D. P. de Gobdelas. Δ. Π. ὁ Γοβδελᾶς.

Τεύχει μὲν γ᾽ ἀνέρος νοῦν, ὄψιν δ᾽ εἰκόνι λεῦσσον
Ἔξοχον Ἑλλάδ᾽ ἄφ᾽. Βίβλον ἄγοντος ἄλλην.

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ΠΑΝΑΓΙΩΤΑΔΟΥ
ΤΟΥ
ΓΟΒΔΕΛΑ
Δόκτορος τῶν Ἐλευθέρων Τεχνῶν καὶ τῆς Φιλοσοφίας

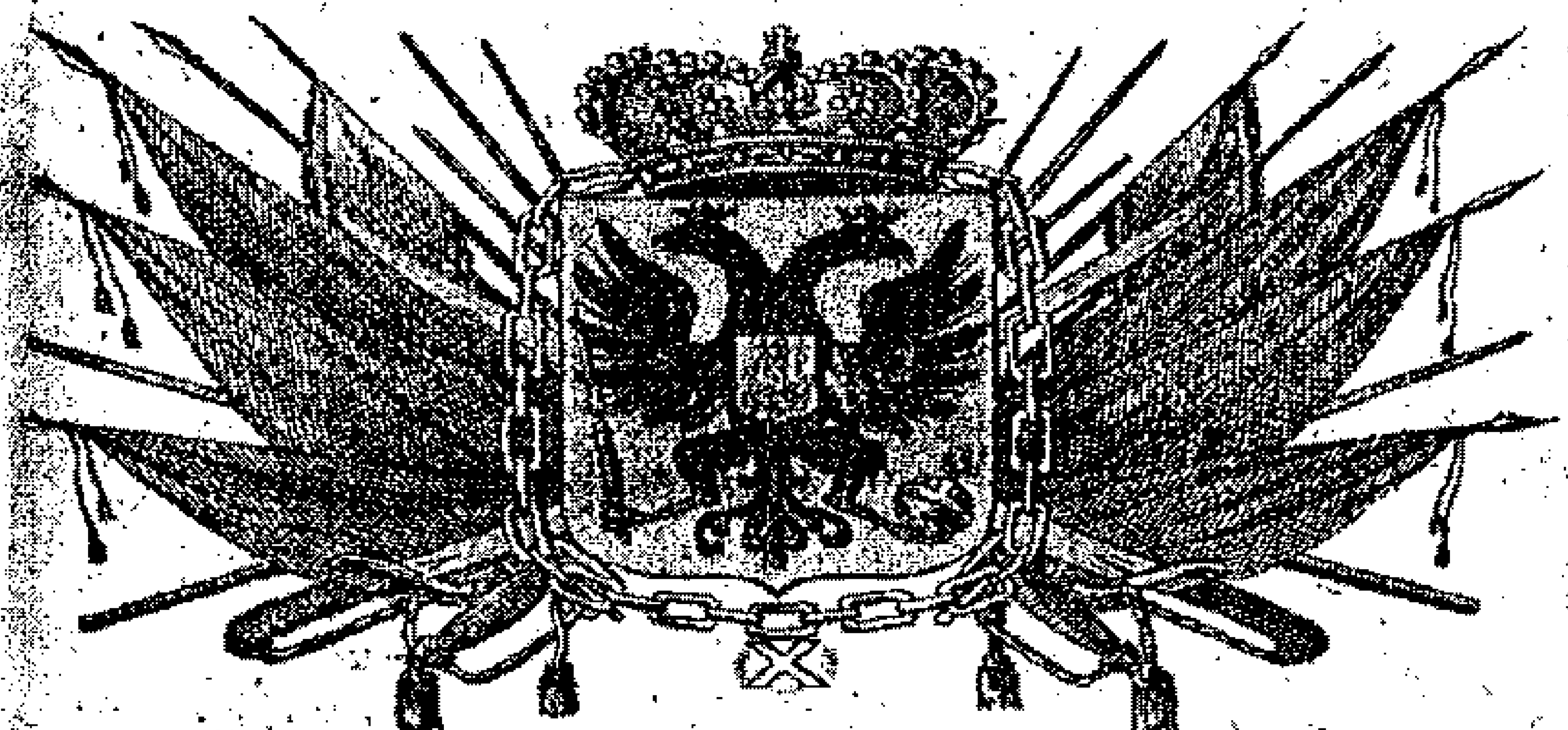
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΟΔΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ
ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ.

Ἐν Ἅλλῃ τῇ Μαγδεβουργικῇ.
Τύποις Φρίδερ. Αὐγουστ. Γρουνερτιανοῖς Πατρικοῖς.
αωϛ'. 1806.

Εν τούτοις γὰρ τοῖς Μαθήμασιν ἑκάστου, οἷον ὀργάνοις, τὸ ψυχῆς ἐκκαθαίρεταί ὄμμα τυφλούμενον καὶ ἀποσβεννύμενον ὑπὸ τῶν ἄλλων ἐπιτηδευμάτων.

Πλάτων παρὰ Θέωνι
Σμυρναίῳ Κεφ. Α΄. σελ. 4.



ΤΩ,
ΘΕΟΣΤΕΠΤΩ ΚΑΙ ΤΡΙΣΕΒΑΣΤΩ,
ΑΥΤΟΚΡΑΤΟΡΙ
ΠΑΣΩΝ ΤΩΝ ΡΩΣΣΙΩΝ
ΑΛΕΞΑΝΔΡΩ ΠΡΩΤΩ,
ΤΩ, ΤΗΣ
ΕΛΛΗΝΙΔΟΣ ΜΟΥΣΗΣ ΕΡΑΣΤΗ, ΔΙΑΠΥΡΩ, ΚΑΙ
ΕΤΟΙΜΩ, ΤΑΥΤΗΣ ΠΡΟΣΤΑΤΗ,

ΤΡΙΣΕΒΑΣΤΕ
ΑΥΤΟΚΡΑΤΟΡ!

Τὰς τῆς ΣΗΣ ΘΕΟΣΤΕΠΤΟΥ ΜΕΓΑΛΕΙΟΤΗΤΟΣ ἐξ ἀρετῆς ἀγλαΐας, ἢ ἐκ τῆς Δυναστείας περιβαλλοῦσα λαμπρότης Φερώνυμον οὐχ ἧττόν ΣΕ, ἥπερ ἔνδοξον τῷ τῶν Ἑλλήνων ἐκείνῳ θρυλλουμένῳ ἀνέδειξαν Ἄνακτι. Ἀπὸ γὰρ ΠΕΤΡΟΥ τοῦ ΜΕΓΑΛΟΥ, καὶ τῶν λοιπῶν οὕτω ἐνδόξων, καὶ τὴν Βασίλειον Ἀρχὴν ἐκ μακροῦ κοσμησάντων ὁρμώμενος· καὶ ἐκ μὲν τοῦ Ἀειμνήστου Φὺς ΠΑΥΛΟΥ, ἀχθεὶς δὲ ὡς ὑπὸ Μητρὶ ἄλλῃ ΤΗ ΤΡΙΣΕΒΑΣΤΩ ἐκείνῃ καὶ ΜΕΓΑΛΗ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ τῇ πάνυ, (ἧςπερ τὸ κλέος οὐ μόνον Ῥώσσοις τε καὶ Γραικοῖς, ἀλλὰ δὴ καὶ τοῖς λοιποῖς ἅπασιν ἔθνεσιν ἄληστον καὶ ἀΐδιον ὁ ἐς ἀεὶ παραπέμψει χρόνος), οὐχ οὕτω πρὸς τὴν τοῦ Γένους Βασίλειον ἀπεῖδες λαμπρότητα, ὡς ἐπὶ τὴν Ἀρετὴν ἔβλεψας τὴν ἐκείνων καὶ Ἡρωϊκὴν ἅμιλλαν, τούτων λαμπρῶς μάλα τὸ ἄκρον, Πινδαρικῶς εἰπεῖν, ἀποδρεψάμενος ἄωτον. Ταῦτά τοι καὶ τοὺς τῆς Βασιλείου Ἀρχῆς ὑπὸ Θεοῦ ἐγχειρισθεὶς οἴακας τῆς τῶν γενναίων τουτωνὶ Ῥώσσων εὐδαιμονίας, πρὸ παντὸς ἄλλου, Κηδεμὼν ὤφθης καὶ Πρύτανις διαπρύσιος· καὶ ἐν μὲν εὐκλείας λόγῳ τὴν ἀρετὴν θέμενος, τὰς δὲ Μούσας περιέπων τε καὶ περιποιούμενος, καὶ τοὺς ὑπὸ χεῖρα ταύταις ξυνήθεις ἀναδεικνύων, ἐχθροῖς μὲν φοβερωτάτους τοῖς δὲ φίλοις δικαιοτάτους, καὶ τῇ Πόλει μακαρίους τούτους ἀπέδειξας. Ο ΑΥΤΟΣ καὶ Μουσῶν φανεὶς Πατὴρ, καὶ Μουσοτρόφων προασπιστής τε καὶ ἀρρωγὸς, καὶ ἵνα τὸ πᾶν εἴπω, τῆς Σοφίας αὐτῆς

. . . . μελεδωνεύς τε καὶ ἄγρυπνος Ἥρως.

Οὐκοῦν καὶ ὋΝ ποτε τοιοῦτον ἡμῖν ἡ Φήμη προεζωγράφισε, δαιμονίως τε καὶ ὑπερφυῶς ὁ καθ' ἡμᾶς χρόνος ἐν καιροῖς τοῖς χαλεπωτάτοις καὶ πολλὴν φέρουσι τὴν δυσχέρειαν τοῖς πᾶσιν ἐγνώρισε. Τῆς γὰρ κοινῆς εὐθύτητός τε καὶ ἀσφαλείας κηδόμενος, Ἄβαρις οἷά τις ἄλλος θεσπέσιος ἐξ Ὑπερβορείων ἐφάνης τοὺς τῆς ἱερᾶς Δίκης οἰστοὺς ἐξημμένος, καί γε κατὰ τὸν Προφητικὸν Γίγαντα ἀπ' ἄκρων τοῦ οὐρανοῦ τὴν πορείαν ποιούμενος· Ὥσθ' οὕτω τήν τε δίκην ἀδεκάστως μικροῖς τε καὶ μείζοσι πρυτανεύεσθαι, καὶ τὴν ΣΗΝ, πανταχῆ ἀκάμαντον τὸν ὀφθαλμὸν ἐπιπέμπουσαν, λαμπρότερον μᾶλλον τοῖς πᾶσιν ἐφαπλοῦσθαι χρηστότητα.

Καὶ ταῦτα μὲν οὐ μόνον ἐμοὶ, ἀλλὰ δὴ καὶ οἷς ἀλήθεια τὸ πρεσβευόμενον, ἀριδήλως τεθρύλληται καὶ ἐλευθέρως καθωμολόγηται· Τὰ δέγε πρὸς τὴν ἔσωθεν τοῦ κοινοῦ διακόσμησιν ἀφορῶντα ἀγλαὰ κατορθώματα, καὶ μεγίστην τοῖς θ' ὑπὸ χεῖρα καὶ τοῖς μακρὰν προμνηστευόμενα τὴν ὠφέλειαν, ἀμήχανον ἄν μοι εἴη καὶ τῶν πάντη ἀνεφίκτων ἐντελῶς ἐφικέσθαι καὶ κατ' ἀξίαν ἐκδιηγήσασθαι·

Πάντα ἐγὼν ἔπεσιν μυθήσασθ' οὔτι δυναίμην·
Οὐδ' εἴμοι δέκα μὲν γλῶσσαι, δέκα δὲ στόματ' εἶεν,
Φωνὴ δ' ἄῤῥηκτος.

Καὶ εἴμοι ἐπ' ἀδείας ἦν τὴν ἐμὴν ἀποφήνασθαι γνώμην, οὐ μὴ πάνυ μάταιος γενοίμην τῶν μελλόντων εἰκαστὴς χρᾶν οἷον ἀπὸ δάφνης προθέμενος, ἀλλὰ δὴ καὶ θεσπιωδός τις ὀφθείην Κάλχας, τὰ κατ' ἐπιστήμην, ὧν ἡ γνῶσις ἐφικτὴ, καὶ ἡ εἰκασία οὐ πόῤῥω τῆς καθ' ἡμᾶς τυγχάνει δυνάμεως προμαντευόμενος. Αἱ γὰρ Ἐπιστῆμαί τε καὶ Μαθήσεις τοῦ ἑαυτῶν γνησίου ἐν τοῖς κατὰ τὰ Ἀρκτῷα εὐμοιρηκυῖαι Προστάτου, ἀναζωπυρεῖσθαι ἤρξαντο καὶ ἀναθάλλειν, κἀπὶ τὰ πρόσω, καὶ μείζω, καὶ τελεώτερα Γιγαντιαίῳ πηδήματι προβαίνειν. Ἀλλὰ δὴ καὶ πόῤῥω ἐχομένως προβήσονται, καί γε Φλογὸς δίκην ταῖς τῆς ΣΗΣ ἀγρύπνου καὶ σωστικῆς Κηδεμονίας αὔραις ἐπὶ τὸ ἀκμαιότερον ἐς ἀεὶ προϊούσαις ἀναῤῥιπιζόμεναι, ἐκ μικροῦ τοῦ ἐναύσματος ἀνὰ πᾶσαν τὴν ὑΦήλιον ἐν βραχεῖ ἀναΦαύσουσιν.

Ὄφρ' ὁδὸς, ἔργα τε ΣΕΥ γνωσθῇ κατ' ἀπείρονα
Γαῖαν·
ΣΟΝ τε Φόως ζωαρκὲς ἐν Ἔθνεσι παντοδαποῖσι.

Καὶ τουτὶ μὲν οὕτω προεκΦοιβάζει ἡ παρ' ἐμοὶ Μαντική· Οἱ δὲ Γενναῖοι Ῥῶσσοι, εὖ οἶδ', ὅτι τὸν ἐμὸν Ὄρνιν ὡς πορῥωτάτω ἀποσοβήσουσι, καὶ ΑΛΛΟΝ ΣΕ ἡμῖν Ἀλέξανδρον ἀναδείξουσιν ἄχρι τῶν Ἰνδικῶν τὰ κατὰ τὴν Ἀσίαν καταστρεψόμενον.

Ἡδ' οὖν παροῦσα τῶν Μαθημάτων Στοιχείωσις, ἡ Ἑλληνὶς αὕτη Μοῦσα, οὐδενί τῳ ἄλλῳ, εἰ μὴ ΣΟΙ, ΤΡΙΣΕΒΑΣΤΕ ΑΥΤΟΚΡΑΤΟΡ! τῷ γνησιωτάτῳ Ἀπόλλωνι, πρὶν τοῦ κοινοῦ γενέσθαι, δωροΦορηθῆναί τε καὶ ἀνατεθῆναι ἐννόμως ἠξίωται· οὐχ ὅπως μόνον διὰ τὰ εἰρημένα ἐν Δίκῃ ΣΟΙ προσοΦειλομένη τυγχάνουσα, ἀλλά γε δὴ μᾶλλον πρὸς δεῖγμα τρανώτατον ἐν Ἱερῷ μνήμης ἀγήρω καὶ ἀϊδίου τοῖς μεθ' ἡμᾶς ἀποκληρωθησόμενον τῆς περὶ τὸν Ἕλληνα λόγον καὶ τὴν ἐγκύκλιον πᾶσαν τῶν Ἑλλήνων παιδείαν ΤΗΣ ΣΗΣ ΜΕΓΑΛΕΙΟΤΗΤΟΣ προστασίας τε καὶ σπουδῆς τῆς διακαεστάτης· ναὶ μὴν καὶ χρέος τὸ δικαιότατον Θέμιδος ψήφοις τοιούτῳ Προστάτῃ ἐποφειλόμενον. Ἔνθεντοι οὐδ' ἀπαξιώσειεν ἡ Φιλόσοφός ΣΟΥ ψυχή, τὸν τὰς ἐν ΣΟΙ γενναίας Ἀρετάς, εἰ καὶ μὴ κατ' ἀξίαν, πρὸς ἀξίαν δ' οὖν ὅμως ᾆσαι προθυμηθέντα, τῷ ΣΩ θρόνῳ πελάσαι, καὶ τὰς αὐτοῦ γονὰς ΤΗ ΑΥΤΟΚΡΑΤΟΡΙΚΗ ΣΟΥ ΜΕΓΑΛΕΙΟΤΗΤΙ προσφωνῆσαί τε καὶ δωροφορῆσαι, καὶ οἷα Ζηνὸς ὑπὸ ποσὶ τὸν θεῖον Ὄρνιν παραθεῖναι· ἐντεῦθεν γὰρ ἐμοί τε πρέψει, καὶ τῇ Βίβλῳ συνοίσει τὰ μάλιστα ΤΟΥ ΣΟΥ ἐνδόξου ΟΝΟΜΑΤΟΣ τὸ γάνος ἐπιφέρουσῃ καὶ σέμνωμα.

Ἀλλ' ἐγὼ μὲν οὕτω πως ὑπὸ ῥοπῆς κινούμενος κρείττονος, τοιαύτην τοῦδέ μου τοῦ ἐγχειρήματος ἐποιησάμην τὴν πρόνοιαν. ΑΥΤΟΣ δὲ, ΤΡΙΣΕΒΑΣΤΕ ΑΥΤΟΚΡΑΤΟΡ! εἴης τὸν Ἄνδρα καὶ τὸν Ὄρνιν τοῦ θεοῦ, αἰσίως πρὸς ΣΕ τὸ πτερὸν ἰθύνοντα, φιλοφρόνως τε καὶ εὐμενῶς δεχόμενος, καὶ ἥν περ ἔλαβες παρὰ Θεοῦ Βασιλείαν ἀμέμπτως οὕτω εἰς αἰῶνα τὸν ἅπαντα διακυβερνῶν· Προηγουμένου μὲν τοῦ Θεοῦ, συμπαρισταμένων δ' ἑκατέρωθεν τῆς τε Δίκης καὶ τοῦ Ἐλέους ἐπί τε δόξῃ ΤΟΥ ΘΕΟΦΡΟΥΡΗΤΟΥ ΣΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ, καὶ εὐμοιρίᾳ τῶν ὑπὸ ΣΟΥ ἀρχομένων. Ναὶ μὴν κἀμοῦ τοῦ ἐν ἀναθήμασι τοιούτοις ΤΗ ΣΗ ΘΕΟΣΤΕΠΤΩ ΜΕΓΑΛΕΙΟΤΗΤΙ προσιεμένου, Στηρίγματι, Σεμνώματι, καὶ διηνεκεῖ Ἀγλαίσματι.

ΤΗΣ ΥΜΕΤΕΡΑΣ ΘΕΟΣΤΕΠΤΟΥ
ΜΕΓΑΛΕΙΟΤΗΤΟΣ

Ἐν Ἄλλῃ τῇ Μαγδεβουργικῇ
Μαιμακτηριῶνος Μεσοῦντος ͵αωϛ'.

ὑποκλινέστατος καὶ ἐλάχιστος δοῦλος
Δ. Π. ὁ ΓΟΒΔΕΛΑΣ
Δόκτωρ τῶν Ελ. Τε. καὶ τῆς Φφ.

ΤΩ
ΕΝΤΕΥΞΟΜΕΝΩ ΦΙΛΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙ
ΧΑΙΡΕΙΝ.

Τὴν τῶν Μαθηματικῶν Ὁδὸν ἅπαξ Στοιχειῶσαι προελομένῳ προὔργου ἂν μοι ἔσεσθαι διέγνων, εἰ τὰ παρὰ τῶν Μαθηματικῶν Ἀνδρῶν ἐπινοηθέντα κατὰ λόγον καὶ ῥυθμὸν προσήκοντα διατεταχὼς, καὶ τὰς αὐτῶν δόξας παραδείγμασι τοῖς προσφυεστάτοις κατασκευάσαι ἐπιχειρήσας, αὐταρκές τε τοῖς Ὁμογενέσι τῶν Σπουδαστῶν, καὶ συνοῖσον τὰ μάλιστα τὸ τοιόνδε παραπέμψαιμι Φιλοπόνημα. Τῶν γὰρ εἰς Φῶς ἐς δεῦρο ἐκδοθεισῶν Μαθηματικῶν Πραγματειῶν, αἱ μὲν ἐξ ὀθνείων καὶ πάντῃ ἐκφύλων ἐπὶ τὴν Ἑλλάδα Φωνὴν μετοχετευθεῖσαί τε καὶ εἰσποιηθεῖσαι, οὐ μόνον ἀσαφεῖς καθ' ἑαυτὰς καὶ τῆς τῶν Εἰσαγομένων διδασκαλίας ἀνώτεραι, ἀλλὰ δὴ καὶ λίαν δυσξύνετοι, τῇ ἐκ τοῦ ὕφους ἀσαφείᾳ σκοτιζόμεναί τε καὶ, κατὰ τὴν δὶς διὰ πασῶν, ὡς οἱ Ἁρμονικοί φασι, συμφωνίαν, εἰς ὑπερβολὴν ὀξυνόμεναι· αἱ δ' οὐχ ἧττον ἐκ πολλῶν καὶ ποικίλων τῆς αὐτῆς ὕλης τε καὶ ἰδέας συνταγμάτων, εἰς ἕν τι τεῦχος συλλεγεῖσαι, καὶ ἐξ ἀλλοτρίων ἀλφίτων μάκτραις ἐν ἰδίαις συμφυρεῖσαι, ἡμιτελῶς πως καὶ λίαν ἐν ἐπιτομῇ τοῖς Φιλεπιστήμοσι τῶν Ἑλλήνων Παισὶ παρετέθησαν. Ἀλλ' οὖν τὰ τοιαῦτα τῶν Μαθημάτων, ἤτοι τοῖς τούτων ἐξηκριβωμένοις τὴν γνῶσιν παρατίθεται, ἢ πάντως τοῖς ἔτι ἀμυήτοις αὐτὰ καὶ πάντῃ ἀτελέστοις. Ἀλλὰ γὰρ τούτοις οὐ θέμις τῇ βίβλῳ οὐδὲ ἐγκύπτειν, ὡς τῶν προέδου τὴν γνῶσιν μὴ φέρουσιν· οὕτως τε αὐτοῖς ἀσυντελῆ ἐπιεικῶς αὐτὰ καὶ φροῦδα ἔσονται, ὄνοις οἷόν τισιν ἐπὶ λύρας ἀκροάσει εἰσαγομένοις. Ἐπίσης γὰρ ἀπρόσφορον καὶ τὸ ἐν Πίθῳ τὴν Κεραμίαν μαθεῖν ἐθέλειν, καὶ τὸ ἐν Κεραμίᾳ τὴν Πίθον ἀνάπαλιν. Τοῖς δὲ ἐν ταῖς κατὰ τὰς Μαθήσεις ἔξεσι τὸ ζῆν κατατετριφόσι, καὶ τούτων οἱονεὶ δημιουργοῖς τε οὖσι καὶ τραπεζίταις, ἔργον οἷον αὐτὸ τοῦτο καὶ σπούδασμα ἰδιαίτατον ἑαυτοῖς προστησαμένοις, μὴ καὶ περιττὰ ᾖ καὶ οὐδὲ λόγου πάνυ πολλοῦ τινος ἄξια. Ἄτοπον γάρ, ἵνα μηδὲν ἕτερον εἴπω, ἐπὶ δεῖπνον παρακαλοῦντα ἄνδρας ἐῤῥωμένους καὶ εὖ πέττοντας, εἶτ' ἀκροθιγῶς ἅπτεσθαι ἐνδιδόναι αὐτοῖς, καὶ οἷον κατ' ἐπιδρομὴν ἀπογεύσασθαι, ἐνὸν παρὰ τοῖς ἀφθονωτέραν τῶν τοιούτων καὶ ἁβροτέραν παρασκευακόσι τὴν εὐωχίαν, εἰς κόρον τούτους ἐμφορηθῆναι· καὶ οἷς χρυσῖτις τὰς φλέβας εἰς δαψίλειαν μεταλλείας φιλοσόφου ὑπήνοιξεν, ἐπιστρέφειν τούτους ἀπασχολοῦντα, περὶ σμικρά τινα, καὶ οὐδὲ οἷα τὸν περὶ τὴν διατριβὴν πόνον ἀντισηκῶσαι ψηγμάτια. Ἔνθεν τοι ἐπὶ πολὺ τὴν γνώμην ταλαντευομένῳ, πρὸς τὸν σκοπὸν συντελέστερον ἔδοξεν, ἄλλα παρ' ἄλλων, ἢ σύνηθες, συνερανισάμενον, καὶ τούτοις ἐξ ἰδίων τι συνεισφέροντα προστιθέναι, ὅπερ οὐχ ὅπως ἔξω Νεμέσεως, ἀλλὰ δὴ καὶ λόγου τοῖς πολλοῖς ἄξιον, τὴν προκειμένην οὕτω συναρτῦσαι Στοιχείωσιν· οὐδὲν ἄλλο, κατὰ τὸν εἰ-

πόντα, ἢ τῶν ἀρχικωτέρων ἐφ' ἑκάστου γνώσεων μάθησιν οὖσαν· ἐξ ὧν ἔπειτα τοῖς περιθάλπειν τε αὐτὰς καὶ μετιέναι κατὰ τὸ προσῆκον ἐπισταμένοις τε καὶ προαιρουμένοις, ὡς ἐκ σπερμάτων πέφυκεν ἀναβλαστάνειν, ἡ τῶν ὑψηλοτέρων τε καὶ ἁδροτέρων κατάληψις, ἅττα ἐν ἐκείνοις δυνάμει πως ὑπελάνθανε καὶ συνείληπτο. Τοῦτο μέν, ἐφ' ᾧ τὰ τῆς μεθόδου πρὸς τὸ λυσιτελέστερον καὶ εὐκοπώτερον μεταδιαιτήσασθαι, τὰ μὲν σαφέστερον διαλευκαίνοντα, τὰ δὲ καὶ λεπτότερον ἐπεξεργαζόμενον· τοῦτο δέ, ἀπερίττως πως καὶ σαφῶς τὰ ἐννοηθέντα, ὅσα γε Νεωτέρας φρενὸς ἵνα μὴ τῆς ἐμῆς εἴπω, πολλοῦ γε καὶ τοῦ παντὸς ἄξια τυγχάνει γεννήματα, καθ' ὅσον εἰς χρῆσιν εἰσὶν ἥκοντα ἐκθεῖναι, τὸ ἀποχρῶν τῇ Ἑλλαδικῇ Νεολαίᾳ ἄρτι τῆς ἐπὶ τὴν Πιερίαν ἁψαμένῃ, μετὰ τοῦ σαφοῦς παρεξόμενον.

Ἔδει ἀλλ' οὖν, ἵνα κατ' αἴσσαν ἡμῖν προβῇ τὸ ἐγχείρημα, μὴ μόνον ἀφελεῖς ἄγαν καὶ λιτὰς περὶ τὸ Μαθηματικὸν εἶδος τὰς Θεωρίας ἐνστήσασθαι, οὔτ' αὖ ἀσαφεῖς καὶ δυσλήπτους, διὰ τῶν ἀσαφῶν καὶ συνεπτυγμένων διασαφίζειν ταύτας ἐπιχειρεῖν, ἢ ταῖς ἐκ τῶν λόγων περιβολαῖς καὶ πλεκτάναις τηρεῖν σκεπομένας, καὶ τοῖς τῶν αἰνιγμάτων προκαλύμμασιν, οἱονεὶ θύραις ἐπιζυγουμέναις, τὴν εἴσοδον μὴ παντὶ ἄνετον ἐπιτρέπειν· ἀλλὰ τὴν μέσην βαδίζων, ἔχεσθαι μὲν τῶν προὐργιαιτέρων ἔγγυον, ἀπέχεσθαι δὲ λεξιθηρίας, οἷα δὴ σπουδῆς ἀνονήτου καὶ περιττῆς, ἀφ' ἧς οὔθ' ὁ οὑτωσὶ συγγράφων παρὰ τοῖς εἰδόσι πολύν τινα τὸν ἔπαινον καρπώσεται, οὔθ' οἱ ἐντευξόμενοι ἐπίσημόν τινα τὴν ὄνησιν ἀποίσονται.

**

Μάτην γὰρ ἄν τις καὶ παρὰ λόγον, ὅσα κἀμέ γ' εἰδέναι, ἐπὶ ταῖς τοιαύταις τῶν Ἐπιστημῶν ἀσαφῆ γράφειν σπουδάσειεν· ἤτοι γὰρ οἱ τῷ Συγγράμματι ἐντευξόμενοι τῶν εὐγνωμόνων ὄντες τῇ τοῦ λόγου σαφηνείᾳ μᾶλλον ἡσθήσονται καὶ χάριτας εἴσονται, ἢ τῶν μοχθηρῶν ἐκείνων καὶ ἀγνωμόνων τυχόντες μωμοσκόπων ἀνδρῶν, οὐδὲν ἧττον ἐκφαυλίζειν τὰ προτιθέμενα σφίσιν ἕτοιμοι ἔσονται καὶ ταχεῖς, κἂν ἐκ τῆς Ἀριστοτέλους δεινότητος, ἢ ἐκ τοῦ καθ' Ἡράκλειτον σκότους, ἢ ἐκ τῶν ἀδύτων τοῦ Πλάτωνος, ἤ τις διαλεγόμενος. Εἰ γὰρ τὸ Ἑλληνιστὶ συγγράφειν ἐν ταῖς διαβατικωτέραις τῶν Ἐπιστημῶν, ἢ καὶ ἀλλοθέν ποθεν ταύτας οὕτω μεθερμηνεύειν· οἷς γε παρὰ τὸν Ἕλληνα λόγον, καὶ ἑτέρων διαλέκτων περίεστιν ἐπαΐειν· καὶ ἀκωλύτως τῷ τῆς λέξεως σαφεῖ τοῖς ἐντυγχάνουσιν ἐμφαίνειν τὰ προβαλλόμενα, ἐσαεὶ ἡμῖν, τῆς Ἑλλάδος φωνῆς (ἧς ἄνευ οὐδὲ τῶν πάλαι πεφιλοσοφηκότων ἐστὶν ἀπώνασθαι) περὶ πολλοῦ ποιουμένοις, κέκριται. Ἀλλά γε δὴ καὶ τὸ συσκιάζειν τὰ γραφόμενα, καὶ συγκαλύπτειν αὐτὰ ταῖς κατὰ τὴν σύνθεσιν καὶ λέξιν πλεκτάναις, τοῖς νοητοῖς ὡς οὐ δέον αἰνιγματωδῶς ἐπιπροσθοῦσαν, καὶ ἀχλὺν οἷον πυκνὴν ἐπιπάσσουσαν, ἐκ διαμέτρου ἀποφεύγειν ὡσαύτως παρήνηται. Ὥστε οὔτε μὴν χυδαϊστὶ πάμπαν τὰ τοιαῦτα τῶν Μαθημάτων συγγράφειν ἐθέλειν, οὔτε δ' αὖ δεινῶς καὶ πέραν δεινοῦ. Ἄλλως γάρ, ἀτοπώτεροι πάντως τῶν πρώτων οἱ ἔσχατοι δόξουσιν· ἐπιβλαβέστεροι δ' ἐκεῖνοι δι' ἀμέλειαν ἑαυτοῖς, καὶ τῇ ἐκ πολλοῦ τοῦ χρόνου τοὐπίσημον φερούσῃ Ἑλληνικῇ γλώττῃ ἐοίκασι γίνεσθαι.

Ὅπως μὲν οὖν ἡμῖν τὰ ἐν τῷδε τῷ τεύχει περιεχόμενα πεπραγμάτευται, αὐτὰ καθ' ἑαυτὰ μονονουχὶ διατρανῶσιν, οἱονεὶ κεκραγότα τὰ πράγματα. Ἐκεῖνο δὲ πρὸς ἡμῶν εἶναι ᾠήθημεν, ἰόντων μὲν ἀτενῶς κατ' ἴχνη τῶν πρὸ ἡμῶν Μαθηματικῶν ἀνδρῶν, τὴν δ' ἐπιτομωτέραν προαιρουμένων, μὴ μόνον τοῖς ἀρχαίοις ἐκείνοις καὶ παλαιοῖς τῶν ὀνομάτων ἐφιζάνειν τε καὶ ἐφησυχάζειν, ἀλλ' ἔστιν ὅπου καινά τινα καὶ ἀρτιφαῆ τῆς ἀνάγκης κατεπειγούσης διὰ τὸ ἐκφαντικώτερον συνεισφέρειν, ὀνοματοθετοῦντας, ἵνα καὶ τῆς ὑπάρξεως γνωσθῇ τὸ πολύσημον, καὶ δῆλον ᾖ κατὰ τίνα ὧδε τῶν σημασιῶν τὸ λεγόμενον ἐκληπτέον. Εἰ δέ τις προσοχθίζων τὰ ὑφ' ἡμῶν ὀνοματοθετηθέντα κακίσειεν, ὅτι μὴ τῆς παλαιᾶς ὄντα συνθήκης Διασίων ὄζει μηδὲ Κρονίων, ἢ τυχὸν καὶ ὑπομυκτηρίσειεν ἡμᾶς, ὡς μὴ ἐκ τῆς Ἀττικῆς κωλιάδος πηλουργοῦντας τοὺς λόγους, μηδὲ τὴν βασιλικὴν βαίνοντας, καινὴν δέ τινα καὶ ἀστιβῆ καὶ ἀήθη τέμνοντας, κατ' αὐτὸν εἰπεῖν· ἐκεῖνο πρὸ πάντων εἰς νοῦν ὁ τοιοῦτος λαμβανέτω, ὅτι τὰ τεχνικὰ τῶν ὀνομάτων οὐχ ὑπὸ ζυγὸν ὑπάγεται τὸν τῆς Ἀρχαιότητος, μηδὲν περὶ φωνῶν τῆς Φιλοσοφίας διαφερομένης, μόνην δὲ τὴν ἐξ αὐτῶν ὑπηρεσίαν τῇ διανοίᾳ ζητούσης, κἂν χαμόθεν αὐτὴν εἰς τὰ πράγματα συμπορίζεται τρανήν τε καὶ ἐφαρμόζουσαν· ἄλλως τε, οὐ τῶν φιλοσοφούντων ἐστὶ περὶ ὀνομάτων ζυγομαχεῖν. Παντὶ γὰρ ὁτῳοῦν ἐφεῖται περὶ τῶν τοιούτων ἀποφήνασθαι τὸ δοκοῦν, ὅπως ἂν βούλοιτο τῇ φωνῇ χρώμενος· μόνον δὲ τὸ τῶν ὀνομάτων βάρος διασταθμευόμενον, καὶ τὴν ἀνήκουσαν τῷ πραγματικῷ τοῦ ὀνόματος σημασίαν ἰδιαιτάτως ἀπονέμοντα, κατὰ μέτρον τῆς ἐντεῦθεν ἐγγινομένης πειθοῦς, τὴν ἐφ' ἑκάστοις τῶν λεγομένων πληροφορίαν ἐπιδείκνυσθαι.

Νεμέσεως δὲ μὴ βάλῃ βέλος ἄλλο, εἴτι καὶ γίνοιτο.

Ἀλλ' ἡμῖν περὶ τῶν ἄλλως πως γνώμης ἐχόντων μικρὰ φροντίζουσιν, ἐκεῖνα δήπου μᾶλλον ἐπὶ τοῦ παρόντος δεήσει (καὶ οὐδὲ περιττὸν ἴσως ἔσται οὐδ' ἄστοχον), πρὶν τέλος ἐπιθέσθαι τῷ λόγῳ, δηλῶσαι· τὰ δύω ταῦτα. Τὸ μὲν πρῶτον, ὅτι ἄρα τό με κινῆσαν ἐξ ἀρχῆς γένοιτο, Πραγματείας διεξοδικῆς τε καὶ ἐκτενοῦς Συγγραφὴν οὕτω καματηρὰν καὶ ἐπίπονον ἀναβαλέσθαι, τῆς τὰ πολλάκις καὶ ὑπὸ πολλῶν συγγραφέντα ἐπανακυκλούσης, καὶ διατριβὴν προελέσθαι ἀναπεμπάσασθαι δυσχερῆ ταύτην, ἢ καὶ (ὡς ἄν τις φαίη τυχὸν, τῶν οἷς ὁ περὶ τὰς Μαθήσεις ἔρως ἐγκαταψυγεὶς μονονουχὶ ὑπεξέλιπε) ψυχράν τινα κομιδῇ καὶ ἕωλον ἤδη, καὶ οὐδὲ πρὸς ὠφέλειαν ἄλλως πάνυ τι διαφέρουσαν; Τουτὶ δὴ τὸ πρῶτον. Ἔπειτα δ' ἐπὶ τούτῳ κἀκεῖνο δεύτερον, ὅπως ἂν ἄρα, καὶ ὅθεν ἔμοιγε τὸν τηλικοῦτον ἀνειληφότι πόνον, καὶ τὸ οὕτως ἀχθηρὸν τοῦ ἔργου ἐν μέρει γοῦν, ὡς οἷός τε ἦν, διαπέψαντι ἀπελπίσαι παρείη, τοῦ μὴ καὶ φρούδόν πως τοῦ Κιβωτίου ἐντὸς μέλλειν τὸ ἐκπονηθὲν ἀποκείσεσθαι· ἀλλὰ διὰ τῆς Τυπογραφίας προβὰν εἰς φῶς διακοινωθήσεσθαι τοῖς Φιλεπιστήμοσι, πρὸς χρῆσίν τε καὶ ὄνησίν τινα τυχὸν τῇ Ἑλληνικῇ Νεολαίᾳ ἐσόμενον;

Τούτων οὖν θάτερον, ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον, εἰδέναι

θέλων εὖ εἰδὼς ἔσο, ὅτι ὁ ἐν τοῖς ἀν' Ἑλλάδα Φροντιστηρίοις, τῆς περὶ τῶν τοιούτων διδασκαλίας ἐν χρήσει τρόπος, εἰς ἀφορμὴν ἡμῖν παρέστη τοῦ ἐγχειρήματος. Οἱ γὰρ τῶν Ἑλλήνων παῖδες, μετὰ τὸ τὰ πρῶτα καὶ βασιμώτατα τῶν Ἑλληνικῶν γραμμάτων στοιχειωθῆναι, καὶ τὴν γλῶσσαν ἅλις ἔν τε τοῖς πεζῶς καὶ τοῖς ἐμμέτρως ξυγγράφουσιν ἀσκῆσαι τὴν Ἑλληνίδα, ἀψικόρως περὶ τὰς διαβατικωτέρας τῶν Ἐπιστημῶν ἔχοντες, καὶ τὴν ἑαυτῶν διάνοιαν περὶ τὰς ἀνωτέρας τῶν θεωριῶν γυμνάσαι ἐφιέμενοι, τοῖς αὐτῶν Καθηγηταῖς οὐ παύουσιν ἐντυγχάνοντες, καί τι ἐξ ἐκείνων αὐτοῖς μεταδοῦναι. Ἀλλὰ γὰρ, πῶς ἄν τις καὶ δοίη, οὗγε ἐστέρητο; Διὸ καί τισι τῶν ἐπὶ πανδήμου καθέδρας ἐν Ἑλλάδι διαπρεψάντων μέλον ἐγένετο, τὰ μὲν οἴκοθεν αὐτουργῆσαί τε καὶ ἀναπλάσαι, ἐκ τῶν γειτόνων ὕλην τὴν προσφυῶς ἔχουσαν περὶ τὰ τοιαῦτα λαβοῦσι· τὰ δὲ καὶ ἐκφύλῳ γνωριζόμενα γλώττῃ, ἑλληνιστὶ μεθερμηνεῦσαι, ὥστε τοῖς αὐτὰ μετελευσομένοις Ἕλλησιν ἐν φωνῇ τῇ Πατρῴᾳ ἐν χρήσει προσήκοντα εἶναι. Ἀλλ' οὕτως μὲν, ἢ ἐκείνως, τὸ τῆς τάξεως ὀρθὸν διημάρτηται πάντως καὶ συμπέφυρται, οἷα δὴ τοῦ Σπουδάσματος μὴ εἰδοποιηθέντος, ἢ κατὰ τάξιν τινὰ καὶ ῥυθμὸν τὰ μάλα ἐν χρήσει συνεχισθέντος. Καὶ παρέστη τοίνυν θεάσασθαι, τὸν μὲν ἀναλυτικώτερον τὸ ποσὸν ἀκριβεῖ οἷον τῇ πλάστιγγι διατρυτανεύοντα, τὸν δὲ καὶ τὴν πεπερασμένην εὐθεῖαν ποικιλλαχῶς τέμνοντα, ἢ καὶ τὴν καμπύλην ἀκριβολογοῦντα, ἄνευ τοῦ τὰ κατὰ τὰς τοιαύτας ὑψηλοτέρας τῶν θεωριῶν βασιμώτατα προπαιδευθῆναί τε καὶ στοιχειωθῆναι. Ἔνθεντοι καὶ αἱ κάλλισται αἵδε καὶ ἔξοχοι τῶν Ἐπιστημῶν, οὕτω πως συμπεπλεγμένως προτιθέμεναι, οὐκ ἂν εἴποι τις ὅσον τὸν σκοτασμὸν τοῖς μετιοῦσιν ἐπέφερον, ὥστε ὑψαδάζειν αὐτοὺς εἰκότως ἐπέρχεσθαι καὶ ἀδημονεῖν, ἀριθμὸν μὴ δυναμένους κυβῶσαι, ἢ ὀρθογωνίου τοῦ δοθέντος τὴν πλευρὰν ἐξευρεῖν. Τοῦθ' ἕνεκα τὴν τῆς Μαθηματικῆς Ὁδὸν ἐξυφάναι ἡμῖν ἐπῆλθε, καὶ τὰ τοιαῦτα Στοιχειῶσαι τῶν Μαθημάτων· καὶ Γεωμετρίαν μὲν δὴ μετὰ τὴν Ἄλγεβραν διελθεῖν καὶ Τριγωνομετρίαν, οὐδεμὴν τὰ τοῦ Κώνου παριδεῖν πάθη, ἀλλάγε δὴ καὶ τὰς περὶ τὰ διαφανῆ τῶν σωμάτων τοῦ Φωτὸς ἐνεργείας, καθ' ὅσον αὗται τῷ Ὀπτικῷ ἀνήκουσιν ἐπιθεωρούμεναι, ἀκριβολογῆσαι· καὶ τὰς τῶν Μηχανῶν δὲ πρὸς ἀλλήλας παρεξετάσαι κινήσεις, καὶ τὰς τῶν Ἀέρων τε καὶ Ὑδάτων καταμετρῆσαι βαρύτητας· καὶ μὴν καὶ Ἀστρονομίαν αὐτὴν, καὶ τἆλλα ἀνιχνεῦσαι τῶν Μαθημάτων εἴδη· ὡς ἂν κἀντεῦθεν παρείη περὶ τὰς τοιάσδε τερθρείας πιθανώτερον ἐξεικάζουσιν, ἐκ τῆς τῶν ὁρωμένων καλλονῆς τε καὶ τάξεως ἐπὶ τὸν Ἀριστοτέχνην Δημιουργὸν τὸ ὄμμα ἀνάγειν, κἀκ τούτων ὡς ἐξ ἀμυδρῶν τινων σκιαγραφημάτων τὸ πανσθενὲς αὐτοῦ, καὶ πάνσοφον, καὶ ἀπειράγαθον ὑμνεῖν τε καὶ ἐκθειάζειν. Κατὰ γὰρ τὸν Ἄγγλον Ἰούγγιον ἐν ταῖς Νυκτεριναῖς αὐτοῦ Μελέταις· Ἀστρονόμος ἄθεος, ἄφρων πάντως ἐστὶ καὶ ἐξεπτυκὼς τὸν ἐγκέφαλον (α). Καὶ τοιαύτη μὲν δὴ ἡ

(α) An indevout aſtronomer is mad. Young's Night thoughts.

ἡμετέρα ἦν πρόθεσις, ἣν δ' ἂν καὶ αὐτοὶ ὡς ἥδιστα εἰς πέρας ἠγάγομεν, εἰμὴ παρ' ἐλπίδα συμβὰν, ὃ ἐφεξῆς μάθοις, τοῦ ἐγχειρήματος ἡμᾶς διεκόλουσεν.

Ἀλλὰ γὰρ, ὅθεν ὡρμήθην πρὸς τὴν τῶν Μαθηματικῶν ἔκθεσιν, εἴρηται· ὅπως δὲ περαιωθέντα ἤδη καὶ τύποις ἂν ἔχοιμι δημοσιεῦσαι, τοῦθ' ὧν πρὸς ἐμοῦ μάθοις θάτερον ἦν, καὶ δὴ ἐρῶ· οὐ γὰρ οὐδὲ τουτὶ τὸ δεύτερον ῥᾷστον ἦν. Τῶν μὲν γὰρ ἐν περιουσίᾳ πλούτου καθεστηκότων, οἱ φιλοτίμως ἔχοντες περὶ τὰς τοιάσδε δαπάνας, ὀλίγοι πάνυ εἰσίν· τῶν Τυπογραφούντων δ' οἱ παῖδες, ἐξ ἰδίων ἀναλωμάτων τοῖς τοιούτοις Βιβλίοις οὐκ ἀξιοῦσιν ἐπιχειρεῖν, ἀφ' ὧν οὐκ ἔστιν αὔξειν βαλάντιον. Ἀτὰρ οὐδὲ οἴκοθεν ἐκ τῶν παρ' ἐμοὶ μετρίων δὴ τούτων ὄντων καὶ γλίσχρων καὶ πάντη ἀπερίττων παρῆν τοσαῦτα, ὅσαγε καὶ ἐπαρκέσαι τῇ δαπάνῃ τῆς ἐκτυπώσεως. Ἀμηχανήσας τοίνυν ἐπὶ ποσὸν, οὔκουν τέλεον ἀπέγνων τοῦ μὴ τυχὸν καὶ τὴν ἐντεῦθεν ἀπαντῶσαν δυσχέρειαν ὑπερβαλέσθαι. Διὸ καὶ ὑπὸ πολλῶν τῶν ἐν ὕψει ἀξιωμάτων ἐπισημοτέρων, καὶ ἐν ὑπεροχαῖς καθεστώτων, καὶ μὴν καὶ ἐν μαθήσει τὰ πρωτεῖα φερόντων τοῦ ἡμετέρου γένους, καὶ προσωπικῶς καὶ διὰ γραμμάτων πόῤῥωθεν προτραπεὶς, ἀνεῤῥίφθω ἔφην· „ἀεὶ γὰρ εὖ πίπτουσιν οἱ Διὸς κύβοι“· πρὸς τὸ Πανέλληνον αὐτίκα ἀπεῖδον, καὶ τῆς αὐτῶν ἐλευθερίου συνδρομῆς τὴν ἀντίληψιν ἐπικαλέσασθαι δεῖν ἔγνων· ὡς ἐν τῇ πέρυσι ἐκδοθείσῃ μοι εἰδήσει καὶ ἀπανταχοῦ πεμφθείσῃ, ἐν ᾗ, ὅ τε τῆς συγγραφῆς τρόπος καὶ τῶν συγγεγραμμένων τὰ εἴδη διετρανοῦτο, ὁρᾷν πάρεστι· καὶ εὔελπις ἄρ' ἤμην τῶν ἐλπίδων μὴ ἀποτεύξασθαι· ἀλλ' ἐπῄει μοι καὶ οὕτω τὸ τοῦ Ποιητοῦ ὑποκρούειν „ἤμβροτες, ἤμβροτες, οὐδ' ἐπέτυχες". Οἱ μὲν γὰρ ἐκ τῶν ἄχρι τοῦδε ἐκδοθεισῶν τοιούτων πραγματειῶν καταβαρυνθέντες, ἢ καὶ ἄλλως ἀδαεῖς τῶν τοιούτων παντάπασι τυγχάνοντες, ὀλίγων ἴσως ὀβολῶν τὸ πόνημα ἄξιον ἐλογίζοντο· οἱ δὲ, καίτοι μεγάλα στομβάζοντες, καὶ μονονουχὶ τὸ στόμα διαῤῥηγνύμενοι, τῷ Φιλογενεῖς, καὶ Φιλομούσους, καὶ Φιλέλληνας, καὶ πᾶν ὅ, τι ἄντις εἴποι τῶν τοιούτων ἄλλο, σφᾶς εἶναι κατεπαγγέλλεσθαι, νωχελῶς μέντοι γε εἶχον καὶ δυσχερῶς καὶ δυσφόρως πρὸς τὴν ἐπιδαψίλευσιν, ὡς νεαρᾶς φρενὸς ἐπιγέννημα ἡγούμενοι τὸ προμνηστευόμενον· ἔνθεν τοι οὐ μόνον τῶν πολλῶν, ἀλλὰ δὴ καὶ ἁπάντων ὀλίγοι τινὲς μόνον ἐγένοντο, οἱ τὴν ἐκ τῶν τοιούτων ὠφέλειαν συνιδότες, καὶ τὸν τῆς Μαθήσεως προαγγελόμενον τρόπον ἐς βάθος συνέντες, ἐκ περιουσίας τὸ Φιλογενὲς ἐπιδαψιλευσάμενοι ἐνεδείξαντο· οὓς δὴ καὶ ἔχεις ὑφ' ἡμῶν κατὰ τὸ τέλος τῆς Βίβλου ἐκτεθέντας, πρὸς μείζονα τῶν ὀψιγόνων εὐλογίαν τε καὶ ἔπαινον. Ἀλλ' οὖν αἱ τοιαῦται ἐκδόσεις, διὰ τὸ τῆς δαπάνης ὑπέρογκον, δαψιλεστέρας πολλῶν ἅμα τῆς προαιρέσεως χρῄζουσιν. Τὸ γὰρ ἐκ τῆς συνδρομῆς συλλεγὲν, οὐδ' οὕτω πρὸς τὴν τῆς Βίβλου δαπάνην ἐξήρκεσε. Καὶ ἢν μὴ ἡ τῶν εὐγενεστάτων τῷ ὄντι καὶ Φιλογενῶν περιωνύμων ἐκείνων Ἑλλήνων Ζωσιμάδων Φιλόμουσος διάθεσις τῇ ἐκδόσει τὴν κορωνίδα ἐπιθεῖναι ἠξίου, σχολῇ γ' ἂν εἰς πέρας τὸ ἐναρχθὲν ἀφικέσθαι ἠδύνατο.

Ταῦτά Σε, ὦ φίλτατε Ἀναγνῶστα! παρ' ἡμῶν

προσῆκεν εἰδέναι τὰ κράτιστα, περί τε τῆς ἐμῆς ἐξ ἀρχῆς προθέσεως, καὶ τῆς ἐγχειρήσεως τοῦ ἔργου, καὶ τῆς ὑπὲρ τοῦ ἐκδοθῆναι προμηθείας, καὶ τῆς τέως, ὡς μὴ ὤφειλεν! ἀποτυχίας. Τὰ δέ τοι ἄλλα, ὅσα γε αὐτῷ τῷ Συγγράμματι καθ' αὑτὸ ἰδίᾳ προσεπανήκει, ὅπως δηλαδὴ ἐπεξείργασται, καὶ ὁποίῳ μεθόδῳ καὶ τάξει πρόηκται, τὸ τεῦχος αὐτὸ ἐπιμελῶς ἀνελίσσοντά Σε διδάξει. Ἐῤῥωμένως μοι μετέρχοιο τὰ ἐν αὐτῷ, καὶ τῶν ἐν αὐτοῖς, εἰ καί τινα, χρησίμων ἀπόναιο, τοῖς τὴν ἔκδοσιν εἰς πέρας ἀγαγεῖν φιλοτιμηθεῖσι Φιλομούσοις Ὁμογενέσιν, ὅ, τι πλείστας γινώσκων τὰς χάριτας.

Ἔγραφον ἐν Ἄλλῃ τῇ Μαγδεβουργικῇ

Ἔτει τῷ Σωτηρίῳ αωϛ'.

κατὰ Μῆνα Σεπτέμβριον φθίνοντα.

ΤΑ

ΕΙΣ ΑΠΑΣΑΝ ΕΝ ΓΕΝΕΙ ΤΗΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΝ ΕΙΩΘΟΤΑ ΠΡΟΛΕΓΕΣΘΑΙ.

Τῶν περὶ ἑκάστου γινομένων εἰσηγήσεων, αἱ μὲν ἐκ προθέσεως καὶ μετὰ τῆς δεούσης ἀκριβείας γινόμεναι, τῷ ἐκ προϋπαρχούσης γνώσεως ἐπὶ τὴν ἐφεξῆς ἐχομένην εὐτάκτως χωροῦντι, διὰ τῶν σαφεστέρων ἀεὶ, τὰ ἧττον γνώριμα ἀποσαφοῦσιν· αἱ δὲ μὴ ἐκ προθέσεως κατὰ δὲ πάροδον τῶν ὑποκειμένων ἁπτόμεναι ὁπωσοῦν, τῆς ἐν τῷ βάθει τελειοτέρας αὐτῶν παραμελοῦσιν ἐρεύνης. Ὑποδιέλοι δ' ἄν τις καὶ τὰς μὴ ἐκ προθέσεως γινομένας διδασκαλίας περὶ ἑκάστου, δισσὰς ἐκ τῶν θεωρουμένων εἶναι τιθέμενος· ἤτοι γὰρ τὰ περὶ ὧν αὗται, ἀμέσως πρῶτα ἐστὶν, ἐκ τῶν ἃς ἔχομεν φύσει προλήψεων ἐπιδεχόμενα τὴν ἐπίκρισιν, ἢ δεύτερά τινα καὶ τρίτα, οὕτως εἰπεῖν, ὧν τὰ πρὸ ὁδοῦ ὄντα τῶν θεωρημάτων, διὰ μόνων τῶν κοινῶν θεωριῶν, σπουδῆς ἄνευ καὶ μελέτης οὐκ ἔστι καταληπτά. Ἐπεὶ οὖν τὸ κατὰ τὰς Μαθήσεις, περὶ ὃ ἐκεῖναι στρέφονται ἐπιστητὸν Γένος ἐξ ἀμφοτέρων συνέστηκεν, εἰκὸς τοὺς περὶ τὰς ἐν μέρει ἀπηλλαγμένας τῆς ὕλης τῶν θεωριῶν, οἷα τὰ Ἀναλυτικὰ τῶν Μαθημάτων, καὶ τὰς παραπλησίους ἐγγεγυμνάσθαι διὰ σπουδῆς ἔχοντας, τῶν πρὸ ὁδοῦ γινομένων μυουμένους, τῷ διηνεκεῖ σκέμματι, καὶ τῷ τῆς Φιλοπονίας ἀτρύτῳ τοῖς καθαρωτέροις τῶν νοημάτων συνεχῶς τε ἐπιβάλλειν, καὶ ἐπιμόνως ἐνδιατρί-

βειν προσεθίζεσθαι· τῶν δ' ἐπιστημῶν πρὸς τὰς διὰ Φαντασίας τὸ πλέον ἐγγινομένας, προκεκαθαρμένους ἤδη καὶ οὕτω προτελεσθέντας ὅσον ἔδει, οὕτως εἰσάγεσθαι. Τῶν γοῦν ἐν τῇ Μαθηματικῇ λεγομένων, πρῶτον ἀπαντῶντα, οἷα δὴ αἱ κατὰ τὴν Ἀριθμητικὴν προπαιδεῖαι, ὡς μὴ πολλῆς πάνυ τῆς θεωρίας χρήζοντα, αὐτόθεν τοῖς Μαθητιῶσι γίνεται σαφῆ, καὶ ἄνευ προηγουμένης ἑτέρας, ὅτι μὴ τῆς κατὰ Φύσιν, περιττῆς γνώσεως· τὰ δὲ οὕτως εἰσὶν ἔχοντα, ὡς ἀμήχανον εἶναι, δίχα τῆς προαπαιτουμένης Στοιχειώσεως, τούτων ἐλθεῖν εἰς περίνοιαν· ὅγε δὴ καὶ οἱ τὴν Μαθηματικὴν ἐν διαφόροις εἴδεσι ποικιλαχῶς διανείμαντες, κομιδῇ τυγχάνουσιν αἰνιττόμενοι.

Ἐκείνης γὰρ περὶ τὸ Ποσὸν στρεφομένης· τούτου δ' αὖ αὐξήσεως ἢ μειώσεως δεκτικοῦ πολλαχῶς τυγχάνοντος, ἕπεται καὶ τὰ κατ' ἐκείνην εἴδη, πολλὰ δὴ ὄντα καὶ διάφορα, ἰσαρίθμως ποικίλλεσθαι, καὶ εἰς μέρη τὰ Γενικώτατα, ἤπερ μᾶλλον ἂν εἴη εὐόριστα, ἀνάγεσθαί τε καὶ κατατάττεσθαι. Κἀντεῦθεν ἡ εἴς τε τὴν Θεωρητικὴν, καὶ τὴν Φυσικο-Μαθηματικὴν, τὴν καὶ ἄλλως Προσηρμοσμένην, ἀνεφύη διαίρεσις· ὡς κατ' ἐκείνην μὲν τὸ Ποσὸν ἀφῃρημένως τε καὶ ἐν γένει, κατὰ δὲ ταύτην συγκεκριμμένως τε καὶ ἐν μέρει διακρινόμενον παρεξετάζεταί τε καὶ παραβάλλεται. Οὕτω καὶ γὰρ, τὸ τῆς Σφαίρας, ἧς ἡ διάμετρος τεσσάρων ἐστὶ δακτύλων, μέγεθος προσδιορίσαι πρὸς τὴν Θεωρητικὴν ἀπεῖδε· τὸ δέτοι μολυβδίνης τυχὸν ἑτέρας τεσσάρων λιτρῶν βάρει σταθμιζομένης μέγεθος ἀποδοῦναι, τῆς Προηρμοσμένης καθέστηκεν ἀντικείμενον. Καὶ ἔστιν ἄρα, ἐκείνως μὲν τὸ Ποσὸν, ἢ ὡς ὅλον, ἢ ὡς ἐκ μερῶν σύνθετον θεωρούμενον· οὕτω δὲ τὰ τοῦ Ποσοῦ πάθη, αἱ τῶν σωμάτων πρὸς ἄλληλα παραβολαὶ, αἱ τοῦ Φωτὸς καὶ τῶν Οὐρανίων σωμάτων ἰδιότητες καὶ τὰ παραπλήσια, φυσιολογικῶς ἐξηκριβολόγηται· ὥστε παρεῖναι καὶ τὰς δύω ταυτασὶ διαιρέσεις, ὑποδιαιρέσεσιν ἄλλαις λεπτότερον ἐπεξεργαζομένας ἀποδιδόναι, ὡς ἐφεξῆς.

Καὶ τῷ μὲν δὴ πρώτῳ τῶν διαιρέσεων εἴδει, ἥ, τε Ἀριθμητικὴ προσεπανήκει καὶ ἡ Ἀνάλυσις, ἧς μέρη τὰ Ἀλγεβραϊκῶς ὑπολογιζόμενα, ἡ Ὑπερέχουσα Ἀναλυτικὴ Μέθοδος, καὶ ὁ κατὰ μὲν Λειβνίτιον τῶν Ἀπειροστῶν ἢ Διαφορητικῶν καὶ Ὁλοσχερητικῶν, κατὰ δὲ Νεύθωνα τῶν Ῥευστῶν καὶ Ῥεόντων ὑπολογισμός (α)· ἡ περὶ τὰς τῶν ἔκτασιν καὶ πλάτος καὶ βάθος ἐχόντων, οἷον δὴ τῶν Γραμμῶν, τῶν Ἐπιφανειῶν, τῶν Ἐπιπέδων, τῶν Στερεῶν, κτλ. διαμετρήσεις καταγινομένη Γεωμετρία· ἡ ἐκ τριῶν ἐγνωσμένων τοῦ τριγώνου μερῶν τὰ λοιπὰ ἀνιχνεύουσα Τριγωνομετρία· ἃ γὰρ ἡ Γεωμετρία, ἐκ τῶν παρὰ

(α) Νεύθων καλεῖ Fluxion μὲν (Ῥευστὸν), τὸ ὑπὸ τοῦ Λειβνιτίου Differentialle (Διαφορητικὸν), Fluante δὲ (Ῥέον), τὸ ὑπὸ τούτου Intégralle (Ὁλοσχερητικὸν, μέρος δηλαδὴ), ἀκοῦον· ὥστε τὴν μὲν τῶν Ῥευστῶν Μέθοδον ἀντιστοιχεῖν τῷ Διαφορητικῷ Ὑπολογισμῷ, τὴν δὲ τῶν Ῥεόντων, ἤτοι τὴν τῶν Ῥευστῶν ἀντίστροφον, τῷ Ὁλοσχερητικῷ.

τοῖς Τριγώνοις διδομένων, διὰ τῆς τοῦ Σχήματος κατασκευῆς ἀνευρίσκει, αὐτὰ ταῦτα ἡ μέθοδος τοῦ ἀριθμητικῶς τὰ τρίγωνα ἀναλύειν, διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ ἀνακαλύπτει· λέγεται δὲ αὕτη Τριγωνομετρία Ἐπίπεδος, διὰ τὸ εἶναι καὶ Τριγωνομετρίαν ἄλλην Σφαιρικὴν, τὴν περὶ τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας καταγραφόμενα καταγινομένη. Καὶ ἡ τὰ καμπυλόγραμμα τῶν Σχημάτων, Παραβολὴν δηλαδὴ, Ἔλλειψιν, καὶ Ὑπερβολὴν διατρανοῦσα Κωνικοτομία.

Τῷ δὲ δὴ δευτέρῳ· Πρῶτον μὲν, ἡ ἐν γένει τὴν τῶν σωμάτων θεωροῦσα δύναμιν Δυναμική· ἧς μέρη, Α΄. ἡ περὶ τὴν τῶν ῥευστῶν δύναμιν φερομένη Ὑδροδυναμικὴ, ἥτινι συνῆπται καὶ ἡ τὴν τῶν ὑδραγωγῶν Μηχανῶν θεωρίαν διδάσκουσα Ὑδρομηχανική· καὶ ἡ τοὺς τῶν σωμάτων, καθ' οὓς τὸ ἐν αὐτοῖς ἰσόῤῥοπον τηρεῖται νόμους ἀνιχνεύουσα Στατική. Β΄. ἡ τὰς τῶν στερεῶν σωμάτων ἐν τῷ κινεῖσθαι δυνάμεις ἀκριβολογοῦσα Μηχανικὴ, καὶ ἡ τὰς τῶν ῥευστῶν Ὑδραυλική. Γ΄. ἡ τὰς τῶν ἰσοῤῥόπων ἢ ἰσοβαρῶν ὑγρῶν ἐλαστικῶν σωμάτων νόμους θεωροῦσα Ἀερομετρία, καὶ ἡ τῶν τοιούτων ἐν κινήσει δύναμιν ἀνιχνεύουσα Ἀερομηχανική.

Δεύτερον δὲ, ἡ περὶ τῶν εὐθυγράμμως τοῦ Φωτὸς ἐκπεμπομένων ἀκτίνων διαλαμβάνουσα Ὀπτική, ἧς τὸ κράτιστον μέρος ἡ Φωτομετρία καθέστηκεν· ἰδιαιτέρως δὲ, καὶ οἷον ἐν προσθήκης μοίρᾳ, ἡ περὶ τῶν

Διοπτηρίων καὶ τῶν Τηλεσκοπίων ἐν γένει Θεω-
ρία, δι' ἧς οἱονδηποτοῦν τῶν Σχημάτων οὕτω κατα-
γράφειν διδασκόμεθα, οἷον δὴ αἱ ἐκ τῶν ἀντικειμένων
τῇ ὁράσει ἐμπίπτουσαι ἀκτῖνες αὐτὸ παριστάνουσιν.
Ὑποβέβηκε δὲ ταύτῃ, ἥ, τε τὰς τῶν ἐκ τῶν κατόπ-
τρων ἐπιγινομένας τοῦ Φωτὸς ἀντανακλάσεις διαλαμ-
βάνουσα Κατοπτρική, καὶ ἡ τὴν διὰ τῶν διαφανῶν
σωμάτων τῶν τεθλασμένων τοῦ Φωτὸς ἀκτίνων διέλευ-
σιν πραγματευομένη Διοπτρική.

Καὶ τρίτον, ἡ τοὺς τῶν Οὐρανίων σωμάτων Μα-
θηματικῶς διατρανοῦσα νόμους Ἀστρονομία, ἥτινι
ὡσαύτως προσεπανήκουσιν. Ἡ τὴν τῆς Γῆς Σφαῖραν
ὡς ὁλοσχερές τι θεωροῦσα, τάς τε τῶν ταύτης περά-
των κατὰ Κλίματα διανομὰς ἐκδιδάσκουσα Μαθημα-
τικὴ Γεωγραφία, ἧς μέρος τὸ κυριώτατον ἡ τῶν Το-
παρχιῶν, Ἐπαρχιῶν τε καὶ Πόλεων καταμέτρησις· ἥτι-
νι καὶ ἡ Ὑδρογραφία, τουτέστιν ἡ περὶ τῶν Ναυ-
τικῶν θεωρία προσαφαρμοζέσθω. Ἡ τοὺς καιροὺς κατὰ
τὰ ἐν τῷ Στερεώματι Φαινόμενα εἰς ἔτη, αἰῶνας, καὶ
αἰώνων περιόδους Μαθηματικῶς διατάττουσα Χρονο-
λογία. Καὶ ἡ τὴν τοῦ καιροῦ κατατομὴν ἐν ἐλαχί-
στοις πάνυ τούτου μορίοις, ἐν ὥραις δηλαδή, λεπτοῖς,
καὶ τούτων πρώτοις, δευτέροις, τρίτοις κτλ. διὰ τῆς
τοῦ Ἡλίου σκιᾶς ἐκδιδάσκουσα Γνωμονική. Οὐ πόῤῥω
δὲ τῶν Φυσικο-Μαθηματικῶν, ἥ, τε Πολιτικὴ
καὶ ἡ ἐπὶ τῶν Στρατηγικῶν Ἀρχιτεκτονική, ἡ
Πυροτεχνική, καὶ ἡ τὴν τῶν Στρατοπέδων θέσιν τε
καὶ τάξιν διατάττουσα Τακτική, καὶ ἕτερ' ἄττα

πλεῖστα ὑποδιαιρέσεων εἴδη, οἷς οἱ Νεώτεροι τὸ τῆς
Μαθηματικῆς ποικίλλειν χαίρουσιν ἀντικείμενον. Ἀλ-
λὰ δὴ καὶ ἡ τῆς Μουσικῆς θεωρία οὐδόλως ξένη ἐστὶ
τῶν Μαθηματικῶν καὶ ἀλλότριος· Τί γὰρ ἂν ἄλλο ἡ
τῶν Ἀρχαίων ἐτύγχανε Μουσική; ἢ μὴ Γεωμετρικαὶ
Ἀναλογίαι ταῖς τῶν Φωνῶν προσαρμοζόμεναι ὑπηχήσε-
σιν. Ἔνθεντοι καὶ τοῖς Μαθηματικοῖς αὕτη εἴδεσι πά-
λαι μὲν ὑπ' Εὐκλείδου, ὕστερον δ' ὑπ' Εὐλήρου καὶ
ἑτέρων προσήρμοσται.

Ἀλλ' οὖν τούτων Νεμέσεως οἱασοῦν ἐκτὸς ἡμῖν ἐν
ἐπιτομῇ προϋπεκτεθέντων, ἐκεῖνο μελέτω, ὅπως δὴ
τὸν τῆς Ἐπιστήμης ταύτης ἐγκρατῆ γενέσθαι ἀφιέμενον
ἥκειν χρεών. Ἐν πρώτοις οὖν τὸν τοιοῦτον μὴ κομιδῇ
ξένον, μηδὲ πάντῃ τοῦ Ἕλληνος λόγου ἀδαῆ εἶναι ἀξιοῦ-
μεν, ἀλλὰ δὴ καί τινων ἐν γνώσει εἶναι ἐνίοτε τῶν ἐκ
τῆς Φιλοσοφίας, καὶ τῆς συγκόου ταύτῃ Διαλεκτικῆς.
Εἰ γὰρ πρὸς τὸ μὴ ἐκ προθέσεως τὰ τοιαῦτα πρὸ τῶν
Μαθηματικῶν ἐξεῖναι πραγματεύεσθαι, καὶ τοῦτο πα-
ρῇ τὸ πρὸς τὰς εἰσηγήσεις τῆς Ἐπιστήμης ἀναγκαῖά τε
εἶναι, ἢ τοὐλάχιστον χρήσιμα καὶ μὴ περιττά, οἷα τὰ
τῆς Διαλεκτικῆς· καὶ πρὸς δὴ τούτῳ τοιαῦτα καθεστη-
κέναι, οἷα ἐκ τῶν κατὰ φύσιν προλήψεων, γίνεσθαι δῆ-
λα καὶ ξυνετά· ἄλλως δὲ εἰ τύχοι ἐξ ἐκείνων ὄντα, ἃ
πολλῶν ἄλλων τῶν πρὸ ὁδοῦ γινομένων ἐπιδεῆ ἐστιν εἰς
ἐπίγνωσιν, οὐδὲν ἂν οἷόν τε ἦ ἀπαλλάξαι τοῦ τῆς Παροι-
μίας σκώμματος, τοὺς πρὸς τὴν τούτων εἰσαγομένους
ἀκρόασιν. Τὸ γὰρ οὕτω τὸν τοιοῦτον συντετάχθαι, οὐ
μόνον χρήσιμον, ἀλλὰ δὴ καὶ τῶν σφόδρα ἀναγκαίων ἐστίν

τὸν γὰρ ἄλλως πως ἥκοντα ἔξω τῶν τῆς Μαθηματικῆς Ἀνακτόρων μένειν κελεύομεν, οὐδὲ τὸ σύνολον τοῖς ἀδύτοις ἐγκύπτειν. Μαρτυρεῖ δέ μου τῷ λόγῳ ὁ τῷ προσελθόντι εἰπών· Πορεύου, κώπην γὰρ Φιλοσοφίας οὐ κέκτησαι· ὥσπερ καὶ ὁ Πλάτων οὐδένα τῶν ἀγεωμετρήτων εἰς τὴν Φυσικὴν εἰσῆγεν. Εἰ γὰρ ἂν οὕτως, καὶ Γεωμετρίαν τις καὶ Ἀριθμητικὴν διδαχθήσεται, καίτοι μὴ ἐν προλήψει ὤν, τῶν πρὸ ὁδοῦ γινομένων τῆς εἰς αὐτάς· ἀλλὰ μὴ καὶ γωνίαν ἐπιστημόνως διχάσαι ἐν πρώτοις μαθήσεται, ἢ ἀριθμὸν κυβῶσαι, ἢ κύβου τοῦ δοθέντος τὴν πλευρὰν ἐξευρεῖν, πρὶν τῶν εἰς ταῦτα φερόντων θεωρημάτων ἀκοῦσαι; καὶ νὴ Δία, καὶ ὁρισμούς, καὶ αἰτήματα, καὶ τὰς ἄλλας ὑποθέσεις προπαιδευθῆναι, δι' ὧν πρότερον ἐλθεῖν δεῖ εἰς τὴν ἐκείνων τῶν προβλημάτων ἐπίλυσιν. Συνεργεῖ γὰρ Φιλοσοφία πρὸς σοφίας κτῆσιν, ὥσπερ καὶ τὰ ἐγκύκλια μαθήματα πρὸς Φιλοσοφίαν συμβάλλεται, κατὰ τὸν Στρωματέα Κλήμεντα.

Ἵνα δ' ἐφεξῆς προσεχέστερον τῆς προθέσεως ὁ ἡμέτερος ξυνθιασώτης γένηται, μήτε μην τηνάλλως τε καὶ ἑαυτῷ ἐπιβλαβῶς περὶ τὸ ὑπολογιστικὸν πονοίη κατατριβόμενος, τοιοῦτον ἑαυτῷ ἐπιλέξαι χρὴ τὸν διδάξοντα, ὡς κώπης ἁψάμενον δυνηθῆναι γενναίως τὸ ἀχανὲς τουτὶ πέλαγος διαπλεῦσαι, καὶ πρὸς αὐταῖς ταῖς ἀκταῖς ἀπαθῶς πρύμναν κρούσασθαι. Τῶν γὰρ τοιούτων Μαθημάτων δυσλήπτων πάνυ τε ὄντων καὶ μονονουχὶ ἀπροσίτων τοῖς μὴ τὰς ἀρχὰς κατέχουσιν, ὁ ἐπὶ τῇ ἰδίᾳ ἀλκῇ πεποιθώς, ἢ καὶ ἐνί τῳ καὶ μόνῳ τῶν τυχόντων ἑαυτὸν καταθαρρῶν, οὐ μόνον τὰ πλεῖστα ἀποτεύξεται, ἀλλὰ δὴ καὶ τοῦ δοκοῦντος ἀπρὶξ ἐχόμενος, τοῦ ὄντος σφαλεῖται καὶ ὑπεκστήσεται. Τῆς γὰρ ἀληθείας ἡ θεωρία, τῇ μὲν χαλεπή, τῇ δὲ ῥαδία, κατὰ τὸν Φιλόσοφον· ἔν τε μυχοῖς αὕτη βαθέσι, κατὰ τὸν Ἀβδηρίτην ἐκεῖνον Γελασῖνον Δημόκριτον.

Ἀναγκαῖα ἀλλ' οὖν πρὸ τῆς ἐγχειρήσεως ἐφόδια, τῷ εἰς κτῆσιν σοφίας ἐπιδεξίῳ θηρευτῇ, καὶ εἰς τέλος ἐντελῶς ἥξειν τοῦ κυνηγεσίου ἐφιεμένῳ εὐφυΐα τε καὶ φιλοπονία, καὶ παρὰ ταῦτα λόγος ὁ εὐοδῶν, ὧν τὰ μὲν πρῶτα δύο οἴκοθεν εἰσφέρειν χρὴ τὸν μαθητιῶντα, τὸ δὲ τρίτον ἐστὶ τοῦ διδάσκοντος μᾶλλον. Ἔστι δὲ εὐφυΐας ἔργον οὐ μόνον ξυνιέναι ῥαδίως τὰ λεγόμενα, ἀλλὰ καὶ κρίνειν ὀρθῶς, καὶ διασώζειν τῇ μνήμῃ ἀποταμιευόμενα· τοῦτο γάρτοι καὶ ἡ Ποίησις τὴν Μνημοσύνην τῶν Μουσῶν μητέρα ἐσήμανεν ἐξυμνήσασα· Φιλοπονία δὲ πᾶσα σχεδὸν παρὰ τὰ ἤθη προσγίνεται καὶ αὔξεται. Δεῖ γὰρ τὸν ἀκροατὴν κάλλιστα μὲν ἦχθαι τοῖς ἤθεσι, μὴ δουλεύειν πάθεσι θυμοῦ καὶ ἐπιθυμίας, ἀλλὰ κατὰ τὸν ἐν Φαίδωνι Σωκράτην, τὴν ἀπὸ τοῦ σώματος τῆς ψυχῆς λύσιν μελέτην ἀεὶ ποιούμενος, ἄγειν διὰ θαύματος τοὺς σοφούς, ἔν τε μεγάλῳ τίθεσθαι τὴν ἐκείνων ὁμιλίαν, καὶ ἔνθουν εἶναι τῷ πρὸς Φιλοσοφίαν ἔρωτι· ὁ γὰρ τοιοῦτος καὶ πρὸς ἅπαντα πόνον ἀτρύτως ἕξει, κἂν δυσχερές τι συμβαίνῃ ῥαδίως οἴσει, καὶ τῆς παιδείας ἐπιμελέστατα ἀνθέξεται. Δεῖ δὲ οὐ πάντα παρὰ τῆς τοῦ διδάσκοντος φωνῆς προσδοκᾶν, μηδ' ἐν ἀκροατοῦ τάξει καταγηράσκειν παρ' ὅλον αἰ-

***

ρεῖσθαι τὸν βίον παιδοτριβούμενον, ἀλλὰ καὶ καθ' ἑαυτὸν τοῖς τῶν πάλαι καὶ τῶν καθ' ἡμᾶς Φιλοσοφησάντων ὑπομνήμασι συγγινόμενον, ἀναλέγεσθαι τὰ δοκοῦντα χρήσιμα, καὶ ἀποσημειοῦσθαι τὰ μνήμης ἄξια. Δεῖ δὲ καὶ τοῦ λόγου μετέχειν ἐπὶ ποσὸν τὸν μυούμενον, καὶ δεξιὸν τὸ τοῦ νοῦ φέρειν πτερὸν, πρός τε τὴν τῶν διδασκομένων κατάληψιν, καὶ τὴν τούτων ἀπειλημμένων διακατοχήν. Δεῖ δὲ πρὸς τὴν τούτων συντέλειαν ἀσκήσεως ὑπηνεκοῦς τε καὶ ἀδιαλείπτου, καὶ μηδὲν μήθ' ἡμέρας, μήτε μὴν νυκτὸς μελετᾷν ἄλλο πλὴν τῶν Μαθημάτων, ἀεί τε συντεταγμένως χωρεῖν ἐπὶ τὰ πρόσω καὶ ἐπεκτείνεσθαι. Τὸ γὰρ τῆς χαλεπότητος δεινὸν διττῶς ἐν τῷ ἀνθρωπίνῳ νοΐ, κατ' Ἀριστοτέλην, ἔνεστι· καὶ γὰρ, ἢ διὰ τὴν τῶν πραγμάτων ἀσάφειαν, ἢ καὶ διὰ τὴν περιοῦσαν ἐν ἡμῖν αὐτοῖς τοῦ γνωστικοῦ ἀμβλύτητα καὶ ἀσθένειαν, πρόσθες δὲ καὶ τροπὴν, οὐδὲ τοῦ πολλοστοῦ, ληπτὸν ἂν γένοιτο τὸ πολλοστημόριον. Πρὸς τὸν τῆς μνήμης μέντοιγε ὑποστηριγμὸν, Μέθοδόν τινα καὶ τάξιν δεῖ κατέχειν κατὰ κόσμον καὶ ὡς χρὴ χωροῦσαν, δι' ἧς οἱονεὶ δι' ὁδοῦ τινος ἀπλανοῦς, διά τε τῶν ἤδη γινωσκομένων, νοερῶς ἐπ' εὑρέσει τῆς ἀληθείας βηματίζοντες, καὶ ἀπὸ τῶν ἁπλουστέρων ἐπὶ τὰ σύνθετα, ἢ τἀνάπαλιν ἀπὸ τῶν συνθέτων ἐπὶ τὰ, ἐξ ὧν ἐκεῖνα, ἁπλούστερα προβιβαζόμενοι, τὴν τῶν ἀγνοουμένων γνῶσιν τε καὶ κατάληψιν ἐφικέσθαι δυνηθῶμεν. Ἐπιστήμης γὰρ ἔργον κατὰ Τακουέτιον (α), τὸ ἐξ ἐν-

(α) Στοιχ. Γεωμ. Βιβ. Α'.

νοιῶν τινων ἁπλουστέρων, ἃς ὁ Δημιουργὸς τῇ λογικῇ φύσει ἐνῆκεν, ἐπιφέρειν ὅ, τι μὴ πρότερον ἔγνωστο· καὶ τούτου ἕτερον αὖθις, ὥστε βαθμίδα ὡσανεὶ προϋφεστηκέναι πρὸς τὴν ἑψομένην, ἀεὶ τὴν γνῶσιν, ἥτις ἡγήσατο. Γένοιτο γὰρ ἂν τοῦ τοιοῦδε λόγου ἀκριβῶς ἐχομένοις, ἀπὸ τῶν ἐλαχίστων τε καὶ καθ' αὑτὰ πλουτούντων τὸ γνώριμον, ἁλωτὰ τῇ γνώσει ῥαδίως καὶ αὐτὰ τὰ λίαν ἀφανῆ καὶ δυσκάτοπτα. Καὶ δή·

Α'. Ἀναγκαῖόν ἐστι παντὸς πράγματος τὰ πρῶτα αἴτια, καὶ τὰς πρώτας ἀρχὰς, καὶ αὐτοὺς δὴ τοὺς ὅρους καλῶς προγινώσκειν, καὶ ἑκάτερον τούτων πανταχόθεν ἐπιμελῶς πολυπραγμονεῖν. Διακριτέον τοίνυν τὴν ὅλην πραγματείαν εἰς μέρη, ἢ εἰς εἴδη· τήν τε τῶν καθ' ἑαυτὰ καὶ ἄνευ ἑτέρας τινὸς ἐπιβοηθείας θεωρουμένων διάληψιν, τῶν μὴ οὕτως ἐχόντων καὶ ἀσαφῶν προτακτέον. Οἷον, ἀρκτέον μὲν ἀπὸ τῶν Ὁρισμῶν, μεθ' οὓς τὰ Ἀξιώματα καὶ Αἰτήματα καταλεγέσθωσαν, εἶτα αἱ Προτάσεις καὶ αἱ τούτων ἐκ τῶν προταχθέντων Λύσεις τε καὶ Δείξεις, ὧν αἱ πρῶται Κατασκευαὶ ὡσαύτως ἀκούουσι. Τούτων δὲ ἅλις εἰς ἐπίδειξιν ἐχόντων ἐπισυναπτέσθωσαν τὰ ἐπιόντα τῶν Πορισμάτων, ἤτοι αἱ Συνέπειαι, μεθ' ἃς τὰ Σχολιάσματα μὴ περιττὰ τέως, μήδ' ἀπροσφυῶς ἔχοντα, ἀλλὰ καὶ κομιδῇ συμβάλλοντα ἐπιταττέσθωσαν. Ἡ τοιαύτη δὲ τοῦ διελεῖν Μέθοδος, Μαθηματικὴ κοινῇ καλεῖσθαι ἠξίωται (α).

(α) Λώκιος, ἐν τῷ περὶ τῆς τοῦ Νοὸς διευθύνσεως. Μαλεμβράγχιος, περὶ τῆς τῆς ἀληθείας εὑρέσεως Βιβ. Ϛ'.

Β΄. Διακριθείσης οὕτω τῆς ὅλης πραγματείας, καὶ τῆς τῶν νοημάτων προόδου βαθμηδὸν ἀνακυπτούσης, τηρείσθω μὲν ὡς ἂν οἷόν τε ᾖ, ὁ τῆς κατὰ φύσιν τάξεως τρόπος, ἐκσυριττέσθω δὲ καὶ μακρὰν πεμπέσθω τὸ περὶ τὴν μελέτην ἐκδεδιῃτημένον καὶ ἄτακτον, ὥστε τῶν πρὸ ὁδοῦ τοῖς ἄλλοις γινομένων παραμελοῦντας, καὶ ἀτελέστους ἔτι τῶν, ἃ προγινώσκειν δέον, ἐπὶ τὰ ἐχόμενα χωρεῖν καὶ ὑπερβάθμιον πόδα, τὸ τοῦ λόγου, αἴρειν. Ἀμήχανον γὰρ τῶν ὀπίσω ἀμαυρά τινα ἴχνη κατέχοντας, ἐπὶ τὰ πρόσω ἐκτείνεσθαι, καὶ τὴν τούτων κατάληψιν θηρᾶν πειρᾶσθαι.

Γ΄. Ἔνθεντοι μὴ ἐπιτροχάδην, μήδ᾽ ἀπερισκέπτως, ὁ ἐπὶ τὴν ταχθεῖσαν αὐτῷ νύσσαν ἐξ αὐτῆς βαλβίδος εὐθὺ σταδιεύων, τὰ ὑπ᾽ ὀφθαλμοῖς παρερχέσθω ἐξ ἄλλης θεωρίας εἰς ἄλλην θαμὰ μεταπηδῶν, καὶ τὸ εὐχερὲς μετὰ τοῦ ἡδέος θηρώμενος. Μοχθηρὸς γὰρ οὗτος πέφυκεν ἐθισμὸς καὶ νόσος τὰς τῆς ψυχῆς δυνάμεις κατὰ μικρὸν λυμαίνουσα, καὶ εἰς παντελῆ νωθρίαν τέως προάγουσα, ὥστε καὶ ἁλωτὸν πᾶν τὸ σφίσιν ἐμπῖπτον ἐκ τοῦ ῥάστου οἴεσθαι. Εἰ δέ τισι ζόφῳ ἐν βαθυτάτῳ τὸ τῆς διανοίας ὄμμα ἠλάσκεται τῇ τῶν δυσχερῶν καὶ δυσξυμβλήτων συναντήσει, τοῦ τόνου οἱ τοιοῦτοι μὴ ὑφιέσθωσαν, μήδ᾽ εἰς ἀθυμίαν ἑαυτοὺς ἐμβαλλέτωσαν μηδὲν ἐλπίζοντες πέρας εὑρήσειν τῆς πολυπόνου

κεφ. ϛ΄. καὶ ζ΄. Βόλφιος ἐν τῇ ἀρχῇ τῶν ἑαυτοῦ Μαθηματικῶν de Methodo Mathematico. Τσιρνχαύσιος· καὶ ἄλλοι.

ἐπιχειρήσεως· ἀλλὰ τὰς ἀπαντώσας δυσχερείας ἐπιμόνως ἀναξιχνεύοντες καὶ τούτων ἀπρὶξ ἐχόμενοι, μὴ περαιτέρω ἴέτωσαν, τὰ παρὰ πόδας ἀδηλότερά τε καὶ ἀγνοούμενα, εἰκῇ καὶ κούφως ὑπεραλλόμενοι, ἀλλὰ μέχρι τούτων ἀναχαιτισθέντες περὶ τοῦ αὐτοῦ δὶς καὶ τρὶς καὶ πολλάκις ἀνασκεπτέσθωσαν· ἕως οὗ τὸ μνημονικὸν φωτὸς πλῆρες γενόμενον, τὴν πρὸς τὰ ἑπόμενα εὐχερῆ καὶ ὁμαλὴν ἀπεργάσεται τρίβον. Οὕτω γὰρ καὶ ὁ νοῦς, τῶν ὅσα στέγειν καὶ χωρεῖν πέφυκε νοημάτων ἐμφορούμενος, τὸ ἀχλυῶδες καὶ ζοφερὸν τῆς ἀγνοίας, οἷα φωτὸς δαψιλοῦς ἐπιλάμψει, αὐτίκα μάλα διασκεδάσας, καὶ εἰς τὸ μηδὲν ἀποπέμψας, τῶν ἐφικτῶν τε καὶ σαφῶν πρυτανεύσει αὐτοῖς τὸ μελέτημα, καὶ ἡδονὴν οὐ τὴν τυχοῦσαν τῇ ἑαυτῶν ψυχῇ ἐμποιήσεται.

Δ΄. Οὐκ ἀσυντελὲς δὲ, ἀλλὰ καὶ τῶν κομιδῆ ἀναγκαίων, πρὸς τὴν τῶν ἧττον σαφῶς ἐκκειμένων κατάληψιν, καὶ τὴν τῶν ἑπομένων πίστιν, τὰ ἐν τοῖς προϊοῦσιν εἰρημένα διὰ σημειώσεων ἀνακεφαλαιοῦν τε καὶ ἀναπεμπάζεσθαι, τὴν τούτων μνήμην οἱονεὶ ἀναζωπυροῦντας. Ἐκ γὰρ τῆς ἐκείνων καταλήψεως τε καὶ λύσεως, ἡ τούτων εὐχερεστέρα ἐξήρτηται ἀπίκρισις·

Ε΄. Τὰ πράξεως ἐν τῷ ὑπολογισμῷ δεόμενα, μεθ᾽ ὅτι πλείστης ἐπιμελείας ἀποχρώντως τῇ σκέψει ὑπαγέσθωσαν. Ὑψηλοτέρως γὰρ οὕτω τῷ νοΐ ἡ τούτων ἐντυποῦται ἀλήθεια, ἢ μόνον κατὰ τὴν ἐπιπολαίως πως γινομένην μελέτην, εἰ χρὴ ταύτην μελέτην, ἢ ἄθυρμα ἀποκαλεῖν. Πολλάκις δὲ καὶ διὰ γραφῆς ἐπὶ χάρτου, γραφείῳ, ἢ μολυβδίνῳ καλάμῳ, κεφαλαιωδῶς τε καὶ εὐτάκτως τὰ μελετηθέντα σημειούσθωσαν, καὶ ἐν ἐπιτομῇ τὰ κατασκευασθέντα καὶ περαιωθέντα ἀνακεφαλαιούμενα τῇ μνήμῃ ἐναποτιθέσθωσαν.

'ϛ'. Ἔσχατον δὲ, ἡ περὶ τὴν Μαθηματικὴν σπουδὴ περὶ τὸ τῆς νυκτὸς γενέσθω ὄρθριον. Οὕτω γὰρ ἡ ψυχὴ τῶν τε μεθ' ἡμέραν καμάτων ἐν ἀνέσει τυγχάνουσα, καὶ τῆς ἀπὸ τῶν σιτίων ῥαστώνης κρείττων, εὐχερέστερόν πως καὶ ὀξυδερκέστερον τὰ προσπίπτοντα ἀνακρίναι ἔχει. Μᾶλλον δὲ, καὶ ἡ Ἠὼς ταῖς Μούσαις ὑπὲρ χρυσὸν φίλη, κατὰ τὸ λεγόμενον (α), εἶναι πεποίηται.

Διαληπτέον οὖν ἤδη καὶ περὶ τῆς ἀνωτέρω (Ἄρθρ. Α'.) διαμνησθείσης Μεθόδου, ἧπερ οἱ Μαθηματικοὶ ἐν τῷ συγγράφειν τὰς ἑαυτῶν Βίβλους χρῆσθαι εἰώθασιν. Οὗτοι γὰρ τὰς ἑαυτῶν δόξας ἀληθεῖς, καὶ ἀμφισβητήσεως οιασοῦν καθυπερτέρας, ἐκθεῖναι βουλόμενοι ἐννόμῳ τινὶ τάξει χρῶνται, ἐφ' ᾧ τοῦ σκοπουμένου τέλους τῆς γνώσεως ῥαδίως περιγενέσθαι καὶ εὐεπιβόλως. Αὕτη δὲ οἱονεί τις ὁδὸς ἰδία αὐτοῖς ἀρχῆθεν πέφυκε, δι' ἧς εὐπόρῳ τε καὶ εὐατιβοῦς ἰόντες, ἀπροσκόπτως χωροῦσι, καὶ πρὸς τὸ σπουδαζόμενον τῆς Ἐπιστήμης πέρας ἀπλανῶς τε καὶ σὺν ἀσφαλείᾳ ἐλαύνουσι. Διὸ καὶ Μαθηματικὴ ἤκουσε Μέθοδος, ὡς δι' αὐτῆς, οἷα δὴ τάξεως ἀσφαλοῦς καὶ ἀμεταπτώτου, καί γε προσφυοῦς τινος ἐπιχειρημάτων σειρᾶς, ἑτέρων ἑτέραις προσφυῶς συνημμένων, τῶν Μαθηματικῶν δογμάτων διδασκομένων. Ἐπεστήρικται δὲ τοῖς Ὁρισμοῖς ἢ Ὅροις,

(α) Aurora Musis amica ... aurea.

Ἀξιώμασιν, Αἰτήμασιν, οἷς παροπηδοῦσιν Ὑποθέσεις, Θεωρήματα, Προβλήματα, ἐξ ὧν τὰ Πορίσματα, Σχόλια, καὶ Λήμματα ἀναφύονται. Τάξειε δ' ἂν τις τὰ Λήμματα μέσα τῶν τε Ἀναποδείκτων (οἱονεὶ Ὅρων, καὶ τῶν λοιπῶν, ὡς σαφῶν), καὶ τῶν Ἀποδεικτῶν (Θεωρημάτων, καὶ τῶν ἑξῆς, ὡς δείξεως δεομένων)· ὡς ἐν ἄλλοις μὲν ὄντα ἀποδεικτὰ, ἀναποδείκτως δὲ καὶ ὁμολογουμένως πρὸς τὸ παρὸν λαμβανόμενα. Καλοῦνται δ' ἐν γένει τὰ ἀνωτέρω εἴδη καὶ Ἀποφαντικοὶ λόγοι, ἢ Ἀποφάνσεις· αἵ τινες, ὥσπερ τοῖς ἀπὸ τῶν Μαθημάτων ἐπίσημοί εἰσιν, οὕτω καὶ τοῖς ὁτιοῦν κατ' Ἐπιστήμην πραγματευομένοις ἐν χρήσει γίγνονται. Ὅθεν καὶ Ἐπιστημονικαὶ καλεῖσθαι δίκαιαι.

Ὁρισμὸς τοίνυν οὐσίας τις ἐστὶ γνωρισμὸς καὶ δήλη τῆς φύσεως πράγματός τινος, ἢ ὀνόματος διασάφησις, δι' ἐννοιῶν αὐτοῖς μόνοις ἀνηκουσῶν, δι' ὧν παντὸς ἄλλου διαστέλλεται καὶ ἀφορίζεται, γινομένη· οἷον, ὀξεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς· καὶ, Σελήνης ἔκλειψις, ἡ μεταξὺ ταύτης καὶ Ἡλίου τῆς Γῆς παρέμπτωσις. Ἐπεὶ δὲ ὁ Ὁρισμὸς δι' ἐννοιῶν μόνον γίνεται, τούτων δὲ τὴν διαφορὰν ὁ μέγιστος πρῶτον ἐξήνεγκε Λειβνίτιος (α), ἕπεται τοῖς Μαθηματικῶς ὁριζομένοις τὰς ἐναργεῖς μόνον καὶ εὐκρινεῖς τῶν ἐννοιῶν προσεπανήκειν (β). Διπλοῦς δὲ ἐστὶν ὁ Ὁρισμός· Ὀνομα-

(α) In Actis Eruditorum An. 1684. p. 537.

(β) Μέτιθι Βόλφιον ἐν τῷ περὶ τῆς Μαθηματικῆς μεθόδου ὑπομνήματι §. 13. Ἔνθα καὶ τὰς ὑπὸ Λειβνιτίου ἐκτετώδης, ὃ καὶ Γνωριστικὸς παρὰ τοῖς Νεωτέροις, ὁ τὴν τοῦ ὀνόματος δύναμιν, ἢ Φωνήν τινα, καὶ τὸ ταύτης σημαινόμενον διερμηνεύων· οἷον, Δορυφόρος ἐστὶ Πλανήτης περὶ Πλανήτην ἕτερον, ὡς περὶ κέντρον φερόμενος· καὶ Πραγματιώδης, ὃ καὶ Γεννετικὸς, ὁ τὴν τοῦ πράγματος φύσιν, τὸ τούτου δυνατὸν, καὶ τὸν τοῦ ὑφίστασθαι τρόπον παραγυμνοῦν· οἷον, περίοδος τοῦ Δορυφόρου ἐστὶν, ἣν περὶ τὸν Πλανήτην τὴν αὐτοῦ περιπολῶν ἐν χρόνῳ τεταγμένῳ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπανιὼν διαπεραίνει. Ἐντεῦθεν γὰρ τὴν Φωνὴν προσενηρμοσμένην τῇ διανοίᾳ προϋποτεθεὶς (ὁ Πραγματιώδης Ὁρισμὸς) τὸ νοητὸν, ὅ, τί ποτ' ἐστὶ διεγνώρισεν. Οὕτω τοίνυν οἱ καθ' ἡμᾶς ἔν τε Φυσικοῖς καὶ Μαθηματικοῖς Ὑπομνήμασι Φιλοσοφοῦντες, πρὸ παντὸς σχεδὸν κεφαλαίου, προκαταβάλλειν εἰώθασι τοὺς Ὁρισμούς. Καὶ γὰρ, ὡς ἄριστα Ἀριστοτέλης (α), πάσας τὰς Ἐπιστήμας δι' Ὁρισμοῦ γίνεσθαι ἠξίωσεν.

Ἀξίωμα δὲ ἐστὶ Πρότασις θετική τε ἅμα καὶ θεωρητικὴ τοῖς πᾶσιν ὁμολογουμένη, καθ' αὑτήν τε τὸ γνώριμον ἔχουσα, ὡς κρείττων οὖσα καὶ ἀποδείξεως· ἔκ τε τοῦ ταυτισμοῦ, ἢ τῆς ἐναλληλίας τῶν ὅρων τὸ ἐναργὲς, καὶ βέβαιον, καὶ αὐτόπιστον ἔχουσα. Οἷον, ἐκ μὲν τοῦ ταυτισμοῦ. Τὸ αὐτὸ ἑαυτῷ ἐστὶν ἴσον· καὶ, ἕκαστον ἐστὶν, ὅπερ ἐστὶν, καὶ οὐδὲν ἐστὶν, ὃ οὐκ

θείσας τῶν ἐννοιῶν διαφορὰς πλατύτερον συνιδεῖν πάρεστι.

(α) Ὑστέρ. Ἀναλυτ. Βιβ. Β'. Κεφ. ιθ'.

ἔστιν· ἐκ δὲ τῆς ἐναλληλίας· Τὸ ὅλον μέρη ἔχον ἐστὶν, τό, τε μέρος οὐκ ἔστιν ἴσον τῷ ὅλῳ αὐτοῦ· ὁ ὀφθαλμὸς ἐλάττων τοῦ ὅλου σώματος· καὶ τὰ τοιαῦτα. Ἐκεῖνα μὲν γὰρ ταυτίζεται, τούτων δὲ θάτερον θατέρῳ ἀναγκαίως συνείληπται. Ἀλλ' οἱ ἀπὸ τῆς Στοᾶς, Ἀξίωμα, ἅπαντα λόγον Ἀποφαντικὸν, ἀπὸ τοῦ ἀξιοῦσθαι μὲν ἀληθεύοντα, ἀθετεῖσθαι δὲ ψευδόμενον, ἀπεφήναντο (α). Καλοῦνται δὲ τὰ Ἀξιώματα, καὶ κοιναὶ ἔννοιαι (β) Ἀξιωματικαὶ δὲ Προτάσεις, καὶ αἱ ταυτολογοῦσαι· οἷον, ὁ κύκλος ἐστὶ κύκλος· καὶ τὰ παραπλήσια.

Αἴτημα δὲ Πρότασις ἐστὶ πρακτικὴ, ἣν ἀδιστάκτως πᾶς τις ἂν αἰτούμενος δοίη, δείξεως τε οἱασοῦν ἀνεπιδεής τε καὶ ἀνεπίδεκτος· Ἀποφέρεται δὲ καὶ τὰ Αἰτήματα ἐκ τῶν Ὁρισμῶν· εἰμὴ παρ' ὅσον τὰ μὲν Ἀξιώματα ἐκ τῶν Γνωριστικῶν, τὰ δὲ Αἰτήματα ἐκ τῶν Γεννετικῶν, ἅτε δὴ εἰς πρᾶξιν βλέποντα· οἷον· Ἠτείσθω τὸ ἴσον ἀντὶ τοῦ ἴσου τῷ τοῦ ποσοῦ λόγῳ λαβεῖν. καὶ Ἀπὸ παντὸς σημείου, ἐπὶ πᾶν ἕτερον σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Οὕτω γὰρ οὐκ ἀπὸ τοῦ Ὁρισμοῦ τῆς εὐθείας, ὡς ἡ ἐξίσου ἐστὶ τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κειμένη, ἢ τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν ἡ ἐλαχίστη, τὸ ἀπὸ παντὸς σημείου, ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν ἄγειν Γεωμετρῶν παῖδες αἰτοῦνται, ἀπὸ δὲ τοῦ τὴν γέννεσιν αὐτῆς ἑρμηνεύοντος· τουτέστι τοῦ

(α) Λαέρτ. εἰς Βίον Ζήν. Κιττ.

(β) Εὐκλ. Βιβ. Α'. τῶν Στοιχείων.

διὰ τῆς ῥύσεως τοῦ σημείου τὴν εὐθεῖαν γεννᾶσθαι διδάσκοντος. Τεθέντος γὰρ τοῦ Αἰτήματος, τοῦ εὐθεῖαν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἐπὶ τὸ δοθὲν σημεῖον ἀχθῆναι κελεύοντος, ἀμέσως δίδοται, τὸ σημεῖον πόθεν ποῖ ῥυῆναι. Ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφειν ἀπὸ τοῦ Γεννετικοῦ τοῖς Γεωμετροῦσι λαμβάνεται ὁρισμοῦ τοῦ κύκλου· καθ᾽ ὃν σχῆμα ὥρισται εἶναι ὑπὸ εὐθείας, θατέρῳ μὲν τῶν ἐπ᾽ αὐτῆ σημείων κατὰ χώραν μενούσης, καὶ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ αὐτὸ, οὗ πρότερον ἦν, περιελθούσης, καταγραφόμενον.

Ὑπόθεσις δὲ ἐστὶ Πρότασις κατὰ τὸ δοκοῦν τοῖς πολλοῖς λαμβανομένη, ὡς αἱ τῶν ὄντων ὀνοματιώδεις φωναὶ, τὰ τῶν ἀριθμῶν σημεῖα, καὶ τὰ τούτοις παραπλήσια. Διενήνοχε δὲ Θέσεως· τῷ μὲν γὰρ ἐκ Θέσεως αἰτιολογοῦντι ἐπιστήμη περίεστι, τῷ δ᾽ ἐξ Ὑποθέσεως ὑπόληψις· καὶ δι᾽ ἐκείνης ἅπας ἀπορίας λόγος ἐκ μέσου αἴρεται, διὰ δὲ ταύτης κἂν ἄλλως εἰς ἀπόδοσιν τῶν Φαινομένων ἐπαρκούσης, ἀεί τις πρόφασις περιλείπεται ὑπονοίας μήτι ἕτερον, παρὰ τὸ ὑποτιθέμενον τοῦ γινομένου τυγχάνει τὸ αἴτιον. Παρὰ δὲ τοῖς Φυσικοῖς, ὑπόθεσις ἐστὶν ἀλήθεια πιθανὴ, ἄδηλος δι᾽ ἔλλειψιν ἀρχῶν βεβαίων ἐκλαμβανομένη. Δύνανται μὲν οὖν ἐντεῦθεν ἀλήθειαι μὲν βέβαιαι Μαθηματικῶς ἐκκύπτειν, οὐ μείζονα δὲ τοῦ, ἐφ᾽ ᾧ ἐπέβησαν στηρίγματος ἰσχὺν ἔχουσαι· Τοιαῦταί εἰσι, τὸ τῆς Γῆς σφαιροειδὲς, ἢ κρομμυοειδὲς, ἢ ᾠοειδές· ἡ ἐνδόμυχος τῆς βαρύτητος δύναμις, κτλ. Ἐν δὲ τῇ Μαθηματικῇ ἐνίοτε ὑποθετικῶς τινα ἐκλαμβάνομεν, ἰδίας ἐκ τούτων ἀληθείας ἐξάγοντες, ἐφ᾽ οἷς εἶτα Θεώρημα, οἱονεὶ Θέσις ἐπάγεται. Οὕτως ἐκλαμβάνομεν Γραμμὰς δύο εἶναι Παραλλήλους, ἔκ τε ταύτης τῆς ὑποθέσεως τὴν τῶν Ἐναλλὰξ Γωνιῶν ἰσότητα, εἰ τρίτη γραμμῇ τμηθεῖεν, ἐξάγομεν· εἶτα Θεώρημα συνιστῶμεν, ὡς τεθείσης τῆς τῶν Ἐναλλὰξ Γωνιῶν ἰσότητος, τὸν τῶν Γραμμῶν Παραλληλισμὸν ἐκκύπτειν. Ἀλλ᾽ οὖν τέως Θέσιν Θέσεως βεβαιοτέραν οὐχ οἷόν τε λαβεῖν, Ὑπόθεσιν δ᾽ Ὑποθέσεως καὶ μάλα· ὥστε καὶ τοῦ θεωροῦντος εἶναι ἐκ τῶν ὑποτιθέναι δυναμένων ἑλέσθαι τὸ πιθανώτατον. Δυνατὸν δὲ καὶ εἰς Θέσιν μεταβάλλεσθαι τὴν Ὑπόθεσιν, ἐὰν ἡ προσληφθεῖσα εἰς ἀνάπτυξιν τοῦ φαινομένου αἰτία, ἐκτὸς πάσης ἀμφισβητήσεως γένηται. οἷον, ἡττοβαρῆ τὰ σώματα ὑπὸ τῷ Ἰσημερινῷ εἶναι, ἢ ὑπὸ τοῖς Ἄρκτοις, οἱ Νεώτεροι συνεωρακότες, ἐντεῦθεν τὸ πεπιέσθαι μὲν τὴν Γῆν ὑπὸ τοῖς Πόλοις, κυρτοῦσθαι δὲ μᾶλλον κατὰ τὸ μέσον ἐτόπασαν. Καὶ ἦν οὐκ ἀπιθάνως ἐν ὑποθέσεως λόγῳ τῆς τοῦ βάρους ἐπαυξήσεως αἰτία προβαλλομένη, ἡ τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τῶν βαρέων ἀποστάσεως μείωσις. Εἰς ὃ τῆς Γῆς τέως ὑπὸ τῶν ἐπίτηδες σταλέντων Σοφῶν Ἀνδρῶν (α),

(α) La Figure de la Terre determinée par les obſervations de M. M. Maupertuis, Clairaut, Camus, La Monnier et Outhier, accompagnés de M. Celſius par M. Maupertuis. Paris 1731. Amſt. 1738.

La Figure de la Terre determinée par M. M. Bouquer et de la Condamine. Paris 1749.

ἀκριβῶς καταμετρηθείσης, τό, τε σχῆμα αὐτῆς ἀκριφῶς διεγνώσθη, καὶ εἰς Θέσιν εἶναι ἡ πρὶν Ὑπόθεσις ἐξενίκησεν.

Θεώρημα ἐστὶ Πρότασις Θεωρητικὴ δείξεως χρήζουσα, καθ' ἣν τι κατά τινος, ἢ ἀπό τινος εἶναι λέγεται, ὅπερ διὰ μεσιτευούσης ἰδέας κατασκευάζεται· οἷον ὁ ἀὴρ ἐστὶ βαρύς· καί, καθ' Ἱπποκράτην (α), οἱ παχέες σφόδρα κατὰ φύσιν ταχυθάνατοι γίγνονται μᾶλλον τῶν ἰσχνῶν· ἡ Σφαῖρα ἴση ἐστὶ δυσὶ Κυλίνδρου τριτημορίοις, οὗ βάσις μὲν ἡ τῆς Σφαίρας μεγίστη τομή, ὕψος δὲ ἡ διάμετρος· καὶ τὰ τοιαῦτα. Γίνεται δὲ ἡ τούτου εὕρεσις κατὰ πρόοδον τὴν ἀπὸ τῶν ἁπλουστέρων ἐπὶ τὰ ἐξ αὐτῶν χωροῦσαν σύνθετα, ἤτοι διὰ τῶν Ἀρχῶν (β), αἵτινες εἰσὶν Ὁρισμοί, Ἀξιώματα, καὶ Αἰτήματα, περὶ ὧν ἀνωτέρω. Κἀντεῦθεν τῷ Θεωρήματι δύω τινὰ εἰσὶν ἀναγόμενα Πρότασις τε καὶ Δεῖξις· καὶ ἐν ἐκείνῃ μὲν τὶ κατά τινος, ἢ ἀπό τινος, οὕτως καὶ μὴ ἄλλως ἐκφέρεται, τουτέστι τὸ πράγματι ὁποιωοῦν ἐν ὑποθέσεσι τισὶ καὶ προσδιορισμοῖς προσεπανῆκον, ἢ μή· ἐν ταύτῃ δέ, οἱ λόγοι καὶ αἱ αἰτίαι, καθ'

Iournal du Voyage fait par Ordre du Roi à l' Equateur, par M. de la Coudamine, Caſsini, Iacq: de la ſigure et de la Grandeur de la Terre.

(α) Ἀφορ. Τμήματ. Β'.

(β) Πᾶν μέντοι Θεώρημα, πρῶτον μὲν ἀληθὲς εἶναι δεῖ· εἶτα δὲ χρήσιμον· εἶτ ἀκόλουθον ταῖς ὑποτεθείσαις Ἀρχαῖς. Γαλην. πρὸς Θρασύβουλ. περὶ ἀρίστ. ὑποθ.

ἃς ὁ Νοῦς τουτὶ καὶ μὴ ἄλλο τῷ ὑποκειμένῳ ἐφαρμόζεσθαι καθυπέβαλεν, ἐκτίθενται καὶ κρατύνονται.

Πρόβλημα ἐστὶ Πρότασις πρακτικὴ οὐκ ἀναπόδεικτος, ἡ προτιθεῖσά τι ποιητέον, οὗ καὶ τὴν Κατασκευὴν ἤτοι Λύσιν δέον ὑποθέσθαι καὶ τῆς Κατασκευῆς τὴν Ἀπόδειξιν· οἷον, Πολυγώνου οὑτινοσοῦν Κανονικοῦ δοθέντος, κύκλον περιγράψαι· καί, Τρίγωνον ἰσοσκελὲς συστήσασθαι, ἐν ᾧ ἑκάστη τῶν πρὸς τῇ βάσει Γωνιῶν διπλασία ἢ τῆς πρὸς τῇ κορυφῇ. Σύγκειται δὲ καὶ τοῦτο, ὡς καὶ τὸ Θεώρημα, ἐκ τῶν Ἀρχῶν, διενήνοχεν ἀλλ' οὖν τοῦ Θεωρήματος· ὅτι δι' αὐτοῦ μὲν τὸ προσῆκον, ἢ μή, τῷ ὑποκειμένῳ Θεωρητικῶς ἀποδείκνυται· διὰ δὲ τοῦ Προβλήματος, καὶ τὸν τρόπον δεῖξαι δεῖ καὶ κατασκευάσαι, καθ' ὃν πρακτικῶς εἰς τὸ εἶναι τὸ προβαλλόμενον ἄγεται. Ἔνθεντοι πᾶν Πρόβλημα ἐκ τριῶν σύγκειται μερῶν, Προτάσεως δηλονότι, Λύσεως ἤτοι Κατασκευῆς, καὶ Δείξεως· ὧν ἡ μὲν πρώτη τὶ κατά τινος ἢ ἀπό τινος εἶναι ἀγορεύει τε καὶ προσδιορίζει, ἡ δὲ δευτέρα πρακτικῶς τὸ προτεθὲν διαλύει τε καὶ κατασκευάζει, καὶ ἡ τρίτη διὰ μεσιτευούσης ἄλλης ἰδέας τουτὶ, οὕτως καὶ μὴ ἄλλως ἔχειν, ὀχυροῖ τε καὶ ἀποδείκνυσιν.

Πόρισμα δὲ ἐστὶ Πρότασις, ἐκ τοῦ ἤδη ἀποδειχθέντος Θεωρήματος ἢ Προβλήματος, ἀμέσως καὶ αὐτομάτως πως τὰ πολλὰ ἐκφερομένη· Οἷον, ἐπεὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς Τριγώνου, αἱ πρὸς τῇ βάσει Γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ἐὰν ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ Γωνία τῶν 180 ἀφαιρεθῇ μοιρῶν, καὶ τὸ ὑπόλοιπον δίχα διαιρεθῇ, ἡ ἑτέρα τῶν ἴσων Γωνιῶν ἐκκύπτει· καί, εἰ βαρὺς ὁ ἀήρ, οὐκοῦν πιέζει τε καὶ θλίβει, τὰ ἐφ' ὧν ἐπίκειται σώματα.

Τὸ δέτοι Λῆμμα ἐν μεταιχμίῳ ὂν τῶν Ἀναποδείκτων τε καὶ Ἀποδεικτῶν, Πρότασις ἐστίν, ἧς ἡ ἀπόδειξις ἐν ἄλλῃ πραγματείᾳ ἀποδοθεῖσα, ἐπὶ τοῦ προκειμένου ὑποτίθεται. Εἴωθε δ' ἐνίοτε καὶ δυσχεροῦς τινες Προτάσεως πρὸς εὐχερεστέραν προτίθεσθαι κατάληψιν. Οἷον, ἐὰν ὡς Λῆμμά τις ἐκ τῶν Ἀλγεβραϊκῶν ὑποθέμενος τό, Δυεῖν Ποσοτήτων, τὴν μὲν μείζω εὑρεῖν, τῇ ἐπὶ τῷ ἐντεῦθεν ἡμιαθροίσματι τῆς διαφορᾶς αὐτῶν προσθέσει, τὴν δ' ἐλάττω, τῇ ἀπ' ἐκείνων ἀφαιρέσει· ἐκ τούτου ἐν τῇ Τριγωνομετρίᾳ δεικνύειν ἐπιχειρῇ, τὸν μεταξὺ τοῦ δυεῖν πλευρῶν ἀθροίσματος πρὸς τὴν αὐτῶν διαφορὰν θεωρούμενον λόγον ἔχειν, ὡς τὴν ἁπτομένην τοῦ τῶν Γωνιῶν ἀθροίσματος, πρὸς τὴν τῆς αὐτῶν ἡμιδιαφορᾶς.

Σχόλιον δὲ ἐσχάτως οὐκ ἐν μοναδικῇ ὡς τὰ πολλὰ τινὶ Προτάσει κεῖται, ἐκ δὲ πλειόνων συγκεκρότηται, δι' ὧν ἔκ τε τῆς παρὰ τῶν ἄλλων μαρτυρίας καὶ ἐκ τῶν ὁμοίων, αἱ προχειρισθεῖσαι Προτάσεις διασαφοῦνται, καὶ πληρέστερόν πως κατασκευάζονται· οἷον, διὰ παραδειγμάτων, διὰ πειραμάτων καὶ παρατηρήσεων, διὰ τῆς τοῦ ἀντιπίπτοντος ἐπιλύσεως, διὰ μαρτυρίας τῶν ἐνδοξοτάτων τινος, καὶ τῶν ὁμοίων. Ἐνίοτε δὲ καὶ τὸν τῆς προκειμένης Προτάσεως εὑρετὴν ἐπαίνοις καταστέφομεν, καὶ σχεδὸν τοὺς ἐντυγχάνοντας περὶ τῆς ποιότητος πράγματός τινος, ὠφελίμως προτρέπομεν.

Εὔχρηστος τοίνυν ἡ Μαθηματικὴ οὐχ ὅπως εἰς πορισμὸν Ἐπιστήμης, ἀλλὰ δὴ κἂν ταῖς ὁσημέραι ἐν τῷ κοινῷ τουτωῒ Βίῳ ἀπαντώσαις χρείαις· καὶ μὴν καὶ ἐν βουλαῖς, καὶ ἐν πράξεσι, καὶ ἐν ἅπασιν ἁπλῶς, οἷς ὁ ἐκ τοῦ ὀρθοῦ λόγου χαρακτηρίζεται ἄνθρωπος· Ὥστε καὶ τοὺς δύσνως πως ἔχοντας καὶ ἀμβλύτητα τοῦ λογιστικοῦ νοσοῦντας, διὰ τῆς ἐπιπόνου περὶ ταύτην μελέτης ὀξύνους καὶ εὐφυεῖς ἀναδείκνυσθαι. Διὰ ταύτης γὰρ θαυμαστὸν ὅσον ὁ Νοῦς ῥώννυται καὶ στομοῦται, καὶ τήν τε κρίσιν καὶ τὰς ἄλλας αὐτοῦ ἐνεργείας ὀξύνεται· κἀντεῦθεν εὐστόχως κρίνειν μαθόντες ἐπικρινοῦσιν, οἷαν δὴ πρὸς ἅπαντα αὐτόθεν τὴν στάθμην καὶ γνώμονα ἐκαρπώσαντο. Συντείνει καὶ γὰρ μάλα, ὡς οὐδεμία τις ἄλλη τῶν Ἐπιστημῶν εἰς γνῶσιν τῆς ἀνθρωπίνης φύσεως, καὶ τέλος παρέχεται τοῖς οἰκείοις ὀργιασταῖς, τὸ γνῶναι σφᾶς αὐτούς, καὶ ἐγκρατεῖς γενέσθαι τῆς σοφῆς παραινέσεως, ἣν διὰ τὸ θαυμάσιον, ὁ πάλαι χρόνος εἰς Θεὸν ἀνήνεγκε διατάττοντα. Ταύτης γὰρ πᾶσα ἐξήρτηται ἡ ἐν ἀνθρώποις εὐδαιμονία, καὶ ἐπ' αὐτῆς, ὡς ἐπὶ πρώτης κρηπῖδος, ὁ τῆς ἀνθρωπίνης ὑπεροχῆς κολοφὼν ἐπερήρεισται. Ἐκ μιᾶς γὰρ ταύτης πηγάζουσι τὴν ἀρχὴν καὶ διασώζονται Νόμοι, Πολιτεῖαι, τάξεις αἱ ἐν ἀνθρώποις τε καὶ διάκοσμοι, ἀρεταί, τέχναι πᾶσαι, δι' ὧν ἄνθρωπος τῶν ὑπὸ Σελήνην ἁπάντων δεσπότης καθίσταται, καρπούμενος Γῆν τε καὶ Θάλασσαν τὰ μεγάλα Στοιχεῖα, καὶ τούτων κρατεῖ καὶ δουλεύειν ἑαυτῷ ἀναγκάζει. Αὕτη καὶ γὰρ γῆν ἄγονον, καρποφόρον ἀνέδειξε, γεωργοῦ τε πόνους ἠμείψατο, καὶ λιμοῦ ἀνέστειλεν ἐπαπείλησιν· ὕψη ὀρέων ἐμέτρησε, καὶ σωμάτων Οὐρανίων κινήσεις συνοῖδε, καὶ ἀπρόσιτον διέγνω χῶρον· Τίς δέτοι τῶν Ἐπιστημῶν ἄλλη παρὰ ταύτην πολυφλοίσβοιο ἐξοιδούμενα κύματα Θαλάσσης κατεύνασε, καὶ Νῆα ποντοποροῦσαν κλύδωνος ἀφαρπάσασα γαληνίῳ λιμένι προσώρμισε; καὶ Πόλεις δὲ αὕτη, καὶ Ἐπαρχίας ὅλας πολλάκις διέσωσεν, ἐχθρὸν ἔφοδον ποιησάμενον βόμβῳ πυροβόλων ὀργάνων διασείσασα, καὶ εἰς φυγὴν τρέψασα· καὶ τεῖχος δὲ ἐπάλξεσι σφοδραῖς κραδαινόμενον, καὶ χαρακώμασι πανταχόθεν περιφρουρούμενον, εὐμηχάνως κατέβαλε· καὶ μὴν καὶ πόλιν εὔπυργον, ἐχθρῶν ἐναπέδειξε λάφυρον· δι' αὐτῆς καὶ γὰρ Στρατηγὸς τρόπαιον ἔστησε, καὶ θρίαμβον Ναύαρχος διὰ θαλάσσης ἐκράτυνε. Τί δαί; ὁ τὰς τῶν Φωστήρων ζοφώσεις προγνοὺς, οὐχὶ διὰ ταύτης τῷ Περσῶν Ἄνακτι Σεληνιαίαν προεφοίβασε σκότωσιν; ἀλλ' ὁ τῆς οἰκείας Πατρίδος ὑπεραμυνόμενος, οὐχὶ διὰ ταύτης πολεμίους ἐπὶ χρόνον διέφθειρε; παρίημι τὸν πρὸς τῇ Μαθηματικῇ δεξιότητι καὶ Στρατηγικὴν ἐμπειρίαν ἐπιδειξάμενον, τὸν ἐν ταῖς οἰκείαις μάχαις πεντάκις τῶν οἰκείων ἡγησάμενον, πεντάκις δὲ καὶ τρόπαιον στήσαντα· οὐδέγε τοῦ Περιστερὰν ἐκ ξύλου εἰς ἀέρα φερομένην τερατευσαμένου, ἢ τοῦ τὸ Ναυτικὸν τῇ τῶν Ὀπτικῶν Κατόπτρων μεθοδείᾳ κατεμπρήσαντος, σκοπὸς ἡμῖν μνείαν ἐνταῦθα ποιήσασθαι· ταῦτα γὰρ πάντα ἡ κατ' αὐτὴν Ἱστορία σαφέστερον πρὸ ἐμοῦ διελεύκανε. Εἰδὲ σμικρὰ ταύτης τινὲς φροντίζουσιν, οὐ παρὰ τοῦτο τῆς οἰκείας αὕτη ἀξίας ἐκπέπτωκε·

τοιαύτης γὰρ ἠμοίρηκε φύσεως, ἥτις καὶ καθαιρουμένη πλέον ὑψοῦται, καὶ καταπατουμένη μᾶλλον ἐγείρεται, καὶ σιγωμένη ἀνακηρύττεται, καὶ κατηγορουμένη μᾶλλον λαμπρύνεται· κἂν γὰρ ὁ τῆς Μαθήσεως ἄξιος ἐραστὴς ἐν παραβύστῳ που τύχῃ κείμενος, Δυνάσταις ὀλιγωρούμενος, καὶ τοῖς πολλοῖς ἀγνοούμενος, Γῆν ἔμπης περιτρέχει τῇ θεωρίᾳ, πελάγη διαπερᾷ, βυθίους μυχοὺς ἐρευνᾷ, δι' ἀέρος ἵπταται καὶ εἰς Οὐρανοὺς φέρεται, συναυγάζει Σελήνῃ, συμπεριθέει Ἡλίῳ, τὰ πάντα περινοστεῖ, τῶν ἁπάντων μεγέθους, καλλονῆς, τάξεως, εὐφυΐας τε καὶ εὐαρμοστίας μόνος ἐντρυφῶν. Ὅτι δὲ οὐ καθ' ὑπερβολὴν λέγων οὕτως ἐνάγομαι ἀποφαίνεσθαι, ῥᾷστα ἄν τις ἐπιγνοίη, τὴν ταύτης λυσιτέλειαν τοῖς ὑπ' ἐμοῦ ῥηθεῖσιν ἀντιπαρατάξας καὶ παρακρίνας.

Τοὺς μὲν οὖν τῆς Μαθηματικῆς καρποὺς, ἀθλίως καίτοι ὑπὸ τῶν ἐπηρεαζόντων ἐκβαρβαρωθεῖσα, ἐκ διαλειμμάτων μέντοιγε ἡ Ἑλλὰς ὤφθη φέρουσα. Ἐν γὰρ τοσούτῳ κακῶν μεγέθει, ἐγένοντο καὶ μεταξὺ, οἷς παιδείας τε καὶ μαθήσεως ἐμέλησεν. Ἀλλὰ δὴ ξὺν Θεῷ, καὶ οἴσει. Πολλοὶ γὰρ εἰσὶν, οἱ τὰ τῶν Μαθημάτων, Φιλοσοφίας τε καὶ παντὸς εἴδους λόγων φιλοπονήματα ἐκ τῶν Λατίνων, καὶ τῶν λοιπῶν ἀν' Εὐρώπην Ἐθνῶν, εἰς Ἑλλάδα διαπορθμεύοντες, πῇ μὲν ἰδίως ξυγγράφοντες, πῇ δὲ καὶ τὰς ἐκείνων ἐξελληνίζοντες Βίβλους· ἔνθεν τοι καὶ ἀξιοχρέους τῶν ἐπὶ καταρτισμῷ τῶν Ἑλλήνων φιλοπονηθέντων τὰς ἀντιδόσεις παρά τε τοῦ Γένους παντὸς, καὶ αὐτοῦ δὴ τοῦ Θεοὐ τέως κομιοῦνται οἱ τοιοῦτοι (α). Ὥσπερ γὰρ πολλοὶ πάλαι τῶν παρὰ Λατίνοις Μουσολήπτων, ἀν' Ἑλλάδα ἐφοίτων, καὶ τὰ παρ' Ἑλλήνων πεποιημένα μετιέναι σπουδὴν τὴν πᾶσαν ἐτίθεντο· οὕτως ὕστερον τῶν Διὸς κύβων ἄλλως μεταπεσόντων, παῖδες Ἑλλήνων παρὰ Λατίνους ἐπιδημοῦσι παιδείας ἕνεκα, καὶ τοὺς πε-

(α) Ὁ ἐν τῷ κατὰ τὴν Οὐγκρίαν Σαβατσαλασίῳ παροικῶν, κατὰ δὲ τὸ 1805 Ἔτος τὸ ζῆν ἐκμετρήσας κύριος Γεώργιος Ζαβείρας ὁ ἀπὸ Σιατίστης, Ἀνὴρ εὖ ἥκων παιδείας, φιλογενής τε ἐκτόπως καὶ φιλόπατρις, Σύγγραμμά τι ὑπ' αὐτοῦ φιλοπονηθὲν καὶ ἐν χειρογράφῳ σωζόμενον, τὰς κατὰ τὴν Φιλοσοφίαν διατριβὰς ἐν τῇ κατ' Οὐγκρίαν Βασιλικῇ Πανδήμῳ Ἀκαδημίᾳ ποτε ποιοῦντί μοι ἰδεῖν παρέσχεν· ἐν ᾧ φιλοπόνως οἱ μετὰ τὴν τῆς ἡμετέρας τῶν Πόλεων Βασιλίδος ἅλωσιν ἐν οἱῳδήποτοῦν εἴδει παιδείας, ἢ γοῦν διὰ συγγραφῆς, ἢ καὶ διὰ μεταφράσεως εὐδοκιμηκότες Γραικοί, πάνυ σοφῶς ἐνηρίθμηνται. Ἔφη δέ μοι τὸ τηνικαῦτα ὁ Ἀνὴρ, ἐνστάσεως τινος μεταξὺ αὐτοῦ, καὶ τινος τῶν παρὰ Καλβίνοις Ἱερολογούντων ἐπισυμβάσης, ἀφορμῆς δράξασθαι τὸ τοιοῦτον φιλολογικὸν ἐκπονῆσαι Ἱστόρημα. Ἀντετείνετο καὶ γὰρ ἀμαθῶς λίαν ὁ ἀμφὶ Καλβῖνον διαθρασυνόμενος, τοὺς Γραικοὺς πάντῃ πάντως, μετὰ τὴν τῆς αὐτῶν Βασιλείου ἀρχῆς ἀποβολὴν ἐκβαρβαρωθῆναι. Διὸ καὶ εὐθίκτως μάλα τὸν οὕτω ἀπαιδεύτως κατορχούμενον, καὶ τὴν τοῦ ἡμετέρου Γένους θλίψιν τε καὶ ταπείνωσιν κατεπονειδίζοντα Καλβινόφρονα, ἐν ὁλοκλήρῳ τῇ Διατριβῇ διεξοδικῶς ἐκπονηθείσῃ, ἔφθη ἀπαντήσας ὁ Ζαβείρειος κάλαμος. Ἄξιον δὲ τὸ τοιοῦτον Σύγγραμμα καὶ μάλα τὸ φῶς διὰ τῆς Τυπογραφίας ἰδέσθαι ποτέ· ὃ καὶ ἐν εὐχῆς μοίρᾳ.

ρὶ τὰς Ἐπιστήμας, καὶ τἄλλα τῶν λόγων εἴδη ἐν Λατίνοις μετίασι διαπρέψαντας, ὅθεν οὐ μικρὰν τυγχάνουσιν ἀρυόμενοι ἡδονήν τε καὶ ὄνησιν. Διὸ οὐδ' ἀμελητέον, οἷς γε ἱλαρῶς ἡ τύχη ἐπέβλεψε, τὰ παρὰ τοῖς Δυτικοῖς τῶν Μαθημάτων καὶ τῶν λοιπῶν Ἐπιστημῶν ἀγώγιμα, ἐξ ἐκείνων εἰς Ἑλλάδα διαπορθμεύειν. Οὕτω γάρ ποτε τοῖς ἡμετέροις ἀποχρώντως ἐν περιουσίᾳ τυγχάνουσιν, ἡμῖν ἐξέσται

Καί γ' ἐπ' ὀνείαθ' ἑτοῖμα, προκείμενα, χεῖρας ἰάλλειν·
Εἰς ὅ μηκέτι θυμὸς (ἡμῖν) δεύοιτο δαιτὸς ἐΐσης.

Ἀλλὰ γοῦν, τὸ μὲν ἡμέτερον τουτὶ Σπούδασμα, οὐ μικρὰν ἐξ αὐτοῦ τοῖς μετερχομένοις προμνηστευόμενον τὴν ὠφέλειαν, οὕτω πως ἐκ τῶν ἐνόντων ἡμῖν ἐσχεδίαστο, ὥστε καὶ Βασιλεῦσι θαῤῥούντως πελάζειν, καὶ ἐν πύλαις Δυναστῶν παρεδρεύειν, καὶ ἰδιώταις συνεῖναι, ἔν τε ἐξόδοις καὶ πλατείαις παῤῥησίαν ἄγειν, κατὰ τὸ Ἱερὸν Λόγιον. Εἰ γὰρ καὶ βραχὺ, ὡς πρὸς τὰ τῶν ἄλλων παραβαλλόμενον, ἀρκέσειε πάντως τοῖς γ' εὐγνώμοσι, πρὸς τὸ πολύχουν τινα ἐντεῦθεν καρπώσασθαι τὴν ὠφέλειαν· ἐκ τοσούτων γὰρ καὶ τηλικούτων αὐτὸ συμπεπύκασται, ὅσα τυχὸν, οὐδ' ἐν πολλῷ τούτου διαφέρουσι τῷ μεγέθει ῥαδίως εὑρεθήσονται τοῖς Συγγράμμασι. Καὶ τῶν μὲν προὐργιαιτέρων εἰς βάθος ἡψάμεθα, τὰ δέγε κατὰ τὴν τῆς πράξεως καὶ τῆς χρείας ἀκολουθίαν ἔστιν ὅπου λιτῶς τε καὶ ἀπερίττως διεξήλθομεν, καὶ ὡς οὐκ ἦν ἄλλως ποιῆσαι Στοιχειωδῶς συγγράψαι προθέμενον· τὰ δὲ, οἷα τὰ τῆς ὑπερεχούσης

Ἀναλύσεως, κατὰ χώραν ὡς εἶχον ἐάσαντες, οὐδὲ μνείαν γοῦν αὐτῶν τὸ παράπαν ἐποιησάμεθα. Μωμήσαιτο γάρ ἄντις ὡς εἰκὸς, τοὺς ἐν αἷς πραγματεύονται, τὰ μηδεμίαν μὲν ἐπὶ τοῖς προκειμένοις συντέλειαν παρεχόμενα Φιλοτιμουμένους ἐκτιθέναι, πολλοῦ δὲ τοῦ λόγου χρήζοντα, ὥστε συνετὰ γενέσθαι, καὶ πολλῆς στοιχειώσεως. Διὸ καὶ τὰ παρ' ἡμῶν, οἷά τις Κόχλη ἐστὶ, τὰ μὲν ἀναποσπάστως ἀλλήλοις ἐπικοχλῶσά τε καὶ συσφίγγουσα, τὰ δὲ ὅσον συνέχεσθαι ποιοῦσα, τὰ δὲ μηδὲ τὴν ἀρχὴν συνάπτουσα. Κἀντεῦθεν ὁ ἐνδοτέρω τοῦ νοητοῦ γενέσθαι ἐφιέμενος, πῇ μὲν ἐκ τῶν προδηλοτέρων τὰ ἀδηλότερα τεκμαιρόμενος καὶ τοῖς ἤδη κειμένοις τὰ ἑπόμενα ὀρθῶς ἐπιφέρων, πῇ δὲ τὰ ὑπὸ ζόφῳ λανθάνοντα, εἰς Φῶς ἐξάγων καὶ τοῖς ἄλλοις διαλευκαίνειν προθυμούμενος, εὕροι ἂν τοῦ σκοποῦ ἀξίαν τὴν σπουδὴν καταβεβληκέναι, εἰ ἐπιμελῶς τουτὶ μετίοι τὸ σπούδασμα· ὅτι γὰρ τὰ τῆς διαλήψεως, πρὸς τὸ σαφὲς καὶ λεῖον, καὶ τοῖς ὑποκειμένοις προσφυὲς καὶ ἀπαραβίαστον ἀπηκρίβωται, αὐτόθεν κατάδηλον. Οἱ δ' οὖν ἐντευξόμενοι, εἰμέν τι ἐλλειπῶς ἔχον εὕροιεν, καὶ Φαύλως, καὶ οὐ πάνυ πολλοῦ τυγχάνον, τοῦ ὀρθοῦ καὶ δικαίου Φροντίζοντες, τὴν ὁμόχρουν, ἢ τὴν λευκὴν, ἢ τὴν μέλαιναν, ὅπως πότ' ἂν βούλοιντο, ψηφισάσθωσαν· Εἰδὲ τισιν ἐντύχοιεν τῶν σπουδαίας ἐχομένων μοίρας, καὶ λόγου ἀξίων, τούτοις ὡς εἰκὸς τόγε νῦν ἔχον ἀρκούμενοι, τοῖς ἔτι ἀμυήτοις αὐτὰ καὶ ἀτελέστοις κοινῶσαι μὴ ἀπαξιούτωσαν, τὸ οὕτως συμπορισθὲν καὶ αὐτοῖς ἐμπιστευθὲν τάλαντον, κατὰ τὴν Δεσποτικὴν

Φωνὴν, ὁ μὲν εἰς τριάκοντα, ὁ δὲ εἰς ἑξήκοντα, ὁ δὲ εἰς ἑκατὸν, ἕκαστος ὅπως ἔχοι δυνάμεως, πολλαπλασιάζοντες·

Ἀλλ' οὕτως, αἴκέν τι φόως Ἕλλησι γένηαι.

Οὕτω γὰρ, αὐτοὶ μὲν ἀνδρὸς τρόπον ἐνδείξαιντο ἂν ἀγαθοῦ καὶ εὐγνώμονος, ἡμεῖς δὲ μείζονα τούτων καὶ τελεώτερα αὐτοῖς παραθεῖναι οὐ κατοκνήσωμεν. Εἰ γάρ που, κἀνταῦθα χώραν ἔχει τὸ Ἐπιχάρμειον.

Ἁ δὲ χεὶρ τὰν χεῖρα νίζει· Δός τι καὶ λάβε τι.

Ἅμα μὲν τῆς πάλαι τοῦ Γένους ἡμῶν ἀφθονίας τὴν μνήμην Φέροντες, ἅμα δὲ κἀπὶ τὴν πρώτην ἐπανελεύσεσθαι οὐκ ἀπελπίζοντες εὐετηρίαν τε καὶ λαμπρότητα, εἴποτε τοῖς καθ' ἡμᾶς εὐμενῶς ἡ Πρόνοια ἐπιβλέψειεν.

μασιωτέροις λόγοις συγκαταμίξας τε καὶ διευκρινήσας, εἰς ταυτὸ τὰς Ἕξεις ἐν τοῖς αὐτοῦ Βιβλίοις συνῆψε καὶ συνηρμόσατο. Ἐκ δὲ τῆς τοῦ Πλάτωνος Ἀκαδημίας οὐκ εὐαρίθμων ἐξεῤῥυηκότων ἀνδρῶν, τριῶν ἐπὶ δέκα τῶν ἐκείνου γνωρίμων ὁ Πρόκλος μέμνηται περὶ τὰ Μαθηματικὰ διαφερόντως ἐσπουδακότων· ὧν ὁ μὲν Λεοδάμας τὴν, ἣν ὑπὸ Πλάτωνος περιειλήφει Ἀνάλυσιν ἐπιμελῶς γυμνάσας, δι᾽ αὐτῆς πολλῶν εὑρετὴς ὀφθῆναι ὑπὸ Λαερτίου γεραίρεται· ὁ δὲ Κνίδιος Εὔδοξος, τὰ μὲν ἄλλα τοῖς πρὸ αὐτοῦ ἴσος, τὰ δὲ Ἀριθμητικὰ καὶ πολλῷ κρείσσω ἀναδέδεικται. Μετὰ τοὺς ἐκ τῆς Ἀκαδημίας ἀλλ᾽ οὖν καὶ τοῦ Περιπάτου ἐξεῤῥυηκότας σοφοὺς Ἄνδρας, ναὶ μὴν καὶ Ἀρχιμήδην ἐκεῖνον τὸν τῆς ἐν ἀνθρώποις λεπτονοίας καὶ τῆς Μαθηματικῆς ἁπάσης παιδείας κολοφῶνα, καὶ τοὺς μετ᾽ ἐκεῖνον λοιποὺς, ἐπὶ τὸν Ἀλεξανδρέα Διόφαντον (α) τέως ἡμᾶς φέρων ὁ λόγος κατήγαγεν. Ὃς δὴ τοιοῦτος κατὰ τὰ Ἀριθμητικὰ ὤφθη, οἷος κατὰ τὴν Γεωμετρίαν Ἀρχιμήδης, καὶ Ἀπολλώνιος, καὶ Εὐκλείδης εἰσὶ κλειζόμενοι. Ἁπάσης γὰρ ἐκεῖνος τρόντι τῆς Ἀριθμητικῆς λεπτονοίας, καθηγεμὼν οἷα γεραίρεται. Τούτου γὰρ δὴ ἐπίνοια καὶ ἡ θαυμαστὴ τέχνη, ἣν Ἄλγεβραν ὀνομάζουσιν (β) ἡ καθ᾽

(α) Εἰ καὶ περὶ τοῦ χρόνου, καθ᾽ ὃν ἀκμάζων ἦν ὁ Διόφαντος ὑπῆρξαν οἱ ἐνδοιάσαντες, τὴν γεμὴν Τετάρτην Ἑκατονταετηρίδα τὸν ἀληθῆ γενέσθαι τοῦ Συγγραφέως χρόνον, καθ᾽ ὃν τῷ Βίῳ ἐκεῖνος περιὼν ἤνθει, ἄνδρες ἐπέγνωσαν τῶν Κριτικωτάτων.

(β) Γακονέτιος ἐν τῇ αὐτοῦ Ἱστορικῇ Ἀφηγήσει περὶ ἀρχῆς καὶ προόδου τῶν Μαθηματικῶν Ἐπιστημῶν.

ἡμᾶς ὑπὸ τῶν Νεωτέρων καθολικωτέρα καταστᾶσα, καὶ ἐπὶ πολὺ ἀκριβείας καὶ τελειότητος προελάσασα.

Συνέγραψε μὲν δὴ Διόφαντος τρισκαίδεκα τὰς πάσας Βίβλους, ὡς μόνος ἐν τῷ τῆς αὐτοῦ Εἰσαγωγῆς τέλει δηλοῖ· πρὸς ἡμᾶς δὲ ὁ τοῦ χρόνου ῥοῦς ἓξ μόνον παρέπεμψε, μετὰ καὶ ἑτέρας τινὸς περὶ τῶν Πολυγώνων ἀριθμῶν. Τὰς μὲν οὖν Διοφαντείους Βίβλους ὑπὸ τῆς Φιλοσόφου Ὑπατίας (α), τὸν τῆς Ἀλεξανδρείας Διδασκαλικὸν θρόνον κατὰ τὴν Πέμπτην Σωτήριον Ἑκατονταετηρίδα περικλεῶς κοσμούσης, ὑπομνηματισθῆναι, ὁ Τζιμερμάνιος (β) παραδέδωκε· τὸ δέγε τοιοῦτον Ὑπόμνημα μετὰ καὶ ἑτέρων τυχὸν πλείστων ἐν τῇ κατ᾽ Ἀλεξάνδρειαν περικλεεῖ ἐκείνῃ Βιβλιοθήκῃ ἐγκαιμένων, Καλλιφικῆς φρενοβλαβείας ἔργον καὶ φλογὸς ἐγένετο παρανάλωμα. Αἱ μέντοι ἄχρις ἡμῶν διασωθεῖσαι, ἐν Κώδιξι χειρογράφοις πρότερον ἐν τῇ κατὰ τὴν Ῥώμην Βατικανῇ Βιβλιοθήκῃ ὑπὸ πυκνῷ τῷ ζόφῳ κρυπτόμεναι καὶ πελιδνόχροες εὐρωτιῶσαι, τὸ πρῶτον μὲν σητῶν καὶ εὐρῶτος ἀπαλλαχθεῖσαι Ῥωμαϊστὶ μόνον ὑπὸ Ξυ-

(α) Γαμετὴ μὲν ἡ Ὑπατία ὑπῆρξε Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως. Διδάσκαλος δὲ ἐπὶ τὰ Φιλοσοφούμενα Συνεσίου, τοῦ ἀπὸ τῆς κατ᾽ Αἴγυπτον Κυρήνης. Ταύτης δὲ τὸ σαρκίον ἀπηνῶς πάνυ καὶ ἀπανθρώπως παρὰ τῶν Ἀλεξανδρέων κατὰ τὴν τοῦ 415 σωτηρίου ἔτους τεσσαρακονθήμερον διασπασθὲν, καὶ εἰς κόρον ἐνυβρισθὲν, Αἰγυπτιακῆς ὠμότητος, καὶ θεοστυγοῦς δεισιδαιμονίας, κατὰ πᾶσαν τὴν Πόλιν, μᾶλλον δὲ τὴν Οἰκουμένην πᾶσαν, διεσπάρη μαρτύριον.

(β) Zimmermanns Werke von der Einsamkeit λάνδρου, κατὰ τὸ 1575 ἐν Βασιλέᾳ εἰς Φῶς προέκυψαν. Ἐν δὲ τῷ 1621 συνάμα τῷ Ἑλληνικῷ πρωτοτύπῳ καὶ τῇ Ῥωμαϊκῇ ἢ Λατινίδι μεθερμηνεύσει, ὑπὸ Βαχέτου τὸ δεύτερον ἐν Παρισίοις ἐξεδόθησαν. Τέως δὲ καὶ τρίτον ὁ αὐτὸς Βαχέτος, ταῖς παρ' ἑαυτοῦ, καὶ τοῦ Φερμάτου τοῦ τῆς Τολόσης Βουλευτοῦ, Σημειώσεσί τε καὶ Ὑπομνήμασι ταύτας πυκάσας, κατὰ τὸ 1670 ἔτος ἐν τῇ κατὰ Γαλλίας Τολόσῃ, ἀκριβέστερον καὶ πολλῷ τῶν δυεῖν προτέρων ἐκδόσεων κρεῖττον εἰς Φῶς ἐξέδωκεν. Αἱ μὲν οὖν ταύταις ταῖς Βίβλοις ἀπαντῶσαι Προτάσεις, ἐν μέρει γοῦν μείζονι πρὸς τὴν ἀΦηρημένην ἀπεῖδον Ἀνάλυσιν· αἱ δέγε τῆς Πρώτης, πλὴν τῶν Λ'. ΛΑ'. ΛΓ'. πρωτοβαθμίους ἡμῖν ἐξισώσεις προβάλλουσαι, προσδιορισμέναι τυγχάνουσι. Τὸ δὲ ὅλον, ἵνα συνελὼν εἴπω, Σύγγραμμα, δεῖγμα τῷ ὄντι ἐναργέστατον τῆς τοῦ ΣυγγραΦέως ἀγχινοίας τε καθέστηκε καὶ ὀξύτητος, δι' οὗ ἀριδηλότατα συνιδεῖν ἔχομεν τὸν Ἄνδρα ἀτρύτῳ τινὶ καὶ τῷ ὄντι δαιμονίῳ τῇ ἐπιβολῇ χρησάμενον, αὐτὰ τὰ τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως ἄδυτα κατοπτεῦσαι, καὶ βαθέως ἐξιχνεῦσαι, καὶ τοῦ νοητοῦ, εἴπέρ τις ἄλλος τῶν πάλαι, εἴσω γενέσθαι. Εἴωθε δὲ ΔιόΦαντος τὴν μὲν ἀόριστον Ποσότητα ἀριθμὸν ἀπροσδιορίστως ἀποκαλεῖν, ταύτην διὰ τοῦ ϛ ἐμΦαίνων. Εἰ δέγε τῇ τοιαύτῃ Ποσότητι καὶ Συνθέτης προσαντῷτο, τότε δὴ τὸ μὲν σημεῖον διπλάζειν Φιλεῖ, τὸν δὲ Συνθέτην κατὰ τὴν αὐτὴν σειρὰν ὄπισθεν ἐπιτάττειν, οἷον ϛϛ'''γ, τουτέστι κατὰ τὴν παρ' ἡμῖν χρῆσιν 3χ. ἘΦεξῆς δέ, ὁ μὲν ἀριθμοῦ τινος Τετράγωνος τῷ δ^{υ} ἐπισεσημείωται, ὁ δὲ Κύβος τῷ κ^{υ}, τὸ δὲ Διτετράγωνον τῷ $\delta\delta^{\upsilon}$, ἡ δὲ Πέμπτη δύναμις τῷ $\delta\kappa^{\upsilon}$, ἡ δὲ Ἕκτη τῷ $\kappa\kappa^{\upsilon}$, καὶ ἡ μονὰς ἔσχατον τῷ $\overset{\circ}{\mu}$. Συντελεῖ δὲ πρὸς ἔννοιαν ἀκριβῆ τῶν ὑπὸ τοῦ ΔιοΦάντου εἰρημένων, αὐτὰ πληρέστερον ἐνταῦθα μεταγράψαντας παραθέσθαι. Φησὶ γὰρ ΔιόΦαντος αὐταῖς λέξεσιν οὕτω. (α). „Καλεῖται οὖν ὁ μὲν Τετράγωνος, Δύναμις, καὶ ἔστιν αὐτῆς σημεῖον δ' ἐπίσημον ἔχον υ, δ^{υ}· ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου ἐπὶ τὴν αὐτοῦ πλευρὰν πολλαπλασιασθέντος Κύβος, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον κ' ἐπίσημον ἔχον υ, κ^{υ}· ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου ἐΦ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος Δυναμοδύναμις, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον δέλτα δύο, ἐπίσημον υ, $\delta\delta^{\upsilon}$· ὁ δὲ ἐκ Τετραγώνου ἐπὶ τὸν ἀπὸ τῆς αὐτῆς αὐτῷ πλευρᾶς Κύβον πολλαπλασιασθέντος Δυναμόκυβος, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον δύο κκ, ἐπίσημον ἔχοντα υ, $\kappa\kappa^{\upsilon}$· ὁ δὲ μηδὲν τούτων τῶν ἰδιωμάτων κτησάμενος, ἔχον δὲ ἐν ἑαυτῷ πλῆθος μονάδων, ἄλογος ἀριθμὸς καλεῖται (β), καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον τὸ ϛ· ἔστι δὲ καὶ ἕτερον σημεῖον τὸ ἀμετάθετον τῶν ὡρισμένων ἡ μονάς, καὶ ἔστιν αὐτῆς σημεῖον τὸ μ ἐπίσημον ἔχον τὸ ο, $\overset{\circ}{\mu}$.

(α) Βιβ. Α'. τῶν Ἀριθμητικῶν Ζητημάτων.

(β) Ἐν μὲν τῷ Κώδικι κεῖται, ἄλογος ἀριθμὸς καλεῖται· κρεῖττον δέ, πλῆθος μονάδων ἄλογον ἀναγνωστέον. Καὶ γὰρ διὰ τοῦ τῶν μονάδων ἀλόγου πλήθους, ἀριθμόν τινα ἄγνωστον, ἤτοι ἀπροσδιόριστον ἐννοῶ· ὃν ὁ ΔιόΦαντος τῷ ὡρισμένῳ, ἤτοι μονάσι προσδιορισμέναις παρακατιὼν ἀντιτίθησι.

Ἡ μὲν οὖν τῆς Ἀλγέβρας σπουδὴ οὐδόλως διὰ τῶν Διοφαντείων πόνων τοῖς πρὸς ἥλιον δυόμενον τετραμμένοις διεγνωρίζετο, ἀλλά γε διὰ τῶν Ἀράβων. Καὶ πρῶτον μὲν κατὰ τὴν τοῦ Πιζαίου Λεονάρδου μαρτυρίαν, ὑπὸ τοῦ Καρδάνου ἡμῖν προβαλλομένην (α), ὑπό τινος Ἄραβος Μωάμεθ τοῦ Μωϋσαΐδου (Βὲν Μούσα) Φιλοσόφου τε καὶ ἐπιστήμονος ἐς ἄκρον, οἷα δὴ πρώτου περὶ τὴν Ἄλγεβραν συντεταχότος· ὥστε κἀν τισι τῶν Βιβλιοθηκῶν, χειρόγραφον τὸ ἐκείνου σώζεσθαι Πόνημα (β). Εἶτα δὲ κατὰ τὸ ω'. που ἀπὸ τῆς τοῦ Σωτῆρος ἐπιφανείας ἔτος τοῖς ὅπλοις οἱ Ἄραβες θαυμαστῶς διευδοκιμηκότες, καὶ πολλὰ μὲν τῶν πρὸς ἀνίσχοντα ἥλιον ὑπαγαγόντες ἐθνῶν· πᾶσαν δὲ ἑξῆς Λιβύην, καὶ πᾶσαν μονονουχὶ τὴν Ἰβήρων τῶν πρὸς δυόμενον ἥλιον ὑφ' ἑαυτοὺς ποιησάμενοι, ἐκεῖσε ταύτην τὴν Ἐπιστήμην ὡς αὐτοῖς οἰκείαν συνεπέφερον. Οἱ μὲν οὖν Ἄραβες οὐδόλως τῶν παρὰ τοῖς Ἕλλησιν κατὰ τὴν Ἄλγεβραν ἐν χρήσει στοιχείων, ἢ γραμμάτων ἐν ἀγνοίᾳ καθεστηκότες ἐτύγχανον. Συνεργὸς δὲ τῆς κατ' αὐτοὺς Μαθηματικῆς, κατὰ τὴν τοῦ Ἀβουλφαραγὶ παρὰ Κλυγελίῳ (γ) μαρτυρίαν, εἰσήχθη Διόφαντος, βαρβαρίζων μὲν τῇ φωνῇ (Ἀραβιστὶ γὰρ διηρμήνευτο), πάνυ δὲ λεπτῶς τὸν νοῦν ὑπομνηματιζόμενος· ὥσθ' οὕτω τὴν

(α) Klügel Mathematisches Wörterbuch, Erster Th. S. 32.

(β) Κλυγέλιος, αὐτόθι.

(γ) Ἔνθα ἀνωτέρω.

παρὰ τοῖς Ἕλλησι τῆς διαβατικωτέρας Ἀριθμητικῆς ἤτοι Ἀλγέβρας πραγματείαν, μᾶλλον δὲ τὴν περὶ τὰς πρωτοβαθμίους ἐξισώσεις στρεφομένην, συστηματικωτέρως ὑπὸ τῶν Ἀράβων ἐκπονηθεῖναι· εἰ καὶ πρὸ τούτου, τὸ Φίλερι τουτὶ Γένος περὶ τὰς κυβικὰς τῶν ἐξισώσεων σχολήν τε ἅμα καὶ σπουδὴν τὴν πᾶσαν ἐτίθη· ὡς τὸ ἐν τῇ κατὰ τὴν Λεΐδα Βιβλιοθήκῃ σωζόμενον Ἀραβικὸν περὶ τῶν τοιούτων ἐξισώσεων χειρόγραφον, οὗ δὴ καὶ ὁ Ἄγγλος Οὕττων (Hutton) ἐν τῷ αὐτοῦ Μαθηματικῷ καὶ Φυσικῷ Λεξικῷ (α) μέμνηται, σαφῶς δείκνυσι. Κοινῇ δὲ γνωμοδοτούμενον φέρεται τοὺς Ἄραβας τὴν περὶ τῶν κυβικῶν ἐξισώσεων θεωρίαν παρὰ τῶν Περσῶν καὶ Ἰνδῶν συνάμα τῇ τῶν Ἀριθμητικῶν χαρακτήρων χρήσει παραλαβεῖν· ὅ, τε περικλεὴς Βαλλήσιος ἐξέδωκεν (β), ὡς ὁ Ἄραψ Ἀλσεπαδὶ ἐν τῷ αὐτοῦ ὑπομνήματι, Τοργκὰτ Λαμιὰτ ὂλ Ἀΐάμ, τοῖς Ἰνδοῖς τὸ περὶ τῆς τῶν τοιούτων εὑρέσεως ἀποδίδωσι κλέος. Ὥστε κατὰ τὴν τῶν Ἰσπανῶν χώραν ἐπιμελῶς οὕτω ὑπὸ τῶν Ἀράβων τὴν τῆς Ἀλγέβρας σπουδὴν περὶ πολλοῦ ποιουμένην, πρῶτα μὲν παρ' Ἰταλοῖς ταύτην διαδοθῆναι, ἔπειτα δ' ἐντεῦθεν καὶ Γερμανοῖς τοῖς ὁμόροις, καὶ Γάλλοις δὲ, καὶ Βρεττανοῖς, καὶ τοῖς ἄλλοις ἅπασιν ἐπιπολάσαι κατὰ βραχὺ τοῖς πρὸς ἥλιον βλέπουσι δυόμενον Ἔθνεσι.

(α) Volum. I. p. 65 — 97.

(β) Arithmet. Oper c. 9. f. 48. Vol. I. Oper. Math. et in Tract. de Algebr. c. 4. f. 11. seqq. Vol. II Oper. Math.

Κατὰ δὲ τὴν Ἰταλίαν οὐχ οὕτω διὰ τῶν Ἀράβων μόνον ἡ τῆς Ἀλγέβρας σπουδὴ ἐγνωρίζετο· ἀλλὰ δὴ ἐμμέσως, κἀκ τινος τῶν αὐτοχθόνων Λεονάρδου τοῦ ἀπὸ τῆς Ἰταλιώτιδος Πίζης· ὃς δὴ πολλάς τε καὶ μεγάλας ὁδοιπορίας ἐμπορίας στειλλάμενος ἕνεκα, καὶ ἱκανὸν κατὰ τὸ 1200 ἔτος ἀνὰ τὴν Ἀσίαν διατρίψας χρόνον, τοῖς ἐπὶ Σοφίᾳ μέγα βρενθυομένοις τὸ τηνικαῦτα Ἄραψι διδασκάλοις οἱονεὶ τῆς ἐπιστήμης ταύτης ἐχρήσατο καὶ ἡγήτορσιν, ὡς τὸ τούτου ἀνέκδοτον ἔτι καὶ ἐν χειρογράφῳ σωζόμενον περὶ τῆς Ἀλγέβρας σαφέστατα διατρανοῖ Σύγγραμμα. Τὸ δέ, ᾧ ἐντυχεῖν ἔξεστι πρώτιστον καὶ ἀρχαιότατον μετὰ τὴν τῆς Τυπογραφίας σύστασιν περὶ τῆς Ἀλγέβρας Πόνημα, τὸ τοῦ Πακιόλου ἐστὶ Λουκᾶ, τοῦ ἐκ τῆς τῶν Ἐλαχίστων Φρατόρων συμμορίας, καὶ δι' αὐτὸ τοῦτο ἐκ τῆς τοῦ ἱεροῦ τάφου κατ' Ἰταλίαν πόλεως ἐπικαλουμένου. (Frater Lucas Minorita de Burgo Sacti Sepulchri — Lucas dal Borgo San Sepolchro) (α). Τὸ μέντοι περὶ τὴν Δεκάτην Πέμπτην ἤδη φθίνουσαν Ἑκατονταετηρίδα συγγραφὲν αὐτοῦ Πόνημα (β), οὗ τὸ δεύτερον μέρος τὴν ὑπερέχουσαν διείληφεν Ἀριθμητικὴν (γ), περιέχει μὲν

(α) Kästners Gesch. der Mathem. I. S. 65.

(β) Summa de Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalità, Venezia 1494.

(γ) L' Arte Maggiore, ditta dal vulgo la Regola de la Cosa, over Algebra e Almucabala· ὃ δὴ ἔσχατον ἐπώνυμον Ἀλμουκάβαλαν διὰ τῶν, restauratio et oppositio, ὁλοσχέρωσιν τε καὶ ἀντίθεσιν, ἐπεξήγησε.

τὰ περὶ τῶν Ἀναλογιῶν τῶν τε Ἀριθμητικῶν δηλαδὴ καὶ τῶν Γεωμετρικῶν, μετὰ πλείστων ὅσων πρὸς λύσιν τῶν ἐν τῇ Γεωμετρικῇ Προόδῳ προβαλλομένων ὑποδειγμάτων· περιέχει δὲ καὶ τὰ περὶ τῆς Ψευδοῦς Θέσεως (de Regula Falsi), ἥτις δὴ καὶ Ἀραβικῷ, ἢ Φοινικείῳ ὀνόματι Καταϋμ καλουμένη εὑρίσκεται· ναὶ μὴν καὶ περὶ τῆς τῶν σημείων + καὶ — ἔν τε τῷ πολλαπλασιασμῷ καὶ τῇ διαιρέσει δυνάμεως, περί τε τῆς τῶν Ῥιζῶν ἐξαγωγῆς, καὶ τοῦ τῶν Ῥιζικῶν ὑπολογισμοῦ· ὅπως δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ σχήματος $23 + \sqrt{448}$ καὶ $\sqrt{18} + \sqrt{10}$ ῥίζα ἐξάγεται, πρὸς μείζονα ἐντεῦθεν σαφήνειαν τῶν παρ' Εὐκλείδῃ ἐν τῷ Δεκάτῳ τῶν Στοιχείων Βιβλίῳ κειμένων. Τὰ δὲ παρ' αὐτῷ ἐν χρήσει σύμβολα τὰ ἐφεξῆς εἰσιν· οἷον ὑπὲρ μὲν τῆς ὡρισμένης ποσότητος n°, numerum ἤτοι ἀριθμὸν ἐμφαῖνον· ὑπὲρ δὲ τῆς ἀορίστου co (cosa) πρᾶγμά τι, ὃ δὴ ἡμεῖς ῥίζαν ἐξισώσεως τινος καλοῦμεν· ὑπὲρ δὲ τοῦ τετραγώνου ce (censo) Ζένσος· ὑπὲρ τοῦ κύβου cu (cubo)· ὑπὲρ τοῦ Διτετραγώνου ce ce Ζενζιζένζον· ὑπὲρ τῆς πέμπτης δυνάμεως p° r° (primo relato) πρώτην ἀναφοράν· ὑπὲρ τῆς Ἕκτης ce cu Ζενζικύβον· Σημεῖον δὲ προσθέσεως παρ' αὐτῷ ἐστι p (piu) πλεῖον, ὡς καὶ ἀφαιρέσεως m (meno) ἔλαττον· οἷον ἐπὶ τοῦ παραδείγματος 3 co . p . 4 ce . m . 5 cu . p . 2 ce . m . 6 n°; ὃ δὴ τῷ ἐφεξῆς παρ' ἡμῖν ἐν χρήσει σχήματι ὅμοιον, $3x + 4x^2 - 5x^3 + 2x^4$

Σημειωτέον δὲ ἐκ τῆς παρωνυμίας Regola de la Cosa, τὴν παρὰ τοῖς Γερμανοῖς Ἀλγεβραϊσταῖς Coß ἀναπλασθῆναι.

— 6. Περὶ δὲ τῆς τῶν τετραγωνικῶν ἐξισώσεων λύσεως, ὡς $\chi^2 + \mu\chi = \alpha$, ἔνθα $\chi = \sqrt{(\alpha + \frac{1}{4}\mu^2)} - \frac{1}{2}\mu$, εὑρίσκεσθαι ἔχουσι παρ' αὐτῷ οἱ Μιξοσολίνῃ Αὐσονίδι Διαλέκτῳ ἐκτεθέντες ἐφεξῆς στίχοι·

Si res et census numero coequantur, a rebus
Dimidio Sumto censum producere debes,
Addereque numero, cuius a radice totiens
Tolle Semis rerum, census latusque redibit.

Ὅπερ ἐστίν:

Εἴκεν ἀριθμῷ Ζένζος τ' ἠδ' ἀόριστος ἴσσα,
Ἡμίσεως ἄρσει ἀορίστου Ζένζου ἀπάξεις·
Κεῖν' ὄγε θεὶς, κἀκ ῥίζης τάσσον ἀπούρας ἰδίης,
Τοὺς δ' αὖ πλευρὴν, ἠδ' ἰσόγωνον τετράδ' ἀποίσεις.

Δῆλον τοίνυν ἐκ τούτων τὸν Πακίολον τὰς φωνὰς μόνον ὑπὸ τῶν Ἀράβων πρὸς τὴν τῶν Δυνάμεων παραλαβεῖν δήλωσιν. Οἱ γὰρ μετ' αὐτὸν τῶν Γερμανῶν Ἀλγεβραϊσταὶ (α). οἱ πρὸ τοῦ Βιέτα δηλαδὴ καὶ Καρτεσίου ἀκμάσαντες, ταῖς τῶν Ἀράβων παρωνυμίαις ἐμμένοντες, συμβόλοις τισὶ τὰς δυνάμεις διακρίνειν φιλοῦσιν, ἃ δὴ σύμβολα, Κοσσικὰ, ἀπὸ τῆς τέχνης τὴν παρωνυμίαν εἰλήχασι (Cossische Zeichen). Οὕτω τοίνυν παρ' ἐκείνοις ἡ μὲν πρώτη Δύναμις τῷ ἀρκτικῷ τοῦ παρὰ Λατίνοις ὀνόματος Radix (Ῥίζα) στοιχείῳ ℜ, ἢ ℞ διεσημαίνετο· τὸ δὲ Τετράγωνον τῷ ℨ ὅτι Zensus (Ζένσος) παρὰ τοῖς Ἄραψιν ἡ δευτέρα Δύναμις ἤκουσεν· ἡ δὲ τρίτη Δύναμις τῷ C; Cubus (Κύβος)· ὡσαύτως καὶ ἡ τετάρτη τοῖς ℨℨ, Zensizensus (Ζενσι-

(α) Ὅρα τὴν τοῦ Κλαβίου Ἄλγεβραν.

ζένζος, ἤτοι Τετραγωνοτετράγωνον)· ἡ, τε πέμπτη τῷ ß, Surdesolidum (Κωφοστερεόν)· ἡ ἕκτη τοῖς ℨC Zensicubus (Τετράγωνον Κύβου)· ἡ ἑβδόμη τοῖς Bß, Bissurdesolidum (Κωφοστερεὸν Δεύτερον)· ἡ ὀγδόη τοῖς ℨℨℨ, Zensizenzensus (Τετραγωνοτετραγώνου Τετράγωνον)· ἡ ἐννάτη τοῖς CC Cubus Cubi (Κύβος Κύβου)· ἡ δεκάτη ℨß, Zensurdesolidum (Τετράγωνον τοῦ Κωφοστερεοῦ)· ἡ ἑνδεκάτη τοῖς Cß, Cubus Surdesolidi (Κύβος τοῦ Κωφοστερεοῦ), κτλ. (α) Ἄμεινον ἀλλ' οὖν εἶτα Καρτεσίῳ (β) ἔδοξε τὰς Δυνάμεις διὰ τῶν ἐκθετικῶν τῆς ῥίζης ὕπερθεν δεξιόθεν συνεκτατομένων διακρίνειν, ὡς α^1, α^2, α^3, α^4, α^5, α^6, κτλ.

Οὐ πολὺ τὸ ἐν μέσῳ, καὶ Σκιπίων ὁ Φέῤῥεω κατὰ τὸ 1505 Ἔτος ἐν Βονωνίᾳ τὸν Μαθηματικὸν ἐξ ἐπαγγέλματος ἐκόσμει θρόνον· ὃς δὴ τὴν τῶν κυβικῶν ὑπὲρ μιᾶς τινος μόνον περιστάσεως ἐξίσωσιν ἐξευρὼν οἷον $\chi^3 + \mu\chi = \alpha$ (γ), οὐδενὶ ἑτέρῳ, εἰμὴ τῷ παρ' αὐτῷ φοιτῶντι Φλορίδῳ, ἢ Φλώρῳ καταθαῤῥῆσαι τὸ ἐφευρεθὲν ἠξίωσεν. Οὗτος ἀλλ' οὖν κατ' ἔριδα μετὰ τοῦ Ἐνετίησι τότε τὰ Μαθηματικὰ ἐκδιδάσκοντος Ταρταλίᾳ λογομαχῶν, προβλήματα πρὸς ἐπίλυσιν ἐκείνῳ προὔτεινε, καὶ ἐγγύας παρ' αὐτοῦ ἀπήτει, εἴπου τυχὸν τῶν τοιούτων τι ἀνεπίλυτον καταλείψειεν. Ἐκεῖνος δὲ,

(α) Μέτιθι πλατύτερον τὸ τοῦ §. 214. Σχόλιον.
(β) In Arithmetica.
(γ) Ἡ κατὰ τὸν ἐκείνων τὸ τηνικαῦτα ἐν χρήσει τῆς ἐκθέσεως τρόπον, Capitulum cubi et rerum numero aequalium, Συμπλήρωμα κύβου σὺν πράγμασιν ἰσαρίθμοις.

*****

ὡς ἀπὸ πτεροῦ τὸν τέττιγα ἑλών, τὰ μὲν προτεθέντα εὐμαθῶς πάνυ καὶ ὀξυνόως διέλυσε προβλημάτια, ἕτερα δὲ αὐτῷ μειζοτέρων ἐξισώσεων πρὸς ἐπίλυσιν προὔθηκεν· ἐφ' οἷς ἰχθύων ἀναυδέστερος ὁ Φλόριδος διαμείνας, αἰσχύνης πεπλήρωται. Ὁ γὰρ Ταρταλήας, ὡς μόνος ἐν τῷ Ἐννάτῳ Βιβλίῳ τῶν ἑαυτοῦ Διαφόρων Ζητημάτων τε καὶ Εὑρέσεων (α) κατὰ τὸ 1546 Ἐνετίῃσι ἐκδεδομένων διέξεισι, περὶ τὸ 1530 τὴν ὑπὲρ δυεῖν περιστάσεων τῶν κυβικῶν ἐξισώσεων, ὡς $\chi^3 + \mu\chi^2 = \alpha$, καὶ $\chi^3 = \mu\chi + \alpha$ ἐξευρὼν λύσιν, προπαρεσκευασμένος πως ἦν πρὸς τὰ ὑπὸ τοῦ Φλορίδου προτεθέντα. Τὸ δὲ τοῦ Ταρταλήα ἔσχατον καὶ ἔξοχον ἅμα Σύγγραμμα, τὸ περὶ ἀριθμῶν τε ἐστὶ καὶ μέτρων (β), Ἐνετίῃσι κατὰ τὸ 1556 καὶ 1560 τῶν τύπων προκύψαν. Τὸ μέντοιγε περὶ τῆς Ἀλγέβρας πραγματευόμενον τοῦ Συγγράμματος τούτου ἕτερον μέρος ἀτελὲς ὑπελείφθη, ὡς τοῦ Συγγραφέως τὸ ζῆν περὶ τὸ 1557 ἐκμετρήσαντος.

Συνήθης δὲ ὢν τῷ Ταρταλήᾳ, Ἱερώνυμος Κάρδανος ὁ ἀπὸ Μεδιολάνων, ἀνὴρ εὖ ἥκων παιδείας καὶ νοὸς ὀξύτητι τοὺς λοιποὺς διαφέρων, ἐπί τε τῇ θερμῇ αὐτοῦ ἐνστάσει καὶ συνθήκαις ταῖς ἱεραῖς, τοῦ μηδοτῳοῦν ἑτέρῳ τὴν τῶν ἐξισώσεων κοινῶσαι μέθοδον, ἐς κόρον τῶν Ταρταλείων Μαθηματικῶν γαμάτων ἐσπάσατο, τὸν περὶ τὰς κυβικὰς ἐξισώσεις ἅλις παρ' ἐκείνου ἐκπαιδευθεὶς τρό-

(α) Quaeſiti et inventioni diverſe. Venez. 1546.

(β) Trattato di numeri et misure. Ven. 1556 — 1560.

πον. Ἀλλ' οὐκ εὐσταθῶς ἐπὶ τοῖς προϋποσχεθεῖσιν ὁ ἀνὴρ ἔχων, δημόσιον ἐν τῷ 1545 τὸ Ταρτάλειον ἐποίει μυστήριον, καὶ τὰ λοιπὰ ἐκείνου τῇ σιγῇ πρότερον τιμώμενα, ἔκπυστα ἐτίθη δογμάσματα, ἐν τῇ ὑπ' αὐτοῦ ἐκδοθείσῃ τῆς μεγάλης Τέχνης, ἤτοι περὶ τῶν τῆς Ἀλγέβρας κανόνων (α) Βίβλῳ· καὶ δὴ πρὸς συνέχειαν τῶν ἐν Μεδιολάνῳ κατὰ τὸ 1539 προεκδοθέντων τῆς Πρακτικῆς Γενικῆς Ἀριθμητικῆς (β) ἐννέα, δεκάτην ταυτηνὶ ἐπέγραψε Βίβλον. Ταῦτα δὲ αὐτοῦ Συγγράμματα μετὰ καὶ ἑτέρων ἄλλων ἰδίων πονημάτων ἐν Βασιλέᾳ κατὰ τὸ 1570 ἐκδοθέντα ἴσμεν καὶ ἐπιγραφὴν φέροντα, Σύγγραμμα νέον περὶ τῶν Ἀναλογιῶν τῶν ἀριθμῶν, περὶ τῶν κινήσεων, κτλ. Ἔτι δὲ τῆς μεγάλης Τέχνης Βίβλος μία, κτλ. (γ). Ἡ τοῦ τοιούτου τοίνυν ἀπορρήτου ὑπὸ τοῦ Καρδάνου γινομένη ἀνακοίνωσις πικρῶς πάνυ καὶ δυσμενῶς διέθηκε τὸν Ταρτάληαν, ὃς δὴ καὶ δίκας ἂν τὸν ἐπίορκον ἐτίσατο, μὴ τοῦ θανάτου διακωλύσαντος. Ἀπολελόγηται δ' ἐπὶ τούτοις καὶ ὁ Κάρδανος αἰτίας τῆς παρεμπεσούσης ἀπολυθῆναι ἀγωνιζόμενος· ἔνθεντοι καὶ ἐπὶ τῇ αὐτοῦ ἀθωώσει εἰς μέσον προῆγε τῆς αὐτῷ διακοινωθείσης ὑπὸ Ταρταλήα μεθόδου τὴν λύσιν αὐτὸν οἴκοθεν ἐξευρεῖν, καὶ τὰ τῆς μεθό-

(α) Artis magnae ſive de Regulis Algebrae Liber unus.

(β) Practica Arithmetica generalis.

(γ) Opus novum de Proportionibus numerorum, motuum, etc. — Praeterea Artis magnae Liber unus — item de Aliza Regula Liber unus.

δου περαιτέρω προάξαι καὶ λυσιτελέστερον ἐκείνου μεταδιαιτήσασθαι. Ἡ δὲ τοιαύτη περὶ τῆς τῶν κυβικῶν ἐξισώσεων λύσεως Ταρτάλειος μέθοδος τὰ μάλιστα παρὰ τοῖς Μαθηματικοῖς θρυλλουμένη, Καρδάνειος εἰσέπειτα ἤκουσεν· ὡς καὶ πολλοὺς τῶν Νεωτέρων σπουδὴν τὴν πᾶσαν ἀναβαλέσθαι πολλὰς διὰ ταύτης τῶν περιστάσεων, ἔνθα τρεῖς αἱ δυνατῶς ἔχουσαι δίδονται ῥίζαι, ἐκκαλύψαι τε καὶ διασαφηνίσαι· τοιαῦται δὲ εἰσὶν αἱ ἐφεξῆς περὶ ταύτης θεωρίαι· οἷον δὴ ἡ ἐν ταῖς Φιλοσοφικαῖς Διαλήψεσι μέθοδος τοῦ τὸν Καρδάνειον κανόνα πρὸς διάλυσιν μιᾶς τινος μόνον τῆς κυβικῆς ἐξισώσεως περιστάσεως ἐφαρμοζόμενον, πρὸς ἑτέραν τῶν καλουμένων δυσαναγώγων δεδομένην ἐπάγειν περίστασιν (α)· τὸ ὑπὸ τῆς ἐν Παδούῳ Ἀκαδημίας προτεθὲν Ἀναλυτικὸν Ζήτημα (β), περὶ ταύτης καὶ μάλα πραγματευόμενον· ἔτι δὲ καὶ ἡ δυνατῶς ἔχουσα τῶν δυσαναγώγων πραγματιώδης διάλυσις (γ)· ἤ, τε τοῦ Κυρίου Καντερζανίου περὶ τῆς Καρδανικῆς δυνάμεως (δ), καὶ τὸ τοῦ

(α) A method of extending Cardan's Rule for refolving one cafe of a cubick equation . . . to the other cafe, called the irreducible. By Fr. Maferes. Philofophical Transactions. 1778.

(β) Sul quaefito Analytico Propofito dall' Academiadi Padova . . . Differt. di Pretro Coffali. Verona 1782.

(γ) Della poffibilità della reale Solutione Analytica del cafe irreducibile, refleffioni dell' Arciprete Nicolai. Padova 1783.

(δ) Offervazione del Signor Sebaft. Canterzani

Κυρίου Καστελλανίου περὶ ταύτης ὑπόμνημα (α). Ἀλλὰ δὴ καὶ Βομβήλιος ἐν τῇ ὑπ' αὐτοῦ ἐν Βονωνίᾳ Ἰταλικῷ τῷ ἰδιώματι κατὰ τὸ 1579 ἐκδοθείσῃ Ἀλγέβρᾳ τῶν Καρδανείων οὐκ ἄμοιρος τυγχάνει Μεθόδων, ὡς ἐν τῷ αὐτοῦ συγγράμματι πλατύτερον τῷ βουλομένῳ συνιδεῖν ἔνεστι.

Παρὰ γε μὴν τοὺς ἐν Ἰταλίᾳ καταλεχθέντας πρώτους τῆς Ἀλγέβρας Εἰσηγητάς, καὶ ἄλλους οὐκ ὀλίγους κἂν τῇ Γερμανίᾳ κατὰ τὴν Ἀλγεβραϊκὴν τήνδε ἰδέαν, περὶ τὰ πρῶτα τῆς ΙϚ'. τῶν ἀπὸ Χριστοῦ τοῦ Θεοῦ ἡμῶν Σωτηριωδῶν ἐνιαυτῶν Ἑκατοστύος ἡμιόλεια, ὁ χρόνος ἤνεγκε διαπρέψαντας (β). Τοιοῦτος ὑπῆρξε Χριστόφορος Ρουδόλφος ὁ Ἰουραβιανός, οὗ δὴ τὸ πρῶτον καὶ ἐν τῇ Γερμανίδι διαλέκτῳ ἀρχαιότατον Ἀλγεβραϊκὸν Σύγγραμμα, Κὸς ἐπιγραφὴν φέρον κατὰ τὸ 1542 τῶν Τύπων προέκυψε. Μετ' οὐ πολὺ δὲ διὰ τὴν τῶν ἐκδοθέντων Βιβλίων σπάνιν νέαν ἀνεβάλετο ἔκδοσιν Μιχαὴλ Στιφέλλιος ὁ ἀπὸ Ἐλσίγκης, πολλαῖς ὑπ' αὐτοῦ ἐπαυξηθεῖσαν Προτάσεσιν· ἔκειτο δὲ τῇ Βίβλῳ ἐπιγραφὴ ἡ ἐφεξῆς. Ἡ Χριστοφόρου τοῦ Ρουδόλφου Κὸς μετὰ παραδειγμάτων Κοσσικῶν καλλίστων πάνυ

Sul valor Cardanico . . . in occafione d' effere ufcito un foglio anonimo, che propone una maniera di reddure il cafo irreducibile. In Bologna 1787.

(α) Mem. fur la regle de Cardan, par de Caftillon. Memoires de Berlin. 1783.

(β) Οὕτως αὐτόθι.

καὶ λυσιτελῶν, ὑπὸ Μιχαὴλ Στιφελλίου ἐπιδιορθωθεῖσα καὶ ἐπαυξηθεῖσα (α)· μεθ' ἣν δὴ καὶ ἑτέρα τρίτη τῆς δευτέρας οὐδὲν παραλάττουσα κατὰ τὸ 1615 ἐν Ἀμστελοδαμίῳ τῶν Τύπων προέκυψε. Συνέγραψε δέτοι Στιφέλλιος καὶ ἰδιαίτερον ἄλλο πόνημα περί τε Ἀριθμητικῆς καὶ Ἀλγέβρας, ἤτοι τὴν ἑαυτοῦ Ὁλοσχερῆ Ἀριθμητικὴν ἐν Νωριμβέργῃ, κατὰ τὸ 1544 ἐκδοθεῖσαν (β). Ἐν ᾧ παρὰ τὴν Πρακτικὴν Ἀριθμητικὴν, περί τε τῶν Ἀριθμητικῶν τε καὶ Γεωμετρικῶν Προόδων καὶ περὶ τῶν Πολυγώνων ἀριθμῶν τὰς θεωρίας ἐνίστησι. Τέως δὲ καὶ τὸν τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου μετὰ τῆς Ἀριθμητικῆς συνδυασμὸν παρατετηρηκὼς πρωτίστην περὶ τῶν Λογαρίθμων ἰδέαν, οἱονεὶ τούτων Βάσιν, ἔφθη προκαταβαλλών. Τῆς δὲ θεωρίας καὶ περαιτέρω ἐχόμενος τοὺς τῶν Δυνάμεων Συνθέτας Διμεροῦς τινος, ἤτοι Διωνύμου ἀριθμοῦ ἄχρι τῶν ἑπτακαίδεκα, συνάμα τῷ τῶν Ῥιζικῶν ὑπολογισμῷ ἐκτίθησιν (γ). Ἐν δὲ τῷ τρίτῳ τῶν αὐτοῦ Βιβλίων περὶ Κοσσικῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν κατ' αὐτοὺς Κανόνων, ἤτοι περὶ τῆς ἐντελοῦς τοῦ Ὑπολογισμοῦ ἐπιγραφομένῳ Μεθό-

(α) Die Coß Christoph Rudolph's aus Jauer mit schönen Exempeln der Coß, durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt, 1571. 491 Bl. in 4. — Kästners Gesch. der Mathematik, 1. Band.

(β) Arithmetica integra, Norimb. 1544; 322 Bl. in 4. — Kästner a. a. O.

(γ) Lib. I. c. 5.

δου (α), τὰ περὶ τὴν Ἄλγεβραν σοφῶς πάνυ ἑρμηνεῦσαι προὐβάλλετο. Ἀτεχνῶς γὰρ τοῦ ἑαυτοῦ χαρακτῆρος ἀξίως ὁ Στιφέλλιος ἐν τῇ τοῦ Ῥουδόλφου Κὸς προσοιμιαζόμενος φθάσας ἐδήλωσεν, αὐτὸν ἐν τῇ θαυμασίᾳ ταύτῃ καὶ φιλοσόφῳ τοῦ λογίζεσθαι τέχνῃ ὑπὸ τῶν Ῥουδολφείων προπαιδευθῆναι Βίβλων. Ἔνθεν τοι καὶ τὰ ἀναποδείκτως παρ' ἐκείνῳ ἔχοντα ἀποδείξεσι μάλα πυκάσας διελεύκανεν, ὥστε καὶ τὰ μὲν κρεῖττόν πως μεταῤῥυθμίσαι, ὡς τὰ τῶν Δυνάμεων σημεῖα $\surd$, τὰ δὲ ταῖς τοῦ ἡγήτορος Ῥουδόλφου ἐννοίαις ἑπόμενος καὶ εἰσαγαγεῖν, ὡς τὰ τῆς προσθέσεως τε καὶ ἀφαιρέσεως σημεῖα $+$ καὶ $-$· καὶ μὴν καὶ τὴν τῶν ἐκθετῶν χρῆσιν ἐπινοῆσαι, τούς τε κατὰ θέσιν τούτων ἢ ἄρσιν ἀντιδιαστειλάμενον, ἐκθέτους αὐτοὺς ἀναδεῖξαι. Θεωρήσας καὶ γὰρ τοὺς ἀπὸ μονάδος ἀρχομένους καὶ ἐν ἴσοις ἀμφοτέρωθεν τοῖς διαλλείμμασιν ἀφεστῶτας ὅρους, τὰς μὲν ὑπὸ μονάδος διαιρουμένας πηλίκον τε ἤτοι ἐκθέτην κλασματώδη προβαλλούσας Δυνάμεις ἀποφάσκειν διέγνω, καταφάσκειν δὲ τὰς ὁλοσχερεῖς, ὡς ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς τῶν τε Δυνάμεων καὶ τῶν ἐκθετῶν δυεῖν Σειρῶν συνιδεῖν πάρεστι.

$$\ldots \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4,\ 8 \ldots$$
$$\ldots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots$$

Δείκνυσι καὶ γὰρ τοὺς ἀποφατικοὺς ἐκθέτας ἔν τε τῷ τῶν Δυνάμεων πολλαπλασιασμῷ καὶ τῇ διαιρέσει,

(α) De numeris Coſſicis et de regula eorum, id eſt, de perfecta arte calculandi.

τοῖς καταφατικοῖς ἴσα δύνασθαι. Καὶ τούτων μὲν δὴ οὕτω προϊόντων, ἕτερος ἡμῖν περὶ τὰ τῆς ΙϚ. Σωτηρίου Ἑκατονταετηρίδος μέσα Ἀλγέβρας οὐκ ἄσημος ἐγνωρίζετο θιασώτης Ἰωάννης ὁ Σχεϋβέλιος, ὁ τῶν Εὐκλειδείων Στοιχείων κατὰ τὴν ἐν Τιβίγγῃ πάνδημον Ἀκαδημίαν διατεταγμένος δημόσιος ἐξ ἐπαγγέλματος Καθηγητής. Οὗ δὴ ἡ κατ' ἐπιτομὴν ἐκτεθεῖσα Ἄλγεβρα, οὐ πάνυ τῶν Ῥουδολφείων καὶ Στιφελείων δογμάτων ἀπᾴδουσα, εἰ καὶ τοῦ ἀνδρὸς τὰς περὶ τῶν Ἐξισώσεων καὶ τῶν Ῥιζικῶν θεωρίας ἀλλοίως πως ἐνστησαμένου, ἐν Παρισσίοις κατὰ τὸ 1552 Τύποις δεδημοσίευτο (α). Ὁ αὐτὸς δὲ καὶ τὰ τοῦ Εὐκλείδου πρῶτα Ἀριθμητικὰ τρία Βιβλία Γερμανιστὶ διερμηνεύσας, κατὰ τὸ 1558 τύποις ἐξέδοτο.

Οὐ μὴν δὲ, ἀλλ' οὐθ' ἡ τῶν Ἄγγλων χώρα τέλεον ἐν ταύτῃ τῇ Ἐπιστήμῃ ἠρήμωται. Τῆς γὰρ ΙϚ. Ἑκατοστύος τῶν ἀπὸ Χριστοῦ σωτηριωδῶν ἐνιαυτῶν, ἡμιολείου ἤδη περιοδευούσης, ἡ ἐφ' ἱκανοῦ Ἰταλιάσασα τε καὶ Γερμανίσασα τῆς Ἀλγέβρας σπουδὴ, πολύχουν τινὰ τὸν καρπὸν κἂν τῇ Βρετανῶν χώρᾳ ἀπενεγκαμένη ἐφαίνετο. Προήνεγκε γὰρ Ῥοβέρτον Ῥεκόρδον, τὸν κατὰ μὲν τὸ 1552 τὴν ἑαυτοῦ Ἀριθμητικήν· κατὰ δὲ τὸ 1557 τὴν Ἄλγεβραν, οἷον δὴ μέρος τὸ δεύτερον, ἐπιγραφὴν φέρουσαν· Ἀκόνη τοῦ Νοὸς, ὃ δὴ ἐστὶ τὸ

(α) Algebrae Compendiosa facilisque descriptio, qua depromuntur magna Arithmetices miracula. Authore Ioh. Scheubelio, Mathem. Prof. in Acad. Tubigensi. Parisiis, 1552.

τῆς Ἀριθμητικῆς δεύτερον μέρος περιέχον τήν τε τῶν Ῥιζῶν ἐξαγωγὴν, καὶ τὴν Κουσικὴν πρᾶξιν, σὺν τοῖς τῶν ἐξισώσεων κανόσι καὶ ταῖς τῶν κωφῶν (Ῥιζαίων) ἀριθμῶν δυνάμεσι (α)· διὰ τῶν Τύπων δημοσιεύσαντα. Ἡ δὲ, ᾗ κέχρηται, Μέθοδος ἐν εἴδει ἐκτέθειται διαλέξεων διδάσκοντος μεταξὺ καὶ μαθηματιῶντος κατ' ἐρωταπόκρισιν. Ἀλλ' οὖν εἰ καὶ πλεῖστον τῶν Γερμανῶν Ἀλγεβραϊστῶν ὁ Ἄγγλος ἀπώνατο, πρῶτος μέντοιγε ὑπῆρξεν ὁ τὸ τῆς Ἰσότητος σημεῖον εἰσαγαγὼν, ὡς μόνῳ παρατετηρηκότι, ὅτι δυοῖν ὁμοίων οὐδὲν ἄλλο οὕτωσὶ προσφυῶς παραστατικὸν ἔσται σύμβολον, ὅτι μὴ δυὰς Παραλλήλων ἰσομεγεθῶν γραμμιδίων $=$, ἐκτέθειται.

Οὕτω τοίνυν περὶ τὰ λοιπὰ τῆς Εὐρώπης μέρη ἡ τῆς Ἀλγέβρας σπουδὴ γεωργουμένη, κἀπὶ τὴν ὅμορον Γαλλίαν ἐνσπείρεσθαι ἤρξατο σπουδῇ Ἰακώβου Πελεταρίου. καὶ γὰρ κατ' ἐκεῖνο τοῦ χρόνου (1558), Βίβλος Ἀλγεβραϊκὴ τοῦ αὐτοῦ, περὶ τῆς τῶν ἀριθμῶν κρυφιομεροῦς δυνάμεως ἐπιγραφομένη (β), τύποις προέκυπτε. Κατὰ μὲν δὴ τὰ τῶν δυνάμεων σημεῖα συνᾴδει πάντως τοῖς Γερμανοῖς Ἀλγεβραϊσταῖς ἐν μέρει γοῦν Πελετάριος· τὰ δέγε $+$ καὶ $-$ σημεῖα οὐδόλως ἐξ

(α) The Whetstone of Witte, which is the Seconde parte of Arithmetike containing the extraction of Rootes: The Cossike Praktise with the Rule of Equation: and the Worths of Surde Numbers.

(β) Iacobi Peletarii Cenomani de occulta parte numerorum, quam Algebram vocant, Libri duo.

ἐκείνων παρείληφεν, ἀλλ' οἴκοθεν τούτοις ἀντὶ τῶν p (piu, plus, πλεῖον) καὶ m (meno, minus, ἔλαττον) ἐχρήσατο· τὴν δέτοι τῶν ἐκθετῶν χρῆσιν τῷ Στιφελίῳ καὶ Σχεϋβελίῳ συνῳδὰ ἐκτίθησιν. Διέγνω ἀλλ' οὖν Πελετάριος, τοὺς τῶν Τετραγωνικῶν καὶ Κυβικῶν ἀριθμῶν Πίνακας, εὐχερῶς πάνυ διὰ μόνης τῆς ἰσοδιαφόρου Ἀριθμητικῶς προϊούσης Σειρᾶς εἰς ἓν προσθέσεως ἐξευρίσκεσθαι. Κἀντεῦθεν καὶ διαφόρους θαυμασίους τῶν ἀριθμῶν τουτωνὶ ἰδιότητας διερμηνεῦσαι ἐπεχειρίσατο· οἷον δὴ τὸ ἐν τῷ ἐφεξῆς τύπῳ ἐκκείμενον τῶν κυβικῶν ἀριθμῶν ἄθροισμα $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3 \ldots\ldots + \nu^3 = (1+2+3+4+5 \ldots\ldots + \nu)^2 = \frac{1}{4}\nu^2(\nu+1)^2$, τῆς τῶν κυβικῶν ἐξισώσεων λύσεως ἀγνώστου ἔτι αὐτῷ ὑπαρχούσης τε καὶ ἀδήλου. Ἀλλὰ δὴ καὶ πρόγε τούτου, ἡνίκα δηλαδὴ ἡ τῆς Ἀλγέβρας σπουδὴ κατὰ τὴν τῶν Ἱσπανῶν χώραν ἐγεωργεῖτο, ἡ τῶν Ἀριθμητικῶν Χαρακτήρων γνῶσίς τε καὶ χρῆσις, οἷά τις παραφυὰς εἰς Γαλλίας μετεφυτεύετο σπουδῇ Γεβέρτου Φλωριανοῦ Μοναχοῦ (α), ὃς μετέπειτα διὰ πολλῶν βαθμῶν, τῶν παρὰ τοῖς Δυτικοῖς Ἐκκλησιαστικῶν ἀξιωμάτων, κἀπὶ τὸν Ποντιφίκειον ἀναχθεὶς θρόνον, ὑπὸ τῷ τοῦ Σιλβέστρου Β', ὀνόματι, ἐν τοῖς ἐπὶ τῆς τοῦ Πέτρου Καθέδρας ἀρθεῖσι περιώνυμος ἐν ἔτει τῷ Σωτηρίῳ 999 ἐγνωρίζετο, ὡς ἐκ τῶν αὐτοῦ ἐπιστολῶν, τῶν ἐν Παρισσίοις κατὰ τὸ 1636 τύποις ἐκδοθεισῶν, τρανῶς φαίνεται. Συγκαταλεγέσθω δὲ

(α) Wallisius in Tract. de Algebr. C. 4. f. 11. et Seqq. Vol. II. Oper. Mathem.

τούτοις καὶ Σίμων ὁ Στηβίνιος ὁ ἀπὸ Βρούγγης τῆς κατὰ τὴν Φλανδρίαν (aus Brügge)· ὁ κατὰ τὸ 1585 Ἀριθμητικὴν πρῶτον, εἶτα δὲ μετ' οὐ πολὺ καὶ Ἄλγεβραν τύποις ἐκδούς. Οὕτω τοίνυν ἡ τῆς Ἀλγέβρας σπουδὴ ἐντεῦθεν καὶ τὰ λοιπὰ κατὰ μικρὸν τῆς Εὐρώπης ἐφεξῆς κατελάμβανε μέρη, ἔνθα αἱ τῶν Μαθηματικῶν ἀνδρῶν Φατρίαι ἀνθήσασαι μέχρι πόῤῥω ταύτην διήνεγκαν.

Τέως δ' οὖν τῶν πράξεων διὰ τῶν Ἀριθμητικῶν περαινομένων χαρακτήρων ὁ περίπυστος ἐκεῖνος καὶ πολλῶν ἄλλων ἀντάξιος, Φραγκίσκος Βιέτης (α) ἀντὶ τούτων τοῖς τοῦ ἀλφαβήτου στοιχείοις ἐχρήσατο, διὰ τὸ ἀπονώτερον δι' αὐτῶν τὰς πράξεις περαίνεσθαι· ὥστε αὐτὸν τὰ μὲν ἐγνωσμένα τῶν μεγεθῶν ἢ ποσοτήτων τοῖς Συμφώνοις ὑποσημῆναι, τὰ δ' ἀόριστα τοῖς Φωνήεσιν. Ἐξ οὗ εἶτα, οἷα πηγῆς ἀπό τινος τὰ πρῶτα καὶ ἔσχατα τῶν Ἀλφαβητικῶν στοιχείων διακριθέντα, τὰ μὲν τῆς ὡρισμένης ἢ δεδομένης ποσότητος, τὰ δὲ τῆς ἀορίστου ὑπὸ τῶν Νεωτέρων πρὸς δήλωσιν εἴληπται. Ὑπὸ τοῦ Βιέτου δὲ καὶ πλεῖστοι ὅσοι τεχνικοὶ κατὰ συνθήκην ὀνοματοθετηθέντες τῶν ὅρων ἐν χρήσει γεγόνασιν· οἷοι εἰσίν, οἱ καταφατικοὶ καὶ ἀποφατικοὶ τῶν Συνθετῶν (Coëfficientes affirmativi et negativi), ἀντὶ τῶν ἐν χρήσει πρότερον ὑπαρκτικῶν καὶ στερητικῶν

(α) François Viète, Maître des Requêtes à Paris. Φὺς ἐν ἔτει 1540 ἐν τῷ κατὰ Πενταβίαν Φοντεναΐῳ (à Fontenai en Poitou), ἀπεβίωσε κατὰ τὸ 1603, ἔτος ἄγων τῆς αὐτοῦ ἡλικίας 63.

(addivi et substractivi)· Δύναμις ἁπλῆ καὶ σύνθετος (Potestas pura et affecta)· ἐξ ἧς δὴ εἶτα παρονομασίας, καὶ Ἐξίσωσις ἁπλῆ καὶ σύνθετος (Aequatio pura et affecta) ὑπὸ τῶν Νεωτέρων ἀνεπλάττετο. Τὰ μέντοι περὶ τῶν Ἐξισώσεων ἄχρι τῆς πεμπτοβαθμίου ἐν τῷ τέλει τῆς κατ᾽ αὐτὸν Βίβλου, περὶ τῆς τῶν Ἐξισώσεων ἐπανορθώσεως (α) ἐν Παρισίοις κατὰ τὸ 1615 συνάμα τῷ περὶ διαγνώσεως Ἐξισώσεων (β) ἐκδοθείσης προβαλλόμενα; τοῦ Συγγραφέως οὐ πολλῷ πρότερον τὸ ζῆν λήξαντος, τὴν τοῦ ἀνδρὸς κατὰ τὸ Ἀναλυτικὸν λίαν ἐνδιαπρέψαντος ὀξύτητα, καὶ τὴν ἐν τοῖς Μαθηματικοῖς δαιμονίαν ἐμβάτευσιν, ἀποχρώντως διατρανοῦσι. Περὶ οὗ τὰ πλεῖστα ἐν τοῖς τοῦ Ἄγγλου Οὐάλτωνος, τῶν Γάλλων Μοντουκλᾶ καὶ Βοσοῦ, τῶν Γερμανῶν Καιστνερίου καὶ Κλυγελίου, καὶ ἑτέρων Συγγράμμασι πλατύτερον ἱστορούμενα τῷ βουλομένῳ ἐστὶν ἀναλέξασθαι. Ἐξ ὧν τὰ πλεῖστα τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων ἡμᾶς ἀρτεῦσαι, οὐκ εὐπρεπὲς, οὐδ᾽ ὅσιον, οὐδὲ πρὸς τρόπου ἄλλως τοῦ ἡμετέρου τυγχάνον, σιγῇ παρελθεῖν ἡγούμεθα.

Κατὰ δὲ τοῦτο τοῦ χρόνου, ἡνίκα δηλαδὴ Βιέτης περιὼν τῷ βίῳ ἤκμαζε, καὶ Θωμᾶς ὁ Ἁρίοτος εὐτυχῶς πάνυ κατὰ τὴν Ἀλγεβραν ἐν Ἀγγλίᾳ ἦν διαπρέπων· οὗ δὴ τὸ Ἀλγεβραϊκὸν Πόνημα, Τέχνης Ἀναλυτικῆς κτλ. Πράξις (γ) ἐπιγραφόμενον, μετὰ δεκαετίαν τῆς

(α) De emendatione Aequationum.
(β) De recognitione Aequationum.
(γ) Artis Analyticae Praxis, ad Aequationes Algebraicas nova, expedita et generali methodo resolvendas.

αὐτοῦ ἀποβιώσεως ἐν Λονδίνῳ ὑπὸ Βαλτέρου Βαρνερίου εἰς φῶς προκύψαν τεθέαται. Διμερῶς δὲ τοῦ Συγγράμματος διαιρουμένου, τὸ μὲν πρῶτον μέρος τὴν περὶ τῶν Ἐξισώσεων θεωρίαν κεκλήρωκε, τὸ δὲ δεύτερον περὶ τῆς τῶν Ἀριθμητικῶν Ἐξισώσεων λύσεως πραγματευόμενον, τὸ γενικὸν τῆς Ἁριοτικῆς Ἀλγέβρας καθέστηκεν ἀντικείμενον. Ἐν ταύτῃ δὲ τῇ τῶν Ἀριθμητικῶν Ἐξισώσεων λύσει, κατὰ τὴν ὑπὸ τοῦ ἐκδόντος ἐπενεχθεῖσαν κρίσιν μακρῷ τὸν Βιέτην ὁ Ἁρίοτος ὑπερέσχεν. Ἐχρήσατο δὲ Ἁρίοτος (α) καὶ τοῖς ἐφεξῆς πρῶτος σημείοις, οἷον δή ἐστι τὸ τοῦ Μείζονος > καὶ τοῦ Ἐλάττονος < καὶ μὴν καὶ τὸ τῆς Ἰσότητος =· ὧν τὸ ἔσχατον ὑπὸ τοῦ ἀνωτέρω ἐπιμνησθέντος Ῥεκόρδου τυχὸν παρείληφεν. Εἷς μέντοιγε τῶν Νεωτέρων Ἄγγλων (Horsley) ὁ τὰ τοῦ Νεύθωνος ἐκδοὺς Συγγράμματα, ἐχθροπαθῆ πάνυ, καὶ ἰοῦ γέμουσαν, καὶ ἀφιλόσοφον κατὰ τοῦ ἑαυτοῦ Ὁμογενοῦς τὴν κρίσιν, οὐκ οἶδ᾽ ὅπως ἐπαγαγεῖν ἐκινήθη· Φησὶ γὰρ ἐν ταῖς ὑπ᾽ αὐτοῦ ἐν τῇ Καθόλου τοῦ Νεύθωνος Ἀριθμητικῇ (β) τεθεῖσι Σημειώσεσι περὶ τῆς ὑφ᾽ Ἁριότου πραγματευθείσης τῶν Ἐξισώσεων θεωρίας, αὐταῖς λέξεσιν οὕτω. Harriotus de numero radicum nil plane sani habet. Vir magnae quidem diligentiae, sed mediocris ingenii, ea fere in Algebraicis intellexit, quae a Cardano

(α) Sect. I. f. 10.
(β) Arithm. Univ. p. 166.

et Vieta acceperat, et radices, ſicut illi fecerant, cuilibet aequationi totidem tribuit, quot illa poſitivas habeat, negativum ne in ullo quidem caſu ratione habita, utpote quas ſemper inutiles judicavit, cum earum naturam minime perſpexiſſet — p. 180. Hariotus qui arcte adeo ad lumen connivebat, ut quantitates — c, — d, aequationum, quae ex illis procreatae eſſent, radices eſſe conſtantiſſime negaret, qui fieri potuit, ut ille intelligeret coëfficientium geneſin e radicum multiplicatione. Ὅπερ ἐστίν· Ἀρίοτος περὶ τοῦ τῶν ῥιζῶν ἀριθμοῦ, οὐδὲν πάντως ὑγιὲς γέγραφεν. Ἀνὴρ μεγάλης μέντοιγε ἐπιμελείας, μετρίας ἀλλ' οὖν νοήσεως, ταῦτα σχεδὸν ἐν τοῖς Ἀλγεβραϊκοῖς συνίδεν, ἅγε παρὰ Καρδάνου καὶ Βιέτου παρείληφε· καὶ τάς γε ῥίζας κατ' ἐκείνους ἰσοσαύτας ἑκάστῃ τῶν ἐξισώσεων ἀπένειμεν, ὁπόσας ἐκείνη (ἡ ἐξίσωσις) θετικὰς ἔσχε, τὴν περὶ τῶν ἀποφατικῶν (ῥιζῶν) γνῶσιν ἐν οὐδεμιᾷ τῶν περιστάσεων εἰς νοῦν φέρων· ἃς δὴ καὶ ἀλυσιτελεῖς ᾠείποτ' ἔκρινεν, οἷα δὴ τὴν αὐτῶν οὐδόλως συνιεὶς φύσιν. καὶ Σελ. 180. Ἀρίοτος καὶ μάλα καμμύων τε καὶ ἀμβλυωπῶν πρὸς τὸ φῶν ἀντώπησε· τὰς γὰρ τῶν ἐξισώσεων ποσότητας — γ, — δ, τὰς ἐξ ἐκείνων προπαραγομένας, ῥίζας εἶναι ἀσαεὶ ἠρνήσατο, οὐδόλως τὴν τῶν Συνθετῶν γένησιν ἐκ τοῦ τῶν ῥιζῶν πολλαπλασιασμοῦ ἱναδίδοσθαι ἐννοήσας.

Τὴν μὲν οὖν τῆς Ἀλγέβρας λυσιτελεστάτην καὶ ἀκριβῆ τὰ μάλιστα ἔκθεσιν διαφερόντως πάνυ κατ' αὐ-

τοὺς τοὺς χρόνους ἐξέθηκε καὶ ὁ Φλάνδρος Ἀλβέρτος Γιράρδας, ὁ κατὰ τὸ 1633 λῆξιν ἀμείψας. Ἐξ οὗ ἐστὶν ἡ Νέα κατὰ τὴν Ἄλγεβραν ὑπ' αὐτοῦ ἀκούουσα ἔκθεσις, κτλ. ἐν Ἀμστελοδαμίῳ κατὰ τὸ 1629 (α) τύποις ἐκδοθεῖσα. Ὃ δή, μικρὸν μὲν τῷ μεγέθει θαυμάσιον δ' ἀλλ' οὖν καὶ μέγα τὴν λυσιτέλειαν, σπάνιον Σύγγραμμα τρεῖς ἑαυτῷ ἐμπεριείληφε Πραγματείας· ὧν ἡ μὲν πρώτη, Εἰσαγωγή τις ἐστὶν ἐπίτομος πρὸς τὴν Ἀριθμητικήν· ἡ δὲ δευτέρα, νεαράς τινας περὶ τὴν Ἄλγεβραν θεωρίας προβάλλεται· τῆς τρίτης, περὶ τὰς ὑπὸ τοῦ Συγγραφέως ἐφευρεθείσας περὶ τὰ τῶν Σφαιρικῶν Τριγώνων καὶ Πολυγώνων ἐμβαδὰ καταμετρήσεις περιστρεφομένης. Ἐν μὲν οὖν ταῖς τῶν Δυνάμεων τε καὶ Ῥιζῶν συμβολικαῖς ἐκθέσεσι τοῖς τοῦ αὐτοῦ ὁμογενοῦς Στηβινίου ἴχνεσιν ἑπόμενος ταυτά, ἃ κἀκεῖνος, πάντως Γιράρδος εἰσποιήσασθαι δεῖν ἔγνω· κέχρηται δ' ἀλλ' οὖν ὑπὲρ τῶν ῥιζῶν σημείοις τοῖς ἐφεξῆς $\sqrt{}$, ἤτοι $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, κτλ. ἐν δέγε ταῖς τῶν ποσοτήτων ἀλλήλαις ἴσαις, οὐδέν τι τῶν σημείων προσπαρείληφε, μόνην δὲ τὴν τῆς ἰσότητος φωνὴν αὐτολεξεὶ ἐκτίθησι· παρ' αὐτῷ καὶ γὰρ == οὐδόλως ἰσότητα, διαφορὰν δὲ καὶ μάλα ἀπροσδιόριστον ἐμφαῖνον κεῖται.

(α) Invention nouvelle en Algebre, tant pour la ſolution des aequations, que pour recoignoiſtre le nombre des ſolutions qu' elles reçoivent, avec pluſieurs choſes qui ſont neceſſaires à la perfection de ceſte divine ſcience. A Amſterdam MDCXXIX.

Παρὰ δὲ ταῦτα, τὰ πολυμερῆ τῶν μεγεθῶν, δυσὶ παρενθέσεσι (   ) παρεγκλείων, ἡνίκα δηλαδὴ ἐκεῖνα ἀνθ' ἑνὸς ἐκληπτέα ὦσιν, τῶν λοιπῶν ὑποδιαστέλλειν καὶ ἀφορίζειν εἴωθε· πρὸς τούτοις δὲ καὶ τὸ τῶν ποσοτήτων ἄνισον διὰ τῶν ʃʃ καὶ § χαρακτήρων ἐδήλωσε. Περὶ δὲ τῶν ἐν ταῖς αὐτοῦ Πραγματείαις περιεχομένων πλεῖστα περιστατικῶς λίαν ἐξέθηκαν Οὔττων τε καὶ Κλυγέλιος (α).

Παρὰ τούτους δὲ, κατὰ τὸ 1638 τῶν ἀπὸ τῆς τοῦ Σωτῆρος ἡμῶν ἐπιφανείας ἐνιαυτῶν, ἐν τοῖς Γάλλοις αὖθις ἀνέλαμπε Ῥενάτος Καρτέσιος (β), ὁ τοῖς Μαθηματικοῖς ἐξίσου καὶ τοῖς Φιλοσοφικοῖς ἐνευδοκιμήσας καὶ παρὰ πᾶσι μέγα τὸ κλέος ἀράμενος. Ὡς πολλὰ μὲν περὶ Ἀλγέβρας συγγράψας, οὐχ ἧττον δὲ καὶ τὸν τῆς Ἀλγέβρας μετὰ τῆς Γεωμετρίας συνδυασμὸν ἐνδεῖξαι ἀγωνισάμενος, ἐπὶ νοὸς ὀξύτητι θαυμάσιος τοῖς μετέπειτα ὑπελείπετο. Ἡ τοίνυν αὐτοῦ κατὰ τὸ 1637 τὸ φῶς Γαλλιστὶ φθεγγομένη ἰδοῦσα Γεωμετρία εἰ καὶ βραχεῖα, οὕτω μέντοι σοφῶς ὑπὸ τοῦ Συγγραφέως πεπύκασται, ὡς μηδὲν τῶν κατὰ Μαθηματικὴν ἀναγκαίως λεγομένων ὑπολειφθῆναι. Τὰς μὲν οὖν δοθείσας τῶν Ποσοτήτων τοῖς πρώτοις τοῦ Ἀλφαβήτου γράμμασιν ἢ στοιχείοις Καρτεσίῳ ἄμεινον ἔδοξε σημᾶναι, τὰς

α) Σελ. 52 — 57. Τ. I.

β) Προῆλθε μὲν εἰς τὸν βίον Ῥενάτος ὁ Καρτέσιος (Rene Descartes) Ἔτει 1596. Μαρτίου 31. Ἐν δὲ Ἔτει 1650. Φευρ. 11. τοῦ τῆδε βίου ἀπήλλακται.

δὲ ἀορίστους τοῖς ἐσχάτοις. Ἐμφαίνειν δὲ καὶ τὰς Δυνάμεις εἴωθε, διὰ τοῦ Ῥιζικοῦ √, οὗ ἐπὶ τῆς κορυφῆς τὸν τῆς ἀξίας ἐκθέτην ἐκτίθησιν· ἀλλ' οὖν δυοῖν μεγεθῶν τὴν ἰσότητα διά τινος τοῦ ἀχρήστου ἤδη σημείου ἐνέφηνε. Μετὰ δὲ τὸν Καρτέσιον καὶ Φερμάτος ἐγνωρίζετο, ὁ τὸ δυσχερὲς ἐκεῖνο παράδειγμα τὸ πέντε τετραγωνικὰς ῥίζας ἐμπεριέχον ἀδιάλυτον ἡμῖν ἐγκαταλείπων (α). Παρὰ τοῦτον δὲ καὶ Ἰωάννης Οὔδδος (β) ὁ Ἀμστελοδάμιος, καὶ δὲ Βῶνος (γ) ἐν Ἀλγέβρᾳ ἐτύγχανον διαπρέποντες.

Τῆς δὲ δὴ ΙΖʹ. ἀπὸ Χριστοῦ τοῦ Σωτῆρος ἡμῶν καὶ Θεοῦ Ἑκατονταετηρίδος διατρεχούσης, ἡ περὶ τῶν τῆς ὑπερεχούσης Ἀναλύσεως τῶν Ἐξισώσεων κατασκευὴ διὰ σπουδῆς ἦγετο. Καρτέσιος μὲν γὰρ πρὸς τὴν τούτων κατασκευὴν τῷ Κύκλῳ καὶ τῇ Παραβολῇ ἔφθη χρησάμενος, ὅδέγε Ἀββᾶς Σλυσέλιος καὶ ἔτι περαιτέρω τὴν τοιαύτην προήγαγε Μέθοδον δεικνύων τὰς τοιαύτας καθυπερτέρας τῶν Ἐξισώσεων καλουμένας κατασκευὰς, διά τε τοῦ Κύκλου καί τινος τῶν ἐν τοῖς Κωνικοῖς θεωρουμένων εἰδῶν, ἀπειραχῶς κατασκευάζεσθαι τε καὶ

(α) Varia Opera Fermatii p. 58 — Influence de Fermat Sur Son Siècle p. 67. par Genty. — Cartesii Epistolae. T. III. ep. 75.

(β) Ἰωάννης Οὔδδος (Jean Hudde) εἷς τῶν ἐν Ἀμστελοδαμίῳ προυχόντων λῆξιν ἠμείψατο κατὰ τὸ 1704.

(γ) Φλοριμόνδος ὁ Βῶνος (Florimond de Beaune) ἐγεννήθη μὲν περὶ τὸ 1601, ἀπεβίου δὲ κατὰ 1651.

******

διαλύεσθαι ἔχειν· καλεῖται δὲ τὸ αὐτοῦ Φιλαπόνημα Μεσόλαβον, πρῶτον μὲν κατὰ τὸ 1659 ἐν Λεοδίῃ (Liège, Leodium), εἶτα καὶ κατὰ τὸ 1668 μεθ' ἑτέρας περὶ Ἀναλύσεως καὶ περὶ τῶν Συμμίκτων πραγματείας εἰς φῶς προκύψαν (α)· ἀλλάγε καὶ οὕτω οὐδόλως τὸν τρόπον, δι' οὗ πρὸς εὕρεσιν τῶν τοιούτων Ἀναλυτικο-Γεωμετρικῶς κατασκευαζομένων ἐξισώσεων ἤχθη, ὁ Ἀββᾶς δηλῶσαι ἠξίωσε. Μετ' οὐ πολὺ δὲ καὶ Θωμᾶς Βακέρος ὁ Ἄγγλος κατὰ τὸ 1684 ἐν τῇ αὐτοῦ Γεωμετρικῇ Κλειδὶ, ἤτοι ἐν τῇ ἀνεωγμένῃ τῶν Ἐξισώσεων θύρᾳ (β) τὰς κυβικὰς καὶ διτετραγωνείους πάσας Ἐξισώσεις διὰ τοῦ Κύκλου καὶ τῆς Παραβολῆς μόνης ἐκτιθέναι, σοφῶς πάνυ δείκνυσιν· ὅς δὴ τρόπος Βακέρου Κεντροκανῶν παρὰ τοῖς ὕστερον οὐκ ἀπροσφυῶς ἤκουσεν. Ἐπεὶ δὲ τὰ τοῦ Βακέρου Συγγράμματα μεγάλης δεῖται καὶ ἀκριβοῦς τῆς προσοχῆς (ὡς ἐκείνου πῇ μὲν τῷ + χρωμένου, πῇ δὲ τῷ —), τοῦθ' ἕνεκα Ἀλλέϋος (Halley) ἑτέραν ἐπεχειρίσατο ἐξευρεῖν μέθοδον, ἐφ' ᾧ ταῦτα πρὸς τὸ εὐχερέστερον μεταῤῥυθμίσαι, ἣν δὴ κἂν ταῖς Φιλοσοφικαῖς ἐγνώρισε Διαλήψεσι (α). Τὸ τοιοῦτον μὲν δὴ Θεώρημα καὶ ὑπὸ Σγραβεζανδίου ἐν τῇ τῆς τοῦ Νεύθωνος καθόλου Ἀριθμητικῆς προσετέθη ἐκδόσει. Δείκνυσι καὶ γὰρ Νεύθων ἐν τούτῳ τῷ Συγγράμματι, ὅπως δὴ ἡ Κογχοῖς πρὸς κατασκευὴν κυβικῶν Ἐξισώσεων, ναὶ μὴν καὶ πρὸς ἄλλας τοῦ Κώνου τομὰς συντελεῖ. Ὁ δέτοι Ἀλλεΰος καὶ πόῤῥω ἔτι δείκνυσιν, ὅπως ὁ τῶν δυνατῶς ἐχουσῶν ῥιζῶν ἀριθμὸς, τοὺς ἐν οἷς ἐκεῖναι ἐμπεριειλήφαται ὅρους καὶ τὰς τούτων Θέσεις ἢ καταστάσεις ὑπὲρ οἱασδηποτοῦν τῶν κυβικῶν καὶ διτετραγώνων ἐξισώσεων περιστάσεως, οἷός τ' ἐστὶ Γεωμετρικῶς ὑπ' ὄψιν οἱονεὶ ἐκθέσθαι (β).

Παρὰ πάντας δὲ καὶ μάλαγε εὐφυῶς ὁ δαιμόνιος ἐκεῖνος ἀνὴρ Νεύθων (γ) ἐν τῇ ἑαυτοῦ Καθόλου Ἀριθμητικῇ (δ) σοφὸν πάνυ καὶ ὑψηλὸν τὸν Κανόνα ἐξέθηκε, καθ' ὃν τὸν ἀδυνάτως ἐχουσῶν ῥιζῶν οἱασοῦν ἐξισώ-

(α) De Slüfel. Mefolabum, Seu duae mediae proportionales per Circulum et Ellipfin vel Hyberbolam infinitis modis exhibitae. Leod. 1659. 4. καὶ 1668 cum parte altera de Analyfi et Mifcellaneis.

(β) The geometrical key, or the gate of equations unlocked.

(α) Philofophical Transactions 1687. No. 188.

(β) Philof. Trans. 1687. No. 190.

(γ) Ἔφυ μὲν Ἰσαὰκ ὁ Νεύθων (Newthon) τῇ 15 Δεκεμ. κατὰ τὸ 1642 ἐν τῇ κατὰ τὴν τοῦ Λινκόλν (Lincoln) ἐπαρχίαν Πόλει Βολστρὸπ (Wolftrop) ἐξ εὐγενοῦς Πατριᾶς· ἤκμαζε δὲ κατὰ τὸ 1687. Ἐτιμήθη δὲ Διευθυντὴς τοῦ ἐν Λονδίνῳ Νομισματοκοπείου κατὰ τὸ 1696, καὶ Ἱππεὺς ὑπὸ τῆς ἐν Ἀγγλίᾳ τότε τοὺς τῆς Βασιλείας οἴακας δρακυβερνώσης Ἄννης κατὰ τὸ 1705. Μετέστη δὲ τῶν τῇδε κατὰ τὸ 1727, ἔτος ἄγων τῆς αὐτοῦ ἡλικίας 85.

(δ) In Arithmetica Univerfali.

διαλύεσθαι ἔχειν· καλεῖται δὲ τὸ αὐτοῦ Φιλαπόνημα Μεσόλαβον, πρῶτον μὲν κατὰ τὸ 1659 ἐν Λεοδίῃ (Liège, Leodium), εἶτα καὶ κατὰ τὸ 1668 μεθ' ἑτέρας περὶ Ἀναλύσεως καὶ περὶ τῶν Συμμίκτων πραγματείας εἰς Φῶς προκύψαν (α)· ἀλλάγε καὶ οὕτω οὐδόλως τὸν τρόπον, δι' οὗ πρὸς εὕρεσιν τῶν τοιούτων Ἀναλυτικο-Γεωμετρικῶς κατασκευαζομένων ἐξισώσεων ἤχθη, ὁ Ἀββᾶς δηλῶσαι ἠξίωσε. Μετ' οὐ πολὺ δὲ καὶ Θωμᾶς Βακέρος ὁ Ἄγγλος κατὰ τὸ 1684 ἐν τῇ αὐτοῦ Γεωμετρικῇ Κλειδὶ, ἤτοι ἐν τῇ ἀνεῳγμένῃ τῶν Ἐξισώσεων Θύρᾳ (β) τὰς κυβικὰς καὶ διτετραγωνείους πάσας Ἐξισώσεις διὰ τοῦ Κύκλου καὶ τῆς Παραβολῆς μόνης ἐκτιθέναι, σοφῶς πάνυ δείκνυσιν· ὃς δὴ τρόπος Βακέρου Κεντροκανὼν παρὰ τοῖς ὕστερον οὐκ ἀπροσφυῶς ἤκουσεν. Ἐπεὶ δὲ τὰ τοῦ Βακέρου Συγγράμματα μεγάλης δεῖται καὶ ἀκριβοῦς τῆς προσοχῆς (ὡς ἐκείνου πῇ μὲν τῷ + χρωμένου, πῇ δὲ τῷ —), τοῦθ' ἕνεκα Ἀλλεΰος (Halley) ἑτέραν ἐπεχειρίσατο ἐξευρεῖν μέθοδον, ἐφ' ᾧ ταῦτα πρὸς τὸ εὐχερέστερον μεταῤῥυθμίσαι, ἣν δὴ κἀν ταῖς Φιλοσοφικαῖς ἐγνώρισε Διαλήψε-

(α) De Slüfel. Mefolabum, Seu duae mediae proportionales per Circulum et Ellipfin vel Hyperbolam infinitis modis exhibitae. Leod. 1659. 4. καὶ 1668 cum parte altera de Analyfi et Mifcellaneis.

(β) The geometrical key, or the gate of equations unlocked.

σι (α). Τὸ τοιοῦτον μὲν δὴ Θεώρημα καὶ ὑπὸ Σγραβεζανδίου ἐν τῇ τῆς τοῦ Νεύθωνος καθόλου Ἀριθμητικῆς προσετέθη ἐκδόσει. Δείκνυσι καὶ γὰρ Νεύθων ἐν τούτῳ τῷ Συγγράμματι, ὅπως δὴ ἡ Κογχοὶς πρὸς κατασκευὴν κυβικῶν Ἐξισώσεων, ναὶ μὴν καὶ πρὸς ἄλλας τοῦ Κώνου τομὰς συντελεῖ. Ὁ δέτοι Ἀλλεΰος καὶ πόῤῥω ἔτι δείκνυσιν, ὅπως ὁ τῶν δυνατῶς ἐχουσῶν ῥιζῶν ἀριθμὸς, τοὺς ἐν οἷς ἐκεῖναι ἐμπεριειλήφαται ὅρους καὶ τὰς τούτων Θέσεις ἢ καταστάσεις ὑπὲρ οἱασδηποτοῦν τῶν κυβικῶν καὶ διτετραγώνων ἐξισώσεων περιστάσεως, οἷός τ' ἐστὶ Γεωμετρικῶς ὑπ' ὄψιν οἱονεὶ ἐκθέσθαι (β).

Παρὰ πάντας δὲ καὶ μάλαγε εὐφυῶς ὁ δαιμόνιος ἐκεῖνος ἀνὴρ Νεύθων (γ) ἐν τῇ ἑαυτοῦ Καθόλου Ἀριθμητικῇ (δ) σοφὸν πάνυ καὶ ὑψηλὸν τὸν Κανόνα ἐξέθηκε, καθ' ὃν τὸν ἀδυνάτως ἐχουσῶν ῥιζῶν οἱασοῦν ἐξισώ-

(α) Philofophical Transactions 1687. No. 188.

(β) Philof. Trans. 1687. No. 190.

(γ) Ἔφυ μὲν Ἰσαὰκ ὁ Νεύθων (Newthon) τῇ 15 Δεκεμ. κατὰ τὸ 1642 ἐν τῇ κατὰ τὴν τοῦ Λινκόλν (Lincoln) ἐπαρχίαν Πόλει Βολστρὸπ (Wolftrop) ἐξ εὐγενοῦς Πατριᾶς· ἤκμαζε δὲ κατὰ τὸ 1687. Ἐτιμήθη δὲ Διευθυντὴς τοῦ ἐν Λονδίνῳ Νομισματοκοπείου κατὰ τὸ 1696, καὶ Ἱππεὺς ὑπὸ τῆς ἐν Ἀγγλίᾳ τότε τοὺς τῆς Βασιλείας οἴακας δρακυβερνώσης Ἄννης κατὰ τὸ 1705. Μετέστη δὲ τῶν τῆδε κατὰ τὸ 1727, ἔτος ἄγων τῆς αὐτοῦ ἡλικίας 85.

(δ) In Arithmetica Univerfali.

σεως ἀριθμὸν ἂν εἴη εὑρίσκειν, εἰ καὶ τὴν τοῦ ἑαυτοῦ Κανόνος δεῖξιν κοινῶσαι ἀνελευθέρως πως ἀπηξίωσεν. Ἀλλά γε δὴ καὶ οὕτω Μακλαουρῖνος τὴν τοιαύτην δεῖξιν μετάγε καὶ ἑτέρων ἄλλων αὐτοῦ Συγγραμμάτων, πρὸς τὴν τῶν ἀδυνάτων ῥιζῶν εὕρεσιν ὑπουργούντων, ἐν ταῖς Φιλοσοφικαῖς Διαλήψεσιν ἐκθεῖναι (α), χρεὼν αὐτῷ πρὸ παντὸς εἶναι ἡγήσατο. Ναὶ μὴν καὶ Καμβέλιος αὐτόθι (β), ἑτέραν τοῦ Κανόνος ἐξέθηκε δεῖξιν· αἵγε δὴ πραγματεῖαι ἐν τῇ προμνησθείσῃ τῆς τοῦ Νεύθωνος Καθόλου Ἀριθμητικῆς ἐκδόσει εὑρίσκεσθαι ἔχουσιν· Ἐν γεμὴν τῇ τοῦ Μακλαουρίνου Ἀλγέβρᾳ (γ) καὶ ἑτέρα δεῖξις ἐκτέθειται. Ἐμνήσθη δὲ τούτων καὶ ὁ Γοῦα ἐν τοῖς Παρισιανοῖς Ὑπομνήμασι (δ)· ναὶ μὴν καὶ ὁ Σεϊοῦρος αὐτόθι (ε).

Καταλεγέσθωσαν δὲ μετὰ τούτους τοῖς ἐν Μαθήσει διαπρέψασιν ὅ, τε Τσιρνχαούσιος (ζ), ὁ γενικήν τινα ἐξευρὼν μέθοδον, πρὸς τὴν τῶν ἐξισώσεων διάλυσιν (η)· καὶ Ἀβραὰμ ὁ Μοάβριος (θ), ὁ τὸν τρόπον ἐν ταῖς Φιλοσοφικαῖς ἐκθεὶς Διαλήψεσι (α), καθ' ὃν ἔκ τινος Ἐξισώσεως πλείστοις ἀορίστοις συμπεπλεγμένης ὅροις τὴν ῥίζαν ἐξάγειν δέον· τουτέστι, καθ' ὃν Πρόοδός τις ἀντίστροφος γίνεσθαι ἔχει· ἀλλ' οὖν τὴν τοιαύτην μέθοδον Νεύθων πρὸ αὐτοῦ εὑρὼν ἀκοινώνητον ἐς γ' ἐπ' ἐκεῖνο τοῦ χρόνου διετήρησεν (β). Ἀλλ' οὐδὲ Λάγνιον παραλειπτέον τὸν τοὺς Γενικοὺς, μεθορίους οἱονεὶ, τῶν ῥιζῶν ἐξευρόντα τύπους, καθ' οὓς αὗται μορίου ἄχρι τινὸς κλασματώδους ἐν ὁλοσχερέσιν εὑρίσκεσθαι ἔχωσιν (γ)· ὃ δὴ καὶ μάλα Ἀλλεϋὸν κεκίνηκε ἰδιαιτέρους τε καὶ καθολικωτέρους μεθορίου, ὑπὲρ τῶν ῥιζῶν Διωνύμου τινὸς τύπους ἀνιχνεῦσαι. Δείκνυσι δ' ὡσαύτως Ἀλλεϋὸς, ὅπως αἱ ὡς ἔγγιστα τοῦ ἀληθοῦς ἐπὶ τῆς τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς, πρὸς τὴν τῆς ῥίζης δύναμιν προσεγγίσεις, εὐχερῶς πάνυ περαίνεσθαι ἔχωσι (δ). Παρὰ τούτους δὲ Ῥαψονίου τε (Raphson) ἐπιμνηστέον καὶ Ταϋλόρου (Brook Taylor) τοῦ τῶν Νευθωνείων ναμάτων ἐς κό-

(α) Philos. Trans. 1726 καὶ 1729 No. 394 καὶ 408.

(β) No. 404.

(γ) Parte II. c. 11.

(δ) De Gua. Mémoires de Paris 1741.

(ε) Du Sejour Mém. de Par. An. 1772.

(ζ) Ἔφυ μὲν ὁ Τσιρνχαούσιος (Ernfroi Walter de Tschirnhaus) κατὰ τὸ 1651, ἤκμαζε δὲ κατὰ τὸ 1682· ἐτελεύτα δὲ πρὸς τὸ τοῦ 1708 τέλος.

(η) Act. Erudit. 1683.

(θ) Ἀβραὰμ ὁ Μοάβριος (Abraham de Moivre) προῆλθε μὲν εἰς τὸ ζῆν ἔτει 1667 ἐν Καμπανίᾳ, μεθίστατο δὲ τῶν τῇδε ἔτει 1754 ἐν Λονδίνῳ.

(α) 1698.

(β) Newt. Epist. ad Oldenburgium 1676. Opusc. I. p. 354.

(γ) Méthodes Nouvelles et abrégées pour l' extraction et l' aproximation des racines et pour resoudre par le cercle et la ligne droite plusieurs Problemes Solides et Surfolides, etc. par M. de Lagny. Seconde Edition, à Paris 1692.

(δ) Philos. Trans. 1694. No. 210.

ρον ἀρυσαμένου· ὡς τοῦ μὲν μέθοδον ἐν γένει πρὸς τὰς τῶν ῥιζῶν ὡς ἔγγιστα εὑρέσεις ἐν τῷ ὑπὸ Ἀλλεύου θαυμαζομένῳ περὶ τῆς τῶν Ἐξισώσεων Καθόλου Ἀναλύσεως αὐτοῦ Συγγράμματι ἐνδείξαντος (α)· τοῦ δὲ τὴν τῆς ὡς ἔγγιστα τοῦ ἀκριβοῦς προσεγγίσεως μέθοδον πρὸς τὸ κρεῖττον κατὰ τὸ 1700 μεταῤῥυθμίσαντος· ἣν δὴ καὶ ἐν ταῖς Φιλοσοφικαῖς κατὰ τὸ 1718 ἐκοίνωσε Διαλήψεσι (β).

Καὶ οὗτοι μὲν δὴ σχεδὸν οἱ ἄχρι τῆς ΙΖ'. τῶν Σωτηρίων ἐνιαυτῶν Ἑκατοντάδος. Ταύτης δὲ ληγούσης κἀπὶ τὴν ΙΗ'. μετακυκλούσης Λεϊβνίτιος (γ) ὁ μέγιστος ἐκεῖνος ἀνὴρ οὐκ ἀμυδρὸν ἄστρον Φιλοσοφίας τε καὶ Μαθήσεως, καὶ παντὸς εἴδους λόγων ἐν τοῖς κατὰ Γερμανίαν ἀπέστιλβε. Τοῦ γὰρ Καρδανείου ὑπὲρ τῶν κυβικῶν Ἐξισώσεων κανόνος ἐν ἐνίοις ἀχλὺν ἐπιπάσσοντος, πρώτῳ ἐπῆλθε Λεϊβνιτίῳ παρατηρῆσαι, καὶ τὸν αὐτοῦ ὑπολογισμὸν Βαλλησίῳ, ἔντινι πρὸς αὐτὸν κατὰ τὸ 1698 πεμφθείσῃ ἐπιστολῇ, σημᾶναι (δ). Περὶ οὗ δὴ καὶ Νικόλαος ὁ Μερκάτωρ ἐν τοῖς Ἀκαδημαϊκοῖς τῶν

(α) Analyſis Aequationum Univerſalis 1690 — 1607. Ed. Sec.

(β) Philoſ. Trans. 1718.

(γ) Λεϊβνίτιος (Godefroi-Guillaume, Baron de Leibnitz) τὰς τοῦ βίου τοῦδε πύλας κατὰ τὸ 1646 ἐν Λειψίᾳ τῆς Σαξ. περάσας, μεθίσταται τῶν τῇδε κατὰ τὸ 1716 Νοεμ. 14.

(δ) Wallifii Opp. T. III. coll. Epiſt. 27. et Leibn. Opp. T. III. p. 126.

Ἐπιστημῶν Ὑπομνήμασιν ἐν τέσσαρσι πραγματείαις διείληφε (α). Κατὰ τοῦτο δὲ τοῦ χρόνου καὶ ὁ Γοῦα ἐν τοῖς αὐτοῖς Ὑπομνήμασι (β), τὸν Καρτεσιανικὸν ὑπὲρ τοῦ τῶν θετικῶν καὶ στερητικῶν οἱασδηποτοῦν Ἐξισώσεως ῥιζῶν ἀριθμοῦ ἐξετίθη κανόνα· ὃς δὴ διαφόρως εἶτα ὑπὸ Σεγνέρου, Κραιστνέρου, Ἀπίνου τε καὶ Μιλνέρου πεποίκιλται. Ἐν δὲ τοῖς Ἀκαδημαϊκοῖς ἐκείνοις ὑπομνήμασι καὶ Φοντάνιος ἐπὶ μαθήσει διαπρέπων ἐτύγχανεν (γ)· ἐξέδωκε καὶ γὰρ κατὰ τὸ 1747 μέθοδόν τινα τοῦ τὰς ῥίζας διὰ τῆς ὡς ἔγγιστα τοῦ ἀληθοῦς προσεγγίσεως ἐξευρίσκειν, ἥτις δὴ καὶ ἀποδεκτέα ἂν ἐν γένει ὑπῆρξε, μὴ τοῦ τῆς πράξεως σχοινοτενοῦς καὶ δυσκόλου ἐμποδὼν καθισταμένου. Μέμνηται δὲ ταύτης καὶ ὁ Ἀλαμβέρτος ἐν τῇ Μεθοδικῇ Ἐγκυκλοπαιδείᾳ (δ)· Ὁδέγε Λὰ Γράγγιος καὶ ἀκριβεστάτην ὑπὲρ ταύτης μαρτυρίαν ἐξέδωκεν, ἐν τῷ αὐτοῦ περὶ τῆς τῶν Ἀριθμητικῶν Ἐξισώσεων λύσεως Συγγράμματι (ε).

Κατὰ δὲ τὴν αὐτὴν Ὀγδόην ἐπὶ τῇ Δεκάτῃ ἀπὸ

(α) Mémoires de l'Acad. des Scienc. 1738. 1741. καὶ 1743. 1744.

(β) De Gua. Mémoires de l'Acad. des Scienc. 1741.

(γ) Fontaine. Mém. de l'Acad. des Sc. 1747.

(δ) D'Alembert. Encyclopédie méthodique, partie Mathém. art. Equation.

(ε) La Grange. De la reſolution des équations numériques (à Paris An. VI.) p. 153 — 164.

Χριστοῦ Ἑκατοστύα Λεορνάδος Εὐλῆρος (ζ) ἀνὴρ Μαθηματικώτατος τοῖς ἄλλοις συνήκμαζεν, ὁ πολλὰς μὲν καὶ ἄλλας συγγραψάμενος Μαθηματικὰς Πραγματείας, ἐκ μιᾶς δὲ ὑπὲρ τῶν ἄλλων πρὸς Ἄλγεβραν ἀνηκούσης περὶ τῶν Σχημάτων τῶν κατὰ τὰς ἐξισώσεις ῥιζῶν (β), μέγα τὸ κλέος ἀράμενος. Ἐξ αὐτοῦ δὲ καὶ ἑτέρας δύω οὐκ ἀγενεῖς ὑπὲρ τῶν ἀδυνάτως ἐχουσῶν ῥιζῶν Πραγματείας, τὴν μὲν ἐν τοῖς Βερολινικοῖς (γ), τὴν δὲ ἐν τοῖς Νέοις τῆς Πετρουπόλεως Ὑπομνήμασιν (δ) ἔχομεν· ἔτι δὲ καὶ ἑτέραν ὑπὲρ τῆς τῶν Ἐξισώσεων οἱουδηποτοῦν βαθμοῦ λύσεως (ε), καὶ περὶ τὰς τῶν Ἐξισώσεων ῥίζας στρεφομένην ἄλλην (ζ), ναὶ μὴν καὶ μέθοδόν τινα τῆς ὡς ἔγγιστα τοῦ ἀληθοῦς τῶν ῥιζῶν προσεγγίσεως (η). Δείκνυσι δὲ παρὰ ταῦτα Εὐλῆρος ἐν τῇ ἑαυτοῦ τῆς τῶν Ἀπείρων Ἀναλύσεως Εἰσαγωγῇ (θ) τὴν τῶν ἀντιστρόφων Σειρῶν πρὸς τὸν τῶν Ῥιζῶν Ὑπολογισμὸν χρῆσιν, οὐχ ἧττον αὐτόθι καὶ περὶ τῆς τῶν Ἐξισώσεων κατασκευῆς πραγματευόμενος· Οὐκ ἀπηξίωσε δ' ὡσαύτως ἐν ταῖς τοῦ Διαφορητικοῦ Ὑπολογισ-

(α) Φὺς κατὰ τὸ 1707 Λεονάρδος Εὐλῆρος (Leonardus Eulerus), ἀπεβίωσε κατὰ τὸ 1783.
(β) De formis radicum Aequationum cujusque ordinis conjectatio. Comm. Petr. T. VI. 1732.
(γ) Mém. de Berlin 1749.
(δ) Nov. Comm. Petr. T. XIII. 1768.
(ε) N. C. Petr. T. IX. 1762.
(ζ) N. Comm. Petr. XV.
(η) Nova Acta Petr. 1788.
(θ) Introd. in Anal. Infinitorum.

μοῦ Ἐκθέσεσι (α), καί τινά τοῦ τοιούτου Ὑπολογισμοῦ ἐφάρμοσιν πρὸς τὴν τῶν Ἐξισώσεων λύσιν διὰ τῆς τοῦ Ταϋλορείου Θεωρήματος χρήσεως ἐκθεῖναι. Τῷ δὲ Εὐλήρῳ καὶ Λαμβέρτος συνήκμαζεν οὐ πάνυ τι ἄσημος Μαθήσεως θιασώτης, ὁ τὰς θεωρίας ὑπὲρ οἱουδηποτοῦν τῶν Ἐξισώσεων Βαθμοῦ ἐν τοῖς Βερολινικοῖς Ὑπομνήμασι (β) ἐνστησάμενος, καί γε πάνυ χρήσιμον ὑπὲρ τῆς τῶν Ἐξισώσεων λύσεως τε καὶ μετασχηματισμοῦ, ἐν τῷ Β'. Μέρει τῶν ἑαυτοῦ Μαθηματικῶν Εἰσηγήσεων Πραγματείαν ἐκθέμενος.

Τοῖς δὲ ταῖς Ἐξισώσεσιν ἐνασχολουμένοις καὶ Λα Γράγγιος διέπρεπεν ὁ ἀνωτέρω ἐπιμνησθείς, ὁ ταῖς Ἀριθμητικαῖς τῶν Ἐξισώσεων Λύσεσι διά τινος ἰδιαιτέρας καὶ ἀγχινόου πάνυ θεωρίας πολύ τι τὸ φῶς ἐπάξας ἐν ταῖς ὑπ' αὐτοῦ περὶ τούτων τοῖς Βερολινικοῖς Ὑπομνήμασιν ἐνταθείσαις δυσὶ Πραγματείαις (γ)· ἅς γε δὴ ἄμφω πολλαῖς συμπεπυκασμένας προσθήκαις εἰς φῶς νεωστὶ προκυψάσας ἴσμεν, περὶ τῆς τῶν Ἀριθμητικῶν Ἐξισώσεων ἁπάντων βαθμῶν λύσεως (δ), ἐπιγραφὴν φερούσας. Πολλὰς δὲ τῶν ἑαυτοῦ βαθυτάτων περὶ τῆς τῶν Ἐξισώσεων Φύσεως παρατηρήσεων ὀξέως μάλα τοῦ νοὸς δεομένων, ἔξεστι τῷ βουλομένῳ ἐν ταῖς

(α) Instit. Calculi Differentialis.
(β) Mém. de Berlin 1763.
(γ) Mém. de Berlin 1767. 1768.
(δ) De la Resolution des Equations Numériques de tous les degrés, par I. La Grange, à Paris. An VI. 266. p. en 4.

ἑαυτοῦ περὶ τῆς τῶν Ἐξισώσεων Ἀλγεβραϊκῆς Λύσεως ἐντυχεῖν Θεωρίαις (α). Παρὰ δὲ ταῦτα, τὸ περὶ τῶν ἀδυνάτων Ῥιζῶν δυσχερὲς πάνυ καὶ μετὰ πόνου οὐκ ἄν εἴποι τις ὅπου ἀποδεικνύμενον Σχῆμα, ὅ, τε Ἀλαμβέρτος (β), Εὐλῆρος (γ), Λα Γράγγιος (δ), Λα Πλάκιος (ε), Γαούσιος (ζ), καὶ Φονκενέκιος ἐν τοῖς τῆς Φιλοσοφικο-Μαθηματικῆς Ταυρινείου Ἑταιρείας Συμμίκτοις (η), διαλευκᾶναι ἀνεβάλοντο. Ἡ δέγε πλείστων ἄλλων ἐξισώσεων, ἀορίσταις οὐχ ἧττον ποσότησι συμπεπλεγμένων πρὸς μίαν Ἐξίσωσιν, ἐν ᾗ ἡ ἄγνωστος ἐν μέρει ἂν εἴη ληπτέα, Ἀναγωγὴ, ἤτοι ἡ περὶ τῆς τῶν ἀορίστων διαστολῆς τε τῆς τούτων δηλονότι παντελοῦς ἀπαλείψεως (de Eliminatione), καὶ εὑρέσεως διδασκαλία ἐπιμελῶς ἄγαν ἐν τοῖς Νεωτέροις ἐπεξείργασται.

(α) Reflexions ſur la Reſolution Algébrique des Equations, Nouv. Mem. de Berlin 1770. 1771.

(β) Mém. de l' Acad. de Berlin 1746· οὗτινος δὴ ἡ Δεῖξις κἂν τῇ ὑπὸ Βογγαινβιλλίου περὶ τοῦ Ὁλοσχεριτικοῦ Ὑπολογισμοῦ Διαλήψει εὑρίσκεται. Traité du Calcul Integral par Bongainville. T. I. p. 47.

(γ) Mém. de l' Acad. de Berlin 1749.

(δ) Nouveaux Mém. de l' Acad. de Berlin 1772.

(ε) La Place, dans le Journal de l'Ecole normale.

(ζ) Gauſſ. Demonſtratio nova Theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel ſecundi gradus reſolvi poſſe. Helmſtadii 1799, 4.

(η) Foncenex in Miſcellaneis Philoſophico-Mathematicis Societatis Taurinenſis. Taurini 1759.

χρόνοις. Τὴν μὲν γὰρ δυεῖν Ἐξισώσεων ἀναγωγὴν Εὐλῆρος μετὰ Κραμέρου τε καὶ Λα Γραγγίου ἐξέθεντο, τὴν δέ γε πλειόνων ἢ δυεῖν σὺν πολλοῖς ἄλλοις καὶ Βεζὼς ἐν ὅλῳ Τεύχει τῆς ἑαυτοῦ Γενικῆς τῶν Ἀλγεβραϊκῶν Ἐξισώσεων Θεωρίας (α) εὐφυῶς μάλα κατασκευάσατο.

Οὕτω τοίνυν εὐτυχῶς πρὸς τὸ ἐκθετικώτερον καὶ ἁδρότερον τοῦ τῆς Ἀλγέβρας ἐπεκτεινομένου Σπουδάσματος, πολλοὶ μὲν καὶ ἄλλοι, οὓς ὁ λόγος ἐνταῦθα παραδραμεῖν ἄκων βιάζεται, οὐχ' ἧττον δὲ καὶ Βόλφιοι, καὶ Σονδερσώνιοι καὶ Συμψώνιοι καὶ Κάλλιοι, καὶ Κλαιροὶ, καὶ λοιποὶ ὅσοι ἀνάριθμοι, ἐπὶ τῆς τῶν Μαθηματικῶν Φάλαγγος παραταχθῆναι ἔσπευσαν, εὐρύτερόν πως ἐκπεταννῦντες τὸ στάδιον, καὶ δολιχοδρομοῦντες τὸν δίαυλον· καὶ παρέστη ἄρ' οὕτω ἐντὸς ὀλίγου ἅπασαν τὴν Εὐρώπην τοῖς αὐτῶν ἀπλέτοις ἱδρῶσι τε καὶ καμάτοις ποτνιωμένην θεάσασθαι, δι' ὧν αἱ τῶν Μαθηματικῶν ἀγέλαι ἐκ δυνάμεως εἰς δύναμιν προβαίνουσαι, πόνοις τε συχνοῖς καὶ ἐπιμελείᾳ ἀτρύτῳ κατὰ βραχὺ τὸ ταύτης ἐλαύνουσαι Σπούδασμα, εἰς ὃ καθ' ἡμᾶς ὁρᾶται νῦν τέλος προήγαγον. Εἰκὸς γὰρ ἦν τοὺς μὲν Ἀρχαιοτέρους καὶ πρώτους ἐπιβαλλόντας τῷ πράγματι, μηδὲν πλέον ἢ τῶν ἀρχοειδῶν ἐννοιῶν τὰς προὐργιαιτάτας, ἁπλῶς τε καὶ ἀπερίττως ὑποθέσθαι, καθ' ὅσον ἥκοντες ἦσαν εἰς χρῆσιν, ἀρκουμένους τῷ τέλει τῆς Φύσεως· οὐδὲν γὰρ τοῦ ἀριθμεῖν ἀρχαιότερον· ὥστε καὶ τοὺς

(α) Théorie Générale des Equations Algébriques, à Paris 1779.

πρώτους ἀνθρώπους περὶ τὰ βιωτικὰ καὶ γεώδη διὰ τὴν παράβασιν κατακριθέντας στρέφεσθαι, τοὺς αὐτῶν δακτύλους, ἀγέλας, ἡμέρας, δένδρα, κτλ. ἐπιστημόνως οἵους τ' εἶναι ἐπαριθμεῖν. Ἀλλὰ δὴ καὶ οἱ μετ' αὐτοὺς περὶ τὴν Γεωργικὴν καὶ τὸ Ἀρχιτεκτονικὸν εἶδος σπουδὴν τὴν πᾶσαν καὶ μάλα γε θέμενοι καὶ τὰς τῆς Μαθηματικῆς πρωτολίους ἀρχὰς παντοίως ἐπινοήσαντες, τὸ ταύτης χρῆμα ἀπαρχαίσαντο. Ἐφεξῆς δὲ τοὺς μετ' ἐκείνους γενομένους πολλὰ προσθεῖναι, καὶ τὸ ἐνδέον ἀναπληρῶσαι, ἁβρότερόν τε καὶ τελειότερον τὸ τῶν τῆς Μαθηματικῆς κανόνων ἄθροισμα ἀναδείξαντας. Τέως δὲ τοὺς ὕστερον, ἐπὶ τὸ μᾶλλον τὴν πραγματείαν προαγαγόντας, καὶ τοὺς λόγους τῶν κανόνων προσπεριεργασθῆναι· τουτέστι καὶ τὰς αἰτίας ἀποδοῦναι, δι' ἅσπερ οὕτω μὲν, ἄλλως δ' οὐδαμῶς, ὀρθῶς ἡμῖν καὶ ἀσφαλῶς προβαίνουσα εἴη, πᾶσα ἡ κατὰ τὸν κοινὸν βίον τῆς Μαθηματικῆς χρῆσίς τε καὶ ὠφέλεια.

Ἀλλὰ περὶ τούτων τοῖς τὰς Ἱστορίας Συγγράφουσι πλατύτερον παραλιποῦσι, τοσοῦτον ἡμῖν ὑποσυναπτέον, ὅτι τὸν μετελευσόμενον ἕν τι ὁποιονοῦν τῶν τῆς Μαθηματικῆς Εἰδῶν, τῶν κατ' αὐτὰ ἀρχικωτέρων γνώσεων ἐγκρατέστατον ἐπάναγκες εἶναι, καὶ εἰς ἄκρον ἐπιβολώτατον· τῷ τοι καὶ βραχέα τινὰ περὶ τοῦ τῆς Ἀλγέβρας ἐτύμου, καὶ τῆς ταύτης Διαιρέσεως, ἵν' ἡμῖν κορωνὶς τῷ λόγῳ ἐπιτεθῇ, τοὺς Ἐντευξομένους προδιαμνήσας, αὐτίκα πεπαύσομαι. Ἔστι τοίνυν τοὔνομα, ὡς ἐκ τῆς Φωνῆς δῆλον, Ἀραβικόν· ὃ δὴ οἱ μὲν ἀπὸ κυρίου ὀνόματος Μαθηματικοῦ τινὸς καὶ Χυμικοῦ Ἄραβος

Γέβερ καλουμένου παράγουσιν, παρ' οὗ καὶ Ἄλγεβρα τῇ προσθέσει τοῦ παρ' ἐκείνοις ἄρθρου ἀλ· οἱδ' ἐκ τινος ἐπιστημονικῆς Ἀραβικῆς Φωνῆς Ἀλγιάβαρ, δι' ἧς ἡ ἀριθμοὺς ἀκεραίους τε καὶ κλασματώδεις τοῦ ὁλοσχεροῦν δηλοῦται μέθοδος· ἕτεροι δὲ κἀξ ἄλλων ἀρχῶν. Οἱ μέντοι Ἄραβες οὐκ ἐχρῶντο τῇ Φωνῇ Ἄλγεβρα μόνῃ, ἐφ' ᾧ τὴν Ἐπιστήμην ταύτην τὴν παρ' ἡμῖν Ἄλγεβραν καλουμένην δηλῶσαι, προσετίθουν δὲ ταύτῃ καί τινα ἄλλην, Μουκεβελὰχ, ἢ Ἀλμουκάβαλα, ὡς περὶ τοῦ Πακιόλου Λουκᾶ ἀφηγούμενοι προεξέθημεν. Οἱ μὲν οὖν Ἀρχαῖοι τὰ Ἀναλυτικῆς Μεθόδου ἐχόμενα, ἧς Πατέρας οἱ πλεῖστοι τοὺς περὶ Πυθαγόραν καὶ Πλάτωνα ἀνακηρύττουσιν, Ἀριθμητικὰ προσηγόρευον, ὡς δηλοῖ τὰ τοῦ Διοφάντου Σωζόμενα· οἱ δέγε Νεώτεροι, οἷς τὰ τῆς Μεθόδου ταύτης ἐμέλησε, καίτοι τοῦ τῆς Ἀναλυτικῆς Μεθόδου ὀνόματος ἐπιλαθέσθαι οὐκ ἔχοντες, ἀλλ' ὅταν δέῃ καὶ τούτῳ χρώμενοι, κοινότερον μέν τοι ἐκφύλῳ ὀνόματι ἠξίωσαν ἀποκαλεῖν Ἄλγεβραν. Φασὶ γὰρ πρὶν ἀπιδεῖν σφᾶς εἰς τὰ τοῦ Διοφάντου ἐκ τῶν Ἀράβων ταύτην παραλαβεῖν (α), καὶ ὡς πολὺ παραλάττουσαν τῆς τῶν Ἑλλήνων Ἀναλυτικῆς Μεθόδου τὸ Ἀραβικὸν διατηρῆσαι ὄνομα, Μέθοδον Ἀναλογικὴν, ἢ Τέχνην Ἀναλυτικὴν ἐμφαῖνον. Ὁ δέγε Γόλιος ἔν τινι τῶν αὐτοῦ περὶ τὰ τοῦ Ἀλφεργάνου Ἀστρονομικὰ Στοιχεῖα Παρατηρήσεων, τὴν τῆς Ἀλγέβρας κλῆσιν ἔκ τινος ἑτέρας Ἀραβικῆς Φωνῆς παρήγαγε

(α) Μέτιθι τὰ ἐν ἀρχῇ Ἀφηγηθέντα.

τῆς κεκλασμένου ὀστοῦν ὑγιοῦν δηλούσης (α). Ἐπεὶ μὲν γὰρ μονάδος οἱασδηποτοῦν μέρη ἐν τοῖς Ἀριθμητικοῖς Συγγράμμασι μενολεξεί πως ἐκφερόμενα κλάσματα, ἤτοι κλασματώδη ἐμφαίνει μόρια, τούτου χάριν, ἐκεῖνός φησί, διὰ τῆς φωνῆς Ἄλγεβρα, τὴν τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως ἔννοιαν παραστῆσαι ἐκείνοις ἔδοξεν· ὥστε τὰ πρὸς ἄλληλα παρεξεταζόμενα μεγέθη (terminos comparationis) πρὸς μίαν Ἐξίσωσιν ἄγοντας, τὰ αὐτῶν οὕτω μέρη πρὸς ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς μεταποιεῖν. Ἀλλὰ δὴ τὴν τοιαύτην παραγωγὴν οὐκ ὀρθῶς ἔχειν, αὐτόθεν κατάδηλον· ἡ γὰρ Ἄλγεβρα οὐδόλως παρὰ τοῖς Ἀρχαίοις κλασμάτων ἐτύγχανεν ὑπολογισμός, ὡς εἴρηται.

Διήρηται δὲ ἡ Ἄλγεβρα εἴς τε τὴν Ἀριθμητικὴν λεγομένην Ἄλγεβραν, καὶ τὴν Στοιχειακήν, ἢ Εἰδικήν. Ὧν ἡ μὲν πρώτη τοῖς Ἀρχαίοις Ἀλγεβραϊσταῖς, πρὸς τὴν τῶν Ἀριθμητικῶν Προτάσεων ἐπίλυσιν, ἐν χρήσει καθέστηκεν· οὕτως τε ἡ ἀόριστος δι' ἑνὸς μόνον στοιχείου, ἢ τινος σημείου παρ' ἐκείνοις ἐδηλοῦτο, τῶν λοιπῶν ἐγνωσμένων δι' ἀριθμῶν ἐμφαινομένων. Ἡ δὲ δευτέρα, ἥτις δὴ καὶ Γραμματικὸς ἤκουσεν Ὑπολογισμός, καὶ Συμβολικὴ Ἄλγεβρα, ἔργον τοῦτο οἱονεὶ ἰδιαίτερον ἀπεκληρώσατο τὴν ἀγνοουμένην ποσότητα παντοίαις πρότερον πράξεσι διαμελισθεῖσάν τε καὶ ἀναλυθεῖσαν, εἰς ὁλοσχερίαν ἔπειτα ἀνακαλεῖν, ἄλλῃ τινὶ προεγνωσμένῃ οὔσῃ ἡμῖν ποσότητι ἴσην γνωριζομένην. Συμβολικὴ δὲ καλεῖται, ὡς τὰς γνωστὰς ἢ ἀγνώστους τῶν ποσοτήτων, καὶ δὴ καὶ τὰς Ἀριθμητικὰς πράξεις οὐ διὰ τῶν Ἀριθμητικῶν χαρακτήρων, διὰ δὲ τῶν στοιχείων, καὶ τινων ἄλλων (α), ἅπερ γνωριστικὰ οἷον τῶν πράξεων λαμβάνει, διὰ συμβόλων περαίνουσα. Ὑπ' ἐνίων δὲ καὶ Ἀλγόριθμος Εἰδικὸς (β) ἡ Ἄλγεβρα ἤκουσεν. Ἦν δέτοι ἡ λέξις Ἀλγόριθμους περὶ τοὺς μέσους αἰῶνας ὑπολογισμοῦ διὰ Δεκαδικῶν χαρακτήρων σημαντική. Σύγκειται δ' ὡσαύτως ἡ φωνὴ ἐκ τοῦ Ἀραβικοῦ ἀλ καὶ τοῦ Ἑλληνικοῦ ἀριθμός, ὡς Ἀλμάγεστον, κτλ. Ἡ δέ γε τῇ τοῦ Ἰωάννου de ſacro Boſco Ἀριθμητικῇ ἐν μέτρῳ ἐπισυναφθεῖσα ἑτέρα Ἀριθμητική, διὰ τῶν ἐφεξῆς ἄρχεται στίχων

> Haec Algorithmus ars praeſens dicitur, in qua
> Talibus Indorum fruimur bis quinque figuris. etc.

Ὅπερ ἐστὶν

> Τὴν δέγε Ἀλγόριθμον τέχνην καλέουσιν, ἐν ἧπερ
> Τοίοις πέντε δὶς Ἰνδῶν χρῆσθαι σχήμασιν ἔστι.

Ὁ δέγε Βιέτης, ὁ τὴν τῶν στοιχείων χρῆσιν, ὑπὲρ οἱωνδηποτοῦν μεγεθῶν ἐγνωσμένων τε ἢ ἀγνώστων Γενικὴν ἀναδείξας, Εἰδικὴν ἐντεῦθεν τὴν Ἄλγεβραν Ἀριθμητικὴν ἀπεκάλεσεν. Ὅ, τε Νεύθων Ἀριθμητικὴν Καθόλου, ὡς περὶ τὰς τῶν Γεωμετρικῶν

(α) Käſtner in d. Vorrede zur Anal. d. Endl. S. XIII. — Klügel Math. Wörterbuch, 1ſter Theil. S. 26.

(α) Ὅρα ἔμπροσθεν Κεφ. Α'. §. 30. τῆς εἰς τὴν Μαθ. Εἰσαγωγῆς.

(β) I. A. Segneri Elem. Anal. Finitorum, C. II. Sect. II. §. 125.

Προτάσεων Λύσεις καὶ μάλα προσφυῶς ἔχουσαν. Ἕτεροι δὲ Ἀριθμητικὴν Συμβολικὴν, ὡς περὶ τὰ ἀόριστα διὰ συμβόλων, ἤτοι σημείων ἀναλογίζεσθαι ἡμᾶς ἐκδιδάσκουσα, εἰς παντοίων προβλημάτων ἐπίλυσιν. Χρῆται τοίνυν ἡ Ἄλγεβρα ὡς τοῦ Ποσοῦ συμβόλοις τοῖς κδ'. Στοιχείοις ἢ Γράμμασι· καὶ τούτων τὰ πρότερα α, β, γ, δ, κτλ.· ἀντὶ τῶν διδομένων καὶ γνωρίμων παραλαμβάνουσα, τοῖς ἐσχάτοις φ, χ, ψ, -//, ω, τὴν εὑρεθησομένην ἀποκληροῦται τῶν ἀγνοουμένων δύναμιν. Ἐγκέκριται δὲ ἡ τῶν στοιχείων χρῆσις τῆς τῶν χαρακτήρων τριῶν ἕνεκα μάλιστα τούτων. Α'. ὅτι τοῖς μὲν χαρακτῆρσι πηλικότης ἡ διωρισμένη τε καὶ δήλη οὐχὶ μόνον ὑποσημαίνεται, τοῖς δὲ στοιχείοις καὶ διωρισμένη, καὶ συνεχὴς, καὶ κίνησις, καὶ χρόνος, καὶ σωμάτων δυνάμεις, καὶ βαρύτητες, καὶ ἐνστάσεις, καὶ ὅ, τι δήποτε ὑπὸ τὸ τοῦ Ποσοῦ Γένος ὁπωσοῦν τάττεσθαι πέφυκε· καὶ ταῦτα ἐν γένει, κἂν ἀόριστα τύχῃ καὶ ἀγνοούμενα οὐδὲν ἔλαττον. Β'. ὅτι τοῖς μὲν ἀριθμητικοῖς ἐν μέρει τὰ προβλήματα ἐπιλύεται, τοῖς δὲ συμβολικοῖς τούτοις καθόλου ἐπὶ πᾶσαν ὑπόθεσιν ῥαδίως ἀνακαλούμενα. Γ'. ὅτι διὰ μὲν ἐκείνων οὐδαμῶς, διὰ δὲ τούτων ἐπ' ὀφθαλμοῖς κεῖται καὶ τὰ μέρη, ἐξ ὧν τὸ ὅλον ἔχει τὴν ὁλοσχέρειαν, οἷον τὸ παραγόμενον, ἢ τὸ κεφάλαιον, ἀντὶ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ προσθέσεως.

Ὅσον μέντοι τὸ τῆς Καθόλου τῆσδε Λογιστικῆς ὀνησιφόρον καὶ ἡ χρῆσις ἁπάσαις σχεδὸν ταῖς Ἐπιστήμαις ἔνεστιν, οὐκ ἂν ἔχοι τις εἰπεῖν, ὡς τὰ μάλιστα οὐ μόνον ἐν ταῖς τῶν Προβλημάτων Ἀναλύσεσιν, ἀλλὰ

καὶ κατ' αὐτὰς οὐδὲν ἧττον τὰς Συνθέσεις ὑπουργοῦσα. Αὕτη δὲ οὐ δι' ἀριθμῶν, δι' ἑτέρων δέ τινων σημείων τε καὶ εἰδῶν, οἷά εἰσι τὰ στοιχεῖα συμβολικῶς ἐμφαίνουσα προβάλλεται τὰς Ποσότητας. Δι' αὐτῶν γὰρ οὐδὲν τι ἧττον καὶ ἀριθμοὶ, καὶ ἐπιφάνειαι, καὶ στερεὰ, καὶ παντοίου γένους ἄλλα μεγέθη ὑποσημαίνεσθαι ἔχουσι. Παρείληπται δὲ αὕτη, ἀντὶ τῆς κοινῆς καὶ πεπατημένης Ἀριθμητικῆς, εἰς χρῆσιν τοῖς Μαθηματικοῖς· τοῦτο μὲν, ἐφ' ᾧ μεταξὺ τοῦ ἀληθοῦς καὶ ψευδοῦς τὴν διάκρισιν προπεπικυρώσηται· τοῦτο δὲ, τὴν τῶν προβληθέντων ἐπίλυσιν, καὶ τῶν ἤδη εὑρεθεισῶν ἀληθειῶν τὴν ἐνάργειαν ἐπιχορηγήσηται· καὶ τὸ μὲν, ἐφ' ᾧ καινοφανεῖς τινας ἀληθείας ἀνακαλύψῃ· τὸ δὲ, ταῖς λοιπαῖς τῶν Ἐπιστημῶν βεβαιότητα καὶ ἐντέλειαν προσενέγκῃ· καὶ τὰ μὲν δι' ὑπολογισμοῦ Ἀριθμητικῶς, τὰ δὲ διὰ τῆς τῶν διαγραμμάτων κατασκευῆς Γεωμετρικῶς τὰ τῆς ἐφόδου περαίνουσα, μεθόδους τινὰς τὰ μάλιστα λυσιτελεῖς ἀνακαλύπτει καὶ ἀναδίδωσιν. Εἰδέ τις ἐν τῇ τῶν Προβλημάτων ἐπιλύσει προσοχθίζων εἴη, ἀντὶ τῶν γενικῶν τούτων στοιχειωδῶν Ποσοτήτων τοὺς ἀριθμοὺς ἐκλαμβάνων καὶ ἀντεισάγων, τοὺς ἐπίσης παντοίῳ γένει ποσότητος προσήκοντας, πᾶσαν ῥαδίως τὴν δοκοῦσαν δυσχέρειαν ἐκ μέσου ποιήσεται· ὃ τῶν κατὰ τὴν Μαθηματικὴν ὑπολογισμῶν, τὸ Πρῶτον ἐστὶ, καὶ Μέσον, καὶ Πύματον.

ΠΙΝΑΞ ΚΕΦΑΛΑΙΩΔΗΣ
ΤΗΣ ΟΛΗΣ ΒΙΒΛΟΥ.

ΤΜΗΜΑ Δ.

Περὶ τῆς τῶν ποσοτήτων διαφόρου Σχέσεως.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ
ΕΙΣ ΤΗΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 1. Ἡ Μαθηματικὴ ἐστὶν Ἐπιστήμη τοῦ Ποσοῦ γενικῶς θεωρουμένου.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 2. Ποσὸν δὲ ἢ Ποσότης ἐστὶ, πᾶν τὸ ἐκ μερῶν μὲν συγκείμενον, αὐξήσεως δὲ ἢ μειώσεως δεκτικόν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 3. Ὁ χρόνος τοίνυν, ὁ στρατὸς καὶ τὰ τούτοις ὅμοια εἰσὶ Ποσότητες· Θεὸς δὲ, ἄγγελος, ἢ ψυχὴ οὐδόλως· ἐκεῖνα μὲν γὰρ αὐξήσεως καὶ μειώσεως δεκτικὰ, ταῦτα δὲ οἷα ἀμερῆ, ὅλως ἀνεπίδεκτα τυγχάνει.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Παρὰ τοῖς πάλαι τῶν Ἑλλήνων ἡ Ποσότης Μονάδων σωρεία τε καὶ συνάφεια ἤκουσεν· ὥστε καὶ Ποσότητα μὲν παρ' ἐκείνοις αὐτὸ τὸ μετροῦν εἶναι μέτρον, ἢ τὸν ἀριθμοῦντα ἀριθμόν· Ποσὰ δὲ τὰ τῷ μέτρῳ καὶ τῷ ἀριθμῷ ὑποκείμενα, τουτέστι τὰ μετρούμενα καὶ ἀριθμούμενα. Ἔνθεντοι καὶ τοῦ Ποσοῦ δίχα παρ' αὐτοῖς διαιρουμένου, τὸ μὲν συνεχὲς Πηλικότης ἢ Μέγεθος εἴρηται, ὅτε δηλαδὴ ἓν ἐστὶ τὸ μετρούμενον, ὥσπερ ἓν ξύλον εὑρίσκεται δίπηχυ, τρίπηχυ, ἢ λίθος, ἤ τι τῶν τοιούτων· τὸ δὲ διωρισμένον, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς Ποσὸν ἢ Ποσότης, ἡνίκα δηλαδὴ κεχωρισμένον καθέστηκεν, ὡς ἐπὶ δέκα λίθων, ἢ δέκα μνῶν· ταῦτα γὰρ κεχωρισμένα ἀπ' ἀλλήλων ὄντα, ἀριθμεῖσθαι λέγονται, εἰμὴ διὰ σμικρότητα καὶ πλῆθος μοδίῳ, ἤ τινι τῶν τοιούτων μετρηθῶσι μέτρῳ, ὥσπερ σῖτος. Ἡμῖν ἀλλ' οὖν τοῖς τῶν Νεωτέρων ἴχνεσιν ἑπομένοις, τὰ ἐν τῇ ἡμετέρᾳ Ἀναλυτικῇ πραγματείᾳ ὁριζόμενα τε καὶ διδασκόμενα τῷ Γενικῷ Ποσῷ ἁρμόζοντα ἐν γένει θεωροῦνται, ὡς ἑκάτερον εἶδος ἐκείνων περιλαμβάνοντα. Διὸ οὐχ ἡ τοιαύτη τῶν λέξεων παρατηρεῖται διαφορά· ὥστε ἐφεξῆς ἐν τῇ τῆς λέξεως Ποσότης ἐννοίᾳ, τόν τε ὡρισμένον ἀριθμὸν, ἤτοι τὸ διωρισμένον Ποσὸν, καὶ τὸ ἀόριστον, ἤτοι τὸ Συνεχὲς ἐμπεριλαμβάνεσθαι.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 4. Ποσότης Διακεκριμμένη μὲν ἐστὶν, ἧς τὰ μέρη ἀπ' ἀλλήλων ἰδίᾳ θεωρεῖσθαι ἔχουσι· Συνεχὴς δὲ, ἡ ἐπ' ἄπειρον ἰοῦσα, μηδεμιᾶς ἑτέρας παρεντιθεμένης.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

Ἡ μὲν γὰρ ἐκ μερῶν διακεκριμμένων συγκειμένη Ποσότης ἐστὶν ὁ στρατὸς· ἢ ἡ λίθων, ἢ ψάμμου σωρεία· ἡ δ' ἐκ μερῶν ἀλλήλοις συνημμένων τε καὶ συνεχιζομένων συνισταμένη ἐστὶν ὁ χρόνος, τὸ τῶν ὁδῶν μῆκος, καὶ ῥάβδου μέγεθος.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

Οὔσης τοίνυν τῆς Ποσότητος Διακεκριμμένης τε καὶ Συνεχοῦς, διχῇ παρίσταται διαιρεῖσθαι τὴν Μαθηματικήν. Ἡ μὲν γὰρ ἐκ μερῶν διακεκριμμένων συγκειμένη Ποσότης τὸ τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ Ἀλγέβρας παρίστησιν ἀντικείμενον, ὡς δι' ἀριθμῶν, ἢ διὰ στοιχείων δηλουμένη· ἡ δ' ἐκ συνεχῶν μερῶν, διαστατὸν καλεῖται, τῆς Γεωμετρίας καὶ τῶν μετ' αὐτὴν τυγχάνουσα ἀντικείμενον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 5. Ποσότης Συγκεκριμμένη ἐστὶν, ἡ μεθ' ἑτέρας τινὸς καταληπτή· οἷον, τρεῖς ἀστέρες. Ἀφηρημένη δὲ, ἡ ἀπολύτως ἐκφερομένη· οἷον, τρεῖς.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 6. Ἕν ἐστι, τὸ οὕτω τι ὂν, ὥσθ' ἕτερον παρὰ τοῦτο ταυτὸν εἶναι μὴ δύνασθαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἓν λέγεται, ὅπερ οὐ διαιρεῖται εἰς πολλὰ, ἢ λέγεται ἕν· Εἰ γὰρ καὶ διαιρεῖται ὁ Στρατὸς εἰς πολλοὺς Στρατιώτας, ὡς μὴ δυνάμενος μέντοιγε εἰς πολλὰ ὅμοια διαιρεθῆναι, ἓν ἀκούει.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 7. Μονάς ἐστι τὸ ἀφηρημένον, δι' οὗ, ἢ καθ' ὃ, ἕν τι λέγομεν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁ δ' Εὐκλείδης οὑτωσὶ ὡρίσατο. Μονάς ἐστι, καθ' ἣν, ὃ ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται (α). Ἕτεροι δὲ οὕτω,

(α) Βιβ. Ζ. τῶν Στοιχείων, ὅρῳ α'.

Μονάς ἐστι, τοῦ τε ἀριθμοῦ καὶ τῶν μορίων μεθόριον· ἀπὸ γὰρ ταύτης ὡς ἀπὸ σπέρματος ἢ ῥίζης, τὸ μὲν Ποσὸν αὔξει, μειοῦται δὲ τὸ Πηλίκον. Τὸ γὰρ διαστατὸν ἐκ μερῶν ἀπείρων συγκείμενον, ἀριθμῷ πεπερασμένῳ οὐκ ἂν ἔχοι δηλοῦσθαι, ἐὰν μὴ καὶ αὐτὰ ταῦτα τὰ μέρη, ἅτε εἰς πλείστας ἥττους συλλογὰς ἐν ἀριθμῷ πεπερασμένῳ καὶ ἀλλήλαις ἴσας ἐκληφθῶσι διῃρημένα· κἀντεῦθεν ἡνίκα ἀριθμῷ τὸ σχοινοτενὲς σημειοῦμεν, δηλοῦμεν μόνον εἰς ὅσας τοιάσδε ἐν μέρει συλλογὰς, τὰ μέρη ἀπαξάπαντα διῃρημένα ἀντιλαμβανόμεθα· καὶ δὴ τότε ἡ τοιάδε τις συλλογὴ, τὴν τῆς μονάδος ἐπέχει χώραν. Διόπερ ἡ μονὰς αὕτη, ἥκιστα μὲν ἀδιαίρετος, ἐκ τῶν αὐτῆς δὲ μερῶν σύγκειται, πρὸς ἃ παραβαλλομένη ἀριθμὸν παρίστησιν. Ἔνθεν τοι ἐὰν ὡρισμένον μέγεθος διαιρεθῇ εἰς δύω, ἑκάτερον μὲν τῶν τούτου μερῶν λόγον ἔχει πρὸς τὸ ὅλον ἡμίσεως μὲν τῇ πηλικότητι, καθ' ὃ καὶ παρονομάζεται, τῷ δὲ πλήθει διπλασίου. Ἐὰν δὲ πάλιν ἕκαστον τῶν μερῶν ὑποδιαιρεθῇ εἰς δύω φέρ' εἰπεῖν, τὰ μόρια ταῦτα τῇ μὲν πηλικότητι ἐλάττω εἰσὶ παρὰ μέρος τῶν τε προτέρων μερῶν καὶ τοῦ ὅλου, τῷ δὲ πλήθει πάντως εἰσὶ μείζω. Μεθόριον ἄρα ἡ μονὰς ἀριθμοῦ καὶ μορίων. Ἄλλοι δὲ πάλιν· Μονάς ἐστιν, ὑφ' ἣν ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν μετρεῖται κατὰ τὸ ἐλάχιστον. Ἔστι καὶ γὰρ πάντη ἀδιαίρετος (§. 6.).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 8. Τῆς οὖν μονάδος ἀμεταθέτου οὔσης, καὶ ἑστώσης ἀεὶ, τὸ ἐπ' αὐτὴν πολλαπλασιαζόμενον, ἢ διαιρούμενον εἶδος, αὐτὸ τὸ εἶδος ἔσται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 9. Πληθύς, ἢ Πλῆθος ἀφῃρημένον ἐστὶ, δι' οὗ, ἢ καθ' ὃ, τινὰ πολλὰ λέγονται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 10. Ἀριθμός ἐστι μονάδων ἄθροισμα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὑπὸ δὲ τῶν πάλαι ὁρίζεται οὕτως. Ἀριθμός ἐστι πλῆθος ὡρισμένον, ἢ μονάδων σύστημα· ὡρισμένον μὲν, ὅτι κἂν τὴν ἐπ' ἄπειρον ἐπιδέχηται προσθήκην, οὐδεὶς μέντοιγε ἀριθμὸς ἐνεργείᾳ γίνεται ἄπειρος· ὥσπερ δὴ καὶ τὸ Μέγεθος, εἰ καὶ τὴν ἐπ' ἄπειρον ἐπιδέχεται τομὴν, ἢ διαίρεσιν, ὡς φύσει τῇ ἰδίᾳ αὐξήσεως καὶ μειώσεως δεκτικὸν ὂν, οὐμέντοιγε οὐδέποτε οὐδὲν ἐνεργείᾳ ἐστὶ τέρματος ἄτερ διαιρετόν. Εἰ γὰρ τὰ κατατεμνόμενα μεγέθη μένουσιν ἀπέραντα, οὐ παύουσιν ἀλλ' οὖν ἰδιώματα ἔχειν ὡς πεπερασμένα. Σύστημα δὲ μονάδων, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἐκ τοσούτων, ὅσων ἐστὶ παραστατικὸς, μονάδων συνίσταται. Ὁρίζεται δὲ καὶ Ποσότητος χῦμα ἐκ μονάδων συγκείμενον, ὅτι ἐπὶ τὸ μεῖζον προχωρεῖ· ἢ κατ' Εὐκλείδην, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος. (α). Ὁ δὲ τοῦ Πλάτωνος ἀκροατὴς καὶ διάδοχος Ξενοκράτης συνῳδὰ τῷ Πλάτωνι, μᾶλλον δὲ τοῖς Πυθαγορείοις, περὶ ψυχῆς ὑπολαμβάνων, ἀριθμὸν εἶναι ταύτην ὡρίζετο κινοῦντα ἑαυτόν· ἀριθμὸν γὰρ τὴν οὐσίαν καὶ Πλάτων εἶναι ᾤετο, καὶ εἰς ἀριθμοὺς ὡς εἰς ἀρχὰς ἀνῆγε τὰ πάντα.

(α) Βιβ. Ζ. τῶν Στοιχ. ὅρ. β'.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 11. Ἡ Μονὰς ἄρα ἀριθμὸν οὐχὶ, ἀρχὴν δὲ ἀποτελεῖ ἀριθμοῦ· λέγομεν ἀλλ' οὖν κοινῶς ἕνα ἀριθμὸν, οἷον ἄνθρωπος εἷς· Ὁ Δύω ἀλλ' οὖν κυρίως ἀριθμὸς οὐ λέγεται, εἰ καὶ μονάδων ἐστὶ συλλογὴ, οὐδὲν γὰρ τῶν σχημάτων διὰ τοῦ δύο παρίσταται· ἄρχεται δὲ τὸ πλῆθος ἀπὸ τῆς τριάδος, ὡς τῶν σχημάτων τὸ τρίγωνον ὂν ἁπλούστατον.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

Ἡ γὰρ Δυὰς μεριστὴ μὲν καὶ πλήθους ποιητικὴ, ἀόριστος δὲ, ὅτι οὐκ ἔχει ὅρον οἰκεῖον, ἀλλὰ παρὰ τῆς μονάδος, ἤτοι τοῦ ἑνὸς αὐτῇ ὁ ὅρος ἑκάστου εἴδους χορηγεῖται, καὶ ταύτης τῷ ἑνὶ παρυποστάσης τῆς Φύσεως, οὕτω πληρωθῆναι τὸν δυϊκὸν ἀριθμόν. Αἴτιον δὲ, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς συντιθέμενος μὲν ἐλάττω ἀριθμὸν ποιεῖ, οἷον τὰ τρία τοῖς τρισὶ προστιθέμενα ἓξ γίνεται, πολλαπλασιαζόμενος δὲ μείζω ἀριθμὸν ἀποτελεῖ, οἷον τρὶς τὰ τρία πολλαπλασιασθέντα, ἐννέα γίνεται, τὰ δ' ἐννέα μείζω τῶν ἕξ· ἡ δὲ μονὰς τὸ ἀνάπαλιν ἔσχηκε, συντιθεμένη γὰρ μείζω ἀριθμὸν ἀποτελεῖ, οἷον τὸ ἓν τῷ ἑνὶ προστιθέμενον δύο ποιεῖ, πολλαπλασιαζομένη δὲ ἐλάττω, καὶ γὰρ ἅπαξ ἡ μονὰς, μονὰς, ἤτοι κοινότερον μία ἡ μία μία· τὰ δύο δὲ μείζω τοῦ ἑνός· ἡ δὲ δυὰς συντιθεμένη τε καὶ πολλαπλασιαζομένη οὔτε μείζω οὔτε ἐλάττω ἀπογεννᾷ ἀριθμὸν, ἀλλ' ἀείποτε τὸν αὐτὸν, οἷον τὸν τέτταρα· ὥστε οὐκ ἀριθμὸς οὔτε ἡ μονὰς οὔτε ἡ δυὰς, διὰ τὸ μὴ ἔχειν τὸ τῶν ἀριθμῶν ἰδίωμα. Ἐπεὶ γὰρ ἀριθμοῦ ἴδιον μείζω γίνεσθαι πολλαπλασιαζόμενον,

ἐλάττω δὲ συντιθέμενον, τῆς δὲ μονάδος τὸ ἀνάπαλιν, μείζω δηλ. γίνεσθαι συντιθεμένην, ἐλάττω δὲ πολλαπλασιαζομένην· τῆς τε δυάδος τὴν αὐτὴν γίνεσθαι καὶ πολλαπλασιαζομένην καὶ συντιθεμένην· διὰ τοῦτο οὔτε ἡ μονὰς, οὔτε ἡ δυὰς ἀριθμοὶ λέγονται, διὰ τὸ ἀμοιρεῖν τῆς τοῦ ἀριθμοῦ ἰδιότητος.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

Εἰκότως τοίνυν τὸ Διωρισμένον Ποσὸν, τοῦ Συνεχοῦς Ἀνδράσι σοφοῖς, τοῖς τε πάλαι καί γε τοῖς νεωτέροις προτακτέον εἶναι κέκριται· τοῦ γὰρ, περὶ ὃ ἐκεῖνο ἀναστρέφεται ἐπιστητοῦ ὑποκειμένου τουτέστι τῶν ἀριθμῶν, ἀπόντος, πᾶσαι ἀναλογίαι καὶ τάξεις, αἷς τὰ ὄντα συντηρεῖται καὶ διασώζεται οἴχονται. Ἀμήχανον γὰρ εἰς ἔννοιαν τριγώνου, ἢ τετραγώνου, ἢ χιλιογώνου ἐλθεῖν, τὸν μὴ τὸν τρία ἀριθμὸν, ἢ τὸν τέσσαρα, ἢ τὸν χίλια προειλημμένως εἰς γνῶσιν Φέροντα.

ΣΧΟΛΙΟΝ Γ.

Τὸ Ἓν ἄρα ὡς πρώτιστον καὶ παρακτικὸν πάντων τῶν ἀριθμῶν, καθ' ἑαυτὸ μέντοι οὐκ ἂν παράγοι (§. 7.), ἔκτινος γὰρ ἀεὶ τὸ παράγον παράγοι, διὸ καὶ ὑπόκειται αὐτῷ ἡ δυὰς, ἣν ἀόριστον ἐκάλουν οἱ πάλαι δυάδα· ἀλλὰ τὸ μὲν ἓν καὶ τὴν δυάδα οὔπω ἀριθμοὺς ἔλεγον, πρώτους δὲ ἀριθμοὺς Πλάτων ἐτίθη τῶν μὲν περιττῶν τὴν τριάδα, τῶν δὲ ἀρτίων τὴν τετράδα. Ἐκαλεῖτο δὲ παρὰ τοῖς Πλατωνικοῖς, ἢ καὶ Ἀριστοτέλει δοκεῖ ἐν τῷ περὶ Ψυχῆς, ἡ μὲν δυὰς πρῶτον μῆκος, ἡ δὲ τριὰς πρῶτον πλάτος, ὥσπερ καὶ τὸ στερεὸν ἤτοι ἡ τετρὰς πρῶτον βάθος·

ἀπὸ δὲ τούτων καὶ τὰ Γεωμετρικὰ παρῆγον μεγέθη· ἀπὸ μὲν γὰρ τοῦ ἑνὸς τὸ σημεῖον ὡς ἀμερὲς, ὥσπερ καὶ τὸ ἕν· ἀπὸ δὲ τῆς δυάδος τὴν γραμμὴν, ὡς πρωτίστην ἐν μεγέθεσι διάστασιν, ὥσπερ καὶ ἡ δυὰς ἐν τοῖς ἀριθμοῖς· καὶ τὴν ἐπιφάνειαν ἀπὸ τῆς τριάδος, διὰ τὸ πλέον διεστᾶναι τῆς γραμμῆς, ὥσπερ καὶ ἡ τριὰς τῆς δυάδος· δι' αὐτὸ δὲ τοῦτο καὶ τὸ στερεὸν ἀπὸ τῆς τετράδος. Καθ' ὃ καὶ τὴν ψυχὴν τετραχα διανείμαντες κατὰ τὰς γνωστικὰς αὐτῇ δυνάμεις, τὸν μὲν νοῦν ἀνῆγον ἐπὶ τὸ ἕν, ὡς ἀδιαιρέτως τῶν νοητῶν ἀντιληπτικόν· τὴν δὲ διάνοιαν, ἣν καὶ ἐπιστημονικὴν δύναμιν ἐκάλουν, ἐπὶ τὴν δυάδα, ὡς δι' ἑτέρου γινώσκουσαν, διὰ τῶν ἀρχῶν δηλ. τὰ συμπεράσματα· τὴν δὲ δόξαν ἐπὶ τὴν τριάδα, ὡς ἀπὸ τῆς αἰτίας καὶ τῶν μέσων εἰς δύο διασχιζομένην τό, τε εἶναι καὶ μὴ εἶναι, τὸ δοξαστὸν ὄν· τὸ δ' αἰσθητικὸν ἐπὶ τὴν τετράδα ὡς τῶν σωμάτων ἀντιληπτικὸν, ὧν τρεῖς εἰσὶ διαστάσεις, ὅσας καὶ τῇ τετράδι ἀπένειμαν· τὸ μὲν γὰρ ἓν ἀδιάστατον ἦν, τὴν δὲ δυάδα ἐν διαστάσει ἐχαρακτήριζον, ὡς μεταξὺ δύω σημείων περιεχομένην.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 12. Ἐὰν τοίνυν εὐθεῖα γραμμὴ ἀντὶ μονάδος ληφθῇ, καὶ ὁ ἀριθμὸς γραμμῇ παρεμφαίνεσθαι δύναται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁ γὰρ Βόλφιος ἐν τῇ καθ' αὑτὸν Μαθηματικῇ (α) τὸν ἀριθμὸν γενικώτερον βούλεται ὁρισθῆναι οὕτω:

(α) Elementa Arithmeticae, C. I. §. 10.

Ἀριθμός ἐστι, πᾶν ὅ, τι πρὸς μονάδα ἀναφέρεται, ὡς εὐθεῖα γραμμὴ πρὸς ἄλλην γραμμήν· καὶ λίαν εἰκότως· ὥστε τούς τε ἀκεραίους καὶ τοὺς κεκερματισμένους, τούς τε λογικοὺς καὶ ἀῤῥήτους εἶναι δυνατὸν ἡμῖν ἐμπεριλαμβάνειν, ἀλλὰ μὴ μόνον τοὺς ἐκ μονάδος. Τοῦτο δὲ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ καὶ τῇ Ἀναλύσει ἐκ περιουσίας κατάδηλον ἔσται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 13. Τὰ, οἷς ἐν τῷ ἀριθμεῖν χρώμεθα ὀνόματα εἰσὶ ταῦτα· ἓν, δύω, τρία, τέτταρα, πέντε, ἓξ, ἑπτὰ, ὀκτὼ, ἐννέα.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 14. Χαρακτῆρες, ἢ Σημεῖα Ἀριθμητικὰ ἐκκείσθωσαν τὰ ἐφεξῆς ἐννέα· 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 15. Οὐδὲν ἐστὶ πᾶν τὸ μὴ ἀριθμεῖσθαι δυνάμενον.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 16. Σημεῖον τοῦ Μηδενὸς ἔστω τοδὶ 0.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 17. Δέκα ἄρ' ὀνομάτων χρεία πρὸς τὸ τοὺς ἐννέα λογικοὺς πρώτους ἀριθμοὺς σὺν τῷ μηδενικῷ συνεκφᾶναι· ὅ γε εἰ μὲν ἐν ἀρχῇ τῆς μονάδος προτίθοιτο, οὐδενὸς τὸ τηνικαῦτα σημαντικόν· ἐκείνη δὲ συνταττόμενον καὶ τῶν ἐννέα ἐπιταττόμενον, δεκάδα μίαν συντίθησι.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 18. Δεκὰς καλεῖται τὸ ἐκ δέκα μονάδων σύστημα, ὥσπερ εἰκὰς τὸ ἐκ δυεῖν δεκάδων. Τριακὰς, τὸ ἐκ τριῶν· καὶ ἐφεξῆς οὕτως.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 19. Ἑκατοντὰς ἡ Ἑκατοστὺς ἀκούει, τὸ ἐκ δέκα δεκάδων συμπλήρωμα.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 20. Τῶν ἑκατοστύων ἀριθμουμένων, δέκα ἐξ αὐτῶν καινὴν μονάδα συναποτελοῦσιν, ἣ λέγεται Χιλιάς.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 21. Ἡ μὲν τῶν χιλιάδων δεκὰς Μυριὰς κέκληται, ἡ δ' ἑκατοντὰς, Δεκὰς Μυριάδων.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 22. Ἡ τῶν χιλιάδων χιλιὰς Χιλιών, ἢ κατὰ Λατίνους Μιλλιών, προσηγόρευται· τὸ δὲ ἐκ χιλίων χιλιαδικῶν χιλιόνων, ἤτοι ὁ ἐκ Μιλλιόνων Μιλλιών, Δισχιλιών, ἢ Διλλιών· ὥσπερ καὶ τὸ ἐκ χιλίων χιλιαδικῶν Δισχιλιόνων, ἤτοι ὁ ἐκ Διλλιόνων Μιλλιών, Τρισχιλιών, ἢ Τριλλιών· καὶ ἐφεξῆς οὕτως.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 23. Ἑκατοντὰς μὲν Μυριάδων, ἢ Ἑκατοντακισμύριον ὁ εἷς κέκληται Χιλιών, ἡ δὲ τούτων ἑκατοντὰς Μυριακισμύριον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 24. Ψηφηφορία ἐστὶ πᾶσα διανοητικὴ ἐπίκτητος ἕξις περὶ τὰς τῶν ἀριθμῶν καταγινομένη ψήφους.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οὕτω μὲν αὕτη κατὰ τοὺς Παλαιοὺς, οἵτινες λήθοις τισὶν ἐν τῷ λογίζεσθαι χρῆσθαι εἰώθασιν· ἡ αὐτὴ δὲ, ᾗ μὲν συντελεῖ Γεωμέτραις, Γεωμετρική· ᾗ δ' Ἀστρονόμοις, Ἀστρονομική· τῷ τῆς διαφορᾶς ἐπικαλεῖται ὀνόματι.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 25. Ποσότητες Σύμμετραί εἰσιν, αἱ κοινῷ τινὶ μέτρῳ καταμετρούμεναι· Ἀσύμμετραι δὲ, ὧν οὐδὲν κοινὸν δίδοται μέτρον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τοιοῦτοί εἰσι, κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίστασιν οἱ ἀριθμοὶ 6 καὶ 4· καὶ κλάσματα δὲ, ὧν οἵ, τε ἀριθμηταὶ καὶ οἱ παρονομασταὶ ἀριθμοὶ εἰσὶν ὁλοσχερεῖς, ἐπὶ τὴν αὐτὴν ὀνομασίαν ἀναγόμενα· οἷον — $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{2}{7}$ ὡς κοινὸν ἔχοντα μέτρον $\frac{1}{28}$· Κατὰ δὲ τὴν δευτέραν, οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ 9, καὶ πάντες οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καλούμενοι, οἳ οὐκ ἔχουσι κοινόν τι μέτρον, ἐξαιρουμένης τῆς μονάδος. Ὁδ' Εὐκλείδης (α), Σύμμετρα μεγέθη εἴρηκε, τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα· Ἀσύμμετρα δὲ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 26. Ποσότης Ὁλοσχερὴς ἢ ἀκέραιός ἐστιν, ἡ πρὸς τὴν μονάδα ὡς ὅλον πρὸς μέρος τὴν ἀναφορὰν

(α) Βιβ. I. τῶν Στοιχ. Ὅρ. α' καὶ β'.

ἔχουσα. Κεκερματισμένη δὲ ἢ κεκλασμένη, ἡ πρὸς τὴν μονάδα, ὡς μέρος πρὸς ὅλον ἀναφερομένη.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 27. Ποσότης Ῥητή ἐστιν ἡ μονάδι σύμμετρος, καλεῖται δὲ καὶ Λογική· Ἄῤῥητος δέ, ἡ διὰ μηδενὸς τῶν τῆς Ἀριθμητικῆς χαρακτήρων παρισταμένη· καλεῖται δὲ ἄλογος, κωφή, ἀνεκφώνητος, καὶ μὴν καὶ Γεωμετρική.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τοιοῦτός ἐστι, κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίστασιν ὁ 2 ἀριθμός, μετρεῖ γὰρ ἑαυτὸν καὶ τὸν 4· ὁ 3, ἑαυτὸν καὶ τὸν 9. Κατὰ δὲ τὴν δευτέραν, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 8, ἡ κυβικὴ τοῦ 16 (§. 25.), τοῦ 18, τοῦ 20, κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 28. Αἱ μὲν τοίνυν Σύμμετραι Ποσότητες εἰσὶ λογικαί, ἤτοι ῥηταί· αἱ δ' Ἀσύμμετροι ἄῤῥητοι, ἢ ἀνεκφώνητοι. Ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἀλλ' οὖν δειχθήσεται Ποσότητας ἀσυμμέτρους δίδοσθαι.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 29. Ποσότης Ὡρισμένη ἐστίν, ἡ πρὸς δοθεῖσαν μονάδα ἀναφερομένη· οἷον, ὁ τριαδικός, δεκαδικὸς ἀριθμός· Ἀόριστος δέ, ἡ πρὸς μονάδα μὴ ὡρισμένην· οἷον, ἀγέλη, στρατός, σωρεία.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 30. Αἱ τῶν Ποσοτήτων ὡρισμέναι ἤτοι αἱ διδόμεναι τοῖς προηγουμένοις τοῦ Ἀλφαβήτου Στοιχείοις

α, β, γ, δ, κτλ.· αἱ δὲ ἀόριστοι ἤτοι αἱ ζητούμεναι τοῖς ἐσχάτοις φ, χ, ψ, ω, ἐμφαινέσθωσαν. Ἔξεστι δ' ἔν τισιν ἀλγεβραϊκοῖς χαρακτῆρσι διαφόρους Ποσότητας τοῖς τῶν λέξεων ἐκείνων, δι' ὧν αὗται ἐκφέρονται, ἀρκτικοῖς στοιχείοις σημαίνειν· οἷον τὸν μὲν χρόνον, τῷ χ· τὴν δὲ διαφοράν, τῷ δ· τὸ δὲ μέγεθος, τῷ μ· τὴν κίνησιν, τῷ κ· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 31. Ἄλγεβρα ἐστὶν ἐπιστήμη ἐν γένει Ποσότητος ἀφῃρημένης, διακεκριμμένης τε καὶ ἀορίστου.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐπεὶ μέντοιγε οἱ πρὸ ἐμοῦ τὴν Ἀριθμητικὴν, ἐπιστήμην τῶν ἀριθμῶν κεκλήκασιν, ἐπιτρεπτέον μοι παρὰ τῶν μετ' ἐμὲ τὴν Ἄλγεβραν Ἐπιστήμην τῶν Στοιχείων ἢ Γραμμάτων ἀποκαλέσαι, ὅτι τοῖς στοιχείοις οἱονεὶ εἴδεσι χρῆται, συμβολικῶς ἐμφαίνουσα τὰ πράγματα.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 32. Ἴσα εἰσίν, ὧν θάτερον σωζομένης τῆς Ποσότητος ἀντὶ θατέρου τεθῆναι, Ἄνισα δὲ ἐὰν τὸ τοῦ θατέρου μέρος, ἀντὶ τοῦ ἑτέρου ὅλου τεθῆναι ἔχει.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 33. Σημεῖον Ἰσότητος ἔστω τὸ $=$, ὅπερ δυσὶ ποσότησιν ἐγγραφόμενον σημαίνει θατέραν τῇ ἑτέρᾳ ἴσην εἶναι· οἷον $\alpha = \beta$. $8 = 8$. α ἴσον β, καὶ ὀκτὼ ἴσον ὀκτώ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 34. Ποσότης Μείζων ἐστὶν, ἧς μέρος ἑτέρῳ τινὶ ὅλῃ ἴσον ἐστίν.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 35. Σημεῖον τοῦ Μείζονος κείσθω τὸ $>$, ὅπερ δυσὶ ποσότησι παρεντιθέμενον, μείζονα εἶναι κατηγορεῖ τὴν πρὸς ἣν διαχαίνει· οἷον $\alpha > \beta$, καὶ $8 > 5$· ἐκφέρεται δὲ οὕτως, α μείζων τοῦ β, καὶ 8 μείζων τῶν 5. Καλεῖται δὲ καὶ σημεῖον Ὑπεροχῆς.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 36. Ποσότης Ἐλάσσων ἐστὶν, ἡ μέρει τινὸς ἑτέρας ἴση.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 37. Σημεῖον τοῦ Ἐλάττονος ἔστω τὸ $<$, ὅπερ δυσὶ ποσότησι παρεντιθέμενον ἐλάττονα εἶναι βούλεται τὴν πρὸς ἣν διοξύνεται· οἷον $\alpha < \beta$, $5 < 8$. ἀπαγγέλεται δὲ οὕτω α ἐλάττω τοῦ β, καὶ πέντε ἐλάττω τῶν ὀκτώ. Καλεῖται δὲ καὶ σημεῖον Ἐλλείψεως.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 38. Ὅμοια εἰσὶν, ὧν θάτερον ἀντὶ θατέρου ληφθῆναι δύναται σωζομένης τῆς αὐτῆς ποιότητος· Ἀνόμοια δὲ, ἐν οἷς διαφέροντα ἐστὶν ἐκεῖνα, δι' ὧν ἀλλήλων ὀφείλει διακρίνεσθαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 39. Ἡ ὁμοιότης τοίνυν ἐστὶ ταυτότης, ἡ δὲ ἀνομοιότης διαφορὰ, ἡ ἑτερότης ἐκείνων, δι' ὧν τὰ πράγματα ἀλλήλων ὀφείλει διακρίνεσθαι.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 40. Σημεῖον Ὁμοιότητος ἔστω τὸ $\sim$, ὅπερ μεταξὺ δυεῖν ποσοτήτων γραφόμενον, οὕτως ἐκτίθεται $\alpha \sim \beta$· ἐκφράζεται δὲ, α ὅμοιο[ν] ἐστὶ τῷ β.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 41. Ποσότης Θετικὴ ἐστιν, ἡ μείζων τοῦ μηδενός· καλεῖται δὲ καὶ Καταφατική.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 42. Τῆς Θετικῆς ποσότητος σημεῖον ἔστω τόδε $+$, ὃ διὰ τοῦ πλεῖον (plus) μὲν παρὰ Λατίνοις προφέρεσθαι εἴωθε, παρ' ἡμῖν δὲ, ἢ διὰ τῆς σὺν προθέσεως σύναψιν δηλούσης, ἢ διὰ τῆς πρὸς πρόσθεσιν σημαινούσης, ἢ καὶ διὰ τῆς μετὰ προφερέσθω· οἷον $\alpha + \beta$, $3 + 4$. Δηλοῖ δὲ τὸ κεφάλαιον τὸ ἐκ τοῦ α καὶ β, ὡσαύτως ἐκ τοῦ 3 καὶ 4· καὶ ἀπαγγέλεται α σὺν β, 3 σὺν 4. Καλεῖται δὲ κατὰ Διόφαντον σημεῖον Ὑπάρξεως καὶ Πλεονασμοῦ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 43. Τὸ ὑπὲρ τὸ μηδὲν ἄρα ὂν ποσὸν, ἤτοι τὸ θετικὸν, ποσῷ ἄλλῳ θετικῷ παραπλησίως προστεθὲν, ἐπαύξει αὐτό.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 44. Ποσότητος θετικῆς μοναδικῶς ἢ κατ' ἀρχὴν τοῦ στίχου τελούσης, τὸ τῆς ὑπάρξεως σημεῖον οὐδόλως ἐκείνης προγράφεται, ἀλλὰ μόνον ἐννοούμενον ἐκλαμβάνεται· οἷον $+ \alpha = \alpha$, καὶ $+ 8\gamma\delta = 8\gamma\delta$. Ἐπιτάσσεται δὲ, ἔνθα ἂν κατὰ συνέπειαν ἄλλῃ ποσότητι συνεκτάσσοιτο, οἷον $\alpha + \beta + \gamma$, κτλ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 45. Ποσότης Ἀποφατικὴ ἢ Στερητικὴ ἐστιν, ἡ ἐλάττω τοῦ μηδενός.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 46. Τῆς Ἀποφατικῆς ποσότητος σημεῖον ἔστω τόδε —, ὅπερ διὰ τοῦ ἔλαττον (minus) μὲν παρὰ Λατίνοις ἀπαγγέλεσθαι εἴωθε· παρ' ἡμῖν δὲ διὰ τοῦ πλὴν, ἢ ἄνευ, ἢ καὶ διὰ τῆς παρὰ προθέσεως ἔλλειψιν ἢ ἐλάττωσιν δηλούσης προφερέσθω· οἷον α — β, 7 — 3. σημαίνει δὲ τὴν διαφορὰν ἢ ὑπεροχὴν τὴν μεταξὺ α καὶ β, 3 καὶ 7· καὶ ἐκφέρεται, α πλὴν τοῦ β, 7 πλὴν τῶν 3. Καλεῖται δὲ κατὰ Διόφαντον σημεῖον Λείψεως.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 47. Τὸ Ἀποφατικὸν τοίνυν, ἤτοι τὸ τοῦ μηδενὸς ἧττον, τῷ θετικῷ προστιθέμενον ἀπομειοῖ αὐτό· τὸ γὰρ μηδὲν ἁπλῶς, οὔτε αὔξησιν φέρει, ᾧπερ ἂν ἐπιτεθείη, οὔτε μείωσιν (§. 15.)· διὸ καὶ μέσον οἷον τῶν τε θετικῶν καὶ ἀποφατικῶν τὸ μηδὲν, ὡς εἰκὸς τέτακται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Θεωρουμένης τοίνυν τῆς μὲν θετικῆς ποσότητος οἱονεὶ ἐν ἕξει ἢ ἐν ὑπάρξει, τῆς δ' ἀποφατικῆς ἐν στερήσει ἢ ἐν ἐλλείψει, καλῶς ταύτας κατανοεῖν δέον. Ὑποκείσθω γάρ τις ἔχων 100 χρυσοῦς, οὗτος πάντως ἐν ὑπάρξει δοκεῖ εἶναι, καί γε πλείω τοῦ μηδενὸς ἔχειν κριθῆναι δύναται. Ἐὰν δὲ διά τινα ἰσοδυναμοῦσαν τῇ ὑπάρξει λεῖψιν, τουτέστι διά τινα ὀφειλὴν, τούτους ἀποτίσηται, τότε λέγεται ἔχειν μηδέν. Ἐὰν δὲ καὶ ὀφείλων πρὸς τούτοις ὀφθῇ φέρ' εἰπεῖν 30, τότε λέγεται ἔχειν ἐλάττω τοῦ μηδενός· ἐπεὶ πρὸς τὸ μηδὲν ἔχειν, ἀνάγκη ἐστὶ τὸ αὐτοῦ ὄφλημα ἀποτῖσαι. Ὡσαύτως καὶ τῷ τὰ προσκτιθέντα οἱ συνιδεῖν ὅσα σκοποῦντι, τὰ μὲν τῶν ἐναπολειφθέντων θετικὰ ἔσται, τὰ δὲ τῆς δαπάνης ἀποφατικά. Τοὐναντίον δὲ τὰ τῆς ἐνδείας ὑπολογιζομένῳ, καὶ ὅσα αὐτῷ τὰ περιόντα τῶν χρημάτων μεμείωται, ἢ ὅσα τῶν ἀλλοτρίων δεδαπάνηται, τὰ μὲν τῆς ἐνδείας θετικὰ ἔσται, τὰ δὲ τῆς ὑπάρξεως ἀποφατικὰ, ὡς ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος $+100-130=-30$. τὸ γὰρ προκύπτον τὴν τῶν δαπανηθέντων ὑπεροχὴν ὑπὲρ τὰ ἐναπολειφθέντα τῷ ἀριθμῷ 30 ὑπερπίπτουσαν συνιδεῖν παρέχει, καὶ τοσούτῳ ἄρα τὴν μὲν περιουσίαν ἀπομειωθεῖσαν ἐλέγχει, τὴν δὲ ἔνδειαν προσαυξήσασαν· Ὡσαύτως ἐάν τις προθέμενος βαδίζειν πρὸς ἀνατολὰς, καὶ κατὰ σκοπὸν γενομένης τῆς ὁδοιπορίας διέλθῃ φέρ' εἰπεῖν στάδια πέντε, ἐν ὑπάρξει ἐστὶ τῶν πέντε· εἰδ' ἀποπλανηθεὶς βαδιεῖ παρὰ σκοπὸν πρὸς δυσμὰς τέσσαρα, ἐν λήψει τούτων ἔσται· καὶ περὶ πολλῶν ἄλλων ὡσαύτως· οἷον τῆς ἀνόδου κατὰ θέσιν ληφθείσης, ἀποφατικὴ ἔσται ἡ κάθοδος, καὶ τὰ παραπλήσια· οἷον κέρδους καὶ ζημίας, αὐξήσεως καὶ μειώσεως, τῆς πρὸς τὰ ἄνω καὶ τῆς πρὸς τὰ κάτω φορᾶς, κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 48. Τῶν ποσοτήτων, αἱ τῷ σημείῳ τούτῳ — διακρινόμεναι, οὐ μόνον ἀρνητικαὶ καλοῦνται καὶ ἀποφατικαὶ καὶ στερητικαὶ (§. 45.), ἀλλὰ δὴ καὶ ἐλλειπτικαὶ (§. 46.), ὡς τῶν θετικῶν καὶ ἀληθῶν ἐλλείπουσαι· ἑπομένως ψευδεῖς. Ὅθεν τῷ συνάπτεσθαι τὸ στερητικὸν, ἤτοι τὸ ἐλλειπτικὸν τῷ θετικῷ, αὐτοῦ τούτου ἐστὶν ἀφαιρεῖσθαι (§. 47.)· οἷον $-3+5=2$. Διὸ καὶ τὴν εἰς ταὐτὸ προσθέσεως τε ἅμα καὶ ἀφαιρέσεως συνέλευσιν προσταφαίρεσιν εἰκότως κλητέον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἔστω γάρ τις ὀφείλων 3 τάλαντα προσπορίσασθαι 5, οὗτος πάντως γε εἰ καὶ ἐν ὑπάρξει δοκεῖ εἶναι τῶν 5, τῷ ὄντι μέντοιγε διὰ τὴν ὀφειλὴν ἐν ὑπάρξει ἐστὶ τῶν 2. Ἡ γὰρ ὀφειλὴ λεῖψίς τις οὖσα ἀφαιρεῖ συναπτομένη τῇ ὑπάρξει· καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν $+5$ ὕπαρξιν, τὸ δὲ -3 λεῖψιν δηλοῖ, διάτοι τοῦτο ἐν τῇ συνάψει συνδυαζόμενα ἀποτίκτει ἀφαίρεσιν· οἷον $5-3=2$. Ἔστω δὴ ἕτερος κεκτημένος τάλαντα 6 προσπορίσασθαι ἔτι 4. οὗτος ἐν ὑπάρξει ὢν τῶν 6, ἐν λήψει ἦν τῶν 4, πρὸ τοῦ κτήσασθαι ταῦτα. Ὅθεν ἀναιρεθείσης τῆς λείψεως διὰ τῆς κτήσεως ἐν ὑπάρξει ἐστὶ τῶν 10. Διάτοι τοῦτο ἐν τῇ ἀφαιρέσει μεταποιοῦνται τὰ σημεῖα τῆς λείψεως εἰς τὰ τῆς ὑπάρξεως, καὶ συνάπτονται οἱ Συνθέται ὡς ἐχομένως εἰρήσεται· οἷον $6-4$ μεταποιουμένου τοῦ $-$ εἰς $+$ ἔσται $6+4=10$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 49. Δυεῖν τοίνυν Ποσοτήτων ἀντισήμων ἀλλήλαις συνιουσῶν, ἀείποτε ἡ ἐλάσσων μέρος τῆς μείζονος περιτρέπει ἑαυτῇ ἴσον, τὴν ὑπεροχὴν τῆς μείζονος ὑπὲρ τὴν ἐλάσσονα καταλείπουσα (§. 48.)· οἷον $\alpha-\beta=\gamma$. $8-3=5$. $-9+7=-2$. Καλεῖται δὲ τὸ ἀπὸ τῆς θετικῆς ἐναπολειπόμενον, θετικόν· καὶ τὸ

ἀπὸ τῆς ἀποφατικῆς, ἀποφατικόν· Ἐξ οὗ ἕπεται τὰς τοῖς $+$ καὶ $-$ διαφερούσας μὲν, ὁμοίας δὲ Ποσότητας, παρέχειν μηδέν· οἷον, $\alpha-\alpha=0$, $8-8=0$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ποσότητος θετικῆς ἑτέραν θετικὴν ἀφαιρεῖν, ὥστε τι ἐναπολείπεσθαι, ταὐτόν ἐστιν, εἴγε τῇ θετικῇ ἀφαιρετικὴν προσθείης· καὶ τοὐναντίου, θετικῆς ἀποφατικὴν ἀφαιρεῖν ταὐτόν ἐστιν, εἰ ταύτῃ ἐκείνην συνάψειας (§. 48.).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 50. Ὥσπερ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ οἱ ἀριθμοὶ ἀφῃρημένως τε καὶ συγκεκριμένως τίθενται (§. 5. 6.), οὕτω καὶ ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ τὰ στοιχεῖα διττῶς τεθῆναι ἔχουσιν.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 51. Ὅποι ἂν διπλοῦν τὸ σημεῖον προσαντῷτο ὡς $\pm$ ἢ $\mp$, ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιστάσει τὸ καταφάσκον σημεῖον λαμβανέσθω, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ τὸ ἀπόφασκον. Τὰ πλεῖστα δὲ $\pm$ τὴν ποσότητα καταφατικῶς τε καὶ ἀποφατικῶς ληφθῆναι οἵαν τε σημαίνει, καὶ οἷον ἄγνοιαν τοῦ τί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν στοιχείων ἐμφαινόμενον, πότερον δηλ: προστιθέναι δεῖ, ἢ ἀφελεῖν ἐκεῖνα.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 52. Ὅρος ἐν γένει ἐστὶ Ποσότης πρᾶγμα ἓν σημαίνουσα· οἷον, α, β, $\alpha\mu\nu$, κτλ. Εἰδικῶς δε καὶ τὸ τῆς πολυωνύμου Ποσότητος μέρος σημείῳ τῳ ὑποκείμενον, ὅρος εἴωθε λέγεσθαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 53. Κἀντεῦθεν τῶν ὅρων, οἱ μὲν καταφατικοί, ὧν δηλ: τὸ + σημεῖον προηγεῖται· οἱ δὲ τὸ — συνέχοντες ἀποφατικοί.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 54. Ποσότης Μονώνυμος ἢ Μονομερὴς ἐστὶν, ἡ μοναδικῶς κειμένη, εἴτ' οὖν ἡ οὐδενὶ τῶν ἀνωτέρω σημείων συνεζευγμένη· οἷον, $\alpha\beta$, ἢ $\alpha\beta\gamma$· καλεῖται δὲ καὶ Ἁπλῆ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 55. Ποσότης Διώνυμος ἢ Διμερὴς ἐστὶν ἡ ἑνὶ μόνῳ σημείῳ συνεζευγμένη· οἷον, $\alpha + \beta$, $\gamma - \delta$. Τριώνυμος δὲ ἢ Τριμερὴς ἡ τρισὶν ὡς, $\alpha + \beta - \gamma$. καὶ Πολυώνυμος ἢ Πολυμερὴς ἡ πλείστοις πρόσω ταύτης ἢ ὀπίσω· οἷον, $\alpha\beta + \gamma\delta + \delta\varepsilon - \kappa\nu$· καὶ ἐφεξῆς οὕτως.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἡ τῶν Ἀριθμητικῶν χαρακτήρων χρῆσις οὐ πάντάπασι ξένη ἐστὶ τοῖς Ἀναλυτικοῖς, ἀλλὰ καὶ κομιδῆ τούτοις συνήθης, ὡς τοῖς στοιχείοις τὰ πολλὰ συντάττομένη. Τριχῶς δὲ τοῦτο εἴωθε γίνεσθαι· ἢ γὰρ συντίθενται τοῖς στοιχείοις σημείου τινος παρεμπίπτοντος, ὡς $\alpha + 5$, $\alpha - 3$. ἢ προτίθενται τῶν στοιχείων, οὐδενὸς τούτοις παρενειρομένου σημείου, ὡς 2α, $8\beta\gamma$. ἢ ἔσχατον ὑποτάττονται τῶν στοιχείων, δεξιόθεν μικρὸν ὕπερθεν τούτων καὶ μὴ κατὰ στίχον προσγραφόμενοι· ὡς, α^3, β^3, γ^4, ε^5.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 56. Συνθέτης καλεῖται Ποσότης οἱαποτοῦν, οἱουδήποτε ὅρου ἐπ' εὐθείας προκειμένη, σημαίνουσά τε ποσάκις τὸν ὅλον ὅρον τῇ προσθέσει θετέον εἶναι. Καλεῖται δὲ καὶ Συμπράκτωρ, Συμποιητὴς, Συνεργὸς καὶ Σύζυγος, τῆς αὐτῆς ἐν ἅπασι τηρουμένης ἐννοίας.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οἱ ταῖς Ἀλγεβραϊκαῖς Ποσότησιν ἀριστερόθεν προσκείμενοι ἀριθμοὶ, ἤτοι οἱ Συνθέται, ἄθροισμα παριστῶσι τοῦ, ᾧ πρόσκεινται ὅρου· οἷον $3\alpha\beta$ σημαίνει, ὅτι τρὶς τὸ $\alpha\beta$ παρείληπται, οἷον $\alpha\beta + \alpha\beta + \alpha\beta$. Ὡσάυτως καὶ $7\delta\varepsilon$, ἑπτάκις τὴν ποσότητα $\delta\varepsilon$ δείκνυσιν εἰλημμένην.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 57. Διὰ τῶν Συνθετῶν ἄρα συνοπτικὴ καὶ ἐπίτομος ἐκτελεῖται Πρόσθεσις.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 58. Οὗ δ' ἂν ὅρου οὐδεὶς χαρακτὴρ Συνθέτης ἐστὶν, ἡ μονὰς ἀεὶ δυνάμει πρόσκειται· οἷον $\alpha = 1\alpha = \alpha$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 59. Ἐκθέτης ἀκούει Ποσότης οἱαποτοῦν, στοιχείῳ κατὰ συνέπειαν μικρὸν ὕπερθεν δεξιόθεν συνεκταττομένη, πολλαπλασιασμόν τε τοῦ, ᾧπερ ἂν πρόσκειται ὑπεμφαίνουσα, καὶ ἐπ' ἐκεῖνο μόνον τὸ στοιχεῖον, οὐμὴν δὲ ἐφ' ὅλον τὸν ὅρον ἀναφερομένη. Καλεῖται δ' ὡσαύτως Λογάριθμος, Βαθμοδείκτης, ὡς τοῦ βαθμοῦ οἱασοῦν δυνάμεως παραστατικός· καὶ μὴν Δείκτης τε καί, κατὰ Διόφαντον, Ἐπίσημον, ὡς ἡλίκη τις ἐστὶ τὴν τάξιν ἡ Ἀξία καὶ Δύναμις ὑποσημαίνων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁ οἱαδηποτοῦν στοιχειώδει ποσότητι ἐπισημειούμενος ἀριθμὸς τῆς αὐτῆς καλεῖται Ἐκθέτης, οἷον $α^3$, σημαίνει τε αὐτὸ τοῦτο τὸ στοιχεῖον α τοσάκις στιχηδὸν ὑπαχθῆναι, ὅσων γε μονάδων αὐτὸς οὗτος παραστατικὸς τυγχάνει· τοῦτο δὲ οὐδὲν ἄλλο δηλοῖ, ὅτι μὴ τὸ στοιχεῖον ἐκεῖνο τοσάκις πολλαπλασιασθῆναι. Ληφθέντος τοίνυν ἀντὶ σημείου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ $\times$, ὡς ὑποκαταβᾶσιν ἑρμηνευθήσεται, ἔσται $α^3 = α \times α \times α$, καὶ $β^2γ^3 = β \times β \times γ \times γ \times γ$. καὶ ἐφεξῆς οὕτως, ὡς τῷ πρὸς δεξιὰν προσεπιγραφομένῳ ἀριθμῷ ἰσαρίθμους εἶναι τὰς μονάδας τοῖς ἰσαλλήλοις παράγουσιν, ἀφ' ὧν ἐκεῖνος προκύπτει.

ΠΟΣΙΣΜΑ Α.

§. 60. Κἀντεῦθεν διὰ τῶν Ἐκθετῶν κατ' ἐπιτομὴν τὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ περαίνεσθαι ἔχει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 61. Σημειωτέον τοίνυν καλῶς τὴν τῶν Συνθετῶν ἀπὸ τῶν Ἐκθετῶν διαφοράν· ἐκεῖνοι μὲν γὰρ προσθέσεως ἄθροισμα ἢ κεφάλαιον, οὗτοι δὲ πολλαπλασιασμοῦ ὑπεμφαίνουσι γινόμενον, καὶ γὰρ $3α$ λίαν διάφορόν ἐστι τοῦ $α^3$. ἐπεὶ $3α = α + α + α$, καὶ $α^3 = α \times α \times α$. ἐὰν δὲ ἑπομένως ληφθῇ $α = 4$, ἔσται $3α = 12$. καὶ $α^3 = 64$.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 62. Στοιχείῳ, ὅτῳ οὐδεὶς ἐπιγέγραπται Ἐκθέτης, ἡ μονὰς ἀεὶ δυνάμει ὑποτίθεται· οἷον $α = α^1 = α$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 63. Ἀλλ' οὖν οὐ μόνον ἀριθμός, ἀλλὰ καὶ στοιχεῖον ἀντ' Ἐκθέτου ἐπίκειται· ὡς $α^ν$, $α^μ$, $β^σ$, $γ^τ$, κτλ. Δηλοῖ δέ, τὸ στοιχεῖον τοσάκις πολλαπλασιασθῆναι ἔχειν, ὁσάκις ὁ Ἐκθέτης ὑποτεθῇ περιέχειν τὴν μονάδα. Ἀλλὰ δὴ καὶ στοιχεῖον μετὰ ἀριθμοῦ, ὡς $α^{ν-1}$, $β^{σ+3}$· καὶ στοιχεῖον μετὰ στοιχείου, ὡς $α^{μ+ν}$, $β^{ν-μ}$, $γ^{μ-ν}$, $ε^{ν+τ}$, ἀντ' Ἐκθέτου παραλαμβάνεται. Ἐὰν τοίνυν διὰ τῶν μ καὶ ν καὶ τ ὑποσημαίνηται κλάσματα· ἢ δὲ καθ' ὑπόθεσιν $μ = \frac{3}{2}$, $ν = \frac{1}{2}$, $τ = \frac{1}{3}$, ἔσται $μ + ν = 2$, καὶ $ν - μ = -1$, καὶ $μ - ν = 1$, καὶ $ν + τ = \frac{5}{6}$· ἅπερ ἀντὶ τῶν γραμμάτων ἀντεισενεχθέντα, τὸ ἀνῆκον τῇ ὑποθέσει τηρήσει. Ὡσαύτως δὲ χωρητέον κἂν τοῖς διὰ γραμμάτων κλασματωδῶς ἐκκειμένοις Ἐκθέταις.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 64. Τὰς ἔντε τῷ Συνθέτῃ καὶ τῷ Ἐκθέτῃ προσυπαντώσας μονάδας (§. 58. 62.), οὐδὲν δέον ἐπιχαράσσεσθαι, εἰμήποτε καθ' ἑαυτὰς τυχὸν ἀπαντώσας, ἢ σαφηνείας ἕνεκεν μείζονος, ὡς $1α = α$, $α^1 = α$, $\frac{α}{α^2} = \frac{1}{α}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 65. Ἀλγεβραϊκὸς χαρακτὴρ ἐστὶ σημείωσις ἁπάντων καθόλου τῶν ὅρων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐν ἅπαντι Ἀλγεβραϊκῷ Χαρακτῆρι ἐνυπάρχειν δέον. Α΄. σημεῖον. Β΄. Συνθέτης. Γ΄. στοιχεῖον. Δ΄. Ἐκθέτης, γραφόμενοι ἢ ὑπονοούμενοι· οἷον α, ὅπερ ἄλλως οὕτως ὑποτυποῦσθαι ἔδει $+ 1\alpha^{1}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 66. Ποσότητες Ὁμογενεῖς καλοῦνται, ἐν αἷς ταὐτὰ εἰσὶν ἐκεῖνα, οἷς διακρίνεσθαι ἀλλήλων ὀφείλουσιν. Ἑτερογενεῖς δὲ, ἐν αἷς διαφέροντα.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 67. Οὐδὲν ἄρα ἐν θατέρῳ τῶν ὁμογενῶν ἀλίσκεται, ὃ μὴ κἂν τῇ θατέρᾳ καταλαμβάνεται ἐξίσου· αὐτῷ τούτῳ ἡ ποσότης ἐσωτερικὴ ἐστὶ διαφορὰ τῶν ὁμογενῶν· καὶ γὰρ ἡ ποσότης ἑτέρου τινος ἄνευ λαμβανομένη, οὐκ ἐννοηθῆναι ἀλλὰ δοθῆναι δύναται μόνον (§. 29.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἡ τῶν σημείων διαφορὰ οὐκ ἐπάγει ἑτερογενείας τι ταῖς Ποσότησι, δύνανται καὶ γὰρ ἑτερόσημοι, ὡς θετικαὶ καὶ ἀποφατικαὶ, ὁμογενεῖς εἶναι, ὡς $\alpha - \alpha$, $3 - 2$. Ἀλλ' οὐδ' ἡ τῶν Συνθετῶν ἑτερότης, ἑτερογένειαν ἀναδίδωσι· καὶ γὰρ δύω χρυσοὶ, καὶ τρεῖς χρυσοὶ, ὡς 2α καὶ 3α, εἰσὶν ὁμογενεῖς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 68. Ἐντεῦθεν ἡ τῶν Ποσοτήτων ἑτερογένεια, ἔκ τε τῶν Ἐκθετῶν καὶ τῶν διαφόρων στοιχείων ἤρτηται, ὡς $\alpha + \alpha\beta$, $\alpha^2 + \alpha\beta^2$, $\alpha^3\gamma^2 + \delta^4\varepsilon^{1}$· ὡσαύτως καὶ ἡ ὁμογένεια, οἷον $\alpha^{\mu} - \alpha^{\mu}$, $\beta^{\sigma} + \beta^{\sigma}$, $\alpha^{\nu}\beta^{\tau}$, $+ \alpha^{\nu}\beta^{\tau}$, $3\gamma\delta^2 + 3\gamma\delta^2$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁ δ' Εὐκλείδης τὰ ὁμογενῆ βουλόμενος δεῖξαι Μεγέθη, φησὶ λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα. Μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν· οἷον Γραμμὴ μὲν Γραμμῆς, Ἐπιφάνεια δὲ Ἐπιφανείας, καὶ Σώματος Σῶμα. Γραμμὴ γὰρ Γραμμῆς, καὶ Ἐπιφάνεια Ἐπιφανείας, καὶ Σῶμα Σώματος διὰ πολλαπλασιασμοῦ δύναται ὑπερέχειν, δι' ὃ καὶ μεταξὺ αὐτῶν λόγος θεωρεῖται. Οὐ μὴν δὲ Γραμμὴ Ἐπιφανείας ἢ Σώματος, ἢ Ἐπιφάνεια Σώματος διὰ πολλαπλασιασμοῦ δύνανται ὑπερέχειν, ἑτερογενῆ γὰρ ταῦτα, καὶ οὐδὲ λόγος μεταξὺ αὐτῶν θεωρεῖται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 69. Ποσότης οἱαποτοῦν ἀντὶ μονάδος ληφθῆναι διά τ' ἐστίν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ποσότης μὲν δὴ οἱαδηποτοῦν ἐν ἑαυτῇ μοναδικῶς κεῖται (§. 7.), οὔτε μὴν πρὸς ἄλλην τινα ὡρισμένην, οἷα δὴ πρὸς μονάδα, τὴν ἀναφορὰν ἔχει (§. 29.)· ἄρα ἀντὶ μονάδος ληφθῆναι δύναται (§. 8.). Ὃ Ἔδει Δεῖξαι.

ΤΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΕΙΤ' ΟΥΝ

ΑΛΓΕΒΡΑ.

ΔΙΑΛΗΨΙΣ.

Τὰ τῇ Ἀλγέβρα εὐχρήστως θεωρούμενα, εἰς τὴν τῶν ἑπομένων τετρακτὺν ἄπειδε. Πρῶτον μὲν ἐπέχουσι χῶρον αἱ Ἀρκτικαὶ Πράξεις. Δεύτερον δὲ, οἱ τῶν Δυνάμεων Συνδυασμοί. Τρίτον, αἱ Ἐξισώσεις, καὶ τὸ τῆς Ἀναλύσεως Λογιστικόν. Τέταρτον δὲ καὶ ἔσχατον, οἱ διάφοροι τῶν Ποσοτήτων ὑπάλληλοι παρεξετασμοί.

ΤΜΗΜΑ Α.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ

ΑΡΚΤΙΚΩΝ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΠΡΑΞΕΩΝ.

§. 70. Τῶν Ποσοτήτων, αἱ μὲν εἰσὶν Ὁλοσχερεῖς αἱ δὲ Κλασματώδεις. Τούτου χάριν εἰς τοσαῦτα μέρη διαιρεῖσθαι ἔχουσι.

ΜΕΡΟΣ Α.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ

ΟΛΟΣΧΕΡΩΝ, ΗΤΟΙ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 71. Ὅλον μὲν καλεῖται τὸ ἐκ μερῶν συνιστάμενον. Μέρη δὲ, ὧν ἕκαστον ὁσάκις ἂν ἐπαναληφθῇ, ἀεὶ ἤτοι μεῖζον, ἢ ἔλαττον τοῦ ὅλου τυγχάνει.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁ δὲ Στοιχειωτὴς (α) ὁρίζεται ταῦθ' οὕτω. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον. Ὡσαύτως (β) καὶ μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα. Μέρη δὲ, ὅταν μὴ καταμετρῇ· οἷον ἡ μονὰς, μέτρον ἐστὶ τῆς δεκάδος· δεκάκις γὰρ ἐπαναληφθεῖσα καταμετρήσει αὐτήν· ὁ δέγε 4 οὐ μέρος μέρη δὲ τῆς δεκάδος ἐστὶν, ἐπαναληφθεὶς γὰρ οὐ καταμετρεῖ, ἀλλὰ δὶς μὲν ἐλλείπει, τρὶς δὲ ὑπερέχει.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ.

§. 72. Τὸ Ὅλον ἄρα, Α'. ἐστὶ μεῖζον ἑκάστου τῶν οἰκείων μερῶν. Β'. τὸ μέρος ἐστὶν ἔλαττον τοῦ ὅλου. Γ'. τὸ ὅλον ἐστὶν ἴσον πᾶσι τοῖς αὐτοῦ μέρεσιν ὁμοῦ ληφθεῖσιν. Οἷον $8 = 4 + 1 + 3$, $4 < 8$, $8 > 3$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τριχῶς παραβάλλεται τὰ μέρη τῷ ὅλῳ· ἢ ἕκαστον μέρος χωρὶς πρὸς τὸ ὅλον, οἷον ὁ ὀφθαλμὸς πρὸς τὸ

(α) Εὐκλείδης Βιβ. Ε. τῶν Στοιχείων ὅρῳ α'.
(β) Βιβ. Ζ. τῶν Στοιχ. ὅρῳ γ'. καὶ δ'.

ὅλον σῶμα, καὶ τότε μὲν ἕτερον τοῦ ὅλου τὸ μέρος, μεῖζον δὲ τὸ ὅλον τοῦ μέρους· ἢ πάντα ὁμοῦ τὰ μέρη χωρὶς πρὸς τὸ ὅλον, οἷον χεῖρες, πόδες, δάκτυλοι, ὀφθαλμοὶ καὶ τὰ λοιπὰ μέρη πρὸς τὸ ὅλον σῶμα, καὶ τότε πάλιν ἕτερα μὲν τὰ μέρη τοῦ ὅλου, τὸ μὲν γὰρ μετὰ τῆς ἑνώσεως θεωρεῖται, τὸ δὲ ἐκτὸς ταύτης· οὐμὴν μεῖζον τὸ ὅλον, πάντων τῶν αὐτοῦ μερῶν, ἐξ αὐτῶν γὰρ πάντων τὸ ὅλον σύγκειται· ἢ τρίτον, τὰ μέρη παραβάλλεται πρὸς τὸ ὅλον οὐ χωρὶς θεωρούμενα, ἀλλ' ἡνωμένως· καὶ τότε ἓν μὲν λέγεται τὰ μέρη τῷ ὅλῳ κατὰ τὸ εἶδος, καὶ τὴν ὁλοκληρίαν, πολλὰ δὲ καὶ διάφορα κατὰ τὴν ποσότητα καὶ τὸν ἀριθμόν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 73. Πᾶν ὅλον, ἢ γενικῶς εἰπεῖν Ποσότης πᾶσα Α'. τῇ Προσθέσει αὔξεται, καὶ Β'. τῇ Ἀφαιρέσει μειοῦται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 74. Κἀντεῦθεν Ποσότης πᾶσα διχῇ ἀλλοιοῦσθαι δύναται, τῇ αὐξήσει δηλαδὴ καὶ τῇ μειώσει.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ποσότητος οἱασοῦν διττῶς παρὰ τοῖς Μαθηματικοῖς θεωρουμένης αὐξήσεως οἷάπερ καὶ μειώσεως δεκτικῆς, ἕπεται τὴν τῶν τοῦ Λογιστικοῦ ἀρκτικῶν πράξεων τετρακτὺν ἐκ ταυτησὶ τῆς διπλόης, ὡς ἀπὸ σπέρματος ἀναφύεσθαί τε καὶ ἀναδίδοσθαι. Πᾶσα γὰρ Ποσότης, ἢ ὡς κεφάλαιον, ἤθ' ὡς προκύπτον ἐκ πολλῶν ἄλλων, ἡ αὐτὴ ὡσαύτως, ἢ ὡς διαφορά, ἢ ὡς πηλίκον ἐξ ἄλλων, οἷά τ' ἐστὶ θεωρεῖσθαι. Ἐὰν μὲν γὰρ Α'. πλεῖστοι δοθέντες ἀριθμοὶ διαφέροντες, ὡς $2+3+4+3+2+2$, ἐν ἑνὶ ὅλῳ συναφθῶσιν ἄθροισμά τι συγκροτ.λοῦσι τὸν 16. Ἐὰν δὲ Β'. ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἑαυτῷ πολλάκις ἀθροισθῆναι δέῃ, ὡς ὁ 4 τετράκις, οἷον $4+4+4+4$ τὸν 16 ὡσαύτως ἀναδώσει. Ἔνθεντοι τῆς διττῆς ταύτης τῶν ἐν ἀριθμοῖς Ποσοτήτων θεωρουμένης αὐξήσεως, εὑρεθήσονται τὰ γινόμενα ἀνακῦψαι. Προσθέσει τε καὶ Πολλαπλασιασμῷ. Αὖθις Γ'. ἐὰν ἀπὸ τοῦ 16 ἀριθμοῦ ὁ 7 ἀφαιρεθῇ, πρὸς τὴν τῆς ὑπεροχῆς ἢ διαφορᾶς διάγνωσιν, ὑπολειφθήσεται ὁ 9. Ἐὰν δὲ Δ'. ὁ 4 ὁσάκις ἂν ἐξῇ τοῦ 16 ἐξαιρεθῇ, τετράκις φέρε, ὡς ἂν γνωσθῇ ποσάκις ὁ μείζων ὑπερέχει τὸν ἐλάττω, ἐναπολειφθήσεται μηδέν. Εὔδηλον οὖν τὰς Ποσότητας διττῶς ἀπομειοῦσθαι. Ἀφαιρέσει τε καὶ Διαιρέσει.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 75. Ἐκ τῶν τεσσάρων τουτωνὶ τῆς ἀλλοιώσεως ἢ μετασχηματισμοῦ τρόπων, τῆς Προσθέσεώς φημι, Ἀφαιρέσεως, Πολλαπλασιασμοῦ καὶ Διαιρέσεως, ἰσάριθμα καὶ τὰ κατ' αὐτὰς μέρη ἐκκύπτουσι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α.

ΠΕΡΙ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 76. Πρόσθεσίς ἐστὶ πλείστων δοθεισῶν Ποσοτήτων, ἐν ἑνὶ ὅλῳ σύναψις, ὡς ἂν τὸ ἐξ αὐτῶν παραγόμενον γνωσθῇ.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 77. Αἱ δοθεῖσαι Ποσότητες καλοῦνται, Ἀθροιστέαι· αἱ δὲ ζητούμεναι, ἤτοι τὸ ὅλον, Κεφάλαιον, ἄθροισμα, καὶ συμποσούμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 78. Τὰ συναπτόμενα μέρη δέον εἶναι ὁμογενῆ, καὶ τῆς αὐτῆς ποσότητος θετικῆς ἢ ἀποφατικῆς ἔνερθεν ταττόμενα. Τὰ γὰρ ἐναντίως πως ἔχοντα, αὐτὰ ἑαυτὰ ἀμοιβαδὸν ἐν μέρει ἢ καθόλου ἐκκρούουσι. Καὶ γὰρ διὰ τῆς συνάψεως ὑποφύεται τὸ ὅλον μεῖζον τοῦ ἰδίου μέρους (§. 72.), μετὰ δὲ τῶν ἑτεροσήμων τοὐναντίον παρεμπίπτει. Ἐὰν γὰρ 5α — 3α συναφθῶσι, τὸ ἐντεῦθεν ἐκκύπτον ὅλον ἔσται = 2α (§. 48.). κἀντεῦθεν τὸ ὅλον 2α ἔσται ἔλαττον τοῦ οἰκείου μέρους 5α· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 79. Ἐὰν οὖν τοῖς συναπτομένοις μέρεσι Ποσότητες θετικαὶ ἢ ἀποφατικαὶ παρεμπίπτωσιν, ἡ τούτων σύναψις μετὰ τῆς ἀφαιρέσεως ἥνωται· διάτοι τοῦτο τὸ ἐκ τῆς τοιαύτης πράξεως ἐκκύπτον, οὐχὶ ὡς ὅλον, μᾶλλον δὲ ὡς ὑπόλοιπον θεωρείσθω. Ποσότης δὲ ἀποφατικὴ, ἀφαιρετέα ἐκ τῆς θετικῆς (§. 48. 49.).

ΑΞΙΩΜΑ Α.

§. 80. Τὸ αὐτὸ ἑαυτῷ ἐστὶν ἴσον. Οἷον $8 = 8$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τοῦ Ἀξιώματος τούτου πλατυτάτη ἐστὶν ἐν τῇ Ἀναλύσει ἡ χρῆσις.

ΑΞΙΩΜΑ Β.

§. 81. Αἱ ὁμογενεῖς Ποσότητες ἴσαι εἰσὶν, ἢ ἄνισοι.

ΑΞΙΩΜΑ Γ.

§. 82. Ἐὰν τοῖς ἴσοις ἴσα προσθῇς, τὸ ἐξ αὐτῶν παραγόμενον ἴσον ἔσται· οἷον.

$$\begin{array}{r} 4+3=7 \\ 2+6=8 \\ \hline 4+3+2+6=7+8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8=6+2 \\ 4=4 \\ \hline 8+4=6+2+4 \end{array}$$

Ἐὰν δ᾽ ἄνισα, καὶ τὰ συμποσούμενα ἄνισα ἔσται· οἷον.

$$\begin{array}{r} 7+8=15 \\ 5>4 \\ \hline 7+8+5>15+4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8>7 \\ 2=2 \\ \hline 10>9 \end{array}$$

ΑΞΙΩΜΑ Δ.

§. 83. Τινῶν τεθέντων, ἕτερόν τι ἀναφύεται· καὶ τούτων ἀφαιρεθέντων, ἐκεῖνο καταλύεται.

ΑΞΙΩΜΑ Ε.

§. 84. Τὸ θατέρου τῶν ἴσων μεῖζον ἢ ἔλαττον, καὶ θατέρου τῶν ἴσων ὡσαύτως μεῖζον ἢ ἔλαττόν ἐστιν· οἷον.

$$\begin{array}{r} 6=5+1 \\ 7>6 \\ \hline 7>5+1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6+3=9 \\ 7<9 \\ \hline 7<6+3 \end{array}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 85. Ποσότητας Ἀλγεβραϊκὰς ἀκεραίους προσθεῖναι.

ΛΥΣΙΣ.

Α'. Αἱ συναφθησόμεναι Ποσότητες ὑπάλληλοι στιχηδὸν τετάχθων, τηρουμένης ὡς ἔνι τῆς τοῦ ἀλφαβήτου τάξεως, ὥστε τοὺς ὁμογενεῖς ὅρους διακρίνεσθαι τῶν ἑτερογενῶν. Β'. ὑπ' αὐτὰς ἀχθήτω γραμμὴ εὐθεῖα, ἐφ' ᾧ μὴ τὸ ἄθροισμα τοῖς ἀθροιστέοις συγχέοιτο· καὶ Γ'. γενέσθω ἡ πρόσθεσις κατὰ τοὺς ἐφεξῆς κανόνας, ἀρχῆς δεξιόθεν γινομένης πρὸς τὰ λαιά.

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ.

Α'. Θεωρείσθω ἡ τῶν Ποσοτήτων ὁμογένεια, ἡ γὰρ ἑτερογένεια οὐδέποτε ἀποτελεῖ σύναψιν (§. 78.).

Β'. Τῶν Ποσοτήτων ὁμοιοσήμων οὐσῶν, τηνικαῦτα α'. τὸ κοινὸν ἀμφοτέραις σημεῖον τῷ ἀθροίσματι ἐγγράφεται· β'. οἱ συνθέται συνάπτονται· γ'. τὰ στοιχεῖα ἅπαξ μόνον ἐγγράφονται μετὰ τῶν αὐτῶν ἐκθετῶν· οἷον $\alpha^2 \beta^\mu$ καὶ $4\alpha^2 \beta^\mu$, ἀποτελοῦσι $5\alpha^2 \beta^\mu$. Ὡσαύτως $-\alpha\gamma^2$ καὶ $-\alpha\gamma^2 = -2\alpha\gamma^2$.

Γ'. Ἑτεροσήμων δ' ἐκείνων οὐσῶν, τότε α'. τὸ τοῦ μείζονος συνθέτου σημεῖον ἐν τῷ συμποσουμένῳ ἐγγράφεται· β'. ὁ ἐλάττων συνθέτης ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεῖται (§. 48.)· γ'. τὰ στοιχεῖα μετὰ τῶν αὐτῶν ἐκθετῶν, ἅπαξ μόνον τίθενται· οἷον, $6\alpha\beta$ καὶ $-2\alpha\beta = 4\alpha\beta$.

Δ'. Ἐὰν τὰ συναφθησόμενα μέρη ὅμοια μὲν, ἀντίσημα δὲ τύχωσιν ὄντα, οἵ τε συνθέται μετὰ τῶν ἐκθετῶν ἴσοι, εἰς τὸ μηδὲν ἀποίχονται· οἷον $2\alpha\beta^3$ καὶ $-2\alpha\beta^3 = 0$ (§. 49.).

Ε'. Ἐὰν τὰ συναφθησόμενα μέρη ὦσιν ἑτερογενῆ, οὐ δύνανται συναφθῆναι, ἀλλὰ μόνον ἐγγράφονται μετὰ τῶν αὐτῶν σημείων ὡς ἔχουσιν, ἄνευ τινος μεταβολῆς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α) $$\begin{array}{r} 3\alpha\beta - 2\alpha\gamma + 3\delta \\ 5\alpha\beta - 5\alpha\gamma \\ \hline 8\alpha\beta - 7\alpha\gamma + 3\delta \end{array}$$

Β) $$\begin{array}{r} 8\alpha\chi + 3\beta\gamma - 5\delta\varepsilon \\ -\alpha\chi - 7\beta\gamma + 2\delta\varepsilon \\ \hline 7\alpha\chi - 4\beta\gamma - 3\delta\varepsilon \end{array}$$

Γ) $$\begin{array}{l} 9\alpha^{\mu+2}\beta^3\chi - 12\beta^5\gamma^2 - 5\alpha^3\chi^\mu + 32 \\ 6 - 2\alpha^3\chi^\mu - 5\alpha^{\mu+2}\beta^3\chi + 8\beta^5\gamma^2 \\ \hline 4\alpha^{\mu+2}\beta^3\chi - 4\beta^5\gamma^2 - 7\alpha^3\chi^\mu + 38 \end{array}$$

Δ) $$\begin{array}{l} 16\alpha\beta^2 - 25 + 4\beta^\mu\gamma\chi^2 - 4\alpha^\mu\beta^2 \\ 3\beta^\mu\gamma\chi^3 - 10\alpha\beta^2 + 3\alpha^\mu\beta^2 + 20 \\ \hline 6\alpha\beta^2 - 5 + 4\beta^\mu\gamma\chi^2 - \alpha^\mu\beta^2 + 3\beta^\mu\gamma\chi^3. \end{array}$$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Πλείστοις ἔτι τοιούτοις ὑποδείγμασιν ἐξασκήτω ὁ Καθηγητὴς τοὺς αὐτοῦ μαθητὰς εὐχερείας τε καὶ ἐπιδόσεως ἕνεκα, μετὰ δὲ ταῦτα κελευέτω βασανίζειν ταῦτα διὰ τῆς ἀφαιρέσεως, ἧς ἀκολούθως καθαψόμεθα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 86. Ἐπεὶ τὸ ὅλον ἴσον ἐστὶ τοῖς αὐτοῦ μέρεσιν ὁμοῦ ληφθεῖσι (§. 72.), τὸ δὲ ὅλον τοῦτο ἐν τῷ ἀθροίσματι Κεφάλαιον καλεῖται (§. 77.)· ἄρα ἐν τῇ Προσθέσει τὸ ὅλον δέον εἶναι ἴσον τοῖς αὐτοῦ μέρεσιν ὁμοῦ ληφθεῖσι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 87. Διττῶς τοίνυν γνωσθῆναι δύναται, τὸ ἄθροισμα τοῖς αὐτοῦ μέρεσιν ὁμοῦ ληφθεῖσιν ἴσον εἶναι. Εἰ Α΄. τῶν ἀθροιστέων μερῶν τοῦ Κεφαλαίου ἀφαιρεθέντων οὐδὲν μενεῖ· ἐξ ὧν γὰρ τὸ ὅλον συνίσταται, τούτων καὶ ἀφαιρεθέντων ἐκλείπει (§. 83.). Β΄. εἰ τοῦ ἀθροίσματος ἑνὸς μέρους ἀφαιρεθέντος τὸ ἕτερον ἐγκαταλειφθήσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 88. Ἐντεῦθεν τὸ τῆς Προσθέσεως τέλειον, διὰ τῆς Ἀφαιρέσεως διαγινώσκεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β.

ΠΕΡΙ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 89. Ἀφαίρεσις ἐστὶν, ἡ ἐκ τοῦ ὅλου ἑνὸς μέρους λῆψις, ὡς ἂν τὸ ἕτερον γνωσθῇ.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 90. Ἐν τῇ Ἀφαιρέσει τὸ μὲν ἀφαιρούμενον μέρος καλεῖται Ἀφαιρετέον· τὸ δὲ, ἀφ᾽ οὗ ἡ ἀφαίρεσις γίνεται, Μειωτέον· τὸ δὲ μένον, Διαφορά· ὑπὸ δέ τινων λείψανον, ὑπόλοιπον καὶ ὑπεροχή.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 91. Ἡ ἀφαίρεσις τοίνυν οὐδὲν ἄλλό ἐστιν, ὅτι μὴ λῆψις τοῦ μειωτέου ἐκ τοῦ ἀφαιρετέου, πρὸς γνῶσιν τοῦ ὑπολοίπου.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 92. Τὸ μειωτέον δέον εἶναι ὁμογενὲς τῷ ἀφαιρετέῳ, ἄλλως γὰρ τὰ τῆς ἀφαιρέσεως γενέσθαι οὐκ ἔχουσι.

ΑΞΙΩΜΑ Α.

§. 93. Ἐὰν ἀπὸ τῶν ἴσων ἴσα ἀφέλῃς, τὰ καταλειπόμενα ἴσά ἐστιν· οἷον.

$$\begin{array}{r} 3+6=9 \\ 2+5=7 \\ \hline 3+6-2-5=9-7 \\ 2 \quad = \quad 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10=2+8 \\ 4=4 \\ \hline 10-4=2+8-4 \\ 6 \quad =2+4 \end{array}$$

Ἐὰν δ᾽ ἄνισα, καὶ τὰ ἐναπολειπόμενα ἄνισα ἔσται· οἷον.

$$\begin{array}{r} 12+6=18 \\ 5>4 \\ \hline 12+6-5<18-4 \end{array}$$

ΑΞΙΩΜΑ Β.

§. 94. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος καὶ τοῦ ἐλάττονος τὸ αὐτὸ, ἢ ἴσα ὑφέλῃς, τὸ μὲν πρῶτον καταλειπόμενον μεῖζόν ἐστι, τὸ δὲ δεύτερον ἔλαττον· οἷον.

$$\begin{array}{r} 6+3>8 \\ 4=4 \\ \hline 6+3-4>8-4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7<10 \\ 3=3 \\ \hline 7-3<10-3 \end{array}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 95. Ποσότητας Ἀλγεβραϊκὰς ἀκεραίους ἀφελεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Α΄. Ὑπογεγράφθω τῷ μειωτέῳ ὁ ἀφαιρετέος, ὥστε τὰ ὁμογενῆ τοῖς ὁμογενέσιν ἀντιστοιχεῖν, ὡς καὶ ἐν τῇ Προσθέσει ὑπεθέμεθα (§. 85.).

Β΄. Τοῦ ἐλάττονος ὅρου, ἤτοι τοῦ ἀφαιρετέου τὰ σημεῖα μετενεχθήτωσαν εἰς τοὐναντίον, οἷον τὰ μὲν θετικὰ μεταβληθήτωσαν εἰς ἀποφατικὰ, τὰ δ' ἀποφατικὰ ἀνάπαλιν εἰς θετικὰ, ὡς $+$ εἰς $-$, καὶ $-$ εἰς $+$· εἶτα γενέσθω πρόσθεσις κατὰ τοὺς ἀνωτέρω κανόνας (§. 85.), ἥτις ἰσοδυναμήσει τῇ ἀφαιρέσει· οὕτως τε ἡ ὁλικὴ ὑπεροχὴ, ἤτοι ἡ μεταξὺ τῶν δοθέντων διαφορὰ ἐκκύψει.

Γ΄. Ὑπὸ ταῦτα δὴ ἀχθήτω εὐθεῖα γραμμὴ πρὸς ἀντιδιαστολήν.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ Β.

Ὁ Μειωτέος ὅρος ἢ θετικός ἐστιν (§. 41.), ἢ ἀποφατικός (§. 45.). Εἰ μὲν θετικός· θετικὸν ἐκ τοῦ ὅλου ἀφαιρεῖν, ταυτόν ἐστι, τῷ τοσοῦτον ἀποφατικὸν τῷ ὅλῳ προστιθέναι (§. 48. 49.)· Ἔνθεντοι τὰ τὴν θέσιν δηλοῦντα σημεῖα εἰς ἀποφατικὰ μεταβλητέον, ἐφ' ᾧ τοῦ ὅλου συγκειμένου, ὁλικῶς καὶ μὴ ἐν μέρει γενέσθαι τὴν ἀφαίρεσιν· τοῦτο δὲ ἐστὶν, ἵνα μὴ (ὥς φασιν) ἔλαττον τοῦ δικαίου ἀφαιρεθῇ· οἷον ἐὰν ἀφελέσθαι δέῃ ἀπὸ $\alpha+\beta$ τὸ $\gamma+\delta$, γραπτέον οὕτω καὶ ἀφαιρετέον $\alpha+\beta-\gamma-\delta$· ὃς γὰρ ἂν οὕτως ἀφαιροίη $\alpha+\beta-\gamma+\delta$, τὸ μὲν ἀφῃρηκὼς ἔσται τὸ γ, τὸ δ' οὐχὶ, ἀλλὰ τοὐναντίον καὶ προστεθηκὼς τὸ δ, δεῆσαν ἀμφότερα· ἄρα ταυτόν ἐστιν ἢ θετικὸν ἐκ τοῦ ὅλου ἀφαιροῖτο, ἢ ἐξ ἐκείνου γένοιτο ἀποφατικὸν τῷ, τε ὅλῳ προσθεῖτο· ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Ἐὰν δὲ δεύτερον ὁ μειωτέος ὅρος ἦ ἀποφατικός· ἀποφατικὸν ἐκ τοῦ ὅλου ἀφαιρεῖν, ταυτόν ἐστι τῷ τοσοῦτον θετικὸν τῷ ὅλῳ προστιθέναι (αὐτόθι)· οἷον εἰ δέοι $\gamma-\delta$ ἀπὸ τοῦ $\alpha+\beta$ ἀφελέσθαι, τρεπτέον αὖθις ὑπεναντίως τὰ σημεῖα, ἵνα μὴ πλέον (ὥς φασι) τοῦ δικαίου ἀφαιρεθῇ, καὶ γραπτέον ὧδὶ, $\alpha+\beta-\gamma+\delta$· δέον γὰρ ἀφελέσθαι οὐχ ὅλον τὸ μέγεθος γ, ἀλλὰ μέρος, οἷον τὸ $\gamma-\delta$, ὡς πρόκειται· ἣν δέ τις ὑφέλῃ $\alpha+\beta-\gamma-\delta$, πρὸς ὅλῳ τῷ γ, συναφελόμενος ἔσται καὶ ὅλον αὐτὸ τὸ δ, ὅπερ ἄτοπον· ἄρα ταυτόν ἐστιν ἢ ἀποφατικὸν τοῦ ὅλου ἀφαιροῖτο, ἢ ἐξ ἐκείνου θετικὸν γενόμενον τῷ ὅλῳ συνάπτοιτο· Ὡσαύτως εἰ προτεθῇ θετικὸν ἐξ ἀποφατικοῦ ἀφελέσθαι, οἷον ἀπὸ $\alpha-\beta$, τὸ $\gamma+\delta$, γραπτέον $\alpha-\beta-\gamma-\delta$, οὐχ οὕτω δὲ $\alpha-\beta-\gamma+\delta$, ἵνα μὴ θάτερον, ἤτοι ὡς ἀνωτέρω ἐλέγετο, ἔλαττον τοῦ δικαίου ὑφέλωμεν, δέον ἑκάτερον. Παραπλησίως ἀποφατικὸν ἐξ ἀποφατικοῦ δεῆσαν ἀφελέσθαι οἷον ἀπὸ τοῦ $\alpha-\beta$, τὸ $\gamma-\delta$, οὕτως ἀφαιρετέον $\alpha-\beta-\gamma+\delta$, ἵνα μὴ πλέον ἢ δέον ὑφέλωμεν. Ὡσαύτως δεῆσαν καὶ ἐν ἀριθμοῖς 9 τῶν $6-2$ ἀφελεῖν, γραπτέον οὕτω καὶ ἀφαιρετέον $9-6+2$. Ἡνίκα γὰρ $9-6$ γράφωμεν, τὸ ὅλον 6 τοῦ 9 ἀφαιροῦμεν, ὥσθ' οὕτω ἡμῖν ὑπολείπεσθαι 3. Ἀλλ' οὖν τοῦ 9 οὐχὶ 6, μᾶλλον δὲ τὸν τοῦ 6 ἐπὶ τὸν 2 πλεονασμὸν, τουτέστι 4, ἀφαιρεῖν βουλόμεθα. Δέον τοίνυν τῷ ὑπολοίπῳ 3 τὸν πλέον τοῦ δικαίου, τοῦ ὅλου 6 ἀφαιρεθέντα ἀριθμὸν 2 προσθεῖναι, πρὸς τὴν τοῦ ἀληθοῦς ὑπολοίπου 5 ἀπόδοσιν, ἤτοι $9-4=5$, ἢ $9-6+2=5$. Γενικῶς τοίνυν Ποσότητας οἱασδηποτοῦν Ἀλγεβραϊκὰς ἀφελεῖν, ταυτόν ἐστι ταύτας ὑπεναντίοις σημείοις προσθεῖναι· Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 96. Ἐὰν τοίνυν τὰ Ποσὰ ἴσα τύχῃ τό, τε ἀφαιρούμενον δηλαδὴ, καὶ τὸ ἀφ' οὗ ἡ ἀφαίρεσις γίνεται· φανερὸν, ὅτι ἡ διαφορὰ ἴση ἔσται τῷ μηδενί· ἐὰν γὰρ $\alpha = \beta$, ἔσται πάντως $\alpha - \beta = 0$ (§. 49.). Ἐὰν δὲ τὸ ἀφαιρετέον μεῖζον, ἡ διαφορὰ καὶ αὐτοῦ τοῦ μηδενὸς ἥττων ἔσται· ἢν γὰρ ᾗ $\alpha = 4$, καὶ $\beta = 6$· ἔσται $\alpha - \beta = 4 - 6 = -2$. Ἐὰν δὲ τὸ ἀφαιρετέον ᾖ ἔλαττον, ἡ διαφορὰ ἴση ἔσται τῇ ὑπεροχῇ τοῦ μειωτέου ὑπὲρ τὸν ἀφαιρετέον· οἷον $6\alpha - 4\beta = 2\alpha$, τεθέντος τοῦ $\alpha = \beta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α) Α. $8\alpha\beta - 7\alpha\gamma + 3\delta$
Β. $5\alpha\beta - 5\alpha\gamma$
$-\quad +$
Γ. $3\alpha\beta - 2\alpha\gamma + 3\delta$

Β) Α. $7\alpha\chi - 4\beta\gamma - 3\delta\varepsilon$
Β. $8\alpha\chi + 3\beta\gamma - 5\delta\varepsilon$
$-\quad -\quad +$
Γ. $-\alpha\chi - 7\beta\gamma + 2\delta\varepsilon$

Γ) Α. $20\alpha^4\beta - 3\beta^{\mu}\gamma\delta^2 + 2\alpha\delta^2 - 64$
Β. $6 + 5\alpha\delta^2 - 4\alpha^4\beta + 5\beta^{\mu}\gamma\delta^2 - \gamma^2\delta$
$-\quad -\quad +\quad -\quad +$
Γ. $24\alpha^4\beta - 8\beta^{\mu}\gamma\delta^2 - 3\alpha\delta^2 - 70 + \gamma^2\delta$

Δ) Α. $5\alpha^{\mu}\chi^2 - 20 + 7\alpha\beta^3\chi - 4\beta^{\mu}\gamma\chi^2$
Β. $2\beta^{\mu}\gamma\chi^2 + 5\alpha^{\mu}\chi^2 + 8 - 2\alpha^3\beta\chi$
$-\quad -\quad -\quad +$
Γ. $-28 + 7\alpha\beta^3\chi - 6\beta^{\mu}\gamma\chi^2 + 2\alpha^3\beta\chi$

Ἡ Βάσανος ἐν ἅπασι γενέσθω οὕτω

$$\text{Β} + \text{Γ} = \text{Α}$$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐν τοῖς ἀνωτέρω ἐντεθεῖσι παραδείγμασι, πρὸς τὸ τὴν βάσανον τοὺς Μαθητιῶντας εὐχερέστερον ἀνακρίναι, τὸ μὲν ὅλον κεκλήκαμεν Α, τὸ δὲ μειωτέον Β, καὶ τὴν διαφορὰν Γ. ὥστε δέον εἶναι $\text{Β} + \text{Γ} = \text{Α}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 97. Ἐπεὶ τὸ ὅλον ἴσόν ἐστι τοῖς αὐτοῦ μέρεσιν ὁμοῦ ληφθεῖσιν (§. 72.)· ἐν τῇ ἀφαιρέσει τοίνυν τὸ ἀφαιρετέον μετὰ τῆς διαφορᾶς ἢ ὑπεροχῆς (§. 90.), ἴσον εἶναι δέον τῷ μειωτέῳ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 98. Τὸ τῆς Ἀφαιρέσεως ἄρα τέλειον, διὰ τῆς Προσθέσεως βασανιζόμενον διακρίνεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ.

ΠΕΡΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 99. Πολλαπλασιασμός ἐστι θέσις δοθείσης Ποσότητος, ἰσαρίθμως ταῖς ἐν τῇ ἑτέρᾳ Ποσότητι περιεχομέναις μονάσιν.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 100. Ἐν τῷ Πολλαπλασιασμῷ, ὁ πολλάκις λαμβανόμενος ὅρος καλεῖται Πολλαπλασιαστέος· ὁ δὲ ἕτερος, ὁ σημαίνων ποσάκις ἐκεῖνος λαμβάνεται, Πολλαπλασιαστής· τὸ δὲ ἐκκύπτον, Γινόμενον. Γενικῶς μέντοιγε οἱ δοθέντες λέγονται Παράγοντες ἢ Ποιοῦντες, ὁ δὲ ζητούμενος τὸ Παραγόμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 101. Πολλαπλασιάσαι ἄρα, οὐδὲν ἄλλο ἐστιν, ὅτι μὴ τὸν Πολλαπλασιαστέον τοσάκις λαβεῖν, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ Πολλαπλασιαστῇ ἐμπεριέχεται, ἐφ' ᾧ τὸ Γινόμενον εὑρεθῇ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁ δὲ Στοιχειωτὴς (α) οὕτω φησίν. Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, οταν ὅσαι ἴσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, τοσάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος καὶ γένηταί τις.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 102. Ἐν τῷ Γινομένῳ τοίνυν τοσάκις ὁ Πολλαπλασιαστέος ἐμπεριείληπται, ὁσάκις ἡ μονὰς ἐν τῷ Πολλαπλασιάζοντι. Ὥστε ἀναλογικῶς, ἡ μονὰς ἔχει πρὸς τὸν Πολλαπλασιαστέον, ὡς ὁ Πολλαπλασιάζων πρὸς τὸ Γινόμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 103. Ὁ Πολλαπλασιαστέος οὐ δέον εἶναι ὁμογενὴς τῷ Πολλαπλασιαστῇ. Ὁποιοσδηποτοῦν καὶ γὰρ ἂν εἴη ἐκεῖνος, οὗτος ἀλλ' οὖν ἀείποτε ἀφῃρημένως τίθεται.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 104. Σημεῖον Πολλαπλασιασμοῦ ἔστω τὸ χιαστὸν $\times$, ὃ δυσὶ παράγουσι παρεγκείμενον, διὰ τῆς ἐπὶ ἢ ἐν ἀπαγγέλλεται· οἷον, $\alpha\times\beta$, 8×3, σημαίνει δὲ τὸ παραγόμενον ἐκ τῶν α ἐπὶ β, καὶ 8 ἐπὶ 3. Τινὲς δὲ καὶ στιγμὴν μεταξὺ τῶν στοιχείων παρενστι-

(α) Βιβ. Ζ. ὅρ. ιε'.

ζομένην τιθέασι τοῦτ' αὐτὸ δηλοῦντες, ὡς $\alpha.\beta$, καὶ $\alpha.\beta+\gamma\times\delta=o.\nu-\varepsilon$, ἐμφαίνει δὲ τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ α καὶ β, σὺν τῷ γινομένῳ ἐκ τοῦ γ καὶ δ, ἴσον τῷ γινομένῳ ἐκ τοῦ ο καὶ ν, ἀφαιρεθέντος τοῦ ε· ἐκφέρεται δὲ οὕτω, α ἐν β, σὺν γ ἐν δ, ἴσον ο ἐν ν, ἀφαιρεθέντος, ἢ πλὴν τοῦ ε.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 105. Τὰ σημεῖα ταῦτα οὐ τίθεται διὰ παντὸς ῥητῶς, ἀλλὰ μόνον προσυπακούεται, ὡς ἐν τῇ Μονομερῇ Ποσότητι. Τὰ γὰρ ἁπλᾶ καὶ σημείου χωρὶς παρεμπίπτοντος εἴωθεν ἐπ' ἄλληλα ἀγόμενα πολλαπλασιάζεσθαι· οἷον τὸ α διὰ τοῦ β οὕτως $\alpha\beta$, ὅπερ ἄλλως οὕτως ἔδει γραφῆναι $\alpha\times\beta$· ὁμοίως καὶ ἐν τῇ Πολυωνύμῳ $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon=\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta\times\varepsilon$.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 106. Ἀλλὰ δὴ καὶ εὐθεῖα τοῖς στοιχείοις ἐπιτίθεται ἡνίκα ἂν ἐκεῖνα ἐκ πλειόνων εἴησαν ὀνομάτων συγκείμενα· οἷον, $\overline{\alpha+\beta}.\delta$· δηλοῖ δὲ, ὅτι ἅπαντα τὰ ὑπὸ τὴν γραμμὴν, εἴτουν τὸ κεφάλαιον τῶν α καὶ β, πολλαπλασιάσαι χρὴ διὰ τοῦ δ, ὡσαύτως $\overline{\alpha+\beta}.\overline{\gamma+\delta}$. Ἔτι δὲ καὶ παρενθέσει, ὃ ταυτόν ἐστιν, εἰώθασι διαστέλλειν ὧδί $(\alpha+\beta).(\gamma+\delta)$, δηλ: τὸ ἐκ τῶν α καὶ β κεφάλαιον, διὰ τοῦ ἐκ τῶν γ καὶ δ πολλαπλασιάσαι δεῆσαν. Ἐὰν γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἰδίᾳ μὴ ἐπιχαραχθῇ, γραφῇ δ' οὕτω, $\alpha+\beta.\delta$, σημαίνει τὰ β μόνον διὰ τοῦ δ πολλαπλασιάσαι χρὴν, τῷ δ' ἐξ αὐτῶν γινομένῳ προσθεῖναι τὸ α. Ὡσαύτως $\alpha+\beta$,

$\gamma + \delta$, μόνον τὸ β διὰ τοῦ γ πολλαπλασιάσαι, τῷ δ' ἐξ αὐτῶν κεφαλαίῳ προσθεῖναι τό, τε α καὶ τὸ δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 107. Ἔξεστι τοίνυν τὸ παραγόμενον εἰς δύω ἀναλύεσθαι παράγοντας, δυσὶ διαφέρουσι τρόποις, ὡς τὸ $\alpha\beta$, εἴς τε τοὺς $+\alpha$ καὶ $+\beta$, καὶ εἰς τοὺς $-\alpha$ καὶ $-\beta$ ἀναλυθείη (§. 105.)· καὶ τὸ $-\alpha\beta$, τούς τε $-\alpha+\beta$ καὶ τοὺς $+\alpha-\beta$ σχοίη ἂν παράγοντας. Τοῦ δὲ πολλαπλασιαστέου καὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἐκ πολλῶν ὅρων συγκειμένων, ὡς ἐν Πολυωνύμῳ ποσότητι, τηνικαῦτα ἀμφότεροι παρενθέσει διαστέλλονται (§. 106.) μετὰ τῶν αὐτῶν σημείων, οἷον $(\alpha+\beta) \times (\gamma+\delta)$ ὡς ἀνωτέρω Φθὰς ἔφην. Εἰ δ' οὖν θάτερος τούτων εἴη ποσότης Μονώνυμος, παραλειφθέντος τοῦ σημείου, οὕτω γραφήτω· $2(\alpha+\gamma)$, ἢ $\gamma(\alpha+\beta)^3$. Ὡσαύτως ἐὰν ᾖ $\alpha\chi+\beta\chi+\delta\chi$, ἔσται τῇ πρὸς τοὺς παράγοντας διαλύσει, $(\alpha+\beta+\delta)\chi$, ἤτοι ἡ πολλάκις πολλαπλασιάζουσα ποσότης χ, παρενθέσει διασταλλεῖσα τῶν λοιπῶν, ἅπαξ μόνον γράφεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 108. Ἐπείπερ ὁ πολλαπλασιαστέος τῷ γινομένῳ ἰσαρίθμως ταῖς τοῦ πολλαπλασιαστοῦ μονάσιν ἔνεστι (§. 102.), δῆλόν ἐστι Α'. τὸ γινόμενον μεῖζον ἀεὶ εἶναι τοῦ πολλαπλασιαστέου (τοῦτο δὲ μόνον ἐν ταῖς ὁλοσχερέσι τῶν Ποσοτήτων). Β'. τὸ γινόμενον τοσάκις μεῖζον δεῖν εἶναι τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὁσάκις τῷ πολλαπλασιαστέῳ ἡ μονὰς ἐμπεριείληπται· οἷον,

24 μεῖζον ἐστὶ τῶν 8, καὶ δὴ τρίς· ἄρα $24>8$. Ἤδη ἐὰν ταύταις ταῖς δυσὶ ποσότησι $24>8$ σημεῖον ἰσότητος παρεντεθῇ, ἀποδιοπομπουμένου τοῦ μείζονος, ἀναγκαίως 8 δέον τρὶς τῷ πολλαπλασιασμῷ τεθεῖναι, οὕτως τε ἔσται $24=8\times 3$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 109. Γενικῶς τοίνυν· Α'. $\alpha\beta>\alpha$, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ β ἐμπεριέχεται· ἐὰν οὖν ἀντὶ τοῦ $>$ τὸ $=$ ληφθῇ, δέον τὸ α ἐπὶ β πολλαπλασιάσαι, καὶ τότε ἔσται $\alpha\beta=\alpha\beta$. Β'. $\alpha\beta>\beta$, ὁσάκις δηλ: ἡ μονὰς τῷ α ἐμπεριέχεται. Ἐὰν οὖν ἀντὶ κτλ: (ἡ πρᾶξις ὡς ἀνωτέρω)· καὶ οὕτως διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ β ἐπὶ α, ἔσται $\alpha\beta=\beta\alpha$.

ΑΞΙΩΜΑ Α.

§. 110. Τὰ τρίτῳ τινὶ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσα· οἷον.

$$\begin{array}{c} 6=4+2 \\ 6=5+1 \\ \hline 4+2=5+1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 7=9-2 \\ 9-2=4+3 \\ \hline 7=4+3 \end{array}$$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τοῦ Ἀξιώματος τούτου ἡ χρῆσις οὐ μόνον ἐν τῇ Μαθηματικῇ, ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ κοινῷ βίῳ λίαν ἐστὶ χρήσιμος· τοῦθ' οὕτω τοίνυν νοητέον. Ἐχέτω τις 10 μνᾶς, ἕτερος δὲ $5+5$ τοσοῦτον δηλ: ὅσον ὁ πρῶτος, καὶ τρίτος τις $7+3$ ἴσον τοῖς δυσίν· ὡς οὔσης τοίνυν τῆς τῶν χρημάτων ποσότητος ἀμφοτέρων ἴσης τῇ τοῦ τρίτου, λεχθῆναι δύναται τὸν δεύτερον ἔχειν ἴσον τῷ τρίτῳ· καὶ ἐν Διαγράμματι.

ἄνθρωπος   10   ἄρα $7+3=10$

Γάϊος = θνητὸς $5+5=7+3$ $5+5=10$

$5+5=7+3$

καὶ ἐπεὶ ὁ Γάϊος ἐστὶν ἄνθρωπος, πᾶς δὲ ἄνθρωπος θνητὸς, ἄρα καὶ ὁ Γάϊος θνητός ἐστι· καὶ ἐφ' ἑτέρων πολλῶν ὡσαύτως.

ΑΞΙΩΜΑ Β.

§. 111. Ἐὰν ἴσα ἐπὶ ἴσων πολλαπλασιάσῃς, τὰ παραγόμενα ἴσα ἔσται· οἷον,

$$\begin{array}{ll} 8=5+3 & 7+4=14-3 \\ 4=4 & 3=3 \\ \hline 8\times4=(5+3)\times4 & (7+4)\times3=(14-3)\times3 \\ 32=20+12 & 33=42-9 \end{array}$$

Ἐὰν δὲ τὸ μεῖζον καὶ ἔλαττον διὰ τῶν αὐτῶν πολλαπλασιάσῃς, ἔσται ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιστάσει τὸ παραγόμενον μεῖζον, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἔλαττον· οἷον,

$$\begin{array}{c} 5>4 \\ 3=3 \\ \hline 5\times3>4\times3 \\ 15>12 \end{array}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 112. Τοίνυν $\alpha-\alpha$ δι' ὁποιουοῦν ἀριθμοῦ πολλαπλασιαζόμενον ἴσον ἔσται τῷ μηδενί· οἷον $(\alpha-\alpha)-\beta=0$, καὶ $(\alpha-\alpha)\beta=0$ (§. 45.).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 113. Δυεῖν Ποσοτήτων α καὶ β ἀλλήλαις ἐπιπολλαπλασιαζομένων, τὸ Γινόμενον

ταυτὸν ἔσται, ἢ α ἐπὶ β, ἢ β ἐπὶ α πολλαπλασιασθῇ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ $\alpha\beta>\alpha$ (§. 109.), ἄρα $\alpha\beta=\alpha\beta$ (αὐτόθι)· καὶ αὖθις ἐπεὶ $\alpha\beta>\beta$, ἔσται $\alpha\beta=\beta\alpha$. Γενικῶς τοίνυν $\alpha\beta=\beta\alpha$ (§. 110.). Οὐδὲν γὰρ διοίσει, ὅπως ἂν καὶ τάττοιτο τὰ ποσὰ ταῦτα πρὸς ἄλληλα, τοῦ αὐτοῦ ἀείποτε παραγομένου ἐκκύπτοντος· πάντως γὰρ $\alpha\beta=\beta\alpha$· ὥσπερ δὴ ταυτὸ παραχθείη ἄν, καὶ εἰ 3 διὰ 5 πολλαπλασιασθείη, ἢ 5 διὰ 3 ἀνάπαλιν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 114. Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ σαφής ἐστιν ἡ τοῦ Θεωρήματος Δεῖξις, καὶ πλείστων οὐσῶν Ποσοτήτων. Καὶ γὰρ ἐπὶ τῶν δεδειγμένων $\alpha\times\beta=\beta\times\alpha$· ἐπεὶ ἢ $\alpha\times\beta$, ἢ $\beta\times\alpha$ ἐπὶ γ πολλαπλασιασθῇ, τὸ γινόμενον ταυτὸν ἔσται, ἤτοι $\alpha\times\beta\times\gamma=\beta\times\alpha\times\gamma$· ὡσαύτως $\alpha\times\gamma=\gamma\times\alpha$ (§. 113.), ταυτὸν γὰρ ἔσται τούτου ἢ ἐκείνου ἐπὶ β πολλαπλασιασθέντος, οἷον $\alpha\times\gamma\times\beta=\gamma\times\alpha\times\beta$· καὶ $\beta\times\gamma=\gamma\times\beta$ (αὐτ.)· ἄρα $\beta\times\gamma\times\alpha=\gamma\times\beta\times\alpha$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Εἴθισται μὲν οὖν κοινότερον τὸν μείζω ἐπὶ τὸν ἐλάττω ἐπὶ τῆς πράξεως ἀεὶ πολλαπλασιάζεσθαι διὰ τὸ εὐτακτότερον· ὅτι δ' οὐδὲν διαφέρει εἴθ' ὁ μείζων ἐπὶ τὸν ἐλάττω, εἴτ' ἀνάπαλιν, δέδεικται καὶ παρ' Εὐκλείδῃ (α). Εὔδηλον δ' ὅτι ὁ αὐτὸς παραγόμενος φέρ' εἰ-

(α) Βιβ. Ζ. Προτ. ιϛ'.

πεῖν 12 ἀριθμὸς, ἢ τετράκις καταμετρεῖται ὑπὸ τοῦ 3, ἢ τρὶς ὑπὸ τοῦ 4. Εἰδὲ βούλοιο καὶ διὰ γραμμῶν
Πίν. Α. Γεωμετρικῶς τὸ αὐτὸ ἔσται σοι δῆλον. Οἷον κείσθω
Σχ. 1. μὲν ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ οὗ ἡμὲν ΑΔ πλευρὰ διαιρεθήτω εἰς τόσα μέρη ἴσα, ὅσας ὁ 4 περιέχει μονάδας, ἡδὲ ΑΒ εἰς ὅσας ὁ 3 ἀριθμός. Ἤχθωσαν δὴ ἀπὸ τῶν τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας πλευρᾶς τομῶν εὐθεῖαι, αἱμὲν τῇ ΑΒ, αἱδὲ τῇ ΑΔ, Παράλληλοι· καὶ τὸ ΑΓ ὀρθογώνιον εἰς δύω καὶ δέκα τετράγωνα ἴσα ἀλλήλοις, ταῖς ἐν τῷ Γινομένῳ 12 ἀριθμῷ περιεχομέναις μονάσιν ἰσαρίθμως, διαιρείσθω. Δῆλον οὖν ἐκ τούτων, τὸ μὲν ΑΕ Παραλληλόγραμμον τὸν 4 παριστᾷν ἀριθμὸν, τὸ δὲ ΑΖ τὸν 3. Ἀλλαμὴν τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον ΑΓ ἀποτελεῖται, εἴτε τὸ ΑΕ Παραλληλόγραμμον τρὶς ληφθῇ, ὁσάκις δηλαδὴ ἓν τετράγωνον ἐν τῷ ΑΖ περιέχεται Παραλληλογράμμῳ· εἴτε τὸ ΑΖ τετράκις, ὁσάκις δηλαδὴ ἓν τετράγωνον ἐν τῷ ΑΕ Παραλληλογράμμῳ ἐμπεριείληπται. Ἄρα καὶ ὁ αὐτὸς γενήσεται ἀριθμὸς, εἴθ' ὁ 4 ἐπὶ τὸν 3, εἴτ' ἀνάπαλιν, πολλαπλασιασθῇ. Παρὰ γὰρ τοῖς Μαθηματικοῖς οἱ ἀριθμοὶ, ἢ ὡς ἁπλῶς Γραμμαὶ ἐννοοῦνται, ὡς ἐπὶ τῆς Συνάψεως καὶ Ἀφαιρέσεως, τῷ Πρόσθεσιν καὶ Ἀφαίρεσιν γίνεσθαι τούτων ἐπὶ τῆς πράξεως, ὡς κἀπὶ τῶν Γραμμῶν· ἢ ὡς Ἐπίπεδα καὶ Στερεά· καὶ ὡς Ἐπίπεδα μὲν ἐπὶ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς Διαιρέσεως, ἐὰν δηλαδὴ οἱ διδόμενοι δύω ὦσι μόνον· ὡς Στερεὰ δὲ ἐὰν ὦσι τρεῖς. Διὸ καὶ ὁμὲν ἐκ τῆς πολλαπλασιάσεως διά τινων ἀριθμῶν παραγόμενος, ὡς Ἐπίπεδον ἐννοεῖσθαι ὀφείλει, οἷον τὸ ΑΓ ὀρθογώνιον· ὁδὲ ἐκ τριῶν τινων, ὡς Παραλλη-

λεπίπεδον, οἷον τὸ ΑΖ, παραστατικὸν ὂν τῶν τριῶν διαστάσεων, ὧν οὐ πλείους δίδονται ἐν τῇ Φύσει, κἂν ἐν τῇ Ἀναλυτικῇ Μεθόδῳ, καὶ τέσσαρες καὶ πέντε κατ' ἐπίνοιαν διαστάσεις, ἤτοι δυνάμεις ἀριθμῶν θεωροῦνται. Ὥσπερ δὲ ἐπὶ τῶν Ἐπιπέδων ἀριθμῶν, ἐὰν ὁποτεροσοῦν, ἐφ' ὁποτερονοῦν πολλαπλασιασθῇ τὸ αὐτὸ Ἐπίπεδον ἀποτελεῖται· οὕτω κἀπὶ τῶν Στερεῶν, τὸ αὐτὸ Στερεὸν, κἂν ἄλλος ἐπ' ἄλλον τῶν τριῶν πολλαπλασιασθῇ, ὡς ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς τριῶν παραδειγμάτων καθίσταται δῆλον· Ἔστω γὰρ ἡ μὲν ΓΒ πλευρὰ παραστα- Σχ. 2.
τικὴ τοῦ 4 ἀριθμοῦ, ἡ δὲ ΓΔ τοῦ 3, ἥ, τε ΒΑ = ΓΘ τοῦ 5· ὧν δὴ ἀλλήλων ἐπιπολλαπλασιασθέντων, τὰ γινόμενα ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται. Τῆς γὰρ ΒΓ πλευρᾶς ἐπὶ τῆς ΓΔ κινηθείσης, ἡ τοῦ ΓΕ Στερεοῦ (οἷον ἐν τῇ καθ' ἡμᾶς παριστάσει Πρίσματος) Βάσις ΒΓΔ γενήσεται. Εἶτα τῆς αὐτῆς Βάσεως ἐπὶ τὸ ΓΘ ὕψος ἀνυψωθείσης, τὸ ΓΕ ἀποτελεσθήσεται Στερεόν. Αὖθις τῆς ΓΔ ἐπὶ τῆς ΓΘ κινηθείσης, τὸ τοῦ ΓΖ Ἐπίπεδον ἡμῖν ἀναδοθήσεται· οὗ δ' αὖ ἐπὶ τῆς ΓΒ πλευρᾶς κινουμένου, τὸ αὐτὸ Στερεὸν ἀποπερατωθήσεται. Τελευταῖον, ἐὰν ἡ ΒΓ ἐπὶ τῆς ΓΘ κινηθῇ, καὶ τὸ ΒΘ πάλιν Ἐπίπεδον γένηται· τοῦτο δ' ἂν ἐπὶ τῆς ΓΔ ἀχθῇ, τὸ αὐτὸ καὶ οὕτως ΓΕ πληρωθήσεται Στερεόν. Τοῦ γὰρ τοῦ οὕτως ἐκκύψαντος Πρίσματος ὕψους ΑΒ εἰς πέντε ἴσα διαιρεθέντος μέρη, τοῦ δὲ πλάτους ΒΓ εἰς τέσσαρα, καὶ τοῦ βάθους ΓΔ εἰς τρία, εὑρεθήσεται τὸ τοῦ Πρίσματος Στερεὸν ἐκ Πρισματίων ἄλλων στοιχειωδῶν συγκείμενον, ὧν ὁ ἀριθμὸς ἔσται $5 \times 4 \times 3 = 60$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 115. Ποσότητας Ἀλγεβραϊκὰς ἀκεραίους πολλαπλασιάσαι.

ΛΥΣΙΣ.

Α'. Γεγράφθω ὁ Πολλαπλασιαστὴς ὑπὸ τὸν Πολλαπλασιαστέον.

Β'. Ἀχθήτω γραμμὴ εὐθεῖα, ὅπως μὴ τὸ παραγόμενον μετὰ τῶν παραγόντων συγχέοιτο.

Γ'. Πολλαπλασιασθήτω ἐφ' ἑνὸς ἑκάστου ὅρου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὁ πολλαπλασιαστέος, ἀρχομένων δεξιόθεν, καὶ τὸ γινόμενον γραφήτω ὑπὸ τῇ ἀχθείσῃ εὐθείᾳ, ἐφ' ᾧ μετὰ τὴν πρᾶξιν ἐν ἑνὶ προστεθῇ κεφαλαίῳ (§. 85.).

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ.

Α'. Τῶν Παραγόντων ἑτεροσήμων ὄντων, τὸ Παραγόμενον δέον εἶναι ἀποφατικόν· οἷον $-\alpha \times +\beta = -\alpha\beta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστω $\alpha - \alpha$ πολλαπλασιαστέον ἐπὶ β. Ἔσται τὸ πρῶτον τοῦ γινομένου μέρος $= \alpha\beta$· τῶν γὰρ θετικῶν καὶ τὸ γινόμενον θετικόν ἐστι· τὸ δ' ἕτερον στοιχειακὸν μέρος ὡσαύτως ἔσται $\alpha\beta$, ἄδηλον ἀλλ' οὖν μετά τινος σημείου $+\alpha\beta$, ἢ $-\alpha\beta$, Φημὶ δέον εἶναι $-\alpha\beta$· καὶ γὰρ $\alpha - \alpha = 0$ (§. 49.), τοῦτο τοίνυν τὸ τῷ μηδενὶ ἴσον, δέον ἐπὶ β πολλαπλασιασθῆναι. Ἀλλαμὴν τὸ μηδὲν ὁσάκις ἂν ληφθῇ, μηδενικὸν ἀεὶ δώσει γινόμενον (§. 112.). Ἐὰν οὖν τὸ δεύτερον τοῦ γινομένου μέρος θετικὸν ἐκκύψῃ, τηνικαῦτα οὐχ ἔσται μηδέν, ἀλλὰ τοῦ μηδενὸς πλεῖον ἤτοι $= 2\alpha\beta$· ὅπως τοίνυν τὸ γινόμενον ἴσον τῷ μηδενὶ ἀποβῇ, δέον ἐν τῷ δευτέρῳ τοῦ γινομένου μέρει τεθῆναι $-\alpha\beta$· ἄρα $-\alpha \times \beta = -\alpha\beta$, τουτέστιν ἢ ἡ προσθήκη ληφθῇ ἐλλειπτικῶς, ἢ ἡ λεῖψις προσθετικῶς, λεῖψις ἀναφύεται. Γενικῶς τοίνυν, ἐὰν οἱ παράγοντες ἑτερόσημοι ὦσι, τὸ παραγόμενον δέον εἶναι ἀποφατικόν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 116. Ἐπείπερ $-\alpha \times \beta = \beta \times -\alpha$ (§ 113.), καὶ $-\alpha \times \beta = -\alpha\beta$ ἐκ τῶν δεδειγμένων· ἔσται καὶ $\beta \times -\alpha = -\beta\alpha$.

Β'. Ἐὰν δὲ ἀμφότεροι οἱ Παράγοντες ταυτόσημοι ὦσι τὸ Παραγόμενον δέον εἶναι θετικόν· οἷον $\pm\alpha \times \pm\beta = \pm\alpha\beta$ καὶ $-\alpha \times -\beta = \pm\alpha\beta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εἰ μὲν γὰρ ἀμφότεροι οἱ παράγοντες εἴησαν θετικοί, δῆλόν ἐστι καὶ τὸ παραγόμενον θετικὸν εἶναι· οἷον $+\alpha \times +\beta = +\alpha\beta$· τὸ γὰρ παραγόμενον ὅλόν τί ἐστι τῶν παραγόντων, θάτερον τοσάκις περιεννοχὸς, ὁσάκις ἡ μονὰς ἐν θατέρῳ, διὸ ἐκείνων ἀμφοῖν θετικῶν ὄντων, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν, ἅτε δὴ τὸν θετικὸν παράγοντα ὡς ὅλον πολλάκις περιέχον, θετικὸν ἐξ ἀνάγκης εἶναι δεῖ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ $+$ ὑπάρξεως ὂν σημεῖον (§. 42.) προσθήκην δηλοῖ τὸ δὲ προσόν τινι ὁσάκις ἂν προσληφθῇ (ὃ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τελεῖται), τοσάκις ἐκείνῳ ὑπάρχειν προσήκει· διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον θετικὸν ὑπάρχειν χρεών· Ὃ ἦν τὸ α΄.

Πολλαπλασιασθήτω δὴ δεύτερον $\alpha - \alpha$ ἐπὶ $-\beta$, ἔσται τὸ μὲν πρῶτον τοῦ γινομένου μέρος, ἐκ τῆς ἀνωτέρω δείξεως $= -\alpha\beta$, τὸ δ' ἕτερον τοῦ γινομένου στοιχειακὸν μέρος $= \alpha\beta$· ἄδηλον δὲ μετά τινος σημείου $+$ ἢ $-$· Κείσθω τοίνυν $\alpha - \alpha = 0$ (§. 49.) πολλαπλασιασθησόμενον ἐπὶ $-\beta$· ἀλλὰ μὴν τὸ μηδὲν ὁσάκις ἂν τεθῇ, γινόμενον ἀεὶ δώσει μηδενικόν· ὅθεν ἐὰν ἐν τῷ δευτέρῳ τοῦ γινομένου μέρει οὐ τεθῇ $+\alpha\beta$, τὸ γινόμενον ἐκκύψει οὐχὶ τῷ μηδενὶ ἴσον, ἀλλ' ἐκείνου ἔλαττον, ἤτοι $= -2\alpha\beta$· ἐφ' ᾧ ἄρα τὸ γινόμενον ἴσον τῷ μηδενὶ ἀναδοθῇ, δέον ἐν τῷ δευτέρῳ γινομένῳ ταχθῆναι $+\alpha\beta$, ἵν' ᾖ $-\alpha \times -\beta = \alpha\beta$· ἡ γὰρ τῆς ἐλλείψεως ἔλλειψις πάντως γε προσθήκην ἀποτελεῖ, καθὰ δὴ καὶ ἡ τῆς ἀποφάσεως ἀπόφασις, κατάφασιν ἀπεργάζεται. Γενικῶς τοίνυν· Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ παράγοντες ταυτόσημοι ὦσι, τὸ παραγόμενον δέον εἶναι θετικόν. Καὶ κατὰ Διόφαντον, (α) λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν· λεῖψις δ' ἐπὶ ὕπαρξιν, ποιεῖ λεῖψιν. Ὃ ἦν τὸ β΄.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Πίν. Α. Ἔστω ΑΓΔΒ Παραλληλόγραμμον Ὀρθογώνιον, καὶ
Σχ. 3. ἔστω $\mathrm{A\Gamma} = \alpha$, $\Gamma\Delta = \beta$. Ἀχθήτω δὴ ΕΘ τῇ ΓΔ παράλληλος, ἔσται $\mathrm{E\Theta} = \mathrm{AB}$, διὰ τὸ εἶναι τὰς πρὸς τὸ Ε καὶ Θ γωνίας ὀρθάς· καὶ μὴν καὶ $\mathrm{AE} =$

(α) Βιβ. Α΄. ὅρῳ θ΄.

ΒΘ, αἱ γὰρ κάθετοι ΑΕ καὶ ΒΘ ἴσας τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΕΘ μοίρας ἐναπολαμβάνουσιν· ἔσται ἑπομένως τὸ ΑΒΘΕ Ὀρθογώνιον. Ὡσαύτως δείκνυται, ἀχθείσης τῆς ΗΖ παραλλήλου τῇ ΒΔ, τὰ ΖΗΒΔ καὶ ΒΗΙΘ, ἑπομένως καὶ τὰ ΑΕΙΗ καὶ ΖΙΘΔ, Ὀρθογώνια εἶναι. Ἔστω τοίνυν $\mathrm{AE} = \mathrm{B\Theta} = \gamma$, $\mathrm{Z\Delta} = \mathrm{I\Theta} = \delta$, ἔσται $\mathrm{E\Gamma} = \Theta\Delta = \alpha - \gamma$, $\Gamma\mathrm{Z} = \mathrm{AH} = \beta - \delta$, κἀντεῦθεν $\mathrm{A\Gamma\Delta B} = \alpha\beta$, $\mathrm{B\Theta IH} = \gamma\delta$, $\mathrm{AEIH} = \beta\gamma - \delta\gamma$ καὶ $\mathrm{Z\Delta\Theta I} = \alpha\delta - \delta\gamma$, τὸ γὰρ μεταξὺ τούτων ἀλλήλων ἀχθέντων γινόμενον, τὸ τοῦ Ὀρθογωνίου ἐστὶν ἐμβαδόν. Ἐὰν οὖν τὰ τῶν Ὀρθογωνίων ΑΙ, ΗΘ καὶ ΙΔ ἐμβαδά, ἀπὸ τῶν τοῦ Ὀρθογωνίου ΑΔ ἐμβαδῶν ἀφαιρεθῶσι, τὸ τοῦ Ὀρθογωνίου ΕΓΖΙ ἐμβαδὸν ὑπολειφθήσεται, τουτέστι τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ $\alpha - \gamma$ ἐπὶ τὸ $\beta - \delta$. Εὑρίσκεται τοίνυν $(\alpha - \gamma) \times (\beta - \delta) = \alpha\beta - \gamma\delta - \beta\gamma + \gamma\delta - \alpha\delta + \gamma\delta$ (§. 95.)· τουτέστιν ἐπεὶ $\gamma\delta - \gamma\delta = 0$ (§. 49.), ὑπολειφθήσεται $\alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\delta + \gamma\delta$. Ἐξ οὗ δῆλον καθίσταται, τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ $-\gamma$ ἐπὶ τὸ $-\delta$ εἶναι $+\gamma\delta$· ὅτι τῶν Ὀρθογωνίων $\beta\gamma$ καὶ $\alpha\delta$ ἀπὸ τοῦ $\alpha\beta$, ἤτοι ΑΕΘΒ καὶ ΗΖΔΒ ἀπὸ τοῦ ΑΓΔΒ ἀφαιρεθέντων, τὸ Ὀρθογώνιον ΗΙΘΒ δὶς ἀφῄρηται, ἅπαξ μόνον ἀφαιρεθῆναι δεῆσαν. Ἄρα ἐπεὶ ποσότης στερητικὴ διὰ στερητικῆς πολλαπλασιασθῆναι τυχόντι οὐκ ἂν ἔχοι (§. 99.), ὅπερ καὶ ἡ τῆς στερητικῆς ποσότητος ἐμφαίνει ἰδέα (§. 48.)· Τούτου χάριν ὁ τοιοῦτος πολλαπλασιασμὸς κυρίως τελεῖται, ἐφ' ὧν τὰ ἀποφατικὰ τοῖς θετικοῖς συμμέμικται, ἔνθα τὸ πλέον τοῦ δικαίου ἀφαιρεθὲν, δέον ἀναπληρῶσαι· οἷον εἰ δέοι $8 - 3$ πολλαπλασιάσαι ἐπὶ -4, τὸ μὲν πρῶτον παραγόμενον διὰ τὰ ἀνωτέρω ληφθέντα -32 πλεονάζον ἔσται· οὐ γὰρ ἀποφατικῶς ἐπὶ -4 ὅλον πολλαπλασιάσαι ἐχρῆν τὸ 8 καὶ -32 λαβεῖν, ἀλλὰ τὸ $8 - 3$, ἤτοι τὸ 5, καὶ ἔχειν οὕτω -20. Ἤδη δὲ, ἐπεὶ τῷ πρώτῳ χαρακτῆρι 8 καὶ αἱ τρεῖς μονάδες, ἃς ὁ ἐφεξῆς ὅρος -3 ἀφαιρεῖ, οὐ προσηκόντως συνεπολλαπλασιάσθησαν ἐπὶ τοῦ -4, καὶ τοῦ μηδενὸς εἶναι καὶ αὐταὶ ἐν τῷ τοῦ 8 πολλαπλασιασμῷ συναπήχθησαν, δίκαιον ἂν εἴη τὸ ὑπὲρ τὸ δίκαιον γεγονὸς ἐκεῖνο (τοῦτο δ' ἂν εἴη τὸ 12) ἀντεισαγαγεῖν, ὡς ἂν ἡ πρᾶξις τὸ ἴσον ἔχοι καὶ δίκαιον, ταύτητοι τῆς ἀνθυποκαταστάσεως δι' ἐναντιοδυνάμων σημείων γενομένης, ὁ ἐκείνην παράγων πολλαπλασιασμὸς τῶν -3 ἐπὶ -4 θετικῶς γράφεται $+12$. Ὃ ἦν θάτερον.

Σχ: 4. Ἔστωσαν αὖθις ΛΜΟΝ καὶ ΠΜΟΡ Ὀρθογώνια, κἂν τούτοις ἔστω $ΝΟ = α$, $ΜΟ = β$, $ΡΟ = γ$, ἔσται $ΝΡ = α - γ$, καὶ τὰ ἐμβαδὰ $ΠΡΟΜ = βγ$, $ΛΝΟΜ = αβ$, διὰ τὰ προσεχῶς κατασκευασθέντα· ἑπομένως $ΛΝΡΠ = β(α - γ) = αβ - βγ$· ἄρα $β$ ἀχθὲν ἐπὶ $-γ$ δίδωσι $-βγ$. Τουτέστιν, εἴγε τὸ θετικὸν δι' ἀποφατικοῦ, ἢ καὶ ἀνάπαλιν, πολλαπλασιάζοιτο, τὸ παραγόμενον ἀποφατικὸν ἔσται· τί γὰρ ἂν ἄλλο εἴη; ἢ τοσάκις τὸ θετικὸν λαβεῖν, ὁσάκις τὸ μηδὲν τῷ ἀποφατικῷ συνείληπται· ἤτοι τὸ μηδὲν αὐτὸ, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ θετικῷ ἐμπεριέχεται. Τοιγαροῦν $+α$ ἐπὶ $-β$ πολλαπλασιάσας, ἢ ἀνάπαλιν (οὐδὲν γὰρ διαφέρει), γινόμενον ἕξεις τὸ $-αβ$. Ὃ ἦν τὸ ἕτερον. Διὸ καὶ ἔσται.

Α'.

$$\begin{array}{rrr} & +8 & -4 \\ & +6 & -3 \\ \hline & +48 & -24 \\ & & -24 \;\; +12 \\ \hline & & +12 \end{array}$$

Β'.

$$\begin{array}{rrrrr} 10 = & 8 & +4 & -2 & \\ 2 = & 8 & -4 & -2 & \\ \hline & & -16 & -8 & +4 \\ & -32 & -16 & +8 & \\ 64 & +32 & -16 & & \\ \hline 20 = & 68 & -48 & & \end{array}$$

ΚΑΙ ΕΝ ΤΥΠΩ.

Α'.

$$\underbrace{+ \times + = +}_{\text{ξύμφημί με ξυμφάναι.}}$$

Β'.

$$\underbrace{- \times + = -}_{\text{ἀπόφημί με ξυμφάναι.}}$$

Γ'.

$$\underbrace{+ \times - = -}_{\text{ξύμφημί με ἀποφάναι.}}$$

Δ'.

$$\underbrace{- \times - = +}_{\text{ἀπόφημί με ἀποφάναι.}}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 117. Ἐπεὶ τοίνυν τὰ αὐτὰ σημεῖα παρέχουσι $+$, τὰ δ' ὑπεναντίως ἔχοντα $-$, ῥάδιον ἡμῖν ἔσται πολλαπλασιάζειν καὶ τὰ συγκείμενα, τοῖς περὶ τῶν ἁπλῶν εἰρημένοις καλῶς προσέχουσι. Ληπτέον γὰρ τοὺς τῶν συγκειμένων ὅρους ὡς ἁπλοῦς καθ' ἑαυτοὺς θεωρουμένους, καὶ δι' ἑκάστου ὅρου τῶν ἐν τῷ πολλαπλασιαστῇ, ἑκάστου τῶν ἐν τῷ πολλαπλασιαστέῳ ἀγομένου, προκύψει τὸ παραγόμενον· οἷον προκείσθω ἡ ἐκ τριῶν ὀνομάτων $α + β - γ$, ἣν χρὴ δι' ἁπλοῦ τοῦ $δ$ πολλαπλασιάσαι, ἔσται παραγόμενον $αδ + βδ - γδ$.

Γ'. Οἱ τῶν ὅρων Συνθέται ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιαζέσθωσαν.

Τοῦ κανόνος τούτου ἡ Δεῖξις σαφής ἐστιν ἐξ αὐτῆς τῆς τῶν Συνθετῶν ἰδιότητος, βραχεῖαν περιεχούσης μέθοδον, τὸ τοὺς αὐτοὺς ὅρους πολλάκις γράφειν (§. 56.)· καὶ γὰρ σαφὲς, ὅτι $3\alpha\beta$, δὶς ληφθὲν ἐστὶν $= 6\alpha\beta$.

Δ'. Τὰ τῶν Παραγόντων διάφορα στοιχεῖα, θάτερον θατέρῳ προστιθέμενον, τῇ τοῦ ἀλφαβήτου φυσικῇ τάξει στιχηδὸν γραφήτωσαν, οὐδενὸς σημείου παρεντιθεμένου.

Τοῦ Κανόνος τούτου ὁ ἀποχρῶν λόγος, παρὰ τοῖς τὰ κατὰ τὴν Ἄλγεβραν πρώτως διορίσασιν ἐξευρίσκεται· οἵγε δὴ τὸν τῶν διαφόρων στοιχείων πολλαπλασιασμὸν, οἷον α καὶ β, οὕτως ὑποτυπεῖν ἠξίουν $\alpha \times \beta$, $\alpha \cdot \beta$, $\alpha\beta$· ὧν τὸ ἔσχατον ὡς εὐχρηστότερον ἐνταῦθα εἰσποιούμεθα.

Ε'. Οἱ τῶν ὁμοίων στοιχείων τῶν Παραγόντων Ἐκθέται, ἐκείνων τῷ γινομένῳ ἅπαξ ἐγγραφομένων, συναπτέσθωσαν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστω δὴ α^3 πολλαπλασιαστέον ἐπὶ α^2, φημὶ τὸ γινόμενον εἶναι α^5. Καὶ γὰρ $\alpha^3 = \alpha \times \alpha \times \alpha$, καὶ $\alpha^2 = \alpha \times \alpha$ (§. 59.) ταυτὸν τοίνυν ἐστὶν, ἢ α^3 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ α^2, ἢ $\alpha \times \alpha \times \alpha$ ἐπὶ $\alpha \times \alpha$· ἀλλὰ μὴν $\alpha \times \alpha \times \alpha$ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ $\alpha \times \alpha$ γινόμενον δώσει $= \alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha = \alpha^{1+1+1+1+1} = \alpha^5$· ἄρα ὡσαύτως, καὶ α^3 πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ α^2, γινόμενον παρέξει $\alpha^{3+2} = \alpha^5$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α) $3\alpha\beta - 2\gamma\delta + \zeta$
$2\gamma - 3\zeta^2$

$6\alpha\beta\gamma - 4\gamma^2\delta + 2\gamma\zeta$
$- 9\alpha\beta\zeta^2 + 6\gamma\delta\zeta^2 - 3\zeta^3$

Β) $\alpha^{\mu} + \beta^{\chi} - 2\gamma^{\nu}$
$2\alpha^{\mu} - 3\beta$

$2\alpha^{2\mu} + 2\alpha^{\mu}\beta^{\chi} - 4\alpha^{\mu}\gamma^{\nu}$
$- 3\alpha^{\mu}\beta - 3\beta^{\chi+1} + 6\beta\gamma^{\nu}$

Γ) $2\alpha^{3-3\mu}\beta^{2}\gamma^{\mu-2} - \alpha\beta^{3\mu+1}\gamma^{5+2\mu} + 6\alpha^{-5}\beta^{3\mu}\gamma\chi^{4-2\mu}$
$\alpha^{4\mu-5}\beta^{2\mu}\gamma^{3-4\mu} - 6$

$2\alpha^{2\mu-2}\beta^{3\mu+2}\gamma^{1-3\mu} - \alpha^{4\mu-4}\beta^{5\mu+1}\gamma^{8-\mu}$
$+ 6\alpha^{4\mu-10}\beta^{5\mu}\gamma^{4-4\mu}\chi^{4-2\mu}$
$- 12\alpha^{3-3\mu}\beta^{2}\gamma^{\mu-2} + 6\alpha\beta^{3\mu+1}\gamma^{5+2\mu} - 36\alpha^{-5}\beta^{3\mu}\gamma\chi^{4-2\mu}$

Δ) $6\alpha^{3}\beta^{2\mu-1}\gamma^{-3} - 2\alpha^{\mu-3}\beta^{4}\gamma^{-5} + 4\alpha^{5-2\mu}\beta^{3}\gamma^{\mu+2}$
$2\alpha^{3\mu-1}\beta^{3}\gamma^{\mu-4} - 3\alpha^{2-3\mu}\beta^{-2}\gamma^{3-\mu}$

$12\alpha^{2+3\mu}\beta^{2\mu+1}\gamma^{\mu-7} - 4\alpha^{4\mu-4}\beta^{7}\gamma^{\mu-9}$
$+ 8\alpha^{4+\mu}\beta^{6}\gamma^{2\mu-2}$
$- 18\alpha^{5-3\mu}\beta^{2\mu-4}\gamma^{-\mu} + 6\alpha^{-1-2\mu}\beta^{2}\gamma^{-2-\mu}$
$- 12\alpha^{7-5\mu}\beta\gamma^{4}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐν τοῖς ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσι παραδείγμασι δέον τὸν Καθηγητὴν τὸ τοῦ πόνου δυσχερὲς λεαίνοντα, τὴν πρᾶξιν πρῶτον ὑπ' ὄψιν τῶν Μαθητιώντων ὑπολογιστικῶς περαίνειν, ἐν ἅπασί τε τοὺς προεκτεθέντας κανόνας ὡς ἔχουσι τάξεως ἐφαρμόττειν· Εἶτα δ' ἐπιτάττειν ταυτὰ κἀκείνους διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ ἐπιτελεῖν, διά τε τῆς Διαιρέσεως, ἧς καθαψόμεθα, βασανίζειν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 118. Ἐπεὶ πολλαπλασιάσαι οὐδὲν ἄλλό ἐστιν, ὅτι μὴ τὸν πολλαπλασιαστέον ποσάκις λαβεῖν, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ πολλαπλασιαστῇ ἐμπεριέχεται (§. 101), τὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοίνυν τέλειον ἐν τούτῳ ὑφίσταται, εἰ ὁ πολλαπλασιαστέος τῳόντι τοσάκις εἴληπται, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ πολλαπλασιαστῇ συνεσχέθη. Ὥστε, ποσότητός τινος διὰ ποσότητος ἡστινοσοῦν πολλαπλασιασθείσης, ἐὰν τὸ παραγόμενον διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ διαιρεθῇ, ἡ ποσότης πάλιν ἀνακύψει· Καὶ ἔστιν ἄρα ἐν γένει τὸ πολλαπλασιάζειν τε καὶ διαιρεῖν οὕτως ἀλλήλοις ἀντίξοα, ὡς τὸ ὑπὸ θατέρου συμβαῖνον, διὰ θατέρου εἰς ὃ πρὸ τοῦ ἦν ἐπανάγεσθαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 119. Τεθέντων τινῶν ἕτερόν τι ἀναφύεται, καὶ τούτων ἀφαιρεθέντων ἐκεῖνα καταλύεται (§. 83)· ἀλλαμὴν τὸ γινόμενον ἐκκύπτει ἐκ τῆς τοῦ πολλαπλασιαστέου θέσεως, κατὰ τὰς ἐν τῷ πολλαπλασιαστῇ περιεχομένας μονάδας (§. 99.). Ἄρα ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστέος τοσάκις ἐκ τοῦ γινομένου ληφθῇ, ὅσαι τῷ πολλαπλασιαστῇ μονάδες ἔνεισι, τὸ γινόμενον καταλύεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 120. Τὸν πολλαπλασιαστέον τοίνυν ἰσαρίθμως ταῖς ἐν τῷ πολλαπλασιαστῇ μονάσιν ἐκ τοῦ γινομένου λαβεῖν δηλοῖ, τὸ γινόμενον διὰ τοῦ πολλαπλασιαστέου διελεῖν. Ἐὰν οὖν τὸ γινόμενον διαιρεθῇ, αὐτῷ τούτῳ καταλυθήσεται (ὡς ἐχομένως δῆλον ἔσται), ὅ, τε πολλαπλασιαστὴς ἀντὶ πηλίκου ἐκκύψει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 121. Ἄρα τὸ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τέλειον, τῆς Διαιρέσεως ἐξήρτηται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ.
ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 122. Διαίρεσις ἐστὶ ποσότητος εὕρεσις ἐκ δυεῖν δοθεισῶν, ἐν ᾗ τοσάκις περιέχεται ἡ μονάς, ὁσάκις τῶν δοθεισῶν ἑτέρα τῇ θατέρᾳ.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 123. Ὁ ὅρος, ὃν χρὴ διελεῖν, καλεῖται Διαιρετέος· ὁ δὲ δι' οὗ ἡ διαίρεσις γίνεται, Διαιρέτης· ὁ δὲ σημαίνων ποσάκις ὁ διαιρέτης τῷ διαιρετέῳ ἐμπεριείληπται, Πηλίκον ἀκούει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 124. Διαιρεῖν ἄρα οὐδὲν ἄλλο σημαίνει, ἢ τὸν διαιρέτην ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τοσάκις ἀφελεῖν, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ πηλίκῳ ἔνεστιν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 125. Ἡ Διαίρεσις τοίνυν ἐπίτομός τις ἐστὶν ἀφαίρεσις, δι' ἧς θατέρα τῶν ποσοτήτων θατέρας ἐξαιρεῖται, ἐφ' ᾧ γνωσθῇ, ὁσάκις θατέρα τῇ ἑτέρᾳ ἐνυπάρχει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 126. Ἐν τῷ διαιρετέῳ ἄρα τοσάκις ὁ διαιρέτης ἐμπεριέχεται, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ πηλίκῳ ἔνεστιν. Ὥστε ἀναλογικῶς, τὴν μονάδα ἔχειν πρὸς τὸ πηλίκον, ὡς τὸν διαιρέτην πρὸς τὸν διαιρετέον.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 127. Σημεῖον διαιρέσεως ἔστω τὸ δίστιγμον :, ὃ τῇ φωνῇ τῆς διαιρέσεως ἀπαγγέλεται· οἷον $a : b$, 8:4· σημαίνει τὸ πηλίκον τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ τοῦ β ἀνακύπτον, ὡσαύτως καὶ τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν 8 διὰ τῶν 4 παραχθὲν πηλίκον. Τινὲς δὲ καὶ γραμμῇ χρῶνται ὑπερκειμένῃ μὲν τοῦ διαιρέτου, ὑποκειμένῃ δὲ τῷ διαιρετέῳ ὡς $\frac{\alpha}{\beta} = \gamma:\delta$· ἀπαγγέλλεται δὲ, τὸ ἐκ τοῦ α διὰ τοῦ β διαιρεθέντος πηλίκον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ γ διὰ τοῦ δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 128. Ἐν μὲν τῷ Πολλαπλασιασμῷ τὸ ἐκ τῶν στοιχείων γινόμενον ἐμφαίνεται ἄνευ τῆς μεταξὺ αὐτῶν παρενθέσεως τῶν σημείων (§. 105.) ὡς α.β ταυτοσήμαντον τῷ αβ, καὶ $\alpha \times \beta$ τῷ αβ ὡσαύτως. Ἐν δὲ τῇ Διαιρέσει τοὐναντίον, δηλοῦται γὰρ ἡ διαίρεσις εὐθείας ὑπὸ τὸν διαιρετέον ἀχθείσης, καὶ ὑπ' αὐτὴν τοῦ διαιρέτου γραφέντος (§. 127.)· διόπερ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ ταυτοσήμαντον τῷ α:β. καὶ ἐπὶ τῶν Πολυμερῶν ὡσαύτως $\frac{\alpha\beta\gamma}{\xi\epsilon} = \alpha\beta\gamma:\xi\epsilon$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 129. Δῆλον ἄρα ὅτι τὸ α:β κλάσμα ἐμφαίνει, οὗτινος ἀριθμητὴς μὲν τὸ α, ὀνομαστὴς δὲ τὸ β.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Α΄. Ὁ διαιρετέος δέον εἶναι ὁμογενὴς, ἢ τῷ διαιρέτῃ, ἢ τῷ πηλίκῳ· καὶ δὴ Α΄. ὁ διαιρετέος ἐστὶν ὁμογενὴς τῷ πηλίκῳ, εἰ ἡ διαίρεσις γένοιτο κατὰ τὸν αὐτῆς ὁρισμὸν (§. 122.)· οἷον εἰ ζητεῖτο, 3 χρυσοὶ ποσάκις ἐν 12 χρυσοῖς περιέχονται; δῆλον ὅτι 4άκις· τὸ πηλίκον ἄρα ἀφῃρημένως εἴληπται, 3 δὲ καὶ 12 εἰσὶν ὁμογενεῖς. Β΄. Ἐὰν ὁ διαιρετέος τῷ πηλίκῳ ὁμογενὴς τυγχάνῃ, τὸ ζητούμενον οὕτως ἕξει· 8 χρυσῶν ἐν δυσὶ πένησι διανεμηθησομένων, πόσους ἕκαστος λήψεται; Φημὶ 4· δῆλον τοίνυν, ὅτι ὁ διαιρετέος ὁμογενὴς τῷ πηλίκῳ ἐστὶν, ὁ δὲ διαιρέτης ἀφῃρημένως ἐτέθη.

Β΄. Ἐκ τοῦ τῆς διαιρέσεως ὁρισμοῦ σαφές ἐστι, τρία τὰ ἐφεξῆς δέον παρατηρεῖν. Α΄. Ἐπεὶ ὁ διαιρέτης ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τοσάκις ἀφαιρετέος, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ πηλίκῳ ἐμπεριείληπται, ἀναγκαῖον πρότερον τὸ πηλίκον εὑρεθῆναι. Β΄. Ἵν' ἐφάπαξ ὁ διαιρέτης ἀφαιρεθῆναι ἔχῃ, καὶ δὴ ἰσαρίθμως ταῖς ἐν τῷ πηλίκῳ μονάσι, δέον τὸν διαιρετέον τοσάκις πρότερον τεθεῖναι, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ πηλίκῳ ἐμπεριέχεται. Γ΄. τοὐντεῦθεν ἐκκύπτον γινόμενον ἀφαιρετέον ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, ἔσται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 130. Ἐκ τῶν προλεχθέντων εὔδηλόν ἐστι τὴν τῆς διαιρέσεως οὐσίαν ἐν τῷ ἐσχάτῳ τουτῳὶ ὑφίστασθαι (Β΄. Σχόλ. ἀριθ. Γ΄.), ἤτοι ἐν τῇ τοῦ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ διαιρέτου διὰ τοῦ πηλίκου ἐκκύπτοντος γινομένου, ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρέσει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 131. Ἐπεὶ δὲ ὁ διαιρέτης οὐκ ἂν ἔχοι ἄλλως ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἰσαρίθμως ταῖς ἐν τῷ πηλίκῳ μονάσιν ἀφαιρεθῆναι, ἐὰν μὴ πρότερον ἐκείναις ἐναρίθμως τεθείη· σαφές ἐστιν, ὡς τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην πολλαπλασιασθὲν, ἀναδώσει πάντως τὸν διαιρετέον.

Τούτου χάριν ἡ τῆς διαιρέσεως βάσανος διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπικρίνεται,

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 132. Εὐθεῖα τοῖς γράμμασιν ἐπικειμένη, ὡς $\overline{\alpha+\beta} : \overline{\gamma+\delta}$, ἢ ὅ ταυτόν ἐστι $(\alpha+\beta):(\gamma+\delta)$, σημαίνει τὸ κεφάλαιον τῶν α καὶ β διαιρεθησόμενον διὰ τοῦ τῶν γ καὶ δ κεφαλαίου· τὸ δὲ $\alpha+\beta:\gamma+\delta$ τὸ β μόνον διὰ τοῦ γ, τῷ δὲ προκύπτοντι πηλίκῳ προσθησόμενον τὸ ἐκ τῶν α καὶ δ κεφάλαιον· διὸ τὸ $\alpha+\beta:\gamma+\delta=\frac{\beta}{\gamma}+\alpha+\delta$ (§. 106.).

ΑΞΙΩΜΑ Α.

§. 133. Ἐὰν ἴσα δι' ἴσων διέλῃς, τὰ Πηλίκα ἴσα ἔσται· οἷον.

$$\begin{array}{c} 8=6+2 \\ 2=2 \\ \hline 4=3+1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 9=6+3 \\ 3=3 \\ \hline 9:3=(6+3):3 \end{array}$$

Ἐὰν δ' ἄνισα, καὶ τὰ Πηλίκα ἄνισα ἔσται· οἷον.

$$\begin{array}{c} 8>6 \\ 2=2 \\ \hline 4>3 \end{array}$$

ΑΞΙΩΜΑ Β.

§. 134. Ποσότης πᾶσα ἐν ἑαυτῇ ἅπαξ περιέχεται· οἷον $\frac{\alpha}{\alpha}=1$; $\frac{8}{8}=1$ (§. 69.).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 135. Ἐὰν Γινόμενον αβ, δι' ἑνὸς τῶν Παραγόντων διαιρεθῇ οἷον διὰ τοῦ α, ἕτερος τούτων ἔσται τὸ Πηλίκον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ τὸ πηλίκον διὰ τοῦ διαιρέτου πολλαπλασιασθῇ, ἀναδιδόσει πάντως τὸν διαιρετέον (§. 131.)· ἀλλὰ μὴν εἴγε τὸ γινόμενον αβ διὰ τοῦ α διαιρούμενον, οὐκ ἀναδώσει ἐν τῷ πηλίκῳ θάτερον τῶν παραγόντων, ἀλλ' ἕτερόν τι, τηνικαῦτα πάντως γινομένης τῆς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ βασάνου, οὐκ ἐκκύψει ὁ διαιρετέος, ἀλλ' ἕτερόν τι· ἄρα δέον ἐν τῷ πηλίκῳ τῶν παραγόντων ὁ ἕτερος ἐκκύψαι, οἷον τὸ β.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 136. Ἐὰν μὲν τοίνυν ὁ γινόμενος ἐπὶ τὸν πολλαπλασιασθέντα διαιρεθῇ, τὸ πηλίκον ἔσται ὁ πολλαπλασιάσας (§. 101. 124.). Ἐὰν δὲ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιάσαντα, τὸ πηλίκον ἔσται ὁ πολλαπλασιασθεὶς (αὐτό)· Ἐὰν δὲ τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην πολλαπλασιασθῇ, ἢ ἔμπαλιν, ὁ γινόμενος ἔσται ὁ διαιρετέος (§. 131.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 137. Θάτερος τῶν παραγόντων ἅπαξ τίθεται, ἕτερος δὲ τὴν συνεχῶς τεθειμένην ποσότητα πολλαπλασιάζει (§. 101.)· οἷον $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ χ, ἀναδώσει παραγόμενον $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\chi=\alpha\chi+\beta\chi+\gamma\chi+\delta\chi$. Ἐνταῦθα τοίνυν τὸ χ πολλάκις τίθεται, ἅτε εἷς τῶν παραγόντων, ὁ δ' ἕτερος, $\alpha+\beta+\gamma+\delta$· ἄρα $\frac{\alpha\chi+\beta\chi+\gamma\chi+\delta\chi}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=\chi$· ὡσαύτως $\frac{(\gamma+1)\chi}{\gamma+1}=\frac{\gamma\chi+\chi}{\gamma+1}=\chi$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τοῦ Πορίσματος τούτου ἡ διάγνωσις μεγίστην ἡμῖν τὴν ὠφέλειαν δίδωσι, πρὸς τὴν ἐπὶ τὰ ἁπλούστερα ἀναγωγὴν, διὰ τῆς πρὸς τοὺς Παράγοντας ἀναλύσεως, διαφόρων ἄλλων ὁμοίων ποσοτήτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 138. *Ποσότητας Ἀλγεβραϊκὰς ἀκεραίους διελεῖν.*

ΛΥΣΙΣ.

Α′. Διαίρεσις οἱαδηποτοῦν τρεῖς ἐν ἑαυτῇ πράξεις ἐμπεριείληφε· καὶ δὴ Α′. δέον τὸν διαιρέτην ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἰσαρίθμως ταῖς ἐν τῷ πηλίκῳ μονάσιν ἀφαιρεθῆναι, ἐπὶ τῇ τοῦ πηλίκου ἑπομένως εὑρέσει (§. 124.)· Β′. μετὰ τοῦ ἤδη εὑρεθέντος πηλίκου, τοσάκις ἀφαιρετέος ὁ διαιρέτης ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ πηλίκῳ ἔνεστιν· ἐφ' ᾧ δὲ τοῦτο γένοιτο, δέον τὸν διαιρέτην τοσάκις πρότερον τεθεῖναι (§. 131.), τουτέστι τοῦτον ἐπὶ τὸ πηλίκον πολλαπλασιασθῆναι· Γ′. τὸ γινόμενον, ἤτοι ἡ τοῦ διαιρέτου ἐναρίθμως ταῖς ἐν τῷ πηλίκῳ μονάσι θέσις, δέον ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεθῆναι, ἥτινι ἀφαιρέσει ἰδίως ἐμπεριείληπται τὰ τῆς διαιρέσεως.

Β′. Γραφήτω πρῶτον ὁ διαιρέτης, εἶτα ἐν τῇ αὐτῇ σειρᾷ ὁ διαιρετέος παρενθέσεως σημείῳ, ἤτοι μηνίσκῳ, διεσταλμένος· τηνικαῦτα ἐξιχνευέσθω διὰ τῶν ἐχομένως ἐκτεθησομένων κανόνων, ποσάκις ὁ πρῶτος τοῦ διαιρέτου ὅρος ἑτέρῳ τινι, φέρ' εἰπεῖν, τῷ πρώτῳ τοῦ διαιρετέου ὅρῳ ἐμπεριέχεται, καὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον γραφήτω μετὰ τὸν διαιρετέον. Εἶτα ὁ διαιρέτης ὅλος πολλαπλασιασθήτω διὰ τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου, καὶ τὸ γινόμενον ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεθήτω. Τὸ μετὰ τὴν πρᾶξιν ὑπόλοιπον θεωρείσθω αὖθις ὡς διαιρετέος, καὶ τῷ αὐτῷ καθόλου τρόπῳ ζητείσθω νέον πηλίκον, ἐφ' ὅπερ ὅλος ὁ διαιρέτης ἀχθήτω. Τῇ αὐτῇ συνθήκῃ διατελείσθω ἡ πρᾶξις, ἄχρις οὗ μηδὲν ἐκ τοῦ διαιρετέου ἐναπολειφθῇ. Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ διαιρετέου, τοῦ διαιρέτου ἐλάττονες ἐναπολειφθῶσιν ὅροι, δεῖγμα ἔσται τὴν διαίρεσιν ὑπολοίπου δίχα μὴ ἐκτελεῖσθαι· τοῦθ' ἕνεκα τουτὶ τὸ ἀδιαίρετον ὑπόλοιπον, ἐν σχήματι σημειούσθω κλάσματος. Οὕτω τοίνυν δῆλον ἔσται τὸν διαιρέτην ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἐκ διαδοχῆς τοσάκις ἀφαιρεῖσθαι, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ πρώτῳ, δευτέρῳ, τρίτῳ, κτλ. τοῦ πηλίκου ὅρῳ, ἤτοι τῷ ὅλῳ πηλίκῳ ἐμπεριείληπται. Ἐπὶ δὲ τῶν ἁπλῶν εἴθισται τὰ τοῦ διαιροῦντος στοιχεῖα, ὑπὸ τὰ τοῦ διαιρετέου, εὐθείας ἀχθείσης, χαράσσεσθαι (§. 137.).

Γ′. Οἱ πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου κανόνες, περὶ τὰ τῶν ὅρων τοῦ τε διαιρέτου καὶ τοῦ διαιρετέου σημεῖα, στοιχεῖα, Συνθέτας τε καὶ Ἐκθέτας στρέφονται. Τούτου χάριν ἔστω.

ΚΑΝΩΝ Α.

Τὸ ἐκ δυοῖν ὁμοιοσήμων ὅρων Πηλίκον πάντως ἐστὶ θετικὸν, τὸ δὲ ἐκ τῶν ἑτεροσήμων ἢ ἀντισήμων, ἀποφατικόν.

Τέσσαρες γενικῶς αἰτίαι ἀπαντῶσιν ἐνταῦθα· καὶ γὰρ Α′. ἢ ἀμφότεροι οἱ ὅροι τὸ κατὰ θέσιν + συνέχουσι σημεῖον, ἢ Β'. ἀμφότεροι τὸ κατ' ἀπόφασιν —· ἢ Γ'. ὁ μὲν διαιρετέος καταφάσκει +, ἀποφάσκει δ' ὁ διαιρέτης —· ἢ Δ'. ὁ μὲν διαιρετέος ἀποφατικὸς —, ὁ δὲ διαιρέτης καταφατικὸς +· ἡ αὐτὴ ὑπὲρ πάντων ἔσται δεῖξις.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπείπερ ὁ διαιρετέος, οἷον δὴ ὁ $\alpha\beta$, ἐστὶ γινόμενον ἐκ τοῦ διαιρέτου α πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸ πηλίκον β. Ἐὰν τὸ γινόμενον $\alpha\beta$ διὰ τοῦ παραγόντος α διαιρεθῇ, τὸ στοιχειακὸν πηλίκον ἔσται β (§. 135.), ἄδηλον δὲ μετά τινος σημείου + ἢ —· φημὶ δὴ μετὰ τοῦ +. Πάντως γὰρ ὁ διαιρέτης ἐπὶ τὸ πηλίκον πολλαπλασιασθεὶς ἀναδώσει τὸν διαιρετέον (§. 131.), ἀλλαμὴν ἐὰν τὸ πηλίκον ἐν θέσει οὐ σημανθῇ ἤτοι $+\beta$, ἐκκύψει ἀποφατικὸν $-\beta$ (§. 115.), ὅπερ οὐκ ἔσται διαιρετέος· ἵν' οὖν ὁ διαιρέτης ἐπὶ τὸ πηλίκον πολλαπλασιαζόμενος ἀναδώσῃ τὸν διαιρετέον, τὸ πηλίκον δεῖ εἶναι $+\beta$. Ἐὰν τοίνυν $\alpha\beta$ διαιρεθῇ διὰ τοῦ α, τὸ πηλίκον ἔσται $+\beta$. Καὶ ἐν γένει· τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου ἐν θέσει σημαινομένων, καὶ τὸ πηλίκον θετικὸν ὂν ἰδεῖν παρέσται.

Ἐὰν δὲ Β'. ὅ, τε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ὦσιν ἀποφάσκοντες, τὸ πηλίκον καταφήσει πάντως οἷον $-\alpha\beta : -\alpha = +\beta$· ἄλλως γὰρ, τῆς πράξεως περανθείσης ὁ διαιρετέος οὐκ ἐκκύψει ἀποφατικὸς, ὅπερ ἐκτός ἐστι τῆς προκειμένης ὑποθέσεως.

Ὡσαύτως, ἐὰν ᾖ Γ'. ὁ διαιρετέος $+\alpha\beta$, ὁ δὲ διαιρέτης $-\alpha$· ἢ Δ'. ὁ διαιρετέος $-\alpha\beta$, καὶ ὁ διαιρέτης

$+\alpha$, τὸ πηλίκον πάντως ἔσται ἀποφατικὸν, οἷον $-\beta$. διὰ τὸν ἀνωτέρω ἐκτεθέντα λόγον.

Β'. Ὁ τοῦ Διαιρετέου ὅρου Συνθέτης διὰ τοῦ ἐν τῷ Διαιρέτῃ διαιρείσθω.

Ὁ λόγος τῆς δείξεως ἤρτηται ἐκ τῆς τῶν Συνθετῶν ἰδίας φύσεως· καὶ γὰρ εὔδηλόν ἐστιν, τὸν $2\alpha\beta$ ἐν τῷ $6\alpha\beta$ τρὶς ἐμπεριέχεσθαι. Ἐὰν δὲ ἡ διαίρεσις ἀκριβῶς οὐχ οἷά τε ᾖ γενέσθαι, ἀλλὰ πηλίκον ἀναδίδωσι μεθ' ὑπολοίπου τινος, ὃ ἂν ἀδιαίρετον καταληφθείη, οἱ Συνθέται ἐν εἴδει γραφήτωσαν κλάσματος. Ὁμοίων δὲ τούτων ὄντων, ἑκάτεροι ἐξαλειφέσθωσαν.

Γ'. Τὰ αὐτὰ στοιχεῖα ἅπαξ ἐν τῷ Πηλίκῳ γραφέσθωσαν, ὁ δὲ τοῦ Διαιρέτου Ἐκθέτης τοῦ κατὰ τὸν Διαιρετέον ἀφαιρείσθω.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστω α^5 διαιρετέον διὰ τοῦ α^3, ἔσται πηλίκον α^2 Καὶ γὰρ $\alpha^5 = \alpha^3 >\!< \alpha^2$. Ταυτὸν τοίνυν πηλίκον ἐκκύψει, ἢ διὰ τοῦ α^3 διαιρεθῇ τὸ α^5, ἢ ἀντὶ τούτου διαιρεθῇ $\alpha^3 >\!< \alpha^2$· ἀλλαμὴν ἐὰν διὰ τοῦ παράγοντος α^3 τὸ γινόμενον $\alpha^3 >\!< \alpha^2$ διαιρεθῇ, τὸ πηλίκον ἔσται α^2 (§. 135.). Ἐὰν ἄρα καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ α^3, τὸ α^5 διαιρεθῇ, πηλίκον ἀναδώσει α^2. Ὡσαύτως $\frac{\alpha^6}{\alpha^2} = \alpha^{6-2} = \alpha^4$ καὶ γὰρ ὁ διαιρέτης $\alpha^6 = \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha$, ὁ δὲ διαιρετέος $\alpha^2 = \alpha\alpha$ καὶ διὰ τῆς τῶν κοινῶν γραμμάτων ἀπαλείψεως ἔσται $\alpha\alpha\alpha\alpha = \alpha^4 = \alpha^{6-2} = \frac{\alpha^6}{\alpha^2} = \frac{\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha}{\alpha\alpha} = \alpha\alpha\alpha\alpha = \alpha^4$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 139. Ἐὰν τοίνυν ὁ τοῦ διαιρέτου ἐκθέτης ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸν διαιρούμενον ἀφαιρεθῆναι οὐκ ἂν ἔχοι, τοῦ σημείου ὑπεναντίως μεταμειφθέντος προστεθήτω (§. 95.)· Ἐὰν δὲ οἱ τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ διαιρετέου ἐκθέται ὅμοιοι ὦσιν, ὁ τοῦ πηλίκου ἐκθέτης ἰσοδυναμήσει τῷ μηδενί, οἷον $\frac{\alpha^3}{\alpha^3} = \alpha^0$· καὶ γὰρ $\frac{\alpha^3}{\alpha^3} = \alpha^{3-3} = \alpha^0$. Τοῦθ' ἕνεκα ἐὰν τῷ πηλίκῳ πλὴν τοῦ τὸ μηδενικὸν ἀντ' ἐκθέτου ἔχοντος στοιχείου, ἕτερα προσυπαντῶσι στοιχεῖα, ἀμελητέον ἐστὶν ἐκείνου· ἄλλως γὰρ διαῤῥήδην γραπτέον, ἢ ἀντ' ἐκείνου μονάδα ἐπιθετέον, οἷον $3\alpha^2$ διὰ τοῦ α^2 διαιρούμενον ἔσται $\frac{3\alpha^2}{\alpha^2} = 3\alpha^0 = 3$, $\frac{\alpha^3}{\alpha^3} = \alpha^0 = 1$. Ὡσαύτως, ἐὰν τῷ διαιρετέῳ οὐδέν τι ἕτερον ἐνυπάρχῃ στοιχεῖον, τὴν μονάδα θετέον (§. 64.), ἐν δὲ τῷ διαιροῦντι ἀντὶ τοῦ μείζονος ἐκθέτου, τὴν τῶν ἐκθετῶν προσληπτέον διαφοράν· οἷον $\frac{\alpha^3}{\alpha^5} = \frac{1}{\alpha^2}$, καὶ γὰρ $\frac{\alpha^3}{\alpha^5} = \frac{\alpha\alpha\alpha}{\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha} = \frac{1}{1 \times \alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 140. Εἰδ' οὖν ὁ τοῦ διαιρέτου ἐκθέτης μείζων τοῦ κατὰ τὸν διαιρετέον εἴη, ὁ τοῦ πηλίκου ἐκθέτης ἔσται ἀποφατικός· οἷον $\frac{\alpha^2}{\alpha^5} = \alpha^{-3}$· καὶ γὰρ $\frac{\alpha^2}{\alpha^5} = \alpha^{2-5} = \alpha^{-3}$.

Δ'. Τὰ τῷ Διαιρετέῳ οὐμὴν δὲ τῷ Διαιρέτῃ ἐνυπάρχοντα στοιχεῖα, τῷ Πηλίκῳ μετὰ τῶν αὐτῶν ὡς ἔχουσιν Ἐκθετῶν ἐγγραφέσθωσαν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ τὸ γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων διαιρεθῇ, θάτερος τούτων ἀντὶ πηλίκου ἐκκύψει (§. 135.). ἀλλαμὴν τὸ διάφορον τοῦ διαιρετέου στοιχεῖον, ἢ τῶν παραγόντων ὁ ἕτερός ἐστιν, ἢ παράγοντος μέρος· ἄρα γραπτέον ὡς ἔχει ἐν τῷ πηλίκῳ· οἷον εἰ $\alpha\beta\gamma^2$ διαιρεθῆναι δέοι διὰ τοῦ $\alpha\beta$, θάτερος τῶν παραγόντων, ἤτοι τὸ πηλίκον ἔσται γ^2. Ὡσαύτως $\alpha^3\beta^2\gamma : \alpha\beta$ πηλίκον δώσει $\alpha^2\beta\gamma$, οὗτινος μέρος ἐστὶ τὸ διάφορον στοιχεῖον γ.

Ε'. Τὰ τῷ Διαιρέτῃ οὐμὴν δὲ τῷ Διαιρετέῳ ἐνόντα στοιχεῖα ἐν σχήματι κλασματώδει γραφέσθωσαν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ τοῦ διαιρέτου διάφορον στοιχεῖον, τῷ διαιρετέῳ οὐκ ἐμπεριείληπται, τούτου χάριν ἄμεινον τὴν διαίρεσιν δίκην κλάσματος ὑποτυπῶσαι, ὅπερ κατὰ τοὺς ἑφεξῆς ἐν τῇ τῶν Κλασμάτων θεωρίᾳ διαληφθησομένους κανόνας εἰς ἐλάττονας ὅρους ἀναχθήσεται· οἷον $\alpha^2\beta^2\gamma^2 : \alpha\beta\delta$ γραπτέον $\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\alpha\beta\delta}$. Ἐπειδὴ γὰρ οὐκ ἀεὶ διὰ τῶν ἀφαιρέσεων ὁ διαιρέτης αὕτως οἴχεται εἰς τὸ μηδὲν, λοιπόν ἐστιν ἔκ τε τοῦ ὑπολειπομένου καὶ τοῦ διαιρέτου καινόν τι κλάσμα πορίζεσθαι, ὃ τῷ ἀκλάστῳ τοῦ πηλίκου μέρει προσεπικαταγραπτέον, ὡς ἐπὶ τοῦ Β'. Παρ. Εἰ μή τις, ὡς ἐν ἀρχῇ ἦν, κατὰ χώραν ἐᾶσαι τὸ προτεθὲν ἕλοιτο, κλασματωδῶς τὴν διαίρεσιν ὑποτυπώσας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α) Διαιρέτης Β. $3\alpha\beta - 2\beta^3\gamma^2 + 5$. Διαιρετέος Α. $(6\alpha^{\mu+1}\beta^2 + 10\alpha^{\mu}\beta - 9\alpha\beta\gamma\delta^{\nu} - 15\gamma\delta^{\nu} + 12\alpha^3\beta\gamma - 4\alpha^{\mu}\beta^4\gamma^2 + 20\alpha^2\gamma + 6\beta^3\gamma^3\delta^{\nu} - 8\alpha^2\beta^3\gamma^3)$. Πηλίκον Γ. $2\alpha^{\mu}\beta - 3\gamma\delta^{\nu} + 4\alpha^2\gamma$.

Β) Διαιρέτης Β. $2\alpha^2\gamma^2 - 3\alpha^{\nu}\beta^{\mu}$. Διαιρετέος Α. $(10\alpha^3\beta^{\mu}\gamma^2 - 24\alpha^2\beta^3\gamma^3 - 15\alpha^{\nu+1}\beta^{2\mu} + 36\alpha^{\nu}\beta^{\mu+3}\gamma - 6\alpha^{\mu}\gamma^3)$ Πηλίκον Γ. $5\alpha\beta^{\mu} - 12\beta^3\gamma \dfrac{-6\alpha^{\mu}\gamma^3}{2\alpha^2\gamma^2 - 3\alpha^{\nu}\beta^{\mu}}$.

Γ) Διαιρέτης Β. $3\alpha^{2+2\mu}\beta^{\mu-3}\chi^{\mu-1} - 4\alpha\beta^{\mu-3}\chi^{-2} + 8$. Διαιρετέος Α. $(3\alpha^{7+\mu}\beta^{2+2\mu}\chi^{\mu+3} - 4\alpha^{6-\mu}\beta^{2+3\mu}\chi^2 + 8\alpha^{5-\mu}\beta^{5+2\mu}\chi^4 - 6\alpha^{3+2\mu}\beta^{\mu-1}\chi^{2-\mu} + 8\alpha^2\beta^{2\mu-4}\chi^{1-2\mu} - 16\alpha\beta^{\mu-1}\chi^{3-2\mu})$ Πηλίκον Γ. $\alpha^{5-\mu}\beta^{5+2\mu}\chi^4 - 2\alpha\beta^{\mu-1}\chi^{3-2\mu}$.

Δ) Διαιρέτης Β. $2\alpha^{3\mu-1}\beta^2\chi^{5-\mu} - 5\alpha^3\beta^{\mu-2}\chi^{3-2\mu}$. Διαιρετέος Α. $(6\alpha^{2+2\mu}\beta^2\chi^{3-\mu} + 8\alpha^{4\mu-3}\beta^5\chi^3 - 2\alpha^{2+\mu}\beta^3\chi^{9-2\mu} - 15\alpha^{6-\mu}\beta^{\mu-2}\chi^{1-2\mu} - 20\alpha^{\mu+1}\beta^{\mu+1}\chi^{1-\mu} + 5\alpha^{6-2\mu}\beta^{\mu-1}\chi^{7-3\mu})$ Πηλίκον Γ. $3\alpha^{3-\mu}\chi^{-2} + 4\alpha^{\mu-1}\beta^3\chi^{\mu-2} - \alpha^{3-2\mu}\beta\chi^{4-\mu}$.

Ε) Διαιρέτης Β. $2\gamma - 3\zeta^2$. Διαιρετέος Α. $(6\alpha\beta\gamma - 4\gamma^2\delta + 2\gamma\zeta - 9\alpha\beta\zeta^2 + 6\gamma\delta\zeta^2 - 3\zeta^3)$. Πηλίκον Γ. $3\alpha\beta - 2\gamma\delta + \zeta$.

Ϛ) Διαιρέτης Β. $2\alpha^2 + 3\alpha\beta - 4\gamma^2\delta^2$. Διαιρετέος Α. $(2\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - 4\beta\gamma^2\delta^2 - 4\alpha^2\gamma - 6\alpha\beta\gamma + 8\gamma^3\delta^2 + 6\alpha^2 + 9\alpha\beta - 12\gamma^2\delta^2)$. Πηλίκον Γ. $\beta - 2\gamma + 3$.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

Ἐφ' ᾧ τοίνυν ἐντελῶς τὸν τῆς Διαιρέσεως τρόπον οἱ Μαθητιῶντες συνιδεῖν ἔχωσι, διαληπτέον τούτων χάριν τὴν τοῦ Α'. Παρ. πρᾶξιν. Διαιρεθήτω δὴ ἐν πρώτοις τὸ τοῦ διαιρετέου πρῶτον μέρος $6\alpha^{\mu+1}\beta^2$ διὰ τοῦ πρώτου τοῦ διαιρέτου μέλους $3\alpha\beta$ κατὰ τοὺς ἀνωτέρω ἐκτεθέντας κανόνας, τὸ δὲ πηλίκον $2\alpha^{\mu}\beta$ γραφήτω μετὰ τὸν διαιρετέον παρενθέσει διεσταλμένον· εἶτα δὲ ὁ διαιρέτης ὅλος ἐπὶ τὸ ἤδη εὑρεθὲν πηλίκον πολλαπλασιασθήτω, καὶ τὸ γινόμενον $6\alpha^{\mu+1}\beta^2 - 4\alpha^{\mu}\beta^4\gamma^2 + 10\alpha^{\mu}\beta$ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεθήτω· ὑπολειφθήσεται οὕτω $-9\alpha\beta\gamma\delta^{\nu} - 15\gamma\delta^{\nu} + 12\alpha^3\beta\gamma + 20\alpha^2\gamma - 6\beta^3\gamma^3\delta^{\nu} - 8\alpha^2\beta^3\gamma^3 + 12\alpha^2\beta^4$. Ὁ τοῦ ὑπολοίπου τουτουῒ πρῶτος ὅρος $-9\alpha\beta\gamma\delta^{\nu}$ διαιρεθήτω διὰ τοῦ πρώτου τοῦ διαιρέτου μέλους $3\alpha\beta$, καὶ τὸ πηλίκον $-3\gamma\delta^{\nu}$ τῷ προευρεθέντι συγκαταλεγέσθω πηλίκῳ· εἶτα ὁ διαιρέτης ὅλος ἐπὶ τὸ νέον τουτὶ ἀχθήτω πηλίκον, τὸ δὲ γινόμενον $-9\alpha\beta\gamma\delta^{\nu} + 6\beta^3\gamma^3\delta^{\nu} - 15\gamma\delta^{\nu}$ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, ἤτοι ἀπὸ τοῦ πρώτου ἀφαιρεθήτω ὑπολοίπου, ἵν' οὕτως δεύτερον ἄλλο ὑπόλοιπον σχῶμεν $12\alpha^3\beta\gamma + 20\alpha^2\gamma - 8\alpha^2\beta^3\gamma^3 + 12\alpha^2\beta^4$. Αὖθις τὸ πρῶτον τουτουῒ τοῦ ὑπολοίπου μέλος $12\alpha^3\beta\gamma$ διαιρεθήτω διὰ τοῦ πρώτου τοῦ διαιρέτου μέλους $3\alpha\beta$, τὸ δὲ πηλίκον $+4\alpha^2\gamma$ τῷ προτέρῳ συγγραφήτω πηλίκῳ, ὡς τρίτον ἐκείνου μέλος· Εἶτα δ' αὖ ὁ διαιρέτης ὅλος ἐπὶ τὸ καινὸν τουτὶ ἀχθήτω πηλίκον, καὶ τὸ γινόμενον $12\alpha^3\beta\gamma - 8\alpha^2\beta^3\gamma^3 + 20\alpha^2\gamma$ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, ἤτοι ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἀφαιρεθὲν ὑπολοίπου οὐδὲν ἀναδώσει ὑπόλοιπον. Κἀντεῦθεν δῆλον τὰ τῆς πράξεως ὀρθῶς διαπραχθῆναι.

Ἡ Βάσανος ἐν ἅπασι γενέσθω οὕτω

$$B \bowtie \Gamma = A$$

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

Τὰ ἐκτεθέντα παραδείγματα ὁ Καθηγητὴς ἐνώπιον τῶν Μαθητῶν δημοσίως πρῶτος ὑπολογιζέτω, τοὺς ἀνωτέρω ἐκτεθέντας κανόνας ἐν ἅπασιν ἐφαρμόττων· οὗ χάριν τὸν μὲν Διαιρετέον κεκλήκαμεν Α, τὸν δὲ Διαιρέτην Β, καὶ τὸ Πηλίκον Γ. Ὥστε δεῖν ἐν ἅπασιν εἶναι $B \bowtie \Gamma = A$. Μετὰ δὲ ταῦτα κελευέτω τοὺς Μαθητιῶντας ταυτὰ περαίνειν μετὰ τῆς ἀνηκούσης τοῦ νοὸς ἐπιστάσεως. Οὕτω γὰρ ῥᾴδιον συνιδεῖν τῷ τοῖς τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ παραβαλεῖν ὅροις μὴ κατοκνήσαντι, ὡς ὀρθῶς κατὰ τοὺς τεθέντας κανόνας τὰ τῆς Διαιρέσεως χωρεῖ. Ἔστι γὰρ οὕτως ἀντίζους τῷ Πολλαπλασιασμῷ ἡ Διαίρεσις, ὡς ταύτην ἀπὸ τοῦ παραγομένου διὰ θατέρου τῶν παραγόντων, τὸν ἕτερον ἀποδιδόναι (§. 136.), τὸν μετὰ θατέρου τὸ γεγονὸς συναποτελέσαντα (§. 118.).

ΜΕΡΟΣ Β.

ΠΕΡΙ
ΦΥΣΕΩΣ, ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΟΥ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΔΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ ΑΛΛΟΙΩΣΕΩΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 141. Κλάσμα ἐστὶ Ποσότης ὁλοσχεροῦς τινος μέρος, ἢ μέρη σημαίνουσα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Μονὰς πᾶσα, ἤτοι Ποσότης τις ὁλοσχερὴς, θεωρεῖσθαι ἔχει ὡς διαιρετὴ εἰς πολλὰ μέρη. Ἐὰν τοίνυν μέρη τινὰ τοῦ ὅλου τούτου, δηλαδὴ τῆς μονάδος, ἰδίᾳ ληφθῶσιν, Κλάσματα ταῦτα κληθήσονται. Οἷον ἔστω ὅλον τι διαιρούμενον εἰς 6 μέρη, ληφθήτωσαν δὴ μόνον 5, ἔσονται πέντε ἕκτα τοῦ ὅλου. Ἡ μνᾶ ἐστὶν ἑξηκοστὸν μέρος τοῦ ταλάντου, τὸ ὅλον ἄρα τάλαντον εἰς 60 μέρη διῄρηται· ἐὰν ἤδη τούτων 45 ληφθῶσιν, ἔσται τεσσαράκοντα πέντε ἑξηκοστά.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 142. Δύω τοίνυν ὅρους ἕκαστον κλάσμα ἔχειν ἐπάναγκες· τὸν μὲν, ὡς τὰ μέρη, εἰς ἃ τὸ ὅλον διῄρηται προσδιορίζοντα· τὸν δὲ, ὡς τὸν τῶν λαμβανομένων μερῶν ἀριθμὸν ἐμπεριλαμβάνοντα· οἷον ἐν τῷ ἀνωτέρω ληφθέντι παραδείγματι, ὁ 60 τὰ τοῦ ὅλου παρονομάζει μέρη, ὁ δὲ 45 τὰ λαμβανόμενα ἀριθμεῖ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 143. Ὅπως τοίνυν τὸ κλάσμα καλῶς γνωσθῇ, δέον Α'. τό, τε μέρος καὶ τὸ ὅλον σημανθῆναι· οἷον εἴ τις φαίη ὀκτὼ μέρη θαλήρου ἔχειν οὐκ ἐννοεῖται ὁποῖα, εἰδὲ προσθείη 8 μέρη θαλήρου εἰς 3 ὅμοια διαιρεθέντος, εὔδηλον τηνικαῦτα ἓν τρίτον θαλήρου ἔχειν· Β'. ἐπείπερ οἱονδηποτοῦν τῶν μορίων πρὸς τὰ ὑπ' αὐτὸ παραβαλλόμενον μόρια ὡς ὅλον λογίζεται, δῆλον δίδοσθαί καὶ κλασμάτων κλάσματα· οἷον ὁ παρὰ Γερμανοῖς γρόσος, τῷ μὲν θαλήρῳ παραβαλλόμενος ἐστὶ μέρος, τῷ δὲ δηναρίῳ, ὅλον· κἀντεῦθεν τὸ δηνάριον ἐστὶ τοῦ γρόσος, καὶ δὴ ἑπομένως τοῦ θαλήρου μόριον (α).

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 144. Ἥμισυ μέν ἐστι τῶν τῆς μονάδος μερῶν εἰς ἴσα διαιρεθείσης ἑκάτερον, Τριτημόριον δὲ τὸ ταύτης τρίτον μέρος, ὥσπερ καὶ Τεταρτημόριον, καὶ Πεμπτημόριον· τῷ δ' αὐτῷ λόγῳ καὶ Δεκατημόριον, Ἑκατοστημόριον ἢ Ἑκατοστὸν, καὶ Χιλιοστημόριον ἢ Χιλιοστὸν καὶ ἑξῆς ὁμοίως τῷ τῶν μερῶν ἀριθμῷ φερωνύμως, εἰς ἃ ἡ μονὰς ἰσάκις, ἢ πλεονάκις, ἢ ἐλαττονάκις διῄρηται, παρονομαζόμενα.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 145. Ἔστι τοίνυν τὸ μὲν ἑκατοστὸν, δεκατημορίου δεκατημόριον· τὸ δὲ χιλιοστὸν, ἑκατοστημορίου δεκατημόριον καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως (§. 21. 22.).

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 146. Ἡ τὰ ἐν τῇ ὑποθέσει διδόμενα μέρη ἐξαριθμοῦσα Ποσότης, Ἀριθμητὴς ἀκούει· ἡ δὲ τὸ ὅλον εἰς μέρη εἶναι διῃρημένον δηλοῦσα, Παρονομαστής. Τοῦθ' ἕνεκα ὁ μὲν Ἀριθμητὴς ὕπερθεν γραφέσθω, ὁ δὲ Παρονομαστὴς ἔνερθεν γραμμιδίῳ διαστελλόμενος· οἷον τριτημόρια δύω ταλάντου οὕτω γραπτέον $\frac{2}{3}$· ἔνθα ὁ πα-

(α) Ἰστέον, ὅτι ὁ παρὰ Γερμανοῖς λεγόμενος θάλερος (Thaler) μία οὐγγία ἀργυρίου ἐστὶν, ὁ δὲ γρόσος (Groschen) τὸ 24 μέρος τοῦ θαλήρου, καὶ τὸ δηνάριον (Pfennig) τὸ 12 μέρος τοῦ γρόσου.

ρονομαστὴς 3 σημαίνει τὸ τάλαντον εἰς τρία μέρη ἴσα διαιρεῖσθαι, ὁ δὲ ἀριθμητὴς 2 τῶν τηλικούτων μερῶν τὰ δύω ὑποδηλοῖ, ἤτοι 40 μνᾶς.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 147. Ἀριθμὸς Ἀριθμητός ἐστιν, ᾧ κοινῶς χρώμεθα· οἷον ἓν, δύω, τρία, κτλ. Τακτὸς δὲ, ᾧτινι στιχηδὸν χρώμεθα· οἷον πρῶτος, δεύτερος, τρίτος, κτλ.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 148. Ὁ ἀριθμητὴς τοίνυν ἐκφραζέσθω τῷ Ἀριθμητῷ ἀριθμῷ, ὁ δὲ παρονομαστὴς τῷ Τακτῷ· ἀμφότεροι δὲ ἐν οὐδετέρῳ γένει, ὥστε προσυπακούεσθαι μέρη.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 149. Ἀριθμοὶ ὑφ' ἓν λέγονται, οἱ μὴ ἑτέρῳ ἀριθμῷ μετρούμενοι, ἀλλὰ μόνῃ μονάδι, καὶ ὑφ' ἓν ἐκφερόμενοι ἀριθμοῦ ὄνομα· οἷον ἅπαξ τὰ πέντε, πέντε· καὶ τὰ 7, 7. Καλοῦνται δὲ καὶ Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ μὴν καὶ Ἁπλοῖ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁ δ' Εὐκλείδης οὕτως αὐτοὺς ὁρίζεται (α)· Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν, ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος· καί, Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

(α) Βιβ. Ζ. ὅρ. ια'. ιβ'.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 150. Ἀριθμὸς Τέλειός ἐστιν, ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος. Σύνθετος δὲ ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος· οἷον ὁ 4 μετρεῖ τὸν 8 διὰ τοῦ 2, κἀνάπαλιν ὁ 2 τὸν 8 διὰ τοῦ 4.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὡσαύτως καὶ Σύνθετοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν (α), οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι, ὡς κοινῷ μέτρῳ· οἱ γὰρ τοιοῦτοι παρὰ τὴν μονάδα καὶ ἕτερον κοινὸν ἔχουσι μέτρον· οὕτως ὁ 12 καὶ ὁ 15 εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους Σύνθετοι. Πολλαπλάσιον δὲ ἀριθμὸν ὁ Στοιχειωτὴς εἴρηκε, τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος (β)· τουτέστιν, ὅταν τὸ ἔλαττον μέρος τοῦ μείζονος μέτρον ᾖ· ἤτοι, ὅταν τὸ μεῖζον περιεκτικὸν ἐπ' ἀκριβὲς ᾖ τοῦ ἐλάττονος πλεονάκις ἐπαναληφθέντος.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 151. Τοῦ συνθέτου ἄρα ἀριθμοῦ, οὐδεὶς ἄλλος διαιρέτης ἐστὶ παρὰ τοὺς ἁπλοῦς ἐξ ὧν σύγκειται, καὶ παρά τινας ἐκ τούτων συνθέτους· οὕτως ὁ 30 ὁ ἐκ τῶν ἁπλῶν 2, 3, 5, παρὰ τούσδε διαιρέτας ἔχει καὶ τοὺς ἐξ αὐτῶν συνθέτους. $6 = 2 \times 3$, $10 = 2 \times 5$, $15 = 3 \times 5$, $30 = 2 \times 3 \times 5$ μόνους.

(α) Βιβ. Ζ. ὅρ. ε'.
(β) Αὐτόθι ὅρ. ιδ'.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 152. Ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν, ὁ εἰς δύω ἴσα δυνάμενος διαιρεθῆναι, μέσον μὴ παρεμπιπτούσης μονάδος. Περιττὸς δὲ, ὁ μηδέποτε εἰς δύω ἴσα δυνάμενος διαιρεθῆναι, διὰ τὸ παρεμπίπτειν μονάδα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁδ' Εὐκλείδης (α) ἄρτιον ἀριθμὸν προσείρηκε, τὸν δίχα διαιρούμενον· Περιττὸν δὲ, τὸν μὴ δίχα διαιρούμενον, ἢ τὸν μονάδι ἀρτίου διαφέροντα· οἷον ὁ 3 διαφέρει μὲν τοῦ 2 μονάδι, τοῦ δὲ 4 ἐλλείπει.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 153. Ἀριθμὸς ἀριθμὸν καταμετρεῖν ἢ καταριθμεῖν λέγεται ἐὰν αὐτὸν οὕτω διαιρῇ, ὥστε τὸ πηλίκον ἀριθμὸν ἀκέραιον εἶναι κλάσματος ἄνευ, ἢ ἐκείνου τοσακικὸν ὑπάρχειν μέρος ὡς ὁ 2 τοῦ 8 τῷ 4· ἢ μέρη, ὅταν οὐ καταμετρῇ, ὡς ὁ 4 τοῦ 6, ἢ τοῦ 10.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 154. Ἔνθεντοι Ἀρτιάκις μὲν ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος, κατὰ ἀριθμὸν ἄρτιον (β), ὡς ὁ 8 ὑπὸ τοῦ 2 κατὰ τὸν 4. Ἀρτιάκις δὲ περισσὸς, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν (γ), οἷον ὁ 12 ὑπὸ τοῦ 4 κατὰ τὸν 3. Πε-

(α) Βιβ. Ζ. ὅρ. ϛ', ζ'.
(β) Εὐκλ. Βιβ. Ζ. ὅρ. η'.
(γ) Αὐτ. ὅρ. θ'.

ρισσάκις δὲ περισσὸς, ὁ ὑπὸ περισσοῦ κατὰ περισσὸν μετρούμενος (α), ὡς ὁ 15 ὑπὸ τοῦ 3 κατὰ τὸν 5.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 155. Κλάσματα Ὁμογενῆ εἰσὶ τὰ τοὺς παρονομαστὰς ὁμοίους ἔχοντα· τὰ δὲ ἀνομοίους, Ἑτερογενῆ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 156. Ἡ τῶν κλασμάτων ὁμογένεια, ἐκ τῆς τῶν παρονομαστῶν ταυτότητος ἤρτηται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ μὲν γὰρ ἀριθμητὴς μόνον μέρη ὑποτυπεῖ (§. 146.), ὁ δὲ παρονομαστὴς τὸ εἶδος. Μένοντος τοίνυν τοῦ αὐτοῦ παρονομαστοῦ, τὸ αὐτὸ εἶδος διέμεινεν, ἑπομένως τε τὰ κλάσματα ὁμογενῆ ἔσται. Ἐὰν δὲ οἱ παρονομασταὶ διαφέροντες, ἤτοι ἑτερώνυμοι ὦσι, καὶ τὰ εἴδη ὁμοίως διάφορα ἔσται, ἑπομένως καὶ τὰ κλάσματα ἑτερογενῆ. Ο. Ε. Δ.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 157. Τὰ ἐν τοῖς κλάσμασι στοιχεῖα $\frac{\alpha}{\beta}$, οὕτως ἐκφραζέσθωσαν, α διαιρούμενον διὰ τοῦ β.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 158. Τὸ κλάσμα ἄρα ἐξισοῦται τῷ ἀριθμητῇ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν διῃρημένῳ· ἤτοι τὸ κλάσμα οὐδὲν ἄλλο ἐστὶν, εἰμὴ τὸ πηλίκον τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν ἐκκύπτον.

(α) Αὐτ. ὅρ. ι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 159. Ἔχει τοίνυν ἡ μονὰς πρὸς τὸ κλάσμα, ὡς ὁ παρονομαστὴς πρὸς τὸν ἀριθμητήν (§. 126. 158.)· ἢ, ὅ ταυτόν ἐστιν, ἡ μονὰς πρὸς τὸ κλάσμα, ἤτοι τὸ ὅλον πρὸς τὸ μέρος, ὡς ὁ παρονομαστὴς πρὸς τὸ αὐτό· ἡ γὰρ μονὰς διῃρημένη ἐστὶν ὁ παρονομαστής (§. 141.)· οἷον $1 : \frac{3}{4} = 4 : 3$ ἢ $3 : 4$.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 160. Ἐὰν μὲν ὁ ἀριθμητὴς ἴσος ᾖ τῷ παρονομαστῇ, τὸ κλάσμα $\frac{4}{4}$ ἰσοδυναμεῖ τῷ ὅλῳ. Ἐὰν δὲ ἐλάττων, τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$, ἔλαττόν ἐστι τοῦ ὅλου. Ἐὰν δὲ μείζων, τὸ κλάσμα $\frac{5}{4}$ τοῦ ὅλου, ἤτοι τῆς μονάδος μεῖζόν ἐστι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ μὲν γὰρ παρονομαστὴς ἐμφαίνει τὴν μονάδα, ἤτοι τὸ ὅλον εἰς ἴσα μέρη, οἷον ἐν τῇ καθ' ἡμᾶς περιστάσει εἰς 4 διῃρημένον, ὁ δὲ ἀριθμητὴς ἀριθμεῖ τῶν τοιούτων μερῶν τὰ ἐν ὑποθέσει τινὶ δοθέντα (§. 146.)· Ἐὰν οὖν ὁ ἀριθμητὴς ἴσος τῷ παρονομαστῇ ἐξ ὑποθέσεως τύχῃ, τοσαῦτα δίδονται μέρη, ὅσα τὸ ὅλον ἔχει· ἄρα τὸ κλάσμα τῷ ὅλῳ ἴσον (§. 72.)· Ὃ ἦν τὸ α'. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὴς ἐλάττων ᾖ ἐξ ὑποθ. τοῦ παρονομαστοῦ, τινὰ γοῦν δίδονται μέρη τοῦ ὅλου, οὐμὴν δὲ πάντα· ἄρα τὸ κλάσμα τισὶ μόνον μέρεσι τοῦ ὅλου ἴσον ἐστι, καὶ ἑπομένως τοῦ αὐτοῦ ἔλαττον (αὐτ.)· Ὃ ἦν τὸ β'. Ἐὰν δὲ τελευταῖον ὁ ἀριθμητὴς μείζων ᾖ τοῦ παρονομαστοῦ ἐξ ὑποθ. πλείω δίδονται μέρη, ἤπερ τὸ ὅλον ἔχει· ἀλλαμὴν τοσαῦτα μέρη, ὅσα τῷ ὅλῳ ἔνεισιν, αὐτῷ τούτῳ τῷ ὅλῳ ἴσα εἰσιν (αὐτ.)· ἄρα τὸ ὅλον μέρει τοῦ κλάσματος ἐστὶν ἴσον, καὶ ἑπομένως τὸ κλάσμα τοῦ ὅλου μεῖζόν ἐστιν· Ὃ ἦν τὸ γ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 161. Κλάσμα Κύριον ἢ Γνήσιον ἀκούει, τὸ τὸν ἀριθμητὴν ἐλάττω τοῦ παρονομαστοῦ ἔχον· Ἄκυρον δὲ ἢ Νόθον, τὸ μείζω. Καλεῖται δὲ ἐκεῖνο μὲν Κανονικὸν, τοῦτο δὲ Ἀτακτοῦν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 162. Κυριολεκτοῦσιν ἄρα ἡμῖν, οὐκ εἰσὶν ἄλλα κλάσματα, ὅτι μὴ τὰ τοῦ ἀκεραίου ἐλάττω (§. 26.).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 163. Τὸ τοῦ ἀκεραίου μεῖζον κλάσμα, οἷον $\frac{8}{4}$ πόσα περιέχει τῶν ἀκεραίων εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Διαιρεθήτω ὁ ἀριθμητὴς ἐπὶ τὸν παρονομαστήν· Φημὶ δὴ τὸ πηλίκον ἐμφαίνειν τὸ ζητούμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ γὰρ πηλίκον 2 ἐμφαίνει ποσάκις ὁ παρονομαστὴς 4 τῷ ἀριθμητῇ 8 ἐμπεριείληπται (§. 122.)· ἀλλαμὴν ὁ παρονομαστὴς ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ ἀκεραίῳ (§. 146.)· ἄρα τὸ πηλίκον ἐμφαίνει ποσάκις τὸ ἀκέραιον ἐν τῷ κλάσματι περιέχεται. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 164. Ἐν τοῖς μὴ κυρίοις τοίνυν κλάσμασιν ἀείποτε τὸ ὅλον λαθραίως ἐμπεριέχεται, ὅπερ διαγινώσκεται τῇ τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ διαιρέσει· καὶ γὰρ ἐὰν μὲν ὁ ἀριθμητὴς ἴσος ᾖ τῷ παρονομαστῇ, τὸ κλάσμα ἰσοδυναμεῖ τῷ ὅλῳ (§. 160.)· ἐὰν δὲ δὶς ἐπαύξῃ, καὶ τὸ δι᾽ ἐκείνου δηλούμενον ποσὸν διπλασιασθήσεται, ἤτοι ἰσοδυναμήσει δυσὶν ἀκεραίοις· Ἐὰν δὲ τρὶς, τρισί· καὶ ἐφεξῆς οὕτω. Ὅσῳ τοίνυν ὁ ἀριθμητὴς μείζων ἐστὶ τοῦ παρονομαστοῦ, τοσούτῳ πλείονα ἐκείνῳ ἔνεισιν ὁλοσχερῆ· ἀλλ᾽ οὖν τὰ τῆς μονάδος ἀριθμούμενα μέρη, ὅσα θατέρᾳ τῶν ποσοτήτων ἔνεισιν, ὅτι μὴ διὰ τῆς διαιρέσεως διαγινώσκονται (§. 163.)· ἄρα ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ διαιρούμενος τὰ ἐν αὐτῷ ἀναδίδωσιν ὁλοσχερῆ. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὴς ἡμισεύων ᾖ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τὸ κλάσμα ἡμισευθήσεται, ἤτοι ἰσοδυναμήσει τῷ ἡμίσει· ὡς $\frac{5}{10}$.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 165. Ποσότης οἱαποτοῦν ὁλοσχερὴς, ὡς κλάσμα ὑπὸ τῆς μονάδος παρονομαζόμενον, ἐννοείσθω· οἷον $6 = \frac{6}{1}$, $9 = \frac{9}{1}$ καὶ ἐν γένει $\alpha = \frac{\alpha}{1}$, $\beta = \frac{\beta}{1}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 166. Κλάσμα Ἁπλοῦν ἐστὶ τὸ ἀριθμητήν τε μόνον καὶ παρονομαστὴν ἔχον. Σύνθετον δὲ, ὃ καὶ Κλάσμα Κλάσματος ἀκούει, τὸ ἐκ πολλῶν ἁπλῶν συγκείμενον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἁπλοῦν μέν ἐστιν, ὡς $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{7}$, κτλ. Σύνθετον δὲ (§. 143. 150.), ὡς $\frac{2}{3}$ ἀπὸ $\frac{1}{2}$, οἷον ἀπὸ ἡμίσεως ἀμφορέως οἴνου ληπτέον δύο τριτημόρια· ὡσαύτως καὶ $\frac{2}{3}$ ἀπὸ $\frac{3}{4}$ θαλήρου, ἤτοι τὸ τριτημόριον ἀπὸ $\frac{3}{4}$ θαλήρου δὶς, ἤτοι $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ θαλ. Εἴωθε δὲ τὸ σύνθετον κλάσμα ὡς $\frac{15}{12}$ εἰς τοὺς ἐν αὐτῷ ἁπλουστέρους παράγοντας ἀναλύεσθαι, ὡς $\frac{15}{12} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{5}{2 \cdot 2}$, ἐφ᾽ ᾧ πρὸς ἐλάττονας ἐκεῖνο ἀναχθείη ὅρους (§. 151.).

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 167. Κλάσμα Μικτόν ἐστι τὸ ἐξ ὁλοσχεροῦς, ἤτοι ἐκ μονάδος συνεστηκὸς καὶ κεκλασμένου.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τοιαῦτά εἰσι τὰ ἐφεξῆς $8\frac{3}{4}$, ἢ $\frac{7\frac{2}{5}}{18}$, $\frac{8}{4\frac{2}{3}}$, $\frac{4\frac{2}{7}}{9\frac{1}{5}}$. Δηλοῖ δὲ τὸ μὲν $\frac{7\frac{2}{5}}{18}$, τὴν ὡς βάσιν ἐκλαμβανομένην μονάδα εἰς 18 ἴσα διῃρεῖσθαι μέρη, ὧν ὁ ἐκληφθησόμενος ἀριθμὸς κλασματῶδες ἑκάστου μέρος ἐμπεριείληφε· τὸ δὲ $\frac{8}{4\frac{2}{3}}$ τὴν μονάδα διττῶς διαιρουμένην παρίστησιν, εἰς 4 δηλαδὴ ἴσα, καὶ 2 ἐλάττονα, ὧν ἕκαστον $\frac{1}{3}$ ἑνὸς ἑκάστου τῶν 4 ἰσοῦται· ἀπὸ δὲ τῶν 4 ἴσων μερῶν τὰ τοῦ ἀριθμητοῦ 8 ληπτέα. Διὰ δὲ τοῦ $\frac{4\frac{2}{7}}{9\frac{1}{5}}$ ἡ μονὰς εἰς 9 ἴσα διῄρηται μέρη $\frac{1}{5}$ προσκείμενον ἔχοντα. Ἐμπεριείληφε δὲ ὁ τούτου ἀριθμητὴς ἓν τῶν 9 μερῶν $4\frac{2}{7}$ κις. Ἀλλ᾽ οὖν ἡ τοιαύτη τῶν κλασμάτων διπλόη πρὸς ἁπλότητα ἀγάγεται διὰ τοῦ ἀμοιβαίου πολλαπλασιασμοῦ τῶν τοῖς κλάσμασιν ἐμπεριεχομένων παρονομαστῶν μετὰ

τοῦ ἐξ ἐκείνων πρώτως προκύπτοντος γινομένου, καὶ μετὰ τῶν λοιπῶν παρονομαστῶν ὡσαύτως· οὕτως $\frac{7\frac{2}{5}}{18} = \frac{37}{90}$, $\frac{8}{4\frac{2}{3}} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7}$, $\frac{4\frac{2}{7}}{9\frac{1}{5}} = \frac{150}{322} = \frac{75}{161}$. Ὡσαύτως ἔσται καὶ $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$. Καθ᾽ ἃ δὴ, τιθεμένου τοῦ Ἔτους $365\frac{1}{4}$ ἡμερῶν, τοῦ δὲ Μηνὸς $29\frac{1}{2}$, ἔσται ὁ Μὴν $= \frac{29\frac{1}{2}}{365\frac{1}{4}}$ τοῦ Ἔτους.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 168. *Ἀμφοῖν τῶν τοῦ κλάσματος ὅρων τοῦ τε ἀριθμητοῦ δηλ. καὶ τοῦ παρονομαστοῦ, διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος πολλαπλασιαζομένων, ἢ διαιρουμένων, ἡ τοῦ κλάσματος δύναμις ἀμετάποίητος σώζεται, ἤτοι κλάσμα ἐκκύπτει τῷ δοθέντι ἰσοδυναμοῦν.*

ΔΕΙΞΙΣ.

Τοῦ μὲν γὰρ ἀριθμητοῦ πολλαπλασιαζομένου, τὸ κλάσμα ἐπιμεγεθύνεται ἰσαρίθμως ταῖς ἐν τῷ πολλαπλασιαστῇ μονάσιν· οἷον $\frac{3}{5} \times 2 = \frac{6}{5}$, ἥτις δὴ ποσότης ἐν διπλῷ μείζων τῆς προτέρας ἐξέκυψεν, ὡς πλείστων μερῶν ἐκληφθεισῶν (§. 101.). Πολλαπλασιαζομένου δὲ τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα ἐπιμειοῦται κατὰ τὰς ἐν τῷ πολλαπλασιαστῇ περιεχομένας μονάδας· οἷον $\frac{6}{5} \times 2 = \frac{6}{10}$ ποσότητι κλασματώδει ἐν διπλῷ τῆς προτέρας ἐλάσσονι, ὡς τῶν τοῦ αὐτοῦ ὁλοσχεροῦς μερῶν πλείστων μὲν, ἐλαχίστων δ᾽ οὖν ἀποβάντων· ἄρα τὸ κλασματῶδες ποσὸν $\frac{3}{5} \times 2 = \frac{6}{10}$ ἴσως ἐπαύξει τε καὶ ἐπιμειοῦται· Ὃ ἦν τὸ α΄. Διαιρουμένου ἀλλ᾽ οὖν τοῦ ἀριθμητοῦ, τοσάκις ἡ ποσότης ἠλάττωται, ὁσάκις ἡ μονὰς τῷ διαιρέτῃ ἐμπεριείληπται· οἷον $\frac{6}{10}: 2 = \frac{3}{10}$ τῷ τοῦ προτέρου ἡμίσει. Ὡσαύτως δὴ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος 2 διαιρεθέντος, ποσότης ἐν διπλῷ μείζων ἀνέκυψεν, ἤτοι $\frac{3}{10}: 2 = \frac{3}{5}$· τρία γὰρ πεμπτημόρια διπλασίως τῶν τριῶν δεκατημορίων πεφύκασι μείζονα. Ἡ οὖν ποσότης ἴσως καὶ τῷ αὐτῷ λόγῳ αὔξει τε καὶ φθίνει, ἄρα τροπὴν οὐδεμίαν ὑφίσταται, καὶ γὰρ $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$· ἑπομένως τε κλάσμα ἐκκύπτει τῷ δοθέντι ἰσοδυναμοῦν. Ὃ ἦν τὸ β′.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 169. Ἐντεῦθεν τοίνυν δῆλόν ἐστιν, ὅπως διάφορα κλάσματα, εἰ καὶ μείζοσιν ἀριθμοῖς ὑποτυπούμενα, ἰσοδυναμοῦσιν ἀλλ' οὖν κλάσμασιν ἐλαχίστων ὅρων, καὶ πρὸς ἐκεῖνα ἀναχθῆναι ἔχουσιν, εἰ κοινὸς καὶ μέγιστος εὑρεθείη παράγων, ἀκριβῶς τόν τε ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν διαιρῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 170. Ἐὰν τοῦ αὐτοῦ μένοντος παρονομαστοῦ ὁ ἀριθμητὴς ἐπαύξῃ, τὸ κλάσμα μεῖζόν ἐστι τοῦ ὅλου.

ΔΕΙΞΙΣ.

Καὶ γάρ, τοῦ αὐτοῦ παρονομαστοῦ μένοντος, καὶ τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ μονάδι τῇ αὐτῇ πληθυνομένου, ὁ τοῦ ἰδίου εἴδους τῶν μερῶν ἀριθμὸς ἐπιμεγεθύνεται,

ἑπομένως τε τὸ κλάσμα, πλεῖστα τοῦ αὐτοῦ εἴδους μέρη ἐκ τοῦ ἰδίου ἀκεραίου δηλώσει, κἀντεῦθεν μεῖζον τοῦ ὅλου ἀποβήσεται. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 171. Τῷ αὐτῷ λόγῳ δείκνυται μειοῦσθαι τὴν τοῦ κλάσματος δύναμιν, εἴγε τοῦ αὐτοῦ μένοντος παρονομαστοῦ ὁ ἀριθμητὴς μειοῦται. Ἐὰν τοίνυν δύω κλάσματα κοινὸν ἔχωσι παρονομαστήν, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστιν, οὗτινος ὁ ἀριθμητὴς μείζων, καὶ δὴ τοσοῦτον, ὅσον οὗτος ἐκεῖνον ὑπερέχει· οἷον $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 172. Ἐὰν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμητοῦ μένοντος ὁ παρονομαστὴς αὔξῃ, τὸ κλάσμα μειοῦται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τοῦ γὰρ αὐτοῦ ἀριθμητοῦ μένοντος, τὰ αὐτὰ πάντως καὶ τοσαῦτα διέμεινε μέρη, τούτου δὲ αὔξοντος, τὸ ἓν ἀκέραιον εἰς πλεῖστα μέν, ἐλάττονα δὲ τῷ ἀριθμῷ διῄρηται· ἀλλὰ μήν, ἐὰν τοσαῦτα μέρη ἐκ τοῦ ὅλου, εἰς ἐλάττονα μέρη διαιρεθέντος, ληφθῶσιν, ἐλάχιστα πάντως λαμβάνονται· ἄρα τοῦ αὐτοῦ ἀριθμητοῦ μένοντος, καὶ τοῦ παρονομαστοῦ αὔξοντος, ἡ τοῦ κλάσματος δύναμις ἀπομειοῦται. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 173. Τῷ αὐτῷ καθόλου λόγῳ δηλοῦται τὸ κλάσμα ἐπιμεγεθύνεσθαι, ἐὰν τοῦ αὐτοῦ μένοντος ἀριθμητοῦ, ὁ παρονομαστὴς μειοῦται· τηνικαῦτα γὰρ ὁ ἀριθμητὴς ἐπαύξει (§. 170.). Ἐὰν τοίνυν δύω κλασμάτων οἱ ἀριθμηταὶ ὁμονυμῶσι, τὸ ἐλάττονα παρονομαστὴν ἀποκεκληρωκὸς μεῖζόν ἔσται καὶ τοσούτῳ, ὅσῳ ὁ παρονομαστὴς ἠλάττωται, οἷον $\frac{3}{5} > \frac{3}{7}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 174. Ἡνίκα τοίνυν ὅ, τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς αὔξωσιν ἢ φθίνωσι, τό, τε κλάσμα συνῳδὰ ἐκείνοις ἐπιμεγεθύνεται ἢ ἀπομειοῦται, ἤτοι οὐδεμίαν ὑφίσταται ἀλλοίωσιν (§. 168.).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 175. Τὰ δοθέντα ὁποιαδηποτοῦν ἑτερογενῆ κλάσματα, πρὸς τὴν αὐτὴν ἀναγαγεῖν παρονομασίαν.

ΛΥΣΙΣ.

Κλάσματος ἑκάστου ὅ, τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς ἀχθήτω ἐπὶ τοὺς τῶν λοιπῶν ἁπάντων παρονομαστάς· οὕτω γάρ, ὁ αὐτὸς μὲν ἔσται πᾶσι κοινὸς παρονομαστής, ἕκαστα δὲ ἰσοδυναμήσουσι τοῖς δοθεῖσιν, εἰς τοῦ τε ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτῶν, διὰ τῶν αὐτῶν ποσοτήτων πολλαπλασιαζομένων (§. 168.). Ἐὰν δὲ κλάσμα τὸ ἐξ ἀμφοῖν, ἢ τοῦ ἑτέρου τῶν ὅρων ὁλοσχερεῖ ἅμα καὶ κλάσματι συγκροτούμενον, ἐπὶ κλασματικὸν ἀνακτέον ἦ, ἀμφότεροι οἱ τοῦ ἀτάκτου τος κλάσματος ὅροι διὰ τῶν παρονομαστῶν τῶν ἐν αὐτοῖς κλασμάτων πολλαπλασιασθήτωσαν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α) $\frac{\alpha-\beta}{\beta+\gamma},\ \frac{\delta+\chi}{\phi+\varepsilon} = \frac{(\alpha-\beta)\times(\phi+\varepsilon)}{(\beta+\gamma)\times(\psi+\varepsilon)},$

$\left.\frac{(\delta+\chi)\times(\beta+\gamma)}{(\beta+\gamma)\times(\phi+\varepsilon)}\right\}$ ἤγουν $\frac{\alpha\phi-\beta\phi+\alpha\varepsilon-\beta\varepsilon}{\beta\phi+\gamma\phi+\beta\varepsilon+\gamma\varepsilon},$

$\left.\frac{\beta\delta+\beta\chi+\gamma\delta+\gamma\chi}{\beta\phi+\gamma\phi+\beta\varepsilon+\gamma\varepsilon}\right\}$ ἀναχθέντα.

Β) $\left.\frac{2\alpha^3\beta}{4\gamma^2},\ \frac{4}{5},\ \frac{2\alpha^{\mu+1}}{3\alpha^{-\nu}}\right\}$ ἀνακτέα.

$\left.\frac{30\alpha^{-\nu+3}\beta,\ 48\alpha^{-\nu}\gamma^2,\ 40\alpha^{\mu+1}\gamma^2}{60\alpha^{-\nu}\gamma^2}\right\}$ ἀναχθέντα.

Γ) $\left.\frac{12\alpha^{\mu+1}\beta^2\chi}{7\alpha^2\beta^\mu},\ \frac{4\alpha^3\gamma^{\mu-1}}{5\beta^2\gamma^3},\ \frac{2\alpha^{-3}\beta^{\mu+2}\gamma}{3\alpha^4\beta^{\mu-1}}\right\}$ ἀνακτέα.

$\left.\frac{180\alpha^{\mu+5}\beta^{3+\mu}\gamma^3\chi,\ 84\alpha^9\beta^{2\mu-1}\gamma^{\mu-1},\ 70\alpha^{-1}\beta^{2\mu+4}\gamma^4}{105\alpha^6\beta^{2\mu+1}\gamma^3}\right\}$ ἀναχθέντα.

Δ) $\left.\frac{2}{3},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{7}\right\}$ ἀνακτέα.

$\left.\frac{140,\ 168,\ 105,\ 90}{210}\right\}$ ἀναχθέντα.

Ε) $\frac{3\frac{2}{5}}{2\frac{3}{8}} = 3\frac{2}{5} : 2\frac{3}{8} = \frac{17}{5} : \frac{19}{8} = \frac{136}{95} = 1\frac{41}{95}.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 176. Τὰ δοθέντα κλάσματα πρὸς ὅρους ἐλάττονας ἀναγαγεῖν, ἤτοι ἐξευρεῖν κλάσμα τοῖς δοθεῖσιν ἰσοδυναμοῦν, ἀλλ᾽ ἐλάττοσιν ἀριθμηταῖς τε καὶ παρονομασταῖς ἐμφαινόμενον.

ΛΥΣΙΣ.

Διαταχθεισῶν ἢ δέοι τῶν ποσοτήτων, ὧν ἡγείσθω μὲν τοὺς μειζοδυνάμους τῶν ὅρων ἐν τῷ αὐτῷ γράμματι, ἕπεσθαι δὲ τοὺς ἡττοδυνάμους, ἐὰν μὲν Α'. οἱ τοῦ κλάσματος ὅροι μοναδικῶς κείμενοι ὦσι (§. 54.), διαιρείσθω ὁ μείζων διὰ τοῦ ἐλάττονος, διὰ τῶν κοινῶν (εἰ ἔχοιεν) στοιχείων. Ἐὰν δὲ Β'. οἱ ὅροι, ἤτοι ὅ, τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς ἐκ πλειόνων συγκείμενοι τύχωσιν ὀνομάτων, ζητηθήτω ποσότης ἐν ἑκατέρῳ ἀκριβῶς περιεχομένη, καὶ διὰ ταύτης ἀμφότεροι διαιρείσθωσαν, διά τε τῆς τοῦ ἐν ἅπασι τοῖς ὅροις συγκειμένου ἐμφιλοχωροῦντος γράμματος διαιρέσεως, εἰς ἁπλουστέρους ἀναγέσθωσαν. Ἢ καὶ τῶν παραγόντων, ὅσοι ἐπ' ἀμφοῖν τοῖς ὅροις κοινῇ ἐμφιλοχωρεῖν διαλυομένων τε καὶ ἀποβαλλομένων (§. 137.), τὸ κλάσμα, ἐφ' ὅσον οἷόν τ' ἐλάχιστα συμπεπλεγμένον παριστάσθω. Οὕτω γὰρ ἡ τοῦ κλάσματος ἐπ' ἔλαττον ἀναγωγὴ εὐπετεστέρα γενήσεται, καὶ οἱ τοῦ δοθέντος κλάσματος ὅροι ἐλαττούμενοι ἰσοδυναμήσουσι τοῖς ἐν ἀρχῇ δοθεῖσι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α) $\frac{2\alpha^4+2\alpha^3\beta-\alpha^2\beta\gamma-\alpha\beta^2\gamma}{3\alpha^3-3\alpha^2\beta+4\alpha\beta^2+4\beta^3}$ διαιρούμενον διὰ τοῦ

$$\alpha+\beta \text{ ἔσται } = \frac{2\alpha^3-\alpha\beta\gamma}{3\alpha^2+4\beta^2}.$$

Β) $\frac{48\alpha^\mu\beta^2}{60\alpha^\mu\beta^3}$ διαιρ. διὰ τοῦ $12\alpha^\mu\beta^2 = \frac{4}{5}$.

Γ) $\frac{3\alpha^{\mu+3}\beta^3\gamma\chi^3}{4\alpha^3\beta^\mu\gamma^3}$ διαιρ. διὰ τοῦ $\alpha^3\beta^3\gamma = \frac{3\alpha^\mu\chi^2}{4\beta^{\mu-3}\gamma^2}$.

Δ) $\frac{30\alpha^{-\nu+3}\beta}{60\alpha^{-\nu}\gamma^2} : 30\alpha^{-\nu} = \frac{\alpha^3\beta}{2\gamma^2}$.

Ε) $-\frac{40\alpha^{\mu+1}\gamma^2}{60\alpha^{-\nu}\gamma^2} : 20\gamma^2 = -\frac{2\alpha^{\mu+1}}{3\alpha^{-\nu}}$.

ς) $-\frac{140}{210} : 70 = -\frac{2}{3}$, ὡσαύτως $-\frac{168}{210} : 42 = -\frac{4}{5}$.

Ζ) $\frac{3\alpha^2\beta-2\alpha\gamma-3\alpha\beta\gamma+2\gamma^2}{5\alpha^2\gamma-3\alpha\beta\chi-5\alpha\gamma^2+3\beta\gamma\chi} : \alpha-\gamma =$

$$\frac{3\alpha\beta-2\gamma}{5\alpha\gamma-3\beta\chi}.$$

Η) $\frac{6\alpha^3\beta-9\alpha\beta^{2\mu+1}-4\alpha^2\gamma\chi+6\beta^{2\mu}\gamma\chi}{9\alpha\beta^3\chi-15\alpha^{\mu+2}\beta\gamma-6\beta^2\gamma\chi^2+10\alpha^{\mu+1}\gamma^2\chi}$

$$: 3\alpha\beta-2\gamma\chi = \frac{2\alpha^2-3\beta^{2\mu}}{3\beta^2\chi-5\alpha^{\mu+1}\gamma}.$$

Θ) $\frac{140}{210} = \frac{14}{21} = \frac{14:7}{21:7} = \frac{2}{3}$.

Ι) $\frac{105}{210} = \frac{105:5}{210:5} = \frac{21}{42} = \frac{21:3}{42:3} = \frac{7}{14} = \frac{7:7}{14:7}$ $= \frac{1}{2}$, καὶ $\frac{216}{81} = \frac{216:3}{81:3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 177. Τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον καὶ τὸ μέγιστον δυεῖν ποσοτήτων μέτρον προσευρίσκεται, τῇ τῆς μείζονος δηλ. ἐπὶ τὴν ἐλάττονα διαιρέσει συνεχῶς ἐπαναλαμβανομένῃ, ἕως ἂν μηδὲν ὑπολειφθῇ· ὁ γὰρ κατὰ ταύτην τὴν διαίρεσιν ἔσχατος διαιρέτης, τὸ κοινὸν μέγιστον ἔσται μέτρον τὸ ζητούμενον τῶν ἐν ἀρχῇ δοθεισῶν. Εἴωθε δέ τοι τὰ τῆς πράξεως καὶ διὰ τῆς τῶν συνθέτων ἐπὶ τῶν ἁπλῶν ἀναλύσεως (§. 151.) εὐχρηστερον περαίνεσθαι, τοῖς τῆς δείξεως κατὰ πρώτην σχεδὸν ἐπιβολὴν ἐγκρατεῖς γενέσθαι ἐφιεμένοις· οἷον

$$\left.\begin{array}{l}\frac{360}{2} = 180\\ \frac{180}{2} = 90\\ \frac{90}{2} = 45\\ \frac{45}{3} = 15\\ \frac{15}{3} = 5\end{array}\right\}$$

οἱ τοῦ 360 ἁπλοῖ παράγοντες
1 . 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5.

ὡσαύτως καὶ οἱ ἐκ δυοῖν σύνθετοι

2 . 2 = 4
2 . 3 = 6
3 . 3 = 9
2 . 5 = 10
3 . 5 = 15

καὶ οἱ ἐκ τριῶν σύνθετοι

2 . 2 . 2 = 8
2 . 2 . 3 = 12
2 . 3 . 3 = 18
2 . 2 . 5 = 20
2 . 3 . 5 = 30
3 . 3 . 5 = 45

καὶ οἱ ἐκ τεσσάρων

2 . 2 . 2 . 3 = 24
2 . 2 . 3 . 3 = 36
2 . 2 . 2 . 5 = 40
2 . 2 . 3 . 5 = 60
2 . 3 . 3 . 5 = 90

καὶ οἱ ἐκ πέντε

2 . 2 . 2 . 3 . 3 = 72
2 . 2 . 2 . 3 . 5 = 120
2 . 2 . 3 . 3 . 5 = 180

καὶ οἱ ἐξ ἁπάντων

2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 = 360.

Ἄρα, πάντες οἱ τοῦ ἀριθμοῦ 360 παράγοντες ἔσονται· 1, 2, 3, 4, 5, 6; 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360. Ὡσαύτως καὶ ἐν ταῖς Γραμμαῖς τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐξευρίσκεται, διὰ τῆς ἀμοιβαίας ἀνθυφαιρέσεως τῶν αὐτῶν ἀπ' ἀλλήλων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐὰν μὲν οἱ τοῦ κλάσματος ἀριθμηταὶ καὶ παρονομασταὶ ὦσιν ἁπλοῖ, ῥαδίως ὁ κοινὸς ἐξευρίσκεται διαιρέ-

της. Ἐὰν δὲ ὦσι πολυμερεῖς, ἡ τοῦ διαιρέτου εὕρεσις μεγίστην τὴν Ἀλγεβραϊκὴν ἀπαιτεῖ χρῆσιν τε καὶ ἐξάσκησιν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 178. *Τὸ δοθὲν νόθον κλάσμα πρὸς γνήσιον ἀναγαγεῖν.*

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπείπερ κλάσμα ὁποιονδηποτοῦν ἰσοδυναμεῖ πηλίκῳ ἐκ τῆς τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ διαιρέσεως ἐκκύπτοντι (§. 158.)· τοῦθ' ἕνεκα διαιρεθέντος τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ πηλίκον ἐξάξει ἀκέραιον, ἢ μετὰ κλάσματος, ἢ χωρὶς τούτου· οἷον.

$$\text{A)}\ \frac{\alpha^{2\mu}}{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\mu}.\quad \text{B)}\ \frac{3\alpha^{\mu}\beta + 2\alpha^{3}\chi}{3\alpha\beta} = \alpha^{\mu-1} + \frac{2\alpha^{3}\chi}{3\alpha\beta} = \alpha^{\mu-1}\ \frac{2\alpha^{2}\chi}{3\beta}.\quad \Gamma)\ \frac{27}{5} = 5\tfrac{2}{5}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 179. *Τὴν δοθεῖσαν ποσότητα ὁλοσχερῆ πρὸς κλάσμα δοθέντος παρονομαστοῦ ἀναγαγεῖν.*

ΛΥΣΙΣ.

Ὁλοσχερῆ τινα ποσότητα ῥᾴδιόν ἐστι κατακλάσαι κατὰ τὸ δοθὲν ὄνομα, ἐὰν μονάδος ὑπογραφείσης, κλασματοειδὲς ἐκτεθῇ τὸ ὁλοσχερές· ἐπεὶ γὰρ τὴν τοῦ κλάσματος δύναμιν ὅλην καθίστησι τὸ ἐκ τῆς τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ διαιρέσεως ἐκκύπτον πηλίκον (§. 158. 163.)· καὶ ποσότης πᾶσα διὰ μονάδος διαιρεθεῖσα ἀναλλοίωτος διασώζεται (§. 8.)· τούτου χάριν τῇ δοθείσῃ ποσότητι ἀντὶ παρονομαστοῦ μονάδος ὑπογραφομένης, τοῦ τε ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ ἐπὶ τὸν δοθέντα ἀγομένων πολλαπλασιαστὴν, κατακλασθήσεται ἡ δοθεῖσα ποσότης κατὰ τὸ δοθὲν ὄνομα ἰσοδυνάμως τῇ προτέρᾳ· οἷον $\alpha^{-2\mu}$ πρὸς κλάσμα, οὗ παρονομαστὴς εἴη $\beta^2\alpha^{3\mu}$ ἀναχθῆναι δεῆσαν ἔσται $\frac{\alpha^{-2\mu}}{1}$, τοῦ τε ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ ἐπὶ $\beta^2\alpha^{3\mu}$ πολλαπλασιασθέντων ἐκκύψει $\frac{\alpha^{-2\mu} \times \beta^2\alpha^{3\mu}}{\beta^2\alpha^{3\mu}} = \frac{\beta^2\alpha^{\mu}}{\beta^2\alpha^{3\mu}}$. Ὡσαύτως ὁ 3 ἐπὶ τὸν 5 ἀναχθεὶς ἔσται $= \frac{15}{5}$, καὶ 3 $= \frac{24}{8}$, 5 $= \frac{30}{6}$, κτλ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 180. *Τὴν δοθεῖσαν μικτὴν ποσότητα πρὸς κλάσμα ἀναγαγεῖν ἄμικτον.*

ΛΥΣΙΣ.

Ἐφ' ᾧ ποσότης ὁλοσχερής τε καὶ κλασματώδης ἐφ' ἓν μόνον ἀναχθῇ κλάσμα, ἀχθήτω ἡ ὁλοσχερὴς ἐπὶ τὸν τοῦ κλάσματος παρονομαστὴν, τῷ δὲ παραγομένῳ συναφθήτω ὁ τούτου ἀριθμητὴς κατὰ τοὺς ἐν τῷ ἐφεξῆς κεφαλαίῳ διαληφθησομένους κανόνας. Ἢ, ἐπαγέσθω διὰ τοῦ κλάσματος ὁ ἀριθμητὴς, τηρείσθω δ' ὁ τούτου παρονομαστής· ἢ, καὶ ἐὰν ὁ παρονομαστὴς διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὁλοσχεροῦς διαιρεθεὶς πηλίκον παριστᾷ ὁλοσχερὲς, εἰδὲ μὴ ἐκείνου διαιρεθέντος τηρηθήτω ὁ ἀριθμητής (§. 179.)· οἷον

$$3\alpha^2\beta \times \frac{4\alpha\gamma^2}{5\beta^2\chi} = \frac{15\alpha^2\beta^3\chi + 4\alpha\gamma^2}{5\beta^2\chi}$$

καὶ ὁ κλασματίας $\frac{7}{12}$ ἐπὶ τὸν 3 πολλαπλασιασθεὶς, δώσει ἢ $\frac{21}{12}$ ἢ $\frac{7}{4}$. Ὡσαύτως $3 \times \frac{7}{8} = \frac{21}{8}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΔΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 181. *Τὰ δοθέντα ὁποιαδηποτοῦν κλάσματα προσθεῖναι.*

ΛΥΣΙΣ.

Ἐὰν μὲν Α'. τὰ δοθέντα κλάσματα ὦσιν ἑτερογενῆ, ἀναχθήτωσαν πρὸς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν (§. 175. 180.), εἶτα δὲ συναφθήτωσαν οἱ τῶν ἀναχθέντων ἀριθμηταὶ, καὶ τῷ ἀθροίσματι ὁ κοινὸς ὑπογραφήτω παρονομαστής. Εἰ δὲ Β'. τὰ κλάσματα ὁλοσχερέσι συμμέμικται, τηνικαῦτα ἢ προστεθήτωσαν ἰδίᾳ, ἢ πρὸς κλάσματα ἀναχθέντα (§. 180.), τούτοις ἐν ἑνὶ κεφαλαίῳ συναπτέσθωσαν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Δῆλόν ἐστι τὰς ἑτερωνύμους ποσότητας, οἷον $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{5}$ ἐν ἑνὶ ποσῷ συγκεφαλαιωθῆναι μὴ δύνασθαι (§. 85.)· καὶ γὰρ τότε τὸ ἐκκύπτον οὔτε τριτημόρια, οὔτε μὴν πεμπτημόρια δηλώσει· ἔνθεν τοι ὁμωνυμούμενα ὑπὸ κοι-

νῷ παρονομαστῇ γνωσθήτωσαν. Ἐπεὶ δὲ οἱ παρονομασταὶ ἐπωνυμίαι εἰσὶ τῶν μονάδων, ἐξ ὧν οἱ ἀριθμηταὶ σύγκεινται (§. 146.), τοῦθ᾽ ἕνεκα οἱ ἀριθμηταὶ μόνον συνάπτονται· συναφθῆναι δὲ οὐ δύνανται, ἐὰν μὴ ὦσιν ὁμογενεῖς (§. 85.), διάτοι τοῦτο, ἐπὶ τὴν αὐτὴν παρονομασίαν τούτων μετενεχθέντων (§. 66.), τῷ ἀθροίσματι ὁ κοινὸς ὑποχαραχθήτω παρονομαστής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

A) $\alpha - \beta + \frac{\beta^2}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha^2 - \beta^2 + \beta^2}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha^2}{\alpha+\beta}$.

B) $\frac{6\alpha^{4\mu}\beta^3}{\alpha^{\nu+\mu}} + \frac{\beta^3}{2\alpha^{\nu-3\mu}} = \frac{12\alpha^{\nu+\mu}\beta^3 + \alpha^{\nu+\mu}\beta^3}{2\alpha^{2\nu-2\mu}}$

$$= \frac{13\alpha^{\nu+\mu}\beta^3}{2\alpha^{2\nu-2\mu}}.$$

Γ) $3\alpha^2\beta + \frac{2\gamma^\mu\chi}{3\alpha\beta} + \alpha^2\beta - \frac{5\gamma^2\chi^\mu}{2\alpha^3\chi} = 4\alpha^2\beta +$
$\frac{4\alpha^3\gamma^\mu\chi^2 - 15\alpha\beta\gamma^2\chi^\mu}{6\alpha^4\beta\chi}$.

Δ) $2\alpha^{\mu+1}\beta + \frac{3\alpha^2\beta^\mu\chi}{2\gamma^3} + 5\alpha^4\beta^\mu\gamma - \frac{4\alpha^{-2}\beta\chi^{\mu-1}}{5\gamma^\mu}$
$= \frac{4\alpha^{\mu+1}\beta\gamma^3 + 3\alpha^2\beta^\mu\chi}{2\gamma^3} + \frac{25\alpha^4\beta^\mu\gamma^{\mu+1}}{}$
$\frac{- 4\alpha^{-2}\beta\chi^{\mu-1}}{5\gamma^\mu} = \frac{20\alpha^{\mu+1}\beta\gamma^{\mu+3}}{}$
$\frac{+ 15\alpha^2\beta^\mu\gamma^\mu\chi + 50\alpha^4\beta^\mu\gamma^{\mu+4} - 8\alpha^{-2}\beta\gamma^3\chi^{\mu-1}}{10\gamma^{\mu+3}}$

E) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} = \frac{70+84+90}{105} = \frac{244}{105} = 2\frac{34}{105}$.

ς) $\frac{7}{8} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{7}{12} + \frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{19}{24}$.
$= \frac{21+16+12+14+20+18+19}{24} = \frac{120}{24} = 5$.

Z) $3\frac{2}{5} + 7\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 3 + 7 + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$
$= 10 + \frac{12+15+20}{30} = 10 + \frac{47}{30} = 11 + \frac{17}{30}$.

H) $5\frac{2}{3} + 6\frac{5}{6} + 7\frac{3}{4} + 8\frac{1}{2} = 26 + \frac{8+10+9+6}{12}$
$= 26 + \frac{33}{12} = 28\frac{3}{4}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἡ τῶν Ἀλγεβραϊκῶν κλασμάτων πρόσθεσις πολλάκις εἴωθε γίνεσθαι διὰ τῆς τούτων μόνον συνάψεως μετὰ τῶν αὐτῶν σημείων, ἄνευ τῆς πρὸς κοινὸν παρονομαστὴν ἀναγωγῆς, ὡς ἐν τῷ Z'. καὶ H'. Παρ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΑΪΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 182. *Τὸ δοθὲν κλάσμα, ἀφ᾽ ἑτέρου κλάσματος ἀφελεῖν.*

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπειδὴ γὰρ ἡ τῶν ἀλγεβραϊκῶν ποσοτήτων ἀφαίρεσις οὐδὲν ἄλλό ἐστιν, ὅτι μὴ τῶν σημείων ἐς τοὐναντίον μεταμειφθέντων, πρόσθεσις (§. 95.)· οἱ αὐτοὶ πάντως εἰσὶν οἱ τῶν κλασματωδῶν ποσοτήτων τῆς ἀφαι-

ρέσεως κανόνες, οἱ καὶ τῆς προσθέσεως. Τῶν δὲ ἑτερογενῶν ποσοτήτων πρὸς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν μετενεχθέντων, ἀφαιρείσθω ὁ θατέρου ἀριθμητὴς, ἤτοι ὁ τοῦ ἀφαιρετέου, ἀπὸ τοῦ ἑτέρου, ἤτοι ἀπὸ τοῦ μειωτέου, τῇ δὲ διαφορᾷ ὁ κοινὸς παρονομαστὴς ὑπογεγράφθω. Ἔνθεν τοι καὶ τῶν ἐπὶ τὴν αὐτὴν μονάδα ἀναφερομένων, κλασμάτων, ἤτοι τῶν ὁμοιοειδῶν, παρονομαστὰς δ' ἐχόντων τοὺς αὐτοὺς, ἡ διαφορὰ λαμβάνεται, ἀφαιρουμένου μὲν τοῦ ἥττονος ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀριθμητοῦ, τοῦ δὲ παρονομαστοῦ τηρουμένου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α) Μειωτέος $\alpha - \beta$, Ἀφαιρετέος $+ \frac{\beta^2}{\alpha+\beta}$,

Διαφορὰ $\frac{\alpha^2 - \beta^2 - \beta^2}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{\alpha+\beta}$.

Β) Μειωτ. $\frac{3\alpha^\mu\beta^2}{4\gamma^3}$, Ἀφαιρετ. $\frac{5\alpha\beta^{\nu-1}}{2\gamma}$,

Διάφ. $\frac{3\alpha^\mu\beta^2}{4\gamma^3} - \frac{5\alpha\beta^{\nu-1}}{2\gamma} = \frac{6\alpha^\mu\beta^2\gamma - 20\alpha\beta^{\nu-1}\gamma^3}{8\gamma^4}$.

Γ) Μειωτ. $4\alpha + \frac{2\beta^2}{\gamma}$, Ἀφ. $-3\alpha \frac{-\beta^2}{\gamma}$,

Διαφ. $= \alpha + \frac{\beta^2}{\gamma}$.

Δ) Μ. $3\alpha^2\beta + \frac{2\gamma^\mu\chi}{3\alpha\beta}$, Ἀφ. $\alpha^2\beta \frac{-5\gamma^2\chi^\mu}{2\alpha^3\chi}$,

Διαφ. $= 2\alpha^2\beta + \frac{4\alpha^3\gamma^\mu\chi^2 + 15\alpha\beta\gamma^2\chi^\mu}{6\alpha^4\beta\chi}$.

Ε) Μειωτ. $\frac{5\alpha^2\beta}{7\gamma^2}$, Ἀφ. $\frac{-2\alpha^2\beta}{7\gamma^2}$;

Διαφ. $= \frac{3\alpha^2\beta}{7\gamma^2}$.

Ϛ) Μειωτ. $2\alpha^{\mu+1}\beta^3 \frac{-3\alpha^2\beta\gamma^\mu}{2\chi}$, Ἀφ. $4\alpha^5\beta^{2\mu}\chi + \frac{3\alpha\beta^\nu\chi^3}{4\gamma^2}$, Διαφ. $\frac{4\alpha^{\mu+1}\beta^3\chi - 3\alpha^2\beta\gamma^\mu}{2\chi}$

$- \frac{16\alpha^5\beta^{2\mu}\gamma^2\chi - 3\alpha\beta^\nu\chi^3}{4\gamma^2} = \frac{16\alpha^{\mu+1}\beta^3\gamma^2\chi - 12\alpha^2\beta\gamma^{\mu+2} - 32\alpha^5\beta^{2\mu}\gamma^2\chi^2 - 6\alpha\beta^\nu\chi^4}{8\gamma^2\chi}$.

Ζ) $\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\frac{5}{12} - \frac{2}{12} - \frac{9}{12}$
$= \frac{5}{12} - \frac{11}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$,
$\frac{2}{3} - \frac{4}{7} = \frac{14-12}{21} = \frac{2}{21}$.

Η) $5 - \frac{2}{3} = 4\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = 4\frac{1}{3}$, $1 - \frac{5}{8} = \frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$,
$8 - 4\frac{3}{5} = 7\frac{5}{5} - 4\frac{3}{5} = 3\frac{2}{5}$.

Θ) $4\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4} = 4 - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 3\frac{1}{2}$
$5\frac{3}{4} - 3\frac{2}{3} = 5 - 3 + \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = 2\frac{1}{12}$.
$8\frac{1}{4} - 5\frac{3}{4} = 7\frac{5}{4} - 5\frac{3}{4} = 2\frac{2}{4} = 2\frac{1}{2}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἡ τῶν κλασμάτων Πρόσθεσις τῇ Ἀφαιρέσει βασανίζεται, καὶ ἡ Ἀφαίρεσις τῇ Προσθέσει, ὃν τρόπον κἂν ταῖς ὁλοσχερέσι τῶν ποσοτήτων διείληπται (§. 85. 95.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΔΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 183. *Τὸ δοθὲν κλάσμα δι᾽ ἑτέρου κλάσματος πολλαπλασιάσαι.*

ΛΥΣΙΣ.

Πολλαπλασιασθήτωσαν οἱ τῶν κλασμάτων ἀριθμηταὶ ἐπὶ τοὺς ἀριθμητάς, οἵ τε παρονομασταὶ ἐπὶ τοὺς παρονομαστάς· τὰ ἐντεῦθεν παραγόμενα συνίστησι τὸ ζητούμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστι γὰρ ὁ πολλαπλασιαστέος πρὸς τὸ γινόμενον, ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν πολλαπλασιαστήν (§. 102. 141.)· ἀλλα μὴν ἡ μονὰς μείζων ἐστὶ πολλαπλασιαστοῦ κλασματώδους, ἄρα ὡσαύτως καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς μείζων ἐστὶ τοῦ γινομένου. Δέον τοίνυν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, μειοῦσθαι τὸν πολλαπλασιαστέον, ἐπομένως τε αὔξειν τὸν τούτου παρονομαστήν (§. 172.). Ἔστι δὲ ἐν τῷ πολλαπλασιαστῇ ὁ παρονομαστὴς μείζων τοῦ ἀριθμητοῦ· ἄρα ἀνακτέος ὁ τοῦ πολλαπλασιαστέου παρονομαστὴς ἐπὶ τὸν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ ὁ τούτου ἀριθμητὴς ἐπὶ τὸν ἐκείνου. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 184. Εἰ μὲν οὖν ποσότητα ὁλοσχερῆ διὰ κλασματώδους πολλαπλασιάσαι δέοι, δι᾽ ἐκείνης ὁ ταύτης μόνον ἀριθμητὴς πολλαπλασιαζέσθω· τῆς γὰρ ὁλοσχεροῦς παρονομαστὴς ἐστὶν ἡ μονὰς (§. 165.), ἥτις οὐδόλως πολλαπλασιάζει (§. 8.)· οἷον $\alpha \times \frac{2\alpha^{\mu}\gamma}{\delta^2} = \frac{\alpha}{1} \times \frac{2\alpha^{\mu}\gamma}{\delta^2} = \frac{2\alpha^{\mu+1}\gamma}{\delta^2}$. Εἰ δέγε ἀμφότεροι τῶν παραγόντων ὁλοσχερῆ κλάσμασι σύμμικτα τύχοιεν, πρὸς ἄμικτα ἀναγόμενα (§. 180.) πολλαπλασιασθήτωσαν· ἢ διά τε τοῦ κλάσματος καὶ τοῦ ὁλοσχεροῦς θατέρου τῶν παραγόντων πολλαπλασιασθήτω τὸ τοῦ ἑτέρου ὁλοσχερές τε καὶ κλάσμα, ὡς ἐπὶ τῶν ἐν τῷ ΙΑ΄. Παρ. δῆλον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 185. Ἐὰν τοίνυν κλάσμα νόθον, ἀριθμητὴν ἴσον τῷ παρονομαστῇ τύχῃ ἔχον, πολλαπλασιασθὲν οὐδόλως μετατρέπεται, ὡς ἰσοδυναμοῦν μονάδι (§. 134.). Τοῦτο δὲ τελεῖται διὰ τῆς τῶν ἀριθμητῶν ἐπὶ τοὺς ἀριθμητάς, καὶ τῶν παρονομαστῶν ἐπὶ τοὺς παρονομαστὰς ἐπαγωγῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 186. Εἰ τοίνυν ὁ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἀριθμητὴς μείζων τοῦ παρονομαστοῦ εἴη, τηνικαῦτα ἡ μονὰς ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἐπομένως τε καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος τοῦ γινομένου· ὅθεν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἡ αὐτοῦ δύναμις αὔξει, κἀντεῦθεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ μείζονα δέον ποσότητα ἄγεσθαι. Τούτου χάριν τῷ αὐτῷ πάντως τρόπῳ, οἵ τε ἀριθμηταὶ ἐπὶ τοὺς ἀριθμητὰς καὶ οἱ παρονομασταὶ ἐπὶ τοὺς παρονομαστὰς ἀνακτέοι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α) $-\frac{4\kappa}{7\sigma}\times-5\lambda=\frac{20\kappa\lambda}{7\sigma}$

Β) $\left(\alpha+\frac{\beta}{\gamma}\right)\left(\delta+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha\delta+\frac{\beta\delta}{\gamma}+\frac{\alpha\gamma}{\alpha}+\frac{\beta\gamma}{\alpha\gamma}$

$$=\alpha\delta+\frac{\beta\delta}{\gamma}+\gamma+\frac{\beta}{\alpha}$$

Γ) $\frac{2\alpha^{2\mu-2}\beta^3}{3\gamma^2}\times\frac{\alpha^3\beta^{-1}}{2\gamma^\mu}=\frac{2\alpha^{2\mu+1}\beta^2}{6\gamma^{\mu+2}}$.

Δ) $\left(2\alpha+\frac{3\beta^2}{\gamma}\right)\times\left(4\beta\gamma-\frac{2\delta^2}{\beta}\right)=$

$$8\alpha\beta\gamma+\frac{12\beta^3\gamma}{\gamma}-\frac{4\alpha\delta^2}{\beta}-\frac{6\beta^2\delta^2}{\beta\gamma}.$$

Ε) $\frac{3\alpha^{\mu+1}\beta^2\gamma^\nu}{4\alpha^{2-\mu}\beta^\nu\gamma^{-2}}\times\frac{4\alpha^{2\mu-3}\beta^\mu\gamma^{3-2\nu}}{5\alpha^2\beta^{\nu-2}\gamma^{\mu+2}}$

$$=\frac{12\alpha^{3\mu-2}\beta^{\mu+2}\gamma^{3-\nu}}{20\alpha^{4-\mu}\beta^{2\nu-2}\gamma^{\mu}}.$$

Ϛ) $5\alpha^{3-\mu}\beta^3\gamma\chi^3\times\frac{2\alpha^{2\mu}\beta^2\chi^{\mu+1}}{3\alpha^3\gamma\chi^2}$

$$=\frac{10\alpha^{3+\mu}\beta^5\gamma\chi^{\mu+4}}{3\alpha^3\gamma\chi^2}.$$

Ζ) $\left(12\alpha^{\mu+1}\beta^2\chi-\frac{3\beta^\mu\gamma^3}{4\alpha^\mu\chi}\right)\times\left(4\alpha^4\beta^\mu+\frac{5\alpha^{3-\mu}\gamma^3}{2\alpha\chi^\mu}\right)$

$$=\left(\frac{48\alpha^{2\mu+1}\beta^2\chi^2-3\beta^\mu\gamma^3}{4\alpha^\mu\chi}\right)$$

$$\times\left(\frac{8\alpha^5\beta^\mu\chi^\mu+5\alpha^{3-\mu}\beta\gamma^3}{2\alpha\chi^\mu}\right)$$

$$=\frac{384\alpha^{2\mu+6}\beta^{\mu+2}\chi^{\mu+2}-24\alpha^5\beta^{2\mu}\gamma^3\chi^{\mu}+240\alpha^{\mu+4}\beta^3\gamma^3\chi^2-15\alpha^{3-\mu}\beta^{\mu+1}\gamma^6}{8\alpha^{\mu+1}\chi^{\mu+1}}.$$

Η) $5\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}\times12=\frac{60}{6}=10$

Θ) $5\frac{3}{4}.6=\frac{3}{4}.6+5.6=\frac{18}{4}+5.6$

$$=4+\frac{2}{4}+30=34\frac{1}{2}$$

Ι) $\frac{2}{3}.\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$, $\frac{3}{4}.\frac{5}{6}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$, $\frac{7}{7}.\frac{2}{5}.\frac{4}{9}=\frac{56}{315}$

ΙΑ) $5\frac{2}{3}.3\frac{4}{5}=\frac{17}{3}.\frac{19}{5}=\frac{323}{15}=21\frac{8}{15}$,

$2\frac{3}{4}.5\frac{2}{7}=\frac{2}{7}.\frac{3}{4}+\frac{2}{7}.2+5.\frac{3}{4}+5.2$

$=\frac{6}{28}+\frac{4}{7}+\frac{15}{4}+10=\frac{6+16+105}{28}+10$

$=10+\frac{127}{28}=14\frac{15}{28}$

$4\frac{2}{3}\times\left(8-\frac{4}{5}\right)=32+\frac{16}{3}-\frac{16}{5}-\frac{8}{15}$

$=32+\frac{80-48-8}{15}=32+\frac{24}{15}$

$=32+\frac{24:3}{15:3}=32+\frac{8}{5}=33\frac{3}{5}$

$3\frac{2}{3}\times4\frac{7}{9}=12+\frac{8}{3}+\frac{21}{9}+\frac{14}{27}$

$=12+\frac{72+63+14}{27}=12+\frac{149}{27}=17\frac{14}{27}$

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

Ἔξεστι δὲ τὰ τοιαῦτα κλάσματα διὰ τὸ εὐχερέστερον τῶν ὁλοσχερῶν ἀποκαθαίρουσιν, ἐπ' ἄλληλα πολλαπλασιάζειν (§. 180.). Οὕτως ἐν τῷ ἐσχάτῳ παραδείγματι τῶν συμμίκτων ἀμειφθέντων ἔσται $3\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$, καὶ $4\frac{7}{9}=\frac{43}{9}$, τῆς τε πράξεως περανθείσης ἐκκύψει $\frac{11}{3}\times\frac{43}{9}=\frac{473}{27}=17\frac{14}{27}$, κλάσμα τῷ προσεχῶς ἐκτεθέντι ἴσον.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

Οὐδὲν θαυμαστὸν ὅτι ἐν τοῖς γνησίοις κλάσμασι τὸ γινόμενον ἔλαττόν ἐστι τῶν ποιούντων αὐτὸ, ἅτε δὴ πράγματι διαιρέσεως οὔσης τῆς καλουμένης ταύτης πολλαπλασιάσεως, οἷον $\frac{2}{3}$ πολλαπλασιάσαι ἐπὶ $\frac{1}{2}$ ταυτόν ἐστιν εὑρεῖν τὸ ἥμισυ τῶν δύω τριτημορίων· καὶ γὰρ ποσότης οἱαποτοῦν διὰ μονάδος μὲν πολλαπλασιαζομένη, ἅπαξ τῷ ὅλῳ τίθεται, διὰ δὲ ποσότητος μονάδος ἥττονος, ἤτοι διὰ κυρίου κλάσματος, οὐδ᾽ ἅπαξ σχεδὸν, ἀλλὰ μέρος ἐκείνης μόνον, καὶ δὴ τοιοῦτον, οἷον ὁ πολλαπλασιαστὴς ἐμφαίνει· ὅθεν ἀναγκαίως τὸ γινόμενον ἔλαττον ἔσται τοῦ πολλαπλασιαστέου· οἷον ἐὰν κλάσμα $\frac{4}{5}$ ἐπὶ $\frac{2}{3}$ ἀχθῇ, αὐτῷ τούτῳ δύω τριτημόρια τῶν τεσσάρων πεμπτημορίων τίθενται. Ἔνθεντοι τὸ δοθὲν κλάσμα $\frac{4}{5}$ πρῶτον διαιρετέον εἰς τρία μέρη, διὰ τῆς τοῦ 5 ἐπὶ τὸν 3 πολλαπλασιάσεως, ὡς εἰρήσεται· εἶτα τὸ τρίτον μέρος δὶς ληπτέον, ἤτοι τὸν ἀριθμητὴν 4 ἐπὶ τὸν 3 πολλαπλασιαστέον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 187. Ἐκ τούτων, ὁ τῶν κλασμάτων πολλαπλασιασμὸς εὐχερέστερον δείκνυται κατὰ τὸν ἀνωτέρω ἐκτεθέντα τρόπον· οἷον ἐὰν ἐπὶ τοῦ προτεθέντος παραδείγματος $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$, δύω τριτημόρια τῶν τεσσάρων πεμπτημορίων δέῃ ἡμῖν εὑρεῖν, διαιρετέον τὸ δοθὲν κλάσμα $\frac{4}{5}$ ὡς ὅλον θεωρούμενον, εἰς τοσαῦτα ἴσα μέρη, ὅσας ὁ τοῦ πολλαπλασιάζοντος παρονομαστὴς ἔχει μονάδας, δηλ. ἐν τῷ ἡμετέρῳ παραδείγματι εἰς τρία, καὶ τὸ μέρος τούτου πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, δηλ. ἐνταῦθα ἐπὶ τὸν 2.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 188. Ἐπεὶ κἀνταῦθα διδομένων ζητεῖται ὁ τρίτος, ὥσπερ κἀπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἄρα ἕξει ὁ τρίτος πρὸς τὸν πολλαπλασιαζόμενον, ὡς ὁ πολλαπλασιάζων πρὸς τὴν μονάδα (§. 102)· Διὸ δὴ ἐπὶ τοῦ $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ ἔχει τὸ γινόμενον $\frac{2}{6}$ πρὸς $\frac{2}{3}$, ὡς $\frac{1}{2}$ πρὸς 1. Ἐπὶ μὲν οὖν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἐπεὶ ὁ πολλαπλασιάζων μείζων ἐστὶν ἀεὶ τῆς μονάδος, διὰ τοῦτο καὶ ὁ γινόμενος ὑπερέχει τοῦ πολλαπλασιαζομένου. Ἐπὶ δὲ τῶν κεκλασμένων, ἐπεὶ τὸ πολλαπλασιάζον κλάσμα ἔλαττον ἐστὶ τῆς μονάδος, καὶ τὸ γινόμενον πάντως ἔλαττον ἔσται τοῦ πολλαπλασιασθέντος, πλὴν εἰμὴ νόθον εἴη κλάσμα τὸ πολλαπλασιάζον· τότε γὰρ εἰμὲν τὸ πολλαπλασιάζον κλάσμα ἴσον τῇ μονάδι εἴη, καὶ τὸ εὑρεθὲν τρίτον ἴσον ἔσται τῷ πολλαπλασιασθέντι, εἰδ᾽ ἐκεῖνο μεῖζον ἐκείνης, καὶ τοῦτο μεῖζον ἐκείνου πάντως ἔσται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΔΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 189. Τὸ δοθὲν κλάσμα, δι᾽ ἑτέρου κλάσματος διελεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἀχθήτω ὁ τοῦ διαιρετέου ἀριθμητὴς ἐπὶ τὸν τοῦ διαιρέτου παρονομαστὴν, ὅ, τε τούτου ἀριθμητὴς ἐπὶ τὸν ἐκείνου παρονομαστήν· τοὐντεῦθεν προκύπτον, ἔσται τὸ ζητούμενον πηλίκον. Ἢ, ὅπερ ταυτόν ἐστιν, ἀντεστράφθω ὁ διαιρέτης, καὶ γενέσθω κλασμάτων πολλαπλασιασμός (§. 183.).

ΔΕΙΞΙΣ.

Διαιρετέος μὲν γὰρ ὁποιοσδηποτοῦν ἐν γένει παρίστασθαι ἔχει τῷ $\frac{\alpha}{\beta}$, ὅ, τε διαιρέτης τῷ $\frac{\mu}{\nu}$. Ἐπεὶ οὖν τὸν διαιρετέον δι' ἀντιστρόφου τοῦ διαιρέτου πολλαπλασιάσαι ἴσόν ἐστιν, ἐκεῖνον διὰ τούτου διελεῖν, ἤτοι πηλίκον λαβεῖν $\frac{\alpha\,\nu}{\beta\,\mu}$· διαιρεθήτω $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ τοῦ μ, τὸ κλάσμα ἐλαττωθήσεται, ὡς πηλίκου ἐκκύπτοντος $\frac{\alpha}{\beta\,\mu}$. Μένοντος γὰρ τοῦ ἀριθμητοῦ, ἐὰν ὁ παρονομαστὴς αὔξῃ τὸ κλάσμα μειοῦται (§. 172.)· τὸ πηλίκον τοίνυν ἔλαττον ἔσται κατὰ τὰς ἐν τῷ μ περιεχομένας μονάδας, ἤτοι μιάκις· ἵν' οὖν τὸ ἀληθὲς ἐκκύψῃ πηλίκον, δέον ἰσαρίθμως ταῖς ἐν τῷ ν μονάσι μεῖζον γενέσθαι, ἤτοι νιάκις, τουτέστι δέον πηλίκον ἐκκύψαι $\frac{\alpha\,\nu}{\beta\,\mu}$· ἀλλαμὴν τοῦτο γενήσεται ἐὰν θατέρου τῶν κλασμάτων ὁ ἀριθμητὴς ἀχθῇ ἐπὶ τὸν τοῦ ἑτέρου παρονομαστὴν, ὅπερ ταυτόν ἐστι, τῷ τὸν διαιρέτην ἀντιστραφῆναι. Ἡ διαίρεσις ἄρα τελεῖται διὰ τῆς τοῦ διαιρέτου ἀντιστρόφου πολλαπλασιάσεως, πρὸς τὴν τοῦ πηλίκου $\frac{\alpha\,\nu}{\beta\,\mu}$ εὕρεσιν. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 190. Ἐπεὶ ὁ διαιρέτης πρὸς τὸν διαιρετέον ἔχει, ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸ πηλίκον (§. 126.), ἕξει ἔτι ἀνάπαλιν καὶ ὁ διαιρετέος πρὸς τὸν διαιρέτην, ὡς τὸ πηλίκον πρὸς τὴν μονάδα· τῶν κλασμάτων τοίνυν ἐπὶ τὴν αὐτὴν παρονομασίαν μετενεχθέντων (§. 175.), ἐπεὶ τὰ αὐτὰ ἴσα εἰσὶ τοῖς ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ἀριθμητῶν διὰ τοῦ κοινοῦ παρονομαστοῦ πηλίκοις (§. 158.), ἕξει ὁ τοῦ διαιρετέου κλάσματος ἀριθμητὴς πρὸς τὸν τοῦ διαιρέτου, ὡς τὸ διαιρούμενον κλάσμα πρὸς τὸ διαιροῦν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 191. Ἐὰν ὁ διαιρέτης κλάσμα νόθον τυγχάνον, τὸν ἀριθμητὴν ἴσον ἔχῃ τῷ παρονομαστῇ, ἰσοῦται μονάδι· ἔνθεν τοι διὰ τῆς διαιρέσεως ἰσοδυναμήσει τῷ δοθέντι, ὡς τοῦ διαιρετέου τῷ πηλίκῳ ἐξισουμένου.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 192. Ἐὰν ὁ τοῦ διαιρετέου ἀριθμητὴς μείζων ᾖ τοῦ παρονομαστοῦ, τηνικαῦτα ὁ διαιρέτης μείζων ἐστὶ τῆς μονάδος, ἑπομένως τε καὶ ὁ διαιρετέος τοῦ πηλίκου μείζων· ὅθεν διὰ τῆς διαιρέσεως μειοῦσθαι δέον, τοῦτ' ἔστι, τὸν μὲν ἀριθμητὴν ἐπ' ἐλάττονα, τὸν δὲ παρονομαστὴν ἐπὶ μείζονα ποσότητα ἄγειν· ἄρα ὁ τοῦ διαιρετέου ἀριθμητὴς, ἐπὶ τὸν τοῦ διαιρέτου παρονομαστὴν, ὅ, τε τούτου ἀριθμητὴς, ἐπὶ τὸν ἐκείνου παρονομαστὴν πολλαπλασιαστέοι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 193. Ἐὰν μὲν τὸ κλάσμα ᾖ μικτὸν, ἀναγέσθω πρὸς ἄμικτον (§. 180)· Ἐὰν δὲ ὁ διαιρέτης, ἢ ὁ διαιρετέος ὁλοσχερὴς ἢ ποσότης, δι' ἐκείνου μόνον ὁ τοῦ κλάσματος παρονομαστὴς πολλαπλασιαζέσθω. Ὥστε τὸ ἐντεῦθεν ἐκκύπτον γινόμενον, ἀριθμητὴς μὲν τοῦ πηλίκου ἔσται, ἐὰν ὁ διαιρετέος ἢ ποσότης ὁλοσχερής· παρονομαστὴς δὲ, ἐὰν ὁ διαιρέτης, ὡς ἐν τῷ Ϛ'. καὶ Ζ'. Παραδείγματι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α) $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$. Β) $\frac{\frac{1}{\alpha-\chi}}{\frac{\chi}{\beta+\mu}}$ ἢ $\frac{1}{\alpha-\chi} : \frac{\chi}{\beta+\mu} = \frac{\beta+\mu}{\alpha\chi-\chi^2}$.

Γ) $\frac{2\alpha^{2\mu+1}\beta^2}{6\gamma^{\mu+2}} : \frac{2\alpha^{2\mu-2}\beta^3}{3\gamma^2} = \frac{6\alpha^{2\mu+1}\beta^2\gamma^2}{12\alpha^{2\mu-2}\beta^3\gamma^{\mu+2}} = \frac{\alpha^3}{2\beta\gamma^\mu}$.

Δ) $\frac{2\alpha^{\mu-1}\beta^2\chi}{3\alpha^2\beta^{\mu-2}} : \frac{4\alpha^{\mu+2}\beta\gamma^{-3}}{5\alpha^{\mu-2}\beta^\mu\gamma} = \frac{10\alpha^{2\mu-3}\beta^{\mu+1}\gamma\chi}{12\alpha^{\mu+4}\alpha^{\mu-1}\gamma^{-3}}$.

Ε) $$\left(8\alpha\beta\gamma + \frac{12\beta^3\gamma}{\gamma} - \frac{4\alpha\delta^2}{\beta} - \frac{6\beta^2\delta^2}{\beta\gamma}\right)$$
$$:\left(2\alpha+\frac{3\beta^2}{\gamma}\right) = \left(\frac{8\alpha\beta^2\gamma^2+12\beta^4\gamma-4\alpha\delta^2\gamma-6\beta^2\delta^2}{\beta\gamma}\right)$$
$$:\left(\frac{2\alpha\beta\gamma+3\beta^3}{\beta\gamma}\right)$$
$$= \frac{8\alpha\beta^2\gamma^2+12\beta^4\gamma-4\alpha\delta^2\gamma-6\beta^2\delta^2}{2\alpha\beta\gamma+3\beta^3}$$
$$= 4\beta\gamma - \frac{2\delta^2}{\beta}.$$

Ϛ) $3\alpha^\mu\beta^2\chi^{-3} : \frac{5\alpha^{3+\mu}\beta^3\chi}{7\alpha^{-2}\beta\gamma^\mu} = \frac{21\alpha^{\mu-2}\beta^3\gamma^\mu\chi^{-3}}{5\alpha^{3+\mu}\beta^3\chi}$.

Ζ) $\frac{2\alpha^{2-\mu}\beta^{3\nu}\gamma^3}{3\alpha^{\mu-4}\beta\gamma^{2\mu}} : 4\alpha^{2\mu+3}\beta^2\gamma\chi^3 = \frac{2\alpha^{2-\mu}\beta^{3\nu}\gamma^3}{12\alpha^{3\mu-1}\beta^3\gamma^{2\mu+1}\chi^3}$.

Η) $$\left(3\alpha^\mu\beta^2\gamma^{\mu+1} + \frac{2\alpha^3\beta^\mu\chi}{3\alpha^\mu\beta\chi^\nu}\right) : \left(\alpha^{3-\mu}\beta\gamma^{\nu+1} - \frac{3\alpha^\mu\beta^3\chi^2}{4\alpha\beta^\mu\gamma^3}\right)$$
$$= \left(\frac{9\alpha^{2\mu}\beta^3\gamma^{\mu+1}\chi^\nu + 2\alpha^3\beta^\mu\chi}{3\alpha^\mu\beta\chi^\nu}\right) : \left(\frac{4\alpha^{4-\mu}\beta^{\mu+1}\gamma^{\nu+4} - 3\alpha^\mu\beta^3\chi^2}{4\alpha\beta^\mu\gamma^3}\right)$$
$$= \frac{36\alpha^{2\mu+1}\beta^{\mu+3}\gamma^{\mu+4} + 8\alpha^4\beta^{2\mu}\gamma^3\chi}{12\alpha^4\beta^{\mu+2}\gamma^{\nu+4}\chi^\nu - 9\alpha^{2\mu}\beta^4\chi^{\nu+2}}.$$

Θ) $\frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$,
$5 : \frac{2}{3} = 5\cdot\frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$.

Ι) $3\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{17}{5} : \frac{3}{4} = \frac{17}{5}\cdot\frac{4}{3} = \frac{68}{15} = 4\frac{8}{15}$
$3 : 4\frac{1}{2} = 3\cdot\frac{9}{2} = 3\cdot\frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
$2\frac{1}{3} : 1\frac{3}{4} = \frac{7}{3} : \frac{7}{4} = \frac{7\cdot4}{3\cdot7} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.
$(32 + \frac{24}{15}) : (8 - \frac{4}{5}) = \frac{480+24}{15} : \frac{40-4}{5}$.
$= \frac{504}{15} : \frac{36}{5} = \frac{2520}{540} = 4\frac{2}{3}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

Τὸ τῆς Διαιρέσεως τέλειον διὰ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ βασανιζόμενον διακρίνεται, ὡς καὶ τὸ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ διὰ τῆς Διαιρέσεως.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

Ληφθήσεται τοίνυν καὶ τὸ κατακλασθὲν κλάσμα, ἤτοι τὸ τοῦ κλάσματος κλάσμα, τῶν τε ἀριθμητῶν καὶ τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων ἀμφοῖν, ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιαζομένων· οἷον $\frac{3}{10}$ τοῦ κλάσματος $\frac{5}{6}$ ἐστὶν $= \frac{3 \cdot 5}{6 \cdot 10} = \frac{15}{60}$· ἐπεὶ $\frac{3}{10}$ τοῦ κλάσματος $\frac{5}{6}$ οὐδὲν ἄλλο δηλοῖ, ὅτι μὴ τὸ κλάσμα $\frac{5}{6}$ εἰς 10 ἴσα διελεῖν μέρη, οὗ γινομένου 3 μόνον τούτων λαβεῖν μόρια. Ἔστι δὲ $\frac{5}{6} : 10 = \frac{5}{6 \cdot 10}$, ὃ δὴ τρὶς ληφθὲν δίδωσι $\frac{3 \cdot 5}{6 \cdot 10}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ Γ.

Ἐπὶ μὲν τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν ἀεὶ ὁ μείζων διαιρεῖται ἐπὶ τὸν ἐλάττω, ἐπὶ δὲ τῶν κεκλασμένων ἐπὶ τὸ τυχὸν τὸ τυχόν. Αἴτιον δὲ, ὅτι ἐπεὶ κατὰ τὸν τῆς διαιρέσεως λόγον (§. 126.), ἐν τῷ αὐτῷ ἐστὶν ἡ μονὰς πρὸς τὸ πηλίκον, ὡς τὸ διαιροῦν πρὸς τὸ διαιρούμενον· ἐπ᾽ ἐκείνων μὲν ἀεὶ ἡ μονὰς ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ εὑρισκομένου πηλίκου, διὰ τὸ ὁλοσχερὲς ἐπ᾽ ὁλοσχερὲς διαιρεῖσθαι, ὧν ἑκατέρου ἔσχατον ὁλοσχερὲς, ἐστὶν ἡ μονὰς ἀδιαίρετος λαμβανομένη. Ἐπὶ τούτων δὲ δυνατὸν τὴν μονάδα μείζονα εἶναι τοῦ πηλίκου διὰ τὸ κεκλασμένον ἐπὶ κεκλασμένον διαιρεῖσθαι, ὧν ἑκατέρου μείζων πάντως ἐστὶν ἡ μονάς. Διὸ ἐπεὶ τὴν μονάδα μείζονα συμβαίνει πολλάκις εἶναι τοῦ πηλίκου, μεῖζον πάντως καὶ τὸ διαιροῦν τοῦ διαιρουμένου κλάσματος ἔσται· ἐντεῦθεν οὐδὲν θαυμαστὸν, εἰ τὸ διαιρούμενον κλάσμα ἐν τῷ διαιρέτῃ περιέχεται, περιέχεται γὰρ καὶ τὸ πηλίκον ὡς κεκλασμένος ἀριθμὸς ἐν τῇ μονάδι μείζονι αὐτοῦ οὔσῃ ὡς ὁλοσχερεῖ. Εἰκότως οὖν ῥητέον, ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς τῶν ὁλοσχερῶν διαιρέσεως ἀεὶ ζητεῖται ἀριθμὸς ἐμ-

φαίνων, ἡλίκον μέρος ἐστὶν ὁ διαιρέτης τοῦ διαιρετέου, διὰ τὸ καὶ τὴν μονάδα ἀεὶ μέρος εἶναι τοιοῦτον τοῦ πηλίκου. Ἐπὶ δὲ τῆς τῶν κλασμάτων διαιρέσεως καὶ τοιοῦτον μὲν ζητεῖται κλάσμα, ἀλλὰ δὴ πολλάκις καὶ ἑτεροῖον, τουτέστιν ἐμφαῖνον ὁποῖον μέρος ἐστὶν ὁ διαιρετέος τοῦ διαιρέτου, διὰ τὸ καὶ τὸ πηλίκον μέρος εἶναι ἐνδέχεσθαι τῆς μονάδος.

ΤΜΗΜΑ Β.

ΠΕΡΙ

ΤΗΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΣΥΝΘΕΣΕΩΣ ΤΕ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α.

ΠΕΡΙ

ΦΥΣΕΩΣ ΚΑΙ ΓΕΝΕΣΕΩΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 194. Δύναμις ἐστὶ γινόμενον ἐκκύπτον, ἐὰν ποσότης ὁποιαοῦν ἐφ' ἑαυτὴν ἅπαξ ἢ πολλάκις πολλαπλασιασθῇ. Καλεῖται δὲ ὑπὸ Βιέτου (α) καὶ Μέγεθος κλιμακωτόν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 195. Ἡ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὴν Δύναμιν ἀναδίδουσα ποσότης, Ῥίζα τῆς αὐτῆς ἀκούει, καὶ Πλευρὰ κατὰ Διόφαντον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 196. Ἐὰν ἡ Ῥίζα ἐφ' ἑαυτὴν ἅπαξ ἀχθῇ ἐκκύπτει Τετράγωνον· ἐὰν δὲ τὸ τετράγωνον ἐπὶ τὴν ἰδίαν πρόσετι ῥίζαν πολλαπλασιασθῇ ἀναδίδωσι Κύβον· ἐὰν δ' αὖθις ὁ κύβος ἐπὶ τὴν ῥίζαν ἀχθῇ Διτετράγωνον, ἤτοι Τεταρτοταγὴς ἀναφύεται Δύναμις· Ὥστε οὕτω τοῦ πολλαπλασιασμοῦ συνεχιζομένου καὶ Δυναμόκυβον ἀναδίδοσθαι καὶ Κυβόκυβον καὶ τὰς λοιπὰς καθυπερτέρας τῶν Δυνάμεων.

(α) In Iſagoge in Artem analyticam.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἔσται τοίνυν τοῦ 2, Τετράγωνον ὁ 4, Κύβος ὁ 8, Διτετράγωνον ὁ 16, Δυναμόκυβος, ἢ πέμπτη δύναμις ὁ 32, Κυβόκυβος ὁ 64, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 197. Ἡ μονὰς ἄρα ὁσάκις ἂν καθ' ἑαυτὴν ἀχθῇ, ἀεὶ μονάδα ἀποτελεῖ (§. 8.). Ἡ τῆς μονάδος τοίνυν δύναμις ἀείποτ' ἐστὶ μονάς, διὰ τὸ ἀμετάθετον ταύτην εἶναι καὶ ἀεὶ ἑστηκυῖαν.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 198. Ἐπεὶ γὰρ ἡ δίκην ῥίζης ὑποτιθεμένη ποσότης, ἑαυτὴν μὲν πολλαπλασιάσασα τετραγωνίζεται, εἴτ' οὖν δευτεροβάθμιος καθίσταται· εἶτα δὲ διὰ τῆς τοῦ τετραγώνου ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιάσεως κυβοῦται, εἴτ' οὖν τριτοβάθμιος τελεῖται, καὶ αὖθις διὰ τοῦ ἐπ' ἄπειρον τῶν γινομένων ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασμοῦ ἐφ' ὑπερτέρας δυνάμεις ἐξαίρεται τέρματος ἄτερ (§. 196.)· τὰ γινόμενα Δυνάμεις, Ἰσχῦς, ἢ Ἀξίαι τῶν ῥιζῶν εἴρηνται· οἷον a^{μ}, ὅ, τι ποτ' ἂν ᾖ τὸ ὑπὸ τοῦ μ δηλούμενον, ἐστὶ δύναμις βαθμοῦ οἱουοῦν, ἧς τινος ῥίζα ἐστὶν ἡ ποσότης a, ἰσαρίθμως ταῖς ἐν τῷ μ μονάσι πολλαπλασιασθεῖσα.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 199. Ἡ τῇ πρὸς τὸ ἑαυτῆς τετράγωνον ἀναφορᾷ ῥίζα, Τετραγώνειος ἀκούει· Κυβικὴ δὲ, ἡ τῇ πρὸς τὸν κύβον· καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 200. Ἐπεὶ ἡ διὰ τῶν ἐκθετῶν σημειουμένη ποσότης, ποσάκις πολλαπλασιασμῷ ὑπαχθῆναι δύναται, ὑποδηλοῦται (§. 59.), εὔδηλόν ἐστιν ἑκάστης δυνάμεως τάξιν διὰ τοῦ ἑαυτῆς ἐκθέτου βαθμοδεικνυμένην ὑποσημαίνεσθαι, διὰ τοῦ αὐτοῦ δὲ καὶ τῇ ῥίζῃ τὸ ὄνομα, ἢ πρὸς τὰς δυνάμεις ἔνθεν καὶ ἔνθεν ἀναβλάσται. Διὸ α, ἢ α^1 (§. 62.) αὐτόθεν ὡς ἀρχὴ, Πρώτη τῆς αὐτῆς ῥίζης α ἀποκαλεῖται Δύναμις (§. 197.)· ἔστι καὶ γὰρ $\alpha^0 = \alpha^1 = 1$, ἀδύναμον· ὡς ἐχομένως δειχθήσεται. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ῥίζης ἐφ' ἑαυτὴν ἑνὶ πολλαπλασιασμῷ γινόμενον, οἷον α^2 δύναμις Δευτέρα καὶ Τετράγωνον τῆς ῥίζης α· ἡ δὲ α, ῥίζα δευτέρα τῆς δυνάμεως α^2· τὸ δὲ δισσῷ πολλαπλασιασμῷ, ἤτοι τὸ ὑπὸ τοῦ τετραγώνου καὶ τῆς ῥίζης ὡς α^3 Τρίτη ἢ Τριτοβάθμιος, ἤτοι Κύβος (§. 196.)· ἡ δὲ α, ῥίζα τρίτη τῆς δυνάμεως α^3 (§. 199.)· τὸ δὲ τρισσῷ πολλαπλασιασμῷ ὡς α^4 Τεταρτοταγὴς ἢ Τεταρτοβάθμιος· οὕτω κἀπὶ τῶν λοιπῶν· ἡ δὲ α^∞ Ἀπειροβάθμιος, ὥσπερ καὶ α^μ Βαθμοῦ ἀπροσδιορίστου.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οὐ χαλεπὸν δὲ συνιδεῖν ἐν τούτοις τὰ στοιχεῖα τάξιν ἔχειν οἱονεὶ πλευρῶν, ὑφ' ὧν τὰ παραγόμενα συγ-

κροτεῖται· Καὶ ὥσπερ διὰ δυεῖν γραμμῶν ἀλλήλαις συμπολλαπλασιαζομένων ὀρθογώνιον ἀναφύεται τοῖς Γεωμέτρουσιν· ἀνίσων μὲν οὐσῶν, Ἑτερόμηκες· ἴσων δὲ, Τετράγωνον. καὶ διὰ τριῶν ἀνίσων μὲν, Πρίσμα· ἴσων δὲ, Κύβος· ὡς ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ, ἐκ περιουσίας δειχθήσεται· οὕτως ἡμῖν ἐνταῦθα $\alpha\beta$ ὀρθογώνιον ὑποτίθεται εἶναι, οὗ πλευραὶ α καὶ β· τὸ δὲ $\alpha\alpha$, ἤτοι τὸ α^2 τετράγωνον, οὗ πλευρὰ ἡ α, ἢ καὶ ῥίζα ἀκούουσα· καὶ $\alpha\beta\gamma$ δὲ, ἢ $\alpha^2\beta = \alpha\alpha\beta$ Στερεόν ἐστιν Ἀλγεβραϊκὸν, οὗ πλευραὶ τρεῖς, αἱ α^2 β, ἢ α καὶ β καὶ γ· τὸ δὲ $\alpha\alpha\alpha$, ἤτοι τὸ α^3 κύβος ἐστὶν Ἀλγεβραϊκός. Ἀλλὰ τοῖς μὲν Γεωμέτραις μέχρι τῶν τριχῇ διαστατῶν, ἡ πρόοδος ἵσταται, τοῖς δ' Ἀλγεβραΐσταις καὶ εἰς τέτταρα, καὶ εἰς πέντε, καὶ εἰς ἄπειρον αἱ διαστάσεις πληθύνονται· οἷον $\alpha\beta\gamma\delta$, $\zeta\lambda\mu\pi$, Στερεὰ τῶν Ἀλγεβραϊστῶν ἐστὶν, ὧν τῷ μὲν τέτταρες διαστάσεις εἰσὶ, τῷ δὲ πέντε. κἀντεῦθεν διὰ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς ληφθείσης, ἡ τέρματος ἄνευ ἀνακύπτει πληθὺς τῶν Δυνάμεων. Ὅθεν καὶ τὸ ὑπὸ διαφερουσῶν ποσοτήτων πολλαπλασιασμῷ γινόμενον, διχῇ, ἢ τετραχῇ, καὶ ἁπλῶς πολλαχῇ, Τοσαχῇ διαστατὸν, ὅσαι δηλονότι αἱ πολλαπλασιαζόμεναι ποσότητες, τοῖς Ἀλγεβραΐσταις ἀκούει.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 201. Ἡ αὐτὴ τοίνυν ποσότης πρὸς διαφόρους ὅρους τὴν παράθεσιν ἔχουσα πῇ μὲν ὡς ἐλάσσων, πῇ δὲ ὡς μείζων τε καὶ ὑπερέχουσα ἐκλαμβάνεται· οἷον α^2 πρὸς μὲν α δύναμις ἂν εἴη δευτέρα (§. 200.), πρὸς δὲ α^3 δύναμις πρώτη (αὐτ.), καὶ ὧδε μὲν ὡς πλευρὰ, ἐκεῖσε δὲ ὡς τετράγωνον. Οὕτωτοι καὶ ὁ ἀριθμὸς 4, ὁ αὐτὸς πλευρὰ μὲν τοῦ 16, τετράγωνον δὲ τοῦ 2.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 202. Δύναμις Καταφατικὴ ἢ Ἀποφατική ἐστιν, ἡ ἐκθέτας πλουτοῦσα ἀριθμοὺς ὁλοσχερεῖς, ἢ καὶ κλασματίας καταφάσκοντας ἢ ἀποφάσκοντας.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 203. Δυνάμεις Σύμμετροί εἰσιν, αἱ δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ μεγέθους ὑπολοίπου δίχα καταμετρούμεναι· Ἀσύμμετροι δὲ ἢ ἀτελεῖς, ὧν αἱ ῥίζαι ἀριθμῷ οὐδενὶ ὁλοσχερεῖ οἷαί τ' εἰσὶ παρίστασθαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

Ὁ δ' Εὐκλείδης Συμμέτρους Δυνάμεις προσείρηκεν εὐθείας, ὧν τὰ τετράγωνα δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ τῆς εὐθείας διαστήματος, οἱονεὶ μέτρου ἐκλαμβανομένου μετρεῖσθαι ἔχουσιν. Ἀσυμμέτρους δὲ, ὧν τὰ τετράγωνα οὐδὲν κοινὸν ἔχουσι μέτρον (α). Ἐὰν οὖν ἀντὶ τῶν γραμμῶν οἱ ἀριθμοὶ 3, 5. ληφθῶσιν, ἔσονται αἱ τούτων δυνάμεις $\sqrt{9}$, $\sqrt{25}$ σύμμετραι· ὡσαύτως καὶ τὰ τῶν $2\sqrt{3}$, $7\sqrt{5}$ τετράγωνα 12, 245. Ἀσυμμετρία δὲ παρὰ τοῖς Παλαιοῖς ἤκουσεν, ὃ δὴ ἡμεῖς ἄλογον

(α) Εὐθεῖαι δυνάμει Σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ὑπ' αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται. Ἀσύμμετροι δὲ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχεται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι. Βιβ. Ι'. ὅρ. γ', δ'.

ἢ ἀδύνατον καλοῦμεν, τουτέστιν ὁ μεταξὺ δυοῖν μεγεθῶν θεωρούμενος λόγος, ὁ ἐν ὁλοσχερέσιν ἀριθμοῖς ἐντελῶς μὴ ἐκλαμβανόμενος, οἷον δὴ ὁ μεταξὺ 1 καὶ $\sqrt{2}$, μεταξὺ δηλαδὴ τῆς τοῦ Τετραγώνου πλευρᾶς καὶ τῆς Διαγωνίου, μεταξὺ τῆς τοῦ Κύκλου Διαμέτρου καὶ τῆς Περιφερείας.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

Ἐν τοῖς ἐφεξῆς εἰρήσεται ἀριθμοὺς ὅτι πλείστους ἀτελεῖς εἶναι δυνάμεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 204. Ἡ Ῥίζα, ἥ τε Τετράγωνος καὶ ἡ Κυβικὴ, εἴθ' ὑπερτέρας οἱασοῦν Δυνάμεως, καλεῖται Διώνυμος, ἐὰν ἐκ δυοῖν· Τριώνυμος, ἐὰν ἐκ τριῶν. καὶ Πολυώνυμος, ἐὰν ἐκ πλειόνων μερῶν ᾖ συνεστηκυῖα.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 205. Σημεῖον Ῥίζης Τετραγωνείου ἔστω $\sqrt[2]{\ } = \sqrt{\ }$, Κυβικῆς $\sqrt[3]{\ }$, Τετάρτης δυνάμεως $\sqrt[4]{\ }$, Δυνάμεως ἀορίστου $\sqrt[\mu]{\ }$, κτλ. οἷον $\sqrt[2]{64} = 8$, $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[4]{81} = 3$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 206. Ἔχει τοίνυν ἡ μονὰς πρὸς τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, ὡς ἡ ῥίζα πρὸς αὐτὸ τὸ τετράγωνον (§. 102. 194.). Ἔστι τοίνυν ἡ ῥίζα μέση ἀνάλογος τῆς τε μονάδος καὶ τοῦ τετραγώνου, οἷον 1 : 2 : 4. Αὖθις ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὴν ῥίζαν, οὕτω τὸ τετράγωνον πρὸς τὸν κύβον, ἔσται καὶ ἡ ῥίζα πρὸς τὸ τετράγωνον, ὡς τὸ τετράγωγον πρὸς τὸν κύβον, προϊόντων τῆς τε μονάδος, ῥίζης τετραγώνου καὶ κύβου ἐν Γεωμετρικῇ Ἀναλογίᾳ, ἤτοι $1 : 2 : 4 : 8$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 207. Ποσότης Ῥιζαῖα, ἢ Ῥιζικὴ καλεῖται, ἡ σημεῖον ῥίζης πρὸ ἑαυτῆς ἔχουσα.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 208. Ἐκθέτης Ῥίζης ἐστὶν, ἡ τῷ ῥιζικῷ σημείῳ ἐντεθειμένη ποσότης.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 209. Ἐκθέτης Δυνάμεως ἐστὶν, ὁ σημαίνων ἀριθμὸς ποσάκις ἡ δοθεῖσα δύναμις διαιρετέα ἐστὶν ἐπὶ τὴν ῥίζαν πρὶν ἀφικέσθαι ἐπὶ τὴν μονάδα· Καλεῖται δὲ καὶ Ἑρμηνεὺς, Ἐνδείκτης, Ἐκφάντωρ καὶ Παρωνυμῶν, ἤτοι παρ' οὗ ἡ ῥίζα ὀνομάζεται, καὶ κατὰ Διόφαντον Ἐπίσημον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οὕτω τοῦ μὲν τετραγώνου ἐκθέτης ἐστὶν ὁ 2, τοῦ δὲ κύβου ὁ 3 (§. 196.)· κἀπὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 210. Παρωνυμουμένων τοίνυν τῶν δυνάμεων ὑπ' ἐκθετῶν ὁλοσχερῶν (§. 209.), ἕξουσιν αἱ ῥίζαι τὴν παρωνυμίαν πάντως ἀντίστροφον. Ἐπὶ μὲν γὰρ τῆς τῶν δυνάμεων ἐξάρσεως διὰ πολλαπλασιασμοῦ τὰ τῆς πράξεως γίνεται, ἐπὶ δὲ τῆς τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς διαίρεσις ἐστὶ τὸ τελούμενον. Ἔνθεντοι ἐκείνως μὲν οἱ

ἐκθέται ἀκέραιοι, οὕτω δὲ κλασματίαι, οἵγε δὴ καὶ ἰσοδυναμοῦσι Ῥιζικοῖς τὸν τῆς σημανθησομένης ῥίζης ἐκθέτην χαρασσόμενον ἐπιφερούσοις· ὡς ἐν οἰκείῳ τόπῳ ἕκαστον τούτων σαφέστερον διατρανωθήσεται· οἷον ἐπεὶ αἱ τοῦ α, ἢ α^1 ῥίζαι πρώτη, δευτέρα, κτλ. εἰσὶ

$$\alpha^{\frac{1}{1}},\ \alpha^{\frac{1}{2}},\ \alpha^{\frac{1}{3}},\ \alpha^{\frac{1}{4}},\ \alpha^{\frac{1}{5}},\ \alpha^{\frac{1}{6}},\ \alpha^{\frac{1}{7}},\ \text{κτλ.}$$

ἔσονται αὗται τῇ ἐφεξῆς ὡσαύτως ἐκθέσει ἰσοδύναμαι

$$\sqrt[1]{\alpha},\ \sqrt[2]{\alpha},\ \sqrt[3]{\alpha},\ \sqrt[4]{\alpha},\ \sqrt[5]{\alpha},\ \sqrt[6]{\alpha},\ \sqrt[7]{\alpha},\ \text{κτλ.}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 211. Ἐπεὶ γὰρ $\alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\alpha}$, κἀνάπαλιν $\sqrt[2]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{2}}$ (§. 210.)· ἔσται ὡσαύτως καὶ $\alpha^2 = \sqrt[\frac{1}{2}]{\alpha}$, ἑπομένως τε $\sqrt[\frac{1}{2}]{\alpha} = \alpha^2$· τί γὰρ ἂν εἴη ἄλλο τὸ $\sqrt[\frac{1}{2}]{\alpha}$, εἰμὴ α^2, τουτέστι τὸ ἐπὶ τῆς τοῦ ῥιζικοῦ κορυφῆς ἐπιχαραχθὲν κλάσμα, διὰ τῆς ἐν τῷ α ἀντ' ἐκθέτου μονάδος (§. 62.) διαιρούμενον· ὃ δὴ ἀντιστραφὲν (§. 189.) ὁλοσχερῆ τὸν κλασματώδη ἡμῖν ἐκθέτην προὔβάλετο. Κἀντεῦθεν, ἐπεὶ ῥίζα οἱαοῦν διττῶς ἐπισημαίνεσθαι ἔχει, ἤτοι διὰ κλασματώδους ἐκθέτου, ἢ διὰ τοῦ ῥιζικοῦ ἐκθέτην ὁλοσχερῆ ἐπιφέροντος· τῷ αὐτῷ πάντως τρόπῳ καὶ δύναμις οἱαδηποτοῦν διττῶς ἐκτεθήσεται, ἢ δι' ἐκθέτου ὁλοσχεροῦς, ἢ διὰ τοῦ ῥιζικοῦ κλασματώδη ἐπικεχαραγμένον ἐκθέτην φέροντος. Ἔνθεντοι αἱ ἀπὸ τῆς πρώτης δυνάμεως στιχηδὸν προβαίνουσαι δυνάμεις, ἀπὸ τοῦ μηδενικοῦ ἀρχόμεναι οὕτως ἐκσημανθήσονται.

$$\alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5,\ \alpha^6,\ \alpha^7,\ \text{κτλ.}$$

ὃ δὴ ταυτόν ἐστι τῷ ἐφεξῆς τύπῳ, ὡς εἴρηται.

$$\sqrt[\frac{1}{0}]{\alpha},\ \sqrt[\frac{1}{1}]{\alpha},\ \sqrt[\frac{1}{2}]{\alpha},\ \sqrt[\frac{1}{3}]{\alpha},\ \sqrt[\frac{1}{4}]{\alpha},\ \sqrt[\frac{1}{5}]{\alpha},\ \sqrt[\frac{1}{6}]{\alpha},\ \sqrt[\frac{1}{7}]{\alpha},\ \text{κτλ.}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 212. Αἱ Ἀλγεβραϊκαὶ τοίνυν Δυνάμεις δι' ἀποφατικῶν ἐνίοτε ἐκθετῶν σημαινόμεναι, ἤτοι α^{-1}, α^{-2}, α^{-3}, κτλ. εἰσὶν ὡσαύτως τῶν δυνατῶς ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ ἐχόντων ποσοτήδων, ὡς καὶ αἱ α^1, α^2, α^3, κτλ. Ληφθεισῶν γὰρ τῶν στιχηδὸν ἀναδιδομένων δυνάμεων τοῦ α, τάξει τινὶ φθινούσῃ· ἤτοι

$$\alpha^6,\ \alpha^5,\ \alpha^4,\ \alpha^3,\ \alpha^2,\ \alpha^1,\ \alpha^0.$$

Ἑκάστου τε τῶν ὅρων διὰ τοῦ α διαιρουμένου

$$\frac{\alpha^6}{\alpha},\ \frac{\alpha^5}{\alpha},\ \frac{\alpha^4}{\alpha},\ \frac{\alpha^3}{\alpha},\ \frac{\alpha^2}{\alpha},\ \frac{\alpha^1}{\alpha},\ \frac{\alpha^0}{\alpha}.$$

Ἐκκύψει

$$\alpha^5,\ \alpha^4,\ \alpha^3,\ \alpha^2,\ \alpha^1,\ \alpha^0,\ \alpha^{-1}.$$

ἐπεὶ γὰρ $\frac{\alpha^6}{\alpha} = \alpha^{6-1} = \alpha^5$ (§. 139.), καὶ $\frac{\alpha^5}{\alpha} = \alpha^{5-1} = \alpha^4$ (αὐτ.), κτλ. ἔσται ὡσαύτως καὶ $\frac{\alpha^1}{\alpha} = \alpha^{1-1} = \alpha^0$, καὶ $\frac{\alpha^0}{\alpha} = \alpha^{0-1} = \alpha^{-1}$. τῷ αὐτῷ τρόπῳ ἐκκύψει καὶ $\frac{\alpha^{-1}}{\alpha} = \alpha^{-1-1} = \alpha^{-2}$, καὶ ἐφεξῆς οὕτω.

Ὥστε ἡ ἀπὸ τῆς μονάδος α^0 ἑκατέρωθεν στείχουσα πρόοδος, οὕτω διασημαινομένη ἐκκείσεται,

$$\ldots\ \alpha^4,\ \alpha^3,\ \alpha^2,\ \alpha^1,\ \alpha^0,\ \alpha^{-1},\ \alpha^{-2},\ \alpha^{-3},\ \alpha^{-4}\ \ldots$$

Ἡ μὲν οὖν α^{-1} Δύναμις Ὑποπρώτη λέγοιτ' ἂν τῆς ῥίζης α, ἡδὲ α^{-2} Ὑποδευτέρα· καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως. Εἰ καὶ ἁπλῶς ἐκράτησε ταύτας τοῖς κατὰ τοὺς ἐκθέτας ἀριθμοῖς ἀποκαλεῖν· ὡς τὴν α^{-4} δύναμιν εἶναι τῆς ῥίζης α· ἧς ὁ ἐκθέτης -4.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 213. Οἱ ἀπὸ τῆς μονάδος τοίνυν ἐν ἴσοις τοῖς διαλείμμασιν, ἀλλ' ἐπὶ τὰ ἀντίθετα τῶν μερῶν ἀφεστῶτες τῶν δυνάμεων ὅροι, διὰ κλασμάτων δηλοῦσθαι ἔχουσιν, ὧν θάτερον θατέρου ἐστὶ τὸ ἀντίστροφον· ἐὰν γὰρ ὑποτεθῇ $\alpha = 2$, ὁ ἀνωτέρω ἔσχατος στίχος.

$$\alpha^5,\ \alpha^4,\ \alpha^3,\ \alpha^2,\ \alpha^1,\ \alpha^0,\ \alpha^{-1},\ \alpha^{-2},\ \alpha^{-3},\ \alpha^{-4},\ \alpha^{-5},$$

ἐπὶ τόνδε μεταστραφήσεται.

$$\frac{32}{1},\ \frac{16}{1},\ \frac{8}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{2}{1},\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32}.$$

Ἔστι καὶ γὰρ $\alpha^{-2} = \frac{1}{\alpha^2}$, καὶ $\alpha^{-3} = \frac{1}{\alpha^3}$ ὡς δῆλον ἐκ τῶν ῥηθέντων (§. 212.)· καὶ δὴ κἀκ τῶν ῥηθησομένων ἐχομένως ἐν τῇ περὶ τούτων θεωρίᾳ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 214. Ἡ ἀφ' οὑτινοσοῦν ἄρα τῶν ὅρων, ἕς γε τὴν μονάδα ἐπάνοδος καὶ ταύτης ἔτι περαιτέρω πρόοδος, ὡς (§. 212.),

α^5, α^4, α^3, α^2, α^1, α^0, α^{-1}, α^{-2}, α^{-3}, α^{-4}, α^{-5}, κτλ.

ἐμφαίνει, τοὺς μὲν καταφάσκοντας ἐκθέτας μονάδος εἶναι μείζονας, τοὺς δὲ ἀποφάσκοντας μονάδος ἐλάσσονας· μεθόριον γὰρ αὕτη τοῦ τε ἀριθμοῦ καὶ τῶν μορίων (§. 7.)· τὸ δὲ α^0 τὸν ὅρον τὸν ἀντὶ μονάδος ἐπὶ τῆς σειρᾶς ληφθέντα (§. 212. 213.), ὑπὲρ ὃν τοῦ α ὄντος τοσῷδε μᾶλλον, οἱ μὲν α^2, α^3 καὶ οἱ λοιποὶ αὔξουσιν· οἱ δὲ α^{-1}, α^{-2}, α^{-3} κτλ. φθίνουσι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οἱ δὲ τοῖς Ἄραψιν ἐν τούτοις ἑπόμενοι ἑκάστῃ δυνάμει ἴδιον ἀπονέμουσιν ὄνομα, ὡς α, Ῥίζα· α^2, Τετράγωνον· α^3, Κύβος· α^4, Τετραγωνοτετράγωνον, ἤτοι Διτετράγωνον. α^5, Κωφόστερεος πρῶτος· α^6, Τετράγωνον Κύβου· α^7, Κωφοστέρεος δεύτερος· α^8, Τετραγωνοτετραγώνου Τετράγωνον· α^9, Κύβος Κύβου πρῶτος· α^{10}, Τετράγωνον τοῦ κωφοστερεοῦ· α^{11}, Κωφοστέρεος τρίτος· καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως· οὕτω καὶ ἐν ἀριθμοῖς.

$$\alpha^1 = 1 \times 1 = 1.$$
$$\alpha^2 = 2 \times 2 = 4.$$
$$\alpha^3 = 2 \times 4 = 8.$$
$$\alpha^4 = 2 \times 8 = 16.$$
$$\alpha^5 = 2 \times 16 = 32.$$
$$\alpha^6 = 2 \times 32 = 64.$$
$$\alpha^7 = 2 \times 64 = 128.$$
$$\alpha^8 = 2 \times 128 = 256.$$
$$\alpha^9 = 2 \times 256 = 512.$$
$$\alpha^{10} = 2 \times 512 = 1024.$$
$$\alpha^{11} = 2 \times 1024 = 2048.$$

Παρ' Ἕλλησι δέ, ὁ μὲν πρῶτος κωφοστέρεος, Ὑπερστέρεος καλεῖται· ὁ δὲ δεύτερος, Ὑπερστέρεος δεύτερος· ὁ δὲ τετράγωνος τοῦ κωφοστερεοῦ Τετράγωνος πρῶτος ἐπιφερόμενος· ὥστε καὶ Ὑπερστέρεον τρίτον ἀκολουθεῖν, καὶ Τετράγωνον δεύτερον· καὶ ἐφεξῆς. Τὰ δὲ παρὰ Διοφάντῳ ἐν τοῖς τῶν Ἀριθμητικῶν βιβλίοις (α) φερόμενα ταῦτα· ἡ μὲν

(α) Βιβ. Α. ὅρ. β'.

πρώτη δύναμις α, Πλευρά, ἤτοι Ῥίζα· α^2, Τετράγωνον· α^3, Κύβος· α^4, Δυναμοδύναμις ἢ Τετραγωνοτετράγωνος· α^5, Δυναμόκυβος ἢ Τετραγωνόκυβος. α^6, Κυβόκυβος· α^7, Τετραγωνοτετραγωνόκυβος· α^8, Τετραγωνοκυβόκυβος· α^9, Κυβοκυβόκυβος· (α) κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 215. Ἀναφυομένων τοίνυν τῶν Δυνάμεων τῷ τῶν ῥιζῶν ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασμῷ (§. 195.), ἕπεται ταύτας ἐν λόγῳ εἶναι τοσαπλασίονι τῶν ἰδίων πλευρῶν, κατὰ τὰς ἐν τῷ ἐκθέτῃ μονάδας· οἷον τὰ μὲν τετράγωνα α^2 πρὸς β^2 ἐν λόγῳ εἰσὶ διπλασίονι τοῦ α πρὸς β· οἱ δὲ κύβοι $\alpha^3 : \beta^3$ ἐν τριπλασίονι τοῦ $\alpha : \beta$· οἱ δὲ τετραγωνοτετράγωνοι ἐν τετραπλασίονι (§. 200.), αἵ τε λοιπαὶ δυνάμεις ἐν τοσαπλασίονι τῶν ἰδίων ῥιζῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 216. Αἱ ἐφ' ἑκάστου ἐκθέτου μονάδες, ἰσάριθμοι μὲν ταῖς κατὰ τὴν δύναμιν εἰσὶ διαστάσεσι, μονάδι δὲ ὑπερέχουσαι ταῖς ἀπαιτουμέναις εἰς γένεσιν τῆς δυνάμεως πολλαπλασιάσεσιν· οἷον ἐπὶ τῆς ἕκτης δυνάμεως α^6, ἓξ μὲν τῷ ἐκθέτῃ ἔνεισιν αἱ μονάδες, ἓξ δὲ καὶ αἱ διαστάσεις αααααα, πέντε δὲ αἱ πολλαπλασιάσεις $\alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 217. Ἀνακύπτει ἄρα ἡ δύναμις, οὐ μόνον πολλαπλασιαζομένης τῆς πλευρᾶς ἰσαρίθμως ταῖς τοῦ πα-

(α) Μέτιθι τὰ περὶ Ἀλγέβρας ἐν ἀρχῇ ἀφηγηθέντα.

ρωνυμοῦντος ἐκθέτου μονάσι πλὴν μιᾶς (§. 216.), ἀλλὰ καὶ δυεῖν δυνάμεων, ὧν πλευρὰ ἡ αὐτὴ ἐνιζομένων τῷ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ἑκατέρου τοῦ ἐκθέτου ἐπιγραφομένῳ ἀθροίσματι· καὶ τριῶν ὡσαύτως, καὶ τεττάρων· Ὅθεν α^6 ἐκληφθείη ἂν καὶ ὡς ἕκτη δύναμις, ἡ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς α πενταπλασιασθείσης, καὶ ὡς δευτέρα ἀπὸ τῆς πλευρᾶς α^3 ἑνὶ πολλαπλασιασμῷ ἀνακύψασα, καὶ γὰρ $\alpha^3 \times \alpha^3 = \alpha^6$· καὶ ὡς τρίτη δὲ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς α^2· Ἡ μὲν γὰρ δευτέρα $\alpha^2 \times \alpha^2 = \alpha^4$· ἡ δὲ τρίτη $\alpha^2 \times \alpha^2 \times \alpha^2 = \alpha^6$ (§. 115. Ε΄.).

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 218. Ἐὰν σημαντέα ἡ δύναμις ποσότητός τινος συγκειμένης, ἤτοι πολυμεροῦς, αὕτη παρενθέσει διαστελλέσθω, τοῦ τῆς δυνάμεως ἐκθέτου ἐπιχαρασσομένου· ἢ, γραμμῆς ἐπαχθείσης προσημειούσθω τὸ ῥιζικὸν σημεῖον $\sqrt{}$ μετὰ τοῦ τῆς ῥίζης ἐκθέτου, ἐν ταῖς τούτου πλευραῖς τιθεμένου· ἢ δι' ἐκθέτου κλασματικοῦ ἐν τῷ τῆς γραμμῆς πέρατι δεξιόθεν ἐπισημειουμένου· ἢ ἔσχατον, τὸ ῥιζικὸν προτετάχθω, οὗ ἐπὶ τῆς κορυφῆς ὁ τῆς ἀξίας ἐκθέτης ἐπιτιθέσθω, ἐὰν ἀνώτερος ἢ τοῦ τῶν τετραγώνων βαθμοῦ· οἷον $(\alpha+\beta+\gamma)^2$, $\overline{2\alpha+2\delta}^{\,2}$, $\sqrt[\mu]{(\alpha+\gamma-\delta)}$, $\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{(\alpha^2-3\delta+\varepsilon)^{\frac{1}{3}}}{(\varepsilon^2-\beta^2)^{\frac{1}{3}}}$, ἢ $\overline{\frac{\alpha^2-3+\varepsilon}{\varepsilon^2-\beta^2}}^{\,\frac{1}{3}}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 219. Ὁποιαοῦν τοίνυν ῥίζα ἢ πλευρὰ διττῶς παρίστασθαι δύναται, ἀριθμητικῷ χαρακτῆρι καὶ τοῖς

στοιχείοις. Εἰ μὲν οὖν ἡ ῥίζα δι' ἀριθμοῦ παρίσταται φέρ' εἰπεῖν διὰ τοῦ 2, αἱ ἐξ αὐτῆς δυνάμεις ἔσονται αὗται· 1^0, 2^1, 4^2, 8^3, 16^4, 32^5, καὶ ἐφεξῆς κατὰ τὴν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν χύσιν ἢ σειράν. Εἰ δὲ διὰ στοιχείου, αὗται· α^0, α^1, α^2, α^3, α^4, α^5, α^6 κτλ. Ὥστε, ληφθέντος τοῦ $\alpha = 2$, εἶναι $\alpha^2 = 4$, $\alpha^3 = 8$; $\alpha^4 = 16$, κἀπὶ τῶν ἄλλων ὡσαύτως.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 220. Τὰ μὲν καταφατικοὺς ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς ἐκθέτας ἔχοντα, ὡς τὸ α^2, οὕτως ἀπαγγελέσθωσαν· α ὑψωθὲν ἐν τοῖς δυσίν, ἢ τὸ τετράγωνον τοῦ α (§. 220.)· α^3, α ὑψωθὲν ἐν τοῖς τρισίν, ἢ ὁ κύβος τοῦ α, ἢ ἡ τρίτη δύναμις τοῦ α· καὶ γενικῶς α^μ, α ἐξαρθὲν ἐν τῷ μ, ἢ ἡ μ δύναμις τοῦ α. Ὁμοίως τὸ $\overline{\alpha+\beta}^{\,\mu}$ ἢ $(\alpha+\beta)^\mu$, α σὺν β ὑψωθέντα ἐν τῷ μ, ἢ τὸ κεφάλαιον τῶν α καὶ β ἐξαρθὲν ἐν τῷ μ, ἢ ἡ μ δύναμις τῶν α καὶ β. Τὰ δὲ ἀποφατικοὺς ὁλοσχερεῖς οὕτω, τὸ μὲν α^{-1}, α ἐπὶ δύναμιν ἐξαρθὲν μονάδος ἧττω, ἢ δύναμις ὑποπρώτη τοῦ α· καὶ ἐν γένει $\alpha^{-\mu}$, α ὑψωθὲν ἐπὶ δύναμιν μ ἀποφατικήν. Τὰ δὲ καταφατικοὺς κεκλασμένους οὕτω $\alpha^{\frac{1}{2}}$, α ὑψωθὲν ἐν ἡμίσει· $\alpha^{\frac{2}{3}}$, α ὑψωθὲν ἐν δυσὶ τριτημορίοις· Ἐπὶ δὲ τῶν κεκλασμένων ἀποφατικῶν $\alpha^{-\frac{2}{3}}$, α ὑψωθὲν ἐν τοῖς ἀποφατικοῖς δυσὶ τριτημορίοις, ἢ α ὑψωθὲν ἐπὶ ἔλαττον δύω, ἢ ἐπὶ ὑποδευτέραν δύναμιν διαιρουμένην διὰ τοῦ 3.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὰ τῶν Δυνάμεων ὀνόματα τοῖς ἀριθμοῖς προσωκείωται (§. 200.), ἀπὸ τῆς ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ τῶν

Μεγεθῶν Πολλαπλασιάσεως (αὐτ. Σχόλ.)· Ἐπεὶ γὰρ δύω εὐθεῖαι γραμμαὶ Γωνίαν συνιστῶσι, καὶ ἐὰν πρὸς ἀλλήλας πολλαπλασιασθῶσιν ἐπίπεδόν τι ἀποτελοῦσιν· ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ τρίτην τὸ Ἐπίπεδον, Στερεὸν ἀποτελοῦσιν. Οὕτω καὶ οἱ Ποσάκις Ποσοὶ λεγόμενοι ἀριθμοὶ, ἤτοι δύω ἀριθμοὶ ἐπ᾽ ἀλλήλους πολλαπλασιαζόμενοι, οἷον δὶς τρία, ἢ δὶς δύω, Πλευραὶ καλοῦνται ὡς αἱ γραμμαὶ τῶν Ἐπιπέδων· οἱ δ᾽ ἐξ αὐτῶν γινόμενοι, Ἐπίπεδοι μὲν γενικῶς, ὅτι δυσὶν ἀριθμοῖς, οἷον δυσὶ πλαγίαις, αἷς τὸ ἐπίπεδον ἀποτελεῖται, περιέχονται· εἰδικῶς δὲ Τετράγωνοι, ὧν τὸ μὲν δὶς τρία, ἑτερόμηκες ποιεῖ σχῆμα, τὴν ἑτέραν τῶν πλευρῶν ἐπιμηκεστέραν ἔχον, τὸ δὲ δὶς δύω, τετράγωνον ἰσόπλευρον, ἴσας ἔχον ἀμφοτέρας τὰς πλαγίας. Ὡσαύτως καὶ οἱ Ποσοὶ Ποσάκις Ποσοὶ λεγόμενοι, καλοῦνται Στερεοὶ κατὰ μίμησιν τῶν Στερεῶν τῶν Συνεχῶν, ὁπηνίκα δηλαδὴ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς τὸν πολλαπλασιάσαντα αὖθις πολλαπλασιάσῃ, Στερεὸν τηνικαῦτα ἀποτελεῖ Σχῆμα· οἷον δὶς δύω τέσσαρα, δὶς τέσσαρα ὀκτώ· $3 \times 3 = 9$, $3 \times 9 = 27$. Οὗτοι μὲν οὖν ἐν γένει Στερεοὶ λέγονται, ὅτι τρισὶν ἐμπεριέχονται διαστάσεσιν, ἃς οἱ τρεῖς ἀποτελοῦσιν ἀριθμοί· κατὰ μὲν γὰρ τὸν πρῶτον πολλαπλασιασμὸν τὸ μῆκος ἀποτελεῖται καὶ τὸ πλάτος, κατὰ δὲ τὸν δεύτερον καὶ τὸ βάθος· εἰδικῶς δὲ Κύβοι ἤκουσαν. Αὗται τοιγαροῦν αἱ ἰδιότητες καθ᾽ ἃς οἱ ἀριθμοὶ Ἐπίπεδοι, ἢ Στερεοὶ, ἢ Ἐπιμήκεις, ἢ Τετράγωνοι λέγονται, Ποιότητες ἐν ἀριθμῷ καλεῖσθαι ἠξίωνται, καὶ καθ᾽ ἑαυτοὺς οἱ ἀριθμοὶ Ποιοὶ ὡσαύτως,

Ἔνθεν τοι καὶ ὁ Στοιχειωτὴς οὕτως αὐτοὺς ὁρίζεται (α). Ὅταν μὲν δύω ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος Ἐπίπεδος καλεῖται, Πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί. Ὅταν δὲ τρεῖς πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος Στερεὸς καλεῖται, Πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί· Τετράγωνος δὲ ἀριθμός ἐστιν, ὁ ἰσάκις ἴσος, ἢ ὁ ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος, ἢ ὁ ὑπό τινος ἀριθμοῦ ἐφ᾽ ἑαυτὸν πολλαπλασιαζομένου γινόμενος· Κύβος δὲ, ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις, ἢ ὁ ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος, ἢ ὁ διὰ πολλαπλασιασμοῦ τετραγώνου τινὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν ἰδίαν ῥίζαν γινόμενος· ἢ κατ᾽ ἄλλους, ὁ ἔχων τὰς τρεῖς διαστάσεις ἴσας, ἢ ὁ ἔχων πλευρὰς δώδεκα, γωνίας δὲ ὀκτὼ, ἐπίπεδα δὲ ἕξ. Αἱ δὲ τοῦ Τετραγώνου καὶ τοῦ Κυβικοῦ ἀριθμοῦ ῥίζαι, ἁπλῶς ῥίζαι καὶ πλευραὶ καλοῦνται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 221. Τετράγωνον ἅπαν δέον εἶναι θετικόν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τετραγώνου οὑτινοσοῦν, οἷον α^2, ἡ ῥίζα α, ἢ κατὰ θέσιν ἐστὶν, ἢ κατ᾽ ἄρσιν, εἴτ᾽ οὖν ἀπόφασιν, ὡς $+\alpha$, ἢ $-\alpha$· παρὰ γὰρ ταῦτα ἕτερον ῥίζης εἶδος θέσθαι ἀμήχανον. Ἀλλαμὴν ἢ $+\alpha$, ἢ $-\alpha$ τεθείη, τοὐντεῦθεν ἐκκύπτον τετράγωνον καταφήσει πάντως· Τὸ γὰρ τε-

(α) Βιβ. Ζ. ὅρ. ιϛ΄. ιζ΄. ιη΄.

τράγωνον ἀναφύεται τῆς αὐτῆς ποσότητος ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασμῷ ἅπαξ ἀχθείσης (§. 196.) Ἐὰν οὖν $+\alpha$ ἐφ' ἑαυτὸ ἀχθῇ, ἐκκύψει $(+\alpha)^2 = +\alpha \times +\alpha = +\alpha^2$ (§. 115. Β'.)· Ἐὰν δ' αὖθις $-\alpha$, ὡσαύτως ἔσται $(-\alpha)^2 = -\alpha \times -\alpha = +\alpha^2$ (αὐτ.)· ἄρα τετράγωνον ἅπαν δέον εἶναι θετικόν. Ο. Ε. Δ. Ληπτέον δὲ πρὸ ὀφθαλμῶν καὶ τὸν προεκτεθέντα (αὐτ.) τοῦ Διοφάντου ἐν γένει Κανόνα· Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 222. Ἅπαν τοίνυν τετράγωνον δυεῖν ῥιζῶν ἐστὶ περιεκτικόν, τῆς μὲν καταφασκούσης, τῆς δ' ἀποφασκούσης· καὶ γὰρ τετράγωνον οἱονδήποτοῦν οἷον α^2, πρόεισιν ἐκ τοῦ $+\alpha \times +\alpha$, ὡς καὶ ἐκ τοῦ $-\alpha \times -\alpha$ (§. 221.). Διὸ καὶ ἐπὶ τετραγωνικῆς τινος ἐξισώσεως $\rho^2 = \alpha\beta$, ἔσται τὸ ταύτης ἐπιβάλλον $\rho = \pm\sqrt{\alpha\beta}$, ἤτοι τὸ ταύτῃ ἰδιάζον ἐκτίμημα, διά τε τῆς καταφατικῆς $+\sqrt{\alpha\beta}$, καὶ δὴ καὶ τῆς ἀποφατικῆς $-\sqrt{\alpha\beta}$ ἐξέρχεται ῥίζης (§. 51.). Ἔνθεντοι καὶ ἑκατέρα τῶν ῥιζῶν ἀληθεύουσά ἐστι, καὶ διὰ τοῦτο ἐπιτομῆς χάριν ἑκάτερον τῶν σημείων $\pm$ συνάμα, ὡς εἴρηται (αὐτ.), εἴωθε τίθεσθαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 223. Ἐὰν μὲν ἡ ῥίζα καταφάσκει, ὅ, τε κύβος καταφήσει δήπου· ἐὰν δ' αὕτη ἀποφάσκει, κἀκεῖνος πάντως ἀποφήσει.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν μὲν γὰρ $+\alpha$ ἀχθῇ ἐπὶ $+\alpha$, γινόμενον ἔσται $+\alpha^2$. Ἐὰν δὲ τουτὶ τὸ γινόμενον $+\alpha^2$ ἐπὶ τὴν ἰδίαν ἀχθῇ ῥίζαν, κύβος ἐκκύψει ὁ $+\alpha^3$. Ἐὰν δ' αὖθις $-\alpha$ ἐπὶ $-\alpha$ πολλαπλασιασμῷ ὑπαχθῇ, ἔσται γινόμενον $+\alpha^2$ (§. 221.)· ὅπερ ὡς δ' αὔτως ἐπὶ τὴν ἰδίαν ῥίζαν $-\alpha$ ἀχθέν, κύβον ἐλλειπτικὸν ἢ ἀποφατικὸν ἀναδώσει $-\alpha^3$ (§. 115. Α'.).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 224. Τοὺς κατὰ τὰς ἀξίας ἀρτιάριθμα τὰ ἐπίσημα ἔχοντας ὅρους, ὡς 0, 2, 4, 6, 8 κτλ. καταφατικῶς ἐκληπτέον, τοὺς δὲ περισσάριθμα, ὡς 1, 3, 5, 7, 9 κτλ. ἀποφατικῶς (§. 223.). Τὸ δ' αὐτὸ παρατετηρηκόσιν ἐπὶ τῶν κατὰ τὰ ὀνόματα ἀξιῶν, οὐδὲν δυσχερὲς τὰ σημεῖα τοῖς ὅροις ἐπιχαράσσειν κατάλληλα, ἐὰν ἡ ῥίζα $-\alpha+\beta$, ἢ $+\alpha-\beta$, τύχῃ οὖσα. Δύναται δ' αὐτὸ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῆς Γεωμετρικῆς λεγομένης προόδου παρίστασθαι, ἐφ' ἧς ὁ μὲν πρῶτος τῶν ὅρων 1, ὁ δὲ μετὰ τοῦτον $-\alpha$· ἐν ᾗ ἅπασαι αἱ κατὰ τοὺς ἀρτιαρίθμους ἐκθέτας δυνάμεις, καταφατικῶς οὐδὲν ἧττον προκύπτουσιν· οἷον,

$1, -\alpha, \alpha^2, -\alpha^3, \alpha^4, -\alpha^5, \alpha^6, -\alpha^7, \alpha^8, -\alpha^9$ κ. ἐφξ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 225. Ὁ Ἑρμηνεὺς ἢ παρωνυμῶν τοῦ λόγου τῶν τετραγώνων, ἐστὶ τὸ τετράγωνον· τοῦ τῶν κύβων, ὁ κύβος· καὶ γενικῶς τοῦ τῶν δυνάμεων οὑτινοσοῦν βαθμοῦ, ἡ κατὰ τὸν αὐτὸν βαθμὸν δύναμις τοῦ ἑρμηνέως τῶν ῥιζῶν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ γὰρ τετράγωνα ἔχουσι λόγον διπλασίονα, οἱ κύβοι τριπλασίονα, καὶ γενικῶς αἱ δυνάμεις οὑτινοσοῦν βαθμοῦ λόγον πολλαπλασίονα τῶν ἰδίων ῥιζῶν (§. 215.). Διὸ δὴ τοῦ μὲν ἑρμηνέως τοῦ συγκειμένου λόγου ἴσου ὄντος τῷ γινομένῳ ἐκ τῶν ἑρμηνέων τῶν ἁπλῶν, ἐξ ὧν σύγκεινται οἱ διπλασίονες, τριπλασίονες, καὶ γενικῶς οἱ ὁποιοιδήποτε πολλαπλασίονες τοῦ αὐτοῦ ὄντος (αὐτ.), ὁ ἑρμηνεὺς τοῦ μὲν διπλασίονος λόγου ἔσται τὸ τετράγωνον (§. 196.), τοῦ δὲ τριπλασίονος ὁ κύβος (αὐτ.), καὶ γενικῶς ὁτουοῦν πολλαπλασίονος ἡ τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ δύναμις τοῦ ἑρμηνέως τῶν ῥιζῶν (§. 194.)· εὔδηλον ἄρα τὸ προτεθέν, Ο. Ε. Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 226. Δύναμιν οἱανδηποτοῦν Μονώνυμον πρὸς ἄλλην δοθέντος ἐκθέτου ἐξᾶραι.

ΛΥΣΙΣ.

Ὁ τῆς δοθείσης δυνάμεως ἐκθέτης ἐπὶ τὸν δοθέντα τῆς αἰτουμένης δυνάμεως ἐπαγέσθω ἐκθέτην· τὸ γὰρ ἐντεῦθεν οὕτως ἐκκύπτον γινόμενον, ὁ αἰτούμενος ἔσται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Παριστάσθω μὲν δὴ Μονομερὴς οἱαποτοῦν δύναμις τῷ α^μ, ὅ, τε δοθεὶς τῆς αἰτουμένης δυνάμεως ἐκθέτης τῷ ν. Ἵν' οὖν α^μ ἐπὶ τὴν τοῦ ἐκθέτου ν ἀναχθῇ δύ-

ναμιν, δέον α^μ νιάκις πολλαπλασιασθῆναι (§. 194.)· ἀλλὰ μὴν α^μ πολλαπλασιάσαι νιάκις οὐδὲν ἄλλο αἰνίττεται, ὅτι μὴ τὸν ἐκθέτην μ, ἰσαρίθμως ταῖς ἐν τῷ ν μονάσι τεθῆναι, ἤτοι μ ἐπὶ ν πολλαπλασιάσαι (§. 115. Ε'.)· ἄρα ὁ τῆς δοθείσης δυνάμεως ἐκθέτης μ, ἀνακτέος ἐπὶ ν πρὸς εὕρεσιν τῆς ζητουμένης δυνάμεως $\alpha^{\mu\nu}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 227. Τοίνυν φ^σ πρὸς δύναμιν θετικὴν τ ἀναχθὲν ἔσται $\varphi^{\sigma\tau}$ (§. 226.). Καὶ γὰρ φ^σ πρὸς τ ἐξαιρόμενον, ἐφ' ἑαυτὸ αὐτόχρημα πολλαπλασιάζεται, ἰσαρίθμως ταῖς ἐν τῷ τ ὑποτεθεῖσι μονάσι, πλὴν μιᾶς (§. 216.)· ἑπομένως τε ἔσται $\varphi^\sigma \times \varphi^\sigma \times \varphi^\sigma \times \varphi^\sigma$ . . . . κτλ. Ἔνθα φ^σ τοσάκις ἐνείληπται, ὁσάκις τὸ τ ὑπετέθη περιέχειν τὴν μονάδα· ἀλλ' οὖν $\varphi^\sigma \times \varphi^\sigma \times \varphi^\sigma \times \varphi^\sigma$ . . . . κτλ. $= \varphi^{\sigma+\sigma+\sigma+\sigma+\dots}$ κτλ. (§. 115. Ε'.), ἤτοι ὁ ἐκθέτης σ, κατὰ τὰς ἐν τῷ τ ἐξ ὑποθέσεως ἐλήφθη μονάδας· ἄρα φ^σ ἰσαρίθμως ταῖς ἐν τῷ τ μονάσι λαβεῖν, οὐδὲν ἄλλο δηλοῖ, ὅτι μὴ σ ἐπὶ τ πολλαπλασιάσαι, ἤτοι $(\varphi^\sigma)^\tau = \varphi^\sigma \times \varphi^\sigma \times \varphi^\sigma \times \varphi^\sigma$ . . . κτλ. $= \varphi^{\sigma+\sigma+\sigma+\sigma+\dots}$ κτλ. $= \varphi^{\sigma\tau}$· τουτέστι, πᾶσα δύναμις φ^σ, ὡς ῥίζα τις θεωρουμένη, πρὸς ἄλλην ὁποιανοῦν δύναμιν, ἧς ἐπίσημον φέρε τὸ τ, ἐξαίρεται, τῶν κατ' αὐτὰς ἐπισήμων σ καὶ τ ἐπιπολλαπλασιαζομένων. Ὥστε κατὰ γένος φ^3 πρὸς τεταρτοταγῆ ὑψωθὲν δύναμιν ἔσται $(\varphi^3)^4 = \varphi^{3\times4} = \varphi^3 \times \varphi^3 \times {}^3\varphi \times \varphi^3 = \varphi^{3+3+3+3} = \varphi^{12}$. Ἀλλὰ γὰρ ἐπὶ τῶν ἀνεκθέτων ποσῶν, οἷον α, ἐπεὶ μονὰς τὸ ἐπίσημον (§. 62.)· τῆς δὲ μονάδος καθ' ἑαυτὴν ἀγομένης, οὐδέν τι πλέον ἢ μονὰς τὸ γινόμενον (§. 197.)· Ἔσται α πρὸς οἱανδηποτοῦν ἀναγόμενον δύναμιν, οἷον δευτέραν, τρίτην, κτλ. ἴσον $\alpha^{1\times 2} = \alpha^2$; $\alpha^{1\times 3} = \alpha^3$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Σημειωτέον ἀλλ' οὖν καλῶς, μεγίστην εἶναι τὴν διαφορὰν μεταξὺ φ^3 πρὸς τεταρτοβάθμιον ἐξαρθὲν δύναμιν, καὶ $\varphi^3 \times \varphi^4$· καὶ γὰρ τὸ πρῶτον $(\varphi^3)^4 = \varphi^{3\times 4} = \varphi^{12}$ (§. 227.), ἐν ᾧ τὸ δεύτερον $\varphi^3 \times \varphi^4 = \varphi^{3+4}$ (§. 115. Ε.) $= \varphi^7$ πολὺ τοῦ φ^{12} διενήνοχε. Καὶ ἐν γένει $\alpha^{\mu\nu} = (\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\times\nu} = \alpha^{\mu\nu}$. ἀλλ' οὖν $\alpha^{\mu} \times \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 228. Ἐπομένως τε φ^{σ} πρὸς δύναμιν ἀποφατικὴν $-\tau$ ἀναχθὲν ἔσται $\varphi^{-\sigma\tau}$. Ἔστι μὲν οὖν $\varphi^{\sigma} = \varphi\varphi\varphi\varphi \ldots$ κτλ. Ἔνθα τὸ στοιχεῖον φ κατὰ τὰς ἐν τῷ σ μονάσι τεθῆναι ἐπάναγκες· οὕτως τε φ^{σ}, ἢ τὸ τούτῳ ἰσοδύναμον $\varphi\varphi\varphi\varphi \ldots$ κτλ. πρὸς δύναμιν $-\tau$ ἀναγόμενον δέον τεθῆναι $\varphi\varphi\varphi\varphi \ldots$ κτλ.$^{-\tau}$, ἤτοι τὸ προτεθὲν μέγεθος πρὸς δύναμιν $-\tau$ ἀνῆκται. Ἀλλαμὴν $\varphi\varphi\varphi\varphi \ldots$ κτλ.$^{-\tau} = \frac{1}{\varphi\varphi\varphi\varphi \ldots \text{κτλ.}^{\tau}}$ (§. 139.), ὡς καὶ ἐχομένως τουτὶ ἐκ περιουσίας δειχθήσεται· καὶ $\frac{1}{\varphi\varphi\varphi\varphi \ldots \text{κτλ.}^{\tau}} = \left(\frac{1}{\varphi^{\sigma}}\right)^{\tau}$. Ἐπεὶ δὲ ἡ μονὰς ἐφ' οἱανδηποτοῦν δύναμιν αἰρομένη ἀεὶ μονάδα ἀναδίδωσι (§. 197.)· ἐπομένως τε, ἐφ' ᾧ τὸ κλάσμα $\frac{1}{\varphi^{\sigma}}$ πρὸς

τὴν δύναμιν τ ἀναχθείη, ὁ τούτου μόνον παρονομαστὴς ἐξαρθήτω, ἵν' ᾖ $\frac{1}{\varphi^{\sigma\tau}}$. Ἀλλ' οὖν $\frac{1}{\varphi^{\sigma\tau}} = \varphi^{-\sigma\tau}$, ὡς δειχθήσεται· ἄρα φ^{σ} πρὸς δύναμιν $-\tau$ ἐξαρθὲν ἔσται $\varphi^{-\sigma\tau}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 229. Ὡσαύτως $\varphi^{-\sigma}$ πρὸς δύναμιν ἀποφατικὴν $-\tau$ ἐξαρθὲν ἔσται $(\varphi^{-\sigma})^{-\tau} = \varphi^{\sigma\tau}$. Ἐπεὶ $\varphi^{-\sigma} = \frac{1}{\varphi^{\sigma}}$, διὰ τὰ ἀνωτέρω ῥηθέντα. Ἵν' οὖν τὸ κλάσμα $\frac{1}{\varphi^{\sigma}}$ ἐπὶ τὴν $-\tau$ δύναμιν ὑψωθῇ, ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἐπὶ τὴν αὐτὴν ἐξᾶραι ἐπάναγκες δύναμιν, ἑπομένως τε ἔσται $\frac{1^{-\tau}}{\varphi^{-\sigma\tau}}$· ἀλλ' οὖν $1^{-\tau} = \frac{1}{1^{\tau}} = 1$ (§. 197.)· ἄρα $\frac{1^{-\tau}}{\varphi^{-\sigma\tau}} = \frac{1}{\varphi^{-\sigma\tau}} = \varphi^{\sigma\tau}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἀλλ' οὖν ζητήσειέ τις, τί ποτ' ἂν βούλοιτο σημᾶναι ποσότητά τινα πρὸς δύναμιν ἀποφατικὴν ἐξᾶραι; πρὸς ὃν ῥητέον, τὰς τοιαύτας ποσότητας, ἤτοι τὰς πρὸς δύναμιν ἀποφατικὴν ὑψουμένας μονάδος ἐκκύπτειν ἥττονας (§. 214.), ἑπομένως τε πρὸς κλάσμα μεταμορφοῦσθαι ἔχειν, ἡνίκα πρὸ τοῦ ἐπὶ τὸν προτεθέντα βαθμὸν ἐξαρθῆναι, ἐκθέτην θετικὸν ἐπλούτουν· τοὐναντίον δὲ ἡ τῆς ποσότητος δύναμις ὁλοσχερὴς καθίσταται, ἐὰν ὁ ἐκθέτης αὐτῆς ἀποφατικὸς τυγχάνῃ· οἷον ἔστω ἡ α^3 ποσότης, πρὸς δύναμιν ἀποφατικὴν -2 ἐξαρθησομένη· δέον οὖν ταύτην α^{-6} ἀποβῆναι (§. 228.) $= \frac{1}{\alpha^6}$ (§. 139.). Ἔνθα ἡ ποσότης α^3 θετικὸν ἐκθέτην πλουτοῦσα ἐλάσσων μονάδος ἀνέκυψεν. Ἔστω δ' αὖθις ἀνάπαλιν α^{-3} πρὸς δύναμιν -2 ἐξαρθησόμενον, ἔσται $= \alpha^6$ (§. 229.), τουτέστιν ἡ ποσότης $\alpha^{-3} = \frac{1}{\alpha^3}$ μονάδος ἐλάσσων τυγχάνουσα καὶ ἑπομένως κλασματώδης, μονάδος μείζων ἀνέθορεν· ἔστι γὰρ ἐξ ὑποθέσεως $\alpha > 1$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 230. Ἔσται ἄρα $\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^\nu = \alpha^{\frac{\mu\nu}{\nu}}$ (§. 226.) $= \alpha^\mu$ (§. 134.)· ὡσαύτως $(\alpha^{-\mu})^{2\mu} = \alpha^{-2\mu^2}$, καὶ $(\alpha^{-\nu})^{\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{-\frac{\mu\nu}{\nu}} = \alpha^{-\mu}$, $(\alpha^{-\mu})^\nu = \left(\frac{1}{\alpha^\mu}\right)^\nu$ (§. 228. 229.) $= \frac{1^\nu}{\alpha^{\mu\nu}}$ (§. 218.) $= \frac{1}{\alpha^{\mu\nu}}$ (§. 197.) $= \alpha^{-\mu\nu}$, $(\alpha^{-\mu})^3 = \left(\frac{1}{\alpha^\mu}\right)^3 = \frac{1}{\alpha^{3\mu}} = \alpha^{-3\mu}$, $(\alpha^\mu \beta^{-\nu})^{-\nu} = \frac{1}{(\alpha^\mu\beta^{-\nu})^\nu} = \frac{1}{\alpha^{\mu\nu}\beta^{-\nu\nu}} = \alpha^{-\mu\nu}\beta^{\nu^2}$, $(-\alpha^\mu\beta\gamma^3)^2 = -\alpha^\mu\beta\gamma^3 \times -\alpha^\mu\beta\gamma^3 = +\alpha^{2\mu}\beta^2\gamma^6$, $[\alpha^3(\alpha^2+\chi^2)^2]^4 = \alpha^{12}(\alpha^2+\chi^2)^8$. $(72)^3 = (6.3.4)^3 = 6^3.3^3.4^3 = 216.27.64 = 373248$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 231. Ἐὰν δὲ κλάσμα ἐπὶ δύναμιν ὁποιανδηποτοῦν ἀνακτέον ᾖ, ἀναχθήτω, ὅ, τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς ὡσαύτως (§. 183.). οἷον $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$, $\left(\frac{\alpha}{\chi}\right)^\mu = \frac{\alpha^\mu}{\chi^\mu}$, $\left(\frac{\alpha^2}{\beta^\nu}\right)^\mu = \frac{\alpha^{2\mu}}{\beta^{\nu\mu}}$, $\left(\frac{3\alpha^2\beta}{4\gamma\kappa^2}\right)^3 = \frac{27\alpha^6\beta^3}{36\gamma^3\kappa^6}$. Ἐπὶ δὲ τῶν ἀριθμῶν, ὅ, τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς ἐφ' ἑαυτὸν, ἢ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν δύναμιν πολλαπλασιασθήτω· οἷον $\frac{2}{3}$ ἐπὶ τετράγωνον ἐξαρθὲν ἔσται $\frac{4}{9}$. ὡσαύτως $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ (§. 197.), $(\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ϛ.

§. 232. Ἐὰν ἀνακτέα ᾖ ποσότης ἐκ πλειόνων συγκειμένη στοιχείων, δῆλόν ἐστι τοὺς ἐκθέτας πολλαπλασιαστέους εἶναι ἐπὶ τὸν δοθέντα (§. 230.)· οἷον $(\beta^2\alpha^\mu)^\nu = \beta^{2\nu}\alpha^{\mu\nu}$, καὶ $(\alpha^3\beta^2)^2 = \alpha^6\beta^4$, $(\alpha^2\gamma^{-3}\delta^{-4})^3 = \alpha^6\gamma^{-9}\delta^{-12}$, ὡς δέδεικται (§. 230.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ.

§. 233. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρου τύπου $\alpha^{\mu\nu}$ (§. 226.), ἐὰν ὑποτεθῇ $\nu = \mu$, ἔσται $\alpha^{\mu\nu} = \alpha^{\mu+\mu} = \alpha^{2\mu}$, ἥτις διὰ α^μ πολλαπλασιασθεῖσα δώσει $\alpha^{3\mu}$ δύναμιν τὴν τρίτην· καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ὅπερ αὖθις διὰ τῆς Γεωμετρικῆς προόδου σαφῶς παρίσταται· οἱ γὰρ ἐν τῇ προόδῳ ὅροι

$$1 \,.\,.\, \alpha^\mu \,.\,.\, \alpha^{2\mu} \,.\,.\, \alpha^{3\mu} \,.\,.\, \alpha^{4\mu} \,.\,.\, \alpha^{5\mu} \,.\,.\,.\,.\, \alpha^{\tau\mu}.$$

ἐν ᾗ ὁ δεύτερος ἐστὶν α^μ (ὃς δ' ἂν εἴη ὁ ὑπὸ τοῦ μ σημειούμενος ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς), ἴσῳ τῷ διαλείμματι ἀλλήλων ἀπέχουσιν· οἵ, τε μεταξὺ τῶν 1 καὶ α^μ παρεμπίπτοντες, ἰσάριθμοι τοῖς μεταξὺ τῶν α^μ καὶ $\alpha^{2\mu}$ εἰσὶν, ὡσαύτως καὶ τοῖς μεταξὺ τῶν $\alpha^{2\mu}$ καὶ $\alpha^{3\mu}$, καὶ ἐφεξῆς. Ὁ, τε $\alpha^{2\mu}$ τοῦ α^μ ἐστὶν ὁ τετράγωνος, καὶ ὁ $\alpha^{3\mu}$ τοῦ $\alpha^{2\mu}$ ὁ κύβος (§. 201.)· ἐφεξῆς τε ὁμοίως· κἂν τε ὁλοσχερὲς τύχοι τὸ μ κἂν τε καὶ κλασματῶδες, καθ' ἑκατέραν τῶν ὑποθέσεων ἔσται ἡ ἐφεξῆς πρόοδος ἰσοδυναμοῦντα τῇ ἐγγὺς ἀνωτέρω.

$$\alpha^{0},\ \alpha^{\mu},\ \alpha^{2\mu},\ \alpha^{3\mu},\ \alpha^{4\mu},\ \alpha^{5\mu}\ \ldots\ldots\ \alpha^{\tau\mu}.$$

Ἐν ᾗ ἀπὸ τῆς μονάδος α^{0} ἄχρι τοῦ $\alpha^{\tau\mu}$, ὅροι μεσιτεύουσι τὸν ἀριθμὸν τ, ὧν ὁ δεύτερος ἐστὶν ὁ μ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Η.

§. 234. Ἐντεῦθεν δῆλον, ὅτι ἥδε ἡ σειρὰ,

$$\alpha^{1},\ \alpha^{2},\ \alpha^{3},\ \alpha^{4},\ \alpha^{5},\ \alpha^{6},\ \alpha^{7},\ \ldots\ \alpha^{\tau}.$$

μεγέθη ἐμφαίνει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πρώτου ἐκκύπτοντα ὅρου α^{1}, πρῶτον μὲν καθ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος, εἶτα ἐν τῷ γινομένῳ α^{2}, καὶ αὖθις ἐν τῷ ἑξῆς· καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως. Διὸ καὶ ἡ προκειμένη σειρὰ Γεωμετρικὴ ἔσται, ἧς οἱ μὲν ὅροι λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους συνεχῆ γεωμετρικὸν, οἱ δ' αὐτῶν ἐκθέται συνεχῆ ἀριθμητικόν· ὡς ἐν ταῖς Ἀναλογίαις ῥηθήσεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 235. Δυνάμεως οἱασοῦν δι' ὁμοστοιχείου διαιρεθείσης δυνάμεως τὸ πηλίκον εὑρεθήσεται, ἐὰν ἀπὸ τοῦ τῆς διαιρετέας ἐκθέτου, ὁ τῆς διαιρούσης ἀφαιρεθῇ ἐκθέτης.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ἐκθέτης τοῦ γινομένου ἐκ παντὸς στοιχείου ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθέντος, ἴσος τῷ κεφαλαίῳ τῶν τῆς ῥίζης ἐκθετῶν (§. 115. Ε.)· Ἔστι δὲ ἡ διαίρεσις ἐναντίως πως ἔχουσα τῇ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πράξει (§. 138. Γ.)· ὁ ἄρα ἐκθέτης τοῦ πηλίκου,

ἴσος τῇ διαφορᾷ τῶν ἐκθετῶν τῆς διαιρετέας καὶ τῆς διαιρούσης.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 236. Ἔνθεν τοι, ὁ τῆς ἀντὶ διαιρέτου ἐκκειμένης δυνάμεως ἐκθέτης τοῦ τῆς διαιρετέας ἀφαιρείσθω, τῇ δὲ ῥίζῃ τὸ τῆς ἀφαιρέσεως ἐναποτιθέσθω λείψανον· οἷον, γ^{5} διαιρούμενον διὰ γ^{3} ἰσοῦται $\gamma^{5-3} = \gamma^{2}$ τῷ εἰς ζήτησιν πηλίκῳ (§. 235.). Ὁ γὰρ διαιρέτης διὰ τοῦ πηλίκου πολλαπλασιαζόμενος ἀναδώσει τὸν διαιρετέον (§. 131.)· οἷον $\gamma^{3} \times \gamma^{2} = \gamma^{3+2} = \gamma^{5}$· καὶ ἐν γένει γ^{ν} ἐπὶ γ^{μ} διαιρούμενον ἴσον ἔσται $\frac{\gamma^{\nu}}{\gamma^{\mu}} = \gamma^{\nu-\mu}$, καὶ $\frac{\alpha^{\nu}}{\alpha} = \alpha^{\nu-1}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 237. Παραπλησίως δεῆσαν τὰς ἀντ' ἐκθέτην ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς ἐχούσας ὁμοῤῥίζους πολλαπλασιάσαι δυνάμεις, γραφήτω ἅπαξ ἡ αὐτὴ ῥίζα, ᾗ τινὶ ἀντ' ἐκθέτου τὸ τῶν ἐκθετῶν ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιαζομένων ἐπιτεθείσθω ἄθροισμα· οἷον $\varphi^{2} \times \varphi^{4} = \varphi^{2+4} = \varphi^{6}$ (§. 115. Ε.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 238. Ἐμφαίνει ἄρα ὁ ἐκθέτης ὁλοσχερὴς ὢν ἀριθμὸς καταφατικὸς, τοσάκις ἐφ' ἑαυτὸ τὸ στοιχεῖον πολλαπλασιασθὲν, ὁσάκις αὐτὸς μονάδι ἐλαττωθεὶς, τὴν μονάδα ἐμπεριείληφεν, οἷον τὸ μὲν α^{1}, μηδάπαξ τὸ α ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθὲν σημαίνει· ὁ δὲ 2, ὁ ἐπὶ τοῦ α^{2}, ἅπαξ· ὁ δὲ 3, ὁ ἐπὶ τοῦ α^{3}, δίς· ὁ δὲ 4, ὁ ἐπὶ τοῦ α^{4}, τρίς (§. 196.)· καὶ γενικῶς ὁ μ ὁ ἐπὶ τοῦ α^{μ}, $\mu - 1$· εἴτουν τοσάκις τὸ α πολλαπλασιασθὲν, ὁσάκις ἡ μονὰς ὑπὸ τοῦ μ περιέχεται, μονάδος ἀφαιρεθείσης (§. 216.).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 239. Δύναμις ἀντ' ἐκθέτου τὸ μηδενικὸν ἔχουσα σημεῖον ἰσοῦται μονάδι· οἷον $\alpha^{0} = 1$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἀχθήτω μὲν δὴ πρῶτον α^{0} ἐπὶ α^{μ}, εὔδηλον ὡς ἡ α^{0} ποσότης ἐπὶ α^{μ} πολλαπλασιαζομένη τὸ ταύτῃ ἀνῆκον ἰδιότιμον οὐδόλως τρέψει, καὶ ἔσται μὲν δὴ γινόμενον $\alpha^{0} \times \alpha^{\mu} = \alpha^{0+\mu} = \alpha^{\mu}$ (§. 115. 237.)· ἄρα ἡ α^{0} εἴη ἂν παράγων, ὃς ἐφ' οἱανοῦν ἀχθεὶς ποσότητα, οὐδ' αὔξει ἐκείνην, οὐδέ μην μειοῖ, ὅ γε μονάδος ἴδιον μόνης (§. 197.), τοιγαροῦν $\alpha^{0} = 1$. Ἔστω δὴ δεύτερον α^{μ} διαιρετέον ἐπὶ α^{μ} (§. 138.), ἔσται $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\mu}} = 1$ (§. 134.)· ἀλλ' οὖν α^{μ} τῷ ὄντι ἐπὶ α^{μ} διαιρούμενον, πηλίκον δώσει $\alpha^{0} = 1$· καὶ γὰρ $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\mu-\mu} = \alpha^{0}$ (§. 139. 236.). Ἔστι δὲ καὶ $\alpha^{\mu-\mu} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\mu}} = 1$· ἄρα $\alpha^{0} = 1$ (§. 110.). Γενικῶς τοίνυν ἡ ἐπὶ ἐκθέτην δυνάμεως μηδενικῆς ἐξαρθεῖσα ποσότης, ἴση ἐστὶ μονάδι· ὡσαύτως ἔσται $\frac{\beta^{\frac{1}{\pi}}}{\beta^{\frac{1}{\pi}}} = \beta^{\frac{1}{\pi}-\frac{1}{\pi}} = \beta^{0} = 1$, καὶ $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{0} = 1$, $(\delta - \chi)^{0} = 1$, κτλ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 240. Δύναμις ἀντ' ἐκθέτου κλάσμα θετικὸν ἔχουσα, ἰσοδυναμεῖ ῥίζῃ τὸν τοῦ κλάσματος παρονομαστὴν ἀντ' ἐκθέτου ἐχούσῃ, τῆς δυνάμεως ἀντ' ἐκθέτου τὸν ἀριθμητὴν ἐχούσης· οἷον $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἀρθήτω $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ἐπὶ τὴν τοῦ ἐκθέτου ν δύναμιν, ἐκκύψει $\alpha^{\frac{\mu\nu}{\nu}} = \alpha^{\mu}$ (§. 226.)· ἄρα α^{μ} ἐστὶ δύναμις νιστέα τῇ πρὸς $\alpha^{\frac{\mu\nu}{\nu}}$ ἀναφορᾷ, κἀναπάλιν $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ἐστὶ ῥίζα νιστέα τῇ πρὸς α^{μ} ἀναφορᾷ, ὅπερ ταυτόν ἐστι $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$· ἤτοι ἐν γένει, ἡ ἐπὶ κλασματίαν θετικὸν ἐξαρθεῖσα ποσότης, ῥίζα τυγχάνει, ἐκθέτην πλουτοῦσα τὸν τοῦ κλάσματος παρονομαστὴν, δυνάμεως ἧς ἐκθέτης, ὁ τοῦ αὐτοῦ κλασματία ἀριθμητής· ὡσαύτως καὶ $\alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha}$, $\alpha^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\alpha^{2}}$· καὶ ἐπὶ διωνύμου $(\alpha + \beta)^{\frac{\nu}{\varkappa}} = \sqrt[\varkappa]{\alpha^{\nu} + \beta^{\nu}}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 241. Ἐὰν τοίνυν ὁ ἐκθέτης ἡστινοσοῦν δυνάμεως α^{μ} διὰ τοῦ 2 διαιρεθῇ, τὸ δὲ πηλίκον ὡς ἐκθέτης καινῆς ἢ ἀρτιφαοῦς δυνάμεως ἐκληφθῇ, ἔσται $\alpha^{\frac{\mu}{2}}$ τῆς προτέρας δυνάμεως α^{μ}, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα· ἐὰν δὲ διὰ τοῦ 3, ἡ $\alpha^{\frac{\mu}{3}}$ τὴν ῥίζαν ἐκείνης δηλώσει τὴν κυβικήν·

ὡσαύτως καὶ $\alpha^{\frac{\mu}{4}}$ τὴν τεταρτοταγῆ, καὶ $\alpha^{\frac{\mu}{5}}$ τὴν πεμπτοταγῆ, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 242. Ἐν γένει ἄρα τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ τῆς α^{μ} δυνάμεως τὴν ῥίζαν προβαλεῖται τὴν κατὰ τὸν βαθμὸν ν (§. 238.)· Διαιρουμένου γὰρ τοῦ μ διὰ τοῦ ν, ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὡς τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ἐξαρθὲν ἐπὶ τὴν δύναμιν ἧς ὁ ἐκθέτης ν, γίνεται α^{μ}· μὴ διαιρουμένου δὲ καὶ τὸ $\frac{\mu}{\nu}$ ἀριθμὸς ὁλοσχερὴς εἶναι οὐ δύναται, ἀλλ' οὐδὲν ἧττον ὅμως τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, τὴν ῥίζαν $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ ὑποσημαίνει, ὅ, τι δ' ἂν τὸ α τις ὑποθείη.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 243. Τὰ τῶν κλασμάτων ἐπιβάλλοντα τοσούτῳ μᾶλλον φθίνουσιν, ὅσῳ περ αὐτὰ τὰ κλάσματα ἐπὶ ἀνωτέρας δυνάμεις μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐξαίρονται, καὶ ὡς ἐλάχισται ποσότητες θεωρεῖσθαι ἔχουσιν· οἷον ἐὰν $\beta > \alpha$ ᾖ, ἔσται ὡσαύτως

Α'. $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha^2}{\beta^2} > \frac{\alpha^3}{\beta^3}$ κτλ.

Ἐντεῦθεν κλάσματος οἱουοῦν > 1 ὄντος, ἡ δύναμις μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐπαύξει, ὅσῳ περ τὸ κλάσμα ἐπὶ μείζονα δύναμιν αἴρεται. διὸ ἐὰν ᾖ $\beta < \alpha$, ἔσται οὕτω

Β'. $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha^2}{\beta^2} < \frac{\alpha^3}{\beta^3}$ κτλ.

Ἐνθεντοι ἐὰν ᾖ $\alpha = \beta$ δύναμις, ἡ ῥίζα οἱαδηποτοῦν ἔσται $= 1$ (§. 134.). Ἐνίοτε ἀλλ' οὖν παρορᾶσθαι δύνανται, αἵ γε ὑπὲρ τὸ τετράγωνον· ὡς τῆς τοῦ κλάσματος δυνάμεως, τῇ τοῦ παρονομαστοῦ μᾶλλον καὶ μᾶλλον αὐξήσει οὕτω μειουμένης (§. 172.), ὡς ἔσχατον ἴσην ἐκκύπτειν τῷ μηδενί.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 244. Δύναμις ἀντ' ἐκθέτου ποσότητα ὁλοσχερῆ ἀποφατικὴν ἔχουσα, ἰσοδυναμεῖ τῷ ἑαυτῆς συνθέτῃ διαιρουμένῳ ἐπὶ τὴν αὐτὴν δύναμιν, ἧς ὁ ἐκθέτης θετικὸς τυγχάνει· οἷον $\beta\alpha^{-\mu} = \frac{\beta}{\alpha^{\mu}}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αχθήτω $\beta\alpha^{-\mu}$ ἐπὶ $\beta\alpha^{2\mu}$, ἔσται γινόμενον $\beta^2\alpha^{\mu}$. Ἐὰν οὖν τουτὶ τὸ γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων διαιρεθῇ, ἤτοι διὰ τοῦ $\beta\alpha^{2\mu}$, θάτερος ἤτοι $\beta\alpha^{-\mu}$ ἔσται τὸ πηλίκον (§. 136.)· ἔσται τοίνυν $\frac{\beta^2\alpha^{\mu}}{\beta\alpha^{2\mu}} = \beta\alpha^{-\mu}$ (§. 236.). Ἐὰν οὖν ὅ, τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς πρῶτον μὲν ἐπὶ β, εἶτα δὲ ἐπὶ α^{μ} πολλαπλασιασθῇ, κλάσμα τῷ προτέρῳ ἰσοδύναμον ἐκκύψει (§. 168.)· ἔσται ἄρα $\frac{\beta}{\alpha^{\mu}} = \beta\alpha^{-\mu}$· ὡσαύτως $\alpha\beta^{-\varsigma} = \frac{\alpha}{\beta^{\varsigma}}$, καὶ ἀνάπαλιν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 245. Ἐὰν τοίνυν ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος (§. 236.) τεθῇ ν ἴσον τῷ μηδενί. Ἔσται ἐκ τῶν εἰρημένων $\frac{\gamma^{\nu}}{\gamma^{\mu}} = \gamma^{0-\mu}$ (αὐτ.) $= \gamma^{-\mu}$, ἤτοι ἐκθέτῃ ἀποφατικῷ. Ἔνθεντοι ἡ ἐκθέτην ἀποφατικὸν ἔχουσα δύναμις κλάσματι ἰσοδυναμεῖ, εἰ καὶ μὴ ἐνεργείᾳ ἐκτυπουμένῳ· καὶ γὰρ $\gamma^0 = 1$ (§. 239.)· τοίνυν $\frac{\gamma^0}{\gamma^\mu} = \frac{1}{\gamma^\mu} = \gamma^{-\mu}$ ὡς δέδεικται· ἄρα $\gamma^{-\mu} =$ κλάσματι θετικῷ $\frac{1}{\gamma^\mu}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Β.

§. 246. Ἐὰν οὖν ὁ συνθέτης ᾖ μονὰς, ἰσοδυναμήσει ἡ τοῦ ἀκεραίου ἀποφατικοῦ ἐκθέτου δύναμις τῇ μονάδι διαιρουμένῃ διὰ τῆς αὐτῆς δυνάμεως, ἀλλ' οὖν θετικὸν ἐχούσης ἐκθέτην (§. 245.)· οἷον, $\alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^\mu}$· καὶ γὰρ $\alpha^\mu : \alpha^{2\mu} = \alpha^{\mu-2\mu}$ (§. 236.) $= \alpha^{-\mu}$· ἔστι δὲ ὡσαύτως $\alpha^\mu : \alpha^{2\mu} = \frac{\alpha^\mu}{\alpha^{2\mu}} = \frac{\alpha^\mu : \alpha^\mu}{\alpha^{2\mu} : \alpha^\mu} = \frac{1}{\alpha^\mu}$ (§. 168.), ἄρα $\alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^\mu}$ (§. 110.). Καὶ ἐν γένει ἡ ἐπὶ δύναμιν ἀποφατικοῦ ὁλοσχεροῦς ἐκθέτου ἐξαρθεῖσα ποσότης, οὐδὲν ἄλλό ἐστιν, ὅτι μὴ ἡ μονὰς διῃρημένη τῇ καταφατικῇ δυνάμει τῆς αὐτῆς ποσότητος, ἧς τινος δηλ: δυνάμεως ἐκθέτης ἐστὶν ὁ ὁλοσχερὴς ἐκεῖνος ἀριθμός· οἷον $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}$, $\alpha^{-2} = \frac{1}{\alpha^2}$, $\alpha^{-3} = \frac{\alpha^2}{\alpha^5}$ (§. 139.) $= \frac{1}{\alpha^3}$, ἐὰν ἑκάτερος τῶν ὅρων διὰ α^2 διαιρεθῇ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 247. Ἔσται τοίνυν κἀνάπαλιν $\frac{\beta}{\alpha^{-\mu}} = \beta\alpha^\mu$·

ὑποτεθέντος δὴ ἀντὶ $\alpha^{-\mu}$ τοῦ ἰσοδυνάμου $\frac{1}{\alpha^\mu}$, ἔσται $\frac{\beta}{\alpha^{-\mu}} = \beta : \frac{1}{\alpha^\mu} = \beta\alpha^\mu$· ὡσαύτως εὔδηλόν ἐστι $\frac{1}{\alpha^{-\mu}}$ εἶναι ἴσον α^μ· καὶ γὰρ $\frac{1}{\alpha^\mu} = \alpha^{-\mu}$ (§. 246.), ἄρα $1 = \alpha^\mu \times \alpha^{-\mu}$ ἑπομένως τε $\frac{1}{\alpha^{-\mu}} = \alpha^\mu$· διὰ τὸ εἶναι $\frac{1}{\alpha^{-\mu}} = 1 : \alpha^{-\mu} = 1 : \frac{1}{\alpha^\mu} = \alpha^\mu$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 248. Ἐπεὶ γὰρ $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}$, καὶ $\alpha^{-2} = \frac{1}{\alpha^2}$ (§. 246.), ἔσται κἀντεῦθεν ἡ

$$1,\ \frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\alpha^2},\ \frac{1}{\alpha^3},\ \frac{1}{\alpha^4},\ \frac{1}{\alpha^5}\ \ldots\ \frac{1}{\alpha^\nu}$$

σειρὰ γεωμετρικῶν ὅρων συνεχῶς ἀναλόγων, ὧν πρῶτος ἡ μονὰς, ἕκαστος δὲ τῶν ἄλλων ἀριθμητὴν μὲν ἔχει τὴν μονάδα, ὀνομαστὴν δὲ τὸ αὐτὸ στοιχεῖον μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἐκθέτου καταφατικοῦ. Ἔσται γὰρ ἡ ῥηθεῖσα πρόοδος

$$1,\ \frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\alpha^2},\ \frac{1}{\alpha^3},\ \frac{1}{\alpha^4},\ \frac{1}{\alpha^5},\ \ldots\ \frac{1}{\alpha^\nu}$$

ἴση τῇδε

$$\alpha^0,\ \alpha^{-1},\ \alpha^{-2},\ \alpha^{-3},\ \alpha^{-4},\ \alpha^{-5},\ \ldots\ \alpha^{-\nu}$$ (§. 212, 213, 244.)

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 249. Παραπλησίως $\delta^4 \phi^{-3}$ μεταχθήσεται ἐπὶ $\frac{\delta^4}{\phi^3}$. Ἔστι γὰρ $\delta^4 \phi^{-3} = \delta^4 \times \frac{1}{\phi^3}$ (§. 245.) $= \frac{\delta^4}{\phi^3}$

(§. 244.). Ἡ αὐτὴ δὲ ποσότης $\frac{\delta^4}{\varphi^3}$ ἐπὶ τήνδε $\frac{\varphi^{-3}}{\delta^{-4}}$ μεταμορφωθῆναι οἷά τ' ἐστιν. Ὄντος γὰρ $\delta^4 = \frac{1}{\delta^{-4}}$ (§. 247.), ἔσται $\delta^4\varphi^{-3} = \frac{1}{\delta^{-4}} \times \varphi^{-3} = \frac{\varphi^{-3}}{\delta^{-4}}$. Ὡσαύτως ἡ αὐτὴ $\delta^4\varphi^{-3}$ ἐπὶ τὸν ἐφεξῆς μεταχθήσεται τύπον $\frac{1}{\delta^{-4}\varphi^3}$· καὶ γὰρ ἐκ τῶν δεδειγμένων $\delta^4 = \frac{1}{\delta^{-4}}$, καὶ $\varphi^{-3} = \frac{1}{\varphi^3}$· ἄρα $\delta^4\varphi^{-3} = \frac{1}{\delta^{-4}} \times \frac{1}{\varphi^3} = \frac{1}{\delta^{-4}\varphi^3}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ϛ.

§. 250. Ἔσται τοίνυν ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε κατασκευασθέντων,

Α'. $\frac{\alpha^2\beta^{-3}}{\gamma\alpha^{-1}} = \alpha^3\beta^{-3}\gamma^{-1} = \frac{\alpha^3}{\beta^3\gamma}$.

Β'. $\sqrt{\frac{\alpha^{-2}\beta^2}{\alpha\beta^{-1}}} = \sqrt{\alpha^{-3}\beta^3} = \sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^3}} = \frac{\beta^{\frac32}}{\alpha^{\frac32}}$.

Γ'. $\frac{\alpha^{\frac13}\sqrt{\beta^{-3}}}{\sqrt[3]{\alpha^2}} = \alpha^{\frac13}\beta^{-\frac32}\alpha^{-\frac23} = \alpha^{-\frac13}\beta^{-\frac32} = \frac{1}{\alpha^{\frac13}\beta^{\frac32}}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Αἱ τῶν Δυνάμεων οὑτωσὶ Ἀναλυτικῶς θεωρουμένων ἀναγωγαὶ ἀναγκαῖαί εἰσιν, ἐπὶ τὸ τὴν τῶν ποσοτήτων ἐν τῷ ὑπολογισμῷ ὁμοιότητα ἀνακρίναι, καί περ ἐκεῖναι ὁμοίως ἐκκεῖσθαι συνιδεῖν οὐκ ἐνδίδωσι.

ΘΕΩΡΗΜΑ,

§. 251. *Δύναμις ἀντ' Ἐκθέτου κλάσμα ἀποφατικὸν ἔχουσα, ἰσοδυναμεῖ τῷ ἑαυτῆς Συνθέτῃ διαιρουμένῳ διὰ τῆς ἀντ' Ἐκθέτου τὸν τοῦ ἰδίου κλάσματος παρονομαστὴν ἐχούσης ῥίζης, δυνάμεως ἧς ἐκθέτης ὁ παρονομαστής ἐστιν· οἷον* $\beta\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\frac{\beta}{\alpha^{\mu}}}$

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἀχθήτω $\beta\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}}$ ἐπὶ $\beta\alpha^{\frac{2\mu}{\nu}}$, ἐκκύψει γινόμενον $\beta^2\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$. Διαιρεθέντος δὴ τούτου τοῦ γινομένου δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων, ἤτοι διὰ τοῦ $\beta\alpha^{\frac{2\mu}{\nu}}$, θάτερος ἔσται τὸ πηλίκον ἤτοι $\beta\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}}$ (§. 135.) ἄρα $\frac{\beta^2\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}{\beta\alpha^{\frac{2\mu}{\nu}}} = \beta\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}}$. Διαιρεθέντων αὖθις τοῦ τε ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ πρῶτον διὰ τοῦ β, εἶτα διὰ τοῦ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, κλάσμα τῷ προτέρῳ καὶ μάλα ἰσοδύναμον ἐκκύψει (§. 168.)· Ἔσται τοίνυν $\frac{\beta}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}} = \beta\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}}$. Ἀλλὰ μὴν ἀντὶ τοῦ παρονομαστοῦ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ληφθῆναι δύναται $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ (§. 240.)· ἄρα τῆς τῶν ἴσων ἀνθυποκαταστάσεως γινομένης ἔσται $\beta\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\frac{\beta}{\alpha^{\mu}}}$. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 252. Ἐὰν δὲ τὸν τοῦ Συνθέτου χῶρον ἡ μονὰς ἐπέχῃ, ἔσται ἡ τοῦ κλασματώδους ἀποφατικοῦ ἐκθέτου δύναμις ἴση τῇ μονάδι διαιρουμένη διὰ τῆς ἀντ' ἐκθέτου τὸν τοῦ αὐτοῦ κλάσματος παρονομαστὴν ἐχούσης δυνάμεως, ἧς ὁ παρονομαστὴς ἐκθέτης, ἀλλ' οὖν θετικός· οἷον $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\frac{1}{\alpha^{\mu}}}$· ὃ ταυτόν ἐστι τῷ $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$ (§. 242. 246.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 253. Οἱ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κανόνες τῶν τὰ ἐπίσημα ἀποφατικὰ ἐχουσῶν δυνάμεων, οἱ αὐτοὶ πάντως εἰσὶ τοῖς ἀνωτέρω (§. 237.) ἐκτεθεῖσιν. Ἔνθεντοι $\delta^{-2} \times \delta^{-3} = \delta^{-2-3} = \delta^{-5}$, καὶ $\delta^{-\mu} \times \delta^{-\nu} = \delta^{-\mu-\nu}$. Ἐπεὶ $\delta^{-\mu} = \frac{1}{\delta^{\mu}}$, καὶ $\delta^{-\nu} = \frac{1}{\delta^{\nu}}$ (§. 245.). Τοίνυν $\delta^{-\mu} \times \delta^{-\nu} = \frac{1}{\delta^{\mu}} \times \frac{1}{\delta^{\nu}} = \frac{1}{\delta^{\mu} \times \delta^{\nu}} = \frac{1}{\delta^{\mu+\nu}}$ (§. 237.) $= \delta^{-\mu-\nu}$ (§. 245.). Ὡσαύτως καὶ ἐν ἀριθμοῖς $\delta^{4} \times \delta^{-5} = \delta^{4-5} = \delta^{-1}$· καὶ γὰρ $\delta^{-5} = \frac{1}{\delta^{5}}$, ἄρα $\delta^{4} \times \frac{1}{\delta^{5}} = \frac{\delta^{4}}{\delta^{5}} = \delta^{4-5} = \delta^{-1}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 254. Τοῖς ἀνωτέρω ὁμοίως ἑπόμενοι (§. 235.) καὶ τὴν τῶν ἐκθέτην ἀποφατικὸν ἐχουσῶν δυνάμεων διαίρεσιν ῥᾳδίως περανοῦμεν. Ἔνθεντοι $\frac{\delta^{-5}}{\delta^{-3}} = \delta^{-5+3} = \delta^{-2}$ τῷ εἰς ἔρευναν πηλίκῳ· καὶ ἐν γένει $\frac{\delta^{-\nu}}{\delta^{-\mu}} = \delta^{-\nu+\mu}$. Πολλαπλασιασθὲν γὰρ τουτὶ τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\delta^{-\mu}$ ἔσται $= \delta^{-\nu+\mu-\mu} = \delta^{-\nu}$ τῷ διαιρετέῳ (§. 136.). Ὡσαύτως καὶ $\frac{\delta^{\nu}}{\delta^{-\mu}} = \delta^{\nu+\mu}$, καὶ γὰρ $\delta^{\nu+\mu} \times \delta^{-\mu} = \delta^{\nu+\mu-\mu} = \delta^{\nu}$. Ἐὰν δὲ $\delta^{-\nu}$ διὰ τοῦ δ^{μ} διαιρεθῇ, πηλίκον ἀναδώσει $\delta^{-\nu-\mu}$. Ἐπεὶ $\delta^{-\nu-\mu} \times \delta^{\mu} = \delta^{-\nu-\mu+\mu} = \delta^{-\nu}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 255. Οἱ τῶν Ῥιζῶν τοίνυν τύποι, ἤτοι αἱ Ῥιζικαὶ πᾶσαι ποσότητες, ἐν σχήματι δυνάμεων παρίστασθαι ἔχουσι, τοῦ τῆς ῥίζης σημείου παραλειπομένου, ἢ γοῦν καὶ ἐπὶ ἄλλας τινὰς Ῥιζικὰς καὶ ἰσοδυνάμους ποσότητας μεταλλάττεσθαι, ἐὰν ὁ τῆς Ῥιζικῆς ποσότητος ἐκθέτης, ἐπὶ τὸν τῆς ῥίζης διαιρεθῇ ἐκθέτην· οἷον $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{\alpha^{4}} = \alpha^{\frac{4}{3}}$, $\sqrt[2]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}}$· καὶ ἐν γένει $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 356. Ὁ τῶν κλασματωδῶν ἐκθετῶν πολλαπλασιασμὸς τοῖς ἐν τῷ §. 237. ῥηθεῖσι παραπλησίως περαίνεται. Ἔνθεντοι ἔσται $\gamma^{\frac{\sigma}{\varkappa}} \times \gamma^{\frac{\tau}{\nu}} = \gamma^{\frac{\nu\sigma+\varkappa\tau}{\nu\varkappa}}$, καὶ $\gamma^{\frac{\nu}{\sigma}} \times \gamma^{-\frac{\mu}{\tau}} = \gamma^{\frac{\nu}{\sigma}-\frac{\mu}{\tau}}$ (§. 253.) $= \gamma^{\frac{\nu\tau-\mu\sigma}{\sigma\tau}}$. Ὡσαύτως $\gamma^{-\frac{\nu}{\sigma}} \times \gamma^{-\frac{\mu}{\tau}} = \gamma^{-\frac{\nu}{\sigma}-\frac{\mu}{\tau}} = -\frac{\nu\tau-\mu\sigma}{\sigma\tau}$. Ἥ, τε τούτων διαίρεσις συνῳδὰ τοῖς ἐν τῷ §. 236. ἐκτεθεῖσιν· οἷον $\gamma^{\frac{\sigma}{\varkappa}} : \gamma^{\frac{\mu}{\nu}} = \gamma^{\frac{\sigma}{\varkappa}-\frac{\mu}{\nu}} = \gamma^{\frac{\nu\sigma-\varkappa\mu}{\varkappa\nu}}$. Τῷ αὐτῷ τρόπῳ καὶ $\gamma^{\frac{\sigma}{\varkappa}} : \gamma^{-\frac{\mu}{\nu}} = \gamma^{\frac{\sigma}{\varkappa}+\frac{\mu}{\nu}} = \gamma^{\frac{\nu\sigma+\varkappa\mu}{\varkappa\nu}}$, καὶ $\gamma^{-\frac{\sigma}{\varkappa}}$

$\div \gamma^{\frac{\mu}{\nu}} = \gamma^{-\frac{\sigma}{\kappa}-\frac{\mu}{\nu}} = \gamma^{-\frac{\nu\sigma-\kappa\mu}{\kappa\nu}}$. καὶ μὴν καὶ $\gamma^{-\frac{\sigma}{\kappa}}$ (
$\gamma^{-\frac{\mu}{\nu}} = \gamma^{-\frac{\sigma}{\kappa}+\frac{\mu}{\nu}} = \gamma^{-\frac{\sigma\nu+\mu\kappa}{\kappa\nu}}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 257. Ῥίζαν Διώνυμον πρὸς τετράγωνον ἐξᾶραι.

ΛΥΣΙΣ.

Κείσθω μὲν δὴ Διώνυμος ὁποιαοῦν ῥίζα ἡ $\alpha+\beta$ πρὸς τετράγωνον (§. 196.) ἐξαρθησομένη, ἔσται οὕτως $(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)(\alpha+\beta) = \alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$. Τουτέστι τὸ τῆς Διωνύμου ῥίζης τετράγωνον σύγκειται Α'. ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ κατὰ τὸν πρῶτον ὅρον α^2· Β'. ἐκ τοῦ δὶς ὀρθογωνίου τοῦ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου τῶν ὅρων, ἤτοι ἐκ τοῦ γινομένου διπλοῦ τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον $2\alpha\beta$· καὶ Γ'. ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ κατὰ τὸν δεύτερον β^2. Ἐν γένει δὲ ἐκ τῶν τετραγώνων ἁπάντων τῶν ὅρων, καὶ ἐκ τοῦ διπλοῦ γινομένου θατέρου τῶν ὅρων ἐπὶ θάτερον. Ἐὰν οὖν τεθῇ $\beta = -\chi$, ἔσται $2\alpha\beta = -2\alpha\chi$, καὶ $\beta^2 = (-\chi)^2 = +\chi^2$, ἤτοι $(\alpha-\chi)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\chi + \chi^2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. $(\alpha^2-1)^2 = \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1$.
Β'. $(\chi+\frac{\alpha}{2})^2 = \chi^2 + \alpha\chi + \frac{\alpha^2}{4}$.
Γ'. $(\beta\gamma^2 - \frac{\alpha}{\beta})^2 = \beta^2\gamma^4 - 2\alpha\gamma^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}$.
Δ'. $(1-\chi)^2 = 1 - 2\chi + \chi^2$.

Ε'. $(99)^2 = (90+9)^2 = 8100 + 1620 + 81 = 9801$.
ἢ ἄλλως $(99)^2 = (100-1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐὰν δὲ ἀριθμοῦ τινος, οἷον τοῦ 9, τετράγωνος ἢ ὁ 81, τοῦ αὐτοῦ τῷ μηδενικῷ σημείῳ οὕτω προσηυξημένου 90, τοὺς αὐτοὺς ἕξει ὁ τετράγωνος χαρακτῆρας δυσὶ μηδενικοῖς σημείοις προσεπηυξημένους, ὡς εἶναι $(90)^2 = (9 \cdot 10)^2 = 9^2 \cdot 10^2 = 81 \cdot 100 = 8100$· τουτέστιν ὁσάκις τὸ τετράγωνον ἐπὶ 100 πολλαπλασιάζεται, τοσάκις ἡ ῥίζα ἐπὶ 10. Καὶ ἐν γένει ἐπὶ τοῦ τετραγώνου δὶς ἀεὶ τοσαῦτα ἔσται τὰ μηδενικὰ τῶν σημείων, ὅσα ἐπὶ τῆς ῥίζης ἐστί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 258. Ῥίζαν Τριώνυμον πρὸς τετράγωνον ἐξᾶραι.

ΛΥΣΙΣ.

Τῆς τριωνύμου οἱασοῦν ῥίζης $\gamma+\delta+\varepsilon$ τετράγωνον ἔσται $(\gamma+\delta+\varepsilon)^2$. Ἐὰν οὖν ληφθῇ $\gamma+\delta=\alpha$, καὶ $\varepsilon=\beta$, ῥίζα πᾶσα τριώνυμος πρὸς διώνυμον μετασχηματιζομένη τῷ $\alpha+\beta$ ὑποτυπωθήσεται, τὸ δὲ ταύτης τετράγωνον τῷ $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ (§. 257.). Ἐνθέντοι τῇ τῶν ἴσων ἀντικαταστάσει, ἔσται.

$$\alpha^2 = (\gamma+\delta)^2 = \gamma^2 + 2\gamma\delta + \delta^2$$
$$+2\alpha\beta = (2\gamma+2\delta)\varepsilon = 2\gamma\varepsilon + 2\delta\varepsilon$$
$$+\beta^2 = \varepsilon^2$$

Κἀντεῦθεν

$$(\gamma+\delta+\varepsilon)^2 = \gamma^2 + 2\gamma\delta + \delta^2 + 2\gamma\varepsilon + 2\delta\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Τουτέστι, τὸ τῆς τριωνύμου ῥίζης τετράγωνον συγκροτεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων ἁπάντων τῶν ὅρων, καὶ ἐκ τοῦ γινομένου ἐκ τοῦ διπλοῦ τῶν ἡγουμένων ἐπὶ τοὺς ἑπομένους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. $(\alpha - \chi + \frac{\beta}{2})^2 = \alpha^2 - 2\alpha\chi + \chi^2 + \alpha\beta - \beta\chi + \frac{\beta^2}{4}$.

Β'. $(2\alpha^2 - 3\alpha\chi - 4\chi^2)^2 = 4\alpha^4 - 12\alpha^3\chi + 9\alpha^2\chi^2 - 16\alpha^2\chi^2 + 24\alpha\chi^3 + 16\chi^4$.

Γ'. $(1 - \chi + \chi^2)^2 = 1 - 2\chi + \chi^2 + 2\chi^2 - 2\chi^3 + \chi^4 = \chi^4 - 2\chi^3 + 3\chi^2 - 2\chi + 1$.

Δ'. $(999)^2 = (900 + 99)^2 = (900 + 90 + 9)^2 = 810000 + 162000 + 8100 + 16200 + 1620 + 81 = 998001$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 259. Ῥίζαν οἱανδηποτοῦν Πολυώνυμον πρὸς τετράγωνον ἐξᾶραι.

ΛΥΣΙΣ.

Τὴν τριώνυμον, ἢ τετρώνυμος ἢ καὶ πολυώνυμος ἀκούουσα ῥίζα διαδέχεται, ἥτις τε τῷ $\gamma + \delta + \epsilon + \zeta$ ἀντίθεσθαι εἴωθεν. Ἐὰν οὖν ἡ $\gamma + \delta + \epsilon = \alpha$, καὶ $\zeta = \beta$· ῥίζα πᾶσα ἐκ τεσσάρων ὅρων συγκροτουμένη τῷ $\alpha + \beta$ ἐκτεθήσεται· ἐντεῦθεν τὸ ταύτης τετράγωνον $(\alpha + \beta)^2$ τῷ $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$· τῆς τε ἀντεισαγωγῆς τῶν α καὶ β γινομένης, ἔσται·

$$\alpha^2 = (\gamma + \delta + \epsilon)^2 = \gamma^2 + 2\gamma\delta + \delta^2 + 2\gamma\epsilon + 2\delta\epsilon + \epsilon^2.$$
$$+ 2\alpha\beta = (2\gamma + 2\delta + 2\epsilon)\zeta = 2\gamma\zeta + 2\delta\zeta + 2\epsilon\zeta$$
$$+ \beta^2 = \zeta^2.$$

τῇ δὲ τούτων εἰς ἓν ἀθροίσει, ἔσται·

$$(\gamma + \delta + \epsilon + \zeta)^2 = \gamma^2 + 2\gamma\delta + \delta^2 + 2\gamma\epsilon + 2\delta\epsilon + \epsilon^2 + 2\gamma\zeta + 2\delta\zeta + 2\epsilon\zeta + \zeta^2.$$

Ἐξ οὗ δῆλον, τὸ τῆς Πολυωνύμου ῥίζης τετράγωνον συνίστασθαι ἐκ τῶν τετραγώνων ἑκάστου τῶν ὅρων, καὶ τῶν γινομένων ἐκ τοῦ διπλασίου τῶν ἡγουμένων ἐπὶ πάντας τοὺς ἑπομένους.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 260. Τετραγώνου ὀρθῶς διατεταγμένου, τὰ τούτου μέρη, ὡς ἐκ τῆς ἐπαγωγῆς σαφὲς, ὧδέ πως ἐκφραστέα. Τετράγωνον πρώτου ὅρου, διπλοῦν τοῦ πρώτου ἀναχθὲν ἐπὶ τὸν δεύτερον, τετράγωνον δευτέρου· διπλοῦν πρώτου καὶ δευτέρου ἀναχθὲν ἐπὶ τὸν τρίτον, τετράγωνον τρίτου· διπλοῦν πρώτου, δευτέρου, καὶ τρίτου ἀναχθὲν ἐπὶ τὸν τέταρτον, τετράγωνον τετάρτου· καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 261. Οἱασδηποτοῦν ἄρα πολυωνύμου ῥίζης τὸ τετράγωνον σύγκειται, ἐκ τῶν τετραγώνων ἁπάντων τῶν ὅρων, καὶ ἐκ τοῦ διπλοῦ γινομένου τῶν ἡγουμένων ἐπὶ τοὺς ἑπομένους.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 262. Τετράγωνον Πλῆρες, ὃ καὶ Ἐντελὲς ἀκούει, ἐστὶ τὸ ἁπάντων τῶν ἐν τῇ ἐκθέσει κειμένων, ἢ δοθέντων ὅρων τὰ τετράγωνα περιέχον. Μὴ πλῆρες δὲ ἢ Ἀτελὲς, ἀφ' οὗ τὸ τοῦ δευτέρου ὅρου τετράγωνον ἄπεστι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 263. Τετράγωνον μὴ πλῆρες πληρῶσαι.

ΛΥΣΙΣ.

Αἰτείσθω ἡ τοῦ πρώτου ὅρου ῥίζα, ἥτις εὑρεθεῖσα διπλασιασθήτω· εἶτα διὰ τῆς διπλῆς ταύτης ῥίζης πάντες οἱ ἑπόμενοι λοιποὶ ὅροι διαιρείσθωσαν, τό, τε εὑρεθὲν πηλίκον, ἤτοι ὁ δεύτερος ὅρος, εἰς τετράγωνον ἀναχθὲν, τῷ ἀτελεῖ τετραγώνῳ ἐφαρμοζέσθω. Οἷον ἔστω τετράγωνον μὴ πλῆρες $\chi^2 \pm \alpha\chi$. Ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ῥίζης πρῶτος ὅρος ἐστὶ χ, ἔσται $\pm 2\chi$ τὸ διπλοῦν, καὶ τῇ διὰ τοῦ $\alpha\chi$ διαιρέσει $\frac{\alpha\chi}{2\chi} = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\alpha$· τὸ δὲ τούτου τετράγωνον $+\frac{1}{4}\alpha^2$· οὕτινος προστεθέντος, ἔσται τετράγωνον πλῆρες $\chi^2 \pm \alpha\chi + \frac{1}{4}\alpha^2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. $4\chi^2 - \frac{2\gamma\chi}{3}\}$ τετράγ. μὴ πλῆρες.

$4\chi^2 - \frac{2\gamma\chi}{3} + \frac{\gamma^2}{9}\}$ τετράγ. πλῆρες.

Β'. $\chi^2 + 3\alpha\chi\}$ τετρ. μὴ πλῆρες.

$\chi^2 + 3\alpha\chi + \frac{9}{4}\alpha^2\}$ τετρ. πλῆρες.

Γ'. $\chi^2 + \gamma\chi - 6\chi\}$ τετράγ. μὴ πλῆρες.

$\chi^2 + \gamma\chi - 6\chi + \frac{1}{4}\gamma^2 - 3\gamma + 9\}$ πλῆρες.

Δ'. $\nu^2 + \frac{2\alpha\nu}{\delta} - \nu\}$ μὴ πλῆρες.

$\nu^2 + \frac{2\alpha\nu}{\delta} - \nu + \frac{\alpha^2}{\delta^2} - \frac{\alpha}{\delta} + \frac{1}{4}\}$ πλῆρες.

Ε'. $\chi^2 - \frac{2}{3}\chi + \frac{1}{2}\alpha\chi\}$ μὴ πλῆρες.

$\chi^2 - \frac{2}{3}\chi + \frac{1}{2}\alpha\chi + \frac{4}{36} - \frac{4}{24}\alpha + \frac{1}{16}\alpha^2\}$ πλῆρες.

ς'. $\chi^2 + \alpha\chi = \beta^2\}$ μὴ πλῆρες.

$\chi^2 + \alpha\chi + \frac{1}{4}\alpha^2 = \beta^2 + \frac{1}{4}\alpha^2\}$ πλῆρες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 264. Ῥίζαν Μονώνυμον πρὸς κύβον ἐξᾶραι.

ΛΥΣΙΣ.

Ἡ δοθεῖσα μονομερὴς ῥίζα πολλαπλασιασθήτω τρίς, καὶ τὸ γινόμενον ἔσται ὁ ζητούμενος κύβος (§. 196.), οἷον $\alpha \times \alpha \times \alpha = \alpha^3$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 265. Ῥίζαν Διώνυμον πρὸς κύβον ἐξᾶραι.

ΛΥΣΙΣ.

Διωνύμου οἱασοῦν ῥίζης $\alpha + \beta$ τὸ τετράγωνον ἐπὶ τὴν ἰδίαν πολλαπλασιασθὲν ῥίζαν, κύβον ἡμῖν ἀναδώσει τὸν ζητούμενον (§. 196.), ἤτοι

$$(\alpha+\beta)^3 = (\alpha+\beta)^2 . (\alpha+\beta) = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)(\alpha+\beta)$$
$$= \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3$$
$$= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3.$$

Ὡς τις ἰδεῖν ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων μερῶν σύγκειται· Α'. ἐκ τοῦ κύβου τοῦ πρώτου ὅρου α^3; Β'. ἐκ τοῦ τρὶς γινομένου ὑπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ὅρου ἐπὶ τὸν δεύτερον $3\alpha^2\beta$, Γ'. ἐκ τοῦ γινομένου ὑπὸ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου ὅρου ἐπὶ τὸν πρῶτον $3\alpha\beta^2$, καὶ Δ'. ἐκ τοῦ κύβου τοῦ δευτέρου ὅρου β^3. Γενικῶς δὲ ἐκ τῶν τριῶν τούτων, ἤτοι ἐκ τῶν κύβων ἑκάστων τῶν ὅρων, ἐκ τοῦ γινομένου ὑπὸ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τῶν ἡγουμένων ὅρων ἐπὶ τοὺς ἑπομένους, καὶ ἐκ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου ἑκάστου τῶν ἑπομένων ἐπὶ πάντας τοὺς ἡγουμένους. Ἐὰν δὲ τεθῇ $\beta = -\chi$, ἔσται $3\alpha^2\beta = -3\alpha^2\chi$, $3\alpha\beta^2 = 3\alpha \times (-\chi)^2 = +3\alpha\chi^2$, καὶ $(-\chi)^3 = -\chi^3$ (§. 224.)· ἑπομένως $(\alpha - \chi)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\chi + 3\alpha\chi^2 - \chi^3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. $(2\alpha\chi - \chi^2)^3 = 8\alpha^3\chi^3 - 12\alpha^2\chi^4 + 6\alpha\chi^5 - \chi^6$.

Β'. $(1 - \chi)^3 = 1 - 3\chi + 3\chi^2 - \chi^3$.

Γ'. $(3\alpha + \frac{1}{2})^3 = 27\alpha^3 + \frac{27\alpha^2}{2} + \frac{9\alpha}{4} + \frac{1}{8}$.

Δ'. $(11)^3 = (10 + 1)^3 = 1000 + 300 + 30 + 1$
$= 1000 + 331 = 1331$.

Ε'. $(99)^3 = (90 + 9)^3 = 729000 + 218700 + 21870 + 729 = 729000 + 241299 = 970299$, ἢ καὶ ἄλλως $(99)^3 = (100 - 1)^3 = 1000000 - 30000 + 300 - 1 = 970299$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὥσπερ ἐπὶ τοῦ τετραγωνικοῦ ἀριθμοῦ, δὶς τοσαῦτα μηδενικὰ εἰσάγεται, ἢ ὅσα ἐπὶ τῆς ῥίζης (§. 257. Σχόλ.), οὕτως ἐπὶ τοῦ κύβου τρὶς τοσαῦτα· ὥστε εἶναι, ὁσάκις ὁ κύβος ἐπὶ 1000 πολλαπλασιάζεται, τοσάκις ἡ ῥίζα ἐπὶ 10· οἷον $(300)^3 = (3.100)^3 = 27.1000000 = 27000000$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 266. Ῥίζαν τριώνυμον πρὸς κύβον ἐξᾶραι.

ΛΥΣΙΣ.

Τριώνυμος οἱαδηποτοῦν ῥίζα τῷ $\gamma + \delta + \varepsilon$, ἐκτί-

θεσθαι εἴωθεν. Ἐὰν οὖν $\gamma + \delta = \alpha$ τεθῇ, καὶ $\varepsilon = \beta$, πᾶσα ῥίζα τριώνυμος τῷ $\alpha + \beta$ ὑποτυπωθήσεται· κἀντεῦθεν ὁ ταύτης κύβος τῷ $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$. Ἔνθα τῆς ἀντικαταστάσεως τῶν α καὶ β γενομένης, ἔσται·

$$\alpha^3 = (\gamma + \delta)^3 = \gamma^3 + 3\gamma^2\delta + 3\gamma\delta^2 + \delta^3.$$
$$+3\alpha^2\beta = 3(\gamma^2 + 2\gamma\delta + \delta^2)\varepsilon = 3\gamma^2\varepsilon + 6\gamma\delta\varepsilon + 3\delta^2\varepsilon.$$
$$+3\alpha\beta^2 = 3(\gamma + \delta)\varepsilon^2 = 3\gamma\varepsilon^2 + 3\delta\varepsilon^2.$$

$+\beta^3 = \varepsilon^3$. ὧν συναφθέντων, ἔσται·

$$(\gamma + \delta + \varepsilon)^3 = \gamma^3 + 3\gamma^2\delta + 3\gamma\delta^2 + \delta^3 + 3\gamma^2\varepsilon + 6\gamma\delta\varepsilon + 3\delta^2\varepsilon + 3\gamma\varepsilon^2 + 3\delta\varepsilon^2 + \varepsilon^3.$$

Ἔνθα αὖθις εὔδηλόν ἐστι τὸν τῆς τριωνύμου ῥίζης κύβον ἐν γένει συναπαρτίζεσθαι ἐκ τῶν κύβων ἑκάστου τῶν τῆς ῥίζης ὅρων, ἐκ τοῦ γινομένου ὑπὸ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τῶν ἡγουμένων ἐπὶ πάντας τοὺς ἑπομένους, καὶ ἐκ τοῦ γινομένου ὑπὸ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου ἑκάστου ἑπομένου ἐπὶ πάντας τοὺς ἡγουμένους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. $(1 + \chi - \chi^2)^3 = 1 + 3\chi + 3\chi^2 + \chi^3 - 3\chi^2 - 6\chi^3 - 3\chi^4 + 3\chi^4 + 3\chi^5 - \chi^6 = 1 + 3\chi - 5\chi^3 + 3\chi^5 - \chi^6$.

Β'. $(999)^3 = (900 + 90 + 9)^3 = 729000000 + 218700000 + 21870000 + 729000 + 26462700 + 240570 + 729 = 997002999$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 267. Ῥίζαν Τετρώνυμον πρὸς κύβον ἐξᾶραι.

ΛΥΣΙΣ.

Τῆς τετρωνύμου, τῆς καὶ πολυωνύμου, τῷ $\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta$ ἐκτιθεμένης, ἐὰν τεθῇ $\gamma+\delta+\varepsilon=\alpha$, καὶ $\zeta=\beta$, πᾶσα ῥίζα τετρώνυμος τῷ $\alpha+\beta$ ὑποτυπωθήσεται· κἀντεῦθεν ὁ ταύτης κύβος τῷ $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$, τῆς τε ἀνθυποκαταστάσεως τῶν α καὶ β γινομένης, ἔσται·

$$\alpha^3=(\gamma+\delta+\varepsilon)^3=\gamma^3+3\gamma^2\delta+3\gamma\delta^2+\delta^3+3\gamma^2\varepsilon$$
$$+6\gamma\delta\varepsilon+3\delta^2\varepsilon+3\gamma\varepsilon^2+3\delta\varepsilon^2+\varepsilon^3.$$
$$+3\alpha^2\beta=3(\gamma^2+2\gamma\delta+\delta^2+2\gamma\varepsilon+2\delta\varepsilon+\varepsilon^2)\zeta$$
$$=3\gamma^2\zeta+6\gamma\delta\zeta+3\delta^2\zeta+6\gamma\varepsilon\zeta+6\delta\varepsilon\zeta+3\varepsilon^2\zeta.$$
$$+3\alpha\beta^2=3(\gamma+\delta+\varepsilon)\zeta^2=3\gamma\zeta^2+3\delta\zeta^2+3\varepsilon\zeta^2$$
$$+\beta^3=\zeta^3.$$

Κἀντεῦθεν.

$$(\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)^3=\gamma^3+3\gamma^2\delta+3\gamma\delta^2+\delta^3+3\gamma^2\varepsilon$$
$$+6\gamma\delta\varepsilon+3\delta^2\varepsilon+3\gamma\varepsilon^2+3\delta\varepsilon^2+\varepsilon^3+3\gamma^2\zeta$$
$$+6\gamma\delta\zeta+3\delta^2\zeta+6\gamma\varepsilon\zeta+6\delta\varepsilon\zeta+3\varepsilon^2\zeta+3\gamma\zeta^2$$
$$+3\delta\zeta^2+3\varepsilon\zeta^2+\zeta^3.$$

Ἐξ ὧν δῆλον τὸν τῆς τετρωνύμου ῥίζης κύβον ἐκ τριῶν ἐν γένει μερῶν συγκεῖσθαι, ἤτοι Α'. ἐκ τῶν κύβων ἑκάστου τῶν ὅρων, Β'. ἐκ τοῦ γινομένου ὑπὸ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τῶν ἡγουμένων ἐπὶ πάντας τοὺς ἑπομένους, καὶ Γ'. ἐκ τοῦ γινομένου ὑπὸ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου ἑκάστου τῶν ἑπομένων ἐπὶ πάντας τοὺς ἡγουμένους. Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ δείκνυται καὶ περὶ τῶν κύβων ὁποιωνοῦν ἄλλων πολυωνύμων ῥιζῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 268. Κύβου ὀρθῶς καὶ κατὰ ῥυθμὸν διατεταγμένου, τὰ ἑαυτοῦ μέρη οὕτως ἐκλαμβάνεσθαι ἔχουσι, Κύβος ὅρου πρώτου. Τριπλοῦν τετράγωνον τοῦ πρώτου ἀχθὲν ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον· τριπλοῦν τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν πρῶτον· κύβος τοῦ δευτέρου ὅρου. Τριπλοῦν τετράγωνον τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ἀχθὲν ἐπὶ τὸν τρίτον· τριπλοῦν τετράγωνον τοῦ τρίτου, ἐπὶ τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον· κύβος τοῦ τρίτου ὅρου. Τριπλοῦν τετράγωνον τοῦ πρώτου, δευτέρου, καὶ τρίτου ἀχθὲν ἐπὶ τὸν τέταρτον· τριπλοῦν τετράγωνον τοῦ τετάρτου ἀχθὲν ἐπὶ τὸν πρῶτον, δεύτερον, καὶ τρίτον· κύβος τετάρτου ὅρου· καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 269. Ἐν γένει τοίνυν Πολυωνύμου οἱασδηποτοῦν ῥίζης ὁ κύβος συντίθεται ἐκ τῶν καθ' ἕκαστον τῶν ὅρων κύβων, καὶ τοῦ γινομένου ἐκ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου ἑκάστου ὅρου ἐπὶ τὸν ἕτερον, ἤτοι τῶν ἡγουμένων ὅρων ἐπὶ τοὺς ἑπομένους, καὶ τῶν ἑπομένων ἐπὶ τοὺς ἡγουμένους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 270. Ῥίζαν Διώνυμον πρὸς τετραγωνοτετράγωνον ἐξᾶραι.

ΛΥΣΙΣ.

Ἅπαν τετραγωνοτετράγωνον, τὸ ἀπὸ πλευρᾶς ἢ ῥίζης διωνύμου, συναπαρτίζεται ἐκ τοῦ τετραγωνοτετραγώνου τοῦ πρώτου ὅρου· ἐκ τοῦ τετράκις γινομένου, τοῦ ὑπὸ τοῦ κύβου τοῦ πρώτου ὅρου ἐπὶ τὸν δεύτερον ἁπλῶς· ἐκ τοῦ ἑξάκις γινομένου, τοῦ ὑπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου μέρους ἐπὶ τὸν τετράγωνον τοῦ δευτέρου· ἐκ τοῦ τετράκις γινομένου ὑπὸ τοῦ κύβου τοῦ δευτέρου ὅρου, ἐπιπολλαπλασιαζομένου ἁπλῶς τῷ πρώτῳ· καὶ ἐκ τοῦ τετραγωνοτετραγώνου τοῦ δευτέρου ὅρου· οἷον $(\alpha+\beta)^4 = \alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν πολυωνύμων ὡσαύτως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 271. Δυνάμεως οἱασοῦν δευτεροβαθμίου, φέρ' εἰπεῖν, ἢ τριτοβαθμίου, διςδευτεροβαθμίου. ἤτοι τεταρτοταγοῦς, ἢ καὶ οἱαςδηποτοῦν ἔτι καθυπερτέρας, τὸν ἀπὸ διωνύμου ῥίζης τύπον ἐξευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐν ἑκάστῃ δυνάμει τοσαίδε θετικαὶ ἢ ἀποφατικαὶ ῥίζαι ἔνεισιν, ὅσαι αἱ τῶν κατὰ θέσιν + καὶ ἀπόφασιν — σημείων ἀλληλουχίαι. Ἐπεὶ δὲ αἱ κατὰ τὰ σημεῖα τροπαὶ τετραχῶς τελεῖσθαι ἔχουσι, τετραπλάζειν ἀνάγκης καὶ τοὺς οὕτως ἐκκύπτοντας τύπους. Καὶ γὰρ ῥίζα διώνυμος οὐκ ἂν ἀπεικότως ῥηθείη ἡ τοῖς σημείοις, οἷς αὕτη συνίσταται διασημαινομένη, ἔκ τε δυοῖν στοιχειακῶν ὀνομάτων συγκειμένη (§. 55. 204.), οἷον $\alpha+\beta$, ἢ $-\alpha-\beta$, ἢ $\alpha-\beta$, ἢ $-\alpha+\beta$· παρὰ ταῦτα γὰρ διωνύμου ῥίζης εἶδος ἕτερον θέσθαι ἀμήχανον. Ἐὰν οὖν ἡ ῥίζα ἐφ' ἑαυτὴν ἀχθῇ, καὶ τὸ γινόμενον αὖθις ἐπὶ τὴν αὐτὴν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὑπ' ὄψιν παραστήσονται αἱ ἀπὸ τῆς δευτέρας ἄχρις οἱασοῦν καθυπερτέρας τῶν δυνάμεων, καθ' ἃς ἂν τῳ βουλητὸν εἴη τὴν διώνυμον ἐξᾶραι, ὧν δὴ αὐτὴ, ἅτε δύναμις πρώτη προκείσεται· οἷον

Α'. $\alpha+\beta$.
Β'. $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.
Γ'. $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$.
Δ'. $\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$.
Ε'. $\alpha^5+5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2+10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4+\beta^5$.
Ϛ'. $\alpha^6+6\alpha^5\beta+15\alpha^4\beta^2+20\alpha^3\beta^3+15\alpha^2\beta^4$
$+6\alpha\beta^5+\beta^6$.
Ζ'. $\alpha^7+7\alpha^6\beta+21\alpha^5\beta^2+35\alpha^4\beta^3+35\alpha^3\beta^4$
$+21\alpha^2\beta^5+7\alpha\beta^6+\beta^7$.

Παραπλησίως καὶ αἱ ἀπὸ ῥίζης $\alpha-\beta$ δυνάμεις συστήσονται, ἐὰν ἀποφατικῶς σημειωθῇ τὰ γινόμενα, οἷς τὸ β ἐμφιλοχωρεῖ περισσάριθμον τὸν ἐκθέτην φέρον (§. 224.)· οἷον.

Α'. $\alpha-\beta$.
Β'. $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$.
Γ'. $\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$.
Δ'. $\alpha^4-4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta^3+\beta^4$.
Ε'. $\alpha^5-5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2-10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4-\beta^5$.
Ϛ'. $\alpha^6-6\alpha^5\beta+15\alpha^4\beta^2-20\alpha^3\beta^3+15\alpha^2\beta^4$
$-6\alpha\beta^5+\beta^6$.
Ζ'. $\alpha^7-7\alpha^6\beta+21\alpha^5\beta^2-35\alpha^4\beta^3+35\alpha^3\beta^4$
$-21\alpha^2\beta^5+7\alpha\beta^6-\beta^7$.

Τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον καὶ αἱ ἀπὸ τῆς $-\alpha+\beta$ ῥίζης δυνάμεις προκύψουσιν, ἐὰν ἀποφατικῶς σημειωθῇ, ἐφ' οἷς τὸ α περισσαρίθμου τοῦ ἐκθέτου ἔλαχε, τὰ γινόμενα· οὕτως.

Α'. $-\alpha+\beta$.
Β'. $+\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$.

Γ'. $-\alpha^3 + 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 + \beta^3$.

Δ'. $+\alpha^4 - 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta^3 + \beta^4$.

Ε'. $-\alpha^5 + 5\alpha^4\beta - 10\alpha^3\beta^2 - 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4$
$+ \beta^5$.

ς'. $+\alpha^6 - 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 - 20\alpha^3\beta^3 + 15\alpha^2\beta^4$
$- 6\alpha\beta^5 + \beta^6$.

Ζ'. $-\alpha^7 + 7\alpha^6\beta - 21\alpha^5\beta^2 + 35\alpha^4\beta^3 - 35\alpha^3\beta^4$
$+ 21\alpha^2\beta^5 - 7\alpha\beta^6 + \beta^7$.

Ἐπὶ τούτων, ἐὰν καὶ οἷς ἐμφιλοχωρεῖ τὸ β ἐν περισσαρίθμῳ τῷ ἐκθέτῃ ὑπεναντίως σημειωθῇ τὰ γινόμενα, οἱ τῶν δυνάμεων τύποι προκύψουσι τῶν ἀπὸ ῥίζης τῆς $-\alpha - \beta$ (§. 224.)· ὡς,

Α'. $-\alpha - \beta$.

Β'. $+\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.

Γ'. $-\alpha^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 - \beta^3$.

Δ'. $+\alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4$.

Ε'. $-\alpha^5 - 5\alpha^4\beta - 10\alpha^3\beta^2 - 10\alpha^2\beta^3 - 5\alpha\beta^4 - \beta^5$

ς'. $+\alpha^6 + 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 + 20\alpha^3\beta^3 + 15\alpha^2\beta^4$
$+ 6\alpha\beta^5 + \beta^6$.

Ζ'. $-\alpha^7 - 7\alpha^6\beta - 21\alpha^5\beta^2 - 35\alpha^4\beta^3 - 35\alpha^3\beta^4$
$- 21\alpha^2\beta^5 - 7\alpha\beta^6 - \beta^7$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 272. Ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων τῶν δυνάμεων τύπων εὔδηλόν ἐστι, τὴν μὲν πρώτην δύναμιν $\alpha + \beta$ εἶναι $= \overline{\alpha + \beta} \times 1 = \alpha + \beta$, ἤτοι $\alpha^1 + \beta^1$ (§. 61.) $= \alpha^1\beta^0 + \alpha^0\beta^1$· τὴν δὲ δευτέραν, ἤτοι τὸ τετράγωνον τοῦ $\alpha + \beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$· ἤτοι ἀναλυτικώτερον $\alpha^2\beta^0 + 2\alpha^1\beta^1 + \alpha^0\beta^2$· τήν τε τρί-

την τοῦ $\alpha + \beta$ δύναμιν, τουτέστι τὸν κύβον $= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$· ἤτοι $\alpha^3\beta^0 + 3\alpha^2\beta^1 + 3\alpha^1\beta^2 + \alpha^0\beta^3$· καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως. Ἐξ ὧν ἕπεται ὅτι, ἐπεὶ ὁ μὲν πρῶτος ὅρος ἀφ' οὗπερ ἐστὶ βαθμοῦ προϊὼν φθίνει ἄχρι διαπαντός, ὁ δὲ δεύτερος ἀπὸ μηδενὸς αὔξει ἐπὶ τὴν προτεθεῖσαν δύναμιν, εὔδηλόν ἐστι τοὺς ὁποιωνδηποτοῦν ὅρων διωνύμου τινὸς ἐκθέτας ῥᾳδίως ἐξευρίσκεσθαι, ἐὰν οἱ ὅροι ἀναλυόμενοι στιχηδὸν ὑπαλλήλως γραφῶσιν· οἷον ἐπὶ τῆς ἕκτης δυνάμεως.

$\alpha^6\beta^0 + \alpha^5\beta^1 + \alpha^4\beta^2 + \alpha^3\beta^3 + \alpha^2\beta^4 + \alpha^1\beta^5$
$+ \alpha^0\beta^6$.

Ἔνθα, τὸ τῶν ἐκθετῶν δυοῖν στοιχείων ἐφ' ἑκάστου τῶν ὅρων ἄθροισμα ἰσοῦται τῷ τῆς δυνάμεως βαθμῷ.

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha^6 + & \alpha^5 + & \alpha^4 + & \alpha^3 + & \alpha^2 + & \alpha + & 1 \\ 1 + & \beta + & \beta^2 + & \beta^3 + & \beta^4 + & \beta^5 + & \beta^6 \\ \hline \alpha^6 + & \alpha^5\beta + & \alpha^4\beta^2 + & \alpha^3\beta^3 + & \alpha^2\beta^4 + & \alpha\beta^5 + & \beta^6. \end{array}$$

Οἱ μὲν γὰρ κατὰ τὸν πρῶτον ὅρον, ἤτοι τὸ α, ἐκθέται, ἐκ τοῦ 6 ἀρχόμενοι ἕως τῆς μονάδος ὑπομειοῦνται, ὅτε τοῦ ἐσχάτου ὅρου, ἤτοι τοῦ β οἱ ἐκθέται βουστροφηδὸν ἀπὸ τοῦ 6 ἀρχόμενοι, ἀντιστρόφως τῷ πρώτῳ φθίνουσιν ἐς τὸν δεύτερον καταλήγοντες ὅρον. Ἢ, ὅ ταυτόν ἐστιν, ἐν τῇ ἑκτοβαθμίῳ ὑψώσει διωνύμου τινὸς ποσότητος, οἱ ἐκθέται τοῦ πρώτου τῆς ῥίζης ὅρου φθίνουσιν ἐκ τοῦ 6 μέχρι τῆς μονάδος, ὅτε οἱ τοῦ δευτέρου ὅρου αὔξουσιν ἐκ τῆς μονάδος ἄχρι τοῦ 6· ὥστε οἱ τῆς ν δυνάμεως ὅροι οὕτως ἐν γένει ἐκκείσονται $\alpha^{\nu} + \alpha^{\nu-1}\beta + \alpha^{\nu-2}\beta^2 + \alpha^{\nu-3}\beta^3 + \alpha^{\nu-4}\beta^4 + \alpha^{\nu-5}\beta^5 + \ldots \beta^{\nu}$.

Ὃ δὴ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δυνάμεων κρατήσει λεγόμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 273. Πρὸς τὴν τῶν Ἐκθετῶν τοίνυν εὕρεσιν, τὸν μὲν τοῦ α ἐκθέτην, ἴσον τῷ κατὰ τὴν δύναμιν βαθμῷ ἐν τῷ πρώτῳ ὅρῳ τυγχάνοντα, μονάδι ἐσαεὶ ἀπομειωτέον, μέχρις ἂν $= 0$ ἀποβῇ. Τοὐναντίον δὲ, τὸν τοῦ β, κατὰ τὸν πρῶτον ὅρον $= 0$ ὄντα, ἐπαυξητέον μονάδι, ἄχρις οὗ τῷ κατὰ τὴν δύναμιν βαθμῷ ἐξισωθῇ· ἔνθεν τοι τῶν Συνθετῶν ἐπὶ τῆς ὀγδόης φέρ' εἰπεῖν, ἢ ἐννάτης τοῦ $\alpha + \beta$ δυνάμεως ὑποτμηθέντων, τὰ γινόμενα οὕτως ἐν στίχῳ ἐκκείσονται.

$\alpha^8\beta,\ \alpha^7\beta^2,\ \alpha^6\beta^3,\ \alpha^5\beta^4,\ \alpha^4\beta^5,\ \alpha^3\beta^6,\ \alpha^2\beta^7,\ \alpha\beta^8.$

$\alpha^9\beta,\ \alpha^8\beta^2,\ \alpha^7\beta^3,\ \alpha^6\beta^4,\ \alpha^5\beta^5,\ \alpha^4\beta^6,\ \alpha^3\beta^7,\ \alpha^2\beta^8,\ \alpha\beta^9.$

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 274. Τῷ αὐτῷ τρόπῳ καὶ τοὺς κατὰ τὰς δυνάμεις Συνθέτας ἀνιχνευτέον. τεθέντος γὰρ τοῦ μὲν $\alpha = 1$, τοῦ δὲ $\beta = 1$· ἔσται $\alpha + \beta = 1 + 1$ τοῖς τῆς πρώτης δυνάμεως συνθέταις. ὧν ἐφ' ἑαυτοὺς ἀγομένων, καὶ τῶν γινομένων αὖθις ἐπ' ἐκείνους, οἱ τῶν λοιπῶν δυνάμεων κατὰ τάξιν συνθέται ἐκκύψουσιν· οἷον·

$$
\begin{array}{r l}
1 + 1 & \text{ὁ τῆς Α'. Δυνάμ. Συνθέτης.} \\
1 + 1 & \\
\hline
1 + 1 & \\
1 + 1 & \\
\hline
1 + 2 + 1 & \text{ὁ τῆς Β'. Δυνάμ. Συνθέτης.} \\
1 + 1 & \\
\hline
1 + 2 + 1 & \\
1 + 2 + 1 & \\
\hline
1 + 3 + 3 + 1 & \text{ὁ τῆς Γ'. Δυνάμ. Συνθέτης.}
\end{array}
$$

καὶ τῆς πράξεως ᾗ χρὴ χωρούσης, ὁ ἐφεξῆς ἡμῖν Πίναξ ἐκκύπτει.

Δυνάμεις.	Συνθέται.
Α'.	1, 1.
Β'.	1, 2, 1.
Γ'.	1, 3, 3, 1.
Δ'.	1, 4, 6, 4, 1.
Ε'.	1, 5, 10, 10, 5, 1.
Ϛ'.	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.
Ζ'.	1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.
Η'.	1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.
Θ'.	1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.
Ι'.	1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 275. Ἐὰν, ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω πορίσματος (§. 274.), ὑποτεθῇ $\alpha = 1$, $\beta = 1$, ἔσονται αἱ ἀπὸ τοῦ 2 δυνάμεις, ὡς ἐφεξῆς.

Α'. Δύναμ. $1 + 1 = 2 = 2^1$.

Β'. — $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$.

Γ'. — $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$.

Δ'. — $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$.

Ε'. — $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$.

Ϛ'. — $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$.

Ζ'. — $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1$
$= 128 = 2^7$.

Η'. — $1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1$
$= 256 = 2^8$.

Θ'. — $1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = 512 = 2^9$.

Ι'. — $1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 1024 = 2^{10}$.

Ἔνθα συνιδεῖν πάρεστιν, ὡς ἐπὶ μὲν τῶν ἀρτιαρίθμων δυνάμεων, οἷον 2, 4, 6, 8, κτλ. ὁ μέγιστος τῶν συνθετῶν τὸν μέσον ἔλαχε χῶρον· ἐπὶ δὲ τῶν περισσαρίθμων, οἷον 3, 5, 7, κτλ. ἀμφότερα τὰ μεσαίτατα μέλη ἀλλήλοις ἰσοῦνται· Ἐφ' ᾧ τοίνυν τοὺς δυνάμεως τινος δοθείσης συνθέτας ῥαδίως ἐξευρίσκειν ἔχωμεν, ἄνευ τῆς τῶν προηγουμένων ἀνιχνεύσεως, γενέσθω κατὰ τὰ μέχρι τοῦδε τεθέντα, ἐπὶ τῆς πέμπτης, φέρ' εἰπεῖν δυνάμεως, τὸ ἐφεξῆς κλάσμα, οὗτινος, ὁ μὲν ἀριθμητὴς ἀπὸ τῆς δοθείσης δυνάμεως τὴν ἀρχὴν ποιούμενος, μονάδα διηνεκῶς ἐπὶ τῶν ἑπομένων κλασμάτων ἀφαιρούμενος προϊέτω, ὁ δὲ παρονομαστὴς ἀπὸ μονάδος ἀρχόμενος, μονάδι ἐπὶ τῶν λοιπῶν ἐπιμεγεθυνέσθω· οἷον,

$$\frac{5}{1},\ \frac{4}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{5}.$$

ὡς καὶ περὶ τῶν ἐκθετῶν ἐῤῥέθη (§. 273.)· ἐπεὶ τοίνυν ἐφ' ἑκάστης δυνάμεως ὁ πρῶτος συνθέτης ἐστὶ 1, τοὐνταῦθεν τὸ πρῶτον κλάσμα, τὸν δεύτερον συνθέτην προὐβάλετο· τὸ δ' ὑπὸ τῶν δυοῖν πρώτων κλασμάτων γινόμενον, τὸν τρίτον· τὸ ὑπὸ τῶν τριῶν, τὸν τέταρτον· καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως· ὥστε εἶναι ἐπὶ τοῦ προεκτεθέντος παραδείγματος

τὸν α'. Συνθέτην $= 1$.

— β'. — $\frac{5}{1} = 5$.

τὸν γ'. Συνθέτην $\frac{5}{1} \cdot \frac{4}{2} = 10$.

— δ'. — $\frac{5}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{3} = 10$.

— ε'. — $\frac{5}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{4} = 5$.

— ς'. — $\frac{5}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{5} = 1$.

Τὸ δὲ ἐπὶ τῆς δευτέρας δυνάμεως κλάσμα, τοιοῦτόν τι δέον εἶναι $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$· οἷον·

α'. Συνθ. $= 1$.

β'. — $\frac{2}{1} = 2$.

γ'. — $\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1$.

καὶ τὸ ἐπὶ τῆς τρίτης $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$· ἤτοι·

α'. Συνθ. $= 1$.

β'. — $\frac{3}{1} = 3$.

γ'. — $\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{2} = 3$.

δ'. — $\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1$.

Τῷ αὐτῷ τρόπῳ χωροῦντες, πασῶν τῶν δοθεισῶν δυνάμεων τοὺς συνθέτας ἀναλυτικῶς ἀνιχνεύσομεν. Τοῦτο δὲ οὐδὲν ἄλλο ἐστιν, ὅτι μὴ ὁ ἐκθέτης τοῦ πρώτου ὅρου συνθέτης ἐστὶ τοῦ δευτέρου· τὸ δὲ παραγόμενον ὑπὸ τοῦ συνθέτου τοῦ κατὰ τὸν δεύτερον ὅρον, καὶ τοῦ ἐκθέτου τοῦ ἐν τῷ αὐτῷ τῆς ῥίζης ὅρῳ, διαιρεθὲν διὰ τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ πηλίκον δίδωσιν, ὃ συνθέτης ἐστὶ τοῦ τρίτου· καὶ ἑξῆς ὁμοίως, ἕως οὗ χωρήσαντες ἐπὶ τὴν ἀκμὴν, ἀντιθέτως τῇ τῶν πρώτων αὐξήσει μειοῦσθαι ἄρξωνται, ἄχρι τοῦ μηδενός· ὁ γὰρ ἀνωτέρω τύπος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἐφεξῆς.

Α'. Δύναμις $1 \alpha^1 + 1 \alpha^0$.

Β'. — $1 \alpha^2 + 2 \alpha^1 + 1 \alpha^0$.

Γ'. — $1 \alpha^3 + 3 \alpha^2 + 3 \alpha^1 + 1 \alpha^0$.

Δ'. Δύναμις $1\alpha^4 + 4\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha^1 + 1\alpha^0$.
Ε'. — $1\alpha^5 + 5\alpha^4 + 10\alpha^3 + 10\alpha^2 + 5\alpha^1 + 1\alpha^0$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 276. Ἐν ἁπάσαις τοίνυν ταῖς τοῦ διωνύμου ὅρου δυνάμεσιν, ὁ τοῦ τρίτου ὅρου συνθέτης τὸ ἥμισυ τυγχάνει τοῦ ἐκ δυοῖν προτέρων ἐκθετῶν παραγομένου· οὕτως τε ἐπὶ τῆς ἑβδόμης δυνάμεως τὸ ἐκ δυοῖν προτέρων ἐκθετῶν τοῦ α γινόμενον, διαιρεθὲν διὰ τοῦ ἐκ δυοῖν προτέρων ἐκθετῶν τοῦ β παραγομένου, πηλίκον προυβάλετο, ὃ ἐπὶ τοῦ τρίτου ὅρου συνθέτης ἐστίν· οἷον $\frac{7.6}{1.2} = \frac{42}{2} = 21$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ϛ.

§. 277. Διὰ τῆς ἐν τῷ Δ'. Πορίσματι δοθείσης περὶ τῶν συνθετῶν ἐν γένει δείξεως, ἔξεστι τὰ κατὰ τοὺς συνθέτας κλάσματα καταγράφουσιν, ἄνευ τινὸς ἑτέρας τοῦ ὑπολογισμοῦ χρήσεως, οἱανδηποτοῦν δοθεῖσαν τοῦ $\alpha+\beta$ ἐκθεῖναι δύναμιν· οἷον

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + \tfrac{2}{1}\alpha\beta + \frac{2.1}{1.2}\beta^2.$$

$$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + \tfrac{3}{1}\alpha^2\beta + \frac{3.2}{1.2}\alpha\beta^2 + \frac{3.2.1}{1.2.3}\beta^3.$$

$$(\alpha+\beta)^4 = \alpha^4 + \tfrac{4}{1}\alpha^3\beta + \frac{4.3}{1.2}\alpha^2\beta^2 + \frac{4.3.2}{1.2.3}\alpha\beta^3 + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}\beta^4.$$

$$(\alpha+\beta)^5 = \alpha^5 + \tfrac{5}{1}\alpha^4\beta + \frac{5.4}{1.2}\alpha^3\beta^2 + \frac{5.4.3}{1.2.3}\alpha^2\beta^3 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}\alpha\beta^4 + \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}\beta^5.$$

$$(\alpha+\beta)^6 = \alpha^6 + \tfrac{6}{1}\alpha^5\beta + \frac{6.5}{1.2}\alpha^4\beta^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}\alpha^3\beta^3 + \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\alpha^2\beta^4 + \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}\alpha\beta^5 + \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6}\beta^6.$$

ἄρα ὡσαύτως·

$$(\alpha+\beta)^{50} = \alpha^{50} + \frac{50}{1}\alpha^{49}\beta + \frac{50.49}{1.2}\alpha^{48}\beta^2 + \frac{50.49.48}{1.2.3}\alpha^{47}\beta^3 + \frac{50.49.48.47}{1.2.3.4}\alpha^{46}\beta^4 + \frac{50.49.48}{1.2.3}\cdot\frac{47.46}{4.5}\alpha^{45}\beta^5 + \frac{50.49.48}{1.2.3}\cdot\frac{47.46.45}{4.5.6}\alpha^{44}\beta^6 + \text{κτλ.}$$

καὶ $$(\alpha+\beta)^{100} = \alpha^{100} + \frac{100}{1}\alpha^{99}\beta + \frac{100.99}{1.2}\alpha^{98}\beta^2 + \frac{100.99.98}{1.2.3}\alpha^{97}\beta^3 + \frac{100.99.98.97}{1.2.3.4}\alpha^{96}\beta^4 + \frac{100.99.98.97.96}{1.2.3.4.5}\alpha^{95}\beta^5 + \text{κτλ.}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ.

§. 278. Ἐὰν τοίνυν ὁ δυνάμεως οἱασοῦν ἐκθέτης δι' ἀορίστου ν ἐκτεθῇ, ἔσται ἐν γένει πρὸς παράστασιν τῶν ἐκθετῶν οἱασοῦν δυνάμεως (§. 275.) ὁ ἐφεξῆς στίχος, ἐν ᾧ οἱ τοῦ α ἐκθέται σὺν τοῖς φυσικῇ τάξει ἰοῦσιν ἀριθμοῖς ὑπ' ὄψιν ἐκτίθενται·

$\alpha = \nu,\ \nu-1,\ \nu-2,\ \nu-3,\ \nu-4,\ \nu-5, \ldots$
$\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6, \ldots$

Κἀντεῦθεν οἱ τῶν ὅρων συνθέται ῥᾳδίως ἐκκύπτουσι (§. 277.). Καὶ δὴ

ὁ μὲν τοῦ Α′. $= 1$.
ὁ δὲ τοῦ Β′. $= \frac{\nu}{1}$.
— — Γ′. $= \frac{\nu . \nu - 1}{1 . 2}$.
— — Δ′. $= \frac{\nu . \nu - 1 . \nu - 2}{1 . 2 . 3}$.
— — Ε′. $= \frac{\nu . \nu - 1 . \nu - 2 . \nu - 3}{1 . 2 . 3 . 4}$.
— — Ϛ′. $= \frac{\nu . \nu - 1 . \nu - 2 . \nu - 3 . \nu - 4}{1 . 2 . 3 . 4 . 5}$.
— — Ζ′. $= \frac{\nu . \nu - 1 . \nu - 2 . \nu - 3 . \nu - 4 . \nu - 5}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6}$.

Καὶ ἐφεξῆς ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως· ἐξ ὧν ὁ ἐν γένει καθόλου ἑπόμενος ἀναφύεται Τύπος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 279. Τύπον ἐν γένει συντάξαι εἰς ἔξαρσιν Διωνύμων ὁποιωνοῦν ποσοτήτων, καθ' ἡλικηνοῦν δύναμιν, ὑπουργοῦντα.

ΛΥΣΙΣ.

Οἱασδηποτοῦν μὲν δὴ ῥίζης διωνύμου ποσότητος τῷ $\chi + \alpha$ δηλουμένης, τοῦ δ' ἀντ' ἐκθέτου λαμβανομένου τῆς δυνάμεως, πρὸς ἣν ἐξᾶραι τὴν ῥίζαν δεῖ τὴν διώνυμον, ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ τῷ ν ἐπισημαινομένου, ἔσται ῥίζα ἐν γένει ὑπὲρ οἱασοῦν δυνάμεως, ἡ $(\chi+\alpha)^{\nu}$ ἐπὶ τὸν ἐκθέτην ν ἀναχθεῖσα. Ἐπεὶ οὖν $\chi + \alpha$ ἰσαρίθμως ταῖς ἐν τῷ ν μονάσι πολλαπλασιαζόμενον δώσει γινόμενον $(\chi+\alpha) \times (\chi+\alpha) \times (\chi+\alpha) \times \ldots\ldots$, ἐν ᾧ $\chi+\alpha$, ὡς εἷς τῶν παραγόντων ἐνείληπται. Ἔσται τοίνυν ὁ πρῶτος τοῦ γινομένου ὅρος $= \chi^{\nu}$. Ἐπεὶ δὲ ὁ τοῦ πρώτου ὅρου συνθέτης ἐστὶ μονάς, ἔσται ὁ τοῦ δευτέρου $\frac{\nu}{1}\alpha$ (§. 275.) $= \nu\alpha$, ἐν ᾧ τὸ α ἰσαρίθμως

ταῖς ἐν τῷ ν μονάσι τέθειται, ὁ δ' ἐκθέτης $= \nu - 1$: (§. 273.), ὥστε εἶναι τὸν δεύτερον τῆς δυνάμεως ὅρον $\nu\alpha\chi^{\nu-1}$. Ὁ τρίτος ἔσται $\alpha^2\chi^{\nu-2}$ συνθέτην ἔχων, τὸν τοῦ δευτέρου ὅρου ἐκθέτην, διὰ τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ, ἤτοι τοῦ 2, διαιρούμενον, διά τε τοῦ αὐτοῦ συνθέτου $\frac{\nu}{1}$ ἐπιπολλαπλασιαζόμενον ἤτοι $\frac{\nu}{1} \times \frac{\nu-1}{2}$. ἔνθεν τοι ὁ τρίτος τῆς δυνάμεως ὅρος ἔσται $\frac{\nu . (\nu-1)}{1 . 2}\alpha^2\chi^{\nu-2}$ (§. 275. 276.)· ἤτοι ὁ πρῶτος τῆς ῥίζης ὅρος πρὸς δύναμιν μονάδος συνεχῶς ἐλλείπουσαν ἀναχθείς, συνθέτην πλουτοῦσαν τῷ ἐκ τῆς ῥίζης τῶν γινομένων ἀθροίσματι ἴσον (§. 272.). Ὁ τέταρτος ὅρος ἔσται $\frac{\nu}{1} + \frac{\nu-1}{2} \times \frac{\nu-2}{3}$ ἤτοι $\frac{\nu . (\nu-1) . (\nu-2)}{1 . 2 . 3}\alpha^3\chi^{\nu-3}$· ὡσαύτως καὶ ὁ πέμπτος

$$\frac{\nu . (\nu-1) . (\nu-2) . (\nu-3)}{1 . 2 . 3 . 4}\alpha^4\chi^{\nu-4}.$$

καὶ ὁ ἕκτος

$$\frac{\nu . (\nu-1) . (\nu-2) . (\nu-3) . (\nu-4)}{1 . 2 . 3 . 4 . 5}\alpha^5\chi^{\nu-5}.$$

καὶ ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς ὡσαύτως χωρητέον, ὥστε τῆσδε τῆς προόδου τοσούσδε παραληφθήσεσθαι ὅρους, ὁπόσοι κατὰ τὴν ταχθεῖσαν δύναμιν τῷ στοιχειακῷ ἐκθέτῃ ν παραχθῆναι δυνήσονται. Ἔσται τοίνυν ὁ ἐπιταχθεὶς ἐν γένει τύπος,

$$(\chi+\alpha)^{\nu} = \chi^{\nu} + \nu\alpha\chi^{\nu-1} + \frac{\nu . (\nu-1)}{1 . 2}\alpha^2\chi^{\nu-2} + \frac{\nu . (\nu-1) . (\nu-2)}{1 . 2 . 3}\alpha^3\chi^{\nu-3} + \frac{\nu . (\nu-1) . (\nu-2) . (\nu-3)}{1 . 2 . 3 . 4}\alpha^4\chi^{\nu-4} + \frac{\nu . (\nu-1) . (\nu-2) . (\nu-3) . (\nu-4)}{1 . 2 . 3 . 4 . 5}\alpha^5\chi^{\nu-5} + \kappa\tau\lambda.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 280. Τῷ αὐτῷ τρόπῳ καὶ ἡ τοῦ $(\pi+\kappa)^{\mu}$ δύναμις ἔσται $\pi^{\mu} + \mu\kappa\pi^{\mu-1} + \frac{\mu . (\mu-1)}{1 . 2}\kappa^2\pi^{\mu-2} + \kappa\tau\lambda.$ ἤτε τοῦ $(\pi-\kappa)^{\mu}$, ἐὰν ἀποφατικῶς σημειωθῇ τὰ γινόμενα, ἐν οἷς τὸ κ ἐμφιλοχωρεῖ περισσάριθμον φέρον τὸν ἐκθέτην (§. 271.)· οἷον

$$\pi^{\mu} - \mu \kappa \pi^{\mu-1} + \frac{\mu.(\mu-2)}{1.\ 2.} \kappa^2 \pi^{\mu-2} - \frac{\mu.(\mu-1).(\mu-2)}{1.\ 2.\ 3.} \kappa^3 \pi^{\mu-3} + \kappa\tau\lambda.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 281. Ἐὰν οὖν ἀντὶ τῆς $(\chi+\alpha)^{\nu}$, ἡ ταύτῃ ἰσοδύναμος ληφθῇ ῥίζα $(\alpha+\beta)^{\nu}$, ἔσται ἐκ τῶν δειχθέντων ὁ ἐν γένει καθόλου τύπος ὑπὲρ οἱασοῦν ῥίζης εἴτ' οὖν καταφασκούσης, ἢ ἀποφασκούσης ὁ ἐφεξῆς τῷ προσεχῶς ἐκτεθέντι (§. 279.) ἰσοδύναμος.

$$(\alpha \pm \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \pm \nu \alpha^{\nu-1} \beta + \frac{\nu.(\nu-1)}{2} \alpha^{\nu-2} \beta^2 \pm \frac{\nu.(\nu-1).(\nu-2)}{2.\ 3.} \alpha^{\nu-3} \beta^3 + \frac{\nu.(\nu-1).(\nu-2).(\nu-3)}{2.\ 3.\ 4} \alpha^{\nu-4} \beta^4 \pm \kappa\tau\lambda.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 282. Ἐπεὶ μὲν δὴ ἐστὶν $\alpha^{\nu-1} = \frac{\alpha^{\nu}}{\alpha}$, καὶ $\alpha^{\nu-2} = \frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^2}$ κτλ. (§. 212. 236.). Ἔσται διὰ τῆς ἐν τῷ καθόλου τύπῳ τούτων ἀνθυποκαταστάσεως

$$(\alpha+\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} + \frac{\nu}{1}.\frac{\alpha^{\nu}\beta}{\alpha} + \frac{\nu.(\nu-1)}{1.\ 2}.\frac{\alpha^{\nu}\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\nu.(\nu-1).(\nu-2)}{1.\ 2.\ 3}.\frac{\alpha^{\nu}\beta^3}{\alpha^3} + \frac{\nu.(\nu-1).(\nu-2).(\nu-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.\frac{\alpha^{\nu}\beta^4}{\alpha^4} + \ldots$$

ἤτοι, ἐὰν ὁποιαδήποτε δύναμις, δι' ὁποιασδήποτε ὁμοῤῥίζου δυνάμεως διαιρεθῇ ἔσται δὴ καὶ τὸ πηλίκον δύναμις ὁμόῤῥιζος, ἧς ἐκθέτης, ἡ τῶν ἐν ἐκείναις ταῖς δυνάμεσιν ἐκθετῶν διαφορά· ὥστε ὁ αὐτὸς τύπος καὶ οὕτως ἂν γράφοιτο, τοῦ α^{ν} παράγοντος πᾶσι τοῖς ἐν τῇ σειρᾷ ὅροις κοινοῦ ὄντος· οἷον,

$$\alpha^{\nu} + \frac{\nu}{1}.\alpha^{\nu}.\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\nu.(\nu-1)}{1.\ 2}.\alpha^{\nu}.\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\nu.(\nu-1).(\nu-2)}{1.\ 2.\ 3}.\alpha^{\nu}.\frac{\beta^3}{\alpha^3} + \frac{\nu.(\nu-1).(\nu-2).(\nu-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.\alpha^{\nu}.\frac{\beta^4}{\alpha^4} + \ldots$$

Δυνατὸν οὖν καὶ τοῦδε τοῦ παράγοντος ἐν μέρει ἀποτεθέντος τὴν αὐτὴν σειρὰν καὶ οὕτω παρίστασθαι·

$$\alpha^{\nu}\left(1 + \frac{\nu}{1}.\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\nu.(\nu-1)}{1.\ 2}.\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\nu.(\nu-1).(\nu-2)}{1.\ 2.\ 3}.\frac{\beta^3}{\alpha^3} + \kappa\tau\lambda.\right.$$

Ἔνθεν τοι ἐὰν συντόμως ῥηθῇ $\alpha = \mathrm{P}$, καὶ $\frac{\beta}{\alpha} = \mathrm{K}$, ἔσται $\beta = \mathrm{PK}$, καὶ $\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \mathrm{K}^2$, $\frac{\beta^3}{\alpha^3} = \mathrm{K}^3$, κτλ. καὶ τῶν ἴσων τοῖς ἴσοις ἀνθυποκαθισταμένων, ἔσται

$$(\alpha+\beta)^{\nu} = (\mathrm{P}+\mathrm{PK})^{\nu} = \mathrm{P}^{\nu} + \frac{\nu}{1}\mathrm{P}^{\nu}\mathrm{K} + \frac{\nu.(\nu-1)}{1.\ 2}\mathrm{P}^{\nu}\mathrm{K}^2 + \frac{\nu.(\nu-1).(\nu-2)}{1.\ 2.\ 3}\mathrm{P}^{\nu}\mathrm{K}^3 + \frac{\nu.(\nu-1).(\nu-2).(\nu-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\mathrm{P}^{\nu}\mathrm{K}^4 + \ldots$$

Ἐξ ὧν ἕπεται, ὅτι τῶν ἀπὸ τῆς αὐτῆς ῥίζης ὁποιωνδήποτε δυνάμεων ἐπ' ἀλλήλας ἀγομένων, δύναμις ἐστὶ καὶ τὸ γινόμενον ἀπὸ ῥίζης τῆς αὐτῆς, ὁ δὲ τῆς τηλικαύτης δυνάμεως ἐκθέτης, τὸ ἐκ τῶν ἐν ταῖς ἐπιπολλαπλασιαζομέναις δυνάμεσιν ἐκθετῶν ἄθροισμα, οὕτως τε ἕκαστον τῶν ἑπομένων ἐν τῇ σειρᾷ μελῶν, γινόμενον ἐστὶ τοῦ προσεχῶς ἡγουμένου· οἷον

$$\frac{\nu}{1}\mathrm{P}^{\nu}\mathrm{K} = \mathrm{P}^{\nu} \times \frac{\nu}{1}\mathrm{K}.$$

$$\frac{\nu.(\nu-1)}{1.\ 2}\mathrm{P}^{\nu}\mathrm{K}^2 = \frac{\nu}{1}\mathrm{P}^{\nu}\mathrm{K} \times \frac{\nu-1}{2}\mathrm{K}.$$

$$\frac{\nu.(\nu-1).(\nu-2)}{1.\ 2.\ 3}\mathrm{P}^{\nu}\mathrm{K}^3 = \frac{\nu(\nu-1)}{1.\ 2}\mathrm{P}^{\nu}\mathrm{K}^2 \times \frac{\nu-2}{3}\mathrm{K}.\ \kappa\tau\lambda.$$

Γενέσθω δὴ τὸ α'. μέλος . . . . . . $\mathrm{P}^{\nu} = \mathrm{A}.$

τὸ β'. — . . . . . . $\frac{\nu}{1}\mathrm{P}^{\nu}\mathrm{K} = \mathrm{B}.$

τὸ γ'. μέλος . . $\frac{\nu\,.\,(\nu-1)}{1\,.\,2}\,P^{\nu}K^{2}=\Gamma.$

τὸ δ'. - - $\frac{\nu\,.\,(\nu-1)\,.\,(\nu-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,P^{\nu}K^{3}=\Delta.$

καὶ ἐφεξῆς οὕτως.

ἐκκύψει $(\alpha+\beta)^{\nu}=(P+PK)^{\nu}=P^{\nu}+\frac{\nu}{1}AK+\frac{\nu-1}{2}BK+\frac{\nu-2}{3}\Gamma K+\frac{\nu-3}{4}\Delta K+\frac{\nu-4}{5}EK+\frac{\nu-5}{6}ZK+\frac{\nu-6}{7}HK+$ κτλ. . .

Ἐν γένει καὶ καθόλου τύπος, τῷ ἐν τῷ Β'. Πορίσματι ἰσοδύναμος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 283. Ἐὰν οὖν ἡ πρόοδος προϊοῦσα ἀριθμὸν ἀπαντήσει τὸν ἀφαιρούμενον ἴσον τῷ ἐκθέτῃ ν, ἐπεὶ μηδὲν ἐστὶ τὸ γινόμενον, τοῦ τε ὅρου α σὺν ᾧ ἔχει ἐκθέτῃ μοναδικοῦ καταστάντος, καὶ τοῦ β μόνου σὺν τῷ ἑαυτοῦ ἐκθέτῃ καταλειφθέντος, οἷα δὴ ἐσχάτου ὅρου, τὰ τῆς προόδου διακέκοπται. Εἰ δὲ μηδεὶς τοιοῦτος ἀπαντήσειεν ἀριθμὸς, ἡ πρόοδος ἐπ' ἄπειρον προελεύσεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 284. Διωνύμου ῥίζης οἱασδηποτοῦν, ἧς ἂν ὁ ἐκθέτης διδῶτο, τὴν δύναμιν ἐκ τοῦ καθόλου τύπου συγκροτῆσαι.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπὶ τῆς τοῦ γενικοῦ τούτου τύπου χρήσεως ἀείποτε δέον τὴν ἐφ' ἣν ἡ ῥίζα ἐξαίρεται ἀόριστον ποσότητα, ὁριστὴν καθίστασθαι, καὶ ἀριθμῷ οἱῳποτοῦν ἰσοδυναμεῖν· καὶ δὴ, τῇ μὲν μονάδι, ὅτε ἡ διώνυμος ἐπὶ τὴν

πρώτην τῶν δυνάμεων ἐξαρθεῖσα ὑπάρχει, τῷ δὲ 2, ὅτε ἐπὶ τὴν δευτέραν· τῷ 3, ἐπὶ τὴν τρίτην· καὶ ἐφεξῆς οὕτω. Ἐνταῦθ' ἀλλ' οὖν τῆς πέμπτης, φέρε, προβαλλομένης δυνάμεως, ἔσται $\nu=5$, αἵ τε τῶν στοιχείων δυνάμεις ἀντὶ τοῦ ν ἀνεπτυγμένως τεθεῖσαι, ἀντικατεστάσθωσαν ἐπὶ τὴν τῶν ὅρων συγκρότησιν· καὶ δὴ τεθέντος $\nu=5$, ἔσται ἡ ἐν καταφάσει ῥίζα $(\alpha+\beta)^{\nu}=(\alpha+\beta)^{5}$· κἀντεῦθεν.

$$\alpha^{\nu}=\alpha^{5}$$

$$+\nu\alpha^{\nu-1}\beta=5\alpha^{4}\beta$$

$$+\frac{\nu.(\nu-1)}{1\times2}\alpha^{\nu-2}\beta^{2}=\frac{5\times4}{1\times2}\alpha^{3}\beta^{2}=10\alpha^{3}\beta^{2}$$

$$+\frac{\nu.(\nu-1).(\nu-2)}{1\times2\times3}\alpha^{\nu-3}\beta^{3}=\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}\alpha^{2}\beta^{3}=10\alpha^{2}\beta^{3}$$

$$+\frac{\nu.(\nu-1).(-2).(\nu-3)}{1\times2\times3\times4}\alpha^{\nu-4}\beta^{4}=\frac{5\times4\times3\times2}{1\times2\times3\times4}\alpha\beta^{4}=5\alpha\beta^{4}$$

$$+\frac{\nu.(\nu-1).(\nu-2).(\nu-3).(\nu-4)}{1\times2\times3\times4\times5}\alpha^{\nu-5}\beta^{5}=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{1\times2\times3\times4\times5}\alpha^{0}\beta^{5}=\beta^{5}$$

Ἀλλ' ἐπέκεινα χωρεῖν οὐκ ἔξεστι, τοῦ ἐφεξῆς ὅρου εἰ ζητηθείη $=0$ προκύπτοντος· διὸ καὶ ὁ τύπος ἐκεῖσε περατοῦται, ὅπου ἐν τῷ συνθέτῃ τὸ ν τυγχάνει ἐξαλειφθὲν ἐκ τοῦ ἐκθέτου τῆς ζητουμένης δυνάμεως (283.). Οὕτω κἂν τῇ ἕκτῃ δυνάμει ὁ τύπος περατοῦται ἐν τῷ ἑβδόμῳ ὅρῳ, ἐν γὰρ τῷ συνθέτῃ τοῦ ὀγδόου ὅρου ἐστὶ $\nu-6$, ὥσπερ δὴ καὶ ἐν ἅπασιν ἐφεξῆς τοῖς ἑπομένοις, οἵ περ δι' αὐτὸ τοῦτο οἴχονται εἰς τὸ μηδέν· πολλαπλασιασθέντες γὰρ ἐπὶ $\nu-6=0$ μηδενικοὶ καθίστανται. Τοιγαροῦν ἔσται ἡ ζητουμένη δύναμις $(\alpha+\beta)^{5}=\alpha^{5}+5\alpha^{4}\beta+10\alpha^{3}\beta^{2}+10\alpha^{2}\beta^{3}+5\alpha\beta^{4}+\beta^{5}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Γενέσθω πρὸς τὴν τῶν εἰσαγομένων ἐξάσκησιν ἡ πρὸς τὴν αὐτὴν πέμπτην δύναμιν ἔξαρσις καὶ ἄλλως, κατὰ τὸν ἐν τῷ Γ'. Πορίσματι (§. 282.) ἐν ἐπιτομῇ γενικὸν κανόνα. Τεθέντος τοίνυν $\alpha = \mathrm{P}$, $\frac{\beta}{\alpha} = \mathrm{K}$, $\nu = 5$, ἔσται·

$$\mathrm{P}^{\nu} = \ldots \alpha^5 = \mathrm{A}$$
$$\tfrac{\nu}{1}\mathrm{AK} = 5 \times \alpha^5 \times \tfrac{\beta}{\alpha} = 5\alpha^4\beta = \mathrm{B}$$
$$\tfrac{\nu-1}{2}\mathrm{BK} = \tfrac{4}{2} \times 5\alpha^4\beta \times \tfrac{\beta}{\alpha} = 10\alpha^3\beta^2 = \Gamma$$
$$\tfrac{\nu-2}{3}\Gamma\mathrm{K} = \tfrac{3}{3} \times 10\alpha^3\beta^2 \times \tfrac{\beta}{\alpha} = 10\alpha^2\beta^3 = \Delta$$
$$\tfrac{\nu-3}{4}\Delta\mathrm{K} = \tfrac{2}{4} \times 10\alpha^2\beta^3 \times \tfrac{\beta}{\alpha} = 5\alpha\beta^4 = \mathrm{H}$$
$$\tfrac{\nu-4}{5}\mathrm{EK} = \tfrac{1}{5} \times 5\alpha\beta^4 \times \tfrac{\beta}{\alpha} = \beta^5 = \mathrm{Z}$$
$$\tfrac{\nu-5}{6}\mathrm{ZK} = \tfrac{0}{6} \times \beta^5 \times \tfrac{\beta}{\alpha} = 0$$

$$(\alpha+\beta)^5 = \alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + \beta^5.$$

Ὡσαύτως δεῆσαν 7 πρὸς ἐννάτην ἐξᾶραι δύναμιν, μεταχθήτω πρῶτον 7 πρὸς ῥίζαν ὁποιανοῦν διώνυμον ἤτοι $1 + 6$, κἀντεῦθεν γενέσθω $\alpha = \mathrm{P} = 1$, $\frac{\beta}{\alpha} = \mathrm{K} = \frac{6}{1} = 6$, $\nu = 9$, διά τε τῆς ἐν τῷ γενικῷ τύπῳ ἀνθυποκαταστάσεως, ἔσται·

$$\mathrm{P}^{\nu} = 1^9 = \ldots 1 = \mathrm{A}$$
$$\tfrac{\nu}{1}\mathrm{AK} = 9 \times 1 \times 6 = 54 = \mathrm{B}$$
$$\tfrac{\nu-1}{2}\mathrm{BK} = 4 \times 54 \times 6 = 1296 = \Gamma$$
$$\tfrac{\nu-2}{3}\Gamma\mathrm{K} = \tfrac{7}{3} \times 1296 \times 6 = 18144 = \Delta$$
$$\tfrac{\nu-3}{4}\Delta\mathrm{K} = \tfrac{6}{4} \times 18144 \times 6 = 163296 = \mathrm{E}$$
$$\tfrac{\nu-4}{5}\mathrm{EK} = \tfrac{5}{5} \times 163296 \times 6 = 979776 = \mathrm{Z}$$
$$\tfrac{\nu-5}{6}\mathrm{ZK} = \tfrac{4}{6} \times 979776 \times 6 = 3919104 = \mathrm{H}$$
$$\tfrac{\nu-6}{7}\mathrm{HK} = \tfrac{3}{7} \times 3919104 \times 6 = 10077696 = \Theta$$

$$\tfrac{\nu-7}{8}\Theta\mathrm{K} = \tfrac{2}{8} \times 10077696 \times 6 = 15116544 = \mathrm{I}$$
$$\tfrac{\nu-8}{9}\mathrm{IK} = \tfrac{1}{9} \times 15116544 \times 6 = 10077696 = \mathrm{M}$$
$$\tfrac{\nu-9}{10}\mathrm{MK} = \tfrac{0}{10} \times 10077696 \times 6 = 0$$

$$(\mathrm{P}+\mathrm{PK})^{\nu} = (1+6)^9 = 7^9 = 40353607.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 285. Ἐὰν δὲ τύχῃ τῶν διμελῶν συγκειμένων τὸ εἰς δύναμιν ἀναχθησόμενον, προσέχοντες τοῖς στοιχείοις, ἐξ ὧν ἡ προβαλλομένη συγκροτεῖται δύναμις, αὐτὴν ἐκθησόμεθα, οὐ μόνον εἰ ἄμφω θετικοὶ οἱ ὅροι, ἀλλὰ καὶ εἰ τούτων ὁ ἕτερος ἀποφατικός· οἷον ἔστω πρὸς πέμπτην ἀναχθησομένη δύναμιν, ἡ $3\alpha\gamma - 2\beta\delta$· γινομένων τῶν $3\alpha\gamma = \pi$, $-2\beta\delta = \kappa$, $5 = \mu$, ἔσται.

$$\pi^{\mu} = (3\alpha\gamma)^5 = 243\alpha^5\gamma^5$$
$$\mu\kappa\pi^{\mu-1} = 5.(-2\beta\delta).(3\alpha\gamma)^4 = -810\alpha^4\beta\gamma^4\delta$$
$$\tfrac{\mu.(\mu-1)}{2}\kappa^2\pi^{\mu-2} = 10.4\beta^2\delta^2(3\alpha\gamma)^3 = 1080\alpha^3\beta^2\gamma^3\delta^2$$
$$\tfrac{\mu.(\mu-1).(\mu-2)}{2.3}\kappa^3\pi^{\mu-3} = 10(-2\beta\delta)^3.(3\alpha\gamma)^2 = -720\alpha^2\beta^3\gamma^2\delta^3$$
$$\tfrac{\mu.(\mu-1).(\mu-2).(\mu-3)}{2.3.4}\kappa^4\pi^{\mu-4} = 5(-2\beta\delta)^4.(3\alpha\gamma) = 240\alpha\beta^4\gamma\delta^4$$
$$\tfrac{\mu.(\mu-1).(\mu-2).(\mu-3).(\mu-4)}{2.3.4.5}\kappa^5\pi^{\mu-5} = 1 \times (-2\beta\delta)^5 \times (3\alpha\gamma)^0 = -32\beta^5\delta^5.$$

οὕτω τοίνυν $(3\alpha\gamma - 2\beta\delta)^5$ ἐπὶ τὴν πεμπτοταγῆ ἐξαρθὲν δύναμιν, ἔσται·

$$(3\alpha\gamma - 2\beta\delta)^5 = 243\alpha^5\gamma^5 - 810\alpha^4\beta\gamma^4\delta + 1080\alpha^3\beta^2\gamma^3\delta^2 - 720\alpha^2\beta^3\gamma^2\delta^3 + 240\alpha\beta^4\gamma\delta^4 - 32\beta^5\delta^5.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 286. Ἐὰν δὲ συγκείμενον τριμελὲς ᾖ, ἢ τετραμελὲς, ἢ ἁπλῶς τῶν πολυμελῶν, παρ' ἕνα τὸν ἐν λαιοῖς ὅρον, πάντας τοὺς δεξιόθεν ἀνθ' ἑνὸς λαβόντες ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν δύναμιν ἐπαροῦμεν· οἷον ἐπὶ τριωνύμου τινος, τοῦ μὲν πρώτου ὅρου κληθέντος π, τοῦ δὲ τῶν λοιπῶν δυοῖν ἀθροίσματος κ, ἡ τριώνυμος ἐπὶ τὴν διώνυμον μεταμορφωθήσεται· οἷον ἔστω ἡ $\alpha+2\beta-\gamma$ πρὸς τεταρτοταγῆ ἀναχθησομένη δύναμιν. Τεθέντων οὖν $\mu=4$, $\pi=\alpha$, $\kappa=2\beta-\gamma$, ἔν τε τῷ καθόλου τύπῳ ἀνθυποκαταστάντων, ἔσται·

$$\pi^{\mu}=\alpha^4$$

$$\mu\kappa\pi^{\mu-1}=4(2\beta-\gamma)\alpha^3=8\alpha^3\beta-4\alpha^3\gamma$$

$$\frac{\mu.(\mu-1)}{1.\ 2}\kappa^2\pi^{\mu-2}=6(2\beta-\gamma)^2\alpha^2=24\alpha^2\beta^2-24\alpha^2\beta\gamma+6\alpha^2\gamma^2$$

$$\frac{\mu.(\mu-1).(\mu-2)}{1.\ 2\ .\ 3}\kappa^3\pi^{\mu-3}=4(2\beta-\gamma)^3\alpha=32\alpha\beta^3-48\alpha\beta^2\gamma+24\alpha\beta\gamma^2-4\alpha\gamma^3$$

$$\frac{\mu.(\mu-1).(\mu-2).(\mu-3)}{1.\ 2\ .\ 3\ .\ 4}\kappa^4\pi^{\mu-4}=(2\beta-\gamma)^4=16\beta^4-4(2\beta)^3\gamma+\frac{4.3}{1.2}(2\beta)^2\gamma^2-\frac{4.3.2}{1.2.3}\times 2\beta\times\gamma^3+\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}\gamma^4=16\beta^4-32\beta^3\gamma+24\beta^2\gamma^2-8\beta\gamma^3+\gamma^4.$$

Ἑπομένως τε ἔσται $(\alpha+2\beta-\gamma)^4=\alpha^4+8\alpha^3\beta-4\alpha^3\gamma+24\alpha^2\beta^2-24\alpha^2\beta\gamma+6\alpha^2\gamma^2+32\alpha\beta^3-48\alpha\beta^2\gamma+24\alpha\beta\gamma^2-4\alpha\gamma^3+16\beta^4-32\beta^3\gamma+24\beta^2\gamma^2-8\beta\gamma^3+\gamma^4.$

Ὡσαύτως καὶ τῇ ἐπὶ τὸν γενικὸν κανόνα ἐφαρμόσει (§. 282.) ἔσται ἄλλως καὶ ἡ ἐπὶ τὴν ἑκτὴν δύναμιν ἔξαρσις τῆς ἐκ πλειόνων ὀνομάτων $\alpha+\beta-\gamma$, ἤτοι τεθέντος $\alpha=\mathrm{P}$, $\frac{\beta-\gamma}{\alpha}=\mathrm{K}$, $\nu=6$, ἔσται·

$$\mathrm{P}^{\nu}=\alpha^6=\mathrm{A}.$$

$$\frac{\nu}{1}\mathrm{AK}=6.\alpha^6.\frac{\beta-\gamma}{\alpha}=\frac{6\alpha^6(\beta-\gamma)}{\alpha}=6\alpha^5(\beta-\gamma)=\mathrm{B}.$$

$$\frac{\nu-1}{2}\mathrm{BK}=\frac{5}{2}.6\alpha^5(\beta-\gamma).\frac{\beta-\gamma}{\alpha}=\frac{30\alpha^5(\beta-\gamma)^2}{2\alpha}=15\alpha^4(\beta-\gamma)^2=\Gamma.$$

$$\frac{\nu-2}{3}\Gamma\mathrm{K}=\frac{4}{3}.15\alpha^4(\beta-\gamma)^2.\frac{\beta-\gamma}{\alpha}=\frac{60\alpha^4(\beta-\gamma)^3}{3\alpha}=20\alpha^3(\beta-\gamma)^3=\Delta.$$

$$\frac{\nu-3}{4}\Delta\mathrm{K}=\frac{3}{4}.20\alpha^3(\beta-\gamma)^3.\frac{\beta-\gamma}{\alpha}=\frac{60\alpha^3(\beta-\gamma)^4}{4\alpha}=15\alpha^2(\beta-\gamma)^4=\mathrm{E}.$$

$$\frac{\nu-4}{5}\mathrm{EK}=\frac{2}{5}.15\alpha^2(\beta-\gamma)^4.\frac{\beta-\gamma}{\alpha}=\frac{30\alpha^2(\beta-\gamma)^5}{5\alpha}=6\alpha(\beta-\gamma)^5=\mathrm{Z}.$$

$$\frac{\nu-5}{6}\mathrm{ZK}=\frac{1}{6}.6\alpha(\beta-\gamma)^5.\frac{\beta-\gamma}{\alpha}=\frac{6\alpha(\beta-\gamma)^6}{6\alpha}=(\beta-\gamma)^6=\mathrm{H}.$$

$$\frac{\nu-6}{7}\mathrm{HK}=\frac{0}{7}.(\beta-\gamma)^6.\frac{\beta-\gamma}{\alpha}=0.$$

$$(\alpha+\beta-\gamma)^6=\alpha^6+6\alpha^5(\beta-\gamma)+15\alpha^4(\beta-\gamma)^2+20\alpha^3(\beta-\gamma)^3+15\alpha^2(\beta-\gamma)^4+6\alpha(\beta-\gamma)^5+(\beta-\gamma)^6.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 287. Ἐπεὶ μὲν δὴ $\sqrt[\nu]{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{\nu}}$ (§. 255.), ἔστ ἐκ τοῦ ἀνωτέρω καθόλου τύπου $\mu=\frac{1}{\nu}$ ἡνίκα τὴν κα τὸ ν ῥίζαν ἀπὸ συγκειμένης τινὸς ποσότητος π + κ ὑπεξελέσθαι δέῃ· οἷον

$$\pi^{\frac{1}{\nu}} + \frac{1}{\nu}\pi^{\frac{1}{\nu}-1}\kappa + \frac{\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{\nu}-1\right)}{2}\pi^{\frac{1}{\nu}-2}\kappa^2 + \text{κτλ.}$$

ὑποσημαίνειν δέησαν $(\pi+\kappa)^{\frac{1}{\nu}}$, ἢ τὴν κατὰ τὸ ν ῥίζαν τῆς διωνύμου π + κ· ὡσαύτως ἀντὶ τοῦ $\frac{1}{(\pi+\kappa)^{\nu}}$, ἢ $(\pi+\kappa)^{-\nu}$ (§. 244. 245.) δέον μ = − ν γενέσθαι ἐν τῇ αὐτῇ τοῦ (π + κ) δυνάμει· κἀντεῦθεν ἐκκύψει

$$\pi^{-\nu} - \nu\pi^{-\nu-1}\kappa - \frac{\nu(-\nu-1)}{2}\pi^{-\nu-2}\kappa^2 - \text{κτλ.}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 288. Αὖθις ἐπεὶ $\frac{1}{\alpha} = \alpha^{-1}$ (§. 244. 248.), ἔσται καὶ $\frac{1}{\alpha+\beta} = (\alpha+\beta)^{-1}$· τὸ κλάσμα τοίνυν $\frac{1}{\alpha+\beta}$ οἱονεὶ δύναμις τοῦ α + β οἷόν τ' ἐστὶ θεωρεῖσθαι, ἧς τινος ἐκθέτης ἐστὶ − 1· θῶμεν γὰρ δὴ $(\alpha+\beta)^{\nu} = (\alpha+\beta)^{-1}$, οὕτως οἱ μὲν συνθέται ἔσονται $\frac{\nu}{1} = -1$, $\frac{\nu-1}{2} = -1$, $\frac{\nu-2}{3} = -1$, $\frac{\nu-3}{4} = -1$, κτλ. αἱ δὲ δυνάμεις, ἤτοι οἱ ἐκθέται $\alpha^{\nu} = \alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}$, $\alpha^{\nu-1} = \frac{1}{\alpha^2}$, $\alpha^{\nu-2} = \frac{1}{\alpha^3}$, $\alpha^{\nu-3} = \frac{1}{\alpha^4}$ κτλ., κἀντεῦθεν ἔξομεν $(\alpha+\beta)^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^3} - \frac{\beta^3}{\alpha^4} + \frac{\beta^4}{\alpha^5} - \frac{\beta^5}{\alpha^6}$ κτλ. Πόῤῥω ἐπεὶ $\frac{1}{(\alpha+\beta)^2} = (\alpha+\beta)^{-2}$, θῶμεν ν = − 2· ἔσονται οἱ μὲν συνθέται $\frac{\nu}{1} = -\frac{2}{1}$, $\frac{\nu-1}{2} = -\frac{3}{2}$, $\frac{\nu-2}{3} = -\frac{4}{3}$, $\frac{\nu-3}{4} = -\frac{5}{4}$, κτλ. οἱ δὲ τοῦ α ἐκθέται $\alpha^{\nu} = \frac{1}{\alpha^2}$, $\alpha^{\nu-1} = \frac{1}{\alpha^3}$, $\alpha^{\nu-2} = \frac{1}{\alpha^4}$, $\alpha^{\nu-4} = \frac{1}{\alpha^5}$, κτλ. κἀντεῦθεν ἔξομεν $(\alpha+\beta)^{-2} = \frac{1}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{1}\cdot\frac{\beta}{\alpha^3} + \frac{2\cdot3}{1\cdot2}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha^4} - \frac{2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{\beta^3}{\alpha^5}$

$+ \frac{2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{\beta^4}{\alpha^6}$ κτλ. Ἔστι δὲ $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{2\cdot3}{1\cdot2} = 3$, $\frac{2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot3} = 4$, $\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 5$, κτλ. ἄρα $\frac{1}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{1}{\alpha^2} - 2\frac{\beta}{\alpha^3} + 3\frac{\beta^2}{\alpha^4} - 4\frac{\beta^3}{\alpha^5} + 5\frac{\beta^4}{\alpha^6} - 6\frac{\beta^5}{\alpha^7} + 7\frac{\beta^6}{\alpha^8}$ κτλ.

Θῶμεν αὖθις ν = − 3, ἔσονται οἱ μὲν συνθέται $\frac{\nu}{1} = -\frac{3}{1}$, $\frac{\nu-1}{2} = -\frac{4}{2}$, $\frac{\nu-2}{3} = -\frac{5}{3}$, $\frac{\nu-3}{4} = -\frac{6}{4}$ κτλ. οἱ δὲ τοῦ α ἐκθέται $\alpha^{\nu} = \frac{1}{\alpha^3}$, $\alpha^{\nu-1} = \frac{1}{\alpha^4}$, $\alpha^{\nu-2} = \frac{1}{\alpha^5}$ κτλ. Κἀντεῦθεν ἕξομεν $(\alpha+\beta)^{-3} = \frac{1}{(\alpha+\beta)^3} = \frac{1}{\alpha^3} - \frac{3}{1}\frac{\beta}{\alpha^4} + \frac{3\cdot4}{1\cdot2}\frac{\beta^2}{\alpha^5} - \frac{3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3}\frac{\beta^3}{\alpha^6} + \frac{3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\frac{\beta^4}{\alpha^7}$ κτλ. $= \frac{1}{\alpha^3} - 3\frac{\beta}{\alpha^4} + 6\frac{\beta^2}{\alpha^5} - 10\frac{\beta^3}{\alpha^6} + 15\frac{\beta^4}{\alpha^7} - 21\frac{\beta^5}{\alpha^8} + 28\frac{\beta^6}{\alpha^9} - 36\frac{\beta^7}{\alpha^{10}} + 45\frac{\beta^8}{\alpha^{11}}$ κτλ.

Θῶμεν πόῤῥω ν = − 4, ἕξομεν οὕτως ἀντὶ μὲν τῶν συνθετῶν $\frac{\nu}{1} = -\frac{4}{1}$, $\frac{\nu-1}{2} = -\frac{5}{2}$, $\frac{\nu-2}{3} = -\frac{6}{3}$, $\frac{\nu-3}{4} = -\frac{7}{4}$ κτλ. ἀντὶ δὲ τῶν τοῦ α ἐκθετῶν $\alpha^{\nu} = \frac{1}{\alpha^4}$, $\alpha^{\nu-1} = \frac{1}{\alpha^5}$, $\alpha^{\nu-2} = \frac{1}{\alpha^6}$, $\alpha^{\nu-3} = \frac{1}{\alpha^7}$, $\alpha^{\nu-4} = \frac{1}{\alpha^8}$ κτλ. Κἀντεῦθεν ἔσται·

$\frac{1}{(\alpha+\beta)^4} = \frac{1}{\alpha^4} - \frac{4}{1}\frac{\beta}{\alpha^5} + \frac{4\cdot5}{1\cdot2}\frac{\beta^2}{\alpha^6} - \frac{4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\frac{\beta^3}{\alpha^7} + \frac{4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\frac{\beta^4}{\alpha^8}$ κτλ. $= \frac{1}{\alpha^4} - 4\frac{\beta}{\alpha^5} + 10\frac{\beta^2}{\alpha^6} - 20\frac{\beta^3}{\alpha^7} + 35\frac{\beta^4}{\alpha^8} - 56\frac{\beta^5}{\alpha^9}$ κτλ. Ἐξ ὧν ἕπεται ὑπὲρ οἱασδηποτοῦν ἐν ἀποφάσει δυνάμεως ὁ ἐν γένει ἐφεξῆς τύπος.

$$\frac{1}{(\alpha+\beta)^{\mu}} = \frac{1}{\alpha^{\mu}} - \frac{\mu}{1}\cdot\frac{\beta}{\alpha^{\mu+1}} + \frac{\mu}{1}\cdot\frac{\mu+1}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^{\mu+2}} - \frac{\mu}{1}\cdot\frac{\mu+1}{2}\cdot\frac{\mu+2}{3}\frac{\beta^3}{\alpha^{\mu+3}} \text{ κτλ.}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 289. Ἐὰν δὲ ἀπὸ ποσότητός τινος τὴν τετραγωνικὴν ἢ κυβικὴν ῥίζαν ἐξελέσθαι δέῃ, τοῖς μέχρι τοῦδε ῥηθεῖσι προσέχοντες ῥᾳδίως οἱασοῦν κλασματώδους δυνάμεως τὴν ἔκθεσιν παρεξόμεθα, διὰ τῆς ταύτης ἐπὶ τοὺς τύπους ἐφαρμόσεως· οἷον ἔστω ἐξευρεῖν τὴν τοῦ $\gamma^2+\delta$ ῥίζαν· ἢ ὅ ταυτόν ἐστι τὴν ἐγγὺς τοῦ ἀληθοῦς τοῦ $(\gamma^2+\delta)^{\frac{1}{2}}$ δύναμιν. Γενέσθω $\nu=\frac{1}{2}$ (§. 281.), $\gamma^2=\alpha$, $\delta=\beta$· ἔσται

Α'. $\alpha^{\nu}=\gamma^{2\times\frac{1}{2}}$ (§. 226.) $=\gamma$.

Β'. $\nu\alpha^{\nu-1}\beta = +\frac{1}{2}\cdot\gamma^{2\times\frac{1}{2}-1}\delta = +\frac{1}{2}\cdot\gamma^{2\times-\frac{1}{2}}\delta = \frac{1}{2}\cdot\gamma^{-1}\delta$
$= \frac{1}{2}\times\frac{\delta}{\gamma}$ (§. 244.).

Γ'. $+\frac{\nu\times\nu-1}{2}\alpha^{\nu-2}\beta^2 = +\frac{\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}}{2}\cdot\gamma^{2\times\frac{1}{2}-2}\delta^2$
$= -\frac{1}{8}\cdot\gamma^{2\times-\frac{3}{2}}\delta^2 = -\frac{1}{8}\times\frac{\delta^2}{\gamma^3}$.

Δ'. $+\frac{\nu\times\nu-1\times\nu-2}{2\times3}\alpha^{\nu-3}\beta^3 = +\frac{\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}\times-\frac{3}{2}}{6}\cdot\gamma^{2\times-\frac{5}{2}}\delta^3$
$= \frac{1}{16}\times\frac{\delta^3}{\gamma^5}$.

Κἀντεῦθεν ἔξομεν

$$\sqrt{(\gamma^2+\delta)} = (\gamma^2+\delta)^{\frac{1}{2}} = \gamma+\frac{1}{2}\times\frac{\delta}{\gamma}-\frac{1}{8}\times\frac{\delta^2}{\gamma^3}$$
$$+\frac{1}{16}\times\frac{\delta^3}{\gamma^5} - \text{κτλ.}$$

ὡσαύτως εἰ τὴν τοῦ 6 ῥίζαν εὑρεῖν προκέοιτο, ἀναλυθέντος τοῦ 6 ἐπὶ $4+2$ καὶ τεθέντος $4=\gamma^2$, $2=\delta$,

ἐκκύψει στιχηδὸν $\sqrt{6} = 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}$ — κτλ. καὶ $\sqrt{2}$ ἢ $(1+1)^{\frac{1}{2}}$ γινομένου $P=1$, $K=\frac{1}{1}=1$, $\nu=\frac{1}{2}$ (§. 282.) ἔσται.

$P^{\nu} = 1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1}$ - - - - $= +1 = A$.

$\frac{\nu}{1}AK = \frac{1}{2}\cdot1\cdot1$ - - - - $= +\frac{1}{2} = B$.

$\frac{\nu-1}{2}BK = \frac{\frac{1}{2}-1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot1 = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot1 = -\frac{1}{8} = \Gamma$.

$\frac{\nu-2}{3}\Gamma K = \frac{\frac{1}{2}-2}{2}\cdot-\frac{1}{8}\cdot1 = -\frac{3}{6}\cdot-\frac{1}{8}\cdot1 = +\frac{3}{48} = \Delta$.

$\frac{\nu-3}{4}\Delta K = \frac{\frac{1}{2}-3}{4}\cdot\frac{3}{48}\cdot1 = -\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{48}\cdot1 = -\frac{15}{384} = E$.

$\frac{\nu-4}{5}EK = \frac{\frac{1}{2}-4}{5}\cdot-\frac{15}{384}\cdot1 = -\frac{7}{10}\cdot-\frac{15}{384}\cdot1$
$= +\frac{105}{3840} = Z$.

ἄρα $\sqrt{2} = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{3}{48}-\frac{15}{384}+\frac{105}{3840}$ . . .

Ἔστω αὖθις πρὸς εὕρεσιν τῆς κυβικῆς ῥίζης τῆς $\gamma^3+\delta$, ἢ τῆς προσεχοῦς δυνάμεως τοῦ $(\gamma^3+\delta)^{\frac{1}{3}}$ ὁ ἐφεξῆς τύπος, ἐν ᾧ γενέσθω $\nu=\frac{1}{3}$, $\gamma^3=\alpha$, $\delta=\beta$.

Α'. $\alpha^{\nu}=\gamma^{3\times\frac{1}{3}}=\gamma$.

Β'. $\nu\alpha^{\nu-1}\beta = +\frac{1}{3}\cdot\gamma^{3\times-\frac{2}{3}}\delta = +\frac{1}{3}\times\frac{\delta}{\gamma^2}$.

Γ'. $+\frac{\nu\times\nu-1}{1\times2}\alpha^{\nu-2}\beta^2 = +\frac{\frac{1}{3}\times-\frac{2}{3}}{2}\cdot\gamma^{3\times-\frac{5}{3}}\delta^2$
$= -\frac{1}{9}\times\frac{\delta^2}{\gamma^5}$.

Δ'. $+\frac{\nu\times\nu-1\times\nu-2}{1\times2\times3}\alpha^{\nu-3}\beta^3 = +\frac{\frac{1}{3}\times-\frac{2}{3}\times-\frac{5}{3}}{6}\cdot\gamma^{3\times-\frac{8}{3}}\delta^3$
$= +\frac{5}{81}\times\frac{\delta^3}{\gamma^8}$.

Κἀντεῦθεν $\sqrt[3]{(\gamma^3+\delta)}$ ἢ $(\gamma^3+\delta)^{\frac{1}{3}} = \gamma+\frac{1}{3}\times\frac{\delta}{\gamma^2}$ $-\frac{1}{9}\times\frac{\delta^2}{\gamma^5}+\frac{5}{81}\times\frac{\delta^3}{\gamma^8}$ — κτλ. Ὡσαύτως μεταληφθήσεται καὶ $\sqrt[3]{2}$ ἢ $(1+1)^{\frac{1}{3}}$· τεθέντων γὰρ $\gamma^3=1$,

$\delta = 1$ ἕξομεν $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81} -$ κτλ. τὴν τοῦ 2 κυβικὴν ῥίζαν τὴν ἐγγὺς τῆς ἀληθοῦς.

Πόῤῥω ἔστω $\sqrt[3]{(\alpha^3 + \chi)}$ ἢ $(\alpha^3 + \chi)^{\frac{1}{3}}$ καὶ γενέσθω $\alpha^3 = P$, $\frac{\chi}{\alpha^3} = K$, $\frac{1}{3} = \nu$· ἔσται.

$$P^\nu = (\alpha^3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\alpha^3} = +\alpha = A.$$

$$\frac{\nu}{1} AK = \frac{1}{3} \cdot \alpha \cdot \frac{\chi}{\alpha^3} = \frac{\alpha\chi}{3\alpha^3} = +\frac{\chi}{3\alpha^2} = B.$$

$$\frac{\nu-1}{2} BK = \frac{\frac{1}{3}-1}{2} \cdot \frac{\chi}{3\alpha^2} \cdot \frac{\chi}{\alpha^3} = -\frac{2}{6} \cdot \frac{\chi}{3\alpha^2} \cdot \frac{\chi}{\alpha^3} = -\frac{2\chi^2}{18\alpha^5} = \Gamma.$$

$$\frac{\nu-2}{3} \Gamma K = \frac{\frac{1}{3}-2}{3} \cdot -\frac{2\chi^2}{18\alpha^5} \cdot \frac{\chi}{\alpha^3} = -\frac{5}{9} \cdot -\frac{2\chi^2}{18\alpha^5} \cdot \frac{\chi}{\alpha^3} = +\frac{10\chi^3}{162\alpha^8} = \Delta.$$

$$\frac{\nu-3}{4} \Delta K = \frac{\frac{1}{3}-3}{4} \cdot \frac{10\chi^3}{162\alpha^8} \cdot \frac{\chi}{\alpha^3} = -\frac{8}{12} \cdot \frac{10\chi^3}{162\alpha^8} \cdot \frac{\chi}{\alpha^3} = -\frac{80\chi^4}{1944\alpha^{11}} \text{ κτλ.}$$

Ἔσται τοίνυν

$$\sqrt[3]{(\alpha^3 + \chi)} = \alpha + \frac{\chi}{3\alpha^2} - \frac{2\chi^2}{18\alpha^5} + \frac{10\chi^3}{162\alpha^8} - \frac{80\chi^4}{1944\alpha^{11}} \text{ κτλ.}$$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τῷ βουλομένῳ τοίνυν καὶ ἔτι περαιτέρω διὰ τῆς πράξεως χωρεῖν καὶ τὰς μᾶλλον καθυπερτέρας τῶν δυνάμεων θηρεύειν, ἀπόχρη ἀκριβῶς τὸν καθόλου καὶ ἐν γένει τύπον (§. 279. 281. 282.) εἰς νοῦν φέρειν· πρὸς ὃν διὰ τῆς τῶν κανόνων ἐφαρμόσεως, προβαλλομένην

οἱανοῦν δύναμιν προστεθεὶς καὶ ἐπάξας (§. 284.), ἀπόνως τὰ ἀπαντῶντα οἱαδήποτε ἐπιλύσει προβλήματα· ἐφ' ᾧ δὴ τοῦτο ῥᾳδίως περαίνειν ἔχοι, δέον διὰ τῆς συνεχοῦς ἀσκήσεως εὐκρινεῖς τὰς ἰδέας φέρειν, καὶ ἐν ἕξει τούτων εἶναι ποιωθείς πως τοὺς τρόπους. Ἐὰν δὲ ἡ ῥίζα διπλάζουσα κατὰ τὰ σημεῖα τύχῃ οὖσα (§. 271.), τὸ τῶν ἐκθετῶν ἀρτιάριθμον ἢ περιττάριθμον ὡς δέον παρατετηρηκότι, οὐδὲν δυσχερὲς τὰ σημεῖα τοῖς ὅροις ἐπιχαράσσειν κατάλληλα (§. 224.), ὡς ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς κατὰ τὴν τοῦ Διωνύμου $\alpha \pm \beta$ σειρὰν αὐξουσῶν καθορᾶν ἔνεστι.

$$(\alpha \pm \beta)^1 = 1\alpha^1 + 1\beta^1.$$
$$(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2.$$
$$(\alpha \pm \beta)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta \pm 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3.$$
$$(\alpha \pm \beta)^4 = \alpha^4 \pm 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 \pm 4\alpha\beta^3 + \beta^4.$$
$$(\beta \pm \beta)^5 = \alpha^5 \pm 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 \pm 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 \pm \beta^5.$$
$$(\alpha \pm \beta)^6 = \alpha^6 \pm 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 \pm 20\alpha^3\beta^3 + 15\alpha^2\beta^4 \pm 6\alpha\beta^5 + \beta^6.$$
$$(\alpha \pm \beta)^7 = \alpha^7 \pm 7\alpha^6\beta + 21\alpha^5\beta^2 \pm 35\alpha^4\beta^3 + 35\alpha^3\beta^4 \pm 21\alpha^2\beta^5 + 5\alpha\beta^6 \pm \beta^7.$$

κτλ. κτλ.

Ἀλλὰ γὰρ τὰς ἀπὸ διωνύμου ῥίζης περισσαρίθμους κατὰ τοὺς ἐκθέτας, θατέρου τῶν τῆς ῥίζης ἀμειφθέντος σημείων, ἢ ἑκατέρου (§. 271.), ἐπάναγκες ἀεὶ καὶ τὰ σημεῖα καὶ ταύτας ἀμείβεσθαι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β.

ΠΕΡΙ

ΤΗΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΕΞΑΓΩΓΗΣ ΑΠΟ ΤΩΝ ΕΝΤΕΛΩΝ ΤΕ ΚΑΙ ΑΤΕΛΩΝ ΑΛΓΕΒΡΑΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 290. Ῥίζαν ἐκ τῆς δοθείσης δυνάμεως ἐξελεῖν, ἢ τὴν Πλευρὰν ἐξαγαγεῖν ἐστὶ, τὸ προσευρεῖν ποσότητα, ἥτις ποσάκις ἐφ᾽ ἑαυτὴν πολλαπλασιασθεῖσα τὴν δοθεῖσαν δύναμιν παράγει.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οἷον ἐξελεῖν ῥίζαν τετραγώνειον ἢ κυβικὴν ἐκ τοῦ α^6 ταυτόν ἐστι τῷ ἀνιχνεῦσαι τὴν ποσότητα α^3 ἢ α^2, ὧν ἡ μὲν ἅπαξ ἐφ᾽ ἑαυτὴν ἀχθεῖσα τετράγωνον α^6 (§. 216.) ἀναδίδωσιν· ἡ δὲ δὶς, κύβον α^6. οὕτως τε τοῦ α^6 ῥίζα τετραγώνειος ἡ α^3, κυβικὴ δὲ ἡ α^2· δῆλον δὲ, ἐπεὶ $\alpha^2 . \alpha^2 . \alpha^2 = \alpha^6$. καὶ $\alpha^3 . \alpha^3 = \alpha^6$ (§. 237.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 291. Ὁ τῆς ῥίζης τοίνυν ἐκθέτης εὑρεθήσεται, ἐὰν ὁ μὲν τῆς δευτέρας δυνάμεως διὰ τοῦ 2 διαιρεθῇ, ὁ δὲ τῆς τρίτης διὰ τοῦ 3, καὶ ἐφεξῆς οὕτως· οἷον $\alpha^{\frac{2}{2}} = \alpha^1 = \alpha$, $\alpha^{\frac{3}{3}} = \alpha^1 = \alpha$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 292. Ἔσται ἄρα καὶ ἡ πέμπτη τοῦ $\alpha^5\beta^5$ ῥίζα $= \alpha^{\frac{5}{5}}\beta^{\frac{5}{5}} = \alpha\beta$, ἥ τε τοῦ $\frac{27\alpha^6\beta^3}{64\varphi^3\gamma^6}$ κυβικὴ ῥίζα $=$

$\frac{3\alpha^2\beta}{4\varphi\gamma^2}$, καὶ ἡ τοῦ $\alpha = \alpha^{\frac{1}{2}}$, καὶ ἡ κυβικὴ τοῦ $\alpha^2 = \alpha^{\frac{2}{3}}$· καὶ ἐν γένει ἡ ῥίζα ν τοῦ $\alpha^\mu = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ (§. 255.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 293. Ὁ κλασματώδης τοίνυν ἐκθέτης ῥίζαν ἐμφαίνει, ἧς τινος τὸ ἐπίσημον, ἤτοι ὁ ἐκθέτης, ὁ τοῦ κλάσματος ἐστὶ παρονομαστής (§. 240.)· οἷον $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, $\alpha^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{\alpha^2}$, $\beta^{\frac{2}{5}}\gamma^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\beta^2\gamma}$, $(\alpha^2 - \chi^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(\alpha^2 - \chi^2)}$, $(\alpha^2 - \chi^2)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(\alpha^2 - \chi^2)^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{(\alpha^2 - \chi^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\alpha^2 - \chi^2)^2}}$ (§. 252.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 294. Οἱασοῦν τοιγαροῦν ἁπλῆς ποσότητος ἐκθέτην πλουτούσης, ἡ καθ᾽ οἱανδήποτε δύναμιν πλευρὰ ἤτοι ῥίζα, αὐτὴ ἐστὶν ἡ ποσότης κλάσματι ἐκτιθεμένη, οὗ ἀριθμητὴς μὲν ὁ τῆς ποσότητος ἐκθέτης, παρονομαστὴς δὲ ὁ τῆς δυνάμεως (§. 255.)· οἷον τῆς α^6, ἡ μὲν τετραγώνειος πλευρὰ $\alpha^{\frac{6}{2}} = \sqrt{\alpha^6}$, ἡ δὲ κυβικὴ $\alpha^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{\alpha^6}$ (§. 242. 255. 293.)· καὶ δὴ, καὶ τῆς α, τετραγωνικὴ μὲν ῥίζα $= \alpha^{\frac{1}{2}}$, κυβικὴ δὲ $\alpha^{\frac{1}{3}}$ (§. αὐτόθι). Καὶ ἐν γένει τεθείσης τῆς μὲν ποσότητος $= \alpha^\mu$, τοῦ δὲ τῆς ῥίζης ἐκθέτου $= \nu$, ἔσται ἡ ἐκείνης πλευρὰ $= \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ (§. 242.). Ἔνθεντοι καὶ $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{\alpha}$ κτλ. ἐπὶ ποσότητας κλασματώδην ἐπιφερούσας ἐκθέτην μεταμορφωθῆναι ἔχουσι, τῆς αὐτῆς σωζομένης δυνάμεως (§. 210. 211.)· οἷον.

$$\sqrt{\alpha},\ \sqrt[3]{\alpha},\ \sqrt[4]{\alpha},\ \sqrt[5]{\alpha}\ \ldots\ldots\ \sqrt[\nu]{\alpha}$$
$$=\alpha^{\frac{1}{2}},\ \alpha^{\frac{1}{3}},\ \alpha^{\frac{1}{4}},\ \alpha^{\frac{1}{5}}\ \ldots\ldots\ \alpha^{\frac{1}{\nu}}$$

ὡσαύτως $\sqrt{\alpha^3}=\alpha^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{\alpha\beta^3}=\alpha^{\frac{1}{3}}\beta$, $\sqrt[4]{(\alpha^2-\chi^2)}=(\alpha^2-\chi^2)^{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\alpha^2-\chi^2}}=\sqrt[3]{\alpha(\alpha^2-\chi^2)^{-1}}$ (§. 107, 235) $=\alpha^{\frac{1}{3}}(\alpha^2-\chi^2)^{-\frac{1}{3}}$, $\sqrt[2]{\alpha^2}=\pm\alpha^{\frac{2}{2}}=\pm\alpha$ (§. 291), $\sqrt[3]{\beta^6}=\beta^{\frac{6}{3}}=\beta^2$, $\sqrt[4]{\chi^8 y^{12}}=\pm\chi^{\frac{8}{4}}y^{\frac{12}{4}}=\pm\chi^2 y^3$· ταυτὸ κἀπὶ πολλῶν ἄλλων τηρείσθω λεγόμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 295. Ἐὰν οὖν τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ τῆς ῥίζης ἐκθέτου ἐκκύπτον πηλίκον, ἀριθμὸς τυγχάνῃ ὁλοσχερὴς, δῆλον τὴν τῆς ποσότητος διὰ τοῦ ἐκθέτου ῥίζαν ἐπ᾽ ἀκριβὲς ἐξάγεσθαι· οἷον τοῦ α^4, ἔσται ῥίζα τετραγωνικὴ ἡ α^2, καὶ τοῦ α^6 ἡ κυβικὴ ῥίζα ἔσται α^2. Ἐὰν δὲ τῇ τοιαύτῃ διαιρέσει τὸ πηλίκον ἀνάμικτον ᾖ ἐξ ὁλοσχεροῦς καὶ κλάσματος, φανερὸν ὡς ἐκ μέρους μόνον ἡ ῥίζα ἐκφέρεται, οἷον τῆς α^4 ποσότητος ῥίζα κυβικὴ ἔσται ἡ $\alpha^{\frac{4}{3}}$, τουτέστιν $\alpha^{1+\frac{1}{3}}$. Ἐὰν δὲ κλάσμα ἀκραιφνὲς, ἡ ῥίζα ἔσται πάντῃ ἀνέκφραστος· οἷον τῆς α^2 ἡ κυβικὴ $\alpha^{\frac{2}{3}}$. Καὶ τὸ ἁπλοῦν δὲ παρηγμένον ὂν ἐκ πλειόνων καὶ διαφερόντων στοιχείων ἐκθέτας πλουτούντων, τῇ αὐτῇ μεθόδῳ ἀπορριζωθήσεται, τῶν ἐκθετῶν ἐκείνου ἁπάντων τῷ κατὰ τὴν δύναμιν ἐκθέτῃ, καθ᾽ ἣν ἡ ῥίζα ζητεῖται διαιρουμένων· οἷον τοῦ $\alpha^4\beta^6$ τῇ τῶν ἐκθετῶν διαιρέσει διὰ τοῦ 2, ὡς $\sqrt{\alpha^4\beta^6}=\alpha^{\frac{4}{2}}\beta^{\frac{6}{2}}$ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἐξάγεται $\alpha^2\beta^3$, διὰ δὲ τοῦ 3 ἡ κυβικὴ $\sqrt[3]{\alpha^2\beta^6}=\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{6}{3}}=\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^2$.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 296. Τῷ ἐν ἄλλοις σημειωθέντι συμβόλῳ $\sqrt{\ }$ τῆς πλευρᾶς, ἤτοι τῆς ῥίζης καθόλου νοουμένης, προστεθεὶς ὁ ἐκθέτης τῆς προκειμένης δυνάμεως τὴν ταύτης ῥίζαν ἐν εἴδει παρίστησιν (§. 205.)· Ταύτῃτοι καὶ εἰ ποσότης παρείη φέρε ἡ α, ἢ $\zeta\theta$, ἧς ἐξελεῖν δεήσει ῥίζαν τὴν τετραγωνικὴν, οὕτω σημανθήσεται $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\zeta\theta}$· καὶ εἰ τὴν κυβικὴν $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt[3]{\zeta\theta}$, καὶ εἴτινα οἱανδηποτοῦν ἄλλην $\sqrt[\nu]{\alpha}$· Ὥστε οὕτω πρὸς τὴν τῆς διαφορᾶς, τῆς μεταξὺ ῥίζης τε καὶ δυνάμεως θεωρουμένης, διάγνωσιν, τὰς διαφόρους τοῦ α, φέρ᾽ εἰπεῖν, ῥίζας (ὅστις δ᾽ ἂν εἴη ὁ ὑπὸ τοῦ α σημαινόμενος ἀριθμὸς) ἔχειν, ὡς ἐφεξῆς·

$\sqrt{\alpha}$ ἡ Β΄. ἐστὶ Ῥίζα τοῦ α
$\sqrt[3]{\alpha}$ - Γ΄. - - - α
$\sqrt[4]{\alpha}$ - Δ΄. - - - α
$\sqrt[5]{\alpha}$ - Ε΄. - - - α
$\sqrt[6]{\alpha}$ - Ϛ΄. - - - α

Κἀνάπαλιν·

ἡ Β΄. Δύναμις τοῦ $\sqrt{\alpha}$ ἴση ἐστὶ τῷ α
- Γ΄. - - $\sqrt[3]{\alpha}$ - - - α
- Δ΄. - - $\sqrt[4]{\alpha}$ - - - α
- Ε΄. - - $\sqrt[5]{\alpha}$ - - - α
- Ϛ΄. - - $\sqrt[6]{\alpha}$ - - - α κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 297. Τῶν μὲν τοίνυν ἁπλῶν καὶ ἀνεκθέτων ποσοτήτων, ὡς ἄρια ἀδυνάμων παρισταμένων, ἐπεὶ τὴν ῥίζαν ἐξελέσθαι οὐχ οἷόν τε· ταύτην μόνῳ τῷ συμβό-λῳ, οἵα τις ἂν εἴη ἡ ζητουμένη, παριστάνομεν $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{\beta}$, $\sqrt[4]{\gamma}$, τοῦ μὲν α φέρ' εἰπεῖν δηλοῦντες τὴν ῥίζαν τὴν τε-τραγώνειον, τοῦ δὲ β τὴν τρίτην, ὡς καὶ τοῦ γ τὴν τε-τάρτην (§. 296.)· ἀπὸ δέ τοι τῶν ἁπλῶν ἐκθέτας ἐχουσῶν τὴν ζητουμένην ῥίζαν ἐξάγομεν, διαιροῦντες μὲν διὰ τοῦ τῆς ῥίζης ἐκθέτου τὸν τῆς ποσότητος, τῷ δὲ πηλίκῳ ὡς ἐκθέτην αὐτὴν διορίζοντες τὴν ποσότητα (§. 290.)· οἷον, $\sqrt{\alpha^6} = \alpha^{\frac{6}{2}} = \alpha^3$, $\sqrt[3]{\alpha^6} = \alpha^{\frac{6}{3}} = \alpha^2$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 298. Ῥίζαι Ἄῤῥητοί εἰσιν, αἱ δι' ἀριθμῶν ἥκιστα παρίστασθαι δυνάμεναι· Καλοῦνται δὲ κοινῇ Κωφαί, ἢ Ἄλογοι.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 299. Τὰ οὕτως ἀδύνατα τῷ τῶν Ῥιζικῶν ἐπωνύμῳ ὑπαγέσθω· αἱ δὲ παραπλήσιαι τῶν Δυνάμεων Νοηταὶ εἰρήσθωσαν, ἢ Ἀδύνατοι, ἢ καὶ Ῥιζαῖαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 300. Ἐὰν ἄρα παρεμπίπτουσα ἡ ποσότης ἀπο-φατικὴ ἀντ' ἐκθέτου ἄρτιον ἀριθμὸν ἔχουσα, ἡ ταύ-της δύναμις νοητὴ ἢ ἀδύνατος ἀκούει· οἷον $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-8}$, $\sqrt{-12}$ κτλ. καὶ ἐν γέ-νει $\sqrt{-\alpha}$, $\sqrt{-\alpha^2}$, $\sqrt[3]{-\alpha}$, $\sqrt[3]{-\alpha^3}$, εἰσὶ ῥίζαι ἀδύ-νατοι, ὡς τῇ ἀληθείᾳ μὴ οὖσαι, εἰμὴ κατ' ἐπίνοιαν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὸ γὰρ α^2 τὸ γινόμενον ἐστὶν ἤτοι ἐκ τῶν $+\alpha . +\alpha$, ἢ ἐκ τῶν $-\alpha . -\alpha$ (§. 222.). Εἴτε οὖν καταφατι-κά, εἴτε ἀποφατικὰ ταῦτα ὦσι, τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον καταφατικόν ἐστι (§. 221.), εἴτουν $+\alpha^2$, οὐ μὴν ἀποφατικόν· ἡ ἄρα $-\alpha^2$ δύναμις καὶ ἡ ῥίζα αὐτῆς ἀνύ-παρκτοί εἰσι καὶ ἐπίπλαστοι. Ὧν δὲ δυνάμεων ἀπο-φατικῶν περισσάριθμοι εἰσὶν οἱ ἐκθέται, ἀποφατικαὶ μὲν εἰσὶν ἐκεῖναι, καὶ αἱ ῥίζαι αὐτῶν, οὐ μὴν δὲ ἐπίπλα-στοί τε καὶ ἀνύπαρκτοι· τοιαύτη ἐστὶν ἡ $-\alpha^3$, γίνεται γὰρ ἐκ τῆς ῥίζης $-\alpha$ δὶς πολλαπλασιασθείσης (§. 223.).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 301. Τὸ ἰδίως τοίνυν ἄλογον ἀεί τι ποσόν ἐστι κυρίως καὶ ἀληθῶς καὶ τῶν ἥκιστα ἀδυνάτων· διὸ τὸ ἀδύνατον, κἂν εἰ καθ' ὁμοιότητα τοῦ ἀλόγου προβάλ-λοιτο, οἷον $\sqrt{-\alpha}$, οὐκ ἂν ἄλογον κυρίως ἐπονομάζοιτο (§. 297.), ἀλλὰ ῥιζικόν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οὕτω γραμμὰς συμμέτρους, καὶ τετράγωνα σύμμε-τρα, καὶ ποσότητας ὡσαύτως ὅσας ἄλλας, ὧν ἔστι κοι-νὸν μέτρον λαβεῖν, δι' ἀριθμῶν ὡρισμένων ἤτοι ῥητῶν (25. 27. 28.) εἴποι τις ἂν λογικάς. Ἄλογον δὲ οἱ Πα-λαιοὶ γραμμὴν προσεῖπον τὴν μὴ μόνον γραμμῇ ἑτέρᾳ τῇ ἀντὶ μονάδος ληφθείσῃ ἀσύμμετρον, ἀλλ' ἀφ' ἧς καὶ τὸ τετράγωνον ἀσυμμέτρως ἔχει, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀν-τὶ μονάδος ληφθείσης τετράγωνον (α).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 302. Ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ τοίνυν κἂν τῇ τῶν Ῥι-ζικῶν Ἀναλύσει δειχθήσεται τοιαύτας ῥίζας, ἃς ἐνερ-

(α) Εὐκλ. Βιβ. Ι'. τῶν Στοιχείων.

γεία δοθῆναι ἀδύνατον (§. 300. 301.), ἔχειν πρὸς τὴν μονάδα, ὡς εὐθεῖα γραμμὴ πρὸς ἄλλην εὐθεῖαν, καὶ ἑπομένως ἀριθμοὺς εἶναι (§. 10.), καὶ τούτους ἀλόγους (§. 27. 28.), ἅτε δὴ ἐξ ὑποθέσεως μὴ ὄντας λογικοὺς ἤτοι ῥητούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 303. Ποσότητες Εὔκρινεῖς ἢ Ἄῤῥιζοι εἰσίν, αἱ ἄνευ τοῦ ἐκ τῶν ῥιζικῶν συνδέσμου συνημμένως ἐκκείμεναι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 304. Ἐκ τῆς δοθείσης Μονωνύμου Δυνάμεως ῥίζαν ὁποιανδηποτοῦν ἐξελεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Διαιρεθήτω ὁ τῆς δοθείσης δυνάμεως ἐκθέτης διὰ τοῦ ἐκθέτου τῆς αἰτουμένης ῥίζης· Λέγω τοὐντεῦθεν ἐκκύπτον πηλίκον, τὴν αἰτουμένην εἶναι ῥίζαν (§. 291. 299.).

ΔΕΙΞΙΣ.

Δύναμις μὲν δὴ ὁποιαοῦν τῷ α^{μ} παρίστασθαι ἔχει, ἡ δ' ἐξακτέα ῥίζα τῷ $\sqrt[\nu]{}$· ἔστιν ἀλλ' οὖν $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ (§. 240.)· ἄρα, κτλ. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 305. Διὰ τῆς διαιρέσεως τοίνυν τῶν ἐκθετῶν ἑκάστου τοῦ κατὰ τὸν δοθέντα μονομερῆ ὅρον στοιχείου διὰ τοῦ τῆς ῥίζης ἐκθέτου, ῥίζα οἱαδηποτοῦν ἐξάγεται (§. 295. 299.)· οἷον δεῆταν ἐκ τοῦ $\alpha^2\beta^6$ ῥίζαν τετραγώνιον ἐξαγαγεῖν ἔσται $\alpha^2\beta^6 = \alpha^{\frac{2}{2}}\beta^{\frac{6}{2}}$, τῇ δὲ ἀναγωγῇ

ἔσται ῥίζα ἀληθὴς ἡ ζητουμένη $\alpha\beta^3$· καὶ γὰρ $\alpha\beta^3 \times \alpha\beta^3 = \alpha^2\beta^6$ (§. 115.). Ἐὰν δὲ οἱ κατὰ τὰ στοιχεῖα ἐκθέται εἰς κλάσματα μετενεχθέντες ἐπ' ἀριθμοὺς ὁλοσχερεῖς οὐχ οἷοί τε ὦσιν ἀνάγεσθαι, τὴν κατὰ τὴν ῥίζαν ἐξαγωγὴν ἀτελῆ ἐκληπτέαν (§. 295.) καὶ γραφῆς μόνον ἀξιωτέαν· οἷον εἰ ἀπὸ τοῦ $\alpha^6\beta$ τὴν κυβικὴν ἐξαλεῖν δέοι ῥίζαν, ἔσται $\alpha^6\beta = \alpha^{\frac{6}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}$ (§. 304.) $= \alpha^2\beta^{\frac{1}{3}}$, ὥστε ἐν μέρει ἡ ἐξαγωγὴ ἀτελής. Εἰ γὰρ ἐντελής, καὶ λειψάνου δίχα γενέσθαι ἠδύνατο (§. 295. 299.).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 306. Ἐὰν ἐκ διαιρέσεως τετραγώνου ἀριθμοῦ ἐπὶ τετράγωνον, κύβου ἐπὶ κύβον, καὶ γενικῶς δυνάμεως ἡστινοσοῦν ἐφ' ἑτέραν ὁμοίαν, ἀριθμὸς προΐῃ ἀκέραιος, καὶ ἐκ διαιρέσεως τῆς ῥίζης ἐπὶ τὴν ῥίζαν ἀκέραιος προϊέναι ὀφείλει.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ ἐκ διαιρέσεως τετραγώνου ἀριθμοῦ ἐπὶ τετράγωνον, κύβου ἐπὶ κύβον, καὶ γενικῶς ἡστινοσοῦν δυνάμεως ἐφ' ἑτέραν ὁμοίαν ἀνακύπτον πηλίκον, ἑρμηνεύς ἐστι τοῦ λόγου τῶν τετραγώνων, τῶν κύβων, καὶ γενικῶς τῶν ἀλλήλαις διαιρουσῶν ὁμοίων δυνάμεων (§. 209.), καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶ τετράγωνος, κύβος, καὶ γενικῶς δύναμις τοῦ ἐκθέτου ἢ ἑρμηνέως τοῦ λόγου τῶν ῥιζῶν (§. 225.). Διὸ δὴ ἐπεὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἐστὶ λογικός, ἤτοι ῥητὸς ἀκέραιος ἐξ ὑποθέσεως, ὁ αὐτὸς ἀκέραιος λογικὸς ἀριθμὸς ἔσται τετράγωνος, κύβος, ἢ δύναμις ἑτέρου βαθμοῦ, οὗπερ ἐπεὶ παραπλησίως ἡ ῥίζα ἀριθμὸς λογικὸς ἀκέραιος εἶναι ὀφείλει (§. 194.), καὶ ὁ τῶν ῥιζῶν ἄρα ἐκθέτης ἀριθμὸς λογικὸς ἀκέραιος ἔσται. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 307. Διὸ δὴ ἐὰν ἡ ῥίζα τὴν ῥίζαν οὐ καταμετρῇ, οὐδὲ τετράγωνον τὸ τετράγωνον. οὐδ' ὁ κύβος τὸν κύβον, οὐδ' ἡτισοῦν δύναμις τὴν ἑτέραν ὁμοίαν καταμετρῇ (§. 153.), καὶ ἑπομένως κλάσμα ἀκεραίου μεῖζον ἐκ τῶν τοιούτων τετραγώνων, κύβων, ἢ δυνάμεων ὁποιωνοῦν ὁμοίων συγκείμενον, εἰς ἀκέραιον ἀριθμὸν οὐ μετάγεται (§. 163.).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 308. *Εἴπερ ἀκεραίου ἀριθμοῦ ῥίζα ἐν ἀκεραίοις οὐ δίδοται, οὐδὲ διὰ κεκλασμένων δοθήσεται.*

ΔΕΙΞΙΣ.

Θῶμεν δίδοσθαι κεκλασμένον ἀριθμὸν, ὃς ἂν ᾖ ῥίζα· ἄρα ἐκ τῆς αὐτοῦ ἐπανειλημμένης ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιάσεως ὀφείλει παράγεσθαι ὁ δοθεὶς ἀριθμός (§. 194.). Ἀλλὰ μὴν ὁσάκις τὸν κεκλασμένον ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιάσειέ τις, ὁ παραγόμενος ἀεὶ ἔσται κεκλασμένος (§. 183.), καὶ οὗτος ἐν τῇ παρούσῃ περιστάσει εἰς ἀκέραιον οὐ μετάγεται (§. 307.)· ἄρα ἐπεὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἐστὶν ὁλοσχερὴς ἐξ ὑποθέσεως, ὁ κεκλασμένος ῥίζα αὐτοῦ εἶναι οὐ δύναται. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 309. Ἤδη γοῦν ἐπεὶ οἱ πρῶτοι καθ' ἑαυτοὺς ἀριθμοὶ ἐκ μηδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ, ἐφ' ἑαυτὸν τοσάκις πολλαπλασιαζομένου γεννῶνται (§. 149.). Ἐκ τῶν καθ' ἑαυτοὺς πρώτων ἀριθμῶν οὐδεμία τελεία ῥίζα ἐξαχθῆναι δύναται ἐν ἀκεραίοις (§. 290.), καὶ διὰ τοῦτο οὐδὲ διὰ κεκλασμένων δοθῆναι δύναται (§. 308.).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 310. *Ἐκ τοῦ δοθέντος ἐντελοῦς Ἀλγεβραϊκοῦ Τετραγώνου τὴν κατὰ δύο ἢ πλείω ὀνόματα τετραγωνικὴν ῥίζαν ἐξελέσθαι.*

ΛΥΣΙΣ.

Ὁποῖον ποτ' ἂν ᾖ τὸ προτεθὲν τετράγωνον, ἤτοι ἡ ἀπὸ ῥίζης ὀνομάτων πλειόνων διδομένη δύναμις, κατὰ τοὺς ἐκθέτας τῶν ἀξιῶν ἀεὶ διατετάχθω τοῦ στοιχείου, τοῦ ἐν αὐτῇ ἐμφιλοχωροῦντος συχνότερον· οὕτως ὥστε, ἤτοι τὰς τοῦ εἰρημένου στοιχείου καθυπερτέρας ἀξίας ἐν τάξει ἡγεῖσθαι, ἕπεσθαι δὲ τὰς ταπεινοτέρας· ἢ γοῦν ἀνάπαλιν τὰς μὲν ἐλάσσονας ἡγεῖσθαι, τὰς δὲ μείζονας ἐν τάξει ἐφέπεσθαι. Εἰ δὲ καὶ πλείω τύχοι τὴν ἀξίαν ἰσαστάσια στοιχεῖα, διατιθέσθω καὶ ταῦτα, ὅσα γε τῷ πρώτῳ παρείκοι, κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, εἶθ' οὕτω θηρευέσθω ἡ ῥίζα ὡς ἐφεξῆς.

Α'. Ἐπεὶ ἐν τῷ πρώτῳ ὅρῳ τοῦ ὀρθῶς διατεταγμένου τετραγώνου, τὸ τοῦ πρώτου τῆς ῥίζης ὅρου τετράγωνον ἔνεστιν, ἐξαχθήτω ἐξ αὐτοῦ ἡ τετραγώνειος ῥίζα (§. 304.), καὶ γραφήτω μετὰ τὸ δοθὲν τετράγωνον παρενθέσει ἤτοι μηνίσκῳ διεσταλμένον, ἥτις ἂν τετραγωνισθεῖσα τῷ πρώτῳ ὅρῳ τῶν κατὰ τὸ δοθὲν τετράγωνον ἴση εἴη, ὑφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ δοθέντος τετραγώνου, καὶ σημειωθήτω τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον.

Β'. Ἐπεὶ ἐν τῷ προτεθέντι τετραγώνῳ ἑπόμενόν ἐστι τὸ διπλοῦν γινόμενον ἐκ τοῦ πρώτου ὅρου ἐπὶ τὸν δεύτερον (§. 260.), διὰ τοῦ διπλοῦ τοῦ ἤδη εὑρεθέντος τῆς ῥίζης ὅρου διαιρεθήτω τὸ μετὰ τὴν ὑφαίρεσιν ὑπολειφθέν· τὸ γὰρ ταύτῃ γε ἐκπροϊὸν πηλίκον θάτερος τῶν ὅρων ἔσται τῆς ῥίζης, ὅγε ἐπί τε τὸν διαιρέτην καὶ ἐφ' ἑαυτὸ ἀχθὲν, τὸ διπλοῦν ἀναδώσει γινόμενον ἐκ τοῦ πρώτου ὅρου ἐπὶ τὸν δεύτερον, καὶ τὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον, ὧν ἀφαιρεθέντων, ἐὰν μηδὲν ὑπολειφθῇ μετὰ τὴν ὑφαίρεσιν, φανερὸν αὐτόθεν τὴν ῥίζαν εἶναι διώνυμον τὴν ζητουμένην. Εἰ δὲ περιλειφθείη τι·

Γ'. Ἐπεὶ ἀκόλουθόν ἐστι τὸ διπλοῦν γινόμενον ἐκ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ὅρου ἐπὶ τὸν τρίτον, οἱ πρῶτοι τῶν ἐν αὐτῷ ἀπαντῶντες ὅροι, ἤτοι τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον, διὰ τοῦ διπλοῦ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου τῶν ἤδη εὑρεθέντων τῆς ῥίζης ὅρων αὖθις διαιρεθήτωσαν, καὶ τὸ ἀπ' ἐντεῦθεν πηλίκον, εἰς τρίτον ὄνομα, ἢ ὅρον τῆς ῥίζης μετὰ τὴν παρένθεσιν ἀποτιθέσθω, ὅπερ ἐπί τε τὸν διαιρέτην καὶ ἐφ' ἑαυτὸ ἀναχθὲν, τὸ διπλοῦν παρέξει γινόμενον ἐκ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ὅρου ἐπὶ τὸν τρίτον, καὶ τὸ τοῦ τρίτου τετράγωνον· τοῦτο δὲ, ἤτοι τὸ ἀπὸ τῆς εἰς τόδε εὑρεθείσης ῥίζης τετράγωνον ἀπὸ τοῦ κατ' ἀρχὰς δοθέντος ἐκείνου τετραγώνου ὑφαιρεί-

σθω, καὶ ἐὰν μηδὲν ὑπολειφθῇ ἔσται ἡ ῥίζα τριώνυμος· Εἰ δέ τι λοιπόν·

Δ'. Ἐπεὶ ἐφεξῆς ἕπεται τὸ διπλοῦν γινόμενον ἐκ τοῦ πρώτου, δευτέρου καὶ τρίτου ὅρου ἐπὶ τὸν τέταρτον, διὰ τοῦ διπλοῦ τῆς ἤδη εὑρεθείσης τριωνύμου ῥίζης, διαιρείσθω τὸ κατὰ τὴν τρίτην πρᾶξιν ἐναπολειφθέν· ὡσαύτως καὶ προσωτέρω τὰ τῆς πράξεως χωρείτω, ἀεὶ μὲν τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ διπλοῦ τῶν εὑρεθέντων τῆς ῥίζης ὅρων, ἢ ὀνομάτων γινομένης, ἀεὶ δὲ καὶ τῆς ἐκείνων αὐτῶν τετραγωνισθέντων ἀπὸ τοῦ προτεθέντος τὸ κατ' ἀρχὰς τετραγώνου ὑφαιρέσεως εἰς τέλος, ἕως οὗ μηδὲν τέως περιῇ τὸ ὑπόλοιπον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς μὲν οὖν ἡ ῥίζα διὰ τῆς ἐπιταχθείσης διαιρέσεως ὑπεξάγεται, ἐξ αὐτῆς τῆς τῶν δυνάμεων συστάσεως (§. 260. 261.) ῥᾴδιον συνιδεῖν· ἡ μὲν γὰρ οὕτως εὑρεθεῖσα ῥίζα, τοῦ προτεθέντος τετραγώνου ῥίζα ἐστὶν ἡ τετραγώνειος· τὸ δὲ ταύτης τετράγωνον ἐκ μερῶν σύγκειται τῷ δοθέντι ἴσων. Ὅτι δὲ ταῦτα ἅμα ληφθέντα τὸ προτεθὲν τετράγωνον συμπληροῖ, δῆλον ἐντεῦθεν, ὅτι ἀφαιρεθέντων ἐξ αὐτοῦ, οὐδὲν ὑπολείπεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 311. Ἐὰν δὲ τὸ προτεθὲν τετράγωνον κλασματῶδες τύχῃ τοῖς αὐτοῖς κανόσιν ἔκ τε τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ ἡ τετραγώνειος ἐξαχθήτω ῥίζα, ὡς ἀνωτέρω διείληπται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α′. $\sqrt{(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)} = \alpha + \beta.$

Β′. $\sqrt{(\alpha^4 + 6\alpha^3\beta + 5\alpha^2\beta^2 - 12\alpha\beta^3 + 4\beta^4)}$
$= \alpha^2 + 3\alpha\beta - 2\beta^2.$

$$\pm\alpha^4$$
$$6\alpha^3\beta + 5\alpha^2\beta^2 - 12\alpha\beta^3 + 4\beta^4 \mid : 2\alpha^2$$
$$\pm 6\alpha^3\beta \pm 9\alpha^2\beta^2$$
$$-4\alpha^2\beta^2 - 12\alpha\beta^3 + 4\beta^4 \mid : 2\alpha^2 + 6\alpha\beta$$
$$-4\alpha^2\beta^2 - 12\alpha\beta^3 + 4\beta^4$$
$$+ \quad + \quad -$$
$$0$$

Γ′. $\sqrt{(4 - 8\phi + 4\phi^3 + \phi^4)} = 2 - 2\phi - \phi^2.$

$$\pm 4$$
$$-8\phi + 4\phi^3 + \phi^4 \mid : 4$$
$$\mp 8\phi \pm 4\phi^2$$
$$-4\phi^2 + 4\phi^3 + \phi^4 \mid : 4 - 4\phi$$
$$\mp 4\phi^2 \pm 4\phi^3 \pm \phi^4$$
$$0$$

Δ′. $\sqrt{\left(\chi^2 - \alpha\chi + \frac{\alpha^2}{4}\right)} = \chi - \frac{\alpha}{2}$

$$\pm\chi^2$$
$$-\alpha\chi + \frac{\alpha^2}{4} \mid : 2\chi$$
$$\mp\alpha\chi + \frac{\alpha^2}{4}$$
$$0.$$

Ε′. $\sqrt{(\beta^2 - 2\beta\delta + \delta^2 + 2\beta\gamma\ 2\gamma - \delta + \gamma^2)}$
$= \beta - \delta + \gamma.$

Ϛ′. $\sqrt{(\psi^4 + 4\psi^3 - 8\psi + 4)} = \psi^2 + 2\psi - 2.$

Ζ′. $\sqrt{(9\gamma^2 - 12\gamma\delta\chi + 4\delta^2\chi^2 + 24\gamma\zeta y - 16\delta\zeta\chi y}$
$+ 16\zeta^2 y^2) = 3\gamma - 2\delta\chi + 4\zeta y.$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα παραδείγματα δέον τὸν Καθηγητὴν ὑπ᾽ ὄψιν τῶν Μαθητιώντων διερμηνεύοντα, τοὺς ἀνωτέρω διαληφθέντας ἐφαρμόττειν κανόνας. Ἀλλ᾽ οὖν τῶν Εἰσαγομένων χάριν ἀναλυτέον εἰς μέρη τὸ Β′. παράδειγμα. Διαταχθέντος τοίνυν τοῦ τετραγώνου κατὰ τοὺς ἐν τῷ α ἐκθέτας, ἐξαχθήτω τοῦ α^4 ῥίζα ἡ α^2, ἀντί τε τοῦ πρώτου τῆς ῥίζης ὅρου μετὰ τὴν παρένθεσιν γραφήτω· εἶτα εἰς τετράγωνον ἐξαρθείσης, ἀφαιρείσθω τὸ ἑαυτῆς τετράγωνον α^4 ἀπὸ τοῦ δοθέντος τετραγώνου. Ζητηθήτω μετὰ ταῦτα ποσάκις τὸ διπλοῦν τῆς εὑρεθείσης ῥίζης $2\alpha^2$ τῷ πρώτῳ τοῦ ὑπολοίπου ὅρῳ $6\alpha^3\beta$ ἐμπεριείληπται, καὶ τὸ πηλίκον $3\alpha\beta$ ἀντὶ τοῦ δευτέρου τῆς ῥίζης ὅρου τεθήτω, ὅ, γε ἐπί τε τὸν διαιρέτην $2\alpha^2$ καὶ ἐφ᾽ ἑαυτὸ ἀχθὲν δώσει γινόμενον $6\alpha^3\beta + 9\alpha^2\beta^2$, οὗτινος ἀφαιρεθέντος, τὸ δεύτερον ἐκκύψει ὑπόλοιπον. Ἡ ἤδη εὑρεθεῖσα ῥίζα $\alpha^2 + 3\alpha\beta$ διπλασιασθήτω, καὶ ζητηθήτω ποσάκις ὁ ταύτης πρῶτος ὅρος $2\alpha^2$ τῷ πρώτῳ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου ὅρῳ $-4\alpha^2\beta^2$ ἐμπεριέχεται, καὶ τὸ πηλίκον $-2\beta^2$ τῷ καταλλήλῳ συμβόλῳ $-$ γνωριζόμενον τοῖς λοιποῖς τῆς ῥίζης συγκαταταχθήτω ὅροις, ἔστι καὶ γὰρ ταύτης ὅρος ὁ τρίτος· οὗτινος ἐπί τε τὸν διαιρέτην $2\alpha^2 + 6\alpha\beta$ καὶ ἐφ᾽ ἑαυτὸ ἀχθέντος γινόμενον ἐκκύψει $-4\alpha^2\beta^2 - 12\alpha\beta^3 + 4\beta^4$. οὗγε ἀπὸ τοῦ δοθέντος συγκειμένου δευτέρου ὑπολοίπου ἀφαιρεθέντος οὐδὲν ὑπολειφθήσεται. Ἡ αἰτουμένη τοίνυν ῥίζα ἐστὶν, $\alpha^2 + 3\alpha\beta - 2\beta^2$· ὡσαύτως κἀπὶ τῶν λοιπῶν χωρητέον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 312. Ἐὰν οὖν μετὰ τὸ οὑτωσὶ τὴν πρᾶξιν γενέσθαι τὸ τετράγωνον ἀκριβοῦς ἐς τὸ παντελὲς οὐκ ἐξάγεται, δῆλόν ἐστι, τὸ τετράγωνον τῶν ἀτελῶν εἶναι. Ἔνθεν τοι τετραγώνου μὴ ἀκριβοῦς, ἀκριβῆ ῥίζαν ἐξάγειν ἀμήχανον· διὸ καὶ ἡ τοιαύτη ῥίζα δι' ἀπείρου τῶν ὅρων σειρᾶς ἐκτίθεσθαι εἴωθεν. Ἔστω τοίνυν·

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 313. Ἐκ τοῦ δοθέντος ἀτελοῦς Ἀλγεβραϊκοῦ Τετραγώνου $\alpha^2 + \beta^2$ τὴν προσεχῶς τετραγώνειον ἐξελεῖν ῥίζαν.

ΛΥΣΙΣ.

Α'. Ληφθήτω ἡ τοῦ πρώτου ὅρου α^2 τοῦ προτεθέντος διωνύμου τετράγωνος ῥίζα α, τῷ γε καταλλήλῳ σημείῳ $+$ σημαινομένη τετραγωνισθήτω, ἀπό τε τοῦ πρώτου ὅρου α^2 μετὰ τοῦ ἀντιθέτου σημείου ἀφαιρεθήτω· ἔσται μετὰ τὴν πρᾶξιν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον $+\beta^2$.

Β'. Διασευθήτω ὁ πρῶτος τῆς ῥίζης ὅρος α, διά τε τοῦ διπλοῦ 2α τοῦ δευτέρου διαιρεθέντος ὑπολοίπου β^2, ἔσται τὸ ἐντεῦθεν ἐπιφερόμενον πηλίκον $+\frac{\beta^2}{2\alpha}$, ὃ δὴ μετὰ τὸν πρῶτον τῆς ῥίζης στιχηδὸν γραφήτω ὅρον, ἔστι γὰρ ταύτης ὅρος ὁ δεύτερος. Πολλαπλασιασθήτω εἶτα ὁ διαιρέτης 2α ἐπὶ τὸ πηλίκον $\frac{\beta^2}{2\alpha}$, ἔσται γινόμενον $\frac{2\alpha\beta^2}{2\alpha} = \beta^2$, ᾧτινι προστεθήτω τὸ τοῦ δευτέρου τῆς

ῥίζης ὅρου $\frac{\beta^2}{2\alpha}$ τετράγωνον $\frac{\beta^4}{4\alpha^2}$ τοῦ δὲ ἀθροίσματος $+\beta^2 + \frac{\beta^4}{4\alpha^2}$, ὑπὸ τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον ὑπεναντίοις σημείοις τεθέντος, καὶ τῆς ἀναγωγῆς γινομένης, ὑπολειφθήσεται $-\frac{\beta^4}{4\alpha^2}$.

Γ'. Δισσευθήτω αὖθις τὸ μέχρι τοῦδε εὑρεθὲν τῆς ῥίζης μέρος, ἤτοι γενέσθω $2\left(\alpha + \frac{\beta^2}{2\alpha}\right) = 2\alpha + \frac{2\beta^2}{2\alpha} = 2\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha}$, διά τε τοῦ πρώτου ὅρου 2α τοῦ διπλοῦ τούτου $2\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha}$, διαιρεθήτω τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον $-\frac{\beta^4}{4\alpha^2}$, ἔσται πηλίκον $2\alpha : -\frac{\beta^4}{4\alpha^2} = -\frac{\beta^4}{8\alpha^3}$, ὅπερ ἐν τῇ τῆς ῥίζης αὖθις σειρᾷ ἀντὶ τοῦ τρίτου ταχθήτω ὅρου. Ἀχθήτω εἶτα ὁ διαιρέτης $2\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha}$ ἐπὶ τὸ πηλίκον $-\frac{\beta^4}{8\alpha^3}$, ἤτοι $\left(2\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha}\right) \times -\frac{\beta^4}{8\alpha^3} = -\frac{3\alpha\beta^4}{8\alpha^3} - \frac{\beta^6}{8\alpha^4}$, ᾧτινι γινομένῳ τὸ τοῦ $-\frac{\beta^4}{8\alpha^3}$ προστεθήτω τετράγωνον $\frac{\beta^8}{64\alpha^6}$· ὧν δὴ συνάμα $-\frac{\beta^4}{4\alpha^2} - \frac{\beta^6}{8\alpha^4} + \frac{\beta^8}{64\alpha^6}$ ἀντισήμως ὑπὸ τὸ δεύτερον γραφέντων πηλίκον, ὑπολειφθήσεται $+\frac{\beta^6}{8\alpha^4} - \frac{\beta^8}{64\alpha^6}$.

Δ'. Τοῦ τῆς ῥίζης αὖθις μέρους $\alpha + \frac{\beta^2}{2\alpha} - \frac{\beta^4}{8\alpha^3}$ διπλασιασθέντος, διὰ τοῦ πρώτου ὅρου 2α τοῦ διπλοῦ τούτου $2\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha} - \frac{\beta^4}{4\alpha^2}$, ὁ τοῦ τρίτου ὑπολοίπου πρῶτος ὅρος διαιρεθήτω· τοὐντεῦθεν ἐκκύπτον πηλίκον $+\frac{\beta^6}{16\alpha^5}$ ἀντὶ τοῦ τετάρτου τῆς ῥίζης στιχηδὸν συγκαταλεχθήτω ὅρου. Τοῦ διαιρέτου εἶτα $2\alpha+\frac{\beta^2}{\alpha}-\frac{\beta^4}{4\alpha^3}$ ἐπὶ τὸ πηλίκον $+\frac{\beta^6}{16\alpha^5}$ ἀχθέντος, καὶ τῷ ἐκκύπτοντι γινομένῳ $\frac{\beta^6}{8\alpha^4}+\frac{\beta^8}{16\alpha^6}-\frac{\beta^{10}}{64\alpha^8}$ τοῦ ἀπὸ $\frac{\beta^6}{16\alpha^5}$ τετραγώνου $\frac{\beta^{12}}{256\alpha^{10}}$ ἐπισυναφθέντος, γραφήτω ἀντισήμως τὸ ἄθροισμα $-\frac{\beta^6}{8\alpha^4}-\frac{\beta^8}{16\alpha^6}+\frac{\beta^{10}}{64\alpha^8}-\frac{\beta^{12}}{256\alpha^{10}}$, ὑπὸ τὸ τρίτον ὑπόλοιπον $+\frac{\beta^6}{8\alpha^4}-\frac{\beta^8}{64\alpha^6}$· τῆς δὲ ἀναγωγῆς γενομένης, ἐπεὶ $-\frac{\beta^6}{8\alpha^4}+\frac{\beta^6}{8\alpha^4}=0$, οἵ τε λοιποὶ δύω τῶν ὅρων, ἤτοι $\frac{\beta^8}{64\alpha^6}$ καὶ $\frac{\beta^8}{16\alpha^6}$ ἀναχθῆναι οὐκ ἔχουσιν ὡς ἑτερογενῶς παρονομαζόμενοι, διάτοι τοῦτο ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἀναγόμενοι ὄνομα τῷ ἐπὶ τὸν 4 πολλαπλασιασμῷ (§. 168.) ἔσονται $-\frac{4.\beta^8}{4.16\alpha^6}-\frac{\beta^8}{64\alpha^6}=-\frac{4\beta^8}{64\alpha^6}-\frac{\beta^8}{64\alpha^6}=-\frac{5\beta^8}{64\alpha^6}$, ᾧ δὴ καὶ τῶν λοιπῶν δυοῖν ὅρων προστιθεμένων, ἕξομεν τὸ τέταρτον ὑπόλοιπον $-\frac{5\beta^8}{64\alpha^6}+\frac{\beta^{10}}{64\alpha^8}-\frac{\beta^{12}}{256\alpha^{10}}$. Ὥστε τῆς πράξεως οὑτωσὶ συνεχιζομένης, καινοὺς τῆς ῥίζης ἰσαρίθμως ἑσαεὶ ὅρους ἐκκύπτειν ἐπ' ἄπειρον. Ἄρα ἡ ῥίζα διὰ τῆς ἐπ' ἄπειρον σειρᾶς οὕτως ἐκτεθειμένη ἐκκείσεται.

Α'. $\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}=\alpha+\frac{\beta^2}{2\alpha}-\frac{\beta^4}{8\alpha^3}+\frac{\beta^6}{16\alpha^5}-\ldots$ κτλ.

Β'. $\sqrt{(\alpha^2-\chi^2)}=\alpha-\frac{\chi^2}{2\alpha}-\frac{\chi^4}{8\alpha^3}-\frac{\chi^6}{16\alpha^5}\ldots$ κτλ.

$$\begin{array}{l|l}
\pm\alpha^2 & \\
\hline
-\chi^2 & :2\alpha \\
\mp\chi^2\pm\frac{\chi^4}{4\alpha^2} & \\
\hline
-\frac{\chi^4}{4\alpha^2} & :2\alpha-\frac{\chi^2}{\alpha} \\
\mp\frac{\chi^4}{4\alpha^2}\pm\frac{\chi^6}{8\alpha^4}\pm\frac{\chi^8}{64\alpha^6} & \\
\hline
-\frac{\chi^6}{8\alpha^4}-\frac{\chi^8}{64\alpha^6} & :2\alpha-\ldots
\end{array}$$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Κείσθω δὴ πρὸς τὴν τῆς τοιαύτης σειρᾶς χρήσεως δεῖξιν ὁ 150 ἀριθμός, οὗτινος ἡ ἐγγὺς τοῦ ἀληθοῦς τετράγωνος ῥίζα ἐξακτέα ἡμῖν πρόκειται. Θεωρουμένου, τοῦ ἀριθμοῦ 150, ὡς ἀθροίσματος ἐκ τῶν $144+6$, ὧν θάτερος ῥίζαν τετράγωνον τὸν 12 ἔσχε, τεθήτω $\alpha^2=144$, $\beta^2=6$. Τούτων γενομένων, μετασχηματισθήσεται διὰ τῆς τῶν ἀριθμῶν ἀνθυποκαταστάσεως ἡ προσεχῶς ἐκτεθεῖσα σειρὰ ἐπὶ τὴν ἐφεξῆς

$$12+\frac{6}{24}-\frac{36}{8\times1728}+\frac{216}{16\times248832}-\text{κτλ.}$$

Ἐπεὶ δὲ αὕτη τῶν ἐγκλινουσῶν πέφυκεν· ἤτοι ἧς ἡ δύναμις ἀεὶ ἐλάττων γίνεται, ὅσῳ αὕτη πρὸς μείζονας κατακλᾶται δυνάμεις (§. 243.)· τούτου χάριν ἀπόχρη τοὺς δύω μόνον πρώτους ταύτης λαβεῖν ὅρους, πρὸς τὴν τῆς δυνάμεως τῆς ὅλης σειρᾶς, ἤτοι τῆς ῥίζης 150, ὡς ἔγγιστα τοῦ ἀληθοῦς εὕρεσιν. Διὸ καὶ τῶν δυοῖν πρώτων τῆς σειρᾶς ὅρων εἰς ἓν συναφθέντων, ἔσται τὸ τούτων ἄθροισμα $12 + \frac{1}{4}$. ἐξ οὗ τοῦ ἀντισήμως ἔχοντος κλασματώδους ἐφεξῆς ὅρου $-\frac{36}{8 \times 1728}$, ἤτοι $\frac{1}{384}$ ἀφαιρεθέντος, ὑπολειφθήσεται $12 + \frac{95}{384}$· καὶ τῇ τοῦ κλάσματος πρὸς Δεκαδικὸν ἀναγωγῇ ἕξομεν 12, 247391 τὴν ὡς ἔγγιστα τοῦ ἀκριβοῦς τοῦ 150 τετράγωνον ῥίζαν, ἥτις δὴ τῆς ἀληθοῦς $\frac{1}{100000}$ σχεδὸν διενήνοχεν. Εἰδ' οὖν πρὸς θυμοῦ τινι γένοιτο τοὺς δύω μόνον πρώτους τῶν ὅρων $\alpha + \frac{\beta^2}{2\alpha}$ παραλαβεῖν, ἕξει καὶ οὕτω 12, 25 τὴν ὡς ἔγγιστα τοῦ ἀληθοῦς τετραγώνειον τοῦ 150 ῥίζαν.

Ἐὰν δ' αὖθις ἀριθμὸς τύχῃ ὁ 345789, ἀφ' οὗ τὴν ἐγγὺς τοῦ ἀληθοῦς τετράγωνον ἐξελεῖν δέοι ῥίζαν. Εὑρεθείσης πρῶτον τῆς τοῦ ἐν τῷ ἀριθμῷ περιεχομένου μεγίστου τετραγώνου ῥίζης, θηρευθήσεται καὶ ἡ λοιπὴ διὰ τῆς ἐν τῇ σειρᾷ ἐφαρμόσεως. Οἷον ἐπεὶ τὸ ἐν τῷ ἀριθμῷ 345789 περιλαμβανόμενον ἐντελὲς τετράγωνον ἐστὶ 345744, ἔσται ἑπομένως ἡ τούτου ῥίζα 588; τὸ δ' ἐκ τῆς πράξεως ὑπόλοιπον 45· κἀντεῦθεν $345789 = 345744 + 45$. Ἔσται τοίνυν διὰ τῆς ἐφαρμογῆς $\alpha^2 = 345744$, $\beta^2 = 45$, $\alpha = 588$ Ληφθέντων τοίνυν τῶν δυοῖν πρώτων τῆς σειρᾶς ὅρων ἕξομεν ὑπὲρ τῆς ὡς ἔγγιστα τοῦ ἀληθοῦς ῥίζης $588 + \frac{45}{2 \times 588} = 588 + \frac{15}{392}$· τουτέστιν ἐν Δεκαδικοῖς κλάσμασι 588,0382; ἥτις δὴ ῥίζα μόγις τῆς ἀληθοῦς $\frac{1}{10000}$ διενήνοχε.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 314. Ἐὰν οὖν ἐν τῇ Διωνύμῳ $\alpha^2 + \beta^2$ τεθῇ

$\beta^2 > \alpha^2$, ληφθήσεται β^2 ὡς πρῶτος ὅρος· κἀντεῦθεν τὰ τῆς ῥίζας μέρη, ἢ δέον προσδιορίσαντες ἀντὶ τῆς σειρᾶς

$$\alpha + \frac{\beta^2}{2\alpha} - \frac{\beta^4}{8\alpha^3} + \frac{\beta^6}{16\alpha^5} - \ldots \text{κτλ.}$$

τὴν ἐφεξῆς ἕξομεν

$$\beta + \frac{\alpha^2}{2\beta} - \frac{\alpha^4}{8\beta^3} + \frac{\alpha^6}{16\beta^5} - \ldots \text{κτλ.}$$

ἥτις δὴ τῶν ἐγκλινουσῶν ὡσαύτως καθέστηκεν· ἤτοι, ἧς ἡ δύναμις συνεχῶς ἀεὶ φθίνουσα πρόεισι (§. 343.). Ἐὰν δὲ τεθῇ $\alpha^2 = \beta^2$, τηνικαῦτα ἑκατέρα τῶν σειρῶν ἐξίσου δώσει

$$\alpha + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{8} + \frac{\alpha}{16} - \ldots \text{κτλ.}$$

ἢ μᾶλλον

$$\alpha \times \left(1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} - \ldots \text{κτλ.}\right)$$

σειράν, ἧττον τῶν ἄλλων ἐγκλίνουσαν· τουτέστιν, ἧς ἡ δύναμις συνεχῶς ἀεὶ ἐλάττων γίνεται, ἠρέμα μέντοιγε καὶ κατὰ βραχύ. Μετιτέον δὲ καὶ τὰ ἐν τῷ §. 289. ῥηθέντα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἡ αὐτὴ τοίνυν μέθοδος ὡσαύτως ἐφαρμοσθήσεται κἀπὶ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς ἐγγὺς τοῦ ἀκριβοῦς τετραγωνείου ῥίζης, τριωνύμου τινος, ἢ τετρωνύμου ποσότητος. Ἐὰν ὡς καὶ ἀνωτέρω (§. 286.) ὑπεθέμεθα, ἡ τριώνυμος ἢ ἑτέρα τις πολυώνυμος διὰ τῆς διωνύμου ἐκτεθῇ· οἷον ἔστω ἡ $\gamma + \delta + \epsilon$ τριώνυμος, ἧστινος τὴν τετραγώνειον ῥίζαν διὰ τῆς ἐπ' ἄπειρον προϊούσης σειρᾶς ἐκθεῖναι δέον· ληφθέντων οὖν τῶν πρὸς δεξιὰν δυοῖν μελῶν $\delta + \epsilon$ συνάμα, τῷ, τε κ ὑπεκτεθέντων, ἐκτε σεται ὡσαύτως διὰ τῆς ἀνωτέρω σειρᾶς ἡ τῆς διωνύμου γ + κ τετραγώνειος ῥίζα. Ἐπὶ δὲ τῆς τετρωνύμου, τὰ πρὸς δεξιὰν τρία μέλη ὁμοῦ λαβεῖν δέον· ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 315. *Ἐκ τοῦ δοθέντος ὁποιουδηποτοῦν ἐντελοῦς Ἀλγεβραϊκοῦ Κύβου τὴν κυβικὴν ἐξελέσθαι ῥίζαν.*

ΛΥΣΙΣ.

Τοῦ δοθέντος κύβου ἤ δέον κατά γε τὰ εἰρημένα προδιαταχθέντος, οὕτως ὥστε, τοὺς μὲν κατὰ τὰ σημεῖα ἐκθέτας μείζονας, ἢ ὑπερτέρους ἐν ἀρχῇ εἶναι, τοὺς δὲ βαθμηδὸν ὑποβαίνοντας ἐφέπεσθαι.

Α'. Ληφθήτω ὁ πρῶτος τῆς ῥίζης ὅρος ἴσος τῇ κυβικῇ ῥίζῃ τοῦ πρωτίστου τῶν ὅρων τῶν ἐπὶ τοῦ προτεθέντος κύβου, καὶ μετ' ἐκεῖνον παρενθέσει διεσταλμένον τεθήτω· ἢ ὅπερ ταυτόν ἐστιν, ἐξαχθήτω ἐκ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ δοθέντος κύβου ἡ κυβικὴ ῥίζα (ἐν γὰρ τοῦ ὀρθῶς διατεταγμένου κύβου πρώτῳ ὅρῳ, ὁ τῆς ῥίζης ἔνεστι κύβος), ἥτις δεξιόθεν μετὰ τὴν παρένθεσιν γραφεῖσα κυβωθήτω, ἀπό τε τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ δοθέντος κύβου ἀφαιρεθήτω, ὑποσημειουμένου τοῦ ἐναπολειφθέντος.

Β'. Ἐπεὶ ἐν τῷ προτεθέντι κύβῳ ἑπόμενόν ἐστι τὸ τριπλοῦν γινόμενον ἐκ τοῦ πρώτου ὅρου ἐπὶ τὸν δεύτερον (§. 268. 269.)· διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τοῦ τῆς ῥίζης ἤδη εὑρεθέντος πρώτου ὅρου, ὁ τοῦ ὑπολοίπου ἁπάντων πρῶτος ὅρος διαιρεθήτω· τὸ γάρτοι

ἐντεῦθεν ἐκκύπτον πηλίκον τῶν κατὰ τὴν ῥίζαν ὀνομάτων ἢ ὅρων ἔσται ὁ δεύτερος, οὕτινος ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀχθέντος, τοῦ δὲ τριπλοῦ αὐτοῦ τετραγώνου ἐπὶ τὸν τῆς ῥίζης πρῶτον ὅρον, αὐτοῦ δὲ τέως κυβωθέντος, τὰ οὑτωσὶ γινόμενα ἀπὸ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου ἀφαιρείσθωσαν· ἔνεισι γὰρ ταῦτα ἐκείνῳ τεταγμένως τε καὶ ἰσαρίθμως. Ἐὰν οὖν μηδὲν ὑπολειφθῇ μετὰ τὴν ὑφαίρεσιν, δῆλον τῶν διωνύμων εἶναι τὴν τοῦ κύβου ῥίζαν· ἣν δέ τοι λείποιτο περιόν.

Γ'. Ἐπεὶ ἐν τῷ δευτέρῳ τούτῳ περιόντι ἔνεστι τὸ γινόμενον, ἐκ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ὅρου, ἐπὶ τὸν τρίτον· διαιρείσθωσαν οἱ πρῶτοι ἐν αὐτῷ ἀπαντῶντες ὅροι, διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου τῶν πρὸ μικροῦ εὑρεθέντων τῆς ῥίζης ὅρων, τὸ δὲ πηλίκον ἔστω τῶν ἐπὶ τῆς ῥίζης ὀνομάτων ἢ ὅρων, ὁ τρίτος· οὗγε ἐφ' ὅλον τὸν διαιρέτην πολλαπλασιασθέντος, τοῦ δὲ τριπλοῦ αὐτοῦ τετραγώνου ὡσαύτως ἐπὶ τοὺς προευρεθέντας ἀμφοτέρους τῆς ῥίζης ὅρους, ἔσχατον αὐτοῦ (ἤτοι τοῦ πηλίκου) κυβωθέντος, τὰ οὑτωσὶ ἐκκύπτοντα τρία ταῦτα γινόμενα ἀπὸ τοῦ δευτέρου ὑφαιρείσθωσαν ὑπολοίπου (ἔνεισι γὰρ ἐκείνῳ ἰσαρίθμως τούτοις·), καὶ εἰ μὲν μηδὲν ὑπολέλειπται, ἡ τοῦ κύβου ῥίζα τριώνυμός ἐστιν· εἰδ' οὖν, τοῦ λοιποῦ (εἴ τι τὸ περιόν·) ὑποκαταβιβασθέντος καὶ ὑποσημειωθέντος.

Δ'. Ἐπεὶ ἐν ἐκείνῳ ἐφεξῆς ἕπεται τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου, δευτέρου καὶ τρίτου ὅρου ἐπὶ τὸν τέταρτον· διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τῶν ἐγγὺς ἀνωτέρω εὑρεθέντων τῆς ῥίζης ὅρων, πρώτου, δευτέρου καὶ τρίτου διαιρεθήτω ἐκ διαδοχῆς τὸ τρίτον ὑπόλοιπον, τὸ δ' ἐντεῦθεν ἐκκύπτον πηλίκον εἰς τέταρτον ὅρον τῶν ἐπὶ τῆς ῥίζης τιθέσθω, οὗτινος ἡ πρᾶξις ἀδελφὰ τοῖς ἀνωτέρω χωρείτω παραινομένη, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς εὑρέσεως τῆς τετραγωνείου ῥίζης· εἰμὴ παρ' ὅσον ἐνταῦθα διαιρεῖν μὲν δέον διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τῶν τῆς ῥίζης ὅρων συνισταμένου, ἀφαιρεῖν δὲ ἀπὸ τοῦ κατ' ἀρχὰς δοθέντος κύβου τὸν κύβον τῶν ἀπὸ τῶν αὐτῶν, ἄχρις οὗ ἀπαντῆσαι γένοιτο τὴν πρᾶξιν προϊοῦσαν τῷ μηδενί.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὴν οὕτω προκύπτουσαν ῥίζαν, ἐπάναγκες τοῦ ἐξ ἀρχῆς προτεθέντος κύβου, τὴν ῥίζαν εἶναι τὴν κυβικήν, εἰ ὁ ἀπὸ ταύτης κύβος ἐκ μερῶν ὤφθη συναπαρτιζόμενος ἴσων τοῖς προτεθεῖσιν· ἅπερ διὰ τῆς τελεσθείσης πράξεως κατὰ μέρη ἀφαιρεθέντα τὸν κύβον ἡμῖν ἐξεκένωσε.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 316. Ἡνίκα δὲ ῥίζα κυβικὴ ζητῆται κλάσματος· αὕτη ἐξ ἑκάστου αὐτοῦ ὅρων ἀριθμητοῦ τε φημὶ καὶ παρονομαστοῦ διὰ τῶν προεκτεθέντων κανόνων ἐξακτέα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 317. Ἐὰν δὲ ἡ ἀπὸ ῥίζης ὀνομάτων πλειόνων διδομένη δύναμις ᾖ διτετράγωνον, ζητῆται δὲ ἡ τούτου ῥίζα ἡ διτετραγωνική. Ληφθήτω δ μὲν, ἴσον τῷ δοθέντι διτετραγώνῳ, κατὰ Σεγνέρον (α), α δὲ τῇ τη-

(α) In Parte IIta Curſus Mathematici, Sectione VIa §. 269. Ἐν δὲ τῇ ὑπὸ τοῦ Περικλέους Εὐγενίου ἐν μι-

λικαύτῃ ῥίζῃ τοῦ πρωτίστου τῶν ὅρων ἴσον· καί, τοῦ δοθέντος διτετραγώνου ᾗ δέον προδιαταχθέντος, ὑφαιρείσθω $\delta - \alpha^4$ ἤτοι ἡ ῥίζα διτετραγωνισθεῖσα ἀπὸ τοῦ δοθέντος διτετραγώνου, ὁ δὲ τοῦ λοιποῦ τοῦδε πρῶτος ἁπάντων ὅρος διὰ τοῦ τετραπλοῦ τῆς ῥίζης κύβου, ἤτοι διὰ $4\alpha^3$ διαιρείσθω, καὶ τὸ πηλίκον, ὅπερ αὖθις εἰρήσεται β, εἰς δεύτερον ὄνομα τῶν ἐπὶ τῆς ῥίζης ἀποτιθέσθω. Ἤδη δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ δοθέντος διτετραγώνου δ, ἡ ῥίζα διτετραγωνισθεῖσα, ἤτοι $(\alpha \pm \beta)^4$, ὑφαιρείσθω, καὶ τοῦ λοιποῦ τοῦ ἀπὸ τῆς ἀφαιρέσεως $\delta - (\alpha \pm \beta)^4$ (εἴτι τὸ περιὸν) οἱ πρῶτοι ὅροι διὰ τοῦ τετραπλοῦ τῆς ῥίζης κύβου, ἤτοι διὰ $4(\alpha \pm \beta)^3$ διαιρείσθων, εἰς τὴν τοῦ τρίτου τῶν ὀνομάτων τῆς ῥίζης γ, γένεσιν· Λαμβανέσθω δὲ δὴ καὶ $\delta - (\alpha \pm \beta \pm \gamma)^4$, καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἐξ ἀρχῆς περαινέσθω.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 318. Ἐὰν δὲ δ δύναμις προκέηται ἡ πέμπτη (β), ἀφ' ἧς ἂν δέοι καὶ πέμπτην ἐξελέσθαι ῥίζαν τινὰ πολυώνυμον, ληπτέον ἀντὶ α τὴν ὁμοταγῆ ῥίζαν τοῦ πρώτου τῶν ὅρων τῆς κατὰ τὸ δ δυνάμεως. Εἶτ' ἐφεξῆς ὑφαιρετέον α^5, καὶ $(\alpha \pm \beta)^5$ ἐὰν ᾖ διώνυμος, καὶ $(\alpha \pm \beta \pm \gamma)^5$ ἐὰν ᾖ τριώνυμος, καὶ ἐφεξῆς· τὸ δ' ὑπόλοιπον κατὰ τὸν ἐκτεθέντα τρόπον διαιρετέον διὰ $5\alpha^4$, καὶ $5(\alpha \pm \beta)^4$, καὶ $5(\alpha \pm \beta \pm \gamma)^4$, ὡς ἂν τῶν ὀνομάτων τῆς ῥίζης ἀνακύπτῃ ἀεὶ τὸ ἑπόμενον.

ρει ἐξελληνισθείσῃ Μαθηματικῇ πραγματείᾳ Τμήματι Α. §. 697. σελ. 309.

(β) Σεγν. αὐτόθι §. 270. ἐν δὲ τῷ ἑλληνικῷ §. 698.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 319. Ἐν γένει τοίνυν, ἐὰν δ ἡ ἀπὸ ῥίζης πολυωνύμου δύναμις ἐπὶ τὸν κατὰ τὸ ν τύχῃ ἐξηρμένη βαθμὸν(α), τῶν λοιπῶν ἁπάντων τηρουμένων, ὑφαιρεθήσεται μὲν ἐκ διαδοχῆς α^{ν}, $(\alpha\pm\beta)^{\nu}$, $(\alpha\pm\beta\pm\gamma)^{\nu}$, τῶν δ' ὑπολειπομένων οἱ πρώτως ἀεὶ προκείμενοι ὅροι διαιρεθήσονται διὰ $\nu\alpha^{\nu-1}$, $\nu(\alpha\pm\beta)^{\nu-1}$, $\nu(\alpha\pm\beta\pm\gamma)^{\nu-1}$, ἄχρις οὗ ἀπαντῆσαι γένοιτο τὴν πρᾶξιν προϊοῦσαν τῷ μηδενί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. $\sqrt[3]{}\,(\chi^6+3\beta\chi^5+3\beta^2\chi^4+3\gamma\chi^4+\beta^3\chi^3+6\beta\gamma\chi^3+3\beta^2\gamma\chi^2+3\gamma^2\chi^2+3\beta\gamma^2\chi+\gamma^3)=\chi^2+\beta\chi+\gamma.$

$$\underline{\pm\chi^6}$$
$$0$$

αος διαιρ. $3\chi^4:(3\beta\chi^5+3\beta^2\chi^4+3\gamma\chi^4+\beta^3\chi^3+6\beta\gamma\chi^3+3\beta^2\gamma\chi^2+3\gamma^2\chi^2+3\beta\gamma^2\chi+\gamma^3)$

$$\underline{\pm3\beta\chi^5\pm3\beta^2\chi^4\qquad\pm\beta^3\chi^3}$$
$$0\quad 0\quad 0$$

βος διαιρ.: $3\chi^4+6\beta\chi^3+3\beta^2\chi^2$

$$(3\gamma\chi^4+6\beta\gamma\chi^3+3\beta^2\gamma\chi^2$$
$$\underline{\pm3\gamma\chi^4\pm6\beta\gamma\chi^3\pm3\beta^2\gamma\chi^2}$$
$$0\quad 0\quad 0$$
$$+3\gamma^2\chi^2+3\beta\gamma^2\chi+\gamma^3)$$
$$\underline{\pm3\gamma^2\chi^2\pm3\beta\gamma^2\chi\pm\gamma^3}$$
$$0\quad 0$$

Β'. $\sqrt[3]{}\,(\alpha^3-3\alpha^2y+3\alpha y^2-y^3)=\alpha-y.$

(α) Σεγν. αὐτ. §. 271. ἐν δὲ τῷ ἑλλην §. 699.

Γ'. $\sqrt[3]{}\,(\gamma^3+3\gamma^2\delta+3\gamma\delta^2+\delta^3+3\gamma^2\varepsilon+6\gamma\delta\varepsilon+3\delta^2\varepsilon+3\gamma\varepsilon^2+3\delta\varepsilon^2+\varepsilon^3)=\gamma+\delta+\varepsilon.$

Δ'. $\sqrt[3]{}\,(\beta^3-3\beta^2\delta+3\beta^2\gamma+3\beta\delta^2-6\beta\delta\gamma+3\beta\gamma^2-\delta^3+3\delta^2\gamma-3\delta\gamma^2+\gamma^3)=\beta-\delta+\gamma.$

Ε'. $\sqrt[3]{}\,(8\gamma^3+36\delta\gamma^2+54\delta^2\gamma+27\delta^3+72\alpha\gamma^2+216\alpha\delta\gamma+162\alpha\delta^2+216\alpha^2\gamma+324\alpha^2\delta+216\alpha^3)=2\gamma+3\delta+6\alpha.$

Ϛ'. $\sqrt[3]{}\,\left(\frac{\alpha^3}{8}+\frac{3\alpha^2\beta}{4}+\frac{3\alpha\beta^2}{2}+\beta^3\right)=\frac{\alpha}{2}+\beta.$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Διασαφηνιζέτω αὖθις ὁ Καθηγητὴς τὰ ἐκτεθέντα παραδείγματα ὑπ' ὄψιν τῶν Μαθητιώντων, ὧν χάριν τὴν τοῦ πρώτου διαληψόμεθα πρᾶξιν. Διαταχθέντος τοῦ κύβου κατὰ τοὺς ἐν τῷ στοιχείῳ χ ἐκθέτας, ἐξαχθήτω ῥίζα κυβικὴ ἡ χ^2 ἐκ τοῦ χ^6, γραφήτω τε μετὰ τὴν παρένθεσιν ἀντὶ τοῦ πρώτου τῆς ῥίζης ὅρου· εἶτα ὁ ταύτης κύβος χ^6 ὑφαιρείσθω ἀπὸ τοῦ δοθέντος, ὑποσημειουμένου τοῦ πρώτου ὑπολοίπου. Ζητηθήτω εἶτα ποσάκις τὸ τριπλοῦν τῆς ἤδη εὑρεθείσης ῥίζης τετράγωνον $3\chi^4$, ἐν τῷ πρώτῳ τοῦ ὑπολοίπου $3\beta\chi^5$ ὅρῳ ἔνεστι, καὶ τὸ πηλίκον $\beta\chi$, ἀντὶ τοῦ δευτέρου τῆς ῥίζης ὅρου ταχθήτω, οὗτινος ἀναχθέντος ἐπὶ τὸν διαιρέτην $3\chi^4$, τοῦ δὲ τριπλοῦ αὐτοῦ τετραγώνου $3\beta^2\chi^2$ ἐπὶ τὸν προαχθέντα τῆς ῥίζης ὅρον χ^2, ἔσχατον τοῦ αὐτοῦ $\beta\chi$ ἐπὶ κύβον ἐξαρθέντος, ἐκκύψει $3\beta\chi^5+3\beta^2\chi^4+\beta^3\chi^3$, οὗτινος ἀφαιρεθέντος, τὸ δεύτερον ὑπολειφθήσεται ὑπόλοιπον. Γενέσθω δὴ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου τῆς ῥίζης ὅρου $\chi^2 + \beta\chi$ τριπλοῦν τετράγωνον $3\chi^4 + 6\beta\chi^3 + 3\beta^2\chi^2$, καὶ ζητηθήτω ποσάκις ὁ πρῶτος τῶν ὅρων $3\chi^4$ τῷ πρώτῳ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου ὅρῳ $3\gamma\chi^4$ ἐμπεριείληπται, καὶ τὸ πηλίκον γ τῇ ῥίζῃ συγκατατάχθήτω ὡς τρίτος ταύτης ὅρος, ὅς τις ἐφ᾽ ὅλον ἀναχθεὶς τὸν διαιρέτην, τό, τε τριπλοῦν αὐτοῦ τετράγωνον $3\gamma^2$ ἐπὶ τοὺς τῆς ῥίζης προκύψαντας ὅρους $\chi^2 + \beta\chi$, καί γε ἔσχατον ὁ αὐτὸς κυβωθεὶς δώσει γινόμενον $3\gamma\chi^4 + 6\beta\gamma\chi^3 + 3\beta^2\gamma\chi^2 + 3\gamma^2\chi^2 + 3\beta\gamma^2\chi + \gamma^3$, ὧν ἐκ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου ἀφαιρεθέντων οὐδὲν ὑπολείπεται· κἀντεῦθεν τὸν μὲν δοθέντα κύβον ἀκριβῆ εἶναι νομιστέον, τὸ δὲ εὑρεθὲν $\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, ῥίζαν εἶναι τὴν κυβικήν.

ΠΟΡΙΣΜΑ

§. 320. Ἢν δέ τοι μετὰ τὸ οὑτωσὶ τὴν πρᾶξιν γενέσθαι, ὁ κύβος ἀκριβῶς οὐκ ἐξάγεται, ἀλλά τι πλεονάζον αὐτῷ ὑπολείπεται, τοῦ κυβικοῦ ἐξίσταται σχήματος· διὸ καὶ τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἐξ αὐτοῦ ὀρθῶς ἐξελεῖν ἀμήχανον, ἐκτίθεσθαι δὲ μόνον, διὰ τῆς ἐπ᾽ ἄπειρον σειρᾶς εἴωθεν, ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ τετραγώνου (§. 312.) προὐπεθέμεθα. Ἔνθεν τοι ἔστω.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 221. Ἐκ τοῦ δοθέντος ἀτελοῦς Ἀλγεβραϊκοῦ Κύβου $\alpha^3 + \beta^3$, τὴν ὡς ἔγγιστα κυβικὴν ἐξελεῖν ῥίζαν.

ΛΥΣΙΣ.

Α΄. Ἐκ τοῦ πρώτου μέρους α^3 τοῦ ὑποτεθέντος

κύβου, ἡ κυβικὴ ἐξαχθήτω ῥίζα α, καὶ μετὰ τὸν μηνίσκον ὡς πρῶτον τῆς ῥίζης μέρος γραφήτω· ἥτις δὴ κυβωθεῖσα, ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ δοθέντος μὴ ἀκριβοῦς κύβου· τῆς πράξεως γενομένης ὑπολειφθήσεται $+\beta^3$.

Β΄. Τριπλασιευθήτω τὸ τοῦ πρώτου τῆς ῥίζης ὅρου α τετράγωνον $\alpha^2 = 3\alpha^2$, δι᾽ οὗ τὸ δεύτερον διαιρεθὲν ὑπόλοιπον $+\beta^3$, πηλίκον δώσει $\frac{\beta^3}{3\alpha^2}$, ὃ δὴ τῇ ῥίζῃ αὖθις συγκατατάχθήτω, οἷα δὴ δεύτερος ταύτης ὅρος. Γενέσθωσαν δ᾽ εἶτα τρία παραγόμενα· Α΄. τὸ ἀπὸ $+3\alpha^2$ ἐπὶ τὸ $+\frac{\beta^3}{3\alpha^2} = \frac{3\alpha^2\beta^3}{3\alpha^2} = \beta^3$. Β΄. τὸ ἀπὸ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου $\frac{\beta^3}{3\alpha^2} = \frac{\beta^6}{3\alpha^4}$ ἐπὶ τὸ $\alpha = \frac{\alpha\beta^6}{3\alpha^4} = \frac{\beta^6}{3\alpha^3}$. Γ΄. ὁ τοῦ $\frac{\beta^3}{3\alpha^2}$ κύβος $= \frac{\beta^9}{27\alpha^6}$· ὧν δὴ παραγομένων $+\beta^3 + \frac{\beta^6}{3\alpha^3} + \frac{\beta^9}{27\alpha^6}$ μετὰ τῶν ἐναντίων σημείων τῷ πρώτῳ ὑπολοίπῳ ὑπογραφέντων, καὶ τῆς ἀναγωγῆς γενομένης, ἐκκύψει $-\frac{\beta^6}{3\alpha^3} - \frac{\beta^9}{27\alpha^6}$ ὑπόλοιπον δεύτερον.

Γ΄. Τριπλασιευθήτω δὴ τὸ ἀπὸ $\alpha + \frac{\beta^3}{3\alpha^2}$ τῶν δυοῖν δηλαδὴ τῆς ῥίζης ὅρων τετράγωνον $\alpha^2 + \frac{2\alpha\beta^3}{3\alpha^2} + \frac{\beta^6}{9\alpha^4} = 3\alpha^2 + \frac{6\alpha\beta^3}{3\alpha^2} + \frac{3\beta^6}{9\alpha^4} = 3\alpha^2 + \frac{2\beta^3}{\alpha} + \frac{\beta^6}{3\alpha^4}$: διὰ τοῦ πρώτου οὖν τῆσδε τῆς ποσότητος ὅρου διαιρεθήτω ὁ πρῶτος τοῦ ὑπολοίπου ὅρος $-\frac{\beta^6}{3\alpha^3} = 3\alpha^2$:

$-\frac{\beta^6}{3\alpha^3}$, καὶ τὸ πηλίκον $-\frac{\beta^6}{9\alpha^5}$ τῇ ῥίζῃ, ὡς τρίτος ταύτης ὅρος, συνεφαρμοσθήτω. Τὰ ἐντεῦθεν ἐκκύπτοντα τῶν παραγομένων ἀθροίσματα, ἤτοι τὸ τοῦ $3\alpha^2 + \frac{2\beta^3}{\alpha} + \frac{\beta^6}{3\alpha^4}$ ἐπὶ τὸ $-\frac{\beta^6}{9\alpha^5} = -\frac{\beta^6}{3\alpha^3} - \frac{2\beta^9}{9\alpha^6} - \frac{\beta^{12}}{27\alpha^9}$· τὸ τοῦ $\alpha + \frac{\beta^3}{3\alpha^2}$ ἐπὶ τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τοῦ $-\frac{\beta^6}{9\alpha^5} = +\frac{\beta^{12}}{27\alpha^{10}}$, ἤτοι $\frac{\beta^{12}}{27\alpha^{10}} \times \left(\alpha + \frac{\beta^3}{3\alpha^2}\right) = \frac{\beta^{12}}{27\alpha^9} + \frac{\beta^{15}}{81\alpha^{12}}$· ὅτε τοῦ $-\frac{\beta^6}{9\alpha^5}$ κύβος $= -\frac{\beta^{18}}{729\alpha^{15}}$· τουτέστι $-\frac{\beta^6}{3\alpha^3} - \frac{2\beta^9}{9\alpha^6} + \frac{\beta^{15}}{81\alpha^{12}} - \frac{\beta^{18}}{729\alpha^{15}}$, ὑπὸ τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον ἀντισήμως γραφέντα δώσουσι μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τὸ τρίτον ὑπόλοιπον· οὗ ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς τὴν αὐτὴν ἀναχθεὶς παρονομασίαν πολλαπλασιασμῷ τοῦ παρονομαστοῦ ἐπὶ 3, ἵν' ᾖ εὐσύνοπτος, ἀριθμητὴν ἡμῖν ἀνέδωκε τῇ τοῦ αὐτοῦ 3 προσθέσει, τὸν 5.

Δ'. Τρισσευθήτω αὖθις τὸ τοῦ $\alpha + \frac{\beta^3}{3\alpha^2} - \frac{\beta^6}{9\alpha^5}$ τετράγωνον, ἤτοι $3\left(\alpha + \frac{\beta^3}{3\alpha^2} - \frac{\beta^6}{9\alpha^5}\right)^2 = 3\left(\alpha^2 + \frac{2\alpha\beta^3}{3\alpha^2} - \frac{\beta^6}{9\alpha^4} - \frac{2\beta^9}{27\alpha^7} + \frac{\beta^{12}}{81\alpha^{10}}\right) = 3\alpha^2 + \frac{6\alpha\beta^3}{3\alpha^2} - \frac{3\beta^6}{9\alpha^4} - \frac{6\beta^9}{27\alpha^7} + \frac{3\beta^{12}}{81\alpha^{10}} = 3\alpha^2 + \frac{2\beta^3}{\alpha} - \frac{\beta^6}{3\alpha^4} - \frac{2\beta^9}{9\alpha^7} + \frac{\beta^{12}}{27\alpha^{10}}$. Εἶτα διὰ τοῦ πρώτου

τῆσδε τῆς σειρᾶς ὅρου, ὁ τοῦ τρίτου ὑπολοίπου πρῶτος διαιρεθήτω ὅρος, ἤτοι $3\alpha^2 : \frac{5\beta^9}{27\alpha^6}$, καὶ τὸ πηλίκον $+\frac{5\beta^9}{81\alpha^8}$ τῇ ῥίζῃ στιχηδὸν ταχθήτω, ὡς τέταρτος ταύτης ὅρος. Ἑπομένως γενέσθωσαν, ὡς καὶ προσεχῶς, τρία παραγόμενα· ἤτοι τὸ ἐκ τοῦ διαιρέτου $3\alpha^2 + \frac{2\beta^3}{\alpha}$ — κτλ., ἐπὶ τὸ $+\frac{5\beta^9}{81\alpha^8}$· τὸ ἐκ τοῦ τριπλοῦ τοῦ ἀπὸ τοῦ $+\frac{5\beta^9}{81\alpha^8}$ τετραγώνου, ἐπὶ τὸ $\alpha + \frac{\beta^3}{3\alpha^2} - \frac{\beta^6}{9\alpha^5}$· ὅ, τε ἐκ τοῦ $\frac{5\beta^9}{81\alpha^8}$ κύβος· καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν τούτων παραγομένων τῷ τρίτῳ ὑπολοίπῳ ἀντισήμως ὑπεκτεθέντος, τὸ τέταρτον ἡμῖν ἀνακύψει ὑπόλοιπον· Οὑτωσὶ τοίνυν τῆς πράξεως συνεχιζομένης, καὶ πέμπτον ἡμῖν ἐξέσται τῆς ῥίζης λαβεῖν ὅρον, καὶ ἕκτον, κτλ. ὥστε τὴν ῥίζαν, ἥτις δὴ τῶν ἐγκλινουσῶν ἐστὶ τοῦ $\alpha > \beta$ ὑποτιθεμένου, οὕτως ἐκτεθῆναι ἔχειν.

$$\text{Α}'.\ \sqrt[3]{(\alpha^3 + \chi^3)} = \alpha + \frac{\chi^3}{3\alpha^2} - \frac{\chi^6}{9\alpha^5} + \frac{5\chi^9}{81\alpha^8} - \frac{10\chi^{12}}{243\alpha^{11}}\ \text{κτλ.}$$

$$\text{Β}'.\ \sqrt[3]{(\alpha^3 + \beta^3)} = \alpha + \frac{\beta^3}{3\alpha^2} - \frac{\beta^6}{9\alpha^5} + \frac{5\beta^9}{81\alpha^8} - \cdots$$

$$\begin{array}{l}
\mp \alpha^3 \\
\hline
+\beta^3 \;\Big|\; : 3\alpha^2 \\
\pm \beta^3 \pm \frac{\beta^6}{3\alpha^3} \pm \frac{\beta^9}{27\alpha^6} \\
\hline
-\frac{\beta^6}{3\alpha^3} - \frac{\beta^9}{27\alpha^6} \;\Big|\; : 3\alpha^2 + \frac{2\beta^3}{\alpha} + \frac{\beta^6}{3\alpha^4}
\end{array}$$

$$+\frac{\beta^6}{3\alpha^3}+\frac{2\beta^9}{9\alpha^6}-\frac{\beta^{15}}{81\alpha^{12}}+\frac{\beta^{18}}{729\alpha^{15}}$$

$$+\frac{5\beta^9}{27\alpha^6}-\frac{\beta^{16}}{81\alpha^{12}}+\frac{\beta^{18}}{729\alpha^{15}}\Bigg|:3\alpha^2+\ldots$$

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 322. Ἐὰν οὖν $\alpha < \beta$ ὑποτεθῇ, ἔσται β^3 ὡς πρῶτον μέρος τοῦ ὑποτεθέντος κύβου, ἔνθεντοι τηνικαῦτα ἡ κυβικὴ ῥίζα διὰ τῆς ἐφεξῆς σειρᾶς ἐκτεθείσεται·

$$\beta+\frac{\alpha^3}{3\beta^2}-\frac{\alpha^6}{9\beta^5}+\frac{5\alpha^9}{81\beta^8}-\ldots$$

Ἐὰν δὲ ᾖ $\alpha=\beta$ ἔσται

$$\alpha\times\left(1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{9}+\tfrac{5}{81}-\ldots\right)$$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Προκειμένου τοίνυν ὡσαύτως Διωνύμου τινος, οἷον τοῦ $\mu+\nu$· ἐν ᾧ μ καὶ ν εἴησαν ἂν κατὰ θέσιν, ἢ κατ' ἀπόφασιν· ἐξαχθήσεται ἡ ὡς ἔγγιστα τοῦ ἀληθοῦς κυβικὴ ῥίζα ὑποτιθεμένου $\alpha^3=\mu$, ἢ $\alpha=\mu^{\frac{1}{3}}$ (§. 304.)· $\beta^3=\nu$, ἢ $\beta=\nu^{\frac{1}{3}}$ (αὐτ.)· καὶ τῶν τοῦ α καὶ β δυνάμεων ἐν ὁποιαοῦν τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθεισῶν σειρῶν (§. 321. 322.) ἀνθυποκαθισταμένων. Ὡσαύτως, εἴγε καὶ Τριώνυμον τὸ $\gamma+\delta+\varepsilon$ ἡμῖν προκέοιτο, τὰ τῆς πράξεως τελεσθήσεται, ὑποτιθεμένου $\alpha^3=\gamma+\delta$, ἢ $\alpha=(\gamma+\delta)^{\frac{1}{3}}$ (§. 293.)· $\beta^3=\varepsilon$, ἢ $\beta=\varepsilon^{\frac{1}{3}}$. Ὥστε τῆς ἀντεισαγωγῆς γενομένης τὰς τῶν α καὶ β ἐν ταῖς αὐταῖς σειραῖς, ἡμῖν ἀναδοθῆναι δυνάμεις. Τῷ αὐτῷ τρόπῳ χωρητέον κἀπὶ τὴν τῶν κυβικῶν ῥιζῶν ἐκ πλειόνων ὁπωσωνοῦν συγκειμένων ὅρων ἐξαγωγήν (§. 289.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΕΝ ΑΡΙΘΜΟΙΣ ΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 323. *Τὸ ἐντελὲς ἀριθμητικὸν Τετράγωνον οἱασδηποτοῦν λογικῆς ῥίζης, ἐπὶ μὲν τῶν μειζόνων ἀριθμῶν σύγκειται ἐκ τῶν διπλῶν τῶν κατὰ τὴν ῥίζαν χαρακτήρων, ἐπὶ δὲ τῶν ἐλασσόνων, ἐκ τῶν αὐτῶν, πλὴν ἑνός.*

ΔΕΙΞΙΣ.

Συγκείσθω μὲν δὴ ῥίζα τὶς ἐκ τεσσάρων χαρακτήρων, ἔσται αὕτη ἁπάντων τῶν ἐκ τεσσάρων συγκειμένων χαρακτήρων ἐλάσσων μὲν ὡς ἡ 1000, μείζων δὲ ὡς ἡ 9999· ἀλλ' οὖν $10000 > 9999$, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ 10000 ἀριθμητικὸν τετράγωνον $>$ δέον εἶναι τοῦ ἀπὸ τοῦ 9999· Ἔστι δὲ τὸ τετράγωνον τοῦ 10000 $=100000000$, ἀριθμῷ ἐλάσσονι ἁπάντων τῶν ἐξ ἐννέα χαρακτήρων συνισταμένων· ἄρα τὸ τοῦ 9999 τετράγωνον ἐξ ὀκτὼ μόνον σύγκείσεται χαρακτήρων ἤτοι 2.4, τουτέστιν ἐκ τῶν διπλῶν τῶν κατὰ τὴν ῥίζαν· Ὃ ἦν τὸ α'. Πόῤῥω τὸ ἀπὸ τοῦ 1000 ἐλάσσονος ἁπάντων τῶν ἐκ τεσσάρων συγκειμένων χαρακτήρων τετράγωνον $=1000000=7$ χαρακτῆρσιν ἤτοι $2.4-1$, οὗπερ οὐδεὶς ἂν ἀριθμὸς ἐλάσσων διδῷτο ἐξ ἑπτὰ συγκείμενος χαρακτήρων· κἀντεῦθεν ἕπεται τὸ ἀριθμητικὸν τουτὶ τετράγωνον ἐκ τῶν διπλῶν τῶν κατὰ τὴν ῥίζαν χαρακτήρων σύγκεῖσθαι, πλὴν ἑνός. Ὅ ἦν τὸ β'.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 324. Τῶν ἀπὸ μονάδος ἄρα ἄχρις ἐννάδος ἀριθμῶν τὰ τετράγωνα ὑπὸ τὴν ἑκατοντάδα τυγχάνοντα οὐ πλείους δυοῖν χαρακτήρων περιέχουσι, τὰ δὲ τῶν δεκάδων οὐ πλείους τεσσάρων, τὰ δὲ τῶν ἑκατοντάδων οὐ πλείους ἕξ· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 325. Ποσότης τοίνυν οἱαποτοῦν ἐξ ὁπωσῶνοῦν χαρακτήρων συγκειμένη, ἐν μὲν τῇ τετάρτῃ δυνάμει οὐκ ἂν ἔχοι πλείους χαρακτῆρας, εἰμὴ τετραπλασίονας· ἐν δὲ τῇ πέμπτῃ, πενταπλασίονας· καὶ ἐν γένει ὁ τῶν χαρακτήρων ἀριθμός, ἐξ ὧν δύναμις οἱαδηποτοῦν συγκροτεῖται, οὐδέποτε μείζων ἐστὶ τοῦ γινομένου ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ τῆς δυνάμεως ἐκθέτου, διὰ τοῦ τῶν κατὰ τὴν ῥίζαν χαρακτήρων ἀριθμοῦ· ἑπομένως ἐὰν ὁ μὲν τῶν κατὰ τὴν δύναμιν ἀριθμὸς κληθῇ π, ὁ δὲ τῶν κατὰ τὴν ῥίζαν ν, καὶ ὁ τῆς δυνάμεως ἐκθέτης σ, ἔσται ἐνίοτε $\pi < \nu\sigma$, καὶ $\pi = \nu\sigma$, οὐδέποτε δὲ $\pi > \nu\sigma$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Πρὸς μείζονα τῶν ῥηθέντων σαφήνειαν ἔστω ὁ ἐφεξῆς Πίναξ.

τὸ Τετράγωνον ἀριθμοῦ	ἐκ χαρακτήρων συγκειμένου			
τοῦ ἐλάσσονος	2	ὡς	10 ἐστὶν	100.
- μείζονος	—	-	99 -	9801.
- ἐλάσσονος	3	-	100 -	10000.
- μείζονος	—	-	999 -	998001.
- ἐλάσσονος	4	-	1000 -	1000000.
- μείζονος	—	-	9999 -	99980001.
- ἐλάσσονος	5	-	10000 -	100000000.
- μείζονος	—	-	99999 -	9999800001.

Τοῦ Ἀριθμητικοῦ ἄρα τετραγώνου ἡ ῥίζα σύγκειται τοῦ ἐκ 3 ἢ 4 χαρακτήρων συγκροτουμένου, ἐκ 2.

—	5 - 6	—	—	- 3.
—	7 - 8	—	—	- 4.
—	9 - 10	—	—	- 5. κτλ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 326. Ἐὰν ἀριθμοῦ τινος ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα πλεονάζῃ μονάδι, τὸ ταύτης τετράγωνον σὺν τῷ διπλῷ τῆς ῥίζης γινομένῳ μονάδι ἐπαύξει.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστω μὲν δὴ $(P+1)^2 = P^2 + 2P + 1$ (§. 257.). Ἐπεὶ οὖν P^2 τὸ τῆς P ἐστὶ τετράγωνον, ἐπαύξει ἐκ $2P+1$, ἡνίκα ἡ ῥίζα μονάδι ἐπιμεγεθύνεται· ἔστι δὲ $2P$ τὸ τῆς ῥίζης διπλοῦν· ἄρα ἐπαύξει τουτὶ συνάμα P^2 μονάδι. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 327. Ἐπεὶ μὲν δὴ $2P+1$ περισσάριθμόν ἐστιν, ἐὰν τουτὶ κατὰ τὸν ἐφεξῆς τύπον ἐκ διαδοχῆς προστεθῇ, ἐκκύψουσιν οὕτω τὰ τετράγωνα πάντων τῶν κατὰ τὴν φυσικὴν σειρὰν ἑπομένων ἀριθμῶν, ὡς ἐφεξῆς.

$$
\begin{array}{lllll}
1^2 = & 1 & = & \underbrace{1} & = 1 \\
2^2 = & 1 + 2 + 1 & = & 1 + 3 & = 4 \\
3^2 = & 4 + 4 + 1 & = & 4 + 5 & = 9 \\
4^2 = & 9 + 6 + 1 & = & 9 + 7 & = 16 \\
5^2 = & 16 + 8 + 1 & = & 16 + 9 & = 25 \\
6 = & 25 + 10 + 1 & = & 25 + 11 & = 36 \\
7^2 = & 36 + 12 + 1 & = & 36 + 13 & = 49 \\
8^2 = & 49 + 14 + 1 & = & 49 + 15 & = 64 \\
9^2 = & 64 + 16 + 1 & = & 64 + 17 & = 81 \\
10^2 = & 81 + 18 + 1 & = & 81 + 19 & = 100 \text{ κτλ.}
\end{array}
$$

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 328. Ὁ ἐντελὴς ἀριθμητικὸς Κύβος οἱασοῦν λογικῆς ῥίζης, ἐπὶ μὲν τῶν μειζόνων ἀριθμῶν οὐκ ἂν ἔξοι πλείους χαρακτῆρας, εἰ μὴ τρὶς τόσους τῶν κατὰ τὴν ῥίζαν, ἐπὶ δὲ τῶν ἐλασσόνων τοσούςδε παρὰ δύω.

ΔΕΙΞΙΣ.

Συγκροτείσθω μὲν δὴ ῥίζά τις ἐκ δυοῖν χαρακτήρων, ἔσται αὕτη ἁπάντων τῶν δυαδικῶν χαρακτήρων, ἐλάσσων μὲν ὡς ἡ 10, μείζων δὲ ὡς ἡ 99· ἀλλ' οὖν 100 $>$ 99, ἄρα καὶ ὁ τούτου κύβος $>$ τοῦ 99 εἶναι δέον· ἔστι δὲ ὁ κύβος τοῦ 100 = 1000000, ἀριθμοῦ ἐλάσσονι ἁπάντων τῶν 7 χαρακτῆρσι συγκειμένων, ἄρα ὁ τοῦ 99 κύβος 6 μόνον, ἤτοι 3 . 2 τρὶς τοσούτοις χαρακ-

τῆρσι συγκροτηθήσεται· Ὃ ἦν τὸ α΄. Πόῤῥω ὁ τοῦ 10, ἐλάσσονος ἁπάντων τῶν 2 χαρακτῆρσι συγκειμένων, κυβικὸς ἀριθμὸς = 1000, τέτταρας χαρακτῆρας, ἤτοι 3 . 2 — 2 ἐμπεριείληφεν· Ἕπεται ἄρα ἐκ τούτων ἐπὶ τῶν ἐλασσόνων ἀριθμῶν τὸν κυβικὸν ἀριθμὸν ἐκ τῶν τριπλῶν τῶν κατὰ τὴν ῥίζαν ἀριθμῶν συγκεῖσθαι, πλὴν δυοῖν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Πρὸς δὲ σαφεστέραν τῶν ῥηθέντων παράστασιν ὁ ἐφεξῆς ἐκκείσθω Πίναξ.

ὁ Κύβος	ἐκ χαρακτήρων συγκειμέν.		
τοῦ ἐλάσσ. ἀριθμ.	2	ὡς 10 ἐστὶν	1000.
. μείζονος	—	99 —	970299.
. ἐλάσσονος	3	100 —	1000000.
. μείζονος	—	999 —	997002999.
. ἐλάσσονας	4	1000 —	1000000000.
. μείζονος	—	9999 —	999700029999.
. ἐλάσσονος	5	10000 —	1000000000000.
. μείζονος	—	99999 —	999970000299999.

	ἐκ χαρακτήρων		ἡ τούτου Ῥίζα συγκείσεται ἐκ
Εἰ μὲν οὖν ὁ Κύβος συναπαρτίζοιτο	4 ἢ 6	. . .	2.
εἰ δὲ . . .	7 - 9	. . .	3.
- . . .	10 - 12	. . .	4.
- . . .	13 - 15	. . .	5. κτλ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 329. Τῆς κυβικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ τινος μονάδι ἐπαυξούσης, ὁ ταύτης κύβος σύγκειται ἐκ τοῦ τριπλοῦ τῆς προηγουμένης ῥίζης ἀθροίσματος, ἐκ τοῦ ταύτης τετραγώνου, πρὸς δὲ καὶ μονάδος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστι μὲν δὴ $(P+1)^3 = P^3 + 3P^2 + 3P + 1$ (§. 265.) ἐπεὶ δὲ P^3 ὁ τῆς P ἐστὶ κύβος, ἐπαύξει ἄρα οὗτος ἐν $3(P+P^2)+1$, τῆς P μονάδι ἐπιμεγεθυνομένης.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 330. Ἕπεται τοίνυν τοὺς τῶν κατὰ τὴν φυσικὴν χύσιν προϊόντων ἀριθμῶν κύβους, ὡς ἐφεξῆς ἐπαύξειν, ἐὰν $3(P+P^2)+1$ ἐκ διαδοχῆς προστεθῇ.

$$1^3 = 1 = \overbrace{}^{1} = 1$$
$$2^3 = 1+3(1+1)+1 = 1+7 = 8$$
$$3^3 = 8+3(2+4)+1 = 8+19 = 27$$
$$4^3 = 27+3(3+9)+1 = 27+37 = 64$$
$$5^3 = 64+3(4+16)+1 = 64+61 = 125$$
$$6^3 = 125+3(5+25)+1 = 125+91 = 216$$
$$7^3 = 216+3(6+36)+1 = 216+127 = 343$$
$$8^3 = 343+3(7+49)+1 = 343+169 = 512$$
$$9^3 = 512+3(8+64)+1 = 512+217 = 729$$
$$10^3 = 729+3(9+81)+1 = 729+271 = 1000$$

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 330. Τὸ ἀριθμητικὸν τετράγωνον καὶ ὁ κύβος ἐκ τῶν αὐτῶν πάντως σύγκειται μερῶν, ἐξ ὧν καὶ ὁ Ἀλγεβραϊκός.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς ὄντος τοῦ αἰτήματος περὶ τῶν συγκειμένων μό-

νων ἀριθμῶν, ῥίζα ὁποιαοῦν ἐκ δυοῖν ἀριθμητικῶν χαρακτήρων συγκροτουμένη οἷον 36, καὶ εἰς μέρη ἴσα τοῖς τῆς στοιχειώδους ῥίζης ἀναλόγως τεμνομένη (ὡς ἂν οὕτως ἡ τῆς Ἀριθμητικῆς τε καὶ Ἀλγέβρας συνάφεια δηλωθῇ), παρίστασθαι ἔχει τῷ $\alpha+\beta$, ὑποτιθεμένου τοῦ μὲν $\alpha=30$ ἀντὶ τῶν δεκάδων, τοῦ δὲ $\beta=6$ ἀντὶ τῶν μονάδων· ἤδ' ἐκ τριῶν ὡς 336, τῷ $\alpha+\beta+\gamma$ δηλωθήσεται, ληφθέντος τοῦ μὲν $\alpha=300$ ἀντὶ τῶν ἑκατοντάδων, τοῦ δὲ $\beta=30$ ἀντὶ τῶν δεκάδων, καὶ τοῦ $\gamma=6$ ἀντὶ τῶν μονάδων· ἤδ' ἐκ τεσσάρων, τῷ $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως. Ἐν γένει τοίνυν, ἐπεὶ οἱ κατὰ τὴν ῥίζαν ἀριθμητικοὶ χαρακτῆρες, ὁπόσοι ἂν τύχωσι, τοῖς ἀλγεβραϊκοῖς ὀνόμασι παρίστασθαι δύνανται, καὶ τὰ τῶν τοιούτων χαρακτήρων ὡσαύτως τετράγωνα καὶ οἱ κύβοι, τοῖς ἀλγεβραϊκοῖς τετραγώνοις τε καὶ κύβοις ὑποδηλούμενα ἐκτεθείσονται. Ἄρα ἐκ τῶν ἰδίων πάντως μερῶν σύγκεινται. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 331. Ἐὰν οὖν ἀριθμὸς ληφθῇ ὁ 36, δυσὶ χαρακτῆρσι συγκείμενος, ὧν ὁ ἕτερος τὰς δεκάδας σημαίνει τῶν διὰ θατέρου δηλουμένων μονάδων, ὁποίας δ' ἂν αὗται τάξεως τύχοιεν· ὁ ἀπ' ἐκείνου τετράγωνος συντεθείσεται τρόπῳ τοιῷδε.

Α'. $36^2 = (30+6)^2 = (\alpha+\beta)^2$

$\alpha^2 = 30\times30 \quad = 9$ Τὸ ἀπὸ τοῦ α τετράγων.

$2\alpha\beta = 2(30)6 = 60\times6 = 36$ Τὸ δὶς παραγ. ὑπὸ τοῦ α ἐπὶ τὸ β.

$\beta^2 = 6\times6 \quad = 36$ Τὸ ἀπὸ τοῦ β τετράγων.

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 = (30+6)^2 = 1296$ Τὸ ὁλικὸν τετράγωνον

Β'. $34^2 = (30+4)^2 = (\alpha+\beta)^2$

$\alpha^2 = 30\times30$ . . . $= 9$ Τὸ ἀπὸ τοῦ α τετράγωνον.

$2\alpha\beta = 60\times4$ . . . $= 24$ Τὸ δὶς παραγ. ὑπὸ τοῦ α ἐπὶ τὸ β.

$\beta^2 = 4\times4$ . . . $= 16$ Τὸ ὑπὸ τοῦ β τετράγων.

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 = (30+4)^2 = 1156$ Τὸ ὁλοσχερὲς τετράγων.

Ἐν ᾧ ὁ ἔσχατος χαρακτὴρ 6 μονάδας σημαίνει ταῖς ὑπὸ τοῦ ἐσχάτου τῆς ῥίζης χαρακτῆρος δηλουμέναις ὁμοταγεῖς. Ἔνθεντοι τῶν ἐν ἐκείνῳ 4 μονάδων ἁπλῶν οὐσῶν, οὐδὲν λοιπὸν προσπεριεργάσασθαι. Ἀλλ᾽ ἐὰν ὁ 4 δεκάδας σημαίνῃ τῷ τετραγώνῳ προστιθέναι δεήσει τῶν μηδενικῶν σημείων δύο, ὥστε εἶναι 115600 (§. 257. Σχ.) Κἀν τοῖς λοιποῖς δὲ ὡσαύτως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 332. Ἐὰν δὲ ἀντὶ κυβικῆς ῥίζης ὁ 24 ληφθῇ ἀριθμὸς, ὁ ἀπ᾽ ἐκείνου κύβος οὕτως συντεθήσεται·

Α'. $24^3 = (20+4)^3 = (\alpha+\beta)^3$

$\alpha^3 = 20\times20\times20 = 8000$ Ὁ ἀπὸ τοῦ α κύβος.

$3\alpha^2\beta = 3 . 20^2 . 4 = 4800$ Τὸ τρὶς ὑπὸ τοῦ τετρ. τοῦ α ἐπὶ τὸ β.

$3\alpha\beta^2 = 3 . 20 . 4^2 = 960$ Τὸ τρὶς ὑπὸ τοῦ τετρ. τοῦ β ἐπὶ τὸ α.

$\beta^3 = 4\times4\times4 = 64$ Ὁ τοῦ β κύβος

$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 = 13824$ Ὁ ὁλικὸς κύβος.

Β'. $21^3 = (20+1)^3 = (\alpha+\beta)^3$

$\alpha^3 = 20\times20\times20 = 8000$ Ὁ ἀπὸ τοῦ α κύβος.

$3\alpha^2\beta = 3(20\times20)\,1 = 1200$ Τρὶς τὸ γινόμ. ὑπὸ τοῦ τετρ. τοῦ α ἐπὶ τὸ β.

$3\alpha\beta^2 = 3(1\times1).\,20 = 60$ Τρὶς τὸ γινόμ. ὑπὸ τοῦ τετρ. τοῦ β ἐπὶ τὸ α.

$\beta^3 = 1\times1\times1 = 1$ Ὁ τοῦ β κύβος.

$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 = 9261$ Ὁ ὁλοσχερὴς κύβος.

Ἐὰν δ᾽ αὖ τῷ ἐπὶ τῆς ῥίζης ἀντὶ Β'. μέρους λαμβανομένῳ χαρακτῆρι, μηδενικόν τι σημεῖον προσὸν εἰς δεκάδας τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας ἐξαίρῃ, τῷ ὡς ἀνωτέρω προκύπτοντι κύβῳ, καὶ μηδενικὰ ἔτι σημεῖα προσθετέον τρία (§. 265. Σχ.)· οἷον ἐὰν 21 τῇ τοῦ μηδενικοῦ κατὰ τὸ τέλος προσθέσει ἐπὶ τὴν 210 προβιβασθῇ, τὸ μὲν πρῶτον αὐτῆς μέρος ἔσται 200 τὸ δὲ δεύτερον 10· ὅ, τε ἐκ τούτων ὁλοσχερὴς συγκροτούμενος κύβος 9261000, αὐτὸς ἔσται ὁ ἀνωτέρω μηδενικὰ τρία προσπαρειληφώς.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Πρὸς μείζονα τῶν εἰρημένων σαφήνειαν ἐμφαινέτω Πιν. Α'.
α + β τετραγώνου τινος ἐντελοῦς πλευρὰς δύω, καὶ γενέσθω, $\alpha = 10$, $\beta = 2$· τούτων τεθέντων ὑπ᾽ ὄψιν ἐστὶ, τὸ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ μεγέθους ὑποτεινόμενον μῆκος τε καὶ πλάτος τοῦ τετραγώνου εἰς 12 ἴσα μέρη διαιρεῖσθαι ἔχειν· οὗ γινομένου, ἀχθήτωσαν δύω εὐθεῖαι ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς κατὰ τὸ δέκατον τῆς διαιρέσεως σημεῖον τέμνουσαι· τὰ ἐντεῦθεν ἐκκύπτοντα τῆς ἐπιφανείας μέρη τῇ ὅλῃ ἐπιφανείᾳ ὁμοῦ ληφθείσῃ ἴσα ἔσται, οἷον·

Σχ. 5. 1.

$\alpha^2 = 10\times10 = 10^2$ . . . $= 100$ Ἑνὶ τετραγ.

$2\alpha\beta = 2\times10\times2$ . . . $= 40$ Δυσὶν ὀρθογ.

$\beta^2 = 2\times2 = 2^2$ . . . $= 4$ Ἑνὶ τετραγ.

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 = 10^2+2.10+10.2+2^2 = 144$ Τῷ ὁλικῷ τετραγώνῳ.

τοίνυν $144 = 12^2$, καὶ $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2$ ἑπομένως ὅ, τε τύπος ἀκριβής ἐστι, καὶ τὸ τετράγωνον τοῖς αὐτοῦ μέρεσιν ἴσον ἐξέκυψεν.

Σχ. 6. 2. Ὡσαύτως καὶ ὁ κυβικὸς τύπος $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ δι' ἑξαέδρου, ἤτοι κύβου ἐκ ξύλου ἢ μετάλλου, ἐναργέστερον ἐκτεθείσεται, διαιρεθέντος τοῦ κύβου δωδεκάκις τε καὶ ἰσάκις εἰς πλάτος, μῆκος καὶ ὕψος, κατὰ τὴν ῥίζαν $\alpha + \beta$, οὕτως ὥστε τὸ μὲν $\alpha = 10$, τὸ δὲ $\beta = 2$ εἶναι· ὧν τεθέντων, καὶ τοῦ κύβου κατὰ τὸ δέκατον τῆς διαιρέσεως σημεῖον τμηθέντος, ἐκκύψουσι τὰ ἑπόμενα τοῦ κύβου μέρη τῷ ὅλῳ ἴσα, οἷον·

$\alpha^3 = 10.10.10 = 10^3$	$= 1000$.	Ἑνὶ κύβῳ.
$3\alpha^2\beta = 3.10^2.2$	$= 600$.	Τρισὶ παραλληλεπιπέδοις, ὧν ἕκαστον $= 200$.
$3\alpha\beta^2 = 3.10.2^2$	$= 120$.	Τρισὶ παραλληλεπιπέδοις, ὧν ἕκαστον $= 40$.
$\beta^3 = 2.2.2 = 2^3$	$= 8$.	Ἑνὶ κύβῳ.

$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = 10^3 + 3.10^2.2 + 3.10.2^2 + 2^3 = 1728$. Τῷ ὁλικῷ κύβῳ.

Ἤδη $1728 = 12^3$, καὶ $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3$· ἑπομένως ὅ, τε τύπος ἀκριβής ἐστι, καὶ ὁ κύβος τοῖς αὐτοῦ μέρεσιν ἴσος ἐξέκυψεν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 333. Ὁ ἐκ τοῦ ὡς ἔτυχε τοίνυν διαιρεθέντος μὲν ἀριθμοῦ, ἐξ ὅλου δὲ γινόμενος κύβος, ἴσος ἔσται τοῖς τε τῶν μερῶν κύβοις, καὶ ἓξ τῷ πλήθει παραλληλεπιπέδοις, ὧν τρία δὶς μὲν ὑπὸ τοῦ πρώτου, ἅπαξ δ' ὑπὸ τοῦ δευτέρου μέρους περιέχεται ἕκαστον· τὰ δὲ λοιπὰ τρία δὶς μὲν ὑπὸ τοῦ δευτέρου, ἅπαξ δ' ὑπὸ τοῦ πρώτου.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 334. Ἐν γένει οὖν ἐντεῦθεν φανερὸν, ὁπόσοι ἂν οἱ κατὰ τὴν ἀξίαν τύχοιεν χαρακτῆρες, ἐπὶ μὲν τοῦ τετραγώνου, τὸν ὁλικὸν τετράγωνον ἀεὶ τοὺς τετραγώνους πάντας τοὺς ἀφ' ἑνὸς ἑκάστου χαρακτῆρος ἐν μέρει περιειληφέναι, καὶ πρὸς δὴ τούτοις τὰ ὑφ' ἑκάστου χαρακτῆρος, ἐπὶ πάντων τῶν πρὸς τὰ λαιὰ αὐτοῦ ἡγουμένων πολλαπλασιασμῷ γινόμενα δὶς ληφθέντα. τῆς τῶν ἐν ὁτῳοῦν χαρακτῆρι μονάδων καταλλήλου τάξεως ἀεὶ σωζομένης. Ἐπὶ δὲ τοῦ κύβου, ὁ ἐκ δυοῖν χαρακτήρων ἢ καὶ πλειόνων συγκείμενος κύβος περιέξει μὲν ἑκατέρων τῶν μερῶν τοὺς κύβους, περιέξει δὲ προσέτι τρὶς μὲν τὸ ὑπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου μέρους, καὶ ὑπὸ τοῦ δευτέρου ἁπλῶς γινόμενον, τρὶς δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου μέρους, καὶ ὑπὸ τοῦ πρώτου ἁπλῶς, ἀνάπαλιν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὸ ἄριστον τουτὶ τέχνασμα τὸ τοὺς ἀριθμοὺς εἰς δύω τὰ τυχόντα μέρη ἀναλύειν, ὡς $34 = 30 + 4$, θαυμασίως τὰς τῆς φαντασίας ἐπιτείνει δυνάμεις, καὶ σφόδρα συναίρεται τῷ νοΐ, πρός τε τὴν τῶν ἀποδείξεων κατάληψιν, καὶ τὴν τῶν προτάσεων εὕρεσιν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 335. Προτεθέντος τετραγώνου ἢ κύβου Ἀριθμητικοῦ ὁποιουοῦν ἀνιχνεῦσαι, ὁποίῳ

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 337. Παραπλησίως καὶ ἐν τῷ ἀριθμητικῷ κύβῳ, ἐὰν ἀπὸ τοῦ τέλους ἀρχόμενοι μετὰ τοὺς τρεῖς χαρακτῆρας γραμμίδιον παρενθῶμεν, τουτέστι δύω παρορῶντες ἀεὶ χαρακτῆρας πρὸς τὰ ἀριστερὰ προβαίνωμεν τὸν ἑξῆς ὑποστίζοντες, οἷον τὸν πρῶτον, τέταρτον, ἕβδομον, δέκατον κτλ., ἐν ἑκάστῃ στιχὶ ὁ τοῦ ἑνὸς ἑκάστου χαρακτῆρος κύβος ὑφέρψει· κἀντεῦθεν τοσοῦτοι τῇ ῥίζῃ χαρακτῆρες ἐνέσονται, ὁπόσα ἐν τῷ κύβῳ μέλη γραμμιδίοις διακεκριμμένα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 338. Ἐὰν δὲ αἱ ῥίζαι πολυμερεῖς ὦσιν, ἐν μὲν τῷ τετραγώνῳ δύω ἢ καὶ πλείω τῶν μερῶν τὰ ἀριστερώτατα ἀνθ' ἑνὸς ληφθήτωσαν, καὶ παραχρῆμα ὀφθήσεται τὸ τετράγωνον ὅ, του δήποτε ἀριθμοῦ συγκεῖσθαι ἐκ τῶν τετραγώνων ἑκάστων τῶν μερῶν, καὶ τῶν γινομένων ἐκ τοῦ διπλασίου οὑτινοσοῦν μέρους ἐπὶ πάντα τὰ τούτου ἀριστερώτατα (§. 259. 331.). Ἐν δὲ τῷ κύβῳ δύω ἢ τρεῖς χαρακτῆρες ἀριστερώτατοι ἀνθ' ἑνὸς λαμβανέσθωσαν, ὅπως σχῆμα διωνύμου μιμῆται (§. 332.)· σαφὲς γὰρ οὕτω καθίσταται παραχρῆμα, ὅτι κύβος ὁστισοῦν σύγκειται ἐκ τῶν κύβων ἑκάστου τῶν τῆς ῥίζης μερῶν, ἐκ τῶν γινομένων ἐκ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου ὡντινωνοῦν ἀριστερωτέρων ἐπὶ τὸ προσεχῶς δεξιώτερον, καὶ ἐκ τῶν γινομένων ἐκ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου οὑτινοσοῦν δεξιωτέρου ἐπὶ πάντα τὰ ἀριστερώτερα (§. 269. 334.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἡ τοῦ ἀριθμοῦ εἰς δύω μέρη κατατομὴ κατὰ βούλησιν ἡμῶν γινομένη, γενικῶς περὶ τῆς ῥίζης ὁπωσοῦν εἰς δύω μέρη διῃρημένης ἐκτείνεται, καὶ τῇ τυχούσῃ τομῇ ἐφαρμόζεται· οἷον ὁ 346 ἀριθμὸς, οὐ μόνον εἰς 340+6, ἢ εἰς 300+46, ἀλλ' ἔτι καὶ εἰς 195+151, εἰς 89+257, καὶ εἰς δύω οἱαδήποτε ἄλλα μέρη δύναται διαιρεθῆναι. Τὸ αὐτὸ ὡσαύτως δύναται καὶ ἐν ἀριθμοῖς τετραγώνοις, μάλιστα δὲ γενικῶς ἐν οἱαισοῦν δυνάμεσιν. Ἀλλ' οὖν ἀποδεκτέα ἐστὶν ἡ ἐν τοῖς §. 331. 332. κατατομή.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 339. Ἐκ τοῦ δοθέντος ὁποιουδηποτοῦν Ἀριθμητικοῦ τετραγώνου ἐντελοῦς, τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἐξελεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἀντὶ τῶν μὴ τοὺς δύω χαρακτῆρας ὑπεραλλόντων ἀριθμῶν, ἐν προχείρῳ δέον εἶναι τὸν τὰ τετράγωνα τῶν ἁπλῶν ἀριθμῶν περιέχοντα Πίνακα. ὡς ἐφεξῆς.

Ῥίζαι	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Τετράγωνα	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Κύβοι	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
Διτετράγ.	1	16	81	256	625	1296	2401	4086	6561	10000

Εἰ δὲ τῶν πολυμερῶν τις καὶ ἐκ πλειόνων συγκρουόμενος χαρακτήρων ἀριθμὸς παρεμπίπτοιεν, ἐξαχθήτω ἡ τετραγώνειος αὐτοῦ ῥίζα κατὰ τοὺς ἐχομένως ἐκτεθεισομένους κανόνας.

Α'. Ἀρχῆς ἀπὸ δεξιῶν γινομένης ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς διακεκρίσθω εἰς κλάσεις ἢ κόμματα, δισσῶν χαρακτήρων ἐφ' ἑκαστησοῦν κλάσεως ἀφοριζομένων, ὥστε τοὺς ἐν τῇ ῥίζῃ χαρακτῆρας ἰσαρίθμους τοῖς κατὰ κόμματα ὑποδιεσταλμένοις μέλεσιν ἐκκύπτειν (§. 336.), ὧν περισσαρίθμων ἐνίοτε τυχόντων τὸ ἀριστερώτατον μοναδικῷ χαρακτῆρι συνίσταται.

Β'. Ἐπεὶ ἐν τῷ ἀριστερωτάτῳ μέρει τὸ τοῦ πρώτου χαρακτῆρος τῆς ῥίζης τετράγωνον ἔνεστι (αὐτόθι), ζητείσθω ἐν τῷ τῶν ῥιζῶν Πίνακι ὁ τετράγωνος ἀριθμός, ὁ τῷ τὸ ἀριστερώτατον μέλος ἐξιδιουμένῳ ἴσος, ἢ ὁ ἔγγιστα αὐτοῦ ἐλάσσων, καὶ ἡ αὐτοῦ ῥίζα σημειούσθω κατὰ σειράν, ὡς τῶν κατ' ἐκείνην μερῶν τὸ πρῶτον, ἀντιστίχως τῷ προεκτεθέντι, σεληνιδίῳ τε ἢ μηνίσκῳ ὑποδιεσταλμένῳ ἀριθμῷ· τὸ δ' ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνον ὑφαιρείσθω ἀπὸ τοῦ ἀριστερωτάτου μέλους, ἐπισημειουμένου (εἴ τι ἐστι) τοῦ πρώτου ὑπολοίπου.

Γ'. Τῷ ἐναπολειφθέντι πηλίκῳ παρατεθείσθω πρὸς δεξιὰν τὸ ἐγγὺς ἑπόμενον μέλος, ἐν ᾧ, συνάμα ἐκείνῳ, ἐμπεριέχεσθαι δέον τὸ διπλοῦν γινόμενον ἐκ τοῦ πρώτου τῆς ῥίζης χαρακτῆρος ἐπὶ τὸν δεύτερον, καὶ τὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον (§. 336.). Ἐπεὶ δὲ τὸ τοῦ δευτέρου χαρακτῆρος τετράγωνον κατὰ χαρακτῆρα ἀποτερματίζεται τὸν ἔσχατον δεξιόθεν (αὐτόθι), διατμηθέντος ἐκείνου ἀπὸ τοῦ κατὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τόπου ἀντὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου χαρακτῆρος, τὸ ὑπόλοιπον ἔσται τὸ διπλοῦν γινόμενον ἐκ τοῦ πρώτου

ἐπὶ τὸν δεύτερον· τοῦτό τε διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἤδη εὑρεθέντος χαρακτῆρος διαιρεθέν, πηλίκον ἀναδώσει τὸν κατὰ τὴν ῥίζαν δεύτερον χαρακτῆρα, ὅπερ τῇ ῥίζῃ συγκαταταχθέν, προσηρμόσθω ὡσαύτως τῷ διαιρέτῃ πρὸς δεξιάν. Ἐπαχθέντων εἶτα τοῦ μὲν διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, τοῦ δὲ πηλίκου ἐφ' ἑαυτό, ἐκκύψει τὸ διπλοῦν γινόμενον ἐκ τοῦ πρώτου χαρακτῆρος ἐπὶ τὸν δεύτερον, καὶ τὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον· ὧν ἀφαιρεθέντων ἐπισημειούσθω, εἴ τις παραλέλειπται, ἡ δευτέρα ὑπεροχή.

Δ'. Ὑπογραφήτω καταβιβασθὲν τῷ δευτέρῳ καταλειφθέντι τὸ προσεχὲς αὖθις τοῦ τετραγώνου μέλος, τῶν τε ἄχρι τοῦδε ἀνωτέρω τῆς ῥίζης εὑρεθέντων χαρακτήρων ὁμοῦ ληφθέντων, γενέσθω τῷ αὐτῷ τρόπῳ τὰ τῆς πράξεως ἐπὶ τὴν τοῦ ἑπομένου χαρακτῆρος τῆς ῥίζης προσεύρεσιν. Οὗπερ εὑρεθέντος προσευρεθήσονται καὶ οἱ λοιποί, κατὰ τοὺς αὐτοὺς κανόνας προϊούσης τῆς πράξεως, καὶ ἀείποτε διὰ τοῦ διπλοῦ τῆς εὑρεθείσης ῥίζης τελουμένων, διὰ διαιρέτου δηλονότι ἐς ἀεὶ προσαύξοντος. Ἐὰν τοίνυν τῆς ἐσχάτης ὑφαιρέσεως γενομένης μηδὲν ὑπολειφθῇ, δῆλόν ἐστι τὴν ῥίζαν ἐξηκριβωμένως ἐξαχθῆναι· εἰ δέ τι τὸ περιόν, ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς οὐκ ἔστι τῶν ἀκριβῶν τετραγώνων, ἥ τε εὑρεθεῖσα ῥίζα, ἐλάσσων τῆς τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ ῥίζης. Ἐὰν γὰρ τὸ ταύτης τετράγωνον ἀπὸ τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ κατὰ μέρη ἀφαιρεθῇ ὑπόλοιπόν τι περιέσται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ αὐτὴ τῇ ἐν τῷ §. 310.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. $\sqrt{9, 12, 64, 41} = 3021.$

```
  9
  01,2 : 60
  00     0
  126.4 : 602
  1204    2
   604,1 : 6041
   6041     1
   0
```

Β'. $\sqrt{21, 38, 13, 76} = 4624$

```
  16
  ┌────────┐
  │ 53 : 8 │
  │ 48     │
  │ 58     │
  │ 36     │
  │ 22     │
  └────────┘
  538 : 86
  516    6
   2213 : 92  2
   1844       2
    36976 : 924 4
    36976       4
    0
```


Γ'. $\sqrt{11, 97, 16} = 346.$

```
  +9
   297 : 64
   256    4
    4116 : 686
    4116     6
    0
```

Δ'. $\sqrt{17, 14, 78, 81} = 4141.$

Ε'. $\sqrt{93, 83, 79, 69} = 9687.$

Ϛ'. $\sqrt{25, 20, 04, 00} = 5020$

Ζ'. $\sqrt{1, 52, 27, 56} = 1234.$

Η'. $\sqrt{36, 30, 06, 25} = 6025.$

Θ'. $\sqrt{99, 22, 15, 21} = 9961.$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τῶν Μαθητιώντων χάριν τὴν τοῦ Α'. Παραδείγματος πρᾶξιν διαληπτέον· Γινομένης τῆς κόμμασιν εἰς μέλη διαιρέσεως τῶν χαρακτήρων ἀνὰ δύο, δῆλόν ἐστι τὴν ῥίζαν ἰσαρίθμους τοῖς μέλεσι χαρακτῆρας περιέχειν, ὧν ὁ πρῶτος τῷ τῶν ῥιζῶν πίνακι ἔνεστιν, οὗτινος τὸ τετράγωνον ἐν τῷ τῶν τετραγώνων ὡσαύτως· Ληφθήτω δὴ ἐν τῷ προεκτεθέντι πίνακι ἡ τετραγωνικὴ πλευρὰ τοῦ ἐν τῷ ἀριστερωτάτῳ κόμματι ἀριθμοῦ (ἤ, εἰ μὴ τετράγωνος αὐτὸς εἴη τοῦ ὡς ἔγγιστα ἐλάσσονος, ὡς ἐπὶ τοῦ Β'. καὶ Γ.' Παραδείγματος), ἤτοι ὁ 3, ὅς γε μηνίσκῳ διασταλεὶς ἀποτεθήτω ἐν μέρει, ἅτε δὴ τῆς ζητουμένης ῥίζης πρῶτος ὢν χαρακτὴρ, οὗτινος τὸ τετράγωνον 9, ἀπὸ τοῦ ἐκκειμένου τετραγώνου 9 ἀφῃρείαθω. Ἐπεὶ οὖν μετὰ τὴν ὑφαίρεσιν οὐδὲν ὑπολείπεται, ὑποκαταβιβασθήτω συγκαταγραφόμενον τὸ δεύτερον μέλος 12, καὶ τοῦ ἐσχάτου χαρακτῆρος 2 ἀμελουμένου, διαιρείσθω τὸ ὑπόλοιπον, διὰ τοῦ διπλοῦ τοῦ ἀποκειμένου πρώτου τῆς ῥίζης χαρακτῆρος, ἤτοι διὰ τοῦ 6· τὸ ἐκ ταύτης τῆς διαιρέσεως πηλίκον 0 εἰς δεύτερον τῆς ῥίζης χαρακτῆρα ταχθὲν, τῷ διαιρέτῃ ἐφαρμοζέσθω, ἵν ᾖ 60, ἤτοι τὸ διπλοῦν τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, ὅπερ ἐν τῷ 0 ἀχθὲν, γινόμενον διώσει ἴσον τῷ μηδενί, τούτου τε ἀπὸ τοῦ 12 ἀπαχθέντος, ὑπολειφθήσεται τὸ ὅλον 12 ἀντὶ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου. Συναπτέσθω τῷ ὑπολοίπῳ τουτωῒ τὸ ἑπόμενον μέλος 64, ἵν ᾖ 1264, καὶ τοῦ ἐσχάτου αὖθις χαρακτῆρος παρεωραμένου, διαιρεθήτω διὰ τοῦ διπλοῦ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου τῆς ῥίζης χαρακτῆρος, τουτέστι διὰ τοῦ 60, καὶ τὸ πηλίκον 2 εἰς τρίτον τῆς ῥίζης χαρακτῆρα ἀποτεθὲν, ἐφαρμοσθήτω ὡσαύτως τῷ διαιρέτῃ 60, ἵν ᾖ 602, ὅγε ἐπὶ τὸ πηλίκον 2 ἀχθὲν γινόμενον διώσει 1204, ἤτοι τὸ διπλοῦν τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου διαιρέτου ἐπὶ τὸν τρίτον ὅρον, καὶ τὸ τοῦ τρίτου ὅρου τετράγωνον, οὗτινος ἀφαιρεθέντος ὑπολειφθήσεται ἡ διαφορὰ 60 τρίτον ὑπόλοιπον. Ἐφαρμοσθήτω αὖθις τῷ ὑπολοίπῳ τὸ ἐφεξῆς μέλος 41, ἵν ᾖ 6041, ὧν (παρὰ τὴν ἐν δεξιοῖς μονάδα) διὰ τοῦ διπλοῦ τοῦ πρώτου, δευτέρου καὶ τρίτου τῆς ῥίζης χαρακτῆρος, ἤτοι διὰ τοῦ 604 διαιρεθέντος, τὸ πηλικον 1 ἀντὶ τοῦ τετάρτου τῆς ῥίζης χαρακτῆρος γραφήτω, ἅμα τε τῷ διαιρέτῃ συναπτέσθω ἵν ᾖ 6041, ὅπερ ἐπὶ τὸ πηλίκον 1 ἀναχθὲν,

γινόμενον διώσει 6041, οὗτινος ἀπὸ τοῦ προκειμένου ἀφαιρεθέντος οὐδὲν μενεῖ. Ἐνθεντοι δῆλον ὅτι ὁ μὲν προτεθεὶς ἀριθμὸς, τετράγωνος ἦν ἀριθμὸς ἐπ' ἀκριβὲς, ἡ δὲ ῥίζα, ῥίζα αὐτοῦ ἡ τετραγωνική. Ταυτὸ καὶ περὶ τῶν λοιπῶν ῥητέον. Ἡ δὲ βάσανος ἐλέγξει τὴν εὑρεθεῖσαν, εἰ ἀκριβὴς, πολλαπλασιασμῷ τῷ ἐφ' ἑαυτήν· καὶ γὰρ $3021 \times 3021 = 9126441$. Ἀλλὰ γὰρ πολλάκις καὶ ἐξ ἀριθμῶν μὴ ἀκριβῶς τετραγώνων ζητεῖν συμβαίνει καὶ ῥίζαν τετραγωνικὴν, ἣν ἐπ' ἀκριβὲς ἔχειν ἀμήχανον, ὡς ὑποκαταβᾶσι δῆλον ἔσται. Ἐὰν δὲ ἀπὸ ἀριθμοῦ τινος μηδενικὰ προσκείμενα ἔχοντος ἡ τετραγωνικὴ ἐξακτέα ᾖ ῥίζα, ἐπεὶ ἡ ῥίζα τοσάκις ἐπὶ 10 πεπολλαπλασίασται, ὁσάκις ἐκεῖνος ἐπὶ 100 (§. 257. Σχολ.) εὑρεθήσεται οὕτως εὐπετέστερον αὐτῇ τῇ ἐπὶ τοὺς, ἐξ ὧν ἐκεῖνο συντίθεται παράγοντας διαλύσει, οἷον $\sqrt{640000} = \sqrt{64} \times \sqrt{10000} = 8 \cdot 100 = 800$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 340. Ἐὰν οὖν ἀπὸ κλάσματος, οὗ, ὅ τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς ἀριθμοί εἰσι τετράγωνοι, τὴν τετραγωνικὴν ἐξελεῖν δέῃ ῥίζαν, ἐξαχθήτω ἐξ ἀμφοτέρων αὐτὴ ἰδίᾳ. Ἐξαγόμεναι γὰρ ἔκ τε τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ, ἐξ αὐτῶν τῶν ῥιζῶν κλάσμα συστήσουσιν, ὅπερ ἔσται ἡ τοῦ δοθέντος κλάσματος ῥίζα. Ὁ γὰρ τετράγωνος ἐκ τῆς τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιάσεως, ἀναφύεται (§. 196.), τῶν δὲ κλασματωδῶν ἀριθμῶν ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιαζομένων, ὁ τοῦ ἑτέρου πάντως ἀριθμητὴς ἐπὶ τὸν τοῦ ἑτέρου, ὅ, τε παρονομαστὴς ὡσαύτως ἐπὶ τὸν τοῦ ἑτέρου πολλαπλασιάζεται (§. 183. 231.), διὰ τοῦτο ἔκ τε τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ ἰδίᾳ τὴν τετραγωνικὴν ἐξελεῖν δέον ῥίζαν· οἷον

$\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5}$, $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$. Καὶ ἐν γένει

$$\sqrt[\mu]{\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}} = \frac{\alpha}{\beta} \text{ (§. 294.).}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 341. Ἐὰν μὲν οἱ τοῦ δοθέντος κλάσματος ὅροι, ὅ, τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς μὴ ὦσι τετράγωνοι, ἀπόχρη τοῦ κλάσματος ὅλου τὸ ῥιζικὸν προχαραχθῆναι ὡς $\sqrt{\frac{2}{3}}$, ἢ ἐπὶ δεκαδικὸν ἔξεστιν ἀναχθῆναι τὸ κλάσμα, καὶ τὴν ῥίζαν ὡσαύτως ἐξαχθῆναι (ἥτινι δὴ μεθόδῳ χρηστέον, ὁπηνίκα οἱ ἀριθμοὶ οὐκ εἰσὶ τετράγωνοι ἐντελεῖς, ὡς εἰρήσεται)· ἤ, μεταχθήτω πρῶτον τὸ αὐτὸ κλάσμα εἰς ἕτερον μὲν ἑαυτῷ ἴσον, ἐκ τετραγώνων δὲ συνεστηκὸς ὅρων (§. 176.)· τουτέστιν, ἐὰν ᾖ τὸ κλάσμα τετράγωνον μέν, οὐμὴν δ' ἐκ τετραγώνων ὅρων συγκείμενον. Εἶτα θηρευθήτω ἡ τούτου ῥίζα, ἥτις εὑρεθεῖσα, ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ τοῦ προτέρου. Οἷον ἔστω κλάσμα ἐκ μὴ τετραγώνων μὲν ὅρων τὸ $\frac{12}{27}$, τετράγωνον δέ, ὡς γεγονὸς ἐκ τοῦ $\frac{4}{9}$, ᾧτινι καὶ ἰσοῦται· μετενεχθὲν οὖν $\frac{12}{27}$ εἰς ἐλαχίστους ὅρους ἔσται $= \frac{4}{9}$. Ἦν δὲ ὁ τοῦ κλάσματος παρονομαστὴς ἀριθμὸς ἄλογος τύχῃ ὡς $\frac{2}{5}$, πολλαπλασιασθήτω πρῶτον αὐτὸς δι' ἑαυτοῦ, εἶτα καὶ διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ, τὸ ἐντεῦθεν ἐκκύπτον κλάσμα ἀριθμὸς ἔσται λογικός. Οἷον·

$$\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{3,1622}{5} = 0,6324.$$

ἤ, ἐπὶ δεκαδικὸν κλάσμα τοῦ δοθέντος ἀναχθέντος, ἐκ τούτου ἡ τετραγώνειος ἐξαχθήσεται ῥίζα κατὰ τοὺς ἑξομένως ἐκτεθεισομένους κανόνας· οἷον·

$$\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{0,\ 375} = \sqrt{0,\ 3750} = 0,\ 61\ldots$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 342. Ἐπεὶ οὖν οἱ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ εἰς κλάσμα τοῦ δοθέντος παρονομαστοῦ μετάγονται, ἐὰν ἐπὶ τὸν αὐτὸν πολλαπλασιασθῶσι, καὶ τῷ γινομένῳ ὡς ἀριθμητῇ ὁ δοθεὶς παρονομαστὴς ὑπογραφῇ (§. 179.). Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὃς ἂν μὴ τετράγωνος ᾖ εἰς κλάσμα μετενεχθῇ, οὗ ὁ παρονομαστὴς ἐστὶ τετράγωνος, καὶ ἐκ τοῦ κλάσματος ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα (§. 341.), τὸ ἀναφυόμενον κλάσμα τὴν προσεχῶς ἀληθεστέραν ῥίζαν παρέξει ἐν τοσούτοις τε καὶ τοιούτοις μέρεσιν, οἷα ἡ τοῦ τετραγώνου παρονομαστοῦ ῥίζα παρίστησι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οἷον ἐὰν ἐκ τοῦ 2 τὴν προσεχῶς ἀληθεστέραν ῥίζαν ἐξαγαγεῖν δέῃ, ἥτις οὐκ ἂν ἐλλείποι ἑνὶ ἑκτημορίῳ· πολλαπλασιασθήτω ὁ 2 ἐπὶ τὸν 36, ὡς ἂν παραχθῇ κλάσμα $\frac{72}{36}$, οὗ ἡ ῥίζα $= \frac{8}{6} = 1\frac{2}{6}$ παρέχεται ῥίζαν τοῦ ἀληθοῦς μεγέθους ἑκτημορίῳ μὴ διαφέρουσαν, ἤτοι ἧς ἡ ἔλλειψις ἐλάττων ἐστὶν ἢ $\frac{1}{6}$. Ἐν δὲ τοῖς δεκαδικοῖς κλάσμασι τὴν προσεχῶς τοῦ ἀληθοῦς ῥίζαν ἀφιεμένων, ἀριθμῷ τῷ μὴ τετραγώνῳ ἀπὸ τοῦ κατὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τόπου ἔνθεν κατὰ στίχας ἀνὰ δύο χαρακτῆρας διαιρεθέντι, προστεθήτωσαν ἀπὸ τῆς τελευτῆς τοσαῦται ἐκ μηδενικῶν στίχες, ὅσας ἂν δόξῃ ἄλις ἔχειν πρὸς τὸ προκείμενον· οἷον δύω, τέσσαρας, ἕξ, ὀκτὼ, κτλ. ἐκεῖνα εἰς μνήμην Φερόντων, ὡς ἑκάστη τῶν ἐκ δυοῖν χαρακτήρων στιχῶν, χαρακτῆρα ἕνα τῶν τῆς ῥίζης πέφυκεν ἀποδιδόναι (§. 335. 336.)· ἡ δὲ πρᾶξις περαινέσθω ὡσαύτως, ὡς εἴπερ καὶ τετράγωνος ἀριθμὸς ἦν ὁ προκείμενος· εἰμὴ ὅτι τοῦ ὑπολοίπου μετὰ τὸ διὰ πασῶν διελθεῖν τῶν στιχῶν, λόγος οὐδείς. Οὕτω γὰρ ἀνακύψει ἡ προσεχεστέρα ἀληθὴς ῥίζα ἐν μέρεσι δεκαδικοῖς, ἑκατοστοῖς, χιλιοστοῖς, καὶ τοῖς ἐφεξῆς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 343. Ῥίζαν τετραγώνειον τὴν ἐγγὺς τῆς ἀληθοῦς, ἐξ ἀριθμοῦ μὴ τετραγώνου ἐξελεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐξ ἀτελοῦς τετραγώνου, ῥίζαν ἐντελῆ ἐξελέσθαι οὐκ ἔνι, ὅτι μὴ τὴν προσεχῶς ταύτης. Ἐφ' ᾧ δὴ τοῦτ' γένοιτο αἱ τῶν μηδενικῶν σημείων στίχες κατὰ βραχὺ προσαπτέσθωσαν, καθ' ὅσον ἡ κατὰ τὴν εὕρεσιν πρᾶξις χωροῦσα πρόεισιν. Ἀλλ' ὅσα δήποτ' ἂν καὶ προσάψαις, ὡς δ' ἂν καὶ πονήσαις, εἰ μὴ τετράγωνος ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς, οὐδέποτ' ἂν εἰς πέρας τοῦ προκειμένου ἀφίκοιο. Τὴν γὰρ ἐπ' ἀκριβὲς ῥίζαν ἐθέλοντι ἀποδοῦναι, μάτην ἂν εἴη πονητέον τέλους ἐπέκεινα. Ἔν-θέντοι·

Α'. Τῆς πράξεως κατὰ τοὺς ἀνωτέρω ἐκτεθέντας κανόνας (§. 339.) διαπερανθείσης ὑπολειφθήσεταί τι μετὰ τὴν ἐσχάτην ἀφαίρεσιν, ᾧτινι οἱονεὶ ἀριθμῷ ἀκεραίῳ ἀντὶ παρονομαστοῦ τὴν μονάδα ὑπογεγραμμένην ἐννοήσωμεν· Εἶτα τῷ τε ἀριθμητῇ καὶ τῷ παρονομαστῇ ἐφαρμοσθήτωσαν δεξιόθεν δύω τῶν μηδενικῶν, οὕτως τε ἡ τοῦ κλάσματος δύναμις ἀμεταποίητος τηρηθήσεται (§. 168.). Ἐπεὶ δὲ ὁ ὑποτεθεὶς παρονομαστὴς ἐστὶ 100, τὸ τούτου νοῒ μόνον ληφθὲν τετράγωνον ἔσται 10· ἀπὸ δὲ τοῦ ἀριθμητοῦ, ἐξαχθήτω ἡ ῥίζα διὰ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων κανόνων (§. 339.), τῶν προσαπτομένων μηδενικῶν οἱονεὶ ἑπόμενον μέλος ἐκ τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ θεωρουμένων· ἡ ἐντεῦθεν ἐκκύπτουσα ῥίζα ἀντὶ παρονομαστοῦ ἕξει 10, ἑπομένως τε ὑποδιασταλθήτω διὰ γραμμιδίου ἀπὸ τῶν ἀκεραίων τῆς ῥίζης χαρακτήρων.

Β'. Τῷ ἐκ τῆς προτέρας πράξεως ὑπολειφθέντι ἐφαρμοζέσθωσαν αὖθις δύω τῶν μηδενικῶν, ἔσται δ' τούτου παρονομαστὴς κατὰ νοῦν λαμβανόμενος 100, διά τε τῆς τῶν δύω μηδενικῶν αὐτῷ ἐπιπροσθέσεως, ἐκκύψει ἴσος τῷ 10000 οὗτινος ἡ τῷ νοῒ ἀνατυπουμένη τετραγώνειος ῥίζα ἔσται 100, ἀπὸ δὲ τοῦ ἀριθμητοῦ ἡ ῥίζα ὡς καὶ πρότερον ἐξαχθήτω, θεωρουμένων ὡσεὶ τῶν προσλαμβανομένων δυοῖν μηδενικῶν, οἱονεὶ ἑπόμενον μέλος τοῦ προτεθέντος ἀτελοῦς τετραγώνου· τῷ αὐτῷ ἐπαναλαμβανομένῳ τρόπῳ, καὶ οἱ λοιποὶ τοῖς ῥίζης χαρακτῆρες ἐκκύψουσιν, ὧν παρονομασταὶ οἱ 10, 100, 1000, 10000 κτλ. ὧν εὐεξουθενήτων ὄντων καὶ οὐδὲ λόγου πάνυ ἀξίων πάντη ἀμελητέον· ὡς τρανώτερον ἐν τῇ περὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων θεωρίᾳ τουτὶ διαληψόμεθα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ διὰ τῆς τῷ ὑπολοίπῳ ἀνὰ δύω ἀεὶ τῶν μηδενικῶν σημείων προσθέσεως, ἐν κλάσμασι δεκαδικοῖς, ἑκατονταδικοῖς καὶ χιλιαδικοῖς ἄνευ τέρματος ἐκκύπτουσα ῥίζα, εἰ καὶ μὴ ἐπ' ἀκριβὲς τυγχάνει, ἀλλ' ἔστι γοῦν τῆς ἀκριβοῦς ῥίζης ἐπ' ἄπειρον ἀεὶ ἔγγιον καὶ ἔγγιον γενέσθαι· Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἑκατονταδικὸν τετράγωνον ῥίζαν ἔσχε τὸν 10, τὸ δὲ μυριαδικὸν, ἤτοι τὸ δεκαχιλιαδικὸν τὸν 100, διὸ καὶ τοῦ ὑπολειπομένου δι' ἑκατὸν πολλαπλασιαζομένου, ἢ 1000, ἢ 10000 (ὃ τῇ προσθέσει τῶν μηδενικῶν τελεῖται), ἡ ἐν δεκαδικοῖς, ἢ ἑκατοστοῖς ἢ χιλιοστοῖς μέρεσιν ἐκκύπτουσα ῥίζα, βραχύ τι καὶ ἐλάχιστον καταλείπει ὑπόλοιπον καὶ οὐδὲ λόγου τινος σχεδὸν ἄξιον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. $\sqrt{1,48} = 12,165.. = 12 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000} + ..$

Β'. $\sqrt{11,90} = 34,496.. = 34 + \frac{4}{10} + \frac{9}{100} + \frac{6}{1000} + ..$

Γ'. $\sqrt{3,62,54} = 190,404.. = 190 + \frac{4}{10} + \frac{0}{100} + \frac{4}{1000} + ..$

Δ'. $\sqrt{3,46,95} = 186,2$. Ε'. $\sqrt{5} = 2,236$

Δ'		Ε'	
1		4	
246 : 28		100 : 42	
224	8	84	2
2295 : 366		1600 : 443	
2196	6	1329	3
9900 : 3722		27100 : 4466	
7444	2	26796	6
2456 ὑπόλοιπ.		304 ὑπόλ.	

Ϛ'. $\sqrt{8,54,40} = 292,3$. Ζ'. $\sqrt{0,|94|30} = 0,971$.

Ϛ'		Ζ'	
4		81	
454 : 49		1330 : 187	
441	9	1309	7
1340 : 582		2100 : 1941	
1164	2	1941	1
17600 : 5843		159 ὑπόλ.	
17529	3		
71 ὑπόλ.			

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

Ἐξαχθείσης ἐπὶ τοῦ πρώτου παραδείγματος διὰ τῶν ἀνωτέρω κανόνων τῆς ῥίζης 12 ὑπελείφθη προσέτι 4, καὶ τῇ τῶν μηδενικῶν δύω προσθέσει ἔσται $4 = \frac{400}{100}$. Σημειούσθω ὑπονοουμένη ἡ τοῦ παρονομαστοῦ ῥίζα 10, ἀπὸ δὲ τοῦ ἀριθμητοῦ ἐξαχθήτω ὡς ἐφεξῆς· ἡ πρὸ μικροῦ εὑρεθεῖσα ῥίζα 12 διπλασιασθήτω, διά τε τοῦ ταύτης διπλοῦ 24 διαιρεθήτω ὁ 40,0 ἀμελουμένου τοῦ πρὸς δεξιὰν χαρακτῆρος 0, τὸ δὲ πηλίκον 1 τὸ ἀντὶ παρονομαστοῦ 10 ἔχον, μετὰ τὸν 12 μεθ' ὑποδιαστολῆς γραφήτω τὰ δὲ λοιπὰ γενέσθωσαν ὡς ἀνωτέρω (§. 339.). Μετὰ τὴν πρᾶξιν ταύτην ὑπολειφθήσεται $\frac{159}{100}$, ᾧτινι ἐὰν αὖθις δύω προσαπιτεθῶσι μηδενικὰ ἔσται $\frac{159}{100} = \frac{15900}{10000}$, ἥ τε νοερῶς ὑποτυπουμένη τοῦ παρονομαστοῦ ῥίζα ἔσται 100, ἀπὸ δὲ τοῦ ἀριθμητοῦ ἐξαχθήτω ὡδί· τῆς πρὸ μικροῦ εὑρεθείσης ῥίζης 121 διπλασιασθείσης, διαιρείσθω διὰ τοῦ ταύτης διπλοῦ 242, ὁ 1590,0 παρ' ἕνα τὸν ἐν δεξιοῖς μηδενικὸν χαρακτῆρα 0, τὸ δὲ πηλίκον 6 παρονομαστὴν ἔχον τὸν 100, ἀντὶ τοῦ ἑπομένου τῆς ῥίζης χαρακτῆρος τεθήτω, καὶ τῆς πράξεως τελεσθείσης ὑπολειφθήσεται $\frac{1344}{10000}$ τρίτον ὑπόλοιπον. Τούτῳ δ' αὖ δυὰς τῶν μηδενικῶν προστεθήτωσαν, ἵν' ἡ $\frac{1344}{10000} = \frac{134400}{1000000}$, ἔσται ἡ ὑποτιθεμένη τοῦ παρονομαστοῦ ῥίζα $= 1000$· ἀπὸ δὲ τοῦ ἀριθμητοῦ ἐξαχθήτω τῷ συνήθει τρόπῳ· διπλασιαζομένης τῆς ἄχρι τοῦδε εὑρεθείσης ῥίζης 1216, καὶ τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ ταύτης διαιρουμένου πρὸς τὴν τοῦ 5 τῆς ῥίζης ἑπομένου χαρακτῆρος εὕρεσιν, καὶ ἐφεξῆς οὕτω. Ἔνθεντοι ἡ μέχρι τοῦδε εὑρεθεῖσα ῥίζα τῆς ἀληθοῦς τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ 148 ῥίζης, οὐδ' ἑνὶ μονάδος χιλιοστημορίῳ διενήνοχε. Πρὸς δὲ μείζονα τῶν ῥηθέντων ἐμπέδωσιν μέτιθι καὶ τὰ ἐν τῷ τοῦ §. 313. Σχολίῳ προϋπεκτεθέντα.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

Ἔστιν ἄρα οὕτως ἐν τῷ Ε'. Παρ. $\sqrt{5} > 2,236$, ἀλλ' οὖν ὡσαύτως $\sqrt{5} < 2,237$· Τῆς δ' ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης πορρωτέρω συνεχιζομένης, εὑρεθήσεται $\sqrt{5} > 2,23606797$ καὶ $\sqrt{5} < 2,23606798$ κτλ. Ἡ δὲ βάσανος σαφὴς ἔσται, ἐὰν ἡ εὑρεθεῖσα ῥίζα πρὸς τετράγωνον ἀρθεῖσα, τὸ προτεθὲν ἀριθμητικὸν ἀναδώσει τετράγωνον συνάμα τῇ τοῦ ἐσχάτου ὑπολοίπου προσθέσει· οἷον ἐπὶ τοῦ Ϛ'. Παρ. $(292,3)\times(292,3) = 85439,29 + 71 = 85440,00$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 344. Πρὸς εὕρεσιν τοίνυν, τοὐλάχιστον ἑκατοστημορίου ὡς ἔγγιστα τῆς τοῦ κλάσματος $\frac{7}{9}$ ῥίζης, μεταχθήτω τουτὶ πρὸς δεκαδικὸν 0,7777, οὗτινος

ἡ ῥίζα 0,88 ἐστὶν ἡ τοῦ $\frac{7}{9}$ σχεδὸν ἑκατοστημορίῳ ὡς ἔγγιστα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 345. Ἀριθμοῦ ἄρα, οὗτινος ἡ ῥίζα ἐν ἀριθμοῖς ὁλοσχερέσιν ἄληπτός ἐστιν, ἔσται ὡσαύτως καὶ ἐν κεκλασμένοις (§. 308.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 346. Οὐκοῦν ἡ κατὰ νοῦν ἀνατυπουμένη ῥίζα τετραγωνικὴ ἀριθμοῦ τοῦ μὴ τετραγώνου, διὰ μερῶν τῶν τῆς μονάδος, ἅττα μεγέθους ἂν εἴη τινὸς ὡρισμένου, ὅσον ἂν ἐλάχιστα προσληφθῇ, οὐδέποτε παραστῆναι δυνήσεται· καὶ ἔστιν ἄρα ἡ τοιάδε ῥίζα ἀριθμὸς ἄλογος (§. 27. 298. 341.). Ὁ τοίνυν λέγων τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀπὸ ἀριθμοῦ μὴ τετραγώνου ἀποδοθῆναι μὴ δύνασθαι, εἰ μὴ τῆς μονάδος εἰς ἀπειροστὰ μέρη διαιρεθείσης, κομιδῇ αὐτὸ τοῦτο τυγχάνει ἀποφαινόμενος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 347. Ἐκ τοῦ δοθέντος ὁποιουοῦν Ἀριθμοῦ Κυβικοῦ ἐντελοῦς, τὴν κυβικὴν ἐξελεῖν ῥίζαν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἀντὶ τῶν μὴ τοὺς τρεῖς χαρακτῆρας ὑπερβαινόντων ἀριθμῶν ἐν προχείρῳ ἔστω ὁ ἀνωτέρω (§. 339.) ἐκτεθεὶς τῶν ῥιζῶν Πίναξ. Εἰ δέ τις ἐκ πλειόνων συγκροτούμενος παρεμπίπτοι χαρακτήρων, τὰ τῆς πράξεως οὑτωσὶ χωρείτω.

Α'. Ἀρχῆς ἀπὸ δεξιῶν γενομένης, ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς διαιρεθήτω εἰς κλάσεις ὑποδιαστελλόμενος, ἢ καὶ εἰς στίχας ὑποστιζόμενος, τριῶν χαρακτήρων ἀφ' ἑκάστη κλάσει ἀφοριζομένων· ἐκ τοσούτων καὶ γὰρ χαρακτήρων ἡ ῥίζα συγκείσεται, ὁπόσαι στίχες ἢ κόμματα τῷ προτεθέντι γεννήσονται ἀριθμῷ (§. 337.), μηδὲν διαφέρον εἰ τὸ πρὸς ἀριστερὰν ἔσχατον κόμμα τὸν ἀριθμὸν τῶν χαρακτήρων μειονεκτοῦν, τριῶν ἐλάσσονας περιείληφεν. Ἡ δὲ κατὰ τρεῖς διανομὴ τῶν στιχῶν τελεῖται, διὰ τὸ μηδένα κύβον ἀπό τινος τῶν ἄχρι δεκάδος ἀριθμῶν, ὑπὲρ τὴν τριάδα τοῖς χαρακτῆρσι πληθύνεσθαι.

Β'. Ἐπεὶ ἐν τῷ ἀριστερωτάτῳ μέλει ὁ τοῦ πρώτου τῆς ῥίζης χαρακτῆρος κύβος ἔνεστιν (αὐτόθι), ληφθήτω ἐκ τοῦ τῶν ῥιζῶν Πίνακος, ὁ τοῦ πρώτου πρὸς ἀριστερὰν μέλους ἴσος, ἢ ὁ προσεχῶς αὐτοῦ ἐλάσσων κύβος, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθήτω· ἡ δ' ἐκείνου ῥίζα μετὰ τὸν μηνίσκον πρὸς δεξιὰν τῷ προεκτεθέντι ἀντίστιχος γραφήτω, ὡς οὖσα τῶν κατ' αὐτὴν μέρος τὸ πρῶτον, ἐπισημειούσθω τε εἴ τι ὑπολέλειπται.

Γ'. Τῷ ὑποσημειωθέντι ὑπολοίπῳ τὸ δεύτερον ἑξῆς τῶν κομμάτων προσεπικαταγραφήτω, ἐν ᾧ συνάμα τῷ ὑπολοίπῳ περιέχεσθαι δέον τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τοῦ γινομένου ἐκ τοῦ πρώτου τῆς ῥίζης χαρακτῆρος ἐπὶ τὸν δεύτερον, τό, τε τριπλοῦν τετράγωνον τοῦ γινομένου ἐκ τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν πρῶτον, καὶ ὁ τοῦ δευτέρου κύβος (§. 337. 338.)· ὧν τὸ μὲν τρίτον ἐν τῷ

πρὸς δεξιὰν ἐσχάτῳ ἀποτερματίζεται χαρακτῆρι, τὸ δὲ δεύτερον ἐν τῷ ἐγγὺς ἐκείνου. Ἔνθεντοι τῶν δυοῖν ἐσχάτων δεξιόθεν ὑποδιασταλέντων, τὸ λοιπὸν ἔσται τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τοῦ γινομένου ἐκ τοῦ πρώτου χαρακτῆρος ἐπὶ τὸν δεύτερον, οὗπερ διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου τῆς ῥίζης μέρους διαιρεθέντος, τὸ ἐντεῦθεν πηλίκον εἰς δεύτερον τῆς ῥίζης χαρακτῆρα ἀποτιθέσθω. Εἶτα τὸ μὲν ὑπὸ τοῦ καινοῦ τοῦδε πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην γινόμενον, κατὰ τὸν πρῶτον πρὸς ἀριστερὰν χαρακτῆρα τοῦ δευτέρου μέλους ἐκτερματιζόμενον ὑπογραφέσθω· τὸ δ' ὑπὸ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τοῦ καινοῦ πηλίκου, καὶ ὑπὸ τοῦ πρὸ τούτου τῆς ῥίζης μέρους γινόμενον κατωτέρω ὑπὸ τὸν μέσον· ὅδε τοι κύβος ὁ ἀπὸ τοῦ εἰρημένου καινοῦ πηλίκου, ὑπὸ τὸν ἔσχατον καὶ δεξιώτατον τῶν ἐν τῷ κόμματι χαρακτήρων ἔτι κατωτέρω ἐκπερατούσθω· ὧν συγκεφαλαιωθέντων καὶ τοῦ προκειμένου ἀριθμοῦ ἀφαιρεθέντων, τὸ λοιπὸν ὅσον ὑποσημειούσθω, καὶ τῷδε τὸ ἐφεξῆς τοῦ κύβου μέλος τὸ τρίτον ὑποκαταβιβασθὲν προσκαταγραφέσθω.

Δ'. Τῷ τριπλῷ τῶν ἀπὸ τῆς ἤδη εὑρεθείσης ῥίζης χαρακτήρων τετραγώνῳ, τοῦ προκειμένου αὖθις ἀριθμοῦ διαιρεθέντος, τὸ πηλίκον ὡς μέρος ἄλλο τῆς ῥίζης καινὸν ἀποσημειούσθω. Εἶθ' ἑξῆς ὡς ἀνωτέρω τῶν τριῶν ἤδη εὑρεθέντων τῆς ῥίζης χαρακτήρων, ἀνθ' ἑνὸς θεωρουμένων τὰ γινόμενα ὑπογραφέσθω ἄλλο μετ' ἄλλο. Τὸ μὲν ὑπὸ τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ ἄρτι ἀνακύψαντος πηλίκου, ἐπὶ τὸ λαιότατον ὁμοίως τοῦ καταταχθέντος μέλους ἐκτερματιζόμενον· τὸ δ' ὑπὸ τοῦ καινοῦ πηλίκου καὶ τῆς προαναφανείσης ῥίζης πρὸς τὰ λαιὰ ἐπὶ τὸ μέσον· ὁ δὲ τέως ἀπὸ τοῦ ἀρτιφανοῦς πηλίκου κύβος ἐπὶ τὸ δεξιώτατον. Τοῦ ἐκ τῶν τριῶν δὴ τούτων προκύπτοντος, ἀπὸ τοῦ προκειμένου ἀριθμοῦ ἀφαιρεθέντος, τὸ ἑπόμενον μέλος ὑποκαταγέσθω.

Ε'. Κατὰ τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον τῆς ἐφόδου χωρούσης, καὶ τῶν οὕτως ἀεὶ τῇ τε ἑκάστου τῶν μελῶν καταγραφῇ, καὶ τοῦ καινοῦ πηλίκου ἀνακύψει διὰ πολλαπλασιασμοῦ γινομένων τε καὶ τοῦ προτεθέντος ἀφαιρουμένων, ἡ ὁλοσχερὴς τελευταῖον κυβικὴ ἀποδοθήσεται ῥίζα· ἥτις εἰ μὲν ἄνευ τινὸς ὑπολοίπου μετὰ τὴν ὑστάτην τύχοι ἀφαίρεσιν, δεῖγμά ἐστιν ἐξ ἀκριβοῦς κύβου ἀκριβῆ ἀπενεχθῆναι τὴν ῥίζαν· εἰ δέ τι τὸ περιὸν, εὔδηλον τὸν προτεθέντα ἀριθμὸν ἐντελῆ μὴ εἶναι κύβον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ αὐτὴ τῇ ἐν τῷ §. 315.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 348. Ἐὰν ὁ τοῦ δοθέντος κυβικοῦ ἀριθμοῦ τετράγωνος ᾖ γνωστὸς, ζητηθήτω ἡ τετραγώνειος τούτου ῥίζα (§. 339.), ἡ αὐτὴ γὰρ ἔσται καὶ τοῦ κύβου.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 349. Ἐὰν τῆς τετραγωνικῆς ληφθείσης ῥίζης, ἐκ ταύτης ἡ κυβικὴ ἐξαχθῇ, ἔσται αὕτη ῥίζα ἡ Τετραγωνοκυβική. Ἐὰν δὲ ἡ κυβικὴ πρῶτον, καὶ ἐξ αὐτῆς ἡ κυβικὴ δεύτερον, ἔσται αὕτη ῥίζα ἡ Κυβοκυβική.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. $\sqrt[3]{41,421,736} = 346$. Β'. $\sqrt[3]{92,959,677} = 453$.

Α'.
27
144,21 : 27
108
362
144
2181
64
21177,36 : 3468
20808
3693
3672
216
216
0

Β'.
64
289 : 48
240
495
300
1959
125
1834
28959 : 48
240
300
125
27125
1834677 : 6075
18225
1215
27
1834677
0

Γ'. $\sqrt[3]{131,096,512} = 508$
125 . . . . . . (= 5^3)
6096 : 75 . . . . (= $5^2.3$)
6096512 : 7500 . . (= $50^2.3$)
60000 . . . (= 7500.8)
9600 . . . (= $8^2.3.50$)
512 . . . . (= 8^3)
6096512
0

Δ'. $\sqrt[3]{78,402,752} = 428$

64 . . . . . $(= 4^3)$

14402 : 48 . . $(= 3 . 4^2)$

8 . . . . $(= 2^3)$

48 . . . $(= 3 . 2^2 . 4)$

96 . . . $(= 3 . 4^2 . 2)$

+ 10088

43147,42 : 5295 $(= 3 . 42^2)$

512 . . . $(= 8^3)$

8064 . . $(= 3 . 8^2 . 42)$

42336 . . $(= 3 . 42^2 . 8)$

4314752

0

Ε'. $\sqrt[3]{143,877,824} = 524.$

Ϛ'. $\sqrt[3]{14,886,936} = 246.$

Ζ'. $\sqrt[3]{\left(\frac{1,860,867}{1,879,080,904}\right)} = \frac{123}{1234}.$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ (Παρ. Α'.) ὀρθῶς κατὰ κόμματα διαιρεθέντος, ζητηθήτω ἐν τῷ τῶν κυβῶν πίνακι (§. 339.) ὁ προσεχῶς ἐλάσσων κύβος 27, οὗτινος ἡ ῥίζα 3 γραφήτω μετὰ τὴν παρένθεσιν, ὡς οὖσα πρῶτος τῆς αἰτουμένης ῥίζης χαρακτὴρ, ὁ δὲ ταύτης κύβος ἀφαιρείσθω ἀπὸ τοῦ πρώτου μέλους 41, τὸ, τε πρῶτον ὑπόλοιπον 14 ὑποσημειούσθω, ᾧτινι ἐφαρμοσθήτω δεξιόθεν τὸ ἑπόμενον μέλος 421, ἵν' 14421. Τῶν πρὸς δεξιὰν δυοῖν χαρακτήρων 21 ἀμελουμένων, διαιρεθήτω τὸ λοιπὸν διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τῆς ἤδη εὑρεθείσης ῥίζης 3 ἤτοι διὰ τοῦ 27, καὶ τὸ πηλίκον 4 ἀντὶ τοῦ δευτέρου τῆς ῥίζης χαρακτῆρος τεθήτω·

ὅπερ ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀχθὲν γινόμενον δώσει 108, τούτου δὲ ἀπὸ τοῦ 144 ἀφαιρεθέντος ὑπολειφθήσεται 36, ᾧτινι συναφθήτω ὁ παρὰ τὸν ἔσχατον τῶν δυοῖν δεξιόθεν ἀμεληθέντων ἀνωτέρω χαρακτήρων 21 λήγων, ἤτοι ὁ 2· τούτου γενομένου ἔσται 362· ἐξ οὗ ἀφαιρεθήτω τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τοῦ δευτέρου τῆς ῥίζης χαρακτῆρος 4, ἤτοι 48 ἀχθὲν ἐπὶ τὸν πρῶτον 3, ἤτοι ὁ 144, ὑπολειφθήσεται ὁ 218, ᾧ ὁ ἔσχατος τῶν ἀνωτέρω παραλειφθέντων δυοῖν χαρακτήρων ἤτοι ὁ 1 προστεθεὶς, ἀναδώσει 2181, ἐν ᾧ λαθραίως ἐνείληπται ὁ τοῦ δευτέρου ἤτοι τοῦ 4 κύβος ὁ 64, οὗ καὶ ἀφαιρεθέντος, ὑπολειφθήσεται 2117 ὑπόλοιπον δεύτερον. Τῷ ὑπολοίπῳ τουτωῒ ἐφαρμοσθήτω πρὸς δεξιὰν τὸ ἑπόμενον τοῦ προτεθέντος κύβου μέλος 736, ἵν' ᾖ 2117736, καὶ τῶν δυοῖν δεξιωτάτων χαρακτήρων 36 ἀμεληθέντων, διαιρεθήτω τὸ λοιπὸν διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου χαρακτῆρος 34, ἤτοι διὰ τοῦ 3468, τὸ δὲ πηλίκον 6 τῇ ῥίζῃ συγκαταταχθήτω, ὡς ὂν ταύτης τρίτος χαρακτήρ· ἀχθήτω εἶτα τὸ πηλίκον τουτὶ ἐπὶ τὸν διαιρέτην, καὶ τὸ γινόμενον 20808 ἀπὸ τοῦ 21177 ἀφαιρεθήτω, ὑπολειφθήσεται 369· ᾧτινι τοῦ τῷ δεξιωτάτῳ τῶν ἀμεληθέντων ἐκείνων δυοῖν χαρακτήρων παραλήγοντος ἑνὸς 3 προστεθέντος, ἔσται 3693, ἐξ οὗ ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ τριπλοῦν τοῦ ἐσχάτου χαρακτῆρος 6 τετράγωνον 108 ἐπὶ τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον τῶν κατὰ τὴν ῥίζαν χαρακτήρων 34 ἀχθὲν, ἤτοι ὁ 3672, ὑπολειφθήσεται 21, καὶ τούτου αὖθις τῷ ἐσχάτῳ παροφθέντι χαρακτῆρι 6 προσαυξηθέντος, ἔσται 216, ᾧτινι ὁ τοῦ τρίτου τῆς ῥίζης χαρακτῆρος κύβος 216 λαθραίως ἔνεστιν, ὃς καὶ ἀφαιρεθεὶς οὐδὲν δώσει ὑπόλοιπον. Ἔνθεντοι σαφές ἐστι τὸν μὲν προτεθέντα ἀριθμὸν, ἀριθμὸν εἶναι κυβικὸν ἐπ' ἀκριβές· τὴν δ' οὕτως ἐκκύψασαν ῥίζαν, ῥίζαν κυβικὴν ἐντελῆ. Ταυτὸ καὶ περὶ τῶν λοιπῶν παραδειγμάτων κρατήσει λεγόμενον. Ἡ δὲ βάσανος ἐλέγξει τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν, εἰ ἀληθής, πολλαπλασιασμῷ τῷ ἐφ' ἑαυτήν, καὶ γὰρ $346 \times 346 \times 346 = 41421736$. Ἀλλὰ γὰρ πολλάκις καὶ ἐξ ἀριθμῶν μὴ ἀκριβῶς κυβικῶν ζητεῖν συμβαίνει τὴν κυβικὴν πλευρὰν, ἣν ἐπ' ἀκριβὲς ἔχειν ἀδύνατον. ὡς ἐχομένως λεχθήσεται. Ἐὰν δὲ ὁ παρεμπίπτων ὁστισοῦν κυβικὸς ἀριθμὸς ἐκ μηδενικῶν συγκείμενος τύχῃ ἔσται οὕτω τῇ διαλύσει (§. 265. Σχόλ.), ἡ τούτου εὕρεσις εὐπετεστέρα, οἷον· $\sqrt[3]{27000} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{1000} = 3 \cdot 10 = 30$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 350. Ἐὰν οὖν ἐκ κλάσματος, οὗ ὅ, τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς ἀριθμοὶ εἰσὶ κυβικοί, τὴν κυβικὴν ἐξαγαγεῖν δέῃ ῥίζαν, ἐξαχθήτω αὕτη ἰδίᾳ ἔκ τε τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ, τῷ αὐτῷ, ᾗ καὶ ἀνωτέρω ἐπὶ τῆς τετραγωνείου κλασματώδους ῥίζης (§. 341.) ἐξεθέμεθα, τρόπῳ· οὕτως οὖν,

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{64}{729}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{4}{9}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 351. Ἐὰν δὲ ὁ τοῦ κλάσματος, ἀφ' οὗ τὴν

κυβικὴν ἐξελεῖν δέοι ῥίζαν, παρονομαστὴς ἀτελὴς ἐστὶ κύβος, ἤτοι ἀριθμὸς ἄλογος, εἰς λογικὸν μεταχθήσεται, ἐὰν ὅ, τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς ἐπὶ τὸ τοῦ παρονομαστοῦ ἀχθῶσι τετράγωνον· οἷον,

$$\sqrt[3]{\frac{5}{4}} = \sqrt[3]{\frac{5.16}{4.16}} = \sqrt[3]{\frac{80}{64}} = \frac{\sqrt[3]{80}}{4} = \frac{4.3088}{4} = 1,0772.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 352. Κἀντεῦθεν οὖν τῷ αὐτῷ, ᾗ καὶ ἀνωτέρω (§. 343.), ἕπεται τρόπῳ τὴν προσεχῶς ἀληθεστέραν ῥίζαν ἐν κλάσματι τοῦ δοθέντος παρονομαστοῦ ἐξευρίσκεσθαι· ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ὁ μὴ κύβος ὤν, ἐπὶ τὸν τοῦ δοθέντος παρονομαστοῦ κύβον πολλαπλασιασθῇ, καὶ τῆς κυβικῆς ῥίζης ἐκ τοῦ γινομένου ἐξαχθείσης, ὡς ἀριθμητῇ ὁ δοθεὶς παρονομαστὴς ὑποβληθῇ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐὰν γὰρ ἐκ τοῦ 12 τὴν προσεχῶς ἀληθεστέραν κυβικὴν ῥίζαν ἐξαγαγεῖν δέῃ ἐλλείψει ἐλάττονι ἢ $\frac{1}{8}$, πολλαπλασιασθήτω ὁ 12 ἐπὶ τὸν 512 τὸν τοῦ 8 κύβον, καὶ ἐκ τοῦ γινομένου 6144 ἐξαχθήτω ἡ προσεχῶς κυβικὴ ῥίζα 18· ἔσται γοῦν $\frac{18}{8}$, ἤτοι $2\frac{2}{8}$ ῥίζα προσεχῶς ἀληθής, ἧς ἡ ἔλλειψις ἐλάττων ἐστὶν ἢ $\frac{1}{8}$· ἔστι γὰρ ὁ προσεχέστερος κύβος τοῦ 6144 ὁ 5832, οὗ ἡ ἀκριβὴς ῥίζα ὁ 18· τοῦ δὲ 512, ὁ 8· ὡς καὶ ἐκ τοῦ Πίνακος κατάδηλον· ἤτοι $8 \times 8 = 64 \times 8 = 512$· καὶ $18 \times 18 = 324 \times 18 = 5832$. Ἡ ἔλλειψις τοίνυν ἐλάττων ἢ $\frac{1}{8}$· μονάδος γὰρ προστεθείσης ἔσται $\frac{19}{8}$· τοῦ δὲ 19 ὁ κύβος 6859.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 353. Ἐν δὲ τοῖς δεκαδικοῖς κλάσμασι τὴν προσεχεστέραν τοῦ ἀληθοῦς κυβικὴν ῥίζαν κατὰ τὸν ἀνωτέρω προεκτεθέντα τρόπον ἐξακτέον (§. 342.), προστιθεμένων τριῶν, ἕξ, ἐννέα, κτλ. χαρακτήρων πρὸς δεξιὰν τῷ μὴ κυβικῷ ἀριθμῷ, ἕνεκεν τῶν δεκατημορίων, ἑκατοστημορίων, χιλιοστημορίων, κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 354. Ἐξαχθήσεται ἄρα καὶ ἡ τοῦ 12 Διτετραγωνικὴ ῥίζα, ὡς ἐφεξῆς·

$$\sqrt[4]{2,0736} = 12 = (\alpha + \beta)$$

$$\begin{array}{rl}
\alpha^4 = & 1 \\ \hline
 & 10736 \\
(4\alpha^3) = & (4) \\
4\alpha^3\beta = & 8 \\
6\alpha^2\beta^2 = & 24 \\
4\alpha\beta^3 = & 32 \\
\beta^4 = & 16 \\ \hline
 & 10736 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

Ἀλλὰ γὰρ τὸ τοιοῦτον εἶδος, ἅτε σπανιώτατα ἐν χρήσει γινόμενον, ἑκόντες ὑπερβησόμεθα. Οἷόν τε δ᾽ εὐχερέστερον πρὸς τὴν τῆς Τετραγωνοτετραγωνικῆς ῥίζης θήραν ποδηγετεῖσθαι, ἐὰν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, ἐκ ταύτης ἡ τετραγωνικὴ αὖθις ἐξαχθῇ ῥίζα· οὕτω γὰρ τῶν ῥιζῶν ἡ δευτέρα, ῥίζα ἔσται ἡ Διτετράγωνος, ἢ ἡ τοῦ δοθέντος ὁποιουοῦν ἄλλου ἀριθμοῦ. οἷον·

$$\sqrt{2,07,36} = \sqrt{1,44} = 12.$$

$$\begin{array}{r}
1 \\ \hline
107 \\
(2)4 \\
96 \\ \hline
1136 \\
(28)4 \\
1136 \\ \hline
0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1 \\ \hline
44 \\
(2)2 \\
44 \\ \hline
0
\end{array}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 355. Ἐκ τοῦ δοθέντος ἀτελοῦς κυβικοῦ ἀριθμοῦ, τὴν ἐγγὺς τῆς ἀληθοῦς κυβικὴν ἐξελεῖν ῥίζαν.

ΛΥΣΙΣ.

Α΄. Τῆς πράξεως κατὰ τοὺς ἀνωτέρω διαλειφθέντας κανόνας (§. 347.) διὰ πάντων τῶν μελῶν περανθείσης, τῷ καταλειφθέντι, καὶ παρονομαστὴν λαθραίως τὴν μονάδα ἔχοντι, τρία τῶν μηδενικῶν σημείων προστεθήτωσαν· οὕτως ὁ μὲν παρονομαστὴς ἔσται 1000, οὗτινος ἡ κυβική ἐστιν, ὁ 10· ἀπὸ δὲ τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπιτηδευθήτω ἡ τῆς κυβικῆς ῥίζης ἐξαγωγὴ ὡς ἀνωτέρω (αὐτόθι), θεωρουμένων τῶν προστεθέντων τριῶν μηδενικῶν σημείων, οἱονεὶ καινοῦ μέλους τῷ ὑπολοίπῳ ἐφαρμοσθέντος.

Β΄. Προστεθήτωσαν αὖθις τῷ δευτέρῳ ὑπολοίπῳ τρία τῶν μηδενικῶν σημείων, ἔσται οὕτως ὁ ὑπονοούμενος αὐτοῦ παρονομαστὴς 1000000, οὗ ἡ κυβικὴ ῥίζα 100· ἀπὸ δὲ τοῦ ἀριθμητοῦ ἐξαχθήτω ὡς σύνηθες, τῶν τριῶν μηδενικῶν οἱονεὶ μέλους ἀρτιφαοῦς λαμβανομένων. Οὕτω τοίνυν τῆς πράξεως συνεχιζομένης ἔξεστιν ἐγγυτέρω τῆς ἀκριβοῦς ῥίζης προσεγγίσαι ἐν κλάσμασι δεκαδικοῖς, ἑκατονταδικοῖς, χιλιαδικοῖς, κτλ. ἐπ' ἄπειρον. Τούτῳ γὰρ τῷ τρόπῳ οἱ τῆς ῥίζης χαρακτῆρες τῶν ἀκεραίων τῆς αὐτῆς ῥίζης ὑποδιαστελλόμενοι ἐκκύψουσι, παρονομαστὴν ἀείποτε 10, 100, 1000, κτλ. ὑπονοούμενον ἔχοντες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. $\sqrt[3]{5,305,472} = 174,41\ldots = 174 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \ldots$

Β'. $\sqrt[3]{474,676,416} = 780,068\ldots = 780 + \frac{0}{10} + \frac{6}{100} + \frac{8}{1000} + \ldots$

Γ'. $\sqrt[3]{48} = 3,63\ldots = 3 + \frac{6}{10} + \frac{3}{100} + \ldots$

Δ'. $\sqrt[3]{4,827} = 16,9.$ Ε'. $\sqrt[3]{10} = 2,15.$

1	8
3827:3	2000:12
18	12 6 1
108	
216	1261
3096	739000:1323
731000:768	6615
6912	1575
3888	125
729	677375
730809	61625 ὑπόλ.
191 ὑπόλ.	

§. 356. Πρὸς εὕρεσιν τοίνυν τοὐλάχιστον χιλιοστημορίου τῆς τοῦ κλάσματος $\frac{4}{9}$ κυβικῆς ῥίζης ὡς ἔγγιστα, μεταχθήτω τουτὶ πρὸς δεκαδικὸν 0,44444444, οὗ ἡ κυβικὴ ῥίζα 0,76, ἐστὶν ὡσαύτως καὶ τοῦ $\frac{4}{9}$ σχεδὸν χιλιοστημορίου ὡς ἔγγιστα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὡσαύτως, ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς μὴ κυβικὸς ἐπί τινα δεκαδικὸν πολλαπλασιασθῇ κύβον, καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου ἡ κυβικὴ ἐξαχθῇ ῥίζα (§. 347.), ἥτινος διὰ τῆς τοῦ δεκαδικοῦ, ἐφ' ὃν ὁ δοθεὶς ἤδη πεπολλαπλασίασται, ῥίζης διαιρεθείσης, ἡ προσεχεστέρα τοῦ μὴ κυβικοῦ ἀριθμοῦ ἀνακύψει ῥίζα· οἷον ἔστω μὴ κυβικὸς ἀριθμὸς ὁ 4· δεκαδικὸς κύβος ὁ 1000, οὗ ῥίζα ὁ 10· ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γινόμενος 40.000. οὗπερ ἡ ἐξακτέα κυβικὴ ῥίζα ἔσται ὁ 34, ἥτις διὰ τοῦ 10 διαιρεθεῖσα πηλίκον ἀναδώσει $3\frac{4}{10}$, ὅπερ ἔσται ἡ τοῦ δοθέντος μὴ κυβικοῦ ἀριθμοῦ προσεχεστέρα ῥίζα. Συνεστάθω καὶ γὰρ ἔκ τε τοῦ δεκαδικοῦ, ὡς παρονομαστοῦ, καὶ ἐκ τοῦ γινομένου ἐξ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν δοθέντα, ὡς ἀριθμητοῦ, κλάσμα τὸ $\frac{40000}{1000}$· καὶ ἕτερον ἔκ τε τῆς ῥίζης 10 τοῦ δεκαδικοῦ, καὶ ἐκ τῆς εὑρεθείσης ῥίζης τοῦ γινομένου (§. 347.) τὸ $\frac{34}{10}$· οὐκοῦν τὸ $\frac{34}{10}$ κλάσμα, ἡ προσεχεστέρα ῥίζα ἔσται (§. 352.) τοῦ $\frac{40000}{1000}$, τοῦτο δὲ ἴσον τῷ 40 (§. 163.)· ἄρα τὸ $\frac{34}{10}$ καὶ τοῦ 40 ἐστὶ προσεχεστέρα ῥίζα· ἐπεὶ δὲ τὸ $\frac{34}{10} = 3\frac{4}{10}$ (αὐτ.), ἄρα τὸ $3\frac{4}{10}$ ἡ τῇ ἀληθείᾳ προσεχεστέρα καὶ τοῦ 40 ἐστὶ ῥίζα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΛΟΓΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ, ΚΑΙ ΤΩΝ ΚΑΤ ΑΥΤΑΣ ΜΕΘΟΔΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 357. Ποσότης Ἀλγεβραϊκῶς Λογικὴ ἀκούει, ἡ τῶν ῥιζικῶν ἄνευ σημείων, ἢ δυνάμεων αἷς τὰ ἐπίσημα κλασματικὰ, παρίστασθαι ἔχουσα. Ἄλογος δὲ, ἡ ἄλλως προβάλλεσθαι μὴ δυναμένη, εἰμὴ δι' ἐπισήμων κλασματωδῶν, ἢ τινων ἄλλων σημείων τοῖς κλασματώδεσιν ἰσοδυναμούντων ἐκθέταις.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 358. Λογικαὶ τοίνυν ποσότητες εἰσὶν αἱ 5, 7, 11, α, β, γ, ἄνευ δηλαδὴ τῶν ῥιζικῶν σημείων· ἢ καὶ αἱ οὕτως ἐκτιθέμεναι $\alpha^2\beta$, ὡς καὶ $\alpha^{\frac{4}{2}}\beta = \alpha^2\beta$. (§. 295.), $\alpha^2 + 2\alpha\beta$, $\alpha^3 - \frac{2}{3}\alpha^2\beta + \frac{1}{4}\beta^3$, καὶ ἐν γένει $\alpha^\mu - 2\alpha^\mu\beta^\sigma - 8\alpha^\mu\beta^\sigma\gamma^\tau$· τῶν μ, σ, τ, ἀριθμοὺς οἱουςδηποτοῦν ὁλοσχερεῖς ἐμφαινόντων. Ἀποδιοπομπτέον δὲ τῶν ἐκθετῶν τοὺς κλασματιώδεις, αἱ γὰρ τούτους φέρουσαι δυνάμεις ταῖς ῥιζικαῖς καὶ μάλα ποσότησιν ἰσοδύναμαι· οἷον, $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ (§. 240.); $\alpha^{\frac{2}{3}}\beta = \beta\sqrt[3]{\alpha^2}$ (§. 295.), καὶ ἑπομένως εἰσὶν ἄλογοι· οὕτω καὶ $\sqrt{\alpha^2\beta}$ ἢ $\sqrt[3]{\alpha^3\beta}$ καὶ τὰ παραπλήσια.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 359. Αἱ μετὰ τοῦ Ῥιζικοῦ σημείου $\sqrt{}$ ἐκκείμεναι ποσότητες, Ποσότητες Ῥιζαῖαι, ἢ ἁπλῶς Ῥιζικὰ ἀκούουσιν· ὧν αἱ μὲν τὸ σημεῖον $\sqrt{}$ ὑφεπόμεναι Μέγεθη ὑποσήμεια, αἱ δὲ τούτου προηγούμεναι Συνθέται τοῦ Ῥιζικοῦ καλεῖσθαι ἠξίωνται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 360. Ἔχουσι τοίνυν τὰ ῥιζικὰ πρὸς τὴν τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγὴν, ὡς τὰ κλάσματα πρὸς τὴν διαίρεσιν· τουτέστι τὰ ῥιζικὰ κυρίως οὐδὲν ἄλλό εἰσιν, ὅτι μὴ τὰ μετὰ τὴν τῆς ῥίζης ἐξαγωγὴν ὑπόλοιπα, καθ' ὃν δὴ λόγον καὶ τὰ κλάσματα μετὰ τὴν διαίρεσιν πεφύκασι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὰ Ῥιζικὰ καὶ ἄλογα κοινῇ καλεῖσθαι εἰώθασι (§. 298.), διὰ τὸ μηδὲν ἐξεῖναι μέρος, οὔτ' ἐν ὁλοσχερέσιν ἀριθμοῖς, οὔτ' ἐν κεκλασμένοις λαβεῖν τὸ ταῦτα καταμετροῦν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 361. Ἐκθέτης τοῦ Ῥιζικοῦ ἐστιν, ἡ τῷ σημείῳ $\sqrt{}$ ἐπικειμένη ποσότης, ἢ ἀριθμὸς ὁποιοσοῦν· ὃς ἐὰν μὲν τῶν ὁλοσχερῶν ᾖ, ἡ τῷ σημείῳ $\sqrt{}$ συνημμένη ποσότης ῥίζα, ἐὰν δὲ τῶν κεκλασμένων, δύναμις τυγχάνει. (§. 211.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 362. Ἐὰν οὖν τῷ τῶν ὑποσημείων μεγεθῶν ἐκθέτῃ, ὁ τοῦ ῥιζικοῦ ἐκθέτης ἀντὶ παρονομαστοῦ ὑπογραφῇ, ὁποιονδηποτοῦν ῥιζικὸν ἄνευ τοῦ ἑαυτοῦ σημείου, οἷα δὴ δύναμις κλασματώδην ἐπιφέρουσα τὸν ἐκθέτην, ὑπεκτεθήσεται. Ἔστι μὲν γὰρ $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$

(§. 240.), ἄρα καὶ ἐπὶ τῶν $\sqrt[\nu]{\chi}$ καὶ $\sqrt[\mu]{\varphi^{-1}}$ ἔσται $\sqrt[\nu]{\chi} = \chi^{\frac{1}{\nu}}$, καὶ $\sqrt[\mu]{\varphi^{-1}} = \varphi^{-\frac{1}{\mu}}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 363. Ἐπεὶ αὖθις $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ (§. 240.), ἔσται καὶ $\sqrt{\alpha^3} = \alpha^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{\alpha\beta^3} = \alpha^{\frac{1}{3}}\beta$, $\sqrt[4]{(\alpha^2-\chi^3)} = (\alpha^2-\chi^3)^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\alpha^2-\chi^2}} = \sqrt[3]{\alpha(\alpha^2-\chi^2)^{-1}} = \alpha^{\frac{1}{3}}(\alpha^2-\chi^2)^{-\frac{1}{3}}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 364. Ὡσαύτως κἀνάπαλιν, ποσότης οἱαποτοῦν μετὰ κλασματώδους ἐκτιθεμένη ἐκθέτου, ἀντὶ ῥιζικῆς ἐκληφθήσεται ποσότητος· ἐὰν τοῦ μὲν ταύτης παρονομαστοῦ ἀντὶ τοῦ τῆς ῥίζης ἐκθέτου προβαλλομένου, ὁ ταύτης ἀριθμητὴς ἐκθέτης τοῦ ὑποσημείου ἀποβῇ μεγέθους (§. 242. 293.)· οἷον, $\alpha^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\alpha^2}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 365. Ἡνίκα ὁ τοῦ ῥιζικοῦ ἐκθέτης, ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ τῆς θετικῆς ὑποσημείου δυνάμεως, ἢ ὁπηνίκα τουτὶ τὸ ὑποσήμειον μέγεθος δύναμίς τις τῶν ἐντελῶν τυγχάνῃ ἰσοβάθμιος τῷ τοῦ σημείου ἐκθέτῃ, ἡ τοιαύτη ποσότης ἀπαλλαγῆναι τοῦ ῥιζικοῦ ἔχει, καὶ ἄνευ τούτου τεθῆναι· οἷον $\sqrt{\chi^2} = \chi$, $\sqrt{16}$ ἢ $\sqrt[2]{4^2} = 4$, $\sqrt[3]{27}$ ἢ $\sqrt[3]{3^3} = 3$, $\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2}$ ἢ $\sqrt[2]{\overline{\alpha-\gamma}^2} = \alpha - \gamma$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 366. Ὁποιονδηποτοῦν ἄρα μέγεθος εἰς ῥιζικὸν οἱονοῦν, τῆς αὐτῆς σωζομένης δυνάμεως, μετασχηματισθήσεται, ἐὰν τουτὶ πρὸς δύναμιν, τῷ τοῦ σὺν ᾧ ἐκτέθειται ῥιζικοῦ ἐκθέτῃ ἰσοβάθμιον ὑψωθῇ· οἷον ἔστω μέγεθος $\beta^2\chi$ πρὸς ῥιζικὸν ἰσοβάθμιον τῷ $\sqrt[3]{\tau}$, μετασχηματισθησόμενον. Κυβωθέντος τοίνυν τοῦ $\beta^2\chi$, καὶ ὑπὸ τὸ σημεῖον τεθέντος ἔσται $\beta^2\chi = \sqrt[3]{\beta^6\chi^3}$ ἴσον τῷ τὸ σημεῖον $\sqrt[3]{\tau}$ ἔχοντι (§. 365.). Διὸ καὶ ἔσται·

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 367. Τὰς ὑπὸ τὸ Ῥιζικὸν ποσότητας ὧν οἱ παράγοντες πῇ μὲν τὸν αὐτὸν τῷ Ῥιζικῷ πλουτοῦσιν Ἐκθέτην, πῇ δ' οὔ· κατὰ μέρος, ὅσον ἔνεστι τοῦ Ῥιζικοῦ ἀπαλλάξαι τῆς ἀλογίας ἐν μέρει γοῦν ἀποσκυβαλιζομένης· οἷον $\sqrt[3]{\alpha^3\beta} = \alpha\sqrt[3]{\beta}$.

ΛΥΣΙΣ.

Ἡ κατὰ τὴν ἐκκειμένην δύναμιν ὁμοβάθμιος ὑποσήμειος ποσότης καθ' ὃ μέρος δυνατὸν ἐξαγομένη, πρὸ τοῦ σημείου, ὡς ῥίζα αὐτὸ πολλαπλασιάζουσα, γραφέσθω· τὸ δὲ λοιπὸν, οὗ ἡ ῥίζα ἄληπτος ὑπὸ τὸ σημεῖον, ὡς καὶ πρότερον κείσθω.

ΔΕΙΞΙΣ.

Δύω γὰρ μεγέθη πρὸς τὴν αὐτὴν ἐξαιρόμενα δύναμιν καὶ γινόμενα ἴσα προβάλλοντα ἐξισοῦνται ἀλλήλοις. Ἐνθέντοι τοῦ μεγέθους $\sqrt[3]{\alpha^3\beta}$ πρὸς τριτοβάθμιον ἐξαρθέντος δύναμιν, ἐκκύψει ἡ $\alpha^3\beta$ ποσότης (§. 226. 304.). Ἐπεὶ $\sqrt[3]{\alpha^3\beta}$ δηλοῖ τὴν κυβικὴν ἀπὸ τοῦ $\alpha^3\beta$, ὃ ὑπεθέμεθα εἶναι κύβον, ἐξελεῖν ῥίζαν· διὸ καὶ τοῦ $\sqrt[3]{}$ ἐν τῇ τοῦ $\sqrt[3]{\alpha^3\beta}$ ἐκθέσει ἀποβληθέντος, ἔσται οὕτω πρὸς τὴν τρίτην αὔτη ἐξαρθεῖσα δύναμιν (§. 230.)· ἀπομένως τε $\alpha^3\beta$ ὁ τοῦ $\sqrt[3]{\alpha^3\beta}$ ἐστὶ κύβος. Ἀλλ' οὖν ὡσαύτως $\alpha^3\beta$ ἐστὶ κύβος καὶ τοῦ $\alpha\sqrt[3]{\beta} = \alpha \times \sqrt[3]{\beta}$· μεγέθους γὰρ ὁτουοῦν πρὸς κύβον, ἢ πρὸς ὁποιανδηποτοῦν ἄλλην δύναμιν ἐξαιρουμένου, τοὺς τούτου ὡσαύτως παράγοντας ἐξαίρεσθαι δέον· οἷον $(\alpha\beta\gamma)^3 = \alpha^3\beta^3\gamma^3$ (§. 232.)· ἄρα καὶ $\alpha \times \sqrt[3]{\beta}$ πρὸς κύβον ἐξαρθησόμενον ἀναδώσει $\alpha^3\beta$· ὅ, τε τοῦ $\alpha\sqrt[3]{\beta}$ κύβος ἴσος τῷ $\alpha^3\beta$. Ἔστι δὲ ἐκ τῶν δειχθέντων ὁ αὐτὸς καὶ τοῦ $\sqrt[3]{\alpha^3\beta}$. Ἄρα $\sqrt[3]{\alpha^3\beta} = \alpha\sqrt[3]{\beta}$. Ὡσαύτως καὶ $\sqrt{\beta^2\gamma} = \beta\sqrt{\gamma}$· ἔστι γὰρ $\sqrt{\beta^2\gamma} = \sqrt{\beta\beta} \times \sqrt{\gamma}$ (§. 107.)· ἀλλαμὴν $\sqrt{\beta\beta} = \sqrt{\beta^2} = \beta$ (§. 304.), ἄρα $\sqrt{\beta\beta} \times \sqrt{\gamma} = \beta\sqrt{\gamma}$, $3\sqrt{\alpha\alpha\beta + \alpha\alpha\gamma} = 3\alpha\sqrt{\beta+\gamma}$, $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{(27 \times 2)} = 3\sqrt{2}$. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

§. 368. Ἀποδοθήσεται τοίνυν ὡσαύτως $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta\gamma^{2\nu}}$ ἁπλούστερον οὕτω $\alpha\gamma^2\sqrt[\nu]{\beta}$. Ἔστι γὰρ $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta\gamma^{2\nu}} = \alpha^{\frac{\nu}{\nu}}\beta^{\frac{1}{\nu}}\gamma^{\frac{2\nu}{\nu}} = \alpha\gamma^2\beta^{\frac{1}{\nu}}$ (§. 255.), καὶ $\beta^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\beta}$ (§. 240.)· ἄρα $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta\gamma^{2\nu}} = \alpha\gamma^2\sqrt[\nu]{\beta}$ (§. 367.). Τουτέστιν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, ἢ τῆς ὁπωσδήποτε ἄλλως ἐκφερομένης ποσότητος, καὶ ὑπὸ τὸ Ῥιζικὸν τελούσης, ἕν τι τῶν παραγόντων, εἴτε ὁλοσχερὲς, εἴτε δὴ καὶ κλασματῶδες (ὡς $\sqrt{\frac{28}{45}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{5}}$· ὅτι $\frac{4}{9} \times \frac{7}{5} = \frac{28}{45}$, τῇ δὲ ἐκ τοῦ $\frac{4}{9}$ παράγοντος τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαγωγῇ ἔσται $\frac{2}{3}$·) ἐν μέρει ἀποληφθῇ, ὁμοβαθμίου τυγχάνον τῇ ῥίζῃ δυνάμεως, ἡ ὁμοταγὴς ῥίζα τοῦ τηλικούτου παράγοντος, ὀρ-

θῶς ἀείποτε καὶ κατὰ σκοπὸν, πρόγε τοῦ Ῥιζικοῦ σημείου, οἷάτις παράγων ταχθήσεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 369. Κἀντιστρόφως, τὸν τοῦ δοθέντος Ῥιζικοῦ Συνθέτην ὑποσήμειον ποιῆσαι, τῆς τοῦ Ῥιζικοῦ δυνάμεως ἀμεταβλήτου τηρουμένης· οἷον, $\alpha^\mu\sqrt[\nu]{\beta^\sigma} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu\nu}\beta^\sigma}$.

ΛΥΣΙΣ.

Ὁ τοῦ Ῥιζικοῦ συνθέτης ἐπὶ τὴν προτεθεῖσαν τοῦ Ῥιζικοῦ ἐξαρθεὶς δύναμιν, τοῖς ὑπὸ τὸ Ῥιζικὸν μεγέθεσιν ἐπιπολλαπλασιασθήτω. Φημὶ τὸ οὕτως ἐκκύπτον γινόμενον, τὸ ἐπιταχθὲν εἶναι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστι μὲν γὰρ $\alpha^\mu\sqrt[\nu]{\beta^\sigma} = \alpha^\mu\beta^{\frac{\sigma}{\nu}} = \alpha^{\frac{\mu\nu}{\nu}}\beta^{\frac{\sigma}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu\nu}}\sqrt[\nu]{\beta^\sigma} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu\nu}\beta^\sigma}$ (§. 226. 294.). Ὡσαύτως καὶ $4\sqrt{5} = \sqrt{(4^2 \times 5)} = \sqrt{(16 \times 5)} = \sqrt{80}$. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 370. Ἔσται τοίνυν $\beta\sqrt{\gamma} = \sqrt{\beta^2\gamma}$· ἐπεὶ $\beta\sqrt{\gamma} = \beta \times \sqrt{\gamma} = \sqrt{\beta^2} \times \sqrt{\gamma} = \sqrt{\beta^2\gamma}$, $\alpha\sqrt{\beta+\gamma} = \sqrt{(\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma)}$, $\alpha\sqrt[3]{\beta} = \sqrt[3]{\alpha^3\beta}$, $(\alpha-\beta)\sqrt{\gamma} = \sqrt{(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)\gamma} = \sqrt{\alpha^2\gamma - 2\alpha\beta\gamma + \beta^2\gamma}$, $\alpha\sqrt[\mu]{\beta} = \alpha^{\frac{\mu}{\mu}} \times \beta^{\frac{1}{\mu}} = \sqrt[\mu]{\alpha^\mu\beta}$ (§. 369.), $3\alpha\sqrt{2\alpha} = \sqrt{18\alpha^3}$, $2\sqrt[3]{(\alpha^2-\chi^2)} = \sqrt[3]{(8\alpha^2 - 8\chi^2)}$, $(\alpha-\chi)\sqrt{(\alpha+\chi)} = \sqrt{(\alpha-\chi)^2(\alpha+\chi)} = \sqrt{(\alpha^2-\chi^2)(\alpha-\chi)}$. Ἐξ ὧν ἕπεται, ὅτι δυοῖν Ῥιζικῶν τῆς αὐτῆς μὲν δυνάμεως, ὑπερογενῶν δὲ ὄντων, τὸ μεῖζον τὸ ὑποσήμειον ἔχον, μειζοδύναμον πάντως καθέστηκεν, οἷον $2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$· ἐπεὶ $2\sqrt{7} = \sqrt{28}$, $3\sqrt{3}$ δὲ $= \sqrt{27}$, ἄρα $\sqrt{28} > \sqrt{27}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 371. Ἐὰν τὸ ὑποσήμειον μέγεθος ἀριθμός τις τύχῃ, ζητητέον εἰ ἔξεστι τοῦτον ἐπὶ τοὺς ἁπλοὺς ἀναλυθῆναι παράγοντας (§. 177.)· οὗ γενομένου, ἐὰν τῶν ὑποσημείων ἁπλῶν παραγόντων τις, ἰσάριθμος ταῖς τοῦ ῥιζικοῦ ἐκθέτου μονάσιν ἐκκύπτῃ, τοσάκις αὐτὸν ἀπὸ τοῦ ῥιζικοῦ ἀπαλειπτέον, καὶ τὸν πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ ἐκθέτου ἅπαξ μόνον ἐπ᾽ αὐτὸν πολλαπλασιαστέον (§. 200.)· οἷον, $5\sqrt[3]{3024} = 5\sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7} = 5 \cdot 2 \cdot 3\sqrt[3]{2 \cdot 7} = 30\sqrt[3]{14}$, $4\sqrt[3]{16} = 4\sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 4 \cdot 2\sqrt[3]{2} = 8\sqrt[3]{2}$ (§. 368.). Ταυτὸ δὲ κρατήσει, ἔνθα καὶ στοιχεῖα τοῖς ἀριθμοῖς συμμέμικται, ὡς ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς παραδειγμάτων·

Α'. $\sqrt[3]{16\alpha^4\beta} = \sqrt[3]{2 \cdot 8 \cdot \alpha^3 \cdot \alpha \cdot \beta} = 2\alpha\sqrt[3]{2\alpha\beta}$.

Β'. $3\sqrt{8\alpha^3\beta^5} = 3\sqrt{2 \cdot 4 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha \cdot \beta^4 \cdot \beta} = 6\alpha\beta^2\sqrt{2\alpha\beta}$.

Γ'. $2\sqrt{(\alpha^2\chi^2 - \chi^4)} = 2\sqrt{\chi^2(\alpha^2 - \chi^2)} = 2\chi\sqrt{(\alpha^2 - \chi^2)}$.

Δ'. $\sqrt{(3\alpha^2\gamma + 6\alpha\beta\gamma + 3\beta^2\gamma)} = \sqrt{3\gamma(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)} = (\alpha + \beta)\sqrt{3\gamma}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 372. Τοῦ παραγομένου τοίνυν ὑπὸ δυοῖν ἰσοβαθμίων δυνάμεων, ῥίζα ἐστὶν ἰσοβάθμιος, τὸ ὑπὸ τῶν

ῥιζῶν ἐκείνων ἐπιπολλαπλασιαζομένων γινόμενον· οἷον τοῦ ὑπὸ α^3 καὶ β^3 κύβου $\overline{\alpha\beta}^3$, ῥίζα τὸ ὑπὸ α καὶ β παραγόμενον $\alpha\beta$· καὶ τὸ ὑπὸ $\overline{\alpha\beta}^4$ καὶ $\overline{\gamma\delta}^4$, ῥίζα τὸ ὑπὸ $\alpha\beta >< \gamma\delta$, ἤτοι τὸ $\alpha\beta\gamma\delta$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 373. Ῥιζικὰ Ἁπλᾶ μέν εἰσι, τὰ μονοειδῶς καὶ ἀσημείως ἐκκείμενα· ὡς $\sqrt{\alpha^2}$, $\sqrt{\overline{\alpha\beta}^3}$. Σύνθετα δὲ τὰ ἐκ δυοῖν, ἢ πλειόνων ὀνομάτων συγκείμενα· ὡς $\sqrt{\overline{(\alpha+\beta)}^4}$, $\sqrt{\overline{\alpha\beta + 2\gamma\delta}^5}$, $\alpha\sqrt{\mu} + \beta\sqrt{\nu}$, καὶ τὰ τούτοις παραπλήσια.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 374. Ῥιζικὰ Ὁμωνυμοῦντα, ἢ Ὁμοταγῆ καλοῦνται τὰ ὁμοίους τοὺς Ῥιζικοὺς ἐκθέτας ἔχοντα, οἷον $\sqrt{5}$, $\sqrt{\alpha\beta^3}$, $\sqrt{74}$, κτλ.· τὰ δ᾽ ἀνομοίους Ἑτερώνυμα, ἢ Ἑτεροταγῆ, ὡς $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{\alpha}$, κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 375. Ὁμώνυμα ἄρα μεγέθη, ἢ ποσότητες ὡσαύτως εἰσὶ καὶ ὧν τὰ κλάσματα ὁμοταγῆ καθεστήκασι (τοῦ ἐκθέτου κλασματικῶς, ὡς εἴρηται (§. 357.), παρισταμένου), ὡς $\alpha^{\frac{1}{3}}$, $\alpha^{\frac{2}{3}}$, καὶ ἐν γένει $\alpha^{\frac{\nu}{\mu}}$, $\alpha^{\frac{\chi}{\mu}}$. Ἑτερώνυμα δὲ, ὡς $\alpha^{\frac{1}{2}}$, $\alpha^{\frac{1}{3}}$, κτλ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 376. Ῥιζικὰ Ὁμογενῆ εἰσι, τὰ ὅμοια ὑποσήμεια μεγέθη ἔχοντα· ὡς $\alpha\sqrt[\nu]{\delta}$, $\beta\sqrt[\nu]{\delta}$. Τὰ δὲ διάφορα, Ἑτερογενῆ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 377. Δύναται ἀλλ' οὖν τὰ ἑτερογενῆ τῶν ῥιζικῶν, ἐφ' ὁμογενῆ ἀνακαλεῖσθαι, τῶν μὴ οὕτως ἐχόντων τοῦ ῥιζικοῦ ἀπαλαττομένων (§. 367.), ἢ καὶ εἰς ἁπλουστέραν ἀναλυομένων ἔκθεσιν (§. 358.) οἷον ἔστωσαν $\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu}\gamma}$ καὶ $\vartheta\sqrt[\nu]{\delta^{2\nu}\gamma}$ ἑτερογενῆ, ἔσται $\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu}\gamma} = \alpha\beta\sqrt[\nu]{\gamma}$, καὶ $\vartheta\sqrt[\nu]{\delta^{2\nu}\gamma} = \vartheta\delta^{2}\sqrt[\nu]{\gamma}$· ὡσαύτως $5\sqrt[3]{2}$ καὶ $4\sqrt[3]{16}$, ἐφ' ὁμογενῆ ἀναχθήσονται τῇ πρὸς τοὺς παράγοντας διαλύσει, $4\sqrt[3]{16} = 4\sqrt[3]{2.2.2.2} = 4.2\sqrt[3]{2} = 8\sqrt[3]{2}$·

$$\text{καὶ}\begin{cases}3\sqrt{8\alpha^{2}\beta} = 3\sqrt{2.4.\alpha^{2}\beta} = 6\alpha\sqrt{2\beta}.\\ 4\sqrt{18\alpha^{2}\beta} = 4\sqrt{2.9.\alpha^{2}\beta} = 12\alpha\sqrt{2\beta}.\end{cases}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 378. Ῥιζικὰ *Ἀσύμμετρά* εἰσιν, ὧν τὴν ῥίζαν οὐκ ἔστιν ἀπὸ βαθμοῦ οἱουδηποτοῦν, οὔτε δι' ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν, οὔτε μὴν διὰ κεκλασμένων ἀκριβῶς λαβεῖν· οἷον $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, κτλ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὰ τοιαῦτα μεγέθη ἀδύνατόν ἐστι τοῦ ῥιζικοῦ ἀπαλλάξαι, ἢ τὴν τούτων ῥίζαν ἀπὸ βαθμοῦ ὁποιουοῦν ἐν ὅλῳ ἢ ἐν μέρει ἐντελῶς λαβεῖν, διὸ καὶ Ἀσύμμετρα ἤκουσαν, ὡς οὐδὲν κοινὸν μέτρον μετὰ τῆς μονάδος, ἢ μετά τινος ἐκείνης μέρους ἔχοντα (ὅρα τὸ τοῦ 301. §. Σχόλιον). Ἔνθεν τοι οὐδεὶς ἀριθμὸς, οὔτε τῶν ὁλοσχερῶν, οὔτε μὴν τῶν κεκλασμένων ἔσται, ὃς ἂν τοῦ 5 ῥίζα ληφθείη τετράγωνος. Ἀλλ' οὖν ἐπὶ τῶν τοιούτων ποσοτήτων, ὧν τὴν ῥίζαν ἀδύνατον ἀκριβῶς λαβεῖν, ἔξεστι μᾶλλον καὶ μᾶλλον ταύτης ἐγγύτερον

γίνεσθαι ἐπ' ἄπειρον, ὡς ἐν τῇ τῶν ἀτελῶν δυνάμεων τῆς ῥίζης ἐξαγωγῇ ὑποθέμεθα· οὕτως τε παραπλήρωμα ἐν δεκατημορίοις, ἑκατοστημορίοις, χιλιοστημορίοις, κτλ. ἐκκύψει, οὗ ἡ χρῆσις ἐν ταῖς καθ' ἡμᾶς πράξεσιν ἀσύμφορος.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 379. Ποσότητες Ῥιζικαὶ *Πραγματιώδεις* εἰσιν αἱ ἀριθμοῖς μὲν ἄῤῥητοι, γραμμαῖς δὲ ῥηταί. *Νοηταὶ* δὲ ἢ *κατ' ἐπίνοιαν*, αἱ μηδὲ γραμμικῶς ὁρίζεσθαι πεφυκῦαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 380. Τοιαῦται εἰσὶ, τῶν μὲν πραγματιωδῶν, ὡς ἡ τοῦ 8 τετράγωνος ῥίζα παραθέσει τῇ πρὸς τὴν τοῦ 4. Ἔστι γὰρ ἐκείνη ἡ διαγώνιος τοῦ ὑπὸ δύω τριγώνων (§. 302.), ὡς ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ δειχθήσεται. Τῶν δὲ κατ' ἐπίνοιαν ἤτοι ἀδυνάτων, ὡς ἡ τοῦ $-\alpha$ τετραγωνική, ὅτι καὶ τὸ τετράγωνον $-\alpha^{2}$ ἀδύνατον (§. 297.).

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

Ἐν ἐνίοις τῶν ῥιζικῶν ποσοτήτων ἡ ἐγγὺς τῆς ἀληθοῦς ῥίζα τῶν ἀδυνάτων ἐστὶν, ἢ, τα ταύτης ἐπίμοχθος ἔρευνα ἄλογός τε καὶ ἀλυσιτελής. Οὕτω $\sqrt{-\alpha^{2}}$ οὐκ ἔστιν, οὔτε μὴν εἶναι δύναται $+\alpha$ ἢ $-\alpha$, καὶ γὰρ $+\alpha$ ἢ $-\alpha$ πρὸς τετράγωνον ἐξαρθὲν οὐδέποτε δώσει $-\alpha^{2}$ (§. 221.)· ὡσαύτως $\sqrt{-9}$ οὐκ ἔστι $+3$ οὔτε μὴν -3, ἐπεὶ 3×3, ἢ -3×-3, δώσουσι $+9$, οὐ μὴν δὲ -9· τούτου χάριν τὰ τοιαῦτα τῶν μεγεθῶν ἢ ποσοτήτων εἴδη, κατ' ἐπίνοιαν καὶ ἀδύνατα προσηγόρευται (§. 300. 379.). Ἔνθεντοι ῥᾴδιον ἐστὶν ἀμέσως τε καὶ ἐκ πρώτης ὄψεως τὰς κατ' ἐπίνοιαν καὶ ἐπιπλάστους τῶν ποσοτήτων, τῶν μὴ τοιούτων, συνιδεῖν τε καὶ διακρῖναι, ὁσάκις δηλ. αὗται ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν, οὗ ὁ ἐκθέτης ἀρτιάριθμος, ἀποφατικῶς ἐμφαινόμεναι κεῖνται, ὡς $\sqrt[4]{-a^4}$, $\sqrt[6]{-a^6}$. Οὐδεμία γὰρ τῶν κατὰ θέσιν ἢ ἀπόφασιν ποσοτήτων, ἐφ' ἑαυτὴν ἐν ἀριθμῷ ἀρτίῳ πολλαπλασιαζομένη, ἀποφατικὸν δώσει γινόμενον (§. 221. 300.), ὡς εἴρηται.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

Ἀλλ' οὖν ζητήσειεν ἄντις, τοῦ χάριν τὰ τοιαῦτα τῶν κατ' ἐπίνοιαν μεγεθῶν ἐν τῷ ὑπολογισμῷ συγχωρεῖν τε καὶ ἀποδέχεσθαι εἴωθε; πρὸς ὃν φημὶ, ὅτι τῆς λύσεως προβλήματος ὁτουοῦν προτιθεμένης, ὁ ταύτην ἀναδεχόμενος συνιδεῖν οὐκ ἔχει ἀμέσως, εἰ τὸ προτεθὲν τῶν δυνατῶν ἐστὶ καὶ ἐνδεχομένων, ἢ τῶν ἀδυνάτων τε καὶ ἀλόγων· ὅθεν καὶ πρὸς αὐτοῦ ἐστι, τὰς τοῦ αἰτήματος ὑποθέσεις (εἰ καί τινες, τῶν ἀντιλεγομένων μὲν καὶ ἀτόπων, οὐμὴν δὲ ἀμέσως καὶ ἐκ πρώτης ὄψεως ληπτῶν, ὑφέρποιεν) ἐκθεῖναι. Οὕτω γὰρ μετὰ τὴν πασῶν τῶν πρὸς τὴν ζητουμένην λύσιν ὁδηγουσῶν ὑποθέσεων παράθεσιν, ἔσχατον πρὸς ἀναδιδόμενον ἤτοι ἐκκύπτον, νοητὸν καὶ κατ' ἐπίνοιαν καταντήσει· οὕτως οὖν ἀποδεῖξαι δύναται, τὸ αἰτούμενον τῶν ἀτόπων εἶναι, ἐπομένως τε τὸ προτεθὲν πρόβλημα διὰ τῆς ἐπ' ἀδύνατον ἐπαγωγῆς διαλυθῆναι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 381. Τὰ κατ' ἐπίνοιαν τοίνυν μεγέθη ὑπολογιζόμενα τὸ κατ' αὐτὰς ἀδύνατον ἐκκρούουσι, καὶ εἰς πραγματιώδη μετασχηματίζεσθαι ἔχουσι· καὶ γὰρ -4 πραγματιῶδές τε καὶ τῶν δυνατῶν ἐστὶ μέγεθος· δύναται γάρ τις 4 ἔλαττω τοῦ μηδενὸς ἔχειν (ὅρα τὸ τοῦ §. 47. Σχόλ.)· οἷον ὁ μηδὲν ἔχων, 100 δὲ προσέτι ὀφείλων τυγχάνει ἀργύρια, 100 ἔλαττω τοῦ μηδενὸς ἔσχηκεν· εἰ γὰρ καὶ ἐν ὑπάρξει τῶν 100 ἔσται, ἀλλ' οὖν, διὰ τὴν ἰσοδύναμον ὀφειλὴν, οὐδὲν ἕξει (§. 48.). Εἰ οὖν πρός θυμοῦ τινι γένοιτο τὴν τοῦ -4 τετραγωνικὴν λαβεῖν ῥίζαν; ἤτοι $\sqrt{-4}$, ἔσται τὸ τούτου αἴτημα τῶν ἀτόπων, τὸ δὲ $\sqrt{-4}$ τῶν κατ' ἐπίνοιαν. Ἀλλ' οὖν ἔνεστι τουτὶ διὰ τοῦ ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασμοῦ πραγματιῶδες ἐκκύψαι, τῆς κατ' αὐτὸ ἀλογίας οὕτως ἀποσκυβαλιζομένης, ἐπομένως τε γενέσθαι $\sqrt{-4} \times \sqrt{-4} = -4$· ὡς ὄντος γὰρ τοῦ ῥιζικοῦ τοῦ τῆς ἀλογίας αἰτίου, ἡ τούτου ἀποβολὴ πραγματιῶδες τὸ ὑπασήμειον ἀναδίδωσι μέγεθος.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Σημειούσθω ἀλλ' οὖν μεγίστην εἶναι τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῶν κατ' ἐπίνοιαν καὶ τῶν τῷ μηδενικῷ (§. 16.) ἴσων (§. 49.) ποσοτήτων. Ποσότης γὰρ τῷ μηδενὶ ἴση, ἄλογος ἤτοι ἀδύνατος κληθῆναι οὐ δύναται, ἔνεστι γὰρ ποσότητά τινα ὑφ' ἑτέρας περιτρέπεσθαι (§. αὐτόθι): τοὐναντίον δὲ αἱ κατ' ἐπίνοιαν ποσότητες τῶν ἀλόγων τε καὶ ἀνυπάρκτων εἰσὶν, ὡς ἀντιλογίας πλήρεις κἀπὶ τὴν ἐπὶ τὸ ἄτοπον ἐπαγωγὴν ῥέπουσαι. Ἔνθεντοι ῥητέον, τὰς κατ' ἐπίνοιαν ποσότητας ὡς μηδενικὰ θεῖναι ρεῖσθαι οὐχ οἷόν τε εἶναι, ἀλλ' οὔτεμην ἡ τῷ μηδενὶ ἴση ποσότης τῇ κατ' ἐπίνοιαν λέγοιτ' ἂν ἰσοδύναμος· οὐδὲν γὰρ τῶν ἀτόπων ποσότητά τινα ἴσην ἀποβῆναι τῷ μηδενί, καὶ γὰρ $+5-5=0$, ὡς δέδεικται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 382. Ἐὰν ἐπὶ Ῥιζικοῦ οὑτινοσοῦν, ὅ, τε τοῦ Ῥιζικοῦ καὶ τῆς ὑποσημείου δυνάμεως ἐκθέτης, διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ, ἡ τοῦ Ῥιζικοῦ δύναμις ἀμεταποίητος σώζεται· οἷον

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \sqrt[\nu\sigma]{\alpha^{\mu\sigma}} \text{. καὶ } \sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \sqrt[\frac{\nu}{\tau}]{\alpha^{\frac{\mu}{\tau}}}$$

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστι μὲν δὴ $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ (§. 294.)· τοίνυν $\alpha^{\frac{\mu\cdot\sigma}{\nu\cdot\sigma}} = \alpha^{\frac{\mu\sigma}{\nu\sigma}}$ (§. 231.)· ἔστι δὲ $\alpha^{\frac{\mu\sigma}{\nu\sigma}} = \sqrt[\nu\sigma]{\alpha^{\mu\sigma}}$ (§. 240.)· ἄρα $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{\frac{\mu\sigma}{\nu\sigma}} = \sqrt[\nu\sigma]{\alpha^{\mu\sigma}}$· ὡσαύτως $\sqrt[3]{\alpha} = \sqrt[3\cdot2]{\alpha^2} = \sqrt[6]{\alpha^2}$· καὶ γὰρ $\sqrt[3]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{3}}$, καὶ $\sqrt[6]{\alpha^2} = \alpha^{\frac{2}{6}}$ (§. 210, 294.)· τοίνυν $\alpha^{\frac{2}{6}} = \alpha^{\frac{1}{3}}$· ἄρα $\alpha^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\alpha} = \sqrt[6]{\alpha^2}$. Ὃ ἦν τὸ α'. Γενέσθω δὴ $\sigma = \frac{1}{\tau}$, τῆς ἀνθυποκαταστάσεως γινομένης ἔσται ἐκ τῶν δειχθέντων $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \sqrt[\frac{\nu}{\tau}]{\alpha^{\frac{\mu}{\tau}}}$· ὡσαύτως καὶ $\sqrt{\alpha\beta^3} = \sqrt[\frac{2}{3}]{\alpha^{\frac{1}{3}}\beta}$, $\sqrt[4]{\alpha} = \sqrt{\alpha^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\sqrt{\alpha}}$, $\sqrt[6]{\alpha} = \sqrt[2]{\alpha^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\alpha}} = \sqrt[3]{\sqrt{\alpha}}$· Ὃ ἦν τὸ β'.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 383. Ἐφ' ᾧ τοίνυν Ῥιζικὰ δύω ἑτεροταγῆ ἐπὶ τὴν αὐτὴν ἀναχθῶσι τάξιν, τῆς αὐτῶν τηρουμένης δυνάμεως, ἀπόχρη τὸν τοῦ πρώτου ἐκθέτην ἐπὶ τὸν τοῦ δευτέρου ἐκθέτην πολλαπλασιάσαι, τήν τε τοῦ πρώτου ὑποσήμειον ποσότητα πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ ἐκθέτου τοῦ δευτέρου δηλουμένην δύναμιν ἐξᾶραι. Κἀνάπαλιν τὸν τοῦ δευτέρου ἐκθέτην, ἐπὶ τὸν τοῦ πρώτου ἀγαγεῖν, καὶ τὴν ὑποσήμειον τοῦ δευτέρου ποσότητα, πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ ἐκθέτου τοῦ πρώτου δεικνυμένην δύναμιν ἐξᾶραι· οἷον ἐπὶ $\sqrt[3]{\gamma}$ καὶ $\sqrt[4]{\varphi}$, ἔσται $\sqrt[3]{\gamma} = \sqrt[3\cdot4]{\gamma^4}$· καὶ $\sqrt[4]{\varphi} = \sqrt[4\cdot3]{\varphi^3}$· ἐπομένως τε $\sqrt[12]{\gamma^4} = \sqrt[12]{\varphi^3}$ ῥιζικῷ ὁμοταγεῖ. Ὡσαύτως καὶ ἐὰν τοῦ ῥιζικοῦ ὡς δυνάμεως κλασματῶδες ἐπιφερούσης ἐπίσημον ἐκτεθέντος, τὴν πρᾶξιν τῷ αὐτῷ πάντως μετέλθωμεν τρόπῳ, ὡς ἐπὶ τοῖς ἐφεξῆς παραδείγμασιν·

$$\text{Α'.}\begin{cases} \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}. \\ \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}. \end{cases}$$

$$\text{Β'.}\begin{cases} \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}. \\ \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}. \\ \sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{7^4} = \sqrt[12]{2401}. \end{cases}$$

$$\text{Γ'.}\begin{cases} \sqrt[\nu]{\alpha\beta} = \alpha^{\frac{1}{\nu}}\beta^{\frac{1}{\nu}} = \alpha^{\frac{3\mu}{3\mu\nu}}\beta^{\frac{3\mu}{3\mu\nu}} = \sqrt[3\mu\nu]{\alpha^{3\mu}\beta^{3\mu}} \\ \sqrt[3]{\alpha^\nu\gamma} = \alpha^{\frac{\nu}{3}}\gamma^{\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{\nu\nu\mu}{3\mu\nu}}\gamma^{\frac{\mu\nu}{3\mu\nu}} = \sqrt[3\mu\nu]{\alpha^{\nu\nu\mu}\gamma^{\mu\nu}} \\ \sqrt[\mu]{\alpha^3} = \alpha^{\frac{3}{\mu}} = \alpha^{\frac{9\nu}{3\mu\nu}} = \sqrt[3\mu\nu]{\alpha^{9\nu}}. \end{cases}$$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Διὰ τῆς τοιαύτης οὖν ἀναγωγῆς δυοῖν ῥιζικῶν ἑτερωνύμων τὸ μεῖζον ἔνεστι διακρίνειν· οἷον, $\sqrt[4]{5} > \sqrt[6]{11}$· ἐπὶ τὴν αὐτὴν ἀναχθησόμενα δύναμιν 12 τὸ μὲν κυβωθήσεται, τὸ δὲ τετραγωνισθήσεται· ἔστι δὲ $\sqrt[4]{5}$

$= \sqrt[12]{125}$· καὶ $\sqrt[6]{11} = \sqrt[12]{121}$· ἄρα $\sqrt[12]{125} > \sqrt[12]{121}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 384. Ὡσαύτως ποσότης οἱαδηποτοῦν α ἐν τῇ τοῦ ῥιζικοῦ ἐκθέσει εἰσαχθήσεται, τῇ τοῦ ῥιζικοῦ συνθέτου διὰ τοῦ α διαιρέσει, καὶ τῷ ἐπὶ τὴν τοῦ α δύναμιν τῷ ῥιζικῷ ἐκθέτῃ ἐμφαινομένην τοῦ ὑποσημείου μεγέθους πολλαπλασιασμῷ· ἢ ὃ ταυτόν ἐστι, τοῦ μὲν ῥιζικοῦ συνθέτου ἐπὶ τὸ α πολλαπλασιαζομένου, τοῦ δ' ὑποσημείου μεγέθους διὰ τῆς τοῦ α δυνάμεως τῷ ῥιζικῷ ἐκθέτῃ ἐπισημαινομένης, διαιρουμένου· οἷον $\gamma\sqrt{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}\sqrt{\alpha^2\beta}$ ἢ $\alpha\gamma\sqrt{\frac{\beta}{\alpha^2}}$· καὶ $\gamma\sqrt[3]{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}\sqrt[3]{\alpha^3\beta}$ ἢ $\alpha\gamma\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha^3}}$. Οὕτω γὰρ διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος τὸ ῥιζικὸν μέγεθος πολλαπλασιασθὲν καὶ διαιρεθὲν, οὐδόλως ἠλλοίωται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 385. Δυοῖν Ῥιζικῶν ὁμωνύμων, ἐὰν τὰ ὑποσήμεια μεγέθη ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσιν, ἡ τῶν ῥιζικῶν δύναμις ἀναλλοίωτος σώζεται· οἷον

$$\sqrt{\alpha} . \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}, \text{ καὶ } \sqrt{\phi\chi} : \sqrt{\phi} = \sqrt{\chi}.$$

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστι μὲν δὴ $\sqrt{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{2}}$ καὶ $\sqrt{\beta} = \beta^{\frac{1}{2}}$ (§. 255.)· ἔστι δὲ $\alpha^{\frac{1}{2}} . \beta^{\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha\beta}$ (§. 293.)· ἄρα ἔσται καὶ $\sqrt{\alpha} . \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$· ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τῶν ῥητῶν ποσοτήτων· οἷον

$$\sqrt{9} = 3$$
πολλαπλ. ἐπὶ $\sqrt{16} = 4$

$$\sqrt{144} = 12$$ Ὃ ἦν τὸ α'.

ἔστω δὴ αὖθις $\sqrt{\phi\chi} = \chi^{\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}$ (§. 255.)
καὶ $\sqrt{\phi} = \phi^{\frac{1}{2}}$
ἔσται $\sqrt{\phi\chi} : \sqrt{\phi} = \chi^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\chi}$,
καὶ ἐν ἀριθμοῖς $\sqrt{36} = 6$
διαιρ. διὰ $\sqrt{9} = 3$

$$\sqrt{4} = 2$$ Ὃ ἦν τὸ β'.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 386. Ἕπεται τοίνυν τῷ αὐτῷ τρόπῳ καὶ τὰ πρὸ τοῖς ὁμωνύμοις τῶν Ῥιζικῶν ἐκκείμενα μεγέθη, ἤτοι τοὺς τούτων συνθέτας ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιάζεσθαί τε καὶ διαιρεῖσθαι ἔχειν, τῆς τούτων δυνάμεως οὐδεμίαν τροπὴν ὑφισταμένης· οἷον $\alpha\sqrt[3]{\chi} . \beta\sqrt[3]{\phi} = \alpha . \sqrt[3]{\chi} . \beta . \sqrt[3]{\phi} = \alpha . \beta . \sqrt[3]{\chi} . \sqrt[3]{\phi} = \alpha\beta\sqrt[3]{\phi\chi}$.
καὶ $\alpha\sqrt[\nu]{\chi} : \beta\sqrt[\nu]{\phi} = \frac{\alpha\sqrt[\nu]{\chi}}{\beta\sqrt[\nu]{\phi}} = \frac{\alpha}{\beta} . \frac{\sqrt[\nu]{\chi}}{\sqrt[\nu]{\phi}} = \frac{\alpha}{\beta}\sqrt[\nu]{\frac{\chi}{\phi}}$.
καὶ ἐν ῥητοῖς μεγέθεσιν οἷον

$$6\sqrt[3]{64} = 6 . 4 = 24.$$
πολλαπλ. ἐπὶ $3\sqrt[3]{8} = 3 . 2 = 6.$

$$18\sqrt[3]{512} = 18 . 8 = 144.$$

Πόῤῥω $8\sqrt{81} = 8 . 9 = 72.$
διαιρούμ. διὰ $4\sqrt{9} = 4 . 3 = 12.$

$$2\sqrt{9} = 2 . 3 = 6.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 387. Ἐὰν δυοῖν μεγεθῶν διαφόρων οἱ

ἐκθέται διὰ τοῦ ἑαυτῶν μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου διαιρεθῶσι, ἐπὶ δὲ τὸ μὲν ἐκ τῆς τοῦ πρώτου διαιρέσεως ἐκκύπτον πηλίκον ὁ δεύτερος πολλαπλασιασθῇ, ἐπὶ δὲ τὸ ἐκ τῆς τοῦ δευτέρου ὁ πρῶτος· τὰ μεγέθη ταῦτα ἐξισοῦνται ἀλλήλοις.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστωσαν μὲν δὴ δύω μεγέθη ὁποιαοῦν α, γ, ὁ δὲ μέγιστος αὐτῶν κοινὸς διαιρέτης δ· θῶμεν δὴ $\frac{\alpha}{\delta}=\pi$, καὶ $\frac{\gamma}{\delta}=\kappa$, δειχθῆναι δὴ δέον $\alpha\times\kappa=\gamma\times\pi$. Ἐπεὶ μὲν γὰρ $\frac{\alpha}{\delta}=\pi$, ἔσται τῇ τοῦ κλάσματος ἀπαλείψει $\alpha=\delta\pi$, ὡσαύτως $\gamma=\delta\kappa$· ἀλλ' οὖν $\alpha\times\delta\kappa=\gamma\times\delta\pi$· ἄρα ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ δ διαιρουμένων ἔσται $\alpha\times\kappa=\gamma\times\pi$. Ο. Ε. Δ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἔστωσαν μὲν δὴ δύω ὁποιαοῦν μεγέθη $\sqrt[6]{\beta}$ καὶ $\sqrt[9]{\gamma}$ ἔχοντα τὸν 3 ἀριθμὸν, μέγιστον κοινὸν αὐτῶν διαιρέτην. Γινομένης τοίνυν τῆς διαιρέσεως $6:3=2$ καὶ $9:3=3$, πολλαπλασιασθήτω ὁ τοῦ πρώτου ῥιζικοῦ ἐκθέτης 6 ἐπὶ τὸ ἐν τῷ δευτέρῳ πηλίκον 3· ὅ, τε τοῦ δευτέρου 9, ἐπὶ τὸ ἐν τῷ πρώτῳ 2· ἔσται οὕτω $\sqrt[6]{\beta}\times 3=\sqrt[6\cdot3]{\beta^3}$ (§. 382.) $=\sqrt[18]{\beta^3}$; καὶ $\sqrt[9]{\gamma}\times 2=\sqrt[9\cdot2]{\gamma^2}=\sqrt[18]{\gamma^2}$ (§. 383.)· Κἀντεῦθεν διὰ τῆς τοιαύτης πράξεως τὰ δύω ταῦτα ῥιζικὰ $\sqrt[6]{\beta}$ καὶ $\sqrt[9]{\gamma}$

πρὸς $\sqrt[18]{\beta^3}$ καὶ $\sqrt[18]{\gamma^2}$, ὧν ὁ ἐκθέτης κοινὸς, μετασχηματισθέντα ἀλλήλοις ἴσα ἀνέκυψαν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 388. Ἐξ ὧν συνιδεῖν ἕπεται, εἰ δύω τινὰ τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν χωρὶς ληφθέντα, σύμμετρα μεταξὺ αὐτῶν τῇ πρὸς ἄλληλα αὐτῶν παραθέσει οὐκ ἂν εἶεν· τουτέστιν εἰ ταῦτα πρὸς ἄλληλα οὐκ ἂν εἶεν ἐν λόγῳ, ὃν ἀριθμὸς ὁλοσχερὴς ἢ κλασματώδης, πρὸς ἕτερόν τινα ὁλοσχερῆ ἢ κλασματώδη ἔχει. Ἐὰν γὰρ μετὰ τὴν τῶν ῥιζικῶν πρὸς τὸν αὐτὸν ἐκθέτην ἀναγωγὴν τὰ ὑποσήμεια ποσὰ ἐκκύψωσιν ὅμοια, ἔσονται ταῦτα σύμμετρα· ἄλλως δὲ, τὸ σύνολον· οἷον $\sqrt{27}$ καὶ $\sqrt{12}$ ἀσύμμετρα καθ' ἑαυτὰ χωρὶς τυγχάνοντα, μεταξὺ ἀλλήλων ἀλλ' οὖν θεωρούμενα εἰσὶ σύμμετρα, ἤτοι ἐν λόγῳ, ὃν ὁ 3 πρὸς τὸν 2 ἔχει· καὶ γὰρ $\sqrt{27}=\sqrt{3\cdot3\cdot3}=3\sqrt{3}$ (§. 371.), καὶ $\sqrt{12}=\sqrt{2\cdot2\cdot3}=2\sqrt{3}$ (αὐτ.), ἄρα $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{12}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{2}$· ἑπομένως τε $\sqrt{27}$ ἐστὶ πρὸς 12, ὡς 3 πρὸς 2 (§. 302.). Ἀλλ' οὖν τὰ ἐφεξῆς ῥιζικὰ $\sqrt[3]{16}$ καὶ $\sqrt[2]{18}$ ἀσύμμετρα καθ' ἑαυτὰ ὄντα, εἰσὶν ὡσαύτως καὶ πρὸς ἄλληλα· καὶ γὰρ $\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^3\times2}$, καὶ $\sqrt[2]{18}=\sqrt[2]{3^2\times2}$, εἰς ὁμωνυμίαν μετενεχθέντα ἐκκύψουσιν $\sqrt[6]{2^6\times4}$, καὶ $\sqrt[6]{3^6\times8}$ (§. 383.), καὶ τῆς ἀναγωγῆς γενομένης ἔσται $2\sqrt[6]{4}$ καὶ $3\sqrt[6]{8}$ (§. 371.), ἀσύμμετρα πρὸς ἄλληλα ὡς ἀνόμοια τὰ ὑποσήμεια ποσὰ ἔχοντα. Ἐφ' ᾧ γὰρ ἐν λόγῳ, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν ἔχει, γένωνται, ἐπάναγκές ἐστι διὰ τῆς πρὸς ἀλλῆλα αὐτῶν παραθέσεως τὰ ῥιζικὰ ἀπαλείφεσθαι ἔχειν· ὅπερ ἀδύνατον, ἐφ' οἷς τὰ ὑποσήμεια μεγέθη ἀνόμοια πέφυκε.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 389. *Τὰς δοθείσας ὁποιασδηποτοῦν ἑτερωνύμους Ῥιζικὰς ποσότητας ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἀναγαγεῖν ὄνομα.*

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστωσαν μὲν δὴ αἱ ἀναχθησόμεναι ποσότητες $\sqrt[\mu]{\chi^\nu}$ καὶ $\sqrt[\sigma]{y^\varkappa}$. Ἐπεὶ οὖν $\sqrt[\mu]{\chi^\nu} = \chi^{\frac{\nu}{\mu}}$ καὶ $\sqrt[\sigma]{y^\varkappa} = y^{\frac{\varkappa}{\sigma}}$ (§. 294.) ἡ τῆς παρονομασίας διαφορὰ ἀπὸ τῶν ἐκθετῶν ἤρτηται, οἱ δ' ἐκθέται οὐδὲν ἄλλο, ὅτι μὴ κλάσματα εἰσὶν (§. 293. 294.), ἅτινα πρὸς ἕτερα ἑαυτοῖς μὲν ἰσοδύναμα, ὁμώνυμα δ' οὖν (§. 375.), ἀχθῆναι ἔχουσιν (§. 175.). Ἄρα αἱ ῥιζικαὶ ποσότητες, τῶν ἐκθετῶν πρὸς τὴν αὐτὴν παρονομασίαν ἀχθέντων, ὁμωνυμήσουσιν. Ἔνθεντοι ἔσται $\chi^{\frac{\nu}{\mu}} = \chi^{\frac{\nu\sigma}{\mu\sigma}} = \sqrt[\mu\sigma]{\chi^{\nu\sigma}}$ καὶ $y^{\frac{\varkappa}{\sigma}} = y^{\frac{\nu\varkappa}{\mu\sigma}} = \sqrt[\mu\sigma]{y^{\nu\varkappa}}$ (§. 293.). Ἔστωσαν ὡσαύτως καὶ ἐν ἀριθμοῖς ἀναχθησόμεναι ποσότητες αἱ $\sqrt{2}$ καὶ $\sqrt[3]{5}$· ὡς ὄντος τοίνυν $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ καὶ $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$ (§. 211.), ἔσται καὶ διὰ τῆς ἀναγωγῆς $2^{\frac{3}{6}}$ καὶ $5^{\frac{2}{6}}$ (§. 175. 383.) ἤτοι $\sqrt[6]{2^3}$ καὶ $\sqrt[6]{5^2}$ (§. 193.)· $=$ $\sqrt[6]{8}$ καὶ $\sqrt[6]{25}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 390. *Τὰς δοθείσας ὁποιασοῦν Ῥιζικὰς*

ποσότητας πρὸς ἁπλουστέραν ἀναγαγεῖν ἔκθεσιν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω ἀναχθησομένη ποσότης ἡ $\sqrt[\mu]{\alpha^\nu\chi^\mu}$· ἐπεὶ οὖν αὕτη ἴση ἐστὶ τῇ $\alpha^{\frac{\nu}{\mu}}\chi$ (§. 294. 160.), ἔσται οὕτω $\sqrt[\mu]{\alpha^\nu\chi^\mu} = \alpha^{\frac{\nu}{\mu}}\chi = \chi\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$ (§. 367.)· Ὡσαύτως καὶ $\sqrt[4]{\alpha^4\gamma - \alpha^4\beta} = \sqrt[4]{\alpha^4 \times \overline{\gamma - \beta}} = \alpha\sqrt[4]{\gamma - \beta}$, $\sqrt[2]{\gamma^2\varrho - 2\beta\gamma\varrho + \beta^2\varrho} = \sqrt[2]{\overline{\gamma^2 - 2\beta\gamma + \beta^2} \times \varrho} = \overline{\gamma - \beta}\sqrt{\varrho}$· Ἔστω καὶ ἐν ἀριθμοῖς ἀναχθησομένη ἡ $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2}$, ἐπεὶ οὖν ὁ 8 κύβος ἐστὶν ἐντελής, οὗτινος ῥίζα ὁ 2, ἔσται $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$· ὡσαύτως εὑρεθήσεται καὶ $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{2}$. $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$. $\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{64 \cdot 3} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 3} = 4\sqrt[3]{3}$ (§. 369.)· τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον μετιτέον, καὶ ὅσα τούτοις ἐοίκασιν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 391. Ἐφ' ᾧ οὖν ῥιζική τις ποσότης ἁπλουστέρως ἐκτεθῆναι ἔχοι, δέον τὴν μὲν τῶν παραγόντων τῆς ὑποσημείου ποσότητος (οἵτινες πρὸς τὴν αὐτὴν ἰσοβάθμιον τῷ ῥιζικῷ ἐκθέτῃ ἐξήρηνται δύναμιν) ῥίζαν ἐξάγειν, τοὺς δὲ λοιποὺς παράγοντας, ἂν ἡ ῥίζα ἄληπτος, ὑπὸ τὸ σημεῖον ἐγκαταλιμπάνειν, καὶ τὸ ῥιζικὸν ἐπὶ τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν πολλαπλασιάζειν (§. 367. 371.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐξ οὗ διδασκόμεθα, τῷ τρόπῳ, ποσότητα ῥιζικήν, κλασματώδη ἐπιφέρουσαν ὑποσήμεια, πρὸς ἑτέραν ἴσην δύναμον μὲν τῇ προτέρᾳ, ὑποσήμειον δ᾽ ἀλλ᾽ οὖν δύναμιν τῶν ὁλοσχερῶν πλουτοῦσαν, μετασχηματίσαι δυνάμεθα· Ἐὰν γὰρ ὑποθῶμεν τὸν τοῦ κλάσματος παρονομαστὴν δύναμιν εἶναι τῶν ἐντελῶν τῷ ῥιζικῷ ἐκθέτῃ ἰσοβάθμιον, ἐξέσται διὰ τῆς τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς, ἢ διὰ τῆς ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον ἐκθέσεως, τοῦ ὑποσημείου ἀπαλλάξαι μεγέθους τὴν, δι᾽ ἧς τουτὶ τὸ μέγεθος κλασματῶδες εἶναι προσδιώρισται, ποσότητα. Οὕτως οὖν $\sqrt{\tfrac{5}{8}}$ ὁλοσχερές τι ὑποσήμειον, ἰσοδύναμον τῷ προτέρῳ κλασματιώδει περιέξει· τοῦ γὰρ ἀριθμητοῦ τε καὶ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος τούτου ἐπὶ 8 πολλαπλασιαζομένων, ἐκκύψει $\sqrt{\tfrac{5}{8}} = \sqrt{\tfrac{5\cdot8}{8\cdot8}} = \sqrt{40} = \tfrac{1}{8\cdot8} = \tfrac{1}{8}\sqrt{40}$ (§. 391.)· ὡσαύτως καὶ $\sqrt[3]{\tfrac{2}{3}}$ μετασχηματισθήσεται, τοῦ παρονομαστοῦ 3 ἐπὶ κύβον ἐξαιρουμένου, τουτέστι τοῦ τε ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος $\tfrac{2}{3}$ τῷ τετραγώνῳ τοῦ παρονομαστοῦ ἐπιπολλαπλασιαζομένων ἤτοι $\sqrt[3]{\tfrac{2}{3}} = \sqrt[3]{\tfrac{2\cdot3\cdot3}{3\cdot3\cdot3}} = \sqrt[3]{18} \times \tfrac{1}{3\cdot3\cdot3} = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{18}$ (§. 367. 371.)· καὶ

$$\sqrt[4]{\frac{\beta\delta}{\gamma}} = \sqrt[4]{\frac{\beta\delta\cdot\gamma^3}{\gamma\cdot\gamma\cdot\gamma\cdot\gamma}} = \sqrt[4]{\beta\gamma^3\delta} \times \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{\gamma}\sqrt[4]{\beta\gamma^3\delta}$$

κἀπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 392. Ἐὰν ποσότητες ῥιζικαὶ ἰσοβάθμιοι πρὸς ἁπλουστέραν ἀναχθεῖσαι ἔκθεσιν, τὴν αὐτὴν ἀναδιδῶσιν ὑποσήμειον ποσότητα, ἔσονται πρὸς ἀλλήλας ποσότητες λογικαὶ ἤτοι ῥηταὶ, σημείοις μόνον διαστελλόμεναι (§. 133.), ἑπομένως τε ποσότητες πρὸς ἀλλήλας σύμμετροι (§. 25.)· οἷον $\sqrt{8} = \sqrt{4\cdot2} = 2\sqrt{2}$

καὶ $\sqrt{18} = \sqrt{9\cdot2} = 3\sqrt{2}$· ἄρα $2\sqrt{2} : 3\sqrt{2} = 2 : 3$, ἤτοι $\sqrt{8} : \sqrt{18} = 2 : 3$ (§. 388.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὸ τοιοῦτον τῶν ῥιζικῶν ποσοτήτων γένος, τῷ Τῶν κοινωνούντων ἐπωνύμῳ ἐμφαίνεσθαι εἴωθε.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 393. Τῇ τοιαύτῃ τοίνυν τῶν ῥιζικῶν ἀναγωγῇ, πολλάκις καὶ τῶν ἄλλως δοξάντων ἂν διαφέρειν ἀναφαίνεται ἡ ταυτότης, δι᾽ ἣν ῥιζικὰ δύο, ὧν τὸ ἄθροισμα ζητεῖται, ἢ γοῦν ἡ διαφορὰ, εἰς ἓν συνελθεῖν δυνήσεται· οἷον δὴ ταῦτα $\sqrt{48}$ καὶ $\sqrt{75}$ ἀναχθέντα γίνεται $\sqrt{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3} = \sqrt{16\cdot3}$ καὶ $\sqrt{5\cdot5\cdot3} = \sqrt{25\cdot3}$· ἤτοι $4\sqrt{3}$ καὶ $5\sqrt{3}$ (§. 391.) διὸ $\sqrt{48} + \sqrt{75} = 9\sqrt{3}$, καὶ $\sqrt{75} - \sqrt{48} = \sqrt{3}$. Ἐνθεντοὶ οὕτω καὶ ὁ τῶν ἀλόγων ἢ ἀῤῥήτων λόγος, εἴτις ἐστιν, ἐξευρίσκεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Αἱ τοιαῦται τῶν ῥιζικῶν ἐκθέσεων μεταβολαὶ, ἄνευ τῆς τοῦ ἐν αὐτοῖς τιμήματος, ἤτοι δυνάμεως ἀλλοιώσεως, Ῥιζικῶν Μεταμορφώσεις, ἢ Μετασχηματισμοὶ καλεῖσθαι εἰώθασιν· ὧν ἡ βάσις, ἐφ᾽ ἁπλουστέραν ὡς οἷόν τε ἔκθεσιν τὰ ῥιζικὰ ἀνάγειν, ἐφ᾽ ᾧ οὕτω ταῖς ἀριθμητικαῖς πράξεσι ταῦτα ὑπάγεσθαι ἔχοιεν. Οὕτω γὰρ μετασχηματιζόμενα αὐξήσεως, καὶ μειώσεως· ἤτοι Προσθέσεως, Ἀφαιρέσεως, Πολλαπλασιασμοῦ τε καὶ Διαιρέσεως δεκτικὰ καθίστανται, οἷα δὴ καὶ τὰ λοιπὰ κοινὰ, ἤτοι ῥητὰ, ἢ λογικὰ τῶν μεγεθῶν,

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 394. Τὰ δοθέντα ὁποιαδηποτοῦν Ῥιζικὰ προσθεῖναι.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐφ' ἁπλουστέραν, ἥπερ οἷόν τε, ἀναγόμενα ἔκθεσιν (§. 390.), εἰ μὲν ἀλλήλοις κοινωνοῦσιν, ἤτοι εἰ μὲν τὸ ἐγκαταλειπόμενον ὑποσήμειον κοινὸν ἔχουσι καὶ ἀλλήλοις ὁμογενῆ εἰσι, κατὰ τὰ πρὸ τοῦ σημείου ἀθροιζέσθωσαν (§. 393.)· εἰ δ' ἀκοινώνητα, ὁλικῶς· οἷον εἰ δέοι προσθεῖναι $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}$ καὶ $\delta\sqrt[\nu]{\beta}$ ὡς κοινωνοῦντα ἀθροιστέον, οἷον $(\alpha+\delta)\sqrt[\nu]{\beta}$. εἰ δὲ δεῖ ἀθροῖσαι τὰ $\sqrt{\alpha^2\beta}$ καὶ $\sqrt{\beta^2\gamma}$, πρῶτον αὐτὰ ἀνακτέον (§. 390.) εἰς $\alpha\sqrt{\beta}$ καὶ $\beta\sqrt{\gamma}$, εἶτα ὡς μὴ κοινωνοῦντα ὁλικῶς προσαθροιστέον, οἷον $\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\gamma}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Αʹ. $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}+\delta\sqrt[\nu]{\beta}=(\alpha+\delta)\sqrt[\nu]{\beta}$, $4\sqrt{5}+8\sqrt{5}=12\sqrt{5}$.

Βʹ.
$$\begin{array}{l} 2\alpha\sqrt{\beta\gamma}-5\beta\sqrt{\delta\vartheta}+\gamma\sqrt{\vartheta}+\sigma \\ -\alpha\sqrt{\beta\gamma}-\beta\sqrt{\delta\vartheta}+3\gamma\sqrt{\vartheta}-\kappa \\ \hline \alpha\sqrt{\beta\gamma}-6\beta\sqrt{\delta\vartheta}+4\gamma\sqrt{\vartheta}+\sigma-\kappa \end{array}$$

Γʹ.
$$\begin{array}{l} \alpha+2\sqrt{\alpha\beta}+3\sqrt[3]{\alpha\gamma}-4\sqrt{\alpha\delta} \\ \beta-5\sqrt{\alpha\beta}+9\sqrt[3]{\alpha\gamma}+2\sqrt{\alpha\delta} \\ \hline \alpha+\beta-3\sqrt{\alpha\beta}+12\sqrt[3]{\alpha\gamma}-2\sqrt{\alpha\delta}. \end{array}$$

Δʹ. $7\sqrt{8}+5\sqrt{8}=12\sqrt{8}=24\sqrt{2}$.

Εʹ. $\sqrt{63}+\sqrt{28}=\sqrt{(9\cdot7)}+\sqrt{(4\cdot7)}=3\sqrt{7}+2\sqrt{7}=5\sqrt{7}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ μὲν γὰρ τοῦ $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}$, (Παρ. Αʹ.) $\sqrt[\nu]{\beta}$ κατὰ τὰς ἐν τῷ α ἐτέθη μονάδας ἢ αάκις, ἐπὶ δὲ τοῦ $\delta\sqrt[\nu]{\beta}$, $\sqrt[\nu]{\beta}$ ὡσαύτως ἰσαρίθμως ταῖς τοῦ δ μονάσιν, ἤτοι δάκις (§. 367.)· δέον τοίνυν $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}+\delta\sqrt[\nu]{\beta}$ τὴν ῥίζαν $\sqrt[\nu]{\beta}$ ἰσαρίθμως ταῖς ἐν $(\alpha+\delta)$ μονάσιν ἐκληφθῆναι, ὥστε εἶναι $=(\alpha+\delta)\sqrt[\nu]{\beta}$. Ο. Ε. Δ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 395. Τὰ δοθέντα ὁποιαοῦν Ῥιζικὰ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ταυτὰ πάντως κἀνταῦθα τηρείσθω, ἃ κἀπὶ τῆς Προσθέσεως (§. 394.), σωζομένης μόνον τῆς κατὰ τὰ σημεῖα + καὶ — διαφορᾶς. Ἐνίοτε δὲ κἀπὶ τὸ ἁπλούστερον ἀναγόμενα, τῇ τροπῇ τῶν σημείων κατὰ τὴν ἐπὶ τῶν ῥητῶν μέθοδον (§. 95.) ἀφαιρεθήσονται· οἷον $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}-\delta\sqrt[\nu]{\beta}=(\alpha-\delta)\sqrt[\nu]{\beta}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐφ' ᾧ γὰρ $\delta\sqrt[\nu]{\beta}$ τοῦ $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}$ ἀφαιρεθῆναι ἔχοι, δέον $\sqrt[\nu]{\beta}$ κατὰ τὰς ἐν τῷ $(\alpha-\delta)$ μονάδας ληφθῆναι, ἤτοι γενέσθαι $=(\alpha-\delta)\sqrt[\nu]{\beta}$. Ο. Ε. Δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Αʹ.
$$\begin{array}{l} 3\beta\sqrt{\vartheta\kappa}-2\alpha\sqrt[4]{\vartheta\mu}+4\sqrt[3]{\alpha\delta-\delta} \\ -\beta\sqrt{\vartheta\kappa}-\alpha\sqrt[4]{\vartheta\mu}+2\sqrt[3]{\alpha\delta+\beta} \\ +\qquad\quad +\qquad\quad -\qquad\quad - \\ \hline 4\beta\sqrt{\vartheta\kappa}-\alpha\sqrt[4]{\vartheta\mu}+2\sqrt[3]{\alpha\delta-\delta-\beta}. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{Β}'. & \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} + 3\sqrt[3]{\alpha\gamma} - 4\sqrt{\alpha\delta} \\
 & \quad \beta - 5\sqrt{\alpha\beta} + 9\sqrt[3]{\alpha\gamma} + 2\sqrt{\alpha\delta} \\
 & - \quad + \qquad\quad - \qquad\quad - \\
\hline
 & \alpha - \beta + 7\sqrt{\alpha\beta} - 6\sqrt[3]{\alpha\gamma} - 6\sqrt{\alpha\delta}.
\end{array}$$

Γ′. $\sqrt[3]{16\alpha^3\beta} + \sqrt{4\alpha^2\beta} - \sqrt{\alpha^2\beta} - \sqrt[3]{54\alpha^3\beta} = 2\alpha\sqrt[3]{2\beta}$
$+ 2\alpha\sqrt{\beta} - \alpha\sqrt{\beta} - 3\alpha\sqrt[3]{2\beta} = \alpha\sqrt{\beta} - \alpha\sqrt[3]{2\beta}.$

Δ′. $\sqrt{63} - \sqrt{28} = 3\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = \sqrt{7}.$

Ε′. $\sqrt{50} - \sqrt{18} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$

Ϛ′. $2\sqrt{(16\sqrt{18})} - \sqrt{(12\sqrt{2})} = 2\sqrt{(16.3\sqrt{2})}$
$- \sqrt{(4.3\sqrt{2})} = 8\sqrt{(3\sqrt{2})} - 2\sqrt{(3\sqrt{2})}$
$= 6\sqrt{(3\sqrt{2})} = 6\sqrt{\sqrt{18}} = 6\sqrt[4]{18}.$

Ζ′. $3\sqrt[3]{(8 + 16\sqrt{5})} - 2\sqrt[3]{(1 + \sqrt{20})}$
$= 3\sqrt[3]{8(1+2\sqrt{5})} - 2\sqrt[3]{(1+\sqrt{4.5})}$
$= 6\sqrt[3]{(1+2\sqrt{5})} - 2\sqrt[3]{(1+2\sqrt{5})}$
$= 4\sqrt[3]{(1+2\sqrt{5})}.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 396. *Τὰ δοθέντα ὁποιαδηποτοῦν Ῥιζικὰ ἐπ' ἄλληλα πολλαπλασιάζειν.*

ΛΥΣΙΣ.

Ὁμογενῆ τε καὶ ὁμωνυμοῦντα πρῶτον, εἰ τύχωσιν ἑτερογενῆ, αὐτὰ ποιητέον· εἶτα τὰ τῷ ῥιζικῷ ὑποσήμεια, ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιαστέον, καὶ τῷ γινομένῳ τὸ αὐτὸ σημεῖον ὡς ἔχει ἐπιγραπτέον. Ἐὰν δὲ τὸ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ παραγόμενον τοιοῦτον ᾖ, οἷον τὴν σημαινομένην αὐτοῦ ῥίζαν ἔχειν ἐξάγεσθαι, τοῦτο μόνον τὸ σημεῖον ἐξαλειπτέον· οἷον $\sqrt{\gamma\delta} \times \sqrt{\gamma\delta} = \sqrt{\gamma^2\delta^2} = \gamma\delta$. Εἰ δὲ καὶ συνθέτας ἔχοιεν

πλὴν τῆς μονάδος (καὶ γὰρ $\sqrt{\gamma} = 1\sqrt{\gamma}$ (§. 58.)) πολλαπλασιαστέον καὶ τούτους, καὶ τοῦ σημείου προσγραπτέον· οἷον $2\gamma\sqrt{\beta\delta} \times 3\gamma\sqrt{\beta\delta} = 6\gamma^2\sqrt{\beta^2\delta^2} = 6\gamma^2\beta\delta$. Τὴν δ' ὁλοσχερῆ ποσότητα ἐπὶ τὴν ῥιζικὴν πολλαπλασιάζοντες, ταύτης τῷ σημείῳ ἐκείνην ὡς συνθέτην ἐπιγράφομεν, τοῖς σημείοις ἀεὶ προσέχοντες· οἷον $\sqrt{\alpha\beta} \times \gamma$ ἢ $\gamma \times \sqrt{\alpha\beta} = \gamma\sqrt{\alpha\beta}$· ὡσαύτως $-\beta \times \sqrt{\delta\phi}$ ἢ $-\sqrt{\delta\phi} \times \beta = -\beta\sqrt{\delta\phi}$, καὶ $(\gamma-\delta) \times \sqrt{-\phi^2-\chi^2} = (\gamma-\delta)\sqrt{-\phi^2-\chi^2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α′. $\alpha\sqrt[\nu]{\beta} \times \gamma\sqrt[\nu]{\delta} = \alpha\gamma\sqrt[\nu]{\beta\delta}$,
$-4\sqrt[3]{5} \times 6\sqrt[3]{9} = -24\sqrt[3]{45}.$

$$\text{Β}'. \left\{\begin{array}{l} 2\beta\sqrt{\gamma} + \delta\sqrt{\zeta} \\ \quad\times \\ 2\beta\sqrt{\gamma} + \delta\sqrt{\zeta} \end{array}\right. \qquad \text{Γ}'. \left\{\begin{array}{l} 3\gamma + \sqrt{-\delta^2} \\ \quad\times \\ 3\gamma - \sqrt{-\delta^2} \end{array}\right.$$
$$4\beta^2\gamma + 4\beta\delta\sqrt{\gamma\zeta} + \delta^2\zeta^2 \qquad\qquad 9\gamma^2 + \delta^2$$

$$\text{Δ}'. \left\{\begin{array}{l} \sqrt{\vartheta\zeta} - \sqrt{\gamma^2-\delta^2} \\ \quad\times \\ \sqrt{\vartheta\zeta} - \sqrt{\gamma^2-\delta^2} \end{array}\right.$$
$$\begin{array}{l}
\vartheta\zeta - \sqrt{(\gamma^2\vartheta\zeta - \delta^2\vartheta\zeta)} \\
\qquad - \sqrt{(\gamma^2\vartheta\zeta - \delta^2\vartheta\zeta)} \\
\hline
\vartheta\zeta - 2\sqrt{(\gamma^2\vartheta\zeta - \delta^2\vartheta\zeta)} + \gamma^2 - \delta^2.
\end{array}$$

$$\text{Ε}'. \left\{\begin{array}{l} \sqrt[3]{\gamma} + \sqrt[3]{\delta} - \sqrt[3]{\zeta} \\ \quad\times \\ \sqrt[3]{\gamma} + \sqrt[3]{\delta} - \sqrt[3]{\zeta} \end{array}\right.$$
$$\begin{array}{l}
\sqrt[3]{\gamma^2} + \sqrt[3]{\gamma\delta} - \sqrt[3]{\gamma\zeta} \\
\qquad - \sqrt[3]{\gamma\delta} - \sqrt[3]{\delta^2} + \sqrt[3]{\delta\zeta} \\
\qquad\qquad + \sqrt[3]{\gamma\zeta} + \sqrt[3]{\delta\zeta} - \sqrt[3]{\zeta^2} \\
\hline
\sqrt[3]{\gamma^2} \quad - \sqrt[3]{\delta^2} + 2\sqrt[3]{\delta\zeta} - \sqrt[3]{\zeta^2}.
\end{array}$$

Ϛ΄. $\alpha\sqrt[\mu]{\beta}\times\gamma\sqrt[\nu]{\delta} = \alpha\beta^{\frac{1}{\mu}}.\gamma\delta^{\frac{1}{\nu}} = \alpha\gamma\beta^{\frac{\nu}{\mu\nu}}\delta^{\frac{\mu}{\mu\nu}}$
$= \alpha\gamma\sqrt[\mu\nu]{\beta^\nu}.\sqrt[\mu\nu]{\delta^\mu} = \alpha\gamma\sqrt[\mu\nu]{\beta^\nu\delta^\mu}.$

Ζ΄. $3\sqrt{2}.4\sqrt{6} = 12\sqrt{12}$, $5\sqrt[3]{7}\times 8 = 40\sqrt[3]{7}$,
$\sqrt[3]{6}.\sqrt[3]{36} = \sqrt[3]{216} = 6$, $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
$= \sqrt{9}-\sqrt{4} = 3-2 = 1$, $5\sqrt[3]{3}\times\sqrt{6}$
$= 5\sqrt[6]{9}.\sqrt[6]{216} = 5\sqrt[6]{1944}$, $\sqrt[4]{20}\times 6\sqrt{3}$
$= \sqrt{\sqrt{20}}.6\sqrt{3} = \sqrt{(2\sqrt{5})}.6\sqrt{3} = 6\sqrt{(6\sqrt{5})}$.

Η΄. $3\sqrt{(2\sqrt[3]{10})}\times 2\sqrt{(5\sqrt[3]{100})} = 6\sqrt{(10\sqrt[3]{1000})}$
$= 6\sqrt{10.10} = 60.$

Θ΄. $2\sqrt{3}\times(6-\sqrt{7}) = 12\sqrt{3}-2\sqrt{21}$, $2\sqrt[3]{5}$
$\times 7\sqrt[2]{3} = 2\sqrt[6]{5^2}\times 7\sqrt[6]{3^3} = 2\sqrt[6]{25}\times 7\sqrt[6]{27}$
$= 14\sqrt[6]{675}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστι μὲν δὴ (ἐπὶ τοῦ Α΄. Παρ.) $\alpha\sqrt[\nu]{\alpha} = \alpha\times\sqrt[\nu]{\beta}$, καὶ $\gamma\sqrt[\nu]{\delta} = \gamma\times\sqrt[\nu]{\delta}$ (§. 367.). Ἔστι δ᾽ ἀλλ᾽ οὖν $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}\times\gamma\sqrt[\nu]{\delta} = \alpha\times\sqrt[\nu]{\beta}\times\gamma\sqrt[\nu]{\delta} = \alpha.\gamma\sqrt[\nu]{\beta}.\sqrt[\nu]{\delta} = \alpha\gamma\sqrt[\nu]{\beta\delta}$ (§. 227.) Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 397. Εἰ δὲ ποσότητά τινα τῶν κατ᾽ ἐπίνοιαν, ἐφ᾽ ἑτέραν ὡσαύτως νοητὴν ἤτοι ἐπίπλαστον, ἢ ἐπί τινα τῶν πραγματιωδῶν προκέοιτο πολλαπλασιάσαι, ἐπισημειούσθω μόνον τὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὅπως ἐν τῷ διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ ἐκκύπτοντι γινομένῳ, αἱ κατ᾽ ἐπίνοιαν τῶν μὴ, διακρίνεσθαι ἔχωσιν· οἷον ἐπὶ τῆς τοῦ $\sqrt{\alpha}$ ἐπὶ $\sqrt{-\gamma^2}$ πολλαπλασιάσεως, οὕτω τὰ τῆς πράξεως ἐκτεθείσεται $\sqrt{\alpha}\times\sqrt{-\gamma^2}$: ὡσαύτως τὸ ἐκ

τοῦ $\sqrt{-\gamma^2}$ ἐπὶ $\sqrt{-\delta^2}$ γινόμενον ἔσται $\sqrt{-\gamma^2}\times\sqrt{-\delta^2}$ καὶ $\sqrt{-\alpha}\times\sqrt{-\alpha} = \sqrt{(-\alpha\times-\alpha)} = \sqrt{(-\alpha)^2} = -\alpha$· ἐὰν δὲ αὐτόχρημα πολλαπλασιασθῶσιν, αἱ κατ᾽ ἐπίνοιαν ἐπ᾽ ἀληθεῖς μετασχηματισθήσονται, οἷον $\sqrt{-\alpha}\times\sqrt{-\alpha} = \sqrt{+\alpha^2}$ (§. 221.) $= \pm\alpha$ (§. 222.)· ὥστε τὰς κατ᾽ ἐπίνοιαν ποσότητας χώραν ἐν τῷ ὑπολογισμῷ ἔχειν (§. 381.), ἐντεῦθεν καταδῆλον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α΄. $\gamma\sqrt{\delta\zeta}\times-\zeta\sqrt{-\delta^2} = -\gamma\zeta\sqrt{\delta\zeta}\times\sqrt{-\delta^2}$,

Β΄. $2\gamma\sqrt{-\delta^2}\times-3\beta\sqrt{-\delta^2} = -6\beta\gamma\sqrt{-\delta^2}$
$\times\sqrt{-\delta^2} = -6\beta\gamma\times-\delta^2$ (§. 381.) $= 6\beta\gamma\delta^2$.

Γ΄. $(-1+\sqrt{-3})\times(-1-\sqrt{-3}) = 1-\sqrt{-3}+\sqrt{-3}+3 = 4$.

Δ΄. $(4+\sqrt{-3})(4-\sqrt{-3}) = 16+4\sqrt{-3}-4\sqrt{-3}+3 = 19$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Εἴωθε δ᾽ ἀλλ᾽ οὖν κοινότερον πρὸς ἀπάτης οἱασοῦν ἐκφυγὴν τῶν κατ᾽ ἐπίνοιαν καὶ ἀδυνάτων ποσοτήτων τὸν πολλαπλασιασμὸν γραφῆς μόνον ἀξιοῦν, οὔτε μὴν τὰ τῆς πράξεως ὁλικῶς περαίνειν· οἷον $3\sqrt{-\alpha}\times 4\alpha\sqrt{-\beta} = 12\alpha\sqrt{-\alpha}\times\sqrt{-\beta}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 398. Τὰ δοθέντα ὁποιαποτοῦν Ῥιζικὰ δι᾽ ἀλλήλων διαιρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ὁμωνυμοῦντα καὶ μὴ κοινωνοῦντα ἐν εἴδει γραφέσθωσαν κλάσματος· οἷον $\sqrt{\alpha\beta} : \sqrt{\gamma\delta} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\gamma\delta}} = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}}$. Κοινωνοῦντα δὲ, διαιρείσθωσαν, ἐξαλειφομένου τοῦ διαιρέτου· τὸ δὲ πηλίκον τῷ αὐτῷ σημείῳ τῆς ῥίζης γνωριζέσθω· οἷον $\sqrt{\alpha\beta} : \sqrt{\alpha} = \beta$. Ἀλλ᾽ εἰ τὸ πηλίκον τὴν ἐκ τοῦ σημείου δηλουμένην ῥίζαν παρέχοιτο, ἡ ῥίζα αὕτη ῥητὸν ἔσται πηλίκον· οἷον $\sqrt{\alpha\beta^2} : \sqrt{\alpha} = \sqrt{\beta^2} = \beta$ (§. 365.)· Εἰ δὲ καὶ συνθέτας τὰ ῥιζικὰ ἔχοιεν, εἴτ᾽ ἐν στοιχείοις, εἴτ᾽ οὖν κἂν ἀριθμοῖς προσκειμένους, διαιρετέον καὶ τούτους ὡσαύτως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α΄. $\alpha\sqrt[\nu]{\beta} : \gamma\sqrt[\nu]{\delta} = \frac{\alpha}{\gamma}\sqrt[\nu]{\frac{\beta}{\delta}}$.

Β΄. $\sqrt{(\alpha^2-\chi^2)} : (\alpha+\chi) = \frac{\sqrt{(\alpha^2-\chi^2)}}{\sqrt{(\alpha+\chi)^2}} = \sqrt{\frac{\alpha^2-\chi^2}{(\alpha+\chi)^2}}$

$= \sqrt{\frac{(\alpha+\chi)(\alpha-\chi)}{(\alpha+\chi)^2}} = \sqrt{\frac{\alpha-\chi}{\alpha+\chi}} = \frac{\sqrt{(\alpha-\chi)}}{\sqrt{(\alpha+\chi)}}$.

Γ΄. $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{5}} : \frac{5}{9}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{27}{20}\sqrt{\frac{6}{10}}$, $\sqrt{12} : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}}$

$= \sqrt{4} = 2$.

Δ΄. $(\sqrt{72} - \sqrt{32}) : \sqrt{8} = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{72}{8}} - \sqrt{\frac{32}{8}}$

$= \sqrt{9} - \sqrt{4} = 1$.

Ε΄. $2\sqrt{6} : 3\sqrt[3]{9} = \frac{2\sqrt[6]{216}}{3\sqrt[6]{81}} = \frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{216}{81}} = \frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{216:27}{81:27}}$

$= \frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{8}{3}}$.

ϛ΄. $9 : \sqrt[3]{6} = \frac{9}{\sqrt[3]{6}} = \frac{\sqrt[3]{9^3}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{729}{6}} = \sqrt[3]{\frac{243}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}}$

$\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{36}$.

Ζ΄. $\sqrt{18} : \sqrt{2} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$, $\sqrt[3]{32} : \sqrt[3]{4}$ $= \sqrt[3]{\frac{32}{4}} = \sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{168} : \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{\frac{168}{250}}$ $= \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστι μὲν δὴ (ἐπὶ τοῦ Α΄. Παρ.) $\alpha\sqrt[\nu]{\beta} = \alpha \times \sqrt[\nu]{\beta}$, καὶ $\gamma\sqrt[\nu]{\delta} = \gamma \times \sqrt[\nu]{\delta}$ (§. 367.)· ἔστιν ἄρα $\alpha\sqrt[\nu]{\beta} : \gamma\sqrt[\nu]{\delta} = \frac{\alpha \times \sqrt[\nu]{\beta}}{\gamma \times \sqrt[\nu]{\delta}} = \frac{\alpha}{\gamma} \times \frac{\sqrt[\nu]{\beta}}{\sqrt[\nu]{\delta}} = \frac{\alpha}{\gamma} \times \sqrt[\nu]{\frac{\beta}{\delta}}$ (§. 304.) $= \frac{\alpha}{\gamma}\sqrt[\nu]{\frac{\beta}{\delta}}$. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 399. Δεῆσαν δὲ καὶ ὁλοσχερῆ διὰ ῥιζικῆς διελεῖν ποσότητος ἢ ἀνάπαλιν, ἀνακτέον τὴν ὁλοσχερῆ ἐπὶ τὴν ὑπὸ τοῦ ἐν τῇ ῥιζικῇ ἐκθέτου βαθμοδεικνυμένην δύναμιν, τὸ δὲ ἰσοβάθμιον ῥιζικὸν σημεῖον αὐτῇ ἐπιγραπτέον· καὶ τότε δὴ ῥιζικῶν ἀμφοῖν προκειμένων ἡ τούτων διαίρεσις ὡς ἀνωτέρω (§. 398.) ἐκπερανθήσεται· οἷον $\beta : \sqrt{\alpha\beta^2} = \sqrt{\beta^2} : \sqrt{\alpha\beta^2} = \sqrt{\alpha}$· ὡσαύτως καὶ $\gamma\sqrt{\delta} : -\sqrt{\gamma\delta} = \frac{\gamma\sqrt{\delta}}{-\sqrt{\gamma\delta}} = \frac{\sqrt{\gamma^2\delta}}{-\sqrt{\gamma\delta}}$ (§. 369.) $= -\sqrt{\frac{\gamma^2\delta}{\gamma\delta}} = -\sqrt{\gamma}$ τῷ πρὸς ἔρευναν πηλίκῳ· καὶ γὰρ ὁ διαιρέτης $-\sqrt{\gamma\delta}$ ἐπὶ τὸ πηλίκον $-\sqrt{\gamma}$ ἀχθεὶς ἔσται $= \sqrt{\gamma^2\delta}$ (§. 136.) ἴσος τῷ διαιρετέῳ $\gamma\sqrt{\delta}$ (§. 390.). Καὶ ἐν ἀριθμοῖς $3 : \sqrt{5} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}}$ $= \sqrt{\frac{9}{5}} = \sqrt{9 \times \frac{1}{5}} = 3\sqrt{\frac{1}{5}}$ (§. 367.)· καὶ γὰρ $3\sqrt{\frac{1}{5}}$ ἢ $\sqrt{\frac{9}{5}} \times \sqrt{5} = \sqrt{9}$ (§. 131.) ἴσον τῷ διαιρετέῳ 3· κἀνάπαλιν $\sqrt[3]{21} : 7 = \frac{\sqrt[3]{21}}{7} = \frac{\sqrt[3]{21}}{\sqrt[3]{7^3}} = \sqrt[3]{\frac{3.7.7}{7.7.7}} = \sqrt[3]{\frac{3}{7.7}}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 400. Ἐπὶ δὲ τῆς τῶν κατ' ἐπίνοιαν ῥιζικῶν διαιρέσεως, ἀπόχρη μόνον ἐν εἴδει κλάσματος αὐτὰ ἐκθεῖναι ὑποσημαίνοντος τὴν διαίρεσιν· οἷον

Α'. $\sqrt{-\alpha^2} : \sqrt{-\beta^2} = \frac{\sqrt{-\alpha^2}}{\sqrt{-\beta^2}}$.

Β'. $\sqrt{-\alpha\beta} : \sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{-\alpha\beta}{\alpha}} = \sqrt{-\beta}$.

Γ'. $\sqrt{-\alpha\beta} : \sqrt{-\beta} = \sqrt{\frac{-\alpha\beta}{-\beta}} = \alpha$,

Δ'. $\gamma\delta\sqrt{-\gamma^2} : -\delta\sqrt{-\gamma^2} = \frac{\gamma\delta\sqrt{-\gamma^2}}{-\delta\sqrt{-\gamma^2}} = -\gamma$,

πλὴν ὅσον τὰ σημεῖα ἐπὶ τούτων τὰ ὑπὸ τῷ ῥιζικῷ ἥκιστα τρεπτέον· πολλαπλασιαζόμενα γὰρ οὐ παράγουσι θετικὸν, ἀλλ' ἀποφατικόν· οἷον ἐπὶ τῶν $\sqrt{-\alpha}$, $\sqrt{-\beta}$, ἐὰν τὰ σημεῖα τραπῶσιν οὐ παρέξουσιν ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $\sqrt{\alpha\beta}$, ἀλλὰ $\sqrt{-\alpha\beta}$. Ἐξ οὗ $\sqrt{-\alpha\beta}$ ἀδυνάτως ἔχοντος, πῶς ἄν τι δυνατὸν ὅλως συσταίη;

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 401. Τὰ μὲν οὖν ἀνόμοια ἀδιαίρετα ὄντα ὑπ' ἀλλήλων, ἐν εἴδει κλάσματος γραπτέον, ὡς $\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\delta}-\sqrt{\epsilon}}$ ἐπὶ δὲ τὰς τῶν ὁμοίων ἐκθέσεις μετὰ τὸ ἐφ' ἁπλουστέρας αὐτὰς ἀναχθῆναι, διαιρετέον τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, οἷον ἐπὶ τῶν μᾶλλον συνθέτων· ὡς ἐπὶ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων. Καὶ τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον καὶ τὰ τούτοις παραπλήσια πραγματευτέον, ὅπερ οὐδεμίαν οἴσει δυσχέρειαν, τοῖς τὰς ἐκτεθείσας ἀρχὰς καλῶς κατέχουσιν.

Α'. $\frac{4\alpha+8\sqrt{\alpha\gamma}-9\beta+12\sqrt{\beta\gamma}}{2\sqrt{\alpha}-3\sqrt{\beta}+4\sqrt{\gamma}} = 2\sqrt{\alpha}+3\sqrt{\beta}$.

Β'. $\frac{2\sqrt{\alpha\gamma^2}+3\sqrt{\alpha\gamma^2}}{\sqrt{\alpha\beta\delta}-\sqrt{\alpha^2\delta}} = \frac{5\gamma\sqrt{\alpha}}{(\sqrt{\beta\delta}-\sqrt{\alpha\delta})\sqrt{\alpha}} = \frac{5\gamma}{\sqrt{\beta\delta}-\sqrt{\alpha\delta}}$.

Γ'. $\frac{-\sqrt{\gamma^2-\delta^2}}{-\sqrt{\gamma+\delta}} = \sqrt{\frac{(\gamma-\delta)\times(\gamma+\delta)}{\gamma+\delta}} = \sqrt{\gamma-\delta}$.

Δ'. $\frac{\sqrt{\gamma^4\delta^2}}{\sqrt{\gamma^2\delta}} = \sqrt{\frac{\gamma^4\delta^2}{\gamma^2\delta}} = \sqrt{\gamma^2\delta} = \gamma\sqrt{\delta}$.

Ε'. $\frac{\sqrt[3]{\gamma\delta}}{\sqrt{\gamma\delta}} = \frac{\sqrt[3]{\gamma\delta}}{\sqrt[2]{\gamma\delta}} = \frac{\sqrt[6]{\gamma^2\delta^2}}{\sqrt[6]{\gamma^3\delta^3}} = \sqrt[6]{\frac{\gamma^2\delta^2}{\gamma^3\delta^3}} = \sqrt[6]{\frac{1}{\gamma\delta}}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἡ δὲ βάσανος ἐπὶ τῶν τοιούτων δήλη· τὸ γὰρ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀχθὲν ἀναδώσει τὸν διαιρετέον (§. 136.). Ὅτι δὲ τὰ δι' ἀλλήλων πολλαπλασιαστέα, ἢ διαιρετέα ῥιζικὰ μᾶλλον εὐεπιχείρητα ἀπαντᾷ, εἰ πρότερον ἀλλήλοις ὁμοταγῆ καθιστῶτο, μή καὶ περιττὸν ᾖ παραινεῖν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 402. Τὰ δοθέντα ὁποιαοῦν Ῥιζικὰ, ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν δύναμιν ἐξᾶραι.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπεὶ μὲν δὴ ἡ πρὸς τὰς δυνάμεις ἐξαγωγὴ οὐδόλως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διενήνοχε, ταυτὰ κἀνταῦθα τηρείσθω, ἃ κἀπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (§. 396.). Διὸ καὶ ἐπὶ μὲν τὴν δευτέραν δύναμιν ῥιζικόν τι ἐξαρθήσεται, αὐτοῦ ἐφ' ἑαυτὸ ἅπαξ πολλαπλασιασθέντος, ἤτοι $2-1$ (§. 216.). ἐπὶ δὲ τὴν τρίτην $3-1$ (αὐτ.), καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως. Ἔνθεντοι ἐπὶ μὲν τῆς πρὸς τετράγωνον τοῦ $\sqrt[\sigma]{\delta}$ ὑψώσεως, ἔσται $\sqrt[\sigma]{\delta} \times \sqrt[\sigma]{\delta} = \sqrt[\sigma]{\delta^2}$ (§. 396.), ἐπὶ δὲ τῆς πρὸς κύβον $\sqrt[\sigma]{\delta} \times \sqrt[\sigma]{\delta} \times \sqrt[\sigma]{\delta} = \sqrt[\sigma]{\delta^3}$. Καὶ ἐν γένει, ῥιζικὸν ὁποιονδηποτοῦν πρὸς τὴν δοθεῖσαν δύναμιν ἐξαρθήσεται, ἐὰν οἵ, τε συνθέται καὶ τὰ ὑποσήμεια αὐτοῦ μεγέθη πρὸς τὴν αὐτὴν δύναμιν ἀναχθῶσι· οἷον $(\alpha \sqrt[\mu]{\beta})^\nu = \alpha^\nu \sqrt[\mu]{\beta^\nu}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστι μὲν δὴ $(\alpha \sqrt[\mu]{\beta})^\nu = (\alpha \beta^{\frac{1}{\mu}})^\nu$ (§. 240. 294.) $= \alpha^\nu \beta^{\frac{\nu}{\mu}}$ (§. 226. 230. 242.) $= \alpha^\nu \sqrt[\mu]{\beta^\nu}$ (§. 293.)· ὡσαύτως $\chi \sqrt[\sigma]{y}$ πρὸς δύναμιν τ ἐξαρθὲν ἔσται $= \chi^\tau \sqrt[\sigma]{y^\tau}$· καὶ γὰρ $\chi \sqrt[\sigma]{y} = \chi y^{\frac{1}{\sigma}}$ (§. 294.)· τοίνυν $\chi y^{\frac{1}{\sigma}}$ πρὸς τὴν δύναμιν τ ἐξαιρόμενον ἐκκύψει $= \chi^\tau y^{\frac{\tau}{\sigma}}$ (§. 227.) $= \chi^\tau \sqrt[\sigma]{y^\tau}$· (§. 293.)· ἄρα, κτλ.

Α'. $(3\sqrt[3]{2\beta})^2 = 9\sqrt[3]{4\beta^2}$.

Β'. $(\sqrt{3\alpha^2})^3 = \sqrt{27\alpha^6}$.

Γ'. $3\sqrt{[\sqrt{3(\alpha^2-\chi^2)}]^3} = 27\sqrt{(\alpha^2-\chi^2)^3} = 27\sqrt{(\alpha^2-\chi^2).(\alpha^2-\chi^2)^2} = 27.(\alpha^2-\chi^2)\sqrt{(\alpha^2-\chi^2)}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 403. Δεῆσαν δὲ ῥιζικόν τι ἐπὶ τὸν τοῦ ῥιζικοῦ ἐκθέτην ἐξᾶραι· ἡ πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ σημείου μονον ποσότης, ἤτοι ὁ τούτου μόνον ἐξαρθήτω συνθέτης, ἐφ' ὃν εἶτα ἡ ὑποσήμειος πολλαπλασιαζέσθω· οἷον

Α'. $(\alpha\sqrt[\nu]{\beta})^\nu = \alpha^\nu \sqrt[\nu]{\beta^\nu} = \alpha^\nu.\beta = \alpha^\nu\beta$.

Β'. $(4\sqrt[3]{2})^3 = 64.2 = 128$, $(\alpha\sqrt{\beta})^2 = \alpha^2\beta$.

Γ'. $(3\sqrt{-3})^2 = -27$, $(-3\sqrt{-3})^2 = -27$.

Δ'. $(1+\frac{1}{2}\sqrt{5})^2 = 1+\sqrt{5}+\frac{1}{4} = \frac{5}{4}+\sqrt{5}$.

Ε'. $(2-\sqrt{2})^3 = 8-12\sqrt{2}+12-\sqrt{8}$
$= 20-14\sqrt{2}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 404. Εἰ δέ τις τῶν κατ' ἐπίνοιαν ποσοτήτων πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ ῥιζικοῦ ἐκθέτου βαθμοδεικνυμένην ἐξαρτᾶν ἡμῖν προκέοιτο δύναμιν, οἷον $(\sqrt[4]{-\alpha})^4$, τοῦ ῥιζικοῦ παραλειφθέντος οὕτως ὑπεκτεθήσεται $= -\alpha$· κἀντεῦθεν $(\sqrt[4]{-\alpha})^2 = \sqrt[4]{-\alpha} \times \sqrt[4]{-\alpha} = \sqrt{-\alpha}$. Ἔνθεντοι καὶ ὑπολογιζομένοις ἀποδείκνυται τὰς ἀποφατικὰς τῶν δυνάμεων, ἐπὶ θετικὰς μεταλάττειν ἐξεῖναι (§. 397.)· ἔσται καὶ γὰρ οὕτω $-\alpha = (-\alpha)^1 = (-\alpha)^{\frac{2}{2}} = \sqrt{(-\alpha)^2} = \sqrt{\alpha^2} = \alpha$, ἢ καὶ τὰς πάντῃ ἀνεφίκτους τε καὶ ἀδυνάτους ἐπὶ δυνατὰς ἀνακαλεῖν· οἷον $\sqrt{-\alpha} = (-\alpha)^{\frac{1}{2}} = (-\alpha)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-\alpha)^2} = \sqrt[4]{+\alpha^2} = \alpha^{\frac{2}{4}} = \pm\sqrt{\alpha}$· ἔνθα ἐπὶ $\sqrt[4]{(-\alpha)^2} = \sqrt[4]{-\alpha} \times \sqrt[4]{-\alpha}$, τὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἄλλως γενέσθαι οὐκ ἔχουσιν, ὅτι μὴ $(-\alpha)^{\frac{1}{4}} \times (-\alpha)^{\frac{1}{4}} = (-\alpha)^{\frac{2}{4}} = (-\alpha)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-\alpha}$. Κἀν τοῖς ἐφεξῆς δὲ παραδείγμασιν ἔσται

Α'. $(-1+\sqrt{-3})^3 = -1+3\sqrt{-3}+9-3\sqrt{-3} = 8$.

Β'. $(-1-\sqrt{-3})^3 = -1-3\sqrt{-3}+9+3\sqrt{-3} = 8$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 405. Ἐκ τῶν εἰς δύναμιν ἠλικηνοῦν προηγμένων Ῥιζικῶν, τὴν ῥίζαν ὡς οἷον τ' ἀκριβέστατα ἀποδοῦναι.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐὰν ἐκ τοῦ πρὸ τὸ ῥιζικὸν συνθέτου, καὶ ἐκ τῆς ὑποσημείου ποσότητος τὴν αἰτουμένην ἐξελεῖν δέῃ ῥίζαν, γενέσθω ἐπιτομῆς ἕνεκα ἡ πρὸ τοῦ σημείου ποσότης, ὑποσήμειος (§. 369.)· οὕτως τε τὸν τῆς δοθείσης ποσότητος τοῦ ῥιζικοῦ ἐκθέτην, ἐπὶ τὸν τῆς αἰτουμένης ῥίζης πολλαπλασιαστέον. Οἷον πρὸς τὸ λαβεῖν τὴν δευτέραν δύναμιν ἀπὸ τοῦ $\sqrt[3]{\gamma}$, ἔσται $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\gamma}} = \sqrt[2\cdot3]{\gamma} = \sqrt[6]{\gamma}$, καὶ γὰρ $\sqrt[3]{\gamma} = \gamma^{\frac{1}{3}}$ (§. 294.)· δι᾿ ἣν αἰτίαν καὶ $\sqrt[2]{\gamma^{\frac{1}{3}}} = \gamma^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\gamma}$· ἄρα ὡσαύτως $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\gamma}} = \sqrt[6]{\gamma}$. Σημειούσθω δὲ $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\gamma}}$, τὴν τετραγώνειον ῥίζαν τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ γ σημαίνειν. Ἔνθεντοι καὶ τῶν ὑπαλλήλων τουτωνὶ ῥιζῶν τὴν πρώτην ἐπὶ τὴν δευτέραν, ἤτοι ἐπὶ τὴν ῥίζαν τὴν ἑαυτῆς, πολλαπλασιασμῷ ἀνάγομεν.

$$\text{Α}'.\ \sqrt[\mu]{(\alpha\sqrt[\sigma]{\beta})} = \sqrt[\mu]{\sqrt[\sigma]{\alpha^\sigma \beta}} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\frac{\sigma}{\sigma}} \beta^{\frac{1}{\sigma}}} = \alpha^{\frac{\sigma}{\mu\sigma}} \beta^{\frac{1}{\mu\sigma}}$$
$$= \sqrt[\mu\sigma]{\alpha^\sigma \beta}.$$

$$\text{Β}'.\ \sqrt{(2\sqrt[3]{120})} = \sqrt{\sqrt[3]{960}} = \sqrt[6]{960} = \sqrt[6]{64 \cdot 15}$$
$$= 2\sqrt[6]{15} = 2\sqrt{\sqrt[3]{15}}.$$

$$\text{Γ}'.\ \sqrt[3]{\sqrt[5]{8}} = \sqrt[5\cdot3]{8} = \sqrt[15]{8}.$$ Ἔστι γὰρ $\sqrt[5]{8} = 8^{\frac{1}{5}}$, καὶ $\sqrt[3]{8^{\frac{1}{5}}} = 8^{\frac{1}{15}}$, ἄρα $8^{\frac{1}{15}} = \sqrt[15]{8}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 406. Ἐξ οὗ δῆλον, τὰς πλείοσι ῥιζικοῖς συνῃσημειμένας ποσότητας ἑνὶ μόνῳ ἐκτιθέναι· ἐὰν τῶν ῥιζικῶν σημείων παραλειπομένων, οἱ ἐκείνων ἐκθέται, ἐπὶ τὸν τοῦ ῥιζικοῦ, ὑφ᾿ οὗ ἡ λογικὴ ποσότης τυγχάνει, ἐκθέτην πολλαπλασιασθῶσιν· οἷον·

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\alpha^3}}} = \sqrt[2\cdot3\cdot4]{\alpha^3} = \sqrt[24]{\alpha^3} = \sqrt[8]{\alpha}.$$

Καὶ γὰρ $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\alpha^3}} = \sqrt[12]{\alpha^3}$ (§. 405.) τοίνυν $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\alpha^3}}} = \sqrt[2]{\sqrt[12]{\alpha^3}} = \sqrt[24]{\alpha^3}$ (αὐτόθι.) $= \alpha^{\frac{3}{24}}$ (§. 294.) $= \alpha^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{\alpha}$· ὡσαύτως $\sqrt[2]{x^2 \sqrt[4]{x^2 \sqrt[5]{x^4}}} = \sqrt[2\cdot4\cdot5]{x^{39}} = \sqrt[40]{x^{39}}$. Τῶν μὲν πρὸ τοῦ σημείου μεγεθῶν, ἡ ποσοτήτων ὑποσημείων γινομένων (§. 369.), τῶν δ᾿ ἐπισημείων ὑπαλλήλων ῥιζικῶν ἐκθετῶν ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιαζομένων, ἐφ᾿ ᾧ τὸ ἐντεῦθεν γινόμενον ὁ τοῦ ὑπολειφθέντος μόνου ῥιζικοῦ ἀποβῇ ἐκθέτης (§. 405.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 407. Ἐπεὶ τοίνυν αἱ μετὰ κλασματωδῶν ἐκθετῶν σημειούμεναι ποσότητες, ἀντὶ ῥιζικῶν ληφθῆναι ἔχωσιν (§. 293. 364.), οἱ αὐτοὶ πάντως τοῦ ὑπολογισμοῦ κανόνες καὶ περὶ αὐτῶν ἀληθεύσουσιν ἐφαρμοζόμενοι, ὡς καὶ περὶ ἐκείνων· διὸ καὶ ἔσται·

$$\text{Α}'.\ \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{\pi}{\varkappa}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu} \cdot \sqrt[\varkappa]{\alpha^\pi} = \sqrt[\nu\varkappa]{\alpha^{\mu\varkappa}} \cdot \sqrt[\nu\varkappa]{\alpha^{\pi\nu}} = \sqrt[\nu\varkappa]{\alpha^{\mu\varkappa} \cdot \alpha^{\pi\nu}} = \sqrt[\nu\varkappa]{\alpha^{\mu\varkappa+\pi\nu}} = \alpha^{\frac{\mu\varkappa+\pi\nu}{\nu\varkappa}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\pi}{\varkappa}},$$

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} : \alpha^{\frac{\pi}{\varkappa}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}}{\sqrt[\varkappa]{\alpha^\pi}} = \sqrt[\nu\varkappa]{\frac{\alpha^{\mu\varkappa}}{\alpha^{\nu\pi}}} = \sqrt[\nu\varkappa]{\alpha^{\mu\varkappa-\pi\nu}} \text{ (§. 236.)}$$
$$= \alpha^{\frac{\mu}{\nu}-\frac{\pi}{\varkappa}} \text{ (§. 235. — 250.)}.$$

Κἀντεῦθεν ὑπ᾿ ὄψιν ἐστί, τά ἔν τε τῷ Πολλαπλασιασμῷ (§. 115. ἀριθ. Ε), καὶ τῇ Διαιρέσει (§. 138. ἀριθ. Γ.) ἐν γένει ῥηθέντα, καὶ περὶ τῶν κλασματώδεσιν ἐκθέταις συνεκτιθεμένων ποσοτήτων κρατεῖν λεγόμενα.

$$\text{Β}'.\ \left(\alpha^{\frac{\pi}{\varkappa}}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\left(\alpha^{\frac{\pi}{\varkappa}}\right)^{\mu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\frac{\pi\mu}{\varkappa}}} \text{ (§. 230.)} = \alpha^{\frac{\pi\mu}{\varkappa\nu}}$$

$$\sqrt[\frac{\mu}{\nu}]{\alpha^{\frac{\pi}{\kappa}}} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\frac{\pi\nu}{\kappa}}} = \alpha^{\frac{\pi\nu}{\kappa\mu}} = \alpha^{\frac{\pi}{\kappa}:\frac{\mu}{\nu}}.$$

Ἐξ ὧν ἕπεται, τοὺς ἀνωτέρω (§. 230. 240.) ἐκτεθέντας κανόνας, περί τε τῆς τῶν ῥιζῶν ἐξάρσεως, καὶ τῆς τούτων ἐξαγωγῆς, κἀπὶ τῶν κλασματωδῶν ἐκθετῶν ἐπεκτείνεσθαι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. $2\alpha^{\frac{1}{2}}(\alpha\beta - 3\alpha^{\frac{1}{3}}) = 2\alpha^{\frac{3}{2}}\beta - 6\alpha^{\frac{5}{6}}$.

Β'. $(\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{-\frac{1}{2}} + 3\alpha^{-\frac{1}{2}}\beta)(2\alpha^{\frac{1}{2}} - \beta^{-\frac{1}{2}}) = 2\alpha\beta^{-\frac{1}{2}} - \alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{-1} + 6\beta - 3\alpha^{-\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}$.

Γ'. $(\alpha\chi^{2} - \chi^{-\frac{1}{3}}) : \chi^{\frac{1}{3}} = \alpha\chi^{\frac{5}{3}} - \chi^{-\frac{2}{3}}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 408. Ἐκ τῆς δοθείσης ὁποιασδηποτοῦν, συγκειμένης, δυνάμεως μέγεθός τι ἐξ ἑνὸς παρενθέσει διεσταλμένου μέλους ἀπαλλάξαι· Τουτέστιν ἐκ τοῦ δοθέντος μεγέθους $(\alpha^{\mu}+\beta\chi^{\nu})^{\tau}$, τὴν κατὰ τὸ δεύτερον μέλος ποσότητα χ^{ν} ἀπαγαγεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Τῶν ὑποσημείων, ἢ καὶ μηνίσκοις διεσταλμένων μελῶν διὰ τῆς, ἣν ἀπαλλάξαι βουλόμεθα, ποσότητος διαιρεθέντων, ἀναχθήτω αὕτη ἐπὶ τὴν τοῦ κοινοῦ ἐκθέτου δύναμιν; καὶ πρὸ τοῦ σημείου, οἷα δὴ παράγων γραφήτω· οἷον $(\alpha^{\mu}+\beta\chi^{\nu})^{\kappa} = \chi^{\nu\kappa}\cdot\left(\frac{\alpha^{\mu}+\beta\chi^{\nu}}{\chi^{\nu}}\right)^{\kappa} = \chi^{\nu\kappa}(\alpha^{\mu}\chi^{-\nu}+\beta)^{\kappa}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστι μὲν δὴ $(\alpha^{\mu}+\beta\chi^{\nu})^{\kappa} = \frac{(\alpha^{\mu}+\beta\chi^{\nu})^{\kappa}}{(\chi^{\nu})^{\kappa}}\cdot(\chi^{\nu})^{\kappa} = \left(\frac{\alpha^{\mu}+\beta\chi^{\nu}}{\chi^{\nu}}\right)^{\kappa}\cdot(\chi^{\nu})^{\kappa} = \chi^{\nu\kappa}(\alpha^{\mu}\chi^{-\nu}+\beta)^{\kappa}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. $\chi(\alpha^{3}\chi - \alpha\chi^{2})^{\frac{3}{2}} = \chi\cdot(\chi^{2})^{\frac{3}{2}}(\alpha^{3}\chi^{-1} - \alpha)^{\frac{3}{2}} = \chi^{4}(\alpha^{3}\chi^{-1} - \alpha)^{\frac{3}{2}}$.

Β'. $(\alpha y^{\frac{1}{2}} + \alpha^{3} y)^{-\frac{2}{3}} = (\alpha y^{\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}}(1+\alpha^{2} y^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}} = \alpha^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{3}} (1+\alpha^{2} y^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 409. Ἔσται κἀνάπαλιν, ἐπί τινος παρενθέσει ὑπεμφαινομένης δυνάμεως, μεγέθους οἱουδηποτοῦν συγκειμένου, ἤτοι πολυμεροῦς, τὸν ἐκτὸς τοῦ τῆς παρενθέσεως σημείου ἐκκείμενον παράγοντα ἐντὸς ἀγαγεῖν, ἐὰν τοῦ ἐκθέτου τουτουῒ τοῦ παράγοντος διὰ τοῦ κοινοῦ ἐκθέτου διαιρεθέντος, τὰ λοιπὰ ἐντὸς τῆς παρενθέσεως μέλη ἐπ' αὐτὸν πολλαπλασιασθῶσιν· οἷον,

Α'. $y^{\sigma}(\alpha^{\mu}+\beta\chi^{\nu})^{\kappa} = (y^{\frac{\sigma}{\kappa}})^{\kappa}\cdot(\alpha^{\mu}+\beta\chi^{\nu})^{\kappa} = [y^{\frac{\sigma}{\kappa}}\cdot(\alpha^{\mu}+\beta\chi^{\nu})]^{\kappa} = (\alpha^{\mu} y^{\frac{\sigma}{\kappa}} + \beta\chi^{\nu} y^{\frac{\sigma}{\kappa}})^{\kappa}$.

Β'. $\alpha\chi^{-\frac{2}{3}}(\alpha^{2}+\chi^{2})^{-\frac{1}{3}} = [\alpha^{-3}\chi^{2}\cdot(\alpha^{2}+\chi^{2})]^{-\frac{1}{3}} = (\alpha^{-1}\chi^{2} + \alpha^{-3}\chi^{4})^{-\frac{1}{3}}$.

ΤΜΗΜΑ Γ.

ΠΕΡΙ

ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΤΟΥΤΩΝ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α.

ΠΕΡΙ

ΦΥΣΕΩΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΟΥ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΑΛΛΟΙΩΣΕΩΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 410. Ἐξίσωσίς ἐστι τῆς αὐτῆς ποσότητος διὰ δυοῖν διαφόρων, ἀλλ' ἴσων δυνάμεων, ἔκθεσις, σημείῳ ἰσότητος συνεζευγμένης.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οἱονδηποτοῦν μὲν δὴ Ἀλγεβραϊκὸν μέγεθος διττῶς ἐκτεθῆναι ἔχει· οἷον τὸ 6α ἐκτεθείσεται μὲν καὶ διὰ τοῦ $9\alpha + \sqrt{\frac{12\alpha^2}{3}} - 5\alpha$, ἐκτεθείσεται δὲ καὶ διὰ τοῦ $4.9\alpha - \frac{90\alpha}{3}$, ἀμφοῖν ἰσοδυνάμων· ἀλλ' οὖν καὶ διαφόρως ἄλλως ὡσαύτως. Ἐνθεντοι τῇ τῶν τοιούτων ἰσοδυνάμων παραθέσει διττή τις ἐκκύπτει ἔκθεσις ἢ $9\alpha + \sqrt{\frac{12\alpha^2}{3}} - 5\alpha = 4.9\alpha - \frac{90\alpha}{3}$, ἥτις τῷ τῆς ἐξισώσεως ὀνόματι δηλοῦσθαι ἠξίωται· οὕτω καὶ ἡ τοῦ 8 δύναμις ἤτοι τὸ τούτου ἰσότιμον ἔσται $6+2$,

ἢ $4+4 = 5+3$. Ὁ δὲ Στιφέλιος (α) τὴν ἐξίσωσιν ὁρίζεται, διὰ τοῦ τῆς ἰσότητος λόγου, μεταξὺ δυοῖν ὅρων διαφόρως παρονομαζομένων, θεωρουμένου.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 411. Ἐξισώσεων Βάσις ἐστὶ τὸ ἐξευρεῖν τὴν τῆς ἀορίστου ποσότητος δύναμιν, ὅπερ τελεῖται διὰ τῆς ἀκριβοῦς τῶν ὑποθέσεων ἀνιχνεύσεως, ἐπ' αὐτῷ τούτῳ δι' ὡρισμένων ποσοτήτων ἐκτιθεμένων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἡ τῶν Ἐξισώσεων χρῆσις τὰ μάλιστα ἐστὶ χρήσιμος, ὡς γενικωτάτη τυγχάνουσα· δι' αὐτῆς γὰρ ἄπειρα τῶν αἰτημάτων τε καὶ προβλημάτων εὐχερῶς διαλύεσθαι ἔχουσιν· οἷον εἰ φαίην, τῆς τοῦ Πέτρου περιουσίας οὔσης 10 ταλάντων, τῆς δὲ τοῦ Παύλου 15, πόσον ἂν εἴη τῆς ἀμφοτέρων περιουσίας τὸ κεφάλαιον; ἐὰν τὸ κεφάλαιον ὡς ἀόριστον κληθῇ χ, εὔδηλόν ἐστι τὸ αἴτημα διὰ τῆς ἐξισώσεως $\chi = 10 + 15$ ἐκτιθέμενον, διὰ τῆς $\chi = 25$ διαλύεσθαι.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 412. Οἱ πρὸς ἀριστερὰν τοῦ τῆς ἰσότητος σημείου ὅροι Ἐξισώσεως Μέλος πρῶτον, οἱ δὲ πρὸς δεξιὰν Μέλος δεύτερον καλεῖσθαι εἰώθασιν· οἷον $\alpha + \beta = \mu$, $\alpha^2 - \chi^2 = \beta^2 + \alpha\delta$. οἱ ὅροι $\alpha + \beta$ καὶ $\alpha^2 - \chi^2$ τὸ πρῶτον συνιστᾶσι μέλος, οἱ δὲ λοιποὶ τὸ δεύτερον.

(α) In Arithm. integra Lib. 3. C. I. p. 238. b.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 413. Ἐξισώσεως Ῥίζα ἐστὶν ἡ τῆς ἀορίστου ποσότητος δύναμις, ἥτις τῇ ἐξισώσει ἐμπεριέχεται· οἷον, ἐὰν ᾖ $\alpha^2+\beta^2=\chi^2$, ῥίζα ἔσται $\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}=\chi$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 414. Ἐὰν μὲν ἡ τῆς ἀορίστου χ δύναμις ᾖ θετικὴ ὡς $\chi=3$, ἡ ῥίζα καλεῖται Ἀληθής. Ἐὰν δὲ ἀποφατικὴ, ὡς $\chi=-5$, Ψευδής. Ἐὰν δὲ τελευταῖον ἡ ταύτης δύναμις, ῥίζα ἀποφατικῆς ποσότητος τυγχάνει, ὡς $\sqrt{-5}$, Κατ' ἐπίνοιαν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 415. Ἀνάλυσις Ἐξισώσεων ἐστὶν, ἡ τὴν ἐξίσωσιν ἀναλύουσα μέθοδος ἢ ἑρμηνεία, δι' ἧς ἡ ἐκείνῃ ἐμπεριεχομένη ἀόριστος ποσότης διακρίνεται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 416. Σύνθεσις Ἐξισώσεων ἀκούει ἡ τῶν τῆς ὡρισμένης ποσότητος αἰτημάτων, ἢ καὶ τῶν ἐν τοῖς προβλήμασιν ὑποθέσεων ἢ καταστάσεων, διὰ τῶν ἐξισώσεων ἔκθεσις.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 417. Ὑπόθεσις ἤτοι Θέσις ἢ Κατάστασις προβλήματος εἰσὶ, τὰ ποσότητας τὰς ὡρισμένας τῶν μὴ, χαρακτηρίζοντα σημεῖα· ἅττα ἐν λόγῳ πεφύκασιν, ὃν αἱ τῶν ποσοτήτων ἀόρισται πρὸς τὰς ὡρισμένας ἔχουσιν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οἷον προτιθεμένου τοῦ ἐφεξῆς αἰτήματος· Ἀγά-

θωνος μετὰ Γοργωνίου ὁμοῦ δαπανησάντων 100 χρυσοὺς, ἡ τοῦ Ἀγάθωνος δαπάνη τριπλῷ μείζων τῆς τοῦ Γοργωνίου ἐξέκυψεν· ποσταία ἄρ' ἦν ἡ ἑνὸς ἑκάστου δαπάνη; Δύω μὲν ἐκκύπτουσιν ἀόρισται ποσότητες, ἤτοι ἡ τοῦ Ἀγάθωνος δαπάνη (ἣν θετέον $=\chi$) καὶ ἡ τοῦ Γοργωνίου (ἣν κλητέον y), μία δὲ ἡ ἐγνωσμένη ἤτοι οἱ 100 χρυσοὶ (οὓς ὀνομαστέον α)· Διὸ καὶ τὸ προβληθὲν διττὰς ἐμπεριείληφε τὰς Θέσεις, ὧν τὴν μὲν, τὰς τοῦ Ἀγάθωνος δηλ. καὶ Γοργωνίου δαπάνας ὁμοῦ ληφθείσας δέον ἰσοῦσθαι τῇ ὁλικῇ ποσότητι, οἷον $\chi+y=\alpha$· τὴν δὲ, ἤτοι τὴν θατέρου δαπάνην τριπλῆν εἶναι τῆς τοῦ ἑτέρου, ἤτοι $\chi=3y$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 418. Οἱ τῶν δοθεισῶν τοίνυν ποσοτήτων πρὸς τὰς ἀορίστους λόγοι, Θέσεις εἰσὶ τοῦ προβλήματος· δι' αὐτῶν γὰρ γινώσκεται, τίνας δέον εἶναι τὰς προτεθείσας καταστάσεις, ἵνα γνωστῆς μεταξὺ καὶ ἀγνώστου ἰσότης ληφθῇ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 419. Πρόβλημα Διακεκριμένον ἐστὶν, ἐν ᾧ μία μόνη ἐστὶν ἡ τῆς ἀορίστου ποσότητος ἀξία, ἢ ὡρισμένος τις ἀξιῶν ἤτοι δυνάμεων ἀριθμός.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 420. Πρόβλημα μὴ διακεκριμένον εἴτ' οὖν Ἀόριστον ἐστὶν, ἐν ᾧ πλείονες εἰσὶ δυνάμεις, ἤτοι ἰσότιμα ποσότησιν ἀορίστοις ὑποτιθάμενα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οἷον μὲν δὴ, εἰ προκέοιτο εὑρεῖν δύω ἀριθμοὺς, ὧν ἡ διαφορὰ $= 3$· ἔσται πρόβλημα τὸ τοιοῦτον μὴ διακεκριμένον, ὡς ὄντων ἀριθμῶν τοιῶνδε ἀπείρων· καὶ γὰρ $6 - 3 = 3$, $7 - 4 = 3$, $15 - 12 = 3$, $17 - 14 = 3$, καὶ ἐφεξῆς. Ἐὰν δὲ προστεθῇ, ὅτι τῶν τοιῶνδε ἀριθμῶν τὸ κεφάλαιον δέον εἶναι $= 15$, ἡ προστεθεῖσα ὑπόθεσις διέκρινεν ἤδη τὸ πρόβλημα, οὔτε μὴν ἕτεροι ἀριθμοὶ τῷ αἰτήματι ἰσοδυναμοῦντες εἰσχωρήσωσιν, ὅτι μὴ ὁ 6 καὶ ὁ 9, τὸ γὰρ τούτων κεφάλαιον ἐστὶν $= 15$, ἡ δὲ διαφορὰ $= 3$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 421. Πρόβλημα Προτιθέναι δηλοῖ, ζητεῖν εὑρεθῆναι τὸ ἰσότιμον μιᾶς τινος, ἢ πλειόνων ἀορίστων ποσοτήτων.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 422. Πρόβλημα Ἀναλύειν ἐστὶ τὸ εὑρεῖν ἑκάστης τῶν ἐν τῷ προβλήματι ἀορίστων ποσοτήτων τὸ ἰσότιμον, τουτέστι τὴν δύναμιν· ἢ δεῖξαι διὰ τῆς ἐς ἀδύνατον ἐπαγωγῆς, (εἴπερ οἱ τοῦ προβλήματος δοθέντες ὅροι, ταυτὸν εἰπεῖν αἱ ὑποθέσεις, ἀντιφάσει ὑπόκεινται), τὴν τοῦ προβλήματος ὑπόθεσιν λυθῆναι μὴ δύνασθαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 423. Εὑρίσκεται δὲ τὸ τῆς ἀορίστου ποσότητος ἐπιβάλλον, ἤτοι ἡ δύναμις, αὐτῆς μόνης ἐν οἱῳδηποτοῦν τῆς ἐξισώσεως μέλει τελούσης, ἐν θατέρῳ δὲ τῶν ἀγνώστων καὶ ἀμιγῶν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 424. Ἐξισώσεως Ὅροι εἰσὶν, αἱ τὴν ἀόριστον

πρὸς διαφόρους ἐξῃρμένην δυνάμεις ἐμπεριέχουσαι ποσότητες.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 425. Οἱ ὅροι, ἐν οἷς ἡ ἀόριστος πρὸς τὴν αὐτὴν ἐξῆρται δύναμιν, ἀνθ' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ θεωρεῖσθαι ἔχουσιν· οἷον ἐν τῇ ἐξισώσει

$$\begin{array}{l} \chi^2 + 2\alpha\chi + \alpha^2 = 0 \\ + 2\beta\chi + \beta^2 \\ + 2\alpha\beta \end{array}$$

τρεῖς εἰσὶν ὅροι, ὡς τριῶν διαφόρων ὄντων βαθμῶν πρὸς οὓς ἡ ἀόριστος χ ἐξῆρται, οἷον χ^2, χ^1, χ^0 (§. 272.). Ἔνθετοι καὶ ὑπάλληλοι οἱ ὅροι εἰώθασι γράφεσθαι, ἐν οἷς ἡ ἀόριστος ἰσοβάθμιος τυγχάνει.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 426. Ἐξίσωσις Πλήρης, εἴτ' οὖν τοὺς ἀνήκοντας ὅρους πλουτοῦσα καλεῖται, ἐν ᾗ οἱ τῶν τῆς ἀορίστου ποσότητος δυνάμεων ἐκθέται, τάξει τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἐγκοπῆς δίχα ἐλαττοῦνται, καὶ πρὸς τούτοις συγκείμενος πάρεστιν ὅρος ἐκ ποσοτήτων μόνον γνωστῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 427. Ἐν πλήρει τοίνυν ἐξισώσει τὸν τῶν ὅρων ἀριθμὸν μονάδι δεῖ πλεονάζειν τοῦ ἐκθέτου, τῆς κατὰ τὴν ἀόριστον μεγίστης δυνάμεως· οἷον ἐν τεταρτοβαθμίῳ ἐξισώσει πέντε ὅρους δέον παρεῖναι, ὡς $\chi^4 - 5\chi^3 + 2\chi^2 - 7\chi - 28 = 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 428. Ἐξίσωσις Μὴ πλήρης ἐστὶν, ἐν ᾗ ἡ τῶν ἐκθετῶν τῆς ἀορίστου, τάξει φυσικῇ ἐλαττουμένων, σειρὰ διακόπτεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 429. Ἡ μὴ πλήρης τοίνυν ἐξίσωσις εἴη ἂν καὶ Ἐλλείπουσα· διὸ καὶ οἱ ἐν τῇ μὴ πλήρει τοιᾷδε θέσει, ἔνθα ἡ σειρὰ διακόπτεται, παρόντες ὅροι ἐλλείποντες ἂν κληθεῖεν· οἷον $\chi^5 - \chi^3 + \chi^2 - \delta = 0$, ἰσότης ἐστὶ μὴ πλήρης, ὡς ἀπόντων τοῦ δευτέρου καὶ πέμπτου τῶν ὅρων.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 430. Ἐξίσωσις Πρώτου, Δευτέρου, Τρίτου κτλ. Βαθμοῦ, ἤτοι Δυνάμεως ἀκούει, καθ' ἣν ἡ ἀόριστος πρὸς τὰς αὐτὰς ἰσαρίθμως ἐξῆρται δυνάμεις.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἡμεῖς δ' ἀλλ' οὖν ἐν τῇ περὶ τῶν ἐξισώσεων ἡμετέρᾳ θεωρίᾳ μέχρι τῶν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἰσχωρῆσαι ἔγνωμεν, τὰς καθυπερτέρας τοῖς τῆς ὑπερεχούσης Ἀναλύσεως ἐρασταῖς παραχωροῦντες.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 431. Ἄρα ἡ ἐξίσωσις ἐν γένει, ὅροις Ἀλγεβραϊκοῖς ἐξ ὡρισμένων τε καὶ ἀορίστων ποσοτήτων συγκειμένοις, καὶ ἑκατέρωσε τοῦ τῆς ἰσότητος σημείου ταττομένοις, συνίσταται.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 432. Τὰς μὲν τῶν δοθεισῶν ἢ ὡρισμένων ποσοτήτων τοῖς τοῦ ἀλφαβήτου πρώτοις στοιχείοις α, β, γ, δ, κτλ. ἐπισημειωτέον· τὰς δὲ τῶν ζητουμένων ἢ

ἀορίστων τοῖς ἐσχάτοις y, φ, χ, ψ (§. 30.), ἐφ' ᾧ ἐν ἑκάστῳ προβλήματι αἱ ἀόριστοι τῶν ὡρισμένων ῥᾳδίως διακρίνοιντο.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 433. Πᾶς ἐξισώσεως ὅρος ἐκ θατέρου τῆς ἰσότητος μέλους ἐπὶ θάτερον ἀντισήμως μετατίθεσθαι ἔχει, σωζομένης τῆς καθ' ἕκαστον τῶν μελῶν ἰσότητος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Καὶ γὰρ ὁ μετατιθέμενος ὅρος ἢ καταφάσει ὑπόκειται, ἢ ἀποφάσει. Εἰ μὲν οὖν καταφατικός ἐστι, γινομένης τῆς μεταθέσεως ἀποφατικὸς ἐκκύψει· οὕτως τε ἐκ τοῦ, οὗ πρότερον ἐτύγχανε μέλους ἀπαλειφθείς, ἐν θατέρῳ παρέσται ἀντιθέτως· εἰ δ' ἀποφατικός, μετατεθεὶς ἐκκύψει θετικός. Ἄρα ὅρον τινὰ ἀντισήμως μετατιθέναι ταυτόν ἐστιν ἐκεῖνον ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἀφελεῖν, ἢ ἀμφοτέροις προσθεῖναι· Ἀλλὰ μὴν ἡνίκα τοῖς ἴσοις ταυτὸν προστίθεται, ἢ ἀφαιρεῖται, τὰ ἐναπολειπόμενα ἴσα εἰσὶν (§. 82. 93.) Ἄρα πᾶς ἐξισώσεως ὅρος, ἐκ θατέρου τῆς ἰσότητος μέλους ἐπὶ θάτερον μετατίθεσθαι ἔχει μετὰ τοῦ ἀντιθέτου σημείου $+$ εἰς $-$ καὶ $-$ εἰς $+$, σωζομένης τῆς καθ' ἕκαστον τῶν μελῶν ἰσότητος. Ο. Ε. Δ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οἷον ἐὰν ἐν τῇ ἐξισώσει $\alpha + \beta = \gamma$, ὁ δεύτερος ὅρος β ἀντισήμως μετατεθῇ, ἵν' ᾖ $\alpha = \gamma - \beta$, ὡς τούτῳ ἐξ ἀμφοτέρων ἀφαιρεῖται τῶν μελῶν, ὥστε ἀριθμοῖς δῆλον, τεθέντων τοῦ μὲν $\alpha = 8$, τοῦ δὲ $\beta = 2$, καὶ τοῦ $\gamma = 10$, ἔσται $\alpha + \beta = \gamma$. $8 + 2 = 10$· καὶ $\alpha = \gamma - \beta$, $8 = 10 - 2$· ὡσαύτως $\alpha^2 - \chi^2 = \beta^2$, ὁ ὅρος χ^2 μετὰ τοῦ ἀντιθέτου σημείου $+$ μετατεθεὶς ἀμφοτέροις προστίθεται οἷον $\alpha^2 = \beta^2 + \chi^2$, $5^2 - 4^2 = 3^2$, ἤτοι $25 - 16 = 9$· καὶ τῇ μεταθέσει ἔσται $5^2 = 3^2 + 4^2$, $25 = 9 + 16$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 434. Πᾶς ἄρα ἐξισώσεως ὅρος ἐξ ἀποφατικοῦ θετικὸς, καὶ τοὔμπαλιν ἐκ θετικοῦ ἀποφατικὸς τῇ μεταθέσει γίνεσθαι ἔχει φυλαττομένης τῆς τῶν μελῶν ἰσότητος. Ἔνθεν τοι δῆλόν ἐστιν ἐξίσωσιν ὁποιανοῦν ἐξίτηλον γίνεσθαι εἴς τε τὸ μηδὲν ἀποίχεσθαι, τῇ τῶν ὅρων ἐκ τοῦ ἑνὸς τῆς ἰσότητος μέλους ἐπὶ τὸ ἕτερον μετὰ τοῦ ἀντιθέτου σημείου μεταποιήσει τε καὶ μεταθέσει, ὡς οἷόν τ' ἐστὶν ἰδεῖν ἐν ταῖς τῆς ὑπερεχούσης Ἀναλύσεως ἐξισώσεσιν· οἷον $\alpha^2 + \chi^2 = \beta^2$, $4^2 + 3^2 = 5^2$, ἤτοι $16 + 9 = 25$· ἔσται $\alpha^2 + \chi^2 - \beta^2 = 0$ $4^2 + 3^2 - 5^2 = 0$, ἤτοι $16 + 9 - 25 = 0$· ὡσαύτως $\delta + \varepsilon = \varphi$, $4 + 9 = 13$· καὶ $\delta + \varepsilon - \varphi = 0$, $4 + 9 - 13 = 0$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 435. Οἱ τὰ αὐτὰ τοίνυν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς τῆς ἐξισώσεως μέλεσι σημεῖα ἔχοντες ὅροι ἑκατέρωθεν ἀπαλειφόμενοι οὐδόλως τὴν τῶν μελῶν ἀλλοιοῦσιν ἰσότητα· οἷον $3\alpha^2 - 2\beta\gamma + \chi^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma$, ἔσται τῇ τοῦ $- 2\beta\gamma$ ἀμφοτέρωθεν ἀπαλείψει $3\alpha^2 + \chi^2 =$

$\beta^2 + \gamma^2$. Καὶ γὰρ οἱ ὅροι, ἢ τὸ τοῦ πλεονασμοῦ σημεῖον, ἢ τὸ τῆς ἐλλείψεως προσκείμενον ἔχουσιν· εἰ μὲν τὸ πρῶτον, ἐξαλειφόμενοι ἀφαιροῦνται ἑκατέρωθεν· εἰ δὲ τὸ δεύτερον, προστίθενται (§. 95.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 436. Ἕπεται τοίνυν ἐν γένει τὴν τῆς ἀορίστου ποσότητος δύναμιν ἐξευρίσκεσθαι, ἐὰν ἡ σὺν ἐκείνῃ ὡρισμένη ποσότης, καταφατικὴ μὲν τυγχάνουσα, ἐξ ἀμφοτέρων ἀφαιρεθῇ τῶν μελῶν· ἀποφατικὴ δὲ, ἀμφοτέροις προστεθῇ· οἷον·

Α'. $\chi - 7 = 12$

$7 = 7$ (§. 82.)

$\chi = 12 + 7 = 19$.

Β'. $\chi + 3 = 10$

$3 = 3$ (§. 93.)

$\chi = 10 - 3 = 7$.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 437. Ἀμφοῖν τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν διὰ τῆς αὐτῆς πολλαπλασιαζομένων ἢ διαιρουμένων ποσότητος, τὰ τούτων παραγόμενα καὶ πηλίκα ἰσοδυναμήσουσι τοῖς ἐν ἀρχῇ δοθεῖσι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἀμφοτέρων γὰρ τῶν μελῶν διὰ τῆς αὐτῆς πολλαπλασιαζομένων ἢ διαιρουμένων ποσότητος, ἴσα ἐπὶ ἴσων πολλαπλασιάζονται καὶ δι' ἴσων διαιροῦνται· ἀλλ' οὖν ἡνίκα ἴσα ἐπὶ ἴσων πολλαπλασιάζονται ἢ δι' ἴσων διαιρεῦνται τὰ ἐντεῦθεν ἐκκύπτοντα παραγόμενα καὶ πηλίκα πάντως ἴσα τυγχάνουσιν (§. 111. 133.)· ἄρα κἀνταῦθα, τὰ τούτων παραγόμενα καὶ πηλίκα ἰσοδυναμήσουσι τοῖς ἐν ἀρχῇ δοθεῖσιν. Οἷον $2\alpha + 3\gamma = 4\chi$, οἱ τῆς ἐξισώσεως ὅροι ἐφ' ὁποιονοῦν ἀριθμὸν πολλαπλασιαζόμενοι, ἤτοι ἐπὶ 2, ἔσονται $4\alpha + 6\gamma = 8\chi$· ὡσαύτως τε οἱ ὅροι $2\chi = \alpha$ διὰ 2 διαιρούμενοι ἰσοδυναμήσουσι τοῖς $\chi = \frac{\alpha}{2}$. Ἐὰν δὲ τεθῇ ἐπὶ τοῦ πρώτου παραδείγματος $\alpha = 8$, $\gamma = 4$, $\chi = 7$· ἔσται $2.8 + 3.4 = 4.7$ ἤτοι $16 + 12 = 28$, οἵτινες ἐπὶ 2 πολλαπλασιασθέντες δώσουσιν $4.8 + 6.4 = 8.7$ ἤτοι $32 + 24 = 76$ ἐὰν δὲ ὡσαύτως ἐπὶ τοῦ δευτέρου παραδείγματος $2\chi = \alpha$, τεθῇ $\chi = 8$. ἔσται $2.8 = 16$, καὶ τῇ διὰ τοῦ 2 διαιρέσει ἐκκύψει $\frac{8}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 438. Ἐν ἐξισώσει τοίνυν ὁποιαοῦν, ἐὰν τὰ τῶν κατ' αὐτὴν ὅρων σημεῖα ἐς τοὐναντίον μετενεχθῶσιν, ἡ ταύτης δύναμις ἀμετάποίητος σώζεται, ὑποτίθεται γὰρ τὸ τηνικαῦτα τοὺς ταύτης ὅρους διὰ -1 πεπολλαπλασιάσθαι· οἷον ἐὰν ᾖ $\alpha\beta - \beta\gamma = \gamma + \delta$, ἔσται $\beta\gamma - \alpha\beta = -\gamma - \delta$· καὶ ἐν ἀριθμοῖς $12 - 4 = 5 + 3$, καὶ $4 - 12 = -5 - 3$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 439. Ἐφ' ᾧ τοίνυν τὸ τῆς ἀορίστου ποσότητος ἑτέρᾳ τινὶ ὡρισμένῃ ἐπιπολλαπλασιαζομένης ἰδιότιμον εὑρεθῆναι ἔχοι, διὰ τοῦ μετ' ἐκείνης συνθέτου ἀμφότερα τὰ τῆς ἐξισώσεως διαιρείσθωσαν μέλη· οἷον $4\chi = 32$, ἔσται $\frac{4\chi}{4} = \frac{32}{4}$ (§. 133.) ἤτοι $\chi = 8$. Κἀνάπαλιν πρὸς τὴν τῆς ἀορίστου δι' ὡρισμένης τινὸς διαιρουμένης εὕρεσιν ἀμφότερα τὰ τῆς ἐξισώσεως μέλη ταύτῃ ἐπιπολλαπλασιασθήτωσαν· οἷον, $\frac{\chi}{9} = 6$, $\frac{\chi}{9} \times 9 = 6 \times 9$ (§. 111.), ἤτοι $\chi = 54$.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 440. *Ἐὰν ἀμφότερα τὰ τῆς ἐξισώσεως μέλη πρὸς τὴν αὐτὴν ἐξαρθῶσι δύναμιν, ἡ τούτων ἰσότης οὐδόλως ἀλλοιοῦται.*

ΔΕΙΞΙΣ.

Καὶ γὰρ ποσότητά τινα πρὸς δύναμιν ἐξαίρειν δηλοῖ, τὰς ἴσας ῥίζας πρὸς τὴν αὐτὴν δύναμιν ἀνάγειν. ἀλλ' οὖν, ἐὰν αἱ ἴσαι ῥίζαι ἐπὶ τὴν αὐτὴν ἀρθῶσι δύναμιν, ἴσα ἴσοις ἐπιπολλαπλασίασται (§. 437.)· ἑπομένως ἡ τούτων ἰσότης οὐκ ἀλλοιοῦται· ἄρα κτλ. ὡς κἂν τῷ παραδείγματι δῆλον·

ἔστι μὲν δὴ $8 = 5 + 3$	Ἐὰν $\alpha = \beta$
ἄρα ὁμοίως $8^2 = (5 + 3)^2$	ἔσται ὡσαύτως $\alpha^{\mu} = \beta^{\mu}$
ἤτοι $64 = 27 + 30 + 9$	ἢ δὲ $\alpha > \beta$
	ἔσται ὡσαύτως $\alpha^{\mu} > \beta^{\mu}$

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 441. *Ἐὰν ἐξ ἀμφοῖν τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν ἡ αὐτὴ ἐξαχθῇ ῥίζα, ἡ ἐξίσωσις οὐδὲ μίαν τροπὴν ὑφίσταται.*

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὅτε γὰρ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ῥίζα ἐξάγεται, αὕτη ἐξ ἴσων ἐξάγεται· ἀλλαμὴν τηνικαῦτα οὐκ ἀλλοιοῦται ἡ τῶν μελῶν ἰσότης· καὶ γὰρ τῶν ἴσων τετραγώνων, κύβων καὶ ἑτέρων δυνάμεων, αἱ ῥίζαι εἰσὶν ἴσαι· ἄρα κτλ. οἷον, ἐὰν ἐκ τοῦ $\chi^2 = \alpha$ ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα τετραγώνειος, ἔσται $\chi = \sqrt{\alpha}$· ὡσαύτως, ὄντος

$$64 = 25+30+9$$

ἔσται ὁμοίως $\sqrt{64} = \sqrt{(25+30+9)}$ Ἐὰν $\alpha = \beta$

ἤτοι $\sqrt{64} = \sqrt{(5+3)^2}$ ἔσται ὡσαύτως $\sqrt[\mu]{\alpha} = \sqrt[\mu]{\beta}$

ἔστι δὲ $\alpha > \beta$

τουτέστι $8 = 5+3$ ἔσται πάντως $\sqrt[\mu]{\alpha} > \sqrt[\mu]{\beta}$

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 442. Ἐξ ὧν ἕπεται, ἐὰν ἐν δοθείσῃ τινὶ ἐξισώσει $\alpha + \frac{5\beta^3}{4} = \gamma$, μέλος τι οἷον τὸ β, τοῦ σὺν αὐτῷ συνθέτου, παρονομαστοῦ καὶ ἐκθέτου ἀπαλλάξαι δέῃ, ἔσται $\frac{5\beta^3}{4} = \gamma - \alpha$ (§. 433.), καὶ $5\beta^3 = 4\gamma - 4\alpha$ (§. 439.), καὶ $\beta^3 = \frac{4\gamma - 4\alpha}{5}$ (αὐτόθι) καὶ ἔσχατον $\beta = \sqrt[3]{\frac{4\gamma - 4\alpha}{5}}$ (§. 441.)· ὡσαύτως ἐν τῇ ἐξισώσει $\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\beta\gamma} = \gamma$ δεήσαν τὸ μέλος $\sqrt{\beta\gamma}$ τοῦ τῆς ῥίζης ἀπαλλάξαι σημείου, ἔσται $-\sqrt{\beta\gamma} = \gamma - \frac{\alpha}{2}$, καὶ $(-\sqrt{\beta\gamma})^2 = (\gamma - \frac{\alpha}{2})^2$, ἤτοι $\beta\gamma = \gamma^2 - \alpha\beta + \frac{\alpha^2}{4}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 443. Ἀπὸ τῆς δοθείσης ὁποιασδηποτοῦν

ἐξισώσεως τὰ ταύτης κλάσματα ἀπαλεῖψαι, σωζομένης τῆς τῶν μελῶν ἰσότητος.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐὰν μὲν Α'. ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει μοναδικὸν παρεμπῖπτον τύχῃ κλάσμα, πολλαπλασιασθήτωσαν ἐπὶ τὸν τοῦ κλάσματος παρονομαστὴν πάντες οἱ λοιποὶ ὅροι, ἤτοι ἀμφότερα τὰ τῆς ἐξισώσεως μέλη· οὕτω γὰρ, ἥ τε ἰσότης τηρηθήσεται (§. 433. 439.), καὶ ὁ τοῦ κλάσματος ἀριθμητὴς διὰ τοῦ αὐτοῦ πολλαπλασιασθεὶς τε καὶ διαιρεθεὶς, οὐδόλως ἀλλοιωθήσεται (§. 168. 437.) Οἷον ἐὰν τῆς ἐξισώσεως $\alpha - \frac{3\chi}{\beta} = 2\gamma$, πάντες οἱ ὅροι ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν β πολλαπλασιασθῶσιν, ἐκκύψει $\alpha\beta - \frac{3\beta\chi}{\beta} = 2\beta\gamma$, ἤτοι $\alpha\beta - 3\chi = 2\beta\gamma$.

Ἐὰν δὲ Β'. πλείονα ἐμπίπτωσι κλάσματα, ἀμοιβαδὸν ἀπαλείφεσθαι ἔχωσιν, ἀμφοτέρων τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν ἐπὶ τοὺς παρονομαστὰς ἑνὸς ἑκάστου κλάσματος, πλὴν τοῦ ἰδίου, πολλαπλασιαζομένων. Πλείστων δὲ ὄντων κλασμάτων, ἐὰν πάντες οἱ ὅροι ἀμφοτέρωθεν πρὸς τὸν αὐτὸν ἀχθῶσι παρονομαστὴν, ἐφ' ὃν εἶτα ἀμφότερα τὰ τῆς ἐξισώσεως πολλαπλασιασθῶσι μέλη, τουτέστιν, ἐὰν ὁ κοινὸς παρονομαστὴς παροφθῇ, εὐχερῶς οὕτω τὰ τοιαῦτα ἀναιρεωθήσονται· οἷον ἐὰν ὦσι $\frac{4}{5}\alpha\chi + \beta^2\gamma - \frac{3}{4}\chi^2 = \alpha\beta$, τῇ τῶν ὅρων πάντων πρὸς κοινὸν παρονομαστὴν ἀναγωγῇ ἐκκύψει $\frac{16\alpha\chi + 20\beta^2\gamma - 15\chi^2 = 20\alpha\beta}{20}$, ὧν διὰ τοῦ 20 πολλαπλασιαζομένων, ἔσται $20\alpha\beta = 16\alpha\chi + 20\beta^2\gamma - 15\chi^2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΤΩΝ ΑΠΛΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 444. Ἐξίσωσις Ἁπλῆ ἐστιν, ἐν ᾗ ἐξίσωσίς τις μεθ' ἑτέρας ἀορίστου ποσότητος, ὁσάκις ἂν τεθῇ, ἀεὶ μοναδικῶς κειμένη εὑρίσκεται· οἷον $\chi = \alpha$, ἢ $\chi^3 = \alpha$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 445. Ἐξίσωσις Πρώτου βαθμοῦ ἐστιν, ἐν ᾗ ἡ ἀόριστος ἐν τῇ πρώτῃ ἐστὶ δυνάμει, ἤτοι πρὸς μονάδα ἐξῆρται· οἷον $\chi = \alpha$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 446. Ἐξίσωσιν Ῥυθμίζειν ἐστὶ τὸ τοὺς ὅρους οὕτω διατάττειν, ὥστε τοὺς τῶν δυνάμεων τῆς ἀορίστου ποσότητος ἐκθέτας πρὸς τὰ δεξιὰ χωροῦντας ἐλαττοῦσθαι, ὡς $\chi^4 - 5\chi^3 + 2\chi^2 - 7\chi - 258 = 0$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 447. Ὁποιοσοῦν μὲν δὴ ὅρος ἐπονομάζεται, ἐξ ἧς ἂν ἔχοι ἐν τῇ πλήρει καὶ τακτικῇ ἰσότητι θέσεως· οὑτωσὶ πρῶτος μὲν ὅρος λέγεται, ὁ τὴν ἀόριστον τῶν ποσοτήτων ἐπὶ τὴν μεγίστην τῶν δυνάμεων ἐξαρθεῖσαν ἔχων· δεύτερος δὲ, οὗπερ ὁ τῆς ἀορίστου ἐκθέτης μονάδι ἐλαττοῦται (§. 279.)· τρίτος δὲ, ἔνθ' αὖ ὁ ἐκθέτης μονάδι τοῦ πρὸ αὐτοῦ ἠλάττωται· καὶ ἐφεξῆς.

Ὁ δ' ἔσχατος τέως, ᾧπερ ἡ ἄγνωστος ποσότης ἥκιστα πάρεστι (§. 273.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 448. Οἱαδηποτοῦν τῶν ἀορίστων ποσοτήτων χ τοσαύτας δυνάμεις, ἤτοι ἰσότιμα ὑποθεῖναι δυνάμεθα, ὅσας ἂν βουλητὸν ἡμῖν εἴη· οὕτω καὶ γὰρ ἔσται $\chi = 2$, $\chi = -5$, $\chi = 6$, $\chi = -8$· ἢ $\chi = \alpha$, $\chi = -\beta$, $\chi = \gamma$, $\chi = -\delta$· ὑποτιθεμένων τοίνυν τουτωνὶ τῶν ἐξισώσεων τῷ μηδενὶ ἴσων, ἕξομεν τὰς ἐφεξῆς ἁπλᾶς μονοβαθμίους ἐξισώσεις.

$\chi - 2 = 0$	$\chi - \alpha = 0$
$\chi + 5 = 0$	$\chi + \beta = 0$
$\chi - 6 = 0$	$\chi - \gamma = 0$
$\chi + 8 = 0$	$\chi + \delta = 0$

Ἐξ ὧν ῥᾴδιον συνιδεῖν τὰς ἀποφασκούσας τῶν ῥιζῶν θετικὰς τυγχάνειν, τοὐναντίον δὲ τὰς καταφασκούσας ἀποφατικὰς, ὡς τῇ μεταθέσει δῆλον (§. 433.)· οἷον

$\chi - \alpha = 0$	ἔσται	$\chi = \alpha$
$\chi + \beta = 0$		$\chi = -\beta$
$\chi - \gamma = 0$		$\chi = \gamma$
$\chi + \delta = 0$		$\chi = -\delta$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 449. Ἐξίσωσιν Ἁπλῆν, ἐν ᾗ μία μόνον ἐστὶν ἀόριστος, διαλῦσαι· ἤτοι ποιῆσαι διὰ τῆς μεταθέσεως, ὅπως τῶν ὡρισμένων ποσοτήτων ἐν τῷ ἑτέρῳ τῆς ἐξισώσεως μέλει ἀποτεθεισῶν, ἐν θατέρῳ μόνη ἡ ἀόριστος ὑπολειφθῇ, σωζομένης τῆς τῶν μελῶν ἰσότητος.

ΛΥΣΙΣ.

Α'. Εἰ μὲν ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει κλάσματα ἀναμὶξ παρεμπίπτοιεν, ταῦτα πρὸ πάντων ἀπαλειπτέσθωσαν (§. 443.).

Β'. Εἰ δ' ἐν ἀμφοτέροις τοῖς τῆς ἐξισώσεως μέλεσιν ὅροι τινὲς ἀορίστοις ποσότησι σύμμικτοι τύχοιεν, μετενεχθήτωσαν πάντες ἀντισήμως πρὸς τὸ ἕτερον μέρος, ἔνθα τῆς ἐσχάτης ἀναλύσεως γινομένης, ἡ ἀόριστος θετικὴ ἐκκύψει· Ὡσαύτως δὴ μετενεκτέον ἀντισήμως πρὸς τὸ ἀντίθετον τῆς ἐξισώσεως μέλος καὶ τοὺς λοιποὺς τῶν ὡρισμένων ποσοτήτων ὅρους, ἐφ' ᾧ τὸ τῆς ἐξισώσεως ἴσον τηροῖτο καὶ δίκαιον (§. 433.).

Γ'. Τῆς ἀορίστου ποσότητος ἐκ θατέρου μέλους ἐπὶ τὸ ἕτερον ἀντιθέτως μεταχθείσης, ἐὰν αὐτὴ ἐφ' ὡρισμένας τινὰς ἄλλας πεπολλαπλασίασται, δι' ἐκείνων πάντες οἱ ὅροι ἑκατέρωθεν διαιρείσθωσαν· οἷον ἐπεὶ ἐν τῇ ἐξισώσει $\alpha\chi - \beta\chi = 3\alpha\beta^2$ ἡ ἀόριστος χ ἐπὶ $\alpha - \beta$ πεπολλαπλασίασται, διαιρουμένων ἀμφοτέρων τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν διὰ $\alpha - \beta$ ἔσται $\frac{\alpha\chi - \beta\chi}{\alpha - \beta} = \frac{3\alpha\beta^2}{\alpha - \beta}$, ἤτοι $\chi = \frac{3\alpha\beta^2}{\alpha - \beta}$. Εὐχερέστερον δ' ἀλλ' οὖν τουτὶ εἴωθε γίνεσθαι, ἐὰν οἱ τὴν ἀόριστον χ συνέχοντες ὅροι ταύτης ἀπαλλαχθῶσι, τῇ πρὸς τοὺς παράγοντας διαλύσει (§. 107.): οἷον $\alpha\chi - \beta\chi = 3\alpha\beta^2$, ἔσται $(\alpha - \beta)\chi = 3\alpha\beta^2$; καὶ τῇ τοῦ συνθέτου $\alpha - \beta$ ἀπαλλαγῇ ἐκκύψει $\chi = \frac{3\alpha\beta^2}{\alpha - \beta}$.

Δ'. Εἰ μὲν οὖν ἡ ἀόριστος διὰ τῶν ἀνωτέρω διαλειφθέντων κανόνων, τῶν ὡρισμένων ὀρθῶς διακριθεῖσα

πρὸς δύναμίν τινα τετράγωνον φέρ' εἰπεῖν, ἢ κυβικήν, ἢ ἄλλην ὁποιανοῦν ἀνῆκται, ἐξαχθήτω τηνικαῦτα ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν ῥίζα ἡ τετραγώνειος, ἢ ἡ κυβική, ἢ ἑτέρα τις ὁποιαοῦν. Οἷον ἐὰν ᾖ $\chi^3 = \alpha^2 - \beta^2$, ἔσται $\chi = \sqrt[3]{(\alpha^2 - \beta^2)}$. Εἰδ' οὖν πρὸ ταύτης τὸ Ῥιζικὸν προκεχάρακται, ἀμφότερα τὰ τῆς ἐξισώσεως μέλη πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ Ῥιζικοῦ σημαινομένην δύναμιν ἐξαρτέον· οἷον ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\sqrt{\chi} = 3\alpha$, ἔσται $\chi = 9\alpha^2$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 450. Ἕπεται τοίνυν ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε ῥηθέντων, τὰς ἐφεξῆς εὐχερῶς διαλύεσθαι ἐξισώσεις· καὶ δὴ προκείσθω

Α'. Ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει $2\alpha\beta = \beta - \alpha\gamma + \delta$, εὑρεῖν τὸ α.

$$2\alpha\beta + \alpha\gamma = \beta + \delta \ (\S.\ 433.)$$
$$\alpha(2\beta + \gamma) = \beta + \delta,$$
$$\alpha = \frac{\beta + \delta}{2\beta + \gamma} \ (\S.\ 439.\ 449.)$$

Β'. Ἐν τῇ $\alpha^2\beta\gamma - \gamma\delta + 5 = \delta - 2\gamma$, εὑρεῖν τὸ γ·

$$\alpha^2\beta\gamma - \gamma\delta + 2\gamma = \delta - 5$$
$$\gamma(\alpha^2\beta - \delta + 2) = \delta - 5$$
$$\gamma = \frac{\delta - 5}{\alpha^2\beta - \delta + 2}.$$

Γ'. Ἐν τῇ $\alpha\chi + \beta\gamma = \delta\gamma + \chi$, εὑρεῖν τὸ χ·

$$\alpha\chi - \chi = \delta\gamma - \beta\gamma$$
$$\chi(\alpha - 1) = \gamma(\delta - \beta)$$
$$\chi = \frac{\gamma(\delta - \beta)}{\alpha - 1}.$$

Δ'. Ἐν τῇ $\frac{\alpha\beta}{y} = \beta\gamma + \delta + \frac{1}{y}$, εὑρεῖν τὸ y·

$$\alpha\beta = \beta\gamma y + \delta y + 1 \text{ (§. 439, 443.)}$$
$$\alpha\beta - 1 = y(\beta\gamma + \delta)$$
$$y = \frac{\alpha\beta - 1}{\beta\gamma + \delta}.$$

Ε'. Ἐν τῇ $\alpha^2 - \chi^2 = \frac{\alpha\beta + \beta\chi}{\gamma}$, εὑρεῖν τὸ χ.

$$(\alpha + \chi).(\alpha - \chi) = \frac{\beta(\alpha + \chi)}{\gamma}$$

$\alpha - \chi = \frac{\beta}{\gamma}$, τῇ διὰ τοῦ $(\alpha + \chi)$ διαιρέσει.

$$\chi = \alpha - \frac{\beta}{\gamma}.$$

Ϛ'. Ἐν τῇ $\alpha\psi^2 - \beta\gamma + 1 = 35 + \beta\psi^2$, εὑρεῖν ψ.

$$\alpha\psi^2 - \beta\psi^2 = 35 + \beta\gamma - 1$$
$$\psi^2(\alpha - \beta) = 35 + \beta\gamma - 1$$
$$\psi^2 = \frac{34 + \beta\gamma}{\alpha - \beta}$$
$$\psi = \sqrt{\frac{34 + \beta\gamma}{\alpha - \beta}}$$

Ζ'. Καὶ κατὰ γένος ἐν τῇ $\alpha\chi^\mu + \beta = \beta\chi^\mu + 18 - \chi^\mu$, εὑρεῖν τὸ χ.

$$\alpha\chi^\mu - \beta\chi^\mu + \chi^\mu = 18 - \beta$$
$$\chi^\mu(\alpha - \beta + 1) = 18 - \beta$$
$$\chi^\mu = \frac{18 - \beta}{\alpha - \beta + 1}$$
$$\chi = \sqrt[\mu]{\frac{18 - \beta}{\alpha - \beta + 1}}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'.

Τὸ τρίτον, ἤδέγ' ὅλον με βαλὼν, ἴσον αὐτίκα λήψῃ,
Αὐτῆς ἐκ μονάδος ἄχρι δυωδεκάδος.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς $12 = \alpha$, ὁ αἰτούμενος χ, τὸ δὲ τούτου τριτημόριον $\frac{1}{3}\chi$. Ἐκκύψει ἄρ' οὕτω κατὰ τὴν προτεθεῖσαν ὑπόθεσιν, ἡ ἐφεξῆς ἐξίσωσις.

$$\chi + \frac{\chi}{3} = \alpha.$$

ΑΝΑΓΩΓΗ.

$3\chi + \chi = 3\alpha$ ἀναιρέσει·

$4\chi = 3\alpha$ (§. 443.) προσθέσει τῶν ὁμοίων

$\chi = \frac{3\alpha}{4}$ (§. 439.) τῇ τοῦ συνθ. ἀπαλείψει

$\chi = \frac{3.12}{4}$ τῇ τῶν ἀριθμῶν ἀντεισαγωγῇ

$$\chi = \frac{36}{4} = 9.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\chi + \frac{\chi}{3} = \alpha\} \{9 + 3 = 12.$$

Β'.

Αἰτείσθω ἀριθμὸς, οὗτινος τὸ ἥμισυ, τὸ τριτημόριον καὶ τεταρτημόριον ὁμοῦ ληφθέντα, ὑπερέξουσιν ἐκείνου μονάδι· ἤτοι ἰσοδυναμήσουσιν ἐκείνῳ σὺν μονάδι.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω ὁ αἰτούμενος ἀριθμὸς χ, ὃς δὴ μονάδι ἐπαυξηθεὶς ἀνακύψει $\chi + 1$· τὸ τούτου ἥμισυ $\frac{1}{2}\chi$, τὸ δὲ τριτημόριον $\frac{1}{3}\chi$, καὶ τὸ τεταρτημόριον $\frac{1}{4}\chi$. Ἐκ τῶν τεθέντων ἄρα ἐξίσωσις ἔσται

$$\frac{\chi}{2} + \frac{\chi}{3} + \frac{\chi}{4} = \chi + 1$$

ΑΝΑΓΩΓΗ.

$12\chi + 8\chi + 6\chi = 24\chi + 24$

$26\chi = 24\chi + 24$ προσθέσει τῶν ὁμοίων

$\chi(26 - 24) = 24$ μεταθέσει

$2\chi = 24$, καὶ $\chi = \frac{24}{2} = 12$.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{4}=\chi+1.$$
$$6+4+3=13.$$

Γ'.

Αἰτείσθω ἀριθμὸς οὗτινος τῷ τριπλῷ, ἐὰν τὸ τοῦ αὐτοῦ προστεθῇ τετραπλοῦν, τοὐντεῦθεν προκύπτον κεφάλαιον ὑπερέξει ἐκεῖνον ὀκτὼ μονάσι.

ΛΥΣΙΣ.

Τεθήτω ὁ αἰτούμενος ἀριθμὸς $=\chi$, τὸ τούτου τριπλοῦν $=3\chi$, καὶ τὸ τετραπλοῦν $=4\chi$. Ἔσται τοίνυν

$$3\chi+4\chi=\chi+8,\ 3\chi+4\chi-\chi=8$$
$$6\chi=8,\ \text{καὶ}\ \chi=\tfrac{8}{6}=\tfrac{4}{3}=1\tfrac{1}{3}.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$3\chi+4\chi=\chi+8\}\ \{4+5\tfrac{1}{3}=9\tfrac{1}{3}.$$

Δ'.

Αἰτείσθω ἀριθμὸς, οὗτινος τὸ τεταρτημόριον σὺν τοῖς διττοῖς τριτημορίοις ἴσον εἴη τῷ 132 ἀριθμῷ, διαιρουμένῳ διὰ τοῦ αὐτοῦ αἰτουμένου ἀριθμοῦ χ.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω ὁ αἰτούμενος ἀριθμὸς χ, τὸ τούτου τεταρτημόριον $\frac{1}{4}\chi$, τὸ δὲ διπλοῦν τριτημόριον $\frac{2}{3}\chi$, ὅ, τε ἀριθμὸς $132=\alpha$. Ἄρα·

$$\frac{\chi}{4}+\frac{2\chi}{3}=\frac{\alpha}{\chi}$$
$$3\chi^2+8\chi^2=12\alpha$$
$$\chi^2=\frac{12\alpha}{11},\ \text{καὶ}\ \chi=\sqrt{\left(\frac{12\alpha}{11}\right)}$$
$$\chi=\sqrt{\left(\frac{12.132}{11}\right)}=\sqrt{\left(\frac{1584}{11}\right)}=\sqrt{144}=12.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\frac{\chi}{4}+\frac{2\chi}{3}=\frac{\alpha}{\chi}$$
$$3+8=11.$$

Ε'.

Εἰπὲ νομεῦ πόσαι εἰσὶ φυτῶν στίχες; Ἥμισυ μέν τοι
Παλλάδος· τρίτον δ' ἀβροκόμου Βρομίου·
Τέτρατον αὖ Δημήτερος· αὐτόθεν ἄφελε δύω
φυτὰ θεῶν, Ἥρης καὶ ῥοδέης Παφίης.

ΛΥΣΙΣ.

$$\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{4}-2=\chi$$
$$\chi(12+8+6)-48=24\chi$$
$$\chi(26-24)=48,\ \text{καὶ}\ \chi=\tfrac{48}{2}=24.$$

Ϛ'.

Γαρσόνιος περὶ τῆς ἑαυτοῦ ἡλικίας ἐρωτηθεὶς ἔφη, ἐὰν οἷς ἐβίωσα ἔτεσι, τὸ τῆς ἐμῆς ἡλικίας προσθῇς ἥμισυ ἔκ τε τοὐντεῦθεν προκύπτοντος κεφαλαίου τὸ τεταρτημόριον ἀφέλῃς, ἕξεις ἔτη 63.

ΛΥΣΙΣ.

Τοῦ τῶν ἐτῶν, ἃ βεβίωκεν, ἀριθμοῦ, οἷα δὴ τῆς αὐτοῦ ἡλικίας, κληθέντος χ, ἔσται τὸ τούτων ἥμισυ $\frac{1}{2}\chi$, τὸ δ' ἐντεῦθεν προκύπτον κεφάλαιον $\chi+\frac{1}{2}\chi$· ἄρα τὸ τοῦ κεφαλαίου τούτου τεταρτημόριον $4:(\chi+\frac{1}{2}\chi)=\frac{1}{4}\chi+\frac{1}{8}\chi$· ὁ δὲ δοθεὶς ἀριθμὸς $63=\beta$. Κἀντεῦθεν·

$$\chi+\frac{\chi}{2}-\frac{\chi}{4}-\frac{\chi}{8}=\beta.$$
$$\chi(8+4-2-1)=8\beta$$

$$\chi(12-3)=8\beta,\ \text{καὶ}\ \chi=\frac{8\beta}{9}$$
$$\chi=\frac{8\cdot 63}{9}=7\cdot 8=56.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\chi+\tfrac{1}{2}\chi-\tfrac{1}{4}\chi-\tfrac{1}{8}\chi=\beta.$$
$$56+28-14-7=63.$$

Ζ'.

Ὁδοιπόροι τινὲς βαλάντιον ἐν τῇ ὁδῷ χρυσῶν πλήρες εὑρόντες, εὐθέως ἐν ἑαυτοῖς τοὺς ἐν αὐτῷ χρυσοὺς διελεῖν ἔγνωσαν. Ἀλλὰ γὰρ, ἐὰν τούτων ἕκαστος 24 λάβῃ, περιέσονται 16· ἐὰν δὲ 25, ἐλλείψωσι πρὸς πλήρη διανομὴν 14. Πόσοι οὖν ἦσαν ὁδοιπόροι; πόσοι δὲ οἱ ἐν τῷ βαλαντίῳ περιεχόμενοι χρυσοί;

ΛΥΣΙΣ.

Τεθέντος τοῦ τῶν ὁδοιπόρων ἀριθμοῦ $=\chi$, ἔσται ὁ τῶν 24 χρυσῶν ἀριθμὸς $=\alpha$, ὡσαύτως καὶ ὁ τῶν $16=\beta$, ὅ, τε τῶν $25=\gamma$, καὶ ὁ τῶν $14=\delta$. Κἀντεῦθεν·

$$\alpha\chi+\beta=\gamma\chi-\delta$$
$$\beta+\delta=\chi(\gamma-\alpha)$$
$$\chi=\frac{\beta+\delta}{\gamma-\alpha}=\frac{16+14}{25-24}=30.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\alpha\chi+\beta=\gamma\chi-\delta$$
$$736=736$$

Η'.

Πατήρ τις τῷ μὲν πρεσβυτέρῳ τῶν ἑαυτοῦ υἱῶν 800 δραχμὰς, τῷ δὲ νεωτέρῳ 600, κατ' ἔτος δαπάνην διέθετο· ἀλλ' ὁ μὲν πρεσβύτερος κατὰ μῆνα 10

δραχμὰς ἀπεταμίευεν· ὁ δέγε νεώτερος μετὰ διετίαν τὸ τοῦ δαιμονος Φειδωλὸν ζηλώσας 15 δραχμὰς ἀποταμιεύειν ἤρξατο. Ποσταίῳ ἔτει ἑκάτερος συνάμα τῇ πατρῴᾳ δαπάνῃ καὶ τῇ ἰδίως ἀποταμιευομένῃ, τὴν αὐτὴν τῶν δραχμῶν ποσότητα ἕξει;

ΛΥΣΙΣ.

Τῶν μὲν ὑπὸ τοῦ νεωτέρου εἰσβληθέντων μηνῶν χ κληθέντων, ἔσται τὰ τούτου ἐτήσια πατρῷα χρήματα $600=\beta$, τὰ δὲ κατὰ μῆνα ἰδίως ἀποταμιευόμενα $15=\varepsilon$· Αὖθις τῶν τοῦ πρεσβυτέρου κατ' ἔτος 800 $=\alpha$, τῶν δὲ κατὰ μῆνα θησαυριζομένων $10=\gamma$ τεθέντων, ἔσται ὁ τῶν 2 ἐτῶν χρόνος καθ' οὓς πρότερον ἤρξατο, ἤτοι οἱ 24 μῆνες $=\delta$. Ἐπεὶ οὖν ἐκ τῶν τεθέντων ὁ τοῦ νεωτέρου χρόνος ἐστὶ χ, ἔσται ὁ τοῦ πρεσβυτέρου $\delta+\chi$· ἀμφοτέρων ἄρα ὁ χρόνος ἐπὶ τὸ μηνιαίως τούτων ἀποταμιευόμενον ποσὸν ἀνακτέος ἔσται, ἤτοι τὸ μὲν τοῦ πρεσβυτέρου ἔσται $(\delta+\chi)\gamma$, τὸ δὲ τοῦ νεωτέρου $\varepsilon\chi$· Ζητεῖται δὲ, πόσον ἕκαστος ἔσχατον ἔσχε συνάμα τῇ διδομένῃ αὐτοῖς πατρῴᾳ ἐνιαυσίῳ μοίρᾳ; Ἐνθεντοι ἔσται τοῦ μὲν πρεσβυτέρου τὸ μέρος $\alpha+(\delta+\chi)\gamma$, τοῦ δὲ νεωτέρου $\beta+\varepsilon\chi$, ἃ δὴ ἀλλήλοις ἴσα δέον εἶναι· ἤτοι

$$\alpha+(\delta+\chi)\gamma=\beta+\varepsilon\chi$$
$$\alpha+\gamma\delta+\gamma\chi=\beta+\varepsilon\chi$$
$$\alpha-\beta+\gamma\delta=\chi(\varepsilon-\gamma)$$
$$\frac{\alpha-\beta+\gamma}{\varepsilon-\gamma}=\chi=\frac{440}{5}=88.$$

Ἄρα ὁ νεώτερος διαστήματι 88 μηνῶν, ἤτοι ἐτῶν $7\frac{1}{3}$

15 δραχμὰς ἀποταμιεύων, τῇ τοῦ πρεσβυτέρου ποσότητι ἴσον ἔσχε.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

Ἐπεὶ ὁ πρεσβύτερος πρὸ δύω ἐτῶν Φειδωλεῖν ἤρξατο, ὁ ἐκείνου χρόνος ἐστὶ $88 + 24 = 112$ μησίν· οἵτινες ἐπὶ τὰς 10 ἀχθέντες δραχμὰς ἀναδίδωσι 1120, ᾧ δὴ παραγομένῳ τῶν ἐτησίων πατρῴων προστεθέντων, ἔσται τὸ ὅλον αὐτοῦ μέρος

$$1120 + 800 = 1920.$$

Αὖθις ἐπεὶ ὁ νεώτερος ἐν διαστήματι 88 μηνῶν, 15 κατὰ μῆνα ἀπεθησαύριζεν, ἔσται τοὐντεῦθεν προκύπτον $88 . 15 = 1320$, ᾧ δὴ τῶν κατ' ἔτος πατρῴων 600 προστιθεμένων, ἐκκύψει καὶ ἡ τούτου ποσότης τῇ τοῦ ἑτέρου ἴση, ἤτοι·

$$1320 + 600 = 1920.$$

Θ'.

Γάϊος Βιβλιοθήκην συστῆσαι βουλόμενος 6 τεύχη κατὰ μῆνα ὠνεῖν προὔθηκε· πρὸς τὴν τούτου δὲ μίμησιν ὁ αὐτῷ ξυνήθης Γαρσόνιος μετὰ δύω προτραπεὶς μῆνας, βιβλίων τε συλλογὴν ποιεῖν ἀρξάμενος, 9 τεύχη κατὰ μῆνα ἐπορίζετο. Κλέπται ἀλλ' οὖν ἐκ μὲν τῆς τοῦ Γαΐου Βιβλιοθήκης τεύχη 36, ἐκ δὲ τῆς τοῦ Γαρσονίου 40 κεκλόφασι. Ζητεῖται ποσταίῳ ἔτει ἀμφότεροι τὸν αὐτὸν τῶν τευχῶν ἀριθμὸν ἐξισούμενον ἔσχον;

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστωσαν οἱ ὑπὸ τοῦ Γαρσονίου εἰσβληθέντες μῆνες $= \chi$, τὰ δὲ κατὰ μῆνα ποριζόμενα τεύχη $9 = \gamma$· ὁ

τούτων ἄρα ἀριθμὸς ἔσται $\gamma\chi$· οἱ κλοπίμως εἰλημμένοι $40 = \delta$, ἔσται ὁ τῶν ὑπολειφθέντων ἀριθμὸς $\gamma\chi - \delta$. Ἔστωσαν αὖθις οἱ, καθ' οὓς ὁ Γάϊος πρότερον ἤρξατο, μῆνες $24 = \alpha$, ἔσται ὁ ἐκείνου χρόνος $\alpha + \chi$, τά τε κατὰ μῆνα συλλεχθέντα τεύχη $6 = \beta$, ὁ δὲ τούτων ὁλικὸς ἀριθμὸς $\beta(\alpha + \chi)$. Ἐὰν δὲ οἱ κλαπέντες $56 = \zeta$ τεθῶσιν, ἔσται ὁ τῶν ὑπολειπομένων ἀριθμὸς $\beta(\alpha + \chi) - \zeta$. Ἐπεὶ δ' ἀμφότεροι μετὰ χρόνου τινὸς παρέλευσιν τὸν αὐτὸν τῶν τευχῶν ἀριθμὸν ἔσχον, ἔσται ἐκ τῶν τεθέντων·

$$\gamma\chi - \delta = \beta(\alpha + \chi) - \zeta$$
$$\gamma\chi - \delta = \alpha\beta + \beta\chi - \zeta$$
$$\gamma\chi - \beta\chi = \delta + \alpha\beta - \zeta$$
$$\chi(\gamma - \beta) = \delta + \alpha\beta - \zeta$$
$$\chi = \frac{\delta + \alpha\beta - \zeta}{\gamma - \beta} = \frac{128}{3} = 42\tfrac{2}{3}.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

Α'. $42\frac{2}{3}$ μην. $\times$ 9 τεύχ. $= 384$, καὶ $384 - 40 = 344$.

Β'. 24 μην. $\times$ 6 τεύχ. $+ 42\frac{2}{3} \times$ 6 τεύχ. $= 400$, καὶ $400 - 56 = 344$.

Ι'.

Μισθωσάμενός τις Γηπόνον ἀπέστειλεν αὐτὸν εἰς τὸν οἰκεῖον ἀγρὸν ἐργάζεσθαι ἐπαγγειλάμενος τροφὴν παρέχειν αὐτῷ ἑκάστης ἡμέρας, καὶ μισθὸν ἐν ταῖς ἐργασίμοις τῶν ἡμερῶν 12 ὀβολούς· ἐν δὲ ταῖς ἀργαῖς οὐ μόνον μὴ παρέχειν αὐτῷ μισθὸν, ἀλλὰ καὶ λαμβάνειν παρ' ἐκείνου 6 ὀβολοὺς τῆς τροφῆς ἕνεκα. Παρελθόντος δὲ τοῦ συμφωνηθέντος χρόνου ἡμερῶν δηλαδὴ 180 ἐλογίσαντο πρὸς ἀλλήλους· καὶ εὗρον, ὅτι οὐδέτερος αὐτῶν ὀφείλει τι τῷ ἑτέρῳ.

ΛΥΣΙΣ.

Τεθήτωσαν οἱ συμφωνηθέντες ἡμερήσιοι ὀβολοὶ $18 = \beta$, οἱ δὲ τροφῆς ἕνεκα διδόμενοι $6 = \gamma$· αἱ ἐργάσιμοι τῶν ἡμερῶν κληθήτωσαν χ, ἔσται ὁ τῶν ἐργασίμων ἡμερῶν μισθὸς $\beta\chi$. Τεθέντων δ' αὖ τῶν $180 = \alpha$· ἔσονται αἱ ἀργαὶ $= \alpha - \chi$, ὁ δὲ τούτων μισθὸς $= (\alpha - \chi)\gamma$. Ἐπεὶ δ' ἐκ τῆς τοῦ προβλήματος συνθήκης ὁ τῶν ἐργασίμων ἡμερῶν ἀριθμὸς ἐξισοῦται τῷ τῶν ἀργῶν, ἔσται.

$$\beta\chi = (\alpha - \chi)\gamma$$

$$\beta\chi = \alpha\gamma - \gamma\chi, \text{ καὶ } \beta\chi + \gamma\chi = \alpha\gamma.$$

$$\chi(\beta + \gamma) = \alpha\gamma, \ \chi = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma} = \frac{180 \cdot 6}{18+6} = 45$$

Καντεῦθεν $180 - 45 = 135$ ταῖς ἀργαῖς.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

Α'. $45 \cdot 18 = 810$ ὀβολοῖς

Β'. $135 \cdot 6 = 810$ — „ —

ΙΑ'.

Σταφυλάς τις οἰκηδὸν πωλῶν, ἐν μὲν τῇ πρώτῃ οἰκίᾳ τὸ ἥμισυ, ὧν εἶχε σταφυλῶν, ἀργυρίῳ ἀντηκαταλλάξατο, πρὸς δὲ καὶ σταφυλῆς τὸ ἥμισυ· ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ τῶν ὑπολειφθέντων τὸ ἥμισυ, πρὸς δὲ καὶ σταφυλῆς ὡσαύτως τὸ ἥμισυ· ὡσαύτως δὴ κἀν τῇ τρίτῃ οἰκίᾳ, ἧς γε δὴ ἐξερχόμενος οὐδὲν πλέον ἐν τῷ καλάθῳ ἔχειν εὗρεν. Πόσας ἄρα σταφυλὰς ἔσχεν;

ΛΥΣΙΣ.

Τιθεμένων τῶν σταφυλῶν $= \chi$, ἔσται ὁ μὲν τῶν ἐν τῇ πρώτῃ οἰκίᾳ πωληθεισῶν ἀριθμὸς $\frac{\chi}{2} + \frac{1}{2}$, ὁ δὲ τῶν ὑπολειφθεισῶν $\frac{\chi}{2} - \frac{1}{2}$. Ἐκ τούτων δὴ ἐν τῇ δευτέρᾳ οἰκίᾳ ἀπεμπωλήθησαν $\frac{\chi-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\chi+1}{4}$, ὑπελείφθησαν δ' ἔτι $\frac{\chi-1}{2} - \frac{\chi-2}{4} = \frac{\chi-3}{4}$. Ἐξ ὧν δὴ ἐν τῇ τρίτῃ οἰκίᾳ ὡσαύτως ἐπράθησαν $2 : \left(\frac{\chi-3}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{\chi-3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{\chi+1}{8}$· ὑπελείφθησαν ἄρα οὕτως $\frac{\chi-3}{4} - \frac{\chi-1}{8} = \frac{\chi-7}{8}$· ἐπεὶ δὲ οὐδὲν πλέον εὗρεν, ἔσται $\frac{\chi-7}{8} = 0$, ἤτοι $\chi - 7 = 0$, καὶ $\chi = 7$.

ΙΒ'.

Ὁδοιπόρον πρότριτα ἀπελθόντα καὶ 10 στάδια ὁσημέραι διανύοντα, ἕτερος ὁσημέραι 12 στάδια διανύων μεταδιώξων πέμπεται, Ποσταίᾳ ἡμέρᾳ ἐκεῖνον καταλήψεται;

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστωσαν αἱ τοῦ πρώτου ἡμέραι $3 = \alpha$, τὰ δὲ στάδια $10 = \beta$· τὰ τοῦ δευτέρου στάδια $12 = \gamma$, αἱ δὲ ἡμέραι, καθ' ἃς τὸν πρῶτον καταλήψεται $= \chi$. Διήνυσε τοίνυν οὕτω ὁ πρῶτος $\alpha \times \beta$ στάδια, καὶ μὴν καὶ διανύσει $\beta \times \chi$, ἄχρις οὗ δηλαδὴ ὁ ἕτερος αὐτὸν καταλήψεται· τὸ ὅλον ἄρα τῆς ἐκείνου ὁδοιπορίας ἔσται $= \alpha\beta + \beta\chi$. Ἀλλ' οὖν ὁ δεύτερος ἐν ἡμέραις χ, $\gamma\chi$ στάδια διανύει, ἐπεὶ δὲ τὸν πρῶτον μεταδιώξων ἐπέμφθη, ἔσται

$$\alpha\beta + \beta\chi = \gamma\chi.$$

$$\chi = \frac{\frac{\alpha\beta}{\gamma}}{\beta} = \frac{3.10}{2} = 15 \text{ ἡμέραις.}$$

Καθ' ὃν δὴ τύπον καὶ τὸ ἐφεξῆς διαλυθήσεται.

ΙΓ'.

Μηχανικὴ Φαέθοντα βιάζεται ἁρμονικοῖσι
Γνώμοσιν ἀγρεύειν τὸν δρόμον ἠελίου.
Ὃν Πόλον (α) εἰσοράων ὥρην φράσον Ἠριγένειης,
Ὡρονόμῳ σοφίῃ καὶ σκιόεντι τύπῳ·
Λεπτοφανὴς σκιὰ δείκτην ὠρονόμον γ' ὅθι σκέπει,
Ἑπτάδος ὡράων ὀκτάδος ἠδὲ μέσον.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπεὶ μὲν δὴ ἐν τῇ ἑβδόμῃ ὥρᾳ, ὁ ὡροδείκτης τῶν 12, ὥραις 7 ἀφίσταται, ὁ δέ γε λεπτοδείκτης ὀρθῶς ἐπὶ τῶν 12 τυγχάνει, ἔσται ἐν τῷ ἡμετέρῳ παραδείγματι $\alpha = 7$. Ἐπεὶ δ' αὖ ὁ ὡροδείκτης ἐν μιᾷ ὥρᾳ μιᾶς μόνον ὥρας διανύει μόριον, ἔσται $\beta = 1$· ὥστε εἶναι καὶ $\gamma = 12$, ὅτι ὁ λεπτοδείκτης ἐν ἑκάστῃ ὥρᾳ πάσας τὰς 12 παρέρχεται ὥρας· ἄρα $\chi = \frac{7}{11}$ ὥρας. Ἔσκεπε δ' ἐκ τῆς τεθείσης ὑποθέσεως ὁ λεπτοδείκτης τὸν ὡροδείκτην μεταξὺ 7 καὶ 8 ὡρῶν, ἤτοι ἦσαν $7\frac{7}{11}$ ὥρ. = 7 ὥρ. καὶ λεπτὰ $38\frac{2}{11}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὰ ἀνώτερω Παραδείγματα τῶν Μαθητιώντων χάριν κατὰ πλάτος κατεσκευάσαμεν· ἀλλ' οὖν πρὸς

(α) Πόλον οὐκ ἂν ἀπεικότως εἴποι τις τὸ καλούμενον ὡρολόγιον, φήσαντος Ἀριστοφάνους ἐν Γηρυτάδῃ· Πόλος τοῦτ' ἐστιν ἑκαστὰ ποστὴν ἥλιος τέτραπται.

μείζονα τούτων ἐξάσκησιν καί τινα ἐν ἐπιτομῇ προσθετέον.

ΙΔ'.

Εὑρεῖν ἀριθμὸν, ᾧτινι ἐὰν προστεθῇ τὸ ἥμισυ τούτου, τὸ τριτημόριον καὶ τεταρτημόριον, κἀκ δὲ τοῦ προκύπτοντος κεφαλαίου τὸ τούτου δωδεκατημόριον ἀφαιρεθῇ, ἐκκύψει ὁ 600 ἀριθμός.

ΛΥΣΙΣ.

$$\chi + \tfrac{\chi}{2} + \tfrac{\chi}{3} + \tfrac{\chi}{4} - \tfrac{\chi}{12} = 600 \cdot \text{ καὶ } \chi = 300.$$

ΙΕ'.

Οἰκίαν τις ὠνῆσαι βουλόμενος, ἀμφορεῖς οἴνου ἐκλεκτοῦ πρὸς τὸ πωλῆσαι ἔχει· διὸ καὶ ἐλογίσατο, ἐὰν μὲν ἕκαστον ἀμφορέα 5 χρυσῶν ἀποδῷ, ἐλλείψουσι πρὸς τὸ τῆς οἰκίας τίμημα 30 χρυσοί. Ἐὰν δὲ 6, περιέσονταί μοι 40. Ζητεῖται ὁ τῶν ἀμφορέων ἀριθμὸς, καὶ τὸ τῆς οἰκίας τίμημα.

ΛΥΣΙΣ.

$$5\chi + 30 = 6\chi - 40.$$

Κἀντεῦθεν $\chi = 70$· τὸ δὲ τῆς οἰκίας τίμημα $5 \cdot 70 + 30 = 380$.

ΙϚ'.

Βολομένῳ τινὶ πένησιν ἀργύρια διανεῖμαι, ἐὰν μὲν ἑκάστῳ τούτων 5 ὀβολοὺς δῷ, ἐλλείψουσιν αὐτῷ 3· ἐὰν δὲ 4, περιέσονται 2. Ποσταῖος ὁ τῶν πενήτων, ὅς τε τῶν δραχμῶν ἦν ἀριθμός;

ΛΥΣΙΣ.

$$5\chi - 3 = 4\chi - 2,\ \chi = 5.$$
$$\text{καὶ } 5\chi - 3 = 22.$$

ΙΖ'.

Ἐπρίατό τις ῥομφαίαν, ἀσπίδα, ἅμα δακτυλίῳ 50 χρυσῶν, οὕτως ὥστε τὴν μὲν ἀσπίδα 2 χρυσῶν μᾶλλον τῆς ῥομφαίας τιμᾶσθαι, τὸν δὲ δακτύλιον 10 τῆς ἀσπίδος πλέον. Ζητεῖται πόσου ἕκαστον τούτων ἰδίᾳ τετίμηται;

ΛΥΣΙΣ.

$$x+x+2+x+2+10=50,\ x=12.$$

ΙΗ'.

Ἔμποροι δύω τὴν αὐτὴν ἀργυρίου ποσότητα εἰς ἑταιρείαν συνεισήνεγκον· ἀλλ' οὖν θατέρῳ τούτων 12 χρυσοὺς δαπανήσαντι τετραπλάσιον μᾶλλον ἐναπολέλειπται τοῦ ἑτέρου 57 μόνον δαπανήσαντος. Ζητεῖται τοίνυν τὸ ὑφ' ἑκάστου καταβληθὲν ἀργύριον.

ΛΥΣΙΣ.

$$x-12=4x-4.57,\ \text{καὶ}\ x=72.$$

ΙΘ'.

Ἐργάτης τις ἐν τῷ αὐτοῦ βαλαντίῳ 6 δραχμὰς ἔχων, τούτοις προσέθηκεν ἡμερῶν πέντε καμάτου μισθόν. Ἐκ ταύτης δὴ τῆς ποσότητος πρὸς τροφὴν αὐτοῦ δαπανήσαντος, μετά τινας ἡμέρας τὸ τεταρτημόριον ὑπελείφθη, ᾧτινι αὖθις τὸν δυεῖν ἑβδομάδων μισθὸν προσθεὶς, εὗρεν ἑαυτὸν ἔχοντα δραχμὰς 21. Ζητεῖται ὁ τῆς μιᾶς ἑβδομάδος μισθὸς x.

ΛΥΣΙΣ.

$$\frac{6+5x}{4}+2x=21,\ \text{καὶ}\ x=6.$$

Κ'.

Ἐρωτηθεὶς τις τὸ σὺν τόκῳ δοθὲν αὐτοῦ ἀργύριον ἐξειπεῖν, ἔφη· ἐὰν τῇ ὅλῃ τῶν χρημάτων ποσότητι, τὸ ταύτης ἥμισυ καὶ τὸ τεταρτημόριον προστεθῇ, τοὐντεῦθεν προκύπτον ἄθροισμα ἰσοδυναμήσει τῇ ὅλῃ ποσότητι σὺν 6000 χρυσοῖς· Ζητεῖται τὸ σὺν τόκῳ δοθὲν ἀργύριον.

ΛΥΣΙΣ.

$$y+\frac{y}{2}+\frac{y}{4}=y+6000,\ y=8000.$$

ΚΑ'.

Ἐκ πόλεώς τινος Ἱππεῖς 144 ἐπὶ τὰ τῶν πολεμίων ἄγχιστά πη τυγχανόντων ἐστέλλοντο χαρακώματα, οἵτινες μετὰ τὴν ἑαυτῶν ἐκείνοις ἐπίθεσιν καὶ τὴν τῆς δυσμενοῦς στρατιᾶς διαφθορὰν, τὰ μὲν λάφυρα ἀλλήλοις διένειμαν, τοὺς δ' ὑπ' αὐτῶν ἑαλωκότας εἰς τὴν πόλιν εἰσέφερον ἐπὶ θρίαμβον. Εἷς οὖν τῶν Ἱππέων ἐρωτηθεὶς ὑπὸ τοῦ Γοργωνίου τὸν τῶν αἰχμαλώτων εἰπεῖν ἀριθμὸν, ἔφη· δίελε τὸν ἡμέτερον ἀριθμὸν διὰ τοῦ τῶν αἰχμαλώτων, τοὐντεῦθεν ἐκκύπτον πηλίκον, τὸν αἰτούμενον δώσει σοι·

$$\frac{144}{x}=x=12.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 451. Προβλήματα ὡρισμένα, ἐν οἷς πλεῖσται τῶν ἀορίστων ἐμπίπτουσι, κατασκευάσαι.

ΛΥΣΙΣ.

Διαλυθήτω ἐν πρώτοις εἰς τὰς ἑαυτοῦ ἐξισώσεις τὸ προτεθὲν οἱονδηποτοῦν πρόβλημα, τηνικαῦτα αἱ ἐμμεσοι ἐξισώσεις πρὸς μίαν, ἐν ᾗ μοναδικὴ ἡ ἀόριστος ἐμπίπτοιεν, ἀναχθήτωσαν. Ἔσχατον δὲ ἡ τοιαύτη ἐξίσωσις ἀναχθήτω διαλυομένη, καὶ τὸ προτεθὲν πρόβλημα κατασκευασθήτω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'.

Ἀριθμοὺς εὑρεῖν δύω, ὧν τὸ μὲν ἄθροισμα $= 8$, ἡ δὲ τῶν τετραγώνων ὑπεροχὴ $= 16$.

ΛΥΣΙΣ.

Τιθεμένων $8 = \alpha$, $16 = \beta$, τοῦ μείζονος $= \chi$, καὶ τοῦ ἐλάττονος $= \varphi$, ἔσται ἐκ μὲν τῆς πρώτης τοῦ προβλήματος ὑποθέσεως

$$\text{Α'.}\quad \chi + \varphi = \alpha.$$

ἐκ δὲ τῆς δευτέρας

$$\text{Β'.}\quad \chi^2 - \varphi^2 = \beta.$$

ΑΝΑΓΩΓΗ.

Ζητηθήτω ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει ἡ τοῦ χ δύναμις, ἤτοι γενέσθω διὰ τῆς μεταθέσεως Γ'. $\chi = \alpha - \varphi$· εἶτα δὲ ἐξαρθήτωσαν ἀμφότερα τὰ τῆς ἐξισώσεως ταύτης μέλη πρὸς τὴν δευτέραν δύναμιν (§. 440.), ἵν' οὕτω τῇ Β'. ἐξισώσει εὐσύνοπτα ἀποβῶσι πρὸς τὴν τοῦ χ ἀπάλλειψιν, κἄπειτα αὕτη ἐκείνης ἀφαιρείσθω. οἷον·

$$\chi^2 = \alpha^2 - 2\alpha\varphi + \varphi^2.$$

ἤτοι $\alpha^2 - 2\alpha\varphi + \varphi^2 - \varphi^2 = \beta = \alpha^2 - 2\alpha\varphi.$

$$\alpha^2 - \beta = 2\alpha\varphi, \text{ καὶ } \varphi = \frac{\alpha^2 - \beta}{2\alpha}$$

$$\varphi = \frac{64-16}{16} = \frac{48}{16} = 3.$$

Κἀντεῦθεν εὐχερῶς ἡ τοῦ χ δύναμις εὑρεθήσεται, κατὰ τὴν Γ'. ἐξίσωσιν $\chi = \alpha - \varphi$, $\chi = 8 - 3 = 5$.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\left.\begin{array}{r} \chi + \varphi = \alpha \\ \chi^2 - \varphi^2 = \beta \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 5 + 3 = 8 \\ 25 - 9 = 16 \end{array}\right.$$

Β'.

Δοθέντος τοῦ ἀθροίσματος δυοῖν ἀριθμῶν, τῆς τε τούτων διαφορᾶς, εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς.

ΛΥΣΙΣ.

Ἵνα τὸ πᾶν γενικῷ τύπῳ ἐκθῶμεν, τεθήτω τὸ μὲν δοθὲν ἄθροισμα, ἤτοι τὸ κεφάλαιον $= \kappa$, ἡ δὲ διαφορὰ $= \delta$, καὶ οἱ αἰτούμενοι ἀριθμοὶ χ καὶ y· ὧν ὁ μὲν μείζων ἔστω ὁ χ, ὁ δ' ἐλάττων ὁ y. Κἀντεῦθεν·

$$\chi + y = \kappa$$

καὶ

$$\chi - y = \delta$$

$$2\chi = \kappa + \delta \text{ προσθέσει}$$

$$\chi = \frac{\kappa}{2} + \frac{\delta}{2}.$$

Τουτέστιν, ὁ μείζων ἀριθμὸς ἰσοδυναμεῖ τῷ ἡμιαθροίσματι σὺν τῇ ἡμιδιαφορᾷ. Ἔστω αὖθις·

$$\chi + y = \kappa$$

καὶ

$$\chi - y = \delta$$

$$- \quad + \quad -$$

$$2y = \kappa - \delta \text{ ἀφαιρέσει.}$$

$$y = \frac{\kappa}{2} - \frac{\delta}{2}.$$

Ἤτοι, ὁ ἐλάττων ἀριθμὸς ἰσοδυναμεῖ τῷ ἡμιαθροίσματι πλὴν τῆς ἡμιδιαφορᾶς.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

Τεθήτω $\kappa = 17$, $\delta = 7$· ἔσται $\chi = \frac{17}{2} + \frac{7}{2} = 12$, καὶ $y = \frac{17}{2} - \frac{7}{2} = 5$. Ἐὰν δὲ ἀντὶ μὲν τοῦ χ τὸ $\frac{\kappa}{2} + \frac{\delta}{2}$, ἀντὶ δὲ τοῦ y τὸ $\frac{\kappa}{2} - \frac{\delta}{2}$, τὰ τούτων δηλαδὴ ἀντεισαχθῶσιν ἰσοδύναμα, ὅπως ἀντὶ μὲν τῶν $\chi + y$ τὸ ἄθροισμα κ ἐκκύψῃ, ἔσται·

$$\chi + y = \frac{\kappa}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\kappa}{2} - \frac{\delta}{2} = \frac{2\kappa}{2} = \kappa.$$

ἀντὶ δὲ τῶν $\chi - y$ ἡ διαφορὰ δ, ἔσται·

$$\chi - y = \frac{\kappa}{2} + \frac{\delta}{2} - \frac{\kappa}{2} + \frac{\delta}{2} = \frac{2\delta}{2} = \delta.$$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οἱ ἀνωτέρω ἐν γένει ἐκτεθέντες τύποι $\chi = \frac{1}{2}(\kappa + \delta)$, καὶ $y = \frac{1}{2}(\kappa - \delta)$, ἐφ' ὁποιαοῦν ἄλλα ἀνάριθμα παραδείγματα εὐχερῶς μάλα ἐφαρμοσθῆναι ἔχουσιν, ἔνθα δηλαδὴ τό, τε κεφάλαιον καὶ ἡ διαφορὰ, δυοῖν τινων ἀριθμῶν ἀορίστων δίδοται, ὡς κἀπὶ τῶν ἐφεξῆς ταυτὸ δηλοῦται.

Γ′.

Ἀμφότεροι Θήβηθε, καὶ ἀμφότεροι πολεμισταί,
Κὴκ Διός· ὃς θύρσῳ δεινὸς, ὁ δὲ ῥοπάλῳ·
Ἀμφοῖν δὲ στῆλαι δεκάδας ἑπτὰ βαρυτίμους,
Δίς τε δύω μονάδας ἕλκουσιν ἀθανάτων·
Τρισὶ δὲ βουθοίνας δεκάσι μονάσι τε σὺν ὀκτὼ,
Βαρύτερος τελέθει ἄλκιμος ἡδυπότου.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω τὸ τῶν στηλῶν ἀμφοῖν ἄθροισμα $74 = \kappa$,

ἥ, τε διαφορὰ $38 = \delta$· ἡ τοῦ Ἡρακλέους στήλη κληθήτω χ, καὶ ἡ τοῦ Διονύσου y. Κἀντεῦθεν·

Α′. $\chi + y = \kappa$. Β′. $\chi - y = \delta$.

$$\begin{array}{l} \chi + y = \kappa \\ \chi - y = \delta \\ \hline 2\chi = \kappa + \delta \quad \text{προσθ.} \\ \chi = \frac{\kappa}{2} + \frac{\delta}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \chi + y = \kappa \\ \chi - y = \delta \\ - \quad + \quad - \\ \hline 2y = \kappa - \delta \quad \text{ἀφαιρ.} \\ y = \frac{\kappa}{2} - \frac{\delta}{2}. \end{array}$$

Διά τε τῆς τῶν ἀριθμῶν ἀνθυποκαταστάσεως, ἔσται·

$$\chi = \frac{\kappa + \delta}{2} = \frac{74 + 38}{2} = \frac{112}{2} = 56.$$

$$y = \frac{\kappa - \delta}{2} = \frac{74 - 38}{2} = \frac{36}{2} = 18.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\left.\begin{array}{l} \chi + y = \kappa \\ \chi - y = \delta \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 56 + 18 = 74. \\ 56 - 18 = 38. \end{array}\right.$$

Δ′.

Γαυρίας ἐπὶ τέρματι ὢν τοῦ βίου τὴν αὐτοῦ περιουσίαν 34860 μνῶν, τοῖς ἑαυτοῦ Υἱέσιν οὕτω διένειμεν, ὡς τὸν νεώτερον 6224 μνᾶς τοῦ πρεσβυτέρου πλέον λαβεῖν. Πόσον τοίνυν ἑκάτερος τούτων κεκλήρωκε;

ΛΥΣΙΣ.

Τιθεμένων τοῦ μὲν ἀθροίσματος $34860 = \kappa$, τῆς δὲ διαφορᾶς $6224 = \delta$, ἔσται ὁ μὲν τοῦ πρεσβυτέρου κλῆρος $= \chi$, ὁ δὲ τοῦ νεωτέρου $= \varphi$· Κἀντεῦθεν·

Α′. $\chi + \varphi = \kappa$ Β′. $\chi - \varphi = \delta$.

ΑΝΑΓΩΓΗ.

$$\begin{array}{ll} \chi + \varphi = \varkappa & \chi + \varphi = \varkappa \\ \chi - \varphi = \delta & \chi - \varphi = \delta \\ \hline 2\chi = \varkappa + \delta \text{ προσθ.} & - \quad + \quad - \\ \chi = \frac{\varkappa + \delta}{2} & 2\varphi = \varkappa - \delta \text{ ἀφαιρ.} \\ & \varphi = \frac{\varkappa - \delta}{2} \end{array}$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\begin{array}{ll} 20542 & 20542 \\ 14318 & -14318 \\ \hline 34860 = \varkappa & 6224 = \delta. \end{array}$$

ΛΗΜΜΑ.

§ 452. *Δυεῖν ποσοτήτων α καὶ β ἀλλήλαις ἀνίσων προκειμένων, ἐὰν τῷ τούτων ἡμιαθροίσματι, ἡ τῶν αὐτῶν προστεθῇ ἡμιδιαφορά, ἡ μείζων ἐκκύπτει ποσότης· ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ ἡμιαθροίσματος αὕτη ἀφαιρεθῇ, ἡ ἐλάττων.*

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔτω μὲν δὴ $\alpha = 30 > \beta = 8$· ἔσται ἐκ τῆς προτεθείσης ὑποθέσεως $\frac{30+8}{2} + \frac{30-8}{2} = 19 + 11 = 30$ Ὃ ἦν τὸ α'. Αὖθις $\frac{30+8}{2} - \frac{30-8}{2} = 19 - 11 = 8$. Ὃ ἦν τὸ β'.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἡ τοῦ Λήμματος τούτου χρῆσις λυσιτελὴς πάνυ ἐν τῇ Τριγωνομετρίᾳ καθέστηκε.

Ε'.

Δοθέντος τοῦ ἀθροίσματος καὶ τοῦ γινομένου δυοῖν ἀριθμῶν, εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω τὸ ἄθροισμα $= \alpha$, τὸ γινόμενον $= \beta$, ἡ ἡμιδιαφορὰ $= \chi$· ἔσται ὁ μείζων ἀριθμὸς $= \frac{1}{2}\alpha + \chi$, ὁ ἐλάττων $\frac{1}{2}\alpha - \chi$. Ἔνθεντοι ἐκ τῆς συνθήκης ἐκκύψει·

$$\tfrac{1}{4}\alpha^2 - \chi^2 = \beta, \quad \tfrac{1}{4}\alpha^2 = \beta + \chi^2,$$
$$\tfrac{1}{4}\alpha^2 - \beta = \chi^2, \quad \sqrt{(\tfrac{1}{4}\alpha^2 - \beta)} = \chi.$$

Τεθήτω $\alpha = 14$, $\beta = 48$. Ἔσται $\sqrt{(\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta)} = \sqrt{(49 - 48)} = 1$. Κἀντεῦθεν ὁ μὲν μείζων ἀριθμὸς $\frac{1}{2}\alpha + \chi = 7 + 1 = 8$, ὁ δ' ἐλάττων $\frac{1}{2}\alpha - \chi = 7 - 1 = 6$.

Ϛ'.

Δοθέντος τοῦ κεφαλαίου καὶ τῆς τῶν τετραγώνων διαφορᾶς δυεῖν ποσοτήτων, ταύτας εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω τὸ κεφάλαιον $= \alpha$, ἡ τῶν τετραγώνων διαφορὰ $= \beta$, ἡ τῶν δοθεισῶν ποσοτήτων ἡμιδιαφορὰ $= y$· ἔσται οὕτω ἡ μὲν μείζων $= \frac{1}{2}\alpha + y$, ἡ δ' ἐλάττων $= \frac{1}{2}\alpha - y$· Κἀντεῦθεν·

$$\begin{array}{ll} \text{τὸ τῆς μείζονος τετράγωνον} \;.\; & = \tfrac{1}{4}\alpha^2 + \alpha y + y^2 \\ \text{τὸ τῆς ἐλάττονος} \;.\;.\;.\;. & = \tfrac{1}{4}\alpha^2 - \alpha y + y^2 \\ \hline \text{ἡ τῶν τετραγώνων διαφορὰ} & \beta = 2\alpha y \text{· καὶ } y = \frac{\beta}{2\alpha} \end{array}$$

Τεθήτω $\beta = 40$, $\alpha = 10$· ἔσται $y = \frac{40}{20} = 2$· κἀντεῦθεν $\frac{1}{2}\alpha + y = 5 + 2 = 7$, $\frac{1}{2}\alpha - y = 5 - 2 = 3$.

Ζ'.

Δοθέντος τοῦ κεφαλαίου δυεῖν τινων ποσοτήτων, καὶ τοῦ τῶν τετραγώνων ἀθροίσματος, τὰς ποσότητας εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Τεθήτω θάτερον τῶν κεφαλαίων $= \alpha$, τὸ δ' ἕτερον $= \beta$, ἡ τῶν ποσοτήτων ἡμιδιαφορὰ $= \varphi$· ἔσται ἐντεῦθεν ἡ μὲν τούτων μείζων $= \frac{1}{2}\alpha + \varphi$, ἡ δ' ἐλάττων $= \frac{1}{2}\alpha - \varphi$· Κἀκ τούτων·

τὸ τῆς μείζονος τετράγωνον $= \frac{1}{4}\alpha^2 + \alpha\varphi + \varphi^2$

τὸ τῆς ἐλάττονος . . . $= \frac{1}{4}\alpha^2 - \alpha\varphi + \varphi^2$

τὸ τῶν τετραγώνων ἄθροισμα $\beta = \frac{1}{2}\alpha^2 + 2\varphi^2$

$$\beta - \frac{1}{2}\alpha^2 = 2\varphi^2,\ \varphi^2 = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\alpha^2$$

$$\text{ἄρα } \varphi = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\alpha^2\right)}.$$

Γενέσθω $\alpha = 10$, $\beta = 58$· ἔσται $\varphi = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\alpha^2\right)} = \sqrt{(29 - 25)} = \sqrt{4} = 2$. κἀντεῦθεν $\frac{1}{2}\alpha + \varphi = 5 + 2 = 7$, καὶ $\frac{1}{2}\alpha - \varphi = 5 - 2 = 3$.

Η'.

Ἀριθμοὺς εὑρεῖν δύω, ὧν τὸ ἄθροισμα ἀπὸ τοῦ τῶν ἰδίων τετραγώνων ἀθροίσματος ἀφαιρεθὲν διαφορὰν δώσει $78 = \alpha$· τὸ δὲ τούτων αὖθις κεφάλαιον τῷ ὑπὸ τῶν ἰδίων προστεθὲν παραγομένῳ προβαλεῖται $39 = \frac{\alpha}{2}$.

ΛΥΣΙΣ.

Κληθήτω τὸ τῶν δυοῖν ἀριθμῶν ἡμιάθροισμα χ, ἡ δὲ τῶν αὐτῶν ἡμιδιαφορὰ y· ἔσται οὕτω ὁ μὲν μείζων ἀριθμὸς $= \chi + y$, ὁ δ' ἐλάττων $= \chi - y$· ἄρα·

$$\text{Α'.}\quad (\chi + y)^2 + (\chi - y)^2 - 2\chi = \alpha$$

$$\text{ἤτοι } 2\chi^2 + 2y^2 - 2\chi = \alpha.$$

$$\text{Β'.}\quad (\chi + y)(\chi - y) + 2\chi = \frac{1}{2}\alpha$$

$$\text{ἤτοι } \chi^2 - y^2 + 2\chi = \frac{1}{2}\alpha.$$

Πολλαπλασιασθήτω ἤδη ἡ Β'. ἐξίσωσις ἐπὶ 2, καὶ τῇ Α'. συναφθήτω· ἐκκύψει οὕτω

$$4\chi^2 + 2\chi = 2\alpha.$$

Διά τε τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, ἔσται

$$\chi = \frac{-1 + \sqrt{(8\alpha + 1)}}{4} = \frac{-1 + 25}{4} = 6.$$

Ἀντεισαχθείσης τῆς ἤδη εὑρεθείσης τοῦ $\chi = 6$ δυνάμεως ἐν τῇ Β'. ἐξισώσει, ἐκκύψει $y = 3$. Ἑπομένως ἄρα ὁ μὲν μείζων αἰτούμενος ἀριθμός ἐστι $\chi + y = 6 + 3 = 9$, ὁ δ' ἐλάττων $\chi - y = 6 - 3 = 3$.

Θ'.

Φιλοπόνῳ τῷ τῶν Μαθηματικῶν ἀκροατῇ, τὴν τῆς αὐτοῦ ἐπιδόσεως τάξιν ἐφιεμένῳ μαθεῖν, ὁ ἐξ ἐπαγγέλματος αὐτοῦ Καθηγητὴς ἔφη. Ἐὰν τὸν τῆς τάξεως ἀριθμόν, ὃν μεταξὺ 300 συμφοιτητῶν ἔχεις ἐπὶ 4 πολλαπλασιάσῃς, τοὐντεῦθεν γινόμενον ἰσοδυναμήσει πηλίκῳ ἐκκύπτοντι, ἐκ τῆς τοῦ τῶν μετὰ σὲ ἑπομένων φοιτητῶν ἀριθμοῦ διαιρουμένου διὰ 6. Οἴκαδε τοίνυν ἐπιστρέψας οὕτως ὑπελογίσατο.

ΛΥΣΙΣ.

Τὸν μὲν τῶν συμφοιτητῶν ἀριθμὸν $300 = \alpha$ ἔθηκε, τὸν δὲ πολλαπλασιαστὴν $4 = \beta$, καὶ τὸν διαιρέτην $6 = \gamma$· τὸν τῆς ἑαυτοῦ τάξεως ἀριθμὸν $= \chi$, τόν τε τῶν μετ' αὐτὸν ἑπομένων $= y$. Τούτων οὕτω τεθέντων τὰ τῆς πράξεως, συνῳδὰ ταῖς ἐκτεθεῖσιν ὑποθέσεσιν ὡς ἐφεξῆς διεπέρανε.

$$\text{Α}'.\quad \chi + y = \alpha, \qquad \text{Β}'.\quad \beta\chi = \frac{y}{\gamma}$$

Εὗρε δὴ ἐν ἀμφοτέραις ταῖς ἐξισώσεσι τὴν τοῦ χ δύναμιν

$$1)\quad \chi = \alpha - y. \qquad 2)\quad \chi = \frac{y}{\beta\gamma}$$

Συνάψας ἤδη ἐν μιᾷ ἐξισώσει τὰς προσεχῶς 1) καὶ 2) ἀνευρεθείσας, πρὸς παντελῆ τοῦ χ ἀπάλειψιν (§. 110.), ἔσχεν οὕτως τὴν τοῦ y δύναμιν.

$$\frac{y}{\beta\gamma} = \alpha - y, \quad y = \alpha\beta\gamma - \beta\gamma y,$$

$$\beta\gamma y + y = \alpha\beta\gamma, \quad (\beta\gamma + 1)\, y = \alpha\beta\gamma,$$

$$y = \frac{\alpha\beta\gamma}{\beta\gamma + 1} = \frac{300 \cdot 4 \cdot 6}{4 \cdot 6 + 1} = \frac{7200}{25} = 288.$$

Κἀντεῦθεν τὸν ἀριθμὸν 288 τῶν μετ' ἐκεῖνον ἀριθμουμένων ἐν τῇ ἀνωτέρω ἐξισώσει (ἀριθμ. 1.) ἀνθυπαγαγὼν ἔσχε

$$\chi = \alpha - y = 300 - 288 = 12.$$

Ὥσθ' οὕτω εὗρεν ἑαυτὸν τῇ τάξει δωδέκατον.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

Τὴν βάσανον ἐκ τῆς ἀνωτέρω Β'. ἐξισώσεως $\beta\chi = \frac{y}{\gamma}$ ἐξειργάσατο οὕτω·

$$\beta\chi = 4 \cdot 12 = 48.$$

$$\frac{y}{\gamma} = \frac{288}{6} = 48.$$

Ι'.

Γεωμέτρῃ τινὶ ἀγρόθεν ἐπανερχομένῳ πάλαι ποτε ιχόντι μοι, καὶ τὸ τοῦ ὑπ' αὐτοῦ καταμετρηθέντος ου μέγεθος εἰπεῖν ἐρωτήσαντι, ἔφη· ἐὰν τὸ τοῦ

καταμετρηθέντος διαστήματος μῆκος 40 ἑξάποσιν ἔλαττω ἦν, τό, τε πλάτος τοσούτοις μείζω, ἔσετ' ἂν τὸ ὅλον διάστημα πλῆρες τετράγωνον. Ὑπολαβὼν δὲ εἶπον αὐτῷ· ἀλλ' ἐὰν τῷ τοῦ καταμετρηθέντος διαστήματος μήκει 40 ἑξάποδας προσθῇς, τοσούτους τε ἐκ τοῦ πλάτους ὑφέλῃς, ἕξεις τὸ μῆκος τοῦ πλάτους διπλάσιον. Εὑρετέον τοίνυν τό, τε μῆκος καὶ πλάτος τοῦ διαστήματος.

ΛΥΣΙΣ.

Οἱ 40 ἑξάποδες κληθήτωσαν β, τὸ τοῦ διαστήματος μῆκος χ, τὸ δὲ πλάτος y. Ἐπεὶ οὖν ἐν τετραγώνῳ ὁποιῳοῦν πλήρει, ἤτοι ἐντελεῖ, τὸ μῆκος ἐξισοῦται τῷ πλάτει, ἔσται κατὰ τὸ ὑπὸ τοῦ Γεωμέτρου ῥηθέν·

$$1)\quad \chi - \beta = y + \beta.$$

Ἐπεὶ δὲ τὸ 40 ἑξάποσιν αὐξηθὲν μῆκος διπλάσιον τοῦ πλάτους ἐκκύπτει, ἐὰν ἐξ αὐτοῦ οἱ 40 ἀφαιρεθῶσιν ἑξάποδες, κατὰ τὴν ὑπ' ἐμοῦ τεθεῖσαν ὑπόθεσιν, ἔσται

$$2)\quad \chi + \beta = 2y - 2\beta.$$

Α'. Εὑρεθήτω ἐν ἀμφοτέραις τὸ χ

$$3)\quad \chi = y + 2\beta, \qquad 4)\quad \chi = 2y - 3\beta.$$

Β'. Τεθήτωσαν ἐν ἐξισώσει τὰ ἐκ τῶν ἰσώσεων τοῦ χ εὑρεθέντα ἐν τοῖς 3) καὶ 4) ἀριθμοῖς πρὸς τελείαν ἐκείνου ἀπαλλαγήν.

$$2y - 3\beta = y + 2\beta,$$

$$2y - y = 3\beta + 2\beta = 5\beta = 5 \cdot 40 = 200.$$

Γ'. Τὸν τοῦ y ἐγνωσμένον ἀριθμὸν ἐν τῇ 3) ἐξισώσει ἀντεισάγοντες ἔξομεν,

$$\chi = y + 2\beta = 200 + 80 = 280$$

Ἦν ἄρα τὸ μὲν μῆκος 280, τὸ δὲ πλάτος 200 ἑξαπόδων.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

Ἐὰν μὲν κατὰ τὴν πρώτην τοῦ προβλήματος ὑπόθεσιν, ἀπὸ τοῦ μήκους 40 ἑξάποδες ἀφαιρεθῶσι, καὶ τῷ πλάτει τοσοῦτοι προστεθῶσι, ἔσται τὸ μῆκος ἴσον τῷ πλάτει· οἷον

$$280 - 40 = 200 + 40 = 240.$$

Ἐὰν δὲ, κατὰ τὴν δευτέραν, τῷ μήκει 40 ἑξάποδες προστεθῶσιν, ἀπό τε τοῦ πλάτους τοσοῦτοι ἀφαιρεθῶσιν, ἔσται τὸ μῆκος τοῦ πλάτους διπλάσιον· καὶ γάρ

$$280 + 40 = 320$$
$$200 - 40 = 160.$$

ΙΑ΄.

Ἐκ δυοῖν εἰδῶν οἴνου, ὧν τοῦ μὲν πρώτου ὡς καλλίστου ὁ ξέστης τιμᾶται χρυσῶν 12, τοῦ δὲ δευτέρου ὡς μικρόν τι ἐκτραπέντος 7, ἐθέλει τις ἀναμίξαι οὕτως, ὡς ἐκ τῆς ἀμφοῖν κράσεως σχεῖν ξέστας 100, ὧν ἑκάστη τιμηθήσεται 9 χρυσῶν. Ζητεῖ οὖν μαθεῖν πόσους ξέστας παρ' ἑκατέρου τῶν δύω τουτωνὶ εἰδῶν ληπτέον, ὥστε μήτ' ἀπατηθῆναι μήτε μὴν ἀπατῆσαι.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω ὁ τῶν 100 ξεστῶν ἀριθμὸς $= \alpha$ ὁ δὲ τῶν ἀπὸ τοῦ πρώτου εἴδους ληφθησομένων $= \chi$, τῶν τε ἀπὸ τοῦ δευτέρου $= \psi$. Ἡ τοῦ προβλήματος τοίνυν ὑπόθεσις ἐστὶν, ὅπως τὸ διπλοῦν τοῦ οἴνου εἶδος μιχθὲν ἀναδώσει ξέστας 100. Ἐντεῦθεν ἔσται·

$$1)\ \chi + \psi = \alpha$$

Τῆς ἐξισώσεως ταύτης ὀρθῶς κειμένης, ἕπεται καὶ τὰ τῶν ξεστῶν ἐκτιμήματα ἀλλήλοις ἐξισοῦσθαι· ὅθεν

$$2)\ 12\chi + 7\psi = 9\alpha$$

Ζητηθήτω ἐν ἑκατέραις τὸ χ· ἔσται

$$3)\ \chi = \alpha - \psi,\ 4)\ \chi = \frac{9\alpha - 7\psi}{12}$$

Κἀντεῦθεν (§. 110.) ἐκκύψει ἐξίσωσις

$$\alpha - \psi = \frac{9\alpha - 7\psi}{12}$$

$$12\alpha - 12\psi = 9\alpha - 7\psi$$
$$12\alpha - 9\alpha = 12\psi - 7\psi,\ \text{καὶ}\ 3\alpha = 5\psi$$
$$\psi = \frac{3\alpha}{5} = \frac{3.100}{5} = \frac{300}{5} = 60.$$

Ληπτέον τοίνυν ἂν εἴη αὐτῷ ἐκ μὲν τοῦ πρώτου οἴνου ξέστας 60, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 40.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\left.\begin{array}{r} \chi + \psi = \alpha \\ 12\chi + 7\psi = 9\alpha \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 40 + 60 = 100. \\ 480 + 420 = 900. \end{array}\right.$$

ΙΓ΄.

Στρατηγός τις πρὸ τῆς τῶν πολεμίων προσβολῆς τοὺς ὑπ' αὐτὸν στρατιώτας πρὸς ἡρωϊκὴν προτρέπων ἅμιλλαν ἔφη· πᾶν σφαιρίδιον ἐκ τοῦ πυροβόλου ὅπλου ἐκκροτηθὲν, καὶ τὸν ἐχθρὸν πλῆξαν 3 χρυσῶν ἀμοιβὴν τοῖς εὐστοχήσασιν ἐπιχορηγήσει· ὅσοι δ' ἀστοχήσαντες ἀποτύχωσι, 7 χρυσοῦς ζημίαν ἀποτίσωσι. Μετὰ δὲ τῆς 60 σφαιριδίων βολῆς τῶν ἐχθρῶν φυγῇ τὴν σωτηρίαν δραξαμένων δῆλον γέγονε, τὴν ἀμοιβὴν τῇ ζημίᾳ ἐξισοῦσθαι. Πόσα τοίνυν τὰ εὐστόχως βληθέντα ἦσαν σφαιρίδια, πόσα δὲ τὰ ἀποτυχόντα;

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω ὁ τῶν σφαιριδίων ἀριθμὸς $= \alpha$, τῶν τε εὐστοχησάντων $= y$, καὶ τῶν μὴ $= \varphi$. Ἔσται ἀμφοτέρων τὸ κεφάλαιον $= y + \varphi$. τοίνυν·

$$1)\quad y + \varphi = \alpha$$

ἔστι δὲ ἡ ζημία τῇ ἀμοιβῇ ἴση· ἄρα

$$2)\quad 3y = 7\varphi$$

Εὑρεθήτω ἐν ἑκατέρᾳ τὸ y· ἤτοι

$$3)\quad y = \alpha - \varphi, \quad 4)\quad y = \frac{7\varphi}{3}$$

$$\alpha - \varphi = \frac{7\varphi}{3} \ (\S.\ 110.),\quad 3\alpha - 3\varphi = 7\varphi,$$

$$3\alpha = 7\varphi + 3\varphi, \text{ καὶ } 3\alpha = 10\varphi$$

$$\varphi = \frac{3\alpha}{10} = \frac{3.60}{10} = \frac{180}{10} = 18.$$

Ἐὰν τοίνυν ἀπὸ τοῦ τῶν 60 βληθέντων σφαιριδίων ἀριθμοῦ ἀφαιρεθῶσι τὰ μὴ εὐστόχως ἐκροτηθέντα, 18, ὑπολειφθήσονται 42 τὰ εὐστοχήσαντα.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\quad y + \varphi = \alpha \\ 2)\quad 3y = 7\varphi \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 42 + 18 = 60. \\ 3.42 = 7.18 = 126. \end{array}\right.$$

ΙΔ'.

Λαῒς δακτυλίους 12 βουληθεῖσα πρίασθαι εὗρεν ἑαυτὴν ἐλλείπουσαν ἑνὸς ταλάντου, ὅθεν 5 μόνον πριαμένη, ἔσχε περιττὰς τρεῖς μνᾶς. Πόση ἄρα ἦν ἡ τῶν ταλάντων ποσότης, πηλίκη δὲ ἡ τῶν δακτυλίων τιμή;

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπεὶ ἐνταῦθα διάφορα νομισμάτων εἴδη συντρέχουσιν, ἀναχθήτωσαν πρὸς τὸ αὐτὸ εἶδος. Ὅθεν καὶ τάλαντον ἓν Ἀττικὸν 60 ἰσοδυναμοῦν μναῖς, ἔσται τουτὶ, ἤτοι αἱ 60 μναῖ $= \alpha$, αἱ 3 ὑπόλοιπαι $= \beta$, τὸ τοῦ δακτυλίου τίμημα $= \chi$, ἤ, τε τῶν ταλάντων ποσότης $= \varphi$ καὶ ἡ τῶν 12 δακτυλίων τιμὴ $= 12\chi$. Τῶν ἑξήκοντα τοίνυν ἀφαιρουμένων μνῶν, τὸ ὑπόλοιπον δώσει τὴν τῶν ταλάντων ποσότητα· τουτέστι·

$$1)\quad 12\chi - \alpha = \varphi.$$

Τὸ τῶν πέντε δακτυλίων τίμημα ἐστὶν $= 5\chi$. Ἐὰν οὖν ἀπὸ τῆς ποσότητος φ τὰς ὑπολοίπους τρεῖς μνᾶς ἀφέλῃς, πάντως ἕξεις τὸ αὐτὸ τίμημα, ἐξ ἧς ὑποθέσεως ἡ ἑτέρα ἐκκύπτει ἐξίσωσις

$$2)\quad 5\chi = \varphi - \beta$$

$$3)\quad \chi = \frac{\varphi + \alpha}{12} \qquad 4)\quad \chi = \frac{\varphi - \beta}{5}$$

$$\frac{\varphi - \beta}{5} = \frac{\varphi + \alpha}{12} \ (\S.\ 110.)$$

$$12\varphi - 12\beta = 5\varphi + 5\alpha$$

$$12\varphi - 5\varphi = 5\alpha + 12\beta$$

$$7\varphi = 5\alpha + 12\beta$$

$$\varphi = \frac{5\alpha + 12\beta}{7} = \frac{5.60 + 12.3}{7} = \frac{336}{7} = 48.$$

Ἐν τῇ ἐξισώσει τοίνυν $\chi = \frac{\varphi - \beta}{5}$ διὰ τῆς τῶν ἀριθμῶν ἀνθυποκαταστάσεως ἔσται $\chi = \frac{48 - 3}{5} = 9.$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\quad 12\chi - \alpha = \varphi \\ 2)\quad 5\chi = \varphi - \beta \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 12.9 - 60 = 48. \\ 5.9 = 48 - 3. \end{array}\right.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 453. Προβλήματα ἐπιλύειν, ἐν οἷς τρεῖς ἐμπίπτουσιν ἀόρισται ἐξισώσεις.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐν πάσαις ταῖς ἐξισώσεσιν ἀεὶ αἰτεῖται δήλην ποιῆσαι τὴν, ἧς ἀπαλλάττεσθαι βουλόμεθα, ἀόριστον ποσότητα· Τούτων δὲ γινομένων ἡ ἐφεξῆς ἐκκύπτουσα ἐξίσωσις περιέξει τὸ διπλοῦν ἰσότιμον τῆς ἀποδιοπομφθείσης ἤδη ἀγνώστου, ἤτοι τὴν ταύτης διπλῆν στοιχειακὴν δύναμιν· ἧς τινος τῇ ἀναγωγῇ, μίαν ἐκ τῶν ἐναπολειφθέντων δυεῖν ἀορίστων εὑρεῖν δέον. Διὸ καὶ τῆς πρώτης τούτων ἐκβληθείσης, διπλῆ ταύτης ἐκ τῶν δυοῖν προτέρων τύπων ἐν τῇ ἑπομένῃ ἐξισώσει συντίθεται δύναμις· ἧς τινος τῇ ἀναγωγῇ, πάλιν ἡ ἑτέρα εὑρεθήσεται ἀόριστος· καὶ ἐφεξῆς οὕτως. Ἔσχατον δὲ τῶν ἀορίστων ὡρισμένων ἤτοι δήλων ἀποβάντων, καὶ ἡ ἐν ἀρχῇ ἀναλυθεῖσα μία τῶν τριῶν ἀορίστων εὑρεθήσεται. Ἔστω δὴ ἐν γένει ὁ τῆς πράξεως τύπος ὡς ἐφεξῆς.

Α'. Κείσθωσαν τρεῖς ἀόρισται ποσότητες ϕ, χ, y· καὶ δὴ ἔστω

Α'.	Β'.
1) $\phi+\chi-y=\alpha$	μ) $\phi=\alpha+y-\chi$
2) $\phi+y-\chi=\beta$	ν) $\phi=\beta+\chi-y$
3) $\chi+y-\phi=\gamma$	ο) $\phi=\chi+y-\gamma$

Β'. Ζητηθήτω ἐν ταῖς τρισὶν ἐξισώσεσιν (ἀριθμ. Α'.) τὸ τῆς ἀορίστου ϕ ἰσότιμον, ἔστι δὲ ἡ πρᾶξις ἐν ἀριθμῷ Β'.

Γ'. Συντεθήτωσαν ἤδη ἐν ἐξισώσει ἀντὶ τοῦ ϕ αἱ ἐκτεθεῖσαι δυνάμεις, ἤτοι τὰ τούτου ἰσότιμα (ο καὶ (μ (ἀριθμ. Β'.).

$$\chi+y-\gamma=\alpha+y-\chi$$
$$\chi+\chi=\alpha+\gamma+y-y$$
$$2\chi=\alpha+\gamma,\ \text{καὶ}\ \chi=\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

Δ'. Συναφθήτωσαν ἤδη ἐν ἐξισώσει ἀντὶ τοῦ ϕ αἱ ἐν (ο καὶ (ν (ἀριθμ. Β'.) ἐκτεθεῖσαι δυνάμεις πρὸς εὕρεσιν τοῦ y·

$$\chi+y-\gamma=\beta+\chi-y$$
$$2y=\beta+\gamma.\ \text{καὶ}\ y=\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Ε'. Δήλη τοίνυν καὶ ἡ ἀόριστος y καθέστηκεν. Ἐντεῦθεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (μ ῥᾳδίως τὸ ϕ εὑρεθήσεται $\phi=\alpha+y-\chi$, ἤτοι $\phi=\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}-\frac{\alpha+\gamma}{2}$ διὰ τῆς τῶν ἴσων ἀνθυποκαταστάσεως. Εὔδηλον οὖν ἐστὶν ὡσαύτως καὶ τὸ χ, οἷόν τ' ὅλως ἀποδιοπομφθῆναι, ἐὰν τὸ τούτου εὑρεθὲν ἰσότιμον $\frac{\alpha+\gamma}{2}$ (ἀριθ. Γ'.) ἐν τῇ (ο καὶ (ν (ἀρ. Β'.) ἀντεισαχθῇ· καὶ τότε ἔσται ἐξίσωσις $\frac{\alpha+\gamma}{2}+y-\gamma=\beta+\frac{\alpha+\gamma}{2}-y$, ἐν ᾗ ἀμφοτέρωθεν τὸ χ ἀπείληπται. Τὸ δὲ τοιοῦτον τῆς ἀνθυποκαταστάσεως εἶδος καὶ μάλα ἐστὶ χρήσιμον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐὰν ἔν τινι τῶν τριῶν ἐξισώσει, δύο μόνον τῶν τριῶν ἀορίστων ἐμπίπτωσιν, εὐχερέστερον τὰ τῆς λύσεως γίνεσθαι ἔχει. Ζητεῖν γὰρ τηνικαῦτα δέον ἐν θατέρῳ τῶν ἐξισώσεων, τὴν μιᾶς τῶν ἀορίστων δύναμιν, ὡς ἐπὶ παραδείγματος τὴν τῆς ἀορίστου χ ἐκ τῆς δευτέρας, τήν τε τῆς y ἐκ τῆς τρίτης, αἵ, τε εὑρεθεῖσαι δυνάμεις ἀντὶ χ καὶ y ἐν μιᾷ συναφθήτωσαν ἐξισώσει. Οἷον ἐὰν ὦσι τρεῖς ἐξισώσεις Α) $\chi + 2y = \alpha$, Β) $\chi - 3\psi = \beta$, Γ) $y + \psi = \gamma$. Ἔσται ἐκ τῆς δευτέρας $\chi = \beta + 3\psi$, ἔκ τε τῆς τρίτης $y = \gamma - \psi$ ὧν τῇ πρώτῃ ἀνθυποκατασταθέντων ἔσται, $\beta + 3\psi + 2\gamma - 2\psi = \alpha$. Ἔνθα μία μόνον ὑπολέλειπται ἄγνωστος ἡ ψ. Τῷ αὐτῷ ἐξιχνευτέον τρόπῳ, ἐάν τε πλεῖσται ὦσιν ἐξισώσεις ἀορίστοις σύμμικται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'.

Τῶν Φιλοκερδῶν τις καθ' ἑαυτὸν λογιζόμενος τίνας ἂν τῶν ἐκ τῆς Δημοσίας Λαχέσεως (ἤτοι ἐκ τοῦ τῆς Τύχης πώματος, Lotterio*) ἐξενεχθησομένων ἀριθμῶν θείη, ἤκουσε καθ' ὕπνον φωνῆς λεγούσης αὐτῷ τρεῖς λαβεῖν ἀριθμούς, ὧν ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου κεφάλαιον πληρώσῃ $= 58$, ὁ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου $= 84$, καὶ ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου $= 66$. Διϋπνισθεὶς δὲ καὶ πρός τινα τῶν ἐμπείρων Ἀλγεβραϊστῶν ἀφικόμενος, τὴν τοῦ ὀνείρατος ἐζήτει λύσιν. Ποίους τοίνυν ἐκεῖνος ἀριθμοὺς εὗρεν;

ΛΥΣΙΣ.

Τεθήτω ὁ πρῶτος ἀριθμὸς $= \chi$, ὁ δεύτερος $= \varphi$, ὁ τρίτος $= \psi$. τὸ κεφάλαιον $58 = \alpha$, $84 = \beta$, $66 = \gamma$.

Α'.	Β'.
1) $\chi + \varphi = \alpha$ καὶ	2) $\varphi + \psi = \beta$
2) $\varphi + \psi = \beta$	$\psi = \beta - \varphi$ (μ
3) $\chi + \psi = \gamma$	3) $\chi + \psi = \gamma$
	$\psi = \gamma - \chi$ (ν

Α'. Ἐκ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης (ἀριθ. Α'.) ἐξισώσεως, ἡ τοῦ ψ δύναμις εὑρίσκεται, (ἀρ. Β'.) Ἐντεῦθεν ἐπεὶ $\psi = \psi$ (§. 110.) ἔσται

$$\beta - \varphi = \gamma - \chi \quad (\text{ο}$$

Β'. Εὑρεθήτω ἤδη ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει ἡ τοῦ χ ἰσότης

$$\chi + \varphi = \alpha$$
$$\chi = \alpha - \varphi \quad (\pi$$

Γ'. Ἀντεισαγομένης τῆς (π ἐξισώσεως ἐν τῷ ἀνωτέρῳ τύπῳ (ο, ἀντὶ τοῦ χ, ἔσται $\beta - \varphi = \gamma - \chi$ ἴσον τῇ ἐφεξῆς

$$\beta - \varphi = \gamma + \varphi - \alpha$$
$$\alpha + \beta - \gamma = 2\varphi \text{ μεταθέσει}$$
$$\frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} = \varphi \text{ τῇ ἀπὸ τοῦ συνθ. ἀπαλλαγῇ}$$
$$\frac{58 + 84 - 66}{2} = \frac{142 - 66}{2} = \frac{76}{2} = 38 = \varphi.$$

Δ'. ἀριθ. Β'. π) $\alpha - \varphi = \chi$, $58 - 38 = 20 = \chi$.
ἀριθ. Β'. μ) $\beta - \varphi = \psi$, $84 - 38 = 46 = \psi$.

Εἰσὶν ἄρα οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ 20, 38, 46.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \chi + \varphi = \alpha \\ 2)\ \varphi + \psi = \beta \\ 3)\ \chi + \psi = \gamma \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 20 + 38 = 58. \\ 38 + 46 = 84. \\ 20 + 46 = 66. \end{array}\right.$$

Β'.

Ἀδελαΐς τρία περιδέραια ἑαυτῇ οὕτως ὠνήσατο, ὥστε τὸ τοῦ πρώτου τίμημα μετὰ τοῦ τῶν λοιπῶν ἡμίσεως, 25 ἀποτελεῖν χρυσοῦς· τὸ τοῦ δευτέρου μετὰ τοῦ τῶν λοιπῶν τριτημορίου, 26· τό, τε τοῦ τρίτου μετὰ τοῦ τῶν προτέρων ἡμίσεως, 29. Πόσου ἕκαστον ἰδίᾳ ὠνήσατο;

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω τὸ τοῦ πρώτου τίμημα $= \chi$· τὸ τοῦ δευτέρου $= y$· τὸ τοῦ τρίτου $= \psi$· οἱ 25 χρυσοὶ $= \alpha$, οἱ $26 = \beta$, καὶ οἱ $29 = \gamma$.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \chi + \frac{y}{2} + \frac{\psi}{2} = \alpha \\ 2)\ y + \frac{\chi}{3} + \frac{\psi}{3} = \beta \\ 3)\ \psi + \frac{\chi}{2} + \frac{y}{2} = \gamma \end{array}\right\} \text{ἤτοι} \left\{\begin{array}{l} 4\chi + 2y + 2\psi = 4\alpha. \\ 9y + 3\chi + 3\psi = 9\beta. \\ 4\psi + 2\chi + 2y = 4\gamma. \end{array}\right.$$

Α'. Ζητείσθω ἐν πάσαις ταῖς ἐξισώσεσιν ἡ τοῦ χ δύναμις.

1) $4\chi + 2y + 2\psi = 4\alpha$

$\chi = \frac{4\alpha - 2y - 2\psi}{4}$ (μ

2) $9y + 3\chi + 3\psi = 9\beta$

$\chi = 3\beta - 3y - \psi$ (ν

3) $2\chi + 2y + 4\psi = 4\gamma$

$\chi = 2\gamma - 2\psi - y$ (ξ

Β'. Αἱ τοῦ χ, κατὰ τὸ (ν καὶ (ξ, ἰσότητες ἐξισωθήτωσαν ἀλλήλαις· οὗ γινομένου ζητείσθω τὸ ψ, ἤτοι·

ν) $3\beta - 3y - \psi = 2\gamma - 2\psi - y$ (ξ

$2\psi - \psi = 2\gamma - 3\beta + 3y - y$ μεταθέσει

$\psi = 2\gamma - 3\beta + 2y$. (π

Γ'. Συζευχθήτωσαν αἱ τοῦ χ, κατὰ τὸ (μ καὶ (ξ, ἐξισώσεις, ἵν' αὖθις εὑρεθῇ τὸ ψ· οἷον

μ) $\frac{4\alpha - 2y - 2\psi}{4} = 2\gamma - 2\psi - y$ (ξ

$4\alpha - 2y - 2\psi = 8\gamma - 8\psi - 4y$

$6\psi = 8\gamma - 4\alpha - 2y$

$\psi = \frac{8\gamma - 4\alpha - 2y}{6}$ (ρ

Δ'. Αἱ εὑρεθεῖσαι τοῦ ψ δυνάμεις ἐν (π καὶ (ρ συναφθήτωσαν ἐν ἐξισώσει, πρὸς τὴν τοῦ y εὕρεσιν.

π) $2\gamma - 3\beta + 2y = \frac{8\gamma - 4\alpha - 2y}{6}$ (ρ

$12\gamma - 18\beta + 12y = 8\gamma - 4\alpha - 2y$ τῇ τοῦ κλάσμ. ἀπαλ.

$14y = 18\beta - 4\alpha - 4\gamma$ μεταθέσει

$y = \frac{18\beta - 4\alpha - 4\gamma}{14}$ τῇ τοῦ συνθ. ἀπαλ.

Ε'. Ἐν τῇ ἐσχάτῃ ταύτῃ ἐξισώσει εἰσαχθήτωσαν ἀντὶ τῶν στοιχείων οἱ ἀριθμοί.

$y = \frac{468 - 100 - 116}{14} = \frac{468 - 216}{14} = \frac{252}{14} = 18$ χρυσοῖς.

ς'. Γενέσθω ἐν τῇ ἐξισώσει (π (ἀριθ. Β'.) πρὸς τὴν τοῦ ψ εὕρεσιν ἀντεισαγωγὴ τῶν ἀριθμῶν ἤτοι

$\psi = 2\gamma - 3\beta + 2y$

$\psi = 58 - 78 + 36 = 94 - 78 = 16$ χρυσοῖς.

Τὸ αὐτὸ γενέσθω ἀντὶ τοῦ χ (ξ, (ἀριθ. Α'.) οἷον

$\chi = 2\gamma - 2\psi - y$

$\chi = 58 - 32 - 18 = 58 - 50 = 8$ χρυσοῖς.

Ἄρα τὸ τῶν τριῶν περιδεραίων τίμημα ἦν 8, 18, 16 χρυσῶν.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ x+\frac{y}{2}+\frac{\psi}{2}=\alpha \\ 2)\ y+\frac{x}{3}+\frac{\psi}{3}=\beta \\ 3)\ \psi+\frac{\psi}{2}+\frac{y}{2}=\gamma \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 8+9+8=25. \\ 18+\frac{8}{3}+\frac{16}{3}=26. \\ 16+4+9=29. \end{array}\right.$$

Ἔστι καὶ γὰρ

$$\frac{8}{3}+\frac{16}{3}=\frac{24}{3}=8$$
$$\text{καὶ } 8+18=26.$$

Γ'.

Ἡδυπότου ταμία Βάκχου, ἀνθοσμία, ὅν περ
Πυθῶνόισιν ἔχεις, εἰπέ μοι εἰρομένῳ
Εἴδεα. Τοῖ δέγ' ἐκεῖνος· μέτρα δύω Θασίοιο,
Ἠδὲ τόσα Χίου, ἕν δέ τε Θετταλικοῦ
Δραχμῆς ἄμ' ἀπέδωκα· δύω δέ τε πάλι Θασίου,
Ἠδὲ Χίου τρία, σὺν τετόρεσσιν ἅμα
Θετταλικοῦ, δραχμῶν δύω μ' ὠνήσατο Φαῦστος·
Δὶς δέ μοι δύ' ἔασι μέτρα Χίοιο, δέκα
Θασίοιο, δυοὶ ξὺν Θετταλικοῦ λαθικηδοῦς
Τριδράχμων. Μέτρων δ' εἰπὲ τιμὴν ὁπόση.

ΠΡΟΠΑΡΑΣΚΕΥΗ.

Ἔστω ἡ τοῦ Θασίου οἴνου ἑνὸς μέτρου τιμὴ $=x$, ἡ τοῦ Χίου $=y$, καὶ ἡ τοῦ Θετταλικοῦ $=\psi$· ἄρα·

$$\text{A)}\ 2x+2y+\psi=1$$

$$\text{B)}\ 2x+3y+4\psi=2$$
$$\Gamma)\ 10x+4y+2\psi=3$$

ΛΥΣΙΣ Α'.

Ζητηθήτω Α'. ἐν ἅπασιν ἡ τοῦ x δύναμις.

$$\text{A)}\ x=\frac{1-2y-\psi}{2}$$
$$\text{B)}\ x=\frac{2-3y-4\psi}{2}$$
$$\Gamma)\ x=\frac{3-4y-2\psi}{10}$$

Β'. Ἐξισούσθωσαν αἱ ἐν τῷ Α καὶ Β εὑρεθεῖσαι τοῦ x δυνάμεις·

$$\Delta)\ \frac{1-2y-\psi}{2}=\frac{2-3y-4\psi}{2}$$

Ὡσαύτως καὶ αἱ ἐν τῷ Α καὶ Γ ληφθεῖσαι, ἤτοι·

$$\text{E)}\ \frac{1-2y-\psi}{2}=\frac{3-4y-2\psi}{10}$$

Γ'. Θηρευθήτω ἐν Δ καὶ Ε ἡ τοῦ y δύναμις, ἥτις δὴ ἐν μιᾷ συναφθήτω ἐξισώσει

$$\Delta)\ y=1-3\psi,\quad \text{E)}\ y=\frac{2-3\psi}{6}$$

$$1-3\psi=\frac{2-3\psi}{6},\ 6-18\psi=2-3\psi$$

Ἐξ ὧν ἐκκύπτει $\psi=\frac{4}{15}$· Εὑρεθήσεται δ' ὡσαύτως Δ', καὶ $y=1-3\psi=1-\frac{12}{15}=\frac{1}{5}$· καὶ μὴν καὶ $x=$ $\frac{1-2y-\psi}{2}=\frac{1-\frac{2}{5}-\frac{4}{15}}{2}=\frac{15-6-4}{15.2}=\frac{1}{6}$.

ΛΥΣΙΣ Β'.

Α'. Πολλαπλασιασθήτω Α ἐπὶ 4, καὶ Γ ἐπὶ 2, ὅπως ψ τὸν αὐτὸν σχῇ συνθέτην 4· ἔσται·

A) $8\chi+8y+4\psi=4$
B) $2\chi+3y+4\psi=2$
Γ) $20\chi+8y+4\psi=6$

B'. Ἀφαιρεθήτω A ἀπὸ B, καὶ B ἀπὸ Γ, ἵν' ᾖ·

Δ) $-6\chi-5y=-2$
E) $18\chi+5y=4$

Γ'. Συναφθήτωσαν εἰς μίαν αἱ ἐν τῷ Δ καὶ E ἐξισώσεις, ἤτοι $12\chi=2$, καὶ $\chi=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$. Κἀντεῦθεν ῥᾳδίως y καὶ ψ εὑρεθήσονται.

ΛΥΣΙΣ Γ'.

A'. Ζητηθήτω ἐν A ἡ τοῦ χ δύναμις, εἴτ' οὖν $\chi=\frac{1-2y-\psi}{2}$, ἥτις δὴ καὶ ἀντεισαχθεῖσα ἐν B καὶ Γ, τὰς ἐφεξῆς ἀναδώσει ἐξισώσεις, οἷον·

Δ) $1-2y-\psi+3y+4\psi=2$
E) $5-10y-5\psi+y+2\psi=3$

Τουτέστι Δ) $y+3\psi=1$, καὶ E) $-6y-3\psi=2$· Ἐν οἷς θηρευθήτω **B.'** ἡ τοῦ y δύναμις, ἤτοι $y=1-3\psi$, κἂν τῇ τοῦ E ἀνθυποκατασταθήτω, ἵν' ᾖ $-6+18\psi-3\psi=-2$, ἤτοι $15\psi=4$, καὶ $\psi=\frac{4}{15}$, ἐξ οὗ καὶ αἱ τῶν λοιπῶν δυνάμεις ἀναδοθήσονται.

Δ'.

Δηΐφοβος χρημάτων ποσότητα, τρισὶν ἀριθμητικοῖς χαρακτῆρσι συγκροτουμένην, δῶρον εἴληφεν. Ἀλλ' οὖν ἐὰν οἱ τρεῖς οὗτοι χαρακτῆρες καθ' ἕκαστον ἰδίᾳ συναφθῶσι, τὸν 17 ἀναδιδῶσιν ἀριθμόν· ἐὰν δὲ ὁ δεύτερος ἀπὸ τοῦ πρώτου ἀφαιρεθῇ, ἥ τε ἐντεῦθεν ἐκκύπτουσα

διαφορὰ αὖθις ἀπὸ τοῦ τρίτου, ὁ 5 ἐκκύψει ἀριθμός. Ἐὰν δὲ ἔσχατον ὁ δεύτερος ἀπὸ τοῦ τρίτου ἀφαιρεθῇ· ἥ τε ἐντεῦθεν λειπομένη διαφορὰ ἀπὸ τοῦ πρώτου, μονὰς ἔσται τὸ ὑπόλοιπον. Ποσταία ἄρα ἡ ἐπιχορηγηθεῖσα ἦν ποσότης;

ΛΥΣΙΣ.

Κείσθω ὁ πρῶτος ἀριθμητικὸς χαρακτὴρ $=\chi$ ὁ δεύτερος $=\phi$, ὁ τρίτος $=\psi$· ὁ $17=\alpha$, ὁ $5=\beta$, καὶ ὁ $1=\delta$.

Ἐὰν οἱ τρεῖς χαρακτῆρες χωρὶς θεωρούμενοι, εἰς ἓν συναφθῶσι κεφάλαιον, ἰσοδυναμήσουσιν ἐκ τῆς συνθήκης τῷ 17· Τουτέστι

1) $\chi+\phi+\psi=\alpha$

Ἐὰν δὲ ὁ δεύτερος χαρακτὴρ ϕ ἀπὸ τοῦ πρώτου χ ἀφαιρεθῇ, ἐκκύψει ἡ διαφορὰ $\chi-\phi$, ἣν ἀπὸ τοῦ τρίτου ψ ἀφαιροῦντες ἕξομεν τὸν 5 ἀριθμόν· Κἀντεῦθεν

2) $\psi-(\chi-\phi)=\beta$· καὶ $\beta=\psi-\chi+\phi$.

Αὖθις ἐὰν ὁ δεύτερος χαρακτὴρ ϕ ἀπὸ τοῦ τρίτου ψ ἀφαιρεθῇ ἔσται ἡ διαφορὰ $\psi-\phi$, ἥτις ἀπὸ τοῦ πρώτου χ ἀφαιρουμένη μονάδα προβαλεῖται, ἤτοι

3) $\chi-(\psi-\phi)=\delta$· καὶ $\delta=\chi-\psi+\phi$.

ΑΝΑΓΩΓΗ.

Ἀφαιρεθήτω ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς εὕρεσιν τοῦ χ

$$\begin{array}{rrrrrr}
1) & \chi & +\phi & +\psi & = & \alpha \\
2) & -\chi & +\phi & +\psi & = & \beta \\
 & + & - & - & & - \\
\hline
\end{array}$$

$$2\chi=\alpha-\beta, \text{ καὶ } \chi=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$\chi = \frac{17-5}{2} = \frac{12}{2} = 6$ τῷ α'. ἀριθμ. χαρακτ.

Ἀφαιρεθήτω αὖθις ἡ ἀνωτέρω διαφορὰ $+\chi-\phi-\psi=-\beta$, ἀπὸ τῆς τρίτης $\chi+\phi-\psi=\delta$ ἐξισώσεως, πρὸς τὴν τοῦ ϕ εὕρεσιν, ἤτοι·

$$\begin{array}{r} \chi+\phi-\psi=\delta \\ \chi-\phi-\psi=-\beta \\ +\ \ +\ \ \ \ \ + \\ \hline 2\phi=\beta+\delta \end{array}$$

$$\text{καὶ } \phi = \frac{\beta+\delta}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$

Εὑρεθήτω δὴ ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει ἡ τοῦ ψ δύναμις, ἔσται·

$$\chi+\phi+\psi=\alpha$$
$$\psi=\alpha-\chi-\phi$$
$$\psi=17-6-3=8$$

Κἀντεῦθεν δῆλον τὴν τῶν χρημάτων ποσότητα εἶναι $=638$.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \chi+\phi+\psi=\alpha \\ 2)\ \psi-\chi+\phi=\beta \\ 3)\ \chi-\psi+\phi=\delta \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 6+3+8=17 \\ 8-6+3=5 \\ 6-8+3=1 \end{array}\right.$$

Ε'.

Δάμνων πρὸς ἀλλοτρίαν νομὴν τὸ ἑαυτοῦ ποίμνιον ἐκ βοῶν, ἵππων τε καὶ προβάτων συγκείμενον εἰσήλασεν· ἦσαν δὲ οἱ μὲν ἵπποι τριπλάσιοι τῶν προβάτων, οἱ δὲ βόες διπλάσιοι τῶν ἵππων. Ἀλλ' οὖν διὰ τὴν τῶν νόμων ἀθέτησιν, εἰς κρίσιν ἀχθεὶς οὕτω κατεκρίθη, ὡς διὰ μὲν τὴν ὑφ' ἑκάστου τῶν ἵππων ὁσημέραι γεγονυῖαν

καταναλωσιν, διπλάσιον τῆς ὑφ' ἑκάστου τῶν προβάτων ἀποτίσειν· διὰ δὲ τὴν ὑπὸ τῶν βοῶν ἑκάστου, 2 μνᾶς πλέον, τῆς ὑφ' ἑνὸς ἑκάστου τῶν ἵππων ἀναλώσεως. Ἐκ-θεντοι, διὰ μὲν τὴν τῶν βοῶν ὁμοῦ ληφθέντων ὁσημέραι ζημίαν 2 τάλαντα σὺν 16 μναῖς ἀποτίσαι ἔδει. Ἀλλ' οἱ μὲν βόες τριπλασίως χρονιώτερον ἐνέμοντο τῶν τε ἵππων καὶ προβάτων, ὥστε τὸ τῆς ζημίας, ἣν ὤφειλε, κεφάλαιον ἴσον ἦν 446 ταλάντοις καὶ 36 μναῖς. Ζητεῖται τοίνυν εὑρεῖν· Αον, πόσον χρόνον ἕκαστον τῶν θρεμμάτων εἶδος ἐνέμετο· Βον, πόσα ἐξ ἑκάστου εἴδους ἐτύγχανον θρέμματα· Γον, ποσταία χρημάτων ζημία ὑπὲρ ἑνὸς ἑκάστου θρέμματος ἐλογίζετο;

ΠΡΟΠΑΡΑΣΚΕΥΗ.

Κληθήτω ὁ τῶν προβάτων ἀριθμὸς χ, ἔσονται οἱ μὲν ἵπποι τῶν προβάτων τριπλάσιοι 3χ, οἱ δὲ βόες διπλάσιοι τῶν ἵππων 6χ. Κείσθω ἀντὶ τῆς ὁσημέραι ἑνὸς προβάτου ζημίας τὸ y, ἔσται ἡ ὑφ' ἑκάστου τῶν ἵππων ζημία $2y$, ἡ δὲ ὑπὸ τῶν βοῶν ἑκάστου $2y+2$. Ἔστω ὁ τῆς νομῆς χρόνος τῶν τε ἵππων καὶ προβάτων ϕ, ἔσται ὁ τῶν βοῶν 3ϕ, ἡ τε τῶν βοῶν καθ' ἡμέραν ζημία (τάλαντ. 6 ἐπὶ τῶν 60 μνῶν πολλαπλ.), ἤτοι αἱ 366 μναῖ δ, καὶ ἡ τῶν ἵππων καὶ προβάτων (τάλ. 3 καὶ 16 μναῖ) ζημία, ἤτοι αἱ 196 μναῖ β. Τὸ ὅλον τῆς ζημίας (446 τάλ. καὶ 36 μναῖ) ἤτοι αἱ 26796 μναῖ, α.

ΛΥΣΙΣ.

Τριῶν ἀορίστων ἐνταῦθα προκειμένων χ, y, ϕ· ἡ μὲν πρώτη διαφόροις συνεζευγμένη συνθέταις τὸν ἐξ ἑκάστου εἴδους τῶν θρεμμάτων δηλοῖ ἀριθμόν· ἡ δὲ δευτέρα σὺν διαφόροις ὡσαύτως συνθέταις, τὴν ὁσημέραι ὑφ' ἑνὸς ἑκάστου γεγονυῖαν ζημίαν· καὶ ἡ τρίτη μετὰ διαφόρων ὡς καὶ αἱ λοιπαὶ συνθετῶν τὸν ὅλον, καθ' ὃν ἕκαστα τῶν θρεμμάτων εἴδη ἐνέμοντο, χρόνον παρίστησι. Τοίνυν·

Α'. Ἐπεὶ ἡ ὀφειλομένη ποσότης ἐστὶν $= \alpha$, δῆλον ταύτῃ ἰσοδυναμεῖν τὴν τῶν θρεμμάτων ζημίαν ἐπὶ τὰς τῆς νομῆς ἡμέρας πολλαπλασιασθεῖσαν· ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ τῶν προβάτων καὶ ἵππων ζημία ἐστὶν $= \beta$, ὁ δὲ τῆς νομῆς χρόνος ϕ, ἑπομένως ἀμφοτέρων ἡ ζημία ἔσται $= \beta\phi$. Αὖθις ἡ τῶν βοῶν κατανάλωσις ἐστὶν $= \delta$, ὅ, τε ὅλος χρόνος, καθ' ὃν ἐνέμοντο $= 3\phi$, ἑπομένως τὸ πᾶν ἔσται $= 3\delta\phi$· αἵγε ποσότητες ὁμοῦ ληφθεῖσαι τῷ ὅλῳ ἐξισωθήσονται α· Κἀντεῦθεν ἔσται ἡ ἐφεξῆς ἐξίσωσις

$$1) \quad \alpha = \beta\phi + 3\delta\phi$$

Β'. Ἐπεὶ ἡ τῶν βοῶν ὁμοῦ ληφθέντων ζημία ἐστὶν $= \delta$· εὔδηλόν ἐστι δ ἰσοδυναμεῖν τῇ ἑνὸς ἑκάστου τῶν βοῶν ζημίᾳ πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ τὸν τῶν βοῶν ἀριθμόν. Ἀλλ' ὁ τῶν βοῶν ἀριθμὸς ἐτέθη $= 6\chi$, ἡ δὲ ὁσημέραι ὑπ' αὐτῶν ζημία $= 2y + 2$· Ἐντεῦθεν

$$2) \quad 6\chi(2y + 2) = \delta$$

$$\delta = 12\chi y + 12\chi$$

Γ'. Αὖθις ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν ἵππων καὶ προβάτων καθ' ἡμέραν ζημία ὁμοῦ ληφθεῖσα ἐστὶν $= \beta$, σαφές ἐστι ταύτην ἐκκύπτειν ἐκ τοῦ τῶν ἵππων ἀριθμοῦ 3χ, ἀχθέντος ἐπὶ τὴν ὑφ' ἑνὸς ἑκάστου τῶν ἵππων ζημίαν

$2y$, ἔκ τε τοῦ τῶν προβάτων ἀριθμοῦ χ, ἐπὶ τὴν ὁσημέραι αὐτῶν ζημίαν y· Κἀντεῦθεν

$$3) \quad \beta = 3\chi \cdot 2y + \chi \cdot y = 6\chi y + \chi y = 7\chi y.$$

ΑΝΑΓΩΓΗ.

Εὑρεθήτω ἐν τῇ τῶν 2) καὶ 3) ἀριθμῶν ἐξισώσει, ἡ τοῦ χ δύναμις·

$$2) \quad \delta = 12\chi y + 12\chi$$

$\delta = \chi(12y + 12)$ τῇ πρὸς τοὺς παράγ. διαλύσει

$$\chi = \frac{\delta}{12y + 12} \quad (\mu$$

$$3) \quad \beta = 7\chi y, \text{ καὶ } \chi = \frac{\beta}{7y} \quad (\nu$$

Συναφθήτωσαν ἐν ἐξισώσει αἱ ἐν τῷ (μ καὶ (ν τοῦ χ δυνάμεις·

$$\frac{\delta}{12y + 12} = \frac{\beta}{7y}$$

$7\delta y = 12\beta y + 12\beta$ ἀκαιρεώσει

$7\delta y - 12\beta y = 12\beta$ μεταθέσει

$y(7\delta - 12\beta) = 12\beta$ τῇ πρὸς τοὺς παρ. διαλ.

$y = \frac{12\beta}{7\delta - 12\beta}$ τῇ ἀπὸ τοῦ συνθ. ἀπαλλαγῇ.

Ἀνθυποκαθιστάσθω ἐν τῷ ἀνωτέρω τύπῳ (ν, ἡ ἤδη εὑρεθεῖσα τοῦ y δύναμις·

$$\chi = \frac{\beta}{7y} = \frac{\beta}{7} \times \frac{7\delta - 12\beta}{12\beta} = \frac{7\beta\delta - 12\beta^2}{84\beta}$$

$$\chi = \frac{7\delta - 12\beta}{84}$$

Ζητείσθω ὡσαύτως ἐν τῇ τοῦ 1) ἀριθ. ἐξισώσει ἡ τοῦ ϕ ἰσότης

$$1)\quad \alpha = \beta\phi + 3\delta\phi$$

$$\alpha = \phi(\beta + 3\delta)$$ τῇ πρὸς τοὺς παράγ. διαλ.

$$\phi = \frac{\alpha}{\beta + 3\delta}$$

Καὶ τῆς τῶν ἀριθμῶν ἀντὶ τῶν στοιχείων εἰσαγωγῆς ἐν ἅπασι γενομένης, ἔσται·

$$\phi = \frac{\alpha}{\beta + 3\delta} = \frac{26796}{196 + 1080} = \frac{26796}{1276} = 21 \text{ ἡμέρ.}$$

Τὰ πρόβατα τοίνυν μετὰ τῶν ἵππων 21 ἡμέρ. ἐβόσκοντο, οἱ δὲ βόες 63.

$$\chi = \frac{7\delta - 12\beta}{84} = \frac{2520 - 2352}{84} = \frac{168}{84} = 2$$

Ἦσαν τοίνυν 2 πρόβατα, 6 ἵπποι, 12 βόες.

$$y = \frac{12\beta}{7\delta - 12\beta} = \frac{2352}{2520 - 2352} = \frac{2352}{168} = 14$$

Τούτου χάριν ἀντὶ τῆς ὑφ' ἑνὸς προβάτου γενομένης ἡμερουσίου ζημίας ἀπέτισε 14 μνᾶς, ἀντὶ δὲ τῆς ὑπὸ τοῦ ἵππου 28, καὶ ἀντὶ τῆς ὑπὸ τοῦ βοὸς 30.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

Α) Ἡ ὁσημέραι ὑφ' ἑκάστου τῶν τε ἵππων καὶ τῶν προβάτων ζημία, ἐπὶ τὸν τῶν θρεμμάτων τοῦ ἰδίου εἴδους ἀριθμὸν ἀχθεῖσα ἰσοδυναμήσει ἐκ τῆς συνθήκης 196 μναῖς.

ἤδη ἀντὶ τοῦ προβάτου $14 \times 2 = 28$
ἀντὶ δὲ τοῦ ἵππου $28 \times 6 = 168$ $\Big\} = 196 = \beta$

Β) Ἡ τοῦ ἑνὸς βοὸς ζημία ἀχθεῖσα ἐπὶ τὸν τῶν βοῶν ἀριθμὸν δώσει μνᾶς 360. Ἔνθεντοι $30 \times 12 = 360 = \delta$.

Γ) Ἡ ὑφ' ἑνὸς ἑκάστου εἴδους ὁσημέραι γενομένη ζημία, διὰ τοῦ τῆς νομῆς πολλαπλασιασθεῖσα χρόνου ἰσοδυναμήσει τῷ ὅλῳ $26796 = \alpha$.

Ὅθεν	μναῖς ἡμέραις μναῖς	
ἀντὶ μὲν τῆς τῶν προβ. ζημίας	$2 \times 28 \times 21 = 588$	
ἀντὶ δὲ τῆς τῶν ἵππων .	$6 \times 168 \times 21 = 3528$	$= 26796$.
καὶ ἀντὶ τῆς τῶν βοῶν .	$12 \times 360 \times 63 = 22680$	

Ε'.

Καθηγητής τις ἐρωτηθεὶς εἰπεῖν πόσοι παρ' αὐτῷ Μαθηματικῶν, πόσοι δὲ Φυσικῶν καὶ Φιλοσοφικῶν μαθημάτων ἀκροαταί εἰσιν; ἔφη. Οἱ τῶν Φυσικῶν ἀκροαταὶ μετὰ τοῦ τῶν λοιπῶν ἡμίσεως 66 ἀριθμοῦνται· Οἱ δὲ τῶν Μαθηματικῶν ἐγκρατεῖς, σὺν τοῖς διττοῖς τῶν λοιπῶν τριτημορίοις, 84· Οἵ τε Φιλόσοφοι σὺν τοῖς διττοῖς τῶν λοιπῶν τεταρτημορίοις τὸν 93 συνιστῶσιν ἀριθμόν. Ζητεῖται πόσοι αὐτῶν ἰδίᾳ ἐξ ἑκάστης εἰσὶ τάξεως;

ΛΥΣΙΣ.

Κείσθω $66 = \alpha$, $84 = \beta$, καὶ $93 = \gamma$. Οἱ τῆς Φυσικῆς ἀκροαταὶ κληθήτωσαν χ, οἵ τε Μαθηματικοὶ y, καὶ οἱ Φιλόσοφοι ϕ.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \chi + \frac{y}{2} + \frac{\phi}{2} = \alpha \\ 2)\ y + \frac{2\chi}{3} + \frac{2\phi}{3} = \beta \\ 3)\ \phi + \frac{3\chi}{4} + \frac{3y}{4} = \gamma \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 2\chi + y + \phi = 2\alpha \\ 3y + 2\chi + 2\phi = 3\beta \\ 4\phi + 3\chi + 3y = 4\gamma \end{array}\right.$$

Ἐντεῦθεν γενέσθω ἐκ τῆς πρώτης τὸ $\chi = \frac{2\alpha - y - \phi}{2}$

Ἔκ τε τῆς τρίτης $\chi = \frac{4\gamma - 3y - 4\phi}{3}$

Ἐπεὶ δὲ $\chi = \chi$ (§. 110.) ἔσται ὡσαύτως,

$$\frac{2\alpha - y - \phi}{2} = \frac{4\gamma - 3y - 4\phi}{3}$$

Κἀντεῦθεν $y = \frac{8\gamma - 6\alpha - 5\phi}{3}$ (μ

Ἐπεὶ δὲ ἐκ τῆς δευτέρας τῶν ἀνωτέρω τριῶν ἐξισώσεων $3y + 2\chi + 2\phi = 3\beta$, ἐστὶν

$$y = \frac{3\beta - 2\chi - 2\phi}{3} \quad (\nu$$

Ἔκ τε τῆς τρίτης $4\phi + 3\chi + 3y = 4\gamma$, ἐστὶν

$$y = \frac{4\gamma - 3\chi - 4\phi}{3} \quad (o$$

Ἐπεὶ δὲ $y = y$ (§. 110.), ἄρα (ν + ο

$$\frac{3\beta - 2\chi - 2\phi}{3} = \frac{4\gamma - 3\chi - 4\phi}{3}$$

Ἐντεῦθεν $\chi = 4\gamma - 3\beta - 2\phi$ (π

Ἐὰν τοίνυν αἱ τοῦ χ καὶ y ἰσότητες ἐν μιᾷ τῶν προτέρων τριῶν ἐξισώσεων, θῶμεν δὴ ἐν τῇ πρώτῃ $2\chi + y + \phi = 2\alpha$ ἀντεισαχθῶσιν, ἐκκύψει.

$$8\gamma - 6\beta - 4\phi + \frac{8\gamma - 6\alpha - 5\phi}{3} + \phi = 2\alpha$$

$$\text{καὶ } \phi = \frac{32\gamma - 18\beta - 12\alpha}{14}$$

$$\phi = \frac{32 \times 93 - 18 \times 84 - 12 \times 66}{14} = 48.$$

Διά τε τῆς τοῦ 48 ἀντὶ τοῦ ϕ, ἐν τοῖς (μ καὶ (π τύποις τῆς τῶν χ καὶ y ἐξισώσεως εἰσαγωγῆς ἔσται.

π) $\chi = 4 \times 93 - 3 \times 84 - 2 \times 48 = 24.$

μ) $y = \frac{8 \times 93 - 6 \times 66 - 5 \times 48}{3} = 36.$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \chi + \frac{y}{2} + \frac{\phi}{2} = \alpha \\ 2)\ y + \frac{2\chi}{3} + \frac{2\phi}{3} = \beta \\ 3)\ \phi + \frac{3\chi}{4} + \frac{3y}{4} = \gamma \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 24 + \frac{63}{2} + \frac{48}{2} = 66 \\ 36 + \frac{2}{3} \times (24 + 48) = 84 \\ 48 + \frac{3}{4} \times (24 + 36) = 93 \end{array}\right.$$

ϛ'.

Οἱ πρὸς τυράννους δεινὸν στήσαντες Ἄρηα,
Κεῖνται ἀριστείης, σύμβολα δεικνύμενοι·
Τίς δέ κεν ἀριθμὸν τρισὶ χαρακτῆρσιν ἐνίσπῃ
Σύνθετον, ὅν γε λίθος δῶκε τυραννοφόνων;
Ἦν γὰρ χαρακτῆρος ἑκάστου τετράδ' εἴσαην
Ξυνάμα συνάψῃς, τέτταρα ἠδ' ἑκατὸν
Ἕξεις· τετράγωνον ἐπεὶ μέσσου, τετόρεσσιν,
Ἀμφοτέρων ἄκρων, διπλασίοιο πέλει
Γινομένου μεῖζον· Πέντ' ἢν δ' ἑκατοντάδας αὖθις,
Ἠδ' ἐννάκι δέκα, πρός γε δὶς αὖτε δύω,
Ἀριθμοῖο ἀποίσεις, τόν δ' ἀντίστροφον ἕξεις·
Πλῆθος ἄγ' Ἡρώων φράζεο παροδῖτα.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω ὁ πρῶτος χαρακτὴρ λαιόθεν $= \chi$, ὁ μέσος $= y$, ὁ δὲ ἔσχατος $= \psi$. Κατὰ μὲν οὖν τὴν πρώτην τοῦ προβλήματος συνθήκην, ἔσται τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ἑνὸς ἑκάστου χαρακτῆρος $= 104$· κατὰ δὲ τὴν δευτέραν, τὸ τοῦ μέσου χαρακτῆρος τετράγωνον, μεῖζον ἔσται ἀριθμῷ 4 τῷ ἐκ τῶν δυοῖν ἄκρων διπλῷ γινομένῳ· ἐὰν δὲ τρίτον τοῦ αἰτουμένου ἀριθμοῦ

594 ἀφαιρεθῶσιν, ἐκκύψωσιν οἱ τρεῖς χαρακτῆρες, ἐξ ὧν ἐκεῖνος σύγκειται, ἀντιστρόφως. Ζητεῖται δὴ ὁ ἀριθμός, πρὸς οὗ τὴν θήραν ἔσται·

$$\text{Α)}\ \chi^2+y^2+\psi^2=104$$

$$\text{Β)}\ y^2=2\chi\psi+4$$

$$\text{Γ)}\ 100\chi+10y+\psi-594=100\psi+10y+\chi,$$

$$\chi=\frac{99\psi+594}{99}=\psi+6.$$

Ἀντεισαχθήτω ἡ τοῦ χ δύναμις ἐν Α καὶ Β, ἵν' ἡ

$$\text{Δ)}\ \psi^2+12\psi+36+y^2+\psi^2=104.$$

$$\text{Ε)}\ y^2=2\psi^2+12\psi+4$$

$$\text{Ε—Δ)}\ 2\psi^2+12\psi+36=104-2\psi^2-12\psi-4$$

$$\psi=-3+\sqrt{25}=2.$$

Τῆς τοῦ ψ δυνάμεως ἐν ταῖς Γ'. καὶ Ε'. ἐξισώσεσιν ἀνθυποκαθισταμένης, ἐκκύψει $\chi=8$, $y=6$. Ἐξ ὧν δῆλον τὸν αἰτούμενον ἀριθμὸν εἶναι 862.

Ἐκκείσθωσαν δὲ καί τινα πρὸς τὴν τῶν φιλοπόνων μείζονα γύμνασιν.

Ζ'.

Ἀνθεμία περὶ τῆς τῶν ἑαυτῆς τριῶν παίδων ἡλικίας ἐρωτηθεῖσα, ἔφη. Ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου ἐτῶν ἐστὶν 24, ὁ αὐτὸς μετὰ τοῦ δευτέρου 18, ὁ δὲ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου 22. Πόσα τοίνυν ἦσαν τὰ τοῦ πρώτου χ ἔτη, τά τε τοῦ δευτέρου y, καὶ τὰ τοῦ τρίτου ψ;

ΕΞΙΣΩΣΙΣ.

$$\chi+\psi=24.$$

$$\chi+y=18.$$

$$y+\psi=22.$$

Η'.

Γλαῦκος μετὰ Φαύστου περὶ τῶν ἰδίων χρημάτων διαλεγόμενος ἔφη, ἐάν μοι τὸ ἥμισυ τῶν παρὰ σοὶ δῷς χρυσῶν, ἕξω πλεῖν' ἢ τετραπλάσιον τῶν ὑπολειφθησομένων σοι, πρὸς δὲ καὶ 3 χρυσούς· καὶ ὁ Φαῦστος ὑπολαβὼν εἶπεν, ἀλλ' ἐάν μοι τῶν σῶν χρυσῶν τρεῖς σὺν ἡμίσει παράσχῃς, ἕξω ἴσους τοῖς παρὰ σοὶ ὑπολειφθεῖσι. Ζητεῖται ὁ τῶν χρυσῶν χ ἀριθμὸς τοῦ Γλαύκου, ὅ, τε τῶν τοῦ Φαύστου φ.

ΕΞΙΣΩΣΙΣ.

$$\chi+\tfrac{1}{2}\varphi=4\times\tfrac{1}{2}\varphi+3$$

$$\varphi+3\tfrac{1}{2}=\chi-3\tfrac{1}{2}$$

Θ'.

Χρυσὸς οὗτινος ἡ οὐγγία 8 μνῶν τιμᾶται, ἀργύρῳ 4 μνῶν τὴν οὐγγίαν τιμωμένῳ, οὕτω συναναμικτέος ἔσται, ὥστε τὸ ὅλον εἶναι οὐγγίας 10, ὧν ἑκάστη 6 τιμηθήσεται μνῶν. Αἰτεῖται τοίνυν ὁ τῶν οὐγγιῶν ἀριθμὸς χ τῶν ἐκ τοῦ χρυσοῦ ληφθησομένων, ὅ, τε τῶν ἐκ τοῦ ἀργύρου y.

ΕΞΙΣΩΣΙΣ.

$$\chi+y=10$$

$$8\chi+4y=60.$$

Ι'.

Γλαύκου, Φαύστου τε καὶ Καρύωνος ἡ περιουσία ὁμοῦ ληφθεῖσα 40 ἦν ταλάντων· εἶχε δὲ ὁ μὲν Γλαῦκος μετὰ Φαύστου 20 τοῦ Καρύωνος πλέον, ὁ δ' αὐτὸς 12 ἔλαττον τοῦ τε Φαύστου καὶ Καρύωνος. Ζητεῖται ἡ ἑνὸς ἑκάστου περιουσία.

ΕΞΙΣΩΣΙΣ.

$$\chi+y+\psi=40$$
$$\chi+y-\psi=20$$
$$\chi-y+\psi=12$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 454. Προβλήματα Ἀόριστα ἐπιλύειν.

ΛΥΣΙΣ.

Τῶν τοιῶνδε ἀορίστων ποσοτήτων· αἵ τινες ἐν τῇ ἐξισώσει ἐκ τῶν ὁμοίων προβλημάτων ἐκκύπτουσι, μία μόνον οἱονεὶ ἄγνωστος θεωρείσθω, αἱ δὲ λοιπαὶ οἱονεὶ ἐγνωσμέναι λαμβανέσθωσαν, ἥ τε ἐξίσωσις, οἷα δὴ ἁπλῆ (ὡς πρὸς τὴν ἀόριστον θεωρουμένη) ἐπιλυέσθω. Εἶτα ταῖς ἀορίστοις ποσότησιν ὡς ὡρισμέναις, ἀριθμὸς ἀνθυποκαθιστάσθω, κατὰ τὸ δοκοῦν μὲν, ταῖς δὲ τοῦ προβλήματος καταστάσεσι καὶ μάλα συνᾴδων, λαμβανόμενος· αὐτῷ δὴ τούτῳ ἡ ἄγνωστος εὑρεθήσεται ποσότης. Ἐὰν δὲ τοὐναντίον ἡ τέως εὑρεθεῖσα ποσότης ταῖς τοῦ προβλήματος οὐκ ἐξαρκῇ συνθήκαις, ἕτερος ἀντεισαχθήτω ἀριθμὸς, θεωρουμένων μέντοι, ὡς εἴρηται, τῶν ἀορίστων ποσοτήτων ὡς ὡρισμένων, τοῦτό τε πολλάκις γενέσθω, μέχρις οὗ τὰ τῆς πράξεως, τῇ τοῦ προβλήματος συνθήκῃ, ἐν ἀποχρῶντι λόγῳ ἐκκύψῃ. Τοιουτοτρόπως, ἄπειραι ἐξισώσεις ταῖς τοῦ προβλήματος ἐξαρκοῦσαι συνθήκαις ἀνιχνευόμεναι, ἐξευρίσκεσθαι ἔχουσιν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'.

Γαυρίας καὶ Γοργώνιος ἐκέρδησαν ὁμοῦ ἐν κυβείᾳ 24 Στατῆρας. Πόσον ἕκαστος τούτων ἐκέρδησεν;

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω ὁ 24 ἀριθμὸς $=\alpha$, τὸ τοῦ Γαυρία κέρδος $=\chi$, τὸ δὲ τοῦ Γοργωνίου $=y$. Τοίνυν·

$$\chi+y=\alpha,\ \text{καὶ}\ \chi=\alpha-y.$$

Εἰσαχθήτω ἤδη ἀντὶ τοῦ y, ἀριθμός τις κατὰ τὸ δοκοῦν λαμβανόμενος, ἀλλ' οὖν τῶν 24 ἐλάττων. Φυλαττέσθω δὲ ὡς ἔνι, ὅπως μὴ ἡ ἄγνωστος χ ἀποφατικὴ ἐκκύψῃ, ὅπερ ἐστὶν, ἐλάττω τοῦ μηδενός (§. 45.), τότε καὶ γὰρ ἔσται ἐναντίον τῆς τοῦ κέρδους ὑποθέσεως. Θῶμεν δὴ $y=15$, ἔσται $\chi=24-15$. Ἐὰν τοίνυν ὁ Γοργίας ἐκέρδησε 15 στατῆρας, ὁ Γοργώνιος ἑπομένως 9. Ἔστι καὶ γὰρ $15+9=24$. Ἐὰν δὲ ληφθῇ $y=7$, ἔσται $\chi=24-7=17$, καὶ γὰρ $7+17=24$.

Β'.

Χρυσόγονος κέκτηται νομίσματα χρυσᾶ τε καὶ ἀργυρᾶ. Ἐὰν τοίνυν ἑκάτερον τῶν νομισμάτων εἶδος ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθῇ, τό τε δεύτερον γινόμενον ἀπὸ τοῦ πρώτου ἀφαιρεθῇ, ὑπολειφθήσονται 80. Πόσα ἄρα τῶν χρυσῶν, πόσα δὲ τῶν ἀργυρῶν νομισμάτων κέκτηται;

ΛΥΣΙΣ.

Κείσθω ὁ ἀριθμὸς $80=\alpha$, τά τε χρυσᾶ τῶν νομισμάτων κληθήτωσαν χ, καὶ τὰ ἀργυρᾶ ψ. Ἄρα·

$$\chi^2-\psi^2=\alpha\ \text{καὶ}\ \chi^2=\alpha+\psi^2$$
$$\text{κἀντεῦθεν}\ \chi=\sqrt{(\alpha+\psi^2)}$$

Ἐνταῦθα οὖν εὑρεῖν δέον ἀριθμὸν, οὗτινος τὸ τετράγωνον τῷ 80 ἀριθμῷ προστιθέμενον, πλῆρες ἀναδώσει τετράγωνον, ἵν' ἐκ τούτου ἐντελὴς ῥίζα ἐξαχθῆναι ἔχῃ. Θῶμεν δὴ $\psi = 1$, ἔσται $\chi = \sqrt{(80+1)} = \sqrt{81} = 9$· ἄρα ὁ Χρυσόγονος κέκτηται 9 μὲν χρυσᾶ, ἓν δὲ ἀργυροῦν· ἐπεὶ $9 \times 9 - 1 \times 1 = 80$. Ἐὰν δὲ τεθῇ $\psi = 8$, ἔσται $\chi = \sqrt{(80+64)} = \sqrt{144} = 12$.

Γ'.

Ἐκ 412 κεντηναρίων χαλκοῦ, διπλοῦν εἶδος κωδώνων μορφωθῆναι δέον οὕτως, ὥστε τοὺς τοῦ ἑνὸς εἴδους κώδωνας 6, τοὺς δὲ τοῦ ἑτέρου 16 κεντηναρίοις ζυγοσταθμεῖσθαι. Πόσοι τοίνυν ἐντεῦθεν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν εἰδῶν μορφωθήσονται κώδωνες;

ΛΥΣΙΣ.

Κληθήτωσαν οἱ 412 τοῦ χαλκοῦ κεντηνάριοι α, οἵ τε 6 τοῦ ἑνὸς τῶν κωδώνων εἴδους β, οἱ δὲ 16 τοῦ ἑτέρου γ, ὁ τοῦ ἑνὸς εἴδους τῶν κωδώνων ἀριθμὸς χ, ὁ δὲ τοῦ ἑτέρου y.

Κατὰ τὴν τοῦ προβλήματος δοθεῖσαν ὑπόθεσιν, ὁ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν εἰδῶν ἀριθμὸς τῶν κωδώνων, ἐπὶ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν αὐτοῦ ὁλκὴν ἀχθεὶς, ἰσοδυναμήσει τοῖς 412 τοῦ χαλκοῦ κεντηναρίοις. Ὅθεν·

$$\beta\chi + \gamma y = \alpha.$$

ΑΝΑΓΩΓΗ.

$$\begin{array}{ccc} \text{Α'.} & & \text{Β'.} \\ \left.\begin{array}{r} \beta\chi = \alpha - \gamma y \\ \chi = \dfrac{\alpha - \gamma y}{\beta} \end{array}\right\} & \text{ἢ} & \left\{\begin{array}{l} \gamma y = \alpha - \beta\chi \\ y = \dfrac{\alpha - \beta\chi}{\gamma} \end{array}\right. \end{array}$$

Α'. Θῶμεν δὴ ἐν τῇ Α'. ἐξισώσει $y = 13$· ἔσται

$$\chi = \frac{\alpha - \gamma y}{\beta} = \frac{412 - 16 \times 13}{6} = \frac{412 - 208}{6}$$

$$\chi = \frac{204}{6} = 34.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\beta\chi + \gamma y = \alpha \begin{cases} 6 \times 34 + 16 \times 13 = 412 \\ 204 + 208 = 412 \end{cases}$$

Β'. Θῶμεν αὖ ἐν τῇ Α'. ἐξισώσει $y = 19$· ἔσται

$$\chi = \frac{\alpha - \gamma y}{\beta} = \frac{412 - 16 \times 19}{6} = \frac{412 - 304}{6}$$

$$\chi = \frac{108}{6} = 18.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\beta\chi + \gamma y = \alpha \begin{cases} 6 \times 18 + 16 \times 19 = 412 \\ 108 + 304 = 412 \end{cases}$$

Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ ἡμῖν ἐξέσται, ὁποιονδηποτοῦν ἀριθμὸν κατὰ τὸ δοκοῦν ἐπὶ τοῦ χ, ὡς κἀπὶ τοῦ y, ἐπὶ τῆς Β'. ἐξισώσεως λαβεῖν.

Δ'.

Ἀριθμοὺς δύω ἀνίσους εὑρεῖν, ὧν τῷ γινομένῳ, ἐὰν τὸ ἐξ αὐτῶν προστεθῇ κεφάλαιον, ἐκκύψει ὁ 34 ἀριθμός.

ΛΥΣΙΣ.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ἔστω ὁ 34 ἀριθ.} = \alpha \\ \text{οἱ ζητούμενοι } \chi \text{ καὶ } y \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{Ἔσται τὸ μὲν τούτων γινόμ.} = \chi y, \\ \text{τὸ δὲ κεφάλαιον} \quad . \quad . \quad = \chi + y \end{array}\right.$$

$$\chi y + \chi + y = \alpha$$

$$\chi y + \chi = \alpha - y$$

$$x(y+1)=\alpha-y$$

$$x=\frac{\alpha-y}{y+1}$$

Καὶ ἀντὶ τοῦ y ὁποιουοῦν ἀριθμοῦ, οἷον τοῦ 4 ληφθέντος, ἔσται·

$$x=\frac{30}{5}=6$$

Ἐὰν δὲ $y=6$ τεθῇ, ἔσται $x=\frac{28}{7}=4$.

Ε'.

Ἀριθμοὺς εὑρεῖν δύω, ὧν ἑκάτερος ἐπὶ τὸν ἕτερον ἀχθεὶς τέλειον ἀναδώσει κύβον, οὗτινος ἡ ῥίζα ἰσοδυναμήσει τῷ ἀπὸ τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον γινομένῳ.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω ὁ πρῶτος ἀριθμὸς $=x$, ὁ δεύτερος $=y$, ἡ δὲ τοῦ κύβου ῥίζα $=\rho$.

Α'.	Β'.
$xy=\rho^3$	$xy^2=\rho$
$x=\frac{\rho^3}{y}$	$x=\frac{\rho}{y^2}$

$$\frac{\rho^3}{y}=\frac{\rho}{y^2},\ \rho^3y^2=\rho y,\ \rho^3y=\rho,\ y=\rho^{-2}$$

Ἐὰν μὲν οὖν ληφθῇ $\rho=3$ ἔσται $y=\rho^{-2}=\frac{1}{9}$, καὶ $x=243$. ἐὰν δὲ τεθῇ $\rho=2$, ἔσται $y=\frac{1}{4}$, καὶ $x=32$.

Ϛ'.

Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐὰν ἐπὶ 12 πολλαπλασιασθῇ, καὶ ἐπὶ 3 ἐφεξῆς, ἀριθμὸν ἀναδώσει τετράγωνον.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς $12=\alpha$, ὁ δὲ $3=\beta$· ὁ αἰτούμενος $=x$, ἡ τοῦ πρώτου τετραγώνου ῥίζα $=\rho$, καὶ ἡ τοῦ δευτέρου $=\sigma$· ἔσται·

Α'.	Β'.
$\alpha x=\rho^2$	$\beta x=\sigma^2$
$x=\frac{\rho^2}{\alpha}$	$x=\frac{\sigma^2}{\beta}$

$$\frac{\rho^2}{\alpha}=\frac{\sigma^2}{\beta},\ \rho^2=\frac{\alpha\sigma^2}{\beta},\ \rho=\sqrt{\left(\frac{\alpha\sigma^2}{\beta}\right)}$$

Ἐὰν οὖν θῶμεν $\sigma=2$· ἔσται $\rho=4$, καὶ $x=\frac{\rho^2}{\alpha}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$. Ἐὰν δὲ τεθῇ $\sigma=3$· ἔσται $\rho=6$, καὶ $x=\frac{16}{12}=3$. Ἐὰν δὲ $\sigma=5$ ληφθῇ· ἔσται $\rho=10$, καὶ $x=\frac{100}{12}=8\frac{4}{12}=8\frac{1}{3}$.

Ἔστωσαν τῶν Φοιτητῶν χάριν τὰ ἐφεξῆς, ἐν οἷς ληπτέον ἀείποτε ὑπὲρ μιᾶς τινος τῶν ἀορίστων ἀριθμόν, ταῖς τοῦ προβλήματος συνθήκαις καὶ μάλα συνᾴδοντα.

Ζ'.

Βακχυλίδης τρία εἴδη οἴνου κέκτηται, ὧν τοῦ μὲν πρώτου ὁ ξέστης 4 τιμᾶται δραχμῶν, τοῦ δὲ δευτέρου 6, καὶ τοῦ τρίτου 9· ταῦτα δὲ οὕτω συγκεράσαι βούλεται, ὡς ἔχειν 20 ξέστας, ὧν ἑκάστη τιμηθήσεται 7 δραχμῶν. Ζητεῖ οὖν μαθεῖν, πόσους ξέστας x λαβεῖν δέον ἐκ τοῦ πρώτου, πόσους δὲ φ ἐκ τοῦ δευτέρου, καὶ πόσους ψ ἐκ τοῦ τρίτου;

ΕΞΙΣΩΣΙΣ.

$$\chi + \phi + \psi = 20.$$
$$4\chi + 6\phi + 9\psi = 140.$$

Η'.

Δίδραχμα 240 διανεμητέα εἰσὶν εἰς 50 πένητας, ἄνδρας, γυναῖκάς τε καὶ παῖδας ἀναμὶξ οὕτως, ὥστε τῶν μὲν ἀνδρῶν ἕκαστον λαβεῖν 8 δίδραχμα, τῶν δὲ γυναικῶν ἑκάστην 6, καὶ τῶν παίδων ἕκαστον 2. Ζητεῖται ὁ τῶν ἀνδρῶν χ ἀριθμὸς, ὅ, τε τῶν γυναικῶν ψ, καὶ ὁ τῶν παίδων y.

ΕΞΙΣΩΣΙΣ.

$$\chi + \psi + y = 50$$
$$8\chi + 6\psi + 2y = 240.$$

Θ'.

Ἐκ τριῶν εἰδῶν οἴνου χοεῖς 120, 300 ὠνηθήσονται δραχμῶν· καὶ τοῦ μὲν πρώτου εἴδους ὁ χοεὺς 8 τιμᾶται δραχμῶν, τοῦ δὲ δευτέρου 5, καὶ τοῦ τρίτου 3. Ζητεῖται ὁ τῶν ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους ἀριθμὸς χ, ὅ, τε τῶν ἐκ τοῦ δευτέρου y, καὶ ὁ τῶν ἐκ τοῦ τρίτου ϕ, ὠνηθησομένων χοέων.

ΕΞΙΣΩΣΙΣ.

$$\chi + y + \phi = 120.$$
$$8\chi + 5y + 3\phi = 300.$$

Ἐκκείσθωσαν δὲ καὶ τὰ τῶν Ἀρχαίων Ἀριθμητικὰ Προβλήματα, ὧν τὰ πλεῖστα Μητροδώρου, πρὸς τὴν τῶν Εἰσαγομένων μείζονα ἐξάσκησιν, οἷς

χαριζόμενοι καὶ τὰς τούτων Λύσεις ἐξεπονήσαμεν.

Α'.

(Εὐκλείδου.)

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορέουσαι οἶνον ἔβαινον·
Αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ' ἄχθεϊ φόρτου ἑοῖο.
Τὴν δὲ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ἐκείνη·
Μῆτερ τί κλαίουσ' ὀλοφύρεαι ἠΰτε κούρη;
Εἰ μέτρον ἐμοὶ δοίης, διπλάσιον σέθεν ἦρα.
Εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις.
Εἰπὲ τὸ μέτρον ἄριστε Γεωμετρίης ἐπίιστορ;

ΛΥΣΙΣ.

Τοὶ μὲν ἐγὼν ἐρέω, σὺ δ' ἀκούων ἔνδοθι κρύπτε·
Πέντε μὲν ἡ ὄνος, ἡμίονος δ' ἔφερεν μέτρα ἑπτά.

ΕΚΘΕΣΙΣ.

Κείσθω γὰρ ἀντὶ τοῦ φόρτου τῆς ἡμιόνου τὸ χ, ἀντὶ δὲ τοῦ τῆς ὄνου τὸ ϕ· Ἐὰν οὖν ἡ ἡμίονος τῇ ὄνῳ ἓν δῷ ἐναπολειφθήσεται αὐτῇ $\chi - 1$, ἡ δὲ ὄνος ἕξει $\phi + 1$, ἐπεὶ δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ἰσότητα φυλάξουσιν, ἔσται.

$$A)\ \chi - 1 = \phi + 1$$

Αὖθις ἐὰν ἡ ὄνος τῇ ἡμιόνῳ ἓν δῷ, κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ προβλήματος ὑπόθεσιν, ὁ ταύτης φόρτος ἔσται $= \chi + 1$, τῇ δὲ ὄνῳ ἐναπολειφθήσεται $\phi - 1$. Τούτων οὕτως ὑποτεθέντων ἔσται ὁ τῆς ἡμιόνου φόρτος διπλάσιος τοῦ τῆς ὄνου, ἑπομένως τε ὁ ἥμισυς τῆς ἡμιόνου φόρτος ἰσοβαρήσει τῷ ὅλῳ τῆς ὄνου φορτίῳ· Ἔνθεν τοι ἔσται.

$$\text{B)}\ \frac{\chi+1}{2}=\varphi-1$$

ΑΝΑΓΩΓΗ.

Α'. Εὑρεθήτω τὸ χ ἐν ἀμφοτέραις

$$\text{A)}\ \chi-1=\varphi+1,\quad \text{B)}\ \frac{\chi+1}{2}=\varphi-1$$

$$\chi=\varphi+2\ (\kappa\quad \chi+1=2\varphi-2$$

$$\chi=2\varphi-3\ (\lambda$$

Β'. Τῇ τῶν ἐκ τῆς πράξεως ἐκκυψάντων ἀντὶ τοῦ χ ἐξισώσεων (κ καὶ (λ συνθέσει, ἔσται.

$$\varphi+2=2\varphi-3$$
$$3+2=2\varphi-\varphi$$
$$5=\varphi$$

Γ'. Ἐντεῦθεν τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν ἀντὶ τοῦ φ ἐν τῇ (κ ἐξισώσει ἀνθυπαγαγόντες ἕξαμεν

$$\chi=\varphi+2=5+2=7.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\text{A)}\ \chi-1=\varphi+1$$
$$7-1=5+1=6$$

Κἀκ τῆς δευτέρας ὑποθέσεως δῆλον, ὅτι ἐὰν ἡ ὄνος τῇ ἡμιόνῳ ἓν δῷ, ὁ ταύτης φόρτος ἔσται διπλάσιος· οἷον

$$\text{B)}\ \chi+1=2\varphi-2$$
$$7+1=10-2=8$$

Καὶ γὰρ $\frac{\chi+1}{2}=\varphi-1$· ἤτοι $\frac{7+1}{2}=5-1=4.$

Β'.

(Διοφάντου.)

Ὀκταδράχμους καὶ πενταδράχμους χοέας τὶς ἔμιξε,
Τοῖς προπόλοισι πιεῖν χρῆστ' ἀποταξάμενος·
Καὶ τιμὴν ἀπέδωκεν ὑπὲρ πάντων τετράγωνον,
Τὰς ἐπιταχθείσας δεξάμενον μονάδας·
Καὶ ποιοῦντα πάλιν ἕτερόν σε φέρειν τετράγωνον,
Κτησάμενον πλευρὰν σύνθεμα τῶν χοέων.
Ὥστε διάστειλον, τοὺς ὀκταδράχμους πόσοι ἦσαν,
Καὶ πάλι τοὺς ἑτέρους παῖ λέγε πενταδράχμους.

ΛΥΣΙΣ.

$$\text{Ἔστω δὴ}\ \begin{cases} \text{A'.}\ 5\chi+8y=\alpha^2, \\ \text{B'.}\ (\chi+y)^2=\alpha^2+60. \end{cases}$$

Δηλοῖ δὲ ὁ κατὰ τὸ δοκοῦν ἡμῖν ληφθεὶς 60 ἀριθμὸς, τὰς δοθείσας ἤτοι τὰς ἐπιταχθείσας μονάδας. Ἐφ' ᾧ τοίνυν τὰς δύο ταυτασὶ ἐξισώσεις εἰς μίαν ἀγάγωμεν, πολλαπλασιαστέον πρῶτον μὲν ἐπὶ $5\chi+5y$, εἶτα δ' ἐπὶ $8\chi+8y$ τὴν Β'., κἆτα ἀπὸ τῆς Α'. ταύτην ἀφαιρετέον·

$$3y=\alpha^2-5\sqrt{(\alpha^2+60)}$$
$$3\chi=8\sqrt{(\alpha^2+60)}-\alpha^2$$

Δέον τοίνυν τὸν τύπον α^2+60 ῥητὸν ἀναδεῖξαι

ἔστω $\sqrt{(\alpha^2+60)}=\alpha+\frac{\mu}{\nu}$

κἀντεῦθεν ἐκκύψει $60=\frac{2\mu\alpha}{\nu}+\frac{\mu\mu}{\nu\nu}$, ἤτοι $\frac{60\nu\nu-\mu\mu}{2\mu\nu}=\alpha$, ἐξ οὗ ἐκκύπτει

$$\sqrt{(\alpha^2+60)}=\frac{60\nu^2+\mu^2}{2\mu\nu}.$$

Ἐφ' ᾧ τοίνυν y καὶ χ θετικῶς ἐκκύψωσι, δέον γε νέσθαι $\alpha^2 > 5\sqrt{(\alpha^2+60)}$, καὶ $\alpha^2 < 8\sqrt{(\alpha^2+60)}$· ἢ $\alpha^4 - 25\alpha^2 > 1500$, καὶ $\alpha^4 - 64\alpha^2 < 3840$. Τοίνυν $\alpha^2 > \frac{25}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6625}$, καὶ $\alpha^2 < 32 + \sqrt{4864}$· ἤ, $\alpha^2 > \frac{106}{2}$, καὶ $\alpha^2 < 102$.

Οἱ ὅροι τοίνυν ἐν οἷς τὸ α^2 ἐμπεριείληπται εἰσὶ 53 καὶ 102 ἐν ἀριθμοῖς ὁλοσχερέσιν· οἱ δὲ τὸ $\frac{\mu}{\nu}$ συνέχοντες εἰσὶ $\sqrt{(\alpha^2+60)} - \alpha = \frac{\mu}{\nu}$, $\sqrt{113} - \sqrt{54}$, καὶ $\sqrt{162} - \sqrt{101}$, ἢ 3,2 καὶ 2,8· ἀντὶ μὲν 53 τοῦ μείζονος 54 τεθέντος, ἀντὶ δὲ τοῦ 102 τοῦ ἐλάττονος 101. Τιθεμένου τοίνυν $\frac{\mu}{\nu} = 3$, ἤτοι $\mu = 3$, $\nu = 1$, ἔσται $\alpha = \frac{60-9}{6} = \frac{17}{2}$, καὶ $\sqrt{(\alpha^2+60)} = \frac{23}{2}$. $x = \frac{79}{12}$, $y = \frac{59}{12}$. Ἔστι καὶ γὰρ $5x + 8y = \frac{395}{12} + \frac{472}{12} = \frac{867}{12} = \frac{289}{4}$, τουτέστιν ἴσον τῷ τετραγώνῳ τοῦ $\frac{17}{2}$, ἢ α^2.

Γ′.

Ὄλβιε Πυθαγόρη Μουσάων Ἑλικώνιον ἔρνος,
Εἰπέ μοι εἰρομένῳ, ὁπόσοι σοφίης κατ' ἀγῶνα
Σοῖσι δόμοισιν ἔασιν, ἀεθλεύοντες ἄριστα;
Τοίγαρ ἐγὼν εἴποιμι, Πολύκρατες· ἡμίσεες μὲν
Ἀμφὶ καλὰ σπεύδουσι Μαθήματα· τέτρατοι αὖτε
Ἀθανάτου Φύσεως πεπονήαται· Ἑβδομάτοις δὲ
Σιγὴ πᾶσα μέμηλε, καὶ ἄφθιτοι ἔνδοθι μῦθοι.
Τρεῖς δὲ γυναῖκες ἔασι. Θεανὼ δ' ἔξοχος ἄλλων.
Τόσσους Πιερίδων ὑποφήτορας αὐτὸς ἀγινῶ.

ΛΥΣΙΣ.

Δῆλόν ἐστιν ἐνταῦθα αἰτεῖσθαι ἀριθμὸν x, οὗτινος τὸ $\frac{1}{2}$ τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{7}$ + 3 αὐτὸν τὸν αἰτούμενον ἀποτελοῦσιν ἀριθμόν. Ἔστω δή·

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3$$
$$56x = 28x + 14x + 8x + 168$$
$$56x = 50x + 168$$
$$56x - 50x = 168$$
$$6x = 168, \text{ καὶ } x = \frac{168}{6} = 28.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\frac{28}{2} + \frac{28}{4} + \frac{28}{7} + 3 = 28$$
$$14 + 7 + 4 + 3 = 28.$$

Δ′.

Ἁ Κύπρις τὸν Ἔρωτα κατηφιόωντα προσηύδα·
Τίπτέ τοι, ὦ τέκος, ἄλγος ἐπέκρασεν; ὃς δ' ἀπάμειπτο·
Πιερίδες μοι μῆλα διήρπασαν ἄλλυδις ἄλλη,
Αἰνύμεναι κόλποιο, τὰ δὴ φέρον ἐξ Ἑλικῶνος.
Κλειὼ μὲν μήλων πέμπτον λάβε· δωδέκατον δὲ
Εὐτέρπη· ἀτὰρ ὀγδοάτην λάχε δῖα Θάλεια·
Μελπομένη δ' εἰκοστὸν ἀπαίνυτο· Τερψιχόρη δὲ
Τέτρατον· ἑβδομάτην δ' Ἐρατὼ μετεκίαθε μοίρην·
Ἡ δὲ τριηκόντων με Πολύμνια νόσφισε μήλων·
Οὐρανίη δ' ἑκατόν τε καὶ εἴκοσι. Καλλιόπη δὲ
Βριθομένη μήλοισι τριηκοσίοισι βέβηκε.
Σοὶ δ' ἄρα κουφοτέρῃσιν ἐγὼ σὺν χερσὶν ἱκάνω
Πεντήκοντα φέρων τάδε λείψανα μῆλα θεάων.

ΛΥΣΙΣ.

$x = \frac{x}{5} + \frac{x}{12} + \frac{x}{8} + \frac{x}{20} + \frac{x}{7} + \frac{x}{4} + 30 + 120 + 300 + 50$· καὶ $x = 3360$. Καὶ γὰρ $672 + 280 + 420 + 168 + 480 + 840 = 2860 + 30 + 120 + 300 + 50 = 3360$.

Ε'.

Αἱ Χάριτες μήλων καλάθους φέρον, ἐν δὲ ἑκάστῳ
Ἶσον ἔην πλῆθος. Μοῦσαι σφίσιν ἀντεβόλησαν
Ἐννέα, καὶ μήλων σφέας ᾔτεον· αἱ δ' ἄρ' ἔδωκαν
Ἶσον ἑκάστη πλῆθος, ἔχον δ' ἴσα ἐννέα καὶ τρεῖς.
Εἰπὲ πόσον δῶκαν, ὅππως δ' ἴσα πᾶσαι ἔχεσκον;

ΛΥΣΙΣ.

Ὁ δὲ νοῦς τοιοῦτος. Τῶν Χαρίτων ἑκάστη τὸν αὐτὸν ἤτοι ἴσον τῶν μήλων εἶχεν ἀριθμὸν, καὶ ἑκάστη ὡσαύτως ἴσον ἀριθμὸν ἑνὶ ἑκάστῃ τῶν Μουσῶν δέδωκε. Ταύτης τῆς ἐξίσου ἔσχατον διανομῆς γενομένης ἑκάστη τῶν τε Χαρίτων καὶ τῶν Μουσῶν τὸν αὐτὸν εὑρέθη ἔχουσα ἀριθμόν. Ἔνθεν τοι τοῦ τῶν Χαρίτων ἤτοι 3 ἀριθμοῦ, τῷ τῶν Μουσῶν ἤτοι 9 συναπτομένου, ἐκκύψει 12 τῷ τῶν μήλων ἀριθμῷ. Διὸ λεκτέον ἑκάστην τῶν Χαρίτων 12 σχεῖν μῆλα, ἢ καὶ οἱονδηποτοῦν ἄλλον τῶν μήλων ἀριθμῶν τῶν 12 πολλαπλοῦν· οὕτω μέντοι, ὡς εἰ ληφθείη ὁ 12, ἑκάστη τῶν Χαρίτων ἓν μόνον ἑκάστῃ δέδωκε τῶν Μουσῶν· εἰ δ' ὁ 24, δύω· καὶ ἐφεξῆς οὕτω. Θῶμεν ἀλλ' οὖν ἑκάστην τῶν Χαρίτων μῆλα σχεῖν 24, καὶ ἀνὰ δύω ἐξ αὐτῶν ἑκάστῃ διανεμεῖν Μούσῃ. Ἑκάστη τοίνυν τῶν Χαρίτων μῆλα δέδωκε 18, ὡς ἐννέα ὄντων τῶν Μουσῶν, ἑπομένως τε ἑκάστῃ αὐτῶν ἓξ ἀναπελείφθησαν μῆλα.

Ϛ'.

Τεῦξον ἐμοὶ στέφανον, χρυσὸν χαλκόν τε κεράσσας,
Κασσίτερον θ' ἅμα τοῖσι, πολύκμητόν τε σίδηρον,

Μνῶν ἑξήκοντα. Χρυσὸς δ' ἐχέτω μετὰ χαλκοῦ
Δοιὰ μέρη τρισσῶν· χρυσὸς δ' ἅμα, κασσίτερός τε
Τρισσὰ μέρη τετόρων· χρυσὸς δ' ἅμα ἠδὲ σίδηρος
Τόσσα μέρη τῶν πέντε· Πόσον δ' ἄρα δεῖ σε κεράσσαι
Λέξον τοῦ χρυσοῦ, χαλκοῦ πόσον, ἀλλ' ἔτι λέξον
Κασσιτέροιο πόσον, λοιποῦ πόσον εἰπὲ σιδήρου,
Ὥστε σε τὸν στέφανον τεῦξαι μνῶν ἑξήκοντα.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω ἡ τοῦ χρυσοῦ ποσότης φ, ἡ τοῦ χαλκοῦ χ, ἥ τε τοῦ κασσιτέρου ψ, καὶ ἡ τοῦ σιδήρου y· αἱ δ' ἑξήκοντα μναῖ κληθήτωσαν α· Τοίνυν·

$$\text{Α}'.\ \underbrace{\varphi+\chi+\psi+y=\alpha}$$

$$\text{Β}'.\ \begin{cases}\varphi+\chi=\frac{2}{3}\alpha\\ \varphi+\psi=\frac{3}{4}\alpha\\ \varphi+y=\frac{3}{5}\alpha\end{cases}$$

$$\Gamma'.\ 3\varphi+\chi+\psi+y=\frac{40+45+36}{60}\alpha$$

Ἐπεὶ δὲ ἐν τῇ Α'. ἐξισώσει ἐστὶν $\alpha=\chi+\psi+y+\varphi$, ἔσται τῇ τῶν ὁμοίων ἀντικαταστάσει ἐπὶ τῆς Γ'.

$$3\varphi+\alpha-\varphi=\frac{121}{60}\alpha$$

$$2\varphi=(\tfrac{121}{60}-60)\alpha$$

$$2\varphi=\tfrac{61}{60}\alpha,\quad \text{καὶ}\ \varphi=(\tfrac{61}{60}\times 60):2$$

$$\varphi=\tfrac{61}{2}=30\tfrac{1}{2}$$

$$\text{Ἔσται τοίνυν}\begin{cases}\chi=\frac{2}{3}\alpha-\varphi=40-30\frac{1}{2}=\frac{80-61}{2}=9\frac{1}{2}\\ \psi=\frac{3}{4}\alpha-\varphi=45-30\frac{1}{2}=\frac{90-61}{2}=14\frac{1}{2}\\ y=\frac{3}{5}\alpha-\varphi=36-30\frac{1}{2}=\frac{72-61}{2}=5\frac{1}{2}\end{cases}$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\left.\begin{array}{l}\varphi + \chi = \frac{2}{3}\alpha \\ \varphi + \psi = \frac{3}{4}\alpha \\ \varphi + y = \frac{3}{5}\alpha\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l}30\frac{1}{2} + \ \ 9\frac{1}{2} = 40. \\ 30\frac{1}{2} + 14\frac{1}{2} = 45. \\ 30\frac{1}{2} + \ \ 5\frac{1}{2} = 36.\end{array}\right.$$

Ζ'.

Τὸ τρίτον ἀργυροποιὲ προσέμβαλε καὶ τὸ τέταρτον,
Τῆς Φιάλης εἰς ἕν, καὶ τὸ δυωδέκατον.
Εἰς δὲ κάμινον ἔλαυνε βαλών, καὶ πάντα κυκήσας,
Ἔξελέ μοι βῶλον, μνᾶν δέ μοι ἑλκυσάτω.

ΛΥΣΙΣ.

$$\chi\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) = \mu = 1$$

$$96\chi = 144 \cdot \text{ ἄρα } \chi = \frac{144}{96} = 1\frac{1}{2} \cdot$$

τῷ τῆς Φιάλης βάρει $1\frac{1}{2}$ μνᾶς σταθμιζομένης.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\frac{\chi}{3} + \frac{\chi}{4} + \frac{\chi}{12} = 1.$$

$$\frac{1\frac{1}{2}}{3} + \frac{1\frac{1}{2}}{4} + \frac{1\frac{1}{2}}{12} = 1.$$

$$\frac{1152}{1152} \text{ (§. 167. Σχόλ.) } = 1.$$

Η'.

Ἔχω τὸν ἑξῆς καὶ τὸ τοῦ τρίτου τρίτον,
Κἀγὼ τὸν ἑξῆς, καὶ τὸ τοῦ πρώτου τρίτον.
Κἀγὼ δέκα μνᾶς, καὶ τὸ τοῦ πρώτου τρίτον.

ΛΥΣΙΣ.

Α'. $\chi = y + \frac{1}{3}\psi$

Β'. $y = \psi + \frac{1}{3}\chi$

Γ'. $\psi = \frac{1}{3}\chi + 10$

Κἀντεῦθεν

$$\chi + y + \psi = y + \psi + \frac{1}{3}\psi + \frac{2}{3}\chi + 10$$

$$\chi + y + \psi - y - \psi = \frac{1}{3}\psi + \frac{2}{3}\chi + 10$$

$$3\chi = \psi + 2\chi + 30$$

$$3\chi - 2\chi = \psi + 30.$$

Ἔστι δὲ ἐν τῇ τρίτῃ ἐξισώσει $\psi = \frac{1}{3}\chi + 10$, διὰ τῆς τῶν ἴσων τοίνυν ἀνθυποκαταστάσεως ἔσται

$$\chi = \frac{1}{3}\chi + 10 + 30$$

$$3\chi - \chi = 40 \times 3$$

$$2\chi = 120, \text{ ἄρα } \chi = \frac{120}{2} = 60.$$

Ἔσται τοίνυν $\psi = \frac{1}{3}\chi + 10 = \frac{60}{3} + 10 = 30$, καὶ $y = \psi + \frac{1}{3}\chi = 30 + \frac{60}{3} = 50.$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\left.\begin{array}{l}\chi = y + \frac{1}{3}\psi \\ y = \psi + \frac{1}{3}\chi \\ \psi = \frac{1}{3}\chi + 10\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l}\chi = 50 + 10 = 60 \\ y = 30 + 20 = 50 \\ \psi = 20 + 10 = 30\end{array}\right.$$

Θ'.

Τοὺς χιλίους στατῆρας, οὓς ἐκτησάμην,
Λαβεῖν κελεύω τοὺς ἐμοὺς παῖδας δύο.
Πλὴν γνησίου τὸ πέμπτον ηὐξήσθω δέκα,
Μέτρου τετάρτου τῶν λαχόντων τῷ νόθῳ.

ΛΥΣΙΣ.

Ὁ δὲ νοῦς τοιοῦτος· Κελεύω, οὕτω τοὺς χιλίους στατῆρας διανεμηθῆναι, ὥστε τὸ πεμπτημόριον τῶν ὑπὸ τοῦ γνησίου ληφθησομένων, ὑπερέχειν τὸ ὑπὸ τοῦ νόθου ληφθησόμενον τεταρτημόριον ἀριθμῷ 10· τοίνυν

Α'. $\chi + y = \alpha = 1000$

Β'. $\frac{1}{5}\chi = \frac{1}{4}y + 10$

Ἔσται τοίνυν Γ'. $4\chi = 5y + 200$.

Πρὸς τὴν τοῦ χ ἤδη εὕρεσιν πολλαπλασιασθήτω ἡ Α'. ἐξίσωσις διὰ τῶν 5, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος $5\chi + 5y$ τοῦ δευτέρου τῆς Γ'. ἀφαιρεθήτω· ὁ δέγε τῆς Α'. δεύτερος ὅρος 5α ταύτῃ συναπτέσθω. Οὕτω γὰρ μόνη ἡ ἄγνωστος ποσότης χ διαστελλομένη προσδιορισθήσεται. Τουτέστι

$$4\chi = 5y + 200 - 5\chi - 5y + 5\alpha$$
$$4\chi + 5\chi = 5\alpha + 200$$
$$9\chi = 5200 \cdot \text{ ἄρα } \chi = 5200 : 9 = 577\tfrac{7}{9}.$$

Κἀντεῦθεν ἐκ τῆς Α'. ἐξισώσεως εὑρεθήσεται καὶ ἡ ἑτέρα τῶν ἀορίστων, ἤτοι

$$y = \alpha - \chi = 1000 - 577\tfrac{7}{9}$$
$$y = \frac{9000 - 5200}{9} = 422\tfrac{2}{9}$$

Γ'.

Ἓξ μνῶν, ἓξ φιάλας Κροῖσος Βασιλεὺς ἀνέθηκε,
Δραχμῇ τὴν ἑτέραν μείζονα τῆς ἑτέρας.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπεὶ οὖν ἑκάστη μνᾶ $= 100$ δραχμῶν, 6 μναῖ 600 ἰσοδυναμοῦσι δραχμαῖς· ἔσται τοίνυν διὰ τῆς μονάδι ἐπαυξούσης προόδου $\chi + \chi + 1 + \chi + 2 + \chi + 3 + \chi + 4 + \chi + 5$, ἤτοι $6\chi + 15 = 600$· καὶ $\chi = 97\frac{1}{2}$· εἰσὶν ἄρα τὰ λοιπὰ μόρια $98\frac{1}{2}$, $99\frac{1}{2}$, $100\frac{1}{2}$, $101\frac{1}{2}$, $102\frac{1}{2}$. Καὶ γὰρ $97\frac{1}{2} + 98\frac{1}{2} + 99\frac{1}{2} + 100\frac{1}{2} + 101\frac{1}{2} + 102\frac{1}{2} = 600$.

ΙΑ'.

Ὡρονόμων ὄχ' ἄριστε, πόσον παρελήλυθεν ἠοῦς;
Ὅσσον ἀποιχομένοιο δύο τρίτα, δὶς τόσα λείπει.

ΛΥΣΙΣ.

$$2 \times \tfrac{2}{3}\chi = 12 - \chi$$
$$4\chi = 36 - 3\chi,$$
$$7\chi = 36, \text{ καὶ } \chi = 5\tfrac{1}{7}$$

Δηλαδὴ 5 ὥραις καὶ λεπτοῖς πρώτοις $8\frac{4}{7}$. Ὑπελείποντο ἄρα μέχρι τέλους τῆς ἡμέρας ὧραι $6\frac{6}{7}$, δηλ. 6 ὧραι καὶ λεπτὰ πρῶτα $51\frac{3}{7}$.

ΙΒ'.

Εἰπέ μοι πῶν καρύων ἕνεκεν πληγῇσι πιέζῃ
Ὦ Μῆτερ; τὰ δὲ πάντα καλαὶ διεμοιρήσαντο
Παρθένοι· ἡ γὰρ ἐμεῖο Μελίσσιον ἕβδομα δοιὰ,
Ἡ δὲ δυωδέκατον Τιτάνη λάβεν· ἕκτον ἔχουσι
Καὶ τρίτον Ἀστυόχη φιλοπαίγμονες ἠδὲ Φίλιννα·
Εἴκοσι δ' ἁρπάξασα Θέτις λάβε, δώδεκα Θίσβη
Ἠνίδε καὶ δὲ γελᾷ Γλαύκη παλάμῃσιν ἔχουσα
Ἕνδεκα· τοῦτο δ' ἐμοὶ κάρυον περιλείπεται οἶον.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐνταῦθα εὑρεῖν δέον ἀριθμὸν χ, οὗτινος τὸ $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, σὺν 20, 12, 11, 1, τῷ αἰτουμένῳ ἴσον ἂν εἴη ἀριθμῷ· ἤτοι.

$$\frac{2\chi}{7} + \frac{\chi}{12} + \frac{\chi}{6} + \frac{\chi}{3} + 44 = \chi$$

καὶ $\chi = 336$· καὶ γὰρ τὰ αὐτοῦ μέρη $96 + 28 + 56 + 112 + 44 = 336$.

ΙΓ'.

Πῇ σοι μῆλα βέβηκεν ἐμὸν τέκος; Ἕκτα μὲν Ἰνὼ
Δοιά, καὶ ὀγδοάτην μοῖραν ἔχει Σεμέλη·
Αὐτονόη δὲ τέταρτον ἀφήρπασεν· αὐτὰρ Ἀγαυὴ
Πέμπτον ἐμῶν κόλπων ᾤχετ' ἀπαινυμένη·
Σοὶ δ' αὐτῇ δέκα μῆλα φυλάσσεται· αὐτὰρ ἔγωγε,
Ναὶ μὰ φίλην Κύπριν, ἓν τόδε μοῦνον ἔχω.

ΛΥΣΙΣ.

Εὑρεῖν ἀριθμὸν x, οὗτινος τὸ $\frac{1}{3}$ ἤτοι τὰ $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ $+ 11$ τῷ αἰτουμένῳ ἀριθμῷ ἴσον ἐστίν· ἔστω δὴ

$$x = \frac{x}{3} + \frac{x}{8} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 11$$

$$x = 120\text{·}$$

Ἐπεὶ $40 + 15 + 30 + 24 = 109 + 11 = 120$.

ΙΔ'.

Δρεψαμένη ποτὲ μῆλα φίλαις διεδάσσατο Μυρτώ,
Χρυσίδι μὲν μήλων πέμπτον πόρε, τέτρατον Ἠροῖ,
Ἐννεακαιδέκατον Ψαμάθῃ, δέκατον Κλεοπάτρῃ·
Αὐτὰρ εεικοστὸν δωρήσατο Παρθενοπείῃ,
Δώδεκα δ' Εὐάδνῃ μοῦνον πόρεν· αὐτὰρ ἐς αὐτὴν
Ἤλυθον ἐκ πάντων ἑκατὸν καὶ εἴκοσι μῆλα.

ΛΥΣΙΣ.

$$x = \frac{x}{5} + \frac{x}{4} + \frac{x}{19} + \frac{x}{10} + \frac{x}{20} + 132$$

καὶ $x = 380$· καὶ γὰρ $76 + 95 + 20 + 38 + 19 = 248 + 132 = 380$· καὶ αὖθις $380 - 248 = 132$.

ΙΕ'.

Ἀντομέναις ποτὲ μῆλα φίλαις διεμοιρήσαντο
Ἰνὼ καὶ Σεμέλη δώδεκα παρθενικαῖς.

Καὶ ταῖς μὲν Σεμέλη πόρεν ἄρτια· ταῖς δὲ περισσὰ
Δῶκε κασιγνήτη· μῆλα δ' ἔχεν πλέονα.
Ἡ μὲν γὰρ τρισσῇσι τρί' ἕβδομα δῶκεν ἑταίραις,
Ταῖς δὲ δύω πάντων πέμπτον ἔδωκε λάχος·
Ἕνδεκα δ' Ἀστυνόμη μιν ἀφείλατο, καὶ οἱ ἔλειπεν
Μοῦνα κασιγνήταις μῆλα δύω φερέμεν.
Ἡ δ' ἑτέρη πισύρεσσι πόρεν δύο τέτρατα μήλων,
Πέμπτῃ δ' ἑκταίην μοῖραν ἔδωκεν ἔχειν·
Τέσσαρα δ' Εὐρυχόρη δῶρον πόρε· τέτρασι δ' ἄλλοις
Μήλοισιν Σεμέλη μίμνεν ἀγαλλομένη.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπεὶ μὲν ἡ Ἰνὼ ἔσχε μῆλα περιττὰ, ἡ δὲ Σεμέλη ἄρτια· ἔσται τὸ μὲν τῆς Ἰνοῦς μέρος $= 2x + 1$, τὸ δὲ τῆς Σεμέλης $= 2y$. Εἶχε δ' ἐκείνη ἀριθμὸν μείζονα μήλων ἐκ συνθήκης, ἄρα ἔσται·

Α'. $2x + 1 > 2y$.

Ζητείσθω ἤδη ἐν πρώτοις x, ἔσται ἐκ τῶν ὑποτεθέντων·

Β'. $\frac{2x+1}{5} + \frac{1}{7}(2x+1) + 11 + 2 = 2x + 1$

$$44x + 477 = 70x + 35$$

$$477 - 35 = 70x - 44x$$

$$442 = 26x$$

$$\frac{442}{26} = x = 17$$

Ἄρα $2x + 1 = 35$· Ὃ ἦν τὸ α'. Ζητείσθω αὖθις y

Γ'. $\frac{1}{2} \times 2y + \frac{1}{4} \times 2y + 4 + 4 = 2y$

$$16y + 96 = 24y$$

$$96 = 8y, \text{ καὶ } y = \frac{96}{8} = 12$$

Ἄρα $2y = 24$. Ὃ ἦν τὸ β'. Ταυτὸ δ' ἐκκύψει, κἂν διὰ τὸ ἀπονώτερον τεθῇ ἐπὶ τῆς Γ'. ἐξισώσεως $y = 3\nu$. Ἔσται γὰρ τηνικαῦτα

$$3\nu + \nu + 8 = 6\nu$$
$$8 = 2\nu, \text{ καὶ } \nu = 4$$

ἄρα $y = 3\nu = 3 \times 4 = 12$.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\text{Α'}.\ 2 \times 17 + 1 > 2 \times 12$$
$$\text{Β'}.\ 7 + 15 + 13 = 35$$
$$\text{Γ'}.\ 12 + 4 + 8 = 24$$

Ἔστι δὲ $35 - 22 = 13$, καὶ $12 - 8 = 4$.

Ἡ καρύη πολλοῖσιν ἐβεβρίθει καρύοισιν·
Νῦν δέ τίς ἐξαπίνης μιν ἀπέθρισεν; ἀλλὰ τί Φησίν;
Ἐκ μὲν ἐμεῦ καρύων πέμπτον λάβε Παρθενόπεια·
Ὀγδόατον δὲ Φίλιννα Φέρει λάχος, ἡ δ' Ἀγανίππη
Τέτρατον· ἑβδομάτῳ δ' ἐπιτέρπεται Ὠρείθυια·
Ἕκτην δ' Εὐρυνόμη καρύων ἐδρέψατο μοῖραν·
Τρισσαὶ δ' ἐξ ἑκατὸν Χάριτες διεμοιρήσαντο·
Ἐννάκι δ' ἐννέα Μοῦσαι ἐμεῦ λάβον· ἑπτὰ δὲ λοιπὰ
Λήεις ἀκρεμόνεσσιν ἐΦήμενα τηλοτέροισιν.

ΛΥΣΙΣ.

Εὑρεῖν δέον ἀριθμὸν χ, οὗτινος τὸ $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{6}$, σὺν τοῖς $106 + 81 + 7$, ἴσα εἴησαν τῷ αἰτουμένῳ ἀριθμῷ. Διὸ καὶ ἔσται·

$$\chi\left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{6}\right) + 194 = \chi$$

Ἄρα $\chi = 1680$.

$$\text{Ἐπεὶ } 336 + 210 + 420 + 240 + 280 = 1486$$
$$\text{Καὶ } 1486 + 194 = 1680\cdot$$

ΙΖ'.

Ἑπτάλοφον ποτὶ ἄστυ Γαδειρόθεν, ἕκτον ὁδοῖο
Βαίτιος εὐμύκους ἄχρις ἐς ἠϊόνας·
Κεῖθεν δ' αὖ πέμπτον Πυλάδου μετὰ Φώκιον οὖδας,
Ταύρη χθών, βοέης οὔνομ' ἀπ' εὐετίης·
Πυρήνην δέ τοι ἔνθεν ἐπ' ὀρθόκραιρον ἰόντι
Ὀγδόον· ἡ δὲ μιῆς δωδέκατον δεκάδος·
Πυρήνης δὲ μεσηγὺ καὶ Ἄλπιος ὑψικαρήνου
Τέτρατον· Αὐσονίης αἶψα δυωδέκατον
Ἀρχομένης ἤλεκτρα Φαείνεται Ἠριδανοῖο·
Ὦ μάκαρ, ὃς δισσὰς ἤνυσα χιλιάδας,
Πρὸς δ' ἔτι πέντ' ἐπὶ ταῖς ἑκατοντάδας ἔνθεν ἐλαύνων.
Ἡ γὰρ Ταρπαίη μέμβλετ' ἀνακτορίη.

ΛΥΣΙΣ.

$$\chi\left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{12}\right) + 2500 = \chi.$$

Ἄρα $\chi = 15000$ ἀριθμῷ τῶν μεταξὺ Γαδείρων καὶ τῆς Ἑπταλόφου ἀριθμουμένων σταδίων. Καὶ γὰρ $2500 + 3000 + 1875 + 125 + 3750 + 1250 = 12500 + 2500 = 15000$.

ΙΗ'.

Εὐβλεφάροιο Δίκης ἱερὰ κρήδεμνα μιήνας,
Ὄφρα σε, πανδαμάτωρ χρυσέ, βλέποιμι τόπον,
Οὐδὲν ἔχω, πίσυρας γὰρ ἀπ' αὐκ ἀγαθοῖσι ταλάντων
Οἰωνοῖσι, μάτην δῶκα Φίλοις δεκάδας.
Ἥμισυ δ' αὖ, τρίτατον τε καὶ ὄγδοον, ὦ πολύμορΦοι,
Ἀνθρώπων κῆρες, ἐχθρὸν ἔχοντα βλέπω.

ΛΥΣΙΣ.

$$x\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{8}\right)+40=x=960.$$

Ἤτοι, $480+320+120=920+40=960.$

ΙΘʹ.

Πέμπτον μοι κλήρου, παῖ, λάμβανε· δωδέκατον δὲ
Δέξο, δάμαρ· πίσυρες δ' υἱέες οἰχομένου
Παιδὸς, ἀδελφειοί τε δύω, καὶ ἀγκλαίουσα μῆτερ,
Ἐνδεκάτην κλήρου μοῖραν ἕκαστος ἔχε.
Αὐτὰρ ἀνεψιαδοῖ δύο καὶ δέκα δέχθε τάλαντα·
Εὔβουλος δ' ἐχέτω πέντε τάλαντα φίλος.
Πιστοτάτοις δμώεσσιν ἐλευθερίην καὶ ἄποινα,
Μισθὸν ὑπηρεσίης, τοῖσδε δίδωμι τάδε·
Ὧδὶ λαμβανέτωσαν· Ὀνήσιμος εἴκοσι πέντε
Μνᾶς ἐχέτω· Δάος δ' εἴκοσι μνᾶς ἐχέτω·
Πεντήκοντα Σύρος, Συνέτη δέκα, Τίβιος ὀκτώ·
Ἑπτὰ δὲ μνᾶς Συνέτῳ παιδὶ δίδωμι Σύρου·
Ἐκ δὲ τριηκόντων κοσμήσατε σῆμα ταλάντων·
Ῥέζετε δ' Οὐδαίῳ Ζανὶ θυηπολίην·
Δισσῶν ἔς τε πυρὴν, καὶ ἄλφιτα, καὶ τελαμῶνας·
Εἰκαίην δοιῶν σῶμα χάριν λαβέτω.

ΛΥΣΙΣ.

$$x\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{7}{11}\right)+53=x=660.$$

Τουτέστι $132+55+420=607+12+5+30+2+2=51$· Εἰσὶ δὲ καὶ αἱ 120 μναῖ, ἴσαι δυσὶ ταλάντοις· ἔσται ἄρα $51+2=53$. Ἔνθεν τοι $607+53=660$.

Κʹ.

Τύμβος ἐγὼ, κεύθω δὲ πολύστονα τέκνα Φιλίννης,

Τοῖον μαψιτόκων καρπὸν ἔχων λαγόνων·
Πέμπτον ἐν ἠιθέοις, τρίτατον δ' ἐνὶ παρθενικῇσι.
Τρεῖς δ' ἐμοὶ ἀρτιγάμους δῶκε Φίλιννα κόρας·
Λοιποὶ δ' ἠελίοιο πανάμμοροι ἠδὲ καὶ αὐδῆς
Τέσσαρες ἐκ λαγόνων εἰς Ἀχέροντα πέσον.

ΛΥΣΙΣ.

$$x\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}\right)+7=x=15\cdot$$

Ἄρα, $5+3=8+7=15.$

ΚΑʹ.

Οὗτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος· ἃ μέγα θαῦμα·
Καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει·
Ἕκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην·
Δωδεκάτην δ' ἐπιθεὶς, μῆλα πόρεν χλοάειν·
Τῇ δ' ἄρ' ἐφ' ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
Ἐκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ' ἐπένευσεν ἔτει·
Αἲ, αἲ τηλύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρὸς
Μέτρον τῷ κρυερὸς Μοῖρ' ὄφελεν βιότου.
Πένθος δ' αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς,
Τῆδε ποσοῦ σοφίῃ τέρμ' ἐπέρησε βίου.

ΛΥΣΙΣ.

$$x\left(\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{7}\right)+5+\tfrac{1}{2}x+4=x$$

$$84x=75x+756,\ \text{καὶ}\ x=\tfrac{756}{9}=84$$

ΚΒʹ.

Παντὸς ὅσον βεβίωκε χρόνου παῖς μὲν τὸ τέταρτον
Δημοχάρης βεβίωκε· νεηνίσκος δὲ τὸ πέμπτον·
Τὸ τρίτον εἰς ἄνδρας· πολιὸν δ' ὅτ' ἀφίκετο γῆρας,
Ἔζησεν λοιπὰ τρεῖς καὶ δέκα γήραος οὐδῷ.

ΛΥΣΙΣ.

$$x\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{3}\right)+13=x=60.$$

$$\text{Ἄρα } 15+12+20=47+13=60.$$

ΚΓ'.

Οἶον ἀδελφειός μ' ἐβιήσατο, πέντε τάλαντα
Οὐχ ὁσίῃ μοίρῃ πατρικὰ δασσάμενος·
Ἑπτὰ κασιγνήτοιο τόδ' ἑνδεκάτων πολύδακρις
Πέμπτον ἔχω μοίρης. Ζεῦ βαθὺν ὕπνον ἔχεις.

ΛΥΣΙΣ.

$$\text{Α'.}\quad x+y=5$$

$$\text{Β'.}\quad \tfrac{1}{5}\times\tfrac{7}{11}x=y$$

$$\text{Ἄρα Γ'.}\quad \tfrac{7}{55}x=y$$

καὶ διὰ τῆς ἀνθυποκαταστάσεως τῆς Γ'. ἐπὶ τὴν Α'. ἔσται

$$x+\tfrac{7}{55}x=5$$

$$55x+7x=275$$

$$62x=275,\ \text{καὶ}\ x=4\tfrac{27}{62}$$

Τουτέστι 4 ταλάντοις, μναῖς 26, καὶ δραχμαῖς $12\frac{8}{62}$. Ἄρα $y=5-4\frac{27}{62}=4\frac{62}{62}-4\frac{27}{62}=\frac{35}{62}$ τῷ τοῦ ἀδικηθέντος μέρει, ἤτοι 33 μναῖς καὶ δραχμαῖς $87\frac{6}{62}$.

ΚΔ'.

Εἶπε κυβερνητῆρι, πλατὺν πόρον Ἀδριακοῖο
Τέμνων νηΐ· Ἁλὸς πόσα λείπεται εἰσέτι μέτρα;
Τὸν δ' ἀπαμείβετο· Ναῦτα, μέσον Κριοῖο μετώπου
Κρηταίου, Σικελῆς τε Πελωρίδος ἑξάκι μέτρα
Χίλια, δοιῶν δ' αὖτε παροιχομένοιο δρόμοιο
Πέμπτων διπλάσιον Σικελὴν ἐπὶ πορθμίδα λεῖπε.

ΛΥΣΙΣ.

$$2\times\tfrac{2}{5}x=6000-x$$

$$4x=30000-5x$$

$$9x=30000\cdot\ \text{Ἄρα}\ x=3333\tfrac{1}{3}.$$

Ὑπελείπετο οὖν ἔτι στάδια ναυτικὰ $6000-x$ $=5999\frac{3}{3}-3333\frac{1}{3}=2666\frac{2}{3}$.

ΚΕ'.

Τῶν πισύρων κρουνῶν ὁ μὲν ἤματι πλῆσεν ἅπασαν
Δεξαμενὴν, δυσὶ δ' οὗτος, ὁ δ' ἐν τρισὶν ἤμασιν οὗτος,
Τέτρατος ἐν τετόρεσσι· πόσῳ πλήσουσιν ἅπαντες;

ΛΥΣΙΣ.

Κείσθω τὸ τῆς δεξαμενῆς χωρητικὸν $=\alpha$, ὁ δὲ χρόνος καθ' ὃν πληροῦται $=x$· ἔσται $1:x=\alpha:\alpha x$. Κἀντεῦθεν ὁ πρῶτος κρουνὸς ἐν τῷ χρόνῳ x τὴν ποσότητα αx δίδωσιν, ὁ δεύτερος $\frac{1}{2}\alpha x$, ὁ τρίτος $\frac{1}{3}\alpha x$, καὶ ὁ τέταρτος $\frac{1}{4}\alpha x$. Ἔσται ἄρα·

$$\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right)\alpha x=\alpha$$

$$\frac{24+12+8+6}{24}x=\frac{\alpha}{\alpha}=1$$

$$x=\tfrac{24}{50}=\tfrac{12}{25}$$

Δηλαδὴ ἐν ὥραις 5 καὶ λεπτοῖς πρώτοις $45\frac{15}{25}$.

ΚΣΤ'.

Οἰγέ με, καὶ πισύρεσσιν ἐνιπλήσω παρεοῦσαν
Δεξαμενὴν ὥραις, κρουνὸς ἅλις προρέων·
Δεξιτερὸς δ' ἄρ' ἐμεῖο τόσαις ἀπολείπεται ὥραις
Ὄφρα μιν ἐμπλήσει· δὶς δὲ τόσαις ὁ τρίτος·
Εἰ δ' ἄμφω σὺν ἐμοὶ προχέειν ῥόον ἐς μίαν οἴγοις
Ἐν ὀλίγῃ μοίρῃ πλήσομεν ἠματίῃ.

ΛΥΣΙΣ.

$$\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}\right)\alpha\chi = \alpha :$$

$$\frac{32+32+16}{128}\chi = 1$$

$$\chi = \tfrac{128}{80} = 1\tfrac{3}{5}$$

Δηλαδὴ 5 ὥραις καὶ λεπτοῖς πρώτοις $7\frac{1}{5}$ τῷ χρόνῳ, καθ' ὃν οἱ τρεῖς κρουνοὶ ὁμοῦ ῥέοντες τὴν δεξαμενὴν ἐμπλήσουσι.

KZ'.

Κύκλωψ ὢ Πολύφημος ὁ χάλκεος· οἷα δ' ἐπ' αὐτῷ
Τεῦξέ τις ὀφθαλμὸν, καὶ στόμα, καὶ παλάμην,
Κρουνοῖς συζεύξας, στάζοντι δὲ πάμπαν ἔοικεν,
Ἠδ' ἔτι καὶ βλύζων φαίνετ' ἀπὸ στόματος.
Κρουνῶν δ' οὔτις ἄτακτος· ὁ μὲν παλάμης, τρισὶ μούνοις
Ἤμασιν ἐμπλήσει δεξαμενὴν προρέων·
Ἠμάτιος γλήνης· στόμα δ' ἤματος ἐν δύω πέμπτοις·
Τίς κ' ἐνέποι τρισσοῖς ἴσα θέοντα χρόνον;

ΛΥΣΙΣ.

Τιθεμένου τοῦ τῆς δεξαμενῆς χωρητικοῦ $=\delta$, καὶ τοῦ χρόνου καθ' ὃν πληροῦται $=\chi$· ὁ μὲν πρῶτος δώσει $\frac{\chi}{3}\delta$, ὁ δὲ δεύτερος $\chi\delta$, ὅ, τε τρίτος $\frac{5\chi}{2}\delta$ (ἔστι καὶ γὰρ $\frac{2}{5}:\chi=\delta:\frac{5\chi}{2}\delta$). Ἔσται τοίνυν·

$$\frac{\chi}{3}\delta+\chi\delta+\tfrac{5}{2}\chi\delta=\delta$$

$$(2+6+15)\chi = 6$$

$$\chi = \tfrac{6}{23}.$$

Τουτέστιν ὁ χρόνος, καθ' ὃν οἱ τρεῖς κρουνοὶ ἐξίσου ῥέοντες τὴν δεξαμενὴν πληρώσουσιν ἔσται $=3$ ὥραις, καὶ λεπτοῖς πρώτοις $7\frac{12}{23}$.

KH'.

Ὡς ἀγαθὸν κρητῆρι θοοὶ κερόωσι ῥέεθρον
Οἵδε δύω ποταμοὶ, καὶ Βρομίοιο χάρις·
Ἶσος δ' οὐ πάντεσσι ῥόου δρόμος, ἀλλά μιν οἶος
Νεῖλος μὲν προρέων ἠμάτιος κορέσει,
Τόσσον ὕδωρ μαζῶν ἀπερεύγεται· ἐκ δ' ἄρα Βάκχου
Θύρσος ἐνὶ τρισσοῖς ἤμασιν οἶνον ἱείς·
Σὸν δὲ κέρας, Ἀχελῶε δύ' ἤμασι. νῦν δ' ἅμα πάντες
Ῥεῖτε, καὶ εἰν ὥραις πλήσετέ μιν ὀλίγαις.

ΛΥΣΙΣ.

$$\chi\delta+\frac{\chi}{3}\delta+\frac{\chi}{2}\delta=\delta$$

$$(6+2+3)\chi = 6$$

$$\chi = \tfrac{6}{11}$$

Δηλαδὴ 6 ὥραις, καὶ λεπτοῖς πρώτοις $32\frac{8}{11}$·

KΘ'.

Ὦ γύναι ὡς πενίης ἐπελήσαο· ἡ δ' ἐπίκειται
Αἰὲν ἀναγκαίη κέντρα φέρουσα πόνων.
Μνᾶν ἐρίων νήθεσκες ἐν ἤματι· πρεσβυτέρη δὲ
Θυγατέρων, καὶ μνᾶν καὶ τρίτον εἷλκε κρόκης·
Ὁπλοτέρη δὲ μιῆς φέρεν ἥμισυ· νῦν δ' ἅμα πάσαις
Δόρπον ἐφοπλίζει μνᾶν ἐρύσας ὁ κανών.

ΛΥΣΙΣ.

$$\left(1+\tfrac{4}{3}+\tfrac{1}{2}\right)\chi = 1$$

$$\frac{6+8+3}{6}\chi = 1. \quad \text{ἄρα } \chi\ \tfrac{6}{17}.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\tfrac{6}{17}+\tfrac{8}{17}+\tfrac{3}{17}=\tfrac{17}{17}=1.$$

Λ'.

Οἵδε λοετροχόοι τρεῖς ἕσταμεν ἐνθάδ' Ἔρωτες,

Καλιῤῥόου πέμποντες ἐπ' Εὐρίποιο λοετρά·
Δεξιτερὸς μὲν ἔγωγε, τανυπτερύγων ἀπὸ ταρσῶν
Ἤματος ἑκταίῃ μοίρῃ ἔνι τόνδε κορέσσω·
Λαιὸς δ' αὖ πισύρεσσιν ἀπ' ἀμφιφορῆος ἐν ὥραις·
Ἐκ δ' ὁ μέσος τόξοιο καθ' ἤματος αὐτὸ τὸ μέσσον.
Φράζεο δ' ὡς ὀλίγῃ κεν ἐνιπλήσαιμεν ἐν ὥρῃ
Ἐκ πτερύγων, τόξου τε, καὶ ἀμφιφορῆος ἰέντες.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπεὶ μὲν δὴ $\frac{1}{2} : \chi = \delta : 6\chi$, καὶ $\frac{1}{4} : \chi = \delta : 3\chi$ κτλ.

ἔσται $6\chi \times \delta + 3\chi \times \delta + 2\chi \times \delta = \delta$

$$(6+3+2)\chi = 1$$

$$\chi = \frac{1}{11}$$

Δηλαδὴ 1 ὥρᾳ, καὶ λεπτοῖς πρώτοις $5\frac{5}{11}$.

ΛΑ'.

Πλινθουργοί, μάλα τοῦτον ἐπείγομαι οἶκον ἐγεῖραι·
Ἦμαρ δ' ἀννέφελον τόδε σήμερον, οὐδ' ἔτι πολλῶν
Χρηΐζω, πᾶσαν δὲ τριηκοσίῃσι δέουσαν
Πλίνθον ἔχω· σὺ δὲ μοῦνος ἐν ἤματι τόσσον ἔτευχες·
Παῖς δέ τοι ἐκ καμάτοιο διηκοσίαις ἀπέληγεν·
Γαμβρὸς δ' αὖ τόσσῃσι καὶ εἰσέτι πεντήκοντα·
Τρισσαῖς συζυγίαις πόσσαις τόδε τεύχεται ὥραις;

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπειδὴ ὁ μὲν πατὴρ ἐν μιᾷ ἡμέρᾳ 300 πλίνθους ἠργάζετο, ὁ δ' υἱὸς 100, καὶ ὁ γαμβρὸς 50, οἱ τρεῖς ὁμοῦ ἐν μιᾷ ἡμέρᾳ ποιήσουσι 450· Ἔσται τοίνυν $450 : 12$ (ἤτοι μίαν ἡμέραν) $= 300 : \chi$, ἄρα $\chi = 8$ ὥραις, ἤτοι $\frac{2}{3}$ ἡμέρας.

ΛΒ'.

Δάκρυ παρὰ στάξαντες ἀμείβετε οἵδε γὰρ ἡμεῖς,
Οὓς τόδε δῶμα πεσὸν ὤλεσεν Ἀντιόχου
Δαιτυμόνας, οἷσίν τε θεὸς δαιτός τε τάφου τε
Τόνδ' ἔπορεν χῶρον· τέσσαρες ἐκ Τεγέης
Κείμεθα. Μεσσήνης δὲ δυώδεκα· ἐκ δέ τε πέντε
Ἄργεος· ἐκ Σπάρτης δ' ἥμισυ δαιτυμόνων·
Αὐτὸς δ' Ἀντίοχος· πέμπτου δέ τε πέμπτον ὄλοντο
Κεκροπίδαι· σὺ δ' Ὕλαν κλαῖε, Κόρινθε, μόνον.

ΛΥΣΙΣ.

$$\tfrac{1}{2}\chi + \tfrac{1}{25}\chi + 23 = \chi$$

$$(25+2)\chi + 23 \times 50 = 50\chi$$

$23 \times 50 = 23\chi$, καὶ $\chi = 50$.

ΛΓ'.

Νικαρέτη παίζουσα σὺν ἡλικιώτισι πέντε,
Ὧν εἶχεν καρύων δῶκε Κλειτοῖ τὸ τρίτον,
Καὶ Σαπφοῖ τὸ τέταρτον, Ἀριστοδίκῃ δὲ τὸ πέμπτον,
Εἰκοστὸν Θεανοῖ καὶ πάλι δωδέκατον,
Εἰκοστὸν τέτρατον δὲ Φιλιννίδι, καὶ περιῆν δὲ
Πεντήκοντ' αὐτῇ Νικαρέτῃ κάρυα.

ΛΥΣΙΣ.

$$\chi = \frac{\chi}{3} + \frac{\chi}{4} + \frac{\chi}{5} + \frac{\chi}{20} + \frac{\chi}{12} + \frac{\chi}{24} + 50$$

Ἄρα $\chi = 1200$· καὶ γὰρ $400 + 300 + 240 + 60 + 100 + 50 = 1150 + 50 = 1200$.

ΛΔ'.

Γυμνονικῶν Διόδωρε μέγα κλέος, εἰπέ μοι ὥρην·

Ἡνίκ' ἀπ' ἀντολίης Πόλον ἥλατο χρύσεα κῆλα
Ἠελίου; Τοῦ δ' ἤτοι ὅσον τρία πέμπτα δρόμοιο
Τετράκι τόσσον· ἔπειτα μεθ' Ἑσπερίην ἅλα λείπει.

ΛΥΣΙΣ.

$$4 \times \tfrac{3}{5}\chi = 12 - \chi$$
$$12\chi = 60 - 5\chi$$
$$17\chi = 60, \text{ καὶ } \chi = 3\tfrac{9}{17}.$$

ταῖς παρελθούσαις ὥραις, τουτέστι 3 ὥραις καὶ λεπ. τοῖς πρώτοις $31\frac{13}{17}$. Ὑπελείποντο ἄρα μέχρι τῆς τοῦ Ἡλίου δύσεως $12 - 3\frac{9}{17}$, ἤτοι $11\frac{17}{17} - 3\frac{9}{17} = 8\frac{8}{17}$, δηλαδὴ ὧραι 8 καὶ λεπτὰ πρῶτα $28\frac{4}{17}$.

ΛΕ'.

Ζεῦ μάκαρ, ἦ ῥά τοι ἦ ῥα τάδ' εὔαδεν, οἷα γυναῖκες
Θεσσαλικαὶ παίζουσι; μαραίνεται ὄμμα Σελήνης
Ἐκ μερόπων· ἴδον αὐτός. ἔην δ' ἔτι νυκτὸς ἐπ' ἠῶ
Δὶς τόσον, ὅσσα δύ' ἕπτα καὶ ἕβδομον οἰχομένοιο.

ΛΥΣΙΣ.

$$2(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7})\chi = 12 - \chi$$
$$2(7 + 3)\chi = 21 . 12 - 21\chi$$
$$41\chi = 252, \text{ καὶ } \chi = 6\tfrac{6}{41}$$

ἤτοι 6 ὥραις καὶ λεπτὰ πρῶτα $8\frac{32}{41}$ ταῖς τῆς νυκτὸς δηλαδὴ, καθ' ἃς ἡ τῆς Σελήνης ἐγένετο Ἔκλειψις. Ὑπελείποντο ἄρα μέχρι τῆς τοῦ Ἡλίου ἀνατολῆς $12 - \chi = 11\frac{41}{41} - 6\frac{6}{41} = 5\frac{35}{41}$· ἤτοι 5 ὧραι καὶ λεπτὰ πρῶτα $51\frac{9}{41}$.

ΛϚ'.

Ἀπλανέων ἄστρων παρόδους τ' ἐπὶ τοῖσιν ἀλητῶν

Εἰπέ μοι, ἠνίκ' ἐμοὶ χθιζὸν ἔτικτε δάμαρ·
Ἦμαρ ἔην ὅσσον τε δὶς ἕβδομον ἀντολίηθεν,
Ἑξάκι τόσσον ἔην Ἑσπερίην ἐς ἅλα.

ΛΥΣΙΣ.

$$6 \times \tfrac{2}{7}\chi = 12 - \chi$$
$$12\chi = 84 - 7\chi$$
$$19\chi = 84, \text{ καὶ } \chi = 4\tfrac{8}{19}$$

τῷ τῆς κυήσεως χρόνῳ, δηλονότι 4 ὥραις καὶ λεπτοῖς πρώτοις $25\frac{5}{19}$. Ὑπελείποντο οὖν ἄχρι τῆς τοῦ Ἡλίου δύσεως ὧραι $12 - \chi = 11\frac{19}{19} - 4\frac{8}{19} = 7\frac{11}{19}$, ἤτοι 7 ὧραι καὶ λεπτὰ πρῶτα $34\frac{14}{19}$.

ΛΖ'.

Ἔγρεσθ', Ἠριγένεια παρέδραμε· πέμπτον, ἔριθοι,
Λειπομένης τρισσῶν οἴχεται ὀγδοάτων.

ΛΥΣΙΣ.

$$\chi = \tfrac{1}{5} \times \tfrac{3}{8}(12 - \chi)$$
$$\chi = \tfrac{1}{5}\left(\frac{36 - 3\chi}{8}\right)$$
$$\chi = \frac{36 - 3\chi}{40}$$
$$40\chi = 36 - 3\chi$$
$$43\chi = 36, \text{ ἄρα } \chi = \tfrac{36}{43}.$$

τουτέστι $50\frac{10}{43}$ λεπτοῖς πρώτοις, τοῖς παρεληλυθόσι μιᾶς ὥρας μορίοις. Ὑπελείποντο ἄρα $11\frac{7}{43}$, ἤτοι 11 ὧραι καὶ λεπτὰ πρῶτα $9\frac{33}{43}$.

ΛΗ'.

Σύρτιος ἐν τενάγεσσι πατὴρ θάνεν, ἐκ δ' ἄρ' ἐκείνης
Πέντε τάλαντα φέρων ἤλυθε ναυτιλίης

Οὗτος ἀδελφειῶν προφερέστατος, ἧ γὰρ ἔμοιγε
Δῶκεν ἑῆς μοίρης διπλάσιον τριτάτων
Δοιῶν, ἡμετέρης δὲ δύ' ὄγδοα μητέρι μοίρης
Ὤπασεν, οὐδὲ δίκης ἤμβροτεν ἀθανάτων.

ΛΥΣΙΣ.

$$2(\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4})\chi = 5$$
$$2(12+4)\chi = 16 \times 5$$
$$(224+8)\chi = 80$$
$$\chi = \tfrac{80}{32} = 2\tfrac{1}{2}.$$

Ἔσχε τοίνυν ὁ μὲν νεώτερος ἀδελφὸς τάλαντα $2\frac{1}{2}$, ὁ δὲ πρεσβύτερος $\frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$, καὶ ἡ μήτηρ $\frac{5}{8}$ ἑνὸς ταλάντου. Ἐπεὶ δὲ ἓν τάλαντον $=$ 60 μναῖς, μία δὲ μνᾶ $=$ 100 δραχμαῖς· ἔσται τοῦ μὲν πρεσβυτέρου τὸ μέρος, τάλαντον ἕν, 52 μναῖ σὺν 50 δραχμαῖς· τὸ τοῦ νεωτέρου, τάλαντα δύο καὶ 30 μναῖ· τὸ δὲ τῆς μητρός, 37 μναῖ σὺν 50 δραχμαῖς.

ΛΘ'.

Ἁ βάσις ἂν πατέω σὺν ἐμοὶ βάρος ἁλίκον ἕλκει
Χ' ἁ κρηπὶς σὺν ἐμοὶ τόσσα τάλαντα φέρει·
Ἀλλ' ἐγὼ οἶος ἅπαξ τὰν σὰν βάσιν ἐς δὶς ἀνέλκω
Κἠγὼ μοῦνος ἐὼν σὰν βάσιν ἐς τρὶς ἄγω.

ΛΥΣΙΣ.

Α'. $\chi + y = 100.$

Β'. $\begin{cases} 2\chi - 3y = 100 \\ \text{ἢ } \frac{\chi}{2} + 3y = 100. \end{cases}$

Γ'. $5y = 100$, καὶ $y = 20.$

Δ'. $\chi = 100 - 20 = 80.$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

Α'. $\chi + y = 100$
$80 + 20 = 100$

Β'. $\begin{cases} 2\chi - 3y = 100 \\ 160 - 60 = 100 \\ \frac{\chi}{2} + 3y = 100 \\ \frac{80}{2} + 60 = 100 \end{cases}$

Ἔστι δὲ τὸ πρόβλημα τῶν ἀορίστων (§. 454).

Μ'.

Δίς μοι δέκα μνᾶς, καὶ τριπλοῦς σοῦ γίνομαι·
Κἀγὼ λαβὼν σοῦ τὰς ἴσας, σοῦ πεντάπλους.

ΛΥΣΙΣ.

Α'.

Α'. $\chi + 10 = 3(y - 10)$

Β'. $[5(\chi - 10) = y + 10]3$

Γ'. $15\chi - 150 = 3y + 30$

Δ'. $14\chi - 160 = 60$, (Α'.—Γ'.)
$14\chi = 160 + 60 = 220$
$\chi = 15\frac{5}{7}.$

Β'.

Α'. $5\chi + 50 = 15y - 150$

Β'. $5\chi - 50 = y + 10$

Γ'. $100 = 14y - 160$, (Α'.—Β'.)
$260 = 14y$, ἄρα $y = 18\frac{4}{7}.$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

Α'.

$$\chi + 10 = 3(y - 10)$$
$$\frac{220+140}{14} = \frac{780-420}{14}$$

Β′.

$$5x + 50 = 15y - 150$$

$$\frac{1100 + 700}{14} = \frac{3900 - 2100}{14}$$

ΜΑ′.

Δός μοι δύο μνᾶς, καὶ διπλοῦς σοῦ γίνομαι·
Κἀγὼ λαβὼν σοῦ τὰς ἴσας, σοῦ τετραπλοῦς.

ΛΥΣΙΣ.

Α′.

Α′. $x + 2 = 2(y - 2)$

Β′. $[4(x - 2) = y + 2]\,2$

Γ′. $8x - 16 = 2y + 4$

Δ′. $7x - 18 = 8$, (Α′. — Γ′.)

$7x = 26$. ἄρα $x = 3\frac{5}{7}$

Β′.

Α′. $4x + 8 = 8y - 16$

Β′. $4(x - 2) = y + 2$

Γ′. $16 = 7y - 18$, (Α′. — Β′.)

$34 = 7y$. ἄρα $y = 4\frac{6}{7}$.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

Α′.

$$x + 2 = 2(y - 2)$$

$$\frac{26 + 14}{7} = 2\left(\frac{34 - 14}{7}\right)$$

Β′.

$$4x + 8 = 8y - 16$$

$$\frac{104 + 56}{7} = \frac{272 - 112}{7}$$

ΜΒ′.

Ὅμηρος Ἡσιόδῳ ἐρωτήσαντι πόσον τὸ τῶν Ἑλλήνων πλῆθος κατὰ τῆς Ἰλίου στρατεῦσαν.

Ἑπτ᾽ ἔσσαν μαλεροῦ πυρὸς ἐσχάραι· ἐν δὲ ἑκάστῃ
Πεντήκοντ᾽ ὀβελοί, περὶ δὲ κρέα πεντήκοντα·
Τρὶς δὲ τριηκόσιοι περὶ ἓν κρέας ἦσαν Ἀχαιοί.

ΛΥΣΙΣ.

Διὰ μόνου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δὶς ἐπαναληφθέντος τὸ προβληθὲν διαλύεσθαι ἔχει· καὶ γὰρ $7 \times 50 = 350 \times 900 = 315000$ ἀριθμῷ τῶν στρατευσάντων Ἑλλήνων. Κεῖται δὲ τοὐπίγραμμα ἐν τῷ τοῦ Ὁμήρου καὶ Ἡσιόδου ἀγῶνι ἑλληνιστί, ἀλλ᾽ ἐσφαλμένως ἐκδοθέντι· ἡ γὰρ τοῦ πρώτου στίχου ἀρχή, οὕτως ἐκεῖσε ἐκτέθειται. Πεντήκοντ᾽ ἦσαν πυρὸς ἐσχάραι. Κἀντεῦθεν ὁ τὸν ἀγῶνα τύποις ἐκδοὺς εἰκότως σφαδάζει, ὡς δύσπιστον τὸν ἐντεῦθεν συλλεγόμενον τῶν στρατιωτῶν ἀριθμὸν λαμβάνων· οὕτω γὰρ τὸ πλῆθος ἐς 2250000 ἐξάγεται.

ΜΓ′.

Παλλὰς ἐγὼ χρυσῆ σφυρήλατος· αὐτὰρ ὁ χρυσὸς
Αἰζηῶν πέλεται δῶρον ἀοιδοπόλων·
Ἥμισυ μὲν χρυσοῖο Χαρίσιος, ὀγδοάτην δὲ
Θέσπις, καὶ δεκάτην μοῖραν ἔδωκε Σόλων,
Αὐτὰρ εἰκοστὴν Θεμίσων· τὰ δὲ λοιπὰ τάλαντα
Ἐννέα, καὶ τέχνη δῶρον Ἀριστοδίκου.

ΛΥΣΙΣ.

$$x = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{20}\right)x + 9\cdot$$

$x = 40$. Ἐπεὶ $20 + 5 + 4 + 2 = 31 + 9 = 40$.

ΜΔʹ.

Αὐγείην ἐρέεινε μέγα σθένος Ἀλκίδαο
Πληθὺν βουκολίων διζήμενος· Ὃς δ' ἀπάμειπτο·
Ἀμφὶ μὲν Ἀλφειοῖο ῥοὰς, Φίλος, ἥμισυ τῶνδε·
Μοίρῃ δ' ὀγδοάτῃ ὄχθον Κρόνου ἀμφινέμονται·
Δωδεκάτῃ δ' ἀπάνευθε Ταραξίπποιο παρ' οὖρον·
Ἀμφὶ δ' ἄρ' Ἤλιδα δῖαν ἐεικοστὴ νεμέθονται·
Αὐτὰρ ἐν Ἀρκαδίηφι τριηκοστὴν προλέλοιπα·
Λοιπὰς δ' αὖ λεύσσεις ἀγέλας τόδε πεντήκοντα.

ΛΥΣΙΣ.

$$\chi + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{30}\right)\chi + 50.$$

καὶ $\chi = 240$, Ἔστι γὰρ $120 + 30 + 20 + 12 + 8$
$= 190 + 50 = 240.$

ΜΕʹ.

Χάλκεός εἰμι λέων· κρουνοὶ δ' ἐμοὶ ὄμματα δοιὰ,
Καὶ στόμα, σὺν δὲ, θέναρ δεξιτεροῖο ποδός.
Πλήθει δὲ κρητῆρα δυ' ἤμασι δεξιὸν ὄμμα,
Καὶ λαιὸν τρισσοῖς, καὶ πισύρεσσι θέναρ·
Ἄρκιον ἐξ ὥραις πλῆσαι στόμα· νῦν δ' ἅμα πάντα,
Καὶ στόμα, καὶ γλῆναι, καὶ θέναρ, εἰπὲ πόσαις.

ΛΥΣΙΣ.

$$24y + 36\varphi + 48\chi + 6\psi = \mu(y + \varphi + \chi + \psi) = \mu\omega$$

$$144y = 6\mu\omega$$
$$144\varphi = 4\mu\omega$$
$$144\chi = 3\mu\omega$$
$$\underline{144\psi = 24\mu\omega}$$
$$144(y + \varphi + \chi + \psi) = 37\mu\omega.$$

ἄρα $144 = 37\mu$, καὶ $\mu = \frac{144}{37} = 3\frac{33}{37}$.

ΜϚʹ.

Ἄμφω μὲν ἡμεῖς εἴκοσι μνᾶς ἕλκομεν,
Ζῆθός τε χὠ ξύναιμος· ἢν δὲ μου λάβῃς
Τρίτον, τὸ τέτρατόν τε τοῦθ' Ἀμφίονος,
Ἕξ πάντ' ἀνευρὼν, μητρὸς εὑρήσεις σταθμόν.

ΛΥΣΙΣ.

Αʹ. $\chi + y = 20$

Βʹ. $\frac{\chi}{3} + \frac{y}{4} = 6$

$4\chi + 3y = 72 \quad (\alpha$

Γʹ. $3(\chi + y = 20) \quad$ Αʹ.

$3\chi + 3y = 60 \quad (\beta$

$\chi = 12, \quad (\beta - \alpha)$.

Ἄρα $y = 20 - 12 = 8$.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

Αʹ. $12 + 8 = 20$

Βʹ. $\frac{12}{3} + \frac{8}{4} = 6$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ.

ΠΕΡΙ

ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΤΩΝ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 455. Ἐξίσωσις Σύνθετός ἐστιν, ἐν ᾗ ἡ αὐτὴ ἀόριστος ποσότης πρὸς διάφορον ἐξῆρται δύναμιν.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 456. Ὁ τῆς ἐξισώσεως βαθμὸς ἀείποτε λαμβανέσθω ἐκ τοῦ πρώτου ὅρου, καθ' ὃν ἡ ἀόριστος πρὸς τὴν μεγίστην ἐξῆρται τῶν δυνάμεων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Αἱ Σύνθετοι ἐξισώσεις οὐδὲν ἄλλό εἰσιν, ὅτι μὴ γινόμενα ἐκκύπτοντα ἐκ τοῦ ὑπαλλήλου δυεῖν, ἢ τριῶν, ἢ τεσσάρων, κτλ. ἁπλῶν ἐξισώσεων πολλαπλασιασμοῦ. Ἔνθεντοι καὶ αἱ Σύνθετοι ἐξισώσεις ἔχουσι πρὸς τὰς Ἁπλᾶς, ὡς αἱ Δυνάμεις πρὸς τὰς Ῥίζας. Καὶ γὰρ δυνάμεως οἱασοῦν πρὸς ἐπίλυσιν προβαλλομένης, ἐφ' ᾧ αὕτη εὐχερῶς διαλυθείη, ταύτης ἐν πρώτοις τὰς ῥίζας ἀκριβῶς ἀνιχνευτέον· ὡσαύτως καὶ ἐξισώσεως τινος Συνθέτου προβαλλομένης, πρῶτον τὰς Ἁπλᾶς, ἐξ ὧν ἐκείνη συντέτακται, θεωρητέον τε καὶ ἐξιχνευτέον· αἵτινες δὴ ἁπλαῖ, παραγόντων οἱονεὶ εἰλήχασι τάξιν, καὶ κοινότερον Ῥίζαι ἐξισώσεως καλεῖσθαι ἠξίωνται (§. 413). Διενήνοχε δέτοι Δύναμις, ἐξισώσεως Συνθέτου· καθ' ὃ ἐν ἐκείνῃ μὲν αἱ ῥίζαι πᾶσαι εἰσὶν ὅμοιαι, ἐν ταύτῃ δὲ ἀνόμοιαι, ἢ ἐν μέρει, ἢ γοῦν καθόλου τυγχάνουσι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 457. Τὰς τῶν ἐξισώσεων Συνθέτους εἴθισται κοινότερον ἴσας τῷ μηδενὶ ὑποτιθέναι, διὰ γὰρ τῆς μεταθέσεως τῶν τοῦ δευτέρου μέλους ὅρων ἐπὶ τὸ ἀντίθετον ἤτοι τὸ πρῶτον, τὸ δεύτερον μέλος $=0$ ὑπολείπεται· οἷον $\chi^2+\chi=\alpha+\beta$, $\chi^2+\chi-\alpha-\beta=0$· $25+5=10+11$, $25+5-19-11=0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 458. Ἐξίσωσις Σύνθετος Δευτέρου μὲν Βαθμοῦ ἀκούει, ἐν ᾗ ἡ τῆς ἀορίστου ποσότητος δύναμις πρὸς τετράγωνον ἐξῆρται, οἷον $\chi^2=\alpha^2+\beta^2$· καλεῖται δὲ καὶ Τετραγωνική. Τρίτου δὲ Βαθμοῦ, ἐν ᾗ πρὸς κύβον ἡ ἀόριστος ὑψωθεῖσα τυγχάνει, οἷον $\chi^3=\alpha^3-\beta^3$· καλεῖται δὲ καὶ Κυβική.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐνταῦθα μόνον τὰς Δευτεροβαθμίους τῶν Ἐξισώσεων διαληψόμεθα, ὡς εἴρηται (§. 430. Σχ.). Ἐπεὶ ἡ τῶν πρὸς τρίτην, τετάρτην, κτλ. δύναμιν ὑψουμένων λύσις πρὸς τὴν Ὑπερέχουσαν ἀπεῖδεν Ἀνάλυσιν, ἧς σὺν Θεῷ ἰδιαιτέραν πραγματείαν τοῖς Φιλεπιστήμοσι παραπέμψαι οὐ κατοκνήσομεν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 459. Ἐξίσωσιν Σύνθετον Δευτέρου βαθμοῦ διατάξαι.

ΛΥΣΙΣ.

Τιθεμένου ἐν πρώτῳ χώρῳ τοῦ τῆς ἀορίστου ποσότητος τετραγώνου, καὶ δὴ ἐν θέσει (§. 257.)· εἰ γὰρ ἀποφατικὸν τύχοι, δέον τῇ μεταθέσει θετικὸν γενέσθαι (§. 221.)· ἅπαντες οἱ τὴν ἀόριστον συνέχοντες ὅροι ἐν τῷ αὐτῷ τῆς ἐξισώσεως μέλει ταχθήτωσαν, τῶν λοιπῶν, ὧν ἐκείνη ἄπεστιν, ἐν θατέρῳ μετατιθεμένων. Ἐὰν δ' ἔτι τὸ τῆς ἀορίστου τετράγωνον συνθέτῃ, ἢ παρονομαστῇ συνέζευκται, ἀπαλαττέσθω τούτων, ὡς κἀν τῇ ἁπλῇ ἐξισώσει ὑπεθέμεθα (§. 443.).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α) $\gamma + y^2 = \alpha - 3y^2$

$y^2 + 3y^2 = \alpha - \gamma$

$4y^2 = \alpha - \gamma$

$y^2 = \frac{\alpha - \gamma}{2}$

Β) $1 - 8\psi^2 = 3\pi$

$1 - 3\pi = 8\psi^2$

$\frac{1 - 3\pi}{8} = \psi^2$

Γ) $\pi + \frac{\rho^2}{\epsilon} = \rho^2 - \zeta$

$\frac{\rho^2}{\epsilon} - \rho^2 = -\pi - \zeta$

$\rho^2 - \epsilon\rho^2 = -\epsilon\pi - \epsilon\zeta$

$\epsilon\pi + \epsilon\zeta = \rho^2(\epsilon - 1)$

$\frac{\epsilon\pi + \epsilon\zeta}{\epsilon - 1} = \rho^2.$

Δ) $5\chi - \frac{\beta}{2\chi} + \frac{\chi}{\mu} = \frac{6\delta}{\chi}$

$10\chi^2 - \beta + \frac{2\chi^2}{\mu} = 12\delta$

$10\mu\chi^2 - \beta\mu + 2\chi^2 = 12\delta\mu$

$10\mu\chi^2 + 2\chi^2 = 12\delta\mu + \beta\mu$

$\chi^2(10\mu + 2) = 12\delta\mu + \beta\mu$

$\chi^2 = \frac{12\delta\mu + \beta\mu}{10\mu + 2}.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 460. Ἐπιστητέον, εἴγε ἡ τοῦ Δευτέρου Βαθμοῦ Σύνθετος Ἐξίσωσις τετραγώνου ἐντελοῦς, ἢ μὴ, περιεκτικὴ τυγχάνει.

ΛΥΣΙΣ.

Τῆς ἐξισώσεως κατὰ τοὺς ἀνωτέρω κανόνας διαταχθείσης (§. 459.), διασκεπτέον εἴπερ τοῖς ἀορίστοις τῶν ὅρων, τὰ τῆς τῶν ποσοτήτων, ἐφ' αἷς ἐν τῷ δευτέρῳ ὅρῳ ἡ ἀόριστος ἀνῆκται, ἡμισείας τετράγωνον ἔνεστιν. Εἰ μὲν οὖν παρείη, τούτου πρὸς τὸ τὴν ἀόριστον συνέχον μέλος μετατεθὲν, ἐκκύψει ἐκεῖσε, ἤτοι πρὸς τὰ λοιπὰ, τετράγωνον ἐντελές. Εἰ δ' οὔ, τῶν ἀτελῶν ἐστὶ τὸ τετράγωνον. Ἄπεστι γὰρ τὸ τοῦ

δευτέρου ὅρου τῆς διωνύμου ῥίζης τετράγωνον, ἧς τινὸς πρῶτος μὲν ὅρος ἐστὶν αὐτὴ ἡ ἀόριστος ποσότης, δεύτερος δὲ τὸ τῶν συνθετῶν τοῦ δευτέρου τῆς ἐξισώσεως ὅρου ἥμισυ (§. 282.).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

$$-\frac{3\beta}{2\gamma} - 3\chi + \chi^2 + \frac{\beta^2}{4\gamma^2} + \frac{\beta\chi}{\gamma} + \frac{9}{4} = \alpha^2.$$

Ἐνταῦθα δῆλόν ἐστι τὸ τετράγωνον τῶν ἐντελῶν εἶναι, ὡς παρόντος τοῦ τῆς τῶν συνθετῶν ἡμισείας $\frac{\beta}{2\gamma} - \frac{3}{2}$ τετραγώνου $+ \frac{\beta^2}{4\gamma^2} - \frac{3\beta}{2\gamma} + \frac{9}{4}$. Ἔνθα λαιόθεν τετράγωνον πάρεστιν ἐντελὲς, οὗ ἡ ῥίζα $\chi + \frac{\beta}{2\gamma} - \frac{3}{2}$.

Β'.

$$3\alpha\chi^2 - \alpha\beta^2 + \beta\chi^2 = \gamma\chi - \beta\chi.$$

Ἐνταῦθ' ἀλλ' οὖν τῶν ἀτελῶν ἐστὶ τὸ τετράγωνον; ἐλλείπει γὰρ τὸ τετράγωνον τῆς τῶν συνθετῶν ἡμισείας $\frac{\beta - \gamma}{6\alpha + 2\beta}$.

Γ'.

$$3\alpha\chi + \gamma\chi - 2\beta\chi = \alpha^2 - \gamma\chi^2.$$

Κἀν τούτοις ὡσαύτως πλῆρες τετράγωνον ἄπεστι· γινομένης γὰρ τῆς ἀναγωγῆς δείκνυται ἐλλείπειν τὸ τετράγωνον τῶν $\frac{3\alpha - 2\beta}{2\gamma} \times \frac{1}{2}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 461. Ἐὰν ἁπάντων τῶν τῆς ἐξισώσεως ὅρων πρὸς τὸ ἕτερον μετατεθέντων μέλος, καὶ τῆς ἐξισώσεως ἴσης τῷ μηδενὶ ἀποβάσης, τὸ τῆς τῶν συνθετῶν ἡμισείας τετράγωνον ἀποφατικὸν ἐκκύψῃ, ἡ ἐξίσωσις ἀτελοῦς τετραγώνου περιεκτικὴ ἔσται, ὡς οὐδενὸς ἀποφατικοῦ τετραγώνου δυνατοῦ ὄντος (§. 221.). Οἷον ἐὰν ἡ ἐξίσωσις $\chi^2 - \alpha\chi = \frac{\alpha^2}{4} + \beta\delta$ τῇ μεταθέσει ἀποβῇ $\chi^2 - \alpha\chi - \frac{\alpha^2}{4} - \beta\delta = 0$, τὸ τῆς τοῦ συνθέτου τοῦ δευτέρου ὅρου $\alpha\chi$ ἡμισείας $- \frac{\alpha}{2}$ τετράγωνον $\frac{\alpha^2}{4}$ ἀποφατικὸν ἀνέκυψεν, αὐτῷ τούτῳ ἀτελές (§. 221, 459.). Μεταχθέντων ἀλλ' οὖν τῶν ὅρων $- \frac{\alpha^2}{4} - \beta\delta$ πρὸς τὸ τῆς ἰσότητος ἕτερον μέλος ἀντισήμως, τὸ πρῶτον μέλος οὐ περιέξει τετράγωνον ἀτελές, ἀλλὰ πληρωθήσεται τῇ τοῦ $+ \frac{\alpha^2}{4}$ προσθέσει· ἔσται γὰρ τηνικαῦτα $\chi^2 - \alpha\chi + \frac{\alpha^2}{4} = \beta\delta + \frac{\alpha^2}{4}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 462. Ἐξίσωσιν Σύνθετον Δευτέρου βαθμοῦ ἐπιλῦσαι.

ΛΥΣΙΣ.

Διαταχθείσης ᾗ δέον τῆς ἐξισώσεως (§. 459.), εἰ μὲν ταύτῃ πλῆρες τετράγωνον ἔνεστιν, ἐξαχθήτω ἀμφοτέρωθεν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα (§. 441.)· εἰ δ' οὔ, πληρωθήτω πρότερον (§. 263.) τῇ ἑκατέρωθεν τοῦ τετραγώνου τῆς τοῦ δευτέρου ὅρου ῥίζης προσθέσει. Εἶτα δ' ἐξ ἀμφοῖν τῶν μελῶν ἡ τετραγωνικὴ ἐξαχθήτω ῥίζα, ὡς εἴρηται· οὗ γινομένου, ὁ ταύτης δεύτερος ὅρος ἀντισήμως ἐπὶ θάτερον τῆς ἰσότητος μεταχθήτω μέλος, ὅπως ἡ ἀόριστος ἐπὶ τὸ ἕτερον μόνη ὑπολειφθῇ, πρὸς τὴν τῆς ἐξισώσεως αἰτουμένην ἐπίλυσιν· οἷον

$$3\chi^2 - 144 = 6\chi$$

$$3\chi^2 - 6\chi = 144 \qquad \text{μεταθέσει}$$

$$\chi^2 - 2\chi = 48 \qquad \text{διαιρέσει διὰ } 3$$

$$\chi^2 - 2\chi + 1 = 48 + 1 \qquad \text{τῇ τοῦ τετρ. πληρώσει}$$

$$\chi - 1 = \sqrt{(48 + 1)} \qquad \text{τῇ τῆς ῥίζ. ἐξαγωγῇ}$$

$$\chi = 1 + 7 = 8.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'.

Ἀφθόνιος περὶ τῆς ἑαυτοῦ ἡλικίας ἐρωτηθείς, ἔφη ἐὰν τῷ τῆς ἐμῆς ἡλικίας διπλασίῳ, τὸ ταύτης προσθῇς τετράγωνον, ὑπερέξω τὰ τοῦ πρωτοπλάστου Ἀδὰμ 930 ἔτη, 30 ἔτεσιν. Ἐκ τούτων τοίνυν, ὦ Ἀλγέβρας τρόφιμε! τὴν ἐμὴν ἀκριβῶς ἔξελε ἡλικίαν.

ΛΥΣΙΣ.

Κείσθω ὁ ἀριθμὸς $930 = \alpha$, ὁ δὲ $30 = \beta$· ἡ αἰτουμένη ἡλικία ἔστω χ, ἐντεῦθεν τὸ ταύτης διπλοῦν 2χ, τὸ δὲ τετράγωνον χ^2. Ἔσται τοίνυν κατὰ τὰ ὑποτιθέντα ἐξίσωσις.

$$2\chi + \chi^2 = \alpha + \beta$$

$\chi^2 + 2\chi = \alpha + \beta$ τῇ τοῦ τετραγώνου διατάξει. Ἐπεὶ δὲ τὸ τῆς ἀορίστου τετράγωνον τῶν ἀτελῶν ἐστι (ἄπεστι γὰρ τὸ τοῦ δευτέρου ὅρου τετράγωνον), πληρούσθω· Ἐνθεντοι τῆς ἀπὸ χ^2 ῥίζης χ διπλασιαζομένης 2χ, διά τε ταύτης τοῦ δευτέρου διαιρουμένου ὅρου 2χ, ἔσται $2\chi : 2\chi = 1$· Ἐπεὶ δὲ ἡ μονὰς πρὸς τετράγωνον, ὑψουμένη, ἀεὶ μονάδα δίδωσιν (§. 197.), ἔσται τῇ ταύτης ἀμφοτέρωθεν προσθέσει

$$\chi^2+2\chi+1=\alpha+\beta+1 \quad \text{τῇ τοῦ τετρ. πληρ.}$$
$$\chi+1=\sqrt{(\alpha+\beta+1)} \quad \text{τῇ τῆς ῥίζ. ἐξαγ.}$$
$$\chi=\sqrt{(\alpha+\beta+1)}-1 \quad \text{μεταθέσει}$$
$$\chi=\sqrt{(930+30+1)}-1=\sqrt{(961)}-1$$
$$\chi=31-1=30.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$2\chi+\chi^2=\alpha+\beta$$
$$2\,.\,30+30^2=930+30=960.$$

Β'.

Γλωσσάριος ἐρωτηθεὶς πόσων διαλέκτων ἐστὶν ἐγκρατής; ἔφη· ἐὰν τοσάκις τόσας ᾔδειν, ὅσας ἐπίσταμαι διαλέκτους, ἤμην ἂν τοσούτων ἐγκρατής, ὅσαι τὴν αὐτῶν ἀρχὴν ἐν τῇ Σενναὰρ ἔσχον (ἤτοι 72.). Ζητεῖται οὖν εὑρεῖν, πόσας ἐκεῖνος ἠπίστατο;

ΛΥΣΙΣ.

Κληθήτωσαν αἱ 72 διάλεκτοι α, ὅ, τε τῶν ζητουμένων ἀριθμὸς χ, ἔσονται αἱ τοσάκις τόσαι ἤτοι $\chi\times\chi=\chi^2$. Κἀντεῦθεν

$$\chi+\chi^2=\alpha$$
$$\chi^2+\chi=\alpha \quad \text{τῇ τοῦ τετρ. διατάξει}$$
$$\chi^2+\chi+\tfrac{1}{4}=\alpha+\tfrac{1}{4} \quad \text{τῇ τούτου πληρώσει}$$
$$\chi+\tfrac{1}{2}=\sqrt{(\alpha+\tfrac{1}{4})} \quad \text{τῇ τῆς ῥίζ. ἐξαγωγῇ}$$
$$\chi=\sqrt{(\alpha+\tfrac{1}{4})}-\tfrac{1}{2} \quad \text{μεταθέσει}$$
$$\chi=\sqrt{(72+\tfrac{1}{4})}-\tfrac{1}{2}=\sqrt{(\tfrac{289}{4})}-\tfrac{1}{2}$$
$$\chi=\tfrac{17}{2}-\tfrac{1}{2}=\tfrac{16}{2}=8.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\chi+\chi^2=\alpha\} \{8+64=72.$$

Γ'.

Γινομένης ἐν δυσὶ πόλεσι τῆς τῶν στρατιωτῶν καταγραφῆς δῆλον ὑπῆρξεν, ἀπὸ τῆς δευτέρας 68 πλείους στρατολογηθῆναι, ἢ ἀπὸ τῆς πρώτης. Ἐὰν οὖν ὁ τῶν ἐν τῇ δευτέρᾳ στρατολογηθέντων ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν ἀπὸ τῆς πρώτης ἀχθῇ, τόσοι ἐκκύψουσι στρατιῶται, ὅσας ὁ κοινὸς χρόνος ἐπαριθμεῖ ἡμέρας; ἤτοι 365. Πόσοι τοίνυν ἀπὸ τῆς πρώτης, πόσοι τε ἀπὸ τῆς δευτέρας ἐστρατολόγηνται;

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω ὁ μὲν ἀριθμὸς τῶν 68 $=\alpha$, ὁ δὲ τῶν 367 $=\beta$· ὁ τῶν ἀπὸ τῆς πρώτης πόλεως στρατιωτῶν $=\chi$, ἔσται ὁ τῶν ἀπὸ τῆς δευτέρας $=\chi+\alpha$, ὅς τις ἐπὶ τὸν πρῶτον χ ἀχθεὶς δώσει $\chi^2+\alpha\chi$. Κἀκ τούτων

$$\chi^2+\alpha\chi=\beta$$
$$\chi^2+\alpha\chi+\frac{\alpha^2}{4}=\beta+\frac{\alpha^2}{4} \quad \text{τῇ πληρ. τοῦ τετραγώνου}$$
$$\chi+\tfrac{\alpha}{2}=\sqrt{(\beta+\frac{\alpha^2}{4})} \quad \text{τῇ τῆς ῥίζης ἐξαγωγῇ}$$
$$\chi=\sqrt{(\beta+\frac{\alpha^2}{4})}-\tfrac{\alpha}{2} \quad \text{μεταθέσει}$$
$$\chi=\sqrt{(365+\tfrac{4624}{4})}-\tfrac{68}{2}=\sqrt{(1521)}-34$$
$$\chi=39-34=5.$$

Ἀπὸ τῆς πρώτης ἄρα ἐστρατολόγηνται 5, ἀπὸ δὲ τῆς δευτέρας $5+68=53$.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\chi^2+\alpha\chi=\beta\} \{25+340=365.$$

Δ'.

Τοκιστής τις ἐν τρισὶ διαφόροις χρηματισταῖς, ἤτοι τραπεζίταις, τὰ ἑαυτοῦ ἐπὶ χρηματισμῷ κατέθετο χρήματα· καὶ δὴ τῷ δευτέρῳ 25 μνᾶς πλεῖον παρέθετο ἢ τῷ πρώτῳ, τῷ δέ γε τρίτῳ 125. Ἀλλὰ τί φησιν; ἐὰν ἑκάστη μνᾶ τῶν ἐν ἐκείνοις τοῖς τρισὶ κατατεθεισῶν τοσοῦτόν μοι κέρδους ἀποδῷ, ὅσον ἐγὼ ἑκάστῳ τῶν τριῶν ἰδίᾳ παρεθέμην, τὸ ἐκ τοῦ τρίτου χρηματιστοῦ κέρδος, ἴσον ἔσται τοῖς ἐκ τῶν δυοῖν ἑτέρων κέρδεσι. Πόσον ἄρα τῷ πρώτῳ, πόσον δὲ τῷ δευτέρῳ ἀργυρίου ἐπὶ τόκῳ παρέθετο;

ΛΥΣΙΣ.

Τεθήτωσαν αἱ 25 μναῖ $=\alpha$, αἱ δὲ $125=\beta$, τὰ τῷ πρώτῳ παρατεθέντα χρήματα $=\chi$, τὰ δὲ τῷ δευτέρῳ $=\chi+\alpha$· τὸ ἐκ τοῦ πρώτου κέρδος $=\chi^2$, τὸ ἐκ τοῦ δευτέρου $=\chi^2+2\alpha\chi+\alpha^2$, καὶ τὸ ἐκ τοῦ τρίτου $=\beta^2$. Τοίνυν,

$$\beta^2=\chi^2+\chi^2+2\alpha\chi+\alpha^2$$

$$\beta^2-\alpha^2=2\chi^2+2\alpha\chi \quad \text{τῇ τοῦ τετρ. διατ.}$$

$$\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^2}{4}=\chi^2+\alpha\chi+\frac{\alpha^2}{4} \quad \text{τῇ τούτου πληρώσει}$$

$$\chi+\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^2}{4}\right)} \quad \text{τῇ τῆς ῥίζ. ἐξαγωγῇ}$$

$$\chi=\sqrt{\left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^2}{4}\right)}-\frac{\alpha}{2} \quad \text{μεταθέσει}$$

$$\chi=\sqrt{\left(\frac{15625-625}{2}+\frac{625}{4}\right)}-\frac{25}{2}=75.$$

Ἐντεῦθεν τῷ μὲν πρώτῳ τραπεζίτῃ παρέθετο 75, τῷ δὲ δευτέρῳ 100.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\beta^2=\chi^2+\chi^2+2\alpha\chi+\alpha^2$$

$$(125)^2=(75)^2+(75)^2+(2.25.75)+(25)^2$$

$$15625=5625+5625+3750+625\cdot$$

$$\text{καὶ } (125)^2=(75)^2+(100)^2\cdot$$

$$15625=15625.$$

Ε'.

Στρατιώτης τις μετὰ τὴν τοῦ πολέμου τελευτὴν οἴκαδε ἐπανελθὼν ἐκόμπαζε πρὸ τῶν ἄλλων λέγων· παρέρχομαι τοὺς διὰ τοῦ πυροβόλου ὑπ' ἐμοῦ ἀποκτανθέντας ἐχθρούς, ἀλλ' ὅμως εἰ τοσάκις τόσοι τῷ ἐμῷ ἐμπεπηγότες ἂν εἴησαν ξίφει, ὅσοι τῷ ὄντι ἐμπεπήγαται, τετράκις ἂν τόσους διεχειρισάμην, ὅσους τῷ ὄντι θανάτῳ παρέδωκα. Πόσους ἄρα ἀληθῶς διεχειρίσατο;

ΛΥΣΙΣ.

Λεχθήτωσαν οἱ ξίφος ὑπελθόντες χ, οἱ τούτων τοσάκις τόσοι χ^2, οἵ τε τετράκις τόσοι 4χ. Τοίνυν

$$\chi+\chi^2=4\chi.$$

$$\chi^2+\chi-4\chi=0 \quad \text{τῇ τοῦ τετρ. διατάξει}$$

$$\chi^2-3\chi=0 \quad \text{ἀφαιρέσει τῶν ὁμοίων}$$

$$\chi^2-3\chi+\tfrac{9}{4}=\tfrac{9}{4} \quad \text{τῇ τοῦ τετρ. πληρώσει}$$

$$\chi-\tfrac{3}{2}=\tfrac{3}{2} \quad \text{τῇ τῆς ῥίζης ἐξαγωγῇ}$$

$$\chi=\tfrac{3}{2}+\tfrac{3}{2}=\tfrac{6}{2}=3.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\chi+\chi^2=4\chi$$

$$3+9=12.$$

Ϛʹ.

Ἐστιωμένους τινὰς πτωχὸς προσεπέλασεν, ἐκεῖνοι δὲ συνέθεντο πρὸς ἀλλήλους, ὡς ἕκαστον τούτων τοσαύτας τῷ αἰτοῦντι μνᾶς δοῦναι, ὅσοι ἐκεῖνοι ἦσαν· οὕτω τοίνυν ὁ πτωχὸς ἔλαβε 4 τάλαντα καὶ 49 μνᾶς. Πόσοι τοίνυν οἱ τραπέζῃ παρακαθήμενοι ἦσαν, πόσας δὲ μνᾶς τούτων ἕκαστος συνεισέφερε;

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω ὁ τῶν τραπέζῃ παρακαθημένων ἀριθμὸς $=\chi$· κἀντεῦθεν ἐπεὶ τούτων ἕκαστος κατὰ τὸν κοινὸν αὐτῶν ἀριθμὸν τῷ πένητι δέδωκεν, ἔσται τὸ δοθὲν $=\chi^2$, τὰ δὲ 4 τάλαντα, καὶ αἱ 49 μναῖ, ἤτοι αἱ 489 μναῖ $=\alpha$. Ἄρα·

$$\chi^2=489, \text{ καὶ } \chi=\sqrt{(489)}=17.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\chi^2=17\times17=489.$$

Ζʹ.

Κλέαρχος, ᾧτινι τὸ Μαθηματικὸν εἶδος ἠσκεῖτο ἐξ ἐπαγγέλματος, ἐρωτηθείς, ὅπως τοὺς αὐτοῦ μαθητὰς ἐν τῷ τοῦ σχολαστικοῦ ἔτους τέλει κατέταξεν, ἔφη· ἀριθμός τις ἀντὶ ῥίζης ληφθεὶς τοὺς ἐν εὐφυΐᾳ ἐξέχοντας δηλώσει, τούτου τε τὸ τετράγωνον, τοὺς ἐν τῇ πρώτῃ τάξει καταταχθέντας, καὶ ἡ μεταξὺ τοῦ τετραγώνου καὶ τῆς ῥίζης διαφορά, τοὺς τῆς δευτέρας δώσει τάξεως· εἷς δὲ μόνον ἀφυῶς ἔχων πρὸς τὴν τρίτην κατέπεσε. Μαθητὰς δὲ ὅλους ἐξηρίθμησα 51.

ΛΥΣΙΣ.

Τιθεμένου τοῦ τῶν ἐξεχόντων Μαθητῶν ἀριθμοῦ

$=\chi$, ἔσονται οἱ τῆς πρώτης τάξεως $=\chi^2$, οἵ τε τῆς δευτέρας $=\chi^2-\chi$, καὶ ὁ τῆς τρίτης τάξεως $=1$, ὅτε τῶν Μαθητῶν ἀριθμὸς $51=\alpha$. Ἐξ ὧν ἔσται·

$$\chi+\chi^2+\chi^2-\chi+1=\alpha$$

$\chi+\chi^2+\chi^2-\chi=\alpha-1$ μεταθέσει.

$2\chi^2=\alpha-1$ ἀναγωγῇ

$\chi^2=\frac{\alpha-1}{2}$ τῇ ἀπὸ τοῦ συνθ. ἀπαλ.

$$\chi^2=(\frac{\alpha-1}{2})=\sqrt{(\frac{51-1}{2})}=\sqrt{(25)}=5$$

Ἦσαν τοίνυν οἱ μὲν ἐξέχοντες 5, οἱ δὲ τῆς πρώτης τάξεως 25, καὶ οἱ τῆς δευτέρας 20.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\chi+\chi^2+\chi^2-\chi+1=\alpha$$
$$5+25+25-5+1=51.$$

Ηʹ.

Ἐρωτηθείς τις εἰπεῖν τήν, ἣν μεθ' ἑαυτοῦ εἶχε χρημάτων ποσότητα, ἔφη· ἐὰν ἀπὸ τοῦ πενταπλασίου τῶν, ὧν ἔχω δραχμῶν, τὸ τούτων ἀφαιρεθῇ τετραπλάσιον, ὑπολειφθήσονται 217 δραχμαί. Πόσας ἄρα μεθ' ἑαυτοῦ δραχμὰς ἔφερε;

ΛΥΣΙΣ.

Κληθήτω ἡ, ἣν μεθ' ἑαυτοῦ ἔφερε, ποσότης y, ἔσται τὸ ταύτης πενταπλάσιον τετράγωνον $=5y^2$, τό, τε τῶν χρημάτων τετραπλάσιον $=4y$, αἱ δὲ 217 δραχμαὶ $=\alpha$· Ἄρα

$$5y^2-4y=\alpha$$

$y^2-\frac{4y}{5}=\frac{\alpha}{5}$ τῇ ἀπὸ τοῦ συνθ. ἀπαλ.

$$y^2 - \frac{4y}{5} + \frac{4}{25} = \frac{\alpha}{5} + \frac{4}{25}$$ τῇ τοῦ τετρ. πληρώσει

$$y - \frac{2}{5} = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{5} + \frac{4}{25}\right)}$$ τῇ τῆς ῥίζης ἐξαγωγῇ

$$y = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{5} + \frac{4}{25}\right)} + \frac{2}{5} = \sqrt{\left(\frac{5 \cdot 217}{25} + \frac{4}{25}\right)} + \frac{2}{5}$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{1089}{25}\right)} + \frac{2}{5} = \frac{33}{5} + \frac{2}{5} = 7$$

Εἶχεν ἄρα μεθ' ἑαυτοῦ 7 δραχμάς.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$5y^2 - 4y = \alpha \} \{ 245 - 28 = 217.$$

Θ'.

Δυοῖν Γεωργῶν 24 μεδίμνους ὁμοῦ ἐνσπειράντων τῇ γῇ, ὁ πρῶτος φησὶ τῷ δευτέρῳ· ἐὰν ἕκαστος τῶν, ὧν ἔσπειρα μεδίμνων, ἴσους μοι δώσει τοῖς ὑπὸ σοῦ σπαρεῖσιν, ἕξω τοὺς πάντας 135. Πόσους ἄρα μεδίμνους τούτων ἕκαστος ἔσπειρεν;

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω ὁ μὲν τῶν ὑπὸ τοῦ Α'. σπαρέντων ἀριθμὸς $= \chi$, ὁ δὲ τῶν ὑπὸ τοῦ Β'. $= \varphi$, οἱ 24 μέδιμνοι $= \alpha$, καὶ οἱ $135 = \beta$.

$$\text{A)}\ \chi + \varphi = \alpha, \quad \text{B)}\ \chi\varphi = \beta$$

$$\text{B)}\ \chi\varphi = \beta. \ \text{καὶ}\ \chi = \frac{\beta}{\varphi}$$

Ἀντεισαγομένης τῆς ἐν Α) καὶ Β) τοῦ χ ἰσότητος ἔσται·

$$\frac{\beta}{\varphi} + \varphi = \alpha$$

$$\beta + \varphi^2 = \alpha\varphi$$ τῇ τοῦ κλάσματος ἀπαλ.

$$\varphi^2 - \alpha\varphi = -\beta$$ μεταθέσει

$$\varphi^2 - \alpha\varphi + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{4} - \beta$$ τῇ τοῦ τετρ. πληρώσει

$$\varphi - \frac{\alpha}{4} = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{4} - \beta\right)}$$ τῇ τῆς ῥίζ. ἐξαγωγῇ

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{4} - \beta\right)} + \frac{\alpha}{2}$$ μεταθέσει

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{576}{4} - 135\right)} + \frac{24}{2} = \sqrt{(9)} + 12$$

$$\varphi = 3 + 12 = 15.$$

Ἄρα Β) $\chi\varphi = \beta$, ἤτοι $\chi = \frac{\beta}{\varphi} = \frac{135}{15} = 9.$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\left.\begin{array}{l}\text{A)}\ \chi + \varphi = \alpha \\ \text{B)}\ \chi\varphi = \beta\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l}9 + 15 = 24. \\ 9 \times 15 = 135.\end{array}\right.$$

Ι'.

Ἀριθμοὺς δύω εὑρεῖν, ὧν τὸ ἄθροισμα $= 24$, τὸ δ' ἐξ αὐτῶν γινόμενον $= 128$.

ΕΚΘΕΣΙΣ.

Ἔστωσαν οἱ αἰτούμενοι ἀριθμοὶ χ καὶ ψ, τὸ τούτων κεφάλαιον, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς $24 = \alpha$, τὸ δὲ γινόμενον $128 = \gamma$.

ΛΥΣΙΣ.

$$\text{A)}\ \varphi + \psi = \alpha, \quad \text{B)}\ \varphi\psi = \gamma.$$

ΑΝΑΓΩΓΗ.

Αἰτείσθω ἐν τῇ Α'. ἐξισώσει ἡ τοῦ φ ἰσότης, ἤτοι

$$\varphi = \alpha - \psi$$

Ὡσαύτως καὶ ἐν τῇ Β'. $\varphi = \frac{\gamma}{\psi}$. Ἄρα·

$$\frac{\gamma}{\psi} = \alpha - \psi$$

$$\gamma = \alpha\psi - \psi^2$$ ἀπαιρεώσει

$\psi^2 - \alpha\psi = -\gamma$ μεταθέσει

$\psi^2 - \alpha\psi + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{4} - \gamma$ τῇ τοῦ τετρ. πληρ.

$\psi - \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{4} - \gamma\right)}$ τῇ τῆς ῥίζ. ἐξαγ.

$\psi = \sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{4} - \gamma\right)} + \frac{\alpha}{2}$ τῇ τῆς ὡρισμ. μεταθ.

$$\psi = \sqrt{(144 - 128)} = \sqrt{(16)} + 12$$

$$\psi = 4 + 12 = 16.$$

Κἀντεῦθεν $\varphi = 8$.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\begin{array}{l} \text{A)}\ \varphi + \psi = \alpha \\ \text{B)}\ \varphi\psi = \delta \end{array} \Big\} \Big\{ \begin{array}{l} 8 + 16 = 24. \\ 8 \times 16 = 128. \end{array}$$

ΙΑ'.

Ἄρταμος ποιμένα αἰγῶν ἤρετο πόσου ἑκάστην αὐτῷ ἀποδοῦναι βούλεται; ὁ δὲ ἔφη· ἐὰν τὴν ἀγέλην πᾶσαν ὠνήσῃ ἀνθ' ἑκάστης αἰγὸς τόσους Φιλιππικούς, ὅσαι ἐκεῖναί εἰσιν, ἀποτίσεις. Ὑπολαβὼν δὲ ὁ Ἄρταμος ἔφη· ἀλλ' ἐὰν ἀπὸ τοῦ ὑπὲρ ἑκάστης τιμήματος Φιλιππικὸν ἐνδώσεις, πάσας ὠνήσομαι· οὑτωσὶ συνελθόντων ὁ Ἄρταμος 812 κατέβαλε Φιλιππικούς. Πόσαι τοίνυν ἦσαν αἶγες, πόσου δὲ ἑκάστη τετίμηται;

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω ὁ τῶν αἰγῶν ἀριθμὸς $= \chi$, τὸ ἑκάστης τίμημα $= \chi - 1$, οἱ 812 Φιλιππικοὶ $= \alpha$. Ἐπεὶ οὖν ὁ τῶν αἰγῶν ἀριθμός ἐστι χ, μιᾶς δὲ ἑκάστης τὸ τίμημα $\chi - 1$, δέον τὸν τῶν αἰγῶν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ ἑαυτῶν ἀχθέντα τίμημα δώσειν 812 Φιλιππικούς. Ὅθεν·

$\chi(\chi - 1) = \alpha$, ἤτοι $\chi^2 - \chi = \alpha$.

$\chi^2 - \chi + \frac{1}{4} = \alpha + \frac{1}{4}$ τῇ τοῦ τετραγ. πληρώσει

$\chi - \frac{1}{2} = \sqrt{(\alpha + \frac{1}{4})}$ τῇ τῆς ῥίζης ἐξαγωγῇ

$\chi = \sqrt{(\alpha + \frac{1}{4})} + \frac{1}{2}$ μεταθέσει

$$\chi = \sqrt{(812 + \tfrac{1}{4})} + \tfrac{1}{2} = \sqrt{(\tfrac{3249}{4})} + \tfrac{1}{2}$$

$$\chi = \tfrac{57}{2} + \tfrac{1}{2} = 29.$$

Ἦσαν τοίνυν αἶγες 29, τούτων τε ἑκάστης τὸ τίμημα 26 Φιλιππικῶν.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\chi^2 - \chi = \alpha \} \{ 841 - 29 = 812.$$

ΙΒ'.

Ἀρίσταρχος μετὰ τρυγητὸν ἐρωτηθεὶς πόσους χοέας γλεύκους ἐναπέθλιψεν; ἔφη· ἐὰν ὁ τῶν χοέων ἀριθμὸς ἐφ' ἑαυτόν τε καὶ ἐπὶ τὸν 6 ἀχθῇ, τὸ ἐξ ἀμφοτέρων γινόμενον ἐν κεφαλαίῳ συναφθὲν δώσει τὸν 249991 ἀριθμόν. Πόσους ἄρα χοέας ἔσχε;

ΛΥΣΙΣ.

Τεθέντος τοῦ τῶν χοέων ἀριθμοῦ $= \psi$, ἔσται τὸ τούτων γινόμενον $= \psi^2$, καὶ τὸ διὰ τοῦ $6 = 6\psi$, οἱ δὲ $249991 = \alpha$, Τοίνυν

$$\psi^2 + 6\psi = \alpha$$

$\psi^2 + 6\psi + 9 = \alpha + 9$ τῇ τοῦ τετρ. πληρ.

$\psi + 3 = \sqrt{(\alpha + 9)}$ τῇ τῆς ῥίζ. ἐξαγ.

$\psi = \sqrt{(\alpha + 9)} - 3$ μεταθέσει

$$\psi = \sqrt{(249991 + 9)} - 3$$

$$\psi = \sqrt{(250000)} = 500 - 3 = 497.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\psi^2 = 497 \times 497 \quad = 247009$$
$$\psi \times 6 = 497 \times 6 = \quad 2982$$
$$\psi^2 + 6\psi = \alpha \quad = 249991$$

ΙΓ'.

Ὁδοιπόρος τις βαλάντια τρία εὗρεν ἐν τῇ ὁδῷ χρυσῶν πλήρη· καὶ δὴ ἐν τῷ πρώτῳ ἦσαν 37 χρυσοί; τῶν ἐν τῷ δευτέρῳ 23 χρυσῶν πλείονες, ἤπερ τῶν ἐν τῷ τρίτῳ. Ἐὰν οὖν οἱ τῶν ἐν τοῖς τρισὶ βαλαντίοις περιεχομένων χρυσῶν ἀριθμοὶ τετραγωνισθῶσι, τὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον ἰσοδυναμήσει τοῖς τῶν λοιπῶν. Αἰτεῖται οὖν ὁ τῶν ἐν ἑκάστῳ βαλαντίῳ περιεχομένων χρυσῶν ἀριθμός.

ΛΥΣΙΣ.

Κληθήτωσαν οἱ 37 χρυσοὶ $= \alpha$, οἱ $23 = \beta$, οἱ ἐν τῷ δευτέρῳ βαλαντίῳ περιεχόμενοι $= \beta + \chi$· κἀντεῦθεν τὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον $= \alpha^2$, τὸ τοῦ δευτέρου $\beta^2 + 2\beta\chi + \chi^2$, τὸ τοῦ τρίτου $= \chi^2$. Ἐξ ὧν ἔσται

$$\beta^2 + 2\beta\chi + \chi^2 + \chi^2 = \alpha^2$$

$$2\chi^2 + 2\beta\chi = \alpha^2 - \beta^2 \qquad \text{διατάξει τοῦ τετραγ.}$$

$$\chi^2 + \beta\chi = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \qquad \text{τῇ ἀπὸ τοῦ συνθ. ἀπαλ.}$$

$$\chi^2 + \beta\chi + \frac{\beta^2}{4} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} + \frac{\beta^2}{4} \quad \text{τῇ πληρώσει τοῦ τετρ.}$$

$$\chi + \frac{\beta}{2} = \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} + \frac{\beta^2}{4}\right)} \quad \text{τῇ τῆς ῥίζης ἐξαγωγῇ}$$

$$\chi = \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} + \frac{\beta^2}{4}\right)} - \frac{\beta}{2} \quad \text{μεταθέσει}$$

$$\chi = \sqrt{\left(\frac{37^2 - 23^2}{2} + \frac{23^2}{4}\right)} - \frac{23}{2}$$

$$\chi = \sqrt{\left(\frac{1369 - 529}{2} + \frac{529}{4}\right)} - \frac{23}{2}$$

$$\chi = \sqrt{\left(\frac{840}{2} + \frac{529}{4}\right)} = \sqrt{(420 + 132\tfrac{1}{4})} - 11\tfrac{1}{2}$$

$$\chi = \sqrt{(552\tfrac{1}{4})} - 11\tfrac{1}{2} = 23\tfrac{1}{2} - 11\tfrac{1}{2} = 12.$$

Ἦσαν ἄρα οἱ αἰτούμενοι χρυσοὶ 12.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\alpha^2 = \beta^2 \; + \; 2\beta\chi \; + 2\chi^2$$
$$37^2 = 23^2 + 2.23.12 + 2.12^2$$
$$1369 = 529 + \; 552 \; + 288$$
$$1369 = 1369.$$

ΙΔ'.

Καθηγητής τις δύω τῶν παρ' αὐτῷ φοιτώντων καθηγούμενος τάξεων, ἐρωτηθεὶς τὸν ἐν ἀμφοτέραις εἰπεῖν ἀριθμόν, ἔφη· τὸ ἀμφοτέρων τῶν τάξεων τῶν μαθητιώντων κεφάλαιον, ἀπὸ τοῦ τῶν ἑαυτῶν τετραγώνων κεφαλαίου ἀφαιρεθὲν δώσει ἀριθμὸν 78· προστεθὲν δὲ τῷ ἀπὸ τοῦ αὐτῶν πολλαπλασιασμοῦ ἐκπίπτοντι ἀριθμῷ ἰσοδυναμήσει τῷ ἡμίσει, ἤτοι 39. Ζητεῖται οὖν ὁ ἀριθμὸς ἀμφοτέρων τῶν τάξεων.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω τὸ κεφάλαιον ἀμφοτέρων τῶν τάξεων $= 2\chi$, ἡ δὲ τούτων διαφορὰ $= 2y$, ἔσται ὁ μείζων ἀριθμὸς $= \chi + y$, ὁ δ' ἐλάττω $= \chi - y$, ὁ $39 = \alpha$, ὅ,τε $78 = 2\alpha$, ἔσται πρὸς τούτοις τὸ τῶν τετραγώνων κεφάλαιον $= 2\chi^2 + 2y^2$, καὶ τὸ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ μείζονος καὶ ἐλάττονος γινόμενον $\chi^2 - y^2$. Ἐὰν οὖν ἀπὸ τοῦ τῶν τετραγώνων καφαλαίου $2\chi^2$

$+ 2y^2$ ἀφαιρεθῇ 2χ, ἔσται κατὰ τὴν πρώτην τοῦ προβλήματος συνθήκην

$$\text{A)}\quad 2\chi^2 + 2y^2 - 2\chi = 2\alpha$$

καὶ τῶν ὅρων πρὸς ἐλάττονας ἀναγομένων διὰ τῆς τοῦ 2 διαιρέσεως (§. 168), ἔσται·

$$\text{A)}\quad \chi^2 + y^2 - \chi = \alpha.$$

Κατὰ δὲ τὴν δευτέραν,

$$\text{B)}\quad \chi^2 - y^2 + 2\chi = \alpha.$$

Συναφθήτωσαν ἤδη αἱ ἐν τῷ A) καὶ B) ἐξισώσεις εἰς μίαν. Ἔσται·

$$2\chi^2 + \chi = 2\alpha$$

$$\chi^2 + \frac{\chi}{2} = \alpha \qquad \text{τῇ ἀπὸ τῶν συνθ. ἀπαλ.}$$

$$\chi^2 + \frac{\chi}{2} + \frac{1}{16} = \alpha + \frac{1}{16} \qquad \text{τῇ τοῦ τετραγ. πληρώσει}$$

$$\chi + \frac{1}{4} = \sqrt{\left(\alpha + \frac{1}{16}\right)} \qquad \text{τῇ τῆς ῥίζης ἐξαγωγῇ}$$

$$\chi = \sqrt{\left(\alpha + \frac{1}{16}\right)} - \frac{1}{4} \qquad \text{μεταθέσει}$$

$$\chi = \sqrt{\left(39 + \frac{1}{16}\right)} - \frac{1}{4} = \sqrt{\left(\frac{625}{16}\right)} - \frac{1}{4}$$

$$\chi = \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

Τοίνυν $\chi = 6$, καὶ $y = 3$.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\text{A)}\quad 2\chi^2 + 2y^2 - 2\chi = 2\alpha.$$

$$72 + 18 - 12 = 78.$$

$$\text{B)}\quad \chi^2 - y^2 + 2\chi = \alpha.$$

$$36 - 9 + 12 = 39.$$

ΙΕ'.

Ζητοῦντί μοι πάλαι ποτὲ μαθεῖν τὸν ἔν τινι Βασιλικῇ Ἀκαδημίᾳ τῶν τε Φυσικευομένων καὶ τῶν Λογικευομένων ἀριθμόν, ἐῤῥέθη πλείονας εἶναι τοὺς πρώ-

τους τῶν δευτέρων οὕτως, ὥστε τὸ ἐκ τοῦ τῶν ἀμφοτέρων ἀριθμοῦ γινόμενον ἀναδίδειν τὸν 160, τὴν δὲ τῶν τετραγώνων διαφορὰν τὸν 156. Εἰδέναι θέλω τὸν τῶν μαθητῶν ἀριθμὸν ἰδίᾳ.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω ὁ 160 ἀριθμὸς $= \alpha$, ὁ δὲ 156 $= \gamma$, τὸ τῶν Μαθητῶν κεφάλαιον $= 2\chi$, ἡ δὲ διαφορὰ $= 2\phi$, ἔσται ὁ τῶν Φυσικευομένων ἀριθμὸς $= \chi + \phi$, τῶν τε Λογικευομένων $= \chi - \phi$, καὶ τὸ τούτων γινόμενον $= \chi^2 - \phi^2$. Κατὰ μὲν τὴν πρώτην τοῦ προβλήματος συνθήκην ἐκκύπτει

$$\text{A)}\quad \chi^2 - \phi^2 = \alpha, \ \text{καὶ}\ \chi^2 = \alpha + \phi^2.$$

Κατὰ δὲ τὴν δευτέραν ἡ τῶν τετραγώνων διαφορά, ἤτοι $2\phi \times 2\chi = 4\phi\chi$.

$$\text{B)}\quad 4\phi\chi = \gamma, \ \text{καὶ}\ \chi = \frac{\gamma}{4\phi}.$$

Ὧν πρὸς τετράγωνον ἐξαρθέντων, ἔσται

$$\text{B)}\quad \chi^2 = \frac{\gamma^2}{4\phi^2}$$

Συναφθήτωσαν ἤδη αἱ ἐν A) καὶ B) ἐξισώσεις, ὡς ὄντες $\chi^2 = \chi^2$.

$$\alpha + \phi^2 = \frac{\gamma^2}{4\phi^2}$$

$$4\alpha\phi^2 + 4\phi^4 = \gamma^2 \qquad \text{τῇ τοῦ κλάσματος ἀπαλ.}$$

$$4\phi^4 + 4\alpha\phi^2 = \gamma^2 \qquad \text{τῇ τοῦ τετραγ. διατάξει}$$

$$\phi^4 + \alpha\phi^2 = \frac{\gamma^2}{4} \qquad \text{τῇ ἀπὸ τοῦ συνθ. ἀπαλ.}$$

$$\phi^4 + \alpha\phi^2 + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\gamma^2}{4} + \frac{\alpha^2}{4} \qquad \text{τῇ πληρ. τοῦ τετραγώνου}$$

$$\varphi^2+\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\left(\frac{\gamma^2}{4}+\frac{\alpha^2}{4}\right)}$$ τῇ τῆς ῥίζης ἐξαγωγῇ

$$\varphi^2=\sqrt{\left(\frac{\gamma^2}{4}+\frac{\alpha^2}{4}\right)}-\frac{\alpha}{2}$$ μεταθέσει

$$\varphi=\sqrt{(-\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\sqrt{(\gamma^2+\alpha^2)}}$$

$$\varphi=\sqrt{(-80+\tfrac{1}{2}\sqrt{(6084+25600)}}=\sqrt{(-80+\tfrac{1}{2}\sqrt{(31684)}}$$

$$\varphi=\sqrt{(-80+\tfrac{178}{2})}=\sqrt{(-80+89)}$$

$$\varphi=\sqrt{9}=3.$$

Ἐντεῦθεν $\chi=\frac{\gamma}{4\varphi}=\frac{156}{12}=\frac{78}{6}=13$. Ἦν ἄρα ὁ μὲν τῶν Φυσικευομένων ἀριθμὸς $\chi+\varphi=16$· ὁ δὲ τῶν Λογικευομένων $\chi-\varphi=10$.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\left.\begin{array}{l}\text{A)}\ \chi^2-\varphi^2=\alpha\\ \text{B)}\ 4\varphi\chi=\gamma\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}169-9=160\\ 4.13.3=156.\end{array}\right.$$

ΙϚʹ.

Ἀριθμοὺς εὑρεῖν δύω, ὧν τὸ γινόμενον συνάμα τῷ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ τετραγώνῳ ἴσον εἴη 55.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω ὁ 55 ἀριθμὸς $=\alpha$, ὁ πρῶτος $=\chi$, καὶ ὁ δεύτερος $=y$. Κἀντεῦθεν

$$\chi^2+\chi y=\alpha$$

$$\chi^2+\chi y+\frac{y^2}{4}=\alpha+\frac{y^2}{4}$$ τῇ πληρ. τοῦ τετραγώνου

$$\chi+\frac{y}{2}=\sqrt{\left(\alpha+\frac{y^2}{4}\right)}$$ τῇ τῆς ῥίζης ἐξαγωγῇ

$$\chi=\sqrt{\left(\alpha+\frac{y^2}{4}\right)}-\frac{y}{2}$$ τῇ μεταθέσει.

Εὔδηλον οὖν ἐντεῦθεν τὸ προβληθὲν τῶν ἀπροσδιορίστων εἶναι. Τούτου χάριν ληφθήτω κατὰ τὸ δοκοῦν ἀριθμὸς, οὗτινος τὸ τετράγωνον διὰ τοῦ 4 διαιρούμενον, καὶ τῷ 55 ἀριθμῷ προστιθέμενον, τέλειον ἀναδώσει τετράγωνον. Γενέσθω οὖν $y=9$, ἔσται

$$\chi=\sqrt{(55+\tfrac{36}{4})}-3$$

$$\chi=\sqrt{(55+9)}-3=8-3=5.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\chi^2+\chi y=\alpha$$

$$5^2+5.6=55$$

$$25+30=55$$

ΙΖʹ.

Εὑρεῖν ἀριθμὸν, ὅς τις σὺν 42 τῷ ἑαυτοῦ ἰσωθήσεται τετραγώνῳ.

ΛΥΣΙΣ.

Τεθήτω ὁ ἀριθμὸς $42=\delta$, ὁ δ' αἰτούμενος $=\varphi$, καὶ τὸ ἑαυτοῦ τετράγωνον $=\varphi^2$. Ἄρα

$$\varphi^2=\varphi+\delta$$

$$\varphi^2-\varphi=\delta$$ τῇ μεταθέσει

$$\varphi^2-\varphi+\tfrac{1}{4}=\delta+\tfrac{1}{4}$$ τῇ τοῦ τετραγ. πληρώσει

$$\varphi-\tfrac{1}{2}=\sqrt{(\delta+\tfrac{1}{4})}$$ τῇ τῆς ῥίζης ἐξαγωγῇ

$$\varphi=\sqrt{(\delta+\tfrac{1}{4})}+\tfrac{1}{2}$$ τῇ μεταθέσει

$$\varphi=\sqrt{(42+\tfrac{1}{4}}+\tfrac{1}{2}=\sqrt{(\tfrac{169}{4})}+\tfrac{1}{2}$$

$$\varphi=\sqrt{\tfrac{13}{2}}+\tfrac{1}{2}=\tfrac{14}{2}=7.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\varphi^2=\varphi+\delta$$

$$49=7+42.$$

ΙΗ΄.

Δυοῖν Νεανίαιν, ὁ μὲν ἐκέρδησεν ἐν πεττείᾳ χρυσοὺς 10, ὁ δὲ χ. Ἀλλ' οὖν ἐὰν οἱ τοῦ πρώτου χρυσοὶ, ἐπὶ τοὺς τοῦ δευτέρου χ ἀχθῶσι, καὶ τῷ γινομένῳ τὰ ἀμφοτέρων προστεθῶσι τετράγωνα, ἐκκύψουσι 124 χρυσοί. Ζητεῖται τὸ τοῦ δευτέρου χ κέρδος.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω τὸ τοῦ δευτέρου κέρδος $= \chi$, οἱ 10 χρυσοὶ ἐπὶ χ ἀχθέντες $= 10\chi$, τὸ τῶν 10 τετράγωνον $= 100$ καὶ τὸ τοῦ $\chi = \chi^2$, οἱ $124 = \alpha$. Κἀντεῦθεν·

$$10\chi + 100 + \chi^2 = \alpha$$

$\chi^2 + 10\chi = 124 - 100$ τῇ διατάξει τοῦ τετρ.

$\chi^2 + 10\chi = 24$ τῇ ἀφαιρέσει

$\chi^2 + 10\chi + 25 = 24 + 25$ τῇ πληρ. τοῦ τετραγώνου

$\chi + 5 = \sqrt{(49)}$ τῇ τῆς ῥίζης ἐξαγωγῇ

$\chi = \sqrt{(49)} - 5$ τῇ μεταθέσει

$$\chi = 7 - 5 = 2.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$\chi^2 + 10\chi + 100 = \alpha$$

$$4 + 20 + 100 = 124.$$

ΙΘ΄.

Ἔχω παρ' ἐμοὶ ἀριθμόν τινα χρυσῶν, οὗτινος τὸ τετραπλοῦν, ἀπὸ τοῦ πενταπλοῦ αὐτοῦ ἀφαιρεθὲν τετραγώνου, δώσει ὑπόλοιπον 105. Αἰτεῖται οὖν ὁ τῶν χρυσῶν ἀριθμός.

ΛΥΣΙΣ.

Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς κληθήτω χ· τὸ τούτου πενταπλοῦν τετράγωνον ἔστω $= 5\chi^2$, τὸ τοῦ ἀριθμοῦ τετραπλοῦν $= 4\chi$, οἱ δὲ 105 χρυσοὶ $= \alpha$. Ἔσται οὖν

$$5\chi^2 - 4\chi = \alpha$$

$\chi^2 - \frac{4\chi}{5} = \frac{\alpha}{5}$ τῇ διὰ τοῦ 5 διαιρ.

$\chi^2 - \frac{4\chi}{5} + \frac{4}{25} = \frac{\alpha}{5} + \frac{4}{25}$ τῇ πληρώσει

$\chi - \frac{2}{5} = \sqrt{(\frac{\alpha}{5} + \frac{4}{25})}$ τῇ τῆς ῥίζης ἐξαγωγῇ

$\chi = \sqrt{(\frac{\alpha}{5} + \frac{4}{25})} + \frac{2}{5}$ τῇ μεταθέσει

$$\chi = \sqrt{(\tfrac{105}{5} + \tfrac{4}{25})} + \tfrac{2}{5} = \sqrt{(11 + \tfrac{4}{25})} + \tfrac{2}{5}$$

$$\chi = \sqrt{(\tfrac{529}{25})} + \tfrac{2}{5} = \tfrac{23}{5} + \tfrac{2}{5} = 5.$$

ΒΑΣΑΝΟΣ.

$$5\chi^2 - 4\chi = \alpha.$$

$$125 - 20 = 105.$$

Κ΄.

Δισσοί με τρύχουσι δανεισταὶ οἰκοτύραννοι
Εὔμαχε· εἷς δ' ἐμὲ τρὶς τόσσον, ὅσον θάτερος
Χρυσῶν δῶκεν· ὀφειλὴν δ' ὧδ' ἔχε ἀργυραμοιβῶν·
Ἢν μὲν γὰρ ἀμφοῖν, τῶν ἰδίων ἀφέλῃς
Τετραγώνων, ἄθροισμα· ὀκτὼ παραλήψῃ
Ξὺν ἑπτὰ δεκάσι· γινομένῳ δ' ὅλον αὖ
Ἢν ἑνὶ συνάψῃς, τριάκοντα σὺν ἐννέα ἕξεις·
Ἀλλ' ἄγε πέμπ' ὦκα φάρμακον ἀντίδοτον.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω ὁ μὲν τοῦ ἑνὸς μείζων ἀριθμὸς $= \chi$, ὁ δὲ τοῦ ἑτέρου ἐλάττων $= y$. Ἤδη ἐὰν τὸ αὐτῶν κεφάλαιον ἀπὸ τοῦ τῶν ἰδίων τετραγώνων ἀφαιρεθῇ κεφαλαίου, δώσει διαφορὰν $78 = \alpha$. Ἐὰν δὲ τὸ αὐτῶν κεφάλαιον τῷ ἐκ τῶν ἰδίων γινομένῳ προστεθῇ, ἀριθμὸν προβαλεῖται $39 = \frac{\alpha}{2}$. Κἀκ τούτων ἔσται

$$\text{Α}'.\quad \chi^2 + y^2 - \chi - y = \alpha$$

$$\text{Β}'.\quad \chi y + \chi + y = \frac{\alpha}{2}$$

Πολλαπλασιασθήτω ἡ Β'. ἐξίσωσις ἐπὶ 2, κἆτα πρῶτον μὲν τῇ Α'. προστεθήτω, εἶτα δὲ ταύτης ἀφαιρεθήτω· ἤτοι

$$\Gamma'.\quad \chi^2 + y^2 - \chi - y + 2\chi y + 2\chi + 2y = 2\alpha$$

ἤτοι $(\chi + y)^2 + (\chi + y) = 2\alpha$ προσθέσει

$$\Delta'.\quad \chi^2 + y^2 - \chi - y - 2\chi y - 2\chi - 2y = 0$$

ἤτοι $(\chi - y)^2 - 3(\chi + y) = 0$ ἀφαιρέσει

$$(\chi - y)^2 = 3(\chi + y) \text{ (§. 433.)}:$$

Ληφθήτω δὴ ἐν τῇ Γ'. ἐξισώσει $(\chi + y)$ ὡς ποσότης μονομερὴς, καὶ πληρωθήτω τὸ ἀτελὲς τετράγωνον (§. 263.)· τουτέστι γενέσθω

$$(\chi + y)^2 + (\chi + y) + (\tfrac{1}{2})^2 = 2\alpha + \tfrac{1}{4}$$

$$\chi + y = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(2\alpha + \tfrac{1}{4})} = 12 \text{ (§. 310.)}.$$

Οὗγε δὴ ἐν τῇ Δ'. ἐξισώσει ἀνθυποκαθισταμένου, ἔσται·

$$(\chi - y)^2 = 3 \cdot 12,\ \text{ἄρα}\ (\chi - y) = \sqrt{36} = 6.$$

Ἔστι δὲ $\chi + y = 12$. καὶ $\chi - y = 6$· ἄρα ἔσται $\chi = 9$, καὶ $y = 3$· ὡσαύτως καὶ $9 = 3 \cdot 3$, κατὰ τὴν τοῦ προβλήματος συνθήκην.

ΤΜΗΜΑ Δ.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΤΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΟΥ ΣΧΕΣΕΩΣ.

ΔΙΑΛΗΨΙΣ.

Εἴτις δύω μεγέθη πρὸς ἄλληλα παρεξετάσειεν, ἐφ' ᾧ συνιδεῖν ἔχοι ποσάκις θάτερον θατέρῳ ἐμπεριείληπται, ἢ ποσάκις θάτερον ὑπερέχει τὸ ἕτερον, ἕξει ἀναφοράν τινα, ἥτις Λόγος καλεῖσθαι ἠξίωται· ἐντεῦθεν ἡ δυεῖν Λόγων ἰσότης Ἀναλογία προσηγόρευται. Ἐκκειμένων δὲ τῶν Λόγων ἐν σειρᾷ, ἤτοι στίχῳ συνεχῶς Ἀναλόγων, Πρόοδος ἀναφύεται. Ἐὰν δὲ Προόδῳ ἐν Λόγῳ Ἀριθμητικῷ προϊούσῃ, ἑτέρα Πρόοδος Γεωμετρικῶς στείχουσα ὑπογραφῇ, οἱ Λόγοι οὓς οἱ τῆς πρώτης ὅροι πρὸς τοὺς τῆς δευτέρας ἔχουσι τὴν τῶν Λογαρίθμων ἐπωνυμίαν εἰλήχασι. Τῆς δὲ Προόδου τέως ἐπ' ἄπειρον συνεχιζομένης, Σειρὰ, ἤτοι Πρόοδος ἐπ' Ἄπειρον ἀναδίδοται. Ἔνθεντοι καὐτοὶ ἐν τῷ παρόντι Τμήματι διαλαβεῖν ἔγνωμεν ἐν ἰσαρίθμοις τοῖς Κεφαλαίοις, Α'. περὶ Λόγων· Β'. περὶ Ἀναλογιῶν· Γ'. περὶ Προόδων· Δ'. περὶ Λογαρίθμων· Ε'. περὶ Σειρῶν. ἐπισυνάψαντες καὶ ϛ'. τὴν τῶν Δεκαδικῶν Κλασμάτων θεωρίαν, ὡς πάνυ ἐν τοῖς κατὰ Γεωμετρίαν συντείνουσαν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α.

ΠΕΡΙ ΛΟΓΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 463. Λόγος ἐστὶν ἡ δυεῖν, ἢ πλειόνων ποσοτήτων, πρὸς ἀλλήλας παραβολή.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Καὶ γὰρ Στήλη μόνη ἐν πεδίῳ ὀρθῶς κειμένη, οὐδεμίαν πρὸς τὰ λοιπὰ ἀναφορὰν ἔχει, ἑπομένως τε τὸ ἐκείνης μέγεθος καταμαθεῖν τῶν ἀμηχάνων ἐστιν, ἄχρις οὗ ἑτέρα ἐκείνη παρατεθεῖσα, τὸν μείζονα ἢ ἐλάττονα ταύτης πρὸς ἐκείνην λόγον προσδιορίσει.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 464. Ποσότητα τοίνυν μοναδικὴν, οὐ δυνάμεθα λόγον ἀποκαλέσαι· καὶ γὰρ μία οὐδεμίαν ἀναφορὰν συνίστησιν (§. 463.). Ὅπως τοίνυν ὁ λόγος ἰσότητα, ἢ ἀνισότητα ἀποφήνῃ, δύω δέον παρεῖναι τὰ ἀλλήλοις παρατιθέμενα, καὶ ταῦτα ὁμογενῆ, ἃ δὴ καὶ ὅροι καλεῖσθαι εἰώθασι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁ λόγος τοίνυν οὐδὲν ἄλλό ἐστιν, ὅτι μὴ πράγματός τινος πρὸς ἕτερον ἑαυτῷ ὁμογενὲς ἀναφορὰ, ἥτις τὸ θατέρου μέγεθος διὰ τῆς τοῦ ἑτέρου παραβολῆς, ἄνευ προσλήψεως τρίτου τινὸς ὁμογενοῦς, οἱονεὶ μέτρου, παρεξετάζουσα προσδιορίζει. Οὕτω γὰρ ἐν τῇ Ἀρχιτεκτονικῇ ἐπὶ κατασκευῆς θύρας τινὸς ἢ θυρίδος, ἢ ἑτέρου του τῶν τοιούτων, Τεκτόνων παῖδες αἰτοῦσι τὸν τοῦ πλάτους πρὸς τὸ αὐτοῦ ὕψος λαβεῖν λόγον. Ἐὰν οὖν τοῦ τῆς θυρίδος, ἐξ ὑποθέσεως, πλάτους ἀντὶ μέτρου ληφθέντος, θηρευθῇ ποσάκις τὸ πλάτος τῷ ὕψει ἐμπεριείληπται, φέρ' εἰπεῖν, δίς· εὑρεθήσεται ὁ τοῦ πλάτους πρὸς τὸ ὕψος λόγος, ὡς 1 πρὸς 2. Ἐὰν δ' ἀνάπαλιν τοῦ ὕψους ἀντὶ μέτρου ληφθέντος, ζητηθῇ ποσάκις τῷ πλάτει ἐκεῖνο ἐμπεριείληπται, εὑρεθήσεται ὁ λόγος, ὡς 2 πρὸς 1.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 465. Ἡγούμενον τοῦ λόγου Α πρὸς Β ἐστὶν ὁ πρῶτος τῶν ἀλλήλαις παραβαλλομένων ποσοτήτων ὅρος Α· Ἑπόμενον δὲ, ὁ δεύτερος Β.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 466. Τὸν, ὃν ποσότης πρὸς ποσότητα ἔχει λόγον, ὁμογενὴς δηλαδὴ πρὸς ὁμογενῆ, οἷον Α πρὸς Β, διαιρέσει παριστάνομεν τοῦ ἡγουμένου διὰ τοῦ ἑπομένου, ἢ καὶ ἐν εἴδει γράφοντες κλάσματος (§. 158.) ὡς $\frac{A}{B}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 467. Ἄρα κἀν τοῖς κλάσμασιν, ἡ τοῦ ἀριθμητοῦ πρὸς τὸν αὐτοῦ παρονομαστὴν ἀναφορὰ, ὡσαύτως λόγος ἀποκαλεῖται· ἄνευ γὰρ τρίτου τινὸς διακρίνεται (§. 159.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 468. Αἱ ὁμογενεῖς τοίνυν ποσότητες ἀλλήλαις παραβαλλόμεναι, ἢ ἀλλήλων ὑπερέχουσιν, ἢ ἀλλήλας μέρει τινὶ ὡρισμένῳ ἐμπεριλαμβάνουσιν. Ἔνθεντοι δυεῖν ποσοτήτων τὸν λόγον αἰτοῦσι προσδιορίσαι κατάδηλον γίνεται, ὅσον θατέρα θατέρας ὑπερέχει, ἢ ποσάκις θατέρα τῇ ἑτέρᾳ ἐμπεριείληπται· οἷον ἐπὶ 7 πρὸς 5, 7 μεῖζον ἐστὶ τοῦ 5 κατὰ τὸν 2, κἀνάπαλιν 5 ἔλαττον τοῦ 7 κατὰ τὸν 2· ὅπερ διὰ τῆς ἀφαιρέσεως δηλοῦται, οἷον 5 — 7, ἢ 7 — 5, καὶ ἐν γένει A — B, ἢ B — A. Πόῤῥω ἐπὶ 8 πρὸς 2, 8 τετράκις μεῖζον ἐστὶ τοῦ 2, 2 δὲ τετράκις ἔλαττον τοῦ 8, ὅπερ αὖθις διὰ τῆς τοῦ ἡγουμένου διὰ τοῦ ἑπομένου διαιρέσεως σαφὲς καθίσταται (§. 466.), ἤτοι 8 : 2, ἢ 2 : 8, καὶ ἐν γένει A : B, ἢ B : A. Καλεῖται δὲ ἐκεῖνο μὲν διαφορά, τοῦτο δὲ πηλίκον, ὡς ἐχομένως ἐν οἰκείοις τόποις ἕκαστον ἐκ περιουσίας κατάδηλον ἔσται. Κἀντεῦθεν ἕπεται τὴν τῶν λόγων διαίρεσιν διττὴν εἶναι, Ἀριθμητικήν τε καὶ Γεωμετρικήν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 469. Ἐπεὶ τοίνυν τῷ αὐτῷ τρόπῳ τὸ A πρὸς τὸ B παραβληθῆναι ἔχει, ὡς τὸ B πρὸς τὸ A (§. 468.), Εὔδηλόν ἐστιν ἔν τινι λόγῳ, ἐκ δυεῖν ποσοτήτων ὁποιανοῦν ἀντ' ἡγουμένου, ἢ ἑπομένου ἀδιαφόρως λαμβάνεσθαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Καὶ ὁ μὲν Βόλφιος τὸν Λόγον οὕτως ὁρίζεται (α)· Λόγος ἐστὶν ἐκείνη τῶν ὁμογενῶν ἡ σχέσις καὶ ἀναφορά, ἡ τὴν θατέρου ποσότητα ἐκ τῆς θατέρου ὁρίζουσα, ἄνευ τρίτου προσλημμένου ὁμογενοῦς. Ὁ δ' Εὐκλείδης (β), δύω μεγεθῶν ὁμογενῶν κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιάν σχέσιν. Ἀλλ' οὗτος ὁ ὁρισμὸς ἐστὶν ἀτελής. Δίδονται γὰρ καὶ ἄλλαι τῶν μεγεθῶν τινες σχέσεις, αἳ σταθεραὶ μέν εἰσι καὶ ἄτρεπτοι, οὐμὴν δὲ ἐν τῷ τῶν λόγων ἀριθμῷ περιέχόμεναι. Τοιαύτη ἐστὶν ἡ τοῦ ὀρθοῦ ἡμιτόνου πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος ἐν τῇ Τριγωνομετρίᾳ. Τέλειον δὲ τὸν ὁρισμὸν καὶ συμπλήρη ἀπέδωκεν ὁ περικλεέστατος ἀνὴρ Λεϊβνίτιος, ᾧτινι καὶ Βόλφιος παρηκολούθηκε. Καὶ μήν γε τῆς τοῦ Εὐκλείδου ὁρισμοῦ ἐπιδιορθώσεως ἐπειράσατο καὶ ὁ περίπυστος Ὡββέσιος (α), ἀλλ' ἀτυχῶς. Ὁριζομένου γὰρ αὐτοῦ τὸν λόγον μεγέθους πρὸς μέγεθος διαφοράν, ὁ τούτου ὁρισμὸς οὐ μόνον, ὅπερ καὶ ὁ Εὐκλείδειος ἴσχει ἐλάττωμα, ὅτι δηλαδὴ τῆς ἀναφορᾶς τὸ εἶδος οὐ διορίζεται· ἀλλ' ἔτι κἀν τούτῳ ἡμάρτηται, ὅτι οὐκ ἐμφαίνει τὸ τῶν δυναμένων λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγεθῶν εἶδος.

(α) C. Wolfius in Elem. Arithm. C. III. §. 117. Tom. I. Elementorum Matheseos Universae.

(β) Βιβ. Ε'. τῶν Στοιχείων ὅρῳ δ'.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 470. Λόγος Ἀριθμητικός ἐστι σχέσις, ἐν τῇ τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἑπόμενον, ἢ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἡγούμενον διαφορᾷ κειμένη.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 471. Διαφορὰ καλείσθω τὸ κοινῶς ὑπόλοιπον προσαγορευόμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 472. Ὥσπερ γὰρ πρὸς τὴν τοῦ ὑπολοίπου εὑ-

(α) Hobbesius in Tractatu de principiis et ratiocinatione Geometrarum, C. II. p. 22.

ρεσιν (§. 89.)· οὕτω καὶ πρὸς τὴν τῆς διαφορᾶς τό, τε ὅλον καὶ τὸ μέρος παρεῖναι δέον. Οὐδὲν ἄρα διαφέρει, ἢ ὁ ἡγούμενος τοῦ ἑπομένου, ἢ ὁ ἑπόμενος τοῦ ἡγουμένου ἀφαιροῖτο (§. 468. 469.).

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 473. Σημεῖον Λόγου Ἀριθμητικοῦ ἔστω τὸ μονόστιγμον (.), ὅπερ ἢ διὰ τῆς Πρὸς, ἢ διὰ τοῦ Διαφέρει ἐκφραζέσθω· οἷον Α . Β, Γ . Δ, 5 . 2, 7 . 3, κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 474. Ἐὰν δυοῖν Ἀριθμητικῶν λόγων αἱ διαφοραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, οἱ λόγοι ἐκεῖνοι ἴσοι εἶναι λέγονται· οἷον ἐπεὶ ἡ τοῦ 1 ἀριθμοῦ ὑπεροχὴ ὑπὲρ τὸν 4, ἡ αὐτὴ τῇ τοῦ ἀριθμοῦ 2 ὑπὲρ τὸν 5, τουτέστι 3, φανερὸν τὸν Ἀριθμητικὸν λόγον 1 . 4 τὸν αὐτὸν εἶναι τῷ 2 . 5· Ἔνθεντοι ἡ τοῦ Ἀριθμητικοῦ λόγου δύναμις ἰσοῦται τῷ ἐκ τῆς τοῦ ἑπομένου ἀπὸ τοῦ ἡγουμένου ἀφαιρέσεως ἐκκύπτοντι ὑπολοίπῳ (§. 468.).

ΛΗΜΜΑ.

§. 475. Ἐπὶ Ἀριθμητικοῦ οἱουδηποτοῦν Λόγου τὸ ἑπόμενον ἰσοῦται τῷ ἡγουμένῳ, προσθέσει, ἢ ἐλλείψει τῆς μεταξὺ τῶν ὅρων θεωρουμένης διαφορᾶς. Προσθέσει μὲν, ἐὰν τὸ ἡγούμενον ἔλαττον ᾖ τοῦ ἑπομένου· Ἐλλείψει δὲ, ἐὰν μεῖζον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ τοῦ Ἀριθμητικοῦ Λόγου 8 . 2, οὗ ἡ διαφορὰ 6, εὔδηλόν ἐστι τὸ ἑπόμενον 2 ἐξισοῦσθαι τῷ ἡγουμένῳ 8, πλὴν τῆς διαφορᾶς 6, ἤτοι $2 = 8 - 6$. Ὡσαύτως κἂν τῷ Ἀριθμητικῷ Λόγῳ 2 . 8, οὗ ἡ διαφορὰ 6, τὸ ἑπόμενον 8 ἐξισωθήσεται τῷ ἡγουμένῳ 2, σὺν τῇ διαφορᾷ 6, τουτέστιν $8 = 2 + 6$. Ἄρα ἐπὶ δυοῖν τινων ὅρων Α . Β Λόγου τινὸς Ἀριθμητικοῦ, διαφορὰν πλουτούντων Δ, ἔσται ἐκ τῶν τεθέντων $Β = Α + Δ$, καὶ $Β = Α - Δ$, κατὰ τὸ μεῖζον δηλαδὴ ἢ ἔλαττον τοῦ Α . Β· ἤτοι ἐν γένει $Β = Α \pm Δ$. Ο. Ε. Δ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 476. Λόγος Γεωμετρικός ἐστι σχέσις, ἐν τῷ τοῦ ἡγουμένου διὰ τῆς τοῦ ἑπομένου διαιρέσεως, ἢ τοῦ ἑπομένου διὰ τῆς τοῦ ἡγουμένου, ἐκκύπτοντι πηλίκῳ, θεωρουμένη.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 477. Πηλίκον ἐν τῷ Γεωμετρικῷ Λόγῳ, τὸ ἐξ οὗ οἱ λόγοι συνονοῦνται μόριον, ἤτοι ὁ τοῦ λόγου ἐκθέτης καλείσθω.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 478. Ἐκθέτης Γεωμετρικοῦ Λόγου ἐστὶ, τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἡγουμένου διὰ τοῦ ἑπομένου ἐκκύπτον πηλίκον· οἷον τοῦ μὲν 3 πρὸς 2 ὁ $1\frac{1}{2}$, τοῦ δὲ 2 πρὸς 3 ὁ $\frac{2}{3}$· καὶ ἐν γένει τοῦ Α πρὸς Β τὸ $\frac{Α}{Β}$, καὶ Α πρὸς ΑΜ, τὸ Μ. Καλεῖται δὲ καὶ Παρωνυμῶν, ἀφ' οὗ δηλαδὴ ὁ λόγος παρονομάζεται, καὶ μὴν καὶ Ὄνομα τοῦ Λόγου καὶ Ἑρμηνεύς.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐκθέτης, καὶ Πηλίκον ἢ Παρωνυμῶν Φωναὶ τοῖς Συγγραφεῦσι συνώνυμαι καθεστήκασιν· Ἄλλως μὲν γὰρ τὸ τοῦ Ἐκθέτου ὄνομα παρὰ τοῖς Ἀρχαίοις, ἄλλως δὲ παρὰ τοῖς Νεωτέροις ὁριζόμενον ἐξεδέχετο. Ἡμεῖς ἀλλ' οὖν ἐνταῦθα (§. 478.) τοὔνομα κατὰ τοὺς Ἀρχαίους ὁρισμῷ ὑπηγάγομεν, οἷα δὴ τὴν τῶν λόγων φύσιν σαφέστερον οὕτω διερμηνεῦον, καὶ πρὸς τὴν τῶν ἀποδείξεων χρῆσιν λυσιτελέστερον. Τοῦ γάρτοι λόγου 2 πρὸς 3, τοῦ ἐκθέτου $\frac{2}{3}$ τεθέντος, αὐτόθεν δηλοῦται τὸ ἡγούμενον δυσὶ τριτημορίοις ἐξισοῦσθαι τοῦ ἑπομένου· ἔνθεντοι τὸ τοῦ ἑπομένου τριτημόριον, ὡς μέτρον ἀμφοτέρων ληφθήσεται, ἤτοι τό, τε ἡγούμενον καὶ τὸ ἑπόμενον καταμετρήσει (§. 25.). Κἀντεῦθεν οὕτω σαφέστερον ἡ τοῦ τοιούτου λόγου φύσις διαγνωρίζεται, ἢ εἴπερ συνῳδά τισι τῶν Νεωτέρων εἴποις, τὸν ἐκθέτην εἶναι $1\frac{1}{2}$, ὅπερ δηλοῖ τὸ ἡγούμενον τῷ ἑπομένῳ $1\frac{1}{2}$ ἐμπεριέχεσθαι. Οἱ γὰρ Νεώτεροι τὸν τοῦ λόγου Ἐκθέτην τῷ αὐτῷ τρόπῳ, ᾧ τινι καὶ τὸν τοῦ λόγου Παρονομαστὴν ὁριζόμενοι, τουτέστι πηλίκον ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ μείζονος ὅρου διὰ τοῦ ἐλάττονος ἐκκύπτον, τὸν αὐτὸν ὑποτιθέασιν ἐκθέτην τῶν λόγων τῆς τε μείζονος καὶ ἐλάττονος ἀνισότητος· ὥστε οὕτω τουτὶ τοὔνομα ἐν ταῖς Ἀναλυτικαῖς δείξεσιν μάλα συνῳδὸν προσφυῶς ἐκλαμβάνεσθαι· καθ' ὃν δὴ λόγον καὐτοὶ ἀντὶ ἐκ-

θέτου τὸν τοῦ λόγου Παρονομαστὴν, ἤτοι τὸ Πηλίκον ἐκλαμβάνομεν· ὡς ἐν τοῖς ἐφεξῆς τουτὶ ἀριδήλως ἐξιχνευθήσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 479. Ὥσπερ γὰρ πρὸς τὴν τοῦ πηλίκου εὕρεσιν (§. 122.), οὕτω καὶ πρὸς τὴν τοῦ ἐκθέτου δέον παρεῖναι τόν τε διαιρέτην καὶ τὸν διαιρετέον· ὥστε ταυτὸν εἶναι, ἢ τὸ ἑπόμενον διὰ τοῦ ἡγουμένου, ἢ τὸ ἡγούμενον διὰ τοῦ ἑπομένου διαιροῖτο (§. 469.). Ἐξ οὗ ἕπεται τὴν τοῦ Γεωμετρικοῦ λόγου δύναμιν ἰσοῦσθαι τῷ ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἡγουμένου διὰ τοῦ ἑπομένου ἐκκύπτοντι πηλίκῳ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Εἰ καὶ ἐν γένει οὐδὲν διενήνοχε τὸ ἡγούμενον διὰ τοῦ ἑπομένου, ἢ τὸ ἑπόμενον διὰ τοῦ ἡγουμένου, ὅπως πότ' ἂν εἴη, ἐπί τινων περιστάσεων διαιρεῖν (§. 479.). Ἀλλ' οὖν κυρίως ἀείποτε τὸ ἡγούμενον διὰ τοῦ ἑπομένου διαιρείσθω (§. 466.), οὐμὴν δ' ἀνάπαλιν· ἐπὶ γὰρ 2 πρὸς 3 οὐ ταυτὸν $\frac{2}{3}$ καὶ $1\frac{1}{2}$, ἔστι γὰρ $1\frac{1}{2} > \frac{2}{3}$.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 480. Σημεῖον Γεωμετρικοῦ Λόγου ἔστω τὸ δίστιγμον (:) (§. 127.), ὅπερ διὰ τῆς Πρὸς προφερέσθω· οἷον Α:Β, Γ:Δ, 2:3, 5:9· ἢ καὶ ἐν εἴδει κλάσματος γραφέσθω $\frac{Α}{Β}$, $\frac{Γ}{Δ}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{9}$.

ΛΗΜΜΑ.

§. 481. Ἐπὶ τῶν Γεωμετρικῶν Λόγων τὸ

ἑπόμενον ἐξισοῦται τῷ ἡγουμένῳ, διαιρεθέντι διὰ τοῦ κατὰ τὸν λόγον πηλίκου.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ τοῦ Γεωμετρικοῦ λόγου $12 : 4$, ἢ $\frac{12}{4}$, οὗ ὁ ἐκθέτης 3, ἔσται τὸ ἑπόμενον $4 = \frac{12}{3}$· ὡσαύτως ἐπὶ τοῦ $4 : 12$, ἢ $\frac{4}{12}$, οὗ ὁ ἐκθέτης $\frac{1}{3}$, ἔσται τὸ ἑπόμενον $12 = 4$ διαιρουμένῳ διὰ τοῦ $\frac{1}{3}$, ἤτοι $12 = \frac{4}{\frac{1}{3}} = \frac{4 \cdot 3}{1}$ (§. 189.) $= 4 \times 3 = 12$. Ὁ γὰρ Γεωμετρικὸς λόγος οὐδὲν ἐστὶν ἄλλο, ὅτι μὴ διαίρεσις (§. 476.)· ἐπὶ δὲ τῆς διαιρέσεως, ὁ διαιρέτης ἐξισοῦται τῷ διαιρετέῳ διαιρουμένῳ διὰ τοῦ πηλίκου (§. 135.)· ἄρα κἀνταῦθα, τὸ ἑπόμενον ἐξισοῦται, κτλ. Ὥστε κατὰ γένος τεθέντος τοῦ μὲν ἡγουμένου $=$ Α, τοῦ δὲ πηλίκου $= \frac{1}{\Pi}$, ἔσται τὸ ἑπόμενον $=$ ΑΠ, ἤτοι Α : ΑΠ. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 482. Ἐὰν δυοῖν Γεωμετρικῶν λόγων τὰ ἡγούμενα πρὸς τὰ ἑαυτῶν ἑπόμενα ἐν τῷ αὐτῷ εἰσὶ λόγῳ, ἤτοι ἐὰν τὰ τούτων πηλίκα ἴσα ὦσιν, ἕπεται καὶ τοὺς λόγους ὡσαύτως ἰσοῦσθαι. Οἷον ἐπεὶ ὁ 2 τοσάκις τῷ 4 ἐμπεριείληπται, ὁσάκις ὁ 5 τῷ 10· ὅ, τε τοῦ λόγου $2 : 4$ ἐκθέτης, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ $5 : 10$· ἕπεται τούτους ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι Γεωμετρικῷ λόγῳ, ἤτοι ἀλλήλοις ἴσους· οἷον $2 : 4 = 5 : 10$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 483. Εἰ μὲν οὖν τὸ ἑπόμενον μονὰς εἴη, ἐκθέτης τοῦ λόγου ἔσται τὸ ἡγούμενον· οἷον $4 : 1 = 4$· εἰ δὲ τὸ ἡγούμενον μονὰς, ἐκθέτης τοῦ λόγου κλάσμα, οὗ

ἀριθμητὴς μὲν ἡ μονὰς, παρονομαστὴς δὲ τὸ ἑπόμενον· οἷον $1 : 4 = \frac{1}{4}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 484. Ἔστιν ἄρα ὁ τοῦ λόγου ἐκθέτης πρὸς τὴν μονάδα, ὡς τὸ ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον (§. 126.). Κἀνάπαλιν ἡ μονὰς πρὸς τὸν ἐκθέτην, ὡς τὸ ἑπόμενον πρὸς τὸ ἡγούμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 485. Τὸ κλάσμα ἄρα $\frac{3}{4} = 3 : 4$ (§. 467.). Ἐπεὶ γὰρ κλάσμα ὁποιονοῦν, τὸ ἐκ τῆς τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ διαιρέσεως ἐμφαίνει πηλίκον (§. 158.), τὸ αὐτὸ ἑπομένως τὸν τοῦ λόγου δηλώσει ἐκθέτην, ὃν ὁ ἀριθμητὴς πρὸς τὸν παρονομαστὴν ἔχει (§. 478.).

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 486. Λόγος Ἰσότητός ἐστιν, ὃν δύω τινὰ ὁμογενῆ πρὸς ἄλληλα ἔχουσιν· οἷον $8 - 2$ πρὸς 6, $6 + 9$ πρὸς 15, $15 - 3$ πρὸς 12.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 487. Λόγοι Ἴσοι τε καὶ Ὅμοιοι, ὧν οἱ ἐκθέται οἱ αὐτοί· οἷον $2 : 6$ καὶ $3 : 9$. Μείζων δὲ λόγος, οὗ ὁ ἐκθέτης μείζων· οἷον ἐπεὶ Α : Β $>$ Γ : Δ, ἔσται καὶ $\frac{\text{Α}}{\text{Β}} > \frac{\text{Γ}}{\text{Δ}}$, ἤτοι $4 : 2 > 3 : 2$, ἄρα $2 > 1\frac{1}{2}$. Ἐλάσσων, οὗπερ ἐλάσσων· καὶ γὰρ $2 : 4 < 3 : 4$, ὡς ὄντος $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 488. Ὁ μὲν οὖν ἐκθέτης τῶν κατ᾽ ἰσότητα λόγων μονάς, $2:2=1$· ὁ δὲ τῶν καθ' ὑπεροχὴν μονάδος μείζων $3:2=1\frac{1}{2}$· ὁ δὲ τῶν κατ' ἔλλειψιν μονάδος ἐλάσσων $2:3=\frac{2}{3}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 489. Ἐν τῷ αὐτῷ Λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, ἑκατέρου ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ληφθέντα κατάλληλα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐχέτω δὴ Α πρὸς Β τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν Γ πρὸς Δ. Ἔστω δὲ τὸ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ πολλαπλάσιον ἐν λόγῳ ὡρισμένῳ· ἤτοι Γ ἢ μεῖζον ἔστω τοῦ Δ, ἢ ἔλαττον, ἢ ἴσον. Ὡσαύτως καὶ τὸ τοῦ Α πρὸς τὸ Β πολλαπλάσιον ἐν λόγῳ ἔστω ὡρισμένῳ· τουτέστιν, ἢ ἐν μείζονι, ἢ ἐν ἐλάσσονι, ἢ ἐν ἴσῳ. Ληφθήτω δὴ ἀριθμὸς ὁ Ε καὶ πολλαπλασιασθήτω δι' αὐτοῦ Α καὶ Γ, ὁμοίως καὶ ἕτερος ὁ Ζ καὶ πολλαπλασιασθήτω ὡσαύτως δι' αὐτοῦ Β καὶ Δ. Φημὶ τοίνυν καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, ἑκατέρου ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ληφθέντα κατάλληλα. Ἐὰν γὰρ μὴ οὕτως, ἀλλ' ἄλλως πως ἐκκύψῃ, ἔσται τότε τοὐναντίον τῆς προτεθείσης ὑποθέσεως· ὅπερ ἄτοπον. Ληφθήτωσαν ἀλλ' οὖν πρὸς μείζονα σαφήνειαν, ἀντὶ τῶν στοιχείων οἱ ἀριθμοὶ, καὶ γενέσθω $A=3$, $B=2$, $\Gamma=6$, $\Delta=4$· $E=4$,

ἢ 6, ἢ 3, $Z=7$, ἢ 9, ἢ 2. Ἔσται ἄρα κατὰ τὰ τεθέντα.

$3:2=6:4$	$3:2=6:4$	$3:2=6:4$
$4\ \ 7\ \ \ 4\ \ 7$	$6\ \ 9\ \ \ 6\ \ 9$	$3\ \ 2\ \ \ 3\ \ 2$
$12:14=24:28$	$18:18=36:36$	$9:4=18:8$

Ἐν μὲν τοίνυν τῇ πρώτῃ περιστάσει, ὥσπερ τὸ τετραπλοῦν τῶν 3, ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἑπταπλασίου τῶν 2· οὕτω καὶ τὸ τετραπλοῦν τῶν 6, ἔλαττον τοῦ τῶν 4 ἑπταπλασίου. Ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ, ὡς τὸ ἑξαπλοῦν τῶν 3, ἴσον ἐστὶ τῷ τῶν 2 ἐννεαπλασίῳ· οὕτω καὶ τὸ ἑξαπλοῦν τῶν 6 ἴσον τῷ τῶν 4 ἐννεαπλασίῳ. Κἂν τῇ τρίτῃ, ὡς τὸ τριπλοῦν τῶν 3, ὑπερέχει τοῦ τῶν 2 διπλασίου· οὕτω καὶ τὸ τοῦ 6 τριπλοῦν τοῦ τῶν 4 διπλασίου. Ἔστι δὲ ὁ Ὁρισμὸς Εὐκλείδειος (α), ὃς δὴ μᾶλλον Θεωρήματος τάξιν ἔχειν δίκαιος, ὡς εὔδηλον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 490. Λόγος Ὀρθός ἐστιν ἐν ᾧ οἱ ἐκθέται τῷ αὐτῷ λόγῳ ἀπ' εὐθείας ἐκκύπτουσιν· οἷον $2:4$, $5:10$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 491. Ἡγούμενον δὲ ἡγουμένῳ παρεξετάζοντες, καὶ ἑπόμενον ἑπομένῳ, τὸν Ἐναλλὰξ ἔχομεν Λόγον, οἷον ἐκ τῶν $3:2$ καὶ $6:4$ ἔσται $3:6$ ὡς $2:4$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁ δ' Εὐκλείδης (β) οὕτως αὐτὸν ὡρίσατο. Ἐναλ-

(α) Βιβ. Ε'. τῶν Στοιχείων, ὅρ. ε'.

(β) Βιβ. Ε'. ὅρ. ιγ'.

λαξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 492. Λόγος Σύνθετός ἐστιν, ὁ ἐκ τοῦ τῶν ἡγουμένων ἐπὶ τὰ ἡγούμενα, τῶν τε ἑπομένων ἐπὶ τὰ ἑπόμενα πολλαπλασιασμοῦ πολλῶν λόγων συγκείμενος· οἷον ἐὰν ὦσιν Α:Β, Γ:Δ, Ε:Ζ, ἔσται ΑΓΕ:ΒΔΖ· κἂν ἀριθμοῖς 1:3, 2:5, 7:9, ἤτοι 14:135. Συντιθέντες δὲ λόγοι εἰσίν, οἱ ἐκ τοῦ αὐτῶν πολλαπλασιασμοῦ τὸν Σύνθετον ἀποτελοῦντες λόγον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 493. Ἡ τοῦ ἡγουμένου προσθέσει τοῦ ἑπομένου, πρὸς τὸ ἴδιον ἑπόμενον ἀναφορά, ἐν Συνθέσει ἀπ' εὐθείας ἀκούει Λόγος. Ἡ δὲ τοῦ ἡγουμένου σὺν τῷ ἑπομένῳ, ὑφ' ἕν, τῷ ἡγουμένῳ παράθεσις, ἐν Συνθέσει ἀνάπαλιν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁ δ' Εὐκλείδης (α) οὕτω. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνός, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 494. Ὁμόλογοι λόγοι εἰσίν, οὓς ἔχουσι τὰ ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, καὶ τὰ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις· οἷον 12:6 ὡς 8:4.

(α) Βιβ. Ε'. ὅρῳ ιε'.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 495. Ἕπεται τοίνυν τὸ μὲν τῶν λόγων κεφάλαιον, ἐκ τοῦ τῶν ἐκθετῶν γνωρίσματος διακρίνεσθαι (§. 237.)· οἷον ἐὰν ᾖ τοῦ μὲν Α:Β ἐκθέτης ὁ Μ, τοῦ δὲ Γ:Δ ὁ Ν, ἔσται τοῦ ἐξ ἐκείνων ἀθροίσματος ἐκθέτης ὁ Μ+Ν· ἤτοι 8:2 καὶ 16:2, ἔσται ἐκθέτης 4+8. Τὴν δὲ διαφορὰν τῶν λόγων, ἐκ τῆς τῶν ἐκθετῶν γνωρίζεσθαι ἀφαιρέσεως (§. 236.) οἷον τοῦ Α:Β καὶ Γ:Δ ἡ διαφορὰ ἐκθέτην ἕξει Μ—Ν· ὡς καὶ τὸ πηλίκον ἐκ τῆς τῶν ἐκθετῶν διαιρέσεως $\frac{M}{N}$, ἢ Μ:Ν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 496. Λόγος Λογικὸς ἢ Ῥητὸς λέγεται, ὃν ποσότης λογικὴ πρὸς ἑτέραν λογικὴν ἔχει. Ἄλογος δὲ ὁ ποσότητι ῥητῇ ἀνέκφραστος.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οἷον ἔστωσαν δύω ποσότητες Α καὶ Β, καὶ ἐχέτω Α πρὸς Β λόγον ῥητόν, τουτέστιν ἔστω Α<Β, ὡς 1:2, ἢ 5:7· ἔσται πάντως ὁ λόγος λογικός, ἐὰν ᾖ τὸ ἔλαττον τοσάκις, ὁσάκις ἂν δέξῃ, ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθὲν ἐκείνῳ ἐξισωθῇ, ἢ ἀμφότερα τὰ μέλη ἓν καὶ τὸ αὐτὸ μέρος ἀλλήλοις κοινὸν ἕξουσιν, ὅπερ τοσάκις τὸ ἔλαττον, πλεονάκις δὲ τὸ μεῖζον ἐμπεριλαβόν, ἴσον ἔσται, ἤτοι $A = \frac{5}{7}$ τοῦ Β. Ἄλογος δὲ ἔσται, ἡνίκα οὐ δύναται ῥηθῆναι πηλίκον μέρος τοῦ Β εἴη ἂν τὸ Α, οὔτε δι' ἀριθμῶν ὁλοσχερῶν, οὔτε μὴν κεκλασμένων. Τοιαύτη ἐστὶν Πίν. Α'.
ἡ τοῦ Τετραγώνου ΑΒΓΔ Διαγώνιος ΑΓ. Ἔστι γὰρ Σχ. 7.

αὕτη πρὸς τὴν αὐτῆς πλευρὰν ΑΒ ἀσύμμετρος (§. 28. 203.), καὶ ἑπομένως λόγον ἔχει ἄλογον. Ἔστι γὰρ αὕτη πρὸς τὴν αὐτῆς πλευρὰν ὡς $1:\sqrt{2}$, ὡς ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ δειχθήσεται. Ἔστι δὲ $\sqrt{2}$ τετράγωνον ἀτελὲς (§. 378. 379.)· ἀδύνατον γὰρ τούτου τὴν ῥίζαν δι' ἀριθμῶν ὁλοσχερῶν, ἢ κεκλασμένων προσδιορίσαι. Διέλαβε δὲ κατὰ πλάτος καὶ Εὐκλείδης (α) περὶ τῆς τοῦ Τετραγώνου Διαμέτρου, ἀσυμμέτρου τῷ τῆς πλευρᾶς οὔσης μήκει.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 497. Ἄρα $4:\sqrt{3}$, $\sqrt{5}:8$, κτλ. λόγοι πεφύκασιν ἄλογοι· οὐδεὶς γὰρ ἀριθμὸς, εἴτε ὁλοσχερὴς, εἴτε γοῦν κλασματίας εὑρεθῆναι ἔχει, ὃς ἂν ἐπιβάλλον ἀκριβῶς ἐκ $\frac{\sqrt{3}}{4}$, ἢ $\frac{8}{\sqrt{5}}$ παρασταίη (§. 378.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ῥητὸς μὲν λόγος καθ' Ἕλληνας λέγεται (β), κατὰ δὲ Λατίνους Λογικός (γ). Ἄλογος δὲ παρ' ἑκατέροις. Ὤφειλον οὖν οἱ Ἕλληνες λέγειν ῥητὸν καὶ ἄῤῥητον, ἢ λογικὸν καὶ ἄλογον, οὐμὴν δὲ ῥητὸν καὶ ἄλογον. Ἀλλ' ἴσως φειδοῖ τοῦ Λογικὸς ὀνόματος, ὅπερ ἐπὶ τῶν ἀνθρώπων μόνων, ὡς τὴν λογικὴν δύναμιν πλουτούντων, ἔλεγον· καὶ τοῦ Ἄῤῥητος, ὅπερ ἐπὶ τῶν μυστηρίων δῶν μόνον καὶ ὑπερφυῶν. Ἡμῖν δὲ οὐδὲν κωλύσει καθ'

(α) Βιβ. ι'. Προτάσει ριθ'.
(β) Αὐτόθι ὅρ. ε'. ἄχρι ι'.
(γ) Ratio Rationalis, et Ratio Irrationalis.

ἑκατέρους τῶν τρόπων ταῦτα ὀνομάζειν, τὴν ἔννοιαν μόνην ὀρθῶς τοῦ νοουμένου πράγματος ἐκλαμβάνουσιν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 498. Λόγος Ἀνισότητός ἐστιν, ὃν δύω ἄνισα μεγέθη πρὸς ἄλληλα ἔχουσιν· οἷον 1:2, 2:3, 14:15.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 499. Αἱ γὰρ Ὁμογενεῖς Ποσότητες πρὸς ἀλλήλας ἀναφερόμεναι, ἢ ἴσαι εἰσὶν (§. 487.), ἢ ἄνισοι (§. 498.)· ἄρα διττῶς θεωρεῖσθαι ἔχουσιν (§. 81.). Ἔνθεντοι οὐκ ἀπόχρη μόνον τὸν μείζονα ἢ ἐλάττονα προσδιορισμὸν δυεῖν ποσοτήτων, καθ' ὃν θατέρα θατέρας ὑπερέχει, ἢ θατέρας ἐλλείπει, εἰδέναι· ἀλλ' ἔτι καὶ τὸν λόγον, ἤτοι ποσάκις ἡ μείζων τὴν ἐλάττω ὑπερέσχεν, ἢ αὐτῆς διενήνοχεν, ἀκριβῶς ἐρευνᾷν ἐπάναγκες.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 500. Ἐὰν τοίνυν οἱ ὅροι τοῦ λόγου ἄνισοι ὦσιν, ἢ ὁ ἐλάσσων ἀναφέρεται πρὸς τὸν μείζονα, ἢ ὁ μείζων πρὸς τὸν ἐλάσσονα (§. 34. 36.)· ὁ μὲν δηλαδὴ ἐλάσσων πρὸς τὸν μείζονα, ὡς μέρος πρὸς ὅλον· ὁ δὲ μείζων πρὸς τὸν ἐλάσσονα, ὡς ὅλον πρὸς μέρος (§. 72.). Καὶ δὴ ὁ λόγος προσδιορίζει ποσάκις τὸ ἔλαττον ἐν τῷ μείζονι περιέχεται, ἢ ποσάκις τὸ μεῖζον ἐμπεριέχει τὸ ἔλαττον (§. 468.), τουτέστι πόσῳ τοῦ μείζονος μέρει τὸ ἔλαττον ἐξισοῦται, τοῦθ' ὅπερ ἡ διαίρεσις δείκνυσι (§. 466.).

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 501. Λόγος μὲν Μείζονος ἀνισότητός ἐστιν, ὃν ἔχει τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττον, οἷον 5:3, 12:7· Ἐλάττονος δὲ, ὃν ἔχει τὸ ἔλαττον πρὸς τὸ μεῖζον, οἷον 3:5, κτλ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 502. Ἐν Διαιρέσει λόγος ἀκούει, ἡνίκα τὴν τοῦ ἡγουμένου ὑπὲρ τὸ ἑπόμενον ὑπεροχὴν, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον παραβάλλομεν· οἷον 16 — 12, 12 — 3, 8 — 2· Ἐν Διαιρέσει δ' ἀνάπαλιν τὴν αὐτὴν ὑπεροχὴν πρὸς τὸ ἡγούμενον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁ δ' Εὐκλείδης οὕτω (α). Διαίρεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 503. Δι' ἴσου τεταγμένος λόγος ἐστὶν, εἰ πρῶτον πρὸς δεύτερον, ὡς πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ δεύτερον πρὸς τρίτον, ὡς δεύτερον πρὸς τρίτον· ἔσται καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὡς τρίτον πρὸς τέταρτον ἐν δυσὶν ὅρων ἐκθέσεσιν· οἷον ἐὰν ᾖ 3:6 ὡς 4:8, καὶ 6:9 ὡς 8:12, ἔσται καὶ 3:9 ὡς 4:12.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁ δ' Εὐκλείδειος Ὁρισμὸς οὕτως ἔχει (β)· Δι' ἴσου λόγος ἐστὶ πλειόνων ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος σὺν δύω λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐ-

(α) Βιβ. Ε'. ὅρ. ιϛ'.
(β) Αὐτ. ὅρ. ιη'.

τῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. Ἢ ἄλλως. Λῆψις τῶν ἄκρων, καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 504. Δι' ἴσου τεταραγμένος λόγος ἐστὶν, ἐὰν ᾖ ὁ παραλήγων πρὸς τὸν ἔσχατον ὅρον τῶν ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἐκθέσεων, ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον τῶν ἐν τῇ θατέρᾳ· οἷον ἐὰν ᾖ 3:6 ὡς 8:16, 6:4 ὡς 12:8, ἔσται καὶ 3:4 ὡς 12:8.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 505. Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου, πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον· οἷον Α:Β καὶ Γ:Δ, ἔσται Β:Α ὡς Δ:Γ· ἤτοι 3:5 κἀνάπαλιν 5:3.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 506. Ἀναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου· οἷον ἐπὶ τῶν 9:3 ἔσται κατ' ἀναστροφὴν 9:6.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 507. Λόγος Ἀντίστροφος ἐστὶν, ἐν ᾧ οἱ ἐκθέται τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἀλλ' οὖν ἀντεστραμμένως ἐκκύπτουσιν· οἷον 2:4 καὶ 8:4.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἀντιξόως πως τῷ ἀπ' εὐθείας λόγῳ (§. 499), τελεῖται ὁ ἀντίστροφος· ἐκεῖ μὲν γὰρ οἱ ἴσοι ἐκθέται τῇ αὐτῇ τῆς πράξεως τάξει ἐκλαμβάνονται, ἤτοι διὰ τῆς τοῦ ἡγουμένου ἐπὶ τὸν ἑπόμενον διαιρέσεως (§. 478.). Ἐνταῦθα δὲ, ἐν μὲν τῷ πρώτῳ ὅρῳ, ὁ ἡγούμενος διὰ τοῦ ἑπομένου διαιρεῖται, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ, ὁ ἑπόμενος διὰ τοῦ ἡγουμένου· ὥστε οἱ τούτων τῶν δυοῖν λόγων ὅροι, ἐν τῷ αὐτῷ μὲν λόγῳ 4 λέγονται εἶναι, καὶ γὰρ ὁ αὐτὸς ἑκατέρων ἐκθέτης 2, ἀντεστραμμένως δέ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 508. Λόγον ἀντίστροφον, ἀπ' εὐθείας ποιῆσαι.

ΛΥΣΙΣ.

Ἀντεστράφθω ὁ ἀντίστροφος ὅρος, ἔκ τε ἡγουμένου γενέσθω ἑπόμενος, καὶ ἐξ ἑπομένου ἡγούμενος. Ἤ, ὅ, τε ἡγούμενος καὶ ὁ ἑπόμενος πρὸς κλάσμα μετενεχθήτωσαν, μονάδος τούτοις ὑπογραφομένης· οἷον $A:AM$, $B:BM$, ἔσται $A:AM = \frac{BM}{1} : \frac{B}{1}$· τῆς γὰρ πράξεως γενομένης ἐν ἀμφοτέροις ὁ αὐτὸς ἐκκύψει ἐκθέτης M (§. 482.).

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 509. Λόγος Πολλαπλάσιος καλεῖται, ὁ ἐς πλῆθος ἐπιμεγεθυνόμενος λόγος, οὗτινος ὁ ἐκ τῆς τοῦ μείζονος ἐπὶ τὸν ἐλάσσονα ὅρον διαιρέσεως ἐκκύπτων ἐκθέτης, ἀριθμὸς ἐστὶν ὁλοσχερής· οἷον 12 : 4. Εἰδικῶς δὲ Διπλάσιος, ἐὰν ὁ ἐκθέτης ᾖ 2· Τριπλάσιος, ἐὰν 3· Τετραπλάσιος, ἐὰν 4· ὥσπερ καὶ Χιλιοπλάσιος, ἐὰν 1000· κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 510. Πολλαπλάσιος τοίνυν λόγος ἀκούει, ὅτε ὁ μείζων τὸν ἐλάττω πλεονάκις περιέχων ἐστιν, οἷον δὶς, τρὶς, κτλ. ὃς καὶ Φερωνύμως ἀπὸ τῆς περιοχῆς διπλάσιος ἤκουσε καὶ τριπλάσιος, κτλ. Ὥστε καὶ τοὺς τῶν Πολλαπλασίων λόγων ἐκθέτας, ἀριθμοὺς εἶναι ὁλοσχερεῖς καθαροὺς, ἤτοι ἀμίκτους· ὡς $2:1=2$, $9:3=3$, κτλ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὴν τοιαύτην τοῦ λόγου ὑπέρβασιν Μέγεθος τοῦ Λόγου, οἱ Μαθηματικοὶ ἀποκαλεῖσθαι ἠξίωσαν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 511. Τοῦ Φθίνοντος λόγου, ἐὰν ὁ ἐλάσσων ὅρος μέρος τοῦ μείζονος καταμετρῇ, ὁ τῆς ἐλάσσονος ἀνισότητος πρὸς τὴν μείζονα λόγος καλεῖται Ὑποπολλαπλάσιος, ὡς $4:12 = \frac{1}{3}$. Εἰδικῶς δὲ, Ὑποδιπλάσιος, ἐὰν ὁ ἐκθέτης ᾖ $\frac{1}{2}$· Ὑποτριπλάσιος, ἐὰν $\frac{1}{3}$· Ὑποτετραπλάσιος, ἐὰν $\frac{1}{4}$· ὥσπερ καὶ Ὑποχιλιοπλάσιος, ἐὰν $\frac{1}{1000}$· κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 512. Οἱ τῶν ὑποπολλαπλασίων ἄρα ἐκθέται ἀριθμοὶ εἰσὶ καθαροὶ κλασματώδεις, ὧν ἀριθμητὴς ἡ μονάς· ὡς $4:8 = \frac{1}{2}$, $3:9 = \frac{1}{3}$· κτλ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 513. Ἐπιμόριος λόγος ἀκούει, οὗ ὁ μείζων τῶν ὅρων τὸν ἐλάσσονα ἅπαξ περιέχει, καὶ μόριόν τι τῶν ἐν αὐτῷ, οἷον $5:4 = 1\frac{1}{4}$. Εἰδικῶς δὲ Ἡμιόλειος, ὅτε ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα ἅπαξ περιέχει, καὶ τούτου προσέτι ἡμίσειαν, ὡς ἐν τῷ $3:2 = 1\frac{1}{2}$· Ἐπίτριτος, ἡνίκα ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα ἅπαξ περιέχει, καὶ τούτου ἔτι τριτημόριον, ὡς ἐν τῷ $4:3 = 1\frac{1}{3}$· ὡσαύτως καὶ Ἐπιτέταρτος, ὡς ἐν τῷ $5:4 = 1\frac{1}{4}$· καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 514. Οἱ τῶν Ἐπιμορίων τοίνυν λόγων ἐκθέται ἀριθμοί εἰσι μικτοὶ ἐκ μονάδος καὶ κλάσματος, οὗ ἀριθμητὴς ἀεὶ μονάς, παρονομαστὴς δὲ μόριόν τι δυαστόν, ἢ τρίτον, ἢ τέταρτον, κτλ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 515. Ὑπεπιμόριος λόγος λέγεται, ἐν ᾧ οἱ ἐκθέται κλασματικοὶ τυγχάνουσι τοὺς ἀριθμητὰς μονάδι ἀεὶ μειουμένους ἔχοντες· ὡς $4:5 = \frac{4}{5}$, $4:6 = \frac{2}{3}$, $6:8 = \frac{3}{4}$, κτλ. Εἰδικῶς δὲ Ὑφημιόλειος, ἐὰν ὁ παρονομαστὴς ᾖ $\frac{2}{3}$, ὡς ἐν τῷ $2:3$· Ὑπεπίτριτος, ἐὰν $\frac{3}{4}$, ὡς ἐν τῷ $3:4$· Ὑπεπιτέταρτος, ἐὰν $\frac{4}{5}$, κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 516. Ἔχει τοίνυν ὁ Ἐπιμόριος λόγος πρὸς τὸν Ὑπεπιμόριον, ὡς ὁ τῆς μείζονος ἀνισότητος πρὸς τὸν τῆς ἐλάττονος (§. 501.)· ὃ δὴ κἀπὶ τῶν λοιπῶν ῥητέον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 517. Ἐπιμερὴς λόγος ἐστίν, ἐν ᾧ ὁ ἐκθέτης ἐκ μονάδος καὶ κλάσματος σύγκειται, οὗ ἀριθμητής, ἀριθμός· οἷον $10:6 = 1\frac{2}{3}$. Εἰδικῶς δὲ Ἐπιδιμερὴς

ἢ Ἐπιδίτριτος, ἐὰν ὁ ἐκθέτης ᾖ $1\frac{2}{3}$, ὡς ἐν τῷ $5:3$· Ἐπιτριμερὴς ἢ Ἐπιτέταρτος, ἐὰν $1\frac{3}{4}$, ὡς ἐν τῷ $7:4$· Ἐπιτετραμερὴς ἢ Ἐπιτετραέβδομος, ἐὰν $1\frac{4}{7}$, ὡς ἐν τῷ $11:7$· κτλ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁ δὲ Τακουέτιος, οὕτω τὸν Ἐπιμερῆ λόγον ὡρίσατο (α). Λόγος Ἐπιμερής ἐστιν, ὅτε ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα τῶν ὅρων ἅπαξ περιέχει, καὶ τούτου μέρη μὴ μόριον συναποτελοῦντα. Τοιοῦτος ὁ λόγος $8:5$, καὶ $14:10$· ὁ γὰρ 8 περιέχει ἅπαξ τὸν 5 καὶ ἔτι πρὸς 3, ἅτινά ἐστι τρία πεμπτημόρια τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 5, ἅπερ ἅμα ληφθέντα μόριον ἓν τοῦ πενταδικοῦ ἀριθμοῦ οὐδαμῶς δίδωσιν· ὡσαύτως δὲ καὶ ὁ 14 περιέχει τὸν 10 ἅπαξ καὶ δὶς 2, τουτέστι δύω πεμπτημόρια τοῦ ἀριθμοῦ 10, ἅττα ἅμα ληφθέντα (ἤτοι 4) ἕν τι μόριον τοῦ 10 ἥκιστα συναποτελεῖ. Προσετέθη γοῦν τὸ μόριον μὴ συναποτελεῖν, εἴη γὰρ ἂν εἴπερ ἄλλως ὁ λόγος Ἐπιμόριος.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 518. Ὑπεπιμερὴς λόγος ἐστίν, οὗ ἐκθέτης κλάσμα ἄμικτον ἀριθμητὴν ἔχων, ἀριθμόν· οἷον $6:10 = \frac{3}{5}$. Εἰδικῶς δὲ Ὑπεπιδιμερὴς ἢ Ὑπεπιδίτριτος, ἐὰν ὁ ἐκθέτης ᾖ $\frac{3}{5}$, ὡς ἐν τῷ $3:5$· Ὑπεπιτριμερὴς ἢ Ὑπεπιτέταρτος, ἐὰν ᾖ $\frac{4}{7}$, ὡς ἐν τῷ $4:7$· Ὑπεπιτετραμερὴς ἢ Ὑπεπιτετραέβδομος, ἐὰν $\frac{7}{11}$· καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως.

(α) Βιβ. Ε'. Μέρει Γ'.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 519. Πολλαπλασιεπιμόριος λόγος καλεῖται, ὁ ἐκθέτην μικτὸν ἐξ ἀριθμοῦ καὶ κλάσματος ἔχων, οὗ ἀριθμητὴς μονάς· οἷον $10 : 4 = 2\frac{1}{2}$. Εἰδικῶς δὲ Διπλασιεφήμισυς, ἐὰν ὁ ἐκθέτης ᾖ $2\frac{1}{2}$, ὡς ἐν τῷ $5:2$· Τριπλασιεπιτέταρτος, ἐὰν $3\frac{1}{4}$, ὡς ἐν τῷ $13:4$· Τετραπλασιεπίτριτος, ἐὰν $4\frac{1}{3}$, ὡς ἐν τῷ $13:3$· Τριπλασιεπίπεμπτος, ἐὰν $3\frac{1}{5}$, ὡς ἐν τῷ $19:5$· κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 520. Ἐπὶ τῶν Πολλαπλασιεπιμορίων ἄρα λόγων, ὁ μείζων ὅρος πλεονάκις, ἢ ἅπαξ ἐν ἑαυτῷ τὸν ἐλάσσονα περιέχει, καὶ προσέτι μόριον αὐτοῦ καταμετροῦν. οἷος ὁ $5:2$, καὶ $10:4$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 521. Ὑποπολλαπλασιεπιμόριος λόγος ἀκούει, ὁ ἐκθέτην πλουτῶν κλασματώδη, οὗ ἀριθμητὴς ἀριθμός· οἷον $4 : 10 = \frac{2}{5}$. Εἰδικῶς δὲ Ὑποδιπλασιεφήμισυς, ἐὰν ὁ ἐκθέτης ᾖ $\frac{2}{5}$, ὡς ἐν τῷ $2:5$· Ὑποδιπλασιεπιτέταρτος, ἐὰν $\frac{4}{9}$, ὡς ἐν τῷ $4:9$· Ὑποτριπλασιεπιτέταρτος, ἐὰν $\frac{4}{13}$, ὡς ἐν τῷ $4:13$ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 522. Πολλαπλασιεπιμερὴς λόγος ἐστίν, ὁ ἐκθέτην μικτὸν ἐξ ἀριθμοῦ καὶ κλάσματος ἔχων, οὗ ἀριθμητὴς ἀριθμός· οἷον $15 : 4 = 3\frac{3}{4}$. Εἰδικῶς δὲ Διπλασιεπιδιμερὴς ἢ Διπλασιεπιδίτριτος, ἐὰν ὁ ἐκθέτης ᾖ $2\frac{2}{3}$, ὡς ἐν τῷ $8:3$· Τριπλασιεπιτετραμερὴς ἢ Τριπλασιεπιτετραέβδομος, ἐὰν τύχῃ $3\frac{4}{7}$, ὡς ἐν τῷ $25:7$· κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 523. Ἐπὶ τῶν πολλαπλασιεπιμερῶν τοίνυν λόγων, ὁ μείζων ὅρος τόν, πρὸς ὃν παραβάλλεται, ἐλάττονα, πλεονάκις, ἢ ἅπαξ περιέχει, καὶ προσέτι μέρη τινὰ αὐτοῦ πλείονα ἑνός, αὐτὸν καταμετροῦντα.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 524. Ὑποπολλαπλασιεπιμερὴς λόγος ἐστίν, οὗπερ ὁ ἐκθέτης κλασματώδης ἐν ἀριθμητῇ ἀριθμῷ· οἷον $4 : 15 = \frac{4}{15}$. Εἰδικῶς δὲ Ὑποδιπλασιεπιδιμερὴς ἢ Ὑποδιπλασιεπιδίτριτος, ἐὰν ὁ ἐκθέτης ᾖ $\frac{3}{8}$, ὡς ἐν τῷ $3:8$· Ὑποτριπλασιεπιτετραμερὴς ἢ Ὑποτριπλασιεπιτετραέβδομος, ἐὰν $\frac{7}{25}$, ὡς ἐν τῷ $7:25$· κτλ.

ΠΟΣΙΣΜΑ Α.

§. 525. Ἐν τούτοις ἀλλ' οὖν ῥαδίως ἐξέσται ἑκάστου τοὔνομα προσευρεῖν, ἐὰν ὁ τοῦ κλασματώδους ἐκθέτου παρονομαστὴς ἐπὶ τὸν αὐτοῦ διαιρεθῇ ἀριθμητήν (§. 466.)· οἷον ἐὰν ᾖ ἐκθέτης $\frac{8}{5}$, ἔσται $8 : 5$ (§. 467.) $= 1\frac{3}{5}$· ὅθεν δῆλον καθίσταται τὸν λόγον καλεῖσθαι Ὑπεπιτρίπεμπτον· $\frac{35}{8} = 35 : 8 = 4\frac{3}{8}$ Τετραπλασιεπιτριτόγδοον· κἀπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 526. Ἕπεται τοίνυν ἐκ τούτων καὶ τοὺς τῆς ἐλάσσονος ἀνισότητος λόγους, δι' ἰδίων ἔτι ἐκθετῶν, προσδιορισθῆναι δύνασθαι. Ἡ γὰρ Α'. ὁ ἐκθέτης ἐστὶ κλάσμα, οὗ ὁ ἀριθμητὴς ἐστὶ μονάδος μείζων· καὶ τότε, ἢ τὸ ἁπλοῦν τοῦ ἀριθμητοῦ, ἢ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ ἐστὶν ἔλαττον τοῦ παρονομαστοῦ. Ἐὰν μὲν οὖν τὸ ἁπλοῦν τοῦ ἀριθμητοῦ ἔλαττον ᾖ τοῦ παρονομαστοῦ, ἡ διαφορὰ αὐτοῦ, ἤτοι ἡ ἀπὸ τοῦ παρονομαστοῦ ἔλλειψις, ἢ Β'. μονάς ἐστιν, ἢ Γ'. μονάδος μείζων· ὡσαύτως ἐὰν τὸ πολλαπλάσιον τοῦ ἀριθμητοῦ ἔλαττον ᾖ τοῦ παρονομαστοῦ, ἡ διαφορά, ἤτοι ἡ ἔλλειψις, ἢ Δ'. μονάς ἐστιν, ἢ Ε'. μονάδος μείζων. Ἐν μὲν οὖν τῇ Α'. περιστάσει, ὁ λόγος ἐστὶν ὑποπολλαπλάσιος· ἐν δὲ τῇ Β'. ὑπεπιμόριος· ἐν δὲ τῇ Γ'. ὑπεπιμερής· ἐν δὲ τῇ Δ'. ὑποπολλαπλασιεπιμόριος· ἐν δὲ τῇ Ε'. ὑποπολλαπλασιεπιμερής· ὡς ἐκ τῶν ὁρισθέντων δῆλον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 527. *Λόγος Λόγων* καλεῖται, ὁ μεταξὺ δυοῖν λόγων θεωρούμενος τῶν ἐκθετῶν λόγος· οἷον ἐπὶ τῶν $6:3$ καὶ $24:8$, ἐστὶ $6:3$ καὶ $24:8$ ὡς $2:3$· ἤτοι $\frac{6}{3}:\frac{24}{8}$ ὡς $2:3$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Γρηγόριος ὁ ἀπὸ τοῦ Ἁγίου Βικεντίου, ἐν τῷ αὐτοῦ Συγγράμματι περὶ τετραγωνισμοῦ τοῦ Κύκλου, καὶ τῶν τοῦ Κώνου τομῶν (α), πρῶτος ὑπῆρξεν, ὅς, τὴν τῶν λόγων, οὓς οἱ τῶν λόγων ἐκθέται ἔχουσι, θεωρίαν,

(α) Gregorius à St. Vincentio de Quadratura Circuli et Sectionibus Coni Lib. VIII. p. 861. et seqq.

ἐν ταῖς κατὰ τὴν Γεωμετρίαν εἰσήγαγε πράξεσιν, ὥστε κἀν τῇ Γεωμετρίᾳ τὸν τοῦ συλλογίζεσθαι τρόπον ἀπὸ τῶν ἀνομοίων λόγων λαμβάνειν ἔξεστι.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 528. *Οἱ Λόγοι οἱ τρίτῳ ἴσοι, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσοι· καὶ οἱ τοῖς ἴσοις ἴσοι, καὶ ἀλλήλοις ἴσοι.*

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ γὰρ $A:B$, ὡς $\Gamma:\Delta$, ἔσται τούτων καὶ ἐκθέτης ὁ αὐτός, οἷον Ε. Ἀλλὰ καὶ $Z:\Theta$, ὡς $\Gamma:\Delta$, ἔσται ἄρα καὶ τοῦ $Z:\Theta$ ἐκθέτης Ε· ἄρα $A:B$, ὡς $Z:\Theta$ (§. 110.). Ἔστω δὴ καὶ ἐν ἀριθμοῖς $6:3$, ὡς $8:4$· καὶ $10:5$, ὡς $8:4$· ἄρα $6:3$, ὡς $10:5$, ἀμφοῖν γὰρ ἐκθέτης ὁ αὐτὸς 2. Ὃ ἦν τὸ α'. Ἀλλὰ καὶ $A:B$, ὡς $\Gamma:\Delta$· καὶ $E:Z$, ὡς $A:B$· καὶ $H:\Theta$, ὡς $\Gamma:\Delta$ (ἐξ ὑποθ.)· ἄρα καὶ $E:Z$, ὡς $H:\Theta$ (διὰ τὸ α'.)· ὡσαύτως καὶ ἐν ἀριθμοῖς $6:3$, ὡς $8:4$· καὶ $4:2$, ὡς $10:5$· ἔσται καὶ $6:3$, ὡς $4:2$· Ὃ ἦν τὸ β'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 529. *Ὁ θατέρῳ τῶν ἴσων λόγων ἴσος, ἴσος καὶ τῷ ἑτέρῳ.*

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ $A:B$ ὡς $\Gamma:\Delta$, καὶ ἐκθέτου εὐμοιρήσουσι τοῦ αὐτοῦ, ἤτοι τοῦ Ε· ἀλλὰ γὰρ $Z:\Theta$ ὡς $A:B$ (ἐξ ὑποθ.)· ἄρ' οὖν καὶ τοῦ $Z:\Theta$ ἐκθέτης ἔσται ὁ αὐτὸς Ε. Ἰσοέκθετοι δὲ ὄντες οἱ λόγοι $Z:\Theta$ καὶ $\Gamma:\Delta$, ἔσονται καὶ ἰσοδύναμοι (§. 487.)· ἤτοι 6 : 3 ὡς 8 : 4, καὶ 10 : 5 ὡς 6 : 3, ἄρα 10 : 5 ὡς 8 : 4 (§. 528.).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 530. Ὧ, ἂν θάτερος τῶν ἴσων λόγων ἴσος, καὶ ὁ ἕτερος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ τοῦ Α : Β, τῶν ἰσοεκθέτων λόγων Γ : Δ ὡς Ε : Ζ, ἰσοέκθετος οἷον ὁ Γ : Δ (ἐξ ὑποθ.), ἔσται καὶ ὁ ἕτερος. Τοιγαροῦν Α : Β ὡς Ε : Ζ· ἤτοι ἐπεὶ 6 : 3 ὡς 8 : 4, ἔσται καὶ 10 : 5 ὡς 8 : 4 (§. 528.).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 531. Οἱ λόγοι οἱ τοῖς ἀνίσοις ἴσοι, ἀλλήλοις ἄνισοι· ὁ δὲ τῷ ἑτέρῳ τῶν ἴσων ἄνισος, καὶ τῷ ἑτέρῳ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ Α : Β καὶ Γ : Δ ἄνισοί εἰσιν, οὐδὲ ἐκθέτου εὐμοιρήσουσι τοῦ αὐτοῦ· ἀλλ' ὁ μὲν τυχὸν Ε, ὁ δὲ Η. Εἰ οὖν ὁ Κ : Λ ὡς Α : Β ἐκθέτην ἕξει Ε· εἰ δὲ καὶ Μ : Ν ὡς Γ : Δ, ἐκθέτην ἄρα ἕξει Η. Ἐπεὶ τοίνυν Ε καὶ Η ἐκθέται οὐχ οἱ αὐτοί, οὐδ' οἱ κατ' αὐτοὺς λόγοι Κ : Λ, καὶ Μ : Ν ἔσονται ἴσοι, ἤτοι 6 : 3 καὶ 8 : 2 ὡσαύτως 4 : 2 καὶ 12 : 3· Ὃ ἦν τὸ α΄. Ὁ δὲ τῷ ἑτέρῳ τῶν ἴσων ἄνισος διοίσει ἐκείνου καὶ τῷ ἐκθέτῃ, διοίσει ἄρα καὶ τοῦ ἑτέρου· ἤτοι 6 : 3 ὡς 4 : 2, καὶ 9 : 3· ἐπεὶ οὖν 9 τοῦ 6 ἄνισος, ἄρα καὶ 3 τοῦ 4. Ὃ ἦν τὸ β΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 532. Τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα, λόγον ἔχει τὸν αὐτόν· καὶ τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτό, λόγον ἔχει τὸν αὐτόν, καὶ ἴσα δὲ πρὸς τὰ ἴσα ὁμοίως.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστω ἴσα Α = Β· ἐχέτω δὲ λόγον πρὸς τὸ ἕτερον Α, τὸ Γ, ὁντιναοῦν Γ : Α· τὸ δ' αὐτὸ Γ πρὸς θάτερον Γ : Β· ἔστι δὲ τὸ Α = Β (ἐξ ὑποθ.), ἀντικατασταθέντος ἄρα τοῦ Α ἀντὶ τοῦ Β, ὁ λόγος Γ : Β, ἔσται ἡμῖν ὁ αὐτὸς τῷ Γ : Α· ἀλλαμὴν τὸ αὐτὸ ἑαυτῷ ἴσον (§. 80.)· ἄρα Γ : Β ὡς Γ : Α· ἤτοι 6 = 4 + 2, ἄρα 3 : 6 ὡς 3 : 4 + 2. Ὃ ἦν τὸ α΄. Ἐχέτω δὴ τὸ Α : Γ λόγον τινα, καὶ δὴ καὶ τὸ Β : Γ, καὶ ἀντικαθιστάσθω Α ἀντὶ Β, ὁ γοῦν δεύτερος παρέσται Α : Γ· ὁ αὐτὸς δὲ τῷ πρώτῳ Α : Γ, καὶ ἴσος. ἄρα Α : Γ ὡς Β : Γ· ἤτοι 6 = 4 + 2, ἄρα 6 : 3 ὡς 4 + 2 : 3. Ὃ ἦν τὸ β΄. Ἀλλ' ἔστω Α = Β, καὶ Γ = Δ. Διὰ γοῦν τὸ πρῶτον μέρος Γ : Α ὡς Γ : Β, ἀντικαθισταμένου τοῦ Δ ἀντὶ τοῦ Γ ἐπὶ τοῦ δευτέρου λόγου, ἔσται Γ : Α ὡς Δ : Β· ἤτοι 6 = 4 + 2, καὶ 3 = 2 + 1, ἄρα 3 : 6 ὡς 2 + 1 : 4 + 2. Ὃ ἦν τὸ γ΄.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐν δὲ τοῖς Εὐκλειδείοις (α) τὸ Θεώρημα οὕτω κεῖται. Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα· ὅπερ ἡμεῖς τοὺς Νεωτέρους τῶν

(α) Βιβ. Ε΄. Προτάσει ζ΄.

Μαθηματικῶν μιμούμενοι (α), ὡς ἀνωτέρω μετεμορφώσαμεν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 533. Τύπος ἐν γένει καλεῖσθαι εἴωθεν, ἡ θέσις ἅπασι τοῖς δυνατῶς ἔχουσιν ἐκτεθεῖναι ἀνήκουσα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 534. Τύπον ἐν γένει συντάξαι, ἐφ' ὃν ἅπας Ἀριθμητικὸς Λόγος ἀνάγεσθαι ἔχοι.

ΛΥΣΙΣ.

Οἱουδηποτοῦν Ἀριθμητικοῦ λόγου, τοῦ μὲν ἡγουμένου τῷ Α ὑπεκτιθεμένου, τῆς δὲ διαφορᾶς τῷ Δ (§. 468.)· τὸ ἑπόμενον ἢ μεῖζον ἔσται τοῦ ἡγουμένου, ἢ ἔλαττον (§. 500)· Εἰ μὲν οὖν μεῖζον, σύγκειται ἐκ τοῦ ἡγουμένου σὺν τῇ διαφορᾷ, οἷον Α + Δ· εἰδ' ἔλαττον, ἐκ τοῦ ἡγουμένου πλὴν τῆς διαφορᾶς, οἷον Α — Δ (§. 475.), ἤτοι καθόλου ἔσται τὸ ἑπόμενον = Α ± Δ (αὐτόθι). Ἄρα ἐν γένει ἅπας Ἀριθμητικὸς λόγος τοιῷδε γενικῷ τύπῳ ἐκτεθῆναι ἔχοι· οἷον, Α . Α ± Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 535. Ὡσαύτως, ἐὰν ποσότητός τινος τὸ μὲν ἡγούμενον ᾖ Β, ἡ δ' αὐτῆς πρὸς ἑτέραν ἄλλην οἱανδηποτοῦν διαφορὰ Δ, ἔσται ὁ μεταξὺ τούτων ἀριθμητικὸς λόγος Β . Β ± Δ. Παραπλησίως καὶ Γ . Γ ± Δ· καὶ ἀφεξῆς οὕτως.

(α) Wolfius in fua Arithm. §. 167.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 536. Ἐὰν τῷ τοῦ Ἀριθμητικοῦ λόγῳ ἡγουμένῳ τε καὶ ἑπομένῳ ἑτέρα τις συναφθῇ ποσότης, ἢ ἀπὸ τούτων ἀφαιρεθῇ, ἡ τοῦ λόγου δύναμις οὐκ ἀλλοιοῦται.

ΛΥΣΙΣ.

Τοῦ μὲν γὰρ Ἀριθμητικοῦ ὁποιουοῦν λόγου οὕτως ἐν γένει παρισταμένου οἷον Α . Α ± Ε (§. 534.), ὑποτυπωθήσεται καὶ ἡ συναφθησομένη, ἢ ἀφαιρεθησομένη ποσότης τῷ Ν. Δειχθῆναι δὴ δέον πρῶτον μὲν Α . Α ± Δ = Α + Ν . Α ± Δ + Ν· δεύτερον δὲ Α . Α ± Δ = Α — Ν . Α ± Δ — Ν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Οἱ Ἀριθμητικοὶ λόγοι, ὧν αἱ διαφοραὶ ἴσαι εἰσίν, ἰσοῦνται ἀλλήλοις (§. 474.)· ἀλλαμὴν ἐνταῦθα πανταχοῦ ἡ αὐτὴ ἐκκύπτει διαφορὰ ± Δ, διὰ τῆς τῶν ἡγουμένων ἐπὶ τὰ ἑπόμενα διαιρέσεως· ἄρα καὶ οἱ τούτων λόγοι ἴσοι· ἑπομένως τε τὸ τοῦ λόγου ἰσότιμον οὐκ ἀλλοιοῦται, ἐὰν τό, τε ἡγούμενον καὶ τὸ ἑπόμενον τῇ αὐτῇ συναφθῶσι ποσότητι, ἢ ἀπὸ τῆς αὐτῆς ἀφαιρεθῶσιν. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 537. Τοῖς Ἀριθμητικοῖς τοίνυν λόγοις, ἡ πρόσθεσις μόνον καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἀνήκουσι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 538. Τύπον ἐν γένει συντάξαι, ἐφ' ὃν ἅπας Γεωμετρικὸς λόγος ἀνάγεσθαι ἔχοι.

ΛΥΣΙΣ.

Παριστάσθω μὲν δὴ τὸ ἡγούμενον παντὸς Γεωμετρικοῦ λόγου τῷ Α, ὁ δὲ τούτου ἐκθέτης τῷ Μ· λέγω δὴ τὸ τοῦ λόγου ἑπόμενον εἶναι ΑΜ. Τὸ γὰρ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀχθὲν ἐξοίσει τὸν διαιρετέον (§. 136.). Ἐνταῦθα δὲ πηλίκον μὲν ἐστὶν ὁ ἐκθέτης (§. 477.), διαιρέτης δὲ τὸ ἡγούμενον, καὶ διαιρετέος τὸ ἑπόμενον· ἑπομένως τε ἔσται τὸ ἑπόμενον $=$ ΑΜ. Ἐν γένει τοίνυν ἅπας Γεωμετρικὸς λόγος ὀρθῶς δηλοῦσθαι ἔχει τῷ Α:ΑΜ (§. 481.).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 539. Ἔσται τοίνυν, ὥσπερ Α : ΑΜ, οὕτω καὶ Γεωμετρικοῦ οἱουοῦν λόγου ἐκθέτην πλουτοῦντος Μ, ἡγούμενον δὲ Β, ὁ τύπος ἔσται Β : ΒΜ· ὡσαύτως καὶ Γ : ΓΜ, καὶ ἐφεξῆς οὕτω.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 540. *Ἐὰν ἑκάτερος τῶν τοῦ Γεωμετρικοῦ λόγου ὅρων, ἤτοι, ὅ, τε ἡγούμενος καὶ ὁ ἑπόμενος διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ, ἡ τοῦ λόγου δύναμις οὐδαμῶς τρέπεται.*

ΛΥΣΙΣ.

Ἐκτιθεμένου μὲν δὴ Γεωμετρικοῦ ὁποιουοῦν λόγου τῷ Α : ΑΜ (§. 538.), τῆς τε τούτου πολλαπλασιαζούσης ἢ διαιρούσης ποσότητος τῷ Ν. Ἔσται ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιστάσει Α : ΑΜ $=$ ΑΝ : ΑΜΝ. Ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ Α : ΑΜ $= \frac{\text{Α}}{\text{Ν}} : \frac{\text{ΑΜ}}{\text{Ν}}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Δυεῖν γὰρ ποσοτήτων ὅ, τε λόγος καὶ ἡ τούτων πρὸς ἀλλήλας ἰσότης, ἐν τῇ τῶν ἐκθετῶν κεῖται ταυτότητι (§. 482.). Ἐνταῦθα δὴ τῆς τοῦ ἡγουμένου ἐπὶ τὸ ἑπόμενον διαιρέσεως γενομένης, ἀμφοτέρωθεν ἐκθέτης ὁ αὐτὸς Ν ἐκκύπτει· ἄρα τὸ τοῦ λόγου ἰσότιμον οὐδεμίαν τροπὴν ὑφίσταται. Ὃ ἦν τὸ α'.

Αὖθις, ἐπεὶ ἡ τῶν λόγων ἰσότης ἐκ τῶν ἐκθετῶν ἤρτηται (αὐτόθι), ἐνταῦθα δὲ, ἤτοι ἐπὶ τοῦ $\frac{\text{Α}}{\text{Ν}} : \frac{\text{ΑΜ}}{\text{Ν}}$, οὔσης τῆς διαιρούσης ποσότητος τῆς αὐτῆς Ν, ἔσονται καὶ οἱ ἐντεῦθεν ἀμφοτέρωθεν ἐκκύπτοντες ἐκθέται οἱ αὐτοὶ, ἤτοι ἴσοι· ἄρα ὅ, τε ἡγούμενος καὶ ὁ ἑπόμενος τοῦ Γεωμετρικοῦ λόγου, τῇ αὐτῇ ποσότητι διαιρούμενος ἐν τῷ αὐτῷ διέμεινε λόγῳ. Ὃ ἦν τὸ β'.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 541. Τῷ Γεωμετρικῷ ἄρα λόγῳ, ὅ, τε πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις ἀνήκουσι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 542. Τοῦ Γεωμετρικοῦ τοίνυν λόγου τῷ κλάσματι ταὐτουμένου (§. 466.), εὔδηλόν ἐστι, τὴν τοῦ κλάσματος δύναμιν, ἤτοι τὸ τούτου ἐπιβάλλον, ἥκιστα μεταβάλλεσθαι, ἑκατέρου τῶν ὅρων διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος πολλαπλασιασθέντος, ἢ διαιρεθέντος (§. 168.). Ὅθεν τῷ αὐτῷ, ἢ καὶ ἀνωτέρω, δειχθήσεται λόγῳ, καὶ Γεωμετρικοῦ οἱουδηποτοῦν λόγου κλάσματι $\frac{\text{Α}}{\text{Β}}$ ἐκτιθεμένου (§. 485.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 543. Κἀντεῦθεν τὰ ἰσοπολλαπλάσια ἢ ἰσοϋποπολλαπλάσια δυεῖν ποσοτήτων ἐν τῷ αὐτῷ εἰσὶ λόγῳ ταῖς ἁπλαῖς ἑαυτῶν. Καὶ γὰρ ἰσοπολλαπλάσια ἐκκύπτουσιν, ἐὰν τό, τε ἡγούμενον καὶ τὸ ἑπόμενον διὰ τῆς αὐτῆς πολλαπλασιασθῶσι ποσότητος, ἰσοϋποπολλαπλάσια δέ, ἐὰν διὰ τῆς αὐτῆς διαιρεθῶσι (§. 212. 214.).

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 544. Πολλαπλασίων λόγος καλεῖται, ὁ ἐκ πολλῶν ὁμοίων λόγων συντιθέμενος λόγος· οἷον ἐκκειμένων τῶν ἐφεξῆς 1 : 2, 2 : 4, 3 : 6 τὸ γινόμενον ἐκ τῶν 1, 2, 3 ἤτοι 6, καὶ τὸ ἐκ τῶν 2, 4, 6 ἤτοι 48, τὸν πολλαπλασίονα συνίστησι λόγον, ἤτοι 6 : 48, ἢ ὃ ταυτόν ἐστιν 1 : 8. Εἰδικῶς δὲ Διπλασίων, ἐὰν ἐκ δυοῖν ἴσων λόγων σύγκειται· Τριπλασίων, ἐὰν ἐκ τριῶν· Τετραπλασίων, ἐὰν ἐκ τεσσάρων· καὶ ἐφεξῆς οὕτως. Πρὸς δέ γε ἕκαστον τῶνδε τῶν εἰρημένων λόγων, ὁ λόγος 1 : 2, ἢ 2 : 4, ἢ 3 : 6, ἢ ὁστισοῦν αὐτῷ ἴσος, εἰρήσεται λόγος Ἁπλοῦς. Καὶ Ὑποδιπλασίων μὲν πρός γε τὸν αὐτοῦ διπλασίονα, Ὑποτριπλασίων δὲ πρὸς τὸν τριπλασίονα· καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 545. Ὁ λόγος τοίνυν ΑΓ : ΒΔ θατέρῳ τῶν Α : Β, ἢ Γ : Δ ἀναφερόμενος λόγων, διπλασίων καλεῖται· τούτων δὲ θάτερος ὑποδιπλασίων, τῇ πρὸς ἐκεῖνον ἀναφορᾷ. Ὡσαύτως καὶ ὑποτριπλασίων, καὶ ὑποτετραπλασίων, κτλ. καὶ ἐν γένει ὑποπολλαπλασίων, τῇ

πρὸς ἕτερόν τινα τριπλασίονα, ἢ τετραπλασίονα, ἢ πολλαπλασίονα ἀναφορᾷ (§. 544.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 546. Τοῦ μὲν οὖν διπλασίονος λόγου ὁ ἐκθέτης τετράγωνόν ἐστι, τὸ ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου τοῦ ἁπλοῦ παραγόμενον οἷον α^2, τοῦ δὲ τριπλασίονος κύβος α^3, τοῦ δὲ τετραπλασίονος τετάρτη δύναμις α^4· καὶ ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς ὡσαύτως (§. 215.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 547. Ἕπεται τοίνυν ἐκ τούτων, καλῶς διακρίνειν τὸν διπλάσιον καὶ τριπλάσιον, καὶ ἁπλῶς πολλαπλάσιον λόγον (§. 509.), τοῦ διπλασίονος, τριπλασίονος, καὶ ἁπλῶς πολλαπλασίονος (§. 544.). Ἐκείνως μὲν γάρ, καθ' ἑαυτὸν ὁ λόγος καλεῖται τῇ παραθέσει τῶν ὅρων πρὸς ἀλλήλους· οὕτω δέ, πρὸς λόγον ὁ λόγος ἀκούει ἀναφερόμενος (§. 545.). Ἐνθέντοι, καὶ ὁ διπλοῦς λόγος μακρῷ τοῦ διπλασίονος διενήνοχε, καὶ ὁ τριπλοῦς τοῦ τριπλασίονος, ἅ, τε ὑποδιπλοῦς τοῦ ὑποδιπλασίονος· καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοιωνύμων ὡσαύτως. Διπλοῦς γὰρ λέγεται, ἐν ᾧ τὸ ἡγούμενον, δὶς τοσοῦτον, ὅσον ἐστὶ τὸ ἑπόμενον· οἷον 2 : 1, 6 : 3, 10 : 5· καὶ Τριπλοῦς ἐν ᾧ τρίς· οἷον 3 : 1, 6 : 2, 15 : 5 (§. 509.)· Ὑποδιπλοῦς δέ, ἐν ᾧ τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου ἡμίσειά ἐστιν, ὡς ἐν τοῖσδε 1 : 2, 3 : 6, 5 : 10 (§. 511.).

Διπλασίων δὲ λόγος οὐδεὶς καλεῖται, εἰ μὴ σχέσει τῇ πρὸς ἕτερόν τινα, τὸν ὡς ἁπλοῦν ἐπιθεωρούμενον (§. 545.). Τούτου δὲ μεταβάλλοντος ὁ τὰ πρὶν διπλασίων, τάχα ἂν τριπλασίων γένοιτο, ἢ ὑποδιπλασίων· διπλασίων δὲ παντως μετὰ τὴν τούτου τροπὴν οὐκ ἂν μένοι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οὕτω μὲν ἡμεῖς τοῖς Νεωτέροις τῶν Μαθηματικῶν ἑπόμενοι τόν τε τοῦ Συνθέτου (§. 492.), καὶ τοῦ Διπλασιονος (§. 544.) ὁρισμὸν, εὐχερέστερόν πως ἀναπτύξαι ἠβουλήθημεν. Ὁ γὰρ Εὐκλείδης οὕτω τὸν Σύνθετον λόγον ὁρίζεται (α). Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθῶσαι ποιῶσί τινα· ὅπερ δὲ ὁ Εὐκλείδης πηλικότητας φησὶ τῶν λόγων, ὁ περικλεὴς Βαλλήσιος ἐκθέτας τῶν λόγων ὀρθότερον ἐξέθετο, ὡς ὄντος τοῦ ἐκθέτου τοῦ λόγου, μέτρον τῆς αὐτῆς ποσότητος (β). Ἐπεὶ γὰρ τὸν λόγον ὁ Εὐκλείδης μεταξὺ δύω μεγεθῶν ἐθεώρησε πρῶτον, διὰ τοῦτο καὶ δύω μεγεθῶν κατὰ πηλικότητα (ἤτοι μέγεθος) πρὸς ἄλληλα ποιὰν σχέσιν αὐτὸν ὑπέγραψεν (γ). Ὡς ἐὰν ὁ αὐτὸς μεταξὺ δύω ἀριθμῶν θεωρηθῇ, τότε κατὰ ποσότητα ποιὰ σχέσις ὑπογραφήσεται (ὅρα τὸ τοῦ §. 3. Σχόλιον.) Ἐὰν οὖν αἱ τῶν λόγων ποσότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα, ὁ λόγος ὁ διὰ τοῦ γινομένου δηλούμενος, Σύνθετος λέγεται (§. 492.). Οἷον, ἐπεὶ ποσότητες τῶν λόγων εἰσὶν οἱ ἐκθέται, ἀφ' ὧν ἐκεῖνοι παρονομάζονται (§. 478.), τοῦ μὲν 4 : 1 ὁ 4, τοῦ δὲ 12 : 3

(α) Βιβ. Ἕκτῳ ὅρῳ ε'.
(β) Vide Wallisii Opera Mathematica, Vol. 2. p. 666.
(γ) Βιβ. Ε', ὅρ. γ'.

αὖθις ὁ 4. Ἐὰν 4 ἐπὶ 4 ἀχθῇ, ὁ γινόμενος 16, ἐστὶν ὁ ἐκθέτης τοῦ ἐκ τῶν δυοῖν συνθέτου λόγου, ὅς ἐστι διπλασίων ἐκείνων ἑκατέρου χωρὶς, ἤτοι τετραπλάσιος τοῦ 4 ἐκθέτου θατέρου ἐκείνων, τουτέστι τετραπλάσιος τοῦ τετραπλασίου. Ὁ γὰρ ἐκείνων ἕτερος, ἐξ ὧν οὗτος ἐγένετο, ἁπλοῦς ἐστὶν ἀσύνθετος, καὶ ὑποδιπλασίων τοῦ συγκειμένου (§. 545.). Ὡσαύτως ἐὰν ὦσι τρεῖς λόγοι 4 : 2, 6 : 3, 8 : 4, ὅμοιοι πάντες· ἐπεὶ οἱ ἐκθέται ἐν ἑκάστῳ εἰσὶν οἱ αὐτοὶ, ἤτοι 2· πολλαπλασιασθήτω ὁ πρῶτος ἐκθέτης 2 ἐπὶ τὸν δεύτερον, καὶ γενέσθω ὁ 4, ἐπί τε τοῦτον ὁ τρίτος, καὶ ἔσται ὁ 8, ὁ τὸν Σύνθετον λόγον δηλῶν τριπλασίονα λόγος ἐκείνων, ἑκάστου ὑποτριπλασίονος ὄντος (αὐτόθι). Ἐὰν δὲ ἡ ἀναλογία ᾖ συνεχὴς (ὡς εἰρήσεται), τότε ὁ συγκείμενος λόγος, ὁ ἐκ τῶν δυοῖν τῶν μεταξὺ τριῶν ὅρων θεωρουμένων ἔσται, ὃν ὁ πρῶτος πρὸς τὸν τρίτον ἤτοι ἔσχατον ἔχει, διπλασίων τῶν ἁπλῶν· καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς ὡσαύτως. Οὕτω γὰρ ὁ Εὐκλείδης ὁρίζεται (α). Ὅταν τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. Καὶ ὅταν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ (β). Οἷον ἐπὶ τῶν 16 : 8 $=$ 4 : 2, ὁ ἐκ τῶν δύω συγκείμενος διπλασίων ἐστὶν, ὃν ὁ 16 : 4 ἔχει· καὶ ὁ ἐκ τῶν τριῶν συγκείμενος τρι-

(α) Βιβ. Ε'. ὅρ. ι'.
(β) Αὐτόθι ὅρῳ ια'.

πλασίων ἐστὶν, ὃν ὁ 16:2 ἔχει· ἤτοι ἐκεῖ μὲν ὁ τετραπλάσιος, ἐνταῦθα δὲ ὁ ὀκταπλάσιος, πολλαπλασιάζων τὰ ἡγούμενα χωρὶς κατὰ διαδοχὴν, καὶ τὰ ἑπόμενα· ὡς ἐπὶ παραδείγματι, ὁ μὲν τετραπλάσιος $\frac{16:8}{128:32}$ ὁ δὲ ὀκταπλάσιος $\frac{4:2}{512:64}$· οὕτω τοίνυν τὸ τῶν λόγων διπλάσιον καὶ τριπλάσιον θεωρεῖται ἐνταῦθα· οὐ γὰρ κατὰ πηλικότητα τοῦ 16 πρὸς τὸν 4 διπλασίων ὁ λόγος· εἴη γὰρ ἂν οὕτως ὁ 16 τοῦ 4 διπλάσιος, ὅπερ ψευδές· ἀλλὰ κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ τῶν ἀκροτήτων λόγου, διὸ καὶ τετραπλάσιος· ὡσαύτως ὁ τοῦ 16 πρὸς τὸν 2 τριπλασίων λόγος, οὐ κατὰ πηλικότητα τοῦ πρώτου πρὸς τὸν ἔσχατον· εἴη γὰρ ἂν οὕτω ὁ 16 τοῦ 2 τριπλάσιος, ὅπερ ἄτοπον· ἀλλὰ καθ' ὃ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τριῶν σύγκειται λόγων, διὸ καὶ ὀκταπλάσιος· ταυτὸν δ' εἰπεῖν μὴ κατὰ διπλασίασιν, ἢ τριπλασίασιν τῆς προσθήκης τῆς τοῦ λόγου πηλικότητος, ἀλλὰ κατὰ διπλασίασιν, ἢ τριπλασίασιν τῆς πολλαπλασιάσεως τῆς αὐτῆς πηλικότητος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 548. *Τύπον ἐν γένει συντάξαι, ἐφ' ὃν ἅπας Διπλασίων λόγος ἀνάγεσθαι ἔχοι.*

ΛΥΣΙΣ.

Ὁ μὲν γὰρ Γεωμετρικὸς λόγος τῷ A:AM ἐκτέθειται (§. 538.), ὡσαύτως καὶ ἕτερός τις τούτῳ ἰσοδύναμος τῷ B:BM (§. 539.)· ἐπεὶ δὲ ὁ διπλασίων λόγος πρὸς τοὺς Γεωμετρικοὺς λόγους ἀνάγεται (§. 476.)· ἄρα τῇ ἐκ τῶν δυοῖν τουτωνὶ ἁπλῶν συνθέσει (§. 544.), διπλασίων οἱοσδηποτοῦν λόγος ὀρθῶς τῷ AB:ABM² ἐκτεθήσεται (§. 545.).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 549. *Ὁ Διπλασίων λόγος ἰσοῦται τῷ τῶν τετραγώνων λόγῳ, οἱωνδήποτε ὅρων συντιθέντων.*

ΔΕΙΞΙΣ.

Τοῦ μὲν γὰρ διπλασίονος λόγου τῷ AB:ABM² ἐκτυπουμένου (§. 548.)· τοῦ δὲ, ἐξ οὗ ἐκεῖνος συντίθεται, ἁπλοῦ, τῷ A:AM· ἔσται AB:ABM² ἴσον τῷ τετραγώνῳ τῶν λόγων $A^2:A^2M^2$. Ἔστι δὲ, ὡς τοῦ αὐτοῦ ἐν ἀμφοτέροις ἐκλαμβανομένου ἐκθέτου M^2 (§. 482.)· ἄρα καὶ οἱ λόγοι ἴσοι ἔσονται. Ἅπας τοίνυν διπλασίων λόγος, ἰσοῦται τῷ τοῦ ἐκθέτου τῶν συντιθέντων λόγων τετραγώνῳ. Ο. Ε. Δ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 550. *Τύπον ἐν γένει συντάξαι, ᾧτινι ὀρθῶς ἐκτυποῦσθαι ἔχει, ἅπας Τριπλασίων λόγος.*

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστι μὲν δὴ A:AM (§. 538.), καὶ B:BM (§. 539.), καὶ μὴν καὶ Γ:ΓM· ἄρα τριπλασίων οἱοσδηποτοῦν λόγος ἐκ τῶν τριῶν τούτων συγκείμενος ἐκτεθήσεται τοιῷδε τύπῳ ΑΒΓ : ΑΒΓΜ³ (§. 544. 546.).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 551. Ἅπας Τριπλασίων λόγος, ἰσοῦται τῷ τοῦ ἐκθέτου, οἱωνδήποτε λόγων συντιθέντων, κύβῳ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστι μὲν γὰρ ΑΒΓ : ΑΒΓΜ³ (§. 550.)· ὁ δὲ, ἐξ οὗ οὗτος συντίθεται Α : ΑΜ. Ἀλλ' ἔστι ΑΒΓ : ΑΒΓΜ³ = Α³ : Α³Μ³, ὡς τοῦ ἐκθέτου Μ³ τὴν τῶν λόγων ὁμοιότητα ἐν ἀμφοτέροις βεβαιοῦντος (§. 482.). Ἄρα, κτλ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁ διπλασίων λόγος, ὑπέρτερος τοῦ ἁπλοῦ εἶναι εἰρήσεται τοσούτῳ δὲ μᾶλλον τοῦ πρὸς αὐτὸν ὑποδιπλασίονος, ἢ ἔτι τοῦ ὑποτριπλασίονος. Ὡσαύτως δὲ καὶ ὁ τριπλασίων, ὑπέρτερος τοῦ διπλασίονος· πολλῷ δὲ μᾶλλον τοῦ ἁπλοῦ, καὶ ἔτι τοῦ πρὸς αὐτὸν ὑποδιπλασίονος· οὕτω κἀν τοῖς λοιποῖς. Τοὐναντίον δὲ ὁ ἁπλοῦς ὑποδεέστερος εἶναι ῥηθήσεται τοῦ διπλασίονος, καὶ ὁ διπλασίων τοῦ τριπλασίονος, καὶ ὧδε τοῦ τετραπλασίονος· καὶ ἑξῆς ὁμοίως. Ἡ δέγε τοιαύτη τοῦ λόγου ὑπεροχὴ, Ὕψωμα τοῦ Λόγου, τοῖς Μαθηματικοῖς ἤκουσε, πρὸς διαφυγὴν τῆς τοῦ διπλοῦ καὶ τριπλοῦ διαφόρου ἐννοίας συγχύσεως (§. 509.)· καθ' ὃ τὸ τοῦ λόγου ὕψωμα κατ' ἄλλην καὶ ἄλλην ἐννοίας ἐκδοχὴν τῷ αὐτῷ ὀνόματι ἀποδίδοται (§. 547.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β.

ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 552. Ἀναλογία ἐστὶ δυοῖν, ἢ πλειόνων λόγων ταυτότης ἢ ἰσότης.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 553. Πᾶσα τοίνυν Ἀναλογία ἐκ δυοῖν συγκειμένη λόγων, τὸν ἐφεξῆς ἕξει λόγον· ὡς ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον. Ἐπεὶ δὲ τῶν λόγων ἑκάτερος ἐκ δυοῖν συγκροτεῖται ὅρων (§. 464.), Ἀναλογία πᾶσα ἐκ τεσσάρων ὅρων συγκείσεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁ δ' Εὐκλείδης οὕτω (α)· Ἀναλογία ἐστὶν, ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης· καὶ (β), Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν· οἷον 6 : 3 ὡς 8 : 4.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 554. Οἱ ἐκθέτην ἄρα ἔχοντες τὸν αὐτὸν λόγοι, συνιστῶσι τὴν Ἀναλογίαν· ὡς 6 : 3 καὶ 8 : 4.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Καθάπερ οὖν οἱ λόγοι, οὕτω καὶ αἱ Ἀναλογίαι διτταὶ τυγχάνουσιν Ἀριθμητικαὶ δηλαδὴ καὶ Γεωμετρικαί.

(α) Βιβ. Ε'. ὅρῳ η'.
(β) Βιβ. Ζ'. ὅρῳ κ'.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 555. Ἀναλογία Ἀριθμητικὴ ἐστὶν ἰσότης ἐκ δυοῖν ἀριθμητικῶν λόγων ἀναφυομένη.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 556. Σημεῖον Ἀριθμητικῆς Ἀναλογίας ἔστω τόδί (:)· οἷον Α.Β : Γ.Δ· ἀπαγγέλεται δὲ Α πρὸς Β, ὡς Γ πρὸς Δ, ὑπακουομένου τοῦ, οὕτως ἔχει ἡ τοῦ Α διαφορὰ πρὸς τὴν τοῦ Β, ὡς ἡ τοῦ Γ πρὸς τὴν τοῦ Δ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐπεὶ οὖν ἡ διαφορὰ μεταξὺ 5 καὶ 7, 11 καὶ 9 ἐστὶν ἡ αὐτὴ ἤτοι 2, ὡς $7-5=11-9$, οἱ λόγοι οὗτοι 5, 7, 9, 11 ἐν Ἀριθμητικῇ Ἀναλογίᾳ ἐκκείσονται, οἷον 5.7 : 9.11, δυσὶ γὰρ μονάσιν ἀμφότεροι ὑπερέχουσιν· ἐξ οὗ δὴ καὶ ἡ Ἀριθμητικὴ Ἀναλογία Ὑπεροχικὴ ὡσαύτως ἤκουσεν. Ἐν ἐνίοις δὲ τῶν Ἀριθμητικῶν Βιβλίων σημεῖον Ἀριθμητικῆς Ἀναλογίας τὸ ἐφεξῆς (∵) ἢ (∴) εἴληπται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 557. Ἡ Ἀριθμητικὴ τοίνυν Ἀναλογία, ποσοῦ μὲν ἴσου ἐν ταῖς διαφοραῖς, ποιοῦ δὲ ἀνίσου, ἢ ἀνομοίου μετέχει· διὸ κἀπὶ τῶν 8.6 : 6.4, ὁ μὲν 8 διαφέρει τοῦ 6 κατὰ τὸν ἐπίτριτον λόγον, ὁ δέγε 6 τοῦ 4 κατὰ τὸν ἡμιόλιον· ἔστι δὲ ἑκάτερος ἀριθμητικός· δυσὶ γὰρ μονάσιν ἄμφω ὑπερέχουσιν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 558. Λόγος Ἡγούμενος Ἀναλογίας ἐστὶν, ὁ πρὸ τοῦ τῆς Ἀναλογίας σημείου ταττόμενος· Ἑπόμενος δὲ ὁ μετὰ τὸ σημεῖον· οἷον ἐπὶ Α.Β : Γ.Δ, ἡγούμενος μὲν ὁ Α.Β, ἑπόμενος δὲ ὁ Γ.Δ. Ταυτὸ εἰρήσθω καὶ περὶ τῆς Γεωμετρικῆς Ἀναλογίας.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 559. Ἡγούμενοι ἄρα Λόγων εἰσὶν, ὅ, τε πρῶτος καὶ τρίτος τῶν ὅρων ὡς Α καὶ Γ, ἑπόμενοι δὲ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τέταρτος, ὡς Β καὶ Δ.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 560. Τούτων τοίνυν, τὸν μὲν πρῶτον ὅρον Πρόλογον καλέσαι, τὸν δὲ δεύτερον Ὑπόλογον ὡσαύτως τόν τε τρίτον καὶ τὸν τέταρτον ἐπὶ τοῦ ἑπομένου λόγου, ἐπιτομῆς χάριν, οὐδὲν τὸ κωλύον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 561. Ἄκρα ἢ Ἀκρότητες Ἀναλογίας εἰσὶν, ὅ, τε πρῶτος καὶ τέταρτος τῶν ὅρων. Μέσα δὲ ἢ Μεσότητες, ὅ, τε δεύτερος καὶ τρίτος.

ΛΗΜΜΑ.

§. 562. Ἐν πάσῃ Ἀριθμητικῇ Ἀναλογίᾳ, ἡ αὐτὴ μεταξὺ τοῦ τε ἡγουμένου καὶ ἑπομένου, ἐν ἀμφοτέροις τοῖς λόγοις, διαφορὰ ἐκλαμβάνεται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν ὁποιαδηποτοῦν γὰρ Ἀριθμητικῇ Ἀναλογίᾳ, οἱ λόγοι, ἐξ ὧν ἐκείνη συγκροτεῖται, ἴσοι τε εἰσὶ (§. 555.) καὶ ἰσοδύναμοι (§. 474.). Ἀλλ' οὖν λόγου οἱουδηποτοῦν Ἀριθμητικοῦ ἡ δύναμις, ἐκ τῆς τῶν λόγων ὁμοίας διαφορᾶς ἤρτηται (αὐτ.). Ἄρα δυσὶ λόγοις, ἡ αὐτὴ ἔνεστι διαφορά. Ἑπομένως ἐὰν ἡ τοῦ πρώτου λόγου διαφορὰ τῷ Δ ὑπεκτεθῇ, ἥ τε τοῦ δευτέρου ὡσαύτως τῷ Δ, τὸ τοῦ πρώτου ἡγούμενον τῷ Α, τὸ δὲ τοῦ δευτέρου τῷ Β, ἔσται ἐν ἑκατέροις τοῖς λόγοις ἡ αὐτὴ διαφορά, ἤτοι Α.Α±Δ : Β.Β±Δ. Ο. Ε. Δ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 563. Ἀναλογία Γεωμετρικὴ ἐστιν ἰσότης, ἐκ δυοῖν Γεωμετρικῶν ἴσων Λόγων ἀναφυομένη.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 564. Σημεῖον Γεωμετρικῆς Ἀναλογίας ἔστω τὸ τῆς Ἰσότητος· οἷον Α : Β = Γ : Δ· ἐκφραζέσθω δὲ, ὡς ἔχει τὸ τοῦ Α πηλίκον πρὸς τὸ τοῦ Β, οὕτω τὸ τοῦ Γ πρὸς τὸ τοῦ Δ· 2 : 4 = 4 : 8.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Εἰώθασι μέν τινες, ὡς ἔν τισι τῶν Ἀριθμητικῶν Βίβλων ἰδεῖν ἔνεστι, τέσσαρσι στιγμαῖς ἐν σχήματι τετραγώνου χρῆσθαι ὡς (: :), ἢ (÷|÷). Ἕτεροι δὲ δύω γραμμίδια ἀπ' εὐθείας, ὡς (||), μεταξὺ δυοῖν Γεωμετρικῶν λόγων παρεντιθέναι φιλοῦσιν, Ἀναλογίας ὁμωνύμου τεκμήριον. Πλεῖστοι δὲ τῶν καθ' ἡμᾶς Μαθηματικῶν τῷ προεκτεθέντι (§. 564.), ὡς εὐχρήστῳ κέχρηνται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 565. Ἐπεὶ οὖν ἡ τῶν ἐκθετῶν ἰσότης, τῆς μεταξὺ δυοῖν Γεωμετρικῶν λόγων θεωρουμένης ἰσότητος δεῖγμα καθέστηκεν (§. 482.), ἡ αὐτὴ ἔσται πάντως καὶ τῆς Γεωμετρικῆς Ἀναλογίας τεκμήριον.

ΛΗΜΜΑ.

§. 566. *Ἐν πάσῃ Γεωμετρικῇ Ἀναλογίᾳ, τὸ αὐτὸ ἀεὶ πηλίκον, τῷ τε ἡγουμένῳ καὶ τῷ ἑπομένῳ ἐνείληπται.*

ΔΕΙΞΙΣ.

Οἱ δύω λόγοι, ἐξ ὧν ἡ Γεωμετρικὴ Ἀναλογία ἐκκύπτει εἰσὶν ἴσοι (§. 482.), ἄρα καὶ ἰσοδύναμοι (§. 479). ἀλλ' οὖν ἡ τούτων δύναμις ἐκ τῆς τῶν πηλίκων ἰσότητος ἤρτηται, ἄρα τὸ αὐτὸ ἑκάτερος ἔσχηκε πηλίκον· ἑπομένως τε ἐὰν τὸ τοῦ πρώτου πηλίκον τῷ $\frac{\Gamma}{\Pi}$ ὑπεκτεθῇ, ὡσαύτως καὶ τὸ τοῦ δευτέρου τῷ $\frac{\Gamma}{\Pi}$, τὸ δὲ τοῦ πρώτου ἡγούμενον τῷ Α, καὶ τὸ τοῦ δευτέρου τῷ Β. τὸ αὐτὸ ὁμοίως πηλίκον ἐν ἑκατέροις τοῖς λόγοις ἐκκύψει, ἤτοι Α : ΑΠ = Β : ΒΠ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 567. Ἀναλογία Συνεχὴς ἐστιν, ἐὰν οἱ μέσοι ὅροι ἴσοι ὦσιν· ἤ, ἐὰν τὸ ἑπόμενον τοῦ πρώτου λόγου ταυτόν ἐστι τῷ τοῦ δευτέρου ἡγουμένῳ· ὡς Α.Β : Β.Γ, 2.5 : 5.8· καὶ Α : Γ = Γ : Δ . 4 : 8 = 8 : 16 κτλ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 568. Μέσος Ἀνάλογος ὅρος ἀκούει, ὁ τοῦ ἑπομένου τοῦ πρώτου λόγου, καὶ τοῦ ἡγουμένου τοῦ δευτέρου ἐν τῇ Συνεχεῖ Ἀναλογίᾳ τόπον ἐπέχων ὅρος· οἷον ὁ 8 ἀριθμὸς μέσος ἀνάλογος ἐστι τῶν 4 καὶ 16·

ὅπερ ἐπιτομώτερον οὕτως εἴωθε γράφεσθαι 4:8:16· ὡσαύτως καὶ 3:6:12.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 569. Σημεῖον Συνεχοῦς Ἀναλογίας, Ἀριθμητικῆς μὲν ἔστω ÷, Γεωμετρικῆς δὲ ∺, ἅπερ πρὸ τῆς οὕτω νοουμένης Ἀναλογίας ἀεὶ προτίθεσθαι εἴωθεν· οἷον ÷ 1.2.3, ἢ 1.3.6.9.12.15, κτλ. ὡσαύτως ∺ 2:4:8:16:32, κτλ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Εἰώθασι δέ τινες τὴν μὲν Ἀριθμητικὴν Συνεχῆ Ἀναλογίαν τῷ ÷ ἐμφαίνειν, τὴν δὲ Γεωμετρικὴν τῷ ∺.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 570. Ἀναλογία Διεχὴς, ἢ Διεζευγμένη ἀκούει, ἐν ᾗ οἱ μέσοι ὅροι ἄνισοί εἰσι, καὶ τὸ ἑπόμενον τοῦ πρώτου ὅρου, ἕτερον ἐστὶ τοῦ ἡγουμένου τοῦ δευτέρου, οἷον, Α:Β = Γ:Δ, 4:8 = 3:6.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 571. Ἡ μὲν ἄρα Συνεχὴς Ἀναλογία ἐν τρισὶν ὅροις θεωρεῖται, ἡ δὲ Διεχὴς ἐν τέσσαρσιν. Ἐὰν τοίνυν τὰ τῆς Διεχοῦς Ἀναλογίας ἡγούμενα ἐπὶ τὰ ἑπόμενα ἀχθῶσιν, ἔσται αὕτη ἐν λόγῳ Συνθέτῳ, ἤτοι 32:18 (§. 492.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐπὶ τῆς Διεχοῦς τοίνυν Ἀναλογίας, ἡ τῶν τριῶν κοινῇ καλουμένη μέθοδος τὰ μάλιστα ἐπεστήρικται ὡς οἰκείῳ τόπῳ ὀψόμεθα.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 572. Δι᾽ ἴσου Ἀναλογία ἐστὶν, ἐὰν ἐπὶ δυεῖν σειρῶν λόγων Α, Β, Γ, καὶ Δ, Ε, Ζ, ὄντος Α πρὸς Β, ὡς Δ πρὸς Ε, Β:Γ ὡς Ε:Ζ, ἢ καὶ Α:Β ὡς Ε:Ζ, Β:Γ ὡς Δ:Ε, ληφθῇ καὶ Α:Γ = Δ:Ζ, ἤτοι Λῆψις τῶν ἄκρων καθ᾽ ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων (α)· ὡσαύτως ἐπὶ τῶν 9, 6, 3, καὶ 12, 8, 4, ἐὰν ᾖ 9:6 = 12:8, καὶ 6:3 = 8:4· ἔσται καὶ Δι᾽ ἴσου 9:3 = 12:4.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 573. Τεταγμένη Ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν ᾖ ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον· ἢ δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον, πρὸς ἄλλό τι, οὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι· οἷον, ἐπὶ τῆς Α:Β = Δ:Ε, ἐὰν ᾖ Β πρὸς ἄλλό τι τὸ Γ, ἔσται καὶ Ε πρὸς ἄλλό τι τὸ Ζ, ἤτοι Β:Γ = Ε:Ζ· 9:6 = 12:8· ἔσται καὶ πρὸς ἄλλό τι 6:3 = 8:4.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 574. Ἀναλογία Τεταραγμένη ἐστὶν, ἐν ᾗ ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, καὶ ὡς τὸ ἡγούμενον πρὸς ἄλλό τι, οὕτως ἄλλό τι πρὸς τὸ ἡγούμενον· οἷον ἐπὶ Α:Β = Δ:Ε, ἐὰν ᾖ Β πρὸς ἄλλό τι Γ, ἔσται καὶ ἄλλό τι Ζ πρὸς τὸ ἡγούμενον Δ, ἤτοι Β:Γ = Ζ:Δ· ἤτοι 9:6 = 12:8, ἔσται 6:3 = 24:12, καὶ Δι᾽ ἴσου 9:3 = 24:8.

(α) Εὐκλ. Βιβ. Ε'. τῶν Στοιχ. ὅρ. ιη'. ὅρα καὶ ἀνωτέρω §. 503, 504.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁ μὲν τῆς Τεταγμένης Ἀναλογίας Ὁρισμὸς (§. 572.), ἐκ τῶν Εὐκλειδείων (α) ὡς εἶχε ληφθεὶς, ὑφ' ἡμῶν μόνον ἐπεξηγήθη· ὁ δὲ τῆς τεταραγμένης οὕτω παρ' ἐκείνοις (β) κεῖται· Τεταραγμένη ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν, τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος, γίνεται ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον· ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλό τι πρὸς ἡγούμενον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 575. Ἀναλογία Λόγων ἐστὶν, ἡ ἐν δυσὶ τῶν λόγων λόγοις θεωρουμένη· οἷον, ἐπὶ τῶν $3:6$, $2:10$, $4:8$, $5:25$, ἔσται $\frac{3}{6}:\frac{2}{10}=\frac{4}{8}:\frac{5}{25}$, ἢ ἐὰν λόγοι ὦσιν $6:3$, $10:2$, $8:4$, $25:5$, ἐκκύψει $\frac{6}{3}:\frac{10}{2}=\frac{8}{4}:\frac{25}{5}$, ἤτοι ὡς $2:5$.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 576. Τὰ ἀνάλογον, καὶ Ἀνάπαλιν, ἀνάλογον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ γὰρ $A:B=\Gamma:\Delta$, ἔσονται καὶ οἱ τούτων ἐκθέται ἴσοι $M=N$. Ἄρα $1:M=1:N$ (§. 532.)·

(α) Βιβ. Ε'. ὅρ. ιθ'.

(β) Αὐτόθι ὅρ. κ'.

ἔσται τοίνυν $B:A=1:M$, καὶ $\Delta:\Gamma=1:N$ (§. 126.). ἄρα $B:A=\Delta:\Gamma$ (§. 528.)· ἤτοι $8:4=6:3$, ἄρα $4:8=3:6$. Ο. Ε. Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 577. Τῶν μορίων τὰ ὅμοια πρὸς τὰ ὅλα τὰ αὐτῶν, λόγον ἔχει τὸν αὐτόν· καὶ πρὸς ἃ τὰ ὅλα λόγον ἔχει τὸν αὐτὸν, ὅμοια· καὶ τὰ ὅλα δὲ, πρὸς τὰ ὅμοια τῶν μορίων, λόγον ἔχει τὸν αὐτόν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ τὰ Μ καὶ μ, ὅμοια μόρια ἢ μέρη τῶν ἰδίων ὅλων Ο καὶ ο ἐστίν· ὁσάκις ἐπαναληφθὲν τὸ Μ, τὸ οἰκεῖον ὅλον Ο καταμετρεῖ, τοσάκις καὶ τὸ μ, τὸ ἑαυτοῦ ο· ἄρα αἱ διαιρέσεις $O:M$ καὶ $o:\mu$ πηλίκον ἔχουσι τὸ αὐτό· τὸ δὲ πηλίκον ὁ τοῦ λόγου ἐστὶν ἐκθέτης (§. 477.) ἄρα $M:O=\mu:o$ (§. 576.)· ἤτοι $15:12$, διὰ τῶν αὐτῶν τριτημορίων 5 καὶ 4 διαιρούμενα, ἐν τῷ αὐτῷ ἔσονται λόγῳ, οἷον $5:15=4:12$· Ὃ ἦν τὸ α'. Ἀλλαμὴν $O:M=o:\mu$, ἄρα ἐκθέτης ὁ αὐτὸς, ταυτὸν εἰπεῖν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως· ὁσάκις ἄρα τὸ Ο καταμετρεῖται ὑπὸ τοῦ Μ, τοσάκις καὶ τὸ ο ὑπὸ τοῦ μ, τὰ ἄρα μέρη Μ καὶ μ ὅμοια· ἤτοι $15:5=12:4$· Ὃ ἦν τὸ β'. Ἄρα τὰ 5, καὶ 4 μέρη, τριτημόριά εἰσι, τὸ μὲν τοῦ 15, τὸ δὲ τοῦ 12 (διὰ τὸ α'. τῆς Δείξ.), $M:O=\mu:o$· τοίνυν $O:M=o:\mu$ (§. 576.)· $5:15=4:12$, ἄρα $15:5=12:4$· Ὃ ἦν τὸ γ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 578. Τὰ ὅμοια τῶν μορίων εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὅλα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁσάκις μὲν γὰρ ὅλον ἐν ὅλῳ ἐμπεριέχεται τὸ ἔλαττον ἐν τῷ μείζονι, τοσάκις πάντως καὶ μέρος ἐν μέρει (ἢν ὅμοια εἴη), τὸ τοῦ ἐλάσσονος ἐν τῷ τοῦ μείζονος· τοῖς γὰρ ὅλοις τὰ μέρη ταυτιζόμενα συμπεριφέρεται (§. [illegible].). Τὸ ἄρα πηλίκον τῆς τοῦ μείζονος τῶν ὅλων διαιρέσεως διὰ τοῦ ἐλάσσονος, ἴσον τῷ πηλίκῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἐν τῷ μείζονι ὅλῳ μέρους, διὰ τοῦ ὁμοίου τοῦ ἐν τῷ ἐλάσσονι· ὥστε ἴσων τῶν ἐκθετῶν ὄντων, κἀκεῖνα ἴσα πρὸς ἄλληλα ἔσονται, ἄρα κτλ. οἷον $O:o = M:\mu$· $150:150 = 5:5$. Ο. Ε. Δ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Σημειώσεως δὲ ἄξιον, ὅτι ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐνδεικνύμενος ποσάκις ληφθείη τὸ ἔλαττον μέρος, ἵνα τῷ μείζονι ἐξισωθῇ, οὐκ ἀεὶ λογικὸς εἶναι ὀφείλει. Δυνατὸν γὰρ ἔτι αὐτὸν καὶ ἄλογον εἶναι, ἐν ᾗ περιστάσει τὰ ὅλα πρὸς ἄλληλα ἄλογον ἔχουσι λόγον (§. 496.). Οἷον, ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ δείξωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, ὡς ἂν τῇ Διαγωνίῳ ἐξισωθῇ τοσάκις εἶναι ληπτέαν, ὁσάκις ἡ μονὰς τῇ ἐκ τοῦ 2 ῥίζῃ ἐμπεριέχεται· Φανερὸν δὲ, ἐὰν ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἰς δύω μέρη διαιρεθῇ, ὧν θάτερον μὲν ᾖ μέρος τοῦ ὅλου τέταρτον, θάτερον δὲ περιέχῃ τρία μέρη· καὶ τὸ τέταρτον ἔτι μέρος τοσάκις λαμβάνεσθαι ὀφείλει, ὁσάκις ἡ μονὰς τῇ ἐκ τοῦ 2 ῥί-

ζῃ ἐμπεριέχεται, ἔστ' ἂν τῷ τετάρτῳ τῆς Διαγωνίου ἐξισωθῇ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 579. Τὰ ἀνάλογον, καὶ Ἐναλλὰξ ἀνάλογον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἤτοι γὰρ τῶν ἡγουμένων μειζόνων, ἢ τῶν ἑπομένων ὑποτεθέντων, ἔσται $O:M = o:\mu$ (§. 577.), καὶ δὴ καὶ $O:o = M:\mu$ (§. 578.)· ἄρα, κτλ. Ἐὰν ἄρα $150:50 = 15:5$, ἔσται καὶ $150:15 = 50:5$ (§. 491.). Ο. Ε. Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 580. Ἐπὶ τῶν ἀνίσων λόγων, τῶν καθ' ὑπεροχὴν μέρος μὲν τοῦ ἐν τῷ μείζονι προλόγου πρὸς τὸν ὑπόλογον τὸν αὐτοῦ, ἀνάλογόν ἐστι τῷ ἐν τῷ ἐλάσσονι προλόγῳ πρὸς τὸν ὑπόλογον τὸν αὐτοῦ. Καὶ τό γε μεῖζον τοῦ ἐν τῇ ἐλάσσονι προλόγου πρὸς τὸν ὑπόλογον τὸν αὐτοῦ, ἀνάλογόν ἐστι τῷ ἐν τῇ μείζονι τῶν λόγων προλόγῳ πρὸς τὸν ὑπόλογον τὸν αὐτοῦ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ γάρ τοι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἐν τῷ μείζονι λόγῳ προλόγου, διὰ τοῦ ὑπολόγου ὡς διαιρέτου (§. 466.), βραχυνομένου ἐκείνου φανερὸν ὡς φθίνει· μεῖζον δὲ δὴ πηλίκον, τὸ κατὰ τὸν μείζονα λόγον, συναποφθῖνον τῷ διαιρετέῳ, τέως συνισοῦται τῷ ἐλάσσονι· ὧν δὲ οἱ ἐκθέται, καὶ οἱ λόγοι ἴσοι (§. 487.)· τὸ ἄρα ἔλαττον μέρος τοῦ προλόγου, τοῦ ἐν τῷ μείζονι λόγῳ τῶν καθ' ὑπεροχὴν, ἐστὶ πρὸς τὸν ὑπόλογον τὸν αὐτοῦ, ὡς ὁ ἐν τῷ ἐλάσσονι λόγῳ πρόλογος πρὸ τὸν ὑπόλογον τὸν αὐτοῦ. Ἀμέλει ἐὰν τεθῇ $A:B > \Gamma:\Delta$· μέρος τι τοῦ A, ὅπερ εἰρήσθω M, ἔσται $M:B = \Gamma:\Delta$· ἤτοι $14:6 > 10:5$, ἄρα $12:6 = 10:5$· Ὃ ἦν τὸ α'. Αὖθις τὸ κατὰ τὸν ἐλάσσονα τοῦ ἐν ὑπεροχῇ πηλίκον, μεγεθυνομένου τοῦ προλόγου, αὔξει, ἑπομένως τε καὶ ὁ τοῦ λόγου ὡσαύτως ἐκθέτης· ὁ δὲ τοῦ ἐλάσσονος ἐκθέτης ἐλάσσων ὤν, τῷ συναύξειν τῷ προλόγῳ, τέως τῷ τοῦ μείζονος τῶν λόγων ἐκθέτῃ συνισωθήσεται· ἴσοι δὲ οἱ λόγοι, ὧν καὶ οἱ ἐκθέται (αὐτ.)· τὸ ἄρα μεῖζον τοῦ κατὰ τὸν ἐν ὑπεροχῇ ἐλάσσονα λόγον προλόγου πρὸς τὸν ὑπόλογον τὸν αὐτοῦ, ὡς ὁ ἐν τῷ μείζονι λόγῳ πρόλογος πρὸς τὸν ὑπόλογον τὸν αὐτοῦ. Ἀμέλει τοι, ἐὰν τεθῇ $A:B < \Gamma:\Delta$, τὸ ὑπὲρ τὸ A, ὅπερ εἰρήσθω N. ἔσται $6:3 < 8:2$· ἄρα $12:3 = 8:2$· Ὃ ἦν τὸ β'.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Σχεδὸν παραπλησίως κατασκευάσαις καὶ τὰ ἑξῆς. Α'. τῶν καθ' ὑπεροχὴν ἀνίσων λόγων, ὁ τοῦ μείζονος πρόλογος πρὸς τὸ μεῖζον τοῦ ὑπολόγου, ἀνάλογόν ἐστι τῷ προλόγῳ τοῦ ἐλάσσονος πρὸς τὸν ὑπόλογον τὸν αὐτοῦ. Β'. ὁ τοῦ ἐλάσσονος πρόλογος πρὸς τὸ ἔλαττον τοῦ ὑπολόγου αὐτοῦ, ἀνάλογόν ἐστι τῷ προλόγῳ τοῦ μείζονος πρὸς τὸν ὑπόλογον τὸν αὐτοῦ. Γ'. τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον· Ἥτις ἐστὶν ἡ Η'. τοῦ Ε'. Βιβ. παρ' Εὐκλείδῃ. Δ'. τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι· πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν· Ἥτις ἐστὶν ἡ Ι'. τοῦ Ε'. Βιβ. τῶν παρ' Εὐκλείδῃ Προτάσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 581. Οἱ καθ' ὑπεροχὴν λόγοι μείζονες τῶν ἐν ἰσότητι, οἱ δὲ κατ' ἔλλειψιν ἐλάσσονες.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τῶν μὲν γὰρ ἐν ἰσότητι ἐκθέτης μονὰς, τῶν δὲ καθ' ὑπεροχὴν μονάδος μείζων, τῶν δὲ κατ' ἔλλειψιν μονάδος ἐλάσσων (§. 487. 488.). Ἄρα, κτλ. Ο. Ε. Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 582. Οἱ ἄνισοι τῶν λόγων, καθ' ὑπεροχὴν, ἢ ἔλλειψιν Ἀνάπαλιν λαμβανόμενοι, ἀμείβουσι τὸ μεῖζον καὶ ἔλαττον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἀνάπαλιν γὰρ μεταληφθέντων τῶν ὅρων, οἱ καθ' ὑπεροχὴν μεταβάλλουσιν εἰς τοὺς ἐν ἐλλείψει, καὶ οὗτοι εἰς ἐκείνους· οἷον τῶν $A:B > \Gamma:\Delta$ οἱ ἐκθέται $M > N$· ἀλλ' οὖν $B:A < \Delta:\Gamma$ ἄρα καὶ $N < M$· ἤτοι $12:3 > 10:5$· ἔνθεντοι καὶ $4 > 2$· ἀλλ' οὖν $3:12 < 5:10$ ἄρα $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. Ἀλλὰ γὰρ οἱ μὲν μείζονες εἰς τοὺς κατ' ἔλλειψιν, ὧν ἐκθέτης κλάσμα παρονομαστοῦ μείζονος· οἱ δὲ ἐλάσσονες εἰς τοὺς κατ' ἔλλειψιν, ὧν ἐκθέτης κλάσμα παρονομαστοῦ ἐλάσσονος· τὰ δέ τοι κλάσματα αὐξήσει τοῦ παρονομαστοῦ φθίνει (§. 172.), μειώσει δὲ αὔξει (§. 170.)· ἄρα οἱ μὲν μείζονες εἰς ἐλάσσονας ἐκθέτας μεταβάλλουσιν, οἱ δὲ ἐλάσσονες εἰς μείζονας. Ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τῶν κατ' ἔλλειψιν μειζόνων, ἢ ἐλασσόνων συλλογιστέον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 583. Δῆλον τοίνυν, ὡς ἐὰν τεσσάρων μεγεθῶν $A:B$ μείζονα λόγον ἔχῃ, ἢ $\Gamma:\Delta$, ἀνάπαλιν $B:A$ ἐλάσσονα λόγον ἕξει, ἢ $\Delta:\Gamma$ (§. 582.). Αὖθις· εἰ $A:B$ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ $\Gamma:\Delta$· $B:A$ μείζονα λόγον ἕξει, ἢ $\Delta:\Gamma$· Ἥτις ἡ Ζ΄. ἐστὶ τοῦ Ζ΄. Βιβ. τῶν τοῦ Πάππου Προτάσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 584. Ἐὰν $A:B$ μείζονα λόγον ἔχῃ, ἢ $\Gamma:\Delta$· καὶ Ἐναλλὰξ $A:\Gamma$ μείζονα λόγον ἕξει, ἢ $B:\Delta$· καὶ ἐὰν ἐλάσσονα, ἐλάσσονα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ $A:B > \Gamma:\Delta$, ἄρα μέρος τοῦ A τὸ M ἔσται $M:B = \Gamma:\Delta$ (§. 580.), τοίνυν $M:\Gamma = B:\Delta$ (§. 579.). Ἀλλὰ γὰρ $A:\Gamma > M:\Gamma$ (διὰ τὸ τρίτον τῶν ἐν τῷ Σχολ. τοῦ §. 580.)· ἄρα ἀντικατασταθέντων ἔσται $A:\Gamma > B:\Delta$. Οἷον, $9:3 > 4:2$, καὶ μὴν καὶ $M:3 = 4:2$· καὶ ἐναλλαγῇ $M:4 = 3:2$, ἄρα $9:4 > 3:2$, ἤτοι $2\frac{1}{4} > 1\frac{1}{2}$· Ὃ ἦν θάτερον.

Πάλιν, ἐπειδὴ $A:B < \Gamma:\Delta$· ἔσται δή τι τοῦ A μεῖζον τὸ M, ἐνθέντος $M:B = \Gamma:\Delta$, ἀλλὰ μὴν $A:\Gamma < M:\Gamma$ (διὰ τὸ Γον τοῦ Σχ. τοῦ §. 580.)· ἄρα τῆς ἀντικαταστάσεως γενομένης ἔσται $A:\Gamma < B:\Delta$. Οἷον, $15:5 < 24:6$· ἀλλὰ καὶ $M:5 = 24:6$· καὶ ἐναλλὰξ $M:24 = 5:6$, ἄρα $15:24 < 5:6$, ἤτοι $\frac{5}{8} < \frac{5}{6}$· Ὃ ἦν τὸ ἕτερον.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 585. Ἐπὶ τῶν καθ' ὑπεροχὴν ἀνομοίων λόγων, ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἑπομένων μείζονα μὲν λόγον ἔχει, ἢ τὸ κατὰ τὸν μείζονα ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον αὐτοῦ· πολλῷ δὲ μείζονα, ἢ τὸ κατὰ τὸν ἐλάσσω πρὸς τὸ ἑπόμενον τοῦ αὐτοῦ. Ἐπὶ δὲ τῶν κατ' ἔλλειψιν ἀνομοίων, ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων πρὸς τὴν τῶν ἑπομένων ἐλάσσονα μὲν λόγον ἔχει, ἢ τὸ κατὰ τὸν ἐλάσσονα ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον αὐτοῦ· πολλῷ δὲ ἐλάσσονα, ἢ τὸ κατὰ τὸν μείζονα ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον αὐτοῦ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ ᾖ ἐν ὑπεροχῇ $A:B > \Gamma:\Delta$, νοουμένων τῶν μειζόνων ὅρων τοῦ πρώτου λόγου ὡς ὅλων, ἀφ' ὧν οἱ ἐλάσσονες τοῦ δευτέρου ὅροι ἀφαιροῦνται, ἔστιν ὅλον A πρὸς ὅλον B μείζονα λόγον ἔχον, ἢ ἀφαιρεθὲν Γ πρὸς ἀφαιρεθὲν Δ· ἑπομένως τε καὶ λοιπὸν πρὸς λοιπὸν μείζονα λόγον ἕξει, ἢ ὅλον πρὸς ὅλον· τουτέστιν, $A-\Gamma : B-\Delta > A:B$· ἤτοι ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων πρὸς τὴν τῶν ἑπομένων μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ κατὰ τὴν μείζονα ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον τοῦ αὐτοῦ. Ὃ ἦν τὸ α΄. Ἀλλὰ γὰρ τὸ μεῖζον τοῦ μείζονος, ἔτι μᾶλλον τοῦ πρὸς ὃ αὐτὸ μεῖζον· ἀλλαμὴν Α:Β>Γ:Δ, ἐπεὶ δὲ Α—Γ:Β—Δ>Α:Β ἐκ τῶν ἀνωτέρω δειχθέντων· ἄρα ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων πρὸς τὴν τῶν ἑπομένων πολλῷ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ Γ:Δ, τουτέστιν ἢ οἱ ἐν τῷ ἐλάσσονι λόγῳ ὅροι· ἤτοι 24 : 6>8:4, ἄρα καὶ 24—8:6—4>24:6, ἤτοι 16:2>24:6. Ὃ ἦν τὸ β΄. Ἔστωσαν αὖθις κατ' ἔλλειψιν Β:Α<Δ:Γ· νοουμένων τῶν μειζόνων ὅρων τοῦ πρώτου λόγου ὡς ὅλων; ἀφ' ὧν οἱ ἐλάσσονες ἀφαιροῦνται ὅροι, ἔστιν ὅλον Β πρὸς ὅλον Α ἐλάσσονα λόγον ἔχον, ἢ ἀφαιρεθὲν Δ πρὸς ἀφαιρεθὲν Γ· ὅθεν λοιπὸν πρὸς λοιπόν, ἐλάσσονα λόγον ἕξει, ἢ ὅλον πρὸς ὅλον· τουτέστι Β—Δ :Α—Γ<Β:Α· ἤτοι ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων πρὸς τὴν τῶν ἑπομένων ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ κατὰ τὸν ἐλάσσονα λόγον ἡγούμενον, πρὸς τὸ κατὰ τὸν αὐτὸν ἑπόμενον. Ὃ ἦν τὸ γ΄. Ἄρα Β—Δ : Α—Γ πολλῷ ἔλαττον Δ:Γ. Ὃ ἦν τὸ δ΄. οἷον 6 : 24<4:8· καὶ 2 : 16<6 : 24· ἄρα 2 : 16<4 : 8· ἤτοι $\frac{1}{8}<\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{8}<\frac{1}{2}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 586. Ἐὰν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἢ ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, καὶ ἐν Συνθέσει ἐπ' εὐθείας, ἡγούμενον σὺν ἑπομένῳ πρὸς ἑπόμενον, μείζονα ἕξει· εἰ δὲ ἐλάττονα, ἐλάττω.

ΔΕΙΞΙΣ.

Προκειμένου Α:Β>Γ:Δ, ἐπεὶ ἐν τῷ λόγῳ Α:Β, τὸ μὲν Α ἐστὶ διαιρετέος, τὸ δὲ Β διαιρέτης· τῇ τοῦ Β τῷ Α προσθέσει, μονάδι τὸ πηλίκον Π μεγεθυνθήσεται· καὶ εἴπερ ἄρα πρότερον ἦν Π, ἔσται μετὰ τὴν πρόσθεσιν Π+1. Κἀπὶ τοῦ δευτέρου δὲ λόγου Γ:Δ, ἐὰν ὡσαύτως τὸ Δ τῷ Γ προστεθῇ τὸ τούτου πηλίκον Ρ· μονάδι συναυξυνθὲν ἔσται Ρ+1. Ἦν δὲ Π>Ρ (§. 488.), ἄρα καὶ Π+1>Ρ+1· τοίνυν Α+Β :Β>Γ+Δ : Δ. Ὃ ἦν τὸ α΄. Ὡσαύτως δειχθήσεται καὶ τὸ β΄. 6:2>8:4, ἄρα 8:2>12:4· ὡσαύτως 6:3<8:2, ἄρα 9:3<10:2. Ἔστι δὲ τὸ Θεώρημα ἡ Δ΄ τῶν τοῦ Πάππου Προτάσεων, Βιβ. Ζ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 587. Ἐὰν ἡ ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον μείζονα λόγον ἔχον, ἢ ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον· τὸ ἄθροισμα τὸ ἐκ τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τὸ ἐκ τῶν ἑπομένων ἐλάσσονα λόγον ἕξει, ἢ τὸ πρῶτον ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον αὐτοῦ. Ἐὰν δὲ ἐλάσσονα, μείζονα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδή, ἐξ ὑποθέσεως Α : Β>Γ : Δ, ἔσται καὶ Γ:Δ<Α:Β· ἄρα Γ:Α<Δ:Β (§. 584.). ἀλλὰ καὶ Γ+Α : Α<Δ:+Β:Β (§. 586.), ἄρα Γ+Α:Δ+Β <Α:Β (§. 584.)· ἐνθεντοι Γ+Α : Δ+Β=Α+Γ :Β+Δ (§. 532.), ἄρα Α+Γ:Β+Δ<Α:Β. Ὃ μοίως δειχθήσεται καὶ τὸ ἕτερον. Ἔστι δὲ ἡ ς΄. τῶν τοῦ Ζ΄. Βιβ. τοῦ Πάππου.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 588. Ἐὰν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἢ ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον· ἔσται καὶ ἐν Διαιρέσει, ἡ διαφορὰ τῶν πρώτων ὅρων πρὸς τὸ τοῦ πρώτου λόγου ἑπόμενον ἐν μείζονι λόγῳ, ἢ ἡ διαφορὰ τῶν τοῦ δευτέρου πρὸς τὸ ἑπόμενον τοῦ αὐτοῦ. Εἰ δὲ ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ὁμοίως καὶ ἡ διαφορὰ πρὸς τὸ ἑπόμενον ἐκείνου ἐλάσσων, ἢ τούτου ἡ διαφορὰ πρὸς τὸ ἑπόμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ ἐξ ὑπόθ. $Α:Β>Γ:Δ$, ἄρα (§. 579.) $Α:Γ>Β:Δ$· ἀλλὰ (§. 585.) $Α-Β:Γ-Δ>Α:Γ$, ἔνθεντοι καὶ $Α-Β:Γ-Δ>Β:Δ$, ἄρα (§. 584.) $Α-Β:Β>Γ-Δ:Δ$. Ὃ ἦν τὸ α΄. Ἐὰν δὲ $Α:Β<Γ:Δ$, ἔσται καὶ $Γ:Δ>Α:Β$, καὶ διὰ τὰ δειχθέντα ἔσται $Γ-Δ:Δ>Α-Β:Β$. Ὃ ἦν τὸ β΄. Αὕτη δέ ἐστιν ἡ Ε΄. τῶν τοῦ Ζ΄. Βιβ. τοῦ Πάππου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 589. Τύπον ἐν Γένει συντάξαι· δι' οὗ πᾶσα Ἀριθμητικὴ Διεχὴς Ἀναλογία παρίστασθαι ἔχοι.

ΛΥΣΙΣ.

Ἅπας Ἀριθμητικὸς Λόγος ὀρθῶς τῷ $Α.Α\pm Δ$ ἐκτέθειται (§. 534.), ὅ, τε τούτῳ ἰσοδύναμος τῷ $Β:Β\pm Δ$ (§. 535.)· ἄρα λόγοι δύω οἱτινεσοῦν ἀριθμητικοὶ οὕτως ἐκτεθείσονται $Α.Α\pm Δ:Β.Β\pm Δ$ (§. 152.). Ἀλλὰ μὴν, ἐκ δυοῖν ἀριθμητικῶν ὁμοίων λόγων, Ἀναλογία ἐκκύπτει Ἀριθμητικὴ (§. 555.)· ἄρα, πᾶσα Ἀριθμητικὴ Ἀναλογία ἐκτεθείσεται τῷ $Α.Α\pm Δ:Β.Β\pm Δ$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐπὶ μὲν οὖν τῶν ὡρισμένων ἔσται $Α.Β:Γ.Δ$, ἐπὶ δὲ τῶν ἀορίστων $Υ.Φ:Χ.Ψ$ (§. 30.).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 590. Ἐν πάσῃ Ἀριθμητικῇ Διεχῇ Ἀναλογίᾳ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκροτήτων ἴσον τῷ τῶν μεσοτήτων.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἀναλογία μὲν δὴ πᾶσα Ἀριθμητικὴ Διεχὴς ὀρθῶς τῷ ἐν γένει τύπῳ $Α.Α\pm Δ:Β.Β\pm Δ$ ἐκτέθειται (§. 589.). Συναφθέντων τοίνυν τῶν ἄκρων καὶ τῶν μέσων, ἔσται $Α+Β\pm Δ=Α\pm Δ+Β$· ἤτοι ἐν τῇ ἀναλογίᾳ $3.7:11.15$, ἔσται $3+15=7+11$· καὶ μὴν κἂν τῇ $5.2:13.10$, ἐκκύψει $5+10=13+2$. Ο. Ε. Δ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 591. Τριῶν Διεχῶς Ἀνάλογον Ἀριθμητικῶν ὅρων δοθέντων, τὸν τέταρτον προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Εἴγε Α΄. τῶν πρώτων τριῶν δοθέντων ζητεῖτο ὁ τέταρτος, ὡς $A . B : \Gamma . \Psi$, ἔσται τὸ τῶν ἀκροτήτων ἄθροισμα ἴσον τῷ τῶν μεσοτήτων (§. 590.), ἤτοι $A + \Psi = B + \Gamma$· ἄρα $\Psi = B + \Gamma - A$ (§. 436.). Ἐν γένει τοίνυν ὁ τέταρτος ὅρος ἐξευρίσκεται, ἐὰν ἀπὸ τοῦ τῶν μέσων ἀθροίσματος ὁ πρῶτος ἀφαιρεθῇ· οἷον ἐπὶ τῶν τριῶν δοθέντων ὅρων 5, $7\frac{1}{3}$, $12\frac{1}{2}$, ἔσται ὁ αἰτούμενος τέταρτος Ἀριθμητικῶς ἀνάλογος $= (7\frac{1}{3} + 12\frac{1}{2}) - 5 = 19\frac{5}{6} - 5 = 14\frac{5}{6}$, ἡ δὲ ἀναλογία $5 . 7\frac{1}{3} : 12\frac{1}{2} . 14\frac{5}{6}$.

Β΄. Ἐάν, τοῦ πρώτου, δευτέρου καὶ τετάρτου τῶν ὅρων δοθέντων, ὁ τρίτος ἀγνοῆται, ἔσται $A . B : X . \Delta$· ἄρα $A + \Delta = B + X$, καὶ $X = A + \Delta - B$. Ὁ τρίτος τοίνυν ὅρος ἐκκύπτει, ἐὰν ἀπὸ τοῦ τῶν ἀκροτήτων ἀθροίσματος ὁ δεύτερος ἀφαιρεθῇ.

Γ΄. Ἐὰν τοῦ πρώτου, τρίτου καὶ τετάρτου δοθέντων, ὁ δεύτερος αἰτῆται, ἔσται $A . \Phi : \Gamma . \Delta$, καὶ $A + \Delta = \Phi + \Gamma$. Ἔνθεντοι $\Phi = A + \Delta - \Gamma$. Ὁ δεύτερος ἄρα ἐξευρίσκεται, ἐὰν ἀπὸ τοῦ τῶν ἀκροτήτων ἀθροίσματος ὁ τρίτος ἀφαιρεθῇ.

Δ΄. Ἐὰν τοῦ δευτέρου, τρίτου καὶ τετάρτου δοθέντων, ὁ πρῶτος ζητῆται, ἔσται $Y . B : \Gamma . \Delta$· καὶ $Y + \Delta = B + \Gamma$· κἀντεῦθεν $Y = B + \Gamma - \Delta$· ὁ πρῶτος ἄρα ἀναδίδοται ὅρος, ἐὰν ἀπὸ τοῦ τῶν μεσοτήτων ἀθροίσματος ὁ τέταρτος ἀφαιρεθῇ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 592. Ἔσται τοίνυν πρὸς εὐχερεστέραν τῶν εἰρημένων κατάληψιν, ὁ ἐφεξῆς περὶ τούτων ἐν Γένει Κανών. Αἱ τῇ ἀορίστῳ ἄζευκτοι συναπτέσθωσαν, ἡ δὲ σὺν ἐκείνῃ, τούτων ἀφαιρείσθω· ὡς καὶ ἐν Τύπῳ.

$$\left.\begin{aligned} Y + \Delta &= B + \Gamma \\ Y &= B + \Gamma - \Delta. \\ \Phi + \Gamma &= A + \Delta \\ \Phi &= A + \Delta - \Gamma. \\ X + B &= A + \Gamma \\ X &= A + \Gamma - B. \\ \Psi + A &= B + \Gamma \\ \Psi &= B + \Gamma - A. \end{aligned}\right\} \left\{\begin{aligned} Y + 6 &= 3 + 4 \\ Y &= 3 + 4 - 6 = 1 \\ \Phi + 4 &= 1 + 6 \\ \Phi &= 1 + 6 - 4 = 3 \\ X + 3 &= 1 + 6 \\ X &= 1 + 6 - 3 = 4 \\ \Psi + 1 &= 3 + 4 \\ \Psi &= 3 + 4 - 1 = 6 \end{aligned}\right.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 593. Ποσοτήτων πλειόνων δοθεισῶν, Μέσην Ἀριθμητικῶς Ἀνάλογον προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Αἱ δοθεῖσαι ποσότητες εἰς ἓν συναπτέσθωσαν, τὸ δ' ἐντεῦθεν προκύπτον κεφάλαιον, διὰ τοῦ τῶν δοθεισῶν ἀριθμοῦ διαιρείσθω. Ἔστωσαν μὲν δὴ δοθεῖσαι ποσότητες αἱ A, B, Γ, Δ, ὥστε τὸ τούτων κεφάλαιον εἶναι $A + B + \Gamma + \Delta$· ἐπεὶ δὲ τέσσαρες δίδονται, ἔσται $\frac{A + B + \Gamma + \Delta}{4} = X$ τῇ ζητουμένῃ Μέσῃ Ἀριθμητικῶς Ἀναλόγῳ. Οἷον.

$$\left.\begin{aligned} A . X &: X . B \\ B . X &: X . \Gamma \\ \Gamma . X &: X . \Delta \\ A . X &: X . \Delta \end{aligned}\right\} \text{κἀντεῦθεν} \left\{\begin{aligned} A + B &= 2X \\ B + \Gamma &= 2X \\ \Gamma + \Delta &= 2X \\ A + \Delta &= 2X \end{aligned}\right.$$

$$\overline{2A + 2B + 2\Gamma + 2\Delta = 8X} \text{ συνάψ.}$$

$$A+B+\Gamma+\Delta=4X$$

$$\frac{A+B+\Gamma+\Delta}{4}=X$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'.

Γάϊος ἐν ἑβδομαδιαίῳ διαστήματι διάφορον χρόνου ἀριθμὸν ἐπὶ μελέτῃ κατέθετο· καὶ δὴ τῇ μὲν τῶν ἡμερῶν Κυρίῳ ὥρας προσδιωρίσατο 6. τῇ δὲ τῆς Σελήνης, 4· τῇ τοῦ Ἄρεως, 7· τῇ τοῦ Ἑρμοῦ, 5· τῇ τοῦ Διός, 8· τῇ τῆς Ἀφροδίτης, 2· καὶ τῇ τοῦ Κρόνου, ἤτοι τῇ τοῦ Σαββάτου, 3. Βούλεται ἀλλ' οὖν ἐς τοὐπιὸν ἴσον τῶν ὡρῶν ἀριθμὸν ὁσημέραι πρὸς τὸ πονεῖν καταβάλλειν, ἀνάλογον ταῖς προαριθμηθείσαις. Αἰτεῖ μαθεῖν, ποσταῖον; Ἔστω $8+7+6+5+4+3+2=35$. Ἐντεῦθεν $\frac{35}{7}=5$.

Β'.

Ἔχει τις ξέστας παλαιοῦ οἴνου, ταύτας δὲ οὕτω βούλεται ἀποδοῦναι· οἷον 6 μὲν, 12 Καισσαρικῶν (α)· 8 δὲ, 8· 8, 6· 6, 5· 2, 9. Αἰτεῖ οὖν τὸ μέσον τοῦ ἐκτιμήματος, ἤτοι τὸ κοινὸν μαθεῖν, πρὸς τὸ εἰδέναι, πόσου ἐν τῷ οἰνοπωλείῳ ἕκαστον ἀποδῷ ξέστην; Ἔσται οὖν·

(α) Ἤτοι Φιορηνίων, τῶν λατινιστὶ μὲν Rennensis καὶ Florenus, Γερμανιστὶ δὲ Gulden λεγομένων· ἰσοδυναμεῖ δὲ ἓν τούτων ἑξήκοντα σταυρωνύμοις ὀβολοῖς, τοῖς γερμανιστὶ κρείτζαρίοις (Kreuzer) ἀκούουσι.

6×12	. . .	$=72$ Καισαρ.
8×8	. . .	$=64$
8×6	. . .	$=48$
6×5	. . .	$=30$
2×9	. . .	$=18$
τῶν ξεστ. κεφ. 30·	τὸ ὅλον τίμημα	232.

Ἔστιν ἄρα $\frac{232}{30}=7$ Καισαρικοῖς καὶ 44 ὀβολοῖς.

ΒΑΣΑΝΟΣ.

ξέσται	Καισ.	ὀβολ.		Καισ.	ὀβολ.
6×	(7 καὶ	44)	=	46 καὶ	24
8×	(7 -	44)	=	61 -	52
8×	(7 -	44)	=	61 -	52
6×	(7 -	44)	=	46 -	24
2×	(7 -	44)	=	15 -	28
30 ξέσται		τὸ δὲ ὁλικ. τίμημα		322.	

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 594. *Τύπον ἐν γένει συντάξαι, δι' οὗ πᾶσα Ἀριθμητικὴ Συνεχὴς Ἀναλογία ἐκτίθεσθαι ἔχοι.*

ΛΥΣΙΣ.

Οἱαδηποτοῦν μὲν δὴ Συνεχὴς Ἀριθμητικὴ Ἀναλογία ὀρθῶς τῷ $A.A\pm\Delta:A\pm\Delta.\Psi$ ὑποτυπωθήσεται (§. 567.). Πρὸς εὕρεσιν τοίνυν τοῦ τετάρτου ὅρου ἔσται $\Psi=2A\pm2\Delta-A=A\pm2\Delta$. Ἄρα πᾶσα Ἀριθμητικὴ Συνεχὴς Ἀναλογία ὀρθῶς, ὡς ἐφεξῆς ὑποτυπωθήσεται· οἷον, $\div A.A\pm\Delta:A\pm\Delta.A\pm2\Delta$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὴν τάξιν δὲ τηροῦσιν ἡμῖν, ἔσται ἐπὶ πάσης Συνεχοῦς Ἀριθμητικῆς Ἀναλογίας, ὡρισμένης μὲν ÷ Α. Β. Γ, κτλ. ÷ Α . Β : Β . Γ· ἀορίστου δὲ, ÷ Φ . Χ . Ψ, ÷ Φ . Χ : Χ . Ψ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 595. Ἐν πάσῃ Συνεχεῖ Ἀριθμητικῇ Ἀναλογίᾳ τὸ ἐκ τῶν ἀκροτήτων κεφάλαιον, τῷ τοῦ μέσου ὅρου διπλῷ ἰσοῦται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστι γὰρ ÷ Α . Α ± Δ . Α ± 2Δ· ἀλλ' οὖν Α + Α ± 2Δ = 2Α ± 2Δ (§. 590.), ὅπερ ἦν τὸ αἰτούμενον. Ἄρα ἐν πάσῃ ἀριθμητικῇ Ἀναλογίᾳ κτλ. Ο. Ε. Δ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 596. Ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Συνεχεῖ Ἀναλογίᾳ δοθέντων τριῶν ὅρων, τὸν τέταρτον προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Α'. Εἰ μὲν τῶν δύω πρώτων δοθέντων ὁ τρίτος ζητεῖται, οἷον ÷ Α . Β . Ψ, ἔσται Α + Ψ = 2Β, καὶ τῇ τοῦ Ψ εὑρέσει ἔσται Ψ = 2Β — Α· τουτέστιν, ὁ τρίτος ὅρος ἰσοῦται τῇ ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ πρώτου ὅρου ἀπὸ τοῦ τῶν μέσων διπλοῦ, ὑπολειπομένῃ διαφορᾷ.

Β'. Εἰ δὲ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου δοθέντων ζητεῖται ὁ δεύτερος, ἤτοι ÷ Α . Χ . Γ, ἔσται ἐκ τῶν εἰρημένων 2Χ = Α + Γ, καὶ Χ = $\frac{Α + Γ}{2}$· ἤτοι ὁ δεύτερος ὅρος ἰσοῦται τῷ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἡμιαθροίσματι· ὡσαύτως δεήσαν μεταξὺ 3 καὶ 8 τὸν μέσον

Ἀριθμητικῶς ἀνάλογον προσευρεῖν, ἔσται Χ = $\frac{3+8}{2}$ = $5\frac{1}{2}$· ἡ δὲ ἀναλογία οὕτως ἐκτεθήσεται 3 . $5\frac{1}{2}$: $5\frac{1}{2}$: 8.

Γ. Εἰ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου δοθέντων, ὁ πρῶτος ἀγνοεῖται, ἔσται ÷ Υ . Β . Γ, καὶ Υ + Γ = 2Β· καὶ μεταθέσει Υ = 2Β — Γ· ἤτοι, ὁ πρῶτος ὅρος ἰσοῦται τῇ ἐκ τῆς τοῦ τρίτου, ἀπὸ τοῦ τῶν μέσων διπλοῦ, ἀναφυομένῃ διαφορᾷ.

ΚΑΙ ΕΝ ΤΥΠΩ.

$$\left.\begin{array}{l} Ψ = 2Β — Α \\ Χ = \frac{Α + Γ}{2} \\ Υ = 2Β — Γ \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} Ψ = 2 \times 2 — 3 = 1 \\ Χ = \frac{1 + 3}{2} \quad = 2 \\ Υ = 2 \times 2 — 1 = 3 \end{array}\right.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 597. Τύπον ἐν γένει συντάξαι, ἐφ' ὃν πᾶσα Γεωμετρικὴ Διεχὴς Ἀναλογία ἀνάγεσθαι ἔχοι.

ΛΥΣΙΣ.

Τοῦ μὲν γὰρ Γεωμετρικοῦ λόγου τῷ Α : ΑΜ ὑποκειμένου (§. 538.), καὶ ἑτέρου του ἰσοδυναμοῦντος τῷ Β : ΒΝ (§. 539.), ἡ τούτων πρὸς ἀλλήλους σχέσις οὕτως ἐκτεθήσεται Α : ΑΜ = Β : ΒΜ (§. 552.). Ἀλλ' οὖν ἡ Γεωμετρικὴ Ἀναλογία ἐκ δυοῖν πάντως Γεωμετρικῶν ἴσων λόγων ἀναφύεται (§. 563.). Ἄρα Ἀναλογία Γεωμετρικὴ ὁποιαδήποτοῦν Διεχὴς, ὡς ἐφεξῆς ὀρθῶς ὑποτυπωθήσεται· οἷον, Α : ΑΜ = Β : ΒΜ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 598. Ἐν πάσῃ Γεωμετρικῇ Διεχῇ Ἀναλογία, τὸ ὑπὸ τῶν ἀκροτήτων γινόμενον ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μεσοτήτων.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστι μὲν δὴ $A:AM = B:BM$ (§. 597.). Ἀλλαμὴν $ABM = AMB$ (§. 114.)· ἄρα ἐπὶ τῶν Γεωμετρικῶς Διεχῶς Ἀναλόγων τὸ ὑπὸ τῶν ἀκροτήτων γινόμενον ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μεσοτήτων· ἤτοι $4:12 = 7:21$, ἔσται $4 \times 21 = 7 \times 12$· καὶ $9:6 = 12:8$, ἔσται $9 \times 8 = 6 \times 12$. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 599. Ἐὰν οὖν ἐν γένει τεθῇ Διεχὴς τις Ἀναλογία $A:B = \Gamma:\Delta$, ὡσαύτως δειχθήσεται $A\Delta = B\Gamma$. Ἔστι μὲν γὰρ ἡ $A:B = \Gamma:\Delta$ ἴση τῇ $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ (§. 466.). Ἐὰν οὖν ἀμφότεροι οἱ τῆς Ἀναλογίας ὅροι διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος, οἷον B, πολλαπλασιασθῶσιν, ἡ ταύτης δύναμις οὐδόλως τρέπεται (§. 540.)· ἄρα $\frac{AB}{B} = \frac{B\Gamma}{\Delta}$ (§. 542.), ἤτοι $A = \frac{B\Gamma}{\Delta}$. Πολλαπλασιασθέντων τε αὖθις διὰ τοῦ Δ, ἔσται $A\Delta = \frac{B\Gamma\Delta}{\Delta}$ ἤτοι $A\Delta = B\Gamma$. Ἀλλαμὴν $A\Delta$ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἀκροτήτων γινόμενον, καὶ $B\Gamma$ τὸ ὑπὸ τῶν μεσοτήτων· ἄρα ἐν πάσῃ Γεωμετρικῇ Διεχῇ Ἀναλογίᾳ, κτλ. Ο. Ε. Δ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 600. Δοθέντων τριῶν ὅρων ἐν τῇ Γεωμετρικῇ Διεχῇ Ἀναλογίᾳ τὸν τέταρτον προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστωσην οἱ μὲν δοθέντες A, B, Γ, ὁ δὲ ζητούμενος X, τῆς Ἀναλογίας γινομένης ἐκκύψει Αον, $A:B = \Gamma:X$, καὶ $AX = B\Gamma$ (§. 598.)· ἄρα $X = \frac{B\Gamma}{A}$. Τουτέστιν, ὁ τέταρτος τῶν ζητουμένων Ἀνάλογος, ἴσός ἐστι πηλίκῳ, τῷ ἐκ τῆς τῶν δυοῖν μέσων ὅρων γινομένῳ, διὰ τῆς τοῦ πρώτου διαιρέσεως προκύπτοντι· οἷον δεήσαν ἐν 3, 5 καὶ 12 τὸν τέταρτον προσευρεῖν ἀνάλογον, ἔσται $X = \frac{5 \cdot 12}{3} = 20$.

Βον. Ἐὰν ἡ Ἀναλογία $A:B = \Phi:\Delta$, ἔσται ἐκ τῶν προλεχθέντων $\Phi = \frac{A\Delta}{B}$· ἤτοι, ὁ τρίτος Ἀνάλογος ἰσοῦται τῷ ὑπὸ τῶν ἀκροτήτων γινομένῳ, διαιρουμένῳ διὰ τοῦ δευτέρου ὅρου.

Γον. Ἐὰν δὲ ἡ $A:\Psi = \Gamma.\Delta$, ἔσται $\Psi = \frac{A\Delta}{\Gamma}$, δηλονότι, ὁ δεύτερος Ἀνάλογος ἰσοῦται τῷ ὑπὸ τῶν ἀκροτήτων γινομένῳ, διαιρουμένῳ διὰ τοῦ τρίτου.

Δον. Ἐὰν δὲ $Y:B = \Gamma:\Delta$, ἔσται $Y = \frac{B\Gamma}{\Delta}$· ἤτοι, ὁ πρῶτος Ἀνάλογος ἰσοῦται τῷ ὑπὸ τῶν μεσοτήτων γινομένῳ, διαιρουμένῳ διὰ τοῦ τετάρτου.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 601. Ἐκ τούτων τοίνυν, ὁ ἐφεξῆς ἐν γένει Κανὼν προκύπτει. Αἱ τῇ ἀορίστῳ ἀμιγεῖς πολλαπλασιαζέσθωσαν, τὸ δ' ἐντεῦθεν Γινόμενον διὰ τῆς σὺν ἐκείνῃ διαιρείσθω.

ΕΣΤΩ ΔΗ ΚΑΙ ΕΝ ΤΥΠΩ.

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A}\mathrm{X} &= \mathrm{B}\Gamma \\ \mathrm{X} &= \frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{A}} \\ \mathrm{B}\Phi &= \mathrm{A}\Delta \\ \Phi &= \frac{\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{B}} \\ \Gamma\Psi &= \mathrm{A}\Delta \\ \Psi &= \frac{\mathrm{A}\Delta}{\Gamma} \\ \Delta\Upsilon &= \mathrm{B}\Gamma \\ \Upsilon &= \frac{\mathrm{B}\Gamma}{\Delta} \end{aligned}\right\} \left\{\begin{aligned} 24\,\mathrm{X} &= 15 \times 40. \\ \mathrm{X} &= \frac{15 \times 40}{24} = \frac{600}{24} = 25. \\ 15\,\Phi &= 24 \times 25. \\ \Phi &= \frac{24 \times 25}{15} = \frac{600}{15} = 40. \\ 40\,\Psi &= 24 \times 25. \\ \Psi &= \frac{24 \times 25}{40} = \frac{600}{40} = 15. \\ 25\,\Upsilon &= 15 \times 40. \\ \Upsilon &= \frac{15 \times 40}{25} = \frac{600}{25} = 24. \end{aligned}\right.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 602. Τύπον ἐν γένει συντάξαι, ἐφ' ὃν πᾶσα Γεωμετρικὴ Συνεχὴς Ἀναλογία ἀνάγεσθαι ἔχοι.

ΛΥΣΙΣ.

Γεωμετρικὸς μὲν δὴ οἱοσδηποτοῦν Λόγος τῷ Α:ΑΜ ὀρθῶς ἐκτέθειται (§. 538.)· ὁ δὲ, ὁποιουοῦν ἑτέρου Μέσου Ἀναλόγου ἡγούμενος τῷ ΑΜ (§. 568.). Ἐπεὶ οὖν τριῶν δοθέντων ὁ τέταρτος ῥαδίως ἐξευρίσκεται, ἔσται Α:ΑΜ = ΑΜ:Χ (§. 600.)· ἄρα $\mathrm{X} = \frac{\mathrm{A}^2\mathrm{M}^2}{\mathrm{A}}$ (§. 601.) $= \mathrm{AM}^2$. Ἐξ οὗ ἕπεται ἐν γένει, οἱανδηποτοῦν Γεωμετρικὴν Συνεχῆ Ἀναλογίαν ὀρθῶς ὑποτυποῦσθαι τῷ $\mathrm{A}:\mathrm{AM} = \mathrm{AM}:\mathrm{AM}^2$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἡμῖν δέ τὰ τῆς τάξεως τηροῦσιν, ἐπὶ μὲν τῶν ὡρι-

σμένων ∺ Α:Β:Γ, ἔσται ∺ Α:Β = Β:Γ (§. 567.)· ἐπὶ δὲ τῶν ἀορίστων ∺ Φ:Χ:Ψ, ἔσται ∺ Φ:Χ = Χ:Ψ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 603. Ἐν πάσῃ Γεωμετρικῇ Συνεχεῖ Ἀναλογίᾳ τὸ ὑπὸ τῶν ἀκροτήτων Γινόμενον, ἴσον τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου τετραγώνῳ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστι μὲν δὴ $\mathrm{A}:\mathrm{AM}:\mathrm{AM}^2$ (§. 602.)· ἀλλ' οὖν $\mathrm{A} \times \mathrm{AM}^2 = \mathrm{AM} \times \mathrm{AM}$ ἤτοι $\mathrm{A}^2\mathrm{M}^2 = \mathrm{A}^2\mathrm{M}^2$ (§. 115). Ἄρα ἐπὶ τῶν Γεωμετρικῶς Συνεχῶς Ἀνάλογον τὸ ὑπὸ τῶν ἀκροτήτων παραγόμενον, ἴσον τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου τετραγώνῳ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 604. Δοθέντων τριῶν ὅρων ἐν τῇ Γεωμετρικῇ Συνεχεῖ Ἀναλογίᾳ, τὸν τέταρτον προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Α'. Δοθήτωσαν ὅ, τε πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος, καὶ αἰτείσθω ὁ τρίτος· ἔσται ∺ Α : Β : Χ· κἀντεῦθεν $\mathrm{AX} = \mathrm{B}^2$ (§. 603.)· ἄρα $\mathrm{X} = \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}$· ἡ δὲ Ἀναλογία οὕτως ἐκκείσεται $\mathrm{A}:\mathrm{B} = \mathrm{B}:\frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}$. Τουτέστιν, ὁ τρίτος ὅρος ἰσοῦται, τῷ ἐκ τῆς τοῦ δευτέρου ὅρου τετραγώνου, διὰ τῆς τοῦ πρώτου διαιρέσεως ἐκκύπτοντι πηλίκῳ.

Β'. Δοθέντων τῶν ἄκρων, αἰτείσθω ὁ μέσος Ἀνάλογος. Ἔσται ∺ Α : Υ : Γ. κἀντεῦθεν $\mathrm{A}\Gamma = \Upsilon^2$·

καὶ $Υ = \sqrt{ΑΓ}$· ἤτοι, ὁ μέσος Γεωμετρικὸς Ἀνάλογος ὅρος ἰσοῦται, τῇ ἐκ τοῦ τῶν ἄκρων γινομένου τῆς τετραγωνείου ῥίζης ἐξαγωγῇ· οἷον δοθέντων τῶν ἄκρων 2 καὶ 32, ἢ 4 καὶ 9, ἔσται ὁ μέσος $Υ = \sqrt{(2 \times 32)} = 8$, ἢ $= \sqrt{(4 \times 9)} = 6$· ἡ δὲ ἀναλογία $2 : 8 = 8 : 32$, ἢ $4 : 6 = 6 : 9$· ὡσαύτως $Υ = \sqrt{(2 \times 12)} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$· ἤτοι ὁ μέσος ἀνάλογος μεταξὺ 2 καὶ 12 ἀριθμός ἐστιν ἄλογος (§. 357.).

Γ'. Δοθέντων τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, αἰτείσθω ὁ πρῶτος· ἔσται $\div\!\div Ψ : Β : Γ$. Ἐντεῦθεν $ΨΓ = Β^2$, καὶ $ψ = \frac{Β^2}{Γ}$. Ὁ πρῶτος τοίνυν ὅρος ἰσοῦται τῷ τοῦ δευτέρου ὅρου τετραγώνῳ, διαιρουμένῳ διὰ τοῦ τρίτου ὅρου.

ΕΣΤΩ ΔΗ ΚΑΙ ΕΝ ΤΥΠΩ.

$$\left.\begin{array}{l} Χ = \frac{Β^2}{Α} \\ Υ = \sqrt{ΑΓ} \\ Ψ = \frac{Β^2}{Γ} \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} Χ = \frac{120^2}{8} = \frac{1440}{8} = 1800. \\ Υ = \sqrt{(8 \times 1800)} = 120. \\ Ψ = \frac{120^2}{1800} = \frac{14400}{1800} = 8. \end{array}\right.$$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὃ δ' ἀνήκει περὶ τῶν μέσων ἀναλόγων, τῶν μεταξὺ δυοῖν ἀριθμῶν δοθέντων, οἱ τοιοῦτοι ἐπ' ἀκριβὲς σπανίως ἡμῖν ἀπαντῶσιν. Οὐ γὰρ δηλονότι, εἰμὴ ὅτε διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἄκρων τετράγωνος ὁ γινόμενος (§. 604. Α'.), οὕτω μεταξὺ 2 καὶ 8 μέσος ὁ 4· ὅτι $2 \times 8 = 16$, ὅς τις ἐκείνου τετράγωνος· καὶ γὰρ $\sqrt{16} = 4$. Ἀλλ' ὅγε μεταξὺ 2 καὶ 10 παρεμπίπτων, ἄλογός ἐστιν· ὃς διὰ Δεκαδικῶν κλασμάτων ἀπο-

δίδοσθαι μέλλων (§. 344.), πρώτως ἕξει προκύπτοντας χαρακτῆρας 4,473, οὓς κατὰ μικρὸν προϊούσης τῆς ῥίζης δυνατὸν ἐπαύξειν ἐπ' ἄπειρον, ὡς ἐν τῇ τῶν Λογαρίθμων θεωρίᾳ, κατάδηλον ἔσται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 605. *Δυοῖν Γινομένων ἴσων $ΑΔ = ΒΓ$, οἱ παράγοντες ἔσονται Ἀντιπεπονθότως ἀνάλογον· οἷον, $Α : Β = Γ : Δ$.*

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ γὰρ τῆς ἀναλογίας ὀρθὸν διακρίνεται, ἐὰν ἐν ἑκατέροις τοῖς λόγοις, οἱ αὐτοὶ ὦσιν ἐκθέται (§. 554. 565.). Ἐνταῦθα δὲ οἱ αὐτοί εἰσι· καὶ γὰρ τῆς $Α : Β = Γ : Δ$ ἀναλογίας ἐκθέται εἰσὶν οἱ $\frac{Α}{Β} = \frac{Γ}{Δ}$ (§. 478.), οἵτινες εἰσὶν ὡσαύτως καὶ τῶν $ΑΔ = ΒΓ$. Τεθέντος γὰρ ἐξ ὑποθέσεως $ΑΔ = ΒΓ$, ἔσται τῇ ἀμφοτέρων τῶν ὅρων διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος ΒΔ διαιρέσει $\frac{ΑΔ}{ΒΔ} = \frac{ΒΓ}{ΒΔ}$ (§. 540.), ἤτοι $\frac{Α}{Β} = \frac{Γ}{Δ}$ (§. 176.)· ἀλλαμὴν, οἱ αὐτοί εἰσι τοῖς ἀνωτέρω· ἄρα, κτλ. Ο. Ε. Δ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐπεὶ οὖν ἐκ τῶν εἰρημένων τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, οἷον ἐκ τῆς Ἀναλογίας $Α : Β = Γ : Δ$ ἐστὶν $Α \times Δ = Β \times Γ$ (§. 526.), σαφές ἐστιν ἐκ τῶν δύω τούτων γινομένων τὴν προτέραν αὖθις ἐκκύψαι ἀναλογίαν, ἐὰν θατέρου τῶν γινομένων οἱ παράγοντες ὦσιν ὁ πρῶτος καὶ ὁ ἔσχατος τῶν ὅρων, τοῦ δ' ἑτέρου ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος. Κἀντεῦθεν ἔσται ὁ τοῦ πρώτου γινομένου παράγων πρὸς τὸν τοῦ δευτέρου, ὡς ὁ τοῦ δευτέρου θάτερος πρὸς τὸν ἕτερον τοῦ πρώτου. Ἄρα τῶν ἴσων γινομένων οἱ παράγοντες ἀείποτ' Ἀντιπεπονθότως ἀνάλογον ἔσονται (αὐτ.). Ὥστε κατὰ γένος τὰ τῶν ὁποιωνοῦν πηλίκων ἴσα, εἰς ἀναλογίαν μετασχηματίζεσθαι ἔχειν, ὡς ἐφεξῆς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α′. $$A\Delta = B\Gamma$$
$$A : B = \Gamma : \Delta.$$

Β′. $$A\Delta - B\Delta = \Gamma Z + \Gamma$$
$$\Delta(A - B) = \Gamma(Z + 1)$$
$$A - B : Z + 1 = \Gamma : \Delta.$$

Γ′. $$1 - X^2 = A$$
$$(1 - X) \times (1 + X) = 1 \times A$$
$$1 - X : A = 1 : 1 + X.$$

Δ′. $$X^2 - \Phi^2 = 1$$
$$(X - \Phi) \times (X + \Phi) = 1 \times 1$$
$$X\Phi : 1 = 1 : X + \Phi.$$

Ε′. $$X = \frac{AB}{\Gamma}$$
$$\Gamma X = AB$$
$$\Gamma : A = B : X.$$

Ϛ′. $$X = \frac{A - B}{\Gamma}$$
$$\Gamma X = A - B\ (1)$$
$$\Gamma : A - B = 1 : X$$

Ζ′. $$\Sigma = A + \Delta N - \Delta$$
$$\Sigma \times 1 = A + \Delta\ (N - 1)$$
$$\Delta : 1 = \Sigma : \left(\frac{A}{\Delta} + N - 1\right)$$

Η′. $$K = \frac{AN + \Lambda N}{2}$$
$$2K = (A + \Lambda) N$$
$$2 : A + \Lambda = N : K$$

Θ′. $$\Delta N^2 - \Delta N = 2\Sigma - AN$$
$$\Delta\ (N^2 - N) = \left(\Sigma - \frac{AN}{2}\right)$$
$$N^2 - N : 2 = (\Sigma - AN) : \Delta.$$

Ι′. $$\Psi = \frac{2\Sigma + \Delta N^2 - \Delta N}{2}$$
$$2N\Psi = 2\left(\Sigma + \frac{AN^2 - \Delta N}{2}\right)$$
$$2N : 2 = \left(\Sigma + \frac{\Delta N^2 - \Delta N}{2}\right) : \Psi.$$

ΙΑ′. $$\Xi = \frac{A\Delta + K\Delta + K^2 - A^2}{2\Delta}$$
$$2\Delta \times \Xi = (A + K) \times (\Delta + K - A)$$
$$2\Delta : (K + A) = (\Delta + K - A) : \Xi.$$

ΙΒ′. $$A^{\mu + \nu} = X^3$$
$$A^{\mu} \times A^{\nu} = X \times X^2$$
$$A^{\mu} : X = X^2 : A^{\nu}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 606. *Οἱ οἱασδηποτοῦν ἀναλογίας τέσσαρες Ἀνάλογον ὅροι πολυτρόπως σχηματισθῆναι ἔχουσι, τοῦ τῆς Ἀναλογίας ὀρθοῦ ἀλωβήτου διατηρουμένου.*

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστι μὲν δὴ ἐν γένει $A : AM = B : BM$ (§. 597.). Δύνασθαι δὴ τούτους ποικιλοτρόπως σχηματίζεσθαι, τηρουμένων ἐν ἑκατέρῳ λόγῳ τῶν αὐτῶν κατασκευῶν, ὥστε τὸ ἐκ τῶν ἄκρων καὶ μέσων γινόμενον ἴσον ἀεὶ εἶναι, ὁ ἐφεξῆς δηλώσει Πίναξ, ὡς ἐν ἅπασι τοῦ αὐτοῦ ἐκλαμβανομένου ἐκθέτου (§. 565.)· οἷον·

	$A : AM = B : BM$ $5 : 15 = 4 : 12$	
Εἴδη.	Σχηματισμοί.	Ἐκθέται.
Ἀνάπ.	$AM : A = BM : B$ $15 : 5 = 12 : 4$	$M = 3$
Ἐναλλ.	$A : B = AM : BM$ $5 : 4 = 15 : 12$	$\frac{A}{B} = 1\frac{1}{4}$
Συνθέσ.	$A + AM : AM = B + BM : BM$ $20 : 15 = 16 : 12$	$\frac{1+M}{M} = 1\frac{1}{3}$
ἢ	$A + AM : A = B + BM : B$ $20 : 5 = 16 : 4$	$(1+M) = 4$
Ἀφαιρ.	$A - AM : AM = B - BM : BM$ $10 : 15 = 8 : 12$	$\frac{1-M}{M} = \frac{2}{3}$
ἢ	$A - AM : A = B : BM : B$ $10 : 5 = 8 : 4$	$(1-M) = 2$
Ἀντιστροφῆ	$A : A + AM = B : B + BM$ $5 : 20 = 4 : 16$	$\frac{1}{1+M} = \frac{1}{4}$
ἢ	$A : A - AM = B : B - BM$ $5 : 10 = 4 : 8$	$\frac{1}{1-M} = \frac{1}{2}$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἡ δὲ τούτων χρῆσις τοιαύτη. Διὰ μὲν γὰρ τοῦ Α'. καὶ Β'. εἴδους, ἕκαστος τῶν ὅρων ἀναλογίας τινος, ἐξ ἑνὸς μέρους ἐφ' ἕτερον οἱονδηποτοῦν ῥᾷστα μετενεχθήσεται· οἷον δεῆσαν ἐν τῇ δοθείσῃ ἀναλογίᾳ $A : B = \Gamma : \Delta$ τὸν πρῶτον ὅρον Α τεταρτοταγῆ ποιῆσαι, ἔσται $A : \Gamma = B : \Delta$. Διὰ δὲ τοῦ Γ'. οἱ ἔν τινι ἀναλογίᾳ ἀόριστοι τῶν ὅρων, θάτερος τῶν μέσων, φέρ' εἰπεῖν, ἕτερος δὲ τῶν ἄκρων, ὧν δὴ τὸ ἄθροισμα ἔγνωσται, ἰδίᾳ εὑρίσκεσθαι ἔχωσιν· οἷον κείσθω $6 : X = 9 : Y$· δεδόσθω δὲ τὸ τῶν ἀορίστων Χ καὶ Υ ἄθροισμα, ἤτοι γενέσθω Α καὶ $Y = 25$· εὑρεθήσεται οὕτω τούτων ἕκαστος ἰδίᾳ· ἤτοι $6 : X = 9 : Y$, ἔσται $6 : 9 = X : Y$ διὰ τὸ Α'. καὶ $(6 + 9) : 9 = (X + Y) : Y$ διὰ τὸ Γ'. ἄρα $15 : 9 = 25 : Y$, καὶ $15 : 6 = 25 : X$· κἀντεῦθεν $Y = \frac{9 \cdot 25}{15} = 15$, καὶ $X = \frac{6 \cdot 25}{15} = 10$ (§. 600.) Ταυτὸ δὲ κρατήσει λεγόμενον κἀπὶ τοῦ Δ'., ἐὰν ἡ τῶν ἀορίστων Χ καὶ Υ διαφορὰ δοθῇ·

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 607. Ὡσαύτως δείκνυται τοὺς αὐτοὺς πάντως Σχηματισμοὺς μεταλαμβάνεσθαι κἂν τῷ τῆς Συνεχοῦς Γεωμετρικῆς Ἀναλογίας ἐν γένει ἐκτεθέντι τύπῳ $A : AM = AM : AM^2$ (§. 602.).

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 608. Γραμμαὶ Παράλληλοί εἰσιν, αἱ ἁπανταχοῦ τὴν αὐτὴν ἀπ' ἀλλήλων τηροῦσαι ἀπόστασιν· οἷον ΑΒ, ΓΔ. Μὴ Παράλληλοι δὲ, αἱ ἐκβαλλόμεναι ἐπί τι σημεῖον ἀλλήλαις συμπίπτουσιν· ὡς ΓΒ, ΕΔ.

Πίν. Α. Σχ. 8

Σχ. 10

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Σχ. 9. §. 609. Ἐγκλινόμεναι πρὸς ἀλλήλας Γραμμαὶ εἰσιν, ὧν ἡ ἀπόστασις συνεχῶς ἀεὶ ἐλάσσων γίνεται, ὡς
10 ΑΒ, ΓΒ. Ἀποκλινόμεναι δὲ, ὧν ἡ ἀπόστασις συνεχῶς ἀεὶ μείζων, ὡς ΓΒ, ΔΕ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐνταῦθα περί τε τῶν Παραλλήλων καὶ Ἐγκλινομένων, καὶ μὴν καὶ τῶν μὴ τοιούτων, ἐκκείσθω τινὰ ἐν ἐπιτομῇ, καθ' ὅσον δηλαδὴ ἡ τούτων χρῆσις, ἐν τοῖς ἐφεξῆς ἐκτεθησομένοις Παραδείγμασιν ἡμῖν ἀναγκαία. Κατὰ πλάτος δὲ περὶ τούτων ἐν τῇ τῆς Γεωμετρίας πραγματείᾳ, ἣν Θεὸς διδῷ, διαληψόμεθα.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 610. Δυεῖν Ἀναλογιῶν, ἐὰν οἱ θατέρας ἑπόμενοι τῇ ἑτέρᾳ ἡγούμενοι ἐκληφθῶσιν, ἔσονται οἱ λοιποὶ ὅροι Ὀρθῶς ἀνάλογον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστωσαν δύω ὁποιαιοῦν ἀναλογίαι αἱ Α:ΑΜ = Β:ΒΜ, καὶ ΑΜ:ΑΜΝ = ΒΜ:ΒΜΝ. Ἐὰν δὴ οἱ τῶν ὅρων ὅμοιοι γραμμαῖς ἀπ' ἀλλήλων διακριθῶσιν, ἔσονται αἱ μὲν γραμμαὶ Παράλληλοι, οἱ δὲ λοιποὶ ὅροι Ὀρθῶς ἀνάλογον· οἷον·

Α:ΑΜ = Β:ΒΜ   3:6 = 5:10
ΑΜ:ΑΜΝ = ΒΜ:ΒΜΝ   6:9 = 10:15
Α:ΑΜΝ = Β:ΒΜΝ   3:9 = 5:15

Ἔστι μὲν γὰρ ἐν ἀμφοτέροις ὁ ἐκθέτης ΜΝ ἴσος (§. 565.); ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν μέσων (§. 598.)· ἄρα, κτλ. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 611. Ἐὰν τοίνυν τῶν αὐτῶν ἀναλογιῶν θατέρα Ἀνάπαλιν ὑπεκτεθῇ, οἵ τε τῶν ὅρων ὅμοιοι γραμμικῶς διασταλλῶσιν· αἱ μὲν γραμμαὶ Παράλληλοι ἔσονται, οἱ δὲ λοιποὶ ὅροι Ὀρθῶς ἀνάλογον· οἷον·

ΑΜ : Α = ΒΜ:Β   6:3 = 10:5
ΑΜ:ΑΜΝ = ΒΜ:ΒΜΝ   6:9 = 10:15
Α:ΑΜΝ = Β:ΒΜΝ.   3:9 = 5:15.

ὡσαύτως ἐὰν καὶ καὶ ἡ ἑτέρα· οἷον·

Α:ΑΜ = Β:ΒΜ   3:6 = 5:10
ΑΜΝ:ΑΜ = ΒΜΝ:ΒΜ   12:6 = 20:10
Α:ΑΜΝ = Β:ΒΜΝ   3:12 = 5:20

Εἰσὶ δὲ αἱ ἀναλογίαι ἴσαι, διὰ τὸν ἀνωτέρω (§. 609.) προεκτεθέντα λόγον.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 612. Δυεῖν Ἀναλογιῶν ἐκκειμένων, ἐὰν ὁ θατέρας ἑπόμενος ὅρος, ἐν τῇ ἑτέρᾳ πρῶτος ἡγούμενος ληφθῇ· ὅ, τε ἐκείνης δεύτερος ἡγούμενος, ἐν ταύτῃ δεύτερος ἑπόμενος, ἔσονται οἱ λοιποὶ ὅροι Ἀντιπεπονθότως ἀνάλογον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐκκείσθωσαν μὲν δὴ ὁποιαιοῦν δύω Ἀναλογίαι, αἱ ἑπόμεναι·

$$\begin{array}{ccc} A:B = \Gamma:\Delta & \quad & 6:12 = 5:10 \\ B:E = Z:\Gamma & & 12:3 = 20:5. \end{array}$$

Ἐὰν οὖν ἐπὶ τοὺς ὁμοίους τῶν ὅρων γραμμαὶ ἀχθῶσιν, αἱ μὲν γραμμαὶ Ἐγκλινόμεναι ἔσονται, οἱ δὲ λοιποὶ ὅροι Ἀντιπεπονθότως ἀνάλογον. Ἔστι γὰρ ἐν τῇ πρώτῃ ἀναλογίᾳ $A\Delta = EZ$ (§. 598.)· ἄρα $A:E = Z:\Delta$ (§. 605.). Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 613. Ἐὰν οὖν ἐπ' ἐκθέσεως τῶν ἀνωτέρω ἀναλογιῶν, οἱ τῆς πρώτης ὅροι Ἀνάπαλιν ληφθῶσι, τῶν ὁμοίων ὅρων γραμμαῖς διασταλλέντων, ἔσονται αἱ μὲν γραμμαὶ Παράλληλοι, οἱ δὲ λοιποὶ ὅροι Ἀντιπεπονθότως ἀνάλογον· οἷον·

$$\begin{array}{ccc} B:A = \Delta:\Gamma & \quad & 3:6 = 5:10 \\ B:E = Z:\Gamma & & 3:2 = 15:10 \\ \hline A:E = Z:\Delta & & 6:2 = 15:5 \end{array}$$

Ἐὰν δὲ οἱ τῆς δευτέρας, ἔσται ὡσαύτως

$$\begin{array}{ccc} A:B \quad \Gamma:\Delta & \quad & 3:6 = 5:10 \\ E:B = \Gamma:Z & & 15:6 = 5:2 \\ \hline A:E = Z:\Delta & & 3:15 = 2:10 \end{array}$$

Ἐὰν δ' ἀμφοτέρων, ἔσονται αἱ μὲν γραμμαὶ Ἀποκλινόμεναι, οἱ δὲ λοιποὶ ὅροι ὡσαύτως ἐν λόγῳ Ἀντιπεπονθότι· οἷον·

$$\begin{array}{ccc} B:A = \Delta:\Gamma & \quad & 3:6 = 5:10 \\ E:B = \Gamma:Z & & 15:3 = 10:2 \\ \hline A:E = \Delta:Z & & 6:15 = 2:5 \end{array}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 614. *Τεσσάρων ὅρων ἐκκειμένων ἀνάλογον, ἐὰν οἱ ἡγούμενοι καὶ οἱ ἑπόμενοι διὰ τῶν αὐτῶν, ἢ δι' ἑτέρων πολλαπλασιασθῶσιν· ἐκείνως μὲν τὰ γινόμενα, οὕτω δὲ τὰ πηλίκα, ἀνάλογον ἔσται.*

ΔΕΙΞΙΣ.

Θῶμεν δὴ Α'. διὰ τῶν αὐτῶν $P = 3$ καὶ $N = 3$, τοὺς ἐν τῇ $A : AM = B:BM$ ἀναλογίᾳ ὅρους πολλαπλασιασθῆναι, ἔσται

$$AP : AMN = BP : BMN.$$

$$(3.3) : (5.3) = (6.3) : (10.3)$$

Ἄρα αὕτη ἀνάλογος τῇ $A:AM = B:BM$, ὡς τοῦ αὐτοῦ ἐκθέτου $\frac{MN}{P}$ ἐν ἀμφοτέροις ἐκλαμβανομένου (§. 565)·

Ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον, τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ἴσον (§. 598.)· ὡσαύτως

$$\begin{array}{ccc} AP:AMN = B:BM & \quad & 9:15 = 6:10 \\ AP:AM = BP:BM & & 9:5 = 18:10 \\ A:AMN = B:BMN & & 3:15 = 6:30 \end{array}$$

Ὃ ἦν τὸ α'. Ἀλλὰ δὴ καὶ δι' ἑτέρων $\Sigma = 4$, $P = 3$.

$A\Sigma : AMP = B\Sigma : BMP \qquad 12 : 15 = 24 : 30.$

Ἔστι δ' ὡσαύτως αὕτη ἡ ἀναλογία ἰσοδύναμος τῇ $A : AM = B : BM$, διὰ τοὺς προεκτεθέντας λόγους· ἄρα τὸ τῆς ἀναλογίας ἰσότιμον οὐδόλως ἠλλοίωται. Ὃ ἦν τὸ β'.

Θῶμεν αὖ διὰ τῶν αὐτῶν $P = 3$ καὶ $N = 3$, τοὺς ἐν τῷ $A : AM = B : BM$ διαιρεθῆναι ὅρους· ἔσται

$$\frac{A}{P} : \frac{AM}{N} = \frac{B}{P} : \frac{BM}{N} \qquad 1 : \tfrac{5}{3} = 2 : \tfrac{10}{3}.$$

Κἀντεῦθεν ἐν ἀμφοτέροις ὁ ἐκθέτης ἔσται $\frac{MP}{N}$. Ὃ ἦν τὸ γ'. ὡσαύτως

$$\frac{A}{P} : \frac{AM}{N} = B : BM \qquad 1 : \tfrac{5}{3} = 6 : 10$$

$$\frac{A}{P} : AM = \frac{B}{P} : BM \qquad 1 : 5 = 2 : 10$$

$$A : \frac{AM}{N} = B : \frac{BM}{N} \qquad 3 : \tfrac{5}{3} = 6 : \tfrac{10}{3}.$$

Ἀλλὰ καὶ δι' ἑτέρων ὡς $N = 2$, καὶ $P = 3$·

$$\frac{A}{P} : \frac{AM}{N} = \frac{B}{P} : \frac{BM}{N} \qquad 1 : \tfrac{5}{2} = 2 : 5.$$

Ἄρα, διὰ τὰ προκατασκευασθέντα, καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως οὐδεμίαν τροπὴν ἡ τῆς ἀναλογίας ἰσότης ὑφίσταται. Ὃ ἦν τὸ δ'.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἡ δὲ τῶν οὕτως ἐκτεθέντων χρῆσις καὶ λίαν ὀνήσιμος. Διὰ μὲν γὰρ τοῦ ἐπὶ τῶν ὁμοίων πολλαπλασιασμοῦ, τὰ ἔν τινι ἀναλογίᾳ προσπίπτοντα κλάσματα ῥαδίως ἀπαλείφειν ἔχομεν· οἷον ἐν τῇ ἐφεξῆς ἀναλογίᾳ

$8 : 13\tfrac{1}{3} = 3 : 5$ ἀποδιοπομφθήσεται τὸ κλάσμα, ἐὰν ὁ τοῦτο συνέχων ὅρος, ὡς καὶ ἕτερος τις τῶν ἄκρων ἐπὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα, φέρ' εἰπεῖν ἐπὶ τὸν 3, πολλαπλασιασθῇ, ἤτοι $8 : 40 = 3 : 15$, ἢ $24 : 40 = 3 : 5$. Διὰ δὲ τῆς διὰ τῶν αὐτῶν διαιρέσεως, οἱ ἐν τῇ ἀναλογίᾳ μείζονες τῶν ὅρων πρὸς ἐλάττονας εὐχερῶς ἀνάγονται, ἐὰν θάτερος μὲν τῶν ἄκρων, ἕτερος δὲ τῶν μέσων, δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ, οἷα δὴ κοινοῦ, γινομένου διαιρεθῇ· οἷον δεῆσαν μεταξὺ τῶν δοθέντων τριῶν ἀριθμῶν 320, 256, 480, τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν, ἔσται $320 : 256 = 480 : X$, καὶ $2 : 256 = 3 : X$ διαιρουμένων τοῦ πρώτου καὶ τρίτου τῶν ὅρων διὰ τῶν 160· πόρρω $1 : 128 = 3 : X$· κἀντεῦθεν $X = 384$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 615. Αἱ τῶν ἀναλόγων τοίνυν ποσοτήτων ταυτούμεναι δυνάμεις ἀνάλογόν εἰσιν. Ἐπιπολλαπλασιασθέντων γὰρ τῶν κατὰ τὴν ἀναλογίαν ὅρων ἐφ' ἑαυτῶν, προκύπτουσιν οἱ τούτων τετράγωνοι, κἀντεῦθεν οἱ κύβοι, καὶ τούτων αἱ δυνάμεις αἱ καθυπέρτεραι. Οἷον θῶμεν διὰ τῶν $A : B = \Gamma : \Delta$ τέσσαρας ὑποτυπεῦσθαι ἀναλόγους ποσότητας· ἔσται δὴ $A\Delta = B\Gamma$ (§. 598.), καὶ τῇ τούτων πρὸς δύναμιν οἱανοῦν ἀναγωγῇ ἔσται $(A\Delta)^\mu = (B\Gamma)^\mu$, κἀντεῦθεν $A^\mu \Delta^\mu = B^\mu \Gamma^\mu$. Ἄρα $A^\mu : B^\mu = \Gamma^\mu : \Delta^\mu$ (§. 605.)· $3^\mu : 5^\mu = 6^\mu : 10^\mu$, τουτέστι $9 : 25 = 36 : 100$, τεθέντος $\mu = 2$· ὡσαύτως ἐὰν τεθῇ $\mu = 3$, ἔσται $27 : 125 = 216 : 1000$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 616. Τοὔμπαλιν αἱ τῶν ἀναλόγων ποσοτήτων ταυτούμεναι ῥίζαι ἀνάλογόν εἰσιν· οἷον ἐὰν ᾖ $A^{\mu} : B^{\mu} = \Gamma^{\mu} : \Delta^{\mu}$, ἔσται $A^{\mu}\Delta^{\mu} = B^{\mu}\Gamma^{\mu}$ (§. 598.), $(A\Delta)^{\mu} = (B\Gamma)^{\mu}$· κἀντεῦθεν $\sqrt[\mu]{A\Delta} = \sqrt[\mu]{B\Gamma}$· Ἄρα $\sqrt[\mu]{A} : \sqrt[\mu]{B} = \sqrt[\mu]{\Gamma} : \sqrt[\mu]{\Delta}$ (§. 605.). $9 : 25 = 36 : 100$, ἤτοι $\sqrt[\mu]{3} : \sqrt[\mu]{5} = \sqrt[\mu]{6} : \sqrt[\mu]{10}$, ὑποτεθέντος $\mu = 2$· ἐὰν δὲ ληφθῇ $\mu = 3$, ἔσται $27 : 125 = 216 : 1000$, ἤτοι $\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{6} : \sqrt[3]{10}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Διὰ τῶν ἐν τοῖς ἀνωτέρω Πορίσμασι (§. 614. 615.) προϋπεκτεθέντων, οἱ ἔν τινι ἀναλογίᾳ παρεμπίπτοντες, ἄλογοι τῶν ὅρων ῥᾷστα ἀποσκυβαλίζεσθαι ἔχουσιν, ἐὰν πάντες, οἱ τῆς ἀναλογίας ὅροι πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ Ῥιζικοῦ ἐκθέτου βαθμοδεικνυμένην ἀναχθῶσι δύναμιν· οἷον $A : B = \Gamma : \sqrt{\Delta}$, ἔσται $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$, ὡσαύτως ἐὰν τύχῃ $A : B = \sqrt[3]{\Gamma} : \sqrt{\Delta}$, ἔσται $A^2 : B^2 = \sqrt[3]{\Gamma^2} : \Delta$, καὶ $A^6 : B^6 = \Gamma^2 : \Delta^3$.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 617. Δυεῖν, ἢ πλειόνων ἀναλογιῶν, τῶν Ὁμολόγων ὅρων ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιασθέντων, ἢ διαιρεθέντων· τὰ γινόμενα, ἢ πηλίκα ἀνάλογον ἔσται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐκκειμένων οἱωνδηποτοῦν Γεωμετρικῶν ἀναλογιῶν, ὡς

$$A : AM = B : BM \qquad 3 : 5 = 6 : 10$$
$$\Gamma : \Gamma N = \Delta : \Delta N \qquad 2 : 4 = 7 : 14$$
$$E : EK = Z : ZK \qquad 8 : 9 = 16 : 18$$

Ἐὰν ἕκαστος τῶν ὁμολόγων ὅρων ἐφ' ἑκάστου ὑπαλλήλως πολλαπλασιασθῇ, ἤτοι οἱ μὲν ἡγούμενοι τοῖς ἡγουμένοις, οἱ δ' ἑπόμενοι τοῖς ἑπομένοις· πρόδηλον ὡς τὰ ἐντεῦθεν προκύπτοντα γινόμενα ἀναλογίαν συντιθέασι τὴν ἐφεξῆς.

$$A\Gamma E : A\Gamma EMNK = B\Delta Z : B\Delta ZMNK$$
$$48 : 180 = 672 : 2520$$

ταῖς ἐν τῇ ἀνωτέρω ἐκθέσει ἁπλαῖς ἰσοδυναμοῦσαν· τὸ γὰρ πηλίκον ἐν ἑκατέροις τοῖς λόγοις ταυτὸν MNK ἐκκύπτει (§. 482.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 618. Ὡσαύτως, ἐὰν οἱ τῆς πρώτης ἀναλογίας ὅροι (§. 617.), διὰ τῶν τῆς δευτέρας διαιρεθῶσιν, ἐκκύψει ἀναλογία τῇ προτέρᾳ ἰσοδύναμος, ἡ ἐφεξῆς

$$\frac{A}{\Gamma} : \frac{AM}{\Gamma N} = \frac{B}{\Delta} : \frac{BM}{\Delta N}$$

ὡς ἐν ἑκατέροις τοῖς λόγοις τοῦ αὐτοῦ πηλίκου $\frac{M}{N}$ ἐκλαμβανομένου·.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 619. Ἐφ' ὁποιασοῦν τοίνυν πλειόνων ὅρων ἐκθέσεως, ἐὰν ὁ τῆς πρώτης ἔσχατος, ἐν τῇ μετ' αὐτὴν τρίτος ληφθῇ· ὅ, τε ταύτης ἔσχατος, τῆς ἐφεπομένης τρίτος· καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως. ἔσται ὁ ἐκ τῶν ἡγουμένων, πρὸς τὸν ἐκ τῶν ἑπομένων τῶν πρώτων λόγων σύνθετος· ὡς ὁ τῆς πρώτης ἐκθέσεως τρίτος, πρὸς τὸν τῆς ἐσχάτης τέταρτον. οἷον·

Α : Β	$=$ Γ : Δ	3 : 6	$=$ 5 : 10
Ε : Ζ	$=$ Δ : Η	2 : 4	$=$ 10 : 20
Θ : Ι	$=$ Η : Κ	5 : 7	$=$ 20 : 28
Λ : Μ	$=$ Κ : Ν	6 : 9	$=$ 28 : 42
ΑΕΘΛ : ΒΖΙΜ	$=$ Γ : Ν	180 : 1512	$=$ 5 : 42

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 620. Ὁ τοῦ Συνθέτου λόγου ἐκθέτης, ἴσός ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν ἁπλῶν ἐκθετῶν παραγομένῳ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστω μὲν δὴ τοῦ μὲν πρώτου λόγου Α:Β, ἐκθέτης ὁ Μ· τοῦ δὲ δευτέρου Γ:Δ, ὁ Ν· ἔσται Μ:1 $=$ Α:Β, καὶ Ν:1 $=$ Γ:Δ (§. 484.)· ἄρα ΜΝ:1 $=$ ΑΓ : ΒΔ (§. 617.). Ἐπομένως τε ΑΝ παρωνυμιῶν ἐστὶ τοῦ λόγου ΑΓ:ΒΔ (§. 484.); τουτέστι τοῦ συγκειμένου ἐκ τοῦ Α:Β καὶ Γ:Δ (§. 492.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οἷον ἔστωσαν λόγοι 8:4 καὶ 24:6, κἀκείνου μὲν ἑρμηνεὺς κείσθω ὁ 2, τούτου δ' ὁ 4. Τὸν ἐκ τῶν δοθέντων τοίνυν συγκείμενον λόγον ἔξουσιν 192:24, οἱ διὰ τοῦ τῶν ἡγουμένων καὶ τῶν ἑπομένων τῶν δυοῖν λόγων ἐπ' ἀλλήλους πολλαπλασιασμοῦ ἐκκύπτοντες. Ἀλλ' οὖν 192:24 $=$ 8 (§. 466.), ὅπερ ἐστὶ τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ 2 ἐπὶ τὸν 4· τουτέστιν ὁ 192 ἐστὶν ὀκταπλάσιος πρὸς τὸν 24, κατὰ τὸν τῶν ἐκθετῶν πολλαπλασιασμόν. Εἴληπται δὲ τὸ Θεώρημα ἐκ τῶν Βολφίου (α).

(α) Elem. Arith. §. 198.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 621. Πάντες ἄρα οἱ Γινόμενοι, ἀριθμοί εἰσι Συνθετοι.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 622. Πλειόνων λόγων ἀλλήλοις ἴσων ἐκκειμένων, τὸ ἄθροισμα τὸ ἐξ ἁπάντων τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τὸ ἐξ ἁπάντων τῶν ἑπομένων, τῷ ἐφ' ἑνὶ ἑκάστῳ τῶν λόγων ἡγουμένῳ πρὸς τὸ αὐτοῦ ἑπόμενον, ἀνάλογόν ἐστι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπίσης γὰρ πάντα τὰ ἡγούμενα, ὑπὸ πάντων τῶν ἑπομένων διαιρεῖται (§. 466.), ἅμα ὑπὸ ἅμα, ὡς ἕκαστον ὑφ' ἑκάστου, καὶ πηλίκον ἡ διαίρεσις οὕτως, ἢ ἐκείνως παρέχει τὸ αὐτό (§. 618.). Ἄρ' ἐὰν ᾖ

Α : ΑΜ	4 : 2
Β : ΒΜ	6 : 3
Γ : ΓΜ	10 : 5
Δ : ΔΜ κτλ.	14 : 7 κτλ.

Ἔσται (Α $+$ Β $+$ Γ $+$ Δ) : (ΑΜ $+$ ΒΜ $+$ ΓΜ $+$ ΔΜ) $=$ Γ:ΓΜ, ἢ Α:ΑΜ, ἢ Β:ΒΜ, ἢ Δ:ΔΜ. Ἐπείπερ (Α $+$ Β $+$ Γ $+$ Δ) $\times$ ΑΜ $=$ (ΑΜ $+$ ΒΜ $+$ ΓΜ $+$ ΔΜ) $\times$ Α· (4 $+$ 6 $+$ 10 $+$ 14) : (2 $+$ 3 $+$ 5 $+$ 7) $=$ 4:2, ἤτοι 34:17 $=$ 4:2, κἀπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 623. Ἔσται ἄρα (Α $+$ Β $+$ Γ) : $\frac{1}{2}$(ΑΜ $+$ ΒΜ $+$ ΓΜ) $=$ Β : $\frac{1}{2}$ΒΜ· ἤτοι τὸ ἄθροισμα ἐκ πάντων τῶν ἡγουμένων, ὑποδιπλάσιον ἐστὶ τοῦ ἐκ πάντων τῶν ἑπομένων· καὶ ἑπομένως ἐστὶν, ὡς τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑνὸς λόγου, πρὸς τὸ αὐτοῦ ἑπόμενον.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 624. Ἐπὶ τῶν ὁμοίων λόγων, ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων ἐστὶ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἑπομένων, ὡς τὸ ἡγούμενον ἐφ' ἑκατέρου τῶν λόγων πρὸς τὸ αὐτοῦ ἑπόμενον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Οἷον ἐπεὶ $A:AM = B:BM$ (§. 597.), ἔσται $(A - B) : (AM - BM) = A:AM$, ἢ $B:BM$· καὶ γὰρ $A - B$ ἐστὶ τὸ λοιπὸν, ἤτοι ἡ διαφορὰ τοῦ ὅλου A, τὸ δὲ B τὸ ἀφαιρεθέν· ὁμοίως $AM - BM$ τὸ λοιπὸν τοῦ ὅλου AM, BM δὲ τὸ ἀφαιρεθέν. Κἀντεῦθεν ἔσται, λοιπὸν πρὸς λοιπὸν, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον· ἄρα $(A - B) : (AM - BM) = A:AM$· ἀλλ', ἔσται καὶ λοιπὸν πρὸς λοιπὸν, ὡς ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν· ἄρα $(A - B) : (AM - BM) = B:BM$. Ἔστι δὲ $(A - B) \times AM = (AM - BM) \times A$· Ἄρα, κτλ. Ὡσαύτως καὶ ἐν ἀριθμοῖς $20 : 10 = 16 : 8$, ἔσται $(20 - 16) : (10 - 8)$, ἤτοι $4:2 = 20:10$, ἢ $16:8$. Ο. Ε. Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 625. Ἐπ' ἐκθέσεως τῆς Συνεχῶς ἀναλόγου, ἔσται ὁ τῶν ὅρων πρῶτος πρὸς ὁποιονοῦν, ὡς ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος πρὸς τὴν αὐτὴν ἀρθέντες δύναμιν, ἣν ἡ μεταξὺ τούτων ἐμφαίνει διάστασις.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ γὰρ $\div A:AM:AM^2:AM^3:AM^4:AM^5$: κτλ. ἐν συνεχεῖ πρόεισιν ἀναλογίᾳ (§. 602.)· ἔστιν $A:AM^2 = A^2 : A^2M^2$, καὶ $A:AM^4 = A^4:A^4M^4$, τέσσαρες γὰρ μεταξὺ τούτων ὅροι ἐμπεριειλήφαται· ὡσαύτως καὶ $A:AM^5 = A^5:A^5M^5$. Καὶ γὰρ $A \times A^2M^2 = AM^2 \times A^2$· ὃ δὴ κἀπὶ τῶν λοιπῶν τηρείσθω λεγόμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 626. Ἐπ' ἐκθέσεως τοίνυν πλειόνων Συνεχῶς ἀνάλογον $\div A:B:\Gamma:\Delta:E$: κτλ. ὁ πρῶτος A πρὸς τὸν τρίτον Γ ἐν διπλασίονι ἐστὶ λόγῳ, ἤτοι $AB : B\Gamma$ (§. 544.), ἤπερ ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον $A:B$, τουτέστιν ἐν λόγῳ τῷ ἀπὸ τῶν ἐκείνων τετραγώνων (§. 215 549.)· πρὸς δὲ τὸν τέταρτον Δ ἐν τριπλασίονι, ὡς $AB\Gamma:B\Gamma\Delta$, ἤπερ $A:B$, ἤτοι τῷ ἀπὸ τῶν αὐτῶν ἐκείνων κύβων ἴσος (§. 551.)· πρὸς δὲ τὸν πέμπτον, ἐν τετραπλασίονι, ἤτοι τῷ ἀπὸ τῶν αὐτῶν τετάρτων δυνάμεων ὁ αὐτός· καὶ ἐφεξῆς οὕτω. Κἀνάπαλιν ἄρα ὁ λόγος $A:B$ ὑποδιπλασίων ἔσται τοῦ $AB : B\Gamma$, ἢ $A:\Gamma$· τουτέστι, λόγος ἔσται ὁ τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν, τῶν ἐκ τῶν ἀριθμῶν ἐκείνων, δι' ὧν ὁ λόγος δίδοται $A:\Gamma$· ὁ δ' αὐτὸς $A:B$ ὑποτριπλασίων τοῦ $AB\Gamma:B\Gamma\Delta$, ἢ $A:\Delta$· ἤτοι ὁ λόγος ἔσται τῶν κυβικῶν ῥιζῶν, τῶν ἐκ τῶν ἀριθμῶν, ὧν ὁ λόγος ἐστὶν $A:\Delta$ (§. 545.)· καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 627. Ἁρμονικὴ Ἀναλογία ἐστὶν, ἐν ᾗ ὁ μείζων ἔχει πρὸς τὸν ἐλάττονα τῶν ὅρων, ὡς ἡ τῶν μειζόνων διαφορὰ πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 628. Ἐν Συνεχεῖ μὲν Ἁρμονικῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, ὅταν τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον λόγον ἔχει, ὃν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου. Ἐν Διακεκριμμένῳ δὲ, ἢ Διεχεῖ, ὅταν τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον λόγον ἔχῃ, ὃν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ τρίτου καὶ τοῦ τετάρτου.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐκκειμένων μὲν δὴ τριῶν μεγεθῶν Α, Β, Γ· 2, 3, 6· ἢ 10, 16, 40· ἐὰν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου λόγον ἔχῃ, ὃν τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον, ἡ ἀναλογία ἔσται Συνεχῶς Ἁρμονική· οἷον (Α — Β) : (Β — Γ) = Α : Γ, 6 : 24 = 10 : 40. Κἂν δὲ τεσσάρων μεγεθῶν Α, Β, Γ, Δ· 2, 3, 6, 12· ἡ ὑπεροχὴ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ τρίτου καὶ τοῦ τετάρτου λόγον ἔχῃ, ὃν τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον, τὰ μεγέθη ταῦτα ἐν Διεχεῖ Ἁρμονικῷ λόγῳ ἐκκεῖσθαι εἰρήσονται· οἷον (Α — Β) : (Γ — Δ) = Α : Δ, 1 : 6 = 2 : 12· ὡσαύτως κἀπὶ

τῶν 2, 8, 12, 18· καὶ 5, 3, 21, 15· ἢ 3, 5, 8, 24.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 629. Δυοῖν ὅρων Α καὶ Β δοθέντων, τέταρτον Χ Ἁρμονικῶς ἀνάλογον προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπεὶ μὲν δή ἐστι

$$Β — Α : Χ — Β = Α : Χ \ (\S. 627.)$$

ἔσται καὶ $(Β — Α)\, Χ = (Χ — Β)\, Α$ (§. 598.)

τοίνυν $2\, ΑΧ = (Α + Χ)\, Β$

ἤτοι $2\, ΑΧ — ΒΧ = ΑΒ$

ἄρα $Χ = ΑΒ : (2Α — Β)$.

Ἐὰν οὖν τεθῇ Α = 10, Β = 16· ἔσται Χ = 160 : (20 — 16) = 160 : 4 = 40.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 630. Ἡ ἰσότης τοίνυν Χ = ΑΒ : (2Α — Β), ἐπὶ τὴν ἐφεξῆς ῥᾳδίως ἀναλυθήσεται Ἀναλογίαν 2Α — Β : Α = Β : Χ. Ἐξ οὗ ἕπεται, ἐπὶ τριῶν ἀριθμῶν Ἁρμονικῶς ἀναλόγων εἶναι τὴν τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ διπλοῦ τοῦ πρώτου διαφορὰν, πρὸς τὸν πρῶτον· ὡς τὸν δεύτερον, πρὸς τὸν τρίτον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 631. Ἐὰν οὖν τεθῇ 2Α = Β, ἔσται Χ = ΑΒ : 0, ἑπομένως τε 1 : 0 = Χ : ΑΒ (§. 126.). Ἐπεὶ δὲ οὐκ ἔστιν 1 = 0, οὐδὲ Χ = ΑΒ. Ἔνθεν τοι ἐν ταύτῃ τῇ περιστάσει οὐδεὶς ἀριθμὸς Ἁρμονικῶς ἀνάλογος τοῖς Α καὶ Β εὑρεθήσεται. Οἷον, ἐὰν τεθῇ Α = 12,

$B = 14$· ἔσται $X = 12 \times 24 : (24 - 24) = 12 \times 24 : 0$· ἀλλ' οὖν τῶν ἀμηχάνων ἐστὶ 12×24 ἤτοι 288 ἀντὶ τρίτου ὅρου λαβεῖν, ἔσται γὰρ οὕτω $12 : 264 = 12 : 288$ (§. 627.) ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. Πολλῷ δ' ἔλαττον εὑρεθήσεται ἀριθμὸς, ἐὰν τεθῇ $B > 2A$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 632. Ἐὰν δὲ ἐκ τριῶν ἀναλόγων 6, 8, 12, ὁ μὲν δεύτερος ληφθῇ ἀντὶ Α, ὁ δὲ τρίτος ἀντὶ Β, εὑρεθήσεται ὁ τέταρτος Συνεχῶς ἀνάλογος $= 8 \times 12 : (16 - 12) = 8 \times 12 : 4 = 8 \times 3 = 24$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 633. Ὡσαύτως, ἐὰν ὁ μὲν τρίτος ἀντὶ Α, ὁ δὲ τέταρτος ἀντὶ Β ληφθῇ, εὑρεθήσεται ὁ πέμπτος, καὶ ἐφεξῆς οὕτως ἐπ' ἄπειρον, δυοῖν ὅρων δοθέντων ἡ πρόοδος εἰ δυνατόν ἐστι (§. 630.), συνεχιζέσθω τῷ εὑρεθέντι κανόνι· οἷον ἐὰν $A = 10$ τεθῇ, $B = 12$, ἔσται ὁ τρίτος $12 \times 10 : (20 - 12) = 15$. Κἀντεῦθεν ὁ τέταρτος $12 \times 15 : (24 - 15) = 20$, ὁ πέμπτος $15 \times 20 : (30 - 20) = 30$· ὁ ἕκτος $20 \times 30 : (40 - 30) = 60$. Ἀλλὰ περαιτέρω χωρεῖν οὐκ ἔξεστι διὰ τὸ $60 = 60$ (§. 632.) ἀπαντᾷν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 634. Δυοῖν ὅρων Α καὶ Β δοθέντων, μέσον Χ Ἁρμονικῶς ἀνάλογον προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω Α ὁ πρῶτος, Χ ὁ δεύτερος, καὶ Β ὁ τρίτος· τοίνυν

$$X - A : B - X = A : B \quad (\S.\ 627.)$$
$$(X - A)B = (B - X)A \quad (\S.\ 598.)$$
$$BX = (2B - X)A$$
$$(A + B)X = 2AB$$
$$X = 2AB : (A + B)$$

Ἔστω $A = 10$, $B = 40$, ἔσται $X = 800 : 50 = 16$.

ΠΟΣΙΣΜΑ Α.

§. 635. Ἡ ἐξίσωσις τοίνυν $X = 2AB : (A + B)$ ἐπ' Ἀναλογίαν οὕτω μετενεχθήσεται $A + B : 2A = B : X$. Ἔνθεν τοι, ἐὰν ὦσι τρεῖς ὅροι Ἁρμονικῶς ἀνάλογον, ἔσται τὸ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου ἄθροισμα πρὸς τὸ διπλοῦν τοῦ πρώτου, ὡς ὁ ἔσχατος πρὸς τὸν μέσον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 636. Ἔστι δὴ ὁ Ἀριθμητικῶς μέσος ἀνάλογος, πρὸς τὸν Γεωμετρικῶς μέσον ἀνάλογον, ὡς ὁ Γεωμετρικῶς μέσος ἀνάλογος, πρὸς τὸν Ἁρμονικῶς μέσον ἀνάλογον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 637. Τριῶν ὅρων Α, Β, Γ δοθέντων, τέταρτον Ψ ἁρμονικῶς Ἀνάλογον προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

$$B - A : \Psi - \Gamma = A : \Psi \quad (\S.\ 627.)$$
$$(B - A)\Psi = (\Psi - \Gamma)A \quad (\S.\ 598.)$$
$$A\Gamma + B\Psi = 2A\Psi$$
$$A\Gamma = (2A - B)\Psi$$
$$\Psi = A\Gamma : (2A - B)$$

Τεθέντος δὲ $A = 6$, $B = 8$, $\Gamma = 12$, ἔσται $\Psi = 72 : (12 - 8) = 72 : 4 = 18$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 638. Ἐὰν τοίνυν ὦσι τέσσαρες ὅροι Ἁρμονικῶς ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ διπλοῦ τοῦ πρώτου διαφορὰ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 639. Ἐν Ὑπεναντίῳ Ἁρμονικῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, ἐὰν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου λόγον ἔχῃ, ὃν τὸ τρίτον πρὸς τὸ πρῶτον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐκκειμένων γὰρ τριῶν ὅρων Α, Β, Γ· 3, 5, 6· ἔσται ἡ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, ὡς ὁ τρίτος πρὸς τὸν πρῶτον· ἤτοι $Α - Β : Β - Γ = Γ : Α$, $2 : 1 = 6 : 3$· ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τῶν 12, 10, 6· ἢ 14, 18, 26, 28, $4 : 2 = 28 : 14$. Περὶ ταύτης πεπραγμάτευται Στιφέλλιος ἐν τῇ αὐτοῦ Ἀριθμητικῇ (α) ἐς πλάτος, καὶ Βόλφιος (β), ναὶ μὴν καὶ Κλυγέλιος (γ), ὁ μετὰ κλέους καθ' ἡμᾶς ἐν Ἄλλῃ τῇ Μαγδεβουργικῇ τὸ Μαθηματικὸν εἶδος ἀσκῶν ἐξ ἐπαγγέλματος, τῶν ἐμοὶ ξυνήθων ὁ εὐνούστατος καὶ Μαθηματικώτατος Ἀνὴρ ἐν τῷ αὐτοῦ Μαθηματικῷ Λεξικῷ· ὅς τις καὶ Φησιν (αὐτ.), παρὰ τοῖς Ἀρχαίοις Ἀριθμητικοῖς Ἀναλογίαν ἐναντίως

(α) Stifellius Lib. I. C. 7. Arithm.
(β) Wolfii Elem. Analyſ. §. 164.
(γ) G. S. Klügel Mathematiſches Wörterbuch, Art. Contra-harmoniſche Proportion.

τῇ Ἀριθμητικῇ καλουμένην εὑρίσκεσθαι, ἤτοι $Α - Β : Α - Γ = Γ : Β$, ὡσαύτως καὶ ἑτέραν Ἀριθμητικο-Γεωμετρικὴν καλουμένην· οἷον $Α'$. $Α - Β : Α - Γ = Γ : Δ$· $Β'$. $Β - Γ : Δ - Γ = Γ : Δ$· $Γ'$. $Β - Γ : Α - Γ = Γ : Β$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 640. Δυοῖν ὅρων δοθέντων Α καὶ Β τρίτον Φ Ἐναντιο-Ἁρμονικῶς ἀνάλογον προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

$$Β - Α : Φ - Β = Φ : Α \quad (§. 639.)$$
$$(Β - Α)\,Α = (Φ - Β)\,Φ \quad (§. 598.)$$
$$\tfrac{1}{4}Β^3 \qquad \tfrac{1}{4}Β^2 \qquad (§. 263.)$$
$$\tfrac{1}{4}Β^2 + ΑΒ - Α^2 = Φ^2 - ΒΦ + \tfrac{1}{4}Β^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}Β^2 + ΑΒ - Α^2)} = Φ - \tfrac{1}{2}Β$$
$$\tfrac{1}{2}Β + \sqrt{(\tfrac{1}{4}Β^2 + ΑΒ - Α^2)} = Φ.$$

Οἷον, ἔστω $Α = 3$, $Β = 5$· ἔσται $Φ = \frac{5}{2} + \sqrt{(\frac{25}{4} + 15 - 9)} = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 641. Τριῶν ὅρων Α καὶ Β δοθέντων, μέσον Χ Ἐναντιο-Ἁρμονικῶς ἀνάλογον προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

$$Χ - Α : Β - Χ = Β : Α$$
$$(Χ - Α)\,Α = (Β - Χ)\,Β$$
$$(Α + Β)\,Χ = Α^2 + Β^2$$
$$Χ = (Α^2 + Β^2) : (Α + Β)$$

Τεθήτω δὴ $A = 3$, $B = 6$· ἔσται $X = (9 + 36) : (3 + 6) = 45 : 9 = 5$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 642. Ἐὰν τοίνυν τὸ δυοῖν τετραγώνων ἄθροισμα, διὰ τοῦ τῶν ῥιζῶν διαιρεθῇ κεφαλαίου, τοὐντεῦθεν ἐκκύπτον πηλίκον ἐστὶ μεταξὺ τῶν ῥιζῶν μέσον Ἐναντιο-Ἁρμονικῶς ἀνάλογον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὄντων μὲν δὴ τῶν τῆς Μουσικῆς Φθόγγων τῶν μὲν ὀξυτέρων, τῶν δὲ βαρυτέρων· ὡς ἐκείνων μὲν ἐκ πυκνοτέρων καὶ πλειόνων, τούτων δὲ ἐξ ἀραιοτέρων καὶ ἐλασσόνων συγκειμένων κινήσεων· ὥστε τοὺς μὲν ὀξυτέρους τοῦ δέοντος ἀνιεμένους ἀφαιρέσει κινήσεων, τυγχάνειν τοῦ δέοντος· τοὺς δὲ βαρυτέρους ἐπιτεινομένους, προσθέσει κινήσεων, τυγχάνειν τοῦ δέοντος (α)· ἤτοι ὄντων τῶν Φθόγγων ἐκ μορίων συγκειμένων (ἐπειδὴ προσθέσει καὶ ἀφαιρέσει τυγχάνουσι τοῦ δέοντος), πάντα δὲ τὰ ἐκ μορίων συγκείμενα ἀριθμοῦ λόγῳ λέγεται πρὸς ἄλληλα· ὥστε καὶ τοὺς Φθόγγους ἀναγκαῖον ἐν ἀριθμοῦ λόγῳ λέγεσθαι πρὸς ἀλλήλους, ἤτοι τοὺς μὲν ἐν πολλαπλασίονι, τοὺς δ' ἐν ἐπιμορίῳ, τοὺς δ' ἐν ἐπιμερεῖ. Ἐπεὶ δὲ ἡ τῶν Τόνων ἀριθμητικὴ δύναμις ἐκ τῆς βαρείας συμφωνίας

C, E, G, c,

$1,\ \frac{4}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2}$,

(α) Ὅρα Εὐκλείδου Κατατομὴν Κανόνος· καὶ, Εἰσαγωγὴν Ἁρμονικήν.

συνεχῆ ἀναλογίαν ἀναδίδωσι (α)· ὡσαύτως C, G, c, καὶ C, E, G. Ἐντεῦθεν τὸ τῆς Ἁρμονικῆς ἀναλογίας ἔτυμον παρῆχθαι, εὔδηλον. Αἱ γὰρ τῶν Τόνων δυνάμεις ἔχουσιν, ὡς τὰ τῶν μερῶν μήκη, οἷον δίτονον, τριημιτόνιον, τόνος, ἡμιτόνιον, δίεσις, διὰ τεσσάρων, διὰ πέντε, διὰ πασῶν, καὶ τὰ ὅμοια. Εἰσὶ γὰρ ὡς $1 : \frac{4}{5} : \frac{2}{3} : \frac{1}{2}$, ἢ ὡς $30 : 24 : 20 : 15$· ἐν οἷς $30 : 20 : 15$, ἢ $30 : 24 : 20$, ἐν ἁρμονικῇ εἰσὶν Ἀναλογίᾳ. Ἀλλὰ δὴ καὶ ἡ διὰ πασῶν, ἡ διὰ τεσσάρων καὶ ἡ ἕκτη μείζων, Ἁρμονικὴν ὡσαύτως ἀναδίδωσιν ἀναλογίαν, ἤτοι αἱ αὐτῶν δυνάμεις 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, ἢ 20, 15, 12. Εἰσὶ γὰρ οἱ Ἁρμονικοὶ τῆς Μουσικῆς λόγοι, ἐπίτριτος $4 : 3$, ὅς ἐστι διὰ τῶν τριῶν· ὁ ἡμιόλιος $6 : 4$, ὅς ἐστι διὰ τῶν πέντε· ὁ διπλάσιος $3 : 6$, ὅς ἐστι διὰ πασῶν· γίνεται δὲ καὶ δὶς διὰ τεσσάρων, καὶ δὶς διὰ πέντε, καὶ δὶς διὰ πασῶν, κτλ. Ἐὰν γὰρ θῶμεν ἓξ φωνὰς, αἱ δώδεκα πρὸς τὰς ἕξ, τὸν τοῦ διπλασίου λόγον ἔχουσιν, ἤτοι $12 : 6$· ἐὰν δὲ $12 : 8$ ἔσται ὁ λόγος ἡμιόλιος (§. 513). Ἐὰν δὲ $6 : 8$ ἔσται ὁ λόγος ἐπίτριτος (§. αὐτ.). Καὶ ταῦτα μὲν περὶ τῆς Ἁρμονικῆς ἀναλογίας ἐν ἐπιτομῇ· ὅρα δὲ πλατύτερον εἰ βούλει· Ἐριγόνιον (β), Δεσχάλην (γ), Σωβῆρον (δ), Εὐφλιγγίον ἐν τοῖς Βερολινικοῖς

(α) G. S. Klügel Mathematisches Wörterbuch, 2ter Th. S. 691. Art. Harm.

(β) Herigonii Curs. Mathem. Tom. V.

(γ) Dechales Elem. Mus. in Mundi Mathem. T. IV.

(δ) Sauveur, in Memoires de l' Academie Royale

Συμμίκτοις (δ), καὶ Λεονάρδου Εὐλῆρου (ε). Φέρεται δὲ παρὰ τοῖς Ἀρχαίοις τῶν Ἀριθμητικῶν, καὶ ἕτερ' ἄττα Ἀναλογιῶν εἴδη· ὡς Ἀναλογία Μέση, Μεγίστη πρὸς τὸ μέσον, Μεγίστη πρὸς τὸν ἐλάττω, Μεγίστη πρὸς τὸν ἐλάττω καὶ μείζω, Μέση πρὸς τὸν ἐλάχιστον καὶ τὰ ἄκρα, Μέση πρός τε τὸν ἐλάχιστον καὶ τὰ ἄκρα καὶ τὸν μείζω· ὥστε εἶναι, συνάμα τοῖς ὑφ' ἡμῶν ἐκτεθεῖσι (§. 555. 583. 627. 639.) τὰ αὐτῶν εἴδη, Δέκα.

ΠΕΡΙ ΤΙΝΩΝ ΧΡΗΣΕΩΝ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ, ΕΝ ΤΩ ΚΟΙΝΩ ΒΙΩ ΠΑΝΤ ΣΥΝΤΕΙΝΟΥΣΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 643. Χρυσοῦς Κανὼν ἐστὶ λύσις προβλήματος, δι' ἧς ἐκ τριῶν δοθέντων, ὁ τέταρτος ἐξευρίσκεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὰ τῶν Ἀναλογιῶν εἴδη, Μεθόδους οἱ Ἀριθμητικοὶ καλεῖν εἰώθασιν, ἀμέλειτοι Μέθοδον τῶν Τριῶν, Μέθοδον τῶν Πέντε, Μέθοδον τῶν Ἑπτά, καί τοι καὶ τῶν Ἐννέα, καὶ τῶν Ἕνδεκα, κτλ. κατὰ τοὺς διδομένους ἀριθμούς. Ἡμεῖς ἀλλ' οὖν τὴν τῶν Τριῶν Μέθοδον, Χρυσοῦν Κανόνα προσηγορεύσαμεν,

des Sciences An. 1701. pag. 390. feqq. καὶ 1707. pag. 390. et feqq. 1717. p. 406. et feqq.

(δ) Henfling in Mifcellaneis Berolinenf. p. 265. feqq.

(ε) Leon. Euler in tentam. Novae Theoriae Muficae.

ἤτοι Χρυσῆν Μέθοδον, διὰ τὸ πάσας τὰς ἄλλας Ἀναλογίας ἐπ' αὐτὴν, ὡς πρωτίστην ἀνάγεσθαι· ὅθεν καὶ Ἀναλογία κατ' ἐξοχὴν προσεκλήθη ὑπὸ πολλῶν· ἔστι δὲ ταύτης ἡ χρῆσις ὅτι πλείστη, ἔν τε τῷ κοινῷ βίῳ, κἂν ταῖς ἐπιστήμαις. Διήρηται δὲ κατὰ τὰς Ἀναλογίας εἴς τε Συνεχῆ καὶ Διεχῆ, Ὀρθήν τε καὶ Πλαγίαν. Τῆς τε ὀρθῆς αὖ καὶ πλαγίας, διχῆ διαιρουμένης εἰς ἁπλῆν δηλαδὴ καὶ σύνθετον. Ἁπλῆ μὲν ἐστὶν ἡ ἐκ τριῶν, ἢ τεσσάρων συγκειμένη τῶν ὅρων· Σύνθετος δὲ ἡ ἐκ πλειόνων, ἢ τεσσάρων ὅρων συνεστηκῦια· ἥτις ἐστὶν, ἡ μὲν τῶν πέντε, ὡς ἐκ πέντε ὅρων συντιθεμένη· ἡ δὲ τῶν ἑπτὰ, ὡς ἐκ τοσούτων συγκροτουμένη τῶν διδομένων. Ἀμφότεραι δὲ ὡς σύνθετοι, ἐπὶ τὴν πρώτην καὶ ἁπλῆν ἀναγόμεναι διαλύονται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 644. Χρυσοῦς Κανὼν Ἁπλοῦς Συνεχὴς ἐστιν, ὁ τοὺς ὅρους κατὰ συνέχειαν ἀναφέρων, ὡς Α : Β = Β : Γ· Διεχὴς δὲ, ὁ τοὺς ὅρους μὴ συνεχίζων, ἀλλὰ κατὰ δύο λαμβάνων, ὡς Α : Β = Γ : Δ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 645. Χρυσοῦς Κανὼν ἁπλοῦς Ὀρθός ἐστιν, οὗ οἱ ὅροι εὐτάκτως καὶ οἱονεὶ κατ' εὐθεῖαν χωροῦσιν ἀνάλογοι· οἷον ἐάν τινος ὠνίου λίτραι 3, μνῶν πιπράσκωνται 36, πόσου ἄρα ἀπεμπωληθήσονται τοῦ αὐτοῦ ὠνίου λίτραι 9; Ῥητέον οὖν ὡς λίτραι 3 πρὸς λίτρας 6, οὕτω αἱ 36 μναῖ ἡ τοῦ τριλίτρου τιμὴ, πρὸς τὴν τῶν λιτρῶν 9, ἤτοι πρὸς μνᾶς Χ, ἐν ὀρθῇ ἀναλογίᾳ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 646. Ἐν τῇ ὀρθῇ τοίνυν Μεθόδῳ οἱ συστοιχοῦντες ὅροι, ἤτοι ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος, ὅ, τε δεύτερος καὶ ὁ τέταρτος, ἀναλόγως αὔξουσιν, ἢ βραχύνονται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὸν γὰρ ἐν ζητήσει ἄγνωστον τέταρτον ὅρον X (§. 600.) ἐπὶ τῆς ὀρθῆς τῶν τριῶν μεθόδου τοσούτῳ μείζονα ἢ ἐλάττω δεῖν εἶναι, ὅσῳ μείζων ἢ ἐλάττων ὁ δεύτερος ἐνείληπται ὅρος· ὡσαύτως καὶ τὸν τρίτον, ἐν τῇ αὐτῇ ἀναλογίᾳ τῷ πρώτῳ ἐκληπτέον· οἷον ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος $3:9 = 36:X$, ἔσται $X = 108$· ἄρα $3:9 = 36:108$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 647. Δοθείσης τῆς τιμῆς τῆς ποσότητος ὠνίου τινὸς, εὑρεῖν τὴν, ἡςτινοσοῦν ἄλλης ποσότητος, ἤτοι τῆς τοῦ ὠνίου, τιμὴν, ὁποιασοῦν ἄλλῃ τιμῇ δοθείσῃ ἀνάλογον.

ΛΥΣΙΣ.

Τὰ εἰς συνάλλαγμα ἐρχόμενα ταῖς ἰδίαις αὐτῶν τιμαῖς εἰσὶν ἀνάλογα· ὁ μὲν γὰρ διπλάσιον ὤνιον λαμβάνων διπλασίαν, ὁ δὲ τριπλάσιον, τριπλασίαν τιμὴν κατατίθησιν. Ἔνθεν τοι καὶ ἡ τῶν τριῶν μέθοδος ῥᾷστα ἐφαρμοσθήσεται, τοῖς περὶ ὠνὴν καὶ πρᾶσιν, καὶ τὰ ὅμοια συναλλάγματα. Καίγε ἡ τοῦ διαπραθέντος εἴδους τιμὴ εὑρεθήσεται, ἐὰν ἑτέρας ποσότητος ὁμοειδοῦς ἡ τιμὴ δήλη τυγχάνῃ (§. 645.), ἢ γοῦν τῆς τιμῆς δο-

θείσης, εὑρεθήσεται ἡ τοῦ πιπρασκομένου ποσότης. Οἷον ἐὰν 6 λίτραι ὠνίου τινος 28 νομισμάτων (α) τιμῶνται, 3 λίτραι τοῦ αὐτοῦ ὠνίου, πόσου ἄραγε τιμηθήσονται; Ἐπιπολλαπλασιαστέον τοίνυν ἀλλήλοις τὸν δεύτερον καὶ τὸν τρίτον, καὶ τὸ γινόμενον διὰ τοῦ πρώτου διαιρετέον· τὸ γάρ τοι πηλίκον ὁ τέταρτος ἔσται αἰτούμενος ἀνάλογος (§. 600.), ἤτοι $6:3 = 28:X$; καὶ $X = 6:(3 \times 28) = 64:6 = 14$ νομίσμασιν· ἄρα $6:3 = 28:14$ (§. 598.), ἐν ὀρθῇ ἀναλογίᾳ (§. 645.).

(α) Νομισμάτων εἴδη παρὰ τοῖς Ἀρχαίοις διάφορα; τὸ μὲν γὰρ Ἀττικὸν διώβολον καλούμενον καὶ τριώβολον ἐντετυπωμένην ἔχον Γλαῦκα, καὶ τὸ ἐκ θατέρου πρόσωπον Διὸς, κτλ. Τὸ δὲ Πελοποννήσιον, τὸ καὶ ὑπό τινων Χελώνη καλούμενον, ἀπὸ τοῦ ἐκτυπώματος· ὅθεν καὶ παροιμία. Τὰν ἀρετὰν, καὶ τὰν σοφίαν νικᾶντι χελῶναι· καὶ ἕτερα πλεῖστα, διὸ καὶ ἡ τούτων τιμὴ διάφορος. Νομίσματα δὲ ἐκληπτέον, καὶ τὰ παρ' ἡμῖν ἡμίχαλκα ἐκ τῆς Ἄγαρ ἀργύρια, καὶ πᾶν ὅ, τιοῦν ἄλλο εἶδος χρημάτων. Τὸ δὲ Νόμισμα Λατινίδι διαλέκτῳ Νοῦμμος (Nummus) καλεῖται· ἀλλὰ τουτὶ τοὔνομα Νοῦμμος, δοκεῖ μὲν εἶναι Ῥωμαίων ἤτοι Λατίνων, ἔστι δὲ Ἑλληνικὸν, τῶν ἐν Ἰταλίᾳ καὶ Σικελίᾳ ὁρίων (Πολυδεύκης ἐν τῷ Ὀνομαστικῷ Βιβ. Θ'.). Ἐπίχαρμός τε γὰρ ἐν ταῖς χύτραις φησὶν, Ἀλλ' ὅμως καλαὶ καὶ πῖοι ἄρνες, εὑρήσουσι δέ μοι καὶ Νούμμους, πωλατιὰς γὰρ ἐντὶ τᾶς ματρός. καὶ πάλιν· Κῆρυξ ἐὰν εὐθὺς πρίω μοι δέκα Νούμμων μόσχον καλήν· καὶ Ἀριστοτέλης ἐν τῇ Ταραντίνων Πολιτείᾳ φησὶ, καλεῖσθαι Νόμισμα παρ' αὐτοῖς Νοῦμμον, ἐφ' οὗ ἐντετυπῶσθαι Τάραντα τὸν Ποσειδῶνος Δελφῖνι ἐποχούμενον.

Δῆλον τοίνυν ἐκ τούτων, τὸν τέταρτον ὅρον τοσούτῳ μείζω, ἢ ἐλάττω τοῦ τρίτου ἐκκύπτειν, ὅσῳ μείζων, ἢ ἐλάττων ὁ δεύτερος ἐστὶ τοῦ πρώτου (§. 646.). Ὡσαύτως καὶ τῆς τιμῆς δοθείσης, ἡ τοῦ πιπρασκομένου ποσότης εὑρεθήσεται· οἷον εἰ χρυσῶν 16, πήχεις $3\frac{1}{2}$ ὑφάσματος σηρικοῦ ὠνήσατό τις, πόσας ἄρα πήχεις ἀποίσεται, χρυσοὺς ἀποτίσας 100; Ἔσται οὖν $16 : 100 = 3\frac{1}{2} : X$. Ἀμέλειτοι ὡς χρυσοὶ 16 πρὸς χρυσοὺς 100, οὕτω πήχεις $3\frac{1}{2}$, πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν πήχεων τὸν ζητούμενον. Ἔσται δὴ οὗτος $X = \frac{3\frac{1}{2} \cdot 100}{16} = \frac{3\frac{1}{2} \cdot 25}{4} = \frac{7 \cdot 25}{2 \cdot 8} = 21\frac{7}{8}$:

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ταῦτ' ἄρα, ἵνα καταλλήλως λαμβάνωνται, καὶ ἐκτὸς ἀπάτης ἡ πρᾶξις χωρεῖ, ἐπιστητέον ὅπως ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος, ὅ, τε δεύτερος καὶ ὁ τέταρτος ὁμογενεῖς ὦσιν (§. 646.)· ἐὰν γὰρ ἑτερογενεῖς, οὐδόλως τὴν αὐτήν, ἣν τὰ τοῖς αὐτοῖς συναντιφθεγγόμενα ἢ δηλούμενα πράγματα, ἀναλογίαν ἕξουσιν. Οἷον ἐὰν ὑποτεθῇ σκεύους τινὸς εὐμεγέθους ὕδατος πλήρους, διὰ σμικρᾶς ὀπῆς ἐν τῷ πυθμένι οὔσης ἐκρεύσοντος, ἐν 2 λεπτοῖς, 3 κυάθους ἐκρέειν, ἐν πόσῳ χρόνῳ 100 κύαθοι ἐκρεύσειεν ἄν; ἔσται ἐνταῦθα ἡ ἀναλογία ἀσύστατος, ὡς τοῦ ὕδατος ἐν ἀρχῇ μὲν τάχιον ἐκρέοντος, ἑξῆς δὲ βραδύτερον, ἑπομένως τε ἡ τούτου ποσότης οὐκ ἔστιν ἀνάλογος τῷ χρόνῳ· διά τοι τοῦτο τὸ ζήτημα διὰ τῆς τῶν τριῶν μεθόδου οὐκ ἐπιλυθήσεται. Εἴωθεν ἀλλ' οὖν διαφόρους ἑτερογενεῖς ποσότητας ἐφ' ὁμογενεῖς ἀνάγειν,

ἐφ' ᾧ τὰ τῆς λύσεως εὐχερέστερον περαίνοιτο, οὗ χάριν τὸν ὑφ' ἡμῶν ἐν τῇ τῶν Δεκαδικῶν κλασμάτων θεωρίᾳ ἐν τῷ Σχολίῳ ἐκτεθησόμενον Πίνακα μέτιθι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'.

Ὁ τῶν Γεγαμηκότων καὶ ἀγάμων ἀριθμός, κατά τινα Πολιτογράφον (Statistam), ἐν λόγῳ ἐστὶ τῶν 175:500. Θῶμεν δὲ τοὺς ἔν τινι Ἐπαρχίᾳ τοῖς Ὀρθοδόξοις τῶν Ἀνατολικῶν δόγμασιν στείχοντας ἀριθμεῖσθαι 2,000,000. Ζητεῖται ὁ τῶν γεγαμηκότων καὶ ἀγάμων ἀριθμός.

Ἐὰν μὲν δὴ οἱ ἄγαμοι κληθῶσι X, ἔσονται οἱ γήμαντες $2000000 - X$. Κἀντεῦθεν

$$175 : 500 = 2000000 - X : X$$
$$175X = 1000000000 - 500X \quad (\S.\ 598.)$$
$$175X + 500X = 1000000000$$
$$X = \frac{1000000000}{675} = 1481481$$ ἀμελουμένου τοῦ κλάσματος.

Κἀκ τούτων τοίνυν ἔσται

$$2000000 - 1481481 = 518519$$ τοῖς γήμασι.

Β'.

Διφρηλάτης πρὸς τὸ συγκομίσαι ὡρισμένην κασσιτέρου ποσότητα, εἰκοσάκις τὴν ἑαυτοῦ ἐπεφόρτισεν ἅμαξαν· ποσάκις τὴν αὐτὴν ἐπισκευάσει, εἰ χαλκοῦ ποσότητα τὴν αὐτὴν μὲν τῷ κασσιτέρῳ οὖσαν, τὴν δὲ τούτου ὁλκὴν πρὸς τὴν τοῦ κασσιτέρου, ἐν λόγῳ τυγχάνουσαν τῶν 8,784:7,320 συγκομίσειεν; Ἔσται δή·

$$7320:8784 = 20:X$$
$$7320X = 8784\times 20$$
$$X = \frac{175680}{7320} = 24.$$

Γ'.

Πρὸς σπερμονὴν ἀγροῦ τινος ὡρισμένου, 4 μεδιμνῶν χρεία ἐστί· πόσων τοίνυν ἔσται, ἐὰν τὸ αὐτοῦ ἐμβαδὸν ὀκταπλάσιον τύχῃ;

$$1:8 = 4:X$$
$$1\times X = 8\times 4 = 32:1 = 32.$$

Δ'.

Ὠνήσατό τις 4 ὀβολοῖς, 18 ὀπώρας· πόσας τοίνυν ὠνήσεται, 120 ὀβολοῖς;

$$4:120 = 18:X = 540.$$

Ε'.

Ἐξ ὀπῆς σκεύους τινὸς 19 δακτύλων τὸ μέγεθος, ὡρισμένῳ χρόνῳ 12 κύαθοι ὑγροῦ ἐξεῤῥύησαν. Πόσοι τοίνυν ἐκρεύσουσιν ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ ἐξ ἑτέρου, οὗ τὸ μέγεθος 4 δακτύλων;

Ἐπεὶ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ διὰ τῆς αὐτῆς τοῦ σκεύους ὀπῆς γενόμεναι τῆς ἐκρεύσεως ποσότητες ἔχουσιν, ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι, τῶν τοῦ ὑπεράνω τῆς τοῦ σκεύους ὀπῆς τυγχάνοντος ὑγροῦ ὕψεων· Ἔσται·

$$\sqrt{16}:\sqrt{4} = 12:\Psi.$$
$$\Psi\times\sqrt{16} = \sqrt{4}\times 12$$
$$\Psi^2\times 16 = 4\times 12^2$$
$$\Psi^2 = \frac{144\cdot 4}{16} = 36$$
$$\Psi = \sqrt{36} = 6.$$

Ϛ'.

Λίθος ἐκ τοῦ κολοφῶνος Πύργου τινὸς ῥιφεὶς, 4 δευτέρων λεπτῶν χρόνῳ, γῆν ἱκάνει· ποσταῖον ἄρα τὸ τοῦ Πύργου ἐστὶν ὕψος;

Ἔστωσαν ἐνταῦθα τὰ ἑπόμενα ἐκ τῆς τῶν Φυσικῶν θεωρίας πρὸς μείζονα τῶν εἰρημένων κατάληψιν. Α'· σῶμά τι ἐλευθέρως ῥιφὲν ἐν χρόνῳ ἑνὸς δευτέρου λεπτοῦ ὁδὸν ἀνύει $= 2233'''$, ἐν μέτρῳ Βινδοβονικῷ (Βιέννης). Β'· αἱ ὑπὸ τῶν ἐλευθέρως πιπτόντων σωμάτων καταγραφόμεναι πορεῖαι εἰσὶν, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν μεταξὺ παρελθόντων χρόνων. Ἐνθεντοι·

λεπτ. δεύτ. λ. δ. πορ. πορ.

$$1^2 : 4^2 = 2233''' : \Phi$$
$$\Phi = 2233'''\times 16 = 35728'''$$

Ἄρα $35728''' = 41^{\circ}.2'.1''.4'''$ ὕψει τοῦ Πύργου $= \Phi$.

Ζ'.

Ἀμφιθεάτρου ἐνδότερον κυκλικὸν μέγεθος, ἤτοι τὸ διάστημα, οὗ ἡ διάμετρος 36 ποδῶν, ἐστὶ χωρητικὸν ἀνθρώπων 1500. Ἀλλ' οὖν, ἑτέρου ἐκ νέου ἀνεγερθησομένου πρὸς 6000 ἀνθρώπων περιλαβὴν, τὸ κυκλικὸν ἔσωθεν ἔδαφος, ποσταίας ἔσται διαμέτρου;

Ἐπεὶ, κατὰ τὰ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ κατασκευαζόμενα, αἱ τῶν Κύκλων ἐπιφάνειαι, ἔχουσιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν Διαμέτρων τετράγωνα, ἔσται·

$$1500:6000 = 36^2:X^2$$
$$1500X^2 = 6000\times 36^2$$
$$X^2 = \frac{6000\cdot 1296}{1500} = 5184$$
$$X = \sqrt{(5184)} = 72$$

Η'.

Σφαίρας ἔνδοθεν κοίλης ἡ διάμετρος ἐστὶν $= 4''$. Ποσταῖα ἔσται ἡ διάμετρος τῆς ὀκταπλάσιον μᾶλλον χωρούσης;

Ἐπεὶ τὰ τῶν Σφαιρῶν στερεὰ ἔχουσιν, ὡς οἱ ἀπὸ τῶν Διαμέτρων Κύβοι, ἔσται·

$$1 : 8 = 4^3 : X^3$$
$$X^3 = 8 . 4^3 = 8 . 64 = 512''$$
$$\text{Ἄρα } X = \sqrt[3]{(512'')} = 8''.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 648. Ἐπεὶ τοίνυν Λόγων ὁποιωνοῦν ἡ δύναμις οὐδόλως ἀνατρέπεται, ἐὰν τὸ ἡγούμενον καὶ τὸ ἑπόμενον διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ (§. 540.), ὡς τῶν ὅρων Ἀναλογίας ἡστινοσοῦν διαφόρως μεταμορφουμένων τῆς αὐτῆς πάντως τηρουμένης Ἀναλογίας (§. 605.). Εὔδηλόν ἐστι τὸν Χρυσοῦν κανόνα οὐδόλως ἀλλοιοῦσθαι, ἐὰν ἢ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος ἐκείνου ὅρος, ἢ ὁ τρίτος καὶ ὁ τέταρτος, διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ· οἷον·

Αον. $6 : 54 = 12 : X$

$$\tfrac{6}{6} : \tfrac{54}{6} = 12 : X$$
$$1 : 9 = 12 : X$$
$$X = 12 . 9 = 109.$$

Βον. $\tfrac{1}{3} : \tfrac{2}{3} = 18 : \Phi$

$$1 : 2 = 18 : \Phi$$
$$\Phi = 18 . 2 = 36.$$

Γον. $3_{8} : 7\tfrac{3}{4} = 19 : \Psi$

$$\tfrac{29}{8} : \tfrac{31}{4} = 19 : \Psi$$
$$\tfrac{116}{32} : \tfrac{248}{32} = 19 : \Psi$$
$$116 : 248 = 19 : \Psi$$
$$\Psi = \tfrac{248 . 19}{116} = 40\tfrac{18}{29}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 649. Ἔστω δὴ ἐν γένει περὶ τῶν τοιούτων, ὁ ἐφεξῆς Κανών. Οἱ μέσοι ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιαζέσθωσαν, καὶ τὸ ἐντεῦθεν προκύπτον Γινόμενον διὰ τοῦ πρώτου διαιρείσθω.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 650. Χρυσοῦς κανὼν Πλάγιος ἐστὶν, οὗτινος οἱ ὅροι ἀτάκτως πως καὶ συγκεχυμένως καὶ, ἧ φησιν Εὐκλείδης (α), τεταραγμένως ἔχουσι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Πλαγία μὲν δὴ ἀκούει ἡ μέθοδος, ὁπηνίκα προβλήματός τινος προτεθέντος συνορᾷν ἔστι, εἰ τὸν ἐν ζητήσει τέταρτον ὅρον τοσούτῳ μείζω ἢ ἐλάττω τοῦ τρίτου δέον εἶναι, ὅσῳ περ τὸν δεύτερον μείζω ἢ ἐλάττω τοῦ πρώτου· τοιοῦτον ἔσται τὸ ἐφεξῆς πρόβλημα. Εἰ 3 ἐργάται ὡρισμένον τι ἔργον ἐν 10 ὥραις συνετέλεσαν, 6 ἐργάται ἐν πόσῳ χρόνῳ τὸ αὐτὸ εἰς πέρας ἀγάγοιεν; Ἐφ' ᾧ τοίνυν συνιδεῖν ἔχωμεν, πότερον τὸ προτεθὲν ἐν λόγῳ ὀρθῷ ἐστὶν, ἢ πλαγίῳ; θετέον τὰ ὁμογενῆ τοῖς ὁμογενέσι, καὶ ῥητέον·

3 ἐργάται : 6 ἐργάτας $=$ 10 ὧραι : X.

Δῆλον τοίνυν ἐντεῦθεν τοὺς δύω ἐσχάτους τῶν ὅρων,

(α) Βιβ. Ε, ὅρ. κ'.

οὐκ ἐν τῇ αὐτῇ εἶναι τάξει τοῖς δύω προτέροις, ἤτοι οὐ δέον τὸν τέταρτον ὅρον μείζονα τοῦ τρίτου ἐκκύψαι· 6 γὰρ ἐργάται τὸ αὐτὸ ἔργον ἐν ἐλάττονι χρόνῳ ἐκτελέσουσιν, ἢ οἱ τρεῖς· ἡ γὰρ τῶν ἐργαζομένων προσθήκη, μείωσιν τοῦ τῶν ὡρῶν ἀριθμοῦ ἀπαιτεῖ. Ἔνθεν τοι διὰ τὸ τῆς ἀναλογίας ὀρθὸν, ἔσται

$3:6 = X:10$ καὶ $X = \frac{3 \times 10}{6} = 5$ (§. 600.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 651. Ἐπὶ τῆς ὀρθῆς τοίνυν Μεθόδου δύω τινὲς ποσότητες Φ καὶ Χ, ἐν λόγῳ οὖσαι ὀρθῷ, δυσὶν ἑτέραις 3 καὶ 2, οὕτως ἐκτεθήσονται $\Phi : X = 3 : 2$· ἐπὶ δὲ τῆς Πλαγίας, τῶν Φ καὶ Χ ἐν λόγῳ Ἀντιστρόφῳ ταῖς 3 καὶ 2, οὐσῶν, ἡ ἔκθεσις οὕτως ἐκκείσεται $\Phi : X = 2 : 3$, ἢ $\Phi : X = \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$· ἐν ἀμφοτέραις γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων· ἤτοι $3\Phi = 2X$, καὶ $\frac{\Phi}{2} = \frac{X}{3}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 652. Ἐξ οὗ ἕπεται, δύω ποσότητας διὰ κλασμάτων, ὧν ἀριθμητὴς ἐστὶν ἡ μονὰς, ἐκτιθεμένας, ἐν λόγῳ εἶναι Ἀντιστρόφῳ τῶν παρονομαστῶν. Ἐπὶ γὰρ τῶν $A : B = \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$, Α καὶ Β ἐν λόγῳ Ἀντιστρόφῳ εἰσὶ τῶν παρονομαστῶν 2 καὶ 3.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐν τοῖς τῶν Ἀριθμητικῶν Συγγράμμασιν, ἡ τῶν τριῶν μέθοδος ἀντεστραμμένως εὑρίσκεται, ἐν οἷς ὁ τῶν δοθέντων πρῶτος ὅρος ἐπὶ τὸν τέταρτον ἐπιτάττεται πολλαπλασιασθῆναι, καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῆναι διο-

ρίζεται διὰ τοῦ τρίτου (ὅρα τὸ τοῦ §. 650. Σχόλιον)· ἐναντίῳ δὲ λόγῳ, τοῦ, ᾧπερ ἐν τῇ ὀρθῇ ἐχρησάμεθα (§. 645.), ὅτι δηλ. ἐνταῦθα οἱ ὅροι ἀντικειμένως τῇ φύσει τάττονται τῆς ἀναλογίας· οἷον ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ τέταρτος πρὸς τὸν τρίτον Χ· ἀλλ᾿ οὖν ἡμῖν οὐδόλως αὐτῆς ἔσται χρεία, ἐὰν οἱ δοθέντες ὅροι διαταχθῶσιν, ὡς ἡ ἀναλογία τῶν αὐτῶν ἀπαιτεῖ· ἢ, ἐὰν ὁ τρίτος καὶ ὁ τέταρτος ἀντὶ παρονομαστῶν ληφθῶσιν κλάσματος, ὑπὸ τῆς μονάδος ἀριθμουμένου. Οἷον ἐὰν ἐξ ἀριθμοῦ ἐγνωσμένου νήματος καναβινοῦ ἱστὸς ὑφαστέος ᾖ, φανερόν ἐστι, τοσούτῳ ἔλαττον λαμβάνειν μῆκος, ὅσῳ πλατύτερον ὑφαίνεται, καὶ τοὔμπαλιν· Ἐὰν τοίνυν τὰ μήκη κληθῶσι Μ καὶ μ, τὰ δὲ πλάτη Π καὶ π, ἔσται ἀντὶ τῆς ὀρθῆς $M : \mu = \Pi : \pi$, $M : \mu = \pi : \Pi$, ἐν ᾗ ἀναλογίᾳ ἡ Ἀντίστροφος ἐπεστήρικται μέθοδος· τοίνυν $M \times \Pi = \mu \times \pi$ καὶ $\pi = \frac{M \times \Pi}{\mu}$, ἢ $M : \mu = \frac{1}{\Pi} : \frac{1}{\pi}$ καὶ $\frac{M}{\pi} = \frac{\mu}{\Pi}$· ἤτοι $M\Pi = \pi\mu$ καὶ $\pi = \frac{M\Pi}{\mu}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α΄.

Ἐργάται 5, ἐν ἡμέραις 24, ὡρισμένον τι ἔργον συνετέλεσαν· πόσων ἄρα ἡμῖν ἐργατῶν χρεία πρὸς τὸ, ἐν ἡμέραις 8, τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς πέρας ἀγαγεῖν;

Ἐὰν τοίνυν ἡ ἀναλογία διαταχθῇ οὕτω $24 : 8 = 5 : X$, δῆλον ἐκ τῆς συνήθους πράξεως Χ ἐλάττω ἐκκύπτειν τῶν 5. Ἐπεὶ δ᾿ ἐνταῦθα ἡ τοῦ ἀριθμοῦ μείωσις προσθήκην ἀπαιτεῖ τῶν ἐργαζομένων, τουτέστιν, ὅσῳ ἐλάσσονες εἰσὶν αἱ 8 ἡμέραι τῶν 24, τοσούτῳ μείζων ζητεῖται, ὁ τῶν ἐργατῶν ἀριθμός, ὑπ' ὄψιν κεῖται X μείζων δέον εἶναι τῶν 5· Τούτου χάριν οὕτως ἡ ἀναλογία διαταχθήσεται

$$24 : 8 = \tfrac{1}{5} : \tfrac{1}{X} \text{ (§. 651. 652.)}$$

$$\tfrac{24}{X} = \tfrac{8}{5}, \text{ καὶ } X = \tfrac{24 \cdot 5}{8} = 15.$$

Οὗ εὑρεθέντος, ἐκκύψει ἀναλογία ἡ ἐφεξῆς·

$$24 : 8 = 15 : 5. \text{ (§. 650.)}$$

$$\text{καὶ γὰρ } 24 \times 5 = 15 \times 6 = 120. \text{ (§. 596.)}$$

$$\text{καὶ } \tfrac{8}{24} = \tfrac{5}{15} = \tfrac{1}{3} \text{ (§. 566.)}$$

B'.

Θῶμεν ἐν στάθμῃ Ῥωμαϊκῇ (α) ἐν τῷ τέλει τοῦ ἐλάττονος βραχίονος 4 δακτύλων τὸ μῆκος, 2 λίτρας ἀπῃωρεῖσθαι ἐὰν ἐν τῷ τέλει τοῦ ἑτέρου βραχίονος 12 δακτύλων τὸ μῆκος, βάρος ἀπῃωρῆτο, ποσταῖον ἐκεῖνο πρὸς τὴν ἑκατέρων ἔσετ' ἂν ἰσοῤῥοπίαν;

Ἐκκείσθω ἐκ τῆς τῶν Μηχανικῶν θεωρίας, πρὸς μείζονα τοῦ προβλήματος κατάληψιν τὸ ἐφεξῆς. Ἐν τῇ Ῥωμαϊκῇ στάθμῃ αἱ ὁλκαὶ εἰσὶν ἐν τῷ τῆς ἰσοῤῥοπίας χρόνῳ, ὡς τὰ τούτων ἀπὸ τοῦ ὑπομοχλίου ἀντίστροφα διαστήματα. Ἔνθεν τοι·

$$4 \text{ δάκτυλ.} : 12 \text{ δακτύλ.} = \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{X}$$

$$\tfrac{4}{X} = \tfrac{12}{2}$$

$$12X = 4 \cdot 2, \quad X = \tfrac{8}{12} = \tfrac{2}{3} \text{ βάρους.}$$

(α) Statera Romana, τὸ κοινῶς στατῆρι, ἢ καντάρι ἐπὶ τῶν μειζόνων, λεγόμενον.

Γ'.

Ταχυδρόμος τις ὁσημέραι τρεῖς ὥρας διανύων, δέκα ἡμέραις τὴν Α κατέλαβε πόλιν. Ἕτερος δέ τοι πρὸς τὴν αὐτὴν πόλιν Α τὴν πορείαν ποιούμενος, καὶ καθ' ἑκάστην 9 διανύων ὥρας, ποσταίᾳ ἡμέρᾳ ἐκεῖσε ἀφίξεται;

Δῆλον τοίνυν αὐξουμένου τοῦ τῶν ὡρῶν ἀριθμοῦ, τὸν τῶν ἡμερῶν μειοῦσθαι. Διό·

$$3 \text{ ὥρ.} : 9 \text{ ὥρ.} = \tfrac{1}{10} : \tfrac{1}{X}$$

$$\tfrac{3}{X} = \tfrac{9}{10}, \text{ καὶ } X = \tfrac{30}{9} = 3\tfrac{1}{3} \text{ ἡμέρας.}$$

Δ'.

Ἐξ ἀριθμοῦ προσδιορισμένου νήματος καναβικοῦ ὑφαίνετο ἱστός, οὗτινος τὸ μῆκος πήχεων ἦν 50, τὸ δὲ πλάτος $\tfrac{3}{4}$· ἐξ ὁμοίου ἀριθμοῦ νήματος ὑφανεῖται ἱστός, οὗτινος τὸ πλάτος μιᾶς ἔσται πήχεως, ζητεῖται τὸ τούτου μῆκος.

Τοῦ αὐτοῦ τῶν νημάτων ἀριθμοῦ μένοντος, φανερόν ἐστιν, αὐξουμένου τοῦ πλάτους δέον τὸ μῆκος μειοῦσθαι· Τοίνυν

$$\tfrac{3}{4} \text{ πλάτ.} \ \tfrac{4}{4} \text{ πλ.} = \tfrac{1}{50} \text{ μηκ.} \ \tfrac{1}{X} \text{ μηκ.}$$

$$3 : 4 = \tfrac{1}{50} : \tfrac{1}{X}, \text{ καὶ } \tfrac{3}{X} = \tfrac{4}{50}$$

$$4 \cdot X = 3 \cdot 50, \text{ καὶ } X = \tfrac{150}{4} = 37\tfrac{1}{2} \text{ πήχεως μήκει.}$$

E'.

Νικαρέτη χιτῶνα ἑαυτῇ στολιδωτὸν (α) βουληθεῖ-

(α) Στολίδες ἤκουον παρὰ τοῖς Ἀρχαίοις, αἱ ἐξεπίτηδες ὑπὸ δεσμοῦ γινόμεναι κατὰ τέλη τοῖς χιτῶσιν ἐπιπτυχαί. Πολυδ. Ὀνομ., Βιβ. Z'.

σα συῤῥάψαι, 6 πήχεις ὑφάσματος ἐκ λίνου λεπτοῦ, οὗ τὸ πλάτος $\frac{2}{3}$ πήχεως ἦν, ὠνήσατο. Πόσων τοίνυν πήχεων χρεία, ἐφ' ᾧ τὸν αὐτὸν χιτῶνα ἐξ ὑφάσματος, οὗ τὸ πλάτος $\frac{2}{9}$, συῤῥάψαι;

Εὔδηλον τοίνυν τοῦ πλάτους τοῦ ὑφάσματος μειουμένου, τὸν τῶν πήχεων αὔξειν ἀριθμόν. Ὅθεν

$$\tfrac{2}{3} : \tfrac{2}{9} = X : 8$$

$$X = \frac{8 \times \frac{2}{3}}{\frac{2}{9}} = \frac{144}{6} = 24 \text{ πήχ.}$$

ἤτοι τριπλασίως μεῖζον ληπτέον τοῦ ὑφάσματος, τριπλασίως ἔλαττον πλάτος ἔχοντος.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 653. Χρυσοῦς κανὼν Σύνθετός ἐστιν, ὁ ἐκ πλειόνων ἢ τεσσάρων ὅρων συνεστηκώς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 654. Πέντε δοθέντων ἀριθμῶν, τὸν ἕκτον εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔσθ' ὅτε διπλῆν παραβαλεῖν χρεία ἐστὶ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, πρὶν ἢ ὁ ζητούμενος εὑρεθῇ ἀριθμός· αὕτη δὲ κοινῇ μὲν ὡς ἰδιάζουσα μέθοδος ἀπεμπωλεῖται· καὶ παρὰ μὲν τῶν, μέθοδος σύνθετος· παρὰ δὲ τῶν, μέθοδος τῶν πέντε ἀκούει, διὰ τὸ πέντε εἶναι τοὺς ἐν αὐτῇ διδομένους τῶν ὅρων, καὶ ζητεῖσθαι τὸν ἕκτον, ἧς καὶ τὸ πρόβλημα εἰς δύω τέμνεται μέρη, ὧν τὸ μὲν πρῶτον τρεῖς, τὸ δὲ δεύτερον δύω περιέχει τῶν ὅρων. Σύνθετος δὲ αὕτη οὖσα, εἰς τὴν ἁπλῆν διὰ τοῦτο ἀναλύεται μέθοδον τῶν Τριῶν. Ἐκ τῶν προλεχθέντων

τοίνυν, ἡ αὐτὴ πάντως μενεῖ ἀναλογία, ἐὰν πλείστων ὅρων οἱ ἡγούμενοι ἐφ' ἑαυτοὺς καὶ οἱ ἑπόμενοι ὡσαύτως ἀχθῶσι (§. 618.)· τοιαύτη δέ τις ἀναλογία τῷ $A \times M : B \times N = \Gamma : X$, ἢ $A \times M : \Gamma = B \times N : X$ διασημανθήσεται, ἐν ᾗ τὰ γινόμενα AM καὶ BN ἐν λόγῳ εἰσὶ τῶν Γ καὶ X ποσοτήτων. Πρὸς δὲ τὴν τῶν πλειόνων ἀναλογιῶν διάταξιν, ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τῶν ὅρων κατὰ τὰς προστυχούσας περιστάσεις ἐπ' ἀλλήλους πολλαπλασιασθήτωσαν, καὶ τὸ ἐντεῦθεν γινόμενον ἀνθ' ἑνὸς τοῦ πρώτου ληφθήτω, ὁ δὲ τρίτος δευτέρου χώραν ἐχέτω (ὡς ἐπὶ τῆς δευτέρας ἀναλογίας), ὡσαύτως δὲ καὶ τοῦ τετάρτου καὶ πέμπτου ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιασθέντων, τὸ γινόμενον τρίτην ἐχέτω τάξιν· εἶτα τῆς ἀναλογίας καλῶς διαταχθείσης, ὁ ἀόριστος αἰτείσθω ὅρος (§. 649.).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'.

Μέτρον ὁπωσοῦν χρημάτων (300 θάληροι) ἐν τοσῷδε χρόνῳ (2 ἔτεσι) τοκιζόμενον, τοσόνδε παρέχεται τόκον (36 θαλ.). Πηλίκος οὖν ἔσται ὁ ἐξ ἀριθμοῦ τοσοῦδε (20000 θαλ.) τόκος, ἐν χρόνῳ τοσῷδε (12 ἔτεσι) λογιστευόμενος;

$$A \times M : B \times N = \Gamma : X$$

$$300 \times 2 : 20000 \times 12 = 36 : X$$

$$\text{ἢ } AM : \Gamma = BN : X$$

$$\begin{array}{ccc} 300 & & 20000 \\ 2 : 36 & = & 12 : X \end{array}$$

Τοίνυν $600 : 36 = 240000 : X$

$$X = \frac{8640000}{600} = 14400.$$

Β'.

Σκαπανεῖς 20, ἐν 10 ἡμέραις, 100 κυβικὰς ὀργγιὰς κατορύττουσι· 30 σκαπανεῖς, ἐν ἡμέραις 6, πόσας κυβικὰς ὀργγιὰς κατορύξουσι;

$$A\,M : B\,M = \Gamma : X$$

$$200 : 180 = 100 : X$$

$$X = \tfrac{18000}{200} = 90$$

Γ'.

Δρυοτόμοι 8, ἐν τέσσαρσιν ἑβδομάσιν, 20 ὀργγιὰς ξύλων ἐν δρυμῶνί τινι ξυλεύονται· 12 δρυοτόμοι ἐν ἑβδομάσιν 8, πόσας ξυλεύσονται;

$$8 \times 4 : 12 \times 8 = 20 : X$$

$$8 \times 4 \times X = 20 \times 12 \times 8$$

$$X = \frac{20 \times 12 \times 8}{4 \times 8}\; 20 \times 3 = 60 \text{ ὀργ.}$$

Δ'.

Ἐργάται 100, ἐν ἡμέραις πέντε, 250 πλέθρα συνετέλεσαν· ἐφ' ᾧ γοῦν 1000 πλέθρα, ἐν ἡμέραις δύω συντελεσθῆναι ἔχοιεν, πηλίκον ἐργατῶν ἀριθμὸν δεῖ παραλαμβάνειν;

Τοῦ τῶν ἡμερῶν ἀριθμοῦ μειουμένου, δῆλόν ἐστιν αὔξειν τὸν τῶν ἐργατῶν ἀριθμόν· ἔνθεντοι ὁ τῶν ἡμερῶν ἀριθμὸς 5 καὶ 2 ἐν λόγῳ ἐστὶν ἀντιστρόφῳ τῶν συντελεσθησομένων πλέθρων· ὅθεν ἔσται (§. 651. 952.)·

$$\frac{A}{M} : \frac{B}{N} = \Gamma : X$$

$$\tfrac{250}{5} : \tfrac{1000}{2} = 100 : X$$

$$\frac{250\,X}{5} = \frac{1000 \times 100}{2}$$

$$X = \frac{1000 \times 50}{50} = 1000 \text{ ἐργάτ.}$$

Ε'.

Γραφεῖς 8, ἐν ἡμέραις 5, συνέγραψαν 6 βίβλους χάρτου· 12 γραφεῖς, βίβλους 6 χάρτου, ποσταίῳ χρόνῳ συγγράψωσι;

$$\tfrac{6}{8} : \tfrac{6}{12} = 5 : X$$

$$\frac{6\,X}{8} = \frac{6 \times 5}{12}, \text{ καὶ } 6\,X = \frac{6 \times 5 \times 8}{12}$$

$$X = \frac{6 \times 5 \times 8}{6 \times 12} = \frac{5 \times 8}{12} = 3\tfrac{1}{3} \text{ ἡμέρ.}$$

Ϛ'.

Θερισταὶ 6, ἐν ἡμέραις 2, 8 πλέθρα ἐσπαρμένης γῆς ἐθέρισαν· θερισταὶ 10, 16 πλέθρα, ποσταίῳ χρόνῳ θεριοῦσι;

$$\tfrac{8}{6} : \tfrac{16}{10} = 2 : X$$

$$\frac{8\,X}{6} = \frac{16 \,.\, 2}{10}$$

$$8\,X = \frac{16 \,.\, 2 \,.\, 6}{10}, \text{ καὶ } X = \frac{16 \,.\, 2 \,.\, 6}{8 \,.\, 10}$$

$$X = \frac{2 \,.\, 2 \,.\, 6}{10} = \frac{2 \,.\, 6}{5} = 2\tfrac{2}{5} \text{ ἡμέρ.}$$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐπὶ τῆς μὴ ὀρθῶς καὶ εὐτάκτως, ἀλλὰ πλαγίως καὶ τεταραγμένως προϊούσης συνθέτου μεθόδου, εἴθισται καὶ ἄλλως ἐν τῇ τοιαύτῃ τῶν ὅρων ἀντιστρόφῳ ἀναφορᾷ τὴν τούτων ἀταξίαν ἐπὶ τὸ εὔτακτον μετασχηματίζειν, ἐὰν τὸ μὲν ἐκ τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον πολλαπλασιαζομένου γινόμενον τεθῇ δεύτερον κατὰ τόπον, ὁ δὲ τρίτος ταχθῇ πρῶτος, ὅ, τε πέμπτος τῷ τοῦ τρίτου τόπῳ ἀποκατασταθῇ· δι' οὗ καὶ ἡ σύνθετος ἐπὶ τὴν τῶν τριῶν ἁπλῆν ἀναχθήσεται μέθοδον. Ἔνθεντοι καὶ τῆς πράξεως γενομένης (§. 649.), τοὐντεῦθεν προκύπτον πηλίκον διὰ τοῦ τετάρτου ὅρου διαιρεθὲν, τὸν ζητούμενον ἡμῖν ἀναδώσει Χ. Οἷον ἄνθρωποι 2, ἐν ἡμέραις 8, ἐδαπάνησαν ἀργύρια 24· πόσοι ἄραγε ἄνθρωποι δαπανήσουσιν ἀργύρια 60, ἐν ἡμέραις 10; Εὑρεθήσεται οὕτω πρῶτον ὁ 40, παραστατικὸς τῶν ἡμερουσίων δαπανῶν, ἤτοι $24:2\times8=60:X$ καὶ $X=40$, καὶ τῇ τούτου εἶτα ἐπὶ τὸν τέταρτον 10 διαιρέσει, ὁ 4 ζητούμενος τῶν ἀνθρώπων ἀριθμός. Ἀλλ' ἀλογιστέα ἡ τοιαύτη μέθοδος, καὶ προκριτέα ἡ κλασματωδῶς ἐκτιθεμένη, ὡς ἀσφαλής τε καὶ εὐχερεστέρα. οἷον·

$$\frac{24}{8}:\frac{60}{10}=2:X$$

$$\frac{24X}{8}=\frac{60\times2}{10}, \text{ ἤτοι } X=\frac{12}{3}=4.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 655. Ἑπτὰ δοθέντων ἀριθμῶν, τὸν ὄγδοον ἐξευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Εἴθισται κοινότερον τοῖς Ἀριθμητικοῖς μετὰ τὴν τῶν πέντε μέθοδον, ποιεῖσθαι τὸν λόγον καὶ περὶ τῆς τῶν ἑπτὰ λεγομένης μεθόδου, συνθέτου οὔσης καὶ αὐτῆς ἀναλογίας, κἀπὶ τὴν τῶν τριῶν ἀναγομένης. Ταύτης δὲ, εἰ μὲν ὁ τρίτος ὁ αὐτὸς εἴη τῷ ἑβδόμῳ τῶν ὅρων, οὐδὲν πάντως κατὰ τὴν πρᾶξιν διοίσει τῆς πρὸ αὐτῆς· εἰ δὲ μὴ, διάφορόν τε καὶ ἐργωδεστέραν ἕξει τὴν ἐργασίαν. Τοῦ μὲν οὖν πρώτου μέρους αὐτῆς ἐκ τεσσάρων ὅρων συνεστηκότος, τοῦ δὲ δευτέρου ἐκ τριῶν ἑξῆς, καὶ εὐτάκτως ἁπάντων κειμένων, πολλαπλασιαστέον μὲν πρῶτον ἐπ' ἀλλήλους τοὺς τοῦ πρώτου μέρους τρεῖς, καὶ τὸ γινόμενον, ἐν τῇ τοῦ πρώτου χώρᾳ τακτέον· δεύτερον δὲ καὶ τοὺς τρεῖς τοῦ δευτέρου μέρους ὡσαύτως ἐπ' ἀλλήλους, καὶ τὸ γινόμενον τρίτην ἐχέτω τάξιν· ὥσπερ ἀμέλει καὶ ὁ μέσος ὃς τὸν τοῦ τετάρτου προεπεῖχε βαθμὸν, μέσος τῶν δύω τούτων γινομένων τεθήτω· καὶ τόνδε δὴ τὸν τρόπον ἀνήχθη ἡ τῶν ἑπτὰ, ἐπὶ τὴν τῶν τριῶν ἁπλῆν μέθοδον. Ἐνθέντος τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν δεύτερον λοιπὸν πολλαπλασιαζομένου, τοὐντεῦθεν γινόμενον διαιρεθήτω ἐπὶ τὸν πρῶτον, καὶ τὸ πηλίκον ἔσται ὁ ζητούμενος (§. 649.).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'.

Ἄνδρες 4, μετὰ ἀργυρίων 180, μῆνας 6 ἐμπορευσάμενοι, ἐκέρδησαν ἀργύρια 90. Ἐὰν οὖν ἄνδρες 8, μετὰ ἀργυρίων 360, ἐν διαστήματι μηνῶν 4, τὴν αὐτὴν ἐμπορεύσωνται ἐμπορίαν, πόσον κερδήσουσιν;

$$4.180.6:90=8.360.4:X=240.$$

Β'.

Εἰ ἀνδράσι 3000, μόδιοι ἀλφίτων 650, ἐπὶ 3 μησὶ διήρκεσαν εἰς τροφὴν $2\frac{1}{2}$ λιτρῶν ἑνὶ ἑκάστῳ διανεμομένων· μόδιοι τὸν ἀριθμὸν 1700, ἐν μησὶ 4, ἀνὰ λίτρας 2 ἑκάστῳ, πόσοις ἂν ἀνθρώποις ἐπαρκέσειαν;

Ἔνθα δὴ σημειωτέον, ὅτι τῷ ἀριθμῷ τῶν μοδίων συναύξει ὁ τῶν τραφησομένων ἀνδρῶν· τοῦ δὲ χρόνου αὔξοντος, ὁ τῶν ἀνδρῶν μειοῦται· αὔξει δὲ πάλιν, τῆς ἡμερουσίου τροφῆς μειουμένης· διὸ θετέον,

$$650.4.2:1700.3.2\tfrac{1}{2}=3000:X$$

$$5200:12750=3000:X=7355\tfrac{10}{13}.$$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἔστι δὲ καὶ πλάγιος ταύτης τρόπος, ἐν ᾧ τῶν τοῦ πρώτου μέρους τεσσάρων ὅρων, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς ὀρθῆς κειμένων, τῶν τοῦ δευτέρου δίδοται μὲν ὁ πρῶτος, ζητεῖται δ' εἷς τις τῶν λοιπῶν τριῶν· ὃς δ' ἂν ᾖ τῶν τριῶν ὁ ζητούμενος, οὐδόλως τὸν τρόπον μεταβαλεῖ. Πολλαπλασιαστέον οὖν κἀπὶ τούτου, ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου τρόπου τοὺς τρεῖς τοῦ πρώτου μέρους ὅρους ἐπ' ἀλλήλους, καὶ τὸ ἐντεῦθεν γινόμενον ἐν δευτέρᾳ χώρᾳ τακτέον, τὸν δὲ τέταρτον τοῦ προβλήματος ἐν τῇ πρώτῃ, μεταλαττομένης δηλαδὴ τῆς θέσεως τῶν ὅρων· καὶ τὸν ἕβδομον, ὃς ἐπὶ τῆς ὀρθῆς ὄγδοος εὕρηται, ἀντὶ τρίτου ληπτέον, οὗ ἐπὶ τὸν δεύτερον ἤδη πολλαπλασιαζομένου, τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν πρῶτον διαιρεθήτω, καὶ τὸ πηλίκον ἐπὶ τοὺς παραλειφθέντας δύω λοιποὺς τοῦ προβλήματος κατὰ διαδοχὴν μερισθήτω. Οὕτως τοίνυν ἐκκύψει ἡμῖν ὁ ζητούμενος· οἷον ἐπὶ τοῦ Α'. παραδείγματος·

$$4.180.6:90 = 8.4.240:X = 360,$$
$$\text{ἢ},\ 4.180.6:90 = 360.4.240:X = 8.$$

ΠΕΡΙ

ΤΗΣ ΚΑΛΟΥΜΕΝΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 656. Ἑταιρεία ἐστὶν ὁμόνοια τινῶν ἐν συμφώνῳ μετοχῇ κοινοῦ τινος, ἐκ συνεισφορᾶς καταβαλλομένων ἀριθμῶν χρηματικῆς διαφόρου ποσότητος συνεστηκότος.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 657. Τὸ ἐν αὐτῇ ἄρα ζητούμενον διανομή ἐστι τοῦ κοινοῦ ἀριθμοῦ, κατὰ τὴν δοθεῖσαν ἀναλογίαν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐπὶ γὰρ κοινῷ τινι συμβολαίῳ πολλῶν συμφώνως διάφορον ἑκάστου χρηματικὴν συνεισενεγκάντων ποσότητα, καὶ τὴν συμποσωθεῖσαν ἐμπορευσάμενοι τὸ ἀποδάσμιον ἑκάστῃ ἀνῆκον τοῦ τυχόντος κέρδους, ἢ τῆς ζημίας ζητεῖται. Ἔνθεντοι ἡ τῆς ἑταιρείας καλουμένη μέθοδος τὰ μάλιστα ἐστὶ χρήσιμος, ἐφ' ᾧ τὸ κέρδος ἢ τὴν ζημίαν, ἀναλόγως τῇ ὑφ' ἑνὸς ἑκάστου καταβληθείσῃ ποσότητι διακρῖναι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 658. Ἐν τῇ τῆς Ἑταιρείας τοίνυν μεθόδῳ τὸ ἐξ ἁπάντων τῶν ποσοτήτων συγκείμενον ἕξει πρὸς τὴν ἑκάστου ποσότητα, ὡς τὸ ὅλον κέρδος πρὸς τὸ ἀνῆκον κέρδος ἑκάστῃ ποσότητι· Ἢ, τὸ ἐξ ἁπάντων συγκείμενον πρὸς τὸ ὅλον κέρδος, ὡς τὸ ὑφ' ἑκάστου καταβληθὲν πρὸς τὸ ἀνῆκον ἑκάστῳ κέρδος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 659. *Τὸ δοθὲν ὅλον εἰς μέρη διελεῖν, τὴν δοθεῖσαν ἑτέρου τινὸς ὅλου τηροῦντα ἀναλογίαν.*

ΛΥΣΙΣ.

Ἐὰν κοινὸν ἑταίρων καὶ συμμετόχων κέρδος, ἢ ζημίαν διανεμητέον ᾖ πρὸς αὐτούς, μερισθήσεται τὸ ἐκ τῆς ἐμπορίας προκύπτον ὅλον, ἤτοι ὁ του κέρδους ἢ τῆς ζημίας ἀριθμὸς, ἀναλόγως τοῖς ὑφ' ἑκάστου συνεισενεχθεῖσι τοῦ συμποσουμένου κεφαλαίου μέρεσιν. Ἔνθεντοι καὶ ἡ μέθοδὸς τοσάκις παραβάλλεται, ὅσοι ἂν οἱ μέτοχοι καὶ ἑταῖροι ὦσιν· ἔχει γὰρ ὡς ἡ τῶν συνεισενεχθέντων σύναψις πρὸς τὸ κοινὸν κέρδος, οὕτως ὁ, τιοῦν αποδάσμιον τῶν συνεισενεχθέντων πρὸς τὸ ἀποδάσμιον κέρδος ἢ τὴν ζημίαν ἐκείνῳ ἀνάλογον (§. 658.). Διὸ καὶ τῶν παρ' ἑκάστου τῶν ἑταίρων συνεισενεχθέντων εἰς ἓν συναφθέντων, ὁ συμποσούμενος ἀριθμὸς πρῶτος τεθήτω, δεύτερος δὲ ὁ τοῦ κέρδους ἢ τῆς ζημίας, καὶ τρίτος ὁ τῆς συνεισφορᾶς ἕκαστος ἑκάστου χωρὶς, ὁ δὲ εὑρεθεὶς ἑκάστου τέταρτος τὸ ἀνῆκον ἑκάστου ἀπὸ τοῦ κέρδους ἢ τῆς ζημίας ἔσται· ὥστε οὕτω τὴν μέθοδον, ἐπὶ τὴν τῶν τριῶν ἀνάγεσθαι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'.

Τὸ κέρδος τριῶν συνεμπόρων ἐστὶ θαλήρων 9000· ἡ τοῦ πρώτου συνεισφορὰ 300, ἡ τοῦ δευτέρου 600, καὶ ἡ τοῦ τρίτου 900. εὑρεῖν δεῖ τὰ ἀποδάσμια κέρδη ἑνὶ ἑκάστῳ ἀνήκοντα. Ἔσται τὸ τῆς συνεισφορᾶς κεφάλαιον 1800 θαλήρων. Ἐὰν οὖν τεθῶσιν $300 = A$, $600 = B$, $900 = \Gamma$, τὸ ὅλον κέρδος $9000 = K$, τὸ τῷ πρώτῳ ἀνῆκον ἀποδάσμιον κέρδος $= \Phi$, τὸ τῷ δευτέρῳ $= X$, τὸ δὲ τῷ τρίτῳ $= \Psi$, ἔσται·

$$A : \Phi = B : X = \Gamma : \Psi$$

Κἀντεῦθεν (§. 622.)·

$$(A + B + \Gamma) : (\Phi + X + \Psi) = A : \Phi = B : X = \Gamma : \Psi.$$

Ἔστι δὲ $A + B + \Gamma$ τὸ συνεισενεχθὲν ὅλον ἄθροισμα, καὶ $\Phi + X + \Psi$ τὰ ἀποδάσμια ἑνὶ ἑκάστῳ ἀνήκοντα κέρδη· ἄρα ἕξει τὸ ὅλον τῆς συνεισφορᾶς κεφάλαιον πρὸς τὸ ὅλον κέρδος, ὡς ἡ ἑνὸς ἑκάστου συνεισφορὰ πρὸς τὸ αὐτῇ ἀνῆκον ἀποδάσμιον κέρδος. Ἔνθεντοι, ἐὰν ἀντὶ τῶν στοιχείων αἱ τούτων τεθῶσι δυνάμεις, ἐκκύψει

$$1800 : 9000 = \begin{cases} 300 : \Phi \\ 600 : X \\ 900 : \Psi \end{cases}$$

$$\text{Ἄρα} \begin{cases} \Phi = \frac{2700000}{1800} = 1500 \\ X = \frac{5400000}{1800} = 3000 \\ \Psi = \frac{8100000}{1800} = 4500 \end{cases}$$

Β'.

Εἰ τῶν συνεμπορευσαμένων, ὁ μὲν κατέβαλε δραχμὰς 1000, ὁ δὲ 500, ὁ δὲ 300, τὸ κοινῇ γεγονὸς αὐτοῖς κέρδος δραχμῶν 2000, πῶς ἂν ἀναλόγως διαμερισθεῖεν; Προσαθροιστέον τοίνυν τὰ καταβληθέντα καὶ τὸ ὅλον 1800 ληπτέον. οἷον·

$$1800 : 2000 = \begin{cases} 1000 : \Phi = 1111\tfrac{2}{18}. \\ 500 : X = 555\tfrac{10}{18}. \\ 3000 : \Psi = 333\tfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Γ'.

Τῆς αὐτῆς δὲ ἐχόμενα εἰσὶ Λύσεως καὶ τὰ εἰς σύνθεσιν τινος εἰσερχόμενα διάφορα μόρια, ἐν ᾗ ἡ τῶν εἰσερχομένων πρὸς ἄλληλα ἀναλογία διέγνωσται. Οἷον εἰς σύνθεσιν εὐπρήστου Πυρίτιδος κόνεως εἰσέρχονται

16 μέρη νίτρου, 2 θείου, καὶ 3 ἀνθράκων· δεῖ δὲ ἡμῖν 600 Κεντηνάρια κατασκευάσαι Πυρίτιδος, πόσον ἄρα ἐξ ἑνὸς ἑκάστου τῶν εἰς σύνθεσιν εἰσερχομένων ληπτέον; Ἐπεὶ οὖν ἑκάστῃ τῇ τῆς Πυρίτιδος κόνεως ὁλκῇ, αἱ τοῦ νίτρου, θείου τε καὶ ἀνθράκων ὁλκαὶ ἀλλήλαις ἀνάλογόν εἰσιν, ὡς 16:2:3, ἔσται·

$$(16+2+3):600=\begin{cases}16:\Phi\\2:X\\3:\Psi\end{cases}$$

$$\text{Ἄρα}\begin{cases}\Phi=457\tfrac{1}{7}\ \text{Κεντ. νίτρου.}\\X=\ \ 57\tfrac{1}{7}\ \text{Κεντ. θείου.}\\\Psi=\ \ 85\tfrac{5}{7}\ \text{Κεντ. ἀνθράκων.}\end{cases}$$

Δ'.

Οὐκ ἐκλείπουσι δὲ καὶ ἄλλα ὑποδείγματα τῆς αὐτῆς ψηφηφορίας δεόμενα, οἷον ἐπὶ τῆς Ἰατρικῆς ἢ ἄλλων τεχνῶν, ἐκ τοῦ δοθέντος λόγου, ὃν αἱ ὁλκαὶ τῶν συμμιχθησομένων πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν, εὑρίσκονται αἱ ὁλκαὶ τῶν ὀφειλόντων συμμίγνυσθαι αἱ ζητούμεναι, ὅπως ἂν ᾖ τὸ ὅλον μικτὸν τῆς δοθείσης ὁλκῆς. Οἷον 3 ἁπλᾶ εἰς σύνθεσιν Φαρμάκου εἰσέρχονται, ἡ μὲν τοῦ πρώτου δόσις = 4 οὐγγιῶν (α), ἡ δὲ τοῦ δευτέρου = 5, καὶ ἡ τοῦ τρίτου = 2. Εὑρεθῆναι γοῦν δεῖ τὰς ἐπιζητουμένας ἑκάστου δόσεις, ὥστε τὴν τοῦ συνθέτου ὁλκὴν 8 λιτρῶν

(α) Παρὰ τοῖς Ἰατρείοις τοῖς κοινῶς λεγομένοις Ἀποθήκαις, δηλαδὴ φαρμάκων· μία λίτρα, ἤτοι 1℔ = 12 οὐγγίαις (℥) ἢ 1½ Marc, 1℥ = 8 δραχμαῖς (ʒ), 1ʒ = 3 γραμμιδίοις ἢ γραμμαρίοις Scrupules (℈), 1℈ = 20 κόκκοις· ἄρα 1℥ = 480 κόκκοις.

ὅλην εἶναι. Ἔσται $4+5+2=11$ οὐγγίαις, καὶ τῶν 8 λιτρῶν ἐπ' οὐγγίας ἀναγομένων, ἤτοι $8\times12=96$, ῥητέον.

$$11:96=\begin{cases}4:\Phi\\5:X\\2:\Psi\end{cases}$$

$$\text{Ἄρα}\begin{cases}\Phi=34\tfrac{10}{11}\ \text{τῇ τοῦ Α'. ἁπλοῦ ὁλκῇ.}\\X=43\tfrac{7}{11}\ \text{τῇ τοῦ Β'. ἁπλοῦ ὁλκῇ.}\\\Psi=17\tfrac{5}{11}\ \text{τῇ τοῦ Γ'. ἁπλοῦ ὁλκῇ.}\end{cases}$$

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

Εἰ δὲ τῶν τὴν Ἑταιρείαν ποιησαμένων ἐν χρόνοις ἀνίσοις, τὸ καταβληθὲν ἕκαστος συνεισήνεγκε, Φροντιστέον δὴ καὶ τοῦ χρόνου. Οἷον εἰ τυχόν, ὁ μὲν 100 ἦν καταθεὶς ἐν 2 μησίν· ὁ δὲ 200 ἐν 4 μησίν, ὁ δὲ 300 ἐν 6 μησί· δέον οὖν αὐτοὺς τὸ κέρμα, ὃ δὴ κείσθω 8400, οὐχ ὅπως τῇ τῶν καταβληθέντων χρημάτων ποσότητι, ἀλλὰ δὴ καὶ τοῖς μησὶν ἀνάλογον διανείμασθαι. Διὸ ὡς ἐφεξῆς ὑπολογίζουσιν, ἡ μέθοδος συνθέτως ἡμῖν ἐκτεθήσεται (§. 653.)· ἤτοι, 100 ἐν 2 μησὶ τὸ αὐτὸ κέρδος ἀναδώσουσιν, ὡς δὶς ἑκατὸν ἤτοι $2\times100=200$ ἐν ἑνὶ μηνί· αὖθις 200 ἐν 4 μησὶ τὸ αὐτὸ ἀναδώσουσιν ὡς $4\times200=800$ ἐν ἑνί· καὶ 300 ἐν 6 τὸ αὐτὸ ἀναδώσουσιν, ὡς $6\times300=1800$, ἐν ἑνί. Ἔνθεν τοι ἔσται, ὡς τὸ ἐκ τῶν καταβληθέντων κεφάλαιον ἐπὶ τὸν ἀνήκοντα πολλαπλασιαζόμενον χρόνον, ἤτοι $100\times2=200$, $200\times4=800$, $300\times6=1800$, τουτέστιν ὡς 2800, πρὸς τὸ ὑφ' ἑκάστου συνεισαχθὲν καὶ τῷ κατ' αὐτὸν χρόνῳ ἐπιπολλαπλασιασθὲν, οὕτω τὸ ὅλον κέρμα, πρὸς τῷ ἑκάστῳ μέρει ἐπιβάλλον. Ἢ, ὡς τὸ κεφάλαιον τὸ ἐκ τῶν καταβληθέντων τῷ ἀνήκοντι χρόνῳ ἐπιπολλαπλασιαζομένων 2800, πρὸς τὸ ὅλον κέρμα 8400· οὕτω τὸ ἑνὸς ἑκάστου μέρος, τῷ κατ' αὐτὸν χρόνῳ ἐπιπολλαπλασιασθὲν, πρὸς τὸ ἐπιβάλλον αὐτῷ κέρμα. Ἐν ἀμφοτέροις γὰρ ἡ αὐτὴ τηρεῖται πάντως ἀναλογία (§. 654.). οἷον·

$$2800 : 8400 = \begin{cases} 200 : \Phi = \frac{8400\times 2}{28} = 600. \\ 800 : X = \frac{8400\times 8}{28} = 2400. \\ 1800 : \Psi = \frac{8400\times 18}{28} = 5400. \end{cases}$$

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

Οὐ ξένη δὲ ταύτης καὶ ἡ τῆς Ψευδοῦς Θέσεως Μέθοδος, ἥτις ἐν χρήσει ἐκλαμβάνεσθαι εἴωθεν, ἐφ' ᾧ ὁ αἰτούμενος ἀριθμὸς, δι' ἑτέρου τινος ἐν ὑποθέσει μὲν καὶ κατὰ τὸ δοκοῦν ληφθέντος, τῇ δὲ περιστάσει καὶ μάλα συνᾴδοντος, ἐξευρίσκοιτο. Οἷον τρεῖς ἑταῖροι κατέβαλον ὁμοῦ ἐν τῇ Δημοσίᾳ Λαχέσει ἀριθμόν τινα χρημάτων· ἀπενέγκαντο δ' οὖν ἐντεῦθεν κέρδος 20000 θαλήρων, ὃ δὴ ἀναλόγως τῷ ὑφ' ἑκάστου καταβληθέντι ἔγνωσαν διανεῖμαι. Ἔστιν ἀλλ' οὖν τὸ ὑπὸ τοῦ δευτέρου καταβληθὲν διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τοῦ τρίτου, τὸ δ' ὑπὸ τοῦ πρώτου διπλάσιον τῆς ἐξ ἀμφοῖν ἅμα καταβληθείσης ποσότητος. Πηλίκον ἄρα τῷ ἑνὶ ἑκάστῳ προσανῆκον ἔσται μέρος;

Θετέον δὴ ἐξ ὑποθέσεως τὸ ὑπὸ τοῦ τρίτου καταβληθὲν εἶναι 2, τὸ ὑπὸ τοῦ δευτέρου 4, καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ πρώτου 12. Ἔσται τοίνυν (§. 658.).

$$18 : 20000 = \begin{cases} 2 : \Phi = \frac{40000}{18} = 2222\tfrac{2}{9} \\ 4 : X = \frac{80000}{18} = 4444\tfrac{4}{9} \\ 12 : \Psi = \frac{240000}{18} = 13333\tfrac{3}{9} \end{cases}$$

$$\underline{}\ 20000$$

ΠΕΡΙ ΜΙΞΕΩΣ ΚΑΙ ΚΡΑΣΕΩΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 660. Μῖξίς ἐστι διαφόρων ὑλῶν, ἢ οὐσιῶν εἰς ταυτὸ ἕνωσις.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οἷον ἀργυρίου δοκίμου καὶ κιβδήλου, οἴνου διαφόρων εἰδῶν, σίτου διαφόρου τιμήματος, μετάλλων διαφόρου δοκιμασίας ἀκριβοῦς καὶ παρασήμου, κτλ. Ὁ δὲ τρόπος, δι' οὗ αὕτη ἀναλόγως γίνεσθαι ἔχει, Κανὼν ἤκουσε Μίξεως.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 661. Τὴν μὲν δὴ τῶν στερεῶν, καὶ τῷ πυρὶ χωνευτῶν εἰς ἓν συμμίγην, Μῖξιν ἢ Μίγμα κλητέον· τὴν δὲ τῶν ὑγρῶν, Κρᾶσιν ἢ Κρᾶμμα.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 662. Μίξεως Κανὼν Ὀρθὸς ἀκούει, ἡ τὸ μέσον ἐκτίμημα μίγματος οἱουδηποτοῦν, ἡνίκα τὰ τοῦτο συντιθέντα μόρια ἐν λόγῳ εἰσὶ διδομένῳ, ἔτι δὲ καὶ τὸ τούτων τίμημα ἔγνωσται, προσευρεῖν διδάσκουσα μέθοδος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 663. Ποσοτήτων διαφόρου τιμήματος

δοθεισῶν, προσδιορίσαι τὰ ἐξ ἑκάστης εἰς μίξιν, ἢ κρᾶσιν ληφθησόμενα μόρια· οὗτινος τὸ μέτρον, ἢ ἡ ὁλκὴ μέσῳ τιμήματι ἂν εἴη ἀνάλογος.

ΛΥΣΙΣ.

Διαιρεθήτω τὸ ὅλον τοῦ μίγματος τίμημα, διὰ τοῦ τῶν μέτρων, ἐξ ὧν ἐκεῖνο σύγκειται, ἀριθμοῦ. Φημὶ δὴ τὸ πηλίκον τὸ μέσον ἀναδιδόναι τίμημα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστω X τὸ μέσον αἰτούμενον τίμημα, A τὸ μέγιστον, B τὸ ἐλάχιστον, M δὲ τὸ ἐκ τοῦ μεγίστου τιμήματος ληφθησόμενον μόριον, καὶ N τὸ ἐκ τοῦ ἐλαχίστου. Τὸ τίμημα τοίνυν τοῦ μέρους M ἔσται AM, τὸ τοῦ N, BN, τὸ δὲ τῶν μέτρων, ἢ τῶν σταθμῶν, ἐξ ὧν τὸ μίγμα ἢ κρᾶμμα συνέστηκεν, ἄθροισμα M + N, ἑπομένως τε καὶ τὸ ὅλον τοῦ μίγματος τίμημα AM + BN. Εὑρεθήσεται τοίνυν τὸ μέσον τοῦ τιμήματος, ληφθείσης τῆς ἀναλογίας ὡς ἐφεξῆς·

$$(M+N):(AM+AN) = 1:X$$

$$\text{Ἄρα } X = \frac{AM+BN}{M+N}$$

Ἔστι δὲ AM + BN τὸ ὅλον τοῦ μίγματος τίμημα, M + N δὲ ὁ τῶν μέτρων, ἐξ ὧν ἐκεῖνο σύγκειται ἀριθμός· ἄρα, κτλ. Ο. Ε. Δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Οἴνου εἴδη δύω διαφόρου τιμήματος, οὕτω βούλεταί τις συγκεράσαι, ὥς ἐκ μὲν τοῦ 10 δραχμῶν τὸν

χοέα τιμωμένου, 4 λαβεῖν χοεῖς, ἐκ δὲ τοῦ 15 δραχμῶν, 6. Ζητεῖ δὲ μαθεῖν, πηλίκον ἔσται τὸ μέσον τίμημα; καθ' ὃ μετὰ τὴν κρᾶσιν ἕκαστον τῶν χοέων ἀποδῷ;

$$X = \frac{AM+BN}{M+N} = \frac{(15\times6)+(10\times4)}{4+6}$$

$$X = \frac{90+40}{10} = \frac{130}{10} = 13$$

$$\text{Τουτέστι} \begin{cases} 4 \text{ χοεῖς} \times 10 \text{ δραχμ.} = 40 \\ \underline{6} \;\ldots \times 15 \;\ldots = \underline{90} \end{cases}$$
$$10 \qquad\qquad\qquad 130$$

Ἄρα 10 : 130 = 1 : X = 13.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 664. Πλάγιος Κανὼν Μίξεως ἐστὶ μέθοδος, δι' ἧς δοθέντος τοῦ μέσου τιμήματος, τοῦ μετὰ τὴν οἱανδηποτοῦν συμμιγὴν ἐκληφθησομένου, ἔτι δὲ καὶ τοῦ τῶν συμμιχθησομένων ἰδιαιτέρου τιμήματος χωρὶς, αἰτεῖται προσδορίσαι τὸν τῶν μορίων ἀριθμὸν, ἐξ ὧν ἡ μίξις συστήσεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Πλαγία δὲ αὕτη κέκληται μέθοδος, ἢ διὰ τὸ ἀντικεῖσθαι τῇ ὀρθῇ (§. 662.), ἐν ᾗ τὸ μέσον αἰτεῖται εὑρεθῆναι τίμημα, τὸ διὰ τῶν μορίων καὶ τῶν ἰδιαιτέρων ἐγνωσμένων ἰδιοτίμων ἀναδοθησόμενον· ἐπειδὰν ἐνταῦθα, ἤτοι ἐπὶ ἐπὶ τῆς πλαγίας, ὁ τῶν μορίων τῶν ληφθησομένων ποσοτήτων διὰ τοῦ μέσου τιμήματος, ἔτι δὲ καὶ τῶν ἰδιαιτέρων ὡρισμένων ἰδιοτίμων, αἰτεῖται ἀριθμός· ἤ, διὰ τὸ ἐν τῇ τῶν ἰδιαιτέρων ἐγνωσμένων ἰδιοτίμων, ἤτοι ἑκάστης ποσότητος, μετὰ τοῦ μέσου τιμήματος ἀναφορᾷ, τὰς διαφορὰς ἀντιστρόφως λαμβάνεσθαι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 665. Δοθέντος τοῦ τε μείζονος, καὶ ἐλάττονος, καὶ τοῦ μέσου, τῶν τιμημάτων, εὑρεῖν τὸν ἐξ ἀμφοῖν ληφθησόμενον τῶν μορίων ἀριθμόν.

ΛΥΣΙΣ.

Τιθεμένου τοῦ μὲν μείζονος τιμήματος $= A$, τοῦ δ' ἐλάττονος $= B$, καὶ τοῦ μέσου $= \Gamma$, ἔσται τὸ πρὸς μέσον ἐκτίμημα μεταχθησόμενον μέτρον $= 1$, ὁ δ' ἐκ τοῦ μείζονος ληφθησόμενος τῶν μορίων ἀριθμὸς $= X$, καὶ ἑπομένως ὁ ἐκ τοῦ ἐλάττονος $1 - X$. Τὸ ἐκτίμημα τοίνυν τοῦ μέρους X ἰσωθήσεται τῷ ἐν τούτῳ περιεχομένῳ τῶν μέτρων ἀριθμῷ, πολλαπλασιαζομένῳ ἐπὶ τὸ ἐκτίμημα A, δι' οὗ ἕκαστον μέτρον τετίμηται, ἤτοι ἔσται AX· ὡσαύτως καὶ τὸ ἰσότιμον, ἤτοι ἡ δύναμις τοῦ μέρους $1 - X$, ἔσται $B - BX$· τὸ κεφάλαιον τοίνυν τῶν ἐκτιμημάτων, ἰσωθήσεται τῷ μέσῳ ἐκτιμήματι Γ, ἤτοι·

$$AX + B - BX = \Gamma$$
$$(A - B)X = \Gamma - B$$
$$X = \frac{\Gamma - B}{A - B}$$

Ἐὰν οὖν τεθῇ $A = 100$, $B = 60$, $\Gamma = 72$, ἔσται·

$$X = \frac{\Gamma - B}{A - B} = \frac{72 - 60}{100 - 60} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}.$$

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὅσῳ γὰρ μᾶλλον τὰ ἐκτιμήματα διενηνόχασι, τοσούτῳ ἔλαττον πρὸς τὸ μίγμα ἢ κρᾶμμα, τοῦ μέσου ἐκτιμήματος ληπτέον· καὶ αὖθις, ὅσῳ ἔλαττον διαφέρουσι, τοσούτῳ πλέον. Τὰ ληφθησόμενα τοίνυν μέρη εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ἐν λόγῳ ἀντιστρόφῳ τῶν μεταξὺ τῶν ἐκτιμημάτων πρὸς τὸ μέσον, ἤτοι κοινὸν τίμημα, θεωρουμένων διαφορῶν. Ἵν' οὖν τὸν τῶν μορίων ἀριθμὸν καλῶς γνῶμεν, τῷ μὲν μείζονι ἐκτιμήματι τὴν τοῦ ἐλάττονος δοτέον διαφορὰν, κἀνάπαλιν τῷ ἐλάττονι τὴν τοῦ μείζονος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'.

Ὑποτιθεμένης τῆς τοῦ κασσιτέρου λίτρας 16 δραχμῶν, τῆς δὲ τοῦ μολύβδου 10· πόσον ἐξ ἀμφοτέρων ληπτέον, ἐφ' ᾧ μίγμα τι χωνευθῇ, οὗ ἡ λίτρα ἐκτιμήματι μέσῳ 12 δραχμῶν πωληθείη;

Παραβαλλομένων τῶν δυοῖν ἐκτιμημάτων τοῦ, τε μείζονος καὶ τοῦ ἐλάσσονος μετὰ τοῦ μέσου, δοτέον τῷ μὲν μείζονι τὴν τοῦ μέσου πρὸς τὸ ἔλαττον διαφορὰν, τῷ δ' ἐλάσσονι, τὴν τοῦ μέσου πρὸς τὸ μεῖζον ἐκ τῶν προσεχῶς δειχθέντων.

$$12\left\{\begin{array}{l}16\ \ldots\ 2\\ 10\ \ldots\ 4\end{array}\right.$$

Ἐκ τῶν διαφορῶν τοίνυν δῆλον, πόσον ἐξ ἑκάστου ληπτέον, ἤτοι ἐκ μὲν τοῦ κασσιτέρου δισσὰ τῶν μορίων, ἐκ δὲ τοῦ μολύβδου, τέτταρα· ἐπειδὴ τὸ τῶν μερῶν, ἐξ ὧν τὸ μίγμα συγκείσεται, ἄθροισμα ἐστὶν $2 + 4 = 6$· τὰ ἐξ ἀμφοῖν ληφθησόμενα μόρια ἔσται $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{6}$ ἤτοι $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

Β'.

Τριῶν δοθέντων ἐκτιμημάτων 20, 16, 10, μίγμα ἐκτελέσαι ἐκτιμήματος μέσου 14. Διατασσομένων τοίνυν ὡς ἐφεξῆς

$$14\begin{cases} 20 \quad . \quad . \quad . \quad 4 \\ 16 \quad . \quad . \quad . \quad 4 \\ 10 \quad . \quad . \quad . \quad 6+2 \end{cases}$$

ληπτέον τὰ δοθέντα ἐκτιμήματα ἀνὰ δύω, ἀρχομένοις ἀπὸ τοῦ μείζονος καὶ τοῦ ἐλάσσονος 20 καὶ 10, ἃ καὶ παραβλητέον πρὸς τὸ μέσον ἐκτίμημα, πρὸς τὴν τῆς διαφορᾶς 6 καὶ 4 λῆψιν, καὶ τὴν μὲν 6 ἀντικρὺ τοῦ 10, τὴν δὲ 4, τοῦ 20 προσημειωτέον. Ἐπεὶ δὲ ὁ τῶν ἐκτιμημάτων δοθεὶς ἀριθμὸς ἐστὶ περισσάριθμος, ἐφ' ᾧ τὸ ἐναπολειφθὲν ἐκτίμημα 16 παραβληθείη, ληπτέον θἄτερον τῶν δυοῖν ἤδη παραβληθέντων τὸν μᾶλλον πρὸς τὴν χρείαν ἁρμόζοντα, ἤτοι τὸν 10 (ὡς τοῦ μέσου 14 τοῖς 10 καὶ 16 ἐμπίπτοντος, οὐμὴν δὲ τοῖς 16 καὶ 20), καὶ τὴν διαφορὰν 2 καὶ 4 λαβόντες, θῶμεν τὴν μὲν 4, τοῦ 16, τὴν δὲ 2, τοῦ 10 κατέναντι (ὅς τις 10 δύω τὰς διαφορὰς ἔσχεν, ὡς δὶς παραβληθείς). Αἱ τοίνυν εὑρεθεῖσαι διαφοραὶ εἰσὶ 4, 4, καὶ $6+2=8$, ὧν τὸ ἄθροισμα ἐστὶ 16. Ἐξ οὗ δῆλον, ὅτι ὁ ἐκ τῶν 20, 16 καὶ 10 ληφθησόμενος τῶν μορίων ἀριθμός ἐστι, $\frac{4}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{8}{16}$ ἤτοι $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$· καὶ τῶν κλασμάτων ἀπαλειφομένων ἐκκύψει ὁ τῶν μερῶν ἀριθμὸς 5, 4, 5, ὧν τὸ κεφάλαιον 14.

Γ'.

Εἰ δὲ τέσσαρα εἴησαν τὰ δοθέντα ἐκτιμήματα, ἐκληπτέον αὖθις ἀνὰ δύω τὴν τάξιν τηροῦσιν, ὥστε τὸ

μὲν ὕπερθεν τοῦ μέσου τιμήματος, τὸ δ' ἔνερθεν τούτου ἐκλαμβάνειν (ἄλλως γὰρ τὰ τῆς λύσεως οὐκ ἐνδέχεται γενέσθαι, ὡς τοῦ ἀναχθησομένου ἐκτιμήματος, μὴ ὄντος μέσου μεταξὺ τῶν παραβαλλομένων ἑτέρων ἐκτιμημάτων). Ἐξ οὗ δῆλον, τὸ αὐτὸ ἐκτίμημα πολλάκις ἐνίοτε παραβάλλεσθαι, ὡς ἐπὶ τοῦ ἐφεξῆς παραδείγματος.

$$22\begin{cases} 26 \quad . \quad . \quad . \quad 12+4+2=18 \\ 20 \quad . \quad . \quad . \quad 4 \\ 18 \quad . \quad . \quad . \quad 4 \\ 10 \quad . \quad . \quad . \quad 4 \end{cases}$$

Ἔνθα τὸ αὐτὸ ἐκτίμημα 26 ἑνὶ ἑκάστῳ τῶν τριῶν ἑτέρων παραβέβληται, ὡς ὄντων ἐκείνων ἔνερθεν, ἤτοι ἐλασσόνων, τοῦ δοθέντος μέσου ἐκτιμήματος 22.

Δ'.

Εἴ τι μέταλλον παρείη περιέχον 11 οὐγγίας ἀργύρου καθαροῦ ἐν ἑκάστῃ λίτρᾳ (α), ἄλλο ἔτι κιβδηλότερον τοῦ πρώτου περιέχον ἀργύρου καθαροῦ ἐν ἑκάστῃ λίτρᾳ οὐγγίας $9\frac{1}{2}$. Βουληθῇ δὲ σκεῦος ἀργυροῦν αὐτῷ χωνευθῆναι, σταθμῷ πεντάλιτρον ἐκ μετάλλου 10 οὐγγίας καθαροῦ ἀργύρου περιέχοντος· τίνι δὴ λόγῳ, συν-

(α) Ἀριστοτ. ἐν τῇ Ἱμεραίων Πολιτ. φησὶν, ὡς οἱ μὲν Σικελιῶται τοὺς δύω χαλκοῦς ἑξάλιτρα καλοῦσι· τὸν δὲ ἕνα, οὐγγίαν· τοὺς δὲ ἓξ, ἡμίλιτρον. Ἐπεὶ οὖν ὁ εἷς χαλκοῦς οὐγγίαν ἀποτελεῖ μίαν. Ἐξ δὴ χαλκοῖ, ἤ, ὃ ταυτόν ἐστιν, ἓξ οὐγγίαι ἡμίλιτρον. Ἄρα αἱ 12 οὐγγίαι μιᾷ λίτρᾳ ἰσοδυναμήσουσι.

τάξας τις τα διαφέροντα μέταλλα τὸ βουλητὸν οἱ λαβεῖν δύναιτο;

Ἐπιστητέον οὖν κἀνταῦθα ὡς ἐκ τούτων τῶν μετάλλων τὸ μὲν τιμιώτερον ὑπερέχει τὸ ζητούμενον (ἤτοι τὸ μέσον ἐκτίμημα 10) μιᾷ οὐγγίᾳ ἀργυρίου καθαροῦ, ἐκ δὲ τοῦ κιβδηλοτέρου ἐλλείπει τοῦ ζητουμένου ἡμιουγγίᾳ· ταύτῃ τοι καὶ συμμικτέον οὕτω τὰ μέταλλα, ὡς εἶναι τὸ τιμιώτερον πρὸς τὸ ἀγενέστερον ἐν τῇ μίξει κατὰ λόγον ὑποδιπλασίονα. Ὥστε τὸ τιμιώτερον μέταλλον πρῶτον γραπτέον, καὶ τούτου ἀντικρὺ προσημειωτέον τὴν τοῦ χείρονος πρὸς τὸ μέσον διαφοράν. Εἶτα συνάψαντι τὰς διαφορὰς ῥητέον, ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν διαφορῶν πρὸς τὴν τοῦ χείρονος διαφορὰν, οὕτως ὁ τῶν πέντε λιτρῶν σταθμὸς τοῦ ζητουμένου σκεύους, πρὸς τὸν τοῦ κρείττονος τῶν μιγνυμένων X· καὶ πάλιν, ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν διαφορῶν, πρὸς τὴν τοῦ κρείττονος διαφορὰν, οὕτως ὁ πεντάλιτρος σταθμὸς, πρὸς τὸν τοῦ χείρονος τῶν μιγνυμένων Φ· ἤτοι·

$$1\tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{2} = 5 : X = 1\tfrac{2}{3}$$
$$1\tfrac{1}{2} : 1 = 5 : \Phi = 3\tfrac{1}{3}$$

Ε'.

Εἴ τις Σινάρων εἴδη τρία πιπράσκων, τὸ μὲν ὀβολῶν 15 κατὰ μέτρον, τὸ δὲ $12\frac{1}{2}$, τὸ δὲ 12· εἶτά τι κράμμα ἐξ αὐτῶν μηχανῷτο τοιοῦτον, οἷον ὀβολῶν 10 πωλῆσαι· Πόσον ἄρα ἐξ ἑκάστου ὀφείλει λαβεῖν, ἐφ' ᾧ μέτρα πληρῶσαι 300;

$$14\begin{cases} 15 & \ldots & 2 \\ 12\frac{1}{2} & \ldots & 1\frac{1}{2} \\ 12 & \ldots & 1 \end{cases}$$

Ἔσται τοίνυν ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν διαφορῶν $4\frac{1}{2}$ πρὸς τὴν τῶν χειρόνων διαφορὰν $2\frac{1}{2}$, οὕτως ὁ τῶν 300 ἀριθμὸς πρὸς τὸν τοῦ κρείττονος τῶν συγκραθησομένων· καὶ αὖθις ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν διαφορῶν πρὸς τὴν τοῦ κρείττονος διαφορὰν $14 - 15 = 1$, οὕτως ὁ τῶν 300 ἀριθμὸς πρὸς τὸν τοῦ χείρονος τῶν συγκραθησομένων· οἷον,

$$4\tfrac{1}{2} : 2\tfrac{1}{2} = 300 : X = 166\tfrac{2}{3}.$$
$$4\tfrac{1}{2} : 1 = 300 : \Phi = 66\tfrac{2}{3}.$$

Ληπτέον ἄρα ἂν εἴη τῷ καπήλῳ εἰς κρᾶσιν, ἐκ μὲν τοῦ 15 ὀβολῶν τιμωμένου $166\frac{2}{3}$, ἐκ δὲ τῶν λοιπῶν ἑκατέρου $66\frac{2}{3}$, ἤτοι $132\frac{4}{3}$. Ἔστι γὰρ $166\frac{2}{3} + 132\frac{4}{3} = 300$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 666. Ἐπεὶ τοίνυν διὰ τῆς τῶν τριῶν μεθόδου τοῖς δοθεῖσι τρισὶν ἀριθμοῖς ἀνάλογος εὑρίσκεται τέταρτος (§. 643.)· ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος, ἐπιτομῆς χάριν, ἢ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος ἐπὶ τὸν αὐτὸν, εἰ δυνατὸν, ἀριθμὸν ἀκριβῶς διαιρεθήτωσαν (§. 616.), καὶ τὰ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύπτοντα πηλίκα ἐκείνοις ἀντικαθιστάσθωσαν· οἷον ἡ τιμὴ τριῶν λιτρῶν ἐστὶν 9 νομισμάτων, πόση ἔσται ἡ 7 λιτρῶν; Εὑρεθέντος ἤδη τοῦ κοινοῦ τῶν 3 καὶ 9 διαιρέτου 3, ἐκεῖ μὲν πηλίκον δώσει τὴν μονάδα $3 : 3 = 1$, ἐνταῦθα δὲ τὸν τρία $3 : 9 = 3$· εἶθ' οὕτω γενέσθω ἡ τῶν τριῶν μέθοδος, ὡς $1 : 3 = 7 : X = 21$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἡ περὶ τῶν τοιούτων διδασκαλία παντάπασι παραλειφθῆναι ἔδει, οὐδεμίαν τε τούτων μνεία γενέσθαι, ὅτι οὐ πολιτικῆς ὅλως καὶ ἀγοραίου Ἀριθμητικῆς σκοπὸς ἡμῖν ποιήσασθαι ἔκθεσιν, ἀλλὰ μᾶλλον τῆς εἰς τὴν ὁδὸν τῆς Μαθηματικῆς συντεινούσης, καὶ διὰ τοῦτο Στοιχειώδης. Ἔτι δὲ τῶν τοιούτων προβλημάτων καὶ ἄλλων πλείστων παραλειφθέντων, ἡ Ἀναλυτικὴ Μέθοδος τὴν ἐπίλυσιν ἔχει ἰδίαν τὰ μάλιστα, ἣ πάντως ὁ ἐνασχοληθεὶς εἰς δέον, ὁμοίως πᾶν ὅ, τιουν πρόβλημα ἐπιλύσεται, ὡς κἂν τῇ περὶ Ἐξισώσεων πραγματείᾳ ἐξεθέμεθα (§. 633. 634.). Διέλαβε δὲ περὶ τούτων Κλάβιος ἐν τῇ τῆς Πρακτικῆς αὐτοῦ Ἀριθμητικῆς Ἐπιτομῇ (α), καὶ Τακουέτιος (β). Νῦν δὲ τὴν ἐξ οὗ παρετράπημεν ἐπαναληπτέον, ἐπί τε τὰ τῆς Μαθηματικῆς ἐνδόμυχα μεταβητέον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ.

ΠΕΡΙ ΠΡΟΟΔΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 667. Πρόοδος ἐν γένει ἐστὶ σειρά τις ποσοτήτως συνεχῶς Ἀναλόγων.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 668. Πρόοδος Ἀριθμητικὴ ἐστὶ σειρὰ ποσοτήτων κατὰ τὴν αὐτὴν διαφορὰν ἐπιμεγεθυνομένων, ἢ ἐπιμειουμένων· ἤτοι Ἀριθμητικῶς Ἀναλόγων, ἢ συνεχῶς ἰσοδιαφόρων.

(α) Clavius in Epitome Arithm. Pract. C. 21 p. 52.
(β) Taquet in ſua Arithmetica.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 669. Ἡ Ἀριθμητικὴ τοίνυν Πρόοδος οὐδὲν ἄλλο, ὅτι μὴ Ἀναλογία Συνεχὴς Ἀριθμητική ἐστιν (§. 567. 569.)· ἤτοι ὅρων σειρὰ ἢ πλῆθος, καθ' ἣν τῶν ἡγουμένων ἕκαστος τοῦ ἀμέσως ἐφεπομένου ἐπίσης διαφέρων ἐστίν, ὅτε πλείους δυοῖν ἴσων λόγων συνεχῶς καταγράφονται. οἷον·

$1 .\ 2 .\ 3 .\ 4 .\ 5 .\ 6 .\ 7 .\ \ldots\ \ldots\ x,$

$2 .\ 5 .\ 8 .\ 11 .\ 14 .\ 17 .\ 20\ \ldots\ \ldots\ x$

$\alpha .\ (\alpha+\beta) .\ (\alpha+2\beta) .\ (\alpha+3\beta)\ .\ x$

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 670. Πρόοδος Ἀριθμητικὴ Αὔξουσά ἐστιν, ἧς οἱ ὅροι συνεχῶς κατὰ τὴν αὐτὴν διαφορὰν ἐπαύξουσιν ὡς 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15, κτλ. Φθίνουσα δέ, ἧς ἡ ὑπεροχή, ἢ ἡ διαφορὰ συνεχῶς ἀεὶ ἐλαττουμένη πρόεισι 21. 18. 15. 12. 9. 6. 3. 1.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐν μὲν τοίνυν τῇ πρώτῃ περιστάσει ἡ διαφορὰ ἐστὶν $= 2$, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ $= -3$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 671. Ὁποιαδηποτοῦν τοίνυν Ἀριθμητικὴ πρόοδος, εἴτ' οὖν αὔξουσα, ἢ φθίνουσα, ἀντιστρόφως τῆς θατέρας πρόεισι μέλεσι περαιτέρω συνεχιζομένη (§. 213.)· καὶ ἐπὶ μὲν τῆς ληγούσης ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς $= 0$, ἐπὶ τοῦ ἐνδεικτοῦ Πίνακος ἐκλαμβάνεται· ὃ δὴ μοναδικόν, καὶ ἀρχὴ ταύτης καθέστηκεν· ἐπὶ δὲ τῆς μεγεθυνομένης ἀρκτικὸν ἡ μονὰς σημεῖον εἴληπται· οἷον

ΕΝΔΕΙΚΤΑΙ, ἢ ΕΡΜΗΝΕΙΣ·

κτλ, -4, -3, -2, -1, -0, $+1$, $+2$, $+3$, $+4$, κτλ.

ΜΕΛΗ

κτλ. -7, -3, $+1$, $+5$, $+9$, $+13$, $+17$, $+21$, $+24$ κτλ.

κτλ. $+9$, $+5$, $+1$, -3, -7, -11, -15, -19, -23, κτλ.

Ἐν μὲν οὖν τῇ πρώτῃ τὸ ἀρτικὸν μέλος ἐστὶ $+9$, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ -7· ἡ μὲν δὴ πρώτη ἐστὶν αὔξουσα, ἡ δὲ δευτέρα φθίνουσα ὡς ὑποκαταβᾶσιν εἰρήσεται· ὡσαύτως

$\alpha.(\alpha+\beta).(\alpha+2\beta).(\alpha+3\beta).(\alpha+4\beta) \;\ldots$

$\alpha.(\alpha-\beta).(\alpha-2\beta).(\alpha-3\beta).(\alpha-4\beta) \;\ldots$

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 672. Ἐν οἱαδηποτοῦν Ἀριθμητικῇ Προόδῳ ἡ αὐτὴ ὑπεροχὴ μεταξὺ δυοῖν ὅρων ἀμέσως συνεφεπομένων ἐσαεὶ ἐνείληπται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ γὰρ τοῦ πρώτου τῶν ὅρων πρὸς τὸν δεύτερον λόγος, ὁ αὐτὸς πάντως ἐστὶ καὶ τοῦ δευτέρου πρὸς τὸν τρίτον, τοῦ τρίτου πρὸς τὸν τέταρτον, τοῦ τετάρτου πρὸς τὸν πέμπτον, κτλ. (§. 669.)· ὁ δὲ λόγος οὐδὲν ἄλλο ἐστὶν ἐνταῦθα, ὅτι μὴ ἡ διαφορὰ ἡ ὑπεροχή· Ἄρα, ἐν οἱαδηποτοῦν κτλ. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 673. Ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ τοίνυν Προόδῳ τῶν ὅρων ἕκαστος ἰσοῦται τῷ πρὸ αὐτοῦ ἀμέσως ἰόντι, προσθέσει ἢ ἐλλείψει τῆς ἐν τῇ Προόδῳ θεωρουμένης διαφορᾶς (§. 475.)· Προσθέσει μὲν, ἡνίκα ἡ Πρόοδος αὔξει. Ἐλλείψει δὲ, ἡνίκα φθίνει.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 674. Τύπον κατὰ γένος ἐκθεῖναι, ἐφ' ὃν πᾶσα Ἀριθμητικὴ Πρόδος ἀνάγεσθαι ἔχοι.

ΛΥΣΙΣ.

Οὔσης μὲν δὴ τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου ὅρων α, β, γ, ε, κτλ, σειρᾶς, ὧν ἑκάστου πρὸς τοὺς ἀμέσως ἑπομένους ἡ αὐτὴ ἐστὶ διαφορὰ (§. 672.), ἐὰν ἡ διαφορὰ κληθῇ δ, ὅ, τε πρῶτος ὅρος α, ἔσται αὐτῷ τούτῳ ὁ δεύτερος $\beta = \alpha \pm \delta$ (§. 475.), τοῦ μὲν θετικοῦ σημείου $+$ ἐπὶ τῆς αὐξούσης, τοῦ δὲ κατ' ἄρσιν $-$ ἐπὶ τῆς φθινούσης λαμβανομένου. Ἐπεὶ δὲ ἡ μεταξὺ τοῦ δευτέρου ὅρου β καὶ τοῦ τρίτου γ ἡ αὐτὴ ἐμπεριείληπται διαφορὰ δ (αὐτ.), φανερὸν ὡς ὁ τρίτος ὅρος $\gamma = \beta \pm \delta$. Ἀλλ' οὖν ἔστι $\beta = \alpha \pm \delta$, ἀντικατασταθείσης ἄρα τῆς τοῦ β δυνάμεως $\alpha \pm \delta$ ἐκκύψει $\gamma = \alpha \pm \delta \pm \delta = \alpha \pm 2\delta$. Αὖθις ἐπεὶ μεταξὺ τοῦ τρίτου ὅρου γ καὶ τοῦ τετάρτου ε, ἡ αὐτὴ θεωρεῖται διαφορὰ $\pm \delta$, ἔσται $\varepsilon = \gamma \pm \delta$; ἔστι δὲ $\gamma = \alpha \pm 2\delta$· τοίνυν διὰ τῆς τῶν ἴσων ἀνθυποκαταστάσεως ἔσται $\varepsilon = \alpha \pm 2\delta \pm \delta = \alpha \pm 3\delta$· καὶ ἐφεξῆς οὕτως. Ἄρα ἐν γένει, Πρόοδος οἱαποτοῦν Ἀριθμητικὴ ἀναχθείη ἂν ἐπὶ τόνδε τὸν τύπον.

$\div \alpha . \alpha \pm \delta . \alpha \pm 2\delta . \alpha \pm 3\delta . \alpha \pm 4\delta . \alpha \pm 5\delta \; . \; . \; . \; . \; . \; \alpha \pm \nu\delta.$

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 675. Διὰ τοῦ ἐν γένει τοίνυν τουτουῒ τύπου, ἥ, τε αὔξουσα καὶ ἡ φθίνουσα τῶν Προόδων παρίσταται (§. 670.). Ἔστι γὰρ ἡ μὲν αὔξουσα.

$\div \alpha . \alpha + \delta . \alpha + 2\delta . \alpha + 3\delta . \alpha + 4\delta \ldots \alpha + \nu\delta,$

ἡ δὲ φθίνουσα·

$\div \alpha . \alpha - \delta . \alpha - 2\delta . \alpha - 3\delta . \alpha - 4\delta \ldots \alpha - \nu\delta.$

Φθίνουσα μέντοι γε οἱασοῦν Πρόοδος καὶ περαιτέρω ἔχοι ἂν ἐκτανθῆναι, ἣν τεθῇ φέρε $\div 16 . 12 . 8 . 4 . 0$, δύναται περαιτέρω οὕτω συνεχισθῆναι (§. 671.)

$\div 16 . 12 . 8 . 4 . 0 . -4 . -8 . -12 . -16 . -\nu.$

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§ 676. Τοῖς τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου ὅροις ἐπιγράφεσθαι εἴωθεν, οἱ τάξει φυσικῇ προϊόντες ἀριθμοί, οἱ καὶ Ἑρμηνεῖς ἢ Ἐνδεῖκται ἀκούοντες, ἐξ ὧν διαγνωρίζεται ποσταῖος τῇ τάξει ἕκαστος τῶν ὅρων τυγχάνει· οἷον.

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & & \mu, \\ \div \alpha . & \alpha \pm \delta . & \alpha \pm 2\delta . & \alpha \pm 3\delta . & \alpha \pm 4\delta . & \alpha \pm 5\delta & \ldots & \alpha \pm \nu\delta. \end{array}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 677. Ἐπὶ τοῦ γενικοῦ δὴ τύπου (§. 674.), οὗ ἑρμηνεῖς μὲν οἱ κατὰ τὴν φυσικὴν χύσιν προϊόντες ἀριθμοὶ (§. 676.), διαφορὰ δὲ ἡ ἐπὶ μὲν τῆς αὐξούσης θετικά, ἐπὶ δὲ τῆς φθινούσης ἀποφατικὰ ἐκδηλοῦσα μεγέθη δ (§. 674.)· οἷον

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \; . \; . \; . \; . & \mu \\ \alpha . & \alpha \pm \delta . & \alpha \pm 2\delta . & \alpha \pm 3\delta . & \alpha \pm 4\delta + \; . \; . \; . & \chi . \\ & \delta, & \delta, & \delta, & \delta, & \end{array}$$

Ἐὰν τεθῇ $\alpha = 1$ καὶ $\delta = 3$, ἔσται αὔξουσα πρόοδος (§. 673.) ἡ

$1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 \; . \; . \; . \; . \; . \; \chi.$

Ἐὰν δὲ τεθῇ $\alpha = 12$ καὶ $\delta = -2$, ἔσται φθίνουσα (αὐτ.) ἡ

$12 . 10 . 8 . 6 . 4 \; . \; . \; . \; . \; . \; \chi$

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 678. Ἐὰν οὖν καθόλου ἐφ' οἱασδηποτοῦν Προόδου οἱ ὅροι ληφθῶσιν $= \nu$, οὕτως ὥστε ἐπὶ μὲν τοῦ πρώτου εἶναι $\nu = 1$, ἐπὶ δὲ τοῦ δευτέρου $\nu = 2$, ἐπὶ τοῦ τρίτου $\nu = 3$, κτλ. κληθήσεται ὁ τῆς προόδου ὅρος ν ἤτοι νιστέος· οἷον ἐπὶ τῆς προόδου 2, 5, 8, 11, 14, κτλ. ὁ καθόλου ὅρος ἐστὶν $= (3\nu - 1)$· ἤτοι ἐπὶ τοῦ τρίτου ὅρου 8, ἐὰν τεθῇ $\nu = 3$, ἔσται $3 . 3 - 1 = 9 - 1 = 8$· καὶ ἐφεξῆς. Ἔνθεν τοι τιθεμένων ὑπαλλήλως $\nu = 1$, $\nu = 2$, $\nu = 3$, $\nu = 4$, κτλ. Ἐκκύψει οὕτως ὁ πρῶτος, δεύτερος, τρίτος, τέταρτος κτλ. τῆς αὐξούσης προόδου ὅρος· διὸ καὶ ἐν ταῖς ἐφεξῆς ἔσονται οἱ ν ὅροι, οὕτως·

Α'.	5 . 10 . 15 . 20 . 25 . - - - -	5ν
Β'.	4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 - - - -	$3\nu + 1$
Γ'.	1 . 4 . 9 . 16 . 25 . - - - -	ν^2
Δ'.	1 . 3 . 6 . 10 . 15 . 21 - - - -	$\frac{\nu^2 + \nu}{2}$
Ε'.	3 . 6 . 12 . 24 . 48 - - - -	$3 . 2^{\nu - 1}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 679. Ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ, ἁπασοῦν ὅρος σύγκειται ἐκ τοῦ πρώτου ὅρου, προσθέσει ἢ ἐλλείψει τῆς ὑπεροχῆς, πολλαπλασιαζομένης ἐπὶ τὸν τῶν προλαβόντων ὅρων ἀριθμόν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ μὲν δὴ

$$\alpha .\ \alpha \pm \delta .\ \alpha \pm 2\delta .\ \alpha \pm 3\delta .\ \alpha \pm 4\delta \ \ldots \ \alpha \pm \nu\delta .$$

ἔσται οἱοσδηποτοῦν ὅρος, οἷον ὁ πέμπτος $\alpha \pm 4\delta$, συγκείμενος σαφέστατα ἐκ τοῦ πρώτου ὅρου α, προσθέσει ἢ ἐλλείψει τῆς διαφορᾶς δ, ἀχθείσης ἐπὶ τὸν τοὺς πρὸ τοῦ πέμπτου προλαβόντας τέσσαρας ὅρους δηλοῦντα ἀριθμὸν 4.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 680. Ἐξ ὧν ἕπεται, ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ οἱονδήτινα ὅρον εὐχερῶς εὑρίσκειν, ἐὰν ἐν γένει ὁ πρῶτος ὅρος τεθῇ $= \alpha$, ἡ κοινὴ τῶν ὅρων διαφορὰ $= \delta$, καὶ ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς $= \nu$. Τοῦ γὰρ αἰτουμένου ὅρου χ ὡς ἐσχάτου τῆς προόδου θεωρουμένου, ἔσται ὁ τῶν τὸν αἰτούμενον χ προλαβόντων τῶν ὅρων ἀριθμὸς $= \nu - 1$· ἐξ ὧν ὁ αἰτούμενος ὅρος διὰ τοῦ ἐφεξῆς ἐκτεθήσεται ἐν γένει ἀορίστου τύπου,

$$\chi = \alpha \pm \delta\,(\nu - 1)$$

ἑπομένως ἐν μὲν τῇ αὐξούσῃ προόδῳ ἔσται ὁ αἰτούμενος ἔσχατος ὅρος χ, ὃς κληθήτω $\omega = \alpha + \delta\,(\nu - 1)$, ἐν δὲ τῇ φθινούσῃ $\chi = \omega = \alpha - \delta\,(\nu + 1)$ (§. 671.).
Ἔνθεν τοι τεθέντος τοῦ μὲν πρώτου ὅρου $\alpha = 1$, τῆς

διαφορᾶς $\delta = 2$, καὶ τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ $= 5$, ἔσται ἡ τοῦ ἐσχάτου ὅρου, ἤτοι τοῦ πέμπτου δύναμις, $\omega = \alpha + \delta\nu - \delta$· ὑποτιθεμένης τῆς προόδου αὐξούσης· $\omega = 1 + 10 - 2 = 1 + 8 = 9$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Σῶμά τι τῶν βαρέων ἀπό τινος ὑψηλῆς ῥιφὲν περιωπῆς λεπτῷ δευτέρῳ ὁδὸν καταγράφει $= 2233'''$ Βινδοβονικοῖς, πρὸς δὲ ἑκάστῳ ἐφεξῆς λεπτῷ ἔτι $4466'''$, ἐν διπλασίονι λόγῳ. Θῶμεν δὴ σφαιρίσκον χαλάζης κεκρυσταλλωμένον $8''$ λεπτοῖς, νεφῆθεν εἰς γῆν πεσεῖν. Ποσταίαν ἄρα ὁδὸν ἐν τῷ ἐσχάτῳ δευτέρῳ λεπτῷ, ἤτοι τῷ ὀγδόῳ, καταγράψειεν;

Ἡ μὲν οὖν κατὰ τὸ ἔσχατον δεύτερον λεπτὸν καταγραφεῖσα ὁδὸς ὁ αἰτούμενος ἐστὶν ὅρος χ, ἤτοι ὁ ἔσχατος ω (§. 680.)· ἡ δὲ κατὰ τὸ πρῶτον δεύτερον λεπτὸν $= \alpha = 2233'''$ Βινδοβονικοῖς, ἡ δοθεῖσα διαφορὰ $= \delta = 4466'''$, ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς $= \nu = 8''$. Ἐπεὶ τοίνυν ἐνταῦθα οἱ ὅροι κατὰ συνέχειαν αὔξουσιν, δῆλον τὴν πρόοδον τῶν αὐξουσῶν εἶναι. ἔνθεν τοι·

$$\underbrace{\omega = \alpha + \delta\,(\nu - 1)}$$
$$\omega = 2233''' + 4466'''\,(8 - 1)$$
$$\omega = 2233''' + 4466''' \times 7$$
$$\omega = 2233''' + 31262''' = 33495'''$$
$$\omega = 38^{\circ},\ 4',\ 7'',\ 3'''.$$

Ἐὰν δὲ οἱ ὅροι κατὰ συνέχειαν φθίνουσιν, ἔσται ὁ ὅρος $\alpha = 33495'''$, κἀντεῦθεν τῶν λοιπῶν ὡς ἔχουσι μενόντων, ὁ τύπος χώραν ἕξει ὡς ἐφεξῆς.

$$\omega = \alpha - \delta\,(\nu + 1)$$
$$\omega = 33495''' - 4466'''\,(8 + 1)$$
$$\omega = 33495''' - 35728''' + 4466$$
$$\omega = 27961''' - 35728''' = 2233'''$$

τῷ τῆς αὐξούσης πρώτῳ ὅρῳ α ἴσον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 681. Ἐπὶ τοῦ ἐν γένει τοίνυν τύπου (§. 687.),

$$\chi = \alpha + (\nu - 1)\delta$$

ὁ οἱασδηποτοῦν προόδου τὴν αὐτὴν ἐχούσης διαφορὰν νιστέος ὅρος, ἤτοι ὁ χ (§. 685.) ληφθήσεται, ἐὰν τῷ πρώτῳ ὅρῳ α, ἡ διὰ τοῦ τῶν προλαβόντων ὅρων $(\nu - 1)$ πολλαπλασιαζομένη διαφορὰ προστεθῇ· οἷον ἐπὶ τῆς τῶν Φυσικῶν ἀριθμῶν σειρᾶς 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . μ, ἔστιν ὁ νιστέος ὅρος $= 1 + 1\,(\nu - 1) = \nu$, ὡς ὄντος τοῦ μὲν $\alpha = 1$, τῆς δὲ $\delta = 1$. Ἀλλ' οὖν ὁ τῶν περισσαρίθμων Φυσικῶν ἀριθμῶν 1, 3, 5, 7, 9, 11, . . μ, νιστέος ὅρος $\chi = 1 + 2\,(\nu - 1) = 2\nu - 1$· ἔστι καὶ γὰρ $\alpha = 1$, $\delta = 2$. Ὁ δὲ τῶν ἀρτιαρίθμων Φυσικῶν ἀριθμῶν 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, . . . μ, ὁ ν ὅρος ἐστὶ $\chi = 0 + 2\,(\nu - 1) = 2\nu - 2$, ἐπεὶ $\alpha = 0$, $\delta = 2$· ὡσαύτως κἀν τῇ ἀνωτέρω (§. 684.) ἐκτεθείσῃ Φθινούσῃ προόδῳ 12, 10, 8, 6 . . . μ, ἐστὶν ὁ χ ὅρος $\nu = 12 - 2\,(\nu - 1) = 14 - 2\nu$· ὡς ὄντος τοῦ μὲν $\alpha = 12$, τῆς δὲ $\delta = -2$. Ἐξ ὧν τὸ ἐφεξῆς ἀναφύεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 682. Διανεῖμαι 600 χρυσοὺς ἐν τέσσαρ-

σιν ἀνδράσιν οὕτως, ὥστε τὰ τούτων ἐκ διαδοχῆς μέρη Πρόοδον ἀποτελεῖν Ἀριθμητικήν, ἧς ἡ διαφορὰ = 4.

ΛΥΣΙΣ.

Τιθεμένου τοῦ πρώτου, ἤτοι τοῦ ἐλάσσονος μεριδίου $= \chi$, ἔσται τὸ δεύτερον $= \chi + 4$, τὸ τρίτον $= \chi + 4 + 4 = \chi + 8$, τὸ τέταρτον $= \chi + 8 + 4 = \chi + 12$. Συναπτομένων τοίνυν τῶν τεσσάρων μορίων ἐν ἑνὶ ὅλῳ, ἔσται τὸ τούτων ἄθροισμα $\chi + \chi + \chi + \chi + 4 + 8 + 12$, ἤτοι $4\chi + 24$. Τουτὶ τοίνυν τὸ ἄθροισμα ἐξισοῦσθαι δέον τοῖς 600 χρυσοῖς· κἀντεῦθεν ἔσται ἡ ἐφεξῆς ἐξίσωσις.

$$4\chi + 24 = 600$$
$$4\chi = 600 - 24$$
$$\chi = \tfrac{576}{4} = 144.$$

τὸ τοῦ πρώτου τοίνυν μέρος $= 144$ χρ., τὸ τοῦ δευτέρου $= 148$, τὸ τοῦ τρίτου $= 152$, καὶ τὸ τοῦ τετάρτου $= 156$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 683. Ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ τὸν πρῶτον ὅρον εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπεὶ ἐν τῷ ἀνωτέρω ἐκτεθέντι τῆς αὐξούσης προόδου τύπῳ, πρὸς τὴν τοῦ ἐσχάτου ὅρου εὕρεσιν ἦν $\omega = \alpha + \delta\,(\nu - 1)$. Εὔδηλόν ἐστι πρὸς τὴν τοῦ πρώτου, οἱονεὶ ἀορίστου, ἀνίχνευσιν, δίδοσθαι μὲν τὴν διαφορὰν δ, τόν τε ἔσχατον ὅρον ω, καὶ τὸν τῶν ὅρων ἀριθμὸν ν· ἄρα ὁ τύπος $\omega = \alpha + \delta\,(\nu - 1)$, ἐπὶ τὸν ἐφεξῆς μετενεχθήσεται, πρὸς τὴν τοῦ α εὕρεσιν·

$$\alpha = \omega - \delta\,(\nu + 1).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'.

Γλαῦκος ὡρισμένην χρημάτων ποσότητα ἐν τῇ Δημοσίᾳ Λαχέσει οὕτως ὀκτωκαιδεκάκις ἐνέβαλεν, ὡς τὸ τεθὲν ἐν πρώτοις κεφάλαιον 8 δραχμαῖς 140 ἐσαεὶ αὔξειν. Ἡ ἐσχάτως ἀλλ' οὖν καταβληθεῖσα ὑπ' αὐτοῦ ποσότης ἦν 140 δραχμῶν· Πόσην ἄρα πρώτως κατέβαλε;

Ἐνταῦθα δίδοται ὁ ἔσχατος ὅρος $\omega = 140$, ἡ, τε διαφορὰ $\delta = 8$, καὶ ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς $\nu = 18$. Ὅθεν·

$$\underbrace{\alpha = \omega - \delta\nu + \delta}$$
$$\alpha = 140 - 8 \times 18 + 8$$
$$\alpha = 148 - 144 = 4.$$

Β'.

Δυνάστης τις τὴν τῶν ἑαυτοῦ ὑπαρχόντων περιουσίαν ἐν δεκαετεῖ διαστήματι οὕτω βελτιῶσαι ἐπειράσατο, ὡς ἑκάστῳ ἔτει ἐξ ἐκείνων 1500 θαλήρους κέρδος ἀπολαμβάνειν· τῷ ἐσχάτῳ τοίνυν τῆς ἐκείνων βελτιώσεως ἔτει ἔγνω ἑαυτὸν 16500 θαλήρους καρπώσασθαι· Πόσον τῷ πρώτῳ ἀπέλαβεν ἔτει;

$$\underbrace{\alpha = \omega - \delta\,(\nu + 1)}$$
$$\alpha = 16500 - 1500\,(10 + 1)$$
$$\alpha = 18000 - 15000 = 3000.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 684. Ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ, ἡ μεταξὺ τῶν ὅρων θεωρουμένη διαφορὰ, ἰσοῦται τῇ τοῦ πρώτου πρὸς τὸν ἔσχατον ὑπεροχῇ, διαιρουμένῃ διὰ τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ μονάδι ἐλλείποντος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & & & \mu \\ \div\,\alpha\,. & \alpha \pm \delta\,. & \alpha \pm 2\delta\,. & \alpha \pm 3\delta\,. & \alpha \pm 4\delta & \ldots & & \alpha \pm \nu\delta \end{array}$$

ληφθείσης, ἐὰν ὁ πρῶτος ὅρος ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου ἀφαιρεθῇ, ἡ διαφορὰ ἔσται 4δ· διαιρεθείσης δὴ τῆς διαφορᾶς διὰ τοῦ 4, ἤτοι διὰ τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ 5 μονάδι ἐλλείποντος $5 - 1 = 4$, τὸ πηλίκον ἔσται ἡ κοινὴ διαφορὰ δ· ἄρα, κτλ. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 685. Ἐὰν τοίνυν, ὁ μὲν πρῶτος ὅρος κληθῇ α, ὁ δ' ἔσχατος ω, ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ν, ἔσται ὁ τῆς κοινῆς τῆς Προόδου διαφορᾶς τύπος $\delta = \frac{\omega - \alpha}{\nu - 1}$ ἐπὶ τῆς αὐξούσης προόδου, ἐπὶ δὲ τῆς φθινούσης $\delta = \frac{\alpha - \omega}{\nu - 1}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 686. Διὰ τοῦ ἐν γένει τοίνυν τύπου $\delta = \frac{\omega - \alpha}{\nu - 1}$ μεταξὺ δυοῖν δοθέντων μεγεθῶν ω καὶ α τοσούτους μέσους Ἀριθμητικῶς ἀναλόγους (§. 568.), ὅσους βουλητὸν ἄν τινι εἴη, εὑρεῖν ἔξεστιν, ἐὰν τῆς διαφορᾶς εὑρεθείσης, αὕτη τῷ ἐφεξῆς ἀμέσως ἑπομένῳ προστεθῇ ὅρῳ, κατὰ συνέχειαν. Οἷον τεθέντος $\alpha = 1$, $\omega = 25$, $\nu = 9$, ἔσται

$$\delta = \frac{25-1}{9-1} = \frac{24}{8} = 3$$

Ἔνθεντοι ὁ πρῶτος μέσος Ἀριθμητικῶς ἀνάλογος ὅρος ἔσται $1+3=4$, ὁ δεύτερος $4+3=7$, ὁ τρίτος $7+3=10$, κτλ. Κἀντεῦθεν ἡ μέσους Ἀριθμητικῶς ἀναλόγους συνέχουσα ὅρους Πρόοδος, οὕτως ἐκκείσεται

$$\div 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 687. Ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ τὴν διαφορὰν εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Τοῦ ἀνωτέρω τύπου (§. 680.) καλῶς ἀναπεμπαζομένου, φανερόν ἐστι τῆς διαφορᾶς αἰτουμένης, δίδοσθαι μὲν τὸν ἔσχατον ὅρον ω, δίδοσθαι δὲ τὸν πρῶτον α, καὶ τὸν τῶν ὅρων ἀριθμὸν ν, ἐπὶ τῆς αὐξούσης δηλαδὴ Προόδου. Ἔνθεντοι

$$\underbrace{\omega = \alpha + \delta\ (\nu - 1)}$$
$$\omega - \alpha = \delta\ (\nu - 1)$$
$$\frac{\omega - \alpha}{\nu - 1} = \delta\ (§. 685.).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Ἑξαετῇ παιδαρίῳ πρὸς τῆς τῶν βαρέων ἀγωγῆς ἐθισμὸν, δυοῖν λιτρῶν βάρος ἐν πρώτοις ἐπετίθετο βαστάζειν· 25 — ετὲς ἀλλ' οὖν γενόμενον, βάρος 122 λιτρῶν φέρειν ἠδύνατο· πόσον τοίνυν ἐν τῷ μεταξὺ ἐβάσταζε;

Ἐνταῦθα δίδοται μὲν ὁ πρῶτος ὅρος $\alpha = 2$, ὁ

ἔσχατος $\omega = 122$, καὶ ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς $\nu = 25$. Ἔνθεντοι.

$$\underbrace{\delta = \frac{\omega - \alpha}{\nu - 1}}$$

$$\delta = \frac{122-2}{25-1} = \frac{120}{24} = 5.$$

Καὶ γὰρ $25 \times 5 + 25 + 2 = 95 + 27 = 122 = \omega$.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 688. Ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ἰσοῦται τῇ τοῦ πρώτου πρὸς τὸν ἔσχατον ὑπεροχῇ, διαιρουμένῃ διὰ τῆς κοινῆς διαφορᾶς προσθέσει μονάδος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου

$$\begin{array}{llllllll} & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & & \mu \\ \div & \alpha . & \alpha \pm \delta . & \alpha \pm 2\delta . & \alpha \pm 3\delta . & \alpha \pm 4\delta & \ldots & \alpha \pm \nu\delta \end{array}$$

ἐκ πέντε συγκροτουμένης ὅρων, ἐὰν ὁ πρῶτος τῶν ὅρων ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου ἀφαιρεθῇ ἔσται ἡ ὑπεροχὴ $= 4\delta$, ἥτις διὰ τῆς κοινῆς διαφορᾶς δ διαιρουμένη, δώσει πηλίκον 4. Τουτωῒ δὴ τῷ πηλίκῳ προστιθεμένη μονὰς τὸν τῶν ὅρων ἀναδώσει ἀριθμὸν, ἤτοι $4+1=5$. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 689. Τεθέντος τοίνυν τοῦ μὲν πρώτου ὅρου $= \alpha$, τοῦ δὲ ἐσχάτου $= \omega$, καὶ τῆς διαφορᾶς $= \delta$, ἔσται ὁ τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ τύπος $\nu = \frac{\omega - \alpha}{\delta} + 1$ ἐπὶ τῆς αὐξούσης Προόδου, ἐπὶ δὲ τῆς ληγούσης $\nu = \frac{\alpha - \omega}{\delta} + 1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 690. *Ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ τὸν τῶν ὅρων εὑρεῖν ἀριθμόν.*

ΛΥΣΙΣ.

Τοῦ αὐτοῦ τηρουμένου τύπου $\omega = \alpha + \delta\,(\nu - 1)$ (§. 680.), εὔδηλόν ἐστιν ἐπὶ τῇ εὑρέσει τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ δίδοσθαι τὸν πρῶτον ὅρον α, τὸν ἔσχατον ω, καὶ τὴν τῶν ὅρων διαφορὰν δ· ὅθεν·

$$\omega = \alpha + \delta\,(\nu - 1)$$
$$\delta\,(\nu - 1) = \omega - \alpha$$
$$\nu - 1 = \frac{\omega - \alpha}{\delta}$$
$$\nu = \frac{\omega - \alpha}{\delta} + 1 \quad (\text{§. 696.})$$
$$\text{Ἢ,}\quad \nu = \frac{\omega - \alpha + \delta}{\delta}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'.

Τῶν Φιλοπόνων τις πρὸς μείζονα τοῦ αὐτοῦ μνημονικοῦ ἐξάσκησιν, ἔγνω ὁσημέραι λέξεις τινὰς ἀπὸ μνήμης ἀποδιδόναι (ἀποστηθίζειν) οὕτως, ὡς ἐν μὲν τῇ πρώτῃ ἡμέρᾳ μίαν μόνον λέξιν τῇ μνήμῃ ἀποταμιεύοντα μανθάνειν, ἑκάστῃ δὲ τῶν λοιπῶν ἡμερῶν 2 προστιθέναι. Ἔτυχε δ' ἐν μιᾷ τῶν ἡμερῶν 181 λέξεις ἀπὸ μνήμης ἀπαγγεῖλαι. Ποσταῖα ἄρα ἦν ἐκείνη;

Ἐνταῦθα ζητεῖται ὁ τῶν ὅρων, ἤτοι τῶν ἡμερῶν ἀριθμὸς ν, δίδονται γὰρ ὁ ἔσχατος $\omega = 181$, ὅ, τε πρῶτος $\alpha = 1$, καὶ ἡ διαφορὰ $\delta = 2$. Ἐνθέντοι

$$\nu = \frac{\omega - \alpha}{\delta} + 1$$
$$\nu = \frac{181 - 1}{2} + 1 = 90 + 1 = 91 \text{ ἡμέρ.}$$

Β'.

Ἔν τινι Κωμοπόλει στρατιωτῶν ἀριθμὸς ἐν τοῖς γειτνιάζουσιν οἴκοις οὕτω διετάχθη, ὡς ἐν μὲν τῇ πρώτῃ οἰκίᾳ 2 καταλύσαι, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ, τρίτῃ, καὶ ταῖς λοιπαῖς ἀεὶ δυοῖν πλείους. Ἐν τῷ ἐσχάτῳ τοίνυν τῶν καταλυμάτων ἀπηριθμήνται 31. Ζητεῖται, μέχρι πόσων οἰκιῶν τὰ τούτων παρετάθη καταλύμματα;

$$\underbrace{\nu = \frac{\omega - \alpha}{\delta} + 1}$$
$$\nu = \frac{31 - 2}{2} + 1 = \frac{29}{2} + 1$$
$$\nu = \frac{30}{2} = 15.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 691. *Ἐν πάσῃ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ, τὸ τῶν ἀκροτήτων ἄθροισμα, ἰσοῦται τῷ δυοῖν ὅρων ἀθροίσματι, ἐξίσου τῶν ἀκροτήτων ἀφεστώτων.*

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστι μὲν δὴ ἐπὶ τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & & \mu \\ \div\,\alpha\,. & \alpha\pm\delta\,. & \alpha\pm2\delta\,. & \alpha\pm3\delta\,. & \alpha\pm4\delta\,. & \alpha\pm5\delta & \ldots & \alpha\pm\nu\delta \end{array}$$

τὸ τῶν ἀκροτήτων ἄθροισμα $\alpha + \alpha \pm 5\delta = \alpha \pm 2\delta + \alpha \pm 3\delta$ ἐξίσου τῶν ἄκρων ἀφεστώτων· ἄρα, κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 692. Ἐὰν δὲ ὁ τῶν τῆς Προόδου ὅρων ἀριθμὸς ᾖ περισσάριθμος, τηνικαῦτα τὸ τῶν ἄκρων ἄθροισμα ἰσωθήσεται τῷ τοῦ μέσου ὅρου διπλῷ, ἤτοι ὁ μέσος ὅρος δὶς ἐκληφθήσεται, ὡς ἐπὶ τοῦ Β'. Γ'. κτλ. Παρ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. $\div 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17$

$$\frac{\quad 9 \quad 7 \quad 5 \quad 3}{20 = 20 = 20 = 20}$$

Β' $\div 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21$

$$\frac{21,\ 19,\ 17,\ 15,\ 13,\ 11,\ 9,\ 7,\ 5,\ 3,\ 1}{22,\ 22,\ 22,\ 22,\ 22,\ 22,\ 22,\ 22,\ 22,\ 22,\ 22}$$

Γ'. $\div \alpha \cdot (\alpha + \delta) \cdot (\alpha + 2\delta) \cdot (\alpha + 3\delta) \cdot (\alpha + 4\delta)$

$$\frac{\alpha + 2\delta \quad \alpha + \delta \quad \alpha}{2\alpha + 4\delta = 2\alpha + 4\delta = 2\alpha + 4\delta}$$

Κἀπὶ τῆς φθινούσης ὡσαύτως

Δ'. $\div 19 \cdot 16 \cdot 13 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot$

$$\frac{10 \quad 13 \quad 16 \quad 19}{20 = 20 = 20 = 20}$$

Ε'. $\div \alpha \cdot (\alpha - \delta) \cdot (\alpha - 2\delta) \cdot (\alpha - 3\delta) \cdot (\alpha - 4\delta)$

$$\frac{\alpha - 2\delta \quad \alpha - \delta \quad \alpha}{2\alpha - 4\delta = 2\alpha - 4\delta = 2\alpha - 4\delta}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 693. Τὸ κεφάλαιον τῶν οἱασδηποτοῦν Ἀριθμητικῆς Προόδου ὅρων, ἰσοῦται τῷ Γινομένῳ, ἐκ τοῦ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἡμιαθροίσματος, ἐπὶ τὸν τῶν ὅρων ἀχθέντος ἀριθμόν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐκκειμένης τῆς ἐφεξῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου ἐκ πέντε συγκροτουμένης ὅρων

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots & \mu \\ \div \alpha . & \alpha \pm \delta . & \alpha \pm 2\delta . & \alpha \pm 3\delta . & \alpha \pm 4\delta & \ldots & \alpha \pm \nu\delta \end{array}$$

ἐὰν οἱ ταύτης ὅροι ἐν ἑνὶ συναφθῶσι κεφαλαίῳ, ἐκκύψει τὸ τούτων ἄθροισμα $= 5\alpha \pm 10\delta$· τὸ τοίνυν τῶν ἄκρων κεφάλαιον ἐστὶ $2\alpha \pm 4\delta$, ἐντεῦθεν τὸ τούτων ἡμιάθροισμα $\frac{2\alpha + 4\delta}{2} = \alpha + 2\delta$, οὗ γε ἐπὶ τὸν τῶν ὅρων ἀριθμὸν 5 ἀχθέντος ἔσται $5(\alpha + 2\delta) = 5\alpha + 10\delta$, ἴσον τῷ ἀνωτέρῳ κεφαλαίῳ. Ἔστω δὴ καὶ ἐν ἀριθμοῖς, ληφθέντος τοῦ Α'. Παρ. (§. 699.), $(3 + 17) \times 4 = 80$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 694. Ταυτὸν τοίνυν ἔσται, ἐὰν τὸ τῶν ἄκρων κεφάλαιον ἐπὶ τὸν ἥμισυν τῶν ὅρων ἀχθῇ ἀριθμόν, ἤτοι $(2\alpha \pm 4\delta)\frac{5}{2} = \frac{10 \pm 20\delta}{2} = 5\alpha \pm 10\delta$ (§. 500.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 695. Ἐὰν οὖν ὁ τῶν τῆς Προόδου ὅρων ἀριθμὸς περισσάριθμος ᾖ, ὡς ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος (§. 693.), τὸ κεφάλαιον τῶν ὅρων ληφθήσεται, τοῦ μέσου ὅρου ἐπὶ τὸν τῶν ὅρων ἀριθμὸν πολλαπλασιαζομένου· τηνικαῦτα γὰρ ὁ μέσος ὅρος τῷ τῶν ἄκρων κεφαλαίῳ ἰσοῦται, οἷον $\alpha \pm 2\delta = \frac{2\alpha \pm 4\delta}{2}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Σαφές ἐστιν ὁποιασδηποτοῦν Ἀριθμητικῆς Προόδου τὸ κεφάλαιον εὑρίσκεσθαι τῇ τῶν συντιθέντων ὅρων προσθέσει. Τὸ τῆς πράξεως ἀλλ' οὖν μῆκος, ἡνίκα ἡ Πρόοδος ἐξ ἀπειραρίθμων σύγκειται ὅρων, τὸν ἀνωτέρω ἐκτεθέντα τρόπον, ἐπιτομῆς χάριν ἐννοῆσαι ἠνάγκασεν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 696. Διὰ τοῦ αὐτοῦ, ᾗ καὶ ἀνωτέρω ἐξεθέμεθα τύπου (§. 685.) ἐφ' οἱασδηποτοῦν Ἀριθμητικῆς Προόδου τὸ τῶν ὅρων κεφάλαιον εὑρεθήσεται, ἐὰν ὑπαλλήλως τεθῇ $\nu = 1$, $\nu = 2$, $\nu = 3$, $\nu = 4$, κτλ, ἔσται οὕτως τὸ τοῦ πρώτου, δευτέρου, τρίτου, τετάρτου, κτλ. τῶν ὅρων κεφάλαιον· οἷον ἐπὶ τῆς Προόδου 2, 5, 8, 11, 14 . . . ὁ τοῦ ἀθροίσματος τύπος ἐστὶν $\frac{3\nu^2+\nu}{2}$. ἐὰν δὲ τεθῇ $\nu = 2$, $\nu = 3$, $\nu = 4$, κτλ. ἐκκύψει τὸ τοῦ δευτέρου $2 + 5$ κεφάλαιον, τὸ τοῦ τρίτου $2 + 5 + 8$, κτλ. ἤτοι

$$\left.\begin{array}{l} 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14\ \ldots\ldots \\ 2,\ 7,\ 15,\ 26,\ 40\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \frac{3\nu^2+\nu}{2}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 697. Τὸ κεφάλαιον εὑρεῖν πάντων τῶν τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου ὅρων.

ΛΥΣΙΣ.

Κληθήτω δὴ τὸ τῆς Ἀριθμητικῆς, ὁποιασοῦν, Προόδου κεφάλαιον $\varkappa$, ὁ πρῶτος ὅρος α, ὁ ἔσχατος ω, ὁ δὲ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ν· ἔσται

$$\varkappa = (\alpha + \omega)\,\frac{\nu}{2}.$$

τουτέστι, τὸ τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου κεφάλαιον εὑρίσκεται, ἐὰν τὸ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου τῶν ὅρων ἄθροισμα ἐπὶ τὸν τῶν ὅρων ἥμισυν ἀχθῇ ἀριθμόν (§. 693. 694.).

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐκκείσθωσαν μὲν δὴ Ἀριθμητικῆς Προόδου ὅροι ὁποσοιοῦν $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \ldots + \omega = \varkappa$ ἔσται ἐκ τῶν προλεχθέντων (§. 692.) $\alpha + \omega = \beta + \varepsilon$, $\alpha + \omega = \gamma + \delta$, καὶ τῇ τῶν ἴσων τοῖς ἴσοις ἀνθυποκαταστάσει (§. 110.) ἔσται $\alpha + \omega + \alpha + \omega + \alpha + \omega = \varkappa$, ἤτοι $3(\alpha + \omega) = \varkappa$. Ἀλλ' οὖν $\alpha + \omega$ ἐστὶ τὸ ἔκ τε τοῦ πρώτου καὶ τοῦ ἐσχάτου τῶν ὅρων κεφάλαιον 3 δὲ ὁ ἥμισυς τῶν ὅρων ἀριθμός· Ἄρα

$$\varkappa = \frac{\alpha\nu + \omega\nu}{2} = (\alpha + \omega)\frac{\nu}{2}. \quad \text{Ο. Ε. Δ.}$$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τεθέντος δὴ $\alpha = 1$, $\omega = 11$, $\nu = 6$ εὑρεθήσεται ἀμέσως τὸ τῆς Προόδου κεφάλαιον

$$\varkappa = \frac{\alpha\nu + \omega\nu}{2} = \frac{1.6 + 11.6}{2} = \frac{6+66}{2} = \frac{72}{2} = 36.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 698. Ἐὰν μὲν ἡ Ἀριθμητικὴ Πρόοδος ἐν τῇ τῶν Φυσικῶν ἀριθμῶν σειρᾷ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, κτλ. ἀπὸ μονάδος ἀρχομένη ληφθῇ, ἔσται τηνικαῦτα ὁ ἔσχατος ὅρος $\omega = \nu$, ὅ, τε ἀνωτέρω ἐκτεθεὶς τύπος $\varkappa = \frac{\alpha\nu + \omega\nu}{2}$ ἐκκύψει $\varkappa = \frac{\omega + \omega^2}{2}$, ἢ $\varkappa = \frac{\nu + \nu^2}{2}$. τουτέστι, τὸ τῶν ὅρων κεφάλαιον ἀμέσως εὑρεθήσεται, ἐὰν τὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρου, καὶ τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου ληφθῇ ἡμιάθροισμα, ἢ τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ τῶν ὅρων ἡμιαθροίσματος, καὶ τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου. Ἐὰν δὲ ἡ τῶν Φυσικῶν ἀριθμῶν Πρόοδος ἀπὸ τοῦ μηδενικοῦ ἄρχηται, τηνικαῦτα οὐκ ἔσται $\omega = \nu$, οὔτε μὴν $\varkappa = \frac{\alpha\nu + \omega\nu}{2} = \frac{\nu + \nu^2}{2}$, ἀλλὰ $\varkappa = \frac{\alpha\nu + \omega\nu}{2} = \frac{\omega + \omega^2}{2}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 699. Ἐκ τοῦ ἐσχάτου τοίνυν τουτουῒ Πορίσματος δῆλον καθίσταται, Πρόοδον ὁποιανοῦν ἐν τῇ τῶν Φυσικῶν ἀριθμῶν σειρᾷ ἀπὸ τοῦ μηδενικοῦ ἀρχομένῃ ληφθεῖσαν, εἶναι πάντως τὸ ἥμισυ Προόδου τινὸς ἐνοειδοῦς, οὗτινος τῶν ὅρων ἕκαστος ἴσος ἔσται τῷ τῆς Φυσικῆς Προόδου ἐσχάτῳ ὅρῳ· οἷον ἐκκειμένων ἐφεξῆς δυεῖν Προόδων

$$0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6$$
$$6 . 6 . 6 . 6 . 6 . 6 . 6$$

τὸ μὲν τῶν τῆς πρώτης ὅρων κεφάλαιον ἔσται (§. 706.) $\varkappa = \frac{6+36}{2} = \frac{42}{2} = 21$, τὸ δὲ τῶν τῆς δευτέρας $\varkappa = 6 \times 7 = 42$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 700. Ἐκ τοῦ γενικοῦ Τύπου $\varkappa = (\alpha + \omega)\frac{\nu}{2}$ τὸν πρῶτον εὑρεῖν ὅρον, ἢ τὸν ἔσχατον, ἢ τὸν τῶν ὅρων ἀριθμόν.

ΛΥΣΙΣ.

Εὑρεθήτω μὲν δὴ Α'. ὁ πρῶτος ὅρος α· ἔσται οὖν (§. 697.)

$$\varkappa = (\alpha + \omega)\frac{\nu}{2}$$
$$2\varkappa = (\alpha + \omega)\nu$$
$$\frac{2\varkappa}{\nu} = \alpha + \omega$$
$$\frac{2\varkappa}{\nu} - \omega = \alpha$$
$$\text{Ἄρα } \alpha = \frac{2\varkappa}{\nu} - \omega.$$

Β'. Εὑρεθήτω ὁ ἔσχατος ὅρος ω·

$$\varkappa = (\alpha + \omega)\frac{\nu}{2}$$
$$2\varkappa = (\alpha + \omega)\nu$$
$$\frac{2\varkappa}{\nu} = \alpha + \omega$$
$$\frac{2\varkappa}{\nu} - \alpha = \omega$$
$$\text{Ἄρα } \omega = \frac{2\varkappa}{\nu} - \alpha$$

Γ'. Εὑρεθήτω ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ν.

$$\varkappa = (\alpha + \omega)\frac{\nu}{2}$$
$$2\varkappa = (\alpha + \omega)\nu$$
$$\frac{2\varkappa}{\alpha + \omega} = \nu$$
$$\text{Ἄρα } \nu = \frac{2\varkappa}{\alpha + \omega}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 701. Ἐὰν τοίνυν ἐπὶ τοῦ ἐν γένει τύπου $\varkappa = (\alpha + \omega)\frac{\nu}{2}$ τεθῇ ἀντὶ τοῦ ἐσχάτου ὅρου ω, τὸ τούτου ἰσοδύναμον (§. 680.) $\alpha + \delta(\nu - 1)$, ἔσται τὸ κεφάλαιον

$$\varkappa = \frac{2\alpha\nu + \delta\nu^2 - \delta\nu}{2}, \text{ ἢ } \varkappa = \alpha\nu + \frac{\delta\nu^2 - \delta\nu}{2}.$$

Οὕτω γὰρ ἔκ τε τοῦ πρώτου ὅρου, καὶ τῆς διαφορᾶς, ἔξεστιν ἡμῖν ὑπὲρ ὁποιουοῦν δοθέντος τῶν ὅρων ἀριθμοῦ Ἀριθμητικῆς οἱασοῦν Προόδου, τὸ κεφάλαιον προσδιορίζειν. Οἷον ἐπὶ τῆς τῶν Φυσικῶν ἀριθμῶν Προόδου 1.2.3.4.5.6.7.8.9. κτλ. ὡς ὄντων τοῦ μὲν $α=1$, τῆς δὲ $δ=1$, ἐκκύψει·

$$κ=\frac{2αν+δν^2-δν}{2}=\frac{2ν+ν^2-ν}{2}=\frac{ν^2+ν}{2}=\frac{ν(ν+1)}{2}.$$

Ὡσαύτως, ἐπὶ τῆς τῶν περισσαρίθμων ὅρων Προόδου 1.3.5.7.9.11. κτλ. τὸ τῶν ὅρων ν κεφάλαιον ἔσται

$$κ=\frac{2ν+2ν^2-2ν}{2}=ν^2.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 702. Ἐπὶ τῆς ἐφεξῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου

$$\div 2.5.8.11.14.17.20.23 \;.\;.\;.\; κ$$

ἐὰν τεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος $2=α$, ἡ διαφορὰ $3=δ$, καὶ ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς $8=ν$ ἔσται τὸ ταύτης κεφάλαιον (§. 701.).

$$κ=αν+\frac{δν^2-δν}{2}=2.8+\frac{3.8^2-3.8}{2}=100.$$

Ὁ αὐτὸς τύπος χώραν ἕξει κἂν ἡ Πρόοδος τῶν Φθινουσῶν τύχῃ, πλὴν ὅτι ἐπὶ τὰς τῶν σημείων ἀλληλουχίας $+$ καὶ $-$, προσέχειν ἐπάναγκες, οἷον·

$$κ=αν-\frac{δν^2+δν}{2}.$$

Ὥστε ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περιστάσεων τὸ τῶν ὅρων κεφάλαιον οἱασδηποτοῦν Ἀριθμητικῆς Προόδου ἐξευρίσκεσθαι ἔχειν, εἰ τὰ ἐφεξῆς τρία δεδομένα εἴησαν· ἤτοι, ὁ πρῶτος ὅρος, ἡ διαφορὰ, καὶ ὁ τῶν ὅρων ἀριθμός.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 703. Ἐὰν οὖν ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ τεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος $α=1$, ἡ διαφορὰ $δ=2$, ἔσονται οἱ τῆς Προόδου ὅροι περισσάριθμοι, τὸ δὲ τούτων κεφάλαιον $κ=ν^2$ (§. 701.). Κἀντεῦθεν τὰ τετράγωνα πάντων τῶν ἀριθμῶν ἐξευρίσκεται, ἐὰν οἱ περισσάριθμοι ὅροι 1, 3, 5, 7, 9, 11, κτλ. ἐκ διαδοχῆς ἀλλήλοις ἐπισυναφθῶσιν, οἷον·

$$
\begin{aligned}
1 &= 1^2 = 1.\\
1+3 &= 2^2 = 4.\\
1+3+5 &= 3^2 = 9.\\
1+3+5+7 &= 4^2 = 16.\\
1+3+5+7+9 &= 5^2 = 25.\\
1+3+5+7+9+11 &= 6^2 = 36.\\
1+3+5+7+9+11+13 &= 7^2 = 49. \text{ κτλ.}
\end{aligned}
$$

Ἐὰν δ' ἔν τινι Προόδῳ τύχῃ $α=\frac{δ}{2}$, ἢ ὃ ταυτόν ἐστιν, $2α=δ$, ἔσται τὸ τῆς Προόδου κεφάλαιον

$$κ=\frac{2αν+δν^2-δν}{2}=\frac{2αν+2αν^2-2αν}{2}=αν^2.$$

Ἐὰν δ' ἔτι πόρρω ᾖ $α=ν$, ἔσται τὸ κεφάλαιον

$$κ=\frac{2αν+δν^2-δν}{2}=\frac{2ν^2+2ν^3-2ν^2}{2}=ν^3.$$

Ὥστε, ἐν οἱαδηποτοῦν περιστάσει τὸν ἐν γένει ὑπὲρ τοῦ τῶν ὅρων κεφαλαίου τύπον, κατὰ τὴν τῆς τυχούσης περιστάσεως χρείαν ἐκλαμβάνεσθαι δύνασθαι, εὔδηλον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Διὰ τῶν ἀνωτέρω ἐν γένει ἐκτεθέντων θεμελιωδῶν Τύπων $ω=α+(ν-1)δ$ (§. 680.), καὶ (§. 697.)

$\varkappa = \frac{1}{2}\nu \times (\alpha + \omega)$· ἅ, τι πλεῖστα ἔν τε τῇ Μαθηματικῇ κἀν τῷ κοινῷ βίῳ προκύπτοντα προβλήματα διαλύεσθαι ἔχουσι. Δυεῖν γὰρ μόνων ἐνταῦθα ἐξισώσεων προκειμένων εἰδῶν, οἷς περ πέντε διάφορα μεγέθη ἐμπεριείληπται, οἷον ὁ πρῶτος τῶν ὅρων α, ὁ ἔσχατος ω, ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ν, ἡ διαφορὰ δ, καὶ τὸ κεφάλαιον κ, ἐπάναγκες ἐκ τῶν πέντε τουτωνὶ τὰ τρία, πρὸς τὴν τοῦ προτεθέντος ὁιουδηποτοῦν προβλήματος ἐπίλυσιν δίδοσθαι, δι᾽ ὧν τὰ ἐν ἐρεύνῃ προκείμενα δύω ζητούμενα ἐκ τῆς τοῦ αὐτοῦ ἐπιβάλλοντος, ἤτοι τῆς αὐτῆς δυνάμεως, διπλῆς ἐκθέσεως, θηρᾶν ἔξεστιν. Ἐνθεντοι ἀναλόγως τοῖς τῶν δυοῖν τουτωνὶ τύπων ποικίλοις μετασχηματισμοῖς, καὶ τὰ ἐφεξῆς ἐκκύπτουσι προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 704. Δοθέντων ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ τοῦ πρώτου ὅρου α, τοῦ ἐσχάτου ω, καὶ τῆς διαφορᾶς δ· εὑρεῖν τὸν τῶν ὅρων ἀριθμὸν ν, καὶ τὸ τῆς Προόδου κεφάλαιον κ.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστι μὲν δὴ ἐκ τοῦ πρώτου ἐν γένει τύπου, ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς $\nu = (\omega - \alpha + \delta):\delta$ (§. 690.)· τῇ τῶν ἴσων ἄρα ἀνθυποκαταστάσει ἐπὶ τοῦ δευτέρου τύπου (§. 697.) ἔσται·

$$\varkappa = \frac{\alpha + \omega}{2} \times \frac{\omega - \alpha + \delta}{\delta}$$

$$\varkappa = \frac{\alpha\omega - \alpha^2 + \alpha\delta + \omega^2 - \alpha\omega + \delta\omega}{2\delta}$$

$$\varkappa = \frac{\omega^2 + \alpha\delta + \omega\delta - \alpha^2}{2\delta}$$

$$\varkappa = \frac{(\alpha + \omega)\delta}{2\delta} + \frac{(\omega + \alpha)(\omega - \alpha)}{2\delta}$$

$$\varkappa = \frac{\alpha + \omega}{2} + \frac{(\omega + \alpha)\ (\omega - \alpha)}{2\delta}.$$

Τεθήτω $\alpha = 2$, $\omega = 17$, $\delta = 3$· ἔσται $\nu = (17 - 2 + 3):3 = 18:3 = 6$, καὶ $\varkappa = \frac{1}{2}(2 + 17) + (289 - 4):6 = \frac{19}{2} + \frac{285}{6} = 9\frac{1}{2} + 47\frac{1}{2} = 57$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 705. Ἐὰν τοίνυν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος α, ἡ διαφορὰ δ, καὶ ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ν· ζητεῖται δὲ ὁ ἔσχατος ὅρος ω, καὶ τὸ τῆς Προόδου κεφάλαιον κ, ἔσται $\omega = \alpha + \delta\nu - \delta$ (§. 680.), καὶ $\varkappa = (\alpha\nu + \omega\nu):2$ (§. 697.)· τῇ τῶν ἴσων τοίνυν ἀντεισαγωγῇ ἐκκύψει (§. 701.)·

$$\varkappa = \frac{\alpha\nu + (\alpha + \delta\nu - \delta)\nu}{2}$$

$$\varkappa = \frac{2\alpha\nu + \delta\nu^2 - \delta\nu}{2} = \alpha\nu + \frac{\delta\nu}{2}(\nu - 1).$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 706. Ἐὰν δ᾽ οὖν δοθῇ ὁ ἔσχατος ὅρος ω, ἡ διαφορὰ δ, καὶ τὸ τῆς Προόδου κεφάλαιον κ, ἔσται $\alpha = \omega - \delta\nu + \delta$ (§. 683.)· ἀντικαθισταμένου δὴ ἐπὶ τοῦ ἐν γένει τύπου $\varkappa = \frac{1}{2}(\alpha + \omega)\nu$ τὸ τοῦ α ἰσοδύναμον, ἔσται·

$$\varkappa = \frac{(2\omega - \delta\nu + \delta)\nu}{2} = \omega\nu - \frac{\delta\nu}{2}(\nu - 1).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 707. *Δοθέντων τοῦ πρώτου ὅρου α, τῆς τῶν ὅρων διαφορᾶς δ, καὶ τοῦ τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου κεφαλαίου κ· εὑρεῖν τὸν τῶν ὅρων ἀριθμὸν ν, καὶ τὸν ἔσχατον ὅρον ω.*

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστιν ἐκ τῶν δειχθέντων (§. 700. Β'.) $\omega = (2\kappa - \alpha\nu):\nu$, καὶ $\omega = \alpha + \delta\nu - \delta$ (§. 680.) ἄρα διὰ τῆς τῶν ἴσων ἀντεισαγωγῆς ἕξομεν·

$$\frac{2\kappa - \alpha\nu}{\nu} = \alpha + \delta\nu - \delta$$

$$2\kappa - \alpha\nu = \alpha\nu + \delta\nu^2 - \delta\nu$$

$$\frac{2\kappa}{\delta} = \nu^2 + \frac{(2\alpha - \delta)\nu}{\delta}$$

Ἐὰν οὖν ληφθῇ διὰ τὸ ἁπλούστερον $\frac{2\alpha - \delta}{\delta} = \mu$, ἔσται τῇ τοῦ τετραγώνου πληρώσει (§. 263.)·

$$\nu^2 + \mu\nu + \frac{\mu^2}{4} = \frac{2\kappa}{\delta} + \frac{\mu^2}{4}$$

$$\nu + \frac{\mu}{2} = \sqrt{\left(\frac{\mu^2}{4} + \frac{2\kappa}{\delta}\right)}$$

$$\nu = -\frac{\mu}{2} + \sqrt{\left(\frac{\mu^2}{4} + \frac{2\kappa}{\delta}\right)}.$$

Γενέσθω $\alpha = 2$, $\delta = 3$, $\kappa = 57$· ἔσται $\mu = (4 - 3):3 = \frac{1}{3}$, ἑπομένως $\nu = \sqrt{\left(\frac{1}{36} + \frac{114}{3}\right)} - \frac{1}{6} = \sqrt{\left(\frac{1369}{36}\right)} - \frac{1}{6} = \frac{37}{6} - \frac{1}{6} = \frac{36}{6} = 6$, καὶ $\omega = 2 + 18 - 3 = 2 + 15 = 17$. Ὁ δέγε τύπος καὶ οὕτως ἂν ἐκτεθεῖναι εἶχεν·

$$2\kappa = 2\nu\alpha + \nu^2\delta - \nu\delta$$

$$2\kappa = \nu^2\delta + (2\alpha - \delta)\nu$$

$$\nu = -\frac{2\alpha - \delta}{\delta} \pm \sqrt{\left(\frac{(2\alpha - \delta)^2}{4\delta^2} + \frac{2\kappa}{\delta}\right)}$$

$$\nu = -\frac{2\alpha - \delta}{2\delta} \pm \frac{\sqrt{((2\alpha - \delta)^2 + 8\delta\kappa)}}{2\delta}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 708. Εἰ τοῦ ἐσχάτου τῶν ὅρων ω, τῆς τῶν ὅρων διαφορᾶς δ, καὶ τοῦ κεφαλαίου δοθέντων, ζητοῖτο ὁ πρῶτος α, καὶ ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ν· ἔσται $\alpha = \omega - \delta\nu + \delta$ (§. 683.), καὶ (§. 700. Α'.) $\alpha = (2\kappa - \omega\nu):\nu$· τῇ τῶν ἴσων τοίνυν ἀνθυποκαταστάσει ἔσται

$$\omega - \delta\nu + \delta = \frac{2\kappa - \omega\nu}{\nu}$$

$$\omega\nu - \delta\nu^2 + \delta\nu = 2\kappa - \omega\nu$$

$$\nu^2\delta = \nu\delta + 2\nu\omega - 2\kappa$$

$$\nu^2 = \frac{\delta + 2\omega}{\delta}\nu - \frac{2\kappa}{\delta}$$

$$\nu^2 - \frac{\delta + 2\omega}{2\delta}\nu = -\frac{2\kappa}{\delta}$$

$$\nu = \frac{\delta + 2\omega}{2\delta} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{\delta + 2\omega}{2\delta}\right)^2 - \frac{2\kappa}{\delta}\right)}$$

$$\nu = +\frac{2\omega + \delta}{2\delta} \pm \frac{\sqrt{((2\omega + \delta)^2 - 8\delta\kappa)}}{2\delta}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 709. *Δοθέντων τοῦ πρώτου καὶ τοῦ ἐσχάτου τῶν ὅρων συνάμα τῷ τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου κεφαλαίῳ, εὑρεῖν τὸν τῶν ὅρων ἀριθμὸν καὶ τὴν διαφοράν.*

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστι μὲν δὴ, $\nu = 2\kappa : \alpha + \omega$ (§. 700. Γ'.), καὶ $\nu = (\omega - \alpha + \delta) : \delta$ (§. 690.). Τοίνυν (§. 110.)·

$$\frac{2\kappa}{\alpha + \omega} = \frac{\omega - \alpha + \delta}{\delta}$$

$$2\kappa\delta = \alpha\omega - \alpha^2 + \alpha\delta + \omega^2 - \alpha\omega + \delta\omega$$

$$2\kappa\delta - \alpha\delta - \delta\omega = \omega^2 - \alpha^2$$

$$(2\kappa - \alpha - \omega)\delta = \omega^2 - \alpha^2$$

$$\delta = \frac{\omega^2 - \alpha^2}{2\kappa - \alpha - \omega}.$$

Τεθήτω $\alpha = 2$, $\omega = 17$, $\kappa = 57$· ἔσται $\nu = 114 : 19 = 6$, καὶ $\delta = (17^2 - 2^2) : (114 - 2 - 17 = (289 - 4) : (114 - 19) = 285 : 95 = 3$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 710. Ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ τοίνυν Προόδῳ ἔστιν, ὡς ἡ διαφορὰ τοῦ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου τῶν ὅρων κεφαλαίου ἀπὸ τοῦ διπλοῦ τῆς Προόδου κεφαλαίου, πρὸς τὴν τοῦ πρώτου ὅρου ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου διαφοράν· οὕτω τὸ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου τῶν ὅρων κεφάλαιον, πρὸς τὴν τῆς Προόδου διαφοράν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 711. Ἐὰν τοίνυν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος α, ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ν, καὶ τὸ τῆς Προόδου κεφάλαιον· ζητεῖται δὲ ὁ ἔσχατος ὅρος ω, καὶ ἡ τῶν ὅρων διαφορὰ δ· ἔσται, $\omega = (2\kappa - \alpha\nu) : \nu$ (§. 700. Β'.), καὶ $\omega = \alpha + \delta\nu - \delta$ (§. 680.). τοίνυν (§. 110.)·

$$\frac{2\kappa - \alpha\nu}{\nu} = \alpha + \delta\nu - \delta$$

$$2\kappa - 2\alpha\nu = \delta\nu(\nu - 1)$$

$$\delta = \frac{2\kappa - 2\alpha\nu}{\nu(\nu - 1)}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 712. Πόῤῥω, ἐὰν ὁ ἔσχατος τῶν ὅρων ω δοθῇ, ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ν, καὶ τὸ τῆς Προόδου κεφάλαιον κ· ζητεῖται δὲ ὁ πρῶτος τῶν ὅρων α, καὶ ἡ διαφορὰ δ. ἔσται, $\alpha = (2\kappa - \omega\nu) : \nu$ (§. 700. Α'.), καὶ $\omega = \alpha + \delta(\nu - 1)$ (§. 680.)· ἄρα διὰ τῆς τῶν ἴσων ἀντεισαγωγῆς, ἔσται.

$$\omega = \frac{2\kappa - \omega\nu}{\nu} + \delta(\nu - 1)$$

$$\text{καὶ } \delta = \frac{2\omega\nu - 2\kappa}{\nu(\nu - 1)}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 713. Δοθείσης, τῆς διαφορᾶς δ, συνάμα τῷ τῶν ὅρων ἀριθμῷ ν, καὶ τῷ τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου κεφαλαίῳ κ· εὑρεῖν τὸν πρῶτον τῶν ὅρων α, καὶ τὸν ἔσχατον ω.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπεὶ $\omega = \frac{2\kappa}{\nu} - \alpha$ (§. 700. Β'.), καὶ $\omega = \alpha + \delta\nu - \delta$ (§. 680.)· ἔσται.

$$\frac{2\kappa}{\nu} - \alpha = \alpha + \delta\nu - \delta$$

$$\frac{2\kappa}{\nu} = 2\alpha + \delta\nu - \delta$$

$$\frac{2\kappa}{\nu} - \delta\nu + \delta = 2\alpha$$

$$\frac{\kappa}{\nu} - \frac{\delta\nu}{2} + \frac{\delta}{2} = \alpha$$

$$\text{Ἄρα } \alpha = \frac{\kappa}{\nu} - \frac{\delta}{2}(\nu - 1).$$

Γενέσθω $\nu = 6$, $\delta = 3$, $\varkappa = 57$· ἔσται $\alpha = \frac{57}{6} - \frac{18-3}{2} = \frac{57}{6} - \frac{15}{2} = \frac{19-15}{2} = \frac{4}{2} = 2$· καὶ $\omega = 2 + 18 - 3 = 17$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 714. Δοθέντων τοῦ ἐσχάτου τῶν ὅρων ω, τῆς διαφορᾶς δ, καὶ τοῦ τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου κεφαλαίου $\varkappa$, εὑρεῖν τὸν πρῶτον α, καὶ τὸν τῶν ὅρων ἀριθμὸν ν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστι μὲν γὰρ $\nu = \frac{2\varkappa}{\alpha + \omega}$ (§. 700. Γ′.), καὶ $\nu = \frac{\omega - \alpha + \delta}{\delta}$ (§. 690.)· ἄρα·

$$\frac{2\varkappa}{\alpha+\omega} = \frac{\omega - \alpha + \delta}{\delta}$$

$$2\varkappa\delta = \alpha\omega - \alpha^2 + \alpha\delta + \omega^2 - \alpha\omega + \delta\omega$$

$$\alpha^2 - \alpha\delta = \omega^2 + \delta\omega - 2\varkappa\delta$$

$$\alpha^2 - \alpha\delta + \frac{\delta^2}{4} = \omega^2 + \delta\omega - 2\varkappa\delta + \frac{\delta^2}{4} \text{ (§. 263.)}$$

$$\alpha - \frac{\delta}{2} = \sqrt{\left(\omega^2 + \delta\omega - 2\varkappa\delta + \frac{\delta^2}{4}\right)}$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\delta + \sqrt{}(\omega^2 + \delta\omega - 2\varkappa\delta + \tfrac{1}{4}\delta^2).$$

Ἐὰν οὖν τεθῇ $\frac{1}{2}\delta > \alpha$, διὰ τὸ εἶναι $\frac{1}{2}\delta - \alpha$, ἐκκύψει $\alpha = \frac{1}{2}\delta + \sqrt{}(\omega^2 + \delta\omega - 2\varkappa\delta + \frac{1}{4}\delta^2)$. Γενέσθω δὴ $\omega = 17$, $\delta = 3$, $\varkappa = 57$· ἔσται $\alpha = \frac{3}{2} + \sqrt{}(289 + 51 - 341 + \frac{9}{4}) = \frac{3}{2} + \sqrt{}(\frac{9}{4} - 2) = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$, καὶ $\nu = (17 + 3 - 2) : 3 = \frac{18}{3} = 6$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α′.

§. 715. Ἐὰν δὲ τοῦ πρώτου ὅρου α, τῆς διαφορᾶς δ, καὶ τοῦ τῆς Προόδου κεφαλαίου δοθέντων, ζητῆται ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ν καὶ ὁ ἔσχατος ὅρος ω· ἔσται ἐκ τῶν ῥηθέντων (§. 700. Γ′. καὶ 660.).

$$\frac{2\varkappa}{\alpha+\omega} = \frac{\omega - \alpha + \delta}{\delta}$$

$$2\delta\varkappa = \alpha\omega - \alpha^2 + \alpha\delta + \omega^2 - \alpha\omega + \delta\omega$$

$$\omega^2 + \delta\omega = 2\delta\varkappa + \alpha^2 - \alpha\delta$$

$$\omega^2 + \delta\omega + \frac{\delta^2}{4} = 2\delta\varkappa + \alpha^2 - \alpha\delta + \frac{\delta^2}{4}$$

$$\omega + \tfrac{1}{2}\delta = \sqrt{\left(2\delta\varkappa + \alpha^2 - \alpha\delta + \frac{\delta^2}{4}\right)}$$

$$\omega = -\tfrac{1}{2}\delta + \sqrt{}(2\delta\varkappa + \alpha^2 - \alpha\delta + \tfrac{1}{4}\delta^2).$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Β′.

§. 716. Ἐὰν δ' αὖθις τῆς διαφορᾶς δ, τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ ν, καὶ τοῦ τῆς Προόδου κεφαλαίου $\varkappa$ δοθέντων, ζητῆται ὁ πρῶτος τῶν ὅρων α καὶ ὁ ἔσχατος ω· ἔσται ἐκ τῶν δειχθέντων (§. 700. Α′. καὶ 683.).

$$\frac{2\varkappa - \omega\nu}{\nu} = \omega - \delta\nu + \delta$$

$$2\varkappa - \omega\nu = \omega\nu - \delta\nu^2 + \delta\nu$$

$$2\varkappa + \delta\nu - \delta\nu = 2\omega\nu$$

$$\omega = \frac{\varkappa}{\nu} + \frac{\delta\nu - \delta}{2}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 717. Δοθέντων τοῦ τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου κεφαλαίου $\varkappa$, τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ ν, καὶ τοῦ γινομένου ἐκ τοῦ πρώτου ὅρου α ἐπὶ τὸν ἔσχατον ω, εὑρεῖν ἕκαστον τῶν ὅρων.

ΛΥΣΙΣ.

Τῶν λοιπῶν, ἃ ἔχουσι, μενόντων, ἐὰν τὸ ἐκ τοῦ πρώτου ὅρου ἐπὶ τὸν ἔσχατον ἀχθέντος γινόμενον κληθῇ γ, ἔσται κατὰ τὴν τοῦ Προβλήματος ὑπόθεσιν·

$$\alpha\omega = \gamma, \text{ καὶ } \omega = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Ἔστι δὲ $\omega = (2\varkappa - \alpha\nu):\nu$ (§. 700. Β′.), ἄρα διὰ τῆς ἀνθυποκαταστάσεως ἔσται·

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2\varkappa}{\nu} - \alpha$$

$$\nu\gamma = 2\alpha\varkappa - \nu\alpha^2$$

$$\nu\alpha^2 - 2\alpha\varkappa = -\nu\gamma$$

$$\alpha^2 - \frac{2\alpha\varkappa}{\nu} = -\gamma$$

$$\alpha^2 - \frac{2\alpha\varkappa}{\nu} + \frac{\varkappa^2}{\nu^2} = \frac{\varkappa^2}{\nu^2} - \gamma$$

$$\frac{\varkappa}{\nu} - \alpha = \sqrt{\left(\frac{\varkappa^2}{\nu^2} - \gamma\right)}$$

$$\frac{\varkappa}{\nu} - \sqrt{\left(\frac{\varkappa^2}{\nu^2} - \gamma\right)} = \alpha$$

Ἔστω $\varkappa = 57$, $\nu = 6$, $\gamma = 34$· ἔσται $\alpha = \frac{57}{6} - \sqrt{\left(\frac{3249}{36} - 34\right)} = \frac{57}{6} - \sqrt{\left(\frac{3249 - 1224}{36}\right)} = \frac{57}{6} - \sqrt{\left(\frac{2025}{36}\right)} = \frac{57 - 45}{6} = \frac{12}{6} = 2$· ἄρα $\omega = \frac{34}{2} = 17$.

ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ ΕΦΑΡΜΟΣΙΣ.

Α′.

Χρυσοὺς τις 300 δανεισθεὶς ἐν 12 μησὶν οὕτως ἀπέδωκεν, ὡς ἑκάστῳ μηνὶ πρὸς τὴν τῆς τοῦ παρελθόντος

μηνὸς ὀφειλῆς ἀπότισιν 4 χρυσοὺς πλεῖον καταβάλλειν. Ζητεῖται, πόσον ἐν τῷ πρώτῳ μηνὶ κατέθετο;

Δίδοται μὲν ἐνταῦθα τὸ κεφάλαιον $\varkappa = 300$, ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς $\nu = 12$, καὶ ἡ διαφορὰ $\delta = 4$. Ζητεῖται ὁ πρῶτος ὅρος α· ἔνθεντοι ἔστι (§. 713.).

$$\alpha = \frac{\varkappa}{\nu} - \frac{\delta(\nu - 1)}{2}.$$

$$\alpha = \frac{300}{12} - \frac{4(12-1)}{2} = 25 - 22 = 3.$$

Β′.

Ἡ αὐτὴ ὀφειλὴ 300 χρυσῶν, ἐν 12 μησὶν οὕτως ἀπεδόθη ὡς ἐν μὲν τῷ πρώτῳ μηνὶ 3 χρυσοὺς κατατεθῆναι, ἑκάστῳ δὲ τῶν ἐφεξῆς 4 χρυσοὺς πλείω. Ζητεῖται ἀλλ' οὖν ὁ τῶν χρυσῶν ἀριθμὸς τῶν τῷ ἐσχάτῳ μηνὶ καταβληθέντων.

Ἔστι μὲν δὴ $\varkappa = 300$, $\nu = 12$, $\delta = 4$, καὶ $\alpha = 3$. Ζητεῖται ὁ τῶν ὅρων ἔσχατος ω· τοίνυν ἔσται (§. 680. 700. Β′.)·

$$\omega = \alpha + \delta\nu - \delta.$$

$$\omega = 3 + 48 - 4 = 44 + 3 = 47.$$

$$\omega = \frac{2\varkappa}{\nu} - \alpha = \frac{600}{12} - 3 = 47.$$

Γ′.

Τὸ αὐτὸ χρέος 300 χρυσῶν Ἀγησίλαος κατὰ μῆνα οὕτως ἀπέδοτο, ὡς ἐν μὲν τῷ πρώτῳ μηνὶ 3 χρυσοὺς ἀποτίσαι, ἐν δὲ τοῖς ἐφεξῆς ἑκάστῳ 4 πλείω ἐκείνων. Τῷ ἐσχάτῳ ἀλλ' οὖν μηνὶ 47 κατέβαλε. Πόσων ἄρα μηνῶν ἐν διαστήματι τὸ ὅλον χρέος ἀπέδοτο;

Δίδοται μὲν τὸ κεφάλαιον $\varkappa = 300$, ὅ, τε πρῶτος ὅρος $\alpha = 3$, ὁ ἔσχατος $\omega = 47$. καὶ ἡ διαφορὰ $\delta = 4$, ζητεῖται ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ν. Ἐνθέντοι ἔσται (§. 690. 700. Γ'.).

$$\nu = \frac{\omega - \alpha + \delta}{\delta} = \frac{47 - 3 + 4}{4} = 12.$$

$$\nu = \frac{2\kappa}{\alpha + \omega} = \frac{600}{50} = 12.$$

Δ'.

Ἡ αὐτὴ ὀφειλὴ 300 χρυσῶν ἐν 12 μησὶν, οὕτως ἀπεδόθη· ὡς ἐν μὲν τῷ πρώτῳ 3 χρυσοὺς, ἐν δὲ τῷ ἐσχάτῳ 47 καταβληθῆναι. Πόσον ἀλλ' οὖν ἐν τοῖς μεταξὺ μηνὶ διαφερόντως ἀπεδόθη;

Ἔστι μὲν δὴ $\kappa = 300$, $\nu = 12$, $\alpha = 3$, $\omega = 47$. Ζητεῖται ἡ μεταξὺ τῶν μηνῶν τῆς ἀποτίσεως διαφορὰ δ· τοίνυν (§. 687. 711.).

$$\delta = \frac{\omega - \alpha}{\nu - 1} = \frac{44}{11} = 4.$$

$$\delta = \frac{2\kappa - 2\alpha\nu}{\nu(\nu - 1)} = \frac{528}{132} = 4.$$

Ε'.

Ἀριθμός τις χρυσῶν ὀφειλόμενος ἐν 12 μησὶν οὕτως ἀπεδόθη, ὡς ἐν μὲν τῷ πρώτῳ 3 καταβληθῆναι, ἑκάστῳ δὲ τῶν ἐφεξῆς 4 πλείω, τῷ ἐσχάτῳ ἀλλ' οὖν 47 ἐλογίσθησαν. Ποσταῖος ἄρα ὁ ὅλος ἦν ἀριθμός;

Ἐπεὶ δὴ $\alpha = 3$, $\omega = 47$, $\delta = 4$, $\nu = 12$, ἔστιν (§. 697. 704.)

$$\kappa = (\alpha + \omega)\frac{\nu}{2} = (3 + 47)\frac{12}{2} = 300.$$

$$\kappa = \frac{\alpha + \omega}{2} + \frac{\omega^2 - \alpha^2}{2\delta} = 25 + 275 = 300.$$

Ϛ'.

Μνησίλοχος ἐν τῇ τῶν κύβων πεττείᾳ πρῶτον μὲν ἕνα θάληρον κατέβαλε, δεύτερον δὲ 3, τρίτον 5, εἶτα 7, πέμπτον δὲ 9, καὶ ἐφεξῆς κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Ζητεῖται τοίνυν πόσον ἐν τριακοστῇ καταθέσει καταβαλεῖν δέον, πόσον τε τὸ ὅλον ἦν τῶν πεττευθέντων χρημάτων κεφάλαιον; Ἔσται μὲν τοίνυν πρῶτον (§. 680.)·

$$\omega = \alpha + \delta(\nu - 1) = 59.$$

δεύτερον δὲ (§. 705.)· $\kappa = \alpha\nu + \frac{\delta\nu}{2}(\nu - 1) = 900.$

Ἔστι γὰρ $\alpha = 1$, $\delta = 2$, καὶ $\nu = 30$.

Ζ'.

Δέδεικται ἐν τῇ τῶν Μηχανικῶν Θεωρίᾳ, σῶμά τι τῶν βαρέων ἐλευθέρως πίπτον ἐν μὲν τῷ πρώτῳ δευτέρῳ λεπτῷ ὁδὸν καταγράφειν σχεδὸν 15 ποδῶν ἐν μέτρῳ Παρισιακῷ, ἐν δὲ τῷ ἐφεξῆς δευτέρῳ 30° πλείω, ἤτοι, ÷ 15, 45, 75, 105, κτλ. Θῶμεν δὴ ἕν τῶν τοιούτων σωμάτων ἀπό τινος πύργου, οὗ τὸ ὕψος ποδῶν Παρισ. 960; χαμαὶ κατενεχθῆναι. Ποσταίου ἄρα χρόνου ἐδέησε;

Ἔσται ἐκ τοῦ (§. 707.),

$$\nu = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\delta} + \sqrt{\left(\frac{2\kappa}{\delta} + \frac{\alpha^2}{\delta^2} + \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{\delta}\right)} = 8''.$$

καὶ γὰρ $\alpha = 15$, $\delta = 30$, καὶ $\kappa = 960$. Ἐὰν δὲ, δοθέντος $\nu = 8''$, ζητῆται τὸ τοῦ πύργου ὕψος, ἤτοι τὸ κεφάλαιον τῶν καταγραφέντων ὁδῶν· ἔσται $\kappa = \alpha\nu + \frac{\delta\nu}{2}(\nu - 1) = 960^{\circ}$ (§. 507.), κατὰ τὸ τῶν Παρισίων δηλαδὴ μέτρον.

Η'.

Φρέαρ κατορύξαί τις βουληθεὶς, οὕτω μετὰ τῶν Φρεωρύχων συνέθετο, ὡς ὑπὲρ μὲν τῆς πρώτης ὀργυιᾶς (α) 5 Καισαρικοὺς αὐτοῖς ἀποδοῦναι, ὑπὲρ δὲ τῆς δευτέρας 11, ὑπὲρ τῆς τρίτης 17, καὶ ἐφεξῆς τῷ ἑπομένῳ ἀριθμῷ ἀεὶ 6 προστιθέναι, ὡς τοῦ ἔργου μᾶλλον ἐπιμόχθου προβαίνοντος. Μετὰ δὲ τοὺς Φρεωρυγοὺς κατορύξαι τὸ Φρέαρ, εὑρέθη ἐκεῖνο βάθος ἔχον ὀργυιῶν $2\frac{1}{2}$. Πόσον τοίνυν αὐτοῖς ἀποτίσαι ὀφείλει;

Ἐπεὶ μὲν δὴ ἡ ὑπὲρ τῶν ὀργυιῶν καταβολὴ ἐν συνεχεῖ ἐστὶν Ἀριθμητικῇ Προόδῳ, δέον ὡσαύτως καὶ τὴν ὑπὲρ τῶν ἡμίσεων ὀργυιῶν ἐν συνεχεῖ εἶναι Προόδῳ. Ἔστω τοίνυν ὁ ὑπὲρ τῆς πρώτης ἡμίσεως ὀργυιᾶς μισθὸς $= x$, καὶ ἡ διαφορὰ $= y$, ἥτινος τῇ προσθέσει πλεῖον ἔσται ὑπὲρ τῶν ἑπομένων ἡμίσεων ὀργυιῶν ἀποδοθήσεται, ἢ ὑπὲρ τῶν παραληγόντων· ἔσται οὖν ἡ δευτέρα ἥμισυς ὀργυιὰ $x + y$, ἡ τρίτη $x + 2y$, ἡ τετάρτη $x + 3y$, ἡ πέμπτη $x + 4y$, κτλ. Ἐπεὶ δὲ συνέθεντο ὑπὲρ μὲν τῆς πρώτης ὀργυιᾶς 5 Καισαρικοὺς ἐκείνους λαβεῖν, ὑπὲρ δὲ τῆς δευτέρας, 11· ἔσται $x + (x + y) = 5$, καὶ $(x + 2y) + (x + 3y) = 11$· ἤτοι $2x + y = 5$, καὶ $2x + 5y = 11$. Ἐξ ὧν, κατὰ τὰ ἐν ταῖς ἐξισώσεσι κατασκευασθέντα, ἐκκύψει $x = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$, καὶ $y = \frac{6}{4}$. Λήψονται οὖν οἱ Φρεωρυγοὶ

(α) Εἰδ' ἄμφω τὰς χεῖρας ἐκτείνας, ὡς καὶ τὸ στέρνον αὐταῖς συμμετρεῖν, ὀργυιὰ τὸ μέτρον. Πολυδ. ἐν Ὀνομ. Βιβ. Β'.

$\frac{7}{4} + \frac{13}{4} + \frac{19}{4} + \frac{25}{4} + \frac{31}{4} = \frac{31+7}{4} \cdot \frac{5}{2} = 23\frac{3}{4}$ Καισ. Ταυτὸν ἐκκύψει καὶ διὰ τῆς ἐφαρμόσεως (§. 705.), τεθέντος $\alpha = 5$, $\delta = 6$, καὶ $\nu = 2\frac{1}{2}$· ἤτοι

$$\varkappa = \alpha\nu + \frac{\delta\nu}{2}(\nu - 1) = 23\frac{3}{4}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 718. Ἀριθμοὶ Πολύγωνοι εἰσὶν ἀθροίσματα Ἀριθμητικῶν Προόδων ἀπὸ μονάδος ἀρχομένων. Εἰδικῶς δὲ Τρίγωνοι ἀκούουσιν, ἐὰν ἡ τῶν ἀθροιζομένων ὅρων διαφορὰ ᾖ μονάς· Τετράγωνοι, ἐὰν 2· Πεντάγωνοι, ἐὰν 3· Ἑξάγωνοι, ἐὰν 4· Ἑπτάγωνοι, ἐὰν 5· Ὀκτάγωνοι, ἐὰν 6· κτλ. Ἐν γένει δὲ οἱ τοιοῦτοι Ἐσχηματισμένοι καλεῖσθαι εἰώθασιν·

Πρόοδος Ἀριθμητική	Διαφορά		Ἀριθμοὶ Πολύγωνοι
1 . 2 . 3 . 4 . 5 κτλ.	1.	Τρίγ.	1 . 3 . 6 . 10 . 15 . κτλ.
1 . 3 . 5 . 7 . 9 .	2.	Τετράγ.	1 . 4 . 9 . 16 . 25 . . .
1 . 4 . 7 . 10 . 13 .	3.	Πεντάγ.	1 . 5 . 12 . 22 . 35 . . .
1 . 5 . 9 . 13 . 17 .	4.	Ἑξάγ.	1 . 6 . 15 . 28 . 45 . . .
κτλ. . . .		κτλ.	. . . . .

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 719. Αἱ μέχρι τοῦδε τοίνυν θεωρηθεῖσαι Ἀριθμητικαὶ Πρόοδοι, οὐκ ἂν ἀπεικότως Πρόοδοι ῥηθείησαν Ἀριθμητικαὶ πρωτοβάθμιοι, ὡς τῆς πρώτης τῶν ὅρων διαφορᾶς συνεχοῦς οὔσης καὶ ὁμοίας ἐν ἅπασιν. Ἔνθα δ' οὖν διὰ τῆς ἀμοιβαίας τῶν ὅρων ἀφαιρέσεως, ἡ μὲν ὑπεροχὴ ἀνομοία ἐκκύπτει, οἱ δ' οὕτως προκύπτοντες ὅροι πρόοδον Ἀριθμητικὴν πρωτοβάθμιον ἀναδιδοῦσιν, ἧς ἡ τῶν ὅρων ὑπεροχὴ ὁμοία, ὁ τοιοῦτος τῶν ὅρων στίχος Πρόοδος Ἀριθμητικὴ δευτεροβάθμιος εἰκότως κληθήσεται· οἷον ἐπὶ τῆς τῶν τετραγώνων ἀριθμῶν τάξει Φυσικῇ προϊόντων σειρᾶς 1, 4, 9, 16, 25, 36 . . . ν ἡ μὲν πρώτη τῶν ὅρων διαφορὰ 3, 5, 7, 9, 11 . . . χ, ἥτις οὐδὲν ἀλλό ἐστιν, ὅτι μὴ Πρόοδος Ἀριθμητικὴ πρωτοβάθμιος· ἡ δὲ δευτέρα τῶν ὅρων διαφορὰ ἡ αὐτὴ πᾶσιν, ἤτοι 2.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 720. Ἐξ ὧν δηλοῦται, ἐφ' οἱασδηποτοῦν Ἀριθμητικῆς Προόδου δευτεροβαθμίου τρεῖς ὅρους ἐπάναγκες δίδοσθαι, ἀφ' ᾧ τὴν Πρόοδον συνεχισθῆναι ἔχειν· οἷον δοθέντων τῶν τριῶν πρώτων ὅρων οἱασδηποτοῦν Προόδου, οἷον δὴ τῆς ἐφεξῆς 4, 7, 12, ἔσται ἡ μὲν πρώτη διαφορὰ 3, 5, ἡ δὲ δευτέρα 2, ἑπομένως ἡ ἐκ τῆς πρώτης διαφορᾶς ἀναδιδομένη Πρόοδος 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 . . . ν, ἔσχατον δὲ ἡ προληφθεῖσα Πρόοδος 4, 7, 12, 19, 28, 39 . . . χ, ἐν ὑποθέσει, ὅτι $19 = 12 + 7$, $28 = 19 + 9$, $39 = 28 + 11$, κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 721. Τοὺς Ἐσχηματισμένους τοίνυν ἀριθμοὺς πάντας ἀπὸ τῶν ἀμεταθέτων καὶ ἀεὶ ἑστώτων παράγεσθαι, εὔδηλον· οἷον

Ἀριθμοὶ	Ἑστῶτες	. . . .	1.	1.	1.	1.	1.	κτλ.
	Φυσικοὶ	. . . .	1.	2.	3.	4.	5.	κτλ.
	Τρίγωνοι	. . . .	1.	3.	6.	10.	15.	κτλ.

Ἑκάστη γὰρ τῶν τῇ ἑστηκυίᾳ ἐφεπομένων Προόδων, καὶ μὴν καὶ τῶν τετραγώνων, κτλ. ἐσχημάτισται διὰ τῆς συνεχοῦς τῶν ὅρων τῆς πρὸ αὐτῆς Προόδου προσθέσεως.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 722. Πλευρὰ ἀριθμοῦ Πολυγώνου ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου ὅρων ἀθροιζόμενος ἀριθμός. Γωνιῶν δὲ ἀριθμός ἐστιν, ὁ δεικνύων ὅρος πόσαι Γωνίαι τῷ σχήματι ἔνεισιν· ἐξ οὗ καὶ οἱ Πολύγωνοι, ἐσχηματισμένοι ἀριθμοὶ ἤκουσαν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 723. Ἐν μὲν τοίνυν τοῖς Τριγώνοις ἀριθμοῖς, ὁ τῶν Γωνιῶν ἀριθμός ἐστι 3, ἐν δὲ τοῖς Τετραγώνοις 4, ἐν τοῖς Πενταγώνοις 5, κτλ. Ἑπομένοις τὴν τῶν ἀθροιζομένων ὅρων διαφορὰν, ὁ τῶν γωνιῶν ἀριθμὸς δυσὶν ὑπερέχει μονάσι (§. 718.).

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 724. Τὸ ἐκ τῶν Πολυγώνων ἀριθμῶν συλλεγόμενον ἄθροισμα τῷ αὐτῷ τρόπῳ, ᾧτινι δηλαδὴ οἱ Πολύγωνοι ἐκ τῶν Ἀριθμητικῶν ἀνεφύησαν Προόδων, Ἀριθμοὶ Πυραμίδειοι ἢ Πυραμοειδεῖς πρῶτοι ἀκούουσι. Τὸ δ' ἐκ τῶν Πυραμιδείων πρώτων προκύπτον ἄθροισμα Πυραμίδειοι δεύτεροι, οὕτω καὶ τὸ ἐκ τῶν δευτέρων, Πυραμίδειοι τρίτοι, καὶ ἐφεξῆς ἐπ' ἄπειρον. Εἰδικῶς δὲ Πυραμοειδεῖς Τρίγωνοι πρῶτοι καλοῦνται, εἰ ἀπὸ τῶν Πενταγώνων τὴν ἀρχὴν ἔχουσιν, καὶ ἐφεξῆς οὕτω.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 725. Ἔσονται τοίνυν ἐπὶ τοῦ ἐφεξῆς Πίνακος, οἱ μὲν Πυραμοειδεῖς Τρίγωνοι ἀριθμοὶ, τὸ ἐκ τῶν Τριγώνων προκύπτον συμποσούμενον, οἱ δὲ Τετράγωνοι Πυραμοειδεῖς, τὸ ἐκ τῶν Τετραγώνων, ὡς καὶ οἱ Πεντάγωνοι Πυραμοειδεῖς τὸ ἐκ τῶν Πενταγώνων· καὶ οἱ λοιποὶ ὡσαύτως.

Ἀριθμοί	Ἑσταῖτες	1. 1.	1.	1.	1.	1	κτλ.
	Φυσικοί	1. 2.	3.	4.	5.	6	. .
	Τρίγωνοι	1. 3.	6.	10.	15.	21	. .
	Πυραμ. Τρίγ.	1. 4.	10.	20.	35.	56	. .
	Πρόοδ. Ἀριθμ.	1. 3.	5.	7.	9.	11	. .
	Τετράγωνοι.	1. 4.	9.	16.	25.	36	. .
	Πυραμ. Τετράγ.	1. 5.	14.	30.	55.	91	. .
	Πρόοδ. Ἀριθ.	1. 4.	7.	10.	13.	16	. .
	Πεντάγωνοι.	1. 5.	12.	22.	35.	51	. .
	Πυραμ. Πεντάγ.	1. 6.	18.	40.	75.	126	. .
	Πρόοδ. Ἀριθ.	1. 5.	9.	13.	17.	21	. .
	Ἑξάγωνοι.	1. 6.	15.	28.	45.	66	. .
	Πυραμ. Ἑξάγ.	1. 7.	22.	50.	95.	161	. .
	κτλ.						κτλ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὰ τῶν Ἐσχηματισμένων ἀριθμῶν ὀνόματα ἀπὸ τῆς Γεωμετρίας τοῖς ἀριθμοῖς προσῳκείωται. Ἐσχηματισμένοι καὶ γὰρ ἤκουσαν, ὡς τὸν ἐν σχήματι οἱῳδηποτοῦν ἐμπεριεχόμενον τῶν σημείων ἐμφαίνοντες ἀριθμόν. Ἔστω γὰρ Τρίγωνόν τι, ὃ δὴ θῶμεν εἶναι ἰσόπλευρον. Διῃρήσθω δὴ τουτὶ τὸ Τρίγωνον κατὰ κορυφὴν διὰ γραμμῶν Παραλλήλων τῇ Βάσει, ἐξίσου ἀλλήλων ἀφισταμένων. Τούτων τεθέντων, σημειούσθω ἡ, τε τοῦ Τριγώνου κορυφὴ καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν Παραλλήλων ἀκρότης σημείοις, ἤτοι τῇ μὲν κορυφῇ ἓν μό-

Πιν. Γ'.

νον ἐπισημειούσθω σημεῖον, ἑκατέρᾳ δὲ τῶν ἀκροτήτων ἀνὰ ἓν ὡσαύτως· ἡ δευτέρα τοίνυν Παράλληλος, οὗ τὸ μῆκος τοῦ τῆς πρώτης διπλάσιον, περιέξει τρία σημεῖα, ἐν τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ἐξίσου ἀλλήλων τοῖς προλαβοῦσι τῶν δυεῖν ἀκροτήτων δυσὶ σημείοις ἀφιστάμενα· ἡ τρίτη Παράλληλος περιέξει τέσσαρα· ἡ τετάρτη, πέντε· κτλ. Οὕτως τε ὁ τῶν σημείων ἑκάστῃ Παραλλήλῳ ἐμπεριληφθησομένων ἀριθμὸς ἔσται ἐν Προόδῳ $+$ 1. 2. 3. 4. 5. κτλ. Κἀντεῦθεν ἔπεστι συνορᾷν, τὸ μὲν τὴν πρώτην τῶν Παραλλήλων ἀντὶ βάσεως ἔχον πρῶτον τρίγωνον περιέχειν $1 + 2$ ἤτοι 3 σημεῖα, τὸ δὲ τὴν δευτέραν τῶν Παραλλήλων ἀντὶ βάσεως ἔχον δεύτερον τρίγωνον $1 + 2 + 3$ ἤτοι 6 σημεῖα, τὸ τὴν τρίτην $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, κτλ. ἐξ ὧν τῶν Τριγώνων ἀριθμῶν τοὔνομα παραχθῆναι εὔδηλον. Οἱ δὲ λοιποί, Πολύγωνοι ἀριθμοὶ τῆς τοιαύτης εἰλήχασι κλήσεως, ἐπεὶ ἑκάστῳ ἔνεστι τόσα τῶν σημείων πρὸς Πολύγωνον σχηματίσαι, ὅσων ἐκεῖνοι μονάδων περιεκτικοὶ τυγχάνουσιν, ὡς διὰ τῶν ἐν τῷ Γ'. Πίνακι ἐκτεθέντων Σχημάτων συνιδεῖν πάρεστι. Πρὸς κρείττονα δὲ τῶν σημείων διάταξιν, ἐσχηματίσθω Κανονικόν τι Πολύγωνον, τὸν ζητούμενον τῶν πλευρῶν ἀριθμὸν περιέχον. Εἶτα δὲ ἐν ἑκάστῃ τῶν τοῦ Πολυγώνου γωνιῶν κορυφῇ τεθήτω ἓν σημεῖον, ἔκ τε τῆς κατὰ τὸ δοκοῦν ἡμῖν ληφθείσης οἱασδηποτοῦν τῶνδε τῶν γωνιῶν κορυφῆς τοσαῦται ἐπ' ἄπειρον ἀχθήτωσαν διαγώνιοι, ὅσας ἡ προτεθεῖσα περίστασις ἀπαιτεῖ, καὶ προσεκβληθήτωσαν ὡσαύτως ἐπ' ἄπειρον αἱ τοῦ τριγώνου, ἐκ τῆς κορυφῆς οὗτινος αἱ διαγώνιοι ἤχθησαν, δύω πλευραί· μετὰ δὲ ταῦτα μεταχθήτωσαν ἀναλόγως τοσάκις, ὁσάκις ἂν ἡμῖν βουλητὸν εἴη, αἱ τοῦ ἐσχηματισθέντος ἐλάττονος Πολυγώνου πλευραί τε καὶ διαγώνιοι ἐπὶ τὰς ἐπ' ἄπειρον ἀχθείσας πλευράς τε καὶ διαγωνίους· ἐπισημειουμένων τῶν, ἐν οἷς τὰ τοῦ Διαβήτου παραβάλλεται σκέλη, μερῶν σημείοις· ἔσχατον δὲ ἀχθήτωσαν διὰ πάντων τῶν ἀντιστοιχούντων σημείων γραμμαὶ ταῖς τοῦ ἐλάττονος Πολυγώνου πλευραῖς παράλληλοι, καὶ διαιρεθήτω σημείοις ἑκάστη τῶν παραλλήλων πρὸς τοσαῦτα ἴσα μέρη, ὁπόσα ἐν μιᾷ ὁποιαοῦν διαγωνίῳ τοῦ ἤδη ἐσχηματισθέντος ἑτέρου Πολυγώνου ἔνεισιν· τελεσθήσεται οὕτω τὸ αἰτούμενον, ὡς δῆλον κἀκ τοῦ Πίνακος. Ἡ δέγε τούτου χρῆσις ἐφ' οἱονδήτινα Πολύγωνον ἐφαρμοσθήσεται ἀριθμόν.

Πόῤῥω, ληφθήτω Πυραμίς τις Κανονικὴ Τρίγωνος, ἣν ἐννοήσωμεν διῃρημένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς δι' Ἐπιπέδων παραλλήλων τῇ βάσει, καὶ ἐξίσου ἀλλήλων ἀφεστώτων· ὑπ' ὄψιν τοίνυν ὁτῳοῦν ἔσται, ἕκαστον τῶν τμημάτων, τρίγωνον ὅμοιον τῷ κατὰ τὴν βάσιν ἀναδιδόναι, ἑπομένως τε τῶν τριγώνων τουτωνὶ τοῦ πρώτου τρία περιειληφότος σημεῖα, τὸ δεύτερον περιέξει ἕξ, τὸ τρίτον δέκα, κτλ. Ἡ μὲν οὖν πρώτη Πυραμίς, ἧς βάσις τὸ πρῶτον ὑπετέθη τρίγωνον, περιέξει $1 + 3$ ἤτοι 4· ἡ δὲ δευτέρα, ἧς βάσις τὸ δεύτερον τρίγωνον, περιέξει $1 + 3 + 6$ ἤτοι 10, κτλ. Ἐξ ὧν τὴν τῶν Πυραμοειδῶν ἀριθμῶν γένεσιν σαφέστατα διδασκόμεθα. Ἀλλ' οὖν σημειωτέον καλῶς μετὰ τοὺς Πυραμοειδεῖς

ἀριθμούς, οὐ δίδοσθαι ἐσχηματισμένους ἑτέρους ἀριθμούς· ἐν γὰρ τῇ Γεωμετρίᾳ οὐδέν τι ἕτερον τῶν Σχημάτων, πλὴν τῶν Στερεῶν δίδοται, οὔτε μὴν τῶν καταμετρήσεων ἑτέρα, πλὴν τῶν ἐν τῇ ἐκτάσει θεωρουμένων τριῶν, ἤτοι τοῦ μήκους, πλάτους καὶ βάθους, ὡς ἐκεῖσε τρανώτερον ὀψόμεθα. Εἰδέποτε οἱ μετὰ τοὺς Πυραμοειδεῖς ἀριθμοὶ, ἐσχηματισμένοι καλεῖσθαι εὕρηνται, ἀναλόγως ἐκείνοις μόνον καὶ πρὸς μείζονα σαφήνειαν οὑτωσὶ ἤκουσαν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 726. Οἱ Πολύγωνοι τοίνυν ἀριθμοὶ οὐδὲν ἄλλό εἰσιν, ὅτι μὴ τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν ἀπὸ μονάδος ἀρχομένων τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου ὅρων, ὡς καὶ οἱ Πυραμοειδεῖς τὸ ἐκ τῶν Πολυγώνων ἄθροισμα· ὥστε τουτὶ τὸ κεφάλαιον τὸν ἔσχατον εἶναι τῆς Πολυγώνου Προόδου ὅρον, ἡνίκα αὕτη ἰσαρίθμως τοῖς τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου σύγκειται ὅροις· οἷον τὸ ἄθροισμα τῶν τῆς πρώτης Ἀριθμητικῆς Προόδου 6 ὅρων (§. 725.) ἐστὶν $= 21$, ἔστι δὲ τὸ αὐτὸ ἄθροισμα $= 21$ ὁ ἕκτος τῆς Τριγωνικῆς Προόδου ὅρος· Ὡσαύτως πόῤῥω τὸ τῶν ὅρων Πολυγώνου τινὸς Προόδου ἄθροισμα, ἐσαεὶ Πυραμοειδής τις ἐστὶν ἀριθμός· οἷον τὸ κεφάλαιον τῶν 6 Τριγώνων ἀριθμητικῶν ὅρων ἐστὶ $= 56$, ὃ δὴ οὐδὲν ἄλλό ἐστιν, ὅτι μὴ ὁ ἕκτος Τριγωνο-Πυραμοειδὴς ἀριθμός (αὐτ.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὸ ἐπὶ τῶν διαφόρων Πολυγώνων Προόδων τῶν ὅρων ἐν ἑνὶ ἄθροισμα, τὰ μάλιστα ἡμῖν λυσιτελεῖ, ἐφ' ᾧ κἀνταῦθα ὡς κἀπὶ τῶν Ἀριθμητικῶν Προόδων ἐξέσται ἡμῖν ἐν γένει ἐξευρεῖν τύπους, καθ' οὓς ἐν ἑκάστῃ περιστάσει τὸ τοιοῦτον τῶν ὅρων ἄθροισμα εὐχερέστερον περαίνειν ἔχωμεν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 727. Δοθείσης τῆς τοῦ Πολυγώνου ἀριθμοῦ πλευρᾶς, καὶ τοῦ τῶν Γωνιῶν ἀριθμοῦ, τὸν Πολύγωνον εὑρεῖν ἀριθμόν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἡ μὲν γὰρ τῶν Πολυγώνων ἀριθμῶν πλευρὰ ὁ τῶν τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου ἀθροιζομένων ὅρων ἐστὶν ἀριθμὸς (§. 722.), ὁ δὲ τῶν Γωνιῶν ἀριθμός, ἡ ἐξ ἐκείνων ἀναδιδομένη πρόοδος (αὐτ.). Ἐνθεντοι τῶν §. 701. 705. καθόλου Τύπων ἀναπεμπαζομένων, ἐὰν κληθῇ τὸ τῆς Προόδου κεφάλαιον κ, ὁ πρῶτος ὅρος α, ἡ διαφορὰ δ, ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ν ἔσται

$$\kappa = \frac{2\alpha\nu + (\nu^2 - \nu)\delta}{2} \quad (§.\ 701.)\cdot$$

Ἐπεὶ δέ, ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς Προόδων (725),

Ἀριθμοὶ	Φυσικοὶ	1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . .
	Τρίγωνοι	1 . 3 . 6 . 10 . 15 . 21 . 28 . 36 . .
	Τρίγ. Πυρ.	1 . 4 . 10 . 20 . 35 . 56 . 84 . 120 . .

Ἐν μὲν τῇ Ἀριθμητικῇ, ἐξ ἧς οἱ Πολύγωνοι ἀναφύονται ἀριθμοί, ὁ πρῶτος ὅρος $\alpha = 1$, ἔσται καὶ τὸ ταύτης ἄθροισμα

$$\kappa = \frac{2\nu + (\nu^2 - \nu)\delta}{2}$$

Ἔστιν ἀλλ' οὖν καὶ ἡ τῶν ὅρων διαφορὰ $\delta = 1$, ἄρα·

$$\kappa = \frac{2\nu + (\nu^2 - \nu) . 1}{2} = \frac{\nu^2 + \nu}{2},$$

Ἐὰν οὖν ἐν τῷ γενικῷ τουτωῒ τύπῳ, δοθῇ ὁ τῶν γωνιῶν ἀριθμός, ἤτοι Πρόοδος ἡ Τριγωνική, ζητεῖται δὲ ὁ ὄγδοος ταύτης ὅρος, ἔσται $\nu = 8$· ὅθεν διὰ τῆς ἐφαρμόσεως εὑρεθήσεται ὁ Πολύγωνος ὄγδοος ἀριθμός, ἤτοι τὸ τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου ἐξ ὀκτὼ συγκειμένης ὅρων, ἄθροισμα· οἷον·

$$\kappa = \frac{\nu^2 + \nu}{2} = \frac{64 + 8}{2} = 36.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 728. Ἐὰν τοίνυν ἐν τῇ Τριγωνικῇ Προόδῳ ἐξ ὀκτὼ συγκειμένῃ ὅρων ὁ παραλήγων ζητῆται ὅρος, ἤτοι ὁ ἕβδομος· ἔσται ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς $\nu - 1$ (§. 680.), ἤτοι ἐλλείψει τοῦ ἐσχάτου, καὶ ὁ αἰτούμενος Πολύγωνος ἀριθμὸς

$$\frac{(\nu - 1)^2 + \nu - 1}{2} = \frac{\nu^2 - \nu}{2}. \text{ ἤτοι } \frac{64 - 8}{2} = 28.$$

ἄρα καὶ ὁ ἕκτος Πολύγωνος ὅρος, ἤτοι ὁ ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου 3, ἔσται·

$$\frac{(\nu - 2)^2 + \nu - 2}{2} = \frac{\nu^2 - 3\nu + 2}{2}$$

ὁ ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου 4 $\dfrac{(\nu - 3)^2 + \nu - 3}{2} = \dfrac{\nu^2 - 5\nu + 5}{2}$

καὶ ὁ . . . . . 5 $\dfrac{(\nu - 4)^2 + \nu - 4}{2} = \dfrac{\nu^2 - 7\nu + 12}{2}$

καὶ ὁ . . . . . 6 $\dfrac{(\nu - 5)^2 + \nu - 5}{2} = \dfrac{\nu^2 - 9\nu + 20}{2}$

ὁ ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου 7 $\frac{(\nu-6)^2+\nu-6}{2}=\frac{\nu^2-11\nu+30}{2}$

καὶ ὁ . . . . . 8 $\frac{(\nu-7)^2+\nu-7}{2}=\frac{\nu^2-13\nu+42}{2}$

ὅς δὴ, ὁ τῆς Προόδου ἐστὶ πρῶτος· ὀκτὼ γὰρ ὅρων ἐν ὡρισμένῳ ἐκκειμένων ἀριθμῷ, ἤτοι $\nu=8$, ὁ ἔσχατος τύπος θεωρεῖσθαι ἔχει ἀντὶ τοῦ πρώτου τῆς Τριγωνικῆς Προόδου ὅρου $=1$· Ἔστι καὶ γὰρ $\frac{\nu^2-13\nu+42}{2}$ $=\frac{64-104+42}{2}=\frac{106-104}{2}=\frac{2}{2}=1.$

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 729. Ἐπεὶ μὲν οὖν τὸ ἄθροισμα τῶν τῆς Τριγωνικῆς Προόδου ὅρων τὴν Τριγωνο-Πυραμίδειον ἀναδίδωσι Πρόοδον (§. 726.), ἐὰν οἱ ἀνωτέρω ἐκτεθέντες γενικοὶ τύποι (§. 728.) εἰς ἓν συναχθῶσιν, ἕξομεν τὸν αὐτωσὶ ἐκκύπτοντα τύπον ἐν γένει ὑπὲρ πάντων τῶν ἐκ τῆς τριγωνικῆς προόδου Πυραμοειδῶν ἀριθμῶν. Μένοντος γὰρ τοῦ αὐτοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ, ἤτοι $\nu=8$, καὶ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων (§. 727. 728.) τύπων ἀθροιζομένων, ἐκκύψει ὑπὲρ τοῦ τῆς ἐσχάτης Τριγωνο-Πυραμοειδοῦς Προόδου κεφαλαίου ὁ ἐξ ἐκείνων ἐφεξῆς τύπος

$$\varkappa=\frac{8\nu^2-49\nu+112}{2}.$$

Ἐὰν δὲ ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς τεθῇ 7, ἤτοι $\nu=7$, ἔσται ὁ ἕβδομος τῆς Τριγωνικῆς Προόδου ὅρος, πρῶτος ὅρος δεξιόθεν, τὸ δ' ἐν αὐτῇ τῶν 7 ὅρων ἄθροισμα, ἤτοι ὁ ἔσχατος ἕβδομος τῆς Πυραμοειδοῦς Προόδου ὅρος,

$$\varkappa=\frac{7\nu^2-35\nu+70}{2}.$$

Ἐὰν αὖθις $\nu=6$, ἔσται ὁ ἕκτος ὅρος, πρῶτος δεξιόθεν τῆς Τριγωνικῆς Προόδου, τὸ δὲ τῶν 6 ὅρων ταύτης κεφάλαιον, ἤτοι ὁ ἔσχατος ἕκτος τῆς Πυραμοειδοῦς Προόδου

$$\varkappa=\frac{6\nu^2-24\nu+40}{2}.$$

ὥστε οὕτω χωροῦσιν ἔξεστιν ἡμῖν ἐν οἱᾳδηποτοῦν περιστάσει ἐν γένει ἐκλαμβάνειν τύπον, ὑπὲρ τοῦ τῶν τῆς Τριγωνικῆς Προόδου ὅρων κεφαλαίου.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 730. Τῶν τῆς Τριγωνικῆς Προόδου ὅρων ὀκτὼ τεθέντων ἔσται $\nu=8$, τὸ δὲ τῶν ὅρων ἄθροισμα $(8\nu^2-48\nu+112):2$. Δέον τοίνυν τὸν ἐν γένει τουτονὶ τύπον ἀναλυτικῶς οὑτωσὶ ἁπλούστερον ἀναδεῖξαι, ὥστε ἐν οἱᾳδηποτοῦν τῶν τῆς Τριγωνικῆς Προόδου ὅρων ὑποθέσει, οἱασοῦν περιστάσεως ἐφαρμόζεσθαι ἔχειν. Τοίνυν·

$$\frac{8\nu^2-48\nu+112}{2}=\frac{24\nu^2-144\nu+336}{6}\ (\text{§. }168.)$$

$$=\frac{24\nu^2-144\nu+42.8}{6}\ (\text{§. }177.)=\frac{24\nu^2-144\nu+42\nu}{6}$$

$$=\frac{24\nu^2-104\nu+2\nu}{6}\left\{\begin{array}{l}\text{ἔστι καὶ γὰρ }-144+42=\\-102\text{ καὶ τῇ τοῦ }2\nu\text{ προσθέ-}\\\text{σει ἔστι }102-2\nu+2\nu=-\\104\nu+2\nu\end{array}\right.$$

$$=\frac{24\nu^2-13.8\nu+2\nu}{6}=\frac{8\nu^3+3\nu^2+2\nu}{6}$$

$$\text{Ἤτοι } \kappa = \frac{\nu^3 + 3\nu^2 + 2\nu}{6}.$$

Ἐν γένει καθόλου Τύπος πρὸς εὕρεσιν οἱωνδηποτοῦν Τριγωνο-Πυραμοειδῶν ἀριθμῶν ὑπουργῶν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Γενέσθωσαν δὴ πρὸς μείζονα τῶν ῥηθέντων παράστασιν καί τινες τοῦ τύπου ἐφαρμόσεις. Εἰ οὖν τὸ τῆς Τριγωνικῆς ἐξ ὀκτὼ ὅρων συγκροτουμένης Προόδου ἄθροισμα, ἤτοι τὸν ὄγδοον ταύτης Πυραμίδειον ἀριθμὸν, εὑρεῖν δέοι, τεθήτω $\nu = 8$. ἔνθεντοι·

$$\frac{\nu^3 + 3\nu^2 + 2\nu}{6} = \frac{512 + 192 + 16}{6} = \frac{720}{6} = 120.$$

Ἐὰν δὲ τεθῇ $\nu = 7$, ἤτοι ὁ ἕβδομος Τριγωνο-Πυραμοειδὴς ὅρος αἰτῆται, ἔσται·

$$\frac{\nu^3 + 3\nu^2 + 2\nu}{6} = \frac{343 + 147 + 14}{6} = \frac{504}{6} = 84.$$

ἐὰν δὲ $\nu = 6$, ἔσται $\frac{216 + 108 + 12}{6} = \frac{336}{6} = 56$.

Ταὐτὸ κρατήσει λεγόμενον κἀπὶ τῆς τῶν λοιπῶν τῆς Τριγωνο-Πυραμοειδοῦς Προόδου ὅρων εὑρέσεως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 731. Ἐν τῇ Τετραγωνικῇ Προόδῳ, Πολύγωνον οἱονδήτινα ὅρον εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς Προόδων (§. 725.),

Πρόοδος	Ἀριθμητικὴ	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.
	Τετραγωνικὴ	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.
	Τετραγ. Πυρ.	1.	5.	14.	30.	55.	91.	140.	204.

ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ, ἐξ ἧς αἱ λοιπαὶ πηγάζουσιν, ὁ μὲν πρῶτος ὅρος $\alpha = 1$, ἡ δὲ διαφορὰ $\delta = 2$· Τοῦ ἐν γένει τοίνυν τύπου (§. 701.) ληφθέντος, ἔσται τὸ τῶν ὅρων ν κεφάλαιον τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου

$$\kappa = \frac{2\nu + (\nu^2 - \nu) \cdot 2}{2} = \nu^2.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 732. Ἐκ τούτων τοίνυν, ὁ τῆς Τετραγωνικῆς Προόδου ἔσχατος ὅρος, ἤτοι ὁ ὄγδοος, τιθεμένου τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ $= \nu$, ἔσται ν^2 (§. 703. 731.)· ὁ δὲ τὸν ἔσχατον παραλήγων, ἤτοι ὁ ἕβδομος, τιθεμένου τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ $\nu = \nu - 1$ (§. 680.), ἔσται $(\nu - 1)^2$· ἤτοι $\nu^2 - 2\nu + 1$.

ὁ ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου 3. ὅρος $(\nu - 2)^2 = \nu^2 - 4\nu + 4$.
ὁ — — — 4. — $(\nu - 3)^2 = \nu^2 - 6\nu + 9$.
ὁ — — — 5. — $(\nu - 4)^2 = \nu^2 - 8\nu + 16$.
ὁ — — — 6. — $(\nu - 5)^2 = \nu^2 - 10\nu + 25$.
ὁ — — — 7. — $(\nu - 6)^2 = \nu^2 - 12\nu + 36$.
ὁ — — — 8. — $(\nu - 7)^2 = \nu^2 - 14\nu + 49$.

Ὑποτιθεμένης οὖν τῆς Τετραγωνικῆς Προόδου ὀκτὼ συγκεῖσθαι ὅροις, ὡς ἐνταῦθα, ἔσται $\nu = 8$. Ἔνθεντοι ὁ ἔσχατος τύπος ἀντὶ τοῦ τῆς Τετραγωνικῆς Προόδου πρώτου ὅρου θεωρηθήσεται. οἷον·

$$\nu^2 - 14\nu + 49 = 113 - 112 = 1.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 733. Ἐπεὶ μὲν δὴ τὸ ἐκ τῶν τῆς Τετραγωνικῆς Προόδου ὅρων συμποσούμενον τὴν ταύτης Πυραμίδειον, ἤτοι τὴν Τετραγωνο-Πυραμίδειον ἀναδίδωσι Πρόοδον (§. 725. 726.), δῆλον, ὡς ἐὰν ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ὁ αὐτὸς ᾖ, ἤτοι $\nu = 8$, τὸ ἐκ τῶν ἀνωτέρω (§. 732.) ὀκτὼ τύπων συμποσούμενον, τύπον ἡμῖν ἀναδώσει ἐν γένει ὑπὲρ τῆς Τετραγωνο-Πυραμιδείου Προόδου· διὸ καὶ ἔσται ἐν τῇ καθ' ἡμᾶς περιστάσει ὁ τῆς Τετρ. Πυραμιδείου Προόδου ἔσχατος ὅρος $8\nu^2 - 56\nu + 140$. Ἐὰν δὲ $\nu = 7$, ἔσται τὸ ἄθροισμα τῶν τῆς Τετραγωνείου Προόδου ὅρων, ἤτοι ὁ ἔσχατος ἕβδομος τῆς Πυραμιδείου ὅρος $7\nu^2 - 42\nu + 91$. Ἐὰν πόῤῥω $\nu = 6$, ἔσται ὡσαύτως ὁ ἔσχατος Πυραμίδειος ὅρος, ἤτοι τὸ ἐκ τῶν τῆς Τετραγωνικῆς Προόδου ὅρων συγκεφαλαιούμενον $6\nu^2 - 30\nu + 55$· κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 734. Τιθεμένων τοίνυν τῶν τῆς Τετραγωνικῆς Προόδου ὅρων ὀκτὼ, ἔσται $\nu = 8$, τὸ δὲ πάντων τῶν ὅρων ἄθροισμα $8\nu^2 - 56\nu + 140$ (§. 733.). Ἀνακτέον τοίνυν καὶ τὴν ἐν γένει ταυτηνὶ ἔκθεσιν, ὡς καὶ τὴν προεκτεθεῖσαν (§. 730.) ὑπὲρ τῆς Τριγωνο-Πυραμιδείου Προόδου, πρὸς ἁπλουστέραν ἐκτύπωσιν, ἐφ' ᾧ εὐχερέστερον οἱονδήτινα Πολύγωνον ἀριθμὸν ἐξευρίσκειν ἔχωμεν. Τοίνυν·

$$8\nu^2 - 56\nu + 140 = \frac{8\nu^2 - 56\nu + 140}{1} \text{ (§. 165.)}$$

$$= \frac{48\nu^2 - 336\nu + 840}{6} \text{ (§. 168.)} = \frac{48\nu^2 - 336\nu + 105.8}{6}$$

(§. 177.)

$$= \frac{48\nu^2 - 336\nu + 105\nu}{6} = \frac{48\nu^2 - 232\nu + \nu}{6}$$

(διὰ τὸ εἶναι $-336\nu + 105\nu = -231$, καὶ τῇ τῶν $-1\nu + \nu$ προσθέσει ἔστι $-232\nu + \nu$.)

$$= \frac{48\nu^2 - 29.8\nu + \nu}{6} = \frac{48\nu^2 - 29\nu^2 + \nu}{6}$$

$$= \frac{16\nu^2 + 3\nu^2 + \nu}{6} = \frac{2.8\nu^2 + 3\nu^2 + \nu}{6}$$

$$\text{Ἤτοι } \kappa = \frac{2\nu^3 + 3\nu^2 + \nu}{6}.$$

ἐν γένει τύπος ὑπὲρ οἱουδηποτοῦν Πολυγώνου ἀριθμοῦ. Ἐὰν οὖν τεθῇ $\nu = 6$, ἤτοι ζητῆται ὁ ἕκτος τῆς Πυραμοειδοῦς προόδου ἔσχατος ὅρος, τουτέστι τὸ ἄθροισμα τῶν τῆς Τετραγωνικῆς προόδου ἓξ ὅρων, ἔσται τῇ ἐφαρμόσει

$$\frac{2\nu^3 + 3\nu^2 + \nu}{6} = \frac{432 + 108 + 6}{6} = \frac{546}{6} = 91.$$

Κἀπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 735. Τῷ αὐτῷ τρόπῳ ἔξεστιν ἐν γένει Τύπους εὐχερῶς θηρεύειν πρὸς τὴν τοῦ ἀθροίσματος πάντων τῶν ὅρων οἱασδηποτοῦν Πολυγώνου Προόδου εὕρεσιν. Οἷον ὁ ἐν γένει τύπος τοῦ τῆς Πενταγώνου Πυραμιδείου Προόδου ἐσχάτου ὅρου ἐστὶν $= \frac{3\nu^3 + 3\nu^2}{2.3} = \frac{\nu^3 + \nu^2}{2}$.

Ὁ τῆς Ἑξαγώνου Πυραμιδείου Προόδου $= \frac{4\nu^3 + 3\nu^2 - \nu}{6}$, ὁ τῆς Ἑπταγώνου $= \frac{5\nu^3 + 3\nu^2 - 2\nu}{6}$. ὁ τῆς Ὀκταγώνου $= \frac{6\nu^3 + 3\nu^2 - 3\nu}{2.3} = \frac{2\nu^3 + \nu^2 - \nu}{2}$. καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἡ μοναδικῶς κειμένη τῶν σφαιρῶν θέσις, ἐν τῇ ἐγνωσμένῃ Τριγώνῳ καὶ Τετραγώνῳ τῶν σφαιρῶν Πυραμί-
Πιν. Α'. Σχ. 11. 12 δι, τῇ κοινῶς παρὰ τοῖς Πυροτέχναις Σφαιρῶν σωρείαν ἢ πλῆθος καλουμένῃ οὐδὲν ἄλλο, ὅτι μὴ ὅροι Τριγώνου καὶ Τετραγώνου εἰσὶ Προόδου, ἔνθα ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ν ἰσοῦται τῷ τῆς θέσεως ἐκείνων πρὸς ἀλλήλας ἀριθμῷ, ἤτοι τῷ τῶν σφαιρῶν ἀριθμῷ ὑπαλλήλως ἐξ ἑνὸς μέρους κατὰ γῆς κειμένων. Διὸ καὶ ἡ ἔνερθεν χαμαὶ ἐσχάτως, ἤτοι ἡ ἐν τῇ βάσει κειμένη τούτων θέσις, ὁ ἔσχατος ἐστὶ τῆς Τριγώνου ταύτης καὶ Τετραγώνου Προόδου ὅρος, ὥστε τὴν ὅλην Πυραμίδα τὸν ἔσχατον ὡσαύτως ἐμφαίνειν τῆς Τριγώνου καὶ Τετραγώνου Πυραμιδείου Προόδου ὅρον. Κἀντεῦθεν ὁ τῶν σφαιρῶν ἀριθμὸς τῶν ἐν τῇ τῆς Πυραμίδος ταύτης βάσει, διὰ τῶν ἐν γένει καθ' οἱανδηποτοῦν παράστασιν ὑπὲρ τοῦ κεφαλαίου τῶν τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου ὅρων εὑρεθέντων τύπων (§. 727—734.), ὑπολογισθήσεται· ὥστε οὑτωσὶ καὶ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἐν τῇ Τριγώνῳ ταύτῃ, ἢ Τετραγώνῳ τῶν σφαιρῶν Πυραμίδι, ἀμέσως κατὰ τοὺς ἐν γένει ἐκεῖσε ἐκτεθέντας ὑπὲρ τοῦ ἀθροίσματος πάντων τῶν τῆς Τριγώνου, ἢ Τετραγώνου Προόδου ὅρων (αὐτ.) τύπους ἐξευρεθήσεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 736. Ἐν τῇ Τριγώνῳ ἢ Τετραγώνῳ τῶν Σφαιρῶν Πυραμίδι τοῦ τῶν ὅρων δοθέντος ἀριθμοῦ, τὸν ἔσχατον εὑρεῖν ὅρον, ἤτοι τὸ ταύτης κεφάλαιον.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐν τῇ Τριγωνικῇ τῶν Σφαιρῶν Πυραμίδι κεῖνται ἐξ Πιν. Α'.
ἑνὸς μέρους ἔνερθεν κατὰ γῆς 45 σφαῖραι, ἤτοι ὁ τῶν Σχ. 11
ὅρων ἀριθμός ἐστι $\nu = 45$· ἔσται τοίνυν ὁ τῶν ἐν τῇ βάσει κειμένων τῶν σφαιρῶν ἀριθμὸς (§. 727.) $\frac{45^2+45}{2} = 1036$, ὁ δὲ πάντων τῶν ἐν ταύτῃ τῇ Πυραμίδι τῶν σφαιρῶν ἀριθμὸς (§. 730.) $\frac{45^3+3.45^2+2.45}{6} = 16215$. Ὃ ἦν τὸ α.

Πόῤῥω ἐν τῇ Τετραγώνῳ τῶν Σφαιρῶν Πυραμίδι Σχ. 12
ἐξ ἑνὸς μέρους χαμαὶ 42 σφαιρῶν κειμένων, ἔσται $\nu = 42$, ὁ δὲ τῶν ἐν τῇ βάσει τῶν σφαιρῶν ἀριθμὸς (§. 735.), $42^2 = 1764$. Ὅ, τε ὁλικὸς τῶν ἐν ταύτῃ τῇ Πυραμίδι τῶν σφαιρῶν ἀριθμὸς (§. 734.) $\frac{2.42^3+3.42^2+42}{6} = 25585$. Ὃ ἦν τὸ β'.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 737. Ἐπεὶ μὲν δὴ ἐπὶ τῶν ὁμοίων Πυραμίδων ὁ τῶν ἐξ ἑνὸς τῆς βάσεως μέρους ἐν τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ τῶν σφαιρῶν ἀριθμὸς τῷ τῆς θέσεως ἀριθμῷ ἰσοῦται (§. 736.), εὔδηλόν ἐστι τὸν τῶν σφαιρῶν ἀριθμὸν, τῶν ἔν τινι Ἀκρωτηριασμένῃ Πυραμίδι ἐκκειμένων προσδιορίσαι· ἐὰν πρῶτον μὲν οὕτως ἡ Πυραμὶς ὑπολογισθῇ, ὡς εἴ γε τέλειος ἐκείνη ὑπῆρχεν· εἶτα δὲ τοῦ ἐλλείποντος μέρους προσδιορισθέντος, ἀπὸ τῆς ὅλης Πυραμίδος τουτὶ ἀφαιρεθῇ, τοὐντεῦθεν ἐκκύπτον ὑπόλοιπον τὸν

τῆς ἀτελοῦς ἤτοι Ἀκρωτηριασμένης Πυραμίδος ἡμῖν ἀριθμὸν δηλώσει. Οἷον ἔστω ἐπὶ τῆς Ἀκρωτηριασμέ-
Σχ. 13. νης Τετραγωνικῆς Πυραμίδος ἡ κατωτάτη σειρὰ $ν = 20$, ἡ δ' ἀνωτάτη $= 8$· ἔσται ὁ τῶν σφαιρῶν ἀριθμὸς, τῆς Πυραμίδος ὁλοκλήρου ὑποτιθεμένης, (§. 730.)·
$$\frac{ν.(ν+1)(ν+ν+1)}{2.3} = \frac{20.21.41}{2.3} = 2870,$$
Ἐνταῦθ' ἀλλ' οὖν ἡ τῆς Πυραμίδος ἐλλείπει κορυφὴ, ἥτις οὐδὲν ἄλλό ἐστιν, ὅτι μὴ Πυραμὶς, ἧς τὸ κατώτατον μέρος 7 περιέχει σφαίρας, ἤτοι $ν = 7$, ἡ δὲ ὅλη ἐλλείπουσα Πυραμὶς $\frac{7.8.15}{2.3} = 240$ σφαιρῶν. Ἔνθεντοι διὰ τῆς ἀφαιρέσεως πορισθήσεται ἡμῖν ὁ ἐν τῇ Ἀκρωτηριασμένῃ Πυραμίδι τῶν σφαιρῶν ἀριθμὸς, ἤτοι $2870 - 140 = 2730$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 738. Εἰ τοίνυν ἡ τῶν Σφαιρῶν σωρεία κατὰ
Πίν. Β'. μῆκος ὑπαλλήλως κειμένη ἐκτέθειται ταύτης καλῶς ἐξε-
Σχ. 16. ταζομένης, εὑρεθήσεται κατὰ τὴν τοῦ ἑνὸς μέρους ἀκρότητα ἐντελὴς τῶν σφαιρῶν Τετράγωνος Πυραμὶς ἡ ΑΒΓΔΕ, τὸ δὲ λοιπὸν τῆς ὅλης σωρείας τῶν σφαιρῶν μῆκος Τρίγωνον ἡμῖν ἀναδώσει τὸ ΖΗΘ ἐκ τῶν σφαιρῶν σχῆμα, οὗ ὁ ἀριθμὸς τῷ τῶν ἐν τῇ ὑπερτάτῃ σειρᾷ ΑΖ κειμένων σφαιρῶν ἀριθμῷ, πλὴν ἑνὸς, ἴσος. Τὸ τῶν σφαιρῶν ἀλλ' οὖν πλῆθος ἐν ἑνὶ ἑκάστῳ τοιούτῳ Τριγώνῳ σχήματι, τῷ τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου ἰσοῦται ἀθροίσματι (§. 722.), ἐν ᾗ ὁ πρῶτος ὅρος $= 1$, ἡ διαφορὰ $= 1$, καὶ ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς τῷ τῶν ἐν τῷ

ἐλάττονι μέρει κατὰ τὸν αὐτὸν στίχον ΘΗ κειμένων ἴσος. Ἐὰν οὖν ἐπὶ μιᾶς τοιαύτης κατὰ μῆκος ἐκτιθεμένης τῶν σφαιρῶν σωρείας ὁ τῶν ἐν τῷ ἐλάττονι μέρει ΒΓ $=$ ΘΗ τῶν σφαιρῶν χαμαὶ κείμενος ἀριθμὸς $= ν$, ὁ δ' ὕπερθεν ἐν τῷ ἀνωτάτῳ στίχῳ ΑΖ $= y$ τεθῇ, ἔσται τὸ ἐκ τῶν σφαιρῶν συμποσούμενον ἄθροισμα, τῶν ἐν τῇ Τετραγώνῳ Πυραμίδι ΑΒΓΔΕ ἤτοι $κ = \frac{2ν^3+3ν^2+ν}{6}$ (§. 736.)· τὸ δὲ ἐν τῷ Τριγώνῳ σχήματι ΖΗΘ περιεχόμενον ἄθροισμα ἔσται $κ = \frac{ν^2+ν}{2}$ (§. 727.). Ὄντος ἀλλ' οὖν τῶν σφαιρῶν ὁ ἀριθμὸς ἐν τῇ Σφαιροσωρείᾳ $(y-1)$κις ἔνεστι, διὸ καὶ ὁ τῶν ἐν τούτῳ τῷ Τριγώνῳ σχήματι πασῶν τῶν σφαιρῶν ἀριθμός ἐστιν $= \frac{ν^2+ν}{2} \times (y-1) = \frac{ν^2y+νy}{2} - \frac{ν^2+ν}{2}$, ὁ δὲ τῶν ἐν τῇ ὅλῃ ἐπιμήκει σωρείᾳ πασῶν τῶν σφαιρῶν ἀριθμὸς, ἔσται·
$$κ = \frac{2ν^3+3ν^2+ν}{6} + \frac{ν^2y+νy}{2} - \frac{ν^2+ν}{2}.$$
Ἐφ' ᾧ δὴ πρὸς ἐλάττονα ἀναχθείη ἔκθεσιν, πολλαπλασιασθήτω $\frac{ν^2+ν}{2}$ ἐπὶ 3 (§. 168.), καὶ τῶν ὁμοίων ἀφαιρεθήτω. οἷον·
$$κ = \frac{2ν^3+3ν^2+ν}{6} + \frac{ν^2y+νy}{2} - \frac{3ν^2+3ν}{6}.$$
$$κ = \frac{2ν^3-2ν}{6} + \frac{ν^2y+νy}{2} = \frac{ν^3-ν}{3} + \frac{(ν^2+ν)y}{2}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 739. Τῶν ἐν τινι ἐπιμήκει Σφαιροσωρείᾳ κατά τε τὸ ἐπίμηκες καὶ κατὰ τὸ βραχύτατον μέρος κατὰ γῆς ἐν ἑνὶ στίχῳ κειμένων σφαιρῶν ἀριθμηθέντων, καὶ τοῦ μὲν ἐν τῇ εὐθείᾳ ΒΓ προσόντος ἀριθμοῦ τεθέντος $= \nu$, τοῦ δὲ ἐν τῇ ΒΘ $= y$, ἔσται ὁ τῶν Τριγωνοειδῶν σωρειῶν ἀριθμὸς ΒΘ — ΒΕ = ΒΘ — ΒΓ $= y - \nu$, κἀντεῦθεν ὁ τῶν ἐν ταύτῃ τῇ σωρείᾳ τῶν σφαιρῶν ἀριθμὸς ἔσται

$$\kappa = \frac{\nu^2+\nu}{2} \times (y-\nu) = \frac{\nu^2 y + \nu y}{2} - \frac{\nu^3+\nu^2}{2},$$

ὥστε τὸν ἐν τῇ ὁλικῇ σωρείᾳ τῶν σφαιρῶν ἀριθμὸν εἶναι

$$\kappa = \frac{2\nu^3+3\nu^2+\nu^2}{6} + \frac{\nu^2 y + \nu y}{2} - \frac{\nu^3+\nu^2}{2},$$

ἤτοι, ὡς ἀνωτέρω (§. 738.)·

$$\kappa = \frac{2\nu^3+3\nu^2+\nu}{6} + \frac{(\nu^2+\nu)y}{2} - \frac{3\nu^3+3\nu^2}{6}$$

$$\kappa = \frac{(\nu^2+\nu)y}{2} - \frac{\nu^3-\nu}{3}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 740. Δοθέντος τοῦ Πολυγώνου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ τῶν Γωνιῶν ἀριθμοῦ, εὑρεῖν τὴν πλευράν.

ΛΥΣΙΣ.

Κείσθω ὁ Πολύγωνος ἀριθμὸς $= \pi$, ἡ δὲ πλευρὰ $= \nu$, ὁ τῶν Γωνιῶν ἀριθμὸς $= \alpha$, ἔσται ἡ τῶν ὅρων διαφορὰ $= \alpha - 2$ (§. 723.), ὁ πρῶτος ὅρος $= 1$ (§. 718.), ἔνθεντοι ὁ ἔσχατος $= 1 + (\nu - 1)(\alpha - 2)$, τουτέστι $3 + \alpha\nu - 2\nu - \alpha$ (§. 705.)· τὸ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου ἄθροισμα $4 + \alpha\nu - 2\nu - \alpha$, καὶ τῇ

τοῦ ἡμίσεως τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ $\frac{1}{2}\nu$ προσθέσει (693) ἔσται ὁ Πολύγωνος ἀριθμὸς $2\nu + \frac{1}{2}\alpha\nu^2 - \nu^2 - \frac{1}{2}\alpha\nu$. Ἐξ ὧν ἔσται·

$$\frac{\alpha\nu^2}{2} - \nu^2 + 2\nu - \frac{\alpha\nu}{2} = \pi.$$

$$\alpha\nu^2 - 2\nu^2 + 4\nu - \alpha\nu = 2\pi.$$

$$\nu^2(\alpha-2) + (4-\alpha)\nu = 2\pi.$$

$$\nu^2 + \frac{\alpha-4}{\alpha-2}\nu = \frac{2\pi}{\alpha-2}.$$

Ἐὰν οὖν τεθῇ $\frac{\alpha-4}{\alpha-2} = \mu$, ἔσται·

$$\nu^2 - \mu\nu = \frac{2\pi}{\alpha-2}.$$

$$\nu^2 - \mu\nu + \frac{\mu^2}{4} = \frac{\mu^2}{4} + \frac{2\pi}{\alpha-2} \quad (\text{§. } 263..$$

$$\nu - \frac{\mu}{2} = \sqrt{\left(\frac{\mu^2}{4} + \frac{2\pi}{\alpha-2}\right)}.$$

$$\nu = \sqrt{\left(\frac{\mu^2}{4} + \frac{2\pi}{\alpha-2}\right)} + \frac{\mu}{2}.$$

Ἀνθυποκαθισταμένου ἤδη ἀντὶ τοῦ μ, τοῦ τούτου ἰσοτίμου· ἔσται,

$$\nu = \frac{\alpha-4}{2\alpha-4} + \sqrt{\frac{\alpha^2-8\alpha+16}{4\alpha^2-16\alpha+16} + \frac{4\pi}{2\alpha-4}}$$

$$\nu = \frac{\alpha-4+\sqrt{(8\alpha\pi-16\pi+\alpha^2-8\alpha+16)}}{2\alpha-4}$$

$$\nu = \frac{\alpha-4+\sqrt{(8(\alpha-2)\pi+(\alpha-4)^2)}}{2\alpha-4}.$$

Ἔστω ἤδη $\alpha = 3$, ἔσται ἡ τοῦ Τριγώνου $2\alpha - 4$ πλευρὰ $\frac{-1+\sqrt{(8\pi+1)}}{2}$. Ἔστω $\alpha = 5$, ἔσται ἡ τοῦ Πενταγώνου πλευρὰ $\frac{1+\sqrt{(24\pi+1)}}{6}$. Ἔστω $\alpha = 6$, ἔσται ἡ τοῦ Ἑξαγώνου πλευρὰ $\frac{2+\sqrt{(32\pi+4)}}{8}$.

Ἔστω $\alpha = 7$, ἔσται ἡ τοῦ Ἑπταγώνου πλευρὰ $\frac{3 + \sqrt{(41\pi + 9)}}{10}$· κτλ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Εἰ μὲν οὖν βουλητὸν ἡμῖν εἴη τὴν τῆς Τριγωνικῆς Προόδου δευτέραν εὑρεῖν πλευρὰν ἔσται $\pi = 3$, καὶ $-1 + \sqrt{(8\pi + 1)} : 2 = -1 \sqrt{(24 + 1)} = \sqrt{(25)} = 5$. Ὅθεν $5 - 1 : 2 = 4 : 2 = 2$· ἄρα 3 ἐστὶν ἡ τῆς Τριγωνικῆς Προόδου δευτέρα πλευρά· Ὡσαύτως εἰ τὴν πέμπτην ἡμῖν πρὸς θυμοῦ ἐξευρεῖν γένοιτο Τρίγωνον πλευρὰν, ἔσται $\pi = 15$ καὶ $-1 + \sqrt{(120 + 1)} : 2 = -1 + \sqrt{(121)} = 11 - 1 = 10 : 2 = 5$· ἄρα 15 ἡ τῆς Τριγωνικῆς Προόδου πέμπτη ἐστὶ πλευρά. Τῷ αὐτῷ τρόπῳ, κἀπὶ τῆς Ἑξαγωνείου Προόδου, ἐὰν τὴν ἕκτην πλευρὰν ἡμῖν προκέηται ἐξευρεῖν, ἔσται $\pi = 66$, καὶ $2 + \sqrt{(32\pi + 4)} : 8 = 2 + \sqrt{(2116)} : 8 = 2 + 46 = 48 : 8 = 6$· ἄρα 66 ἡ τῆς Ἑξαγωνείου Προόδου ἕκτη ἐστὶ πλευρά· καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὡσαύτως.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 741. Πρόοδος Γεωμετρικὴ ἐστὶ σειρὰ Ποσοτήτων κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἤτοι ἐκθέτην ἐπαυξουμένων, ἢ ἐπιμειουμένων, ἤτοι Γεωμετρικῶς κατὰ συνέχειαν Ἀναλόγων.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 742. Ἡ Γεωμετρικὴ τοίνυν Πρόοδος ὅρων ἐστὶ σειρὰ, ἐν Γεωμετρικῇ συνεχεῖ προϊόντων Ἀναλογίᾳ (§. 567. 569.)· καθ' ἣν ὁστισοῦν τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸν ἀμέσως αὐτῷ ἑπόμενον διαιρεθεὶς, τὸ αὐτὸ πηλίκον, ἤτοι τὸν τοῦ λόγου ἐκθέτην (§. 478.) ἐξέδωκεν. οἷον

$$3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384 : \cdot \quad x.$$
$$\alpha : \alpha\mu : \alpha\mu^2 : \alpha\mu^3 : \alpha\mu^4 : \alpha\mu^5 : \alpha\mu^6 : \alpha\mu^7 \quad , \quad \alpha\mu^\nu.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 743. Πρόοδος Γεωμετρικὴ Αὔξουσά ἐστιν, ἧς οἱ ὅροι συνεχῶς κατὰ τὸν αὐτὸν ἐκθέτην ἐπιμεγεθύνονται· Φθίνουσα δὲ, ἡ κατὰ τὸν αὐτὸν ἐκθέτην βραχυνομένη.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 744. Ἐπὶ μὲν οὖν τῶν αὐξουσῶν ὁ Ἑρμηνεὺς ὅρος, ἤτοι τὸ ἀρκτικὸν μέλος, ἀριθμός ἐστιν ὁλοσχερής· ἐπὶ δὲ τῶν Φθινουσῶν κλασματίας (§. 213.), ὡς ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς Προόδων συνορᾶν τουτὶ ἔχομεν.

$$\text{κτλ.}\ \tfrac{1}{8} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{2} : 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : \text{κτλ.}$$
$$\text{κτλ.}\ 8 : 4 : 2 : 1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{8} : \tfrac{1}{16} : \text{κτλ.}$$
$$\text{κτλ.}\ \alpha\mu^3 : \alpha\mu^2 : \alpha\mu : \alpha : \frac{\alpha}{\mu} : \frac{\alpha}{\mu^2} : \frac{\alpha}{\mu^3} : \frac{\alpha}{\mu^4} : \text{κτλ.}$$

Ἐπὶ μὲν γὰρ τῆς πρώτης τὸ ἀρκτικὸν εἴληπται $+ 2$, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας $\frac{1}{2}$· κἀντεῦθεν ἐκείνη μὲν αὔξουσα, αὕτη δὲ λήγουσα πέφυκεν. Ἀλλὰ δὴ καὶ ἐν γένει ἑκατέρωθεν συνεχιζομένη ἡ Πρόοδος ἔσται (§. 212 ἄχρι 214.).

$$\text{κτλ.}\ \frac{\alpha^4}{\beta^3} : \frac{\alpha^3}{\beta^2} : \frac{\alpha^2}{\beta} : \alpha : \beta : \frac{\beta^2}{\alpha} : \frac{\beta^3}{\alpha^2} : \frac{\beta^4}{\alpha^3} : \text{κτλ.}$$

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 745. Ἡνίκα ἔν τε τῇ Ἀριθμητικῇ καὶ τῇ Γεωμετρικῇ Προόδῳ, ὁ ἑκάστου ὅρου ἑπόμενος, ὁ αὐτὸς ὁμοῦ καὶ ἡγούμενος τοῦ ἐφεξῆς ἐκλαμβάνεται, τοῦτ' ἔστιν ἡνίκα Μέσος ἐστὶν Ἀνάλογος (§. 568.), ὡς 3.6:6.9:9.12, κτλ. ἢ 2:4 = 4:8 = 8:16 = 12:32, κτλ. ἐπιτομῆς χάριν οὕτω τὰ τῆς Προόδου ἐκκείσεται, ἐπὶ μὲν τῶν Ἀριθμητικῶς προϊόντων ÷ 3.6.9.12.15, κτλ.· ἐπὶ δὲ τῶν Γεωμετρικῶς ∺ 2:4:8:16:32, κτλ.· ὡσαύτως ∺ 1:3:9:27:243, κτλ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 746. Πρόοδος Ἁρμονική ἐστι σειρὰ ποσοτήτων Ἁρμονικῶς ἀναλόγων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐκκειμένων τοίνυν τῶν α, β, γ, δ, ε, ἐὰν ᾖ $\gamma = \frac{\alpha\beta}{2\alpha - \beta}$, $\delta = \frac{\beta\gamma}{2\beta - \gamma}$, $\varepsilon = \frac{\gamma\delta}{2\gamma - \delta}$ (§. 628.), ἤτοι γ, δ, ε, Ἁρμονικὴν συνεχῆ ἀποτελούντων Ἀναλογίαν (§. 680.), τὰ μεγέθη α, β, γ, δ, ε, κτλ. ἐν Ἁρμονικῇ Προόδῳ ἐκκεῖσθαι λέγονται. Ὡσαύτως $\frac{4}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{4}{14}$, κτλ., ἐν οἷς $\frac{4}{8}$ ἡ τοῦ D ἐστὶ διὰ πασῶν, $\frac{4}{10}$ τὸ τοῦ E διάστημα, ὡς καὶ $\frac{4}{12}$ τὸ τοῦ G. Ἀλλ' οὖν $\frac{4}{7}$ τόνος ἐστὶ πυκνότερός τε καὶ χ.θαμαλώτερος τοῦ B, ὃ δὴ Κινβέργιος (α) ἐν τῇ τῆς Μουσικῆς ἐν χρήσει διατονικῇ Κλίμακι εἰσαγαγεῖν ἐπειράσατο. Πόῤῥω $\frac{4}{11}$, τόνος ἐστὶ μεταξὺ f καὶ fis ἐγγὺς τῆς Ὀγδόης παραλήγων· $\frac{4}{13}$ τόνος μεταξὺ as καὶ a, κτλ.· ὡς ἐν τῇ τῶν Μουσικῶν Θεωρίᾳ τουτὶ ἐκ περιουσίας κατάδηλον.

(α) Ὅρα Klügel Mathem. Wörterbuch, Th. II. S. 698.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 747. Ἐν οἱαδηποτοῦν Γεωμετρικῇ Προόδῳ, τὸ αὐτὸ πηλίκον μεταξὺ δυοῖν ὅρων ἀμέσως συνεφεπομένων ἐσαεὶ ἐνείληπται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ γὰρ τοῦ πρώτου ὅρου πρὸς τὸν δεύτερον λόγος ἤτοι ἐκθέτης, ὁ αὐτός ἐστι καὶ τοῦ δευτέρου πρὸς τὸν τρίτον, τοῦ τρίτου πρὸς τὸν τέταρτον, κτλ. (§. 742.). Ἕκαστος γὰρ τῶν τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου ὅρων, τὸν αὐτῷ ἀμέσως ἑπόμενον κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἑαυτῷ ἐμπεριείληφε, καθ' ὃν καὶ αὐτὸς τῷ πρὸ αὐτοῦ ἀμέσως ἡγουμένῳ ἐνείληπται· οἷον ὁ 6 τὸν 3 δὶς ἐμπεριέχει, ὡς καὶ ὁ 6 ὑπὸ τοῦ 12 (αὐτ.)· ὁ δ' ἐκθέτης οὐδὲν ἄλλο, ὅτι μὴ τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ὅρων ἐκκύπτον πηλίκον (§. 478.)· Ἄρα, ἐν οἱαδηποτοῦν κτλ. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 748. Ἐν τῇ Γεωμετρικῇ τοίνυν Προόδῳ τῶν ὅρων ἕκαστος ἰσοῦται τῷ πρὸ αὐτοῦ ἀμέσως ἑπομένῳ, διαιρεθέντι διὰ τοῦ ἐν τῇ Προόδῳ ἐκλαμβανομένου πηλίκου (§. 481.).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 749. Τύπον ἐν γένει συντάξαι ἐφ' ὃν πᾶσα Γεωμετρικὴ Πρόοδος ἀνάγεσθαι ἔχοι.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστι μὲν γὰρ ἡ Γεωμετρικὴ Πρόοδος, ὅρων ἀλληλεχῶν σειρὰ τὸν αὐτὸν πάντως πλουτούντων ἐκθέτην (§. 742.). Ἐὰν οὖν ὁ πρῶτος ὅρος τεθῇ = α, ὁ δὲ τῶν ὅρων κοινὸς ἐκθέτης $= \frac{1}{\mu}$ ἤτοι $= \mu$, ἔσται ὁ δεύτερος $= \alpha\mu$, ὁ τρίτος $= \alpha\mu^2$, ὁ τέταρτος $= \alpha\mu^3$, κτλ. (§. 538.)· ἕκαστος γὰρ διὰ τοῦ ἑαυτοῦ ἡγουμένου διαιρεθεὶς, τὸ αὐτὸ ἀναδίδωσι πηλίκον (§. 748.)· Ἄρα ἐν γένει οἱαδηποτοῦν Γεωμετρικὴ Πρόοδος, οὕτως ὑποτυπωθήσεται

$$\div\div\ \alpha : \alpha\mu : \alpha\mu^2 : \alpha\mu^3 : \alpha\mu^4 : \alpha\mu^5 : \alpha\mu^6 : \ \ldots \ \alpha\mu^\nu.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 750. Ἐπὶ μὲν οὖν τῆς αὐξούσης Γεωμετρικῆς Προόδου $\frac{1}{\mu}$ κλασματῶδες ἔσται, μ δὲ ὁλοσχερῆ ἡμῖν ὑποδηλώσει ἀριθμόν· ἐπὶ δὲ τῆς φθινούσης $\frac{1}{\mu}$ ὁλοσχερὲς ἔσται, μ δὲ κλασματῶδες.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 751. Ἐπεὶ μὲν δὴ οἱ ἐκθέται ἐν τῇ Γεωμετρικῇ Προόδῳ σειρὰν καθιστῶσι τῶν ἐν φυσικῇ χύσει αὐξανόντων ἀριθμῶν, ἀπό τε τοῦ μηδενικοῦ ἀρχομένων, ἕπεται τὸν τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου γενικὸν τύπον ἔχειν ὡσαύτως οὕτω παρίστασθαι (§. 248.).

$$\div\div\ \alpha\mu^0 : \alpha\mu^1 : \alpha\mu^2 : \alpha\mu^3 : \alpha\mu^4 : \alpha\mu^5 \ \ldots \ \alpha\mu^\nu.$$

Καὶ γὰρ $\alpha\mu^0 : \alpha\mu^1 = \frac{\alpha\mu^0}{\alpha\mu^1} = \mu^{1-0} = \mu$ (§. 138. Γ.). ἔστι δὲ $\alpha\mu^0 = \alpha\mu$, ἑπομένως $\mu^0 = 1$ (§. 239.).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 752. Ὁ τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου ἔσχατος ὅρος, ἢ καὶ οἱοσδηποτοῦν ἕτερος, ἴσος ἐστὶ τῷ γινομένῳ, πολλαπλασιασμῷ τοῦ πρώτου ὅρου ἐπὶ τὸ κατὰ τὴν Πρόοδον πηλίκον,

ἐξαρθὲν ἐπὶ δύναμιν, ἧς ὁ ἐκθέτης τὸν τῶν προλαβόντων ὅρων ἀριθμὸν πλὴν ἑνὸς παρίστησι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Θεωρουμένου τοῦ ἐν γένει τύπου (§. 749.)

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots\ \sigma.$$
$$\div\div\ \alpha : \alpha\mu : \alpha\mu^2 : \alpha\mu^3 : \alpha\mu^4 : \alpha\mu^5\ \ldots\ \alpha\mu^\nu.$$

εὔδηλόν ἐστι τὸν ὅρον $\alpha\mu^5$, ἢ καὶ ὁποιονδηποτοῦν ἕτερον, σύγκεισθαι ἐκ τοῦ γινομένου τοῦ πρώτου ὅρου α, ἀχθέντος ἐπὶ τὸ εἰς πέμπτην δύναμιν ἐξαρθὲν πηλίκον μ, τουτέστι τὸ ἐκθέτην πλουτοῦν τὸν τῶν ὅρων ἀριθμὸν 6 πλὴν ἑνὸς, ἤτοι τὸν τῶν προλαβόντων ὅρων ἀριθμόν. Ἐὰν οὖν ὁ ἔσχατος ὅρος κληθῇ ω, ὁ πρῶτος α, τὸ πηλίκον π, καὶ ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ν, ἔσται ἐν γένει πρὸς εὕρεσιν τοῦ αἰτουμένου ὅρου ὁ ἐφεξῆς τύπος.

$$\omega = \alpha\pi^{\nu-1}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 753. Ἐν πάσῃ τοίνυν Γεωμετρικῇ Προόδῳ οἱοσδηποτοῦν ὅρος, ἰσοῦται τῷ πρώτῳ ὅρῳ α, διαιρουμένῳ διὰ τῆς κατὰ τὸν ἐκθέτην $\frac{1}{\mu} = \mu$ δυνάμεως, ἰσοβαθμίου τῷ τῶν προλαβόντων ὅρων ἀριθμῷ. Ὁ γὰρ πέμπτος ὅρος $\alpha\mu^4$ (§. 749.) ἰσοῦται τῷ πρώτῳ α, διαιρουμένῳ διὰ τοῦ $\frac{1}{\mu}$ πρὸς τετάρτην ἐξαρθέντος δυνάμιν. Καὶ γὰρ α διὰ τοῦ $\frac{1}{\mu^4}$ διαιρούμενον ἔσται $= \frac{\alpha\mu^4}{1}$ (§. 189.) $= \alpha\mu^4$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 754. Ἐὰν οὖν ἐπὶ τοῦ ἐν γένει τύπου, $\omega =$

$\alpha\pi^{\nu-1}$ (§. 752.) τεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος $\alpha = 1$, ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς $\nu = 6$, τὸ δὲ πηλίκον $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2}$, τουτέστι $\pi = 2$. (§. 750.), τῆς Προόδου τῶν αὐξουσῶν ὑποτιθεμένης ἔσται ὁ αἰτούμενος ὅρος $\omega = \alpha\pi^{\nu-1} = 1 \times 2^{6-1} = 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$· ἡ δὲ Πρόοδος

$$1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32.$$

Πόῤῥω, ὑποτιθεμένης τῆς Προόδου τῶν φθινουσῶν, ἔσται $\frac{1}{\pi}$ ὁλόσχερές, π δὲ κλασματῶδες (αὐτόθι). Ἐντεῦθεν τεθέντων $\alpha = 32$, $\nu = 6$, καὶ $\frac{1}{\pi} = 2$, ἤτοι $\pi = \frac{1}{2}$, ἔσται $\omega = \alpha\pi^{\nu-1} = 32 \times \frac{1}{2^{6-1}} = \frac{32}{2^{6-1}} = \frac{32}{2^5} = \frac{32}{2.2.2.2.2} = \frac{32}{32} = 1$· ἡ δὲ Πρόοδος

$$32 : 16 : 8 : 4 : 2 : 1.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 755. *Ἐν πάσῃ Γεωμετρικῇ Προόδῳ τὸ ὑπὸ τῶν ἀκροτήτων γινόμενον, ἰσοῦται τῷ ὑπὸ δυοῖν ὁποιωνοῦν ὅρων ἐξίσου τῶν ἀκροτήτων ἀφεστώτων γινομένῳ.*

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐκκειμένης τῆς ἐφεξῆς Γεωμετρικῆς Προόδου

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6.$$
$$∺\ \alpha : \alpha\mu : \alpha\mu^2 : \alpha\mu^3 : \alpha\mu^4 : \alpha\mu^5$$

εὔδηλόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ἀκροτήτων α καὶ $\alpha\mu^5$ γινόμενον $\alpha^2\mu^5$, ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τοῦ δευτέρου $\alpha\mu$ ἐπὶ τὸν πέμπτον $\alpha\mu^4$ γινομένῳ $\alpha^2\mu^5$· Ἄρα, κτλ. Ο. Ε. Δ. Ἔστω δὴ καὶ ἐν ἀριθμοῖς·

$$∺\ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192$$
$$\underline{\quad 24 \qquad 12 \qquad 6 \qquad 3\quad}$$
$$576 = 576 = 576 = 576.$$

καὶ ἐν γένει

$$∺\ \alpha : \alpha\mu : \alpha\mu^2 : \alpha\mu^3 : \alpha\mu^4 : \alpha\mu^5$$
$$\underline{\quad \alpha\mu^2 : \alpha\mu : \alpha\quad}$$
$$\alpha^2\mu^5 = \alpha^2\mu^5 = \alpha^2\mu^5.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 756. Εἰ δὲ οἱ ὅροι εἴησαν περισσάριθμοι, τὸ ὑπὸ τῶν ἀκροτήτων γινόμενον ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου τετραγώνῳ· οἷον ἐπὶ τῆς ἐφεξῆς Προόδου

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7.$$
$$∺\ \alpha : \alpha\mu : \alpha\mu^2 : \alpha\mu^3 : \alpha\mu^4 : \alpha\mu^5 : \alpha\mu^6$$

ἐστὶν $\alpha \times \alpha\mu^6 = \alpha\mu^3 \times \alpha\mu^3$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 757. Ἐπεὶ μὲν δὴ $\alpha\mu^5 = \alpha\mu^{6-1}$ (§. 752.), ἔσται ἐπὶ τῆς Προόδου

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6.$$
$$∺\ \alpha : \alpha\mu : \alpha\mu^2 : \alpha\mu^3 : \alpha\mu^4 : \alpha\mu^5$$

ὁ ἔσχατος ὅρος $\alpha\mu^5 = \alpha\mu^{\nu-1}$, ὁ παραλήγων $\alpha\mu^4 = \alpha\mu^{\nu-2}$, ὁ ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου τρίτος $\alpha\mu^3 = \alpha\mu^{\nu-3}$, κτλ. Κἀντεῦθεν Πρόοδος οἱαδηποτοῦν Γεωμετρικὴ ἀντιστρόφως λαμβανομένη, οὕτως ἐκτεθήσεται.

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6.$$
$$∺\ \alpha\mu^{\nu-1} : \alpha\mu^{\nu-2} : \alpha\mu^{\nu-3} : \alpha\mu^{\nu-4} : \alpha\mu^{\nu-5} : \alpha\mu^{\nu-6} : \text{κτλ.}$$

Τῆς δυνάμεως ἀλλ' οὖν ν προσδιορισθείσης, ὁ τύπος ἴσος τῷ πρώτῳ ἀποβήσεται ὅρῳ, ἤτοι $= \alpha$· τεθέντος γὰρ $\nu = 6$, ἔσται $\alpha\mu^{\nu-6} = \alpha\mu^{6-6} = \alpha\mu^0 = \alpha$ (§. 239.).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 758. Ἐν πάσῃ Γεωμετρικῇ Προόδῳ τὸ ἄθροισμα τὸ ἐξ ἁπάντων τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τὸ ἐξ ἁπάντων τῶν ἑπομένων, τῷ ἐφ᾽ ἑνὶ ἑκάστῳ τῶν ὅρων ἡγουμένῳ πρὸς τὸ ἑπόμενον αὐτοῦ ἀνάλογόν ἐστι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ ᾖ $\div\, \alpha : \alpha\pi : \alpha\pi^2 : \alpha\pi^3 : \alpha\pi^4$, πάντες οἱ ὅροι εἰσὶν ἡγούμενοι, πλὴν τοῦ ἐσχάτου· τὸ ἐξ ἁπάντων τοίνυν τῶν ἡγουμένων ἄθροισμα ἔσται $\alpha + \alpha\pi + \alpha\pi^2 + \alpha\pi^3$. ὡσαύτως πάντες οἱ ὅροι εἰσὶν ἑπόμενοι πλὴν τοῦ πρώτου, ἔσται δὴ τὸ ἐξ ἁπάντων τῶν ἑπομένων ἄθροισμα $\alpha\pi + \alpha\pi^2 + \alpha\pi^3 + \alpha\pi^4$. Ἐξ ὧν ἡ ἐφεξῆς ἀναφύεται ἀναλογία $(\alpha + \alpha\pi + \alpha\pi^2 + \alpha\pi^3) : (\alpha\pi + \alpha\pi^2 + \alpha\pi^3 + \alpha\pi^4) = \alpha : \alpha\pi$, ἐν ᾗ τὸ ὑπὸ τῶν ἀκροτήτων γινόμενον ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων (§. 589.) Ἄρα, ἐν πάσῃ Γεωμετρικῇ Προόδῳ, κτλ. Ο. Ε. Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 759. Τὸ κεφάλαιον οἱασοῦν Γεωμετρικῆς Προόδου ἰσοῦται τῇ τοῦ πρώτου ὅρου ἀπὸ τοῦ γινομένου του ἐσχάτου ἐπὶ τὸ πηλίκον ἀναφυομένῃ διαφορᾷ, διὰ τοῦ πηλίκου μονάδι ἐλλείποντος διαιρουμένῃ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τιθεμένου γὰρ τοῦ μὲν πρώτου τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου ὅρου $=\alpha$, τοῦ δὲ πηλίκου $=\pi$, οἱαδήποτοῦν Πρόοδος τῶν προσεχῶς διαδεχομένων Γεωμετρικῶς ὅρων ἐκτεθῆναι ἂν ἔχοι τῷ ἐφεξῆς τύπῳ $\div\, \alpha : \alpha\pi : \alpha\pi^2 : \alpha\pi^3 : \alpha\pi^4 :$ κτλ. Τοίνυν ἐν τῇ Προόδῳ ταύτῃ τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν ὅρων πλὴν ἑνὸς, ἐστὶ πρὸς τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν ὅρων πλὴν τοῦ πρώτου, ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον (§. 758.) Ἐὰν οὖν τεθῇ τὸ τῶν ὅρων κεφάλαιον $=\kappa$, ὁ ἔσχατος ὅρος $=\omega$, καὶ τὸ πηλίκον $=\pi$, ὁ τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας τύπος $(\alpha + \alpha\pi + \alpha\pi^2 + \alpha\pi^3) : (\alpha\pi + \alpha\pi^2 + \alpha\pi^3 + \alpha\pi^4) = \alpha : \alpha\pi$, ἐπιτομῆς χάριν ἐπὶ τόνδε $(\kappa - \omega) : (\kappa - \alpha) = \alpha : \alpha\pi$, τραπήσεται. Κἀντεῦθεν ἔσται·

$$(\kappa - \omega)\,\alpha\pi = (\kappa - \alpha)\,\alpha \quad (\text{§. } 598.)$$
$$\alpha\kappa\pi - \alpha\pi\omega = \alpha\kappa - \alpha^2$$
$$\kappa\pi - \pi\omega = \kappa - \alpha$$
$$\kappa\pi - \kappa = \pi\omega - \alpha$$
$$\kappa(\pi - 1) = \pi\omega - \alpha$$
$$\kappa = \frac{\pi\omega - \alpha}{\pi - 1}. \quad \text{Ο. Ε. Δ.}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 760. Ἔσται τοίνυν τὸ κεφάλαιον τῆς ἐφεξῆς Προόδου $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = \frac{32 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 63$· ὡσαύτως ἐστὶν $81 + 27 + 9 + 3 = \frac{3 \cdot \frac{1}{3} - 81}{\frac{1}{3} - 1}$ (§. 754.) $= -80 : -\frac{2}{3} = +120$· Ὥστε, ἐκ τοῦ ἐσχάτου τουτουὶ παραδείγματος ἕπεται, τήν τε αὔξουσαν καὶ φθίνουσαν τῶν Προόδων ῥᾳδίως ἀνιχνεύειν, ἄνευ τὰ τῆς Προόδου ἀναστρέφειν, ἤτοι τὸν ἔσχατον ὅρον ἀντὶ τοῦ πρώτου, καὶ τὸν πρῶτον ἀντὶ τοῦ ἐσχάτου ἐκλαμβάνειν (§. 680.)· ὡσαύτως $\frac{3 \cdot \frac{1}{2} - 1836}{-\frac{1}{2}}$ $= \frac{-1634\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = +3069$.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 761. Ἐν πάσῃ Γεωμετρικῇ Προόδῳ ἐὰν τὸ πηλίκον $\frac{1}{\pi}$ ἐστὶ 2, ἤτοι $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2}$, τὸ ἐξ ἁπάντων τῶν ὅρων ἄθροισμα, πλὴν τοῦ μεγίστου, ἰσοῦται τῇ τοῦ πρώτου ὅρου πρὸς τὸν ἔσχατον ὑπεροχῇ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ τεθῇ $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2}$ ἤτοι $\pi = 2$ (§. 750.), ἡ Πρόοδος $\div\!\div\ \alpha : \alpha\pi : \alpha\pi^2 : \alpha\pi^3 : \alpha\pi^4$, ἐπὶ τήνδε $\div\!\div\ \alpha : 2\alpha : 4\alpha : 8\alpha : 16\alpha$ μετενεχθήσεται, ἢ μᾶλλον

$$\div\!\div\ \alpha : \frac{\alpha}{2} : \frac{\alpha}{4} : \frac{\alpha}{8} : \frac{\alpha}{16}$$

τὸ ἄθροισμα τοίνυν ἁπάντων τῶν ὅρων (πλὴν τοῦ μεγίστου) ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιστάσει ἐστὶν $= 15\alpha$, τουτέστιν $= 16\alpha - \alpha$ τῇ μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ ἐσχάτου ὅρου ὑπεροχῇ· ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ περιστάσει, ἤτοι ἐπὶ τῆς κλασματωδῶς ἐκτεθείσης Προόδου, $\frac{15\alpha}{16} = \frac{16\alpha - \alpha}{16}$ τῇ μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου ὑπεροχῇ· Ἄρα, κτλ. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 762. Ἐὰν τοίνυν τὸ Πηλίκον ᾖ $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3}$ ἤτοι $\pi = 3$, τὸ ἐξ ἁπάντων τῶν ὅρων πλὴν τοῦ μεγίστου ἄθροισμα ὑποδιπλάσιον ἔσται τῆς τοῦ πρώτου πρὸς τὸν ἔσχατον ὅρον διαφορᾶς, ἤτοι $\div\!\div\ \alpha : 3\alpha : 9\alpha : 27\alpha : 81\alpha$· ἔσται καὶ γὰρ $40\alpha = 81\alpha - \alpha$. Ὡσαύτως ἐὰν $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{4}$,

ἤτοι $\pi = 4$ τὸ ἐκ τῶν ὅρων, πλὴν τοῦ μεγίστου, ἄθροισμα, ὑποτριπλάσιον τῆς τοῦ πρώτου πρὸς τὸν ἔσχατον διαφορᾶς· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 763. Ἐκκύψει τοίνυν ῥᾳδίως τὸ κεφάλαιον ἁπάντων τῶν ὅρων οἱασδηποτοῦν Γεωμετρικῆς Προόδου, ἐὰν πρῶτον ὁ μέγιστος ληφθῇ ὅρος, εἶτα δὲ ἡ τοῦ πρώτου πρὸς τὸν ἔσχατον διαφορὰ, ἥτις καὶ διαιρεθήσεται διὰ μὲν 1, ἐὰν τὸ πηλίκον ᾖ $= 2$, ἢ $\frac{1}{2}$· διὰ δὲ 2, ἐὰν ᾖ $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3} = 3$· καὶ διὰ 3, ἐὰν τύχῃ $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{4} = 4$· ἑπομένως τε τὸν διαιρέτην ἴσον ἀεὶ εἶναι τῷ πηλίκῳ μονάδι ἐλαττουμένῳ (§. 759.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τοῦ πηλίκου $\frac{1}{\pi}$ ὄντος, ἔσται ἐν τῇ αὐξούσῃ Προόδῳ $\pi = 1$, ἢ $\pi = 2$, ἢ $\pi = 3$, κτλ. ἐν δὲ τῇ φθινούσῃ δέον ἐκλαμβάνειν τὸ πηλίκον, ὡς ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρου, οἷα δὴ ἐλαχίστου, ἀρχόμενον· ἐφ᾽ ᾧ οὕτως τὴν μὲν Πρόοδον αὔξουσαν ἀναδίδοσθαι ἔχειν, τὸ δὲ πηλίκον $\pi = 1$, ἢ $\pi = 2$, ἢ $\pi = 3$ κτλ. ἐκλαμβάνεσθαι οἷόν τ᾽ εἶναι. Ἔσται καὶ γὰρ οὕτως ἐπὶ μὲν τῆς αὐξούσης ὁ ἐν γένει τύπος, $\kappa = \frac{\pi\omega - \alpha}{\pi - 1}$ (§. 759.)· ἐπὶ δὲ τῆς φθινούσης, $\kappa = \frac{\alpha\pi - \omega}{\pi - 1}$. Ἐὰν δὲ τεθῇ $\alpha = 1$, $\omega = 16$, $\pi = 2$· ἔσται τὸ μὲν τῆς αὐξούσης Προόδου ἄθροισμα $\kappa = \frac{2 \cdot 16 - 1}{2 - 1} = \frac{32 - 1}{2 - 1} = \frac{31}{1} = 31$, ἡ δὲ Πρόοδος $1 : 2 : 4 : 8 : 16$· τὸ δὲ τῆς φθινούσης $\kappa =$

$\frac{1\cdot 2-16}{2-1} = \frac{14}{1} = 14$, ἡδὲ Πρόοδος $16:8:4:2:1$· καὶ γὰρ $16-8=8$, $8-4=4$, $4-2=2$· κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 764. Κατὰ τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον εὑρεθήσεται καὶ τὸ ἄθροισμα

τῶν ἡμιολίων, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$. $O = 1$

τῶν τριτημορίων, $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}$. $O = \frac{1}{2}$

τῶν τεταρτημορίων, $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}$. $O = \frac{1}{3}$

τῶν δεκατημορίων, $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}$. $O = \frac{1}{9}$

τῶν ἑκατοστημορίων, $\frac{1}{100}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{1000000}$. $O = \frac{1}{99}$

καὶ ἐν γένει εὐχερῶς εὑρεθήσεται τὸ ἄθροισμα οἱωνδηποτοῦν μορίων, ἐν Γεωμετρικῇ Φθινούσῃ Προόδῳ ἰόντων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πρώτου ὅρου μονὰς ἀφαιρεθῇ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 765. *Ἐν πάσῃ Γεωμετρικῇ Προόδῳ, Α΄. τὰ ἀθροίσματα, Β΄. αἱ διαφοραί, Γ΄. τὰ γινόμενα τῶν ἀμέσως ἐφεπομένων ὅρων, ἐν Γεωμετρικῇ εἰσὶ Προόδῳ.*

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου $\div\!\div a:a\pi:a\pi^2:a\pi^3:a\pi^4:a\pi^5$, ὑποτιθεμένου $\pi = 2$, μεταχθήσεται αὕτη ἐπὶ τὴν ἐφεξῆς $\div\!\div a:2a:4a:8a:16a$. Τὰ κεφάλαια τοίνυν τῶν ἀμέσως ἐφεπομένων ὅρων εἰσὶ $3a$, $6a$, $12a$, $24a$· αἱ δὲ διαφοραὶ $a-2a:2a-4a:4a:-8a:8a-16a$, τουτέστιν, $-a:-2a:-4a:-8a$· καὶ τὰ γινόμενα $2a^2:8a^2:32a^2:128a^2$. Εἰσὶ δὲ ταῦτα πάντα ἐν Γεωμετρικῇ Προόδῳ, ὡς ὑπ' ὄψιν δῆλον· Ἄρα, κτλ. Ο. Ε. Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 766. *Ἐν πάσῃ Γεωμετρικῇ Προόδῳ αἱ ὁμωνυμοῦσαι Δυνάμεις τε καὶ Ῥίζαι τῶν συνεχῶς ἐφεπομένων ὅρων, Γεωμετρικῶς πρόεισι.*

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν ἐν τῇ Γεωμετρικῇ Προόδῳ $\div\!\div a:a\pi:a\pi^2:a\pi^3:a\pi^4:a\pi^5$, τεθῇ $\pi = 2$, ἔσται $\div\!\div a:2a:4a:8a:16a$, κτλ. Ἐὰν οὖν τὰ τετράγωνα τῶν ἀλλήλους διαδεχομένων ληφθῶσιν ὅρων, ἔσονται ταῦτα $\div\!\div a^2:4a^2:16a^2:64a^2:256a^2$, κτλ. εἰσὶ δὲ ἐν Γεωμετρικῇ Προόδῳ· ἄρα, κτλ. Ὡσαύτως, ἐὰν αἱ τετραγώνειοι, ἢ αἱ κυβικαί, ἢ καὶ ὁποιασοῦν καθυπερτέρας δυνάμεως τῶν ἀμέσως ἑπομένων ὅρων ῥίζαι ληφθῶσιν, ἔσονται ὡσαύτως ἐν Γεωμετρικῇ Προόδῳ. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 767. Αἱ τῆς αὐτῆς ὡσαύτως ποσότητος ἀλλήλας ἀμοιβαδὸν διαδεχόμεναι δυνάμεις, ἐν Προόδῳ εἰσὶ Γεωμετρικῇ· οἷον ἔστω ποσότης τις a, ἔσονται αἱ ταύτης ὑπάλληλαι δυνάμεις a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, κτλ. ἐν Προόδῳ σαφῶς Γεωμετρικῇ. Ἀλλ' οὖν οὐχ οὕτω περὶ τῶν ῥιζῶν νοητέον, τιθεμένης γὰρ τῆς a ποσότητος, αἱ ταύτης ῥίζαι

$a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{5}}, a^{\frac{1}{6}}, a^{\frac{1}{7}},$

οὐδόλως Πρόοδον ἀναδιδόασι Γεωμετρικήν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 768. Ἐν οἱαδηποτοῦν τοίνυν Γεωμετρικῇ Προόδῳ, ἧς οἱ ὅροι μετ' ἐκθετῶν κεῖνται, οἱ ἐκθέται ἐν Ἀριθμητικῇ ἀσφεὶ Προόδῳ ἐκκύπτουσιν· οἷον ἐπὶ τῆς $\div\div \alpha : \alpha\pi : \alpha\pi^2 : \alpha\pi^3 : \alpha\pi^4 : \alpha\pi^5 : \alpha\pi^6$: κτλ., οἱ ἐκθέται $0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6$. κτλ. Ἀριθμητικὴν συνιστῶσι Πρόοδον. Ἐξ οὗ ἕπεται, ἐὰν ἔν τινι Γεωμετρικῇ Προόδῳ, ὁποιοιοῦν ὅροι, ὧν οἱ ἐκθέται ἐν Ἀριθμητικῇ στίχουσι Προόδῳ, ληφθῶσιν· οἱ ὅροι ἐν Γεωμετρικῇ ἐκκείσονται Ἀναλογίᾳ, οἷον $\alpha\pi : \alpha\pi^3 = \alpha\pi^5 : \alpha\pi^7$. (§. 598.)

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἡνίκα μὲν δὴ ὅροι ἐν Γεωμετρικῇ στίχουσι Προόδῳ ἐκθέταις συγκείμενοι, ἐπὶ τῆς αὐτῆς μιᾶς Προόδου, δύω ἐννοεῖσθαι ἔχουσι Πρόοδοι συνάμα ἐκτεθειμέναι· τουτέστι, μία μὲν ἡ κατὰ τοὺς ὅρους θεωρουμένη Γεωμετρική, ἑτέρα δὲ ἡ κατὰ τοὺς ἐκθέτας Ἀριθμητική. Ἔνθεντοι καὶ ἡ τῶν δυοῖν τουτωνὶ Προόδων συνάφεια τὴν βάσιν καὶ τὴν ἀρχὴν ὑποτίθησι τοῦ ἐν ταῖς Μαθήσεσι τὰ μάλιστα κλεϊζομένου καὶ λίαν λυσιτελοῦς Λογαριθμικοῦ ὑπολογισμοῦ, περὶ οὗ ἐν τῷ ἐφεξῆς κεφαλαίῳ διαληψόμεθα.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 769. Ἐν πάσῃ Γεωμετρικῇ Προόδῳ, δύω ὁποιοιοῦν ὅροι, ἐν ἀριθμῷ ὡρισμένῳ διαστάσεων ἑνὸς ἑτέρου ἀφεστῶτες, ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς δύω ἕτεροι ἀμέσως ἑαυτοὺς διαδεχόμενοι, καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν ἀμφότεροι ἐξηρμένοι δύναμιν, ἣν ὁ τῶν διαστάσεων δηλοῖ ἀριθμός.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ τοῦ ἐφεξῆς ἐν γένει τύπου $\div\div \alpha : \alpha\pi : \alpha\pi^2 : \alpha\pi^3 : \alpha\pi^4$, ὁ πρῶτος α καὶ ὁ τρίτος $\alpha\pi^2$ τῶν ὅρων δυσὶ διαστάσεσιν ἀλλήλων ἀφεστῶτες, ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὸ τοῦ πρώτου ὅρου τετράγωνον πρὸς τὸ τοῦ δευτέρου. τουτέστι,

$$\alpha : \alpha\pi^2 = \alpha^2 : \alpha^2\pi^2. \quad \text{Ο. Ε. Δ.}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 770. Ἐν οἱαδηποτοῦν τοίνυν Προόδῳ ὁ πρῶτος ὅρος ἔχει πρὸς τὸν τρίτον ὡς τὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον πρὸς τὸ τοῦ δευτέρου· ὡσαύτως ὁ πρῶτος πρὸς τὸν τέταρτον, ὡς ὁ τοῦ πρώτου κύβος πρὸς τὸν τοῦ δευτέρου· ὁμοίως καὶ ὁ πρῶτος πρὸς τὸν πέμπτον, ὡς ἡ τοῦ πρώτου τεταρτοταγὴς δύναμις πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου· Τὸ αὐτὸ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ῥητέον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 771. Ὁ τῆς Προόδου τοίνυν δεύτερος ὅρος ἰσοῦται τῷ πρώτῳ, πολλαπλασιαζομένῳ ἐπὶ τὸν κατὰ τὴν Πρόοδον ἐκθέτην, (§. 478.)· ὁ τρίτος ἰσοῦται τῷ δευτέρῳ πολλαπλασιαζομένῳ ἐπὶ τὸν κατὰ τὸν λόγον ἐκθέτην, ἐπομένως τε ὁ τρίτος ὅρος ἰσοῦται τῷ πρώτῳ πολλαπλασιαζομένῳ ἐπὶ τὴν κατὰ τὸν λόγον δευτέραν δύναμιν, ὡς δύω οὐσῶν τῶν μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου διαστάσεων· ὁ τέταρτος ἰσοῦται τῷ τρίτῳ, ἐπὶ τὸν κατὰ τὸν λόγον ἐκθέτην πολλαπλασιαζομένῳ, ἑπομένως τε ἰσοῦται τῷ πρώτῳ ἐπὶ τρίτην ἀναχθέντι δύναμιν· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐπὶ τῆς ἀνιούσης Γεωμετρικῆς Προόδου $\div$ 32 : 64 : 128 : 256 : 512, κτλ. ἔσται Α′. $64 = 32 \times 2$, Β′. $128 = 64 \times 2 = 32 \times 2 \times 2 = 32 \times 4$ ἐπὶ τὸ τοῦ 2 τετράγωνον· Γ′. $256 = 128 \times 2 = 32 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \times 8$ ἐπὶ τὸν τοῦ 2 κύβον (§. 771.), κτλ. Ὡσαύτως κἀπὶ τῆς κατιούσης $\div$ 32 : 16 : 8 : 4 : 2, κτλ. ἔσται Α′. $16 = 32 \times \frac{1}{2}$ (§. 750.) Β′. $8 = 16 \times \frac{1}{2} = 32 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 32 \times \frac{1}{4}$ ἐπὶ τὸ τοῦ $\frac{1}{2}$ τετράγωνον· Γ′. $4 = 8 \times \frac{1}{2} = 32 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 32 \times \frac{1}{8}$ ἐπὶ τὸν τοῦ $\frac{1}{2}$ κύβον (§. 771.).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 772. Πρόοδον Γεωμετρικὴν ἐμπαραβύσαι.

ΛΥΣΙΣ.

Πρόοδον μὲν δή τινα, ἐμπαραβύεσθαι ἔχειν δηλοῖ, τὸ δυοῖν μεταξὺ τῶν κατ' αὐτὴν ὁποιωνοῦν ὅρων, ὅρους ἄλλους ἐμπαρεισάγεσθαι, ὑφ' ὧν ἂν μετὰ τῶν προτέρων, καινή τις πρόοδος Γεωμετρικὴ ἀναφύοιτο· οἷον ἐὰν ἐπὶ τῆς αὐξούσης $\div$ $\alpha : \alpha\mu : \alpha\mu^2 : \alpha\mu^3 : \alpha\mu^4$, μεταξὺ δυοῖν ὅρων α καὶ $\alpha\mu$, ἢ $\alpha\mu$ καὶ $\alpha\mu^2$, κτλ. δεήσῃ τρίτον ἐμπαραβύσαι, ἔσται κατὰ τὰ ῥηθέντα (§. 604. Α′.)

$\sqrt{(\alpha^2\mu)}$ ὁ μέσος Γεωμετρ. ἀνάλ. μεταξὺ α καὶ μ (§. 770.)

$\sqrt{(\alpha^2\mu^3)}$ — — — — $\alpha\mu$ καὶ $\alpha\mu^2$

$\sqrt{(\alpha^2\mu^5)}$ ὁ μέσος Γεωμετρ. ἀνάλ. μεταξὺ $\alpha\mu^2$ — $\alpha\mu^3$

$\sqrt{(\alpha^2\mu^7)}$ — — — — $\alpha\mu^3$ — $\alpha\mu^4$.

Ἐὰν οὖν οὗτοι τοῖς Γεωμετρικοῖς ἐπεμβληθῶσιν ὅροις, τὸν μέσον παρέξωσι Γεωμετρικῶς ἀνάλογον, ὡς ἐπὶ τῆς ἐφεξῆς Προόδου.

$$\alpha : \sqrt{(\alpha^2\mu)} : \alpha\mu : \sqrt{(\alpha^2\mu^3)} : \alpha\mu^2 : \sqrt{(\alpha^2\mu^5)} : \alpha\mu^3 : \sqrt{(\alpha^2\mu^7)} : \alpha\mu^4.$$

Ἤτοι $\alpha : \alpha\mu^{\frac{1}{2}} : \alpha\mu : \alpha\mu^{\frac{3}{2}} : \alpha\mu^2 : \alpha\mu^{\frac{5}{2}} : \alpha\mu^3 : \alpha\mu^{\frac{7}{2}} : \alpha\mu^4$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Χρώμεθα μὲν δὴ τῇ μεθόδῳ ταύτῃ, ἐφ' ᾧ μεταξὺ δυοῖν δοθέντων ὅρων, ἕτερον μέσον Γεωμετρικῶς ἀνάλογον ἐμπαρεισάξαι· ἡ γὰρ Γεωμετρικὴ Πρόοδος δίδοται, δοθέντος οὑτινοσοῦν τῶν ὅρων, καὶ τοῦ λόγου ὃν ἔχει πρὸς τὸν αὐτῷ ἔγγιστα. Τοῦ γὰρ τοιοῦδε λόγου διὰ πάσης προόδου τοῦ αὐτοῦ σωζομένου (§. 741.) δυνατὸν τὸν τῷ δοθέντι ἢ εὑρεθέντι προσεγγίζοντα ὅρον, διὰ τοῦ τῶν Ἀναλογιῶν κανόνος λαμβάνεσθαι. Ἢν οὖν Γεωμετρικήν τινα πρόοδον ἐμπαραβύσαι δέοι, ἑνὸς μόνου ὅρου μεταξὺ δυοῖν ἑκάστων τῶν ἐν αὐτῇ ἐπεμβαλλομένου, τοῦτο διὰ τῶν ἀποδειχθέντων (§. 772.) ῥᾶστα γενήσεται, μόνου τοῦ ἀναλόγου μέσου ἐκείνων μεταξὺ παρεισαγομένου (§. 603. 604. Α′.). Οἷον εἰ δοθέντων 4 καὶ 128 βουλητὸν ἡμῖν εἴη, τέσσαρας ἑτέρους ὅρους κατὰ Γεωμετρικὴν Πρόοδον τοῖς 4 καὶ 128 ἐμπαραβύσαι, δῆλον τὴν τοιαύτην πρόοδον ἐξ ὅρων συγκεῖσθαι ἕξ, ὥστε δοθέντος τοῦ πρώτου, ἀπόνως οἱ λοιποὶ σχηματισθήσονται, εἰ μόνον ὁ τῆς προόδου λόγος δεδομένος εἴη. Ὁ ἕκτος τοίνυν καὶ ἔσχατος τῶν ὅρων 128 σύγκειται ἐκ τοῦ πρώτου ὅρου 4 πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸ κατὰ τὸν λόγον πηλίκον, οὗ ἐκθέτης ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς, παρ' ἕνα (§. 752.). Ἐὰν οὖν 128 διὰ τοῦ 4 διαιρεθῇ τὸ πηλίκον 32 συγκείσεται ἐκ τῆς κατὰ τὸ πηλίκον πέμπτης δυνάμεως. Τῆς πέμπτης ἀλλ' οὖν τοῦ 32 ἐξαχθείσης ῥίζης 2, ἔσται ἡμῖν αὕτη ὁ τῆς προόδου λόγος, ἤτοι τὸ πηλίκον (§. 477.). Κἀντεῦθεν οἱ αἰτούμενοι μέσοι ὅροι εὐχερῶς προσδιορισθήσονται· οἷον, ὁ πρῶτος $= 4 \times 2 = 8$, ὁ δεύτερος $4 \times 4 = 16$ (§. 770.), ὁ τρίτος $4 \times 8 = 32$ (αὐτ.), ὁ τέταρτος $4 \times 16 = 64$. Οὕτω τοίνυν τῇ μεταξὺ τῶν 4 καὶ 128, τῶν τεσσάρων τουτωνὶ κατ' ἀναλογίαν μεσιτευόντων παρεμπτώσει τὴν πρόοδον ἐμπαραβῦσαι ἔνι· οἷον ∺ 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128. Ἡ αὐτὴ δὲ Πρόοδος καὶ οὕτως ἐμπαραβύεσθαι δυνήσεται, ἐὰν τῶν ἄκρων α καὶ ω τεθέντων, ἤτοι $\alpha = 4$, $\omega = 128$, τοῦ δὲ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ $\nu = 6$ (§. 754.), 4 μέσοι ζητηθῶσιν ἀνάλογοι· ἔστι μὲν δὴ τότε $\sqrt[\nu-1]{\frac{\omega}{\alpha}} = \pi$ (ὡς ἐν τῷ ἐφεξῆς Θεωρήματι δηλοῦται), ἤτοι $\sqrt[5]{\frac{128}{4}} = \sqrt[5]{32} = 2$, ἔστιν ἄρα $4 \times 2 = 8$ ὁ Α'. μέσος ἀνάλογος, ὁ δὲ Β'. $8 \times 2 = 16$, ὁ Γ'. $16 \times 2 = 32$, ὁ Δ'. $32 \times 2 = 64$· ἡ δὲ Πρόοδος, ὡς ἀνωτέρω.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

Ἐπὶ τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου, ὡς κἀπὶ τῆς Ἀριθμητικῆς, πέντε τῶν μεγεθῶν πρὸς ἔρευναν ἡμῖν πρόκειται, ἐξ ὧν ἐπάναγκες τρία δίδοσθαι, πρὸς τὴν τῶν λοιπῶν δύω εὕρεσιν, ὡς ἐχομένως δηλοῦται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 773. Ἐν τῇ Γεωμετρικῇ Προόδῳ, δοθέντων τοῦ πρώτου ὅρου α, τοῦ ἐσχάτου ω, καὶ τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ ν, τὸν τοῦ λόγου εὑρεῖν ἐκθέτην π.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστι μὲν δὴ (§. 752.) $\omega = \alpha \pi^{\nu-1}$· τοίνυν $\frac{\omega}{\alpha} = \pi^{\nu-1}$, καὶ $\pi = \frac{\omega^{\nu-1}}{\alpha^{\nu-1}}$· ἄρα $\pi = \sqrt[\nu-1]{\frac{\omega}{\alpha}}$· ἔστω $\alpha = 2$, $\omega = 486$, $\nu = 6$, ἔσται $\pi = \sqrt[5]{\frac{486}{2}} = \sqrt[5]{243} = 3$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 774. Ὡσαύτως ἐὰν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος α, ὁ ἔσχατος ω, καὶ τὸ τῆς Προόδου κεφάλαιον κ, ζητεῖται δὲ ὁ τοῦ λόγου ἐκθέτης π (§. 478.), ἔσται (§. 759.)·

$$\kappa = \frac{\pi\omega - \alpha}{\pi - 1}$$

$$\kappa\pi - \kappa = \pi\omega - \alpha$$

$$\kappa\pi - \pi\omega = \kappa - \alpha$$

$$\pi(\kappa - \omega) = \kappa - \alpha$$

$$\pi = \frac{\kappa - \alpha}{\kappa - \omega}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 775. Δοθέντων ἐν τῇ Γεωμετρικῇ Προόδῳ τοῦ πρώτου ὅρου α, τοῦ ἐσχάτου ω, καὶ τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ ν, τὸ ταύτης εὑρεῖν κεφάλαιον κ.

ΛΥΣΙΣ.

Ἀντικαθισταμένου τοῦ ἐπιβάλλοντος τοῦ $\pi = \frac{\omega^{\frac{1}{\nu-1}}}{\alpha^{\frac{1}{\nu-1}}}$ (§. 775.) ἐν τῇ $\kappa(\pi - 1) = \pi\omega - \alpha$ ἐξισώσει (§. 759.) ἐκκύψει

$$\kappa\left(\frac{\omega^{\frac{1}{\nu-1}}}{\alpha^{\frac{1}{\nu-1}}} - 1\right) = \omega \times \frac{\omega^{\frac{1}{\nu-1}}}{\alpha^{\frac{1}{\nu-1}}} - \alpha$$

Πολλαπλασιαζομένων τοίνυν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ τοῦ $\alpha^{\frac{1}{\nu-1}}$, ἔσται·

$$\kappa(\omega^{\frac{1}{\nu-1}} - \alpha^{\frac{1}{\nu-1}}) = \omega^{1+\frac{1}{\nu-1}} - \alpha^{1+\frac{1}{\nu-1}}$$

$$\kappa(\omega^{\frac{1}{\nu-1}} - \alpha^{\frac{1}{\nu-1}}) = \omega^{\frac{\nu}{\nu-1}} - \alpha^{\frac{\nu}{\nu-1}}$$

Ἄρα, $\kappa = \dfrac{\omega^{\frac{\nu}{\nu-1}} - \alpha^{\frac{\nu}{\nu-1}}}{\omega^{\frac{1}{\nu-1}} - \alpha^{\frac{1}{\nu-1}}}$

Ἢ μᾶλλον, $\kappa = \dfrac{\sqrt[\nu-1]{\omega^\nu} - \sqrt[\nu-1]{\alpha^\nu}}{\sqrt[\nu-1]{\omega} - \sqrt[\nu-1]{\alpha}}$ (§. 293.)

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 776. Ἐὰν δὲ δοθέντων τοῦ πρώτου ὅρου α, τοῦ πηλίκου π (§. 747.), καὶ τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ ν, ζητεῖται τὸ κεφάλαιον κ, ἔσται διὰ τῆς ἀνθυποκαταστάσεως τῆς τοῦ ω δυνάμεως $\alpha\pi^{\nu-1}$ (§. 752.) ἐπὶ τοῦ γενικοῦ τύπου $\kappa\pi - \kappa = \pi\omega - \alpha$ (§. 759.);

$$\kappa\pi - \kappa = \alpha\pi^\nu - \alpha$$

$$\kappa(\pi - 1) = \alpha(\pi^\nu - 1)$$

$$\kappa = \frac{\alpha(\pi^\nu - 1)}{\pi - 1}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 777. Δοθέντων τοῦ πηλίκου π, τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ ν, καὶ τοῦ τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου κεφάλαιον κ, τὸν πρῶτον εὑρεῖν ὅρον α.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπεὶ μὲν δὴ (§. 776.)

$$\kappa = \frac{\pi^\nu\alpha - \alpha}{\pi - 1}$$

ἔσται $\pi\kappa - \kappa = \pi^\nu\alpha - \alpha$

$$\pi\kappa - \kappa = \alpha(\pi^\nu - 1)$$

$$\alpha = \frac{\pi\kappa - \kappa}{\pi^\nu - 1}$$

Ἤτοι, $\alpha = \dfrac{(\pi - 1)\kappa}{\pi^\nu - 1}$,

ἐὰν οὖν τεθῇ $\pi = 3$, $\nu = 6$, $\kappa = 728$· ἔσται $\alpha = \frac{2.728}{728} = 2$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 778. Τὸ κεφάλαιον τοίνυν τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου ἔχει ἀναλογικῶς πρὸς τὸν πρῶτον ὅρον, ὡς ἡ τοῦ κατὰ τὸν λόγον πηλίκου ἀξία, ἧς ὁ ἐκθέτης τῷ τῶν ὅρων ἀριθμῷ πλὴν μονάδος ἴσος, πρὸς τὸ αὐτὸ πηλίκον, ἤτοι τὸν ἐκθέτην π (§. 478.) μονάδι ἠλαττωμένον. Ἡ γὰρ ἀνωτέρω ἐξίσωσις $\alpha = \kappa(\pi - 1) : (\pi^\nu - 1)$, ἐπὶ τὴν ἐφεξῆς ἀναλύεται Ἀναλογίαν $\varkappa : \alpha = \pi^{\nu} - 1 : \pi - 1$ (§. 598.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 779. Ἐὰν οὖν δοθῇ τὸ τοῦ λόγου πηλίκον π, ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ν, καὶ ὁ ἔσχατος ὅρος ω, ζητεῖται δὲ ὁ πρῶτος ὅρος α, ἔσται (§. 752.).

$$\omega = \alpha \pi^{\nu-1}$$

$$\text{καί, } \alpha = \frac{\omega}{\pi^{\nu-1}}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 780. Ὡσαύτως δοθέντων τοῦ ἐκθέτου π, τοῦ ἐσχάτου ὅρου ω, καὶ τοῦ τῆς Προόδου κεφαλαίου $\varkappa$, ζητεῖται ὁ πρῶτος ὅρος α, ἔσται (§. 759.)·

$$\varkappa = \frac{\pi\omega - \alpha}{\pi - 1}$$

$$\varkappa\pi - \varkappa = \pi\omega - \alpha$$

$$\alpha = \pi\omega - \pi\varkappa + \varkappa$$

$$\text{ἤτοι, } \alpha = \pi\omega - \varkappa(\pi - 1).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 781. Δοθέντων, τοῦ τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου πηλίκου π, τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ ν, καὶ τοῦ ἐσχάτου ω, εὑρεῖν τὸν πρῶτον ὅρον α, καὶ τὸ τῆς Προόδου κεφάλαιον $\varkappa$.

ΛΥΣΙΣ.

Ὡς ὄντος τοῦ πρώτου ὅρου $\alpha = \frac{\omega}{\pi^{\nu-1}}$ (§. 779.),

ἔσται διὰ τῆς τούτου ἀντικαταστάσεως ἐπὶ τοῦ ἑτέρου τύπου (§. 759.),

$$\varkappa(\pi - 1) = \pi\omega - \frac{\omega}{\pi^{\nu-1}}$$

$$\varkappa(\pi - 1) = \frac{\pi^{\nu}\omega - \omega}{\pi^{\nu-1}}$$

$$\varkappa(\pi - 1) = \frac{\omega(\pi^{\nu} - 1)}{\pi^{\nu-1}}$$

$$\varkappa = \frac{\omega(\pi^{\nu} - 1)}{\pi^{\nu-1}(\pi - 1)}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 782. Δοθέντων ἐν τῇ Γεωμετρικῇ Προόδῳ τοῦ πρώτου καὶ ἐσχάτου τῶν ὅρων, σὺν τῷ πηλίκῳ, τὸν τῶν ὅρων εὑρεῖν ἀριθμόν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπεὶ μέντοι (§. 752.), $\omega = \alpha\pi^{\nu-1}$, ἔσται $\frac{\omega}{\alpha} = \pi^{\nu-1}$. Ἐὰν οὖν ἀμφότερα τὰ τῆς ἐξισώσεως μέλη διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος π πολλαπλασιασθῶσιν, ἡ τούτων δύναμις οὐδόλως ἀλλοιοῦται (§. 437.)· ἐνθεντοι ἔσται

$$\frac{\pi\omega}{\alpha} = \pi^{\nu}$$

Τουτέστιν, ἐὰν ὁ τῆς Προόδου ἔσχατος ὅρος ἐπὶ τὸ ἑαυτῆς ἀχθῇ πηλίκον, τό, τε ἐντεῦθεν γινόμενον διὰ τοῦ πρώτου ὅρου διαιρεθῇ, ἐκκύψει πηλίκον ἰσοδυναμοῦν τῷ τῆς Προόδου πηλίκῳ, ἐπὶ τὴν τὸν τῶν ὅρων ἀριθμὸν, ἀντ' ἐκθέτου ἔχουσαν δύναμιν ἐξαρθέντι.

Διὸ καὶ τὸ τῆς Προόδου πηλίκον ἐπὶ δυνάμεις ἐφεξῆς ἀλληλοδιαδόχους ἀναγέσθω, μέχρις οὗ τούτων τις ἐξισωθῇ τῷ τοῦ $\frac{\pi\omega}{\alpha}$ πηλίκῳ π, οὗ ὁ ἐκθέτης ἐστὶν $= \nu$. Θῶμεν τοίνυν $\omega = 24$, $\alpha = 3$, $\pi = 2$· ἔσται ἐντεῦθεν

$$\frac{\pi\omega}{\alpha} = \pi^{\nu},\ \frac{24\cdot 2}{3} = 16.$$

ἐὰν γὰρ τεθῇ $\pi = 2$, $\pi^2 = 4$, $\pi^3 = 8$, $\pi^4 = 16$, ἔσται πάντως $\pi^{\nu} = 2^4$. Κἀντεῦθεν $\nu = 4$, ἑπομένως ἡ Πρόοδος ἔσται $\div 2:4:8:16$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁ αὐτὸς τύπος $\pi^{\nu} = \pi\omega : \alpha$, καὶ διὰ τῆς τῶν Λογαρίθμων ἀντεισαγωγῆς εὐχερῶς δηλοῦται, ὡς ἐκεῖσε τρανώτερον δείξομεν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 783. Ἐὰν τοίνυν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος α, ὁ ἔσχατος ω, καὶ τὸ τῆς προόδου κεφάλαιον, ζητεῖται δὲ ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ν· ἔσται $\pi^{\nu-1} = \omega : \alpha$ (§. 773.), καὶ (§. 774.) $\pi = (\varkappa - \alpha) : (\varkappa - \omega)$· τοίνυν·

$$\text{A)}\ \pi^{\nu-1} = \frac{\omega}{\alpha}$$

$$\text{B)}\ \pi = \frac{\varkappa - \alpha}{\varkappa - \omega}$$

ἐὰν οὖν ἀμφότερα τὰ τῆς Β'. ἐξισώσεως μέλη πρὸς τὴν αὐτὴν ἐξαρθῶσι δύναμιν $\nu - 1$, ἡ τούτων ἰσότης ἀμετάτρεπτος σώζεται (§. 440.), ἤτοι·

$$\Gamma)\ \pi^{\nu-1} = \frac{(\varkappa - \alpha)^{\nu-1}}{(\varkappa - \omega)^{\nu-1}}$$

ἀνθυποκαθισταμένου τοίνυν ἀντὶ τοῦ τῆς πρώτης ἐξισώσεως $\pi^{\nu-1}$ ὅρου τοῦ ἰσοτίμου $\omega : \alpha$, ἐπὶ τῆς τρίτης ἐξισώσεως (§. 110.), ἔσται·

$$\left(\frac{\varkappa - \alpha}{\alpha - \omega}\right)^{\nu-1} = \frac{\omega}{\alpha}.$$

ὃ πρὸς εὕρεσιν προὔκειτο· Τῇ δέ γε ἀκεραιώσει ἕξομεν

$$\omega(\varkappa - \alpha)^{\nu-1} = \alpha(\varkappa - \omega)^{\nu-1}.$$

Ἡ δ' ἐφάρμοσις, λογαριθμικῶς κατασκευασθήσεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 784. Δοθέντων ἐν τῇ Γεωμετρικῇ Προόδῳ τοῦ πρώτου ὅρου α, τοῦ πηλίκου π, καὶ τοῦ κεφαλαίου $\varkappa$, τὸν ἔσχατον εὑρεῖν ὅρον ω.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπεὶ (§. 759.)·

$$\varkappa = \frac{\pi\omega - \alpha}{\pi - 1}$$

ἔσται $$\pi\varkappa - \varkappa = \pi\omega - \alpha$$

$$\pi\varkappa - \varkappa + \alpha = \pi\omega$$

ἄρα $$\frac{\varkappa\pi - \varkappa + \alpha}{\pi} = \omega$$

ἤτοι $$\omega = \frac{\alpha + (\pi - 1)\varkappa}{\pi}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 785. Ἐὰν τοίνυν δοθέντων τοῦ πηλίκου π, τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ ν, καὶ τοῦ τῆς Προόδου κεφαλαίου $\varkappa$, ζητῆται ὁ ἔσχατος ὅρος ω καὶ ὁ πρῶτος α· ἔσται ὁ μὲν πρῶτος $\alpha = \omega : \pi^{\nu-1}$ (§. 779.), οὗτινος τῇ ἀντεισαγωγῇ ἐπὶ τοῦ γενικοῦ τύπου (§. 759.) ἐκκύψει·

$$\kappa = \frac{\pi\omega - \frac{\omega}{\pi^{\nu-1}}}{\pi - 1}$$

$$\kappa\pi - \kappa = \pi\omega - \frac{\omega}{\pi^{\nu-1}}$$

$$\kappa\pi^{\nu} - \kappa\pi^{\nu-1} = \pi^{\nu}\omega - \omega$$

$$\kappa(\pi^{\nu} - 1)\pi^{\nu-1} = \omega(\pi^{\nu} - 1)$$

$$\text{Ἄρα, } \omega = \frac{\pi^{\nu-1}(\pi^{\nu} - 1)\kappa}{\pi^{\nu} - 1}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 786. Δοθέντων ἐν τῇ Γεωμετρικῇ Προόδῳ, τοῦ πηλίκου π, τοῦ ἐσχάτου ὅρου ω, καὶ τοῦ κεφαλαίου κ, εὑρεῖν τὸν πρῶτον ὅρον α, καὶ τὸν τῶν ὅρων ἀριθμὸν ν.

ΛΥΣΙΣ.

Ὁ μὲν πρῶτος ὅρος ἐστὶν $\alpha = \omega : \pi^{\nu-1}$ (§. 779.), οὗτινος τῇ ἀντικαταστάσει ἐπὶ τὸν ἕτερον γενικὸν τύπον (§. 759.), ἔσται·

$$\kappa = \frac{\pi\omega - \frac{\omega}{\pi^{\nu-1}}}{\pi - 1}$$

$$\kappa\pi - \kappa = \pi\omega - \frac{\omega}{\pi^{\nu-1}}$$

καὶ τοῦ $\frac{\omega}{\pi^{\nu-1}}$ ἐπὶ π πολλαπλασιασθέντος ἐκκύψει

$$\kappa\pi - \kappa = \pi\omega - \frac{\omega\pi}{\pi^{\nu}} \quad (\text{§. } 236.)$$

$$\pi\omega - \kappa\pi + \kappa = \frac{\omega\pi}{\pi^{\nu}}$$

$$\pi^{\nu}(\pi\omega - \kappa(\pi - 1)) = \omega\pi$$

$$\text{Ἄρα, } \pi^{\nu} = \frac{\omega\pi}{\pi\omega - \kappa(\pi - 1)}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 787. Εἰ δέγε τοῦ πρώτου ὅρου, τοῦ πηλίκου, καὶ τοῦ τῆς Προόδου κεφαλαίου δοθέντων, οἱ λοιποὶ δύω πρὸς εὕρεσιν πρόκεινται· ἔσται ὁ μὲν ἔσχατος $\omega = \alpha\pi^{\nu-1}$ (§. 752.), ὁ δὲ τῶν ὅρων ἀριθμὸς διὰ τῆς ἀντεισαγωγῆς

$$\kappa = \frac{\pi^{\nu}\alpha - \alpha}{\pi - 1}$$

$$\kappa\pi - \kappa = \pi^{\nu}\alpha - \alpha$$

$$\kappa\pi - \kappa + \alpha = \pi^{\nu}\alpha$$

$$\pi^{\nu}\alpha = \alpha + (\pi - 1)\kappa$$

$$\pi^{\nu} = \frac{\alpha + \kappa(\pi - 1)}{\alpha}.$$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οἱ ἀνωτέρω τύποι (§. 786. 787.) διὰ τῆς τῶν Λογαρίθμων διὰ τῆς τῶν ἀντεισαγωγῆς ἐφεξῆς ὡσαύτως κατάδηλοι ἔσονται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 788. Ἐν τῇ Γεωμετρικῇ Προόδῳ δοθέντων τοῦ ἐκ τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν ἔσχατον γινομένου, τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ, καὶ τοῦ κατὰ τὸν λόγον πηλίκου, τὸν πρῶτον καὶ ἔσχατον εὑρεῖν ὅρον.

ΛΥΣΙΣ.

Τῶν λοιπῶν ᾗ ἔχουσι μενόντων, ἐὰν τὸ ἐκ τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν ἔσχατον ἐκκύπτον γινόμενον κληθῇ γ, ἔσται ἐκ τῆς τοῦ Προβλήματος συνθήκης $\alpha\omega = \gamma$, καὶ $\omega = \frac{\gamma}{\alpha}$. Ἔστι δὲ $\omega = \alpha\pi^{\nu-1}$ (§. 752.)· ἄρα (§. 110.)

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \alpha\pi^{\nu-1}$$

$$\gamma = \alpha^2\pi^{\nu-1}$$

$$\frac{\gamma}{\pi^{\nu-1}} = \alpha^2$$

$$\text{Ἄρα, } \alpha = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\pi^{\nu-1}}\right)}.$$

Ἐὰν τεθῇ $\pi = 3$, $\nu = 6$, $\gamma = 972$· ἔσται $\alpha = \sqrt{\left(\frac{972}{243}\right)} = \sqrt{4} = 2$.

ΤΥΠΩΝ ΕΝΙΩΝ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΣΙΣ.

Α'.

Γέρων τις τῶν πλουσίων ἐν τῇ τῶν Γενεθλίων αὐτοῦ ἡμέρᾳ 2 χρυσοὺς τοῖς πένησι διένειμεν, ἐπὶ συνθήκῃ τοιᾶδε, ὡς εἰ 6 ἔτεσιν ἑπομένως ζήσειεν, ἑκάστῳ ἐφεξῆς ἔτει διπλοῦν τοῦ παρεληγόντος δοῦναι. Πόσους τοίνυν χρυσοὺς τῷ ἐσχάτῳ, ἤτοι τῷ ἕκτῳ ἔτει διένειμε;

Ἔστι μὲν δὴ ἐνταῦθα $\alpha = 2$, $\pi = 2$, $\nu = 6$· ἄρα (§. 752.)

$$\omega = 2 \times 2^5 = 2 \times 32 = 64.$$

Β'.

Ὁ αὐτὸς Γέρων μετὰ τὸ ἐν τῷ πρώτῳ ἔτει 2 χρυσοὺς διανεῖμαι, ἔν τε τῷ ἐσχάτῳ 64, συνεχῶς ἐν διπλασίονι λόγῳ αὔξων, πόσους χρυσοὺς ἐν ἓξ ἔτεσι διένειμε;

Ὡς ὄντος $\alpha = 2$, $\omega = 64$, $\pi = 2$, ἔσται τὸ κεφάλαιον (§. 759.)

$$\kappa = \frac{64 \times 2 - 2}{1} = 128 - 2 = 126.$$

Γ'.

Δοθέντος τοῦ πρώτου ὅρου $\alpha = 2$, τοῦ ἐσχάτου $\omega = 64$, τοῦ τε τῶν ὅρων ἀριθμοῦ $\nu = 6$, καὶ τοῦ κεφαλαίου $\kappa = 126$, εὑρεῖν τὸ πηλίκον π· τοίνυν (§. 774.)

$$\Pi = \frac{126 - 2}{126 - 64} = \frac{124}{62} = 2.$$

Δ'.

Δοθέντος τοῦ ἐσχάτου τῶν ὅρων $\omega = 64$, τοῦ πρώτου $\alpha = 2$, καὶ τοῦ πηλίκου $\pi = 2$, εὑρεῖν τὸν τῶν ὅρων ἀριθμὸν ν. Ἔνθεντοι (§. 782.)

$$\pi^\nu = \frac{2 \times 64}{2} = 64 = 2^\nu = 2^6.$$

ἡ γὰρ ἐφεξῆς Πρόοδος ∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64, ἐξ ὅρων σύγκειται ἕξ.

Ε'.

Ζατρικίοιο (α) ἀρηϊφίλου πολύμητι νοήτωρ,
Ὃς Περσῶν σοφίης δόξαν ἔλαχες ἔχειν,

(α) Οὕτω γὰρ ἡ Ἀλεξιὰς ἐν τῇ Βυζαντίδι συνέγραψεν, ἣν ἡ τῶν Γάλλων φωνὴ Jeu des Echecs οἶδε. Πεσσοὶ δὲ καὶ Ψῆφοι les pièces du jeu εἴρηνται, ὅθεν καὶ Πεσσονομία, καὶ Πεσσονομεῖν ἄριστος. Ὁ δέγε ἐπὶ τῇ τοῦ Γένους λαμπρότητι οὐχ ἧττον, ἢ ἐπὶ πολυμαθείᾳ κλειζόμενος Ἐκλαμπρότατος Μπεϊζαδὲς κύριος Σκαρ-

Ἄγ' αἴτησον ὅ, τι κεν ἐμεῦ βούλοιο. Ὃδ' ηὔδα·
Θέσκελε Βασιλέων, μνημόσυνον σοφίης
Δῶρον ἔδωκας ἂν ὄλβιον ἀνδράσιν ἔξοχον ἄλλοις,
Νυν δέγ' ἐμοὶ σίτου πάρεχε κόκκον ἕνα
Πεσσοῦ ὑπὲρ πρώτου· δὶς δὲ τόσον, ὑπὲρ ἄλλου·
Ἠδ' ὑπέρ τρίτου, τέτταρας· αὖ τε τόσους
Δίς, ὑπέρ γε τετάρτου· διπλασίως δέγ' ἐφεξῆς
Δός μοι σίτου κόκκους, ὃν τρόπον ἐξεθέμην
Ἑξηκοστοῦ ἄχρι τετάρτου Ζατρικίοιο
Ψήφου, ἀγαθῆς σύμβολον εὐνομίης.

ΛΥΣΙΣ.

Ληπτέον τοίνυν τὸ τῆς Γεωμετρικῆς προόδου κεφάλαιον, ἧς ὁ μὲν πρῶτος ὅρος $\alpha = 1$, τὸ δὲ πηλίκον $\pi = 2$, ὅ, τε τῶν ὅρων ἀριθμὸς $\nu = 64$. Τοίνυν (§. 752.) ὁ ἑξηκοστὸς τέταρτος, ἤτοι ὁ ἔσχατος τῆς προόδου ὅρος ἔσται 2^{63} (§. 772.)· κἀντεῦθεν τὸ τῶν ὅρων τῆς προόδου ταύτης (§. 759.) ἄθροισμα, ἔσται·

$$\frac{2^{64}-1}{2-1} = 18,446,744,073,709,551,615.$$

Ἔδει τοίνυν τὸν τοῦ Ζατρικίου εὑρετὴν Σέσσα ἔχειν πρὸς τὴν τοσούτου σίτου κατάθεσιν 32,768 Πόλεις, πάσας ἐν ἀποθήκαις, ἤτοι σιτοβολίοις· ὥστε εἰ ἡ τοῦ σίτου ποσότης εἰς Πυραμίδα σχηματισθῆναι ἂν εἶχεν, ἀνέ-

λατος ὁ Γκικάδης, ὁ καὶ τὰς προμνησθείσας ὀνοματοθεσίας διὰ γράμματος ἡμῖν κοινώσας, καὶ παιδιάν που τῶν ληστῶν λεγόμενον τὸ Ζατρίκιον φιλοπόνως εὑρὼν ἡμῖν προσεσήμανε.

δωκεν ἂν τηλικαύτην, ἧς τινος τὸ μὲν ὕψος τριῶν ἂν εἴη μηλίων (α), τὸ δὲ μῆκος ὡσαύτως τριῶν, καὶ τὸ πλάτος τριῶν ὁμοίως μηλίων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ.

ΠΕΡΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 789. Ἐκκειμένης Προόδου τινὸς Γεωμετρικῆς, καὶ ὑπ' αὐτὴν ἄλλης Ἀριθμητικῆς, τῆς μὲν δηλονότι ἀπὸ τῆς μονάδος ἀρχομένης, τῆς δ' ἀπὸ τοῦ μηδενικοῦ· οἱ κατὰ τὴν δευτέραν ἔκθεσιν ἀριθμοί, Λογάριθμοι τῶν κατὰ τὴν πρώτην ἀκούουσιν, ὡς τοὺς καθ' ἐκείνην λόγους ἀριθμοῦντες· οἷον

$$\div\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128, \text{ κτλ.}$$
$$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7, \text{ κτλ.}$$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐπεὶ οὖν πρὸ τῆς μονάδος λόγος οὐδεὶς θεωρεῖται, διὰ τοῦτο τὸ μηδενικὸν ταύτης ὑποτέτακται, μεταξὺ δὲ ταύτης καὶ 2, ἐπεὶ εἷς ἐστιν ὁ θεωρούμενος λόγος; [illegible] ἐγράφη ἡ μονάς· κἀπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως. Σημαίνουσιν ἀλλ' οὖν οἱ Λογάριθμοι καὶ τὰς ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ διαστάσεις (§. 216.), ἤτοι τὰ τῶν ἀναλόγων ἀριθμῶν κατὰ φυσικὴν χύσιν ἀπὸ μονάδος ἀρχομένων, καὶ ἐν λόγῳ Γεωμετρικῷ προϊόντων διαστήματα. Ὥστε,

(α) Ἓν μήλιον 2 ἐστὶν Ἱππικῶν. Ἔστι δὲ τὸ μὲν Γερμανικὸν μήλιον δυεῖν ὡρῶν, τὸ δὲ Γαλλικὸν μιᾶς.

ὅσοι λόγοι (μεταξὺ δοτέον τῆς μονάδος καὶ τῶν 128), τοσοῦτοι καὶ οἱ λογάριθμοι, ὅσοι δὲ λογάριθμοι, τοσαῦται καὶ αἱ διαστάσεις.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 790. Ἐξ ὧν ῥᾴδιόν ἐστι συνιδεῖν, ὅτι ἐπὶ τῶν ἐκκειμένων δυεῖν ἐκθέσεων (§. 789.) τῆς δευτέρας οἱ ὅροι, τοὺς πρὸς τὴν μονάδα λόγους τῶν ὑπερκειμένων ὁμοταγῶν ἀριθμοῦσι, κἀκείνων τὰς δυνάμεις εὐτάκτως χωρούσας παριστάνουσι.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 791. Οἱ Λογάριθμοι ποσοτήτων εἰσὶν ἐκθέται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὑποτιθεμένου τοῦ ἐκθέτου οἱασοῦν Γεωμετρικῆς Προόδου $= \mu$ (§. 749.), τῆς τε μονάδος $1 = \mu^0$ (§. 239.), Πρόοδος πᾶσα Γεωμετρικὴ ἀπὸ μονάδος ἀρχομένη ὀρθῶς, ὡς ἐφεξῆς ὑποτυπωθήσεται $\div\div \mu^0 : \mu^1 : \mu^2 : \mu^3 : \mu^4 : \mu^5$, κτλ. Ἐὰν οὖν αὕτη τῇ ἑτέρᾳ Ἀριθμητικῇ (§. 789.) ἐπιγραφῇ, ὡς

$$\div\div \mu^0 : \mu^1 : \mu^2 : \mu^3 : \mu^4 : \mu^5 : \mu^6, \text{ κτλ.}$$
$$\div\ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6, \text{ κτλ.}$$

Εὔδηλόν ἐστι τὴν τῶν λογαρίθμων ἐπὶ τῆς δευτέρας Προόδου σειρὰν, πάντως τὴν αὐτὴν εἶναι τῇ τῶν ἐκθετῶν ἐπὶ τῆς πρώτης. Ἑπομένως ἄρα ὁ ἑκάστου ὅρου τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου λογάριθμος, ὁ τούτου ἐστὶν ἐκθέτης (§. 790.).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 792. Ἐὰν οὖν τεθῇ $\mu = 2$, ἔσται

$$\div\div 2^0 : 2^1 : 2^2 : 2^3 : 2^4 : 2^5 : 2^6 \ldots 2^{\nu+1} \ldots 2^{\nu}.$$
$$\div\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 ; 64 \ldots \text{—} \ldots \text{—}$$
$$\div\ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 \ldots \nu+1 \ldots \nu.$$

Ἐξ ὧν, ἡ μὲν τὴν τῶν ὅρων δηλοῖ πρόοδον, ἡ δὲ τὴν τῶν ἐκθετῶν· ὥστε διὰ τὸ εὐχερέστερον καὶ οὕτωσὶ ταύτας εἴωθε γράφεσθαι

0 . . .	1
1 . . .	2
2 . . .	4
3 . . .	8
4 . . .	16
5 . . .	32
6 . . .	64
7 . . .	128
8 . . .	256
9 . . .	512
κτλ.	κτλ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁ μὲν δὴ Στιφέλιος ἐν τῇ αὐτοῦ Ἀριθμητικῇ (α) τοὺς Λογαρίθμους, ἐκθέτας ἀποκαλεῖ. Ὁ δὲ Βλάκκιος (Adrianus Vlacq), ποσοτήτων συνεχῶς ἀναλόγων Συνδρόμους ἰσοδιαφόρους (β).

(α) Lib. 3. C. 15. p. 249.

(β) Logarithmi ſunt quantitatum continue Proportionalium Comites aequidifferentes.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 793. Ἐὰν οὖν κατὰ τὸ δοκοῦν ἡμῖν ἀριθμός τις ὁ $β$ θετικός τε καὶ μονάδος μείζων (§. 214.) ληφθεὶς, πρὸς διαφόρους ἐξαρθῇ δυνάμεις, ἐκθέτου ὁλοσχεροῦς ἢ κεκλασμένου, καταφατικοῦ ἢ ἀποφατικοῦ, ῥητοῦ ἢ ἀλόγου, εἰς ἀριθμῶν διαφόρων γέννεσιν, οἱ μὲν ἐκθέται οἱ τῶν ἀριθμῶν, τῶν ταῖς δυνάμεσιν ἐκείναις ἴσων, εἰσὶ Λογάριθμοι· ὁ δὲ πρὸς διαφόρους ἐξαρθεὶς δυνάμεις, τοὺς διαφόρους τε ἐκείνους ἀριθμοὺς ἀναδίδων ἀριθμὸς $β$, Βάσις τῶν λογαρίθμων καλείσθω.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οἷον, ἐὰν ἡ Βάσις $β$ πρὸς τὰς τῶν ἐκθετῶν $μ$, $ν$, $σ$, . . . δυνάμεις ἐξαρθεῖσα, τοὺς ἀριθμοὺς Μ, Ν, Σ, . . . ἀναδίδωσιν, ἑπομένως τε εἴη $β^μ = Μ$, $β^ν = Ν$, $β^σ = Σ$, . . . ἔσται $μ$ ὁ τοῦ ἀριθμοῦ Ν λογάριθμος, $ν$ ὁ τοῦ ἀριθμοῦ Ν λογάριθμος, $σ$ ὁ τοῦ ἀριθμοῦ Σ λογάριθμος, κτλ. Ὅπερ οὕτως ἐκτίθεσθαι εἴωθε. $μ =$ λογ. Μ, $ν =$ λογ. Ν, $σ =$ λογ. Σ, κτλ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 794. Σύστημα Λογαριθμικὸν ἀκούει, οἷον ἐπὶ τοῦ $β^μ = Μ$, ἐν ᾧ ὁ τοῦ ἀντὶ Βάσεως ὑποτιθεμένου ἀριθμοῦ $β$ ἐκθέτης $μ =$ λογ. Μ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Αἱ ἀμφοτέρων τῶν Προόδων σειραὶ (§. 789.), οὐδὲν ἄλλο, ὅτι μὴ Σύστημα εἰσὶ Λογαριθμικὸν, ἐν ᾧ Βάσεις τὰ Γεωμετρικὰ εἰσὶ μεγέθη· Ἀλλ' οὖν ἐὰν πρόο-

δος Γεωμετρικὴ ἄλλη τε καὶ ἄλλη ληφθῇ, παραπλησίως καὶ οἱ λογάριθμοι τῶν αὐτῶν λόγων τραπήσονται. Καὶ ἔστιν ἄρα ἐπέκεινα πέρατος, ἃ τῶν Λογαρίθμων κατασκευασθῆναι δύναται τὰ Συστήματα. Οὕτως ἐὰν ἀντὶ τοῦ 1 : 2 (αὐτ.) λόγος ἁπλοῦς τεθῇ ὧδε 1 : 4, ὥστε πρόοδον ἀνακύπτειν τὴν

÷÷ 1 : 4 : 16 : 64 : 256 : 1024 : 4096 . . . . μ.
÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . . . . ν.

ὁ τοῦ 256 λογάριθμος, ὃς ἐπὶ τοῦ ἄχρι τοῦδε ὑποκειμένου Συστήματος (αὐτ.) ἦν 8, ἔσται ἤδη 4. Καὶ κατὰ γένος, οἱ τοῦ προτέρου Συστήματος λογάριθμοι τῶν τοῦ καινοῦ τοῦδε ἔσονται διπλοῖ, τῶν τοῖς αὐτοῖς ἀριθμοῖς προσεπανηκόντων. Ὡσαύτως ἐὰν ἀντὶ τοῦ λόγου 1 : 2 τεθῇ 3 : 9· ἀντὶ δὲ 1 . 2 . 3, κτλ.· ἡ ἰσοδιάφορος τεθῇ 2 . 4 . 6 . 8, κτλ.· ἔσται

÷÷ 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 . . μ
÷ 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 . 16 . . ν

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 795. Ἐὰν οὖν δυοῖν ἀριθμῶν Χ καὶ Υ οἱ προσανήκοντες λογάριθμοι τοῖς στοιχείοις $χ$ καὶ y ὑπὲρ τῆς Βάσεως $β$ ἐπισημειωθῶσιν, ἕξομεν

$$β^χ = X, \text{ καὶ } χ = \text{λογ. } X.$$
$$β^y = Y, \quad y = \text{λογ. } Y.$$

Ἐὰν τοίνυν ἐν ταύταις ταῖς ἐξισώσεσι τεθῇ $X = Y$, ἔσται ὡσαύτως $β^χ = β^y$, κἀντεῦθεν ὁμοίως $χ = y$, καὶ λογ. Χ = λογ. Υ. Εἰ δὲ τεθείη $X > Y$, ἢ $X < Y$, ἔσται $β^χ > β^y$, ἢ $β^χ < β^y$, ἔνθεντοι καὶ $χ > y$, διὰ τὸ εἶναι $\beta > 1$ (§. 793.)· κἀντεῦθεν λογ. $X >$ λογ. Y, ἢ λογ. $X <$ λογ. Y. Τοὔμπαλιν δὲ τεθέντος λογ. $X =$ λογ. Y, ἔσται $X = Y$, εἰδέ γε εἴη λογ. $X >$ λογ. Y ἔσται καὶ $X > Y$, καὶ αὖθις εἴπερ λογ. $X <$ λογ. Y, ἔσται καὶ $X < Y$. Κατὰ γένος τοίνυν, ἐν οἱῳδηποτοῦν λογαριθμικῷ Συστήματι, Βάσει δοθείσῃ β σημαινομένῳ, τοῖς ἴσοις ἀριθμοῖς ἴσοι λογάριθμοι, ἀνίσοις ἄνισοι, μείζονες μείζοσιν, ἐλάττονες ἐλάττοσιν ἀντιστοιχοῦσι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 796. Ἐὰν μὲν οὖν Α'. ἐν τῇ ἐξισώσει $\beta^{\chi} = X$ (§. 795.) τεθῇ ὁ ἐκθέτης $\chi = 0$, ἔσται $X = 1$ (§. 239.) ἑπομένως τε $0 =$ λογ. 1· τουτέστιν ἐν οἱῳδηποτοῦν λογαριθμικῷ συστήματι ἡ μονὰς ὑπὸ τοῦ μηδενικοῦ λογαριθμεῖται. Ὡσαύτως τεθέντος $\chi = 1$, ἔσται $X = \beta$, ἑπομένως τε $1 =$ λογ. β· ἤτοι ἐν οἱῳδηποτοῦν λογαριθμικῷ συστήματι, ὁ τῆς Βάσεως λογάριθμος ἰσοῦται μονάδι. Ἐὰν δὲ Β'. τεθῇ $\chi = -1$ ἔσται $X = \beta^{-1}$, κἀντεῦθεν $-1 =$ λογ. β^{-1}. Ἔστι δὲ $\beta^{-1} = \frac{1}{\beta}$ (§. 246.)· ἄρα ἔσται καὶ λογ. $\frac{1}{\beta} = -1$, λογ. $\frac{1}{\beta^2} = -2$, λογ. $\frac{1}{\beta^3} = -3$, κτλ. Τουτέστιν, ἐν οἱῳδηποτοῦν λογαριθμικῷ συστήματι, ἱοῦ ἡ Βάσις ἐλάσσων ἐστὶ μονάδος, καὶ ἑπομένως κλάσμα γνήσιον (§. 162.), ὁ ταύτης λογάριθμος ἀποφατικὸς ἔσται, ἑπομένως $X < 1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 797. Ὁ τοῦ Γινομένου Λογάριθμος, ἴσος τῷ ἀθροίσματι τῷ ἐκ τῶν Λογαρίθμων τῶν Παραγόντων.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ μὲν δὴ $\beta^{\mu} = M$, $\beta^{\nu} = N$ (§. 793. Σχ.), ἔσται ὡσαύτως $\beta^{\mu} \times \beta^{\nu} = \beta^{\mu+\nu}$ (§. 237.), ἤτοι $\beta^{\mu+\nu} = MN$ (§. 111.). Ἄρα $\mu + \nu =$ λογ. MN (§. 793.). Ἔστι δὲ $\mu =$ λογ. M, καὶ $\nu =$ λογ. N (αὐτ. Σχ.)· Ἄρα λογ. $MN =$ λογ. $M +$ λογ. N (§. 119.). Ο. Ε. Δ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τουτὶ τὸ Θεώρημα, κἀπὶ τῶν Γινομένων ἐκ πλειόνων Παραγόντων, κρατήσει λεγόμενον. Τεθέντος γὰρ $N = \Delta Z$, ἔσται λογ. $NN =$ λογ. $M +$ λογ. $\Delta Z =$ $M +$ λογ. $\Delta +$ λογ. Z.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 798. Ἐπεὶ οὖν τὸ μηδενικὸν σημεῖον τὴν μονάδα λογαριθμεῖ (§. 796. Α'.), ἔσται ἡ μονὰς πρὸς θάτερον τῶν Παραγόντων, ὡς ὁ ἕτερος πρὸς τὸ Γινόμενον (§. 102.). Ὁ τοῦ Γινομένου τοίνυν λογάριθμος, ὁ τέταρτος ἐστὶ τῶν ἰσοδιαφερόντων, πρὸς τὸν τῆς μονάδος λογάριθμον, καὶ πρὸς τοὺς τῶν Παραγόντων λογαρίθμους (§. 789.)· ἔστι δὲ ὁ αὐτὸς ἴσος τῷ ἀθροίσματι τῷ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου, πλὴν τοῦ πρώτου, ὧδε δὲ ἐξ ὑποθέσεως πρῶτος ἐστὶ τὸ μηδέν· Ἄρα ὁ τοῦ Γινομένου λογάριθμος, ἰσοῦται τῷ ἐκ τῶν λογαρίθμων τῶν Παραγόντων ἀθροίσματι οἷον $4 + 2 =$ λογ. 16×6, ἤτοι $6 =$ λογ. 64.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 799. Ὡς ὄντος ἄρα τοῦ τετραγώνου, ἐκ τῆς ῥίζης ἐφ' ἑαυτὴν γινομένου (§. 196.), ὁ τοῦ τετραγώνου λογάριθμος διπλοῦς ἐστὶ τοῦ τῆς ῥίζης, οἷον $8 \times 8 = 64$, τοῦ μὲν 8 λογ. 3, τοῦ δὲ 64 λογ. 6. Ὁ δὲ τοῦ κύβου, τριπλοῦς· ὁ δὲ τοῦ διτετραγώνου, τετραπλοῦς· καὶ ἐφεξῆς οὕτω.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 800. Ὁ τοῦ Πηλίκου Λογάριθμος, ἴσος ἐστὶ τῇ διαφορᾷ τῶν Λογαρίθμων τοῦ Διαιρέτου καὶ τοῦ Διαιρετέου.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστι μὲν γὰρ $\beta^{\mu} = M$, καὶ $\beta^{\nu} = N$ (§. 793. Σχ.)· ἄρα $\beta^{\mu-\nu} = \frac{M}{N}$ (§. 236. 133.). Τοίνυν $\mu - \nu =$ λογ. $\frac{M}{N}$, ἢ ἐὰν ἀντὶ τῶν μ καὶ ν, τὰ τούτων ἀντεισαχθῶσιν ἰσοδύναμα λογ. M καὶ λογ. N, ἔσται λογ. $\frac{M}{N} =$ λογ. M — λογ. N. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 801. Ἐπεὶ μὲν δὴ τὸ πηλίκον ταυτοῦται τῷ κλάσματι (§. 158.), ἔσται ἄρα καὶ ὁ κλάσματος οἱουδηποτοῦν λογάριθμος ἴσος τῇ διαφορᾷ τῶν λογαρίθμων τοῦ τε ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ· τουτέστι συγκείσεται ἐκ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμητοῦ, παρὰ τὸν τοῦ παρονομαστοῦ λογάριθμον (§. 800.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 802. Ἐπεὶ οὖν τὸ μηδενικὸν σημεῖον τὴν μονάδα λογαριθμεῖ (§. 796. Α'.), ἔσται ἡ μονὰς πρὸς τὸ πηλίκον, ὡς ὁ διαιρέτης πρὸς τὸν διαιρετέον (§. 126.). Ἄρ' οὕτω, ὁ τοῦ πηλίκου λογάριθμος, ὁ τέταρτος ἐστὶ τῶν ἰσοδιαφερόντων πρὸς τοὺς τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ διαιρετέου λογαρίθμους, ἔτι δὲ καὶ πρὸς τὸν τῆς μονάδος (§. 789.). Ἀλλὰ γὰρ τῶν ἰσοδιαφερόντων ὁ τέταρτος ἐστὶ τὸ ὑπὸ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου πρὸς τὸν πρῶτον γινόμενον, ὁ δὲ πρῶτος, ἤτοι ὁ τῆς μονάδος, ἐστὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν μηδέν. Ἄρα ὁ τοῦ πηλίκου λογάριθμος σύγκειται ἐκ τοῦ κατὰ τὸν διαιρετέον λογαρίθμου, πλὴν τοῦ κατὰ τὸν διαιρέτην. Οἷον, ἐὰν 512 διὰ τοῦ 8 διαιρεθῇ, ἐκκύψει πηλίκον ὁ 64· ἔστι δὲ ἡ τῶν λογαρίθμων διαφορὰ $9 - 3 = 6$, τῷ τοῦ πηλίκου 64 λογαρίθμῳ ἴση.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 803. Ὁ τῆς Δυνάμεως M^{σ} Λογάριθμος, ἴσος ἐστὶ τῷ κατὰ τὴν Ῥίζαν M Λογαρίθμῳ, πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὸν τῆς Δυνάμεως ἐκθέτην σ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς ὄντος $\beta^{\mu} = M$ (§. 793. Σχ.), ἔσται ὡσαύτως $\beta^{\sigma\mu} = M^{\sigma}$ (§. 440.). Ἄρα $\sigma\mu =$ λογ. M^{σ}, ἢ $\sigma \times$ λογ. M = λογ. M^{σ} (§. 793. Σχ.). Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 804. Ὁ τῆς δυνάμεως τοίνυν λογάριθμος, ἐκκύπτει, ἐὰν ὁ τῆς ῥίζης λογάριθμος, ἐπὶ τὸν τῆς δυνάμεως βαθμοδείκτην πολλαπλασιασθῇ ἀριθμόν· ὥστε δεῖν αὐτὸν ἐν ἑαυτῷ, κατὰ τὰς ἐν τῷ βαθμοδείκτῃ μονάδας προστεθῆναι (§. 237.)· οἷον λογ. $(\alpha^2)^3 = 3 \times$ λογ. $\alpha^2 = 3 \times 2 = 6 =$ λογ. α^6. Ἔσται τοίνυν τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ ἐκθέτου τῆς δυνάμεως καὶ τοῦ τῆς ῥίζης λογαρίθμου, τὸν τῆς δυνάμεως εἶναι λογάριθμον (§. 803.)· οἷον ἐπὶ $1:3 = 3:9$, ἔσται $3 \times 3 = 9$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 805. Ἔστιν ἄρα ἡ μονὰς πρὸς τὸν τῆς δυνάμεως ἐκθέτην, ὡς ὁ τῆς ῥίζης λογάριθμος πρὸς τὸν τῆς δυνάμεως (§. 200. 209.)· οἷον $8^3 = 512$, ἄρα $1:3 = 3:9$.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 806. Ὁ τοῦ Ῥιζικοῦ μεγέθους $\sqrt[\sigma]{M}$ Λογάριθμος, ἴσος ἐστὶ τῷ τῆς Δυνάμεως M Λογαρίθμῳ, διαιρεθέντι διὰ τοῦ κατὰ τὸ Ῥιζικὸν ἐκθέτου σ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ $\beta^{\mu} = M$ (§. 793. Σχ.), ἔσται ὡσαύτως $\beta^{\frac{\mu}{\sigma}} = \sqrt[\sigma]{M}$ (§. 441.)· κἀντεῦθεν $\frac{\mu}{\sigma} =$ λογ. $\sqrt[\sigma]{M}$. Ἄρα $\frac{\text{λογ. M}}{\sigma} =$ λογ. $\sqrt[\sigma]{M}$ (§. 293.). Ὡσαύτως λογ. $\sqrt[3]{\alpha^6} = \frac{1}{3} \times$ λογ. $\alpha^6 = \frac{1}{3} \times 2 = 2 =$ λογ. α^2. Ο. Ε. Δ.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

Ἐκ τῆς τοῦ Θεωρήματος τούτου δείξεως δηλοῦται, τὸν τῶν λογαρίθμων ὑπολογισμὸν ἐπὶ μόνων τῶν Πρώτων καθ' ἑαυτοὺς ἀριθμῶν (§. 152.) 2, 3, 5, 7, 11, κτλ. δεῖν περαίνεσθαι. Ἐπὶ γὰρ τῶν λοιπῶν διὰ

μόνης τῆς τῶν συνθέτων προσθέσεως, ἡ ἐκείνων προσδιορίζεται δύναμις.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

Ἐκθέτης καὶ Λογάριθμος ταυτόν. Διενήνοχε δὲ, ᾗ ὁ μὲν λογάριθμος τοὺς λόγους δείκνυσι, πόσοι· ὁ δ' ἐκθέτης, ποσάκις ἕκαστος μέχρι μονάδος ἐπὶ τῆς ἰδίας ῥίζης διαιρετέος (§. 209.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 807. Ἐπεὶ τοίνυν ὁ τῆς δυνάμεως λογάριθμος ἐκκύπτει, ἐὰν ὁ τῆς ῥίζης λογάριθμος, ἐπὶ τὸν τῆς δυνάμεως πολλαπλασιασθῇ ἐκθέτην (§. 804.)· ὁ τῆς ῥίζης ἄρα λογάριθμος ἐκληφθήσεται, ἐὰν ὁ τῆς δυνάμεως λογάριθμος διὰ τοῦ ἐκθέτου τῆς αὐτῆς διαιρεθῇ (§. 136.)· ὥστε ἐπεὶ τὸ τῶν λογαρίθμων $1 + 2$ ἄθροισμα, ὁ τοῦ γινομένου ἐκ τῶν $2 \times 4 = 8$ ἐστὶ λογάριθμος· ἔσται ὡσαύτως καὶ $7 = 2 + 5$, ὁ τοῦ $128 = 4 \times 32$. Πόῤῥω ὁ τῆς τετραγωνικῆς τοῦ 8 ῥίζης λογάριθμος 3 ἥμισυς ἐστὶ τοῦ 6 λογαρίθμου τοῦ 64 τετραγώνου, ἔσται ἄρα καὶ ὁ τῆς κυβικῆς ῥίζης 4 λογάριθμος 2 ὑποτριπλάσιος τοῦ κατὰ τὸν κύβον 64 λογαρίθμου 6. Ὡσαύτως ἐπεὶ $1:3 = 3:9$ (§. 805.), ἔσται καὶ $3:9 = 1:3$ (§. 126.), ἤτοι $9:3 = 3:1$ ἄρα $\frac{9}{3} = \frac{3}{1} = 3$. Ἔνθεν τοι ἐπεὶ ὁ τοῦ τετραγώνου λογάριθμος, διπλοῦς ἐστὶ τοῦ τῆς ῥίζης, ὁ δὲ τοῦ κύβου τριπλοῦς (§. 799.), κτλ. ἔσται κἀνάπαλιν ὁ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης παντὸς ἀριθμοῦ λογάριθμος ἴσος τῷ ἡμίσει τοῦ κατὰ τὸν ἀριθμὸν λογαρίθμου· καὶ ὁ τῆς κυβικῆς, τριτημορίῳ· καὶ ὁ ἐκ τῆς τετάρτης δυνάμεως, τεταρτημορίῳ· οὕτω κἀν τοῖς λοιποῖς.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 808. Ἐὰν ἐν τῇ ἐξισώσει $\beta^{\chi} = X$ (§. 795.), καὶ λογ. $X = \chi$, ληφθῇ X μονάδος μείζων (§. 243. Β'.), ἡ τοῦ ἐκθέτου χ δύναμις καταφήσει πάντως (§. 793.), ἔνθεντοι ὡσαύτως καὶ λογ. X ὑπὲρ οἱουδηποτοῦν ἀριθμοῦ $X > 1$ θετικὸς ἐξ ἀνάγκης ἐκκύψει. Εἴδγε ἐν τῇ αὐτῇ ἐξισώσει ληφθείη $X < 1$ (§. 243. Α'.), ἤτοι κλάσμα γνήσιον (§. 162.), καὶ χ ἀποφατικὸν ἑπομένως ἀναδοθήσεται· Ἄρα κατὰ γένος, ἐν οἱῳδηποτοῦν λογαριθμικῷ συστήματι, οἱ τῶν μονάδος μειζόνων ἀριθμῶν λογάριθμοι κατὰ θέσιν τυγχάνουσιν, οἱ δὲ τῶν μονάδος ἐλασσόνων κατ' ἀπόφασιν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 809. Ὡσαύτως ἐὰν ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως (§. 795.) ὁ X ἀριθμὸς ἀπείρως ὑποτεθῇ αὔξων, ἑπομένως τε καὶ ὁ ἐκθέτης χ, ἄρα ὁμοίως καὶ λογ. X ἐπ' ἄπειρον ἐπιμεγεθυνθήσεται· ἤτοι ἐὰν $X = \infty$ ληφθῇ, λογ. X ἀπείρως ἔσται μέγας. Τοὔμπαλιν ἐὰν $X = 0$ τεθῇ, ἔσται ἐν τῇ ἐξισώσει $\beta^{\chi} = 0$, ἡ τοῦ χ δύναμις, ἤτοι λογ. $0 = -\infty$. Τουτέστιν ἐν οἱῳδηποτοῦν λογαριθμικῷ συστήματι Βάσεως β (§. 793.) ὁ τοῦ ἀπείρως αὔξοντος ἀριθμοῦ λογάριθμος, ἀπείρως μείζων, καὶ δὴ κατὰ θέσιν ἔσται· Τοὐναντίον δὲ ὁ τοῦ μηδενικοῦ λογάριθμος ἀπείρως μείζων, ἀλλ' ἀποφατικὸς ἐκκύψει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 810. Δῆλον τοίνυν ἐκ τῶν ῥηθέντων (§. 808.), τὸ μάλιστα ἁρμόζον εἶναι, ἀντὶ Βάσεως, ἀριθμόν τινα ἢ μέγεθος μονάδος μείζω, καὶ ἑπομένως θετικὸν προσλαμβάνειν· οἱ γὰρ θετικοὶ ἀριθμοὶ πραγματώδεις ἐνδίδουσι λογαρίθμους. Τοὐναντίον δὲ οἱ τῶν ἀποφατικῶν ἀριθμῶν λογάριθμοι ἐπὶ τὸ ἀδύνατον ῥέπουσιν. Ὅσῳ γὰρ μείζων ὁ ἀριθμός ἐστι, τοσούτῳ μείζων καὶ ὁ τούτῳ ἀντιστοίχων λογάριθμος ἐκληφθήσεται· ἐπεὶ X ἐν τῇ προεκτεθείσῃ ἐξισώσει $\beta^{\chi} = X$, τοσούτῳ μεῖζον ἔσται, ὅσῳ μεῖζον χ ὑποτεθήσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 811. Ἔσται τοίνυν καὶ λογ. $\beta^{-\chi} = -\chi$ λογ. β (§. 808.)· ἄρα λογ. $\beta^{-\chi} =$ λογ. $\frac{1}{\beta^{\chi}}$ (§. 796. Β'.) $=$ λογ. $1 -$ λογ. $\beta^{\chi} = -\chi$ λογ. β· ἔστι γὰρ λογ. $1 = 0$ (§. 796. Α'.). Ἔνθεντοι ἐὰν ἐν τῷ λογαριθμικῷ Συστήματι τεθῇ $\beta = 10$, ὁ δὲ τῆς Βάσεως λόγος $10 : 1$, ἔσται ὁ προσανήκων λογάριθμος $= 1$. Ὥστε ἐπὶ τοῦ λογαριθμικοῦ Συστήματος, οὗ οἱ δεκαδικοὶ ὅροι συνεχῶς καθ' ὑπόθεσιν ἐπιμεγεθύνονται, τὸν λογάριθμον τοσαύτας θετικὰς ἐμπεριειληφέναι μονάδας, ὁπόσα τῷ, ᾧ προσανήκει ἀριθμῷ, τὰ μηδενικὰ πρόσεισιν. Εἰδ' οὖν τῆς προόδου ἑκατέρωθεν ἐπ' ἄπειρον κατὰ τὸ συνεχὲς προαγομένης, οἱ κλασματωδῶς ἐκτιθέμενοι ὅροι ὑπεναντίᾳ, τῇ καθ' ἣν οἱ ὁλοσχερεῖς προβαίνοντες, ἀποφατικοὺς καὶ τοὺς τοῖς κατὰ τὴν δεκαδικὴν πρόοδον μηδενικοῖς ἰσαρίθμους ἐκδώσουσι λογαρίθμους. Τοιγαρουν τῶν οὕτως ἐχουσῶν ποσοτήτων τῆς καταστάσεως διὰ τῶν σημείων $+$ καὶ $-$ διακρίνεσθαι Φιλούσης, ἔσται·

$$\frac{1}{\beta^4} : \frac{1}{\beta^3} : \frac{1}{\beta^2} : \frac{1}{\beta} : 1 : \beta : \beta^2 : \beta^3 : \beta^4, \text{ κτλ.}$$

$$\beta^{-4} : \beta^{-3} : \beta^{-2} : \beta^{-1} : \beta^0 : \beta^1 : \beta^2 : \beta^3 : \beta^4,$$

$$\tfrac{1}{10000} : \tfrac{1}{1000} : \tfrac{1}{100} : \tfrac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000$$

$$10^{-4} : 10^{-3} : 10^{-2} : 10^{-1} : 10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4$$

$$\text{Λογ.} -4 \,.\, -3 \,.\, -2 \,.\, -1 \,.\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4$$

Ἔνθα ἐπεὶ λογ. $10^0 =$ λογ. $1 = 0$ (§. 796. Α΄.), ἔσται καὶ λογ. $10^1 = 1$, λογ. $\frac{1}{10} =$ λογ. $0.1 = -1$ (§. 796. Β΄.), λογ. $10^2 =$ λογ. $100 = 2$, λογ. $\frac{1}{10^2} =$ λογ. $0.01 = -2$, λογ. $10^3 =$ λογ. $1000 = 3$, λογ. $\frac{1}{10^3} =$ λογ. $0.001 = -3$· καὶ ἐν γένει, λογ. $10^\nu = \nu$, λογ. $\frac{1}{10^\nu} = -\nu$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 812. Ἀριθμοῦ Λογάριθμος, ὁ ἐκθέτης ἐστὶ τῆς τοῦ ἀριθμοῦ δυνάμεως, ἥτις τῷ ἀριθμῷ ἐκείνῳ ἰσοῦται· οἷον ἐπεὶ $10^2 = 100$, ἔσται $2 =$ λογ. 100.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 813. Ἐὰν ἐν τῇ Γεωμετρικῇ προόδῳ $\div\!\div\ \mu^0 : \mu^1 : \mu^2 : \mu^3 : \mu^4$, κτλ. ἤτοι $\div\!\div\ 1 : 2 : 4 : 8 : 16$, κτλ. μέσος εὑρεθῇ ἀνάλογος μεταξὺ δυοῖν ὅρων ἀμέσως ἐφεπομένων, οἷον μεταξὺ 1 καὶ 2, ἢ 2 καὶ 4, οἱ μέσοι οὗτοι ἀνάλογοι, ὡς καὶ οἱ λοιποὶ ὅροι, τοὺς ἑαυτῶν ἕξουσιν ἐκθέτας, οἵτινες τῶν μέσων τουτωνὶ ἀναλόγων λογάριθμοι ἔσονται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 814. Ἐὰν τοίνυν μεταξὺ τῶν ἀμέσως ἀλλήλους διαδεχομένων ἐν τῇ Γεωμετρικῇ προόδῳ ὅρων, ληφθῶσι μέσοι Γεωμετρικῶς ἀνάλογοι· ληφθῶσι δ᾽ ὡσαύτως κἀπὶ τῶν ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ προόδῳ ἀμέσως ἐφεπομένων ὅρων, μέσοι Ἀριθμητικῶς ἀνάλογοι. Οἱ μέσοι Ἀριθμητικῶς ἀνάλογοι, τῶν ἀντιστοιχούντων μέσων Γεωμετρικῶς ἀναλόγων λογάριθμοι ἔσονται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ταύταις τοίνυν ταῖς ἀρχαῖς (§. 813. 814.), οἱονεὶ πειθανάγκαις οἱ Γεωμέτραι ἑπόμενοι, τὴν τῶν λογαριθμικῶν Πινάκων, ἢ Κανονίων κατασκευὴν ἐπεννόησαν. Εἰ γὰρ καὶ πρὸς τὴν τούτων κατασκευὴν ἡμῖν ἐξέσται οἱανδηποτοῦν Γεωμετρικὴν κατὰ τὸ δοκοῦν ἐκλαβεῖν πρόοδον, μέντοιγε δέον ἐκείνην πάντων τῶν κατὰ Φυσικὴν χύσιν ἰόντων ἀριθμῶν περιεκτικὴν τυγχάνειν, ἄλλως γὰρ τὰ τῶν Κανονίων τοῦ ἐν γένει ἀμοιρήσουσι τύπου. Ἐὰν οὖν τῆς ἐν λόγῳ διπλασίῳ ἰούσης προόδου $\div\!\div\ 1 : 2 : 4 : 8 : 16$, κτλ. ληφθείσης ἀνιχνευθῶσι μέσοι Γεωμετρικοὶ μεταξὺ 1 καὶ 2, 2 καὶ 4, 4 καὶ 8, κτλ. πληρωθήσονται οὕτω τὰ τῶν ὅρων ἀφεστῶτα κενὰ διαστήματα, διὰ τῶν παρεμπιπτόντων μέσων Φυσικῶν ἀριθμῶν. Πρὸς μείζονα ἀλλ᾽ οὖν τῆς ἐπιπόνου τῶν ἐκ τῶν κατὰ Φυσικὴν τάξιν προϊόντων ἀριθμῶν συγκειμένων λογαριθμικῶν Κανονίων συνεχείας εὐχέρειαν, λαμβάνεσθαι εἴωθε Γεωμετρῶν Παισὶ πρόοδος Γεωμετρικὴ ἀπὸ μονάδος ἀρχομένη, ἔν τε δεκαπλασίονι λόγῳ αὔξουσα, οἷον $10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5$, κτλ. ἥτις τῇ τῶν Ἀριθμητικῶς ἀναλόγων σειρᾷ ἀντιστοιχοῦσα, ἔσται·

0	1
1	10
2	100
3	1000
4	10000
5	100000.

Οἷον 10^2 ἡ δεκὰς ἐπὶ δευτέραν ἐξαρθεῖσα δύναμιν τὸν 100 προβάλλεται ἀριθμόν, ὅς τις καὶ ἐπιβάλλον τῆς δυνάμεως καλεῖται, ἥτις δύναμις 10^2 ἰσοῦται τῷ 100 ἀριθμῷ. Ὁ τοίνυν 2 ἐκθέτης, λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 100 ἀκούει (§. 812.)· Ἔνθεντοι, οἱ μὲν ἀριθμοὶ ἐν τῇ Γεωμετρικῇ προόδῳ δεκαδικῶς αὔξουσιν, οἱ δ' ἐπανήκοντες λογάριθμοι ἐν τῇ Φυσικῇ τῶν ἀριθμῶν τάξει. Οὗ δὴ κειμένου, οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τῶν κατὰ πρόοδον δεκαδικὴν 1, 10, 100, 1000, 10000, κτλ. ἰόντων, ἀριθμοὶ εἰσὶν ὁλοσχερεῖς Φυσικῇ τάξει προβαίνοντες 0, 1, 2, 3, 4, κτλ. ὅ, τε λογάριθμος τοσαύτας ἐμπεριείληφε μονάδας, ὁπόσα τῷ ἀριθμῷ, ᾧ προσανήκει, τὰ μηδενικὰ ἔνεισιν. Οἱ δὲ τῶν ἀριθμῶν λογάριθμοι τῶν μεταξὺ γινομένων, κλάσματα γίνονται δεκαδικά, ὡς ἐπὶ τοῦ ἐφεξῆς Θεωρήματος δείκνυται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 815. Οἱ τῶν ἐν τῇ Γεωμετρικῇ Προόδῳ ἐμπιπτόντων ἀριθμῶν Λογάριθμοι, ἀριθμοὶ εἰσὶν ὁλοσχερεῖς καὶ σχετικοὶ πρὸς τοὺς ἐκεί-

νων ὅρους· οἱ δὲ μεταξὺ τῶν τῆς Γεωμετρικῆς Προόδου ὅρων θεωρούμενοι, κλασματώδεις.

ΔΕΙΞΙΣ.

Γεωμετρικῆς οὔσης τῆς ἐκθέσεως τῆς δεκαδικῆς, πᾶσα πρὸς τὸ δοκοῦν ληφθεῖσα Ἀριθμητικὴ Πρόοδος ταύτην λογαριθμήσει οἷον·

∷ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000

÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6.

Ἐπεὶ τοίνυν τὸ μηδενικὸν τῆς ἐπ' αὐτὸ μονάδος ἐστὶ λογάριθμος (§. 796.), ἥ, τε μονὰς τῆς ἐπ' αὐτὴν δεκάδος, οἱ μεταξὺ 1 καὶ 10 ἐμπίπτοντες ἀριθμοί, ἤτοι οἱ ἀπὸ 2 μέχρι τῶν 9, μείζονες μὲν εἰσὶ μονάδος, ἐλάττονες δὲ τῶν 10, ἑπομένως τε οἱ μεταξὺ τούτων τῶν ἀριθμῶν λογάριθμοι μείζονες μὲν 0, ἐλάσσονες δὲ μονάδος ἐκκύψουσιν. Ἀλλ' οὖν ποσότητες οἱαιδηποτοῦν μείζονες μὲν τοῦ μηδενικοῦ, ἐλάσσονες δὲ μονάδος, οὐκ ἂν ἄλλως παρασταθεῖεν, ὅτι μὴ διὰ κλασμάτων (§. 214. 246.)· Ἄρα οἱ μεταξὺ 1 καὶ 10 παρεμπίπτοντες ἀριθμοί, λογαρίθμους πλουτοῦσιν, ὧν ἕκαστος κλάσμα ἐστὶ συνεχῶς μὲν αὔξον, ἕκαστον δὲ ἀεὶ μονάδος ἔλαττον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 816. Οἱ τοῖς μεταξὺ τοίνυν 10 καὶ 100 (ἀπὸ 11 μέχρις 99) ἀριθμοῖς ἐπανήκοντες λογάριθμοι, μεταξὺ τῶν λογαρίθμων 1 καὶ 2 ἔσονται, ἤτοι μείζονες μὲν τῆς μονάδος, ἐλάττονες δὲ τῶν δύω, ἑπομένως τε κλασματίαι μετὰ μονάδος καὶ κλάσματος· ὡσαύτως καὶ οἱ μεταξὺ 100 καὶ 1000 (ἀπὸ 101 μέχρις 999) παρεμπίπτοντες λογάριθμοι, ἐκ δυοῖν μονάδων καὶ κλασματώδους συγκείσονται ἀριθμοῦ· καὶ οἱ μεταξὺ 1000 καὶ 10000, (ἀπὸ 1001 μέχρις 9999), ἐκ τριῶν μονάδων καὶ κλάσματος· ὥστε ἐν γένει τὸν ὁποιουοῦν ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ λογάριθμον, ἐκ τοσούτων ὁλοσχερῶν μονάδων μετὰ κλάσματος συγκεῖσθαι, ὅσων χαρακτήρων ὁ ἀριθμὸς ἐκεῖνος ἑαυτῷ ἐμπεριείληφε πλὴν 1. Τουτέστι, τὸν ἀριθμὸν τῶν ὁλοσχερῶν μονάδων τῶν ἐμπεριεχομένων τῷ λογαρίθμῳ, παρὰ μονάδα ἴσον εἶναι τῷ ἀριθμῷ τῶν χαρακτήρων, δι' ὧν ἐκδηλοῦνται αἱ ὁλοσχερεῖς μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ, ᾧπερ ὁ λογάριθμος προσήκων ἐστίν· οἷον τῶν μὲν ἀπὸ 10 μέχρις 100 χαρακτηριστικόν ἐστιν ἡ μονὰς ἤτοι, $2-1$· τῶν δ' ἀπὸ 100 ἄχρι 1000 χαρακτηριστικὸν ἡ δυὰς, ἤτοι $3-1=2$· καὶ ἀφεξῆς οὕτως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 817. Τιθεμένης μὲν δὴ, ἐν τῷ πρὸς χρῆσιν λογαριθμικῷ Συστήματι, τῷ Βριγγιανῷ, τῆς Βάσεως $\alpha = 10$ (§. 810.), ἐπεὶ $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$, ἔσται λογ. $10 = 1$ (§. 793.), λογ. $100 = 2$, λογ. $1000 = 3$, λογ. $100000 = 4$, κτλ. Ὡσαύτως, ἐπεὶ $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ (§. 240.), $10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$, $10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10}$, $10^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{10^{\mu}}$, ἔσται $\frac{1}{2} =$ λογ. $\sqrt{10}$, $\frac{1}{3} =$ λογ. $\sqrt[3]{10}$, $\frac{1}{4} =$ λογ. $\sqrt[4]{10}$, $\frac{\mu}{\nu} =$ λογ. $\sqrt[\nu]{10^{\mu}}$. Τουτέστιν οἱ τῶν τῆς Βάσεως ἐντελῶν δυνάμεων λογάριθμοι, ἀριθμοὶ εἰσὶν ὁλοσχερεῖς ῥητοί· οἱ δὲ τῶν ταύτης ἀτελῶν, ἤτοι

ἀλόγων, κλασματώδεις ῥητοὶ καθεστήκασι (§. 604. Σχολ.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐφ' ᾧ τοίνυν Γεωμετρῶν Παῖδες τὴν τῶν κλασμάτων ἀταξίαν καὶ σύγχυσιν ἀποφύγωσι, τοὺς τῶν τῆς δεκαδικῆς προόδου ὅρων λογαρίθμους, πρὸς δεκαδικὰ διὰ τὸ εὐχερέστερον μετήγαγον κλάσματα, ὧν παρονομαστής ἐστι 1000000· ὥστε ἡ δεκαδικῶς ἐκτεθειμένη Πρόοδος.

1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000, κτλ.
0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . . .

ἤτοι	0	1
	1	10
	2	100
	3	1000
	4	10000
	κτλ.	κτλ.

ἐπὶ τήνδε σὺν ἑπτὰ μηδενικοῖς μετενήνεκται.

1	: 10	: 100	: 1000
0.0000000	1.0000000	2.0000000	3.0000000

τουτέστι

0.0000000	1
1.0000000	10
2.0000000	100
3.0000000	1000
4.0000000	10000
κτλ.	κτλ.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 818. Ὁ πρῶτος τῶν λογαρίθμων χαρακτὴρ, ἤτοι τὸ λαιόθεν ἀπὸ τῶν λοιπῶν γραμμιδίῳ, διαστελλόμενον, ἢ καὶ στιγμῇ ὑποστιζόμενον σημεῖον, Χαρακτηριστικὸν καλείσθω.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Καὶ γὰρ ἐμφαίνει ἐκ πόσων, μετὰ τὸ πρῶτον, χαρακτήρων, ὁ ἀριθμὸς, οὗτινος ἐστὶ λογάριθμος, σύγκειται. Διὰ τοῦτο καὶ πάντων τῶν ἀπὸ 1 μέχρι 10 ἀριθμῶν ἕκαστος, ἰδίου λογαρίθμου Χαρακτηριστικὸν ἔχει 0· ἀπὸ δὲ 10 μέχρις 100, 1· καὶ ἀπὸ 100 ἄχρι 1000, 2· κτλ. (§. 816.). Τούτου χάριν τὸ Χαρακτηριστικὸν τόσας ἐν ἑαυτῷ περιέχει μονάδας, πλὴν μιᾶς, ἐξ ὅσων ἐν γένει ὁ λογαρίθμῳ ἀντιστοιχῶν φυσικὸς ἀριθμὸς χαρακτήρων σύγκειται παρὰ ἕνα· ὥστε τεθέντος τοῦ Χαρακτηριστικοῦ $= \chi$, τοῦ τῶν χαρακτήρων, οἷς ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς συνίσταται, ἀριθμοῦ $= \alpha$, ἔσται ἐν γένει $\chi = \alpha - 1$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 819. Οἵῳ μὲν δὴ τρόπῳ ἀπὸ τοῦ Χαρακτηριστικοῦ τοῦ λογαρίθμου, ὁ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος φυσικοῦ ἀριθμοῦ τῶν χαρακτήρων ἀριθμὸς ἐκλαμβάνεται, οὕτως ἀνάπαλιν ἀπὸ τοῦ κατὰ φυσικὴν τάξιν τῶν σημείων ἀντιστοιχοῦντος ἀριθμοῦ, τὸ Χαρακτηριστικὸν τοῦ ἀνήκοντος λογαρίθμου ὑπεμφαίνεται. Ὥσπερ γὰρ τὸ Χαρακτηριστικὸν μονάδι ἐπαυξηθὲν τοὺς τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τῷ λογαρίθμῳ ἀριθμοῦ χαρακτῆρας, διὰ τῶν ἐν αὐτῷ μονάδων ὑποδηλοῖ, οὕτως αὖθις ὁποιοσοῦν ἀριθμὸς ἑνὶ σημείῳ ἐλλείπων, διὰ τοῦ τῶν ἐν αὐτῷ χα-

ρακτήρων ἀριθμοῦ, τὰς ἐν τῷ Χαρακτηριστικῷ τῷ ἀντιστοιχοῦντι τῷ λογαρίθμῳ μονάδας ὑποσημαίνει. Τιθεμένου γὰρ $\chi = \alpha - 1$, ἔσται $\chi + 1 = \alpha$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 820. Ἐν τῷ αὐτῷ τοίνυν Βριγγιανῷ Συστήματι, ὁ οἱουδηποτοῦν ἀριθμοῦ μηδενικοῖς δεξιόθεν ὁποσοισοῦν συγκειμένου λογάριθμος, ἴσός ἐστι τῷ τῶν χαρακτήρων λογαρίθμῳ, ἐπὶ τῷ τῶν δεκαδικῶν ἀχθέντι ἀριθμῷ· ὥστε καὶ τὸ Χαρακτηριστικὸν ἐκ τοσούτων μονάδων συγκεῖσθαι, ὅσοις ὁ ἀριθμὸς δεξιόθεν μηδενικοῖς συναπαρτίζεται· οἷον, λογ. $3564000 =$ λογ. $3564 \times 1000 =$ λογ. $1000 +$ λογ. 3564 (§. 797.) $= 3 +$ λογ. 3564· ὡσαύτως $654.89 =$ λογ. $\frac{65489}{100} =$ λογ. $65489 - 2$ (§. 800.)· τουτέστιν, ὁ τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος λογάριθμος δεκαδικῶς ἐκτιθέμενος, ἰσοῦται τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ, ὡς ὁλοσχερεῖ μὲν θεωρουμένῳ, κατὰ δὲ τὸ Χαρακτηριστικὸν ἐκ τοσούτων μονάδων ἐλάσσονι, ὅσα δεκαδικὰ τῷ προτεθέντι πρόσεισιν ἀριθμῷ (§. 810.).

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 821. Ἐπὶ τῶν ἀποφατικῶς ἐκκειμένων λογαρίθμων, τὸ σημεῖον $-$, μόνον τὸ Χαρακτηριστικὸν διατίθησιν, οὐχὶ δὲ τοὺς μετ' ἐκεῖνο ἑπομένους ἀριθμούς· ὡς ἐπὶ τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος 00.035682, οὗ λογάριθμος $- 3.5524492$· ὥστε δεῖν τὸν λογάριθμον οὕτως ἀναγινώσκειν, ὡς εἴπερ ὧδε ἦν γεγραμμένος $-3 + 0.5524492$.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 822. Οἱ Λογάριθμοι ἀμείβουσι τὸν Πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ Σύναψιν, τὴν Διαίρεσιν ἐπὶ τὴν Ἀφαίρεσιν, τὴν πρὸς Δυνάμεις ἔξαρσιν ἐπὶ Πολλαπλασιασμὸν, καὶ τὴν τῶν Ῥιζῶν ἐξαγωγὴν ἐπὶ Διαίρεσιν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ μὲν γὰρ οἱ λογάριθμοι ποσοτήτων εἰσὶν ἐκθέται (§. 791.), ἐὰν μὲν οἱ τῶν παραγόντων ἐκθέται εἰς ἓν συναφθῶσι κεφάλαιον, ὁ τοῦ γινομένου ἐκθέτης ἔξεισι (§. 115. Ε.)· ὡσαύτως ἄρα, ἐὰν οἱ τῶν παραγόντων λογάριθμοι, εἰς ἓν συναφθῶσι κεφάλαιον, τὸν τοῦ γινομένου δεῖν ἐκκύπτειν λογάριθμον (§. 797.)· ὥστε τοῦ λογαρίθμου τοῦ γινομένου εὑρεθέντος, εὐχερῶς αὐτὸ τὸ γινόμενον, ἤτοι ὁ αἰτούμενος ἐξευρίσκεται ἀριθμός. Ὃ ἦν τὸ α΄. Ἐὰν δὲ αὖθις ὁ τοῦ διαιρέτου ἐκθέτης ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸν διαιρετέον ἀφαιρεθῇ, ὁ τοῦ πηλίκου ἐκθέτης ἐκκύπτει (§. 138. Γ.)· τῷ αὐτῷ τρόπῳ, καὶ ὁ τοῦ διαιρέτου λογάριθμος, ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸν διαιρετέον ἀφαιρεθεὶς λογαρίθμου, τὸν τοῦ πηλίκου ἡμῖν ἀναδίδωσι λογάριθμον (§. 800.), ἢ μᾶλλον αὐτὸ τοῦτο τὸ πηλίκον. Ὃ ἦν τὸ β΄. Πόῤῥω, ἐπεὶ ὁ τῆς δοθείσης ῥίζης ἐκθέτης, ἐπὶ τὸν δοθέντα τῆς αἰτουμένης δυνάμεως ἐκθέτην ἀχθεὶς, τὸν τῆς δυνάμεως ἐκθέτην προβάλλεται (§. 226.)· ἄρα ἐὰν καὶ ὁ τῆς δοθείσης ῥίζης λογάριθμος ἐπὶ τὸν δοθέντα τῆς αἰτουμένης δυνάμεως ἐκθέτην ἀχθῇ, ὁ ταύτης γνωσθήσεται λογάριθμος (§. 802.)· οἷον, ὁ τοῦ τετραγώνου, ἢ τοῦ κύβου λογάριθμος ἀναδίδοται, πολλαπλασιασμῷ τοῦ τῆς ῥίζης λογαρίθμου ἐπὶ 2, ἢ 3, κτλ. Ὃ ἦν τὸ γ΄. Ἐπεὶ δὲ, ἔσχατον, ὁ τῆς δοθείσης δυνάμεως ἐκθέτης, ἐπὶ τὸν δοθέντα τῆς ῥίζης ἐκθέτην διαιρεθεὶς τὴν αἰτουμένην ἀναδίδωσι ῥίζαν (§. 304.)· ἄρα ὡσαύτως καὶ τοῦ τῆς δοθείσης δυνάμεως λογαρίθμου ἐπὶ τὸν δοθέντα τῆς ῥίζης ἐκθέτην διαιρεθέντος, ὁ ταύτης ἐξενεχθήσεται λογάριθμος (§. 805.)· οἷον ὁ τῆς τετραγωνικῆς, ἢ κυβικῆς ῥίζης λογάριθμος γινώσκεται, ἐὰν ὁ μὲν τοῦ τετραγώνου λογάριθμος διὰ 2, ἢ τοῦ κύβου διὰ 3 διαιρεθῇ. Ὃ ἦν τὸ δ΄.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐκ τοῦ προτεθέντος Θεωρήματος δῆλον καθίσταται διὰ τῶν λογαρίθμων τὸν τῶν μειζόνων ἀριθμῶν ὑπολογισμὸν (ἡνίκα δηλαδὴ ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς, ἐξ ἢ ἑπτὰ χαρακτῆρσι συγκείμενος, δι' ἄλλου ἀριθμοῦ ἰσοφεροῦς, ἰσαρίθμους πλουτοῦντος χαρακτῆρας πολλαπλασιαστέος, ἢ διαιρετέος, ἢ, κτλ. εἴη) τὰ μάλιστα εὐχερῶς καὶ κατ' ἐπιτομὴν περαίνειν· περὶ γὰρ τῶν ἐλαχίστων ἀριθμῶν οὐδόλως ἐπὶ τοῦ παρόντος ἡμῖν ὁ λόγος, ὡς οὕτως ἢ ἄλλως ῥαδίως ἐκεῖνοι ὑπολογιζόμενοι· οἷον ἐπεὶ ὁ 4 ἐπὶ 8 πολλαπλασιασθεὶς γινόμενον τὸν 32 ἀναδίδωσιν ἀριθμὸν, τὸ αὐτὸ γινόμενον καὶ διὰ τῶν λογαρίθμων ἐκκύπτει, ἐὰν ὁ τοῦ 4 λογάριθμος 2, τῷ τοῦ 8 προστεθῇ λογαρίθμῳ 3, τὸ γὰρ κεφάλαιον 5 τὸν ἀντιστοιχοῦντα, οὗτινος ἐστὶ λογάριθμος, ἡμῖν 32 ἀναδίδωσιν ἀριθμὸν, τουτέστι τὸ ἀνωτέρω διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύψαν γινόμενον. Ἐπεὶ δὲ πάλιν, ὁ 8 πρὸς τετράγωνον ἐξαρθεὶς τὸν 64 ἡμῖν προβάλλεται ἀριθμὸν, ἐὰν ὁ τοῦ 8 λογάριθμος 3 ἐπὶ τὸν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἀχθῇ ἐκθέτην, ἤτοι $3 \times 2 = 6$, τὸν τοῦ 64 λογάριθμον 6 ἡμῖν ἐξάξει· ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν χωρητέον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 823. Δεῆσαν τοίνυν ἐπὶ τῶν μειζόνων ἀριθμῶν πολλαπλασιάσαι 24 ἐπὶ 8, διὰ τῆς τῶν λογαρίθμων ἀντεισαγωγῆς ἔσται (§. 797.)·

$$\begin{array}{l} \lambda o\gamma.\ 24 = 1.3802112 \\ \underline{\lambda o\gamma.\ \ 8 = 0.9030900} \\ \lambda o\gamma.\ 192 = 2.2833012. \end{array}$$

Τουτέστι μετὰ τὸ προσθεῖναι τὸν τοῦ 8 λογάριθμον τῷ τοῦ 24 λογ. ζητητέον ἐν τοῖς τῶν λογαρίθμων Πίναξι τὸν τῷ προκύπτοντι ἐκ τῆς προσθέσεως λογαρίθμῳ ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμὸν, ἤτοι τὸν 192, ὅς τις ἐστὶ τὸ γινόμενον τοῦ 24×8 ἀχθέντος.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Εἰ δ' οὖν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἴη, 10, 100, 1000, κτλ. ἐφ' ᾧ ὁ τοῦ γινομένου εὑρεθῇ λογάριθμος, προσθετέον ἰσαρίθμως τοῖς ἐν τῷ πολλαπλασιαστῇ μηδενικοῖς, 1, ἢ 2, ἢ 3, κτλ. μονάδας τῷ τοῦ πολλαπλασιαστέου χαρακτηριστικῷ. Οἷον δεῆσαν πολλαπλασιάσαι 49×10, προστεθήτω 1 τῷ τοῦ 49 λογαρίθμου χαρακτηριστικῷ, ἤτοι $1 + 1.6901961$, τὸ δὲ κεφάλαιον 2.6901961 ὁ τοῦ γινομένου τῷ 49×10

πολλαπλασιασμῷ, ἤτοι τοῦ 490 ἔσται λογάριθμος. Ἐὰν δὲ δύω προστεθῶσι μονάδες τῷ τοῦ 1.6901961 χαρακτηριστικῷ, ἔσται $2 + 1 = 3.6901961$, ὅςτις τοῦ 4900 ἐστὶ λογάριθμος, ἤτοι τοῦ γινομένου πολλαπλασιασμῷ τοῦ 49×100. Εὔδηλον γάρ ἐστι διὰ τοῦ 49 ἐπὶ 10, ἢ 100 πολλαπλασιασμοῦ, τὸν πολλαπλασιαζόμενον ἀριθμὸν δεκάκις, ἢ ἑκατοντάκις ἐκκύπτειν μείζονα· ἐὰν τοίνυν 1 ἢ 2 μονάδες τῷ τοῦ λογαρίθμου τοῦ 49 χαρακτηριστικῷ προστεθῶσιν, ὁ τοιοῦτος λογάριθμος πρὸς ἀριθμὸν ἀνήκων ἔσται δεκάκις, ἢ ἑκατοντάκις μείζονα· ἄρα τούτῳ τῷ τρόπῳ ὁ τοῦ ἀληθοῦς γινομένου ἡμῖν ἀνακύψει λογάριθμος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 824. Ἐφ' ᾧ τοίνυν αὖθις 174 διὰ τοῦ 29 διαιρεθῇ, ἀφαιρεθήτω ὁ τοῦ 29 λογάριθμος ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸν 174 λογαρίθμου, ἡ γὰρ ἐντεῦθεν ἐκκύπτουσα ὑπεροχὴ, ὁ τοῦ πηλίκου ἔσται λογάριθμος (§. 800.), οἷον·

$$\begin{array}{l} \lambda o\gamma.\ 174 = 2.2405492 \\ \underline{\lambda o\gamma.\ \ 29 = 1.4623980} \\ \lambda o\gamma.\ \ \ 6 = 0.7781513 \end{array}$$

Ἄρα ἐν γένει, τὰ πολλαπλασιασμῷ γινόμενα, καὶ τὰ ἐκ διαιρέσεως πηλίκα ἐν ἀριθμοῖς, διὰ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκεται προχειρότατα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐπεὶ τῇ τῶν 1, ἢ 2, ἢ 3 μονάδων τῷ τοῦ λογαρίθμου οἱουδηποτοῦν ἀριθμοῦ χαρακτηριστικῷ προσθέσει, ὁ τοῦ γινομένου τῷ ἐπὶ 10, ἢ 100, ἢ 1000 πολλαπλασιασμῷ ἐκκύπτει λογάριθμος· ὡσαύτως τῇ ἀπὸ τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοῦ ὁποιουοῦν ἀριθμοῦ λογαρίθμου 1, ἢ 2, ἢ 3 μονάδων ἀφαιρέσει, ὁ τοῦ πηλίκου ἡμῖν ἀναδοθήσεται λογάριθμος τοῦ διὰ 10, 100, 1000 κτλ. διαιρεθησομένου ἀριθμοῦ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 825. Ἐὰν οὖν ἀριθμός τις, οἷον ὁ 13, πρὸς δευτέραν ἐξαρθησόμενος ἡμῖν προκέητο δύναμιν, εὑρεθήτω ἐν τοῖς λογαριθμικοῖς Πίναξιν ὁ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου λογάριθμος 1.1139433, ὅστις διπλασιασθεὶς ἀναδώσει ἡμῖν λογάριθμον τὸν 2.2278866 τῷ τοῦ 13 τετραγώνῳ 169 ἀντιστοιχοῦντα. Ὡσαύτως ἐὰν κυβῶσαι δέῃ τὸν 5 ἀριθμόν, τριπλασιαστέον τὸν τούτου λογάριθμον 0.6989700, ἤτοι 2.0969100, οὕτινος ὁ ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς 125, ὁ τοῦ 5 ἐστὶ κύβος.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω Παραδείγματος (§. 825.), τὸν τοῦ 169 τετραγώνου λογάριθμον, ἤτοι τὸν τοῦ 13 λογαρίθμου διπλάσιον, ἐχρῆν εἶναι 2.2278866. Ἀλλ' οὖν ἐν τοῖς λογαριθμικοῖς Κανονίοις εὑρίσκεται 2.2278867. τουτέστιν ὁ ἔσχατος χαρακτὴρ μονάδι τὸν τοῦ προτέρου ἔσχατον ὑπερέχει. Ἐν τοῖς τοιούτοις μέντοιγε, καὶ τοῖς τούτων παραπλησίοις Παραδείγμασιν ἡ τοιαύτη διαφορὰ φρούδη καὶ ὡς οὐδεμία λογίζεται. Ὁ γὰρ ἔσχατος τῶν λογαρίθμων χαρακτὴρ δεξιόθεν, οὐχ οὕτως ἐξηκριβωμένως ἐν τοῖς Πίναξιν εὑρίσκεται. Ἅπαντες γὰρ οἱ διὰ τῶν Πινάκων παριστάμενοι λογάριθμοι, τῶν ἀληθῶν ἐλλείποντες εἰσί, τοῖς χαρακτῆρσιν ἐκείνοις, ὅσοι ἐν ταῖς τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγαῖς, δι' ὧν ὁ εὑρεθεὶς λογάριθμος νοεῖσθαι δύναται, κατὰ τὸ τέλος παρημέληνται, ὡς ἐν τῇ τῶν λογαριθμικῶν Κανονίων κατασκευῇ παρατηρηθήσεται. Πέρατος δ' ἐπέκεινα ὁ τῶν τοιούτων χαρακτήρων ἀείποτε ἀριθμός, εἰ καὶ τὸ μονάδος μόριον, ὃ παριστῶσι πολλοστόν ἐστι, καὶ τοσούτῳ ἔλαττον, ὅσῳ πλείους οἱ χαρακτῆρες οἱ ἐν τῷ λογαρίθμῳ προσλαμβανόμενοι· τοιγαροῦν οὐκ ἂν ἀκριβεῖς εἶναι ταχθεῖεν οἱ χαρακτῆρες, οἱ τῷ λογαρίθμῳ προσεπιγιγνόμενοι, καὶ μᾶλλον οἱ ἔσχατοι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 826. Εἰ δὲ βουλητὸν ἡμῖν ὡσαύτως εἴη, τὴν ὁποιουοῦν ἀριθμοῦ, ἤτοι τοῦ 144, τετραγώνειον εὑρεῖν ῥίζαν, ληφθήτω ὁ τούτου λογάριθμος 2.1583625 καὶ ἡμισευθήτω· ὁ γὰρ τούτου ἥμισυς λογάριθμος 1.0791812 τῇ τοῦ 144 τετραγωνικῇ ἀντιστοιχήσει ῥίζῃ, ἤτοι τῷ 12. Τῷ αὐτῷ τρόπῳ πρὸς τὴν τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ 27 ἐξαγωγήν, ληφθήτω τὸ τοῦ 27 λογαρίθμου 1.4313638 τριτημόριον 0.4771213, ᾧπερ ἀριθμὸς ἀντιστοιχεῖ ὁ 3, ἡ τοῦ 27 δηλαδὴ κυβικὴ ῥίζα. Διὸ κατὰ γένος, αἱ τῶν κατὰ πᾶσαν τάξιν ῥιζῶν ὑπεξαγωγαί, διὰ τῶν λογαρίθμων, ὅτι ῥᾷστα περαίνονται (§. 807.).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 827. *Κανόνιον κατασκευάσαι, ἐν ᾧ οἱ ἀπὸ 1 μέχρι τῶν 100000 Φυσικῶν ἀριθμῶν Λογάριθμοι εὑρίσκεσθαι ἔχωσι.*

ΛΥΣΙΣ.

Ληφθήτω Πρόοδος Γεωμετρικὴ ἀπὸ 1 ἀρχομένη, ἧς ὁ ἐκθέτης 10, ἤτοι ἐν λόγῳ προϊοῦσα δεκαδικῷ, οἷον $10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4$, κτλ. τουτέστιν 1 : 10 : 100, 1000 : 10000, κτλ. (§. 791.), καθ' ἣν ἀπὸ 1 ἄχρι 10 ὅροι ἐμφιλοχωρεῦσι 10000000. Διὸ καὶ ἰσάριθμοι ἔσονται οἱ ὅροι καὶ ἀπὸ 10 ἄχρις 100· ἀπὸ 100 ἄχρι 1000 (§. 816.), κτλ.· καὶ ἔσται ἄρα τοῦ μὲν ἀριθμοῦ 10 λογάριθμος ὁ 10000000· τοῦ δὲ 100, ὁ 20000000· τοῦ δὲ 1000 ὁ 30000000, ἤτοι οἱ Φυσικοὶ ἀριθμοὶ ἑπτὰ μηδενικοῖς αὐξηθέντος (§. 817.). Ἐφ' ᾧ τοίνυν οἱ μεταξὺ τῶν δεκαδικῶν ὅρων, παρεμπίπτοντες λογάριθμοι εὑρεθῶσι, ληφθήτωσαν αἱ ἐφεξῆς ἐκ δεκαδικῶν κλασμάτων συγκείμεναι πρόοδοι· οἷον:

1.0000000,	0.0000000
10.0000000,	1.0000000
100.0000000,	2.0000000
1000.0000000,	3.0000000
10000.0000000,	4.0000000
κτλ.	κτλ.

Οἱ γὰρ ἐμμέσως παρεμπίπτοντες ἀριθμοὶ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (§. 816.), μεταξὺ τῶν μέσων Γεωμετρικῶς ἀναλόγων εὑρεθήσονται, ὧν τοὺς λογαρίθμους

οἱ ἀντιστοιχοῦντες μέσοι Ἀριθμητικῶς ἀνάλογοι ἀναδώσουσι (§. 814.). Καίτοι μὲν οὖν τῶν μὴ κατὰ Γεωμετρικὴν πρόοδον χωρούντων ἀριθμῶν, ἤτοι τῶν ἐμμέσων, ἀκριβεῖς τοὺς λογαρίθμους λαβεῖν ἀμήχανον (§. 604. Σχόλ.), ἀλλ' ὅτι ἔγγιστα ἐλθεῖν δυνατὸν, ὡς τὴν ἐπὶ τοῦ ἀκριβοῦς διαφορὰν μηδὲ λόγου ἀξίαν εἶναι. Οἷον ἵνα παραδείγματι σαφὲς ᾖ τὸ λεγόμενον· προκείσθω δὴ ἀριθμὸς τῶν μεταξὺ 1.0000000, καὶ 10,0000000 παρεμπιπτόντων ὁ 9, ὃν χρὴ κατὰ παραβυσμὸν τῆς Γεωμετρικῆς προόδου (§. 772.) ἐξευρεῖν· καὶ δὴ καὶ ὁ τῷ ἀριθμῷ τούτῳ προσανήκων λογάριθμος. Ζητείσθω δὴ μεταξὺ τῶν δοθέντων ὅρων ὁ μέσος Γεωμετρικῶς ἀνάλογος ὁποιοσοῦν (αὐτ.), εὑρεθήσεται δὲ ἐὰν οἱ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 10 λογάριθμοι 0.0000000, καὶ 1.0000000 εἰς ἓν συναφθῶσι κεφάλαιον 1.0000000, οὗ τὸ ἥμισυ (§. 807.) 5000000, ὁ οἱουδηποτοῦν μέσου Γεωμετρικῶς ἀναλόγου μεταξὺ τῶν δοθέντων 1 καὶ 10 παρεμπίπτοντος ἀριθμοῦ ἔσται λογάριθμος (§. 826.). Ἐπεὶ γὰρ $0 = \text{λογ.}\ 1$ (§. 796.), ὁ δὲ τῆς Βάσεως λογάριθμος $= 1$ (§. 817.)· ἔσται $0 . x : x . 1$ (§. 593.)· ἄρα $0 + 1 = 2x$, καὶ $x = \frac{1}{2}$. Ἐνθέντοι τῇ τῶν 7 μηδενικῶν προσάψει ἔσται $(1{,}0000000) : 2 = 0.5000000$· ὡς καὶ προσεχῶς.

Ἐφ' ᾧ τοίνυν ἤδη μεταξὺ 1 καὶ 10 ὁ μέσος εὑρεθείη Γεωμετρικῶς ἀνάλογος, ἐξακτέον τοῦ 10 τὴν τετραγώνειον ῥίζαν· ἐπεὶ δ' αὕτη ἐντελῶς οὐκ ἐξάγεται (§. 817.), τοσούτῳ προσεγγιστέον (§. 344.), ὡς τὴν τῆς ληφθησομένης ῥίζης πρὸς τὴν τῆς ἀληθοῦς διαφορὰν παῥοπτέαν εἶναι καὶ μηδὲ λόγου ἀξίαν, ὥστε καὶ τὸ οὑτωσὶ μετρίως ἐμφιλοχωροῦν διάπτωμα ἀμελεῖν ἔξεσται· διὸ καὶ μετενεκτέον, ὡς ἀνωτέρω τοὺς δύω ἀριθμοὺς 1 καὶ 10, πρὸς δεκαδικὰ κλάσματα 1.0000000, καὶ 10.0000000 καὶ οὕτω μεταξὺ τούτων τὸν μέσον ζητητέον Γεωμετρικῶς ἀνάλογον ἤτοι $1.0000000 : \chi = \chi : 10.0000000$ (§. 604.), ἄρα $\chi^2 = 10.00000000000000$· καὶ $\chi = \sqrt{(10.00000000000000)} = 3.1622777$, ἧς τὸ τετράγωνον σχεδὸν οὐδόλως τοῦ 10 διενήνοχεν. Ὁ 3.1622777 τοίνυν πρῶτος ἔσται μέσος Γεωμετρικῶς ἀνάλογος μεταξὺ 1 καὶ 10, οὗ ὁ ἀνωτέρω εὑρεθεὶς λογάριθμος 5000000, ὁ πρῶτος μέσος ἐστὶν Ἀριθμητικῶς ἀνάλογος, μεταξὺ τῶν λογαρίθμων 0.0000000 καὶ 1.0000000. Ἀλλ' οὖν ἡ εὑρεθεῖσα αὕτη ῥίζα, ἤτοι ὁ πρῶτος μέσος Γεωμετρικῶς ἀνάλογος, οὐκ ἔστιν ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς 9 ἤτοι 9.0000000, οὗτινος ὁ λογάριθμος ἐν αἰτήσει πρόκειται. Ὁ γὰρ προτεθεὶς ἐνναδικὸς ἀριθμὸς μέγα τι τοῦ εὑρεθέντος τριαδικοῦ ὑπερέχει, ἑπομένως τε τοῦ δεκαδικοῦ ἔτι ἀφίσταται, ἤτοι ἐλάσσων ἐστίν, ἢ 10.0000000. Ἔνθεντοι ζητείσθω αὖθις μεταξὺ τοῦ εὑρεθέντος τριαδικοῦ 3.1622777, καὶ 10.0000000 μέσος Γεωμετρικῶς ἀνάλογος, κατὰ τὴν προσεχῶς ἐκτεθεῖσαν μέθοδον, ἤτοι $\chi^2 = (3.1622777) \times (10.0000000)$, καὶ $\chi = \sqrt{(31.62277700000000)} = 5.6234132$, ὁ τῷ ἐνναδικῷ ἐγγυτέρω γινόμενος μέσος Γεωμετρικῶς ἀνάλογος, οὗτινος εὑρεθήσεται ὡς ἀνωτέρω, καὶ ὁ λο-

γάριθμος, ἐὰν δηλαδὴ ὁ εὑρεθεὶς 0.5000000 τῷ τοῦ 10 προστεθεὶς λογαρίθμῳ διὰ 2 διαιρεθῇ (§. 826.)· ὡς $(0.5000000 + 1) : 2 = (1.5000000) : 2 = 0.7500000$, ὅστις ἑπομένως ὁ δεύτερος ἐστὶ μέσος Ἀριθμητικῶς ἀνάλογος. Ἀλλὰ δὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος 5.6234132 ἐλάσσων ἔτι τοῦ 9.0000000. Ὅθεν καὶ ζητείσθω αὖθις μεταξὺ τούτου καὶ τοῦ 10.0000000 μέσος Γεωμετρικῶς ἀνάλογος τῷ ἐνναδικῷ μᾶλλον προσεγγίζων· καὶ πάλιν μεταξὺ τοῦ εὑρεθέντος καὶ 10.0000000 ἄλλος· καὶ ἐφεξῆς οὕτως ἄλλοι καὶ ἄλλοι μεταξὺ τῶν μειζόνων καὶ ἐλασσόνων τοῦ ἐνναδικοῦ, ἕως οὗ ἔσχατον ἀπαντήσει ζητοῦντι ὁ 9.0000000, ἤτοι $9\frac{0000000}{10000000}$, ὃς οὐδὲ μιλλιοστημορίῳ τοῦ ἐνναδικοῦ διαφέρει, ἔνθεντοι καὶ ὁ τούτου λογάριθμος 0.9542425 ἀδεῶς, ὁ τοῦ ἐνναδικοῦ 9.0000000 ἤτοι 9 ἔσται λογάριθμος· μόναι γὰρ αἱ τοῦ μιλλιονιστημορίου ἐλάσσονες διαφοραί, λόγου τινὸς εἶναι κρίνονται. Ἐν ἑκάστῃ ἀλλ' οὖν τοῦ Γεωμετρικοῦ μέσου εὑρέσει, ζητείσθω ὁ μέσος Ἀριθμητικῶς ἀνάλογος εἰς λογάριθμον ἐκείνου (§. 814.) Οὕτω γὰρ εὑρεθήσεται ὁ τοῦ ἐνναδικοῦ λογάριθμος, ὅτι ἔγγιστα τοῦ ἀληθοῦς γενόμενος.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐν τῷ ἐφεξῆς Ἀβακίῳ δείκνυται οὕτως ἡ τοῦ ἀριθμοῦ 9 σὺν τῷ ἰδίῳ λογαρίθμῳ εὕρεσις, ἔνθα ὁ μέσος ἑκάστου ὀρθογωνίου ἀριθμός, ὁ προκύπτων μέσος τυγχάνει ἀνάλογος· τὰ δὲ στοιχεῖα ἐμφαίνει μεταξὺ τίνων ζητεῖται· οἷον

	Ἀριθμοὶ Μέσοι Γεωμετρικῶς Ἀνάλογοι	Ἀριθμοὶ Μέσοι Ἀριθμητικῶς Ἀνάλογοι, ἤτοι Λογάριθμοι.
Α.	1.0000000	0.00000000
Γ.	3.1622777	0.50000000
Β.	10.0000000	1.00000000
Β.	10.0000000	1.00000000
Δ.	5.6234132	0.75000000
Γ.	3.1622777	0.50000000
Β.	10.0000000	1.00000000
Ε.	7.4989421	0.87500000
Δ.	5.6234132	0.75000000
Β.	10.0000000	1.00000000
Ζ.	8.6596432	0.93750000
Ε.	7.4989421	0.87500000
Β.	10.0000000	1.00000000
Η.	9.3057204	0.96875000
Ζ.	8.6596432	0.93750000
Η.	9.3057204	0.96875000
Θ.	8.9768712	0.95312500
Ζ.	8.6596432	0.93750000
Η.	9.3057204	0.96875000
Ι.	9.1398170	0.96093750
Θ.	8.9768713	0.95312500
Ι.	9.1398170	0.96093750
Κ.	9.0579777	0.95703125
Θ.	8.9768713	0.95312500

Κ.	9.0579777	0.95703125
Λ.	9.0173333	0.95507812
Θ.	8.9768713	0.95312500
Λ.	9.0173333	0.95507812
Μ.	8.9970796	0.95410156
Θ.	8.9768713	0.95312500
Λ.	9.0173333	0.95507812
Ν.	9.0072008	0.95458984
Μ.	8.9970796	0.95410156
Ν.	9.0072008	0.95458984
Ο.	9.0021388	0.95434570
Μ.	8.9970796	0.95410156
Ο.	9.0021388	0.95434570
Π.	8.9996088	0.95422363
Μ.	8.9970796	0.95410156
Ο.	9.0021388	0.95434570
Ρ.	9.0008737	0.95428467
Π.	8.9996088	0.95422363
Ρ.	9.0008737	0.95428467
Σ.	9.0002412	0.95425415
Π.	8.9996088	0.95422363
Σ.	9.0002412	0.95425415
Τ.	8.9999250	0.95423889
Π.	8.9996088	0.95422363
Σ.	9.0002412	0.95425415
Υ.	9.0000831	0.95424652
Τ.	8.9999250	0.95423889

υ.	9.0000831	0.95424662
φ.	9.0000041	0.95424271
τ.	8.9999250	0.95423889
φ.	9.0000041	0.95424271
χ.	8.9999650	0.95424080
τ.	8.9999250	0.95423889
φ.	9.0000041	0.95424271
ψ.	8.9999845	0.95424175
χ.	8.9999640	0.95424080
φ.	9.0000041	0.95424271
ω.	8.9999943	0.95424223
ψ.	8.9999845	0.95424175
φ.	9.0000041	0.95424271
α.	8.9999992	0.95424247
ω.	8.9999943	0.95424223
φ.	9.0000041	0.95424271
β.	9.0000016	0.95424259
α.	8.9999992	0.95424247
β.	9.0000016	0.95424259
γ.	9.0000004	0.95424253
α.	8.9999992	0.95424247
γ.	9.0000004	0.95424253
δ.	8.9999998	0.95424250
α.	8.9999992	0.95424247
γ.	9.0000004	0.95424253
ε.	9.0000000	0.95424252
δ.	8.9999998	0.95424250

Ἔνθα ὁ ἔσχατος μέσος Γεωμετρικῶς ἀνάλογος τῷ στοιχείῳ ε ἀντιστοιχῶν ἐστιν 9.0000000 = 9, οὕτως ἐγγὺς δηλαδὴ τοῦ 9, ὥστε τὸ ἐμφιλοχωροῦν διάπτωμα μηδὲ γοῦν δεκαμηλλιοστημορίῳ ἐξισοῦσθαι· ὁ δὲ τούτου λογάριθμος = 0.95424252. Προέθησαν δὲ οἱ λογάριθμοι μέχρι τῶν ὀκτὼ δεκαδικῶν, ἐπειδὴ τῆς πράξεως συνεχιζομένης, οἱ ἐν τοῖς πρώτοις ἑπτὰ δεκαδικοῖς λογάριθμοι, ἴσοι ἀλλήλοις γίνεσθαι ἄρχονται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 828. Ἐὰν οὖν παραπλησίᾳ τῇ μεθόδῳ μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ οἱ μέσοι Γεωμετρικῶς θηρευθῶσι, καὶ τούτοις οἱ ἀνήκοντες ἀποδοθῶσι λογάριθμοι, εὑρεθήσεται τέως καὶ ὁ τοῦ ἀριθμοῦ 2, ἢ 2.0000000 λογάριθμος τοῦ τριαδικοῦ οὐδὲ γοῦν ἑκατοντακισμυριοστῷ τῆς μονάδος μορίῳ διαφέρων· καὶ ἐφεξῆς οὕτως. Εἰδέ τις ἐθέλοι τῶν λογαρίθμων τοὺς Πίνακας καταγράψαι, τῇ μεθόδῳ ταύτῃ χωρεῖν ὀφείλει, ὑπεξάγων ἀεὶ τὰς ῥίζας, ἄχρις οὗ πρόοδος αὐτῷ ὑπανακύψῃ, καθ' ἣν ἕκαστος τῶν ὅρων τῷ ἔγγιστα καθεξῆς ἑπομένῳ, μικροῦ δεῖν, καὶ ἴσος ἂν εἴη (§. 827.), τῆς διαφορᾶς παρὰ τὴν τῶν ὅρων πυκνότητα μονονουχὶ καὶ ἀφανιζομένης.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

Ἀλλ' οὐκ οὐ χρεία τοῦ διὰ τοσούτου πόνου πάντων τῶν παρεμπιπτόντων ἀριθμῶν τοὺς λογαρίθμους θηρεύειν, μόνον γὰρ τοὺς τῶν ὁλοσχερῶν λογαρίθμους, τῶν εἰς παράγοντας κατατμηθῆναι μὴ δυναμένων, καὶ διὰ τοῦτο Πρώτων ἀριθμῶν πρὸς ἀλλήλους (§. 149.) καλουμένων, οἷον 2, 5, 7, 11, 13, 19, κτλ. ὧν μέγα τι πλῆθος μέχρι τῶν 1000 ἐπαριθμεῖται, οὕτως εὑρεῖν ἐπάναγκες (§. 806.). Τῶν γὰρ συνθέτων, ἐξ ἄλλων ἀριθμῶν ἁπλουστέρων ἀλλήλους ἐπιπολλαπλασιαζόντων, ἀναφυομένων, οἱ τούτων λογάριθμοι εὑρεθήσονται, τῇ τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων προσθέσει, ὡς δέδεικται (§. 822.). Εὑρεθέντων γὰρ τῶν λογαρίθμων τῶν 2 καὶ 3 ἀριθμῶν, ὁ τοῦ ἀριθμοῦ 6 ἐκκύψει λογάριθμος· ἐπεὶ γὰρ $2 \times 3 = 6$, ἔσται λογ. 2 + λογ. 3 = λογ. 6· ὡσαύτως ἐπεὶ $6 \times 7 = 42$, ἔσται λογ. 6 + λογ. 7 = λογ. 42, κτλ. Εὑρεθήσονται δὲ τῷ αὐτῷ τρόπῳ καὶ οἱ τῶν ἀριθμῶν 9, 27, 81, 243, κτλ.· καὶ μὴν καὶ τῶν ἀριθμῶν 4, 8, 16, 32, 64, κτλ. τῶν ἀντὶ δυνάμεων τοῦ 2 καὶ 3 ἐκλαμβανομένων, λογάριθμοι. Καὶ οὕτω κἂν τοῖς λοιποῖς. Τοῦτον δὴ τὸν τρόπον (§. 827. 828.) πάρεστι νοεῖν, τὰ Λογαριθμικὰ τοῦ κατὰ φύσιν τῶν ἀριθμῶν χύματος ἀπὸ 1 ἄχρι τῶν 10000, καὶ ἔτι μᾶλλον περαιτέρω ὑπὸ τῶν Γεωμετρῶν καταγεγράφθαι Κανόνια. Ἐξ ὧν μόνοι ἔπειτα ἐξῄρηνταί τε τῶν ἄλλων καὶ ἐκδέδονται, οἱ τοῖς ὁλοσχερέσιν ἔγγιστα γενόμενοι ἀριθμοί, μετὰ τῶν λογαρίθμων αὐτῶν· οὗ δὴ χάριν, οὐδ' ἴχνος σχεδὸν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ἐκείνων προόδου καταφαίνεται Γεωμετρικῆς, ὡς οὐδὲ ἐπὶ τῶν λογαρίθμων Ἀριθμητικῆς. Τὸν δὲ δὴ Λογαριθμικὸν Πίνακα, οὗ ἡ Βάσις = 10, ἄχρι τῆς Α'. χιλιάδος, ἐν τῷ τέλει τῆς βίβλου παραθέσθαι διέγνωμεν, πρὸς τὴν τῶν Φιλοπόνων μείζονα γύμνασιν, καὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ ἐπιβοήθημα· ἄλλως γὰρ ἔδει αὐτοὺς ἐπὶ τῶν λογαριθμικῶν Πινάκων, τοὺς τῶν ἀριθμῶν λογαρίθμους ἀναζητεῖν χρονοτριβοῦντας. Τῶν γεμὴν λογαρίθμων παρὰ τὸ Χαρακτηριστικὸν ἑπτὰ μόνοι οἱ πρῶτοι τῶν χαρακτήρων γράφονται, οἳ δήπου ἀποχρῶντές εἰσιν, οἱ γὰρ λοιποὶ τὰ πολλὰ φροῦδοι (§. 828.)· Αὐτοὶ δὲ τοὺς ἐν τῷ τῶν λογαρίθμων Πίνακι, ὃν πρὸς τῷ τέλει τῇ Βίβλῳ ὑποσυνάπτομεν, τῶν κατὰ πλευρὰν πρώτων ἑπτὰ χαρακτήρων, δύω ἐσχάτους σημείῳ διεστείλαμεν. Εἴωθε γὰρ ἐν ταῖς κατὰ τὴν Γεωμετρίαν πράξεσιν, ἐφ' ᾧ αὗται απονώτερόν τε καὶ εὐχερέστερον περαίνεσθαι ἔχοιεν, τούτους ἄνευ παρεμπίπτοντος καταφανοῦς διαπτώματος παροράσθαι. Ὅσῳ περ γὰρ τὰ δεκαδικὰ τὸ πλῆθος μείζω, τοσοῦτον ἧττον ἔσται τὸ ἐμφιλοχωροῦν ἔλεμμα, ἡλίκον καὶ ἀδεῶς ἔχειν ὀλιγωρεῖσθαι, ἔνθα μάλιστα τὸ ὡς ἔγγιστα τοῦ ἀληθοῦς ζητεῖται γινόμενον (§. 828.).

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

Ἰωάννης Νεπῆρος Βαρόνος ἀπὸ Μερκιστὸν, Σκῶτος τῷ γένει, πρῶτος ὑπῆρξεν, ὃς πόνημά τι περὶ τῆς τῶν λογαρίθμων ἰδιότητός τε καὶ χρήσεως, ἐπιγραφὴν φέρον, Θαυμασίου τῶν Λογαρίθμων Κανόνος περιγραφὴ (α), ἐν Ἐδινβούργῳ ἔτει 1614, εἰς φῶς ἐξέδωκεν. Ἔνθεν τοι καὶ ἡ τῶν λογαρίθμων εὕρεσις πάντως ὑπὸ πλείστων ἐκείνῳ ἀπεδίδετο. Ἀλλ' οὖν εἰσὶν οἳ, τὸν οἱ δοθέντα κότινον καὶ τὴν τῆς εὑρέσεως δόξαν ὑποσυλήσαντες Γερμανῷ τινι Ἰούστῳ Βυργίῳ προσανέθεντο, ὃς πολλοῖς

(α) Canonis Mirifici Logarithmorum Deſcriptio.

πρὸ ἐκείνου ἔτεσι τὴν τῶν λογαρίθμιων γνῶσιν τε καὶ χρῆσιν ἐσχηκέναι ὑπό τε Κεπλέρου (α) καὶ Κλεμμίου ἐπ' αὐτῷ τούτῳ διϊσχυριζομένων ἱστόρηται· ὡς πλεῖστα ἔν τε τῇ τοῦ Σχειβέλου (β) Εἰσαγωγῇ, κἀν τῇ τοῦ Καιστνέρου Ἀριθμολογικῇ συνεπείᾳ (γ) ὁρᾶν ἔνεστιν. Ἀλλ' ἴσμεν δὴ καὶ Στιφέλιον ἐν τῇ αὐτοῦ ὁλοσχερεῖ Ἀριθμητικῇ (δ) ἐν Νορινβέργῃ κατὰ τὸ 1544 ἐκδοθείσῃ τὴν τῶν λογαρίθμιων γνῶσιν, καὶ τὸν τῶν δυοῖν προόδων συνδυασμὸν πολὺ πρότερον τοῦ Ἰούστου συνιδόντα, εἰ καὶ τὴν τούτων χρῆσιν, οἷα δὴ ἐν τοῖς ὕστερον ἐπεξειργάσται χρόνοις ἀγνοοῦντα. Ἀλλ' οὖν Ἐρρῖκος Βρίγγιος ὁ Σιλβιανὸς, ᾧτινι τὸ Μαθηματικὸν εἶδος ἐν τῇ Ἀγγλικῇ τῆς Ὀξωνίας Ἀκαδημίᾳ ἠσκεῖτο ἐξ ἐπαγγέλματος, συναινέσει τε καὶ συμβουλίᾳ τοῦ πρώτου ἐφευρετοῦ Νεπήρου τοὺς αὐτοῦ λογαρίθμους, τήν τε τούτων ἀρχὴν διδασκαλίαν τε καὶ χρῆσιν, οὐ μόνον ἐπὶ τὸ κρεῖττον μεταῤῥυθμήσας διεσαφήνησεν, ἀλλὰ καὶ τοὺς τοῖς Φυσικοῖς ἀριθμοῖς ἀπὸ 1 μέχρι 20000, ἀπό τε 90000 μέχρι 100000 προσανήκοντας λογαρίθμους, Κανόνιον πρῶτος κατασκευάσας προσδιωρίσατο, καὶ τὴν τῆς κα-

(α) In Tabulis Rudolphinis C. I. p. 11, ὅς δὴ ἀποκαλεῖ αὐτὸν Hominem Cunctatorem et Secretorum suorum custodem, qui foetum in partu destituit et non ad usus Publicos educavit.

(β) Schelbels Einleit. zur mathematischen Bücherkenntniss im X. Stück S. 444.

(γ) Kästners Fortsetzung der Rechenkunst. 1786. S. 95.

(δ) In Arithmetica integra.

τασκευῆς μέθοδον ἐν τῇ Λογαριθμικῇ αὐτοῦ Ἀριθμητικῇ (α) κατὰ τὸ 1624 ἐκδοθείσῃ, ἐξέθετο. Οἵτινες δὴ Βριγγιανοὶ λογάριθμοι κἀν τῇ Βρεταγικῇ Τριγωνομετρίᾳ (β) ἐν ἔτει 1633 ἐκδοθείσῃ, εὑρίσκεσθαι ἔχουσι. Διενήνοχε δὲ τὸ Βριγγιανὸν τοῦ Νεπηριανοῦ Συστήματος, καθ' ὅσον ὁ μὲν Νεπῆρος, Πρόοδον ἐν γένει Φθινουσῶν (§. 744.) ὡς Γενικὴν Σειρὰν ὑπεστήσατο, ὁ δὲ Βρίγγιος αὔξουσαν. Ἔστι γὰρ οὕτω κατὰ μὲν Νεπῆρον λογ. 10000000 = 0, καὶ λογ. 9999999 = 1, ὥστε τῆς Γενικῶς ὑπ' αὐτοῦ ληφθείσης Φθινούσης Προόδου τὸν ἐκθέτην εἶναι $\frac{9999999}{10000000}$· κἀντεῦθεν τοὺς λογαρίθμους πάντων τῶν ἀριθμῶν τῶν μειζόνων τοῦ 10000000 ἀποφατικοὺς εἶναι, τοὺς δὲ τῶν κλασμάτων, θετικούς (γ). Τὸ δὲ κατὰ τὰς τοῦ Βριγγίου ἀρχὰς τῶν λογαρίθμων μεταξὺ τῶν 20000 καὶ 90000 χάσμα Ἀδριανὸς ὁ Βλάκκιας, τῆς κατὰ τὴν Μεσημβρινὴν Ὀλλανδίαν Γοῦδα ἤτοι Τέργοβ (Gouda ter Gouw) ἐξορμώμενος, ἀκαμάτῳ σπουδῇ ἀνεπλήρωσε, πρὸς χρῆσιν ἐκθέτους τούτους ἀνέδειξε, καί γε Πίνακα ἢ Κανόνιον τῶν λογαρίθμων ὑπὲρ τῶν Φυσικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἄχρι τῶν 100000 ἐκπονήσας, ὑπὸ τῷ ὀνόματι, Βριγγίου Ἀριθμητικὴ Λογαριθμικὴ (δ), κατὰ τὸ 1628 τύποις ἐξέδοτο. Ἡμεῖς ἀλλ' οὖν τοὺς μετὰ ταῦτα εἰς φῶς ἀχθέντας ὅ, τι πλείστους Λογαριθμικοὺς παρατρέ-

(α) In Arithmetica Logarithmica.

(β) In Trigonometria Britanica.

(γ) Ἐν τῇ τοῦ Θαυμασίου Καν. τῶν Λογ. περιγραφῇ.

(δ) Arithmetica Logarithmica Briggii. Goudae 1628.

χοντες Πίνακας, τοὺς ἐφεξῆς, οἷα δὴ πρὸς τὴν προβλημάτων προσφυῶς ἔχοντας ἐπίλυσιν, τοῖς βουλομένοις ἀξιοῦμεν. Οἷον· Τοὺς ὑπὸ τοῦ Σερβίνου προεκπονηθέντας (α), ὑπὸ δὲ Σαμουήλου Κλαρκίου τὸ πρῶτον κατὰ τὸ 1742, εἶτα δὲ ὑπὸ Γαρδηνερίου ἐν Λονδίνῳ κατὰ τὸ 1761 ἐκδοθέντας. Οἵ γε δὴ καὶ τὸ τρίτον Γαλλιστὶ φθεγγόμενοι, ὑπὸ Πεζηνᾶ καὶ Δουμᾶ καὶ ἑτέρων, τῆς Ἀγγλικῆς ἀκριβέστερον ἐκδόσεως ἐξεδόθησαν (β). Ἐκ δὲ τῶν Γερμανιστὶ ἐκδοθέντων, οἱ τοῦ Κυρίου εἶεν Καρστενίου, ἔτι δὲ καὶ ἡ ἀνωνύμως περιφερομένη Λογαριθμικὴ Σύναψις (γ). Προκριτέοι ἀλλ' οὖν οἱ τοῦ περικλεοῦς Κυρίου Γεωργίου Βέγα (δ), ὡς οὐ μόνον μυρία ὅσα ὑπολογισμοῖς καθυποπίπτει δι' αὐτῶν

(α) Sherwins Mathematical Tables, Contiv'd after a most Comprehensive Method.

(β) Tables des Logarithmes contenantes les Logarithmes des Nombres depuis 1 jusqu' à 102100 et les Logarithmes des Sinus et des Tangentes de 10 en 10 Secondes pour chaque Degré du quart de Cercle avec differentes autres Tables. Publiées ci-devant en Angleterre par Monsieur Gardiner. Nouvelle edition augmentée des Logarithmes des Sinus et Tangentes, pour chaque Seconde des quatre premiers Degrès. Avignon 1770.

(γ) Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer und anderer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln. Berlin 1778. 2 Bde. in gr. 8.

(δ) Logarithmische, trigonometrische und andere zum

ἀκριβῶς ἅλις ἐκπεραίνεσθαι ἀποχρῶντες, ἀλλὰ δὴ καὶ εὐῶνοι. Ναὶ μὴν καὶ ἐκ τῶν Ῥωμαϊστὶ, τὸ τοῦ Βλακκίου μέγα Λογαριθμικὸν Σύνταγμα, ἢ καὶ τὸ τούτου ἐν ἐπιτομῇ Ἐγχειρίδιον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 829. Παρεξεταζομένων τοίνυν ἐν τοῖς Λογαριθμικοῖς Πίναξι, τριῶν ὁποιωνοῦν ἀλλήλοις συνεφαπτομένων ἀριθμῶν, εὑρεθήσονται αἱ τῶν τούτοις ἀντιστοιχούντων λογαρίθμων διαφοραὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἀλλήλοις συνεξισοῦσθαι, ὅσῳ δηλαδὴ οἱ τοῖς ἀριθμοῖς ἐκείνοις προσανήκοντες λογάριθμοι μείζονες καθεστήκασιν· ὥστε τῶν ἀριθμῶν μειζόνων ἢ 1000 ἐκκειμένων, τὰς τῶν προσανηκόντων τούτοις λογαρίθμων διαφορὰς, ἐν τῷ ἑπταρίθμῳ μόνον δεκαδικῷ χαρακτῆρι μονάσι τισὶ διενηνοχέναι· τῷ δέ γε 10000 ἐγγύτερον γινομένων, οὐδὲ γοῦν μονάδι αἱ διαφοραὶ ἀλλήλων παραλλάττουσαι εὑρεθήσονται· οἷον·

Ἀριθμοί	Λογάριθμοι	Διαφοραί
1001	3,0004341	
1002	3,0008677	0,0004336
1003	3,0013009	0,0004332

Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln und Formeln, von Georg Vega, Unterlieutenant und Lehrer der Mathematik beim K. K. 2ten Feld-Artillerie-Regimente. Wien 1783. Ἔτι δὲ καὶ τὸ τούτου Λατινογερμανικὸν Ἐγχειρίδιον Manuale Logarithmico-Trigonometricum. Georg Vega's logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, Leipzig 1800.

ἡ δὲ τῶν διαφορῶν διαφορὰ = 4·

Ἀριθμοὶ	Λογάριθμοι	Διαφοραὶ
9988	3,9994785	
9989	3,9995220	0,0000435
9990	3,9995655	0,0000435

καθ' οὓς αἱ διαφοραὶ οὐδὲ γοῦν μονάδι ἀλλήλων διενηνόχασιν. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὡς ἐὰν ἀριθμοὶ ληφθῶσιν, ὧν ἡ διαφορὰ μὴ ᾖ μονὰς, ἀλλὰ μονάδος ἐλάσσων, ἠλίκοι 1001, $1001\frac{1}{2}$, 1002, ἡ τῶν κατ' αὐτοὺς λογαρίθμων διαφορὰ ἴση ἔσται· οἷον.

Ἀριθμοὶ	Λογάριθμοι	Διαφοραὶ
1001	3,0004341	
$1001\frac{1}{2}$	3,0006509	0,0002168
1002	3,0008677	0,0002168

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 830. Ἐκ τούτων δὴ οἷόν τε ἐπιφέρειν ἀείποτε, ἐπὶ τῶν χιλιάδος μὲν ἐπέκεινα προβαινόντων ἀριθμῶν, τὴν δὲ διαφορὰν μονάδος πλουτούντων ἐλάσσονα, τὰς τῶν ἀριθμῶν διαφορὰς ἔχειν πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ τῶν ἐκείνοις ἀνηκόντων λογαρίθμων διαφοραί· ἤτοι ὡς ἡ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου τῶν ἀριθμῶν διαφορὰ πρὸς τὴν διαφορὰν τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, οὕτως ἡ τῶν λογαρίθμων διαφορὰ τῶν προσανηκόντων τῷ πρώτῳ καὶ τρίτῳ, πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν λογαρίθμων, τῶν ἀντιστοιχούντων τῷ δευτέρῳ καὶ πρώτῳ· οἷον (1002 — 1001) : ($1001\frac{1}{2}$ — 1001) = (λογ. 1002 — λογ. 1001) : (λογ. $1001\frac{1}{2}$ — λογ. 1001)· Τουτέστιν $1 : \frac{1}{2}$ = 0,0004336 : 0,0002168.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Συνίδοι δ' ἄν τις ἐκ τῶν ῥηθέντων, ταῖς τῶν λογαρίθμων διαφοραῖς ἀτενέστερον τὸν νοῦν ἐπιστήσας, ὅτι τῶν 100 μὲν μειζόνων, τῶν δὲ 1000 ἐλασσόνων ἀριθμῶν ὀλίγαις τισὶ μονάσιν ἐπηυξημένων αἱ διαφοραὶ ὑπομειοῦνται, κατὰ βραχὺ γεμὴν καὶ ἠρέμα· ὥστε καίτοι κατὰ τοὺς λογαρίθμους τῶν ἐκ τοῦ σύνεγγυς τοῖς 100 παρεπομένων ἀριθμῶν ἡ τηλικαύτη τῶν διαφορῶν ὑπομείωσις μάλιστα ἐπίσημος οὖσα, ἡ τῶν λογαρίθμων μέντοι διαφορὰ τῶν ἐπανηκόντων τοῖς ἀριθμοῖς 101, καὶ 102, μόλις μείζων τῆς διαφορᾶς ἀναφαίνεται τῶν τοῖς 102 καὶ 103 ἀριθμοῖς ἀντιστοιχούντων λογαρίθμων. Ἐν γὰρ τοῖς μειζοτέροις λογαρίθμοις, ἡ ὑπομείωσις ἤδε τῶν διαφορῶν τηλίκη, ὡς πλείοσι τὴν αὐτὴν ἐν τάξει ἐφεπομένοις προσήκειν. Ἔνθεντοι ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω διαφορῶν (§. 829.) καὶ τῆς ἀναλογίας (§. 830.) τοσούτῳ γεμὴν ἔλαττον ἐμφιλοχωρεῖ τὸ διάπτωμα, ὅσῳ μείζονες μὲν οἱ ἀριθμοί εἰσιν, ἐλάσσονες δὲ αἱ τούτων διαφοραί. Διὸ καὶ ἐν χρήσει ἡ τοιάδε ἔσται ἀναλογία, εἴς τε τὴν ἀριθμοῦ εὕρεσιν τοῦ τῷ δοθέντι λογαρίθμῳ ἀντιστοιχοῦντος, ὃς ἂν ἐν τῷ Πίνακι συντομίας χάριν μὴ ἐπ' ἀκριβὲς περιέχοιτο, καὶ εἰς τὴν τοῦ λογαρίθμου ἀπόδοσιν, τοῦ τῷ ἀριθμῷ τῷ μὴ ἐν τῷ Κανονίῳ κειμένῳ, προσεπανήκοντος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 831. Ἀριθμοῦ ὁλοσχεροῦς δοθέντος, τὸν τούτῳ ἀντιστοιχοῦντα Λογάριθμον ἐν τοῖς Κανονίοις εὑρεῖν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εἰ μὲν δὴ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἐλάττων εἴη τοῦ ἐν τοῖς Κανονίοις ἐσχάτου ἀριθμοῦ, ζητείσθω μεταξὺ τῶν Φυσικῶν ἀριθμῶν, εὑρεθήσεται δὲ ἐν τῷ οἰκείῳ τόπῳ· οὕτως τε κατὰ δεξιὰν πλευρὰν ἀντιστοιχήσει τούτῳ ὁ ζητούμενος λογάριθμος. Εἰδ' οὖν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἐν τῇ τῶν Φυσικῶν ἀριθμῶν σειρᾷ οὐκ ἐνείληπται· δῆλόν ἐστι τοῦτον μείζονα εἶναι τοῦ ἐν τοῖς περιφερομένοις Κανονίοις ἐσχάτου, ἃ δὴ ὑποτίθημι μέχρι τῶν 10000 προβαίνειν, ἐλάσσονα δὲ τῶν 100000. Ἔνθεντοὶ καὶ ἀποτμηθήτωσαν ἐκείνου διὰ γραμμιδίου δεξιόθεν τόσοι χαρακτῆρες, ὅσοι πρὸς τὴν τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἐλάττωσιν ἐξαρκέσωσιν· οὕτως οὖν ὁ ἐλαττωθεὶς ἀριθμὸς ἥττων ἐκκύλιας τοῦ ἐν τοῖς Κανονίοις ἐσχάτου, ζητείσθω κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον ἐν τῷ Κανονίῳ. Ὁ ἐν τοῖς Κανονίοις οὕτως εὑρεθεὶς ἀριθμὸς ἀφῃρείσθω τοῦ ἐν τοῖς Κανονίοις αὐτῷ προσεχῶς μείζονος ἀριθμοῦ, τῇ δὲ ἐντεῦθεν ἀναφυομένῃ διαφορᾷ, ἥτις ἔσται μονὰς, τόσα μηδενικὰ προστεθείσθωσαν σημεῖα, ὁπόσοι τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ χαρακτῆρες ἀπειλήφθησαν, σημειουμένης τῆς πρώτης ταύτης διαφορᾶς. Ἀφῃρείσθω εἶτα ὁ τῷ ἐλαττωθέντι ἀριθμῷ ἀντίστοιχος λογάριθμος, ἀπὸ τοῦ προσεχῶς ἐν τοῖς Κανονίοις μείζονος λογαρίθμου, ἥ, τε δευτέρα αὕτη διαφορὰ σημειούσθω. Τεθήτω δὴ ἡ ἐφεξῆς ἀναλογία καὶ λεγέσθω, ὡς ἡ πρώτη διαφορὰ πρὸς τὴν δευτέραν, οὕτως οἱ ἀποτμηθέντες χαρακτῆρες πρὸς τὴν διαφορὰν, καθ' ἣν ὁ τῷ ὁλοσχερεῖ ἀριθμῷ ἀντίστοιχος λογάριθμος, τὸν τῷ ἐλαττωθέντι ἀριθμῷ ἀντιστοιχοῦντα ὑπερέχει λογάριθμον· τουτέστιν, ὡς ἡ διαφορὰ τῶν ἐν τῷ Κανονίῳ εὑρεθέντων ἀριθμῶν (κατὰ τὴν ἐκ τῆς θέσεως, ἣν ἂν ἔχοι ἐν τῷ μείζονι ἀριθμῷ δύναμιν, ληφθεῖσα) πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν λογαρίθμων τῶν ἀντιστοιχούντων ἐκείνοις, οὕτως οἱ λοιποὶ χαρακτῆρες τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ πρὸς τὴν λογαριθμικὴν διαφορὰν, ἣν εὑρεῖν δέοι (§. 830.). Ἡ εὑρεθεῖσα οὖν ἤδη διαφορὰ προστεθείσθω τῷ τοῦ ἐλαττωθέντος ἀριθμοῦ λογαρίθμῳ, ἅμα δὲ τὸ τούτου τοῦ λογαρίθμου Χαρακτηριστικὸν τοσαύταις αὐξηνθήτω μονάσιν, ὁπόσοι χαρακτῆρες ὁλοσχερεῖς τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἀπελήφθησαν· ἐφ' ᾧ ὁ τοῦ ἀριθμοῦ χαρακτὴρ, ὁ τὰς τῆς ὑπερτάτης τάξεως μονάδας (τὰς ἀπειλημμένας δηλαδὴ) τὸ πρὶν διασημαίνων, τῶν μονάδων ἤδη τὰς ἁπλᾶς παριστᾷ· οὕτως τε ὁ αἰτούμενος εὑρεθήσεται λογάριθμος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Προκείσθω δὴ πρὸς εὕρεσιν ὁ τῷ ἀριθμῷ 102212 ἀντιστοιχῶν λογάριθμος, ὅπου γε ἐν τοῖς κοινοῖς Κανονίοις οἱ λογάριθμοί εἰσιν ἄχρι τῶν 10000. Ἐπεὶ οὖν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς τὸν ἐν τοῖς Κανονίοις ἔσχατον ὑπερέχει, ἀποτετμήσθων τούτου οἱ δύω ἔσχατοι χαρακτῆρες 12, καὶ ἀπειλήφθω τὸ τούτου μέρος 1022. Ζητείσθω ἤδη ἐν τοῖς Κανονίοις ὁ 1022 διασταλεὶς ἀριθμὸς, ἀπό τε τοῦ προσεχῶς μείζονος ἀφῃρείσθω (§. 829.)· ἡ δὲ διαφορὰ 1, τοσοῖςδε ἐπαυξηνθήτω μηδενικοῖς, ὁπόσαις μονάσιν ὁ ἀριθμὸς ὑποδιέσταλται, ὅπερ ἐστὶν 1 ἰσαρίθμως τοῖς ἀποτμηθεῖσι χαρακτῆρσι ἐπὶ 10 πολλαπλασιασθήτω, ἤτοι δὶς, ἵν' ᾖ 100. Ἐπεὶ δὲ ἐν τοῖς Κανονίοις τοῦ ἀριθμοῦ τοῦδε 1022 λογάριθμος ἀπαντᾷ $= 3,0094509$, τῆς πρώτης διαφορᾶς 100 ἐν μέρει ἀποτιθεμένης, τὸν ἐγγὺς ἐλάσσονα τοῦτον λογάριθμον, ἀπὸ τοῦ ἐφεξῆς ἑπομένου μείζονος ἐν τοῖς Κανονίοις λογαρίθμου ἀφαιρετέον· οἷον

Ἀριθμοί	Λογάριθμοι	Διαφορὰ
1022	3,0094509	
1023	3,0098756	4247

καὶ ἡ δευτέρα αὕτη διαφορὰ, αὖθις ἐπισημειωθήτω. Διαταχθήτωσαν δὴ αἱ σημειωθεῖσαι δύω διαφοραὶ μετὰ τῶν δύω ἀπειλημμένων χαρακτήρων 12 ἐν ἀναλογίᾳ (§. 830.), πρὸς τὴν τοῦ τετάρτου ὅρου x, ἤτοι τῆς τρίτης διαφορᾶς εὕρεσιν· ἔσται $100:4247 = 12:x$, ἢ ἁπλουστέρως $25 : 4247 = 3:x$ (§. 616.)· ἄρα $x = \frac{4247 \times 3}{25} = 509$, τοῦ μετρίως ἐμφιλοχωροῦντος διαπτώματος παραμελουμένου. Προσθετέον ἤδη τὴν εὑρεθεῖσαν διαφορὰν τῷ τοῦ ὑποδιασταλέντος ἀριθμοῦ λογαρίθμῳ 3,0094509, τὸ δὲ τούτου χαρακτηριστικὸν 3 δυσὶ μονάσιν ἐπαυξητέον, διὰ τὸ δύω δεξιόθεν ἀπειληφθῆναι, ἤτοι $3 + 2,0094509 + 509$· Εὑρεθήσεται οὕτως ὁ τῷ ἐν ἀρχῇ δοθέντι ἀριθμῷ 102212 προσανήκων λογάριθμος 5,0095018.

Ἐὰν δὲ δεύτερον εὑρεῖν προκέηται λογάριθμον τῷ ἀριθμῷ 7842365 προσανήκοντα, ὑποτιθεμένων τῶν ἐν τοῖς Κανονίοις λογαρίθμων ἄχρι τῶν 100000, ἑπομένως τε τοῦ ἀριθμοῦ μείζονος τοῦ ἐν τοῖς Κανονίοις ἐσχάτου. Ἀπειλημμένων ἐκείνου δεξιόθεν δύω χαρακτήρων 65, ὁ κολοβωθεὶς ἀριθμὸς 78423 ἀντιπαρακείμενον ἕξει ἐν τοῖς Κανονίοις λογάριθμον τὸν 4,8944435. Ἔνθεν τοι κατὰ τὰ ῥηθέντα ἔσται λογ. 78424 — λογ. $78423 = 55$, ἑπομένως $100 : 65 = 55 : x = \frac{55 . 65}{100} = 36$· ἄρα λογ. $7842365 = 6,8944471$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 832. Ἐφ' ᾧ τοίνυν, ὁ ἀριθμοῦ τινος ὁλοσχεροῦς μὲν δοθέντος, τὸν δὲ ἐν τοῖς Κανονίοις ἔσχατον μονάσι τισιν ὑπερέχοντος λογάριθμος εὑρεθῆναι ἔχοι· ἀπόχρη μόνον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τόσους μηδενικοὺς χαρακτῆρας δεξιόθεν ἀπολαβεῖν, ὅσοι ἐξαρκέσωσιν, ὅπως ὁ ἀποκερματισθεὶς ἐν τοῖς Κανονίοις εὑρεθῇ. Εἶτα δὲ τὸ Χαρακτηριστικὸν τοῦ τῷ ἀποκερματισθέντι ἀριθμῷ ἀντιπαρακεισομένου λογαρίθμου, τοσαῖσδε ἐπαυξηνθήτω μονάσιν, ὅσα τῶν μηδενικῶν τοῦ δοθέντος ὑποδιέσταλται ἀριθμοῦ, ὡς εἴρηται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 833. Κλάσματος δοθέντος, τὸν τούτῳ προσανήκοντα Λογάριθμον ἐξευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ζητείσθω ἐν τοῖς Κανονίοις ὅ, τε τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ λογάριθμος· ὧν δὴ εὑρεθέντων, ἀφαιρείσθω ὁ τοῦ ἀριθμητοῦ λογάριθμος ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ παρονομαστοῦ· τουτέστι τὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ παρονομαστοῦ χαρακτηριστικὸν ἀντισήμως γραφήτω (§. 95. Β'.), εἶτα ὁ ἐλάττων λογάριθμός ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφῃρείσθω· οὕτως ἡ ἐντεῦθεν ἐκκύπτουσα διαφορὰ, ὁ ζητούμενος ἔσται λογάριθμος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Οἷον, εἴτις τὸν λογάριθμον ζητοίη τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$, ἔσται διὰ τῆς ἀφαιρέσεως·

$$\begin{array}{l} \lambda o\gamma.\ 3 = 0,4771213 \\ \underline{\lambda o\gamma.\ 4 = 0,6020600} \\ \lambda o\gamma.\ \frac{3}{4} = -0,1249387 \end{array}$$

τοῦ σημείου — μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν διατιθέντος, καθάπερ εἴρηται (§. 821.).

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ μὲν δὴ ὁ τοῦ πηλίκου λογάριθμος, ἡ διαφορὰ ἐστὶ τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρετέου (§. 800.), τὸ δὲ κλάσμα τὸ πηλίκον ἐστὶ τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν ἐκκύπτον (§. 158.), ἢ, ἡ διαίρεσις διὰ τῶν λογαρίθμων εἰς ἀφαίρεσιν μεταποιεῖται (§. 822.). Ἐφ' ᾧ ἄρα ὁ τοῦ κλάσματος ἀναδοθείη λογάριθμος, τὸν τοῦ ἀριθμητοῦ λογάριθμον ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ παρονομαστοῦ ἀφαιρετέον, ἤτοι ἐκεῖνον ἀντισήμως τούτῳ συναπτέον (§. 95. Β'.). Ἐπομένως, τοῦ ἀριθμητοῦ ἐλάττονος τοῦ παρονομαστοῦ ὑποτιθεμένου, ὁ ἐλάττων λογάριθμος ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθήσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 834. Ἐὰν ἄρα τὸ δοθὲν κλάσμα ᾖ γνήσιον, ὡς $\frac{3}{8}$, ὁ τούτῳ ἀνήκων λογάριθμος ἀποφατικὸς ἔσται (§. 833.)· ὁ γὰρ τοῦ παρονομαστοῦ ἀφαιρετέος λογάριθμος ἐν τοιαύτῃ περιστάσει, μείζων ἐστὶ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμητοῦ (§. 808.), ἐπομένως ἡ διαφορὰ ἐκκύψει ἀποφατική (§. 49.)· οἷον λογ. 3 — λογ. 8 = — λογ. $\frac{3}{8}$.

$$\begin{array}{l} \lambda o\gamma.\ 3 = \ \ 0,4771213, \\ \underline{\lambda o\gamma.\ 8 = \ \ 0,9030900,} \\ \lambda o\gamma.\ \frac{3}{8} = -0,4259687. \end{array}$$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οὐδὲν δὲ θαυμαστὸν δόξει, εἰ ὁ τοῦ γνησίου κλάσματος λογάριθμος ἐλλειπὴς, ἤτοι ἀποφατικὸς ὢν, τοῦ μηδενός ἐστιν ἥττων, εἰδόσι τὸν τῆς μονάδος λογάριθμον μηδὲν ὄντα. Τὸ γὰρ κλάσμα ἔλαττον ἐστὶ τῆς μονάδος (§. 160.), ὁ δὲ τῆς μονάδος λογάριθμος ἐστὶν = 0 (§. 796.), ἄρα ὁ τοῦ κλάσματος λογάριθμος τοῦ μηδενός ἐστιν ἐλάττων.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 835. Ἐὰν δὲ τὸ κλάσμα ᾖ νόθον, ὡς $\frac{9}{5}$, ὁ τούτου λογάριθμος ἔσται θετικός. Ἐν ταύτῃ γὰρ τῇ περιστάσει ὁ τοῦ παρονομαστοῦ ἀφαιρετέος λογάριθμος ἐλάττων ἐστὶ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμητοῦ, ἐπομένως τὸ τούτου ὑπόλοιπον, θετικὸν ἔσται· οἷον λογ. 9 — λογ. 5 = λογ. $\frac{9}{5}$.

$$\begin{array}{l} \lambda o\gamma.\ 9 = 0,9542425, \\ \underline{\lambda o\gamma.\ 5 = 0,6989700,} \\ \lambda o\gamma.\ \frac{9}{5} = 0,2552725. \end{array}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 836. Ἐὰν δ' αὖ τὸ κλάσμα ᾖ μικτὸν, τουτέστιν ἐξ ὁλοσχεροῦς καὶ κεκλασμένου συγκείμενον, ὡς

$9\frac{3}{4}$, πρόχειρον τὸν τούτου λογάριθμον ἐξευρεῖν, τὸ τοιόνδε εἰς κλάσμα νόθον τρέποντας $\frac{39}{4}$ (§. 835.)· οἷον, λογ. 39 — λογ. 4 = λογ. $9\frac{3}{4}$.

$$
\begin{aligned}
\text{λογ. } 39 &= 1,5910646, \\
\text{λογ. } 4 &= 0.6020600, \\
\hline
\text{λογ. } 9\tfrac{3}{4} &= 0,9890046.
\end{aligned}
$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 837. Δεῆσαν οὖν ἀριθμόν τινα ὁλοσχερῆ ἐπὶ κλασματιώδη πολλαπλασιάσαι, ἀφῃρείσθω ὁ τοῦ κλάσματος λογάριθμος ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ πολλαπλασιαστέου. Ὁ γὰρ διὰ κλάσματος πολλαπλασιάζων, τὸν μὲν τοῦ ἀριθμητοῦ λογάριθμον προστεθηκὼς ἔσται, τὸν δὲ τοῦ παρονομαστοῦ ἀφῃρηκὼς (§. 184.)· ὃ δὴ οὐδὲν ἄλλό ἐστιν, ὅτι μὴ λεῖψις τῆς τοῦ λογαρίθμου τοῦ παρονομαστοῦ ὑπεροχῆς ὑπὲρ τὸν τοῦ ἀριθμητοῦ λογάριθμον (§. 800.)· ἀλλ' οὖν ἡ τοιαύτη ὑπεροχή, ὁ τοῦ κλάσματος ἐστὶ λογάριθμος (§ 833.). Ἄρα, ἵν' ὁ ὁλοσχερὴς ἐπὶ τὸν κλασματίαν πολλαπλασιασθῇ, ὁ τούτου λογάριθμος ἀπ' ἐκείνου ἀφαιρετέος. Ἢν δ' αὖ τὸν ὁλοσχερῆ διὰ κεκλασμένου διελεῖν δεήσῃ, τηνικαῦτα ὁ τοῦ κεκλασμένου λογάριθμος τῷ διαιρετέῳ προσθετέος· ὁ γὰρ κλασματωδῶς διαιρῶν, τὸν μὲν τοῦ παρονομαστοῦ λογάριθμον προστίθησιν, ἀπάγει δὲ ἀφαιρῶν τὸν τοῦ ἀριθμητοῦ (§. 193.), ὃ δὴ ταυτόν ἐστι, τῷ τὴν τοῦ λογαρίθμου τοῦ παρονομαστοῦ ὑπὲρ τὸν τοῦ ἀριθμητοῦ ὑπεροχὴν προσθεῖναι (§. 797.). Ἔστι δὲ, ἐκ τῶν ῥηθέντων, ἡ τοιαύτη ὑπεροχὴ ὁ τοῦ κλάσματος λογάριθμος· ἄρα, ἀριθμὸν ὁλοσχερῆ διὰ κλασματικοῦ δεήσαν διελέσθαι, τὸν τούτου λογάριθμον τῷ τοῦ ὁλοσχεροῦς προσθετέον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Πρὸς εὕρεσιν τοίνυν τῶν λογαρίθμων, τῶν τοῖς ὑπὸ μονάδος ἀριθμουμένοις κλάσμασι προσανηκόντων, τὸν τοῦ παρονομαστοῦ μόνον τοῦ τοιούτου κλάσματος λογάριθμον θηρᾶν δέον, ὃν δὴ εὑρεθέντα ἀποφατικῶς σημειωτέον. Τοῦ γὰρ τῆς μονάδος λογαρίθμου ἐκ μηδενικῶν συγκειμένου χαρακτήρων (§. 796.), ἡ ἀληθὴς ἀφαίρεσις οὐκ ἔχει ἄλλως γενέσθαι, εἰμὴ μόνον τῇ ἀντισήμῳ τοῦ τῷ παρονομαστῇ ἀνήκοντος λογαρίθμου ἐκθέσει· οἷον λογ. $\frac{1}{7} = -0,8450980$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 838. *Δοθέντος ἀριθμοῦ ὁλοσχεροῦς κλάσμα δεκαδικὸν προσκείμενον ἔχοντος, τὸν τούτῳ ἀνήκοντα λογάριθμον προσευρεῖν.*

ΛΥΣΙΣ.

Τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ μετὰ τῶν αὐτῷ προσκειμένων δεκαδικῶν χαρακτήρων, οἱονεὶ συνεχοῦς ἤτοι ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ θεωρουμένου, ὁ τούτῳ ἀντιστοίχων λογάριθμος θηρευέσθω· ἀλλ' οὖν ἀπὸ τοῦ χαρακτηριστικοῦ τόσους χαρακτῆρας, ἤτοι μονάδας ἀφαιρετέον, ὅσοις τὸ προσκείμενον κλάσμα δεκαδικοῖς σύγκειται· τὸ οὕτως προκύπτον ὑπόλοιπον, ἤτοι ἡ διαφορά, ὁ αἰτούμενος ἔσται ἐγγὺς τοῦ ἀληθοῦς λογάριθμος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Πρὸς τὴν τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 4,13 εὑρεσιν, ζητείσθω ἐν τοῖς Κανονίοις ὁ τούτῳ, οἱονεὶ ὁλοσχερεῖ 413, προσανήκων λογάριθμος $= 2,6159500$· εἶτα ἀπὸ τοῦ χαρακτηριστικοῦ 2 δύω ἀφαιρείσθωσαν μονάδες ταῖς ἀνωτέρω διασταλείσαις ἰσάριθμοι· ἡ ἐντεῦθεν ἐκκύπτουσα ὑπεροχὴ 0,6159500, ὁ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ 4,13 αἰτούμενος ἔσται λογάριθμος.

Ἐὰν δὲ δεύτερον εὑρεῖν προκέηται τὸν τοῦ ἀριθμοῦ 0,009 λογάριθμον. Οὐκοῦν ὡς ἂν οὗτος εὑρεθῆναι ἔχοι. ληφθήτω ἀπὸ τοῦ Πίνακος ὁ τοῦ 9 λογάριθμος $= 0,9542425$, ὃς δὴ ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ 1000 ἀφαιρεθεὶς, διαφορὰν ἡμῖν ἀναδώσει, ἥτις ὁ αἰτούμενος ἔσται λογάριθμος· οἷον·

$$\begin{array}{rl} \text{λογ. } 9 = & 0,9542425 \\ \text{λογ. } 1000 = & 3,0000000 \\ \hline \text{διαφορὰ} = & -2,0457575 \end{array}$$

καὶ γὰρ $0,009 = \frac{9}{1000}$· ἀλλ' οὖν λογ. $\frac{9}{1000} =$ λογ. $9 -$ λογ. 1000 (§. 833.)· ἄρα λογ. $0,009 = -2,0457575$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Κατὰ τὰ ἐν τῇ Λύσει κατασκευασθέντα, ὁ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς 4, ᾧτινι τὸ δεκαδικὸν προστέθειται κλάσμα 13, παρονομαστὴν ὑπονοούμενον ἔσχε τὸν 100 (ὡς ἐν τῇ τῶν Δεκαδικῶν Κλασμάτων Θεωρίᾳ κατάδηλον ἔσται), ἤτοι τοσάκις ἐπὶ τὸν 10 πεπολλαπλασίασται, ὁπόσοι ἐν τῷ κλάσματι δεκαδικοὶ εἰσὶ χαρακτῆρες, αἵ γε πρὸς τούτοις τῷ αὐτῷ προσετέθησαν ἀριθμῷ· τούτου χάριν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ, ᾧ ἀνήκει λογαρίθμου, τοσαῖσδε μονάσιν ἐπαύξεται, ὁπό-

σοι ἐν τῷ κλάσματι δεκαδικοὶ συμπίπτουσι χαρακτῆρες (§. 831.). Ἐὰν τοίνυν ἀνάπαλιν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ, τῷ ὡς ὁλοσχερεῖ ληφθέντι ἀριθμῷ, προσανήκοντος λογαρίθμου, τοσαῖσδε ὑπομειωθῇ μονάσιν, ὁ τῷ δοθέντι ἀριθμῷ προσήκων ἐκκύπτει λογάριθμος. Καὶ γὰρ, ἐὰν ὁ δοθεὶς ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς πρὸς κλάσμα μεταχθῇ· οὗτινος παρονομαστὴς ὁ τῷ δεκαδικῷ κλάσματι συνημμένος, τῶν τε κλασμάτων ἀλλήλοις προστιθεμένων, ὁ προσανήκων ἐκείνοις ζητηθῇ λογάριθμος (§. 833.), ὁ κατὰ τὴν τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος ἐπίτομον πρᾶξιν εὑρεθεὶς λογάριθμος, ὁ αὐτὸς πάντως κἀνταῦθα ἐκκύψει· οἷον $4,13 = 4 + \frac{13}{100} = \frac{400}{100} + \frac{13}{100} = \frac{413}{100} =$ λογ. $413 -$ λόγ. 100 (§. 800.) $=$ λογ. $413 - 2$ (§. 820.)· ἄρα λογ. $413 - 2 = 2,6159500 - 2 = 0,6159500$. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 839. Ἔσται τοίνυν καὶ λογ. $0,8432 =$ λόγ. $\frac{8432}{10000} =$ λογ. $8432 -$ λογ. $10000 = 3,9259306 - 4 = 0,9259306 - 1$. Τὸ χαρακτηριστικὸν δὲ ληφθήσεται, καταφατικὸν μὲν, ἐὰν τὸ σημεῖον πρὸς τὰ λαιὰ προάγεσθαι δέῃ, τουτέστιν ἐὰν ὁ ἀριθμὸς μονάδος ᾖ μείζων· ἀποφατικὸν δὲ ἐὰν εἰς δεξιὰ, τουτέστιν, ἐὰν ᾖ ὁ ἀριθμὸς μονάδος ἐλάσσων (§. 820.)· ὡσαύτως καὶ $0,0375 = -2,5740313$. Ἔνθα τὸ σημεῖον $-$ πρὸς μόνον ἀνάγεται τὸ χαρακτηριστικὸν (§. 821.)· ἔστι καὶ γὰρ $0,0375 = -2 + \frac{5740313}{10000000} = -2 + 0,5740313$, συνημμένον τὸν ὑπονοούμενον δεκαδικὸν παρονομαστὴν ἐπιφέρον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 840. *Λογαρίθμου, τοῦ ἐν τοῖς Κανονίοις ἐσχάτου, ἐλάττονος δοθέντος, τὸν τούτῳ ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμὸν εὑρεῖν.*

ΛΥΣΙΣ.

Ὁ δοθεὶς τοιοῦτος λογάριθμος, ἢ εὑρίσκεται ἐν τοῖς Πίναξιν ἀκριβῶς, ἤτοι καθ' ὅλους τοὺς αὐτοῦ χαρακτῆρας· ἤ, κατὰ μὲν τὸ χαρακτηριστικὸν συνᾴδει, διαφέρει δὲ κατὰ τοὺς λοιπούς. Εἰ μὲν τὸ πρῶτον ὥσπερ ὁ δοθεὶς λογάριθμος πρὸς δεξιὰν ἐμπίπτει, οὕτως ἀριστερόθεν ἐπὶ τοῦ Κανονίου κατὰ πλευρὰν ὁ ζητούμενος αὐτῷ ἀντιστοιχήσει ἀριθμός. Εἰ δ' οὖν ὁ δοθεὶς λογάριθμος καθ' ὅλους τοὺς αὐτοῦ ὑστέρους χαρακτῆρας ἐν τοῖς Πίναξιν οὐχ εὑρίσκεται, εὑρεθήσεται πάντως μεταξὺ τῶν δυοῖν προσεχῶς Κανονικῶν λογαρίθμων· ὧν ὁ μὲν πρὸς τὸν δοθέντα ἀναφερόμενος ἐστὶ προσεχῶς ἐλάττων, ὁ δὲ προσεχῶς μείζων. Οὕτως οὖν ὁ τοιούτῳ λογαρίθμῳ ἀντιπαρακείμενος ἀριθμὸς αὐτῷ τούτῳ οὐκ ἔσται καθαρῶς ὁλοσχερής, ἀλλὰ προσκείμενον αὐτῷ κλάσμα ἔχων. Εὑρεθήσεται δὲ οὕτως. Ὁ προσεχέστατα ἐλάττων ἐν τοῖς Κανονίοις λογάριθμος, ἀφαιρείσθω ἀπό τε τοῦ προσεχέστατα αὐτῷ μείζονος καὶ ἀπὸ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, καὶ σημειούσθωσαν αἱ τούτου πρὸς ἑκάτερον διαφοραί· ἐξ ὧν συνιστάσθω κλάσμα, ἀριθμητὴν μὲν ἔχον τὴν τοῦ προσεχέστατα ἐλάττονος διαφορὰν πρὸς τὸν δοθέντα, παρονομαστὴν δὲ τὴν αὐτοῦ τούτου πρὸς τὸν μείζονα· τὸ

οὕτως εὑρεθὲν κλάσμα (ὅπερ δεῆσαν, καὶ πρὸς δεκαδικὸν μεταβαλεῖν ἔνεστι) συνεζεύχθω τῷ προσεχῶς ἐλάττονι ἐν τοῖς Κανονίοις ἀριθμῷ, καὶ ἔσται οὕτως ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εὑρεθείς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Ἔστω εὑρετέος ἀριθμὸς τῷ λογαρίθμῳ 2,6886099 ἀντίστοιχος. Ἀφῃρείσθω δὴ ὁ προσεχῶς αὐτοῦ ἐν τοῖς Πίναξιν ἐλάσσων 2,6884198, ἀπὸ τοῦ προσεχῶς μείζονος 2,6893089, ἥ τε διαφορὰ 8891 σημειούσθω· ὡσαύτως καὶ τοῦ προσεχῶς ἐλάσσονος ἐν τοῖς Πίναξι λογαρίθμου ἀφαιρεθέντος, τῇ ἐντεῦθεν ἀναφυομένῃ ὑπεροχῇ 1901 ἡ προτέρα κλασματωδῶς ὑπογεγράφθω $\frac{1901}{8891}$· καθ' ὃ δὴ κλάσμα, ὁ αἰτούμενος ἀριθμὸς τὸν προσεχῶς ἐλάττονα ἐν τοῖς Πίναξιν ἀριθμὸν 488 ὑπερέχει. Ἐὰν τοίνυν τουτὶ τὸ κλάσμα τῷ προσεχῶς ἐλάσσονι ἀριθμῷ 488 προστεθῇ, ἐκκύψει ὁ αἰτούμενος ἀριθμὸς 488 $\frac{1901}{8891}$· ἤ, ἐὰν δέῃ τὸ κοινὸν κλάσμα πρὸς δεκαδικὸν μεταγαγεῖν, ἔσται ὁ αἰτούμενος ἀριθμὸς 488,213.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ ὁ δοθεὶς λογάριθμος μεταξὺ δυοῖν ἐν τοῖς Κανονίοις λογαρίθμων παρεμπίπτει, τὸν τούτῳ ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμὸν ὡσαύτως μεταξὺ δυοῖν προσεχῶς ἀνηκόντων Κανονικῶν ἀριθμῶν ἐπάναγκες ἐμπαρακεῖσθαι. Ἀλλ' οὖν ὁ προσεχῶς μείζων ἀριθμός, τὸν προσεχῶς ἐλάσσονα, ὅτι μὴ μονάδι ὑπερέχει (§. 829.)· ἄρα ὁ μεταξὺ δυοῖν ἐγγυτάτων ἀριθμῶν παρεμπίπτων ἀριθμός, τῷ ἔγγιστα ἐλάσσονι πλὴν μονάδος, τουτέστι παρὰ μονάδα ἰσωθήσεται. Ἐὰν οὖν τοιοῦτόν τι κλάσμα τῷ προσεχῶς ἐν τοῖς Κανονίοις ἐλάσσονι ἀριθμῷ πρόστεθῇ, ἐκκύψει ὁ αἰτούμενος ἀριθμὸς, τῷ δοθέντι ἀντιστοιχῶν λογαρίθμῳ, ὡς εὔδηλον· ἑπομένως τῷ δοθέντι λογαρίθμῳ ἀριθμὸς ὁλοσχερὴς μετὰ κλάσματος προσήκων ἔσται. Τὸ δὲ κλάσμα τῇ προεκτεθείσῃ μεθόδῳ (§. 830.) ὀρθῶς θηρᾶν, φανερόν· ἤτοι διὰ τῆς ἐφεξῆς ἀναλογίας, ὡς ἡ τῶν δυοῖν προσεχῶν λογαρίθμων ἐν τοῖς Κανονίοις διαφορὰ, πρὸς τὴν τῶν ἀνηκόντων ἀριθμῶν· οὕτως ἡ τοῦ δοθέντος καὶ προσεχῶς ἐλάσσονος ἐν τοῖς Κανονίοις λογαρίθμου διαφορὰ, πρὸς τὴν τῶν ἀντιστοιχούντων ἀριθμῶν. Ἐπεὶ τοίνυν ἐν ταύτῃ τῇ ἀναλογίᾳ ὁ δεύτερος ὅρος ἐστὶ μονὰς, ἥτις οὐδόλως πολλαπλασιάζει, ὁ τέταρτος ὅρος, ἤτοι τὸ ζητούμενον κλάσμα ἐκκύπτει τῇ τοῦ τρίτου ὅρου ἐπὶ τὸν πρῶτον διαιρέσει (§. 649.). Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 841. Ἐξενεχθήσεται ἄρα ὡσαύτως ἀπὸ τῶν Πινάκων ὁ τῷ δοθέντι λογαρίθμῳ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς, ἀμελουμένου μὲν καὶ τοῦ ἐκείνου χαρακτηριστικοῦ, τῶν δὲ χαρακτήρων τῶν ἐπὶ τοῦ Πίνακος τῷ λογαρίθμῳ ἀντιστοιχούντων καταγραφομένων. Οἷον ἔστω λογάριθμος ὁ *, 8765432, ὁποῖον πότ' ἂν ᾖ τὸ χαρακτηριστικὸν μὴ φροντίζουσιν. Ἐπεὶ οὖν τὸ χαρακτηριστικὸν τὸν ἀριθμὸν τῶν τῷ λογαρίθμῳ προσηκόντων ὁλοσχερῶν χαρακτήρων παρὰ μονάδα ἐμφαίνει (§. 816.), τὸν τούτῳ ἀνήκοντα ἀριθμὸν προσδιορίσαι

δέον· ἔσται γὰρ οὗτος, ὡς ἐν τοῖς μείζοσι Κανονίοις τυγχάνει ἐκκείμενος, ὡς ἐφεξῆς.

	Λογάριθμοι	Διαφ.	Οἱ ἐπανήκοντες Ἀριθμοὶ
ὁ προσεχ. ἐλάσσων	*,8765411	. . .	75256
		21	
ὁ δοθείς	*,8765432	. . .	75256 + χ
		58	
ὁ προσεχῶς μείζων	*,8765469	. . .	75257

Ἔσται ἄρα $58:21 = 100:\chi$ (§. 830.), ἔνθα τὸ χ τοὺς ἀποτμηθέντας δύω ἐπισημειοῖ χαρακτῆρας· κἀντεῦθεν $\chi = \frac{2100}{58} = 36$, ἑπομένως ἔσται ὁ αἰτούμενος ἀριθμὸς 7525636, ἔνθα κατὰ τὴν τοῦ χαρακτηριστικοῦ προεκτεθεῖσαν ὑπόθεσιν ἰσαρίθμως καὶ τὰ ὁλοσχερῆ τῶν δεκαδικῶν ὑποδιασταλτέον· οἷον ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν ᾖ = 0, ἔσται ὁ ἀριθμὸς 7,525636 (§. 816. 820.), ἐὰν δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν = 6 τύχῃ, ἔσται ὁ ἀριθμὸς 7525632 ἄνευ δεκαδικῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 842. Εἰ μὲν οὖν τοῦ λογαρίθμου χαρακτηριστικὴ ἡ τριὰς εἴη, ὅπερ ἐστὶν, εἰ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς μεταξὺ τῶν 1000 καὶ 10000 παρεμπίπτει (§. 816.), ζητητέον τοῦτον ὡς ἀνωτέρω (§. 840.). Εἰ δ' οὖν ὁ δοθεὶς λογάριθμος χαρακτηρίζοιτο διὰ τῶν 0, 1, 2 (§. 818.), τουτέστιν εἰ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς μεταξὺ 1 καὶ 1000 ἀνείληπται· ἀμειπτέον τὸ χαρακτηριστικὸν εἰς 3 καὶ τὸν λογάριθμον οὕτω ζητητέον μεταξὺ 1000 καὶ 10000, κατὰ τὰς τῷ χαρακτηριστικῷ προστεθείσας μονάδας· οἷον, εἰ ζητοῖτο ἀριθμὸς ὁ τῷ λογαρίθμῳ 1,9201662 προσήκων, ἐπεὶ ἐν τοῖς Κανονίοις τῷ ἐγγὺς ἐλάσσονι ἀντιστοιχεῖ ἀριθμὸς 83, ὁ αὐτὸς λογάριθμος κεῖται ὑπὸ χαρακτηριστικῷ τῷ 3, μετὰ τὸν ἀριθμὸν 8360, ἔνθα τῷ ἐγγὺς ἐλάσσονι ἀντιστοιχεῖ ἀριθμὸς 83,21· καὶ ἔσται ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς $83\frac{21}{100}$. Οὐδὲν δὲ δυσχερέστερον καὶ τὸν ἀριθμὸν ἐπισημειῶσαι, τὸν τῷ λογαρίθμῳ 1,7839608 ἀντιπαρακεισόμενον· ἐπεὶ γὰρ ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς ἐντὸς μὲν τῶν ὅρων τῆς ὑπερτάτης τῶν ἐν τῷ Πίνακι τάξεως εἴληπται, οἷα δὴ ἐπὶ τοῖς 60 καὶ 61 εἴσω ἐμπίπτων, διὰ δὲ τὸ προσκείμενον κλάσμα ἐπὶ τοῦ Πίνακος, οὔτε μὴν αὐτὸς, οὔτε δὲ ὁ τούτου λογάριθμος κεῖται, ἔσται πάντως ἐξ ὁλοσχεροῦς καὶ κεκλασμένου συγκείμενος, διὸ καὶ τὸ τούτου κλάσμα διὰ τῶν 10, 100, 1000 κτλ. διαιρέσιμον ἔσται (§. 820.). Δυνατὸν οὖν κἀνταῦθα τὴν μεταξὺ τῶν ἐγγὺς ἐλασσόνων καὶ τῶν ἐγγὺς μειζόνων λογαρίθμων τὴν διαφορὰν, ἣν ὁ Πίναξ παρίστησιν, ὡς εἰ ὁλοσχερεῖς ἐδήλουν ἀριθμοὺς οἱ ἐν αὐτῇ χαρακτῆρες, οὕτως ἐκλαβεῖν, καὶ τὸν ὑπολογισμὸν διεκπεράναι κατὰ τὸ ἐφεξῆς σχῆμα.

	Λογάριθμοι	Διαφ.	Ἀριθμοί
ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων	1.7781512	. . . .	60
		58096	
ὁ δοθεὶς	1.7839608	. . . .	60 + χ
		71786	
ὁ ἐγγὺς μείζων	1.7853798	. . . .	61

Μεταξὺ τοίνυν τούτων τῶν διαφορῶν, καὶ τῶν 10, ἢ 100, ἢ 1000, ὁ τέταρτος ζητείσθω ἀνάλογος (§. 830.)· ὃς δὴ παρονομαστὴν 10, ἢ 100, ἢ 1000 προσκείμενον, ἢ ὑπονοούμενον ἕξει. οἷον·

$$71786 : 58096 = 100 : \chi = 81.$$

ἔσται $60\frac{81}{100} = 60,81$ τῷ δοθέντι λογαρίθμῳ προσήκοντι ἀριθμῷ ἴσος.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁ τοιοῦτος μὲν δὴ τρόπος ἐν γένει ἀναγκαῖός ἐστιν, ἡνίκα ὁ λογάριθμος ζητῆται, οὗ τὸ χαρακτηριστικὸν ἔλαττον τοῦ χαρακτηριστικοῦ τῆς ὑπερτάτης τῶν ἐπὶ τοῦ Πίνακος τάξεως. Τοὐναντίον δὲ ῥᾷστα εὑρεθήσονται τὰ δεκαδικὰ, ἢ ἑκατοστὰ, ἢ χιλιοστὰ τῶν μορίων, τοῦ χαρακτηριστικοῦ μονάδι, ἢ δυάδι, ἢ τριάδι, κτλ. αὐξηθέντος (§. 810.), καὶ τοῦ προσήκοντος τουτωῒ τῷ λογαρίθμῳ ἀριθμοῦ ζητουμένου (§. 842.).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 843. Λογαρίθμου δοθέντος μείζονος τῶν ἐν τοῖς Πίναξι περιεχομένων, τὸν τούτῳ προσήκοντα ἀριθμὸν εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Τὸ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου χαρακτηριστικὸν ἐν τοσαῖσδε ἐπιμειούσθω μονάσιν, ὅσαι ἐξαρκέσωσιν, ἐφ' ᾧ τουτὶ τὸ τοῦ ἐσχάτου ἐν τοῖς Πίναξι λογαρίθμου χαρακτηριστικὸν ὑπερβάλλειν μηδόλως ἔχοι· εἶτα ζητείσθω ἀριθμὸς ὁ τῷ οὕτωσὶ ἐλαττωθέντι λογαρίθμῳ ἀντιστοιχῶν, ὅς γε δὴ τοσάκις ἐπὶ 10, 100, 1000, πολλαπλασιασθεὶς, ἰσαρίθμως δηλαδὴ ταῖς ἀπὸ τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου διακριθεῖσι μονάσιν, ἀναδώσει ἡμῖν γινόμενον, ὃ δὴ ὁ αἰτούμενος ἔσται ἀριθμός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Ζητουμένου γὰρ τοῦ τῷ λογαρίθμῳ 5.0021661 ἀντιστοιχοῦντος ἀριθμοῦ, ἀφαιρείσθωσαν δύω μονάδες ἀπὸ τοῦ χαρακτηριστικοῦ 5, τῷ δὲ ἐναπολειφθέντι λογαρίθμῳ 3.0021661 ζητείσθω ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς 1005, ὃς δὴ ἐπὶ 100 πολλαπλασιασθείς, τὸν ζητούμενον ἡμῖν ἀναδώσει ἀριθμὸν 100500.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁσάκις γὰρ μονάδι τὸ χαρακτηριστικὸν ὁποιουοῦν λογαρίθμου ἐλλείπει, ἤτοι ὁσάκις μονὰς ἀπ' ἐκείνου ἀφαιρεῖται, τοσάκις ὁ τούτῳ ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς διὰ τοῦ 10 διῄρηται (§. 810. 819.). Εἰ τοίνυν τοσάκις ἐπὶ 10 πολλαπλασιασθῇ, ἐκκύπτει ἀριθμὸς τῷ προτέρῳ λογαρίθμῳ ὅμοιος. Ἀλλ' οὖν ἐνταῦθα δυὰς μονάδων τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἀπείληπται· ἄρα ὁ τῷ ἐναπολειφθέντι λογαρίθμῳ προσανήκων ἀριθμὸς ἐπὶ 100 πολλαπλασιαστέος ἔσται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 844. Εὑρεθήσεται ἄρα ὡσαύτως καὶ ὁ τῷ τοὺς τῆς ὑπερτάτης τάξεως ὅρους ὑπερπίπτοντι λογαρίθμῳ προσήκων ἀριθμός, ἐὰν ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 10, 100, 1000 κτλ. ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀφαιρεθῇ λογαρίθμου, ἕως οὗ καταλειφθῇ ὁ ἔσχατος ἐλάσσων λογάριθμος τῶν ἐν τοῖς Κανονίοις· εἶτα δὲ ζητείσθω τῇ ἀνωτέρῳ μεθόδῳ (§. 842.) ὁ ἐκείνου ἀντίστοιχος ἀριθ-

μός, ἐν δεκαδικοῖς εἴπερ τοῦ χαρακτηριστικοῦ μονὰς ἀφήρηται, ἐν ἑκατοστοῖς εἰ δυάς, ἐν χιλιοστοῖς εἰ τριάς, κτλ. ὡς εἴρηται· τὰ δὲ λοιπὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῷ ἀνωτέρῳ διαπερανθήσεται τρόπῳ (§. 843.). Οἷον δοθέντος τοῦ λογαρίθμου 6.8165798, ζητείσθω ὁ τούτῳ ἀντίστοιχος ἀριθμός· ἔσται τοίνυν διὰ τῆς τῶν 3 τοῦ χαρακτηριστικοῦ μονάδων ἀφαιρέσεως = 3.8165789. ἐπεὶ δὲ οὗτος μεταξὺ τῶν 6555 καὶ 6556 ἀπαντᾷ, ἔσται·

	Λογάριθμοι	Διαφ.	Ἀριθμοί
ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων	3.8165727	. . . .	6555
		71	
ὁ δοθείς	3.8165798	. . . .	6555 + χ
		662	
ὁ ἐγγὺς μείζων	3.8166389	. . . .	6556

ἐπεὶ δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν 3 μονάσιν ἠλάττωται, ἔσται ὁ τρίτος τῆς ἀναλογίας ὅρος = 1000. Κἀντεῦθεν (§. 830.)·

$$662 : 71 = 1000 : \frac{71 \times 1000}{662} = 107.$$

ὃς δὴ τέταρτος ἀνάλογος 107 ὁ τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος χ ἐστὶν ἀριθμητής, παρονομαστὴν ἐπιφέρων 1000· ἔσται ἄρα ὁ τῷ λογαρίθμῳ 3.8165798 προσήκων ἀριθμὸς = $6555\frac{107}{1000}$ = 6555.107, ἑπομένως τε ἔσται ὁ τῷ ἐν ἀρχῇ δοθέντι λογαρίθμῳ 6.8165798 προσήκων ἀριθμὸς = 6555107 (§. 841.).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 845. Λογαρίθμῳ ἀποφατικῷ, ἀριθμόν, ἤτοι κλάσμα συστοιχοῦν εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ὁ δοθεὶς ἀποφατικὸς λογάριθμος ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου λογαρίθμου τῶν ἐν τῷ Κανονίῳ, οἷος ὁ τῷ ἀριθμῷ 10000 ἢ 100000, ἀντιστοιχῶν ἀφῃρείσθω, ὁ τῇ ἐντεῦθεν ἐκλαμβανομένῃ ὑπεροχῇ ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς, ὁ τοῦ ζητουμένου κλάσματος ἔσται ἀριθμητὴς, οὗ παρονομαστὴς τὸ δεκαδικὸν, ἢ ἑκατοστὸν, ἢ χιλιοστὸν, ἢ μυριοστὸν, κτλ. μόριον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Ἔστω λογάριθμος ἀποφατικὸς $=-0,1249387$· ἔνθεντοι πρῶτον, τῷ δοθέντι λογαρίθμῳ προστεθήτω ὁ τῶν 100000 λογάριθμος, τουτέστιν ἀπ' ἐκείνου ἀφαιρεθήτω (§. 85. Γʹ.). Ἔσται τοίνυν λογ. $100000 = 5.0000000 - 0.1249387 = 4.8750613$. Εἶτα δὲ τῇ προϋφάσῃ διαφορᾷ, ἤτοι τῷ οὕτως εὑρεθέντι λογαρίθμῳ, ζητείσθω ὁ ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς $=75000$, ὃς δὴ καὶ διὰ τῶν 100000 διαιρεθεὶς, πηλίκον ἡμῖν ἀναδώσει τὸν τῷ δοθέντι λογαρίθμῳ προσήκοντα ἀριθμόν· οἷον $\frac{75000}{100000} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$· ἔσται ἄρα $-0.1249387 =$ λογ. $\frac{3}{4}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ μὲν δὴ τὸ κλάσμα πηλίκον τι ἐστὶ, τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ προκύπτον (§. 158.), ἔσται ἡ μονὰς πρὸς τὸ κλάσμα, ὡς ὁ παρονομαστὴς πρὸς τὸν ἀριθμητήν (§. 159.). Ἀλλ' οὖν, ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸ κλάσμα τὸ τῷ δοθέντι στερητικῷ λογαρίθμῳ ἀντιστοιχοῦν, οὕτως 100000 πρὸς τὸν ἀριθμὸν τὸν τῷ ὑπολειφθέντι λογαρίθμῳ προσήκοντα (§. 797. 102.). Ἐὰν ἄρα ὁ 100000 ἀντὶ παρονομαστοῦ ληφθῇ, ἔσται ὁ ἀριθμὸς 75000, ὁ τοῦ ζητουμένου κλάσματος ἀριθμητής. Ο. Ε. Δ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὸ τῆς πράξεως τέλειον ἐν τούτῳ ὑφίσταται, ἐὰν τῷ ἀποφατικῷ λογαρίθμῳ, τοῦ τῶν 100000 προστεθέντος λογαρίθμου, τὸ πρὸς τὸν ἀποφατικὸν λογάριθμον ἀνῆκον κλάσμα ἐπὶ 100000 πολλαπλασιασθῇ (§. 820.). Ἔσται δὲ οὕτως ὁ ἀριθμὸς ἑκατοντάκις χιλιάκις μείζων, ἤπερ ἔδει εἶναι· ἵν' οὖν ὁ ἀριθμὸς τὸ αὑτοῦ ἀληθὲς ἰδιότιμον σχῇ, ἐπάναγκες τὸν εὑρεθέντα διὰ τῶν 100000 διελεῖν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 846. Εἰ ἄρα ζητοῖτο τὸ κλάσμα, ᾧτινι ὁ ἀποφατικὸς ἀντιστοιχείη λογάριθμος -1.2552725· ῥᾷστα ἐκεῖνο εὑρεθήσεται, ὡς τοῦ λογαρίθμου θετικῶς ἐν τοῖς Πίναξιν κειμένου· ὥστε ἐπεὶ 1.2552725 τῷ 18 ἀντιστοιχεῖ ἀριθμῷ, ἔσται $-1.2552725 =$ λογ. $\frac{1}{18}$ (§. 837. Σχόλ.).

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 847. Παραπλήρωμα Ἀριθμητικὸν ἀκούει, ἡ μεταξὺ ἑνὸς ὁποιουοῦν ἀριθμοῦ καὶ τῆς μονάδος, ἰσαρίθμοις τοῖς κατὰ τὸν ἀριθμὸν χαρακτῆρσι, μηδενικοῖς συνεζευγμένης θεωρουμένη διαφορά.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἀριθμοῦ μὲν δὴ ὁποιουοῦν, οἷον τοῦ 3728 Ἀριθμητικὸν Παραπλήρωμα ἔσται τοδὶ $6272 = 10000 - 3728$ (§. 847.). Ἐπισημειούσθω δὲ, ἕκαστον τῶν τοῦ Ἀριθμητικοῦ Παραπληρώματος χαρακτήρων, ἑκάστῳ τοῦ ἐν ἀρχῇ δοθέντος ἀριθμοῦ λαιόθεν πρὸς δεξιὰν προστιθέμενον ἄθροισμα ἀείποτε ἀναδιδόναι $= 9$, πλὴν τοῦ λαιόθεν ἐσχάτου, οὗ τὸ ἄθροισμα $= 10$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 848. Δεήσαν τοίνυν ἐπὶ τοῦ τῶν λογαρίθμων ὑπολογισμοῦ λογάριθμον τινα ἑτέρου ἀφελεῖν, προστεθείσθω ἐκείνῳ τὸ τοῦ ἀφαιρετέου λογαρίθμου Ἀριθμητικὸν Παραπλήρωμα· ἀπὸ δὲ τοῦ χαρακτηριστικοῦ, ὁ ταῖς δεκάσιν ἐντοπιζόμενος χαρακτὴρ ἀπολαμβανέσθω. Οἷον εἰ δέοι ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου 1.1760913 τὸν λογάριθμον 0.8450980 ἀφελεῖν, συναπτέσθω ἐκείνῳ τὸ τούτου Ἀριθμητικὸν Παραπλήρωμα $9.1549020 = 10.0000000 - 0.8450980$· εἶτα δὲ ἀπὸ τοῦ τῶν $1.1760913 + 9.1549020$ προκύπτοντος ἀθροίσματος 10.3309933 δεκὰς ἀπειλήφθω, ἵν' ᾖ τοὐντεῦθεν ὑπόλοιπον $= 0.3309933$, ταυτὸν τῇ τῶν ἐν ἀρχῇ δοθέντων, δυοῖν λογαρίθμων $1.1760913 - 0.8450980$ ὑπεροχῇ $= 0.3309933$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 849. Δοθέντων τῶν Λογαρίθμων τριῶν ἀριθμῶν, τὸν τοῦ τετάρτου Ἀναλογικοῦ Λογάριθμον προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου ἀναλογικῶν ἀριθμῶν

λογαρίθμων εἰς ἓν ἀθροισθέντων, ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος ὁ τοῦ πρώτου ἀφαιρείσθω λογάριθμος· ὁ γὰρ λοιπὸς, ὁ τοῦ τετάρτου ἀναλογικοῦ ἀριθμοῦ ἔσται λογάριθμος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Ἔστωσαν μὲν δὴ ἀριθμοὶ τρεῖς Ἀνάλογον οἱ ἐφεξῆς $9:27 = 33:x$, καὶ ζητείσθω διὰ τῶν λογαρίθμων ὁ τέταρτος. ἔσται $(\text{λογ.}\ 27 + \text{λογ.}\ 33.) - \text{λογ.}\ 9 = x$· ἤτοι·

$$\begin{array}{r} \text{λογ.}\ 27 = 1.4313638. \\ \text{λογ.}\ 33 = 1.5185139. \\ \hline \text{λογ.}\ 27 + \text{λογ}\ 33 = 2.9498777. \\ -\ \text{λογ.}\ 9 = 0.9542425. \\ \hline (\text{λογ.}\ 27 + \text{λογ.}\ 33) - \text{λογ.}\ 9 = 1.9956352. \end{array}$$

ᾧ δὴ, ἀριθμὸς ἀντιστοιχεῖ ἐν τοῖς Πίναξιν ὁ 99· ἄρα $9:27 = 33:99$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν γὰρ τῷ ζητεῖν τὸν τέταρτον ἀναλογικὸν, πολλαπλασιάζομεν τὸν δεύτερον ἐπὶ τὸν πρῶτον, τὸ δ' ἐντεῦθεν προκύπτον γινόμενον διὰ τοῦ πρώτου διαιροῦμεν (§. 600. Α'.). Ἀλλ' οὖν ἐπὶ τοῦ τῶν λογαρίθμων ὑπολογισμοῦ, ὁ μὲν πολλαπλασιασμὸς εἰς πρόσθεσιν μετήμειπται, ἡ δὲ διαίρεσις εἰς ἀφαίρεσιν (§. 822.). Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου τῶν ὅρων, ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ πρώτου ἀφαιρεθὲν, ὑπόλοιπον ἡμῖν λογαριθμικὸν ἀναδώσει, ᾧτινι τὸ πηλίκον, ἤτοι ὁ τέταρτος ἀνάλογος ἐν τῷ Πίνακι ἀντιπαρακείσεται ἀριθμός. Ο. Ε. Δ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἡ τοῦ Προβλήματος τούτου χρῆσις τὰ μάλιστα λυσιτελὴς ἔν τε τῇ Τριγωνομετρίᾳ καὶ Ἀστρονομίᾳ κα-θέστηκε, καὶ θαυμασία εἰς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων· ἧς χάριν καὶ τῶν Φυσικῶν ἀριθμῶν ἐξετέθησαν οἱ λογά-ριθμοι παρὰ τοῦ Βριγγίου καὶ Βλακκίου, τοῦ Νεπήρου Κανόνιον μόνον διαφόρου ὁπωσδήποτε Φύσεως λογαρίθ-μων περὶ τῶν Ἡμιτόνων καὶ τῶν Ἐφαπτομένων κατα-σκευάσαντος, ὡς εἴρηται (§. 828. Σχόλ. Β'.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 850. Εὑρεθήσεται ἄρα ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω ἀνα-λογίας (§. 849.), ὁ αὐτὸς τέταρτος ἀναλογικὸς ὅρος, καὶ διὰ τῆς τοῦ Ἀριθμητικοῦ Παραπληρώματος τοῦ λογαρίθμου τοῦ πρώτου ὅρου 9.0457575 = 10.000-00000 — 0.9542425, τοῖς τῶν λοιπῶν δυοῖν ἀναλο-γικῶν ὅρων λογαρίθμοις προσθέσεως (§. 848.)· οἷον·

$$\begin{array}{rl} \lambda o\gamma.\ 27 &= 1.4313638. \\ \lambda o\gamma.\ 33 &= 1.5185139. \\ \text{Ἀριθμ. Παραπλ. } \lambda o\gamma.\ 9 &= 9.0457575. \\ \hline \text{ἄθροισμα} &= 11.9956352 \end{array}$$

καὶ τῇ τῆς δεκάδος ἀπὸ τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἀπαλείψει, ὑπολειφθήσεται ὁ ἴσος τῷ ἐν τοῖς Πίναξι λογαρίθμῳ 1.9956352, ᾧ δὴ ὁ 99 ἀντιστοιχεῖ ἀριθμός.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 851. Ἐπὶ δὲ τῆς Συνεχοῦς Γεωμετρικῆς Ἀνα-λογίας, ἐν ᾗ ὁ τρίτος μέσος ἀναλογικὸς ζητεῖται ὅρος, ἀντιξόως τῇ ἀνωτέρω μεθόδῳ (§. 849.) ἰτέον· προσ-θετέον τοὺς τῶν ἀκροτήτων λογαρίθμους, ἀπὸ δὲ τοῦ τούτων ἀθροίσματος τὸν τοῦ ἐγνωσμένου μέσου ἀφαιρε-τέον λογάριθμον· οἷον ἐὰν ᾖ $2:8 = \chi:32$, ἔσται (λογ. 2 + λογ. 32) — λογ. 8 = χ· ἤτοι,

$$\begin{array}{rl} \lambda o\gamma.\ 2 &= 0.3010300 \\ \lambda o\gamma.\ 32 &= 1.5051500 \\ \hline \lambda o\gamma.\ 2 + \lambda o\gamma.\ 32 &= 1.8061800 \\ - \lambda o\gamma.\ 8 &= 0.9030900 \\ \hline (\lambda o\gamma.\ 2 + \lambda o\gamma.\ 32) - \lambda o\gamma.\ 8 &= 0.9030900 \end{array}$$

ᾧ δὴ ὁ αὐτὸς ἀντιστοιχεῖ ἀριθμὸς 8, ὁ τρίτος μέσος ἀνάλογος· ἄρα $2:8 = 8:32$. Ἐὰν δὲ ζητῆται, ὁ μέ-σος ἀνάλογος, οἷον $2:\chi = \chi:32$· ἐπεὶ $2 \times 32 = \chi^2$ (§. 604. Α'.) καὶ $\sqrt{(2 \times 32)} = \chi$· ἔσται (λογ. 2 + λογ. 32.) : 2 = χ (§. 826.)· ἄρα·

$$\begin{array}{rl} \lambda o\gamma.\ 2 &= 0.3010300 \\ \lambda o\gamma.\ 32 &= 1.5051500 \\ \hline \lambda o\gamma.\ 2 + \lambda o\gamma.\ 32 &= 1.8061800 \\ \text{Ἄρα, } \frac{1.8061800}{2} &= 0.9030900. \end{array}$$

ᾧτινι ὁ μέσος ἀντιστοιχεῖ ἀνάλογος ἀριθμὸς 8· ἄρα $2:8 = 8:32$· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὰ διὰ τῶν λογαρίθμων ἐπιλυόμενα Προβλήματα ἐπέκεινα σχεδὸν εἰσὶ πέρατος· οὐκ ἂν εἴποι δέτις, ὅση τούτων ἡ χρῆσις διὰ πάσης τῆς μαθήσεως, καὶ ἐπὶ τοῦ κοινοῦ βίου. Διὸ καὶ τὰ οὕτως εὑρισκόμενα, οὐ πάντη πάντως ἀκριβολογεῖται, τοῦ δ' ἀληθοῦς ἐγγὺς γίνεται· ταύτητοι καὶ ἐπὶ τῶν ὑπολογισμῶν λεπτολογεῖν παραιτητέον, τὰ ἔξω πτοίας ἀπάτης γινόμενα. Τῶν δὲ Προβλημάτων ἔνια, ἃ καὶ ἡμῖν πάλαι ποτὲ λογαριθμικῶς κατεσκεύαστο, ἔδοξεν ἐνταῦθα προσθεῖναι, πρὸς μείζονα τῶν Φιλοπόνων ἐξάσκησιν.

Α'.

Γεωργός τις ἕνα χοίνικα σίτου ἐνσπείρας, τοὐντεῦθεν συλλεγὲν 4 χοινίκων ἐν τῷ ἀμητῷ, τῷ ἐφεξῆς χρόνῳ ὅλον αὖθις ἐνέσπειρε· καὶ πάλιν, ὃν τηνικαῦτα ἐκαρπώσατο θερίσας σῖτον, τῷ τρίτῳ ἔτει ὅλον ἐνέσπειρε· καὶ ἐφεξῆς οὕτω, μέχρι τῶν δέκα ἐτῶν. Πόσους τοίνυς χοίνικας σίτου ἐν τῷ τοῦ δεκάτου ἔτους θερισμῷ ἐκομίσατο;

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπεὶ οὖν ὁ ἐνιαυσίως ἐν τῷ θερισμῷ ἀπολαμβανόμενος σῖτος ἐν προόδῳ Γεωμετρικῇ στίχει, οἷον ἐν μὲν τῷ πρώτῳ ἔτει $= 4$, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ $= 16$, ἐν δὲ τῷ τρίτῳ $= 64$· τῶν λοιπῶν ὅρων δοθέντων, ὁ ἔσχατος αἰτεῖται (§. 752.)· ἔσται τοίνυν $\alpha = 4$, $\pi = 4$, $\nu = 10$· κἀντεῦθεν $\omega = \alpha\pi^{\nu-1} = 4.4^9 = 4^{10}$, καὶ διὰ τῆς τῶν λογαρίθμων ἀντεισαγωγῆς ἔσται λογ. $\omega = 10$ λογ. $4 = 6{,}0206000$· ἄρα $\omega = 1048576$ σίτου χοίνιξι.

Β'.

Γαυρίας, ἐλπίδι τοῦ ἀποκερδάναι ἐν τῇ Δημοσίᾳ κνιζόμενος Λαχέσει, οὕτω τὰ ἐν χερσὶν ἐντρεχῶς κατα-

βάλλει; ὡς μὲν πρώτως 3 ὀβολοὺς καταθεῖναι, ἐφεξῆς δὲ ἐν λόγῳ ἀεὶ διπλασίονι, ἄχρι τῶν 12 καταθέσεων. Πόσον τοίνυν ἐσχάτως ἀποτίσεται;

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπεὶ ταῖς ὑπαλλήλοις διαδεχομέναις καταθέσεσιν, ἡ ἐφεξῆς ἕπεται Γεωμετρικὴ πρόοδος 3, 6, 12, 24, ἔσται (§. 176.) $\alpha = 3$, $\pi = 2$, $\nu = 12$· ἑπομένως $\kappa = 3(2^{12} - 1)$. Ἔστι δὲ λογ. $2^{12} = 12$ λογ. 2 (§. 803.) $= 3{,}6123600$· ἄρα $2^{12} = 4096$· ἑπομένως $\kappa = 3(4096 - 1) = 3 \times 4095 = 12285$.

Γ'.

Τοὺς ἐν τῇ Γεωμετρικῇ Προόδῳ ἐκτεθέντας τύπους λογαριθμικῶς κατασκευάσαι.

ΛΥΣΙΣ.

Α'. Ἐπεὶ μὲν δὴ $\omega = \alpha\pi^{\nu-1}$ (§. 752.)· ἄρα ν λογ. π — λογ. π + λογ. α = λογ. ω (§. 807.)· κἀντεῦθεν

$$\nu \text{ λογ. } \pi = \text{λογ. } \omega - \text{λογ. } \alpha + \text{λογ. } \pi$$

$$\nu = \frac{\text{λογ. } \omega - \text{λογ. } \alpha + \text{λογ. } \pi}{\text{λογ. } \pi}$$

$$\nu = \frac{\text{λογ. } \omega - \text{λογ. } \alpha}{\text{λογ. } \pi} + 1$$

Ἔστω $\alpha = 2$, $\omega = 486$, $\pi = 3$, ἔσται,

$$\text{λογ. } \omega = 2.6866363$$
$$\text{λογ. } \alpha = 0.3010300$$
$$\frac{\text{λ. } \omega - \text{λ. } \alpha = 2.3856063}{\text{λογ. } \pi = 0.4771213} = 5 + 1 = 6 = \nu.$$

Β'. Ἔστι μὲν δὴ (§. 774.) $\pi = (\kappa - \alpha) : (\kappa - \omega)$ ἄρα τῇ τῶν λογαρίθμων ἀντεισαγωγῇ ἔσται $\lambda.\pi = \lambda(\kappa - \alpha) : \lambda.(\kappa - \omega)$· ἔστι δὲ $\lambda.(\kappa - \alpha) : \lambda.(\kappa - \omega) = \lambda.(\kappa - \alpha) - \lambda.(\kappa - \omega)$ (§. 822.)· ἀνθυποκαθισταμένου ἄρα τοῦ ἰσοτίμου τοῦ π, ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως $\nu = (\lambda.\omega - \lambda.\alpha + \lambda.\pi) : \lambda.\pi$, ἔσται·

$$\nu = \frac{\lambda o\gamma.\ \omega - \lambda o\gamma.\ \alpha}{\lambda.(\kappa - \alpha) - \lambda.(\kappa - \omega)} + 1$$

καὶ τεθέντων $\kappa = 728$, $\alpha = 2$, $\omega = 486$, ἔσται·

$$\begin{array}{rr} \lambda.\omega = 2.6866363 & \kappa = 728 \\ \lambda.\alpha = 0.3010300 & \omega = 486 \\ \hline \lambda.\omega - \lambda.\alpha = 2.3856063 & \kappa - \omega = 242 \\ \lambda.(\kappa - \alpha) = 2.8609366 & \kappa = 728 \\ \lambda.(\kappa - \omega) = 2.3838154 & \alpha = 2 \\ \hline \delta\iota\alpha\varphi o\rho\grave{\alpha}\ 0.4771212 & \kappa - \alpha = 726 \end{array}$$

Ἄρα, $\frac{23856063}{4771212} = 5 + 1 = 6 = \nu$.

Γ'. Ὡς ὄντος (§. 783.) $\omega(\kappa - \alpha)^{\nu-1} = \alpha(\kappa - \omega)^{\nu-1}$, ἔσται καὶ λογαριθμικῶς

$$\lambda o\gamma.[\omega(\kappa - \alpha)^{\nu-1}] = \lambda o\gamma.[\alpha(\kappa - \omega)^{\nu-1}]$$

$$\lambda o\gamma.\ \omega + (\nu - 1)\ \lambda o\gamma.(\kappa - \alpha) = \lambda o\gamma.\ \alpha + (\nu - 1)\ \lambda o\gamma.(\kappa - \omega),\ (\S.\ 802.).$$

$$\lambda o\gamma.\ \omega - \lambda o\gamma.\ \alpha = (\nu - 1)[\lambda o\gamma.(\kappa - \alpha) - \lambda o\gamma.(\kappa - \omega)],\ (\S.\ 433.).$$

$$\nu - 1 = \frac{\lambda o\gamma.\ \omega - \lambda o\gamma.\ \alpha}{\lambda.(\kappa - \alpha) - \lambda.(\kappa - \omega)}\ (\S.\ 439.)$$

$$\nu = \frac{\lambda o\gamma.\ \omega - \lambda o\gamma.\ \alpha}{\lambda.(\kappa - \alpha) - \lambda.(\kappa - \omega)} + 1$$

τῷ ἀνωτέρω (Β'.) κατασκευασθέντι ἴσον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε.

ΠΕΡΙ ΣΕΙΡΩΝ, ΕΝ ΑΙΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΑΠΕΡΑΝΤΟΜΕΓΕΘΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 852. Σειρά, ἢ Στίχος ἀκούει, ἡ τῶν ποσοτήτων ἀλλήλαις συνεχιζομένων, καί γε ἑαυτὰς κανόνι τινὶ συνεχεῖ καὶ ἀμεταπτώτῳ διαδεχομένων συνάφεια.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 853. Αἱ Ἀριθμητικαὶ τοίνυν καὶ Γεωμετρικαὶ τῶν Προόδων οὐδὲν ἄλλο, ὅτι μὴ Σειραί εἰσι. Κατὰ μὲν γὰρ τὴν πρώτην, τῶν ἡγουμένων ἕκαστος τοῦ ἀμέσως ἑφεπομένου, ἐπίσης διαφέρων ἐστί (§. 668.)· κατὰ δὲ τὴν δευτέραν, ὁςτισοῦν τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸν ἀμέσως αὐτῷ ἑφεπόμενον, ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀείποτε λόγου, ἤτοι ἐκθέτου παρωνυμεῖται (§. 741.).

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 854. Σειρὰ μὲν Πεπερασμένη ἐστίν, ἧς τινος ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ὥρισται· Ἄπειρος δέ, ἧς οἱ ὅροι ἐπ' ἄπειρον ἀορίστως συνεχιζόμενοι ὑποτίθενται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Κυρίως μέντοιγε, κατὰ τὰ ἐν τῇ Μεταφυσικῇ κατασκευαζόμενα, οὐδεμία ποσότης, ἢ ἀριθμός τις δοθῆναι ἔχοι, ὃς ἂν τῷόντι ἀπείρως κληθείη μέγιστος, ἢ ἀπείρως ἐλάχιστος. Ὅσῳ γὰρ ἄντις μέγιστον τῇ διανοίᾳ ὑποτυπώσηται ἀριθμόν, δύναται μέντοι τὸν αὐτὸν καὶ διπλάσιον ἐννοῆσαι, καὶ τριπλάσιον, καὶ τετραπλάσιον, καὶ ἐν γένει πολλαπλάσιον· καὶ τοῦτο μὲν ἐπὶ τῶν Ἀπεραντομεγεθῶν. Παραπλησίως δὲ καὶ ὁ ἀπείρως ἐλάχιστος ἀριθμός, τῇ ἐπινοίᾳ γοῦν εἰς μέρη διαιρεθήσεται· ὥστε εἶναι καὶ τοῦ ἀπειραχῶς ἐλαχίστου, τὸ μὲν ὑποδιπλάσιον, τὸ δ' ὑποτριπλάσιον, καὶ καθόλου ὑποπολλαπλάσιον· ὃ δὴ ἐπὶ τῶν διὰ τὸ τοῦ μεγέθους ἐλάχιστον τὴν τῆς αἰσθήσεως ἀκμὴν διαφευγόντων. Ἕπεται τοίνυν ἐκ τούτων τὸ ἀπείρως μέγιστον, καὶ ἀπείρως ἐλάχιστον, καταχρηστικῶς μόνον λέγεσθαι· οὕτω δὴ ποσότητα τινὰ ἀπείρως αὔξουσαν, ἢ φθίνουσαν (§. 2.) οἱ περὶ τὰς Μαθήσεις στρεφόμενοι ἐννοεῖν φιλοῦσιν, ὥστε πρὸς οὐδεμίαν ἑτέραν ποσότητα τοῦ αὐτοῦ εἴδους παραβάλλεσθαι, ἀλλὰ πᾶσαν οἱανδηποτοῦν ποσότητα πρὸς τὴν οὕτως ἐπαυξηθεῖσαν, ἢ ἐπιμειωθεῖσαν, ἐν τῷ ὑπολογισμῷ ὡς τὸ μηδὲν λογίζεσθαι.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 855. Σημεῖον τῶν Ἀπεραντομεγεθῶν ἔστω τοδὶ ∞.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Πρὸς μείζονα τοῦ ἀπείρου παράστασιν ἔστω κλάσμα $\frac{1}{\omega}$, καὶ ληφθήτω ὁ τοῦ κλάσματος παρονομαστὴς $\omega = \alpha - \chi$. Ὅσῳ τοίνυν ὁ παρονομαστὴς ἐλάττων καθίσταται, τοσούτῳ ἡ τοῦ κλάσματος δύναμις ἐπιμεγεθύνεται (§. 170.). Ἐννοήσωμεν δὴ τὸν παρονομαστὴν μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐπιμειοῦσθαι, ἄχρις οὗ ἐσχάτως ἴσος τῷ μηδενὶ ἀποβῇ, ἔσται οὕτω τὸ πηλίκον (§. 158.) ἀπάσης οἱασοῦν ἐπέκεινα ἀπείρως μέγιστον, τουτέστιν ἔσται

$\frac{1}{0} = \infty$. Ἐπειδὴ γὰρ προϋπετέθη $\omega = \alpha - \chi$, τιθεμένου $\alpha = 1$ καὶ $\chi = 1$, ἔσται $\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\alpha - \chi} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \infty$ ἐν ἀπείρῳ Σειρᾷ· ὡσαύτως ἔσται καὶ $\frac{\alpha}{0} = \frac{1}{0} \times \alpha = \infty \times \alpha$. Καὶ Γραμμὰς δὲ ἀπείρως μεγίστους νοῆ-
σαι δυνάμεθα, ἢν τεθῇ φέρε Γραμμή τις ἀπὸ τοῦ Α Πιν. Α'.
ἀρχομένη, καὶ διὰ τοῦ Β εἰς τὰ πρόσω ἀεὶ χωροῦσα τέρ- Σχ. 12.
ματος ἄτερ· ὥστε καὶ ἐπὶ δυεῖν Παραλλήλων Γραμ- Σχ. 8.
μῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἑκατέρωθεν ἐπ' ἄπειρον προσεκβαλλομένων, μηδέποτε δὲ ἀλλήλαις συνιουσῶν, εἴωθε λέγεσθαι, ὅτι συμπεσοῦνται ἀλλήλαις ἐν ἀπείρῳ τῇ ἀποστάσει, ἤτοι οὐδέποτε.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 856. Ἀπείρως ἐλαχίστη Σειρά, ἤτοι Ἀπειροστὴ καλεῖται, ἧς οἱ ὅροι οὕτω μειούμενοι πρόεισιν, ὥστε ἐσχάτως ἐλάσσονες πάντων οἱωνδηποτοῦν νοουμένων ἐλαχίστων ἄλλων καθίστασθαι.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 857. Σημεῖον Ἀπειροστοῦ ἔστω τουτὶ $\frac{1}{\infty}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὥσπερ μὲν γὰρ ποσότητά τινα ἑτέρας ἀπεραντομεγέθη ἐκλαμβάνομεν, οὕτω δὴ τὴν αὐτὴν εἰς μέρη ἀνάριθμα, διὰ τὸ τοῦ μεγέθους ἐλάχιστον τὴν τῆς αἰσθήσεως ἀκμὴν διαφεύγοντα, διῃρημένην ἐννοῆσαι δυνάμεθα, οἷον δὴ γραμμῆς τινος ἀπείρως κατατμηθείσης μέρη τὰ ἀπειροστά· ἤτοι τὰ ἀφ' ὅσου ἄν τις καὶ βούλοιτο, ἄχρι τοῦ καὶ πρὸς τὸ μηδὲν ἀπολήγειν, ἀπομειούμενα. Διὸ καὶ ἡ οὕτως ἀπείρως μεριζομένη, κλάσματι ἂν ὑποτυπωθείη πάντων τῶν δυνατῶς ἐχόντων κει[illegible]μένων ἐλαχίστῳ· οἷον, τῶν τῆς ἀπείρου τῆσδε Σειρᾶς $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ . . . . . . παρονομαστῶν, ἀπείρως αὐξουμένων, ἔσται ὁ τοῦ ἐσχάτου ὅρου παρονομαστὴς $=\infty$, ὁ δὲ ἔσχατος ὅρος $=\frac{1}{\infty}$. Ἐπεὶ οὖν ἡ τοῦ κλάσματος δύναμις τοσούτῳ ἐλαχίστη καθίσταται, ὅσῳ μείζων ὁ τούτου γίνεται παρονομαστὴς (§. 172.), ἔσται ἑπομένως ἡ τοῦ τοιούτου κλάσματος οἷον $\frac{1}{\nu}$ δύναμις ἀπειροστή, τοῦ παρονομαστοῦ ν ἀπείρως ἐπιμεγεθυνομένου. Διὸ καὶ τὸ σημεῖον $\frac{1}{\infty}$ μέρος τι μονάδος ἐμφαίνει ἐλάχιστον πάντων τῶν δυνατῶς ἐχόντων ἐλαχίστων, ἤτοι ἀπειροστόν, παρὰ τὸ μηδὲν δηλαδὴ ὑποτίθεσθαι πέρας τῇ τούτου σμικρότητι· ὡσαύτως καὶ $\frac{\alpha}{\infty} = \frac{1}{\infty} \times \alpha$ μέρος τι ἀπειροστὸν τοῦ α. Δεῖ μέντοι καλῶς τὰ ἀπειροστὰ ταῦτα διακρίνειν, τῶν ὅσων ἂν ἐθέλοι τις ἐλαχίστων, μεγέθει δὲ ὅμως ὡρισμένων, καὶ ὧν οὐ θέμις νοεῖν ἐλάσσονα.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 858. Ἐν τῷ ὑπολογισμῷ τοίνυν τὸ ἀπειροστὸν τοῦ μηδενὸς οὐδόλως διενήνοχεν, ἔστι καὶ γὰρ τούτου ὡς ἔγγιστα (§. 243.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι ἐὰν τὸ πηλίκον (§. 158.) $\frac{1}{\infty}$, διὰ τοῦ διαιρετέου 1 διαιρεθῇ, ἀναδώσει τὸν διαιρέτην ∞ (§. 136.)· ἔστι δὲ $\infty = 0$ (§. 858.)· ἄρα καὶ 1 διὰ 0 διαιρούμενον, μέγεθός τι προβαλεῖται ἄπειρον, ἤτοι ∞. Πόῤῥω ἐπεὶ $\frac{1}{\infty} = \frac{1}{0}$, ἔσται καὶ $\frac{2}{0}, \frac{3}{0}$,

$\frac{4}{0}$, ὃ δὴ τὴν τοῦ ἀπείρου ὕπαρξιν ἐκ βάθρων ἀνατρέπει· ὥστε τὸ ἄπειρον Μαθηματικῶς μόνον ἐννοεῖσθαι, οὐ μὴν δὲ Μεταφυσικῶς, ὡς εἴρηται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 859. Σειρὰ μὲν Ἀποκλίνουσα ἐστὶν, ἧς οἱ ὅροι συνεχῶς ἐπαύξουσιν· Ἐγκλίνουσα δὲ, ἧς οἱ ὅροι ἀεὶ φθίνουσιν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 860. Τὸ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δυοῖν Ἀπείρων προκύπτον γινόμενον Ἀπειροδευτεροβάθμιον ἤκουσε· τὸ δ' ἐκ τριῶν, Ἀπειροτριτοβάθμιον· ὡς καὶ Ἀπειροτεταρτοβάθμιον τὸ ἐκ τεσσάρων· καὶ ἐφεξῆς οὕτω.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 861. Ἀπειροστὸν δι' ἀπειροστοῦ πολλαπλασιαζόμενον, Ἀπειροστὸν προβάλλεται Ὑποδευτεροβάθμιον· τὸ δ' αὐτὸ δι' ἑτέρου τρίτου, Ὑποτριτοβάθμιον· ὡσαύτως καὶ Ὑποτεταρτοβάθμιον, ἣν τὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ τεσσάρων τελεῖται· καὶ ἐν τοῖς λοιποῖς ὡσαύτως.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 862. Σημεῖον τῶν μὲν Ἀπεραντομεγεθῶν καθυπερτέρας οἱασοῦν τάξεως, ὡς τοῦ δευτεροβαθμίου ἔστω ∞^2, τοῦ τριτοβαθμίου ∞^3, τοῦ τεταρτοταγοῦς ∞^4, κτλ. τῶν δ' Ἀπειροστῶν ὑποδεεστέρων ὡντινωνοῦν τάξεων, οἷον τοῦ ὑποδευτεροβαθμίου ἔστω $\frac{1}{\infty^2}$, τοῦ ὑποτριτοβαθμίου $\frac{1}{\infty^3}$, τοῦ ὑποτεταρτοβαθμίου $\frac{1}{\infty^4}$· καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς ἑπομένων ὡσαύτως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 863. Εἰ οὖν ἐν Σειρᾷ ἀπείρῳ ὅρος τις παρεμπέσειεν ἀπείρως μέγιστος, ἡλίκος ἐν μὲν τῇ Ἀριθμητικῇ Προόδῳ ἐστὶν $\alpha + \infty\delta$, ἐν δὲ τῇ Γεωμετρικῇ $\alpha\mu^{\infty}$, οἱ λοιποὶ ὅροι πεπερασμένον ἔχοντες μέγεθος, ἐκείνῳ τε συνεζευγμένοι, ἐξίτηλοι γίνονται, ἑπομένως τε τῷ μηδενικῷ ἴσοι· οἷον $\alpha^{\infty} + \alpha^2 = \alpha^{\infty}$, $\infty^{\mu} + 4^{\mu} = \infty^{\mu}$· ὥστε ἐν γένει, τὰ πεπερασμένον ἔχοντα μέγεθος, τοῖς Ἀπεραντομεγέθεσι προστιθέμενα ἢ ἀπ' ἐκείνων ἀφαιρούμενα, οὐδόλως τὰ ἐκείνων ἐξαλλοιοῦσι μεγέθη, τουτέστιν οὔτε μείζονα οὔτε μὴν ἐλάσσονα ἀποκαθίστησιν. Ἐπεὶ τὸ πεπερασμένον τῷ ἀπείρῳ παρατιθέμενον, ὡς οὐδὲν θεωρεῖται, διὰ καὶ ἐν τῷ ὑπολογισμῷ ἀμελεῖται· ἔσται γὰρ ἐκεῖνο πρὸς τὸ ἄπειρον, ὡς τὸ μηδὲν πρὸς τὴν μονάδα· ὁ δὲ λόγος, ὅτι τὸ ἄπειρον πάσας τὰς δυνατῶς ἐχούσας αὐξήσεις ἐμπεριλαβὸν, ἀνεπίδεκτον αὐξήσεως ἢ μειώσεως ἑτέρων πεπερασμένων ἀναδείκνυται· διὸ καὶ $\infty + 2 = \infty$, $\infty + \alpha = \infty$, ὡς εἴρηται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 864. Οἱ ἀπείρως τοίνυν μέγιστοι ὅροι μεθ' ἑτέρων ἀπειράκις Ἀπείρως μεγίστων ἐκτιθέμενοι, οἱ αὐτοί τε μεθ' ἑτέρων ἀπειροαπειράκις ἀπείρως μεγίστων, ἤτοι ἐν γένει, μέγεθος ἅπαν ἄπειρον, μεγέθει ἀπείρῳ τάξεως οἱασοῦν καθυπερτέρας συνεζευγμένον, ἐξίτηλον γίνεται, ἔνθεν τοι ἀντὶ μηδενικοῦ τεθῆναι ἔχει. Τὸ γὰρ ἀπείρως μέγιστον τάξεώς τινος καθυποβεβηκυίας ἑτέρῳ τινὶ ἀπείρως μεγίστῳ τάξεως ἀνωτέρας παραβαλλόμενον λόγον ἔχει, ὃν τὸ πεπερασμένον πρὸς τὸ ἄπειρον, ἤτοι ὃν τὸ μηδὲν πρὸς τὴν μονάδα (§. 863.)· οἷον· $\infty^2 + \infty = \infty^2$, $\infty^3 + \infty^2 = \infty^3$, $3^{\infty 2} + 2^{\infty} = 3^{\infty 2}$, $\alpha^{\infty 4} - \beta^{\infty 3} = \alpha^{\infty 4}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 865. Ὡσαύτως ὅροι Ἀπειροστοὶ πεπερασμένοις συναπτόμενοι, ἢ ἐκείνων ἀφαιρούμενοι ἐκλείπουσιν· οἷον, $1 \pm \frac{1}{\infty} = 1$, $2\alpha \pm \frac{\alpha}{\infty} = 2\alpha$, $\alpha \pm \frac{\alpha}{\infty} = \alpha\,(\alpha \pm \frac{1}{\infty}) = \alpha$, $2 + \frac{1}{\infty} = 2$, $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$. Εἰσὶ γὰρ οἱ τοιοῦτοι οὐδὲν ἄλλο, ὅτι μὴ κλάσματα ἀπείρως ἐλάχιστα ἀριθμητὴν μὲν πεπερασμένον, παρονομαστὴν δὲ ἄπειρον φέροντα (§. 856.)· διὸ καὶ τῇ πρὸς ὁλοσχερές τι ἕτερον παραθέσει, ἐλάχιστα πάνυ καὶ οὐδὲ λόγου τινὸς ἄξια προκύπτουσι μερίδια, ὥστε καὶ παροράσθαι ἔχειν, ὡς τῷ μηδενὶ ἴσα (§. 858.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 866. Μᾶλλον δὲ Ποσότης ἀπειράκις Ἀπειροστή, ἤτοι ἀπειράκις ἄπειρος ἐλαχίστη, τῇ πρὸς ἀπείρως ἐλαχίστην παραβολῇ· αὖθις τε ποσότης ἀπειροαπειράκις ἀπείρως ἐλαχίστη, τῇ πρὸς ἀπειράκις ἀπείρως ἐλαχίστην παραβολῇ· ἤτοι ἐν γένει ἐλαχιστότης πᾶσα ἢ ὑπομείωσις ἄπειρος τάξεως καθυπερτέρας, τῇ πρὸς ἐλαχιστότητα ἢ ὑπομείωσιν ἄπειρον τάξεως ὑποδεεστέρας παραβολῇ, ἐκλείπει· οἷον, $\frac{1}{\infty^3} - \frac{3}{\infty^2} + \frac{2\alpha}{3\infty} = \frac{2\alpha}{3\infty}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 867. Ἀλλ' οὖν ποσότης ἄπειρος δι' ἑτέρας ἀπείρου πολλαπλασιασθεῖσα ἢ διαιρεθεῖσα οὐκ ἐκλείπει, ἀλλ' ἐκείνης μὲν ἄπειρον καθυπερτέρας καθίσταται τάξεως, οὕτως δὲ ταπεινοτέρας· οἷον $\infty \times \infty = \infty^2$, $\infty^3 \times \infty = \infty^4$, $\alpha \infty^2 \times \beta \infty^3 = \alpha\beta\infty^5$ (§. 860.). ὡσαύτως $\frac{\infty^4}{\infty} = \infty^3$, $\frac{\infty^5}{\infty} = \infty^4$. Ἑπομένως τὰ τούτων γινόμενα, ἢ πηλίκα, ἄπειρα ὡσαύτως ἐκκύπτουσιν, ἐκθέτην πλουτοῦντα τὸν διὰ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν κατὰ τὰ δύο ἐκεῖνα πολλαπλασιασθέντα ἢ διαιρεθέντα ἀπεραντομεγέθη ἐκθετῶν βαθμοδεικνύμενον ἀριθμόν. Ταυτὸ καὶ περὶ τῶν ἀπειροστῶν ῥητέον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Εἰ καὶ ἐν τοῖς οὖσι τὸ ἐπ' Ἄπειρον οὐ δίδοται (§. 854. Σχ.), ἔξεστιν ἀλλ' οὖν τοῖς τῶν Μαθημάτων δημιουργοῖς τὰ κατ' ἐπίνοιαν τῶν μεγεθῶν διὰ σημείων ∞ καὶ $\frac{1}{\infty}$ παριστανόμενα τῷ ὑπολογισμῷ ἐμπαρεισάγειν, ὡς κἂν τοῖς Ῥιζικοῖς ἡμῖν τεθεώρηται, τὰ ἀδύνατα τῶν μεγεθῶν, οἷον $\sqrt[2v]{-\alpha}$, διὰ σημείων ἐμφαινόμενα ὑπολογίζεσθαι (§. 381.). Οὐδεὶς γὰρ ἂν δοίη πάντως τὰ τοιαῦτα τῶν ἀδυνάτων χώραν ἔχειν ἐν τοῖς οὖσιν, ὥσπερ δὴ τοῖς περὶ τὰ Μαθήματα ἐνασχολουμένοις ψιλαῖς ἐφεῖται ταῖς ἐπινοίαις θεωρεῖν τε καὶ ὑποτιθέναι· ὥστε ἀπειραχῶς τὰς τοιαύτας ἐννοίας ἐπὶ τῶν κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν, μᾶλλον δὲ κατὰ τὴν ὑπερέχουσαν καὶ διαβατικωτέραν Μαθηματικὴν, πράξεων συμβαίνειν ποικίλλεσθαι. Καὶ τόνδε ἄρα τὸν τρόπον τῶν ἐπ' Ἄπειρον δικτυπουμένων, ὅσα δήποτε περὶ τῶν πεπερασμένων προαπεδείχθη, ταῦτα δὴ καὶ τούτοις προσαποδοθήσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 868. Ἔσται δὴ οὕτω $\infty + \infty = 2\infty$, $3\infty - 2\infty = \infty$, $\infty \times \alpha = \infty\alpha$, $\infty : \alpha = \frac{\infty}{\alpha}$, $\alpha : \infty = \frac{\alpha}{\infty}$· ὡσαύτως $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} = \frac{2}{\infty}$, $\frac{1}{\infty} \times \alpha = \frac{\alpha}{\infty}$, $\frac{1}{\infty} : \beta = \frac{1}{\infty\beta}$, $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} \times \frac{\infty}{1} = \frac{\infty}{\infty} = 1$. Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ ἔσται καὶ $\infty \times \infty = \infty^2$, $\infty^2 \times \infty = \infty^3$, $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^2} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^3}$, κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 869. Τοῦ πεπερασμένου α δι' ἀπείρου ∞ πολλαπλασιαζομένου μὲν, τὸ γινόμενον ἔσται $= \infty\alpha$ (§. 868.), διαιρουμένου δὲ, τὸ πηλίκον $= \frac{\alpha}{\infty}$ (αὐτ.). Ἐν οἷς τὰ μεγέθη $\frac{\alpha}{\infty}$, α, $\infty\alpha$, οἷα δὴ τρεῖς τῶν ἀλλήλοις διαδεχομένων ἐν τῇ Γεωμετρικῇ προόδῳ ὅρων, παρατηρηθήσονται. Διὸ καὶ τῶν ὅρων ἑκατέρωθεν συνεχιζομένων (§. 744.), πρόοδος ἄν τις ἢ σειρὰ συσταίη Γεωμετρικὴ, ἡ ἐφεξῆς·

$$\ldots \frac{\alpha}{\infty^3} : \frac{\alpha}{\infty^2} : \frac{\alpha}{\infty} : \alpha : \infty\alpha : \infty^2\alpha : \infty^3\alpha \ldots$$

ὥστε ἐξέσται μεταξὺ α καὶ $\frac{\alpha}{\infty}$, τὸν τρίτον Γεωμετρικῶς Συνεχῆ θηρεύειν ἀνάλογον, ὡσαύτως καὶ μεταξὺ α καὶ $\infty\alpha$· ἢ, ὃ ταυτόν ἐστι, τὸ α ἐπὶ τὸ ∞ πολλαπλασιάζειν, καὶ $\frac{\alpha}{\infty}$ διὰ τοῦ ∞ διαιρεῖν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τῶν προδιαληφθέντων (§. 869.) καλῶς θεωρουμένων τὰ ἑπόμενα πάρεστι σημειοῦν. Α'. πεπερασμένον ἀπείρῳ παρατιθέμενον ἐκλείπει, ἐὰν δηλαδὴ τούτῳ προστεθῇ, ἢ ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ (§. 863.)· ἐκ γὰρ τῆς προεκτεθείσης ἀπείρου Γεωμετρικῆς Σειρᾶς.

$$\frac{\alpha}{\infty} : \alpha = \alpha : \infty\alpha$$

ἔσται $\alpha \pm \frac{\alpha}{\infty} : \alpha = \infty\alpha \pm \alpha : \infty\alpha$ (§. 608.) προσθέσει ἢ ἀφαιρέσει τῶν ἑπομένων. Ἀλλ' οὖν ἔστιν $\alpha \pm \frac{\alpha}{\infty} = \alpha$ (§. 865.)· ἄρα καὶ $\infty\alpha + \alpha = \infty\alpha$.

Β΄. Ἄπειρον τῶν ἡττοδυνάμων μειζοδυνάμῳ παρεξεταζόμενον ἀποίχεται (§. 864.), ἔστι γὰρ

$$\frac{\alpha}{\infty} : \alpha = \infty\alpha : \infty^2\alpha$$

ἔστι δὲ $\alpha \pm \frac{\alpha}{\infty} : \alpha = \infty^2\alpha \pm \infty\alpha : \infty^2\alpha$· τουτέστιν $\infty^2\alpha \pm \infty\alpha = \infty^2\alpha$· ὡσαύτως καὶ $\infty^3\alpha \pm \infty^2\alpha = \infty^3\alpha$· κἂν τοῖς ἐφεξῆς οὕτω.

Γ΄. Ἀπειροστὸν δὲ μειζοδύναμον ἡττοδυνάμῳ προσθέσει, ἢ ἀφαιρέσει παραβαλλόμενον ἐκλείπει (§. 866.)· οἷον

$$\frac{\alpha}{\infty} \pm \frac{\alpha}{\infty^2} = \frac{\alpha}{\infty}, \quad \frac{\alpha}{\infty^2} \pm \frac{\alpha}{\infty^3} = \frac{\alpha}{\infty^2}, \text{ κτλ.}$$

ΛΗΜΜΑ.

§. 870. Σειρᾶς οἱασδηποτοῦν Ἀριθμητικῆς $\div \alpha . \beta . \gamma . \varepsilon . \zeta .$ κτλ. διαφορὰν πλουτούσης $= \delta$, ὁ ἐν γένει τύπος ἔσται $\div \alpha . \alpha \pm \delta . \beta \pm \delta . \gamma \pm \delta . \varepsilon \pm \delta . \zeta \pm \delta .$ κτλ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἕκαστος γὰρ τῶν τῆς Ἀριθμητικῆς Προόδου ὅρων ἰσοῦται τῷ πρὸ τοῦ αὐτοῦ ἀμέσως ἡγουμένῳ, ὑπεροχῇ ἢ ἐλλείψει τῆς κατὰ τὴν πρόοδον διαφορᾶς (§. 673.). Ἐν τῇ ἀριθμητικῇ ἄρα Σειρᾷ $\div \alpha . \beta . \gamma . \varepsilon . \zeta .$ κτλ.

ὡς ὄντος τοῦ πρώτου ὅρου α καὶ τῆς διαφορᾶς δ, ἔσται ὁ δεύτερος $\beta = \alpha \pm \delta$, ὁ τρίτος $\gamma = \beta \pm \delta$, ὁ τέταρτος $\varepsilon = \gamma \pm \delta$, καὶ ἐφεξῆς οὕτω (§. 674.)· Ἐὰν οὖν ἀντὶ τῶν α, β, γ, ε, ζ, κτλ. αἱ τούτων ἀντικαταστῶσι δυνάμεις, ἐκκύψει ἀντὶ τῆς δοθείσης Σειρᾶς ἡ ἐφεξῆς $\div \alpha . \alpha \pm \delta . \beta \pm \delta . \gamma \pm \delta . \varepsilon \pm \delta . \zeta \pm \delta .$ κτλ. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 871. Ἐὰν οὖν ἔντινι Ἀριθμητικῇ Σειρᾷ τεθῇ ἡ διαφορὰ $\delta = 1$, ὁ ἐν γένει τύπος (§. 870.), ἐπὶ τὸν ἐφεξῆς μετατραπήσεται $\div \alpha . \alpha \pm 1 . \beta \pm 1 . \gamma \pm 1 . \varepsilon \pm 1.$ κτλ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 872. Ἐν οἱαδηποτοῦν Ἀριθμητικῇ Σειρᾷ, ἧς ἡ διαφορὰ = 1, ὁστισοῦν τῶν ὅρων ἰσοῦται τῷ ἐκ τοῦ πρώτου ὅρου καὶ ἐκ τοῦ τῶν προλαβόντων ὅρων ἀριθμοῦ προκύπτοντι ἀθροίσματι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τοῦ ἐν γένει προσεχῶς ἐκλαμβανομένου τύπου (§. 871.) $\div \alpha . \alpha \pm 1 . \beta \pm 1 . \gamma \pm 1 . \varepsilon \pm 1 .$ κτλ. ἔσται ὁ τέταρτος ὅρος $\varepsilon = \gamma \pm 1$· ἀλλ' οὖν $\gamma = \beta \pm 1$, καὶ $\beta = \alpha \pm 1$ (§. 673.)· ἄρα $\varepsilon = \alpha \pm 1 \pm 1 \pm 1 = \alpha \pm 3$· ἔστι δὲ $\alpha \pm 3$ τὸ ἐκ τοῦ πρώτου ὅρου, καὶ ἐκ τοῦ τῶν προλαβόντων ὅρων ἀριθμοῦ ἄθροισμα· Ἄρα, κτλ. Ο. Ε. Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 873. Ἐν ὁποιαοῦν Ἀριθμητικῇ Σειρᾷ

διαφορὰν πλουτούσῃ $= 1$, τὸ τετράγωνον οὑτινοσοῦν τῶν ὅρων ἰσοῦται τῷ ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ὅρου, ἐκ τοῦ διπλοῦ ἀθροίσματος τῶν προλαβόντων ὅρων, κἀκ τοῦ τούτων ἀριθμοῦ προκύπτοντι κεφαλαίῳ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ τῆς καθόλου τῆςδε Σειρᾶς $\div \alpha . \alpha \pm 1 . \beta \pm 1$· ἔσται ὁ τρίτος ὅρος $\gamma = \beta \pm 1$, κατὰ τὰ προϋποτεθέντα, τὸ δὲ τούτου τετράγωνον $\gamma^2 = \beta^2 + 2\beta + 1$ (§. 257.). Ἔστι δὲ $\beta = \alpha \pm 1$, καὶ $\beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha + 1$· τῇ οὖν ἀνθυποκαταστάσει τῆς τοῦ β^2 ἰσοδυνάμεως, ἔσται $\gamma^2 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 + 2\beta + 1$, ἤτοι $\gamma^2 = \alpha^2 + 2\alpha + 2\beta + 2$· Ἄρα τὸ τετράγωνον γ^2, ἰσοῦται τῷ ἐκ τοῦ πρώτου ὅρου τετραγώνῳ α^2, τῷ ἐκ τῶν προλαβόντων ὅρων ἀθροίσματι $2\alpha + 2\beta$, καὶ τοῦ τῶν προλαβόντων ὅρων ἀριθμοῦ $1 + 1 = 2$. Ο. Ε. Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 874. Οἱασδηποτοῦν Ἀριθμητικῆς Σειρᾶς διαφορὰν πλουτούσης $= 1$, ὁ ὁποιουοῦν ὅρου κύβος ἰσοῦται τῷ τοῦ πρώτου ὅρου κύβῳ, τῷ τε ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τῶν προλαβόντων ὅρων τριπλῷ ἀθροίσματι, τῷ τριπλῷ τῶν προλαβόντων ὅρων, καὶ τῷ ἐκ τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ ἀθροίσματι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστι μὲν γὰρ ἐπὶ τῆςδε τῆς Σειρᾶς $\div \alpha . \alpha \pm 1$.

$\beta \pm 1$, ὁ τρίτος τῶν α, β, γ ὅρων $\gamma = \beta \pm 1$, ὡς δέδεικται (§. 879.)· ὁ δὲ τούτου κύβος $\gamma^3 = \beta^3 + 3\beta^2 + 3\beta + 1$ (§. 265.)· ἔστι δὲ $\beta = \alpha \pm 1$, ἄρα ὡσαύτως $\beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1$, καὶ διὰ τῆς τοῦ β^3 ἰσοδυνάμου ἀντικαταστάσεως, ἔσται

$$\gamma^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1$$
$$+ 3\beta^2 + 3\beta + 1$$

Ἄρα τοῦ τρίτου ὅρου κύβος γ^3, ἰσοῦται τῷ ἐκ τοῦ κύβου τοῦ πρώτου ὅρου α^3, ἐκ τοῦ τριπλοῦ τῶν ὀρθογωνίων $3\alpha^2 + 3\beta^2$, ἐκ τοῦ τριπλοῦ τῶν προλαβόντων ὅρων $3\alpha + 3\beta$, κτλ. προϊόντι ἀθροίσματι. Ο. Ε. Δ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 875. Θεωρήματα Γενικὰ, τοῖς προσεχῶς ἐκτεθεῖσι καὶ μάλα συνᾴδοντα ἐξευρεῖν, ὑπὲρ οἱασδηποτοῦν δυνάμεως τοῦ ἐσχάτου ὅρου τῶν τὴν πεπερασμένην Σειρὰν συνιστώντων Φυσικῶν ἀριθμῶν.

ΛΥΣΙΣ.

Οἱαδηποτοῦν μὲν δὴ πεπερασμένη Σειρὰ τῶν Φυσικῇ συνεπείᾳ προϊόντων ἀριθμῶν, οἷον ἡ 1, 2, 3, 4, 5, 6, ἐξαρίθμοις συγκροτουμένη ὅροις, τοῖς α, β, γ, δ, ϵ, ζ, ὀρθῶς ὑποτυπωθήσεται. Ἐπεὶ οὖν ἐν Ἀριθμητικῇ ὁποιαοῦν πεπερασμένῃ Σειρᾷ, τῶν ὅρων ἕκαστος ἰσοῦται τῷ πρὸ αὐτοῦ σὺν τῇ διαφορᾷ (§. 872.), ἥτις ἐστὶ μονὰς (§. 871.)· τουτέστιν ἐπεὶ οἱ τάξει Φυσικῇ προϊόντες ἀριθμοὶ, ἀείποτε μονάδι διεχηνόχασιν, ἔσται (§. 673.)·

$$\zeta = \varepsilon + 1$$
$$\varepsilon = \delta + 1$$
$$\delta = \gamma + 1$$
$$\gamma = \beta + 1$$
$$\beta = \alpha + 1$$

Τῶν ἐξισώσεων τοίνυν τουτωνὶ ἐπὶ καθυπερτέρας ἀναγομένων δυνάμεις, ἤτοι ἐπὶ τὴν δευτεροταγῆ (§. 257.), τριτοταγῆ (§. 265.), καὶ τεταρτοταγῆ (§. 270.), ἐκκύψει·

$$\zeta^2 = \varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1$$
$$\varepsilon^2 = \delta^2 + 2\delta + 1$$
$$\delta^2 = \gamma^2 + 2\gamma + 1$$
$$\gamma^2 = \beta^2 + 2\beta + 1$$
$$\beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha + 1$$
$$\zeta^3 = \varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 1$$
$$\varepsilon^3 = \delta^3 + 3\delta^2 + 3\delta + 1$$
$$\delta^3 = \gamma^3 + 3\gamma^2 + 3\gamma + 1$$
$$\gamma^3 = \beta^3 + 3\beta^2 + 3\beta + 1$$
$$\beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1$$
$$\zeta^4 = \varepsilon^4 + 4\varepsilon^3 + 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon + 1$$
$$\varepsilon^4 = \delta^4 + 4\delta^3 + 6\delta^2 + 4\delta + 1$$
$$\delta^4 = \gamma^4 + 4\gamma^3 + 6\gamma^2 + 4\gamma + 1$$
$$\gamma^4 = \beta^4 + 4\beta^3 + 6\beta^2 + 4\beta + 1$$
$$\beta^4 = \alpha^4 + 4\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha + 1$$

Συναπτέσθωσαν ἤδη, αἱ τῆς δευτέρας, τρίτης τε καὶ τετάρτης δυνάμεως ἐξισώσεις· οἷον

$$\zeta^2 + \varepsilon^2 + \delta^2 + \gamma^2 + \beta^2 = \varepsilon^2 + \delta^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \alpha^2 + 2\varepsilon + 2\delta + 2\gamma + 2\beta + 2\alpha + 5\cdot$$

$$\zeta^3 + \varepsilon^3 + \delta^3 + \gamma^3 + \beta^3 = \varepsilon^3 + \delta^3 + \gamma^3 + \beta^3 + \alpha^3 + 3\varepsilon^2 + 3\delta^2 + 3\gamma^2 + 3\beta^2 + 3\alpha^2 + 3\varepsilon + 3\delta + 3\gamma + 3\beta + 3\alpha + 5$$
$$\zeta^4 + \varepsilon^4 + \delta^4 + \gamma^4 + \beta^4 = \varepsilon^4 + \delta^4 + \gamma^4 + \beta^4 + \alpha^4 + 4\varepsilon^3 + 4\delta^3 + 4\gamma^3 + 4\beta^3 + 4\alpha^3 + 6\varepsilon^2 + 6\delta^2 + 6\gamma^2 + 6\beta^2 + 6\alpha^2 + 4\varepsilon + 4\delta + 4\gamma + 4\beta + 4\alpha + 5.$$

Ἐν ταῖς ἐσχάταις ταυταισὶ τρισὶν ἐξισώσεσι ζητείσθω ἡ τοῦ ἐσχάτου ὅρου ζ δύναμις, ἤτοι τὸ τούτου ἰσότιμον· ὥστε εἶναι τῇ μεταθέσει (§. 433.)·

$$\zeta^2 = \alpha^2 + 2\varepsilon + 2\delta + 2\gamma + 2\beta + 2\alpha + 5\cdot$$
$$\zeta^3 = \alpha^3 + 3\varepsilon^2 + 3\delta^2 + 3\gamma^2 + 3\beta^2 + 3\alpha^2 + 3\varepsilon + 3\delta + 3\gamma + 3\beta + 3\alpha + 5$$
$$\zeta^4 = \alpha^4 + 4\varepsilon^3 + 4\delta^3 + 4\gamma^3 + 4\beta^3 + 4\alpha^3 + 6\varepsilon^2 + 6\delta^2 + 6\gamma^2 + 6\beta^2 + 6\alpha^2 + 4\varepsilon + 4\delta + 4\gamma + 4\beta + 4\alpha + 5.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 876. Ἐντεῦθεν οὖν δῆλον, κατὰ μὲν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἐσχάτου ὅρου ζ^2 ἐξισοῦσθαι τῷ τοῦ πρώτου ὅρου τετραγώνῳ α^2, τῷ διπλῷ ἀθροίσματι ἁπάντων τῶν πρὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρων, καὶ τῷ τῶν τὸν ἔσχατον προλαβόντων ὅρων ἀριθμῷ 5 (§. 873.).

Κατὰ δὲ τὴν δευτέραν. Τὸν κύβον τοῦ ἐσχάτου ὅρου ζ^3 ἰσοῦσθαι τῷ τοῦ πρώτου ὅρου κύβῳ α^3, τῷ τριπλῷ τετραγώνῳ ἁπάντων τῶν πρὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρων, τῷ τριπλῷ ἀθροίσματι πάντων τῶν τὸν ἔσχατον προλαβόντων ὅρων, καί γε τῷ τούτων ἀριθμῷ (§. 874.).

Καὶ κατὰ τὴν τρίτην· Τὴν τοῦ ἐσχάτου ὅρου τετάρτην δύναμιν ζ^4 ἴσην εἶναι τῇ τετάρτῃ τοῦ πρώτου ὅρου δυνάμει α^4, τῷ τετραπλῷ κύβῳ τῶν πρὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρων, τῷ ἑξαπλῷ τετραγώνῳ τῶν αὐτῶν ὅρων, τῷ τετραπλῷ τῶν τὸν ἔσχατον προλαβόντων ὅρων ἀθροίσματι, καί γε τῷ τούτων ἀριθμῷ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐκ τούτων τοίνυν δηλοῦται, τὰ αὐτὰ Θεωρήματα, καὶ πρὸς οἱασοῦν τοῦ ἐσχάτου ὅρου δυνάμεις, τῷ αὐτῷ πάντως λόγῳ ἀνάγεσθαι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 877. Τὰ εὑρεθέντα Θεωρήματα Τύποις Γενικοῖς ἐκθεῖναι.

ΛΥΣΙΣ.

Τεθήτω ὁ πρῶτος ὅρος $= \alpha$, ὁ δὲ ἔσχατος $= \omega$, ἔσται ὁ τῶν τὸν ἔσχατον προϊόντων ὅρων ἀριθμὸς $= \omega - \alpha$, ὡς ὑπ' ὄψιν, ἐκ μόνης τῆς ψιλῆς θεωρίας τῆς τῶν Φυσικῶν ἀριθμῶν πεπερασμένης οἱασοῦν σειρᾶς, κατάδηλον γίνεται. Κείσθω ἐφεξῆς τὸ ἁπάντων τῶν ὅρων κεφάλαιον $= \kappa$, ἔσται τὸ κεφάλαιον τῶν τὸν ἔσχατον προλαβόντων ὅρων $= \kappa - \omega$. Τεθήτω πόῤῥω τὸ τῶν τετραγώνων ἁπάντων τῶν ὅρων κεφάλαιον $= \kappa^2$, τὸ τῶν κύβων $= \kappa^3$. Τῆς ἀντικαταστάσεως τοίνυν καὶ τῆς ἀναγωγῆς γενομένων, τὰ προσεχῶς Θεωρήματα (§. 876.), τοῖς ἐφεξῆς ἐκτεθείσονται γενικοῖς τύποις.

$$\omega^2 = \alpha^2 + 2\kappa - \omega - \alpha$$

$$\omega^3 = \alpha^3 + 3\kappa^2 - 3\omega^2 + 3\kappa - 2\omega - \alpha$$

$$\omega^4 = \alpha^4 + 4\kappa^3 - 4\omega^3 + 6\kappa^2 - 6\omega^2 + 4\kappa - 3\omega - \alpha.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 878. Τὸ τῶν μονάδων κεφάλαιον ἀπειράκις ληφθὲν, ἄπειρον καθίσταται πρωτοβάθμιον, οἷον $\kappa = \infty$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ γὰρ μονὰς ἀπειράκις ληφθεῖσα, ὡς $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots$ ποσότητα ἐμφαίνει πεπερασμένην, ἁπάσας τὰς δυνατῶς ἐχούσας αὐξήσεις ἑαυτῇ ἐμπεριλαβοῦσαν, καὶ περαιτέρω ἐπαύξειν ἀδυνατοῦσαν· τουτὶ ἀλλ' οὖν τὴν τοῦ ἀπείρου παρίστησιν ἔννοιαν. Ἄρα τὸ τῶν μονάδων κεφάλαιον ἀπειράκις ληφθὲν, ἄπειρον καθίσταται πρωτοβάθμιον, ἤτοι $\kappa = \infty$. Ο. Ε. Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 879. Τὸ τῶν ὅρων τῆς ἐπ' ἄπειρον προϊούσης τῶν Φυσικῶν ἀριθμῶν $1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\ldots \infty$ Σειρᾶς κεφάλαιον, τῷ τοῦ δευτεροβαθμίου ἀπείρου ἰσοῦται ἡμίσει· οἷον $\kappa = \frac{\infty^2}{2}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τῆς σειρᾶς ἀπείρου ὑποτιθεμένης, ἔσται ὁ ἔσχατος ταύτης ὅρος $= \infty$, ὁ δὲ τῶν τὸν ἔσχατον προϊόντων ὅρων ἀριθμὸς $= \infty - 1$, ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν τὸν ἔσχατον προλαβόντων ἔσται $= \kappa - \infty$ (§. 877.)· ἄρα $\infty^2 = 1 + 2\kappa - 2\infty + \infty - 1$ (§. 873.), $\infty^2 = 2\kappa - \infty$ (§. 863.), $\infty^2 + \infty = 2\kappa$· ἔστι δὲ $\infty^2 + \infty = \infty^2$ (§. 864.)· Ἄρα ∞^2

$= 2\kappa$, καὶ τῇ τοῦ συνθέτου ἀπαλλαγῇ ἔσται $\kappa = \frac{\infty^2}{2} = \frac{\infty \times \infty}{2}$ (§. 867.)· Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 880. Ἐπεὶ μὲν δὴ $\kappa = (\omega + \omega^2) : 2$ (§. 698.)· ἔστι δὲ ἐνταῦθα ὁ ἔσχατος ὅρος $\omega = \infty$· ἄρα τῇ τῶν ἴσων ἀντικαταστάσει ἐκκύψει $\kappa = \frac{\omega + \omega^2}{2} = \frac{\infty + \infty^2}{2} = \frac{\infty^2}{2}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 881. Τὸ κεφάλαιον τῶν ὅρων τῆς ἐπ' ἄπειρον προϊούσης τῶν τετραγώνων ἀριθμῶν 1, 4, 9, 16 . . . . . ∞^2 σειρᾶς, ἰσοῦται τῷ τοῦ τριτοβαθμίου ἀπείρου τριτημορίῳ· ἤτοι

$$\kappa^2 = \frac{\infty^3}{3}.$$

ΔΕΙΞΙΣ.

Τῆς σειρᾶς τῶν κατὰ φυσικὴν τάξιν προϊόντων ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . . ∞ ἐπ' ἄπειρον συνεχιζομένης, ὁ μὲν τῶν ὅρων ἀριθμός ἐστιν $= \infty$, ὁ δὲ τῶν τὸν ἔσχατον προηγουμένων $= \infty - 1$, τὸ τῶν ὅρων κεφάλαιον $\infty^2 : 2$ (§ 879.), ἑπομένως τὸ κεφάλαιον τῶν τὸν ἔσχατον προϊόντων ὅρων ἔσται $= (\infty^2 : 2) - \infty$· ὥστε τοῦ τῶν τετραγώνων ἁπάντων τῶν ὅρων ἀθροίσματος τεθέντος $= \kappa^2$, ἔσται τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τὸν ἔσχατον προϊόντων ὅρων $= \kappa^2 - \infty^2$. Ἀλλ' οὖν (§. 874.) ἔστιν

$$\infty^3 = 1 + 3\kappa^2 - 3\infty + \frac{3\infty^2}{2} - 3\infty + \infty - 1$$

$$\infty^3 = 3\kappa^2 - 3\infty^2 + \frac{3\infty^2}{2}$$

$$\infty^3 + 3\infty^2 - \frac{3\infty^2}{2} = 3\kappa^2$$

Ἔστι δὲ $\infty^3 + 3\infty^2 - \frac{3\infty^2}{2} = \infty^3$ (§. 864.)· Ἄρα

$3\kappa^2 = \infty^3$, καὶ $\kappa^2 = \frac{\infty^3}{3}$. Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 882. Ἐπεὶ μὲν δὴ $(2\nu^3 + 3\nu^2 + \nu) : 6 = \kappa^2$ (§. 734.)· ἔστι δὲ ἐν τῇ ἡμετέρᾳ περιστάσει ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ἄπειρος, ἤτοι $\nu = \infty$· διὰ τῆς τῶν ἴσων ἀνθυποκαταστάσεως, ἔσται $\kappa^2 = \frac{2\nu^3 + 3\nu^2 + \nu}{6} = \frac{2\infty^3 + 3\infty^2 + \infty}{6} = \frac{2\infty^3}{6}$ (§. 864.) $= \frac{\infty^3}{3}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 883. Τῷ αὐτῷ τοίνυν δειχθήσεται τρόπῳ, τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς ἐπ' ἀπείρου προϊούσης τῶν κυβικῶν ἀριθμῶν σειρᾶς, ἤτοι τῆς τριτοβαθμίου 1, 8, 27, 64 . . . ∞^3, ἴσον εἶναι τῷ τοῦ τεταρτεταγοῦς ἀπείρου τεταρτημορίῳ, οἷον $\kappa^3 = \frac{\infty^4}{4}$. ὡς δ' αὕτως, καὶ τὸ τῶν κατὰ τὴν τετάρτην δύναμιν ἀπείρων ὅρων 2, 16, 81 . . . . ∞^4 ἄθροισμα ἰσοῦσθαι τῷ τοῦ πεμπτοβαθμίου ἀπείρου πεμπτημορίῳ, οἷον $\kappa^4 = \frac{\infty^5}{5}$· καὶ τὸ τῶν κατὰ τὴν πέμπτην $\kappa^5 = \frac{\infty^6}{6}$, κἂν τοῖς ἐφεξῆς ὡσαύτως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 884. Ἐπεὶ οὖν $\frac{\infty^2}{2} = \frac{\infty \times \infty}{1+1}$ (§. 867.), καὶ $\frac{\infty^3}{4} = \frac{\infty^2 \times \infty}{2+1}$, καὶ $\frac{\infty^4}{4} = \frac{\infty^3 \times \infty}{3+1}$, καὶ τοῖς ἐφεξῆς οὕτω τῇ πρὸς τοὺς παράγοντας διαλύσει. Ἐὰν ὁ ἐκθέτης τεθῇ $= \nu$ ἔσται ἐν γένει πρὸς παράστασιν ὁποιωνοῦν ἐνδεχομένων δυνάμεων ὁ ἐφεξῆς τύπος

$$\kappa^{\nu} = \frac{\infty^{\nu} \times \infty}{\nu + 1}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 885. Τὸ κεφάλαιον ἐξευρεῖν οἱωνδηποτοῦν δυνάμεων, τῶν Φυσικῶς προϊόντων ἀριθμῶν, τήν τε ἄπειρον συνιστώντων Σειρὰν, τοῖς ἐν τοῖς προεκτεθεῖσι Θεωρήμασι συνᾷδον.

ΛΥΣΙΣ.

Τῶν ἐν γένει προεκτεθέντων τύπων ὑπ' ὄψιν ληφθέντων (§. 877.), ζητείσθω ἐν πρώτοις ἐκ τῆς τοῦ πρώτου τύπου κατασκευῆς τὸ κεφάλαιον τῶν πρὸς μονάδα ἠρμένων δυνάμεων, $1^1 + 2^1 + 3^1 + 4^1 + \ldots \infty^1$. ἔσται οὕτως

$$\kappa = \frac{\omega^2 - \alpha^2 + \omega + \alpha}{2}.$$

Ἐφ' ᾧ τοίνυν τὸ τῆς ἐπ' ἄπειρον προϊούσης σειρᾶς, ἣν ἐνταῦθα ὑποθέμεθα, εὑρεθῇ ἄθροισμα· ἐπεὶ $\omega = \infty$· ἀντικαταστήτω ἀντὶ τοῦ ω, τὸ τούτου ἰσοδύναμον ∞, ἤτοι γενέσθω

$$\kappa = \frac{\infty^2 - \alpha^2 + \infty + \alpha}{2} = \frac{\infty^2}{2} \text{ (§. 866.)} = \frac{\infty \times \infty}{2}.$$

Β'. Ζητείσθω ἐκ τῆς τοῦ δευτέρου τύπου κατασκευῆς κ^2, τουτέστι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τῶν τὴν πεπερασμένην σειρὰν συνιστώντων Φυσικῶν ἀριθμῶν· οἷον·

$$\kappa^2 = \frac{\omega^3 - \alpha^3}{3} + \omega^2 - \kappa + \frac{2\omega + \alpha}{3}.$$

Ἀλλ' οὖν ἐνταῦθα, τὸ τῆς ἐπ' ἄπειρον προϊούσης τῶν τετραγώνων σειρᾶς κεφάλαιον πρὸς εὕρεσιν πρόκειται, $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots \infty^2$. Διὸ, ἐπεὶ $\omega = \infty$, καὶ $\kappa = \infty^2 : 2$ (§. 885. Α'.), ἔσται διὰ τῆς τῶν ἴσων πανταχῇ ἀντεισαγωγῆς

$$\kappa^2 = \frac{\infty^3 - \alpha^3}{3} + \infty^2 - \frac{\infty^2}{2} + \frac{2\infty + \alpha}{3}$$

$$\kappa^2 = \frac{\infty^3}{3} = \frac{\infty^2 \times \infty}{3} \text{ (§. 882.)}.$$

Γ'. Ἐκ τοῦ τρίτου αὖθις τύπου ζητείσθω κ^3, ἤτοι τὸ τῶν κύβων ἄθροισμα, τῶν τὴν πεπερασμένην συνιστώντων τῶν Φυσικῶν ἀριθμῶν σειράν. ἔνθεν τοι·

$$\kappa^3 = \frac{\omega^4 - \alpha^4}{4} + \omega^3 - \frac{6\kappa^2}{4} + \frac{6\omega^2}{4} - \kappa + \frac{3\omega + \alpha}{4}.$$

Ὅπως τοίνυν τὸ τῆς ἐπ' ἄπειρον προϊούσης τῶν τριτοταγῶν δυνάμεων σειρᾶς προκύψῃ ἄθροισμα, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots \infty^3$. ἐπεὶ $\omega = \infty$, $\kappa = \infty^2 : 2$, $\kappa^2 = \infty^3 : 3$ (§. 885. Β'.)· ἀντεισαγομένων τούτων ἀντ' ἐκείνων, ἔσται·

$$\kappa^3 = \frac{\infty^4 - \alpha^4}{4} + \infty^3 - \frac{6\infty^3}{12} + \frac{6\infty^2}{4} - \frac{\infty^2}{2} + \frac{3\infty + \alpha}{4}.$$

$$\kappa^3 = \frac{\infty^4}{4} = \frac{\infty^3 \times \infty}{3+1} \text{ (§. 884.)}.$$

Δ'. Ἢν ληφθῇ ἐν γένει ἀνθ' οἱασοῦν καθυπερτέρας τῶν δυνάμεων τὸ ν, ἔσται ὁ ἐφεξῆς κατὰ γένος περὶ πασῶν τῶν τῆς ἀπείρου σειρᾶς δυνάμεων τύπος.

$$\kappa^{\nu} = \frac{\infty^{\nu} \times \infty}{\nu + 1} \quad (\S.\ 885.).$$

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 886. Τοῦ κανόνος τοίνυν, καθ' ὃν οἱ τοιοῦτοι ἀναφύονται τύποι καλῶς θεωρουμένου, εὐχερῶς τὰ ἑπόμενα πάρεστι συνιδεῖν. Α'. τὸ κεφάλαιον τῶν τὴν ἄπειρον συνιστώντων σειρὰν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἰσοῦται τῷ γινομένῳ ἐκ τοῦ ἐσχάτου ὅρου ἐπὶ τὸν τῶν ὅρων ἀχθέντος ἀριθμὸν, διαιρουμένῳ διὰ 2.

Β'. Τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων, τῶν κατὰ φυσικὴν τάξιν προϊόντων ἀριθμῶν, ἰσοῦται τριτημορίῳ τοῦ γινομένου ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἐσχάτου ὅρου, ἐπὶ τὸν τῶν ὅρων πολλαπλασιαζομένου ἀριθμόν.

Γ'. Τὸ κεφάλαιον τῶν κύβων τῶν τὴν ἄπειρον σειρὰν συντιθέντων φυσικῶν ἀριθμῶν, ἰσοῦται τεταρτημορίῳ τοῦ γινομένου ἐκ τοῦ κύβου τοῦ ἐσχάτου ὅρου, ἐπὶ τὸν τῶν ὅρων ἀχθέντος ἀριθμόν.

Δ'. Καὶ ἐν γένει, τὸ κεφάλαιον οἱωνδηποτοῦν δυνάμεων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν τῶν τὴν ἄπειρον συνιστώντων σειρὰν, ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τῆς τοῦ ἐσχάτου ὅρου δυνάμεως, ἐπὶ τὸν τῶν ὅρων ἀριθμὸν πολλαπλασιαζομένης, προκύπτοντι γινομένῳ, διὰ τοῦ τῶν δυνάμεων ἐκθέτου μονάδι ἐπηυξημένου διαιρουμένῳ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 887. Τὸ κεφάλαιον οἱωνδηποτοῦν ῥιζῶν

ἐξευρεῖν, τῶν φυσικῇ τάξει προϊόντων, τήν τε ἀπείρων ὅρων σειρὰν συνιστώντων ἀριθμῶν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπεὶ μὲν δὴ ποσότης οἱαποτοῦν κλάσμα καταφάσκον ἀντ' ἐκθέτου πλουτοῦσα, ἰσοδυναμεῖ ῥίζῃ τὸν τοῦ κλάσματος ὀνομαστὴν ἀντ' ἐκθέτου ἐχούσῃ, τῆς δυνάμεως ὑπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ βαθμοδεικνυμένης (§. 240.), οἷον $\alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha}$, $\alpha^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\alpha}$, $\alpha^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\alpha}$, καὶ ἐν γένει $\alpha^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha}$. Τοῦ προσεχῶς ἐκτεθέντος γενικοῦ τύπου λαμβανομένου (§. 886. Δ'.), ἢν τεθῇ $\nu = \frac{1}{2}$, ὁ αὐτὸς τύπος τὸ τῶν τετραγώνων ῥιζῶν $1^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + 4^{\frac{1}{2}} + \ldots \infty^{\frac{1}{2}}$ (§. 293.) ἀναδώσει κεφάλαιον· ἢν δὲ $\nu = \frac{1}{3}$, τὸ τῶν κυβικῶν· ἢν δὲ $\nu = \frac{1}{4}$, τὸ τῶν τεταρτοταγῶν ῥιζῶν, τῶν τὴν ἀπείρων ὅρων σειρὰν συνιστώντων φυσικῶν ἀριθμῶν δηλώσει ἄθροισμα· ὥστε κἀντεῦθεν τοὺς ἐφεξῆς ὡσαύτως ἀναδίδοσθαι τύπους· οἷον·

$$\kappa^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\kappa} = \frac{\infty^{\frac{1}{2}} \times \infty}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{\infty^{\frac{1}{2}} \times \infty}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(\infty^{\frac{1}{2}} \times \infty)$$

$$\kappa^{\frac{1}{2}} = \frac{2\,\infty^{\frac{1}{2}} \times \infty}{3} = \frac{2\,\infty^{\frac{1}{2}+1}}{3} = \frac{2}{3}\infty^{\frac{3}{2}}.$$

$$\kappa^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\kappa} = \frac{\infty^{\frac{1}{3}} \times \infty}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{\infty^{\frac{1}{3}} \times \infty}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}(\infty^{\frac{1}{3}} \times \infty)$$

$$\kappa^{\frac{1}{3}} = \frac{3\,\infty^{\frac{1}{3}} \times \infty}{4} = \frac{3}{4}\infty^{\frac{4}{3}}$$

$$\kappa^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\kappa} = \frac{\infty^{\frac{1}{4}} \times \infty}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\infty^{\frac{1}{4}} \times \infty}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}(\infty^{\frac{1}{4}} \times \infty)$$

$$\kappa^{\frac{1}{4}} = \frac{4\,\infty^{\frac{1}{4}} \times \infty}{5} = \frac{4}{5}\infty^{\frac{5}{4}}$$

καὶ ἐν γένει· $\kappa^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\kappa} = \frac{\nu}{\nu + 1}(\infty^{\frac{1}{\nu}} \times \infty)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 888. Ἐξ ὧν δὴ τὰ ἐφεξῆς ἔπεται ἐπιφέρειν.

Α'. Τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγωνείων ῥιζῶν, σειρῶν ἀπείρων ὅρων τάξει φυσικῇ προϊόντων, ἰσοῦται δυσὶ τριτημορίοις τοῦ γινομένου, πολλαπλασιασμῷ τῆς τοῦ ἐσχάτου ὅρου τετραγωνείου ῥίζης, ἐπὶ τὸν τῶν ὅρων ἀριθμόν.

Β'. Τὸ κεφάλαιον τῶν κυβικῶν ῥιζῶν, σειρῶν ἀπείρων ὅρων τάξει φυσικῇ προϊόντων, ἰσοῦται τρισὶ τεταρτημορίοις τοῦ γινομένου ἐκ τῆς τοῦ ἐσχάτου ὅρου κυβικῆς ῥίζης, πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὸν τῶν ὅρων ἀριθμόν.

Γ'. Τὸ κεφάλαιον τῶν τῆς τεταρτοταγοῦς δυνάμεως ῥιζῶν, σειρῶν ἀπείρων ὅρων τάξει φυσικῇ προϊόντων, ἴσον ἐστὶ τέτταρσι πεμπτημορίοις τοῦ γινομένου ἐκ τῆς τοῦ κατὰ τὴν τετάρτην δύναμιν ἐσχάτου ὅρου ῥίζης, πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὸν τῶν ὅρων ἀριθμόν.

Δ'. Ἄρα καθόλου· τὸ κεφάλαιον οἱωνδηποτοῦν ῥιζῶν, σειρῶν ἀπείρων ὅρων τάξει φυσικῇ προϊόντων, ἰσοῦται κλάσματι ὑπὸ μὲν τοῦ τῶν ῥιζῶν ἐκθέτου ἀριθμουμένῳ, παρωνυμουμένῳ δὲ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐκθέτου μονάδι ἐπαυξηθέντος, ἐπί τε τὴν τοῦ ἐσχάτου ὅρου ῥίζαν καὶ τὸν τῶν ὅρων ἀριθμὸν πολλαπλασιαζομένῳ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 889. Τὰ ἀνωτέρω προϋπεκτεθέντα, δι' ἐφαρμογῆς κατασκευάσαι.

ΛΥΣΙΣ.

Πίν. Α'. Σχ. 12. Τῆς τετραγωνείου Πυραμίδος, ἧς ἡ βάσις ὡσαύτως

τετραγωνική, ὑπ' ὄψιν ληφθείσης, ἔσται ὁ μὲν ἐν τῇ ταύτης οἱαδηποτοῦν πλευρᾷ τῶν σφαιρῶν ἀριθμὸς ἑξάδικός, αἱ δὲ βάσεις ὡσαύτως ἑξάριθμοι, καὶ ἡ τούτων καθυπερτάτη $= 1$. Ζητητέον οὖν ἤδη διὰ τῆς τῶν ἐκτεθέντων τύπων ἐφαρμογῆς, τὸν ἐν τῇ τοιαύτῃ Πυραμίδι ἐμπεριλαμβανόμενον τῶν σφαιρῶν ἀριθμόν. Ἐπεὶ οὖν ἥ, τε ἐσχάτη τῶν βάσεων καὶ αἱ λοιπαὶ εἰσὶ τετράγωνα, καὶ δὴ τῶν φυσικῇ τάξει προϊόντων τήν τε πεπερατμένην σειρὰν συνιστώντων ἀριθμῶν, ὧν ὁ πρῶτος ὅρος $= 1 = \alpha$, ἔσται τὸ τούτων κεφάλαιον (§. 877.).

$$\varkappa^2 = \frac{\omega^3 - \alpha^3}{3} + \omega^2 - \varkappa + \frac{2\omega + \alpha}{3}.$$

Ἔστι δὲ $\varkappa = \frac{\omega^2 - \alpha^2 + \omega + \alpha}{2}$ (§. 886. Α'.), Ἄρα

$$\varkappa^2 = \frac{\omega^3}{3} + \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega}{6} - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha}{6}.$$

Ἀλλ' οὖν $\alpha = 1$, ἄρα $-\frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha}{6} = 0$. Ὑπολείπεται οὖν

$$\varkappa^2 = \frac{\omega^3}{3} + \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega}{6}.$$

$$\varkappa^2 = \frac{2\omega^3 + 3\omega^2 + \omega}{6} \quad (§. 175.).$$

Ἐπεὶ δ' ἐν τῇ σειρᾷ ταύτῃ τῇ ἀπὸ μονάδος ἀρχομένῃ μονάδι τε ἰσοδιαφερούσῃ, ὁ ἔσχατος ὅρος ὁ τῶν ὅρων ἐστὶν ἀριθμὸς ἤτοι $\nu = \omega = 6$ (§. 734.)· ἔσται

$$\varkappa^2 = \frac{2 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 6}{6} = \frac{432 + 108 + 6}{6} = 546$$

ἤτοι, $\varkappa^2 = 91$.

Σχ. 11. Θῶμεν δὴ πόῤῥω τὴν τῆς Πυραμίδος βάσιν εἶναι τρίγωνον ἰσόπλευρον, ἓξ δὲ μόνον ὑποτίθεσθαι βάσεις, ὧν τὴν πρώτην, ἤτοι τὴν ὑπερτάτην ἴσην εἶναι μονάδι. Θηρευτέον δὴ κἀνταῦθα, τὸν ἐν αὐτῇ περιεχόμενον τῶν σφαιρῶν ἀριθμόν. Τοῦ μὲν οὖν κεφαλαίου τῆς ἐσχάτης τριγωνικῆς βάσεως ὡς ὄντος δεδομένου (§. 727.), ἔσονται τὰ προσεχῶς τῷ ἐσχάτῳ ἑπόμενα ἀθροίσματα ἐν τῷ αὐτῷ πάντως ἐκείνου λόγῳ· οἷον ἐπεὶ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $\nu = \omega$, ἔσται

τὸ τῆς ἐσχάτης βάσεως $\varkappa = \dfrac{\omega^2 + \omega}{2}$

τὸ τῆς παραληγούσης $\varkappa = \dfrac{\varepsilon^2 + \varepsilon}{2}$

τὸ τῆς προσεχῶς ἐφεπομένης $\varkappa = \dfrac{\delta^2 + \delta}{2}$

τὸ ἀπ' ἐκείνης τέταρτον $\varkappa = \dfrac{\gamma^2 + \gamma}{2}$

τὸ δὲ πέμπτον $\varkappa = \dfrac{\beta^2 + \beta}{2}$

καὶ τὸ ἕκτον, ἤτοι τὸ πρῶτον $\varkappa = \dfrac{\alpha^2 + \alpha}{2}$

Τὸ ἄθροισμα τοίνυν ἁπάντων, ἔσται $\varkappa = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \omega^2 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \omega) : 2$· Τουτέστι, τὸ ἄθροισμα ἁπασῶν τῶν ἐν τῇ τοιαύτῃ Πυραμίδι περιεχομένων σφαιρῶν, ἰσοῦται τῷ τῶν τετραγώνων ἡμιαθροίσματι, προσθέσει τοῦ τῶν ἑαυτῶν βάσεων ἡμικεφαλαίου. Ἐκ γὰρ τῶν δειχθέντων, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ἐστὶ

$$\varkappa^2 = \frac{2\omega^3 3\omega^2 + 6}{6}\text{· ἔστι δὲ } \varkappa = \frac{\omega^2 + \omega}{2}$$

ἔσται τοίνυν τὸ τῶν κεφαλαίων $\varkappa^2$ καὶ $\varkappa$ ἀμφοτέρων ὁμοῦ συναφθέντων ἡμιάθροισμα

$$\frac{\varkappa^2 + \varkappa}{2} = \frac{2\omega^3 + 3\omega^2 + 6}{6 . 2} + \frac{\omega^2 + \omega}{2 . 2}$$

$$\frac{\varkappa^2 + \varkappa}{2} = \frac{2\omega^3 + 3\omega^2 + 6}{12} + \frac{\omega^2 + \omega}{4}$$

$$\frac{\varkappa^2 + \varkappa}{2} = \frac{8\omega^2 + 24\omega^2 + 16\omega}{48} = \frac{\omega^3 + 3\omega^3 + 2\omega}{6}$$

Ἐπεὶ δ' ἐνταῦθα $\omega = 6 = \nu$ (§. 730.), ἔσται

$$\frac{6^3 + 3 . 6 + 2 . 6}{6} = \frac{216 + 108 + 12}{6} = \frac{636}{6} = 56.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 890. Τὸ κεφάλαιον εὑρεῖν κλασματωδῶν ὁποιωνοῦν ὅρων, τῶν τὴν ἄπειρον Σειρὰν συνιστώντων ἀριθμῶν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω δὴ προσδιορισθησόμενον τὸ κεφάλαιον τῆς ἐφεξῆς ἐπ' ἄπειρον προϊούσης κλασματώδους σειρᾶς·

$$\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma\mu} + \frac{\beta}{\gamma\mu^2} + \frac{\beta}{\gamma\mu^3} + \ldots \frac{\beta}{\gamma\mu^\infty}$$

Ἐν ᾗ οἱ μὲν ἀριθμηταὶ ἐν τῇ αὐτῇ ἑστῶτες εἰσὶ μονοβαθμίῳ τάξει, οἱ δὲ παρονομασταὶ ἐν προόδῳ αὔξουσι Γεωμετρικῇ. Ἐπεὶ οὖν (§. 776.) ἔστι $\varkappa = \alpha(\pi^\nu - 1) : (\pi - 1)$, ἣν τεθῇ φέρε $\alpha = \dfrac{\beta}{\gamma}$, καὶ $\pi = \dfrac{1}{\mu}$ ἔσται

$$\varkappa = \frac{\beta\mu(\mu^\nu - 1)}{\gamma\mu^\nu(\mu - 1)}.$$

Τεθήτω δὴ ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς $\nu = \infty$, κατὰ τὴν προτεθεῖσαν ὑπόθεσιν· ἔσται οὕτω,

$$\varkappa = \frac{\beta\mu . \mu^\infty}{\gamma\mu^\infty(\mu - 1)} = \frac{\beta\mu}{\gamma(\mu - 1)}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 891. Ἔσται τοίνυν τὸ κεφάλαιον τῶν ἐφεξῆς ἐπ' ἄπειρον κλασματωδῶν Σειρῶν διὰ τῆς ἐφαρμογῆς κατασκευαζόμενον, ἤτοι·

Α'. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots = 1$

ἔστι καὶ γὰρ ἐνταῦθα $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\mu = 2$, ἑπομένως $\varkappa = \frac{1.2}{2.1} = 1$.

Β'. $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\ldots\ldots = \frac{2}{3}$

ἐπεὶ $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\mu = 4$, ἑπομένως $\varkappa = \frac{1.4}{2.3} = \frac{2}{3}$.

Γ'. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\ldots\ldots = \frac{1}{3}$

ἐπεὶ $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\mu = -2$, ἑπομένως $\varkappa = \frac{1.-2}{2.-3} = \frac{1}{3}$.

Δ'. $\frac{3}{2}-\frac{6}{6}+\frac{12}{18}-\frac{24}{54}+\frac{48}{162}\ldots\ldots = \frac{9}{10}$

ἐπεὶ $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $\mu = -\frac{3}{2}$, ἑπομένως $\varkappa = (3.-\frac{3}{2}) : 2 \times -\frac{5}{2} = -\frac{9}{2} : -\frac{10}{2} = \frac{9}{10}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Καὶ ταῦτα μὲν ὡς οἷόν τε περί τε τῶν Ἀπείρων καὶ Ἀπειροστῶν χάριν τῶν Εἰσαγομένων ἡμῖν ἐστοιχείωται· τὰ δὲ λοιπὰ ὡς λεπτοτέρας δεόμενα θεωρίας, τοῖς τῆς ὑπερεχούσης Ἀναλύσεως ἐρασταῖς, ἐν τῇ τοῦ τῶν Ὁλοσχερητικῶν τε καὶ Διαφορητικῶν (de Calculo Integrali et Differentiali) ὑπολογισμοῦ πραγματείᾳ, ἀπεταμιεύσαμεν. Νῦν δὲ, οὐ πόῤῥω ἴσως τῆς παρούσης ἂν εἴη προθέσεως καὶ περὶ τῶν Δεκαδικῶν κλασμάτων γνῶξίν τινα παρασχεῖν, ὡς ἡ τούτων χρῆσις λίαν ἐπίσημος ἔν τε τῷ Λογαριθμικῷ ὑπολογισμῷ, καὶ πλείστοις ἄλλοις, εἴτ' οὖν Ἀλγεβραϊκῶς, ἢ καὶ Γεωμετρικῶς κατασκευαζομένοις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ϛ.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 892. Κλάσμα Δεκαδικὸν ἀκούει, οὗ ὁ παρονομαστὴς μετὰ τὴν μονάδα, ἰσαρίθμως τοῖς τοῦ ἀριθμητοῦ χαρακτῆρσι, μηδενικοῖς συνέζευκται.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 893. Τὰ Δεκαδικὰ τῶν κλασμάτων, ὡς ἐφεξῆς ἐκτιθέμενα οἷον $\frac{6}{10}$, $\frac{38}{100}$, $\frac{433}{1000}$, οὕτως ἀπαγγελέσθωσαν· ἓξ δεκατημόρια, 38 ἑκατοστημόρια, 433 χιλιοστημόρια. Ἀλλ' οὖν καὶ οἱ τοῦ ἀριθμητοῦ χαρακτῆρες σὺν τῷ ἀνήκοντι παρονομαστῇ ἰδίᾳ οὕτως ἐξαριθμείσθωσαν· οἷον $\frac{433}{1000}$, 4 δεκατημόρια, 3 ἑκατοστημόρια, 3 χιλιοστημόρια.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 894. Τοῦ ἀριθμητοῦ ἐλάσσονας χαρακτῆρας τῶν τῷ παρονομαστῇ προσκειμένων μηδενικῶν ἔχοντος, ὁ τῶν χαρακτήρων ἀριθμὸς τῇ τῶν μηδενικῶν, ὅσων ἂν ᾖ χρεία, προσθέσει αὐξανέσθω, οἷον $\frac{4}{1000} = \frac{004}{1000}$· ἑνὸς γὰρ μηδενικοῦ τῷ ἀριθμητῇ, οἷον τῷ 4, προστιθεμένου, αὐτίκα ὁ παρονομαστὴς ὑπονοεῖται προσδιοριζόμενος εἶναι 100 (§. 892.)· δυεῖν δὲ, 1000· καὶ ἐφεξῆς οὕτω.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 895. Ἐπεὶ οὖν ἐκ μόνης τῆς τοῦ ἀριθμητοῦ θεωρίας ὁ παρονομαστὴς διαγνωρίζεται (§. 892.), εἰωθε πολλάκις τὸν παρονομαστὴν μηδὲ γοῦν γράφεσθαι, τὸν δ' ἀριθμητὴν στίγματι ἀπὸ τῶν ὁλοσχερῶν ὑποδιαστελλόμενον διακρίνεσθαι· οἷον $35 + \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{9}{10000} = 35 + \frac{7859}{10000} = 35,7859$. Εἰ δὲ τὸ δεκαδικὸν κλάσμα ὁλοσχερῶν ἄνευ ἐκτέθειται, ἢ καὶ ὁ τούτου ἀριθμητὴς ἐκ χαρακτήρων συγκροτεῖται πλειόνων ἢ ἐλαττόνων· ἐκείνως μὲν τὰς ἐν αὐτῷ τῶν μονάδων τάξεις διοριζόμεθα, ἰσαρίθμους ἐν αὐτῷ ὑποδιαστέλλοντες δεξιόθεν πρὸς τὰ λαιὰ χαρακτῆρας, τοῖς ἐν τῷ παρονομαστῇ μηδενικοῖς· οὕτω δὲ, λαιόθεν πρὸς δεξιὰν τὸν ἀριθμητὴν μηδενικοῖς, τοῖς τοῦ παρονομαστοῦ ἰσαρίθμοις ὁλοσχεροῦμεν· οἷον $\frac{86504}{1000} = 86,504$· καὶ $\frac{56}{100} = 0,56$· καὶ $\frac{4}{10000} = 0,0004$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἔσται τοίνυν ἐπὶ τοῦ ἑφεξῆς Διαγράμματος·

6, ἓξ ὁλοσχερῆ
6,1 — — — καὶ 1 δεκατημόριον
6,01 — — — 1 ἑκατοστημόριον
3,001 — — — 1 χιλιοστημόριον
6,0001 — — — 1 μυριοστημόριον

καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοιοτρόπως προβαινόντων, ταυτὸ κρατείθω λεγόμενον. Ὡσαύτως ἔσται καὶ 0,2 μηδὲν ὁλοσχερὲς σὺν δυσὶ δεκατημορίοις (§. 894.)· 0,02 ὁλοσχερὲς μηδὲν σὺν δυσὶ ἑκατοστημορίοις· κἂν τοῖς λοιποῖς ὡσαύτως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 896. Ὁποιῳοῦν τοίνυν κλάσματι δεκαδικῷ πρὸς

δεξιὰν ἓν, ἢ δύω, ἢ τρία κτλ., τῶν μηδενικῶν προστεθῆναι ἔχουσι τῆς αὐτῆς, ἢ καὶ πρότερον, τοῦ κλάσματος τηρουμένης δυνάμεως· οὕτω γὰρ καὶ τῷ παρονομαστῇ τοσαῦτα προστίθενται (§. 893.), ἑπομένως τε ὅ, τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς διὰ τῶν αὐτῶν πεπολλαπλασίασταί τε καὶ διῄρηται (§. 168.)· οἷον $5,32 = 5,32000$· ὡσαύτως $0,24 = 0,240 = 0,2400 = 0,24000$. ἔστι γὰρ $0,240 = \frac{240}{1000}$, καὶ $0,2400 = \frac{2400}{10000}$ (§. 895.)· εἰσὶ δὲ ταῦτα ἴσα τῷ $\frac{24}{100} = 0,24$. Ὥστε ἐν γένει, τοῦ τῶν ἁπλῶν μονάδων τόπου κατὰ χώραν μένοντος, ὁ δεκαδικῶς καταγεγραμμένος ἀριθμὸς ὅσους ἂν ἑκατέρωθεν προσκειμένους σχοίη μηδενικοὺς χαρακτῆρας, οὐδεμίαν τὸ παράπαν τροπὴν ὑποστήσεται. Οὐκοῦν ὁ ἀριθμὸς 5,32, κἂν οὕτω γράφοιτο 005,32, κἂν οὕτω 005,320, κἂν ὡς ἀνωτέρω, κἂν ποικιλοτρόπως ἄλλως, ἀεὶ ὁ αὐτὸς ἔσται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐπεὶ οὖν ὁ μετὰ τὸ γραμμίδιον πρῶτος χαρακτὴρ ἐν τῷ δεκαδικῷ κλάσματι, τὰ τῶν δεκάδων ἀείποτ' ὑποδηλοῖ μόρια, ὁ δέ τοι δεύτερος τὰ τῶν ἑκατοστύων, ὡς καὶ ὁ τρίτος τὰ χιλιοστὰ, καὶ ἑφεξῆς οὕτω (§. 893.)· ἐὰν κλάσμα οἱονδηποτοῦν ὁμοιογενὲς ὡς 0,352 ἰδίᾳ οὑτωσὶ γραφόμενον $\frac{0 + 300}{1000} + \frac{50}{1000} + \frac{2}{1000}$ ἐκτεθῇ, τὰ τὸν ἔσχατον χαρακτῆρα δεξιόθεν προηγούμενα κλάσματα πρὸς ἐλαχίστους ἀναγόμενα ὅρους ὡς ἑφεξῆς μεταρρυθμισθήσονται $0 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{2}{1000}$· ὃ δὴ καὶ ἐπὶ πολλῶν ἄλλων προσφυῶς εἰρήσθω ἐφαρμοζόμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 897. Ἐντεῦθεν τοίνυν δηλοῦται τὴν τῶν δεκαδικῶν χαρακτήρων δύναμιν ἀπὸ τοῦ τέλους ἐπαναστρεφομένων, ἐν δεκαπλασίονι λόγῳ αὔξειν. ὡς κἀν τοῖς ὁλοσχερέσι τῶν ἀριθμῶν (§. 22.)· πλὴν ὅτι κἀκείνοις, ὥσπερ κἀν τούτοις, μηδενικῷ πληρωτέον τὸ μέρος, καθ' ὃ χαρακτήρ τις ἐξέλιπεν ἔμμεσος· οἷον, $2 + \frac{3}{10} + \frac{1}{1000} + \frac{4}{100000} = 2,30104$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 898. Διττῶς ἄρα, κλάσμα οἱονδηποτοῦν δεκαδικὸν ἐκφέρεσθαι ἔχει· ἢ γὰρ πρῶτον, οἱ αὐτοῦ χαρακτῆρες ἅπαντες, τοῖς τοῦ ἐσχάτου παρονομαστοῦ συνάμα ἀπαγγέλονται· ἢ δεύτερον, ἕκαστος χαρακτὴρ σὺν τῷ ἰδίῳ παρονομαστῇ χωρίς· οἷον τὸ ἀνωτέρω κλάσμα 2,30104, ἢ δηλώσει 2 ὁλοσχερῆ, καὶ 30104 μονάδος δεκαμυριοστημόρια· ἢ 2 ὁλοσχερῆ, 3 δεκατημόρια, οὐδὲν ἑκατοστημόριον, ἓν χιλιοστημόριον, οὐδὲν μυριοστημόριον, καὶ 4 δεκαμυριοστημόρια.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐπὶ τῶν ἀτελῶν διαιρέσεων, καὶ τῆς παραπλησίας τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς, ὅσῳπερ οἱ διαιρούμενοι, ἢ ἀφ' ὧν αἱ ῥίζαι ἐξάγονται ἀριθμοὶ εἰσὶν ἥττονες, τοσούτῳ μείζονος δυνάμεως τὰ οὑτωσὶ ἐναπολειπόμενα καθεστήκασι μόρια, ἀναλόγως τε καὶ τὸ ἐμφιλοχωροῦν διάπτωμα τοσούτῳ μεῖζον καὶ προφανὲς ἐκλαμβάνεται, ἡλίκον καὶ ἀδεῶς ὀλιγωρεῖσθαι μὴ ἔχειν· οἷον ἔστω ἀριθμὸς ὁ 5, ὃν χρὴ διελεῖν διὰ 2, ἤτοι $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$, ὃ δὴ κλάσμα

ἄλλως παροφθῆναι οὐκ ἂν ἔχοι. ὅτι μὴ μετὰ καταφανοῦς τοῦ διαπτώματος· πρὸς γὰρ τὸν ἐλάσσονα τουτὶ παραβαλλόμενον ἀριθμὸν 5, καὶ μάλα πολλοστόν τι λογίζεται μόριον· ἀλλ' οὖν ἐὰν ὁ διαιρούμενος ἀριθμὸς τῶν μειζόνων τύχῃ ὡς 501:2, τηνικαῦτα τὸ οὕτως ἐκ τῆς διαιρέσεως ὑπόλοιπον $\frac{501}{2} = 250 + \frac{1}{2}$ ἥμισυ, πρὸς τὸν οὕτω μείζονα παρεξεταζόμενον ἀριθμὸν, ἄνευ προφανοῦς τινος ἐλλείμματος παροφθήσεται· ὃ δὴ καὶ περὶ τῆς τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς κρατήσει λεγόμενον. Ἵν' οὖν Γεωμετρῶν παῖδες τὸ οὑτωσὶ προκύπτον ὑπόλοιπον, ἄνευ παρεμπίπτοντος ἀτόπου παρορᾷν ἔχωσι, τὸν τῶν Δεκαδικῶν κλασμάτων ὑπολογισμὸν ἐπινενοήκασι· ταύτητοι καὶ τὰ τοιαῦτα μετὰ τὴν διαίρεσιν ὑπολειπόμενα τῶν κλασμάτων, πρὸς ἕτερα μείζω μὲν τὸν ἀριθμὸν, ἐλάσσω δὲ τὴν δύναμιν μεταγαγεῖν αὐτοῖς ἔδοξε, διαιροῦσι μὲν αὐτὰ διά τινος προσφυῶς ἔχοντος ἀριθμοῦ, οἷοι εἰσὶν οἱ δεκαδικοὶ 10, 100, 1000, 10000, κτλ. διὰ τοῦ αὐτοῦ δὲ καὶ πολλαπλασιάζουσι, πρὸς τὸ τῆς δυνάμεως ἀπαράτρεπτον (§. 168.). Οὕτω τοίνυν τὰ τῶν κλασμάτων δεκαδικὰ τῷ πηλίκῳ (§. 158.) ἐμπαρεισάγοντες, τὸ δι' ἐπανειλημμένης ἀφαιρέσεως ὑπόλοιπον παρορᾷν ἐσχάτως εἰώθασιν, ὡς οὐ πάνυ πολλοῦ ἄξιον· τὸ γὰρ ἀνωτέρω κλάσμα $\frac{1}{2}$, οὗ τὸ λοιπὸν ἐκεῖνο 1 ἀριθμητὴς, ὡς μὴ ἐπὶ μονάδα ὁλοσχερῆ, ἀλλ' ἐπὶ ὁλοσχεροῦς ἧττω (§. 412.) ἐπαναγόμενον, τῷ μορίῳ 2 οὐκ εὐσύνοπτον· ὡς δ' ἂν τοῦτο ἀξιολόγου τινος παρατροπῆς δίχα γίγνοιτο, προάγουσι τὴν διαίρεσιν μηδενικὰ σημεῖα πρὸς τῷ τέλει τῷ διαιρετέῳ (§. 158.)

προσάπτοντες, τουτέστι διὰ τῶν 10, 100, 1000, κτλ. πολλαπλασιάζοντες, ὧν ὅσῳπερ τὸ πλῆθος μεῖζον, τοσούτῳ ἐπὶ τοῦ πηλίκου ἧττον ἔσται τὸ ἔλλειμα (§. 344. 356.). Ὡσαύτως εἰ δέοι τοὺς ἀριθμοὺς 3, 25, 48, πρὸς μείζονας μετασχηματίσαι, τούτων διὰ 10 πολλαπλασιαζομένων τε καὶ διαιρουμένων ἔσται $\frac{30}{10}$, $\frac{250}{10}$, $\frac{480}{10}$ ἤτοι 0,3· 0,25· 0,48 (§. 895.)· ὁμοίως καὶ διὰ 100, 1000, κτλ. Παραπλησίῳ δὲ τῷ τρόπῳ κἀπὶ τῶν δυναμικῶν δείκνυται, ὧν ὁ διαιρέτης ἐκ τῶν 2, ἢ 5, ἢ ἐξ ἀμφοῖν συνέστηκεν· οἷον $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$, $\frac{1}{8} = \frac{125}{1000}$, κτλ. καὶ μὴν καὶ $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$, $\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$ κτλ. Ὁ δὲ τῶν Δεκαδικῶν πρῶτος εἰσηγητὴς Ἰωάννης ὑπῆρξεν ὁ Ῥεγιομοντάνος, πρὸς εὐχερεστέραν τῶν Λογαριθμικῶν Πινάκων ἐντεῦθεν κατασκευήν. Διειλήφασι δὲ περὶ τούτων ὅ, τε περικλεὴς Βαλλήσιος ἐν τῇ αὑτοῦ Ἀλγέβρᾳ, Εὔλῆρος, Βερνούλλιος ἐν τοῖς Βερολινικοῖς Ὑπομνήμασι (α) καὶ Ῥοβερτσόνιος ἐν ταῖς Φιλοσοφικαῖς Διαλήψεσιν (β).

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 899. Κλάσμα δεκαδικὸν Ἀκριβές ἐστι, τὸ τὸν ἀληθῆ παρέχον λόγον τοῦ, ὅπερ ἐμφαίνει μέρους πρὸς τὸ ὅλον, οἷον δὴ τὸ 0,8 $= \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$· ἑρμηνεύει γὰρ τὸν τοῦ μέρους 4 πρὸς τὸ ὅλον 5 λόγον τὸν ἀληθῆ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 900. Κλάσμα δεκαδικὸν Προσεχὲς, ἢ Προσεγγίζων ἐστὶ, τὸ τὸν λόγον τοῦ, ὅπερ δείκνυσι μέρους πρὸς τὸ ὅλον, ὡς ἔγγιστα ἀληθῆ παρέχον.

(α) Memoires de Berlin 1771.

(β) Robertson on the theory of circulating Decimal Fractions. Philosophical Transactions 1768.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τουτέστιν ἢ ἐλάττονα ἐμφαίνει τοῦ ἀληθοῦς ἢ μείζονα, τῆς ἐλλείψεως μέντοι γε ἢ τῆς ὑπεροχῆς ὑπὸ τὴν μονάδα τὴν τῷ ἐσχάτῳ χαρακτῆρι ἀνήκουσαν ὑπαρχούσης· οἷον $\frac{3}{7} > 0,42857$ καὶ $< 0,42858$· τὸ ἄρα προσεχὲς κλάσμα $\frac{42857}{100000}$, τὸν ὡς ἔγγιστα ἀληθῆ ἑρμηνεύει λόγον, τῆς ἐλλείψεως ἐλάττονος ὑπαρχούσης ἢ $\frac{1}{100000}$· καὶ γὰρ $\frac{3}{7} > \frac{42857}{100000}$· εἰδ' οὖν μονὰς τῷ ἐσχάτῳ συναφθῇ χαρακτῆρι γενήσεται $\frac{42858}{100000}$, ἑπομένως $\frac{3}{7}$ μονάδι ἔλαττον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 901. Ὁμοταγεῖς τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων Χαρακτῆρες, ἤτοι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ τε καὶ τάξεως ἀκούουσιν, ὧν παρονομασταὶ εἰσὶν οἱ αὐτοί· οἷον 0,795 καὶ 0,865, οἱ 9 καὶ 6 χαρακτῆρες τῆς αὐτῆς εἰσὶ τάξεως ἐν ἑκατέροις γὰρ ὁ αὐτὸς ἀντιστοιχεῖ παρονομαστὴς 100· ἤτοι $\frac{795}{1000} = \frac{7}{10} + \frac{9}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{865}{1000}$.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 902. Τὰ τῶν δεκαδικῶν ἐν τῇ Πρακτικῇ Γεωμετρίᾳ ἐκ περιουσίας ἐν χρήσει σύμβολα, ἐκκείσθωσαν τὰ ἐφεξῆς °) ′) ″) ‴), οἷον $5^{\circ}\ 8'\ 8''\ 3'''$· ἐν οἷς τὸ μὲν μηδενικὸν 0 μονάδα σημεῖοῖ· ἔστι καὶ γὰρ $a^{0} = 1$ (§. 239.)· τὸ δὲ ′) τὴν τοῦ κλάσματος ἐμφαίνει δύναμιν, ὡς $\frac{1}{10}$, ἢ $\frac{1}{12}$, ἢ ὁποιονοῦν ἄλλό τι, δι' οὗ οἱ οὐτωσὶ ἐνδεικνύμενοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιαστέοι τυγχάνουσιν· ὡσαύτως καὶ τὰ λοιπά.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἡ περὶ τῶν Δεκαδικῶν κλασμάτων Θεωρία, ἄλλοις περὶ Γεωμετρικῆς Ψηφηφορίας ἐκφέρεται· ἀμφότερα δέ γε εἰκότως. Ἐπεὶ γὰρ τοῖς τῶν Γεωμετρῶν παισὶν ἡ τοιαύτη τῆς τῶν Δεκαδικῶν κλασμάτων χρήσεως ἐγένετο χρεία, διὰ τοῦτο καὶ ἡ πραγματεία περὶ ταύτης οὑτωσὶ ἤκουσε. Τοῖς γὰρ Γεωμέτραις περὶ τὴν τῶν μηκέων, ἐπιφανειῶν τε καὶ τῶν στερεῶν αὐτῶν σωμάτων ἐνασχολουμένοις διαμέτρησιν καὶ διανομὴν ῥάβδος τις ἐφεύρηται, ὃ καὶ κοινὸν παρ' αὐτοῖς καθέστηκε μέτρον, εἰς ἴσα ἀλλήλοις δέκα μέρη διαιρουμένη, ἃ καὶ πρῶτα λεπτὰ παρ' αὐτοῖς καὶ πόδες προσαγορεύονται, καὶ διὰ τοῦτο τὴν αὐτὴν ῥάβδον Δεκάποδα, καὶ Δεκαδικὸν ἀριθμὸν, καὶ Γεωμετρικὴν ψῆφον παρονομάζουσιν. Ὑποδιαιρεῖται δὲ ἕκαστον τῶν δεκαδικῶν αὐτῆς τούτων μερῶν αὖθις εἰς δέκα, τρίτα καλούμενα· καὶ τούτων ἕκαστον εἰς δέκα, τέσσαρα καλούμενα· καὶ ἑξῆς ὡσαύτως ἄχρι τῶν ἕκτων, πρὸς τὴν ἐν ταῖς πράξεσιν ἀκρίβειαν αὐτοῖς ἐπαρκούντων. Ἐκ τοίνυν τῆς διαιρέσεως ταύτης τῆς Δεκάποδος ῥάβδου ἕπεται ἐξ ἀνάγκης, τῶν μὲν πρώτων ἕκαστον, δεκαδικὸν εἶναι μέρος· τῶν δὲ δευτέρων ἕκαστον, ἑκατοστόν· ὥσπερ δὴ χιλιοστὸν, ἕκαστον τῶν τρίτων (§. 898. Σχόλ.)· καὶ μυριοστὸν, ἕκαστον τῶν τετάρτων· καὶ δεκάκις μυριοστὸν, ἕκαστον τῶν πέμπτων· καὶ ἑκατοντάκις μυριοστὸν, ἕκαστον τῶν ἕκτων,

ἤτοι τὸ κατὰ τὴν τῶν Λατίνων φωνὴν Μιλλιονιστόν (§. 897. Σχόλ.)· ὧν ἕκαστον τὸ μὲν δεκαδικὸν, ποῦς καλεῖται, καὶ πρῶτον λεπτόν· τὸ δ' ἑκατοστὸν, λεπτὸν δεύτερον· ὥσπερ τὸ χιλιοστὸν, λεπτὸν τρίτον· καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως. Γνωρίζεται δ' ἕκαστον τούτων, ὁ μὲν δεκάπους, ἤτοι τὸ ὁλοσχερὲς, ἢ ἡ μονὰς, ἀπὸ τοῦ ἐπικειμένου σημείου $^{\circ}$)· ὁ δὲ ποῦς, ἤτοι τὸ πρῶτον λεπτὸν, ἀπὸ τοῦ ἐπικειμένου ἑνὸς γραμμιδίου $'$)· ὥσπερ τὸ δεύτερον, ἀπὸ τῶν δυοῖν $''$)· καὶ ἑπομένως (§. 902.) οὕτως, ὡς κἀπὶ τοῦ παρόντος στίχου 4°, $6'$, $8''$, $5'''$, $6''''$, $4'''''$, $7''''''$. (αὐτ.). Κἀντεῦθεν καὶ τὴν τούτων, ἔτι δὲ καὶ τῶν παραπλησίων ὑποδιαίρεσιν, καὶ περαιτέρω ἐκράτησε συνεχίζεσθαι, διὰ τὸ τῶν πράξεων εὐμαρέστερον. Ἀλλὰ δὴ καὶ Δωδεκάπους ἡμῖν ἑτέρα ἀναφύεται κατὰ Πολιτικὸν μέτρον· ὥστε ἐπεὶ αὕτη εἰς 12 οὕτω διήρηται μέρη, διαιρεθήσεται αὖθις καὶ ὁ ποῦς εἰς μέρη 12 δακτύλους λεγόμενα, ὁ δὲ δάκτυλος εἰς 12 γραμμίδια, τὸ δὲ γραμμίδιον εἰς 12 μόρια, ἤτοι στίγματα. Αὕτη δὲ ἡ διαίρεσις, παρὰ τὰς Γεωμετρικὰς πράξεις, ἐν τῷ κοινῷ Βίῳ καὶ μάλα ἐν χρήσει καθέστηκε. Κατὰ δὲ ταῦτα·

Ὡσαύτως καὶ ἡ τοῦ Κύκλου διαίρεσις εἰς 360 μέρη ἴσα ἀλλήλοις γίνεται, ἅπερ βαθμοὺς ἢ μοίρας καλεῖν εἰώθασιν· ὁ δέ τοι βαθμὸς αὖθις εἰς λεπτὰ 60 προσυποδιαιρεῖται· καὶ τὸ μὲν τούτων πρῶτον, εἰς ἑξηκοστὰ δεύτερα· τὸ δὲ δεύτερον, εἰς τρίτα 60, καὶ ἐφεξῆς οὕτω. Οἱ δέγε τῶν Γάλλων Νεώτεροι Μαθηματικοὶ τὴν τοῦ Κύκλου περιφέρειαν εἰς 400 διελόντες μοίρας, τὸ μὲν τοῦ Τεταρτημορίου ἑκατοστημόριον, Δεκαδικὸν βαθμὸν ἢ μοῖραν κεκλήκασι, τὸ δὲ τοῦ τοιούτου βαθμοῦ ἑκατοστημόριον Δεκαδικὸν λεπτὸν, ὥσπερ καὶ Δεκαδικὸν δεύτερον, τὸ τοῦ πρώτου ἑκατοστημόριον (α). Κρεῖττον δ' ἀλλ' οὖν, καὶ μᾶλλον προσδιωρισμένη ἡ τοῦ ἑκατοστοῦ ἀντὶ τοῦ δεκαδικοῦ ὑπῆρξεν ἂν κλῆσις.

Ὅ, τε χρόνος διαιρεῖται εἰς ἡμέρας, ἡ δὲ ἡμέρα εἰς 24 μέρη ἴσα, ἤτοι ὥρας· καὶ ἡ μὲν ὥρα εἰς λεπτὰ 60, ἕκαστον δὲ τούτων εἰς λεπτὰ δεύτερα 60, κτλ.

Αὖθις τε τὸ Ἀττικὸν τάλαντον ἐστὶ μνῶν 60, ἡ δὲ μνᾶ δραχμῶν 100, ἡδὲ δραχμὴ ὀβολῶν 6, ὁ δὲ ὀβολὸς κερατίων 3.

Ἔτι τε ἐπὶ μὲν τῶν ξηρῶν ὁ μέδιμνος 6 ἐστὶν ἑκτέων, ὁ δ' ἑκτεὺς 2 ἡμιέκτων, τὸ δ' ἡμίεκτον 4 χοινίκιων, ὁ δὲ χοῖνιξ 2 ξεστῶν, ὁ δὲ ξέστης 2 κοτύλων, ἡδὲ κοτύλη 4 ὀξυβάφων, τὸ δ' ὀξύβαφον $1\frac{1}{2}$ κυάθου, ὁ δὲ κύαθος 10 κοχλιαρίων.

Ἐπὶ δὲ τῶν ὑγρῶν, ὁ μετρητὴς χοῶν ἐστὶ 12, ὁ δὲ χοῦς ξεστῶν 6, ὁ δὲ ξέστης κοτύλων 2 (ἦν γὰρ ἡ κοτύλη καὶ ὑγρῶν καὶ ξηρῶν μέτρον, ὡς πολλαχόθεν ἡ Κωμῳδία ὑποδηλοῖ), ἡ δὲ κοτύλη τετάρτων 2, τὸ δὲ τέταρτον ὀξυβάφων 2, ὁ δ' ὀξύβαφος $1\frac{1}{2}$ κυάθου, ὁ δὲ κύαθος 2 κόγχων, ἡ δὲ κόγχη 2 μέστρων, τὸ δὲ μέστρον $1\frac{1}{2}$ χήμων, ἡδὲ χήμη 2 κοχλιαρίων.

Κἀπὶ τῶν διαστημάτων· τὸ μὲν μήλιον 2 ἱππικῶν, τὸ δ' ἱππικὸν 4 σταδίων, τὸ δὲ στάδιον 6 πλέθρων, τὸ δὲ πλέθρον $16\frac{2}{3}$ ὀργυιῶν, ἡ δ' ὀργυιὰ 4 πήχεων, ὁ δὲ πῆχυς $1\frac{1}{2}$ ποδὸς, ὁ δὲ ποῦς 4 παλαιστῶν, ἡ δὲ παλαιστὴ τεσσάρων δακτύλων· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

(α) Tables Trigonométriques Décimales par Borda et Delambre, pag. 18.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 903. Ἐκ τούτων τοίνυν καθόλου συνάγεται· πρῶτον μὲν, τὰ οἱουδήποτε μέτρου μέρη διὰ τοῦ αὐτοῦ ἐκδηλούμενα ὀνόματος, κλάσματα εἶναι τοῦ αὐτοῦ παρονομαστοῦ· δεύτερον δὲ, τὸν παρονομαστὴν τοῦτον ἐξισοῦσθαι τῷ τῶν ἴσων μερῶν ἀριθμῷ, ἐφ' ἃ ἡ ποσότης, εἴτ' οὖν τὸ μέτρον τὸ προσεχῶς ἀνώτερον ὑποδιαιρεῖται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οἷον ἐπὶ παραδείγματος, τὰ μὲν σταθμὰ λίτραις διακρίνεται, ἡ δὲ λίτρα ἐξ οὐγγιῶν συνίσταται 12, ἥτις τε περιεκτικὴ ἐστὶ δραχμῶν 12, ἡ δὲ δραχμὴ κόκκων 72. Πᾶσαι τοίνυν αἱ οὐγγίαι κλάσματά εἰσιν, ὧν ὁ παρονομαστὴς ἀείποτ' ἐστὶ 12· ὁδὲ τοιοῦτος παρονομαστὴς ἐξισοῦται τοῖς ἐν τῇ λίτρᾳ μέρεσιν, ἥτις δὴ ποσότης προσεχῶς ἀνωτέρα τυγχάνει τῆς οὐγγίας· Ὡσαύτως οἱ δάκτυλοι κλάσματά εἰσιν, ὧν παρονομαστὴς ὁ 12, καὶ γὰρ ὁ ποῦς μέτρον προσεχῶς τοῦ δακτύλου εἰς 12 ἴσα μέρη ὑποδιαιρεῖται. Κἀν τοῖς λοιποῖς ὁμοιοτρόπως χωρητέον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 904. Τὸ δοθὲν κοινὸν Κλάσμα, πρὸς Δεκαδικὸν μεταγαγεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Τῷ τοῦ δοθέντος κλάσματος ἀριθμητῇ τοσαῦτα τῶν μηδενικῶν ἐν τῷ τέλει προστεθείσθω, ὁπόσα τῶν δεκαδικῶν ἐν τῷ αἰτουμένῳ δίδονται κλάσματι· μετὰ δὲ ταῦτα, ὁ οὕτως αὐξηθεὶς ἀριθμητὴς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ διαιρούμενος, τὸ ζητούμενον ἡμῖν ἀναδώσει δεκαδικὸν κλάσμα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁποιουοῦν μὲν δὴ κοινοῦ κλάσματος δοθέντος τῷ $\frac{\alpha}{\beta}$ ὑποτυπουμένου, τοῦ δὲ ἐν αἰτήσει δεκαδικοῦ τῷ χ, ἔσται $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\chi}{1000\ldots}$ κτλ. κἀντεῦθεν $\beta : \alpha = 1000\ldots : \chi$ (§. 485.), ἄρα $\chi = \frac{\alpha \,.\, 1000\ldots}{\beta}$ (§. 598.)· ὥστε ἐὰν τεθῇ $\alpha = 3$, $\beta = 8$, ὁ δὲ τοῦ κλάσματος παρονομαστὴς ἐν λόγῳ χιλιοστῷ προσδιορισθῇ, ἔσται $\chi = \frac{3000}{8} = 375$, ἄρα $\frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = 0{,}375$· Ὁ δὴ γενέσθαι εἶχεν, εἰ καὶ τῷ ἀριθμητῇ ὁμοιοτρόπως τοσαῦτα ἂν τῶν μηδενικῶν κατὰ βραχὺ προσετέθησαν, ὁπόσα πρὸς τὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ διαίρεσιν ἡ προτεθεῖσα ἀπήτει περίστασις. Ο. Ε. Δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

Α'. $\frac{13}{80} = 0{,}1625$. Β'. $\frac{15}{25} = 0{,}6$.
Γ'. $\frac{7}{18} = 0{,}388$. Δ'. $\frac{23}{150} = 0{,}1533\ldots$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 905. Οἱ πρὸ τὸ τῆς ὑποδιαστολῆς τοίνυν σημεῖον ταττόμενοι χαρακτῆρες τῶν ἁπλῶν παραστατικοὶ μονάδων ἔσονται, ἤτοι τῶν ὁλοσχερῶν, οἱ δὲ μετ' ἐκεῖνο τῶν δεκαδικῶν, οἷον τὸ κλάσμα 4,05 ἔσται =

$4 + \frac{5}{100}$ (§. 895.) καὶ γὰρ $4.05 = \frac{405}{100} = 4 + \frac{5}{100} = 4 + \frac{1}{20}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 906. Ἐπὶ μὲν οὖν τῶν ἀνωτέρω κλασμάτων ῥᾳδίως τὰ κοινὰ πρὸς δεκαδικὰ μετάγεται, ἔνθα τὰ τῆς διαιρέσεως ἄνευ ὑπολοίπου τελεῖται, ἢ καὶ ἔνθα οἱ τοῦ παρονομαστοῦ παράγοντες εἴησαν 2 καὶ 5· ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν, ἡ διαίρεσις ἐπ' ἄπειρον πρόεισιν. Ἔνθεν τοι τὸ τοιοῦτον κλάσμα πρὸς δεκαδικὸν ἀκριβῶς οὐ μεταχθήσεται· ὅσῳ γὰρ μᾶλλον ὁ διαιρῶν πρόεισι, τοσούτῳ ἔγγιον τῆς τοῦ κλάσματος ἀληθοῦς δυνάμεως γίνεται, ὥστε ἐσχάτως τὸ διάπτωμα οὐδὲ μιλλιοστημορίου διοίσει, ἡλίκον καὶ ἀδεῶς παροράσθαι ἔχειν καὶ οὐδὲ λόγου τινὸς ἄξιον κρίνεσθαι· οἷον

Α'. $\frac{1}{3} = \frac{1{,}000000\ldots}{3} = 0{,}333333\ldots$

Β'. $\frac{2}{7} = \frac{2.000000\ldots}{7} = 0{,}2857142\ldots$

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 907. Εἰδ' οὖν κλάσμα ἡμῖν σύμμικτον πρὸς δεκαδικὸν μεταχθησόμενον προκέοιτο, ὡς $23\frac{4}{10}$. Ἐπεὶ $\frac{4}{10} = 0{,}4$ (§. 895.), ἔσται $23\frac{4}{10} = 23{,}4$ (§. 905.)· ὡσαύτως ἔσται καὶ $23\frac{4}{100} = 23{,}04$, καὶ $23\frac{4}{1000} = 23{,}004$, ὥστε μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τοὺς ἐκλαμβανομένους δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, ἰσαρίθμως τοῖς τοῦ παρονομαστοῦ συγκεῖσθαι μηδενικοῖς· καὶ ἐπὶ πολλῶν ἄλλων ὡσαύτως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 908. Ἐὰν δὲ τὸ δοθὲν κλάσμα ᾖ $\frac{1}{4}$, ἔσται τῇ πρὸς δεκαδικὸν μεταγωγὴ $= 0{,}2500000$· ἔστι γὰρ $\frac{1}{4} = 1{,}0000000 : 4 = 0{,}2500000 = 0{,}25 = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$· καὶ $\frac{5}{4} = 1{,}2500000 = 1 + \frac{25}{100} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, καὶ $\frac{1}{5} = 0{,}2$, καὶ $\frac{2}{5} = 0{,}4$. Ἐὰν δὲ ὁ παρονομαστὴς ᾖ 6, ἔσται $\frac{1}{6} = 0{,}166666$ κτλ. $= 0.666666 - 0{,}5$· τουτέστιν ἐπεὶ $0{,}666666 = \frac{2}{3}$, καὶ $0{,}5 = \frac{1}{2}$, ἔσται ἑπομένως $0{,}166666 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Εὑρεθήσεται πόῤῥω καὶ $\frac{2}{6} = 0{,}3333333$ κτλ. $= \frac{1}{3}$, ἔτι δὲ καὶ $\frac{3}{6} = 0{,}5000000 = \frac{1}{2}$· ὥστε καὶ $\frac{5}{6} = 0{,}833333 = 0{,}3333333 + 0{,}5$· τουτέστιν $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$. Τοῦ δ' αὖ παρονομαστοῦ 7 ὄντος, τὰ δεκαδικὰ μᾶλλον συμπεπλεγμένως ἐκκείσονται· ἔστι γὰρ $\frac{1}{7} = 0{,}142857$ κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 909. Ἐὰν δὲ ὁ παρονομαστὴς τύχῃ 8 ἔσται $\frac{1}{8} = 0{,}125$, $\frac{2}{8} = 0{,}250$, $\frac{3}{8} = 0{,}375$, $\frac{4}{8} = 0{,}500$, $\frac{5}{8} = 625$, $\frac{6}{8} = 0{,}750$, $\frac{7}{8} = 0{,}875$ κτλ. Ἐὰν δὲ 9, ἔσται $\frac{1}{9} = 0{,}111$ κτλ. $\frac{2}{9} = 0{,}222 \ldots \frac{3}{9} = 0{,}333 \ldots$ Ἔστι δὲ ὁ παρονομαστὴς 10, ἐκκύψωσι τὰ δεκαδικὰ, ὡς ἐφεξῆς· $\frac{1}{10} = 0{,}100$, $\frac{2}{10} = 0{,}2$, $\frac{3}{10} = 0{,}3$, ὡς καὶ ἐξ αὐτῆς τοὺς τοῦ κλάσματος ἰδιότητος εὔδηλον· ὡσαύτως $\frac{1}{100} = 0{,}01$, $\frac{37}{100} = 0{,}37$, πόῤῥω $\frac{256}{1000} = 0{,}256$, καὶ $\frac{24}{10000} = 0{,}0024$, ὡς προδέδεικται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 910. Κλάσμα Δεκαδικὸν πρὸς κοινὸν δοθέντος παρονομαστοῦ μεταγαγεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Διὰ τοῦ δοθέντος παρονομαστοῦ πολλαπλασιασθήτω, ὁ τοῦ δοθέντος κλάσματος ἀριθμητὴς, καὶ τοὐντεῦθεν γινόμενον διαιρεθήτω ἐπὶ τὸν τοῦ δεκαδικοῦ παρονομαστὴν, τουτέστιν ἀπὸ τοῦ γινομένου τοσοῦτοι πρὸς δεξιὰν χαρακτῆρες διακριθήτωσαν, ὁπόσοι οἱ δεκαδικοὶ τυγχάνουσι· τὸ οὑτωσὶ προκύπτον πηλίκον ἔσται ὁ τοῦ αἰτουμένου κοινοῦ κλάσματος ἀριθμητὴς, οὗτινος ὁ παρονομαστὴς δέδοται. Οἷον εἰ δέοι $0{,}6$ πρὸς κοινὸν μεταγαγεῖν κλάσμα, οὗτινος ὁ παρονομαστὴς δέδοται $= 5$, ἔσται $0{,}6 = \frac{6}{10} \times 5 = \frac{30}{10} = 3$· κἀντεῦθεν $\frac{6}{10} = 0{,}6 = \frac{3}{5}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὑπεμφαινομένου μὲν δὴ ὁποιουοῦν Δεκαδικοῦ κλάσματος τῷ $\frac{\alpha}{\mu} = \frac{\alpha}{10000\ldots}$ τοῦ δὲ, τοῦ αἰτουμένου κλάσματος, δοθέντος παρονομαστοῦ τῷ β, ἔσται ὁ τούτου αἰτούμενος ἀριθμητὴς $= \chi$· κἀντεῦθεν, $\frac{\alpha}{\mu} = \frac{\chi}{\beta}$, ἤτοι $\alpha : \mu = \chi : \beta$ (§. 605.), ἄρα $\alpha \times \beta = \mu \times \chi$ (§. 599.), ἑπομένως $\chi = \frac{\alpha\beta}{\mu} = \frac{\alpha\beta}{10000\ldots}$. Οἷον ἔστωσαν Α'. 75 ἑκατοστὰ ποδὸς, ἤτοι $0^{0}{,}75' = \frac{75}{100}$· ἐπεὶ δὲ εἷς ποὺς 12 ἰσοῦται δακτύλοις ἔσται $\frac{75'}{100} \times 12'' = \frac{900}{100} = 9'$ ἔστωσαν πόῤῥω Β'. 25 ἑκατοστὰ μιᾶς λίτρας, ἢ $0{,}25$ ℔ $\frac{25 ℔}{100}$· ἐπεὶ δὲ μία λίτρα ἐκ 32 ἡμιουγγιῶν (Loth) σύγκειται, ἔσται $\frac{25}{100} \times 32 = \frac{800}{100} = 8$ ἡμιουγγ. Ὡσαύτως Γ'. καὶ 95 ἑκατοστὰ ἑνὸς Καισαρικοῦ ἤτοι $0,95 = \frac{95}{100} \times 60$ ὀβολοῖς (κρεϊτζαρίοις) $= \frac{5700}{100} = 57$· καὶ γὰρ $60 = 1$. Καισ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Εἰ καὶ οὐχὶ πᾶν κλάσμα κοινὸν πρὸς δεκαδικὸν, οὕτως οὐδὲ πᾶν δεκαδικὸν πρὸς κοινὸν ἀπηκριβωμένως μεταφέρεσθαι δύναται· ἡ μέντοι τοῦ ἀνωτέρω Προβλήματος χρῆσις τὰ μάλιστα λυσιτελεῖ, ἡνίκα δεκαδικὰ μέρη Καισαρικῶν πρὸς ὀβολοὺς τοῦ αὐτοῦ εἴδους, ἢ βαθμοῦ μέρη πρὸς λεπτὰ, πρῶτα, ταῦτα δὲ πρὸς δεύτερα· ποδὸς πρὸς δακτύλους, δακτύλων πρὸς γραμμάς· ὥρας πρὸς λεπτὰ πρῶτα, πρῶτα πρὸς δεύτερα, κτλ. μεταγαγεῖν ἡμῖν πρόκειται· ὥστε καὶ τὸν παρονομαστὴν, ἐν μὲν τοῖς Καισαρικοῖς ἐν χρήσει νομίσμασι, βαθμοῖς, λεπτοῖς, ὥραις κτλ. εἶναι 60· ἐν δὲ τοῖς ποσὶ, δακτύλοις, κτλ. εἶναι 12 (§. 902.)· οὕτω·

$0,25$ Καισ. $= \frac{15}{60} = 15$ Καισ. ὀβολοῖς.

$3,21$ Βαθμ. $= 3^{\circ}, 12', 36''$.

$0,348$ ποδ. $= 4'', 2'''$.

$8,204$ ὥρ. $= 8^{\text{ὥρ}}, 12', 14''$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 911. Ἀποδοθήσεται τοίνυν τὸ δεκαδικὸν κλάσμα $0,11111 \ldots$ ἐπ' ἄπειρον προϊὸν ἁπλουστέρως, καὶ τῇ ἐπὶ τοῦ ἐν γένει ἐπὶ τῶν ἀπείρων προϋποτεθέντος τύπου ἐφαρμογῇ (§. 893.)· ἔστι καὶ γὰρ οὕτω $\beta = 1$, $\gamma = 10$, καὶ $\mu = 10$· κἀντεῦθεν $0,11111 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots$ ἑπομένως

ἔσται τὸ ζητούμενον κλάσμα $\kappa = \frac{1.10}{10.9} = \frac{1}{9}$· Εὑρεθήσεται δὲ ὡσαύτως τῷ δεκαδικῷ προσανήκων κλάσματι $0,575757 \ldots$ τὸ κλάσμα $\frac{57}{99} = \frac{19}{33}$· ἔστι καὶ γὰρ ἐν τῇ τοιαύτῃ περιστάσει $\beta = 57$, $\gamma = 100$, καὶ $\mu = 100$. Παραπλησίως καὶ εἰ τὸ πρὸς δεκαδικὸν $0,9999 \ldots$ μεταχθὲν κλάσμα εἰς ἔρευναν προκέοιτο, ἔσται $\beta = 9$, $\gamma = 10$, καὶ $\mu = 10$, ἑπομένως $\kappa = \frac{9.10}{10.9} = 1$ τουτέστι, τὸ πρὸς τοιοῦτον δεκαδικὸν $0,999 \ldots$ μετασχηματιζόμενον κλάσμα ἐντελῶς προσδιορισθῆναι οὐκ ἔχει· κατὰ γὰρ τὰ ῥηθέντα (§. 856.) ἡ μεταξὺ τοῦ τοιούτου ἐπ' ἄπειρον προϊόντος δεκαδικοῦ, καὶ τῆς ὁλοσχεροῦς μονάδος ἐκλαμβανομένη διαφορὰ, προσδιορισθῆναι οὐ δύναται ἡλίκη· ἔστι καὶ γὰρ ἀπειροστή.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 912. *Ἀριθμοὺς οὑστινασοῦν ἐκ Δεκαδικῶν συγκειμένους κλασμάτων προσθεῖναι.*

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπεὶ μὲν δὴ τὰ Δεκαδικὰ κλάσματα, δεξιόθεν πρὸς τὰ λαιὰ τοῖς ὁλοσχερέσιν ὁμοίως προβαίνοντα, ἐν δεκαπλασίονι αὔξουσι λόγῳ (§. 897.)· τῶν ὁμογενῶν μερῶν ὑπαλλήλων ταχθέντων, ἡ τούτων σύναψις ὁμοιοτρόπως τοῖς κοινοῖς ὁλοσχερέσιν ἀριθμοῖς διαπερανθήσεται (§. 85.). Οὕτω γὰρ ἀπὸ τῶν δυνάμει ἐλαχίστων ἀρχῆς γινομένης, ἐν κεφαλαίῳ αἱ μονάδες ἐπαθροισθήτωσαν αἱ ὁμόστιχοι, ἤτοι αἱ ἑκατοντάδες, χιλιάδες, κτλ. ὅσαι δ' ἐξ αὐτῶν δεκάδες συναποτελοῦνται, ἐπὶ τοῦ ἐχομένου ἀμέσως προβιβαζόμεναι στίχου ταῖς ἐκεῖσε συγκαταταχθήτωσαν, τῶν παρὰ τὰς εἰρημένας δεκάδας λοιπῶν μονάδων ὑπὸ τῷ στίχῳ ὡς ὁλοσχερῶν καταγραφομένων· πλὴν ὅτι ἐν τοῖς προσεχέσιν (§. 900.) ὁ λαιόθεν ἐσχάτως ἐντοπιζόμενος χαρακτὴρ ἀμφισβητήσιμός πως ἐστὶ καὶ ἀβέβαιος.

4,56	3,04
12,0018	26,1735
0,739	7,5
17,3008	36,7135
23,07543	312
0,923	25,73
6,0024	0,364
30,00083	338,094

ΔΕΙΞΙΣ.

Εὔδηλον γὰρ κατὰ τὰ δειχθέντα (§. 896.), ὅτι τῶν ὑπὸ τὴν αὐτὴν ὀνομασίαν ἐκφερομένων Δεκαδικῶν κλασμάτων, καὶ ὡς ὁλοσχερῶν θεωρουμένων, προστίθενται μὲν ἀλλήλοις ἐπαθροιζόμενοι οἱ ἀριθμηταί, τηροῦνται δὲ οἱ τούτων παρονομασταί (§. 181.). Ἐπεὶ δὲ τὸ ἐν τοῖς ἀριθμηταῖς κενὸν τῶν τόπων, ἐκείνων πρὸς τὸ αὐτὸ ὄνομα ἀναγομένων, μηδενικοῖς συμπληροῦται (§. 897.)· ὃ δὴ κἀνταῦθα τελεῖται. Ἄρα ἀποδοθήσεται καὶ τὸ κεφάλαιον ἀκριβές, ἐὰν οἱ ὑπαλλήλως στιχηδὸν τεταγμένοι ἰσοδυναμοῦντες χαρακτῆρες, ἐν ἑνὶ προσαθροισθῶσιν. Ο. Ε. Δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Ἡνίοχός τις ἐκόμιζε δύω κυβικοὺς πόδας ξύλου

δρυΐνου, 3 ὡσαύτως ξύλου Φηγίνου, καὶ 5 χάλικος· πόσας οὖν λίτρας Βινδοβονικὰς ἐξ ὑποθέσεως ἐκόμισε;

Τιθεμένων μὲν δὴ τῶν δυοῖν κυβικῶν ποδῶν ἐν στάθμῃ Βινδοβονικῇ ἴσων λίτραις 104 καὶ $\frac{977}{1000}$, τῶν δὲ 3 κυβ. ποδ. τοῦ Φηγίνου ξύλου $=$ 144 $\frac{753}{1000}$, καὶ τῶν 5 κυβ. ποδ. τοῦ χαλίκου $=$ 632 $\frac{800}{1000}$, ἔσται,

104,977
144,753
632,800
882,530.

ἐκόμισε τοίνυν ἐν στάθμῃ Βινδοβονικῇ 882 λίτρας καὶ 530 ἑκατοστὰ μιᾶς λίτρας.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 913. Εἰ οὖν κλάσμα κοινὸν δεκαδικῷ προστιθέναι δέοι, ἐκείνου πρὸς δεκαδικὸν μετενεχθέντος (§. 904.) τὰ τῆς συνάψεως ὡς ἀνωτέρω τελείσθω· οἷον·

$$3,465 + \tfrac{3}{4} = 3,465 + 0,75 = 4,215.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 914. Ἀριθμῶν Δεκαδικῶς κλασματωδῶν προτεθέντων, τὸν ἐλάττω τοῦ μείζονος ἀφελεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπειδὴ ἡ ἀφαίρεσις εὕρεσίς ἐστιν ὑπεροχῆς ὁλοσχερῶν πρὸς ὁλοσχερῆ, ἡ πρᾶξις πάντως κατὰ τοὺς ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὺς γενέσθω (§. 95.), τῶν τοῦ ἀφαιρετέου χαρακτήρων τοῖς τοῦ μειωτέου ὁμογενέσιν ὑπογραφομένων, ὡς τῶν μονάδων τὰς ἰσοδυνάμους ὁμοστιχεῖν· οἷον τὰ μὲν ὁλοσχερῆ τοῖς ὁλοσχερέσι, τὰ δὲ δεκαδικὰ τοῖς δεκαδικοῖς, τὰ ἑκατοστὰ τοῖς ἑκατοστοῖς, κτλ. Εἶτα ἀπὸ τῶν δυνάμει ἐλαχίστων ἀρχομένοις κἀπὶ τῶν μειζοδυνάμων χωροῦσιν ἀφαιρείσθω ὁ τῶν μονάδων ἑκαστησοῦν τάξεως ἀριθμὸς, ὁ ἐπὶ τοῦ ἥττονος, ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ μείζονι, καὶ τὸ λοιπὸν σημειούσθω ὑπὸ στίχον τὸν αὐτόν· ὁπηνίκα δηλαδὴ πλείους αἱ ἰσοδύναμοι μονάδες εἰσὶν ἐπὶ τοῦ μειωτέου, ἢ ἐπὶ τοῦ ἀφαιρετέου. Ἐὰν δ' ὦσιν ἐλάσσονες, μονὰς μία ἀπὸ τοῦ ἐγγὺς ἑπομένου χαρακτῆρος εἰς δεκάδα ἐκλαμβανέσθω· ὁ δὲ τοῦ μείζονος τῶν ἀριθμῶν χαρακτὴρ, ἀφ' οὗ ἡ ληφθεῖσα εἰς δέκα ἀναλέλυται μονάδας τῆς ἐγγὺς καταδεεστέρας τάξεως, νοείσθω ἤδη μονάδι ἀπομειωθεὶς, πρὸς ἀπάτης οἱασοῦν ἐκφυγὴν, τῆς διαφορᾶς ἀείποτ', ὡς καὶ πρότερον, ὑποσημειουμένης. οἷον·

$$\begin{array}{r} 28,438 \\ \underline{7,642} \\ 18,796 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4,209 \\ \underline{1,12} \\ 3,089 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12,3257 \\ \underline{4,56} \\ 7,7657 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60,57 \\ \underline{0,0856} \\ 59,5844 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ \underline{2,346} \\ 10,654 \end{array}$$

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ ἀνωτέρω (§. 912.), τῇ ὀνομαποθεσίᾳ προσέχουσι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Τιθεμένης χρυσίου καθαρωτάτου τῆς εἰδικῆς βαρύ-

τητος = 19,640, σιδήρου δὲ χαλκευθέντος = 7, 434· Ζητεῖται ἡ τῆς μεταξὺ ἀμφοῖν εἰδικῆς βαρύτητος ὑπεροχή. ἐνθεντοι·

$$\begin{array}{r} 19,640 \\ \underline{7,434} \\ 12,206. \end{array}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 915. Ἀφαιρεθήσεται ἄρα καὶ κοινὸν κλάσμα ἀπὸ Δεκαδικοῦ, πρὸς ἐκεῖνο πρότερον μεταχθέν. οἷον· $\frac{17}{6} - 1,34 = 2,8333\ldots - 1,34 = 1,4933\ldots$

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 916. Ἐὰν δ' ὁ μειωτέος ἐλάττω τοῦ ἀφαιρετέου τύχῃ, ἡ τῶν χαρακτήρων ἔλλειψις τῇ τῶν μηδενικῶν προσθέσει ἀντιπληρούσθω (§. 896.)· ὃ δὴ ταυτόν ἐστι, τῇ τῆς μονάδος ἀπὸ τοῦ ἐγγὺς χαρακτῆρος προσληφθείσης εἰς δέκα μονάδας τῆς ἐγγὺς ὑποδεεστέρας τάξεως ἀναλύσει, ὡς εἴρηται (§. 914.)· οἷον

$$\left.\begin{array}{r} 16,7 \\ \underline{13,567} \\ 3,133 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} 16,700 \\ \underline{13,567} \\ 3,133 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} 62,7 \\ \underline{8,6253} \\ 54,0747 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} 62,7000 \\ \underline{8,6253} \\ 54,0747. \end{array}\right.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 917. Ἀριθμὸν ἐκ κλασμάτων Δεκαδικῶν τάξεως οἱασδηποτοῦν συγκείμενον, ἐπ' ἀριθμὸν Δεκαδικῶς ἐκκείμενον πολλαπλασιάσαι.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐν τῷ τῶν δεκαδικῶν πολλαπλασιασμῷ, ἅπαντα ὡς κἀπὶ τῶν ὁλοσχερῶν τελείσθω (§. 115)· πλὴν ὅτι ἐν τῷ οὕτω προκύπτοντι ὁλικῷ γινομένῳ, τοσοῦτοι πρὸς δεξιὰν χαρακτῆρες γραμμιδίῳ ὑποδιαστελλόμενοι ἀποληφθήτωσαν, ὅσα τῶν δεκαδικῶν ἐν ἑκατέροις τοῖς παράγουσιν ὁμοῦ ληφθεῖσιν ἐμπεριείληπται· κἀντεῦθεν ἐὰν τῷ ἑτέρῳ τῶν παραγόντων, ἢ ἑκατέρῳ μηδενικὰ σημεῖα προσῇ, ἀεὶ τοσαῦτα τῷ παραγομένῳ προσαπτέον, ὅσα δηλαδὴ ἐκείνοις ἀμφοῖν ἅμα προσαριθμεῖται·

2,342
3,056
―――――
7,025552

0,337
0,023
―――――
1011
674
―――――
0,007751

0,0000421
0,3872
―――――
842
2947
3368
1263
―――――
0,00001630112

0,048
0,004
―――――
0,000192

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὰν μὲν δὴ τοῦ τοιούτου εἴδους κλάσματα ἐπ' ἀλλήλων πολλαπλασιάζηται, καὶ τοὺς τούτων παρονομαστὰς ὡσαύτως ἀλλήλοις ἐπάγεσθαι, ἐπέναγκες (§. 183.)· ἐφ' ὧν δὴ καὶ τὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ περανθήσεται,

τῇ τῶν μηδενικῶν, ὧν ἀμφότεροι τῶν παραγόντων μετέχουσιν, ἐπεισάξει. Οἱ γὰρ παρονομασταὶ οὐδὲν ἄλλο, ὅτι μὴ μονάδες εἰσὶ μηδενικοῖς συνεζευγμέναι (§. 892.)· ἔνθεντοι ὁ τοῦ γινομένου παρονομαστὴς τοσούτων μετὰ τὴν μονάδα μηδενικῶν περιεκτικὸς ἔσται, ὅσα ὁ τῶν παραγόντων ἀμφοῖν παρονομαστὴς προσεπαριθμεῖ. Ὁπόσα τοίνυν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ἐπ' ἀμφοῖν ἅμα ἐκείνοις παρῇ τοῖς παράγουσι, τοσοῦτοι χαρακτῆρες ἐπὶ τοῦ παραγομένου ὑποδιαστελλόμενοι τῶν τοιῶνδε κλασμάτων δηλωτικοὶ ἔσονται. Ο. Ε. Δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Τῆς τοῦ ὕδατος εἰδικῆς βαρύτητος πρὸς τὴν τοῦ χρυσοῦ ἐν λόγῳ τῶν 1 : 19,620 ἐκλαμβανομένης, ἐὰν μὲν ὁ εἷς κυβικὸς Βινδοβονικὸς ποῦς 57 λιτρῶν τεθῇ περιεκτικός, ζητηθῇ δὲ ὁ εἷς τοῦ χρυσοῦ κυβικὸς ποῦς, πόσας ἐν μέτρῳ Βινδοβονικῷ λίτρας σταθμίζει, ἔσται·

19,640
57
―――――
137,480
982,00
―――――
1,119,480

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 918. Ἔσται ἄρα $2,04 \times \frac{3}{4} = \frac{2,04}{4} \times 3$ $= \frac{6,12}{4} = 1,53$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 919. Δεῆσαν δὲ τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10 πολλαπλασιάσαι, προαχθήτω τὸ σημεῖον τῆς τῶν ἁπλῶν μονάδων χώρας μιᾶς ὀπίσω πρὸς τὰ δεξιὰ, ὅπως αἱ ἐν τῷ παραγομένῳ ἁπλαῖ μονάδες δεκαπλασίως αὔξωσιν· ὡσαύτως δὲ ἐντοπισθήτω δυεῖν, ἢ τριῶν, ἢ τεσσάρων μονάδων περαιτέρω τὸ σημεῖον; εἰ ἐπὶ 100, 1000, 10000, κτλ. πολλαπλασιάσαι δέοι· ὅπως ἂν ὁ αὐτὸς ἑκαντοταπλάσια, ἢ χιλιοπλάσια, ἢ ἑκατοντάκις χιλιαπλάσια δύναιτο· οἷον· $4,587 \times 10 = 45,87$· $9,307 \times 100 = 930,7$· $0,5380 \times 1000 = 538,6$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 920. Ἀριθμὸν Δεκαδικὰ κλάσματα ὁποιωνδήποτε τάξεων ἐμπεριέχοντα, δι' ἄλλου ὁμοιογενοῦς διελεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Τῆς διαιρέσεως, ὡς κἀν τοῖς ὁλοσχερέσιν ἀριθμοῖς διαπερανθείσης (§. 138.), τὰς ἐν τῷ πηλίκῳ τάξεις τῶν μονάδων προσδιοριστέον, ἰσαρίθμως ἐν αὐτῷ ὑποδιαστέλλουσι δεξιόθεν πρὸς τὰ λαιὰ χαρακτῆρας, τοῖς ἐν τῷ διαιρετέῳ ὑποδιεσταλμένοις πλὴν τῶν τοῦ διαιρέτου· τουτέστι τοὺς ἐν τῷ πηλίκῳ δεκαδικοὺς, καθ' οὓς ὁ διαιρετέος τὸν διαιρέτην ὑπερήλασε διακριτέον. Εἰδ' οὖν ἐκεῖνος τοῦτον οὐχ ὑπερέχει, ἐπαυξητέον τοὺς τοῦ διαιρετέου χαρακτῆρας τῇ τῶν μηδενικῶν πρὸς τὸ τέλος ἐμπαρεισαγωγῇ (§. 896.), ὡς ἐν τῷ Β'. παραδείγματι.

3,2 (8,192) 2,56. 0,5234 (1695, 816) 3240,00·

$$3,045 : 15 = \frac{3,045}{15,000} = \frac{3045}{15000} = 0,203.$$

$$2,134 : 0,12 = \frac{2,134}{0,120} = \frac{2134}{120} = 17,7833.$$

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ μὲν δὴ, ὁπηνίκα τοιοῦτόν τι κλάσμα δι' ἑτέρου ὁμοιογενοῦς διαιρεῖται, ἤτοι ὁπηνίκα δι' ἀντιστρόφου τοῦ διαιρέτου πολλαπλασιάζεται (§. 189.), τῷ μὲν τοῦ πηλίκου ἀριθμητῇ τὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ διαιρετέου μηδενικὰ προστίθεται, τῷ δὲ παρονομαστῇ τὰ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ διαιρέτου ἀνάπαλιν· τούτου χάριν πάντων τῶν ἐν τῷ τοῦ πηλίκου ἀριθμητῇ μηδενικῶν ἀπαλειφθέντων, ἰσαρίθμως δὲ τούτοις καὶ τῶν κατὰ τὸν τοῦ αὐτοῦ πηλίκου παρονομαστὴν, τοσαῦτα ἐν τῷ τοῦ πηλίκου παρρονομαστῇ ὑπολειφθήσονται τὰ μηδενικὰ, ὁπόσα τῷ τοῦ διαιρετέου παρονομαστῇ ὑπὲρ τὸν τοῦ διαιρέτου προσῆν· τουτέστι καθ' ὅσους δεκαδικοὺς χαρακτῆρας ὁ διαιρετέος τὸν διαιρέτην ὑπερεῖχε (§. 892.)· ἰσάριθμοι ἄρα καὶ ἐν τῷ πηλίκῳ, ἀντὶ τῶν δεκαδικῶν οἱ χαρακτῆρες οὑτωσὶ ὑποδιασταλλόμενοι ἐκληφθήσονται. Ο. Ε. Δ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Πολλάκις δὲ εἴωθεν, ἔντε τῷ γινομένῳ, κἀν τῷ πηλίκῳ χαρακτῆρας τοὺς δεξιωτάτους, ὡς εὐεξουθενήτου δυνάμεως παραμελεῖσθαι· ὡς ἂν δὲ τοῦτο ἄνευ καταφανοῦς τοῦ διαπτώματος γένοιτο τὸν ἐσχάτως ἐκληφθησόμενον χαρακτῆρα μονάδι ἐπαυξητέον, εἰ ὁ τούτῳ ἑπόμενος μείζων καθέστηκεν, ἢ 5 (§. 908. Σχ.)·

ἢ ὁ αὐτὸς 5 μετ' ἄλλων. Οἷον, ἐὰν ἐν τῷ δεκαδικῷ κλάσματι 4,3657. οἱ ἔσχατοι δύω χαρακτῆρες παροπτέοι εἰσιν, ἔσται 4,37, οὐχὶ δὲ 4,36· ἐκείνως μὲν γὰρ τὸ κλάσμα ὑπερέχει $\frac{43}{10000}$, οὕτω δὲ ἀπὸ τούτου διαφέρει $\frac{57}{10000}$, τοῦ ἐλλείμματος πάντως τὸ πλεονέκτημα ὑπερνικῶντος. Ἐὰν δὲ ὁ παροφθησόμενος χαρακτὴρ τύχῃ 5 μονοχαράκτως ἐν τῷ τέλει ἐγκείμενος, καὶ ἄνευ ἑτέρων αὐτῷ ἐφεπομένων, τὸ πλεονέκτημα ἤτοι ἡ ὑπεροχὴ τῷ ἐλλείμματι ἰσοδυναμήσει, ἢ ὁ τούτῳ παραλήγων χαρακτὴρ μονάδι ἐπαυξηθείη, ἢ καὶ οὐχί· οἷον ἐπὶ 0,265, παραμελουμένου τοῦ ἐσχάτου ταυτὸν ἔσται, ἢ τὸ ὑπόλοιπον γραφείη 0,27, ἢ 0,26· ἐκείνως μὲν γὰρ ἡ ὑπεροχὴ, οὕτω δὲ ἡ ἔλλειψις ἀείποτ' ἴση $\frac{5}{1000}$. Ἐὰν δ' ἐσχάτως ὁ τῶν ἀποληφθησομένων χαρακτήρων θάτερος, ἤτοι ὁ πρῶτος ἐλάσσων τύχῃ τῶν 5, οἱ δ' ἐφεξῆς ἑπόμενοι μείζονες, ὁ τοὺς παροφθησομένους παραλήγων ἔσχατος χαρακτὴρ, οὐδεμιᾶς μοναδικῆς αὐξήσεως δεκτικὸς ἔσται. Οἷον εἰ ἐπὶ 0,31638 παροφθησόμενοι προκέοιντο οἱ δύω ἔσχατοι 38, εἰ καίπερ 3 ἐλάττω ἐστὶν ἢ 5, προκριτέον ἀλλ' οὖν οὑτωσὶ τοὺς λοιποὺς ἀποδοῦναι 0,316, ἤ περ 0,317. Ἐν γὰρ τῇ πρώτῃ περιστάσει, ἡ ἔλλειψις ἔσται $\frac{38}{100000}$, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἡ ὑπεροχὴ $\frac{62}{100000}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 921. Ἔσται ἄρα $\frac{5}{6} : 0,342 = \frac{5}{6 \times 0,342}$
$= \frac{5}{2,052} = \frac{5000}{2052} = 2,436.$

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 922. Εἰ οὖν τὸ δεκαδικὸν κλάσμα διὰ 10, 100, 1000, κτλ. διελεῖν δέοι, διὰ τοσούτων πρὸς λαιὰν χαρακτήρων τὸ σημεῖον προαγέσθω, ὅσα ἂν τῷ διαιρέτῃ μηδενικὰ σημεῖα 1, 2, 3, . . . προσκέοιτο ἐφ' ᾧ τὸν αὐτὸν ἑκατοστημόρια, χιλιοστημόρια, δεκαχιλιοστημόρια, καὶ ἐφεξῆς τῷ διαιρέτῃ ἀνάλογως δύνασθαι, οἷον·

$$53,436 : 10 = 5,3436.$$
$$32,43 : 100 = 0,3243.$$
$$5,38 : 1000 = 0,00538.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 923. Δῆλον ἄρα ἔσχατον ἐξ ὧν ἴσμεν (§. 257. Σχόλ.), ὡς ἐὰν ἡ ῥίζα ᾖ 0,9, ὁ τετράγωνος ἔσται 0,81, τῆς δὲ ῥίζης οὔσης 0,09, ὁ τετράγωνος ἔσται 0,0081· καὶ οὕτως ἐφεξῆς· δὶς τοσούτων μετὰ τὴν τῶν ἁπλῶν ὑποδιαστολὴν μονάδιων ὄντων ἐπὶ τοῦ τετραγώνου τῶν χαρακτήρων, ὁπόσοι τοῦ τοιοῦδε γένους ἐπὶ τῆς ῥίζης εἰσί (§. 917.). Ταυτὸ καὶ περὶ τῶν λοιπῶν δυνάμεων κρατήσει λεγόμενον.

ΣΧΟΛΙΟΝ ΚΑΘΟΛΟΥ.

Ταῦτα μὲν δὴ τοῖς φιλοπόνως περὶ τὰς Ἐπιστήμας ἔχουσιν ἀρκέσειεν, οἷα δὴ Στοιχειακά· οἵτινες τοὺς λόγους τῶν λεχθέντων καθ' ἕξιν τῷ νῷ ἅπαξ ἐνσημηνάμενοί τε καὶ ἐγκολάψαντες, πολλῶν ἄλλων αὐτοῖς προβαλλομένων καὶ ἀγχινοίας μᾶλλον ἢ μεθόδου εἰς ἐπίλυσιν δεομένων, οἴκοθεν τρόποις ἰδίοις, τοῖς ἐς δεῦρο διαληφθεῖσιν ἐπηρεισμένοι, εὐχερεῖς ἀποδιδόασι τὰς λύσεις. Μείζονα δὲ τούτων, Θεοῦ συναιρομένου, ἐν τῇ τῆς Ὑπερεχούσης, ἢ Ὑψηλοτέρας Ἀναλύσεως πραγματείᾳ, τοῖς ἀψικόρως πρὸς τὴν τῶν Διαβατικωτέρων Ἐπιστημῶν ἀνάβασιν ἔχουσι, γραφῇ παραπέμψαι οὐ κατοκνήσομεν.

ΤΕΛΟΣ

ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.

ΠΙΝΑΞ

ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΝΡΙΚΟΥ ΒΡΙΓΓΙΟΥ

ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

ὑπὲρ τῶν Φυσικῇ τάξει προϊόντων Ἀριθμῶν

ἀπὸ Μονάδος ἄχρι τῶν 1000.

Ἀριθμοὶ	Χαρ. Λογάριθμοι	Ἀριθμοὶ	Χαρ. Λογάριθμοι	Ἀριθμοὶ	Χαρ. Λογάριθμοι
0	ἀπείρ. ἀποφ.	35	1.54406.80	70	1.84509.80
1	0.00000.00	36	55630.25	71	85125.83
2	30103.00	37	56820.17	72	85733.25
3	47712.13	38	57978.36	73	86332.29
4	60206.00	39	59106.46	74	86923.17
5	0,69897.00	40	1.60206.00	75	1,87506.13
6	77815.13	41	61278.39	76	88081.36
7	84509.80	42	62324.93	77	88649.07
8	90309.00	43	63346.85	78	89209.46
9	95424.25	44	64345.27	79	89762.71
10	1.00000.00	45	1.65321.25	80	1,90309.00
11	04139.27	46	66275.78	81	90848.50
12	07918.12	47	67209.79	82	91381.39
13	11394.34	48	68124.12	83	91907.81
14	14612.80	49	69019.61	84	92427.93
15	1,17609.13	50	1,69897.00	85	1,92941.89
16	20412.00	51	70757.02	86	93449.85
17	23044.89	52	71600.33	87	93951.93
18	25527.25	53	72427.59	88	94448.27
19	27875.36	54	73239.38	89	94939.00
20	1,30103.00	55	1 74036.27	90	1,95424.25
21	32221.93	56	74818.80	91	95904.14
22	34242.27	57	75587.49	92	96378.78
23	36172.78	58	76342.80	93	96848.29
24	38021.12	59	77085.20	94	97312.79
25	1.39794.00	60	1,77815.13	95	1,97772.36
26	41497.33	61	78532.98	96	98227.12
27	43136.38	62	79239.17	97	98677.17
28	44715.80	63	79934.05	98	99122.61
29	46239.80	64	80618.00	99	99563.52
30	1.47712.13	65	1.81291.34	100	2.00000,00
31	49136.17	66	81954.39	101	00432.14
32	50515.00	67	82607.48	102	00860.02
33	51851.39	68	83250.89	103	01283.72
34	53147.89	69	83884.91	104	01703.33

Αριθμοί	Λογάριθμοι	Αριθμοί	Λογάριθμοι	Αριθμοί	Λογάριθμοι
105	2.02118.93	140	2.14612.80	175	2.24303.80
106	02530.59	141	14921.91	176	24551.27
107	02938.38	142	15228.83	177	24797.33
108	03342.38	143	15533.60	178	25042.00
109	03742.65	144	15836.25	179	25285.30
110	2.04139.27	145	2.16136.80	180	2.25527.25
111	04532.30	146	16435.29	181	25767.86
112	04921.80	147	16731.73	182	26007.14
113	05307.84	148	17026.17	183	26245.11
114	05690.49	149	17318.63	184	26481.78
115	2.06069.78	150	2.17609.13	185	2.26717.17
116	06445.80	151	17897.69	186	26951.29
117	06818.59	152	18184.36	187	27184.16
118	07188.20	153	18469.14	188	27415.78
119	07554.70	154	18752.07	189	27646.18
120	2.07918.12	155	2.19033.17	190	2.27875.36
121	08278.54	156	19312.46	191	28103.34
122	08635.98	157	19589.97	192	28330.12
123	08990.51	158	19865.71	193	28555.73
124	09342.17	159	20139.71	194	28780.17
125	2.09691.00	160	2.20412.00	195	2.29003.46
126	10037.05	161	20682.59	196	29225.61
127	10380.37	162	20951.50	197	29446.62
128	10721.00	163	21218.76	198	29666.52
129	11058.97	164	21484.38	199	29885.31
130	2.11394.34	165	2.21748.39	200	2.30103.00
131	11727.13	166	22010.81	201	30319.61
132	12057.39	167	22271.65	202	30535.14
133	12385.16	168	22530.93	203	30749.60
134	12710.48	169	22788.67	204	30963.02
135	2.13033.38	170	2.23044.89	205	2.31175.39
136	13353.89	171	23299.61	206	31386.72
137	13672.06	172	23552.84	207	31597.03
138	13987.91	173	23804.61	208	31806.33
139	14301.48	174	24054.92	209	32014.63

Αριθμοί	Λογάριθμοι	Αριθμοί	Λογάριθμοι	Αριθμοί	Λογάριθμοι
210	2.32221.93	245	2.38916.61	280	2.44715.80
211	32428.25	246	39093.51	281	44870.64
212	32633.69	247	39269.70	282	45024.91
213	32837.96	248	39445.17	283	45178.64
214	33041.38	249	39619.93	284	45331.83
215	2.33243.85	250	2.39794.00	285	2.45484.49
216	33445.38	251	39967.37	286	45636.60
217	33645.97	252	40140.05	287	45788.19
218	33845.65	253	40312.05	288	45939.25
219	34044.41	254	40483.37	289	46089.78
220	2.34242.27	255	2.40654.02	290	2.46239.80
221	34439.23	256	40824.00	291	46389.30
222	34635.30	257	40993.31	292	46538.29
223	34830.49	258	41161.97	293	46686.76
224	35024.80	259	41329.98	294	46834.73
225	2.35218.25	260	2.41497.33	295	2.46982.20
226	35410.84	261	41664.05	296	47129.17
227	35602.69	262	41830.13	297	47275.64
228	35793.48	263	41995.57	298	47421.63
229	35983.55	264	42160.39	299	47567.12
230	2.36172.78	265	2.42324.59	300	2.47712.13
231	36361.20	266	42488.16	301	47856.65
232	36548.80	267	42651.13	302	48000.69
233	36735.69	268	42813.48	303	48144.26
234	36921.69	269	42975.23	304	48287.36
235	2.37106.79	270	2.43136.38	305	2.48429.98
236	37291.20	271	43296.93	306	48572.14
237	37474.83	272	43456.89	307	48713.84
238	37657.70	273	43616.26	308	48855.07
239	37839.79	274	43775.06	309	48995.85
240	2.38021.12	275	2.43933.27	310	2.49136.17
241	38201.70	276	44090.91	311	49276.04
242	38381.54	277	44247.98	312	49415.46
243	38560.63	378	44404.48	313	49554.43
244	38738.98	279	44560.42	314	49692.96

Αριθμοί	Λογάριθμοι	Αριθμοί	Λογάριθμοι	Αριθμοί	Λογάριθμοι
315	2.49831.06	350	2.54406.80	386	2.58546.07
316	49968.71	351	54530.71	389	58658.73
317	50105.93	352	54654.27	387	58771.1
318	50242.71	353	54777.47	388	58883.1
319	50379.07	354	54900.33	389	58994.96
320	2.50515.00	355	2.55022.84	390	2.59106.4
321	50650.50	356	55145.00	391	59217.68
322	50785.59	357	55266.82	392	59328.6
323	50920.25	358	55388.30	393	59439.2
324	51054.50	359	55509.44	394	59549.6
325	2.51188.34	360	2.55630.25	395	2.59659.7
326	51321.76	361	55750.72	396	59769.5
327	51454.78	362	55870.86	397	59879.05
328	51587.38	363	55990.66	398	59988.3
329	51719.59	364	56110.14	399	60097.2
330	2.51851.39	365	2.56229.29	400	2.60206.0
331	51982.80	366	56348.11	401	60314.4
332	52113.81	367	56466.61	402	60422.6
333	52244.42	368	56584.78	403	60530.5
334	52374.65	369	56702.64	404	60638.1
335	2.52504.48	370	2.56820.17	405	2.60745.5
336	52633.93	371	56937.39	406	60852.6
337	52762.99	372	57054.29	407	60959.44
338	52891.67	373	57170.88	408	61066.0
339	53019.97	374	57287.16	409	61172.3
340	2.53147.89	375	2.57403.13	410	2.61278.3
341	53275.44	376	57518.78	411	61384.18
342	53402.61	377	57634.14	412	61489.7
343	53529.41	378	57749.18	413	61595.0
344	53655.84	379	57863.92	414	61700.0
345	2.53781.91	380	2.57978.36	415	2.61804.8
346	53907.61	381	58092.50	416	61909.33
347	54032.95	382	58206.34	417	62013.61
348	54157.92	383	58319.88	418	62117.63
349	54282.54	384	58433.12	419	62221.40

Αριθμοί	Λογάριθμοι	Αριθμοί	Λογάριθμοι	Αριθμοί	Λογάριθμοι
420	2.62324.93	455	2.65801.14	490	2.69019.61
421	62428.21	456	65896.48	491	69108.15
422	62531.25	457	65991.62	492	69196.51
423	62634.04	458	66086.55	493	69284.69
424	62736.59	459	66181.27	494	69372.69
425	2.62838.89	460	2.66275.78	495	2.69460.52
426	62940.96	461	66370.09	496	69548.17
427	63042.79	462	66464.20	497	69635.64
428	63144.38	463	66558.10	498	69722.93
429	63245.73	464	66651.80	499	69810.05
430	2.63346.85	465	2.66745.30	500	2.69897.00
431	63447.73	466	66838.59	501	69983.77
432	63548.37	467	66931.69	502	70070.37
433	63648.79	468	67024.59	503	70156.80
434	63748.97	469	67117.28	504	70243.05
435	2.63848.93	470	2.67209.79	505	2.70329.14
436	63948.66	471	67302.09	506	70415.05
437	64048.14	472	67394.20	507	70500.80
438	64147.41	473	67486.11	508	70586.37
439	64246.45	474	67577.83	509	70671.78
440	2.64345.27	475	2.67669.36	510	2.70757.02
441	64443.86	476	67760.79	511	70842.09
442	64542.23	477	67851.84	512	70927.00
443	64640.37	478	67942.79	513	71011.74
444	64738.30	479	68033.55	514	71096.31
445	2.64836.00	480	2.68124.12	515	2.71180.72
446	64933.49	481	68214.51	516	71264.97
447	65030.75	482	68304.70	517	71349.05
448	65127.80	483	68394.71	518	71432.98
449	65224.63	484	68484.54	519	71516.74
450	2.65321.25	485	2.68574.17	520	2.71600.33
451	65417.65	486	68663.63	521	71683.77
452	65513.84	487	68752.90	522	71767.05
453	65609.82	488	68841.98	523	71850.17
454	65705.59	489	68930.89	524	71933.13

Ἀριθμοί	Λογάριθμοι	Ἀριθμοί	Λογάριθμοι	Ἀριθμοί	Λογάριθμοι
525	2.72015.93	560	2.74818.80	595	2.77451.70
526	72098.57	561	74896.29	596	77524.63
527	72181.06	562	74973.63	597	77597.43
528	72263.39	563	75050.84	598	77670.12
529	72345.57	564	75127.91	599	77742.68
530	2.72427.59	565	2.75204.84	600	2.77815.13
531	72509.45	566	75281.64	601	77887.45
532	72591.16	567	75358.31	602	77959.65
533	72672.72	568	75434.83	603	78031.73
534	72754.13	569	75511.23	604	78103.69
535	2.72835.38	570	2.75587.49	605	2.78175.54
536	72916.48	571	75663.61	606	78247.26
537	72997.43	572	75739.60	607	78318.87
538	73078.23	573	75815.46	608	78390.36
539	73158.88	574	75891.19	609	78461.73
540	2.73239.38	575	2.75966.78	610	2.78532.98
541	73319.73	576	76042.25	611	78604.12
542	73399.93	577	76117.58	612	78675.14
543	73479.98	578	76192.78	613	78746.05
544	73559.89	579	76267.86	614	78816.84
545	2.73639.65	580	2.76342.80	615	2.78887.51
546	73719.26	581	76417.61	616	78958.07
547	73798.73	582	76492.30	617	79028.52
548	73878.06	583	76566.86	618	79098.85
549	73957.23	584	76641.28	619	79169.06
550	2.74036.27	585	2.76715.59	620	2.79239.17
551	74115.16	586	76789.76	621	79309.16
552	74193.91	587	76863.81	622	79379.04
553	74272.51	588	76937.73	623	79448.80
554	74350.98	589	77011.53	624	79518.96
555	2.74429.30	590	2.77085.20	625	2.79588.00
556	74507.48	591	77158.75	626	79657.43
557	74585.52	592	77232.17	627	79726.73
558	74663.42	593	77305.47	628	79796.90
559	74741.98	594	77378.64	629	79865.96

Ἀριθμοί	Λογάριθμοι	Ἀριθμοί	Λογάριθμος	Ἀριθμοί	Λογάριθμος
630	2.79934.05	665	2.82282.16	700	2.84509.80
631	80002.94	666	82347.42	701	84571.80
632	80071.71	667	82412.58	702	84633.71
633	80140.37	668	82477.65	703	84695.53
634	80208.93	669	82542.61	704	84757.27
635	2.80277.37	670	2.82607.48	705	2.84818.91
636	80345.71	671	82672.25	706	84880.47
637	80413.94	672	82736.93	707	84941.94
638	80482.07	673	82801.51	708	85003.33
639	80550.09	674	82865.99	709	85064.62
640	2.80618.00	675	2.82930.38	710	2.85125.83
641	80685.80	676	82994.67	711	85186.96
642	80753.50	677	83058.87	712	85248.00
643	80821.10	678	83122.97	713	85308.95
644	80888.59	679	83186.98	714	85369.82
645	2.80955.97	680	2.83250.89	715	2.85430.60
646	81023.25	681	83314.71	716	85491.30
647	81090.43	682	83378.44	717	85551.92
648	81157.50	683	83442.07	718	85612.44
649	81224.47	684	83505.61	719	85672.89
650	2.81291.34	685	2.83569.06	720	2.85733.25
651	81358.10	686	83632.41	721	85793.53
652	81424.76	687	83695.67	722	85853.72
653	81491.32	688	83758.84	723	85612.44
654	81557.77	689	83821.92	724	85973.86
655	2.81624.13	690	2.83884.91	725	2.86033.80
656	81690.38	691	83947.80	726	86093.66
657	81756.54	692	84010.61	727	86153.44
658	81822.59	693	84073.32	728	86213.14
659	81888.54	694	84135.95	729	86272.75
660	2.81954.39	695	2.84198.48	730	2.86332.29
661	82020.15	696	84260.92	731	86391.74
662	82085.80	697	84323.28	732	86451.11
663	82151.35	698	84385.54	733	86510.40
664	82216.81	699	84447.72	734	86569.61

Αριθμοί	Διαφ. Λογάριθμοι	Αριθμοί	Διαφ. Λογάριθμοι	Αριθμοί	Διαφ. Λογάριθμοι
735	2.86628.73	770	2.88649.07	805	2.90579.59
736	86687.78	771	88705.44	806	90633.50
737	86746.75	772	88761.73	807	90687.35
738	86805.64	773	88817.96	808	90741.14
739	86864.44	774	88874.10	809	90794.85
740	2.86923.17	775	2.88930.17	810	2.90848.50
741	86981.82	776	88986.17	811	90902.09
742	87040.39	777	89042.10	812	90955.60
743	87098.88	778	89097.96	813	91009.05
744	87157.29	779	89153.75	814	91062.44
745	2.87215.63	780	2.89209.46	815	2.91115.76
746	87273.88	781	89265.10	816	91169.02
747	87332.06	782	89320.68	817	91222.21
748	87390.16	783	89376.18	818	91275.33
749	87448.18	784	89431.61	819	91328.39
750	2.87506.13	785	2.89486.97	820	2.91381.39
751	87563.99	786	89542.25	821	91434.32
752	87621.78	787	89597.47	822	91487.18
753	87679.50	788	89652.62	823	91539.98
754	87737.13	789	89707.70	824	91592.72
755	2.87794.70	790	2.89762.71	825	2.91645.39
756	87852.18	791	89817.65	826	91698.00
757	87909.59	792	89872.52	827	91750.55
758	87966.92	793	89927.32	828	91803.03
759	88024.18	794	89982.05	829	91855.45
760	2.88081.36	795	2.90036.71	830	2.91907.81
761	88138.47	796	90091.31	831	91960.10
762	88195.50	797	90145.83	832	92012.33
763	88252.45	798	90200.29	833	92064.50
764	88309.34	799	90254.68	834	92116.61
765	2.88366.14	800	2.90309.00	835	2.92168.65
766	88422.88	801	90363.25	836	92220.63
767	88479.54	802	90417.44	837	92272.55
768	88536.12	803	90471.55	838	92324.40
769	88592.63	804	90525.60	839	92376.20

Αριθμοί	Διαφ. Λογάριθμοι	Αριθμοί	Διαφ. Λογάριθμοι	Αριθμοί	Διαφ. Λογάριθμοι
840	2.92427.93	875	2.94200.81	910	2.95904.14
841	92479.60	876	94250.41	911	95951.84
842	92531.21	877	94299.96	912	95999.48
843	92582.76	878	94349.45	913	96047.08
844	92634.24	879	94398.89	914	96094.62
845	2.92685.67	880	2.94448.27	915	2.96142.11
846	92737.04	881	94497.59	916	96189.55
847	92788.34	882	94546.86	917	96236.93
848	92839.59	883	94596.07	918	96284.27
849	92890.77	884	94645.23	919	96331.55
850	2.92941.89	885	2.94694.33	920	2.96378.78
851	92992.96	886	94743.37	921	96425.96
852	93043.96	887	94792.36	922	96473.09
853	93094.90	888	94841.30	923	96520.17
854	93145.79	889	94890.18	924	96567.20
855	2.93196.61	890	2.94939.00	925	2.96614.17
856	93247.38	891	94987.77	926	96661.10
857	93298.08	892	95036.49	927	96707.97
858	93348.73	893	95085.15	928	96754.80
859	93399.32	894	95133.75	929	96801.57
860	2.93449.85	895	2.95182.30	930	2.96848.29
861	93500.32	896	95230.80	931	96894.97
862	93550.73	897	95279.24	932	96941.59
863	93601.08	898	95327.63	933	96988.16
864	93651.37	899	95375.97	934	97034.69
865	2.93701.61	900	2.95424.25	935	2.97081.16
866	93751.79	901	95472.48	936	97127.58
867	93801.91	902	95520.65	937	97173.96
868	93851.97	903	95568.78	938	97220.28
869	93901.98	904	95616.84	939	97266.56
870	2.93951.93	905	2.95664.86	940	2.97312.79
871	94001.82	906	95712.82	941	97358.96
872	94051.65	907	95760.73	942	97405.09
873	94101.42	908	95808.68	943	97451.17
874	94151.14	909	95856.39	944	97497.20

Ἀριθμοὶ	Λογάριθμοι	Ἀριθμοὶ	Λογάριθμοι	Ἀριθμοὶ	Λογάριθμοι
945	2,97543.08	965	2,98452.73	985	2,99343.62
946	97589.11	966	98497.71	986	99387.69
947	97635.00	967	98542.65	987	99431.72
948	97660.83	968	98587.64	988	99476.69
949	97726.62	969	98632.38	989	99519.63
950	2,97772.36	970	2,98677.17	990	2,99563.52
951	97818.05	971	98721.92	991	99607.37
952	97863.69	972	98766.63	992	99651.17
953	97909.29	973	98811.28	993	99694.92
954	97954.84	974	98855.99	994	99738.64
955	2,98000.34	975	2,98900.46	995	2,99782.31
956	98045.79	976	98944.98	996	99826.93
957	98091.19	977	98989.46	997	99869.52
958	98136.55	978	99033.89	998	99913.05
959	98181.86	979	99078.27	999	99956.55
960	2,98227.12	980	2,99122.61	1000	3,00000.00
961	98272.34	981	99166.90	1001	00043.41
962	98317.51	982	99211.15	1002	00086.77
963	98362.63	983	99255.35	1003	00130.09
964	98407.70	96[illegible]	99299.51	1004	00173.37

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ
ΤΩΝ
ΕΝ ΜΕΡΕΙ ΣΥΝΔΡΟΜΗΤΩΝ
τῆς τοῦ Πρώτου τῶν Μαθηματικῶν Τόμου ἐκδόσεως.

Σώμ.

Ὁ Πανιερώτατος καὶ Φιλόμουσος Ἅγιος Μητροπολίτης Μολδαβίας κύριος Βενιαμὶν 5

ὁ Πανοσιολογιώτατος Ἀρχιμανδρίτης κύριος Ἰάκωβος 2

ὁ Πανοσιολογιώτατος Ἀρχιμανδρίτης κύριος Διονύσιος, ὁ τοῦ Γαλατᾶ Ἡγούμενος 2

ὁ Πανοσιολογιώτατος Ἀρχιμανδρίτης καὶ ἐφημέριος τῆς ἐν Λειψίᾳ Καπέλης τῶν Γραικῶν κύριος Καλλίνικος ὁ Θεσσαλονικεύς 2

ὁ Πανοσιολογιώτατος Ἀρχιμανδρίτης κύριος Θεοδόσιος Βυζάντιος ὁ Ἰβηρίτης . . . . . . [illegible]

Τὸ ἐν Ἰασσίῳ Ἑλληνομουσεῖον διὰ τοῦ Ἐκλαμπροτάτου καὶ Φιλομούσου Μπεϊζαδὲ κυρίου Σκαρλάτου Γκίκα 12

Ὁ Εὐγενέστατος καὶ Φιλόμουσος Ἄρχων Ποστέλνικος κύριος Δημήτριος Μάνος 10

Τὰ ἐν Κωνσταντινουπόλει ἀνωνύμως συναχθέντα σπουδῇ τοῦ Φιλογενεστάτου καὶ Φιλομούσου Ἄρχοντος Ποστελνίκου κυρίου Δημητρίου Μάνου 60

Σώμ.

Οἱ Εὐγενέστατοι καὶ Φιλόμουσοι Αὐτάδελφοι κύριοι Σωσιμάδαι 20

Ὁ Εὐγενέστατος καὶ Φιλόμουσος Ἄρχων Κόμισος κύριος Γιάνκος Βάλσας 5

Ὁ Εὐγενέστατος καὶ Φιλόμουσος Ἄρχων Κόμισος κύριος Μιχαλάκης Μαυρογένης, ὁ καὶ τῆς τῶν Μαθηματικῶν ἐκδόσεως πρωταίτιος . . . 5

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Σπαθάρης κύριος Γρηγόριος Μάνου 5

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Σπαθάρης κύριος Ἀλέξανδρος Καρατζᾶς 5

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Σπαθάρης κύριος Σταυράκης Πελαγινός 5

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Λογοθέτης κύριος Ματθαῖος Κρουπένσκης 5

Ὁ Ἐξοχώτατος Ἰατρὸς κύριος Εὐστάθιος . . . 2

Ὁ Ἐξοχώτατος Ἰατρὸς κύριος Ἀντώνιος Φωτεινός 2

Ὁ Ἐντιμώτατος κύριος Ἀνδρέας Παύλου . . 5

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Καμινάρης κύριος Γεώργιος Πουζανέσκος 3

Ὁ Εὐγενέστατος Παχάρνικος κύριος Ἰωάννης Ματθαίου 2

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Σερδάρης κύριος Γεώργιος Φωτεινός 1

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Βόρνικος κύριος Βασίλειος Ῥωσσέτος 1

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Βόρνικος κύριος Μανολάκης Δημάκης 1

Σώμ.

Ὁ Εὐγενέστατος Ἄρχων Σπαθάρης κύριος Γρηγόριος Καταρτζῆς 1

Ὁ Ἐντιμώτατος κύριος Χριστόδουλος Ἰωάννου . . 2

Ὁ Ἐντιμώτατος κύριος Ἀναστάσιος Δημητρίου . 2

Ὁ Ἐντιμώτατος κύριος Μάρκος Δοπροβήκης ὁ ἐκ Κεμνιτζίου 1

Ὁ Λογιώτατος κύριος Τριαντάφυλλος Ἰωάννου Γκίκας Ζαγοραῖος 1

Ὁ Λογιώτατος κύριος Κωνσταντῖνος Χρυσοκέφαλος 1

Ὁ Ἄρχων Πιτιτάρης κύριος Ἀγγελής . . . 1

Ὁ Ἄρχων Κλουτζιάρης κύριος Γρηγόριος . . 1

Ὁ Ἄρχων Μεδελνιτζάρης κύριος Σάνδουλος Θεοδοσίου 1

Ὁ Ἐντιμώτατος κύριος Νικόλαος Ματθαίου . . 1

Ὁ Ἐντιμώτατος κύριος Βόϊκος Τζερνίκου Βλάχος . 1

Ὁ Ἐντιμώτατος κύριος Γρηγόριος Θωμουλέτζος . 1

Τὰ ὑπὸ τοῦ Συγγραφέως ἐν τῷ τῆς Ῥαψάνης Ἑλληνομουσείῳ ἀφιερωθέντα πρὸς διανομὴν τῶν ἐκεῖσε φοιτώντων ἐνδεῶν μαθητῶν 50

ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΤΕΡΩΝ ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ.

Σελ. 1 Στίχ. 24. εὑρίσκευται· γράφε εὑρίσκεται.
— 22 — 18. ΠΟΣΙΣΜΑ· Γράφε ΠΟΡΙΣΜΑ.
— 27 — 14. ταταμετρῇ· Γράφε καταμετρῇ.
— 32 — 16. $5\alpha^2\beta\mu$· Γράφε $5\alpha^2\beta^{\mu}$.
— 42 — 15. ἐν ἐνίοις, $2(+\gamma)$· Γράφε $2(\alpha+\gamma)^{\nu}$
— 55 — 6. $\alpha\beta^{3\mu}+\gamma^{5}+^{\mu}$. Γράφε $\alpha\beta^{3\mu}+$
$\gamma^{5+2\mu}$.
— 57 — 6. ἑτέρῳ· Γράφε ἑτέρα.
— 61 — 16. ὁ διαιρέτης· Γράφε ὁ διαιρατέος.
— 68 — 13. $\beta^{\mu-4}\chi^{1-\mu}$. Γράφε $\beta^{2\mu-4}\chi^{1-2\mu}$.
— — — 14. $\beta+^{2\mu}\chi^{4}$· Γράφε $\beta^{5+2\mu}\chi^{4}$.
— — — 16. $8\alpha^{4\mu-3}\beta^{5}\chi$· Γράφε $8\alpha^{4\mu-3}\beta^{5}\chi^{3}$.
— 69 — 13. καὶ 22. ἑκατέρωθεν ἀπαλειπτέον
$+12\alpha^2\beta^4$.
— 81 — 4. $\frac{1}{3}$· Γράφε $\frac{2}{3}$.
— 85 — 18. $3\frac{2}{5} : 2\frac{3}{5}$· Γράφε $3\frac{2}{5} : 2\frac{3}{8}$.
— 86 — 22. $44\alpha\beta^{3}$· Γράφε $4\alpha\beta^{3}$.
— 116 — 5. ποσετήδων· Γράφε ποσοτήτων.
— 126 — 16. ΘΕΩΡΗΜΑ· Γράφε ΠΡΟΒΛΗΜΑ.
— 143 — 19. $-\frac{\nu\tau-\mu\sigma}{\sigma\tau}$. Γράφε $\gamma-\frac{\nu\tau-\mu\sigma}{\sigma\tau}$.
— 160 — 7. πυνθετῶν· Γράφε συνθετῶν.
— 169 — 13. $+\frac{\nu.(\nu-1).(-2).(\nu-3)}{1\times2\times3\times4}$. Γράφε
$+\frac{\nu.(\nu-1).(\nu-2).(\nu-3)}{1\times2\times3\times4}$.

Σελ. 270 Στίχ. 18. $y^{\frac{\nu\kappa}{\kappa\upsilon}} = \sqrt[\mu\sigma]{y^{\nu\kappa}}$. Γράφε $y^{\frac{\mu\kappa}{\mu\sigma}} = \sqrt[\mu\sigma]{y^{\mu\kappa}}$.

— 284 — 8. $43147,43 : 5295 \,(= 3 \cdot 242^3)$ Γράφε $43147,52 : 5295 \,(= 3 \cdot 42^2)$.

— 284 — 20. $(\alpha^2 - \chi^2)^- 27$· Γράφε $(\alpha^2 - \chi^2) = 27$.

— 301 — 20. $64 = 27 + 30 + 9$· Γράφε $64 = 25 + 30 + 9$.

— 316 — 24. τῶν ὑπολειφθέντων· Γραφε τῶν ὑπολειφθεισῶν.

— 318 — 1. $\chi = \frac{\alpha\beta}{\gamma \;\; \beta}$· Γράφε $\chi = \frac{\alpha\beta}{\gamma - \beta}$.

— 372 — 15. $422\frac{2}{7}$· Γράφε $422\frac{2}{9}$.

— 375 — 16. $3\chi + 1 > 2y$· Γράφε $2\chi + 1 > 2y$.

— 379 — 15. ἐπένευσνν· Γράφε ἐπένευσεν.

— 383 — 24. ἄρα $\chi\frac{6}{17}$· Γράφε ἄρα $\chi' = \frac{6}{17}$.

— 405 — 16. ἀπὸ τοῦ πενταπλασιου· Γράφε ἀπὸ τοῦ πενταπλασίου τετραγώνου.

— 406 — 2. $\sqrt{(\frac{\alpha}{5} + \frac{4}{24})}$· Γράφε $\sqrt{(\frac{\alpha}{5} + \frac{4}{25})}$.

— — — 3. $\sqrt{(\frac{\alpha}{5} + \frac{4}{24}}$· Γράφε $\sqrt{(\frac{5\alpha}{25} + \frac{4}{25})}$.

— — — 4. $\sqrt{(\frac{1080}{25})}$· Γράφε $\sqrt{(\frac{1089}{25})}$.

— 432 — 13. ἀπ'· Γράφε ἐπ'.

— 438 — 9. ἀπ' εὐθείας· Γράφε ἐπ' εὐθείας.

— 440 — 5. τριτημήριον· Γράφε τριτημόριον.

Σελ. 488 Στίχ. 11. $\psi = \frac{B^2}{\Gamma}$· Γράφε $\Psi = \frac{B^2}{\Gamma}$.

— 492 — 17. Β:ΒΜ:Β· Γράφε Β — ΒΜ:Β.

— 493 — 7. Α:Γ = Β:Δ· Γράφε Δ:Γ = Β:Α.

— — — 14. καὶ $(6 + 9) : 9 = (X + Y) : Y$· διὰ τὸ Γ'. Γράφε καὶ $(6 + 9) : 9 = (X + Y) : Y$ διὰ τὸ Γ. ναὶ μὴν καὶ $(6 + 9) : 6 = (X + Y) : X$.

— 500 — 8. $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$· Γράφε $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta$.

— 512 — 26. 6· Γράφε 9.

— 524 — 14. ΠΟΡΙΣΜΑ Β· Γράφε ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

— 589 — 22. Πενταγώνων· Γράφε Τριγώνων.

— 595 — 19. $\frac{\nu^2 - 5\nu + 5}{}$· Γράφε $\frac{\nu^2 - 5\nu + 6}{2}$.

— 596 — 20. $\frac{8\nu^2 - 49\nu + 112}{2}$· Γράφε $\frac{8\nu^2 - 48\nu + 112}{2}$.

— 603 — 14. $\frac{2 \cdot 42^3 + 3\nu\, 42^2 + 42}{2}$· Γράφε $\frac{2 \cdot 42^3 + 3 \cdot 42^2 + 42}{2}$.

— 604 — 5. (§. 730.)· Γράφε (§. 734.).

— — — 10. 240 σφαιρῶν· Γράφε 140 σφαίραις.

— 607 — 18. ἀπαλειπτέον $2\alpha - 4$· ὥστε εἶναι, ἡ τοῦ Τριγώνου πλευρά, κτλ.

Σελ. 608 Στίχ. 2. $\frac{3+\sqrt{(41\pi+9)}}{10}$. Γράφε $\frac{3+\sqrt{(40\pi+9)}}{10}$.

— 628 — 10. $\omega^{1+\frac{1}{\nu-1}} - \alpha^{1+\frac{1}{\nu-1}}$. Γράφε $\omega^{1+\frac{1}{\nu-1}} - \alpha^{1+\frac{1}{\nu-1}}$.

— 633 — 4. $\left(\frac{x-\alpha}{\alpha-\omega}\right)^{\nu-1}$. Γράφε $\left(\frac{x-\alpha}{x-\omega}\right)^{\nu-1}$.

— 637 — 11. Π· Γράφε π.

— 639 — 11. καθ' ἐκείνην· Γράφε κατ' ἐκείνην.

— — — 25. μιᾶς· Γράφε μιᾶς.

— 648 — 18. β^{σ}· Γράφε $\beta^{\frac{\mu}{\sigma}}$.

— 675 — 14. ἔλεμμα· Γράφε ἔλλειμμα.

— 682 — 1. ΔΕΙΞΙΣ· Γράφε ΛΥΣΙΣ.

— 711 — 7. Σχ. 12· Γράφε Σχ. 14.

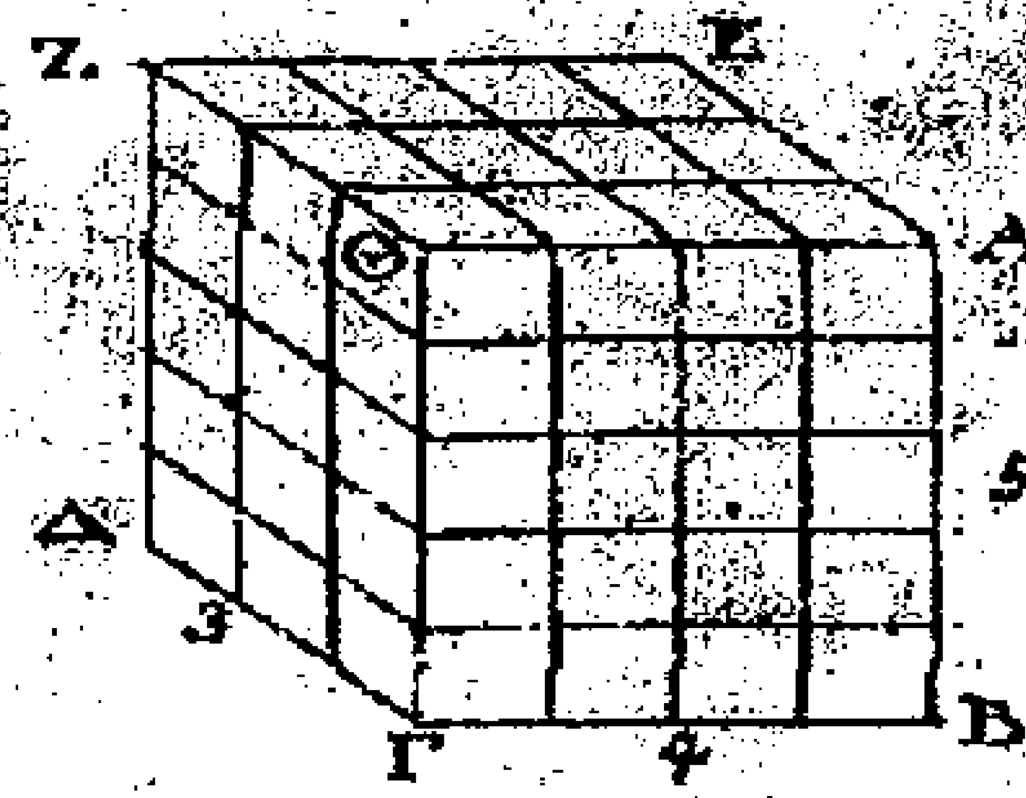
— 730 — 4. (§. 885.)· Γράφε (§. 884.).

— 731 — 10. (§. 886. Δ'.)· Γράφε (§. 885. Δ'.).

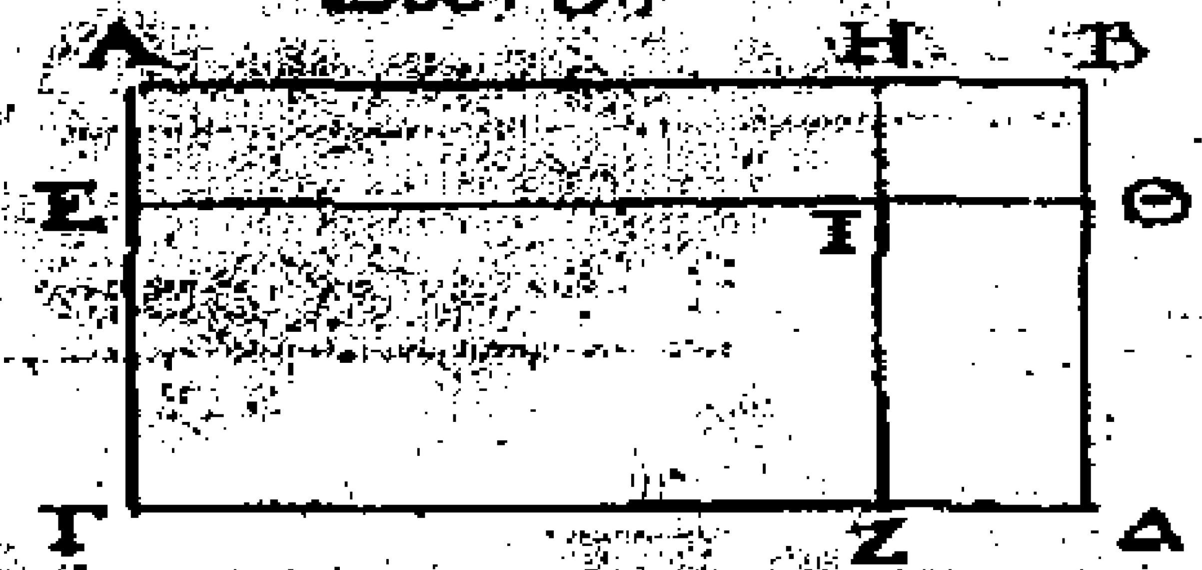
— 733 — 13. (§. 886. Α'.)· Γράφε (§. 885. Α'.).

Σχ. 1.

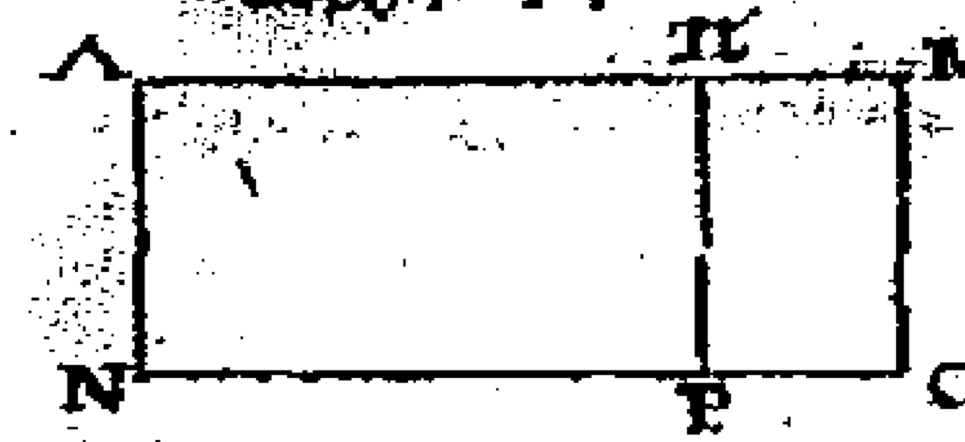
Σχ. 2.



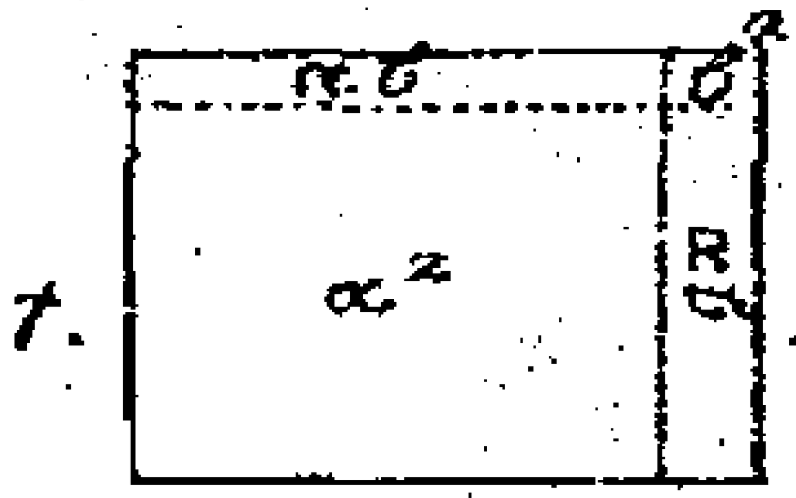
Σχ. 3.



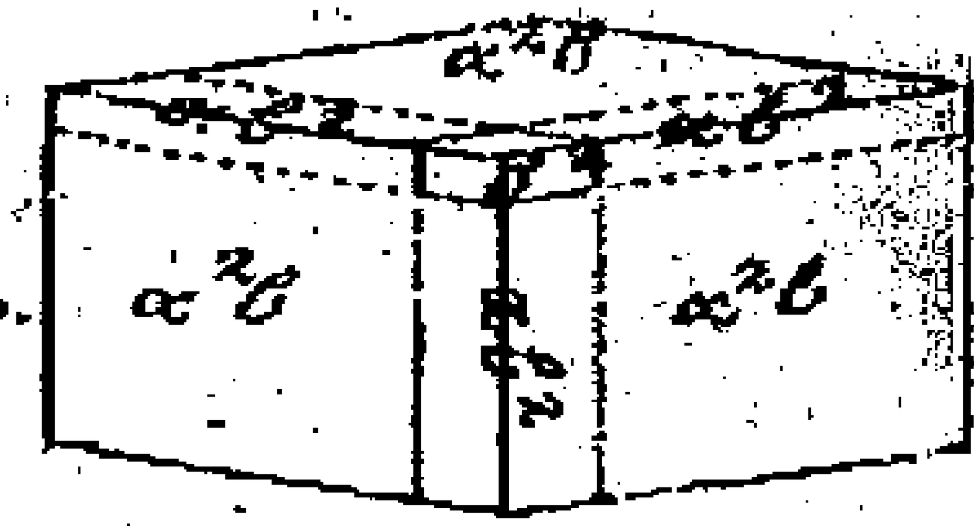
Σχ. 4.



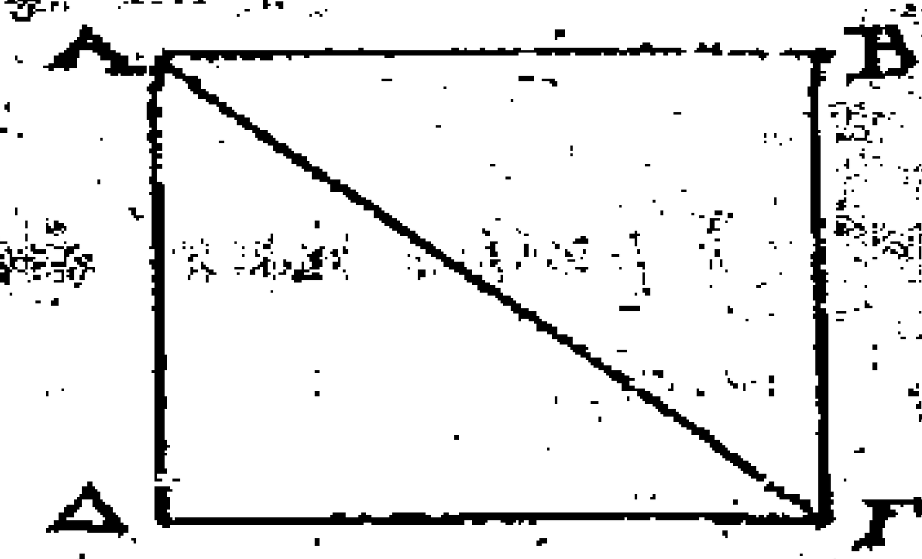
Σχ. 5.



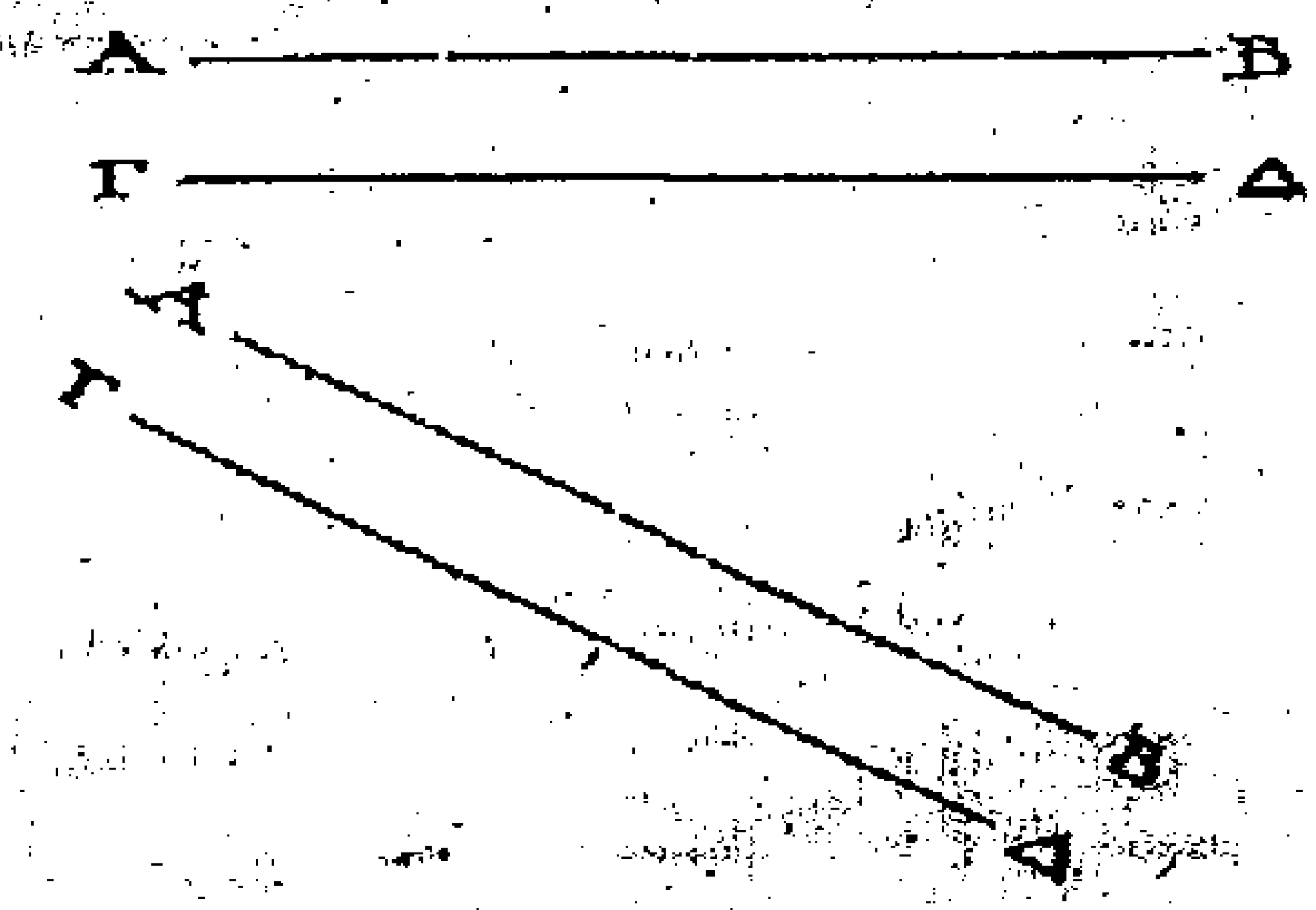
Σχ. 6.



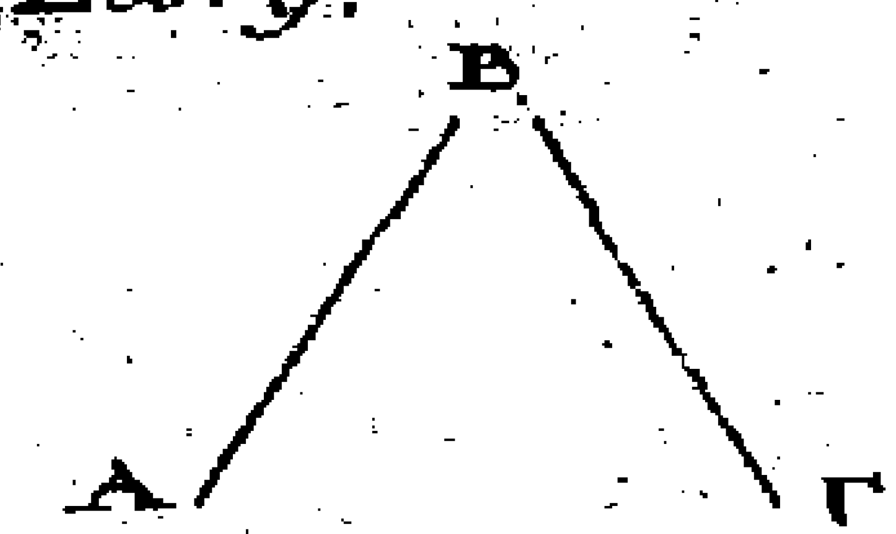
Σχ. 7.



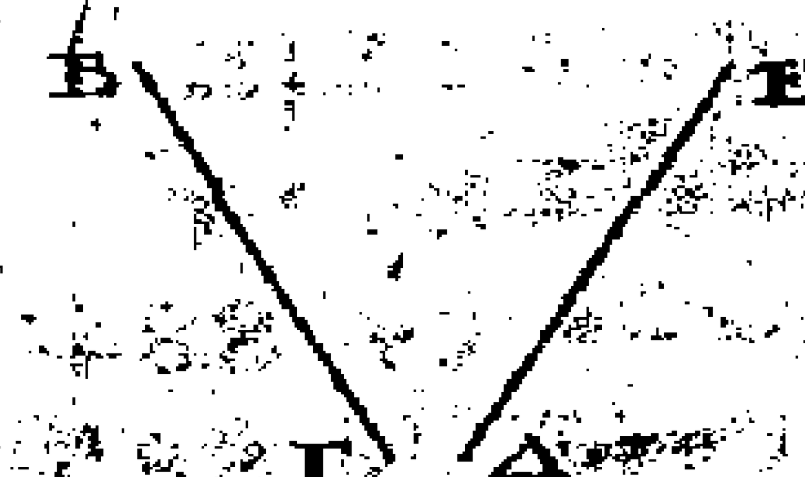
Σχ. 8.



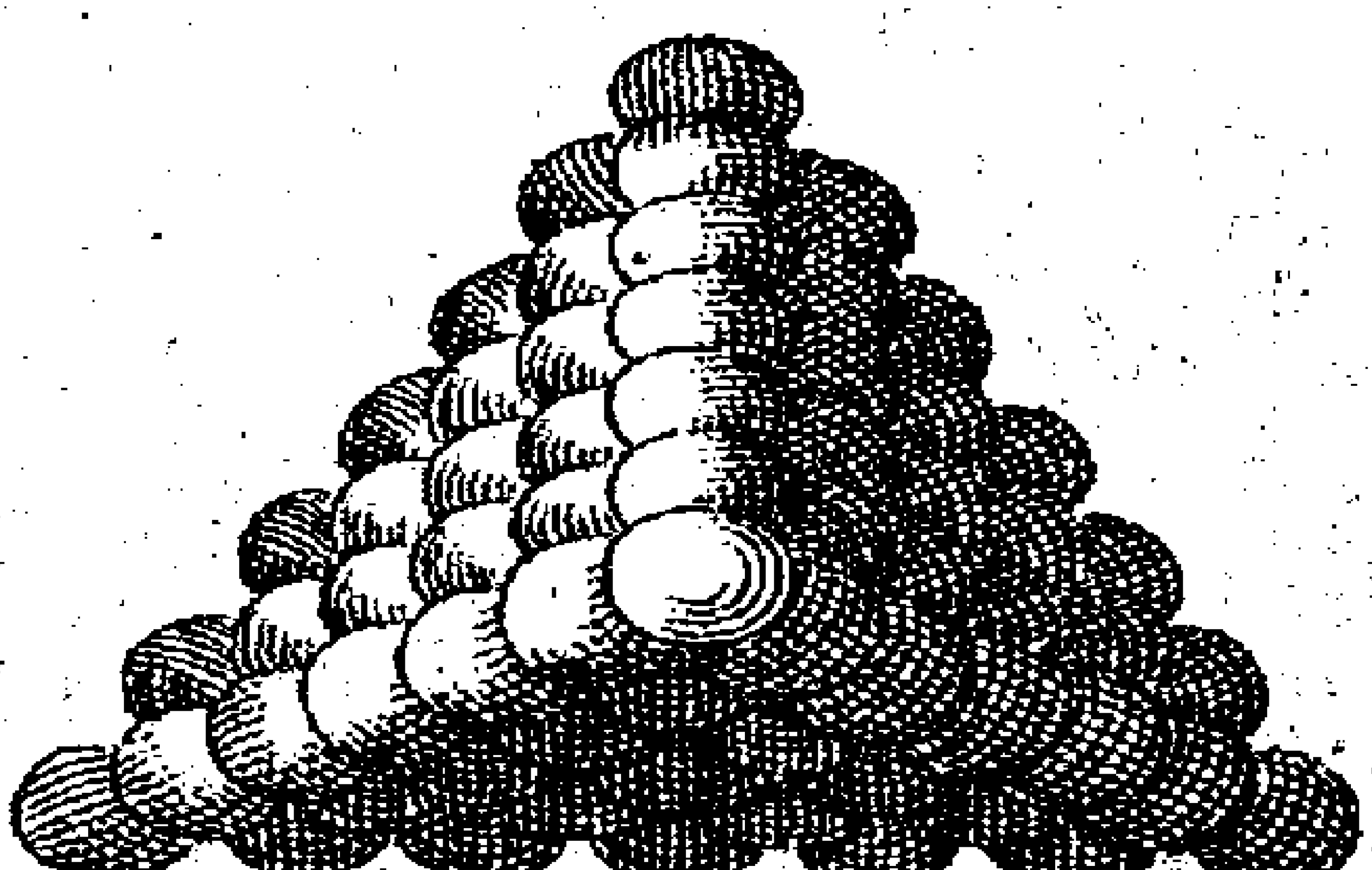
Σχ. 9.



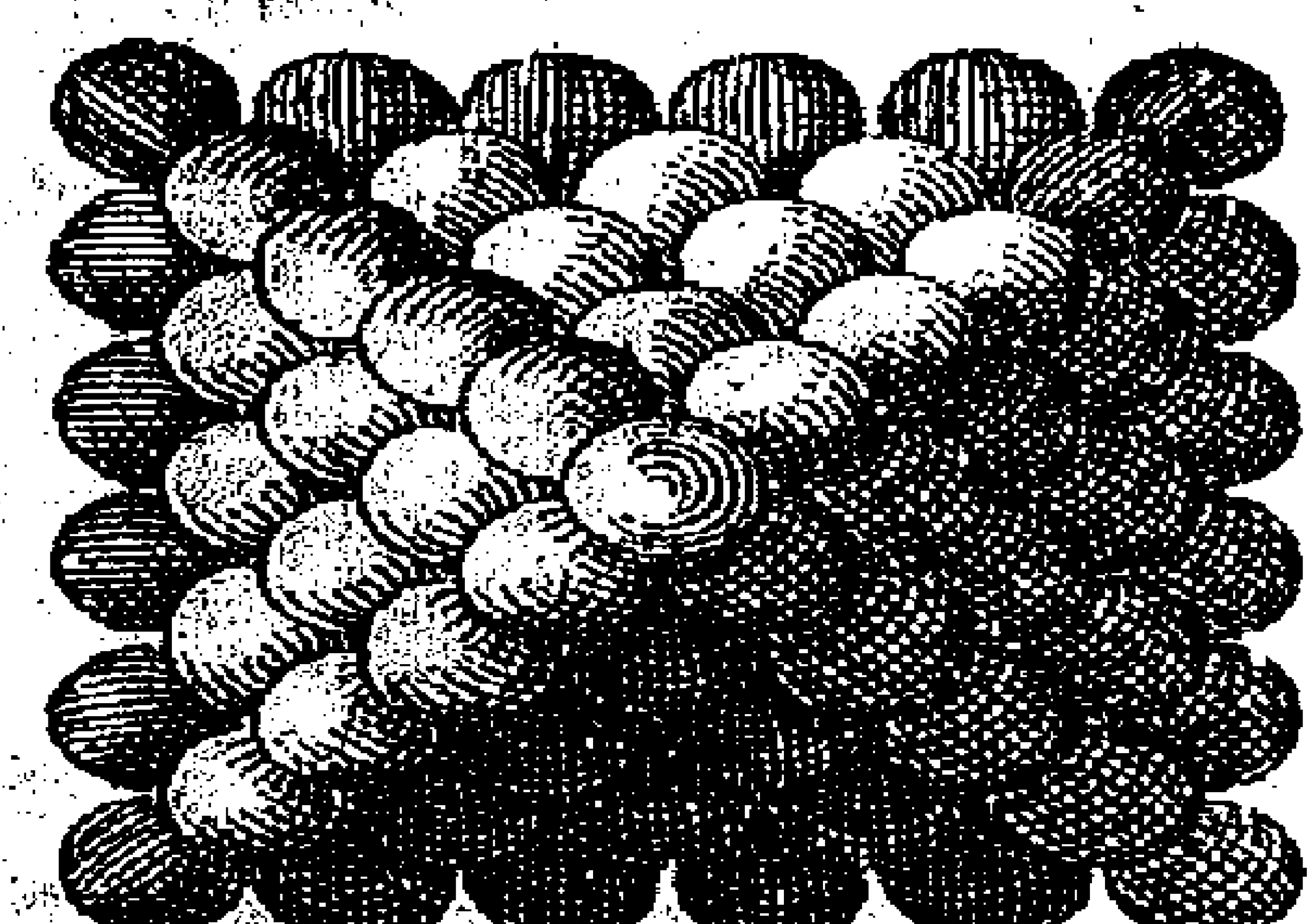
Σχ. 10.



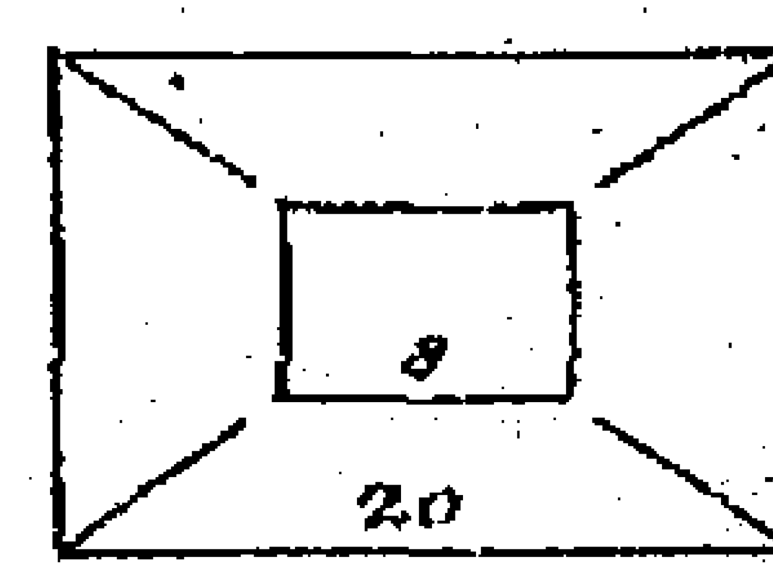
Σχ. 11.



Σχ. 12.

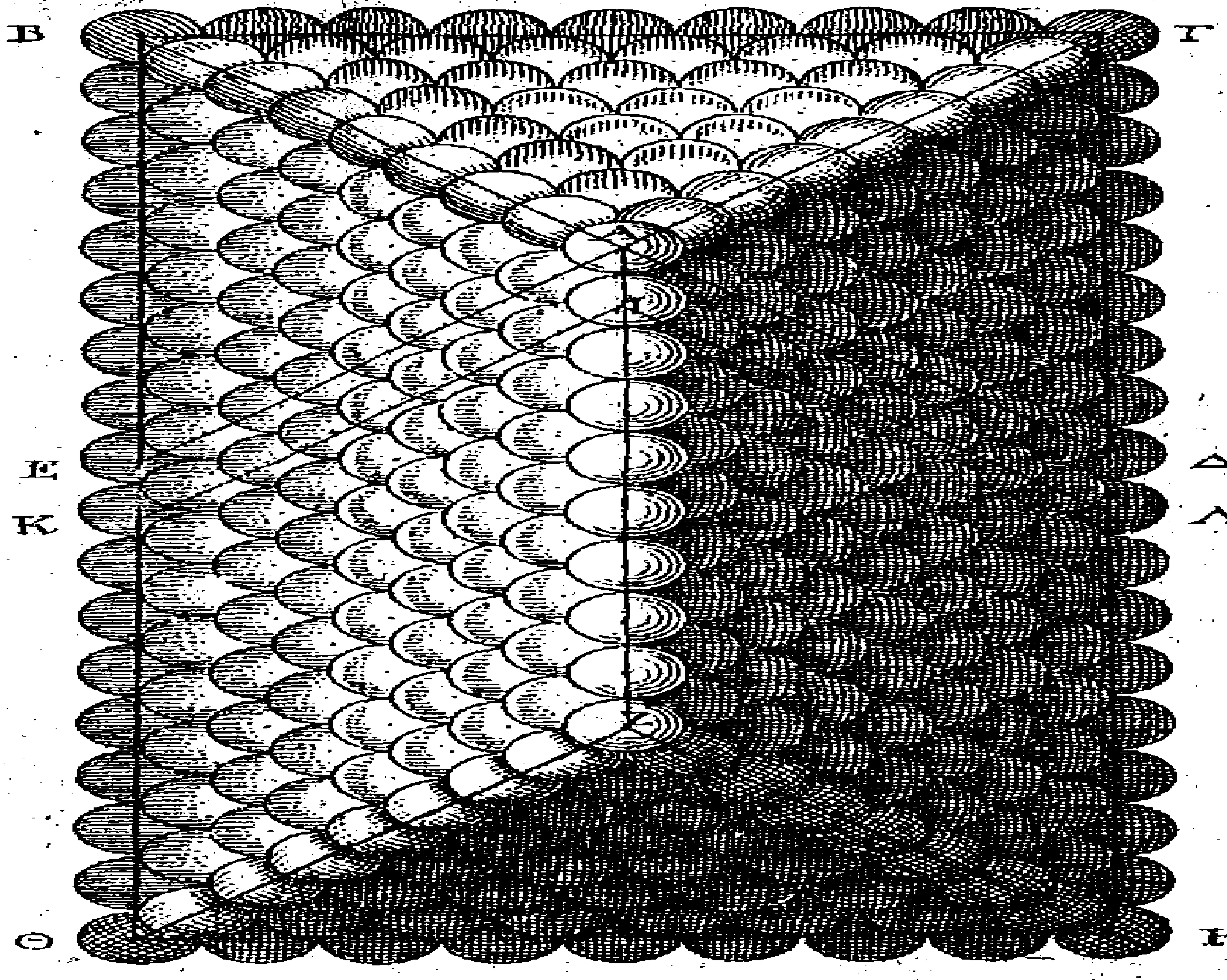


Σχ. 13.



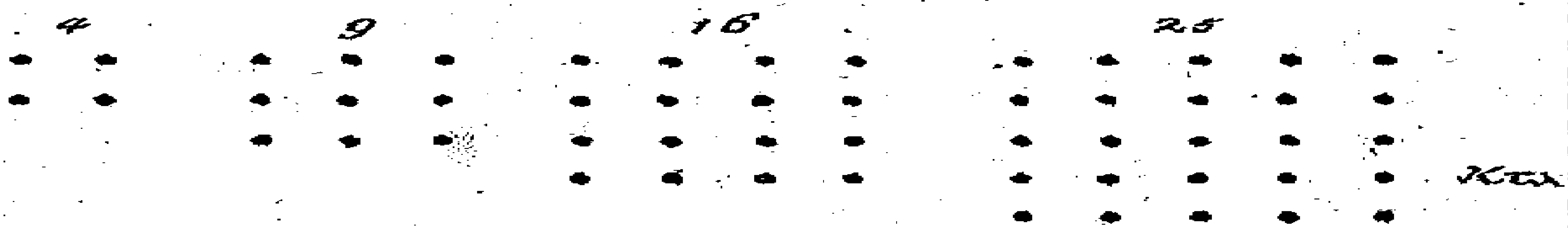
Σχ. 14.

Σχ. 15.

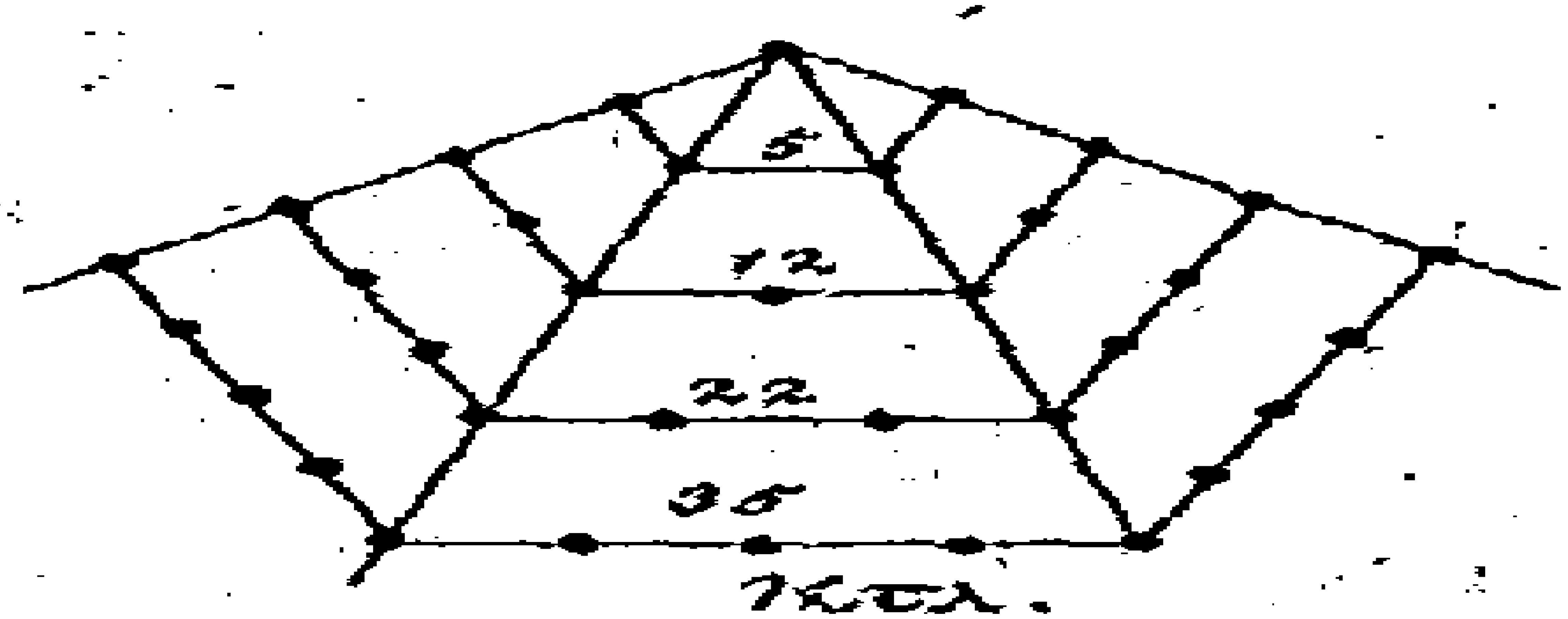


Ἀριθμοὶ Τρίγωνοι.

Ἀριθμοὶ Τετράγωνοι.



Ἀριθμοὶ Πεντάγωνοι.



Ἀριθμοὶ ἑξάγωνοι.