰ τῶν Παράδων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι 53 Παράδες, ϗ ἐπειδὴ 53 Παράδ. δύνανται Γρόσιον μὲ ἓν Γρόσι, ϗ δέκα τρεῖς Παράδ. γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν Παράδ. μόνον 13 Παράδες, τὸ δὲ Γρόσιον ἀθροίζομεν μετὰ τῶν Γροσίων, ϗ οὕτως ἑπομένως.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. β'.

Βήματα		Πόδες		Παλάμαι		Δάκτυλοι
30	:	4	:	2	:	3
12	:	3	:	3	:	2
6	:	2	:	0	:	1
50	:	0	:	2	:	2

ΠΑΡΑ'-

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ γ'.

Μῆνες		Ἡμέραι		Ὧραι		Λεπτὰ πρῶτα		λεπτὰ δεύτερα
4	:	25	:	20	:	40	:	35
6	:	4	:	3	:	19	:	25
11	:	0	:	0	:	0	:	00

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ β'.

§. 55. Νὰ ἀφαιρῶμεν Ἑτεροειδεῖς Ποσότητας.

ΠΡΑΚΤΕ'Α, ἢ ΛΥ'ΣΙΣ.

Καν. α'.) Γράφομεν τὰς Ὁμοειδεῖς Ποσότητας ὑπὸ τὰς Ὁμοειδεῖς, καθὼς ϗ ἐν τοῖς ἀνωτέρω Παραδείγμασι γέγονε.

Καν. β'.) Ἀφαιροῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ὁμοειδῶν ἀπὸ τῶν ἀριθμῶν τῶν Ὁμοειδῶν, τὴν δὲ ἀπομένουσαν Διαφορὰν γράφομεν ὑπὸ τὴν Γραμμήν. ὅταν ὅμως τὸ ἀφαιρετέον εἶδος τύχῃ νὰ εἶναι μεῖζον τοῦ ἐλαττωτέου, τότε προσαυξάνομεν αὐτό, λαμβάνοντες ἀπὸ τοῦ πλησίον κειμένου μείζονος εἴδους, μίαν Μονάδα, τὴν ὁποίαν, ἐπειδὴ εἶναι μείζων μιᾶς τῶν Μονάδων αὐτοῦ τοῦ κατωτέρου εἴδους πλέον, ἢ ἅπαξ, ἀναλύομεν κατ' ἐπίνοιαν εἰς Μονάδας τοῦ αὐτοῦ εἴδους, τοῦ ὁποίου εἶναι ϗ αἱ Μονάδες αὐτοῦ τοῦ κατωτέρου εἴδους, ϗ οὕτω ποιοῦμεν τὴν προσήκουσαν ἀφαίρεσιν.

ΠΑΡΑ'-

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ ά.

Γρόσια	Παράδες	Ἄσπρα
55	8	2
15	4	1
40	4	1

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. β'.

Γρόσια	Παράδες	Ἄσπρα
103	4	1
16	15	2
86	28	2

α. Ἄσπρα νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὸ 1 δὲν δύνανται, ὅθεν λαμβάνομεν ἀπὸ τὸ ἐγγὺς μείζονος εἴδους, τουτέστι ἀπὸ τῶν 4 Παράδων μίαν Μονάδα, ϗ ἀναλύοντες αὐτὴν εἰς 3 ἄσπρα, (ἐπειδὴ ἴσον μὲ 3 ἄσπρα δύναται ὁ Παρᾶς) προσαυξάνομεν κατ᾽ ἐπίνοιαν δι᾽ αὐτῶν τὸ 1 ἄσπρον, ὥστε 3 ϗ 1 γίνονται 4 ἄσπρα, ἀφ᾽ ὧν δὲ ἐκ τούτων ἀφαιρεθῶσι τὰ 2 ἄσπρα, ἐναπολείπονται εἰς Διαφορὰ ἔτι 2, τὰ ὁποῖα γράφομεν ὑπὸ τὴν Γραμμήν· ἔπειτα μεταβαίνομεν εἰς τὴν στήλην τῶν Παράδων, ϗ ἐπειδὴ οἱ 15 Παράδες δὲν δύνανται νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τῶν 3 Παράδων (ὁ 4 χαρακτὴρ δύναται ἤδη ἴσον μὲ τρεῖς Παράδες, ἐπειδὴ ἠλαττώθη πρότερον μίαν Μονάδας), λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ ἐγγὺς μείζονος εἴδους, τουτέστιν ἀπὸ τῶν 103 Γροσίων μίαν Μονάδα, τὴν ὁποίαν διαλύομεν εἰς 40 Παράδες, ϗ δι᾽ αὐτῶν προσαυξάνομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν 3 Παράδων, ὥστε 40 ϗ 3 γίνονται 43 Παράδες, ἀπὸ τῶν ὁποίων γίνεται ἡ ἀφαίρεσις τῶν 15, ϗ ἐναπολείπεται διαφορὰ 28 Παράδ. ἔπειτα μεταβαίνομεν εἰς ἀφαίρεσιν τῶν Γροσίων, ϗ

ποιοῦ-

ποιοῦμεν ἐφεξῆς τὴν προσήκουσαν ἀφαίρεσιν. ὥστε ἐναπολείπεται ϗ ἐπὶ τούτων Διαφορὰ 86 Γρόσια.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ γ'.

Ἐργαζόμενός τις κατά τινα χρόνον ἐκέρδισε Γρόσια 2300, Παράδες 18, ϗ ἄσπρα 2, κατ᾽ αὐτὸν ὅμως τὸν χρόνον ἐδαπάνησε Γρόσια 1250, Παράδες 20, ϗ 1 ἄσπρον. ὅθεν ζητεῖται πόσα ἔτι ἔμειναν αὐτῷ.

Γρόσια	Παράδες	Ἄσπρα
2300	18	2
1250	20	1
1049	38	1

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. δ'.

Ἡμέραι	Ὧραι	Λεπτὰ
18	15	40
14	19	20
3	20	20

κατ᾽ αὐτοὺς τοὺς εἰρημένους Κανόνας ἀφαιροῦνται ἀπ᾽ ἀλλήλων ϗ ἑκάστου εἴδους τὰ δυνατὰ διδόμενα.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ γ'.

§. 56. Νὰ Πολλαπλασιάζωμεν Ποσὰ διαφόρου εἴδους ὄντα, ϗ πολλαχῶς διδόμενα.

ΠΡΑΚ-

ΠΡΑΚΤΕ'Α ἢ ΛΥ'ΣΙΣ.

Καν. α΄.) Ο'τε τὸ μὲν Πολλαπλασιαςέον Ποσὸν ὑπάρχει μόνον ἑνὸς εἴδους, ὁ δὲ Πολλαπλασιαςὴς σύγκειται ἐκ πλειόνων εἰδῶν, γίνεται ἡ Πολλαπλασίασις τοῦ Πολλαπλασιαςέου ἐφ' ἕκαςον εἶδος τοῦ Πολλαπλασιαςοῦ χωρὶς, τουτέςι πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ τὸ Πολλαπλασιαζόμενον Ποσὸν πρῶτον μετὰ τοῦ μείζονος εἴδους τοῦ Πολλαπλασιαςοῦ, ἔπειτα μετὰ τοῦ ἐγγὺς μικροτέρου, καὶ ἐφεξῆς, καθὼς κατωτέρω ἐπὶ τοῦ πρώτου Παραδείγματος δείκνυται τοῦτο πραγματικώτερον. Δύναται δὲ νὰ γένῃ ἡ πρᾶξις εἰς τοιαύτην περίςασιν καὶ κατὰ ἄλλον τρόπον, ἀνάγομεν δηλονότι πρῶτον τὰ εἴδη τοῦ Πολλαπλασιαςοῦ εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ εἶδος τουτέςι τὰς Μονάδας τῶν μειζόνων εἰς Μονάδας ὁμοειδεῖς μὲ τὰς Μονάδας τοῦ μικροτέρου εἴδους αὐτοῦ, καὶ ἔπειτα τελοῦμεν ἐπὶ τούτων μίαν Πολλαπλασίασιν, ὡς ἐν τῷ δευτέρῳ Παραδείγματι δεικνύομεν τὸν τρόπον σαφέςερον.

Καν. β΄.) Ο'τε δὲ τὸ μὲν Πολλαπλασιαζόμενον Ποσὸν συνίςαται ἐκ πολλῶν εἰδῶν, τὸ δὲ Πολλαπλασιάζον τυγχάνει ἑνὸς μόνου εἴδους, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸ μεῖζον εἶδος τοῦ Πολλαπλασιαςέου διὰ τοῦ Πολλαπλασιαςοῦ, ἔπειτα διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ ἕκαςον μικρότερον εἶδος αὐτοῦ, λαμβάνομεν ἐκ τοῦ Πολλαπλασιαςοῦ ἓν μέρος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἔχῃ πρὸς αὐτὸν τὸν Πολλαπλασιαςὴν τὸν ἴδιον λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ Μονὰς τούτου τοῦ μικροτέρου εἴδους πρὸς τὴν Μονάδα τοῦ μείζονος εἴδους αὐτοῦ τοῦ Πολλαπλασιαςέου. τουτέςιν ἂν μὲν ἡ Μονὰς τοῦ ἔλαττον δυναμένου εἴδους, τὸ ὁποῖον ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν, περιέχηται εἰς τὴν Μονάδα τοῦ μείζονος εἴδους τοῦ Πολλαπλασιαςέου φερ' εἰπεῖν, τετράκις, λαμβάνομεν καὶ ἡμεῖς τότε τὸ τέταρτον μέρος τοῦ κειμένου Πολλαπλασιαςοῦ, ἂν δὲ περιέχηται πεντάκις, λαμβάνομεν ἓν πέμπτον μέρος, κ. τ. καὶ δι' αὐτοῦ τοῦ μέρους πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ τὸ μικρότερον εἶδος τοῦ Πολλαπλασιαςέου, καθὼς καὶ κατωτέρω διὰ τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου Παραδείγματος ἐκθέτομεν σαφέςερον αὐτὴν τὴν περίςασιν.

Καν. γ΄.) Ο'ταν δὲ καὶ τὸ Πολλαπλασιαζόμενον καὶ καὶ τὸ Πολλαπλασιάζον ὑπάρχῃ Πολυειδὲς, τότε πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸ μεῖζον εἶδος τοῦ Πολλαπλασιαζομένου διὰ τοῦ μείζονος εἴδους αὐτοῦ τοῦ Πολλαπλασιάζοντος, δεύτερον πολλαπλασιάζομεν τὸ ἴδιον μεῖζον εἶδος τοῦ Πολλαπλασιαζομένου μετὰ τοῦ ἐλάττονος εἴδους τοῦ Πολλαπλασιάζοντος. εἶτα δὲ πολλαπλασιάζομεν τὸ μικρότερον εἶδος τοῦ Πολλαπλασιαζομένου διὰ τοῦ ἀναλόγου μέρους ὅλου, τοῦ Πολλαπλασιάζοντος Ποσοῦ, καθὼς ἀνωτέρω ἐν τῷ δευτέρῳ Κανόνι εἴρηται, κ. τ. καὶ καθὼς ἐν τῷ πέμπτῳ καὶ ἕκτῳ Παραδείγματι καθορᾶται τρανότερον.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. α΄.

Πωλεῖται ἓν εἶδος, φερ' εἰπεῖν, σῖτος πρὸς 5 Γρόσια, καὶ 15 Παράδ. τὸ Μόδιον, ἐκ τοῦ ὁποίου ἀγοράζει τις μόνον 4 Μόδια, καὶ ζητεῖ νὰ μάθῃ, πόσα πρέπει νὰ πληρώσῃ διὰ ταῦτα. ὅθεν

$$\begin{array}{r} 4 \\ 5 \;:\; 15 \\ \hline \end{array}$$

τὰ 4 Μόδια πολλαπλασιασθέντα διὰ τῶν 5

Γρο-

Γροσίων, παρέχυσι Γινόμενον . . . Γρόσ. 20
τὰ 4 πολλαπλασιασθέντα αὖθις διὰ τῶν
15 Παράδων, παρέχυσι Γινόμενον Παράδες 60, οἵτινες ἀναχθέντες εἰς Γρόσια ποιῦσι . . . . 1 : 20

21 : 20

πρέπει ἄρα νὰ καταβάλῃ ὁ ἀγοράσας εἴκοσι ἓν Γρόσιον, καὶ εἴκοσι Παράδ.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. β'.

Ἔςωσαν τὰ ἴδια ὡς ἀνωτέρω, πλὴν τὰ εἴδη τῦ Πολλαπλασιαςῦ γενίσθωσαν πρῶτον εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ εἶδος, τυτέςι τὰ Γρόσ. εἰς Παράδ. ὅθεν

4 Μόδια
πρὸς 215 Παράδ.

20
4
8

860 Παράδ. τυτέςι
Γρόσια 21 Παράδ. 20.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. γ'.

Ἀγοράζει τις, δὸς εἰπεῖν, ἕνα τόπον Βημάτων 10, καὶ Ποδῶν 4 πρὸς 10 Γρόσ. τὸ Βῆμα, πόσα τοίνυν πρέπει νὰ καταβάλῃ ἕνεκεν τούτων τῶν εἴκοσι Βημάτων καὶ τεσσάρων Ποδῶν;

20 : 4
10

τὰ

τὰ 20 Βήματα πολλαπλασιασθέντα διὰ τῦ 10, διδόασι Γινόμενον . . . Γρόσ. 200
ἐπειδὴ δὲ ἕνας Πῦς περιέχεται ἐν τῷ Βήματι πεντάκις, τυτέςι πέντε πόδες συνιςῶσιν ἓν Βῆμα, διὰ τῦτο πρέπει νὰ λάβωμεν ἐκ τῦ Πολλαπλασιαςῦ 10 τὸ πέμπτον μέρος αὐτῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ 2 ἀριθμὸς, καὶ δι' αὐτῦ πολλαπλασιάζομεν τὰς 4 Πόδας, ὥςε προκύπτει Γινόμενον . . . . Γρόσ. 8

ἅπαν τὸ Γινόμενον Γρόσια 208

ΠΑΡΑ'Δ. δ'.

Ἓν εἶδος ὑφάσματος πωλεῖται πρὸς 6 Γρόσια τὸν Πῆχυν, λοιπὸν διὰ ὀκτὼ Πήχεις καὶ ἥμισυν ἐκ τύτυ τῦ ὑφάσματος πόσα πρέπει γίνας νὰ πληρώσῃς ὅθεν

8 $\frac{1}{2}$
6

οἱ 8 Πήχεις πολλαπλασιασθέντες διὰ τῶν 6 Γροσίων, ποιῦσι . . . . Γρόσ. 48
τὸ δὲ $\frac{1}{2}$ ἐπειδὴ δύναται τὸ ἥμισυ τῦ Πήχεως, πρέπει νὰ εἶναι καὶ ἡ τιμὴ αὐτῦ τὸ ἥμισυ τῦ Πολλαπλασιαςῦ, τυτέςιν ὁ 3, ὥςε τὸ Γινόμενον εἶναι . . . 3

Γρόσια 51

ΠΑ-

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. έ.

Ἐρωτᾷ τις, πόσα Βήματα δύναται νὰ περιέχῃ ἕνας τόπος, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν μῆκος εἶναι Βήματα 8, ϗ $\frac{1}{2}$, τὸ δὲ πλάτος εἶναι Βήματα 10 ϗ 4 Πόδες. ὅθεν

8 : $\frac{1}{2}$
10 : 4

τὰ 8 Βήματα πολλαπλασιασθέντα διὰ τῶν 10 Βημάτων, παρέχουσι 80
ϗ πάλιν πολλαπλασιασθέντα τὰ 8 Βήματα διὰ τῶν 4 Ποδῶν, παρέχουσι Γινόμενον 32 Πόδας, τουτέστι Βήματα . . . 6 : ϗ 2 Πόδας
τοῦ δὲ $\frac{1}{2}$, ἐπειδὴ σημαίνει τὸ ἥμισυ τοῦ Βήματος, ἔσται . . . . 5 : 2

91 : 4

τὸ περιεχόμενον ἄρα τοῦ τόπου τούτου εἶναι Βήματα ἐννενήκοντα ἕν, ϗ τέσσαρες Πόδες.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. ς'.

Ἠγόρασέ τις 15 Βήματα ϗ 3 Πόδας τόπου πρὸς Γρόσια 10 ϗ Παράδ. 20 τὸ Βῆμα, ϗ ἐπιθυμεῖ νὰ μάθῃ πόσα πρέπει νὰ πληρώσῃ ἀντὶ τῶν 15 Βημάτων, ϗ 3 Ποδ. ὅθεν

15 : 3
10 : 20

τῶν 15 Βημάτων πολλαπλασιασθέντων διὰ

διὰ τῶν 10 Γροσ. τὸ Γινόμενον . . 150
πολλαπλασιασθέντων δὲ ϗ διὰ τῶν 20 Παράδων, προκύπτει Γινόμενον 300 Παράδ. τουτέστι Γρόσια . . . . . . 7 : 20
οἱ δὲ 3 Πόδες πολλαπλασιασθέντες διὰ τοῦ πέμπτου μέρους τῶν 10, τουτέστι διὰ τοῦ 2, παρέχουσι Γρόσια . . . 6
πολλαπλασιασθέντες ἔτι ϗ διὰ τοῦ πέμπτου μέρους τῶν 20, τουτέστι διὰ τοῦ 4 ἀριθμοῦ, παρέχει Παράδ. . . . 12

163 : 32
Γρόσ. Παράδ.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 57. Τῆς κατὰ ταῦτα πράξεως εἰσὶ ϗ ἄλλοι τρόποι, τοὺς ὁποίους μεταχειρίζονται ἕτεροι. ἀλλ' ἡμεῖς διὰ νὰ μὴ φύγωμεν ἀπὸ τῆς τάξεως τῆς καθ' ἡμᾶς προθέσεως, μακρολογοῦντες ἴσως ἀνωφελῶς ϗ ἄνευ ἀνάγκης, παραλιμπάνομεν τὴν τούτων Ἔκθεσιν· εἰσὶ δὲ πρὸς τοῖς εἰρημένοις ϗ ἄλλαι περιστάσεις, ἀλλὰ περὶ τούτων θέλομεν ὁμιλήσει πλατύτερον εἰς τὴν ἄλγεβραν, ὅτε προχωρήσωμεν περὶ τῆς Μεθόδου τῶν τριῶν κ. τ.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ δ'.

§. 58. Νὰ διαιρῶμεν, ἢ νὰ μερίζωμεν Ποσὰ Ἑτεροειδῆ.

ΠΡΑΚΤΕ'Α ἢ ΛΥ'ΣΙΣ.

Καν. ά) Ὅταν ὁ μὲν Διαιρετέος ὑπάρχῃ Πολυειδής, ὁ δὲ Διαιρέτης τύχῃ μόνον ἑνὸς εἴδους ὤν, τότε διαιρῶμεν

μεν διὰ τοῦ Διαιρέτου πρῶτον τὸ μεῖζον εἶδος τοῦ Διαι-ρετέου, καθ' ὃν τρόπον προείρηται ἐν τῷ περὶ Διαιρέσεως τῶν ὁμοειδῶν, γράφοντες ϗ τὸ Πηλίκον ὑπὸ τὴν Γραμ-μὴν, ἔπειτα ἂν μὲν ἐκ ταύτης τῆς Διαιρέσεως δὲν μένη τὶ λείψανον, μεταβαίνομεν εὐθὺς εἰς Διαίρεσιν τοῦ ἐγγὺς ἐλάττονος εἴδους. ἂν ὅμως ἐναπολειφθῇ τι, διαλύομεν αὐτὸ εἰς Μονάδας Ἰσοδυνάμους μὲ τὰς τοῦ ἐγγύς ἐλάτ-τονος εἴδους, ϗ συνάψαντες αὐτὰς ὁμοῦ μὲ τὸν ἀριθμὸν τούτου τοῦ ἐλάττονος εἴδους, ποιοῦμεν αὖθις ἐπ' αὐτῶν τὴν συνήθη Διαίρεσιν, ϗ γράφομεν τὸ Πηλίκον χωρὶς, ϗ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον διαιροῦμεν ἅπαντα τὰ εἴδη τοῦ Διαιρετέου. καθὼς ϗ κατωτέρω ἐπὶ τοῦ πρώτου Παρα-δείγματος γίνεται.

Καν. β΄) Ὅταν δὲ ὁ Διαιρετέος εἶναι ἑνὸς μόνου εἴδους, ὁ δὲ Διαιρέτης τυγχάνη ἐκ πολλῶν συγκείμενος, διαλύομεν πρῶτον τὰ μεγαλήτερα εἴδη τοῦ Διαιρέτου εἰς τὸ μικρότερον εἶδος, ἔπειτα ἂν ὁ ἀριθμὸς τούτου τοῦ δια-λυθέντος Διαιρέτου εἶναι ἐλάττων τοῦ Διαιρετέου, ποιοῦμεν τὴν συνήθη Διαίρεσιν, ἂν ὅμως μετὰ τὴν διάλυσιν ὁ ἀριθ-μὸς τοῦ Διαιρέτου γένηται μεῖζον τοῦ Διαιρετέου, τότε αὐ-ξάνομεν πρῶτον ϗ τὸν ἀριθμὸν τούτου τοῦ Διαιρετέου, πολ-λαπλασιάζοντες αὐτὸν δι' ἐκείνου τοῦ ἀριθμοῦ, διὰ τοῦ ὁποίου διελύσαμεν ϗ τὰ μείζονα εἴδη τοῦ Διαιρέτου, ἔπει-τα ποιοῦμεν τὴν Διαίρεσιν ἐπ' αὐτῶν, καθῶς διὰ τοῦ δευ-τέρου, ϗ τρίτου Παραδείγματος ἐμφαίνομεν ταῦτα σαφέ-στερον.

Καν. γ΄. Ὅτι δὲ ϗ ὁ Διαιρετέος ϗ ὁ Διαιρέτης συ-νίσανται ἐκ πολλῶν εἰδῶν, ϗ σημαίνουσι ἑκάτεροι Ποσότη-τας ἑνὸς ϗ τοῦ αὐτοῦ γένους, διαλύομεν πρῶτον ϗ τοὺς δύω εἰς τὸ μικρότερον εἶδος, ϗ τοὺς ἀποκαθιστῶμεν ὁμοει-δεῖς,

δεῖς, ἔπειτα ποιοῦμεν ἐπ' αὐτῶν τὴν Διαίρεσιν, καθὼς ϗ κατωτέρω εἰς τὸ τέταρτον Παράδειγμα ταύτην τὴν πε-ρίστασιν παρατιθέτομεν. ὅταν δὲ ϗ ὁ Διαιρετέος ϗ ὁ Διαι-ρέτης ὑπάρχωσι συγκείμενοι ἐκ πολλῶν εἰδῶν, πλὴν ση-μαίνωσι Ποσὰ ἑτερογενῆ, τότε διαλύομεν ἑκάτερον εἰς τὸ μικρότερον εἶδος αὐτοῦ, ἔπειτα διαιροῦμεν αὐτοὺς, ὡς ϗ ἐν τῷ πέμπτῳ Παραδείγματι ποιεῖται.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓ. ά.

Νὰ διαιρεθῶσι 453 Γρόσια ϗ 8 Παράδ. εἰς 4 ὑποκείμενα. ὅθεν

	Γρόσια		Παράδ.	
	453	:	8	4
	4		40	
	05		48	
			4	
	13			
	12		08	
			8	
λείψανον	1			
			0	

τὰ 453 Γρόσια διαιρεθέντα διὰ τῶν 4, παρέχουσι Πηλίκον Γρόσια 113 ϗ μένει ἐξ' αὐτῶν ἀδιαίρετον ἓν Γρόσιον, τοῦτο δὲ εἰς 40 Πα-ράδ. διαλυθέντος, ϗ συναφθέντος μετὰ τῶν λοιπῶν Παράδων, ἀναφύεται ὁ ἀριθμὸς 48, ὁ ὁποῖος διαιρεθεὶς διὰ τῶν 4, πα-ρέχει Πηλίκον Παράδ. 12. ὥστε ἕκαστον τῶν 4 ὑποκειμένων λαμβάνει 113 Γρόσ. ϗ 12 Παράδ.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. β'.

Ταχυδρόμος τις τεταγμένος ὁδοίων, εἰς 5 ἡμέρας καὶ 7 ὥρας διήλασε δρόμον 762 Μίλλια, καὶ ζητεῖται, πόσα Μίλλια διήνυσεν οὗτος καθ' ἑκάστην ἡμέραν.

Διαλύομεν πρῶτον τὰς 5 ἡμέρας εἰς ὥρας, πολλαπλασιάζοντες τὸν 5 ἀριθμὸν διὰ τοῦ 24. ὅτι εἴκοσι τέσσαρας ὥρας ἔχει ἡ ἡμέρα, ὥστε προκύπτει ἀριθμὸς ἡμερῶν 120, ἔπειτα συνάψαντες τοῦτον τὸν ἀριθμὸν μετὰ τῶν λοιπῶν 7 ἡμερῶν, ποιοῦμεν τὴν Διαίρεσιν, οἷον

Μίλλια

762 | 127 ὧραι

6

762

000

γίγονεν ἄρα φανερὸν ὅτι οὗτος ὁ Ταχυδρόμος ἔτρεχε τὴν ὥραν 6 Μίλλια, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιασθέντα διὰ τῶν 24 ὡρῶν, δεικνύουσιν, ὅτι ὥδευε καθ' ἑκάστην ἡμέραν 144 Μίλλια.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ γ'.

Ἄνθρωπός τις εἰς 2 ὥρας καὶ 20 λεπτὰ ἔτρεξεν 28 Μίλλια· ζητεῖται λοιπὸν, πόσα Μίλλια διέτρεξε καθ' ἑκάστην ὥραν.

Ἀφ' οὗ διαλυθῶσιν αἱ 2 ὧραι διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως τῶν 60 (ἐπειδὴ ἑξήκοντα λεπτὰ συμπληροῦσι μίαν ὥραν), προκύπτει ἀριθμὸς 120 λεπτὰ, σὺν αὐτοῖς δὲ συναφθέντων καὶ τῶν 20, γίνονται ἅπαντα 140 λεπτὰ, διὰ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ διαιρεθῶσι τὰ 28 Μίλλια, ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ 28 δὲν δύνανται νὰ διαιρεθῶσι διὰ τῶν 140, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ αὐξήσωμεν τὰ αὐτὰ διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως τοῦ ἀριθμοῦ 60, ἐπειδὴ δι' αὐτῆς διαλύσομεν τὸ μεῖζον εἶδος τοῦ Διαιρέτου, τουτέστι τὰς 2 ὥρας εἰς λεπτά. ὅθεν τὰ 28 Μίλλια

πολλαπλασιασθέντα διὰ τῶν 60, παρέχουσιν ἀριθμὸν 1680, ἐπὶ τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ Διαίρεσις οὕτως.

1680 | 140

12

140

0280

280

000

ὅθεν γίνεται φανερὸν, ὅτι εἰς κάθε ὥραν ἔτρεξεν 12 Μίλλια.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ δ'.

Νὰ διαιρεθῶσι 16 Γρόσ. καὶ 10 Παράδ. διὰ 4 Γροσίων καὶ 2 Παράδων.

Τὰ 16 Γρόσια τοῦ Διαιρετέου διαλυθέντα πρῶτον εἰς Παράδ. καὶ συναφθέντα ἔπειτα μετὰ τῶν λοιπῶν 10 Παράδων, παρέχουσιν ἀριθμὸν 650 Παράδ. διαλυθέντα δὲ καὶ τὰ 4 Γρόσ. τοῦ Διαιρέτου εἰς Παράδ. καὶ συναφθέντα μετὰ τῶν λοιπῶν 2 Παράδων, ποιοῦσιν ἀριθμὸν 162. ὅθεν γίνεται

650 | 162

$4 + \frac{2}{162}$

648

002 ἐναπολειπόμενον.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. έ.

Ἐργαζόμενός τις, ἔλαβε μισθὸν εἰς 4 Μῆνας ϗ 6 ἡμέρας, Γρόσια 37 ϗ 12 Παράδ. ϗ ζητεῖ νὰ μάθῃ, πόσος εἶναι ὁ μισθὸς ἑκάστη Μηνός.

Διαλυθέντων τῶν 4 Μηνῶν εἰς ἡμέρας, ϗ σὺν αὐταῖς ληφθεισῶν ϗ τῶν 6 λοιπῶν ἡμερῶν, γίνεται ἀριθμὸς 126 ἡμερῶν. Διαλυθέντων δὲ ϗ τῶν 37 Γροσίων εἰς τὸ μικρότερον αὐτῶν εἶδος, ἤτοι εἰς Παράδ. ϗ σὺν αὐτοῖς ληφθέντων ϗ τῶν 12 Παράδων, προκύπτει ἀριθμὸς 1512 Παράδ. ὅθεν γίνεται ἡ Διαίρεσις οὕτως

Παράδες	Ἡμέραι
1512	126
126	12
0252	
252	

δῆλον ἄρα, ὅτι καθ' ἑκάστην μὲν ἡμέραν ἦν αὐτῷ ὁ μισθὸς 12 Παράδες, καθ' ἕκαστον δὲ Μῆνα ἐγένετο Παράδες 360 ἤτοι Γρόσια 9.

ΥΠΟΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 59. Αἱ Δείξεις τῶν προτέρων Προβλημάτων, ἐπειδή εἰσιν αἱ αὐταὶ μὲ τὰς Δείξεις τῶν ὁμοειδῶν, διὰ τοῦτο παρελείφθησαν ἐνταῦθα, ὡς περιτταί.

ΚΕΦΑΛ.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ δ'.

Γενικαὶ Ἰδέαι τῶν Κλασμάτων.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ ά.

§. 60. Κλάσμα τοίνυν ἐστὶ μέρος πρὸς ὅλον ὡς Μονάδος θεωρουμένου, ἢ μέρος ἐστὶ τῆς μονάδος, ὅθεν ϗ τῆς Μονάδος ἐκείνης ἔλαττον ὑπάρχει.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 61. Ἐὰν τι ὅλον, ἢ Μονάς τις διαιρεθῇ εἰς πλείονα μέρη, ϗ ἐξ αὐτῶν ληφθῶσί τινα, λέγεται τότε Κλάσμα. οἷον, ἐὰν διέλωμεν ἓν ὅλον εἰς ἓξ ἴσα μέρη, ϗ ἐξ αὐτῶν ἔχωμεν νὰ λάβωμεν δύω μόνα μέρη, ἐκθέτομεν αὐτὰ οὕτως $\frac{2}{6}$, ϗ τότε καλοῦμεν αὐτὰ Κλάσμα. ἂν διαιρεθῇ τὸ Γρόσιον εἰς τεσσαράκοντα ἴσα μέρη, ἕκαστον μέρος αὐτῶν δύναται ἴσον μὲ ἕνα Παρᾶν. ὅθεν ἂν θέλωμεν νὰ λάβωμεν ἐξ αὐτῶν μόνον 30 Παράδας, ἐμφαίνομεν οὕτως $\frac{30}{40}$. οὕτω δὴ ϗ $\frac{3}{4}$ σημαίνει, ὅτι τὸ ὅλον, ἢ ἡ Μονὰς διῃρέθη εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, ϗ ἐλήφθησαν μόνον τρία τινὰ τεμάχια. ὥστε ἕκαστον Κλάσμα ἔχει δύω μέρη, τὸ μὲν ἓν δεικνύει εἰς πόσα μέρη τὸ ὅλον διῄρηται, τὸ δὲ ἄλλο ἐμφαίνει, πόσα μέρη τοῦ ὅλου περιλαμβάνει ἐν αὐτῷ τὸ Κλάσμα.

ΟΡΙΣ.

ὉΡΙΣΜΟ͂Σ β΄.

§. 62. Ἀριθμητὴς μὲν Κλάσματός ἐστιν ἐκεῖνος ὁ ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος κεῖται ὑπεράνω τῆς Γραμμῆς, καὶ δεικνύει τὸν ἀριθμὸν τῶν ληφθέντων μερῶν ἐκ τοῦ ὅλου. Παρωνυμῶν δὲ, ἢ Παρονομαστὴς Κλάσματός ἐστιν ὁ ὑποκάτω τῆς Γραμμῆς κείμενος ἀριθμὸς, ὅστις ἐμφαίνει, εἰς πόσα ἴσα μέρη τὸ ὅλον διῄρηται. καὶ οἱ δύο δὲ κοινῶς ὀνομάζονται Ὅροι τοῦ Κλάσματος.

ὉΡΙΣΜΟ͂Σ γ΄

§. 63. Κυρίως μὲν Κλάσματά εἰσιν ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμητὴς εἶναι ἐλάττων τοῦ Παρονομαστοῦ οἷον $\frac{3}{4}$, ἢ $\frac{2}{6}$. Καταχρηστικὰ δὲ Κλάσματά εἰσιν ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν ἀριθμητὴν ἢ ἴσον, ἢ μείζονα τοῦ Παρονομαστοῦ, οἷον $\frac{5}{5}$, καὶ $\frac{18}{6}$, καὶ $\frac{13}{4}$, ἐπειδὴ ὅταν ληφθῶσι μέρη πλείονα τῶν, εἰς ὅσα τὸ ὅλον διῄρηται, τὸ Κλάσμα τότε εἶναι μεῖζον

τοῦ ὅλου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐναντίον τῷ τοῦ Κλάσματος Ὁρισμῷ.

ΣΧΟ͂ΛΙΟΝ.

§. 64. Τὰ Καταχρηστικὰ Κλάσματα δύνανται διὰ τῆς Διαιρέσεως νὰ ἀνάγωνται ἢ εἰς ἓν ὅλον μόνον, ἢ (ὅταν ἐναπολείπηταί τι) εἰς ἀκέραιον μετὰ Κλάσματος κυρίου. τουτέστι διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὸν τοῦ Καταχρηστικοῦ Κλάσματος διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ, καὶ τότε τὸ Προκύπτον εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, καθὼς ἐκ τῶν ἀνωτέρω τεθέντων Καταχρηστικῶν Κλασμάτων γίνεται. οἷον ἐκ μὲν τοῦ $\frac{5}{5}$ προκύπτει ἀκέραιος ἀριθμὸς 1, ἐκ δὲ τοῦ $\frac{18}{6}$ γίνεται 3, ἐκ δὲ τοῦ $\frac{13}{4}$ προκύπτει 3 καὶ $\frac{1}{4}$.

ὉΡΙΣΜΟ͂Σ δ΄.

§. 65. Ἁπλοῦν Κλάσμα ὀνομάζεται τὸ ἐξ ἑνὸς ἀριθμητοῦ καὶ ἐξ ἑνὸς Παρονομαστοῦ συνιστάμενον· οἷον $\frac{2}{4}$, $\frac{10}{17}$. Σύνθετον δὲ Κλάσμα, ἢ (ὡς ἄλλοι λέγουσι) Κλάσμα Κλάσματός ἐστι μόριον, ἢ μόρια μερῶν τινος ὅλου, τουτέστι τὸ ἐκ πολλῶν ἁπλῶν Συγκείμενον. ὡς τὸ $\frac{2}{3}$ ἀπὸ τοῦ $\frac{1}{2}$. π. χ. ἀπὸ τοῦ ἡμί σεως τινος ὅλου πρέπει νὰ ληφθῶσι πάλιν ὁμοίως τετμημένα, αὐτὰ δὲ τὰ Κλάσματα ἀνάγονται εἰς ἁπλᾶ Κλάσματα, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι μετ' ἀλλήλων κατὰ τοὺς ῥηθησομένους Κανόνας ἐν τῷ (§. 84.).

ΘΕΩ'ΡΗΜΑ α'.

§. 66. Τοσάκις περιέχεται ἓν Κλάσμα εἰς τὸ ὅλον, ὁσάκις ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ εἰς τὸν Παρονομαστήν.

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

Ὁ μὲν Παρονομαστὴς τοῦ Κλάσματος σημαίνει πόσα μέρη, εἰς ὅσα διῃρέθη τὸ ὅλον, ὁ δὲ ἀριθμητὴς παρίστησιν, ὅσα μέρη ἐλήφθησαν ἐκ τοῦ Διαιρεθέντος ὅλου, τοῦτ' ἔστιν ἐμφαίνει αὐτὸ τὸ Κλάσμα (§. 62.). ἄρα τὸ Κλάσμα ἔχει πρὸς τὸ ὅλον τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ πρὸς τὸν Παρονομαστήν.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ α'.

§. 67. Τὰ Κλάσματα ἄρα, τῶν ὁποίων οἱ ἀριθμηταὶ ἔχουσι πρὸς τοὺς Παρονομαστὰς τὸν αὐτὸν λόγον, ταὐτὰ περιέχονται τοσάκις ἐν τοῖς ἰδίοις Παρονομασταῖς, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. π. χ. $\frac{2}{4}$ καὶ $\frac{3}{6}$, ἐπειδὴ ὁ 2 ἀριθμητὴς περιέχεται ἐν τῷ 4 Παρονομα-

στῇ τοσάκις, ὁσάκις ὁ 3 ἀριθμητὴς τοῦ ἑτέρου Κλάσματος ἐν τῷ αὐτῷ Παρονομαστῇ 6. ὡσαύτως $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{90}{270}$ ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. Ἔλαττον δὲ Κλάσμα εἶναι ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου ὁ Ἀριθμητὴς περιέχεται ἐν τῷ οἰκείῳ Παρονομαστῇ πλεονάκις, παρὰ ὁ Ἀριθμητὴς τοῦ ἑτέρου Κλάσματος ἐν τῷ αὐτοῦ Παρονομαστῇ. π. χ. τὸ $\frac{3}{24}$ ὑπάρχει ἔλαττον τοῦ $\frac{2}{6}$. ὡσαύτως καὶ τὸ $\frac{4}{7}$ ἔλαττόν ἐστι τοῦ $\frac{5}{8}$. ὁ δὲ αἴτιος λόγος εἶναι, ὅτι ἐπειδὴ ὁ μὲν Παρονομαστὴς ἐμφαίνει τὰ μέρη τοῦ Διαιρεθέντος ὅλου, ὁ δὲ Ἀριθμητὴς σημαίνει τὰ ἐκ τούτων ληφθέντα μέρη, πρέπει νὰ λαμβάνωνται καὶ τὰ δύο πάντοτε κατά τινα λόγον· καὶ ἂν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὅλον διαιρεθῇ εἰς διάφορα μέρη π. χ. ἤδη μὲν εἰς 12 μέρη, ἔπειτα εἰς 18, καὶ πάλιν εἰς 24, κατ' ἀνάγκην ἐλαττοῦνται ταῦτα τὰ μέρη τοσοῦτον, ὅσον πλεῖον διαιροῦνται. ὥστε πρέπει νὰ αὐξάνηται καὶ ὁ Ἀριθμητὴς δι' ἀναλόγου Ποσῶν, ἂν εἶναι χρεία νὰ μείνῃ τὸ Ἴσον. π. χ. ἂν πρότερον ἐλήφθη ἐκ τοῦ ὅλου τὸ $\frac{6}{12}$, μετὰ ταῦτα διὰ νὰ μείνῃ τὸ Ἴσον, πρέπει νὰ ληφθῇ $\frac{9}{18}$, ἢ $\frac{12}{24}$. ὅθεν ἂν μὲν καὶ τὰ δύο μέρη αὐξηθῶσι διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως ἴσων Ποσοτήτων, τὸ Κλάσμα μένει Ἴσον. ἂν δὲ ὁ Ἀριθμητὴς πολλαπλασιασθῇ μετὰ Ποσότητος μείζονος, καθ' ἣν ὁ Παρονομαστής, τὸ Κλάσμα ἔσται μεῖζον, ὅταν ὅμως ὁ Παρονομαστὴς πολλαπλασιασθῇ μετὰ μείζονος, καθ' ἣν ὁ Ἀριθμητής, γίνεται ἐξ ἐναντίας τότε τὸ Κλάσμα ἔλαττον.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ β'.

§. 68. Ἐντεῦθεν εὐκόλως δύναται νὰ γένῃ δῆλον, ποῖα Κλάσματα εἶναι ἴσα ἀλλήλοις, ἢ διαφέροντα, τὰ ὁποῖα εὐθὺς ἄρα ἐν τῇ ἀρχῇ δὲν εἶναι γνωστά, πολλαπλασιάζομεν ἐναλλὰξ τὸν Ἀριθ-

μητὴν

μητὴν ἑκατέρου Κλάσματος μετὰ τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ ἑτέρου, καὶ ἂν μὲν τὰ ἐξ αὐτῶν Γινόμενα ὦσιν ἴσα, εἰσὶ καὶ τὰ Κλάσματα ἴσα, οὗ τινος δὲ Κλάσματος ὁ Ἀριθμητὴς πολλαπλασιασθεὶς μετὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ἑτέρου ἤθελε δώσῃ μεῖζον Γινόμενον, καὶ τὸ Κλάσμα ἐκεῖνο ἔσται μεῖζον. ὅθεν τὸ $\frac{8}{24}$ καὶ $\frac{1}{3}$ εἰσὶν ἴσα ἀλλήλοις. ἐπειδὴ καὶ τὰ Γινόμενα ἑνὸς ἑκάστου τῶν Ἀριθμητῶν εἰσὶν ἀλλήλοις ἴσα. τὸ δὲ $\frac{5}{8}$ Κλάσμα εἶναι μεῖζον τοῦ $\frac{4}{7}$. ἐπειδὴ πολλαπλασιασθεὶς ὁ Ἀριθμητὴς 5 μετὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 7, περιέχει Γινόμενον 35, πολλαπλασιασθεὶς ὅμως ὁ 4 μετὰ τοῦ 8, περιέχει Γινόμενον 32 μόνον, ὅταν δὲ Κλάσματα ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς Παρονομαστάς, τότε μεῖζον Κλάσμα ἔσται τὸ ἔχον Ἀριθμητὴν μείζονα, π. χ. τὸ $\frac{5}{7}$ εἶναι μεῖζον τοῦ $\frac{3}{7}$. ὅταν δὲ οἱ Ἀριθμηταὶ ὑπάρχωσιν ἴσοι, μεῖζον Κλάσμα ἔσεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει Παρονομαστὴν ἐλάττονα, οἷον $\frac{4}{6}$ ἐστὶ μεῖζον τοῦ $\frac{4}{8}$. ἐπειδὴ τὸ Κλάσμα ἔχει πρὸς τὸ ὅλον πάντοτε, ὡς ὁ Ἀριθμητὴς πρὸς τὸν αὐτοῦ Παρονομαστὴν §. 66.

ὉΡΙΣΜΟ'Σ ι'.

§. 69. Μικτὴ Ποσότης ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἐξ ἀκεραίου καὶ Κλάσματος. οἷον $8\frac{3}{4}$.

ΘΕΩ-

ΘΕΩ'ΡΗΜΑ β'.

§. 70. Ἂν καὶ οἱ δύο Ὅροι ἑνὸς Κλάσματος, τουτέστιν ὁ Ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, ἡ Δύναμις τοῦ Κλάσματος δὲν λαμβάνει τινὰ μεταβολήν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Πολλαπλασιασθέντος μὲν τοῦ ἀριθμητοῦ, γίνεται μεῖζον τὸ Κλάσμα τοσάκις, ὅσας Μονάδας περιέχει ὁ Πολλαπλασιαστής, διὰ τοῦ ὁποίου ἐπολλαπλασιάσθη αὐτὸς ὁ ἀριθμητής. π. χ. ἂν τοῦ $\frac{3}{5}$ ὁ ἀριθμητὴς πολλαπλασιασθῇ διὰ τοῦ 2, γίνεται $\frac{6}{5}$, τὸ ὁποῖον δύναται μεῖζον δὶς τόσον, ὅσον ἐδύνατο πρότερον. πολλαπλασιασθέντος δὲ τοῦ Παρονομαστοῦ, ἐλαττοῦται τὸ Ποσὸν τοσάκις, ὁσάκις περιέχει τὴν Μονάδα ὁ Πολλαπλασιαστής, π. χ. ἂν τοῦ ἀνωτέρου $\frac{6}{5}$ πολλαπλασιασθῇ ὁ Παρονομαστὴς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 2, γίνεται ἓν Ποσὸν $\frac{6}{10}$, τὸ ὁποῖον σημαίνει μόνον ἓν δεύτερον τοῦ ὅσον ἐσήμαινε πρότερον· ὥστε τὸ $\frac{6}{10}$ δύναται ἴσον μὲ τὸ $\frac{3}{5}$. ἂν δὲ τοῦ $\frac{6}{10}$ ὁ ἀριθμη-

τής

τῆς διαιρεθῇ διὰ τῦ 2, μένει $\frac{3}{10}$, τυτέσι τὸ ἥμισυ τῦ προτέρυ, ἂν δὲ διαιρεθῇ ϗ ὁ Παρονομαςὴς τῦ $\frac{3}{10}$ διὰ τῦ 2, προκύπτει $\frac{3}{5}$ τυτέςι γίνεται διπλασίως μεῖζον, ϗ ἑπομένως $\frac{6}{10}$ εἶναι Ἴσον τῷ $\frac{3}{5}$. ἄρα ἂν ϗ οἱ δύω Ὅροι ἑνὸς Κλάσματος πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ . . . κ. τ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

§. 71. Ἐντεῦθεν προξένεται τις, κατὰ ποῖον τρόπον δύνονται διάφορα Κλάσματα (ἔςωσαν ϗ ἐξ ὁποσωνδήποτε μεγίςων ἀριθμῶν συνιςάμενα) νὰ ἰσοδυναμῶσι μὲ ἓν ἕτερον Κλάσμα (κἂν ἐξ ἐλαχίςων ἀριθμῶν συγκείμενον ᾖ) ϗ νὰ ἀναχθῶσιν εἰς τοῦτο, ἐπειδὴ ἀφ' ὃ εὑρεθῇ ὁ κοινὸς Παράγων ϗ μάλιςα ὁ μέγιςος, ὅςις διαιρεῖ ϗ τὸν ἀριθμητὴν ϗ τὸν Παρονομαςὴν ἀμφοῖν, δύνανται νὰ γένη δι' αὐτῦ ἡ Διαίρεσις, ϗ ἀντὶ τῶν προτέρων Πηλικότητων γράφονται τὰ εὑρισκόμενα Πηλίκα, τὰ ὁποῖα εἶναι Ἰσοδύναμα μὲ τὸ πρότερον Κλάσμα. ὁ τοιοῦτος κοινὸς Παράγων ὀνομάζεται Κοινὸν ϗ Μέγιςον Μέτρον, ἢ Κοινὸς Μέγιςος Διαιρέτης.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ ά.

§. 72. Νὰ εὑρίσκωμεν τὸ Κοινὸν Μέγιςον Μέτρον τῦ Κλάσματος.

ΠΡΑΚΤΕ'Α ἢ ΛΥ'ΣΙΣ.

Καν. ά.) Διαιρῦμεν τὸν Παρονομαςὴν διὰ τῦ ἀριθμητῦ, ϗ ἂν μετὰ τὴν Διαίρεσιν δὲν μένῃ τι λείψανον, αὐτὸς

αὐτὸς ὁ ἀριθμητὴς τότε ὑπάρχει τὸ Κοινὸν Μέγιςον Μέτρον. π. χ. $\frac{7}{56}$. ἐπειδὴ διαιρεθέντων τῶν 56 διὰ τῦ 7, δὲν ἐναπολείπεται τι, ἔςιν ἄρα ὁ 7 τὸ Κοινὸν Μέτρον.

Κάν. β'.) Ἂν δὲ μετὰ τὴν πρώτην Διαίρεσιν ἐναπολειφθῇ τι λείψανον εἶναι δῆλον, ὅτι δὲν εὑρέθη ἔτι τὸ Κοινὸν Μέτρον, ὅθεν χωρῦμεν αὖθις εἰς τὸ ἔργον, διαιρῦντες ἐπὶ πλέον, ὕτως ὅμως, ὥςε τὸν μὲν ὄντα πρότερον Διαιρέτην ποιῦμεν Διαιρετέον, τὸ δὲ μετὰ τὴν Διαίρεσιν ἐναπολειπόμενον λαμβάνομεν ὡς Διαιρέτην, τῦ Πηλίκυ μηδένα λόγον ποιῦμενοι, ἕως ὃ μετά τινα Διαίρεσιν δὲν ἐναπολείπηται ὐδὲν, ὁ δὲ ἀριθμὸς ὁ κατὰ τὴν ἐσχάτην Διαίρεσιν Διαιρέτης γενόμενος, αὐτὸς εἶναι τὸ Κοινὸν ϗ Μέγιςον Μέτρον. ὅταν ὅμως μετά τινα Διαίρεσιν ἐναπολείπηται Μονὰς, τότε εἶναι Σημεῖον, ὅτι ἐκεῖνο τὸ Κλάσμα δὲν ἔχει ἕτερον Κοινὸν Μέγιςον Μέτρον, παρὰ τὴν Μονάδα, ἡ ὁποία δὲν διαιρεῖ, ὡς πρότερον εἴρηται. οἷον $\frac{53}{120}$ κ. τ.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. ά.

Ζητηθήτω τὸ Κοινὸν Μέγιςον Μέτρον τῦ Κλάσματος $\frac{252}{315}$.

Διαιρῦμεν τὰ 315 διὰ τῶν 252 κατὰ τὺς ἤδη γνωςὺς Κανόνας τῆς Διαιρέσεως,

$$\begin{array}{r|l} 315 & 252 \\ 252 & 1 \\ \hline 63 & \end{array}$$

ὥςε

ὥστε μετὰ τὴν πρώτην ταύτην Διαίρεσιν ἐναπολείπονται 63, τὰ ὁποῖα Διαιρέτην ποιῦντες, διαιρῦμεν ἤδη τὰ 252 οὕτως .

252 | 63
4
252
———
0

ἐπειδὴ τοίνυν ὁ 63 διαιρεῖ τὰ 252 ἀκριβῶς, ἤτοι χωρὶς νὰ μείνῃ τι μετὰ τὴν Διαίρεσιν λείψανον, γίνεται δῆλον, ὅτι οὗτος ὁ 63 ἀριθμὸς εἶναι τὸ Κοινὸν Μέγιστον Μέτρον τοῦ $\frac{252}{315}$ Κλάσματος· ἡ δὲ Δεῖξις εἶναι δήλη ἐξ αὐτῆς τῆς Πράξεως.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓ. β΄.

Ἔστω εἰς εὕρεσιν τὸ Κοινὸν Μέγιστον Μέτρον τοῦ Κλάσματος $\frac{189}{513}$.

διαιρεθέντων τῶν 513 διὰ τῶν 189, προκύπτει Πηλίκον 2, καὶ μένει λείψανον 135, τὰ ὁποῖα Διαιρέτην ποιῦντες, διαιρῦμεν δι᾽ αὐτῶν τὰ 189 οὕτως . . . . .

513 | 189
2
378
———
135

189 | 135
1
135
———
54

ἀλλ᾽ ἐπειδὴ καὶ μετὰ τὴν δευτέραν ταύτην Διαίρεσιν ἐναπολείπονται 54 εἶναι δῆλον, ὅτι τὰ 135 δὲν εἶναι τὸ Κοινὸν Μέγιστον Μέτρον, ὅθεν διὰ τῶν ἐναπολειφθέντων 54 διαιρῦμεν τὰ 135 οὕτως . . . . .

135 | 54
2
108
———
27

ἀλλ᾽ ἐπειδὴ καὶ μετὰ τὴν τρίτην Διαίρεσιν ἐναπελείφθησαν 27, πρέπει νὰ γένῃ πάλιν Διαίρεσις, ὅθεν διαιρῦμεν τὰ 54 διὰ τῶν 27 οὕτως . . . .

54 | 27
2
54
———
0

ὁ 27 ἄρα ἀριθμὸς εἶναι τὸ Κοινὸν καὶ Μέγιστον Μέτρον τοῦ Κλάσματος $\frac{189}{513}$. ὅστις δύναται νὰ διέλῃ καὶ τὸν ἀριθμητὴν, καὶ τὸν Παρονομαστὴν ἐπ᾽ ἀκριβές. κ. τ.

ΠΡΟ΄ΒΛΗΜΑ β΄.

§. 73. Νὰ ἀνάγωμεν τὸ δοθὲν Κλάσμα εἰς ἐλαχίστους Ὅρους χωρὶς νὰ λυμανθῇ ἡ Δύναμις αὐτοῦ, λέγω, νὰ εὕρωμεν ἕτερον Κλάσμα Ἴσον τῷ δοθέντι, καὶ ἐν Μικροτάτοις ἀριθμοῖς ἐμφαινόμενον.

ΠΡΑΚ-

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Καν. α΄.) Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ Κοινὸν Μέγιστον Μέτρον κατὰ τοὺς προτεθέντας Κανόνας.

Καν. β΄,) Διαιροῦμεν ἔπειτα δι᾽ αὐτοῦ τοῦ Κοινοῦ Μέτρου καὶ τοὺς δύο Ὅρους τοῦ δοθέντος Κλάσματος, λέγω τόντε ἀριθμητὴν καὶ Παρονομαστήν, καὶ τότε τὰ ἐκ τῆς Διαιρέσεως ταύτης προκύψαντα Πηλίκα εἶναι αὐτὸ τὸ Κλάσμα ἐν ἐλαχίστοις Ὅροις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Τὸ μὲν $\frac{252}{315}$ διὰ τῆς Διαιρέσεως τοῦ Κοινοῦ Μέτρου 63 ἀνάγεται εἰς $\frac{4}{5}$. τὸ δὲ $\frac{189}{513}$ διὰ τῆς Διαιρ. τοῦ Κοινοῦ Μέτρου 17 ἀνάγεται εἰς τὸ $\frac{7}{19}$. τὸ δὲ $\frac{255}{663}$ ἂν Γνωρίσωμεν μὲ τὸ $\frac{5}{13}$. τὸ δὲ $\frac{6}{264}$ μὲ τὸ $\frac{1}{44}$. τὸ δὲ $\frac{431}{629}$ ἀνάγεται εἰς τὸ $\frac{14}{17}$. τὸ δὲ $\frac{171}{399}$ εἰς τὸ $\frac{3}{4}$, τὸ δὲ $\frac{85}{425}$ ἂν Γνωρίσωμεν μὲ τὸ $\frac{1}{5}$. τὸ δὲ $\frac{60}{90}$ μὲ τὸ $\frac{6}{9}$ καὶ $\frac{2}{3}$, τὸ δὲ $\frac{100}{150}$ ἀνάγεται εἰς τὸ $\frac{10}{15}$ ἢ εἰς τὸ $\frac{2}{3}$. τὸ δὲ $\frac{125}{450}$ εἰς τὸ $\frac{25}{90}$ ἢ εἰς τὸ $\frac{5}{18}$ ἐκ δὲ τοῦ $\frac{192}{256}$ γίνονται κατὰ τὸ ἥμισυ τὰ ἑξῆς

$\frac{96}{128}$, $\frac{48}{64}$, [illegible], ἤδη ἐπειδὴ ἕκαστον τούτων τῶν Κλασμάτων ἔχει ἐν τῷ [illegible] ἀριθμόν, δύναται νὰ γίνηται ἡ Διαίρεσις πάντοτε διὰ τοῦ 2 συνεχῶς. ἀρτίους δὲ ἀριθμοὺς ὀνομάζομεν ἐκείνους, οἵτινες δύνανται νὰ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ 2, οἷον 2, 4, 6, 8, κ. τ. Περιττοὶ δὲ ἀριθμοὶ εἶναι τὸ ἐναντίον, οἷον, 3, 5, 7, κ. τ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὅταν διαιρῆται καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς διὰ τῆς αὐτῆς Ποσότητος, τότε ἡ Δύναμις τοῦ Κλάσματος δὲν λυμαίνεται κατὰ τὸ προτεθὲν (§. 70.) Θεώρημα, ἐνταῦθα δὲ διαιρεῖται καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς διὰ τοῦ κοινοῦ Μέτρου, καθὼς διὰ τῆς αὐτῆς Ποσότητος. ἡ Δύναμις ἄρα τοῦ Κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἀλλ᾽ ἐπειδὴ καὶ τὸ Κοινὸν Μέτρον εἶναι τὸ Μέγιστον, καὶ ὡς τοιοῦτον παρέχει τὰ μικρότατα Πηλίκα, ἄρα κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον ἄγεται τὸ Κλάσμα εἰς ἐλαχίστους Ὅρους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ γ΄.

§. 74. Νὰ μεταποιήσωμεν, ἢ νὰ ἀγάγωμεν ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς Κλάσμα.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἢ ΛΥΣΙΣ.

Γράφομεν ὑποκάτω τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ μίαν Μονάδα ὡς Παρονομαστήν, π. χ. ἐκ τοῦ 8 γίνεται $\frac{8}{1}$, ἐκ δὲ τοῦ 32 ποιοῦμεν $\frac{32}{1}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἕκαστος ἀριθμὸς δύναται νὰ διαιρεθῇ διὰ τῆς Μονάδος, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ποσῶς ἡ Δύναμις αὐτοῦ, ὅθεν δύναταί τις νὰ γράψῃ ὑποκάτω τινὸς ἀκεραίου τὴν Μονάδα ὡς Διαιρέτην. ἀλλὰ μὴν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐμφαίνεται ἀριθμὸς κεκλασμένος, ἄρα ἕκαστος ἀκέραιος δύναται ἔτσι νὰ μεταποιηθῇ εἰς Κλάσμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛʹ.

§. 75. Νὰ μεταποιήσωμεν τινὰ ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς Κλάσμα, δοθέντος τοῦ Παρονομαστοῦ.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἡ ΛΥΣΙΣ.

Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸ ὅλον μετὰ τοῦ δοθέντος Παρονομαστοῦ, τὸ δὲ ἐκ τούτου Γινόμενον ποιοῦμεν ἀριθμητὴν, καὶ γράφομεν ἔπειτα ὑποκάτω αὐτοῦ τὸν δοθέντα Παρονομαστήν. π. χ. μεταποιεῖται ὁ 8 ἀριθμὸς εἰς Κλάσμα, ἐπὶ τοῦ ὁποίου δίδοται ὁ Παρονομαστὴς 6, ἂν πολλαπλασιασθῇ πρῶτον ὁ 8 διὰ τοῦ 6, καὶ ἔπειτα γραφῇ ὁ 6 ὑποκάτω τοῦ Γινομένου, οἷον $\frac{48}{6}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς πολλαπλασιάζωνται καὶ διαιρῶνται διὰ τῆς αὐτῆς Ποσότητος, ἡ Δύ-

ναμις

ναμις αὐτῶν δὲν λαμβάνει τινὰ μεταβολήν, ἀλλὰ μὴν ἐνταῦθα τὸ δοθὲν ἀκέραιον ἐπολλαπλασιάσθη καὶ διῃρέθη διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ Δύναμις ἄρα δὲν μεταβέβληται, καὶ ἐπομένως τὸ ἀκέραιον κατὰ τὸν ἀνωτέρω Κανόνα μετεποιήθη ὀρθῶς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 76. Γίνεται τοῦτο καταδήλον, ἂν διὰ τοῦ αὐτοῦ Παρονομαστοῦ διαιρεθῇ πάλιν ὁ ἀριθμητὴς, ἐπειδὴ μετὰ τὴν Διαίρεσιν θέλει προκύψει ὁ πρότερον ἀκέραιος ἀριθμός. διότι ἡ Διαίρεσις πρέπει νὰ διαλύῃ ἐκεῖνο, ὅπου διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως συντίθεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ζʹ.

§. 77. Νὰ ἀγάγωμεν Κλάσματα διαφόρους Παρονομαστὰς ἔχοντα ἐπὶ τοὺς αὐτοὺς Παρονομαστάς.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἡ ΛΥΣΙΣ.

Καν. αʹ.) Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν ἑκάστου Κλάσματος διὰ πάντων τῶν Παρονομαστῶν ἐκτὸς τοῦ ἰδίου μόνον, τουτέστι πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πρώτου Κλάσματος διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ δευτέρου, καὶ πάλιν τὸ ἐκ τούτου Γινόμενον διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ τρίτου Κλάσματος, καὶ αὖθις [illegible] Παραγόμενον πολλαπλασιάζομεν διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ τετάρτου Κλάσματος, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. ἔπειτα ἀρχόμεθα πάλιν καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ δευτέρου Κλάσματος διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ πρώτου Κλάσματος,

μετὰ

μετὰ ταῦτα δὲ διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ τρίτου, τοῦ τετάρτου, κ. τ. ὥστε κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον πολλαπλασιάζομεν ἅπαντας τοὺς ἀριθμητὰς τῶν τυχόντων Κλασμάτων. τὸ δὲ Γινόμενον, ὅπου παράγεται ἐκ τῆς Πολλαπλασιάσεως τοῦ ἑνὸς ἀριθμητοῦ καὶ Παρονομαστῶν τῶν ἄλλων Κλασμάτων, ἔσται ἀριθμητὴς αὐτοῦ τοῦ Κλάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς ἐπολλαπλασιάσθη.

Καν. β΄.) Εἶτα δὲ πολλαπλασιάζομεν ἅπαντας τοὺς Παρονομαστὰς μετ᾽ ἀλλήλων, καὶ τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον ἔσται ὁ Κοινὸς Παρονομαστὴς εἰς ἐκεῖνα τὰ δοθέντα Κλάσματα.

Π. χ. διὰ νὰ φέρωμεν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν τὰ Κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{5}$, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν 2 διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 5, ὥστε προκύπτει Γινόμενον ὁ 10, ὃς καὶ γίνεται ἀριθμητὴς τοῦ πρώτου Κλάσματος· ἔπειτα μεταβαίνομεν, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν 4 ἤτοι τὸν ἀριθμητὴν τοῦ δευτέρου Κλάσματος, διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 3, ὥστε παράγεται ἀριθμὸς 12, ὅστις ἔσται ἤδη ἀριθμητὴς τοῦ δευτέρου Κλάσματος. τέλος πολλαπλασιάζομεν καὶ τὸν Παρονομαστὴν τοῦ πρώτου Κλάσματος μετὰ τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ δευτέρου, λέγω τὸν 3 μετὰ τοῦ 5. ὥστε προκύπτει Γινόμενον 15, καὶ οὗτος ὁ 15 ὑπάρχει ὁ κοινὸς Παρονομαστὴς εἰς τοὺς δύο Κλάσματα. οἷον $\frac{10}{15}$ καὶ $\frac{12}{15}$, ἢ $\frac{10 \text{ καὶ } 12}{15}$.

Διὰ νὰ ἀνάγωμεν αὖθις εἰς τοὺς αὐτοὺς Παρονομαστὰς αὐτὰ τὰ Κλάσματα $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{3}$, καὶ $\frac{4}{5}$, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν 3 διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 3, ὥστε προκύπτει Γινόμενον ὁ 9, τοῦτον δὲ τὸν 9 πολλαπλασιάζομεν διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 5, καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον, τὸ ὁποῖον εἶναι 45, ὑπάρχει ἀριθμητὴς τοῦ πρώτου Κλάσματος, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν

τὸν

τοῦ δευτέρου Κλάσματος, λέγω τὸν 2 διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 7, καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον 14 πολλαπλασιάζομεν αὖθις διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ 5, ὥστε προκύπτει ἐξ αὐτῶν Γινόμενον 70, καὶ εἶναι ἀριθμητὴς τοῦ δευτέρου Κλάσματος· κατ᾽ αὐτὸν δὲ τὸν τρόπον πολλαπλασιάζομεν καὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ τρίτου Κλάσματος μετὰ τῶν 7 καὶ 3 Παρονομαστῶν, ὥστε τὸ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον εἶναι 84. τέλος δὲ πολλαπλασιάζομεν ὁμοῦ καὶ ἅπαντας τοὺς Παρονομαστάς, λέγω τὸν 7, 3, καὶ 5, ὥστε ἐκ τῆς Πολλαπλασιάσεως αὐτῶν προκύπτει ὁ 105, καὶ οὗτος εἶναι ὁ κοινὸς Παρονομαστὴς καὶ εἰς τὰ τρία ταῦτα Κλάσματα· οἷον $\frac{45}{105}$, $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$. ἅπαντα ὁμοῦ $\frac{45 \text{ καὶ } 70 \text{ καὶ } 84}{105}$.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Ὅταν καὶ οἱ δύω Ὅροι τινὸς Κλάσματος τουτέστι καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς πολλαπλασιασθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς Ποσότητος, ἡ Δύναμις τοῦ Κλάσματος δὲν βλάπτεται, ἀλλὰ μὴν κατὰ τοὺς ἀνωτέρω Κανόνας καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ Παρονομαστὴς ἑκάστου Κλάσματος πολλαπλασιάζεται διὰ τῆς αὐτῆς Ποσότητος, ἄρα ἡ Δύναμις δὲν μεταβάλλεται. καὶ ἐπειδὴ δὲ οἱ αὐτοὶ Παράγοντες, παρέχουσι τὸ αὐτὸ Γινόμενον, ὁ Παρονομαστὴς ἑκάστου Κλάσματος πολλαπλασιασθεὶς μετὰ τῶν ἄλλων Παρονομαστῶν, παρέχει τὸ αὐτὸ Γινόμενον, καὶ ἑπομένως οἱ Παρονομασταὶ εἰσὶν Ἴσοι.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

§. 78. Δύναται ἔτι νὰ γίνηται ἡ ἀγωγὴ τῶν Κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν καὶ κατὰ τὸν ἑπόμενον τρόπον. πολλαπλασιάζομεν δηλονότι τοὺς Παρονομαστὰς μετ᾽ ἀλλήλων, τὸ δὲ ἐκ τού-

των

τῶν Γινόμενον ὑπάρχει [illegible] Παρονομαστής. ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν [illegible] Παρονομαστῆ, ἐκ τὸ ἐκ τούτου Γινόμενον διαιρῦμεν [illegible] πρότερον Παρονομαστὴν ἐκείνυ τοῦ Κλάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς ἐπολλαπλασιάσθη, τὸ δὲ ἐκ τῆς Διαιρέσεως Πηλίκον εἶναι ὁ νέος ἀριθμητής.

Π. χ. $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{7}$ ἀναχθέντα, γίνονται $\frac{105}{280}$, $\frac{112}{280}$, $\frac{200}{280}$.

Ὁμοίως καὶ $\frac{9}{10}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{6}$ γίνονται $\frac{648}{720}$, $\frac{420}{720}$, $\frac{600}{720}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ έ.

Περὶ τῶν ἀριθμητικῶν Πράξεων, ἢ λογισμῶν ἐν Κλάσμασι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ά.

§. 79. Νὰ συνάπτωμεν Κλάσματα.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἢ ΛΥΣΙΣ.

Καν. ά.) Ἄν τὰ συναφθησόμενα Κλάσματα δὲν ἔχωσι τὸν αὐτὸν Παρονομαστήν, ἀνάγομεν αὐτὰ εἰς ἕνα

[illegible]

κοινὸν Παρονομαστὴν κατὰ τὰς γνωστὰς ἤδη Κανόνας.

Καν. β'.) Ἔπειτα συνάπτομεν τὰς ἀριθμητὰς πάντων, καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα γράφομεν τὸν κοινὸν Παρονομαστήν.

Π. χ. ἐκ τοῦ $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{4}{5}$ γίνεται $\frac{6}{5}$

τὰ δὲ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ γίνονται $\frac{8}{12}$ καὶ $\frac{9}{12}$, τουτέστι $\frac{17}{12}$

τὰ δὲ $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$ γίνονται $\frac{35}{70}$, $\frac{42}{70}$, $\frac{20}{70}$ τουτέστι $\frac{97}{70}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὅταν τὰ Κλάσματα ἔχωσι διαφόρους Παρονομαστάς, εἰσὶ Ποσότητες Ἑτεροειδεῖς, ἐπειδὴ ἐν αὐτοῖς καθορᾶται, ὅτι τὰ ὅλα εἰσὶ διῃρημένα ἑτεροειδῶς, καὶ δὲν δύνανται νὰ συναφθῶσιν ἀλλήλοις, πρὶν νὰ γένωσιν ὁμοειδῆ ἀναχθέντα ἐπὶ τὸν κοινὸν Παρονομαστήν. πλὴν δὲ, ἐπειδὴ οἱ ἀριθμηταὶ δεικνύουσι τὴν πληθὺν τῶν μερῶν, ἡ δὲ Σύναψις εἶναι μία ἄθροισις τῶν μερῶν, πρέπει ἄρα νὰ συναφθῶσιν οἱ ἀριθμηταὶ μόνον, διὰ νὰ ἀναφανῇ τὸ Κεφάλαιον ὅλων τῶν ληφθέντων μερῶν.

ΣΧΟΛΙΟΝ ά.

§. 80. Ὅταν δὲ ἔχωμεν νὰ συνάψωμεν Μικτόν τινα ἀριθμὸν, ἀλέγομεν δηλονότι καὶ Κλάσμα, τότε μετασχηματίζομεν πρῶτον τὸν [illegible] εἰς Κλάσμα, ὡς ἐν τῷ (§. 74.) [illegible], ἔπειτα ἀνα-

 γόντας

γόντες αὐτὰ εἰς κοινὸν Παρονομαστὴν συναθροίζομεν τοὺς τούτων ἀριθμητάς. π. χ. ἔστωσαν εἰς Σύναψιν τὸ 8 ϗ $\frac{1}{3}$. ὅθεν ποιοῦμεν πρῶτον $\frac{8}{1}$ ϗ $\frac{1}{3}$, ἔπειτα $\frac{24}{3}$ $\frac{1}{3}$ τουτέστι $\frac{25}{3}$.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ β'.

§. 81. Ὅταν δὲ τὸ ἄθροισμα ὑπάρχῃ Κλάσμα καταχρηστικὸν, μεταποιοῦμεν αὐτὸ εἰς ἀκέραιον ἀριθμὸν, διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ. π. χ. ἐκ τῶν ἀνωτέρω Κλασμάτων τὸ μὲν $\frac{6}{5}$ μεταποιεῖται εἰς 1 $\frac{1}{5}$, τὸ δὲ $\frac{8}{8}$ εἰς 1. τὸ δὲ $\frac{17}{12}$ ἄγεται εἰς 1 $\frac{5}{12}$. τὸ δὲ $\frac{97}{70}$, εἰς 1 $\frac{27}{70}$.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ β'.

§. 82. Νὰ ἀφαιρῶμεν Κλάσματα.

ΠΡΑΚΤΕ'Α ἡ ΛΥ'ΣΙΣ.

Καν. α'.) Ἄγομεν πρῶτον τὰ δοθέντα Κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, ἐὰν δὲν ἔχωσι τὸν αὐτόν.

Καν. β'.) Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὸν ἐλάττονα ἀριθμητὴν ἀπὸ τοῦ μείζονος, ϗ οὕτω γέγονε τὸ ζητούμενον.

Π. χ. ἀφαιρεθέντος τοῦ $\frac{2}{5}$ ἀπὸ τοῦ $\frac{4}{3}$, μένει $\frac{2}{5}$.

ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῇ $\frac{2}{3}$ ἀπὸ τοῦ $\frac{5}{6}$, μένει $\frac{3}{18}$.

ΔΕΙΞΙΣ

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

Ἐπειδὴ Ποσὰ, καθὼς εἶναι τὰ Κλάσματα, ἔχοντα διαφόρους Παρονομαστὰς, δὲν δύνανται νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπ' ἀλλήλων, πρέπει λοιπὸν νὰ ἀναχθῶσιν εἰς ἕνα κοινὸν Παρονομαστὴν, ἐπειδὴ δὲ ζητεῖται ἡ Διαφορὰ τῶν μερῶν, ἀφαιρεῖται ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς τῶν μερῶν ἀπὸ τοῦ μείζονος, τουτέστιν ὁ μικρότερος ἀριθμητὴς ἀπὸ τοῦ μεγαλητέρου.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 83. Ὅταν τύχωσι Μικτοὶ ἀριθμοὶ, μεταποιοῦμεν πρῶτον τοὺς ἀκεραίους εἰς Κλάσματα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. π. χ. ἐὰν ζητῆται νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ $\frac{2}{3}$ ἀπὸ τοῦ 2 $\frac{1}{2}$, μεταποιοῦμεν πρῶτον τὸ 2 $\frac{1}{2}$ εἰς $\frac{5}{2}$, ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὸ $\frac{2}{3}$ ἀπὸ τοῦ $\frac{5}{2}$ κατὰ τὸν ἀνωτέρω Κανόνα, τουτέστιν ἀφ' οὗ ἀναχθῶσι τὸ $\frac{2}{3}$ ϗ $\frac{5}{2}$ εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, ϗ γένωνται $\frac{4}{6}$, $\frac{15}{6}$, ἀφαιροῦμεν τὸ $\frac{4}{6}$ ἀπὸ τοῦ $\frac{15}{6}$ ὥστε ἐναπολείπεται Διαφορὰ $\frac{11}{6}$ Κλάσμα καταχρηστικὸν, τὸ ὁποῖον μεταποιηθὲν ἔσεται 1 $\frac{5}{6}$.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ γ΄.

§. 84. Νὰ πολλαπλασιάζωμεν Κλάσματα.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἡ ΛΥΣΙΣ.

Καν. ά.) Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὰς ἀριθμητὰς πρὸς ἀλλήλους. τὸ δὲ ἐκ τῆς Πολλαπλασιάσεως Γινόμενον ἔςαι ὁ κοινὸς ἀριθμητής.

Καν. β΄.) Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν ϗ τὰς Παρονομαςὰς πρὸς ἀλλήλους, τὸ δὲ ἐκ τούτων Γινόμενον ὑπάρχει ὁ νέος Παρονομαςής. π. χ. τὸ $\frac{3}{4}$ πολλαπλασιασθὲν μετὰ τοῦ $\frac{7}{8}$, παρέχει $\frac{21}{32}$ καθάπερ δὴ ϗ τοῦ $\frac{9}{15}$ πολλαπλασιασθέντος μετὰ τοῦ $\frac{2}{3}$, προκύπτει $\frac{18}{45}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Πολλαπλασίασις ἐςὶν ἡ Πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται τοιοῦτός τις ἀριθμός, εἰς τὸν ὁποῖον περιέχεται ὁ ἕνας Παράγων τοσάκις, ὁσάκις περιέχεται ἡ Μονὰς εἰς τὸν ἕτερον Παράγοντα, ἀλλὰ μὴν ἐν τοῖς ἀνωτέρω οὕτως ἔχει, τουτέςι τὸ $\frac{3}{4}$ περιέχεται ἐν τῷ $\frac{21}{32}$ τοσάκις, ὁσά-

κις

κις ἡ 1 περιέχεται ἐν τῷ $\frac{7}{8}$, ἄρα οὕτω πρέπει νὰ γίνηται ἡ Πολλαπλασίασις τῶν Κλασμάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ δ΄.

§. 85. Νὰ διαιρῶμεν Κλάσματα.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἡ ΛΥΣΙΣ.

Καν. ά.) Ἀναςρέφομεν πρῶτον τὰς Ὅρους τοῦ Διαιρέτου οὕτως, ὥςε ὁ μὲν πρώην ἀριθμητὴς νὰ γένῃ Παρονομαςὴς ὁ δὲ πρώην Παρονομαςὴς νὰ γένῃ ἀριθμητής.

Καν. β΄.) Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὰ Κλάσματα, καθὼς ἐν τῷ ἀνωτέρῳ Προβλήματι εἴρηται, τουτέςι τὰς ἀριθμητὰς μετὰ τῶν ἀριθμητῶν, ϗ τὰς Παρονομαςὰς μετὰ τῶν Παρονομαςῶν. π. χ. ἔςω διαιρεθησόμενον τὸ $\frac{3}{4}$ διὰ τοῦ $\frac{1}{2}$. ὅθεν ἀναςρέφομεν πρῶτον τὸν $\frac{1}{2}$ εἰς $\frac{2}{1}$, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν δι᾽ αὐτοῦ τὸ $\frac{3}{4}$, ὥςε προκύπτει διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως τὸ $\frac{6}{4}$, ϗ αὐτὸ εἶναι τὸ ζητούμενον Πηλίκον. ὡσαύτως ϗ τὸ $\frac{4}{9}$ διαιρεθὲν διὰ τοῦ $\frac{2}{5}$ παρέχει τὸ $\frac{20}{18}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Δ Ε Ι͂ Ξ Ι Σ.

Εἴτε Κλάσμα δι' ἀκεραίου, εἴτε ἀκέραιον διὰ Κλάσματος, εἴτε καὶ Κλάσμα διὰ Κλάσματος διαιρεῖται, εἰς κάθε περίστασιν ὁ Διαιρέτης σημαίνει, εἰς πόσα μέρη πρέπει νὰ διαιρεθῇ τὸ ὅλον, ἀλλὰ μὴν τοῦτο ἐν τοῖς Κλάσμασιν ὁ Παρονομαστὴς δεικνύει, ἄρα πρέπει τοῦ ὄντι νὰ γένῃ Διαιρέτης ὁ Παρονομαστὴς καὶ οὐχὶ ὁ ἀριθμητής. ἂν τὰ 2 ἤθελον διαιρεθῇ εἰς 3 μέρη, ἔπρεπε νὰ εἶναι 3 ὁ Παρονομαστής. ὅθεν ἂν τὸ $\frac{1}{2}$ προτεθῇ νὰ διαιρεθῇ εἰς 3 μέρη, πρέπει νὰ εἶναι καὶ ὁ Παρονομαστὴς 3. ἀλλ' ἐπειδὴ αὐτὸ τὸ ὅλον προελήφθη ὡς εἰς δύω μέρη διῃρημένον, καὶ ἤδη πάλιν πρόκειται νὰ διαιρεθῶσιν αὐτὰ τὰ ἡμίσεα εἰς 3 μέρη, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσι πρὸς ἀλλήλους καὶ οἱ δύω οὗτοι Διαιρέται, καὶ οὕτω, διαιρεθέντος τοῦ $\frac{1}{2}$ διὰ τοῦ 3, προκύπτει $\frac{1}{6}$. διότι ἂν τὸ ἀκέραιον ἐκτεθῇ ἐν Κλάσματι, ἔσται 1 $\frac{1}{2}$ διαιρεμένον διὰ τοῦ $\frac{3}{1}$, καὶ ἀναστραφέντος τοῦ $\frac{3}{1}$ εἰς $\frac{1}{3}$, διὰ νὰ τελεσθῇ ἐπ' αὐτῶν ὁ Πολλαπλασιασμός, ἔσται $\frac{1}{2}$ πολλαπλαζόμενον μετὰ τοῦ $\frac{1}{3}$, τουτέστι $\frac{1}{6}$ τὸ Πηλίκον.

Ἀκεραίου διαιρουμένου διὰ Κλάσματος, π. χ. 3 διὰ τοῦ

$\frac{1}{2}$ ἔσεται, ἂν τὸ ὅλον διαιρεθῇ διὰ 1, τὸ Πηλίκον ἴσον μὲ τὸ ὅλον. ἂν δὲ τὸ ἀκέραιον διαιρεθῇ διὰ Κλάσματος, πρέπει νὰ εἶναι τὸ πηλίκον μεῖζον τοῦ ἀκεραίου, ἢ τὰ μέρη τοῦ ἀκεραίου πρέπει νὰ εἶναι τοσοῦτον πλείονα, ὅσον μικρότερα λαμβάνονται. ἂν ληφθῇ τὸ ἥμισυ τῶν μερῶν, πρέπει νὰ εἶναι δύω φοραῖς περισσότερα, ἐὰν δὲ ληφθῶσι τὸ τρίτον τῶν μερῶν, πρέπει νὰ εἶναι τριπλασίως πλείονα, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. ὅθεν ἂν εἶναι νὰ διαιρεθῇ τὸ 3 διὰ τοῦ $\frac{1}{2}$, τουτέστι νὰ ληφθῇ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ, πρέπει νὰ μεταβληθῇ εἰς μέρη διπλασίως πλείονα, λέγω νὰ πολλαπλασιασθῇ διὰ τοῦ 2. ἄρα πρέπει ὁ Παρονομαστὴς τοῦ Κλάσματος νὰ πολλαπλασιασθῇ μετὰ τοῦ ἀκεραίου. ἀφ' οὗ δὲ τὸ ἀκέραιον ἐκτεθῇ ὡς Κλάσμα, τουτέστι $\frac{3}{1}$, πρέπει νὰ ἀναστραφῶσι καὶ οἱ Ὅροι τοῦ $\frac{1}{2}$, τουτέστι νὰ γένηται $\frac{2}{1}$, διὰ νὰ τελεσθῇ ἐπ' αὐτῶν ἡ Πολλαπλασίασις, ὥστε ὁ Πολλαπλασιασμὸς γίνεται ἐν τοῖς Κλάσμασιν, ἀναστραφέντος τοῦ Διαιρέτου. Ὄντος δὲ Κλάσματος νὰ διαιρεθῇ διὰ Κλάσματος π. χ. τοῦ $\frac{3}{4}$ διὰ τοῦ $\frac{2}{5}$, πρέπει (ἐπειδὴ $\frac{3}{4}$ ἔχει νὰ μεταποιηθῇ εἰς πεμπτημόρια) νὰ γένωσι πλείονα καὶ μικρότερα μέρη, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως τοῦ 3 μετὰ τοῦ 5. καὶ ἐπειδὴ ἔχει νὰ διαιρεθῇ

εἰς 2

εἰς 2 τοιαῦτα μέρη, πρέπει ὁ Παρονομαστὴς 4 νὰ ληφθῇ δὶς, νὰ πολλαπλασιασθῇ δηλονότι διὰ τῦ 2. γίνεται ἄρα κ̓ ἐντοῦθα ὁ Πολλαπλασιασμὸς, ἀναστραφέντος τῦ Διαιρέτη. Ἡ αὐτὴ Δεῖξις ὑπάρχει, κ̓ ὅταν τὰ Κλάσματα ἔχωσι τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, ἔνθα ὁ ἀριθμητὴς τῦ Διαιρετέυ διαιρόμενος διὰ τῦ ἀριθμητῦ τῦ Διαιρέτυ, παρέχει τὸ Πηλίκον. $\frac{3}{4}$ διαιρεθὲν διὰ τῦ $\frac{1}{2}$, τυτέστι $\frac{6}{8}$ διὰ τῦ $\frac{4}{8}$, παρέχει $\frac{48}{32}$, τὸ ὁποῖον ἐκτεθὲν διὰ μικροτέρων ἀριθμῶν, εἶναι $\frac{6}{4}$, ὡς πρότερον εὕρηται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 86. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι διὰ μὲν τῆς Πολλαπλασιάσεως τῶν Κλασμάτων ἡ Δύναμις ἐλαττῦται, διὰ δὲ τῆς Διαιρέσεως αὐξάνει. ἐπειδὴ κατὰ μὲν τὸν πρῶτον [illegible] γίνεται [illegible] Διαίρεσις, κατὰ δὲ τὸν δεύτερον γίνεται Πολλαπλασιασμὸς. [illegible] ληφθῇ τὸ ἥμισυ τῦ [illegible], τὸ ὁποῖον γίνεται διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως μὲ $\frac{1}{2}$, ἢ μὲ ὁποῖόν τι Κλάσμα ἐκφράζεται αὐτὸ εἰς ἕνα μέρος, ἢ εἰς πλείονα κατὰ τὸ σημαινόμενον τῦ Παρονομαστῦ. ἂν ὅμως εἶναι νὰ διαιρεθῇ εἰς ἡμίσεια, εἰς τέταρτα, ἢ [illegible], τὸ ὁποῖον πλεῖστα διὰ τῆς Διαιρέσεως τῶν Κλασμάτων γίνεται, κατ᾽ ἀνάγκην νὰ προκύψωσι πλείονα μέρη, ἢ μείζων τις ἀριθμὸς. οἷον 4 πολλαπλασιασθὲν διὰ τῦ $\frac{1}{2}$, ἢ τὸ ἥμισυ τῦ 4 εἶναι 2 [illegible] τοὐναντίον δὲ 4 διαιρεθὲν εἰς ἡμίσεια, ἢ διαιρεθὲν διὰ τῦ $\frac{1}{2}$, [illegible].

ΚΕΦΑΛ-

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ϛ'.

Περὶ Δεκαδικῶν Κλασμάτων.

ΟΡΙΣΜΟΣ α'.

§. 87. Κλάσμα Δεκαδικὸν ἐστὶ τὸ ἔχον Παρονομαστὴν 10, ἢ 100, ἢ 1000, κ̓ ὅλως, τὸ ἔχον Παρονομαστὴν μίαν Μονάδα μετὰ Μηδενικῶν χαρακτήρων προσκειμένην. π. χ. $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{5}{1000}$ κ. τ. τρία δηλονότι Δεκατημόρια, ἑπτὰ Ἑκατοστημόρια, πέντε χιλιοστημόρια.

ΠΟΡΙΣΜΑ α'.

§. 88. Ἐπειδὴ τοίνυν πάντα ταῦτα τὰ Κλάσματα διαφέρουσι μόνον διὰ τῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐν τῷ Παρονομαστῇ Μηδενικῶν χαρακτήρων, διὰ τοῦτο δύνανται νὰ ἐκλείπωσιν οἱ Παρονομασταὶ, φθάνει μόνον νὰ δείκνυνται ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς, πόσα Μηδενικὰ πρέπει νὰ ὑπάρχωσιν ἐν τῷ Παρονομαστῇ πλησίον τῆς Μονάδος. τοῦτο δὲ δυναται νὰ γένῃ μόνον διὰ τῦ τόπυ, τὸν ὁποῖον κατέχυσιν οἱ ἀριθμητικοὶ ἀπὸ τῶν ἀριστερῶν ἐπὶ τὰ δεξιά, τυτέστιν ἂν μὲν ὁ ἀριθμητικὸς κατέχῃ ἐν τοῖς ἀριστεροῖς τὸν πρῶτον τόπον, ὁ Παρονομαστὴς εἶναι

Μονὰς

Μονὰς μεθ' ἑνὸς Μηδενικοῦ, λέγω, 10. ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὴς εὑρίσκηται ἐν τῷ δευτέρῳ τόπῳ, ὁ Παρονομαστὴς εἶναι Μονὰς μετὰ δύω Μηδενικῶν, λέγω, 100. ἂν δὲ ὁ ἀριθμητὴς ἔχῃ τὸν τρίτον τόπον, ὁ Παρονομαστὴς εἶναι 1000. ϗ οὕτως ἐφεξῆς. π. χ. 375 ἤγουν $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{5}{1000}$, εἴτ' οὖν 3 Δεκατημόρια, 7 Ἑκατοστημόρια, 5 χιλιοστημόρια, ὡς ϗ ἀνωτέρω.

Διὰ νὰ διακρίνωνται τὰ Δεκαδικὰ ταῦτα Κλάσματα ἀπὸ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ὅταν ὑπάρχωσι, γράφομεν μετὰ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς μίαν ὑποδιαστολήν, ϗ οὕτω διαστέλλονται τὰ Δεκαδικὰ ἀπὸ τῶν ἀκεραίων, οἷον 25, 37, τὸ ὁποῖον δηλοῖ ὅτι εἶναι εἴκοσι πέντε ἀκέραιοι ἀριθμοί, τρία Δεκατημόρια, ἑπτὰ Ἑκατοστημόρια.

Ὅταν δὲ πρὸ τῶν Δεκαδικῶν δὲν προηγῆται ἀκέραιός τις ἀριθμός, θέτομεν πρὸς δήλωσιν τούτου ἓν Μηδενικόν, οἷον, 0, 375, ἤτοι μόνον τρία Δεκατημόρια, ἑπτὰ Ἑκατοστημόρια, πέντε χιλιοστημόρια.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 89. Ὅταν ἐν τοῖς Δεκαδικοῖς Κλάσμασι μένωσί τινες τόποι κενοὶ ϗ ἄνευ σημασίας Δεκαδικῆς, πληροῦμεν τότε προσηκόντως τοὺς τόπους διὰ τῶν Μηδενικῶν χαρακτήρων. π. χ. Ὅταν ἔχωμεν νὰ ἐκθέτωμεν μόνον τρία χιλιοστημόρια, γράφομεν 0, 003. ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει μήτε ἀκέραιός τις ἀριθμός, μήτε τι Δεκατημόριον, μήτε Ἑκατοστημόριον, ἀλλὰ μόνον 3 χιλιοστημόρια. καθάπερ δὲ ϗ 2, 3004 δηλοῖ δύω μὲν ἀκεραίους ἀριθμούς, τρία δὲ Δεκατημόρια, οὐδὲν Ἑκατοστημόριον, οὐδὲν χιλιοστημόριον, τέσσαρα Δεκακισχιλιοστημόρια.

ΠΟΡΙΣΜΑ β'.

§. 90. Ἐπειδὴ ταῦτα τὰ Κλάσματα, κατὰ τοὺς ἑαυτῶν Παρονομαστὰς θεωρούμενα, αὐξάνουσιν ἀπὸ τῶν ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, διὰ τοῦτο τὰ ἐν τῷ τέλει προστιθέμενα Μηδενικὰ οὔτε μείζονα οὔτε ἐλάσσονα παρέχουσι δύναμιν. π. χ. 0, 3 σημαίνει οὐδὲν μὲν ἀκέ-

ραιον

ραιον, τρία δὲ μόνον Δεκατημόρια, ὅπερ ταὐτὸν ὑπάρχει μὲ τὸ 0, 3000000. ἐπειδὴ ϗ ἐνταῦθα τυγχάνει ἀκέραιον μὲν οὐδέν, ἀλλὰ τρία Δεκατημόρια, οὐδὲν Ἑκατοστημόριον, οὐδὲν χιλιοστημόριον, οὐδὲν Δεκακισχιλιοστημόριον κ. τ. λ. διότι ϗ ὁ ἀριθμητὴς ϗ ὁ Παρονομαστὴς πολλαπλασιασμένος ἐστὶ διὰ τοῦ 10 ὅπερ τὴν Δύναμιν δὲν μεταστρέπει. ὅθεν δύναταί τις χωρὶς νὰ λαμβάνῃ τινὰ μεταβολὴν ἡ Δύναμις, νὰ προσθέτῃ ἐν τῷ τέλει, ὅσα Μηδενικὰ ϗ βούλεται, τὸ ὁποῖον ϗ ἐνίοτε γίνεται χρήσιμον, διὰ νὰ ἠμποροῦμεν νὰ φέρωμεν δύω, τρία Κλάσματα τοῦ αὐτοῦ εἴδους εἰς ἕνα ἴσον ἀριθμὸν χαρακτήρων, ϗ ὅλως ὠφελεῖ εἰς τὰς κατὰ ταῦτα πράξεις.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ γ'.

§. 91. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι οὗτοι οἱ χαρακτῆρες ἐνταῦθα δύνανται νὰ ἔχωσι μόνον μίαν Δύναμιν εἰς Δεκαδικήν. ἐπειδὴ δέκα Δεκατημόρια, ἤτοι $\frac{10}{10}$ εἰσὶν ἴσα μὲ ἓν ἀκέραιον. τὸ δὲ $\frac{10}{100}$ ἰσοδυναμεῖ μὲ ἓν Δεκατημόριον. ἐπειδὴ ἐξαλειφθέντος ἄνωθεν ϗ κάτωθεν ἑνὸς Μηδενικοῦ, μένει $\frac{1}{10}$. ὡσαύτως ϗ $\frac{10}{1000}$ δύναται ἴσον μὲ ἓν Ἑκατοστημόριον, ἐπειδὴ ἂν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῶν δύω μερῶν ἓν Μηδενικόν, καταλείπεται $\frac{1}{100}$. καθὼς δὴ καὶ $\frac{10}{10000}$ εἶναι ἴσον μὲ ἓν χιλιοστημόριον ἤτοι $\frac{1}{1000}$. ἡ δύναμις λοιπὸν αὐξάνει κατὰ τὸ Δεκαπλάσιον, καθὼς ϗ ἐν τοῖς ἀκεραίοις ἀριθμοῖς, ϗ ὁσάκις τις χαρακτὴρ μέχρι τῶν 10 αὐξάνει, τοσάκις πρέπει νὰ μεταφέρηται μία Μονὰς ἐν τῷ προηγουμένῳ τόπῳ ἀπὸ τῶν δεξιῶν εἰς τὰ ἀριστερά, καθὼς ϗ ἐν τοῖς ἀκεραίοις ἀριθμοῖς. ὅθεν γίνεται δῆλον, ὅτι ἡ Σύναψις, ϗ ἀφαίρεσις τῶν Δεκαδικῶν Κλασμάτων δύνανται νὰ γένωνται οὕτω, ϗ νὰ λαμβάνωνται κατὰ τοὺς ἰδίους Κανόνας τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ δ'.

§. 91. Ἐντεῦθεν εὐκόλως δύναταί τις νὰ συλλάβῃ, ἐκ δύο Δεκαδικῶν Κλασμάτων ποῖον εἶναι μεῖζον τοῦ ἑτέρου, ὅπου καὶ τὰ δύο ἔχουσιν ἴσον ἀριθμὸν χαρακτήρων, ἐκεῖνο ἔσται μεῖζον, τὸ ὁποῖον οἱ χαρακτῆρες λαμβανόμενοι κατὰ τὴν συνήθη Σημείωσιν σημαίνουσι μείζονα Ποσότητα. π. χ. 4, 71 εἶναι μεῖζον τοῦ 4, 69, ἐπειδὴ τὰ ἑβδομήκοντα δύο εἰσὶ πλείονα τῶν ἑξήκοντα ἐννέα. ὁμοίως καὶ 4, 7111 δύναται πλεῖον τοῦ 4, 6999. ἐὰν δὲ δὲν ἔχωσιν ἰσοπληθεῖς χαρακτῆρας, δυνάμεθα νὰ τὰ ἀποκαταστήσωμεν εἰς ἰσοπληθεῖς, προσθέτοντες ἐν τῷ τέλει Μηδενικά, τὰ ὁποῖα καὶ δὲν μεταβάλλουσι τὴν δύναμιν, ὡς ἐν τῷ §. 90. εἴρηται, καὶ τότε μεῖζον Κλάσμα ἔσται τὸ ἐμφαῖνον μείζονα Ποσότητα. π. χ. εἰς τὰ Κλάσματα 4, 7, καὶ 4, 69999. ἀφ' οὗ δὲ προστεθῶσιν εἰς τὸ 7 τέσσαρα Μηδενικά, τουτέστι 70000, εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ 70000 εἰσὶ πλείονα τῶν 69999, ἐπειδὴ ἂν ὑπογραφῶσιν εἰς αὐτὰ ἴσοι Παρονομασταί, ἔσται μεῖζον Κλάσμα ἐκεῖνο, ὅπερ ἔχει μείζονα Ἀριθμητήν, ὡς ἐν τῷ §. 67.

ΠΟΡΙΣΜΑ ε'.

§. 93. Κατάδηλον δ' ἔτι ἐστὶν, ὅτι ὅσον πλείονες Δεκαδικοὶ χαρακτῆρες προστίθενται, τοσοῦτον μᾶλλον τὸ Κλάσμα ἐγγίζει πρὸς τὸ ἀκέραιον, ὅμως οὐδέποτε ἐξισοῦται αὐτῷ. π. χ. τὸ 4, 999 εἶναι πλησιέστερον τοῦ νὰ γίνῃ ἀκέραιος ἀριθμὸς 5, παρὰ τὸ 4, 99 ἐπειδὴ τὸ μὲν πρῶτον Κλάσμα διὰ νὰ γένῃ ἀριθμὸς ἀκέραιος, ἐλλείπει μόνον ἓν χιλιοστημόριον $\frac{1}{1000}$. τὸ δὲ δεύτερον ἐλλείπει ἓν Ἑκατοστημόριον $\frac{1}{100}$. λοιπὸν ὅσον πλείονα ἀριθμὸν προστίθενται, τοσοῦτον μᾶλλον τὸ Κλάσμα πλησιάζει πρὸς τὸ νὰ γένῃ ἀκέραιον. πλὴν ἐπειδὴ ταῦτα τὰ προσγινόμενα μέρη εἶναι πάντοτε

ἐλάτ-

ἐλάττονα τοῦ Παρονομαστοῦ, εἶναι ἀδύνατον. ὅταν νὰ ἀπαρτισθῇ ἓν ἀκέραιον, ἂν δὲν προστεθῇ ἐν τοῖς τελευταίοις χαρακτῆρσιν ἓν μέρος ἴσον μὲ τὸν αὐτὸν Παρονομαστήν, τουτέστιν ἂν προσθέσωμεν ἐν τῷ 4, 999 ἓν χιλιοστημόριον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ὀνομασίαν τοῦ τελευταίου Παρονομαστοῦ, πορίζομεθα ἀκέραιον ἀριθμὸν 5.

ΠΟΡΙΣΜΑ ς'.

§. 94. Ἐπειδὴ τοίνυν τὸ Κλάσμα διὰ τῆς προσθέσεως τινὸς Δεκαδικοῦ χαρακτῆρος πλησιάζει μᾶλλον πρὸς τὸ γενέσθαι ἀκέραιον, καὶ ἐκ τούτου προκύπτει Πηλίκον τι ἀκριβέστερον, δύναταί τις νὰ ἐπαναλαμβάνῃ ἐφ' ὅσον ἐθέλει μίαν Διαίρεσιν, ἐπὶ τῆς ὁποίας πρὸς τῷ εὑρισκομένῳ Πηλίκῳ μένει καὶ λείψανόν τι, προσθέτει δηλονότι ἐν τῷ λειψάνῳ ἓν Μηδενικὸν καὶ οὕτω διαιρεῖ αὐτὸν τὸν νέον Διαιρετέον διὰ τοῦ προτέρου Διαιρέτου, τὸ δὲ ἐκ ταύτης τῆς Διαιρέσεως Πηλίκον ἔσται Δεκατημόρια. προσθέσας δ' αὖθις (ἐὰν ἀπολειφθῇ τι) καὶ ἕτερον Μηδενικόν, ποιεῖ ἐπ' αὐτῶν ἔτι τὴν Διαίρεσιν, τὸ δὲ ἐκ τῆς Διαιρέσεως προκύπτον ἔσεται Ἑκατοστημόρια, καὶ οὕτω ποιεῖ ἐφεξῆς. π. χ. ἐκ τῆς Διαιρέσεως τοῦ 26 διὰ τοῦ 8 ἀναφαίνεται πρῶτον Πηλίκον ἀκέραιος ἀριθμὸς 3, καὶ ἐναπολείπεται ἔτι καὶ 2, προστεθέντος δὲ ἐν τούτῳ τῷ 2 ἑνὸς Μηδενικοῦ, καὶ διαιρεθέντων τῶν 20 πάλιν διὰ τοῦ 8, προκύπτει Πηλίκον 2 Δεκατημόρια, καὶ μένει ἔτι λείψανον 4, εἰς τὸ ὁποῖον προστεθέντος αὖθις ἑνὸς Μηδενικοῦ, γίνονται 40, τὰ ὁποῖα διαιρεθέντα διὰ τοῦ 8, παρέχουσι Πηλίκον 5 Ἑκατοστημόρια ἄνευ τινὸς λειψάνου, ὥστε τὸ ἀληθὲς Πηλίκον ἐκ τούτων τῶν Διαιρέσεων εἶναι 3, 25, τουτέστιν ἀκέραιος ἀριθμὸς 3, δύω Δεκατημόρια, καὶ πέντε Ἑκατοστημόρια. κατ' αὐτὸν δὲ τὸν τρόπον δυνάμεθα καὶ ὁποιονδήποτε Κλάσμα νὰ μεταποιήσωμεν εἰς Δεκαδικόν, προσθέτομεν δηλονότι ἐν τῷ ἀριθμητῇ ἓν Μηδενικόν, καὶ διαιροῦμεν αὐτὸν οὕτω διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ, τὸ δὲ προκύπτον Πηλίκον ἔσται τότε Δεκαδικόν. π. χ. τὸ μὲν $\frac{1}{2}$ μεταποιεῖται εἰς τὸ 0, 5. τὸ δὲ $\frac{1}{4}$ εἰς τὸ 0, 25. τὸ δὲ $\frac{1}{4}$ ἀντί-

θεται

γεται εἰς τὸ 0, 75. τὸ δὲ $\frac{7}{8}$ εἰς τὸ 0, 875. τὸ δὲ $\frac{5}{9}$ εἰς τὸ 0, 5555. κ. τ. τοῦτο δ' ὅμως τὸ πλειστεῖον Κλάσμα οὐδέποτε παρέξει ἀκριβὲς Πηλίκον. ἐπειδὴ ἐφ' ὅσον συνεχίζεται ἡ Διαίρεσις, μένει λείψανόν τι, καθὼς δὴ καὶ τὸ $\frac{4}{7}$ διαιρούμενον, ἀνάγεται εἰς τὸ 0, 571428571 κ. τ. καὶ δὲν δύναται νὰ φθάσῃ ποτὲ εἰς ἀκριβῆ Διαίρεσιν, τὰ τοιαῦτα ὀνομάζονται Κλάσματα προσεγγίζοντα, τὰ δὲ ἄλλα, ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει Πηλίκον ἀκριβὲς, καλοῦνται Κλάσματα ἀκριβῆ.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ α'.

§. 95. Νὰ συνάπτωμεν Δεκαδικὰ Κλάσματα.

ΠΡΑΚΤΕ'Α ἡ ΛΥ'ΣΙΣ.

Καν. α'.) Γράφομεν πρῶτον τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς ὑπ' ἀλλήλους ἐν τῷ προσήκοντι τόπῳ κατὰ τὸν ἤδη γνωστὸν ἡμῖν τρόπον, ὥστε καὶ αἱ τούτων ὑποδιαστολαὶ νὰ εἶναι ἐν τῇ αὐτῇ Στήλῃ. ἔπειτα γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ τὰ Δεκαδικὰ Κλάσματα ὑπ' ἄλληλα, τουτέστι τὰ Δεκατημόρια ὑπὸ τὰ Δεκατημόρια, τὰ Ἑκατοστημόρια ὑποκάτω τῶν Ἑκατοστημορίων. κ. τ. ὅταν δέ τις Σειρὰ τύχῃ ἔχουσα πλείονας Δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς, ἀναπληροῦμεν τότε τοὺς κενοὺς τόπους τῶν ἄλλων διὰ Μηδενικῶν Γραμμάτων.

Καν. β'.) Συνάπτομεν ὕστερον αὐτὰ κατὰ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς, ὡς καὶ ἐν τῷ κατωτέρω παραδείγματι.

εἶν

οἷον ἔστωσαν συναφθησόμενα 3, 0506. καὶ 4, 789, καὶ 6, 62, καὶ 4, 753647. ὅθεν

3, 050600
4, 789000
6, 620000
4, 753647
19, 213247

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ β'.

§. 96. Νὰ ἀφαιρῶμεν Δεκαδικὰ Κλάσματα.

ΠΡΑΚΤΕ'Α ἡ ΛΥ'ΣΙΣ.

Καν. Γράφομεν τοὺς χαρακτῆρας τοῦ ἀφαιρετέου ὑπὸ τοὺς χαρακτῆρας τοῦ ἐλαττωτέου κατὰ τὸν ἀνωτέρω Κανόνα τῆς Συνάψεως, ἔπειτα πλοῦμεν ἐπ' αὐτῶν τὴν ἀφαίρεσιν κατὰ τὴν κοινὴν τῆς ἀφαιρέσεως Μέθοδον. π. χ. ἔστω ἀφαιρεθησόμενον τὸ 5, 0294 ἀπὸ τοῦ 16, 4325. ὅθεν

τὸ ἐλαττωτέον	16, 4325.	ὡσαύτως καὶ	7, 30000
τὸ ἀφαιρετέον	5, 0294.		3, 79468
ἡ διαφορὰ	11, 4031.		3, 50532

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ γ'.

§. 97. Νὰ πολλαπλασιάζωμεν Δεκαδικὰ Κλάσματα.

ΠΡΑΚ-

ΠΡΑΚΤΕΑ ἡ ΛΥΣΙΣ.

Καν. α΄) Γράφομεν πρῶτον τὰ Κλάσματα ὑπ' ἄλληλα, ὡς ἀκεραίους ἀριθμοὺς, χωρὶς νὰ ἐκκόπτωμεν τοὺς χαρακτῆρας διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν Πολλαπλασιαστέον διὰ τοῦ Πολλαπλασιαστοῦ κατὰ τὸν κοινὸν τρόπον τῆς Πολλαπλασιάσεως.

Καν. β΄.) Μετὰ δὲ τὴν Πολλαπλασίασιν ἐκκόπτομεν δεξιόθεν ἀπὸ τοῦ Γινομένου τοσούτους χαρακτῆρας, ὅσοι Δεκαδικοὶ χαρακτῆρές εἰσιν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς Παράγουσι. π. χ. ἔστω Πολλαπλασιασθησόμενον 4, 26 διὰ τοῦ 3, 62. ὅθεν

$$\begin{array}{r} 426 \\ 362 \\ \hline 852 \\ 2556 \\ 1278 \\ \hline 154212 \end{array}$$

ἐπειδὴ τοίνυν καὶ εἰς τοὺς δύω Παράγοντάς εἰσι τέσσαρες Δεκαδικοὶ χαρακτῆρες, πρέπει νὰ ἐκκοπῶσι δεξιόθεν καὶ ἀπὸ τοῦ Γινομένου ὁμοίως τέσσαρες χαρακτῆρες διὰ τὰ Δεκαδικὰ Κλάσματα. ὅθεν τὸ ζητούμενον Γινόμενόν ἐστι 15, 4212.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τῷ Πολλαπλασιασμῷ τῶν Κλασμάτων πολλαπλασιάζομεν τοὺς μὲν ἀριθμητὰς μετὰ τῶν ἀριθμητῶν, τοὺς

δὲ Παρονομαστὰς μετὰ τῶν Παρονομαστῶν (§. 84.). τὰ δὲ δοθέντα Δεκαδικὰ Κλάσματα μετὰ τῶν ἀκεραίων, ἢ ἄνευ τούτων, εἰσὶν ἀριθμηταὶ, ἄρα πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσι ταῦτα πρὸς ἄλληλα κατὰ τοὺς κοινοὺς Κανόνας. τὸ δὲ Γινόμενον τῶν Παρονομαστῶν θέλει ἔχει τοσαῦτα Μηδενικὰ, ὅσα ὁμοῦ εἰσιν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς Παράγουσι Παρονομασταῖς, τὸ Γινόμενον ἄρα τῶν ἀριθμητῶν θέλει ἔχει τοιοῦτον Παρονομαστὴν, ὅστις ἔχει τοσαῦτα Μηδενικὰ, ὅσοι Δεκαδικοὶ χαρακτῆρές εἰσιν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς Παράγουσιν. ὅθεν πρέπει νὰ ἐκκοπῶσιν ἀπὸ τοῦ Γινομένου τοσοῦτοι χαρακτῆρες διὰ τὰ Δεκαδικὰ Κλάσματα. τὸ ἀνωτέρω Παράδειγμα δύναται νὰ ἐκτεθῇ μετὰ τοῦ οἰκείου Παρονομαστοῦ ἤτοι $\frac{426}{100}$ πολλαπλασιασθὲν μετὰ τοῦ $\frac{362}{100}$, ποιεῖ $\frac{154212}{10000}$, ἤτοι 15, 4212. ὡσαύτως καὶ 3, 503 πολλαπλασιασθὲν μετὰ τοῦ 1, 2. παρέχει Γινόμενον 4, 2036.

ΣΧΟΛΙΟΝ α΄.

§. 98. Ἂν ἐν τῷ Γινομένῳ προκύψωσι μόνον τοσοῦτοι χαρακτῆρες, ὅσοι Δεκαδικοὶ χαρακτῆρές εἰσιν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς Παράγουσιν, ἅπαντες οἱ χαρακτῆρες τότε τοῦ Γινομένου γίνονται τότε Δεκαδικοὶ π. χ. 4, 134 πολλαπλασιασθὲν διὰ τοῦ 0, 2 παρέχει Γινόμενον 8268, καὶ ἐπειδὴ εἰς τοὺς δύω Παράγοντάς εἰσι τέσσαρες Δεκαδικοὶ χαρακτῆρες, πρέπει ἅπαντες οἱ τέσσαρες χαρακτῆρες τοῦ Γινομένου νὰ εἶναι Δεκαδικοὶ, καὶ γράφονται οὕτω 0, 8268. ἡ δὲ Δεῖξις τούτου εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν προτεθεῖσαν. ἐπειδὴ δύνανται ταῦτα νὰ ἐκτεθῶσι μετὰ τῶν ἰδίων Παρονομαστῶν $\frac{4134}{1000}$, καὶ $\frac{2}{10}$, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιασθέντα πρὸς ἄλληλα, παρέχουσι $\frac{8168}{10000}$, καὶ ἐπειδὴ ὁ Παρονομαστὴς εἶναι μείζων τοῦ ἀριθμητοῦ, τὸ Κλάσμα εἶναι ἀληθὲς καὶ κύριον, τὸ ὁποῖον καὶ ἀκέραιον ἀριθμὸν δὲν παρέχει.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ β'.

§. 99. Ὅταν δὲ ὦσιν ἐν τῷ Γινομένῳ χαρακτῆρες ὀλιγώτεροι τῶν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς Παράγουσιν ὄντων, τότε πρέπει νὰ προσθέτωμεν ἐν αὐτῷ ἐπὶ τὰ ἀριστερὰ τόσα Μηδενικά, ὅσα εἶναι ἀναγκαῖα πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν Δεκαδικῶν χαρακτήρων, ἐν δὲ τῷ τόπῳ τῶν ἀκεραίων πρέπει ἔτι νὰ γράφωμεν ἓν Μηδενικόν. τουτέστιν ἂν ἐν τῷ Γινομένῳ εἰσὶ μόνοι τρεῖς χαρακτῆρες, ἐν ᾧ ἐν ἀμφοτέροις τοῖς Παράγουσιν εἰσὶν ἕξ, πρέπει νὰ γράψωμεν πρὸ τοῦ Γινομένου πρὸς συμπλήρωσιν τρία Μηδενικά, καὶ ἔτι ἓν εἰς τὸν τόπον τῶν ἀκεραίων π. χ. 0,02 πολλαπλασιασθὲν διὰ τοῦ 0,0083, ἤγουν 2 διὰ τοῦ 83, παρέχει Γινόμενον 166, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐκτεθῇ οὕτω 0,000166. ἐπειδὴ εἶναι $\frac{2}{100}$ πολλαπλασιαζόμενον μετὰ τοῦ $\frac{83}{10000}$, τῶν ὁποίων τὸ Γινόμενον ὑπάρχει $\frac{166}{1000000}$, ἤτοι 0,000166.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ δ'.

§. 100. Νὰ διαιρῶμεν Δεκαδικὰ Κλάσματα.

ΠΡΑΚΤΕ'Α ἡ ΛΥ'ΣΙΣ.

Καν. α') Γράφομεν τὰ διαιρεθησόμενα Κλάσματα κατὰ τὸν τρόπον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, χωρὶς νὰ ἐκ-

κόπτωμεν

κόπτωμεν τοὺς Δεκαδικοὺς χαρακτῆρας διά τινος ὑποδιαστολῆς, τελοῦμεν ἔπειτα ἐπ' αὐτῶν τὴν Διαίρεσιν, καθὼς καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων.

Καν. β'.) Μετὰ τὴν Διαίρεσιν ἐκκόπτομεν διὰ τὰ Δεκαδικὰ ἀπὸ τοῦ Πηλίκου τοσούτους χαρακτῆρας, ὅσους ὑπερέχουσιν οἱ Δεκαδικοὶ χαρακτῆρες τοῦ Διαιρετέου τῶν Δεκαδικῶν χαρακτήρων τοῦ Διαιρέτου. π. χ. ἔστω διαιρεθησόμενον 3,7036. διὰ τοῦ 4,7. ὅθεν γράφομεν αὐτὰ οὕτω

```
37036 | 47
        788
329
---
413
376
---
 376
 376
 ---
  0
```

Μετὰ τὴν Διαίρεσιν προέκυψε Πηλίκον 788, ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ Δεκαδικοὶ χαρακτῆρες τοῦ Διαιρουμένου εἰσὶ τέσσαρες, οἱ δὲ Δεκαδικοὶ τοῦ Διαιροῦντος μόνον ἕνας, καὶ ἡ ὑπεροχὴ μεταξὺ τούτων εἰσὶ τρεῖς χαρακτῆρες, ἐκκόπτομεν διὰ Δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ Πηλίκου τρεῖς χαρακτῆρας, τουτέστιν ἐνταῦθα λαμβάνομεν ὅλον τὸ Πηλίκον 788 ὥστε τὸ ζητούμενον εἶναι 0,788.

ΕΤΕΡΟΝ

ΕΤΕΡΟΝ ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ.

Ἔστω διαιρέμενον τὸ 12, 236 διὰ τοῦ 2, 3. ὅθεν γίνεται

```
12236  |_23
        532
115
———
073
 69
———
 046
  46
———
   0
```

ὥστε τὸ ζητήμενον Πηλίκον ἐστὶ 5, 32.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ ά.

§. 101. Ὅταν μὲν οἱ Δεκαδικοὶ χαρακτῆρες τοῦ Διαιρετέυ ὑπάρχωσιν Ἰσάριθμοι μὲ τοὺς Δεκαδικοὺς χαρακτῆρας τοῦ Διαιρέτη, τότε δὲν ἐκκόπτομεν ἀπὸ τοῦ Πηλίκυ χαρακτῆρά τινα διὰ Δεκαδικά, ἀλλ' ὅλον τὸ Πηλίκον μένει ἀνῆκον εἰς τὸν ἀκέραιον ἀριθμόν. ὅταν δὲ εἰς τὸν Διαιρετέον εἶναι Δεκαδικοὶ χαρακτῆρες ὀλιγώτεροι τῶν ἐν τῷ Διαιρέτῃ ὄντων Δεκαδικῶν, προσθέτομεν τότε πρῶτον εἰς τὸν Διαιρετέον ἐν τοῖς δεξιοῖς τοσαῦτα Μηδενικά, ὅσα ἀρκοῦσι διὰ νὰ γίνωνται οἱ Δεκαδικοὶ χαρακτῆρες τοῦ Διαιρετέυ Ἰσάριθμοι μὲ τοὺς Δεκαδικοὺς τοῦ Διαιρέτη, ἔπειτα τελοῦμεν τὴν Διαίρεσιν, ϗ τὸ πρῶτον Πηλίκον εἶναι Σημαντικὸν Ποσότητος ἀκεραίας. ἂν ὅμως προσθέσωμεν πλείονα Μηδενικά, ὁ ἀριθμὸς τῶν Δεκαδικῶν χαρακτήρων θέλει αὐξήσει ἐν τῷ Πηλίκῳ κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν προ

στιθε-

στιθεμένων Μηδενικῶν. π. χ. ἔστω διαιρεθησόμενον τὸ 181, 23 διὰ τοῦ 25, 89. ὅθεν

```
18123  |_2589
18123     7
```

τὸ Πηλίκον, ὅπερ ϗ Ποσότης ἀκέραιός ἐστι.

ἔστω ἔτι διαιρεθησόμενον τὸ 43, 5 διὰ τοῦ 5, 26. ὅθεν προστεθέντος ἑνὸς Μηδενικοῦ, γίνεται

```
4350  |_526
         8
4208
————
 142
```

ὥστε Πηλίκον πρῶτον προέκυψε 8 ϗ ἐναπολείπεται ἔτι τὰ 142, εἰς τὰ ὁποῖα προστεθέντος ἑνὸς Μηδενικοῦ, ἄρχονται τὰ Δεκαδικὰ Κλάσματα, ϗ δύναται νὰ συνεχίζηται ἡ Διαίρεσις, ἐφ' ὅσον τις ἐθέλει νὰ προσθέτῃ Μηδενικὰ ἐν τῷ λειψάνῳ.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ β'.

§. 102. Ἐὰν ὁ Διαιρέμενος ἐλάττων τοῦ Διαιροῦντος τυγχάνῃ, ἡ Διαίρεσις δὲν δύναται νὰ γένῃ ἐν ἀκεραίοις ἀριθμοῖς. ἐπειδὴ εἰς τοιαύτην περίστασιν ὑπάρχει Κλάσμα γνήσιον, ἤτοι κύριον. π. χ. ἔστω διαιρεθησόμενον τὸ 0, 045 διὰ τοῦ 9 ἀκεραίου, ἐκτεθέντων δὲ τούτων μετὰ τῶν οἰκείων Παρονομαστῶν, γίνεται $\frac{45}{1000}$ διαιρετέον

διὰ τοῦ $\frac{9}{1}$, ϗ γενομένης τῆς Διαιρέσεως, προκύπτει Πηλίκον

$\frac{45}{9000}$, τὸ ὁποῖον εἶναι Κλάσμα κύριον, ϗ ἐπομένως δὲν δύναται

Γάνὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ. ἐὰν δὲ τοῦτο τὸ Κλάσμα ἤθελε μεταποιηθῇ εἰς Κλάσμα Δεκαδικὸν κατὰ τὸ προτεθὲν τέταρτον Πρόβλημα, πρέπει νὰ προστεθῶσιν ἐν τῷ ἀριθμητῇ Μηδενικά. καὶ ἐπειδὴ ἡ πρώτη Διαίρεσις δύναται νὰ ἀρχίσῃ, προστεθέντων μόνων τριῶν Μηδενικῶν, εἶναι δῆλον, ὅτι καὶ τὸ Πηλίκον ἐν μὲν τῇ ἀρχῇ θέλει ἔχῃ τρία Μηδενικά, τὸν δὲ ἐν τῷ τετάρτῳ τόπῳ χαρακτῆρα ἀριθμὸν πρῶτον, ὁ ὁποῖος ὑπάρχει χιλιοστημόριον. ἡ Διαίρεσις δύναται νὰ πραχθῇ οὕτω

```
45        | 9000
            0,005
0000
-----
 450
 0000
-----
 4500
 0000
-----
 45000
 45000
-----
     0
```


ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ἈΛΓΕΒΡΑΣ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ α'.

ΓΕΝΙΚΑΙ ἈΛΓΕΒΡΑΙΚΑΙ ἸΔΕΑΙ.

ὉΡΙΣΜΟΣ α'.

§. 1. ἌΛΓΕΒΡΑ ἐστὶ Γενικὴ ἀριθμητική, ἢ Ἐπιστήμη τῶν ἀφῃρημένων καὶ ἀορίστων, ἢ τῶν ἐν γένει καὶ καθόλου λαμβανομένων Ποσῶν, τὰ ὁποῖα ἐμφαίνονται διὰ τῶν τοῦ ἀλφαβήτου Γραμμάτων, τῶν ὁποίων ἡ σημασία εἶναι ἐπίσης ἀόριστος.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 2. Τρία πρέπει νὰ παρατηρῶμεν εἰς τὴν Ἄλγεβραν προσεκτικῶς· πρῶτον, αὐτὰ τὰ Ποσά. δεύτερον, τὰς Μεταβολάς, ἢ τὰ Πάθη, τὰ ὁποῖα ὑπόκεινται αὐτὰ τὰ Ποσά, καὶ τρίτον, τὰς σχέσεις τὰς ὁποίας πρὸς ἄλληλα ἔχουσι τὰ Ποσά, ὧν ἕκαστον πάντων τῶν

τριῶν

τελῶν μεταχειριζόμεθα ἴδια Σημεῖα, ἢ Γράμματα, ὡς ἀκολούθως.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ α΄.

§. 3. Κάθε Ποσὸν ἐκφράζεται ϗ ἐκδηλοῦται διὰ τῶν Γραμμάτων α, β, γ, δ, κτ. ϗ αὐτὰ εἶναι τὰ Σημεῖα τῶν ποσῶν. ὡς τόσον τὰ μὲν ἐγνωσμένα, ἢ διδόμενα Ποσὰ ἐμφαίνομεν διὰ τῶν πρώτων Γραμμάτων α, β, γ, μέχρι τοῦ μ. Τὰ δὲ ἄγνωστα, ἢ ζητούμενα, διὰ τῶν τελευταίων, φ, χ, ψ, ω, ἐντεῦθεν ἕπεται.

ΟΡΙΣΜΟΣ β΄.

§. 4. Ἔκθεσις ἀλγεβραϊκή ἐστιν ἕν, ἢ πλείονα Μεγέθη (Ποσὰ) παριστάμενα δι' ἑνός, ἢ πλειόνων Γραμμάτων. ὅθεν τὰ Ποσὰ τὰ δι' ἑνὸς μόνου Γράμματος παριστάμενα, ὀνομάζονται ἁπλᾶ, ὡς α, β, γ, ὁμοῦ δὲ λαμβανόμενα ϗ διὰ πλειόνων Γραμμάτων ἐκτεθειμένα, ὀνομάζονται σύνθετα. ὡς $\alpha\beta$, $\beta\delta\varepsilon$, κ. τ. ἔτι τὰ ἁπλᾶ ϗ Σύνθετα Ποσὰ μόνα τεθέμενα ὀνομάζονται ἀσύμπλεκτα, ὡς α, $\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$, $\chi\chi$· τὰ ὁποῖα λέγονται ϗ Μέλη, ἢ Ὅροι. ὅταν δὲ μετ' ἄλλων συμπλέκωνται, ϗ συνάπτωνται διὰ τῶν (§. 6.) Σημείων, τότε λέγονται Ποσότητες Συμπεπλεγμέναι, ὡς $\alpha\beta + \gamma\delta$. ἢ $\alpha + \beta$, ἢ $\gamma - \delta$. κάθε δὲ

Πο-

Ποσότης, ἥτις συνίσταται ἐξ ἑνὸς μόνου μέλους ὀνομάζεται Μονομερής, ἢ Μονομελής, καθὼς $\alpha\beta\gamma$, ἢ α, ἢ $\gamma\delta$. ἥτις δὲ σύγκειται ἐκ δύω Μελῶν, ὀνομάζεται Διμερής, ἢ Διμελής, ὡς $\alpha\beta + \gamma\delta$. ἐὰν δὲ σύγκειται ἐκ τριῶν, λέγεται Τριμερής, ὡς $\alpha - \gamma\delta + \varepsilon$. ϗ ὅλως, ὅταν σύγκειται ἐκ πολλῶν μελῶν, καλεῖται Πολυμερής. Τὰ Ποσὰ ἔτι εἰσὶν ἢ Ὁμοειδῆ, ἢ Ἑτεροειδῆ. ϗ Ὁμοειδῆ μὲν ὀνομάζονται, ὅσα διὰ τῶν ἰδίων Γραμμάτων ἐμφαίνονται, ἔχοντα ἅμα ϗ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν Γραμμάτων. οἷον $\alpha\beta$ ϗ $\alpha\beta$. $\gamma\gamma\delta$ ϗ $\gamma\gamma\delta$. ϗ ὅταν πρὸς τούτοις ἔχουσι ϗ τὸν αὐτὸν Δυναμοδείκτην (ἢ Βαθμοδείκτην κατ' ἄλλους) (*) ἐπὶ τοῦ ἰδίου Γράμματος κείμενον, οἷον $\alpha^2\beta$ ϗ $\alpha^2\beta$, τὰ ὁποῖα ἂν τύχῃ νὰ ἔχωσι ϗ Σημεῖα, ἢ Συνεργοὺς διαφόρους, οἷον $3\alpha^2\beta$ ϗ $-2\alpha^2\beta$, πάλιν εἰσὶν ὁμοειδῆ. ἐπειδὴ ἡ ταυτότης, ἢ ἡ ἑτερότης τῶν Σημείων, ἢ Συνεργῶν δὲν συνεργεῖ καθόλου εἰς τὸ νὰ εἶναι ὁμοειδῆ ἢ Ἑτεροειδῆ τὰ Ποσά. Ἑτεροειδῆ δὲ Ποσὰ προηγουμένως ϗ κυρίως ὀνο-

(*) Τί δὲ σημαίνει αὕτη ἡ λέξις, ὅρα ἐν τοῖς ἑπομ. §. 44.

ὀνομάζονται, ὅσα δὲν ἐμφαίνονται διὰ τῶν ἰδίων Γραμμάτων, μήτε ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν γραμμάτων. π. χ. τὸ αβγ εἶναι Ἑτεροειδὲς τῷ αβ. ἐπειδὴ τὸ γ ἐκ τοῦ ἑτέρου Μέρους ἐλλείπει. ἑπομένως δὲ Ἑτεροειδῆ Ποσά εἰσι, καὶ ὅσα δὲν ἔχουσι τὸν ἴδιον Δυναμοδείκτην, ἢ ὅσα ἔχουσι μὲν τὸν ἴδιον, δὲν τὸν ἔχουσιν ὅμως ἐπὶ τοῦ ἰδίου Γράμματος ἐπικείμενον. π. χ. τὸ Ποσὸν $α^2βγ$ εἶναι Ἑτεροειδὲς τῷ αβγ. ἐπειδὴ μόνον τὸ α τὸ ἐν ἐκείνῳ ἔχει ἐφ' ἑαυτοῦ Δυναμοδείκτην τὸν 2. μάλιστα δὲ Ἑτεροειδῆ εἰσι τὰ $αβγ^2$ καὶ $αβδ^2$. ἐπειδὴ μήτε ἐκ τῶν αὐτῶν Γραμμάτων ὅλως συνίστανται, μήτε ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ Γράμματος ἔχουσι τὸν Δυναμοδείκτην.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 5. Δὲν θέλει μᾶς φανῇ παράξενος ἡ ἀόριστος Δύναμις (Σημασία) τῶν Γραμμάτων, ὅταν λάβωμεν κατὰ νοῦν τοὺς ἀφῃρημένους ἀριθμούς π. χ. ὅτι ὁ 10 ἀριθμὸς δύναται νὰ σημαίνῃ ἢ 10 ἀνθρώπους, ἢ 10 Ἵππους, ἢ 10 Γρόσια, ἢ ὁποιανδήποτε εἴκοσι Ὁμοειδεῖς Μονάδας, τὸ ὁποῖον κρέμαται ἐκ τῆς θελήσεως ἑκάστου. Τὰ δὲ Γράμματα πρὸς τῇ ἀοριστίᾳ δύνανται νὰ σημειώσι καὶ γενικώτερον. ἐπειδὴ τὸ α, ἢ β π. χ. δύναται νὰ ληφθῇ ἢ σημαντικὸν 10 ἀνθρώπων, ἢ 100 Ἵππων, ἢ 300 Δένδρων, καὶ ὅλως δύναται νὰ ληφθῇ ἓν Γράμμα ὡς σημαντικὸν πάσης δυνατῆς πλήθους, ἐξ ὁποιασδήποτε Ποσότητος· ἀφ' οὗ ὅμως διορίσωμεν τὴν σημασίαν ἑνὸς Γράμματος, ἀνάγκη τότε νὰ ἐμμένωμεν εἰς τὸν διορισμὸν μέχρι τέλους τοῦ ἀνὰ χεῖρας ὑπολογισμοῦ.

ΥΠΟ-

ΥΠΟΘΕΣΙΣ β'.

§. 6. Διὰ νὰ φανερώνωμεν τὰς Μεταβολάς, ἢ τὰ Πάθη, εἰς τὰ ὁποῖα ὑπόκεινται αὐτὰ τὰ διὰ τῶν Γραμμάτων ἐκτιθέμενα Ποσά, συνεθίζομεν νὰ μεταχειριζώμεθα τὰ ἑξῆς Σύμβολα (Σημεῖα), οἷον τὸ + Σύμβολον λαμβάνομεν δηλωτικὸν προσθέσεως, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται εἰς τὴν φωνήν, Πλέον. π. χ. ὅταν θέλωμεν νὰ προσθέσωμεν τὸ α εἰς τὸ β, γράφομεν οὕτω $α + β$ τουτέστι α πλέον, β, ἤγουν β. Τὸ δὲ Σύμβολον — λαμβάνεται σημαντικὸν ἀφαιρέσεως ἢ Ἐλλείψεως, ἢ Στερήσεως, τὸ ὁποῖον ἐκφωνεῖται Ἧττον π. χ. ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ α τὸ β. γράφομεν οὕτω $α - β$, τουτέστι α Ἧττον β. Τοῦ δὲ Πολλαπλασιασμοῦ Σημείου μεταχειριζόμεθα τὸ ×, ἢ μίαν στιγμὴν (.), π. χ. ὅταν θέλωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ α μετὰ τοῦ β, ποιοῦμεν οὕτως $α \times β$, ἢ $α . β$, ἢ $αβ$, καὶ ἐκφωνοῦμεν οὕτω, τὸ α πολλαπλασιαζόμενόν ἐστι μετὰ τοῦ β, ἢ ἐπὶ τὸ β. ἐὰν δὲ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἓν Συμπεπλεγμένον Ποσόν, ποιοῦμεν διὰ τῆς Παρενθέσεως οὕτω $(α - β)\, γ$, καὶ τότε παραλιμπάνεται τὸ Σημεῖον τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα καὶ οὕτω νὰ φανερώσωμεν $\overline{α - β} \times γ$. Ἡ Διαίρεσις τέλος ἐμφαίνεται διὰ διττῶν Σημείων, δηλαδὴ ἢ διὰ δύο στιγμῶν, ἢ διὰ Γραμμῆς μεταξὺ τοῦ Διαιρέτου καὶ Διαιρουμένου κειμένης, ὡς εἰς τὰ Κλάσματα, οἷον, $α : β$ ἢ $\frac{α}{β}$. τουτέστι τὸ α διαιρούμενόν ἐστι διὰ τοῦ β. προσέτι $(α - β) : (γ - δ)$ τουτέστι α ἧττον β διαιρεῖ-

ται

ται διὰ τῆ γ ἧττον δ. ἢ ἢ ὕτως $\alpha - \beta : \gamma - \delta$,

ἢ $\dfrac{\alpha - \beta}{\gamma - \delta}$.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

§. 7. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἕπεται, ὅτι, ταῦτα τὰ Σύμβολα δεικνύεσι μόνον τὰ Πάθη τῶν Ποσῶν χωρὶς νὰ μεταβάλλωσι ποντάπασι τὴν δύναμιν αὐτῶν. π. χ. $+\alpha$ σημαίνει, ὅτι τὸ α πρέπει νὰ προστεθῇ. κὶ $-\alpha$ δηλοῖ, ὅτι τὸ α πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ. ἑπομένως διὰ τῶν Σημείων δὲν μεταβάλλονται τὰ Ποσὰ, ἀλλὰ δι' αὐτῶν ἐμφαίνεται μόνον, πῶς νὰ μεταχειρισθῶμεν τὸ Ποσὸν, ἢ πῶς νὰ τὸ θεωρήσωμεν.

Υ'ΠΟ'ΘΕΣΙΣ γ'.

§. 8. Τέλος ἡ Σχέσις, τὴν ὁποίαν ἔχουσι τὰ Ποσὰ πρὸς ἄλληλα, ἐμφαίνεται διὰ δύω στιγμῶν (:) ὡς $\alpha : \beta$. Θέλοντες δὲ νὰ δείξωμεν, ποία Ποσότης εἶναι μείζων, κὶ ποία ἐλάσσων, μεταχειριζόμεθα τὰ Σύμβολα $>$ κὶ ἀνάπαλιν $<$, οὕτως ὅμως, ὥστε ἡ μὲν Συνοχὴ τῶν δύω Γραμμῶν νὰ τείνηται πάντοτε πρὸς τὴν ἐλάσσονα Ποσότητα, τὰ δὲ δύω ἄκρα αὐτῶν νὰ νεύωσι πρὸς τὴν μείζονα. οἷον $\alpha > \beta$ σημαίνει, ὅτι τὸ α μεῖζον ἐστὶ τῆ β, κὶ $\alpha < \beta$ δηλοῖ, ὅτι τὸ α ἔλαττόν ἐστι τῆ β. τούτων τὸ μὲν $>$ δύναται νὰ ὀνομασθῇ ἔσω Νενευκῆιος, τὸ δὲ $<$ ἔξω Νενευκῆια. αἱ δὲ δύω αὗται Γραμμαὶ $=$ σημαίνουσιν Ἰσότητα, οἷον ἐπὶ τῆ $\alpha = \beta$ φανερώνει, ὅτι τὸ α εἶναι ἴσον τῷ β. Τὸ δὲ Σύμβολον $\backsim$ Ὁμοιότητα δηλοῖ· οἷον ἐπὶ τῆ $\chi \backsim \psi$ φανερώνει, ὅτι τὸ χ εἶναι ὅμοιον τῷ ψ. Τὸ δὲ Σημεῖον ∞ εἶναι ἀπειρίας σημαν-

τικόν. ἐπειδὴ ὅπου ἂν τεθῇ, ἐμφαίνει Ποσὸν ἄπειρον.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ ά.

§. 9. Ἐπεκράτησε κὶ χρῆσις εἰς τοὺς Μαθηματικοὺς νὰ θεωρῶσιν ἐνίοτε τὰς Ποσότητας κατὰ τὸ παρ' αὐταῖς ἀποκείμενον Σύμβολον. ὅθεν ἡ Ποσότης ἡ ἔχουσα τὸ Σύμβολον $+$, ὀνομάζεται Καταφατικὴ, ἢ Θετικὴ, τοῦτ' ἔστι μία Ποσότης τῷ ὄντι ὑπάρχουσα. ἐκείνη δὲ ἥτις ἔχει τὸ Σημεῖον $-$, λέγεται ἀποφατικὴ, ἢ Στερητικὴ, ἤτοι Ποσότης ἀπῦσα, ἢ ἀφαιρετέα, π. χ. ἂν ὁ Πέτρος ἔχῃ 10 Γρόσια, γράφομεν τὸ Σημεῖον $+$, τὸ ὁποῖον σημαίνει, ὅτι ὁ Πέτρος κέκτηται ἀληθῶς αὐτὰ τὰ Γρόσια· ἐὰν ὅμως χρεωστῇ εἰς τὸν Παῦλον 10 Γρόσ. τότε δὲν ἔχει τίποτε. ἐπειδὴ χρεωστεῖ τόσα, ὅσα ἔχει, κὶ ἀφ' ἦ ἀφαιρεθῶσι τὰ 10 ἀπὸ τῶν 10, ἤτοι $10 - 10$, μένει $= 0$. ἂν δὲ χρεωστῇ 20 Γρόσ. τότε ὄχι μόνον δὲν ἔχει οὐδὲν, ἀλλ' ἀκόμη ἐλλείπει (ἤτοι ἔχει ὀλιγώτερον) τὰ μηδενὸς, τὸ ὁποῖον δηλοῦται διὰ τῆ Σημείου $-$. ἡ Κατάστασις ἄρα τῆ Πέτρου εἶναι -10, τὸ ὁποῖον δεικνύει, ὅτι χρεωστεῖ 10, ἂν δὲ ἀφαιρεθῶσι τὰ 10 ἀπὸ τῶν 10, μένουσι ἔτι 10 ἀφαιρετέα, ἤτοι $10 - 10$, ὅπερ ποιεῖ -10. ἤτοι τὸ χρέος εἶναι 10 Γρόσ. ἀφ' ὃ κατακρατήσωμεν αὐτὴν τὴν ἰδέαν ἐντελῶς, δὲν θέλομεν δυσκολευθῇ εἰς τὰς μεταβολὰς τῶν Ποσῶν, ὅπου θέλομεν ἐντύχῃ.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ β'.

§. 10. Κάθε Ποσότης πρέπει νὰ ἔχῃ ἓν Σημεῖον προκείμενον, διὰ νὰ διακρίνηται, ἂν αὕτη εἶναι προσθετικὴ, ἢ ἀφαιρετικὴ. ὅταν ὅμως μία Ποσότης Καταφατικὴ εἶναι Μονομερὴς, ἢ εὑρίσκηται εἰς τὴν ἀρχὴν ἑτέρων Ποσοτήτων συμπεπλεγμένων, τότε τὸ Σημεῖον $+$ δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ προστίθηται εἰς αὐτὴν ἐπιτηδείως, ἐπειδὴ γέγονεν εἰς χρῆσιν νὰ ἐννοῆται ἔξωθεν. οἷον ἐκ τῆ $+\alpha$ ὡς Μονομεροῦς ὄντος, δύναται νὰ ἐλλείπῃ τὸ Σημεῖον $+$, κὶ νὰ μένῃ μόνον α. ὡσαύτως κὶ τὸ $+\alpha+\beta+\gamma$ δύναται νὰ γραφῇ ἄνευ τῆ πρώτου Καταφατικοῦ Σημείου, οἷον $\alpha+\beta+\gamma$.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ γ'.

§. 11. Ἐπειδὴ συμβαίνει ἐνίοτε νὰ λαμβάνωμεν τὰς αὐτὰς Ποσότητας πολλάκις, διὰ τοῦτο ἐκθέτομεν τὸ τοιοῦτον διὰ τῶν ἀριθμητικῶν χαρακτήρων, ἀμέσως πρὸ τοῦ Γράμματος τιθεμένων. π. χ. ὅταν πρέπῃ νὰ λάβωμεν τὸ α τρὶς, ἤτοι $α + α + α$, τότε γράφομεν οὕτω $3α$, διότι $3α$ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ $α + α + α$. οὗτοι δὲ οἱ ἀριθμοὶ, οἵτινες τίθενται πρὸ τῶν Γραμμάτων κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἄνευ τινὸς Σημείου μεταξὺ αὐτῶν ϗ τῶν Γραμμάτων, ὀνομάζονται Συνεργοὶ, ἢ Συμπλέκτορες.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ γ'.

§. 12. Συνεργὸς καλεῖται ὁ πρὸ τοῦ Γράμματος ἀμέσως τιθέμενος ἀριθμὸς, ὅστις σημαίνει, ποσάκις πρέπει νὰ λάβωμεν τὴν διὰ τοῦ Γράμματος ἐκείνου παρισταμένην Ποσότητα, ἢ διὰ τίνος ἀριθμοῦ πρέπει αὕτη νὰ πολλαπλασιασθῇ. Ὅταν δὲ δὲν ὑπάρχῃ κανένας Συνεργὸς πρὸ τοῦ Γράμματος, τότε ἐννοεῖται ἔξωθεν ἡ Μονὰς, ἧς ἐνεργεία δὲν γράφεται ποτέ. π. χ. $αβ$ εἶναι $1αβ$. $2ββ$ εἶναι $= ββ + ββ$, ἢ τὸ $ββ$ εἶναι πεπολλαπλασιασμένον μετὰ τοῦ 2.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 13. Ἡ Ἑτερότης (διαφορότης) τῶν Συνεργῶν δύο Ποσοτήτων δὲν μεταβάλλει τὸ Ὁμοειδὲς ἢ Ἑτεροειδὲς τῶν Ποσοτήτων. διότι π. χ. $6αα$ ϗ $3αα$ Ποσὰ ϗ μ' ὅλον ὁποῦ ἔχουσι διαφόρους Συνερ-

γοὺς εἶναι ὅμως πάλιν ἀλλήλοις Ὁμοειδῆ. ὅμως $6α$ ϗ $6γ$ εἶναι ἀλλήλοις Ἑτεροειδῆ, καθὼς πάλιν ϗ $5ααα$ ϗ $5αα$ εἶναι μεταξύ των ἀνόμοια Ποσά, ὡς εἴρηται (§. 4.).

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ β'.

Περὶ Ἀλγεβραϊκῶν λογισμῶν.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ α'.

§. 14. Νὰ ἐκθέτωμεν τὰ δοθέντα Μέλη κατὰ τὸν δέοντα ϗ ἁπλούστατον τρόπον.

ΛΥ'ΣΙΣ, ἢ ΠΡΑΚΤΕ'Α.

1.) Τὰ Μέλη, ϗ κάθε Γράμμα ἐν τῷ αὐτῷ Μέλει (κἄντε Συμπεπλεγμένα, κἄντε ἀσύμπλεκτα τύχωσι τὰ Ποσά) πρέπει νὰ γράφωνται κατὰ τὴν τάξιν τοῦ ἀλφαβήτου, ϗ νὰ προσπαθῶμεν, εἰ δυνατὸν, νὰ εἶναι τὸ πρῶτον Μέλος πάντοτε Καταφατικὸν, π. χ. τὸ δοθὲν Ποσὸν $β - γ + α + ζδ$ πρέπει νὰ γραφθῇ εἰς τοιαύτην τάξιν, $α + β - γ + δζ$. ὁμοίως ϗ τὸ $8ζβ - 10βαγ + 6α$ νὰ μετατεθῇ εἰς τοιαύτην $6α - 10αβγ + 8βζ$.

2.) Τὰ ὅμοια, ἢ ὁμοειδῆ Μέλη πρέπει νὰ ἐνάγωνται κατὰ τὰ Σημεῖά των ϗ Συνεργούς των εἰς ἓν Μέλος, ὅπερ ϗ Ἐπιτομὴ ὀνομάζεται, ϗ τοῦτο γίνεται κατὰ τοὺς ἑξῆς τρεῖς Κανόνας.

Καν. ά.) Ἤ Συνάπτομεν τοὺς Συνεργοὺς τῶν Μελῶν (ἐὰν αὐτὰ τύχωσι ταυτοσύμβολα), καὶ θέτομεν πρὸ τοῦ Κεφαλαίου πάλιν τὸ αὐτὸ Σύμβολον τῶν συναπτομένων Μελῶν, καθὼς ἐπὶ τῶν Α΄ Ὑποδειγμάτων.

Καν. β΄.) Ἤ ἀφαιροῦμεν (ἂν τύχωσι τὰ Μέλη ἑτεροσύμβολα) τοὺς Συνεργοὺς αὐτῶν, τουτέστι τὸν ἐλάσσονα ἀπὸ τοῦ μείζονος, καὶ τότε θέτομεν πρὸ τῆς Διαφορᾶς τὸ Σύμβολον τοῦ μείζονος. ὡς ἐπὶ τῶν Β΄. Ὑποδειγμάτων γίνεται.

Καν. γ΄.) Ἤ ἐξαλείφομεν ἀμοιβαίως τὰ ὁμοειδῆ Μέλη, ἂν τύχη νὰ ἔχωσι Συνεργοὺς μὲν τοὺς αὐτοὺς, Σύμβολα ὅμως διάφορα, ὡς ἐπὶ τῶν Γ΄ Ὑποδειγμάτων δηλοῦται σαφέστερον.

ὙΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΤᾺ ΤῸΝ ά. ΚΑΝ.

$\alpha\beta + \alpha\beta + \gamma\delta$ γίνεται διὰ τῆς προσθ. $2\alpha\beta + \gamma\delta$.
$2\alpha - 2\delta + 5\alpha - 6\delta$ γίνεται διὰ τῆς προσθ. $7\alpha - 8\delta$.
$\alpha\alpha + 2\alpha\gamma + 3\alpha\gamma$ γίνεται $\alpha\alpha + 5\alpha\gamma$.

ὙΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΤᾺ ΤῸΝ β΄. ΚΑΝ.

$3\alpha\beta + 2\alpha\beta\beta - \alpha\beta$ γίνεται διὰ τῆς ἀφαιρ. $2\alpha\beta + 2\alpha\beta\beta$.
ὁμοίως $2\alpha + \delta - 7\alpha$ γίνεται $\delta - 5\alpha$.

ὙΠΟΔΕΙΓΜ. ΚΑΤᾺ ΤῸΝ γ΄. ΚΑΝ.

$\alpha\alpha + 2\alpha\beta\beta + 3\alpha\alpha - 2\alpha\beta\beta$ ἐγκαταλείπεται διὰ τῆς ἀμοιβαίας ἐξαλείψεως $4\alpha\alpha$.
ὁμοίως καὶ $\beta\delta - \beta\delta\zeta + 2\beta\delta + 2\beta\delta\zeta - 3\beta\delta$ μένει $\beta\delta\zeta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Τὰ Γράμματα δεικνύουσιν ὁποίαν Ποσότητα πρέπει νὰ λάβωμεν, οἱ δὲ Συνεργοὶ σημαίνουσι, ποσάκις νὰ λάβωμεν τὴν Ποσότητα, τὰ δὲ Σύμβολα δηλοῦσι, κατὰ ποῖον τρόπον νὰ τὴν ἐκλάβωμεν. ὅθεν ὅταν μία Ποσότης εἶναι Προσθετέα, ἢ ἀφαιρετέα πλεονάκις, φθάνει νὰ γράψωμεν αὐτὴν ἅπαξ, τιθέντες πρὸ αὐτῆς ἐκεῖνον τὸν Συνεργὸν ὅστις δύναται νὰ ἐκτελῇ τὸ τοιοῦτον, καθὼς ἀνωτέρω εἰς τὰ κατὰ τὸν ά. ὑποδείγματα γέγονεν. ἐὰν δὲ ἡ αὐτὴ Ποσότης μερικαῖς φοραῖς εὑρίσκηται Προσθετέα, καὶ ἐξ ἐναντίας μερικαῖς φοραῖς ἀφαιρετέα, μετά τινος ὅμως Διαφορᾶς τῶν Συνεργούντων, τότε ἐκθέτομεν τὴν Διαφορὰν τῆς Προσθετέας, ἢ τῆς ἀφαιρετέας, καθὼς ἀνωτέρω εἰς τὰ β΄ δείκνυται. ἂν τέλος ἡ αὐτὴ Ποσότης εἶναι προσθετέα καὶ ἐν ταυτῷ ἀφαιρετέα, ἄνευ τινὸς Διαφορᾶς τῶν Συνεργῶν, εἶναι φανερὸν, ὅτι δὲν ἐγκαταλείπεται τίποτε, ὡς εἰς τὰ κατὰ τὸν γ΄. Ὑποδείγματα γέγονε. δι᾽ αὐτῆς ἄρα τῆς Ἐργασίας ἀπεκαπσάθησαν τὰ δοθέντα Μέλη κατὰ τὸν ἁπλούστατον τρόπον.

Π Ρ Ό Β Λ Η Μ Α γ΄.

§. 15. Νὰ προσθέτωμεν Ἀλγεβραϊκὰς Ποσότητας.

ΛΥ΄ΣΙΣ ἢ ΠΡΑΚΤΈΑ.

Πρῶτον τὰ διδόμενα Μέλη πρέπει κατὰ τάξιν νὰ τεθῶσι μετὰ τῶν ἑαυτῶν Συμβόλων, ἔπειτα νὰ πλεσθῇ ἡ πρᾶξις διὰ τῆς Ἐπιτομῆς κατὰ τοὺς ἀνήκοντας Κανόνας τοῦ α΄. προτεθέντος Προβλήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ α΄.

Ἔστω εἰς σύναψιν τὸ $\alpha\beta$ καὶ $\gamma\delta$. ὅθεν ποιοῦμεν $\alpha\beta + \gamma\delta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓ. β΄.

Ἔστωσαν Προσθετέα τὰ 4α καὶ 8α. ὅθεν ποιοῦμεν οὕτως $4\alpha + 8\alpha$, καὶ διὰ τῆς Ἐπιτομῆς 12α. τὸ Κεφάλαιον τῶν 3α καὶ -5α καὶ 2β γίνεται $3\alpha - 5\alpha + 2\beta$. καὶ διὰ τῆς Ἐπιτομῆς $2\beta - 2\alpha$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ γ΄.

Ἔστωσαν προσθετέα τὰ $\alpha\beta + \gamma$ καὶ $\beta - \gamma$, ὅθεν ποιοῦμεν $\alpha\beta + \beta + \gamma - \gamma$, καὶ διὰ τῆς Ἐπιτομῆς $\alpha\beta + \beta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ δ΄.

Τὸ Κεφάλ. τῶν $3\beta\gamma - 4\beta\gamma\delta + 6\beta\zeta$, καὶ $6\beta\gamma\delta - 5\beta\gamma + 3\beta\zeta$, γίνεται διὰ τῆς Ἐπιτομῆς $2\beta\gamma\delta - 2\beta\gamma + 9\beta\zeta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Πρόσθεσις (ἥτις κατ' ἄλλους Σύναψις ὀνομάζεται) ἐστὶν ἄθροισις δύο, ἢ πλειόνων Ποσοτήτων εἰς ἓν γενικὸν

Κεφά

Κεφάλαιον, ἀλλὰ μὴν διὰ τούτου τοῦ Κανόνος τὰ δοθέντα Ποσὰ συνήχθησαν εἰς μίαν συμπεπλεγμένην Ποσότητα, ἥτις παρίστησι τὸ γενικὸν Κεφάλαιον, ἐγίνετο ἄρα κατὰ τὸ δέον ἡ ἀλγεβραϊκὴ Σύναψις.

ΣΧΟΛΙΟΝ α΄.

§. 16. Ἕκαστος δύναται νὰ καταλάβῃ σαφῶς, ὅτι ἐπὶ τῶν Ὁμοειδῶν Ποσοτήτων πρέπει νὰ ἀθροίζωμεν μόνον τοὺς Συνεργούς· ἐπειδὴ ἂν διορίσωμεν τὴν Σημασίαν τῶν Γραμμάτων. π. χ. ὅτι τὸ α σημαίνει μίαν Γραμμὴν, ἢ ἓν Γρόσιον, εἶναι φανερὸν, ὅτι 3α καὶ 5α ἤτοι τρία Γρόσ. καὶ πέντε Γρόσ. ἢ τρεῖς Γραμμαὶ καὶ πέντε Γραμ. ποιοῦσιν 8α, ἤτοι 8 Γρόσ., ἢ 8 Γραμμάς. παραπλησίως δύναται ἕκαστος νὰ ἐννοήσῃ εὐκόλως, καὶ ὅτι τὰ Ἑτεροειδῆ Ποσὰ πρέπει νὰ γράφωμεν καθ' ἓν ξεχωριστά, π. χ. τὸ Κεφάλαιον τῶν 3β καὶ 2γ Ἑτεροειδῶν εἶναι $3\beta + 2\gamma$. ἐπειδὴ ἂν τὸ β ἐνταῦθα σημαίνῃ ἓν Γρόσιον, καὶ τὸ γ ἕνα ὀβολὸν, δὲν δυνάμεθα νὰ καθίσωμεν ἄλλως τὸ ἄθροισμα, εἰμὴ 3 Γρόσ. σὺν 2 ὀβολοὺς, ἢ 6β καὶ -4γ εἶναι $6\beta - 4\gamma$, ἤτοι 6 Γρόσια πλὴν 4 ὀβολούς.

ΣΧΟΛΙΟΝ β΄.

§. 17. Διὰ νὰ ἠμποροῦμεν νὰ κάμνωμεν εὐκολώτερον τὰς Συνάψεις τῶν συναφθησομένων Ποσῶν, ὅταν δοθῶσι πλείονα Μίκτα Ὁμοειδῆ, καὶ Ἑτεροειδῆ, πρῶτον τάττομεν τὰ Ὁμοειδῆ κατὰ κάθετον, τὸ ἓν ὑποκάτω τοῦ ἄλλου, καὶ ἔπειτα τῶν μὲν Ὁμοειδῶν καὶ ἅμα Ταυτοσυμβόλων ἀθροίζομεν τοὺς Συνεργοὺς εἰς ἓν γενικώτερον ἄθροισμα κατὰ τὴν κοινὴν Σύναψιν, τῶν δὲ Ὁμοειδῶν καὶ ἐν ταυτῷ Ἑτεροσυμβόλων ἀφαιροῦμεν τοὺς Συνεργοὺς, ἤγουν τὸν ἐλάττονα Συνεργὸν ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὰ δὲ Ἑτεροειδῆ ἁπλῶς καταγράφομεν, καθὼς εἰς τὸ ἀνωτέρω Σχόλιον εἴρηται. καὶ τότε κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον ἀθροίζονται τὰ δοθέντα Ποσὰ εὐκολώτερον καὶ συντομώτερον, ὅσον ἐνδέχεται, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς Ὑποδείγμασι.

ΥΠΟ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ α΄.

$$
\begin{array}{l}
15\alpha\beta - 6\gamma\delta + 4\zeta\varepsilon \\
\quad\quad - 7\gamma\delta + 3\zeta\varepsilon - \varepsilon\vartheta\vartheta \\
-6\alpha\beta \quad\quad\quad\quad - \zeta\varepsilon + 3\varepsilon\vartheta\vartheta \\
\hline
9\alpha\beta - 13\gamma\delta + 6\zeta\varepsilon + 2\varepsilon\vartheta\vartheta
\end{array}
$$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ β΄.

$$
\begin{array}{l}
2\chi - 3\alpha + 4\beta - 5\gamma + 6\delta - 7\varepsilon \\
10\chi + 9\alpha - 8\beta - 7\gamma - 6\delta \quad - 5\zeta \\
\hline
12\chi + 6\alpha - 4\beta - 12\gamma - 7\varepsilon - 5\zeta.
\end{array}
$$

ΣΧΟΛΙΟΝ γ΄.

§. 18. Εἰς τὰς Ἀλγεβραϊκὰς Ἐργασίας ἀρχόμεθα ἀπὸ τῶν ἀριστερῶν, καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ Δεξιά, μ' ὅλον ὁποῦ ἀκωλύτως δυνάμεθα νὰ ἀρχίσωμεν καὶ ἀπὸ τῶν Δεξιῶν. ἐπειδὴ αἱ διὰ τῶν Γραμμάτων ἐμφαινόμεναι Ποσότητες δὲν ἔχουσι τινὰ δύναμιν ὁποῦ νὰ κρέμαται ἀπὸ τῆς κατὰ τὸν τόπον Θέσεως, καθὼς εἰς τοὺς ἀριθμητικοὺς χαρακτῆρας ἀκολουθεῖ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ γ΄.

§. 19. Νὰ ἀφαιρῶμεν Ἀλγεβραϊκὰς Ποσότητας.

ΛΥΣΙΣ ἢ ΠΡΑΚΤΕΑ.

Μεταβάλλομεν τὸ Σύμβολον τοῦ ἀφαιρετέου Ποσοῦ εἰς τὸ ἐναντίον, δηλαδὴ ἐὰν μὲν τὸ ἀφαιρεθησόμενον Ποσὸν

τυγχα-

τυγχάνῃ Καταφατικόν, ἔχον πρὸ ἑαυτοῦ κείμενον ἢ ὑπεννοούμενον τὸ Σύμβολον $+$, μεταβάλλομεν αὐτὸ εἰς ἀποφατικὸν διὰ τοῦ ἐναντίου Συμβόλου, τουτέστι διὰ τοῦ $-$· ἐὰν δὲ ὑπάρχῃ ἀποφατικόν, τότε κάμνομεν αὐτὸ νὰ λάβῃ Σημασίαν θετικὴν διὰ τοῦ Συμβόλου $+$, καὶ μετὰ τοῦτο γίνεται Πρόσθεσις καὶ Ἐπιτομή, ὡς

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ α΄.

Ἐὰν εἶναι τὸ $+\alpha$ ἀπὸ τοῦ $+\alpha$ ἀφαιρετέον, γράφομεν οὕτως $\alpha - \alpha$, τουτέστι 0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ β΄.

Ἐὰν ᾖ $\gamma\delta$ ἀφαιρετέον ἀπὸ τοῦ $\alpha\beta$, γράφομεν $\alpha\beta - \gamma\delta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ γ΄.

Ἐὰν ᾖ $3\gamma\delta\varepsilon$ ἀφαιρετέον ἀπὸ τοῦ $2\gamma\delta\varepsilon$, γράφομεν οὕτως $3\gamma\delta\varepsilon - 2\gamma\delta\varepsilon$, τουτέστι $\gamma\delta\varepsilon$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ δ΄.

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ $\alpha\beta\gamma$ εἶναι ἀφαιρετέον τὸ $-\alpha\beta\gamma$, γράφομεν ἄρα $\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma$, τουτέστι $2\alpha\beta\gamma$:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ε΄.

Ἐὰν ἀπὸ τῶν $\alpha\alpha + 2\beta\gamma + \beta\beta\delta$ εἶναι ἀφαιρετέα τὰ $\alpha\alpha + 4\beta\gamma - \beta\beta\delta$, μεταβάλλομεν πρῶτον τὰ Σύμβολα τῶν ἀφαιρετέων· οἷον $-\alpha\alpha - 4\beta\gamma + \beta\beta\delta$, ἔπειτα προστιθέντες ἀλλήλοις τὰ Ποσά, ἔχομεν $\alpha\alpha - \alpha\alpha + 2\beta\gamma - 4\beta\gamma + \beta\beta\delta + \beta\beta\delta$, τουτέστι $2\beta\beta\delta - 2\beta\gamma$.

ΔΕΙΞΙΣ.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Η῾ ἀφαίρεσις ἑνὸς Ποσοῦ ἐνδηλοῦται διὰ τοῦ Συμβόλου — (§. 6.)· λοιπὸν ὅταν πρόκηται νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ Ποσὸν β ἀπὸ τοῦ Ποσοῦ α, πρέπει νὰ γράφωμεν πρὸ τοῦ β τὸ Σύμβολον —, τουτέστι νὰ μεταβάλλωμεν τὸ + εἰς τὸ —. ὅταν δὲ τὸ ἀφαιρετέον Ποσὸν ἔχῃ Σύμβολον τὸ —, ὑπάρχει ἄρα τότε ἀφαιρετέον, καὶ ὡς τοιοῦτον πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ· ὅθεν πρέπει νὰ μεταβάλλωμεν τότε τὸ ἀποφατικὸν Σημεῖον — εἰς Καταφατικὸν + κατὰ τὸν γενικὸν ἐκεῖνον Κανόνα „· ὅτι δύω ἀποφάσεις ἀποτελοῦσι μίαν Κατάφασιν.

ΣΧΟ͗ΛΙΟΝ ά.

§. 10. Τοῦτο ὑποδεικνύεται καὶ διὰ τῆς Ἰδέας τοῦ ἀποφατικοῦ Ποσοῦ (§. 9). διότι, ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι μία Ἔλλειψις, ἢ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἓν χρέος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπ' ἄλλης ὁποιασδήποτε Ποσότητος, διὰ τοῦτο τὸ νὰ ἀφαιρῆται μία Ἔλλειψις, ἢ ἓν χρέος, δὲν σημαίνει ἄλλο, παρὰ νὰ κάμωμεν, ὥστε νὰ μὴν ἔχῃ ὁ ἄλλος αὐτὴν τὴν Ἔλλειψιν, αὐτὸ τὸ χρέος. τοῦτο ὅμως κατ' ἄλλον τρόπον δὲν δυνάμεθα νὰ ἀποτελέσωμεν, εἰ μὴ μεταποιοῦντες διὰ τῶν Συμβόλων τὴν ἀποφατικὴν Ποσότητα εἰς Καταφατικήν. καθὼς ἐξ ἐναντίας τὸ νὰ προστίθηται μία Ἔλλειψις σημαίνει τὸ νὰ κάμωμεν νὰ ἔχῃ ὁ ἄλλος αὐτὴν τὴν Ἔλλειψιν. ὅταν λοιπὸν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ α τὸ ἧττον β, γράφομεν α — β. ὅταν δὲ ἔχωμεν νὰ ἀφέλωμεν τὸ ἧττον β ἀπὸ τοῦ α, γράφομεν α + β. καὶ πάλιν ἂν προσθέσωμεν εἰς τὰ 12 τὴν Ἔλλειψιν, ἢ τὸ χρέος 4, ἔχομεν 12 — 4, τουτέστι 8. ἐὰν δὲ ἀφέλωμεν ἀπὸ τῶν 8 τὴν Ἔλλειψιν 4, τότε ἔχομεν 8 + 4 τουτέστι 12.

ΣΧΟ͗ΛΙΟΝ γ'.

§. 11. Ἐπειδὴ εἶναι ἀντίφασις τὸ νὰ ὑπάρχῃ τῷ ὄντι μία ἀποφατικὴ Ποσότης ὡς τοιαύτη, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ τὴν θεωροῦμεν πάν-

τοτε ὡς μίαν ἀληθῶς ὑπάρχουσαν, ἥτις πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ, διὰ τοῦτο προϋποθέτει αὕτη πάντοτε μίαν ἄλλην Καταφατικήν, ἀπὸ τῆς ὁποίας πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ. ἐκ τούτου πηγάζει ἔτι μία ἄλλη ἀπόδειξις διὰ ἓν τοιοῦτον Συμπεπλεγμένον Ποσόν. π. χ. τὸ β — γ ἔστω ἀφαιρετέον ἀπὸ τοῦ α. ἐὰν ἤδη ἀφέλωμεν τὸ β ἀπὸ τοῦ α, γινόμενον α — β, ἕκαστος εὐκόλως δύναται νὰ καταλάβῃ, ὅτι ἀφῃρέθη πλέον τοῦ δέοντος. ἐπειδὴ δὲν ἔπρεπε νὰ ἀφέλωμεν ὅλον τὸ Ποσὸν β, ἀλλὰ τὸ β ἐλαττούμενον κατὰ τὸ γ, μόνην δηλονότι τὴν διαφορὰν καθ' ἣν τὸ β ὑπερέχει τὸ γ. διὰ νὰ ἀποπληρώσωμεν λοιπὸν τὸ ἔλλειπον κατὰ τὸ δέον, πρέπει νὰ προσθέσωμεν πάλιν τόσον, ὅσον ἀφῃρέθη πλέον τοῦ δέοντος. ἀλλὰ μὴν τοῦτο τὸ πλέον τοῦ δέοντος ἀφαιρεθὲν εἶναι τὸ γ, ἄρα τὸ γ αὖθις πρέπει νὰ προστεθῇ, καὶ τότε ἔχομεν α — β + γ, τουτέστι τὰ Σύμβολα μεταβάλλονται εἰς τὸ ἐναντίον. Πρὸς σαφεστέραν κατάληψιν τῶν λεγομένων, ἔστω ἀπὸ τῶν 12 ἀφαιρετέος ἀριθμὸς ὁ 8 — 3. ὅθεν ἐὰν ἀπὸ τῶν 12 ἀφέλωμεν ὅλα τὰ 8, ἀφείλομεν τότε τρεῖς μονάδας πλέον τοῦ δέοντος. ἐπειδὴ δὲν πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ὅλος ὁ 8 ἀριθμός, ἀλλὰ μόνον ὁ 8 — 3, δηλαδὴ μόνον ὁ 5. ἂν λοιπὸν γράψωμεν 12 — 8, δὲν ἔχομεν τὴν ἀληθῆ διαφορὰν τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, ἀλλ' ἐλάττονα τοῦ ἀληθοῦς. ὥστε διὰ νὰ ἀποπληρώσωμεν τὸ ἔλλειπον, πρέπει νὰ προσθέσωμεν 3 μονάδας, καὶ οὕτω γίνεται 12 — 8 + 3, τουτέστιν 7, ὡσὰν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τῶν 12 τὸν ἀριθμὸν 8 — 3, τουτέστιν 5.

ΣΧΟ͗ΛΙΟΝ γ'.

§. 12. Ὅσον ὀλιγώτερον ἀφαιρεῖται ἀπό τινος ἀριθμοῦ π. χ. ἀπὸ τοῦ 7, τόσον περισσότερον μένει. ἂν τοίνυν ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ Μηδέν, ἢ 0, τότε μένει ὅλος ὁ ἀριθμός. Ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ ἔτι ὀλιγώτερον τοῦ Μηδενός, ἤτοι μία ἀποφατικὴ Ποσότης, τότε πρέπει νὰ μείνῃ πλέον τῶν 7. π. χ. ἐὰν ἀπὸ τῶν 7 ἀφέλωμεν 4, μένουσι 3, ἐὰν δὲ ἀφέλωμεν 2, μένουσιν 5, ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν 7 ἀφέλωμεν τὸ 0, μένουσιν ὁμοίως 7, ἄρα ἂν ἀπὸ τῶν 7 ἀφαιρεθῇ — 2, τότε μένουσι 9.

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ β΄.

§. 13. Τῶν διδομένων Μελῶν δύνανται νὰ γραφθῶσι τὰ Ὁμοειδῆ ὑποκάτω τῶν Ὁμοειδῶν, καθὼς ϗ ἐπὶ τῆς Συνάψεως (§. 17.) εἴρηται, οὕτως ὅμως ἐνταῦθα, ὥστε τὰ ἀφαιρετέα Μέλη νὰ γράφωνται ὑποκάτω ἐκείνων, ἀπὸ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ ἀφαιρεθῶσι, ϗ ἀφ' οὗ μεταβληθῶσιν εἰς τὸ ἐναντίον τὰ Σύμβολα, τὸ λοιπὸν τῆς Πράξεως δὲν διαφέρει τῆς Συνάψεως, τοῦτ' ἔστι τῶν μὲν Ὁμοιοσυμβόλων συνάπτομεν τοὺς Συνεργοὺς, τῶν δὲ Ἑτεροσυμβόλων τοὺς Συνεργοὺς ἀφαιροῦμεν, ϗ τὸ ἐξαχθὲν ἔσται ἡ τούτων Διαφορά, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς Ὑποδείγμασι.

ΥΠΟ΄ΔΕΙΓΜΑ α΄.

$9\alpha\beta - 13\gamma\delta + 6\varepsilon\zeta + 2\zeta\eta\eta$ τὸ μεῖζον Ποσόν.
$-6\alpha\beta - 7\gamma\delta + 3\varepsilon\zeta + 3\zeta\eta\eta$ τὸ ἀφαιρετέον.
$+ \quad + \quad - \quad -$ μεταβολὴ τῶν Συμβόλων.

$15\alpha\beta - 6\gamma\delta + 3\varepsilon\zeta - \zeta\eta\eta$ ἡ Διαφορά.

ΥΠΟ΄ΔΕΙΓ. β΄.

$12\chi + 6\alpha - 4\beta - 12\gamma - 7\varepsilon - 5\zeta.$ τὸ μεῖζον Π.
$10\chi + 9\alpha - 8\beta - 7\gamma - 6\delta - 5\zeta.$ τὸ ἀφαιρ.
$- \quad - \quad + \quad + \quad + \quad +$ μεταβολὴ τῶν Συμβ.

$2\chi - 3\alpha + 4\beta - 5\gamma + 6\delta - 7\varepsilon.$ ἡ Διαφορά.

ΥΠΟ΄ΔΕΙΓ. γ΄.

$20\alpha\alpha\beta + 6\alpha\beta\beta\gamma - 18\gamma\gamma\delta + 5\delta\varepsilon\varepsilon.$ τὸ μεῖζον Π.
$2\alpha\alpha\beta - 3\alpha\beta\gamma + 7\gamma\gamma\delta + 5\delta\varepsilon\varepsilon.$ τὸ ἀφαιρ.

$18\alpha\alpha\beta + 6\alpha\beta\beta\gamma + 3\alpha\beta\gamma - 25\gamma\gamma\delta.$ ἡ Διαφορά.

ΣΧΟ-

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ ʹ.

§. 14. Ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίτον Ὑπόδειγμα εἶναι τὸ $\alpha\beta\beta\gamma$ καὶ $\alpha\beta\gamma$ ἀνόμοια Ποσὰ (ἐπειδὴ εἰς μὲν τὸ πρῶτον εἶναι δὶς τὸ β, εἰς δὲ τὸ δεύτερον μόνον ἅπαξ γεγραμμένον) διὰ τοῦτο δὲν δύνανται αὐτὰ τὰ δύω Μέλη νὰ συλληφθῶσιν εἰς ἓν Μέλος. ὅθεν πρέπει ἑκαστὸν νὰ γραφθῇ χωρὶς.

ΠΡΟ΄ΒΛΗΜΑ δ΄.

§. 15. Νὰ πολλαπλασιάζωμεν Ποσότητας Ἀλγεβραϊκάς.

ΛΥ΄ΣΙΣ ἢ ΠΡΑΚΤΕ΄Α.

Καν. α΄.) Δύω Καταφατικοὶ Παράγοντες, διδόασιν εἰς τὸ Γινόμενον πάντοτε τὸ Σύμβολον +, τουτέστιν ἀποτελοῦσι Γινόμενον πάντοτε Καταφατικόν, ὁμοίως ϗ δύω ἀποφατικοὶ Παράγοντες διδόασιν εἰς τὸ Γινόμενον τὸ Συμβ. + τουτέστι ἀποτελοῦσι πάντοτε Γινόμενον Καταφατικόν. ὅταν ὅμως ὁ ἕνας τῶν Παραγόντων εἶναι Καταφατικὸς, ὁ δὲ ἄλλος εἶναι ἀποφατικὸς, τότε εἰς τὸ Γινόμενον ἔσται τὸ Σύμβολον − τουτέστι τὸ Γινόμενον ἔσται πάντοτε ἀποφατικόν.

Καν. β΄.) Οἱ Συνεργοὶ τῶν Παραγόντων πολλαπλασιάζονται μετ' ἀλλήλων, ϗ τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον εἶναι ὁ Συνεργὸς τοῦ Ἀλγεβραϊκοῦ Γινομένου.

Καν. γ΄.) Τὰ Γράμματα Συνάπτονται, ϗ συντίθενται ἀλλήλοις χωρὶς παρεμπτώσεως τινὸς Συμβόλου.

ΥΠΟ-

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ.

ἐκ τοῦ $\alpha \times \beta$ ἀποτελεῖται τὸ Γινόμενον $\alpha\beta$, τουτέστι Καταφ.
ἐκ τοῦ $\alpha \times -\beta$ ἀποτελεῖται Γινόμ. $-\alpha\beta$, τουτέσ. Ἀποφ.
ἐκ τοῦ $-\alpha \times \beta$ ἀποτελ. Γινόμ. $-\alpha\beta$, τουτέσ. Ἀποφ.
ἐκ τοῦ $-\alpha \times -\beta$ ἀποτελ. Γινόμ. $\alpha\beta$, τουτέσ. Καταφ.
ἐκ δὲ τοῦ $2\alpha \times 6\beta$ ἀποτελ. Γινόμ. $12\alpha\beta$. Καταφ.

Ἐπὶ δὲ τῶν Συμπεπλεγμένων Ποσῶν πρέπει κάθε Μέλος τοῦ Πολλαπλασιαστοῦ νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ ὅλα τὰ Μέλη τοῦ Πολλαπλασιαστέου καθὼς εἰς τοὺς ἀριθμοὺς π. χ. $(3\alpha\gamma - 4\beta\delta) \times 2\alpha\beta$ ἀποτελεῖ Γινόμενον $6\alpha\alpha\beta\gamma - 8\alpha\beta\beta\delta$. καὶ $(2\alpha + \beta - 5\gamma) \times (3\alpha - \delta + 6\varepsilon)$ δίδει Γινόμ. τὸ $6\alpha\alpha + 3\alpha\beta - 15\alpha\gamma - 2\alpha\delta - \beta\delta + 5\gamma\delta + 12\alpha\varepsilon + 6\beta\varepsilon - 30\gamma\varepsilon$. τουτέστι ὁ Πολλαπλασιαστέος πολλαπλασιάζεται πρῶτον μετὰ τοῦ 3α, ὕστερον μετὰ τοῦ $-\delta$, καὶ τέλος μετὰ τοῦ 6ε. ἂν δὲ εὑρεθῶσί τινα Ὁμοειδῆ Μέλη, ἀνάγομεν αὐτὰ κατὰ τὸ Α΄. Πρόβλημα εἰς ἓν Μέλος, τοῦτο γίνεται πολλὰ εὐκόλως, ἂν μεταξὺ τῆς ἐργασίας γράφωμεν τὰ Ὁμοειδῆ ὑποκάτω τῶν Ὁμοειδῶν, καθὼς θέλομεν ἰδῇ κατωτέρω ἐν τῷ πρώτῳ Ὑποδείγματι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Περὶ τῶν Συμβ. Πολλαπλασιασμός ἐστι τὸ νὰ λάβωμεν τοσάκις τὸν Πολλαπλασιαστέον, ὁσάκις ὁ Πολλαπλασιαστὴς περιέχει τὴν Μονάδα. ὅταν λοιπὸν πολλαπλασιάζωμεν μίαν Καταφατικὴν Ποσότητα μετ' ἄλλης Καταφατικῆς, ἢ τὸ Σύμβολον + μετ' ἄλλου τοιούτου +. ἢ ὅταν

προσ-

προσθέτωμεν πλεονάκις μίαν δεδομένην Ποσότητα, τουτέστι τίθεται ἡ ἀνωτέρω Ποσότης τοσάκις, ὁσάκις περιέχεται ἡ Μονὰς εἰς τὴν κατωτέρω Ποσότητα. π. χ. ἐκ τοῦ $+3 \times +2$ προάγεται 6, ἐπειδὴ τὸ 3 πρέπει νὰ τεθῇ δύο φοραῖς, ὅθεν πρέπει εἰς τὸ Γινόμενον νὰ μείνῃ τὸ Καταφατικὸν Σύμβολον +.

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάζωμεν μίαν ἀποφατικὴν μετ' ἄλλης Καταφατικῆς Ποσότητος, τότε δεικνύει ὁ Πολλαπλασιασμὸς, ποσάκις πρέπει ἡ ἀποφατικὴ Ποσότης νὰ τεθῇ, ἢ νὰ γραφθῇ, ὅθεν μένει Γινόμενον ἀποφατικὸν, καὶ ἐμφαίνεται διὰ τοῦ Συμβόλου −. ἐπειδὴ ἡ ἀποφατικὴ Ποσότης ἐλήφθη τοσάκις, ὁσάκις ὁ Καταφατικὸς Πολλαπλασιαστὴς περιέχει τὴν Μονάδα. π. χ. $-3 \times +2$ σημαίνει, ὅτι ἡ Ἔλλειψις τῆς Ποσότητος 3 πρέπει νὰ τεθῇ δὶς, ὅπερ ἐστὶν -6.

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάζωμεν μίαν Καταφατικὴν Ποσότητα μετ' ἄλλης ἀποφατικῆς, τότε πρέπει ἡ Καταφατικὴ Ποσότης νὰ ἀφαιρεθῇ τοσάκις, ὁσάκις ἐν τῷ ἀποφατικῷ Πολλαπλασιαστῇ περιέχεται ἡ Μονὰς π. χ. 3×-2 σημαίνει, ὅτι ἡ Ποσότης 3 πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ δὶς, ὅπερ ἀποτελεῖ -6.

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῇ μία ἀποφατικὴ Ποσότης μετ' ἄλλης ἀποφατικῆς, τότε δεικνύει ὁ Πολλαπλασιασμὸς, ὅτι ἡ ἀποφατικὴ Ποσότης πρέπει τοσάκις νὰ ἀφαιρεθῇ, ὁσάκις περιέχεται ἡ Μονὰς ἐν τῷ Πολλαπλασιαστῇ. ἀλλὰ μὴν τὸ νὰ ἀφαιρῆται μία ἀποφατικὴ Ποσότης, δηλοῖ τὸ νὰ προστίθηται. ἄρα καὶ τὸ Γινόμενον πρέπει νὰ ἔχῃ Σύμβολον Καταφατικὸν +. ἐπειδὴ ἡ Ἔλλειψις τῆς ἀποφατικῆς Ποσότητος τοσάκις λαμβάνεται, ὁσάκις ἐν τῷ Πολλαπλασιαστῇ περιέχεται ἡ Μονάς.

Ὅταν

Ὅσον δὲ διὰ τὰς Συνεργοὺς εἶναι φανερὰ ἡ Δεῖξις ἐκ τοῦ ἀριθμητικοῦ Πολλαπλασιασμοῦ. ἐπειδὴ οἱ Συνεργοὶ εἶσιν οἱ Παράγοντες, οἱ ὁποῖοι μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθέντες, ἀποτελοῦσι τὸ ζητούμενον Παραγόμενον.

Περὶ τῶν Γραμμάτων. Πολλαπλασιάζειν ἐστὶ τὸ νὰ κάμωμεν ἐκ μιᾶς ἁπλῆς Ποσότητος μίαν ἄλλην Σύνθετον. ἀλλὰ μὴν Σύνθετος Ποσότης λέγεται ἐκείνη, εἰς τὴν ὁποίαν ὑπάρχουσι πολλὰ Γράμματα συνεζευγμένα χωρὶς παρεμπτώσεώς τινος Συμβόλου (§. 4.). ἄρα διὰ τῆς τοιαύτης καταγραφῆς τῶν Γραμμάτων πολλαπλασιάζονται αἱ Ποσότητες. α καὶ β εἰσὶν ἁπλαῖ Ποσότητες, ἢ Παράγοντες, τὸ δὲ $\alpha\beta$ εἶναι Ποσότης Σύνθετος, ἢ Γινόμενον, ὅπερ κατ' ἄλλους καὶ Παραγόμενον ὀνομάζεται. ὡσαύτως $\alpha\beta$ καὶ $\gamma\delta$ εἰσὶν οἱ Παράγοντες, τὸ δὲ $\alpha\beta\gamma\delta$ εἶναι τὸ ἐκ τούτων Παραγόμενον.

ΣΧΟΛΙΟΝ α΄.

§. 26. Ἡ αὐτὴ Δεῖξις, ἥτις καὶ ἐν τῷ (§. 11.) περὶ τῆς ἀφαιρέσεως εἴρηται, δύναται νὰ χρησιμεύσῃ καὶ ἐπὶ τοῦ παρόντος, ἐπειδὴ μία ἀποφατικὴ Ποσότης δὲν ὑπάρχει ἀληθῶς, διὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον νὰ Πολλαπλασιασθῇ μετ' αὐτῆς ἄλλη τις ἀποφατική, ὅθεν πρέπει νὰ θεωρῆται αὕτη ὡς ἠνωμένη μετά τινος ἄλλης Ποσότητος, ἀφ' ἧς πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ. π. χ. $\alpha - \gamma$ ἔστω πολλαπλασιαζόμενον μετὰ τοῦ $\beta - \delta$. καὶ τῆς ἀρχῆς ἀπὸ τοῦ β γινομένης, α μετὰ τοῦ β πολλαπλασιασθὲν παρέχει $\alpha\beta$. ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὅλη ἡ Ποσότης α, ἀλλὰ μόνον $\alpha - \gamma$, τουτέστιν α παρὰ γ, διὰ τοῦτο τὸ Γινόμενον $\alpha\beta$ εἶναι μεῖζον τοῦ δέοντος τόσον, ὅσον δίδωσι τὸ β μετὰ τοῦ γ πολλαπλασιασθέν. πρέπει λοιπὸν τὸ $\beta\gamma$ νὰ ἀφαιρεθῇ, ὅθεν $-\gamma \times +\beta$ δίδωσι $-\beta\gamma$, ἢ ἀνόμοια Σύμβολα διδόασι Σύμβολον $-$. ἔπειτα τὸ α μετὰ τοῦ $-\delta$ πολλαπλασιασθὲν (κατὰ τὰ ἄνω εἰρημένα, ἐπειδὴ πρέ-

πει νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ α τοσάκις, ὁσάκις τὸ δ περιέχει τὴν Μονάδα) δίδωσιν $-\alpha\delta$. ἀλλ' ἐπειδὴ πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ καὶ νὰ ἀφαιρεθῇ ὄχι ὅλη ἡ Ποσότης α, ἀλλὰ μόνον τὸ α παρὰ τὸ γ, διὰ τοῦτο ἀφῃρέθη πλέον τοῦ δέοντος τόσον, ὅσον δίδωσι τὸ γ μετὰ τοῦ δ πολλαπλασιασθέν, ὅθεν πρέπει αὕτη ἡ Ποσότης $\gamma\delta$ πάλιν νὰ προστεθῇ, ἢ νὰ γραφῇ μετὰ τοῦ Συμβόλου $+$. τουτέστι τὸ $-$ μετὰ τοῦ $-$ πολλαπλασιασθὲν, δίδωσι τὸ $+$. Ἡ ἀλήθεια ταύτης τῆς πράξεως φαίνεται σαφέστατα, ἂν ἡ σημασία τῶν Γραμμάτων προσδιορισθῇ δι' ἀριθμητικῶν χαρακτήρων. π. χ. ἔστωσαν $8 - 3$ Πολλαπλασιαστέα μετὰ τῶν $6 - 4$, ὅθεν 8 διὰ τοῦ 6 πολλαπλασιασθεὶς, δίδωσι 48, ἀλλ' αὐτὸ τὸ Γινόμενον εἶναι μεῖζον τοῦ δέοντος. ἐπειδὴ δὲν πρέπει ὅλος ὁ 8 ἀριθμὸς νὰ πολλαπλασιασθῇ μετὰ τοῦ 6, ἀλλὰ μόνον 8 παρὰ 3. ὅθεν τὸ ἐκ τοῦ 3 καὶ 6 Γινόμενον, τουτέστιν ὁ 18 ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ. λοιπὸν τὸ πρῶτον ἀληθὲς Παραγόμενον εἶναι $48 - 18$. πάλιν 8 ἐπὶ τὸν -4 πολλαπλασιασθεὶς, δίδωσι -32 κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα. ἀλλὰ καὶ τοῦτο τὸ ἀποφατικὸν, ἢ ἀφαιρετέον Ποσὸν εἶναι τόσον μεῖζον τοῦ δέοντος, ὅσον εἶναι τὸ ἐκ τοῦ 3 καὶ 4 Γινόμενον. διὰ νὰ γένῃ λοιπὸν ἡ προσήκουσα ἀποπλήρωσις, πρέπει νὰ προστεθῇ τὸ ἐκ τοῦ 3 καὶ 4 Γινόμενον, τουτέστιν ὁ 12, καὶ οὕτως ἀποκτῶμεν τὸ δεύτερον ἀληθὲς Γινόμενον $-32 + 12$. ἀμφότερα τὰ Γινόμενα ποιοῦσι $48 - 18 - 32 + 12$, τουτέστι $60 - 50 = 10$, καὶ τοῦτο εἶναι τὸ ἴδιον Γινόμενον ἐκ τῶν 5 (ἤτοι $8 - 3$) καὶ 2 (ἤτοι $6 - 4$).

ΣΧΟΛΙΟΝ β΄.

§. 27. Ἐὰν ὦσιν οἱ Παράγοντες Συμπεπλεγμένα Ποσὰ, γράφομεν πρῶτον τὸν Πολλαπλασιαστὴν ὑποκάτω τοῦ Πολλαπλασιαστέου, ἔπειτα τραβοῦμεν μίαν Γραμμὴν (ὡς εἰς τὸν Πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀριθμῶν), ὑποκάτω τῆς ὁποίας γράφομεν τὰ γινόμενα εἰς διαφόρους Σειρὰς (ἀράδας) ἔνθα πρέπει νὰ παρατηρῶμεν ἐπιμελῶς, ὥστε πάντοτε ἡ Ὁμοειδὴς Ποσότης νὰ ἔρχηται ὑποκάτω τῆς Ὁμοειδοῦς. μετὰ τοῦτο ἐπισυνάπτομεν, ἂν εἶναι δυνατὸν, πάντα ταῦτα τὰ μερικὰ Γινόμενα κατὰ τὸ (§. 14.). καὶ γράφομεν τὸ γενικὸν Γινόμενον εἰς μίαν Σειρὰν, καθὼς εἰς τὰ ἑπόμενα Παραδείγματα.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ β'.

$\alpha + \beta$
$\alpha - \beta$

$\alpha\alpha + \alpha\beta$
$\qquad - \alpha\beta - \beta\beta$

$\alpha\alpha - \beta\beta$

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. β'.

$3\alpha\beta - 6\gamma\delta + 5\epsilon\epsilon\zeta$
$4\alpha\beta - 3\epsilon\zeta$

$12\alpha\alpha\beta\beta - 24\alpha\beta\gamma\delta + 20\alpha\beta\epsilon\epsilon\zeta$
$\qquad - 9\alpha\beta\epsilon\zeta + 18\gamma\delta\epsilon\zeta - 15\epsilon\epsilon\epsilon\zeta\zeta$

$12\alpha\alpha\beta\beta - 24\alpha\beta\gamma\delta + 20\alpha\beta\epsilon\epsilon\zeta - 9\alpha\beta\epsilon\zeta + 18\gamma\delta\epsilon\zeta - 15\epsilon\epsilon\epsilon\zeta\zeta.$

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. γ'.

$6\chi\chi - 7\alpha\chi + 8\alpha\alpha$
$2\chi\chi - 3\alpha\chi + 8\alpha\alpha$

$12\chi\chi\chi\chi - 14\alpha\chi\chi\chi + 16\alpha\alpha\chi\chi$
$\qquad - 18\alpha\chi\chi\chi + 21\alpha\alpha\chi\chi - 24\alpha\alpha\alpha\chi$
$\qquad\qquad + 24\alpha\alpha\chi\chi - 28\alpha\alpha\alpha\chi + 32\alpha\alpha\alpha\alpha.$

$12\chi\chi\chi\chi - 32\alpha\chi\chi\chi + 61\alpha\alpha\chi\chi - 52\alpha\alpha\alpha\chi + 32\alpha\alpha\alpha\alpha.$

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ γ.

§. 28. Εἶναι ἀναγκαῖον νὰ προσέχωμεν καλῶς ἐπάνω εἰς τὰς πράξεις τῆς Συνάψεως ϗ Πολλαπλασιάσεως, διὰ νὰ μὴ συγχυθῶσιν αὗται αἱ δύω Ἐκθέσεις, ἐν ᾧ πολὺ ἀλλήλων διαφέρουσιν. ἡ μὲν ἀλγεβραϊκὴ Σύναψις γίνεται μόνον διὰ τῶν Συνεργῶν, ἐπὶ δὲ τῦ Πολλαπλασιασμῦ ἐνεργῦσι ϗ οἱ Συνεργοὶ ϗ τὰ Γράμματα. π. χ.

α μὲ α συναφθὲν, ποιεῖ	2α.	ἐκ δὲ τῦ $\alpha \times \alpha$ γίνεται	$\alpha\alpha$
α μὲ o συναφ. ποιεῖ . .	α.	$\alpha \times o$ γίν.	o
α μὲ $-\alpha$ συναφ. ποιεῖ .	o.	$\alpha \times -\alpha$ γίν.	$-\alpha\alpha$
$-\alpha$ μὲ $-\alpha$ συναφ. ποιεῖ	-2α.	$-\alpha \times -\alpha$ γίν.	$+\alpha\alpha$
α μὲ 1 . . . . . ποιεῖ	$\alpha + 1$.	$\alpha \times 1$ γίνεται . . .	α
2α μὲ -3β . ποιεῖ	$2\alpha - 3\beta$.	$2\alpha \times -3\beta$ γίνεται	$-6\alpha\beta$

Τυτέςιν ἐπὶ μὲν τῆς Συνάψεως συνδέονται ϗ συνάπτονται τὰ Ποσὰ μετὰ τῶν ἑαυτῶν Συμβόλων, ϗ ἐκ τύτυ γίνεται μία Συμπεπλεγμένη Ποσότης. ἐπὶ δὲ τῆς Πολλαπλασιάσεως ἐκ μιᾶς ἁπλῆς Ποσότητος ἀποκαθίςαται ἄλλη τις Σύνθετος, καταγραφομένων τῶν Γραμμάτων ἄνευ παρεμπτώσεώς τινος Συμβόλυ. ἡ ἀλήθεια τύτυ γίνεται σαφεςέρα, ἐὰν εἰς τὸν τόπον τῶν Γραμμάτων τεθῶσιν ἀριθμοί. ὅθεν ἂν τὸ α ὑποτεθῆ ἴσον τῷ 4, ἔςαι τότε τὸ μὲν 2α τυτέςι $4 + 4 = 8$, τὸ δὲ $\alpha \times \alpha$ τυτέςι $4 \times 4 = 16$, ϗ πάλιν τὸ μὲν $\alpha + o = 4$, τὸ δὲ $\alpha \times o$, τυτέςι $4 \times o = o$.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ ί.

§. 29. Νὰ διαιρῶμεν Ποσότητας ἀλγεβραϊκάς.

ΛΥ'ΣΙΣ ἢ ΠΡΑΚΤΕ'Α.

Καν. ά.) Τὰ μὲν ὅμοια Σύμβολα ἀποτελῦσι Σύμβολον $+$, τυτέςι Πηλίκον Καταφατικόν. Τὰ δὲ ἀνόμοια

Συμβ. διδόασι Συμβολ. —, τουτέστι Πηλίκον ἀποφατικόν.

Καν. β'.) Οἱ Συνεργοὶ διαιροῦνται κατὰ τοὺς κανόνας τῆς ἀριθμητικῆς.

Καν. γ'.) Ὑποκάτω τοῦ Διαιρετέου γράφομεν μίαν Γραμμὴν, καὶ ὑποκάτω αὐτῆς γράφεται ὁ Διαιρέτης. ἂν ὅμως εὑρίσκωνται καὶ εἰς τὸν Διαιρετέον καὶ εἰς τὸν Διαιρέτην τὰ αὐτὰ Γράμματα, τότε ἀφαιροῦμεν, ἢ σβύομεν διὰ γραμμικοῦ τινὸς σημείου ἀμφοτέρωθεν ἕνα Ἴσον ἀριθμὸν τῶν Ὁμοίων Γραμμάτων.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ.

$\alpha:\alpha$ ποιεῖ $\frac{\alpha}{\alpha}$. ὁ Συνεργὸς 1 (ὅστις ἐννοεῖται ἐνταῦθα κατὰ τὸ §. 12) διαιρούμενος ἐπὶ τὸ 1, δίδει Πηλίκον 1. λοιπὸν τοῦ α καὶ α ἀφαιρεθέντος, ἢ σβυσθέντος $\frac{\not\alpha}{\not\alpha}$, ἔσται τὸ Πηλίκον μονὰς 1.

Ἐκ τοῦ αα: α προκύπτει Πηλίκον $\frac{\alpha\alpha}{\alpha}$ ἢ $\frac{\not\alpha\alpha}{\not\alpha} = \alpha$. τοῦ αβ διαιρεθέντος ἐπὶ τὸ α, προκύπτει $\frac{\alpha\beta}{\alpha}$ τουτ' ἐστι $\frac{\not\alpha\beta}{\not\alpha} = \beta$.

Ἐκ δὲ τοῦ 16 αααβγ: 8 αββγγ προκύπτει Πηλίκον $\frac{16\alpha\alpha\alpha\beta\gamma}{8\alpha\beta\beta\gamma\gamma}$ ἤτοι $\frac{16\not\alpha\alpha\alpha\not\beta\not\gamma}{8\not\alpha\not\beta\beta\not\gamma\gamma} = 2\,\frac{\alpha\alpha}{\beta\gamma}$.

Ἐκ

Ἐκ δὲ τοῦ 72 αβ: — 9 αβ προκύπτει $-\frac{72\alpha\beta}{9\alpha\beta} = -8$.

Ἐπὶ δὲ τῶν Συμπεπλεγμένων Ποσῶν ἀκολουθοῦμεν τὴν Διαίρεσιν καθὼς ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν, γράφομεν δηλονότι τὸν Διαιρέτην ὑπὸ τὸν Διαιρετέον, καὶ ζητοῦμεν τὸ Πηλίκον κατὰ τοὺς προτεθέντας κανόνας, τὸ ὁποῖον θέτομεν εἰς τὸν τόπον τῶν Πηλίκων, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν μετ' αὐτοῦ τὸν Διαιρέτην, καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ Διαιρετέου τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον, μεταβάλλοντες τὰ Σύμβολα, καὶ ἐπιτέμνοντες τὸν Διαιρετέον, ὡς ἐν τῷ ἑξῆς παραδείγματι.

αα + 2αβ + ββ (α + β
α + β
αα + αβ
— —
αβ + ββ
α + β
αβ + ββ
— —
0 0

Τὸ πρῶτον Πηλίκον τοῦ αα : α εἶναι α. ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσωμεν τὸ Πηλίκον α μετὰ τοῦ Διαιρέτου α + β ἀποκτῶμεν Γινόμενον τὸ αα + αβ, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑποκάτω τοῦ Διαιρετέου, καὶ μεταβάλλοντες ἔπειτα τὰ Σημεῖα τούτου τοῦ Γινομένου, τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ Διαιρετέου, καὶ οὕτω τὸ μὲν — αα ἀναιρεῖ τὸ + αα, καὶ μένει διαφορὰ τὸ μηδενικὸν 0, ἀπὸ δὲ τοῦ + αβ ἀφαιρεθέντος τοῦ — αβ, μένει + αβ ἡ διαφορὰ, τὴν ὁποίαν γράφομεν ὑποκάτω τῆς Γραμμῆς, προσθέτοντες τὸ ἑπόμενον Μέλος τοῦ Διαιρετέου, τουτέστι τὸ ββ, πάλιν γράφομεν τὸν Διαιρέτην α + β ὑποκάτω τοῦ λοιποῦ Διαιρετέου + αβ + ββ, καὶ διαιρεθέντος τοῦ αβ ἐπὶ τὸ α, προκύ-

πτει

πτει δεύτερον Πηλίκον τὸ + β, τὸ ὁποῖον ὡσαύτως γράφομεν εἰς τὸν τόπον τῶν Πηλίκων μετὰ τῦ ἑαυτῦ Συμβόλυ, ὕσερον πολλαπλασιάζομεν τὸ Πηλίκον β μεθ' ὅλυ τῦ Διαιρέτυ, ϗ τὸ ἐκ τύτων Γινόμενον αβ + ββ γράφομεν ὑποκάτω τῦ Διαιρέτυ, ϗ μεταβαλόντες τὰ Σημεῖα τύτυ τῦ Γινομένυ, τὸ ἀφαιρῦμεν ἀπὸ τῦ Διαιρετέυ. ὅθεν τὸ + αβ ἀναιρεῖ τὸ — αβ, ὁμοίως ϗ τὸ + ββ τὸ — ββ, ϗ ἐγκαταλείπεται Διαφορὰ τὸ 0, ϗ ὕτω γέγονεν ἡ Διαίρεσις ἐντελῶς. κατ' αὐτὴν τὴν μέθοδον ἀναλύομεν ϗ τὰ ἑξῆς Παραδείγματα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ ἡ Διαίρεσις ἀναλύει ἐκεῖνο, ὅπῦ ἐσύνθεσεν ὁ Πολλαπλασιασμὸς, διὰ τῦτο πρέπει ϗ διὰ τῆς Διαιρέσεως νὰ προκύψωσιν ἐκεῖνοι οἱ Παράγοντες, οἵτινες ἐσύνθεσαν τὸ Γινόμενον διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως. ὅθεν ἐπειδὴ τὸ — μετὰ τῦ — πολλαπλασιασθὲν, ἀποτελεῖ Σύμβολον +, εἶναι φανερὸν, ὅτι ἓν Γινόμενον δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ τὸ Συμβ. —, ἐὰν δὲν ἔχωσιν ἐναντία Σημεῖα οἱ Παράγοντες. λοιπὸν τὸ — αβ (τὸ Γινόμενον δηλ. ἐκ τῦ + α ϗ — β, ἢ τῦ — α ϗ + β) διαιρεθὲν ἐπὶ τὸ + α, δίδωσι Πηλίκον τὸ — β. διαιρέμενον δὲ ἐπὶ τὸ — α, δίδωσι τὸν ὅτερον Παράγοντα + β. ἐξ ἐναντίας τὸ + αβ (τυτ' ἐσὶ τὸ Γινόμενον ἐκ τῦ + α ϗ + β, ἢ τῦ — α ϗ — β διαιρεθὲν ἐπὶ τὸ + α, δίδωσι Πηλίκον (τὸν ἕνα δηλονότι Παράγοντα) + β, Διαιρεθὲν δὲ ἐπὶ τὸ — β, δίδει Πηλίκον τὸ — β. τὸ αὐτὸ τῦτο δύναται νὰ λεχθῇ ϗ περὶ τῶν Συνεργῶν ϗ Γραμμάτων. ἐπειδὴ προσπαθῦμεν νὰ ἀποκτήσωμεν διὰ τῆς Διαιρέσεως τὰς Ἰδίας Παράγοντας, οἵτινες διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως συνθέτυσι τὸ Πολλαπλῦν, ἢ Διαιρετέον.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ α'.

48ααα — 76ααβ — 64αββ + 105βββ | 12αα — 4αβ — 21ββ

4α — 5β. ὁ Διαιρέτης

48ααα — 60ααβ. Τὸ Γινόμενον

— + μεταβολὴ τῶν Συμβ.

— 16ααβ — 64αββ

4α — 5β

— 16ααβ + 20αββ

+ —

— 84αββ + 105βββ

4α — 5β

— 84αββ + 105βββ

+ —

0 0

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. β'.

18xxxx — 45xxx + 82xx — 67x + 40 | 6xx — 7x + 8

3xx — 4x + 5

18xxxx — 24xxx + 30xx

— + —

— 21xxx + 52xx — 67x

3xx — 4x + 5

— 21xxx + 28xx — 35x

+ — +

+ 24xx — 32x + 40

3xx — 4x + 5

24xx — 32x + 40

— + —

0 0 0

ΠΑΡΑ'-

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. γ'.

$$
\begin{array}{l}
16\alpha\alpha\alpha\alpha - 72\alpha\alpha\beta\beta + 81\beta\beta\beta\beta . \quad \underline{8\alpha\alpha\alpha} + 12\alpha\alpha\beta - 18\alpha\beta\beta - 27\beta\beta\beta \\
2\alpha \quad - 3\beta \\
16\alpha\alpha\alpha\alpha - 24\alpha\alpha\alpha\beta \\
- \quad + \\
\hline
\quad 24\alpha\alpha\alpha\beta - 72\alpha\alpha\beta\beta \\
\quad 2\alpha \quad - 3\beta \\
\quad 24\alpha\alpha\alpha\beta - 36\alpha\alpha\beta\beta \\
\quad - \quad + \\
\hline
\qquad -36\alpha\alpha\beta\beta + 81\beta\beta\beta\beta \\
\qquad 2\alpha \quad - 3\beta \\
\qquad -36\alpha\alpha\beta\beta + 54\alpha\beta\beta\beta \\
\qquad + \quad - \\
\hline
\qquad\quad -54\alpha\beta\beta\beta + 81\beta\beta\beta\beta \\
\qquad\quad 1\alpha \quad - 3\beta \\
\qquad\quad -54\alpha\beta\beta\beta + 81\beta\beta\beta\beta \\
\qquad\quad + \quad - \\
\hline
\qquad\quad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 30. Ἐὰν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀνόμοια Συμπεπλεγμένα Ποσὰ με ἄλλα ἀνόμοια Συμπεπλεγ. Ποσά, καὶ εὑρίσκηται εἰς κάθε Ποσότητα τὸ αὐτὸ Γράμμα ἁπλῶς, ἢ πολλάκις, δυνάμεθα τότε νὰ σβύσωμεν ἀμφοτέρωθεν ἴσον ἀριθμὸν Γραμμάτων, πρὸς τούτοις καὶ ἐὰν ὅλοι οἱ Συνεργοὶ ἐπιδέχωνται ἕνα κοινὸν Διαιρέτην, δυνάμεθα νὰ τοὺς ἀνάξωμεν διὰ τῆς Διαιρέσεως εἰς τὸ συντομώτερον, τουτέστιν εἰς ἐλάσσονας Ὅρους. π. χ. $\dfrac{8\alpha\beta\gamma - 4\beta\gamma\delta}{40\alpha\beta\gamma + 8\alpha\beta\gamma\delta}$

ἀφ' ᾧ

ἀφ' ᾧ σβύσωμεν ἀπὸ ὅλα τὰ Μέλη τὸ $\beta\gamma$, καὶ διαιρέσωμεν κάθε Συνεργὸν μετὰ τοῦ 4, γίνεται $\dfrac{2\alpha - \delta}{10\alpha + 2\alpha\delta}$ πρὸς τούτοις τὸ $\dfrac{4\alpha\alpha\gamma - 6\alpha + 8\alpha\alpha\alpha\delta}{10\alpha - 6\alpha\beta}$ δίδωσιν $\dfrac{2\alpha\gamma - 3 + 4\alpha\alpha\delta}{5 - 3\beta}$.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 31. Ἡ Διαίρεσις, ἢ ἡ ἀνάλυσις μιᾶς Ποσότητος εἰς τοὺς ἑαυτῆς Παράγοντας ἀκολουθεῖ εἰς τὴν Ἄλγεβραν συχνότατα, καὶ διὰ τοῦτο πρέπει νὰ γυμνασθῶμεν εἰς αὐτὴν ἀκριβῶς. οὕτω συντίθεται τὸ $\alpha\beta$ ἐκ τοῦ α καὶ β: καὶ τὸ $\beta\gamma\gamma$ ἐκ τοῦ β καὶ $\gamma\gamma$, ἢ ἐκ τοῦ $\beta\gamma$ καὶ γ. $4\chi\chi + 2\chi$ ἐκ τοῦ $2\chi\chi + \chi$ καὶ 2, ἢ ἐκ τοῦ $2\chi + 1$ πολλαπλασιασθέντος μετὰ τοῦ 2χ. προσέτι τὸ $\alpha\delta - \delta$ συνίσταται ἐκ τοῦ $\alpha - 1$ καὶ τοῦ δ. ἐπειδὴ ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσωμεν τὸ $\alpha - 1$ μετὰ τοῦ δ, ἀναφύεται Γενόμενον τὸ $\alpha\delta - \delta$. ὡσαύτως καὶ τοῦ $\delta\nu\nu + \delta\nu - \delta$ Παράγοντες εἰσὶν οἱ $\nu\nu + \nu - 1$ καὶ δ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ γ'.

Περὶ ἀλγεβραϊκῶν Κλασμάτων.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ α'.

§. 32. Νὰ φέρωμεν Κλάσματα Ἀλγεβραϊκὰ εἰς ἐλαχίστους Ὅρους.

ΛΥ'ΣΙΣ,

ΛΥ´ΣΙΣ, ἢ ΠΡΑΚΤΕ´Α.

Τοῦτο γίνεται κατὰ τοὺς Κανόνας, τοὺς ὁποίους ἐπραγματεύθημεν ἀνωτέρω εἰς τὴν Διαίρεσιν (§. 29.). ἐὰν δ᾽ εὑρίσκωνται τόσον εἰς τὸν ἀριθμητὴν, ὅσον ϗ εἰς τὸν Παρονομαστὴν τὰ αὐτὰ Γράμματα, ἐξαλείφομεν ἀμφοτέρωθεν ἕνα ἴσον ἀριθμὸν τῶν ὁμοίων Γραμμάτων, τοὺς δὲ Συνεργοὺς ἀνάγομεν εἰς ἐλαχίστους Ὅρους κατὰ τοὺς ἐν τῇ ἀριθμητικῇ δοθέντας Κανόνας. κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον λοιπὸν ἐκθέτομεν ἓν Κλάσμα εἰς ἐλαχίστους Ὅρους, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ Δύναμις αὐτοῦ: π. χ. $\frac{2\alpha\beta\gamma\delta}{4\alpha\delta\epsilon}$ ἀνάγεται εἰς $\frac{\beta\gamma}{2\epsilon}$.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ὅταν πολλαπλασιάσωμεν, ϗ διαιρέσωμεν μίαν Ποσότητα διὰ τοῦ Ἰδίου Μεγέθους, τότε δὲν μεταβάλλεται ἡ Δύναμις αὐτῆς. ἐπειδὴ τόσον ἠλαττώθη, ὅσον ηὐξήθη. ἀλλὰ μὴν τὰ Γράμματα ἑνὸς ἀλγεβραϊκοῦ Κλάσματος εἰσὶν ἐν μὲν τῷ ἀριθμητῇ Πολλαπλασιασταί, ἐν δὲ τῷ Παρονομαστῇ Διαιρέται. ἄρα ἐὰν σβύσωμεν ἴσους Πολλαπλασιαστὰς ϗ Διαιρέτας, ἐκθέτεται τὸ Κλάσμα εἰς ἐλαχίστους Ὅρους, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ Δύναμις αὐτοῦ.

ΠΡΟ´ΒΛΗΜΑ β´.

§. 33. Νὰ Προσθέτωμεν, ϗ νὰ ἀφαιρῶμεν Ἀλγεβραϊκὰ Κλάσματα.

ΛΥ´ΣΙΣ ἢ ΠΡΑΚΤΕ´Α.

Τὰ δοθέντα Κλάσματα πρέπει πρῶτον νὰ ἀναγάγωμεν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν κατὰ τοὺς Κανόνας τῆς ἀριθμητικῆς, ϗ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν ϗ νὰ ἀφαιρέσωμεν τοὺς ἀριθμητάς, π. χ., $\frac{\alpha}{\gamma}$ ϗ $\frac{\beta}{\delta}$ ἀνάγονται εἰς $\frac{\alpha\delta}{\gamma\delta}$ ϗ $\frac{\beta\gamma}{\gamma\delta}$. ἔπειτα προσθέτονται $\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\gamma\delta}$ ἢ ἀφαιροῦνται $\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma\delta}$. ἡ Δεῖξις εἶναι ἡ Ἰδία, καθὼς εἰς τὴν ἀριθμητικὴν περὶ Προσθέσεως ϗ ἀφαιρέσεως τῶν Κλασμάτων.

ΣΧΟ´ΛΙΟΝ.

§. 34. Ἐπειδὴ πρὸς Πρόσθεσιν & ἀφαίρεσιν ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ μεταχειριζόμεθα μόνον Σημεῖα (§. 7.). διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν, & νὰ ἀφαιρέσωμεν Ἀλγεβραϊκὰ Κλάσματα, χωρὶς νὰ ἀνάγωμεν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, προσγράφοντες μεταξὺ τῶν Κλασμάτων τὸ Σημεῖον + ἢ τὸ — π. χ. ἐὰν θέλωμεν νὰ προσθέτωμεν τὸ $\frac{\alpha}{\gamma}$ ϗ $\frac{\beta}{\delta}$, γράφομεν $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}$. ἐὰν δὲ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ $\frac{\beta}{\delta}$ ἀπὸ τῦ $\frac{\alpha}{\gamma}$ γράφομεν $\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\delta}$.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ γ'.

§. 35. Νὰ πολλαπλασιάζωμεν, ϗ νὰ διαιρῶμεν Ἀλγεβραϊκὰ Κλάσματα.

ΠΡΑΚΤΕ'Α, ἢ ΛΥ'ΣΙΣ.

Εἰς τὸν Πολλαπλασιασμὸν πολλαπλασιάζομεν τὺς δύω ἀριθμητὰς μετ' ἀλλήλων, ὡσαύτως ϗ τὺς Παρονομαστὰς, τὸν αὐτὸν τρόπον μεταχειριζόμεθα ϗ ἐπὶ τῆς Διαιρέσεως, ἀφ' ὖ ἀναποδίσωμεν τὸν Διαιρέτην. λοιπὸν ἀμφότεραι αὗται αἱ Ἐργασίαι ἀκολυθῦσι τὺς ἐν τῇ ἀριθμητικῇ δοθέντας Κανόνας, π. χ. ἐκ μὲν τῦ $\frac{\alpha}{\gamma} \times \frac{\beta}{\delta}$ γίνεται $\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$, ἐκ δὲ τῦ $\frac{\alpha}{\gamma}$ διαιρεμένυ ἐπὶ τῦ $\frac{\beta}{\delta}$, (ἀφ' ὖ ἀναποδισθῇ ὁ Διαιρέτης $\frac{\beta}{\delta}$ ὕτω $\frac{\delta}{\beta}$) ἀποτελεῖται $\frac{\alpha}{\gamma} \times \frac{\delta}{\beta} = \frac{\alpha\delta}{\gamma\beta}$.

Ἡ Δεῖξις εἶναι ἡ αὐτὴ, ὅπῦ γέγονε ϗ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ περὶ Πολλαπλασιασμῦ ϗ Διαιρέσεως τῶν Κλασμάτων.

ΣΧΟ'.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 36. Πάντα τὰ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ περὶ τῶν Κλασμάτων εἰρημένα, δύνανται νὰ προσαρμισθῶσι ϗ εἰς τὴν Ἄλγεβραν. οἷον ἓν ἀκέραιον Ποσὸν δύναται νὰ μεταποιηθῇ, ἢ νὰ ἀναχθῇ εἰς Κλάσμα, ὑπογραφομένης τῆς Μονάδος ἀντὶ τῦ Παρονομαστῦ. ἓν ἀκέραιον δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς ἓν Κλάσμα, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἀκέραιον μετὰ τῦ Παρονομαστῦ Κλάσματος, ϗ ὑποκάτω τῦ ἐκ τύτων Γινομένυ γράψωμεν τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν τῦ Κλάσματος. π. χ. ἐκ τῦ $\alpha + \frac{\beta}{\delta}$ γίνεται $\frac{\alpha\delta + \beta}{\delta}$, ὕτω ἢ περὶ τῶν λοιπῶν πραγματευόμεθα, καθὼς εἰς τῆς ἀριθμητικῆς ἔγιναν ἤδη εἰς ἡμᾶς γνωστά.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ δ'.

Περὶ Δυνάμεων.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ α'.

§. 37. Ὅταν ἀριθμός τις, ἢ Ποσὸν ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθῇ, τὸ Γινόμενον ὀνομάζεται Δευτέρα Δύναμις τῦ πολλαπλασιασθέντος ἀριθμῦ, ἢ Ποσῦ. ϗ τὸ Ποσὸν αὐτὸ ἀναφερόμενον πρὸς τὴν Δευτέραν Δύναμιν, λέγεται Ῥίζα, ἢ Πρώτη Δύναμις. π. χ. $\alpha\alpha$ εἶναι ἡ

Δευτ.

Δυτ. Δύναμις τῆς Ρίζης α. καὶ 16 ἐστὶν ἡ δευτ. Δύναμις τοῦ 4. ἐπειδὴ $4 \times 4 = 16$. Πρώτη Δύναμις λοιπὸν εἶναι ἕκαστον Ποσὸν καθ' ἑαυτὸν θεωρούμενον.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ α'.

§. 38. Ε'κείνη ἡ Δύναμις, ἥτις γίνεται εὐθὺς κατὰ πρῶτον Πολλαπλασιασμὸν, ὀνομάζεται γενικῶς Τετράγωνος. π. χ. ὁ 16 εἶναι τὸ Τετράγωνον τοῦ 4, ὁ δὲ 36 εἶναι τὸ Τετράγωνον τοῦ 6.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ β'.

§. 39. Ἡ Δευτέρα Δύναμις, ἢ ὁ Τετράγωνος διὰ τῆς ῥίζης πάλιν πολλαπλασιασθεὶς, προάγει τὴν Τρίτην Δύναμιν, ἥτις ὀνομάζεται Κύβος. π. χ. $aa \times a$ ποιεῖ aaa, τὸν Τρίτην δηλονότι Δύναμιν, ἢ τὸν Κύβον τοῦ α. 16×4 δίδουσιν 64, τὸν Κύβον τοῦ 4.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ γ'.

§. 40. Ε'ὰν δὲ πολλαπλασιασθῇ ἡ Τρίτη Δύναμις μετὰ τῆς Ρίζης, παράγεται ἡ Τετάρτη Δύναμις. Ε'ὰν δὲ πάλιν πολλαπλασιασθῇ καὶ αὕτη μετὰ τῆς Ρίζης, γεννᾶται ἡ Πέμπτη Δύναμις· καὶ οὕτω δυνάμεθα νὰ ἄρωμεν καθε Ποσὸν εἰς ὁποιανδήποτε δύναμιν Δύναμιν διὰ μόνου τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τῆς προηγουμένης Δυνάμεως μετὰ τῆς Ρίζης.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

§. 41. Ε'κ τῶν εἰρημένων γίνεται δῆλον, ὅτι δὲν δύναται κανένα Τετράγωνον νὰ εἶναι ἀποφατικόν. ἐπειδὴ εἴτε Καταφατικὴ, εἴτε ἀποφατικὴ εἶναι ἡ Ρίζα, τὸ Γινόμενον ἔσεται πάντοτε Καταφα

ταφατικόν. ὡς $-a \times -a = +aa$· ἢ $+a \times +a = +aa$, ὁ δὲ Κύβος δύναται νὰ εἶναι καὶ ἀποφατικὸς, ἐὰν ἡ Ρίζα ἔχῃ τὸ ἀποφατικὸν Σημεῖον $-$. ἐπειδὴ $+aa \times -a = -aaa$. ἡ δὲ Τετάρτη Δύναμις ἔσται πάλιν Καταφατική. ἐπειδὴ $-aaa \times -a = +aaaa$, καὶ οὕτω...

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ β'.

§. 42. Αἱ ῥίζαι ἔχουσι καὶ αὗται τὰς ἰδίας των Προσηγορίας, καθὼς αἱ Δυνάμεις. ἡ Ρίζα ἑνὸς Τετραγώνου ὀνομάζεται Τετραγωνικὴ Ρίζα. ἑνὸς δὲ Κύβου καλεῖται Κυβική. ἑνὸς δὲ Τετραγωνοτετραγώνου (δηλ. τῆς Τετάρτης Δυνάμ.) λέγεται Τετάρτη, ἢ Τετραγωνοτετραγωνικὴ Ρίζα. κ. τ. Πρὸς δήλωσιν ἑκάστης Δυνάμεως μεταχειριζόμεθα τὸ Σύμβολον τοῦτο $\sqrt{}$, ἐπάνω τοῦ ὁποίου γράφομεν τὸν ἀριθμὸν, ὅστις ἐκδηλοῖ ἐκείνην τὴν Δύναμιν, τῆς ὁποίας ἡ Ρίζα σημειοῦται, π. χ. $\sqrt[2]{}$ εἶναι τὸ Σημεῖον τῆς δευτέρας Δυνάμ. ἢ τοῦ Τετραγώνου. $\sqrt[3]{}$ εἶναι τὸ Σύμβ. τῆς Ρίζης τῆς Τρίτης Δυνάμεως, ἢ τοῦ Κύβου. $\sqrt[4]{}$ εἶναι τὸ Σύμβολον τῆς ῥίζης τῆς Τετάρτης Δυνάμεως. $\sqrt[2]{a}$ εἶναι ἡ Τετραγωνικὴ ῥίζα τῆς Ποσότητος α. αὕτη ὅμως ἡ

Τετρα-

Τετραγωνικὴ ῥίζα ἐκδηλοῦται διὰ μόνου τοῦ Σημείου √, ἄνευ τῆς ἐπιγραφῆς τοῦ 2. οἷον √α. ὁσάκις λοιπὸν βλέπομεν αὐτὸ τὸ Σημεῖον ἄνευ τινὸς ἐπιγραφομένου ἀριθμοῦ, πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι τοῦτο σημαίνει τὴν Τετραγωνικὴν ῥίζαν. ὅταν δὲ ἔχωμεν νὰ φανερώσωμεν τὴν ῥίζαν ἑνὸς Συμπεπλεγμένου Ποσοῦ, πρέπει νὰ περικλείωμεν αὐτὸ τὸ Ποσὸν ἐν παρενθέσει, διὰ νὰ γνωρίζηται, ὅτι τούτου τοῦ Ποσοῦ ζητεῖται ἡ ῥίζα, π. χ. $\sqrt[3]{}\,(αα+β)$. ἢ γράφομεν ἐπ' αὐτοῦ μίαν Γραμμὴν οὕτω $\sqrt[3]{αα+β}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 43. Ἐπειδὴ αἱ Δυνάμεις γεννῶνται διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ μιᾶς Ποσότητος ἐφ' ἑαυτήν. διὰ τοῦτο πρέπει νὰ θέτωμεν τὸ Ποσὸν τοσάκις, ὁσάκις ζητεῖται ἡ Δύναμις. π. χ. ἡ δευτέρα Δύναμις τοῦ α ἐστὶ τὸ αα, ἢ τὸ α δὶς τεθέν. ἡ ἑβδόμη Δύναμις τοῦ α εἶναι α α α α α α α, ἤγουν τὸ α ἑπτάκις τεθέν. ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ἀποφύγωμεν ταύτην τὴν πολυγραφίαν, γράφοντες μόνον ἐπὶ τοῦ Γράμματος πρὸς τὰ δεξιὰ ἀριθμὸν δηλοῦντα, ποσάκις ἐπολλαπλασιάσθη τὸ Ποσὸν διὰ τῆς ῥίζης, ἢ εἰς ποίαν Δύναμιν ἤρθη αὐτὸ τὸ Ποσόν. λοιπὸν ἀντὶ τοῦ ἑπτάκις ἀνωτέρω τεθειμένου α, γράφομεν $α^7$. ὁ ἀριθμὸς οὗτος, ὁ ἐπὶ τοῦ Γράμματος τεθειμένος, ὀνομάζεται παρ' ἡμῶν Δυναμοδείκτης, τὸν ὁποῖον ἄλλοι μὲν καλοῦσι Βαθμοδείκτην, ἄλλοι δὲ Ἐκθέτην καὶ ἄλλοι Ἐπίσημον, ἢ Ἐκφραστὴν τῆς Δυνάμεως, ὅθεν ἕπεται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ γ'.

§. 44. Δυναμοδείκτης ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων, εἰς ποίαν Δύναμιν, ἢ Βαθμὸν ὑψώθη μία Ποσότης. ὅθεν ὁ Δυναμοδείκτης τῆς πρώτης Δυνάμεως ἐστιν ἡ Μονάς, πραγματικῶς ὅμως δὲν γράφεται, ἀλλὰ πάντοτε ἐννοεῖται ἔξωθεν. ἐπειδὴ κάθε Ποσὸν ἀλγεβραϊκόν, καθὼς ἔχει ἕνα Συνεργόν, οὕτω πρέπει νὰ ἔχῃ καὶ ἕνα Δυναμοδείκτην. π. χ. α ἐστὶν πρώτη Δύναμις. $α^2$ εἶναι δευτέρα Δύν. ἢ τὸ Τετράγωνον. τὸ δὲ $α^3$ εἶναι τρίτη Δύναμις, ἢ Κύβος κ. τ. λ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 45. Ἐπειδὴ καὶ αἱ Δυνάμεις αὗται δύνανται νὰ εἶναι ἀόριστοι, καθὼς καὶ αὐτὰ τὰ Ποσά, διὰ τοῦτο δύναται ὁ Δυναμοδείκτης νὰ ἐκφράζηται ἐνίοτε καὶ διὰ τινος Γράμματος. π. χ. τὸ $β^μ$ σημαίνει, ὅτι τὸ Ποσὸν β ἤρθη εἰς τὴν Δύναμιν μ. τὸ δὲ $α^ν β$ δηλοῖ ὁμοίως, ὅτι τὸ Ποσὸν α ἤρθη εἰς τὴν Δύναμιν ν, καὶ ἐπολλαπλασιάσθη μετὰ τοῦ β.

ΠΟΡΙΣΜΑ α'.

§. 46. Αἱ Ποσότητες αἱ ἔχουσαι Διαφόρους Δυναμοδείκτας, εἶναι ἀνόμοιοι πρὸς ἀλλήλας. διότι ἐπειδὴ ὁ Δυναμοδείκτης δεικνύει, ποσάκις

σάκις ἐτέθη τὸ Γράμμα, διὰ τοῦτο τότε, ὅταν ὑπάρχωσιν οἱ Δυναμοδείκται διάφοροι, πρέπει νὰ εἶναι καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν Γραμμάτων Διάφορος, καὶ διὰ αὐτὸ τοῦτο εἰσιν ἀνόμοια τὰ Ποσά. Ὅθεν δύο Ποσὰ ἔχοντα Διαφόρους Δυναμοδείκτας, δὲν δυνάμεθα νὰ ἀγάγωμεν εἰς ἓν ἀσύμπλεκτον Ποσὸν, ἢ εἰς ἓν Μέλος. π. χ. ἐκ τοῦ $3\alpha^{3} + 4\alpha^{2}$ δὲν δύναται νὰ γένῃ μία Ποσότης ἀσύμπλεκτος, ἐξ ἐναντίας δὲ ἐκ τοῦ $2\alpha^{3} + 4\alpha^{3}$ γίνεται $6\alpha^{3}$. ἐπειδὴ ἀμφότερα ἔχουσι τὸν αὐτὸν Δυναμοδείκτην τὸν 3. ὅταν λοιπὸν θέλομεν νὰ προσθέσωμεν, ἢ νὰ ἀφέλωμεν Ποσὰ ἔχοντα Διαφόρους Δυναμοδείκτας, πρέπει νὰ τὰ γράφωμεν κατὰ τάξιν ἀνάλογα Ἐπιτομῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ β'.

§. 47. Εἰς δὲ τὸν Πολλαπλασιασμὸν πρέπει μόνον νὰ συνάπτωμεν ὁμοῦ τοὺς Δυναμοδείκτας. π. χ. $\alpha^{3} \times \alpha^{2}$ γίνεται α^{3+2} ἤτοι α^{5}, $\alpha^{2}\beta^{3}\gamma^{2} \times \alpha^{4}\beta^{2}\gamma^{3}$ ποιεῖ $\alpha^{6}\beta^{5}\gamma^{5}$. ἐπειδὴ καθῶς Δυναμοδείκτης δεικνύει, ποσάκις ἐτέθη τὸ αὐτὸ Γράμμα ἐν ἑκάστῳ τῶν Πολλαπλασιαζόντων. ἐν δὲ τῷ Γινομένῳ πρέπει νὰ ἐντεθῶσιν αὐτὰ τὰ Γράμματα, ἢ νὰ τεθῶσι τοσάκις, ὅσας μονάδες εἰσὶν ἐν ἑκατέρῳ τῶν Πολλαπλασιαζόντων. τὸ Κεφάλαιον λοιπὸν τῶν μονάδων δεικνύει τὸ Κεφάλαιον τῶν Γραμμάτων, καὶ οὕτω διὰ τῆς Συνθέσεως τῶν Δυναμοδεικτῶν ἀποκτῶμεν τὸν Δυναμοδείκτην τοῦ Γινομένου. π. χ. $\alpha^{6} \times \alpha^{3}$ εἶναι $= \alpha^{6+3}$ τουτέστιν α^{9}. ἐπειδὴ $\alpha^{6} = \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha$, καὶ $\alpha^{3} = \alpha\alpha\alpha$, αὐτὰ πολλαπλασιασθέντα μετ' ἀλλήλων, ποιοῦσι Γινόμενον ααααααααα τουτέστιν α^{9}. $\alpha \times \alpha$ εἶναι $= \alpha^{1+1}$ ἤτοι α^{2}. $\alpha^{\mu} \times \alpha^{\nu}$ εἶναι $= \alpha^{\mu+\nu}$. $\alpha^{\mu} \times \alpha$ ἐστὶν $= \alpha^{\mu+1}$. $\alpha^{\mu} \times \alpha^{\mu}$ εἶναι $= \alpha^{\mu+\mu}$ ἤτοι $\alpha^{2\mu}$. τὸ $\alpha^{\mu} \times \beta\varphi$ εἶναι $= \alpha^{\mu}\beta\varphi$. τὸ δὲ $3\alpha^{2} \times 4\beta^{3}$ εἶναι $= 12\alpha^{2}\beta^{3}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 48. Εἰς τὴν Διαίρεσιν, ἥτις ἀντίκειται τῷ Πολλαπλασιασμῷ, πρέπει νὰ ἀφαιρῶνται οἱ Δυναμοδεῖκται. διότι ὥσπερ ὅταν δυνάμεθα τόσον ἐκ τοῦ Διαιρετέου, ὅσον καὶ ἐκ τοῦ Διαιρέτου νὰ ἐξαλείφωμεν ἴσον ἀριθμὸν τῶν Ἰδίων Γραμμάτων, διὰ τοῦτο εἶναι τὸ ἴδιον νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τοῦ Δυναμοδείκτου τοῦ Διαιρετέου τόσαι Μονάδες, ὅσας ἔχει ὁ Δυναμοδείκτης τοῦ Διαιρέτου π. χ. $\alpha^{9} : \alpha^{3}$ γίνεται α^{9-3} ἤτοι α^{6}. ἐπειδὴ ἐὰν ἀπὸ $\frac{\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha}{\alpha\alpha\alpha}$ ἐξαλείψωμεν ἴσον ἀριθμὸν, τουτέστι ἑκατέρωθεν ἀπὸ τρία, μένουσιν ἔτι αααααα τουτέστι α^{6}. $\alpha : \alpha$ γίνεται α^{1-1} τουτέστι $\alpha^{0} = 1$. ἐπειδὴ ὁ Συνεργὸς 1 περιέχεται ἐν τῷ 1 ἅπαξ. $\frac{\alpha}{\alpha}$ σβέννυται. λοιπὸν $\alpha : \alpha$ ἢ $\alpha^{0} = 1$. $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$. $\alpha^{3} : \alpha^{5}$ γίνεται $\alpha^{3-5} = \alpha^{-2}$. $\beta^{\mu} : \beta = \beta^{\mu-1}$. μία Ποσότης λοιπὸν, ἥτις ἔχει Δυναμοδείκτην τὸ μηδενικὸν 0, εἶναι ἴση Μονάδι. ἐκεῖνο δὲ τὸ Ποσὸν ὅπου ἔχει Δυναμοδείκτην ἀποφατικὸν εἶναι ἴσον Κλάσματι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ α'.

§. 49. Νὰ ἄρωμεν (ὑψώσωμεν) μίαν δοθεῖσαν Ποσότητα εἰς τὴν Δευτέραν, ἢ εἰς ἄλλην τινὰ ὡρισμένην, ἢ ἀόριστον Δύναμιν.

ΛΥΣΙΣ ἢ ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ἐὰν ζητῶμεν νὰ ὑψώσωμεν τὸ δοθὲν Ποσὸν εἰς τὴν Δευτέραν Δύναμιν, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐφ' ἑαυτὸ ἅπαξ. ἐὰν δὲ ζητοῦμεν τὴν Τρίτην Δύναμιν τουτέστι τὸν Κύβον αὐτοῦ τοῦ Ποσοῦ, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ δὶς, καὶ οὕτως ἀκολουθοῦμεν γενικῶς, τουτέστιν ὁσάκις περιέχεται ἡ Μονὰς εἰς τὴν Ἐκθέτην τῆς ζητουμένης Δυνάμεως, τοσάκις, πλὴν ἅπαξ, πολλαπλασιάζομεν τὸ διδόμενον Ποσὸν ἐφ' ἑαυτὸ, δηλαδὴ ἐπὶ τὴν ῥίζαν, ὅταν, δὸς εἰπεῖν, ζητῆται ἡ Τετάρτη Δύναμις, πολλαπλασιάζομεν τότε τὸ Ποσὸν τρεῖς φοραῖς ἐφ' ἑαυτό. τὸ Τετράγωνον τοῦ α ἐστὶν $\alpha \times \alpha$, ἢ $\alpha\alpha$, τουτέστι $\alpha^{1\times 2} = \alpha^{2}$. ὁ Κύβος τοῦ α εἶναι $\alpha \times \alpha \times \alpha$, ἢ $\alpha\alpha \times \alpha$, τουτ' ἐστιν $\alpha^{1\times 3} = \alpha\alpha\alpha$, ἢ α^{3}. ἐὰν δὲ ζητῆται νὰ ὑψώσωμεν τὸ Ποσὸν α^{μ} εἰς Δύναμιν ν, πολλαπλασιάζομεν τὸ μ μετὰ τοῦ ν, καὶ τότε τὸ ζητούμενον ἔσται $\alpha^{\mu\times\nu}$, ἢ $\alpha^{\mu\nu}$. τὸ α ἀρθὲν εἰς τὴν ἐννάτην Δύναμιν, εἶναι $\alpha^{1\times 9} = \alpha^{9}$. ὅταν δὲ χρειαζώμεθα νὰ ἄρωμεν τὸ Ποσὸν α^{2} τουτέστι τὸ $\alpha\alpha$ εἰς τὴν ἕκτην Δύναμιν, γίνεται οὕτως $\alpha^{2\times 6} = \alpha^{12}$. ἐπειδὴ τὸ $\alpha\alpha$ πεντάκις μεθ' ἑαυτοῦ, τουτέστι μετὰ τοῦ $\alpha\alpha$ πολλαπλασιασθὲν, προάγει α^{12}, κ. τ. λ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ Δευτέρα Δύναμις κατὰ τὸν ἀνωτέρω Ὁρισμὸν (§. 37.) εἶναι τὸ Γινόμενον ἑνὸς Ποσοῦ ἅπαξ ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθέντος, ἡ δὲ Τρίτη Δύναμις ἐστὶ τὸ

Γινό-

Γινόμενον ἑνὸς Ποσοῦ, τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσθη δὶς μεθ' ἑαυτοῦ. ἡ δὲ Τετάρτη Δύναμις εἶναι τὸ Γινόμενον ἑνὸς Ποσοῦ τρὶς ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθέντος, κ. τ. ἐὰν λοιπὸν πολλαπλασιασθῇ μία Ποσότης ἐφ' ἑαυτὴν τοσάκις, ὅσαι Μονάδες, πλὴν μιᾶς, περιέχονται εἰς τὸν Ἐκθέτην τῆς ζητουμένης Δυνάμεως, ἀποκτῶμεν τότε τὴν ζητουμένην Δύναμιν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 50. Ἐὰν ἔχωμεν νὰ ὑψώσωμεν μίαν Σύνθετον Ποσότητα εἴς τινα Δύναμιν, πρέπει νὰ γράφωμεν ἐπάνω εἰς κάθε Γράμμα τὸν Δυναμοδείκτην. εἰς δὲ τὰ Κλάσματα πρέπει νὰ γράφωμεν τὸν Δυναμοδείκτην, καὶ ἐπὶ τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ ἐπὶ τοῦ Παρονομαστοῦ. π. χ. ἡ Πέμπτη Δύναμις τοῦ $\alpha\beta\gamma$ εἶναι $\alpha^{5}\beta^{5}\gamma^{5}$. ἡ Δύναμις μ τοῦ Ποσοῦ $\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$ ὑπάρχει $\frac{\alpha^{\mu}\beta^{\mu}}{\gamma^{\mu}\delta^{\mu}}$. Ὁ δὲ Κύβος ἐκ τοῦ $\frac{2\alpha\gamma}{5\delta\epsilon}$ εἶναι $\frac{8\alpha^{3}\gamma^{3}}{125\delta^{3}\epsilon^{3}}$, δυνάμεθα δὲ τοῦτο νὰ ἐκφράσωμεν ἐνίοτε καὶ ἄλλως. περικλείοντες δηλονότι τὸ Ποσὸν ἐν Παρενθέσει, ἢ γράφοντες ἐπὶ τοῦ Ποσοῦ μίαν Γραμμὴν, τιθέντες τὸν Δυναμοδείκτην τῆς Δυνάμεως πλησίον πρὸς τὰ δεξιά. οἷον. $(\alpha\beta\gamma)^{5}$, ἢ $\overline{\alpha\beta\gamma}^{5}$. ὁμοίως καὶ ἡ Δύναμις μ τοῦ Ποσοῦ $\alpha\alpha - \beta\gamma$ γράφεται οὕτως $(\alpha\alpha - \beta\gamma)^{\mu}$, ἢ οὕτως $\overline{\alpha\alpha - \beta\gamma}^{\mu}$.

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 51. Ἐὰν θέλωμεν νὰ ὑψώσωμεν ἓν Διμερὲς Ποσὸν εἰς τὴν Δευτέραν Δύναμιν, τότε πρέπει νὰ ἀκολουθήσωμεν τὰς συνήθεις Κανόνας τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ. π. χ. τὸ Τετράγωνον τοῦ $\alpha + \beta$, ἢ $- \alpha - \beta$, ἐστὶν $\alpha\alpha + 2\alpha\beta + \beta\beta$, ἢ $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$. τὸ δὲ Τετράγωνον τοῦ $- \alpha + \beta$ εἶναι $\alpha\alpha - 2\alpha\beta + \beta\beta$. ἢ $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$. ἐκ τούτου ἕπεται τὸ ἑξῆς Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ α'.

§. 52. Τὸ Τετράγωνον ἑνὸς Διμεροῦς Ποσοῦ συνίσταται ἐκ τοῦ Τετραγώνου τοῦ Πρώτου Ὅρου, καὶ ἐκ τοῦ Τετραγώνου τοῦ Δευτέρου Ὅρου, καὶ ἐκ τοῦ δὶς ληφθέντος Γινομένου τούτων τῶν Δύω Ὅρων ἀλλήλοις πολλαπλασιασθέντων.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδή, ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ τὸ Διμερὲς Ποσόν, ἀποκτῶμεν $\alpha\alpha$ καὶ $\beta\beta$, τουτέστι τὰ Τετράγωνα ἑκατέρων τῶν Ὅρων, πρὸς τούτοις ἀποκτῶμεν καὶ $2\alpha\beta$, δηλαδὴ τὸ ἐκ τῶν Ὅρων διπλοῦν Γινόμενον. ἐὰν τοῦτο τὸ Διπλοῦν Γινόμενον εἶναι Καταφατικόν, τότε οἱ Ὅροι εἰσὶν Ταυτοσύμβολοι, οἷον $+ \alpha + \beta$, ἢ $- \alpha - \beta$, ἐὰν δὲ εἶναι ἀποφατικόν, τότε οἱ Ὅροι εἶναι Ἑτεροσύμβολοι, οἷον $+ \alpha - \beta$, ἢ $- \alpha + \beta$.

ΟΡΙΣ-

ΟΡΙΣΜΟΣ δ'.

§. 53. Ἐντελὲς Τετράγωνον λέγεται ἐκεῖνο, ὅπερ συνίσταται ἐξ ὅλων τῶν ἀνωτέρω εἰρημένων τριῶν Μελῶν, οἷον τὸ $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$. ἀτελὲς δὲ Τετράγωνον λέγομεν ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου λείπει τι Μέλος, οἷον τὸ $\alpha^2 + 2\alpha\beta$, τοῦ ὁποίου λείπει β^2, διὰ νὰ γένῃ Ἐντελές. ὁμοίως καὶ τὸ $\alpha^2 + \beta^2$ ὀνομάζεται Τετράγωνον ἀτελές. ἐπειδὴ λείπει ἀπ' αὐτοῦ $2\alpha\beta$, καθὼς καὶ ἀπὸ τοῦ $2\alpha\beta + \beta^2$ λείπει, τὸ α^2.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 54. Ὅταν ἔχωμεν νὰ ἄρωμεν ἓν Διμερὲς Ποσὸν εἰς τὴν Τρίτην Δύναμιν, τότε πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ Τετράγωνον αὐτοῦ ἔτι ἅπαξ μετὰ τῆς Ῥίζης. οἷον $\alpha\alpha + 2\alpha\beta + \beta\beta \times \alpha + \beta$, καὶ τότε ἀποκτῶμεν τὴν Τρίτην Δύναμιν, ἤτοι τὸν Κύβον $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$. ἐκ τούτου ἕπεται τὸ ἑξῆς.

ΘΕΩΡΗΜΑ β'.

§. 55. Ὁ Κύβος ἑνὸς Διμεροῦς Ποσοῦ συνίσταται ἀπὸ τὸν Κύβον τοῦ Πρώτου Ὅρου, καὶ ἀπὸ τὸν Κύβον τοῦ Δευτέρου, καὶ ἀπὸ τὸ τρὶς ληφθὲν Γινόμενον ἔκ τε τοῦ Δευτέρου Ὅρου καὶ τοῦ Τετραγώνου τοῦ Πρώτου, καὶ ἀπὸ τὸ τρὶς

λη-

ληφθὲν Γινόμενον ἔκ τε τοῦ Πρώτου Ὅρου ϗ τοῦ Τετραγώνου τοῦ Δευτέρου.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ ἀποκτῶμεν α^3 ϗ β^3 (τουτέστι τοὺς Κύβους τοῦ α ϗ β Ὅρου) ϗ τὰ $\alpha^2 \times \beta$ ϗ $\beta^2 \times \alpha$, ἀμφότερα τρὶς ληφθέντα, ἤτοι $3\alpha^2\beta$ ϗ $3\alpha\beta^2$. ἄρα ποριζόμεθα τὸ τριπλοῦν Τετράγωνον τοῦ πρώτου Ὅρου πολλαπλασιασθέντος μετὰ τοῦ Δευτέρου, ϗ αὖθις τὸ τριπλοῦν Τετράγωνον τοῦ Δευτέρου Ὅρου πολλαπλασιασθέντος μετὰ τοῦ πρώτου, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ α΄.

§. 56. Κατ' αὐτὴν τὴν Μέθοδον δυνάμεθα νὰ συστήσωμεν Κανόνας ϗ Τύπους ϗ διὰ κάθε ἄλλην Δύναμιν, ϗ ἐκ τούτων νὰ ἀποριφώμεν Θεωρήματα.

ΣΧΟΛΙΟΝ β΄.

§. 57. Τὰ ἕως ὧδε εἰρημένα δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ϗ διὰ ἀριθμῶν. π. χ. ἐὰν διέλωμεν τὸν 12 ἀριθμὸν εἰς 10 ϗ 2, ϗ ἀποκαταστήσωμεν τὸ ἐκ τούτου Τετράγωνον κατὰ τὸν Καν. τῆς Ἀλγέβρας, γενήσεται σαφεστέρα ἡ ἀλήθεια τοῦ πράγματος, ϗ γὰρ

$$\begin{array}{r} 10 + 2 \\ 10 + 2 \\ \hline 100 + 20 \\ + 20 + 4 \\ \hline 100 + 40 + 4 \end{array}$$

τουτέστι τὸ Τετράγωνον τοῦ $10 = 100$, τὸ διπλοῦν Γινόμ. ἐκ τῶν 10×2 ἐστὶν $= 40$ ϗ τὸ Τετράγ. τοῦ $2 = 4$, ἢ

$$\begin{array}{r} 100 \\ 40 \\ 4 \\ \hline 144 \end{array}$$

Τὸ ὅλον Τετράγωνον

ὑπάρχει 144, ὅπερ ἀποκτῶμεν ὡσαύτως, ϗ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ 12 μετὰ τῶν 12.

ΣΧΟΛΙΟΝ γ΄.

§. 58. Ἐὰν ἁπλοῖ ἀριθμοὶ (ἀπὸ τῆς Μονάδος δηλονότι μέχρι τῶν 9) ἀρθῶσιν εἰς τὴν Δευτέραν Δύναμιν, τὸ Τετράγωνον αὐτῶν θέλει ἔχῃ μόνον δύω χαρακτῆρας ἀριθμητικούς, ὅπερ γίνεται φανερὸν, ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς τοιούτους ἀριθμοὺς ἐφ' ἑαυτούς. ἐπειδὴ $8 \times 8 = 64$, ϗ $9 \times 9 = 81$. τὰ δὲ Τετράγωνα τῶν ἀπὸ 10 ἕως τῶν 100 ἀριθμῶν ἔχουσι τρεῖς, ἢ τέσσαρας χαρακτῆρας. ϗ γὰρ $10 \times 10 = 100$, ϗ $50 \times 50 = 2500$, Τὰ δὲ Τετραγ. τῶν 100 μέχρι τῶν 1000 ἔχουσι πέντε, ἢ ἕξ χαρακτ. κ. τ. λ. ὁ Κύβος τοῦ 9 συνίσταται μόνον ἐκ τριῶν χαρακτ. οἷον 729. ὁ δὲ Κύβος τοῦ 10 συνίσταται ἐκ τεσσάρων. ὁ δὲ Κύβος τοῦ 100 ἔχει ἑπτὰ χαρακτ. ϗ οὕτως ἐφεξῆς. πάντα ταῦτα δεικνύονται ἐκ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ ϗ ἐκ τῆς ὑψώσεως αὐτῶν εἰς Δυνάμεις. τὰ δὲ Τετράγωνα ϗ οἱ Κύβοι τῶν πρώτων ἐννέα ἀριθμῶν ἐκτίθενται ἐν τῷ ἑξῆς Πίνακι.

αἱ ῥίζαι	1	2	3	4	5	6	7	8	9
τὰ Τετράγωνα	1	4	9	16	25	36	49	64	81
οἱ Κύβοι	1	8	27	64	125	216	343	512	729

δοθέντος λοιπὸν ἀριθμοῦ τινὸς, δυνάμεθα νὰ εἰδῶμεν παρευθὺς, πόσους χαρακτῆρας πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ ῥίζα αὐτοῦ. Ἐὰν δηλαδὴ ἓν Τετράγωνον συνίσταται ἐξ ἑνὸς, ἢ δύω χαρακτήρων, τότε ἡ ῥίζα πρέπει νὰ ἔχῃ μόνον ἕνα. τρεῖς δὲ ἢ τέσσαρες χαρακτῆρες ἐν τῷ Τετραγώνῳ παρόντες, δεικνύουσιν, ὅτι ἡ ῥίζα αὐτοῦ συνίσταται ἐκ δύω χαρακτήρων, ϗ οὕτως ἐφεξῆς. ἐὰν ὁ Κύβος ἔχῃ ἕνα, ἢ δύω, ἢ τρεῖς χαρακτῆρας, ἡ ῥίζα αὐτοῦ ἔχει ἕνα μόνον· ἐὰν δὲ ὁ Κύβος ἔχῃ τέσσαρας, πέντε, ἢ ἕξ χαρακτῆρας, τότε συνίσταται ἡ Ῥίζα ἐκ δύω· ϗ ἐὰν ὁ Κύβος ἔχῃ ἑπτὰ, ὀκτὼ, ἐννέα, ἡ ῥίζα τότε ἔχει τρεῖς, κ. τ.

ὉΡΙΣ-

ΟΡΙΣΜΟΣ ί.

§. 59. Ἀληθὲς Τετράγωνον εἶναι ἐκεῖνο, ἐκ τοῦ ὁποίου δύναται νὰ ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα ἐντελῶς. Μὴ ἀληθὲς δὲ Τετράγ. εἶναι ἐκεῖνο, ὅπου ἔχει, ἄλογον ῥίζαν π. χ. 16 εἶναι ἀληθὲς Τετράγωνον. ἐπειδὴ ἡ ῥίζα αὐτοῦ ὑπάρχει ὁ ἀριθ. 4. ὁ δὲ ἀριθ. 12 ἐξ ἐναντίας εἶναι Τετράγωνον μὴ ἀληθές. ἐπειδὴ ἡ ῥίζα αὐτοῦ εἶναι ἄλογος, τοιαῦτα ἀπλᾶ Τετράγ. λέγονται καὶ ἄλογα Ποσά, περὶ τῶν ὁποίων ἐν τοῖς κατωτέρω πραγματευσόμεθα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 60. Κάθε ἀληθὲς Τετράγωνον ἔχει εἰς τὸ τέλος ἕνα τούτων τῶν χαρακτήρων 1, 4, 5, 6, 9, ἢ δύο, ἢ καὶ πλείω μηδενικά, τῶν ὁποίων προηγεῖται τις τούτων τῶν χαρακτ. ὁ δὲ ἀριθμὸς ὁ ἔχων ἐν τῷ τέλει ἕνα μόνον Μηδενικὸν 0, ἢ τοὺς χαρακτῆρας 2, 3, 7, 8, δὲν εἶναι ἀληθὲς Τετράγωνον. πλὴν δὲν ἕπεται πάλιν νὰ ἐκλάβωμεν, ὅτι κάθε ἀριθμός, ὅστις ἔχει ἐν τῷ τέλει τοὺς ἀνωτέρω χαρακτῆρας, ὑπάρχει ἤδη Τετράγωνος. διὰ τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν θέλομεν δυνηθῇ νὰ καταλάβωμεν τὸ τοιοῦτον σαφέστατα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ β'.

§. 61. Νὰ ἐξάγωμεν ἔκ τινος Μονομελοῦς Ποσοῦ τὴν ζητουμένην ῥίζαν, οἷον τὴν Τετραγωνικήν, ἢ Κυβικήν, ἢ ἄλλην τινά.

ΠΡΑΚΤΕΑ,

ΠΡΑΚΤΕΑ ἡ ΛΥΣΙΣ.

Διαιροῦμεν τὸν Δυναμοδείκτην τοῦ δοθέντος Ποσοῦ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει, ὁποίας Δυνάμεως ῥίζα ζητεῖται π. χ. ἐὰν ζητῆται ἡ Τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ a^2, διαιροῦμεν τὸν Δυναμοδ. τοῦ a διὰ τοῦ 2 καὶ οὕτω γίνεται $a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a$. ἐὰν δὲ ζητῆται ἡ Τετραγ. ῥίζα τοῦ a, γράφομεν $a^{\frac{1}{2}}$. ἐὰν δὲ ζητῆται τοῦ a^4 ἡ Τετάρτη ῥίζα, γράφομεν $a^{\frac{4}{4}} = a$. ἐὰν δὲ ζητῆται τοῦ a^4 ἡ Δευτέρα ῥίζα, γίνεται $a^{\frac{4}{2}} = a^2$. καὶ ἐν γένει ἐὰν ζητῆται ἡ ν Δύναμις τοῦ Ποσοῦ a^μ, γράφομεν $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, ὅταν θέλωμεν ἁπλῶς μόνον νὰ ἐκθέσωμεν τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ῥιζῶν, τότε θέτομεν πρὸ τοῦ Ποσοῦ τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον (§. 42.) μετὰ τοῦ Ἐκθέτου αὐτοῦ π. χ. $\sqrt[4]{a^1}$ ἢ $\sqrt[\nu]{a^\mu}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Μία Ποσότης ὑψώνεται εἰς τινὰ Δύναμιν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ Δυναμοδείκτης τοῦ Ποσοῦ μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐμφαίνοντος τὴν ζητουμένην Δύναμιν κατὰ τὸ (§. 49). λοιπὸν ἐκ μιᾶς Δυνάμεως ἐξάγεται ἡ ῥίζα ἐὰν διαιρεθῇ ὁ Δυναμοδείκτης τοῦ διδομένου Ποσοῦ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐμφαίνοντος τὴν ζητουμένην ῥίζαν. καὶ γὰρ ἡ Διαίρεσις λύει, ὅπερ ὁ Πολλαπλασιασμὸς συνθέτει. ἀλλὰ μὴν

αἱ

αἱ Δυνάμεις γεννῶνται διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ. αὐταὶ αὗται ἄρα λύονται διὰ τῆς Διαιρέσεως εἰς τὰς ἑαυτῶν ῥίζας.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 62. Τὴν ῥίζαν ἑνὸς Τετραγωνικοῦ ἀριθμοῦ ἐξ ἑνὸς ἢ δύω χαρακτήρων συγκειμένου δείξαμεν ἀνωτέρω ἐν τῷ Πίνακι (§. 58.).

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ γ΄.

§. 63. Νὰ ἐξάγωμεν τὴν Τετραγωνικὴν ῥίζαν ἔκ τινος Διμελοῦς Ποσοῦ.

ΠΡΑΚΤΕ'Α, ἢ ΛΥ'ΣΙΣ.

Ἐπειδὴ κάθε Τετράγωνον Διμελοῦς Ποσοῦ συνίσταται ἐκ τῶν Τετραγώνων τοῦ Πρώτου καὶ Δευτέρου Ὅρου, καὶ ἐκ τοῦ δὶς ληφθέντος Γινομένου τῶν Ὅρων, διὰ τοῦτο ἀποκτῶμεν τὴν Διμελῆ ῥίζαν, ἐὰν ἐξαγάγωμεν ἐκ τοῦ Πρώτου Τετραγώνου α^2 τὴν ῥίζαν, ἥτις ὑπάρχει τὸ Πρῶτον Μέλος ὅλης τῆς ῥίζης, καὶ ἐν ταυτῷ ἕνας Παράγων τοῦ Διπλοῦ Γινομένου, ἤτοι τοῦ $2\alpha\beta$, ὅπερ διαιροῦμεν ἔπειτα διὰ τοῦ Διπλασίου Πρώτου Παράγοντος, ἤτοι 2α, καὶ τὸ Πηλίκον β ὑπάρχει τὸ Δεύτερον Μέλος τῆς ὅλης ῥίζης, τὸ ὁποῖον γράφομεν μετὰ τοῦ ἑαυτοῦ Σημείου εἰς τὸν τόπον του. ὕστερον ἀφαιροῦμεν τὰ Τετράγωνα ἑκατέρων τῶν Μελῶν σὺν τῷ δὶς ἐξ αὐτῶν Γινομένῳ ἀπὸ τοῦ δοθέντος Τετραγώνου. π. χ. ζητεῖται νὰ ἐξαχθῇ ἡ Τετραγωνικὴ ῥίζα

αα +

$$
\begin{array}{l|l}
\alpha\alpha+2\alpha\beta+\beta\beta & \alpha+\beta \\
-\alpha\alpha & \\
\hline
\quad +2\alpha\beta & \\
\quad\ 2\alpha & \\
\quad +2\alpha\beta & \\
\hline
\qquad\quad +\beta\beta & \\
\qquad\quad +\beta\beta & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

τοῦ $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$. ὅθεν ἀφ' οὗ ἐξαγάγωμεν ἀπὸ τοῦ Τετραγώνου α^2 τὴν ῥίζαν α, τὴν θέτομεν εἰς τὸν τόπον τοῦ Πηλίκου, καὶ ποιοῦμεν τὸ Τετράγωνον αὐτοῦ καὶ τὸ ἀφαιροῦμεν, μεταβαλόντες τὸ Σημεῖον αὐτοῦ, ἤτοι $\alpha\alpha-\alpha\alpha=0$. καταλείπεται ἔτι $2\alpha\beta+\beta\beta$. τὸ εὑρεθὲν Πηλίκον α λαμβάνομεν δεδιπλασιασμένον, ἤτοι 2α, καὶ διαιροῦμεν δι' αὐτοῦ τὸ Δεύτερον Μέρος ἤτοι τὸ $2\alpha\beta$, καὶ διὰ τοῦ τοιούτου ἀποκτῶμεν τὸ Πηλίκον β, ὅπερ ἐστὶ τὸ Δεύτερον Μέλος τῆς ῥίζης, καὶ τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν αὖθις μετὰ τῆς ῥίζης, καὶ τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ Δευτέρου Μέλους, $2\alpha\beta-2\alpha\beta=0$. Τετραγωνίζομεν δὲ καὶ τὸ Δεύτερον Μέλος β, καὶ τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ Τρίτου Μέλους ἤτοι $\beta^2-\beta^2=0$, καὶ ἐπειδὴ δὲν μένει τίποτε, ἐγένετο ἄρα τὸ ζητούμενον.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ α΄.

§. 64. Ἐὰν ὑπάρχῃ τὸ Διπλοῦν Γινόμενον ἀποφατικὸν, τοῦτο εἶναι Σημεῖον, ὅτι ἓν Μέλος τῆς ῥίζης εἶναι ἀποφατικόν. τοῦτο δείκνυται διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τοῦ $\alpha-\beta$ ἐπὶ $\alpha-\beta$, ἢ τοῦ $-\alpha+\beta$ ἐπὶ $-\alpha+\beta$. πάντοτε θέλει εἶναι τὸ Παραγόμενον $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ β΄.

§. 65. Οἱ αὐτοὶ Κανόνες ἰσχύουσι καὶ ἐπὶ τῆς Ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης ἐξ ἀριθμῶν.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ δʹ.

§. 66. Νὰ ἐξάγωμεν ἐκ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν.

ΠΡΑΚΤΕΑ ἡ ΛΥΣΙΣ.

Καν. αʹ.) Μερίζομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἀπὸ τῶν Δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ εἰς Κλάσεις οὕτως, ὥστε εἰς κάθε Κλάσιν νὰ εἶναι (ἐκτὸς τῆς τελευταίας πρὸς τὰ ἀριστερὰ Κλάσεως, ἥτις δύναται νὰ περιέχῃ ϗ ἕνα μόνον χαρακτῆρα) δύω χαρακτῆρες. εἰς ὅσας λοιπὸν Κλάσεις μερισθῇ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἐκ τοσούτων χαρακτήρων συνίσταται ἡ ῥίζα αὐτοῦ (§. 58.).

Καν. βʹ.) Ζητοῦμεν εἰς τὸν προεκτεθέντα Πίνακα (§. 58.), ἂν ὑπάρχῃ ἡ ἐκ τῶν ἀριστερῶν Πρώτη Κλάσις ἀληθὲς Τετράγωνον, ϗ ἂν μὲν ὑπάρχῃ τοιοῦτον, γράφομεν αὐτὸ ὑποκάτω τῆς Πρώτης Κλάσεως. ἐὰν δὲ ἡ Πρώτη Κλάσις δὲν εἶναι ἀληθὲς Τετράγωνον, τότε λαμβάνομεν τὸ ὡς ἔγγιστα ἔλαττον Τετράγωνον, ϗ γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν πρώτην Κλάσιν, τὴν δὲ ῥίζαν αὐτοῦ τοῦ Τετραγώνου γράφομεν εἰς τὸν τόπον τοῦ Πηλίκου.

Καν. γʹ) Ἀφαιροῦμεν τοῦτο τὸ Τετράγωνον ἀπὸ τῆς πρώτης Κλάσεως, τὸ δὲ ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως καταλειπόμενον (ἐὰν ὑπάρχῃ) προσγράφομεν εἰς τὴν Ἑπομένην Κλάσιν.

Καν. δʹ.) Διπλασιάζομεν τὸ εὑρεθὲν Πηλίκον ϗ γράφομεν αὐτὸ ὡς Διαιρέτην ὑποκάτω τῆς δευτέρας Κλάσεως οὕτως, ὥστε ὁ τόπος ὁ ὑπὸ τὸν πλησιέστερον χαρακτῆρα πρὸς τὰ Δεξιὰ νὰ μένῃ κενὸς ϗ ἐλεύθερος.

Καν. εʹ.) Ἤδη ζητοῦμεν ποσάκις περιέχεται ὁ Διαιρέτης ἐν τοῖς ἀνωτέρω ἐπ' αὐτοῦ κειμένοις ἀριθμοῖς. τὸ δὲ εὑρεθὲν Πηλίκον θέτομεν τόσον εἰς τὸν τόπον τοῦ Πηλίκου πλησίον τῆς πρότερον εὑρεθείσης ῥίζης, ὅσον ϗ εἰς τὸν κενὸν τόπον πλησίον τοῦ Διαιρέτου.

Καν. ςʹ.) Ὅλον αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν μετὰ τούτου τοῦ ὑστέρως εὑρεθέντος Πηλίκου ϗ τὸ Γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀνωτέρου ἀριθμοῦ, καθὼς ἐν τῷ ἑξῆς παραδείγματι γίνονται σαφέστερα τὰ λεγόμενα.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμ. 529., διὰ νὰ ἐξαχθῇ ἡ Τετραγωνικὴ τούτου ῥίζα.

αʹ.)	5,29	ἐμερίσθη εἰς δύω Κλάσεις. | 23 ἡ ῥίζα.
βʹ.)	4	τὸ ὡς ἔγγιστα ἔλαττον Τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ ῥίζα εἶναι ὁ 2.
γʹ.)	129	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τῆς ἑπομένης Κλάσεως.
δʹ ϗ εʹ.)	43	τὸ διπλάσιον τοῦ Πηλίκου 2 = 4 ὡς Διαιρέτης, ϗ τὸ δεύτερον Πηλίκον τὸ 3 πλησίον τοῦ Διαιρέτου τεθειμένον εἰς τὸν ἐλεύθερον τόπον ὑποκάτω τοῦ 9, ὅπερ Πηλίκον 3 ἐτέθη ϗ εἰς τὸν τόπον τῆς ῥίζης πλησίον τοῦ 2.
ςʹ.)	129	τὸ Γινόμενον ἐκ τοῦ 43 ϗ 3, τὸ ὁποῖον ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ 129, ...
	0	

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ἀλήθεια ταύτης τῆς Πράξεως δείκνυται ἐκ τοῦ Ἀλγεβραϊκοῦ Σχήματος (§. 63.) τὸ δεύτερον Μέλος τῆς ῥίζης διὰ τοῦτο τίθεται εἰς τὸν κενὸν τόπον πλησίον τοῦ Διαιρέτου, διὰ νὰ ἔχωμεν ἐν τῷ Γενομένῳ χωρὶς πολλῶν κόπων ϗ τὸ Τετράγωνον αὐτοῦ τούτου τοῦ Μέλους, ἐπειδὴ ϗ αὐτὸ τὸ Τετράγωνον ϗ τὸ Διπλάσιον Γινόμενον ἐκ τῶν δύω Μελῶν πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ ἀριθμοῦ, τὰ ὁποῖα ἀμφότερα (ϗ τὸ Τετράγωνον, δηλαδὴ τοῦ δευτέρου Μέλους τῆς ῥίζης, ϗ τὸ διπλάσιον Γινόμενον ἐκ τῶν Μελῶν τῆς ῥίζης) ἠμποροῦμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον νὰ ἀποκτήσωμεν ἐν ταυτῷ.

ΣΧΟΛΙΟΝ α'.

§. 67. Ὅταν εἰς τὴν δευτέραν Κλάσιν ἀκολουθῇ ϗ τρίτη, ϗ ἐπομένως συνίσταται ἡ ῥίζα ἐκ τριῶν χαρακτήρων, ἐξακολουθεῖται πάλιν ἡ ῥηθεῖσα Μέθοδος, ἀρχομένη ἀπὸ τοῦ Τετάρτου Κανόνος. ὅθεν εἰς τὸ δεύτερον καταλειπόμενον τῆς προτέρας ἀφαιρέσεως γράφομεν τὴν τρίτην Κλάσιν, ἥτις μετὰ τούτου τοῦ καταλειπομένου εἶναι τὸ τρίτον διαλυθησόμενον Ποσὸν, ϗ διπλασιάσαντες τοὺς δύω προτέρους χαρακτῆρας τῆς ῥίζης, γράφομεν ὑποκάτω τοῦ διαλυθησομένου ἀριθμοῦ οὕτως, ὥστε ὁ τόπος ὁ ὑποκάτω τοῦ τελευταίου χαρακτῆρος τοῦ διαλυθησομένου Ποσοῦ νὰ μείνῃ κενὸς, τὸ δὲ ἐκ τῆς Νέας Διαιρέσεως Πηλίκον, τὸ ὁποῖον εἶναι ϗ τρίτον Μέλος τῆς ῥίζης, γράφομεν ὡσαύτως ϗ εἰς τὸν τόπον τῶν Πηλίκων ϗ εἰς τὸ κενὸν Διάστημα. ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν Διαιρέτην ϗ τὴν ῥίζαν μετὰ τοῦ νέου Πηλίκου, ϗ οὕτως ἀποκτῶμεν τὸ ἀφαιρετέον Γινόμενον. εἰ δ' ἔτι ϗ ἑτέρα Κλάσις ἐστὶ, καταβιβάζομεν αὐτὴν πάλιν πλησίον εἰς τὸ καταλειφθὲν, ϗ λαμβάνομεν τὸ διπλάσιον ὅλων τῶν Μελῶν τῆς ῥίζης ὡς Διαιρέτην, ϗ οὕτως ἐξακολουθοῦμεν τοὺς αὐτοὺς Κανόνας, ἕως

οὗ λάβωσι τέλος ὅλαι αἱ Κλάσεις. ὅταν δὲ τύχῃ νὰ εἶναι τὸ ἀφαιρετέον Γινόμενον μεῖζον, ἢ ὥστε νὰ δύναται νὰ γένῃ ἡ ἀφαίρεσις, τότε λαμβάνομεν μικρότερον Πηλίκον, καθὼς ϗ ἐπὶ τῆς Διαιρέσεως· θέλομεν τύχῃ αὐτὴν τὴν περίστασιν δὶς ἐν τῷ ἑξῆς Παραδείγματι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

6,15,04	248 ἡ ῥίζα
4	τὸ ὡς ἔγγιστα ἔλαττον Τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ ῥίζα ὑπάρχει ὁ 2.
215	τὸ καταλειπόμενον μετὰ τῆς ἀκολούθου Κλάσεως.
44	ἡ διπλασία ῥίζα μετὰ τοῦ νέου Πηλίκου.
176	τὸ ἀφαιρετέον Γινόμενον ἐκ τοῦ 44 ϗ 4.
3904	τὸ καταλειπόμενον μετὰ τῆς ἑπομένης Κλάσεως.
488	τὸ διπλ. τῆς ῥίζης 24×2=48 μετὰ τοῦ νέου Πηλίκου.
3904	τὸ ἀφαιρετέον Γινόμενον.
0	

ΣΧΟΛΙΟΝ β'.

§. 68. Ὁμοίως τὸ Μηδενικὸν 0 δύναται εἰς τὸν τόπον τῆς ῥίζης, καθὼς εἰς τὴν κοινὴν διαίρεσιν, ἐὰν δηλονότι τὸ διπλάσιον Γινόμενον τῆς προτέρας ῥίζης δὲν περιέχηται μήτε ἅπαξ εἰς τὸν διαλυθησόμενον ἀριθμὸν, ϗ τότε ἄνευ τινὸς ἄλλου Πολλαπλασιασμοῦ ἢ ἀφαιρέσεως κ. τ. γράφομεν εἰς τὴν προτέραν Κλάσιν τὴν ἑπομένην, ϗ ἐξακολουθοῦμεν τὴν ἐργασίαν, διπλασιάζοντες τὴν νέαν ῥίζαν ὡς ἐν τῷ ἑξῆς Παραδείγματι.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ.

16,45,92,49	1 4057
16	τὸ ἀφαιρετέον Τετράγ. τῦ ὁποίου ἡ ῥίζα εἶναι ὁ 4.
45	ἡ ἑπομένη Κλάσις.
8	τὸ διπλάσιον τῆς ῥίζης, τὸ Πηλίκον ἐςὶν 0,
4592	ἡ ἑπομένη Κλάσις πρὸς τῇ ἀνωτέρῳ τιθεμένη.
805	τὸ διπλ. τῆς ῥίζης 40×2 μετὰ τῆς νέας ῥίζης 5.
4025	τὸ ἐκ τῦ Διαιρέτυ καὶ τῦ νέυ Πηλίκυ Γινόμενον, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ.
56749	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τῆς ἑξῆς Κλάσεως.
8107	τὸ διπλ. τῆς ῥίζης 405×2 μετὰ τῆς νέας ῥίζης.
56749	τὸ ἀφαιρετέον Γινόμενον.
0	

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ γ'.

§. 69. Ἡ' Βάσανος (Δοκιμὴ) τῆς Ὀρθῶς ἐξαχθείσης ῥίζης γίνεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν ἐφ' ἑαυτὴν, ἢ ὑψώσωμεν αὐτὴν εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν, κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον θέλομεν ἰδεῖ, ἂν εἶναι τὸ Τετράγωνον τῆς ῥίζης ἴσον τῷ δοθέντι ἀριθμῷ ὡς ἐν τῷ ἑξῆς Παραδείγματι.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ α'.

9,57,90,25	1 3095.	Βάσανος.	3095
9			3095
57			15475
6			27855
5790			92850
609			9579025
5481			
30925			
6185			
30925			
0			

ΠΑΡΑΔ. β'.		ΠΑΡΑΔ. γ'.	
34,69,21	1 589	16,00,00	1 400
25		16	
969		000	
108		00	
864		0000	
10521		000	
1169		0	
10521			
0			

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ δ'.

```
36,09,60,64   | 6008
36
-----
 009
 12
-----
  0960
  120
-------
   96064
   12008
   96064
   -----
       0
```

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ γ'.

§. 70. Ὅταν εἰς τὸ τέλος ἐγκαταλείπηται τι λείψανον, τοῦτο εἶναι Σημεῖον, ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δὲν ἦτον Ἐντελὴς Τετράγωνον. ὅθεν δὲν δυνάμεθα νὰ ἀποκτήσωμεν ῥίζαν ἀληθῆ (§. 59). τὸ τοιοῦτον ἐκφράζομεν διὰ τοῦ Σημείου $\sqrt{}$, οἷον $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt{148}$ κ. τ. ὡστόσον δυνάμεθα διὰ τῆς Ἐξαγωγῆς νὰ εὕρωμεν τὴν ἀληθῆ ῥίζαν, ἐξακολουθοῦντες περαιτέρω διὰ τῶν Δεκαδικῶν. τοῦτο γίνεται ἐὰν προσθέσωμεν τῷ λειψάνῳ μίαν Κλάσιν ἐκ δύω Μηδενικῶν 00, καὶ οὕτω θεωρεῖται αὕτη ἡ Κλάσις ὅλη ὡς Δεκαδικὰ Κλάσματα, καὶ ἡ ἐκ ταύτης ῥίζα ὡς Δεκατημόρια. ἂν δὲ καὶ ἀπὸ αὐτῆς μένῃ κἀνένα λείψανον, προστίθεμεν ἄλλα δύω μηδενικά, καὶ τὸ ἐκ τούτων Πηλίκον εἶναι Ἑκατοστημόρια, οὕτω δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν ἐπὶ πλέον, προστιθέντες ἑκάστης Διαιρέσεως πάντοτε ἀπὸ ἓν 0 εἰς τὸν Διαιρετέον, κατ' αὐτὴν τὴν Μέθοδον ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν ἀπὸ 129 καὶ 540. ὡς θέλομεν ἰδεῖ ἐν τοῖς ἑξῆς Παραδείγμασι.

ΠΑΡΑ-

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ά, καὶ β'.

```
1,29   | 11,35 κ. τ.          5,40   | 22,23 κ. τ.
1                             4
----                          ----
 29                           140
 21                            43
 21                           129
-----                         -----
  8,00                         11,00
  223                          462
  669                          924
-----                         -----
  13100                        17600
   2265                         4543
  11325                        13929
  -----                        -----
   1775                         3671
```

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ έ.

§. 71. Εἰς Τετραγωνικὰ Κλάσματα πρέπει καὶ ἐκ τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ ἐκ τοῦ Παρονομαστοῦ νὰ ἐξάγωμεν τὴν ῥίζαν π. χ. $\frac{4}{25}$ δίδωσι ῥίζαν $\frac{2}{5}$. καὶ $\frac{36}{81}$ τὴν $\frac{6}{9}$. εἰς δὲ τὰ Δεκαδικὰ Κλάσματα γίνεται ἡ Πρᾶξις καθὼς εἰς τὰ Ὁλόσχερη. πρέπει ὅμως εἰς τὰ Δεκαδικὰ νὰ προσέχωμεν νὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν χαρακτήρων πάντοτε ἄρτιος, εἰ δὲ καὶ εἶναι Περιττὸς, προστίθεμεν ἓν Μηδενικὸν 0 εἰς τὸ τέλος, καὶ οὕτω γίνεται ἄρτιος, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ Δύναμις τοῦ Κλάσματος (§. 90. ἐν ἀριθμητικῇ). ἡ δὲ αἰτία τούτου εἶναι, ὅτι τὸ Δεκαδικὸν Κλάσμα προϋποτίθεται πάντοτε νὰ ἔχῃ Παρονομαστὴν

 μαστὴν

μαςὴν συνιςάμενον ἐκ τῆς Μονάδος καὶ τῶν Μηδενικῶν, καὶ εἰς αὐτὴν τὴν αὔξησιν Τετράγωνον Παρονομαςὴν, ὅπου εἶναι πάντοτε ὁ ἀριθμὸς τῶν Μηδενικῶν Σημείων ἄρτιος. καθὼς ἐκ τῶν Τετραγώνων τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν γίνεται δῆλον, π. χ. τῶν 10, 100, 1000, 10000 κ. τ. Τετράγωνα εἰσὶ 100, 10000, 1000000, 100000000 κ. τ. ἀλλὰ μὴν ἐν τῷ ἀριθμητῇ ὑπάρχουσι τόσοι χαρακτῆρες, ὅσα Μηδενικὰ Σημεῖα ἐν τῷ Παρονομαςῇ, πρέπει ἄρα καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν χαρακτήρων τοῦ ἀριθμητοῦ νὰ εἶναι ἄρτιος. ἐὰν δὲ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι Μικτὸς, τουτέστιν ἐὰν συνίςαται ἐξ ἀκεραίων καὶ Δεκαδικῶν, τότε διαιροῦμεν αὐτὸν εἰς Κλάσεις ξεχωριστὰ τόσον τὸν ἀκέραιον, ὅσον καὶ τὸν Δεκαδικὸν, καὶ ὕστερον γίνεται ἡ Ἐξαγωγὴ τῆς ῥίζης κατὰ τοὺς Κανόνας τοὺς προτεθέντας ἐν ταῖς ἀνωτέρω Παραγράφοις· πρὸς ἐξήγησιν τῶν εἰρημένων, κείσθωσαν τὰ ἑξῆς Παραδείγματα διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν ἀπὸ τῶν 7.24576, καὶ 0.56644, καὶ 7487.441 τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν.

ΠΑΡΑΔ. α'.

7.24,57,60 | 2.691
4
324
46
276
4857
529
4761
9660
5381
5381
4279 κ. τ.

ΠΑΡΑΔ. β'.

56,64,40 | 0.752
49
764
145
725
3940
1502
3004
936 κ. τ.

ΠΑΡΑ-

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ γ'.

74,87.44,10 | 86.53
64
1087
166
996
9144
1725
8625
51910
17303
51909
0 1

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ε'.

§. 72. Ἐκ τοῦ δοθέντος Κύβου νὰ ἐξάγωμεν τὴν Διμερῆ ῥίζαν.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Ἐπειδὴ κάθε Κύβος ἑνὸς Διμελοῦς Ποσοῦ συνίςαται ἐκ τοῦ Κύβου τοῦ πρώτου Μέλους, καὶ ἐκ τοῦ Τριπλοῦ Τετραγώνου ἑκάστου Μέλους πολλαπλασιασθέντος μετὰ τοῦ ἑτέρου, καὶ ἐκ τοῦ Κύβου τοῦ δευτέρου Μέλους, καθὼς φαίνεται ἐκ τοῦ Σχήματος $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$, ἀποκτῶμεν τὴν ῥίζαν, ἐὰν ἐξαγάγωμεν ἐκ τοῦ δοθέντος τὸ α καὶ β, ὕστερον σχηματίζομεν ἐκ τῆς ῥίζης α καὶ β τὰ τέσσαρα τοῦ

Κύβου

Κύβου γνωστὰ Ποσὰ, ϗ τὰ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ δεδομένου Κύβου. ἐπειδὴ εἰς τοιαῦτα ἀναλύονται, ἐξ ὧν ϗ συνετέθησαν.

Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν ἀπὸ τοῦ a^3 τὴν Κυβικὴν, ῥίζαν a, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ β, ἀφ' οὗ διέλωμεν τὸ $3a^2\beta$ μὲ $3a^2$ τουτέστι μὲ τὸ Τριπλάσιον Τετράγωνον τοῦ πρώτου Μέλους. ἀφ' οὗ εὕρωμεν τὸ β, συντίθεμεν ἔπειτα τὰ τρία ἑξῆς Ποσὰ $3a^2\beta$, $3a\beta^2$, β^3 ϗ τὰ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ δεδομένου Ποσοῦ, ϗ οὕτω δὲν ἐγκαταλείπεται μηδέν.

$a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3 \quad | \, a + \beta$

$-a^3$	ὁ ἀφαιρετέος Κύβος τοῦ πρώτου Μέλους a, τὸ ὁποῖον δέτομεν εἰς τὸν τόπον τοῦ Πηλίκου.
$3a^2\beta$	τὸ δεύτερον Ποσόν.
$3a^2$	τὸ Τριπλοῦν Τετράγωνον τοῦ πρώτου Μέλους ὡς Διαιρ.
$-3a^2\beta$	Πολλαπλασιασθὲν μετὰ τῆς νέας ῥίζης, ϗ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ δευτέρου Ποσοῦ.
$0 \quad 3a\beta^2$	τὸ τρίτον Ποσόν.
$-3a\beta^2$	τὸ τριπλάσιον Τετράγ. τοῦ δευτέρου Μέλους τῆς ῥίζης πολλαπλασιασθὲν μετὰ τοῦ πρώτου Μέλους ϗ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ τρίτου Ποσοῦ.
$0 \quad \beta^3$	τὸ Τέταρτον Ποσόν
$-\beta^3$	ὁ ἀφαιρετέος Κύβος τοῦ δευτέρου Μέλους τῆς ῥίζης.
0	

ΠΡΟ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ι'.

§ 73. Νὰ ἐξάγωμεν τὴν Κυβικὴν ῥίζαν.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

α'.) Μερίζομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς Κλάσεις οὕτως, ὥστε ἑκάστη Κλάσις νὰ περιέχῃ τρεῖς χαρακτῆρας ἐκτὸς τῆς τελευταίας πρὸς τὰ ἀριστερὰ Κλάσεως, ἥτις δύναται κατὰ πεῖσασιν νὰ περιέχῃ ϗ δύω, ἢ ϗ ἕνα μόνον χαρακτῆρα. ἐντεῦθεν δηλοῦται, ἐκ πόσων χαρακτήρων συνίσταται ἡ ῥίζα, ἐκ τοσούτων δηλονότι, εἰς ὅσας Κλάσεις ἐμερίσθη ὁ δοθεὶς Κύβος (§. 58).

β'.) Ἔπειτα ζητοῦμεν εἰς τὸν Πίνακα (§. 58), ἂν ἡ πρώτη Κλάσις ὑπάρχῃ Κύβος, ἢ οὔ. ϗ εἰ μὲν ὑπάρχει Κύβος, γράφομεν αὐτὸν ὑποκάτω τῆς πρώτης Κλάσεως, ἐὰν δὲ δὲν εἶναι Κύβος. λαμβάνομεν τὸν ὡς ἔγγιστα ἐλάττονα Κύβον, ϗ γράφομεν αὐτὸν ὑπὸ τὴν πρώτην Κλάσιν, τὴν δὲ ῥίζαν αὐτοῦ εἰς τὸν τόπον τοῦ Πηλίκου.

γ'.) Ἀφαιροῦμεν τοῦτον τὸν Κύβον ἀπὸ τῆς πρώτης Κλάσεως, ϗ τίθεμεν πλησίον τοῦ καταλειπομένου τὴν ἑπομένην Κλάσιν.

δ'.) Ἐκ τοῦ εὑρεθέντος Πηλίκου (a) ποιοῦμεν Τετράγωνον, ὅπερ πολλαπλασιασθὲν μετὰ τοῦ 3 ($= 3a^2$) γράφομεν ὑπὸ τὴν δευτέραν Κλάσιν ὡς Διαιρέτην οὕτως, ὥστε οἱ ὑπὸ τοὺς δύω ἐσχάτους χαρακτῆρας πρὸς τὰ δεξιὰ τόποι νὰ μένωσι κενοί.

ε'.) Ζητοῦμεν ὕστερον, ποσάκις ὁ Διαιρέτης περιέχεται ἐν ἐν τῷ ἐπ' αὐτὸν Διαιρετέῳ, τὸ δὲ Πηλίκον εἶναι τὸ δεύτερον Μέλος τῆς ῥίζης, ὅπερ θέτομεν εἰς τὸν τόπον τῶν Πηλίκων·

ς'.) Πολλαπλασιάζομεν μετὰ τούτου τοῦ νεωστὶ ἀριθέντος Μέλους τῆς ῥίζης (β) τὸν Διαιρέτην, τὸ δὲ Γινόμενον ($3\alpha^2\beta$) ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ Διαιρετέου ἀριθμοῦ, καὶ εἰς τὸ καταλειφθὲν γράφομεν τὸν προπλατεῖον χαρακτῆρα.

ζ'.) Ἐκ τῆς δευτέρας ταύτης ῥίζης (β) ἀποπλοῦμεν Τετράγωνον (β^2), καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ μετὰ τοῦ πρώτου Μέλους τῆς ῥίζης καὶ μετὰ τοῦ 3, καὶ οὕτω γεννᾶται τὸ Γενόμενον ($3\alpha\beta^2$), τὸ ὁποῖον ἀφαιροῦμεν πάλιν ἀπὸ τοῦ ἀνωτέρω ἀριθμοῦ, καὶ πλησίον τοῦ ἐγκαταλειπομένου προσγράφομεν τὸν πλατεῖον χαρακτῆρα τῆς Κλάσεως.

η'.) Ἐκ τῆς αὐτῆς ῥίζης (β) ἀποπλοῦμεν Κύβον, καὶ ἀφαιροῦμεν αὐτὸν [illegible] τοῦ ἀνωτέρω ἀριθμοῦ, καὶ ἂν δὲν μείνῃ τι ἐγκαταλειπόμενον, τότε ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὑπάρχει ἀληθὴς Κύβος, καὶ ἡ ῥίζα τούτου ἐξήχθη. π. χ. νὰ ἐξαγάγωμεν ἀπὸ τοῦ 13824 τὴν Κυβικὴν ῥίζαν.

α.)		13,824	$\lfloor$ 24 ἡ ῥίζα
β'.)	α^3	8	ὁ ὡς ἔγγιστα ἀφαιρετέος Κύβος.
γ'.		5824	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τῆς ἑπομένης Κλάσεως.
δ'.)	$3\alpha^2$	12	τὸ τριπλοῦν Τετραγ. τοῦ πρώτου Μέλους $2\times2\times3 = 12$.
ε'.)	$3\alpha^2\beta$.	48	$\times$ μετὰ τοῦ ἄλλου Μέλους $\beta = 12\times3 = 48$, καὶ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τῶν 58.
		102	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τοῦ προπλατείου χαρακτῆρος 2.
ζ'.)	$3\alpha\beta^2$	96	τὸ δεύτερον Μέλος τῆς ῥίζης $4\times4 = 16\times3 = 4^2\times2$ τὸ πρῶτον Μέλος τῆς ῥίζης) $= 96$.
		64	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τοῦ ἐσχάτου χαρακτῆρος.
η'.)	β^3	64	ὁ Κύβος τοῦ δευτέρου Μέλους τῆς ῥίζης $4 = 64$.
		0	

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Ἡ ἀλήθεια αὐτῆς τῆς Μεθόδου τοῦ τὰς Κυβικὰς ἐξάγειν ῥίζας δηλοῦται ἐκ τοῦ Ἀλγεβραϊκοῦ Σχήματος (§. 72.), ἀφ' οὗ εὕρωμεν μίαν φορὰν τὸ β, τότε συνθέτομεν τὰ Μέρη, ἐξ ὧν συνίσταται ὁ Κύβος, καὶ ἀφαιροῦμεν αὐτὰ καθὲν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

ΣΧΟΛΙΟΝ α.

§. 74. Ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἔχῃ πλέον, ἢ δύω Κλάσεις, καὶ ἑπομένως συνίσταται ἡ ῥίζα ἐκ πλειόνων χαρακτήρων, ἐξακολουθοῦμεν τὴν Μέθοδον ταύτην, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Τετάρτου Κανόνος, καὶ θεωροῦμεν τοὺς δύω εὑρεθέντας χαρακτῆρας τῆς ῥίζης ὡς πρῶτον Μέλος, ἐξ ὧν γίνεται διὰ τὴν Διαίρεσιν τὸ Τριπλοῦν Τετράγωνον αὐτῶν, διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ β, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ τὸ Τριπλοῦν Τετράγωνον μεθ' ὅλου τοῦ ἀνωτέρου μετὰ πασῶν τῶν προτέρων ῥιζῶν, καὶ τὸ ἀφαιροῦμεν, καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον [illegible]ίσκοντες ὅλας τὰς ῥίζας ὁποιουδήποτοῦν ἀριθμοῦ.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ.

	18,399,744 $\left\vert \begin{array}{l} \alpha\beta \\ 264 \end{array}\right.$	ἡ ῥίζα
α^3	8	ὁ ὡς ἔγγιστα ἐλάσσων Κύβος.
	10399	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τῆς ἑπομένης Κλάσεως.
$3\alpha^2$	12	$2\times 2 = 4\times 3 = 12$ ὁ Διαιρέτης, τὸ Πηλίκ. $6 = \beta$.
$3\alpha^2\beta$	72	12×6, ἢ $3\alpha^2\times\beta = 72$.
	319	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τοῦ ἑπομένου χαρακτῆρος.
$3\alpha\beta^2$	216	$6\times 6 = 36\times 3 = 108\times 2 = 216 = \beta^2\times 3\times\alpha$.
	1039	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τοῦ ἑπομένου χαρακτῆρος.
β^3	216	ὁ Κύβος τῆς ῥίζης 6.
	823744	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τῆς ἑπομένης Κλάσεως.
$3\alpha^2$	2028	$26\times 26 = 676\times 3 = 2028$ ὁ Διαιρέτης. τὸ Πηλίκον $4 = \beta$.
$3\alpha^2\beta$	8112	$2028\times 4 = 3\alpha^2\times\beta$.
	2254	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τοῦ προτελευταίου χαρακτ.
$3\alpha\beta^2$	1248	$4\times 4 = 16\times 3 = 48\times 26 = 1248 = \beta^2\times 3\times\alpha$.
	64	τὸ καταλειφθὲν μετὰ τοῦ τελευταίου χαρακτῆρος.
β^3	64	ὁ Κύβος τοῦ 4.
	0	

Ἐὰν

Ἐὰν μεταξὺ τῆς ἐργασίας δὲν δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ κανένας ἀριθμός, τοῦτο εἶναι Σημεῖον, ὅτι ἐλήφθη ῥίζα μείζων τοῦ δέοντος, καὶ διὰ τοῦτο ἀνάγκη νὰ τεθῇ μικροτέρα εἰς τὸν τόπον τούτου, καὶ ἀφ' οὗ δὲ τελειώσωμεν τὴν ἐργασίαν, ποιοῦμεν τὴν Βασανισμόν, ἀφ' οὗ δὲ πολλαπλασιάζοντες πρῶτον τὴν ῥίζαν μεθ' ἑαυτῆς, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸ γινόμενον, (τὸ Τετράγωνον δηλονότι τῆς ῥίζης ταύτης) αὖθις ἐπὶ τὴν ῥίζαν. καὶ ἂν τὸ δεύτερον Γινόμενον ὑπάρχῃ ἴσον μὲ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, εἶναι δῆλον, ὅτι ἐξήχθη ἐντελῶς ἡ Κυβικὴ ῥίζα τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

28,934,443 $\lfloor$ 307	438,976 $\lfloor$ 76	Βάσανος.
27	343	76
1934	95976	76
27	147	456
1934443	882	532
2700	777	5776
18900	756	76
4444	216	34656
4410	216	40432
343	0	438976
343		
0		

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ β'.

§. 75. Ἐὰν μετὰ τὴν Ἐργασίαν μείνῃ κανένα λείψανον, εἶναι Σημεῖον, ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δὲν εἶναι ἀληθὴς Κύβος, καὶ τὴν ἀληθῆ ῥίζαν δὲν δυνάμεθα ἀκριβῶς νὰ εὕρωμεν, ὅθεν δυνάμεθα

διὰ

ἐ τῶν Δεκαδικῶν Κλασμάτων νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ὡς ἐγγιστα ηθῆ ρίζαν τούτου, προσθέτοντες εἰς τὸ λεῖψανον τρία Μηδενικὰ καθὼς εἴπομεν ἀνωτέρω, (§. 70). οὕτως ἐξάγεται ἐκ τῆς 54 ἡ ἐγγιστα Κυβικὴ ρίζα.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ.		Βάσανος.	
54	3.77	377	
27		377	
27000		2639	
27		2639	
189		1131	
810		142129	Τετράγ.
441		377	
3690		994903	
343		994903	
3347000		426387	
4107		53582633	Κύβος
28749		417367	τὸ καταλειφθὲν
47210		54,000000	
5439			
417710			
343			
417367	Καταλειφθὲν.		

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ γ'.

§. 76. Ἐπὶ τῶν Δεκαδικῶν Κλασμάτων γίνεται ἡ Ἐργασία τῆς Ἐξαγωγῆς, καθὼς καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, πρέπει δὲ νὰ σημειώσωμεν καὶ ἐντεῦθα, ὅτι τὰ Μηδενικὰ πρέπει νὰ εἶναι κατὰ τὸν ἀριθμὸν ἢ τρία, ἢ ἕξ, ἢ ἐννέα, κ. τ. καθὼς εὐθὺς γίνεται τοῦτο δῆλον διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν Δεκαδικῶν ριζῶν ἐφ' ἑαυτάς. π. χ. τὸ Τετράγωνον 100 μετὰ τῆς ρίζης 10 πολλαπλασιασθὲν, παρέχει τὸν Κύβον 1000, τρία Μηδενικά. τὸ δὲ Τετράγωνον 10000 καὶ μετὰ τῆς ρίζης 100, παρέχει τὸν Κύβον 1000000, ἕξ Μηδενικά. τὸ δὲ Τετράγ. 1000000 καὶ μετὰ τῆς ρίζης 1000, παρέχει Κύβον 1000000000 ἐννέα Μηδενικά. πρέπει λοιπὸν νὰ προσθέτωμεν ἐν τοῖς Δεκαδικοῖς Κλάσμασιν εἰς τὸ τέλος τοιαῦτα Μηδενικὰ Σημεῖα. ἐὰν δὲ τὸ δοθὲν Ποσὸν εἶναι Μικτὸν, τότε Μερίζομεν τὸ ὁλοσχερὲς ξεχωριστὰ, καὶ τὰ Δεκαδικὰ ξεχωριστὰ εἰς Κλάσεις, καθὼς εἴπομεν ἀνωτέρω (§. 71.), νὰ ἐξαγάγωμεν ἐκ τοῦ 0,3758, καὶ 146. 37. τὴν Κυβικὴν ρίζαν.

375,800	10.72	146,370	5.2
343		125	
32800		21370	
147		75	
294		150	
340		637	
84		60	
2560		5770	
8		8	
2552	κ. τ. λ.	5762	κ. τ. λ.

ΣΧΟΛΙΟΝ δ'.

§. 77. Ἐὰν παρατηρήσωμεν ἀκριβέστερον τὰ Ἀλγεβραϊκὰ Σχήματα τῶν Δυνάμεων, καὶ ἐξετάσωμεν τοὺς Κανόνας, καθ' οὓς τίθενται οἱ Συνεργοί, ὅσον καὶ οἱ Δυναμοδεῖκται αὐξάνουσι, καὶ ἐλαττοῦνται θέλομεν εὕρῃ, ὅτι δύναται νὰ σχηματισθῇ ἕνας Γενικὸς Κανών, καθ' ὃν δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τὰ Μέλη σὺν τοῖς αὐτῶν Συνεργοῖς καὶ Δυναμοδείκταις, χωρὶς νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸ διδόμενον Ποσὸν μετὰ τῆς ῥίζης πρὸς ὕψωσιν Δυνάμεων. αἱ Δυνάμεις τοῦ $\alpha+\beta$ εἰσὶν αἱ ἑξῆς.

α'.) $\alpha+\beta$

β'.) $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

γ'.) $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

δ'.) $\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$. κ. τ.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν Μελῶν, ἢ ὅρων πάντοτε εἶναι μείζων τοῦ Δυναμοδείκτου τῆς ζητουμένης Δυνάμεως Μονάδι. οἱ Δυναμοδεῖκται τοῦ α ἐλαττοῦνται κατὰ τάξιν Μονάδι, οἱ δὲ τοῦ β αὐξάνουσιν. Ὁ Συνεργὸς τοῦ Δευτέρου Μέλους εἶναι πάντοτε Ἴσος μὲ τὸν Δυναμοδείκτην τοῦ πρώτου. οἱ δὲ Συνεργοὶ τῶν ἐπιλοίπων Μελῶν εἶναι τὸ Γινόμενον ἐκ τοῦ Δυναμοδείκτου τοῦ προηγουμένου Μέλους καὶ τοῦ ἰδίου Συνεργοῦ, διαιρεθὲν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προηγουμένων Μελῶν. π. χ. ἡ τῷ $(\alpha+\beta)^4$ πρῶτον Μέλος εἶναι α^4. ὁ Συνεργὸς ἄρα τοῦ δευτέρου Μέλους ὑπάρχει ὁ 4, καὶ ὁ Δυναμοδείκτης τοῦ α εἶναι ὁ 3, τοῦ δὲ β εἶναι ἡ Μονὰς ($4\alpha^3\beta$). Ὁ Συνεργὸς τοῦ τρίτου Μέλους εἶναι τὸ Γινόμενον ἐκ τοῦ Δυναμοδείκτου τοῦ δευτέρου Μέλους, καὶ ἐκ τοῦ Συνεργοῦ αὐτοῦ, ἤτοι $3 \times 4 = 12$ διαιρεθὲν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προηγουμένων Μελῶν, ἤτοι διὰ τοῦ 2, ὅπερ ἐστὶ $= 6$. ὁ Δυναμοδείκτης τοῦ α εἰς τὸ τρίτον Μέλος εἶναι ὁ 2, καὶ τοῦ β ὡσαύτως ὁ 2, ($6\alpha^2\beta^2$), καὶ πάλιν ὁ Συνεργὸς τοῦ τετάρτου Μέλους εἶναι ὁ τοῦ προτέρου Μέλους Συνεργὸς Πολλαπλασιασθεὶς μετὰ τοῦ Δυναμοδείκτου τοῦ αὐτοῦ Μέλους, τουτέστι $6 \times 2 = 12$, καὶ Διαιρεθεὶς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προηγουμένων Μελῶν, ἤτοι διὰ τοῦ 3, καὶ οὕτω προκύπτει ὁ Συνεργὸς τοῦ τε-

τάρτου

τάρτου Μέλους ὁ 4. ὁ δὲ Δυναμοδείκτης τοῦ α εἶναι ἡ Μονάς. τοῦ δὲ β ὁ 3 ($4\alpha\beta^3$). καὶ ἐν ἑνὶ λόγῳ ὁ Συνεργὸς τοῦ πέμπτου Μέλους εἶναι $4 \times 1 : 4 = \frac{4}{4} = 1$. Τὸ α ἔχει Ἐκθέτην τὸ 0. ἄρα $\alpha^0 = 1$, ἐπειδὴ δὲ ἡ Μονὰς δὲν γράφεται, διὰ τοῦτο μένει τὸ Τέταρτον Μέλος β^4 μόνον. Ἔστω ἡ ῥίζα $\alpha+\beta$ διὰ νὰ ὑψωθῇ εἰς τὴν ὀγδόην Δύναμιν ἤτοι $(\alpha+\beta)^8$, ὅθεν γράφομεν πρῶτον τὸ Ποσὸν α μετὰ τῶν Δυναμοδεικτῶν ἐλαττουμένων, οἷον $\alpha^8, \alpha^7, \alpha^6, \alpha^5, \alpha^4, \alpha^3, \alpha^2, \alpha$. Ἔπειτα πλησίον τούτου τίθεμεν καὶ τὸ β, μετὰ τῶν Δυναμοδ. αὐξανομένων, ἀρχίζοντες ἀπὸ τοῦ δευτέρου Μέλους ἕως εἰς τὸ ἔννατον. ἐπειδὴ ζητεῖται ἡ ὀγδόη Δύναμις. οἷον. $\alpha^8, \alpha^7\beta, \alpha^6\beta^2, \alpha^5\beta^3, \alpha^4\beta^4, \alpha^3\beta^5, \alpha^2\beta^6, \alpha\beta^7, \beta^8$. Ὁ μὲν Συνεργὸς τοῦ δευτέρου Μέλους εἶναι $8 =$ τῷ Δυναμοδείκτῃ τοῦ πρώτου. Ὁ δὲ Συνεργὸς τοῦ τρίτου Μέλους εἶναι ὁ προηγούμενος Συνεργὸς 8, πολλαπλασιασθεὶς μετὰ τοῦ Δυναμοδείκτου 7, οἷον $8 \times 7 = 56$, καὶ διαιρεθεὶς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προηγουμένων Μελῶν, ἤτοι διὰ τοῦ 2, $56 : 2 = 28$. ὁ δὲ Συνεργὸς τοῦ τετάρτου Μέλους εἶναι $= 28 \times 6 = 168$, καὶ διαιρεθεὶς διὰ τοῦ 3 τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προηγουμένων Μελῶν, $168 : 3 = 56$. ὁ δὲ Συνεργὸς τοῦ πέμπτου $= 56 \times 5 = 280 : 4 = 70$. ὁ Συνεργὸς τοῦ ἕκτου εἶναι $70 \times 4 = 280 : 5 = 56$. ὁ δὲ Συνεργὸς τοῦ ἑβδόμου εἶναι $56 \times 3 = 168 : 6 = 28$. ὁ δὲ Συνεργὸς τοῦ ὀγδόου Μέλους εἶναι $28 \times 2 = 56 : 7 = 8$. ὁ δὲ Συνεργὸς τοῦ ἐννάτου εἶναι $8 \times 1 = 8 : 8 = 1$. κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ποριζόμεθα τὸ Ἀλγεβραϊκὸν Σχῆμα τῆς ὀγδόης Δυνάμεως ἄνευ Πολλαπλασιάσεως

$$\alpha^8+8\alpha^7\beta+28\alpha^6\beta^2+56\alpha^5\beta^3+70\alpha^4\beta^4+56\alpha^3\beta^5+28\alpha^2\beta^6+8\alpha\beta^7+\beta^8.$$

Εἰς ἐκεῖνο τὸ Μέλος εἰς τὸ ὁποῖον οἱ Δυναμοδεῖκται τοῦ α καὶ τοῦ β εἶναι Ἴσοι ἀλλήλοις (τὸ ὁποῖον εἶναι πάντοτε εἰς τὸ μεσαίτατον Μέλος, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν Μελῶν τυγχάνῃ περιττὸς) ἔχει τὸν μέγιστον Συνεργόν, ἀπὸ δὲ τοῦ μεσαιτάτου τούτου Μέλους μέχρι τέλους ἐλαττοῦνται οἱ Συνεργοί, καθ' ὃν τρόπον πρότερον ηὔξησαν ἤτοι ἀπὸ τοῦ πρώτου Μέλους μέχρι τοῦ μεσαιτάτου. π. χ. εἰς τὸ προτεθὲν Παράδειγμα οἱ μὲν τέσσαρες προηγούμενοι Συνεργοί εἰσιν 1, 8, 28, 56, ὁ δὲ μεσαίτατος 70, καὶ ὕστερον οἱ τελευταῖοι τέσσαρες πάλιν 56, 28, 8, 1. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν Μελῶν ἄρτιος ὑπάρχῃ, ὡς εἰς τὴν ἐννάτην Δύναμιν τοῦ $\alpha+\beta$. οἷον $\alpha^9+9\alpha^8\beta$

$+ 36\alpha^7\beta^2 + 84\alpha^6\beta^3 + 126\alpha^5\beta^4 + 126\alpha^4\beta^5 + 84\alpha^3\beta^6 + 36\alpha^2\beta^7 + 9\alpha\beta^8 + \beta^9$. τότε τὰ δύω μεσαίτατα Μέλη ἔχυσι τὸν αὐτὸν ϗ μέγιστον Συνεργὸν, ὅθεν ἐλαττῦνται πάλιν ἕως τέλους κατὰ τὸν λόγον καθ' ὃν ηὔξησαν ἀπ' ἀρχῆς. ἀναγκαῖον λοιπὸν νὰ διατάττωμεν τὰς ὑπολογισμὰς ἕως εἰς τὸν μέγιστον Συνεργὸν ϗ εἰς τὰ μετὰ τὸ μεσαίτατον Μέλη νὰ προσγράφωμεν τὰς αὐτὰς Συνεργὰς, ὅμως κατ' ἀντεστραμμένην τάξιν, καθὼς ἐν τῷ προτέρῳ Παραδείγματι, οἱ τρεῖς πρῶτοι Συνεργοὶ εἰσὶν 8, 28, 56. ὁ δὲ μέγιστος 70, ἔπειτα οἱ τελευταῖοι τρεῖς 56, 28, 8.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ ε.

§. 78. Ἐὰν ἐκλάβωμεν τὴν Δύναμιν, ἢ ἀξίαν γενικῶς ϗ ἀόριστως, τότε τὸν Ἐκθέτην τῆς Δυνάμεως ὀνομάζομεν μ, ϗ τὸ μὲν πρῶτον Μέλος ἔσται α^{μ}. τὸ δὲ δεύτερον $\mu\alpha^{\mu-1}.\beta$. τὸ δὲ τρίτον $\frac{\mu.\mu-1}{1.2}\alpha^{\mu-2}.\beta^2$. τὸ δὲ τέταρτον $\frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3}\alpha^{\mu-3}.\beta^3$ ϗ τ. λ. τὸ α ὅμως δύναται νὰ λείψῃ, ϗ ἡ Σειρὰ αὕτη νὰ τελειώσῃ, ἐὰν ὁ ἀπὸ τῦ μ τῦ Δυναμοδείκτη τῦ α ἀφαιρετέος ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸ μ. ἐπειδὴ τότε ἔσται $\alpha^{\mu-\mu} = \alpha^0 = 1$, ϗ αὕτη ἡ Μονὰς εἶναι ὁ Συνεργὸς τῦ ἐσχάτυ Μέλυς τῦ β.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ ϛ'.

§. 79. Αὗται αἱ γενικαὶ Ἐκθέσεις χρησιμεύυσι μάλιστα εἰς τὸ νὰ ἐφοδιάζωμεν διάφορα Θεωρήματα, ϗ Ἰδιότητας, καθὼς θέλομεν ἰδῇ ἐν τῷ ἑξῆς Κεφαλαίῳ σαφέστερον. κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον δυνάμεθα ἐκ τῆς γενικῆς Ἐκθέσεως τῦ Διμελῦς Τετραγώνυ $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ νὰ συμπεραίνωμεν (ἐὰν ὑπάρχῃ τὸ $\beta = 1$), ὅτι τὸ Τετράγωνον τῆς Μονάδι αὐξηθείσης ῥίζης εἶναι ἴσον τῷ Τετραγώνῳ τῆς προτέρας ῥίζης, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ Διπλάσιον τῆς ῥίζης ϗ μίαν Μονάδα. ἐπειδὴ ὅτω τὸ πρότερον Σχῆμα μετασχηματίζεται εἰς τὸ ἑξῆς $\alpha\alpha + 2\alpha + 1$ ὅθεν τὸ Τετράγωνον τῦ 13 (τυτέστι τὸ 169) εἶναι ἴσον τῷ Τετραγώνῳ τῦ 12 (τυτέστι τῷ 144), ἐὰν προσθέσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ Διπλῦν τῦ 12 ϗ μίαν Μονάδα. ἐκ δὲ τῆς γενικῆς Ἐκθέσεως τῦ Κύβυ $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^3 + \beta^3$, (ἐὰν εἶναι τὸ $\beta = 1$) γίνεται δῆλον, ὅτι ὁ Κύβος τῆς Μονάδι αὐξηθείσης ῥίζης ἴσος ἐστὶ μὲ τὸν Κύβον τῆς προτέρας ῥίζης, ἐὰν εἰς τῦτον προστεθῇ τὸ Τριπλάσιον Τετράγωνον τῆς προτέρας ῥίζης ϗ τὸ Τριπλάσιον τῆς ῥίζης, ϗ μία Μονὰς οἷον $\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1$. ὅτω ϗ περὶ τῶν λοιπῶν.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ ε'.

Περὶ λογισμῦ τῶν ῥιζικῶν Ποσῶν.

ΟΡΙΣΜΟ'Σ ά.

§. 80. Ῥιζικὸν Ποσὸν λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει τῦτο τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον $\sqrt{}$ πρὸ ἑαυτῦ κείμενον ὡς $\sqrt{\alpha}$, $5\sqrt[4]{\alpha^3}$, $\delta\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$, $\sqrt{16}$, $4\sqrt[3]{20}$. κ. τ. λ. ὁ δὲ ἀριθμὸς, ἢ τὸ Γράμμα τὸ πρὸ τύτυ τῦ ῥιζικῦ Σημείου εὑρισκόμενον λέγεται τῆς ῥίζης, ἢ ῥιζικὸς, Συνεργός. ὅταν ὅμως δὲν εὑρίσκηται γεγραμμένος κανένας τοιῦτος Συνεργὸς, ἐννοεῖται πότε ἡ Μονάς. ὁ δὲ ἐπὶ τῦ ῥιζικῦ Σημείυ κείμενος ἀριθμὸς, ἢ τὸ Γράμμα ὀνομάζεται Ἐκθέτης, ἢ Δυναμοδείκτης τῆς ῥίζης. ὅπου ὅμως δὲν εἶναι μήτ' αὐτὸς ἐπιγεγραμμένος, ἐννοεῖται πάντοτε τὸ 2, ἢ ἡ Δευτέρα Δύναμις· π. χ. $\sqrt{\alpha}$ εἶναι Τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ Ποσοῦ α. $\sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$ εἶναι ἡ ῥίζα μ τοῦ Ποσοῦ α ὑψωμένου εἰς τὴν ν Δύναμιν.

ΟΡΙΣΜΟΣ β'.

§. 81. Ὅμοια ῥιζικὰ Ποσὰ ὀνομάζονται ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς Ἐκθέτας ἐπὶ τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου, καὶ τὰ αὐτὰ μετὰ τὸ Σημεῖον κείμενα Γράμματα, οἱ δὲ τούτων Συνεργοὶ ἔστωσαν καὶ Διάφοροι. π. χ. τὸ $\mu\sqrt{\alpha}$ μὲ τὸ $\nu\sqrt{\alpha}$, καὶ $3\sqrt[\mu]{\alpha}$ μὲ τὸ $\sqrt[\mu]{\alpha}$ εἰσὶν ἀλλήλοις ὁμοιογενῆ ῥιζικὰ Ποσά. Ἀνόμοια δὲ λέγονται, ὅτε ἔχουσιν ἢ διαφόρους Ἐκθέτας, ἢ διάφορα Γράμματα μετὰ τὸ Σημεῖον ὡς $\sqrt{\alpha}$ καὶ $\sqrt[3]{\beta}$. $\sqrt[\mu]{\alpha}$ καὶ $\sqrt[\mu]{\beta}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 82. Διὰ αὐτῆς τῆς Ἐκθέσεως δεικνύομεν, ὅτι πρέπει νὰ ἐξαχθῇ ἡ διὰ τοῦ ῥιζικοῦ Ἐκθέτου ἐμφαινομένη ῥίζα ἐκείνου τοῦ Ποσοῦ,

τὸ

τὸ ὁποῖον κεῖται ὑποκάτω τοῦ Σημείου. ἐὰν τὸ Ποσὸν ὑπάρχῃ ἀληθὴς Δύναμις καὶ ἑπομένως ἡ ῥίζα τούτου εἶναι ἀληθής, δυνάμεθα τότε νὰ γράψωμεν τὴν ῥίζαν αὐτὴν ἀντὶ τοῦ δεδομένου Ποσοῦ. ὡς $\sqrt{16} = 4$. $\sqrt[3]{64} = 4$. $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$, κ. τ. εἰ δὲ καὶ δὲν δύναται νὰ ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα ἀκριβῶς, καὶ ἑπομένως εἶναι ἄῤῥητος ἢ ψευδὴς (§. 59), τότε ὀνομάζομεν τὸ τοιοῦτον Ποσὸν ἄλογον Ποσὸν ὡς $\sqrt[3]{50}$, $\sqrt{\alpha}$, κ. τ. Περὶ τούτων τῶν ἀλόγων Ποσῶν θέλομεν πραγματευθῇ κυρίως εἰς αὐτὸ τὸ Κεφάλαιον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 83. Ὅστις φυλάττει εἰς τὴν μνήμην του, ὅσα ἀνωτέρω (§. 61.) ἐπραγματεύθημεν περὶ τῆς Ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν, εὐκόλως θέλει καταλάβῃ καὶ ὅσα ἔχομεν νὰ πραγματευθῶμεν ἤδη περὶ τῆς Ἐργασίας τῶν ῥιζικῶν Ποσῶν. Ἐπειδὴ ἐὰν διέλωμεν τὸν Ἐκθέτην τοῦ Ποσοῦ, ἢ τῆς μετὰ τὸ Σημεῖον κειμένης Δυνάμεως διὰ τοῦ Ἐκθέτου τῆς ῥίζης, ἐξάγεται οὕτως ἡ ῥίζα τοῦ δεδομένου Ποσοῦ, ἑπομένως γράφομεν τὸν τοιοῦτον Κλασματικὸν Ἐκθέτην ἐπὶ τοῦ Ποσοῦ χωρὶς νὰ πρόσκειται τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον. π. χ. ἐὰν ζητῆται ἡ Κυβικὴ ῥίζα τοῦ α^2, πρέπει νὰ γράψωμεν $\sqrt[3]{\alpha^2}$, τὸ ὁποῖον γινομένης τῆς Ἐξαγωγῆς, μεταβάλλεται εἰς $\alpha^{\frac{2}{3}}$ (§. 61.).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ α'.

§. 84. Νὰ ἀποβάλλωμεν τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Διαιροῦμεν τὸν Δυναμοδείκτην τοῦ Ποσοῦ διὰ τοῦ Ἐκθέτου τῆς ῥίζης, ἢ γράφομεν τὸν Ἐκθέτην τῆς ῥίζης ὡς

m 4 Παρο-

Παρονομαστὴν ὑπὸ τὸν Δυναμοδείκτην (ὅστις θεωρεῖται πάντοτε ὡς ἀριθμητὴς) τοῦ μετὰ τὸ Σημεῖον προσγεγραμμένου Ποσοῦ, καὶ τὸ ἐκ τούτου προκύπτον Πηλίκον, ἢ τὸ Κλάσμα ποιοῦμεν Ἐκθέτην τοῦ δεδομένου Ποσοῦ, ἀποβάλλοντες τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον, π. χ. $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{a^4}=a^{\frac{4}{2}}=a^2$. $\sqrt[\mu]{a^\nu}=a^{\frac{\nu}{\mu}}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ ῥίζα ἐξάγεται, ὅταν διαιρεθῇ ὁ Ἐκθέτης τῆς Δυνάμεως, ἢ τοῦ διδομένου Ποσοῦ διὰ τοῦ Ἐκθέτου τῆς ζητουμένης ῥίζης (§. 61). ἀλλὰ μὴν ταύτην τὴν Διαίρεσιν ἐμφαίνει ὁ Κλασματικὸς Ἐκθέτης. ἄρα ἀφ' οὗ ὁ τοιοῦτος Κλασματικὸς Ἐκθέτης ἐπὶ τοῦ Ποσοῦ, ἐξήχθη ἡ ῥίζα αὐτοῦ. καὶ τὸ ῥιζικὸν σημεῖον ἐξωθεῖται ὡς περιττόν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 85. Ἐὰν τὸ δοθὲν Ποσὸν ὑπάρχῃ ἀληθὴς Δύναμις, τότε γράφομεν ἀμέσως τὴν ῥίζαν αὐτοῦ, ἄνευ τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου καθὼς εἴπομεν ἀνωτέρω (§. 82.). ἐὰν δὲ τὸ Ποσὸν δὲν εἶναι ἀληθὴς Δύναμις, τότε γράφομεν αὐτὸ μετὰ τοῦ Κλασματικοῦ Ἐκθέτου, ἀλλ' ἐὰν τὸ δοθὲν Ποσὸν εἶναι ἓν τῶν ἀδυνάτων, ἢ τῶν κατ' ἐπίνοιαν λεγομένων Ποσῶν, ὡς ἡ ῥίζα τοῦ ἀποφατικοῦ Τετραγώνου $\sqrt{-a^2}$, τότε εἶναι καὶ ἡ Ἐξαγωγὴ αὐτοῦ ἀδύνατος καὶ κατ' ἐπίνοιαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ β'.

§. 86. Νὰ ἐκθέτωμεν τὴν Δύναμιν τοῦ Κεκλασμένου Ἐκθέτου διὰ τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ὁ Παρονομαστὴς γίνεται Ἐκθέτης τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου, καὶ ὁ ἀριθμητὴς μένει Ἐκθέτης τῆς Δυνάμεως, π. χ. $a^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{a^\mu}$: ὡσαύτως καὶ $a^{\frac{4}{5}}=\sqrt[5]{a^4}$

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ μὲν Παρονομαστὴς εἶναι Παραστατικὸς τῆς ῥίζης. ὁ δὲ ἀριθμητὴς τῆς Δυνάμεως κατὰ τὴν προλαβοῦσαν Δεῖξιν (§. 84). δύναται ἄρα ἡ αὐτὴ ῥίζα τὴν ὁποίαν ἐμφαίνει ὁ Παρονομαστὴς, νὰ προτεθῇ τῆς Δυνάμεως, ἣν ἐμφαίνει ὁ ἀριθμητής. ἐπειδὴ καὶ αἱ δύω αὗται Ἐκθέτεις δεικνύουσιν, ὅτι εἶναι Ἐξακτέα ἡ ῥίζα τοῦ Ποσοῦ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ γ'.

§. 87. Νὰ μεταβάλλωμεν τοὺς Ἐκθέτους τινὸς ῥιζικοῦ Ποσοῦ, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ Δύναμις αὐτοῦ τοῦ Ποσοῦ.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Πολλαπλασιάζομεν τόσον τὸν Ἐκθέτην τῆς ῥίζης, ὅσον καὶ τὸν Ἐκθέτην τοῦ μετὰ τὸ Σημεῖον κειμένου Ποσοῦ μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἢ Ποσοῦ, καὶ οὕτω μεταβάλλονται οἱ Ἐκθέται, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ Δύναμις καὶ ἡ Σημασία τοῦ Ποσοῦ..

ΠΑΡΑ-

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ.

$$\sqrt[3]{\alpha^2} = \sqrt[3\times2]{\alpha^{2\times2}} = \sqrt[6]{\alpha^4}$$

$$\sqrt[\mu]{\alpha^\nu} = \sqrt[\mu\times\gamma]{\alpha^{\nu\times\gamma}} = \sqrt[\mu\gamma]{\alpha^{\nu\gamma}}.$$

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

Η' Δύναμις ἑνὸς Κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ϗ ὁ ἀριθμητὴς, ϗ ὁ Παρονομαςὴς μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ (ἀριθμητ. §. 70.). ἀλλὰ μὴν δύναται ὁμὲν Ε'κθέτης τῆς ῥίζης νὰ θεωρηθῇ ὡς Παρονομαςὴς, ὁ δὲ Ε'κθέτης τοῦ Ποσοῦ ὡς ἀριθμητὴς (§. 84), ἄρα δύναται νὰ μεταβληθῶσιν οἱ Ε'κθέται τοῦ ῥιζικοῦ Ποσοῦ ἄνευ τινὸς Μεταβολῆς τῆς Σημασίας αὐτοῦ, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι ϗ οἱ δύω διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ γ'.

§. 88. Τὸ Ἴδιον γίνεται ϗ περὶ τῆς Διαιρέσεως διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καθὼς εἴπομεν εἰς τὰ Κλάσματα. π. χ.

$\sqrt[6]{\alpha^4} = \sqrt[3]{\alpha^2}$. ἐπειδὴ $\sqrt[\frac{6}{2}]{\alpha^{\frac{4}{2}}} = \sqrt[3]{\alpha^2}$. ϗ $\sqrt[8]{\alpha^8} = \sqrt[\frac{8}{4}]{\alpha^{\frac{8}{4}}} = \sqrt{\alpha^2} = \alpha$.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ δ'.

§. 89. Νὰ φέρωμεν εἰς τὸν αὐτὸν Ε'κθέτην ῥιζικὰ Ποσὰ ἔχοντα διαφόρους Ε'κθέτας.

ΛΥ'ΣΙΣ,

ΛΥ'ΣΙΣ, ἢ ΠΡΑΚΤΕ'Α.

Δ'ιὰ βάλλομεν πρῶτον τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον ϗ ἐμφαίνομεν τοὺς Ε'κθέτας εἰς Κλάσματα (§. 84.). ἔπειτα αὐτὰ τὰ Κλάσματα ἀνάγωμεν εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαςὴν (ἀριθμητ. §. 77.), μετέπειτα πάλιν ποιοῦμεν τὸν Παρονομαςὴν κάθε Κλάσματος Ε'κθέτην τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου (§. 86.), ϗ οὕτω θέλουσιν ἔχῃ ὅλα τὰ δεδομένα Ποσὰ τὸν αὐτὸν ῥιζικὸν Ε'κθέτην.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ.

$\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$ ϗ $\sqrt[\pi]{\beta^\sigma}$ εἶναι $\alpha^{\frac{\nu}{\mu}}$ ϗ $\beta^{\frac{\sigma}{\pi}}$. ἐξ οὗ γίνεται $\alpha^{\frac{\nu\pi}{\mu\pi}}$ ϗ $\beta^{\frac{\mu\sigma}{\mu\pi}}$. ἄρα $\sqrt[\mu\pi]{\alpha^{\nu\pi}}$ ϗ $\sqrt[\mu\pi]{\beta^{\mu\sigma}}$. ϗ δι᾽ ἀριθμῶν $\sqrt[6]{\alpha^3}$ ϗ $\sqrt[5]{\beta^2}$ ἐςὶ $\alpha^{\frac{3}{6}}$ ϗ $\beta^{\frac{2}{5}}$ ἐξ οὗ γίνεται $\alpha^{\frac{15}{30}}$ ϗ $\beta^{\frac{12}{30}}$. λοιπὸν $\sqrt[30]{\alpha^{15}}$ $\sqrt[30]{\beta^{12}}$.

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

Η' Δεῖξις αὕτη κρέμαται ἀπὸ τῶν Παραγράφων, τοὺς ὁποίους ἀνωτέρω εἰς τὴν λύσιν ἀνεκαλέσαμεν, ϗ τὸ ἄθροισμα τῶν Δείξεων τούτων τῶν Παραγράφων εἶναι ἡ Δεῖξις τούτου τοῦ Προβλήματος.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 90. Ο'ταν ὁ Ε'κθέτης δὲν εἶναι γεγραμμένος μήτε ἐπὶ τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου, μήτε ἐπὶ τῆς μετὰ τὸ Σημεῖον Ποσότητος, τότε ἐννοεῖ-

ἐννοεῖται, καθὼς εἴπομεν ἀνωτέρω, ἐπὶ μὲν τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου τὸ 2. ἐπὶ δὲ τῆς Ποσότητος ἡ Μονάς, τὰ ὁποῖα ϐ τὰ δύο εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἐκθέσωμεν εἰς αὐτὰ τὰ Προβλήματα.

Π. χ. $\sqrt{\alpha^3}$ ϗ $\sqrt[5]{\beta}$ εἶναι $\alpha^{\frac{3}{2}}$ ϗ $\beta^{\frac{1}{5}}$ ἐξ ὧν λύεται $\alpha^{\frac{15}{10}}$ ϗ $\beta^{\frac{2}{10}}$. λοιπὸν $\sqrt[10]{\alpha^{15}}$ ϗ $\sqrt[10]{\beta^2}$.

Ἐὰν ἀποβάλωμεν πάλιν τὰ ῥιζικὰ Σημεῖα, ϗ ἀναγάγωμεν εἰς ἐλαχίστους Ὅρους τοὺς κεκλασμένους Ἐκθέτας, τότε θέλουσι κύψει πάλιν τὰ δεδομένα Ποσά. τοῦτο δύναται νὰ μᾶς χρησιμεύσῃ ὡς Βάσανος, εἰς κάθε τοιαύτην Ἀλγεβραϊκὴν Ἐργασίαν.

Π. χ. $\sqrt[10]{\alpha^{15}}$ ϗ $\sqrt[10]{\beta^2}$. εἶναι $\alpha^{\frac{15}{10}}$ ϗ $\beta^{\frac{2}{10}} = \alpha^{\frac{3}{2}} = \beta^{\frac{1}{5}}$ $= \sqrt{\alpha^3}$ ϗ $\sqrt[5]{\beta}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ έ.

§. 91. Νὰ θέτωμεν μετὰ τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον τὸν Συνεργὸν ἑνὸς ῥιζικοῦ Ποσοῦ, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ Δύναμις.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ὑψόνομεν πρῶτον τὸν Συνεργὸν εἰς ἐκείνην τὴν Δύναμιν, τὴν ὁποίαν ἐμφαίνει ὁ Ἐκθέτης τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου, ϗ ὕστερον τὸν πολλαπλασιάζομεν διὰ τοῦ μετὰ τὸ Σημεῖον Ποσοῦ ϗ τότε θέτομεν τὸ Γινόμενον μετὰ τὸ Σημεῖον.

π. χ. $\alpha\sqrt[3]{\beta^2} = \sqrt[3]{\alpha^3\beta^2}$, ὡσαύτως $3\sqrt{8} = \sqrt{9\times 8} = \sqrt{72}$. ἔτι δὲ $3\alpha\sqrt{\beta}$ γίνεται $\sqrt{9\alpha^2\beta}$. ὡσαύτως ϗ $\frac{\alpha}{\beta}\sqrt[3]{\gamma}$ $= \sqrt[3]{\frac{\alpha^3}{\beta^3}\gamma}$. ϗ $\frac{3\alpha}{2\beta}\sqrt[3]{\delta} = \sqrt[3]{\frac{27\alpha^3}{8\beta}\delta}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον ἐμφαίνει, ὅτι ἐκ τοῦ μετὰ τοῦτο τὸ Σημεῖον Κειμένου Ποσοῦ πρέπει νὰ ἐξαγάγωμεν ἐκείνην τὴν ῥίζαν, τὴν ὁποίαν ἐμφαίνει ὁ Ἐκθέτης τοῦ Σημείου. ἐὰν λοιπὸν ἐξαγάγωμεν πάλιν ἐκ τῆς Δυνάμεως τοῦ Συνεργοῦ ῥίζαν τῆς αὐτῆς Δυνάμεως δὲν μεταβάλλεται ἡ Δύναμις τοῦ Συνεργοῦ, ϗ ἑπομένως ἡ λύσις ἐγένετο κατὰ τὸ πρέπον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς'.

§. 92. Νὰ φέρωμεν ῥιζικὰ Ποσὰ εἰς Ἐκθέσεις, ἢ Ὅρους ἐλάσσονας.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ἀναλύομεν τὴν μετὰ τὸ Σημεῖον Ποσότητα εἰς Παράγοντας, ϗ ἐὰν ἐξ ἑνὸς τούτων τῶν Παραγόντων δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ῥίζαν, ἥτις ἐμφαίνεται διὰ τοῦ ῥιζικοῦ Ἐκθέτου, θέτομεν αὐτὴν ὡς Συνεργὸν πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ Σημείου.

$$\sqrt[\mu]{\alpha^\nu\beta^\mu} = \sqrt[\mu]{\alpha^\nu}\times\sqrt[\mu]{\beta^\mu} = \beta\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$$

ὡσαύτως $\sqrt[3]{\alpha^2\beta^3} = \sqrt[3]{\alpha^2}\times\sqrt[3]{\beta^3} = \beta\sqrt[3]{\alpha^2}$

ὡσαύτως $\sqrt{32} = \sqrt{16\times 2} = 4\sqrt{2}$

ὡσαύτως $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8\times 4} = 2\sqrt[3]{4}$.

ΔΕΙΞΙΣ,

ΔΕΙ´ΞΙΣ.

Ἡ Δεῖξις αὕτη κρέμαται ἐκ τῦ ἀνωτέρω Προβλήματ© (§. 91.) ἐπειδὴ καθ᾽ ὃν τρόπον συντίθεται μία Ποσότης, κατὰ τὸν αὐτὸν κ) ἀναλύεται πάλιν.

ΠΡΟ´ΒΛΗΜΑ ζ´.

§. 93. Ποσὰ ἔχοντα πλείω ῥιζικὰ Σημεῖα, εἰς ἕνα μόνον Ὅρον ἀγαγεῖν.

ΠΡΑΚΤΕ´Α, ἢ ΛΥ´ΣΙΣ.

Τὸ πρὸ τῦ ῥιζικῦ Σημείυ Ποσὸν θέτομεν μετὰ τὸ Σημεῖον (§. 91.) κ) τὰς Ἐκθέτας τῶν ῥιζικῶν Σημείων πολλαπλασιάζομεν ἐπ᾽ ἀλλήλυς. π. χ.

$\sqrt[\mu]{\frac{\alpha}{\beta}\sqrt[\nu]{\frac{\gamma}{\delta}\sqrt[\rho]{\frac{\varepsilon}{\vartheta}}}}$ γίνεται πρῶτον $\sqrt[\mu]{\frac{\alpha}{\beta}\sqrt[\nu\rho]{\frac{\gamma^{\rho}\varepsilon}{\delta^{\rho}\vartheta}}}$

ἔπειτα $\sqrt[\mu\nu\rho]{\frac{\alpha^{\nu\rho}\gamma^{\rho}\varepsilon}{\beta^{\nu\rho}\delta^{\rho}\vartheta}}$, κ) ἐν ἀριθμ. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ θῆ·

πέστι $\sqrt[4]{2\sqrt[4]{4\times2}}$, τυτέστι $\sqrt[8]{16\times4\times2}$ ὅπερ ἐστὶ $\sqrt[8]{128}$.

διὰ τῆς ἐναντίας Ἐργασίας ἀνάγομεν τὸ ῥιζικὸν Ποσὸν εἰς ἐλαχίσυς Ὅρυς.

$$\sqrt[18]{73728}=\sqrt[18]{4096\times9\times2}=\sqrt[9]{64\times3\sqrt{2}}=\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{3}\sqrt{2}.$$

ΠΡΟ´ΒΛΗΜΑ η.

§. 94. Νὰ ἀθροίζωμεν, κ) νὰ ἀφαιρῶμεν ῥιζικὰ Ποσά.

ΠΡΑΚΤΕ´Α, ἢ ΛΥ´ΣΙΣ.

Ἐὰν ὦσιν ἀνόμοια τὰ Ποσά, ἐμφαίνεται ἡ Πρόσθεσις, ἢ ἡ ἀφαίρεσις μόνον διὰ Σημείων + κ) —. ὅταν δὲ ὦσιν ὅμοια, τότε ἀθροίζομεν, ἢ ἀφαιρῦμεν, ἢ ἀνάγομεν τὰς Συνέργυς κατὰ τὰς προτεθέντας Κανόνας ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ. (§. 14. κ. τ.).

ΔΕΙ´ΞΙΣ.

Τὰ μὲν ἀνόμοια Ποσὰ δὲν δύνανται νὰ ἑνωθῶσιν ὕτως, ὥστε ἐξ αὐτῶν νὰ γένῃ μόνον ἕνας ὅρ©. τὰ δὲ Ὅμοια Ποσὰ ἐὰν μηδὲν τι κωλύῃ, δύνανται νὰ ἑνωθῶσιν εἰς ἕνα Ὅρον, ἀλλὰ μὴν εἰς τὰ Ὁμοειδῆ Ἀλγεβραϊκὰ Ποσὰ γίνεται ἡ Πρόσθεσις, κ) ἀφαίρεσις, ἢ ἡ Ἐπιτομὴ διὰ τῶν Συμβόλων κ) Συνεργῶν. ἄρα κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον ἀθροίζονται κ) ἀφαιρῦνται τὰ ῥιζικὰ Ποσά.

ΠΑΡΑ´ΔΕΙΓΜΑ.

$\alpha\sqrt{\gamma}$ κ) $\beta\sqrt{\delta}$ ἀθροίζονται ὕτως $\alpha\sqrt{\gamma}+\beta\sqrt{\delta}$. $\alpha\sqrt{\gamma}+\beta\sqrt{\gamma}$ ἐν μὲν τῇ Προσθέσει γίνεται $(\alpha+\beta)\sqrt{\gamma}$. ἐν δὲ τῇ ἀφαιρέσει γίνεται $(\alpha-\beta)\sqrt{\gamma}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 95. Ὅταν ὦσι τὰ ῥιζικὰ Ποσὰ δι' ἀριθμῶν περιέχομεναι, τότε πρέπει νὰ προσπαθήσωμεν νὰ τὰ ἀνάξωμεν εἰς ἕνα & Ἴσην Ἔκθεσιν δύω Ὅρων, ἄλλως δὲν ἠμποροῦμεν νὰ τὰ συμβάλωμεν, εἰμὴ διὰ τῶν Σημείων. π. χ. $\sqrt{8}$ ϗ $\sqrt{18}$ γίνονται $\sqrt{4\times2}$ ϗ $\sqrt{9\times2}$, ἤτοι $2\sqrt{2}$ & $3\sqrt{2}$. ἀθροιζομένων τῶν Συνεργῶν, γίνεται $5\sqrt{2}$. ϗ κατὰ τὸ πέμπτον Πρόβλημα ἔχομεν $\sqrt{25\times2}=\sqrt{50}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'.

§. 96. Νὰ πολλαπλασιάζωμεν ῥιζικὰ Ποσά.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Ἀνάγομεν αὐτὰ πρῶτον εἰς ἕνα κοινὸν Παρονομαστὴν, ἢ Ἐκθέτην τῆς ῥίζης (§. 89), ἐὰν δὲν ἔχωσιν αὐτὸ κοινόν. ὕστερον πολλαπλασιάζομεν τὰς Συνεργὰς μετ' ἀλλήλων, ϗ τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον εἶναι ὁ νέος Συνεργός: τέλος πολλαπλασιάζομεν μετ' ἀλλήλων ϗ τὰ μετὰ τὸ Σημεῖον κείμενα Ποσά, ϗ τὸ Γινόμενον τοῦτο εἶναι τὸ νέον Ποσὸν, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ τεθῇ μετὰ τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον.

ΠΑΡΑ-

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

$\sqrt{\alpha}\times\delta=\delta\sqrt{\alpha}$. ϗ $\alpha\sqrt[3]{\beta}\times\gamma\sqrt[3]{\delta}=\alpha\gamma\sqrt[3]{\beta\delta}$

εἰς. ϗ $3\sqrt{\alpha}\times4\sqrt{\beta^3}=12\sqrt{\alpha\beta^3}$

τὸ δὲ $\frac{4}{5}\sqrt[3]{\alpha^2\gamma}\times\frac{3}{8}\sqrt[3]{\alpha\gamma^4}=\frac{12}{40}\sqrt[3]{\alpha^3\gamma^5}$.

$$\text{τὸ δὲ } \frac{\alpha}{\beta}\sqrt[\nu]{\frac{\gamma}{\delta}}\times\frac{\epsilon}{\zeta}\sqrt[\mu]{\frac{\eta}{\theta}}=\frac{\alpha}{\beta}\sqrt[\mu\nu]{\frac{\gamma^\mu}{\delta^\mu}}\times\frac{\epsilon}{\zeta}\sqrt[\mu\nu]{\frac{\eta^\nu}{\theta^\nu}}$$

$$=\frac{\alpha\epsilon}{\beta\zeta}\sqrt[\mu\nu]{\frac{\gamma^\mu\eta^\nu}{\delta^\mu\theta^\nu}}.$$

τὸ δὲ $\sqrt{3}-4\sqrt{2}$ πολλαπλασιασθὲν μετὰ

τοῦ $\sqrt{3}-5\sqrt{2}$

$$\begin{array}{r} \sqrt{9}-4\sqrt{6} \\ -5\sqrt{6}+20\sqrt{4} \\ \hline \sqrt{9}-9\sqrt{6}+20\sqrt{4}=3-9\sqrt{6}+40. \end{array}$$

ἔτι $2\sqrt[2]{5}\times3\sqrt[3]{2}=2\sqrt[6]{125}\times3\sqrt[6]{4}=6\sqrt[6]{500}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι'.

§. 97. Νὰ διαιρῶμεν ῥιζικὰ Ποσά.

ΛΥΣΙΣ, ἢ ΠΡΑΚΤΕΑ.

Πρῶτον ἀνάγομεν αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν Ἐκθέτην τῆς ῥίζης, ἐὰν δὲν ἔχωσιν τὸν Ἴδιον, ὕστερον διαιροῦμεν τὸν Συνερ-

 γερνεργὸν τοῦ Διαιρετέου διὰ τοῦ Συνεργοῦ τοῦ Διαιρέτου, καὶ τὸ Πηλίκον εἶναι ὁ νέος Συνεργός. τέλος διαιροῦμεν καὶ τὰ μετὰ τὸ ῥιζικὸν Ποσά, καὶ τὸ Πηλίκον εἶναι τὸ ἴδιον Ποσὸν, τὸ ὁποῖον θέτομεν μετὰ τὸ Ἴδιον ῥιζικὸν Ποσόν. π. χ.

$$\alpha\sqrt[3]{\beta}:\gamma\sqrt[3]{\delta}=\frac{\alpha}{\gamma}\sqrt[3]{\frac{\beta}{\delta}}.$$

$$4\sqrt{\alpha}:2\sqrt{\alpha}=2$$

$$8\sqrt{32}:4\sqrt{8}=2\sqrt{4}=2\times 2=4$$

ἐπὶ καὶ $\frac{\kappa}{\vartheta}\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} : \frac{\eta}{\varepsilon}\sqrt[\mu]{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\varepsilon\kappa}{\eta\vartheta}\sqrt[\mu\nu]{\frac{\alpha^{\mu}\delta^{\nu}}{\beta^{\mu}\gamma^{\nu}}}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ιά.

§. 98. Νὰ ὑψώνωμεν ῥιζικὰ Ποσὰ εἰς ὁποιανδήποτε Δύναμιν, ἢ νὰ ἐξάγωμεν ἐξ αὐτῶν ὁποιανδήποτε ῥίζαν.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν Δυναμοδείκτην τοῦ μετὰ τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον Ποσοῦ μετὰ τῆς ζητουμένης Δυνάμεως, καὶ οὕτως ὑψώθη τὸ ῥιζικὸν Ποσὸν εἰς τὴν ζητουμένην Δύναμιν. ἢ διαιροῦμεν τὸν Δυναμοδείκτην τοῦ μετὰ τὸ Σημεῖον Ποσοῦ μὲ τὴν ζητουμένην ῥίζαν, καὶ οὕτως ἐγένετο ἡ ζητουμένη Ἐξαγωγή. π. χ. ἔστω τὸ $\sqrt[5]{\alpha}$ ἀρτέον εἰς τὴν

πτην

[illegible] Δύναμιν. ὅθεν γίνεται $\sqrt[5]{\alpha^4}$. ὡσαύτως καὶ τὸ $\sqrt{\alpha\beta\gamma}$, ἐὰν πρέπῃ νὰ ὑψωθῇ εἰς τὴν τρίτην Δύναμ., γίνεται $\sqrt{\alpha^3\beta^3\gamma^3}$, ἤτοι $(\sqrt{\alpha\beta\gamma})^3$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 99. Αἱ Δείξεις τούτων τῶν λύσεων δὲν διαφέρουσιν ἀπὸ τῶν ἐν τῷ §. 95. καὶ ἑπομ. προτεθεισῶν δείξ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 100. Ἐὰν θελήσωμεν νὰ ἀποβάλωμεν κατὰ τὸ πρῶτον Πρόβλημα πάντοθεν τὸ ῥιζικὸν Σημεῖον, τότε ὁ μετὰ τῶν ῥιζικῶν λογισμὸς γίνεται ἁπλοῦς Ἐκθετικὸς λογαριασμὸς, περὶ οὗ ἐπραγματεύθημεν ἐν τῷ §. 44. καὶ ἐν τοῖς ἑξῆς §§. διὰ τοῦτο ἐν γένει ὁ λογαριασμὸς τῶν ῥιζικῶν Ποσοτήτων δύναται νὰ καταλειφθῇ σχεδὸν, ὡς περιττός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ς'.

Περὶ Ἐξισώσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ α'.

§. 101. Ἐξίσωσις ἐστι Παράθεσις δύω Ἴσων, ἢ ταυτοδυνάμων Ποσοτήτων, τὰς ὁποίας ἐκθέτομεν εἴτε διὰ τῶν Ἰδίων, εἴτε διὰ Διαφόρων Γραμμάτων. ταύτην δὲ τὴν Ἐξίσωσιν πα-

 ρασαί-

ρασαίνομεν, γράφοντες μεταξὺ τῶν δύω παραθετομένων Ποσοτήτων τοῦτο, τὸ Σημεῖον τῆς Ἰσότητος $=$. π. χ. ὅταν θέλωμεν νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ Ποσὸν α εἶναι Ἴσον, ἢ ἔχει τὴν αὐτὴν Δύναμιν μὲ τὸ β, γράφομεν οὕτως; $\alpha = \beta$. καὶ $\chi = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$ σημαίνει, ὅτι τὸ Ποσὸν χ εἶναι Ἴσον τῷ α, πολλαπλασιασθέντι πρῶτον μετὰ τοῦ β, καὶ διαιρεθέντι ἔπειτα διὰ τοῦ γ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 102. Ἐκ τούτου γίνεται δῆλον, ὅτι κάθε Ἐξίσωσις πρέπει νὰ ἔχῃ δύω Ὅρους ἢ Μέλη, τὸ ἓν πρὸ τοῦ Σημείου τῆς Ἰσότητος, καὶ τὸ ἄλλο μετὰ τὸ Σημεῖον. καὶ τὸ μὲν πρὸ τοῦ Σημείου λέγεται πρῶτον Μέλος, τὸ δὲ μετὰ τὸ Σημεῖον γραφόμενον καλεῖται δεύτερον Μέλος.

ΣΧΟΛΙΟΝ α'.

§. 103. Αἱ λέξεις Τὸ Αὐτὸ, Ἴσον, καὶ Ὅμοιον διαφέρουσιν ἀλλήλων, καὶ πρέπει ἐνταῦθα νὰ προσέξωμεν καλῶς, νὰ μὴ συγχύσωμεν ταύτας τὰς λέξεις. ἐπειδὴ Τὸ Αὐτὸ ἐκλαμβάνεται κυρίως διὰ ἓν μόνον πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον ἀποκλείει κάθε διαφορὰν ἢ Πλῆθος. δὲν δύναται νὰ εἶναι ὁ Παῦλος καὶ ὁ Πέτρος τὸ αὐτὸ, καὶ οὕτως ἐκλαμβάνομεν τὴν λέξιν Τὸ Αὐτὸ διὰ ἓν καὶ τὸ ἴδιον πρᾶγμα. Ἴσον δὲ λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον συμφωνεῖ κατά τινα λόγον μὲ ἓν ἕτερον, π. χ. τὸ Τετράγωνον Α εἶναι Ἴσον τῷ Τριγώνῳ Β, ἐὰν ὅλαι αἱ Πλευραὶ καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι Ἴσαι ἑκατέ-

ρα ἑκατέρα. καὶ διὰ τοῦτο δύναται νὰ τεθῇ ἀδιαφόρως τὸ ἓν ἀντὶ τοῦ ἄλλου. Ταῦτα ἀμφότερα κατὰ μὲν τὸ πρᾶγμα εἶναι Τὸ Αὐτὸ, κατὰ δὲ τὸν ἀριθμὸν εἰσὶ δύω. Ὅμοιον δὲ λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον συμφωνεῖ μὲ ἓν δεύτερον κατὰ πάντα λόγον ἐκτὸς τοῦ Μεγέθους. οὕτως εἶναι τὸ Τρίγωνον Α Ὅμοιον τῷ Τριγώνῳ Β, ἐὰν εἶναι αἱ Γωνίαι Ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, αἱ δὲ Πλευραὶ διάφοροι.

Εἰς τὰς Ἐξισώσεις λέγομεν ἐκεῖνα τὰ Ποσὰ Ἴσα, ὅπου ἔχουσι τὴν αὐτὴν Δύναμιν ἢ Σημασίαν π. χ. Τουρκικὰ Γρόσια 5 $=$ 100 Τουρκικοῖς Παρᾶσιν.

ΣΧΟΛΙΟΝ β'.

§. 104. Τὸ ἀντικείμενον τῶν Ἐξισώσεων εἶναι τὸ νὰ εὑρίσκωμεν τὴν Δύναμιν, ἢ Σημασίαν ἑνὸς, ἢ καὶ πλειόνων ἀγνώστων Ποσῶν. τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον νὰ ποιηθῇ, ἐὰν δοθῶσι μόνον ἄγνωστα Ποσὰ χωρὶς τινῶν Ἐγνωσμένων, ὡς $\chi = \varphi$. διὰ τοῦτο εἶναι ἀνάγκη μετὰ τῶν ἀγνώστων νὰ δίδωνται πάντοτε καὶ Γνωστά τινα Ποσὰ, πρὸς τὰ ὁποῖα νὰ ἔχωσι τὰ ἄγνωστα Σχέσιν, ἢ λόγον τινὰ, ὡς $3\chi = 18$ τουτέστιν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τὸ ἄγνωστον Ποσὸν μετὰ τοῦ 3, ἔχει λόγον Ἰσότητος πρὸς τὰ 18. $\frac{3\varphi}{5} = 6$ σημαίνει, ὅτι τὸ ἄγνωστον ζητούμενον Ποσὸν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ μετὰ τοῦ 3, καὶ τὸ ἐκ τούτου Γενόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ 5, Ἰσοδυναμεῖ τῷ 6. ἐκ τούτων ἕπονται οἱ ἑξῆς Ὁρισμοί.

ΟΡΙΣΜΟΣ β'.

§. 105. Τὸ Πρόβλημα μιᾶς Ἐξισώσεως εἶναι ἡ Ἐρώτησις πρὸς εὑρεσίαν Δύναμιν τινὸς Ποσοῦ, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἔχῃ λόγον Ἰσότητος μὲ τὴν Γνωστὴν Σημασίαν ἑνὸς ἄλλου Ποσοῦ. Ἡ λύσις τοῦ Προβλήματος συνίσταται εἰς τὴν Ἔκθεσιν αὐτὴν τοῦ ἀγνώστου Ποσοῦ μετά τινος Ἐγνωσμένης Δυνάμεως, ἢ Σημασίας, π. χ. Πρόβλημα εἶναι: τὸ νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν, ὅστις ἐὰν προστεθῇ εἰς τὰ 56, παρέχει ἄθροισμα Ἴσον μὲ τὸ Τριπλάσιον αὐτοῦ.

Ἡ δὲ λύσις εἶναι αὕτη $\chi = 28$ τουτέστιν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι 28, ὅστις προστεθεὶς εἰς τὸν 56, δίδει Κεφάλαιον Τριπλάσιον τοῦ 28. ἢ $28 + 56 = 28 \times 3$ ἀμφότερα εἰσιν Ἴσα μὲ τὰ 84.

ΟΡΙΣΜΟΣ γ'.

§. 106. Ὑποθέσεις, ἢ Συνθῆκαι τοῦ Προβλήματος λέγονται αἱ Σχέσεις τοῦ ἀγνώστου Ποσοῦ πρὸς τὰ Ἐγνωσμένα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀπολύτως ἀναγκαῖα πρὸς λύσιν τοῦ Προβλήματος. Τὰς δὲ Συνθήκας ἐκδηλοῦμεν ἢ διὰ ἀριθμητικῶν χαρακτήρων, ἢ διὰ τῶν ἀρκτικῶν Γραμμάτων α, β, γ. οἷον. ὁ Πέτρος ἀποδημήσας, ἐλαύνει καθ' ἑκάστην ἡμέραν 10 Μίλλια, καὶ ὁδεύει ἤδη πέντε ἡμέρας. ὁ δὲ Παῦλος ὁδεύει καθ' ἑκάστην 15. Μίλ., εἰς πόσας ἄρα ἡμέρας θέλει φθάσει τὸν Πέτρον. ἐνταῦθα ζητεῖται ὁ χρόνος, καθ' ὃν μέλλει

νὰ

νὰ συνέλθωσιν ἀμφότεροι· αἱ Συνθῆκαι εἶναι αἱ ἡμέραι καὶ τὰ Μίλλια τοῦ Πέτρου μετὰ τῶν Μίλ. τοῦ Παύλου. Ὁ δρόμος τὸν ὁποῖον ὥδευσεν ὁ Πέτρος, εἶναι $10 \times 5 = 50$ Μίλ. καὶ πρέπει νὰ κάμῃ δρόμον ἔτι $10 \times \chi$, τὰ ὁποῖα ὁμοῦ ληφθέντα πρέπει νὰ εἶναι Ἴσα μὲ τὸν δρόμον τοῦ Παύλου $15 \times \chi$, τουτέστιν $50 + 10\chi = 15\chi$· δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν τὰ Μίλλια τοῦ Πέτρου α καὶ τὰς ἡμέρας τοῦ δρόμου γ. τὰ δὲ Μίλλια τοῦ Παύλου β, καὶ τότε γίγνεται ἡ Ἐξίσωσις οὕτως, $\alpha\gamma + \alpha\chi = \beta\chi$. ἐὰν δὲ λυθῇ αὐτὸ τὸ Πρόβλημα εἰς ἀριθμητικοὺς χαρακτῆρας ἔσται τὸ $\chi = 10$. ὥσπερ δὴ καὶ ἐν Γράμμασιν $\frac{\alpha\gamma}{\beta - \alpha} = \chi$, ἢ $\frac{50}{15 - 10} = 10$, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, καθ' ἃς ὁ Παῦλος πρέπει νὰ φθάσῃ τὸν Πέτρον.

ΟΡΙΣΜΟΣ δ'.

§. 107. Ὡρισμένον Πρόβλημα λέγεται ἐκεῖνο, ὁποῦ ἐπιδέχεται μίαν μόνην καὶ ταύτην Ὡρισμένην λύσιν τῆς προκειμένης Ἐρωτήσεως. οὕτως εἶναι ἐν τῷ προτέρῳ Προβλήματι (§. 106.) ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς μόνος, καὶ ὡρισμένος

 10,

τοιαῦτα Προβλήματά εἰσιν ἐκεῖνα, εἰς οἷς γίνονται τόσαι Ἐξισώσεις, ὅσα εἰσὶ καὶ τὰ ἄγνωστα Ποσά. ἂν δὲ τὸ ἄγνωστον Ποσὸν ἓν μόνον ὑπάρχῃ, πρέπει καὶ Ἐξίσωσις νὰ εἶναι μία. ἐὰν δὲ ὦσι δύω τὰ ἄγνωστα, ὡσαύτως καὶ αἱ Ἐξισώσεις πρέπει νὰ εἶναι δύω. ἐὰν δὲ ὦσι τρία τὰ ἄγνωστα, πρέπει καὶ αἱ Ἐξισώσεις νὰ εἶναι τρεῖς. ἀδιόριστον Πρόβλημα λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἐπιλυθῇ πολλαχῶς, καὶ νὰ ἀποδοθῇ διὰ πλειόνων ἀριθμῶν, π. χ. ζητοῦμεν δύω ἀριθμοὺς, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι Ὀκτώ. οἱ δύω οὗτοι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ εἶναι 7 καὶ 1, ἢ 6 καὶ 2, ἢ 5 καὶ 3, ἢ 4 καὶ 4. τοῦτο συμβαίνει κάθε φορὰν, ὅπου εἶναι ὀλιγώτεραι αἱ Ἐξισώσεις ἀπὸ τὰ ἄγνωστα Ποσὰ, καθὼς εἰς τὸ προλαβὸν Παράδειγμα, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν Ἐξίσωσιν καὶ δύω ἄγνωστα Ποσά, $\chi + \psi = 8$. ἂν δὲ προστεθῇ καὶ δευτέρα Ἐξίσωσις εἰς αὐτὸ, ὅτι δηλαδὴ τὸ ἐκ τῶν δύω τούτων ἀριθμῶν Γινόμενον νὰ εἶναι 12, τότε ἤθελεν εἶναι τὸ Πρόβλημα διωρισμένον, καὶ ἤθελε λυθῇ μόνον μὲ τοὺς δύω τούτους ἀριθμοὺς 6 καὶ 2. πλέον ἢ διωρισμένον λέγεται τὸ Πρόβλημα τὸ ὁποῖον ἔχει πλέονας Συνθήκας (ὑποθέσεις), παρὰ ἄγνωστα Ποσά, αἱ ὁποῖαι Συνθῆκαι, ἢ εἶναι περιτταὶ, ἢ περικλείουσιν ἀντίφασιν, ὅθεν καὶ τὴν λύσιν τοῦ Προβλήματος ἀδύνατον ἀποκαθιστῶσιν. Ἐὰν προστεθῇ εἰς τῷ προλαβόντι Παραδείγματι καὶ τρίτη Συνθήκη, ὅτι δηλαδὴ ἡ Διαφορὰ τῶν δύω ἀριθμῶν νὰ εἶναι $= 4$. ὡς $\chi - \psi = 4$. φθάνουσιν οἱ δύω πρότεροι ἀριθμοί. ἐὰν δὲ ἡ τρίτη Συνθήκη ἤθελεν εἶναι, ὅτι ἡ Διαφορὰ αὐτῶν νὰ εἶναι $= 2$., τότε ἤθελεν εἶναι ἀδύνατος ἡ λύσις τοῦ Προβλήματος. ἐπειδὴ δὲν εὑρίσκονται δύω τοιοῦτοι ἀριθμοὶ, ὥστε νὰ περιέχωσι καὶ τὰς τρεῖς ταύτας Συνθήκας.

ὉΡΙΣΜΌΣ ι.

§. 108. Ἐξίσωσις τοῦ πρώτου Βαθμοῦ εἶναι, ὅταν τὸ ἄγνωστον Ποσὸν ὑπάρχῃ μόνον εἰς τὴν πρώτην Δύναμιν. $\chi + \frac{1}{2}\chi = \alpha$. Ἐξίσωσις δὲ τοῦ δευτέρου Βαθμοῦ λέγεται, ὅταν τὸ ἄγνωστον Ποσὸν ὑπάρχῃ Τετράγωνον, ἢ εἶναι ὑψωμένον εἰς τὴν δευτέραν Δύναμιν. οἷον $\chi^2 - \chi = \alpha$. Ἐξίσωσις δὲ τοῦ Τρίτου Βαθμοῦ λέγεται, ὅταν τὸ ἄγνωστον Ποσὸν εἶναι Κύβος. κ. τ. Ὅταν

δὲ

δὲ πλείονας ὦσι τὰ ἄγνωστα Ποσὰ, τότε λαμβάνεται ἡ ὀνομασία ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν ἑνὶ μέλει ὄντων Δυναμοδεικτῶν τῶν ἀγνώστων Ποσοτήτων. ὡς $\chi\phi - \phi = \beta$ εἶναι Ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου Βαθμοῦ. ἐπειδὴ καὶ τὸ Κεφάλαιον τῶν Δυναμοδεικτῶν τοῦ $\chi^{1}\phi^{1}$ εἶναι $= 2$.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 109. Ὅταν λοιπὸν μᾶς προβληθῇ καμμία ἐρώτησις, πρέπει νὰ τὴν ἐκφράζωμεν τρόπον τινὰ εἰς ἀλγεβραϊκὴν διάλεκτον. πρέπει δὲ νὰ διακρίνωμεν καλῶς τὰ ἄγνωστα Ποσὰ ἀπὸ τὰ Ἐγνωσμένα, καὶ τὰ μὲν Ἐγνωσμένα ἐκθέτομεν ἢ δι᾽ ἀριθμῶν, ἢ διὰ τῶν ἀρχικῶν Γραμμάτων α, β, γ, κ. τ. τὰ δὲ ἄγνωστα διὰ τῶν τελευταίων ϕ, χ, ψ, ω. πρέπει δὲ πρὸς τούτοις νὰ προσέχωμεν ἀκριβῶς, νὰ μὴν αὐξάνωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀγνώστων Ποσῶν ἄνευ ἀνάγκης π. χ. ἐὰν ζητῆται ἀριθμός τις, φέρ᾽ εἰπεῖν, χ, καὶ τούτου πρέπει νὰ ληφθῇ τὸ ἥμισυ, τὸ Διπλάσιον, τὸ Τριπλάσιον, κ. τ. γράφομεν τὸ μὲν Διπλάσιον 2χ, τὸ δὲ Τριπλάσιον 3χ, τὸ δὲ ἥμισυ $\frac{1}{2}\chi$, ἢ $\frac{\chi}{2}$. ἐὰν δὲ ζητῶνται δύω ἀριθμοὶ, τῶν ὁποίων νὰ εἶναι ἡ ἡ Διαφορὰ $= 10$, ἢ τὸ Κεφάλαιόν $= 30$, εἶναι περιττὸν νὰ ἐκθέτωμεν τοὺς δύω τούτους ἀριθμοὺς διὰ δύω Γραμμάτων χ καὶ ψ, ἀλλὰ λαμβάνομεν τὸν ἐλάσσονα $= \chi$ καὶ τότε ὁ μείζων ἔσται $= 30 - \chi$, $(10 + \chi)$, ἢ θέτομεν τὸν μείζονα $= \chi$, καὶ τότε ὁ ἐλάσσων εἶναι Ἴσος τῷ $30 - \chi$. τοῦτο χρησιμεύει πολλάκις, ὅτι τὸ Πρόβλημα παρίσταται ἐκ τριῶν ἀγνώστων Ποσῶν, ὡς κατωτέρω εἰς τὸ α΄. Παράδειγμα. πρὸς τούτοις πρέπει νὰ πρόσκηνται μετὰ τῶν προσηκόντων Σημείων των. ἐὰν εἶναι ὁ λόγος περὶ κέρδους, αὐξήσεως, ἢ προσθήκης, θέτομεν τὸ Σημεῖον $+$. ὅτι δὲ ὁ λόγος γίνεται περὶ ζημίας, ἐλαττώσεως, ἢ Διαφορᾶς, μεταχειριζόμεθα τὸ

τὸ Σημεῖον $-$. Ἐὰν ζητῶνται πολλαπλάσια Ποσὰ, προσθέτομεν εἰς τὸ ἄγνωστον Ποσὸν Συνεργούς. Ἐὰν δὲ ζητῶνται Μέρη, γράφομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν Μερῶν ὑπὸ τὸ χ ἢ ϕ εἰς εἶδος Κλάσματος καθὼς $\frac{\chi}{3}$, $\frac{\phi}{4}$. καὶ τέλος πάντων ἐκεῖνο τὸ Ποσὸν, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἔχῃ λόγον Ἰσότητος μετὰ τινὸς ἄλλου, διακρίνομεν ἐκ τούτου τοῦ Σημείου τῆς Ἰσότητος $=$ δι᾽ οὗ χωρίζομεν τὴν ... εἰς τὰ δύω Μέρη της.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ ς΄.

§. 110. Αἱ Συνθῆκαι, τὰς ὁποίας φέρουσι τὰ ἄγνωστα Ποσὰ μεθ᾽ ἑαυτῶν, εἰσὶ μετὰ τούτων τῶν Ποσῶν συνδεδεμέναι, ἢ διὰ τοῦ Σημείου τῆς Προσθέσεως $+$, ὡς $\chi + 20 = 30$, ἢ διὰ τοῦ τῆς ἀφαιρέσεως Σημείου $-$, ὡς $\chi - 10 = 20$, ἢ διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ, ὅταν αὗται συνέχωνται μετὰ τοῦ ἀγνώστου Ποσοῦ ὡς Συνεργοὶ, ὡς $3\chi = 30$, ἢ διὰ τῆς Διαιρέσεως, ὅταν θέτωνται ὑπὸ τὸ ἄγνωστον Ποσὸν ὡς Παρονομασταὶ εἰς εἶδος Κλάσματος, ὡς $\frac{\chi}{3} = 30$ ἢ $\frac{1}{3}\chi = 30$.

ΚΕΦΑΛΑΙΩ'ΔΕΣ Α'ΞΙΩΜΑ.

§. 111. Δύω Ἴσα Ποσὰ μένουσιν ἀλλήλοις Ἴσα, ἐὰν προστεθῶσιν αὐτοῖς Ἴσα, ἢ ἀφαιρεθῶσιν ἀπ᾽ αὐτῶν Ἴσα, ἢ πολλαπλασιαθῶσιν αὐτὰ,

αὐτὰ, ἢ διαιρεθῶσι μετ' Ἴσων, ἢ ἀρθῶσιν εἰς τὰς αὐτὰς Δυνάμεις, ἢ ἐξαχθῶσιν ἐξ αὐτῶν αἱ αὐταὶ ῥίζαι, ἢ μεταβληθῶσιν ἐπίσης τὰ Σημεῖα ἀμφοτέρων.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων φανερῦται ἡ ἀλήθεια τῦ ἀξιώματος Ἐναργῶς, καὶ τὸ τελευταῖον εἶναι καθ' ἑαυτὸ φανερόν. ἐπειδὴ ἐὰν $+a=+\beta$, ἔσεται καὶ $-a=-\beta$. ἐὰν δὲ $8-3=12-7$, ἔσεται καὶ $-8+3=-12+7$. ἐπειδὴ τὰ Σημεῖα δὲν μεταβάλλουσιν αὐτὰ τὰ Ποσὰ, ἀλλὰ σημαίνουσι μόνον τὰ πάθη των, ὅθεν δὲν μεταβάλλεται μήτε ἡ Ἰσότης τῶν Ποσῶν διὰ τῶν Σημείων, ἀλλὰ μόνον τὸ προσθετέον Ποσὸν γίνεται ἀφαιρετέον, καὶ ἀνάπαλιν, ἐκ τούτου ἕπεται τὸ ἑξῆς Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 112. Ἐγνωσμένα Ποσὰ, καθ' ὁποιονδήποτε λόγον καὶ τρόπον μετὰ ἀγνώστων συνδεδεμένα, δυνάμεθα νὰ χωρίσωμεν ἀπὸ τῶν ἀγνώστων διὰ τῆς ἐναντίας Ἐργασίας, καὶ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου νὰ τὰ μεταθέσωμεν εἰς τὸ ἕτερον Μέρος τῆς Ἐξισώσεως π. χ. ἐκ τῆς $\frac{2\chi}{3}+20-30=100$. δυνάμεθα νὰ κάμωμεν αὐτὴν τὴν Ἐξίσωσιν $\chi=\left(\frac{100+30-20}{2}\right)^3$.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ἐκ τοῦ Προλαβόντος ἀξιώματος (§. 111) εἶναι δῆλον, ὅτι ἡ Ἰσότης τῶν Ποσῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν πάθωσιν ἀμφότερα τὰς αὐτὰς μεταβολάς. λοιπὸν ἐὰν κρεμ... ἀμφοτέρωθεν τὸ δεδομένον Καταφατικὸν Ποσὸν διὰ τοῦ Σημείου $-$, ἢ προσθέσωμεν τὸ ἀποφατικὸν Ποσὸν διὰ τοῦ Σημείου $+$, τότε ἐξαλείφεται τὸ Ποσὸν τοῦτο ἀπὸ τὸ Μέρος τῆς Ἐξισώσεως, ἐν ᾧ εὑρίσκεται, καὶ γράφομεν αὐτὸ εἰς τὸ ἕτερον Μέρος. ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ Ποσὰ μετὰ τοῦ Συνεργοῦ τοῦ ἀγνώστου Ποσοῦ, ἢ πολλαπλασιάσωμεν μετὰ τοῦ Παρονομαστοῦ τοῦ ἀγνώστου Ποσοῦ, τότε σβύομεν εἰς τὸ ἓν Μέρος τὸν αὐτὸν Πολλαπλασιαστὴν ἢ Διαιρέτην, εἰς δὲ τὸ ἄλλο Μέρος πρέπει νὰ τοὺς γράφωμεν. δὲν μεταβάλλεται λοιπὸν ἡ Δύναμις τοῦ Ποσοῦ, ἐὰν τὸ μεταφέρωμεν εἰς τὸ ἄλλο Μέρος διὰ τοῦ ἐναντίου Σημείου, χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν ἄλλο. π. χ. ἐκ τοῦ $\frac{2\chi}{3}+20-30=100$. ἐὰν ἀφαιρεθῶσι τὰ 20 ἀμφοτέρωθεν, καὶ προστεθῶσι τὰ 30 γίνεται $\frac{2\chi}{3}+20-20-30+30=100-20+30$, τουτέστιν ἐὰν σβύσωμεν ἀπὸ τὸ πρῶτον Μέλος $+20$ καὶ -20, ὡσαύτως, καὶ τὸ -30 καὶ $+30$, τὰ ὁποῖα ἀναιροῦνται ὑπ' ἀλλήλων, τότε μένει $\frac{2\chi}{3}=100-20+30$. ἔπειτα ἐκ τοῦ $\frac{2\chi}{3}=100-20+30$ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύω Μέρη μετὰ τοῦ 3, θέλομεν ἔχει $\frac{2\chi\times3}{3}=(100-20+30)^3$.

ἀλλὰ

ἀλλὰ μὴν εἶναι Ἴσον τὸ $\frac{2\chi \times 3}{3}$ μὲ τὸ 2χ. ἄρα τὸ 2χ εἶναι Ἴσον καὶ μὲ τὸ $(100 - 20 + 30)^3$. ἐὰν τέλος διέλωμεν ἀμφότερα τὰ Μέρη τῆς Ἐξισώσεως διὰ τοῦ 2, γενήσεται $\frac{2\chi}{2} = \left(\frac{100 - 20 + 30}{2}\right)^3$, τουτέστι χ

$$= \left(\frac{100 + 30 - 20}{2}\right)^3.$$

Τὸ Ἴδιον γίνεται λοιπόν; καὶ ἐὰν εὐθὺς χωρὶς τινὸς ἄλλης πράξεως; μεταφέρωμεν τὸ $+ 20$ μετὰ τοῦ Σημείου $-$; καὶ τὸ $- 30$ μετὰ τοῦ Σημείου $+$; καὶ τὸν Συνεργὸν 2 ὡς Διαιρέτην, καὶ τὸν Παρονομαστὴν, ἢ Διαιρέτην 3 ὡς Πολλαπλασιαστὴν εἰς τὸ ἄλλο Μέρος τῆς Ἐξισώσεως.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 113. Ἐντεῦθεν μανθάνομεν τὴν Μέθοδον, διὰ τῆς ὁποίας δυνάμεθα κάθε ἀποφατικὸν Ποσὸν νὰ μεταβάλλωμεν εἰς ἀποφατικὸν, καὶ ἀνάπαλιν. ἐπειδὴ πρὸς τὸ τοιοῦτον τοῦτο μόνον ἀπαιτεῖται, τὸ νὰ μεταθέτωμεν εἰς αὐτὰ τὸ ἀντίθετον Σημεῖον π. χ. ἐκ τοῦ $10\chi - 100 = 10 - 3\chi$; δύναται νὰ γένῃ $10\chi + 3\chi = 100 + 10$. ἐκ δὲ τοῦ $a^2 - \gamma = \beta\chi - \varphi^2$ γίνεται $\varphi^2 = \beta\chi - a^2 + \gamma$.

ΠΟΡΙΣΜΑ β'.

§. 114. Νὰ λύωμεν τὴν Ἐξίσωσιν ἑνὸς μόνου ἀγνώστου Ποσοῦ.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Κανών. Ἐλευθεροῦμεν τὸ ἄγνωστον Ποσὸν ἀπὸ ὅλων τῶν Ἐγνωσμένων διὰ τῆς Μεταθέσεως (§. 111), καὶ τότε θέλομεν ἔχῃ τὴν Δύναμιν τοῦ ἀγνώστου. οὕτως ἐν τῷ προτέρῳ Προβλήματι $\frac{2\chi}{3} + 20 - 30 = 100$ εὑρίσκεται ἡ Δύναμις τοῦ χ, ἀφ' οὗ διὰ τῆς ἐναντίας Ἐργασίας μεταθέσωσιν εἰς τὸ ἄλλο Μέρος τῆς Ἐξισώσεως ὅλα τὰ προσκείμενα αὐτῷ Ποσά, οἷον $\chi = \left(\frac{100 - 20 + 30}{2}\right)^3$. τουτέστι $\chi = 165$.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ἡ λύσις τοῦ Προβλήματος εἶναι ἡ Ἔκθεσις τοῦ ἀγνώστου Ποσοῦ εἰς Ἐγνωσμένην Δύναμιν: ἀλλὰ μὴν κατὰ τὸν ῥηθέντα Κανόνα ἐκθέτεται τὸ ἄγνωστον Ποσὸν εἰς Δύναμιν Ἐγνωσμένην, λέλυται ἄρα τὸ Πρόβλημα κατὰ τὸ δέον.

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ.

§. 115. Διὰ νὰ μὴ συμβαίνῃ εἰς τὴν Μετάθεσιν καμμία Σύγχυσις, ἢ ἁμάρτημα, μεταχειριζόμεθα τὴν ἑξῆς τάξιν, ἥτις συναπαρτίζεται εἰς τούτους τοὺς πέντε τρόπους.

α') Μεταφέρομεν πρῶτον εἰς ἓν Μέρος τὰ Ἐγνωσμένα Ποσὰ μετὰ τοῦ Συμβόλου $+$, ἢ $-$ οὕτως, ὥστε ἡ ἄγνωστος Ποσότης ἅπαξ, ἢ πολλάκις κειμένη, νὰ ἐγκαταλειφθῇ μόνη εἰς ἓν Μέρος μετὰ τῶν ἑαυτῆς (ἂν ἔχῃ) Συνεργῶν, ἢ Διαιρετῶν.

β'.) Ἔπειτα τὰ ἄγνωστα Ποσὰ, ἐὰν ὑπάρχωσιν ἀκέραια, ἀθροίζομεν ὁμοῦ εἰς μίαν Ποσότητα ἢ διὰ τῆς Συνάψεως, ἢ ἀφαιρέσεως τῶν Συνεργῶν, ἂν ὅμως εἶναι ἐν Κλάσμασιν, φέρομεν αὐτὰ πρῶτον εἰς τὸν κοινὸν Παρονομαστὴν, ἔπειτα τὰ συνάπτομεν εἰς ἕν, ὡς ἀπαιτοῦσι τὰ Σύμβολα.

γ'.) Ἂν εὑρίσκωνται καὶ εἰς τὰ δύω Μέρη τῆς Ἐξισώσεως ἄγνωστα γα Ποσὰ, μεταφέρομεν αὐτὰ εἰς ἓν Μέρος, οὕτως ὅμως, ὥστε ἡ Ποσότης ἡ ἔχουσα μείζονα Συνεργὸν νὰ ἔχῃ τὸ Σύμβολον + διὰ νὰ μὴ γένῃ ἡ Δύναμις (Σημασία) στερητική.

δ'.) Ὁ Παρονομαστὴς, ἢ ὁ Διαιρέτης τῶν ἀγνώστων Κλασμάτων μεταφέρεται διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ, καὶ τέλος ὁ Συνεργὸς διὰ τῆς Διαιρέσεως, ὥστε μένει ἡ ἄγνωστος Ποσότης μόνη.

ε'.) Ἐὰν ἡ ἄγνωστος Ποσότης εἶναι Παρονομαστὴς τινὸς Κλάσματος, εὐθὺς πρῶτον ἀναγκαῖον ἐστὶν νὰ μεταφέρωμεν αὐτὴν διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὸ ἕτερον Μέρος οἷον $\frac{2}{\chi} = 6$ γίνεται $2 = 6\chi$ καὶ $\frac{2}{6}$ ἢ $\frac{1}{3} = \chi$.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ α'.

Τρεῖς ἄνθρωποι ἐκέρδησαν ὁμοῦ 180 Γρόσια, ὁ δεύτερος ἐκέρδησε πλείονα τοῦ πρώτου 8, ὁ δὲ τρίτος ἐκέρδησε τόσα, ὅσα ἐκέρδησεν ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος, ὅθεν τὸ κέρδος τοῦ πρώτου εἶναι $= \chi$, τοῦ δὲ δευτέρου $\chi + 8$, τοῦ δὲ τρίτου $\chi + \chi + 8$, καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ ἐκέρδησαν 180. λοιπὸν γίνεται αὕτη ἡ Ἐξίσωσις

$$\chi+\chi+8+\chi+\chi+8=180$$

καὶ κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον $\chi+\chi+\chi+\chi=180-8-8=180-16=164$

κατὰ τὸν δεύτερον $4\chi = 164$

κατὰ τὸν τέταρτον $\chi = \frac{164}{4} = 41$.

λοιπὸν ὁ πρῶτος ἐκέρδησε . 41

ὁ δεύτερος 8 πλείονα . . . 49

ὁ δὲ τρίτος ἐκέρδησεν ὅσα οἱ δύο, ἤτοι. 90

180 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ β'.

Ὁ Πέτρος, φέρ' εἰπεῖν, ἐδαπάνησεν, ἢ ἐμοίρασε τὴν πρώτην ἡμέραν ἐκ τῶν χρημάτων του ἓν τριτημόριον, τὴν δὲ δευτέραν ἡμέραν ἐμοίρασεν αὖθις τὸ ἓν τεταρτημόριον, τὴν δὲ τρίτην ἡμέραν ὡσαύτως ἐδαπάνησεν ἓν πεμπτημόριον, καὶ ἔμειναν εἰς αὐτὸν ἔτι 26 Γρόσια. Ζητεῖται λοιπὸν, πόσα εἶχε κατ' ἀρχὰς

ἔστω ὅλη ἡ Ποσότης, ἥτις καὶ ζητεῖται $= \chi$

ὅσα ἐδαπάνησε $= \frac{\chi}{3}, \frac{\chi}{4}, \frac{\chi}{5}$

ὅσα ἔμειναν αὐτῷ $= 26$

γίνεται αὕτη ἡ Ἐξίσωσις $\chi - \frac{\chi}{3} - \frac{\chi}{4} - \frac{\chi}{5} = 26$

κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον.
$$\left\{\begin{aligned} &\frac{60\chi-20\chi-15\chi-12\chi}{60} = 26 \\ &\frac{60\chi-47\chi}{60} = 26 \\ &\frac{13\chi}{60} = 26 \end{aligned}\right.$$

κατὰ τὸν τέταρτον τρόπον.
$$\left\{\begin{aligned} &13\chi = 26\times60 = 1560 \\ &\chi = \frac{1560}{13} = 120 \text{ ἡ πρώτη Ποσότης.} \end{aligned}\right.$$

δηλαδὴ $120-40-30-24=26$.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. γ'.

Πατήρ τις ἔχων ἓξ υἱοὺς, καὶ ἐρωτηθεὶς περὶ τῆς ἡλικίας αὐτῶν, ἀπεκρίθη, ὅτι ἕκαστος προγενέστερος ὑπερέχει τὸν αὐτοῦ μεταγενέστερον 4 ἔτη, ὁ πρεσβύτατος ὅμως (τουτέστιν ὁ πρῶτος) εἶναι μείζων τοῦ νεωτάτου (δηλαδὴ τοῦ ἕκτου) κατὰ τὴν ἡλικίαν τριπλασίως. ὅθεν κατὰ τὴν τοῦ Προβλήματος Ὑπόθεσιν γίνεται οὕτως

ἡ ἡλικία τοῦ νεωτέρου, ἡ ἕκτου $= \chi$

τοῦ δὲ πέμπτου $= \chi + 4$

τοῦ δὲ τετάρτου $= \chi + 8$

τοῦ δὲ τρίτου $= \chi + 12$

τοῦ δὲ δευτέρου $= \chi + 16$

τοῦ δὲ πρώτου $= \chi + 20$

καὶ ἐπειδὴ ἡ ἡλικία τοῦ πρωτοτόκου $\chi + 20$ πρέπει νὰ εἶναι τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ ἕκτου, γίνεται ἄρα αὕτη ἡ Ἐξίσωσις $\chi + 20 = 3\chi$

κατὰ τὸν τρίτον τρόπον $20 = 3\chi - \chi$, ἤτοι $20 = 2\chi$

κατὰ τὸν τέταρτον τρόπον $\frac{20}{2} = \chi$ ἤτοι $10 = \chi$.

εὕρηται ἄρα, ὅτι ἡ ἡλικία τοῦ ἕκτου εἶναι $= 10$:

τοῦ δὲ πέμπτου $= 10 + 4 = 14$

τοῦ δὲ τετάρτου $= 10 + 8 = 18$

τοῦ δὲ τρίτου $= 10 + 12 = 22$

τοῦ δὲ δευτέρου $= 10 + 16 = 26$

τοῦ δὲ πρώτου $= 10 + 20 = 30$ ὅπερ ἐστὶ τὸ τριπλάσιον τοῦ 10.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Ἐντεῦθεν μανθάνομεν τὴν Μέθοδον, καθ' ἣν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν Ἐργασίας τινὸς τὴν ἀλήθειαν, θέτομεν δηλονότι μετὰ τὴν

Πᾶξιν εἰς τὴν πρώτην Ἐξίσωσιν ἀντὶ τοῦ Ποσοῦ χ τὴν ἐκ τῆς Ἐργασίας εὑρεθεῖσαν τελευταίαν Ποσότητα, καὶ ἐὰν τοῦτο τὸ κατ' αὐτὴν τὴν Μέθοδον λελυμένον Μέρος τῆς Ἐξισώσεως ὑπάρχῃ ἴσον μὲ τὸ δεύτερον Μέρος, λέλυται τότε τὸ Πρόβλημα ἀκριβῶς. ἐπειδὴ εἶναι ἀδύνατον μετὰ τὴν λύσιν νὰ εὑρεθῶσι τὰ δύω τῆς Ἐξισώσεως Μέρη ἴσα ἀλλήλοις, ἂν ἡ Δύναμις τοῦ Ποσοῦ χ, ἥτις ἐλήφθη ἐν τῇ Ἐξισώσει, ὑπάρχῃ ἄνισος μὲ τὴν εὑρεθεῖσαν Ποσότητα.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. δ'.

Υἱός τις λέγει πρὸς τὸν ἑαυτοῦ Πατέρα, ὅστις ἤδη κατὰ τὴν ἡλικίαν ἦτον μείζων τοῦ υἱοῦ τριπλασίως, ὅτι μετὰ εἴκοσι ἔτη φίλτατε Πάπερ! θέλεις εἶσαι μόνον διπλασίως μείζων ἐμοῦ. εἰς ποίαν λοιπὸν ἡλικίαν ἦσαν τότε ὁ Πατὴρ καὶ ὁ υἱός;

ἔστω ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ $= \varphi$

τοῦ δὲ Πατρὸς $= 3\varphi$

καὶ κατὰ τὴν τοῦ Προβλήματος Ὑπόθεσιν μετὰ 20 ἔτη ἔσται ἡ μὲν ἡλικία τοῦ υἱοῦ $= \varphi + 20$, τοῦ δὲ Πατρὸς $= 3\varphi + 20$. καὶ τότε ἡ τοῦ Πατρὸς ἡλικία πρέπει νὰ εἶναι διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ. ὅθεν

$$3\varphi + 20 = (\varphi + 20)^2$$

ἤτοι $3\varphi + 20 = 2\varphi + 40$

ἤτοι $3\varphi - 2\varphi = 40 - 20$

ἤτοι $\varphi = 20$.

εὕρηται ἄρα, ὅτι ἡ μὲν Ἡλικία τοῦ υἱοῦ ἦν $= 20$, ἡ δὲ τοῦ Πατρὸς $= 60$ Τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ, μετὰ δὲ 20 ἔτη ἔσται ἡ μὲν Ἡλικία τοῦ υἱοῦ $= 40$, ἡ δὲ τοῦ Πατρὸς $= 80$, Διπλασία δηλονότι τῆς Ἡλικίας τοῦ υἱοῦ.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. ε.

Ὁ Πέτρος, φέρ' εἰπεῖν, καὶ Ἰωάννης ἔσχον ἕκαστος ἴσην Ποσότητα χρημάτων, ὅτι ἤρξαντο μετ' ἄλλων νὰ παίζωσι, καὶ ὁ μὲν Πέτρος ἀπώλεσεν εἰς τὸ Παιγνίδιον 12 Γρόσια, ὁ δὲ Ἰωάννης ἔχασε Γρόσια 57. ἀλλ' εἶχεν ὁ Πέτρος ἔτι λοιπὰ τετράκις τόσα, ὅσα ἔμειναν εἰς τὸν Ἰωάννην.

Ἔστω ἡ τοῦ Πέτρου Ποσότης $= \chi$ ὅθεν ἔμεινε μετὰ τὸ Παιγνίδιον $\chi - 12$.

Ἡ τοῦ Ἰωάννου ὡσαύτως $= \chi$ καὶ μετὰ τὸ Παιγνίδιον ἔμεινε $\chi - 57$

καὶ κατὰ τὰς Συνθήκας ἔσται

$$\chi - 12 = (\chi - 57)4$$

ἤτοι $$\chi - 12 = 4\chi - 228$$

$$228 - 12 = 4\chi - \chi$$

$$216 = 3\chi$$

$$72 = \chi$$

ἡ Ποσότης τοῦ Πέτρου $= 72$. τὰ δὲ ἐγκαταλειφθέντα μετὰ τὸ Παιγνίδιον $= 60$ ὡσαύτως ἡ τοῦ Ἰωάννου Ποσότης $= 72$. τὰ δὲ ἐγκαταλειφθέντα $= 15$. καὶ ἐπειδὴ ὁ 60 ἀριθμὸς εἶναι τετραπλάσιος τοῦ 15, λέλυται ἄρα τὸ Πρόβλημα.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. ς'.

Δεσπότης τις μισθούμενος τινα Δοῦλον, ὑπισχνεῖται εἰς αὐτὸν νὰ δώσῃ διὰ 12 Μῆνας Γρόσια 80, προσέτι καὶ ἓν Ἔνδυμα, τοῦ ὁποίου τὴν τιμὴν αὐτοὶ ὡσαύτως προσ-

διορίζουσι. μετὰ δὲ ἑπτὰ Μῆνας ἀπολύσας ὁ Δεσπότης τὸν Δοῦλον, δίδει αὐτῷ μισθὸν 30 Γρόσια, καὶ ἀφίνει εἰς αὐτὸν καὶ τὸ ἔνδυμα. ζητεῖται λοιπὸν, πόση εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἐνδύματος.

Ἡ τιμὴ τοῦ ἐνδύματος χ. ὅλος ὁ μισθὸς τοῦ Δούλου $\chi + 80$. ὁ δὲ μισθὸς τῶν ἑπτὰ Μηνῶν εὑρίσκεται οὕτω. διαιρῶν τις τὸν $\chi + 80$ διὰ τοῦ 12, εὑρίσκει πρῶτον τὸν μισθὸν τὸν ἀνήκοντα διὰ ἕνα Μῆνα, ἤτοι τὸν $\frac{\chi + 80}{12}$, εἶτα πολλαπλασιάσας τοῦτον διὰ τοῦ 7, εὑρήσει τὸν ἑπταμηνιαῖον μισθὸν, δηλαδὴ τὸν $\frac{7\chi + 560}{12}$, ὅστις πρέπει νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν πληρωθέντα μισθὸν $30 + \chi$ ὅθεν γίνεται

$$\frac{7\chi + 560}{12} = 30 + \chi$$

$$7\chi + 560 = 360 + 12\chi$$

$$560 - 360 = 12\chi - 7\chi$$

$$200 = 5\chi$$

$$40 = \chi$$

ὁ διὰ ἓν ἔτος μισθὸς ἐστὶν 120 Γρόσια, ὁ δὲ μισθὸς διὰ ἕνα Μῆνα 10, καὶ ἑπομένως διὰ 7 Μῆνας εἶναι 70 Γρόσια. συνάψαντες λοιπὸν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν 30 μετὰ τοῦ 40, τουτέστι μετὰ τῆς τιμῆς τοῦ ἐνδύματος, βλέπομεν, ὅτι λέλυται ὀρθῶς τὸ Πρόβλημα.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ ζ'.

Πεζοδρόμος ἀποδημήσας, τρέχει καθ' ἑκάστην 10 Μίλλια. ἄλλος δὲ τις μετὰ πέντε ἡμέρας ἀποδημήσας,

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. ε'.

Ὁ Πέτρος, φέρ' εἰπεῖν, καὶ Ἰωάννης ἔσχον ἕκαστος Ἴσην Ποσότητα χρημάτων, ὅτι ἤρξαντο μετ' ἀλλήλων νὰ παίζωσι, καὶ ὁ μὲν Πέτρος ἀπώλεσεν εἰς τὸ Παιγνίδιον 12 Γρόσια, ὁ δὲ Ἰωάννης ἔχασε Γρόσια 57. ἀλλ' εἶχεν ὁ Πέτρος ἔτι λοιπὰ τετράκις τόσα, ὅσα ἔμειναν εἰς τὸν Ἰωάννην.

Ἔστω ἡ τοῦ Πέτρου Ποσότης $= \chi$ ὅθεν ἔμεινε μετὰ τὸ Παιγνίδιον $\chi - 12$.

Ἡ τοῦ Ἰωάννου ὡσαύτως $= \chi$ καὶ μετὰ τὸ Παιγνίδιον ἔμεινε $\chi - 57$

καὶ κατὰ τὰς Συνθήκας ἔσται

$$\chi - 12 = (\chi - 57)4$$

ἤτοι

$$\chi - 12 = 4\chi - 228$$
$$228 - 12 = 4\chi - \chi$$
$$216 = 3\chi$$
$$72 = \chi$$

ἡ Ποσότης τοῦ Πέτρου $= 72$. τὰ δὲ ἐγκαταλειφθέντα μετὰ τὸ Παιγνίδιον $= 60$

ὡσαύτως ἡ τοῦ Ἰωάννου Ποσότης $= 72$. τὰ δὲ ἐγκαταλειφθέντα $= 15$. καὶ ἐπειδὴ ὁ 60 ἀριθμὸς εἶναι τετραπλάσιος τοῦ 15, λέλυται ἄρα τὸ Πρόβλημα.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. ς'.

Δεσπότης τις μισθώμενός τινα Δοῦλον, ὑπισχνεῖται εἰς αὐτὸν νὰ δώσῃ διὰ 12 Μῆνας Γρόσια 80, προσέτι καὶ ἓν Ἔνδυμα, τοῦ ὁποίου τὴν τιμὴν αὐτοὶ ὡσαύτως προσδιορίζουσι. μετὰ δὲ ἑπτὰ Μῆνας ἀπολύσας ὁ Δεσπότης τὸν Δοῦλον, δίδει αὐτῷ μισθὸν 30 Γρόσια, καὶ ἀφίνει εἰς αὐτὸν καὶ τὸ ἔνδυμα. ζητεῖται λοιπὸν, πόση εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἐνδύματος.

Ἡ τιμὴ τοῦ ἐνδύματος χ. ὅλος ὁ μισθὸς τοῦ Δούλου $\chi + 80$. ὁ δὲ μισθὸς τῶν ἑπτὰ Μηνῶν εὑρίσκεται οὕτω. Διαιρῶν τις τὸν $\chi + 80$ διὰ τοῦ 12, εὑρίσκει πρῶτον τὸν μισθὸν τὸν ἀνήκοντα διὰ ἕνα Μῆνα, ἤτοι τὸν $\frac{\chi + 80}{12}$, εἶτα πολλαπλασιάσας τοῦτον διὰ τοῦ 7, εὑρίσκει τὸν ἑπταμηνιαῖον μισθὸν, δηλαδὴ τὸν $\frac{7\chi + 560}{12}$, ὅστις πρέπει νὰ εἶναι Ἴσος μὲ τὸν πληρωθέντα μισθὸν $30 + \chi$ ὅθεν γίνεται

$$\frac{7\chi + 560}{12} = 30 + \chi$$
$$7\chi + 560 = 360 + 12\chi$$
$$560 - 360 = 12\chi - 7\chi$$
$$200 = 5\chi$$
$$40 = \chi$$

ὁ διὰ ἓν ἔτος μισθὸς ἐστὶν 120 Γρόσια, ὁ δὲ μισθὸς διὰ ἕνα Μῆνα 10, καὶ ἑπομένως διὰ 7 Μῆνας εἶναι 70 Γρόσια. συνάψαντες λοιπὸν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν 30 μετὰ τοῦ 40, τουτέστι μετὰ τῆς τιμῆς τοῦ ἐνδύματος, βλέπομεν, ὅτι λέλυται ὀρθῶς τὸ Πρόβλημα.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ ζ'.

Πεζοδρόμος ἀποδημήσας, τρέχει καθ' ἑκάστην 10 Μίλλια. ἄλλος δὲ τις μετὰ πέντε ἡμέρας ἀποδημήσας, καὶ

καὶ τὴν αὐτὴν ἐκείνῳ ὁδοιπορίαν ποιούμενος, διανύει καθ' ἑκάστην 15 Μίλλια, ζητεῖ δὲ νὰ μάθῃ μετὰ πόσας ἡμέρας αὐτὸν καταλήψεται.

Ἔςω ἡ ζητουμένη ἡμέρα τῆς ἐνταῦξεως $= \chi$. τὰ Μίλλια, τὰ ὁποῖα ὁ πρῶτος διέδραμεν εἰς πέντε ἡμέρας, εἰσὶν 50, ὅσα δὲ μένουσιν αὐτῷ λοιπὰ νὰ διατρέξῃ εἰσὶν $10 \times \chi$. τὰ δὲ Μίλλια, τὰ ὁποῖα μέλλει ὁ δεύτερος νὰ κάμῃ, καὶ τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ εἶναι ἴσα με τὰ τοῦ πρώτου Μίλλια, εἰσὶν $15 \times \chi$ ὅθεν

$$50 + 10 \times = 15 \chi$$
$$50 = 15 \chi - 10 \chi$$
$$50 = 5 \chi$$
$$10 = \chi$$

μετὰ δέκα ἡμέρας ἄρα πρέπει ὁ δεύτερος νὰ φθάσῃ τὸν πρῶτον, ἐπειδὴ ὁ μὲν πρῶτος μετὰ 10 ἡμέρας διατρέξει 100 Μίλλια καὶ 50, τὰ ὁποῖα πρότερον διέτρεξε, γίνονται 150. ἀλλὰ καὶ ὁ δεύτερος ὡσαύτως εἰς δέκα ἡμέρας ὁμοίως διανύσει 150 Μίλλια. ἄρα ....

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ η'.

Ταχυδρόμος τις ἀποδημήσας, τελειώνει καθ' ἑκάςην 8 Μίλλια, μετὰ δὲ πέντε ἡμέρας ἀποδημεῖ ἕτερος, ὅςις πρέπει νὰ φθάσῃ εἰς ἓξ ἡμέρας τὸν πρῶτον. ζητεῖται λοιπὸν, πόσα Μίλλια ἔχει καθ' ἑκάςην νὰ διατρέχῃ, διὰ νὰ φθάσῃ ἐκεῖνον. ὅθεν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν Μιλλίων χ.

Τὰ δὲ Μίλλια, τὰ ὁποῖα ὁ πρῶτος εἰς πέντε ἡμέρας διήνυσεν, εἰσὶν 40. ὅσα μέλλει νὰ κάμῃ εἰς ἓξ ἡμέρας, εἰσὶν 48. ὅσα δὲ μέλλει νὰ διατρέξῃ ὁ δεύτερος εἰς ἓξ ἡμέρας εἰσὶν $= 6 \chi$ λοιπὸν

$$40 + 48 = 6 \chi$$
$$88 = 6 \chi$$
$$14 \frac{2}{3} = \chi$$ τόσα Μίλλια πρέπει

νὰ τελειώνῃ ὁ δεύτερος καθ' ἑκάστην, καὶ οὕτω θέλει φθάσει τὸν πρῶτον εἰς ἓξ ἡμέρας.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ θ'.

Δύω τόποι, φέρ' εἰπεῖν, A ——— B ἀπέχουσιν ἀπ' ἀλλήλων 120 Μίλλια. Ὁδοιπόρος τις ἀπὸ τοῦ A ἀποδημήσας, πορεύεται πρὸς τὸ B, διανύων καθ' ἑκάςην 6 Μίλλια. ἄλλος δέ τις πάλιν τὸν αὐτὸν χρόνον ἀπὸ τοῦ B ἀποδημήσας, ποιεῖ καθ' ἑκάςην 4 Μίλλια, πότε ἄραγε οὗτοι ἀπαντήσουσιν ἀλλήλοις; ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν χ

τὰ Μίλλια τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου εἰσὶν 120

τὰ Μίλλια τοῦ πρώτου εἰσὶν 6χ, τοῦ δὲ δευτέρου 4χ.

ἄρα

$$6 \chi + 4 \chi = 120$$
$$10 \chi = 120$$
$$\chi = 12$$

μετὰ 12 ἡμέρας οὗτοι συναντήσουσιν ἀλλήλοις.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 117. Ἂν ἀναλύσωμεν Ἀλγεβραϊκῶς, καὶ ἐκθέσωμεν διὰ σοιχείων τὰ τελευταῖα τρία Παραδείγματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἀναφορὰν πρὸς πράγματα κινητὰ, προκύπτουσιν ἐκ τούτου ἄλλοι τόποι Γενικοὶ, Τύποι, τοὺς ὁποίους δυνάμεθα νὰ μεταχειριζώμεθα εἰς κάθε Ἰδιωτέραν Περίςασιν. ἂν ἐν τῷ πρώτῳ τούτων Παραδείγματι ληφθῶσι τὰ Μίλλια (τὰ ὁποῖα καθ' ἑκάστην ὁ πρῶτος διέτρεχε) $= \alpha$, τὰ δὲ Μίλλια (τὰ ὁποῖα ὁ δεύτερος καθ' ἑκάστην ἐποίει) $= \beta$. ὁ δὲ δοθεὶς χρόνος γ, καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς $= \chi$, προκύπτουσι τὰ ἑξῆς

$$\alpha\gamma + \alpha\chi = \beta\chi$$
$$\alpha\gamma = \beta\chi - \alpha\chi$$
$$\alpha\gamma = (\beta - \alpha)$$
$$\frac{\alpha\gamma}{\beta - \alpha} = \chi \ \ldots \quad \text{Τύπος πρῶτος}$$

ὅθεν ὁ Κανὼν εἰς τὴν πρώτην ταύτην Περίστασιν προσδιορίζει οὕτω„ ἀφ' οὗ πολλαπλασιασθῶσι τὰ Μίλλια τοῦ πρώτου μετὰ τοῦ δοθέντος χρόνου, καὶ διαιρεθῶσι διὰ τῆς Διαφορᾶς τῶν Μιλλίων, τὰ ὁποῖα ἕκαστος τούτων ποιεῖ καθ' ἑκάστην, προκύπτει ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν.

Ἂν ἐν τῷ δευτέρῳ Παραδείγματι ὑποτεθῶσιν $= \alpha$ τὰ Μίλλια, τὰ ὁποῖα καθ' ἑκάστην ὁ πρῶτος διανύει, ὁ δὲ παρελθὼν χρόνος (καθὼς ἐνταῦθα τῶν πέντε ἡμερῶν) ὑποτεθῇ β, ὁ δὲ δοθεὶς τῆς κινήσεως ἀριθμὸς $= \gamma$, καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν Μιλλίων $= \chi$. ἔσονται τὰ ἑξῆς

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \gamma\chi, \text{ ἤτοι } \frac{\alpha\beta + \alpha\gamma}{\gamma} = \chi \text{ τουτέστι}$$
$$\frac{\alpha\beta}{\gamma} + \alpha = \chi \ \ldots\ldots \quad \text{Τύπος δεύτερος}$$

Ἐν ταύτῃ τῇ δευτέρᾳ Περιστάσει εἶναι οὗτος ὁ Κανών. „ ὅτι ἀφ' οὗ τὸ Γινόμενον, (καθὼς τὸ $\alpha\beta$) τὸ ὁποῖον παράγεται ἐκ τῶν καθημερινῶν Μιλλίων τοῦ πρώτου Ταχυδρόμου καὶ ἐκ τῶν ἡμερῶν, καθ' ἃς οὗτος πρότερον πορεύεται, συναφθῇ μὲ τὸ ἐκ τοῦ δεδομένου χρόνου καὶ Μιλλίων τοῦ πρώτου Γενόμενον (ὡς ἀνωτέρω $\alpha\beta + \alpha\gamma$), καὶ διαιρεθῇ ἔπειτα διὰ τοῦ ἰδίου δεδομένου χρόνου (ὡς $\frac{\alpha\beta}{\gamma} + \alpha = \chi$), εὑρίσκεται ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν Μιλλίων.

Ἂν δὲ εἰς τὸ τρίτον καὶ τελευταῖον Παράδειγμα τὸ δοθὲν Διάστημα, καθ' ὃ οἱ δύω τόποι ἀπέχουσιν ἀπ' ἀλλήλων, ληφθῇ $= \alpha$,

τὰ

τὰ δὲ Μίλλια τοῦ Πρώτου $= \beta$, τὰ δὲ τοῦ δευτέρου $= \gamma$ καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς $= \chi$, ἔσται

$$\beta\chi + \gamma\chi = \alpha$$
$$(\beta + \gamma)\chi = \alpha$$
$$\chi = \frac{\alpha}{\beta + \gamma} \ \ldots \quad \text{Τύπος τρίτος}$$

Ὅθεν ἐνταῦθα πηγάζει τοιοῦτος Κανὼν „ ὅτι ἂν διαιρεθῇ τὸ δεδομένον διάστημα διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν Μιλλίων τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου, τὸ ἐκ τῆς Διαιρέσεως Πηλίκον εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ β'.

§. 118. Νὰ λύωμεν Ἐξίσωσιν δύω ἀγνώστων Ποσοτήτων.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

α'.) Ζητοῦμεν καὶ ἐν ταῖς δυσὶν Ἐξισώσεσι τὴν Δύναμιν μόνον ἑνὸς καὶ τοῦ ἰδίου ἀγνώστου Ποσοῦ διὰ τῆς μεταθέσεως.

β'.) Παραβάλλομεν τὰς δύω ταύτας Δυνάμεις πρὸς ἀλλήλας, καὶ κατὰ τοὺς ἀνωτέρω Κανόνας ζητοῦμεν τὴν Δύναμιν τοῦ ἑτέρου λοιποῦ ἀγνώστου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓ. α'.

Νὰ εὕρωμεν δύω ἀριθμούς, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἐστὶν $= 100$, ἡ δὲ τούτων Διαφορὰ $= 30$.

ἔσω τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν ὁ μὲν χ, ὁ δὲ φ.

κατὰ τὴν πρώτην Συνθήκην $\chi + \varphi = 100$

κατὰ

κατὰ τὴν δευτέραν Συνθήκην $\chi - \varphi = 30$

λοιπὸν ἐκ τοῦ πρώτου γίνεται $\chi = 100 - \varphi$

$$\chi = 30 + \varphi$$

ἐκ τοῦ δευτέρου $100 - \varphi = 30 + \varphi$

$$100 - 30 = \varphi + \varphi$$

$$100 - 30 = 2\varphi$$

$$\frac{70}{2} = \varphi$$

ἄρα $\varphi = 35$. καὶ ἐπειδὴ $\chi = 100 - \varphi$ ἐστὶν, ἄρα $\chi = 65$, καὶ $65 + 35 = 100$, καὶ $65 - 35 = 30$.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ἐπειδὴ ὑποτίθεται, ὅτι τὸ Πρόβλημα προσδιωρισμένον ἐστὶ, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι καὶ δύω Ἐξισώσεις, ἢ Συνθῆκαι (§. 106.) διαφορετικαί. ὅθεν ζητοῦντες καὶ εἰς τὰς δύω Ἐξισώσεις τὴν Δύναμιν τοῦ Ποσοῦ χ, ἀποκτῶμεν δύω Δυνάμεις, αἵτινες εἰσὶ μὲν διαφόρως ἐκτιθέμεναι, εἰσὶν ὅμως Ἴσαι τῷ ἰδίῳ Ποσῷ χ. καὶ ἐπειδὴ δύω πράγματα, τὰ ὁποῖα εἰσιν Ἴσα ἑτέρῳ τινὶ, εἰσὶ καὶ ἀλλήλοις Ἴσα, ἄρα καὶ αἱ δύω Δυνάμεις αὗται αἱ διαφόρως ἐκτιθέμεναι, εἰσιν Ἴσαι ἀλλήλαις. ὅθεν δυνάμεθα διὰ τούτων τῶν δύω Δυνάμεων νὰ σχηματίσωμεν μίαν ἄλλην Ἐξίσωσιν, ἀφ' ἧς τοιούτῳ τρόπῳ ἀποβληθῇ ἡ ἄλλη ἄγνωστος Ποσότης. ἔπειτα τὴν εὑρεθεῖσαν Δύναμιν τοῦ φ, θέτομεν εἰς τὴν πρώτην Ἐξίσωσιν εἰς τὸν τόπον τοῦ φ, καὶ οὕτως ἀποκτῶμεν τὴν Δύναμιν τοῦ Μεγέθους χ.

ΠΟ῾ΡΙΣΜΑ.

§. 119. Ἂν ἀναλύσωμεν διὰ τῶν Γραμμάτων τὸ ἀνωτέρω Πρόβλημα, ἀποκτῶμεν πάλιν ἕνα Κοινὸν Τύπον, ἢ Ἔκθεσιν, διὰ νὰ

εὑρίσ-

εὑρίσκωμεν δύω ἀριθμοὺς, τῶν ὁποίων τὸ Κεφάλαιον καὶ ἡ Διαφορὰ εἶναι δεδομένα. ἂν οὖν ληφθῇ τὸ Κεφάλαιον $= \kappa$ ἡ δὲ Διαφορὰ $= \delta$, ἀποκτῶμεν τὰ ἑξῆς.

$$\chi + \varphi = \kappa$$
$$\chi - \varphi = \delta$$

$$\chi = \kappa - \varphi$$
$$\chi = \delta + \varphi$$

$$\kappa - \varphi = \delta + \varphi$$
$$\kappa - \delta = 2\varphi$$
$$\frac{\kappa - \delta}{2} = \varphi, \text{ ἢ } \frac{1}{2}\kappa - \frac{1}{2}\delta = \varphi$$

ἂν ζητῆται τὸ Ποσὸν χ γίνεται οὕτως

$$\varphi = \kappa - \chi$$
$$\chi - \delta = \varphi$$

$$\kappa - \chi = \chi - \delta$$
$$\kappa + \delta = 2\chi$$
$$\frac{\kappa + \delta}{2} = \chi, \text{ ἢ } \frac{1}{2}\kappa + \frac{1}{2}\delta = \chi$$

λοιπὸν ἂν προσθέσωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ Κεφαλαίου εἰς τὸ ἥμισυ τῆς Διαφορᾶς, ἀποκτῶμεν τὸν μείζονα ἀριθμόν. ἂν δὲ ἀφέλωμεν τὸ ἥμισυ τῆς Διαφορᾶς ἐκ τοῦ ἡμίσεως Κεφαλαίου, ἀποκτῶμεν τὸν ἐλάσσονα ἀριθμόν. εἰς τὸ προτεθὲν Παράδειγμα τὸ ἥμισυ τοῦ Κεφαλαίου ἐστὶ $= 50$. καὶ ἡ ἡμιδιαφορὰ $= 15$. ὅθεν $50 + 15 = 65$. καὶ $50 - 15 = 35$, ἡ ἀλήθεια αὕτη ἐκτίθεται ἐν τῷ ἀκολούθῳ Θεωρήματι.

ΘΕΩ῾ΡΗΜΑ.

Ἡ ἡμιδιαφορὰ συναπτομένη μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ Κεφαλαίου, παρέχει τὸν μείζονα ἀριθμόν. ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῇ αὕτη ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως τοῦ Κε-

φαλαίου,

φαλαίου, προκύπτει ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς, ἢ Ποσόν.

ΣΧΟΛΙΟΝ α΄.

§. 120. Ταῦτα τὰ Προβλήματα δύνανται νὰ λυθῶσι καὶ ἔτζι, δηλαδὴ τὴν ἐν τῇ πρώτῃ Ἐξισώσει εὑρεθεῖσαν Δύναμιν τοῦ Ποσοῦ χ, θέτομεν παρευθὺς εἰς τὴν δευτέραν Ἐξίσωσιν εἰς τὸν τόπον τοῦ χ, καὶ ἐξορίζομεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὸ Ποσὸν χ. οἷον ἐν τῷ προκειμένῳ Προβλήματι ἐκ τῆς πρώτης Ἐξισώσεως ἐστὶν $\chi = 100 - \varphi$. ὅθεν ἐν τῇ δευτέρᾳ Ἐξισώσει $\chi - \varphi = 30$ εἰς τὸν τόπον τοῦ χ γράφομεν τὴν ἐν τῇ πρώτῃ Ἐξισώσει εὑρεθεῖσαν Δύναμιν $100 - \varphi$, καὶ ἡ Ἐξίσωσις ἔσται $100 - \varphi - \varphi = 30$, ἤτοι $100 - 30 = 2\varphi$. ὡς ἀνωτέρω δέδεικται.

ΣΧΟΛΙΟΝ β΄.

§. 121. Ἀφ' οὗ σχηματίσωμεν ὀρθῶς δύο Ἐξισώσεις διὰ τῆς προτεθείσης Συνθήκης, δυνάμεθα νὰ ἀπαλείψωμεν ἐκ τοῦ μέσου ἓν ὁποιονδήποτε τῶν δύο ἀγνώστων Ποσῶν, ἀφαιροῦντες τὸ ἓν ἐκ τοῦ ἑτέρου, ὥστε διὰ τῶν ἐναντίως τιθεμένων Σημείων νὰ γένῃ ἄφαντος ἡ ἄγνωστος Ποσότης. οὕτως εἰσὶν ἐν τῷ πρώτῳ Παραδείγματι (§. 118) αὗται αἱ δύο Ἐξισώσεις.

$$\chi + \varphi = 100$$

$$\chi - \varphi = 30$$

ἀφαιρεθείσης οὖν ταύτης ἐκ τῆς ἀνωτέρω μένει $2\varphi = 70$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓ. β΄.

Πέτρος τις καὶ Παῦλος ἐκέρδησαν παίζοντες, τόσα φέρ' εἰπεῖν, Γρόσια, ὥστε ἂν ὁ Πέτρος δώσῃ εἰς τὸν Παῦλον ἓν τοῦ ἑαυτοῦ Κέρδους, ἔχουσι τότε καὶ οἱ δύο ἴσον Κέρδος. ἂν ὅμως δώσῃ ὁ Παῦλος πρὸς τὸν Πέτρον ἓν ἀπὸ

ἀπὸ τὸ ἴδικόν του Κέρδος, τότε ὁ Πέτρος θέλει ἔχῃ Κέρδος διπλάσιον τοῦ Παύλου. ζητεῖται λοιπὸν πόσα ἐκέρδησεν ἑκάτερος τούτων.

ἔστω τὸ τοῦ Πέτρου Κέρδος $= \chi$

τὸ δὲ τοῦ Παύλου . $= \varphi$

ὅθεν κατὰ μὲν τὴν πρώτην Συνθήκην $\chi - 1 = \varphi + 1$

κατὰ δὲ τὴν δευτέραν . . . . . $\chi + 1 = (\varphi - 1)^2$

$$\left.\begin{array}{l}\text{ἐκ τῆς πρώτης Ἐξισώσ. ἔσται } \chi = \varphi + 1 + 1 \\ \text{ἐκ δὲ τῆς δευτέρας . } \chi = 2\varphi - 2 - 1\end{array}\right\}$$

ἐντεῦθεν γίνεται $\varphi + 2 = 2\varphi - 3$

ἤτοι $2 + 3 = 2\varphi - \varphi$

ἤτοι $5 = \varphi$

καὶ ἐπειδὴ τὸ $\chi = \varphi + 2$ ὑπάρχει, ἔσται ἄρα $\chi = 5 + 2 = 7$, διότι ἂν ὁ πρῶτος δώσῃ εἰς τὸν δεύτερον ἕν, θέλουσιν ἔχῃ καὶ οἱ δύο ἀπὸ 6. εἰδὲ δώσει ὁ δεύτερος εἰς τὸν πρῶτον ἕν, τότε εἰς μὲν τὸν δεύτερον ἐγκαταλείπονται 4. ὁ δὲ πρῶτος ἔχει 8, ὅπερ ἐστὶ τὸ διπλάσιον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓ. γ΄.

Ὅλη ἡ Ποσότης τῶν χρημάτων τοῦ Πέτρου μετὰ τοῦ ἡμίσεως τῆς τοῦ Παύλου Ποσότητος εἶναι $= 20$ Γροσίοις. ἡ δὲ τοῦ Παύλου Ποσότης μὲ τὸ τρίτον μέρος τῆς τοῦ Πέτρου Ποσότητος ὑπάρχει ὡσαύτως $= 20$.

ἔστω ἡ τοῦ Πέτρου Ποσ. χ, τὸ δὲ τρίτον Μέρος ταύτης $= \frac{1}{3}\chi$, ἤτοι $\frac{\chi}{3}$.

ἡ τοῦ Παύλου Ποσ. φ, τὸ δὲ ἥμισυ $= \frac{1}{2}\varphi$, ἢ $\frac{\varphi}{2}$.

ὅθεν πρώτη Συνθήκη $\chi + \frac{\varphi}{2} = 20$. $\frac{2\chi + \varphi}{2} = 20$.

$2\chi + \varphi = 40$.

δευτέρα

δευτέρα Συνθήκη $\varphi + \frac{\chi}{3} = 20$, $\frac{3\varphi+\chi}{3} = 20$. $3\varphi + \chi = 60$

ἐκ τῆς πρώτης Ἐξισώσεως $\chi = \frac{40 - \varphi}{2}$

ἐκ τῆς δευτέρας $\chi = 60 - 3\varphi$ λοιπὸν

$$\frac{40-\varphi}{2} = 60 - 3\varphi$$
$$40 - \varphi = 120 - 6\varphi$$
$$6\varphi - \varphi = 120 - 40$$
$$5\varphi = 80$$
$$\varphi = 16;\ \chi = 60 - 48.\ \chi = 12$$

ἡ τοῦ Πέτρου Ποσότης $12 + \frac{16}{2} = 20$

ἡ τοῦ Παύλου . . $16 + \frac{12}{3} = 20$: ὅπερ ἔδει δεῖξαι

ΠΑΡΑ´ΔΕΙΓ. δʹ.

Ὁδοιπόροι τινὲς δειπνήσαντες παρά τινι ξενοδόχῳ, ἠρώτησαν αὐτόν, πόσα πρέπει νὰ καταβάλῃ ἕκαστος αὐτῶν; ὁ δὲ ξενοδόχος ἀπεκρίθη, ἂν ἦσαν εἰς τὸν δεῖπνον ἐπὶ τρεῖς περισσότεροι, ἔπρεπε νὰ πληρώσῃ ἕκαστος ἓν Γρόσιον ὀλιγώτερον, ἂν ὅμως ἦσαν δύω ὀλιγώτεροι, ἔπρεπε νὰ καταβάλῃ ἕκαστος ἓν Γρόσ. περισσότερον: ζητεῖται τοίνυν, πόσοι ἄνθρωποι ἦσαν, καὶ πόσα Γρόσ. πρέπει νὰ πληρώσῃ ἕκαστος.

ὁ τῶν δειπνησάντων ἀριθμὸς ἔστω $= \chi$. τὰ Γρόσ. ἑκάστου $= \varphi$

ὅλη

ὅλη ἄρα ἡ Ποσότης τῶν Γροσίων $= \chi\varphi$.

ὅσα ἕκαστος χρεωστεῖ νὰ πληρώσῃ $= \frac{\chi\varphi}{\chi}$

κατὰ τὴν πρώτην Συνθ.

$$\frac{\chi\varphi}{\chi+3} = \varphi - 1$$
$$\chi\varphi = \chi\varphi - \chi + 3\varphi - 3$$
$$\chi\varphi - \chi\varphi + \chi = 3\varphi - 3$$
$$\chi = 3\varphi - 3$$
$$3\varphi - 3 = 2\varphi + 2$$
$$\varphi = 5$$

κατὰ τὴν δευτέραν Συνθήκην

$$\frac{\chi\varphi}{\chi-2} = \varphi + 1$$
$$\chi\varphi = \chi\varphi + \chi - 2\varphi - 2$$
$$2\varphi + 2 = \chi\varphi - \chi\varphi + \chi$$
$$2\varphi + 2 = \chi$$
$$\chi = 15 - 3 = 12$$

ἦσαν ἄρα οἱ δειπνήσαντες $= 12$, ὅσα δὲ ἕκαστος χρεωστεῖ νὰ καταβάλῃ $= 5$, ὅλη δὲ ἡ Ποσότης $= 60$, ὅθεν ἂν ἦσαν οἱ δειπνήσαντες δέκα, ἔπρεπε νὰ πληρώσῃ ἕκαστος τούτων Γρόσ. 6. εἰ δὲ ἦσαν δέκα πέντε, τότε ἐχρεώστει ἕκαστος νὰ καταβάλῃ 4 Γρόσ.

ΠΑΡΑ´ΔΕΙΓ. εʹ.

Ἕνας θέλει νὰ μίξῃ (ἀνακατώσῃ) ἐκ δύω εἰδῶν οἴνου 100 Ξέστας *, καὶ τοῦ μὲν πρώτου εἴδους ὁ Ξέστης τιμᾶται 42 Παράδ. τοῦ δὲ δευτέρου εἴδους ὁ Ξέστης τιμᾶται 27 Παράδ., πρέπει δὲ πρὸς τούτοις ὁ Ξέστης τοῦ μεμιγμένου οἴνου νὰ πωλῆται 30 Παράδ.. ζητεῖται λοιπόν, πόσους Ξέστας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου τούτων τῶν εἰδῶν.

Ἔστω

* Ξέστης εἶναι εἶδος Μέτρου.

Ἔςω ὁ ἀριθμὸς τῶν Ξεστῶν, ὁπȣ̃ πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τȣ̃ κρείττονος οἴνȣ $= \chi$ τȣ̃ δὲ κατωτέρȣ οἴνȣ $= \varphi$, τὸ δὲ Κεφάλαιον ὅλων τῶν Ξεστῶν τȣ̃ μιχθέντος οἴνȣ $= 100$. ἡ δὲ τιμὴ τȣ̃ πρώτȣ εἴδȣς $= 42$. τȣ̃ δὲ δευτέρȣ $= 27$. ἅπασα δὲ ἡ τιμὴ τȣ̃ μιχθέντος οἴνȣ $= 30 \times 100 = 3000$. οἱ Ξέσται ϗ τῶν δύω εἰδῶν τȣ̃ μιχθέντος οἴνȣ $\chi + \varphi = 100$, ἡ τιμὴ $42\chi + 27\varphi = 3000$.

κατὰ τὴν πρώτην Συνθήκην $\chi = 100 - \varphi$

κατὰ τὴν δευτέραν . . . $\chi = \dfrac{3000 - 27\varphi}{42}$

$$100 - \varphi = \frac{3000 - 27\varphi}{42}$$
$$4200 - 42\varphi = 3000 - 27\varphi$$
$$4200 - 3000 = 42\varphi - 27\varphi$$
$$1200 = 15\varphi$$
$$\frac{1200}{15} = \varphi \,.\; 80 = \varphi.$$

Εὕρηται ἄρα, ὅτι ἐκ τȣ̃ δευτέρȣ εἴδȣς πρέπει νὰ λάβῃ Ξέστας 80. ϗ ἑπομένως ἐκ τȣ̃ πρώτȣ 20. ἡ τιμὴ τȣ̃ δευτέρȣ εἶναι $80 \times 27 = 2160$, τȣ̃ δὲ πρώτȣ $20 \times 42 = 840$. ϗ ὅτως γίνεται $2160 + 840 = 3000$.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. ϛ'.

Κάπηλός τις ὁ ὁποῖος ἐπώλει προτήτερα ἓν εἶδος οἴνȣ πρὸς 16 Παράδας τὸ μέτρον, θέλει νὰ χύσῃ ὕδωρ εἰς κάθε μέτρον, ϗ νὰ πωλῇ εἰς τὸ ἑξῆς πρὸς 10 Παράδ. τὸ μέτρον. ζητεῖται λοιπὸν, πόσον οἶνον ϗ ὕδωρ πρέπει νὰ λάβῃ ὅτος εἰς κάθε μέτρον. ἡ ζητȣμένη Πο-

σότης τȣ̃ οἴνȣ $= \chi$, τȣ̃ δὲ ὕδατος $= \varphi$ τὰ ὁποῖα συναφθέντα ἀλλήλοις, εἰσὶν Ἴσα μὲ ἓν μέτρον δηλαδὴ $\chi + \varphi = 1$.

ἡ νέα τιμὴ τȣ̃ οἴνȣ ἔσται $= 10$ Παρᾶσι. ϗ ἐπειδὴ τὸ μέτρον τȣ̃ οἴνȣ τιμᾶται 16 Παραδ., τȣ̃ δὲ ὕδατος τιμᾶται μηδενός. ἔςαι ἄρα $16\chi + \varphi \times 0 = 10$

ἐκ τῆς πρώτης Ἐξισώσεως $\chi = 1 - \varphi$

ἐκ τῆς δευτέρας $\chi = \dfrac{10 - \varphi \times 0}{16}$ δηλαδὴ $= \dfrac{10}{16}$

$$1 - \varphi = \frac{10}{16}$$
$$16 - 16\varphi = 10$$
$$16 - 10 = 16\varphi$$
$$\frac{6}{16} = \varphi$$

Εὕρηται ἄρα ἡ Ποσότης τȣ̃ ὕδατος $= \dfrac{6}{16}$, ἤτοι $\dfrac{3}{8}$, ϗ ἑπομένως πρέπει νὰ λάβῃ $\dfrac{5}{8}$ οἴνȣ διὰ νὰ γένῃ $\dfrac{8}{8}$ ἤγȣν ἓν μέτρον.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ α'.

§. 122. Ἡ ἀλήθεια ταύτης τῆς λύσεως δείκνυται ϗ ἐν τοῖς ἑξῆς ἐκ τȣ̃ Κανόνος τῆς ἀναλογίας.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ, β'.

§. 123. Αὐτὰ τὰ Προβλήματα ὀνομάζονται μίξεως Κανόνες, ϗ λύονται ὡσαύτως ὑπὸ τῶν ἀριθμητικῶν κατά τινα Κανόνα Ἰδιαίτερον, ϗ ἐν τȣ́τοις ἁρμόδιον. οἱ Κανόνες ὅτοι εἶναι πολλὰ ὠφελεῖς

φελεῖς εἰς τὰς οἰκονομίας τῶν Καπήλων, ἢ ἄλλων, εἰς τὴν Φυσικὴν, καὶ Ἰατρικὴν κ. τ. λ. ὅπου θεωρεῖται ἀνάλογος Μίξις μερῶν. ἐντεῦθεν δύναταί τις νὰ σχηματίσῃ πάλιν ἕνα γενικὸν Τύπον πρὸς λύσιν τούτων τῶν Προβλημάτων, ὁποιονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ μιγνύμενον, καθάπερ δὴ καὶ τὰ μικτέα μέρη ἂς εἶναι ὁποιασοῦν ἀξίας. ἂς ὑποτεθῶσι τὰ Μικτέα Ποσὰ χ, καὶ ϕ, τὸ δὲ συντιθέμενον ὅλον ἔστω α, ἡ δὲ τιμὴ τοῦ χ Ποσοῦ ἔστω β, ἡ δὲ τοῦ ϕ ἔστω γ, ἡ δὲ τιμὴ τῶν μιχθέντων μερῶν ἔστω δ. λοιπὸν ὅλη ἡ τιμὴ τοῦ μεμιγμένου ἔσται $\alpha\delta$.

$$\chi + \phi = \alpha$$
$$\beta\chi + \gamma\phi = \alpha\delta$$
$$\chi = \alpha - \phi$$
$$\chi = \frac{\alpha\delta - \gamma\phi}{\beta}$$
$$\alpha - \phi = \frac{\alpha\delta - \gamma\phi}{\beta}$$
$$\alpha\beta - \beta\phi = \alpha\delta - \gamma\phi$$
$$\alpha\beta - \alpha\delta = \beta\phi - \gamma\phi$$
$$\frac{\alpha\beta - \alpha\delta}{\beta - \gamma}\ \phi$$

δηλαδὴ πολλαπλασιάζομεν τὸ περισσότερον Ποσὸν μετὰ τῆς μείζονος τιμῆς, καὶ ἐκ τούτου ἀφαιροῦμεν τὸ Γενόμενον, τὸ ὁποῖον γίνεται ἐκ τοῦ Ἰδίου Ποσοῦ πολλαπλασιαζομένου μετὰ τῆς τιμῆς τῶν Μικτέων μερῶν, εἶτα διαιροῦμεν τὸ λοιπὸν διὰ τῆς Διαφορᾶς τῶν τιμῶν, ἢ τὸ Πηλίκον ἔσται ἴσον τῷ μικροτέρῳ Μικτέῳ Ποσῷ.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ γ'.

§. 124. Οἱ δὲ ἄλλοι Κανόνες τῆς Μίξεως εἰς τοὺς ὁποίους πλέκονται πλείονα Μικτέα Μέρη, ἀνήκουσιν εἰς τὰ ἀπροσδιόριστα Προβλήματα, περὶ τῶν ὁποίων κατωτέρω θέλομεν πραγματευθῇ.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ γ'.

§. 125. Νὰ λύωμεν τινα Ἐξίσωσιν τριῶν ἀγνώστων Ποσῶν.

ΠΡΑΚΤΕ'Α

ΠΡΑΚΤΕ'Α.

α'.) Πρῶτον ἐξαλείφομεν εὐθὺς τὸ Ποσὸν χ ἐκ τῶν δύω διδομένων Ἐξισώσεων κατὰ τοὺς προτεθέντας Κανόνας, καὶ ζητοῦντες τὴν Δύναμιν τοῦ Ποσοῦ ϕ, ποριζόμεθα αὐτὴν μετὰ μόνου τοῦ ἀγνώστου Ποσοῦ ψ.

β'.) Ἔπειτα ἀποβάλλομεν ὡσαύτως τὸ Ποσὸν ϕ, καὶ ζητοῦντες τὴν Δύναμιν τοῦ Ποσοῦ χ, ἀποκτῶμεν αὖθις ταύτην τὴν Δύναμιν ἔχουσαν μεθ' ἑαυτῆς τὸ ἄγνωστον Ποσὸν ψ.

Ἐντεῦθεν θέτομεν καὶ τὰς δύω εὑρεθείσας Δυνάμεις, εἰς μίαν τῶν δεδομένων Ἐξισώσεων, καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ποριζόμεθα τὴν μόνην ἄγνωστον Ποσότητα ψ.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ.

Ἀγοράσας τὶς τρεῖς Ἵππους, καὶ ἐρωτηθεὶς, πόσου ἕκαστον τούτων ἠγόρασεν, εἶπεν, ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου Ἵππου συνάμα τῷ ἡμίσει τῆς τιμῆς τῶν ἐπιλοίπων εἶναι 25 χρυσᾶ (τουτέστι φλορία). ἡ δὲ τιμὴ τοῦ δευτέρου μετὰ τοῦ τρίτου μέρους τῶν λοιπῶν εἶναι 26 φλ. ἡ δὲ τιμὴ τοῦ τρίτου Ἵππου μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου γίνεται 29 φλ. ζητεῖται λοιπὸν, πρὸς πόσα ἕτος ἠγόρασεν ἕκαστον τούτων τῶν Ἵππων.

πρώτη Συνθήκη $\chi + \frac{\phi}{2} + \frac{\psi}{2} = 25$

δευτέρα Συνθήκη $\phi + \frac{\chi}{3} + \frac{\psi}{3} = 26$

τρίτη Συνθήκη $\psi + \frac{\chi}{2} + \frac{\phi}{2} = 29$

 φέρο-

φέρομεν αὐτὰ πρῶτον εἰς τὸν αὐτὸν Παρονομαστὴν, ἔπειτα ἀκεραιοῦμεν τὰ τούτων Κλάσματα, οἷον

$$\frac{2\chi+\varphi+\psi}{2}=25,\ \text{ἤτοι}\ 2\chi+\varphi+\psi=50$$

$$\frac{3\varphi+\chi+\psi}{3}=26,\ \text{ἢ}\ 3\varphi+\chi+\psi=78$$

$$\frac{2\psi+\chi+\varphi}{2}=29,\ \text{ἤτοι}\ 2\psi+\chi+\varphi=58$$

κατὰ τὸν πρῶτον Καν. ἐκ τῆς δευτέρας Ἐξισώσ.

$$\chi=78-3\varphi-\psi$$

ἐκ τῆς τρίτης $\chi=58-2\psi-\varphi$

$$78-3\varphi-\psi=58-2\psi-\varphi$$
$$78-58=3\varphi-\varphi-2\psi+\psi$$
$$20=3\varphi-\psi$$

$\frac{20+\psi}{2}=\varphi$. ἄρα ἡ Δύναμις τοῦ φ ὑπάρχει $=\frac{20+\psi}{2}$

κατὰ τὸν δεύτερον Καν. ἐκ τῆς πρώτης Ἐξισώσ.

$$\varphi=50-2\chi-\psi$$

ἐκ τῆς τρίτης $\varphi=58-2\psi-\chi$

$$50-2\chi-\psi=58-2\psi-\chi$$
$$2\psi+\chi-2\chi-\psi=58-50$$
$$\psi-\chi=8$$
$$\psi-8=\chi$$

λοιπὸν ἡ Δύναμις τοῦ χ ἐστὶν $=\psi-8$

κατὰ τὸν τρίτον Κανόνα εἰς τὴν πρώτην Ἐξίσωσιν γράφομεν ἤδη ἀντὶ τοῦ 2χ τὴν Δύναμιν $(\psi-8)^2$, δηλαδὴ $2\psi-16$. καὶ ἀντὶ τοῦ φ γράφομεν $\frac{20+\psi}{2}$, ἐκ τῆς πρώτης Ἐξισώσεως $2\chi+\varphi+\psi=50$ γίγνεται $2\psi-16$ +

$$+\frac{20+\psi}{2}+\psi=50,\ \text{ἤτοι}\ \frac{4\psi-32+20+\psi+2\psi}{2}=50$$

$$4\psi-32+20+\psi+2\psi=100$$
$$7\psi-12=100$$
$$7\psi=112$$
$$\psi=\frac{112}{7}=16.$$

καὶ ἐπειδὴ τυγχάνει $\chi=\psi-8$. ἄρα $\chi=8$, καὶ $\varphi=\frac{20+\psi}{2}=\frac{36}{2}=18$, λοιπὸν ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου Ἵππου εὕρηται $=8$, τοῦ δὲ δευτέρου $=18$, τοῦ δὲ τρίτου $=16$.

κατὰ τὴν πρώτην Συνθήκην $8+9+8=25$.

κατὰ τὴν δευτέραν $18+2\frac{2}{3}+5\frac{1}{3}=26$.

κατὰ τὴν τρίτην $16+4+9=29$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ Δεῖξις ἐκδηλοῦται ἐκ τῶν ἑξῆς ἀξιωμάτων. „Δύω πράγματα ἑτέρῳ τινὶ τρίτῳ Ἴσα ὄντα, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν Ἴσα. καὶ Ἴσα πράγματα μένουσιν Ἴσα, ἂν εἰς τὸν τόπον τούτων τεθῶσιν Ἴσα. ἐὰν λοιπὸν τοιούτῳ τρόπῳ ἀπομακρύνωμεν τὰ ἄγνωστα Ποσὰ, θέτοντες εἰς τὸν τόπον τούτων τὴν Δύναμιν αὐτῶν, ἀποκαθίσταται ἡ Ἐξίσωσις μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον Ποσότητα, τῆς ὁποίας ἡ ἐπίλυσις λαμβάνει τόπον πλέον κατὰ τοὺς προαποδειχθέντας Κανόνας.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 126. Ἐὰν δὲν περιέχωνται εἰς κάθε Ἐξίσωσιν ὅλα τὰ Μέλη, δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἀποβάλλωμεν δύω φορὰς τὰ ἄγνωστα Ποσὰ, ἀλλ' ἀφ' οὗ εἰς τὸν τόπον τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου Ποσοῦ θέσωμεν τὴν Δύναμιν τούτου, μανθάνομεν τότε τὴν Δύναμιν τοῦ ἄλλου, ὡς ἐν τῷ ἀκολούθῳ Παραδείγματι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Ὁ Γεώργιος, φέρ' εἰπεῖν, χρεώστης ὤν, καὶ ἐρωτώμενος, πόσα ὀφείλει, λέγει τοσοῦτον μόνον, ὅτι χρεωστεῖ τῷ Πέτρῳ καὶ Παύλῳ ὁμοῦ 10000, καὶ πάλιν τῷ Πέτρῳ καὶ Ἰωάννῃ ὁμοῦ 11000, καὶ πάλιν τῷ Παύλῳ καὶ Ἰωάννῃ ὁμοῦ 9000. ζητεῖται λοιπὸν εἰς εὕρεσιν, πόσα οὗτος ἑκάστῳ χρεωστεῖ.

$$\chi + \varphi = 10000 \,.\; \chi + \psi = 11000 \,.\; \varphi + \psi = 9000$$

ἐκ τῆς πρώτης Ἐξισώσεως $\chi = 10000 - \varphi$

ἐκ τῆς δευτέρας . . . $\chi = 11000 - \psi$

$$10000 - \varphi = 11000 - \psi$$

$$\psi - \varphi = 11000 - 10000$$

$$\psi = 1000 + \varphi$$

ἂν εἰς τὴν τρίτην Ἐξίσωσιν ἀντὶ τοῦ μεγέθους ψ θέσωμεν τὴν εὑρεθεῖσαν αὐτοῦ Δύναμιν, ἀποκτῶμεν ἀντὶ τοῦ ψ τὰ ἑξῆς

$$\varphi + 1000 + \varphi = 9000$$

$$2\varphi = 9000 - 1000$$

$$\varphi = \frac{8000}{2} = 4000$$

ἐν-

ἐντεῦθεν ποριζόμεθα $\chi = 10000 - \varphi$, δηλαδὴ $10000 - 4000 = 6000$, καὶ $\psi = 1000 + \varphi$, δηλαδὴ $1000 + 4000$, ἄρα $\psi = 5000$, καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὑρίσκεται, ὅτι χρεωστεῖ εἰς μὲν τὸν Πέτρον $= 6000$, εἰς δὲ τὸν Παῦλον $= 4000$, εἰς δὲ τὸν Ἰωάννην $= 5000$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ δʹ.

§. 127. Νὰ λύωμεν μίαν Ἐξίσωσίν τινος ἀπροσδιορίστου Προβλήματος.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

αʹ.) Ἀποκαθιστῶμεν τὴν Ἐξίσωσιν οὕτως, ὥστε μόνον μία ἄγνωστος Ποσότης νὰ εὑρίσκηται εἰς τὸ ἓν μέρος κειμένη, καὶ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ δεύτερον μέρος τῆς Ἐξισώσεως, τὸ ὁποῖον περιέχει τὴν ἄγνωστον Ποσότητα μετὰ τῶν Ἐγνωσμένων. ἔπειτα λαμβάνομεν ἐν τῷ δευτέρῳ μέρει μίαν Δύναμιν τῆς ἀγνώστου Ποσότητος κατὰ τὸ δοκοῦν, καὶ ζητοῦμεν τὴν Δύναμιν τῆς πρώτης. πρέπει ὅμως ἐνταῦθα νὰ προσέχωμεν, ἂν αὕτη ἡ Δύναμις εἶναι ἁρμόζουσα εἰς λύσιν τοῦ δεδομένου Προβλήματος, καὶ οὕτως ἀποκτῶμεν τὴν πρώτην λύσιν.

βʹ.) Ἔπειτα λαμβάνομεν ἕνα ἄλλον ἀριθμὸν, καὶ ζητοῦμεν, ἂν καὶ οὗτος ὁ ἀριθμὸς εἶναι προσαρμόδιος εἰς λύσιν τῆς προκειμένης ὑποθέσεως. καὶ οὕτως ποιοῦντες, ποριζόμεθα τὴν δευτέραν λύσιν.

γʹ.) Οὕτως ἐξακολουθοῦμεν, ἕως οὗ νὰ φθάσῃ ἡ λύσις εἰς τὸ ἀδύνατον. τουτέστι νὰ ληφθῇ ἀριθμὸς ἢ πολλὰ μείζων, ἢ πολλὰ ἐλάσσων, ὡς ἐν τῷ Παραδ. ὁρᾶται.

 ΠΑΡΑ-

ΠΑΡΑΔΕΙΓ. α'.

Ἔστωσαν δύω ἀριθμοὶ εἰς εὕρεσιν, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι $= 12$. ἡ Ἐξίσωσις ἔσαι $\chi+\varphi=12$, λοιπὸν $\chi=12-\varphi$. ὅθεν ἂν ληφθῇ τὸ $\varphi=1$, ἔσαι τὸ $\chi=11$. ἂν δὲ ληφθῇ τὸ $\varphi=2$. ἔσται τότε τὸ $\chi=10$. εἰ δ' αὖ τὸ $\varphi=3$, ἔσαι $\chi=9$, ϗ ὕτω ἀκολύθως, ὥστε ἐνταῦθα εἰσὶν ἕνδεκα δυναταὶ λύσεις. ἐπειδὴ τόσας Δυνάμεις εἰς ἀκεραίυς ἀριθμὺς δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀπὸ τῦ φ, αἵτινες συμβάλλυσι πρὸς λύσιν τῦ Προβλήματος. πρὸς τύτοις δυνάμεθα ϗ διὰ κεκλασμένων ἀριθμῶν νὰ λύσωμεν τὸ Πρόβλημα, τυτέστι ἂν ληφθῇ τὸ $\varphi = \frac{1}{2}$, ἔσται $\chi=11+\frac{1}{2}$. εἰ δ' αὖθις τὸ $\varphi=\frac{1}{4}$, ἔσται $\chi=11+\frac{3}{4}$. εἰ δὲ τὸ $\varphi = 6+\frac{2}{3}$, ἔσται $\chi=5+\frac{1}{3}$. ϗ ὕτω δυνάμεθα νὰ ἐξακολυθήσωμεν τὴν λύσιν ἀδιορίστως, ὥστε ἂν ληφθῇ τὸ $\varphi=12$, τότε ἔσται τὸ $\chi=0$, ϗ ἑπομένως ἡ λύσις εἶναι ἀδύνατος. ἐπειδὴ ὁ δεύτερος ἀριθμὸς κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον χάνεται. ἂν δὲ ληφθῇ τὸ $\varphi=13$, ἔσται τὸ $\chi=-1$, ἂν δὲ $\varphi=20$, ἔσαι $\chi=-8$, ϗ ὕτω περαιτέρω, ὥστε διὰ τῶν ἀποφατικῶν Ποσοτήτων ἠμπορῦμεν νὰ ἐξακολυθήσωμεν τὴν λύσιν ἐπ' ἄπειρον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓ. β'.

Εἰς 30 Πτωχὺς (ἄνδρας, γυναῖκας, ϗ παιδία) μοιράζονται 100 γρόσ. ὕτως, ὥςε ἑκάςῳ ἀνδρὶ δίδωνται

8 Γρόσ. ἑκάστῃ δὲ γυναικὶ 5, ϗ ἑκάςῳ παιδὶ 1 Γρόσ. ζητεῖται λοιπόν. πόσοι ἄνδρες εἰσίν, πόσαι δὲ γυναῖκες, ϗ πόσα παιδία·

$\chi+\varphi+\psi = 30$, ὁ τῶν Πτωχῶν ἀριθμὸς

$8\chi+5\varphi+1\psi=100$, τὰ μοιραστέα Γρόσια.

ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως $\chi = 30-\varphi-\psi$

ἐκ τῆς δευτέρας . . . . $\chi = \frac{100-5\varphi-\psi}{8}$

$$30-\varphi-\psi = \frac{100-5\varphi-\psi}{8}$$

$$240-8\varphi-8\psi = 100-5\varphi-\psi$$

$$240-100 = 8\varphi-5\varphi+8\psi-\psi$$

$$140=3\varphi+7\psi$$

$$140-3\varphi=7\psi$$

$$\frac{140-3\varphi}{7}=\psi.$$

ἐπειδὴ τὸ ψ ϗ φ εἶναι σημαντικὰ ἀνθρώπων, διὰ τῦτο δὲν ἔχει τόπον εἰς λύσιν τῦ Προβλήματος ἡ ἐν Κλάσματι παρισταμένη Δύναμις. ϗ ἑπομένως ἀντὶ τῦ φ δὲν δύναται νὰ τεθῇ καμμία Δύναμις, ἥτις ἀπὸ τῶν 140 ἀφαιρεθεῖσα ϗ διαιρεθεῖσα διὰ τῦ 7, παρέχει κεκλασμένον Πηλίκον. ὅθεν ἀντὶ τῦ φ, δὲν δύνανται νὰ τεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ ὗτοι 1, 2, 3, 4, 5, 6. ἐπειδὴ διὰ τὸ ψ παρέχυσι ἀριθμὸν Κλασματώδη.

ἐὰν δὲ τεθῇ τὸ $\varphi=7$, ἔσται $\psi=\frac{119}{7}=17$. ἄρα $\chi=30-7-17=6$. ϗ $8\chi+5\varphi+\psi$. τυτέστιν $48+35+17=100$ ἡ πρώτη λύσις. οἱ λοιποὶ ἀριθμοὶ μέχρι τῦ 14, διδόασιν αὖθις κλασματικὸν Πηλίκον. εἰ δὲ τεθῇ $\phi = 14$, ἔσται $\psi = \frac{98}{7} = 14$. ὅθεν $\chi = 2$, ϗ $8\chi + 5\phi + \psi$, ἤγουν $16 + 70 + 14 = 100$ ἡ δευτέρα λύσις. ἐὰν δ' ὅμως τεθῇ τὸ $\phi = 21$, γίνεται τότε τὸ χ ἀποφατικόν. ἐπειδὴ ἤθελεν εἶναι τὸ $\psi = 11$, ὅθεν δὲν ὑπάρχει ἔτι πλέον ἄλλη δυνατὴ λύσις.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ γ'.

Ἕνας θέλει νὰ ἑνώσῃ τρία εἴδη οἴνου, τῶν ὁποίων τοῦ μὲν πρώτου οἴνου τὸ μέτρον τιμᾶται 4 Παράδ., τοῦ δὲ δευτέρου 8, τοῦ δὲ τρίτου 20 Παράδ. ϗ πρὸς τούτοις ἤθελε, ὅλος ὁ μιχθεὶς οἶνος νὰ εἶναι 20 μέτρα, ϗ νὰ πωλῇ πρὸς 10 Παράδ. τὸ μέτρον. ζητεῖται λοιπόν, πόσα μέτρα οἴνου πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους εἰς μίξιν.

$$\chi + \phi + \psi = 20$$
$$4\chi + 8\phi + 20\psi = 200$$
$$\chi = 20 - \phi - \psi$$
$$\chi = \frac{200 - 8\phi - 20\psi}{4}$$
$$20 - \phi - \psi = \frac{200 - 8\phi - 20\psi}{4}$$
$$80 - 4\phi - 4\psi = 200 - 8\phi - 20\psi$$
$$8\phi + 20\psi - 4\phi - 4\psi = 200 - 80$$
$$4\phi + 16\psi = 120$$
$$4\phi = 120 - 16\psi$$
$$\phi = 30 - 4\psi$$

ἐὰν ληφθῇ τὸ $\psi = 1$, ἔσται $\phi = 26$. ἀλλὰ τοῦτο ἀνθί-

σταται

σταται εἰς τὸ Πρόβλημα. ἐπειδὴ ὅλος ὁ συμμιχθεὶς οἶνος πρέπει νὰ εἶναι 20 μέτρα. τὸ ἴδιον συμβαίνει, ϗ ἂν ληφθῇ τὸ $\psi = 2$, ἢ $= 3$. εἰ δὲ ληφθῇ τὸ $\psi = 4$, ἔσαι $\phi = 14$, ϗ $= 2$, ἡ τιμὴ ἄρα ἔσται $4\chi + 8\phi + 20\psi$. ἤτοι $8 + 112 + 80 = 200$. εἰ δὲ λάβωμεν τὸ $\psi = 5$, ἔσαι $\phi = 10$, ϗ $\chi = 5$. ϗ ἡ τιμὴ ἄρα $20 + 80 + 100 = 200$. ϗ αὖθις ἂν ληφθῇ $\psi = 6$, ἔσται $\phi = 6$, ϗ $\chi = 8$, ϗ ἡ τιμὴ ἄρα $32 + 48 + 120 = 200$. ϗ πάλιν ἂν τεθῇ $\psi = 7$, ἔσαι $\phi = 2$, ϗ $\chi = 11$, ϗ ἡ τιμὴ $44 + 16 + 140 = 200$. ἂν ὅμως ληφθῇ τὸ $\psi = 8$, γίνονται τότε τὸ ϕ, ϗ χ ἀποφατικά, ϗ ἑπομένως ἡ λύσις ἔσται ἀδύνατος. μόνον λοιπὸν αὗται αἱ τέσσαρες λύσεις εἰσὶν ἁρμόδιαι εἰς τὸ Πρόβλημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ δ'.

Ἠγόρασέ τις χοίρους, αἶγας, ϗ ἀρνία ὅλα ὁμοῦ τὸν ἀριθμὸν 30 διὰ Γρόσ. 75, ἕκαστος δὲ τῶν χοίρων τιμᾶται 5 Γρόσ. τῶν δὲ αἰγῶν ἑκάστη Γρόσ. 3. τῶν δὲ ἀρνίων Γρόσ. 2. ὅθεν ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς ἑκάστου εἴδους.

$$\chi + \phi + \psi = 30. \qquad \chi = 30 - \phi - \psi.$$
$$5\chi + 3\phi + 2\psi = 75 \qquad \chi = \frac{75 - 3\phi - 2\psi}{5}.$$
$$150 - 5\phi - 5\psi = 75 - 3\phi - 2\psi$$
$$150 - 75 = 5\phi - 3\phi + 5\psi - 2\psi$$
$$75 = 2\phi + 3\psi$$
$$75 - 3\psi = 2\phi$$
$$\phi = \frac{75 - 3\psi}{2}$$

ἐὰν

ἂν μὲν ἀπὸ τῆς Μονάδος μέχρι τῶν 16 λάβωμεν ἕνα τούτων τῶν ἀριθμῶν Ἴσον μὲ τὸ ψ, τότε ἡ Δύναμις τοῦ φ, ἔσται ἤτοι Κλασματώδης, ἢ πολλὰ μείζων διὰ νὰ λύσῃ τὸ Πρόβλημα· εἰ δὲ ληφθῇ τὸ $\psi = 17$, ἔσται $\varphi = \frac{24}{2} = 12$. καὶ $\chi = 1$. καὶ αὖθις ληφθέντος τοῦ $\psi = 18$, προκύπτει Κλάσμα. ἂν ὅμως ὑποτεθῇ $\psi = 19$, καὶ $\psi = 21$, καὶ $\psi = 23$, ἀναφύονται αἱ ἑξῆς Δυνάμεις, καὶ τέσσαρες τρόποι ἀναλύσεως τοῦ Προβλήματος.

$\psi = 17$	$\varphi = 12$	$\chi = 1$
19	9	2
21	6	3
23	3	4

ΣΧΟ΄ΛΙΟΝ.

§. 128. Ἐνταῦθα δὲν ἀπαιτεῖται ἄλλη νεωτέρα ἀπόδειξις. ἐπειδὴ κατὰ τοὺς προαποδειχθέντας Κανόνας ζητοῦμεν τὴν Δύναμιν τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου Ποσοῦ, τὴν δὲ Δύναμιν τοῦ ἑτέρου λαμβάνομεν κατὰ τὸ δοκοῦν, καὶ οὕτω ζητοῦμεν νὰ ἀποκτήσωμεν τὴν λύσιν τοῦ Προβλήματος.

Ο΄ΡΙΣΜΟ΄Σ ζ΄.

§. 129. Πλήρης, ἢ Ἐντελὴς Τετραγωνικὴ Ἐξίσωσις εἶναι, ἔνθα ἡ ἄγνωστος Ποσότης ὑψώνεται μόνον εἰς δευτέραν Δύναμιν, καὶ ἑπομένως πρόκειται ἓν Ἐντελὲς Τετράγωνον. ὡς $\chi^2 = \alpha\alpha$. ἀτελὲς δὲ ἐστιν, ὅταν τῶν τριῶν Ὅρων (οἱ ὁποῖοι ἀπαιτοῦνται εἰς ἓν Διμελὲς Τετράγωνον, καθὼς ἐν τῷ περὶ Δυνάμεων εἴρηται) ἐλλείπῃ ὁ ἔσχατος, ἢ λείπῃ τὸ Τετράγωνον τοῦ δευτέρου Μέλους, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνάγκη νὰ προστίθεται πρὸ τῆς λύσεως, διὰ νὰ γένῃ οὕτω τὸ Τετράγωνον Ἐντελές. ὡς $\chi\chi + \alpha\chi = \beta\beta$, ἢ $\chi\chi + 17\chi = 60$, ἢ $\chi\chi + \chi = 100$.

ΠΡΟ΄ΒΛΗΜΑ ι.

§. 130. Νὰ λύωμέν τινα Τετραγωνικὴν Ἐξίσωσιν Ἐντελῆ.

ΠΡΑΚΤΕ΄Α, ἢ ΛΥ΄ΣΙΣ.

α.) Θέτομεν τὰς μὲν ἀγνώστους Ποσότητας εἰς τὸ ἓν μέρος, τὰς δὲ Ἐγνωσμένας εἰς τὸ ἕτερον.

β΄. Ἐὰν εἰς τὸ Τετράγωνον τοῦ ἀγνώστου Ποσοῦ πρόσκειται Συνεργός τις, ἢ Διαιρέτης, ἐξαλείφομεν αὐτὸν διὰ τῆς ἐναντίας πράξεως.

γ΄.) Ἐὰν τὸ Τετράγωνον ὑπάρχῃ ἀποφατικὸν, ποιοῦμεν αὐτὸ Καταφατικὸν, μεταθέτοντες εἰς τὸ ἄλλο μέρος τῆς Ἐξισώσεως. ἐπειδὴ εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑπάρχῃ ἀποφατικὸν Τετράγωνον, καθὼς δεδήλωται (§. 41).

δ΄.) Τέλος ἐξάγομεν καὶ ἐκ τῶν δύω μερῶν τὴν Τετραγωνικὴν ῥίζαν.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓΜΑ. ά.

$\frac{100 - \chi\chi}{2} = 20 - 2$, διὰ τῆς Ἐξαλείψεως τῦ Διαιρέτυ γίνεται $100 - \chi\chi = 40 - 4$. διὰ δὲ τῆς Μεταθέσεως τῶν ἀγνώστων γίν. $100 - 40 + 4 = \chi\chi$, ἤτοι $60 + 4 = 64 = \chi\chi$. ϗ διὰ τῆς Ἐξαγωγῆς τῆς Τετραγωνικῆς ῥίζης $\chi = 8$.

ΠΑΡΑΔΕΙ΄ΓΜΑ β΄.

$$8\,2 + 2\chi\chi = 180$$
$$2\chi\chi = 180 - 8\,2$$
$$\chi\chi = \frac{98}{2} = 49$$
$$\chi = \sqrt{49},\ \text{ἄρα}\ \chi = 7.$$

ΠΡΟ΄ΒΛΗΜΑ ς΄.

§. 131. Νὰ λύωμεν Ἐξίσωσίν τινα Τετραγωνικὴν ἀτελῆ.

ΠΡΑΚΤΕ΄Α, ἤ ΛΥ΄ΣΙΣ.

ά.) Μεταφέρομεν τὰ μὲν ἄγνωστα Ποσὰ εἰς τὸ ἓν μέρ☉ ὕτως, ὥστε τὸ μὲν ἀποφατικὸν Τετράγωνον τῦ ἀγνώστυ Ποσῦ χ νὰ ἀποτελῇ τὸ πρῶτον Μέλ☉, τὸ δὲ ἕτερον ἄγνωστον Ποσὸν χ, μετὰ τῦ ἑαυτῦ Συνεργῦ νὰ ἐπέχῃ τὸν τόπον τῦ δευτέρυ Μέλυς. τὰ δὲ Ἐγνωσμένα Ποσὰ θέτομεν ὅλα εἰς τὸ ἕτερον μέρ☉ τῆς Ἐξισώσεως.

β΄.) Ὁ Συνεργὸς τῦ δευτέρυ Ποσῦ χ, διαιρεῖται διὰ τῦ 2, ϗ τὸ ἐκ τῆς Διαιρέσεως Κλάσμα Τετραγωνισθὲν, προστίθεται ϗ εἰς τὰ δύω μέρη τῆς Ἐξισώσεως.

γ΄.) Ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν ἐκ τῦ πρώτυ Μέλυς, ϗ προσθέτομεν τὸ Ποσὸν χ, ϗ τὸν προτεθέντα Συνεργὸν μετὰ τῦ ἑαυτῦ παρονομασῦ, παραιτύμενοι τὸ διπλάσιον Γενόμενον, τὸ ἴδιον ποιῦμεν ϗ εἰς τὸ δεύτερον Μέρ☉ τῆς Ἐξισώσεως.

δ΄.) Τὴν δ' ἄλλην ῥίζαν, ἥτις προσήκεται εἰς τὸ ἄγνωσον Ποσὸν χ, μεταφέρομεν εἰς τὸ ἄλλο μέρος τῆς Ἐξισώσεως, ϗ ὕτω λυθήσεται τὸ Πρόβλημα.

ΠΑΡΑ΄ΔΕΙΓΜΑ ά.

$$10\chi = 600 - \chi^2$$

$\chi^2 + 10\chi = 600$ ἡ ἄλλη ῥίζα $\frac{10}{2}$, ϗ τὸ ἐξ αὐτῆς Τετράγωνον $\frac{100}{4}$.

$$\chi^2 + 10\chi + \frac{100}{4} = 600 + \frac{100}{4}$$
$$\chi + \frac{10}{2} = \sqrt{625}$$
$$\chi = 25 - 5 = 20$$

ΠΑΡΑ΄-

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ β'.

$$\chi^2+\frac{2}{3}\chi=\frac{1}{3}$$ ἡ δὲ ἄλλη ῥίζα $\frac{2}{3}:2=\frac{2}{6}$ $=\frac{1}{3}$ καὶ τὸ ἐξ αὐτῆς Τετράγωνον $\frac{1}{9}$. λοιπὸν

$$\chi^2+\frac{2}{3}\chi+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$$

$$\chi+\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$\chi=\frac{2}{3}-\frac{1}{3},$$ ἤτοι $\chi=\frac{1}{3}$

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ γ'.

$$\chi^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\right)\chi=\delta^2.$$ ἡ δὲ ἄλλη ῥίζα $\frac{\alpha-\beta}{2\gamma}$

$$\chi^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\right)\chi+\frac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{4\gamma^2}=\delta^2+\frac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{4\gamma^2}$$

$$\chi-\frac{\alpha-\beta}{2\gamma}=\sqrt{\frac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{4\gamma^2}+\delta^2}$$ τυτέστι

$$\chi=\sqrt{\frac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{4\gamma^2}+\delta^2}+\frac{\alpha-\beta}{2\gamma}$$

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

Ἔν ἀτελὲς Τετράγωνον συνίσταται ἐκ τῦ Τετραγώνυ τῆς πρώτης ῥίζης, καὶ ἐκ τῦ διπλασίυ Γινομένυ τῶν ῥιζῶν, αἵτινες πολλαπλασιάζονται μετ' ἀλλήλων. διὰ νὰ γένῃ λοιπὸν ἕν Ἐντελὲς Τετράγωνον πρέπει νὰ προστεθῇ καὶ ἡ δευτέρα ῥίζα. ἐπειδὴ ἐν τῷ διπλασίῳ Γινομένῳ, τυτέστιν ἐν τῷ χ μετὰ τῦ ἑαυτῦ Συνεργῦ ὄντι ἐμπεριέχονται δύω ῥίζαι, καὶ ἐπειδὴ τῆς μιᾶς ῥίζης Παράγων εἶναι τὸ χ, διὰ τῦτο καὶ τῆς ἑτέρας πρέπει νὰ εἶναι Παράγων ὁ Ἴδιος Συνεργός. ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ Γινόμενον εἶναι τὸ διπλάσιον, διὰ τῦτο λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τῦ Συνεργῦ (ἢ ἄλλως, διαιρῦμεν αὐτὸν διὰ τῦ 2), καὶ τῦτο Τετραγωνίσαντες, ἀποκτῶμεν τὸ ἐλλεῖπον, καὶ τύτυ προστεθέντος, ἔσται ἡ Τετραγωνικὴ Ἐξίσωσις Ἐντελής. ἀλλὰ διὰ νὰ φυλαχθῇ ἡ Ἐξίσωσις ἀκριβῶς, καὶ νὰ μὴ λυμανθῇ, καὶ κολοβωθῇ, πρέπει τῦτο τὸ ἀρεθὲν Ἐλλεῖπον νὰ προστεθῇ καὶ εἰς τὰ δύω μέρη τῆς Ἐξισώσεως. Ὅταν δὲ δύω Τετράγωνα εἶναι Ἴσα ἀλλήλοις, πρέπει καὶ ἐξαχθεῖσαι ῥίζαι νὰ εἶναι Ἴσαι ἀλλήλαις. διότι ἐπειδὴ τὰ Τετράγωνα συνίστανται διὰ τῆς πολλαπλασιάσεως τῦ αὐτῦ ἀριθμῦ ἐφ' ἑαυτόν, διὰ τῦτο εἶναι ἀδύνατον νὰ εἶναι αἱ ῥίζαι μεταξύτων Διάφοροι, ὅταν τὰ Τετράγωνα Ἴσα ἀλλήλοις ὑπάρχωσι.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ δ'.

Τὸ μὲν Συμποσύμενον δύω ἀριθμῶν εἶναι 17, τὸ δὲ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον εἶναι $=60$, ποῖοι ἄρα εἰσὶν ὗτοι οἱ δύω ἀριθμοί;

τὸ

τὸ Συμποσούμενον $\chi + \phi = 17$. $\chi = 17 - \phi$

τὸ Γενόμενον $\chi\phi = 60$. $\chi = \frac{60}{\phi}$

$$17 - \phi = \frac{60}{\phi}$$

$$17\phi - \phi^2 = 60$$

$-60 = \phi^2 - 17\phi$ ἡ δευτέρα ῥίζα $\frac{17}{2}$ τὸ δὲ Τετράγωνον $\frac{289}{4}$

$\frac{289}{4} - 60 = \phi^2 - 17\phi + \frac{289}{4}$ ἤγουν

$$\frac{289}{4} - \frac{240}{4} = \phi^2 - 17\phi + \frac{289}{4}$$

$$\frac{49}{4} = \phi^2 - 17\phi + \frac{289}{4}$$

$$\frac{7}{2} = \phi - \frac{17}{2}$$

$\frac{17}{2} + \frac{7}{2}$ ἤτοι $\phi = 12$. ϗ τὸ χ ἄρα $= 5$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 231. Ἐπειδὴ τὸ διπλάσιον Γενόμενον 17ϕ εἶναι ἀποφατικὸν, διὰ τοῦτο εἶναι ἀνάγκη ϗ θάτερος τῶν Παραγόντων, ἢ τὸ $\frac{17}{2}$, ἢ τὸ ϕ νὰ εἶναι ἀποφατικόν. καθὼς εἰς τὴν λύσιν ἡ μὲν Δύναμις τοῦ ϕ εἶναι Καταφατικὴ, ἡ δὲ τοῦ $\frac{17}{2}$ ἀποφατική. ἂν ὅμως ὑποτεθῇ τὸ ϕ ἀποφατικὸν, ϗ τὸ $\frac{17}{2}$. Καταφατικὸν, ἔσται ἡ Ἐξίσωσις $\frac{7}{2} = \frac{17}{2}$

$-\phi$.

$-\phi$, ϗ διὰ τῆς μεταθέσεως $\phi = \frac{17}{2} - \frac{7}{2} = \frac{10}{2} = 5$. τὸ ϕ ἄρα $= 5$, τὸ $\chi = 12$. ἐντεῦθεν γίνεται φανερὸν, ὅτι τοῦτο τὸ Πρόβλημα, ἢ ϗ ἐν γένει κάθε Τετραγωνικὴ Ἐξίσωσις δύναται νὰ λυθῇ διττῶς. ἐπειδὴ ἑνὸς μονομεροῦς Τετραγώνου ἔσται ἡ ῥίζα ἤτοι Καταφατικὴ, ἢ ἀποφατική. ἔπειτα τῆς ῥίζης ἐφ᾽ ἑαυτὴν πολλαπλασιασθείσης, συνίσταται Τετράγωνον πάντοτε Καταφατικόν. ὅθεν ἐν τῇ Ἐξισώσει $\chi^2 = \alpha$ τὸ ἴδιον ὑπάρχει νὰ εἶναι ἡ ῥίζα $+\chi$, ἢ $-\chi$. εἰς ἓν δὲ διμελὲς Ποσὸν, ἐὰν τὸ διπλάσιον Γενόμενον εἶναι Καταφατικὸν, αἱ ῥίζαι ἔσονται ἤτοι Καταφατικαὶ, ἢ ἀποφατικαί. ἐὰν δὲ τοῦτο τὸ Γενόμενον εἶναι ἀποφατικὸν, ἐξ ἀνάγκης ἕπεται τότε ἢ ἡ μία, ἢ ἡ ἄλλη ῥίζα νὰ εἶναι ἀποφατική. ἀλλ᾽, εἴτε κατ᾽ ἐκείνην τὴν ὑπόθεσιν, εἴτε κατὰ ταύτην εἶναι τὰ προτεθέμενα, τὸ Πρόβλημα πάντοτε λύεται ϗ κατὰ τοὺς δύω τρόπους ὀρθῶς. μ᾽ ὅλον ὁποῦ ἐνίοτε ἕνα μόνον τρόπον δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ε.

Νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν, τοῦ ὁποίου τὸ Τετραπλάσιον ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ Τετραγώνου τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, ἐγκαταλείπεται ὁ 21 ἀριθμός.

$\chi^2 - 4\chi = 21$ ἡ δευτέρα ῥίζα $\frac{4}{2} = 4$, ὅθεν

$\chi^2 - 4\chi + 4 = 21 + 4$, $\chi^2 - 4\chi + 4 = 25$

$\chi - 2 = 5$ ἢ $2 - \chi = 5$

$\chi = 7$ $2 - 5 = \chi$, ϗ $-3 = \chi$

λοιπὸν $\chi = 7$, ϗ $\chi = -3$ εἶναι δύω Δυνάμεις ἀρκοῦσαι πρὸς τὴν Ὑπόθεσιν, ὅθεν ἂν λάβωμεν τὴν πρώτην Δύναμιν ἀντὶ τοῦ χ, ἔσται τὸ Τετράγωνον 49, τὸ δὲ Τετραπλάσιον 28. ϗ τούτου ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τοῦ 49 Τετραγώνου, ἐναπολείπεται 21, οἷον $49 - 28 = 21$. ἂν ὅμως λάβωμεν τὴν δευτέραν Δύναμιν ἀντὶ τοῦ χ, ἔσται τὸ Τετράγωνον τῦ $-3=9$. τὸ δὲ Τετραπλάσιον $-3\times4=-12$, τὸ ὁποῖον ἀφαιρύμενον ἀπὸ τῦ Τετραγώνυ, πρέπει νὰ γένη Καταφατικὸν $+12$. ὅθεν $9+12=21$.

ΠΑΡΆΔΕΙΓΜΑ ϛ΄.

Ἔστω τὸ ἄθροισμα δύω ἀριθμῶν $=10$. ἡ δὲ Διαφορὰ τῶν Τετραγώνων $=40$, ποῖοι ἄρα εἰσὶν ἤτοι οἱ δύω ἀριθμοί;

$$\chi+\varphi=10,\ \chi=10-\varphi,\ \text{ϗ}\ \chi^2=100-20\varphi+\varphi^2$$
$$\chi^2-\varphi^2=40,\ \chi^2=40+\varphi^2$$
$$100-20\varphi+\varphi^2=40+\varphi^2$$
$$100-40=20\varphi+\varphi^2-\varphi^2$$
$$60=20\varphi$$
$$3=\varphi \qquad \chi=7$$
$$7+3=10 \qquad 49-9=40$$

ΠΑΡΆΔΕΙΓΜΑ ζ΄.

Νὰ εὕρωμεν δύω ἀριθμὺς, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα δίδοται $=10$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν Τετραγώνων $=58$,

$$\chi+\varphi=10,\ \chi=10-\varphi,\quad \chi^2=100-20\varphi+\varphi^2$$
$$\chi^2+\varphi^2=58 \qquad \chi^2=58-\varphi^2$$
$$100-20\varphi+\varphi^2=58-\varphi^2$$
$$2\varphi^2-20\varphi=58-100$$
$$\varphi^2-\frac{20\varphi}{2}=\frac{58-100}{2},\ \text{ἡ δευτέρα ῥίζα}\ \frac{20}{4}=5$$
$$\varphi^2-10\varphi+25=25-21$$
$$\varphi-5=\sqrt{4},\ \text{ἢ}\ 5-\varphi=\sqrt{4}$$
$$\varphi-5=2 \qquad 5=2+\varphi$$
$$\varphi=7 \qquad 3=\varphi$$
$$\chi=3 \qquad 7=\chi$$
$$7+3=10 \qquad 49+9=58.$$

ΣΧΌΛΙΟΝ.

ΣΧΌΛΙΟΝ.

§. 133. Ὅσον ἔτι προσήκει νὰ ὁμιλήσωμεν περὶ τῆς Ἐξισώσεως τῶν ἄλλων Δυνάμεων, συγγραφήσεται εἰς τὴν ὑψηλοτέραν Μαθηματικήν.

ΚΕΦΆΛΑΙΟΝ ζ΄.

Περὶ λόγων.

ὉΡΙΣΜΌΣ α΄.

§. 134. Λόγος ὀνομάζεται ἡ Παράθεσις, ἢ ἡ Σχέσις, τὴν ὁποίαν ἔχυσι πρὸς ἄλληλα δύω Ὁμοειδῆ Ποσά. ὗτος δὲ ὁ λόγος θεωρεῖται διττῶς, τυτέστιν ἢ εἶναι ὁ λόγος ἀριθμητικὸς, ἢ Γεωμετρικός· ϗ ἀριθμητικὸς λόγος καλεῖται, ὅταν παρεξετάζωμεν τὴν Διαφορὰν μεταξὺ δύω Ποσῶν, ἥτις διὰ τῆς ἀφαιρέσεως εὑρίσκεται· π. χ. παραβάλλοντες μίαν Στήλην τελῶν Ποδῶν πρὸς ἄλλην τινὰ Ποδῶν δώδεκα, θεωρῶμεν, ὅτι ἡ μία Στήλη εἶναι μείζων τῆς ἄλλης 9 Πόδας, ϗ ἑπομένως ἡ μεταξὺ τῶν δύω Στηλῶν Διαφορὰ εἶναι 9 Πόδες, καὶ αἱ Στῆλαι τότε εἶναι ἐν ἀριθμητικῷ λόγῳ, τὸν ὁποῖον καὶ διὰ τοῦ τῆς ἀφαιρέσεως Σημείου ἐμφαίνομεν, παρενθέντες τὸ σημεῖον μεταξὺ τῶν παραβαλλομένων Ποσοτήτων. οἷον 3—12, ἢ οὕτως α . β. Γεωμετρικὸς δὲ λόγος ὀνομάζεται, ὅταν παρεξετάζωμεν, ποσάκις μία Ποσότης ἐμπεριέχεται εἰς τινὰ ἄλλην, τὸ ὁποῖον καὶ διὰ τῆς Διαιρέσεως ἀνακαλύπτεται. π. χ. παραβάλλοντες πρὸς ἀλλήλας τὰς ἀνωτέρω δύο Στήλας, θεωροῦμεν, ὅτι ἡ μία ἐμπεριέχεται εἰς τὴν ἄλλην τετράκις, καὶ αἱ Στῆλαι τότε εἰσὶν ἐν Γεωμετρικῷ λόγῳ, τὸν ὁποῖον καὶ διὰ τῶν τῆς Διαιρέσεως Συμβόλων παρασταίνομεν, ὡς $3 : 12$, ἢ $\frac{3}{12}$, καὶ ἐν γένει $\alpha : \beta$, ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$, ὅλα δὲ ταῦτα τὰ Σύμβολα ἐκφωνοῦνται οὕτω „ 3 πρὸς 12.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 135. Ἐφ' ἑκάστου τῶν λόγων θεωροῦνται τρία τινά. πρῶτον, τὸ Παραβαλλόμενον Ποσόν, δεύτερον, τὸ ἄλλο Ποσόν, πρὸς τὸ ὁποῖον τὸ πρῶτον παραβάλλεται, τρίτον, ἡ ἐν ἀριθμητικῷ λόγῳ θεωρουμένη Διαφορά, ἢ τὸ ἐν Γεωμετρικῷ λόγῳ Πηλίκον. ταῦτα οὕτως ἀλλήλοις συνακολουθοῦσιν, ὥστε ὅταν δοθῶσι τὰ δύο, τὸ τρίτον ἀπολύτως εὑρίσκεται. ἔστω τὸ μὲν μεῖζον α, τὸ δὲ ἔλαττον β, ἡ δὲ τούτων Διαφορὰ δ. ὅθεν τὸ μὲν μεῖζον ἔσται $\alpha = \beta + \delta$, τὸ

δὲ ἔλαττον $\beta = \alpha - \delta$, καὶ ἡ Διαφορὰ $\delta = \alpha - \beta$. ἂς διορισθῇ δὲ $\alpha = 10$. $\beta = 6$. $\delta = 4$. ὅθεν ἔσται $10 = 6 + 4$, καὶ $6 = 10 - 4$, καὶ $4 = 10 - 6$. πρὸς τούτοις ἐν τῇ τῶν λόγων Παραθέσει, εἴτε τὸ κατατιθέμενον Ποσόν, εἴτε τὸ ἐπιτιθέμενον μεῖζόν ἐστιν, οὐδὲν κωλύει. ἐπειδὴ ἢ $2 - 6$, ἢ $6 - 3$, ἡ Διαφορὰ εἶναι ὁ 4. καθὼς καὶ ἐν Γεωμετρικῷ τινὶ λόγῳ, ἤτοι $3 : 12$, ἢ $12 : 3$, τὸ Πηλίκον εἶναι 4. Ὅταν μὲν τὸ πρῶτον Μέλος εἶναι ἔλαττον τοῦ δευτέρου, τότε ὁ λόγος καλεῖται αὔξων. ὅταν δὲ μεῖζον τοῦ δευτέρου τυγχάνῃ, τότε ὀνομάζεται ὁ λόγος Μειούμενος, ἢ Ἐλαττούμενος, ἢ φθίνων.

ΟΡΙΣΜΟΣ β'.

§. 136. Τὰ παραβαλλόμενα Ποσὰ ὀνομάζονται Ὅροι τοῦ λόγου, τῶν ὁποίων ὁ μὲν προτιθέμενος καλεῖται Ἡγούμενος, ἢ Πρῶτος Ὅρος, ὁ δὲ ἐπιτιθέμενος λέγεται Ἑπόμενος, ἢ Δεύτερος Ὅρος. ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις ἐν τῷ ἀριθμητικῷ λόγῳ παρασταίνει τὴν μεταξὺ τῶν δύο Ποσοτήτων Διαφοράν, ὀνομάζεται Διαφορά, τὸ δὲ ἐπὶ τοῦ Γεωμετρικοῦ λόγου διὰ τῆς Διαιρέσεως τοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου προκύπτον καλεῖται Πηλίκον, ἢ Ἐκθέτης τοῦ λόγου.

ΠΟΡΙΣΜΑ α'.

§. 137. Ἐπειδὴ ἕκαστον Γεωμετρικὸν λόγον ἀποκτῶμεν διὰ τῆς Διαιρέσεως. ἕκαστον δὲ Κλάσμα εἶναι μία Διαίρεσις. ἄρα καὶ ἕκαστον Κλάσμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς Γεωμετρικός τις λόγος.

ΠΟΡΙΣΜΑ β΄.

§. 138. Ἐκ τῶν εἰρημένων ὡσαύτως ἀκολουθεῖ, ὅτι ἐπὶ μὲν ἀριθμητικοῦ λόγου οἱ Ὅροι μόνον διὰ τῆς Διαφορᾶς διακρίνονται, ἐπὶ δὲ τοῦ Γεωμετρικοῦ λόγου μόνον διὰ τοῦ Πηλίκου. διὰ τοῦτο καὶ τὸν μείζονα Ὅρον ἀποκτῶμεν, ὅταν ἐν μὲν τῷ ἀριθμητικῷ λόγῳ τὴν Διαφορὰν μετὰ τοῦ Ἐλάττονος Ὅρου συνάπτωμεν, ἐν δὲ τῷ Γεωμετρικῷ τὸν ἐλάττονα Ὅρον μετὰ τοῦ Πηλίκου πολλαπλασιάζωμεν. ἐὰν ὑποτεθῇ ὁ Ἡγούμενος Ὅρος 2, ἡ δὲ Διαφορὰ 3, ἔσται τότε ὁ Ἑπόμενος $2 + 3 = 5$. καὶ πάλιν ἐὰν ὑποτεθῇ ὁ Ἡγούμενος 2, τὸ δὲ Πηλίκον 3, ἔσται τότε ὁ Ἑπόμενος Ὅρος $2 \times 3 = 6$. ὅθεν γενικῶς ὁ Ἑπόμενος Ὅρος ἐπὶ μὲν ἀριθμητικοῦ λόγου, οὐδὲν ἄλλο ἐστίν, εἰ μὴ αὐτὸς ὁ Ἡγούμενος μετὰ τῆς Διαφορᾶς. ἐπὶ δὲ Γεωμετρικοῦ λόγου εἶναι αὐτὸς ὁ Ἡγούμενος Ὅρος πεπολλαπλασιασμένος μετὰ τοῦ Πηλίκου.

ΠΟΡΙΣΜΑ γ΄.

§. 139. Ὅθεν ὅταν θελήσωμεν νὰ ἀποκτήσωμεν γενικῶς μίαν Ἀλγεβραϊκὴν Ἔκθεσιν ἀριθμητικοῦ λόγου, καὶ νὰ ὀνομάσωμεν τὸν μὲν Πρῶτον Ὅρον α, τὴν δὲ Διαφορὰν δ, ἔσται τότε ὁ δεύτερος Ὅρος $\alpha + \delta$. ἂν δὲ ὁ Πρῶτος Ὅρος ὑποτεθῇ β, ἔσται τότε καὶ ὁ Δεύτερος $\beta + \delta$, καὶ οὕτω καθεξῆς. καθὼς καὶ ἐπὶ Γεωμετρικοῦ λόγου ἂν ὀνομασθῇ ὁ Πρῶτος Ὅρος α, τὸ δὲ Πηλίκον Π, ἔσται ὁ Δεύτερος Ὅρος $\alpha\pi$. εἰ δὲ ὀνομασθῇ ὁ Πρῶτος β, ἔσται ὁ Δεύτερος $\beta\pi$. καὶ οὕτω καθεξῆς. ὁ γενικὸς λοιπὸν Τύπος (Ἔκθεσις). τοῦ ἀριθμητικοῦ λόγου εἶναι $\alpha . \alpha + \delta$, ἢ $\beta . \beta + \delta$, ἢ $\gamma : \gamma + \delta$. τοῦ δὲ Γεωμετρικοῦ λόγου οὕτος $\alpha : \alpha\pi$, ἢ $\beta : \beta\pi$, ἢ $\gamma : \gamma\pi$. καὶ ἐν γένει δυνάμεθα ἀντὶ τοῦ Δευτέρου Ὅρου νὰ μεταχειριζώμεθα τὸν Πρῶτον Ὅρον μετὰ τῆς Διαφορᾶς $+ \delta$, ἢ μετὰ τοῦ Πηλίκου $\times \pi$, ὅπερ καὶ ἐκφράζεται διὰ τῶν ἑξῆς δύω Θεωρημάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ α΄.

§. 140. Ἐπὶ τοῦ ἀριθμητικοῦ λόγου τὸ ἐκ τοῦ ἐλάττονος Ὅρου καὶ τῆς Διαφορᾶς Συμποσούμενον, τουτέστι τὸ τούτων Κεφάλαιον εἶναι Ἴσον μὲ τὸν μείζονα Ὅρον.

ΘΕΩΡΗΜΑ β΄.

§. 141. Ἐπὶ τοῦ Γεωμετρικοῦ λόγου τὸ Γινόμενον ἐκ τοῦ Ἐλάττονος Ὅρου καὶ τοῦ Πηλίκου Ἴσον ἐστὶ μὲ τὸν μείζονα Ὅρον.

Ἡ Δεῖξις τούτων τῶν Θεωρημάτων ἀναφύεται ἐκ τῶν ἀνωτέρω Πορισμάτων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 142. Ἂν τύχῃ νὰ εἶναι ὁ Πρῶτος Ὅρος μείζων, τότε ἐπὶ μὲν τοῦ ἀριθμητικοῦ λόγου ὁ Δεύτερος Ὅρος εἶναι αὐτὸς ὁ Πρῶτος $- \delta$, καὶ ὁ λόγος ἔσται $\alpha . \alpha - \delta$. ἐπὶ δὲ Γεωμετρικοῦ λόγου ὁ Δεύτερος Ὅρος εἶναι αὐτὸς ὁ Πρῶτος διῃρημένος διὰ τοῦ Πηλίκου, καὶ ὁ Τύπος ἔσται $\alpha : \frac{\alpha}{\pi}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ γ΄.

§. 143. Ἴσοι λόγοι εἰσὶν ἐκεῖνοι, οἵτινες ἔχουσι τὴν αὐτὴν Διαφορὰν, ἢ τὸ αὐτὸ Πηλίκον π. χ. 7 — 3, ϗ 9 — 5 εἰσὶν Ἴσοι λόγοι. ἐπειδὴ ϗ εἰς τοὺς δύω τούτους λόγους ἡ Διαφορὰ εἶναι ὁ 4. ϗ ἐπομένως ὁ 7 ἔχει πρὸς τὸν 3 τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ 9 πρὸς τὸν 5. α. α+δ, ϗ β. β+δ εἰσὶν Ἴσοι λόγοι. ὡσαύτως ϗ 3 : 15, ϗ 2 : 10 εἰσὶν Ἴσοι λόγοι. ἐπειδὴ ἔχουσι τὸ αὐτὸ Πηλίκον 5. ϗ ὁ 3 ἔχει πρὸς τὸν 15 τὸν Ἴδιον λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ 2 πρὸς τὸν 10. α : απ, ϗ β : βπ, εἰσὶν Ἴσοι λόγοι. ἄνισοι δὲ λόγοι εἰσὶν, ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουσι τὴν αὐτὴν Διαφορὰν, μήτε τὸ αὐτὸ Πηλίκον.

ΟΡΙΣΜΟΣ δ′.

144. Ὅταν εἰς δύω Ἴσους λόγους οἱ Ἡγούμενοι Ὅροι εἶναι μείζονες, ἢ ἐλάττονες τῶν Ἑπομένων, τουτέστιν, ὅταν ὁ ἐν τῷ πρώτῳ λόγῳ Ἡγούμενος Ὅρος ἔχῃ πρὸς τὸν Ἴδιον Ἑπόμενον τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ ἐν τῷ δευτέρῳ λόγῳ Ἡγούμενος πρὸς τὸν Ἑπόμενον, ἢ ὅταν εἶναι ϗ οἱ δύω λόγοι αὔξοντες, ἢ Μειούμενοι, οἱ λόγοι τότε καλοῦνται Ὀρθοί, ἢ Εὐθεῖς. οἷον 7 — 3, ϗ 9 — 5 εἰσὶν ἐν Ὀρθῷ

λόγῳ,

λόγῳ. καθὼς ϗ 3 : 15, ϗ 2 : 10. ὅταν δὲ ὁ ἐπὶ τοῦ πρώτου λόγου Ἡγούμενος τυγχάνῃ μείζων τοῦ Ἰδίου Ἑπομένου, ὁ δὲ τοῦ δευτέρου λόγου Ἡγούμενος Ὅρος εἶναι ἐλάττων τοῦ Ἰδίου Ἑπομένου, ἢ ἀνάπαλιν ὁ πρῶτος ἐλάττων, ϗ ὁ Δεύτερος μείζων. τουτέστιν ὅταν ὁ τοῦ πρώτου λόγου Ἡγούμενος Ὅρος πρὸς τὸν Ἴδιον Ἑπόμενον ἔχῃ λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ τοῦ δευτέρου λόγου Ἑπόμενος Ὅρος πρὸς τὸν Ἡγούμενον, ἢ ὁ μὲν ἕνας λόγος τυγχάνῃ αὔξων, ὁ δὲ ἕτερος Ἐλαττούμενος, οἱ λόγοι τότε ὀνομάζονται ἀντίστροφοι, οἷον 7 — 3, ϗ 5 — 9. α. α+δ, ϗ β+δ. β εἰσὶν ἐν λόγῳ ἀντιστρόφῳ καθὼς ϗ 3 : 15, ϗ 10 : 2. α : απ, ϗ βπ : β.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 145. Δυνάμεθα ὡσόσον νὰ μεταβάλωμεν κάθε ἀντίστροφον λόγον εἰς Ὀρθὸν, μετατεθέντες τοὺς Ὅρους τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου λόγου, διὰ νὰ ἔλθωσιν ἤτοι οἱ μεταφερθέντες Ὅροι εἰς τὴν αὐτὴν τάξιν, ὅπου ἔχουσιν οἱ ἄλλοι Ὅροι. ϗ τότε ἔσονται ϗ οἱ δύω λόγοι ἤτοι αὔξοντες, ἢ Ἐλαττούμενοι.

ΟΡΙΣΜΟΣ ε′.

§. 146. Λόγος Ἰσότητος ὀνομάζεται, ὅτε ὁ Πρῶτος ϗ Δεύτερος Ὅρος συνίσταται ἐξ Ἴσων

ϗ

κ) τῶν αὐτῶν Ποσοτήτων, ὡς 6 = 6 . α : α. Διπλάσιος δὲ Γεωμετρικὸς λόγος λέγεται, ὅταν ὁ δεύτερος Ὅρος ἐμπεριέχηται δὶς ἐν τῷ πρώτῳ Ὅρῳ, ἢ Ὅταν τὸ Πηλίκον τυγχάνῃ ὁ 2, ὡς 6 : 3, κ) 10 : 5 . 8 : 4, κ) 20 : 10. Τριπλάσιος δὲ λόγος ἐστὶν, ὅταν ὁ δεύτερος Ὅρος ἐμπεριέχηται τρὶς εἰς τὸν πρῶτον Ὅρον ὡς 6 : 2, κ) 12 : 4. Τετραπλάσιος δὲ λόγος καλεῖται, ὅτε αὖθις ὁ δεύτερος τετράκις ἐμπεριέχεται ἐν τῷ πρώτῳ, ὡς 20 : 5, κ) 8 : 2 . κ) οὕτω καθεξῆς.

ΟΡΙΣΜΟΣ ς'.

§. 147. Ἐὰν οἱ Ὅροι δύω, ἢ πλείονες Γεωμετρικῶν λόγων μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθῶσιν, τουτέστιν οἱ Ἡγούμενοι μετὰ τῶν Ἡγουμένων, κ) οἱ Ἑπόμενοι μετὰ τῶν Ἑπομένων, τὸ ἐξ αὐτῶν Γινόμενον ὀνομάζεται λόγος Σύνθετος. οἱ δὲ ἁπλοῖ λόγοι λέγονται Συντεθέντες, ἢ Συνθετικοὶ λόγοι. οὕτως ἐκ τῶν λόγων 2 : 9, κ) 4 : 7 γίνεται Σύνθετος λόγος 8 : 63, κ) ἐκ τῶν 3 : 6 : κ) 4 : 16. προκύπτει Σύνθετος λόγος 12 : 96. τὸ δὲ Πηλίκον (ὁ Ἐκθέτης) ἑνὸς Συνθέτου λόγου εἶναι

εἶναι πάντοτε τὸ Γινόμενον ἐκ τῶν Πηλίκων τῶν Συντεθέντων λόγων. οἷον τὰ μὲν Πηλίκα τῶν 3 : 6, κ) 4 : 16 Συντεθέντων λόγων εἰσὶν ὁ 2 κ) 4. τὸ δὲ Πηλίκον τοῦ Συνθέτου λόγου ἐστὶν ὁ 8, τὸ ἐκ τοῦ 2 κ) 4 δηλονότι Γινόμενον. Ἔστωσαν ἔτι κ) διὰ Γραμμάτων δύω λόγοι α : β, κ) γ : ε, ὁ δὲ Ἐκθέτης, ἢ τὸ Πηλίκον τοῦ Πρώτου λόγου ἔστω μ, τοῦ δὲ δευτέρου ἔστω ν. ὅθεν κατὰ τὸ γ'. Πόρισμα ὁ μὲν πρῶτος λόγος μεταποιεῖται εἰς τὸν α : αμ. ὁ δὲ δεύτερος λόγος εἰς τὸν γ . γν. κ) τούτων πολλαπλασιασθέντων ὡς εἴρηται, προκύπτει ὁ ἑξῆς Σύνθετος λόγος. αγ : αγμν, ὁ δὲ τούτου Ἐκθέτης ἔσται μν. ὁ δὲ λόγος ὁ Συντεθειμένος ἐκ δύω Ἴσων λόγων, καλεῖται Διπλασίων, ἢ Τετραγωνικὸς λόγος, κ) ὁ Ἐκθέτης τούτου εἶναι τὸ Τετράγωνον τοῦ ἑνὸς κ) τοῦ αὐτοῦ ὄντος Ἐκθέτου τῶν οὕτως Ἴσων λόγων. ἐπειδὴ ὁ Ἐκθέτης ἑνὸς Συνθέτου λόγου εἶναι αὐτὸ τὸ Γινόμενον, τὸ ὁποῖον παράγεται ἐκ τῶν Ἐκθετῶν τῶν Συντεθέντων λόγων. ἀλλὰ μὴν ἐπὶ τῶν Ἴσων λόγων εἶναι κ) εἰς τὰ δύω Μέρη ὁ αὐτὸς Ἐκθέτης, ἄρα ἀφ' οὗ πολλαπλασιασθῇ οὗτος ὁ Ἐκθέτης ἐφ' ἑαυτὸν, γίνεται

νεται ἓν Τετράγωνον· ϗ εἶναι ἄρα ὁ Ἐκθέτης ἑνὸς Διπλασίονος λόγȣ. καθὼς ἐκ τῶν 2 : 4, ϗ 3 : 6 γίνεται Σύνθετος λόγος 6 : 24, τȣ̃ ὁποίȣ λόγȣ ὁ Ἐκθέτης εἶναι 4, τȣτέστι τὸ Τετράγωνον τȣ̃ ἁπλȣ̃ Ἐκθέτȣ 2. ὡσαύτως ϗ διὰ Γραμμάτων ἐκ δύω Ἴσων λόγων α : απ, ϗ β : βπ ἀναφύεται ὁ Σύνθετος λόγος αβ : αβππ, τȣ̃ ὁποίȣ Ἐκθέτης εἶναι ππ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ Τετράγωνον τȣ̃ ἑνὸς μόνȣ τῶν Ἐκθετῶν. ἄρα κ. τ. Ἐὰν δὲ τρεῖς Ἴσοι λόγοι μετ᾽ ἀλλήλων πολλαπλασιασθῶσιν, ἀναφύεται ὁ καλȣ́μενος Τριπλασίων, ἢ Κυβικὸς λόγος, ὁ δὲ τȣ́τȣ Ἐκθέτης ἐστὶν ὁ Κύβος τȣ̃ ἑνὸς μόνȣ τῶν Ἐκθετῶν. καθὼς ἐκ τῶν 2 : 4, ϗ 3 : 6, ϗ 4 : 8 λόγων προκύπτει Σύνθετος λόγος 24 : 192, τȣ̃ ὁποίȣ Ἐκθέτης εἶναι ὁ 8, ὁ Κύβος δηλαδὴ τȣ̃ ἑνὸς ϗ μόνȣ τῶν Ἐκθετῶν. ὡσαύτως ϗ διὰ Γραμμάτων ἐκ τῶν α : απ, ϗ β : βπ, ϗ γ : γπ λόγων γίνεται Σύνθετος λόγος αβγ : αβγπππ, τȣ̃ ὁποίȣ Ἐκθέτης ὑπάρχει π^3 ὁ Κύβος τȣ̃ ἑνὸς μόνȣ Ἐκθέτȣ π. ϗ ὅτως ἀκολȣ́θως δύναταί τις νὰ συνθέτῃ ϗ Τετραπλασίονας, ϗ Πενταπλασίονας κ. τ. λόγȣς.

ΘΕΩ-

ΘΕΩ'ΡΗΜΑ.

§. 148. Οἱ Ὅροι ἑνὸς Γεωμετρικȣ̃ λόγȣ κἄντε πολλαπλασιασθῶσι, κἄντε διαιρεθῶσιν ὑπὸ τȣ̃ Ἰδίȣ ἀριθμȣ̃, ἢ Μεγέθȣς, ὁ λόγος τȣ́των δὲν μεταβάλλεται.

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

Ἕκαστος Γεωμετρικὸς λόγος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς Κλάσμα (137). ἀλλ᾽ ἐπειδὴ εἴτε ὁ ἀριθμητὴς, εἴτε ὁ Παρονομαστὴς πολλαπλασιασθῇ, ἢ διαιρεθῇ ὑπὸ τȣ̃ Ἰδίȣ ἀριθμȣ̃, ἡ Δύναμις τȣ̃ Κλάσματος δὲν μεταβάλλεται (§. 70. ἀριθμ.). ἄρα ἡ Δύναμις ἑνὸς Γεωμετρικȣ̃ λόγȣ δὲν μεταβάλλεται.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ η'.

Περὶ ἀναλογίας.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ α'.

§. 149. Ἀναλογία καλεῖται ἐν γένει ἡ Παράθεσις δύω Ἴσων λόγων. αὕτη δὲ ἡ ἀναλογία εἶναι διττὴ, ἀριθμητικὴ δηλονότι ϗ Γεωμετρικὴ, ϗ ἀριθμητικὴ μὲν ἀναλογία εἶναι, ὅταν ἀριθμητικοὶ λόγοι παραβάλλωνται πρὸς ἀλλή-

ἀλλήλους. Γεωμετρικὴ δέ εἶναι, ὅτε Γεωμετρικοὶ λόγοι παραθέτονται πρὸς ἀλλήλους. ὅθεν ἅπαντας τοὺς λόγους, οἱ ὁποῖοι ἔχουσι τὴν αὐτὴν Διαφορὰν, ἢ τὸ αὐτὸ Πηλίκον, δυνάμεθα νὰ κατατάξωμεν εἰς τάξιν ἀναλογίας, καὶ νὰ τοὺς συνθέσωμεν, παρενθέτοντες μεταξὺ τούτων τὸ Σημεῖον τῆς Ἰσότητος· οἷον ἐκ μὲν τῶν δύω τούτων Ἴσων λόγων $3 - 7$, καὶ $5 - 9$ γίνεται αὕτη ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία $3 - 7 = 5 - 9$. ἐκ δὲ τῶν δύω τούτων. $3 : 9$, καὶ $4 : 12$ ἀποκαθίσταται Γεωμ. ἀναλογία $3 : = 4 : 12$. ὁ τρόπος ταύτης τῆς Παραθέσεως ἐπὶ μὲν τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας ἐκφωνεῖται οὕτως,, Ὁ 3 πρὸς τὸν 7 ἔχει ἀριθμητικῶς τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ 5 πρὸς τὸν 9. ἐπὶ δὲ τῆς Γεωμετρικῆς ἀναλογίας ἐκφράζεται οὕτως,, Ὁ 3 πρὸς τὸν 9 ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ 4 πρὸς τὸν 12, ἢ συντομώτερον οὕτως,, ὡς 3 πρὸς 9, οὕτως 4 πρὸς 12. Εἰς τὴν Γεωμετρικὴν ἀναλογίαν ἡ λέξις ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΣ δὲν λέγεται. ἐπειδὴ εἰς κάθε ἀναλογίαν, εἰς τὴν ὁποίαν δὲν ἀπαντᾶται αὕτη ἡ λέξις, ἐννοεῖται, ὅτι ἡ ἀναλογία εἶναι Γεωμετρική.

ΠΟ-

ΠΟΡΙΣΜΑ α.

§. 150. Ἑκάστη λοιπὸν ἀναλογία συνίσταται ἐκ τεσσάρων Ὅρων, δηλαδὴ ἐκ δύω Ἡγουμένων, καὶ ἐκ δύω Ἑπομένων. Ὁ Πρῶτος, καὶ ὁ Τέταρτος Ὅρος λέγονται ἄκραι, ἢ ἄκροι, ὁ δὲ Δεύτερος, καὶ Τρίτος Ὅρος ὀνομάζονται Μέσοι.

ΠΟΡΙΣΜΑ β.

§. 151. Ὅ,τι περὶ τῶν λόγων (§. 144.) προείρηται, τὸ Ἴδιον δύναται νὰ λεχθῇ καὶ περὶ τῶν ἀναλογιῶν, τουτέστιν ὅταν οἱ Ἡγούμενοι Ὅροι ἔχωσι πρὸς τοὺς Ἑπομένους τὸν αὐτὸν λόγον, καθὼς εἰς τὰς ἀνωτέρω ἀναλογίας, τότε ἡ ἀναλογία ὀνομάζεται Ὀρθή. ὅταν ὅμως οἱ λόγοι ἄλλως πως ἔχωσι, τουτέστιν ὁ πρῶτος Ὅρος ἔχῃ πρὸς τὸν Δεύτερον, ὡς ὁ Τέταρτος πρὸς τὸν Τρίτον. οἷον $3 - 7 = 9 - 5$, ἢ $3 : 9 = 12 : 4$, τότε ἡ ἀναλογία καλεῖται ἀντίστροφος, καὶ ἐν ἑνὶ λόγῳ ἡ ἀναλογία, τῆς ὁποίας ὁ ἕνας λόγος εἶναι αὔξων, ὁ δὲ ἄλλος εἶναι Ἐλαττούμενος, ὀνομάζεται ἀντίστροφος, δυνάμεθα ὅμως ταύτην νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς Ὀρθὴν, τοὺς Ὅρους τοῦ Δευτέρου λόγου μεταθέτοντες ὡς $3 - 7 = 5 - 9$, καὶ $3 : 9 = 4 : 12$.

ΠΟΡΙΣΜΑ γ.

§. 152. Ἐντεῦθεν ἀναφύεται μία γενικὴ Ἔκθεσις ἀναλογίας. διότι, ἐπειδὴ κάθε μὲν ἀριθμητικὸς λόγος ἐκφράζεται διὰ τοῦ $\alpha . \alpha + \delta$, ἢ $\beta . \beta + \delta$, κάθε δὲ Γεωμετρικὸς παρίσταται διὰ τοῦ $\alpha : \alpha\pi$, ἢ $\beta : \beta\pi$, διὰ τοῦτο ἂν δύω τοιοῦτοι λόγοι συνδεθῶσι διὰ τοῦ Σημείου τῆς Ἰσότητος, προκύπτει ἕνας Γενικὸς Τύπος τῆς μὲν ἀριθμητικῆς ἀναλογίας $\alpha . \alpha + \delta = \beta . \beta + \delta$, τῆς δὲ Γεωμετρικῆς $\alpha : \alpha\pi = \beta : \beta\pi$.

ΟΡΙΣ-

ΟΡΙΣΜΟΣ β'.

§. 153. Ὅταν ὁ Ἑπόμενος Ὅρος τοῦ πρώτου λόγου εἶναι ἅμα Ἡγούμενος τοῦ δευτέρου λόγου, τουτέστιν ὅταν οἱ δύω Μέσοι Ὅροι εἶναι Ἴσοι, ὡς ἐν τῷ Παραδείγματι $3 - 5 = 5 - 7$, ἢ $3 : 6 = 6 : 12$, ἢ $\alpha : \beta = \beta : \gamma$, τότε ἡ ἀναλογία ὀνομάζεται Συνεχής, εἰς τὴν ὁποίαν τινὲς συνεθίζουσι νὰ γράφωσιν ὁμοῦ τὸν δεύτερον, καὶ τρίτον Ὅρον ἅπαξ, οἷον εἰς μὲν τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλ. οὕτως $\div 3 - 5 - 7$, εἰς δὲ τὴν Γεωμετρικὴν $\because 3 : 6 : 12$: ἢ $\because \alpha : \beta : \gamma$, καὶ νὰ ὀνομάζωσι τότε τοῦτον τὸν δεύτερον Ὅρον Μέσον ἀνάλογον. Ὅταν δὲ οἱ δύω Μέσοι Ὅροι εἶναι διάφοροι, τότε ἡ ἀναλογία ὀνομάζεται Διακεκριμένη.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 154. Ἂν ἐπὶ τῆς Συνεχοῦς ἀναλογίας μεταχειρισθῶμεν τὸ ἐν τῷ γ'. Πορίσματι προκύψαντα τύπον $\alpha . \alpha + \delta$, ἔσται τότε ὁ δεύτερος λόγος $\alpha + \delta . \alpha + 2\delta$. διότι, ἐπειδὴ ὁ Ἡγούμενος Ὅρος τοῦ δευτέρου λόγου εἶναι Ἴσος μὲ τὸν Ἑπόμενον Ὅρον τοῦ πρώτου λόγου, διὰ τοῦτο ἐνταῦθα ὁ Ἡγούμενος εἶναι $\alpha + \delta$, καὶ πάλιν, ἐπειδὴ ὁ Ἑπόμενος Ὅρος πρέπει νὰ αὐξάνηται διὰ τῆς Διαφορᾶς (§. 138), ἔσται ἄρα ἐνταῦθα ὁ Ἑπόμενος Ὅρος $\alpha + \delta + \delta$, ἤτοι $\alpha + 2\delta$. καὶ ἡ Ἔκθεσις τῆς ἀναλογίας $\div \alpha . \alpha + \delta . \alpha + 2\delta$. ἐὰν δὲ εἰς

τὴν

τὴν Γεωμετρικὴν ἀναλογίαν εἶναι ὁ πρῶτος λόγος $\alpha : \alpha\pi$, ὁ δεύτερος πρέπει νὰ εἶναι $\alpha\pi : \alpha\pi\pi$. διότι, ἐπειδὴ ὁ Ἑπόμενος Ὅρος τοῦ δευτέρου λόγου εἶναι αὐτὸς ὁ Ἡγούμενος πεπολλαπλασιασμένος μετὰ τοῦ Πηλίκου, διὰ τοῦτο ὁ Ἑπόμενος οὗτος Ὅρος εἶναι $\alpha\pi \times \pi$ ἢ $\alpha\pi^2$, καὶ ἡ Ἔκθεσις τῆς Γεωμετρικῆς ἀναλογίας εἶναι $\because \alpha : \alpha\pi : \alpha\pi^2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 155. Ἐφ' ἑκάστης ἀριθμητικῆς ἀναλογίας εἴτε Συνεχοῦς, εἴτε Διακεκριμένης, τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων Ὅρων εἶναι Ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν Μέσων. ἐπὶ δὲ Γεωμετρικῆς ἀναλογίας τὸ ἐκ τῶν ἄκρων Γινόμενον εἶναι Ἴσον μὲ τὸ ἐκ τῶν Μέσων Παραγόμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἂς ὑποτεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία $\alpha . \gamma = \beta . \epsilon$. ὅθεν οἱ ἄκροι Ὅροι ὁμοῦ συναφθέντες, ἔσονται Ἴσοι μὲ τοὺς Μέσους, οἷον $\alpha + \epsilon = \gamma + \beta$. ἐπειδὴ δὲ ἀντὶ τῶν Ἑπομένων Ὅρων δύω λόγων δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν τοὺς Ἡγουμένους Ὅρους μετὰ τῆς Διαφορᾶς (§. 138, καὶ §. 154), Καὶ ἐπειδὴ εἰς Ἴσους λόγους εἶναι ἡ Ἴδία Διαφορά, διὰ τοῦτο δύναται νὰ ἐκτεθῇ αὕτη ἡ δοθεῖσα ἀναλογία κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον $\alpha . \alpha + \delta = \beta . \beta + \delta$, ὡς καὶ ἐν τῷ γ'. Πορίσματι (§. 139, καὶ §. 152) δεδήλωται. ἀλλὰ μὴν ταύτης τῆς ἀναλογίας οἱ δύω ἄκροι Ὅροι συναφθέντες, εἰσὶν $\alpha + \beta + \delta$, οἱ δὲ Μέσοι ὡσαύτως $\alpha + \beta + \delta$. Ἴσοι δηλονότι ἀλλήλοις. ἄρα εἰς κάθε

ἀριθ-

ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν δύω ἄκρων Ἴσον ἐστὶ τῷ τῶν Μέσων ἀθροίσματι. ἔστω δὲ καὶ δι' ἀριθμῶν αὕτη ἡ ἀναλογία πρὸς σαφεστέραν κατάληψιν ÷ $3 - 5 = 7 - 9$. εἰς τὴν ὁποίαν ἕκαστος βλέπει, ὅτι τὸ Κεφάλαιον τῶν ἄκρων Ἴσον ἐστὶ μὲ τὸ Κεφάλαιον τῶν Μέσων Ὅρων. Ἐὰν δ' αὖθις ὑποτεθῇ Γεωμετρικὴ τις ἀναλογία, οἷον $\alpha : \gamma = \beta : \delta$, ἔσται διὰ τῆς πολλαπλασιάσεως $\alpha\delta = \beta\gamma$, ἡ ὁποία εἶναι ὁμοία μὲ τὴν ἐν τῷ τρίτῳ Πορισμ. (§. 139) γενικῶς ἐκτεθεῖσαν Γεωμετρικὴν ἀναλογίαν $\alpha : \alpha\pi = \beta : \beta\pi$. ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς αὐτὴν τὴν ἀναλογίαν τὸ ἐκ τῶν ἄκρων Παραγόμενον $\alpha\beta\pi$ Ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον μὲ τὸ ἐκ τῶν Μέσων Παραγόμενον $\alpha\beta\pi$. ἄρα ἐφ' ἑκάστης Γεωμετρικῆς ἀναλογίας τῷ ἐκ τῶν ἄκρων Παραγόμενον Ἴσον ... κ. τ.

ΠΟΡΙΣΜΑ α'.

§. 156. Ἂν ἐπὶ τῆς πρώτης Ἐξισώσεως $\alpha + \epsilon = \beta + \gamma$ τεθῇ $\beta + \delta$ ἀντὶ τῆς Δυνάμεως ϵ εἰς τὸ πρῶτον μέρος, εἰς δὲ τὸ δεύτερον μέρος τεθῇ $\alpha + \delta$ ἀντὶ τῆς Δυνάμεως τοῦ γ, προκύπτουσιν ἔτω ἀθροίσματα Ἴσα, τουτέστι $\alpha + \beta + \delta = \beta + \alpha + \delta$. ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἀναλογίας $\alpha\delta = \beta\gamma$ ἡ Δύναμις τοῦ δ εἶναι $\beta\pi$, καὶ ἡ Δύναμις τοῦ γ εἶναι $\alpha\pi$, τὰ ὁποῖα τεθέντα ἀντ' ἐκείνων, περιέχουσιν Ἴσα Γινόμενα, τουτέστι $\alpha\beta\pi = \beta\alpha\pi$.

ΠΟΡΙΣΜΑ β'.

§. 157. Ἐπειδὴ ἐπὶ τῆς Συνεχοῦς ἀναλογίας ὁ δεύτερος Ὅρος μ' ὅλον ὅπου τίθεται ἅπαξ, ἐννοεῖται ὡς δὶς τεθειμένος, διὰ τοῦτο εἰς μὲν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων, τουτέστι τοῦ πρώτου καὶ τρίτου Ὅρου εἶναι Ἴσον μὲ τὸ Διπλάσιον τοῦ Μέσου Ὅρου, οἷον ἐν τῇ ÷ $\alpha . \beta . \gamma$ εἶναι $\alpha + \gamma = 2\beta$. Εἰς δὲ Γεωμετρικὴν

κὴν

ἀναλογίαν τὸ ἐκ τῶν ἄκρων Γινόμενον τυγχάνει Ἴσον μὲ τὸ Τετράγωνον τοῦ Μέσου Ὅρου, οἷον ∺ $\alpha : \beta : \gamma$ γίνεται $\alpha\gamma = \beta\beta$. ἐπειδὴ ἂν λυθῶσιν αὗται αἱ ἀναλογίαι εἰς Διακεκομμένας, ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἀναλογ. γίνεται $\alpha . \beta = \beta . \gamma$, ἄρα $\alpha + \gamma = 2\beta$. ἐκ δὲ τῆς δευτέρας ἀναλογ. γίνεται $\alpha : \beta = \beta : \gamma$, ἄρα $\alpha\gamma = \beta\beta$. καθάπερ δὴ καὶ δι' ἀριθμῶν τὸ ἴδιον γίνεται, καὶ ἔστω ἀναλογία ÷ $3 . 7 . 11$, ὅθεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων εἶναι 14, τὸ δὲ διπλάσιον τοῦ Μέσου ὁμοίως 14. ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τῆς ∺ $3 : 6 : 12$ τὸ ἐκ τῶν ἄκρων Γινόμενον εἶναι 36 τὸ δὲ Τετράγωνον τοῦ Μέσου αὖθις 36, οἷον $6 \times 6 = 36$.

ΠΟΡΙΣΜΑ γ'.

§. 158. Ἐντεῦθεν ἀνακύπτει ἡ Μέθοδος, δι' ἧς δυνάμεθα νὰ μεταβάλλωμεν ἑκάστην ἀναλογίαν εἰς Ἐξίσωσιν, καὶ ἑκάστην Ἐξίσωσιν εἰς ἀναλογίαν. ἐπειδὴ ἐκ παντὸς ἀναλογίας δύναται νὰ προκύπτῃ πάντοτε ἤτοι ἄθροισμα, ἢ Παραγόμενον τῶν ἄκρων καὶ Μέσων Ὅρων, καὶ οὕτω νὰ γέγνηται Ἐξίσωσις. καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν δοθῶσι δύω μέρη μιᾶς Ἐξισώσεως, δυνάμεθα νὰ λύσωμεν αὐτὰ εἰς δύω ἕτερα μέρη, τὰ ὁποῖα νὰ δίδωσι τὸ ἴδιον ἄθροισμα, ἢ εἰς δύω Παράγοντας, ἐξ ὧν νὰ προκύπτῃ τὸ ἴδιον Παραγόμενον, π. χ. ἐκ τῆς Ἐξισώσεως $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ δύναται νὰ γένῃ $\alpha . \gamma = \delta . \beta$, ἐκ δὲ τῆς $\alpha\beta = \gamma\delta$ δύναται νὰ γένῃ ἡ $\alpha : \gamma = \delta : \beta$ ἀναλογία, οὕτω καὶ ἐκ τοῦ $12 = 12$ γίνεται $3 + 9 = 5 + 7$, καὶ ἐντεῦθεν $3 . 5 = 7 . 9$ ἀριθμητικῶς, καθάπερ πάλιν καὶ Γεωμετρικῶς ὁ ἴδιος ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς Παράγοντας $2 \times 6 = 3 \times 4$, καὶ ἐντεῦθεν $2 : 4 = 3 : 6$.

ΘΕΩΡΗΜΑ α'.

§. 159. Ἐκ τῶν Παραγόντων δύω Ἴσων Παραγομένων δύνανται νὰ προκύψωσιν Ὀκτὼ Ὀρθαὶ Γεωμετρικαὶ ἀναλογίαι.

ΔΕΙΞΙΣ.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Δύω Ἴσα Παραγόμενα ἀποτελοῦσι μίαν Ἐξίσωσιν, τῆς ὁποίας τοὺς Ὅρους κατὰ τὸ προτεθὲν Θεώρημα δυνάμεθα νὰ διαθέσωμεν ἐν εἴδει ἀναλογίας, ἐν ᾧ μεταχειριζόμεθα τοὺς Παράγοντας ἑνὸς τούτων τῶν δύω Παραγομένων ὡς ἄκρους, ἢ Μέσους Ὅρους. ἀλλ' ἐπειδὴ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἕκαστος τῶν Παραγόντων ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ Παραγομένου (ἂν οὗτοι οἱ Παράγοντες ὡς ἄκροι Ὅροι τῆς ἀναλογίας ληφθῶσιν) ἔσται ἢ πρῶτος, ἢ ἔσχατος Ὅρος, καὶ αὖθις (ἂν οὗτοι ὡς Μέσοι Ὅροι τῆς ἀναλογίας ληφθῶσιν.) ἔσεται ἢ δεύτερος ἢ τρίτος Ὅρος, καὶ ἐπειδὴ αὕτη ἡ διάφορος μετάθεσις τῶν Ὅρων δύναται ὀκτάκις νὰ γένῃ, ὡς κατωτέρω δηλωθήσεται. ἄρα ἐκ δύω Ἴσων Παραγομένων δύνανται νὰ προκύψωσιν ὀκτὼ Ὀρθαὶ Γεωμετρικαὶ ἀναλογίαι. Ἔστωσαν δύω Παραγόμενα Ἴσα, οἷον $\alpha\delta = \beta\gamma$. καὶ ληφθήτωσαν οἱ Παράγοντες ἑνὸς τῶν Παραγομένων ὡς ἄκροι Ὅροι, ἐν ᾧ ἕκαστος τῶν Παραγόντων ἔσται εἰς τέσσαρας ἀναλογίας ἢ πρῶτος, ἢ ἔσχατος.

$\alpha\delta + \beta\gamma$	ἤτοι	$3 \times 8 = 4 \times 6$
$\alpha:\beta = \gamma:\delta$	. . . . .	$3:4 = 6:8$
$\alpha:\gamma = \beta:\delta$	. . . . .	$3:6 = 4:8$
$\delta:\beta = \gamma:\alpha$	. . . . .	$8:4 = 6:3$
$\delta:\gamma = \beta:\alpha$	. . . . .	$8:6 = 4:3$
$\beta:\alpha = \delta:\gamma$	καὶ πάλιν ληφθήτωσαν	$4:3 = 8:6$
$\beta:\delta = \alpha:\gamma$	οἱ αὐτοὶ Παράγοντες ὡς	$4:8 = 3:6$
$\gamma:\alpha = \delta:\beta$	Μέσοι. κ. τ. . .	$6:3 = 8:4$
$\gamma:\delta = \alpha:\beta$	. . . . .	$6:8 = 3:4$

Ὅλαι

Ὅλαι αὗται αἱ ἀναλογίαι συνίστανται ἐκ τῶν $\alpha\delta = \beta\gamma$, ἤτοι $3 \times 8 = 4 \times 6$, κἀντεῦθεν τὸ Παραγόμενον τῶν ἄκρων εἶναι Ἴσον μὲ τὸ Παραγόμενον τῶν Μέσων, καὶ ἐπομένως ἑκάστη ἀναλογία εἶναι Ὀρθή.

ΠΟΡΙΣΜΑ α'.

§. 160. Ἐὰν οἱ Παράγοντες τεθῶσιν εἰς μίαν ἀναλογίαν οὕτως, ὥστε ὁ πρῶτος Ὅρος νὰ ἔχῃ πρὸς τὸν δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ὁ τέταρτος πρὸς τὸν τρίτον, τότε εἶναι ἀναλογία ἀντίστροφος, καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον δύνανται νὰ γένωσιν αὖθις ὡς ἀνωτέρω, ὀκτὼ διάφοροι μεταθέσεις τῶν Ὅρων, ὥστε πάντοτε νὰ προκύπτῃ ἀναλογία ἀντίστροφος, καὶ τὸ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου Ὅρου Παραγόμενον νὰ εἶναι Ἴσον τῷ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου Παραγομένῳ, καθὼς ἐκ τῶν ἀκολούθων σαφέστερον δειχθήσεται.

$\alpha\delta = \beta\gamma$	$3 \times 8 = 4 \times 6$
$\alpha:\beta = \delta:\gamma$	$3:4 = 8:6$
$\alpha:\gamma = \delta:\beta$	$3:6 = 8:4$
$\beta:\alpha = \gamma:\delta$	$4:3 = 6:8$
$\beta:\delta = \gamma:\alpha$	$4:8 = 6:3$
$\gamma:\alpha = \beta:\delta$	$6:3 = 4:8$
$\gamma:\delta = \beta:\alpha$	$6:8 = 4:3$
$\delta:\beta = \alpha:\gamma$	$8:4 = 3:6$
$\delta:\gamma = \alpha:\beta$	$8:6 = 3:4$

Ἐνταῦθα ἐφ' ἑκάστης τῶν ἀναλογιῶν ὁ πρῶτος Ὅρος ἔχει πρὸς τὸν δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ τέταρτος πρὸς τὸν τρίτον. μ' ὅλον τοῦτο ἐὰν μεταθέσωμεν τοὺς Ὅρους μόνον τοῦ ἑνὸς λόγου, ἀποκτῶμεν ἀναλογίαν Ὀρθήν, καὶ τὸ ἐκ τῶν ἄκρων Παραγόμενον εἶναι Ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων Παραγομένῳ.

ΠΟ-

ΠΟΡΙΣΜΑ β΄.

§. 161. Δύνανται τέλος νὰ τεθῶσιν οἱ Παράγοντες καὶ ἄλλον τρόπον, ὥστε οἱ ἔτω τεθέντες Ὅροι νὰ μὴ ἀποκαθιστῶσι μήτε Ὀρθὴν μήτε ἀντίστροφον ἀναλογίαν, τουτέστι ἂν μεταξὺ τῶν Πα-Παραγόντων, ἑκατέρου τῶν Παραγομένων θεωρῆται ἕνας λόγος, ἤτοι οἱ δύω λόγοι φερθῶσιν εἰς Ἐξίσωσιν, αὕτη δὲ ἡ ἄλλου τινὸς ἀναλογίας μετάθεσις τῶν Παραγόντων δύναται νὰ γένῃ κατὰ ὀκτὼ διαφόρους τρόπους, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς δηλοῦται.

$\alpha\delta = \beta\gamma$	$3 \times 8 = 4 \times 6$
$\alpha : \delta = \beta : \gamma$	$3 : 8 = 4 : 6$
$\alpha : \delta = \gamma : \beta$	$3 : 8 = 6 : 4$
$\beta : \gamma = \alpha : \delta$	$4 : 6 = 3 : 8$
$\beta : \gamma = \delta : \alpha$	$4 : 6 = 8 : 3$
$\gamma : \beta = \alpha : \delta$	$6 : 4 = 3 : 8$
$\gamma : \beta = \delta : \alpha$	$6 : 4 = 8 : 3$
$\delta : \alpha = \beta\,\gamma$	$8 : 3 = 4 : 6$
$\delta : \alpha = \gamma : \beta$	$8 : 3 = 6 : 4$

ΠΟΡΙΣΜΑ γ΄.

§. 162. Ἐπειδὴ οἱ Ἴσοι λόγοι εἴτε ἐλαττωθῶσιν, εἴτε αὐξηθῶσι διὰ Ἴσων Ποσοτήτων, μένουσιν αὖθις Ἴσοι (§. 147.) λόγοι, διὰ τοῦτο δύναται νὰ ἀναφανῶσιν ἔτι πλείονες μεταλλαγαί, χωρὶς νὰ λάβῃ τινα μεταβολὴν ἡ ἀναλογία. καὶ τοῦτο γίνεται, ἐὰν οἱ Ἡγούμενοι Ὅροι διὰ τῶν Ἑπομένων, ἢ ἀνάπαλιν οἱ Ἑπόμενοι διὰ τῶν Ἡγουμένων αὐξηθῶσιν, ἢ ἐλαττωθῶσι, καὶ ἐν ἑνὶ λόγῳ δύναται νὰ γίνωσι τόσαι μεταλλαγαί, ὅσα Ἴσα Παραγόμενα προκύψουσι διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως τῶν ἄκρων καὶ Μέσων Ὅρων

$\alpha + \beta : \beta = \gamma + \delta : \delta$ $\beta + \alpha : \beta = \gamma + \gamma : \delta$ $\alpha : \alpha + \beta = \gamma : \gamma + \delta$	οἱ λόγοι αὐξάνονται διὰ τῆς Προσθέσεως.	$3 + 4 : 4 = 6 + 8 : 8$ $3 + 3 : 4 = 6 + 6 : 8$ $3 : 3 + 4 = 6 : 6 + 8$
$\alpha : \beta - \alpha = \gamma : \delta - \gamma$ $\beta - \alpha : \beta = \gamma - \alpha : \alpha$ $\delta + \beta : \delta - \beta = \gamma + \alpha : \gamma - \alpha$	ἐλαττοῦνται διὰ τῆς ἀφαιρέσεως	$3 : 4 - 3 = 6 : 8 - 6$ $8 - 4 : 4 = 6 - 3 : 3$ $8 + 4 : 8 - 4 = 3 : 6 - 3$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 163. Τὸ περὶ τῆς μεταβολῆς μιᾶς Ἐξισώσεως εἰς ἀναλογίαν καὶ ἀνάπαλιν ἀπαιτεῖ πολλὴν προσοχὴν καὶ παρατήρησιν, ὡσὰν ὁποῦ εἰς ὅλην τὴν Μαθηματικὴν γίνεται πρόξενον μεγάλης ὠφελείας καὶ χρήσεως. ὅθεν πρέπει νὰ διακρίνωμεν πάντοτε καλῶς, ποῖοι εἶναι οἱ Παράγοντες ἑκάστου Παραγομένου, διὰ νὰ ἐννοῶμεν ἔπειτα καλῶς, καὶ νὰ σχεδιάζωμεν θεωρητικῶς ἢ πρακτικῶς τοὺς Ὅρους τῆς ἀναλογίας. ὅταν ὑπάρχῃ ἁπλοῦν τι Ποσόν, οἱ τότε Παράγοντές εἰσιν αὐτὸ τὸ Ἴδιον Ποσὸν καὶ ἡ Μονάς, ἥτις, ἐπειδὴ δὲν πολλαπλασιάζει μηδέν, ἠμπορεῖ νὰ λαμβάνηται πάντοτε ἀντὶ τοῦ ἑτέρου Παράγοντος. π. χ. τοῦ χ οἱ Παράγοντές εἰσιν τὸ χ καὶ 1, ὅθεν ἡ Ἐξίσωσις $\chi = \gamma\delta$ ἔχει Παράγοντας $\chi \times 1 = \gamma \times \delta$ καὶ ἐντεῦθεν γίνεται ἡ ἀναλογία $\chi : \gamma = \delta : 1$, ἢ $1 : \gamma = \delta : \chi$. Ὅταν δὲ τὸ Παραγόμενον ὑπάρχῃ Συμπεπλεγμένον Ποσόν, καὶ εἰς καθε Ὅρον συμπίπτῃ τὸ αὐτὸ Γράμμα, τότε Παράγοντες εἶναι αὐτὸ τὸ Γράμμα, καὶ τὸ Συμπεπλεγμένον Ποσόν. π. χ. $\nu\delta - \delta = \alpha\gamma - \beta\gamma$ παράγοντές εἰσιν $(\nu - 1)\,\delta = (\alpha - \beta)\,\gamma$. ὅθεν ἡ ἀναλογία $\nu - 1 : \alpha - \beta = \gamma : \delta$; προσέτι τοῦ $1 - \chi\chi = \alpha$ Παράγοντές εἰσιν $1 - \chi \times 1 + \chi = \alpha \times 1$, ἡ δὲ ἀναλογία $1 - \chi : \alpha = 1 : 1 + \chi$. οὕτω καὶ τὰ $\chi\chi - \phi\phi = 1$ δίδουσιν ἀναλογίαν $\chi - \phi : 1 = 1 : \chi + \phi$, καὶ Συνεχῆ $\div \chi - \phi : 1 : \chi + \phi$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 164. Ἐπειδὴ καὶ τὰ Κλάσματα εἶναι λόγοι (137), διὰ τοῦτο Ἴσα Κλάσματα διαλυθέντα δύνανται νὰ τεθῶσιν ἐν εἴδει ἀναλογίας, ὅθεν ὅταν μὲν ὁ Παρονομαστὴς ἔχῃ πρὸς τὸν ἑαυτοῦ Ἀριθμητὸν τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει καὶ ὁ ἕτερος Παρονομαστὴς πρὸς τὸν ἑαυτοῦ ἀριθμητὴν, ἢ ἀνάπαλιν, ὡς ὁ ἀριθμ. πρὸς τὸν ἑαυτοῦ Παρονομ. οὕτω καὶ ὁ ἕτερος ἀριθμ. πρὸς τὸν ἑαυτοῦ Παρονομ. τότε τὰ Κλάσματα εἶναι τεταγμένα εἰς Ὀρθὴν ἀναλογίαν. ὅταν ὅμως ὁ Παρονομ. πρὸς τὸν ἑαυτοῦ ἀριθ. ἔχῃ λόγον τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ ἄλλος ἀριθμ. πρὸς τὸν ἑαυτοῦ Παρονομαστὴν, καὶ ἀνάπαλιν, τότε τὰ Κλάσματα εἶναι τεταγμένα εἰς ἀντίστροφον ἀναλογίαν, οἷον ἐκ τοῦ $\frac{3}{9}$ καὶ $\frac{6}{18}$ ἀποκαθίσταται Ὀρθὴ ἀναλογία $9 : 3 = 18 : 6$ ἢ $3 : 9 = 6 : 18$. ἀντίστροφος δὲ $9 : 3 = 6 : 18$ ἢ $3 : 9 = 18 : 6$. ὅταν δ' αὖθις τὰ Κλάσματα ἔχωσιν ἀριθμητὴν μὲν τὸν αὐτὸν, Παρονομαστὴν ὅμως διάφορον, τότε τὰ Κλάσματα εἶναι εἰς ἀντίστροφον λόγον τῶν Παρονομαστῶν, δηλαδὴ τὸ πρῶτον Κλάσμα ἔχει πρὸς τὸ δεύτερον λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ Παρονομ. τοῦ δευτέρου Κλάσματος πρὸς τὸν Παρονομαστὴν τοῦ πρώτου. οἷον $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\alpha}{\delta} = \delta : \beta$, καὶ $\frac{3}{4} : \frac{3}{5} = 5 : 4$. καὶ τοῦτο εἶναι φανερὸν, ἐπειδὴ τὸ ἐκ τῶν ἄκρων Γινόμενον $\frac{\alpha\beta}{\beta}$ ἤτοι $\frac{3\times4}{4}$ = τῷ ἐκ τῶν Μέσων Γινομένῳ $\frac{\alpha\delta}{\delta}$ ἢ $\frac{3\times5}{5}$ δηλαδὴ $\alpha = \alpha$ καὶ $3 = 3$. ἂν ὅμως οἱ Παρονομασταὶ ὦσιν Ἴσοι, οἱ δὲ ἀριθμηταὶ ἄνισοι, τὰ Κλάσματα ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα τοιοῦτον, ὅ, τι λογῆς ἔχουσι καὶ οἱ ἀριθμηταὶ πρὸς ἀλλήλους. π. χ. $\frac{\alpha}{\delta} : \frac{\gamma}{\delta} = \alpha : \gamma$ καὶ $\frac{3}{5} : \frac{2}{5} = 3 : 2$, ἐπειδὴ τὸ ἐκ τῶν Μέσων Γινόμενον Ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν ἄκρων $\frac{\alpha\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\delta}$ καὶ $\frac{6}{5} = \frac{6}{5}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ β'.

§. 165. Ἐὰν οἱ Ὅροι μιᾶς ἀναλογίας πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι διὰ τῶν Ὅρων

ἄλλης

ἄλλης τινὸς ἀναλογίας, δηλαδὴ ὁ πρῶτος Ὅρος διὰ τοῦ πρώτου, καὶ ὁ δεύτερος διὰ τοῦ δευτέρου, καὶ οὕτως καθεξῆς, τὰ ἐκ τούτων Γινόμενα, ἢ Πηλίκα ἔσονται, αὖθις ἀνάλογα, ἢ ἐν λόγῳ τινί.

ΔΕΙΞΙΣ.

Πολλαπλασιασθήτω ἡ $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ ἀναλογία
μετὰ τῆς $\varepsilon : \zeta = \eta : \theta$

$$\alpha\varepsilon : \beta\zeta = \gamma\eta : \delta\theta$$

ὑποτεθήτω ἔτι εἰς μὲν τὴν πρώτην ἀναλογίαν τὸ Πηλίκον $= \pi$. εἰς δὲ τὴν δευτέραν $= \rho$. λοιπὸν (κατὰ τὸ γ', Πόρισμα) ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἀναλογίας γίγνεται

$$\alpha : \alpha\pi = \gamma : \gamma\pi \quad \big| \quad 2 : 4 = 3 : 6$$

ἐκ δὲ τῆς δευτέρας

$$\varepsilon : \varepsilon\rho = \eta : \eta\rho \quad \big| \quad 3 : 9 = 5 : 15$$

$$\alpha\varepsilon : \alpha\varepsilon\pi\rho = \gamma\eta : \gamma\eta\pi\rho \quad \big| \quad 6 : 36 = 15 : 90$$

ἐπειδὴ ἐν τοῖς δυσὶ τούτοις λόγοις τὸ Πηλίκον ἐστὶ $\pi\rho$, ἄρα οἱ λόγοι οὗτοι εἶναι Ἴσοι ἀλλήλοις. ὅθεν ἀναλογίαι εἴτε δύω, εἴτε πλείονες ἀλλήλων πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιοῦσιν αὖθις ἀναλογίαν.

ΠΟΡΙΣΜΑ α'.

§. 166. Ὅταν τοίνυν πάντες οἱ Ὅροι μιᾶς ἀναλογίας πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς Ποσότητος, ἢ ἄλλως ὅταν μόνον οἱ δύω Ἡγούμενοι Ὅροι πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς Ποσότητος, οἱ δὲ δύω Ἑπόμενοι δι' ἑτέρας

Ποσό-

Ποσότητος, τότε οἱ οὕτως αὐξηθέντες, ἢ ἐλαττωθέντες Ὅροι μένουσι πάντοτε ἀνάλογοι. ἐπειδὴ ἀφ' οὗ λυθῶσιν οἱ Ὅροι ὡς ἀνωτέρω, τὸ ἐκ τῶν ἄκρων Γινόμενον εἶναι πάντοτε Ἴσον μὲ τὸ ἐκ τῶν Μέσων Γινόμενον, καὶ ἐντεῦθεν εἶναι μία ἀληθὴς ἀναλογία,

ΠΟΡΙΣΜΑ β'.

§. 167. Ἐπειδὴ εἰς τὰς ἀριθμητικὰς ἀναλογίας ἀκολουθεῖ διὰ τῆς συνάψεως ἐκεῖνο, ὅπου γίνεται εἰς τὰς Γεωμετρικὰς διὰ τῆς Πολλαπλασιάσεως, διὰ τοῦτο ἂν δύω ἀριθμητικαὶ ἀναλογίαι συναχθῶσιν ἀναλογικῶς, τὰ ἀθροίσματα πάλιν μένουσιν ἐν λόγῳ. Ἐὰν ὅμως ἀφαιρεθῶσιν, αἱ διαφοραὶ αὐτῶν ἔσονται ἐν λόγῳ. καὶ ἡ Διαφορὰ εἰς τὴν πρώτην ὑπάρχει $= \delta$, εἰς δὲ τὴν δευτέραν $= \chi$

$$\alpha . \alpha+\delta = \beta . \beta+\delta \qquad 3 . 5 = 7 . 9$$
$$\gamma . \gamma+\chi = \varepsilon . \varepsilon+\chi \qquad 2 . 3 = 4 . 5$$
$$\overline{\alpha+\gamma . \alpha+\gamma+\delta+\chi = \beta+\varepsilon . \beta+\varepsilon+\delta+\chi} \qquad 5 . 8 = 11 . 14$$

ΠΟΡΙΣΜΑ γ'.

§. 168. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀποδειχθέντων γίνεται δῆλον, ὅτι ἐὰν Ἴσαι ἀναλογίαι μετ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθῶσιν, τὰ ἐκ τούτων Γινόμενα μένουσιν ἀνάλογα. ὅθεν ἐὰν προτεθῶσιν εἰς πολλαπλασίασιν τρεῖς, ἢ πλείονες τοιαῦται ἀναλογίαι, τὰ Γινόμενα (ἔσονται ταῦτα ἢ Κύβοι, ἢ ἄλλαι ἀνώτεραι Δυνάμεις) θέλουσιν εἶναι κάθε φορὰν ἀνάλογα. ὅθεν πολλαπλασιασθεῖσα ἐφ' ἑαυτὴν ἡ ἀναλογία $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, παρέχει πάλιν ἀναλογίαν Σύνθετον, οἷον

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta$$
$$\alpha : \beta = \gamma : \delta$$
$$\alpha^2 : \beta^2 = \gamma^2 : \delta^2$$

ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀναλογία, ἥτις πολλαπλασιάζεται, εἶναι αἱ ῥίζαι, καὶ τὸ Γενόμενον εἶναι τὰ Τετράγωνα τούτων τῶν ῥιζῶν· ἄρα ἐὰν αἱ ῥίζαι εἶναι ἀνάλογαι, πρέπει καὶ τὰ Τετράγωνα νὰ εἶναι ἀνάλογα, τὸ ὁποῖον ἐκφράζεται διὰ τοῦ ἑπομένου Θεωρήματος ΑἹ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ῬΙΖΩ͂Ν ἈΝΑΛΟ͂ΓΩΝ ΕἸΣῚΝ ἈΝΆΛΟΓΟΙ.

ΘΕΩΡΗΜΑ γ'.

§. 169. Ὅταν ἐπὶ δύω ἀναλογιῶν (τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι ὑπὸ τὴν ἄλλην γεγραμμένη, καὶ δύω Ὅροι τῆς μιᾶς εἶναι Ἴσοι μὲ δύω Ὅρους τῆς ἄλλης) ἀχθῶσι Παράλληλοι Γραμμαὶ εἰς ἀνίσους Ὅρους, τότε οὗτοι οἱ ἄνισοι Ὅροι εἶναι εἰς Ὀρθὴν ἀναλογίαν

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta$$
$$\beta : \mu = \delta : \nu \qquad \text{ἐστὶ } \alpha : \mu = \gamma : \nu .$$

ἐπειδὴ ἐκ τῆς πρώτης ἀναλογίας γίνεται διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν Ὅρων $\alpha : \gamma = \beta : \delta$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας γίνεται $\beta : \delta = \mu : \nu$. ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ $\alpha : \gamma$ καὶ $\mu : \nu$ εἶναι Ἴσα τῷ τρίτῳ λόγῳ $\beta : \delta$, ἄρα καὶ ἀλλήλοις οὗτοί εἰσιν Ἴσοι, δηλαδὴ $\alpha : \gamma = \mu : \nu$, ἢ $\alpha : \mu = \gamma : \nu$, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ δ'.

§. 170. Ἐὰν εἰς δύω ἀναλογίας (εἰς τὰς ὁποίας δύω Ὅροι τῆς μιᾶς εἶσιν Ἴσοι μὲ δύω Ὅρους τῆς ἄλλης) ἀχθῶσι δύω Γραμμαὶ Συμπίπτουσαι (τουτέστι μὴ παράλληλοι) ἐπὶ ἀνί-

σων

σων Ὅρων, οἱ Ὅροι ἦτοι εἰσὶν εἰς τὴν ἀναλογίαν ἀντιςρόφως.

$$\beta : \beta = \gamma : \delta$$
$$\beta : \mu = \nu : \gamma$$

ὅθεν γίνεται $\alpha : \mu = \nu : \delta$, ἐπειδὴ δὲ εἰς τὴν πρώτην ἀναλογίαν ἐςὶ $\alpha\,\delta = \beta\,\gamma$, εἰς δὲ τὴν δευτέραν $\mu\,\nu = \beta\,\gamma$. ἄρα ϗ $\alpha\,\delta = \mu\,\nu$. ἅπερ διαλυθέντα ποιῦσιν ἀναλογίαν $\alpha : \mu = \nu : \delta$.

ΘΕΩ'ΡΗΜΑ έ.

§. 171. Ὅταν εἰς δύω ἀναλογίας οἱ πρῶτοι Ἡγέμενοι Ὅροι εἶναι Ἴσοι ἀλλήλοις, ὡσαύτως ϗ οἱ ἐσχάτως Ἑπόμενοι, ϗ ἀνάπαλιν, τότε οἱ λοιποὶ Ὅροι εἰσὶν ἐν ἀντιςρόφῳ λόγῳ.

ἐὰν ὦσιν $\begin{cases} \alpha : \beta = \gamma : \delta \\ \alpha : \mu = \nu : \delta \end{cases}$

γίνεται $\quad \beta : \mu = \nu : \gamma$

ϗ γὰρ $\alpha\delta = \beta\gamma$, ϗ $\mu\nu = \alpha\delta$, ἄρα ϗ $\beta\gamma = \mu\nu$, ἐξ ὧν γίνεται $\beta : \mu = \nu : \gamma$.

ΘΕΩ'ΡΗΜΑ ς'.

§. 172. Ὅταν εἰς δύω ἀναλογίας οἱ πρώτως Ἡγέμενοι Ὅροι, ϗ οἱ δευτέρως αὖθις Ἡγέ-

Ἡγέμενοι Ἴσοι ὦσιν ἀλλήλοις, τότε οἱ λοιποὶ Ὅροι εἰσὶν εἰς ἀναλογίαν Ὀρθήν.

ἐὰν ὦσιν $\begin{cases} \alpha : \beta = \gamma : \delta \\ \alpha : \mu = \gamma : \nu \end{cases}$

γίνεται $\quad \beta : \mu = \delta : \nu$. ἐπειδὴ διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν Ὅρων ἐςὶ $\alpha : \gamma = \beta : \delta$ ϗ $\alpha : \gamma = \mu : \nu$. ἄρα ἔςαι ὡσαύτως Ὀρθή $\beta : \mu = \delta : \nu$.

ΘΕΩ'ΡΗΜΑ ζ'.

§. 173. Ὅταν ὦσι πλέονες Ἴσοι λόγοι (τῶν ὁποίων ὁ εἷς ἀκολυθεῖ τῷ ἑτέρῳ) ἢ πλέονες ἀνάλογοι Ὅροι, τότε τὸ Κεφάλαιον πάντων τῶν Ἡγυμένων Ὅρων πρὸς τὸ Κεφάλαιον ὅλων τῶν Ἑπομένων ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει κάθε Ἡγέμενος πρὸς τὸν ἑαυτῦ Ἑπόμενον.

Ἔςωσαν οἱ λόγοι $\alpha : \beta = \gamma : \delta = \varepsilon : \zeta = \eta : \vartheta$. κ. τ. οἱ ὁποῖοι δύνανται νὰ μεταποιηθῶσιν ὕτως $\alpha : \alpha\pi = \gamma : \gamma\pi = \varepsilon : \varepsilon\pi = \eta : \eta\pi$. τὸ Κεφάλαιον λοιπὸν τῶν Ἡγυμένων εἶναι $\alpha + \gamma + \varepsilon + \eta$, τῶν δὲ Ἑπομένων $\alpha\pi + \gamma\pi + \varepsilon\pi + \eta\pi$. ὥστε $\alpha + \gamma + \varepsilon + \eta : \alpha\pi + \gamma\pi + \varepsilon\pi + \eta\pi = \alpha : \alpha\pi$ δηλαδὴ $\alpha + \gamma + \varepsilon + \eta : (\alpha + \gamma + \varepsilon + \eta)\pi = \alpha : \alpha\pi$, ὅθεν τὸ ἐκ τῶν Μέσων Ὅρων Γινόμενόν ἐςι $(\alpha + \gamma + \varepsilon + \eta)\,\alpha\pi$, τὸ δὲ ἐκ τῶν ἄκρων Γινόμε-

νον

νον ὡσαύτως $(\alpha+\gamma+\epsilon+\eta)$ απ, τὰ ὁποῖα Ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις. καὶ ἐπειδὴ ὅπου τὸ ἐκ τῶν ἄκρων Γινόμενον εἶναι Ἴσον μὲ τὸ ἐκ τῶν Μέσων Γινόμενον, ἐκεῖ τυγχάνει ἀληθὴς ἀναλογία. ἄρα τὸ Κεφάλαιον τῶν Ἡγεμένων ἔχει λόγον κ. τ. ὡς εἴρηται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ α΄.

§. 174. Δοθέντων τριῶν Ὅρων τινὸς ἀναλογίας, νὰ εὕρωμεν τὸν τέταρτον, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ ἦναι ὁποιοσδήποτε Ὅρος τῆς ἀναλογίας.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ἂς εἶναι ὁ ζητούμενος Ὅρος χ, καὶ ἂς τεθῇ οὗτος εἰς τὸν τόπον τοῦ ζητητέου. ἐκ τῆς ἀναλογίας γίνεται ἤτοι ἀριθμητικὴ Ἐξίσωσις διὰ τῆς Συνάψεως τῶν Ὅρων, ἢ Γεωμετρικὴ διὰ τῆς πολλαπλασιάσεως αὐτῶν, ἔπειτα ζητεῖται τὸ χ κατὰ τοὺς Κανόνας τῆς Ἐξισώσεως.

$\alpha . \beta = \gamma . \chi$	γίνεται	$\alpha+\chi=\beta+\gamma$	ἤτοι	$\chi=\beta+\gamma-\alpha$.
$\alpha . \beta = \chi . \gamma$	.	$\alpha+\gamma=\beta+\chi$	.	$\chi=\alpha+\gamma-\beta$.
$\alpha . \chi = \beta . \gamma$	.	$\alpha+\gamma=\chi+\beta$	.	$\chi=\alpha+\gamma-\beta$.
$\chi . \alpha = \beta . \gamma$	.	$\chi+\gamma=\alpha+\beta$	.	$\chi=\alpha+\beta-\gamma$.
$\alpha . \beta = \gamma : \chi$	.	$\alpha\chi=\alpha\gamma$	.	$\chi=\frac{\beta\gamma}{\alpha}$.
$\alpha : \beta = \chi : \gamma$	.	$\alpha\gamma=\beta\chi$	.	$\chi=\frac{\alpha\gamma}{\beta}$.
$\alpha : \chi = \beta : \gamma$	.	$\alpha\gamma=\chi\beta$	.	$\chi=\frac{\alpha\gamma}{\beta}$.
$\chi : \alpha = \beta : \gamma$	.	$\chi\gamma=\alpha\beta$	.	$\chi=\frac{\alpha\beta}{\gamma}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἑκάστη ἀναλογία δύναται νὰ μεταποιηθῇ εἰς Ἐξίσωσιν (§. 157) εἰς τὴν ὁποίαν διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν Ὅρων εὑρίσκεται ἡ Δύναμις τοῦ ζητουμένου χ (§. 111).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ β΄.

§. 175. Ὅταν δοθῶσι δύω Ὅροι συνεχοῦς τινος ἀναλογίας, νὰ εὕρωμεν τὸν Μέσον, ἢ τρίτον Ὅρον.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Πρῶτον ὀνομάζεται ὁ ἄγνωστος Ὅρος χ, ὡς ἀνωτέρω εἴρηται, ἔπειτα ἀφ' οὗ ἀποκαταστασθῶσιν οἱ Ὅροι εἰς Ἐξίσωσιν, ζητεῖται ἡ Δύναμις τοῦ χ. οἷον

$\div \alpha . \beta . \chi$	γίνεται	$\alpha+\chi=2\beta$,	ἤτοι	$\chi=2\beta-\alpha$
$\div \alpha . \chi . \beta$	.	$\alpha+\beta=2\chi$	.	$\chi=\frac{\alpha+\beta}{2}$
$\div\!\!\div \alpha : \beta : \chi$	.	$\alpha\chi=\beta\beta$	.	$\chi=\frac{\beta\beta}{\alpha}$
$\div\!\!\div \alpha : \chi : \beta$	.	$\alpha\beta=\chi\chi$	.	$\chi=\sqrt{\alpha\beta}$

Ἡ Δεῖξις εἶναι ἡ Ἰδία μὲ τὴν ἀνωτέρω εἰρημένην.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 176. Ὁ Τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον δοθέντων τριῶν Ὅρων, εὑρίσκομεν τὸν τέταρτον, καλεῖται Μέθοδος τῶν τριῶν, ἡ ὁποία κοινῶς εἰς τὸν ἀνθρώπινον βίον εἶναι πολλῆς ὠφελείας πρᾶξις, διὰ τοῦτο καὶ χρυσοῦς Κανὼν ὀνομάζεται· περὶ δὲ τῆς χρήσεως αὐτοῦ ἐν τῷ ἀκολούθῳ Κεφαλαίῳ πραγματευσόμεθα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ θ'.

Περὶ τοῦ χρυσοῦ Κανόνος, ἢ Μεθόδου τῶν Τριῶν.

ΟΡΙΣΜΟΣ α'.

§. 177. Χρυσοῦς Κανών, ἢ ἀναλογίας Κανών ἐστιν ἡ Μέθοδος, διὰ τῆς ὁποίας ὅταν δοθῶσιν τρεῖς Ὅροι, εὑρίσκεται ὁ τέταρτος Γεωμετρικῶς ἀνάλογος. ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἀναλογία, ἐπὶ τοῦ παρόντος πάντοτε ἐννοεῖται Γεωμετρική τις ἀναλογία, καὶ λόγος πρὸς αὐτὴν ἀνήκων.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 178. Ὅθεν καὶ αὕτη ἡ Μέθοδος γενικῶς λαμβανομένη, διαιρεῖται εἰς ἁπλῆν, καὶ Σύνθετον· καὶ ἁπλῆ μέν ἐστιν, ὅταν δίδωνται τρεῖς Ὅροι, καὶ ζητῆται ὁ τέταρτος, καὶ θεωρῶνται δύω λόγοι, ἥτις καὶ Μέθοδος τότε τῶν τριῶν ὀνομάζεται. Σύνθετος δέ, ὅταν δοθῶσιν πέντε, ἢ ἑπτὰ Ὅροι, καὶ ζητῆται ὁ ἕκτος, ἢ ὁ ὄγδοος, καὶ θεωρῶνται τρεῖς, ἢ τέσσαρες λόγοι, ἥτις τῶν πέντε, ἢ τῶν ἑπτὰ Μέθοδος καλεῖται ὑπὸ τῶν ἀριθμητικῶν. ἐπιδιαιρεῖται δὲ πάλιν εἰς Ὀρθὴν καὶ εἰς ἀντίστροφον, καὶ Ὀρθὴ μέν ἐστιν, ἐὰν ὁ πρῶτος

Ὅρος

Ὅρος ἔχῃ πρὸς τὸν δεύτερον, καθὼς ὁ τρίτος πρὸς τὸν ζητούμενον. ἀντίστροφος δὲ τυγχάνει, ὅταν ὁ πρῶτος Ὅρος ἔχῃ πρὸς τὸν δεύτερον, καθὼς ὁ ζητούμενος τέταρτος πρὸς τὸν δοθέντα τρίτον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 179. Ἐφ' ἑκάστου Προβλήματος ταύτης τῆς Μεθόδου προϋποτίθενται δύω τινα, τὸ μὲν ἕν, ὡς πρᾶγμα γεγονός, ἢ δοθέν, τὸ δ' ἕτερον ὡς ποιητέον ἢ ζητητέον, ἀνάλογον ὅμως μὲ τὸ πρῶτον. π. χ. πρῶτον δίδεται, ὅτι τέσσαρες Μαθηταὶ δαπανῶσιν εἰς ἕνα Μῆνα 19 Γρόσια, ἔπειτα ζητεῖται, πόσα ἄραγε Γρόσια θέλουσι δαπανήσει εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν δώδεκα Μαθηταί; ἢ δίδοται πρῶτον, ὅτι ἕνας ἠγόρασε τρεῖς Πήχεις τινὸς πράγματος διὰ 7 Γρόσια, ἔπειτα ζητεῖται, πόσους ἄραγε Πήχεις τοῦ αὐτοῦ πράγματος δύναταί τις νὰ ἀγοράσῃ μὲ Γρόσια 21; ἢ πάλιν προϋποτίθεται, ὅτι 12 Σκαπανεῖς σκάπτουσιν ἐν μιᾷ ἡμέρᾳ 24 Ὀργυιάς, ἔπειτα ζητεῖται· Πόσας ἄραγε Ὀργυιὰς θέλουσι σκάψει πεντήκοντα Ἐργάται;

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 180. Ἐντεῦθεν εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ τῆς Μεθόδου τῶν Τριῶν ἐκ τεσσάρων Ὅρων συνίστανται, οἱ ὁποῖοι ἢ πάντες εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους, ἢ ἀνὰ δύω. καὶ ἀνὰ δύω μὲν εἰσί, καθὼς εἰς τὰ τρία πρόσθεν Παραδείγματα. οἷον οἱ ἀριθμοὶ τῶν Μαθητῶν ὁ 4, καὶ ὁ 12 εἰσὶν ὁμοειδεῖς, οἱ δὲ ἀριθμοὶ τῶν Γροσίων ὁ 19, καὶ ὁ ζητούμενος εἰσὶν ὁμοίως ὁμοειδεῖς μὲν ἀλλήλοις, ἑτεροειδεῖς δὲ μὲ τοὺς ἀνωτέρω δύω ἀριθμοὺς τῶν Μαθητῶν, κ. τ. ὁμοειδεῖς δὲ πάντες εἰσίν, ὅταν εἶναι τὰ τῆς ἀναλογίας, καθὼς ἐπὶ τούτου τοῦ Παραδείγματος: Τοκιστὴς διὰ 500 Γρόσια ἔλαβε Τόκον Γρόσια 30, διὰ δὲ 800 Γρόσια, πόσα Γρόσια θέλει λάβῃ;

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 181. Ἐὰν δὲ ἡ Μέθοδος Σύνθετος ὑπάρχῃ, συνακολουθοῦσι τοὐλάχιστον ἄλλοι δύω Ὅροι Ὁμοειδεῖς. π. χ. ἐὰν εἰς τὸ ἀνω-

τέρω

γρα τρίτον Παράδειγμα προσεπιτεθῇ εἰς ζήτησιν οὕτως ἢ πόσας ἄραγε Ὀργυιὰς σκάψουσιν 50 Ἐργάται εἰς 8 ἡμέρας;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ά.

§. 182. Εἰς τὴν ἁπλῆν Μέθοδον πρὸς τοῖς δοθεῖσι τρισὶ Ὅροις νὰ εὕρωμεν τὸν τέταρτον ἀνάλογον.

ΛΥΣΙΣ, ἢ ΠΡΑΚΤΕΑ.

ά.) Ὁ Ὅρος, ὁ ὁποῖος εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὸν ζητούμενον τέταρτον, τίθεται εἰς τὸν τρίτον τόπον, οἱ δὲ λοιποὶ δύω, οἵτινες ἀλλήλοις εἰσὶν ὁμοειδεῖς, γράφονται εἰς τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον Τόπον,

β'.) Ζητεῖται, ἂν κατὰ τὴν τοῦ Προβλήματος ὑπόθεσιν ὁ τέταρτος Ὅρος πρέπῃ νὰ εἶναι μείζων, ἢ ἐλάττων τοῦ τρίτου. ἔπειτα κατατάττεται ὁ πρῶτος καὶ δεύτερος Ὅρος οὕτως, ὥστε ὁ πρῶτος νὰ ἔχῃ πρὸς τὸν δεύτερον, ὡς ὁ τρίτος πρὸς τὸν ζητούμενον τέταρτον,

γ'.) Πολλαπλασιάζομεν τὸν δεύτερον καὶ τρίτον Ὅρον ὁμοῦ, καὶ διαιροῦμεν τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον διὰ τοῦ πρώτου Ὅρου, καὶ τότε τὸ ἐκ τῆς Διαιρέσεως Πηλίκον ἐστὶν ὁ ζητούμενος τέταρτος Ὅρος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ά.

Τέσσαρες Μαθηταὶ δαπανῶσιν εἰς ἕνα Μῆνα Γρόσ. 19. πόσα ἄραγε Γρόσ. θέλουσι δαπανήσει μαθηταὶ δώδεκα;

Ὁ δο-

Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς τῶν Γροσίων τίθεται εἰς τὸν τρίτον Τόπον, ὥσαν ὁποῦ αὖθις ἀριθμὸς Γροσίων προβάλλεται εἰς ζήτησιν. καὶ ἐπειδὴ 12 Μαθηταὶ δαπανῶσι περισσότερα, παρὰ οἱ 4 Μαθηταί, διὰ τοῦτο καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν Γροσ. πρέπει νὰ εἶναι μείζων τοῦ δοθέντος 19 ἀριθμοῦ, καὶ ἑπομένως ὁ δεύτερος Ὅρος ἀνάγκη νὰ εἶναι μείζων τοῦ πρώτου, ἐπειδὴ ὃν λόγον ἔχουσιν οἱ 4 Μαθηταὶ πρὸς τοὺς πλείονας 12, τὸν αὐτὸν λόγον θέλουσιν ἔχῃ, καὶ τὰ 19 Γρόσια τὰ ὑπὸ τῶν τεσσάρων Μαθητῶν δαπανώμενα πρὸς τὰ ζητούμενα τὰ ὑπὸ τῶν 12 Μαθητῶν δαπανηθησόμενα, οἷον

Μαθ.		Μαθ.		Γρόσ.		Γρόσ.
4	:	12	=	19	:	χ

ἂν λοιπὸν οἱ Μέσοι Ὅροι ὑπ' ἀλλήλων πολλαπλασιασθῶσι 12×19, καὶ τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον 128 διαιρεθῇ διὰ τοῦ πρώτου Ὅρου 4, προκύπτει Πηλίκον Γρόσια 57. καὶ τόσα θέλουσι δαπανήσει 12 Μαθηταὶ εἰς ἕνα Μῆνα.

ΣΧΟΛΙΟΝ ά.

§. 183. Ἐπειδὴ ἐφ' ἑκάστης Ὀρθῆς ἀναλογίας τὸ ἐκ τῶν ἄκρων Γινόμενον πρέπει νὰ εἶναι ἴσον τῷ ἐκ τῶν Μέσων Γινομένῳ, διὰ τοῦτο καὶ ἐν τῷ εἰρημένῳ Παραδείγματι ἂν ὁ εὑρεθεὶς τέταρτος Ὅρος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τοὺς ἄλλους Ὅρους, τὸ ἐκ τῶν ἄκρων Γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐκ τῶν Μέσων Γινόμενον. ὅταν δὲ θέλῃ τινὰς νὰ πληροφορηθῇ ἐντελέστερον, ἐὰν εὑρέθη ἡ ζήτησις τοῦ Προβλήματος ἀληθῶς, τότε πολλαπλασιάζει τὸν πρῶτον Ὅρον μετὰ τοῦ εὑρεθέντος τετάρτου, καὶ ἂν τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον ἴσον τυγχάνῃ μὲ τὸ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου Γινόμενον, ἡ εὕρεσις τοῦ ζητουμένου ἐστὶν ἀληθής. δυνάμεθα ἔτι νὰ μεταχειρισθῶμεν καὶ κατὰ ἄλλον τρόπον τὴν δοκιμήν. λαμβάνομεν δηλαδὴ τὸν ἤδη εὑρεθέντα τέταρτον Ὅρον 57 ὡς διδόμενον, τὸν δὲ τούτῳ ὁμοειδῆ Ὅρον 19, ὡς

S 3 ζητού-

ζητούμενον, καὶ μετάθέτομεν εἰς ἀναλογίαν τοὺς Ὅρους κατὰ τὴν ἑξῆς ἐρώτησιν. ἐὰν 12 Μαθηταὶ εἰς ἕνα Μῆνα ἐξοδεύουσι 57 Γρόσια, πόσα ἄραγε Γρόσ. θέλουσιν ἐξοδεύσει 4 Μαθηταί; οἷον

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Μαθ.} & & \text{Μαθ.} & & \text{Γρόσ.} & & \text{Γρόσ.} \\ 12 & : & 4 & = & 57 & : & \chi \end{array}$$

τουτέστι $12\chi = 4 \times 57 = 228$

ἄρα $\chi = \frac{228}{12} = 19$ ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ β'.

Τρεῖς Πήχεις ὑφάσματός τινος πωλοῦνται ὁμοῦ 7 Γρόσια· λοιπὸν πόσους Πήχεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος δύναταί τις νὰ ἀγοράσῃ μὲ Γρόσια 21;

Α'ΠΑ'ΝΤΗΣΙΣ.

Ἐπειδὴ μὲ 21 Γρόσ. ἀγοράζει τινὰς πλείονας Πήχεις, παρὰ μὲ 7 Γρόσ., διὰ τοῦτο καὶ ὁ τέταρτος Ὅρος, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν Πήχεων πρέπει νὰ εἶναι μείζων. ὅθεν γίνεται ἡ ἑξῆς ἀναλογία ὡς ἔλαττον πρὸς μεῖζον, οὕτως ἔλαττον πρὸς μεῖζον, οἷον

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Γροσ.} & & \text{Γροσ.} & & \text{Πηχ.} & & \text{Πηχ.} \\ 7 & : & 21 & = & 3 & : & \chi \end{array}$$

καὶ διὰ τῆς πολλαπλασιάσεως γίνεται $21 \times 3 = 63$ τῶν ὁποίων διαιρεθέντων διὰ τοῦ 7, τὸ Πηλίκον ἔσται $= 9$ Πηχ.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. γ'.

Ἐργάται 30 σκάπτουσι 24 Ὀργυιάς. πόσας ἄραγε Ὀργυιὰς θέλουσι σκάψει 50 Ἐργάται;

Α'ΠΑ'Ν.

Α'ΠΑΝΤΗΣΙΣ.

Ἐπειδὴ οἱ 50 Ἐργάται δύνανται νὰ σκάψωσι πλείονας Ὀργυιάς, παρὰ οἱ 30 Ἐργάται. διὰ τοῦτο καὶ ὁ τέταρτος Ὅρος πρέπει νὰ εἶναι μείζων τοῦ 24, καὶ ἐπομένως ὁ δεύτερος Ὅρος πρέπει νὰ εἶναι μείζων τοῦ πρώτου, οἷον

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ἐργ.} & & \text{Ἐργ.} & & \text{Ὀργ.} & & \text{Ὀργ.} \\ 30 & : & 50 & = & 24 & : & \chi \end{array}$$

$\frac{24 \times 50}{30} = 40$ ὅπερ ἐστὶν ὁ ζητούμενος ἀριθμός,

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ δ'.

Θερισταὶ 8 τελειώνουσί τινα, φέρ' εἰπεῖν, Ἐργασίαν ἐν τῷ ἀγρῷ εἰς 12 ἡμέρας. θερισταὶ λοιπὸν 24 εἰς πόσας ἡμέρας θέλουσι τελειώσει τὴν αὐτὴν Ἐργασίαν;

Α'ΠΑ'ΝΤΗΣΙΣ.

Ἐπειδὴ οἱ πλείονες θερισταὶ τελειώνουσί τινα Ἐργασίαν εἰς ὀλίγας ἡμέρας, παρὰ οἱ ἐλάττονες, διὰ τοῦτο καὶ ὁ ζητούμενος Ὅρος πρέπει νὰ εἶναι Ἐλάσσων τοῦ 12. ὅθεν καὶ ὁ δεύτερος Ὅρος ἔσται Ἐλάσσων τοῦ πρώτου.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{θερ.} & & \text{θερ.} & & \text{ἡμερ.} & & \text{ἡμερ.} \\ 24 & : & 8 & = & 12 & : & \chi \end{array}$$

ὁ ζητούμενος ἔσται $\frac{8 \times 12}{24} = 4$

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. ε'.

Μία Ποσότης τῶν πρὸς τὸ ζῆν ἀναγκαίων ἐξαρκεῖ 30 ἡμέρας διὰ 24 στρατιώτας. πόσας ἄραγε ἡμέρας

S 4

ρας θέλει ἐξαρκέσει ἡ αὐτὴ ποσότης διὰ 40 στρατιώτας.

ΑΠΑΝΤΗΣΙΣ.

Ἐπειδὴ τὰ πρὸς τροφὴν ἀναγκαῖα ἐξαρκοῦσιν ὀλιγωτέρας ἡμέρας ὅταν ὦσι πλείονες στρατιῶται, διὰ τοῦτο καὶ ἐνταῦθα κατὰ τὴν τοῦ Προβλήματος ὑπόθεσιν, πρέπει ὁ ζητούμενος Ὅρος νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ τρίτου. ὅθεν καὶ ὁ δεύτερος θέλει εἶναι μικρότερος τοῦ πρώτου Ὅρου. οἷον

$$40 : 24 = 30 : \chi$$

$$\chi = \frac{720}{40} = 18$$ τόσας ἡμέρας θέλουσιν ἐξαρκέσει τὰ ἐπιτήδεια διὰ 40 στρατιώτας.

ΣΧΟΛΙΟΝ β'.

§. 184. Ὅταν δὲ ὦσι Μικταί, ἢ Ἑτερογενεῖς Ποσότητες, πρέπει πρῶτον νὰ μεταποιήσωμεν τοὺς ἀκεραίους, ἢ μείζονας εἰς τὸ μικρότερον εἶδος διὰ τῆς ἀναλύσεως, ἔπειτα νὰ ἀποκαταστήσωμεν τὰ ἀναλυθέντα Μέρη εἰς ἁπλᾶ κλάσματα. π. χ. $3\frac{3}{4}$ Πήχαι ὑφάσματός τινος ἀγοράζονται διὰ 19 Γρόσια καὶ 30 Παράδες. πόσον ἄραγε ἀγορασθήσεται ἕνας Πῆχυς;

$$\underset{\text{Πηχ.}}{\frac{15}{4}} : \underset{\text{Παραδ.}}{\frac{790}{1}} = \frac{1}{1} : \chi$$

ὅθεν ὁ τέταρτος Ὅρος ἔσται 210 Παραδ. ἤτοι 5 Γρόσ. καὶ 10 Παράδες.

ΣΧΟΛΙΟΝ γ'.

§. 185. Ἐντεῦθεν ἀναφύεται ἡ Μέθοδος, κατὰ τὴν ὁποίαν δυνάμεθα ἄνευ τινὸς παραφθορᾶς τῆς δυνάμεως νὰ μεταβάλλωμεν

ἕκαστον

ἕκαστον Κλάσμα εἰς ἕτερον, τοῦ ὁποίου ὁ Παρονομαστὴς εἶναι δεδομένος, ἢ νὰ εὑρίσκωμεν τὴν δύναμιν ἑκάστου Κλάσματος εἰς τὰ ἁπλούστερα μέρη τοῦ ὅλου, εἴτε νομίσματος, εἴτε μέτρου, εἴτε ἄλλης τινὸς ὀνομασίας τούτου ὄντος. διότι ἐπειδὴ κάθε Κλάσμα λόγος ἐστὶν ὡς ἐν τῷ (§. 136) δεδήλωται, διὰ τοῦτο καὶ δύω Ἴσα Κλάσματα δύνανται νὰ καταστρωθῶσιν εἰς ἀναλογίαν οὕτως, ὥστε ὁ Παρονομαστὴς τοῦ ἑνὸς Κλάσματος νὰ ἔχῃ πρὸς τὸν ἀριθμητὴν τοιοῦτον λόγον, ὅν τινα λόγον ἔχει ὁ Παρονομαστὴς τοῦ ἑτέρου Κλάσματος πρὸς τὸν ἑαυτοῦ ἀριθμητήν. ὅθεν ὁ δοθεὶς Παρονομαστὴς ἔσται ὁ τρίτος Ὅρος τῆς ἀναλογίας, πρὸς τὸν ὁποῖον ζητεῖται ἕνας ἀριθμητής. ἐὰν λοιπὸν θέλωμεν νὰ μάθωμεν τὸ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς φέρ' εἰπεῖν, Γροσίου μὲ πόσους Παράδας ἐξισοῦται, πρέπει νὰ ζητήσωμεν πρὸς τὸν 40 Παρονομαστὴν τὸν ἀριθμητήν, λέγοντες οὕτως $4 : 3 = 40 : 30$, καὶ $\frac{30}{40}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{3}{4}$, οὕτως αὖθις γίνεται καὶ $\frac{2}{3}$ τοῦ ποδὸς εἰς δακτύλους, ἢ δωδεκατημόρια, οἷον $3 : 2 = 12 : 8$, καὶ 8 δάκτυλοι εἰσιν $\frac{2}{3}$ τοῦ ποδός (*).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ β'.

§. 186. Ἐὰν δοθῶσι πέντε, ἢ ἑπτὰ Ὅροι μιᾶς Συνθέτου Μεθόδου, νὰ εὕρωμεν τὸν ἕκτον, ἢ ὄγδοον ἀνάλογον Ὅρον.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

(*) Οἱ δάκτυλοι καὶ ὁ πούς ἐνταῦθα λαμβάνονται οὐχὶ κατὰ τὴν Γεωγραφικὴν (§. 53 ἀριθμητικῇ) χρῆσιν, ἀλλὰ κατὰ τὴν τοῦ μάκρους, ὅτι δηλαδὴ δώδεκα δάκτυλοι συμπληροῦσιν ἕνα πόδα.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

α.) Ὁ Ὅρος, ὅστις εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὸν ζητούμενον, τίθεται εἰς τὸν τρίτον τόπον.

β΄. Οἱ μὲν δύω Ὁμοειδεῖς Ὅροι τίθενται εἰς τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον τόπον, καθὼς προείρηται. οἱ δὲ λοιποὶ Ὅροι ἐγκαταλείπονται ἐν τοσούτῳ, καὶ παρορῶνται, ὡς μὴ προκείμενοι εἰς τὴν ὑπόθεσιν, καὶ οὕτω διὰ τῶν τριῶν ζητεῖται ὁ τέταρτος Ὅρος κατὰ τὸν πρότερον ῥηθέντα Κανόνα.

γ΄.) Ὁ μὲν εὑρεθεὶς τέταρτος Ὅρος φέρεται πάλιν εἰς ἄλλην νέαν ἀναλογίαν, καὶ τίθεται εἰς τὸν τρίτον τόπον, οἱ δὲ λοιποὶ προεγκαταλειφθέντες δύω Ὁμοειδεῖς Ὅροι, ἐπέχουσι κατὰ τὴν προτεθεῖσαν διδασκαλίαν τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον τόπον, ἔπειτα πολλαπλασιάζονται οἱ Μέσοι Ὅροι μετ᾽ ἀλλήλων, καὶ τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ πρώτου Ὅρου, καὶ οὕτω τὸ Πηλίκον ἔσται ὁ ζητούμενος τέταρτος Ὅρος.

δ΄.) Ὁ μὲν ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀναλογίᾳ εὑρεθεὶς Ὅρος τίθεται πάλιν (τοῦτο ἀκολουθεῖ ὅταν δίδωνται ἑπτὰ Ὅροι, καὶ ζητῆται ὁ ὄγδοος) εἰς τὸν τρίτον τόπον ἄλλης τρίτης ἀναλογίας, οἱ δὲ λοιποὶ ἔτι δύω προεγκαταλειφθέντες Ὅροι (οἱ ὁποῖοι ἀλλήλοις μὲν εἰσὶν Ὁμοειδεῖς, μὲ τοὺς ἄλλους ὅμως ἑτεροειδεῖς) τίθενται εἰς τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον τόπον, ἔπειτα ζητεῖται ὁμοίως ὁ τέταρτος Ὅρος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ α΄.

Ἵπποι 8 τρέφονται μὲ 9 σακκία Κριθῆς, ἢ βρώμης ἡμέρας 12, ζητεῖται λοιπόν, 16 Ἵπποι μὲ 24 σακκία πόσας ἡμέρας θέλουσι τραφῇ.

ΑΠΑΝ-

ΑΠΑΝΤΗΣΙΣ.

Αἱ μὲν 12 ἡμέραι κατέχουσι τὸν τρίτον τόπον, εἰς δὲ τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον τίθενται κατ᾽ ἀρχὰς οἱ ἀριθμοί (ὁ 16 δηλαδὴ καὶ 8) τῶν Ἵππων, τὰ δὲ σακκία ἐν τοσούτῳ ἐγκαταλείπονται. Καὶ ἐπειδὴ μία Ποσότης Κριθῆς, ἥτις πρὸς τροφὴν 8 Ἵππων εἶναι ἱκανὴ εἰς δώδεκα ἡμέρας, διὰ 16 Ἵππους διαρκεῖ ὀλιγώτερον χρόνον, διὰ τοῦτο καὶ ὁ ζητούμενος τέταρτος Ὅρος ἔσται ἐλάσσων τοῦ τρίτου, καθὼς καὶ ὁ δεύτερος μικρότερος ἀπὸ τὸν πρῶτον.

$$\overset{\text{Ἵπ.}}{16} : \overset{\text{Ἵπ.}}{8} = \overset{\text{ἡμ.}}{12} : \overset{\text{ἡμ.}}{6}$$

Ὁ εὑρεθεὶς Ὅρος 6 φέρεται αὖθις εἰς τὸν τρίτον τόπον δευτέρας ἀναλογίας, ἐπὶ τῆς ὁποίας τίθενται οἱ ἀριθμοὶ (ὁ 9, καὶ 24) τῶν σακκίων εἰς τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον τόπον, ἔπειτα ἐπειδὴ εἰς ἕνα ἀριθμὸν Ἵππων (πρὸς τροφὴν τῶν ὁποίων 9 σακκία εἰσὶν ἱκανὰ εἰς ἡμέρας 6) διαρκοῦσιν 24 σακκία πλείονας ἡμέρας, διὰ τοῦτο ὁ τέταρτος Ὅρος ἔσται μείζων τοῦ τρίτου, καὶ ἐπομένως ὁ δεύτερος μείζων τοῦ πρώτου, ἐξ ὧν γίνεται

$$\overset{\text{σακ.}}{9} : \overset{\text{σακ.}}{24} = \overset{\text{ἡμ.}}{6} : \overset{\text{ἡμ.}}{16}$$

ἄρα 24 σακκία Κριθῆς εἰς τροφὴν 16 Ἵππων ἐξαρκοῦσιν 16 ἡμέρας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ β΄.

Οἰκοδόμοι 4 κτίζουσιν εἰς 3 ἡμέρας Ὀργυιὰς 5. ζητεῖται οὖν, πόσας Ὀργυιὰς θέλουσι κτίσει 5 οἰκοδόμοι εἰς ἑπτὰ ἡμέρας;

$$\overset{\text{Οἰκ.}}{4} : \overset{\text{Οἰκ.}}{5} = \overset{\text{Ὀργ.}}{5} : \overset{\text{Ὀργ.}}{x}$$

$$\text{ἄρα } x = \frac{25}{4} \text{ ἢ } = 6\,\frac{1}{4}$$

ἔπειτα ὁ εὑρεθεὶς τέταρτος Ὅρος ὁ $\frac{25}{4}$, ἢ ὁ $6 + \frac{1}{4}$

τίτετίθεται αὖθις εἰς τὸν τρίτον τόπον ἄλλης δευτέρας ἀναλογίας, οἷον

$$\overset{\text{ἡμ.}}{3} : \overset{\text{ἡμ.}}{7} = \overset{\text{ὀργ.}}{\frac{25}{4}} : \overset{\text{ὀργ.}}{x}$$

$$3x = \frac{7}{1} \times \frac{25}{4} \text{ ἤγουν } \frac{175}{4}.$$

$$\text{ὅθεν } x = \frac{175}{12} \text{ ὅπερ ἐστὶν } = 14 + \frac{7}{12}.$$

Οἰκοδόμοι ἄρα πέντε εἰς 7 ἡμέρας κτίζουσιν $14 + \frac{7}{12}$ Ὀργυιάς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ γʹ.

Γρόσια 3550 φέρουσιν 1420 Γρόσ. κέρδος εἰς 10 ἔτη. ζητεῖται λοιπὸν, πόσον κέρδος θέλουσι φέρῃ 50000 Γρόσια εἰς χρόνους 20;

$$\overset{\text{Γρόσ.}}{3550} : \overset{\text{Γρόσ.}}{50000} = \overset{\text{Κέρδ.}}{1420} : x$$

$$\overset{\text{χρ.}}{10} : \overset{\text{χρ.}}{20} = x$$

Τὸ πρῶτον εὑρεθὲν x εἶναι $= 20000$ ἀριθ. τὸν ὁποῖον θέτοντες εἰς τὸν τρίτον τόπον τῆς δευτέρας ἀναλογίας, πορίζόμεθα τὰ ἑξῆς $10:20 = 20000:40000$, ὅθεν εἶναι φανερὸν, ὅτι τὰ 50000 Γρόσια εἰς 20 ἔτη φέρουσι κέρδος 40000 Γρόσια.

ΣΧΟ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 187. Ἐντεῦθεν προκύπτει μία ἀλγεβραϊκῶς γενικὴ Ἔκθεσις περὶ ἑκάστου κέρδους, ἢ τόκου ὁποιασδήποτε Ποσότητος, καὶ μάλιστα διὰ τινὰς ἡμέρας τοῦ χρόνου θεωρουμένης. ἐπειδὴ τὸ κέρδος ἑκάστης ποσότητος ἔχει λόγον τινὰ, καὶ σχέσιν πρὸς τὸ κέρδος, ὅπου φέρουσι, φέρ' εἰπεῖν, 100 Γρόσια, διὰ τοῦτο ἡ μὲν πρώτη ἀναλογία πρέπει νὰ γένῃ οὕτως, ὡς τὰ 100 Γρόσια πρὸς τὸ κέρδος των, οὕτως ἡ δοθεῖσα Ποσότης πρὸς τὸ κέρδος της, ἡ δὲ δευτέρα ἀναλογία οὕτως, ὡς ἓν ἔτος (ἢ 360 ἡμέραι) πρὸς τὰς ἡμέρας, διὰ τὰς ὁποίας ζητεῖται τὸ κέρδος, οὕτω τὸ ἐν τῇ πρώτῃ ἀναλογίᾳ εὑρεθὲν κέρδος πρὸς τὸ εἰς ζήτησιν προτεθέμενον κέρδος, ὅπερ ἀνήκει εἰς τὰς δεδομένας ἡμέρας. ἔστω τὸ κέρδος τῶν 100 Γροσίων $= 1$. ἡ δὲ δοθεῖσα ποσότης $= \pi$, καὶ αἱ δοθεῖσαι ἡμέραι $= \eta$. ὅθεν γίνεται ἡ ἑξῆς ἀναλογία.

$$100 : 1 = \pi : \frac{1\pi}{100}. \text{ ἔπειτα}$$

$$360 : \eta = \frac{1\pi}{100} : \frac{1\pi\eta}{36000}.$$

Ὅταν ὅμως ὑποτεθῇ, ὅτι τὰ 100 Γρόσ. φέρουσι κέρδος 4, τότε ἀντὶ τῆς 1, τίθεται ὁ 4 ἀριθμός. καὶ ἡ γενικὴ Ἔκθεσις ἔσται $\frac{4\pi\eta}{36000}$. δυνάμεθα ὅμως νὰ φέρωμεν τοῦτο τὸ Κλάσμα εἰς μικροτέραν Ἔκθεσιν διὰ τῆς διαιρέσεως, οἷον $\frac{\pi\eta}{9000}$, καὶ ἀφ' οὗ πάλιν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ Παρονομαστοῦ, τὸ προκύπτον Πηλίκον ἔσται τὸ ζητούμενον κέρδος. ἐὰν ὅμως θέλωμεν νὰ μεταβληθῇ ἡ δύναμις εἰς Παράδες, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ Κλάσματος διὰ τοῦ 40 (§. 185), καὶ τότε ἡ Ἔκθεσις αὕτη $\frac{\pi\eta}{9000}$ μεταβάλλεται εἰς $\frac{40\pi\eta}{9000}$, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα αὖθις νὰ τὸ φέρωμεν διὰ τῆς διαιρέσεως εἰς μικροτέραν Ἔκθεσιν, οἷον εἰς τὴν $\frac{2\pi\eta}{450}$, καὶ τοῦτο τὸ Κλάσμα

μα

μια δηλοῖ, ὅτι ἡ ποσότης τῶν χρημάτων πεπολλαπλασιασμένη τυγχάνει διὰ τοῦ διπλασίου ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν, καὶ τὸ ἐκ τούτου Γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ 450, τὸ δὲ ἐκ τῆς διαιρέσεως Πηλίκον εἶναι τὸ ζητούμενον κέρδος εἰς Παράδ. οἷον αἱ μὲν ἡμέραι ἑνὸς ὁλοκλήρου ἔτους λογίζονται $=$ 360, ἑνὸς δὲ μηνὸς $=$ 30, λοιπὸν ἂν προβληθῇ εἰς ζήτησιν, πόσον κέρδος φέρει μία Ποσότης ἀπὸ 6000 Γρόσ. εἰς 6 ἡμέρας; ποιοῦμεν κατὰ μὲν τὴν πρώτην $\left(\frac{\pi\,\eta}{9000}\right)$ Ἔκθεσιν οὕτως $\frac{6000 \times 6}{9000} = 4$ Γρόσ. τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ ζητούμενον κέρδος, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν $\left(\frac{2\,\pi\,\eta}{450}\right)$ ποιοῦμεν οὕτως $\frac{6000 \times 12}{450} = 160$ Παράδ. τὰ ὁποῖα εἰσὶν ἴσα μὲ 4 Γρόσια. Ὅταν δὲ προϋποτεθῇ, ὅτι ὁ ἐτήσιος (χρονικὸς) τόκος τῶν 100 Γροσίων εἶναι $=$ 2, 3, 5, κ. τ. ἢ 1 $\frac{1}{2}$, 2 $\frac{1}{2}$, 3 $\frac{1}{3}$ Γρόσ. κ. τ. τότε ἀντὶ τοῦ 1 τίθεται ὁ προϋποτεθεὶς ἀριθμὸς τοῦ Τόκου, καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον πραγματευόμεθα εἰς κάθε περίστασιν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓ. δ'.

Οἰκοδόμοι 3 τὴν ἡμέραν 7 ὥρας ἐργαζόμενοι, κτίζουσιν εἰς 2 ἡμέρας. 84 Ὀργυιάς. πόσας ἄραγε Ὀργυιὰς κτίζουσιν οἰκοδόμοι 5 εἰς 3 ἡμέρας, ὥρας 4 τὴν ἡμέραν ἐργαζόμενοι;

ἈΠΑΝΤΗΣΙΣ.

Εἰς μὲν τὴν πρώτην ἀναλογίαν λαμβάνομεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν οἰκοδομούντων μετὰ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τῶν Ὀργυιῶν, οἷον.

$$\overset{\text{Οἰκ.}}{3} : \overset{\text{Οἰκ.}}{5} = \overset{\text{Ὀργ.}}{84} : \chi = \overset{\text{Ὀργ.}}{140}$$

Ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἀναλογίᾳ λαμβάνονται αἱ ἡμέραι μετὰ τοῦ εὑρεθέντος ἀριθμοῦ, οἷον

$$\overset{\text{ἡμ.}}{2} : \overset{\text{ἡμ.}}{3} = \overset{\text{Ὀργ.}}{140} : \chi = \overset{\text{Ὀργ.}}{210}$$

Εἰς δὲ τὴν τρίτην ἀναλογίαν τίθενται οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὡρῶν μετὰ τοῦ εὑρεθέντος ἀριθμοῦ, οἷον

$$\overset{\text{ὡρ.}}{7} : \overset{\text{ὡρ.}}{4} = \overset{\text{Ὀργ.}}{210} : \chi = \overset{\text{Ὀργ.}}{120}$$

ἢ τόσας Ὀργυιὰς κτίσουσιν Οἰκοδ. 5. κ. τ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 188. Δυνάμεθα ἔτι νὰ ἀποκτῶμεν τὴν ἐπίλυσιν ἑκάστου προβλήματος, εἰς σύνθετον Μέθοδον κειμένου, καὶ κατὰ ἄλλον τρόπον εὐκολώτερον, τουτέστι πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς πρώτους λόγους (ὡστόσον πρέπει πρότερον οὗτοι οἱ λόγοι νὰ κατατάττωνται εἰκότως κατὰ τὴν Συνθήκην τοῦ Προβλήματος, καθὼς ἀνωτέρω κατετάχθησαν) μετ' ἀλλήλων, καὶ ἐκ τῶν γινομένων σύγκροτοῦμεν ἕνα μόνον λόγον, ἔπειτα τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, ὅστις Ὁμοειδὴς τυγχάνει μὲ τὸν ζητούμενον, θέτομεν εἰς τὸν τρίτον τόπον τῆς ἀναλογίας, καὶ οὕτω ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τέταρτόν τινα ἀριθμὸν, ὅστις εἶναι τὸ ζητούμενον. ὅθεν εἰς τὸ προτεθὲν Πρόβλημα ποιοῦμεν οὕτω, πρῶτον πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν Οἰκοδ. μετὰ τῶν ἡμερῶν καὶ ὡρῶν, καθ' ἃς οὗτοι ἐργάζονται, ἔπειτα τὰ ἐκ τούτων Γινόμενα θέτομεν εἰς ἀναλογίαν, ὥστε τὸ μὲν ἓν Γινόμενον νὰ ἔχῃ τὸν πρῶτον τόπον, τὸ δὲ ἕτερον νὰ ἔχῃ τὸν δεύτερον, ὁ δὲ δοθεὶς ἀριθμὸς τῶν Ὀργυιῶν ὅστις εἶναι Ὁμοειδὴς μὲ τὸν ζητούμενον, τίθεται εἰς τὸν τρίτον τόπον οἷον

$$\begin{array}{lcccc} \text{Οἰκ.} & 3 : 5 & & & \\ \text{Ἡμ.} & 2 : 3 & & & \\ \text{Ὡρ.} & \frac{7}{42} : \frac{4}{60} & = \overset{\text{Ὀργ.}}{84} & : = \chi & \overset{\text{Ὀργ.}}{120} \end{array}$$

εὑρίσκεται ἄρα τὸ $\chi = 120$ Ὀργ. καὶ εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, ὅστις καὶ κατὰ τὴν ἄλλως προτεθεῖσαν διδασκαλίαν εὑρίσκεται.

ὉΡΙΣ-

ΟʹΡΙΣΜΟʹΣ βʹ.

§. 189. Μέθοδος Ἑταιρείας (Συντροφίας) καλεῖται ὁ τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου, δείχνομεν διαφόρους Ποσότητας, αἱ ὁποῖαι ἀναλογικῶς ἀνήκουσιν εἴς τινας, οἵτινες συντροφικῶς κατέθεντο ἕκαστός τινα Ποσότητα, ἔπειτα ἐμπορευσάμενοι ἐπὶ τινὰ χρόνον, μοιράζουσιν ἀναλόγως τὸ ἐκ τῆς ὅλης Ποσότητος κέρδος, ἢ ζημίαν, ὥστε κερδαίνει, ἢ ζημιοῦται ἕκαστος κατὰ τὴν καταπεθεῖσαν αὐτοῦ Ποσότητα.

ΠΡΟʹΒΛΗΜΑ γʹ.

§. 190. Νὰ εὕρωμεν εἰς τὴν Μέθοδον ἑταιρείας ἀναλόγους Ὅρους, ἢ Ποσότητας.

ΠΡΑΚΤΕʹΑ, ἢ ΛΥʹΣΙΣ.

αʹ.) Συνάπτομεν ἀλλήλας τὰς κατατεθείσας Ποσότητας, καὶ ἀποτελοῦμεν ἐκ τούτου ἓν κεφαλαιῶδες ἄθροισμα, ἔπειτα κάμνομεν μίαν τοιαύτην ἀναλογίαν, οἷον ὡς τὸ ἐξ ἁπασῶν τῶν Ποσοτήτων συγκείμενον (ἄθροισμα) πρὸς τὴν ἰδίαν Ποσότητα ἑκάστου, οὕτω καὶ ὅλον τὸ κέρδος (ἢ ἡ ζημία) πρὸς τὸ ζητούμενον κέρδος, τὸ ἀνῆκον ἑκάστῃ Ποσότητι,

ΠΑΡΑʹ-

ΠΑΡΑʹΔΕΙΓ. αʹ.

Συνέμποροι τρεῖς συντροφίαν ποιησάμενοι, κατέβαλον καθ' ὑπόθεσιν ὁ μὲν πρῶτος Γρόσ. 5000, ὁ δὲ δεύτερος 3000, ὁ δὲ τρίτος αὖθις 2000. καὶ ἐκέρδησαν 15000 Γρόσ. ὅθεν ζητεῖται, πόσον κέρδος ἀνήκει νὰ λάβῃ ἕκαστος τούτων. ὅλη ἡ Ποσότης τῶν Γροσίων, ὁποῦ κατέβαλον ἦτοι εἶναι 10000; ὅθεν

$10000:5000 = 15000:x = 7500.$ { τὸ κέρδος τὸ ἀνῆκον εἰς τὸν πρῶτον

$10000:3000 = 15000:x = 4500.$ { τὸ τοῦ δευτέρου

$10000:2000 = 15000:3000.$ { τὸ τοῦ τρίτου

ΠΑΡΑʹΔΕΙΓΜΑ βʹ.

Τρεῖς ἠγόρασαν ὁμοῦ 4000 μέτρα σίτου διὰ 500, φέρ' εἰπεῖν, Γρόσια, καὶ ὁ πρῶτος ζητεῖ νὰ λάβῃ ἐξ αὐτῶν διὰ λογαριασμόν του 1300 μέτρα, ὁ δὲ δεύτερος 1460, καὶ ὁ τρίτος 1240. πόσα λοιπὸν Γρόσια πρέπει νὰ πληρώσῃ ἕκαστος διὰ ὅσα μέτρα σίτου ἔλαβεν;

μέτρα. μέτρα. Γρόσ. Γρόσ.
$4000 : 1300 = 500 : 162\frac{1}{2}.$ { τόσα Γρόσια πρέπει νὰ πληρώσῃ ὁ πρῶτος.

μέτρ. μέτρ. Γρόσ. Γρόσ.
$4000 : 1460 = 500 : 182\frac{1}{2}.$ { τόσα ὁ δεύτερος

μέτρ. μέτρ. Γρόσ. Γρόσ.
$4000 : 1240 = 500 : 155.$ { ὁ δὲ τρίτος τόσα

ΣΧΟʹ-

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ α'.

§. 191. Ἂν δὲ πλείονες τῶν τριῶν τύχωσιν οἱ τὴν συντροφίαν ποιήσαντες, τὴν αὐτὴν αὖθις τρόπον μεταχειριζόμεθα. τουτέστι δηλαδὴ συγκροτοῦμεν ἀναλογίας, ὅσοι εἰσὶν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ β'.

§. 192. Εἰς ἐντελεστέραν πληροφορίαν μεταχειριζόμεθα ἰδίαν καὶ βάσανον (τουτέστι δοκιμὴν) μετὰ τὴν λύσιν τοῦ Προβλήματος. Συνάπτομεν ἀλλήλους τοὺς εὑρεθέντας ἀριθμοὺς, οἷον τὸν (τοῦ πρώτου Παραδείγματος) 7500, καὶ τὸν 4500, καὶ τὸν 3000 ἀριθμὸν, ἐὰν ἐκ τῆς Συνάψεως προκύψῃ ἀριθμὸς ἴσος μὲ τὸ ὅλον κέρδος 15000, ἡ πρᾶξις καὶ ἡ Ἐπίλυσις τότε εἶναι ὑγιής.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ γ'.

§. 193. Εἰσὶν ἔτι καὶ ἄλλαι διάφοροι Συνθῆκαι καὶ περιστάσεις, ὡς εἴρηται προλαβόντως περὶ τῆς Συνθέτου Μεθόδου, οἷον κοντὰ εἰς τὴν Διαφορὰν καὶ ἀνισότητα τῶν παρ' ἑκάστου καταβαλλομένων Ποσοτήτων, θεωρεῖται καὶ τις διαφορὰ τοῦ χρόνου, κατὰ τὸν ὁποῖον ἕκαστος τῶν συνεμπόρων κατέθετο τὴν Ποσότητά του. ὅθεν ὅταν προβληθῶσιν εἰς λύσιν τοιαῦται περιστάσεις, πρῶτον πολλαπλασιάζομεν τὴν Ποσότητα ἑκάστου μετὰ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τοῦ χρόνου, ὁ ὁποῖος θεωρεῖται καὶ ἀναφέρεται εἰς τὴν αὐτὴν Ποσότητα, ἔπειτα συνάπτομεν τὰ ἐκ τούτων Γινόμενα εἰς ἓν ὁλικὸν ἄθροισμα, καὶ τέλος ἀποτελοῦμεν μίαν ἀναλογίαν, καθὼς ἐν τοῖς ἑξῆς δηλοῦται σαφέστερον.

ΔΕΙ͂ΞΙΣ.

Ἐπειδὴ τὰ ζητούμενα κέρδη ἔχουσι λόγον καὶ πρὸς τὰς καταβληθείσας Ποσότητας, καὶ πρὸς τὸν ἀριθμὸν τοῦ χρόνου, εἶναι πρόδηλον, ὅτι ἔχουσι λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν αὐτῶν, καὶ ἐπομένως ἔχουσιν ὡς οἱ ὑπ' αὐτῶν Γινόμενοι ἀριθμοί.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. γ'.

Συνέμποροι τρεῖς ἐκέρδησαν Γρόσια 200, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ μὲν εἶχε βάλει Γρόσ. 20 πρὸ 3 Μηνῶν, ὁ δὲ δεύτερος Γρόσια 40 πρὸ 2 Μηνῶν, καὶ ὁ τρίτος 24 πρὸ 6 Μηνῶν. ὅθεν ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ, πόσον κέρδος ἀνήκει ἑκάστῳ.

Γρόσ.	20	40	24	60
Μην.	3	2	6	80
	60	80	144	144
				284

$$ὡς\ 284 : πρὸς\ 60 = οὕτω\ 200 : πρὸς\ 42 + \frac{72}{284}$$

$$284 : 80 = 200 : 56 + \frac{96}{284}$$

$$284 : 144 = 200 : 101 + \frac{116}{284}$$

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. δ'.

Γεώργιός τις, δὸς εἰπεῖν, καὶ Δημήτριος, καὶ Ἰωάννης οἱ τρεῖς ὁμοῦ ἔκαμον συντροφίαν, καὶ ὁ μὲν Γεώργιος κατέθετο εἰς τὴν συντροφίαν Γρόσ. 100. διὰ 19 Μῆνας.
ὁ δὲ Δημήτριος κατέβαλεν 130. διὰ 10 Μῆνας.
ὁ δὲ Ἰωάννης . . . . 300. διὰ 6 Μῆνας.

τὸ δὲ κέρδος ἐγένετο 10000. ζητεῖται λοιπὸν, πόσον κέρδος πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος τούτων;

ἡ Ποσότης τοῦ πρώτου 100 πολλαπλασιασθεῖσα μετὰ τοῦ 16 ἀριθμοῦ γίνεται 1900

ἡ δὲ τοῦ δευτέρου 1300

ἡ δὲ τοῦ τρίτου 1800

5000

ὅθεν 5000 : 1900 = 10000 : 3800. τόσον κέρδος πρέπει νὰ λάβῃ ὁ πρῶτος.

5000 : 1300 = 10000 : 2600. πόσον ὁ δεύτερος.

5000 : 1800 = 10000 : 3600. τόσα ὁ τρίτος.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ γ'.

§. 194. Περὶ ἐκείνων, ὁποῦ συνεθίζουσιν οἱ ἀριθμητικοὶ νὰ προσθέτωσιν ἔτι ἐντοῦθα, ἡμεῖς ὡμιλήσαμεν, ὅτι ἐν τῷ (§. 160) ἐπραγματευσάμεθα.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ γ'.

Περὶ τῆς Μεθόδου τῆς ψευδοῦς ὑποθέσεως.

§. 195. Μέθοδος ψευδοῦς ὑποθέσεως καλεῖται, ὅταν λαμβάνωμεν, ἀντὶ τῶν ἀγνώστων καὶ ζητουμένων ἀριθμῶν, ἄλλους τινας ἀριθμοὺς ὑποθετικοὺς καὶ ἀναλόγους μὲ τοὺς ζητουμένους, διὰ νὰ ἀποκτήσωμεν τὴν ἀληθῆ ἐπίλυσιν τοῦ προβαλλομένου.

ΠΑΡΑ'-

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ.

Προβάλλεται πρῶτον, ὅτι τρεῖς ἄνθρωποι ἔχουσι νὰ μοιράσωσιν 1300 Γρόσια, τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος πρέπει νὰ λάβῃ πενταπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου, ὁ δὲ δεύτερος διπλάσιον τῶν τοῦ τρίτου. ἔπειτα ζητεῖται πόσα Γρόσ. πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

Ο'θεν ἂν ὑποτεθῇ νὰ λάβῃ ὁ τρίτος 1, πρέπει καὶ ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ 2, κατὰ τὴν τοῦ Προβλήματος συνθήκην, καὶ ἑπομένως ὁ πρῶτος 10. τούτους δὲ τοὺς ἀριθμοὺς συνάπτοντες ὁμοῦ, ποιοῦμεν τὸν 13 ἀριθμὸν, ἔπειτα συγκροτοῦμεν τὰς ἑξῆς ἀναλογίας.

13 : 10 = 1300 : χ = 1000 ὅπερ ἐστὶ τὸ μέρος τοῦ πρώτου.

13 : 2 = 1300 : ψ = 200 τὸ μέρος τοῦ δευτέρου

13 : 1 = 1300 : φ = 100 . . . τοῦ τρίτου.

ΔΕΙ'ΞΙΣ.

Εἶναι φανερὸν ἐκ τῆς ὑποθέσεως, ὅτι ὃν λόγον ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξ ὑποθέσεως ληφθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι ὁ 13 πρὸς τὸ μερίδιον (ὁποῦ ὑποθετικῶς λαμβάνει ὁ πρῶτος) εἴτ' οὖν πρὸς τὸν 10, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει καὶ ὁ δοθεὶς τῶν Γροσίων ἀριθμὸς, εἴτ' οὖν 1300, πρὸς τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν Γροσίων (τὰ ὁποῖα ἀληθῶς πρέπει νὰ λάβῃ ὁ πρῶτος) τουτέστι πρὸς τὸν 1000. καὶ οὕτω διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ δευτέρα καὶ ἡ τρίτη ἀναλογία εἶναι ἀληθής.

ΚΕΦΑ'-

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ ι.

Περὶ Προόδων.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ α.

§. 195. Πρόοδος καλεῖται σειρά τις Ποσοτήτων ἢ πλῆθυς ἀριθμῶν τινων κατά τινας Ἴσους λόγους χωρούντων, ἢ γραφομένων. αὕτη δὲ εἶναι διττή, ἀριθμητική δηλαδή, ϗ Γεωμετρική. ϗ ἀριθμητική μὲν Πρόοδος εἶναι, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ χωρῶσι κατά τινα ἀριθμητικὸν λόγον, τοὺς ὁποίους ϗ διὰ τοῦτο Μεγέθη, ἢ ἀριθμοὺς Ἰσοδιαφέροντας ὀνομάζουσί τινες. Γεωμετρική δὲ εἶναι, ὅταν αἱ Ποσότητες καταπάττωνται ἐν Γεωμετρικῷ τινι λόγῳ, ϗ διὰ τοῦτο ὀνομάζονται σειρά μεγεθῶν τὸ αὐτὸ Πηλίκον ἐχόντων. ϗ τὰς δύο ταύτας Προόδους ἐκθέτομεν δι' ἀριθμῶν οὕτω

Ἀριθμ.

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22. κτ.

Γεωμ.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. κτ.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ β.

§. 196. Αὔξουσα Πρόοδος λέγεται ἐκείνη, τῆς ὁποίας οἱ ἑπόμενοι Ὅροι διηνεκῶς χωροῦσιν αὐξάνοντες, ϗ ἑπομένως εἶναι μείζονες τῶν Ἡγουμένων, καθὼς αἱ ἀνωτέρω δύο προτεθεῖσαι. Μειουμένη δέ, ἢ Ἐλαττουμένη Πρόοδος εἶναι ἐκείνη, τῆς ὁποίας οἱ Ὅροι χωροῦσιν ἐλαττούμενοι, ϗ ἑπομένως ὁ Ἡγούμενος Ὅρος εἶναι πάντοτε μείζων τοῦ ἑπομένου. διὰ τοῦτο ϗ μιᾶς μὲν αὐξούσης Προόδου ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ Ἐλάττων, ὁ δὲ ἔσχατος εἶναι ὁ μείζων τῶν ἄλλων. εἰς δὲ τὴν Ἐλαττουμένην Πρόοδον ἀκολουθεῖ τὸ ἀνάπαλιν.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

§. 197. Ἐκ τῶν εἰρημένων εἶναι καταφανές, ὅτι ἡ ἀρχὴ ϗ ἡ Πηγή τινος Προόδου εἶναι μία συνεχὴς ἀναλογία, ἥτις διὰ τῆς ζητήσεως τοῦ ἑπομένου Ὅρου χωροῦσα κατὰ τοὺς ἤδη γνωστοὺς κανόνας, Πρόοδος τις ἀποκαθίσταται. ἂν π. χ. λάβωμεν πρῶτον μίαν συνεχῆ ἀναλογίαν, οἷον τὴν ÷ 1, 4, 7, ϗ ἔπειτα εἴπωμεν, ὡς 4 πρὸς 7, οὕτω 7 πρὸς 10, κτώμεθα τὸν τέταρτον Ὅρον. ϗ πάλιν ἂν ἀκολουθήσωμεν τὸ αὐτὸ ἐπὶ πλέον, λέγοντες, ὡς 7 πρὸς 10, οὕτως 10 πρὸς 13, πορίζομεθα τὸν πέμπτον Ὅρον, ϗ οὕτω χωροῦμεν ἐπ' ἄπειρον. τὸ ἴδιον ἀκολουθεῖ ϗ εἰς μίαν Γεωμετρικήν. π. χ. 1 : 2 = 2 : 4 & 2 : 4 = 4 : 8 ϗ 4 : 8 = 8 : 16. κ. τ. ἐξ ὧν γίνεται 1 : 2 : 4 : 8 : 16. κ. τ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 198. Διὰ νὰ ἀποφύγωμεν τινὰ σύγχυσιν, θέλομεν πραγματευθῇ ἐν τοῖς ἑξῆς μόνον περὶ τῆς αὐξούσης Προόδου. ἐπειδὴ ὅταν θελήσωμεν νὰ μεταβάλωμεν μίαν αὔξουσαν εἰς Ἐλαττωμένην Πρόοδον, ἠμποροῦμεν εὐκόλως νὰ τὴν μεταβάλωμεν διὰ τῆς ἐναντίας μεταθέσεως τῶν Ὅρων.

ΚΕΦΑΛΑΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 199. Κάθε αὔξουσα ἀριθμητικὴ Πρόοδος δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τοῦτον τὸν τύπον $\div\ \alpha \,.\, \alpha+\delta \,.\, \alpha+2\delta \,.\, \alpha+3\delta \,.\, \alpha+4\delta \,.\, \alpha+5\delta$. κ. τ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἀριθμητικὴ Πρόοδος εἶναι μία συνεχὴς σειρὰ Ποσοτήτων, ἢ ἀριθμῶν (§. 195), οἱ ὁποῖοι χωροῦσι κατά τινα Ἴσην διαφοράν. ἄρα ἕκαστος Ἑπόμενος Ὅρος εἶναι μείζων τοῦ Ἡγουμένου κατά τινα προσδιωρισμένην καὶ Ἴσην διαφοράν. ὅθεν ὅταν ὑποτεθῇ ὁ πρῶτος Ὅρος μιᾶς ἀριθμ. Προόδου α. ὁ δεύτερος Ὅρος ἔσται τότε αὐτὸς ὁ πρῶτος μετὰ τῆς δοθείσης διαφορᾶς, τουτέστιν $\alpha+\delta$, ὁ δὲ τρίτος ἔσται ὁ ἴδιος Ἡγούμενος δεύτερος μετὰ τῆς Ἰδίας διαφορᾶς. τουτέστιν $\alpha+\delta+\delta$, ἢ $\alpha+2\delta$, ὁ δὲ τέταρτος ἔσαι πάλιν αὐτὸς ὁ Ἡγούμενος τρίτος μετὰ τῆς διαφορᾶς, οἷον $\alpha+2\delta+\delta$, ἢ $\alpha+3\delta$. καὶ οὕτω καθεξῆς. ἑκάστη ἄρα αὔξουσα ἀριθμητικὴ Πρόοδος κ. τ. ἥτις διὰ τῶν ἀριθμῶν παρισαμένη, προάγεται οὕτως.

2.2+3

$$2.2 \div 3.2+6.2+9.2+12.2+15.2+18.$$
$$2.\ \ 5\ \ .\ \ 8\ \ .\ \ 11\ \ .\ \ 14\ \ .\ \ 17\ \ .\ \ 20$$

ἐπὶ δὲ τῆς ἐλαττωμένης Προόδου οἱ Ὅροι ἀκολουθοῦσιν οὕτως.

$\alpha \,.\, \alpha-\delta \,.\, \alpha-2\delta \,.\, \alpha-3\delta$. κ. τ.

ΠΟΡΙΣΜΑ α.

§. 200. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἕκαστος δύναται νὰ καταλάβῃ σαφέστατα, ὅτι κάθε ἑπόμενος Ὅρος μιᾶς αὐξούσης Προόδου συνίσταται ἐκ τοῦ πρώτου Ὅρου καὶ τῆς δοθείσης διαφορᾶς, πολλαπλασιασθείσης μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος εἶναι Ἴσος μὲ τὴν πληθὺν τῶν προηγουμένων Ὅρων, ἢ μὲ ἀριθμὸν μονάδι Ἐλάττονα τῆς κατ' αὐτὸν ζητουμένου Ὅρου πληθύος, τουτέστιν ὁ τέταρτος, φέρ' εἰπεῖν, τὸν ζητούμενον Ὅρον πληθύος, τουτέστιν ὁ τέταρτος Ὅρος τῆς ἀνωτέρω Προόδου (§. 199) σύγκειται ἐκ τοῦ α καὶ τῆς διαφορᾶς δ, πολλαπλασιασθείσης μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3. Ὅστις εἶναι Ἴσος μὲ τὴν πληθὺν τῶν προηγουμένων Ὅρων. οἷον $\alpha+3\delta$. ὁ δὲ ἕκτος Ὅρος εἶναι $\alpha+5\delta$. καὶ ἑπομένως ὁ εἰκοστὸς Ὅρος συνίσταται ἐκ τοῦ $\alpha+19\delta$. ὅθεν ἂν ὁ πρῶτος Ὅρος ὑποτεθῇ Ἴσος μὲ τὸν 2, καὶ ἡ διαφορὰ 3, τότε ὁ εἰκοστὸς Ὅρος $2+3 \times 19 = 2+57 = 59$.

ΠΟΡΙΣΜΑ β.

§. 201. Ὅταν θέλωμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν Διαφορὰν μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου τῆς Προόδου, ἀφαιροῦμεν τότε τὸν πρῶτον Ὅρον ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου. π. χ. ἔσχατος Ὅρος μιᾶς Προόδου ἔσω ὁ ἕβδομος Ὅρος, ἤτ' οὖν ὁ $\alpha+6\delta$. ἐκ τοῦ ὁποίου ἀφ' οὗ ἀφαιρεθῇ ὁ πρῶτος Ὅρος α, ἐγκαταλείπεται μόνον 6δ, ὅπερ ἐστὶν ἡ διαφορὰ ἡ μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ τούτου τοῦ ἐσχάτου Ὅρου θεωρουμένη. Ὅθεν ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου εἶναι Ἴση μὲ τὴν κοινὴν διαφορὰν δ, πολλαπλασιασθεῖσαν μετὰ τῆς πληθύος τῶν Ὅρων Μονάδι Ἐλαττωθείσης.

ΠΟ-

ΠΟΡΙΣΜΑ γ'.

§. 201. Τὸ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου καὶ προεσχάτου, τουτέστι τοῦ παραλήγοντος Ὅρου, ὡσαύτως καὶ τὸ ἄθροισμα ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ προεσχάτου Ὅρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ τρίτου καὶ τοῦ Ὅρου τοῦ ... μένου πλησίον τοῦ Προεσχάτου, τουτέστι τοῦ προπαραλήγοντος. π. χ. ἔστω τις Πρόοδος ἀριθμητικὴ ἀπὸ ἕξ Ὅρων συνισταμένη, οἷον ἡ α. α + δ. α + 2 δ. α + 3 δ. α + 4 δ. α + 5 δ. τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ ἐσχάτου Ὅρου, τουτέστι τὸ α + α + 5 δ εἶναι ἴσον μὲ τὸ α + δ + α + 4 δ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ πέμπτου Ὅρου, ὡσαύτως καὶ τὸ ἄθροισμα ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ πέμπτου, τουτέστι τὸ 2α + 5δ εἶναι ἴσον μὲ τὸ 2α + 5 δ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου Ὅρου. εἰ δὲ καὶ τύχῃ ἡ Πρόοδος ἐκ πλειόνων Ὅρων συνισταμένη, πάλιν τὸν αὐτὸν τρόπον μεταχειριζόμεθα, ἐκ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου ἀρχόμενοι, ὥστε γενικῶς πρέπει νὰ θεωρῶνται τὰ ἑξῆς. ὅτι, ἐφ' ἑκάστης ἀριθμητικῆς Προόδου τὸ Κεφάλαιον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ Κεφάλαιον ἐκείνων τῶν Ὅρων, οἵτινες ἐπίσης ἀφίστανται ἀπὸ τῶν ἄκρων. Ὅτε ὅμως ἡ Πρόοδος ἐκ περιττῶν (*) Ὅρων συνίσταται, τότε ὁ μεσαίτατος Ὅρος τῆς Προόδου μένει μόνος του καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλησιέστατα περὶ αὐτὸν δύω κειμένων Ὅρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τούτου τοῦ μεσαιτάτου Ὅρου.

ΠΟΡΙΣΜΑ δ'.

§. 203. Ἐπειδὴ πάντα ταῦτα τὰ ἀθροίσματα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, ἐντεῦθεν μανθάνομεν, πῶς νὰ εὑρίσκωμεν εὐκόλως τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν Ὅρων τῆς τυχούσης Προόδου. πολλαπλασιάζομεν

(*) Περιττὰ ἐνταῦθα λέγονται τὰ ἄζυγα, οἷον τὸ ἕν, τὰ τρία, τὰ πέντε, τὰ ἑπτά. κ. τ.

μεν δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ πάντων τῶν Ὅρων, καὶ τότε τὸ ἐκ τῆς Πολλαπλασιάσεως Γινόμενον εἶναι τὸ Κεφάλαιον πάντων τῶν Ὅρων. ἢ ἄλλως πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν Ὅρων, ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ Γινόμενον διὰ 2. καὶ τότε τὸ ἐκ τῆς Διαιρέσεως Πηλίκον ἔσται ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν Ὅρων. π. χ. Ἔστω δοθεῖσα αὕτη ἡ Πρόοδος. 2. 5. 8. 11. 14. 17. 20. 23. λοιπὸν θέλοντες νὰ εὕρωμεν πόσον εἶναι ὅλον τὸ ἄθροισμα πάντων τούτων τῶν Ὅρων, λαμβάνομεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου, τουτέστι τὸ 2 + 23, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ πάντων τῶν Ὅρων, τουτέστι μὲ τὸν 4, καὶ τὸ ἐκ τῆς Πολλαπλασιάσεως Γινόμενον εἶναι ὅλον τὸ ἄθροισμα τῶν Ὅρων, οἷον $(2+23)4 = 100$. ἢ κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον $(2+23)\frac{8}{2} = 100$.

ΠΟΡΙΣΜΑ ε'.

§. 204. Ὅθεν δὴ ἐφ' ἑκάστης Προόδου θεωροῦνται πέντε τινά.

1) Ὁ πρῶτος Ὅρος τῆς Προόδου, ὅστις ἐστὶν ὁ πλέον μικρότερος (ἐνταῦθα ὑποτίθεται Πρόοδος αὔξουσα) τῶν ἑπομένων Ὅρων.

2) Ὁ ἔσχατος Ὅρος, ὅστις ὑπάρχει καὶ μείζων τῶν ἄλλων.

3) Ἡ διαφορὰ, καθ' ἣν οἱ Ὅροι διαφέρουσι μεταξύ των ἐπίσης.

4) Ἡ πληθὺς, ἢ ὁ ἀριθμὸς τῶν Ὅρων.

5) Τὸ Κεφάλαιον, ἢ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν Ὅρων. τὰ ὁποῖα οὕτως εἰσὶν συνδεδεμένα, ὥστε ἂν δοθῶσιν ἐξ αὐτῶν μόνον τὰ τρία, εὐθὺς καὶ τὰ λοιπὰ δύω προσδιορίζονται ἐξ αὐτῆς τῆς Συνθήκης, καὶ εὑρίσκονται εὐκολώτατα. π. χ. ἂν εἰς μίαν Πρόοδον προσδιορισθῇ ὁ πρῶτος Ὅρος 2, ὁ ἔσχατος 23, καὶ ἡ διαφορὰ 3, εὐθὺς ἐξ αὐτῆς τῆς Συνθήκης προσδιορίζεται, καὶ ὅτι (μ' ὅλον ὁποῦ φαίνεται εἰς ἡμᾶς ἔτι ὡς ἀπροσδιόριστον καὶ ἄδηλον) ἡ μὲν πληθὺς τῶν Ὅρων εἶναι ὀκτὼ, τὸ δὲ Κεφάλαιον ὅλων τῶν Ὅρων ἑκατόν.

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 205. Δι᾽ αὐτῶν τῶν πέντε εἰρημένων Ἰδιοτήτων, ἂν ταῖς σημαδεύσωμεν ἀλγεβραϊκῶς διὰ Γραμμάτων, δυνάμεθα νὰ κάμωμεν ἀλγεβραϊκάς τινας, καὶ γενικοὺς Τύπους, τοὺς ὁποίους δύναται ἕκαστος νὰ μεταχειρίζηται εἰς κάθε Ἰδιαιτέραν περίστασιν, ὥστε ἂν δοθῶσι καὶ προσδιορισθῶσιν ἐξ αὐτῶν τρία, νὰ εὑρίσκῃ τὰ λοιπὰ δύω. καὶ δὴ

ὁ πρῶτος Ὅρος τῆς Προόδου ὀνομασθήτω α
ὁ δὲ ἔσχατος . . . . . ω
ἡ δὲ διαφορὰ . . . . . δ
τὸ δὲ πλῆθος . . . . . π
τὸ δὲ κεφάλαιον . . . . . κ

κατὰ τὸ πρῶτον Πόρισμα (§. 200) ἕκαστος ἑπόμενος Ὅρος εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρῶτον Ὅρον σὺν τῇ διαφορᾷ πολλαπλασιασθείσῃ μετὰ τοῦ πλήθους τῶν Ὅρων κατὰ Μονάδα ἐλαττωμένης, ταὐτὸ μετὰ τοῦ $\pi - 1$. λοιπὸν ἕκαστος Ὅρος εἶναι $= \alpha + \pi\delta - \delta$. Κατὰ δὲ τὸ δεύτερον Πόρισμα ἡ μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου διαφορὰ $\omega - \alpha$ εἶναι ἴση μὲ τὴν κοινὴν τῶν Ὅρων διαφορὰν πολλαπλασιασθεῖσαν μετὰ τοῦ πλήθους τῶν Ὅρων Μονάδι ἐλαττωμένης τουτέστι μετὰ τοῦ $\pi - 1$, ὅπερ γίνεται $\pi\delta - \delta$. λοιπὸν $\omega - \alpha = \pi\delta - \delta$. Κατὰ τὸ τέταρτον Πόρισμα πορίζομεθα τὸ Κεφάλαιον πάντων τῶν Ὅρων, πολλαπλασιάζοντες τὸ Κεφάλαιον τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου, ἤτοι $\alpha + \omega$ μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλήθους τῶν Ὅρων τουτέστι μὲ τὸ $\frac{\pi}{2}$. λοιπὸν τὸ Κεφάλαιον τῶν Ὅρων εἶναι ἴσον μὲ ταύτην τὴν Ἀλγεβραϊκὴν Ἔκθεσιν $\frac{\alpha\pi + \omega\pi}{2}$, οἷον $\kappa = \frac{\alpha\pi + \omega\pi}{2}$. αὗται αἱ εἰρημέναι Ἐκθέσεις χρησιμεύουσι πρὸς λύσιν τοῦ ἀκολούθου Προβλήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ α΄.

§. 206. Νὰ ἀποκαταστήσωμεν Ἐκθέσεις τινάς, ἢ Τύπους γενικούς, διὰ τῶν ὁποίων, ὅταν δοθῶσι τρεῖς Ἰδιότητες μιᾶς Προόδου, νὰ ἠμπορῶμεν νὰ εὑρίσκωμεν εὐκόλως καὶ τὰς λοιπὰς δύω.

Διὰ νὰ σαφηνίσωμεν ἐπὶ πλέον τὰ πρακτέα καὶ τὰς λύσεις διὰ ἑνὸς Παραδείγματος, μεταχειριζόμεθα ταύτην τὴν ἀκόλουθον Πρόοδον. 1 · 4 · 7 · 10 · 13 · 16 · 19 · 22 · 25 · 28 · 31 · 34.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Εἰς τὸ προτεθὲν Σχόλιον προέκυψεν ἐκ τοῦ δευτέρου Πορίσματος ἡ Ἀλγεβραϊκὴ Ἔκθεσις $\omega - \alpha = \pi\delta - \delta$, ἂν λοιπὸν λάβωμεν τὰ τῆς Ἐξισώσεως ταύτης, καὶ κατὰ τοὺς περὶ Ἐξισώσεως Κανόνας μεταθέσωμεν τὰ μὲν τρία διδόμενα εἰς τὸ ἓν μέρος, τὸ δὲ ἕτερον ζητούμενον εἰς τὸ ἄλλο μέρος, ἀποκτῶμεν οὕτω τέσσαρας διαφόρους Τύπους, τῶν ὁποίων τὸν μὲν πρῶτον μεταχειριζόμεθα εἰς εὕρεσιν τοῦ πρώτου Ὅρου α, τὸν δὲ δεύτερον εἰς εὕρεσιν τοῦ ἐσχάτου Ὅρου ω, τὸν δὲ τρίτον εἰς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς δ, καὶ τὸν τέταρτον εἰς εὕρεσιν τῆς πλήθους τῶν Ὅρων π. οἷον.

ΤΥΠΟΣ α΄.

Ἐὰν δοθῇ ὁ ἔσχατος Ὅρος ω, καὶ ἡ διαφορὰ δ, καὶ ὁ πλῆθος π, καὶ ζητῆται ὁ πρῶτος Ὅρος α, ποιοῦμεν οὕτω $\omega - \pi\delta + \delta = \alpha$, τουτέστι $34 - 36 + 3 = 1$.

ΤΥ'ΠΟΣ β'.

Ἐὰν δὲ δοθῇ τὸ π, τὸ δ, τὸ α, ϗ ζητῆται τὸ ω, μεταχειριζόμεθα ταύτην τὴν Ἐξίσωσιν

$$\pi\delta - \delta + \alpha = \omega, \text{ τυτέστι } 36 - 3 + 1 = 34.$$

ΤΥ'ΠΟΣ γ'.

Ὅταν δὲ ὦσι διδόμενα τὸ ω, α, π, ϗ ζητῆται ἡ διαφορὰ δ, ποιῦμεν ὕτω

$$\frac{\omega - \alpha}{\pi - 1} = \delta \text{ τυτέστι } \frac{34 - 1}{12 - 1} = 3.$$

ΤΥ'ΠΟΣ δ'.

Ὅταν δὲ ὦσι διδόμενα τὸ ω, α, δ, ϗ ζητῆται τὸ π, τότε ποιῦμεν ὕτω

$$\frac{\omega - \alpha + \delta}{\delta} = \pi, \text{ τυτέστι } \frac{34 - 1 + 3}{3} = 12$$

Ὡσαύτως εἰς τὸ προτεθὲν Σχόλιον προέκυψε κατὰ τὸ τέταρτον Πόρισμα αὕτη ἡ Ἔκθεσις $\kappa = \frac{\alpha\pi + \omega\pi}{2}$. ἂν λοιπὸν εἰς αὐτὴν τὴν Ἐξίσωσιν ζητηθῇ, ὡς πρότερον, ἡ Ἔκθεσις τῦ κ, α, ω, ϗ τῦ π, δύνανται νὰ προκύψωσιν ἄλλοι τρεῖς γενικοὶ Τύποι. οἷον,

ΤΥ-

ΤΥ'ΠΟΣ έ.

Ὅταν δοθῇ ὁ πρῶτος Ὅρος, ὁ ἔσχατος, ϗ ἡ πληθὺς τῶν Ὅρων, ϗ ζητῆται τὸ Κεφάλαιον, τότε μεταχειριζόμεθα εἰς εὕρεσιν τὴν ἑξῆς Ἔκθεσιν

$$\frac{\alpha\pi + \omega\pi}{2} = \kappa, \text{ τυτέστι } \frac{1 \times 12 + 34 \times 12}{2} = 210$$

ΤΥ'ΠΟΣ ϛ'.

Ὅταν δὲ δοθῇ τὸ Κεφάλαιον, ἡ πληθύς, ϗ ὁ ἔσχατος, ϗ ζητῆται ὁ πρῶτος, μεταχειριζόμεθα τὴν Ἔκθεσιν κατὰ τῦτον τὸν Τύπον.

$$\frac{2\kappa}{\pi} - \omega = \alpha \text{ τυτέστι } \frac{420}{12} - 34 = 1.$$

ΤΥ'ΠΟΣ ζ'.

Ὅταν δὲ δοθῇ τὸ Κεφάλαιον, ἡ πληθύς, ϗ ὁ πρῶτος Ὅρος, ϗ ζητῆται ὁ ἔσχατος, εὑρίσκομεν τὸ ζητύμενον κατὰ τὸν ἑξῆς γενικὸν Τύπον.

$$\frac{2\kappa}{\pi} - \alpha = \omega \text{ τυτέστι } \frac{420}{12} - 1 = 34$$

ΤΥ'ΠΟΣ ή.

Ὅταν δὲ δοθῇ τὸ Κεφάλαιον, ὁ πρῶτος Ὅρος, ϗ ὁ ἔσχατος, ϗ ζητῆται ἡ πληθὺς τῶν Ὅρων, τότε ποιῦμεν κατὰ τὸν ἑξῆς Τύπον

$$\frac{2\kappa}{\alpha + \omega} = \pi \text{ τυτέστι } \frac{420}{1 + 34} = 12$$

Διὰ

Διὰ τῶν ἀνωτέρω εὑρεθεισῶν δυνάμεων προκύπτουσι ἄλλοι δώδεκα γενικοὶ Τύποι. οἷον.

ΤΥΠΟΣ θ'.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐσχάτου μεταχειριζόμεθα.

$$\frac{2\kappa+\delta\pi^2-\delta\pi}{2\pi}=\omega, \text{ τουτέστι } \frac{420+432-36}{24}=34$$

ΤΥΠΟΣ ι'.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς Διαφορᾶς μεταχειριζόμεθα.

$$\frac{2\omega\pi-2\kappa}{\pi^2-\pi}=\delta \text{ τουτέστι } \frac{816-420}{114-12}=3$$

ΤΥΠΟΣ ια'.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ Κεφαλαίου μεταχειριζόμεθα

$$\frac{2\omega\pi-\delta\pi^2+\delta\pi}{2}=\kappa \quad \frac{816-432+36}{2}=210.$$

ΤΥΠΟΣ ιβ'.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς πληθύος τῶν Ὅρων μεταχειριζόμεθα.

$$\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\delta^2}+\frac{\omega}{\delta}+\frac{1}{4}-\frac{2\kappa}{\delta}\right)}+\frac{\omega}{\delta}+\frac{1}{2}=\pi.$$

ὅπερ δι' ἀριθμῶν ἐμφαίνομεν $\sqrt{\left(\frac{1156}{9}+\frac{34}{3}+\frac{1}{4}+\frac{420}{3}\right)}+\frac{34}{3}+\frac{1}{2}=12.$

ΤΥ-

ΤΥΠΟΣ ιγ'.

Πρὸς εὕρεσιν αὖθις τῆς πληθύος τῶν Ὅρων μεταχειριζόμεθα.

$$\sqrt{\left(\frac{2\kappa}{\delta}+\frac{\alpha^2}{\delta^2}-\frac{\alpha}{\delta}+\frac{1}{4}\right)}-\frac{\alpha}{\delta}+\frac{1}{2}=\pi.$$

ὅπερ δι' ἀριθμῶν $\sqrt{\left(\frac{420}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=12.$

ΤΥΠΟΣ ιδ'.

Εἰς εὕρεσιν τοῦ πρώτου Ὅρου μεταχειριζόμεθα

$\frac{2\kappa}{2\pi}-\frac{\pi\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\alpha$. καὶ δι' ἀριθ. $\frac{420}{24}-\frac{36}{4}+\frac{3}{2}=1.$

ΤΥΠΟΣ ιε'.

Εἰς εὕρεσιν τῆς Διαφορᾶς μεταχειριζόμεθα

$$\frac{2\kappa-2\alpha\pi}{\pi^2-\pi}=\delta, \text{ τουτέστι } \frac{420-24}{144-12}=3.$$

ΤΥΠΟΣ ιϛ'.

Εἰς εὕρεσιν τοῦ κεφαλαίου μεταχειριζόμεθα

$$\frac{\pi^2\delta-\pi\delta+2\pi\alpha}{2}=\kappa. \quad \frac{432-36+24}{2}=210.$$

ΤΥ-

ΤΥΠΟΣ ιζ'.

Εἰς εὕρεσιν αὖθις τοῦ κεφαλαίου μεταχειριζόμεθα

$$\frac{\omega^2 - \alpha^2 + \alpha\delta + \omega\delta}{2\delta} = \kappa, \text{ τουτέστι } \frac{1156 - 1 + 3 + 102}{6} = 210.$$

ΤΥΠΟΣ ιη'.

Εἰς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς μεταχειριζόμεθα

$$\frac{\omega^2 - \alpha^2}{2\kappa - \alpha - \omega} = \delta \text{ τουτέστι } \frac{1156 - 1}{420 - 1 - 34} = 3$$

ΤΥΠΟΣ ιθ'.

Εἰς εὕρεσιν τοῦ πρώτου Ὅρου μεταχειριζόμεθα

$$\sqrt{\left(\omega^2 + \omega\delta - 2\kappa\delta + \frac{1}{4}\delta^2\right)} + \frac{1}{2}\delta = \alpha. \text{ καὶ}$$

δι' ἀριθμῶν γίνεται $\sqrt{\left(1156 + 102 - 1260 + \frac{9}{4}\right)} + \frac{3}{2} = 1.$

ΤΥΠΟΣ κ'.

Εἰς εὕρεσιν τοῦ ἐσχάτου Ὅρου μεταχειριζόμεθα

$$\sqrt{\left(\alpha^2 - \alpha\delta + \frac{1}{4}\delta^2 + 2\kappa\delta\right)} - \frac{1}{2}\delta = \omega. \text{ καὶ}$$

δι' ἀριθμῶν $\sqrt{\left(1260 + 1 - 3 + \frac{9}{4}\right)} - \frac{3}{2} = 34.$

ΣΧΟ'.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 207. Ὅταν τοίνυν ἐξ αὐτῶν τῶν πέντε (δηλαδὴ τῶν α, ω, δ, π, κ) δίδωνται τὰ τρία, καὶ ζητεῖται τὸ τέταρτον, μεταχειριζόμεθα ἕνα τούτων τῶν ἀνωτέρω εἴκοσι τύπων· ἀλλ' ἐπειδὴ ἕκαστον τούτων τῶν πέντε, ὅταν τυγχάνῃ ζητούμενον, δύναται νὰ ἔχῃ τὰ διδόμενα ποικίλως καὶ πολλαχῶς, καὶ ἐπειδὴ ἐξ αὐτῆς τῆς ποικιλότητος τῶν διδομένων προκύπτουσι δι' ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ζητούμενον τέσσαρες διαφορετικοὶ τύποι, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ προσέχωμεν νὰ γνωρίζωμεν τὰ διδόμενα, καὶ κατ' αὐτὰ τὰ διδόμενα νὰ μεταχειριζώμεθα διὰ κάθε ζητούμενον τὸν ἀνήκοντα τύπον. π. χ. Ὅταν δοθῇ τὸ ω, δ, π, καὶ ζητῆται τὸ α, πρέπει νὰ ζητήσωμεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον κατὰ τοῦτον τὸν Τύπον $\omega - \pi\delta + \delta = \alpha$. Ὅταν ὅμως δοθῶσι τὸ κ, π, ω, καὶ ζητῆται ὡσαύτως τὸ α, εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον, τάττοντες εἰς ἐξίσωσιν τὰ διδόμενα κατὰ τὸν ἀνωτέρω ἕκτον Τύπον $\frac{2\kappa}{\pi} - \omega = \alpha$. ἐπειδὴ μ' ὅλον ὁποῦ καὶ εἰς τὰς δύω ταύτας περιστάσεις τὸ ζητούμενον εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτό, εἰσὶν ὅμως διάφορα τὰ διδόμενα, καὶ ἑπομένως τὸ ζητούμενον εὑρίσκεται κατὰ διάφορον Τύπον. ὅθεν πρὸς πλείονα διάγνωσιν καὶ εὐκολίαν ἐκθέτομεν κατωτέρω πάντας τούτους τοὺς εἴκοσι Τύπους τακτικώτερον, ὁ δὲ ταύτην τὴν Μέθοδον μετερχόμενος, ἔχων αὐτοὺς ὡς ἕνα Πίνακα, δύναται νὰ τοὺς μεταχειρίζηται κατὰ τὰς προσηκούσας περιστάσεις.

Εἰς

	Διδόμενα.	Ζητούμενον.	
			Εἰς εὕρεσιν τοῦ πρώτου Ὅρου
ΤΥΠΟΣ α'.	ω,δ,π.		$\omega - \pi\delta + \delta = \alpha.$
. . . ς'.	κ,π,ω.		$\frac{2\kappa}{\pi} - \omega = \alpha.$
. . . ιδ'.	κ,δ,π.	α	$\frac{2\kappa}{2\pi} - \frac{\pi\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \alpha.$
. . . ιθ'.	ω,δ,κ.		$\sqrt{\left(\omega^2 + \omega\delta - 2\kappa\delta + \frac{1}{4}\delta^2\right)} + \frac{1}{2}\delta = \alpha.$
			Εἰς εὕρεσιν τοῦ ἐσχάτου Ὅρου.
. . . β'.	α,δ,π.		$\alpha + \delta\pi - \delta = \omega.$
. . . ζ'.	α,κ,π.		$\frac{2\kappa}{\pi} - \alpha = \omega.$
. . . θ'.	δ,κ,π.	ω	$\frac{2\kappa + \delta\pi^2 - \delta\pi}{2\pi} = \omega$
. . . κ'.	α,δ,κ.		$\sqrt{\left(\alpha^2 - \alpha\delta + 2\delta\kappa + \frac{1}{4}\delta^2\right)} - \frac{1}{2}\delta = \omega.$
			Εἰς εὕρεσιν τῆς Διαφορᾶς.
. . . γ'.	α,ω,π.		$\frac{\omega - \alpha}{\pi - 1} = \delta.$
. . . ι'.	ω,π,κ.	δ	$\frac{2\omega\pi - 2\kappa}{\pi^2 - \pi} = \delta.$
. . . ιε'.	κ,α,π.		$\frac{2\kappa - 2\alpha\pi}{\pi^2 - \pi} = \delta.$
. . . ιη'.	ω,α,κ.		$\frac{\omega^2 - \alpha^2}{2\kappa - \alpha - \omega} = \delta.$

	Διδόμενα.	Ζητούμενον.	
			Εἰς εὕρεσιν τῆς πλήθους τῶν Ὅρων.
ΤΥΠΟΣ δ'.	ω,α,δ.		$\frac{\omega - \alpha + \delta}{\delta} = \pi$
. . . η'.	κ,α,ω.	π	$\frac{2\kappa}{\alpha + \omega} = \pi$
. . . ιγ'.	κ,α,δ.		$\sqrt{\left(\frac{2\kappa}{\delta} + \frac{\alpha^2}{\delta^2} - \frac{\alpha}{\delta} + \frac{1}{4}\right)} - \frac{\alpha}{\delta} + \frac{1}{2} = \pi$
. . . ιβ'.	ω,κ,δ.		$\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\delta^2} + \frac{\omega}{\delta} - \frac{2\kappa}{\delta} + \frac{1}{4}\right)} + \frac{\omega}{\delta} + \frac{1}{2} = \pi.$
			Εἰς εὕρεσιν τοῦ Κεφαλαίου.
. . . ε'.	α,π,ω.		$\frac{\alpha\pi + \omega\pi}{2} = \kappa$
. . . ια'.	ω,π,δ.	κ	$\frac{2\omega\pi - \delta\pi^2 + \delta\pi}{2} = \kappa$
. . . ις'.	π,δ,α.		$\frac{\pi^2\delta - \delta\pi + 2\pi\alpha}{2} = \kappa$
. . . ιζ'.	ω,α,δ.		$\frac{\omega^2 - \alpha^2 + \alpha\delta + \omega\delta}{2\delta} = \kappa$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 208. Ὁποίαν ὠφέλειαν προξενοῦσιν οὗτοι οἱ τεθέντες Τύποι, εἰς χρῆσιν γενόμενοι, δηλωθήσεται ἐν τοῖς ἑξῆς Προβλήμασι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ α΄.

§. 209. Ὁ Πέτρος, διὸς εἰπεῖν, πωλεῖ τὴν Βιβλιοθήκην του, ἥτις συνίσταται ἐκ 1400 Βιβλίων, καὶ διὰ μὲν τὸ πρῶτον Βιβλίον ζητεῖ δύο Ὀβολούς, διὰ δὲ τὸ δεύτερον ζητεῖ περισσότερον τρεῖς Ὀβολούς, καὶ διὰ τὸ τρίτον αὖθις ζητεῖ τρεῖς Ὀβολοὺς πλέον τῆς τιμῆς τοῦ δευτέρου Βιβλίου, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ζητεῖται λοιπὸν πρῶτον, ὁποία ἔσται ἡ τιμὴ τοῦ ἐσχάτου Βιβλίου, δεύτερον, πόση ἔσται ἡ τιμὴ ὁμοῦ ὅλων τῶν Βιβλίων.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

$\pi = 1400$	ἡ πληθὺς τῶν Βιβλίων.
$\delta = 3$	ἡ διαφορά.
$\alpha = 2$	ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου Βιβλίου.

ω ζητεῖται, ἡ τιμὴ τοῦ ἐσχάτου Βιβλίου.
κ ζητεῖται, ἅπασα ἡ τιμὴ τῶν Βιβλίων.

ὅθεν ἐπειδὴ ἐδόθη ἡ πληθύς, ἡ διαφορά, ὁ πρῶτος Ὅρος, καὶ ζητεῖται πρῶτον ἡ τιμὴ τοῦ ἐσχάτου βιβλίου, εὑρί-

σκεται κατὰ τὸν δεύτερον Τύπον, οἷον $\omega = \alpha + \delta\pi - \delta$ τουτέστι $\omega = 2 + 1400 \times 3 - 3$, ἤτοι $2 + 4200 - 3 = 4199$ Ὀβολ., οἱ ὁποῖοι εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἐσχάτου Βιβλίου. Ἐπειδὴ δὲ ζητεῖται τὸ Κεφάλαιον τῆς τιμῆς ὅλων τῶν Βιβλίων, ἐν ᾧ εἶναι δεδομένος ὁ πρῶτος Ὅρος, ἡ πληθύς, καὶ ἡ διαφορά, εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον μεταχειριζόμενοι τὸν πέμπτον Τύπον $\kappa = \frac{\alpha\pi + \omega\pi}{2}$

τουτέστι $\kappa = \frac{2 \times 1400 + 4199 \times 1400}{2}$, δηλαδὴ $\frac{2800 + 5878600}{2} = \frac{5881400}{2} = 2940700$ ὀβολοῖς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ β΄.

§. 210. Στρατηγός τις ὑπισχνεῖται εἰς δώδεκα Στρατιώτας, ἀφ' οὗ ἀναβῶσιν εἰς ὕψωμα γῆς, νὰ δώσῃ αὐτοῖς δῶρον μίαν Ποσότητα χρημάτων κατὰ τὴν ἑξῆς συμφωνίαν. Εἰς μὲν τὸν ἀναβάντα πρότερον τῶν ἄλλων ὑπόσχεται νὰ δώσῃ 49 ἀργύρια, εἰς δὲ τὸν δεύτερον νὰ δώσῃ ὀλιγώτερον τῶν τοῦ πρώτου ἀργύρια 4, καὶ οὕτως εἰς καθένα τῶν ἑπομένων νὰ δώσῃ 4 ἀργ. ὀλιγώτερον τοῦ προηγουμένου. Ζητεῖται λοιπὸν πρῶτον πόσα ἀργύρια λήψεται ὁ ἔσχατος, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει καὶ ὁ ἐλάττων ἀριθμὸς τῶν ἀργυρ. δεύτερον δὲ πόσα ἀργύρια λήψονται ὅλοι ὁμοῦ οἱ Στρατιῶται.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

ΠΡΑΚΤΕ'Α.

$\pi = 12$
$\omega = 49$
$\delta = 4$

α ϗ κ ζητοῦνται, ὅθεν κατὰ μὲν τὸν πρῶτον Τύπον $\alpha = \omega - \delta\pi + \delta$

$\alpha = 49 - 48 + 4 = 5$

κατὰ δὲ τὸν ἑνδέκατον τύπον $\kappa = \frac{2\omega\pi - \delta\pi^2 + \delta\pi}{2}$

τουτέστι $\kappa = \frac{1176 - 576 + 48}{2} = \frac{648}{2} = 324.$

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ γ'.

§. 211. Ἄνθρωπός τις θέλει νὰ μοιράσῃ εἰς 12 πτωχοὺς 222 ὀβολοὺς κατ' αὔξουσαν Πρόοδον. ὅθεν ἄρχεται, μοιράζων εἰς μὲν τὸν πρῶτον ὀβολοὺς 2, εἰς δὲ τὸν δεύτερον πλείονας, παρὰ εἰς τὸν πρῶτον, ϗ οὕτω καθεξῆς. Ζητεῖται λοιπὸν, πόσους ὀβολοὺς ἔδωκεν εἰς τὸν ἔσχατον, ϗ ποία εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ποσοτήτων, ὅπου ἕκαστος τῶν πτωχῶν ἔλαβεν.

$\kappa = 222$, $\pi = 12$, $\alpha = 2$ ϗ ζητεῖται εἰς εὕρεσιν ω ϗ δ. ὅθεν κατὰ τὸν ἕβδομον τύπον

$\omega = \frac{2\kappa}{\pi} - \alpha$, τουτέστι $\omega = \frac{444}{12} - 2 = 35.$

κατὰ

κατὰ τὸν δέκατον πέμπτον Τύπον.

$\delta = \frac{2\kappa - 2\alpha\pi}{\pi^2 - \pi}$ τουτέστι $\delta = \frac{444 - 48}{144 - 12} = \frac{396}{132} = 3.$

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ δ'.

§. 212. Μισθωσάμενός τις ἐργάτην τινα, συνεφώνησε νὰ δίδῃ αὐτῷ καθ' ἑκάστην μισθὸν μετά τινος διαφορᾶς. ὅθεν ἔδωκεν αὐτῷ, φέρ' εἰπεῖν, τὴν πρώτην ἡμέραν μισθὸν τρεῖς ὀβολοὺς, τὴν δὲ δευτέραν πλείονας 5, ϗ οὕτω τὴν τελευταίαν ἡμέραν ἔδωκεν αὐτῷ μισθὸν 38 ὀβολούς. ζητεῖται τοίνυν νὰ εὑρεθῇ πρῶτον, πόσας ἡμέρας οὗτος ἐδούλευσε, δεύτερον πόσους ὀβολοὺς ἔλαβεν εἰς ὅλον τὸν καιρὸν, καθ' ὃν οὗτος εἰργάσατο.

$\alpha = 3$
$\delta = 5$
$\omega = 38$

π ϗ κ ζητεῖται, ὅθεν κατὰ τὸν τέταρτον τύπον

$\pi = \frac{\omega - \alpha + \delta}{\delta}$ τουτέστι $\pi = \frac{38 - 3 + 5}{5} = 8$

κατὰ τὸν δέκατον ἕβδομον Τύπ.

$\kappa = \frac{\omega^2 - \alpha^2 + \alpha\delta + \omega\delta}{2\delta}$ τουτέστι $\kappa = \frac{1444 - 9 + 15 + 190}{10}$

$= 164.$

ΣΧΟ'-

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 213. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ λύσωμεν ἄπειρα τοιοῦτα Προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς αὐτὰς τὰς Προόδους, π. χ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ'.

§. 214. Δοθέντος τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου, νὰ εὕρωμεν τοὺς ὁποιουσδήποτε μέσους ἀναλόγους Ὅρους, καὶ μεταξὺ τούτων τῶν δύο δοθέντων νὰ κατατάξωμεν αὐτούς, ὁπόσοι ἂν ὦσι τὸν ἀριθμόν.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Ἡ Διαφορὰ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ πάντων τῶν Ὅρων μονάδι (— 1) ἐλαττωθέντος, καὶ τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως Πηλίκον ἐστὶν ἡ κοινὴ τῶν Ὅρων διαφορά, ἥτις προστεθεῖσα εἰς τὸν ἡγούμενον Ὅρον, παρέχει τὸν ἑπόμενον Ὅρον, π. χ. Μεταξὺ τοῦ 7 καὶ 13 πρέπει νὰ εὑρεθῶσιν 4 Ὅροι. οἱ Ὅροι ἄρα τῆς Προόδου ἔσονται ἅπαντες 6, καὶ κατὰ τὸν τρίτον τύπον ποριζόμεθα τὰ ἑξῆς.

$$\delta = \frac{\omega - \alpha}{\pi - 1} = \frac{13 - 7}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}.$$ ἡ Πρόοδος λοιπὸν ἐστὶν αὕτη

$$7 : 8\frac{1}{5} : 9\frac{2}{5} : 10\frac{3}{5} : 11\frac{4}{5} : 13.$$

ΔΕΙΞΙΣ.

Εὑρεθείσης τῆς διαφορᾶς τῆς Προόδου, προσδιορίζεται τότε καὶ ἡ Πρόοδος, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι διδόμενα ὁ πρῶτος καὶ ὁ ἔσχατος Ὅρος. ἀλλὰ μὴν ἡ διαφορὰ ἀποκτᾶται (κατὰ τοῦτον τὸν Τύπον $\delta = \frac{\omega - \alpha}{\pi - 1}$, τουτέστιν ἡ Διαφορὰ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου διαιρεθεῖσα διὰ τῆς πληθύος τῶν Ὅρων — 1, παρέχει τὴν κοινὴν Διαφοράν, ἄρα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν λύσιν προσδιορίζονται οἱ ζητούμενοι Ὅροι.

ΚΕΦΑΛΑΙΩΔΕΣ ΘΔΩΡΗΜΑ.

§. 215. Πᾶσα Γεωμετρικὴ αὔξουσα Πρόοδος δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸν ἑξῆς Τύπον.

$$\alpha : \alpha\Pi : \alpha\Pi^2 : \alpha\Pi^3 : \alpha\Pi^4 : \alpha\Pi^5 : \alpha\Pi^6 : \alpha\Pi^7 . \ \text{κ.τ.λ.}$$

ΔΕΙΞΙΣ.

Πρόοδος Γεωμετρικὴ εἶναι μία πληθὺς ἀριθμῶν, (ἢ Ποσοτήτων) ἐν τάξει λαμβανομένων, καὶ χωρούντων κατά τινα ἴσον Γεωμετρικὸν λόγον, καὶ διαφερόντων ἀλλήλων κατὰ τὸ αὐτὸ Πηλίκον. ἔνθα κάθε ἑπόμενος Ὅρος εἶναι ἴσος τῷ ἡγουμένῳ πολλαπλασιασθέντι διὰ τοῦ Πηλίκου Π (κἀνταῦθα τὸ Π ὡς Πηλίκον τῆς Προόδου λαμβάνομεν). ὅθεν κάθε ἑπόμενος Ὅρος ἀναφύεται ἐκ τῆς πολλαπλασιάσεως τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ Πηλίκου. καὶ διὰ νὰ γένη σαφέστερον τὸ λεγόμενον, ἔστω ὁ μὲν πρῶτος Ὅρος τῆς

Προόδου α, τὸ δὲ Πηλίκον Π. ὁ ἑπόμενος Ὅρος ἤδη ἔσται $\alpha\Pi$, καὶ πάλιν τούτῳ ἑπόμενος Ὅρος ἔσται $\alpha\Pi^2$, καὶ τούτῳ αὖθις λαμβανομένῳ ὡς ἡγουμένῳ, ἑπόμενος Ὅρος ἔσται $\alpha\Pi^3$, καὶ οὕτω χωρεῖ ἐπ' ἄπειρον τὸ λεγόμενον. ἑκάστη ἄρα αὔξουσα Γεωμετρικὴ Πρόοδος εἰκότως δύναται νὰ ἐκτεθῇ κατὰ τὸν προτεθέντα Τύπον.

ΠΟΡΙΣΜΑ α'.

§. 216. Ταύτην τὴν εἰρημένην Σειρὰν θεωροῦντες πάλιν δευτέρως, εὑρίσκομεν, ὅτι ἕκαστος τῶν ἑπομένων Ὅρων συνίσταται ἐκ τοῦ πρώτου Ὅρου α πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ Πηλίκον Π ὑψωμένον ὂν εἰς ἐκείνην τὴν Δύναμιν, ἥτις ἐμφαίνει τὴν πληθὺν τῶν προηγουμένων Ὅρων. ὁ δὲ τούτου λόγος εἶναι, ὅτι εἰς μίαν Πρόοδον ἅπαντες οἱ Ὅροι ἐκτὸς τοῦ πρώτου εἶναι πεπολλαπλασιασμένοι μετὰ τοῦ κοινοῦ Πηλίκου, καὶ ἡ πολλαπλασίασις διὰ τοῦ Πηλίκου γίνεται τοσάκις, ὅσοι εἶναι οἱ Ὅροι πλὴν τοῦ πρώτου. οἷον τῆς προτεθείσης Προόδου ὁ ἕκτος Ὅρος εἶναι $\alpha\Pi^5$, ὅστις συνίσταται ἐκ τοῦ πρώτου Ὅρου πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ κοινὸν Πηλίκον ἀρθὲν εἰς τὴν πέμπτην δύναμιν, ἥτις ἐστὶν ἴση μὲ τὴν πληθὺν τῶν πρὸ αὐτοῦ ἡγουμένων Ὅρων, ὥσπερ καὶ ὁ δωδέκατος Ὅρος εἶναι $\alpha\Pi^{11}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 217. Ἐὰν λάβωμεν τὰ μέχρι τοῦδε εἰρημένα εἰς μίαν Ἔκθεσιν, ὡσαύτως καὶ ἕνα ἀπροσδιόριστον ἀριθμὸν τῶν Ὅρων $= \nu$, ὁ ἔσχατος Ὅρος τῆς Προόδου ἔσται τότε $= \alpha\Pi^{\nu-1}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ β'.

§. 218. Τὸ ἐκ τῶν δύο ἄκρων (τουτέστιν ἐκ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου Ὅρου) Γινόμενον, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ παραλή-

γοντος

γοντος Ὅρου παραγόμενον, καὶ γενικῶς τὸ ἐκ τῶν δύο ἄκρων παραγόμενον πάντοτε εἶναι ἴσον μὲ τὸ Γινόμενον ἐκ δύο ἑτέρων Ὅρων, οἵτινες ἀφίστανται ἐπίσης ἀπὸ τῶν δύο ἄκρων. καὶ τοῦτο δείκνυται σαφῶς ἐν τῇ προτεθείσῃ σειρᾷ. ἐπειδὴ τὸ μὲν ἐκ τοῦ πρώτου καὶ ὀγδόου Ὅρου παραγόμενον εἶναι $\alpha^2\Pi^7$. τὸ δὲ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ ἑβδόμου παραγόμενον ὁμοίως $\alpha^2\Pi^7$. τὸ δὲ ἐκ τρίτου καὶ ἕκτου Ὅρου πάλιν $\alpha^2\Pi^7$. τὸ δὲ ἐκ τοῦ τετάρτου καὶ πέμπτου, ὡσαύτως $\alpha^2\Pi^7$. ὁ δὲ λόγος τούτου εἶναι, ὅτι καθὲ Πρόοδος εἶναι μία πληθὺς Ὅρων ἀναλόγων, καὶ εἰς καθὲ ἀναλογίαν τὸ ἐκ τῶν ἄκρων παραγόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐκ τῶν μέσων παραγόμενον. ὅθεν ἕπεται κατ' ἀνάγκην τὸ παραγόμενον τὸ ἐκ τῶν δύο ἄκρων νὰ εἶναι πάντοτε ἴσον τῷ παραγομένῳ. κ. τ. οἷον ἐν τῇ Προόδῳ ∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64. τὰ παραγόμενα τὰ ἐκ τῶν ἐπίσης ἀφισταμένων Ὅρων εἰσὶν 64 X 2 = 128. 32 X 4 = 128. καὶ 8 X 16 = 128. εἰ δὲ καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν Ὅρων τύχῃ νὰ εἶναι περιττὸς, τότε ὁ μεσαίτατος, καὶ μόνος ἐγκαταλειπόμενος Ὅρος πολλαπλασιάζεται ἐφ' ἑαυτόν, καὶ ἑπομένως τὸ τετράγωνον τούτου εἶναι ἴσον μὲ τὸ παραγόμενον τῶν Ὅρων τῶν ἐπίσης ἀπεχόντων.

ΠΟΡΙΣΜΑ γ'.

§. 218. Ἐκ ταύτης τῆς γενικῆς Ἐκθέσεως ἕπεται, ὅτι ὁ πρῶτος Ὅρος ἔχει πρὸς τὸν τρίτον τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου, οἷον ὁ πρῶτος Ὅρος α ἔχει πρὸς τὸν τρίτον $\alpha\Pi^2$, ὡς τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου α^2 πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου $\alpha^2\Pi^2$, ἐπειδὴ καὶ εἰς τοὺς δύο τούτους λόγους εἶναι τὸ Πηλίκον Π^2. καὶ εἶναι ἄρα ἐνταῦθα μία ἀληθὴς ἀναλογία, ὅτι ὁ πρῶτος Ὅρος ἔχει πρὸς τὸν τέταρτον, ὡς ὁ κύβος τοῦ πρώτου Ὅρου πρὸς τὸν κύβον τοῦ δευτέρου. ἐπειδὴ $\alpha : \alpha\Pi^3 = \alpha^3 : \alpha^3\Pi^3$. κ. τ.

ΠΟΡΙΣΜΑ δ'.

§. 219. Ἂν εἰς αὐτὴν τὴν γενικὴν Ἔκθεσιν ὁ πρῶτος Ὅρος α εἶναι $= 1$, τότε ἡ Πρόοδος $\alpha : \alpha\Pi^1 : \alpha\Pi^2 : \alpha\Pi^3$ μετατρέπεται

εἰς

εἰς τὸν $1 : 1\Pi^1 : 1\Pi^2 : 1\Pi^3$, δηλαδὴ $1 : \Pi^1 : \Pi^2 : \Pi^3$. κ. τ. καὶ ἐπειδὴ κάθε Ποσότης, ἢ Ὅρος, τοῦ ὁποίου ὁ δυναμοδείκτης εἶναι $= 0$, εἶναι καθ' ἑαυτὸν $= 1$ (§. 48), δυνάμεθα διὰ τοῦτο ἀντὶ τῆς μονάδος νὰ μεταχειρισθῶμεν τὸ Π^0, καὶ νὰ βάλωμεν αὐτὸ εἰς τὸν τόπον αὐτῆς, κἀντεῦθεν ἄνωθεν ἡ Πρόοδος δύναται νὰ ἐκτεθῇ οὕτω $\Pi^0 : \Pi^1 : \Pi^2 : \Pi^3$. κ. τ. ὅθεν γίνεται φανερὸν, ὅτι αἱ μὲν δυνάμεις τῶν ποσῶν ἵστανται ἐν Γεωμετρικῇ Προόδῳ, οἱ δὲ δυναμοδεῖκται κατὰ Πρόοδον ἀριθμητικήν.

ΣΧΟΛΙΟΝ α'.

§. 220. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων περὶ τῶν Προόδων καὶ Γεωμετρικῶν ἀναλογιῶν προκύπτουσι καὶ ἕτεροι Τύποι, οἵτινες συμβάλλουσιν εἰς λύσιν Γεωμετρικῶν Προβλημάτων, ἀναφορὰν ἐχόντων πρὸς τὰς Προόδους· διότι ἐπειδὴ κάθε Πρόοδος εἶναι πλῆθος τι λόγων ἴσων καὶ κατὰ τάξιν προαγομένων, διὰ τοῦτο καὶ εἰς μίαν τοιαύτην Πρόοδον τὸ Κεφάλαιον πάντων τῶν ἡγουμένων Ὅρων ἔχει λόγον πρὸς τὸ κεφάλαιον τῶν ἑπομένων, τὸν ὁποῖον ἔχει κάθε ἡγούμενος, ἢ πρῶτος Ὅρος πρὸς τὸν ἑπόμενον, ἢ δεύτερον Ὅρον (§. 171). ἀλλὰ μὴν εἰς μίαν Πρόοδον ἕκαστος Ὅρος πλὴν τοῦ ἐσχάτου εἶναι ἡγούμενος λόγου, καὶ ὁμοίως ἕκαστος Ὅρος πλὴν τοῦ πρώτου, εἶναι ἑπόμενος τοῦ αὐτοῦ λόγου, ἔστι δὲ καὶ τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν Ὅρων τῆς Προόδου $= \kappa$. ἄρα τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν Ἡγουμένων εἶναι αὐτὸ τὸ Κεφάλαιον πάντων τῶν Ὅρων πλὴν τοῦ ἐσχάτου, οἷον $= \kappa - \omega$. ὥσπερ δὴ καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν ἑπομένων εἶναι αὐτὸ τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν τῆς Προόδου Ὅρων πλὴν τοῦ πρώτου, οἷον $= \kappa - \alpha$. αὕτη τοίνυν ἡ ἀναλογία ἐκτίθεται οὕτω. $\kappa - \omega : \kappa - \alpha = \alpha : \alpha\Pi$. καὶ διὰ τῆς πολλαπλασιάσεως τῶν ἄκρων καὶ μέσων Ὅρων γίνεται Ἐξίσωσις $\kappa\alpha\Pi - \omega\alpha\Pi = \kappa\alpha - \alpha\alpha$. τούτων δὲ διαιρεθέντων διὰ τοῦ α, προάγεται $\kappa\Pi - \omega\Pi = \kappa - \alpha$. ἐκ ταύτης τῆς Ἐξισώσεως δύναταί τις νὰ εὕρῃ κατὰ τοὺς τῆς Ἐξισώσεως κανόνας πόσον α, ὅσον καὶ ω, καὶ π, καὶ κ. καὶ διὰ νὰ γίνῃ σαφὲς τὸ λεγόμενον δι' ἑνὸς παραδείγματος, ἔστω ἡ ἑξῆς Πρόοδος.

$$3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187.$$

α'.)

α'.) $\alpha = \omega\Pi - \kappa\Pi + \kappa$ τουτέστι $\alpha = 6561 - 9837 + 3279 = 3$ ὁ πρῶτος Ὅρος.

β'.) $\omega = \dfrac{\kappa\Pi - \kappa + \alpha}{\Pi}$ τουτέστι $\omega = \dfrac{9837 - 3279 + 3}{3} = 2187$ ὁ ἔσχατος.

γ'.) $\Pi = \dfrac{\kappa - \alpha}{\kappa - \alpha}$ τουτέστι $\Pi = \dfrac{3279 - 3}{3279 - 2187} = 3$ τὸ Πηλίκον.

δ'.) $\kappa = \dfrac{\omega\Pi - \alpha}{\Pi - 1}$ τουτέστι $\kappa = \dfrac{6561 - 3}{2} = 3279$ τὸ κεφάλαιον. Ὁ πρῶτος καὶ δεύτερος τύπος εὑρίσκεται διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν Ὅρων, ἐπὶ δὲ τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου τύπου λύεται $\kappa\Pi - \omega\Pi$ εἰς τοὺς συνεργοὺς $(\kappa - \omega)\Pi$, καὶ $\kappa\Pi - \kappa$ εἰς συνεργοὺς $(\Pi - 1)\kappa$.

ΣΧΟΛΙΟΝ β'.

§. 221. Κατὰ τὸ Σχόλιον (§. 217) εἶναι ἡ Ἔκθεσις τοῦ ἐσχάτου Ὅρου $= \alpha\Pi^{\nu-1}$ τουτέστιν $\omega = \alpha\Pi^{\nu-1}$. λοιπὸν δυνάμεθα εἰς τὸν τέταρτον τύπον ἀντὶ τοῦ ω νὰ βάλωμεν $\alpha\Pi^{\nu-1}$. ἀλλὰ μὴν τὸ ω εἶναι πεπολλαπλασιασμένον μετὰ τοῦ Π, πρέπει ἄρα καὶ τὸ $\alpha\Pi^{\nu-1}$ νὰ πολλαπλασιασθῇ μετὰ τοῦ Π. ἐν δὲ τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν μεγεθῶν προστίθενται καὶ αἱ Ἐκθέται, ὅθεν γίνεται $\alpha\Pi^{\nu-1} \times \Pi = \alpha\Pi^{\nu-1+1} = \alpha\Pi^{\nu}$, καὶ ἐκ τοῦ τετάρτου τύπου ἕπεται $\kappa = \dfrac{\alpha\Pi^{\nu} - \alpha}{\Pi - 1}$, ἐξ οὗ πορίζόμεθα διὰ τῆς μεταθέσεως τοὺς ἑξῆς δύο τύπους.

$$\epsilon'.)\ \kappa = \frac{\alpha\Pi^{\nu} - \alpha}{\Pi - 1}\ \text{τουτέστι}\ \kappa = \frac{6561 - 3}{\Pi - 1} = 3279$$

τὸ κεφάλαιον.

$$\varsigma'.)\ \alpha = \frac{\kappa\Pi - \kappa}{\Pi^{\nu} - 1}\ \text{τουτέστι}\ \alpha = \frac{9887 - 3279}{2187 - 1} = 3$$

ὁ πρῶτος Ὅρος, ϗ ἐκ τοῦ $\omega = \alpha\Pi^{\nu-1}$ ποριζόμεθα διὰ τῆς μεταθέσεως ϗ ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης τὰ ἑξῆς.

$$\zeta'.)\ \omega = \alpha\Pi^{\nu-1} = 3 \times 729 = 2187\ \text{ὁ ἔσχατος Ὅρος.}$$

$$\eta'.)\ \Pi = \sqrt[\nu-1]{\frac{\omega}{\alpha}} = \sqrt[6]{\frac{2187}{3}} = 3\ \text{τὸ Πηλίκον.}$$

ϗ ἐπειδὴ $\Pi^{\nu-1} = \frac{\Pi^{\nu}}{\Pi}$ ἐστὶν (§. 198), γίνεται διὰ τῆς μεταθέσεως ὁ ἑξῆς τύπος, διὰ τῆς χρήσεως τοῦ ὁποίου ἀξιόνεται ἡ πληθὺς τῶν Ὅρων μιᾶς Προόδου Γεωμετρικῆς.

$$\vartheta'.)\ \Pi^{\nu} = \frac{\omega\Pi}{\alpha}.$$

Τουτέστι πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸν ἔσχατον Ὅρον τῆς Προόδου μετὰ τοῦ ἐν αὐτῇ κοινοῦ Πηλίκου, ϗ τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ πρώτου Ὅρου τῆς ἰδίας Προόδου, ϗ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύπτει τι Πηλίκον. ἔπειτα λαμβάνομεν τὸ κοινὸν τῆς Προόδου Πηλίκον, ϗ προάγοντες ὑψώνομεν αὐτὸ συνεχῶς εἰς Δυνάμεις ἀλληλοδιαδόχους, ἕως οὗ νὰ φθάσῃ τοῦτο τὸ Πηλίκον νὰ ἐξισωθῇ κατὰ τὸ σημαντικὸν μὲ τὸ ἐκ τῆς ἀνωτέρω Διαιρέσεως προκύψαν Πηλίκον, ϗ τότε αὗται αἱ εὑρεθεῖσαι δυνάμεις δεικνύουσι τὴν πληθὺν τῶν Ὅρων, ἐπειδὴ τοσοῦτοι ἔσονται οἱ Ὅροι τῆς Προόδου, ὅσαι δυνάμεις ἀπαιτηθήσονται διὰ νὰ ἐξισωθῇ τὸ κοινὸν τῆς Προόδ. Πηλίκον μὲ τὸ ἐκ τῆς ῥηθείσης διαιρέσεως προκύψαν Πηλίκον. ϗ διὰ

νὰ

νὰ γένωσι σαφέστερα τὰ λεγόμενα, ἔστω ἐν ἀριθμοῖς μιᾶς Βραχείας Προόδου διδόμενος ὁ πρῶτος Ὅρος 3, ὁ ἔσχατος 48, ϗ τὸ κοινὸν Πηλίκον 2, ϗ ζητηθήτω ἡ πληθὺς τῶν Ὅρων. ὅθεν ἀφ' οὗ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἔσχατος Ὅρος 48 μετὰ τοῦ κοινοῦ Πηλίκου 2, ϗ τὸ ἐκ τούτων Γενόμενον 96 διαιρεθῇ διὰ τοῦ πρώτου Ὅρου 3, προκύπτει ἐκ τῆς διαιρέσεως Πηλίκον ὁ ἀριθμὸς 32, ἔπειτα ὑψώνομεν συνεχῶς τὸ κοινὸν Πηλίκον 2 εἰς δευτέραν, τρίτην, τετάρτην ϗ πέμπτην Δύναμιν, οἷον 2^5 (ὅπερ ἐστὶ $= 32$), ἕως οὗ βλέπομεν, ὅτι τοῦτο τὸ Πηλίκον ὑψωθὲν εἰς τὴν πέμπτην δύναμιν, σημαίνει ἕνα ἀριθμὸν, ὅστις εἶναι Ἴσος μὲ τὸ ἀνωτέρω ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύψαν Πηλίκον 32, ὅθεν ϗ ἡ ζητουμένη πληθὺς τῶν Ὅρων πρέπει νὰ εἶναι $= 5$, καθὼς ϗ ἐκ τοῦ Ἰδίου προτεθέντος Παραδείγματος γίνεται κατάδηλον. οἷον $3 : 6 : 12 : 24 : 48$.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ ς'.

§. 222. Ὁ Πέτρος βάζει εἰς τὸ δημόσιον Λαχεῖον (*) τὴν πρώτην φορὰν 1 Γρόσ., τὴν δευτέραν 2 Γρόσ., τὴν τρίτην φορὰν 4 Γρόσ., ϗ οὕτω ....., ζητεῖται λοιπὸν, πόσα Γρόσια ἔβαλεν οὗτος τὴν δωδεκάτην φορὰν, ἔπειτα πόση ἔσται ὅλη ἡ Ποσότης τῶν Γροσίων, ὅπου ἔβαλε.

οἱ τρεῖς ἐγνωσμένοι Ὅροι εἰσὶν $\alpha = 1, \Pi = 2, \nu = 12$. ω ϗ κ ζητοῦνται. κατὰ τὸν ἕβδομον τύπον εἶναι $\omega = \alpha\pi^{\nu-1}$. ὁ ἔσχατος Ὅρος $= 1 \times 2^{11} = 2048$.

κατὰ

(*) Οὕτως εὗρον οἰκειότερον κατὰ τὴν κρίσιν ϗ ἄλλων πεπαιδευμένων νὰ ὀνομάσω ἐκεῖνο, ὅπερ κοινότερον λέγομεν λόττον ἢ λοττερίαν.

κατὰ δὲ τὸν τέταρτον τύπον $\kappa = \frac{\omega\pi - \alpha}{\pi - 1}$ τυτέστι

$\kappa = \frac{4096 - 1}{1} = 4096$ ὅλη ἡ Ποσότης.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ ια.

Περὶ Συζυγίας, ἢ Συνδυασμοῦ.

Ο'ΡΙΣΜΟ'Σ.

§. 223. Συνδυασμοῦ μέθοδος καλεῖται ὁ τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν, ποσαχῶς δύνανται νὰ συνδεθῶσι, καὶ διαφόρως νὰ μετατεθῶσι δεδομένα τινα (ἔστωσαν ταῦτα ἢ γράμματα, ἢ ἀριθμοὶ, ἢ ὁποιαδήποτοῦν πράγματα), ἀνὰ δύω, ἀνὰ τρία, ἀνὰ τέσσαρα, ἢ ἀνὰ πλείονα λαμβανόμενα.

ΣΧΟ'ΛΙΟΝ.

§. 224. Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τοῦ σκοποῦ εὐχερέστερον, εἶναι ἀναγκαῖον, εὐθὺς ἀρχόμενοι τοῦ ἔργου, νὰ μεταχειρισθῶμεν μικρούς τινας ἀριθμοὺς πραγμάτων, ἢ μεγεθῶν, ἐξ οὗ ἀποκαλύπτονται καὶ γίνονται φανεροὶ οἱ νόμοι, τοὺς ὁποίους ἀκολουθοῦσιν αἱ συζυγίαι εἰς [illegible] κατὰ τὸν διδόμενον ἀριθμὸν μεγέθη.

ΠΡΟ

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ α.

§. 225. Εὑρεῖν τὸν ἀριθμὸν τῶν συζυγιῶν, εἴτινές εἰσιν δυναταὶ διὰ τῶν 24 γραμμάτων ἀνὰ δύω, ἀνὰ τρία .... ἀνὰ 24 λαμβανομένων.

ΠΡΑΚΤΕ'Α, καὶ ΔΕΙ'ΞΙΣ.

Τὸ α συζευχθὲν μὲν μεθ' ἑαυτοῦ παρέχει αα, συζευχθὲν δὲ μετὰ τοῦ β, ποιεῖ αβ· μετὰ δὲ τοῦ γ, ποιεῖ αγ. κ. τ. τοῦ α ἄρα συζευχθέντος οὕτω μετὰ τῶν 24 Γραμ., ἀναφύονται ὁμοίως 24 διάφοροι συζυγίαι. οὕτω καὶ τὸ β συζευχθὲν μετὰ τοῦ α, ποιεῖ βα, συζευχθὲν δὲ μεθ' ἑαυτοῦ, ποιεῖ ββ, κ. τ. ἄρα καὶ διὰ τῆς συζεύξεως τοῦ β μεθ' ἑκάστου τῶν 24 γραμμάτων προκύπτουσιν ἄλλαι 24 συζυγίαι, ἐξ οὗ γίνεται δῆλον, ὅτι ἕκαστον τῶν 24 γραμμάτων ἐν ἀρχῇ τιθέμενον, καὶ 24κις ἑνὶ ἑκάστῳ τῶν ἄλλων γραμμάτων συζευγνύμενον, παρέχει 24 συνδυασμούς. πάντα ἄρα τὰ εἰκοσιτέσσαρα γράμματα ἀνὰ δύω λαμβανόμενα, ἀποτελοῦσι διαφόρους συζυγίας 24×24 ἤτοι 576.

Ἐὰν δὲ συζευχθῶσι γράμματα ἀνὰ τρία λαμβανόμενα, τουτέστιν ἐὰν προστεθῇ τὸ α ἐν ἑκάστῃ τῶν ἄνωτέρω 576 συζυγιῶν, ἔσται ἡ πρώτη συζυγία ααα, ἡ δευτέρα ααβ, ἡ τρίτη ααγ. κ. τ. ἄρα προστιθέμενον ἐν ἀρχῇ τὸ α μόνον, ποιεῖ 576 νέας συζυγίας γραμμάτων ἀνὰ τρία λαμβανομένων. ἐξ οὗ γίνεται φανερὸν [illegible] καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν γραμμάτων προστιθέμενον

καθὼς

καθὼς ἀνωτέρω τὸ α, καὶ τὴν ἐκείνου τάξιν φυλάττον, δύναται νὰ δώσῃ 576 νέους συνδυασμοὺς γραμμάτων ἀνὰ τρία λαμβανομένων. καταφανὲς ἄρα, ὅτι ἅπασαι αἱ ἐκ τριῶν γραμμάτων συζυγίαι, ἢ μεταθέσεις εἰσὶν $576\times24 = 13824$.

ἐὰν δὲ αὖθις συζευχθῶσι τέσσαρα γράμματα, τουτέστιν ἐὰν προστεθῇ αὖθις τὸ α ὡς ἀνωτέρω, ἐν ἑκάστῃ τῶν ἐκ τριῶν γραμμάτων συζυγιῶν, ἀνακύπτουσιν πάλιν 13824 καιναὶ συζυγίαι ἐκ τεσσάρων γραμμάτων. τὸ ἴδιον γίνεται καὶ δι᾿ ἑκάστου τῶν 24 γραμμάτων. ἅπασαι ἄρα αἱ συζυγίαι αἱ ἐκ τεσσάρων γραμμάτων εἰσὶν 13824×24. τούτου δὲ οὕτω καὶ περαιτέρω ὑποτεθέντος, ἕκαστος δύναται νὰ νοήσῃ καλῶς, ὅτι αἱ συζυγίαι πάντοτε χωροῦσιν αὐξάνουσαι, ἐὰν τὸ κεφάλαιον τῶν προτεθειμένων συζυγιῶν πολλαπλασιάζηται διὰ τοῦ 24. αἱ συζυγίαι ἄρα συνιστῶσι Γεωμετρικήν τινα Πρόοδον, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι ὁ πρῶτος Ὅρος 576 ἡ ἐκ δύο γραμμάτων συζυγία, ὁ δὲ δεύτερος Ὅρος εἶναι ἡ ἐκ τριῶν γραμμάτων συζυγία, ὁ δὲ τρίτος εἶναι ἡ ἐκ τεσσάρων, καὶ ἐν ἑνὶ λόγῳ ὁ τελευταῖος Ὅρος εἶναι ὁ συνδυασμὸς ἀπὸ εἴκοσι καὶ τριῶν γραμμάτων, τὸ Πηλίκον ὅμως τούτων εἶναι ὁ 24, καὶ ἡ πληθὺς τῶν Ὅρων πρέπει νὰ εἶναι μονάδι ἐλάττων τοῦ ἀριθμοῦ τῶν 24 γραμμάτων, τουτέστι $\nu = 23$, ἐκ τῶν εἰρημένων τύπων (§. 183) δύναται εὐκόλως νὰ εὑρεθῇ ὁ ἔσχατος Ὅρος, καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν Ὅρων, δηλονότι ὁ ἔσχατος Ὅρος εἶναι $= a\Pi^{\nu-1} = a\Pi^{22}$, τὸ δὲ κεφάλαιον $= \frac{a\Pi^{\nu}-a}{\Pi-1}$.

ἐὰν δὲ αὐτῇ τῷ α τεθῇ $a\Pi^{\nu-1}$, ἔσται τότε

$\varkappa =$

$$\varkappa = \frac{a\Pi^{\nu}-a}{\Pi-1} \text{ (§. 198), ἤτοι } \varkappa = \frac{576\times24^{23}-576}{23}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 226. Ἐὰν δὲ λάβωμεν γράμματα μόνα 24 χωρὶς ἄλλων τινῶν, οἷον α, β, γ, κ. τ. λ. ἔσται ὁ πρῶτος Ὅρος $\alpha = 24$, ὁ δεύτερος Π τουτέστι 24×24, καὶ ἅπαν τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν δυνατῶν συζυγιῶν καὶ γραμμάτων 24, εἶναι $= \frac{24\times24^{24}-24}{23}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ β'.

§. 227. Ἐὰν δοθῇ τις ἀριθμὸς Ποσοτήτων, ἢ μεγεθῶν, καὶ ἕκαστον τούτων ἐν τῇ συζεύξει τεθῇ εἰς τὸν πρῶτον τόπον τοσάκις, μὲ ὅσας μονάδας εἶναι ἴσος ὁ ἐν τῷ Προβλήματι δοθεὶς ἀριθμὸς τῶν μεγεθῶν, νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν συζυγιῶν, τουτέστι πόσους δυνατοὺς συνδυασμοὺς παρέχουσι ταῦτα τὰ δοθέντα μεγέθη.

Ληφθήτω πρῶτον ἀριθμὸς τις μεγεθῶν ὁ 2, τουτέστιν δύο μεγέθη τὸ α, καὶ β, καὶ ἕκαστον τούτων ἐν τῇ συζεύξει τεθήτω εἰς τὸν πρῶτον τόπον δίς. ἐπειδὴ καὶ τὰ μεγέθη ἐνταῦθα δύο εἰσίν.

ΠΡΑΚΤΕΑ, καὶ ΔΕΙΞΙΣ.

Συζευχθὲν τὸ α μετὰ τοῦ β, καὶ ἑκάτερον τούτων μεθ᾿ ἑαυτοῦ, παρέχουσιν αα, ββ, αβ, βα συζυγίας 4, ἢ τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συζευκτέων μεγεθῶν, ϗ πάλιν α, β, γ ἀνὰ δύω λαμβανόμενα, παρέχουσιν αα, ββ, γγ, αβ, βα, γα, αγ, βγ, γβ, συζυγίας ἐννέα, ἢ τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συζευκτέων μεγεθῶν. α, β, γ, δ διδόασιν 16 συζυγίας. κ. τ. ἄρα ἡ ἀνὰ δύω, ἀνὰ τρία ... σύζευξις τῶν μεγεθῶν, ἥτις κρέμαται ἐκ τῆς χρείας, ϗ θελήσεως ἑκάστου, δεικνύει τὴν δύναμιν ἐκείνην, εἰς τὴν ὁποίαν ὑψοῦται ὁ ἀριθμὸς τῶν συζευκτέων μεγεθῶν.

α, β, γ, ἀνὰ τρία συζευγνύμενα, δίδουσιν 27 συζυγίας, τουτέστι τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συζευκτέων μεγεθῶν. α, β, γ, δ ἀνὰ τρία λαμβανόμενα, διδόασι τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συζευχθέντων μεγεθῶν, ϗ οὕτω καθεξῆς. ἐὰν οὖν ὁ ἀριθμὸς τῶν μεγεθῶν εἶναι $= \mu$, ϗ ἡ κατὰ θέλησιν σύζευξις τῶν μεγεθῶν $= \nu$, ἔσται τότε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν συζυγιῶν μ^{ν}. τουτέστιν ἂν συζεύξωμεν 6 μεγέθη ἀνὰ τέσσαρα, προκύπτουσι συζυγίαι $= 6^4 = 1296$. ἐὰν δὲ λάβωμεν 9 μεγέθη ἀνὰ τέσσαρα, ἔσονται συζυγίαι $9^4 = 6561$. 100 μεγέθη ἀνὰ τρία λαμβανόμενα, παρέχουσιν ἀριθμὸν συζυγιῶν $100^3 = 1000000$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. [illegible] Ἐὰν εἰς τὴν λογικὴν τὴν μὲν καθόλου καταφατικὴν πρότασιν ὀνομάσωμεν Α, τὴν δὲ καθόλου ἀποφατικὴν Ε, τὴν δὲ ἐπὶ μέρους καταφατικὴν Ι, τὴν δὲ μερικῶς ἀποφατικὴν Ο, ϗ συζεύξωμεν αὐτὰς ἀλλήλας, προκύψουσιν ἐκ τούτων τῶν 4 Προτάσεων ἀνὰ

τρεῖ

τρεῖς (ἐπειδὴ ϗ παντὸς συλλογισμοῦ τρεῖς εἰσιν αἱ προτάσεις) λαμβανομένων συζυγίαι 4^3 τουτέστι 64, τὰς ὁποίας ὀνομάζουσι τρόπους, ἢ τύπους τῶν συλλογισμῶν.. ἐξ ἁπάντων Ὅμως τούτων τῶν Τύπων μόνοι δέκα (εἰμὴ τις ἐξέλοι ϗ ἐκ τούτων τινας) εἰσὶν ἀληθεῖς ϗ ἔννομοι, ϗ ὀρθῶς συνάγειν δυνάμενοι, οἱ ἑξῆς, ααα. ααι. αεε. αιι. αοο. εαε. εαο. ειο. ιαι. οαο. οἱ δὲ λοιποὶ ἅτε δὴ ἀσύστατοι, ϗ ἀδόκιμοι ὄντες, ἀποδοκιμάζονται, περὶ τῶν ὁποίων ϗ ὁ κὺρ Εὐγένιος εἰς τὴν λογικήν του (σελ. 425) πραγματεύεται πλατύτερον, ἔνθα εὑρίσκεται ϗ ὁ τῶν 64 Συζυγιῶν Πίναξ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ γʹ.

§. 229. Νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μεταθέσεων (ἢ κατὰ θέσιν μεταλλαγῶν) Μεγεθῶν διωρισμένων.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ϗ ΔΕΙΞΙΣ.

α ϗ β ἀλλήλοις συζευγνύμενα, ϗ μετακινούμενα, ποιοῦσι μεταθέσεις δύω, οἷον αβ, βα. τὰ δὲ α, β, γ ἀποτελοῦσι δυνατὰς μεταθέσεις αβγ, αγβ, βαγ, βγα, γαβ, γβα. τουτέστιν αἱ ἀνωτέρω δύω μεταθέσεις πολλαπλασιάζονται μετὰ τοῦ νέου ἀριθμοῦ τῶν μεγεθῶν, μετὰ τοῦ 3 δηλονότι. α, β, γ, δ παρέχουσι δυνατὰς μεταθέσεις 24, τουτέστιν αἱ ἀνωτέρω 6 μεταθ. πολλαπλασιάζονται μετὰ τοῦ 4 νέου ἀριθμοῦ. α, β, γ, δ, ε διδόασι μεταθέσεις 120, τουτέστιν αἱ ἀνωτέρω 24 πολλαπλασιάζονται μετὰ τοῦ 5. ϗ οὕτω χωρεῖ τις, ὡς οὗ δύναται. λοιπὸν ἐν γένει, διὰ νὰ ἀποκτήσωμεν τὸν ἀριθμὸν ἐκείνων τῶν μεταθέσεων, ὅπου δύναται νὰ ἔχῃ [illegible] διδόμενος ἀριθμὸς, καταγράφομεν πρῶτον μίαν ἀριθμη-

τικὴν

τικὴν Πρόοδον, ἔπειτα ὑπ' αὐτὴν γράφομεν τὰ περιγόμενα κατὰ τὴν ἤδη γενομένην μέθοδον, οἷον

∴ 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 .
1 . 2 . 6 . 24 . 120 . 720 . 5040 . 40320 . 362880 .
10
3628800 .

Πρέπει δὲ ἑνὸς παραδείγματος νὰ σαφηνισθῶσι τὰ λεγόμενα ἐπὶ πλέον. γίνεται ἐρώτησις.

Ἐξ ἄνθρωποι καθήμενοι περὶ δεῖπνα τραπέζων, ποσάκις δύνανται νὰ μετατεθῶσι καὶ νὰ καθίσωσι διαφόρως;

Λοιπὸν τῆς ἐρωτήσεως ταύτης ἡ λύσις εἶναι τὸ περιγόμενον 720, τὸ ὑπὸ τὸν 6 ἀριθμὸν εὑρισκόμενον. ἐὰν δὲ γένηται ἡ ἐρώτησις διὰ 10 ἀνθρώπους, ἔσονται μεταθέσεις 3628800. κ. τ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ δʹ.

§. 230. Νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν Συζυγιῶν, αἵτινες καθ' ἑαυτὰς διαφέρουσι, καὶ οὐδεμία τούτων παραβάλλεται ἑαυτῇ. δοθήτωσαν 6 ἀριθμοί, ὡς 6 τινα Μεγέθη νοούμενοι. 1, 2, 3, 4, 5, 6.

ΠΡΑΚΤΕΑ, καὶ ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ 1 Παρατιθέμενον τοῖς λοιποῖς, παρέχει 5 Συζυγίας ἐκ δύο ἀριθμῶν, οἷον 1:2, 1:3, 1:4, 1:5, 1:6. ὁ 2 παραβαλλόμενος τοῖς λοιποῖς τοῖς μεθ' ἑαυτὸν, παρέχει Συζυγίας 4. (ἐπειδὴ τὸ 1 παραβέβληται ἤδη)

οἷον

οἷον 2:3, 2:4, 2:5, 2:6. ὁ 3 παρατιθέμενος τοῖς λοιποῖς, δίδει 3 Συζυγίας. (ἐπειδὴ τὸ 1 καὶ 2 ἤδη παρετέθησαν), οἷον 3:4, 3:5, 3:6. ὁ δὲ 4 παρέχει Συζυγίας 2, οἷον 4:5, 4:6. τὸ δὲ 5 δίδει μόνον μίαν Συζυγίαν, 5:6. λοιπὸν αἱ Συζυγίαι ἐξ Ὅρων ἀνὰ δύο λαμβανομένων, συνιστῶσιν ἀριθμητικήν τινα Σειρὰν. 5.4.3.2.1, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ μείζων Ὅρος εἶναι ὁ 5, καὶ ὁ ἐλάττων 1, ἡ δὲ πληθὺς τῶν Ὅρων ὡσαύτως 5. τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ποριζόμεθα κατὰ τὸν Τύπον $\kappa = \frac{a\pi + \omega\pi}{2}$, τουτέστιν $\frac{1\times5+5\times5}{2}$, ἢ $\frac{5+5\times5}{2}$. ἀλλὰ μὴν $\frac{5\times5+5}{2}$ εἶναι $= \frac{5\times6}{2}$, δηλονότι οἱ δύο δοθέντες ἔσχατοι Ὅροι πολλαπλασιάζονται μετ' ἀλλήλων, καὶ διαιροῦνται διὰ τῶν πρώτων δύο Ὅρων πεπολλαπλασιασμένων. ἄρα ἀποκτῶμεν τὸ κεφάλαιον τῶν Ὅρων ἐκ δύο ἀριθμῶν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἐσχάτους Ὅρους ὁποιωνδήποτε δεδομένων, καὶ τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον διέλωμεν διὰ τοῦ περιγομένου τῶν δύο πρώτων. ἐὰν ἔτι θέλωμεν νὰ ἀποκτήσωμεν Συζυγίαν τινα δοθέντων πραγμάτων ἀνὰ τρία λαμβανομένων, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς τρεῖς ἐσχάτους Ὅρους ἐπ' ἀλλήλους, ἔπειτα τὸ ἐκ τούτων Γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν τριῶν πρώτων Ὅρων, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ αʹ.

§. 231. Ἐν 90 ἄρα ἀριθμοῖς, ἐὰν ἀνὰ δύο τούτους συνάψωμεν, εἰσὶ Συζυγίαι $\frac{90\times89}{1\times2} = 4005$, αἵτινες κοινῆς ὀνομάζονται

ἄλλαι

ἄμβοι (ambi), λαμβανομένων δὲ ἀνὰ τρεῖς, ἔσονται Συζυγίαι $\frac{90×89×88}{1×2×3} = 117480$, αἵτινες τέρνι (terni) καλοῦνται. ἀνὰ τέσσαρας δὲ λαμβανομένων, προκύψουσι Συζυγίαι (quaterni) $\frac{90×89×88×87}{1×2×3×4} = 2555190$, λαμβανομένων δὲ ἀνὰ πέντε, ἔσονται Συζυγίαι (quinterni). $\frac{90×89×88×87×86}{1×2×3×4×5} = 43949268$.

ΠΟΡΙΣΜΑ β'.

§. 232. Ἐὰν λάβωμεν γενικῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν συζευκτέων μεγεθῶν, καὶ ὀνομάσωμεν αὐτὸν μ, ἔσονται τότε κατὰ τὸ προτεθὲν Πόρισμα αἱ Συζυγίαι τῶν ἀνὰ δύω $\frac{μ×\overline{μ-1}}{1×2}$. τῶν ἀνὰ τρία $\frac{μ×\overline{μ-1}×\overline{μ-2}}{1×2×3}$. τῶν ἀνὰ τέσσαρα $\frac{μ×\overline{μ-1}×\overline{μ-2}×\overline{μ-3}}{1×2×3×4}$. κ. τ.

ΣΧΟΛΙΟΝ α'.

§. 233. Ἔστω ἡ ἐρώτησις, ποσάκις δύνανται νὰ συζευχθῶσιν ἑπτὰ πλανῆται; κατὰ τοῦτο ἔσται $μ = 7$, ὅθεν ἀνὰ δύω λαμβανομένων, $\frac{7×6}{1×2} = 21$. ἀνὰ τρεῖς, $\frac{7×6×5}{1×2×3} = 35$. ἀνὰ τέσσαρας λαμβανομένων, ἔσονται Συζυγίαι = 35, ἀνὰ πέντε, = 21, ἓξ ὁμοῦ = 7, καὶ τέλος ἑπτὰ ὁμοῦ = 1. ἑπομένως εἰσὶν ὅλαι αἱ Συζυγίαι [illegible] 120. κ. τ.

ΣΧΟΛΙΟΝ β'.

§. 234. Αὕτη ἡ περὶ τοῦ Συνδυασμοῦ πραγματεία δὲν συμβάλλει μόνον πρὸς ἀναγραμματισμούς, καὶ πρὸς ἄλλα τοιαῦτα παιδιᾶς εἴδη, ἀλλὰ καὶ πρὸς τὴν τῆς πιθανότητος ἐπιστήμην, διὰ στοιχήματα, καὶ διὰ τὴν ἀξιοθεώρητον πολιτικὴν ἀριθμητικήν.

ΚΕΦΑ'-

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ιβ'.

Περὶ λογαρίθμων.

ΟΡΙΣΜΟΣ α'.

§. 235. Ἐὰν ὑποκάτω μιᾶς ἀριθμητικῆς Προόδου ἀρχομένης ἐκ τοῦ 0, ταχθῇ τις Γεωμετρικὴ Πρόοδος, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος Ὅρος ἄρχεται ἀπὸ τοῦ 1, οἱ Ὅροι τότε τῆς ἀριθμητικῆς ταύτης Σειρᾶς ἔσονται λογάριθμοι τῶν Ὅρων τῆς Γεωμετρικῆς Σειρᾶς, τουτ' ἔστιν ἕκαστος Ὅρος τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ ὑπ' αὐτὸν κειμένου Ὅρου τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς

Ἀριθμ. 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7

Γεωμ. 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128.

Ἔνθα ἕκαστος Ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς Προόδου παρίστησι τὸν λογάριθμον τοῦ ὑπ' αὐτὸν κειμένου Ὅρου τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου, οἷον 5 εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ 32, ἢ ὁ 5 ἐμφαίνει ὅτι [illegible] Γεωμετρικῇ Προόδῳ εἶναι ὁ πενταπλασίων λόγος τοῦ 1 : [illegible]. ἐπειδὴ ἂν ὅταν συνάγωμεν 1 : 2 = 2 : 4. 2 : 4 = 4 : 8. 4 : 8 = 8 : 16 [illegible] 8 : 16 = 16 : 32. γίνεται καταφανές, ὅτι εἶναι πέντε οἱ λόγοι ἀπὸ 1 μέχρι τοῦ 32. οἷον 1 : 2 (εἷς λόγος), 2 : 4 (δύω). 4 : 8 (τρεῖς), [illegible] 16. (τέσσαρες). 16 : 32 (πέντε).

ΠΟ'-

ΠΟΡΙΣΜΑ α'.

§. 236. Ἐπειδὴ ἑκάστη Γεωμετρικὴ Πρόοδος, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος Ὅρος ἐστὶν = 1, δύναται νὰ ἐκτεθῇ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον $\Pi^0, \Pi^1, \Pi^2, \Pi^3, \Pi^4, \Pi^5, \Pi^6, \Pi^7$ (§. 219) ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι οἱ Ἐκθέται μιᾶς Γεωμετρικῆς Προόδου δύνανται νὰ θεωρῶνται ὡς λογάριθμοι τῶν Ὅρων τῆς ῥηθείσης Προόδου· οἱ Ἐκθέται δηλονότι εἰσὶν λογάριθμοι τῶν δυνάμεων αὐτῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ β'.

§. 237. Ἐπειδὴ κάθε πολλαπλασιασμὸς τῶν δυνάμεων γίγνεται διὰ τῆς προσθέσεως τῶν Ἐκθετῶν, καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν Ἐκθετῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸν Ἐκθέτην τοῦ Παραγομένου, οἱ δὲ Ἐκθέται ταυτὸν δύνανται τοῖς λογαρίθμοις, ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι ἐὰν συναφθῶσιν οἱ λογάριθμοι δύο Παραγομένων, τὸ κεφάλαιον ἐκ τῆς Συνάψεως τῶν λογαρίθμων ἔσται ὁ λογάριθμος τοῦ παραγομένου. π. χ. εἰς τὴν ἀνωτέρω σειρὰν οἱ λογάριθμοι τοῦ 4 καὶ 32 εἶναι ὁ 2, καὶ ὁ 5, τὸ δὲ τούτων κεφάλαιον 7 εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ Παραγομένου 128. καὶ πάλιν, ἐπειδὴ ἡ διαίρεσις τῶν Δυνάμεων γίνεται διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τῶν Ἐκθετῶν, ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι ἐὰν ἀφαιρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ διαιροῦντος ἀπὸ τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρουμένου, τὸ ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως ἐναπολειπόμενον ἔσται ὁ λογάριθμος τοῦ Πηλίκου. π. χ. Ἐν τῇ Ἰδίᾳ Σειρᾷ ἐκ τοῦ 128 διαιρεθέντος ἐπὶ τὸν 4, προκύπτει Πηλ. 32, καὶ ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν τούτων λογαρίθμων 7—2 προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 5, ὅστις εἶναι λογάριθμος τοῦ Πηλίκου 32.

ΠΟΡΙΣΜΑ γ'.

§. 238. Ἐπειδὴ ὁ Ἐκθέτης τοῦ δεδομένου ποσοῦ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ μετὰ τοῦ Ἐκθέτου τῆς ζητουμένης δυνάμεως, δίδει τὸν Ἐκθέτην τῆς δυνάμεως (§. 49), ἄρα καὶ ὁ λογάριθμος τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεὶς μετὰ τοῦ Ἐκθέτου τῆς δυνάμεως, δίδει

τὸν

τὸν λογάριθμον τῆς δυνάμεως. προσεζόμεθα τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ 4, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ, οἷον τὸν 2 μετὰ τοῦ 3, καὶ τὸ ἐκ τούτων Παραγόμενον 6 εἶναι ὁ λογάριθμος τῆς τρίτης δυνάμεως 64. καὶ ἂν διέλωμεν τὸν Ἐκθέτην ἑκάστης δυνάμεως μὲ τὸν δοθέντα Ἐκθέτην τῆς ῥίζης, ἀποκτῶμεν τὴν ζητουμένην ῥίζαν (§. 60). καὶ ὁ λογάριθμος ἄρα τῆς δυνάμεως διαιρεθεὶς διὰ τοῦ Ἐκθέτου τῆς ῥίζης, δίδει τὸν λογάριθμον τῆς ζητουμένης ῥίζης. ἐκ τοῦ 64 ἐξάγεται ἡ ῥίζα τῆς τρίτης δυνάμεως ἂν διαιρεθῇ ὁ λογάριθμος αὐτοῦ ὁ 6 διὰ τοῦ 3, καὶ τότε τὸ Πηλίκον 2 ἐστὶν ὁ λογάριθμος τῆς ῥίζης 4. λοιπὸν ἐπὶ τῶν λογαρίθμων κάθε πολλαπλασιασμὸς μεταβάλλεται εἰς πρόσθεσιν, κάθε διαίρεσις εἰς ἀφαίρεσιν, κάθε δὲ εἰς δυνάμεις ὕψωσις μεταβάλλεται εἰς πολλαπλασίασιν, καὶ κάθε ἐξαγωγὴ ῥίζης εἰς διαίρεσιν. ὅθεν διὰ τῆς χρήσεως τῶν λογαρίθμων μεγάλην καρπούμεθα τὴν ὠφέλειαν καὶ τὴν ἐν παντὶ εἴδει λογισμῶν εὐχέρειαν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 239. Ὁ τοὺς λογαρίθμους ἐπινοήσας λέγεται, ὅτι εἶναι πρῶτος Ἰωάννης τις Νέπιρος ἐν τῇ Σκωτίᾳ, ὅστις ἐρευνῶν τὰς Ἰδιότητας τῆς Ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν μετὰ πολλῆς ἀκριβείας, ἔφθασε διὰ τούτης εἰς τὴν γνῶσιν τῆς φύσεως καὶ Ἰδιότητος τῶν λογαρίθμων, καὶ ἐξέδωκε πόνημα ἐπιγραφόμενον. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΘΑΥΜΑΣΙΟΥ ΚΑΝΟΝΟΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ κατὰ τὸ 1614 ἔτος ἘΝ ἘΔΙΝΒΟΥΡΓ. Τῆς πρὸς τοῦτο φροντίδος ἔλαβε πολὺ μέρος καὶ ὁ ἙΝΡΙΚΟΣ ΒΡΙΓΓΙΟΣ, καὶ ἐκοπίασε σὺν ἐκείνῳ διὰ νὰ φέρωσιν τὴν ὑπόθεσιν εἰς τὸ ἐντελέστερον, ὁ δὲ σκοπὸς καὶ τῶν δύο ἰδίως ἦν εἰς τὸ νὰ εὕρωσιν ἑκάστῳ ἀριθμῷ ἕνα μεταξὺ καὶ ἀνήκοντα λογάριθμον, ἢ Ἐκθέτην. ὅθεν ἐν ἀρχῇ τὸν λόγον 1 : 10 ὡς ἁπλοῦν ἐκλαβόντες, ἐξέφρασαν ἐκ τούτου τὴν ἑξῆς Γεωμετρικὴν Πρόοδον, καὶ ἔδωκαν εἰς τοὺς Ὅρους αὐτοὺς ὡς Ἐκθέτας τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς ἐν ἀριθμητικῇ Προόδῳ, τὴν ὁποίαν ἀπὸ τοῦ 0 ἤρξαντο, καὶ εἰς τοὺς 1, 2, 3, 4, κ. τ. προήγαγον. καὶ οὕτως ἀνεφάνη ὁ τῆς μονάδος λογάριθμος 0, τῆς δεκάδος 1, τῆς ἑκατοντάδος ὁ 2, κ. τ.

Ἀριθ. 0, 1, 2, 3, 4, 5,

Ὅροι. 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 κ. τ.

μετὰ

μετὰ τοῦτο τὸ ἔργον ἦτον ἀναγκαῖον νὰ εὑρεθῶσι καὶ οἱ ἀνήκοντες λογάριθμοι (*) τῶν φυσικῇ τάξει ἀλλήλους διαδεχομένων ἀριθμῶν, ἤτοι τῶν ὄντων μεταξὺ τῆς 1, 10, 100, 1000 κ. τ. Γεωμετρικῆς Προόδου. ἐπειδὴ μεταξὺ τῆς 1 καὶ 10 ἐλλείπουσιν ἐπτὰ ὀκτὼ χαρακτῆρες, οἷον ὁ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, μεταξὺ δὲ τῶν 10 καὶ 100 ἐλλείπουσιν ἔτι πλείους, καὶ ἔτι πλείονες μεταξὺ τῶν λοιπῶν τῆς Προόδου Ὅρων· ἀλλ' ἅπαντες οἱ ἐλλείποντες ἀριθμοὶ δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς δυνάμεις τοῦ 10 κ. τ. ἐπειδὴ μεταξὺ 1 καὶ 10 δύναταί τις νὰ νοήσῃ καὶ ἑτέρας μυρίας δυνάμεις, τῶν ὁποίων οἱ Ἐκθέται εἰσὶν ἐλάττονες μὲν τῆς 1, μείζονες δὲ τοῦ 0. οὕτω δὴ καὶ μεταξὺ τοῦ 10 καὶ 100, ἤτοι μεταξὺ τοῦ 10 καὶ 100 δύνανται νὰ νοηθῶσι καὶ ἄλλοι μυρίοι ἀριθμοὶ, τῶν ὁποίων ἡ δύναμις ὑπερέχει μὲν τὴν 1, ὑπερέχεται ὅμως ὑπὸ τοῦ 2. ἐκ τούτου γίνεται φανερὸν, ὅτι ἅπαντες οἱ Ἐκθέται τῶν δυνάμεων, τουτέστιν ἅπαντες οἱ λογάριθμοι τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν τῶν μεταξὺ 1 καὶ 10 εἰσὶ γνήσια Κλάσματα, ὡς ὄντες ἐλάττονες τῆς 1, ἅπαντες δὲ οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τῶν μεταξὺ 10 καὶ 100 κ. τ. εἰσὶν ἀριθμοὶ ὁλοσχερεῖς, ἔχοντες καὶ Κλάσματα ἑαυτοῖς παρακείμενα, οἵτινες μετὰ τῶν Κλασμάτων εἰς Κλάσματα γεγονότες, εἰσὶν νόθα Κλάσματα. οὕτω. π. χ. ἅπαντες οἱ ἀριθμοὶ μεταξὺ 10 καὶ 100 ἔχουσι λογάριθμον τὴν 1, καὶ Κλάσμα. ἐπειδὴ μόνον τοῦ 100 λογάριθμος εἶναι ὁ 2. κ. τ.

Μὲ ἐργωδέστατον τρόπον εὗρον τὸ πρῶτον τούτους τοὺς ἀνήκοντας λογαρίθμους, διὰ τῆς ζητήσεως δηλονότι τῶν Μέσων ἀναλόγων ἀριθμῶν μεταξὺ τῆς ἀριθμητικῆς καὶ Γεωμετρικῆς Προόδου, ἕως οὗ ἐνέτυχον ἀριθμῷ ὡς ἔγγιστα ὄντι τοῦ ζητουμένου, τὸν ὁποῖον καὶ ὡς ἀληθῆ παρέλαβον, καὶ πρὸς τὸν ὁποῖον προέκυπτε καὶ ὁ τοῦ ζητουμένου λογάριθμος, διὰ τῆς ζητήσεως τοῦ Μέσου ἀριθμητικῶς ἀναλόγου

ἀριθ-

(*) Οὗτοι εὑρίσκονται ἐν ἀριθμητικῷ αὖθις λόγῳ μεταξὺ τοῦ 0, 1, 2, 3, 4, κ. τ. ἤτοι μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω ἐπ' ἀκριβὲς λογαρίθμων, καὶ ἔσονται ἐκδηλούμεναι εἰς δεκαδικὰ Κλάσματα, ἐπειδὴ μεταξὺ τοῦ 0 καὶ 1 καὶ μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 2 δὲν ὑπάρχει κανένας ὁλόκληρος ἀριθμός.

ἀριθμοῦ εὑρεθεῖσ. καὶ διὰ νὰ δηλωθῇ σαφέστερον αὕτη ἡ Μέθοδος περὶ τῆς εὑρέσεως τούτων τῶν λογαρίθμων, φέρε δὴ τὰ εἰρημένα παραδειγματίσωμεν, καὶ δείξωμεν λεπτομερέστερον τὸν τρόπον, κατὰ τὸν ὁποῖον εὑρίσκεταί τις ἀνήκων λογάριθμος. πολλαπλασιάζονται πρῶτον μετ' ἀλλήλων οἱ δύω δοθέντες ἄκροι Ὅροι, μεταξὺ τῶν ὁποίων ζητεῖται ὁ Μέσος Γεωμετρικὸς ἀνάλογος, ἂν εἶναι ἄγνωστος· ἔπειτα ἐξάγεται ἐκ τοῦ Παραγομένου ἡ Τετραγωνικὴ ῥίζα, καὶ αὕτη ἐστὶν ὁ Μέσος Γεωμετρικὸς ἀνάλογος. ζητουμένου, δὸς εἰπεῖν, τοῦ Μέσου γεωμετρικῶς ἀναλόγου τοῦ μεταξὺ 2 καὶ 32. ποιοῦμεν οὕτως $2 : x = x : 32$, ὥστε $64 = x^2$, καὶ ἐκ τῶν δύω τῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, ἔσται $\sqrt{64} = x$, τουτέστιν $8 = x$, καὶ ὁ 8 ἀριθμὸς ἔσται ὁ ζητούμενος Μέσος Γεωμετρικὸς ἀνάλογος μεταξὺ τοῦ 2 καὶ 32. Ὁ δὲ Μέσος ἀριθμητικὸς ἀνάλογος εὑρίσκεται οὕτω· συνάπτονται πρῶτον οἱ ἐν ἀριθμητικῷ λόγῳ δύω Ὅροι, τουτέστιν οἱ λογάριθμοι τῶν ἐν Γεωμετρικῷ λόγῳ κειμένων δύω Ὅρων, μεταξὺ τῶν ὁποίων ζητεῖται ὁ Μέσος Γεωμετρικὸς ἀνάλογος, ἔπειτα τὸ ἐκ τῆς συνάψεως ἄθροισμα διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, τὸ δὲ ἐκ τῆς διαιρέσεως Πηλίκον ἔσται ὁ ζητούμενος μέσος ἀριθμητικὸς ἀνάλογος. π. χ. ἐὰν ζητῆται ὁ Μέσος ἀριθμητικὸς ἀνάλογος μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 5 δύω Ὅρων, ὧν τὸ μὲν 1 εἶναι λογάριθμος τοῦ ἐν Γεωμετρικῷ λόγῳ κειμένου Ὅρου 2, ὁ δὲ 5 αὖθις λογάριθμος τοῦ 32, ποιοῦμεν οὕτως $1 + 5 = 6$ καὶ τοῦ κεφαλαίου διαιρεθέντος, γίνεται $\frac{6}{2} = 3$, καὶ οὗτος ὁ προκύψας 3 ὑπάρχει ὁ ζητούμενος μέσος ἀριθμητικὸς ἀνάλογος, ὅστις εἶναι λογάριθμος τοῦ 8 τοῦ εὑρεθέντος μέσου γεωμετρικῶς ἀναλόγου μεταξὺ τοῦ 2 καὶ 32. τοῦτον δὲ τὸν τρόπον μετεχειρίσθησαν καὶ οἱ πρῶτοι τῶν λογαρίθμων εὑρεταὶ, καὶ εἰς εὕρεσιν τοῦ λογαρίθμου τοῦ 9 ἀριθμοῦ ἐποίησαν οὕτως. Ἔλαβον πρῶτον δοθέντας τοὺς δύω ἄκρους ἀριθμοὺς, μεταξὺ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται ὁ 9, δηλονότι τὸ 1 καὶ τὰ 10, καὶ τούτοις προσετέθησαν ἑπτὰ Σημεῖα μηδενικὰ (ἐπειδὴ καὶ εἶναι ἀναγκαῖον νὰ παρίστανται οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἰς δεκαδικὰ διὰ νὰ γένωνται αἱ πράξεις ἀκριβέστερον) ἔπειτα συνήγαγον $1,0000000 : x = x : 10,0000000$, ὥστε $10,0000000000000000 = x^2$, τούτων δὲ τῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, προέκυψεν 3.1622777 ἐν ἑπτὰ δηλονότι δεκαδικοῖς, ὅστις ἐστὶν ὁ

μέσος

μέσος Γεωμετρικὸς ἀνάλογος μεταξὺ 1 καὶ 10. τὸν δὲ τούτου λογάριθμον εὗρον οὕτως. ἐπειδὴ ὁ τῆς 1 λογάριθμος ἐστὶν = 0, ὁ δὲ τοῦ 10 λογάριθμος ἐστὶν = 1. ἐν ἀριθμητικῇ ἀναλογίᾳ συνήγαγον ὧδε 0. χ = χ. 1. ἄρα 1 = 2χ, ὥστε $\frac{1}{2} = χ$.

προστεθέντων δὲ ταύτῃ τῇ 1 τῶν ἑπτὰ μηδενικῶν, γέγονε $\frac{1.0000000}{2}$

τουτέστιν = 0,5000000, καὶ οὗτος ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ 3.1622777, ἀλλ' ἐπειδὴ οὗτος ὁ εὑρεθεὶς Μέσος ἀνάλογος, δὲν εἶναι ὁ ζητούμενος 9 μετὰ τοῦ ἰδίου λογαρίθμου, διὰ τοῦτο ἀνάγκη ἦν νὰ προχωρήσωσι περαιτέρω, ζητοῦντες τὸν λογάριθμον τοῦ 9. ὅθεν δὴ λαβόντες αὖθις τοῦτον τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν 3.162277, καὶ τὸν 10 σὺν ἑπτὰ μηδενικοῖς δεκαδικοῖς, ἐπολλαπλασίασαν αὐτοὺς ἐπ' ἀλλήλους, οἷον 3.162277X10.0000000 = 31.622770000000. ἔπειτα ἐξήγαγον τούτου τὴν ῥίζαν μέχρις ἑπταδεκαδικῶν, καὶ ἀνεφάνη Μέσος γεωμετρικῶς ἀνάλογος οὗτος ὁ ἀριθμὸς = 5.6234132, τοῦ ὁποίου εὗρον καὶ τὸν ἀνήκοντα λογάριθμον, συνάψαντες πρῶτον τὸν λογάριθμον τοῦ 3.1622777 τουτέστι τὸν 0.5000000 καὶ τὸν λογάριθμον τοῦ 10, καὶ διελόντες ἔπειτα διὰ τοῦ 2 τὸ ἐκ τούτων ἄθροισμα, ἐξ οὗ προέκυψεν οὗτος ὁ ἀριθμὸς 0.7500000 Μέσος ἀριθμητικὸς ἀνάλογος, καὶ λογάριθμος τοῦ εὑρεθέντος 5.6234132. ἀλλ' ἐπειδὴ μήτε οὗτος ὁ εὑρεθεὶς Μέσος ἀνάλογος εἶναι ὁ ζητούμενος 9, μήτε ὁ εὑρεθεὶς Μέσος ἀριθμητικὸς ἀνάλογος εἶναι ὁ ζητούμενος λογάριθμος τοῦ 9. ἐζήτησαν πάλιν ἐκ τρίτου νὰ εὕρωσι τὸν Μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τοῦ 10, καὶ 5.6234132, ὁμοίως καὶ τὸν τούτου λογάριθμον, καὶ οὕτω χωροῦντες εἰς ζήτησιν τοῦ μέσου ἀναλόγου μεταξὺ δύω ἀριθμῶν καὶ εἰς ζήτησιν τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ, ἔφθασαν τέλος πάντων μετὰ 26 τοιαύτας πράξεις εἰς τὸ ζητούμενον, εὗρον δηλαδὴ τὸν ἐν Γεωμετρικῷ λόγῳ ἀριθμὸν 9.0000000, καὶ τὸν τούτου λογάριθμον 0.9542425. κατ' αὐτὸν ἄρα τὸν τρόπον προσδιωρίσθη ὁ λογάριθμος τοῦ 9. ὥσπερ δὴ καὶ οἱ λογάριθμοι τοῦ 2, τοῦ 5, τοῦ 7, ζητηθέντες, εὑρέθησαν οἱ ἑξῆς.

2	0.3010300
5	0.6989700
7	0.8450980
9	0.9542425.

οἱ δὲ

οἱ δὲ λογάριθμοι τῶν 3 ἀριθμῶν, τοῦ 4, τοῦ 6, καὶ τοῦ 8 εὑρίσκονται κατὰ τὸ προτεθὲν Πόρισμα. π. χ. ἡ ῥίζα τοῦ 9 εἶναι ὁ 3. ἐὰν ἦν ὁ λογάριθμος τοῦ 9 διαιρεθῇ διὰ τοῦ δύω, τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως Πηλίκον, οἷον 0.4771212 ἔσται ὁ λογάριθμος τῆς ῥίζης 3 (§. 6). τοῦ 2 τὸ Τετράγωνόν ἐστιν 4. λοιπὸν ἂν ληφθῇ δὶς (§. 49) ὁ τούτου λογάριθμος, προκύπτει ἐκ τῆς συνάψεως ὁ τοῦ 4 λογάριθμος 0.6020600. καὶ ἐκ τοῦ 2X3 παράγεται ὁ ἀριθμὸς 6, ἄρα κτώμεθα τὸν λογάριθμον αὐτοῦ, ἀφ' οὗ συνάψωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 2 μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ 3 (§. 47), ὅστις ἐστὶν 0.7781512. τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τοῦ 2 καὶ 4 ἀριθμοῦ δίδει τοῦ 8 ἀριθμοῦ τὸν λογάριθμον = 9030900. Οἱ λογάριθμοι τοῦ ἀριθμοῦ 11, 13, κ. τ. εἰσὶν αὖθις εἰς ζήτησιν. οἱ δὲ λογάριθμοι τοῦ 12, 14 κ. τ. εὑρίσκονται διὰ τῆς προσθέσεως. ἅπαντας τούτους τοὺς λογαρίθμους ΒΡΙΓΓΙΟΣ πρῶτος συνέλεξεν ἐν Πίναξι, καὶ τούτους τύποις ἐξέδωκε. ἔπειτα ὑπὸ τοῦ ΦΛΑ'ΚΚΟΥ, ἢ ΟΥ'ΛΑ'Κ κατ' ἄλλους, προσηυξήθησαν, καὶ γνωρίζονται ὑπὸ τὸ ὄνομα „ ΚΑΝΩ'Ν ΛΟΓΑΡΙ'ΘΜΩΝ. εἰσὶν ὅμως καὶ ἄλλαι τούτων ἐκδόσεις διάφοροι."

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ ά.

§. 240. Ἐκ τῶν ἕως ὧδε λεχθέντων ἕπεται, ὅτι ἕκαστος λογάριθμος ἐκ δεκαδικοῦ τινος συνίσταται Κλάσματος, καὶ οἱ μὲν λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τῶν μεταξὺ 1 καὶ 10 εἰσὶν Κλάσματα μόνα, καὶ ἕκαστος τούτων ἐλάττων ἐστὶ Μονάδος. ὅτι μόνον ὁ λογάριθμος τοῦ 10 ἐστὶν = 1. ἕκαστος δὲ λογάριθμος τῶν μεταξὺ 10 καὶ 100 ἀριθμῶν εἶναι Μονὰς ὁλοσχερὴς ἔχουσα ἑαυτῇ προσκείμενον καὶ Κλάσμα. ὅτι μόνον τοῦ 100 ὁ λογάριθμος ἐστὶν = 2. ἑκάστου δὲ λογαρίθμων τῶν ἀπὸ τοῦ 100 μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ 999 ἕκαστος σύγκειται ἐκ δύω Μονάδων καὶ Κλάσματος, ὅτι μόνον τοῦ 1000 ὁ λογάριθμος εἶναι = 3. ὅθεν ἐν γένει ὁ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς τοῦ λογαρίθμου εἶναι πάντοτε μίαν μονάδα μικρότερος ἀπὸ τὴν πληθὺν τῶν χαρακτήρων, ἐκ τῶν ὁποίων σύγκειται τὸ Διδόμενον. π.χ. ἔστω τὸ Διδόμενον ἐκ τριῶν χαρακτήρων 528 συγκείμενον, ὁ τούτου λογάριθμος (ἢ τὸ χαρακτηριστικὸν) ὑπάρχει μονάδι ἐλάττων τουτέ-

τουτέ-

J

τυτέστι = 2. ἐὰν δὲ τὸ Διδόμενον εἶναι ἐκ 5 χαρακτήρων 34467. εἰς τὸν λογάριθμον πρέπει νὰ εἶναι 4 ὁλοσχερεῖς ἀριθμοί. ὅθεν ϗ τὸν πρὸ τῶν Δεκαδικῶν Κλασμάτων κείμενον ὁλοσχερῆ ἀριθμὸν ὀνομάζουσιν Χαρακτηριστικόν. ἐπειδὴ ἐκ τούτυ μανθάνει τις, ἐκ πόσων χαρακτήρων συνίσταται τὸ Διδόμενον, ὅπου προσήκει εἰς τοῦτο τὸ χαρακτηριστικόν, ἢ λογάριθμον.

ΠΟΡΙΣΜΑ β'.

§. 241. Ἐπειδὴ ὁ λογάριθμος τοῦ 10 εἶναι 1.0000000, ϗ ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιασμὸς δύω ἀριθμῶν γίνεται διὰ τῆς συνάψεως τῶν λογαρίθμων, ἐκ τούτυ εἶναι φανερόν, ὅτι ἂν ὁ ἕνας συνεργὸς εἶναι 10, ὁ λογάριθμος τοῦ Παραγομένου πρέπει νὰ εἶναι Ἴσος μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ἄλλου Συνεργοῦ, μὲ τοσην ὅμως διαφοράν, ὅτι ἐκεῖνος ἐν τῷ χαρακτηριστικῷ αὐξάνει μίαν Μονάδα. π.χ. ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ 10 μετὰ τοῦ 2 ἀριθμοῦ διὰ τῆς Συνάψεως τῶν λογαρίθμων, ὁ λογάριθμος τοῦ παραγομένου ἔσται Ἴσος μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ἑτέρου Συνεργοῦ, τυτέστι τοῦ 2, πλὴν ὅτι ὁ λογάριθμος τοῦ Παραγομένου ἐν τῷ χαρακτηριστικῷ ὑπερέξει τὸν λογάριθμον τοῦ 2 μίαν Μονάδα. ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 2, ϗ 20, ϗ 200, ϗ 2000 ἐν μὲν τοῖς Δεκαδικοῖς εἶναι ὁ Ἴδιος, τυτέστι 3010300, κατὰ δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν ἐπὶ μὲν τοῦ 2 = 0, ὅτι ὁ τοῦ 2 λογάριθμος τυγχάνει 0.3010300, ἐπὶ δὲ τοῦ 20 εἶναι = 1, ὅτι ὁ τοῦ 20 λογάριθμος τυγχάνει 1.3010300. ἐπὶ δὲ τοῦ 200 = 2, ὅτι ὁ τοῦ 200 λογάριθμός ἐστιν 2.3010300, ἐπὶ δὲ τοῦ 2000 = 3, ὅτι ὁ λογάριθμος τοῦ 2000 ἐστὶν ὁ 3.3010300, δι' αὐτὸν δὲ τοῦτον τὸν λόγον πάλιν ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 34 ϗ 340 κατὰ τὰ Δεκαδικὰ εἶναι ὁ αὐτός. ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ 346 ϗ 3460 ὡσαύτως. ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ 347 ϗ 3470 ὁμοίως εἶναι ὁ ἴδιος, καθὼς ἐπὶ πλέον ὁ λογάριθμος τοῦ 346 ϗ 34600, ἢ 346000 ἔσται ὁ αὐτός, κατὰ δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν πάντοτε μίαν Μονάδα ἐλάττων τῆς πλήθους τῶν χαρακτήρων, τῶν ὁποίων ζητεῖται ὁ λογάριθμος, ὡς ἐν τῷ ἀνωτέρῳ (§. 240) Πορίσματι εἴρηται.

ΠΟ-

ΠΟΡΙΣΜΑ γ'.

§. 242. Ἐντεῦθεν μανθάνομεν τὴν Μέθοδον, κατὰ τὴν ὁποίαν δύναταί τις νὰ εὑρίσκῃ τὸν λογάριθμον ἑνὸς Ποσοῦ μείζονος τῶν ἐν τῷ Πίνακι ἐμπεριεχομένων, ἢ νὰ εὑρίσκῃ ἀριθμὸν ἀνήκοντα εἰς τὸν Διδόμενον λογάριθμον ἑνὸς χαρακτηριστικοῦ μείζονος τῶν ἐν τῷ Πίνακι εὑρισκομένων. ὅθεν ἐπειδὴ ὁ λογάριθμος ἐκτὸς τοῦ χαρακτηριστικοῦ, δὲν λαμβάνει τινὰ μεταβολήν, ἂν τὸ Ποσὸν προσαυξηθῇ, ἢ ἐλαττωθῇ ἓν Μηδενικόν 0, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν διὰ τοῦ ἁπλοῦ κανόνος τῶν ἀναλογιῶν τοὺς μεταξὺ λογαρίθμους, ἢ τοὺς ἀνήκοντας ἀριθμούς. ἂς ἀποδεχθῶμεν, ὅτι ἐν τῷ Πίνακι περιέχονται οἱ λογάριθμοι τῆς 1 μέχρι τῶν 1000, ϗ ὅτι πρόκειται εἰς ζήτησιν ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 6771, ἢ τοῦ 6775. ϗ ἐπειδὴ ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 6770 εἶναι ἴδιος μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ 677, ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ 6780 πάλιν εἶναι ἴδιος μὲ τὸν λογάριθ. τοῦ 678. ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι καθὼς μεταξὺ τοῦ 6770 ϗ 6780 εἰσὶν ἀριθμοὶ 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, οὕτω ϗ μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν 6770 ϗ 6780 ἀριθμῶν περιέχονται ἄλλοι μεταξὺ λογάριθμοι. ὅθεν πρέπει νὰ λάβωμεν τὸν Διαφορὰν τῶν λογαρίθμων τοῦ 677 ϗ τοῦ 678 ἀριθμοῦ, ϗ νὰ διέλωμεν αὐτὴν εἰς 10 Μέρη, ϗ τότε κάθε ἑπόμενος λογάριθμος εἶναι μείζων τοῦ ἡγυμένου λογαρίθμου ἓν τοιοῦτον δεκατημόριον· κατ' αὐτὸν λοιπὸν τὸν τρόπον πορίζόμεθα τοὺς λογαρίθμους τῶν μεταξὺ ἀριθμῶν. ἐπειδὴ ὡς 10 πρὸς ἅπασαν τὴν Διαφοράν. οὕτως 1 πρὸς τὴν Διαφορὰν ἑνὸς δεκατημορίου ϗ 2 πρὸς τὴν Διαφορὰν δύω δεκατημορίων, κ.τ. ὁ μὲν λογάριθμος τοῦ 677, ἢ 6770 (ἐκτὸς τοῦ χαρακτηριστικοῦ) εἶναι 830588, ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ 678, ἢ 6780 εἶναι 831229, ἡ δὲ τῶν λογαρίθμων Διαφορὰ = 641, ὅθεν διαιρεθεῖσα αὕτη ἡ Διαφορὰ ἐπὶ τὸν 10, ποιεῖ $\frac{641}{10}$ = 64 ἀριθμόν, ὅστις πρέπει νὰ προστεθῇ ἑκάστῳ τῶν ἡγυμένων λογαρίθμων. ὁ λογάριθμος ἄρα τοῦ ζητυμένου 6771 εἶναι 3.830652, κ.τ. ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ ἄλλου ζητυμένου 6775 ἀριθμοῦ εἶναι 3.830909. ἐπὶ τούτυ θεμελιοῦται ἡ λύσις ϗ ἡ ἀπόδειξις τῶν ἀκολούθων Προβλημάτων· ἐν-

γοῦνται.

νοεῖται ὅμως, ὅτι τοὺς Πίνακας τῶν λογαρίθμων ἀπὸ τῆς 1 μέχρι τῶν 1000 πρέπει νὰ ἔχωμεν ἀνὰ χεῖρας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ α΄.

§. 243. Νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, τοῦ ὁποίου τὸ χαρακτηριστικὸν ὑπάρχει ο, ἢ 1, ἢ 2, ἢ 3.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 0, ἢ 1, ζητοῦμεν τὸν δοθέντα λογάριθμον εἰς τὸν Πίνακα ἀπὸ τῆς Μονάδος μέχρι τῶν 99, ὁ δὲ τῷ λογαρίθμῳ προσήκων ἀριθμὸς εἶναι ὁ ζητούμενος.

Ἐὰν δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν τυγχάνῃ 2, ἢ 3, ζητοῦμεν τότε ἐν τῷ Πίνακι ἀπὸ τῶν 100 μέχρι 9999, καὶ ὁ τῷ λογαρίθμῳ ἀνήκων ἀριθμὸς εἶναι ὁ ζητούμενος. π. χ.
εἰς τὸν λογάριθ. 1.716003 ἀνήκει ὁ 52 ἀριθμὸς
εἰς τὸν λογάριθ 2.424883 προσήκει ὁ 266 ἀριθμὸς
εἰς τὸν λογάριθ. 3.725585 ἀνήκει ὁ 5316 ἀριθμὸς
εἰς τὸν λογάριθ. 3.858958 ἀνήκει ὁ 7227 ἀριθμὸς
ὅταν ὅμως ὁ ζητούμενος λογάριθμος δὲν εὑρίσκηται ἐν τῷ Πίνακι, λαμβάνομεν τότε τὸν ἔγγιστα μικρότερον. π. χ.

εἰς τὸν λογάριθ.	0.759668 ἀνήκει ὡς ἔγγιστα	5
. . .	0.991669 . . .	9
. . .	1.060698 . . .	11
. . .	1.294466 . . .	19
. . .	2.730540 . . .	537
. . .	2.255996 . . .	180.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ β΄.

§. 244. Νὰ εὕρωμεν τινα ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προσανήκει εἰς δεδομένον τινὰ λογάριθμον χαρακτηριστικοῦ μείζονος τῶν ἐν τοῖς Πίναξιν ὑπαρχόντων.

ΛΥΣΙΣ, ἢ ΠΡΑΚΤΕΑ.

Καν. α΄.) Ὑπὸ τὸ πλέον μεγαλήτερον τῶν ἐν τοῖς Πίναξι χαρακτηριστικόν, τουτέστι ὑπὸ τὸ χαρακ. 3 ζητοῦμεν δύω λογαρίθμους, δηλαδὴ τὸν λογάριθμον τὸν ἔγγυς ἐλάσσονα, καὶ τὸν λογάριθμον τὸν ἔγγυς μείζονα τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, μεταξὺ τῶν ὁποίων παρεμπίπτουσι πάντως τὰ Δεκαδικὰ τούτου τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, καὶ ἀφ' οὗ εὕρωμεν τούτους τοὺς δύω λογαρίθμους, σημειοῦμεν τότε τὴν μεταξὺ τούτων Διαφορὰν, ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸν ἐλάσσονα ἀφαιροῦντες. ἐνταῦθα ὅμως οὐδόλως φροντίζομεν διὰ τὸ χαρακτηριστικὸν τούτων.

Καν. β΄) Μεταξὺ τοῦ δοθέντος καὶ ἔγγυς ἐλάσσονος λογαρίθμου ζητοῦμεν πάλιν τὴν τούτων Διαφορὰν, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν, ἀφ' οὗ ἀφέλωμεν τὸν ἔγγυς ἐλάσσονα ἀπὸ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, ὡστόσον καὶ ἐνταῦθα τὰ χαρακτηριστικὰ αὐτῶν παρορῶνται.

Καν. γ΄.) Συγκροτοῦμεν μετὰ ταῦτα μίαν ἀναλογίαν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. „ ὡς ἡ Διαφορὰ τῶν ἐν Πίνακι δύω λογαρίθμων (τοῦ ἔγγυς μείζ. καὶ ἔγγυς ἐλάσ.), πρὸς τὴν Διαφορὰν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, καὶ ἔγγυς ἐλάσ-

ἐλάσσονος, οὕτω καὶ 10, 100, ἢ 1000 πρὸς τὸν εὑρετέον τέταρτον ἀριθμόν, τουτέστι τὸν τρίτον Ὅρον τῆς ἀναλογίας (ὁ ὁποῖος εἶναι Μονὰς) παρασταίνομεν, προσθέτοντες αὐτῷ τοσαῦτα Μηδενικὰ καθ' ὅσας Μονάδας τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου ὑπερέχει τὸν 3, ὅστις εἶναι τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ἐγγὺς ἐλάσσονος λογαρίθμου. ὅθεν ἂν μὲν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εἶναι 4, λαμβάνομεν τὸν 10 ὡς τρίτον Ὅρον τῆς ἀναλογίας. ἂν δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 5, λαμβάνομεν τὸν 100. ὅταν δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν ὑπάρχῃ 6, παρασταίνομεν τότε τὸν τρίτον τῆς ἀναλογίας Ὅρον διὰ τοῦ 1000 ἀριθμοῦ. κ. τ. λ.

Καν. δ',) Τέλος δὲ τὸν εὑρεθέντα τέταρτον ἀριθμὸν παραθέτομεν εἰς τὸ τέλος ἐκείνου τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου λογάριθμος εἶναι ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων, καὶ τότε οὗτος ἐστὶν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τοῦ δοθέντος λογαρίθμου.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ ἐπὶ τοῦ ΠΡΟΒΛΗ'ΜΑΤΟΣ.

Ἔστω δοθεὶς ὁ λογάριθμος 4.530632, τοῦ ὁποίου ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ προσήκων ἀριθμός. ὅθεν

κατὰ τὸν α'. καν.
- ὁ ἐγγὺς μείζων λογάριθ. 3.530712
- ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων λογάριθ. 3.530584
- ἡ τούτων Διαφορὰ = 128

κατὰ τὸν β'. καν.
- ὁ δοθεὶς λογάριθ. 4.530632
- ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων. 3.530584

ἡ τούτων Διαφορὰ = 48

κατὰ

κατὰ δὲ τὸν γ'. κανόνα ποιοῦμεν ταύτην τὴν ἀναλογίαν.

ἡ διαφ. τοῦ ἐγγὺς μείζ. καὶ ἐλάσ.		ἡ διαφ. τοῦ δοθ. καὶ ἐλάσ.	
128	:	48	= 10 : χ = 3

κατὰ τὸν δ'. κανόνα προσθέτομεν τοῦτον τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν 3 εἰς τὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ 3393, ὅστις προσήκει εἰς τὸν ἐγγὺς ἐλάσσονα λογάριθμον, καὶ τότε ἔχομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, δηλαδὴ τὸν 33933.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓ. ΕΤΕΡΟΝ.

Ἔστω ζητούμενος ἀριθμὸς ὁ προσήκων εἰς τὸν δοθέντα λογάριθμον 6.753473. ὅθεν ζητοῦντες κατὰ τὸν πρῶτον κανόνα ὑπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν 3,

εὑρίσκομεν
- τὸν ἐγγὺς μείζ. λογάριθ. 3.753496
- τὸν ἐγγὺς ἐλάσσονα. 3.753429

ἡ Διαφορὰ = 77.

κατὰ δὲ τὸν β'. καν.
- ὁ δοθεὶς λογάριθ. 6.753473
- ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων. 3.753429

ἡ Διαφορὰ = 44.

κατὰ τὸν γ', καν. 77 : 44 = 1000 : χ = 571.
κατὰ δὲ τὸν δ'. κανόνα εὑρίσκεται, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εἶναι 5668571, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τοῦ ἐγγὺς ἐλάσσονος λογαρίθμου ὑπάρχει ἐν τῷ Πίνακι = 5668.

ΠΡΟ'-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ γ΄.

§. 245. Δοθέντος ἀριθμοῦ τινος, νὰ εὕρωμεν τὸν προσήκοντα αὐτῷ λογάριθμον.

ΠΡΑΚΤΕΑ, ἢ ΛΥΣΙΣ.

Ὅταν τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ ὑπάρχῃ 0, ἢ 1, ἢ 2, ἢ 3. τότε εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον λογάριθμον ἐκτεθειμένον ἐν τοῖς Πίναξι, καθὼς εἰς τὸ πρῶτον Πρόβλημα (§. 243) ἀνάπαλιν εἴρηται. π. χ.

ὁ 5 ἔχει τὸν λογάριθμον 0.698970.
ὁ 19 . . . . 1.278754.
ὁ 537 . . . . 2.629974.

Ἐὰν ὅμως τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 4, ἢ 5, ἢ 6, ἢ καὶ μεῖζον, γίνεται ἡ λύσις κατὰ τὸ τρίτον Πόρισμα (§. 242) καὶ κατὰ τὸ δεύτερον Πρόβλημα (§. 244) οὕτως.

Καν. α΄.) Διαχωρίζομεν τοὺς χαρακτῆρας τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ εἰς δύο μέρη οὕτως, ὥστε ἐν μὲν τῷ ἀριστερῷ μέρει νὰ μένωσιν ὁμοῦ τόσοι χαρακτῆρες, ὅσοι ὑπάρχουσιν ἐν τοῖς Πίναξι, τουτέστι χαρακτῆρες τέσσαρες. ὅτι καὶ οἱ ἐν τοῖς ῥηθεῖσι Πίναξι περιλαμβανόμενοι Ἀριθμοὶ μόνον διὰ τεσσάρων χαρακτήρων ἐμφαίνονται. ὁ δὲ ἐν τοῖς δεξιοῖς ἐγκαταλειπόμενος μένει ἐν τοσούτῳ φυλαττόμενος.

Καν. β΄.) Ζητοῦμεν ἔπειτα τὸν λογάριθμον τοῦ διὰ τῶν ἀνωτέρω διαχωρισθέντων τεσσάρων χαρατήρων ἐμφαινομένου ἀριθμοῦ, καὶ τὸν λογάριθμον τοῦ ἐγγὺς μείζονος

ἀριθμ.

ἀριθμοῦ, οἵτινες εὑρίσκονται γεγραμμένοι ἐν τοῖς εἰρημένοις Πίναξι, καὶ μετὰ τοῦτο σημειοῦμεν τὴν μεταξὺ τούτων τῶν λογαρίθμων Διαφορὰν, τὸν ἐλάσσονα ἐκ τοῦ μείζονος ἀφαιροῦντες.

Καν. γ΄.) Καθιστῶμεν μετὰ τοῦτο μίαν ἀναλογίαν, εἰς τὴν ὁποίαν πρῶτον Ὅρον θέτομεν μίαν Μονάδα ἔχουσαν μεθ' ἑαυτῆς κείμενα τόσα Μηδενικὰ, ὅσοι πλεῖσται χαρακτῆρες ἔμειναν ἀνωτέρω ἐν τῇ διαχωρίσει πρὸς τὰ δεξιά. τουτέστιν ἂν ὁ πρὸς τὰ δεξιὰ ἐγκαταλειφθεὶς ἀριθμὸς εἶναι ἕνας μόνος χαρακτὴρ, μεταχειριζόμεθα τότε πρῶτον Ὅρον τῆς ἀναλογίας τὸν 10. ὅτι δὲ ὁ ἐγκαταλειφθεὶς οὗτος συνίσταται ἐκ δύο χαρακτήρων, λαμβάνομεν πρῶτον Ὅρον τῆς ἀναλογίας τὸν 100. εἰ δὲ συνίσταται ἐκ τριῶν, θέτομεν τὸν 1000 ἀριθμὸν εἰς τὸν πρῶτον τόπον τῆς ἀναλογίας, καὶ οὕτω περαιτέρω. δεύτερον δὲ Ὅρον τῆς ἀναλογίας γράφομεν αὐτὸν τὸν ἐν τῇ διαχωρίσει πρὸς τὰ δεξιὰ ἐγκαταλειφθέντα ἀριθμὸν, εἰς δὲ τὸν τρίτον τόπον θέτομεν τὴν μεταξὺ τῶν δύο λογαρίθμων εὑρεθεῖσαν διαφορὰν, καὶ οὕτω ζητοῦμεν τὸν τέταρτον Ὅρον.

Καν. δ΄.) Ἀφ' οὗ εὕρωμεν τοῦτον τὸν ζητούμενον τέταρτον Ὅρον, συνάπτομεν αὐτὸν μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ἐκ τῶν διασταλέντων τεσσάρων χαρακτήρων συνισταμένου ἀριθμοῦ, καὶ τότε τὸ ἐκ τῆς συνάψεως ἄθροισμα (κειμένου καὶ τοῦ ἀνήκοντος χαρακτηριστικοῦ) εἶναι ὁ ἐν τῷ Προβλήματι ζητούμενος λογάριθμος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ἐπὶ τοῦ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ.

Ἔστω δοθεὶς ἀριθμὸς 45647, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ λογάριθμος. ὅθεν

κατὰ

κατὰ τὸν α΄. Κανόνα διαχωρίζομεν τοὺς χαρακτῆρας τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ οὕτως 4564,7.
κατὰ δὲ τὸν β΄. Κανόνα ζητοῦμεν ἐν τοῖς Πίναξι τὸν λογάριθμον τοῦ 4564 διασταλέντος ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν, ὅτι εἶναι 659346, εὑρίσκομεν ὅτι καὶ τοῦ ἐγγὺς μείζονος ἀριθμοῦ τὸν λογάριθμον, ὁ ὁποῖος εἶναι 659441, καὶ ἀφαιροῦντες τὸν ἐλάσσονα ἀπὸ τοῦ μείζονος, οἷον 659441, εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ τούτων Διαφορὰ εἶ-
659346

ναι = 95.
κατὰ τὸν γ΄. Κανόνα. ἐπειδὴ ὁ ἐν τῇ διαχωρίσει πρὸς τὰ δεξιὰ ἐγκαταλειφθεὶς ἀριθμὸς τουτέστιν ὁ 7 ὑπάρχει μόνον ἕνας χαρακτὴρ, διὰ τοῦτο μεταχειριζόμεθα ἐνταῦθα εἰς τὴν ἀναλογίαν πρῶτον Ὅρον τὸν 10, καὶ καθιστῶμεν τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν, $10:7=95:\chi=66$.
κατὰ τὸν δ΄. Κανόνα συνάπτομεν τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν 66 μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ἀνωτέρω ἐν τοῖς ἀριστεροῖς διασταλέντος Ἀριθμοῦ, τουτέστι μὲ τὸν 659346 λογάριθμον. οἷον 659346
66

καὶ εἰς τοῦτο τὸ ἐκ τῆς συνάψεως κε- 659412
φάλαιον προσθέσαντες τὸ προσῆκον χαρακτηριστικὸν 4, ἀποκτῶμεν τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ 45647 τὸν ζητούμενον λογάριθμον 4.659412.

ΠΑΡΑ'ΔΕΙΓΜΑ Ε'ΤΕΡΟΝ.

Ἔστω δοθεὶς ἀριθμὸς 7853646, τοῦ ὁποίου πρόκειται εἰς εὕρεσιν ὁ ἀνήκων λογάριθμος.

ὅθεν

ὅθεν κατὰ τὸν α΄. Κανόνα διαχωρίζομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν οὕτως 7853,646.
κατὰ δὲ τὸν β΄. Κανόνα εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ μὲν λογάριθμος τοῦ 7853 διασταλέντος ἀριθμοῦ εἶναι 895036. ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ ἐγγὺς μείζονος ἀριθμοῦ εἶναι 895091. ἡ δὲ τούτων Διαφορὰ = 55,
κατὰ τὸν γ΄. Κανόνα. ἐπειδὴ ὁ ἐν τῇ διαχωρίσει πρὸς τὰ δεξιὰ ἐγκαταλειφθεὶς ἀριθμὸς, τουτέστιν ὁ 646 συνίσταται ἐκ τριῶν χαρακτήρων, διὰ τοῦτο ἐν τῷ πρώτῳ τόπῳ τῆς ἀναλογίας θέτομεν τὸν ἀριθμὸν 1000, ὅθεν γίνεται ἀναλογία $1000:646=55:\chi=35$.
καὶ τέλος κατὰ τὸν δ΄, Κανόνα συνάψαντες τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν 35 μετὰ τοῦ λογαρίθμου 895036, πορίζομεθα τὸν ζητούμενον λογάριθμον· οἷον 6.895071.

ΠΡΟ'ΒΛΗΜΑ δ΄.

§. 246. Νὰ εὕρωμεν δεκαδικὰ Κλάσματα, ὄντα προσηρτημένα εἰς ἕνα ἀριθμὸν, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος δεδομένος ὢν, δὲν ὑπάρχει ἐν τοῖς Πίναξι.

ΠΡΑΚΤΕ'Α.

Ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 0, ἢ 1, ἢ 2, ζητοῦμεν τὸν διδόμενον, ἢ τὸν ἐγγὺς ἐλάσσονα λογάριθμον ὑπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν 3, τουτέστιν, ὑπὸ τὸν ἀριθμὸν ἐκ τεσσάρων χαρακτήρων, καὶ ἐκ τούτων τῶν τεσσάρων προσηκόντων χαρακτήρων, ἂν τὸ δεδομένον χαρακτηριστικὸν

εἶναι

εἶναι = 0, ὁ πρῶτος χαρακτὴρ σημαίνει ὁλόσχερῆ ἀριθμὸν, οἱ δὲ ἀκόλουθοι τρεῖς χαρακτῆρες εἰσὶν Δεκαδικὰ Κλάσματα. ἐὰν δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι = 1, ἔσονται τότε οἱ μὲν δύω πρῶτοι χαρακτῆρες σημαντικοὶ ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ, οἱ δὲ ἀκόλουθοι δύω ἔσονται Δεκαδικὰ Κλάσματα. ὅταν δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι = 2, τότε οἱ μὲν τρεῖς πρῶτοι χαρακτῆρες εἰσὶν ἀκέραιοι, ὁ δὲ ἑπόμενος τέταρτος ὑπάρχει Κλάσμα Δεκαδικόν. π. χ.

εἰς τὸν λογάριθ.	0.871281	προσήκει ὁ	7.435
εἰς	1.538448	. . . .	34. 55
εἰς	2.790567	. . . .	617. 4

ἐὰν ὅμως τὸ δεδομένον χαρακτηριστικὸν τυγχάνῃ = 3, ἢ 4, ἢ ϗ μεῖζον. ζητοῦμεν τὰ Δεκαδικὰ Κλάσματα κατὰ τὴν ἐν τῷ Προβλήματι (§. 244) ἐκτεθεῖσαν ἀναλογίαν, ἐν ᾧ διὰ πρῶτον ϗ δεύτερον Ὅρον τῆς ἀναλογίας λαμβάνομεν τὰς διαφορὰς τῶν λογαρίθμων, τρίτον δὲ Ὅρον θέτομεν μίαν Μονάδα μὲ τόσα Μηδενικά, ὅσα Δεκαδικὰ ζητοῦνται. π. χ.

Δίδεται ὁ λογάριθμος 3.525783, εἰς τὸν ὁποῖον προσήκει ὁ 3355 ἀριθμός. ϗ ζητοῦνται δύω Δεκαδικὰ Κλάσματα.

Καν. α'.) Ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων λογάριθμος ὑπάρχει 525693, ἡ δὲ Διαφορὰ μεταξὺ τούτου ϗ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εἶναι = 90.

Καν. β'.) Ἡ ἐν Πίναξι Διαφορὰ εἶναι = 129. ὅθεν γίνεται ἀναλογία $129 : 90 = 100 : \chi = 69$. ὁ προσήκων ἄρα ἀριθμὸς εἶναι 3355.69.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ε'.

§. 247. Νὰ εὕρωμεν τὸν ἀνήκοντα λογάριθμον εἰς δοθέντος μικτοῦ ἀριθμοῦ, τουτέστιν ἀριθμοῦ ὁλοσχεροῦς μετὰ Δεκαδικῶν.

ΛΥΣΙΣ.

Θεωροῦμεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ὡς ἓν ὅλον, ϗ κατὰ τὸ ἐν τῷ τρίτῳ (§. 245.) Προβλήματι πραγματευθέντα ζητοῦμεν τὸν προσήκοντα αὐτῷ λογάριθμον, ϗ ἀφ' οὗ εὕρωμεν αὐτὸν, θέτομεν ϗ τὸ ἁρμόζον χαρακτηριστικὸν, ϗ οὕτως ἔχομεν τὸ ζητούμενον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς'.

§. 248. Νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον τινος Κλάσματος.

ΛΥΣΙΣ, ἢ ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ἐπειδὴ κάθε Κλάσμα εἶναι μία διαίρεσις, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ μὲν ἀριθμητὴς εἶναι διαιρούμενος, ὁ δὲ Παρονομαστὴς διαιρέτης, εἰς δὲ τὴν διαίρεσιν οἱ λογάριθμοι ἀφαιροῦνται (§. 214)· ἄρα ἀφαιροῦντες τὸν λογάριθμον τοῦ Παρονομαστοῦ ἀπὸ τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμητοῦ, κτώμεθα τὴν τούτων Διαφορὰν, ἥτις εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ Κλάσματος. πρέπει ὅμως νὰ ἔχῃ προκείμενον τὸ ἀποφατικὸν Σημεῖον. π. χ. πορίζομεθα τὸν λογάριθμον τοῦ Κλάσματος $\frac{3}{8}$, ἂν ἀφέλωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ $8 = 0.903090$ ἀπὸ τὸν λογάριθ. τοῦ ἀριθμοῦ $3 = 0.477121$. ὁ ὁποῖος ἔσται $= -0.574031$.

ΠΟ-

ΠΟΡΙΣΜΑ α΄.

§. 249. Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μόνον Μονὰς, τῦ ὁποίου λογάριθμος εἶναι ἁπλῶς Μηδενικὸς, τότε εἰς τὸν λογάριθμον τῦ Παρονομαστῦ προτίθεται μόνον τὸ Σύμβολον —, π. χ. ὁ λογάριθμος τῦ $\frac{1}{12}$ εἶναι —1.079181. ὅθεν καὶ ὁ ἀριθμὸς, εἰς τὸν ὁποῖον προστίθει λογάριθμος ἀποφατικὸς, ἐκθέτεται εἰς Παρονομαστὴς, ἐν ᾧ ὁ ἀριθμητὴς ἴσαι Μονὰς π. χ. εἰς τὸν λογάριθμον —1.875061 προσήκει $\frac{1}{75}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ β΄.

§. 250. Ἐὰν δὲ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι Μικτὸς, ἀνάγομεν αὐτὸν εἰς Κλάσμα, καὶ ἀφαιρῦμεν τότε τὸν λογάριθμον τῦ Παρονομαστῦ ἀπὸ τὸν λογάριθμον τῦ ἀριθμητῦ, καὶ ἡ Διαφορὰ ἔσαι ὁ λογάριθμος τῦ δοθέντος Κλάσματος. π. χ. $8\frac{5}{6} = \frac{53}{6}$ ἔχει λογάριθμον (1.724276 — 0.778151) = 0.946125.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ζ΄.

§. 251. Νὰ πολλαπλασιάζωμεν Ποσὰ, νὰ διαιρῦμεν, νὰ ὑψώνωμεν εἰς δυνάμεις, νὰ ἐξάγωμεν ῥίζας διὰ τῶν λογαρίθμων.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Ἐπειδὴ οἱ λογάριθμοι εἰσὶν Ἐκθέται, διὰ τῦτο πρέπει νὰ παρατηρῶμεν καὶ νὰ διατηρῶμεν τὰς Κανόνας τῶν Ἐκθετῶν (§. 44). ἐπὶ μὲν πολλαπλασιάσεως ὕτοι συνάπτονται, ἐπὶ δὲ διαιρέσεως ἀφαιρῦνται, ἐπὶ δὲ ὑψώσεως εἰς δυνάμεις πολλαπλασιάζονται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῆς ζητυμένης Δυνάμεως, ἐπὶ δὲ ἐξαγωγῆς ῥιζῶν διαιρῦνται διὰ τῦ ἀριθμῦ τῆς ζητυμένης ῥίζης.

α.)

α΄.) Πολλαπλασιάζομεν 324 μὲ 26

λογάριθ. τῦ 324 = 2.510545

+ λογάριθμον 26 = 1.414973

3.925518

τὸ δὲ ἀνῆκον Γινόμενον εἶναι 8424

β΄.) Διαιρῦμεν 8424 μὲ 26

λογάριθ. τῦ 8424 = 3.925518

— λογάριθ. τῦ 26 = 1.414973

2.510545

τὸ δὲ προσῆκον Πηλίκον εἶναι 324

γ΄.) Ζητεῖται ἡ τρίτη δύναμις τῦ 12

λογάριθ. τῦ 12 = 1.079181

3

3.237543

ὁ δὲ ἀνήκων Κύβος ὑπάρχει 1728.

δ΄.) Ἐξάγομεν τὴν Κυβικὴν ῥίζαν ἐκ τῦ 2744

λογαρ. τῦ 2744 = 3.438384

διαιρεῖται μὲ 3

1.146128

ἡ δὲ τύτῳ προσήκυσα ῥίζα εἶναι 14

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 252. Τὰ δὲ λοιπὰ περὶ τῶν λογαρίθμων θέλυσι παρατεθῇ εἰς τὸ περὶ Τριγωνομετρίας.

ΤΕΛΟΣ.

Τῶν ἀναγκαιοτέρων παροραμάτων διόρθωσις.

σελίδ.	στίχ.	ἀντὶ	ἀνάγνωθι
4	23	ἀναγκαῖαν	ἀναγκαίαν
6	18	ἀληθεῖαν	ἀλήθειαν
7	10	μαμβανομένοις	λαμβανομένοις
49	1	τ' λει	πλεῖ
57	1	ἐνακπολείπεται	ἐναπολείπεται
61	14	ὕφσματος	ὑφαίσματος
61	1	τ	τῦ
65	6	μικρότερρν	μικρότερον
—	11	14	$\frac{14}{113 . 12}$
65	7	Διτάρεσιν	Διαίρεσιν
70	11	Παονομαστῦ	Παρονομαστῦ
72	3	ὁπλῶς	ἁπλῶς
75	10	πολλαπλασιασθῆ	πολλαπλασιασθῆ
76	19	Κλάσλατος	Κλάσματος
80	16	ἔξις	ἑξῆς
84	18	δετέρα — πολλαπλασιάζομεν	δευτέρα — πολλαπλασιάζομεν
85	11	$\frac{45 \text{ ϗ } 70 \text{ ϗ } 84}{205}$	$\frac{45 \text{ ϗ } 70 \text{ ϗ } 84}{105}$
—	25	εἰ	εἰς
88	1	εἰς κοινὸν Παρονομαστήν	εἰς ἕνα κοινὸν Παρονομαστὴν
89	9	μεταποιῦμεν	μεταποιῦμεν
92	3	πεσα	πόσα
—	15	$1 \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
94	22	πολλαπλασθὲν	πολλαπλασιασθὲν
98	13	Μηδενικά — φανερόν	Μηδενικά — φανερὸν
—	19	μᾶλον	μᾶλλον
101	15	μέδοδον	μέθοδον
103	20	Διναμένυ	Γινομένυ
106	13	ὅλλον	ὅλον
—	20	Δεδαδικῶν	Δεκαδικῶν
107	14	συνελίζηται	συνεχίζηται
110	7	πρῶτον	πρῶτον
111	4	Δεμελής	Διμελής
112	24	ἐξ ὁποιασδηποτῦν	ϗ ὁποιασδηποτῦν
113	21	ἐμφείνεται	ἐμφαίνεται.
120	9	γινεται	γίνεται
121	15	ὀβολὴς	ὀβολοῖς
132	10	11 αα χχ	21 αα χχ
138	26	ἔν	ἕνα
144	4	καθ' ἑαυτὸν	καθ' ἑαυτὸ
190	17	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[2]{2}$
194	4	Ποσὸν	Σημεῖον