I



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΝΗΠΙΑΓΩΓΩΝ

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΙΣΧΥΣΗ ΤΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ

Πήττα Γεωργία
ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2026

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή

1. Ξανθή Βαμβακούση, Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων (Επιβλέπουσα)
2. Μαρία Καλδρυμίδου, Ομότιμη Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
3. Κωνσταντίνος Π. Χρήστου, Επίκουρος Καθηγητής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή

1. Ξανθή Βαμβακούση, Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων (Επιβλέπουσα)
2. Μαρία Καλδρυμίδου, Ομότιμη Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
3. Κωνσταντίνος Π. Χρήστου, Επίκουρος Καθηγητής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
4. Σόνια Καφούση, Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
5. Χαράλαμπος Λεμονίδης, Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
6. Πολυξένη Παγγέ, Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
7. Κωνσταντίνος Τάτσης, Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Η συλλογή και η επεξεργασία των δεδομένων προσωπικού χαρακτήρα που υποβάλλονται πραγματοποιείται σύμφωνα με τα οριζόμενα στις διατάξεις του Ν.4624/19 και του Κανονισμού (ΕΕ)2016/2019. Το Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων συλλέγει και επεξεργάζεται τα δεδομένα προσωπικού χαρακτήρα αποκλειστικά στο πλαίσιο της υλοποίησης του σκοπού της παρούσας διαδικασίας. Για το χρονικό διάστημα που τα προσωπικά δεδομένα θα παραμείνουν στη διάθεση του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων το υποκείμενο έχει τη δυνατότητα να ασκήσει τα δικαιώματά του σύμφωνα με τους όρους του Γενικού Κανονισμού Προστασίας Δεδομένων Προσωπικού Χαρακτήρα 2016/679 (Ε.Ε.) και τα οριζόμενα στα άρθρα 34 και 35 Ν. 4624/2019. Υπεύθυνη Προσωπικών Δεδομένων του Ιδρύματος είναι η κα. Σταυρούλα Σταθαρά (email: dpo@uoi.gr).

Στα παιδιά της οικογένειας

που γέμισαν τις μέρες μας με φως:

τη Λυδία, την Αγγελική Θωμαΐδα και τον Βασίλη

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η ολοκλήρωση της παρούσας διδακτορικής διατριβής αποτελεί το επιστέγασμα μιας μακράς και απαιτητικής διαδρομής, κατά την οποία είχα την τύχη να έχω δίπλα μου ανθρώπους που με στήριξαν, με ενθάρρυναν και συνέβαλαν, ο καθένας με τον δικό του τρόπο, στην ολοκλήρωση αυτής της προσπάθειας.

Πρώτα απ' όλα, θα ήθελα να εκφράσω την πιο βαθιά και ειλικρινή μου ευγνωμοσύνη στον σύζυγό μου, Νίκο, για τη διαρκή στήριξή του, την υπομονή, την κατανόηση και την πίστη του σε εμένα όλα αυτά τα χρόνια. Η παρουσία του υπήρξε για μένα ένα σταθερό σημείο αναφοράς, ιδιαίτερα στις στιγμές της αμφιβολίας και των δυσκολιών που συνάντησα. Τον ευχαριστώ που στάθηκε δίπλα μου σε κάθε βήμα αυτής της πορείας, που μοιράστηκε μαζί μου τις αγωνίες και τις χαρές μου και που με ενθάρρυνε να συνεχίσω μέχρι το τέλος. Μαζί με τον γιο μας, Βασίλη, ο οποίος με τον δικό του ήρεμο τρόπο συνόδευσε τα τελευταία βήματα αυτής της διαδρομής, υπήρξαν η δύναμη που χρειαζόμουν για να συνεχίσω όταν όλα έμοιαζαν ακατόρθωτα.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στην επιβλέπουσα της διδακτορικής μου διατριβής, την Καθηγήτρια κ. Ξανθή (Ξένια) Βαμβακούση, για την επιστημονική καθοδήγηση, την εμπιστοσύνη και τη συνεχή υποστήριξή της σε όλα τα στάδια της εκπόνησης της παρούσας διατριβής. Ως γνήσια συνοδοιπόρος σε αυτό το ταξίδι, δεν μπορώ παρά να αναγνωρίσω τη συμβολή της, τόσο στην οργάνωση όσο και στην υλοποίηση της έρευνας και την συγγραφή της παρούσας εργασίας. Οι παρατηρήσεις, οι υποδείξεις και ο γόνιμος επιστημονικός διάλογος συνέβαλαν ουσιαστικά στην εξέλιξή μου ως ερευνήτριας.

Θερμές ευχαριστίες απευθύνω και στα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής. Ιδιαίτερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Ομότιμη Καθηγήτρια κ. Μαρία Καλδρυμίδου, καθηγήτριά μου ήδη από τον πρώτο κύκλο των σπουδών μου, για το επιστημονικό της ενδιαφέρον και τη συμβολή της στην πορεία της παρούσας εργασίας, καθώς και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Κωνσταντίνο Π. Χρήστου για τη συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή, αλλά και για τις πολύτιμες συζητήσεις, τις εύστοχες παρατηρήσεις και τις υποδείξεις του.

Θερμές ευχαριστίες οφείλω και στα μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής. Θα ήθελα να ευχαριστήσω την Καθηγήτρια κ. Σόνια Καφούση για τον χρόνο που αφιέρωσε στη διδακτορική μου διατριβή, τον Καθηγητή κ. Χαράλαμπο Λεμονίδη για την πολύτιμη βοήθεια του, μιας και μοιράστηκε τις σκέψεις του για τα επίπεδα κατανόησης της έννοιας του κλάσματος, την Καθηγήτρια κ. Πολυξένη Παγγέ που είναι δίπλα μου και σε αυτό το βήμα και τον Καθηγητή κ. Κωνσταντίνο Τάτση για τη συμμετοχή του στην επταμελή εξεταστική επιτροπή. Η συμβολή σας είναι πραγματικά πολύ σημαντική για την επιστημονική αξιολόγηση της παρούσας διατριβής.

Ακόμη, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στη συνάδελφο και πρώτο μου ερευνητικό ταίρι, την κ. Λητώ Αθανασίου, για όλες εκείνες τις έρευνες μέσα και έξω από τη σχολική μας τάξη, αλλά και στη «συμφοιτήτριά» μου, κ. Θεοδώρα Αυγέρη, για όλα εκείνα τα τηλεφωνήματα εμψύχωσης και τα βράδια με ανταλλαγές αρχείων και διορθώσεις.

Οι γονείς μου και κυρίως η μητέρα μου, η οικογένειά μου και οι φίλοι μου στάθηκαν δίπλα μου και συνέβαλαν, ο καθένας με τον δικό του τρόπο, άμεσα ή έμμεσα, στην ολοκλήρωση αυτής της μακράς διαδρομής. Γι’ αυτό, εκφράζω σε όλους την ειλικρινή και βαθιά μου ευγνωμοσύνη.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους που συνέβαλαν στη συλλογή των δεδομένων της παρούσας έρευνας: τους διευθυντές, τους συναδέλφους και τους γονείς που με προθυμία και εμπιστοσύνη διευκόλυναν την υλοποίηση της ερευνητικής διαδικασίας, αλλά, πάνω απ’ όλα, τα μικρά μου παιδιά, που με υπομονή, χαρά και ενθουσιασμό υποδέχονταν κάθε φορά στην τάξη μας τις Παμ και απαντούσαν στα αμέτρητα «γιατί» μου, συμβάλλοντας με τον δικό τους μοναδικό τρόπο στην πραγματοποίηση αυτής της έρευνας.

Τέλος, θα ήθελα να σημειώσω πως η προβληματική και η οργάνωση της παρούσας έρευνας είναι η τρέχουσα μορφής μιας μακροπρόθεσμης συλλογικής προσπάθειας (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018; Πήττα κ.ά., 2019; Pitta et al., 2021; Vamvakoussi, 2015; Vamvakoussi et al., 2018, 2019; Vraka, 2018) που προηγήθηκε της παρούσας διατριβής, αλλά αποσαφηνίστηκε και εξειδικεύτηκε στο πλαίσιό της. Επιπλέον, για την παρούσα εργασία έχει γίνει χρήση εφαρμογών τεχνητής νοημοσύνης (AI) για αναζήτηση και οργάνωση της

βιβλιογραφίας, γλωσσική επιμέλεια του κειμένου και έλεγχο αριθμητικών στοιχείων των πινάκων.

Περιεχόμενα

Περίληψη **1**

Abstract **3**

Εισαγωγή **5**

Κεφάλαιο 1: Θεωρητικό Υπόβαθρο **8**

1.1 Η πολλαπλασιαστική σκέψη και κρίσιμα χαρακτηριστικά της 8

1.2 Πρώιμες ικανότητες πολλαπλασιαστικής σκέψης 17

1.3 Πολλαπλασιαστική σκέψη και πρωτοσχολική εκπαίδευση 25

1.4 Μελέτες παρέμβασης για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης στην πρωτοσχολική ηλικία 29

Κεφάλαιο 2: Θεωρητική και Μεθοδολογική Οργάνωση της Έρευνας **40**

2.1 Βασικές παραδοχές και η προβληματική της έρευνας 40

2.2. Στόχος και σκοποί της έρευνας – κεντρικά ερευνητικά ερωτήματα 45

2.3 Μεθοδολογική οργάνωση της έρευνας 45

2.4 Επισκόπηση των Κύκλων της έρευνας σχεδιασμού 48

2.5 Θεωρητική οργάνωση του σχεδιασμού και της υλοποίησής του 49

Κεφάλαιο 3: Κύκλος Ι- Σχεδιασμός, Υλοποίηση και Αναδρομική Ανάλυση **54**

3.1 Σχεδιασμός Δραστηριοτήτων 54

3.1.1 Εισαγωγική δραστηριότητα (Δ1 - Πολλαπλασιαστική Σύγκριση) 54

3.1.2 Δεύτερη δραστηριότητα (Δ2 – Αναλογικά προβλήματα) 56

Διαδικασίες κατασκευής πολλαπλασίου (Α) 56

Διαδικασίες κατασκευής υποπολλαπλάσιου (ποσότητα β) 58

3.1.3 Τρίτη δραστηριότητα (Δ3 – Πολλαπλασιαστική αλλαγή) 60

3.2. Τοπικές υποθέσεις και ερευνητικά ερωτήματα 62

3.3. Υλοποίηση: Μέθοδος 63

3.3.1 Ερευνητικός σχεδιασμός -Συνολική διαδικασία 63

3.3.2 Συμμετέχοντα παιδιά 64

3.3.3 Ερευνητικό Εργαλείο 65

Διαδικασία χορήγησης 68

3.3.4 Συλλογή, οργάνωση και ανάλυση δεδομένων 68

3.4. Αποτελέσματα 69

Κανονικότητα και πολλαπλάσια (Τ.Υ.1) 69

Υποπολλαπλάσια και το «μισό» ως εμπόδιο (Τ.Υ.1 - Τ.Υ.3) 70

Στρατηγικές ισομερισμού στις διακριτές ποσότητες (Τ.Υ.2) 71

Η διαδικασία της Έμμεσης Ανάλυσης στις συνεχείς ποσότητες (Ε.Ε.1) 72

Η διαδικασία Σύνθεσης με ενδιάμεσο βήμα (Ε.Ε.1) και η λέξη «ομάδα». 76
Προέλεγχος- Μεταέλεγχος (διατήρησης) 78
Έργο Π («Ποια παίκτρια είναι;») 79
Προβλήματα των κατηγοριών Α και Β (διαφορετικά από την παρέμβαση) 83
Επιδόσεις 83
Διαδικασίες/Στρατηγικές 87
Σχέσεις/Όροι 93
3.5 Αναδρομική Ανάλυση, Συζήτηση και Συμπεράσματα 97
Κεφάλαιο 4: Κύκλος ΙΙ 102
4.1. Προοπτική ανάλυση - Επανασχεδιασμός 102
4.1.1 «Πολλά ως ένα»: Αναπαραστάσεις σύνθετων μονάδων 103
4.1.2 «Πολλά προς ένα» / «Ένα προς πολλά»: Αναπαράσταση του λόγου 104
4.1.3 Η διαδικασία *Έμμεσης Ανάλυσης* με το εργαλείο του λόγου 106
4.1.4 Η διαδικασία *Σύνθεσης* με το εργαλείο του λόγου 107
4.1.5 Εισαγωγή και διαχείριση του εργαλείου του λόγου και των διαδικασιών 108
4.2 Τοπικές υποθέσεις και ερευνητικά ερωτήματα 110
4.3 Υλοποίηση: Μέθοδος 112
4.3.1 Συνολική Διαδικασία 112
4.3.2 Συμμετέχοντα παιδιά 113
4.3.3 Ερευνητικό Εργαλείο 113
Διαδικασία χορήγησης 118
4.3.4 Συλλογή, οργάνωση και ανάλυση δεδομένων 118
Κεφάλαιο 5: Κύκλος ΙΙ Αποτελέσματα 120
5.1 Επιδόσεις και ύπαρξη ή μη τεκμηρίωσης 120
5.1.1 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα 120
Προέλεγχος 121
Μεταέλεγχος: Επιδόσεις 122
Μεταέλεγχος: Τεκμηρίωση 124
5.1.2 Ατομικά αποτελέσματα 127
5.1.3 Ανάλυση λαθών 129
5.1.4 Σύνοψη των ευρημάτων και σύνδεση με την παρέμβαση 138
Τα προνήπια στην παρέμβαση 139
5.2 Εφαρμοσμένες διαδικασίες 145
5.2.1 Διαδικασίες για το ζητούμενο Α 145
5.2.2 Διαδικασίες για το ζητούμενο β 151

5.2.3 Διαδικασίες για το ζητούμενο ν 159
5.2.4 Χρήση εμπράγματων αναπαραστάσεων κατά την επίλυση 162
5.2.5 Σύνοψη και σύνδεση με την παρέμβαση 166
Επαναλαμβανόμενη 1-1 αντιστοίχιση και στρατηγική συντόμευσης. 168
«Πολλές βιταμίνες»: Δύο-προς-ένα αντιστοίχιση 169
Διακρίνοντας ομάδες 171
Η Έμμεση Ανάλυση στην παρέμβαση 172
Επίλυση προβλήματος με ζητούμενο το πολλαπλάσιο 174
Το εργαλείο του λόγου και το δομημένο υλικό των σύνθετων μονάδων 175
5.3. Λεκτικές περιγραφές ενεργειών 176
5.3.1 Ενέργειες για το ζητούμενο Α 177
5.3.2 Ενέργειες για το ζητούμενο β 178
5.3.3. Ενέργειες για το ζητούμενο ν 182
5.3.4 Σύνοψη και σύνδεση με την παρέμβαση 187
Αντίστροφες ενέργειες στην παρέμβαση 188
5.4 Λεκτικές περιγραφές σχέσεων 190
5.4.1. Το ζητούμενο Α σε σχέση με το δεδομένο β 191
5.4.2 Το ζητούμενο β σε σχέση με το δεδομένο Α 203
5.4.3 Περιγραφές αναλογικών σχέσεων 218
5.4.4 Σύνοψη και σύνδεση με την παρέμβαση 218
Κανονικότητες, όροι και το β ως «ένα από τα ν μέρη (του Α)» 219
5.5 Αναδρομική Ανάλυση 222
5.5.1 Επιδόσεις 224
5.5.2 Τρόποι επίλυσης και λεκτικές περιγραφές ενεργειών 225
5.5.3 Λεκτικές περιγραφές σχέσεων και χρήση όρων 227
5.5.4. Τοπικές υποθέσεις, ερευνητικά ερωτήματα και περιορισμοί της έρευνας 230
6. Γενική Συζήτηση και Συμπεράσματα 236
6.1 Είναι εφικτοί ο στόχος και ο σκοπός της έρευνας; 238
6.2. Είναι ο σχεδιασμός στο πλαίσιο των δυνατοτήτων των παιδιών του Νηπιαγωγείου; 240
6.3 Τι επίδραση έχει ο σχεδιασμός στις ικανότητες πολλαπλασιαστικής σκέψης των μικρών παιδιών; 241
6.4. Περιορισμοί και περαιτέρω έρευνα 243
Παράρτημα 1 245
Παρουσίαση ιστορίας πλαισίου των δραστηριοτήτων 245
Δραστηριότητα 1 245
Δραστηριότητα 2 245

Δραστηριότητα 3.....246
Παράρτημα 2 249
Περιγραφή εκφωνήσεων έργων προελέγχου και μεταελέγχου 249
Παράρτημα 3 252
Περιγραφή έργων ανά ημέρα για τον Κύκλο Ι εφαρμογής του προγράμματος 252
Παράρτημα 4 271
Περιγραφή έργων ανά ημέρα για τον Κύκλο ΙΙ εφαρμογής του προγράμματος 271
Βιβλιογραφία..... 301
Ελληνική Βιβλιογραφία 301
Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία.....302
Ηλεκτρονικές Πηγές 315

Ευρετήριο Πινάκων

Πίνακας 1: Κωδικοποίηση έργων προελέγχου και μεταελέγχου για τον Κύκλο Α εφαρμογής του προγράμματος 67
Πίνακας 2: Αποκρίσεις στο έργο Π («Ποια παίκτρια είναι;») ανά παιδί, ανά υποέργο (Π1, Π2, Π3) και ανά αριθμητική τιμή του ν (2,3, 4) 82
Πίνακας 3: Σωστές (1) και μη (0) αποκρίσεις ανά παιδί, για κάθε ζητούμενο (Α ή β) ξεχωριστά, ανά τύπο προβλήματος (Α / Β), ανά είδος ποσότητας (διακριτή/συνεχής) και ανά αριθμητική τιμή του ν (2, 3, 4), στον μεταέλεγχο (διατήρησης). 86
Πίνακας 4: Συχνότητα κατηγορίας περιγραφής σχέσης, ανά παιδί και ανά ζητούμενο 96
Πίνακας 5: Κατηγοριοποίηση προβλημάτων προελέγχου και μεταελέγχου 117
Πίνακας 6: Συχνότητα και σχετική συχνότητα των σωστών απαντήσεων στο σύνολο των απαντήσεων ανά ζητούμενο (Α, β, ν), ανά είδος ποσότητας (διακριτή, συνεχής), και αριθμητική τιμή του ν (2, 3, 4). 123
Πίνακας 7: Συχνότητα και σχετική συχνότητα των κατηγοριών τεκμηρίωσης των σωστών απαντήσεων ανά ζητούμενο (Α, β, ν) και ανά ποσότητα (συνεχής, διακριτή) 125
Πίνακας 8: Συχνότητα και σχετική συχνότητα των κατηγοριών τεκμηρίωσης των σωστών απαντήσεων ανά ζητούμενο (Α, β, ν) και ανά τιμή του ν (2, 3, 4).....126
Πίνακας 9: Σύνολο σωστών και τεκμηριωμένων απαντήσεων ανά παιδί και κατηγορία τεκμηρίωσης 128
Πίνακας 10: Συχνότητα των λανθασμένων απαντήσεων στον μεταέλεγχο ανά ζητούμενο, τιμή του ν (2, 3, 4) και τύπο προβλήματος 130

Πίνακας 11: Συχνότητα εμφάνισης τύπου λαθών ανά παιδί και ανά ζητούμενο που απαντήθηκε λανθασμένα (Α*, β*, ν*)..... 136
Πίνακας 12.: Συχνότητα και η σχετική συχνότητα των εφαρμοσμένων διαδικασιών για το ζητούμενο Α ανά ν (2, 3, 4) και ανά είδος ποσότητας (διακριτή, συνεχής)..... 148
Πίνακας 13: Συχνότητα χρήσης διαδικασιών για το ζητούμενο Α ανά παιδί..... 150
Πίνακας 14:. Συχνότητα και σχετική συχνότητα των εφαρμοσμένων διαδικασιών για το ζητούμενο β ανά ν (2, 3, 4) και είδος ποσότητας (συνεχής, διακριτή)..... 155
Πίνακας 15: Συχνότητα εφαρμοσμένων διαδικασιών ανά παιδί για το ζητούμενο β..... 157
Πίνακας 16: Συχνότητα εμφάνισης των διαδικασιών ανά παιδί για το ζητούμενο ν..... 161
Πίνακας 17: Ατομικό προφίλ χρήσης εμπράγματων αναπαραστάσεων στο σύνολο των σωστών και τεκμηριωμένων απαντήσεων στα 46 προβλήματα του μεταελέγχου και χρήσης του εργαλείου του λόγου. 163
Πίνακας 18: Λεκτικές περιγραφές ενεργειών για το ζητούμενο β, ανά είδος ποσότητας. 179

Ευρετήριο πλαισίου παραδειγμάτων

Πλαίσιο παραδείγματος 1: Παραδείγματα 1-1 και 2-1 αντιστοίχισης..... 87
Πλαίσιο παραδείγματος 2: Παραδείγματα διαχωρισμού διακριτών ποσοτήτων σε ομάδες 88
Πλαίσιο παραδείγματος 3: Παραδείγματα εφαρμογής της διαδικασίας της Έμμεσης Ανάλυση 89
Πλαίσιο παραδείγματος 4: Υπολογισμός του διπλάσιου με πρόσθεση 91
Πλαίσιο παραδείγματος 5: Υπολογισμός του τετραπλάσιου των «δύο» από τον Άρη 92
Πλαίσιο παραδείγματος 6: Παραδείγματα κατασκευής του Α* με σωστό ν και λανθασμένο β (β*) 132
Πλαίσιο παραδείγματος 7: Παραδείγματα κατασκευής του Α* με σωστό β και λανθασμένο ν (ν*). 133
Πλαίσιο παραδείγματος 8: Παράδειγμα αποδοχής του λανθασμένου β* μετά από έλεγχο (νxβ* ≠ Α) 134
Πλαίσιο παραδείγματος 9: Παράδειγμα αποδοχής του λανθασμένου β* χωρίς έλεγχο (νxβ* ≠ Α) 134
Πλαίσιο παραδείγματος 10: Παράδειγμα λάθους στο ν (ν*) για το ζητούμενο β (ν*xβ≠Α)..... 135
Πλαίσιο παραδείγματος 11: Παράδειγμα λάθους όταν το ζητούμενο είναι το ν..... 136
Πλαίσιο παραδείγματος 12: Παραδείγματα σύνθεσης του Α με ΕΒ..... 146
Πλαίσιο παραδείγματος 13: Παραδείγματα άμεσης σύνθεσης του Α, για ν=3..... 147
Πλαίσιο παραδείγματος 14:Παραδείγματα της διαδικασίας Εκτίμησης του Α και Μέτρησης με 1β 147
Πλαίσιο παραδείγματος 15: Παραδείγματα έμμεσης ανάλυσης με ενδιάμεσο βήμα..... 151
Πλαίσιο παραδείγματος 16: Παραδείγματα Έμμεσης Ανάλυσης με ν αντίγραφα του β 152

Πλαίσιο παραδείγματος 17: Παραδείγματα έμμεσης ανάλυσης ποσότητας μέσω μέτρησης ποσότητας με ένα αντίγραφο του β 152
Πλαίσιο παραδείγματος 18: Παραδείγματα άμεσης ανάλυσης με επαναλαμβανόμενη 1-1 αντιστοίχιση 153
Πλαίσιο παραδείγματος 19: Παράδειγμα άμεσης ανάλυσης με αντιστοίχιση «1 προς β» 153
Πλαίσιο παραδείγματος 20: Παράδειγμα Άμεσης ανάλυσης με αντιστοίχιση «1 προς β» και διόρθωση 153
Πλαίσιο παραδείγματος 21: Παραδείγματα άμεσης ανάλυσης του Α 154
Πλαίσιο παραδείγματος 22:Παραδείγματα Άμεσης ανάλυσησε νβ με διόρθωση 154
Πλαίσιο παραδείγματος 23: Παράδειγμα ανάλυσης με επαναλαμβανόμενη αντιστοίχιση 1-β 159
Πλαίσιο παραδείγματος 24 : Παράδειγμα ανάλυσης ανάλυση του Α σε β-άδες 160
Πλαίσιο παραδείγματος 25: Παραδείγματα μέτρησης του Α με ν αντίγραφα του β 160
Πλαίσιο παραδείγματος 26: Παραδείγματα μέτρησης του Α με ένα αντίγραφο του β 161
Πλαίσιο παραδείγματος 27: Παραδείγματα μη χρήσης εμπράγματου υλικού 165
Πλαίσιο παραδείγματος 28: Παραδείγματα περιγραφής σύνθεσης για το ζητούμενο Α 177
Πλαίσιο παραδείγματος 29: Παραδείγματα περιγραφής σύνθεσης/ ανάλυσης για το ζητούμενο Α. 178
Πλαίσιο παραδείγματος 30: Λεκτική περιγραφή ενέργειας σύνθεσης με εφαρμογή μέτρησης 178
Πλαίσιο παραδείγματος 31: Λεκτικές περιγραφές ανάλυσης για το ζητούμενο β 179
Πλαίσιο παραδείγματος 32: Λεκτικές περιγραφές σύνθεσης για το ζητούμενο β. 180

Ευρετήριο εικόνων

Εικόνα 1: Αναπαράσταση διαδικασίας κατασκευής πολλαπλασίου για τις διακριτές ποσότητες 57
Εικόνα 2: Αναπαράσταση διαδικασίας κατασκευής πολλαπλασίου για τις συνεχείς ποσότητες 57
Εικόνα 3: Αναπαράσταση της κατάστασης για την κατασκευή υποπολλαπλασίου στις διακριτές ποσότητες 59
Εικόνα 4: Αναπαράσταση διαδικασίας κατασκευής υποπολλαπλασίου για τις συνεχείς ποσότητες . 60
Εικόνα 5: Η «κλασματομηχανή» για διακριτές και συνεχείς ποσότητες 61
Εικόνα 6:Μοντέλο των τριών προβλημάτων για τις «ισοπληθείς ομάδες» με τα διαθέσιμα υλικά ... 65
Εικόνα 7: Αναπαραστάσεις σύνθετων μονάδων 103
Εικόνα 8: Μοντέλο της εμπράγματης αναπαράστασης του λόγου 1:3 / 3:1 104
Εικόνα 9: Προσδιορισμός και αναπαράσταση της σχέσης μεταξύ της «Παμ» και της «Τριπάμ» 105
Εικόνα 10: «Έμμεση Ανάλυση με Ενδιάμεσο Βήμα στις διακριτές ποσότητες 107
Εικόνα 11: «Σύνθεση με ενδιάμεσο βήμα»/ Ζητούμενο: Α (διακριτές και συνεχείς ποσότητες) 108

Περίληψη

Η παρούσα διδακτορική διατριβή διερευνά τη δυνατότητα συστηματικής υποστήριξης της πολλαπλασιαστικής σκέψης στο Νηπιαγωγείο, μέσω του σχεδιασμού, της υλοποίησης και της αξιολόγησης ενός εκπαιδευτικού προγράμματος που αντιμετωπίζει ενιαία διακριτές και συνεχείς ποσότητες. Η έρευνα εστιάζει σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις της μορφής Α=ν × β και αποσκοπεί στην ανάδειξη μαθησιακών εμπειριών που μπορούν να υποστηρίξουν τα παιδιά στην κατασκευή και διαχείριση πολλαπλασιαστικών σχέσεων, στην ανάπτυξη διαδικασιών για την κατασκευή πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων και στη μεταφορά σχετικών γνώσεων σε διαφορετικά πλαίσια. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στις θεμελιώδεις μαθηματικές ενέργειες του ισομερισμού, της μέτρησης με διαφορετικού τύπου μονάδες και της επανάληψης ποσότητας. Ακόμη, κεντρική θέση στον σχεδιασμό κατέχουν οι έννοιες «πολλά-προς-ένα» και «πολλά-ως-ένα», η κατασκευή και ο συντονισμός μονάδων και η διαχείριση σύνθετων μονάδων. Η επιλογή αυτή συνδέεται με την ανάγκη περιορισμού της ασυμμετρίας υπέρ του προσθετικού πεδίου που χαρακτηρίζει συχνά την πρώιμη μαθηματική εκπαίδευση. Τα κεντρικά ερευνητικά ερωτήματα αφορούν, αφενός, τη δυνατότητα σχεδιασμού και υλοποίησης ενός τέτοιου εκπαιδευτικού προγράμματος και, αφετέρου, τη συμβατότητα του σχεδιασμού με τις δυνατότητες των παιδιών του Νηπιαγωγείου και την επίδρασή του στις ικανότητές τους να διαχειρίζονται πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, διαδικασίες και σχέσεις. Η έρευνα οργανώθηκε ως έρευνα σχεδιασμού με θεματική εστίαση, μέσα από διαδοχικές φάσεις σχεδιασμού, υλοποίησης, αναδρομικής ανάλυσης και επανασχεδιασμού. Υλοποιήθηκαν δύο κύκλοι εφαρμογής. Στον πρώτο κύκλο συμμετείχαν οκτώ νήπια, ενώ στον δεύτερο το πρόγραμμα υλοποιήθηκε σε δύο ομάδες των έντεκα παιδιών, σε μικτή τάξη νηπίων και προνηπίων. Ο σχεδιασμός περιλάμβανε τρεις βασικές δραστηριότητες, οι οποίες αφορούσαν διαφορετικές πολλαπλασιαστικές καταστάσεις και υποστηρίζονταν από εμπράγματες αναπαραστάσεις και λεκτικά εργαλεία, με ιδιαίτερη έμφαση στις σύνθετες μονάδες και την αναπαράσταση του λόγου. Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε μέσω ατομικών συνεντεύξεων βασισμένων σε έργα κατά τον προέλεγχο και τον μεταέλεγχο, καθώς και μέσω παρατήρησης, σύγχρονης καταγραφής και βιντεοσκόπησης κατά την παρέμβαση. Τα παιδιά ενθαρρύνονταν να τεκμηριώνουν τις απαντήσεις τους και να περιγράφουν τις ενέργειες και τις σχέσεις που χρησιμοποιούσαν. Η ανάλυση περιλάμβανε ποσοτική και ποιοτική

επεξεργασία των επιδόσεων, των διαδικασιών και στρατηγικών επίλυσης, των λεκτικών περιγραφών ενεργειών, σχέσεων και της χρήσης μαθηματικών όρων. Η κωδικοποίηση οργανώθηκε με βάση κατηγορίες που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων, ενώ μέρος της πραγματοποιήθηκε από δύο κωδικοποιητές με σύγκριση και συζήτηση των αποκλίσεων. Η έρευνα παρέχει ενδείξεις ότι η συστηματική οργάνωση μαθησιακών εμπειριών γύρω από τη σχέση Α=ν × β, η σύνδεση διακριτών και συνεχών ποσοτήτων και η υποστήριξη της μοναδοποίησης, των σύνθετων μονάδων και των πολλαπλασιαστικών σχέσεων μπορούν να συμβάλουν στην ανάπτυξη σημαντικών πτυχών της πολλαπλασιαστικής σκέψης ήδη από το Νηπιαγωγείο. Ταυτόχρονα, τα ευρήματα αναδεικνύουν την ανάγκη για την οργάνωση μιας διαχρονικής μελέτης της πορείας των παιδιών με πιθανή ανάπτυξη του σχεδιασμού μας και επέκτασή του στις Α΄ και Β΄ τάξεις του Δημοτικού.

Λέξεις-κλειδιά: πολλαπλασιαστική σκέψη, Νηπιαγωγείο, έρευνα σχεδιασμού, πολλαπλασιαστικές σχέσεις, εκπαιδευτική παρέμβαση

Abstract

This dissertation investigates the possibility of systematically supporting the development of multiplicative thinking in kindergarten through the design, implementation, and evaluation of an educational program that addresses discrete and continuous quantities within a unified framework. The study focuses on multiplicative relationships of the form A = n × b and aims to identify learning experiences that can support children in constructing and managing multiplicative relationships, developing procedures for constructing multiples and submultiples, and transferring their knowledge across different contexts. Emphasis is placed on the fundamental mathematical actions of equal sharing, measurement using different types of units, and the iteration of a quantity. Furthermore, the concepts of "many-to-one" and "many-as-one", the coordination of units, and the use of composite units are of great importance for the design of our program. Our research questions concern, on the one hand, the possibility of designing and implementing such an educational program and, on the other hand, the compatibility of the design with kindergarten children's capabilities and its effect on their ability to manage multiplicative situations, implement procedures, and express multiplicative relationships. The research was organized as a topic specific research study, through successive phases of design, implementation, retrospective analysis, and redesign. Two implementation cycles were conducted. Eight kindergarten children participated in the first cycle, whilst in the second cycle the program was implemented in a mixed kindergarten and kindergarten classroom (two groups of eleven children). The design included three main activities addressing different multiplicative situations and supported by concrete representations and verbal tools, with particular emphasis on composite units and the representation of ratio. Data was collected through individual task-based interviews during the pre-test and post-test, as well as through observation, contemporaneous recording, and video recording during the intervention. Children were encouraged to justify their answers and describe their actions and the relationships between quantities they identified. The analysis involved both quantitative and qualitative examination of performance, problem-solving procedures and strategies, verbal descriptions of actions and relationships, and the use of terms for multiples and submultiples. Coding was organized based on categories that emerged from the analysis of the data, while part of the coding was conducted independently by two coders, with discrepancies subsequently compared and discussed. The findings

provide evidence that the systematic organization of learning experiences around the relationship A =n × b, the connection between discrete and continuous quantities, and the support of unitization, composite units, and multiplicative relationships can contribute to the development of important aspects of multiplicative thinking from the early years of kindergarten. At the same time, the findings highlight the need for a longitudinal study of children's development, with the potential further development of an instructional design and its extension to the first and second grade of primary school.

Keywords: multiplicative thinking, kindergarten, topic specific research study, multiplicative relationships, intervention program

Εισαγωγή

Η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης ξεκινάει για τα παιδιά από πολύ μικρή ηλικία και χρειάζεται από νωρίς υποστήριξη (Sarama & Clements, 2009; Vogler,2020). Ένα από τα βασικά πεδία ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης είναι το πολλαπλασιαστικό. Τα μικρά παιδιά συναντούν καταστάσεις που εμπεριέχουν στοιχεία από τη πολλαπλασιαστική σκέψη σε πάρα πολλές καταστάσεις της καθημερινής τους ζωής, μιας και εκείνα συχνά καλούνται να μοιραστούν τα μπισκότα ή τη σοκολάτα που έχουν με κάποιο άλλο παιδί ή και να συμμετέχουν σε δραστηριότητες όπως η μαγειρική που πρέπει να «υπολογίσουν» πόσο χυμό ή πόσο γάλα πρέπει να χρησιμοποιήσουν για να φτιάξουν τη διπλάσια ή τη μισή δόση από το γλυκό τους.

Η κατανόηση από τα μικρά παιδιά πολλαπλασιαστικών σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων έχει πολύ μεγάλη σημασία μιας και αποτελεί τη βάση για την κατάκτηση εννοιών που σχετίζονται με ένα μεγάλο εύρος αλγεβρικών και γεωμετρικών εννοιών, όπως, για παράδειγμα οι ρητοί αριθμοί (Boyer & Levine, 2008).

Αυτός είναι και ο λόγος που γίνονται μελέτες για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης αλλά και για τους τρόπους ενίσχυσης της μέσω της διδασκαλίας. Οι μελέτες αυτές, ήδη από τη δεκαετία του ‘80 αφορούν τόσο τις βάσεις της πολλαπλασιαστικής σκέψης, όσο και τις ικανότητες και στρατηγικές των μικρών παιδιών σε πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, ενώ σχεδιάζονται και εφαρμόζονται πιθανές διδακτικές προσεγγίσεις για την ενίσχυση της πολλαπλασιαστικής σκέψης στις μικρές ηλικίες (π.χ., Confrey, 1995; Hunting& Davis, 1991; Desforges & Desforges, 1980; Kouba, 1989; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Nunes & Bryant, 1996; Sophian, 2004). Όλες αυτές οι έρευνες έχουν προκαλέσει αλλαγές στα αναλυτικά προγράμματα για την πρωτοσχολική ηλικία σε διεθνές επίπεδο (π.χ., Clements, Sarama, & DiBiase, 2004), ενώ φαίνεται να αρχίζουν να επηρεάζουν και την οργάνωση του ελληνικού αναλυτικού προγράμματος (βλ. Αναλυτικό Πρόγραμμα, 2022).

Η ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης συναντά συχνά δυσκολίες, τις οποίες πολλοί ερευνητές (π.χ., Sophian, 2004; Vamvakoussi, et al., 2018) αποδίδουν στον τρόπο με τον οποίο πραγματεύονται οι έννοιες και καταστάσεις του πολλαπλασιαστικού πεδίου (Vergnaud, 2019) στην εκπαίδευση. Τα παιδιά διδάσκονται ήδη από το νηπιαγωγείο τους

φυσικούς αριθμούς και τις ιδιότητες τους και δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην κατάκτηση των προσθετικών σχέσεων που αναπτύσσονται μεταξύ τους, γεγονός που δεν ισχύει και για την διδασκαλία πολλαπλασιαστικών σχέσεων μεταξύ αριθμών και ποσοτήτων (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018; Βράκα, 2017). Συχνά δε, ο πολλαπλασιασμός διδάσκεται ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, κάτι που εμποδίζει ακόμη περισσότερο τα παιδιά να παρατηρήσουν τις ενυπάρχουσες πολλαπλασιαστικές σχέσεις.

Η ασυμμετρία αυτή δημιουργεί πολλά προβλήματα στην ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης. Οι γνώσεις που τα παιδιά διαθέτουν σχετικά με τους φυσικούς αριθμούς και τις προσθετικές σχέσεις δεν μπορούν να υποστηρίξουν αποτελεσματικά την κατάκτηση εννοιών και καταστάσεων του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου (π.χ., τους ρητούς αριθμούς και τις πράξεις τους, Vamvakoussi et al., 2018). Για την αποφυγή τέτοιων ασυμμετριών σημαντικό ρόλο παίζει η διδασκαλία με στόχο την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικών σκέψης, ήδη από την πρωτοσχολική ηλικία.

Η παρούσα έρευνα αξιοποιεί τα θεωρητικά, εμπειρικά και εκπαιδευτικά αυτά δεδομένα στο σχεδιασμό ενός εκπαιδευτικού προγράμματος με στόχο να υποστηριχθεί η ικανότητα των παιδιών να πραγματευθούν πολλαπλασιαστικές σχέσεις.

Το πρώτο κεφάλαιο της εργασίας αυτής παρουσιάζει την βιβλιογραφική ανασκόπηση που αποτέλεσε τη βάση για την ανάπτυξη της παρούσας έρευνας. Πιο συγκεκριμένα, γίνεται μια προσπάθεια ορισμού της πολλαπλασιαστικής σκέψης και παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά της (§1.1). Στη συνέχεια, παρουσιάζονται έρευνες που εντοπίζουν πρώιμες ικανότητες πολλαπλασιαστικής σκέψης σε μικρά παιδιά (§1.2) και συζητάται η θέση της πολλαπλασιαστικής σκέψης στην πρωτοσχολική εκπαίδευση και τα αναλυτικά προγράμματα τόσο της Ελλάδας όσο και άλλων χωρών. Εντοπίζεται η ασυμμετρία υπέρ του προσθετικού πεδίου στα πρώτα σχολικά χρόνια των παιδιών και συζητώνται οι συνέπειές της (§1.3). Τέλος, παρουσιάζονται μελέτες παρέμβασης για την ανάπτυξη πολλαπλασιαστικής σκέψης σε παιδιά νηπιαγωγείου και πρώτων τάξεων του δημοτικού με στόχο να εντοπιστούν ερευνητικά κενά τα οποία έχει ως στόχο να καλύψει η παρούσα έρευνα αλλά και κοινά σημεία τα οποία μπορούν να αποτελέσουν βάση για περαιτέρω μελέτη (§1.4).

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές παραδοχές και η προβληματική της έρευνας μας (§2.1) ενώ τίθεται ο στόχος οργάνωσης της παρέμβασης μας και οι περαιτέρω

σκοποί μας μαζί με τα κεντρικά ερευνητικά ερωτήματα (§2.2). Στηρίζεται βιβλιογραφικά η μεθοδολογική οργάνωση της έρευνας (§2.3) και παρουσιάζεται η επισκόπηση των κύκλων της έρευνας σχεδιασμού (§2.4). Στο τελευταίο μέρος του κεφαλαίου αναφερόμαστε στη θεωρητική οργάνωση του σχεδιασμού μας και της υλοποίησης του (§2.5).

Τα κεφάλαια 3 και 4 που ακολουθούν αφορούν τους δύο κύκλους εφαρμογής της παρέμβασης που οργανώσαμε και περιλαμβάνουν αναλυτικές περιγραφές για τον σχεδιασμό (και επανασχεδιασμό) των δραστηριοτήτων (§3.1 και §4.1) τις τοπικές υποθέσεις και τα ερευνητικά ερωτήματα μας για κάθε κύκλο (§3.2 και §4.2) αλλά και αναλυτική περιγραφή της υλοποίησης τους με παρουσίαση των ερευνητικών εργαλείων αλλά και του τρόπου συλλογής, οργάνωσης και ανάλυσης των δεδομένων (§3.3 και §4.3). Τέλος, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από κάθε κύκλο εφαρμογής (§3.4 και §5.1-5.4) και τα συμπεράσματα που λειτουργούν ως βάση για τον επανασχεδιασμό του επόμενου κύκλου κάθε φορά (§3.5, §5.5 και §6)

Κεφάλαιο 1: Θεωρητικό Υπόβαθρο

1.1 Η πολλαπλασιαστική σκέψη και κρίσιμα χαρακτηριστικά της

Η πολλαπλασιαστική σκέψη σχετίζεται με ποικίλες καταστάσεις της καθημερινής ζωής και η κατάκτηση της παίζει σημαντικό ρόλο στην κατανόηση πολλών μαθηματικών εννοιών, ενώ ακόμη σχετίζεται και με άλλους επιστημονικούς τομείς (Degrande, 2019).

Παλαιότερες προσεγγίσεις στην ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης σχετίζονταν με την εισαγωγή του πολλαπλασιασμού ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Οι προσεγγίσεις αυτές υποστηρίζουν ότι η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση βοηθά τα παιδιά να κατανοήσουν την πράξη του πολλαπλασιασμού μιας και για τη διαχείριση της στηρίζονται σε πρωταρχικά διαισθητικά μοντέλα για τις πράξεις (primitive intuitive models) που ήδη διαθέτουν (Fishbein et al., 1985). Σήμερα, παρόλο που αναγνωρίζεται η συμβολή της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης στην ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης, υπογραμμίζεται ότι η πολλαπλασιαστική σκέψη δεν μπορεί να περιλαμβάνει μόνο την κατάκτηση διαδικασιών που σχετίζονται με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση – ένα τέτοιος «ορισμός» θα ήταν πολύ απλοϊκός και τελικά λανθασμένος (Wright, 2011).

Η αποσαφήνιση του όρου «πολλαπλασιαστική σκέψη» δεν είναι εύκολο εγχείρημα. Ορισμένες απόπειρες από ερευνητές προσδιορίζουν την πολλαπλασιαστική σκέψη με όρους γενικών «δεξιοτήτων». Για παράδειγμα, σύμφωνα με τους Callingham & Siemon (2021) και με βάση τη δουλειά της Siemon και των συνεργατών της (2006, 2012), η πολλαπλασιαστική σκέψη σχετίζεται με τις δεξιότητες:

- διαχείρισης με ευελιξία και επάρκεια ενός εύρους αριθμών (π.χ. ακέραιοι και ρητοί σε μορφή κλάσματος, δεκαδικού ή ποσοστού).
- αναγνώρισης και επίλυσης μιας ποικιλίας προβλημάτων πολλαπλασιασμού, διαίρεσης, ανάλογων και αντιστρόφως ανάλογων ποσών.
- εξήγησης των στρατηγικών επίλυσης με διάφορους τρόπους (λεκτικά, διαγραμματικά, συμβολικά).

Ο Hurst (2017) ενσωματώνει στις παραπάνω δεξιότητες και εκείνη της εννοιολογικής διαχείρισης του σχετικού μεγέθους και της πολλαπλασιαστικής σύγκρισης μεταξύ αριθμών και ποσοτήτων (π.χ. «πόσες φορές μεγαλύτερη» είναι μια ποσότητα από μία άλλη).

Η ανάλυση της πολλαπλασιαστικής σκέψης με όρους γενικών δεξιοτήτων είναι χρήσιμη, καθώς δίνει μια εικόνα επιθυμητών μαθησιακών στόχων, ιδιαίτερα για παιδιά στις μεγάλες τάξεις του Δημοτικού σχολείου ή και μεγαλύτερα. Ωστόσο, δεν κάνει άμεσα ορατή τη συνθετότητα της κάθε μια από τις παραπάνω συνιστώσες της πολλαπλασιαστικής σκέψης, καθώς και τα θεμελιώδη συστατικά της που μπορούν να υποστηριχθούν, ιδιαίτερα από τις μικρές ηλικίες.

Για την παρούσα έρευνα, επικεντρωνόμαστε στις δύο τελευταίες συνιστώσες του παραπάνω «ορισμού» μιας και το πρώτο χαρακτηριστικό αφορά κυρίως μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας. Η συνθετότητα των δύο αυτών συνιστωσών αναδεικνύεται από την οπτική του «εννοιολογικού πεδίου» του Vergnaud (1994). Ο Vergnaud όρισε ως «εννοιολογικό πεδίο» ένα σύνολο εννοιών και ένα σύνολο καταστάσεων στενά συνδεδεμένων μεταξύ τους, έτσι ώστε μία έννοια να μπορεί να είναι σχετική με πολλές καταστάσεις και, ταυτόχρονα, η ανάλυση μιας κατάστασης να μπορεί να απαιτεί παραπάνω από μία έννοιες. Το πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο έχει στο επίκεντρό του τις πολλαπλασιαστικές και αναλογικές σχέσεις με την επισήμανση ότι οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις είναι ειδική περίπτωση των αναλογικών, της μορφής Α= νxβ, όπου τα Α, β και ν μπορεί να είναι αριθμητικές ή μη αριθμητικές ποσότητες. Στο εννοιολογικό πεδίο εντάσσονται, συνεπώς, μαθηματικές έννοιες, ενέργειες, διαδικασίες και καταστάσεις οι οποίες συνδέονται με πολλαπλασιαστικές/αναλογικές σχέσεις. Αυτό συνεπάγεται ότι στο πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο συμπεριλαμβάνονται (ανάμεσα σε άλλα), ο λόγος, οι ρητοί αριθμοί, η πολλαπλασιαστική σύγκριση (μέσω του λόγου), οι αριθμητικές πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, η σχέση της αντίστροφης αναλογίας, καθώς και οι καταστάσεις προβλήματος που συνδέονται με τα παραπάνω (βλ. Greer, 1992, για μια ταξινόμηση των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων για συνεχείς και διακριτές ποσότητες). Δεδομένου ενός εννοιολογικού πεδίου, η ανάπτυξη της κατανόησης του υποκειμένου αντανακλάται α) στο σύνολο των καταστάσεων, για τις οποίες το υποκείμενο μπορεί να αναγνωρίσει ότι τα στοιχεία του πεδίου είναι σχετικά και χρήσιμα, β) στο σύνολο των «λειτουργικών αναλλοίωτων» (operational invariants) που επιστρατεύει στη δράση του (π.χ. κατά την επίλυση ενός προβλήματος)—παράδειγμα επιστράτευσης λειτουργικών αναλλοίωτων αποτελούν η αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού και η αντίστροφη σχέση μεταξύ του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης (Nunes & Bryant, 2015) και γ) στο

σύνολο των αναπαραστάσεων, οποιουδήποτε τύπου που μπορεί να αξιοποιήσει για να αναπαραστήσει και να επικοινωνήσει την κατανόησή του για μια κατάσταση—στο οποίο συμπεριλαμβάνονται τόσο οι πολιτισμικά προωθούμενες αναπαραστάσεις, όσο και οι προσωπικές αναπαραστάσεις του υποκειμένου. Η θεωρητική κατασκευή του εννοιολογικού πεδίου, ανάμεσα σε άλλα, φέρνει στο προσκήνιο τις εμπειρίες του υποκειμένου με τα στοιχεία του πεδίου και αναδεικνύει τη σημασία τους για την ανάπτυξη της κατανόησής του στο πλαίσιο του πεδίου. Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία για το ρόλο της εκπαίδευσης γενικά, και ειδικά για τις μικρές ηλικίες.

Ένα δεύτερο στοιχείο που έχει ιδιαίτερη σημασία για την εκπαίδευση είναι η ανάδειξη των μαθηματικών ενεργειών (που εντάσσονται σε ένα εννοιολογικό πεδίο). Οι μαθηματικές ενέργειες, όπως η ομαδοποίηση/ταξινόμηση, η ανάλυση/σύνθεση ποσοτήτων, η σύγκριση/διάταξη (Καλδρυμίδου,2009), συναντώνται και ως μαθησιακοί στόχοι στα αναλυτικά προγράμματα και είναι οι αρχικοί οργανωτές τις αλληλεπίδρασης των παιδιών με το μαθηματικό περιεχόμενο που δυνητικά μπορεί να οδηγήσει στην κατασκευή σχέσεων. Όσον αφορά το πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο, πέρα από την πολλαπλασιαστική σύγκριση που προαναφέρθηκε, τρεις ενέργειες χαρακτηρίζονται ως θεμελιώδεις: ο ισομερισμός, η μέτρηση με διαφορετικού τύπου μονάδες και η επανάληψη ποσότητας (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018). Οι ενέργειες αυτές εφαρμόζονται στο πλαίσιο τόσο των διακριτών, όσο και των συνεχών ποσοτήτων και απαιτούνται για μια μεγάλη ποικιλία πολλαπλασιαστικών καταστάσεων, όπως τα προβλήματα του τύπου των ισοπληθών ομάδων/ ίσων μέτρων (Greer, 1992) και τις καταστάσεις που αφορούν τα κλάσματα.

Η ενέργεια του ισομερισμού, δηλαδή, η ανάλυσης μιας ποσότητας σε ίσα μέρη είναι γενικώς αναγνωρισμένη ως κρίσιμη για το πολλαπλασιαστικό πεδίο (π.χ. Confrey & Malone, 2015; Hackenberg, 2010). Θα πρέπει, ωστόσο, να τονιστεί ιδιαίτερα η σημασία της μέτρησης ως βάση κατάκτησης του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης (Schmittau, 2004) αλλά και της έννοιας της μονάδας (Sophian, 2003; 2004; 2008). Η κατάκτηση της έννοιας της μονάδας μέσω μέτρησης μπορεί να ξεκινήσει μέσω της σύγκρισης συνεχών ποσοτήτων και της χρήσης μιας ποσότητας ως μονάδα μέτρησης μια άλλης (Dougherty, 2003). Οι παραπάνω προσεγγίσεις βασίζονται στο πρόγραμμα σπουδών του Davydov (1975), το οποίο στηρίζεται στη μέτρηση τόσο για την ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού όσο και για την ανάπτυξη εννοιών όπως τα κλάσματα και έχει ως στόχο να στρέψει την προσοχή των παιδιών σε

πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ συνεχών ποσοτήτων και όχι διακριτών αντικειμένων (Bobos & Sierpinska, 2017).

Για τη συνέχεια, θα ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα μιας πολλαπλασιαστικής κατάστασης στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων: «Η γιαγιά είχε ένα σακουλάκι με 6 καραμέλες και τις μοίρασε εξίσου στα 3 εγγόνια της. Κάθε παιδί πήρε από 2 καραμέλες». Από την κατάσταση αυτή μπορούν να προκύψουν τρία προβλήματα, ανάλογα με τα δεδομένα και το ζητούμενο:

α) Η γιαγιά είχε ένα σακουλάκι με 6 καραμέλες και τις μοίρασε εξίσου στα 3 εγγόνια της. Πόσες καραμέλες πήρε το κάθε παιδί;

β) Η γιαγιά είχε ένα σακουλάκι με 6 καραμέλες. Τις μοίρασε όλες εξίσου στα εγγόνια της και κάθε παιδί πήρε 2 καραμέλες. Πόσα ήταν τα εγγόνια της γιαγιάς;

γ) Η γιαγιά είχε ένα σακουλάκι με καραμέλες. Τις μοίρασε εξίσου στα 3 εγγόνια της και κάθε παιδί πήρε 2 καραμέλες. Πόσες καραμέλες μοίρασε η γιαγιά;

Η δεδομένη κατάσταση και τα προβλήματα που προκύπτουν από αυτή αναγνωρίζεται εύκολα ως πολλαπλασιαστική, είτε ως κατάσταση «ισοπληθών ομάδων» με προβλήματα πολλαπλασιασμού, διαίρεσης μερισμού και διαίρεσης μέτρησης, είτε ως αναλογικό πρόβλημα. Ποιο ή ποια είναι τα καθοριστικά χαρακτηριστικά που κάνουν αυτή την κατάσταση *πολλαπλασιαστική* και, μάλιστα, ανεξάρτητα από τον τρόπο επίλυσής των προβλημάτων;

Η Confrey και οι συνεργάτες της (2009) διακρίνουν στην κατάσταση αυτή δύο χαρακτηριστικά στοιχεία που ονομάζουν «πολλά προς ένα» και «πολλά ως ένα». Το «πολλά προς ένα» αντιστοιχεί στο μοναδιαίο λόγο «δύο καραμέλες ανά παιδί» που επιτρέπει την πραγμάτευση της παραπάνω κατάστασης ως μιας κατάστασης συμμεταβολής μεταξύ του πλήθους των παιδιών και του πλήθους των καραμελών.

Το «πολλά ως ένα» αντιστοιχεί στην θεώρηση των δύο καραμελών ως μια ενιαία ποσότητα. Αυτό διαφαίνεται στην περίπτωση του προβλήματος του πολλαπλασιασμού, όπου οι δύο καραμέλες πρέπει να επαναληφθούν 3 φορές, αλλά περισσότερο στην περίπτωση του προβλήματος της διαίρεσης μέτρησης, όπου πρέπει να απαντηθεί το ερώτημα πόσα ζευγάρια καραμέλες συνιστούν τις έξι καραμέλες, κάτι που η Sophian (2004, 2013) χαρακτηρίζει ως *μέτρηση* με σύνθετη μονάδα. Όπως σχολιάζουν οι Confrey και συνεργάτες (2009) η διαχείριση των «πολλών» ως «ένα» είναι προπομπός της κατασκευής σύνθετων

μονάδων, δηλαδή, μονάδων από άλλες μονάδες. Η διεργασία της μοναδοποίησης (unitizing), δηλαδή, η δόμηση μιας ποσότητας σε μονάδες και, μάλιστα, διαφορετικών τάξεων, θεωρείται κεντρικό στοιχείο της πολλαπλασιαστικής σκέψης και δείκτης πρόβλεψης της ικανότητας των παιδιών να σκέφτονται πολλαπλασιαστικά (Hackenberg, 2010; Hackenberg & Levice, 2024).

Η ανάλυση αυτή μας δίνει δύο απαντήσεις για το τι κάνει μια κατάσταση *πολλαπλασιαστική* για ένα μεγάλο εύρος τέτοιων καταστάσεων και μας επιτρέπει να αναζητήσουμε βάσεις ανάπτυξης της πολλαπλασιαστικής σκέψης: Η πρώτη εστιάζει στον σταθερό λόγο («πολλά προς ένα») και η δεύτερη στις μονάδες, και ιδιαίτερα στις σύνθετες («πολλά ως ένα») (Confrey et al., 2009).

Για τα επόμενα, είναι απαραίτητος ένας γενικός ορισμός του *γνωστικού σχήματος*, που θα μας επιτρέψει να παρουσιάσουμε δύο προσεγγίσεις στην ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης, χωρίς να υπεισέλθουμε στις λεπτομέρειες του τρόπου με τον οποίο κάθε ερευνητική ομάδα ορίζει και περιγράφει το γνωστικό σχήμα. Στη Γνωστική Ψυχολογία, ένα γνωστικό σχήμα νοείται γενικά ως μια γνωσιακή δομή που αφορά μια κατηγορία αντικειμένων, γεγονότων, καταστάσεων ή δράσεων και τις μεταξύ τους σχέσεις (American Psychological Association, 2018; Eysenck & Keane, 2010). Η συγκρότηση και η εξέλιξη των γνωστικών σχημάτων συναρτώνται με τη δράση του υποκειμένου στο πλαίσιο του φυσικού και κοινωνικο-πολιτισμικού του περιβάλλοντος, καθώς και με νοητικές διεργασίες, όπως η γενίκευση και η αφαίρεση. Τα σχήματα οργανώνουν την υπάρχουσα γνώση, ενεργοποιούνται όταν το υποκείμενο αναγνωρίζει μια κατάσταση ως σχετική και συμβάλλουν στην ερμηνεία της και την οργάνωση της δράσης του υποκειμένου. Η δράση μπορεί να είναι φυσική ή/και νοητική.

Σε αυτό το πλαίσιο, ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα της πολλαπλασιαστικής σκέψης θεωρείται το νοητικό σχήμα της αντιστοιχίας (Piaget, 1965; Vergnaud 1983; Nunes and Bryant, 1996) και συγκεκριμένα της ένα-προς-πολλά αντιστοιχίας (schema of one-to-many correspondence, Park & Nunes, 2001; Nunes & Bryant, 2015), το οποίο επιτρέπει την αναγνώριση μιας σχέσης «πολλά προς ένα» με την ορολογία των Confrey και συνεργατών (2009) σε καταστάσεις που το παιδί ερμηνεύει ως πρόσφορες. Τα παιδιά, από σχετικά μικρές ηλικίες πραγματοποιούν ένα-προς-πολλά αντιστοιχίσεις στη *δράση*. Για παράδειγμα, δεδομένου του προβλήματος «Ένα παιδί χρειάζεται δύο γάντια. Πόσα γάντια χρειάζονται τα

τρία παιδιά;», αν υπάρχουν αναπαραστάσεις για τα «παιδιά» και τα «γάντια», ένα μικρό παιδί μπορεί να επιλύσει το πρόβλημα αντιστοιχίζοντας δύο «γάντια» σε κάθε ένα «παιδί» και υπολογίζοντας το συνολικό πλήθος των γαντιών. Η πραγματοποίηση ένα-προς-πολλά αντιστοίχισης στη δράση, όπως κατά την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι έχει κατασκευαστεί το νοητικό σχήμα της ένα-προς-πολλά αντιστοιχίας (Nunes & Bryant, 2015). Ωστόσο, η έκθεση των παιδιών σε σχετικές εμπειρίες είναι αναγκαία για την κατασκευή του αντίστοιχου νοητικού σχήματος και φαίνεται να είναι ωφέλιμη και σε μικρές ηλικίες. Για παράδειγμα, οι οι Park και Nunes (2001), μέσα από έρευνά τους σε παιδιά ηλικίας 6 ετών έδειξαν ότι όσα από αυτά ενισχύθηκαν μέσω παρέμβασης στη χρήση της ένα-προς-πολλά αντιστοίχισης, απαντούσαν σωστά σε περισσότερα πολλαπλασιαστικά έργα από εκείνα που μπορούσαν να επιλυθούν με την στρατηγική της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης.

Το σχήμα της ένα-προς-πολλά αντιστοιχίας φαίνεται, εκ πρώτης όψεως, να αφορά μόνο τις διακριτές ποσότητες. Ωστόσο, όταν μια συνεχής ποσότητα «διακριτοποιείται» σε μονάδες, το ίδιο σχήμα μπορεί να αφορά και τη συνεχή περίπτωση. Θα επανέλθουμε σε αυτό στη συνέχεια.

Η κατασκευή και ο συντονισμός μονάδων είναι κεντρικό στοιχείο της θεωρίας του Steffe (1992, 1994) για τη διαφοροποίηση και ιεράρχηση των νοητικών σχημάτων των παιδιών για την αριθμητική ακολουθία—ή, πιο απλά, σχήματα καταμέτρησης, όπως τα αναφέρει ο Steffe (2013). Η θεωρία αυτή έχει εφαρμοστεί τόσο από τον ίδιο τον Steffe, όσο και από άλλους ερευνητές (π.χ. Hackenberg, 2010; Ding et. al., 2022; Tzur, 2013; Zwanch & Wilkins, 2021) για να περιγραφούν και να στοιχειοθετηθούν διαδρομές ανάπτυξης της πολλαπλασιαστικής σκέψης με δύο κριτήρια: το πλήθος των διαφορετικών επιπέδων μονάδων που μπορούν να διαχειριστούν τα παιδιά και αν το κάνουν μόνο σε καταστάσεις δράσης (π.χ. κατά την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος), ή αν τα έχουν «εσωτερικεύσει». Στο συγκεκριμένο θεωρητικό πλαίσιο, «εσωτερίκευση» σημαίνει ότι το αντίστοιχο πλήθος μονάδων και η δυνατότητα συντονισμού τους καθίσταται εκ των προτέρων διαθέσιμη στο υποκείμενο. Για παράδειγμα, στην περίπτωση δύο εσωτερικευμένων μονάδων, με τη διατύπωση των Hackenberg και συνεργατών (2016), ένα παιδί μπορεί να λειτουργήσει με δύο μονάδες ως δεδομένες και, ενδεχομένως, να

συντονίσει τρεις στη δράση. Αυτό το παιδί, επιλύοντας ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, αναγνωρίζει δύο μονάδες και την μεταξύ τους σχέση εκ των προτέρων.

Παρά τις διαφορές που υπάρχουν στις αναπτυξιακές διαδρομές που προτείνονται από διαφορετικούς ερευνητές, υπάρχουν κεντρικά σημεία συμφωνίας, όπως ότι το πιο απλό πολλαπλασιαστικό σχήμα είναι αυτό που προϋποθέτει τον συντονισμό μονάδων δύο τάξεων στη δράση. Η Hackenberg (2010) παρουσιάζει αυτό και τα πιο εξελιγμένα διαφορετικά σχήματα για τον πολλαπλασιασμό χρησιμοποιώντας δύο προβληματικές καταστάσεις με το σενάριο των «μάφιν» (κεκάκια). Το πρώτο πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: «Σε ένα φούρνο, μια φόρμα για κεκάκια έχει 4 σειρές. Κάθε σειρά έχει θέσεις για 6 κεκάκια. Πόσα κεκάκια μπορούμε να φτιάξουμε με αυτή τη φόρμα;». Το δεύτερο πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: «Στον ίδιο φούρνο, υπάρχει και μια άλλη φόρμα για κεκάκια που έχει 8 σειρές. Κάθε σειρά έχει θέσεις για 6 κεκάκια. Πόσα κεκάκια μπορούμε να φτιάξουμε και με τις δύο φόρμες μαζί;». Παρόμοια προβλήματα έχουν χρησιμοποιηθεί και από άλλους ερευνητές (π.χ. Ding et al., 2022).

Επιλύοντας το πρώτο πρόβλημα, ένα παιδί που μπορεί να συντονίσει μονάδες δύο τάξεων στη δράση για τη συγκεκριμένη κατάσταση, η οποία περιλαμβάνει την ένθεση μιας σύνθετης μονάδας (εξάδας) σε κάθε μία σειρά και να επιλύσει το πρόβλημα με κάποια στρατηγική, ακόμα και με την πιο στοιχειώδη της καταμέτρησης με μονάδα το 1 κεκάκι. Ένα παιδί που έχει εσωτερικεύσει μονάδες δύο τάξεων, μπορεί να ξεκινήσει την επίλυση λαμβάνοντας υπόψη ότι πρέπει να υπολογίσει το πλήθος των εξάδων συντονίζοντάς το με το πλήθος των σειρών, ανεξάρτητα με τη στρατηγική που θα εφαρμόσει (π.χ. «έξι και έξι δώδεκα και δώδεκα είκοσι τέσσερα» ή «τέσσερις φορές το έξι, είκοσι-τέσσερα»). Το ίδιο παιδί θα μπορούσε να επιλύσει και το δεύτερο πρόβλημα, υπολογίζοντας ξεχωριστά τα κεκάκια της πρώτης και της δεύτερης φόρμας και προσθέτοντάς τα. Ωστόσο, απαιτείται ο συντονισμός μονάδων τριών τάξεων (1 μονάδα των 8 εξάδων και 1 μονάδα των 4 εξάδων) ώστε η κατάσταση να ερμηνευθεί ως «12 εξάδες» και να επιλυθεί ανάλογα.

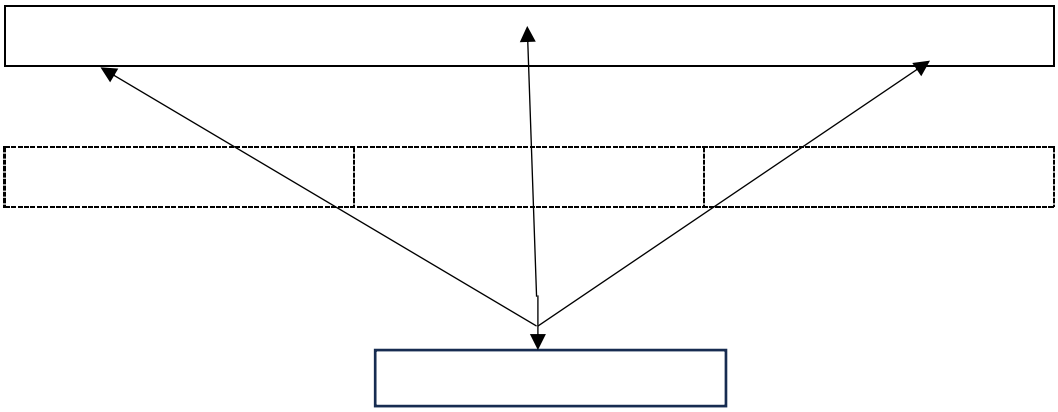
Ενδιαφέρον παρουσιάζει η συμπεριφορά των παιδιών που λειτουργούν στο επίπεδο της μιας μονάδας, όταν καλούνται να επιλύσουν προβλήματα που εμπεριέχουν μονάδες περισσότερων τάξεων. Ένα τέτοιο παράδειγμα προέρχεται από τη δουλειά του Steffe (1992) με δεδομένα που προέκυψαν από ένα διδακτικό πείραμα διάρκειας τριών χρόνων. Ο Steffe (1992) έθεσε στον Zachary, ένα παιδί 8 ετών στην αρχή της έρευνας, ένα πρόβλημα που

μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: «Κάτω από αυτή την πετσέτα υπάρχουν 3 σειρές με τρία τουβλάκια η κάθε μία. Θα βάλω μερικές ίδιες σειρές ακόμα. Τώρα έχω 7 σειρές με 3 τουβλάκια η καθεμία. Πόσες σειρές έβαλα;». Το παιδί αυτό, αντί να εστιάσει στις σειρές, που ήταν το ζητούμενο, εστίασε στα τουβλάκια και αποπειράθηκε να υπολογίσει το σύνολό τους. Ξεκίνησε λέγοντας «τρία, έξι», αλλά στη συνέχεια χρησιμοποίησε τρία δάχτυλα τα οποία ακουμπούσε ένα-ένα στο τραπέζι απαγγέλοντας τις επόμενες αριθμολέξεις (επτά, οκτώ, εννιά / δέκα, έντεκα, δώδεκα…). Στην πορεία ξέχασε πόσες «τριάδες» έπρεπε να μετρήσει και σταμάτησε στο 24. Ο Zachary, στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, φαίνεται να λειτουργεί στο επίπεδο της μιας μονάδας και, μάλιστα, της πιο απλής (1 τουβλάκι): ερμήνευσε το ζητούμενο ως «πόσα είναι τα τουβλάκια», δεν μπόρεσε στη διαδικασία της επίλυσης να διατηρήσει κατά την επίλυση την τριάδα ως ένα ενιαίο αντικείμενο, ούτε το πλήθος των σειρών/ τριάδων. Αυτό, από την οπτική του συγκεκριμένου θεωρητικού πλαισίου, θα προϋπέθετε—για το πρόβλημα που λύνει το ίδιο το παιδί—να συντονίσει την μονάδα των «7» με τη μονάδα των «3» και να κατασκευάσει μια μονάδα 7 σειρών με 3 τουβλάκια η κάθε μία.

Η θεωρία του Steffe για τη σταδιακή εξέλιξη των νοητικών σχημάτων της αριθμητικής ακολουθίας, με κεντρικό στοιχείο το πλήθος των διαφορετικών μονάδων που το παιδί μπορεί να αναγνωρίσει και να συντονίσει σε μια κατάσταση, έχει μεταφερθεί στο πλαίσιο των συνεχών ποσοτήτων με εφαρμογή στην ανάπτυξη της γνώσης για τα κλάσματα (Hackenberg et al., 2016; Steffe & Olive, 2010). Εδώ, ως μονάδες διαφορετικής τάξης νοούνται η μονάδα ή άλλοι ακέραιοι αριθμοί, οι κλασματικές μονάδες, αλλά και τα μη μοναδιαία κλάσματα. Η Hackenberg και συνεργάτες (2016) παρουσιάζουν τρία στάδια συντονισμού μονάδων στις συνεχείς ποσότητες με αναφορά στο εξής έργο: Παρουσιάζονται στο παιδί σε εικονική αναπαράσταση τρεις μπάρες μ1, μ2, μ3 με μ1<μ2<μ3 ως προς το μήκος. Στη συνέχεια, το παιδί καλείται να βρει πόσες φορές χωράει το μ1 στο μ3, αν α) το μ1 χωράει 3 φορές στο μ2 και β) το μ2 χωράει 4 φορές στο μ3. Οι δεδομένες μπάρες δεν έχουν στην πραγματικότητα αυτές τις σχέσεις μεταξύ τους, έτσι ώστε η ζητούμενη σχέση να μην μπορεί να εκτιμηθεί (το παιδί καλείται να «προσποιηθεί» ότι οι δεδομένες σχέσεις ισχύουν). Ένα παιδί στο πρώτο στάδιο λειτουργεί με μία εσωτερικευμένη μονάδα και μπορεί να συντονίσει δύο στη δράση. Το παιδί αυτό προσπαθεί να μετρήσει το μ3 με μονάδα το μ1, επαναλαμβάνοντας νοερά το μ1, με βάση την εικονική τους αναπαράσταση. Ένα παιδί στο

δεύτερο στάδιο λειτουργεί με δύο εσωτερικευμένες μονάδες και μπορεί να συντονίσει τρεις στη δράση. Το παιδί αυτό μπορεί να επαναλάβει νοερά 4 φορές το μ2, διατηρώντας την πληροφορία ότι το μ2 αντιστοιχεί σε 3μ1. Μια συμπεριφορική ένδειξη μπορεί να είναι ότι το παιδί λέει «τρία, τρία, τρία, τρία». Τέλος, ένα παιδί που λειτουργεί με τρεις εσωτερικευμένες μονάδες, μπορεί να συντονίσει τις μεταξύ τους σχέσεις ταυτόχρονα και να καταλήξει στο αποτέλεσμα «δώδεκα», το οποίο μπορεί να εκφράσει και ως «τέσσερα τριάρια».

Η προσέγγιση του Steffe και των ερευνητών και ερευνητριών που υιοθετούν το συγκεκριμένο θεωρητικό πλαίσιο παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας, καθώς αποτελεί μια ενιαία προσέγγιση στην ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης στο πλαίσιο των διακριτών και των συνεχών ποσοτήτων. Επιπλέον, ο «συντονισμός» των μονάδων του Steffe εμπεριέχει τη συγκρότηση σχέσεων ανάμεσα στις μονάδες διαφορετικών επιπέδων, που μπορούν να περιγραφούν μέσω της αντιστοιχίας-ένα-προς-πολλά, τόσο στην περίπτωση των διακριτών, όσο και στην περίπτωση συνεχών ποσοτήτων.



Σχήμα 1: Η ένα-προς-πολλά αντιστοιχία στην περίπτωση μιας συνεχούς ποσότητας

Στο Σχήμα 1, η ενδιάμεση μπάρα με τις διακεκομμένες γραμμές απεικονίζει σχηματικά το γεγονός ότι η αντιστοιχία αυτή, αν μιλάμε για νοητικά σχήματα, προϋποθέτει ότι η δυνατότητα «μοναδοποίησης» της μπάρας είναι διαθέσιμη στο υποκείμενο.

Εξετάζοντας το Σχήμα 1 από μαθηματική άποψη, η «μεγάλη» και η «μικρή» μπάρα συνδέονται με μια αντιστρέψιμη πολλαπλασιαστική σχέση, υπό την έννοια ότι η «μεγάλη» είναι τριπλάσια της «μικρής» και η «μικρή» είναι το ένα τρίτο της «μεγάλης».

Η αντιστροφή είναι θεμελιώδες δομικό στοιχείο στα μαθηματικά, αλλά και στη μαθηματική σκέψη (Greer, 2012). Ο Greer εξετάζει αντιστροφές διαφόρων τύπων, με αναφορές και στο πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο (π.χ. ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση ως αντίστροφες αριθμητικές πράξεις, ή η διατύπωση «αντίστροφων προβλημάτων» στο πλαίσιο μιας πολλαπλασιαστικής κατάστασης, όπως στο παράδειγμα της γιαγιάς που μοιράζει καραμέλες στα εγγόνια της παραπάνω).

Εξετάζοντας την κατάσταση του Σχήματος 1 με όρους μαθηματικών ενεργειών, η αντιστρεψιμότητα μπορεί να περιγραφεί με διάφορους τρόπους: Η ανάλυση της «μεγάλης» μπάρας σε 3 ίσα μέρη (ισομερισμός) αντιστρέφεται με την σύνθεση των τριών αυτών μερών. Εναλλακτικά, αν στη «μεγάλη» μπάρα χωρούν τρείς «μικρές» μπάρες (μέτρηση χωρίς επανάληψη της μονάδας), τότε η «μεγάλη» μπάρα μπορεί να αναλυθεί σε τρεις «μικρές». Αν η «μικρή» μπάρα χωράει τρεις φορές στη «μεγάλη» μπάρα (μέτρηση με επανάληψη της μονάδας), τότε η «μεγάλη μπάρα» ισούται με 3 φορές τη «μικρή» μπάρα. Η τελευταία περιγραφή συμπυκνώνεται στην έκφραση της αντιστρέψιμης σχέσης τριπλάσιο/ένα τρίτο.

Η αντιστρεψιμότητα αποτελεί κεντρικό στοιχείο της πολλαπλασιαστικής σκέψης και αυτό αντανακλάται σε διάφορες αναλύσεις, θεωρητικά πλαίσια και εκπαιδευτικές εφαρμογές. Η Confrey και Maloney (2014) δίνουν μεγάλη έμφαση στην ενέργεια του ισομερισμού και βασίζουν την εισαγωγή του πολλαπλασιασμού ως την αντίστροφη ενέργεια της σύνθεσης των μερών. Για τον Steffe και τους ερευνητές και ερευνήτριες που υιοθετούν τη θεωρητική του οπτική, ένα ορόσημο στην πολλαπλασιαστική σκέψη είναι η εμφάνιση μιας νοητικής ενέργειας ισομερισμού/επανάληψης («splitting») που συνθέτει την ενέργεια του ισομερισμού μιας ποσότητας (μονάδας) με την ενέργεια της επανάληψης του μέρους της καθιστώντας τις αντίστροφες νοητικές ενέργειες. Η νοητική αυτή λειτουργία αφορά πολλαπλασιαστικές καταστάσεις στις διακριτές και τις συνεχείς ποσότητες, και αποτελεί παράγοντα διαφοροποίησης των νοητικών σχημάτων για τα κλάσματα (Hackenberg, 2010; Hackenberg et al., 2016; Steffe & Olive, 2010; Wilkins & Norton, 2018).

1.2 Πρώιμες ικανότητες πολλαπλασιαστικής σκέψης

Στο πλαίσιο της εκπαίδευσης, η πρόσθεση τυπικά θεωρείται ως προαπαιτούμενο για την εισαγωγή του πολλαπλασιασμού. Παράλληλα, μια «παραδοσιακή» άποψη ότι η προσθετική σκέψη προηγείται αναπτυξιακά της πολλαπλασιαστικής, επηρέασε και την έρευνα για την

εκπαίδευση. Όπως αναφέρουν οι Vanluydt και συνεργάτες (2022), η άποψη αυτή αντανακλά, σε μεγάλο βαθμό, την επιρροή της πιαζετιανής προσέγγισης στη γνωστική ανάπτυξη (ή της ερμηνείας της στο χώρο της εκπαιδευτικής έρευνας). Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η υπόθεση ήταν ότι τα παιδιά δεν μπορούν να συγκροτήσουν αναλογικές σχέσεις πριν φτάσουν στο στάδιο των τυπικών λειτουργιών (από περίπου 11-12 ετών και μετά). Τόσο ο ίδιος ο Piaget και οι συνεργάτες του, όσο και πολλοί ερευνητές και ερευνήτριες στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης διέθεσαν εμπειρικά δεδομένα που έδειχναν ότι τα παιδιά σε μικρότερες ηλικίες συστηματικά διακρίνουν και αξιοποιούν προσθετικές σχέσεις σε καταστάσεις αναλογίας και, συνεπώς, οδηγούνται σε λανθασμένη επίλυση. Έτσι, ενισχύθηκε η πεποίθηση ότι η προσθετική σκέψη προηγείται της πολλαπλασιαστικής (Clark & Kamii, 1996; Jacob & Willis, 2003) ενώ η μετάβαση από την προσθετική σκέψη στην πολλαπλασιαστική χαρακτηρίστηκε ως ένα από τα μεγαλύτερα εμπόδια για την μαθηματική ανάπτυξη των παιδιών (Siemon et al., 2005).

Η πεποίθηση αυτή άρχισε να κλονίζεται όταν η προσοχή των ερευνητών και ερευνητριών στράφηκε, από τις ανεπτυγμένες πολλαπλασιαστικές ικανότητες που απαιτούνται για τη διαχείριση απαιτητικών αναλογικών καταστάσεων υπό διάφορες συνθήκες, σε πιο στοιχειώδεις ικανότητες που μπορεί να είναι παρούσες σε πιο μικρές ηλικίες. Όπως σχολιάζουν οι Nunes και Bryant, ο ίδιος ο Piaget (1952, όπως αναφέρεται στο Nunes & Bryant, 2015) ήταν ο πρώτος που εντόπισε την ικανότητα των μικρών παιδιών να πραγματοποιούν ένα-προς-πολλά αντιστοιχίσεις για να επιλύσουν πολλαπλασιαστικά προβλήματα.

Υπάρχει πληθώρα ερευνών που δείχνει ότι πρώιμες, πολύ στοιχειώδεις, ικανότητες που σχετίζονται με την πολλαπλασιαστική σκέψη είναι παρούσες από πολύ μικρή, ακόμα και βρεφική ηλικία. Οι έρευνες αυτές μπορούν να χωριστούν σε δύο αδρές κατηγορίες: Αυτές που αφορούν την πρώιμη αντίληψη πολλαπλασιαστικών/αναλογικών σχέσεων και αυτές που αφορούν την επίλυση απλών πολλαπλασιαστικών προβλημάτων (Fitzpatrick & Hallett, 2019).

Οι Mix και συνεργάτες (2002), έκαναν μια επισκόπηση των διαθέσιμων μέχρι τότε ερευνών και συμπέραναν ότι υπάρχουν αρκετές ενδείξεις ότι τα βρέφη είναι ευαίσθητα σε πληροφορίες για ποσότητες, διακριτές και συνεχείς, και τη μεταβολή τους. Πιο

συγκεκριμένα, τα βρέφη, υπό συνθήκες, διακρίνουν μεταξύ ποσοτήτων με διαφορά ως προς κάποιο μέγεθος, ενώ έχουν μια πρώιμη αντίληψη του λόγου.

Οι Fitzpatrick και Hallet (2019) πραγματοποίησαν μια επισκόπηση της βιβλιογραφίας με έρευνες σε παιδιά 3-10 ετών σχετικά με καταστάσεις αναλογίας, με ένα ευρύ πεδίο έργων. Διαπίστωσαν ότι το είδος του έργου, ο τρόπος με τον οποίο τίθεται το ερώτημα, αλλά και το είδος της ποσότητας (διακριτή ή συνεχής) παίζουν ρόλο στο αν τα παιδιά θα επιτύχουν στο έργο. Το τελευταίο έχει σημασία για την παρούσα έρευνα: Όταν οι εμπλεκόμενες ποσότητες είναι συνεχείς, τότε είναι πιο πιθανή η επιτυχία των παιδιών. Για παράδειγμα, οι Boyer και συνεργάτες (2008) σχεδίασαν έργο ανάμειξης υγρών και ζήτησαν από παιδιά ηλικία 4 έως 10 ετών να «βοηθήσουν ένα αρκουδάκι» να αναμείξει «χυμό» διαφόρων χρωμάτων με νερό, για φτιάξει ένα αναψυκτικό που να έχει τη γεύση που του αρέσει. Παρουσίαζαν στα παιδιά το μείγμα με την κατάλληλη γεύση ως μια μπάρα, ένα μέρος της οποίας είχε το χρώμα του φρουτοχυμού, ενώ το άλλο μέρος ήταν ανοιχτό γαλάζιο και αναπαριστούσε την ποσότητα του νερού. Στη συνέχεια έλεγαν στα παιδιά ότι το «αρκουδάκι» θέλει να φτιάξει περισσότερο ή λιγότερο χυμό με την «ίδια γεύση» και τους έδιναν δύο εναλλακτικές με μπάρες διαφορετικού μήκος από την αρχική, με τα ίδια δύο χρώματα. Στη μία μπάρα, ο λόγος χυμός/νερό ήταν ίσος με τον δεδομένο. Στην άλλη μπάρα, είτε η ποσότητα χυμού, είτε η συνολική ποσότητα νερού και χυμού ήταν ίδια με τη δεδομένη μπάρα. Τα παιδιά έπρεπε να διαλέξουν ποια από τις εναλλακτικές αντιστοιχεί σε χυμό με την «ίδια γεύση». Υπήρχαν δύο παραλλαγές στην αναπαράσταση για τις μπάρες: Στη μία, οι μπάρες ήταν «διακριτοποιημένες» (διαβαθμισμένες σε μονάδες υγρού), ενώ στην άλλη όχι. Διαπίστωσαν ότι η πιθανότητα επιτυχίας στη συνεχή περίπτωση ήταν μεγαλύτερη, σε σχέση με τη διακριτή περίπτωση, σε όλες τις ηλικίες. Μια εξήγηση για το εύρημα αυτό και παρόμοια ευρήματα είναι ότι, ενδεχομένως τα παιδιά, στη διακριτή περίπτωση, ερμηνεύουν την κατάσταση ως μια κατάσταση που απαιτεί «αριθμητική» επεξεργασία και εστιάζουν στις απόλυτες ποσότητες, αντί στις σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι υπάρχουν και ευρήματα που δείχνουν ότι, όταν δεν υπάρχει η δυνατότητα καταμέτρησης ή άμεση αναγνώρισης του πλήθους, αντιληπτική ανίχνευση λόγων εντοπίζεται και στις διακριτές ποσότητες. Για παράδειγμα, οι McCrink & Wynn (2007) οργάνωσαν μία έρευνα με βρέφη 5-7 μηνών, στα οποία παρουσίαζαν διαφάνειες με μεγάλο αριθμό κουκκίδων δύο διαφορετικών χρωμάτων με σταθερό λόγο,

μέχρι τα βρέφη να «εξοικειωθούν» με τον συγκεκριμένο λόγο (δηλαδή, να μειωθεί ο χρόνος εστίασης του βλέμματός τους στο συγκεκριμένο ερέθισμα, που ερμηνεύεται στο πλαίσιο αυτού του παραδείγματος ως ένδειξη ότι δεν διαφοροποιούν μεταξύ των ερεθισμάτων). Στη συνέχεια άλλαζαν τον λόγο. Βρήκαν ότι, όταν ο πρώτος και ο δεύτερος λόγος διέφεραν κατά έναν παράγοντα τουλάχιστον δύο, ο χρόνος εστίασης του βλέμματος των βρεφών αυξανόταν. Συμπέραναν ότι, υπό αυτή τη συνθήκη, τα βρέφη αντιλαμβάνονταν τα δύο ερεθίσματα ως διαφορετικά.

Οι Singer-Freeman και Goswami (2001) σχεδίασαν ένα έργο αναλογίας για παιδιά 3-4 ετών. Χρησιμοποίησαν συνεχή και διακριτά μοντέλα «φαγητού» (π.χ., πίτσα/ σοκολατάκια σε κουτί). Η πειραματίστρια και το παιδί είχαν μπροστά τους μοντέλα φαγητού, είτε ίδιου τύπου, είτε διαφορετικού. Η πειραματίστρια «έτρωγε στα κρυφά» ένα μέρος από το φαγητό της και ζητούσε από το παιδί να «φάει» από το δικό του «όσο έφαγε» αυτή από το δικό της. Βρήκαν ότι τα παιδιά αυτής της ηλικίας είχαν αξιοσημείωτα καλή επίδοση όταν και τα δύο μοντέλα ήταν συνεχή, και είχαν επίδοση πάνω από το επίπεδο της τυχαιότητας και σε άλλες περιπτώσεις, ιδιαίτερα όταν ο λόγος ήταν 1:2.

Τέτοιου είδους μελέτες στοιχειοθετούν μια πρώιμη ικανότητα ανίχνευσης λόγων που εκδηλώνεται σε ορισμένες περιστάσεις, πιο συχνά στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων, αλλά και στην περίπτωση των διακριτών υπό ευνοϊκές συνθήκες (π.χ. το είδος του έργου), με τον λόγο 1:2 να έχει ιδιαίτερη σημασία (Fitzpatrick & Hallet, 2019).

Όσον αφορά την επίλυση πολλαπλασιαστικών προβλημάτων, το πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων είναι πιο ευνοϊκό για τα μικρά παιδιά. Το είδος των προβλημάτων που έχουν μελετηθεί πιο συστηματικά είναι τα προβλήματα που αντιστοιχούν στη διαίρεση, πρωτίστως μερισμού στο πλαίσιο της «δίκαιης μοιρασιάς», αλλά και στη διαίρεση μέτρησης.

Οι Hunting και Davis, με συνεργάτες και συνεργάτιδες, έκαναν πρωτοπόρα δουλειά σε αυτό τον χώρο, ένα σημαντικό μέρος της οποίας περιλαμβάνεται σε έναν τόμο (Hunting & Davis, 1991). Μέρος των μελετών τους αφορά μικρά παιδιά ξεκινώντας από τα 3-4 έτη. Έδωσαν στα παιδιά έργα «δίκαιης μοιρασιάς» και «αναδιανομής» (δηλαδή, προβλήματα στα οποία η ίδια ποσότητα που έχει μοιραστεί δίκαια πρέπει να αναδιανεμηθεί γιατί αλλάζει το πλήθος των παραληπτών) στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων (Davis & Pepper, 1992), αλλά και των συνεχών ποσοτήτων (Hunting & Sharpley, 1991). Έδειξαν ότι τα μικρά παιδιά μπορούσαν

να επιλύσουν τέτοιου είδους προβλήματα στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων, με κύρια στρατηγική την επαναλαμβανόμενη ένα-προς-ένα αντιστοίχιση στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων. Στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων («σκοινιά», «λουκάνικα»), μπορούσαν να επιλύσουν αυτά τα προβλήματα στην περίπτωση που ο διαιρέτης ήταν 2, εκτιμώντας «το μισό» με σχετική ακρίβεια. Για μεγαλύτερους διαιρέτες, εμφανίστηκε η στρατηγική του επαναλαμβανόμενου υπο-διπλασιασιασμού. Ασφαλώς, αυτό δεν σημαίνει ότι όλα τα παιδιά ή κάθε παιδί, ανεξάρτητα από το πλαίσιο, έλυσαν τα προβλήματα, ή ότι είχαν σταθεροποιήσει τις στρατηγικές τους. Τα παιδιά συχνά δυσκολεύονταν να συντονίσουν όλες τις προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα (το πλήθος των μεριδίων πρέπει να ταυτίζεται με το πλήθος των παραληπτών, τα μερίδια πρέπει να είναι ισοδύναμα ως προς το μέγεθός τους και η αρχική ποσότητα πρέπει να εξαντλείται). Για παράδειγμα, μπορεί να δίνουν σε όλους τους παραλήπτες ίσα μερίδια, χωρίς να εξαντλούν την ποσότητα. Οι Hunting και Sharpley αναφέρουν, επίσης, ότι τα παιδιά τυπικά δεν ελέγχουν αυθόρμητα κατά πόσο η λύση που έχουν δώσει ικανοποιεί αυτές τις προϋποθέσεις, ενώ δεν προβλέπουν εκ των προτέρων πόσες τομές πρέπει να γίνουν στις συνεχείς ποσότητες, ώστε να πετύχουν το πλήθος των κομματιών που απαιτούνται.

Η βιβλιογραφία που επισκόπησαν οι Fitzpatrick και Hallett (2019) ενισχύει το εύρημα ότι οι πρώιμες προσεγγίσεις στα προβλήματα «δίκαιης μοιρασιάς» βασίζονται στην επαναλαμβανόμενη ένα-προς-ένα αντιστοίχιση (διακριτές ποσότητες) και τον υπο-διπλασιασμό (συνεχείς ποσότητες), με το πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων να είναι, συνεπώς, αυτό στο οποίο τα παιδιά έχουν μεγαλύτερες πιθανότητες επιτυχούς επίλυσης. Επιπλέον, δείχνει ότι τα προβλήματα που αντιστοιχούν σε διαίρεση μέτρησης είναι πιο δύσκολα για τα παιδιά, σε σχέση με αυτά που αντιστοιχούν σε διαίρεση μερισμού. Οι Fitzpatrick και Hallett παρουσιάζουν ευρήματα που δείχνουν ότι η επίλυση ενός προβλήματος δεν σημαίνει απαραίτητα ότι τα παιδιά έχουν κατακτήσει αρχές και σχέσεις που ενυπάρχουν στην κατάσταση. Για παράδειγμα, ένα παιδί 4 ετών μπορεί να μοιράσει δίκαια 8 καραμέλες σε δύο παραλήπτες (π.χ. στον Γιάννη και τη Μαρία) με επαναλαμβανόμενη ένα-προς-ένα αντιστοίχιση, και αν ρωτηθεί «Πόσες καραμέλες πήρε ο Γιάννης;», να τις μετρήσει και να απαντήσει «Τέσσερις». Αν ρωτηθεί «Πόσες καραμέλες πήρε η Μαρία;», το παιδί μπορεί να χρειαστεί να ξαναμετρήσει. Τέλος, από τη βιβλιογραφία στοιχειοθετείται ότι οι σχέσεις που συνδέουν τις ποσότητες που αντιστοιχούν στον

διαιρετέο, τον διαιρέτη και το πηλίκο, ιδιαίτερα η αντίστροφη σχέση μεταξύ διαιρέτη και πηλίκου (περισσότεροι παραλήπτες-μικρότερο μερίδιο για κάθε παραλήπτη) είναι απαιτητικές για τα παιδιά, όχι μόνο τα προνήπια και τα νήπια, αλλά και παιδιά στο Δημοτικό σχολείο.

Οι Kornillaki και Nunes (2005) εξέτασαν την κατανόηση παιδιών τριών ηλικιακών ομάδων περίπου 5, 6 και 7 ετών για την αντίστροφη σχέση διαιρέτη-πηλίκου, για συνεχείς και διακριτές ποσότητες, σε προβλήματα διαίρεσης μερισμού και διαίρεσης μέτρησης. Τα παιδιά αυτά δεν είχαν τυπικές σχολικές εμπειρίες για τη διαίρεση. Με δεδομένο ότι τα παιδιά αυτών των ηλικιών είναι πολύ πιο πιθανό να επιλύσουν τέτοια προβλήματα για διακριτές ποσότητες, οι ερευνήτριες αυτές σχεδίασαν έργα που απαιτούσαν σύγκριση χωρίς επίλυση. Το σενάριο των έργων αφορούσε δύο ειδών γάτες (άσπρες και κεραμιδί) και την τροφή τους, είτε κροκέτες σε μορφή ψαριών (διακριτή συνθήκη), είτε στρογγυλές «πίτες» ψαριού (συνεχής συνθήκη). Στα προβλήματα διαίρεσης μερισμού, δίνονταν μία ομάδα από άσπρες γάτες και μία ομάδα από κεραμιδί γάτες, είτε ισοπληθείς, είτε όχι. Δίνονταν επίσης 12 ή 24 κροκέτες ψαριού (διακριτή συνθήκη ή 1-3 «πίτες» ψαριού), για κάθε ομάδα από γάτες. Στα παιδιά δίνονταν η πληροφορία ότι η κάθε ομάδα θα μοιραστεί την τροφή «δίκαια» και καλούνταν να συγκρίνουν την τροφή μιας άσπρης γάτας με αυτήν μιας κεραμιδί γάτας. Στα προβλήματα διαίρεσης μέτρησης, στη διακριτή συνθήκη, δυο γάτες (μία από κάθε είδος) είχαν στη διάθεσή τους την ίδια ποσότητα από κροκέτες ψαριού (π.χ. 12) και ήθελαν να κεράσουν τις «φίλες» τους. Στα παιδιά δινόταν η πληροφορία ότι η μία γάτα ήθελε να δώσει, για παράδειγμα, δύο κροκέτες σε κάθε φίλη της, ενώ η άλλη ήθελε να δώσει είτε το ίδιο πλήθος, είτε διαφορετικό. Το πρώτο ζητούμενο ήταν αν η κεραμιδί γάτα μπορούσε να κεράσει τόσες φίλες, όσες η άσπρη γάτα και, εφόσον το παιδί απαντούσε αρνητικά, το δεύτερο ερώτημα ήταν ποια γάτα μπορούσε να κεράσει περισσότερες φίλες. Στη συνεχή συνθήκη, το σενάριο ήταν ίδιο, η αρχική ποσότητα ήταν 1-3 πίτες ψαριού και δίνονταν είτε ίδια, είτε διαφορετικά κομμάτια για τις δύο γάτες.

Τα αποτελέσματα έδειξαν τα μεγαλύτερα παιδιά ήταν σημαντικά πιο πιθανόν να επιτύχουν σε αυτά τα έργα (παρά το γεγονός ότι δεν είχαν πρόσθετη σχετική σχολική εμπειρία), πιο συχνά στα προβλήματα διαίρεσης μερισμού και όταν οι διαιρέτες ήταν ίδιοι (ισοδυναμία), παρά διαφορετικοί (ανισοτικές σχέσεις). Το πιο σημαντικό εύρημα της έρευνας ήταν ότι δεν υπήρχε σημαντική διαφορά ανάμεσα στη διακριτή και τη συνεχή συνθήκη, ενώ υπήρχε και

ισχυρή συσχέτιση: Τα παιδιά που απαντούσαν σωστά στη μία περίπτωση, ήταν πολύ πιθανόν να απαντήσουν σωστά και στην άλλη. Αξιοσημείωτο είναι ότι σωστές απαντήσεις προήλθαν και από τα μικρότερα παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα. Οι ερευνήτριες συμπέραναν ότι η κατανόηση της απαιτητικής αντίστροφης σχέσης μεταξύ του διαιρέτη και του πηλίκου είναι δυνατόν να αναπτυχθεί χωρίς διδασκαλία, και η ανάπτυξη συμβαίνει παράλληλα για τις διακριτές και τις συνεχείς ποσότητες. Επομένως, είναι πολύ πιθανόν η μεγαλύτερη δυσκολία των παιδιών στην επίλυση προβλημάτων που αντιστοιχούν στη διαίρεση στο πλαίσιο των συνεχών ποσοτήτων να οφείλεται στο γεγονός ότι δεν έχουν τρόπους να πραγματοποιήσουν ισομερισμό συνεχών ποσοτήτων.

Όσον αφορά την επίλυση προβλημάτων που αντιστοιχούν στον πολλαπλασιασμό, οι εμπειρικές μελέτες που δεν έχουν παρεμβατικό χαρακτήρα στις μικρές ηλικίες είναι πιο περιορισμένες σε πλήθος. Οι Vanluydt και συνεργάτες (2020, 2022) πραγματοποίησαν δύο εμπειρικές μελέτες με στόχο τη διερεύνηση την ανάπτυξης της αναλογικής σκέψης, πριν την τυπική διδασκαλία. Η πρώτη (Vanluydt et al., 2020) ήταν διατομεακή (cross-sectional) έρευνα με 4 ηλικιακές ομάδες παιδιών από το νηπιαγωγείο μέχρι και την τρίτη τάξη. Η μέση ηλικία των παιδιών του νηπιαγωγείου ήταν 5 έτη και 6 μήνες. Η δεύτερη (Valuydt et al., 2023) ήταν διαχρονική (longitudinal) έρευνα, στην οποία παρακολούθησαν μια ομάδα 315 παιδιών από το νηπιαγωγείο έως την δεύτερη τάξη (από περίπου 5 έως περίπου 8 ετών), δίνοντας ένα τεστ με αναλογικά έργα σε τακτά χρονικά διαστήματα, το ίδιο που χρησιμοποίησαν και στην διατομεακή μελέτη. Τα ερευνητικά έργα περιλάμβαναν αναλογικά προβλήματα, στα οποία παραλήπτες (ξύλινα κουκλάκια) λάμβαναν μια ποσότητα φαγητού, είτε διακριτή («ρόγες από σταφύλι»), είτε συνεχή («μπάρες σοκολάτας» ως ράβδοι). Μια δεύτερη ομάδα παραλήπτες («εξίσου πεινασμένοι») έπρεπε να λάβει την ποσότητα που της αναλογούσε, ώστε να «είναι δίκαιο». Σε κάποιες περιπτώσεις υπήρχε μόνο 1 παραλήπτης, σε κάποιες το δεδομένο αντιστοιχούσε στους «λίγους» παραλήπτες και το ζητούμενο στους «περισσότερους» και σε κάποιες, το αντίστροφο. Τα παιδιά κλήθηκαν να επιλύσουν τέτοια προβλήματα, τόσο για ζητούμενο την ποσότητα του φαγητού, όσο και για ζητούμενο το πλήθος των παραληπτών. Σημειώνεται ότι, στην περίπτωση του ενός παραλήπτη, τα προβλήματα αυτά αντιστοιχούν σε προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης.

Τα αποτελέσματα και από τις δύο έρευνες συγκλίνουν στο ότι τα προβλήματα που μπορούσαν να επιλυθούν με αντιστοίχιση «ένα-προς-πολλά» (1 παραλήπτης), στη διακριτή

περίπτωση, ήταν τα πιο προσβάσιμα στα παιδιά και απαραίτητη προϋπόθεση για την επίλυση πιο απαιτητικών προβλημάτων. Στη διατομεακή μελέτη, τα περισσότερα από τα μικρότερα παιδιά (αλλά όχι αποκλειστικά) έλυσαν μόνο τέτοιου τύπου προβλήματα. Ωστόσο, τα μικρότερα παιδιά βρέθηκαν να επιλύουν και προβλήματα όπου υπήρχαν περισσότεροι παραλήπτες στη διακριτή περίπτωση, αλλά και προβλήματα στη συνεχή περίπτωση. Οι Vanluydt et al. (2020) αναφέρουν ότι 2 παιδιά νηπιαγωγείου έλυσαν σωστά όλα τα προβλήματα του τεστ. Ταυτόχρονα, και οι δύο μελέτες δείχνουν μεγάλες διατομικές διαφορές μεταξύ των παιδιών ως προς την ικανότητα επίλυσης των προβλημάτων αυτών, ανεξαρτήτως ηλικίας.

Τα παραπάνω στοιχειοθετούν ότι υπάρχουν πρώιμες ικανότητες που σχετίζονται με την πολλαπλασιαστική σκέψη. Το γεγονός ότι τέτοιες ικανότητες ανιχνεύονται ερευνητικά, δε σημαίνει ότι αυτές εκδηλώνονται από όλα τα παιδιά της ίδιας ηλικίας με τον ίδιο τρόπο και στον ίδιο βαθμό, σε οποιοδήποτε πλαίσιο. Στην περίπτωση της αντιληπτικής αναγνώρισης πολλαπλασιαστικών/αναλογικών σχέσεων τα μικρά παιδιά επιτυγχάνουν συχνότερα στο πλαίσιο των συνεχών ποσοτήτων και λιγότερο συχνά στις διακριτές ποσότητες. Το είδος του έργου, το ερώτημα και, ιδιαίτερα, ο λόγος μπορεί να επηρεάσουν την επιτυχία στο έργο, με τον λόγο 1:2/2:1 να είναι ιδιαίτερα ευνοϊκός (Fitzpatrick et al., 2019).

Όσον αφορά την επίλυση πολλαπλασιαστικών/αναλογικών προβλημάτων, το πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων είναι πιο ευνοϊκό για την ανάδυση στρατηγικών επίλυσης, καθώς επιτρέπει την εφαρμογή στη δράση στρατηγικών αντιστοίχισης, όπως την επαναλαμβανόμενη αντιστοίχιση ένα-προς-ένα και την αντιστοίχιση ένα-προς-πολλά. Αντίθετα, στο πλαίσιο των συνεχών ποσοτήτων, οι διαθέσιμες στα παιδιά στρατηγικές είναι περιορισμένες. Στο πλαίσιο της δίκαιης μοιρασιάς, βασίζονται στην αντιληπτική εκτίμηση του «μισού» (υπο-διπλασιασμός, ενδεχομένως με επανάληψη). Το φαινόμενο αυτό αναδεικνύεται τόσο κατά την επίλυση με διαφορετικά χειραπτικά υλικά, όσο και από το είδος των εικονικών αναπαραστάσεων που κατασκευάζουν τα παιδιά (βλ. και Cartwright, 2024; Skoumpourdi & Sofikiti, 2009). Η ανάδυση και εφαρμογή στρατηγικών επίλυσης δεν σημαίνει απαραίτητα ότι τα μικρά παιδιά κατανοούν τις αρχές και τις σχέσεις που διέπουν τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις (π.χ. Hunting & Sharpley, 2005). Ωστόσο, τέτοιου είδους κατανοήσεις φαίνεται να αναπτύσσονται παράλληλα για τις διακριτές και συνεχείς ποσότητες, παρά τις διαδικαστικές διαφορές (Kornilaki & Nunes, 2005).

Από τα παραπάνω, φαίνεται ότι τα μικρά παιδιά, στις ηλικίες που αντιστοιχούν στο νηπιαγωγείο στο Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα (4-6) διαθέτουν ικανότητες πολλαπλασιαστικής σκέψης, έστω και περιορισμένες, πριν την απόκτηση σχολικών εμπειριών. Για την ανάπτυξη αυτών των ικανοτήτων, πολύ σημαντικό ζήτημα είναι η συχνότητα και η ποιότητα των ευκαιριών που δίνονται στα παιδιά για να διαχειριστούν πολλαπλασιαστικές καταστάσεις (Hunting & Davis, 1991; Van den Heuvel-Panhuizen & Elia, 2020).

1.3 Πολλαπλασιαστική σκέψη και πρωτοσχολική εκπαίδευση

Όπως αναλύθηκε και παραπάνω μια πληθώρα ερευνών υποστηρίζει τις ικανότητες των παιδιών από την ηλικία του νηπιαγωγείου να κατανοήσουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Οι ικανότητες, όμως, αυτές δεν έχουν την κατάλληλη θέση στα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης των παιδιών μιας και αυτή επικεντρώνεται στους φυσικούς αριθμούς και τις προσθετικές σχέσεις, στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018). Οι Βαμβακούση και Καλδρυμίδου (2018) ανέλυσαν το αναλυτικό πρόγραμμα του 2011 (Α.Π., 2011) για το νηπιαγωγείο, την Α΄ και τη Β΄ Δημοτικού ως προς του ρητούς μαθησιακούς του στόχους που αφορούν το πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο. Διαπίστωσαν ότι αυτοί ήταν κατά πολύ λιγότεροι από αυτούς που αφορούν το προσθετικό εννοιολογικό πεδίο (φυσικοί αριθμοί ως πληθικοί αριθμοί, καταμέτρηση, προσθετικές καταστάσεις), τόσο ως προς το πλήθος, όσο και ως προς τον προτεινόμενο διδακτικό χρόνο. Ειδικότερα, για το νηπιαγωγείο διαπίστωσαν ότι, παρά το γεγονός ότι υπήρχαν ρητοί στόχοι σχετικά με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, αυτοί περιορίζονταν στις διακριτές ποσότητες, παρά το γεγονός ότι κι άλλες θεματικές ενότητες προσφέρονται για την πραγμάτευση τέτοιων στόχων, όπως οι μετρήσεις και η συμμετρία. Τέλος, επισήμαναν ότι στο νηπιαγωγείο δεν προβλεπόταν λεξιλόγιο πρόσφορο για την περιγραφή πολλαπλασιαστικών σχέσεων, ούτε καν η λέξη «μισό».

Παρόμοια είναι η εικόνα στο πιο πρόσφατο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών του νηπιαγωγείου. Το Νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα (Α.Π., 2022) για το Νηπιαγωγείο περιλαμβάνει στόχους καλλιέργειας δεξιοτήτων που σχετίζονται με την πολλαπλασιαστική σκέψη μέσα από δραστηριότητες όπου τα παιδιά καλούνται να ομαδοποιήσουν και να μοιράσουν αντικείμενα σε δυάδες, τριάδες, τετράδες και πεντάδες αλλά και να χρησιμοποιήσουν υποδιαιρέσεις της μονάδας σε απλές καθημερινές καταστάσεις. Ωστόσο, οι στόχοι αυτοί,

αφενός αναφέρονται ρητά μόνο στις διακριτές ποσότητες (ομαδοποίηση αντικειμένων) και αφετέρου δεν παρέχουν στα παιδιά τα απαραίτητα γλωσσικά εργαλεία για την κατανόηση και την έκφραση των σχέσεων μεταξύ των ποσοτήτων που επεξεργάζονται.

Το φαινόμενο αυτό όμως παρατηρείται και σε διεθνές επίπεδο, μιας και ακόμα πολλά προγράμματα σπουδών δεν έχουν προσαρμοστεί κατάλληλα, ιδιαίτερα στο νηπιαγωγείο. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι σύμφωνα με τα Common Core Standards (Common Core State Standards Initiative, u.d.) στην Αμερική, τα παιδιά προσχολικής ηλικίας έρχονται σε επαφή με τους φυσικούς αριθμούς μέχρι το 20 στο πλαίσιο συγκρίσεων και προσθετικών καταστάσεων ενώ δεν πραγματεύονται στόχοι σχετικά με την πολλαπλασιαστική σκέψη. Το ίδιο παρατηρούμε και στην περίπτωση της Φινλανδίας (Finnish National Agency for Education, 2022) και της Σουηδίας (Swedish National Agency for Education, 2024), χωρών που δίνουν ιδιαίτερη σημασία στην εκπαίδευση, η οποία από το επίπεδο του νηπιαγωγείου προωθεί την ανακαλυπτική μάθηση μέσα από το παιχνίδι και την κατάκτηση της ικανότητας του παιδιού να επιλύει προβλήματα. Και εκεί, τα παιδιά ενθαρρύνονται να συμμετέχουν σε δραστηριότητες σχετικά με τους αριθμούς για να μπορούν να καταμετρήσουν ποσότητες και να χρησιμοποιήσουν για το πλήθος τις κατάλληλες λέξεις και αριθμητικά σύμβολα. Όσον αφορά τα βασικά γεωμετρικά σχήματα τα παιδιά προτρέπονται να παρατηρήσουν, να τα ταξινομήσουν και να τα συγκρίνουν ενώ εμπεριέχεται και η έννοια της μέτρησης την οποία τα παιδιά μπορούν να προσεγγίσουν μέσα από χωρικές σχέσεις και ζωγραφιές ή χειροτεχνίες. Ρητοί στόχοι για την ενίσχυση της πολλαπλασιαστικής σκέψης δεν υπάρχουν σε κανένα από τα δύο αναλυτικά προγράμματα σπουδών. Τέλος, το ίδιο ισχύει και για το πρόγραμμα σπουδών της Κίνας (Curriculum Development Council, 2017), σύμφωνα με το οποίο τα παιδιά πρέπει να επιδείξουν ενδιαφέρον για τους αριθμούς και τις ποσότητες αλλά και τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης μέσα από τη χρήση αντικειμένων και μαθηματικών συμβόλων για να καταφέρουν να επιλύουν μαθηματικά προβλήματα και στην καθημερινή τους ζωή. Ακόμη και στο σημείο που αναφέρεται η χρήση μοτίβων δεν αναφέρονται στόχοι που να σχετίζονται με την πολλαπλασιαστική σκέψη.

Η ασυμμετρία αυτή υπέρ του προσθετικού εννοιολογικού πεδίου στα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης δημιουργεί εμπόδια στη μαθηματική ανάπτυξη των παιδιών βραχυπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα (Hunting & Davis, 2010; Sophian, 2004; Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018).

Έχει παρατηρηθεί ότι η επίδοση των μικρών παιδιών σε απλές πολλαπλασιαστικές καταστάσεις με συνεχείς ποσότητες μειώνεται, όταν αυτά αρχίζουν να αναπαριστούν το πλήθος μέσω της καταμέτρησης (Ni & Zhou, 2005). Για παράδειγμα, ένα παιδί που μπορεί να μοιράσει μια χάρτινη «τούρτα» σε 4 «κορίτσια» και μια ίδια σε 2 «αγόρια», έχοντας μπροστά του τα μερίδια της κάθε ομάδας, αν ρωτηθεί ποιος θα πάρει μεγαλύτερο κομμάτι, να απαντήσει «τα κορίτσια», είτε γιατί «τα κορίτσια είναι περισσότερα», είτε γιατί «τα κομμάτια είναι περισσότερα». Οι Boyer και συνεργάτες (2008), εξηγώντας το εύρημα ότι τα παιδιά έχουν υψηλότερη επίδοση σε αναλογικά προβλήματα στην περίπτωση των συνεχών, παρά των διακριτών ποσοτήτων (βλ. 1.2), θεωρούν ότι αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στη δεύτερη περίπτωση, τα παιδιά δεν βασίζονται στην αντιληπτική σύγκριση των λόγων, αλλά σε αριθμητικές στρατηγικές.

Τα παιδιά θα εμφανίσουν προβλήματα και στα κλάσματα. Για παράδειγμα, η Ball (1993, όπως αναφέρεται στο Boyer & Levine, 2008) σε έρευνα της εντόπισε την συστηματικά λανθασμένη ερμηνεία του μεγέθους των κλασμάτων λόγω της λανθασμένης μεταφοράς των γνώσεων των παιδιών από τους φυσικούς αριθμούς. Πιο συγκεκριμένα, τα παιδιά ανέφεραν πως τα κλάσματα με μεγαλύτερους παρονομαστές είναι μεγαλύτερα από εκείνα με μικρότερους παρονομαστές (π.χ., 4/6 < 4/8). Παρόμοια, πολλοί μαθητές απαντούν ότι, για παράδειγμα, το κλάσμα 3/8 είναι μεγαλύτερο από το 2/3, γιατί «το 3 είναι μεγαλύτερο από το 2 και το 8 είναι μεγαλύτερο από το 3». (Vamvakoussi et al., 2018).

Η Moss (2005) σε έρευνα της αναδεικνύει ένα άλλου τύπου γνωστό λάθος στη σύγκριση κλασμάτων, παρουσιάζοντας το παράδειγμα ενός παιδιού που θεωρεί ότι το 3/4 και το 2/3 είναι ίσα, γιατί από το καθένα «λείπει ένα κομμάτι για να γίνουν ολόκληρα». Ακόμη και όταν του ζητήθηκε να σχεδιάσει την αναπαράσταση του κάθε κλάσματος, το παιδί παρέμεινε στην αρχική του απάντηση, με δύο σωστά μοντέλα «πίττας» μπροστά του.

Λάθη ή περιορισμένες ερμηνείες εντοπίζονται και στο πλαίσιο πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που αφορούν αναλογίες. Η Lamon (όπως αναφέρει η Moss, 2005) μέσα από έρευνές της έδειξε ότι τα παιδιά ερμηνεύουν σε ορισμένες περιπτώσεις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις ως προσθετικές. Για παράδειγμα, ζητήθηκε από τα παιδιά να υπολογίσουν ποιο από δύο φίδια μεγάλωσε περισσότερο, αναφέροντας τους πως το πρώτο φίδι είχε αρχικό μήκος 4 πόδια και τελικό μήκος 7 πόδια και το δεύτερο φίδι είχε αρχικό μήκος 5 πόδια και τελικό μήκος 8 πόδια. Τα περισσότερα παιδιά εστίασαν στην προσθετική μεταβολή και

απάντησαν ότι τα δύο φίδια μεγάλωσαν το ίδιο, ενώ πολύ λιγότερα παιδιά εστίασαν στην πολλαπλασιαστική μεταβολή και σύγκριναν τους λόγους 4/7 και 5/8 παρατηρώντας ότι το πρώτο φίδι μεγάλωσε περισσότερο σε σχέση με το αρχικό του μήκος. Παρόμοια προβλήματα εντοπίστηκαν και από τους Misailidou & Williams (2003), όπου παιδιά κλήθηκαν να λύσουν αναλογικά προβλήματα με μία ελλείπουσα τιμή (missing value problems). Για παράδειγμα, σε ένα από τα προβλήματα της έρευνας αυτής, στα παιδιά αναφέρθηκε πως για να βάψει έναν τοίχο η Sue θα χρησιμοποιήσει 1 κουτί κίτρινη μπογιά και 3 κουτιά μπλε και τους ζητήθηκε να βρουν πόσα κουτιά μπλε μπογιά θα χρησιμοποιήσει η Jenny, αν έχει 5 κουτιά κίτρινη μπογιά. Τα παιδιά εδώ, απάντησαν και πάλι χρησιμοποιώντας προσθετικές σχέσεις πως αφού η Sue έβαλε 2 κουτιά παραπάνω κίτρινης μπογιάς, άρα και η Jenny θα πρέπει να έχει χρησιμοποιήσει 2 κουτιά παραπάνω, δηλαδή έχει 3 κουτιά μπλε μπογιάς.

Κάποια από τα παραπάνω είναι ενδεικτικά των προβλημάτων που δημιουργούνται κατά τη μετάβαση από τους φυσικούς αριθμούς στους ρητούς και σχετίζονται με την καταχρηστική μεταφορά των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών και των κανόνων που εφαρμόζονται σε αυτούς σε στο πλαίσιο των ρητών. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται προκατάληψη του φυσικού αριθμού (natural number bias- Alibali, 2015; Christou & Vamvakoussi, 2021). Ένα ακόμη κοινό λάθος που σχετίζεται με την πολλαπλασιαστική σκέψη και οφείλεται στην προκατάληψη του φυσικού αριθμού είναι η λανθασμένη αντίληψη ότι ο πολλαπλασιασμός «μεγαλώνει» έναν αριθμό (Vamvakoussi et. al, 2013; Christou, 2015) μιας και αυτό είναι γεγονός όταν αναφερόμαστε σε πολλαπλασιασμό φυσικών αριθμών α και β (με $\alpha,\beta\neq0$ και $\alpha,\beta\neq1$).

Ωστόσο, κάποια άλλα προβλήματα δεν μπορούν να εξηγηθούν με βάση αποκλειστικά την προκατάληψη του φυσικού αριθμού. Απαιτείται μια ευρύτερη οπτική και θα μπορούσε να πει κανείς ότι τα παιδιά στηρίζονται σε στοιχεία του προσθετικού εννοιολογικού πεδίου για να ερμηνεύσουν καταστάσεις του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου (Vergnaud, 1994). Πράγματι, στα παραπάνω παραδείγματα φαίνεται τα παιδιά να βασίζονται στις γνώσεις τους για τους φυσικούς αριθμούς και τις προσθετικές σχέσεις για να μπορέσουν να επεξεργαστούν πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, γεγονός που τα οδηγεί σε λάθη (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018). Όπως ισχυρίζονται οι Βαμβακούση και Καλδρυμίδου, αλλά και άλλες ερευνήτριες και ερευνητές (Ni & Zhou, 2005; Sophian, 2005; Vamvakoussi et al., 2018) το πρόβλημα αυτό μπορεί να οφείλεται στην έμφαση στο προσθετικό εννοιολογικό

πεδίο στα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης και την ταυτόχρονη παραμέληση του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου. Οι Hunting και Davis (1991) έχουν υποστηρίξει εδώ και χρόνια την άποψη ότι τα κλάσματα προκαλούν προβλήματα στα παιδιά επειδή ακριβώς η διδασκαλία τους καθυστερεί σημαντικά μέσα στα σχολικά τους χρόνια επιτρέποντας στις γνώσεις τους για τους φυσικούς αριθμούς να κυριαρχήσουν. Έχουν, δε, επισημάνει ότι η πρώιμη εμπλοκή των παιδιών σε πολλαπλασιαστικές καταστάσεις μπορεί να συμβάλει στη σταδιακή οικοδόμηση κατάλληλων εννοιολογικών δομών και να διευκολύνει τη μετέπειτα κατανόηση πιο σύνθετων μαθηματικών εννοιών.

Σε μια προσπάθεια άμβλυνσης των δυσκολιών που τα παιδιά αντιμετωπίζουν κατά την εισαγωγή τους σε έννοιες που σχετίζονται με την πολλαπλασιαστική σκέψη, οργανώθηκε η παρούσα έρευνα. Η έρευνα αυτή στηρίζεται στην παραδοχή ότι οι συνέπειες της ασυμμετρίας που παρατηρείται στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών υπέρ του προσθετικού πεδίου θα μπορούσαν να περιοριστούν, εφόσον η εκπαίδευση φρόντιζε να θεμελιώσει από νωρίς τις βάσεις της πολλαπλασιαστικής σκέψης. Φυσικά, η έρευνα αυτή δεν είναι η πρώτη που αφορά στη διδασκαλία για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης στις μικρές ηλικίες. Στην επόμενη ενότητα ανασκοπούνται σχετικές μελέτες παρέμβασης.

1.4 Μελέτες παρέμβασης για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης στην πρωτοσχολική ηλικία

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε εμπειρικές μελέτες για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης στις μικρές ηλικίες με παρεμβατικό χαρακτήρα, ανεξάρτητα από το είδος της μεθοδολογίας. Επειδή οι έρευνες στις ηλικίες του νηπιαγωγείου (4-6) είναι σχετικά περιορισμένες, επεκτείναμε την ανασκόπηση στις ηλικίες από περίπου 4 μέχρι 7 ετών, που αντιστοιχούν στο Νηπιαγωγείο και την Α΄ Δημοτικού στο Ελληνικό εκπαιδευτικό πλαίσιο. Οι έρευνες που εντοπίστηκαν οργανώνονται με βάση την εστίασή τους σε συστατικά της πολλαπλασιαστικής σκέψης.

Η Sophian (2004) οργάνωσε ένα εκπαιδευτικό πρόγραμμα με εστίαση στην έννοια της μονάδας, στις συνεχείς και τις διακριτές ποσότητες. Κεντρική ιδέα του σχεδιασμού ήταν να αναδειχθούν οι ομοιότητες μεταξύ της καταμέτρησης και της μέτρησης, υπό το πρίσμα της μέτρησης, με τα εξής κρίσιμα σημεία: α) η επιλογή μονάδας επηρεάζει το αποτέλεσμα της

μέτρησης, αλλά και της καταμέτρησης (π.χ. 6 παπούτσια, αλλά 3 ζευγάρια παπούτσια) και β) μονάδες μιας τάξης μπορούν να συγκροτηθούν σε μονάδα άλλης τάξης, είτε μικρότερης, είτε μεγαλύτερης. Το πρόγραμμα εφαρμόστηκε σε 46 παιδιά (περίπου 3 έως περίπου 5 ετών στην αρχή του προγράμματος), σε τρία σχολεία και περιελάμβανε μία εβδομαδιαία δραστηριότητα που εφαρμοζόταν στο σχολείο από τον Σεπτέμβριο μέχρι και τον Μάιο. Ο σχεδιασμός ήταν πειραματικός και περιλάμβανε προέλεγχο/μεταέλεγχο και δύο ομάδες ελέγχου: μια ομάδα παιδιών που συμμετείχαν σε πρόγραμμα ανάπτυξης της γλώσσας και μια ομάδα παιδιών που δεν συμμετείχαν σε κανένα από τα δύο προγράμματα. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων προέκυψε πως η πειραματική ομάδα βελτίωσε σημαντικά τις μαθηματικές επιδόσεις σε μια ποικιλία έργων, σε σχέση με τις ομάδες ελέγχου.

Η Mallone και οι συνεργάτιδές της (π.χ. Iannece et al., 2010; Mallone et al., 2013, 2026) εστιάζουν στην μέτρηση και αξιοποιούν τις σχέσεις αναλογίας και αντίστροφης αναλογίας που διέπουν τη μέτρηση. Αυτή η ερευνητική ομάδα διατηρεί μακροχρόνια συνεργασία με σχολεία και επιδίδεται σε έρευνες σχεδιασμού, με ιδιαίτερη έμφαση στο σχεδιασμό διδακτικών έργων, αλλά και παιδαγωγικών προσεγγίσεων για τις μικρές ηλικίες (5 έως 8 ετών), όπως είναι η διδασκαλία που οργανώνεται γύρω από την αφήγηση μια ιστορίας (story-telling, Mallone et al., 2013, 2026). Στις εργασίες τους στοιχειοθετούν με παραδείγματα διδακτικών επεισοδίων την ανάδυση της πολλαπλασιαστικής σκέψης των μικρών παιδιών, στο πλαίσιο της δραστηριότητας που προκαλείται από τα διδακτικά έργα και τη διαχείρισή τους από την εκπαιδευτικό. Για παράδειγμα, στο ευρύτερο πλαίσιο μιας έρευνας σχεδιασμού, 14 παιδιά νηπιαγωγείου είχαν ήδη επεξεργαστεί έργα μέτρησης μήκους, καθώς και τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων στο πλαίσιο της μέτρησης (Iannece et al., 2010). Τους δόθηκε ένας σωρός από πλακίδια, τα οποία μπορούσαν να συναρμολογηθούν το ένα πάνω στο άλλο και τους τέθηκε το ερώτημα: «Πώς μπορούμε να τα μετρήσουμε;». Τα παιδιά άρχισαν να οργανώνουν τα πλακίδια με διάφορους τρόπους σε στοίβες και, κάποια στιγμή, σε ισοϋψείς στοίβες, εκφράζοντας το πλήθος τους ως αποτέλεσμα μέτρησης με σύνθετες μονάδες.

Στην κατασκευή της σύνθετης μονάδας έδωσε μεγάλη έμφαση η Καπέλου (2004), στο πλαίσιο της διδακτορικής της διατριβής με στόχο την επεξεργασία πολλαπλασιαστικών δομών στο νηπιαγωγείο. Στην έρευνα συμμετείχαν 66 παιδιά (5-6 ετών) από τρία νηπιαγωγεία και η εφαρμογή έγινε στη διάρκεια ενός εξαμήνου. Η πρώτη προσέγγιση στη

σύνθετη μονάδα έγινε με τη δυάδα σε ένα πρόσφορο πλαίσιο (γάντια-ζευγάρια γάντια). Τα παιδιά επέλυσαν προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης στο ίδιο πλαίσιο (π.χ. «Πόσα γάντια/ζευγάρια γάντια για 3 παιδιά; Για πόσα παιδιά 6 γάντια/3 ζευγάρια γάντια;»). Στη συνέχεια, τα παιδιά επεξεργάστηκαν δύο τύπους προβλημάτων. Στον πρώτο τύπο («Ραβδάκια και κουτιά»), τα παιδιά χρησιμοποίησαν «ραβδάκια» (συναρμολογημένες ομάδες από κυβάκια λέγκο) για να κατασκευάσουν «κουτιά» (ορθογώνιες διατάξεις από ίδια «ραβδάκια» σε «σειρές») και κλήθηκαν να μετρήσουν πόσα «ραβδάκια» και «κυβάκια» αποτελούν ένα δεδομένο «κουτί», μια δραστηριότητα που θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι περιλαμβάνει σύνθεση μιας ποσότητας με επανάληψη μιας σύνθετης μονάδας και μέτρηση ποσότητας με απλές και σύνθετες μονάδες. Τέλος, στα παιδιά δόθηκε μια κατάσταση, στην οποία ένα φυσικός αριθμός λειτουργεί ως πολλαπλασιαστικός τελεστής επί μίας σύνθετης μονάδας. Πιο συγκεκριμένα, τα παιδιά κλήθηκαν να υπολογίσουν πόσες ομάδες (δυάδες, τριάδες, τετράδες) αντικειμένων και πόσα αντικείμενα υπάρχουν σε ένα αδιαφανές κουτί, με δεδομένα μία τέτοια ομάδα και μια κάρτα με έναν φυσικό αριθμό (2,3,4) που εκφράζει το πλήθος των ομάδων στο κουτί. Τα παιδιά εξετάστηκαν ατομικά πριν και μετά την παρέμβαση, καθώς και μεταγενέστερα με 3 ίδια τεστ που εξέταζαν ένα ευρύ πεδίο αριθμητικών γνώσεων συμπεριλαμβανομένων και των πολλαπλασιαστικών. Η Καπέλου στοιχειοθετεί εξελίξεις στον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζουν τα παιδιά αυτά τα έργα κατά την παρέμβαση, ενώ οι έλεγχοι δείχνουν σημαντική βελτίωση των παιδιών στα έργα πολλαπλασιαστικού τύπου, και ποιοτικές διαφορές σε άλλα έργα, στα οποία τα παιδιά μπορούν να αξιοποιήσουν σύνθετες μονάδες.

Πιο πρόσφατα, οι Cheeseman et al. (2023) οργάνωσαν ένα πρόγραμμα για παιδιά του νηπιαγωγείου, με έμφαση και πάλι στις σύνθετες μονάδες, το οποίο εφάρμοσαν σε μια τάξη νηπιαγωγείου 21 παιδιών, σε πέντε μαθήματα. Ο γενικός στόχος ήταν να μπορέσουν τα παιδιά να συγκρατήσουν και να διαχειριστούν νοερά σύνθετες μονάδες. Ξεκίνησαν με κινητικό παιχνίδι, στο οποίο τα παιδιά καλούνταν να σχηματίσουν ομάδες με συγκεκριμένο πλήθος με ένα παράγγελμα, και εισήγαγαν όρους («ίσες ομάδες», «ομάδες των τριών»). Τα παιδιά, επίσης, κλήθηκαν να καταμετρήσουν «πεντάρια», οργανωμένα σε ένα πρότυπο παλάμης και να αναγνωρίσουν το πλήθος από διατάξεις κουκκίδων, τόσο οργανωμένων στο πρότυπο του ζαριού, όσο και χωρίς οργάνωση. Τέλος, τους ζητήθηκε να αναπαραστήσουν με εικόνες τι «φαντάζονται» σε δύο προβληματικές καταστάσεις: Πώς μπορεί να χωρίστηκαν

σε ισοπληθείς ομάδες 12 «παπάκια» και «πόσα πόδια από χελώνες βρίσκονται σε ένα κουτί που περιέχει δύο κουτιά, που καθένα περιέχει δύο χελώνες». Οι Cheeseman et al. στοιχειοθετούν με παραδείγματα από την παρέμβαση και τις ζωγραφιές των παιδιών ότι τα παιδιά ανταποκρίνονται στα έργα αυτά, εκδηλώνοντας τη δυνατότητα χειρισμού των «πολλών ως ένα» στη δράση και σε νοερό επίπεδο.

Σε παρόμοιο πλαίσιο εντάσσεται και η πρόσφατη μελέτη των Χρήστου και Κανδύλη (2024), οι οποίοι σχεδίασαν και υλοποίησαν μία διδακτική παρέμβαση βασισμένη σε ένα παιχνίδι παρόμοιο με αυτό των Cheeseman et al. (2023), με στόχο την πρώιμη κατανόηση της διαίρεσης μέτρησης. Οι Χρήστου και Κανδύλη έδωσαν σε 35 παιδιά νηπιαγωγείου (4-6 ετών) 4 προβλήματα διαίρεσης μέτρησης στο πλαίσιο διακριτών ποσοτήτων (π.χ. «Έχω 12 μπισκότα και κουτιά που χωρούν δύο μπισκότα το καθένα. Πόσα κουτιά θα χρειαστώ για τα μπισκότα;»), με εικονική αναπαράσταση των δεδομένων. Την επόμενη μέρα, 14 από αυτά τα παιδιά συμμετείχαν σε μία παρέμβαση, στην οποία έπαιξαν το κινητικό παιχνίδι στο οποίο τα παιδιά κινούνται ελεύθερα και σχηματίζουν ομάδες με δεδομένο πλήθος στοιχείων με ένα παράγγελμα. Μετά από κάθε φάση του παιχνιδιού, η ερευνήτρια έστρεφε την προσοχή τους στις σχέσεις μεταξύ των του πλήθους των στοιχείων της ομάδας και το πλήθος των ομάδων. Η παρέμβαση ήταν σύντομη, με τα παιδιά να παίζουν το παιχνίδι για 5 γύρους μέσα σε μία διδακτική ώρα. Την επόμενη μέρα, έγινε ο μεταέλεγχος σε όλα τα παιδιά. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι, και πριν την παρέμβαση, τα περισσότερα παιδιά είχαν επιλύσει προβλήματα διαίρεσης μέτρησης, κυρίως με στοιχειώδεις στρατηγικές (π.χ. απεικονίζοντας την αντιστοίχιση δύο μπισκότων σε ένα κουτί και επαναλαμβάνοντας). Μετά την παρέμβαση, τα παιδιά της πειραματικής ομάδας απεικόνισαν πιο συχνά την ομαδοποίηση (π.χ. κυκλώνοντας ομάδες των δύο και καταμετρώντας), ενώ κάποια από αυτά έλυσαν προβλήματα νοερά.

Οι Bicnell και συνεργάτες (2016) πραγματοποίησαν μια έρευνα σχεδιασμού με στόχο την ανάπτυξη της κατανόησης των μικρών παιδιών για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση. Σχεδίασαν μια διδακτική ακολουθία, στην οποία συμπεριέλαβαν προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μέτρησης, στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων (τύπος των «ισοπληθών ομάδων», με πλήθος 2, 5 και 10). Το πρόγραμμα υλοποιήθηκε σε μια τάξη 15 παιδιών, περίπου 5 ετών, σε διάστημα 2 εβδομάδων. Εκτός από τη χρήση του χειραπτικού υλικού, έγινε σκόπιμη εισαγωγή λεξιλογίου για τις «ομάδες», για τις αντίστοιχες πράξεις

(πολλαπλασιασμός, διαίρεση), αλλά και τα αντίστοιχα σύμβολα των πράξεων. Οι εκφράσεις «ομάδες των ν» και «σε ομάδες των ν» συνδέθηκαν ρητά με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, αντίστοιχα. Τα παιδιά καλούνταν να γράψουν την αριθμητική πρόταση που αντιστοιχούσε στα προβλήματα που έλυναν (κάτι που ήταν απαιτητικό και όχι πάντα ευνοϊκό, σύμφωνα με την εκπαιδευτικό που εφάρμοσε το πρόγραμμα). Τα παιδιά εξετάστηκαν ατομικά πριν και μετά την παρέμβαση, με ένα τεστ που περιλάμβανε προβλήματα πολλαπλασιασμού, διαίρεσης, πρόσθεσης, αφαίρεσης και καταμέτρησης. Τα αποτελέσματα έδειξαν σημαντική βελτίωση της επίδοσης σε όλους του τύπους έργων. Στην καταμέτρηση αυτό εκδηλώθηκε με εξέλιξη των στρατηγικών καταμέτρησης (π.χ. με βήμα 2, ή συνέχιση της καταμέτρησης από έναν δεδομένο αριθμό και πάνω). Ενδιαφέρον παρουσιάζει το εύρημα ότι, παρόμοια με την έρευνα των Χρήστου και Κανδύλη (2024), επιτυχής επίλυση πολλαπλασιαστικών προβλημάτων εμφανίστηκε και πριν την παρέμβαση.

Στο σημείο αυτό, αξίζει να σημειωθεί μια διακριτή προσέγγιση στην ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψη που προέρχεται από ερευνήτριες και ερευνητές που ασχολούνται με τις κανονικότητες (π.χ. επαναλαμβανόμενα και εξελισσόμενα μοτίβα ή άλλους είδους πρότυπα). Μία ερευνητική ομάδα από την Αυστραλία, με κεντρικό πρόσωπο την Joanne Mulligan και διάφορους συνεργάτες και συνεργάτιδες (2006, 2007, 2009, 2011) θεωρεί την ενασχόληση με τις κανονικότητες ως παράγοντα προώθησης της πολλαπλασιαστικής σκέψης. Η σύνθετη μονάδα («πολλά ως ένα») αποτελεί έναν κρίκο σύνδεσης των κανονικοτήτων με την πολλαπλασιαστική σκέψη. Πιο συγκεκριμένα, ας πάρουμε ένα παράδειγμα επαναλαμβανόμενου μοτίβου της μορφής ABBABB. Μια προηγμένη κατανόηση αυτού του τύπου μοτίβου βασίζεται στη θεώρηση του ABB ως μια ενιαία μονάδα, η οποία επαναλαμβάνεται. Με αυτό το σκεπτικό, η διδασκαλία που σκοπεύει στην υποστήριξη των παιδιών να αναγνωρίζουν την επαναλαμβανόμενη μονάδα των μοτίβων ευνοεί ταυτόχρονα και την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης και μπορεί να ξεκινήσει από τις μικρές ηλικίες, ήδη από τα 4 έτη (Papic et al. 2007, 2011).

Μια δεύτερη σύνδεση ανάμεσα στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα και την πολλαπλασιαστική σκέψη παραπέμπει στον σταθερό λόγο («πολλά προς ένα»). Για παράδειγμα, στο παραπάνω μοτίβο, ανεξάρτητα από το πλήθος των επαναλήψεων, για κάθε Α υπάρχουν 2 Β. Τη σύνδεση αυτή αξιοποίησαν διδακτικά η Warren και Cooper (2007) με μεγαλύτερης ηλικίας παιδιά του Δημοτικού (9 ετών).

Η Nunes και συνεργάτες της (Nunes et al., 2010; Park & Nunes, 2011) σχεδίασαν πειραματικές παρεμβάσεις για να ελέγξουν την υπόθεση ότι το σχήμα της ένα-προς-πολλά αντιστοιχίας είναι θεμέλιο της πολλαπλασιαστικής σκέψης, εμφανίζεται ή μπορεί να εμφανιστεί στη δράση πριν τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης και υποστηρίζει περισσότερο την πολλαπλασιαστική σκέψη, σε σχέση με το μοντέλο της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης ή αφαίρεσης.

Στη δεύτερη μελέτη που παρουσιάζουν οι Nunes και συνεργάτες (2010) συμμετείχαν 32 παιδιά με ηλικία από 4 έτη και 8 μήνες, έως 5 έτη και 9 μήνες (μέση ηλικία 5 έτη και 4 μήνες), που δεν είχαν σχολικές εμπειρίες με πολλαπλασιαστικές καταστάσεις. Τα παιδιά χωρίστηκαν τυχαία σε πειραματική ομάδα και ομάδα ελέγχου. Κάθε παιδί της πειραματικής ομάδας συμμετείχε σε δύο συνεδρίες της μισής ώρας περίπου, όπου έλυσε προβλήματα του τύπου των «ισοπληθών ομάδων» τόσο πολλαπλασιασμού, όσο και διαίρεσης με εμπράγματες αναπαραστάσεις και υποστήριξη από την ερευνήτρια για την πραγματοποίηση ένα-προς-πολλά αντιστοιχίσεων. Η πειραματική ομάδα αφιέρωσε περίπου τον ίδιο χρόνο σε έργα οπτικής αντίληψης και σκέψης. Έγινε προέλεγχος και μεταέλεγχος με πολλαπλασιαστικά και προσθετικά προβλήματα και στις δύο ομάδες. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η επίδοση της πειραματικής ομάδας βελτιώθηκε σημαντικά και πιο πολύ από αυτήν της ομάδας ελέγχου μετά την παρέμβαση.

Η πρώτη μελέτη που παρουσιάζουν οι Nunes και συνεργάτες (2010) είναι η μελέτη των Park και Nunes (2001), με λεπτομέρειες και αναλύσεις που δεν είχαν συμπεριληφθεί στην αρχική δημοσίευση. Οι Park και Nunes χώρισαν 42 παιδιά μέσης ηλικίας 6 ετών και 7 μηνών σε δύο ομάδες, κάθε μία εκ των οποίων εκτέθηκε σε διαφορετική παρέμβαση. Και οι δύο ομάδες εξετάστηκαν πριν και μετά την παρέμβαση με κοινό δοκίμιο που περιελάβανε 8 προσθετικά (πρόσθεση, αφαίρεση) και 8 πολλαπλασιαστικά προβλήματα (πολλαπλασιασμός, διαίρεση). Κάθε παιδί συμμετείχε ατομικά στην παρέμβαση και έλυσε 16 προβλήματα σε δύο συνεδρίες, ανάλογα με την ομάδα του. Στην μία ομάδα δόθηκαν προβλήματα επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης (π.χ. «Ο Τομ έχει 3 αυτοκινητάκια. Η Άννα έχει 3 κούκλες. Πόσα παιχνίδια έχουν και τα δυο παιδιά μαζί;» ενώ στη άλλη ομάδα δόθηκαν προβλήματα του τύπου των ισοπληθών ομάδων (π.χ. «Η μαμά της Μαρίας φτιάχνει δυο κατσαρόλες τοματόσουπα. Θα βάλει 3 τομάτες σε κάθε κατσαρόλα. Πόσες τομάτες θα χρειαστεί;»). Από διαδικαστική άποψη, και οι δύο τύποι προβλημάτων μπορούν να επιλυθούν με

επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Τα παιδιά υποστηρίχτηκαν κατά την παρέμβαση να αξιοποιήσουν αναπαραστάσεις για να μοντελοποιήσουν τα προβλήματα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι και η επίδοση και των δύο ομάδων βελτιώθηκε σημαντικά μετά την παρέμβαση, αλλά η ομάδα που έλυσε τα πολλαπλασιαστικά προβλήματα βελτιώθηκε περισσότερο από την άλλη στα αντίστοιχα προβλήματα του μεταελέγχου.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να επισημανθεί ότι τα προβλήματα αυτού του τύπου μπορούν να θεωρηθούν υπό το πρίσμα της συμμεταβολής δύο ποσοτήτων, και έχουν μελετηθεί και από ερευνητές και ερευνήτριες που ενδιαφέρονται για την ανάπτυξη της αλγεβρικής/συναρτησιακής σκέψης στις μικρές ηλικίες, ως ειδική περίπτωση συνάρτησης (y=αx). Για παράδειγμα, οι Blanton et al. (2015) συμπεριέλαβαν τέτοιου είδους συναρτήσεις στη διδακτική ακολουθία που σχεδίασαν για παιδιά από το νηπιαγωγείο ως τη Β΄ Δημοτικού. Τα σχετικά διδακτικά έργα αφορούν την εγκαθίδρυση μιας αντιστοιχίας ένα-προς-ένα (α=1) ή ένα-προς-προς-πολλά (α>1) μεταξύ δύο διακριτών συνόλων (π.χ. 1 σκυλί-1 μύτη, 2 σκυλιά – 2 μύτες, … / 1 σκυλί-4 πόδια, 2 σκυλιά – 8 πόδια) και η έμφαση δίνεται στην αναγνώριση και γενίκευση της σχέσης.

Η κατάσταση της «δίκαιης μοιρασιάς» έχει μελετηθεί ως προς την καταλληλόλητά της για την εισαγωγή της έννοιας του κλάσματος στις μικρές ηλικίες (νηπιαγωγείο και Α΄ Δημοτικού). Σε μια σειρά μελετών, η Mamede και οι συνεργάτες της (2008, 2012, 2018) σύγκριναν το νόημα του κλάσματος ως πηλίκου που συνδέεται με την κατάσταση της «δίκαιης μοιρασιάς», με άλλα νοήματα του κλάσματος. Για παράδειγμα, η Mamede (2018) πραγματοποίησε παρέμβαση με προέλεγχο και μεταέλεγχο με 37 παιδιά 6-7 ετών που δεν είχα σχολική εμπειρία με τα κλάσματα ή τη διαίρεση. Τα παιδιά χωρίστηκαν σε ομάδες και κλήθηκαν να συγκρίνουν κλάσματα, κάθε ομάδα σε διαφορετική κατάσταση που συνδέεται με διαφορετικά νοήματα του κλάσματος. Εξετάστηκαν τρία νοήματα για το κλάσμα: α) το κλάσμα ως πηλίκο (π.χ. «Τρία αγόρια θα μοιραστούν δίκαια μια μπάρα σοκολάτας. Έξι κορίτσια θα μοιραστούν δίκαια δύο ίδιες μπάρες» με ζητούμενο τη σύγκριση της ποσότητας που θα φάει το κάθε αγόρι και το κάθε κορίτσι), β) το κλάσμα ως μέρος-όλου (π.χ. «Η Μαρία και ο Γιάννης έχουν από μία ίδια σοκολάτα. Η Μαρία έκοψε τη δική της σε 3 κομμάτια και έφαγε το ένα. Ο Γιάννης έκοψε τη δική του σε 6 κομμάτια και έφαγε τα δύο» με ζητούμενο τη σύγκριση της ποσότητας που έφαγε κάθε παιδί) και γ) το κλάσμα ως τελεστής (π.χ. «Η Μαρία και ο Γιάννης έχουν 12 καραμέλες ο καθένας. Η Μαρία μοίρασε τις δικές της εξίσου

σε 3 ίδια πουγκιά. Ο Γιάννης μοίρασε τις δικές τους σε τα ίδια πουγκιά. Κάθε παιδί έφαγε τις καραμέλες από το ένα του πουγκί» με ζητούμενο τη σύγκριση της ποσότητας που έφαγε κάθε παιδί»). Η παρέμβαση ήταν σύντομη (2 συνεδρίες των 35 λεπτών περίπου), δόθηκαν εικονικές αναπαραστάσεις για τα προβλήματα και αναφέρθηκαν από την ερευνήτρια όροι για τα κλάσματα. Ο προέλεγχος και ο μεταέλεγχος περιλάμβαναν παρόμοια προβλήματα, και εξέταζαν κατά πόσο τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν όρους για τα κλάσματα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπήρξε σημαντική βελτίωση στην επίλυση μετά από τη σύντομη αυτή παρέμβαση μόνο για την ομάδα που δούλεψε με τις καταστάσεις «δίκαιης μοιρασιάς» και μόνο γι' αυτού του είδους τα προβλήματα σύγκρισης. Αντίθετα, τα παιδιά της ομάδας «μέρος-όλου», τα πήγαν καλύτερα στην ονομασία κλασμάτων. Η Mamede συμπεραίνει ότι το κλάσμα ως πηλίκο, συνδεδεμένο με καταστάσεις μοιρασιάς, είναι πιο πρόσφορο για την εισαγωγή της έννοιας στις μικρές ηλικίες, σε σχέση με το κλάσμα ως μέρος-όλου.

Η Empson (1995, 1999) αξιοποίησε την κατάσταση της «δίκαιης μοιρασιάς» στο σχεδιασμό μιας διδακτικής ενότητας για τη θεμελίωση της έννοιας του κλάσματος στις μικρές ηλικίες. Ο σχεδιασμός έγινε σε συνεργασία με την εκπαιδευτικό μιας τάξης Α΄ Δημοτικού με 19 παιδιά (6-7 ετών), η οποία και πραγματοποίησε τη διδασκαλία. Η διδακτική ενότητα περιλάμβανε 15 μαθήματα, τα οποία υλοποιήθηκαν στη διάρκεια 5 εβδομάδων. Τα προβλήματα που επεξεργάστηκαν τα παιδιά περιλάμβαναν «δίκαιη μοιρασιά» με διακριτές ποσότητες (χωρίς ή με υπόλοιπο που έπρεπε και αυτό να μοιραστεί) και συνεχείς ποσότητες και έμφαση στις σχέσεις ανάμεσα στο πλήθος των «παραληπτών» και το μέγεθος των μεριδίων. Τα κλάσματα που αντιστοιχούσαν στις καταστάσεις που επεξεργάστηκαν τα παιδιά ήταν κλασματικές μονάδες (τουλάχιστον μέχρι το 1/8), αλλά και μη μοναδιαία κλάσματα, γνήσια και καταχρηστικά. Συμβολισμός για τα κλάσματα δεν εισήχθη εξαρχής, αλλά σταδιακά στο διάστημα της εφαρμογής. Τα παιδιά είχαν στη διάθεσή τους εμπράγματο και εικονιστικό υλικό. Πριν και μετά την παρέμβαση, τα παιδιά συμμετείχαν σε ατομική κλινική συνέντευξη με προβλήματα μοιρασιάς, σύγκρισης κλασμάτων (π.χ. σε διαφορετικούς διαμερισμούς της ίδιας ποσότητας, «ποιο παιδί θα πάρει μεγαλύτερο μερίδιο;»), αλλά και πρόσθεσης κλασμάτων. Διαπιστώθηκε ότι, πριν την παρέμβαση, τα παιδιά μπορούσαν να διαχειριστούν σχεδόν αποκλειστικά καταστάσεις με το «μισό», σε απλές μορφές δίκαιης μοιρασιάς. Μετά την παρέμβαση, σχεδόν όλα παιδιά μπορούσαν να διαχειριστούν πιο σύνθετες καταστάσεις μοιρασιάς με περισσότερους διαιρέτες, και να συγκρίνουν κλάσματα,

ενώ κάποια επέλυσαν και προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων. Ενδιαφέρον για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας έχουν οι στρατηγικές των παιδιών για τον ισομερισμό συνεχών ποσοτήτων: Αρχικά τα παιδιά φαίνεται να πραγματοποιούν υποδιπλασιασμό με εκτίμηση, στη συνέχεια εφαρμόζουν επαναλαμβανόμενο υποδιπλασιασμό. Δυσκολίες εμφανίστηκαν όταν απαιτήθηκε περιττό πλήθος μεριδίων, όπου τα παιδιά εφάρμοσαν στρατηγικές δοκιμής και λάθους, καθώς προσπαθούσαν να συντονίσουν το πλήθος των μεριδίων, με το μέγεθος των μεριδίων και, ταυτόχρονα, να εξαντλήσουν τη δεδομένη ποσότητα. Στην πορεία φαίνεται να αναπτύσσουν πιο εξελιγμένες στρατηγικές, συμπεριλαμβανομένης της αξιοποίησης γεωμετρικών ιδιοτήτων των σχημάτων, όπως οι άξονες συμμετρίας (πρβλ. Καλδρυμίδου, 1999). Στον μεταέλεγχο, όλα τα παιδιά έκαναν τουλάχιστον ένα διαμερισμό, διαφορετικό από αυτόν στα δύο ίσα μέρη. Ωστόσο, ο ισομερισμός συνεχών ποσοτήτων ήταν και παρέμεινε μια πρόκληση για τα παιδιά.

Η επισκόπηση δείχνει ότι οι έρευνες με παρεμβατικό χαρακτήρα για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης σε παιδιά 4-7 ετών είναι σχετικά περιορισμένη. Οι έρευνες που εντοπίστηκαν διαφέρουν πολύ ως προς τη μεθοδολογία και τη διάρκεια της παρέμβασης, από σύντομες πειραματικές παρεμβάσεις, μέχρι πιο μακροχρόνιες έρευνες με τη μέθοδο του διδακτικού πειράματος ή της έρευνας σχεδιασμού. Από το σύνολο των ερευνών που εξετάσαμε προκύπτει ότι ακόμα και σύντομες παρεμβάσεις προκαλούν ποσοτικές ή ποιοτικές βελτιώσεις στην ικανότητα των παιδιών να αντιμετωπίζουν πολλαπλασιαστικά προβλήματα (π.χ. Nunes et al., 2010; Mamede, 2018; Χρήστου & Κανδύλη, 2024), ενώ σε πιο μακροχρόνιες παρεμβάσεις τεκμηριώνονται κατακτήσεις των παιδιών και σε απαιτητικές έννοιες, όπως είναι αυτή του κλάσματος (Empson, 1999).

Δυο κεντρικές ιδέες, το «πολλά ως ένα» και το «πολλά προς ένα» (Confrey et al., 2009) είναι παρούσες στις έρευνες αυτές. Το «πολλά ως ένα» είναι εμφανές στις έρευνες που δίνουν έμφαση στη σύνθετη μονάδα οι οποίες είναι, κατά κύριο λόγο, τοποθετημένες στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων (Cheeseman et al., 2023; Καπέλου, 2004; Χρήστου και Κανδύλη, 2024; βλ. και Papic et al., 2011 για τη μονάδα των επαναλαμβανόμενων μοτίβων ως «σύνθετη μονάδα»). Το «πολλά προς ένα» ενυπάρχει στις έρευνες που εστιάζουν στα προβλήματα αναλογίας με την κατάσταση των «ισοπληθών ομάδων» ως ειδική περίπτωση (Nunes et al., 2010; Park & Nunes, 2001) και επίσης τοποθετούνται, κατά κύριο λόγο, στο

πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων (βλ. και Blanton et al., 2015 για τη θεώρηση τέτοιων προβλημάτων από την οπτική της συνάρτησης).

Πιο συστηματική εναλλαγή του πλαισίου των διακριτών και συνεχών ποσοτήτων παρατηρείται στις προσεγγίσεις που δίνουν έμφαση στην έννοια της μονάδας και την ενέργεια της μέτρησης (Sophian, 2004; Iannece et al., 2010; Mallone et al., 2013, 2026), καθώς και στην ενέργεια του ισομερισμού με απόβλεψη στην έννοια του κλάσματος (Empson, 1999; Mamede, 2018).

Τέλος, θα πρέπει να επισημανθεί ότι σε πολλές περιπτώσεις δίνεται έμφαση στην εισαγωγή λεξιλογίου σχετικού με τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις που επεξεργάζονται τα παιδιά. Συχνή είναι η στόχευση στο λεξιλόγιο για την αναφορά σε σύνθετες μονάδες. Για παράδειγμα, η Καπέλου (2004) εισήγαγε αρχικά και σκόπιμα τον όρο «ζευγάρι» και στη συνέχεια φαίνεται να χρησιμοποιούνται στην παρέμβαση και άλλοι όροι (π.χ. «τριάδα»). Παρόμοια, οι Cheeseman et al. (2023) εισήγαγαν τον όρο «ομάδα των ν» (π.χ. “groups of five”) και αναφέρουν και τη χρήση όρων του τύπου «πέντε τριάρια» (five threes). Οι Bicknell et al. (2016), όχι μόνο εισήγαγαν λεξιλόγιο για τις «ομάδες», αλλά τροποποίησαν τις εκφράσεις («ομάδες των ν» και «σε ομάδες των ν») ώστε να ταιριάζουν με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση μέτρησης, αντίστοιχα. Επιπλέον προέβλεψαν τη χρήση συμβόλων και αριθμητικών προτάσεων για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση.

Η Empson (1999) προέβλεψε την εισαγωγή όρων για τα κλάσματα στην παρέμβασή της και την εξέτασε στον προέλεγχο και το μεταέλεγχο και, μάλιστα, για κλασματικές μονάδες, γνήσια κλάσματα και καταχρηστικά κλάσματα ως μεικτούς αριθμούς. Και η Mamede (2018), στη σύντομη παρέμβασή της, εισήγαγε και εξέτασε όρους για κλάσματα. Αντίθετα, δεν φαίνεται να υπάρχει συστηματική προσπάθεια για την εισαγωγή του όρου «ν-πλάσιο» για την περιγραφή της αντίστροφης σχέσης.

Παρά το γεγονός ότι σε κάποιες περιπτώσεις τα παιδιά επεξεργάζονται καταστάσεις που απαιτούν αντίστροφες ενέργειες λύνοντας προβλήματα που αντιστοιχούν σε πολλαπλασιασμό και διαίρεση δεν φαίνεται να υπάρχει συστηματική προσπάθεια να αναδειχθεί η αντιστρεψιμότητα των ενεργειών, ή να συμπεριληφθούν και οι τρεις θεμελιώδεις αυτές ενέργειες στον διδακτικό σχεδιασμό. Θα πρέπει να σημειωθεί, ωστόσο, ότι Bicnell et al. (2016) αναφέρουν ότι κατά τη διδασκαλία, τα παιδιά κλήθηκαν να γράψουν

την αριθμητική πρόταση που αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό, μαζί με αυτή που αντιστοιχεί στη διαίρεση και στα προβλήματα διαίρεση ώστε να αναδειχθεί η αντιστρεψιμότητα των δύο πράξεων.

Η εναλλαγή του πλαισίου των διακριτών και των συνεχών ποσοτήτων, η συστηματική χρήση και των τριών ενεργειών, η ανάδειξη της αντιστρεψιμότητας και τα ζητήματα ορολογίας θα μας απασχολήσουν στον σχεδιασμό του προγράμματος στην επόμενη ενότητα.

Κεφάλαιο 2: Θεωρητική και Μεθοδολογική Οργάνωση της Έρευνας

2.1 Βασικές παραδοχές και η προβληματική της έρευνας

Με βάση τη συζήτηση που προηγήθηκε στο Κεφάλαιο 1, ξεκινάμε θεωρώντας ως δεδομένο ότι υπάρχουν πρώιμες ικανότητες πολλαπλασιαστικής σκέψης, οι οποίες είναι εφικτό να αναπτυχθούν στις μικρές ηλικίες, εφόσον τα παιδιά εκτεθούν σε σχετικές εμπειρίες.

Θεωρούμε, επίσης, ως δεδομένο ότι η εκπαίδευση στις μικρές ηλικίες δίνει μεγάλη βαρύτητα σε μαθηματικές έννοιες, σχέσεις, ενέργειες και διαδικασίες του προσθετικού εννοιολογικού πεδίου, αλλά όχι του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου. Συμφωνούμε με τους ερευνητές και τις ερευνήτριες που υποστηρίζουν ότι η ασυμμετρία αυτή έχει επιπτώσεις στην περαιτέρω μαθηματική ανάπτυξη των παιδιών (π.χ. Hunting & Davis, 1991; Ni & Zhou, 2005; Sophian, 2004; Vamvakoussi et al., 2018). Δύο συμπληρωματικά επιχειρήματα μπορούν να στηρίξουν αυτόν τον ισχυρισμό. Το πρώτο είναι ότι συστατικά στοιχεία του προσθετικού εννοιολογικού πεδίου εδραιώνονται και αποτελούν τη βάση της ποσοτικής σκέψης των παιδιών, όπως την ορίζει ο Thompson (1994 σελ. 165) ως «την ανάλυση μιας κατάστασης σε μια ποσοτική δομή – ένα δίκτυο ποσοτήτων και ποσοτικών σχέσεων». Μια μεγάλη ποικιλία συστηματικών λαθών σε πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, όπως αυτές που αναφέρθηκαν στην ενότητα 1.3, μπορούν να εξηγηθούν αν παρατηρήσει κανείς ότι το πλήθος και οι αριθμοί που το εκφράζουν (οι φυσικοί ως πληθικοί αριθμοί) καθώς και οι προσθετικές σχέσεις θεωρούνται από τα παιδιά κατάλληλα για την ανάλυση μιας κατάστασης, η οποία είναι πολλαπλασιαστικής φύσης και αφορά συνεχείς ποσότητες.

Το δεύτερο επιχείρημα είναι ότι η μαθηματική εκπαίδευση στις μικρές ηλικίες δεν υποστηρίζει τα παιδιά να αναπτύξουν το γνωστικό υπόβαθρο που θα τους επιτρέψει να κατανοήσουν έννοιες του πολλαπλασιαστικού πεδίου, όπως τα κλάσματα (Ni & Zhou, 2005). Με δεδομένο ότι η μαθηματική ανάπτυξη είναι μια μακροχρόνια διαδικασία, η μαθηματική εκπαίδευση θα μπορούσε να αξιοποιήσει πιο παραγωγικά τα πρώτα σχολικά χρόνια, ώστε να αναπτυχθεί το απαραίτητο γνωστικό υπόβαθρο για το πολλαπλασιαστικό πεδίο. Χρησιμοποιώντας την έννοια του κλάσματος ως παράδειγμα, η Sophian (2004) υποστηρίζει ότι χρειάζεται μια προοπτική αναπτυξιακή προσέγγιση (prospective developmental approach) στη μαθηματική εκπαίδευση στις μικρές ηλικίες, που λαμβάνει υπόψη τόσο τις

πρώιμες ικανότητες των μικρών παιδιών, όσο και τι θα τους είναι απαραίτητο μακροπρόθεσμα.

Ένα ζήτημα που χρήζει προσοχής είναι οι βάσεις, πάνω στις οποίες μπορεί να θεμελιωθεί η ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης. Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας στην §1.2 δείχνει ότι δύο θεμελιώδη συστατικά της πολλαπλασιαστικής σκέψης είναι η αναγνώριση των «πολλών ως ένα» και της σχέσης «πολλά προς ένα» (Confrey, 2009). Η ανασκόπηση των ερευνών με παρεμβατικό χαρακτήρα (§1.4) δείχνει ότι και τα δύο έχουν αξιοποιηθεί, κατά κύριο λόγο ξεχωριστά, στο σχεδιασμό παρεμβάσεων διαφόρων τύπων. Ένα ζήτημα που μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο προβληματισμού είναι η εναλλαγή του πλαισίου των διακριτών και των συνεχών ποσοτήτων και το εύρος των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων που έχουν ληφθεί υπόψη στο σχεδιασμό.

Υπάρχει μια ισχυρή (και βασισμένη σε ιστορικά στοιχεία) διάκριση μεταξύ των διακριτών και των συνεχών ποσοτήτων (Lucas, 2001) και, πράγματι, μπορεί να βρει κανείς πολλά επιχειρήματα, τόσο από την πλευρά της μαθηματικής τους φύσης, όσο και από την πλευρά της μάθησης για να υποστηρίξει τις διαφορές τους. Από την άλλη μεριά, η μακροχρόνια σύγκριση μεταξύ διακριτών και συνεχών ποσοτήτων στην Ιστορία και Φιλοσοφία των Μαθηματικών έχει αποτελέσει κρίσιμη διεργασία για την εξέλιξη των αριθμητικών εννοιών και, τελικά, την αυστηρή θεμελίωσή τους (Vamvakoussi, 2017). Η σύνδεση αυτή δεν είναι εμφανής στα μαθηματικά των πρώτων σχολικών ετών. Με μια περιήγηση στα αναλυτικά προγράμματα για τα μαθηματικά στο Νηπιαγωγείο και την Α΄ Δημοτικού μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι η θεματική ενότητα για αριθμούς και πράξεις αναφέρεται αποκλειστικά σε διακριτές ποσότητες και φυσικούς αριθμούς, ενώ η θεματική ενότητα για τις μετρήσεις συνδέεται με τη γεωμετρία (π.χ. Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018).

Για διαφορετικούς, αλλά όχι ασύμβατους μεταξύ τους λόγους, έχει υποστηριχτεί η άποψη ότι οι διακριτές και συνεχείς ποσότητες έχουν περισσότερες ομοιότητες, απ’ ό,τι παραδοσιακά θεωρείται. Ο Steffe (2013) θεωρεί ότι οι νοητικές ενέργειες (π.χ. της μοναδοποίησης, της επανάληψης μιας μονάδας και του ισομερισμού) που συγκροτούν διακριτές και συνεχείς ποσότητες παρουσιάζουν ουσιαστικές ομοιότητες. Επιπλέον, υποστηρίζει ότι τα νοητικά σχήματα της καταμέτρησης και της μέτρησης σχετίζονται: τα σχήματα της μέτρησης προκύπτουν από την αναδιοργάνωση των σχημάτων για την καταμέτρηση (βλ. και Steffe & Olive, 2010). Όπως είδαμε στην §1.2, η «μοναδοποίηση» σε

μονάδες διαφορετικών τάξεων και η επίγνωση των μεταξύ τους σχέσεων είναι ο κοινός παράγοντας που διαφοροποιεί μεταξύ νοητικών σχημάτων διαφορετικών επιπέδων, που ενεργοποιούνται σε ένα εύρος καταστάσεων, τόσο σε διακριτό, όσο και σε συνεχές πλαίσιο (Hackenberg, 2010; Hackenberg & Levice, 2024).

Η Sophian (2004) επικεντρώνεται στις μαθηματικές ενέργειες της καταμέτρησης και της μέτρησης. Η επικρατούσα άποψη είναι ότι η μέτρηση είναι πολύ διαφορετική από την καταμέτρηση, γιατί προ-απαιτεί την επιλογή μιας μονάδας και, επιπλέον, το αριθμητικό αποτέλεσμα της μέτρησης εξαρτάται από την μονάδα που επιλέχτηκε. Η Sophian αναδεικνύει το γεγονός ότι το ίδιο ισχύει και για την καταμέτρηση: Αν κάποια επιλέξει να καταμετρήσει μια συλλογή παπουτσιών με μονάδα το 1 παπούτσι, τότε το αριθμητικό αποτέλεσμα είναι 12 (παπούτσια). Αν επιλέξει ως μονάδα το 1 ζευγάρι παπούτσια, τότε το αποτέλεσμα είναι 6 (ζευγάρια παπούτσια). Η προσέγγιση αυτή στη μέτρηση και την καταμέτρηση αναδεικνύει ομοιότητες μεταξύ δύο μαθηματικών ενεργειών που τυπικά εντάσσονται σε διαφορετικά πλαίσια (συνεχείς ποσότητες, διακριτές ποσότητες, αντίστοιχα). Ταυτόχρονα, αναδεικνύει το ρόλο των διαφορετικών τύπων μονάδων και στα δύο πλαίσια. Όπως αναφέρθηκε στην §1.4, η Sophian στήριξε ένα εκπαιδευτικό πρόγραμμα για τις μικρές ηλικίες στο ρόλο της μονάδας στη μέτρηση και την καταμέτρηση και στη σύνθεση μονάδων από άλλες μονάδες στο πλαίσιο των διακριτών και των συνεχών ποσοτήτων.

Υπάρχουν μαθηματικές ενέργειες για τις οποίες δεν μπορεί να αμφισβητηθεί ότι είναι κοινές στις διακριτές και στις συνεχείς ποσότητες. Τέτοιες ενέργειες είναι η σύγκριση, καθώς και οι αντίστροφες ενέργειες της ανάλυσης και σύνθεσης ποσοτήτων. Οι ενέργειες αυτές συνδέονται με σχέσεις (διάταξης, προσθετικές, πολλαπλασιαστικές). Οι Βαμβακούση και Καλδρυμίδου (2018) επισημαίνουν ότι τρεις θεμελιώδεις ενέργειες για τη διαχείριση πολλαπλασιαστικών καταστάσεων εφαρμόζονται τόσο στις διακριτές, όσο και στις συνεχείς ποσότητες: ο ισομερισμός (ειδική περίπτωση ανάλυσης), η σύνθεση με επανάληψη μιας ποσότητας (ειδική περίπτωση σύνθεσης) και η μέτρηση με μονάδες διαφορετικού τύπου (πρβλ. Sophian, 2004).

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί ότι οι ενέργειες στις οποίες αναφέρεται ο Steffe (2013) είναι νοητικές και δεν ταυτίζονται με τις παραπάνω μαθηματικές ενέργειες. Εστιάζουμε στις μαθηματικές ενέργειες, γιατί είναι οδηγός για τα είδη των δραστηριοτήτων

στις οποίες μπορούν να εμπλακούν τα παιδιά στη *δράση* (π.χ. τι είδους προβλήματα; με τι είδους υλικό;). Η *δράση* είναι σημαντικός παράγοντας διαμόρφωσης της αντίληψης και της νόησης (Rakison & Woodward, 2008) και έχει σημαντική θέση και στη θεωρία του Steffe για την κατασκευή των νοητικών σχημάτων (Steffe, 2013).

Οι παραπάνω μαθηματικές ενέργειες συνδέονται με τις αριθμητικές πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Ωστόσο, η εστίασή μας είναι στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις που συνδέονται με αυτές τις ενέργειες. Υιοθετούμε μια σχεσιακή οπτική στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση (Polotskaia & Savard, 2021), σύμφωνα με την οποία μια έκφραση της μορφής Α=ν x β αναπαριστά μια σχέση μεταξύ αριθμητικών ή μη αριθμητικών ποσοτήτων. Για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας, οι αριθμητικές τιμές του ν είναι φυσικοί αριθμοί. Πρόκειται για μια απλή πολλαπλασιαστική σχέση, ειδική περίπτωση αναλογίας, στην οποία ο λόγος είναι μοναδιαίος, με την έννοια ότι ο ένας όρος του είναι 1.

Όταν το ν είναι καθαρός αριθμός, τότε μια σχέση της μορφής Α=ν x β περιγράφει μια πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ ομοειδών ποσοτήτων και ενυπάρχει σε καταστάσεις μέτρησης, πολλαπλασιαστικής σύγκρισης και πολλαπλασιαστικής αλλαγής, στο πλαίσιο τόσο των διακριτών, όσο και των συνεχών ποσοτήτων (Greer, 1992). Η σχέση αυτή μπορεί να περιγραφεί αμφίδρομα (Το Α είναι το ν-πλάσιο του β / Το β είναι το ένα νιοστό του Α).

Όταν το ν δεν είναι καθαρός αριθμός, τότε μια σχέση της μορφής Α=ν x β μπορεί να βρεθεί σε πολλαπλασιαστικά προβλήματα του τύπου των «ισοπληθών ομάδων» και του αντίστοιχου τύπου στις συνεχείς ποσότητες των «ίσων μέτρων» (Greer, 1992). Στην κατάσταση των «ισοπληθών ομάδων», πρόκειται για τα τρία προβλήματα (πολλαπλασιασμού, διαίρεσης μερισμού και διαίρεσης μέτρησης) που προκύπτουν από μια κατάσταση σαν την επόμενη: «Η γιαγιά μοίρασε 12 καραμέλες εξίσου στα 4 εγγόνια της και κάθε παιδί πήρε από 3 καραμέλες». Στην κατάσταση των «ίσων μέτρων», τα αντίστοιχα προβλήματα θα μπορούσαν να προκύψουν από μια κατάσταση σαν την εξής: «Η γιαγιά μοίρασε 1 κιλό καραμέλες στα 4 εγγόνια της και κάθε παιδί πήρε από 250 γραμμάρια». Σε αυτές τις καταστάσεις ο λόγος ν είναι μια εντατική ποσότητα (3 καραμέλες ανά παιδί / 250 γραμμάρια ανά παιδί). Ωστόσο, και πάλι υπάρχει μια αμφίδρομη πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ ομοειδών ποσοτήτων με βάση την αριθμητική τιμή του ν. Για παράδειγμα, οι 12 καραμέλες είναι τετραπλάσιες από τις 3 καραμέλες που αντιστοιχούν στο ένα μερίδιο, ενώ το ένα μερίδιο είναι το ένα τέταρτο των 12 καραμελών (Confrey et al., 2009).

Η ανάλυση αυτή δείχνει ότι η σχέση της μορφής Α=ν x β σχετίζεται με θεμελιώδεις μαθηματικές ενέργειες, διαπερνά μια ποικιλία πολλαπλασιαστικών καταστάσεων και σχετίζεται με σημαντικά στοιχεία του πολλαπλασιαστικού πεδίου—όπως είναι ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση, τα κλάσματα και οι αντίστροφοι αριθμοί—και αφορά τόσο τις διακριτές, όσο και τις συνεχείς ποσότητες.

Φυσικά, το πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο δεν εξαντλείται στα παραπάνω. Ωστόσο, η διδακτική πραγμάτευση της σχέσης Α=ν x β, με έναν ενιαίο τρόπο στο πλαίσιο των διακριτών και συνεχών ποσοτήτων, σε διαφορετικές καταστάσεις, ενοποιεί ένα μεγάλο μέρος του μαθηματικού περιεχομένου που σχετίζεται με το πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση και θα μπορούσε να υποστηρίξει την ανάπτυξη του γνωστικού υποβάθρου για την κατανόηση απαιτητικών εννοιών, όπως το κλάσμα. Για παράδειγμα, από μια σχεσιακή οπτική, η αριθμητική πρόταση «3x5=15» θα μπορούσε να ερμηνευθεί ως «το τριπλάσιο του 5 είναι το 15» και, ταυτόχρονα, «το ένα τρίτο του 15 είναι το 5». Η ερμηνεία αυτή έχει μεγάλη διαφορά από τη συνήθη ερμηνεία («3 φορές το 5 κάνει 15») και θα μπορούσε να υποστηρίξει την απόδοση νοήματος στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων αποδίδοντας σε φυσικούς και κλασματικούς αριθμούς τον ίδιο ρόλο του πολλαπλασιαστικού τελεστή (Avgeri et al. 2025).

Θέσαμε το ερώτημα: Από ποια ηλικία θα μπορούσε να ξεκινήσει μια διδακτική πραγμάτευση της σχέσης Α=ν x β, με τις παραπάνω προϋποθέσεις (ενιαία αντιμετώπιση διακριτών και συνεχών ποσοτήτων με κοινές ενέργειες, σε διάφορες πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, με ανάδειξη της αντιστρεψιμότητας ενεργειών και της αμφίδρομης σχέσης μεταξύ των Α και β);

Το ερώτημα αυτό έχει σημασία, από μια προοπτική αναπτυξιακή προσέγγιση στη διδασκαλία (Sophian, 2004) και λαμβάνοντας υπόψη την μικρή βαρύτητα που αποδίδεται στο πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο στα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης και τις επιπτώσεις της (βλ. και ενότητα 1.3). Με αυτό το σκεπτικό, θεωρήσαμε ότι αξίζει διερεύνησης το «όσο το δυνατόν νωρίτερα» ως απάντηση σε αυτό το ερώτημα. Στο πλαίσιο του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος, αυτό αντιστοιχεί στο Νηπιαγωγείο.

2.2. Στόχος και σκοποί της έρευνας – κεντρικά ερευνητικά ερωτήματα

Στόχος της έρευνας είναι να διερευνηθεί η δυνατότητα υποστήριξης της πολλαπλασιαστικής σκέψης στις μικρές ηλικίες, με έναν ενιαίο τρόπο για τις διακριτές και συνεχείς ποσότητες, με εστίαση στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις του τύπου Α=ν x β.

Σκοπός της έρευνας είναι ο σχεδιασμός ενός προγράμματος δραστηριοτήτων συμβατού με τον στόχο και με τα εξής χαρακτηριστικά:

α) να περιλαμβάνει διαφορετικές πολλαπλασιαστικές καταστάσεις στις οποίες εμφανίζεται η σχέση αυτή,

β) να προσφέρει οργανωμένες εμπειρίες για τις θεμελιώδεις ενέργειες που είναι κοινές για τις διακριτές και συνεχείς ποσότητες,

γ) να προβλέπει την εισαγωγή λεξιλογίου για την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων,

δ) να λαμβάνει υπόψη και να προωθεί θεμελιώδη συστατικά της πολλαπλασιαστικής σκέψης στις μικρές ηλικίες («πολλά ως ένα», «πολλά προς ένα»).

ε) να αναδεικνύει την αντιστρεψιμότητα ενεργειών και σχέσεων

Τα κεντρικά ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας είναι τα εξής:

α) Είναι εφικτός ο σχεδιασμός ενός προγράμματος με αυτά τα χαρακτηριστικά;

β) Είναι ένα πρόγραμμα με αυτά τα χαρακτηριστικά στο πλαίσιο των δυνατοτήτων των παιδιών του Νηπιαγωγείου;

γ) Τι επίδραση έχει στις ικανότητες πολλαπλασιαστικής σκέψης των μικρών παιδιών, με όρους επίλυσης προβλήματος, έκφρασης πολλαπλασιαστικών σχέσεων και μεταφοράς σε νέες καταστάσεις;

Το ερώτημα (γ) θα εξειδικευτεί στη συνέχεια (Κεφάλαια 3 και 4).

2.3 Μεθοδολογική οργάνωση της έρευνας

Δεδομένου ότι τα ερευνητικά μας ερωτήματα αφορούν ζητήματα διδακτικού σχεδιασμού και μάθησης, η μεθοδολογία που επιλέξαμε είναι η έρευνα σχεδιασμού με εστίαση σε συγκεκριμένη (μαθηματική) θεματική (topic-specific design research, Gravemeijer & Prediger, 2019), η οποία συνδυάζει τον διδακτικό σχεδιασμό με την εκπαιδευτική έρευνα. Το

είδος αυτό των ερευνών διαφέρει από τις έρευνες σχεδιασμού γενικού τύπου, καθώς εστιάζει σε ένα καθορισμένο μαθηματικό θέμα, όπως είναι, στην περίπτωσή μας οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις και έχει διπλό στόχο. Από τη μία, αναλύουμε το μαθηματικό περιεχόμενο και καθορίζουμε τι θα διδαχθεί και με ποια σειρά και από την άλλη σχεδιάζουμε ένα μαθησιακό περιβάλλον και μελετάμε πώς μαθαίνουν τα παιδιά σε αυτό. Αυτό σημαίνει ότι μία τέτοιου είδους έρευνα δίνει ιδιαίτερη έμφαση στην ανάλυση του ίδιου του μαθηματικού περιεχομένου αλλά και του σχεδιασμού του εκπαιδευτικού υλικού (Bakker & van Eerde, 2015). Η ενσωμάτωση αυτής της ανάλυσης μας επιτρέπει και τη πιο ουσιαστική σύνδεση της ερευνητικής διαδικασίας με τη μαθηματική ουσία του αντικειμένου.

Η έρευνά μας, όπως κάθε έρευνα σχεδιασμού, πραγματοποιείται σε κύκλους. Κάθε κύκλος έχει τρεις φάσεις, τις οποίες θα χαρακτηρίσουμε για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας ως «Προοπτική Ανάλυση και Σχεδιασμός», «Υλοποίηση» και «Αναδρομική Ανάλυση». Στην πρώτη φάση, οργανώνεται το μαθηματικό περιεχόμενο, διατυπώνονται τοπικές υποθέσεις και σχεδιάζεται το πρόγραμμα. Στη δεύτερη, το πρόγραμμα υλοποιείται. Στην τρίτη φάση, αναλύονται τα δεδομένα, επανεξετάζονται οι παραδοχές, και αναθεωρείται ο σχεδιασμός, αν χρειαστεί. Οι φάσεις αυτές, παρά το ότι παρουσιάζονται γραμμικά, δεν υλοποιούνται απαραίτητα με αυτόν τον τρόπο (Gravemeijer & Prediger, 2019). Για παράδειγμα, μια παρατήρηση στη διάρκεια της διδασκαλίας, μπορεί να προκαλέσει μια αναθεώρηση στο σχεδιασμό στη φάση της υλοποίησης. Το γεγονός αυτό, μας δίνει την ευκαιρία να οργανώνουμε τις υποθέσεις μας και να σχεδιάζουμε το πρόγραμμα δραστηριοτήτων μας, στη συνέχεια να το εφαρμόζουμε και να προχωρούμε στην ανάλυση δεδομένων πάνω στα οποία θα βασιστούμε για την αναθεώρησή του για τον σχεδιασμό των επόμενων κύκλων. Ακόμη, μας δίνει την ευκαιρία όχι μόνο να βελτιώσουμε σχεδιαστικά το μαθησιακό περιβάλλον, αλλά να εξετάσουμε και να αναθεωρήσουμε τις θεωρητικές παραδοχές στις οποίες στηριζόμαστε για την οργάνωση της. Τέλος, καθώς πρόκειται για ένα είδος έρευνας με έντονη έμφαση στις οικολογικές εκπαιδευτικές εφαρμογές, προσπαθούμε σε κάθε κύκλο εφαρμογής να λαμβάνουμε όλο και περισσότερο υπόψη μας τις πραγματικές συνθήκες της διδασκαλίας μέσα σε μια τάξη νηπιαγωγείου (Bakker & van Eerde, 2015).

Όσον αφορά τη συλλογή δεδομένων, σε κάθε κύκλο, πριν και μετά την υλοποίηση της διδακτικής παρέμβασης που σχεδιάσαμε, πραγματοποιήθηκε προέλεγχος και μεταέλεγχος σε όλα τα παιδιά που συμμετείχαν. Για τον προέλεγχο και μεταέλεγχο επιλέχθηκαν οι

ατομικές συνεντεύξεις που είναι ο κατεξοχήν τρόπος εξέτασης μικρών παιδιών, από τότε που την εισήγαγε ο Piaget (1975, όπως αναφέρεται στο Clement, 2000). Πιο συγκεκριμένα, επιλέξαμε συνεντεύξεις όπου τα παιδιά καλούνται να αντιμετωπίσουν συγκεκριμένα έργα (task-based interviews, Maher & Sigley, 2020), στην περίπτωσή μας να επιλύσουν πολλαπλασιαστικά προβλήματα. Αυτό δίνει τη δυνατότητα να διερευνηθεί η επίδοση, αλλά και οι στρατηγικές επίλυσης. Επιπλέον, τα παιδιά ενθαρρύνθηκαν να «σκεφτούν φωναχτά (Ericsson & Simon, 1993, όπως αναφέρεται στο Koichu & Harel, 2007) και κλήθηκαν να εξηγήσουν «πώς είναι σίγουρα» ότι έχουν καταλήξει σε σωστή απάντηση. Συνολικά, μας ενδιέφερε το «πώς» φτάνει στην απάντησή του το παιδί και στο «γιατί» απαντά κατ' αυτόν τον τρόπο (Zazkis & Hazzan, 1998).

Οι συνεντεύξεις, όπως και τα μαθήματα, βιντεοσκοπήθηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν. Το κύριο σώμα των δεδομένων που αναλύθηκαν προέρχεται από τα τεστ προελέγχου και μεταελέγχου σε κάθε κύκλο. Για τις ανάγκες της ανάλυσης, τα δεδομένα οργανώθηκαν σε ξεχωριστά αρχεία Excel ανά κατηγορία έργου (π.χ. πολλαπλάσια). Σε κάθε αρχείο, τα δεδομένα οργανώθηκαν σε γραμμές ανά παιδί και πρόβλημα, ενώ οι στήλες περιλάμβαναν τις μεταβλητές: Παιδί, Είδος Ποσότητας, Είδος Σχέσης και Είδος Προβλήματος, καθώς και δύο ξεχωριστές στήλες ακατέργαστων δεδομένων στις οποίες καταγράφονταν τι έκανε και τι είπε το παιδί. Η οργάνωση αυτή επέτρεπε την ταξινόμηση και το φιλτράρισμα των δεδομένων ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές.

Εξετάστηκαν οι επιδόσεις (ποσοτική ανάλυση, με περιγραφική στατιστική). Εξετάστηκαν επίσης οι διαδικασίες/στρατηγικές επίλυσης των παιδιών και οι εξηγήσεις τους (π.χ. οι λεκτικές απεικονίσεις των μαθηματικών ενεργειών και σχέσεων στα λόγια των παιδιών). Αναλύσεις για την δημιουργία κατηγοριών πραγματοποιήθηκαν μέσω μιας υβριδικής παραγωγικής–επαγωγικής διαδικασίας κωδικοποίησης (hybrid deductive–inductive coding, Fereday & Muir-Cochrane, 2006). Οι αρχικές κατηγορίες διαμορφώθηκαν με βάση τα χαρακτηριστικά των έργων, καθώς και την προηγούμενη εμπειρία από τη διδακτική διαδικασία, η οποία είχε διαμορφώσει μια αρχική εικόνα σχετικά με τις αποκρίσεις των παιδιών. Κατά την κωδικοποίηση, ωστόσο, το αρχικό σύστημα κατηγοριών εξεταζόταν και αναθεωρούνταν επαναληπτικά, καθώς η εφαρμογή του στα δεδομένα οδηγούσε, όπου ήταν απαραίτητο, σε διαφοροποίηση, συγχώνευση ή προσθήκη κατηγοριών και υποκατηγοριών. Παράλληλα, πραγματοποιούνταν συνεχής σύγκριση μεταξύ των απαντήσεων των παιδιών,

με στόχο τον εντοπισμό ομοιοτήτων και διαφοροποιήσεων και τον έλεγχο της επάρκειας και της σαφήνειας των κατηγοριών. Μέρος της διαδικασίας κωδικοποίησης πραγματοποιήθηκε από δύο «κωδικοποιητές», οι οποίοι συνέκριναν τις κωδικοποιήσεις τους και συζήτησαν τις περιπτώσεις απόκλισης, προκειμένου να καταλήξουν σε κοινή απόφαση ως προς την εφαρμογή των κατηγοριών. Δεδομένα από την παρέμβαση παρουσιάζονται συμπληρωματικά, για επεξήγηση ή τεκμηρίωση.

Για τη διεξαγωγή όλων των εμπειρικών μελετών με παιδιά του νηπιαγωγείου που πραγματοποιήθηκαν στο πλαίσιο της διατριβής λάβαμε έγκριση από την Επιτροπή Ηθικής και Δεοντολογίας της Έρευνας του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

2.4 Επισκόπηση των Κύκλων της έρευνας σχεδιασμού

Μέχρι στιγμής έχουν ολοκληρωθεί τρεις κύκλοι στο πλαίσιο αυτής της έρευνας σχεδιασμού. Ο πρώτος κύκλος αντιστοιχεί στη διπλωματική εργασία της γράφουσας (Πήττα, 2019)

Στον κύκλο αυτό σχεδιάστηκε μια διαδικασία εύρεσης υποπολλαπλασίων συνεχών ποσοτήτων, που να παρακάμπτει τη δυσκολία του ισομερισμού μιας και δόθηκε η δυνατότητα στα παιδιά να χρησιμοποιούν αντίγραφα των μονάδων για τον υπολογισμό των υποπολλαπλασίων. Στην εργασία αυτή, διερευνήθηκε η δυνατότητα υποστήριξης παιδιών πρωτοσχολικής ηλικίας προκειμένου να αναγνωρίζουν και να εκφράζουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις, καθώς και να επιλύουν προβλήματα που εμπεριέχουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Τα αποτελέσματα της έρευνας ήταν ενθαρρυντικά μιας και όσον αφορά τις επιδόσεις των παιδιών, υπήρξε αξιόλογη αύξηση των σωστών απαντήσεων μετά την παρέμβαση, τόσο και στη συνολική συχνότητα των σωστών απαντήσεων, όσο και ανά παιδί. Βελτίωση παρατηρήθηκε και στις στρατηγικές που τα παιδιά χρησιμοποιήσαν μετά την συμμετοχή τους στην παρέμβαση (βλ. και Pitta et al., 2021; Πήττα κ.ά., 2019),

Οι δύο επόμενοι κύκλοι πραγματοποιήθηκαν στο πλαίσιο της παρούσας διδακτορικής διατριβής. Στο κείμενο αυτό θα αναφερόμαστε σε αυτούς ως Κύκλος Ι και Κύκλος ΙΙ.

Στον Κύκλο Ι αξιοποιήθηκε η εμπειρία από τον πρώτο κύκλο για να αναδιαμορφωθεί και να εμπλουτιστεί το αρχικό πρόγραμμα. Εντάχθηκε μια δραστηριότητα, η οποία βασίζεται στις εμπειρίες των παιδιών για τα «απόλυτα» και τα «τακτικά αριθμητικά» για να εισάγει όρους για τα ακέραια πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια (στην ουσία, ονόματα μοναδιαίων κλασμάτων). Σχεδιάστηκαν διαδικασίες υπολογισμού πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων

για συνεχείς και διακριτές ποσότητες, καθώς και υποστηρικτικό υλικό. Η υλοποίηση του προγράμματος (με 8 νήπια) ξεκίνησε λίγο πριν την περίοδο της πανδημίας, με αποτέλεσμα να μην ολοκληρωθεί πλήρως, ενώ ο μεταέλεγχος πραγματοποιήθηκε καθυστερημένα, στην αρχή της επόμενης σχολικής χρονιάς. Παρόλ' αυτά, η εμπειρία της εφαρμογής, μαζί με τα αποτελέσματα, έδειξαν την ανάγκη για βελτιώσεις, τόσο στο σχεδιασμό, όσο και στην υλοποίηση.

Ο Κύκλος ΙΙ αποτελεί την κύρια έρευνα της διατριβής. Σε αυτόν τον Κύκλο, το πρόγραμμα επανασχεδιάστηκε, έτσι ώστε να ευθυγραμμιστεί καλύτερα με τις προϋποθέσεις που είχαμε θέσει (βλ. Ενότητα 2.2). Υλοποιήθηκε σε μία τάξη νηπιαγωγείου (22 παιδιά), η οποία περιλάμβανε προνήπια και νήπια, όπως είναι η συνήθης συνθήκη στα ελληνικά νηπιαγωγεία, γεγονός που ενισχύει την «οικολογική» εγκυρότητα της έρευνας (Bakker & van Eerde, 2015).

Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζεται η θεωρητική οργάνωση του σχεδιασμού και της υλοποίησης, ενώ οι Κύκλοι Ι και ΙΙ παρουσιάζονται αναλυτικά στα Κεφάλαια 3 και 4, αντίστοιχα.

2.5 Θεωρητική οργάνωση του σχεδιασμού και της υλοποίησής του

Με βάση τις προϋποθέσεις που τέθηκαν για το πρόγραμμα (βλ. §2.2), ο σχεδιασμός στηρίχθηκε σε πέντε βασικούς πυλώνες.

Ο πρώτος πυλώνας είναι η ενιαία αντιμετώπιση των διακριτών και συνεχών ποσοτήτων, σε διαφορετικές πολλαπλασιαστικές καταστάσεις. Για τις συνεχείς ποσότητες, επιλέξαμε το μέγεθος του μήκους, το οποίο ιστορικά και αναπτυξιακά συνδέεται στενά με τις αριθμητικές έννοιες, και είναι διδακτικά πρόσφορο με μια μακροπρόθεσμη προοπτική ως μοντέλο για τους αριθμούς (Lemonidis & Golfos, 2020; Λεμονίδης, 2016; Vamvakoussi et al., 2018). Οι πολλαπλασιαστικές καταστάσεις που επεξεργαστήκαμε ήταν η πολλαπλασιαστική σύγκριση (μέσω μέτρησης), τα αναλογικά προβλήματα της μορφής Α=ν x β, και η πολλαπλασιαστική αλλαγή (Greer, 1992).

Δεύτερος πυλώνας είναι η παροχή εμπειριών για τις τρεις βασικές ενέργειες που αφορούν τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις και είναι ο ισομερισμός, η σύνθεση ποσότητας με επανάληψη και η μέτρηση με διαφορετικές μονάδες. Στον Κύκλο ΙΙ επανασχεδιάσαμε τις διαδικασίες ισομερισμού ώστε να είναι παρόμοιες για τις συνεχείς και τις διακριτές

ποσότητες για να δημιουργηθεί η δυνατότητα να αναγνωριστούν ομοιότητες ανάμεσα στα δύο πλαίσια (Kornillaki & Nunes, 2005).

Ο τρίτος πυλώνας είναι η εισαγωγή γλωσσικών εργαλείων για την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων. Συγκεκριμένα, εισήχθησαν οι όροι για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια και συνδέθηκαν ρητά με τον όρο «σχέση». Θεωρήσαμε ότι η χρήση αυτών των γλωσσικών εργαλείων δημιουργεί τη δυνατότητα συστηματοποίησης των εμπειριών που αποκτούνται σε διαφορετικά πλαίσια (στην περίπτωσή μας, διαφορετικά είδη ποσοτήτων και πολλαπλασιαστικών καταστάσεων) και δημιουργεί τη δυνατότητα αναγνώρισης ότι διαφορετικές καταστάσεις έχουν την ίδια *σχεσιακή βάση* που είναι ένα σημαντικό βήμα για τη νοητική κατασκευή της σχέσης (Davis, 1991). Επιπλέον, υπάρχουν εμπειρικά δεδομένα που δείχνουν ότι το λεξιλόγιο για την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων αποτελεί ισχυρό παράγοντα εξήγησης και πρόβλεψης διαφορών ως προς τις ικανότητες πολλαπλασιαστικής/αναλογικής σκέψης σε παιδιά ηλικίας περίπου 6 -7 ετών (De Keersmaeker et al., 2023; Vanluydt et al., 2021).

Ο τέταρτος πυλώνας είναι η έμφαση στις σύνθετες μονάδες («πολλά ως ένα») και στη σχέση «πολλά προς ένα» (Confrey, 2009) που, όπως συζητήθηκε στην §1.2, αναγνωρίζονται ως θεμελιώδη συστατικά της πολλαπλασιαστικής σκέψης. Στον Κύκλο ΙΙ, η αντιμετώπιση των «πολλών» ως «ένα» υποστηρίχθηκε καταρχάς γλωσσικά, μια τακτική που έχει ακολουθηθεί και σε προηγούμενες έρευνες με παρεμβατικό χαρακτήρα σε αυτές τις ηλικίες (βλ. §1.4). Πιο συγκεκριμένα, προβλέψαμε τη χρήση του όρου ν-άδα (δυάδα, τριάδα κ.λπ.). Επιπλέον, σχεδιάσαμε εμπράγματες αναπαραστάσεις ν-άδων, τις οποίες τα παιδιά μπορούσαν να χειριστούν ως ενιαία αντικείμενα υλοποιώντας ενέργειες, όπως αυτή της μέτρησης (με σύνθετη μονάδα, Sophian, 2004).

Επιπλέον, σχεδιάσαμε μια εμπράγματη αναπαράσταση της αντιστοιχίας «πολλά προς ένα» (Confrey, 2009), για διακριτές και συνεχείς ποσότητες (υπό την έννοια που απεικονίζεται στο Σχήμα 1, §1.1), η οποία είχε και τη λειτουργία της υποστήριξης της πραγματοποίησης των διαδικασιών.

Τέλος, ο πέμπτος πυλώνας ήταν η ανάδειξη της αμοιβαίας αντιστρεψιμότητας ενεργειών και σχέσεων, που θεωρείται σημαντική γενικά (Greer, 2012) και για την πολλαπλασιαστική

σκέψη ειδικότερα (Confrey & Malone, 2014; Hackenberg et al., 2016; Steffe & Olive, 2010; Wilkins & Norton, 2018).

Η ιδέα αυτή διατρέχει τον σχεδιασμό μας σε διάφορα επίπεδα. Από τον πρώτο κύκλο της έρευνας χρησιμοποιήσαμε τροποποιημένες «κλασματομηχανές» (fraction machines). Οι κλασματομηχανές είναι ειδικές περιπτώσεις «μηχανών συνάρτησης» (function machines), οι οποίες παίρνουν μια ποσότητα εισόδου (τυπικά, αριθμητική), τη μετασχηματίζουν βάσει ενός κανόνα και βγάζουν μια ποσότητα εξόδου. Οι Hunting, Davis και συνεργάτες τους (1991) δημιούργησαν μια ψηφιακή «κλασματομηχανή» , η οποία επιδέχεται ως ποσότητα εισόδου διακριτικές ποσότητες (ως συλλογές αντικειμένων) και τη μετασχηματίζει με βάση έναν μοναδιαίο κλασματικό τελετή (ισομερισμός). Αναφέρουν ότι η «κλασματομηχανή» μπορεί να λειτουργήσει και με φυσικούς αριθμούς ή καταχρηστικά κλάσματα ως τελεστές και επισημαίνουν ότι μπορεί να αξιοποιηθεί για να υποστηρίξει την αναγνώριση της αμοιβαίας αντιστρεψιμότητας του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης (Hunting et al., 1991). Όσο μπορούμε να γνωρίζουμε, δεν την χρησιμοποίησαν με τέτοιο τρόπο στις εμπειρικές τους μελέτες με παιδιά (7-8 ετών). «Μηχανές συνάρτησης» με αριθμητικές ποσότητες εισόδου και κλασματικό τελεστή έχουν χρησιμοποιηθεί για να διερευνήσουν την κατανόηση των παιδιών (5-12) της αντιστρεψιμότητας πολλαπλασιασμού-διαίρεσης, δίνοντας τον αριθμό εξόδου ως δεδομένο και ζητώντας τον αριθμό εισόδου (Ng, 2018).

Η τροποποιημένη «κλασματομηχανή» που σχεδιάσαμε επιδέχεται είτε διακριτές, είτε συνεχείς ποσότητες (μήκη) ως ποσότητες εισόδου και η λειτουργία της είναι αμφίδρομη, δηλαδή, η είσοδος μετατρέπεται σε έξοδο και αντίστροφα.

Το «εργαλείο του λόγου», δηλαδή, η εμπράγματη αναπαράσταση που περιγράφτηκε παραπάνω αναπαριστά το «πολλά προς ένα» και το «ένα προς πολλά» ταυτόχρονα (Κύκλος ΙΙ). Τέλος, τόσο στον Κύκλο Ι, όσο και στον Κύκλο ΙΙ, προβλέψαμε ώστε η έκφραση της σχέσης Α=ν x β να γίνεται από δύο οπτικές (Το Α είναι ν-πλάσιο του β / Το β είναι το ένα νιοστό του Α).

Μια αρχή οργάνωσης των προβλημάτων προς επίλυση ήταν η *παραλλαγή* (*variation*). Όπως επισημαίνει η Watson (2017), η ιδέα της παραλλαγής έχει αξιοποιηθεί στη μαθηματική εκπαίδευση μέσα από συγγενείς αλλά όχι ταυτόσημες προσεγγίσεις. Στην κινεζική παράδοση της διδασκαλίας μέσω παραλλαγών *(teaching with variation*), η συστηματική δημιουργία

παραλλαγών μαθηματικών προβλημάτων και παραδειγμάτων αποτελεί βασικό στοιχείο της διδακτικής πρακτικής που στοχεύει στη δημιουργία δυνατοτήτων σύγκρισης, μέσω της οποίας μπορούν να καταστούν αντιληπτά αναλλοίωτα στοιχεία και σχέσεις (π.χ. Sun, 2011). Στο πλαίσιο της Μαθησιακής Θεωρίας της Παραλλαγής (Variation Theory of Learning), η παραλλαγή και τα αναλλοίωτα στοιχεία συνδέονται με τις συνθήκες υπό τις οποίες τα παιδιά μπορούν να διακρίνουν κρίσιμες πτυχές του αντικειμένου της μάθησης. Για παράδειγμα, να διακρίνουν τι διαφοροποιεί ένα τρίγωνο από άλλα σχήματα και, ταυτόχρονα, τι κάνει δύο σχήματα με πολύ διαφορετική μορφή να είναι τρίγωνα (Kullberg et al., 2017). Συνθέτοντας τις διαφορετικές προσεγγίσεις, η Watson (2017) επισημαίνει ότι η παιδαγωγική χρήση της παραλλαγής έγκειται στον σκόπιμο σχεδιασμό του τι μεταβάλλεται και τι διατηρείται σταθερό. Οι μαθηματικές καταστάσεις μπορούν έτσι να οργανωθούν ως παραλλαγές γύρω από έναν κοινό μαθηματικό πυρήνα, δημιουργώντας δυνατότητες σύγκρισης μεταξύ περιπτώσεων. Μέσα από τέτοιες συγκρίσεις μπορούν να αναδειχθούν καθοριστικά γνωρίσματα, μαθηματικές ιδιότητες, σχέσεις και δομές και να υποστηριχθούν διαδικασίες γενίκευσης και αφαίρεσης.

Με βάση αυτή την οπτική, στον σχεδιασμό μας η παραλλαγή οργανώθηκε συστηματικά ως εξής. Σε κάθε πολλαπλασιαστική κατάσταση στο πλαίσιο της παρέμβασης, επιλύονταν προβλήματα με αυτή τη σειρά: α) Ίδια ενέργεια/σχέση, διαφορετικά πλαίσια (συνεχής/ διακριτή ποσότητα) και β) Αντίστροφη ενέργεια/αντίστροφη σχέση, διαφορετικά πλαίσια (συνεχής/διακριτή ποσότητα). Για παράδειγμα, για ν =3: α) Πρόβλημα με ζητούμενο το τριπλάσιο (Α), για συνεχείς και διακριτές ποσότητες, β) Πρόβλημα με ζητούμενο το ένα τρίτο (β), για συνεχείς και διακριτές ποσότητες. Για παράδειγμα τα παιδιά κλήθηκαν να επιλύσουν διαδοχικά για συνεχείς και διακριτές ποσότητες τα εξής προβλήματα: α) Δίνεται στην Παμ αυτή η μπάρα/ 2 καραμέλες ποια μπάρα/πόσες καραμέλες θα πάρει η Τριπάμ; β) Αν δώσω στην Τριπάμ 9 καραμέλες/αυτή τη μπάρα, πόσες καραμέλες θα πάρει η Παμ;

Για την ακολουθία των δραστηριοτήτων δημιουργήθηκε ένα σενάριο βάσης, με σταθερούς χαρακτήρες και πλαίσιο, ενώ μια διαφορετική ιστορία εισήγαγε κάθε καινούργια δραστηριότητα με τα αντίστοιχα προβλήματα (Παράρτημα 1). Τα παιδιά είχαν χρόνο για να τα επεξεργαστούν και να προτείνουν λύσεις. Δεδομένου ότι τα προβλήματα απαιτούσαν την κατασκευή πολλαπλασίων και υπο-πολλαπλασίων συνεχών και διακριτών ποσοτήτων για ν>2, οι διαθέσιμες στρατηγικές των παιδιών αρχικά ήταν πολύ περιορισμένες. Η ερευνήτρια

μοντελοποίησε τις διαδικασίες και εισήγαγε τους όρους. Αυτό συνιστά πλήρως καθοδηγούμενη διδασκαλία που κρίθηκε απαραίτητη για τους συγκεκριμένους μαθησιακούς στόχους (Baroody et al., 2019). Στον Κύκλο ΙΙ, η καθοδήγηση μειώθηκε σταδιακά και περιορίστηκε στην υποστήριξη μέσω ερωτήσεων και εννοιολογικών νύξεων (scaffolding), ευθυγραμμισμένη με τη θεωρία της ζώνης επικείμενης ανάπτυξης (Vygotsky, 1978), ενώ η ευθύνη της ανατροφοδότησης παραχωρήθηκε στην ομάδα των παιδιών. Επισημαίνεται ότι η ερευνήτρια χρησιμοποιούσε η ίδια συστηματικά τους όρους και προέτρεπε τα παιδιά να κάνουν το ίδιο, όταν δεν το έκαναν αυθόρμητα. Καθ' όλη τη διάρκεια της παρέμβασης, τα παιδιά καλούνταν συστηματικά να τεκμηριώνουν τις απαντήσεις τους, και οι έγκυρες στρατηγικές που επινοούσαν τα παιδιά αναγνωρίζονταν ως τέτοιες.

Συνοψίζοντας, οι σχεδιασμοί μας είναι συμβατοί με τον στόχο και τους σκοπούς της έρευνας και βασίστηκαν στην ανάλυση και οργάνωση του περιεχομένου, με βάση θεωρητικές προσεγγίσεις και εμπειρικά δεδομένα για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης, ειδικότερα, στις μικρές ηλικίες. Όσο μπορούμε να γνωρίζουμε, δεν υπάρχει αντίστοιχη προσέγγιση στην βιβλιογραφία.

Κεφάλαιο 3: Κύκλος Ι- Σχεδιασμός, Υλοποίηση και Αναδρομική Ανάλυση

3.1 Σχεδιασμός Δραστηριοτήτων

Στον Κύκλο Ι σχεδιάστηκαν τρεις δραστηριότητες (Δ1, Δ2 και Δ3) πλαισιωμένες από ένα σενάριο με κεντρικούς ήρωες δύο ομάδες από φανταστικά πλάσματα που παίζουν ένα ομαδικό άθλημα (Η ομάδα της Παμ και η ομάδα του Πομ).

Οι παίκτριες (αντ. παίκτες) της ομάδας αναπαρίστανται με ξύλινες κυλινδρικές ράβδους με ίδια βάση και ύψος από 1 έως 10 μονάδες μήκους. Στην ουσία, οι ήρωες της κάθε ομάδας αποτελούν συνεχείς αναπαραστάσεις των φυσικών αριθμών 1-10. Στην ομάδα με αρχηγό την Παμ, η μονάδα μήκους είναι ίση με 4 εκ. και ισούται με το ύψος της Παμ. Αντίστοιχα, στην ομάδα με αρχηγό τον Πομ, η μονάδα μήκους είναι 3 εκ.

3.1.1 Εισαγωγική δραστηριότητα (Δ1) - Πολλαπλασιαστική Σύγκριση

Στην πρώτη δραστηριότητα (Δ1 εισάγονται οι όροι για τα πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια για να περιγράψουν τη σχέση των «παικτριών» με την «αρχηγό» της ομάδας (με ύψος ίσο με τη μονάδα μήκους). Η πολλαπλασιαστική κατάσταση στην οποία τοποθετείται η Δ1 είναι η πολλαπλασιαστική σύγκριση.

Κεντρικά στοιχεία του σχεδιασμού της Δ1 είναι τα εξής:

α) Για την κατασκευή όρων για τα πολλαπλάσια αξιοποιούνται οι εμπειρίες των παιδιών για την ακολουθία των φυσικών αριθμών και η κανονικότητα που διέπει την κατασκευή των λέξεων για τα πολλαπλάσια (κάθε λέξη κατασκευάζεται με το πρόθεμα ενός αριθμού και την κατάληξη -πλάσιο). Αντίστοιχα, για τα υποπολλαπλάσια αξιοποιείται η κανονικότητα που διέπει την παραγωγή των λέξεων για τα τακτικά αριθμητικά.

β) Η σχέση μεταξύ των δύο μηκών διαπιστώνεται με μέτρηση και εκφράζεται συμμετρικά (π.χ. η παίκτρια είναι τριπλάσια -ως προς το ύψος- από την αρχηγό, η αρχηγός είναι το ένα τρίτο της παίκτριας).

Στη δραστηριότητα χρησιμοποιούνται και οι δύο «ομάδες» (της Παμ και του Πομ). Διατίθενται επιπλέον 10 αντίγραφα της μονάδας μήκους για κάθε μία «ομάδα». Τα αντίγραφα είναι ίσα ως προς τις διαστάσεις με την Παμ (αντ. τον Πομ), αλλά έχουν διαφορετικό χρώμα. Τέλος, στο υλικό συμπεριλαμβάνονται «φανέλες» των ομάδων, κατασκευασμένες από χαρτί, και μαρκαδόροι.

Όσον αφορά την πορεία υλοποίησης της δραστηριότητας, αρχικά δίνονται ορισμένες από τις παίκτριες στα παιδιά για να τις παρατηρήσουν ως προς το ύψος τους και γίνονται γενικές ερωτήσεις για να τα βοηθήσουν να παρατηρήσουν σχέσεις διάταξης μεταξύ τους (π.χ. Ποια παίκτρια είναι ψηλότερη/πιο κοντή;).

Οι παίκτριες αποσύρονται και παραμένει η παίκτρια που αντιστοιχεί στη μονάδα, συστήνεται στα παιδιά ως «η αρχηγός της ομάδας» με το όνομα «Παμ». Τα παιδιά καλούνται να συμπληρώσουν τον αριθμό 1 στη φανέλα της, όπου αναγράφεται ήδη η συλλαβή «Παμ» (1 Παμ) και έπειτα, καλούνται διαδοχικά οι επόμενες παίκτριες με χρήση των τακτικών αριθμητικών (η δεύτερη, η τρίτη, κ.λπ.) και τα ονόματά τους να προκύπτουν με διαδοχικές προσθήκες της συλλαβής «Παμ» (η δεύτερη συστήνεται ως ΠαμΠαμ, η τρίτη ως ΠαμΠαμΠαμ, κ.λπ.) Πρόκειται για ένα ηχητικό αναπτυσσόμενο μοτίβο. Τα παιδιά καλούν τις παίκτριες λέγοντας το όνομα της κάθε μιας και χτυπώντας τόσα παλαμάκια όσα και οι συλλαβές Παμ στα ονόματα τους. Από την τρίτη παίκτρια και μετά, ζητείται από τα παιδιά να προβλέψουν το όνομα της επόμενης.

Όσο αυξάνονται οι συλλαβές τόσο πιο δυσχερής γίνεται η αναφορά των ονομάτων των παικτριών. Για τον λόγο αυτό, οι παίκτριες με τη σειρά, ξεκινώντας από τη δεύτερη, αναφέρουν στα παιδιά το υποκοριστικό τους όνομα που προκύπτει από το κατάλληλο αριθμητικό πρόθεμα (δι-, τρι-,…) και την κατάληξη «Παμ» (π.χ. «Οι φίλες μου με φωνάζουν Τρι-Παμ»). Τα παιδιά καλούνται να συμπληρώσουν τον αριθμό της παίκτριας στη φανέλα της (3 Παμ), ως προοίμιο για τη συμβολική έκφραση ενός αποτελέσματος μέτρησης πολλαπλασιαστικά. Κάθε παίκτρια συγκρίνεται ως προς το ύψος με την Παμ, με ρητή ερώτηση (π.χ. «Τι σχέση έχει το ύψος της Τρι-παμ με το ύψος της Παμ;»). Τα αντίγραφα της μονάδας χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση του ύψους της παίκτριας σε σχέση με το ύψος της Παμ. Η σχέση περιγράφεται με εκφράσεις όπως «η Τρι-Παμ είναι ψηλή ίσαμε με 3 Παμ», για να ακολουθήσει η εισαγωγή του όρου για το αντίστοιχο πολλαπλάσιο (τριπλάσιο). Τέλος, οι δύο παίκτριες λεκτικοποιούν τη μεταξύ τους σχέση αμφίδρομα (π.χ. «είμαι το τριπλάσιό σου – είμαι το ένα σου τρίτο»).

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για τα πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια μέχρι το 10 με παραλλαγές ως προς τι ζητείται από τα παιδιά. Αρχικά, δίνεται το όνομα για να προβλέψουν το υποκοριστικό και να φτιάξουν τη φανέλα της κάθε παίκτριας. Στην πορεία, δίνεται είτε η παίκτρια και πρέπει να βρουν το όνομά της, το υποκοριστικό της και να φτιάξουν τη φανέλα

της, είτε η φανέλα της και ζητούνται τα υπόλοιπα. Η πολλαπλασιαστική σύγκριση του ύψους κάθε παίκτριας με αυτό της Παμ και η έκφραση της σχέσης με όρους πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων είναι σταθερό ζητούμενο. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για δεύτερη φορά με την «ομάδα του Πομ» (ίδιες σχέσεις, διαφορετική μονάδα). Αυτή τη φορά, η τυχαία σειρά στην παρουσίαση των παικτών ξεκινά σχεδόν άμεσα. Και πάλι στα παιδιά παρουσιάζονται έργα όμοια με τα παραπάνω και εκείνα καλούνται να προβλέψουν τον παίκτη που τους παρουσιάζεται, να βρουν το όνομα και το υποκοριστικό του, να κατασκευάσουν τη φανέλα του και να εκφράσουν τις σχέσεις που παρατηρούν ανάμεσα σε αυτόν και τη μονάδα (και την αντίστροφη σχέση ανάμεσα σε μονάδα και παίκτη).

3.1.2 Δεύτερη δραστηριότητα (Δ2) – Αναλογικά προβλήματα

Η δεύτερη δραστηριότητα (Δ2) τίθεται στο πλαίσιο των αναλογικών προβλημάτων στην ειδική περίπτωση όπου Α=ν x β. Στη δραστηριότητα αυτή εισάγονται οι βασικές ενέργειες του ισομερισμού και της σύνθεσης με επανάληψη μιας ποσότητας, στο πλαίσιο διακριτών και συνεχών ποσοτήτων.

Τα αναλογικά προβλήματα είχαν την εξής μορφή: α) Στην αρχηγό της ομάδας (Παμ, μονάδα) αντιστοιχεί μια ποσότητα είτε διακριτή («βιταμίνες»), είτε συνεχής («ενεργειακές μπάρες»), και ζητείται η ποσότητα που αντιστοιχεί σε κάποια παίκτρια, ανάλογα με το ύψος της. Στο αριστερό μέρος της Εικόνας 1 (αντ. 2) απεικονίζεται ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάστηκαν τα προβλήματα για τις διακριτές (αντ. συνεχείς) ποσότητες, για ν=3. Στα αντίστροφα προβλήματα, σε μια παίκτρια αντιστοιχεί μια διακριτή ή συνεχής ποσότητα και ζητείται η ποσότητα που αντιστοιχεί στην αρχηγό. Στο αριστερό μέρος της Εικόνας 3 (αντ. 4) απεικονίζεται ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάστηκαν τα προβλήματα για τις διακριτές (αντ. συνεχείς ποσότητες).

Οι «βιταμίνες» αναπαραστάθηκαν με χάρτινους δίσκους, ενώ οι «ενεργειακές μπάρες» με χάρτινες λωρίδες. Στα διαθέσιμα υλικά ήταν τα αντίγραφα της μονάδας (με γκρι χρώμα στις Εικόνες 1-4).

Διαδικασίες κατασκευής πολλαπλασίου (Α)

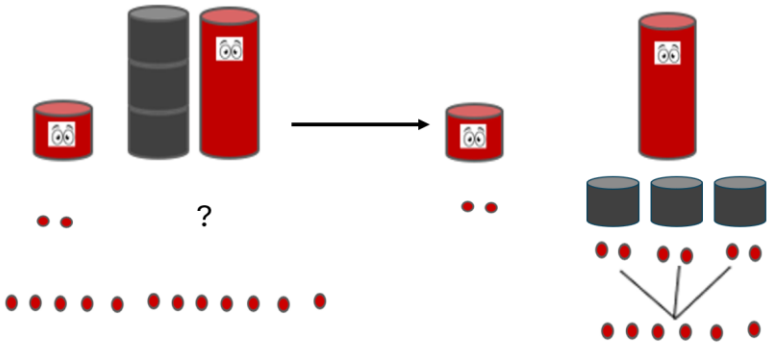
Η διαδικασία κατασκευής πολλαπλασίου είναι παρόμοια στις διακριτές και τις συνεχείς ποσότητες, με μία διαφορά. Πιο συγκεκριμένα, και στις δύο περιπτώσεις, η διαδικασία ξεκινά με τον προσδιορισμό της σχέσης μεταξύ της Παμ (μονάδα) και της δεδομένης

παίκτριας (στο παράδειγμα, της Τριπάμ). Αυτό γίνεται μέσω μέτρησης με τα αντίγραφα των μονάδων (με γκρι χρώμα στις Εικόνες 1 και 2). Τα αντίγραφα των μονάδων τοποθετούνται μπροστά στην Τριπάμ και λειτουργούν ως αναπαράσταση της αριθμητικής τιμής του ν.

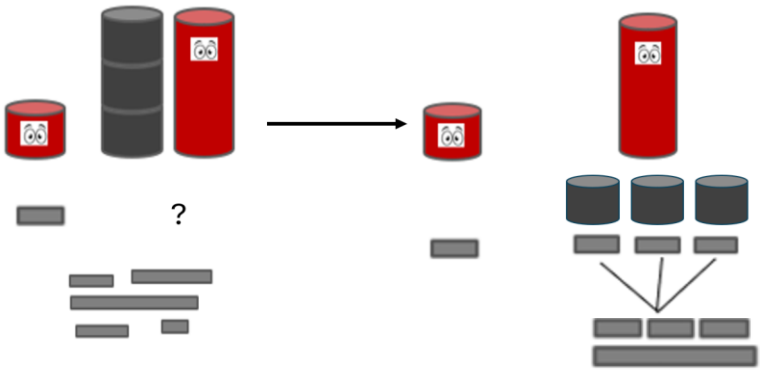
Για τις διακριτές ποσότητες, ακολουθούνται τα εξής βήματα (βλ. δεξί μέρος της Εικόνας 1):

i) Αντιστοίχιση της ποσότητας β (εδώ, δύο «βιταμίνες») στο πρώτο αντίγραφο της μονάδας
ii) Επανάληψη του βήματος (i) για κάθε ένα αντίγραφο της μονάδας (εδώ, 3)
iii) Σύνθεση του Α από ν αντίγραφα του β

Στις συνεχείς ποσότητες, υπάρχει η εξής διαφοροποίηση: Δίνονται εξαρχής 5 επιλογές για το Α, με το αίτημα της εκτίμησης. Ακολουθούν τα βήματα (i)-(iii). Στο τέλος ελέγχεται η αρχική εκτίμηση Συγκεκριμένα, ελέγχεται αν η σύνθεση των β κατασκευάζει το προεπιλεγμένο Α, διαφορετικά, αν το β μετράει ακριβώς το Α (βλ. δεξί μέρος της Εικόνας 2). Με τον τρόπο αυτό, το αποτέλεσμα (εδώ, το τριπλάσιο του β) τελικά προκύπτει ως ενιαία συνεχής ποσότητα.



Εικόνα 1: Αναπαράσταση διαδικασίας κατασκευής πολλαπλασίου για τις διακριτές ποσότητες



Εικόνα 2: Αναπαράσταση διαδικασίας κατασκευής πολλαπλασίου για τις συνεχείς ποσότητες

Ονομάζουμε τη διαδικασία αυτή *Σύνθεση με Ενδιάμεσο Βήμα* (ΕΒ). Ως ενδιάμεσο βήμα θεωρούμε την αντιστοίχιση των αντιγράφων του β στην αναπαράσταση της αριθμητικής τιμής του ν (δηλ. τις «παμίνες»).

Κατά την υλοποίηση, ζητείται από τα παιδιά να προσδιορίσουν την παίκτρια και να εκφράσουν αμφίδρομα τη σχέσης της παίκτριας με την Παμ. Συζητείται η ποσότητα που θα πρέπει να πάρει η παίκτρια σε σχέση με την ποσότητα που πήρε η Παμ (π.χ. Η Τριπάμ είναι τριπλάσια από την Παμ -θα πρέπει να πάρει την τριπλάσια δόση). Η ερευνήτρια μοντελοποιεί τη διαδικασία περιγράφοντας την αντιστοιχία («κάθε μικρή παμίνα πρέπει να πάρει τη δόση της Παμ»), με χρήση των αντιγράφων της μονάδας («παμίνες»).

Διαδικασίες κατασκευής υποπολλαπλάσιου (ποσότητα β)

Οι διαδικασίες κατασκευής υποπολλαπλασίου, παρόμοια με τις διαδικασίες για τα πολλαπλάσια, ξεκινούν με τον προσδιορισμό της σχέσης μεταξύ της δεδομένης παίκτριας (π.χ. Τριπάμ) και της αρχηγού Παμ (μονάδα) μέσω μέτρησης και έκφρασής της με όρους πολλαπλασίων/ υποπολλαπλασίων, με τη χρήση των αντιγράφων της μονάδας («παμίνες»). Προβλέπεται, επίσης, παρόμοια συζήτηση για να συνδεθεί η σχέση της δόσης της Τριπάμ, με τη δόση που πρέπει να πάρει η Παμ, καθώς και παρόμοια χρήση των αντιγράφων της μονάδας για να αναπαριστούν την αριθμητική τιμή του ν (δηλαδή, το πλήθος των μερών).

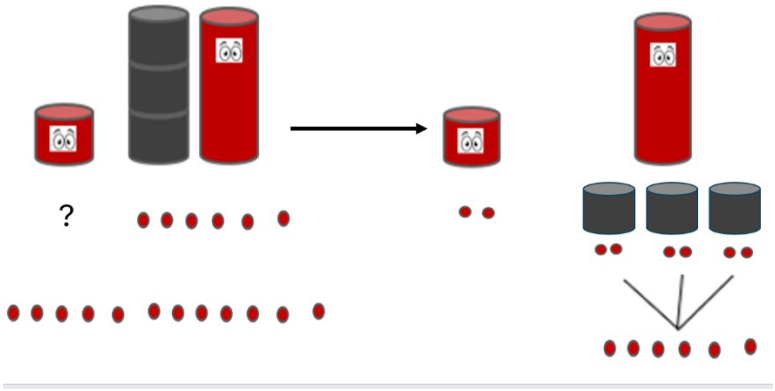
Στον Κύκλο Ι, ωστόσο, υπήρξε διαφορετική πρόβλεψη για τον υπολογισμό στο πλαίσιο των διακριτών, σε σχέση με το πλαίσιο των συνεχών ποσοτήτων.

Στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων, δεν προβλέφθηκε ο σχεδιασμός κάποιας ειδικής διαδικασίας, παρά μόνο ένα Ενδιάμεσο υποστηρικτικό Βήμα (ΕΒ). Στην Εικόνα 3, απεικονίζεται ο τρόπος παρουσίασης και τα υλικά στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων. Η ποσότητα Α αναπαραστάθηκε ως συλλογή αντικειμένων («βιταμίνες»), με αρχικά γραμμική διάταξη, που τα παιδιά θα μπορούσαν να χειριστούν ένα-ένα ξεχωριστά. Το πλαίσιο αυτό επιτρέπει την εφαρμογή διαφόρων στρατηγικών (δοκιμής και λάθους, επαναλαμβανόμενη 1-1 αντιστοίχιση, αντιστοίχιση 1-προς-πολλά, ή κάποιον συνδυασμό τους).

Η ερευνήτρια περιέγραψε τη διαδικασία ως ενέργεια ανάλυσης (π.χ. «να μοιράσουμε», «να χωρίσουμε») σε ν μέρη, με το ν να αναπαρίσταται από τα αντίγραφα των μονάδων (παμίνες). Τα μέρη αυτά πρέπει να είναι ίσα μεταξύ τους (π.χ. «όλες οι παμίνες πρέπει να πάρουν το

ίδιο», «έχουν όλες οι παμίνες την ίδια δόση;) και να εξαντλούν την αρχική ποσότητα Α (π.χ. «Τέλειωσαν οι βιταμίνες; Να δώσω τώρα αυτή τη δόση στην Παμ;»).

Ονομάζουμε αυτή τη διαδικασία *Ανάλυση με ΕΒ* (Ενδιάμεσο Βήμα)

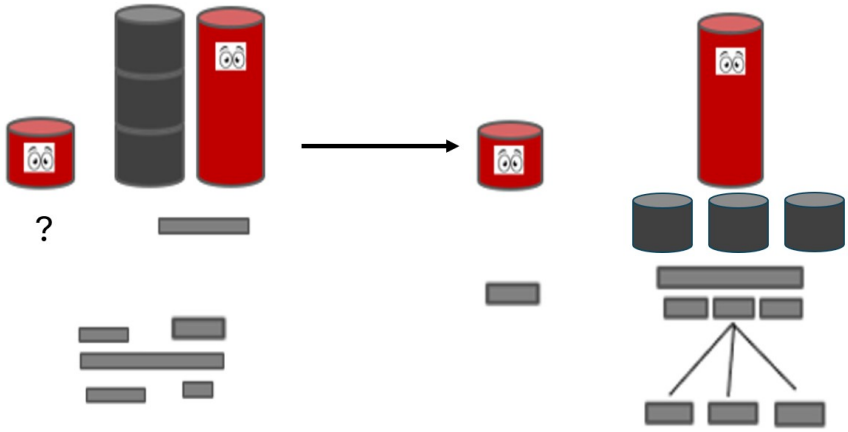


Εικόνα 3: Αναπαράσταση της κατάστασης για την κατασκευή υποπολλαπλασίου στις διακριτές ποσότητες

Αντίθετα, στις συνεχείς ποσότητες σχεδιάστηκε μια διαδικασία εκτίμησης-σύνθεσης-σύγκρισης (Εικόνα 4), με τα εξής βήματα (μετά το αρχικό του προσδιορισμού και έκφρασης της σχέσης μεταξύ των υψών των Παμ και της δεδομένης παίκτριας):

i) Ζητείται εκτίμηση του β και επιλογή του από 5 εναλλακτικές (διαθέσιμες χάρτινες μπάρες διαφορετικών μηκών—βλ. αριστερό μέρος της Εικόνας 4—με πολλαπλά διαθέσιμα αντίγραφα για την κάθε επιλογή). Το κομμάτι τοποθετείται προσωρινά μπροστά στην Παμ.
ii) Ζητείται έλεγχος της εκτίμησης: αντίγραφα του επιλεγμένου β αντιστοιχίζονται στα αντίγραφα των μονάδων («παμίνες»). Στη συνέχεια συνενώνονται και η ένωσή τους συγκρίνεται με το Α ως προς το μήκος.
iii) Αν τα ν αντίγραφα συνθέτουν το Α—αλλιώς, αν το μετρούν ακριβώς—η διαδικασία τελειώνει και το επιλεγμένο κομμάτι παραμένει μπροστά στην Παμ. Αν όχι, η διαδικασία ξεκινάει από την αρχή με την επιλογή άλλου β από τις εναλλακτικές.

Ονομάζουμε αυτή τη διαδικασία *Έμμεση Ανάλυση με ενδιάμεσο βήμα (ΕΒ).* Ως ενδιάμεσο βήμα θεωρούμε την αντιστοίχιση των αντιγράφων του β στην αναπαράσταση της αριθμητικής τιμής του ν («παμίνες»).



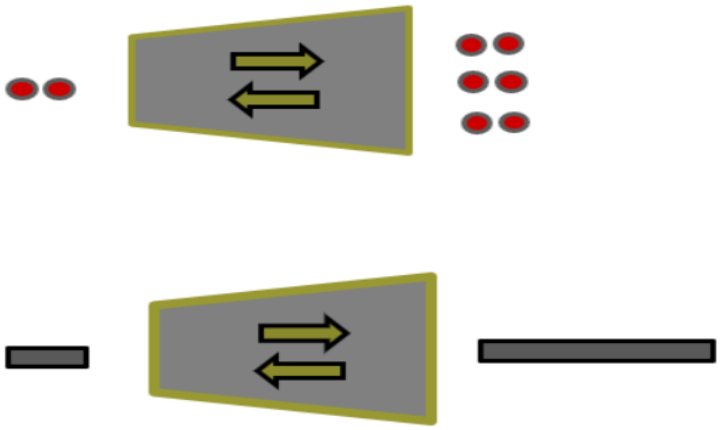
Εικόνα 4: Αναπαράσταση διαδικασίας κατασκευής υποπολλαπλασίου για τις συνεχείς ποσότητες

Η διαδικασία αυτή έχει τα εξής πλεονεκτήματα: α) παρακάμπτει το πρόβλημα του ισομερισμού συνεχών ποσοτήτων, ιδιαίτερα σε περιττό πλήθος μερών και μπορεί να γενικευθεί—φυσικά, προϋποθέτει ότι υπάρχουν διαθέσιμες επιλογές, μεταξύ των οποίων και η σωστή, β) ζητάει την εκτίμηση, αλλά δεν την προϋποθέτει—έτσι, δημιουργεί τη δυνατότητα το παιδί να «φανταστεί» το «όλον» ισομερισμένο, αλλά διατηρεί και τη δυνατότητα πιο στοιχειωδών στρατηγικών, όπως δοκιμή-και-λάθος, γ) το «όλον» είναι ορατό και ως συνεχής ποσότητα, και ως «διακριτοποιημένη» ποσότητα, δημιουργώντας τη δυνατότητα της αντιστοιχίας πολλά-προς-ένα / ένα-προς-πολλά.

Η πρόβλεψη για την λεκτική περιγραφή αυτής της διαδικασίας από την ερευνήτρια ήταν να περιγραφτεί αρχικά ως ενέργεια σύνθεσης (π.χ. «Για να δούμε, προβλέψαμε σωστά; Αν βάλω αυτά τα τρία κομματάκια μαζί, θα μου φτιάχνουν τη δόση της Τριπάμ;»). Σταδιακά να περιγράφεται με όρους μέτρησης, είτε χωρίς επανάληψη της μονάδας (π.χ. «Σωστά, τρία τέτοια κομματάκια χωράνε στην μπάρα της Τριπάμ»), είτε με επανάληψη της μονάδας (π.χ. «Πόσες φορές το έβαλες το κομμάτι στη μεγάλη μπάρα;»). Με αυτόν τον τρόπο, ο όρος «ένα νιοστό» θα μπορούσε να συνδεθεί με το μέρος-όλου («ένα από τα τρία ίσα κομμάτια του Α») ή με το «μέτρο του Α» (π.χ. «το κομμάτι που χωράει τρεις φορές στη μεγάλη μπάρα»).

3.1.3 Τρίτη δραστηριότητα (Δ3) – Πολλαπλασιαστική αλλαγή

Η τρίτη δραστηριότητα (Δ3) εντάσσεται στο πλαίσιο της πολλαπλασιαστικής αλλαγής. Όπως συζητήσαμε στην §2.5, σχεδιάσαμε μια τροποποιημένη «κλασματομηχανή», η οποία λειτουργεί αμφίδρομα, με την έννοια ότι η «είσοδος» γίνεται «έξοδος» και αντίστροφα, ενώ επιδέχεται και συνεχείς ποσότητες (Εικόνα 5).



Εικόνα 5: Η «κλασματομηχανή» για διακριτές και συνεχείς ποσότητες

Όπως φαίνεται στην Εικόνα 5, η μηχανή έχει μια «μικρή» και μια «μεγάλη» πλευρά. Από τη μικρή πλευρά, η ποσότητα που εισέρχεται (συνεχής ή διακριτή), πολλαπλασιάζεται με ένα φυσικό αριθμό ν και το πολλαπλάσιο της παρουσιάζεται από την μεγάλη πλευρά της μηχανής. Αντίστροφα, η ποσότητα που εισέρχεται από τη μεγάλη της πολλαπλασιάζεται με το 1/ν και το ένα νιοστό της ποσότητας εμφανίζεται από την άλλη πλευρά. Η αρχική και η τελική ποσότητα παραμένουν ταυτόχρονα ορατές. Οι μετασχηματισμοί αυτοί πραγματοποιούνται «χειροκίνητα» από την ερευνήτρια.

Τα διαθέσιμα υλικά είναι παρόμοια με αυτά της Δ2: Υπάρχει το ίδιο εμπράγματο υλικό για τις συνεχείς και διακριτές ποσότητες που καλούνται να επεξεργαστούν. Στα προβλήματα με συνεχείς ποσότητες, έχουν 5 επιλογές για να επιλέξουν μία σε κάθε πρόβλημα, και αντίγραφα για κάθε επιλογή, με πλήθος μεγαλύτερο από αυτό που απαιτείται για το εκάστοτε πρόβλημα.

Κατά την υλοποίηση της δραστηριότητας, στα παιδιά παρουσιάζεται κάθε μηχανή με παραδείγματα της λειτουργίας της (πώς επιδρά στις ποσότητες εισόδου). Τα παιδιά καλούνται να «μαντέψουν τι κάνει η μηχανή». Αφού τα παιδιά ανακαλύψουν τη λειτουργία κάθε μηχανής, κάθε μία από αυτές μπορεί να κατασκευάσει το πολλαπλάσιο ή υποπολλαπλάσιο που ζητάμε από τα παιδιά. Έπειτα, τα παιδιά κατασκευάζουν πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια για διαφορετικές αρχικές ποσότητες, συνεχείς ή διακριτές, για ν=2, 3,

4. Η αμοιβαία αντιστρεψιμότητα των ενεργειών αναδεικνύεται με ερωτήσεις του τύπου «Τι κάνει αυτή η μηχανή από τη μικρή προς τη μεγάλη πλευρά;» και αντίστροφα.

3.2. Τοπικές υποθέσεις και ερευνητικά ερωτήματα

Όπως διαφαίνεται από τον σχεδιασμό μας (§ 3.1), είχαμε δύο τοπικές υποθέσεις σχετικά με τις δραστηριότητες Δ1 και Δ2. Πιο συγκεκριμένα, υποθέσαμε ότι:

Τ.Υ.1: Η κανονικότητα που παρουσιάζεται κατά την παραγωγή των όρων για τα ακέραια πολλαπλάσια και τα αντίστοιχα υποπολλαπλάσια και οι υφιστάμενες γνώσεις των παιδιών για τα απόλυτα και τα τακτικά αριθμητικά θα λειτουργήσουν βοηθητικά στην προσπάθεια των παιδιών να κατασκευάσουν τους ζητούμενους όρους για τις σχέσεις που τους παρουσιάστηκαν. Αναμέναμε ότι τα παιδιά θα μπορούν να παραγάγουν όρους, γενικεύοντας και σε νέες περιπτώσεις.

Τ.Υ.2: Με βάση τη βιβλιογραφική ανασκόπηση της §1.2, αναμέναμε ότι στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων, θα εμφανίζονταν στρατηγικές ισομερισμού που απαντώνται σε αυτές τις ηλικίες, όπως η επαναλαμβανόμενη 1-1 αντιστοίχιση (π.χ. Fitzpatrick & Hallet, 2019).

Μια τρίτη τοπική υπόθεση αφορούσε τη χρήση της λέξης «μισό».

Τ.Υ.3: Με βάση τη βιβλιογραφική ανασκόπηση της §1.2, υποθέσαμε ότι η χρήση της λέξης «μισό» για την περιγραφή της σχέσης 1:2 στην πρώτη επαφή των παιδιών με τους όρους (Δ1) θα ήταν υποστηρικτική για τα παιδιά, δεδομένου ότι η σχέση «μισό»/ διπλάσιο είναι η πιο προσιτή στα μικρά παιδιά (Fitzpatrick & Hallett, 2019).

Στο πλαίσιο των κεντρικών ερευνητικών ερωτημάτων της έρευνας (§2.2), θέσαμε τα εξής ερωτήματα:

Ε.Ε.1) Είναι οι διαδικασίες *Σύνθεσης* και *Έμμεσης Ανάλυσης με ΕΒ* στα πλαίσια των δυνατοτήτων των νηπίων; Πιο συγκεκριμένα, θα μπορέσουν τα παιδιά να τις εφαρμόσουν για την επίλυση προβλημάτων με ζητούμενο το Α (πολλαπλάσιο) ή το β (υποπολλαπλάσιο) στο πλαίσιο της παρέμβασης; Ποιες δυσκολίες θα αντιμετωπίσουν τα παιδιά και τι είδους κατανόηση για τις διαδικασίες θα επιδείξουν;

Ε.Ε.2) Τι επίδραση θα έχει η παρέμβαση στην ικανότητα των παιδιών να επιλύουν προβλήματα, να αναγνωρίζουν και να εκφράζουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις σε

πολλαπλασιαστικές καταστάσεις διαφορετικού τύπου από αυτές που επεξεργάστηκαν κατά την παρέμβαση;

3.3. Υλοποίηση: Μέθοδος

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η φάση της υλοποίησης του Κύκλου Ι συνέπεσε με την περίοδο της πανδημίας. Αυτό είχε επιπτώσεις για τη διεξαγωγή και την ολοκλήρωση της υλοποίησης. Θα περιγράψουμε τον αρχικό σχεδιασμό και τον τρόπο με τον οποίο υλοποιήθηκε. Στα αποτελέσματα θα εστιάσουμε σε αυτά που μας οδήγησαν στον επανασχεδιασμό του προγράμματος

3.3.1 Ερευνητικός σχεδιασμός -Συνολική διαδικασία

Η υλοποίηση του προγράμματος οργανώθηκε αρχικά ως παρέμβαση με ημι-πειραματικό σχεδιασμό (προέλεγχος-παρέμβαση- μεταέλεγχος).

Στον προέλεγχο έγινε η διερεύνηση των αρχικών ικανοτήτων επίλυσης πολλαπλασιαστικών προβλημάτων των παιδιών και η καταγραφή των υφιστάμενων γνώσεων τους σχετικά με όρους που αφορούν πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια. Η διαδικασία διαρκούσε κατά μέσο όρο 30’. Ο προέλεγχος έγινε με ατομικές συνεντεύξεις τον Ιανουάριο του σχολικού έτους 2020-21 και η παρέμβαση ξεκίνησε αμέσως μετά.

Κατά το σχολικό έτος 2020-21 και λόγω της έξαρσης του κορονοϊού (Covid19), τα σχολεία διέκοπταν τη δια ζώσης λειτουργία τους συχνά, γεγονός που επηρέασε τόσο τη συχνότητα των συναντήσεων μας με τα παιδιά, όσο και τον αριθμό των δραστηριοτήτων που τελικά εφαρμόστηκαν στην τάξη. Η μόνη δραστηριότητα που είχε ολοκληρωθεί πριν την πανδημία ήταν η Δ1 (Εισαγωγική). Η Δ2 (αναλογικά προβλήματα) δουλεύτηκε σε άτακτα χρονικά διαστήματα, με μεγάλη απόσταση μεταξύ τους και η Δ3 («κλασματομηχανή») δεν υλοποιήθηκε καθόλου.

Η παρέμβαση έγινε σε δύο ομάδες των τεσσάρων παιδιών, στο χώρο του σχολείου. Κάθε ομάδα συμμετείχε συνολικά σε 5 συναντήσεις, διάρκειας περίπου 45΄ λεπτών η κάθε μία, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν από τον Φεβρουάριο του 2021 έως και τον Μάιο του 2021, κατά τα διαστήματα όπου τα παιδιά επέστρεφαν στη δια ζώσης εκπαίδευση. Στο Παράρτημα 3 παρουσιάζεται μια συνοπτική περιγραφή των συναντήσεων.

Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, η ερευνήτρια αφηγήθηκε/δραματοποίησε τις ιστορίες, παρουσίασε τις ηρωίδες και τους ήρωες, και έθεσε τα προβλήματα. Η διδακτική διαχείριση των δραστηριοτήτων, με όρους μοντελοποίησης των διαδικασιών και χρήσης γλώσσας ήταν όπως περιγράφεται στην §3.1, με την εξής επισήμανση: Στην εισαγωγή των όρων (Δ1), χρησιμοποιήθηκε ο όρος «μισό», αντί του όρου «ένα δεύτερο».

Πιο συγκεκριμένα, στο πλαίσιο του σεναρίου της ιστορίας, η Διπάμ λέει στην Παμ «Είμαι το διπλάσιό σου», ενώ η Παμ λέει στη Διπάμ «Είμαι το ένα σου μισό». Θεωρήσαμε ότι η χρήση της πιο οικείας λέξης «μισό» (Τ.Υ.3) θα ήταν πιο πρόσφορη για την εισαγωγή των πρώτων όρων, καθώς και ότι η έκφραση «ένα *σου* μισό» θα αναδείκνυε το γεγονός ότι η λέξη εκφράζει σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων.

Τα παιδιά είχαν χρόνο να επεξεργαστούν κάθε πρόβλημα, πριν από οποιαδήποτε παρέμβαση της ερευνήτριας. Όλα τα παιδιά έλυσαν προβλήματα όλων των τύπων με τη σειρά, τόσο στο πλαίσιο της ομάδας (συζητώντας και ανταλλάσσοντας απόψεις), όσο και ατομικά, μιας και το κάθε παιδί κλήθηκε να κατασκευάσει υποπολλαπλάσια και τα πολλαπλάσια ποσοτήτων. Καθ’ όλη τη διάρκεια των δραστηριοτήτων όλα τα παιδιά μπορούσαν να πάρουν το λόγο για να εκφράσουν την άποψη τους και για να εξηγούν στα άλλα παιδιά τι έκαναν και γιατί.

Η ερευνήτρια συζητούσε μαζί τους για τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να ελέγξουν την ορθότητα των απαντήσεων τους και τους ζητούσε αιτιολογήσεις. Ακόμη, επέμενε στην αναφορά όρων για τα υποπολλαπλάσια και πολλαπλάσια σε κάθε έργο και στο τέλος προέτρεπε τα παιδιά να παρουσιάσουν ξανά το συμπέρασμα που έβγαινε από τη συζήτηση και τις δοκιμές τους, το οποίο εκείνη αναδιατύπωνε, όταν χρειαζόταν, με αναφορά σε διαδικασίες και σχέσεις.

3.3.2 Συμμετέχοντα παιδιά

Στη φάση της υλοποίησης του Κύκλου Ι συμμετείχαν 8 παιδιά (όλα νήπια) ενός τμήματος ιδιωτικού σχολείου των Ιωαννίνων, μέσης ηλικίας 5 ετών 9 μηνών (με εύρος 5 έτη 7 μήνες – 6 έτη 4 μήνες). Τα πέντε ήταν κορίτσια και τα τρία ήταν αγόρια. Η μητρική τους γλώσσα ήταν τα ελληνικά. Όλα τα παιδιά της τάξης που συμμετείχαν στην έρευνα με συγκατάθεση από τους γονείς τους, συναίνεσαν στην συμμετοχή τους στις δραστηριότητες.

Θα αναφερόμαστε στα παιδιά αυτά με τα εξής ψευδώνυμα: Γιάννα, Σωτηρία, Λόρα, Ελένη, Πένυ, Άρης, Κώστας και Νικήτας.

3.3.3 Ερευνητικό Εργαλείο

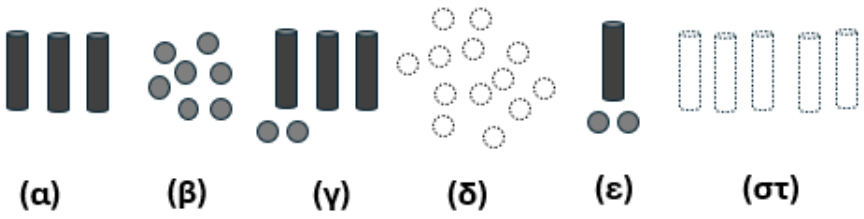
Στον προέλεγχο εξετάστηκαν δύο κατηγορίες προβλημάτων (Α και Β), τα οποία δεν συμπεριλαμβάνονταν στην παρέμβαση.

Η κατηγορία Α αφορούσε την κατάσταση των «ισοπληθών ομάδων» (διακριτές ποσότητες) και «ίσων μέτρων» (συνεχείς ποσότητες). Εξετάστηκαν και τα τρία προβλήματα που προκύπτουν από την κατάσταση αυτή (διαίρεσης μερισμού, διαίρεσης μέτρησης και πολλαπλασιασμού), για διακριτές και συνεχείς ποσότητες και για ν =2, 3, 4 (συνολικά, 18 προβλήματα). Τα προβλήματα διατυπώθηκαν στο πλαίσιο της «δίκαιης μοιρασιάς». Τόσο οι παραλήπτες όσο και οι ποσότητες δόθηκαν ως εμπράγματο υλικό (καραμέλες ως διακριτές ποσότητες και χάρτινες ράβδοι ως σοκολάτες). Στην Εικόνα 6 παρουσιάζεται το μοντέλο αυτών των προβλημάτων με το διαθέσιμο υλικό, για 3 ισοπληθείς ομάδες. Οι διατυπώσεις των προβλημάτων ήταν ως εξής (με αναφορά στην Εικόνα 6):

Πρόβλημα διαίρεσης μερισμού (Α1): Τρία παιδιά (6α) θα μοιραστούν δίκαια αυτές τις καραμέλες (6β). Μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες θα πάρει κάθε παιδί;

Πρόβλημα πολλαπλασιασμού (Α2): Τρία παιδιά (6α) μοιράστηκαν ένα πακέτο καραμέλες. Η Ελένη πήρε αυτές τις δύο (6γ). Μπορείς να μου πεις πόσες καραμέλες είχε το πακέτο που μοιράστηκαν τα παιδιά;

Πρόβλημα διαίρεσης μέτρησης (Α3): Μια παρέα παιδιών μοιράστηκε δίκαια αυτές τις καραμέλες (6β). Δεν ξέρω πόσα ήταν, αλλά ξέρω ότι η Ελένη πήρε αυτές τις δύο (6ε). Μπορείς να μου πεις πόσα ήταν τα παιδιά της παρέας;



Εικόνα 6:Μοντέλο των τριών προβλημάτων για τις «ισοπληθείς ομάδες» με τα διαθέσιμα υλικά

Στα προβλήματα «ίσων μέτρων», η διατύπωση ήταν ίδια, αλλά δίνονταν εναλλακτικές για να επιλέξουν τα παιδιά ως απάντηση, παρόμοια με τα προβλήματα της παρέμβασης.

Στη κατηγορία Β, δόθηκαν στα παιδιά διακριτές και συνεχείς ποσότητες και τους ζητήθηκε ρητά να βρουν το υποπολλαπλάσιο (υπο-κατηγορία Β1) και το αντίστοιχο πολλαπλάσιο (υπο-κατηγορία Β2) για ν=2,3,4. Τόσο οι διακριτές όσο και οι συνεχείς ποσότητες και σε αυτή την κατηγορία αναπαραστάθηκαν με εμπράγματο υλικό (καραμέλες και ράβδους από χαρτόνι) και στα παιδιά δινόταν κάθε φορά 4 εναλλακτικές απαντήσεις από τις οποίες έπρεπε να διαλέξουν τη σωστή. Για παράδειγμα στις συνεχείς ποσότητες ένα από τα προβλήματα που παρουσιάστηκε στα παιδιά ήταν το εξής: «Έχω αυτή τη σοκολάτα (χάρτινη ορθογώνια ράβδος). Θα δώσω στον Γιάννη το ένα τρίτο της σοκολάτας. Ποιο από αυτά τα κομμάτια (4 επιλογές) λες ότι θα πάρει ο Γιάννης;». Στο έργο αυτό (συνολικά, 12 προβλήματα), απαραίτητη προϋπόθεση επίλυσης ήταν η αναγνώριση και ερμηνεία των όρων.

Στις διακριτές ποσότητες, παραμείναμε σε μικρά πλήθη (<10). Για ν=2, 3, 4, αυτό σημαίνει ότι το Α ήταν 4, 6, 8 ή 9 και αντίστοιχα το β ήταν 2,3,4. Στις συνεχείς ποσότητες δινόταν αρκετά αντίγραφα για κάθε β που χρησιμοποιούσαμε είτε ως αρχική ποσότητα (στα έργα που ζητούμενο ήταν το Α) είτε ως ζητούμενο έτσι ώστε τα παιδιά να μπορούν να εφαρμόσουν τη διαδικασία που διδάχθηκαν κατά τη διάρκεια της παρέμβασης και να ελέγξουν τις απαντήσεις τους.

Μετά από κάθε έργο, η ερευνήτρια ζητούσε από τα παιδιά να εξηγήσουν την απάντησή τους προτρέποντας τα με ερωτήσεις όπως: «Πώς το ξέρεις ότι αυτό είναι το σωστό;» και «Ξέρεις τι σχέση έχει η σοκολάτα (οι καραμέλες) που επέλεξες με την αρχική σοκολάτα (τις αρχικές καραμέλες);»

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζεται συνοπτικά ο κωδικός του κάθε τύπου προβλήματος ανά κατηγορία, και το είδος της ποσότητας και της σχέση που αφορά. Στο Παράρτημα 2 παρουσιάζονται αναλυτικά τα προβλήματα. Συνολικά, τα προβλήματα ήταν 30, 18 της κατηγορίας Α και 12 της κατηγορίας Β, 15 ανά είδος ποσότητας (διακριτή/συνεχής) και 10 ανά αριθμητική τιμή του ν (2, 3, 4).

Κατηγορία έργου	Έργο	Ποσότητα	ν		
			2	**3**	**4**
Α	**Α1 - Μερισμού**	Συνεχής	Α1.1	Α1.3	Α1.5
		Διακριτή	Α1.2 (6:2)	Α1.4 (6:3)	Α1.6 (8:4)
	Α2 -Πολ/σμού	Συνεχής	Α2.1	Α2.3	Α2.5
		Διακριτή	Α2.2 (2*2)	Α2.4 (3*3)	Α2.6 (4*2)
	Α3 - Μέτρησης	Συνεχής	Α3.1	Α3.3	Α3.5
		Διακριτή	Α3.2 (8:4)	Α3.4 (9:3)	Α3.6 (8:2)
Β	**Β1 -Υποπολλαπλάσιο**	Συνεχής	Β1.1	Β1.3	Β1.5
		Διακριτή	Β1.2 (4:2)	Β1.4 (6:3)	Β1.6 (8:4)
	Β2 -Πολλαπλάσιο	Συνεχής	Β2.1	Β2.3	Β2.5
		Διακριτή	Β2.2 (2*3)	Β2.4 (3*2)	Β2.6 (4*2)

Πίνακας 1: Κωδικοποίηση έργων προελέγχου και μεταελέγχου για τον Κύκλο Α εφαρμογής του προγράμματος

Στον μεταέλεγχο δόθηκε, επιπλέον, ένα έργο (Π) με προβλήματα παρόμοια με αυτά της δραστηριότητας Δ1. Πιο συγκεκριμένα: Στα παιδιά παρουσιάστηκαν με τυχαία σειρά τρεις «παίκτριες» της ομάδας (ν=2, 3, 4). Τα παιδιά κλήθηκαν να την αναγνωρίσουν με το όνομά της και να εκφράσουν τη σχέση μεταξύ της παίκτριας και της αρχηγού Παμ. Είχαν στη διάθεσή τους τα υλικά της παρέμβασης, δηλαδή την Παμ (μονάδα) και τις «παμίνες» (αντίγραφα της μονάδας).

Από την παρουσίαση των προβλημάτων, μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι, με βάση το ζητούμενό τους, μπορούν να διακριθούν σε τρεις κατηγορίες: Ζητούμενο το Α (πολλαπλάσιο), ζητούμενο το β (υποπολλαπλάσιο) και ζητούμενο το ν. Το τελευταίο αντιστοιχεί στο έργο Π («Ποια είναι η παίκτρια;) και στο πρόβλημα διαίρεσης μέτρησης.

Διαδικασία χορήγησης

Τα προβλήματα επιδόθηκαν σε όλα τα παιδιά με την ίδια σειρά. Πρώτα δόθηκε το έργο Π («Ποια είναι η παίκτρια;») σε όλα τα παιδιά.

Μετά δόθηκαν τα προβλήματα για ν=2 με ζητούμενο το β (Α1, Β1) με την εξής σειρά: Α1.1, Α1.2, Β1.1, Β1.2 (δηλαδή, διαίρεσης μερισμού στις συνεχείς και μετά στις διακριτές και, κατόπιν, τα προβλήματα με αναγνώριση του όρου). Αν το παιδί επέλυε έστω και ένα από αυτά τα προβλήματα, τότε του δίνονταν τα αντίστοιχα προβλήματα για ν=3 (Α1.3, Α1.4, Β1.3, Β1.4). Αν όχι, το παιδί δεν έλυνε τέτοια προβλήματα για ν=3 και ν=4. Η διαδικασία επαναλαμβανόταν για ν=3.

Παρόμοιο σκεπτικό ακολουθήθηκε στα προβλήματα με ζητούμενο το Α (Α2, Β2), που δόθηκαν στη συνέχεια. Τελευταία δόθηκαν τα προβλήματα Α3 (διαίρεσης μέτρησης).

Ο λόγος που αποφασίσαμε να δοθούν με αυτό τον τρόπο τα προβλήματα της κατηγορίας Α και Β ήταν ότι το συνολικό πλήθος των προβλημάτων ήταν μεγάλο, δεν υπήρχε η δυνατότητα να γίνει ο έλεγχος σε δύο ή περισσότερες συνεδρίες και, δεδομένων των συνθηκών της παρέμβασης, αναμέναμε ότι τα προβλήματα θα ήταν απαιτητικά και κουραστικά για τα παιδιά. Θεωρήσαμε, επίσης, ότι η πιθανότητα να αποτύχει ένα παιδί σε όλα τα προβλήματα ενός ζητουμένου για ν=2 και να επιτύχει σε πρόβλημα για ν=3 ήταν πολύ μικρή.

Στον προέλεγχο χρησιμοποιήθηκε η λέξη «μισό», ενώ στον μεταέλεγχο ο όρος «ένα δεύτερο».

3.3.4 Συλλογή, οργάνωση και ανάλυση δεδομένων

Η συλλογή και η οργάνωση δεδομένων έγινε όπως περιγράφεται στην §2.3: Τόσο στη διάρκεια της παρέμβασης, όσο και κατά τη διαδικασία του προελέγχου και του μεταελέγχου (διατήρησης) έγινε βιντεοσκόπηση με εστίαση στο τραπέζι στο οποίο δούλευαν τα παιδιά και χωρίς καταγραφή των προσώπων τους. Στις απομαγνητοφωνήσεις αυτές καταγράφηκαν και μη λεκτικά στοιχεία των απαντήσεων των παιδιών (οποιαδήποτε ενέργεια έκαναν τα παιδιά κατά την επίλυση των προβλημάτων που τους δόθηκαν).

Τα δεδομένα από τον προέλεγχο και τον μεταέλεγχο απομαγνητοφωνήθηκαν και οργανώθηκαν σε αρχείο excel (§2.3). Τα βίντεο από την παρέμβαση παρακολουθούσε η ερευνήτρια μετά το τέλος κάθε μαθήματος, κρατώντας σημειώσεις και βάζοντας χρονικές

σημάνσεις στα επεισόδια ενδιαφέροντος. Επιλεγμένα επεισόδια από την παρέμβαση παρουσιάζονται στα αποτελέσματα.

3.4. Αποτελέσματα

Θα ξεκινήσουμε την ενότητα αυτή από τις τοπικές υποθέσεις που αφορούν στην υλοποίηση των δραστηριοτήτων.

Κανονικότητα και πολλαπλάσια (Τ.Υ.1)

Κατά την υλοποίηση της Δ1 (εισαγωγική δραστηριότητα), τα παιδιά αξιοποίησαν την αριθμητική ακολουθία ως διαδοχή των αριθμολέξεων για να προβλέψουν το όνομα της «επόμενης παίκτριας», ενώ προέβλεψαν και την ύπαρξη «παικτριών» πέραν των 10 πρώτων. Η χρήση των αριθμολέξεων διαφαίνεται και στο πώς εξέφρασαν το «υποκοριστικό» της τέταρτης παίκτριας:

> Κώστας: Κυρία, εγώ ξέρω ποια είναι. (Είναι) η Τέσσερα-Παμ (…) Επειδή αυτές είναι το ένα-δύο-τρία [*δείχνει τις αντίστοιχες παίκτριες επάνω στο τραπέζι*] και αυτή θα είναι το τέσσερα. Μετά είναι το τέσσερα.
>
> Πένυ: Να πάρουμε και μια πολύ μεγάλη, την Εικοσιτέσσερα-Παμ.

Μετά την εισαγωγή των «συμπτυγμένων» ονομάτων και την εισαγωγή του όρου «διπλάσιο», τα παιδιά φάνηκε να προσαρμόζουν γρήγορα τα «υποκοριστικά» σε όρους για τα πολλαπλάσια. Για παράδειγμα:

> Ε: Για την Διπάμ είπαμε πως είναι η διπλάσια της Παμ. Για την Τριπάμ;
>
> Πένυ - Κώστας: Τριπλάσια (μαζί).

Η κατασκευή των όρων δε στηριζόταν μόνο στην ηχητική ομοιότητα του ονόματος της παίκτριας με τον αντίστοιχο όρο. Για παράδειγμα, η Λόρα, έχοντας μπροστά της την Τετραπάμ δίπλα από τη στοίβα με τις τέσσερις μονάδες, ρωτήθηκε «τι σχέση έχει η Τετραπάμ με την Παμ» και απάντησε «η τεσσεραπλάσια» γιατί χρειάστηκε «τέσσερις Παμ, Παμ-Παμ-Παμ-Παμ».

Πέρα από τις αριθμολέξεις, τα παιδιά αξιοποίησαν τον αναδρομικό κανόνα της αριθμητικής ακολουθίας για να προβλέψουν το ύψος της επόμενης παίκτριας. Παρακάτω, ο Άρης

διατυπώνει τον κανόνα, εξηγώντας πώς προβλέπει, όχι μόνο την επόμενη παίκτρια, αλλά και το ύψος της:

> Άρης: Επειδή μέτρησα ότι η προηγούμενη ήταν η τέταρτη άρα τώρα θα χρειαστώ αυτή και άλλο ένα. Για να φτάσω στο πέμπτο [*δείχνει παίρνοντας την Τετραπάμ και βάζοντας επάνω της μία μονάδα*].
>
> Ε: Για να πάμε από την Πενταπάμ στην Εξαπάμ, πόσες Παμ θα βάλεις;
>
> Άρης: Μία.(…) Κάθε φορά θα βάζουμε ένα τέτοιο [*δείχνει τη μονάδα*].

Υποπολλαπλάσια και το «μισό» ως εμπόδιο (Τ.Υ.1 - Τ.Υ.3)

Κατά την υλοποίηση της Δ1 (εισαγωγική δραστηριότητα), η ερευνήτρια, όπως είχε προβλεφθεί, χρησιμοποίησε τη λέξη «μισό» για να περιγράψει τη σχέση της Παμ με τη Διπαμ. Συγκεκριμένα, στο πλαίσιο του σεναρίου, η Διπάμ λέει στην Παμ: «Είμαι το διπλάσιό σου», ενώ η Παμ λέει: «Είμαι το ένα σου μισό».

Τα παιδιά χρησιμοποίησαν τη λέξη «μισό», και παραλλαγές της συγκεκριμένης διατύπωσης («ένα *σου* μισό») άμεσα για την παραγωγή των επόμενων όρων για τα υποπολλαπλάσια. Στο απόσπασμα που ακολουθεί, έχει τεθεί το ερώτημα «τι σχέση έχει η Παμ με την Τριπάμ»:

> Κώστας- Λόρα: Είναι το ένα της μισό (μαζί)
>
> Ε: Το ένα της μισό; Μα χρειαστήκαμε 3 κουκλάκια για την Τριπάμ.
>
> Πένυ: Το τρία σου μισό.

Η ερευνήτρια προέβη σε διορθωτική κίνηση στη διάρκεια της διδασκαλίας, αντικαθιστώντας τη λέξη «μισό» με τον όρο «ένα δεύτερο» και συνδέοντας με την ακολουθία των τακτικών αριθμητικών. Ωστόσο, στην πορεία της παρέμβασης, τα παιδιά συνέχιζαν να χρησιμοποιούν τον όρο «μισό». Παραμορφώσεις του όρου «νιοστό» (π.χ. «το ένα μισό της τέσσερα») συνέχισαν να εμφανίζονται κατά την παρέμβαση και, όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, και στον μεταέλεγχο (διατήρησης).

Γενικότερα, η κατασκευή των όρων για τα πολλαπλάσια ήταν σταθερά πιο εύκολη για τα παιδιά, σε σχέση με το αντίστοιχο υποπολλαπλάσιο, όπως φαίνεται και στο επόμενο παράδειγμα:

> Ε: Και τι σχέση έχει η Πενταπάμ, η μεγάλη, με την Παμ, την μικρή;

Άρης: Πενταπλάσια.

Ε: Μπορείτε να μου πείτε και για την Παμ; Τι σχέση έχει με την Πενταπάμ;

Άρης: Είναι το ένα τέταρτο.

Ε: Μα είναι πέντε τα κομμάτια της Πενταπάμ.

Σωτηρία: Το ένα πέμπτο.

Στρατηγικές ισομερισμού στις διακριτές ποσότητες (Τ.Υ.2)

Στο επεισόδιο που ακολουθεί, η ερευνήτρια έχει τοποθετήσει 8 βιταμίνες σε γραμμική διάταξη μπροστά από τη Διπάμ και ζητάει από τα παιδιά να βρουν τη δόση της Παμ. Ανάμεσα στην Διπάμ και τις βιταμίνες υπάρχουν δύο αντίγραφα μονάδων («παμίνες») που έχουν χρησιμοποιήσει ήδη τα παιδιά για να βρουν τη σχέση της Διπάμ με την Παμ. Ακολουθούν τα εξής:

Ελένη: Θα πάρει η Παμ δύο. Είναι πιο μικρή.

Πένυ: Γιατί να πάρει δύο;

Ε: Δεν ξέρω πόσες θα πάρει. Ελάτε να σκεφτούμε όλοι μαζί.

Άρης: Εγώ ξέρω πως γίνεται.

Ε: Μπράβο Άρη! Να ρωτήσουμε και τα άλλα τα παιδιά;

Γιάννα: Θα δώσω πέντε σε αυτή [*τοποθετεί πέντε βιταμίνες μπροστά στην πρώτη παμίνα]*.

Ε: Και στην άλλη;

Άρης: Μένουν μόνο τρεις για την άλλη, δεν γίνεται! Να πω;

Ε: Ναι, σε λιγάκι.

Πένυ: Δεν είναι δίκαιο. Η μία έχει πιο πολλές.

Ε: Μαζέψτε τες τότε, να βρούμε άλλον τρόπο.

Πένυ: Να δώσω μία σε αυτή;

Ελένη: Να την δώσω εγώ;

Ε: Ναι, δώστη. [*Η Ελένη αντιστοιχίζει μία βιταμίνη στην πρώτη παμίνα*]

Πένυ: Να δώσουμε και στην άλλη.

Άρης: Να τις δώσουμε μία-μία όλες!

Ε: Άρη, ωραία η ιδέα σου. Θέλετε να την δοκιμάσουμε;

Ελένη: [*διαμοιράζει μία-μία τις* καραμέλες] Τέσσερις θα πάρει η Παμ!

Ε: Έχουν και οι δύο παμίνες τις ίδιες καραμέλες;

Γιάννα: Ναι.

Ε: Άρα βρήκαμε τρόπο να βρίσκουμε τη δόση της Παμ;

Πένυ: Ναι. Θα δίνουμε μία-μία μέχρι να τελειώσουν.

Στο επεισόδιο αυτό φαίνεται πώς ένα πιο προχωρημένο παιδί (Άρης) εισάγει τη διαδικασία της επαναλαμβανόμενης ένα-προς-ένα αντιστοίχισης στο πλαίσιο της παρέμβασης. Ο Άρης φαίνεται να αναγνωρίζει εκ των προτέρων ότι οι δυο «παμίνες» πρέπει να πάρουν ίσες «δόσεις». Το ίδιο φαίνεται να ισχύει και για την Πένυ, η οποία αμφισβητεί την πρώτη απάντηση της Ελένης, αλλά και τη λύση της Γιάννας. Η Πένυ λεκτικοποιεί και μια δεύτερη προϋπόθεση, ότι η αρχική ποσότητα πρέπει να εξαντληθεί. Για την Ελένη και τη Γιάννα, δεν φαίνεται να είναι ακόμη σαφής η προϋπόθεση για την ισότητα των «δόσεων». Ειδικότερα η Ελένη, στην πρώτη της απάντηση, φαίνεται να βασίζεται σε έναν κανόνα του τύπου «μικρότερη παίκτρια, μικρότερη δόση», χωρίς κάποια ορατή προϋπόθεση για το «μικρότερο». Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, παρόμοιοι «κανόνες» φαίνεται να εφαρμόζονται και στον μεταέλεγχο (διατήρησης).

Η διαδικασία της Έμμεσης Ανάλυσης στις συνεχείς ποσότητες (Ε.Ε.1)

Στο επεισόδιο που ακολουθεί, είναι η πρώτη φορά που τίθεται το πρόβλημα της εύρεσης της δόσης της Παμ, με δεδομένη τη δόση της Διπάμ, στις συνεχείς ποσότητες. Τα παιδιά έχουν λύσει αμέσως πριν το αντίστροφο πρόβλημα και έχουν μπροστά τους όλα τα διαθέσιμα υλικά (την Παμ, τη Διπάμ, τις «παμίνες» —αντίγραφα της μονάδας, με τα οποία έχουν μετρήσει τη Διπάμ—και τις επιλογές για τη δόση της Παμ, δηλαδή, το ζητούμενο β).

Ε: Τι θα γίνει τώρα αν δώσω αυτή την μπάρα στην Διπάμ. Μπορούμε να βρούμε την μπάρα για την Παμ; Δείτε τις επιλογές μας. Κάποια από αυτές είναι η μπάρα της Παμ.

Νικήτας: Θα πάρει δύο κομμάτια η Παμ.

Λόρα: Θα σπάσει σε δύο κομμάτια η μπάρα.

Ε: Θα πάρει ένα ή δύο κομμάτια;

Γιάννα: Ένα θα πάρει.

Ε: Και πώς ξέρω ποιο θα είναι το κομμάτι της Παμ;

Γιάννα: Θα την σπάσω [*δείχνει την μπάρα]* σε δύο, γιατί δύο είναι οι Παμίτσες. Οι μικρές. Είναι σαν αυτή [*δείχνει την Παμ στην άλλη πλευρά του τραπεζιού]*. Αυτηνής το κομμάτι ψάχνουμε.

Ε: Και πως θα το βρούμε;

Νικήτας: Μπορούμε να τα δούμε; Κοίτα, αν το πάω κοντά;

Ε: Ναι! Και πώς θα βρω αυτό που θέλω;

Λόρα: Να κάνουμε σαν τα τουβλάκια; Σαν τις Παμ;

Ε: Δηλαδή;

Λόρα: Να τα ενώσουμε σαν τουβλάκια μπροστά από την μεγάλη.

Ε: Και τι θα καταλαβαίνουμε; Θέλουμε ένα κομμάτι για να βρούμε το μισό ή δύο; [*Τα παιδιά δεν απαντάνε για λίγη ώρα]*

Νικήτας: Με ένα δεν ξέρουμε. Μπορεί να μαλώσουν. Εγώ μαλώνω όταν το μισό μου είναι πιο μικρό από του Γιάννη [*ο αδερφός του]*.

Ε: Και πώς τα ελέγχεις;

Νικήτας: Τα βάζουμε το ένα πάνω στο άλλο.

Ε: Για να δούμε αν είναι το μισό της μπάρας της Διπάμ τι μπορούμε να κάνουμε; [*Τα παιδιά δεν μιλάνε για αρκετή ώρα]*.

Γιάννα: Δεν μπορούμε.

Ε: Και αυτό με τα τουβλάκια που είπε η Λόρα; Δηλαδή;

Λόρα: Αν τα ενώσουμε; Μπορούμε να τα ενώσουμε.

Ε: Δηλαδή; Αν είναι τα δύο μισά της μπάρας αυτής πως θα το καταλάβουμε; *[Τα παιδιά δεν μιλάνε για αρκετή ώρα]*

Ε: Για να κοιτάξουμε τα κομμάτια μας [*τις διαθέσιμες επιλογές]*. Ποιο λέτε να είναι το μισό, να δοκιμάσουμε.

Στη συνέχεια του επεισοδίου, ο Νικήτας, με την πρώτη δοκιμή, επιλέγει το «μισό» από τις επιλογές, παίρνει ένα αντίγραφό του από το υλικό και τα ενώνει μπροστά στην μπάρα της Διπάμ. Τα παιδιά συμφωνούν ότι βρήκε το «μισό» και η ερευνήτρια επιβεβαιώνει και μοντελοποιεί λεκτικά τη διαδικασία *Έμμεσης Ανάλυσης* με τη βοήθεια των υλικών, εισάγοντας το ΕΒ (ενδιάμεσο βήμα).

> Ε: Για να δούμε λοιπόν, πώς βρήκαμε τη δόση της Παμ; Πρώτα βρήκαμε σε πόσα κομμάτια έπρεπε να κόψουμε τη δόση της Διπαμ. Πώς το βρήκαμε; (….) Πόσα είναι; (…) Μετά κοιτάμε τα κομμάτια μας και κάνουμε μια καλή μαντεψιά. Παίρνουμε το κομμάτι που νομίζουμε ότι πρέπει να δώσουμε στην Παμ. Πόσα τέτοια ίδια κομμάτια πρέπει να πάρουμε; (…) Για να ξέρουμε ότι πήραμε το σωστό αριθμό κομματιών, δίνουμε από ένα σε κάθε παμίνα *(ΕΒ).* Τα μαζεύουμε και τα ενώνουμε μπροστά στην μπάρα της Διπαμ. Αν είναι ίσες, παίρνουμε το κομμάτι μας είναι σωστό και το δίνουμε στην Παμ.

Στο παραπάνω επεισόδιο φαίνεται να ενεργοποιούνται εμπειρίες για τη «δίκαιη μοιρασιά» στα δύο με τη βασική αρχή ότι τα μερίδια είναι ίσα (Νικήτας). Δεν είναι σαφές με ποιο σκεπτικό προτείνει η Λόρα να «ενώσουν» τα κομμάτια «σαν τουβλάκια μπροστά από την μεγάλη», αλλά φαίνεται να βασίζεται στην εμπειρία με την εισαγωγική δραστηριότητα (Δ1). Το γεγονός ότι η πρώτη επιλογή του Νικήτα ήταν η σωστή, δεν έδωσε την ευκαιρία να πραγματευτούν τα παιδιά την αρχή ότι το συνολικό μήκος των δύο κομματιών πρέπει να ισούται με αυτό της αρχικής μπάρας. Συμφώνησαν εύκολα ότι βρέθηκε το σωστό κομμάτι, πιθανώς λόγω της διαισθητικής κατανόησης για το «μισό». Η ευκαιρία αυτή δόθηκε στην περίπτωση του ενός τρίτου.

Στο επεισόδιο που ακολουθεί, τα παιδιά, με τα ίδια υλικά, λύνουν το πρόβλημα της εύρεσης της δόσης της Παμ, με δεδομένη τη δόση της Τριπάμ. Η σχέση μεταξύ των δύο έχει ήδη προσδιοριστεί και εκφραστεί αμφίδρομα.

Ο Κώστας και η Λόρα έχουν κάνει μια εκτίμηση για τη δόση της Παμ, διαλέγοντας ένα κομμάτι. Έχουν συμφωνήσει ότι χρειάζονται τρία τέτοια κομμάτια, έχουν ελέγξει αντιστοιχίζοντας τα κομμάτια στις «παμίνες», τα έχουν συνενώσει μπροστά στη μπάρα της Τριπαμ. Το συνολικό τους μήκος είναι μικρότερο από το μήκος της μεγάλης μπάρας (αρχικής ποσότητας). Κανένα από τα δύο παιδιά δεν φαίνεται να ενοχλείται από το γεγονός αυτό. Ούτε τα άλλα παιδιά αντιδρούν. Επεμβαίνει η ερευνήτρια:

Ε: Ωραία. Βρήκατε τρία ίδια κομμάτια, αλλά φτιάχνετε τη μπάρα που έδωσα στην Τριπάμ; Να πάρω ένα από αυτά να δώσω στην Παμ;

Νικήτας: Όχι, γιατί δεν έφαγαν όλη την μπάρα με τα κομμάτια.

Ε: Τι εννοείς;

Νικήτας: Όταν λέω μοιράζω εννοώ το μοιράζω όλο. Πρέπει να βρούμε άλλα κομμάτια. [*το παιδί διαλέγει ένα άλλο κομμάτι, επαναλαμβάνει τη διαδικασία*]. Αυτό είναι το σωστό. Να, είναι το ένα από τα τρία κομμάτια της μπάρας που μας δίνει τώρα.

Λόρα: Ναι, είναι το ένα τρία της μισό.

Νικήτας: Όχι. Είναι το ένα τρίτο.

Στην πορεία της παρέμβασης παρατηρήθηκε ότι, εν γένει, το πλήθος των κομματιών και η μεταξύ τους ισότητα ήταν αρχές που τηρούσαν τα παιδιά. Επίσης, η σύνθεση των ν ίσων κομματιών εφαρμοζόταν ως μέρος της διαδικασίας. Το μέρος της διαδικασίας που δημιουργούσε δυσκολίες ήταν η σύγκριση με το δεδομένο Α. Πράγματι, τα παιδιά δεν τηρούσαν συστηματικά την αρχή ότι η σύνθεση των ν β πρέπει να είναι ίση με το Α (αλλιώς, ότι το β να μετράει ακριβώς το Α), με την έννοια ότι το ίδιο παιδί μπορεί να την τηρούσε σε κάποια προβλήματα, αλλά όχι σε άλλα. Όπως φαίνεται από το παραπάνω παράδειγμα, τα παιδιά μπορεί να πραγματοποιούσαν τη σύγκριση, χωρίς να λάβουν υπόψη τη διαφορά. Σε άλλες περιπτώσεις, παραλείπονταν τελείως η σύγκριση.

Από το παραπάνω επεισόδιο φαίνεται επίσης ότι η λεκτικοποίηση αυτής της αρχής γίνεται και από κάποια παιδιά (στο παράδειγμα, από τον Νικήτα) από νωρίς.

Στο επόμενο επεισόδιο, ο Άρης λεκτικοποιεί τη διαδικασία *Έμμεσης Ανάλυσης*, μαζί με το ενδιάμεσο βήμα *(ΕΒ),* εκφράζοντας εξαρχής την προϋπόθεση ότι η σύνθεση των κομματιών (ν β) πρέπει να ισούται με τη δεδομένη μπάρα. Το επεισόδιο είναι από την τελευταία συνάντηση της παρέμβασης.

Ε: Αν δώσω στην Τετραπάμ αυτή την μπάρα, μπορείτε να βρείτε ποια μπάρα θα δώσω στην Παμ;

Άρης: Θα την κόψω σε τέσσερα κομμάτια. Θα τα μοιράσω στις μικρές. Και όταν τα ενώσω θα πρέπει να ξαναγίνεται αυτό που μου δίνεις.

Το παιδί επιλέγει το μικρότερο κομμάτι που δεν αντιστοιχεί στο ένα τέταρτο, παίρνει 4 αντίγραφά του, υλοποιεί τη διαδικασία και το απορρίπτει. Επιλέγει το αμέσως μεγαλύτερο, που αντιστοιχεί στο ένα τέταρτο, και επαναλαμβάνει.

Άρης: Αυτό δίνω στην Παμ *[παίρνει ένα από τα κομμάτια και το τοποθετεί μπροστά στην Παμ].*

Ε: Πώς μπορούμε να πούμε αλλιώς το κομμάτι της Παμ;

Άρης: Είναι το ένα τέσσερα μισό. Γιατί χωράει τέσσερα κομμάτια στην μεγάλη. Παίρνω μετά το ένα από τα τέσσερα.

Στο παραπάνω επεισόδιο, μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι ο Άρης περιγράφει ταυτόχρονα δύο αντίστροφες ενέργειες (ανάλυση σε ν ίσα μέρη – σύνθεση από ν ίσα μέρη) που εφαρμόζονται στην αρχική μπάρα. Η ισότητα των κομματιών δεν εκφράζεται ρητά από το παιδί, αλλά πιστοποιείται μέσω της δράσης του (επιλέγει αντίγραφα για κάθε κομμάτι που δοκιμάζει). Επίσης, το παιδί εκφράζει τη σύνθεση μαζί με τη σύγκριση ως μέτρηση (χωρίς επανάληψη της μονάδας). Στο τέλος εκφράζει το β ως μέρος-όλου, αντιστοιχώντας μια «παραμορφωμένη» έκφραση για τον όρο «ένα τέταρτο».

Τα παραπάνω επεισόδια δίνουν ενδείξεις για αυτό που παρατηρήθηκε στη διάρκεια της παρέμβασης: Η διαδικασία *Έμμεσης Ανάλυσης* είναι στο πλαίσιο των δυνατοτήτων των παιδιών και δημιουργεί την ευκαιρία για πραγμάτευση σημαντικών ενεργειών και σχέσεων που διέπουν τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις που μελετάμε.

Η διαδικασία Σύνθεσης με ενδιάμεσο βήμα (Ε.Ε.1) και η λέξη «ομάδα».

Οι μεγαλύτερες δυσκολίες που εμφανίστηκαν στα προβλήματα πολλαπλασίων κατά την παρέμβαση ήταν στις διακριτές ποσότητες. Πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι, στις συνεχείς ποσότητες όπου έπρεπε να επαναληφθεί ένα «κομμάτι», τα παιδιά είχαν να διαχειριστούν ένα στοιχείο, το πλήθος των επαναλήψεων. Στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων, έπρεπε να διαχειριστούν δύο στοιχεία: το πλήθος των επαναλήψεων (πολλαπλασιαστής, ν) και την ποσότητα που αντιστοιχεί στον πολλαπλασιαστέο (β, π.χ. «δύο βιταμίνες»).

Σε κάποιες περιπτώσεις, τα παιδιά αντέστρεψαν τον ρόλο πολλαπλασιαστή/ πολλαπλασιαστέου. Σε άλλες, άλλαξαν την αρχική, δεδομένη ποσότητα β ή έχασαν το πλήθος των επαναλήψεων (ειδικά όταν δεν χρησιμοποίησαν το ενδιάμεσο υποστηρικτικό

βήμα *ΕΒ* της αντιστοίχισης αντιγράφων του β στα αντίγραφα των μονάδων του ν – «παμίνες»).

Στο επεισόδιο που ακολουθεί, η Λόρα εισάγει μια άλλη αριθμητική ποσότητα κατά την επίλυση ενός προβλήματος, αρχικά ως πολλαπλασιαστέο (β) και μετά ως πολλαπλασιαστή (ν). Τα παιδιά έχουν μετρήσει τη Διπάμ με τα αντίγραφα των μονάδων, τα οποία τώρα είναι τοποθετημένα μπροστά στη Διπάμ. Η ερευνήτρια θέτει το πρόβλημα.

> Ε: Και αφού είναι η διπλάσια, φτιάχτηκε όπως είπατε από δύο Παμ, τι δόση θα πρέπει να της δώσουμε; Αν βάλουμε για παράδειγμα δύο βιταμίνες στην Παμ; Λόρα, θα έρθεις να μας βοηθήσεις;
>
> Λόρα: Ναι.
>
> Σωτηρία: Να έρθω και εγώ;
>
> Κώστας: Και εγώ θέλω.
>
> Ε: Ελάτε. Πάμε να δούμε .
>
> Λόρα: Θα βάλω δύο σε αυτή [*δείχνει το πρώτο αντίγραφο της μονάδας]*;
>
> Κώστας: Ναι. Κάθε Παμ από τις μικρές εδώ *[δείχνει τα αντίγραφα της μονάδας]* πρέπει να έχει δύο.
>
> Λόρα: Γιατί να μην βάλουμε τρεις;
>
> Σωτηρία: Πού τις βρήκες τις τρεις;
>
> Κώστας: Δυο θα βάλουμε.
>
> Λόρα: Τρεις φορές;
>
> Σωτηρία: Δύο φορές. Δύο οι Παμ.
>
> Ε: Λόρα, θες να τις φτιάξεις εσύ;
>
> Λόρα: Ναι *[αντιστοιχίζει δύο βιταμίνες στο πρώτο, και άλλες δύο στο δεύτερο αντίγραφο της μονάδας]*.
>
> Κώστας: Την διπλάσια δόση έκανες. Μπράβο.

Στο επόμενο επεισόδιο, η δόση της Παμ είναι 3 βιταμίνες και τα παιδιά λύνουν το πρόβλημα υπολογισμού της δόσης της Τριπάμ.

Ε: Πόσες φορές θα πρέπει να επαναλάβω την δόση της Παμ για να φτιάξω την δόση της Τριπάμ;

Νικήτας: Τρεις φορές.

Το παιδί παίρνει 2 βιταμίνες από το υλικό, τις βάζει μπροστά του και επαναλαμβάνει, φτιάχνοντας μια γραμμή με 6 βιταμίνες.

Η ερευνήτρια αναδιατάσσει την γραμμή του Νικήτα, αντιστοιχίζοντας 2 βιταμίνες σε κάθε αντίγραφο της μονάδας.

Γιάννα: Ναι, θα βάζουμε όσα είναι τα κουκλάκια. Γραμμούλες από βιταμίνες για να φτιάξουμε την δόση της Τριπάμ. Θα λέμε και τρία και τρία και τρία.

Ο Νικήτας μαζεύει τις βιταμίνες και ξαναφτιάχνει τη γραμμή όπως την είχε πριν.

Ε: Για να μη φτιάχνουμε όμως σκουλήκια με τις βιταμίνες, Νικήτα, δεν είναι καλύτερο να κάνουμε αυτό που είπε η Γιάννα; Να φτιάχνουμε ομαδούλες από βιταμίνες;

Στο επεισόδιο αυτό, η ερευνήτρια εισήγαγε τη λέξη «ομάδα» για να αναφερθεί στις «2 βιταμίνες», αναδιατυπώνοντας τα λόγια της Γιάννας. Όπως έχουμε αναφέρει, αυτό δεν είχε ρητά προβλεφθεί στο σχεδιασμό μας. Η ερευνήτρια συνέχισε να αναφέρει τη λέξη «ομάδα» στην παρέμβαση και αυτό φάνηκε να διευκολύνει τα παιδιά. Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, κάποια από τα παιδιά αναφέρονται ρητά σε «ομάδες» στον μεταέλεγχο (διατήρησης).

Έχει ήδη αναφερθεί ότι στον σχεδιασμό του Κύκλου Ι δεν είχε προβλεφθεί υποστήριξη των παιδιών για τη διαχείριση των «πολλών» ως «ένα». Η εισαγωγή της λέξης «ομάδα» έγινε στην πορεία της υλοποίησης και όχι με συστηματικό τρόπο. Οι παρατηρήσεις στο πλαίσιο της παρέμβασης υποδείκνυαν ότι αυτό ήταν ένα σημείο που επιδέχεται βελτίωσης.

Προέλεγχος- Μεταέλεγχος (διατήρησης)

Αρχικά πρέπει να επισημανθεί ότι ένα από τα παιδιά (Ελένη) δεν ήταν πρόθυμο να επιλύσει προβλήματα κατά τον μεταέλεγχο. Δήλωσε ότι ήθελε «μόνο να παίξει με τις Παμ». Στα επόμενα θα αναφερόμαστε στα υπόλοιπα 7 παιδιά. Το όνομα της Ελένης δεν εμφανίζεται στους πίνακες και θα αναφερθούμε στο παιδί αυτό μόνο σχετικά με τον προέλεγχο.

Έργο Π («Ποια παίκτρια είναι;»)

Το έργο Π (παρόμοιο με την παρέμβαση) αναλύθηκε σε 3 υπο-έργα: Π1 (αναγνώριση), Π2 (τεκμηρίωση), Π3 (χρήση όρου και περιγραφή σχέσης). Οι αποκρίσεις των παιδιών στο Π1 (Αναγνώριση) κωδικοποιήθηκαν ως 1 (Ναι) και 0 (Όχι). Για το Π2 εξετάστηκε αν το παιδί τεκμηρίωσε την απάντησή του στο Π1, είτε εφαρμόζοντας μια έγκυρη διαδικασία, είτε εξηγώντας λεκτικά (1:Ναι, 0: Όχι).

Για το Π3 εξετάστηκε αν το παιδί χρησιμοποίησε όρο για το πολλαπλάσιο (ΠΟΛ, 1: Ναι, 0:Όχι) και το υποπολλαπλάσιο (ΥΠΟ, 1: Ναι, 0: Όχι). Επιπλέον εξετάστηκε αν και με ποιο τρόπο περιέγραψαν τη σχέση, είτε ανέφεραν όρο, είτε όχι. Όσον αφορά τα πολλαπλάσια, εντοπίστηκαν τριών ειδών περιγραφές σχέσης:

Στην πρώτη (ΠΣ1) το παιδί περιγράφει προσθετικά τη σχέση, με επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (π.χ. «Η Τριπάμ είναι μία Παμ κι άλλη μία κι άλλη μία»).

Στη δεύτερη (ΠΣ2), το παιδί περιγράφει τη σχέση με αναφορά στη μέτρηση. Ως αναφορά στη μέτρηση θεωρήσαμε εκφράσεις με το «χωράει» (π.χ. «Είναι η Διπαμ γιατί χωράει δύο Παμ») και εκφράσεις του τύπου «Η Τριπάμ είναι τρεις Παμ», τις οποίες εκλάβαμε ως έκφραση αποτελέσματος μέτρησης (Α=νβ).

Τέλος, στην τρίτη (ΠΣ3), το παιδί περιγράφει τη σχέση με αναφορά στην επανάληψη (π.χ. «Είναι τρεις φορές όσο η Παμ»).

Όσον αφορά τα υποπολλαπλάσια, εντοπίστηκαν 3 ειδών περιγραφές σχέσης. Στην πρώτη (ΥΣ1), το παιδί περιγράφει μια σχέση μέρους-όλου της μορφής «ένα από τα ν μέρη» (π.χ. «Είναι το μισό γιατί είναι το ένα από τα δύο κομμάτια της Διπάμ»).

Στη δεύτερη (ΥΣ2), το παιδί περιγράφει τη σχέση με αναφορά στη μέτρηση της «μεγάλης» (Α) από τη «μικρή» (π.χ. «Είναι το ένα τέταρτο, επειδή η Παμ χωράει τέσσερις φορές στην Τετραπάμ») ή με αναφορά στο αποτέλεσμα της μέτρησης (π.χ. «Είναι το μισό, γιατί η μεγάλη είναι δύο Παμ».

Τέλος, στην τρίτη (ΥΣ3), το παιδί περιγράφει τη σχέση με συνδυασμό των δύο προηγούμενων (π.χ. «Η Διπάμ χωράει δύο κομμάτια κι αυτό είναι το ένα από τα δύο»).

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται οι αποκρίσεις κάθε παιδιού, ανά υποέργο (Π1, Π2, Π3) και ανά αριθμητική τιμή του ν (2,3,4).

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2, όλα τα παιδιά αναγνώρισαν τη δεδομένη παίκτρια για όλες τις τιμές του ν, και τεκμηρίωσαν την απάντησή τους. Σημειώνουμε ότι, για την τεκμηρίωση, όλα εφάρμοσαν μέτρηση, χρησιμοποιώντας τα αντίγραφα της μονάδας.

Επιπλέον, όλα τα παιδιά χρησιμοποίησαν τον όρο «ν-πλάσιο» για όλες τις τιμές του ν (2,3,4). Ο τρόπος με τον οποίο περιέγραψαν την αντίστοιχη σχέση διέφερε για τις διαφορετικές τιμές του ν. Για ν=2, 5 παιδιά περιέγραψαν τη σχέση προσθετικά. Η Γιάννα περιέγραψε με μέτρηση ενώ η Πένυ περιέγραψε με επανάληψη, όπως συστηματικά έκανε και για ν=3, 4.

Για ν=3 και ν=4, 5 παιδιά περιέγραψαν τη σχέση με επανάληψη («φορές») και στις δύο περιπτώσεις. Η Σωτηρία έδωσε δύο περιγραφές με μέτρηση (ως αποτέλεσμα). Τέλος, ο Κώστας ήταν το μόνο παιδί που παρέμεινε στην προσθετική περιγραφή, για όλα τα ν.

Όσον αφορά τους όρους για υποπολλαπλάσια, όλα τα παιδιά ανέφεραν είτε τη λέξη «μισό», είτε το «ένα δεύτερο». Πιο συγκεκριμένα, τη λέξη «μισό» χρησιμοποίησαν η Λόρα, ο Κώστας και η Σωτηρία. Η Λόρα ανέφερε τον όρο «ένα τρίτο», αλλά αντί για «ένα τέταρτο» είπε «το ένα μισό της τέσσερα». Ο Κώστας και η Σωτηρία «παραμόρφωσαν» με παρόμοιο τρόπο τους όρους, τόσο για το ένα τέταρτο, όσο και το ένα τρίτο (π.χ. «το τρίτο σου μισό»). Δύο από αυτά τα παιδιά περιέγραψαν και λεκτικά μία από τις σχέσεις που «ονομάτισαν». Η Λόρα το «ένα τρίτο» με μέτρηση και ο Κώστας το «μισό» ως «ένα από τα δύο κομμάτια».

Τα υπόλοιπα 4 παιδιά χρησιμοποίησαν τον όρο «ένα νιοστό» για όλα τα ν. Ο Νικήτας δεν έδωσε καμία λεκτική περιγραφή σχέσης. Η Πένυ περιέγραψε λεκτικά τη σχέση για ν=3,4, με δύο αναφορές στη μέτρηση, τη μία με το «χωράει».

Τέλος, η Γιάννα και ο Άρης χρησιμοποίησαν τον όρο «ένα νιοστό» για ν=2,3,4 και περιέγραψαν τη σχέση συνδυαστικά (ΥΣ3).

Συνοψίζοντας, όλα τα παιδιά αναγνώρισαν τις δεδομένες παίκτριες. Ως προς την τεκμηρίωση τους για τα πολλαπλάσια, όλα χρησιμοποίησαν τον όρο «ν-πλάσιο», ωστόσο διαφοροποιήθηκαν ως προς τον τρόπο περιγραφής της σχέσης, καθώς άλλοτε την προσέγγισαν προσθετικά, άλλοτε μέσω επανάληψης («φορές») και σε ορισμένες περιπτώσεις μέσω μέτρησης. Αντίστοιχα, για τα υποπολλαπλάσια, όλα τα παιδιά χρησιμοποίησαν τους όρους «μισό» ή «ένα δεύτερο». Ωστόσο, παρατηρήθηκαν διαφοροποιήσεις τόσο στην ορολογία όσο και στη λεκτική περιγραφή των σχέσεων, με

ορισμένα παιδιά να χρησιμοποιούν μη συμβατικές ή «παραμορφωμένες» εκφράσεις. Συνολικά, τα παιδιά φαίνεται να έχουν κατακτήσει σε σημαντικό βαθμό την αναγνώριση των πολλαπλασίων και των υποπολλαπλασίων ενώ διαφοροποιήθηκαν ως προς την ορολογία και τους τρόπους με τους οποίους περιέγραψαν λεκτικά τις σχέσεις που εντόπισαν.

Παιδί	ν=2						ν=3						ν=4					
	Π1	Π2	Π3				Π1	Π2	Π3				Π1	Π2	Π3			
			ΠΟΛ		ΥΠΟ				ΠΟΛ		ΥΠΟ				ΠΟΛ		ΥΠΟ	
			Όρος	Σχέση	Όρος	Σχέση			Όρος	Σχέση	Όρος	Σχέση			Όρος	Σχέση	Όρος	Σχέση
Άρης	1	1	1	$ΠΣ_1$	1	$ΥΣ_3$	1	1	1	$ΠΣ_3$	1	$ΥΣ_3$	1	1	1	$ΠΣ_3$	1	$ΥΣ_3$
Γιάννα	1	1	1	$ΠΣ_2$	1	$ΥΣ_3$	1	1	1	$ΠΣ_3$	1	$ΥΣ_3$	1	1	1	$ΠΣ_3$	1	$ΥΣ_3$
Κώστας	1	1	1	$ΠΣ_1$	1	$ΥΣ_1$	1	1	1	$ΠΣ_1$	0	-	1	1	1	$ΠΣ_1$	0	-
Λόρα	1	1	1	$ΠΣ_1$	1	-	1	1	1	$ΠΣ_3$	1	$ΥΣ_2$	1	1	1	$ΠΣ_3$	0	-
Νικήτας	1	1	1	$ΠΣ_1$	1	-	1	1	1	$ΠΣ_3$	1	-	1	1	1	$ΠΣ_3$	1	-
Πένυ	1	1	1	$ΠΣ_3$	1	-	1	1	1	$ΠΣ_3$	1	$ΥΣ_2$	1	1	1	$ΠΣ_3$	1	$ΥΣ_2$
Σωτηρία	1	1	1	$ΠΣ_1$	1	-	1	1	1	$ΠΣ_2$	0	-	1	1	1	$ΠΣ_2$	0	-
Σύνολο	7	7	7		7		7	7	7		5		7	7	7		4	

Σημείωση.

Π1: Αναγνώριση/ Π2: Τεκμηρίωση/ Π3: Χρήση όρου / περιγραφή σχέσης

$ΠΣ_1$: Προσθετική	$ΥΣ_1$: Μέρος-όλου
$ΠΣ_2$: Μέτρηση	$ΥΣ_2$: Μέτρηση
$ΠΣ_3$: Επανάληψη	$ΥΣ_3$: Συνδυασμός των $ΥΣ_1$,$ΥΣ_2$

Πίνακας 2: Αποκρίσεις στο έργο Π («Ποια παίκτρια είναι;») ανά παιδί, ανά υποέργο και ανά αριθμητική τιμή του ν (2,3, 4)

Προβλήματα των κατηγοριών Α και Β (διαφορετικά από την παρέμβαση)

Επιδόσεις

Οι απαντήσεις των παιδιών που συμμετείχαν στη διαδικασία του προελέγχου και του μεταελέγχου (διατήρησης) ταξινομήθηκαν αρχικά σε σωστές (1) και λανθασμένες (0). Αν το παιδί δεν απάντησε (π.χ. «δεν ξέρω»), βαθμολογήθηκε με 0.

Στον Πίνακα 3 οργανώνονται τα αποτελέσματα του προελέγχου και του μεταελέγχου, ανά παιδί, για κάθε ζητούμενο (Α ή β) ξεχωριστά, ανά είδος ποσότητας (διακριτή/συνεχής) και ανά τιμή του ν. Το ζητούμενο ν (προβλήματα διαίρεσης μέτρησης) απουσιάζει, γιατί δεν υπήρξε σωστή απάντηση ούτε στον προέλεγχο, ούτε στον μεταέλεγχο. Υπενθυμίζεται ότι, σύμφωνα με τη διαδικασίας επίδοση των προβλημάτων, δεν έχουν πάρει όλα τα παιδιά όλα τα προβλήματα. Χρησιμοποιούμε χρωματικούς κωδικούς για την πληροφορία ποια προβλήματα πήρε το κάθε παιδί, σε ποια απάντησε σωστά στον μεταέλεγχο και σε ποια είχε απαντήσει σωστά ήδη από τον προέλεγχο. Πιο συγκεκριμένα το μαύρο χρώμα σημαίνει ότι το παιδί δεν έλαβε το αντίστοιχο πρόβλημα. Το ανοιχτό γκρι χρώμα σημαίνει ότι το παιδί απάντησε λανθασμένα, ή δεν απάντησε καθόλου. Το ανοιχτό γαλάζιο χρώμα σημαίνει ότι το παιδί απάντησε σωστά μόνο στον μεταέλεγχο. Το σκούρο μπλε χρώμα σημαίνει ότι απάντησε σωστά και στους δύο ελέγχους. Οι βαθμοί 0 και 1 και τα αντίστοιχα σύνολα αντιστοιχούν στις απαντήσεις του μεταελέγχου.

Από τα στοιχεία του Πίνακα 3, φαίνεται ότι σωστές απαντήσεις υπάρχουν ήδη από τον προέλεγχο, αλλά μόνο στην περίπτωση του ζητούμενου β και σχεδόν αποκλειστικά για ν=2. Στον προέλεγχο, πιο πολλές σωστές απαντήσεις εμφανίζονται στις συνεχείς ποσότητες (υπενθυμίζεται, ωστόσο, ότι στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων, υπήρχαν εναλλακτικές από τις οποίες μπορούσαν να επιλέξουν τα παιδιά).

Στις διακριτές ποσότητες, στον προέλεγχο, δύο παιδιά (Άρης, Γιάννα) έλυσαν τα προβλήματα και των δύο τύπων (Α και Β) για ν=2. Η Γιάννα ήταν το μόνο παιδί που έλυσε το πρόβλημα διαίρεσης μερισμού για ν=3. Σημειώνουμε ότι η Ελένη, το παιδί που δεν δέχτηκε να λύσει προβλήματα στον μεταέλεγχο, στον προέλεγχο έλυσε το πρόβλημα διαίρεσης μερισμού στις διακριτές, και ένα πρόβλημα με αναγνώριση όρου («μισό») στις συνεχείς, για ν=2.

Στον μεταέλεγχο, υπάρχει αύξηση των σωστών απαντήσεων, με τα εξής χαρακτηριστικά: Περισσότερα παιδιά δίνουν σωστές απαντήσεις για το ζητούμενο β για ν=2, και στη διακριτή συνθήκη. Επιπλέον, εμφανίζονται σωστές απαντήσεις και στην περίπτωση του ζητούμενου Α (πολλαπλάσιο), κατά κύριο λόγο για ν=2. Στον μεταέλεγχο, από τα στοιχεία του Πίνακα 3 προκύπτει ότι για το ζητούμενο Α δόθηκαν 13 (αντ. 11) σωστές απαντήσεις στις διακριτές (αντ. συνεχείς) ποσότητες. Για το ζητούμενο β, δόθηκαν 14 (αντ. 16) σωστές απαντήσεις στις διακριτές (αντ. συνεχείς) ποσότητες. Συνολικά, περισσότερες σωστές απαντήσεις δόθηκαν για το ζητούμενο β.

Από τον Πίνακα 3 φαίνεται, ακόμη, ότι υπάρχουν διαφορές μεταξύ των παιδιών στον προέλεγχο. Ο Άρης και η Γιάννα είχαν εξαρχής προβάδισμα, το οποίο διατήρησαν στον μεταέλεγχο, με 13 και 10 σωστές απαντήσεις συνολικά, αντίστοιχα. Είναι τα μόνα παιδιά που έδωσαν σωστές απαντήσεις και για διακριτές ποσότητες και ν=3, ήδη από τον προέλεγχο. Από την άλλη μεριά, ο Κώστας και ο Νικήτας ήταν τα μόνα παιδιά που δεν έδωσαν καμία σωστή απάντηση στον προέλεγχο. Ο Κώστας ήταν το παιδί με τις λιγότερες σωστές απαντήσεις και στον μεταέλεγχο (συνολικά, 3), ακολουθούμενος από τη Λόρα (5). Τα υπόλοιπα τρία παιδιά στον μεταέλεγχο έδωσαν 7-8 σωστές απαντήσεις, με τον Νικήτα να δίνει 8.

Ζητούμενο το Α (πολλαπλάσιο)													
	Α: Ισοπληθείς Ομάδες /Ισα Μέτρα						Β: Με αναγνώριση όρου						
	Διακριτές			Συνεχείς			Διακριτές			Συνεχείς			
Παιδί	v=2	v=3	v=4	v=2	v=3	v=4	v=2	v=3	v=4	v=2	v=3	v=4	Σύνολο
Άρης	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	6
Γιάννα	1	0		1	0		1	0		1	0		4
Κώστας	1	0		0	0		0	0		0	0		1
Λόρα	1	0		1	0		0	0		0	0		2
Νικήτας	1	0		1	0		1	0		1	0		4
Πένυ	1	0		1	0		1	0		1	0		4
Σωτηρία	1	0		1	0		1	0		0	0		3
Σύνολο	7	1	0	6	1	0	5	0	0	4	0	0	24

Ζητούμενο το β (Υποπολλαπλάσιο)													
	Α: Ισοπληθείς Ομάδες /Ισα Μέτρα						Β: Με αναγνώριση όρου						
	Διακριτές			Συνεχείς			Διακριτές			Συνεχείς			
Παιδί	v=2	v=3	v=4	v=2	v=3	v=4	v=2	v=3	v=4	v=2	v=3	v=4	Σύνολο
Άρης	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	7
Γιάννα	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	6
Κώστας	1	0		1	0		0	0		0	0		2
Λόρα	1	0		1	0		0	0		1	0		3
Νικήτας	1	0		1	0		1	0		1	0		4
Πένυ	1	0		1	0		1	0		1	0		4
Σωτηρία	1	0		1	0		1	0		1	0		4
Σύνολο	7	2	0	7	2	0	5	0	0	6	1	0	31

Σημείωση:

Μαύρο χρώμα: Το παιδί δεν πήρε το έργο / Γκρι χρώμα: Το παιδί δεν απάντησε, ή απάντησε λανθασμένα

Γαλάζιο ανοιχτό χρώμα: Το παιδί απάντησε σωστά μόνο στον μεταέλεγχο/ Μπλε χρώμα: Το παιδί απάντησε σωστά στον προέλεγχο και τον μεταέλεγχο.

Πίνακας 3: Σωστές (1) και μη (0) αποκρίσεις ανά παιδί, για κάθε ζητούμενο (Α ή Β) ξεχωριστά, ανά τύπο προβλήματος (Α / Β), ανά είδος ποσότητας (διακριτή/συνεχής) και ανά αριθμητική τιμή του ν (2, 3, 4), στον μεταέλεγχο (διατήρησης).

Διαδικασίες/Στρατηγικές

Στον προέλεγχο, τα 5 παιδιά που επέλεξαν σωστά το «μισό» στη συνεχή συνθήκη φαίνεται να το έκαναν κατ' εκτίμηση. Όλα, τουλάχιστον μια φορά, εκτίμησαν το μέσο της ποσότητας τοποθετώντας το χέρι τους πάνω στη λωρίδα που αντιστοιχούσε στη δοθείσα συνεχή ποσότητα. Ωστόσο, δεν είναι δυνατόν να αποκλειστεί η περίπτωση να επέλεξαν στην τύχη. Οι λεκτικές εξηγήσεις τους ήταν στοιχειώδεις, με έμφαση στο πλήθος των κομματιών (π.χ. «Είναι δύο τα παιδάκια»), ή αναφορά στα ίσα μερίδια στο πρόβλημα της διαίρεσης μερισμού (π.χ., «πρέπει να πάρουν το ίδιο»), χωρίς να τεκμηριώνουν την ισότητα. Ο Άρης και η Γιάννα, ήδη στον προέλεγχο, εφάρμοσαν την επαναλαμβανόμενη 1-1 αντιστοίχιση, με την οποία και έλυσαν το πρόβλημα της δίκαιης μοιρασιάς για ν=3.

Στον μεταέλεγχο, για το ζητούμενο β, στις διακριτές ποσότητες η επαναλαμβανόμενη 1-1 αντιστοίχιση συνυπήρξε με άλλες στρατηγικές. Στο Πλαίσιο 1, η Πένυ εφαρμόζει διαδικασία 1-1 αντιστοίχισης, ενώ η Σωτηρία εφαρμόζει μια παραλλαγή της, πραγματοποιώντας 2-1 αντιστοίχιση. Η παραλλαγή αυτή είχε εμφανιστεί στην παρέμβαση, ως στρατηγική συντόμευσης της διαδικασίας της 1-1 αντιστοίχισης. Για ν=4, τα παιδιά διαμοίραζαν την υπόλοιπη ποσότητα με τον ίδιο τρόπο, ενώ για ν=3, διαμοίραζαν 1-1 τα υπόλοιπα αντικείμενα. Με τα δεδομένα του συγκεκριμένου προβλήματος, η Σωτηρία ολοκληρώνει σε έναν γύρο τη διαδικασία.

Έργο Α1.1 (αναλογικά προβλήματα, διαίρεση μερισμού, Α=6, ν=2).

Η Πένυ παίρνει καραμέλες στα χέρια της. Αντιστοιχίζει μία καραμέλα στον πρώτο παραλήπτη λέγοντας «μία στο ένα». Αντιστοιχίζει μία καραμέλα στον δεύτερο παραλήπτη λέγοντας «μία στο άλλο». Συνεχίζει μέχρι να τελειώσουν οι καραμέλες. Λέει: «Τρεις καραμέλες». Η ερευνήτρια ρωτά: «Πώς είσαι σίγουρη ότι βρήκες το σωστό;». Η Πένυ απαντά: «Το ίδιο έχουν τα παιδάκια».

Η Σωτηρία λέει: «Θα μοιράσω με τις δύο». Πραγματοποιεί την 2 προς 1 αντιστοίχιση σιωπηλά και εξαντλεί την αρχική της ποσότητα με 1 προς 1 αντιστοίχιση. Στο τέλος, λέει «Τρεις καραμέλες η Ελένη». Η ερευνήτρια ρωτά: «Πώς είσαι σίγουρη ότι βρήκες το σωστό;». Η Σωτηρία δείχνει διαδοχικά τις καραμέλες μπροστά σε κάθε παραλήπτη και λέει «Τρεις και τρεις».

Πλαίσιο παραδείγματος 1: Παραδείγματα 1-1 και 2-1 αντιστοίχισης

Επιπλέον, στον μεταέλεγχο εμφανίστηκαν στρατηγικές διαχωρισμού σε ομάδες. Στο Πλαίσιο 2, ο Άρης και ο Νικήτας εφαρμόζουν τέτοιες στρατηγικές και αναφέρονται σε «ομάδες», ο Άρης ρητά, ενώ ο Νικήτας έμμεσα.

Έργο Α1.1 (αναλογικό πρόβλημα, διαίρεση μερισμού, Α=6, ν=2).
Ο Άρης λέει, «Να φτιάξω δυο ομάδες». Τοποθετεί το χέρι του περίπου στο μέσο της γραμμής των 6 καραμελών. Λέει: «Τρεις θα πάρει η Ελένη».
Η ερευνήτρια ρωτά: «Πώς είσαι σίγουρος ότι βρήκες το σωστό;».
Ο Άρης λέει: «Δες, υπάρχουν δύο ομάδες πάνω στο τραπέζι και η Ελένη θα πάρει τη μία και την άλλη η αδερφή της».
Έργο Β 1.1 (αναγνώριση του όρου «ένα δεύτερο» και κατασκευή της αντίστοιχης ποσότητας, Α=4, ν=2)
Ο Νικήτας τοποθετεί τον αντίχειρα και τον δείκτη πάνω στις δύο πρώτες καραμέλες και τις μετακινεί ώστε να έρθουν πιο κοντά. Λέει: «Δύο είναι το ένα δεύτερο». Η ερευνήτρια ρωτά: «Πώς είσαι σίγουρος ότι βρήκες το σωστό;». Ο Νικήτας λέει: «Έκανα δύο και έδωσα τη μία».

Πλαίσιο παραδείγματος 2: Παραδείγματα διαχωρισμού διακριτών ποσοτήτων σε ομάδες

Τη λέξη «ομάδα» ανέφερε ρητά ακόμη ένα παιδί, η Γιάννα. Το παιδί αυτό εφάρμοσε επαναλαμβανόμενη 1-1 αντιστοίχιση για να επιλύσει τα προβλήματα Α1.1 και Β1.1. Όταν της ζητήθηκε να εξηγήσει, η Γιάννα είπε για το Α1.1. (αντ. Β1.1): «Οι έξι είναι δυο ομάδες από τρεις. Η Ελένη θα πάρει τη μία από τις δύο ομάδες που έκανα» (αντ. «Τις μισές δίνω. Τη μία από τις δύο ομάδες που έκανα»).

Η *Έμμεση Ανάλυση* ως διαδικασία για την εύρεση του υποπολλαπλάσιου εφαρμόστηκε τουλάχιστον μία φορά από όλα τα παιδιά στον μεταέλεγχο. Με την εξαίρεση του Άρη και της Γιάννας, όλες οι εφαρμογές ήταν για την εύρεση του «μισού». Στο Πλαίσιο 3 παρουσιάζονται δύο παραδείγματα εφαρμογής της διαδικασίας, από τη Λόρα και τον Κώστα για το πρόβλημα Α1.1 (διαίρεση μερισμού):

Λόρα

Η Λόρα επιλέγει το κομμάτι με το μικρότερο μήκος από τις διαθέσιμες επιλογές. Παίρνει και ένα αντίγραφο της επιλογής της. Τα τοποθετεί κατάλληλα ένα-ένα κατά μήκος του Α. Το συνολικό τους μήκος είναι μικρότερο από αυτό του Α. Η Λόρα επαναλαμβάνει, επιλέγοντας το αμέσως μεγαλύτερο κομμάτι. Το συνολικό μήκος της ένωσης των κομματιών ισούται με αυτό του Α. Η Λόρα λέει: «Θα δώσω αυτό στο ένα παιδάκι» *(αντιστοιχίζει το ένα κομμάτι στον πρώτο παραλήπτη),* «και αυτό στο άλλο» *αντιστοιχίζει το άλλο κομμάτι στον δεύτερο παραλήπτη)*.

Η ερευνήτρια ρωτά: «Πώς είσαι σίγουρη ότι έδωσες το σωστό κομμάτι;»

Η Λόρα απαντά: «Έκοψα τη σοκολάτα δύο κομμάτια».

Κώστας

Ο Κώστας λέει: «Σε δύο κομμάτια θα την κόψω τη σοκολάτα». Κοιτάζει τις επιλογές και λέει: «Αυτό νομίζω ότι είναι», παίρνοντας στο χέρι του το σωστό κομμάτι, και ένα αντίγραφό του. Συνεχίζει λέγοντας «θα δώσω έναν σε αυτόν» *(αντιστοιχίζει ένα κομμάτι στον πρώτο παραλήπτη*), «και ένα σε αυτόν» *(αντιστοιχίζει το δεύτερο κομμάτι στον δεύτερο παραλήπτη).*

Η ερευνήτρια ρωτά: «Πώς το ξέρεις ότι έδωσες το σωστό κομμάτι;».

Ο Κώστας παίρνει τα δύο κομμάτια πάλι στα χέρια του, τα τοποθετεί κατά μήκος του Α και λέει: «Κοίτα, κάνουν αυτήν. Αυτό το κομμάτι θα δώσω».

Πλαίσιο παραδείγματος 3: Παραδείγματα εφαρμογής της διαδικασίας της Έμμεσης Ανάλυση

Από τα παραπάνω παραδείγματα φαίνεται ότι για τα δύο αυτά παιδιά, που ήταν αυτά με τη χαμηλότερη επίδοση στον μεταέλεγχο, η χρήση της διαδικασίας της *Έμμεσης Ανάλυσης* έδωσε έναν τρόπο τεκμηρίωσης για την επιλογή τους. Η Λόρα χρησιμοποίησε τη διαδικασία αυθόρμητα εκ των προτέρων, για να εξασφαλίσει ότι η επιλογή της είναι σωστή. Λεκτικά, δεν εξέφρασε ποια είναι η «αρχή» που ελέγχει κατά την εφαρμογή της. Ο Κώστας εφάρμοσε αυτή τη διαδικασία εκ των υστέρων, για να πείσει την ερευνήτρια ότι έχει βρει το σωστό κομμάτι και εξέφρασε λεκτικά την αρχή που έπρεπε να τηρείται, με αδρό τρόπο. Μπορεί κανείς να παρατηρήσει, επιπλέον, ότι τα παιδιά δεν χρησιμοποιούν το *ΕΒ* (ενδιάμεσο υποστηρικτικό βήμα) της αντιστοίχισης των «κομματιών» στις «παμίνες». Για τον Κώστα, αυτό ήταν το μοναδικό πρόβλημα με ζητούμενο β που έλυσε σωστά στις συνεχείς ποσότητες.

Στο αντίστοιχο πρόβλημα τύπου Β (με αναγνώριση όρου), δεν απάντησε, λέγοντας «δεν ξέρω».

Τα υπόλοιπα παιδιά αναγνωρίζουν τον όρο «ένα δεύτερο» και απαντούν στο αντίστοιχο πρόβλημα τύπου Β (Πίνακας 3). Για ν=3, όμως, δίνουν σωστή απάντηση μόνο ο Άρης και η Γιάννα. Μπορεί να εικάσει κανείς ότι υπήρξαν παιδιά που δεν αναγνώρισαν τον όρο «ένα τρίτο» ή τον ερμήνευσαν λανθασμένα. Και πράγματι, αυτό ισχύει.

Από μόνο του, όμως, ένα πρόβλημα με την ορολογία, δεν μπορεί να εξηγήσει τη διαφορά για ν=2 και ν=3 στα αντίστοιχα προβλήματα τύπου Α, που δεν προαπαιτούν την αναγνώριση των όρων (Πίνακας 3). Για παράδειγμα, γιατί η Λόρα, που εφαρμόζει την *Έμμεση Ανάλυση*, για ν=2 (Πλαίσιο 3) στη «δίκαιη μοιρασιά», αποτυγχάνει στον ίδιο τύπο προβλήματος για ν=3 (Πίνακας 3); Μας ενδιέφερε να δούμε αν η Λόρα και τα άλλα παιδιά εφαρμόζουν τη διαδικασία λανθασμένα, ή δεν την εφαρμόζουν καθόλου.

Εξετάσαμε τι συμβαίνει με τα παιδιά που χρησιμοποιούν μια έγκυρη διαδικασία για κάποια τιμή του ν, στις διακριτές και στις συνεχείς ποσότητες, όταν δεν δίνουν σωστή απάντηση για μεγαλύτερη τιμή του ν, στα προβλήματα τύπου Α (δίκαιη μοιρασιά) και ξεχωριστά στα προβλήματα τύπου Β. Με την εξαίρεση του Κώστα, που έδωσε λανθασμένες απαντήσεις και για ν=2, τα υπόλοιπα παιδιά αρχίζουν να δίνουν λανθασμένες απαντήσεις για ν=3 (Πίνακας 3).

Διαπιστώσαμε ότι, για τα υποπολλαπλάσια στις λανθασμένες απαντήσεις τους, τα παιδιά δεν αποπειράθηκαν να εφαρμόσουν κάποια διαδικασία ή στρατηγική που εφάρμοσαν για μικρότερη τιμή του ν, τόσο στις διακριτές, όσο και στις συνεχείς ποσότητες, και για τα δύο είδη προβλημάτων (τύποι Α και Β). Τα παιδιά έκαναν ένα από τα ακόλουθα:

α) Δεν έδωσαν απάντηση, είτε λέγοντας ρητά «δεν ξέρω», είτε όχι. Ο Κώστας και η Σωτηρία ήταν τα μόνα παιδιά που άφησαν αναπάντητα περισσότερα από ένα προβλήματα και, συγκεκριμένα, 3 προβλήματα το κάθε παιδί.

β) Επέλεξαν «μικρότερο κομμάτι» από το δεδομένο Α (συνεχείς ποσότητες). Τα παιδιά επέλεξαν ένα μικρότερο κομμάτι, συνήθως το μικρότερο ανάμεσα στις διαθέσιμες επιλογές. Πλην του Άρη, για ν=3 όλα τα παιδιά, κάνουν τέτοια επιλογή και την εξηγούν λεκτικά τουλάχιστον μια φορά , με αναφορά στη «μικρή ποσότητα» που αντιστοιχεί στο μερίδιο (Α)

ή στο «ένα τρίτο» (Β). Για παράδειγμα, «είναι λίγο το ένα τρίτο» (Γιάννα), «πρέπει να φάει λίγο» (Πένυ), «αυτό το κουκλάκι θα πάρει πιο μικρό κομμάτι, γιατί δεν κάνει να φάει πολλή σοκολάτα» (Νικήτας). Για ν=4, η Γιάννα έκανε την ίδια επιλογή, ενώ ο Άρης δεν απάντησε καθόλου.

γ) Έδωσαν «λιγότερα» από το Α (διακριτές ποσότητες). Πρόκειται για το αντίστοιχο με το παραπάνω λάθος, με τη διαφορά ότι στο πρόβλημα τύπο Β (με αναγνώριση όρου) παρατηρήθηκε το εξής: Τα τρία παιδιά που απάντησαν στο πρόβλημα έδωσαν είτε 1 καραμέλα (Άρης), είτε 3 καραμέλες (Γιάννα, Σωτηρία). Ο Άρης δικαιολόγησε την επιλογή του λέγοντας «Είπες θες το *ένα* τρίτο», τονίζοντας τη λέξη «ένα». Η Σωτηρία τόνισε τη λέξη «τρίτο», λέγοντας «Αυτές είναι το ένα *τρίτο*». Τέλος, η Γιάννα τόνισε τις λέξεις «τρίτο» και «τρεις», λέγοντας «Είναι το ένα *τρίτο, τρεις».* Στην περίπτωση αυτή, φαίνεται τα παιδιά να βασίζονται σε μια παρερμηνεία του όρου «ένα τρίτο».

Όσον αφορά τα πολλαπλάσια, στις σωστές απαντήσεις του μεταελέγχου εφαρμόστηκε κατά κύριο λόγο η *Σύνθεση*, με ή χωρίς *ΕΒ* (Ενδιάμεσο υποστηρικτικό Βήμα), τόσο στις συνεχείς, όσο και στις διακριτές ποσότητες. Ο Άρης για β=2,3 υπολόγισε το διπλάσιο νοερά, με πρόσθεση. Στο Πλαίσιο 4 παρουσιάζεται ένα τέτοιο παράδειγμα:

<u>Έργο Β1.2 (αναγνώριση όρου «διπλάσιο» και κατασκευής της αντίστοιχης ποσότητας, β=3, ν=2).</u> Ο Άρης κοιτάζει για λίγο τις 3 καραμέλες στο τραπέζι. Μετά λέει: «Είναι τρεις και τρεις. Έξι είναι οι διπλάσιες».

Πλαίσιο παραδείγματος 4: Υπολογισμός του διπλάσιου με πρόσθεση

Παρόμοια με την περίπτωση του υποπολλαπλάσιου, στα πολλαπλάσια, η σωστή εφαρμογή της διαδικασίας *Σύνθεσης με ή χωρίς ΕΒ* για ν=2 δεν εξασφάλιζε ότι θα χρησιμοποιηθεί για μεγαλύτερα ν. Ο Κώστας, ξανά, ήταν το μόνο παιδί που έδωσε λανθασμένες απαντήσεις για ν=2, όπου έλυσε σωστά μόνο ένα πρόβλημα (Πίνακας 3), ενώ δεν απάντησε σε κανέναν από τα προβλήματα για ν=3. Τα υπόλοιπα παιδιά έλυσαν όλα τα προβλήματα για ν=2, αλλά μόνο ο Άρης έλυσε προβλήματα για ν=3 (Πίνακας 3).

Για ν=3, στις λανθασμένες απαντήσεις, κανένα παιδί δεν εφάρμοσε κάποια διαδικασία ή στρατηγική. Τα παιδιά έκαναν ένα από τα ακόλουθα:

α) Δεν έδωσαν απάντηση, είτε λέγοντας ρητά «δεν ξέρω», είτε όχι. Στα 4 αντίστοιχα προβλήματα, ο Κώστας δεν απάντησε κανένα, η Σωτηρία απάντησε 1, από 2 η Λόρα και η Γιάννα, και 3 η Πένυ.

β) Επέλεξαν «μεγαλύτερο κομμάτι» από το β (συνεχείς ποσότητες). Η Γιάννα, ο Νικήτας και η Λόρα έκαναν από τουλάχιστον μία τέτοια επιλογή, με τα δύο πρώτα παιδιά να την εξηγούν και λεκτικά: «Τριπλάσιο είναι μεγάλο» (Γιάννα), «Πρέπει να είναι μεγάλο» (Νικήτας).

γ) Έδωσαν «περισσότερα» από το δεδομένο β (διακριτές ποσότητες). Όλα τα παιδιά έκαναν τουλάχιστον μία τέτοια επιλογή, συμπεριλαμβανομένου και του Άρη. Η Γιάννα, ο Νικήτας και η Σωτηρία έδωσαν και τις 10 διαθέσιμες καραμέλες, γιατί «είναι πολλές» (Γιάννα) ή «πρέπει να είναι όλες» (Νικήτας).

δ) Έδωσαν «τρία» (διακριτές ποσότητες). Η Πένυ και η Λόρα έδωσαν τρεις καραμέλες λέγοντας «Οι τριπλάσιες είναι τρεις» και «Να οι τριπλάσιες – τρεις είπες», αντίστοιχα. Σε αυτήν την περίπτωση, τα δυο κορίτσια φαίνεται να βασίζονται σε λανθασμένη ερμηνεία του όρου «τριπλάσιο».

Ο Άρης είναι το μόνο παιδί που πήρε τα προβλήματα για ν=4. Επέλεξε δύο φορές το «μεγαλύτερο κομμάτι», και έδωσε όλες τις διαθέσιμες καραμέλες στο πρόβλημα του πολλαπλασιασμού. Στο Πλαίσιο 5 παρουσιάζεται ο τρόπος που το παιδί υπολόγισε το τετραπλάσιο των 2 καραμελών:

Πρόβλημα Β.2.6 (αναγνώριση όρου «τετραπλάσιο» και κατασκευής της αντίστοιχης ποσότητας, β=2, ν=4).

Ο Άρης επαναλαμβάνει, «Τετραπλάσιο» και φαίνεται να σκέφτεται για λίγο. Μετά, φτιάχνει μια γραμμή από 4 καραμέλες. Τη συνεχίζει με άλλες 4 καραμέλες. Σταματάει για λίγο και τοποθετεί άλλη μία καραμέλα στη γραμμή. Εξηγεί: «Τετραπλάσιο. Δηλαδή, τέσσερα και τέσσερα και ένα ακόμη».

Πλαίσιο παραδείγματος 5: Υπολογισμός του τετραπλάσιου των «δύο» από τον Άρη

Ο Άρης είχε εφαρμόσει μια στρατηγική βασισμένη στην πρόσθεση για τον υπολογισμό του διπλάσιου (βλ. Πλαίσιο 5), για μικρότερες τιμές του ν, νοερά. Εδώ, η στρατηγική είναι παρόμοια, αλλά το παιδί δεν την εφαρμόζει νοερά. Καταρχάς, το παιδί αντικαθιστά τον πολλαπλασιαστέο (2 καραμέλες) με τον πολλαπλασιαστή (4), πιθανόν εξαιτίας της λέξης

«τετραπλάσιο». Ξεκινά μια διαδικασία επανάληψης των «τεσσάρων». Δεν είναι σαφές αν, ξεκινώντας τη διαδικασία επανάληψης, το παιδί έχει στο μυαλό του έναν αρχικό πολλαπλασιαστή και ποιος είναι αυτός. Μετά τη δεύτερη επανάληψη, προσθέτει 1 καραμέλα. Αυτό θα μπορούσε να ερμηνευθεί ως πιθανή σύγχυση μεταξύ του «1 φορά ακόμα» και «1 καραμέλα ακόμα», ή μπορεί να αντανακλά τον περιορισμό που έθεσε στο παιδί το γεγονός ότι είχε στη διάθεσή του μόνο 10 καραμέλες.

Σχέσεις/Όροι

Όπως είδαμε παραπάνω, στις λανθασμένες απαντήσεις των παιδιών αποκαλύπτονται παρερμηνείες των όρων «ν-πλάσιο» και «ένα νιοστό». Ωστόσο, στον μεταέλεγχο υπήρξε και σωστή χρήση των όρων. Εξετάσαμε το σύνολο της λεκτικής παραγωγής του κάθε παιδιού ανά πρόβλημα (δηλαδή, τόσο κατά τη διάρκεια της επίλυσης, όσο και μετά τις ερωτήσεις της ερευνήτριας) για τη σωστή χρήση όρων. Όλα τα παιδιά, εκτός από τη Λόρα, χρησιμοποίησαν σωστά τον όρο «διπλάσιο», από 1 ή 3 φορές (Άρης, Γιάννα)». Σημειώνεται ότι ο Κώστας ανέφερε τον όρο ως «διπλό».

Για το υποπολλαπλάσιο, αναφέρθηκε το «μισό» και «παραμορφώσεις» του όρου «ένα δεύτερο» (π.χ. «το μισό του δεύτερου») από όλα τα παιδιά, τουλάχιστον δύο φορές ανά παιδί. Ο Άρης και η Γιάννα ήταν τα μόνα παιδιά που χρησιμοποίησαν από μία φορά σωστά τον όρο «ένα δεύτερο». Ο Άρης, στο πλαίσιο του ίδιου προβλήματος, αναφέρθηκε και στο ένα τρίτο με δύο τρόπους: ως «ένα τρίτο» και ως «το μισό τρία».

Πέρα από τη χρήση των όρων, εξετάσαμε τις σωστές απαντήσεις των παιδιών στην στοχευμένη ερώτηση της ερευνήτριας για τη σχέση των δύο ποσοτήτων (Α και β). Συγκεκριμένα, εξετάσαμε αν και πώς περιέγραψαν τα παιδιά α) το ζητούμενο Α, σε σχέση με το δεδομένο β και β) Το ζητούμενο β, σε σχέση με το δεδομένο Α, στα αντίστοιχα προβλήματα, ανεξάρτητα από το αν χρησιμοποίησαν τους αντίστοιχους όρους. Διαπιστώσαμε ότι τα παιδιά συχνά απεικόνιζαν λεκτικά τον τρόπο που είχαν επιλύσει το πρόβλημα, κάποιες φορές επαναλαμβάνοντας την περιγραφή που είχαν ήδη δώσει, είτε κατά την επίλυση, είτε εξηγώντας την απάντησή τους (π.χ. «έκοψα δύο και έδωσα ένα», «ένωσα δύο κομματάκια και έφτιαξα τη μεγάλη», «έβαλα το μικρό και άλλο ένα μικρό»). Σε κάποιες περιπτώσεις, περιέγραφαν επιπλέον, ή μόνο, σχέσεις με ένα πιο δομικό τρόπο (π.χ. «είναι το ένα από τα δύο μικρά», «είναι δυο φορές το κομμάτι σου», «οι καραμέλες είναι

τρεις και τρεις», «η μεγάλη έχει δύο μικρά»). Διαχωρίσαμε μεταξύ των σχέσεων που περιγράφονται ως μια διαδικασία και των σχέσεων που περιγράφονται με ένα πιο δομικό τρόπο και εστιάσαμε στο δεύτερο. Αναζητήσαμε στα λόγια των παιδιών σχέσεις που περιγράφονται με χρήση ρημάτων όπως «είναι», «έχει». Ιδανικά, σε μια τέτοιου είδους σχέση θα πρέπει να αναφέρονται και οι δύο ποσότητες (π.χ. «Η μεγάλη σοκολάτα είναι δυο φορές το μικρό κομμάτι»), αλλά δεχτήκαμε και ελλειπτικές διατυπώσεις, στις οποίες μία από τις ποσότητες υπονοείται (π.χ. «Είναι δυο φορές το μικρό κομμάτι»), αλλά και χωρίς το ρήμα («π.χ. «δυο φορές αυτό το κομμάτι»), καθώς τα παιδιά απαντούν σε μια πλήρως διατυπωμένη ερώτηση. Προέκυψαν τρεις κατηγορίες λεκτικής περιγραφής σχέσης για το Α, και μία για το β (για τη μέθοδο και τη διαδικασία ανάλυσης, βλ. § 2.3). Πιο συγκεκριμένα:

Το ζητούμενο Α, σε σχέση με το δεδομένο β, περιγράφτηκε με τρεις τρόπους από τα παιδιά:

Α) Ως άθροισμα β+β (+β). Στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων, η σχέση αυτή εκφράζεται μέσω της πρόσθεσης αριθμών. Για παράδειγμα:

> Οι διπλάσιες. Είναι τρεις και τρεις. (Άρης, Β.2.2)

Στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων, η σχέση αυτή εκφράζεται μέσω της λεκτικής πρόσθεσης «κομματιών» (με χρήση του συνδέσμου «και»). Για παράδειγμα:

> Αυτή (*δείχνει τη σοκολάτα*) έχει ένα (*δείχνει το ένα κομμάτι*) και ένα (*δείχνει το άλλο*). (Γιάννα, Β.2.1)

Β) Ως αποτέλεσμα μέτρησης (χωρίς επανάληψη). Η κατηγορία αυτή εμφανίστηκε μόνο στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων. Το Α εκφράζεται ως «ν κομμάτια», το οποίο θεωρήσαμε ως αποτέλεσμα μέτρησης (χωρίς επανάληψης της μονάδας). Για παράδειγμα:

> Η σοκολάτα είναι δύο κομμάτια (Σωτηρία, Α.2.1)

Σημειώνεται ότι, για να ενταχθεί μια περιγραφή σε αυτή την κατηγορία, δεν απαιτήσαμε να εκφράζεται ρητά η ισότητα των «κομματιών», εφόσον το παιδί τεκμηρίωνε στην πράξη ότι λαμβάνει υπόψη αυτή την αρχή (δηλαδή, επιλέγοντας αντίγραφα του β).

Γ) Πολλαπλασιαστικά. Στην κατηγορία αυτή, το Α περιγράφεται ως «ν φορές το β». Η σχέση αυτή θα μπορούσε και να περιγραφεί και ως αποτέλεσμα μέτρησης με επανάληψη της

μονάδας. Στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων, η σχέση αυτή εκφράστηκε αριθμητικά, με τον πολλαπλασιαστέο να αναφέρεται στο πλήθος των «καραμελών». Για παράδειγμα:

> Τέσσερις είναι (*δείχνει το Α που έχει κατασκευάσει*). Δύο φορές αυτές οι δύο. (*δείχνει με τον δείκτη και τον μέσο τις δύο καραμέλες*). (Νικήτας, Β.2.2)

Στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων, το Α περιγράφεται ως «ν φορές το κομμάτι». Για παράδειγμα:

> Η σοκολάτα σου έχει το ίδιο κομμάτι δύο φορές. (Άρης, Β.2.1)

Το ζητούμενο β, σε σχέση με το δεδομένο Α, περιγράφτηκε από τα παιδιά με μόνο με τρόπους που παραπέμπουν στο β ως «μέρος όλου», ανεξάρτητα από το αν το παιδί χρησιμοποίησε τον αντίστοιχο όρο, ή όχι. Υπάρχουν διαφοροποιήσεις στις διατυπώσεις των παιδιών ως προς την ποσότητα αναφοράς, αλλά θα αντιμετωπίσουμε την κατηγορία ως ενιαία, καθώς δεν διαφοροποιείται ως προς το κεντρικό της χαρακτηριστικό, που είναι ότι το β περιγράφεται ως «ένα από ν». Επισημαίνεται, για να ενταχθεί μια περιγραφή σε αυτή την κατηγορία, δεν απαιτήσαμε να εκφράζεται ρητά η ισότητα των «κομματιών», εφόσον το παιδί έχει ήδη τεκμηριώσει στη δράση του ότι λαμβάνει υπόψη αυτή την αρχή (δηλαδή, επιλέγοντας αντίγραφα του β).

Πιο συγκεκριμένα, στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν περιγραφές του β ως «ένα από ν», χωρίς ρητή ποσότητα αναφοράς. Για παράδειγμα:

> Έδωσα στον Γιάννη το μισό. Βλέπεις; (*δείχνει την σύνθεση των 2 αντιγράφων του β*). Το ένα από τα δύο. Αυτό έδωσα. (Άρης, Α.1.1)

Εντάχθηκαν επίσης περιγραφές, στις οποίες το σύνολο αναφοράς είναι το σύνολο των μερών, ως «κομμάτια» ή ως «ομάδες». Για παράδειγμα:

> Είναι το ένα από τα δύο κομμάτια, το μικρό (Πένυ, Α1.1)

> Έδωσα τη μία από τις δύο ομάδες που έκανα. (Γιάννα, Β.2.2)

Τέλος, εντάχθηκαν περιγραφές, στις οποίες το σύνολο αναφοράς είναι το Α.

> Έδωσα το ένα από τα δύο κομμάτια της σοκολάτας. (Νικήτας, Α.1.1).

Στον Πίνακα 4, παρουσιάζεται η συχνότητα κάθε κατηγορίας σχέσης ανά παιδί.

Παιδί	A			β
	A=β+β(+β)	A=νβ	A=ν x β	1 από ν
Άρης	3	1	2	4
Γιάννα	2	1	1	4
Κώστας	0	0	0	1
Λόρα	1	1	0	1
Νικήτας	1	0	2	4
Πένυ	1	1	0	2
Σωτηρία	1	1	0	1
Σύνολο	9	5	5	17

Πίνακας 4: Συχνότητα κατηγορίας περιγραφής σχέσης, ανά παιδί και ανά ζητούμενο

Από τον Πίνακα 4 παρατηρούμε ότι η σχέση του ζητούμενου Α με το δεδομένο β περιγράφτηκε πιο συχνά προσθετικά. Όλα τα παιδιά, εκτός από τον Κώστα που δεν έδωσε λεκτική περιγραφή σχέσης (με την έννοια που την προσδιορίσαμε), έδωσαν τουλάχιστον μια περιγραφή προσθετικής σχέσης μεταξύ του Α και του β. Το ίδιο ισχύει και για την έκφραση του Α ως «ν β», με την εξαίρεση του Νικήτα. Πολλαπλασιαστικά εξέφρασαν τη σχέση τρία παιδιά, ο Άρης, η Γιάννα και ο Νικήτας.

Το β ως «ένα από ν», με τις διαφοροποιήσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω, περιγράφτηκε από όλα τα παιδιά, συμπεριλαμβανομένου του Κώστα.

3.5 Αναδρομική Ανάλυση, Συζήτηση και Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε τον δεύτερο κύκλο μιας έρευνας σχεδιασμού με εστίαση σε συγκεκριμένη μαθηματική θεματική (Gravemeijer & Prediger, 2019). Ο κύκλος αυτός αναφέρεται ως Κύκλος Ι στο κείμενο, καθώς πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο της παρούσας διδακτορικής διατριβής. Πραγματοποιήσαμε έναν σχεδιασμό με κορμό τρεις δραστηριότητες σε διαφορετικές πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, μοντέλα διαδικασιών για τον υπολογισμό πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων και την πρόβλεψη για εισαγωγή λεκτικών εργαλείων για την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων. Η υλοποίηση του σχεδιασμού έγινε υπό δυσμενείς συνθήκες και δεν ολοκληρώθηκε, καθώς συνέπεσε με την περίοδο της πανδημίας. Επιπλέον, ο μεταέλεγχος πραγματοποιήθηκε περίπου τέσσερις μήνες μετά την παρέμβαση, γεγονός που τον καθιστά, επί της ουσίας, έλεγχο διατήρησης.

Εντούτοις, από την εμπειρία της παρέμβασης, καθώς και από την ατομική εξέταση των παιδιών πριν και μετά την παρέμβαση, προέκυψαν χρήσιμες διαπιστώσεις. Παρουσιάσαμε αποτελέσματα από την ατομική εξέταση των παιδιών, καθώς και ενδεικτικά επεισόδια από την παρέμβαση, συναφή με τις τοπικές υποθέσεις και τα ερευνητικά μας ερωτήματα, ώστε να αναδείξουμε, κατά το δυνατόν, κρίσιμα στοιχεία από την εμπειρία της παρέμβασης.

Επεισόδια από την υλοποίηση της πρώτης δραστηριότητας (Δ1), δείχνουν ότι πράγματι τα παιδιά αναγνωρίζουν και αξιοποιούν την κανονικότητα που παρουσιάζεται στην παραγωγή των όρων για τα ακέραια πολλαπλάσια, ώστε να κατασκευάσουν καινούργιους όρους (Τ.Υ.1). Επιπλέον, τα αποτελέσματα από το παρόμοιο έργο που εντάχθηκε στον μεταέλεγχο, δείχνουν ότι τα παιδιά, στο πλαίσιο της πολλαπλασιαστικής σύγκρισης όπου διδάχτηκαν τους όρους, τους χρησιμοποιούν για τα πολλαπλάσια, τους αποδίδουν νόημα και μπορούν να περιγράψουν λεκτικά τις σχέσεις, με διαφορές ως προς τον τρόπο περιγραφής.

Από την άλλη μεριά, τα αποτελέσματα από τον μεταέλεγχο, στους τύπους προβλημάτων που δεν συμπεριλαμβάνονταν στην παρέμβαση, έδειξαν ότι η σύνδεση του όρου «ν-πλάσιο» με το πρόθεμα «ν», μπορεί να αξιοποιηθεί και με μη ευνοϊκούς τρόπους. Πράγματι, σε μη οικεία προβλήματα εμφανίστηκε η ταύτιση του «τριπλάσιου» (αντ. του «τετραπλάσιου») με το «τρία» (αντ. «τέσσερα») ως απόλυτη τιμή.

Τα ευρήματα αυτά, συνδυαστικά, είναι συμβατά με την Τ.Υ.1, για την περίπτωση των πολλαπλασίων, με την επισήμανση ότι η αναγνώριση και αξιοποίηση της κανονικότητας μπορεί να λειτουργεί ευνοϊκά, ή όχι.

Στην περίπτωση των υποπολλαπλασίων, η υπόθεσή μας ότι η λέξη «μισό» θα ήταν πιο κατάλληλη από τον όρο «ένα δεύτερο» για την εισαγωγή των όρων για τα υποπολλαπλάσια (Τ.Υ.3), είχε αρνητικές επιπτώσεις. Η χρήση της λέξης «μισό» παραβίασε εξαρχής την κανονικότητα της παραγωγής των όρων για τα υποπολλαπλάσια με βάση τα τακτικά αριθμητικά. Η διορθωτική κίνηση που έκανε η ερευνήτρια, προσπαθώντας να αντικαταστήσει το «μισό» με το «ένα δεύτερο» στη διάρκεια της παρέμβασης, δεν φαίνεται τελικά να ήταν αποτελεσματική. Όπως φαίνεται από τα στοιχεία που παρουσιάσαμε, η λέξη «μισό» και ο συγκεκριμένος τρόπος με τον οποίο παρουσιάστηκε η σχέση («είμαι το ένα σου μισό») χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή όρων για τα υποπολλαπλάσια, από τη στιγμή της εισαγωγής κατά την υλοποίηση της Δ1, σε όλη τη διάρκεια της παρέμβασης και μέχρι τον μεταέλεγχο, τέσσερις μήνες μετά, τόσο στο οικείο έργο, όσο και στα προβλήματα που δεν συμπεριλαμβάνονταν στην παρέμβαση. Η διαφορά μεταξύ του οικείου έργου και των μη οικείων προβλημάτων είναι ότι στο πρώτο, τα παιδιά παραμορφώνουν μεν τους όρους για τα υποπολλαπλάσια, αλλά τους αποδίδουν νόημα και μπορούν να περιγράψουν λεκτικά σχέσεις, με διαφορές μεταξύ των παιδιών. Αντίθετα, στα μη οικεία προβλήματα, τα παιδιά δεν χρησιμοποίησαν συστηματικά όρους για υποπολλαπλάσια, είτε παραμορφωμένους, είτε όχι. Επιπλέον, εμφανίστηκε και η ταύτιση του «ενός τρίτου» με το «τρία» ως απόλυτη τιμή.

Συνδυαστικά, τα ευρήματα αυτά δείχνουν ότι η υπόθεση Τ.Υ.3 (χρήση του όρου «μισό») δεν ήταν παραγωγική και, ταυτόχρονα, ότι η υπόθεση Τ.Υ.2 (χρήση της στρατηγικής 1-1 αντιστοίχισης για τις διακριτές ποσότητες) για την περίπτωση των υποπολλαπλασίων δεν μπορεί να αξιολογηθεί. Κατά μία έννοια, τα παιδιά όντως αξιοποίησαν μια κανονικότητα στην παραγωγή όρων για τα υποπολλαπλάσια, αλλά όχι την επιθυμητή.

Όπως είχαμε υποθέσει (Τ.Υ.2), η στρατηγική της επαναλαμβανόμενης 1-1 αντιστοίχισης εισφέρθηκε από τα παιδιά ως στρατηγική για τον ισομερισμό διακριτών ποσοτήτων. Ήδη από τον προέλεγχο, δύο παιδιά εφάρμοσαν αυτή τη στρατηγική για να επιλύσουν προβλήματα «δίκαιης» μοιρασιάς σε τρεις παραλήπτες. Στον μεταέλεγχο, εμφανίστηκε μια παραλλαγή αυτής της στρατηγικής (με αντιστοίχιση 2 προς 1), αλλά και στρατηγικές ομαδοποίησης από κάποια παιδιά.

Τόσο η διαδικασία της *Έμμεσης Ανάλυσης*, όσο και αυτή της *Σύνθεσης* ήταν απαιτητικές για τα παιδιά, αλλά όχι εκτός του πλαισίου των δυνατοτήτων τους (Ε.Ε.1).

Όσον αφορά τη διαδικασία της *Έμμεσης Ανάλυσης,* τα επεισόδια από την παρέμβαση που παρουσιάσαμε υποδεικνύουν ότι, κατά την εισαγωγή της διαδικασίας, οι εμπειρίες με τη «δίκαιη μοιρασιά» και η διαισθητική αντίληψη για το «μισό» μπορεί να είναι βοηθητικές για την πραγμάτευση βημάτων της διαδικασίας. Η επέκταση στο «ένα τρίτο» ήταν κρίσιμη, ώστε να γίνουν ορατές όλες οι «αρχές» που πρέπει να τηρούνται. Στη διάρκεια της παρέμβασης διαπιστώσαμε ότι το πιο απαιτητικό βήμα της διαδικασίας ήταν η σύγκριση του μήκους της σύνθεσης των «κομματιών», με αυτό της αρχικής ποσότητας, όπως φάνηκε και στο αντίστοιχο επεισόδιο. Αξίζει να επισημανθεί ότι αυτό το βήμα βασίζεται στην αντιστροφή της ενέργειας του ισομερισμού μιας ποσότητας, με αυτήν της σύνθεσης της ποσότητας από τα μέρη της. Κάποια παιδιά ήταν σε θέση να εκφράσουν λεκτικά την αρχή αυτή από νωρίς στην παρέμβαση. Στον μεταέλεγχο, η διαδικασία αυτή εφαρμόστηκε από τα παιδιά και, ειδικότερα, από τα δύο παιδιά με τη χαμηλότερη συνολική επίδοση, με τήρηση όλων των αρχών.

Όσον αφορά τη διαδικασία της *Σύνθεσης* για την κατασκευή πολλαπλασίου, κατά την παρέμβαση οι περισσότερες δυσκολίες εμφανίστηκαν στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων. Στις συνεχείς ποσότητες όπου έπρεπε να επαναληφθεί ένα «κομμάτι», τα παιδιά είχαν να διαχειριστούν ένα στοιχείο, το πλήθος των επαναλήψεων (πολλαπλασιαστής). Στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων έπρεπε να διαχειριστούν δύο στοιχεία: τον πολλαπλασιαστή και την ποσότητα που αντιστοιχεί στον πολλαπλασιαστέο. Όπως φάνηκε και στα αντίστοιχα επεισόδια, σε κάποιες περιπτώσεις, τα παιδιά αντέστρεψαν τον ρόλο του πολλαπλασιαστή και του πολλαπλασιαστέου. Σε άλλες, άλλαξαν την αρχική, δεδομένη ποσότητα β ή έχασαν το πλήθος των επαναλήψεων. Από τα αποτελέσματα στον μεταέλεγχο, το παράδειγμα του Άρη που προσπαθεί να υπολογίσει το τετραπλάσιο του δύο είναι πολύ χαρακτηριστικό τέτοιων δυσκολιών.

Στον σχεδιασμό μας είχαμε προβλέψει την αναπαράσταση της αριθμητικής τιμής του ν (με τα αντίγραφα των μονάδων) και ένα ενδιάμεσο υποστηρικτικό βήμα (ΕΒ) και για τις δύο διαδικασίες, στο οποίο γίνεται αντιστοίχιση κάθε μέρους σε μια μονάδα, έτσι ώστε ο πολλαπλασιαστής («σε πόσα μέρη θα κόψω»/ «πόσες φορές το ίδιο μέρος») να είναι ορατός

στα παιδιά. Το *ΕΒ* κάποιες φορές χρησιμοποιήθηκε αυθόρμητα από τα παιδιά, κάποιες όχι και έπρεπε να το υπενθυμίζει η ερευνήτρια στη διάρκεια της διαδικασίας.

Αυτό που δεν είχαμε προβλέψει, ήταν η συστηματική υποστήριξη των παιδιών, ώστε να αντιμετωπίσουν «τα πολλά» ως «ένα». Η χρήση της λέξης «ομάδα» ξεκίνησε κατά τη διάρκεια της παρέμβασης από την ερευνήτρια και, μάλιστα, με αφορμή τα λόγια ενός παιδιού. Παρά το γεγονός ότι δεν είχε προβλεφθεί και χρησιμοποιήθηκε μη συστηματικά, η χρήση της λέξης «ομάδα» ήταν βοηθητική για τα παιδιά κατά τη διάρκεια της παρέμβασης. Από τα αποτελέσματα του μεταελέγχου, φάνηκε ότι κάποια παιδιά αναφέρθηκαν στη λέξη «ομάδα» για να περιγράψουν και να εκφράσουν σχέση (π.χ. «μία από τις ομάδες που έκανα») στα προβλήματα με ζητούμενο το υποπολλαπλάσιο.

Τέλος, από τον προέλεγχο στον μεταέλεγχο φάνηκε να υπάρχει βελτίωση σε τύπους προβλημάτων που δεν είχαν επεξεργαστεί τα παιδιά κατά την παρέμβαση (Ε.Ε.2), τέσσερις μήνες μετά, και χωρίς αυτή να έχει ολοκληρωθεί. Η βελτίωση ήταν περιορισμένη, με πολύ συγκεκριμένα χαρακτηριστικά: Παρατηρήθηκε σχεδόν αποκλειστικά για ν=2 («μισό»/ διπλάσιο) όπου, με μία εξαίρεση, όλα τα παιδιά έλυσαν τα αντίστοιχα προβλήματα, περιέγραψαν λεκτικά σχέσεις και χρησιμοποίησαν τους αντίστοιχους όρους, λιγότερο ή περισσότερο συστηματικά. Μόνο δύο παιδιά και, μάλιστα, αυτά που είχαν προβάδισμα ήδη από τον προέλεγχο στα προβλήματα «δίκαιης μοιρασιάς», προχώρησαν για ν=3, όπου ξεκίνησαν και οι πρώτες τους «αποτυχίες». Σημειώνεται ότι σωστές απαντήσεις στον προέλεγχο δεν υπήρχαν για κανένα πρόβλημα πολλαπλασίου.

Ένα ενδιαφέρον εύρημα από τον μεταέλεγχο ήταν ότι παιδιά που έχουν χρησιμοποιήσει τη διαδικασία της *Έμμεσης Ανάλυσης* και της *Σύνθεσης* με ή χωρίς το ενδιάμεσο υποστηρικτικό βήμα (*ΕΒ*) για ν=2, δεν αποπειρώνται να την εφαρμόσουν για ν=3. Όταν απαντούν, οι απαντήσεις τους δείχνουν ότι αρχίζουν να εφαρμόζουν κανόνες του τύπου «το υποπολλαπλάσιο είναι μικρό» και το «πολλαπλάσιο είναι μεγάλο», με βάση την απόλυτο μέγεθος. Κάποια παιδιά λεκτικοποίησαν αυτούς τους κανόνες. Το μόνο παιδί που εφάρμοσε μία φορά την *Έμμεση Ανάλυση* για ν=3, στο δεύτερο αντίστοιχο πρόβλημα απάντησε βάσει ενός τέτοιου κανόνα.

Συνολικά, τα αποτελέσματά μας είναι συμβατά με τη βιβλιογραφία που δείχνει ότι στρατηγικές αντιμετώπισης προβλημάτων για το «μισό» είναι διαθέσιμες στα παιδιά αυτής

της ηλικίας, είτε μέσω της αντιληπτικής εκτίμησης στις συνεχείς ποσότητες, είτε μέσω της επαναλαμβανόμενης 1-1 αντιστοίχισης στις διακριτές ποσότητες (Davis & Pepper, 1992; Hunting & Sharpley, 1991; Fitzpatrick et al., 2019). Αυτό δεν σημαίνει ότι σε μια δεδομένη στιγμή όλα τα παιδιά βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, καθώς εντοπίστηκαν και διαφορές μεταξύ των παιδιών ήδη στον προέλεγχο (Vanluydt et al., 2020).

Ο τρόπος με τον οποίο διαχειριστήκαμε το «μισό» στον σχεδιασμό μας για την εισαγωγή λεκτικών εργαλείων ήταν ατυχής και είναι το πιο προφανές από τα στοιχεία που απαιτούν αναθεώρηση.

Επιπλέον, στο σχεδιασμό αυτού του κύκλου, δεν υπήρχε πρόβλεψη για την υποστήριξη των παιδιών να αναπτύξουν πιο προχωρημένες διαδικασίες ισομερισμού στις διακριτές ποσότητες. Αυτό σχετίζεται με το σχεδιαστικό έλλειμμα που αναγνωρίσαμε και στην περίπτωση των πολλαπλασίων. Πιο συγκεκριμένα, δεν προβλέψαμε συστηματική υποστήριξη για να αντιμετωπίσουν τα παιδιά τα «πολλά» ως «ένα» (Confrey, 2009), όπως έχει προβλεφθεί από άλλες ερευνήτριες και ερευνητές, με ωφέλιμα αποτελέσματα σε παιδιά αυτής της ηλικίας (π.χ. Bicnell et al., 2016; Cheesaman et al., 2023; Καπέλου, 2004; Sophian, 2004, Χρήστου & Κανδύλη, 2024).

Ένα επιπλέον θέμα που χρήζει προσοχής είναι το θέμα της γενίκευσης αυτών που τα παιδιά φαίνεται να αντιλαμβάνονται στο πλαίσιο του «μισού» και του «διπλάσιου», για μεγαλύτερες τιμές του ν, με κρίσιμη τιμή το ν=3. Πώς θα μπορούσαν να αναδειχθούν οι δομικές ομοιότητες, ήδη στο πλαίσιο του «ενός δευτέρου», ώστε να μεταφερθούν καταρχάς στο «ένα τρίτο» και σε μεγαλύτερες τιμές του ν;

Τα ζητήματα αυτά μας απασχόλησαν στον σχεδιασμό του Κύκλου ΙΙ, που παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 4: Κύκλος ΙΙ

4.1. Προοπτική ανάλυση - Επανασχεδιασμός

Η προοπτική ανάλυση του Κύκλου ΙΙ έγινε υπό το φως των διαπιστώσεών μας κατά την αναδρομική ανάλυση του Κύκλου Ι (Gravemeijer & Prediger, 2019), όπως παρουσιάστηκαν στην §3.5. Πριν περιγράψουμε αναλυτικά τις αλλαγές που πραγματοποιήθηκαν, στο σημείο αυτό θα κάνουμε μια επισκόπηση των αναθεωρήσεων, των καινούργιων στοιχείων, αλλά και των στοιχείων του σχεδιασμού που διατηρήθηκαν. Πιο συγκεκριμένα:

α) Διατηρήθηκαν το σενάριο, οι ιστορίες και τα υλικά αναπαράστασης των «ηρωίδων» και «ηρώων» των ιστοριών: Η ομάδα της Παμ, η ομάδα του Πομ, και τα αντίγραφα της μονάδας για κάθε ομάδα, αντίστοιχα.

β) Διατηρήθηκε η δραστηριότητα Δ1 (εισαγωγική, πολλαπλασιαστική σύγκριση με μέτρηση), αλλά αναθεωρήθηκε ο τρόπος εισαγωγής των όρων για τα υποπολλαπλάσια μιας και συναντήσαμε εμπόδια, λόγω της επιλογής μας να χρησιμοποιηθεί ο όρος «μισό». Η επιλογή μας αυτή παραβίασε την κανονικότητα στην παραγωγή των όρων με βάση τα τακτικά αριθμητικά. Για τον λόγο αυτό, ο όρος «μισό» δε χρησιμοποιήθηκε κατά την εισαγωγή των παιδιών στους όρους για υποπολλαπλάσια. Αντ' αυτού, η εισαγωγή των όρων έγινε εξαρχής με αξιοποίηση των τακτικών αριθμητικών για την κατασκευή των αντίστοιχων όρων («ένα δεύτερο», αντί «μισό»).

γ) Έγινε πρόβλεψη για την εισαγωγή γλωσσικών και μη γλωσσικών αναπαραστατικών εργαλείων για την ενίσχυση της αντιμετώπισης των «πολλών» ως «ένα» (σύνθετη μονάδα).

δ) Σχεδιάστηκε μια εμπράγματη αναπαράσταση της αριθμητικής τιμής του λόγου ν:1 / 1:ν («πολλά προς ένα» / «ένα προς πολλά») στη σχέση της μορφής Α=ν x β.

ε) Οι διαδικασίες *Έμμεσης Ανάλυσης* και *Σύνθεσης με ΕΒ* (Ενδιάμεσο υποστηρικτικό Βήμα) επανασχεδιάστηκαν, ώστε να αξιοποιούν τα νέα εργαλεία των (γ) και (δ).

στ) Η διαδικασία *Έμμεσης Ανάλυσης με ΕΒ* εφαρμόστηκε και στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων.

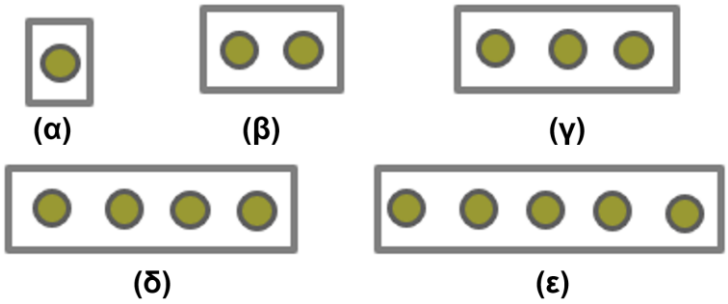
ζ) Οι δραστηριότητες Δ2 (αναλογικά προβλήματα) και Δ3 (πολλαπλασιαστική αλλαγή) διατηρήθηκαν, αλλά με τα νέα δεδομένα των (α)-(στ).

Υπενθυμίζεται ότι το σενάριο και οι ιστορίες βρίσκονται στο Παράρτημα 1, ενώ οι δραστηριότητες Δ1, Δ2, και Δ3 περιγράφονται αναλυτικά στις §3.1.1-3.1.3.

4.1.1 «Πολλά ως ένα»: Αναπαραστάσεις σύνθετων μονάδων

Για την υποστήριξη των παιδιών ώστε να διαχειριστούν μια συλλογή από μονάδες ως ένα ενιαίο αντικείμενο, προβλέφθηκε η συστηματική χρήση των όρων «δυάδα», «τριάδα», «τετράδα» κ.λπ. Και στην περίπτωση της παραγωγής αυτών των όρων, υπάρχει μια κανονικότητα που βασίζεται στη σταθερή κατάληξη «-άδα» και σε ένα πρόθεμα που βασίζεται στις αντίστοιχες αριθμολέξεις. Κάποιοι από αυτούς τους όρους είναι πιθανόν να είναι σχετικά οικείοι στα παιδιά του νηπιαγωγείου, με βάση των σχηματισμό μικρών ομάδων στην σχολική τους καθημερινότητα. Ωστόσο, υπάρχει και σε αυτήν την περίπτωση η εξαίρεση στην πρώτη ομάδα: η λέξη «ζευγάρι» είναι πιο συνηθισμένη στην καθημερινή ζωή, σε σχέση με τον όρο «δυάδα». Με βάση την εμπειρία μας από το αντίστοιχο ζήτημα στην παραγωγή των όρων για τα υποπολλαπλάσια στον Κύκλο Ι, αποφασίσαμε ότι εξαρχής και συστηματικά η ερευνήτρια θα χρησιμοποιούσε τον όρο «δυάδα».

Επιπλέον, σχεδιάστηκαν εμπράγματες αναπαραστάσεις σύνθετων μονάδων. Πιο συγκεκριμένα, κατασκευάστηκαν λωρίδες από χαρτί επάνω στις οποίες ήταν κολλημένες «βιταμίνες» (μικρές καραμέλες) ως «ν-άδες» (δυάδες, τριάδες κ.λπ.). Το μήκος των λωρίδων ήταν ανάλογο του πλήθους των μονάδων και οι μονάδες βρίσκονταν σε ίση απόσταση μεταξύ τους. Ένα μοντέλο αυτού του υλικού παρουσιάζεται στην Εικόνα 7 (β-δ). Οι αναπαραστάσεις των σύνθετων μονάδων χρησιμοποιήθηκαν στη διαδικασία εύρεσης του υποπολλαπλάσιου (*Έμμεση Ανάλυση*) με την προσθήκη ακόμη μιας επιλογής, αυτή τη φορά για τη μονάδα (μία «βιταμίνη»- Εικόνα 7α).



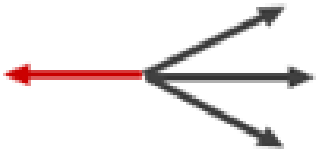
Εικόνα 7: Αναπαραστάσεις απλών και σύνθετων μονάδων

Για την εύρεση του πολλαπλασίου, χρησιμοποιήθηκε ακόμα ένα υλικό (μικροί δίσκοι, στους οποίους συγκεντρώνεται η ποσότητα του πολλαπλασιαστέου), το οποίο θα παρουσιαστεί μαζί με τη διαδικασία *Σύνθεσης* στην §4.1.3.

Ο σχεδιασμός αυτός δημιουργεί τη δυνατότητα τα παιδιά να χειριστούν και να εκφράσουν λεκτικά «πολλές» μονάδες ως «ένα» ενιαίο αντικείμενο (Confrey, 2009). Συνδυάζοντας αυτό το υλικό με συλλογές των ίδιων αντικειμένων («βιταμίνες») ως ανεξάρτητα αντικείμενα που επιδέχονται χειρισμό, δημιουργείται μια συνθήκη στην οποία ευνοείται η μοναδοποίηση, δηλαδή, η δόμηση μιας ποσότητας σε μονάδες, εδώ σύνθετες, πρώτα στη δράση του παιδιού. Όπως έχουμε αναφέρει, η μοναδοποίηση είναι θεμελιώδες συστατικό της πολλαπλασιαστικής σκέψης (Confrey, 2009; Hackenberg, 2010; Sophian, 2004; Steffe, 2013).

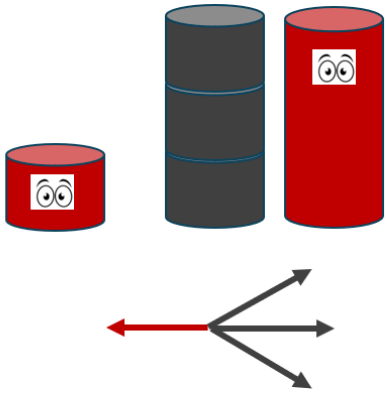
4.1.2 «Πολλά προς ένα» / «Ένα προς πολλά»: Αναπαράσταση του λόγου

Η αφετηρία γι' αυτόν τον σχεδιασμό ήταν η δυσκολία που παρατηρήθηκε στη φάση της υλοποίησης του Κύκλου Ι στον συντονισμό των στοιχείων της σχέσης Α=ν x β. Σχεδιάσαμε μια εμπράγματη αναπαράσταση της αριθμητικής τιμής του λόγου ν (βλ. Εικόνα 8 για ένα μοντέλο αυτού του εργαλείου, για ν=3).



Εικόνα 8: Μοντέλο της εμπράγματης αναπαράστασης του λόγου 1:3 / 3:1

Το εργαλείο αυτό (στο εξής, εργαλείο του λόγου) μπορεί να αναπαραστήσει τη σχέση που συνδέει τα Α και β (1:ν / ν:1). Για παράδειγμα, ο προσδιορισμός της σχέσης μεταξύ της Παμ (μονάδα) και της Τριπάμ, γίνεται μέσω μέτρησης με αντίγραφα της μονάδας («παμίνες», με γκρι χρώμα στην Εικόνα 9). Το εργαλείο του λόγου αναπαριστά τη σχέση της Παμ με την Τριπάμ, διαμέσου των αντιγράφων της μονάδας. Από αυτήν την άποψη, είναι η αναπαράσταση μιας αμφίδρομης σχέσης «πολλά προς ένα» / «ένα προς πολλά», που συνδέει μια απλή με μια σύνθετη μονάδα (βλ. §1.1, Σχ. 1).



Εικόνα 9: Προσδιορισμός και αναπαράσταση της σχέσης μεταξύ της «Παμ» και της «Τριπάμ»

Το εργαλείο του λόγου μπορεί, ταυτόχρονα, να λειτουργήσει ως αναπαράσταση του πολλαπλασιαστικού μετασχηματισμού μιας ποσότητας με ακέραιο τελεστή από τα αριστερά προς τα δεξιά και τον αντίστροφό του από δεξιά προς τα αριστερά.

Το εργαλείο αυτό μπορεί, κατ' ελάχιστο, να αξιοποιηθεί ώστε να διατηρεί ορατό στα παιδιά ένα βασικό στοιχείο του προβλήματος, που είναι η τιμή του ν (πόσες φορές επαναλαμβάνω/ σε πόσα μέρη ισομερίζω). Έτσι, μπορεί να υλοποιήσει με πιο αποτελεσματικό τρόπο το ενδιάμεσο υποστηρικτικό βήμα (*ΕΒ*) της αντιστοίχισης των αντιγράφων του β στις μονάδες του ν, που είχαμε προβλέψει στον σχεδιασμό του Κύκλου Ι μέσω των αντιγράφων της μονάδας («παμίνες»). Επιπλέον, θα μπορούσε να αναδείξει τις δομικές ομοιότητες των ενεργειών και των σχέσεων για τις διαφορετικές τιμές του ν (διαφορετική τιμή του ν, ίδιο εργαλείο) και να διευκολύνει το πέρασμα από την τιμή 2, σε επόμενες.

Τέλος, το εργαλείο του λόγου δημιουργεί τη δυνατότητα τα παιδιά να διαχειριστούν στη δράση τη σχέση μιας απλής και μιας σύνθετης μονάδας, ως προοίμιο για τον συντονισμό μονάδων (Hackenberg et al., 2016; Steffe, 2013).

Επισημαίνουμε ότι χρησιμοποιήσαμε το εργαλείο αυτό για την αναπαράσταση του λόγου μεταξύ ομοειδών ποσοτήτων. Η αντιστοιχία «πολλά προς ένα»/ «ένα προς πολλά» σε αυτή την περίπτωση δεν ταυτίζεται με αυτήν που περιγράφουν η Confrey (2009) και οι Nunes & Bryant (2015), η οποία αφορά ετεροειδείς ποσότητες που συμμεταβάλλονται. Πιο συγκεκριμένα, στο πρόβλημα: «Η δόση της Παμ είναι δύο βιταμίνες. Πόσες βιταμίνες είναι η δόση της Τριπάμ;», αναφερόμαστε στη σχέση μεταξύ της δόσης της Παμ και της δόσης της Τριπάμ. Αντίθετα, η Confrey και οι Nunes και Bryant αναφέρονται στην αντιστοιχία «2 καραμέλες ανά 1 Παμ». Σημειώνουμε ότι το ίδιο εργαλείο, με διαφορετική διαχείριση,

μπορεί να αξιοποιηθεί και για την ένα-προς-πολλά αντιστοιχία μεταξύ ετεροειδών ποσοτήτων.

Το εργαλείο του λόγου κατασκευάστηκε από χαρτόνι, για ν=2, 3, 4. Ο προσανατολισμός του ήταν σταθερός (1 βέλος αριστερά, ν βέλη δεξιά). Η λειτουργία του ήταν α) από τα αριστερά προς τα δεξιά, επανάληψη μιας ποσότητας και β) από τα δεξιά στα αριστερά, ισομερισμός της. Οι διαδικασίες της *Έμμεσης Ανάλυσης* και *Σύνθεσης* με *ΕΒ* (Ενδιάμεσο υποστηρικτικό Βήμα) επανασχεδιάστηκαν με την ενσωμάτωση αυτού του εργαλείου.

4.1.3 Η διαδικασία *Έμμεσης Ανάλυσης* με το εργαλείο του λόγου

Η δομή της διαδικασίας *Έμμεσης Ανάλυσης* για την εύρεση του υποπολλαπλάσιου είναι ίδια με αυτήν που σχεδιάστηκε στον Κύκλο Ι (Εκτίμηση, Σύνθεση και Σύγκριση). Η διαφορά με τον Κύκλο Ι είναι ότι, στον Κύκλο ΙΙ, η διαδικασία αυτή αφορά τόσο τις συνεχείς, όσο και τις διακριτές ποσότητες και υλοποιείται με τη χρήση του εργαλείου του λόγου.

Και για τις διακριτές και για τις συνεχείς ποσότητες, δίνονται 5 επιλογές για το β, με το αίτημα της εκτίμησης. Στη διακριτή συνθήκη, οι επιλογές αυτές είναι αναπαραστάσεις μονάδων (απλών και σύνθετων) από λωρίδες χαρτιού με κολλημένες «βιταμίνες» (§4.1.1). Διατίθεται, επίσης, συλλογή από «βιταμίνες», που μπορούν ελεύθερα να χειριστούν τα παιδιά.

Η διαδικασία είναι πανομοιότυπη για τα δύο είδη ποσοτήτων. Στην Εικόνα 10 μοντελοποιείται η διαδικασία για τις διακριτές ποσότητες και ν=2. Συγκεκριμένα, τα βήματα είναι τα εξής:

(i) Επιλέγεται το κατάλληλο εργαλείο και το Α τοποθετείται στην κατάλληλη πλευρά (στα δεξιά, Εικόνα 10α),

(ii) Εκτιμάται και προεπιλέγεται το β σε κατάλληλο πλήθος αντιγράφων, τα οποία και αντιστοιχίζονται στα βέλη δεξιά (Εικόνα 10β)

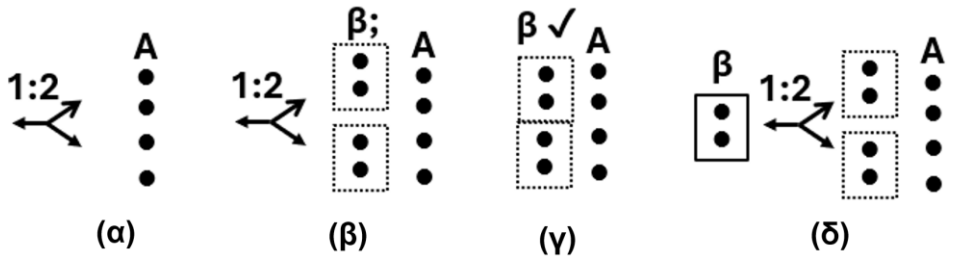
(iii) Η σύνθεση των ν αντιγράφων του β συγκρίνεται με το Α (Εικόνα 10γ)

(iv) Αν είναι ίσα, το αποτέλεσμα (Εικόνα 10δ) προκύπτει με την αντιστοίχιση ενός αντιγράφου του β στο αριστερό βέλος. Αν όχι, επιλέγεται άλλο β και η διαδικασία επαναλαμβάνεται.

Στο βήμα (ii), η αντιστοίχιση των αντιγράφων του β στα βέλη του εργαλείου γίνεται για να εξασφαλιστεί ότι έχει επιλεγεί το κατάλληλο πλήθος αντιγράφων και αντιστοιχεί στο

ενδιάμεσο υποστηρικτικό βήμα (ΕΒ). Ονομάζουμε την διαδικασία αυτή *Έμμεση Ανάλυση με ΕΒ.*

Στο βήμα (ii), η σύγκριση είναι ως προς το πλήθος και μπορεί να ειδωθεί ως μέτρηση του Α με σύνθετη μονάδα (χωρίς επανάληψη). Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι, με κατάλληλη διάταξη του Α, η σύγκριση μπορεί να γίνει και ως προς το μήκος. Ως προς το μήκος γίνεται η σύγκριση στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων, με τη σύγκριση να αναπαρίσταται ως μέτρηση χωρίς επανάληψη της μονάδας.



Εικόνα 10: «Έμμεση Ανάλυση με Ενδιάμεσο Βήμα» στις διακριτές ποσότητες

4.1.4 Η διαδικασία *Σύνθεσης* με το εργαλείο του λόγου

Η διαδικασία της *Σύνθεσης* του πολλαπλασίου με τη χρήση του εργαλείου του λόγου (*Σύνθεση με ΕΒ*) είναι παρόμοια στη βασική δομή της για τις συνεχείς και τις διακριτές ποσότητες, με ορισμένες διαφοροποιήσεις.

Η διαδικασία *Σύνθεσης* του πολλαπλάσιου με τη χρήση του εργαλείου του λόγου παρουσιάζεται στην Εικόνα 11 σχηματικά για ν=2 (που είναι και η πρώτη κατάσταση που τα παιδιά συναντούν). Στο πάνω μέρος της Εικόνας 11 τα σχήματα με το ανοιχτό γκρι χρώμα αναπαριστούν μικρούς ίδιους δίσκους («πιατάκια») που τοποθετούνταν σε κάθε βέλος του εργαλείου στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων, έτσι ώστε ο πολλαπλασιαστέος να εμφανίζεται ως ομάδα (εδώ, δυάδα). Εδώ να τονιστεί ότι τα παιδιά κατά τη διάρκεια κατασκευής των πολλαπλασίων είχαν στη διάθεσή τους τόσο τις σύνθετες μονάδες που ήταν κολλημένες σε λωρίδες χαρτιών όπως αυτές παρουσιάστηκαν στην §4.1.1 αλλά και «ελεύθερες» καραμέλες που μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν.

Στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων δίνονταν και 5 επιλογές για το ζητούμενο Α. Τα παιδιά καλούνταν αρχικά να εκτιμήσουν το Α ως ένα ενιαίο μήκος. Το εκτιμημένο Α

παρουσιάζεται με διακεκομμένες γραμμές στο κάτω μέρος της Εικόνας 11. Μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας κατασκευής του Α από τα ν β, έπρεπε να ελέγξουν την αρχική τους εκτίμηση συγκρίνοντας με το κατασκευασμένο Α και να την αποδεχτούν ή να την απορρίψουν, επιλέγοντας άλλο κομμάτι. Με αυτόν τον τρόπο, η τελική τους απάντηση αντιστοιχούσε σε ένα ενιαίο μήκος, το οποίο έβλεπαν ταυτόχρονα διαμερισμένο σε ίσα μέρη.

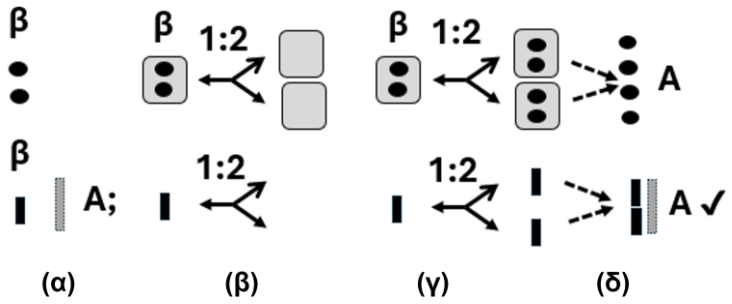
Μετά την επιλογή του κατάλληλου εργαλείου, ακολουθούν τα εξής βασικά βήματα:

i) Τοποθέτηση της ομάδας ή του κομματιού β στο 1 βέλος στα αριστερά (Εικόνα 11α),

ii) Αντιστοίχιση μιας ίδιας ομάδας ή κομματιού β σε κάθε ένα από τα ν βέλη στα δεξιά (Εικόνα 11β)

iii) Σύνθεση του Α από τις ομάδες ή τα κομμάτια β (Εικόνα 11γ)

iv) Στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων, έλεγχος της αρχικής επιλογής για το Α (Εικόνα 11δ).



Εικόνα 11: «Σύνθεση με ενδιάμεσο βήμα» για διακριτές και συνεχείς ποσότητες

4.1.5 Εισαγωγή και διαχείριση του εργαλείου του λόγου και των διαδικασιών

Η εισαγωγή των διαδικασιών *Έμμεσης Ανάλυσης και Σύνθεσης με ΕΒ* γίνεται στη δραστηριότητα Δ2 (Αναλογικά Προβλήματα), όπως και στον Κύκλο Ι. Τα προβλήματα που λύνουν τα παιδιά είναι ο υπολογισμός της δόσης μιας παίκτριας, με δεδομένη τη δόση της Παμ, ή αντίστροφα. Αρχικά, προσδιορίζεται η σχέση μεταξύ της Παμ και της δεδομένης παίκτριας (πρώτα με τη Διπάμ) μέσω μέτρησης. Ανεξάρτητα από το ποιο από τα δύο αντίστροφα προβλήματα επιλύουν τα παιδιά, επιλέγεται το κατάλληλο εργαλείο το λόγου που αναπαριστά τη σχέση της Παμ με την παίκτρια. Πρόκειται για το εργαλείο με τον αριθμό

βελών στα δεξιά που αντιστοιχούν στον αριθμό των μονάδων που χρειάστηκαν για να μετρηθεί η παίκτρια.

Η εισαγωγή της *Έμμεσης Ανάλυσης με ΕΒ* γίνεται αρχικά στο πλαίσιο των συνεχών ποσοτήτων. Στο πλαίσιο των διακριτών, δίνεται πρώτα η ευκαιρία στα παιδιά να επεξεργαστούν το πρόβλημα με διαθέσιμο υλικό τη συλλογή των «βιταμινών». Η διαδικασία εισάγεται, με την ερευνήτρια να ζητάει από τα παιδιά να προβλέψουν ένα αποτέλεσμα, από τις διαθέσιμες επιλογές των σύνθετων μονάδων (π.χ. «Να κάνουμε μια καλή μαντεψιά: Ποια ομάδα λέτε ότι θα βγει; Μήπως είναι η τετράδα; Μήπως είναι η τριάδα; Μήπως είναι κάποια άλλη; Κοιτάξτε καλά τη δόση της Διπάμ»). Παρόμοια με την περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων, όπως παρουσιάστηκε στον Κύκλο Ι, η διαδικασία προϋποθέτει μια αρχική εκτίμηση, αλλά δεν απαιτεί η εκτίμηση να είναι ακριβής, καθώς υπάρχει η δυνατότητα δοκιμής και διόρθωσης με επανεκτίμηση.

Παρόμοια με τον Κύκλο Ι, η πρόβλεψη για την λεκτική περιγραφή αυτής της διαδικασίας από την ερευνήτρια ήταν να περιγραφτεί αρχικά ως ενέργεια σύνθεσης (π.χ. «Για να δούμε, προβλέψαμε σωστά; Αν ενώσω τις δύο τριάδες, θα μου φτιάχνουν τη δόση της Τριπάμ;»). Σταδιακά, όμως, περιγράφεται με όρους μέτρησης, είτε χωρίς επανάληψη της μονάδας (π.χ. «Σωστά, τρία κομματάκια χωράνε στην μπάρα της Διπάμ»), είτε με επανάληψη της μονάδας (π.χ. «Πόσες φορές έβαλες το κομμάτι στη μεγάλη μπάρα;, Πόσες φορές χρειάστηκα την τριάδα;»). Με αυτόν τον τρόπο, ο όρος «ένα νιοστό» θα μπορούσε να συνδεθεί με το μέρος-όλου («μία από τις τρεις τριάδες/ ένα από τα τρία ίσα κομμάτια του Α») ή με το «μέτρο του Α» (π.χ. «το κομμάτι που χωράει τρεις φορές στη μεγάλη μπάρα» / «η ομάδα που χωράει τρεις φορές στις καραμέλες»).

Η εισαγωγή της *Σύνθεσης με ΕΒ* γίνεται επίσης στο πλαίσιο των συνεχών ποσοτήτων. Στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων, η ερευνήτρια αναφέρεται στην ποσότητα που αντιστοιχεί στον πολλαπλασιαστέο ως ν-άδα (π.χ. «Τρεις καραμέλες είναι η δόση της Παμ – μια τριάδα. Να βάλουμε την τριάδα στη μία μυτούλα του εργαλείου. Πόσα τριάδες πρέπει να δώσω στη Διπάμ; Πόσες μυτούλες έχει το εργαλείο;»).

Η διαδικασία περιγράφεται λεκτικά από την ερευνήτρια αρχικά ως ενέργεια σύνθεσης (π.χ. «Να ενώσουμε τα κομματάκια για να φτιάξουμε τη δόση της Τριπάμ») και, σχεδόν άμεσα, εισάγεται η επανάληψη («Πόσες φορές έβαλα τη δόση της Παμ;»).

Τέλος, οι όροι για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια εισάγονται στη Δ1 (εισαγωγική δραστηριότητα), και χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν αμφίδρομα τη σχέση της Παμ με μια δεδομένη παίκτρια. Στη Δ2 (αναλογικά προβλήματα), επαναλαμβάνεται η έκφραση της σχέσης, αρχικά για την Παμ και τη δεδομένη παίκτρια και στη συνέχεια για τις αντίστοιχες δόσεις. Παρόμοια, οι όροι χρησιμοποιούνται και στη Δ3 («κλασματομηχανή»). Η ερευνήτρια χρησιμοποιεί η ίδια τους όρους, αναδιατυπώνει τα λόγια των παιδιών με χρήση όρων και ζητά από τα παιδιά να τους χρησιμοποιήσουν. Η λέξη «σχέση» αναφέρεται ρητά, και στην ερώτηση «τι σχέση έχει» το Α με το β / το β με το Α και αναμένεται λεκτική περιγραφή και χρήση του όρου.

Επισημαίνεται ότι στην δραστηριότητα Δ3 («κλασματομηχανή») εντάχθηκε το εργαλείο του λόγου, ως εξής: Μετά την παρουσίαση ενός έως τριών παραδειγμάτων της λειτουργίας της «κλασματομηχανής» και αφού τα παιδιά είχαν προσδιορίσει «τι κάνει η μηχανή», η πρόβλεψη ήταν να επιλέξουν το κατάλληλο εργαλείο και να το τοποθετήσουν πάνω στην «κλασματομηχανή» .

4.2 Τοπικές υποθέσεις και ερευνητικά ερωτήματα

Παρόμοια με τον Κύκλο Ι, είχαμε μία τοπική υπόθεση σχετικά με τη δραστηριότητα Δ1 (για τον διαχωρισμό τους από τις προηγούμενες τοπικές υποθέσεις τις ονομάζουμε Τ.Υ.1* και Τ.Υ.2*). Πιο συγκεκριμένα, υποθέσαμε ότι:

Τ.Υ.1*: Η κανονικότητα που παρουσιάζεται κατά την παραγωγή των όρων για τα ακέραια πολλαπλάσια και τα αντίστοιχα υποπολλαπλάσια και οι υφιστάμενες γνώσεις των παιδιών για τα απόλυτα και τα τακτικά αριθμητικά θα λειτουργήσουν βοηθητικά στην προσπάθεια των παιδιών να κατασκευάσουν και να γενικεύσουν τους ζητούμενους όρους. Συμβατά με αυτή την υπόθεση, σε αυτόν τον κύκλο, υποθέσαμε ότι η εισαγωγή του όρου «ένα δεύτερο» έναντι του «μισού» θα είναι βοηθητική για την παραγωγή των επόμενων όρων για τα υποπολλαπλάσια.

Τ.Υ.2*: Με βάση τη βιβλιογραφική ανασκόπηση της §1.2., αναμέναμε ότι στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων, θα εμφανίζονταν στρατηγικές ισομερισμού που απαντώνται σε αυτές τις ηλικίες, όπως η επαναλαμβανόμενη 1-1 αντιστοίχιση (π.χ. Fitzpatrick & Hallet, 2019).

Στο πλαίσιο των κεντρικών ερευνητικών ερωτημάτων της έρευνας (§2.2), θέσαμε τα εξής ερωτήματα:

Ε.Ε.1*: Είναι ο συνολικός σχεδιασμός του προγράμματος στα πλαίσια των δυνατοτήτων παιδιών που φοιτούν σε μικτή τάξη (νήπια -προνήπια) στο νηπιαγωγείο; Πιο συγκεκριμένα, μπορούν τα νήπια και τα προνήπια να αντιμετωπίσουν τα προβλήματα των δραστηριοτήτων Δ1, Δ2 και Δ3 στο πλαίσιο της παρέμβασης;

Ε.Ε.2*: Μετά την παρέμβαση, θα μπορούν τα παιδιά ατομικά να επιλύσουν προβλήματα ίδιου τύπου με αυτά που συμπεριλαμβάνονται στην παρέμβαση, αλλά και διαφορετικού τύπου;

Ε.Ε.3*: Με ποιους τρόπους θα επιλύσουν προβλήματα τα παιδιά μετά την παρέμβαση, και τι σχέση θα έχουν με τις δομημένες διαδικασίες του σχεδιασμού;

Ε.Ε.4*: Πώς θα περιγράψουν τα παιδιά τις μαθηματικές ενέργειες που πραγματοποίησαν και τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων στα προβλήματα που θα επιλύσουν;

Ε.Ε.5*: Σε ποιο βαθμό διαφοροποιούνται η επιτυχία στην επίλυση, οι τρόποι επίλυσης και οι λεκτικές περιγραφές των μαθηματικών σχέσεων (i) ανάλογα με τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων και (ii) μεταξύ των παιδιών;

Ειδικότερα, ως προς τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων, εξετάζεται η διαφοροποίηση ανάλογα με:

α) το είδος του ζητούμενου (πολλαπλάσιο/υποπολλαπλάσιο),

β) το είδος της ποσότητας (διακριτή/συνεχής), και

γ) την τιμή του ν (2, 3, 4).

Για το Ε.Ε.5*, αναμέναμε διατομικές διαφορές (μεταξύ των παιδιών) και ενδοατομικές διαφορές, δηλαδή διαφορετική ανταπόκριση του ίδιου παιδιού ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του εκάστοτε προβλήματος. Διαφορές στη μαθηματική ανάπτυξη μεταξύ των παιδιών μιας τάξης νηπιαγωγείου είναι αναμενόμενες και, μάλιστα, δεν οφείλονται αποκλειστικά σε ηλικιακές διαφορές (Clements & Sarama, 2021). Επιπλέον, η γνωστική ανάπτυξη χαρακτηρίζεται από ενδοατομική μεταβλητότητα: ακόμα και σε παρόμοια έργα, το ίδιο παιδί μπορεί να διαφοροποιεί την ανταπόκριση ή τη στρατηγική του, επιστρέφοντας σε πιο στοιχειώδη στρατηγική, ή και αποτυγχάνοντας (Siegler, 2007).

Στα αποτελέσματα του Κύκλου Ι, είδαμε ότι η μεταβολή της τιμής του ν από 2 σε 3 συνοδεύτηκε από διαφοροποιήσεις στην ανταπόκριση των παιδιών. Το εύρημα αυτό είναι υποδεικνύει ότι η ανταπόκριση των παιδιών θα μπορούσε να διαφοροποιείται ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του προβλήματος.

4.3 Υλοποίηση: Μέθοδος

Η υλοποίηση οργανώθηκε ως παρέμβαση με ημι-πειραματικό σχεδιασμό (προέλεγχος-παρέμβαση-μεταέλεγχος).

Στη δεύτερη αυτή φάση, η συλλογή δεδομένων κατά τον προέλεγχο και τον μεταέλεγχο πραγματοποιήθηκε μέσω ατομικών συνεντεύξεων βασισμένων σε έργα (task-based interviews) ενώ κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, δεδομένα συλλέχθηκαν με παρατήρηση και σύγχρονη καταγραφή από την ερευνήτρια αλλά και βιντεοσκόπηση. Η βιντεοσκόπηση όλων των παραπάνω έγινε με την συγκατάθεση των γονέων των μαθητών που συμμετείχαν.

4.3.1 Συνολική Διαδικασία

Κατά τον προέλεγχο κάθε παιδί εξετάστηκε ατομικά, σε μία συνεδρία διάρκειας περίπου 10-15 λεπτών ανά παιδί, σε προβλήματα που δεν συμπεριλαμβάνονταν στη παρέμβαση.

Στον μεταέλεγχο, τα παιδιά εξετάστηκαν α) στα ίδια προβλήματα με αυτά του προελέγχου και β) σε προβλήματα παρόμοια με αυτά της παρέμβασης. Η εξέταση έγινε ατομικά, σε δύο συναντήσεις ανά παιδί, διάρκειας περίπου 40 λεπτών η κάθε μία.

Κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης τα παιδιά συμμετείχαν σε δραστηριότητες σχετικές με την κατασκευή όρων για πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια για τις σχέσεις Α=νxβ, όπου ν=2,3,4 για τις Δ2 και Δ3 (αναλογικά προβλήματα και «κλασματομηχανή»—πολλαπλασιαστική μεταβολή—αντίστοιχα) και ν=2-10 στην Δ1 (πολλαπλασιαστική σύγκριση).

Η εφαρμογή έγινε σε δύο μεικτές ομάδες των έντεκα παιδιών (νήπια και προνήπια), στο χώρο του σχολείου. Κάθε ομάδα συμμετείχε σε εννιά συναντήσεις, διάρκειας περίπου 45΄ λεπτών η κάθε μία. Η εφαρμογή του προγράμματος ξεκίνησε τον Ιανουάριο και ολοκληρώθηκε τον Μάιο του σχολικού έτους 2022-23. Στο Παράρτημα 4 παρουσιάζεται μία συνοπτική περιγραφή των έργων ανά ημέρα εφαρμογής της παρέμβασης.

Όπως και στον Κύκλο Ι, στο πλαίσιο της παρέμβασης, η ερευνήτρια διηγήθηκε τις ιστορίες και έθεσε τα προβλήματα. Για κάθε είδος ποσότητας (διακριτή, συνεχής) και για κάθε μία τιμή του ν επιλύονταν τουλάχιστον 5 προβλήματα στο πλαίσιο της κάθε πολλαπλασιαστικής κατάστασης.

Τα παιδιά συμμετείχαν στις δραστηριότητες σαν ομάδα (συζητώντας και ανταλλάσσοντας απόψεις), βοηθώντας το ένα το άλλο στην κατασκευή πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων και εξηγώντας σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων και διαδικασίες στους συμμαθητές τους. Η ερευνήτρια φρόντιζε ώστε να δοθούν σε όλα τα παιδιά επαρκείς ευκαιρίες ώστε να ξεκινήσουν τη διαδικασία επίλυσης. Τα προβλήματα θέτονταν αρχικά χωρίς παρέμβαση της ερευνήτριας. Η ερευνήτρια παρενέβαινε όποτε χρειαζόταν για να επισημάνει τα κρίσιμα σημεία μιας διαδικασίας, με ερωτήσεις ή με μοντελοποίηση. Χρησιμοποιούσε η ίδια τους όρους συνδέοντας με τη δεδομένη κατάσταση, αναδιατύπωνε τα λόγια των παιδιών και συνόψιζε μετά την επίλυση κάθε προβλήματος.

4.3.2 Συμμετέχοντα παιδιά

Στη δεύτερη φάση της έρευνας συμμετείχαν είκοσι δύο παιδιά (9 προνήπια και 13 νήπια) ενός τμήματος ιδιωτικού σχολείου των Ιωαννίνων, με μέση ηλικία τα 5 έτη και 7 μήνες (με εύρος 4 έτη 10 μήνες – 6 έτη 4 μήνες). Η μητρική τους γλώσσα ήταν τα ελληνικά. Τα 9 από τα 22 παιδιά ήταν κορίτσια (4 προνήπια και 5 νήπια) και τα 13 ήταν αγόρια (5 προνήπια και 8 νήπια). Τα παιδιά συναίνεσαν στη συμμετοχή τους και είχαν τη συγκατάθεση των γονιών τους. Σε όλα τα παιδιά δόθηκαν ψευδώνυμα για τους σκοπούς αυτής της έρευνας και με αυτά παρουσιάζεται η ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν από τις απαντήσεις τους.

4.3.3 Ερευνητικό Εργαλείο

Σχεδιάστηκαν δύο δοκίμια για τον προέλεγχο και τον μεταέλεγχο που περιλάμβαναν προβλήματα από διαφορετικές πολλαπλασιαστικές καταστάσεις στα οποία ενυπάρχει μια σχέση Α=ν x β, όπου η αριθμητική τιμή του ν είναι 2, 3 και, σε ορισμένα από αυτά, 4. Πιο συγκεκριμένα:

Το δοκίμιο του προελέγχου ήταν ίδιο με αυτό του Κύκλου Ι (βλ. §2.3.6) και περιλάμβανε συνολικά 30 προβλήματα, χωρισμένα σε δύο κατηγορίες.

Η πρώτη (Κατηγορία Α) περιλάμβανε προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής του τύπου «ισοπληθών ομάδων» (διακριτές ποσότητες) και «ίσων μέτρων» (συνεχείς ποσότητες). Προβλήματα αυτής της κατηγορίας δεν συμπεριλαμβάνονταν στην παρέμβαση και δόθηκαν για τρία ζητούμενα (Α, β, ν) και για ν=2, 3, 4.

Τα προβλήματα της δεύτερης κατηγορίας (Κατηγορία Β) αφορούσαν την αναγνώριση όρων για πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια και την κατασκευή τους. Προβλήματα αυτής της

κατηγορίας δεν συμπεριλαμβάνονταν στην παρέμβαση και δόθηκαν για τα ζητούμενα Α και β και για ν=2,3,4. Εδώ, να σημειωθεί ότι κατά τον προέλεγχο ο όρος που ζητήθηκε από τα παιδιά να αναγνωρίσουν ήταν το «μισό» μιας και τους είναι πιο οικείος ενώ κατά τον μεταέλεγχο τους ζητήθηκε να αναγνωρίσουν τον όρο «ένα δεύτερο». Ο όρος αυτός ήταν που εισήχθη και χρησιμοποιήθηκε στην παρέμβαση γι' αυτό και έγινε προσπάθεια ελέγχου της δυνατότητας των παιδιών να τον αναγνωρίζουν μετά από αυτή.

Οι αναπαραστάσεις για τα προβλήματα τύπου Α και Β ήταν όπως περιγράφονται στην §2.3.6.

Το δοκίμιο του μεταελέγχου περιλάμβανε όλα τα προβλήματα του προελέγχου (κατηγορία Α και Β) και επιπλέον προβλήματα, στο σύνολο 17, τα οποία ήταν παρόμοια με αυτά της παρέμβασης (Κατηγορία Π). Τα προβλήματα αυτά δόθηκαν για τα ζητούμενα Α και β και για ν=2,3. Πιο συγκεκριμένα, συμπεριελήφθησαν οι εξής τύποι προβλημάτων:

Π0: Το πρόβλημα αυτό ήταν ίδιο με αυτά που λύθηκαν στη δραστηριότητα Δ1 (εισαγωγική) και περιλάμβανε την αναγνώριση της παίκτριας Οκταπάμ και τη λεκτική έκφραση της σχέσης της με την Παμ και αντίστροφα.

Π1: Τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας ήταν ίδια με τα αναλογικά προβλήματα για συνεχείς και διακριτές ποσότητες που λύθηκαν στο πλαίσιο της δραστηριότητας Δ2, είχαν ζητούμενα το Α και το β και δόθηκαν για ν=2,3. Για παράδειγμα, στις διακριτές ποσότητες για ν=2 και ζητούμενο το β, δίνεται στα παιδιά η εξής κατάσταση: «Μπορείς να μου δείξεις ποια θα είναι η δόση της Παμ αν η Διπάμ έχει πάρει ως δόση 6 βιταμίνες;». Αντίστοιχα, για ν=2 και ζητούμενο το Α το ερώτημα που τίθεται στα παιδιά είναι το εξής: «Μπορείς να μου δείξεις τη δόση της Διπάμ αν η δόση της Παμ είναι δύο βιταμίνες;»

Π2: Τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας ήταν ίδια με τα προβλήματα πολλαπλασιαστικής αλλαγής με «κλασματομηχανές» για διακριτές και συνεχείς ποσότητες που είχαν λυθεί στο πλαίσιο της δραστηριότητας Δ3, είχαν ζητούμενα το Α και το β και δόθηκαν για ν=2,3. Στο παιδί δίνονταν από 1 μέχρι 3 παραδείγματα της λειτουργίας της «κλασματομηχανής» , έπρεπε να επιλέξει το κατάλληλο εργαλείο του λόγου για την «κλασματομηχανή» , και να επιλύσει προβλήματα εύρεσης των Α και β. Ενδεικτικό πρόβλημα αυτής της κατηγορίας για τις συνεχείς ποσότητες με ζητούμενο το β είναι το εξής: «Μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες θα βγουν από τη μικρή πλευρά της μηχανής αν βάλω από τη μεγάλη πλευρά της μηχανής έξι καραμέλες,». Αντίστοιχα, για ζητούμενο το Α το πρόβλημα διατυπώνεται ως

εξής: «Μπορείς να μου πεις πόσες καραμέλες θα βγουν από τη μεγάλη πλευρά της μηχανής αν βάλω από τη μικρή πλευρά της μηχανής δύο καραμέλες;».

Για τα προβλήματα της κατηγορίας Π χρησιμοποιήθηκαν τα υλικά της παρέμβασης (η Παμ και η Οκταπάμ, τα αντίγραφα της μονάδας, η «κλασματομηχανή»).

Ο Πίνακας 5 παρουσιάζει συνοπτικά τον κωδικό του κάθε έργου ανά κατηγορία, και το είδος της ποσότητας και της σχέση που αφορά.

Για κάθε πρόβλημα με ζητούμενο το β, προσφέρονταν 5 εναλλακτικές επιλογές, με 5 διαθέσιμα αντίγραφα η κάθε μία. Πιο συγκεκριμένα, οι εναλλακτικές επιλογές για τις συνεχείς ποσότητες ήταν χάρτινες λωρίδες ίδιου πλάτους, ενώ για τις διακριτές ήταν μια απλή και τέσσερις σύνθετες μονάδες (μονάδα, δυάδα, τριάδα, τετράδα και πεντάδα- ως μικρές καραμέλες κολλημένες επάνω σε χάρτινες λωρίδες). Και για τις συνεχείς ποσότητες, οι εναλλακτικές περιλάμβαναν πάντα και μεγαλύτερα και μικρότερα μήκη, σε σχέση με αυτό του β.

Για τα προβλήματα με ζητούμενο το Α, δόθηκαν 5 εναλλακτικές επιλογές στα προβλήματα για τις συνεχείς ποσότητες, όπως γινόταν και στο πλαίσιο της παρέμβασης. Στις επιλογές περιλαμβάνονταν τόσο μικρότερα, όσο και μεγαλύτερα μήκη από αυτό του β. Επιπλέον, δόθηκαν 5 επιλογές και για τις διακριτές ποσότητες, οι οποίες ήταν λωρίδες από χαρτί με κολλημένες μονάδες και περιλάμβαναν πλήθη τόσο μικρότερα, όσο και μεγαλύτερα από το Α.

Τα παιδιά είχαν στη διάθεσή τους και «ελεύθερες» μονάδες (μικρές καραμέλες), ενώ από την αρχή υπήρχε διαθέσιμο το εργαλείο το λόγου για ν=2, 3, 4.

Κατηγορία	Έργο	Ποσότητα	Σχέση (δοκιμή) 1↔2	1↔3	1↔4	1↔8	Αριθμός προβλημάτων ανά υποκατηγορία	Σύνολο προβλημάτων
	Π0- Αναγνώριση	Συνεχής				Π0	1	1
Π	Π1- Αναλογικά (Υποπολλαπλάσιο)	Συνεχής	Π1.1	Π1.3			2	8
		Διακριτές	Π1.2	Π1.4			2	
	Π1- Αναλογικά (Πολλαπλάσιο)	Συνεχής	Π1.5	Π1.7			2	
		Διακριτές	Π1.6	Π1.8			2	
	Π2- "Κλασματομηχανές" (Υπολλαπλάσιο)	Συνεχής	Π2.1	Π2.3			2	8
		Διακριτές	Π2.2	Π2.4			2	
	Π2- "Κλασματομηχανές"/ (Πολλαπλάσιο)	Συνεχής	Π2.5	Π2.7			2	
		Διακριτές	Π2.6	Π2.8			2	
Α	Α1 – Μερισμού (Υποπολλαπλάσιο)	Συνεχής	Α1.1	Α1.3	Α1.5		3	18
		Διακριτή	Α1.2	Α1.4	Α1.6		3	
	Α2 -Πολ/σμού (Πολλαπλάσιο)	Συνεχής	Α2.1	Α2.3	Α2.5		3	
		Διακριτή	Α2.2	Α2.4	Α2.6		3	
	Α3 - Μέτρησης	Συνεχής	Α3.1	Α3.3	Α3.5		3	

	(Λόγος)	Διακριτή	A3.2	0A3.4	A3.6	3	
B	B1 -Υποπολλαπλάσιο	Συνεχής	B1.1	B1.3	B1.5	3	12
		Διακριτή	B1.2	B1.4	B1.6	3	
	B2 -Πολλαπλάσιο	Συνεχής	B2.1	B2.3	B2.5	3	
		Διακριτή	B2.2	B2.4	B2.6	3	
						Σύνολο προβλημάτων	47

Πίνακας 5: Κατηγοριοποίηση προβλημάτων προελέγχου και μεταελέγχου

Διαδικασία χορήγησης

Τα παιδιά εξετάστηκαν ατομικά, σε ήσυχο χώρο στο σχολικό τους περιβάλλον. Όπως αναφέραμε, τα προβλήματα του προελέγχου επιδόθηκαν σε μία συνάντηση (10-15 λεπτά η κάθε μία), ενώ για τα προβλήματα του μεταελέγχου χρειάστηκαν δύο συναντήσεις για κάθε παιδί (περίπου 40 λεπτά η κάθε μία). Η πρόβλεψη ήταν όλα τα παιδιά να λάβουν όλα τα προβλήματα.

Τα παιδιά κλήθηκαν α) να επιλύσουν τα προβλήματα και β) να τεκμηριώσουν τις απαντήσεις τους. Πιο συγκεκριμένα, η ερευνήτρια έθετε το πρόβλημα και δεν επενέβαινε κατά τη διάρκεια της επίλυσης από το παιδί. Αφού το παιδί κατέληγε στην απάντησή του, η ερευνήτρια έθετε δύο ερωτήσεις. Η πρώτη ερώτηση (Ε1) ήταν (κωδικοποιημένη) «Πώς ξέρεις ότι βρήκες το σωστό αποτέλεσμα»; και ρωτήθηκε με μικρές παραλλαγές ανάλογα με το εκάστοτε πρόβλημα (π.χ., «Πώς είσαι σίγουρος/η ότι αυτό θα πάρει η Ελένη»; «Πώς ξέρεις ότι αυτή τη σοκολάτα είχα στην αρχή»;). Μετά την απάντηση του παιδιού, η δεύτερη ερώτηση (Ε2) ήταν (κωδικοποιημένη) «Τι σχέση έχει η ποσότητα που βρήκες με αυτή που σου έδωσα στην αρχή;». Η Ε2 ρωτήθηκε επίσης με μικρές παραλλαγές, ανάλογα με το εκάστοτε πρόβλημα.

4.3.4 Συλλογή, οργάνωση και ανάλυση δεδομένων

Η συλλογή και η οργάνωση δεδομένων έγινε όπως περιγράφεται στην §2.3: Τόσο στη διάρκεια της παρέμβασης, όσο και κατά τη διαδικασία του προελέγχου και του μεταελέγχου έγινε βιντεοσκόπηση με εστίαση στο τραπέζι στο οποίο δούλευαν τα παιδιά χωρίς καταγραφή των προσώπων τους. Στις απομαγνητοφωνήσεις αυτές καταγράφηκαν και μη λεκτικά στοιχεία των απαντήσεων των παιδιών (οποιαδήποτε ενέργεια έκαναν τα παιδιά κατά την επίλυση των προβλημάτων που τους δόθηκαν).

Τα βίντεο από την παρέμβαση παρακολουθούσε η ερευνήτρια μετά το τέλος κάθε μαθήματος, κρατώντας σημειώσεις και βάζοντας χρονικές σημάνσεις στα επεισόδια ενδιαφέροντος. Επιλεγμένα επεισόδια από την παρέμβαση, συναφή με τις τοπικές υποθέσεις και τα ερευνητικά ερωτήματα, απομαγνητοφωνήθηκαν και παρουσιάζονται στα αποτελέσματα.

Τα δεδομένα από τον προέλεγχο και τον μεταέλεγχο απομαγνητοφωνήθηκαν. Για την οργάνωση των δεδομένων, αλλά και την παρουσίαση των αποτελεσμάτων, τα προβλήματα

οργανώθηκαν καταρχάς ανά ζητούμενο. Με δεδομένη τη σχέση Α=ν x β που αφορά όλα τα προβλήματα που εξετάστηκαν, τα προβλήματα του μεταελέγχου μπορούν να διακριθούν σε προβλήματα με ζητούμενο το Α (πολλαπλάσιο), το β (υποπολλαπλάσιο) και το ν (αριθμητική τιμή του λόγου). Μπορούν επίσης να διακριθούν με βάση το είδος της ποσότητας (διακριτή/ συνεχής) και την τιμή του ν (2, 3, 4). Τέλος, μπορούν να διακριθούν ανά είδος προβλήματος (π.χ. αναλογικό, πολλαπλασιαστική μεταβολή). Τα δεδομένα οργανώθηκαν σε αρχεία excel, με όλες τις παραπάνω μεταβλητές και ανά παιδί, διατηρώντας την περιγραφή του τι έκανε και την καταγραφή του τι είπε κάθε παιδί σε κάθε πρόβλημα (βλ. §2.3).

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω μεταβλητές, τα δεδομένα εξετάστηκαν ως προς:

α) Την επίδοση στα προβλήματα (σωστές ή μη επιλογές απαντήσεων) και την τεκμηρίωση της απάντησης (ναι ή όχι).
β) Το περιεχόμενο της τεκμηρίωσης. Συγκεκριμένα, εξετάστηκαν: β1) Οι διαδικασίες που εφάρμοσαν τα παιδιά κατά τη διάρκεια της επίλυσης ή μετά την ερώτηση Ε1 («Πώς ξέρεις ότι βρήκες το σωστό αποτέλεσμα;») και β2) Η λεκτική παραγωγή των παιδιών πριν και μετά τις ερωτήσεις τις ερευνήτριας με εστίαση στις ενέργειες και τις σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων που περιέγραψαν λεκτικά.
Η μέθοδος και η διαδικασία ανάλυσης περιγράφεται στην §2.3 και θα εξειδικεύεται, όταν χρειάζεται, πριν την παρουσίαση των αποτελεσμάτων στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 5: Κύκλος ΙΙ Αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την υλοποίηση του Κύκλου ΙΙ.

Η παρουσίαση είναι οργανωμένη ως εξής: Παρουσιάζονται πρώτα αποτελέσματα από τον προέλεγχο και τον μεταέλεγχο σε ενότητες και στο τέλος κάθε ενότητας, παρουσιάζουμε επεισόδια από την παρέμβαση που ρίχνουν φως σε ορισμένα ευρήματα.

5.1 Επιδόσεις και ύπαρξη ή μη τεκμηρίωσης

5.1.1 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

Οι απαντήσεις στις δοκιμασίες του προελέγχου και του μεταελέγχου ταξινομήθηκαν σε σωστές και λανθασμένες, με βάση την επιλογή των παιδιών από τις εναλλακτικές που είχαν στη διάθεσή τους. Η σωστή επιλογή βαθμολογήθηκε με 1, ενώ η λανθασμένη με 0. Με 0 βαθμολογήθηκαν και οι μη απαντήσεις, οι περιπτώσεις, δηλαδή, στις οποίες το παιδί δεν έδωσε απάντηση.

Για κάθε απάντηση εξετάστηκε εάν ήταν ή όχι τεκμηριωμένη. Τεκμηριωμένες θεωρήθηκαν οι απαντήσεις που συνοδεύονταν από την εφαρμογή μιας έγκυρης διαδικασίας, από μια έγκυρη λεκτική εξήγηση ή συνδυασμό των δύο προηγούμενων. Πιο αναλυτικά:

Μια σωστή επιλογή από τις διαθέσιμες εναλλακτικές, χωρίς εφαρμογή διαδικασίας και χωρίς λεκτική εξήγηση καταγράφτηκε ως σωστή, μη τεκμηριωμένη απάντηση.

Μια σωστή επιλογή με εφαρμογή διαδικασίας καταγράφτηκε ως σωστή και τεκμηριωμένη απάντηση, ανεξάρτητα από το αν συνοδεύτηκε από ικανοποιητική λεκτική εξήγηση ή όχι.

Για μια σωστή επιλογή χωρίς εφαρμογή διαδικασίας, εξετάστηκε η λεκτική εξήγηση του παιδιού. Αν δεν υπήρχε λεκτική εξήγηση ή αυτή ήταν μη ουσιαστική (π.χ. «θα πάρει ένα μικρό κομμάτι, για να μην πονέσουν τα δόντια της», «είναι μικρή, φτάνουν δυο καραμέλες»), τότε η απάντηση καταγράφτηκε ως σωστή και μη τεκμηριωμένη. Ως σωστές και μη τεκμηριωμένες θεωρήθηκαν επίσης λίγες απαντήσεις με σωστή επιλογή, και με λεκτική εξήγηση στην οποία το παιδί επαναλάμβανε με διαφορετικό τρόπο το αποτέλεσμα (π.χ. «Δύο θα πάρουν όλοι (…) Δύο θα πάρει ο Γιάννης. Δύο θα πάρει και το αδερφάκι του») ή ήταν ελλειπτικές με το παιδί να αναφέρει ένα στοιχείο του προβλήματος, όπως το ν (π.χ. «Τέσσερα είναι τα παιδιά»).

Οι απαντήσεις με σωστή επιλογή, χωρίς εφαρμογή διαδικασίας που θεωρήθηκαν τεκμηριωμένες λεκτικά περιλάμβαναν περιπτώσεις στις οποίες τα παιδιά βρήκαν το αποτέλεσμα χωρίς να αξιοποιήσουν τα διαθέσιμα υλικά και μετά την ερώτηση Ε1, περιέγραψαν έγκυρες σχέσεις μεταξύ των δεδομένων ποσοτήτων, είτε στατικά είτε μέσω της περιγραφής μιας ενέργειας. Ως παράδειγμα παραθέτουμε τρεις αποκλειστικά λεκτικές τεκμηριώσεις για το πρόβλημα διαίρεσης μερισμού με αρχική ποσότητα 6 καραμέλες και 2 παραλήπτες:

> Τρεις (…) Οι έξι καραμέλες είναι τρεις και τρεις.
>
> (…) Είναι δύο τριάδες. Τη μία έδωσα.
>
> (…) Έχω δύο τριάδες. Αν τις ενώσω έχω έξι καραμέλες.

Οι διαδικασίες που εφάρμοσαν τα παιδιά, καθώς και οι ενέργειες και σχέσεις που περιέγραψαν λεκτικά στις εξηγήσεις τους θα παρουσιαστούν με λεπτομέρεια στις επόμενες ενότητες. Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε αποτελέσματα σχετικά με τις τεκμηριωμένες και μη τεκμηριωμένες απαντήσεις, καθώς και την κατηγορία τεκμηρίωσης (*Μόνο με διαδικασία, Μόνο λεκτικά, Με διαδικασία και Λεκτικά*) συνολικά και ανά παιδί.

Προέλεγχος

Κατά τον προέλεγχο, στο σύνολο των 30 προβλημάτων, τρία από τα παιδιά (η Δέσποινα, η Άρια και ο Γιάννης) απάντησαν σωστά σε ένα από τα προβλήματα και ένα παιδί (ο Άγης) απάντησε σωστά σε 3 προβλήματα. Όλες οι σωστές απαντήσεις των παιδιών στον προέλεγχο αφορούσαν α) πρόβλημα «δίκαιης μοιρασιάς» για δύο παραλήπτες στις διακριτές ποσότητες (Άρια, Άγης, Γιάννης), β) αναγνώρισης του όρου «μισό» για συνεχείς ποσότητες (Άγης και Δέσποινα) και γ) αναγνώρισης του όρου «διπλάσιο» για τις διακριτές ποσότητες (Άγης).

Στα έργα της δίκαιης μοιρασιάς τα παιδιά κατέληξαν στην απάντησή τους μοιράζοντας την ποσότητα που τους δόθηκε αντιστοιχίζοντας μία καραμέλα σε κάθε αναπαράσταση του ν. Δεν εξήγησαν τις απαντήσεις τους, απλά καταμέτρησαν τις καραμέλες και απάντησαν αναφέροντας αριθμούς. Τα δύο παιδιά που αναγνώρισαν τον όρο «μισό» εκτίμησαν το μέσο της μπάρας, περνώντας από πάνω το χέρι τους. Ούτε εδώ τα παιδιά έδωσαν κάποια εξήγηση. Τέλος, ο Άγης αναγνώρισε τον όρο «διπλάσιο» και κατασκεύασε την αντίστοιχη ποσότητα για τις 2 καραμέλες που τους δόθηκαν. Όταν ρωτήθηκε αν ξέρει τι σημαίνει ο όρος

«διπλάσιο» είπε: «Διπλάσιο είναι το διπλό. Δηλαδή περισσότερο. Αυτό είναι δύο και αυτό είναι και άλλα δύο».

Μεταέλεγχος: Επιδόσεις

Κατά τον μεταέλεγχο, 2 προνήπια (Αδριανός και Δημήτρης) αρνήθηκαν να συμμετέχουν ενώ 4 προνήπια (Αννα, Βάνα, Μελίτα, Πάνος) δεν επέλυσαν σωστά κανένα από τα προβλήματα που δοκίμασαν (ν=2), ενώ αρνήθηκαν να δοκιμάσουν τα υπόλοιπα προβλήματα. Τέλος, ένα προνήπιο (Καίτη) απάντησε σωστά μόνο στο έργο Π0 (αναγνώριση της Οκταπάμ). Από τις λανθασμένες απαντήσεις των παραπάνω παιδιών παρατηρήθηκε πως για το ένα δεύτερο και το διπλάσιο μιας ποσότητας επέλεγαν τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη σε απόλυτο μέγεθος εναλλακτική, αντίστοιχα. Η συμπεριφορά αυτή παρατηρήθηκε τόσο στο πλαίσιο των συνεχών, όσο και στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων. Η επίδοση των παιδιών αυτών κατά τον μεταέλεγχο είναι μηδενική και οι απαντήσεις τους χωρίς τεκμηρίωση. Για τον λόγο αυτό, οι επόμενες αναλύσεις αφορούν τα υπόλοιπα 15 παιδιά, μεταξύ των οποίων 2 προνήπια (Γιάννης, Ευτύχης).

Στο Π0, όλα τα παιδιά απάντησαν σωστά, δηλαδή, αναγνώρισαν μέσω μέτρησης την Οκταπάμ και εξέφρασαν τη σχέση της με την Παμ και αντίστροφα. Στη συνέχεια, επικεντρωνόμαστε στα υπόλοιπα προβλήματα (στο σύνολο 46). Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 5, για τα ζητούμενα Α και β περιλαμβάνονται από 4 προβλήματα για ν=2, από 4 προβλήματα για ν=3 και από 2 προβλήματα για ν=4, ενώ για το ζητούμενο ν περιλαμβάνεται από ένα πρόβλημα για κάθε τιμή του ν (2, 3 και 4), τόσο στις συνεχείς όσο και στις διακριτές ποσότητες.

Στον Πίνακα 6 παρουσιάζεται η συχνότητα των σωστών απαντήσεων στο μεταέλεγχο, ανά ζητούμενο (Α, β, ή ν), ανά είδος ποσότητας (διακριτή/συνεχής), και ανά αριθμητική τιμή του ν (2, 3, 4).

Ζητού-μενο	ν	# Προβλημάτων ανά ποσότητα	# Απαντήσεων ανά ποσότητα	Συνεχείς ποσότητες		Διακριτές ποσότητες	
				Συχνότητα	Σχ. Συχνότητα	Συχνότητα	Σχ. Συχνότητα
Α	2	4	60	55	0.92	56	0.93
	3	4	60	56	0.93	55	0.92
	4	2	30	30	1.00	26	0.87
	Σύνολο	10	150	141	0.94	137	0.91
β	2	4	60	55	0.92	56	0.93
	3	4	60	51	0.85	51	0.85
	4	2	30	25	0.83	23	0.77
	Σύνολο	10	150	131	0.87	130	0.87
ν	2	1	15	12	0.80	14	0.93
	3	1	15	13	0.87	10	0.67
	4	1	15	10	0.67	13	0.87
	Σύνολο	3	45	35	0.78	37	0.82

Πίνακας 6: Συχνότητα και σχετική συχνότητα των σωστών απαντήσεων στο σύνολο των απαντήσεων ανά ζητούμενο (Α, β, ν), ανά είδος ποσότητας (διακριτή, συνεχής), και αριθμητική τιμή του ν (2, 3, 4).

Εξετάζοντας τον Πίνακα 6, για κάθε ζητούμενο ξεχωριστά, φαίνεται ότι για το Α δόθηκαν σωστές απαντήσεις με σχετική συχνότητα 0,94 και 0,91 για τις συνεχείς και τις διακριτές ποσότητες, αντίστοιχα, μια μικρή διαφορά που συνδέεται με τις 4 παραπάνω σωστές απαντήσεις στις συνεχείς ποσότητες για ν=4, όπου η σχετική συχνότητα παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή της. Στις διακριτές ποσότητες, οι σωστές απαντήσεις μειώνονται με την αύξηση του ν. Συνολικά, οι σωστές απαντήσεις για το ζητούμενο Α αθροίζουν στο 278 με ποσοστό 92,7% στο σύνολο των 300 απαντήσεων στις διακριτές και συνεχείς ποσότητες.

Για το ζητούμενο β δόθηκαν σωστές απαντήσεις με ταυτόσημη (στα δύο δεκαδικά ψηφία) σχετική συχνότητα 0,87 για τα δύο είδη ποσότητας. Οι σωστές απαντήσεις εμφανίζονται με φθίνουσα σχετική συχνότητα με την αύξηση του ν και στα δύο είδη ποσοτήτων. Συνολικά, οι σωστές απαντήσει για το ζητούμενο β αθροίζουν στις 261 με ποσοστό 87% στο σύνολο των 300 απαντήσεων στις διακριτές και συνεχείς ποσότητες.

Για το ζητούμενο ν δόθηκαν σωστές απαντήσεις με σχετική συχνότητα 0,78 και 0,82 στις συνεχείς και τις διακριτές ποσότητες, αντίστοιχα. Οι σωστές απαντήσεις για τις διαφορετικές

τιμές του ν είναι πιο συχνές για ν=3 στις συνεχείς ποσότητες και για ν=2 στις διακριτές. Συνολικά, οι σωστές απαντήσεις για το ζητούμενο ν αθροίζουν στο 72 με ποσοστό 80% στο σύνολο των 90 απαντήσεων στις διακριτές και συνεχής ποσότητες.

Εξετάζοντας τη συνολική επίδοση για τις διακριτές και, αντίστοιχα, τις συνεχείς ποσότητες, από τα στοιχεία του Πίνακα 6, προκύπτει ότι οι σωστές απαντήσεις είναι 307 στις συνεχείς και 304 στις διακριτές ποσότητες με ποσοστό 89% και 88,1% στο σύνολο των 345 απαντήσεων για κάθε ποσότητα, αντίστοιχα.

Εξετάζοντας τη συνολική επίδοση σε σχέση με το ν, από τα στοιχεία του Πίνακα 6, προκύπτει ότι το οι σωστές απαντήσεις για ν=2, 3, 4 είναι 248, 236 και 127, αντίστοιχα, στα σύνολα των 270, 270 και 150 απαντήσεων, αντίστοιχα. Συνεπώς, τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων για ν=2,3 4 είναι 91,9%, 87,4% και 84,7%, αντίστοιχα.

Συνοψίζοντας, φαίνεται οι σωστές απαντήσεις δίνονται με πρακτικά ταυτόσημη συχνότητα στις διακριτές και τις συνεχείς ποσότητες, πιο συχνά για το ζητούμενο Α και λιγότερο συχνά στα προβλήματα με ζητούμενο το ν. Φαίνεται να υπάρχει μια γενική τάση μείωσης των σωστών απαντήσεων όσο αυξάνει το ν, αλλά ανά ζητούμενο δεν ακολουθείται απαραίτητα το ίδιο μοτίβο.

Μεταέλεγχος: Τεκμηρίωση

Όσον αφορά την τεκμηρίωση, στον Πίνακα 7 παρουσιάζεται η συχνότητα και το ποσοστό των τύπων τεκμηρίωσης (*Μόνο με διαδικασία*, *Μόνο λεκτικά*, *Με διαδικασία και λεκτικά*) και των μη τεκμηριωμένων σωστών απαντήσεων ανά ζητούμενο (Α, β, ν) και είδος ποσότητας (συνεχής, διακριτή).

Ζητ/νο	Ποσότητα	Τύπος Τεκμηρίωσης				Σύνολο
		Μόνο με Διαδικασία	Μόνο Λεκτικά	Με Διαδικασία & Λεκτικά	Μη τεκμ/νες	
Α	Συνεχής	31	12	98	0	141
		0.22	0.09	0.7	0	
	Διακριτή	31	11	95	0	137
		0.23	0.08	0.69	0	
	Σύνολο	62	23	193	0	278
		0.22	0.08	0.69	0.00	
β	Συνεχής	36	12	80	3	131
		0.27	0.09	0.61	0.02	
	Διακριτή	31	16	81	2	130
		0.24	0.12	0.62	0.02	
	Σύνολο	67	28	161	5	261
		0.26	0.11	0.62	0.02	
ν	Συνεχής	12	1	19	3	35
		0.34	0.03	0.54	0.09	
	Διακριτή	9	3	21	4	37
		0.24	0.08	0.57	0.11	
	Σύνολο	21	4	40	7	72
		0.29	0.06	0.56	0.10	

Πίνακας 7: Συχνότητα και σχετική συχνότητα των κατηγοριών τεκμηρίωσης των σωστών απαντήσεων ανά ζητούμενο (Α, β, ν) και ανά ποσότητα (συνεχής, διακριτή)

Από τον Πίνακα 7 φαίνεται ότι, οι μη τεκμηριωμένες σωστές απαντήσεις ήταν συνολικά πολύ λίγες και μηδενικές για το ζητούμενο Α. Για όλα τα ζητούμενα, τόσο στις διακριτές όσο και στις συνεχείς ποσότητες, η κατηγορία: *Με διαδικασία και λεκτικά* είναι επικρατούσα, ακολουθούμενη από την *Μόνο με διαδικασία*, ενώ η *Μόνο Λεκτικά* εμφανίζεται με χαμηλή συχνότητα. Από το ζητούμενο Α προς το ζητούμενο ν, φαίνεται να υπάρχει μια τάση μείωσης της *Με Διαδικασία και Λεκτικά* και αύξηση το *Μόνο με διαδικασία*, ενώ για το ζητούμενο ν παρατηρείται η μεγαλύτερη σχετική συχνότητα των μη τεκμηριωμένων απαντήσεων.

Στον Πίνακα 8, παρουσιάζεται η συχνότητα και η σχετική συχνότητα των κατηγοριών τεκμηρίωσης ανά ζητούμενο (Α, β, ν) και αριθμητική τιμή του ν (2,3,4).

Ζητ/νο	ν	Κατηγορία Τεκμηρίωσης				Σύνολο
		Μόνο με Διαδικασία	Μόνο Λεκτικά	Με Διαδικασία & Λεκτικά	Μη τεκμ/νες	
Α	2	19	10	82	0	111
		0.17	0.09	0.74	0.00	
	3	21	10	80	0	111
		0.19	0.09	0.72	0.00	
	4	22	3	31	0	56
		0.39	0.05	0.55	0.00	
	Σύνολο	62	23	193	0	278
		0.22	0.08	0.69	0.00	
β	2	19	10	82	0	111
		0.17	0.09	0.74	0.00	
	3	21	10	69	2	102
		0.21	0.10	0.68	0.02	
	4	27	8	10	3	48
		0.56	0.17	0.21	0.06	
	Σύνολο	67	28	161	5	261
		0.26	0.11	0.62	0.02	
ν	2	4	2	18	2	26
		0.15	0.08	0.69	0.08	
	3	7	1	13	2	23
		0.30	0.04	0.57	0.09	
	4	10	1	9	3	23
		0.43	0.04	0.39	0.13	
	Σύνολο	21	4	40	7	72
		0.29	0.06	0.56	0.10	

Πίνακας 8: Συχνότητα και σχετική συχνότητα των κατηγοριών τεκμηρίωσης των σωστών απαντήσεων ανά ζητούμενο (Α, β, ν) και ανά τιμή του ν (2, 3, 4)

Από τον Πίνακα 8 παρατηρείται για κάθε ζητούμενο ότι η κατηγορία: *Με Διαδικασία και Λεκτικά* μειώνεται, ενώ η κατηγορία: *Μόνο με διαδικασία* αυξάνεται, με την αύξηση του ν. Για το ζητούμενο Α, η κατηγορία: *Με διαδικασία και Λεκτικά* παραμένει επικρατούσα για όλες τις τιμές του ν. Όταν ζητούμενα είναι το β και το ν, η ίδια κατηγορία είναι επικρατούσα

για ν=2,3, αλλά όχι για ν=4, όπου επικρατεί η κατηγορία: *Μόνο με διαδικασία*. Επιπλέον, οι μη τεκμηριωμένες σωστές απαντήσεις για το ζητούμενο β εμφανίζονται για ν=3, 4, ενώ όταν το ζητούμενο είναι το ν εμφανίζονται και για τις τρεις τιμές του ν (2, 3, 4).

Συνοψίζοντας, το είδος του ζητούμενου και η αριθμητική τιμή του ν φαίνεται να παίζουν ρόλο στο αν και με ποιον τρόπο τεκμηριώθηκε μια σωστή απάντηση. Ειδικότερα, όσο αυξάνεται η τιμή του ν, παρατηρείται γενικά μείωση των τεκμηριώσεων που συνδυάζουν διαδικασία και λεκτική επεξήγηση και αντίστοιχη αύξηση των απαντήσεων που τεκμηριώνονται μόνο μέσω διαδικασίας, με τη μεταβολή αυτή να είναι εντονότερη στα ζητούμενα β και ν. Παράλληλα, οι μη τεκμηριωμένες σωστές απαντήσεις παραμένουν συνολικά περιορισμένες, εμφανίζοντας μεγαλύτερη συχνότητα στα προβλήματα με ζητούμενο το ν.

5.1.2 Ατομικά αποτελέσματα

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε τη συνολική επίδοση και την τεκμηρίωση ανά παιδί. Ως επίδοση υπολογίστηκε το άθροισμα των σωστών απαντήσεων στα προβλήματα. Υπολογίστηκε επίσης το σύνολο των τεκμηριωμένων απαντήσεων στο σύνολο των απαντήσεων του κάθε παιδιού, καθώς και ο τύπος της τεκμηρίωσης.

Στον Πίνακα 9 παρουσιάζεται η συχνότητα της κατηγορίας τεκμηρίωσης για τις σωστές απαντήσεις του κάθε παιδιού, οι οποίες αθροίζουν στο σύνολο των σωστών του απαντήσεων, καθώς και ο λόγος των τεκμηριωμένων απαντήσεων προς τις σωστές, ανά παιδί.

Ομάδα	Παιδί	Κατηγορία Τεκμηρίωσης				Σωστές	Τεκμ/νες	Τεκμ./ Σωστές
		Δ[1]	Λ[2]	Δ & Λ[3]	ΜΤ[4]			
I	Άγης	3	9	34	0	46	46	1
	Άρια	5	7	34	0	46	46	1
	Διαμαντής	10	11	25	0	46	46	1
	Γιάννης	5	2	38	1	46	45	0.98
	Ίριδα	19	1	25	1	46	45	0.98
	Κώστας	9	7	28	2	46	44	0.96
	Μαρία	8	3	35	0	46	46	1
	Ορφέας	13	6	27	0	46	46	1
II	Δέσποινα	8	2	35	0	45	45	1
	Δήμος	10	7	28	0	45	45	1
	Μάρκος	20	0	24	1	45	44	0.98
III	Ευτύχης	12	0	15	0	27	27	1
	Άντυ	10	0	17	1	28	27	0.96
	Πέτρος	12	0	11	4	27	23	0.85
	Άλεξ	6	0	18	2	26	24	0.92
	Σύνολο	150	55	394	12	611	599	0.98

Σημείωση.

[1] Μόνο με Διαδικασία

[2] Με Διαδικασία και Λεκτικά

[3] Μόνο Λεκτικά

[4] Μη Τεκμηριωμένες

Πίνακας 9: Σύνολο σωστών και τεκμηριωμένων απαντήσεων ανά παιδί και κατηγορία τεκμηρίωσης

Από τον Πίνακα 9 φαίνεται ότι μια ομάδα 8 παιδιών (Ομάδα Ι) έχει απαντήσει σωστά σε όλα τα προβλήματα του μεταελέγχου, με 5 από αυτά να έχουν τεκμηριώσει όλες τις σωστές απαντήσεις τους και τα υπόλοιπα 3 να έχουν το πολύ δύο ατεκμηρίωτες απαντήσεις. Στην ομάδα αυτή συμπεριλαμβάνεται και ένα προνήπιο (Γιάννης).

Μια δεύτερη ομάδα 3 παιδιών (Ομάδα ΙΙ) έχουν δώσει μία λανθασμένη απάντηση. Δύο από τα παιδιά αυτής της ομάδας έχουν τεκμηριώσει όλες τις σωστές απαντήσεις τους, ενώ το τρίτο δεν έχει τεκμηριώσει μία απάντηση.

Τέλος, μια ομάδα 4 παιδιών (Ομάδα ΙΙΙ, με ένα προνήπιο, τον Ευτύχη) έχουν αισθητά μικρότερη συνολική επίδοση, με το σύνολο των σωστών τους απαντήσεων να κυμαίνεται από το 26 έως το 28 στο σύνολο των 46 προβλημάτων (57% έως 61%). Και σε αυτή την ομάδα, ωστόσο, οι σωστές απαντήσεις τεκμηριώνονται σε μεγάλο βαθμό.

Από τον Πίνακα 9, παρατηρούμε ότι για κάθε ένα παιδί η επικρατούσα κατηγορία τεκμηρίωσης είναι *Με Διαδικασία και Λεκτικά*, με τη εξαίρεση τον Πέτρο. Σε όλες τις ομάδες παιδιών εμφανίζονται μη τεκμηριωμένες απαντήσεις, με την Ομάδα ΙΙΙ να συγκεντρώνει την πλειοψηφία τους και τον Πέτρο να δίνει τις περισσότερες. Στην Ομάδα Ι και στην Ομάδα ΙΙ τα παιδιά δίνουν τεκμηριώσεις και από τις τρεις υπόλοιπες κατηγορίες, με την εξαίρεση του Μάρκου (Ομάδα ΙΙ) που δεν τεκμηρίωσε καμία απάντηση αποκλειστικά λεκτικά και έδωσε τεκμηριώσεις της κατηγορίας *Μόνο με διαδικασία* με μεγάλη σχετική συχνότητα και ίδια μόνο με παιδιά της Ομάδας ΙΙΙ (Ευτύχης, Πέτρος). Στην Ομάδα Ι παρατηρούμε διαφορές στο μείγμα τεκμηριώσεων που έδωσαν τα παιδιά, με τη σχετική συχνότητα της κατηγορίας ανά παιδί *Μόνο με διαδικασία* να κυμαίνεται από 0,07 (Άγης) έως 0,41 (Ίριδα) και της κατηγορίας *Μόνο λεκτικά* από 0,02 (Ίριδα) έως 0,24 (Διαμαντής). Η κατηγορία *Με διαδικασία και Λεκτικά* κυμαίνεται από 0,54 (Διαμαντής, Ίριδα), έως 0,83 (Γιάννης).

Συνοψίζοντας, με κριτήριο την επίδοση των 15 παιδιών που συμμετείχαν στον μεταέλεγχο διακρίνεται πολύ καθαρά μία ομάδα τεσσάρων παιδιών (ένα προνήπιο) η οποία συγκεντρώνει σχεδόν το σύνολο των λανθασμένων απαντήσεων. Ωστόσο, και αυτά τα παιδιά τεκμηρίωσαν τις σωστές τους απαντήσεις σε μεγάλο βαθμό.

Τα υπόλοιπα παιδιά παρουσιάζουν πολύ μικρές διαφορές ως προς την επίδοση, με τα οκτώ να δίνουν μόνο σωστές απαντήσεις και τα τρία να δίνουν από μία λανθασμένη απάντηση. Τα παιδιά αυτά τεκμηρίωσαν όλες ή σχεδόν όλες τις απαντήσεις τους, με κυρίαρχο τρόπο την εφαρμογή διαδικασίας συνοδευόμενη από λεκτική εξήγηση. Τα παιδιά αυτά εν γένει έδωσαν τεκμηριώσεις από όλες τις κατηγορίες, με διαφορές ως προς είδος της τεκμηρίωσης που έδωσε κάθε παιδί πιο συχνά.

5.1.3 Ανάλυση λαθών

Από την προηγούμενη ενότητα φαίνεται ότι οι λανθασμένες απαντήσεις (N=79, 11,4%) εμφανίζονται με μεγαλύτερη σχετική συχνότητα όταν ζητούμενο είναι το ν, πιο συχνά όταν ζητούμενο είναι το β (υποπολλαπλάσιο) παρά το Α (πολλαπλάσιο), και με μικρότερη σχετική

συχνότητα όταν το ν είναι 2, παρά όταν είναι 3 ή 4. Γνωρίζουμε επίσης ότι τα τρία παιδιά της Ομάδας ΙΙ (Δέσποινα, Δήμος, Μάρκος) έδωσαν από μία λανθασμένη απάντηση, και τέσσερα παιδιά της Ομάδας ΙΙΙ (Άλεξ, Άντυ, Ευτύχης, Πέτρος), έδωσαν τις υπόλοιπες 76.

Στον Πίνακα 10, παρουσιάζεται η κατανομή των λανθασμένων απαντήσεων στους διαφορετικούς τύπους προβλημάτων που δόθηκαν στον μεταέλεγχο, ανά ζητούμενο και αριθμητική τιμή του ν (2, 3, 4). Υπενθυμίζεται ότι τα αναλογικά προβλήματα και τα προβλήματα της ««κλασματομηχανής» (πολλαπλασιαστική μεταβολή) ήταν παρόμοια με αυτά της παρέμβασης, ενώ τα προβλήματα του τύπου αναγνώρισης/κατασκευής πολλαπλασίων/υποπολλαπλασίων και τα προβλήματα του τύπου «ισοπληθείς ομάδες»/ «ίσα μέτρα» δεν περιλαμβάνονταν στην παρέμβαση. Τα προβλήματα του τελευταίου τύπου περιλαμβάνουν και τα προβλήματα διαίρεσης μέτρησης που αντιστοιχούν στα προβλήματα με ζητούμενο το ν.

Ζητούμενο	Τύπος Προβλήματος	ν			
		2	3	4	Σύνολο
Α	Αναλογικά Προβλήματα	8	8		16
	«Κλασματομηχανή»	1	1		2
	Ισοπληθείς Ομάδες/Ίσα μέτρα	0	0	4	4
	Αναγνώριση/Κατασκευή	0	0	0	0
	Σύνολο	9	9	4	22
β	Αναλογικά Προβλήματα	8	8		16
	«Κλασματομηχανή»	1	2		3
	Ισοπληθείς Ομάδες/Ίσα μέτρα	0	0	4	4
	Αναγνώριση/Κατασκευή	0	8	8	16
	Σύνολο	9	18	12	39
ν	Διαίρεση μέτρησης	4	7	7	18

Σημείωση.

Το πλήθος των προβλημάτων ανά τύπο και ανά τιμή του ν είναι 2 (1: διακριτές, 1:συνεχείς).

Πίνακας 10: Συχνότητα των λανθασμένων απαντήσεων στον μεταέλεγχο ανά ζητούμενο, τιμή του ν (2, 3, 4) και τύπο προβλήματος

Αξίζει να σημειωθεί εξαρχής ότι τα παιδιά της Ομάδας ΙΙ έδωσαν λανθασμένη απάντηση μόνο σε πρόβλημα διαίρεσης μέτρησης (ζητούμενο το ν). Πιο συγκεκριμένα, η Δέσποινα και ο Μάρκος έδωσαν λανθασμένη απάντηση για ν=4, ενώ ο Δήμος για ν=3.

Λαμβάνοντας το στοιχείο αυτό υπόψη, από τον Πίνακα 10 φαίνεται για το ζητούμενο Α και το ζητούμενο β, τα Αναλογικά Προβλήματα συγκεντρώνουν 8 λανθασμένες απαντήσεις ανά ζητούμενο, που σημαίνει ότι τα παιδιά της Ομάδας ΙΙΙ έδωσαν λανθασμένη απάντηση σε όλα τα προβλήματα αυτού του τύπου, ανεξάρτητα από το ζητούμενο και την τιμή του ν (2, 3). Επιπλέον, όλα τα παιδιά της Ομάδας ΙΙΙ έδωσαν λανθασμένη απάντηση στα προβλήματα του τύπου Αναγνώριση/Κατασκευή, για το ζητούμενο β και για ν=3,4. Αντίθετα, όλα απάντησαν σωστά στον ίδιο τύπο προβλήματος, για το ζητούμενο Α. Τέλος, λανθασμένες απαντήσεις εμφανίζονται με συχνότητα 4 (δηλ. από δύο παιδιά της Ομάδας ΙΙΙ) στα προβλήματα του τύπου των «ισοπληθών ομάδων»/ «ίσων μέτρων» για ν=4.

Όσον αφορά τα προβλήματα με ζητούμενο το ν, παρατηρούνται περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις για ν=3, 4. Στο σύνολο των 18 λαθών, ένα λάθος ανά παιδί προέρχεται από τα 3 παιδιά της Ομάδας ΙΙ. Αυτό σημαίνει ότι στο σύνολο των 24 απαντήσεων των 4 παιδιών της Ομάδας ΙΙΙ στα 6 προβλήματα με ζητούμενο το ν, οι 15 ήταν λανθασμένες.

Συνοψίζοντας, τα παιδιά της Ομάδας ΙΙΙ δεν μπόρεσαν να αντιμετωπίσουν έναν τύπο προβλήματος (αναλογικά προβλήματα) που συμπεριλαμβανόταν στην παρέμβαση, ούτε για το ζητούμενο Α, ούτε για το ζητούμενο β. Όσον αφορά τους τύπους προβλημάτων που δεν περιλαμβάνονταν στην παρέμβαση, τα παιδιά αυτά δεν μπόρεσαν να αντιμετωπίσουν τα προβλήματα αναγνώρισης/κατασκευής για ν=3,4 για το ζητούμενο β, όπου απαιτείται αναγνώριση των όρων «ένα τρίτο» και «ένα τέταρτο». Αντίθετα, έδωσαν σωστή απάντηση σε όλα τα αντίστοιχα προβλήματα με ζητούμενο το Α, όπου απαιτείται η αναγνώριση του όρου «ν-πλάσιο» για ν=2,3,4. Τέλος, έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις στα περισσότερα από τα προβλήματα διαίρεσης μέτρησης (ζητούμενο το ν).

Στη συνέχεια αναλύονται τα λάθη των παιδιών ανάλογα με το ζητούμενο (Α, β, ή ν). Σε κάθε κατηγορία υπάρχουν και οι λανθασμένες απαντήσεις που δεν ήταν τεκμηριωμένες με οποιονδήποτε τρόπο οι οποίες φαίνεται να έχουν επιλεχθεί τυχαία. Με δεδομένο ότι το εκάστοτε ζητούμενο απαντήθηκε λανθασμένα, εξετάζουμε σε ποιο/ά από τα δύο δεδομένα έγινε το λάθος και ποιο ακριβώς ήταν.

Ζητούμενο το Α. Στην περίπτωση λανθασμένων απαντήσεων για το ζητούμενο Α (Α*), διακρίνονται τα λάθη στα οποία το ν είναι σωστό, αλλά γίνεται λάθος στο β (β*) και αυτά που το λάθος γίνεται στο ν (ν*). Πιο αναλυτικά:

Στην πρώτη περίπτωση **(νxβ*≠Α)** τα παιδιά επαναλαμβάνουν ν φορές ένα β*, διαφορετικό από αυτό που τους δόθηκε. Εδώ, τα παιδιά παρόλο που τους δίνεται ένα κομμάτι ή μια ομάδα αντικειμένων ως β, το αφήνουν στην άκρη στην προσπάθεια τους να βρουν ν αντίγραφα για να κατασκευάσουν το ζητούμενο Α. Τα παιδιά δίνουν βάρος στο να επιλέξουν τον σωστό αριθμό αντίγραφων, μετρούν τα αντίγραφα του β* που επιλέγουν αλλά δεν ελέγχουν αν η επιλογή τους ταιριάζει με το αρχικό β. Στο Πλαίσιο 6 που ακολουθεί παρουσιάζονται παραδείγματα για το λάθος αυτό σε συνεχείς και διακριτές ποσότητες.

Συνεχείς ποσότητες

Στο Π2.1 («κλασματομηχανή» για ν=2), ο Άλεξ παίρνει στα χέρια του το β που του δίνεται και το αφήνει δίπλα στα αντίγραφα των διαθέσιμων β. Στην συνέχεια αναφέρει πως πρέπει να βρει δύο κομμάτια αλλά επιλέγει δύο αντίγραφα από ένα β* διαφορετικό από αυτό που του δόθηκε. Ενώνει τα κομμάτια που επέλεξε και κατασκευάζει ένα Α* (λανθασμένο). Το παιδί εξηγεί πως κατασκεύασε το διπλάσιο η μηχανή λέγοντας: «Ένωσε δύο κομμάτια και το έφτιαξε».

Διακριτές ποσότητες

Αντίστοιχα, στο Α2.6 (αναλογικό πρόβλημα για ν=4, β=2), ο Ευτύχης παίρνει στο χέρι του τις δύο καραμέλες και τις αφήνει δίπλα στις καραμέλες που βρίσκονται επάνω στο τραπέζι. Στη συνέχεια και ενώ μουρμουρίζει: «τέσσερις φορές, τέσσερις φορές» παίρνει από τον σωρό με τις καραμέλες μία τριάδα ως β*. Επαναλαμβάνει την τριάδα τέσσερις φορές και απαντά χωρίς να εξηγεί, καταμετρώντας τις καραμέλες και λέγοντας: «Είναι δώδεκα».

Πλαίσιο παραδείγματος 6: Παραδείγματα κατασκευής του Α με σωστό ν και λανθασμένο β (β*)*

Στη δεύτερη περίπτωση **(ν*xβ≠Α)** τα παιδιά χρησιμοποιούν το β που τους δίνεται, αλλά παίρνουν λανθασμένο αριθμό αντιγράφων του. Τα παιδιά δεν χρησιμοποιούν εμπράγματες αναπαραστάσεις για το ν, πιθανώς γιατί θεωρούν ότι δεν τις χρειάζονται. Στο Πλαίσιο 7 παρουσιάζονται παραδείγματα αυτής της κατηγορίας λαθών για συνεχείς και διακριτές ποσότητες.

Συνεχείς ποσότητες

Στο Β2.3 (πρόβλημα αναγνώρισης του όρου «τριπλάσιο» και κατασκευής της αντίστοιχης ποσότητας), ο Άντυ παίρνει στα χέρια του το β που του δίνεται και πλησιάζοντας το στις διαθέσιμες επιλογές διαλέγει ένα ίδιο με αυτό. Κατασκευάζει ένα Α* ενώνοντας τα δύο β που έχει στα χέρια του. Στην συνέχεια απαντά «αυτό είναι το τριπλάσιο» χωρίς να εξηγεί περαιτέρω την επιλογή του.

Διακριτές ποσότητες

Αντίστοιχα, Β2.5 (πρόβλημα αναγνώρισης του όρου «τριπλάσιο» και κατασκευής της αντίστοιχης ποσότητας, β=3), ο Πέτρος παίρνει τις τρεις καραμέλες που έχει ως β και τις τοποθετεί γραμμικά επάνω στο τραπέζι. Λίγο πιο δίπλα κατασκευάζει τρεις ακόμη γραμμές σαν την πρώτη με τρεις καραμέλες. Απαντά καταμετρώντας όλες τις καραμέλες (4 τριάδες) και αναφέροντας τον αριθμό «Δώδεκα» χωρίς να εξηγεί την απάντησή του.

Πλαίσιο παραδείγματος 7: Παραδείγματα κατασκευής του Α με σωστό β και λανθασμένο ν (ν*).*

Ζητούμενο το β. Στην περίπτωση λανθασμένης απάντησης για το β (β*), εμφανίζονται δύο κατηγορίες λαθών. Στην πρώτη κατηγορία, το ν είναι σωστό και το λάθος αφορά το Α (Α*), με δύο διαφορετικούς τρόπους. Στη δεύτερη κατηγορία, το λάθος γίνεται στο ν. Πιο αναλυτικά:

Στην πρώτη κατηγορία **(νxβ* ≠ Α, με έλεγχο)**, τα παιδιά επιλέγουν ένα β* διαφορετικό από το σωστό αποτέλεσμα (β), παίρνουν ν αντίγραφα του β*, συνθέτουν ένα Α*, συγκρίνουν με το δεδομένο Α και δεν αναθεωρούν την αρχική τους επιλογή, ενώ υπάρχει διαφορά ανάμεσα στο κατασκευασμένο Α* και το δοθέν Α**.** Στο Πλαίσιο 8 παρουσιάζονται παραδείγματα αυτής της περίπτωσης λαθών.

Συνεχείς ποσότητες

Στο Π1.3 (αναλογικό πρόβλημα , ν=3), ο Άντυ, αφού επιλέξει ένα β* μεγαλύτερο από το ζητούμενο β που θεωρεί ότι είναι η δόση που χρειάζεται η Παμ, βρίσκει δύο ακόμα αντίγραφά του, τα ενώνει γραμμικά τοποθετώντας τα δίπλα στο δοθέν Α. Στη συνέχεια τα απομακρύνει από το Α και παίρνει ένα από αυτά απαντώντας: «Θα πάρω το ένα από τα τρία κομμάτια για την Παμ. Αυτό το κομμάτι θα της δώσω».

Διακριτές ποσότητες

Αντίστοιχα, στο έργο Β2.4 (πρόβλημα αναγνώρισης του όρου «ένα τρίτο» και κατασκευής της αντίστοιχης ποσότητας, Α=9), ο Πέτρος κοιτάζει τις λωρίδες με τις σύνθετες μονάδες

και επιλέγει εκείνη που έχει την τετράδα λέγοντας: «Εννιά είναι πολλές. Και όταν μοιράσω πρέπει να είναι πολλές». Επιλέγει 2 ακόμη τετράδες, τις ενώνει γραμμικά και τις συγκρίνει με το δοθέν Α. Παρόλο που το Α* που κατασκευάζει δεν είναι ίδιο με το δοθέν, παίρνει μία από τις λωρίδες με τις τετράδες και απαντά πως «4 καραμέλες θα πάρει το κάθε παιδί» χωρίς να δικαιολογεί παραπάνω την απάντησή του.

Πλαίσιο παραδείγματος 8: Παράδειγμα αποδοχής του λανθασμένου β μετά από έλεγχο (νxβ* ≠ Α)*

Στη δεύτερη περίπτωση **(νxβ*≠ Α, χωρίς έλεγχο),** τα παιδιά επιλέγουν ένα β*, διαφορετικό από το σωστό β, παίρνουν το σωστό πλήθος ν από αντίγραφα του β*, αλλά δεν λαμβάνουν υπόψη ότι αυτά πρέπει να συγκροτούν το Α. Στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων, αυτό μπορεί να σημαίνει ότι τα παιδιά «μοιράζουν» ένα μέρος του Α, χωρίς να το εξαντλούν. Επισημαίνεται ότι αυτές οι περιπτώσεις θα μπορούσαν να θεωρηθούν μη τεκμηριωμένες λανθασμένες απαντήσεις, καθώς τα παιδιά δεν τεκμηριώνουν ούτε στην πράξη, ούτε λεκτικά την επιλογή τους. Στο πλαίσιο παραδείγματος 9 παρουσιάζεται ένα τέτοιο παράδειγμα.

Συνεχείς ποσότητες

Στο έργο Β2.4 (πρόβλημα αναγνώρισης του όρου «ένα τρίτο» και κατασκευής της αντίστοιχης ποσότητας), ο Άλεξ επιλέγει ένα από τα διαθέσιμα κομμάτια ως το ένα τρίτο που πρέπει να κατασκευαστεί και άλλα δύο αντίγραφά του. Στη συνέχεια δίνει κάθε ένα από αυτά σε κάθε παραλήπτη χωρίς να προσπαθεί να επαληθεύσει την απάντησή του και χωρίς να εξαντλεί το αρχικό Α. Δεν εξηγεί.

Διακριτές ποσότητες

Στο έργο Α1.6 («ισοπληθείς ομάδες» για ν=4, Α=8), ο Άντυ παίρνει στα χέρια του τις 8 καραμέλες και βάζει μία καραμέλα μπροστά από κάθε παραλήπτη. Αφήνει τις υπόλοιπες καραμέλες επάνω στο τραπέζι και απαντά αναφέροντας λέγοντας «Μία θα δώσω».

Πλαίσιο παραδείγματος 9: Παράδειγμα αποδοχής του λανθασμένου β χωρίς έλεγχο (νxβ* ≠ Α)*

Στη δεύτερη κατηγορία **(ν*xβ≠ Α)** το παιδί επιλέγει το σωστό β, αναζητά ν* αντίγραφα του β (αντί του σωστού ν), συνθέτει ένα Α*, το συγκρίνει με το Α, και απορρίπτει τη σωστή απάντηση. Εδώ το παιδί επιμένει στην επιλογή του για το β χωρίς να λαμβάνει υπόψιν του τον αριθμό των μεριδίων που πρέπει να κατασκευάσει και δεν χρησιμοποιεί την εμπράγματη αναπαράσταση του λόγου ή τις εμπράγματες αναπαραστάσεις για τους παραλήπτες που έχει στη διάθεσή του. Η κατηγορία αυτή λαθών εμφανίζεται για συνεχείς και διακριτές ποσότητες (Πλαίσιο παραδείγματος 10).

Συνεχείς ποσότητες

Στο Π1.1 (αναλογικό πρόβλημα, ν=2), ο Πέτρος επιλέγει το κομμάτι που εκτιμά πως είναι το μισό (σωστό β) για να φτιάξει τη δόση της Πάμ λέγοντας «αυτό το κομμάτι θα πάρει η Παμ». Δεν χρησιμοποιεί το εργαλείο αναπαράστασης του λόγου, παίρνει απευθείας τρία αντίγραφα του β και συνθέτει ένα Α*. Παρατηρεί ότι το Α* είναι πιο μεγάλο από το δεδομένο Α, επιλέγει ένα β*, μικρότερο από το β, από το οποίο βρίσκει τρία αντίγραφα που κατασκευάζουν το δοθέν Α. Προχωρά στην απάντησή του δείχνοντας το β* που επέλεξε και χωρίς να εξηγεί την επιλογή του.

Διακριτές ποσότητες

Αντίστοιχα, ο Άλεξ στο Π1.2 (αναλογικό πρόβλημα, ν=2, Α=6) επιλέγει την λωρίδα με την τριάδα, εκτιμώντας πως αυτό είναι το ζητούμενο β. Παίρνει δύο ακόμη αντίγραφα της τριάδας που επέλεξε, τα ενώνει γραμμικά και τα συγκρίνει με το Α που του δόθηκε. Όταν παρατηρεί ότι το Α* που κατασκεύασε είναι μεγαλύτερο παίρνει τη λωρίδα με το ζευγάρι, βρίσκει 3 αντίγραφα, τα ενώνει και όταν παρατηρεί ότι το Α που κατασκεύασε είναι ίδιο με το αρχικό απαντά πως «Δύο καραμέλες θα δώσω στον Γιάννη».

Πλαίσιο παραδείγματος 10: Παράδειγμα λάθους στο ν (ν) για το ζητούμενο β (ν*χβ≠Α).*

Ζητούμενο το ν. Στα προβλήματα αυτά το παιδί χρησιμοποιεί το δοθέν β ως μερίδιο το οποίο πρέπει να έχει ο κάθε παραλήπτης, αλλά δεν χρησιμοποιεί τον σωστό αριθμό των παραληπτών. Πιο αναλυτικά, το παιδί φροντίζει να έχουν το β που τους δίνεται όλοι οι διαθέσιμοι «παραλήπτες» πάνω στο τραπέζι ή προσθέτει τον εαυτό του ως παραλήπτη. Όσον αφορά την προσπάθεια των παιδιών να έχουν μερίδιο όλοι οι παραλήπτες πιθανόν αυτά να επηρεάστηκαν από το γεγονός ότι κατά τη διάρκεια της παρέμβασης που δεν υπήρχε το πλαίσιο της μέτρησης, επιμέναμε στο να έχουν όλοι οι παραλήπτες μερίδιο και μάλιστα ίσο μεταξύ τους. Στο Πλαίσιο 11 παρουσιάζονται παραδείγματα αυτής της κατηγορίας λάθους για συνεχείς και διακριτές ποσότητες.

Συνεχείς ποσότητες

Στο έργο Α3.3 («ίσα μέτρα» για ν=3), ο Ευτύχης παίρνει στα χέρια του το β που του δίνεται και όλα τα διαθέσιμα αντίγραφα του που βρίσκει επάνω στο τραπέζι και δίνει από ένα σε κάθε παραλήπτη προσθέτοντας σε αυτούς και τον εαυτό του. Στη συνέχεια εξηγεί πως: «Όλοι έχουν πάρει από ένα ίδιο κομμάτι».

Διακριτές ποσότητες

Αντίστοιχα στο έργο Α3.6 («ισοπληθείς ομάδες» για ν=4, Α=8), ο Άλεξ βάζει ένα ζευγάρι καραμέλες μπροστά από κάθε παραλήπτη. Όταν οι καραμέλες που πήρε ως αρχικές (Α) τελειώσουν ενώ δεν έχουν πάρει β όλοι οι παραλήπτες, παίρνει και άλλες καραμέλες από την στοίβα με τις διαθέσιμες επάνω στο τραπέζι και συνεχίζει μοιράζοντας και στον πέμπτο παραλήπτη. Στη συνέχεια απαντά: «Όλοι έχουν ένα ζευγάρι. Άρα μοίρασα σε όλους και έχουν όλοι τις ίδιες καραμέλες).

Πλαίσιο παραδείγματος 11: Παράδειγμα λάθους όταν το ζητούμενο είναι το ν

Στον Πίνακα 11, παρουσιάζεται η συχνότητα εμφάνισης των παραπάνω κατηγοριών λαθών ανά παιδί και ανά ζητούμενο όπως αυτά παρουσιάστηκαν και παραπάνω. Στον Πίνακα 11 περιλαμβάνεται και η κατηγορία ΜΑ/ΜΤ που αναφέρεται στις περιπτώσεις που τα παιδιά δεν απάντησαν, ή απάντησαν μόνο μέσω επιλογής.

Παιδί	Α*			β*				ν*		Σύνολο
	ΜΑ/ΜΤ[1]	ν x β* ≠ Α	ν* x β ≠ Α	ΜΑ/ΜΤ	ν x β* ≠ Α		ν* x β ≠ Α	ΜΑ/ΜΤ	ν* x β ≠Α	
					ΜΕ[2]	ΧΕ[3]				
Άλεξ	2	2	3	2	2	1	4	1	3	20
Ευτύχης	1	2	2	2	2	1	5	2	2	19
Πέτρος	1	2	2	2	2	3	4	1	2	19
Άντυ	1	2	2	1	2	1	5	2	2	18
Δέσποινα	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Δήμος	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Μάρκος	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Σύνολο	5	8	9	7	8	6	18	6	12	79

Σημείωση.

[1] Μη απάντηση ή απάντηση μόνο μέσω επιλογής.

[2] Με έλεγχο

[3] Χωρίς έλεγχο

Πίνακας 11: Συχνότητα εμφάνισης τύπου λαθών
ανά παιδί και ανά ζητούμενο που απαντήθηκε λανθασμένα (Α, β*, ν*)*

Από τον Πίνακα 11, φαίνεται ότι όλα τα παιδιά της Ομάδας ΙΙ έκαναν λάθη από όλες τις κατηγορίες, για όλα τα ζητούμενα. Επίσης, σε 4 ή 5 περιπτώσεις το καθένα, δεν απάντησαν ή έδωσαν απάντηση μέσω επιλογής και μόνο (ΜΑ/ΜΤ). Επιπλέον, για το ζητούμενο β,

δόθηκαν 3 ή 5 (Πέτρος) απαντήσεις της κατηγορίας νxβ* ≠ Α με και χωρίς έλεγχο. Σε αυτές τις απαντήσεις, είτε δεν έλεγξαν αν τα ν αντίγραφα από το β* που είχαν επιλέξει συγκροτούν το Α, είτε πραγματοποίησαν φαινομενικά τη σύγκριση, αλλά αγνόησαν τη διαφορά.

Συνοψίζοντας, οι λανθασμένες απαντήσεις κατά τον μεταέλεγχο προήλθαν κατά βάση από τα τέσσερα παιδιά της Ομάδας ΙΙΙ, μεταξύ των οποίων και ένα προνήπιο (Ευτύχης). Για τα παιδιά αυτά το είδος του προβλήματος συνδέεται με το αν θα απαντήσουν σωστά ή όχι. Ένα ενδιαφέρον εύρημα είναι ότι το είδος προβλήματος που συγκέντρωσε τα περισσότερα λάθη, είναι ένα αυτά που περιλαμβάνονταν στην παρέμβαση και, συγκεκριμένα, τα αναλογικά προβλήματα. Στα προβλήματα αυτά η Ομάδα ΙΙΙ απέτυχε συνολικά, ανεξάρτητα από το είδος του ζητούμενου (Α ή β) και την τιμή του ν. Δεδομένου ότι η δομή των αναλογικών προβλημάτων είναι πράγματι η πιο σύνθετη σε σχέση με τα υπόλοιπα είδη προβλημάτων της παρέμβασης και του μεταελέγχου, το εύρημα αυτό θέτει ένα ζήτημα για προβληματισμό σχετικά με την επιλογή να συμπεριληφθεί στην παρέμβαση.

Ο δεύτερος τύπος προβλήματος που προκάλεσε πολλές λανθασμένες απαντήσεις ήταν τα προβλήματα αναγνώρισης/κατασκευής, τα οποία έχουν μικρότερη δομική διαφορά από τα προβλήματα της παρέμβασης, αλλά προαπαιτούν την αναγνώριση όρων. Σε αυτή την περίπτωση, η Ομάδα ΙΙ απέτυχε συνολικά στα προβλήματα για το «ένα τρίτο» και το «ένα τέταρτο». Από την άλλη μεριά, όλα αυτά τα παιδιά απάντησαν σωστά (και τεκμηριωμένα) σε όλα τα υπόλοιπα προβλήματα της κατηγορίας αυτής.

Στα αναλογικά προβλήματα και τα προβλήματα αναγνώρισης/κατασκευής για το β σημειώθηκαν και οι περιπτώσεις στις οποίες τα παιδιά δεν απάντησαν καθόλου ή απάντησαν μόνο μέσω επιλογής και χωρίς εξήγηση, πολύ πιθανόν στην τύχη.

Γενικότερα, το είδος του ζητούμενου και η αριθμητική τιμή του ν συνδέονται, όπως ήταν αναμενόμενο από τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα, με την επιτυχία ή μη στο εκάστοτε πρόβλημα. Με την εξαίρεση των αναλογικών προβλημάτων, τα παιδιά απαντούν συστηματικά σωστά για το Α για ν=2,3 και λιγότερο για ν=4. Τα λάθη που έκαναν στην περίπτωση του Α δείχνουν ότι τα παιδιά δυσκολεύονται να συγκρατήσουν νοερά (στην περίπτωση του λανθασμένου ν) ή να διαχειριστούν στην πράξη (στην περίπτωση του λανθασμένου β) τα στοιχεία του προβλήματος. Αν τα παιδιά είχαν χρησιμοποιήσει τις αναπαραστάσεις για το ν, ενδεχομένως, δεν θα τα έκαναν. Για το β, πάντα με την εξαίρεση

των αναλογικών προβλημάτων, τα παιδιά απαντούν συστηματικά σωστά μόνο για ν=2. Ορισμένα από τα λάθη που έγιναν στην περίπτωση του β είναι πιο σοβαρά, σε σχέση με αυτά του Α. Σε κάποιες περιπτώσεις τα παιδιά εφάρμοσαν μια έγκυρη διαδικασία, αλλά αγνόησαν το αποτέλεσμά της, ενώ σε άλλες παραβίασαν βασικές αρχές, όπως την αρχή της εξάντλησης της αρχικής ποσότητας κατά τον ισομερισμό.

Τέλος, όταν το ζητούμενο είναι το ν (προβλήματα διαίρεσης μέτρησης), τα παιδιά φαίνεται να θεωρούν ότι το ίδιο μερίδιο πρέπει να δοθεί σε όλους τους διαθέσιμους παραλήπτες. Αυτό το λάθος ενδεχομένως οφείλεται στο γεγονός ότι η ισότητα των μεριδίων για όλους τους παραλήπτες ήταν ένα από τα σημεία εστίασης κατά τη διάρκεια της παρέμβασης όταν το ζητούμενο ήταν το β. Οι λανθασμένες απαντήσεις στα προβλήματα αυτά, συνεπώς, μπορεί να οφείλονται στο ότι δεν έχει γίνει αντιληπτή η διαφορά ανάμεσα στους δύο τύπους προβλημάτων.

5.1.4 Σύνοψη των ευρημάτων και σύνδεση με την παρέμβαση

Από τον προέλεγχο, διαπιστώθηκε ότι ένα προνήπιο (Γιάννης) και τρία ακόμη παιδιά (Άρια, Δέσποινα και Άγης) είχαν ένα προβάδισμα σε σχέση με τα υπόλοιπα παιδιά. Τα παιδιά αυτά έλυσαν προβλήματα «δίκαιης μοιρασιάς» για δύο παραλήπτες, κατάσταση η οποία είναι πιο οικεία για τα παιδιά αυτής της ηλικίας. Ακόμη, ο Άγης ήταν το μόνο παιδί που αναγνώρισε τον όρο «διπλάσιο» και κατασκεύασε το διπλάσιο μιας ποσότητας. Παρόμοια προβλήματα δεν είχαν δουλευτεί στο σχολικό τους περιβάλλον πριν την παρέμβαση. Επομένως, το προβάδισμα αυτό θα μπορούσε να αποδοθεί σε μεγαλύτερη ευχέρεια στην επίλυση προβλήματος αυτών των παιδιών ή/και σε άτυπη γνώση για τον συγκεκριμένο τύπο προβλήματος που είχαν αναπτύξει στο πλαίσιο του ευρύτερου περιβάλλοντός τους.

Για τα παιδιά που συμμετείχαν και ολοκλήρωσαν τη διαδικασία του μεταελέγχου, η συνολική εξέταση της επίδοσης έδειξε υψηλή επίδοση γενικά και παρόμοια στις διακριτές και τις συνεχείς ποσότητες. Το είδος του ζητούμενου φάνηκε να παίζει ρόλο, με τα προβλήματα που αντιστοιχούν σε πολλαπλασιασμό να είναι λιγότερο απαιτητικά, και τα προβλήματα διαίρεσης, ιδιαίτερα μέτρησης, να είναι πιο απαιτητικά. Τέλος, τα προβλήματα για το διπλάσιο/ένα δεύτερο προκάλεσαν τα λιγότερα λάθη, ενώ αυτά για το τετραπλάσιο/ένα τέταρτο τα περισσότερα. Η εξέταση της επίδοσης ανά παιδί έδειξε, ωστόσο, ότι οι λανθασμένες απαντήσεις οφείλονταν σχεδόν αποκλειστικά σε ένα προνήπιο

(Ευτύχης) και τρία ακόμα παιδιά (Άλεξ, Άντυ και Πέτρος). Η εξέταση των λαθών τους έδειξε ότι και ο τύπος του προβλήματος έπαιξε ρόλο στην επίδοση αυτών των παιδιών. Συγκεκριμένα, δεν μπόρεσαν να αντιμετωπίσουν τα αναλογικά προβλήματα, παρότι ήταν ένας τύπος προβλημάτων που είχαν επεξεργαστεί στη διάρκεια της παρέμβασης. Επιπλέον, δυσκολεύτηκαν στα προβλήματα που προαπαιτούσαν την αναγνώριση όρων, ιδιαίτερα τους όρους «ένα τρίτο» και «ένα τέταρτο». Κάποια από τα λάθη που έκαναν τα παιδιά αυτά οφείλονταν στην αδυναμία διαχείρισης των στοιχείων του προβλήματος, χωρίς τη χρήση εμπράγματων αναπαραστάσεων. Ωστόσο, υπήρξαν και λάθη στα οποία τα παιδιά φάνηκε περιστασιακά να παραβλέπουν βασικές αρχές που διέπουν την εκάστοτε κατάσταση (π.χ., ότι στο διαμερισμό η αρχική ποσότητα πρέπει να εξαντλείται). Φαίνεται ότι για τα παιδιά αυτά δεν είχε ακόμη εδραιωθεί η συστηματική συνεκτίμηση όλων των απαραίτητων προϋποθέσεων κατά την επίλυση των προβλημάτων. Τέλος, τα παιδιά αυτά φάνηκε να συγχέουν την κατάσταση της διαίρεσης μέτρησης με τη διαίρεση μερισμού, θεωρώντας ότι είναι «δίκαιο» να πάρουν το δεδομένο μερίδιο όλοι οι δυνητικοί παραλήπτες.

Τα υπόλοιπα παιδιά που συμμετείχαν στον μεταέλεγχο και ολοκλήρωσαν τη διαδικασία είχαν άριστη ή εξαιρετικά υψηλή (με μόνο μια λανθασμένη απάντηση) επίδοση, ανεξάρτητα από το αν είχαν προβάδισμα στον προέλεγχο ή όχι. Στα παιδιά αυτά συμπεριλαμβάνεται ένα προνήπιο (Γιάννης). Η πρώτη ανάλυση των τεκμηριωμένων απαντήσεων δείχνει ότι οι σωστές απαντήσεις μέσω επιλογής είναι τεκμηριωμένες σε πολύ υψηλό βαθμό, ανεξάρτητα από το είδος της ποσότητας και με πολύ μικρές διαφορές μεταξύ των ζητουμένων Α και β. Τα προβλήματα διαίρεσης μέτρησης (ζητούμενο ν) ήταν αυτά που τεκμηριώθηκαν λιγότερο συχνά. Επιπλέον, για μεγαλύτερες τιμές του ν, τα παιδιά φαίνεται να δίνουν πιο συχνά τεκμηρίωση που βασίζεται μόνο στην εφαρμογή διαδικασίας. Σε ατομικό επίπεδο, σχεδόν όλα τα παιδιά, ανεξάρτητα από την επίδοσή του, τεκμηριώνουν πιο συχνά τόσο με εφαρμογή διαδικασίας, όσο και λεκτικά. Στα παιδιά με υψηλή επίδοση (Ομάδες Ι και ΙΙ), υπάρχουν διαφορές ως προς το μείγμα των τεκμηριώσεων (μόνο με διαδικασία, μόνο λεκτικά ή και τα δύο), ενώ στα παιδιά χαμηλότερης επίδοσης (Ομάδα ΙΙΙ) απουσιάζουν οι αποκλειστικά λεκτικές εξηγήσεις.

Τα προνήπια στην παρέμβαση

Το εύρημα που χρήζει προσοχής σε αυτή την ενότητα αφορά τη συμπεριφορά της πλειοψηφίας των προνηπίων κατά τον μεταέλεγχο. Με την εξαίρεση του Γιάννη και του

Ευτύχη, τα υπόλοιπα προνήπια, είτε αρνήθηκαν τη συμμετοχή στη διαδικασία του μεταελέγχου, είτε εγκατέλειψαν τη διαδικασία του μεταελέγχου. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι κατά τη διάρκεια της παρέμβασης κανένα από τα προνήπια αυτά δεν είχε φανεί να δυσανασχετεί για τη συμμετοχή του στις δραστηριότητες. Αντίθετα, εκδήλωναν ευχαρίστηση όταν η ερευνήτρια καλούσε την ομάδα στη γωνιά με το υλικό και συχνά αναφέρονταν στη διαδικασία ως «παιχνίδι» (π.χ. «Κυρία, σήμερα δεν θα παίξουμε με τις Παμ;»). Από τις καταγραφές κατά τη διάρκεια της παρέμβασης και την εκ των υστέρων επισκόπηση του βιντεοληπτικού υλικού, διαπιστώθηκε ότι τα προνήπια διέφεραν μεταξύ τους ως προς την προθυμία με την οποία προσφέρονταν τα ίδια να επιλύσουν κάποιο δεδομένο πρόβλημα, αλλά και ως προς τα δείγματα κατανόησης της εκάστοτε πολλαπλασιαστικής κατάσταση που αντιμετώπιζαν. Πιο συγκεκριμένα:

Στην πρώτη δραστηριότητα, τα προνήπια συμμετείχαν ενεργά, επιλύοντας αυτόνομα τα διάφορα προβλήματα της δραστηριότητας (π.χ. έβρισκαν ποια είναι η επόμενη «Παμίνα» που θα εμφανιστεί, την κατασκεύαζαν διαπίστωναν ποια είναι μια δεδομένη «Παμίνα» με μέτρηση, έγραφαν τον αριθμό στη φανέλα της και την ονόμαζαν). Συνήθως, δεν περιέγραφαν αυτόνομα λεκτικά τις εκάστοτε σχέσεις και δεν χρησιμοποιούσαν όρους. Στο επεισόδιο που ακολουθεί, ο Πάνος (προνήπιο) διαπιστώνει με μέτρηση ποια είναι η ζητούμενη «Παμίνα», η Μελίτα (προνήπιο) λέει το ακριβές της «όνομα», ενώ η Δέσποινας (νήπιο) χρησιμοποιεί τον όρο «τριπλάσια» και «ένα τρίτο» και περιγράφει λεκτικά τη σχέση και την αντίστροφή της. Ο Πάνος επαναλαμβάνει τα λόγια της Δέσποινας.

> Ε: Πάνο η σειρά σου! Θέλω να μου πεις ποια είναι αυτή η Παμίνα.
>
> Ο Πάνος τοποθετεί αντίγραφα της «Παμ» (μονάδα) το ένα πάνω στο άλλο δίπλα στη ζητούμενη. Σταματά όταν το συνολικό τους ύψος ισούται με αυτό της ζητούμενης.
>
> Πάνος: [ψιθυριστά] Η Τρία Παμ.
>
> Μελίτα: Ναι, έβαλε τρεις Παμ. Τριπάμ.
>
> Ε: Τι σχέση έχει η Τριπάμ με την Παμ; Ξέρετε; Η Τριπάμ είναι ίση με τρεις Παμ.
>
> Δέσποινα: Και είναι η τριπλάσια. Ναι, γιατί χρειάζομαι τρεις Παμ για να την φτιάξω. Δες. Να τη η Τριπάμ. Και η Παμ είναι το ένα από τα τρία της κομμάτια. Το ένα τρίτο.

Πάνος: Ναι. Η Τριπάμ είναι η τριπλάσια. Γιατί χρειάζομαι τρεις Παμ για να την φτιάξω.

Στις δύο επόμενες δραστηριότητες (Αναλογικά Προβλήματα, «κλασματομηχανή») κάποια από τα προνήπια αυτά συνέχισαν να προσφέρονται να επιλύσουν προβλήματα. Έλυσαν αυτόνομα ορισμένα προβλήματα, κυρίως για το «ένα δεύτερο», χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις στρατηγικές (π.χ. επαναλαμβανόμενη 1-1 αντιστοίχιση στις διακριτές, και εκτίμηση στις συνεχείς ποσότητες.

Η Μελίτα σηκώνεται για να λύσει το πρόβλημα με ζητούμενο την μπάρα της «Παμ» και δεδομένο την μπάρα της «Διπαμ».

Το παιδί διαλέγει μία από τις εναλλακτικές μπάρες και την τοποθετεί δίπλα στη δεδομένη.

Μελίτα: Αυτό θα πάρει η μικρή.

Ε.: Πώς ξέρεις ότι αυτό το κομμάτι πρέπει να δώσω στην Παμ;

Μελίτα: Είναι το μισό αυτό. Ένα θα είναι μέχρι εκεί (δείχνει τη μέση της μπάρας «κόβοντας» τη με το χέρι της) και ένα μέχρι εδώ (δείχνει το άκρο της μπάρας).

Από το παραπάνω επεισόδιο φαίνεται, επίσης, ότι η Μελίτα τεκμηριώνει την απάντησή της, συγκρίνοντας το κομμάτι που διάλεξε με τη δεδομένη μπάρα.

Για τις δομημένες διαδικασίες με τη χρήση του εργαλείου του λόγου, τα προνήπια δεν ολοκλήρωναν τη διαδικασία αυτόνομα. Κάποιο πιο προχωρημένο παιδί επενέβαινε για να υποστηρίξει και συχνά να ολοκληρώσει το ίδιο τη διαδικασία. Στο παρακάτω απόσπασμα, το ίδιο παιδί του παραπάνω παραδείγματος (Μελίτα) επιχειρεί να λύσει το αντίστροφο πρόβλημα.

Η Μελίτα σηκώνεται για να λύσει το πρόβλημα με ζητούμενη τη μπάρα της Διπαμ και δεδομένη τη μπάρα της Παμ. Το παιδί διαλέγει δυο κομμάτια ίσα μεταξύ τους, αλλά διαφορετικά από το δεδομένο.

Ε: Αυτό το κομμάτι θα βάλεις δύο φορές; Είναι το κομμάτι που δώσαμε στην Παμ;

Μελίτα: Όχι. θέλω δύο τέτοια κομμάτια.

Το παιδί δείχνει το δεδομένο, αλλά διαλέγει και πάλι δύο κομμάτια ίσα μεταξύ τους και διαφορετικά από το δεδομένο. Τα αντιστοιχεί στα βέλη του εργαλείου, τα ενώνει και δείχνει τη μπάρα που έφτιαξε).

Ε: Είναι το κομμάτι που δώσαμε στην Παμ;

Δέσποινα: Όχι. Αυτό είναι το κομμάτι.

Η Δέσποινα παίρνει το δεδομένο και ένα ίδιο κομμάτι, τα αντιστοιχεί στα βέλη του εργαλείου, τα ενώνει, βρίσκει τη μπάρα που έχει ίδιο μήκος με τα ενωμένα κομμάτια.

Δέσποινα: Είναι δύο φορές το κομμάτι που μας έδωσες. Το διπλάσιο. Μελίτα, αυτό είναι.

Στο παραπάνω επεισόδιο, η Μελίτα φαίνεται να τηρεί δύο βασικές προϋποθέσεις (*τα μέρη που θα συνθέσουν τη διπλάσια μπάρα πρέπει να είναι δύο και να είναι ίσα*) και να εφαρμόζει τη διαδικασία με τη βοήθεια του εργαλείου, αν και χωρίς να ελέγξει ότι τα κομμάτια που έχει επιλέξει είναι ίσα με το δεδομένο. Άλλα προνήπια, αφενός ήταν πιο διστακτικά να σηκωθούν από μόνα τους για να λύσουν ένα πρόβλημα, αφετέρου εμφάνιζαν πιο σημαντικές δυσκολίες κατά την επίλυση. Στο απόσπασμα που ακολουθεί, η ομάδα έχει ήδη καταλήξει στο συμπέρασμα ποια είναι και τι κάνει η δεδομένη «κλασματομηχανή» . Η ερευνήτρια αναδιατυπώνει το συμπέρασμα της ομάδας και καλεί τον Αδριανό, ένα προνήπιο που γενικά δεν ήταν πρόθυμο από μόνο του να λύσει προβλήματα, να βρει τι θα βγάλει η μηχανή από τη μεγάλη πλευρά, αν από τη μικρή μπουν δυο «βιταμίνες».

Ε: Πολύ ωραία! Αυτή η μηχανή φτιάχνει, λοιπόν, το διπλάσιο. Ό,τι βάλουμε από τη μικρή πλευρά θα το κάνει διπλάσιο και θα το βγάζει από τη μεγάλη. Πάρα πολύ ωραία! Για να έρθει ο Ανδριανός να κάνουμε μία δοκιμή. Βάζω μέσα στην μηχανή της κυρίας Διάνοιας, αυτήν την μηχανή την τρομερή, από τη μικρή μεριά δύο βιταμίνες, Μπορείς να μου δείξεις πόσες θα βγάλει από την άλλη; Πόσες φορές θα το φτιάξει αυτό το ζευγάρι;

Αδριανός: Τρεις;

Ε.: Τι θες να πεις; Για κάντο!

Ο Αδριανός τοποθετεί απευθείας τρεις «βιταμίνες» από την άλλη μεριά.

Ε: Το εργαλείο δεν σε βοηθάει καθόλου; Το εργαλείο αυτό τι σου λέει να κάνεις;

Ο Αδριανός δεν απαντά. Η ερευνήτρια απευθύνει την ερώτηση στην ομάδα.

Ε.: Τι μας λέει το εργαλείο;

Πέτρος: Μας λέει να κάνουμε δύο. Δύο φορές τις δύο.

Ε: Άρα αν βάλω τις δύο βιταμίνες από την μικρή πλευρά από την μεγάλη θα βγούνε;

Διαμαντής: Τέσσερις. Δύο φορές οι δύο βιταμίνες. Σωστά;

Ε: Ναι. Σωστά. Θα μας δείξεις Αδριανέ;

Αδριανός: Ναι, θα βγάλει τέσσερις.

Το παιδί τοποθετεί απευθείας τέσσερις «βιταμίνες» στη «μεγάλη» πλευρά της μηχανής.

Αντίθετα με τη Μελίτα, για τον Αδριανό δεν υπάρχουν ενδείξεις ότι κατανοεί κάποιες πτυχές της κατάστασης που αντιμετωπίζει. Ενδεχομένως γι' αυτό δεν του είναι χρήσιμη η υπόδειξη της ερευνήτριας για να χρησιμοποιήσει το «εργαλείο». Επιπλέον, το παιδί δεν μπορεί να βοηθηθεί ούτε από την παρέμβαση των δύο νηπίων, του Πέτρου και του Διαμαντή. Τα παιδιά αυτά βρίσκονται εμφανώς σε πιο προχωρημένο επίπεδο και περιγράφουν λεκτικά την επανάληψη της δεδομένης ποσότητας. Ο Αδριανός αναπαριστά μόνο το αριθμητικό αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξε ο Διαμαντής.

Κάποια από τα προνήπια είχαν ιδιαίτερα ενεργό συμμετοχή στη διάρκεια της παρέμβασης,, συμβάλλοντας στη συζήτηση και θέτοντας προκλήσεις σε μεγαλύτερα παιδιά. Ένα από αυτά ήταν η Καίτη. Στο απόσπασμα που ακολουθεί, η Καίτη αμφισβητεί τον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζει η Άρια (νήπιο) τη λύση στο πρόβλημα του διαμερισμού οκτώ «καραμελών» σε δύο ίσα μέρη.

Άρια: Σε τετράδες θα τις μοιράσω τις καραμέλες.

Η Άρια βάζει το χέρι της ανάμεσα στις καραμέλες, χωρίζοντάς της σε δύο μέρη.

Άρια: Κοίτα. Χωράει μία, δύο τετράδες.

Η Άρια βάζει κάθε μία τετράδα σε ένα «πιάτο». Η Καίτη σηκώνεται και πηγαίνει κοντά στην Άρια, στην απέναντι πλευρά του τραπεζιού.

Καίτη: Δεν είναι δύο τετράδες. Κοίτα, εδώ έχει δυάδες.

Η Καίτη χωρίζει με τα χέρια της κάθε τετράδα σε δύο δυάδες και της απαριθμεί.

Καίτη: Δες! Μία, δύο, τρεις, τέσσερις.

Ε: Τελικά βρε κορίτσια τι έχει; Δυο τετράδες ή τέσσερις δυάδες;

Άγης: Το ίδιο είναι. Το κάθε πιάτο έχει τέσσερις καραμέλες. Αυτή τις λέει τετράδα, η άλλη δυάδες.

Στο παραπάνω απόσπασμα η Καίτη δεν θέτει απλώς έναν γόνιμο προβληματισμό. Κάνει σαφές ότι διακρίνει δυάδες στο σύνολο των τεσσάρων καραμελών, τις οποίες και αντιμετωπίζει ως «ένα», δηλαδή, μοναδοποιεί. Το παιδί αυτό, επιπλέον, είναι από τα πρώτα που άρχισαν να χρησιμοποιούν αυθόρμητα τους όρους «ν-πλάσιο» και «ένα νιοστό». Από το χαρακτηριστικό παράδειγμα που ακολουθεί, η Καίτη φαίνεται να έχει συνδέσει τους όρους με συγκεκριμένες εκφράσεις.

Η Δέσποινα έχει βρει ποιο κομμάτι αντιστοιχεί στην Παμ, με δεδομένο το κομμάτι της Διπαμ (αναλογικό πρόβλημα)

Δέσποινα: Θα πάρει αυτό. Το ένα από τα δύο.

Καίτη: Το ένα δεύτερο πήρε. Ναι. Είπες το ένα από τα δύο.

Ε: Πολύ ωραία! Και η μπάρα που είχα στην αρχή; Που φτιάχνεται αν βάλω αυτό το κομμάτι δύο φορές;

Καίτη: Η διπλάσια. Είπες δύο φορές.

Ανεξάρτητα με τις διαφορές μεταξύ των προνηπίων αυτών, οι μικρότερες ή μεγαλύτερες κατακτήσεις τους στη διάρκεια της παρέμβασης δεν αποτυπώθηκαν από τη δοκιμασία του μεταελέγχου. Το γεγονός αυτό θέτει ένα ζήτημα που πρέπει να ληφθεί υπόψη στη συζήτηση και για μελλοντικούς κύκλους σχεδιασμού, τόσο όσον αφορά την καταλληλόλητα της παρέμβασης για τα προνήπια όπως ο Αδριανός, όσο και στην καταλληλόλητα της αξιολόγησης με τη μέθοδο της ατομική συνέντευξης.

5.2 Εφαρμοσμένες διαδικασίες

Στην ενότητα αυτή εξετάζονται οι διαδικασίες που εφάρμοσαν τα παιδιά κατά την επίλυση των προβλημάτων του μεταελέγχου. Οι εφαρμοσμένες διαδικασίες εξετάστηκαν ξεχωριστά για τα ζητούμενα Α, β, και ν, στο σύνολο των σωστών απαντήσεων των παιδιών.

Για την ανάλυση των διαδικασιών εξετάστηκαν τα βιντεοσκοπημένα δεδομένα των απαντήσεων των παιδιών. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά καταγράψαμε λεπτομερώς το πώς τα παιδιά αλληλεπίδρασαν με το διαθέσιμο εμπράγματο υλικό λαμβάνοντας υπόψιν μας την κάθε τους κίνηση. Στη συνέχεια, οι καταγραφές αυτές κωδικοποιήθηκαν και συγκρίθηκαν με τις διδαγμένες διαδικασίες της παρέμβασης και μεταξύ τους. Μέρος της κωδικοποίησης και της ταξινόμησης των δεδομένων ανά ζητούμενο πραγματοποιήθηκαν ανεξάρτητα από την ερευνήτρια και την επιβλέπουσα, με στόχο τη διασφάλιση της αξιοπιστίας της διαδικασίας. Τυχόν διαφωνίες επιλύθηκαν με συζήτηση ή/και με αναδιοργάνωση των κατηγοριών.

Υπενθυμίζουμε ότι οι διδαγμένες διαδικασίες περιλάμβαναν ένα σύνθετο ενδιάμεσο βήμα (ΕΒ), κατά το οποίο το δεδομένο ή εκτιμημένο β αντιστοιχίζεται επαναληπτικά στην αναπαράσταση του ν. Εμπράγματες αναπαραστάσεις του ν υπήρχαν διαθέσιμες, μέσω των φυσικών αντικειμένων που αναπαριστούν τους «παραλήπτες» στα προβλήματα του τύπου «ισοπληθών ομάδων»/ίσων μέτρων», μέσω των αντιγράφων της «Παμ» (μονάδας) στα αναλογικά προβλήματα, αλλά και μέσω εργαλείου του λόγου. Επισημαίνουμε ότι η εμπράγματη αναπαράσταση του λόγου έχει μεγαλύτερη αναπαραστατική ισχύ, καθώς αναπαριστά τη σχέση 1:ν και όχι απλώς το ν. Ωστόσο, για τις ανάγκες των παρακάτω αναλύσεων, δεν θα κάνουμε αυτή τη διαφοροποίηση. Στοιχεία για τη χρήση του εργαλείου αυτού παρουσιάζονται στην ενότητα 5.2.4.

5.2.1 Διαδικασίες για το ζητούμενο Α

Στα προβλήματα με ζητούμενο το Α ανιχνεύτηκαν οι εξής διαδικασίες:

Σύνθεση του Α με ΕΒ (Ενδιάμεσο Βήμα). Πρόκειται για μια διαδικασία που διατηρεί το ενδιάμεσο υποστηρικτικό βήμα (*ΕΒ*) της διδαγμένης κατά την παρέμβαση διαδικασίας για την κατασκευή του Α, με κάποια αναπαράσταση του ν. Πιο συγκεκριμένα, εφαρμόζοντας τη διαδικασία αυτή, το παιδί αντιστοιχεί ένα β σε κάθε μονάδα του ν. Στη συνέχεια συνενώνει τα β για να συνθέσει το Α. Στο Πλαίσιο 12 που ακολουθεί παρουσιάζονται παραδείγματα αυτής της διαδικασίας.

Συνεχείς ποσότητες

Στο Α2.4 («ίσα μέτρα», ν=3), ο Άντυ παίρνει στα χέρια του το β και βρίσκει ένα ακόμη ίσο με αυτό. Δίνει το πρώτο κομμάτι στο πρώτο κουκλάκι- παραλήπτη και το δεύτερο στο επόμενο. Παρατηρεί πως υπάρχει ακόμη ένα κουκλάκι-παραλήπτης επάνω στο τραπέζι χωρίς να έχει κομμάτι «σοκολάτας», βρίσκει ένα β ίσο με τα άλλα δύο, το δίνει στο τελευταίο κουκλάκι-παραλήπτη και στη συνέχεια τα μαζεύει με τα χέρια του και τα ενώνει κατασκευάζοντας τη σοκολάτα.

Διακριτές ποσότητες

Στο Α2.2 («ισοπληθείς ομάδες», ν=2, β=2), η Δέσποινα, φτιάχνει δυάδες από τις διαθέσιμες «καραμέλες» που υπάρχουν επάνω στο τραπέζι και τις βάζει μπροστά από τα κουκλάκια-παραλήπτες αντιστοιχώντας στο κάθε κουκλάκι- παραλήπτη ένα ζευγάρι. Στη συνέχεια τις μαζεύει και τις ενώνει γραμμικά. Μετά προχωράει στην απάντηση της χωρίς να χρησιμοποιεί αριθμητική τιμή για το σύνολο από τις «καραμέλες» που έχει στο τέλος.

Πλαίσιο παραδείγματος 12: Παραδείγματα σύνθεσης του Α με ΕΒ

Σύνθεση του Α χωρίς ΕΒ (Ενδιάμεσο Βήμα). Στη διαδικασία αυτή παραλείπεται το ενδιάμεσο βήμα (*ΕΒ*). Πιο συγκεκριμένα, το παιδί παίρνει απευθείας ν αντίγραφα του β, τα συνενώνει και συνθέτει το Α. Η διαδικασία αυτή εφαρμόστηκε τόσο στην περίπτωση των συνεχών, όσο και στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων (Πλαίσιο 13).

Όπως φαίνεται και από τα παραδείγματα του Πλαισίου 13, στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων μπορεί να χρησιμοποιηθούν είτε οι «ελεύθερες» καραμέλες, είτε το υλικό με τις καραμέλες στις χάρτινες λωρίδες. Στη δεύτερη περίπτωση, όπως και στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων, ως τελική απάντηση μπορεί να δοθεί είτε η ποσότητα που έχει συνθέσει (με τη μορφή των ενωμένων κομματιών), είτε η αντίστοιχη επιλογή από τις διαθέσιμες για το Α (με τη μορφή ενιαίου κομματιού).

Συνεχείς ποσότητες

Στο Π1.4 (αναλογικό πρόβλημα, ν=3), ο Γιάννης παίρνει το κομμάτι β και βρίσκει δύο ακόμα ίδια από το διαθέσιμο υλικό που υπάρχει στο τραπέζι. Ενώνει αυτά τα τρία κομμάτια και απαντάει.

Διακριτές ποσότητες

Στο Β2.4 (πρόβλημα αναγνώρισης του όρου «τριπλάσιο» και κατασκευής της αντίστοιχης ποσότητας, β=2), ο Άλεξ χρησιμοποιεί τις καραμέλες και φτιάχνει ένα ζευγάρι (όμοιο με το δοθέν). Στη συνέχεια παίρνει τις καραμέλες που βλέπει επάνω στο τραπέζι και φτιάχνει

δύο ζευγάρια ακόμη. Φέρνει τα τρία ζευγάρια κοντά σε γραμμική διάταξη και τα παρουσιάζει ως απάντηση (χωρίς να χρησιμοποιήσει αριθμητική τιμή).

Αντίστοιχα στο Π2.8 («κλασματομηχανή», ν=3, β=2), ο Ευτύχης χρησιμοποιεί τις καραμέλες που είναι κολλημένες σε ζευγάρια επάνω στις λωρίδες. Παίρνει 3 ζευγάρια καραμέλες και τις βάζει από τη μεγάλη πλευρά της μηχανής ενωμένες σε γραμμική διάταξη. Μετράει μία μία τις συνολικές καραμέλες και απαντάει.

Πλαίσιο παραδείγματος 13: Παραδείγματα άμεσης σύνθεσης του Α, για ν=3.

Εκτίμηση του Α και μέτρηση με επανάληψη του β (1β). Στην περίπτωση αυτή, το παιδί επιλέγει μία από τις εναλλακτικές ως πιθανό Α. Στη συνέχεια μετράει το Α είτε με το β, είτε μεταφέροντας το μήκος/πλήθος του β σε άλλο μέσο, εξετάζοντας αν χωράει ν φορές. Η διαδικασία αυτή εφαρμόστηκε για τις συνεχείς, αλλά και για τις διακριτές ποσότητες, δεδομένου ότι στον μεταέλεγχο υπήρχαν διαθέσιμες επιλογές και σε αυτή τη συνθήκη (Πλαίσιο 14).

<u>Συνεχείς ποσότητες</u>

Στο Β2.2 (αναγνώριση του όρου «διπλάσιο» και κατασκευής της αντίστοιχης ποσότητας), η Δέσποινα κοιτάζοντας τις επιλογές που της έχουν δοθεί για το Α, επιλέγει ένα κομμάτι μεγαλύτερο από το αρχικό. Στη συνέχεια το "μετράει" με το β που της δόθηκε μετακινώντας κατά μήκος του Α και σημειώνοντας με το δάχτυλό της που τελειώνει το κομμάτι β πριν το μετακινήσει. Αφού διαπιστώσει ότι χωράει δύο φορές, το παρουσιάζει ως το ζητούμενο Α και απαντά.

<u>Διακριτές ποσότητες</u>

Στο Β2.4 (αναγνώρισης του όρου «τριπλάσιο» και κατασκευής της αντίστοιχης ποσότητας, β=2), ο Ορφέας παίρνει στα χέρια του τη λωρίδα που επάνω έχει κολλημένες τις 2 καραμέλες και κοιτάζει τις διαθέσιμες επιλογές για το Α (που είναι επίσης κολλημένες καραμέλες επάνω σε λωρίδες χαρτιού). Επιλέγει από αυτές εκείνη που έχει επάνω 8 καραμέλες και βάζει ακριβώς μπροστά της την λωρίδα με τις 2 καραμέλες που έχει στο χέρι του. Μετακινώντας τη λωρίδα με τις δύο καραμέλες 3 φορές προχωράει μέχρι την 6η καραμέλα του Α και παρατηρεί πως δεν είναι αυτή η σωστή επιλογή. Τότε επιλέγει τη λωρίδα με τις 6 καραμέλες, επαναλαμβάνει την ίδια διαδικασία και αφού δει ότι το ζευγάρι με τις κολλημένες καραμέλες χωράει στο Α που επέλεξε 3 φορές , απαντάει με τον αριθμό από τις καραμέλες που έχει επάνω η λωρίδα του χαρτιού.

Πλαίσιο παραδείγματος 14:Παραδείγματα της διαδικασίας Εκτίμησης του Α και Μέτρησης με 1β

Στον Πίνακα 12 παρουσιάζεται η συχνότητα και η σχετική συχνότητα των εφαρμοσμένων διαδικασιών για το ζητούμενο Α ανά ν (2, 3, 4) και ανά είδος ποσότητας (διακριτή, συνεχής).

ν	Ποσότητα	Διαδικασία			Σύνολο
		Σύνθεση με ΕΒ	Σύνθεση χωρίς ΕΒ	Εκτίμηση του Α-Μέτρηση με 1β	
2	Συνεχής	12	32	8	52
		0,23	0,62	0,15	
	Διακριτή	11	35	3	49
		0,22	0,71	0,06	
	Σύνολο	23	67	11	101
		0,23	0,66	0,11	
3	Συνεχής	14	32	4	50
		0,28	0,64	0,08	
	Διακριτή	15	34	2	51
		0,29	0,67	0,04	
	Σύνολο	29	66	6	101
		0,29	0,65	0,06	
4	Συνεχής	18	7	2	27
		0,67	0,26	0,07	
	Διακριτή	15	10	1	26
		0,58	0,38	0,04	
	Σύνολο	33	17	3	53
		0,62	0,32	0,06	

Σημείωση.

Το σύνολο των προβλημάτων ανά τιμή του ν είναι 8 για ν=2,3 (4 στις διακριτές, 4 στις συνεχείς ποσότητες) και 4 για ν=4 (2 στις διακριτές, 2 στις συνεχείς ποσότητες)

Πίνακας 12: Συχνότητα και η σχετική συχνότητα των εφαρμοσμένων διαδικασιών για το ζητούμενο Α ανά ν (2, 3, 4) και ανά είδος ποσότητας (διακριτή, συνεχής)

Από τα στοιχεία του Πίνακα 12 προκύπτει ότι το σύνολο των διαδικασιών που εφαρμόστηκαν στην περίπτωση που ζητούμενο ήταν το Α ήταν 255. Από αυτές, οι 85 (33,33%) αντιστοιχούν στη *Σύνθεση με ΕΒ*, οι 150 (58,82%) στη *Σύνθεση χωρίς ΕΒ* και οι 20 (7,84%) στην *Εκτίμηση του Α και Μέτρηση με 1β.* Συνολικά, η *Σύνθεση χωρίς ΕΒ* είναι η επικρατούσα διαδικασία και

εφαρμόζεται ελαφρά πιο συχνά στις διακριτές ποσότητες (N=79, 52,67%) σε σχέση με τις συνεχείς (N=71, 47,33%).

Εξετάζοντας τις διαδικασίες που εφαρμόστηκαν για τις διαφορετικές τιμές του ν, από τον Πίνακα 12 προκύπτει ότι η *Σύνθεση χωρίς ΕΒ* είναι επικρατούσα για ν=2 και ν=3, αλλά όχι για ν=4, όπου η επικρατούσα διαδικασία είναι η *Σύνθεση με ΕΒ.* Η διαδικασία αυτή εφαρμόζεται με αυξημένη σχετική συχνότητα καθώς αυξάνει το ν, παρόμοιες σχετικές συχνότητες για τις δυο πρώτες τιμές του ν στις διακριτές και τις συνεχείς ποσότητες, ενώ για ν=4 η σχετική της συχνότητα είναι υπερδιπλάσια των αντίστοιχων για ν=2,3 και πιο υψηλή στις συνεχείς, παρά στις διακριτές ποσότητες.

Τέλος, η διαδικασία *Εκτίμηση του Α και Μέτρηση με 1β* εφαρμόστηκε με μεγαλύτερη σχετική συχνότητα για ν=2 και πιο συχνά στις συνεχείς, παρά στις διακριτές ποσότητες.

Συνοψίζοντας, όταν ζητούμενο ήταν το Α, η διαδικασία που εφαρμόστηκε πιο συχνά ήταν η σύνθεση του Α χωρίς το υποστηρικτικό βήμα της αντιστοίχισης του β στην αναπαράσταση του ν, το οποίο όμως φαίνεται να είναι πιο αναγκαίο όταν μεγαλώνει το ν και, ιδίως, στη συνεχή συνθήκη. Ενδιαφέρον εύρημα είναι ότι η *Εκτίμηση του Α και μέτρηση με 1β,* δηλαδή, με επανάληψη της μονάδας, αν και λιγότερο συχνή, εμφανίζεται τόσο για συνεχείς ποσότητες (πιο συχνά για ν=2) όσο και για διακριτές ποσότητες.

Στον Πίνακα 13 παρουσιάζεται η συχνότητα εμφάνισης των διαδικασιών ανά παιδί για τις παραπάνω διαδικασίες.

		Διαδικασίες					
Ομάδα	Παιδιά	Σύνθεση		Μέτρηση			
		Σύνθεση με ΕΒ	Σύνθεση χωρίς ΕΒ	Εκτίμηση Α & Μέτρηση με 1β	Σύνολο ΜΔ[1]	$Σ^2$	$ΜΔ/Σ^3$
	Άγης	2	10	3	15	20	0.75
	Άρια	2	12	3	17	20	0.85
	Γιάννης*	9	9	1	19	20	0.95
Ι	Διαμαντής	5	8	3	16	20	0.80
	Ίριδα	8	10	1	19	20	0.95
	Κων/νος	3	12	2	17	20	0.85
	Μαρία	7	11	2	20	20	1.00

	Ορφέας	5	11	2	18	20	0.90
	Δέσποινα	8	10	1	19	20	0.95
II	Δήμος	4	11	2	17	20	0.85
	Μάρκος	8	12	0	20	20	1.00
III	Άντυ	7	8	0	15	15	1.00
	Ευτύχης*	4	11	0	15	15	1.00
	Άλεξ	8	6	0	13	13	1.00
	Πέτρος	5	9	0	14	15	0.93
	Σύνολο	85	150	20	255	278	0.92

Σημείωση.

[1] ΜΔ: Με Διαδικασία

[2] Σωστές απαντήσεις ανά παιδί για το ζητούμενο Α.

[3] Τεκμηριωμένες με Διαδικασία ανά Σωστές για το ζητούμενο Α

Πίνακας 13: Συχνότητα χρήσης διαδικασιών για το ζητούμενο Α ανά παιδί

Από τον Πίνακα 13, μπορούμε να διακρίνουμε τον τρόπο χρήσης των διαδικασιών ανά κατηγορία σε ατομικό επίπεδο. Φαίνεται ότι, στις σωστές απαντήσεις του κάθε παιδιού για το ζητούμενο Α. διαδικασίες εφαρμόστηκαν με υψηλή σχετική συχνότητα από 0,75 έως 1.

Όλα τα παιδιά εφάρμοσαν τις διαδικασίες *Σύνθεση με ΕΒ* και *Σύνθεση χωρίς ΕΒ*, ενώ η διαδικασία *Εκτίμηση του Α και Μέτρηση με 1β* χρησιμοποιείται μόνο από παιδιά των Ομάδων Ι και ΙΙ. Ανεξάρτητα από την ομάδα που βρίσκονται, σχεδόν όλα τα παιδιά εφάρμοσαν πιο συχνά τη *Σύνθεση χωρίς ΕΒ* (με την εξαίρεση του Γιάννη και του Άλεξ).

Συνοψίζοντας, στα προβλήματα με ζητούμενο το Α εφαρμόστηκαν τρεις διαδικασίες, η διδαγμένη, μια παραλλαγή της στην οποία παραλείπεται το ενδιάμεσο υποστηρικτικό βήμα (ΕΒ) και μια τρίτη που περιλαμβάνει την εκτίμηση του Α και μέτρησή του με επανάληψη του β. Συνολικά και σχεδόν για όλα τα παιδιά, η *Σύνθεση χωρίς ΕΒ* ήταν η διαδικασία που εφαρμόστηκε πιο συχνά και κατά κύριο λόγο για ν=2,3. Για ν=4, εφαρμόστηκε πιο συχνά η *Σύνθεση με ΕΒ*. Το εύρημα αυτό υποδηλώνει ότι για τις δύο μικρότερες τιμές του ν, τα παιδιά το συγκρατούν πιο συχνά νοερά (αλλά βλ. και τα λάθη που κάνουν τα παιδιά της Ομάδας ΙΙΙ σε αυτές τις περιπτώσεις, §4.1.3).

Η διαδικασία μέσω εκτίμησης του Α και μέτρησής του με 1 β βασίζεται σε μια εξελιγμένη διαδικασία μέτρησης που έχει ενδιαφέρον για δύο λόγους. Ο πρώτος είναι ότι στην παρέμβαση, στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων, δεν είχαν δοθεί εναλλακτικές

επιλογές για να προ-εκτιμηθεί το Α. Επιπλέον, η μέτρηση με επανάληψη της μονάδας δεν είχε μοντελοποιηθεί από την ερευνήτρια κατά την παρέμβαση. Φαίνεται ότι τα παιδιά της Ομάδας Ι και δύο από την Ομάδα ΙΙ προσάρμοσαν τη μέθοδο, στην εξελιγμένη μορφή της μέτρησης με επανάληψη του β, για τις διακριτές ποσότητες. Η μέθοδος αυτή εμφανίζεται κυρίως για ν=2.

5.2.2 Διαδικασίες για το ζητούμενο β

Εντοπίστηκαν 3 διαδικασίες *Έμμεσης Ανάλυσης* του Α (δηλαδή, ανάλυσης μέσω εκτίμησης και μέτρησης), η διδαγμένη και 2 παραλλαγές της. Επιπλέον, εντοπίστηκαν 3 κατηγορίες διαδικασιών άμεσης ανάλυσης του Α.

Έμμεση Ανάλυση με ΕΒ (Ενδιάμεσο Βήμα). *Πρόκειται για τη* διαδικασία *Έμμεσης Ανάλυσης με ΕΒ*, η οποία διδάχθηκε κατά τη διάρκεια της παρέμβασης. Στην *Έμμεση Ανάλυση με ΕΒ* το παιδί εκτιμά το ζητούμενο β, αντιστοιχεί ένα β σε κάθε μονάδα του ν, στη συνέχεια συνενώνει τα β αυτά και συγκρίνει το σύνολό τους με το Α ή αλλιώς «μετράει» το Α με το β (χωρίς επανάληψη). Παραδείγματα εφαρμογής αυτής της διαδικασίας παρουσιάζονται στο Πλαίσιο 15.

Συνεχείς ποσότητες

Στο Π2.1 («κλασματομηχανή», ν=2), ο Διαμαντής παίρνει το κομμάτι που εκτιμά πως αντιστοιχεί στο μισό και ένα ακόμη ίδιο και το δίνει σε κάθε ένα από τα αντικείμενα-παραλήπτες που υπάρχουν επάνω στο τραπέζι. Στη συνέχεια τα μαζεύει, τα ενώνει και τα βάζει δίπλα στην αρχική σοκολάτα και παίρνει ένα από τα κομμάτια, το οποίο παρουσιάζει ως απάντηση.

Διακριτές ποσότητες

Στο Π1.4 (αναλογικό πρόβλημα, ν=3, Α=9), η Δέσποινα φτιάχνει με τις καραμέλες μία τριάδα ως εκτιμώμενο β. Στη συνέχεια, δίνει από μια τριάδα σε κάθε αντικείμενο-παραλήπτη επάνω στο τραπέζι. Μαζεύει τις τριάδες και τις ενώνει γραμμικά. Τέλος, συγκρίνει τη γραμμή που σχηματίστηκε με το Α και απαντά δείχνοντας μία από τις τριάδες με το χέρι της.

Πλαίσιο παραδείγματος 15: Παραδείγματα έμμεσης ανάλυσης με ενδιάμεσο βήμα

Έμμεση Ανάλυση με ν αντίγραφα του β (νβ). Στη διαδικασία αυτή παραλείπεται το ενδιάμεσο βήμα (*ΕΒ*) από την προηγούμενη διαδικασία. Πιο συγκεκριμένα, το παιδί επιλέγει μία από τις εναλλακτικές ως πιθανό β. Στη συνέχεια παίρνει ν αντίγραφα του β και τα

τοποθετεί απευθείας δίπλα στο Α, το άθροισμα των μηκών των νβ και του Α είναι ίδιο. Η διαδικασία αυτή εφαρμόστηκε για τις συνεχείς ποσότητες (Πλαίσιο 16).

Συνεχείς ποσότητες

Στο Β1.3 (αναγνώριση του όρου «ένα τρίτο» και κατασκευή της αντίστοιχης ποσότητας), ο Γιάννης επιλέγει ένα κομμάτι ως πιθανό β, παίρνει τρία αντίγραφά του και τα ενώνει δίπλα από την σοκολάτα που αντιστοιχεί στο Α. Το συνολικό τους μήκος ταυτίζεται με του Α. Ο Γιάννης παίρνει ένα από αυτά και το δείχνει στην ερευνήτρια.

Πλαίσιο παραδείγματος 16: Παραδείγματα Έμμεσης Ανάλυσης με ν αντίγραφα του β

Έμμεση Ανάλυση του Α με ένα αντίγραφο του β (1β). Στη διαδικασία αυτή παραλείπεται το ενδιάμεσο βήμα (*ΕΒ*) της διαδικασίας *Έμμεσης Ανάλυσης με ΕΒ* και η μέτρηση γίνεται με ένα αντίγραφο του β (μέτρηση με επανάληψη). Πιο συγκεκριμένα, το παιδί επιλέγει μία από τις εναλλακτικές ως πιθανό β. Στη συνέχεια μετράει το Α είτε με το β, είτε μεταφέροντας το μήκος ή το πλήθος του β σε άλλο μέσο, εξετάζοντας αν χωράει ν φορές. Η διαδικασία αυτή εφαρμόστηκε για τις συνεχείς και διακριτές ποσότητες (Πλαίσιο 17).

Στις διακριτές ποσότητες η μέτρηση της ποσότητας Α γίνεται κυρίως με τις λωρίδες χαρτιού που επάνω είχαν κολλημένες δυάδες, τριάδες και τετράδες και τις οποίες τα παιδιά χρησιμοποιούσαν για να δουν πόσες φορές χωράει η κάθε σύνθετη μονάδα στην αρχική ποσότητα.

Συνεχείς ποσότητες

Στο Π2.1 («κλασματομηχανή», ν=2), η Μαρία παίρνει το κομμάτι που εκτιμά πως αντιστοιχεί στο μισό. Το βάζει δίπλα στην αρχική σοκολάτα και το μετακινεί κατά μήκος της «μετρώντας» τη. Διαπιστώνει ότι εκείνο χωράει στην σοκολάτα δύο φορές. Μετά απαντάει.

Διακριτές ποσότητες

Στο Π1.4 (αναλογικό πρόβλημα, ν=3, Α=9), ο Κώστας φτιάχνει με τα δάχτυλα του μία τριάδα. Στη συνέχεια με την τριάδα από τα δάχτυλα του δείχνει τρεις τρεις τις καραμέλες επάνω στο τραπέζι και «μετράει» τις τριάδες που δείχνει λέγοντας «ένα, δύο, τρία».

Πλαίσιο παραδείγματος 17: Παραδείγματα έμμεσης ανάλυσης ποσότητας μέσω μέτρησης ποσότητας με ένα αντίγραφο του β

Άμεση Ανάλυση ποσότητας με επαναλαμβανόμενη 1-1 αντιστοίχιση **(1-1)** Με τη διαδικασία αυτή, τα παιδιά αντιστοιχούσαν επαναλαμβανόμενα στην αναπαράσταση κάθε μονάδας του

ν, μια μονάδα του β (π.χ. μία καραμέλα ανά παραλήπτη). Η διαδικασία αυτή εμφανίζεται μόνο για τις διακριτές ποσότητες (Πλαίσιο 18).

Διακριτές ποσότητες
Στο Π1.2 (αναλογικό πρόβλημα, ν=2, Α=6), ο Ευτύχης αντιστοιχεί επαναληπτικά μία μία τις καραμέλες σε κάθε βέλος του εργαλείου μέχρι εκείνες να εξαντληθούν. Στη συνέχεια, μετράει τις καραμέλες που βρίσκονται σε κάθε βέλος του και απαντά.

Πλαίσιο παραδείγματος 18: Παραδείγματα άμεσης ανάλυσης με επαναλαμβανόμενη 1-1 αντιστοίχιση

Άμεση Ανάλυση ποσότητας με αντιστοίχιση «1 προς β» (1-β). Στην κατηγορία αυτή περιλαμβάνονται παραλλαγές μιας διαδικασίας, η οποία εμφανίστηκε μόνο στη διακριτή συνθήκη, με το εξής κοινό στοιχείο: Τα παιδιά ξεκινούν να αναλύουν την αρχική ποσότητα Α αντιστοιχίζοντας μια σύνθετη μονάδα (π.χ. δυάδα, τριάδα κ.λπ) στις αναπαραστάσεις των μονάδων του ν.

Σε κάποιες περιπτώσεις, το Α εξαντλείται με την αντιστοίχιση της πρώτης σύνθετης μονάδας που έχει επιλέξει το παιδί (Πλαίσιο 19)

Διακριτές ποσότητες
Στο Α1.6 («ισοπληθείς ομάδες», ν=4, Α=8), η Ίριδα δίνει από μια δυάδα καραμέλες σε κάθε «παραλήπτη» μέχρι να εξαντλήσει τις καραμέλες και μετά απαντά: «Ένα ζευγάρι θα πάρει το κάθε παιδί» .

Πλαίσιο παραδείγματος 19: Παράδειγμα άμεσης ανάλυσης με αντιστοίχιση «1 προς β»

Σε άλλες περιπτώσεις, το Α δεν εξαντλείται με την αντιστοίχιση της πρώτης σύνθετης μονάδας και το παιδί προβαίνει σε διόρθωση διαμοιράζοντας το υπόλοιπο Α με 1-1 αντιστοίχιση (Πλαίσιο 20).

Διακριτές ποσότητες
Στο Π1.2 (αναλογικό πρόβλημα για ν=2, Α=6), ο Γιάννης αντιστοιχεί ένα ζευγάρι καραμέλες σε κάθε έναν παραλήπτη και μένουν στα χέρια του 2 ακόμη καραμέλες. Τότε προσθέτει από μία ακόμη καραμέλα μπροστά από κάθε παραλήπτη και απαντά: «Τρεις καραμέλες θα πάρει η Παμ».

Πλαίσιο παραδείγματος 20: Παράδειγμα Άμεσης ανάλυσης με αντιστοίχιση «1 προς β» και διόρθωση

Θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι οι διαδικασίες αυτές θα έπρεπε να ενταχθούν σε διαφορετικές κατηγορίες, καθώς στη δεύτερη περίπτωση φαίνεται να εφαρμόζεται η

στρατηγική «δοκιμή και λάθος», ενώ στην πρώτη όχι. Ωστόσο, δεν μπορεί να διασφαλιστεί ότι και στις περιπτώσεις που δεν χρειάζεται διόρθωση, δεν έχει εφαρμοστεί μια στρατηγική «δοκιμή και λάθος» όπου η πρώτη απόπειρα τυχαίνει να είναι σωστή. Επομένως, επιλέξαμε να βάλουμε αυτές τις στρατηγικές σε μία κατηγορία.

Άμεση Ανάλυση του Α σε νβ*. Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν οι διαδικασίες στις οποίες τα παιδιά ενεργούν απευθείας επί της ποσότητας Α και τη διαμερίζουν σε ίσα μέρη, με ενδεχόμενη διόρθωση. Για τον ίδιο λόγο που αναφέρθηκε παραπάνω, οι διαδικασίες χωρίς και με διόρθωση τοποθετήθηκαν στην ίδια κατηγορία. Πιο συγκεκριμένα:

Σε ορισμένες περιπτώσεις, το Α διαμερίζεται απευθείας σε νβ, είτε για συνεχείς, είτε για διακριτές ποσότητες. (Πλαίσιο 21).

<u>Συνεχείς ποσότητες</u> Στο Π1.1 (αναλογικό πρόβλημα, ν=2), η Άρια τοποθετεί το χέρι της στο σημείο που εκτιμά ότι χωρίζει σε δύο ίσα μέρη το δεδομένο Α και μετά επιλέγει εκείνο το β που αντιστοιχεί στο μισό κομμάτι. <u>Διακριτές ποσότητες</u> Στο Π1.2 (αναλογικό πρόβλημα, ν=3, Α= 9), η Άρια οργανώνει τις 9 καραμέλες επάνω στο τραπέζι σε τριάδες και παίρνει τη μία τριάδα.

Πλαίσιο παραδείγματος 21: Παραδείγματα άμεσης ανάλυσης του Α

Στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων, υπήρχαν περιπτώσεις στις οποίες τα παιδιά ξεκίνησαν αναλύοντας το Α όχι σε ομάδες των β, αλλά σε άλλες ομάδες (π.χ., δυάδες αντί για τριάδες) και προέβησαν σε διόρθωση, είτε αλλάζοντας τις αρχικές τους ομάδες, είτε προσθέτοντας από ένα αντικείμενο σε κάθε αρχική ομάδα (Πλαίσιο 22).

<u>Διακριτές ποσότητες (Διόρθωση αρχικής ομάδας)</u> Στο Π1.3 (αναλογικό πρόβλημα, για ν=3, Α=6) η Δέσποινα οργανώνει τις καραμέλες σε τριάδες σε δύο σημεία επάνω στο τραπέζι. Σταματά, τις μαζεύει και μετά τις οργανώνει σε δυάδες σε τρία σημεία επάνω στο τραπέζι. <u>Διακριτές ποσότητες (Προσθήκη ενός αντικειμένου σε κάθε αρχική ομάδα)</u> Στο Α1.3 («ισοπληθείς ομάδες», β=3, Α=9) ο Γιάννης οργανώνει τις καραμέλες σε δυάδες σε τρία σημεία επάνω στο τραπέζι. Παίρνει τις τρεις καραμέλες που του περισσεύουν και προσθέτει από μία σε κάθε δυάδα.

Πλαίσιο παραδείγματος 22:Παραδείγματα Άμεσης ανάλυσηςσε νβ με διόρθωση

Στην συνέχεια, στον Πίνακα 14 εξετάζουμε την συχνότητα εμφάνισης των διαδικασιών για το ζητούμενο β ανά ν και είδος ποσότητας (συνεχείς και διακριτές ποσότητες) και οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες.

ν	Ποσότητα	Διαδικασία						Σύνολο
		Έμμεση Ανάλυση			Άμεση ανάλυση			
		Με ΕΒ	Χωρίς ΕΒ, με νβ	Χωρίς ΕΒ, με 1β	1-1	1-β	Με νβ*	
2	Συνεχής	2	15	14	0	0	19	50
		0,04	0,30	0,28	0,00	0,00	0,38	
	Διακριτή	1	2	3	8	16	21	51
		0,02	0,04	0,06	0,16	0,31	0,41	
	Σύνολο	3	17	17	8	16	40	101
		0,03	0,17	0,17	0,08	0,16	0,40	
3	Συνεχής	5	29	8	0	0	3	45
		0,11	0,64	0,18	0,00	0,00	0,07	
	Διακριτή	2	4	2	12	16	9	45
		0,04	0,09	0,04	0,27	0,36	0,20	
	Σύνολο	7	33	10	12	16	12	90
		0,08	0,37	0,11	0,13	0,18	0,13	
4	Συνεχής	8	9	4	0	0	0	21
		0,38	0,43	0,19	0,00	0,00	0	
	Διακριτή	2	1	1	2	3	7	16
		0,13	0,06	0,06	0,13	0,19	0,44	
	Σύνολο	10	10	5	2	3	7	37
		0,27	0,27	0,14	0,05	0,08	0,19	

Σημείωση.

Το σύνολο των προβλημάτων ανά τιμή του ν είναι 8 για ν=2,3 (4 στις διακριτές, 4 στις συνεχείς ποσότητες) και 4 για ν=4 (2 στις διακριτές, 2 στις συνεχείς ποσότητες).

Πίνακας 14: Συχνότητα και σχετική συχνότητα των εφαρμοσμένων διαδικασιών για το ζητούμενο β ανά ν (2, 3, 4) και είδος ποσότητας (συνεχής, διακριτή)

Υπολογίζοντας από τα στοιχεία του Πίνακα 14 βρίσκουμε ότι στο σύνολο των 228 εφαρμοσμένων διαδικασιών, οι διαδικασίες *Έμμεσης Ανάλυσης* συνολικά είναι 112 (49,12%) και οι διαδικασίες *Άμεσης Ανάλυσης* είναι 116 (50,88%). Οι διαδικασίες *Έμμεσης Ανάλυσης* εφαρμόζονται κατά κύριο λόγο στις συνεχείς ποσότητες (N=94, 83,93%), με ένα σαφώς μικρότερο ποσοστό να εφαρμόζεται στις διακριτές (N=18, 16,07%). Αντίθετα, οι διαδικασίες *Άμεσης Ανάλυσης* εφαρμόζονται κυρίως στις διακριτές ποσότητες (N=94, 81,03%), με ένα σαφώς μικρότερο ποσοστό να εφαρμόζεται στις συνεχείς ποσότητες (N=22, 18,97%).

Οι επιμέρους διαδικασίες *Έμμεσης Ανάλυσης με ΕΒ, Χωρίς ΕΒ-με νβ και Χωρίς ΕΒ-με 1β* εμφανίζονται στις 228 διαδικασίες με συνολική συχνότητα 20 (8,77%), 60 (26,32%) και 32 (14,04%), αντίστοιχα.

Οι διαδικασίες *Άμεσης Ανάλυσης Με αντιστοίχιση 1-1, 1-β* και Με *νβ** εμφανίζονται στις 228 διαδικασίες με συνολική συχνότητα 22 (9,65%), 35 (15,35%) και 59 (25,88%) αντίστοιχα.

Για ν=2 εφαρμόζονται κατά κύριο λόγο διαδικασίες *Άμεσης Ανάλυσης.* Πράγματι, στο σύνολο των 101 διαδικασιών για ν=2, οι διαδικασίες *Άμεσης Ανάλυσης* είναι 64 (63,36%) με την *Άμεση Ανάλυση σε νβ** να υπερτερεί, τόσο στις συνεχείς (σχ. συχνότητα 0,38), όσο και στις διακριτές ποσότητες (σχ. συχνότητα 0,41).

Για ν=3 υπερτερούν ελαφρά οι διαδικασίες *Έμμεσης Ανάλυσης* με συχνότητα 50 στο σύνολο των 90 διαδικασιών (55,55%). Στις συνεχείς ποσότητες, επικρατεί η *Έμμεση Ανάλυση χωρίς ΕΒ* (σχ. συχνότητα 0,64), ενώ στις διακριτές έχει μικρό προβάδισμα η *Άμεση Ανάλυση* με αντιστοίχιση «1 προς β» (σχ. συχνότητα 0,36).

Για ν=4, υπερτερούν οι διαδικασίες *Έμμεσης Ανάλυσης* με συχνότητα 25 (67,6% στο σύνολο των 37 διαδικασιών). Η *Έμμεση Ανάλυση με και χωρίς ΕΒ* εφαρμόζονται με παρόμοια συχνότητα στις συνεχείς ποσότητες. Στις διακριτές ποσότητες, ωστόσο, υπερτερεί η *Άμεση Ανάλυση με νβ*.*

Στη συνέχεια εξετάζεται η εφαρμογή διαδικασιών στα προβλήματα με ζητούμενο το β σε ατομικό επίπεδο. Στον Πίνακα 15 παρουσιάζεται η συχνότητα εμφάνισης των διαδικασιών σε επίπεδο παιδιού ανά κατηγορία διαδικασίας, στο σύνολο των τεκμηριώσεων που έδωσε το κάθε παιδί για το ζητούμενο β.

		Διαδικασίες								
		Έμμεση Ανάλυση			Άμεση ανάλυση					
Ομάδα	Παιδιά	Με ΕΒ	Χωρίς ΕΒ, με νβ	Χωρίς ΕΒ, με 1β	1-1	1-β	Με νβ*	ΜΔ[1]	Σ[2]	ΜΔ/Σ[3]
I	Άγης	0	4	4	0	2	7	17	20	0.85
	Άρια	0	3	4	0	4	6	17	20	0.85
	Διαμαντής	1	4	3	1	4	5	18	20	0.90
	Γιάννης	0	4	4	0	1	5	14	20	0.70
	Ίριδα	3	5	1	5	2	3	19	20	0.95
	Κώστας	0	5	5	1	1	3	15	20	0.75
	Μαρία	2	2	3	0	4	6	17	20	0.85
	Ορφέας	0	6	2	0	2	6	16	20	0.80
II	Δέσποινα	0	4	1	1	7	6	19	20	0.95
	Δήμος	0	5	3	0	1	7	16	20	0.80
	Μάρκος	2	6	2	2	3	5	20	20	1
III	Άντυ	2	4	0	3	2	0	11	11	1
	Ευτύχης	4	5	0	1	0	0	10	10	1
	Άλεξ	3	2	0	4	2	0	11	11	1
	Πέτρος	3	1	0	4	0	0	8	9	0.89
Σύνολο		20	60	32	22	35	59	228	261	0.87

Σημείωση.

[1] ΜΔ: Με Διαδικασία

[2] Σωστές απαντήσεις ανά παιδί για το ζητούμενο β.

[3] Τεκμηριωμένες με Διαδικασία ανά Σωστές για το ζητούμενο β.

Πίνακας 15: Συχνότητα εφαρμοσμένων διαδικασιών ανά παιδί για το ζητούμενο β

Από τον Πίνακα 15 φαίνεται όλα τα παιδιά τεκμηρίωσαν τις περισσότερες από τις σωστές απαντήσεις τους μέσω της εφαρμογής διαδικασίας, με σχετική συχνότητα από 0,85 έως 1. Όλα τα παιδιά εφάρμοσαν τουλάχιστον μια φορά την *Έμμεση Ανάλυση χωρίς ΕΒ με νβ,* αλλά μόνο τα παιδιά των Ομάδων I και II εφάρμοσαν την αντίστοιχη διαδικασία με *1β*, καθώς και την *Άμεση Ανάλυση σε νβ.*

Όλα τα παιδιά των Ομάδων I και II εφάρμοσαν την *Άμεση Ανάλυση 1-β* και τα περισσότερα παιδιά των Ομάδων I και II χρησιμοποίησαν σπάνια ή καθόλου την *Έμμεση Ανάλυση με ΕΒ*

και την *Άμεση Ανάλυση 1-1*. Και τις δύο αυτές διαδικασίες εφάρμοσαν ο Γιάννης και η Ίριδα, με το δεύτερο παιδί πιο συχνά.

Όλα τα παιδιά της Ομάδας ΙΙ εφάρμοσαν της *Έμμεση Ανάλυση με ΕΒ* και την *Άμεση Ανάλυση 1-1* συχνά, αναλογικά με τις σωστές τους απαντήσεις και μόνο δύο (Άντυ, Άλεξ) εφάρμοσαν την *Άμεση Ανάλυση 1-β.*

Συνοψίζοντας, οι διαδικασίες που εφαρμόστηκαν στα προβλήματα με ζητούμενο το β διαφέρουν στην περίπτωση των συνεχών και των διακριτών ποσοτήτων. Στις συνεχείς ποσότητες εφαρμόστηκαν κατά κύριο λόγο διαδικασίες *Έμμεσης Ανάλυσης*, όπως είναι αναμενόμενο, αλλά με παραλλαγές ως προς τη διδαγμένη διαδικασία, η οποία είχε περιορισμένη εφαρμογή, πιο συχνά για ν=4. Η πιο συχνή διαδικασία *Έμμεσης Ανάλυσης* ήταν αυτή στην οποία παραλείπεται το ενδιάμεσο υποστηρικτικό βήμα (*ΕΒ*) και διατηρείται η μέτρηση χωρίς επανάληψη του β (με νβ). Η διαδικασία αυτή διατηρεί αξιόλογα ποσοστά, για όλες τις τιμές του ν. Αντίθετα, στις διακριτές ποσότητες, εφαρμόστηκαν κατά κύριο λόγο διαδικασίες *Άμεσης Ανάλυσης* με πιο συχνή την *Άμεση Ανάλυση με νβ**, με την οποία τα παιδιά μετασχηματίζουν απευθείας την ποσότητα Α. Ενδιαφέρον εύρημα είναι ότι η διαδικασία αυτή εμφανίζει αυξημένη σχετική συχνότητα για ν=2 και ν=4 και μειωμένη για ν=3. Το εύρημα αυτό μπορεί να συνδέεται με την ευχέρεια με την οποία τα παιδιά χειρίζονται τα «ζευγάρια».

Όταν το ν έχει την τιμή 2, υπάρχει μια εμφανής διαφοροποίηση ως προς τις εφαρμοσμένες διαδικασίες, καθώς η διαδικασία *Άμεσης Ανάλυσης* σε νβ* επικρατεί και στις συνεχείς ποσότητες. Αυτό υποδηλώνει ότι στην περίπτωση αυτή τα παιδιά προσδιορίζουν κατ' εκτίμηση το «μισό» της δεδομένης συνεχούς ποσότητας.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι, με την αναμενόμενη εξαίρεση των διαδικασιών με αντιστοίχιση 1-1 και 1-β, όλες οι άλλες διαδικασίες εμφανίζονται και στα δύο είδη ποσοτήτων. Ιδιαίτερη περίπτωση είναι η διαδικασία *Έμμεσης Ανάλυσης* με παράλειψη του ενδιάμεσου υποστηρικτικού βήματος και μέτρηση με 1β (με επανάληψη της μονάδας), η οποία αφενός δεν είχε διδαχθεί στη διάρκεια της παρέμβασης, αφετέρου εφαρμόστηκε και στα δύο είδη ποσοτήτων.

Σε ατομικό επίπεδο, η διδαγμένη (*Έμμεση Ανάλυση με ΕΒ*), και η πιο στοιχειώδης διαδικασία (*Άμεση Ανάλυση 1-1*) τείνουν να εκλείψουν στις Ομάδες Ι και ΙΙ. Εφαρμόζεται από κάθε παιδί

ένα μείγμα στρατηγικών που περιλαμβάνει πάντα την *Άμεση Ανάλυση 1-β* και τις πιο προχωρημένες, δηλαδή, την *Έμμεση Ανάλυση χωρίς ΕΒ, με 1β* και την *Άμεση Ανάλυση με νβ*.*

Τα παιδιά της Ομάδας ΙΙΙ δεν εφάρμοσαν αυτές τις δύο τελευταίες στρατηγικές. Εφάρμοσαν τη διδαγμένη (*Έμμεση Ανάλυση με ΕΒ*) και την πιο στοιχειώδη (*Άμεση Ανάλυση 1-1*). Και σε αυτή την ομάδα εμφανίστηκαν η *Έμμεση Ανάλυση με ΕΒ, χωρίς ΕΒ με νβ* και πιο περιορισμένα η *Άμεση Ανάλυση 1-β.*

Αν ληφθεί υπόψη ότι, η διαδικασία που μοντελοποιήθηκε κατά την παρέμβαση είναι η *Έμμεση Ανάλυση με ΕΒ,* τόσο για τις συνεχείς, όσο και για τις διακριτές ποσότητες, τα ευρήματα αυτά υποδηλώνουν ότι τα παιδιά, όχι μόνο παράλλαξαν αυτή τη διαδικασία, αλλά ανέπτυξαν διαδικασίες ανάλυσης για τις διακριτές ποσότητες.

5.2.3 Διαδικασίες για το ζητούμενο ν

Οι διαδικασίες αυτές εμφανίζονται μόνο στα προβλήματα διαίρεσης μέτρησης του τύπου των «ισοπληθών ομάδων»/ «ίσων μέτρων», στα οποία δίνεται το μερίδιο (β), η ποσότητα που μοιράζεται (Α) και ζητείται το πλήθος των παραληπτών.

Εντοπίστηκαν 4 διαδικασίες, δύο ανάλυσης και δύο μέτρησης. Οι διαδικασίες ανάλυσης εφαρμόστηκαν μόνο τις διακριτές ποσότητες, ενώ οι διαδικασίες μέτρησης εφαρμόστηκαν είτε μόνο στις συνεχείς είτε και στα δύο είδη ποσοτήτων.

***Ανάλυση του Α με αντιστοίχιση 1-β*.** Στη διαδικασία αυτή το παιδί αποκόπτει μια β-άδα από το δεδομένο Α, την αντιστοιχεί σε έναν παραλήπτη και επαναλαμβάνει μέχρι να εξαντληθεί το Α (Πλαίσιο 23). Η διαδικασία αυτή μπορεί να περιγραφτεί ως «διανομή».

Στο Α1.4 («ισοπληθείς ομάδες», Α=8, β=2), η Άρια λέει «Θα δώσω καραμέλες μέχρι να τελειώσουν. Από ένα ζευγάρι». Δίνει από ένα ζευγάρι στον κάθε παραλήπτη, λέγοντας ταυτόχρονα: «Ένα εδώ, ένα εδώ, ένα εδώ, ένα εδώ». Καταμετρά τους παραλήπτες λέγοντας «Ένα δύο, τρία, τέσσερα κορίτσια θα πάρουν ζευγαράκι».

Πλαίσιο παραδείγματος 23: Παράδειγμα ανάλυσης με επαναλαμβανόμενη αντιστοίχιση 1-β

Ανάλυση του Α σε β-άδες. Το παιδί αναλύει απευθείας το δεδομένο Α σε β-άδες και μετράει ή αναγνωρίζει το πλήθος τους (βλ. Πλαίσιο 24). Η διαδικασία αυτή μπορεί να περιγραφτεί και ως «ομαδοποίηση» του Α.

Στο Α.3.2 («ισοπληθείς ομάδες» Α=8, β=2), ο Ορφέας λέει: «Τώρα θα παίρνουν δύο. Πόσες δυάδες είναι;». Ομαδοποιεί τις 8 καραμέλες σε δυάδες. Λέει: «Τέσσερις δυάδες είναι. Τέσσερα παιδιά θα φάνε».

Πλαίσιο παραδείγματος 24 : Παράδειγμα ανάλυσης ανάλυση του Α σε β-άδες

Μέτρηση του Α με νβ. Το παιδί παίρνει αντίγραφα του δεδομένου β και τα τοποθετεί ένα-ένα δίπλα στο Α. Όταν το μήκος των β συμπίπτει με το μήκος του Α, σταματά. Το παιδί μπορεί να καταμετρά κατά τη διάρκεια, μετά, ή απλώς να αναφέρει στο τέλος το πλήθος των β. Η διαδικασία αυτή εφαρμόστηκε για τις συνεχείς ποσότητες (Πλαίσιο 25).

Συνεχείς ποσότητες

Στο Α.3.3 Άγης στο Α3.2 («ίσα μέτρα», ν=3), τοποθετεί δίπλα στη σοκολάτα (Α) κομμάτια ίδια με το αρχικό β, ενωμένα. Τοποθετώντας το τρίτο κομμάτι, σταματά και λέει «Τρία παιδιά θα φάνε».

Πλαίσιο παραδείγματος 25: Παραδείγματα μέτρησης του Α με ν αντίγραφα του β

Μέτρηση του Α με 1β. Το παιδί χρησιμοποιεί το δεδομένο β για να μετρήσει το δεδομένο Α. Η διαδικασία αυτή εφαρμόστηκε κατά κύριο λόγο στις συνεχείς, αλλά και στις διακριτές ποσότητες (Πλαίσιο 26).

Συνεχείς ποσότητες

Στο Α3.3 («ίσα μέτρα», ν=3), ο Διαμαντής βάζει το κομμάτι β δίπλα στην αρχική σοκολάτα. Με το δάχτυλό του «κρατά» το σημείο στο οποίο τελειώνει το μήκος του β. Επαναλαμβάνει άλλες δυο φορές, μετακινώντας το β παράλληλα με το Α. Λέει «Αυτά είναι τρία. Σε τρία παιδιά θα δώσω κομμάτι».

Διακριτές ποσότητες

Στο Α.3.4 (ισοπληθείς ομάδες, β=3, Α=6), η Ίριδα λέει: «Δύο καραμέλες. Θα μοιράζω δύο, με τη κορδέλα με το ζευγάρι». Παίρνει την κορδέλα με την κολλημένη δυάδα από καραμέλες και την τοποθετεί δίπλα στη γραμμή με τις 6 καραμέλες. Την μετακινεί δύο φορές παράλληλα. Λέει: «Τρία παιδιά θα πάρουν καραμέλες και τα δύο θα μείνουν χωρίς καραμέλες».

Στο Α3.6 («ισοπληθείς ομάδες», β=2, Α=8), ο Μάρκος λέει «Θα δώσω δύο καραμέλες σε κάθε κορίτσι». Παίρνει μία λωρίδα χαρτιού με (κολλημένη) δυάδα, την τοποθετεί δίπλα στη γραμμή με τις 8 καραμέλες και λέει «Ένα». Μετακινεί την κορδέλα κατά μήκος της

γραμμής και λέει «Δύο». Επαναλαμβάνει άλλες δύο φορές, μετρώντας φωναχτά. Στο τέλος λέει: «Τέσσερα κορίτσια θα πάρουν καραμέλες».

Πλαίσιο παραδείγματος 26: Παραδείγματα μέτρησης του Α με ένα αντίγραφο του β

Στον Πίνακα 16 παρουσιάζεται η συχνότητα εμφάνισης των διαδικασιών ανά παιδί.

		Διαδικασίες					
		Μέτρηση		Ανάλυση			
Ομάδα	Παιδί	Με νβ	Με 1β	Αντ/χιση 1-β	Σε β-άδες	Σύνολο ΜΔ	Σωστές
I	Άγης	3	0	3	0	6	6
	Άρια	3	0	3	0	6	6
	Διαμαντής	3	0	3	0	6	6
	Γιάννης	0	3	0	0	6	6
	Ίριδα	3	3	0	0	6	6
	Κώστας	0	3	0	3	6	6
	Μαρία	3	0	3	0	6	6
	Ορφέας	3	0	0	3	6	6
II	Δέσποινα	2	0	3	0	5	5
	Δήμος	2	0	3	0	5	5
	Μάρκος	2	3	0	0	5	5
III	Άντυ	1	0	0	0	1	2
	Ευτύχης	0	0	2	0	2	2
	Αλεξ	0	0	0	0	0	2
	Πέτρος	0	0	0	0	0	3
	Σύνολο	25	12	20	6	66	72

Πίνακας 16: Συχνότητα εμφάνισης των διαδικασιών ανά παιδί για το ζητούμενο ν

Από τον Πίνακα 16 παρατηρούμε πως σχεδόν όλα τα παιδιά των Ομάδων I και II, με εξαίρεση τον Γιάννη και τον Κώστα, χρησιμοποιούν τουλάχιστον δύο φορές τη διαδικασία της μέτρησης με νβ, ενώ μόνο τέσσερα από αυτά καταφεύγουν στη μέτρηση με 1β.

Αντίθετα, στα παιδιά της Ομάδας III παρατηρείται σαφώς περιορισμένη χρήση διαδικασιών. Μόνο ο Άντυ και ο Ευτύχης χρησιμοποιούν κάποια διαδικασία για την εύρεση του ν, συγκεκριμένα τη μέτρηση με νβ και την αντιστοίχιση 1-β, ενώ ο Αλεξ και ο Πέτρος δεν καταγράφεται να χρησιμοποιούν κάποια από τις συγκεκριμένες διαδικασίες.

5.2.4 Χρήση εμπράγματων αναπαραστάσεων κατά την επίλυση

Στην §5.1 διακρίθηκαν τρεις τρόποι τεκμηρίωσης των απαντήσεων των παιδιών: *Μόνο με Διαδικασία*, *Με Διαδικασία και Λεκτικά*, *Μόνο Λεκτικά*. Μέχρι στιγμής, έχουν παρουσιαστεί οι διαδικασίες που εφάρμοσαν τα παιδιά στα προβλήματα του μεταελέγχου. Από την παρουσίαση αυτή, είναι φανερό ότι, ανά ζητούμενο, υπάρχουν διαφοροποιήσεις μεταξύ των εφαρμοσμένων διαδικασιών. Στην ενότητα αυτή εστιάζουμε σε ένα κριτήριο διαφοροποίησης των διαδικασιών αυτών που μπορεί να εφαρμοστεί, ανεξαρτήτως του ζητούμενου του προβλήματος. Πρόκειται για τη χρήση ή μη εμπράγματων αναπαραστάσεων για το ν, είτε μέσω του εργαλείου του λόγου, είτε μέσω των αντιγράφων της μονάδας, ή μέσω της αναπαράστασης των παραληπτών στα προβλήματα ισοπληθών ομάδων/ ίσων μέτρων. Με βάση αυτό το κριτήριο, οι εφαρμοσμένες διαδικασίες μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις αδρές κατηγορίες.

Στην πρώτη κατηγορία, χρησιμοποιείται κάποιου τύπου αναπαράστασης για το ν. Η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει τις εξής διαδικασίες ανά ζητούμενο: Για το Α, *Σύνθεση του Α με Ενδιάμεσο Βήμα*. Για το β, *Έμμεση Ανάλυση με Ενδιάμεσο Βήμα (ΕΒ), Άμεση Ανάλυση με Επαναλαμβανόμενη 1-1 αντιστοίχιση, Άμεση Ανάλυση με Αντιστοίχιση 1-β.* Για το ν, *Ανάλυση του Α με επαναλαμβανόμενη αντιστοίχιση 1-β.* Για τις διαδικασίες της κατηγορίας αυτής απαιτείται χειρισμός εμπράγματης αναπαράστασης και για τις τρεις εμπλεκόμενες ποσότητες (Α, β, ν), με την εξαίρεση της *Άμεσης Ανάλυσης του Α με επαναλαμβανόμενη 1-1 αντιστοίχιση*. Στη διαδικασία αυτή δεν απαιτείται αναπαράσταση του β, καθώς έχει αντικατασταθεί από την επαναλαμβανόμενη χρήση της αναπαράστασης του ν. Υπό αυτή την έννοια, η εφαρμογή αυτών των διαδικασιών από τα παιδιά βασίζεται *πλήρως* στη χρήση του χειραπτικού υλικού.

Στη δεύτερη κατηγορία δεν χρησιμοποιείται οποιουδήποτε τύπου εμπράγματη αναπαράσταση για το ν και περιλαμβάνει τις εξής διαδικασίες ανά ζητούμενο: Για το Α, *Σύνθεση χωρίς Ενδιάμεσο Βήμα*, *Εκτίμηση του Α και Μέτρηση με επανάληψη του β*. Για το β, *Έμμεση Ανάλυση με νβ, Έμμεση Ανάλυση με 1β, Άμεση Ανάλυση του Α με νβ**. Για το ν, *Ανάλυση του Α σε β-άδες, Μέτρηση του Α με νβ, Μέτρηση του Α με 1β.* Οι διαδικασίες της κατηγορίας αυτής απαιτούν εμπράγματη αναπαράσταση για δύο ποσότητες (Α, β), εκτός από τις *Άμεση Ανάλυση του Α σε νβ* και την Ανάλυση του β σε β-άδες*, όπου τα παιδιά

μετασχηματίζουν απευθείας την ποσότητα Α. Υπό αυτή την έννοια, η εφαρμογή αυτών των διαδικασιών από τα παιδιά βασίζεται *μερικώς* στη χρήση του χειραπτικού υλικού.

Τις κατηγορίες αυτές συμπληρώνει μια τρίτη, που περιλαμβάνει τις περιπτώσεις στις οποίες τα παιδιά απάντησαν σωστά χωρίς να εφαρμόσουν κάποια διαδικασία (και άρα, χωρίς να χρησιμοποιήσουν καμία εμπράγματη αναπαράσταση) και αντιστοιχεί στις τεκμηριώσεις της κατηγορίας *Μόνο Λεκτικά.*

Εξετάσαμε το προφίλ του κάθε παιδιού σε σχέση με τη χρήση των εμπράγματων αναπαραστάσεων, στο σύνολο των σωστών και τεκμηριωμένων απαντήσεων του στα 46 προβλήματα του μεταελέγχου. Εξετάσαμε επίσης ξεχωριστά, αν και πόσες φορές χρησιμοποίησε το κάθε παιδί το εργαλείο του λόγου για την επίλυση κάποιου προβλήματος, και για ποιο ζητούμενο. Στον Πίνακα 17 συνοψίζονται τα αποτελέσματα αυτά.

		Χρήση εμπράγματων αναπαραστάσεων				Εργαλείο λόγου		
Ομάδα	Παιδιά	Πλήρως	Μερικώς	Καθόλου	Σύνολο	Α	β	Σύνολο
I	Άγης	6	31	9	46	0	0	0
	Άρια	8	31	7	46	0	0	0
	Διαμαντής	17	26	2	45	0	1	1
	Γιάννης	7	28	11	46	1	3	4
	Ίριδα	20	24	1	45	1	3	4
	Κώστας	8	29	7	44	0	1	1
	Μαρία	17	26	3	46	0	1	1
	Ορφέας	9	31	6	46	0	0	0
II	Δέσποινα	17	26	2	45	0	1	1
	Δήμος	6	32	7	45	0	0	0
	Μάρκος	18	26	0	44	0	2	2
III	Άντυ	14	13	0	27	3	1	4
	Ευτύχης	11	16	0	27	0	3	3
	Άλεξ	16	8	0	24	1	1	2
	Πέτρος	13	10	0	23	1	1	2
	Σύνολο	187	357	55	599	7	18	25

Πίνακας 17: Ατομικό προφίλ χρήσης εμπράγματων αναπαραστάσεων στο σύνολο των σωστών και τεκμηριωμένων απαντήσεων στα 46 προβλήματα του μεταελέγχου και χρήσης του εργαλείου του λόγου.

Ξεκινώντας από τη χρήση του εργαλείου του λόγου, από τον Πίνακα 17 φαίνεται ότι το εργαλείο χρησιμοποιήθηκε συνολικά 25 φορές, πιο συχνά για το ζητούμενο β, παρά για το Α. Σημειώνουμε ότι το εργαλείο δεν χρησιμοποιήθηκε για το ζητούμενο ν, γι' αυτό και δεν εμφανίζεται στον Πίνακα 17. Σημειώνουμε, επίσης, ότι το εργαλείο δεν χρησιμοποιήθηκε σε λανθασμένες ή μη τεκμηριωμένες απαντήσεις.

Παρατηρούμε ότι 4 από τα παιδιά (Άγης, Άρια, Ορφέας και Δήμος) δεν το χρησιμοποίησαν καθόλου. Τα άλλα παιδιά το χρησιμοποίησαν τουλάχιστον μία φορά για το ζητούμενο β και το πολύ μία φορά για το ζητούμενο Α, με την εξαίρεση του Αντρέα, που το χρησιμοποίησε 3 φορές για το Α.

Τα παιδιά εξέφρασαν από μόνα τους την πρόθεση να χρησιμοποιήσουν το εργαλείο του λόγου και, μάλιστα, συχνά δήλωναν ταυτόχρονα ότι δυσκολεύονται με το συγκεκριμένο πρόβλημα (π.χ. «Αυτό είναι δύσκολο. Θέλω το εργαλείο μου!». «Είναι πολλές οι βιταμίνες. Να πάρω το εργαλείο;»).

Όπως επίσης φαίνεται από τον Πίνακα 17, τα παιδιά της Ομάδας Ι και της Ομάδας ΙΙ κάνουν κατά κύριο λόγο μερική χρήση των εμπράγματων αναπαραστάσεων. Με την εξαίρεση του Μάρκου, όλα τα παιδιά αυτά έχουν επιλύσει τουλάχιστον ένα πρόβλημα χωρίς χρήση εμπράγματης αναπαράστασης. Υπάρχουν, ωστόσο, και διαφορές μεταξύ των παιδιών. Ο Γιάννης, η Ίριδα, η Μαρία, η Δέσποινα και ο Μάρκος χρησιμοποιούν πιο συχνά πλήρως τις εμπράγματες αναπαραστάσεις, και, ταυτόχρονα, έχουν επιλύσει λιγότερα προβλήματα χωρίς τη χρήση αναπαραστάσεων, σε σχέση με τα υπόλοιπα παιδιά των Ομάδων Ι και ΙΙ. Ο Διαμαντής και ο Άγης έχουν δώσει τις περισσότερες απαντήσεις χωρίς χρήση αναπαραστάσεων, ακολουθούμενοι από την Άρια, τον Κώστα και τον Δήμο.

Με την εξαίρεση του Ευτύχη, τα παιδιά της Ομάδας ΙΙΙ έχουν χρησιμοποιήσει πιο συχνά πλήρως τις εμπράγματες αναπαραστάσεις. Επιπλέον, κανένα από αυτά τα παιδιά δεν έχει απαντήσει σωστά και τεκμηριωμένα χωρίς τη χρήση αναπαράστασης.

Αξίζει στο σημείο αυτό η υπενθύμιση ότι, ένα μέρος των λανθασμένων απαντήσεων των παιδιών της Ομάδας ΙΙΙ, ιδιαίτερα στην περίπτωση των προβλημάτων με ζητούμενο το Α, συμβαίνει όταν δεν χρησιμοποιούν κάποια αναπαράσταση για το ν. Ακόμη, στις διακριτές ποσότητες, όταν τα παιδιά δεν χρησιμοποιούν καθόλου εμπράγματες αναπαραστάσεις,

φαίνεται να αναγνωρίζουν και να διαχειρίζονται νοερά ν-άδες, ανεξάρτητα από το ζητούμενο του προβλήματος. Στο Πλαίσιο 27 παρουσιάζονται παραδείγματα για τα ζητούμενα Α, β και ν.

Ζητούμενο το Α

Στο Π.1.2 (αναλογικό πρόβλημα (πολλαπλασιασμού), β=2, ν=2) ο Άγης παίρνει στα χέρια του 4 καραμέλες και τις δείχνει, λέγοντας «τέσσερις». Εξηγεί: «Τέσσερις. Δύο δυάδες. Τέσσερις.»

Ζητούμενο το β

Στο Α.1.4 («ισοπληθείς ομάδες» (διαίρεση μερισμού), Α=6, ν=3), ο Κώστας λέει: «Τρία παιδιά είναι η Ελένη με τις αδερφές». Κοιτάζει τη γραμμή με τις 6 καραμέλες και απαντά: «Ένα ζευγάρι θα πάρει η κάθε μια. Το ένα τρίτο».

Ζητούμενο το ν:

Στο Α.3.4 («ισοπληθείς ομάδες» (διαίρεση μέτρησης), με Α=8, β=2), ο Διαμαντής κοιτάζει τη γραμμή με τις 8 καραμέλες για λίγο. Απαντά: «Από δύο». Εξηγεί: «Τέσσερα ζευγάρια έχεις. Τέσσερα παιδιά θα πάρουν».

Πλαίσιο παραδείγματος 27: Παραδείγματα μη χρήσης εμπράγματου υλικού

Συνοψίζοντας, εξετάζοντας το βαθμό χρήσης των εμπράγματων αναπαραστάσεων από τα παιδιά, διαπιστώθηκε ότι όλα τα παιδιά των Ομάδων Ι και ΙΙ χρησιμοποιούν κατά κύριο λόγο μερικώς τις εμπράγματες αναπαραστάσεις κατά την επίλυση των προβλημάτων, που σημαίνει ότι δεν χρησιμοποιούν αναπαράσταση για το ν και περιστασιακά και για μια ακόμα ποσότητα. Επιπλέον, όλα τα παιδιά της Ομάδας Ι και δύο από την Ομάδα ΙΙ από λίγο ως αρκετά συχνά επιλύουν προβλήματα νοερά. Διαφοροποιήσεις μεταξύ αυτών των παιδιών υπάρχουν, καθώς κάποια στηρίζονται πιο συχνά πλήρως στις εμπράγματες αναπαραστάσεις για όλες τις ποσότητες, ενώ κάποια άλλα επιλύουν πιο συχνά νοερά από τα υπόλοιπα παιδιά. Από την άλλη μεριά, τα παιδιά της Ομάδας ΙΙΙ φαίνεται να στηρίζονται πιο πολύ στη χρήση των εμπράγματων αναπαραστάσεων, ενώ δεν έχουν επιλύσει νοερά και σωστά κανένα πρόβλημα. Αυτά τα παιδιά, κάποιες φορές καταλήγουν σε σωστές απαντήσεις με μερική χρήση των εμπράγματων αναπαραστάσεων και άλλες καταλήγουν σε λανθασμένες απαντήσεις (βλ. §5.1.3). Τα ευρήματα αυτά υποδηλώνουν μια αναδυόμενη τάση μετάβασης

από προσεγγίσεις επίλυσης που βασίζονται στο χειρισμό εμπράγματων αναπαραστάσεων, σε πιο νοερή επεξεργασία των προβλημάτων.

Τέλος, το εργαλείο του λόγου ζητήθηκε και χρησιμοποιήθηκε από 11 από τα 15 παιδιά, με ενδείξεις ότι το ζήτησαν όταν θεώρησαν κάποιο πρόβλημα δύσκολο. Το εύρημα αυτό υποδηλώνει ότι το εργαλείο αυτό θεωρήθηκε από τα παιδιά βοηθητικό για την επίλυση πολλαπλασιαστικών προβλημάτων.

5.2.5 Σύνοψη και σύνδεση με την παρέμβαση

Στο πρώτο επεισόδιο, η «κλασματομηχανή» δουλεύει από τη «μικρή» προς τη «μεγάλη πλευρά» με τελεστή 2. Στη μηχανή έχουν μπει 2 βιταμίνες, και έχουν βγει τέσσερις. Τα παιδιά καλούνται να «μαντέψουν» τι κάνει αυτή η μηχανή.

> Ε: Μπορεί κάποιος να έρθει και να μου πει, να κοιτάξει τις βιταμίνες και να σκεφτεί τι μπορεί να κάνει αυτή η μηχανή;
>
> Άντυ: Θα δώσει τις σωστές βιταμίνες. Έβγαλε το ίδιο δύο.
>
> Ε: Τι εννοείς το ίδιο δύο;
>
> Άντυ: Έβγαλε δύο τέτοια. Δύο και δύο. Τέσσερις.
>
> Δήμος: Ναι, δύο ζευγάρια.
>
> Ε: Α, ακούσατε τι είπε; Έχω από εδώ δύο βιταμίνες, μία δυάδα. Η μηχανή τις διαβάζει και βγάζει δύο δυάδες. Το είδατε; Τι μπορεί να κάνει λοιπόν αυτή η μηχανή, μπορείς Αντρέα να μου εξηγήσεις; [το παιδί μένει σιωπηλό]
>
> Δήμος: Θα το φτιάχνει δύο φορές. Θα φτιάξει τη δυάδα δύο φορές. Ή ό,τι του βάλεις. Πού έχει τα υλικά;
>
> Ε: Μέσα έχει τα υλικά. Να δες. Βγάζει δύο φορές ό,τι του βάλουμε. Ωραία. Μπορείς να βρεις και το εργαλείο που θα βάλουμε πάνω στη μηχανή;
>
> Δήμος: [Βρίσκει το σωστό εργαλείο]. Αυτό. Από η μία έχει ένα, από την άλλη το βγάζει δύο φορές.

Στο παραπάνω επεισόδιο, μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι ο ‘Αντυ δεν χρησιμοποιεί τον όρο «δυάδα», αλλά ούτε και το «ζευγάρι», όπως ο Μάρκος. Αναγνωρίζει τι κάνει η μηχανή στη συγκεκριμένη περίπτωση και το περιγράφει τελικά προσθετικά. Δεν φαίνεται να μπορεί να γενικεύσει, ακόμα και με προσθετικό τρόπο, τι κάνει η μηχανή. Ο Μάρκος αλλάζει από

«ζευγάρι» σε «δυάδα», μετά τη χρήση του όρου από την ερευνήτρια, και περιγράφει πολλαπλασιαστικά τη λειτουργία της μηχανής, συνδέοντας με το εργαλείο του λόγου.

Από την εξέταση των διαδικασιών που εφάρμοσαν τα παιδιά για την επίλυση των προβλημάτων του μεταελέγχου, είναι εμφανές ότι οι διαδικασίες που εφάρμοσαν τα παιδιά είχαν πολύ μεγαλύτερη ποικιλία, σε σχέση με τις δομημένες διαδικασίες της παρέμβασης. Η μεγαλύτερη ποικιλία παρουσιάστηκε στην περίπτωση του ζητούμενου β. Ένα κεντρικό εύρημα είναι ότι στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων, εφαρμόστηκαν εν γένει (αλλά όχι αποκλειστικά) *Ανάλυση*, ενώ στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων, εφαρμόστηκαν εν γένει (αλλά όχι αποκλειστικά) διαδικασίες *Έμμεσης Σύνθεσης*. Η τιμή του ν φαίνεται επίσης να παίζει ρόλο στο είδος της διαδικασίας που εφάρμοσαν τα παιδιά (*Ανάλυσης ή Σύνθεσης*, λιγότερο ή περισσότερο «προχωρημένη»). Νέοι τρόποι επίλυσης εμφανίστηκαν και στα δύο ζητούμενα .

Ένα κοινό χαρακτηριστικό για παραλλαγές των διδαγμένων διαδικασιών για το Α και το β που ανιχνεύτηκαν είναι ότι παραλείπεται το *ΕΒ* (ενδιάμεσο υποστηρικτικό βήμα), δηλαδή, δεν χρησιμοποιείται αναπαράσταση για το ν, οποιουδήποτε τύπου. Όλα τα παιδιά εμφανίστηκαν να κάνουν αυτή την παραλλαγή, τόσο για το Α, όσο και για το β, με διαφορές ως προς τη συχνότητα και με κύρια διαφορά ότι τα παιδιά των Ομάδων Ι και ΙΙ δεν κάνουν λάθη όταν παραλείπουν το *ΕΒ*, ενώ τα παιδιά της Ομάδας ΙΙ μπορεί και να κάνουν λάθη, όπως είδαμε από τη σχετική ανάλυση. Η τιμή του ν φαίνεται να παίζει ρόλο στη χρήση ή μη του *ΕΒ*, τόσο για το Α, όσο και για το β.

Όσον αφορά το ζητούμενο β, το πιο σημαντικό εύρημα είναι ότι τα παιδιά, στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων εφαρμόζουν κατά κύριο λόγο διαδικασίες ανάλυσης. Η πιο στοιχειώδης, αυτή της επαναλαμβανόμενης 1-1 αντιστοίχισης, εμφανίστηκε εξαρχής στην παρέμβαση, όταν δόθηκε η ευκαιρία στα παιδιά να επιλύσουν προβλήματα με τις συλλογές των καραμελών και φαίνεται να μην χρησιμοποιείται σε μεγάλο βαθμό από τα παιδιά των Ομάδων Ι και ΙΙ. Οι διαδικασίες αντιστοίχισης 1-προς πολλά, με πιθανή διόρθωση εμφανίστηκε ως στρατηγική συντόμευσης της 1-1 αντιστοιχίας, ενώ σταδιακά τα παιδιά ξεκίνησαν να επενεργούν απευθείας πάνω στο Α, αναζητώντας κατάλληλες ομάδες. Θα παρουσιάσουμε τρία επεισόδια, που δείχνουν πώς εμφανίστηκαν και αυτοί οι τρόποι επίλυσης στο πλαίσιο της παρέμβασης.

Επαναλαμβανόμενη 1-1 αντιστοίχιση και στρατηγική συντόμευσης.

Στο επεισόδιο αυτό, τα παιδιά επιλύουν το πρόβλημα υπολογισμού της δόσης της Παμ, με δεδομένο ότι η δόση της Διπαμ είναι 6 βιταμίνες. Είναι ένα από τα πρώτα προβλήματα που έχουν λάβει στο πλαίσιο της δραστηριότητας Δ2 (Αναλογικά Προβλήματα). Έχει προηγηθεί ο προσδιορισμός και η έκφραση της σχέσης της Παμ με τη Διπάμ, η επιλογή του κατάλληλου εργαλείου και η τοποθέτησή του ανάμεσα στην Παμ και τη Διπάμ. Μπροστά από τη Διπάμ υπάρχει ένα πιατάκι με 6 βιταμίνες.

Μαρία: [Τοποθετεί δύο βιταμίνες στο ένα βέλος και δύο στο άλλο] Θα δώσω δύο και δύο.

Ε: Οι δύο τελευταίες βιταμίνες στο πιάτο της Διπάμ τι θα γίνουν;

Μαρία: Θα τις δώσω στη μικρή παμ [τοποθετεί τις καραμέλες μπροστά σε ένα από τα αντίγραφα της μονάδας –«παμίνα»].

Ε: Περίμενε, θα δώσεις βιταμίνες και στις παμίνες;

Μαρία: Όχι. Εδώ θα μοιράσω [δείχνει τα δύο βέλη].

Ε: Σε πόσα βέλη πρέπει να χωρίσεις τις καραμέλες;

Μελίτα: Σε δύο [σταματάει για λίγο]. Πώς θα τις μοιράσω;

Διαμαντής: Πρέπει να δούμε να είναι δίκαιο.

Ε: Δηλαδή; Σκέφτεστε κάποιον τρόπο να τις μοιράσουμε δίκαια;

Άγης: Εγώ με τον αδερφό μου δίνω μία καραμέλα κάθε φορά.

Ε: Δηλαδή;

Άγης: Κοίτα. [ξεκινάει να μοιράζει μία προς μία τις καραμέλες] Μία αυτή, μία αυτή. Μία αυτή, μία αυτή [σταματά].

Μαρία: Και αυτές να τις μοιράσουμε.

Άγης: [συνεχίζει].Μία και μία και τέλος. Όλες. Τέλος.

Ε: Δηλαδή; Για να μοιράσω τις βιταμίνες υπάρχει τρόπος;

Άγης: Ναι. Δίνω μία-μία τις βιταμίνες.

Δέσποινα: Δεν είναι πιο εύκολο να βάλουμε σε κάθε πιάτο από ένα ζευγάρι και μία, για πιο γρήγορα [πλησιάζει και εκτελεί αυτό που είπε].

Ε: Πολύ σωστά. Είναι πιο εύκολο να μοιράζουμε με δυάδες ή τριάδες ή τετράδες. Και πιο γρήγορο. Αλλά ένα-ένα να τα δούμε. Πείτε μου πρώτα, πόσες βιταμίνες να δώσω στην Παμ;

Μελίτα (προνήπιο): Να τις μετρήσω;

Ε: Ναι αμέ.

Μελίτα: [μετράει τις βιταμίνες και στα δύο βέλη]. Μία δύο τρεις. Μια δυο τρεις.

Ε: Άρα η Παμ πόσες θα πάρει;

Άγης: Τρεις θα πάρει η Παμ.

Στο επεισόδιο αυτό φαίνεται ότι ο Άγης, με βάση την εμπειρία του από καταστάσεις «μοιρασιάς» με τον αδερφό του, εισφέρε την επαναλαμβανόμενη 1-1 αντιστοίχιση στη διαδικασία επίλυσης. Η Δέσποινα, πολύ γρήγορα, προτείνει τη συντόμευση αυτής της διαδικασίας, με 2-προς-1 αντιστοίχιση, ακολουθούμενη από 1-1 αντιστοίχιση για ό,τι περισσέψει.

Μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι, όπως είναι αναμενόμενο, η αρχή της εξάντλησης της ποσότητας στον ισομερισμό δεν είναι εξαρχής δεδομένη για τη Μαρία, πιθανώς και για τον Άγη και μπαίνει σε συζήτηση με την προτροπή της ερευνήτριας. Επίσης, φαίνεται ότι αρχικά δεν είναι σαφές ποιο είναι το μερίδιο που αναλογεί στην Παμ. Εδώ, αυτή η ασάφεια εκδηλώνεται από τη Μελίτα, αλλά παρατηρήθηκε και σε άλλα παιδιά, στην αρχική τους επαφή με τη χρήση του εργαλείου του λόγου. Σημειώνουμε, όμως, ότι η δυσκολία αυτή μπορεί να οφείλεται και στη διατύπωση του προβλήματος ως αναλογικό πρόβλημα.

Στο επόμενο επεισόδιο, θα δούμε πώς ο τρόπος που πρότεινε αρχικά η Δέσποινα, φαίνεται να εφαρμόζεται ως «ασφαλής διαδικασία» από τον Δήμο και τον Διαμαντή.

«Πολλές βιταμίνες»: Δύο-προς-ένα αντιστοίχιση

Στο πλαίσιο της ίδιας δραστηριότητας (Δ2), με τις ίδιες συνθήκες, η δεδομένη παίκτρια είναι η Τριπάμ με δόση 12 καραμέλες. Το πρόβλημα, με βάση τα στοιχεία του, (Α=12, ν=3) προβλέπεται να είναι απαιτητικό για τα παιδιά.

Διαμαντής: Εδώ έχει πολλές βιταμίνες. Θα μοιράζουμε ζευγάρια μέχρι να τελειώσουν [ο Δήμος εκτελεί αυτό που λέει ο Διαμαντής, τοποθετώντας επαναλαμβανόμενα από δύο καραμέλες σε κάθε βέλος].

Ε: Και πόσες βιταμίνες θα δώσουμε στην Παμ;

Δήμος: Τέσσερις. Κυρία, θα μπορούσαμε να μοιράσουμε με τετράδες;

Ε: Ναι, ίσως ήταν και πιο γρήγορο. Θα βάζαμε από μία τετράδα σε κάθε πιάτο και θα ξεμπερδεύαμε.

Δήμος: Ναι, όμως δεν μπορούμε να δούμε πόσες τετράδες είναι από την αρχή, γιατί είναι πολλές οι βιταμίνες.

Διαμαντής: Ναι, ένα-ένα ζευγάρι παίρνεις και αν σου μείνουν τρεις μετά τις μοιράζεις μία-μία. Με τις τετράδες θα κάναμε λάθος.

Ε: Γιατί;

Διαμαντής: Είναι πολλές οι τέσσερις βιταμίνες. Δεν ξέρουμε μεγάλους αριθμούς.

Ε: Δε θα κάνατε λάθος. Μα και τώρα τα είπατε πολύ σωστά!

Δήμος: Όμως είναι πολλές οι καραμέλες για να δούμε ομάδες.

Ε: Α, γι’ αυτό κάνατε αυτό που είπε ο Διαμαντής.

Διαμαντής: Ναι, όταν δεν βλέπεις τις ομάδες αυτό κάνεις.

Στο παραπάνω επεισόδιο, τα παιδιά λύνουν ένα απαιτητικό πρόβλημα, εκφράζοντας πολύ καθαρά γιατί είναι απαιτητικό γι’ αυτά. Καταρχάς, γιατί η αρχική ποσότητα είναι «πολλές βιταμίνες». Μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι, το γεγονός ότι ο διαιρέτης είναι 3, δεν εμφανίζεται στα λόγια των παιδιών. Στη συνέχεια, εξηγούν γιατί επέλεξαν την συγκεκριμένη διαδικασία που περιγράφουν αναλυτικά ως μια «ασφαλή» διαδικασία. Τέλος, από τα λόγια τους διαφαίνεται ότι, σε μια συνθήκη που θα ήταν ασφαλής, είναι πιθανόν να προσπαθούσαν να «δουν» ομάδες. Φαίνεται επίσης, ότι με μια «μικρότερη» ομάδα («είναι πολλές οι τέσσερις βιταμίνες»), σε συνδυασμό με μια μικρότερη αρχική ποσότητα, θα έκανε πιθανόν τη συνθήκη πιο ασφαλή για να προσπαθήσουν «να δουν» ομάδες. Στο επόμενο επεισόδιο, ο Διαμαντής «βλέπει» πόσες δυάδες είναι στο οκτώ.

Διακρίνοντας ομάδες

Στο πλαίσιο της ίδιας δραστηριότητας (Δ2), με τις ίδιες συνθήκες, η δεδομένη παίκτρια είναι η Τετραπάμ με δόση 8 καραμέλες.

> Κώστας: Θα προσπαθήσω να βρω μια ομαδούλα. Θα δώσω από μία τριάδα. Κοίτα, τρεις και τρεις [*παίρνει με χέρι του τρεις και άλλες τρεις βιταμίνες και τις τοποθετεί στα δύο από τα 4 βέλη του εργαλείου].*
>
> Διαμαντής: Πρέπει να τις τελειώσεις τις βιταμίνες αλλιώς δε μοιράζει.
>
> Κώστας: Πρέπει να βρω άλλη δόση. Τρεις δε φτάνουν για όλες τις μύτες. Πρέπει να φτάνει για όλες [*ξαναμαζεύει τις καραμέλες όλες μαζί σε μια γραμμή].*
>
> Διαμαντής: Ζευγάρια είναι [*δείχνοντας με το χέρι του ένα-ένα τα ζευγάρια]*. Αν δώσεις ζευγάρι σε όλες τις Παμ και τελειώνεις τις βιταμίνες και έχουν όλες.

Στο επεισόδιο αυτό, ο Κώστας ξεκινά προσπαθώντας «να βρει ομαδούλα», αλλά τηρεί μόνο μία προϋπόθεση (*πρέπει να έχω ίσα μέρη*) από αυτές που πρέπει να ισχύουν για να επιλυθεί σωστά το πρόβλημα. Ο Διαμαντής του επισημαίνει μία ακόμα (*η αρχική ποσότητα πρέπει να εξαντληθεί*). Ο Κώστας διαπιστώνει, μάλλον με τη βοήθεια του εργαλείου του λόγου (*τα μέρη πρέπει να είναι τέσσερα*) ότι δεν μπορεί να έχει 4 μέρη με 3 βιταμίνες το καθένα. Στο τέλος του επεισοδίου, από τα λόγια και την πράξη του Διαμαντή, φαίνεται ότι διακρίνει 4 ζευγάρια στις 8 βιταμίνες. Ταυτόχρονα, εκφράζει το αποτέλεσμα και λεκτικοποιεί προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν συνδυαστικά.

Στο επεισόδιο αυτό, ο Κώστας, αντίθετα με τον Διαμαντή στο προηγούμενο επεισόδιο, δεν επιχειρεί να εφαρμόσει μια «ασφαλή» διαδικασία και, αρχικά, δίνει μια λανθασμένη απάντηση. Γεγονότα σαν αυτό ήταν πολύ γόνιμα στη διάρκεια της παρέμβασης, ώστε να αναδειχθούν τα κρίσιμα στοιχεία των προβλημάτων και να τεθούν υπό συζήτηση.

Παρόμοιες ευκαιρίες δημιούργησε και η δυνατότητα για «δοκιμή και λάθος» που επιτρέπει η διαδικασία *Έμμεσης Ανάλυσης με ή χωρίς ΕΒ.* Επιπλέον, έδωσε μια μέθοδο στα παιδιά να ελέγχουν και να αιτιολογούν αρχικές εκτιμήσεις, σωστές ή λανθασμένες. Στα παρακάτω επεισόδιο παρουσιάζονται εφαρμογές της *Έμμεσης Ανάλυσης* στο πλαίσιο της παρέμβασης.

Η Έμμεση Ανάλυση στην παρέμβαση

Το επόμενο επεισόδιο είναι στο πλαίσιο της δραστηριότητας Δ2 (Αναλογικά Προβλήματα). Το πρόβλημα προς επίλυση είναι το εξής: Η δόση της Διπάμ είναι 6 βιταμίνες και ζητείται η δόση της Παμ. Ο Κώστας επιλέγει να χρησιμοποιήσει το δομημένο υλικό των σύνθετων μονάδων.

> Κώστας: Θα δοκιμάσω τις δύο *(παίρνει δυο αντίγραφα της δυάδας,[τα τοποθετεί κατάλληλα δίπλα από τη γραμμή με τις βιταμίνες]*
>
> Κώστας: Θα τις δοκιμάσω από την αρχή. Αυτή με τις δύο αφήνει βιταμίνες, δεν είναι σωστή [*επιλέγει δύο αντίγραφα της τριάδας και επαναλαμβάνει ό,τι έκανε με τις δυάδες]*. Αυτή με τις τρείς είναι σωστή.
>
> Ε: Γιατί;
>
> Κώστας: Κοιτά, χωράει δύο φορές [δείχνει με το δάχτυλο προς τα υλικά]. Τρεις βιταμίνες θα πάρει η Παμ.

Στο επεισόδιο αυτό, ο Κώστας ξεκινάει με μια αρχική επιλογή, χωρίς να είναι σαφές πώς την έκανε. Πολύ πιθανόν είναι να ξεκίνησε με «τις δύο», που φαίνεται να «δουλεύουν» σε πολλά προβλήματα. Το παιδί δεν χρησιμοποιεί όρους για τις σύνθετες μονάδες. Φαίνεται, όμως, να αξιοποιεί ένα κρίσιμο μέρος της διαδικασίας, που είναι η σύγκριση. Στο τέλος, εκφράζει τη σύγκριση ως μέτρηση με επανάληψη της μονάδας.

Στο επόμενο επεισόδιο, στο πλαίσιο της ίδιας δραστηριότητας (Δ2), τα παιδιά αναζητούν τη δόση της Παμ, με δεδομένη τη δόση της Διπάμ, στις συνεχείς ποσότητες. Ο Δήμος στέκει για λίγο σιωπηλός. Μετά επιλέγει ένα κομμάτι από τις επιλογές

> Ε: Δήμο πώς το ξέρεις ότι θα πάρει αυτό το κομμάτι.
>
> Δήμος: Επειδή έχει ίδιο ύψος με την Παμ. Θα πάρει ένα κομμάτι τόσο μεγάλο όσο και αυτή.
>
> Ε: Εσύ Διαμαντή συμφωνείς;
>
> Διαμαντής: Ναι.
>
> Ίριδα: Όχι. Πρέπει να δοκιμάζουμε. Θα πάρουμε κομμάτια, δύο ίδια και θα τα ενώνουμε.
>
> Ε: Θα τα ενώνεις για να δεις τι;

Ίριδα: Αν είναι ίδιο με αυτό που μας έδωσες [*ενώνει τα δύο κομμάτια με τα χέρια της, φέρνει δίπλα την μπάρα της Διπάμ*]. Ίδιο είναι. Αυτό είναι το κομμάτι της Παμ. Από τα δύο το ένα.

Στο επεισόδιο αυτό, ο Δήμος ξεκίνησε με μια λανθασμένη ιδέα, ότι το κομμάτι της Παμ πρέπει να είναι ίσο ως προς το ύψος με την ίδια την Παμ. Σημειώνουμε ότι αυτή είναι μια δυσκολία που μπορεί να προέρχεται από το είδος του προβλήματος (αναλογικό). Ο Διαμαντής συμφώνησε. Αντίθετα, η Ίριδα διαφωνεί. Αρχικά, δηλώνει ότι «πρέπει να δοκιμάζουμε», αλλά αναφέρεται στη σύνθεση, χωρίς τη σύγκριση. Με την παρέμβαση της ερευνήτριας, η Ίριδα εκφράζει λεκτικά ποια είναι η προϋπόθεση που πρέπει να τηρείται και εκτελεί ολόκληρη τη διαδικασία.

Το επόμενο επεισόδιο είναι στο πλαίσιο της δραστηριότητας Δ3 («κλασματομηχανή»). Το πρόβλημα προς επίλυση είναι ο υποδιπλασιασμός 6 βιταμινών. Τα παιδιά έχουν βρει «τι κάνει» η συγκεκριμένη «κλασματομηχανή» και το εργαλείο του λόγου έχει τοποθετηθεί πάνω στη μηχανή.

Ε: Βάζω λοιπόν έξι βιταμίνες από τη μεγάλη πλευρά. Πόσες θα βγάλει από τη μικρή;

Άγης: Τρεις.

Άρια: Τη μία από τις δύο τριάδες. Ένα δεύτερο.

Ε: Πώς το ξέρετε αυτό;

Άγης: Από εδώ βγάζει τη μία από τις δύο τριάδες. Το ένα δεύτερο. Έχει το ίδιο εργαλείο με τις Παμ. Δύο μύτες. Σε δυο ομάδες χωρίζει.

Στο επεισόδιο αυτό, ο Άγης και η Άρια επιλύουν νοερά το πρόβλημα. Η Άρια και, πιθανότατα ο Άγης, φαίνεται να διακρίνουν «δύο τριάδες» στις 6 καραμέλες. Επιπλέον, τα παιδιά αυτά εκφράζουν το αποτέλεσμα ως «μία από τις δύο τριάδες» και ως «ένα δεύτερο».

Στην περίπτωση του ζητούμενου Α, υπήρξε μικρότερη ποικιλία τρόπων επίλυσης των προβλημάτων: Σχετικά σπάνια η διδαγμένη διαδικασία *Σύνθεση με ΕΒ*, πιο συχνά *χωρίς ΕΒ*. Η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση για το Α, είναι η επίλυση με εκτίμηση του Α και μέτρηση με επανάληψη της μονάδας. Αυτό δεν είχε διδαχθεί και δεν είχε παρατηρηθεί στην παρέμβαση. Στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων, δεν θα μπορούσε να παρατηρηθεί, καθώς δεν

υπήρχαν επιλογές για το Α. Σχεδόν όλα τα παιδιά των Ομάδων Ι και ΙΙ, εμφάνισαν αυτή τη στρατηγική στον μεταέλεγχο, αλλά όχι τα παιδιά της Ομάδας ΙΙΙ.

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε ένα επεισόδιο με υπολογισμό του ζητούμενου το Α στο πλαίσιο της παρέμβασης.

Επίλυση προβλήματος με ζητούμενο το πολλαπλάσιο

Το επόμενο επεισόδιο είναι στο πλαίσιο της δραστηριότητας Δ3 («κλασματομηχανή»-πολλαπλασιαστική αλλαγή). Η «κλασματομηχανή» δουλεύει από τη «μικρή» προς τη «μεγάλη» πλευρά με τελεστή 3. Η αρχική ποσότητα είναι 2 βιταμίνες.

> Ε: Λοιπόν, εγώ θα βάλω δύο βιταμίνες από την μικρή πλευρά. Μπορείς να μου δείξεις τι θα βγάλει από την μεγάλη πλευρά Ορφέα;
>
> Ορφέας: Εεμ, έξι.
>
> Ε: Γιατί έξι;
>
> Άντυ: Θα βγάλει έντεκα βιταμίνες.
>
> Ε: Γιατί έντεκα; Θέλω να μου δείξετε τι κάνει η μηχανή. Όχι μόνο να μου λέτε αριθμούς. Ποιος μπορεί να μου δείξει τι θα βγάλει από την άλλη πλευρά η μηχανή;
>
> Ορφέας: [βάζει σε κάθε βέλος από 2 βιταμίνες]. Ορίστε, έξι.
>
> Ε: Πόσες δυάδες έχεις από την μεγάλη πλευρά;
>
> Ορφέας: Τρεις δυάδες. Κοίτα. Μου έδωσες μία και εγώ έκανα από μία σε κάθε βελάκι. Και είναι τρεις οι δυάδες. Η μηχανή τις κάνει τριπλάσιες.
>
> Ε: Τριπλάσιες, πάρα πολύ ωραία. Να κάνω και μία πονηρή ερώτηση; Αν πάρω μία από αυτές εδώ τις δυάδες στο χέρι μου, την μία από τις τρεις τριάδες, τι θα έχω;
>
> Ορφέας: Το ένα τρίτο είναι, η μία από τις τρεις.

Σε αυτό το επεισόδιο, ο Ορφέας φαίνεται να υπολογίζει νοερά το αποτέλεσμα. Δεν είναι σαφές γιατί ο Άντυ προτείνει 11 βιταμίνες, ενδεχομένως προτείνει έναν «μεγάλο» αριθμό. Ο Ορφέας ξεκινά τη διαδικασία, δεν συνθέτει τις καραμέλες (ξέρει ήδη ότι είναι 6) εξηγεί τι έκανε, με ορολογία και εκφράζοντας σχέσεις. Το επεισόδιο αυτό αναδεικνύει και τις διαφορές μεταξύ των παιδιών, οι οποίες ήταν ορατές στη διάρκεια της παρέμβασης. Ο Άντυ

ήταν ένα από τα παιδιά της Ομάδας ΙΙΙ. Από το συγκεκριμένο επεισόδιο αυτό, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν το παιδί αυτό επωφελείται από την εξήγηση του Ορφέα. Γνωρίζουμε, όμως, ότι ο Άντυ, όπως και τα υπόλοιπα παιδιά της Ομάδας ΙΙΙ, απάντησαν σωστά και τεκμηρίωσαν προβλήματα με ζητούμενο το Α και για ν=3, 4.

Το εργαλείο του λόγου και το δομημένο υλικό των σύνθετων μονάδων

Το επόμενο επεισόδιο είναι επίσης στο πλαίσιο της ίδιας δραστηριότητας (Δ3). Η «κλασματομηχανή» δουλεύει από τη «μικρή» προς τη «μεγάλη» πλευρά με τελεστή 4. Η λειτουργία της έχει προσδιοριστεί και το κατάλληλο εργαλείο του λόγου έχει τοποθετηθεί από τα παιδιά πάνω στη μηχανή. Η αρχική ποσότητα είναι 3 βιταμίνες. Η ερευνήτρια καλεί τον Κώστα για να βρει το πολλαπλάσιο, αλλά ο Άλεξ προφταίνει και βάζει από μία καραμέλα σε κάθε βέλος.

Ε: Άλεξ, πόσες βιταμίνες σου έδωσε στην αρχή η κυρία;

Άλεξ: Μία.

Ε: Μία; Και οι άλλες δύο που είναι δίπλα της; Δεν σου έδωσε μία τριάδα; Εσύ από την άλλη μεριά τι θα κάνεις;

Άλεξ: Έβαλα τέσσερις.

Ε: Τι εννοείς; Έβαλες τέσσερις φορές, ή τέσσερις βιταμίνες;

Άλεξ: Τέσσερις.

Ε: [*Η Άρια σηκώνει χέρι*] Μπορεί να έρθει η Άρια λίγο να μας βοηθήσει;

Άρια: Η μηχανή θα τις διαβάσει τις τριάδες και θα βγάλει τέσσερις. Δεν χρειάζεται να κοιτάζω τις φορές. Μου τις λέει το εργαλείο.

Ε: Α, τι σου δείχνει το εργαλείο σου;

Άρια: Πόσες φορές θα κάνω την τριάδα. Δεν χρειάζεται να το ξέρω. Παίρνω μόνο τις βιταμίνες και κάνω τριάδες σε κάθε μύτη.

Άλεξ: Ναι, αλλά εγώ δε μπορώ να φτιάξω τριάδες.

Άγης: Πάρε τις κολλημένες. Με τις κολλημένες ούτε ένα, δυο, τρία μετράς κάθε φορά. Βάζεις μόνο την τριάδα ή τη δυάδα ή ό,τι είναι στο βελάκι.

Ε: Άλεξ, θες να δοκιμάσεις με τις τριάδες; [*παίρνει τις τρεις καραμέλες από την είσοδο της μηχανής, και βάζει μια δομημένη τριάδα*]

Άλεξ [*παίρνει 4 αντίγραφα της δομημένης τριάδας και τα αντιστοιχεί στα βέλη*]

Τέσσερα τρία.

Στο παραπάνω επεισόδιο, ο Άλεξ φαίνεται να συγχέει τον πολλαπλασιαστή με το γινόμενο. Ο Άλεξ, όπως και ο Άντυ στο προηγούμενο επεισόδιο, είναι παιδί της Ομάδας ΙΙΙ. Η Άρια εξηγεί πολύ καθαρά τι κάνει και σε τι τη βοηθάει το εργαλείο του λόγου. Ο Άντυ δηλώνει τη δυσκολία του «να φτιάξει τριάδες». Ο Άγης προτείνει τη χρήση του δομημένου υλικού, εξηγώντας σε τι βοηθάει. Ο Άντυ αντιστοιχεί τριάδες στα βέλη, και εκφράζει το αποτέλεσμα με πιο στοιχειώδη γλώσσα, σε σχέση με τα άλλα δύο παιδιά.

Εξετάζοντας το επεισόδιο αυτό, θα μπορούσε κανείς να πει ότι η Άρια και ο Άγης περιγράφουν μια καθαρά διαδικαστική χρήση του εργαλείου του λόγου, που μπορεί να εκτελεστεί και χωρίς κατανόηση. Γνωρίζουμε, ωστόσο, ότι κανένα από τα δύο αυτά παιδιά δεν χρησιμοποίησε το εργαλείο του λόγου στον μεταέλεγχο.

5.3. Λεκτικές περιγραφές ενεργειών

Στην κατηγορία αυτή εξετάζονται οι ενέργειες (ανάλυση, σύνθεση, μέτρηση, ή συνδυασμός τους) που περιγράφτηκαν λεκτικά από τα παιδιά. Εξετάστηκαν οι σωστές απαντήσεις των παιδιών, ανά ζητούμενο (Α, β, ή ν). Ως μονάδα ανάλυσης χρησιμοποιήθηκε το σύνολο της λεκτικής παραγωγής του κάθε παιδιού ανά πρόβλημα, κατά τη διάρκεια της επίλυσης και μετά από τις ερωτήσεις της ερευνήτριας.

Για την ενέργεια της σύνθεσης, αναζητήθηκαν εκφράσεις των παιδιών στις οποίες η συνένωση ποσοτήτων καταλήγει στην κατασκευή μιας νέας ποσότητας (π.χ. «ενώνω», «βάζω μαζί και φτιάχνω», «β και β και…» «βάζω το β ν φορές και φτιάχνω»).

Σημειώνεται ότι υπάρχουν ποιοτικές διαφορές ανάμεσα στις περιγραφές της σύνθεσης, οι οποίες θα εξεταστούν με λεπτομέρεια στην ενότητα §4.5 που αφορά τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων, όπως αντανακλώνται στα λόγια των παιδιών.

Για την ενέργεια της ανάλυσης αναζητήθηκαν εκφράσεις στις οποίες απεικονίζεται ο διαμερισμός μιας ποσότητας (όπως «χωρίζω», «μοιράζω», «κόβω»). Επιπλέον, ως ελλειπτικές περιγραφές της ενέργειας της ανάλυσης θεωρήθηκαν οι περιγραφές «σε ν» και «στα ν» (π.χ. «σε τέσσερα», «στα δύο»).

Για την ενέργεια της μέτρησης αναζητήθηκε αρχικά το ρήμα «μετράω». Διαπιστώθηκε ότι η λέξη «μετράω» χρησιμοποιήθηκε ελάχιστες φορές στο σύνολο των απαντήσεων των παιδιών και όχι απαραίτητα για την περιγραφή μιας ενέργειας από τις κρίσιμες για την επίλυση του προβλήματος. Θεωρήσαμε ως αναφορά στη μέτρηση την περιγραφή του αποτελέσματός της με την έκφραση «χωράει» (π.χ. «Τρία κομμάτια χωράνε εδώ», «Τρεις φορές χωράει το κομμάτι σου»).

5.3.1 Ενέργειες για το ζητούμενο Α

Στο σύνολο των 278 σωστών απαντήσεων για το Α, εντοπίστηκαν συνολικά 125 (45%) περιγραφές ενεργειών. Η ενέργεια που περίγραψαν λεκτικά τα παιδιά ήταν η σύνθεση, αποκλειστικά στις 121 περιπτώσεις. Όλα τα παιδιά περιέγραψαν την ενέργεια της σύνθεσης, τουλάχιστον 4 φορές το καθένα. Στο Πλαίσιο 28 παρουσιάζονται παραδείγματα λεκτικών περιγραφών σύνθεσης στις συνεχείς και στις διακριτές ποσότητες.

Συνεχείς ποσότητες

Στο Π2.7 («κλασματομηχανές», ν=3), ο Μάρκος περιγράφει: «Θέλω να ενώσω αυτό το κομμάτι και ένα και ένα. Να τη η σοκολάτα».

Στο Π2.7 («κλασματομηχανές», ν=3), ο Διαμαντής αναφέρει: «Πρέπει να βρω τρία κομμάτια σαν αυτό. Να κοίτα! Θα ενώσω αυτό και το ίδιο και το ίδιο.»

Στο Π2.3 (αναγνώριση του όρου «τριπλάσιο» και κατασκευή της αντίστοιχης ποσότητας), ο Κώστας περιγράφει: «Έφτιαξα τρεις φορές το κομμάτι μου [*δείχνει το αρχικό]* και το ένωσα. Έκανα μία σοκολάτα, να, η τριπλάσια».

Διακριτές ποσότητες

Στο Β2.2 (αναγνώριση του όρου «διπλάσιο» και κατασκευής της αντίστοιχης ποσότητας, β=3), ο Άντυ περιγράφει: «Θα βάλω αυτές τις καραμέλες [*παίρνει στο χέρι του τις 3 καραμέλες που δίνονται ως αρχική ποσότητα]* και θα τις ενώσω με αυτές [*παίρνει ακόμη 3]*».

Στο Β2.6 (αναγνώριση του όρου «τετραπλάσιο» και κατασκευή της αντίστοιχης ποσότητας, β=2), ο Ευτύχης περιγράφει: «Θα ενώσω δύο καραμέλες και δύο και δύο και δύο καραμέλες. Οκτώ καραμέλες όλες.»

Στο Β2.4 (αναγνώριση του όρου «τριπλάσιο» και κατασκευή της αντίστοιχης ποσότητας, β=2, η Άρια περιγράφει: «Θα ενώσω τρεις φορές το ζευγάρι. Να, το έβαλα τρεις φορές. Και αφού είναι τρεις φορές είναι το τριπλάσιο.»

Πλαίσιο παραδείγματος 28: Παραδείγματα περιγραφής σύνθεσης για το ζητούμενο Α

Σε 4 περιπτώσεις αναφέρθηκαν ταυτόχρονα η σύνθεση και η ανάλυση. Στο Πλαίσιο 29 παρουσιάζονται παραδείγματα τέτοιων περιγραφών για τις συνεχείς και διακριτές ποσότητες. Οι περιγραφές αυτές προήλθαν από 3 παιδιά (Άγης, Άρια, Διαμαντής), με δύο περιγραφές να αντιστοιχούν στην Άρια.

Συνεχείς ποσότητες

Στο Π2.1 («κλασματομηχανή», ν=2), ο Άγης αναφέρει: «Κοίτα… Από την μία θα ενώσω δύο ίδια κομμάτια και έτσι (η μηχανή) θα μου φτιάχνει το διπλάσιο και από την άλλη θα χωρίσω τα κομμάτια, αυτά τα ίδια, και θα έχω το ένα δεύτερο.»

Διακριτές ποσότητες

Αντίστοιχα, για την ίδια σχέση, στο ίδιο πρόβλημα («κλασματομηχανή», ν=2, β=2), η Άρια περιγράφει: «Θα κάνω τις καραμέλες γιατί θα ενώσω δύο φορές τη δυάδα. Και έτσι θα έχω τις 4 καραμέλες. Αν όμως τις σπάσω θα έχω πάλι δύο δυάδες. Αυτό μπορώ να το κάνω συνέχεια. Κοίτα [*κουνάει τις καραμέλες ενώνοντας και χωρίζοντας τες]»*

Πλαίσιο παραδείγματος 29: Παραδείγματα περιγραφής σύνθεσης/ ανάλυσης για το ζητούμενο Α.

Επισημαίνουμε για τις εφαρμοσμένες διαδικασίες που κωδικοποιήθηκαν ως *Εκτίμηση του Α-Μέτρηση* με 1β (§5.2.1), όταν περιγράφτηκαν λεκτικά ενέργειες, αυτές ήταν ενέργειες σύνθεσης. Ένα τέτοιο παράδειγμα παρουσιάζεται στο Πλαίσιο 30.

Στο Π1.1 (αναλογικό πρόβλημα, συνεχείς ποσότητες, ν=2), ο Άγης εκτιμά το Α, βάζει τη μεγάλη μπάρα δίπλα στη μικρή, αρχικά από τη μία άκρη μέχρι τη μέση και μετά από τη μέση μέχρι την άλλη άκρη. Εξηγεί γιατί θεωρεί ότι βρήκε το σωστό Α: «Γιατί αυτή η μπάρα φτιάχνεται από το κομμάτι της Παμ που μου έδωσες αν το βάλω δύο φορές. Τη διπλάσια μπάρα ζητάς».

Πλαίσιο παραδείγματος 30: Λεκτική περιγραφή ενέργειας σύνθεσης με εφαρμογή μέτρησης

Συνοψίζοντας, στα προβλήματα με ζητούμενο το Α, όταν τα παιδιά περιγράφουν μια ενέργεια, αυτή είναι η ενέργεια της σύνθεσης. Η ενέργεια που περιγράφουν τα παιδιά δεν αντιστοιχεί απαραίτητα στη διαδικασία που εφαρμόζουν κατά την επίλυση. Τρία παιδιά (Άγης, Άρια, Διαμαντής) περιγράφουν αντίστροφες ενέργειες στο πλαίσιο του ίδιου προβλήματος.

5.3.2 Ενέργειες για το ζητούμενο β

Στο σύνολο των 261 σωστών απαντήσεων στα προβλήματα με ζητούμενο το β, εντοπίστηκαν 122 λεκτικές περιγραφές ενεργειών (46,7%). Δεδομένης της διαφοράς μεταξύ διακριτών και

συνεχών ποσοτήτων στην περίπτωση του ζητούμενου β, όπως φάνηκε και από τις διαδικασίες που εφάρμοσαν τα παιδιά, έχει νόημα να εξεταστούν οι ενέργειες που περιγράφτηκαν λεκτικά ανά είδος ποσότητας (Πίνακας 18).

Ποσότητα	Ενέργεια Λεκτικά					
	Ανάλυση	Σύνθεση	Μέτρηση	Αντίστροφες	Άλλο	Σύνολο
Διακριτή	39	2	1	1	0	43
Συνεχής	63	10	1	5	2	81
Σύνολο	102	12	2	6	2	122

Πίνακας 18: Λεκτικές περιγραφές ενεργειών για το ζητούμενο β, ανά είδος ποσότητας.

Από τον Πίνακα 18 φαίνεται ότι λεκτικές περιγραφές ενεργειών παρατηρήθηκαν πιο συχνά στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων και ότι η μεγάλη πλειοψηφία τους αφορά την ανάλυση, και για τα δύο είδη ποσοτήτων (Πλαίσιο 31).

Συνεχείς ποσότητες

Στο Α1.1 («ίσα μέτρα», ν=4), ο Δήμος λέει: «Τα αδερφάκια είναι τέσσερα. Θα κόψω την σοκολάτα σε τέσσερα κομμάτια.» Το παιδί επιλέγει ένα κομμάτι, παίρνει άλλα τρία αντίγραφά του. Τα τοποθετεί κατάλληλα δίπλα στη σοκολάτα. Το άθροισμα των μηκών τους είναι διαφορετικό από το μήκος της σοκολάτας. Το παιδί επαναλαμβάνει με (το σωστό) κομμάτι και το προτείνει ως απάντηση («Αυτό θα πάρει ο Γιάννης»).

Διακριτές ποσότητες

Στο Α1.2 («ισοπληθείς ομάδες», ν=2, Α=6), ο Ευτύχης λέει: «Θα χωρίσω τις καραμέλες» [*μοιράζει μία-μία τις καραμέλες στους παραλήπτες]*.

Στο Α1.4 («ισοπληθείς ομάδες», ν=3, Α=6), η Δέσποινα περιγράφει: «Θα τις μοιράσω με ζευγάρια. Αυτό πάντα πιάνει».

Πλαίσιο παραδείγματος 31: Λεκτικές περιγραφές ανάλυσης για το ζητούμενο β

Όπως φαίνεται και από το παράδειγμα του Δήμου στο Πλαίσιο 31, το παιδί αναφέρεται στην αντίστροφη ενέργεια, από αυτήν που εφαρμόζει για την επίλυση του προβλήματος. Όλα τα παιδιά αναφέρθηκαν στην αντίστροφη ενέργεια από αυτή που αντιστοιχούσε στη διαδικασία που εφάρμοσαν, από 1 έως 9 φορές το καθένα, σε συνολικά 60 περιπτώσεις. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρθηκαν στην ανάλυση, ενώ πραγματοποίησαν κάποια διαδικασία *Έμμεσης Ανάλυσης*.

Τα παιδιά περιέγραψαν λεκτικά σύνθεση λίγες φορές, κατά κύριο λόγο στις συνεχείς ποσότητες, ενώ δύο παιδιά (Άγης, Κώστας) το έκαναν και στη διακριτή περίπτωση. Παραδείγματα παρουσιάζονται στο Πλαίσιο 32.

Συνεχείς ποσότητες

Στο Α1.1 («ίσα μέτρα», ν=2) ο Γιάννης λέει: «Δύο κομμάτια θα ενώσω. Ίδια. Να τα ενώσω να δω αν είναι ίδια με αυτή;» [*Δείχνει την αρχική σοκολάτα. Τοποθετεί τα κομμάτια κατάλληλα, παράλληλα με τη δεδομένη μπάρα]*. Συνεχίζει: «Ναι αυτή είναι. Αυτό το κομμάτι, το ένα δεύτερο θα πάρω».

Διακριτές ποσότητες

Στο Α1.6 («ισοπληθείς ομάδες», ν=4, Α=8), ο Άγης επιλέγει την κορδέλα με τις δύο (κολλημένες) καραμέλες. Λέει: «Θα ενώσω τα ζευγάρια μου». Τοποθετεί αντίγραφα με κορδέλες παράλληλα με τις δεδομένες καραμέλες. Λέει: «Κοίτα, τέσσερα ζευγάρια ενωμένα είναι οι καραμέλες που μου έδωσες»

Πλαίσιο παραδείγματος 32: Λεκτικές περιγραφές σύνθεσης για το ζητούμενο β.

Σε ένα παιδί (Κώστας) οφείλονται οι δύο περιγραφές μέτρησης, μία στις συνεχείς και μία στις διακριτές ποσότητες (Πλαίσιο 32).

Συνεχείς ποσότητες

Στο Π1.1 (αναλογικό πρόβλημα, ν=2), ο Κώστας επιλέγει ένα κομμάτι, το τοποθετεί παράλληλα με τη μπάρα, από την αρχή μέχρι τη μέση της, το σηκώνει και το ξανατοποθετεί από τη μέση μέχρι το τέλος. Λέει: «Να το ένα δεύτερο. (…) Πάλι δύο κομμάτια χωράνε στη σοκολάτα και θα δώσω το ένα».

Διακριτές ποσότητες

Στο Α1.4 («ισοπληθείς ομάδες», ν=2, Α=6), ο Κώστας χωρίζει απευθείας τις 6 καραμέλες σε 2 τριάδες. Λέει «Δυο τριάδες χωράνε εδώ. Ε, θα πάρω τη μία από τις δύο».

Πλαίσιο παραδείγματος 33: Λεκτικές περιγραφές μέτρησης για το ζητούμενο β.

Σε 6 περιπτώσεις, 3 παιδιά (Άγης, Άρια, Δέσποινα), από δύο φορές το καθένα, περιέγραψαν τόσο τη σύνθεση, όσο και την ανάλυση, δηλαδή αντίστροφες ενέργειες. Παραδείγματα παρουσιάζονται στο (Πλαίσιο 34).

Συνεχείς ποσότητες

Στο Β1.1 (αναγνώριση του όρου «ένα τρίτο» και κατασκευής της αντίστοιχης ποσότητας) η Δέσποινα λέει: «Τρία κομματάκια ενώνονται κάνουν τη σοκολατίτσα. Χωρίζονται και έχω το ένα από τα τρία».

Στο Π1.3 (αναλογικό πρόβλημα, ν=3), Άγης λέει: «Περίμενε. Θέλω τρία τέτοια κομμάτια. Αν με αυτά τα τρία μπορώ να φτιάξω την μπάρα που μου έδωσες τότε αυτό είναι το σωστό [*επαληθεύει]*. «Αυτό είναι. Είναι το ένα από τα τρία κομμάτια που θα κόψω την μπάρα της Τριπάμ».

Στο Π1.2 (αναλογικό πρόβλημα, ν=2), η Άρια τοποθετεί το χέρι της στη μέση της μπάρας, ύστερα επιλέγει ένα κομμάτι. Λέει: «Αυτό το κομμάτι θα δώσω στην Παμ που έκοψα. Κοίτα, η Παμ είναι η μία μικρή Παμ, το ένα από τα δύο κομμάτια της Διπάμ.(….) Η μπάρα που θα πάρει θα είναι το ένα από τα δύο κομμάτια, τα μικρά. Κοίτα αν τα ενώσω φτιάχνουν την μπάρα της Διπάμ».

Διακριτές ποσότητες

Στο Α1.4 («ίσοπληθείς ομάδες», ν=2, Α=6) ο Άγης λέει: «Θα τις μοιράσω με τριάδες. Θα είναι δύο τριάδες. Και κολλάνε οι τριάδες και είναι πάλι έξι!»

Πλαίσιο παραδείγματος 34: Λεκτικές περιγραφές ανάλυσης και σύνθεσης για το ζητούμενο β.

Στην κατηγορία «Άλλο» τοποθετήθηκαν δύο λεκτικές περιγραφές που περιγράφουν αντίστροφες διαδικασίες, αλλά στο πλαίσιο της λειτουργίας της «κλασματομηχανής» (Πλαίσιο 35).

Συνεχείς ποσότητες

Στο Π2.1 («κλασματομηχανή», ν=2), ο Μάρκος λέει: «Θα το κάνουμε δύο μικρά. Θα πάρουμε το ένα και θα το πάμε από τη μικρή πλευρά». (...) Είναι το ένα δεύτερο. Άμα από δω είναι το διπλάσιο, από δω είναι το ένα δεύτερο. Η θα ενώνει δύο ή θα χωρίζει δύο. Και μια άλλη μηχανή τρία. Και μια άλλη μηχανή τέσσερα. Έτσι δουλεύουν αυτές οι μηχανές».

Στο Π2.1 (κλασματομηχανή», ν=2) η Μαρία λέει: «Δύο κομμάτια θα βγάλει. Από τη μία το ενώνει και μία το κόβει. Στη μικρή (πλευρά) το κόβει».

Πλαίσιο παραδείγματος 35: Λεκτική περιγραφή σύνθεσης και ανάλυσης στο πλαίσιο της «κλασματομηχανής».

Συνοψίζοντας, στην περίπτωση του ζητούμενου β, όταν τα παιδιά περιέγραψαν λεκτικά κάποια ενέργεια, αυτή ήταν κατά κύριο λόγο η ενέργεια της ανάλυσης, ακόμα και όταν η διαδικασία που εφάρμοσαν περιλάμβανε την αντίστροφη ενέργεια. Ένα παιδί (Κώστας) αναφέρθηκε ρητά στη μέτρηση. Στην περίπτωση του ζητούμενου β, τρία παιδιά αναφέρθηκαν σε αντίστροφες διαδικασίες στο ίδιο πρόβλημα. Δύο από αυτά (Άγης, Άρια) είχαν κάνει το ίδιο και στην περίπτωση του ζητούμενου Α, ενώ το τρίτο (Δέσποινα) όχι.

5.3.3. Ενέργειες για το ζητούμενο ν

Στο σύνολο των 72 σωστών απαντήσεων στα προβλήματα με ζητούμενο το β, στις 31 τα παιδιά περιγράφουν λεκτικά μόνο τη διανομή των αντίγραφων του «μεριδίου» στους παραλήπτες. Στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων, η διανομή «μεριδίων» μέχρι την εξάντληση της ποσότητας αντιστοιχεί και στη διαδικασία με την οποία επέλυσαν το πρόβλημα (βλ. §4.2.3). Ωστόσο, η λεκτική αναφορά στην αντιστοίχιση εμφανίζεται και στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων, όπου τα παιδιά βρίσκουν το πλήθος των «κομματιών» με μέτρηση, αλλά περιγράφουν μόνο τη διανομή ενός κομματιού σε κάθε παραλήπτη (Πλαίσιο 36). Η διανομή περιγράφτηκε είτε με επαναλαμβανόμενη αντιστοίχιση (βλ. τα παραδείγματα του Άγη στο Πλαίσιο 36), είτε με αντιστοίχιση του ίδιου μεριδίου σε «κάθε» παραλήπτη ή «όλους» τους παραλήπτες (βλ. το παράδειγμα του Πέτρου και του Κώστα στο Πλαίσιο 36).

Συνεχείς ποσότητες

Στο Α3.1 («ίσα μέτρα», ν=2), ο Άγης παίρνει το δεδομένο β, το τοποθετεί δίπλα στο δεδομένο Α. Κάνει το ίδιο με ένα αντίγραφο του β. Το συνολικό του μήκος ισούται με αυτό του Α. Ο Άγης μαζεύει τα κομμάτια και δίνει το ένα στον πρώτο παραλήπτη και το άλλο στον δεύτερο παραλήπτη. Λέει: «Δύο θα πάρουν. Έδωσα ένα κομμάτι σε αυτόν, και ένα σε αυτόν».

Στο Α3.1 («ίσα μέτρα», ν=2) ο Πέτρος λέει: «Όλοι θα πάρουν το κομμάτι που μου δίνεις».

Διακριτές ποσότητες

Στο Α3.2 («ισοπληθείς ομάδες», Α=6, β=3) ο Άγης αποσπά 3 από τις 6 καραμέλες και βάζει μπροστά στον πρώτο παραλήπτη. Επαναλαμβάνει με τις υπόλοιπες 3 καραμέλες. Ταυτόχρονα περιγράφει: «Μία τριάδα θα πάρει αυτή και μία αυτή. Η κάθε μία από μία».

Στο Α3.2 (ισοπληθείς ομάδες, Α=8, β=2), ο Κώστας λέει: «Θα δώσω δύο καραμέλες σε κάθε κορίτσι». Αντιστοιχεί δύο καραμέλες σε κάθε παραλήπτη. Λέει: «Τέσσερα κορίτσια θα πάρουν καραμέλες».

Πλαίσιο παραδείγματος 36: Λεκτικές περιγραφές της αντιστοίχισης για το ζητούμενο ν

Σε 6 περιπτώσεις, περιγράφτηκε η ενέργεια της ανάλυσης, κατά κύριο λόγο στις διακριτές και σε δύο περιπτώσεις (Άντυ, Μαρία) στις συνεχείς ποσότητες, ενώ σε 10 περιπτώσεις περιγράφτηκε η ενέργεια της σύνθεσης, μόνο για τις συνεχείς ποσότητες (Πλαίσιο 37). Οι περιγραφές αυτές μπορεί να συνοδεύονταν και από την περιγραφή της διανομής των μεριδίων.

Συνεχείς ποσότητες

Στο Α3.3 («ίσα μέτρα», ν=4) ο Γιάννης παίρνει στα χέρια του αντίγραφα του δεδομένου ν. Λέει: «Περίμενε να τα ενώσω». Τοποθετεί κατάλληλα κομμάτια δίπλα στο δεδομένο Α, έως ότου το συνολικό του μήκος ταυτιστεί με αυτό του Α. Ο Γιάννης μετράει τα κομμάτια και λέει «Τέσσερα κομμάτια φτιάχνουν αυτή τη σοκολάτα. Τέσσερα παιδιά θα πάρουν».

Στο Α3.1(«ίσα μέτρα», ν=2) η Μαρία παίρνει στα χέρια της και τα 5 διαθέσιμα αντίγραφα του δεδομένου β και τα ενώνει γραμμικά. Στη συνέχεια τα τοποθετεί κατάλληλα δίπλα τους το δεδομένο Α. Αφαιρεί τα 3 κομμάτια που περισσεύουν. Λέει: «Σε δύο κομμάτια κόβεται η σοκολάτα. Δύο παιδιά θα πάρουν κομμάτι».

Διακριτές ποσότητες

Στο Α3.6 («ισοπληθείς ομάδες», ν=4, Α=8), ο Γιάννης λέει: «Θα τις μοιράσω δίκαια και θα πάρουν όλες από δύο». Αντιστοιχεί δύο καραμέλες σε κάθε «κορίτσι» λέγοντας ταυτόχρονα: «Δύο και δύο και δύο και δύο». Καταλήγει: «Για τέσσερα παιδάκια φτάνουν οι καραμέλες. Τα άλλα δε θα φάνε».

Πλαίσιο παραδείγματος 37: Λεκτικές περιγραφές ανάλυσης ή σύνθεσης για το ζητούμενο ν

Σε 7 περιπτώσεις, όλες στις συνεχείς ποσότητες, περιγράφτηκαν τόσο η ανάλυση, όσο και η σύνθεση. Οι περιγραφές αυτές προήλθαν από 4 παιδιά (Άρια, Κώστας, Μαρία, Γιάννης). Τα τρία πρώτα παιδιά περιέγραψαν ανάλυση και σύνθεση από 2 φορές το καθένα. Παραδείγματα παρουσιάζονται στο Πλαίσιο 38.

Συνεχείς ποσότητες

Στο Α3.3 («ίσα μέτρα», ν=3), ο Γιάννης παίρνει στα χέρια του αντίγραφα του δεδομένου β. Αρχίζει να τα τοποθετεί κατάλληλα δίπλα στο δεδομένο Α λέγοντας ταυτόχρονα «Θα ενώνω ένα και ένα και ένα». Καταλήγει: «Τρία κομμάτια φτιάχνουν αυτή τη σοκολάτα. Θα την μοιράσω σε τρία παιδιά».

Στο Α3.3 («ίσα μέτρα», ν=3), ο Κώστας λέει: «Πόσα κομμάτια, δηλαδή, θα κόψω τη σοκολάτα». Παίρνει στα χέρια του το δεδομένο β λέγοντας «Κάθε παιδί θα πάρει αυτό το κομμάτι». Μετράει με το «κομμάτι» τη «σοκολάτα» και λέει: «Τρία κομμάτια φτιάχνουν αυτή το σοκολάτα. Τρία παιδιά θα πάρουν».

Στο Α3.3 («ίσα μέτρα», ν=3), η Μαρία λέει: «Θα βρω πόσα κομμάτια θα κόψω τη σοκολάτα». Τοποθετεί 3 αντίγραφα του δεδομένου β δίπλα στο δεδομένο Α. Λέει: «Τρία κομμάτια φτιάχνουν τη σοκολάτα».

Πλαίσιο παραδείγματος 38: Λεκτικές περιγραφές ανάλυσης και σύνθεσης για το ζητούμενο ν.

Στις λεκτικές παραγωγές των παιδιών εντοπίστηκε μία περιγραφή της ενέργειας της μέτρησης με χρήση του ρήματος «μετράω» από τον Διαμαντή (Πλαίσιο 39). Σε άλλες 13 περιπτώσεις έγινε αναφορά στη μέτρηση δια του αποτελέσματός της, με χρήση του ρήματος «χωράω» (Πλαίσιο 40). Οι αναφορές αυτές προήλθαν από 6 παιδιά (Άγης, Άρια, Διαμαντής, Δήμος, Ίριδα, Μάρκος). Από 4 τέτοιες αναφορές έκαναν ο Άγης και η Άρια, 2 η Ίριδα και από μία ο Διαμαντής, ο Δήμος και ο Μάρκος.

Διακριτές ποσότητες

Στο Α3.6 («ισοπληθείς ομάδες», Α=8, β=2), ο Διαμαντής παίρνει τις λωρίδες με τις (κολλημένες) δυάδες και τις ενώνει μπροστά από το δοθέν Α. Στη συνέχεια λέει: «Για να μετρήσω τις καραμέλες θέλω τέσσερις κορδέλες, τέσσερα ζευγάρια. Θα δώσω σε τέσσερα παιδιά ζευγάρι»

Πλαίσιο παραδείγματος 39: Λεκτική περιγραφή μέτρησης με το ρήμα «μετράω» για το ζητούμενο ν.

Συνεχείς ποσότητες

Στο Α3.3 («ίσα μέτρα», ν=3), η Άρια ξεκινάει από την άκρη της σοκολάτας και τοποθετεί τα β το ένα δίπλα στο άλλο. Μόλις την φτιάξει σταματά και απαντά: «Κοίτα, τρία κομμάτια χωράνε σε αυτή (δείχνει την αρχική σοκολάτα). Τρία παιδιά μπορούν να φάνε».

Στο Α3.1 («ίσα μέτρα», ν=2), ο Διαμαντής παίρνει το δεδομένο β, το βάζει δίπλα στην αρχική σοκολάτα και το μετακινεί κατά μήκος της. Μετά απαντάει: «Κοίτα, χώρεσε το κομμάτι μία φορά και όταν το κουνήσω δύο. Δύο παιδιά θα πάρουν κομμάτι».

Στο Α3.5 («ίσα μέτρα», ν=4), η Ίριδα παίρνει το δεδομένο β και 5 αντίγραφα. Τοποθετεί αντίγραφα δίπλα στο δεδομένο Α, μέχρι το συνολικό τους μήκος να γίνει ίσο με αυτό του Α. Παίρνει τα τέσσερα κομμάτια που χρειάστηκε λέγοντας «Θα δώσω τέσσερα τέτοια σε τέσσερα παιδιά». Εξηγεί: «Το κομμάτι σου χωράει τέσσερις φορές»

Διακριτές ποσότητες

Στο Α3.4 («ισοπληθείς ομάδες», Α=9, β=3) η Άρια αρχικά επιλέγει την κορδέλα με τις δύο (κολλημένες) καραμέλες και τη μετακινεί κατά μήκος των 9 καραμελών που είναι επάνω στο τραπέζι. Αλλάζει την κορδέλα, παίρνοντας αυτή με τις 3 καραμέλες. Μετράει μετακινώντας κατά μήκος της γραμμής που φτιάχνουν οι καραμέλες την κορδέλα και περιγράφει κρατώντας την στο χέρι της: «Κοίτα. Χωράει μία, δύο, τρεις φορές! Τρεις φορές την κούνησα».

Στο Α3.4 («ισοπληθείς ομάδες», Α=6, β=2), ο Κώστας παίρνει τη λωρίδα με την (κολλημένη) δυάδα και μετράει τις «καραμέλες» μετακινώντας την κατά μήκος τους. Λέει: «Θα δώσω στα δύο τα κορίτσια. Δύο φορές χωράει η κορδέλα μου».

Πλαίσιο παραδείγματος 40: Αναφορά στη μέτρηση με το ρήμα «χωράω» για το ζητούμενο ν.

Από το Πλαίσιο 40 παρατηρείται ότι οι αναφορές των παιδιών στη μέτρηση μέσω του ρήματος «χωράω» μπορεί να αντιστοιχούν σε μέτρηση χωρίς ή με επανάληψη της μονάδας.

Αξίζει να επισημανθεί ότι στις υπόλοιπες σωστές απαντήσεις των παιδιών εκφράζονται αποτελέσματα μέτρησης, ενώ συχνά τα παιδιά διατυπώνουν ρητά την ερώτηση «πόσα είναι τα κομμάτια/ οι ομάδες». Για παράδειγμα, ο Ορφέας στο Α3.4 («ισοπληθείς ομάδες», Α=6, β=2), ξεκίνησε λέγοντας «Τώρα θα παίρνουν δύο. Πόσες δυάδες είναι;». Αφού ομαδοποίησε τις 6 «καραμέλες» σε δυάδες, απάντησε «Τρεις δυάδες είναι». Αυτού του είδους οι απαντήσεις θα μας απασχολήσουν στην επόμενη ενότητα, καθώς θεωρήσαμε ότι δεν αντιστοιχούν σε λεκτικές περιγραφές ενεργειών.

Όπως φαίνεται από τις §5.3.1-5.3.3, όλα τα παιδιά περιγράφουν ενέργειες σύνθεσης και ανάλυσης για τα ζητούμενα Α, β και σε κάποιες περιπτώσεις και για το ζητούμενο ν. Λίγα παιδιά περιγράφουν λεκτικά μέτρηση, κατά κύριο λόγο στο πρόβλημα διαίρεσης μέτρησης.

Ορισμένα παιδιά περιγράφουν λεκτικά ταυτόχρονα της αντίστροφες ενέργειες της σύνθεσης και της ανάλυσης. Στον Πίνακα 19, παρουσιάζεται η συχνότητα με την οποία τα παιδιά αναφέρθηκαν σε αντίστροφες ενέργειες, ή στην ενέργεια της μέτρησης, στα 46 προβλήματα του μεταελέγχου που εξετάστηκαν.

		Αντίστροφες ενέργειες				Μέτρηση			
Ομάδα	Παιδιά	Α	β	ν	Σύνολο	Α	β	ν	Σύνολο
I	Άγης	1	2	0	3	0	0	4	4
	Άρια	2	2	2	6	0	0	4	4
	Γιάννης*	0	0	1	1	0	0	0	0
	Διαμαντής	1	0	0	1	0	0	1	1
	Ίριδα	0	0	0	0	0	0	2	2
	Κων/νος	0	0	2	2	0	2	0	2
	Μαρία	0	0	2	2	0	0	0	0
	Ορφέας	0	0	0	0	0	0	0	0
II	Δέσποινα	0	2	0	2	0	0	0	0
	Δήμος	0	0	0	0	0	0	1	1
	Μάρκος	0	0	0	0	0	0	1	1
III	Άντυ	0	0	0	0	0	0	0	0
	Ευτύχης*	0	0	0	0	0	0	0	0
	Άλεξ	0	0	0	0	0	0	0	0
	Πέτρος	0	0	0	0	0	0	0	0
	Σύνολο	4	6	7	17	0	2	13	15

Πίνακας 19: Συχνότητα λεκτικής περιγραφής αντίστροφων ενεργειών (ανάλυση/σύνθεση) ή μέτρησης, ανά παιδί και ανά ζητούμενο.

Από τον Πίνακα 19 φαίνεται ότι 7 παιδιά της Ομάδας I και II περιέγραψαν λεκτικά αντίστροφες ενέργειες, τα περισσότερα από 1-3 φορές και κυρίως στα προβλήματα με ζητούμενο το β. Η Άρια περιέγραψε αντίστροφες ενέργειες πιο συστηματικά (6 φορές) και για όλα τα ζητούμενα. Η ενέργεια της μέτρησης περιγράφτηκε λεκτικά κατά κύριο λόγο για το ζητούμενο ν, από 7 παιδιά, τα περισσότερα από 1-2 φορές και 4 φορές από τον Άγη και την Άρια. Ένα παιδί, ο Κώστας περιέγραψε μέτρηση για το ζητούμενο β.

5.3.4 Σύνοψη και σύνδεση με την παρέμβαση

Από την εξέταση των λεκτικών παραγωγών των παιδιών σε κάθε πρόβλημα, ανά ζητούμενο, διαπιστώθηκε ότι όταν τα παιδιά περιγράφουν λεκτικά κάποια ενέργεια, αναφέρονται στη σύνθεση για το ζητούμενο Α και, κατά κύριο λόγο στην ανάλυση για το ζητούμενο β. Οι περιγραφές αυτές δεν συμβαδίζουν απαραίτητα με την διαδικασία που εφάρμοσαν για να λύσουν το πρόβλημα. Ειδικότερα, στην περίπτωση του β, περιγράφεται η ενέργεια της ανάλυσης στην πλειοψηφία των περιπτώσεων όπου έχουν εφαρμοστεί διαδικασίες *Έμμεσης Ανάλυσης*, οι οποίες περιλαμβάνουν σύνθεση και σύγκριση. Όλα τα παιδιά αναφέρθηκαν στην ενέργεια της ανάλυσης, ενώ εφάρμοζαν την αντίστροφη ενέργεια. Αυτό υποδεικνύει ότι η διδαγμένη διαδικασία της *Έμμεσης Ανάλυσης* και οι παραλλαγές της που εφάρμοσαν τα παιδιά έχουν ερμηνευτεί από τα παιδιά ως διαδικασίες που υλοποιούν την ενέργεια της ανάλυσης. Η μέτρηση περιγράφτηκε λεκτικά λίγες φορές και, κατά κύριο λόγο, στα προβλήματα διαίρεσης μέτρησης. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι μέτρηση περιγράφτηκε και στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων (μέτρηση με σύνθετη μονάδα).

Υπενθυμίζεται ότι η διαδικασία *Έμμεσης Ανάλυσης* περιλαμβάνει την ενέργεια της σύγκρισης της σύνθεσης των ν β με το Α, η οποία μπορεί να ιδωθεί ως άμεση σύγκριση μηκών, ή ως μέτρηση και να εκφραστεί ως μέτρηση χωρίς επανάληψη της μονάδας (π.χ. «Τέσσερα κομμάτια χωράνε στην μπάρα») ή ως μέτρηση με επανάληψη της μονάδας (π.χ. «Το κομμάτι χωράει τέσσερις φορές στην μπάρα»). Εξετάζοντας δειγματοληπτικά το βιντεοσκοπημένο υλικό, διαπιστώσαμε ότι η ερευνήτρια περιγράφει την σύγκριση και ως μέτρηση σχετικά συχνά (π.χ. «Πόσες φορές χώρεσε το κομμάτι σου στην μπάρα;) αλλά οι περιγραφές του τύπου «Να ενώσουμε τα κομμάτια, να δούμε αν μας φτιάχνουν την μπάρα» είναι πολύ πιο συχνές σε διάφορα στάδια της παρέμβασης και, ιδιαίτερα, για τις δραστηριότητες Δ2 και Δ3.

Ένα σημαντικό εύρημα στην ενότητα αυτή είναι ότι ορισμένα παιδιά, και μόνο παιδιά των Ομάδων Ι και ΙΙ αναφέρονται σε αντίστροφες ενέργειες στο πλαίσιο του ίδιου προβλήματος. Στη διάρκεια της παρέμβασης, στα προβλήματα με ζητούμενο το β, αναφέρεται η ανάλυση ως η αρχική ενέργεια, και η σύνθεση ως η αντίστροφη, που λειτουργεί ως έλεγχος.

Αντίστροφες ενέργειες στην παρέμβαση

Στο επόμενο επεισόδιο, ο Δήμος λύνει το πρόβλημα της εύρεσης της δόσης της Παμ, με δεδομένη τη δόση της Τετραπάμ, στις συνεχείς ποσότητες.

> Δήμος: Θα την κόψω σε τέσσερα κομμάτια. Και όταν τα ενώσω θα πρέπει να ξαναγίνεται αυτό που μου δίνεις.
>
> Ε: Ωραία, για να δούμε, ποιο κομμάτι θα δώσουμε στην Παμ;
>
> Δήμος: Θα δοκιμάσω αυτό [*παίρνει 4 αντίγραφα του μικρότερου κομματιού από τις διαθέσιμες επιλογές, τα ενώνει γραμμικά δίπλα στην μπάρα της Τριπαμ*]. Δεν είναι σωστό.
>
> Ε: Γιατί;
>
> Πέτρος: Δεν τρώει όλη τη σοκολάτα.
>
> Δήμος: Να πάρω αυτό [*παίρνει 4 αντίγραφα από το αμέσως μεγαλύτερο κομμάτι, που είναι το ζητούμενο*]. Ναι, αυτό το κομμάτι είναι για την Παμ. Το ένα τέταρτο.

Στο παραπάνω επεισόδιο, ο Δήμος περιγράφει εξαρχής τις δύο αντίστροφες ενέργειες που αντιστοιχούν στην κατάσταση αυτή. Επισημαίνουμε ότι η πρώτη ενέργεια που περιγράφει ο Δήμος είναι η ανάλυση. Το παιδί δεν αναφέρεται λεκτικά στην ισότητα των κομματιών, αλλά στην πράξη επιλέγει αντίγραφα του κομματιού που επιλέγει. Με αυτήν την επισήμανση, η ενέργεια στην οποία αναφέρεται το παιδί είναι ο ισομερισμός. Όταν ξεκινά να εκτελεί την *Έμμεση Ανάλυση* (εδώ, χωρίς ενδιάμεσο υποστηρικτικό βήμα), το παιδί δεν φαίνεται να αποπειράται να εκτιμήσει ποιο είναι το β. Εφαρμόζει μάλλον μια στρατηγική «δοκιμής και διόρθωσης» τηρώντας ωστόσο, αυτό που έχει δηλώσει ρητά εξαρχής. Το παιδί αυτό δεν περιέγραψε λεκτικά αντίστροφες ενέργειες στον μεταέλεγχο.

Στο επόμενο παράδειγμα, η Δέσποινα περιγράφει τι κάνει μια «κλασματομηχανή» με ν=2, με αναφορά στο συγκεκριμένο παράδειγμα που έχει μπροστά της:

> Δέσποινα: Αν βάλω τις δύο βιταμίνες από την μικρή πλευρά, από την μεγάλη θα βγούνε τέσσερις. Δύο φορές οι δύο βιταμίνες. Διπλάσιες. Από τη μικρή πλευρά βγαίνει η μία από τις δύο ομάδες, μία δυάδα. Το ένα δεύτερο.

Το παιδί αυτό περιγράφει την αμφίδρομη λειτουργία της μηχανής, περιγράφοντας τον τρόπο με τον οποίο μετασχηματίζονται οι ποσότητες και τις αντίστοιχες αμφίδρομες σχέσεις.

Η λεκτική περιγραφή αντίστροφων ενεργειών εμφανίζεται συχνά στην παρέμβαση για να περιγράψει είτε την λειτουργία του εργαλείου του λόγου, είτε τη λειτουργία της «κλασματομηχανής». Στο ακόλουθο επεισόδιο, συνυπάρχουν και οι δύο περιπτώσεις. Έχει σχεδόν ολοκληρωθεί μια συνάντηση στο πλαίσιο της δραστηριότητας Δ3. Υπενθυμίζεται ότι οι «κλασματομηχανές» που επεξεργάστηκαν τα παιδιά στο πλαίσιο της Δ3 είχαν τελεστές μέχρι για ν=4.

> Δήμος: Αν είχα μια πιρούνα [*εργαλείο του λόγου*] με οκτώ βελάκια, θα έκοβα σε οχτώ κομμάτια. Ωραία θα ήταν. Να βάλουμε μια πιρούνα με ένα και οχτώ και να κάνει τα οχτώ κομμάτια και το οχταπλάσιο. Κυρία έχεις τέτοια πιρούνα;
>
> Ε: Όχι αλλά, αν θες, μπορώ να σε βοηθήσω να την φτιάξουμε μετά.
>
> Άγης: Κυρία, σε αυτές τις μηχανές δεν μπορούμε να γράψουμε τι κάνουν;
>
> Ε: Τι εννοείς;
>
> Άγης: Στη μία μηχανή, ό,τι της έβαζες στο έφτιαχνε από την μία δύο φορές και από την άλλη χώριζε σε δύο κομμάτια. Η άλλη μηχανή, ό,τι της έβαζες στο έφτιαχνε από την μία τρεις φορές και από την άλλη χώριζε σε τρία κομμάτια.
>
> Ε: Και τι θέλεις να γράψουμε;
>
> Άγης: Μπορούμε να γράψουμε τους αριθμούς που κάνει και να βάλουμε ένα σύμβολο.
>
> Ε: Τι σύμβολο; Έναν ήλιο; Ένα παιχνίδι;
>
> Άγης: Όχι, η πρόσθεση έχει τον σταυρό, η αφαίρεση την παύλα. Ε, αυτό, μπορούμε να βάλουμε κάτι ανάμεσα που θα δείχνει ότι παίρνει το ένα και κάνει δύο, παίρνει το ένα και κάνει τρία. Και μετά παίρνει δύο και κάνει ένα, παίρνει τρία και κάνει ένα.
>
> Ε: Άρα τι θα βάλουμε ανάμεσα από τους αριθμούς; Να βάλω σταυρό; Να βάλω παύλα;
>
> Άγης: Δεν είναι πρόσθεση ούτε αφαίρεση.
>
> Ε: Ωραία. Θα το σκεφτείς και θα δούμε και μαζί τι μπορούμε να ζωγραφίσουμε επάνω στις μηχανές.

Στο επεισόδιο αυτό, τόσο ο Δήμος, όσο και ο Άγης περιγράφουν λεκτικά τις αντίστροφες ενέργειες που υλοποιούνται με το εργαλείο του λόγου και με τις «κλασματομηχανές». Επιπλέον, τα δύο παιδιά γενικεύουν, με διαφορετικό τρόπο το καθένα.

Ο Δήμος γενικεύει την αμφίδρομη λειτουργία του εργαλείου του λόγου, για μια τιμή του ν που δεν είχε συναντήσει στο πλαίσιο της Δ2 και της Δ3, όπου έγινε η εισαγωγή του εργαλείου (Δ2) και η σύνδεσή του με τις κλασματομηχανές (Δ3). Υπενθυμίζουμε, ωστόσο, ότι στο πλαίσιο της Δ1, τα παιδιά είχαν επεξεργαστεί σχέσεις μεταξύ της «Παμ» και των «ν-Παμ» μέχρι και για ν=10.

Από την άλλη μεριά, ο Άγης, γενικεύει την αμφίδρομη λειτουργία των «κλασματομηχανών» για διάφορες τιμές του ν. Επιπλέον, το παιδί αυτό φαίνεται να έχει μια αντίληψη της λειτουργίας της «κλασματομηχανής» που παραπέμπει σε αριθμητικές πράξεις. Το ίδιο το παιδί φαίνεται να κάνει τη σύνδεση με τις αριθμητικές πράξεις που γνωρίζει (πρόσθεση/ αφαίρεση), διατυπώνοντας το ερώτημα «ποιο σύμβολο» να μπει στην «κλασματομηχανή» και διαχωρίζοντας αυτό το «σύμβολο» από τον «σταυρό» και την «παύλα».

Πρέπει να σημειωθεί ότι, ενώ στην παρέμβαση περιέγραψαν αντίστροφες ενέργειες και παιδιά που δεν το έκαναν στον μεταέλεγχο, δεν έδωσαν όλα τα παιδιά τόσο επεξεργασμένες περιγραφές ενώ κάποια δεν έδωσαν καθόλου, όπως τα παιδιά της Ομάδας ΙΙΙ.

5.4 Λεκτικές περιγραφές σχέσεων

Στην ενότητα αυτή εξετάστηκε αν και πώς εκφράζουν τα παιδιά λεκτικά τη σχέση μέρους-όλου που συνδέει το Α με το β, καθώς και αν χρησιμοποιούν τους αντίστοιχους όρους. Ως μονάδα ανάλυσης εξετάστηκε το σύνολο της λεκτικής παραγωγής του κάθε παιδιού στις σωστές του απαντήσεις ανά πρόβλημα, είτε κατά τη διάρκεια της επίλυσης, είτε μετά την επίλυση και τις ενδεχόμενες προτροπές της ερευνήτριας για εξήγηση και λεκτική έκφραση σχέσης. Υπενθυμίζουμε ότι, οι δύο ερωτήσεις Ε1 αι Ε2 είναι (κωδικοποιημένες) α) *Πώς ξέρεις ότι βρήκες το σωστό Α (αντ. β ή ν);* και β) *Τι σχέση έχει το Α (αντ. β) που βρήκες με το αρχικό β (αντ. Α);* Η Ε2 ρωτήθηκε στα προβλήματα με ζητούμενο το Α ή το β.

5.4.1. Το ζητούμενο Α σε σχέση με το δεδομένο β

Τα λόγια των παιδιών εξετάστηκαν κατ' αντιπαραβολή ανά είδος ποσότητας και συνολικά. Αναζητήθηκαν αρχικά εκφράσεις με τις οποίες τα παιδιά αναφέρονται στην ποσότητα Α και διαχωρίστηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες το Α δεν συνδέεται, από αυτές στις οποίες συνδέεται με κάποια άλλη ποσότητα. Οι περιπτώσεις αυτές είναι δυνατόν να συνυπάρχουν στα λεγόμενα των παιδιών και να συνοδεύονται ή όχι από τον όρο ν-πλάσιο.

Στην πρώτη περίπτωση, η ποσότητα Α περιγράφεται από τα παιδιά ως το αποτέλεσμα που αναζητούν, ως απόλυτο μέγεθος (π.χ. «θα βγάλει έξι καραμέλες», «έξι όλες μαζί», «αυτή τη σοκολάτα έδωσες στα παιδιά»).

Στη δεύτερη περίπτωση, το Α περιγράφεται μέσω της σχέσης του με το β. Στη διακριτή περίπτωση, το β αναφέρεται ως ισοπληθής ομάδα («δυάδα» ή «ζευγάρι», «τριάδα», «τετράδα») ή εκφράζεται μέσω της αριθμητικής του τιμής, με αναφορά στα αντικείμενα, ή όχι (π.χ. «τρεις καραμέλες», «τρία»). Στη συνεχή περίπτωση, το β αναφέρεται ως «κομμάτι» (π.χ. «4 κομμάτια κολλημένα», «αυτό το κομμάτι δύο φορές», «έχω τέσσερα κομμάτια»). Σε ορισμένες περιπτώσεις, το β περιγράφεται ρητά ως η αρχική δεδομένη ποσότητα (π.χ. «οι καραμέλες που μου έδωσες»).

Στις λεκτικές περιγραφές της σχέσης μεταξύ του β και του Α, ξεχωριστά από αυτές που γίνονται με τη χρήση του όρου «ν-πλάσιο», το β αναφέρεται πάντα, με μία από τις προηγούμενες διατυπώσεις. Το Α μπορεί να αναφέρεται ρητά ως το αποτέλεσμα ή να υπονοείται ως το αποτέλεσμα σε ελλειπτικές προτάσεις (π.χ. «Είναι 6 φορές το κομμάτι», ή «τρεις δυάδες»).

Ανά πρόβλημα, το κάθε παιδί μπορεί ή όχι να αναφέρει τον όρο «ν-πλάσιο», είτε αυθόρμητα (κατά τη διάρκεια της επίλυσης ή καθώς απαντά την Ε1), είτε μετά από την ερώτηση Ε2.

Το Α ως ν φορές το β («ν x β»)

Σε αυτές τις περιπτώσεις, το Α περιγράφεται ως «ν φορές το β», δηλαδή, ν φορές η δεδομένη ομάδα, ή ν φορές το δεδομένο κομμάτι. Η κατηγορία περιλαμβάνει αυθόρμητες και μη αυθόρμητες (μετά την Ε2) περιγραφές των παιδιών. Σημειώνεται ότι οι περιγραφές είναι δύο τύπων. Στον πρώτο περιγράφεται στατικά η σχέση και μπορεί να εμφανίζεται πριν ή μετά

την Ε2. Στα παρακάτω παραδείγματα, η Ίριδα εξέφρασε στατικά τη σχέση πριν και ο Άγης μετά τη σχετική ερώτηση:

Θα εμφανιστούν οι τρεις δύο φορές. Έξι είναι. (Ίριδα)

(…) Τρεις φορές το ζευγάρι οι καραμέλες που μου έδωσες (Άγης)

Στον δεύτερο τύπο, περιγράφεται η σχέση μέσω μιας διαδικασίας που παράγει ή παρήγαγε το ζητούμενο Α. Τέτοιες περιγραφές μπορεί να δόθηκαν αυθόρμητα, ή μετά από την ερώτηση Α. Στα παρακάτω παραδείγματα, η Άρια έδωσε αυθόρμητα μια τέτοια περιγραφή, ενώ η Δέσποινα μετά τη σχετική ερώτηση:

Έβαλα δύο φορές το ίδιο κομμάτι και έφτιαξα το διπλάσιο (Άρια)

Έξι είναι (…). Έκανε τις τρεις μία, τρεις δύο. Δύο φορές. (Δέσποινα)

Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκε και η παρακάτω περιγραφή, με την οποία το παιδί απάντησε στην ερώτηση Ε2:

Είναι μεγαλύτερο. Δύο φορές μεγαλύτερο. (Διαμαντής)

Τέλος, στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν και λίγες περιπτώσεις στις οποίες το παιδί περιέγραψε μόνο τη διαδικασία ως απάντηση στην ερώτηση Ε1, όπως στο παρακάτω παράδειγμα:

(…) Έβαλα τρεις φορές από δύο (Άλεξ)

Το Α ως «ν β»

Παρόμοια με την προηγούμενη κατηγορία, και η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει αυθόρμητες και μη αυθόρμητες περιγραφές των παιδιών. Εδώ το Α περιγράφεται ως ν β». Πιο συγκεκριμένα:

Στη διακριτή συνθήκη, το β αναφέρεται ως ομάδα/σύνθετη μονάδα ή μέσω τις αριθμητικής του τιμής. Οι περιγραφές αυτής της κατηγορίας είναι στατικές. Για παράδειγμα:

Θα βγάλει έξι. Δύο τριάδες (Άγης).

Τέσσερις. Δυο ζευγάρια είναι (Δέσποινα)

Τρία τρία θα βγάλει. Αστείο είναι. Τρία τρία έχουμε (Ίριδα).

Στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων, τα παιδιά αναφέρθηκαν στο πλήθος των κομματιών από τα οποία συντίθεται η ζητούμενη ποσότητα με τη μεταξύ τους ισότητα να

αναφέρεται ρητά, ή όχι. Σημειώνουμε ότι οι απαντήσεις των παιδιών δεν διαφοροποιήθηκαν με βάση τη ρητή αναφορά στην ισότητα των κομματιών, καθώς έδειχναν στην πράξη ότι τη λαμβάνουν υπόψη, επιλέγοντας μόνα τους αντίγραφα των κομματιών. Ωστόσο, η πληροφορία αυτή καταγράφτηκε και γνωρίζουμε ότι το κριτήριο της ισότητας διατυπώθηκε ρητά τουλάχιστον 1 φορά και μέχρι και 10 (στα 10 προβλήματα των συνεχών ποσοτήτων) από όλα τα παιδιά, με 8 παιδιά να το κάνουν τουλάχιστον 6 φορές.

Στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων διακρίνονται στατικές περιγραφές της σχέσης και περιγραφές μέσω της ενέργειας της σύνθεσης. Στην πρώτη περίπτωση, το Α περιγράφεται ως απαρτιζόμενο από ν κομμάτια, ή το αποτέλεσμα της σύνθεσης ν κομματιών. Για παράδειγμα:

> Η σοκολάτα που είχες στην αρχή φτιάχνεται από τέσσερα τέτοια κομμάτια. (Άγης)
>
> Δυο τέτοια κομμάτια είχες. Αυτή ήταν η σοκολάτα (Ορφέας).
>
> Ο Γιάννης πήρε αυτό το κομμάτι, το αδερφάκι πρέπει να πάρει το ίδιο. Έχει δύο κομμάτια η σοκολάτα. (Γιάννης)
>
> Η μηχανή έβγαλε τρία κομμάτια κολλημένα τώρα. (Μαρία)

Στις περιγραφές μέσω διαδικασίας, το Α παράγεται ή έχει παραχθεί μέσω μια ενέργειας σύνθεσης:

> Τρία τέτοια κομμάτια θέλω να κάνω το τριπλάσιο (Γιάννης)
>
> Δυο τέτοια κομμάτια είχες. Αυτή ήταν η σοκολάτα (Ορφέας)
>
> Τέσσερα κομμάτια ένωσα, έδωσα την τετραπλάσια (Διαμαντής).

Το Α ως άθροισμα των β (ΣΒ)

Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν οι περιπτώσεις, στις οποίες τα παιδιά εξέφρασαν προσθετικά τη σχέση μεταξύ του Α και του β.

Στη διακριτή συνθήκη, το β αναφέρεται μέσω της αριθμητικής του τιμής.

Για παράδειγμα:

> Θα πάρει δύο η Ελένη και δύο η αδερφή της. Τέσσερις, δηλαδή (Άγης)
>
> Δύο και δύο και δύο (…). Θα έχει βγάλει τις τριπλάσιες καραμέλες (Γιάννης)

(…) Τρεις και τρεις καραμέλες έβαλα. Την τριάδα που μου έδωσες. Και έκανα το διπλάσιο (Δέσποινα)

Δύο καραμέλες και δύο και δύο και δύο καραμέλες. Οκτώ καραμέλες όλες (Ευτύχης)

Δύο και δύο θα πάρει (…) Είναι δύο κι άλλες δύο (Κώστας).

Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν και 4 περιπτώσεις στις οποίες το παιδί αναφέρθηκε επαναληπτικά στην αριθμητική τιμή του β, χωρίς να αναφέρουν ρητά το συνολικό πλήθος των β:

Τρεις, τρεις, τρεις. Όλες μαζί εννιά. (Γιάννης)

Τρεις, τρεις, τρεις (Άγης)

Εννιά (…) Τρεις εδώ, τρεις εδώ, τρεις εδώ [δείχνει με τα χέρια του]. Τριπλάσιες είναι! (Διαμαντής)

Εννιά. Τριάδες φτιάχνουμε. Τριάδα, τριάδα, τριάδα (Διαμαντής).

Σε λίγες περιπτώσεις στη συνεχή συνθήκη, τα παιδιά περιέγραψαν προσθετικά τη διαδικασία σύνθεσης του Α από κομμάτια. Για παράδειγμα:

Ένα κι ένα κομμάτι. Και ένα κι ένα κομμάτι και το φτιάξαμε. (Ευτύχης, για το τετραπλάσιο)

Έβαλα το κομμάτι που μου έδωσες και ένα ακόμα (Άλεξ).

Είναι το κομμάτι και ένα ακόμα και ένα ακόμα. (Μάρκος)

Το Α μόνο ως «ν-πλάσιο»

Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκα οι περιπτώσεις στις οποίες τα παιδιά δεν περιέγραψαν λεκτικά τη σχέση, αλλά την προσδιόρισαν με τον όρο «ν-πλάσιο». Σε κάποιες από αυτές τις περιπτώσεις τα παιδιά αναφέρθηκαν μόνο στο ν (πλήθος ομάδων ή κομματιών) κατά τη διάρκεια της επίλυσης και ανέφεραν τον όρο μόνο μετά τη σχετική ερώτηση της ερευνήτριας. Για παράδειγμα:

Τέσσερα είναι τα παιδιά (…) Είναι το τετραπλάσιο. (Διαμαντής).

Σε άλλες περιπτώσεις ανέφεραν αυθόρμητα τον όρο. Για παράδειγμα:

Η τριπλάσια θα εμφανιστεί (Κώστας)

Όπως είναι εμφανές, σε κάθε μία από τις παραπάνω κατηγορία συνυπάρχουν περιγραφές που διαφέρουν μεταξύ τους και θα μπορούσαν να εξεταστούν ξεχωριστά ως κατηγορίες. Ωστόσο, εδώ θα αναφέρουμε ποσοτικά αποτελέσματα για τις υπερ-κατηγορίες και θα κάνουμε ποιοτικές διαφοροποιήσεις, όπου είναι απαραίτητο.

Στον Πίνακα 20, παρουσιάζεται η συχνότητα κάθε κατηγορίας περιγραφής σχέσης μεταξύ του ζητούμενου Α και του δεδομένου β, ξεχωριστά στην περίπτωση χρήσης ή μη του όρου ν-πλάσιο (ΜΟ, ΧΟ, αντίστοιχα), ανά είδος ποσότητας (διακριτή, συνεχής) και ανά τιμή του ν (2, 3, 4). Σημειώνεται ότι, όταν στα λεγόμενα ενός παιδιού ανά πρόβλημα συνυπήρχαν λεκτικές περιγραφές από διαφορετικές κατηγορίες, καταμετρήθηκε η πιο προχωρημένη από αυτές.

		Κατηγορίες Περιγραφής											
Ποσότητα		«ν x β»			«ν β»			«ΣΒ»			Μόνο όρος	# Περι-γραφών	# Όρων
	ν	ΜΟ	ΧΟ	Σ	ΜΟ	ΧΟ	Σ	ΜΟ	ΧΟ	Σ			
Διακριτή	2	12	6	18	6	7	13	7	15	22	2	55	27
	3	6	13	19	10	6	16	4	13	17	2	54	22
	4	2	5	7	5	1	6	2	5	7	2	22	11
	Σύνολο	20	24	44	21	14	35	13	33	46	6	131	60
	%			33.6%			26.7%			35.1%	4.6%	100%	45.8%
Συνεχής	2	9	7	16	18	10	28	0	5	5	4	53	32
	3	9	5	14	16	16	32	0	3	3	4	53	27
	4	1	6	7	7	11	18	0	2	2	1	28	10
	Σύνολο	19	18	37	41	37	78	0	10	10	9	134	69
	%			27.6%			58.2%			7.5%	6.7%	100%	51.5%

Σημείωση.

Το πλήθος των προβλημάτων με ζητούμενο το Α είναι 20, 10 ανά είδος ποσότητας, 8, 8 και 4 για ν=2,3,4 αντ.
Το σύνολο των σωστών απαντήσεων στα προβλήματα με ζητούμενο το Α είναι 278 συνολικά, 137 και 141 για τις διακριτές και τις συνεχείς ποσότητες, αντίστοιχα, 111, 111 και 56 για ν=2, 3, 4 αντίστοιχα.

Πίνακας 20: Συχνότητα των κατηγοριών περιγραφής σχέσης μεταξύ του ζητούμενου Α και του δεδομένου β, με ή χωρίς χρήση όρου (ΜΟ, ΧΟ, αντίστοιχα), ανά είδος ποσότητας (διακριτή, συνεχής) και ανά τιμή του ν (2, 3, 4).

Εξετάζοντας τα στοιχεία του Πίνακα 20, για τις διακριτές και συνεχείς ποσότητες, παρατηρούμε ότι οι περιγραφές σχέσεων ήταν παρόμοιες ως προς το πλήθος τους, αλλά όχι ως προς την κατηγορία της περιγραφής. Συνολικά, στις διακριτές ποσότητες δόθηκαν 131 περιγραφές σχέσεων (95,6% στο σύνολο των 137 σωστών απαντήσεων), ενώ στις συνεχείς ποσότητες δόθηκαν 134 (95% στο σύνολο των αντίστοιχων 141 σωστών απαντήσεων).

Όσον αφορά τις διακριτές ποσότητες, φαίνεται ότι στο σύνολο των 131 περιγραφών που δόθηκαν από τα παιδιά συνολικά, η «Σβ» εμφανίζεται περίπου στο 35% των περιγραφών, με τη «ν x β» να ακολουθεί με μικρή διαφορά σε ποσοστό περίπου 34%. Η κατηγορία «Μόνο όρος» εμφανίζει ποσοστό μικρότερο του 10%. Χρήση του όρου «ν-πλάσιο» γίνεται περίπου στο 46% των περιπτώσεων, με μικρότερη σχετική συχνότητα στην κατηγορία «Σβ».

Όσον αφορά τις συνεχείς ποσότητες, στο σύνολο των 134 περιγραφών, επικρατούσα κατηγορία είναι η «ν β», με ποσοστό που πλησιάζει το 60%. Η «ν x β» εμφανίζεται με μικρότερη σχετική συχνότητα, σε σχέση με τη διακριτή συνθήκη, αλλά διατηρεί ένα αξιόλογο ποσοστό κοντά στο 30%. Αντίθετα, η «Σβ» εμφανίζεται στις συνεχείς ποσότητες με ποσοστό μικρότερο του 10%. Και σε αυτή τη συνθήκη, η κατηγορία «Μόνο όρος» εμφανίζεται με ποσοστό μικρότερο του 10%. Χρήση του όρου ν-πλάσιο γίνεται στο 52% των περιπτώσεων, σχετικά πιο συχνά στην κατηγορία «ν x β» και καθόλου στην κατηγορία Σβ.

Για να εξεταστούν τα στοιχεία του Πίνακα 20 για τις διαφορετικές τιμές του ν, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη η διαφορά του πλήθους των προβλημάτων για ν=2,3 και για ν=4 (βλ. Σημείωση στον Πίνακα 20).

Για ν=2, δόθηκαν συνολικά 108 περιγραφές σχέσεων (97,3% στο σύνολο των 111 σωστών απαντήσεων). Η συνολική σχετική συχνότητα των κατηγοριών «ν x β»», «ν β» και «ΣΒ» και «Μόνο Όρος» (στο σύνολο των 108 περιγραφών) είναι 0,31, 0,38 , 0,25 και 0,06 αντίστοιχα. Ο όρος «διπλάσιο» αναφέρθηκε με σχετική συχνότητα 0,55.

Για ν=3, δόθηκαν συνολικά 107 περιγραφές σχέσεων (96,4% στο σύνολο των 111 σωστών απαντήσεων). Η συνολική σχετική συχνότητα των κατηγοριών «ν x β», «ν β», «ΣΒ» και «Μόνο όρος» (στο σύνολο των 107 περιγραφών) είναι 0,31, 0,45, 0,19, και 0,06 αντίστοιχα. Ο όρος «τριπλάσιο» αναφέρθηκε με σχετική συχνότητα 0,46.

Για ν=4, δόθηκαν συνολικά 50 περιγραφές σχέσεων (89,3% στο σύνολο των 56 σωστών απαντήσεων). Η σχετική συχνότητα των κατηγοριών «ν x β»», «ν β», «ΣΒ» και «Μόνο όρος»

(στο σύνολο των 50 περιγραφών) είναι 0,28, 0,48, 0,18 και 0,06, αντίστοιχα. Ο όρος «τετραπλάσιο» αναφέρθηκε με σχετική συχνότητα 0,42.

Σημειώνουμε ότι, από τις 129 αναφορές στον όρο «ν-πλάσιο», οι 63 (49%) έγιναν αυθόρμητα, δηλαδή, πριν την ερώτηση Ε2. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι, όσον αφορά τη χρήση του όρου «ν-πλάσιο», διαπιστώθηκε ότι δεν υπήρξε περίπτωση στην οποία τα παιδιά να διατύπωσαν μια πλήρη πρόταση του τύπου «το Α είναι ν-πλάσιο από το β», ή παρόμοια (π.χ. «το Α είναι το ν-πλάσιο του β»), ή ελλειπτική του τύπου «(Είναι) ν-πλάσιο του β».) Ο όρος χρησιμοποιήθηκε κατά κύριο λόγο σε ελλειπτικές προτάσεις του τύπου «είναι (το) τριπλάσιο» ή «(το) τριπλάσιο», με ρόλο κατηγορουμένου στην πρόταση. Δευτερευόντως, ο όρος χρησιμοποιήθηκε ως ουσιαστικοποιημένο επίθετο, με ρόλο αντικειμένου στην πρόταση (π.χ. «Τέσσερις φορές το κομμάτι σου και έφτιαξα το τετραπλάσιο»). Λίγες φορές ο όρος χρησιμοποιήθηκε ως επιθετικός προσδιορισμός (π.χ. «Θα βάλω 2 ίδια κομμάτια και θα φτιάξω σοκολάτα διπλάσια», «να η σοκολάτα η διπλάσια»). Ελάχιστες φορές ο όρος χρησιμοποιήθηκε με ρόλο υποκειμένου στην πρόταση (π.χ. «Η διπλάσια θα βγει από τη μηχανή», «Το τριπλάσιο θα εμφανιστεί») ή συνδέθηκε με τη λειτουργία της «κλασματομηχανής» (π.χ., «Θα την βάλω στο τετραπλάσιο», «Από τη μεγάλη πλευρά τα κάνει τριπλάσια»).

Συνοψίζοντας ως εδώ, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι, όταν τα παιδιά απαντούν σωστά στα προβλήματα με ζητούμενο το Α, περιγράφουν σχέσεις με υψηλή συχνότητα, τόσο στις διακριτές, όσο και στις συνεχείς ποσότητες. Η συχνότητα με την οποία δίνουν περιγραφές είναι παρόμοια για ν=2,3 και μικρότερη για ν=4. Ο όρος «ν-πλάσιο» αναφέρεται πιο συχνά στις συνεχείς ποσότητες, και με φθίνουσα συχνότητα για ν=2, 3, 4.

Ωστόσο, η σχετική συχνότητα της κάθε κατηγορίας περιγραφής διαφέρει για τις διακριτές και τις συνεχείς ποσότητες. Στις διακριτές ποσότητες οι προσθετικές περιγραφές («Σβ») υπερτερούν, αλλά στις συνεχείς μειώνονται κατά πολύ.

Τέλος, η κατηγορία «ν x β», στην οποία περιγράφεται ξεκάθαρα πολλαπλασιαστικά η σχέση μεταξύ του Α και του β, είναι παρούσα με αξιόλογα ποσοστά και στις δύο συνθήκες, πιο έντονα στις διακριτές ποσότητες, με ίδια συχνότητα για ν=2,3 και μειωμένη ελαφρά για ν=4.

Στη συνέχεια εξετάζεται η λεκτική περιγραφή σχέσεων ανά παιδί στα προβλήματα με ζητούμενο το Α. Στον Πίνακα …. παρουσιάζεται το σύνολο των απαντήσεων της κάθε

κατηγορίας ανά παιδί, καθώς και το σύνολο των όρων που ανέφερε, ξεχωριστά για τις διακριτές και τις συνεχείς ποσότητες, και συνδυαστικά. Τα παιδιά είναι διατεταγμένα σε φθίνουσα σειρά, με κριτήριο το σύνολο των περιγραφών της μορφής «ν x β» που έδωσαν και στα δύο είδη ποσοτήτων (τελευταία στήλη του Πίνακα 21).

Παιδί	Διακριτές ποσότητες						Συνεχείς ποσότητες						Διακριτές & Συνεχείς		
	νχβ	ν β	Σβ	Μόνο όρος	Σύνολο	# Όρων	νχβ	νβ	Σβ	Μόνο όρος	Σύνολο	# Όρων	# Περι-γραφών	# Όρων	# νχβ
Γιάννης	6	1	3	0	10	6	5	5	0	0	10	6	20	12	11
Δέσποινα	5	2	1	1	9	7	6	3	0	0	9	5	18	12	11
Άρια	5	4	1	0	10	9	5	5	0	0	10	9	20	18	10
Άγης	4	3	3	0	10	4	5	5	0	0	10	7	20	11	9
Ίριδα	4	5	0	0	9	3	5	2	0	2	9	4	18	7	9
Διαμαντής	4	2	3	1	10	8	3	6	0	1	10	9	20	17	7
Μαρία	6	0	2	1	9	4	1	9	0	0	10	5	19	9	7
Δήμος	3	3	1	2	9	6	2	6	0	1	9	7	18	13	5
Ορφέας	2	7	1	0	10	6	2	8	0	0	10	6	20	12	4
Άλεξ	1	0	5	0	6	0	2	5	1	0	8	0	14[1]	0	3
Μάρκος	2	1	7	0	10	0	0	3	6	0	9	0	19	0	2
Άντυ	1	0	5	0	6	1	1	7	0	0	8	2	14[2]	3	2
Κων/νος	1	7	1	1	10	6	0	5	0	5	10	9	20	15	1
Πέτρος	0	0	7	0	7	0	0	8	0	0	8	0	15[3]	0	0
Ευτύχης[4]	0	0	6	0	6	0	0	1	3	0	4	0	10[4]	0	0
	44	35	46	6	131	60	37	78	10	9	134	69	265	129	81

Σημείωση.

[1] Στο σύνολο των 14 σωστών απαντήσεων του Άλεξ στα 20 προβλήματα με ζητούμενο το Α.

[2] Στο σύνολο των 16 σωστών απαντήσεων του Άντυ στα 20 προβλήματα με ζητούμενο το Α.

[3] Στο σύνολο των 17 σωστών απαντήσεων του Πέτρου στα 20 προβλήματα με ζητούμενο το Α.

[4] Στο σύνολο των 16 σωστών απαντήσεων του Ευτύχης στα 20 προβλήματα με ζητούμενο το Α.

Πίνακας 21: Σύνολο των απαντήσεων της κάθε κατηγορίας περιγραφής σχέσεων και σύνολο αναφερόμενων όρων, ανά παιδί, για τις διακριτές και συνεχείς ποσότητες ξεχωριστά και συνδυαστικά, στα 20 προβλήματα με ζητούμενο το Α.

Από τον Πίνακα 21 φαίνεται ότι κάθε παιδί δίνει εν γένει περιγραφές από περισσότερες από μία κατηγορίες και τα 13 από τα 15 δίνουν μια τουλάχιστον περιγραφή της μορφής «ν x β», με μέγιστο τις 11 (στις 20) τέτοιου τύπου περιγραφές ανά παιδί.

Μπορούν να διακριθούν τρεις ομάδες παιδιών με κοινά, αλλά και διαφορετικά χαρακτηριστικά εντός κάθε ομάδας. Πιο συγκεκριμένα:

Μια ομάδα 5 παιδιών (Γιάννης, Δέσποινα, Άρια, Άγης, Ίριδα) δίνουν από 9 έως 11 περιγραφές του τύπου «ν x β». Το κάθε παιδί δίνει τέτοιες περιγραφές πιο συχνά, ή το ίδιο συχνά σε κάποιες περιπτώσεις με περιγραφές άλλων κατηγοριών, τόσο στις διακριτές, όσο και στις συνεχείς ποσότητες (με την εξαίρεση της Ίριδας στη διακριτή περίπτωση). Τα παιδιά αυτά έδωσαν από 18 έως 20 περιγραφές σχέσεων, το πολύ 3 περιγραφές του τύπου «Σβ» στις διακριτές και καμία στις συνεχείς ποσότητες. Διαφέρουν ως προς τη συστηματικότητα με την οποία χρησιμοποιούν τον όρο «ν-πλάσιο», από 7 φορές (Ίριδα), έως 18 φορές (Άρια), που είναι και η μέγιστη συχνότητα χρήσης του όρου ανά παιδί.

Η δεύτερη ομάδα περιλαμβάνει 4 παιδιά (Διαμαντής, Μαρία, Δήμος, Ορφέας) που έδωσαν από 4 έως 7 περιγραφές του τύπου «ν x β». Η ομάδα αυτή έχει ορισμένα κοινά χαρακτηριστικά με την προηγούμενη. Και τα παιδιά αυτά έδωσαν από 18 έως 20 περιγραφές, το πολύ 3 περιγραφές του τύπου «Σβ» στις διακριτές ποσότητες και καμία στις συνεχείς ποσότητες. Με την εξαίρεση του Ορφέα, κάθε παιδί έδωσε την περιγραφή «ν x β» πιο συχνά ή το ίδιο συχνά με περιγραφές άλλων κατηγοριών στις διακριτές ποσότητες. Αντίθετα με την πρώτη ομάδα, οι περιγραφές της δεύτερης ομάδας στις συνεχείς ποσότητες συγκεντρώνονται στην κατηγορία «ν β». Το πλήθος των περιγραφών της μορφής «ν x β» ανά παιδί είτε μένει στάσιμο (Ορφέας), είτε υποχωρεί, με τη Μαρία να εμφανίζει μια αξιοσημείωτη μείωση από 6 στις διακριτές, σε 1 στις συνεχείς ποσότητες. Σημειώνουμε ότι οι περιγραφές της κατηγορίας «ν β» από αυτά τα παιδιά τυπικά δεν βασίζονται σε διαδικασίες σύνθεσης, αλλά αναφέρονται στο αποτέλεσμά της (π.χ. το παράδειγμα της Δέσποινας παραπάνω «Είναι 4 κομμάτια κολλημένα») και συχνά συνοδεύονται από τον όρο ν-πλάσιο. Ο όρος χρησιμοποιήθηκε από αυτή την ομάδα από 9 (Μαρία) έως 17 φορές (Διαμαντής).

Μια τρίτη ομάδα 6 παιδιών δίνει το πολύ 3 φορές περιγραφή του τύπου «ν x β». Η ομάδα αυτή περιλαμβάνει τα παιδιά με τη χαμηλότερη επίδοση (Ομάδα ΙΙΙ: Άλεξ, Άντυ, Πέτρος, Ευτύχης) που έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις στα προβλήματα με ζητούμενο το Α.

Περιλαμβάνει επίσης ένα παιδί της Ομάδας ΙΙ (Μάρκος), που δεν έδωσε λανθασμένη απάντηση σε αυτά τα προβλήματα. Τέλος, περιλαμβάνει ένα παιδί της Ομάδας Ι (Κώστας).

Τα 5 από αυτά τα παιδιά (Άλεξ, Μάρκος, Άντυ, Πέτρος, Ευτύχης) μοιράζονται πολλά κοινά στοιχεία: Εμφάνισαν τη χαμηλότερη συχνότητα των περιγραφών της μορφής «ν β» στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων με 4 παιδιά να μην δίνουν τέτοια περιγραφή και τον Μάρκο να δίνει μία. Επιπλέον, η πιο συχνή περιγραφή τους στις διακριτές ποσότητες είναι της μορφής «Σβ», με διαφορά σε σχέση με όλα τα υπόλοιπα παιδιά. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι αυτά τα παιδιά, σε κάποιες από τις προτροπές της ερευνήτριας να εκφράσουν τη σχέση του Α με το β επικαλέστηκαν (σωστά) σχέσεις διάταξης («είναι πιο πολλές», «είναι μεγαλύτερη»). Σε 3 από αυτά τα παιδιά (Άλεξ, Μάρκος και Ευτύχης) οφείλεται η παρουσία της κατηγορίας «Σβ» στις συνεχείς ποσότητες, που ήταν και η συχνότερη περιγραφή που έδωσαν τα δύο τελευταία παιδιά στη συνθήκη αυτή. Οι περιγραφές του Άντυ, του Άλεξ και του Πέτρου εμφανίστηκαν πιο συχνά στην κατηγορία «ν β». Τέλος, εμφάνισαν τη χαμηλότερη συχνότητα χρήσης του όρου, με 4 παιδιά να μην τον χρησιμοποιούν καθόλου και τον Αντρέα να τον αναφέρει 3 φορές. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι περιγραφές της κατηγορίας «ν β» από αυτά τα παιδιά αναφέρθηκαν κατά κύριο λόγο στη διαδικασία της σύνθεσης («ενώνω», «θα ενώσω», «βάζω μαζί τα κομματάκια»). Πάραυτα, μόνο δύο από αυτά τα παιδιά (Πέτρος, Ευτύχης) δεν έδωσαν καμία περιγραφή του τύπου «ν x β».

Από την άλλη μεριά, ο Κώστας δεν παρουσιάζει άλλη ομοιότητα με τα υπόλοιπα παιδιά της τρίτης ομάδας, καθώς είχε την υψηλότερη συχνότητα εμφάνισης της κατηγορίας «ν β» στη διακριτή συνθήκη και, επιπλέον, ανέφερε τον όρο «ν-πλάσιο» 15 φορές. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του Κώστα είναι ότι τις 6 από τις 15 φορές, ανέφερε τον όρο χωρίς να περιγράψει λεκτικά τη σχέση με άλλον τρόπο, πιο συχνά από οποιοδήποτε άλλο παιδί.

Συνοψίζοντας, τα παραπάνω ευρήματα δείχνουν ότι υπάρχουν διαφορές στον τρόπο με τον οποίο περιγράφουν τα παιδιά σχέσεις μεταξύ του δεδομένου β και του ζητούμενου Α. Η πιο καίρια διαφορά είναι μεταξύ προσθετικών και πολλαπλασιαστικών τρόπων περιγραφής.

Ο προσθετικός τρόπος περιγραφής χαρακτήρισε τα τέσσερα παιδιά χαμηλότερη επίδοση (Ομάδα ΙΙΙ), που έκαναν λάθη κατά την επίλυση των προβλημάτων με ζητούμενο το Α, αλλά και ένα επιπλέον παιδί (Μάρκος) που έλυσε σωστά όλα τα αντίστοιχα προβλήματα. ΄Όταν αυτά τα παιδιά δίνουν περιγραφές της κατηγορίας «ν β» στην περίπτωση των συνεχών

ποσοτήτων, το κάνουν συνήθως περιγράφοντας την ενέργεια της σύνθεσης. Επιπλέον, χρησιμοποιούν τον όρο ν-πλάσιο πολύ λίγο ή καθόλου.

Τα υπόλοιπα δέκα παιδιά (συμπεριλαμβανομένου του Κώστα) δίνουν καθαρά προσθετικές περιγραφές μόνο στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων, όπου και αποδίδουν αριθμητικές τιμές στο β και το Α. Με την εξαίρεση του Κώστα, τα παιδιά αυτά δίνουν αρκετά συχνά (με διαφοροποιήσεις) την πιο καθαρή πολλαπλασιαστική περιγραφή («ν x β») στις διακριτές ποσότητες (π.χ. «τρεις φορές η δυάδα»). Τα παιδιά που περιγράφουν λιγότερο συχνά πολλαπλασιαστικά τη σχέση στις διακριτές ποσότητες (συμπεριλαμβανομένου του Κώστα), δίνουν συχνά περιγραφές του τύπου «ν β» (π.χ. «τρεις δυάδες»). Διαφοροποίηση μεταξύ αυτών των παιδιών εμφανίζεται στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων, όπου πέντε παιδιά συνεχίζουν να δίνουν συχνά περιγραφές πολλαπλασιαστικών σχέσεων («ν φορές το κομμάτι»), ενώ τα υπόλοιπα δίνουν συχνότερα περιγραφές της μορφής «ν κομμάτια», συνήθως περιγράφοντας το αποτέλεσμα της σύνθεσης των κομματιών. Ο Κώστας είναι ειδικότερη περίπτωση, καθώς είναι το παιδί που προσδιόρισε πιο συχνά τη σχέση μόνο μέσω του όρου ν-πλάσιο. Γενικότερα, τα δέκα αυτά παιδιά χρησιμοποίησαν τον όρο ν-πλάσιο αρκετά ή και πολύ συστηματικά.

Τέλος, με βάση τα ευρήματα σε ατομικό επίπεδο, φαίνεται ότι οι περιγραφές της κατηγορίας «ν β» στη συνεχή περίπτωση πράγματι δεν μπορούν αυτόματα να χαρακτηριστούν πολλαπλασιαστικές, έστω και υποτυπωδώς, ή προσθετικές. Προέρχονται και από παιδιά που εκφράζουν σχέσεις πολλαπλασιαστικά με σχετική συστηματικότητα, και από παιδιά που δεν το κάνουν.

5.4.2 Το ζητούμενο β σε σχέση με το δεδομένο Α

Τα λόγια των παιδιών εξετάστηκαν κατ ’αντιπαραβολή ανά πρόβλημα, ανά είδος ποσότητας, και συνολικά. Αναζητήθηκαν αρχικά εκφράσεις με τις οποίες τα παιδιά αναφέρονται στην ποσότητα β και διαχωρίστηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες το β δεν συνδέεται, από αυτές στις οποίες συνδέεται με κάποια άλλη ποσότητα.

Στην πρώτη περίπτωση, το β περιγράφεται από τα παιδιά ως το αποτέλεσμα που αναζητούν, είτε ως απόλυτο μέγεθος (π.χ. «Θα δώσω αυτό το κομμάτι», «Δύο θα φάει η Ελενίτσα»), είτε ως εντατική ποσότητα (π.χ. «Κάθε παιδάκι παίρνει τρεις», «Από δύο θα δώσω»). Η έκφραση του β ως εντατική ποσότητα εμφανίζεται κατά κύριο λόγο στα προβλήματα διαίρεσης

μερισμού. Σε κάποιες επιπλέον περιπτώσεις, προσδιορίζεται ξεχωριστά το μερίδιο για κάθε παραλήπτη (π.χ. «Ένα κομμάτι για τον Γιάννη και ένα για το αδερφάκι του», «Τρεις και τρεις και τρεις»).

Όταν το β συνδέεται με μια άλλη ποσότητα, εξαρχής αναφέρουμε ότι, με ελάχιστες εξαιρέσεις, περιγράφεται ως «ένα από ν μέρη», με διαφοροποιήσεις ως προς την ποσότητα αναφοράς. Ως ρητή αναφορά στην αρχική ποσότητα Α θεωρήθηκε η αναφορά στα σχετικά αντικείμενα στην αρχική τους κατάσταση (π.χ. «η σοκολάτα», «οι καραμέλες που μου έδωσες» «μοίρασα τις καραμέλες με ζευγάρια», «οι τριάδες που είχα ενωμένες στην αρχή»), καθώς και η αναφορά στην αριθμητική τιμή του Α στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων (π.χ. «οι οχτώ καραμέλες»). Επιπλέον, ως αναφορά στο αρχικό Α θεωρήθηκε η χρήση αντωνυμιών όπως «την έκοψα», «τις μοίρασα», «τα κομμάτια της».

Η αναφορά στην ποσότητα Α διακρίθηκε από την αναφορά αποκλειστικά στο σύνολο των μερών της (στο εξής, ΣΜ). Τα μέρη στη διακριτή συνθήκη τυπικά περιγράφονται ως ν ισοπληθείς ομάδες (π.χ. «δύο τριάδες»). Σε λίγες περιπτώσεις, τα μέρη περιγράφονται μέσω της αριθμητικής τους τιμής (π.χ. «Ένα τρία, ενώ έχεις τρία τρία») ή αναφέρονται ως «ομάδες». Στη συνεχή συνθήκη περιγράφονται ως «κομμάτια», με την ισότητα των κομματιών να αναφέρεται ρητά ή όχι. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημανθεί ότι η ισότητα των «κομματιών» λαμβάνεται υπόψη από τα παιδιά στην πράξη, καθώς τα ίδια επιλέγουν ίσα «κομμάτια» για να μετασχηματίσουν τη δεδομένη ποσότητα Α. Επομένως, η ρητή αναφορά στην ισότητα των μερών καταγράφτηκε μεν, αλλά δεν θεωρήθηκε ως παράμετρος που διαφοροποιεί τις λεκτικές περιγραφές σχέσεων. Με την εξαίρεση τριών παιδιών (Διαμαντής, Μάρκος, Μαρία), όλα τα υπόλοιπα παιδιά αναφέρθηκα ρητά από μία έως 8 φορές στην ισότητα των μερών στο σύνολο των 10 προβλημάτων της συνεχούς συνθήκης.

Εντοπίστηκε μια ενδιάμεση κατάσταση (Α-Έμμεσα), στην οποία το β έχει ως άμεση ποσότητα αναφοράς το ΣΜ, ενώ ταυτόχρονα η ποσότητα Α αναφέρεται ως η ποσότητα που αναλύεται σε ν μέρη, ή συντίθεται από ν μέρη, ή και τα δύο ταυτόχρονα (βλ. §5.3.2).

Με βάση τις λεκτικές περιγραφές των παιδιών και ανεξάρτητα αν αυτές συνοδεύτηκαν ή όχι από τη χρήση του όρου «ένα νιοστό», διακρίθηκαν οι εξής κατηγορίες περιγραφής της σχέσης μέρους-όλου μεταξύ του δεδομένου Α και του ζητούμενου β:

α) Το β εκφράζεται ως «**ένα από ν μέρη**» με άμεση ποσότητα αναφοράς το Α (Α-Άμεσα). Για παράδειγμα:

> Είναι το ένα από τα τρία κομμάτια που έκοψε η μηχανή τη σοκολάτα (Μαρία)
>
> Είναι το ένα από τα τρία κομμάτια της μπάρας. (Άρια).
>
> Είναι η μία από τις δύο τετράδες που είχα στην αρχή ενωμένες. (Δέσποινα)
>
> Είναι μία από τις δύο τριάδες που είχα στην αρχή. Το ένα δεύτερο. (Διαμαντής)

Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν και 5 περιπτώσεις στις οποίες ο όρος χρησιμοποιήθηκε απευθείας με μονάδα αναφοράς το Α. Προήλθαν από 4 παιδιά και ήταν οι εξής:

> Είναι η μία από τις δύο τετράδες. Το ένα δεύτερο από τις καραμέλες. (Άγης)
>
> Είναι το ένα από τα τρία κομμάτια της, το ένα της τρίτο. (Άγης)
>
> Το ένα δεύτερο από τις καραμέλες. Κοίτα, δύο τετράδες. (Διαμαντής)
>
> Θα είναι το ένα της δεύτερο. (Δέσποινα)
>
> Δύο θα πάρει η Ελενίτσα. Το ένα δεύτερο από τις δυάδες (Κώστας)

β) Το β εκφράζεται ως «**ένα από ν μέρη»** με άμεση ποσότητα αναφοράς το ΣΜ και έμμεση αναφορά με την ποσότητα Α (Α-Έμμεσα).

Στις περιπτώσεις αυτές τα παιδιά περιγράφουν πρώτα τον μετασχηματισμό της ποσότητας Α και στη συνέχεια εκφράζουν το β ως «ένα από τα μέρη» που έχουν προκύψει. Η περιγραφή της σχέσης με αυτόν τον τρόπο μπορεί να ακολουθεί άμεσα την περιγραφή του μετασχηματισμού ή να προκύπτει μετά την ερώτηση Ε2. Στα παρακάτω παραδείγματα, ο Άγης και η Άρια δίνουν από μία τέτοια περιγραφή πριν, ενώ ο Γιάννης μετά την Ε2.

> Τώρα την μοίρασα σε τέσσερα κομμάτια και πήρα το ένα από αυτά. (Άγης)
>
> Θα τις κάνω τριάδες. Τρεις. Η μία από αυτές, το ένα τρίτο, θα βγει από την άλλη πλευρά της μηχανής. (Άρια)
>
> Σε 4 κομμάτια θα κόψω τη σοκολάτα (...) Είναι το ένα από τα τέσσερα κομμάτια. (Γιάννης)

Ο μετασχηματισμός που περιγράφεται σε αυτήν την κατηγορία είναι, κατά κύριο λόγο η ανάλυση, αλλά όχι αποκλειστικά (βλ. §5.3.2). Τα παρακάτω παραδείγματα δείχνουν ότι σε

κάποιες περιπτώσεις περιγράφουν σύνθεση (όπως η Άρια) ή ανάλυση και σύνθεση ταυτόχρονα (όπως η Δέσποινα).

> Η μπάρα που θα πάρει θα είναι το ένα από τα δύο κομμάτια, τα μικρά. Κοίτα, αν τα ενώσω φτιάχνουν την μπάρα της Διπάμ. (Άρια)
>
> Τρία κομματάκια ενώνονται κάνουν τη σοκολατίτσα. Χωρίζονται και έχω το ένα από τα τρία (Δέσποινα).

γ) Το β εκφράζεται «**ένα από ν μέρη»**, με αναφορά στο σύνολο των μερών, αλλά όχι στο Α (ΣΜ). Ο όρος «ένα νιοστό» μπορεί να αναφέρεται, ή όχι. Για παράδειγμα:

> Έδωσα τη μία από τις τρεις τριάδες (Άγης).
>
> Είναι η μία από τις δύο τετράδες. Να δες, μία, δύο τετράδες (Άντυ)
>
> Το ένα από τα τέσσερα κομμάτια θα δώσω. (Άρια)
>
> Θα πάρω το ένα από τα τέσσερα ζευγάρια (Γιάννης).

Σε αυτή την κατηγορία τοποθετήθηκε και μία περίπτωση στην οποία ο όρος «ένα νιοστό» χρησιμοποιήθηκε απευθείας με μονάδα αναφοράς το ΣΜ.

> Δύο θα πάρει η Ελενίτσα. Το ένα δεύτερο από τις δυάδες.(Κώστας).

Στην κατηγορία αυτή τοποθετήθηκαν και 7 περιπτώσεις που προήλθαν από 5 παιδιά (Άγης, Άρια, Δέσποινα, Κώστας, Μαρία), στις οποίες ο όρος «ένα νιοστό» χρησιμοποιήθηκε αντί του «ένα από τα ν». Για παράδειγμα:

> Είναι δύο ζευγάρια. Δίνω το ένα δεύτερο. (Δέσποινα).
>
> Σε δύο κομμάτια θα κόψω; … Σε δύο. Τότε είναι εύκολο. Το ένα δεύτερο θα δώσω μόνο (Κώστας.).
>
> Πάλι δύο είναι τα παιδάκια. Θα κάνει δύο η μηχανή. Δύο είναι. Το ένα δεύτερο έδωσα στην Ελένη. (Μαρία)

Τέλος, στην κατηγορία αυτή τοποθετήθηκαν 7 περιπτώσεις, στις οποίες διαφορετικά παιδιά εξέφρασαν το β ως **«ένα από ν»,** μόνο αριθμητικά. Για παράδειγμα:

> Είναι το ένα από τα δύο. (Άγης)
>
> Τρία θα κόψει η μηχανή. Θα δώσει μετά το ένα από τα τρία (Μαρία).

δ) Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες το β συνδέεται με μια διαδικασία απόσπασης ενός μέρους από μία ποσότητα (**Με Απόσπαση**). Στις περιπτώσεις αυτές, δεν υπάρχει η έκφραση

«ένα **από**». Περιγράφεται το ΣΜ (π.χ. «έχω δύο τριάδες») ή ο μετασχηματισμός του Α (π.χ. «η μηχανή έκοψε το Α τρεις φορές») και η απόσπαση ενός μέρους του Α (παίρνω/δίνω/βρίσκω/ έχω **το ένα**). Για παράδειγμα:

> Να το, το ένα τρίτο! Τρεις τριάδες έχω και θα πάρω τη μία.(Άρια)
>
> Κόβω σε δύο, δίνω το ένα. (Δήμος)
>
> Τρία κομμάτια έφτιαξα για να το δώσω το ένα (Ίριδα)
>
> Η μηχανή κόβει τώρα τρία κομμάτια. Όσα λες τόσα κόβω και δίνω ένα μόνο. (Μαρία).

ε) Αναφέρεται **μόνο ο όρος «ένα νιοστό»**, χωρίς να συνδέεται με κάποια περιγραφή σχέσης από τις παραπάνω. Στις περιπτώσεις αυτές, τα παιδιά μιλούν για το ν (πόσες «ομάδες» ή «κομμάτια») και αναφέρουν τον όρο μετά την ερώτηση Ε2.

Οι εξαιρέσεις στην περιγραφή της σχέσης του ζητούμενου β με το δεδομένο Α ήταν ελάχιστες, αλλά αξιοσημείωτες. Τρεις από αυτές προήλθαν από τη Δέσποινα και τον Κώστα:

> Θα έχω ένα κομμάτι που όταν το βάλω δύο φορές να κάνει τη σοκολάτα που μου έδωσες. (Δέσποινα)
>
> Δύο τριάδες χωράνε εδώ. Ε θα πάρω τη μία από της δύο. (Κώστας)
>
> Πάλι δύο κομμάτια χωράνε στη σοκολάτα και θα δώσω το ένα. (Κώστας)

Στις περιγραφές και των δύο παιδιών, το ζητούμενο β έχει το ρόλο της μονάδας μέτρησης του Α. Στην περίπτωση της Δέσποινας, η μέτρηση είναι με επανάληψη της μονάδας, παρότι το ίδιο το παιδί περιγράφει την ενέργεια ως σύνθεση (βλ. §5.3.2). Στην περίπτωση του Κώστα, περιγράφεται ρητά («χωράνε») το αποτέλεσμα της μέτρησης του Α από το β (χωρίς επανάληψη), πριν προχωρήσει στην έκφραση μιας σχέσης του τύπου «ένα από ν», απόσπαση «μιας». Οι απαντήσεις του Κώστα κωδικοποιήθηκαν ως «Α-Έμμεση».

Τέλος, σε δύο περιπτώσεις, ο Μάρκος περιέγραψε προσθετικά τη σχέση μέρους-όλου μεταξύ του Α και του β:

> Είναι τέσσερις και τέσσερις. Οι οκτώ καραμέλες είναι τέσσερις και τέσσερις.
>
> Είναι ένα κομμάτι, και ένα και ένα. Αυτή είναι η σοκολάτα.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για περιγραφές του τύπου «ένα από ν» και θα αναφερθούμε στις εξαιρέσεις στα προφίλ των παιδιών παρακάτω.

Στον Πίνακα 22, παρουσιάζεται η συχνότητα κάθε κατηγορίας περιγραφής σχέσης της μορφής «ένα από ν» μεταξύ του ζητούμενου β και του δεδομένου Α, ξεχωριστά στην περίπτωση χρήσης ή μη του όρου ν-πλάσιο (ΜΟ, ΧΟ, αντίστοιχα), ανά είδος ποσότητας (διακριτή, συνεχής) και ανά τιμή του ν (2, 3, 4). Σημειώνεται ότι, όταν στα λεγόμενα ενός παιδιού ανά πρόβλημα συνυπήρχαν λεκτικές περιγραφές από διαφορετικές κατηγορίες, καταμετρήθηκε η πιο προχωρημένη από αυτές.

Ποσότητα	ν	Κατηγορίες Περιγραφής: Α-Άμεση			Α-Έμμεση			ΣΜ			Με απόσπαση			Μόνο όρος	# Περι-γραφών	# Όρων
		ΜΟ	ΧΟ	Σ	ΜΟ	ΧΟ	Σ	ΜΟ	ΧΟ	Σ	ΜΟ	ΧΟ	Σ			
Διακριτή	2	4	1	5	1	2	3	7	7	14	4	6	10	4	36	20
	3	0	0	0	0	2	2	10	19	29	1	3	4	2	37	13
	4	0	0	0	0	0	0	6	3	9	2	0	2	1	12	9
Σύνολο		4	1	5	1	4	5	23	29	52	7	9	16	7	85	42
%				5.9%			5.9%			61.2%			18.8%	8.24%	100%	49.4%
Συνεχής	2	5	8	13	3	2	5	7	8	15	5	6	11	2	46	22
	3	6	6	12	5	4	9	3	7	10	1	5	6	3	40	16
	4	0	0	0	5	2	7	1	5	6	0	4	4	1	18	7
Σύνολο		11	14	25	13	8	21	11	20	31	6	15	21	6	104	45
%				24.0%			20.2%			29.8%			20.2%	5.8%	100%	43.3%

Σημείωση.

Το πλήθος των προβλημάτων με ζητούμενο το β είναι 20, 10 ανά είδος ποσότητας, 8, 8 και 4 για ν=2,3,4 αντίστοιχα.

Το σύνολο των σωστών απαντήσεων στα προβλήματα με ζητούμενο το β είναι 261 συνολικά, 130 και 131 για τις διακριτές και τις συνεχείς ποσότητες, αντίστοιχα, 111, 102 και 48 για ν=2, 3, 4 αντίστοιχα.

Πίνακας 22: Συχνότητα των κατηγοριών περιγραφής σχέσης της μορφής «ένα από ν» μεταξύ του ζητούμενου β και του δεδομένου Α, με ή χωρίς χρήση όρου (ΜΟ, ΧΟ, αντ.), ανά είδος ποσότητας (διακριτή, συνεχής) και ανά τιμή του ν (2, 3, 4).

Από τον Πίνακα 22 φαίνεται ότι οι περιγραφές σχέσης της μορφής «ένα από ν» είναι πιο συχνές για τις συνεχείς ποσότητες. Στο σύνολο των σωστών απαντήσεων για τις διακριτές και συνεχείς ποσότητες (130 και 131, αντ.) τέτοιες περιγραφές δίνονται με ποσοστό 65,4% και 79,4%, αντίστοιχα. Επιπλέον, ενώ και στις δύο περιπτώσεις επικρατούσα είναι η κατηγορία, στην οποία η ποσότητα αναφοράς είναι το σύνολο των μερών («ΣΜ»), αυτή εμφανίζεται πιο συχνά στις διακριτές (και πολύ λιγότερο συχνά στις συνεχείς ποσότητες). Παράλληλα, στις συνεχείς ποσότητες αυξάνεται κατά πολύ η συχνότητα εμφάνισης των κατηγοριών στις οποίες η ποσότητα αναφοράς είναι άμεσα ή έμμεσα το Α. Η κατηγορία «Με απόσπαση» εμφανίζεται με ποσοστά κοντά στο 20% και στις δύο συνθήκες και η κατηγορία «Μόνο όρος» με χαμηλά ποσοστά, κάτω του 10% και στις δύο συνθήκες. Ο όρος «ένα νιοστό» χρησιμοποιείται πιο συχνά στις διακριτές, παρά στις συνεχείς ποσότητες.

Για να εξεταστούν τα στοιχεία του Πίνακα 22 για τις διαφορετικές τιμές του ν, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη η διαφορά του πλήθους των προβλημάτων για ν=2,3 και για ν=4 (βλ. Σημείωση στον Πίνακα 22). Από τα στοιχεία του Πίνακα 22 μπορούν να υπολογιστούν τα παρακάτω:

Για ν=2, δόθηκαν συνολικά 82 περιγραφές (73,9% στο σύνολο των 111 σωστών απαντήσεων). Η συνολική σχετική συχνότητα των κατηγοριών «Α-Άμεσα», «Α-Έμμεσα», «Με Απόσπαση» και «Μόνο όρος» (στο σύνολο των 82) είναι 0,22, 0,10, 0,35, 0,26 και 0,07, αντίστοιχα. Ο όρος «ένα δεύτερο» αναφέρθηκε με σχετική συχνότητα 0,51.

Για ν=3, δόθηκαν συνολικά 77 περιγραφές (75,5% στο σύνολο των 102 σωστών απαντήσεων). Η συνολική σχετική συχνότητα των κατηγοριών «Α-Άμεσα», «Α-Έμμεσα», «Με Απόσπαση» και «Μόνο όρος» (στο σύνολο των 77) είναι 0,16, 0,14, 0,51, 0,13, και 0,06, αντίστοιχα. Ο όρος «ένα τρίτο» αναφέρθηκε με σχετική συχνότητα 0,38.

Για ν=4, δόθηκαν συνολικά 30 περιγραφές (62,5% στο σύνολο των 48 σωστών απαντήσεων).Η συνολική σχετική συχνότητα των κατηγοριών «Α-Άμεσα», «Α-Έμμεσα», «Με Απόσπαση» και «Μόνο όρος» (στο σύνολο των 30) είναι αντίστοιχα 0, 0,23, 0,50, 0,20 και 0.07, αντίστοιχα. Ο όρος «ένα τέταρτο» αναφέρθηκε με σχετική συχνότητα 0,53.

Φαίνεται ότι η συχνότητα των λεκτικών περιγραφών σχέσης στις σωστές απαντήσεις μειώνεται με την αύξηση του ν. Η κατηγορία «Α-Άμεση» εμφανίζεται πιο συχνά για ν=2, λιγότερο συχνά για ν=3 και καθόλου για ν=4. Αντίθετα, η «Α-Έμμεση» εμφανίζει αυξανόμενη

συχνότητα με την αύξηση του ν. Η σχετική συχνότητα της «ΣΜ» παίρνει τη μικρότερη τιμή της για ν=2, και εμφανίζεται περίπου στις μισές περιπτώσεις για ν=3,4. Η κατηγορία «Με απόσπαση» εμφανίζεται πιο συχνά για ν=2 και λιγότερο συχνά για ν=3. Τέλος, η κατηγορία «Μόνο όρος» έχει χαμηλή συχνότητα εμφάνισης για όλες τις τιμές του ν. Ο όρος «ένα τρίτο» αναφέρεται με τη μικρότερη σχετική συχνότητα. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι στις συνολικά 97 αναφορές του όρου «ένα νιοστό», οι 28 (28,8%) έγιναν αυθόρμητα, δηλαδή, πριν την ερώτηση Ε2.

Συνοψίζοντας ως εδώ, φαίνεται ότι το είδος της ποσότητας αλλά και η αριθμητική τιμή του ν παίζουν ρόλο στο πλήθος και το είδος των περιγραφών της σχέσης «ένα από ν» στα προβλήματα με ζητούμενο το Α. Όταν δίνονται σωστές απαντήσεις, πιο συχνά δίνονται περιγραφές στις συνεχείς ποσότητες, και πιο συχνά για ν=2,3. Ωστόσο, πιο συχνά αναφέρεται ο όρος «ένα νιοστό» στις διακριτές ποσότητες. Ο όρος «ένα τέταρτο» αναφέρθηκε πιο συχνά, με αμελητέα διαφορά από τον όρο «ένα δεύτερο», αλλά αισθητή διαφορά από τον όρο «ένα τρίτο».

Στις συνεχείς ποσότητες δίνονται πολύ πιο συχνά περιγραφές στις οποίες το β συνδέεται άμεσα ή έμμεσα με το Α ως ποσότητα αναφοράς («Α-Άμεση», «Α-Έμμεση»). Οι περιγραφές με άμεση σύνδεση του β με το Α μειώνονται με την αύξηση του ν και μηδενίζονται για ν=4, ενώ οι περιγραφές με έμμεση σύνδεση αυξάνονται με την αύξηση του ν.

Περιγραφές στις οποίες το β συνδέεται με το σύνολο των μερών, αλλά όχι το Α («ΣΜ») είναι οι πιο συχνές και για τα δύο είδη ποσοτήτων, αλλά πολύ πιο συχνά στη διακριτή περίπτωση. Οι περιγραφές αυτές εμφανίζονται λιγότερο συχνά για ν=2. Η κατηγορία «Με απόσπαση» εμφανίζεται με παρόμοια συχνότητα σε διακριτές και συνεχείς, και πιο συχνά για ν=2.

Η πιο συχνή άμεση σύνδεση του β με το Α στις συνεχείς ποσότητες μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι το Α παραμένει αδιάσπαστο και ορατό ως αρχική ποσότητα στη συνθήκη αυτή, αντίθετα με την περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων, στην οποία τα παιδιά εφαρμόζουν συχνά διαδικασίες ανάλυσης και διασπούν την αρχική ποσότητα Α. Από την άλλη μεριά, η πιο συχνή έμμεση σύνδεση του β με το Α στις συνεχείς, και η πιο συχνή σύνδεση με το ΣΜ στις διακριτές θα μπορούσε να αποδοθεί στο γεγονός ότι στη δεύτερη περίπτωση, τα παιδιά περιγράφουν πιο συχνά απευθείας το αποτέλεσμα της διαδικασίας που εφάρμοσαν, και όχι την ίδια τη διαδικασία (π.χ. «Είναι δύο τριάδες και δίνω μία από τις δύο»).

Στη συνέχεια εξετάζεται ο τρόπος περιγραφής της σχέσης «ένα από ν» από κάθε παιδί. Στον Πίνακα 23, παρουσιάζεται η συχνότητα της κάθε κατηγορίας και το πλήθος των όρων που αναφέρθηκαν για τις διακριτές και τις συνεχείς ποσότητες, ξεχωριστά και συνδυαστικά, ανά παιδί. Σημειώνεται ότι στην περίπτωση που ένα παιδί έδινε παραπάνω από μία περιγραφές στο ίδιο πρόβλημα, καταμετρήθηκε η πιο προηγμένη. Για παράδειγμα, αν ένα παιδί είπε «ένα από τα τρία κομμάτια, το ένα τρίτο της μπάρας», καταμετρήθηκε μόνο η δεύτερη έκφραση. Ο Πίνακας 232 είναι διατεταγμένος σε αύξουσα σειρά, με βάση την τελευταία στήλη του που δείχνει το σύνολο των περιγραφών των κατηγοριών «Α-Άμεσα» και «Α-Έμμεσα» συνολικά στα 20 προβλήματα των διακριτών και συνεχών ποσοτήτων.

Παιδί	Διακριτές Ποσότητες							Συνεχείς ποσότητες							Διακριτές & Συνεχείς		
	Α-Άμεση	Α-Έμμεση	ΣΜ	Από-σπαση	Μόνο όρος	Σύνολο	# Όρων	Α-Άμεση	Α-Έμμεση	ΣΜ	Από-σπαση	Μόνο όρος	Σύνολο	# Όρων	# Περιγραφών	# Όρων	Α Άμ. & Εμμ.
Άγης *	1	1	4	1	0	7	5	5	3	2	0	0	10	7	17	12	10
Άρια	0	1	5	3	1	10	8	5	2	2	1	0	10	6	20	14	8
Κων/νος*	1	1	3	2	3	10	7	1	3	3	1	1	9	7	19	14	6
Διαμαντής	2	0	6	0	0	8	6	1	3	4	2	0	10	7	18	13	6
Μαρία	0	1	3	2	1	7	2	2	2	1	4	0	9	3	16	5	5
Γιάννης	0	0	6	1	1	8	2	1	3	3	1	0	8	0	16	2	4
Δήμος	0	0	7	1	0	8	5	0	3	3	2	2	10	7	18	12	3
Ίριδα	0	0	3	2	0	5	0	3	0	3	3	0	9	1	14	1	3
Δέσποινα	1	0	6	0	0	7	3	1	1	3	0	1	6	3	13	6	3
Ορφέας	0	1	6	2	0	9	3	1	0	5	3	1	10	3	19	6	2
Μάρκος	0	0	1	1	0	2	0	2	0	1	2	1	6	1	8	1	2
Άντυ	0	0	1	0	0	1	0	2	0	0	0	0	2	0	3[1]	0	2
Ευτύχης	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	2	0	3[2]	0	1
Πέτρος	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	2	0	3[3]	1	1
Άλεξ	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	2[4]	0	0
Σύνολο	5	5	52	16	7	85	42	25	21	31	21	6	104	45	189	87	56

Σημείωση.

[1] Στο σύνολο των 13 σωστών απαντήσεων που έδωσε ο Άντυ στα 20 προβλήματα με ζητούμενο το β

[2] Στο σύνολο των 12 σωστών απαντήσεων που έδωσε ο Ευτύχης στα 20 προβλήματα με ζητούμενο το β.

[3] Στο σύνολο των 11 σωστών απαντήσεων που έδωσε ο Πέτρος στα 20 προβλήματα με ζητούμενο το β.

[4] Στο σύνολο των 14 σωστών απαντήσεων που έδωσε ο Άλεξ στα 20 προβλήματα με ζητούμενο το β.

Πίνακας 23: Σύνολο των απαντήσεων της κάθε κατηγορίας περιγραφής σχέσεων και σύνολο αναφερόμενων όρων, ανά παιδί, για τις διακριτές και συνεχείς ποσότητες ξεχωριστά και συνδυαστικά, στα 20 προβλήματα με ζητούμενο το Α.

Από τον Πίνακα 23 φαίνεται ότι όλα τα παιδιά περιέγραψαν λεκτικά μια σχέση μέρους-όλου της μορφής «ένα από ν», από 3 και έως 19 φορές, στο σύνολο των σωστών τους απαντήσεων. Επιπλέον, όλα τα παιδιά, εκτός από ένα (Άλεξ), εξέφρασαν αυτή τη σχέση με ποσότητα αναφοράς, άμεσα ή έμμεσα το Α. Για τα περισσότερα παιδιά, τέτοιες περιγραφές έγιναν μόνο στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων, και είναι λιγότερες από τις μισές στο σύνολο των περιγραφών που έδωσαν. Ο όρος «ένα νιοστό» αναφέρεται από 0 έως και 14 φορές, με τρία παιδιά να μην τον αναφέρουν καθόλου (Άντυ, Ευτύχης, Άλεξ).

Διακρίνεται μια πρώτη ομάδα 4 παιδιών (Άγης, Άρια, Κώστας, Διαμαντής), τα οποία δίνουν από 17 (Άγης) έως 20 (Άρια) περιγραφές σχέσεων και χρησιμοποιούν όρους από 12 (Άγης) έως 14 φορές (Άρια), αναφέροντας το «ν-πλάσιο» και για τις τρεις τιμές του ν. Τα παιδιά αυτά δίνουν περιγραφές από διαφορετικές κατηγορίες, αλλά αναφέρουν το Α ως «όλον», άμεσα ή έμμεσα, από 6 (Κώστας, Διαμαντής) έως 10 φορές (Άγης), πιο συστηματικά στις συνεχείς, αλλά και στις διακριτές ποσότητες, όπου οι περιγραφές αυτές είναι σπάνιες. Η Άρια και ο Άγης είναι τα παιδιά που ανέφεραν το Α ως «όλον» με τη μεγαλύτερη συστηματικότητα (5 φορές το καθένα) στις συνεχείς ποσότητες. Επιπλέον, πάνω από τις μισές περιγραφές του Άγη έχουν άμεση ή έμμεση αναφορά στο Α. Επίσης, τα τρία αγόρια περιέγραψαν το β και ως «ένα νιοστό» του Α (βλ. τα παραδείγματα του Άγη παραπάνω «μία από τις δύο τετράδες - το ένα δεύτερο από τις καραμέλες» και «ένα από τα τρία κομμάτια της, το ένα της τρίτο»). Υπενθυμίζεται ότι ο Κώστας είναι το παιδί που περιέγραψε και ρητά το Α ως αποτέλεσμα μέτρησης από το β («τρεις τριάδες χωράνε εδώ»). Στην ομάδα αυτή θα μπορούσε να ενταχθεί και η Μαρία που έδωσε 16 περιγραφές της σχέσης, 5 με άμεση ή έμμεση αναφορά στο Α, μία εκ των οποίων στις διακριτές ποσότητες. Αντίθετα με τα υπόλοιπα παιδιά, η Μαρία δεν αναφέρει συστηματικά τον όρο «ένα νιοστό». Επίσης, η Μαρία είναι το παιδί που, συνολικά, έδωσε τις περισσότερες περιγραφές με απόσπαση.

Μια ομάδα που ξεχωρίζει, επίσης, είναι αυτή που περιλαμβάνει 5 παιδιά, όλα τα παιδιά της Ομάδας ΙΙΙ (Άντυ, Ευτύχης, Πέτρος, Άλεξ) που έδωσαν και λανθασμένες απαντήσεις στα προβλήματα με ζητούμενο το Α (βλ. Σημείωση στον Πίνακα 23) και ένα ακόμα παιδί (Μάρκος) από την Ομάδα ΙΙ, το οποίο δεν έδωσε λανθασμένες απαντήσεις στα προβλήματα αυτά. Ο Μάρκος, επιπλέον, έδωσε δύο προσθετικές περιγραφές της σχέσης μέρους-όλου μεταξύ του β και του Α («Οι οχτώ καραμέλες είναι τέσσερις και τέσσερις»). Τα παιδιά αυτά δίνουν λίγες περιγραφές σχέσεων της μορφής «ένα από ν» γενικά και αναλογικά με τις

σωστές τους απαντήσεις και χρησιμοποιούν τον όρο «ένα νιοστό» ελάχιστα ή καθόλου. Πάραυτα, 3 από αυτά τα παιδιά (Μάρκος, Άντυ, Πέτρος) ανέφεραν το Α ως «όλον», τα δύο πρώτα 2 φορές, ενώ ο Ευτύχης έκανε μια έμμεση αναφορά στο Α, στις συνεχείς ποσότητες.

Τα υπόλοιπα παιδιά δεν συγκροτούν μια ομοιογενή ομάδα. Το μόνο κοινό στοιχείο μεταξύ όλων αυτών των παιδιών είναι ότι έχουν δώσει περιγραφές σχέσεις σε περισσότερες από τις μισές απαντήσεις τους, που είναι όλες σωστές.

Ο Γιάννης, η Ίριδα δίνουν λιγότερες περιγραφές από τα παιδιά της πρώτης ομάδας, ενώ αναλογικά σε σχετικά μεγάλο μέρος τους συνδέουν το β με το Α ως ποσότητα αναφοράς. Αυτά τα δύο παιδιά αναφέρουν ελάχιστες φορές τον όρο «ένα νιοστό» και συγκεκριμένα, το «ένα δεύτερο» και το «ένα τέταρτο» (Γιάννης).

Ο Δήμος και ο Ορφέας δίνουν πολλές περιγραφές σχέσεων, παρόμοια με τα παιδιά της πρώτης ομάδας, με αναλογικά μικρό μέρος τους να είναι από τις πιο προχωρημένες κατηγορίες. Επίσης παρόμοια με τα παιδιά της πρώτης ομάδας και αντίθετα με τον Ορφέα, ο Δήμος αναφέρει συχνά τον όρο «ένα νιοστό» και, μάλιστα, για όλες τις τιμές του ν.

Τέλος, η Δέσποινα έδωσε λιγότερες περιγραφές σχέσεων από τα παιδιά της πρώτης ομάδας, αναλογικά λιγότερες περιγραφές με άμεση ή έμμεση αναφορά στη μονάδα, αλλά μία άμεση στις διακριτές ποσότητες, όπου αυτές οι περιγραφές είναι σπάνιες. Το παιδί αυτό ανέφερε σχετικά λίγους όρους, και συγκεκριμένα το «ένα δεύτερο» και το «ένα τρίτο». Ωστόσο, συγκαταλέγεται στα λίγα παιδιά που χρησιμοποίησαν τον όρο με ποσότητα αναφοράς το Α (βλ. παράδειγμα παραπάνω «θα είναι το ένα της δεύτερο»). Επιπλέον, η Δέσποινα είναι το μόνο παιδί που εξέφρασε τη σχέση μεταξύ του β και του Α και ως «μέτρο»- «μετρούμενο», περιγράφοντας το β ως το κομμάτι που «όταν το βάλω δύο φορές να κάνει τη σοκολάτα που μου έδωσες».

Συνοψίζοντας, όλα τα παιδιά περιγράφουν τη σχέση του ζητούμενου β με το δεδομένο Α ως σχέση μέρους-όλου της μορφής «ένα από ν». Η συστηματικότητα με την οποία περιγράφουν σχέσεις διαφέρει μεταξύ των παιδιών, όπως και η συχνότητα με την οποία αναφέρουν όρους. Παιδιά όλων των ομάδων δίνουν περιγραφές στις οποίες το β συνδέεται άμεσα ή έμμεσα με το Α, τα περισσότερα στις συνεχείς ποσότητες, με την εξαίρεση ενός μόνο παιδιού.

Τα παιδιά διαφοροποιούνται ως προς το πλήθος των περιγραφών σχέσεων της μορφής «ένα από ν» που δίνουν συνολικά, ως προς τη συστηματικότητα με την οποία έδωσαν περιγραφές του β σε άμεση ή έμμεση σύνδεση με το Α και αν το κάνουν και στις διακριτές ποσότητες. Επίσης, διαφοροποιούνται ως προς τη συστηματικότητα με την οποία ανέφεραν τον όρο «ένα νιοστό». Τέλος, διαφοροποιούνται ως προς το αν έδωσαν και εναλλακτικές περιγραφές της σχέσης μεταξύ του Α και του β, ή όχι. Με βάση τα παραπάνω, υπάρχουν δύο ομάδες παιδιών που διακρίνονται αρκετά καθαρά.

Η μία ομάδα περιλαμβάνει τέσσερα παιδιά που περιγράφουν σχέσεις συστηματικά και απεικονίζουν λεκτικά τη σύνδεση του β με το Α αρκετά έως πολύ συστηματικά στις συνεχείς ποσότητες, περιστασιακά και στις διακριτές. Τα παιδιά αυτά χρησιμοποιούν συστηματικά τον όρο «ένα νιοστό» και, περιστασιακά, με ποσότητα αναφοράς το Α. Στην ομάδα αυτή ανήκει ένα παιδί που περιέγραψε το Α ρητά ως αποτέλεσμα μέτρησης από το β. Κοντά στην ομάδα αυτή βρίσκεται ακόμα ένα παιδί, το οποίο διαφέρει ως προς τη συστηματικότητα που χρησιμοποιεί τον όρο «ένα νιοστό».

Η άλλη ομάδα περιλαμβάνει όλα τα παιδιά που έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις στα αντίστοιχα προβλήματα με ζητούμενο το β, επομένως έχουν πιστωθεί εξαρχής με λιγότερες περιγραφές σχέσεων. Στην ομάδα περιλαμβάνεται ένα πέμπτο παιδί που έδωσε μόνο σωστές απαντήσεις σε αυτά τα προβλήματα και που περιστασιακά περιέγραψε τη σχέση του Α με το β προσθετικά. Τα παιδιά αυτά δίνουν λίγες περιγραφές σχέσεων αναλογικά με τις σωστές τους απαντήσεις και αναφέρουν τον όρο «ένα νιοστό» ελάχιστα ή καθόλου. Εντούτοις, στις συνεχείς ποσότητες, με την εξαίρεση ενός παιδιού, όλα έδωσαν μία ή δύο περιγραφές του β σε σύνδεση με το Α.

Τα υπόλοιπα πέντε παιδιά αποτελούν μια ανομοιογενή ομάδα που περιλαμβάνει παιδιά που δίνουν από αρκετές έως πολλές περιγραφές της σχέσης «ένα από ν» και, σε κάθε περίπτωση, σε πάνω από τις μισές σωστές τους απαντήσεις. Ως προς άλλα χαρακτηριστικά, τα παιδιά αυτά διαφοροποιούνται, ως προς τη συστηματικότητα με την οποία απεικονίζουν λεκτικά τη σχέση του β με το Α, αλλά και ως προς την χρήση του όρου. Ανάμεσα στα παιδιά αυτά διακρίνεται ένα (Δέσποινα) η οποία έδωσε ίσως την πιο προηγμένη περιγραφή σχέσης μεταξύ του β και του Α, αυτήν του «μέτρου»-«μετρούμενου».

5.4.3 Περιγραφές αναλογικών σχέσεων

Στα αναλογικά προβλήματα, υπήρξαν παιδιά που περιέγραψαν λεκτικά την αναλογία μεταξύ της σχέσης της Παμ και μιας δεδομένης παίκτριας, με τη σχέση της δόσης της Παμ, και τη δόση της παίκτριας. Πιο συγκεκριμένα, ο Άγης, η Άρια, η Ίριδα και ο Ορφέας έδωσαν από μία τουλάχιστον επεξεργασμένη λεκτική περιγραφή της αναλογίας. Για παράδειγμα:

> Η Παμ είναι το ένα από τα δύο κομμάτια της Διπάμ έτσι και η μπάρα που θα πάρει θα είναι το ένα από τα δύο κομμάτια που φτιάχνουν την μπάρα της Διπάμ. (Άγης)
>
> Κόβω σε δύο κομμάτια και δίνω ένα στην Παμ. Αφού είναι η Παμ το ένα από τα δύο κομμάτια της Διπάμ έτσι και η μπάρα της θα είναι το ένα από τα δύο κομμάτια της μπάρας της Διπάμ. (Άρια).
>
> Η Παμ είναι το ένα από τα δύο κομμάτια της Διπάμ. Ένα κομμάτι από τα δύο της μπάρας θα δώσω πάλι. (Ίριδα)
>
> Τώρα η Τριπάμ έχει τρία παμ. Η μπάρα πρέπει να έχει τρία κομμάτια. Θα δώσω ένα, το λέμε τρίτο. Ένα τρίτο. (Ορφέας)

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι η Άρια διαπίστωσε και εξέφρασε λεκτικά μια άλλου τύπου αναλογία, μεταξύ των προβλημάτων της παρέμβασης και των προβλημάτων του μεταελέγχου:

> Ο Γιάννης και το αδερφάκι του είναι δύο παιδιά. Άρα θα πρέπει να κόψω την σοκολάτα σε δύο κομμάτια; Πονηρή. Θέλεις να κάνω ότι έκανα και για την Παμ και την Διπάμ ε; Μόνο που τώρα έβαλες άλλο όνομα. (…) Όταν είχαμε την Διπάμ και την Παμ μας έδινες μία σοκολάτα ή καραμέλες και μετά εμείς κόβαμε τη σοκολάτα σε δύο κομμάτια για τις δύο μικρές παμίνες ή φτιάχναμε τις καραμέλες σε δύο ομάδες και δίναμε στη μία Παμ την μία από την ίδια ομάδα. Και τώρα αυτό με βάζεις να κάνω. Αλλά δεν λες Παμ, λες Γιώργος.

5.4.4 Σύνοψη και σύνδεση με την παρέμβαση

Τα αποτελέσματα που παρουσιάσαμε δείχνουν ότι για το ζητούμενο Α, στις σωστές απαντήσεις των παιδιών υπάρχουν πολύ συχνά περιγραφές σχέσεων τόσο στις διακριτές, όσο και στις συνεχείς ποσότητες. Η τιμή του ν φαίνεται να παίζει ρόλο στο αν θα περιγραφεί

μια σχέση και αν θα χρησιμοποιηθεί ο όρος «ν-πλάσιο». Όλα τα παιδιά περιέγραψαν συχνά τη σχέση με προσθετικό τρόπο στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων, το οποίο επιτρέπει την αριθμητική πράξη της πρόσθεσης. Διαφοροποιούνται με βάση τη συστηματικότητα με την οποία εξέφρασαν τη σχέση πολλαπλασιαστικά («φορές»): Τα παιδιά της Ομάδας ΙΙΙ περιγράφουν λεκτικά σχέσεις σχεδόν αποκλειστικά προσθετικά. Διαφορές μεταξύ των παιδιών προκύπτουν, επίσης, από τον τρόπο που εξέφρασαν τη σχέση στο πλαίσιο των συνεχών ποσοτήτων: Παιδιά των Ομάδων Ι και ΙΙ, μαζί με τα παιδιά της Ομάδας ΙΙΙ, εκφράζουν το Α ως «ν κομμάτια». Η επόμενη διαφοροποίηση γίνεται στην αντίστοιχη έκφραση του Α στις διακριτές ποσότητες: Τα παιδιά της Ομάδας ΙΙΙ εν γένει δεν περιγράφουν το Α ως «ν β-άδες».

Στις σωστές απαντήσεις στα προβλήματα με ζητούμενο το β, σχεδόν όλες οι περιγραφές σχέσης που έδωσαν τα παιδιά εμπίπτουν στην κατηγορία «ένα από ν μέρη (του Α)», με μια πλειάδα διαφοροποιήσεων, ανάλογα με την ποσότητα αναφοράς που περιγράφουν τα παιδιά. Τέτοιες περιγραφές δίνονται πιο συχνά και είναι πιο εκλεπτυσμένες στις συνεχείς ποσότητες, και λιγότερο συχνά για ν=4. Ωστόσο, ό όρος «ένα τρίτο» ήταν αυτό που αναφέρθηκε λιγότερο. Σε ατομικό επίπεδο, υπάρχουν διαφοροποιήσεις μεταξύ των παιδιών που περιγράφτηκαν με λεπτομέρεια παραπάνω, ωστόσο εδώ θα θέλαμε να σταθούμε στην ομοιομορφία αυτού του τύπου περιγραφής, έναντι των ελάχιστων εξαιρέσεων, στην ουσία τρεις διαφορετικές διατυπώσεις από τον Κώστα και την Δέσποινα, κυρίως την δεύτερη (το β ως το κομμάτι που «όταν το βάλω δυο φορές να κάνει τη σοκολάτα που έδωσες»). Είναι προφανές ότι κατά την παρέμβαση στηρίχτηκε σχεδόν αποκλειστικά η περιγραφή του «ένα από ν μέρη (του Α)». Όπως διαπιστώσαμε εξετάζοντας το βιντεοσκοπημένο υλικό, η ερευνήτρια χρησιμοποιεί συχνά και εκφράσεις του τύπου «πρέπει να βάλουμε το β ν φορές για να φτιάξουμε το Α», αλλά η περιγραφή του β ως «ένα από ν μέρη του Α» υπερέχει και από τη μεριά της ερευνήτρια, αλλά και στην αλληλεπίδραση των παιδιών μεταξύ τους.

Κανονικότητες, όροι και το β ως «ένα από τα ν μέρη (του Α)»

Το επεισόδιο που ακολουθεί είναι στο πλαίσιο της Δ1 (εισαγωγική δραστηριότητα-πολλαπλασιαστική σύγκριση). Έχουν παρουσιαστεί η Παμ και οι τρεις πρώτες παίκτριες.

Ε: Να φωνάξω κάποια ακόμα για την παρέα μας;

Ευτύχης: Εγώ ξέρω ποια είναι. Να τη φτιάξω; [*το παιδί παίρνει τέσσερις «παμίνες» και τις στοιβάζει τη μία πάνω στην άλλη*] Είναι η τέσσερα. Ήρθε μετά το τρία.

Ε: Μπράβο! Πόσες παμίνες χρειάστηκες, Ευτύχη, για να φτιάξεις αυτήν την παίκτρια την ψηλή;

Ευτύχης: Τέσσερις. Έτσι πάει. Ένα, δύο, τρία, τέσσερα. Τέσσερα έβαλα.

Ε: Μπορούμε να βρούμε το όνομα αυτής της παίκτριας; Ποια είναι;

Ευτύχης: ΠαμΠαμ [*σταματάει*]. Τέσσερα παμ.

Ε: Σωστά. Αυτή, όμως, είναι λίγο μυστήρια, θέλει να την φωνάζουμε Τετραπάμ. Θα το θυμόμαστε, μην την στενοχωρήσουμε;

Παρατηρούμε ότι το παιδί δεν χρησιμοποιεί απλώς τη διαδοχή των αριθμολέξεων για να προβλέψει το όνομα της επόμενης παίκτρια, αλλά και τον κανόνα της αριθμητικής ακολουθίας για να την κατασκευάσει. Το «τέσσερα» είναι ο όρος που χαλάει κάπως την κανονικότητα φωνολογικά και η συγκεκριμένη ονομασία (Τέσσεραπαμ) για την παίκτρια είχε παρατηρηθεί και στον Κύκλο Ι.

Το επόμενο επεισόδιο είναι στο πλαίσιο της ίδιας δραστηριότητας (Δ1) :

Ε: Άρα λοιπόν πρέπει να βάλουμε την Παμ δύο φορές για να φτιάξουμε την Διπάμ. Τι σχέση έχει η Διπάμ με την Παμ; Μαρία;

Μαρία: Ότι η Παμ είναι δύο περισσότερο μεγάλο από την Παμ.

Δέσποινα : Δεν είναι δυο περισσότερο. Είναι δύο φορές. Τη λέμε διπλάσια. Η διπλάσια.

Ε: Και τι σχέση έχει η Παμ, η μικρή, με την Διπαμ, ξέρετε να μου πείτε.

Μαρία: Είναι το ένα από τα δύο μικρά. Είναι το ένα δεύτερο. Το δύο σου το λέει.

Στο επεισόδιο αυτό, η Μαρία φαίνεται να μην έχει βρει ακόμα τον τρόπο να εκφράσει τη σχέση της Παμ με τη Διπαμ, παρόλο που η ερευνήτρια το «μαρτυράει» αμέσως πριν. Φτιάχνει μια δική της έκφραση που συνδυάζει τον τελεστή, τη λέξη «περισσότερο» και τη λέξη «μεγάλο». Η Δέσποινα την διορθώνει, χρησιμοποιεί τον τελεστή με τις «φορές» και εκφράζει τη σχέση με όρο. Η Μαρία, από την άλλη, εκφράζει την αντίστροφη σχέση, ως «ένα

από τα δύο μικρά» και χρησιμοποιεί τον όρο «ένα δεύτερο», εξηγώντας και πώς τον βρήκε («το δύο σου το λέει»).

Το ίδιο παιδί δίνει συστηματικά αυτή τη λεκτική περιγραφή για να διορθώσει άλλα παιδιά όταν χρησιμοποιούν λανθασμένο όρο, όπως στο παρακάτω επεισόδιο, στην ίδια δραστηριότητα:

> Ε: Πόσες Παμ χρειάστηκες για να φτιάξεις την Εξαπάμ;
>
> Κώστας: Ένα, δύο τρία τέσσερα, πέντε, έξι.
>
> Ε: Τι σχέση έχει η Παμ με την Εξαπάμ ξέρεις; Το ένα κομματάκι, η Παμ;
>
> Κώστας: Το ένα τρίτο.
>
> Μαρία : Δεν είναι το ένα τρίτο. Το ένα έκτο είναι. Το ένα από τα έξι κομμάτια της Εξαπάμ.
>
> Ε: Για αυτό είναι έκτο! Και είναι ένα!

Στο επόμενο επεισόδιο, πρώτα η ερευνήτρια και μετά η Μαρία περιγράφουν το β ως «ένα από τα εφτά». Η Μαρία περιγράφει και την κανονικότητα που την βοηθά να βρίσκει τον σωστό όρο.

> Ε: Είναι η εφταπλάσια, πάρα πολύ ωραία. Και το κομματάκι αυτό, Πάνο, που είναι το ένα από τα εφτά; Πώς θα το πω;
>
> Πάνος (προνήπιο): Το ένα εφτά.
>
> Μαρία: Όχι, είναι το ένα έβδομο. Μπαίνει στη σειρά. Ο δεύτερος, ο τρίτος, ο τέταρτος, ο έβδομος. Έτσι δεν τα λέμε κυρία;
>
> Ε: Πολύ σωστά.
>
> Μαρία: Και είναι ένα από τα εφτά.

Η περίπτωση της Μαρίας δείχνει πώς το παιδί αυτό αναγνώρισε την κανονικότητα στον τρόπο παραγωγής των όρων για τα υποπολλαπλάσια, πιο νωρίς από άλλα παιδιά, τι νόημα του απέδωσε και πώς το επανάφερε στη συζήτηση, χωρίς ή με τη συμβολή της ερευνήτριας.

5.5 Αναδρομική Ανάλυση

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε τον τρίτο κύκλο μιας έρευνας σχεδιασμού με εστίαση σε συγκεκριμένη μαθηματική θεματική (Gravemeijer & Prediger, 2019). Ο κύκλος αυτός αναφέρεται ως Κύκλος ΙΙ στο κείμενο, καθώς πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο της παρούσας διδακτορικής διατριβής. Με βάση την αναδρομική ανάλυση του Κύκλου Ι (§3.5), επανασχεδιάσαμε το πρόγραμμά μας, διατηρώντας τον βασικό κορμό των τριών δραστηριοτήτων, οι οποίες εδράζονται σε τρεις διαφορετικές πολλαπλασιαστικές καταστάσεις (πολλαπλασιαστική σύγκριση, αναλογία, πολλαπλασιαστική αλλαγή- Greer, 1992). Προβλέψαμε την εισαγωγή γλωσσικών και μη γλωσσικών αναπαραστατικών εργαλείων για την ενίσχυση της αντιμετώπισης των «πολλών ως ένα» (Confrey, 2009). Συγκεκριμένα, προβλέψαμε τη συστηματική χρήση του όρου «ν-άδα» (δυάδα, τριάδα, τετράδα) και σχεδιάσαμε δομημένες εμπράγματες αναπαραστάσεις για τις σύνθετες μονάδες. Επιπλέον, σχεδιάσαμε το «εργαλείο του λόγου» για να αναπαραστήσουμε την αμφίδρομη σχέση μεταξύ μιας ποσότητας και των μερών της, που είναι μια αναπαράσταση της αντιστοιχίας «πολλά προς ένα» (Confrey,2009) ή «ένα προς πολλά» (Nunes & Bryant, 2015, στην περίπτωση των ομοειδών ποσοτήτων. Προβλέψαμε υλικό («πιατάκια») για τα βέλη του εργαλείου, σε περίπτωση χρήσης της μη δομημένης συλλογής από μονάδες.

Στη συνέχεια, επανασχεδιάστηκαν οι διαδικασίες για την κατασκευή πολλαπλασίων και εύρεσης του υποπολλαπλασίου, με αξιοποίηση των παραπάνω υλικών. Σε αντίθεση με τον Κύκλο Ι, οι διαδικασίες αυτές ήταν πανομοιότυπες για τις διακριτές και τις συνεχείς ποσότητες, ευθυγραμμίζοντας τον σχεδιασμό μας με τον στόχο της έρευνας, που περιλαμβάνει την ενιαία προσέγγιση στις διακριτές και συνεχείς ποσότητες (§2.2).Τέλος, διατηρήσαμε το σενάριο και τις ιστορίες του Κύκλου Ι, και προβλέψαμε την εισαγωγή του πρώτου υποπολλαπλάσιου με τον όρο «ένα δεύτερο», έναντι της λέξης «μισό» που είχε δημιουργήσει προβλήματα στον Κύκλο Ι.

Υλοποιήσαμε αυτόν το σχεδιασμό με είκοσι δύο παιδιά μιας μικτής τάξης Νηπιαγωγείου (δεκατρία νήπια και εννιά προνήπια), που είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα του Ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος και προσδίδει μεγαλύτερη οικολογική εγκυρότητα στην έρευνα (Gravemeijer & Prediger, 2019). Η υλοποίηση ήταν οργανωμένη ως παρέμβαση με προέλεγχο και μεταέλεγχο. Στον προέλεγχο, όλα τα παιδιά εξετάστηκαν σε τύπους

προβλημάτων που δεν συμπεριλαμβάνονταν στην παρέμβαση, ενώ στο μεταέλεγχο συμπεριλάβαμε και προβλήματα ίδια με αυτά της παρέμβασης.

Όπως είναι φανερό από τα αποτελέσματα που παρουσιάσαμε, στην αναδρομική ανάλυση πρέπει να ληφθούν υπόψη τρεις ομάδες παιδιών: Η πρώτη περιλαμβάνει τα παιδιά που συμμετείχαν στον μεταέλεγχο και είχαν άριστη ή εξαιρετικά υψηλή επίδοση (το πολύ μια λανθασμένη απάντηση). Η δεύτερη περιλαμβάνει τα παιδιά που επίσης συμμετείχαν στον μεταέλεγχο και είχαν χαμηλότερη επίδοση. Η τρίτη περιλαμβάνει τα παιδιά που αρνήθηκαν να συμμετάσχουν στον μεταέλεγχο ή εγκατέλειψαν τη διαδικασία πολύ γρήγορα. Για την καλύτερη οργάνωση της συζήτησης, θα αναφερόμαστε στις ομάδες αυτές ως ομάδα Α, Β και Γ, αντίστοιχα. Στην Ομάδα Α βρίσκονται δέκα νήπια και ένα προνήπιο. Στη Β, τρία νήπια και ένα προνήπιο. Τέλος, η Ομάδα Γ περιλαμβάνει επτά προνήπια. Κανένα από τα παιδιά, ανεξάρτητα από την ομάδα στην οποία βρέθηκε, δεν αρνήθηκε τη συμμετοχή στις συναντήσεις της παρέμβασης, από την αρχή και μέχρι το τέλος της. Τα παιδιά και των τριών ομάδων έλυσαν προβλήματα πολλαπλασιαστικής σύγκρισης με μέτρηση, στο πλαίσιο της πρώτης δραστηριότητας (Δ1), με λιγότερη ή περισσότερη δυσκολία στην παραγωγή όρων για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια. Για τα παιδιά όλων των ομάδων, εμφανίστηκαν δυσκολίες κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, ιδιαίτερα στη δεύτερη δραστηριότητα (Δ2-αναλογικά προβλήματα), όπου και έγινε η εισαγωγή των δομημένων διαδικασιών του σχεδιασμού. Όπως προσπαθήσαμε να αναδείξουμε περιγραφικά και μέσω επεισοδίων από την παρέμβαση (§ 5.1.4), στο πλαίσιο της Δ2 η Ομάδα Γ άρχισε να διαφοροποιείται: Κάποια παιδιά δίσταζαν να πάρουν την πρωτοβουλία να ξεκινήσουν την επίλυση ενός προβλήματος, ή δεν μπορούσαν να ξεκινήσουν ή/και να ολοκληρώσουν μια διαδικασία, χωρίς την υποστήριξη των πιο προχωρημένων παιδιών ή της ερευνήτριας. Στην πορεία, κάποια παιδιά δεν μπορούσαν ούτε να ακολουθήσουν τις λεκτικές οδηγίες των πιο προχωρημένων παιδιών. Αυτό δεν σημαίνει ότι δεν υπήρχαν περιστάσεις στις οποίες κάποιο παιδί της Ομάδας Γ να δίνει ενδείξεις κατανόησης για την κατάσταση προβλήματος που αντιμετώπιζε, ορισμένες φορές πολύ καθαρές (όπως η Καίτη που βλέπει «τέσσερις δυάδες» στις οχτώ καραμέλες» · §5.1.4). Αντίστοιχα, και τα παιδιά της ομάδας Α και, ιδιαίτερα, της Β έκαναν λάθη και αντιμετώπισαν δυσκολίες (όπως ο Άλεξ που δήλωσε ότι «δεν μπορεί να φτιάξει τριάδες» · §5.2.6).

Όλα τα παιδιά συμμετείχαν στον προέλεγχο, όπου η συνολική επίδοση ήταν σχεδόν μηδενική. Τρία νήπια (Άγης, Άρια, Δέσποινα) και ένα προνήπιο (Γιάννης) είχαν προβάδισμα σε σχέση με τα υπόλοιπα παιδιά. Τα παιδιά αυτά έλυσαν από ένα ή δύο προβλήματα «δίκαιης μοιρασιάς στα δύο», είτε με ένα-προς-ένα αντιστοίχιση, είτε με αντιληπτική εκτίμηση του «μισού» (Fitzpatrick & Hallet, 2019). Ένα παιδί (Άγης) αναγνώρισε στον προέλεγχο τον όρο «διπλάσιο», τον ερμήνευσε ως «διπλό» και τον υπολόγισε σε μία περίπτωση ως «δύο και άλλα δύο». Γνωρίζουμε ότι τα παιδιά αυτά δεν είχαν σχετικές εμπειρίες στο σχολικό τους περιβάλλον πριν την παρέμβαση. Επομένως, το εύρημα είναι συμβατό με έρευνες που δείχνουν ότι υπάρχουν διαφορές μεταξύ των παιδιών σε ικανότητες που σχετίζονται με την πολλαπλασιαστική σκέψη, συμπεριλαμβανομένου του λεξιλογίου, πριν εκτεθούν σε σχετική διδασκαλία (Vanluydt et al., 2021).

5.5.1 Επιδόσεις

Στον μεταέλεγχο, συμμετείχαν οι ομάδες Α και Β. Η συνολική μέση επίδοση ήταν εξαιρετικά υψηλή (0,89) και όλα τα παιδιά τεκμηρίωσαν επαρκώς, σε πολύ μεγάλο βαθμό, τις απαντήσεις τους. Η ομάδα Α απάντησε σωστά σε όλα τα προβλήματα, με την εξαίρεση τριών παιδιών που δεν έλυσαν από ένα πρόβλημα διαίρεσης μέτρησης. Για την ομάδα Α, επομένως, δεν είχε διαφορά η διάκριση μεταξύ διακριτών και συνεχών ποσοτήτων, η τιμή του ν (2, 3, 4) , ή ο τύπος του προβλημάτων που εξετάστηκαν στον μεταέλεγχο.

Το είδος της ποσότητας (διακριτή ή συνεχής) δεν φάνηκε να παίζει ρόλο ούτε για την ομάδα Β. Ωστόσο, η ομάδα αυτή είχε καλύτερη επίδοση στα προβλήματα με ζητούμενο το πολλαπλάσιο, παρά το υποπολλαπλάσιο και έδωσε πιο πολλές σωστές απαντήσεις για ν=2, παρά για ν=3, 4. Επιπλέον, γι’ αυτήν την ομάδα, είχε σημασία και ο τύπος του προβλήματος. Το μη οικείο πρόβλημα της διαίρεσης μέτρησης επέσυρε πολλές λανθασμένες απαντήσεις. Ωστόσο, το πιο ενδιαφέρον σχετικό εύρημα είναι ότι από την ομάδα Β συνολικά δεν λύθηκε κανένα αναλογικό πρόβλημα, ενώ τα αναλογικά προβλήματα ήταν ίδια με αυτά της παρέμβασης. Αντίθετα, λύθηκαν προβλήματα ισοπληθών ομάδων και ίσων μέτρων, που δεν είχαν επιλυθεί στο πλαίσιο της παρέμβασης.

Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι, μετά την παρέμβαση, τα παιδιά τόσο της ομάδας Α, όσο και της ομάδας Β, ήταν σε θέση να επιλύσουν περισσότερα πολλαπλασιαστικά προβλήματα, για διακριτές και συνεχείς ποσότητες και για όλες τις τιμές του ν. Για την ομάδα Α, αυτό ισχύει τόσο για τα ίδιους, όσο και τους διαφορετικούς τύπος προβλήματος σε σχέση

με αυτούς της παρέμβασης, για όλες τις τιμές του ν και ανεξάρτητα από το ζητούμενο. Αντίθετα, για την ομάδα Β, υπάρχουν περιορισμοί, με βάση όλες τις προηγούμενες παραμέτρους.

Το εύρημα που μας απασχολεί για τον επανασχεδιασμό του προγράμματος, είναι η δυσκολία που παρουσίασαν τα αναλογικά προβλήματα για τα παιδιά της Ομάδας Β. Το εύρημα αυτό υποδηλώνει ότι η πολλαπλασιαστική κατάσταση της δεύτερης δραστηριότητας (Δ2) ήταν απαιτητική γι' αυτά τα παιδιά.

5.5.2 Τρόποι επίλυσης και λεκτικές περιγραφές ενεργειών

Ενώ το πλαίσιο των διακριτών σε σχέση με αυτό των συνεχών ποσοτήτων δεν φάνηκε να επηρεάζει το αν τα παιδιά θα επιλύσουν ή όχι ένα πρόβλημα, έπαιξε σημαντικό ρόλο στον τρόπο επίλυσης, στην περίπτωση των υποπολλαπλασίων. Συγκεκριμένα, στον μεταέλεγχο οι ομάδες Α και Β πραγματοποίησαν κατά κύριο λόγο (αλλά όχι αποκλειστικά) ανάλυση των αρχικών ποσοτήτων, ενώ εφάρμοσαν κατά κύριο λόγο (αλλά όχι αποκλειστικά) διαδικασίες *Έμμεσης Ανάλυσης* στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων.

Όπως αναμέναμε (Τ.Υ.1*), η διαδικασία της επαναλαμβανόμενης ένα-προς-ένα αντιστοίχισης εισήχθη στην παρέμβαση από τα παιδιά και λειτούργησε ως έναυσμα ώστε να αναλύουν τις διακριτές ποσότητες. Παρουσιάσαμε επεισόδια (§5.2.5) με στιγμιότυπα που αναδεικνύουν αυτό που παρατηρήθηκε κατά τη διάρκεια της παρέμβασης: Εμφανίστηκαν «συντομεύσεις» της ένα-προς-ένα αντιστοίχισης, τυπικά αντιστοίχιση δύο-προς-ένα με πιθανή διόρθωση. Εμφανίστηκαν, επίσης, απόπειρες των παιδιών «να δουν ομάδες» στην αρχική ποσότητα, όπως είδαμε να εκφράζουν ρητά ο Διαμαντής και ο Δήμος, που στο συγκεκριμένο επεισόδιο επέλεξαν να γυρίσουν σε μια πιο ασφαλή διαδικασία δύο-προς-ένα αντιστοίχισης, γιατί τόσο ο διαιρετέος (αρχική ποσότητα), όσο και ο διαιρέτης (ν) ήταν «πολλές βιταμίνες». Πολλά παιδιά άρχισαν να δοκιμάζουν να χωρίσουν σε «ομάδες» απευθείας την αρχική ποσότητα. Στην πορεία εμφανίστηκε και η εξαρχής διάκριση ομάδων στην αρχική ποσότητα, όπως είδαμε να κάνουν η Άρια, ο Άγης και ο Διαμαντής. Στον μεταέλεγχο, εμφανίστηκαν όλα τα παραπάνω στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων και συνυπήρξαν με εμφανώς λιγότερες εφαρμογές *Έμμεσης Ανάλυσης* για τον υπολογισμό του υποπολλαπλασίου, ενώ οι νοερές στρατηγικές βασίστηκαν στην αναγνώριση εκ των προτέρων «ομάδων» και στην έκφρασή τους είτε ως «ν-άδες» είτε αριθμητικά.

Ανάλυση, ή μάλλον, «προσομοίωση» ανάλυσης, πραγματοποιήθηκε σε κάποιες περιπτώσεις και στις συνεχείς ποσότητες, κυρίως για ν=2, όπου τα παιδιά εκτίμησαν το μέσο της λωρίδας, περνώντας από πάνω και τοποθετώντας το χέρι τους. Σε κάποιες άλλες περιπτώσεις επέλεξαν απευθείας «το κομμάτι», εξηγώντας λεκτικά ποια συνθήκη πρέπει ικανοποιεί. Με *Έμμεση Ανάλυση* επιλύθηκε η πλειοψηφία των προβλημάτων. Όπως φάνηκε στα λόγια των παιδιών, η *Έμμεση Ανάλυση* απεικονίστηκε λεκτικά κατά κύριο λόγο ως ανάλυση, παρά το γεγονός ότι περιλαμβάνει την αντίστροφη ενέργεια. Αυτό υποδηλώνει ότι τα παιδιά αντιλήφθηκαν τη δομημένη διαδικασία της παρέμβασης ως διαδικασία που υλοποιεί την ενέργεια της ανάλυσης.

Όσον αφορά τα πολλαπλάσια, τα παιδιά πραγματοποίησαν, αναμενόμενα, σύνθεση και περιέγραψαν λεκτικά σύνθεση, κάποιες φορές και με επανάληψη («φορές»).

Τόσο στην περίπτωση των υποπολλαπλασίων, όσο και των πολλαπλασίων, στον μεταέλεγχο πραγματοποιήθηκε από σχεδόν όλα τα παιδιά της Ομάδας Α μέτρηση με επανάληψης της μονάδας, μια προηγμένη μορφή μέτρησης που δεν είχε υποστηριχθεί στην παρέμβαση. Και σε αυτές τις περιπτώσεις, τα παιδιά περιέγραψαν λεκτικά ενέργειες ανάλυσης ή σύνθεσης. Γενικότερα, η ενέργεια της μέτρησης δεν απεικονίστηκε λεκτικά συχνά από τα παιδιά. Με μία μόνο εξαίρεση (Κώστας), η μέτρηση περιγράφτηκε μόνο στο πλαίσιο των προβλημάτων διαίρεσης μέτρησης. Τα ευρήματα αυτά μας απασχολούν για τον επανασχεδιασμό του προγράμματος και θα συζητηθούν στη συνέχεια.

Τόσο στην περίπτωση των υποπολλαπλασίων, όσο και των πολλαπλασίων, στον μεταέλεγχο η εφαρμογή των δομημένων διαδικασιών της παρέμβασης έγινε, στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, χωρίς το ενδιάμεσο υποστηρικτικό βήμα (*ΕΒ*) με την χρήση οποιασδήποτε αναπαράστασης για το ν. Ειδικότερα, το εργαλείο του λόγου ζητήθηκε από την πλειοψηφία των παιδιών, αλλά όχι συχνά, στις περιπτώσεις που αξιολόγησαν το πρόβλημα ως δύσκολο. Επιπλέον, φάνηκε ότι για μεγαλύτερες τιμές του ν, αυξήθηκαν και οι πιο «ασφαλείς» τρόποι επίλυσης.

Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι τα παιδιά οικειοποιήθηκαν, σε μεγάλο βαθμό, τις δομημένες διαδικασίες του σχεδιασμού μας, καθώς τις εφάρμοσαν είτε αυτούσιες είτε, πιο συχνά, παραλλαγμένες, Ταυτόχρονα, η παρέμβαση δεν εμπόδισε την ανάδυση της κύριας στρατηγικής που είναι αναμενόμενη σε αυτές τις ηλικίες στο πλαίσιο των διακριτών

ποσοτήτων, δηλαδή, της επαναλαμβανόμενης ένα-προς-ένα αντιστοίχισης. Αντίθετα, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι υποστήριξε τα παιδιά να την εξελίξουν και να την υπερβούν, μέσω της υποστήριξης για τον χειρισμό σύνθετων μονάδων. Επιπλέον, επινοήθηκαν νέες στρατηγικές, ακόμα και στο πλαίσιο του μεταελέγχου (π.χ. μέτρηση με επανάληψη της μονάδας, στις διακριτές ποσότητες, με τη συνθήκη της ύπαρξης επιλογών για το Α).

Διαφοροποιήσεις με βάση τους τρόπους επίλυσης των προβλημάτων υπάρχουν τόσο μεταξύ της ομάδας Α και της ομάδας Β, όσο και εντός της ομάδας Α. Συγκεκριμένα, η ομάδα Β εμφάνισε λιγότερο ή καθόλου τους πιο εξελιγμένους τρόπους επίλυσης (π.χ. άμεση ανάλυση μιας διακριτής ποσότητας, μέτρηση με επανάληψη της μονάδας, νοερές στρατηγικές), ενώ όταν τα παιδιά δεν χρησιμοποίησαν την εμπράγματη αναπαράσταση του ν, κάποιες φορές οδηγήθηκαν σε λάθη.

Στην ομάδα Α, τα παιδιά χρησιμοποίησαν ένα μείγμα τρόπων επίλυσης, αλλά διαφοροποιήθηκαν ως προς το πόσο συχνά επέστρεψαν σε πιο στοιχειώδεις διαδικασίες, όπως η επαναλαμβανόμενη ένα-προς-ένα αντιστοίχιση, ή πιο «ασφαλείς» τρόπους επίλυσης με χρήση αναπαραστάσεων, καθώς και ως προς τη συχνότητα με την οποία επέλυσαν νοερά τα προβλήματα. Διαφοροποιήθηκαν, επίσης, ως προς το αν περιέγραψαν λεκτικά την ενέργεια της μέτρησης.

Μια σημαντική διαφοροποίηση εντός της ομάδας Α ήταν η λεκτική περιγραφή αντίστροφων ενεργειών στο πλαίσιο του ίδιου προβλήματος, που έδωσαν επτά από τα έντεκα παιδιά, με ένα παιδί (Άρια) πολύ πιο συστηματικά από τα υπόλοιπα. Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι αυτές οι λεκτικές περιγραφές έγιναν αυθόρμητα, καθώς δεν είχαμε προβλέψει να εξετάσουμε το στοιχείο αυτό.

5.5.3 Λεκτικές περιγραφές σχέσεων και χρήση όρων

Όπως αναμέναμε (Τ.Υ.2*), η κανονικότητα στην παραγωγή των όρων για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια αναγνωρίστηκε από τα παιδιά στη διάρκεια της παρέμβασης και οδήγησε στην κατασκευή όρων, εν γένει πιο γρήγορα για τα πολλαπλάσια. Στην περίπτωση των υποπολλαπλασίων, η κανονικότητα αξιοποιήθηκε αρχικά και με εναλλακτικούς τρόπους (π.χ. «ένα εφτά», αντί για «ένα έβδομο»). Στα επεισόδια από την παρέμβαση που παρουσιάσαμε, φαίνεται ότι κάποια παιδιά αναγνώρισαν, αλλά και εξέφρασαν πολύ

γρήγορα και συστηματικά τους κανόνες παραγωγής των όρων, όπως η Μαρία που ονόμασε σωστά το ένα έβδομο εξηγώντας ότι «μπαίνει στη σειρά—ο δεύτερος, ο τρίτος , ο τέταρτος, ο έβδομος» (§5.4.4). Στο απόλυτο αριθμητικό και τη σύνδεση με συγκεκριμένες εκφράσεις βασίστηκε ένα προνήπιο της ομάδας Α, η Καίτη, που ονόμασε το ένα δεύτερο και το διπλάσιο εξηγώντας «είπες ένα από τα δύο» και «είπες δυο φορές» (§ 5.1.4).

Στον μεταέλεγχο, οι όροι για τα πολλαπλάσια χρησιμοποιήθηκαν περίπου στις μισές σωστές απαντήσεις των παιδιών, με μεγαλύτερη σχετική συχνότητα για το διπλάσιο και μικρότερη για το τετραπλάσιο. Όσον αφορά τα υποπολλαπλάσια, αξίζει να σημειωθεί ότι τα παιδιά χρησιμοποίησαν τον όρο «ένα δεύτερο» και όχι «μισό». Τον όρο αυτό χρησιμοποίησαν πιο συχνά από τους υπόλοιπους, ενώ ο όρος «ένα τρίτο» ήταν ο πιο σπάνιος. Συνολικά, οι όροι για τα υποπολλαπλάσια χρησιμοποιήθηκαν λιγότερο συχνά από τους αντίστοιχους για τα πολλαπλάσια.

Όσον αφορά την λεκτική περιγραφή σχέσεων, πέρα από τη χρήση των όρων, για τα πολλαπλάσια παρατηρήθηκε μεγαλύτερη ποικιλία, σε σχέση με τα υποπολλαπλάσια. Παρατηρήθηκαν επίσης ορισμένες διαφορές μεταξύ των διακριτών και των συνεχών ποσοτήτων.

Για τα πολλαπλάσια, στις διακριτές ποσότητες, συνολικά, η πολλαπλασιαστική («φορές») και η προσθετική έκφραση σχέσης εμφανίζονται περίπου το ίδιο συχνά και πιο συχνά από την έκφραση της τελικής ποσότητας ως «ν β-άδες». Οι προσθετικές περιγραφές στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων δεν μας εξέπληξαν, καθώς είναι το πλαίσιο στο οποίο τα παιδιά μπορούν να εκφράσουν αριθμητικά τις ποσότητες. Ωστόσο, στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων, η προσθετική έκφραση της σχέσης μειώθηκε κατά πολύ μεν, αλλά αυξήθηκε κατά πολύ η έκφραση της αρχικής ποσότητας ως «ν κομμάτια» και όχι η αντίστοιχη πολλαπλασιαστική έκφραση «ν φορές το κομμάτι». ΄Το εύρημα αυτό μας απασχολεί για τον επανασχεδιασμό του προγράμματος, όπως θα συζητήσουμε στη συνέχεια.

Από την άλλη μεριά, η ποσότητα που αντιστοιχεί σε υποπολλαπλάσιο εκφράστηκε σχεδόν αποκλειστικά ως «ένα από ν μέρη (του Α)», πιο συχνά με ποσότητα αναφοράς το σύνολο των μερών. Στις συνεχείς ποσότητες, η σύνδεση με την αρχική ποσότητα Α ήταν πολύ πιο συχνή. Πέρα από τις διαφοροποιήσεις ως προς την ποσότητα αναφοράς, το πιο σημαντικό εύρημα είναι η ομοιομορφία στην ερμηνεία της σχέσης. Όπως είναι προφανές, στην παρέμβασή μας

προωθήθηκε σχεδόν αποκλειστικά αυτή η συγκεκριμένη ερμηνεία. Με τα επεισόδια που παρουσιάσαμε στην §5.4.4 και τη σχετική συζήτηση προσπαθήσαμε να αναδείξουμε αυτό που εκ των υστέρων διαπιστώσαμε σε σχέση με την παρέμβαση: Η ερευνήτρια ευνόησε την ερμηνεία αυτή, αλλά και τα ίδια τα παιδιά την υιοθέτησαν πιο άμεσα από εναλλακτικές ερμηνείες (π.χ. «χωράει ν φορές στο Α») και την προώθησαν στη διάρκεια της παρέμβασης.

Οι ομάδες Α και Β διαφοροποιούνται πολύ καθαρά σε σχέση με τρόπο που περιέγραψαν σχέσεις στην περίπτωση των πολλαπλασίων. Στην ομάδα Β οι σχέσεις περιγράφτηκαν σχεδόν αποκλειστικά με προσθετικό τρόπο τόσο στις διακριτές όσο και στις συνεχείς ποσότητες. Γενικότερα, στην ομάδα Β περιγράφτηκαν σχέσεις λιγότερο συχνά, ανάλογα με τις σωστές τους απαντήσεις και οι όροι χρησιμοποιήθηκαν σπάνια ή καθόλου. Παρατηρήθηκε επίσης ότι η τελική ποσότητα σπάνια εκφράζεται ως «ν ομάδες».

Από την άλλη μεριά, τα παιδιά της ομάδας Α διαφοροποιούνται με βάση τη συστηματικότητα με την οποία εξέφρασαν τη σχέση πολλαπλασιαστικά και, κυρίως, στο πλαίσιο των συνεχών ποσοτήτων («ν κομμάτια» ή «ν φορές το κομμάτι»). Διαφοροποιούνται επίσης ως προς τη συχνότητα με την οποία χρησιμοποιούν τους όρους. Μια ακόμα διαφοροποίηση διαπιστώθηκε στα δεδομένα: Ορισμένα παιδιά της Ομάδας Α, στα αναλογικά προβλήματα, περιέγραψαν αυθόρμητα αναλογική σχέση μεταξύ των ομοειδών ποσοτήτων.

Τα προνήπια που δεν συμμετείχαν ή εγκατέλειψαν τον μεταέλεγχο, δεν είχαν αρνηθεί ποτέ να συμμετάσχουν στις ομαδικές δραστηριότητες της παρέμβασης. Από την εμπειρία της παρέμβασης και όπως αναδείξαμε με σχετικά επεισόδια, τα προνήπια αυτά εν γένει συμμετείχαν πιο ενεργά και επέλυσαν αυτόνομα προβλήματα στην πρώτη δραστηριότητα (Δ1). Από τη δεύτερη δραστηριότητα (Δ2-αναλογικά προβλήματα) και μετά, κάποια δεν προσφέρονταν να ξεκινήσουν τα ίδια την επίλυση προβλήματος, ενώ εν γένει δεν ολοκλήρωναν τις δομημένες διαδικασίες χωρίς υποστήριξη από τα πιο προχωρημένα παιδιά. Στη Δ3 («κλασματομηχανή»), κάποια από τα προνήπια της ομάδας αυτής δεν μπορούσαν να ακολουθήσουν ούτε τις λεκτικές οδηγίες των πιο προχωρημένων παιδιών.

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι τα αναλογικά προβλήματα αποδείχθηκαν δύσκολα και για τα παιδιά της μεσαίας ομάδας, τα οποία απέτυχαν σε όλα τα σχετικά προβλήματα του μεταελέγχου, ενώ έλυσαν προβλήματα τα οποία δεν είχαν επεξεργαστεί στην παρέμβαση. Λαμβάνοντας υπόψη αυτό το εύρημα, φαίνεται εύλογο να υποθέσουμε ότι τα προνήπια της

τρίτης ομάδας άρχισαν να δυσκολεύονται σημαντικά ήδη στη δεύτερη δραστηριότητα και δεν επιθυμούσαν να επιλύσουν παρόμοια προβλήματα και, μάλιστα, στη συνθήκη της ατομικής εξέτασης. Φαίνεται, λοιπόν, ότι ο σχεδιασμός μας δεν ήταν στο πλαίσιο των δυνατοτήτων αυτής της ομάδας των προνηπίων (Ε.Ε.1*). Επιπλέον, προκύπτει ότι η επιλογή των αναλογικών προβλημάτων ως πλαίσιο της δεύτερης δραστηριότητας πρέπει να επανεξεταστεί, καθώς αποδείχθηκε απαιτητική τόσο για προνήπια της τρίτης ομάδας, όσο και στα τέσσερα παιδιά της μεσαίας ομάδας, τρία εκ των οποίων ήταν νήπια.

5.5.4. Τοπικές υποθέσεις, ερευνητικά ερωτήματα και περιορισμοί της έρευνας

Από τη συζήτηση που προηγήθηκε, οι τοπικές υποθέσεις 1* και 2* φαίνεται ότι είχαν προβλεπτική ισχύ κατά την υλοποίηση του σχεδιασμού: Στο πλαίσιο της παρέμβασης, αξιοποιήθηκε πράγματι από τα παιδιά η κανονικότητα της παραγωγής όρων για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια προκειμένου να κατασκευάσουν τους όρους αυτούς (Τ.Υ.1*). Η εισαγωγή των όρων για τα υποπολλαπλάσια από την αρχή με τον όρο «ένα δεύτερο», αντί της λέξης «μισό», φάνηκε να διευκολύνει τη παραγωγή των όρων. Επιπλέον, η επαναλαμβανόμενη 1-1 αντιστοίχιση πράγματι εισήχθη στη διάρκεια της παρέμβασης από τα ίδια τα παιδιά (Τ.Υ.2*) και ήταν διαθέσιμη σε περιορισμένα πλαίσια για κάποια από αυτά πριν την παρέμβαση.

Ο σχεδιασμός δεν ήταν συνολικά στο πλαίσιο των δυνατοτήτων των παιδιών της μικτής τάξης (νήπια και προνήπια) που συμμετείχαν στην παρέμβαση (ΕΕ1). Πιο συγκεκριμένα, μόνο η εισαγωγική δραστηριότητα (Δ1) στο πλαίσιο της πολλαπλασιαστικής σύγκρισης με μέτρηση φάνηκε να είναι προσβάσιμη στο σύνολο των παιδιών.

Η δεύτερη δραστηριότητα (Δ2, αναλογικά προβλήματα), στην οποία έγινε η εισαγωγή των δομημένων διαδικασιών του σχεδιασμού, ήταν απαιτητική για όλα τα παιδιά, αλλά όχι στον ίδιο βαθμό. Από τα αποτελέσματα του μεταελέγχου γνωρίζουμε ότι για την ομάδα Β (τρία νήπια, ένα προνήπιο), αυτός ο τύπος της πολλαπλασιαστικής κατάστασης προκάλεσε καθολική αποτυχία, ενώ τα παιδιά αυτά έλυσαν προβλήματα διαφορετικού τύπου από αυτούς της παρέμβασης, εφαρμόζοντας και δομημένες διαδικασίες. Αντίθετα, η ομάδα Α (δέκα νήπια και ένα προνήπιο) επέλυσε όλα τα αναλογικά προβλήματα, ενώ κάποια παιδιά περιέγραψαν λεκτικά και αναλογικές σχέσεις.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι πράγματι υπάρχουν διατομικές διαφορές στην ικανότητα των μικρών παιδιών να διαχειριστούν αναλογικές σχέσεις (Vanluydt et al., 2020) και υποδεικνύει ότι η διαδοχή των δραστηριοτήτων στον σχεδιασμό μας πρέπει να αναθεωρηθεί.

Πράγματι, τα αναλογικά προβλήματα, ακόμα και στην πιο απλή μορφή στην οποία τα παρουσιάσαμε στο πλαίσιο της Δ2—με τον έναν όρο να αντιστοιχεί στη μονάδα—συνιστούν μια απαιτητική πολλαπλασιαστική κατάσταση, καθώς πρέπει να ληφθούν υπόψη και να συσχετιστούν δύο απλές πολλαπλασιαστικές σχέσεις, που ήταν και η βασική επισήμανση του Piaget (Inhelder & Piaget, 1958, όπως αναφέρεται στο He et al., 2018). Θεωρήσαμε ότι η δραστηριότητα Δ1 έθετε ένα επαρκές πλαίσιο για την πραγμάτευση των αναλογικών προβλημάτων στη συνέχεια, ωστόσο αυτό δεν φάνηκε, εκ του αποτελέσματος, να ισχύει.

Εικάζουμε ότι για τα παιδιά της ομάδας Γ (επτά προνήπια), η δυσκολία των αναλογικών προβλημάτων, σε συνδυασμό με την εισαγωγή των δομημένων διαδικασιών, δημιούργησε μια υπερβολικά απαιτητική γι’ αυτά συνθήκη που δεν ευνόησε την παραγωγική συμμετοχή τους στο υπόλοιπο της παρέμβασης. Ενδεχομένως, η απροθυμία τους να συμμετάσχουν ή να ολοκληρώσουν τη διαδικασία του μεταελέγχου μπορεί να εξηγηθεί ως αποφυγή μιας κατάστασης την οποία εξέλαβαν και τα ίδια ως δύσκολη και εκτός των δυνατοτήτων τους (Wang & Bonawitz, 2023).

Για τα παιδιά της ομάδας Γ, δεν μπορούμε να απαντήσουμε τα ερευνητικά ερωτήματα Ε.Ε.2-Ε.Ε.5. Ενδεχομένως μια λεπτομερής ανάλυση της ανταπόκρισης του κάθε παιδιού στη διάρκεια της παρέμβασης να αποτύπωνε αν και ποια οφέλη είχαν τα παιδιά αυτά στη διάρκεια της παρέμβασης. Ωστόσο, δεν πραγματοποιήθηκε τέτοια ανάλυση στο πλαίσιο της παρούσας διατριβής.

Για τα υπόλοιπα παιδιά, από τον μεταέλεγχο φάνηκε ότι όλα έλυσαν πολύ περισσότερα προβλήματα διαφορετικού τύπου από αυτά της παρέμβασης, σε σχέση με αυτά που είχαν λύσει στον προέλεγχο, και επιπλέον, έλυσαν και προβλήματα ίδια με αυτά της παρέμβασης, στη συνθήκη της ατομικής εξέτασης (Ε.Ε.2). Η επίδοση είναι πολύ παρόμοια, για τα δύο είδη ποσότητας (Ε.Ε.5i.β), συνολικά και ανά ζητούμενο. Το εύρημα αυτό είναι συμβατό με το συμπέρασμα των Kornillaki και Nunes (2005), ότι οι διαφορές που παρατηρούνται στην επίλυση προβλημάτων (στην περίπτωσή τους, προβλήματα διαίρεσης μερισμού και μέτρησης), υπέρ των διακριτών ποσοτήτων, είναι μάλλον πρόβλημα «διαδικαστικού» παρά

«εννοιολογικού» χαρακτήρα. Στη δική μας περίπτωση, με τις διαθέσιμες διαδικασίες που μπορούν να εφαρμοστούν και στα δύο είδη ποσοτήτων, φαίνεται ότι το είδος της ποσότητας δεν καθόρισε πότε ένα πρόβλημα, είτε πολλαπλασίου, είτε υποπολλαπλασίου, θα λυθεί, ή όχι.

Όσον αφορά τους τρόπους επίλυσης (Ε.Ε.2), οι δομημένες διαδικασίες της παρέμβασης εφαρμόστηκαν πιο συχνά παραλλαγμένες, παρά αυτούσιες. Ένα κεντρικό εύρημα είναι ότι, στην περίπτωση του υποπολλαπλασίου, οι τρόποι επίλυσης διαφέρουν ανάλογα με το είδος της ποσότητας (Ε.Ε.5.iβ): Στις διακριτές ποσότητες πραγματοποιήθηκε κατά κύριο (αλλά όχι αποκλειστικά) ανάλυση, ενώ στις συνεχείς πραγματοποιήθηκε κατά κύριο λόγο (αλλά όχι αποκλειστικά) η δομημένη διαδικασία της εκτίμησης-σύνθεσης-σύγκρισης που ονομάσαμε *έμμεση σύνθεση*, συχνότερα χωρίς το υποστηρικτικό ενδιάμεσο βήμα (*ΕΒ*) και, συνήθως, χωρίς το «εργαλείο του λόγου». Εμφανίστηκε μια ποικιλία τρόπων επίλυσης των προβλημάτων, με κάποιους να είναι ιδιαίτερα προηγμένοι και έναν να επινοείται στο πλαίσιο του μεταελέγχου. Η ποικιλία που παρουσιάστηκε υποδηλώνει ότι τα παιδιά δεν αποστήθισαν απλώς τις δομημένες διαδικασίες της παρέμβασης. Στην περίπτωση των υποπολλαπλασίων, επιπλέον, δεν εμποδίστηκαν από την παρέμβαση οι συνήθεις στρατηγικές των παιδιών (Firzpatrick & Hallet, 2019). Οι μεταβολές στην τιμή του ν φάνηκαν να συνδέονται με επιλογές διαφορετικών τρόπων επίλυσης, καθώς διαφαίνεται η τάση επιστροφής σε πιο «ασφαλείς» τρόπους επίλυσης για μεγαλύτερες τιμές (Siegler, 2007). Ενδιαφέρον εύρημα είναι ότι η δομημένη διαδικασία έμμεσης ανάλυσης περιγράφτηκε κατά κύριο λόγο από τα παιδιά ως ανάλυση που υποδεικνύει ότι έγινε αντιληπτή ως διαδικασία που υλοποιεί την ενέργεια της ανάλυσης (Καλδρυμίδου, 1999)

Διατομικές διαφορές (Ε.Ε.5i) εμφανίστηκαν καταρχάς μεταξύ των ομάδων Α και Β με κεντρικές αυτές ως προς την επίδοση, ως προς τους τρόπους επίλυσης και ως προς την λεκτική περιγραφή των σχέσεων, με και χωρίς όρους, με τα χαρακτηριστικά που συνοψίστηκαν στις §5.5.1-5.5.3. Τα παιδιά της ομάδας Α είχαν άριστη ή σχεδόν άριστη επίδοση (το πολύ μια λανθασμένη απάντηση από τρία παιδιά). Και εμφάνισαν μια ποικιλία τρόπων επίλυσης, κάποιους ιδιαίτερα προηγμένους,. Διαφορές μεταξύ των παιδιών της ομάδας Α υπάρχουν όσον αφορά τη συστηματικότητα με την οποία εφαρμόζουν προηγμένους τρόπους επίλυσης, περιγράφουν σχέσεις πολλαπλασιαστικά και

χρησιμοποιούν όρους. Οι διαφορές δεν εξαντλούνται σε αυτές και θα επανέλθουμε στη συνέχεια στο ζήτημα αυτό.

Τα παιδιά της ομάδας Β εμφάνισαν αισθητά χαμηλότερη επίδοση—αντιμετωπίζοντας, ωστόσο, με επιτυχία τουλάχιστον τα μισά προβλήματα του μεταελέγχου—πιο στοιχειώδεις τρόπους επίλυσης και καθόλου κάποιους από τους πιο προηγμένους που εμφάνισε η ομάδα Α, όπως οι νοεροί. Επιπλέον, τα παιδιά της ομάδας Β περιέγραψαν σχέσεις σχεδόν αποκλειστικά με προσθετικό τρόπο, ακόμα και στο πλαίσιο των συνεχών ποσοτήτων, και αναφέρθηκαν πολύ περιορισμένα σε σύνθετες μονάδες για να εκφράσουν ποσότητες, αλλά και σε όρους για τα πολλαπλάσια και για τα υποπολλαπλάσια.

Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ευρείες διατομικές διαφορές μεταξύ των παιδιών της ομάδας Α και της ομάδας Β που, μάλιστα, δεν εξαρτώνται αποκλειστικά από την ηλικία (Clements & Sarama, 2021). Πράγματι, στην ομάδα Α, βρέθηκε ένα προνήπιο (Γιάννης), ενώ στην ομάδα Β βρέθηκαν τρία νήπια και ένα προνήπιο (Ευτύχης). Ειδικότερα, τα προνήπια αυτά διαφοροποιούνται μεταξύ τους, αλλά και από τα προνήπια της ομάδας Γ. Γνωρίζουμε ότι ο Γιάννης ήταν ανάμεσα στα παιδιά που είχαν προβάδισμα πριν την παρέμβαση και μπορούμε να εικάσουμε ότι είχε σχετικές εμπειρίες εκτός σχολικού περιβάλλοντος (Clements & Sarama, 2021; Hunting & Davis, 1991). Ωστόσο, δεν μπορούμε να εξηγήσουμε γενικότερα πού οφείλονται οι διατομικές διαφορές που παρατηρήθηκαν τόσο στον μεταέλεγχο, όσο και στη διάρκεια της παρέμβασης, καθώς δεν εξετάσαμε παραμέτρους που ενδεχομένως σχετίζονται με αυτές τις διαφορές, όπως η γλωσσική ικανότητα, ή η γενικότερη ικανότητα επίλυσης προβλήματος. Αυτό αποτελεί και έναν περιορισμό της έρευνας.

Εστιάζοντας στα παιδιά της ομάδας Α, στον μεταέλεγχο διαπιστώθηκαν διαφορές μεταξύ των παιδιών, τις οποίες δεν είχαμε προβλέψει να εξετάσουμε συστηματικά, γεγονός που συνιστά ακόμα έναν περιορισμό της έρευνας. Πιο συγκεκριμένα, επτά από τα έντεκα παιδιά της ομάδας αυτής αναφέρθηκαν αυθόρμητα σε αντίστροφες ενέργειες (ανάλυση/ σύνθεση) στο πλαίσιο του ίδιου προβλήματος, λιγότερο ή περισσότερο συστηματικά, με ένα (Άρια) να το κάνει πιο συστηματικά από όλα τα παιδιά. Αν είχαμε προβλέψει να συμπεριλάβουμε στο ερευνητικό μας εργαλείο έργα που να εξετάζουν στοχευμένα την αντιστρεψιμότητα των ενεργειών αυτών στο πλαίσιο των πολλαπλασιαστικών προβλημάτων, θα είχαμε καλύτερη εικόνα για όλα τα παιδιά και, ενδεχομένως, πιο συστηματικές αναφορές στην

αντιστρεψιμότητα. Αυθόρμητα και πολύ αναλυτικά περιγράφτηκε από τέσσερα παιδιά η αναλογική σχέση στο πλαίσιο των αναλογικών προβλημάτων.

Τέλος, θα πρέπει ακόμα να επισημανθεί ότι, στο πρωτόκολλο χορήγησης του εργαλείου, ρωτήθηκε μόνο η σχέση της ζητούμενης με τη δεδομένη ποσότητα και όχι και η αντίστροφη. Με δεδομένο και αυτόν τον περιορισμό, είναι φανερό ότι το ερευνητικό μας εργαλείο πρέπει να βελτιωθεί, καθώς είναι πολύ πιθανόν να υποεκτιμά την κατανόηση των παιδιών για τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, ενέργειες και σχέσεις που αντιμετώπισαν.

Ακόμα και με αυτούς τους περιορισμούς, τα αποτελέσματα από τον μεταέλεγχο, ποσοτικά και ποιοτικά, δείχνουν ότι τα παιδιά της ομάδας Α επέδειξαν μια αξιοσημείωτη σταθερότητα όσον αφορά την επίλυση των προβλημάτων του μεταελέγχου, τόσο με ζητούμενο το πολλαπλάσιο, όσο και το υποπολλαπλάσιο, για τα δύο είδη ποσοτήτων και για όλες τις τιμές του ν (2,3,4). Αυτό υποδηλώνει ότι μετέφεραν ό,τι αποκόμισαν από την παρέμβαση, από τη συνθήκης της συλλογικής επίλυσης, στην συνθήκη της ατομικής εξέτασης χωρίς υποστήριξη, καθώς και σε άλλους τύπους προβλημάτων, συμπεριλαμβανομένων των προβλημάτων διαίρεσης μέτρησης. Επιπλέον, οικειοποιήθηκαν τις δομημένες διαδικασίες της παρέμβασης και ανέπτυξαν διαφορετικούς τρόπους επίλυσης, που δεν είχαν υποστηριχθεί στην παρέμβαση (ή εκτός αυτής, στο σχολικό τους περιβάλλον). Οι πιο προχωρημένοι από αυτούς περιλαμβάνουν μέτρηση με επανάληψη της μονάδας, τόσο στις συνεχείς, όσο και στις διακριτές ποσότητες, καθώς και άμεση ανάλυση μιας ποσότητας σε ομάδες ή ίσα μέρη, στη δράση και νοερά. Τα αποτελέσματα αυτά μας επιτρέπουν να ισχυριστούμε ότι αναπτύχθηκαν ικανότητες πολλαπλασιαστικής σκέψης που αποτελούν προοίμιο της «μοναδοποίησης» (Confrey, 2009; Hackenberg, 2010; Sophian, 2004; Steffe, 2013). Επιπλέον, υπάρχουν ενδείξεις για την πλειοψηφία των παιδιών της ομάδας Α ότι αντιλαμβάνονται την αντιστρεψιμότητα των ενεργειών σύνθεσης και ανάλυσης στο πλαίσιο πολλαπλασιαστικών καταστάσεων, μια πολύ σημαντική κατανόηση γενικά (Greer, 2012) και ειδικά για τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις (Confrey & Malone, 2014; Steffe & Olive, 2010), καθόλου αυτονόητη σε αυτές τις ηλικίες (Nunes & Bryant, 2015).

Στη συνέχεια, επικεντρώνουμε σε ορισμένες ομοιότητες μεταξύ των ομάδα Α και Β, που θεωρούμε σημαντικές για τον επανασχεδιασμό του προγράμματός μας. Αυτές οι ομοιότητες είναι οι εξής: Η ενέργεια της μέτρησης απεικονίστηκε σπάνια ή καθόλου στις λεκτικές περιγραφές των παιδιών, ακόμα και όταν πραγματοποίησαν μέτρηση με επανάληψη της

μονάδας για την επίλυση. Επιπλέον, στις συνεχείς ποσότητες, η επικρατούσα περιγραφή του πολλαπλάσιου Α ήταν «ν κομμάτια». Τέλος, τα υποπολλαπλάσια περιγράφτηκαν σχεδόν αποκλειστικά ως «ένα από ν μέρη». Όπως έχουμε αναφέρει, η εκ των υστέρων εξέταση βιντεοσκοπημένου υλικού από την παρέμβαση έδειξε ότι οι εκφράσεις αυτές χρησιμοποιήθηκαν πιο συχνά από την ερευνήτρια, σε σχέση με άλλες, ενώ και τα ίδια τα παιδιά υιοθέτησαν γρήγορα και προώθησαν την έκφραση του υποπολλαπλασίου ως «ένα από ν μέρη» (§5.4.4).

Ωστόσο, και τα τρία παραπάνω ευρήματα μπορούν να αποδοθούν στον αρχικό μας σχεδιασμό, στον οποίο ο ρόλος της μέτρησης είναι πιο περιορισμένος απ' όσο θεωρήσαμε αρχικά, καταρχάς στο πλαίσιο της δομημένης διαδικασίας της έμμεσης ανάλυσης. Πιο συγκεκριμένα, η διαδικασία έμμεσης ανάλυσης είναι μια διαδικασία που περιλαμβάνει εκτίμηση, σύνθεση και σύγκριση με την ποσότητα Α (§3.1.2). Η πρόβλεψη ήταν να υποστηριχθεί λεκτικά η έκφραση της σύγκρισης ως μέτρηση, αρχικά ως μέτρηση χωρίς επανάληψη της μονάδας («πόσα β χωράνε στο Α») και σταδιακά ως μέτρηση με επανάληψη της μονάδας («πόσες φορές χωράει το β στο Α»). Ωστόσο, η αναπαράσταση της κατάστασης αυτής με το υλικό αντιστοιχούσε στη σύγκριση νβ με το Α , που θα μπορούσε να εκληφθεί και ως απλή σύγκριση μηκών, ή σύγκριση της σύνθεσης των β με το Α. Σε συνδυασμό με την πιο ευνοημένη λεκτική περιγραφή, αυτό κατέληξε στο «ενώνω ν β και φτιάχνω το Α» και, κατ' επέκταση, «το Α είναι ν β» και «το β είναι ένα από τα ν β», που τόσο συχνά εμφανίστηκαν στα λόγια των παιδιών στον μεταέλεγχο.

Σε συμφωνία με άλλες ερευνήτριες και άλλους ερευνητές, εξαρχής δεχτήκαμε ότι η μέτρηση είναι βασική μαθηματική ενέργεια γενικά και, ειδικά, για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης (π.χ. Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018; Schmittau, 2004; Sophian, 2004) και, ειδικότερα, για το σημαντικό νόημα του κλάσματος ως «μέτρο» (Wilkins & Norton, 2018) και την ανάπτυξη της κατανόησης για τους ρητούς αριθμούς (Vamvakoussi et al., 2018). Στον επανασχεδιασμό του προγράμματος, η μέτρηση θα έχει πιο κεντρική θέση, καταρχάς ως διακριτή πολλαπλασιαστική κατάσταση (Greer, 1992). Επιπλέον, η μέτρηση με επανάληψης της μονάδας, μια διαδικασία μέτρησης που εμφάνισαν αυθόρμητα τα ίδια τα παιδιά σε αυτόν τον κύκλο, θα υποστηριχθεί στοχευμένα και το λεξιλόγιο για τη μέτρηση θα εισαχθεί στο πλαίσιο της μέτρησης. Τέλος, προβλήματα διαίρεσης μέτρησης στις διακριτές και συνεχείς ποσότητες θα ενταχθούν στο πλαίσιο της παρέμβασης.

6. Γενική Συζήτηση και Συμπεράσματα

Στην παρούσα διατριβή παρουσιάσαμε δύο κύκλους μιας έρευνα σχεδιασμού με εστίαση σε συγκεκριμένη μαθηματική θεματική (Gravemeijer & Prediger, 2019). Στόχος της έρευνας είναι να διερευνηθεί η δυνατότητα υποστήριξης της πολλαπλασιαστικής σκέψης στις μικρές ηλικίες, με έναν ενιαίο τρόπο για τις διακριτές και συνεχείς ποσότητες, με εστίαση στις απλές πολλαπλασιαστικές σχέσεις του τύπου A=v x β, οι οποίες διατρέχουν μια ποικιλία πολλαπλασιαστικών καταστάσεων του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση, όπως είναι η μέτρηση, η πολλαπλασιαστική αλλαγή, αλλά και τα προβλήματα ισοπληθών ομάδων ή ίσων μέτρων και τα απλά προβλήματα αναλογίας (Greer, 1992), Πρόκειται για ένα μέρος του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου (Vergnaud, 1994), το οποίο μπορεί κανείς να δει με έναν ενιαίο τρόπο από αυτή τη σχεσιακή οπτική (Polotskaia & Savard, 2021).

Η προβληματική της έρευνας βασίζεται σε τρεις άξονες: Ο πρώτος είναι ότι ερευνητικά δεδομένα δείχνουν ότι υπάρχουν πρώιμες ικανότητες πολλαπλασιαστικής σκέψης, που φυσικά είναι περιορισμένες, και εκδηλώνονται υπό ευνοϊκές συνθήκες (π.χ. Boyer et al., 2008; Hunting & Davis, 1991; McCrink & Wynn, 2007; Mix et al., 2002; Vanluydt et al., 2020, 2022; Singer-Freeman & Goswami, 2001). Ένα ενδιαφέρον εύρημα που ανακύπτει συχνά σε αυτές τις έρευνες είναι ότι οι πρώιμες ικανότητες πολλαπλασιαστικής σκέψης εκδηλώνονται τόσο στις διακριτές, όσο και στις συνεχείς ποσότητες, αλλά με διαφορετικό τρόπο: Στην πρώτη περίπτωση ως ικανότητα αντιληπτικής εκτίμησης του λόγου, ενώ στη δεύτερη με την ικανότητα ισομερισμού, κατά κύριο λόγο στο πλαίσιο της «δίκαιης μοιρασιάς», με τον λόγο 1:2 /2:1 να έχει ιδιαίτερη σημασία και στις δύο περιπτώσεις (Fitzpatrick & Hallett, 2019).

Ο δεύτερος άξονας είναι η διαπίστωση ότι οι πρώιμες ικανότητες πολλαπλασιαστικής σκέψης δεν υποστηρίζονται επαρκώς και συστηματικά στα πρώτα σχολικά χρόνια. Η Βαμβακούση και Καλδρυμίδου (2018) εξέτασαν το αναλυτικό πρόγραμμα του 2011 για το νηπιαγωγείο, την Α΄ και τη Β΄ Δημοτικού ως προς του ρητούς μαθησιακούς του στόχους που αφορούν το πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο (Vergnaud, 1994) κι έκαναν μια σειρά από διαπιστώσεις: οι στόχοι αυτοί ήταν κατά πολύ λιγότεροι από αυτούς που αφορούν το προσθετικό εννοιολογικό πεδίο, τόσο ως προς το πλήθος, όσο και ως προς τον προτεινόμενο διδακτικό χρόνο. Ειδικότερα, για το νηπιαγωγείο διαπίστωσαν ότι, παρά το γεγονός ότι υπήρχαν ρητοί στόχοι σχετικά με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, αυτοί περιορίζονταν

στις διακριτές ποσότητες, ενώ δεν προβλεπόταν λεξιλόγιο πρόσφορο για την περιγραφή πολλαπλασιαστικών σχέσεων, ούτε καν η λέξη «μισό». Παρόμοιες διαπιστώσεις κάναμε για το πιο πρόσφατο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών στο νηπιαγωγείο (Α.Π.,2022) και σε αναλυτικά προγράμματα μαθηματικών για τις μικρές ηλικίες σε διεθνές επίπεδο.

Τέλος, ο τρίτος άξονας είναι ότι σε διάφορες ηλικίες, εκδηλώνονται μια σειρά συστηματικών λαθών και δυσκολιών που φαίνεται να αντανακλούν ακριβώς αυτή την ασύμμετρη προσοχή που δίνει η εκπαίδευση στα πρώτα σχολικά χρόνια στο προσθετικό έναντι του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου. Πιο συγκεκριμένα, παιδιά διαφόρων ηλικιών εστιάζουν στις διακριτές ποσότητες, το πλήθος και τους αριθμούς που το εκφράζουν και τις προσθετικές σχέσεις, σε ακατάλληλες περιστάσεις (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018; Vamvakoussi et al., 2018). Κι άλλες ερευνήτριες και ερευνητές έχουν επισημάνει ότι οι πρώτες σχολικές εμπειρίες των παιδιών δεν βοηθούν τα παιδιά να διαμορφώσουν το γνωστικό υπόβαθρο που θα τους επιτρέψει να κατανοήσουν μεταγενέστερα έννοιες, όπως αυτή του κλάσματος (Hunting & Davis, 1991; Ni & Zhou, 2005; Sophian, 2004).

Χρησιμοποιώντας την έννοια του κλάσματος ως παράδειγμα, η Sophian (2004) υποστηρίζει ότι χρειάζεται μια προοπτική αναπτυξιακή προσέγγιση στη μαθηματική εκπαίδευση στις μικρές ηλικίες, που λαμβάνει υπόψη τόσο τις πρώιμες ικανότητες των μικρών παιδιών, όσο και τι θα τους είναι απαραίτητο μακροπρόθεσμα. Υιοθετήσαμε αυτή την οπτική και εστιάσαμε στις ομοιότητες των διακριτών και συνεχών ποσοτήτων, που έχουν αναδειχθεί από διαφορετικές πλευρές: Από την άποψη των νοητικών διεργασιών που αφορούν και τα δύο είδη ποσοτήτων (Steffe, 2013), τις ομοιότητες μεταξύ της μέτρησης και της καταμέτρησης (Sophian, 2004), αλλά και τις ομοιότητες στις μαθηματικές ενέργειες που τις αφορούν και έχουν σημασία για το πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο: ο ισομερισμός ως ειδική περίπτωση ανάλυσης, η σύνθεση με επανάληψη και η μέτρηση (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018). Λάβαμε υπόψη τα αποτελέσματα και το συμπέρασμα των Kornillaki και Nunes (2005), ότι οι διαφορές που παρατηρούνται στην ικανότητα των παιδιών να αντιμετωπίσουν προβλήματα που αντιστοιχούν στη διαίρεση στις συνεχείς και διακριτές ποσότητες, οφείλονται σε «διαδικαστικές» μάλλον, παρά «εννοιολογικές» δυσκολίες, καθώς φαίνεται ότι η ανάπτυξη της κατανόησης των αρχών που διέπουν τις αντίστοιχες καταστάσεις είναι παράλληλη στα δύο είδη ποσοτήτων.

Αναζητήσαμε τα βασικά συστατικά της πολλαπλασιαστικής σκέψης στις μικρές ηλικίες και τα οργανώσαμε, όπως η Confrey (2009), με βάση το «πολλά ως ένα» που παραπέμπει στη σύνθετη μονάδα και το «πολλά προς ένα» που παραπέμπει στον λόγο (και το αντίστοιχο νοητικό σχήμα της «ένα-προς-πολλά» αντιστοιχίας- Nunes & Bryant, 2015). Προσαρμόσαμε το «πολλά ως ένα» στην περίπτωση των ομοειδών ποσοτήτων, που παραπέμπει σε μια στοιχειώδη μορφή συντονισμού μονάδων, και το συνδέσαμε με την αντιστρεψιμότητα της σχέσης μεταξύ δύο μονάδων, που θεωρείται θεμελιώδης για τη πολλαπλασιαστική σκέψη (Confrey & Maloney, 2014; Hackenberg, 2010; Hackenberg et al., 2016; Steffe & Olive, 2010; Wilkins & Norton, 2018). Τέλος, λάβαμε υπόψη ότι (Vanluydt et al., 2021; De Keersmaeker et al., 2024).

Η προβληματική και η παραπάνω οργάνωση είναι η τρέχουσα μορφής μιας μακροπρόθεσμης συλλογικής προσπάθειας (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018; Πήττα κ.ά., 2019; Pitta et al., 2021; Vamvakoussi, 2015; Vamvakoussi et al., 2018, 2019; Vraka, 2018) που προηγήθηκε της παρούσας διατριβής, αλλά αποσαφηνίστηκε και εξειδικεύτηκε στο πλαίσιό της.

6.1 Είναι εφικτοί ο στόχος και ο σκοπός της έρευνας;

Με βάση τον στόχο της έρευνας, διατυπώσαμε τον σκοπό της έρευνας ως τον σχεδιασμό ενός προγράμματος δραστηριοτήτων, με ενιαία προσέγγιση της σχέσης Α=ν x β, στις διακριτές και συνεχείς ποσότητες και με τα εξής χαρακτηριστικά: α) να περιλαμβάνει διαφορετικές πολλαπλασιαστικές καταστάσεις στις οποίες εμφανίζεται η σχέση αυτή, β) να προσφέρει οργανωμένες εμπειρίες για τις θεμελιώδεις ενέργειες που είναι κοινές για τις διακριτές και συνεχείς ποσότητες, γ) να προβλέπει την εισαγωγή λεξιλογίου για την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων, δ) να λαμβάνει υπόψη και να προωθεί θεμελιώδη συστατικά της πολλαπλασιαστικής σκέψης στις μικρές ηλικίες («πολλά ως ένα», «πολλά προς ένα») και ε) να αναδεικνύει την αντιστρεψιμότητα ενεργειών και σχέσεων

Το πρώτο κεντρικό ερώτημα της έρευνας είναι αν ένα τέτοιος σχεδιασμός είναι εφικτός.

Στον Κύκλο Ι επιλέξαμε τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, προβλέψαμε μια δομημένη διαδικασία για τον υπολογισμό πολλαπλασίων, παρόμοια στις διακριτές και τις συνεχείς ποσότητες. Προβλέψαμε, ωστόσο, μόνο μία δομημένη διαδικασία για τον υπολογισμό του υποπολλαπλάσιου, στις συνεχείς ποσότητες και αναμέναμε τη χρήση της ένα-προς-ένα

αντιστοίχισης στις διακριτές ποσότητες. Η επιλογή αυτή δεν ήταν συμβατή με τον στόχο της έρευνας.

Επιπλέον, σχεδιάσαμε ένα κοινό σενάριο με διαφορετική ιστορία για κάθε δραστηριότητα, και προβλέψαμε πώς θα εισαχθούν οι όροι για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια στον πλαίσιο του σεναρίου. Υποθέσαμε ότι η φωνολογική κανονικότητα στην παραγωγή των όρων με βάση τα απόλυτα και τα τακτικά αριθμητικά θα λειτουργήσει βοηθητικά ώστε να κατασκευάσουν όρους τα παιδιά. Ωστόσο, επιλέξαμε ταυτόχρονα να ξεκινήσουμε την εισαγωγή των όρων για τα υποπολλαπλάσια με τη λέξη «μισό» και, μάλιστα, με την έκφραση «είμαι το ένα σου μισό» στο πλαίσιο της ιστορίας. Θεωρήσαμε ότι η λέξη «μισό» θα ήταν πιο οικεία στα παιδιά από το «ένα δεύτερο» και η δεδομένη διατύπωση θα αναδείκνυε το γεγονός ότι εκφράζει μια σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων.

Η φάση της υλοποίησης του Κύκλου Ι συνέπεσε με την περίοδο της πανδημίας του κορονοϊού, πραγματοποιήθηκε υπό δυσμενείς συνθήκες και δεν ολοκληρώθηκε. Επιπλέον, ο μεταέλεγχος πραγματοποιήθηκε περίπου τέσσερις μήνες αργότερα. Παρά ταύτα, είχαμε αρκετά στοιχεία, ώστε να αποτιμήσουμε τον σχεδιασμό μας και την υλοποίησή του.

Συγκεκριμένα, στη διάρκεια της υλοποίησης, καθώς και στη φάση της αναδρομικής ανάλυσης του Κύκλου Ι διαπιστώσαμε ότι η επιλογή μας για το «μισό» ήταν πολύ ατυχής. Διαπιστώσαμε, επίσης, ότι δεν είχε υποστηριχτεί συστηματικά η αντιμετώπιση των «πολλών» ως «ένα», παρά μόνο από την περιστασιακή χρήση της λέξης «ομάδα». Τέλος, διαπιστώσαμε ότι το πέρασμα από το ν=2 στο ν=3 δεν ήταν καθόλου αυτονόητο για τα παιδιά, ούτε γι’ αυτά που εφάρμοσαν τις δομημένες διαδικασίες για ν=2.

Στον Κύκλο ΙΙ, διατηρήσαμε τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, το σενάριο και τις ιστορίες. Σχεδιάσαμε εμπράγματες αναπαραστάσεις σύνθετων μονάδων και προβλέψαμε την εισαγωγή του αντίστοιχου λεξιλογίου, συγκεκριμένα των όρων «δυάδα», «τριάδα», «τετράδα». Αυτή τη φορά, η εισαγωγή των όρων για τα υποπολλαπλάσια έγινε με τον όρο «ένα δεύτερο» και όχι με τη λέξη «μισό».

Επιπλέον, σχεδιάσαμε μια εμπράγματη αναπαράσταση του λόγου («ένα προς πολλά» / «πολλά προς ένα»), ώστε να αναδειχθούν οι ομοιότητες ανάμεσα στο ν=2 και ν=3, η αντιστρεψιμότητα των ενεργειών και των σχέσεων και, ταυτόχρονα, να διευκολυνθεί η εκτέλεση των δομημένων διαδικασιών. Επανασχεδιάσαμε τις διαδικασίες, με βάση τα

καινούργια αναπαραστατικά εργαλεία. Αυτή τη φορά, η δομημένη διαδικασία για τα υποπολλαπλάσια ήταν ίδια στη συνεχείς και τις διακριτές ποσότητες, που είναι συμβατό με τον στόχο της έρευνας.

Η φάση της υλοποίησης του Κύκλου ΙΙ πραγματοποιήθηκε και ολοκληρώθηκε με παιδιά μιας μικτής τάξης νηπιαγωγείου (προνήπια και νήπια). Κατά τη διάρκεια της υλοποίησης και στη φάση της αναδρομικής ανάλυσης, διαπιστώσαμε τα αναλογικά προβλήματα, στη σειρά που είχαν στον σχεδιασμό (δεύτερη δραστηριότητα) δημιούργησαν μια απαιτητική συνθήκη για τα παιδιά, ιδιαίτερα για τα προνήπια.

Ωστόσο, το πιο σημαντικό μας συμπέρασμα από τη φάση της αναδρομικής ανάλυσης ήταν ότι η ενέργεια της μέτρησης ήταν, στην πραγματικότητα, υποβαθμισμένη στον σχεδιασμό μας, σε σχέση με τις ενέργειες του ισομερισμού (ειδική περίπτωση ανάλυσης) και της σύνθεσης. Μια πιο στοχευμένη αντιμετώπιση της μέτρησης στον σχεδιασμό αναμένουμε να αναδείξει πιο καθαρά και τη σύνθεση ως σύνθεση με επανάληψη («φορές»). Στον επανασχεδιασμό του προγράμματος σκοπεύουμε να εντάξουμε τη μέτρηση ως διακριτή πολλαπλασιαστική κατάσταση (Greer, 1992), αλλά και σε σύνδεση με προβλήματα διαίρεσης μέτρησης, τόσο στις συνεχείς, όσο και στις διακριτές ποσότητες.

Με βάση τα παραπάνω, ο σχεδιασμός ενός προγράμματος, με τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και συμβατού με τον στόχο της ενιαίας αντιμετώπισης των διακριτών και των συνεχών ποσοτήτων είναι εφικτός, και συνεχίζει να είναι υπό διαμόρφωση, καθώς το πρόγραμμα θα επανασχεδιαστεί στον επόμενο κύκλο.

6.2. Είναι ο σχεδιασμός στο πλαίσιο των δυνατοτήτων των παιδιών του Νηπιαγωγείου;

Να ξεκινήσουμε διευκρινίζοντας ότι θεωρούμε μια δραστηριότητα «εντός των πλαισίων των δυνατοτήτων» ενός παιδιού, αν το παιδί είναι σε θέση να συμμετάσχει στη συλλογική επίλυση των προβλημάτων ή/και να εισφέρει στη συζήτηση, στο πλαίσιο της παρέμβασης.

Η υλοποίηση του Κύκλου Ι και του Κύκλου ΙΙ έδειξε ότι το πρόγραμμα ήταν στο πλαίσιο των δυνατοτήτων όλων των νηπίων που συμμετείχαν. Από την άλλη μεριά, όπως συζητήσαμε αναλυτικά στην αναδρομική ανάλυση του Κύκλου ΙΙ, για τα προνήπια η εικόνα ήταν πιο σύνθετη. Όλα τα προνήπια ήταν σε θέση να συμμετάσχουν στην εισαγωγική δραστηριότητα, στο πλαίσιο της πολλαπλασιαστικής σύγκρισης με μέτρηση. Τα αναλογικά προβλήματα της δεύτερης δραστηριότητας ήταν απαιτητικά για όλα τα παιδιά, αλλά ορισμένα προνήπια, από

τη δραστηριότητα αυτή και μετά, φάνηκε να μην μπορούν να ακολουθήσουν τα υπόλοιπα παιδιά στην επίλυση και στη συζήτηση.

Κρίνοντας από την απροθυμία των περισσότερων από τα προνήπια που συμμετείχαν στον Κύκλου ΙΙ να ξεκινήσουν ή να ολοκληρώσουν τη διαδικασία της ατομικής εξέτασης μετά την παρέμβαση, εικάζουμε ότι τα ίδια τα προνήπια αυτά αντιλήφθηκαν τα προβλήματα της παρέμβασης ως δύσκολα (Wang & Bonawitz, 2023). Τα προνήπια αυτά δεν είχαν όλα την ίδια εικόνα στο πλαίσιο της παρέμβασης και περιλαμβάνουν παιδιά που συνέχισαν να συμμετέχουν ενεργά και μετά την εισαγωγική δραστηριότητα, και παιδιά που σταμάτησαν να το κάνουν.

Σε κάθε περίπτωση, ο σχεδιασμός του Κύκλου ΙΙ φάνηκε εν γένει να μην είναι στο πλαίσιο των δυνατοτήτων των περισσότερων προνηπίων. Υπάρχουν, ωστόσο, δύο εξαιρέσεις που δείχνουν ότι αυτό δεν είναι αποκλειστικά θέμα ηλικίας. Επιπλέον, θα πρέπει να συνεκτιμηθεί το εύρημα ότι τα αναλογικά προβλήματα αποδείχτηκαν ιδιαίτερα απαιτητικά και για τρία νήπια, κατά τον μεταέλεγχο. Τέλος, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι το πρόγραμμα ήταν εξαιρετικά πυκνό όσον αφορά το περιεχόμενό του και η υλοποίησή του, αναλογικά, περιορισμένη σε πλήθος συναντήσεων και συνολική διάρκεια.

Επομένως, κατά τον επανασχεδιασμό, θα επιδιωχθεί η διάχυση του περιεχομένου σε περισσότερες δραστηριότητες, αρχικά ανάλογες ως προς τη δυσκολία με την εισαγωγική δραστηριότητα του Κύκλου ΙΙ (π.χ. δραστηριότητες μέτρησης με τα δομημένα υλικά του προγράμματος ή άλλες που θα σχεδιαστούν ειδικά για τον σκοπό αυτό), οι οποίες θα υλοποιούνται σε όλη τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς. Με τον τρόπο αυτό, θα δοθεί η ευκαιρία σε όλα τα παιδιά, ανεξάρτητα από το επίπεδο στο οποίο βρίσκονται, να επεξεργαστούν το μαθηματικό περιεχόμενο σε μεγαλύτερο εύρος και βάθος, με επαναλαμβανόμενες ευκαιρίες επανεπεξεργασίας, στον χρόνο που χρειάζεται το καθένα (Clements & Sarama, 2021).

6.3 Τι επίδραση έχει ο σχεδιασμός στις ικανότητες πολλαπλασιαστικής σκέψης των μικρών παιδιών;

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε στον Κύκλο ΙΙ, στον οποίο αντιστοιχεί η πιο πρόσφατη εκδοχή του σχεδιασμού. Το πλαίσιο της παρέμβασης ήταν απαιτητικό για τα παιδιά, αλλά τα περισσότερα συμμετείχαν ενεργά, τόσο στην επίλυση, όσο και στη συζήτηση. Στα επεισόδια

που παρουσιάσαμε, είδαμε παραδείγματα όπου παιδιά κάνουν λάθη, και εκφράζουν ρητά δυσκολίες («εγώ δεν μπορώ να φτιάξω τριάδες»). Παράλληλα, είδαμε παραδείγματα παιδιών να διατυπώνουν αρχές και προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν σε ένα δεδομένο πρόβλημα, να ελέγχουν μια αντιληπτική εκτίμηση με τη δομημένη διαδικασία, να προσπαθούν να «δουν» ή να «βλέπουν» ομάδες. Είδαμε, επίσης, παραδείγματα παιδιών να εφαρμόζουν στρατηγικές «δοκιμής και διόρθωσης», αναγνωρίζοντας πότε πρέπει να διορθώσουν. Σε άλλα παραδείγματα, παιδιά περιέγραψαν τη λειτουργία του «εργαλείου του λόγου» και της «κλασματομηχανής» γενικεύοντας και αναφέροντας αντίστροφες ενέργειες ή σχέσεις. Και ένα παιδί ζήτησε να μπει ένα σύμβολο στην «κλασματομηχανή» όπως ο «σταυρός» και η «παύλα» της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Επαναφέρουμε τα παραδείγματα αυτά για να αναδείξουμε το γεγονός ότι η υλοποίηση του σχεδιασμού δημιούργησε δυνατότητες συλλογικής επεξεργασίας πολλών πτυχών των δεδομένων πολλαπλασιαστικών καταστάσεων, οργανωμένων γύρω από τη σχέση Α=ν x β.

Θα σταθούμε στο αξιοσημείωτο εύρημα ότι τα μισά από τα παιδιά που συμμετείχαν σε αυτή την παρέμβαση, συμπεριλαμβανομένου ενός προνηπίου, έλυσαν ατομικά τουλάχιστον σαράντα πέντε από τα σαράντα έξι προβλήματα του μεταελέγχου, ανεξάρτητα από το ζητούμενο, το είδος της ποσότητας, την τιμή του ν, την πολλαπλασιαστική κατάσταση και το αν είχαν επιλύσει παρόμοια προβλήματα στη διάρκεια της παρέμβασης ή όχι. Για την επίλυση χρησιμοποιήθηκαν οι δομημένες διαδικασίες, παραλλαγές τους, διαδικασίες που είχαν αναπτυχθεί από τα παιδιά στο πλαίσιο της παρέμβασης, διαδικασίες που δεν είχαν υποστηριχθεί στην παρέμβαση, και νοερές στρατηγικές. Περιγράφτηκαν λεκτικά σχέσεις, συχνά με πολλαπλασιαστικό τρόπο, χωρίς και με όρους για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια και αναφέρθηκαν συστηματικά οι όροι για τις σύνθετες μονάδες. Περιγράφτηκαν λεκτικά ενέργειες και τα περισσότερα παιδιά περιέγραψαν αυθόρμητα αντίστροφες ενέργειες στο πλαίσιο του ίδιου προβλήματος. Κάποια περιέγραψαν αυθόρμητα αναλογικές σχέσεις.

Το εύρημα αυτό παρέχει ενδείξεις ότι ο σχεδιασμός μας, παρά τους περιορισμούς στη σχεδίαση και την υλοποίησή του, στον Κύκλο ΙΙ, μπορεί να δημιουργήσει δυνατότητες υποστήριξης σημαντικών πτυχών της πολλαπλασιαστικής σκέψης ήδη από τις μικρές ηλικίες. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της συστηματικής οργάνωσης των μαθησιακών εμπειριών των παιδιών, με πυρήνα τη σχέση Α=ν × β, της ανάδειξης των ομοιοτήτων μεταξύ διακριτών και

συνεχών ποσοτήτων μέσω των κοινών μαθηματικών ενεργειών που τις αφορούν, της διάθεσης κοινών διαδικασιών για τα δύο είδη ποσοτήτων και της υποστήριξης βασικών συστατικών της πολλαπλασιαστικής σκέψης στις μικρές ηλικίες («πολλά ως ένα», «πολλά προς ένα»).

Η ιδιαίτερη συμβολή της έρευνάς μας έγκειται, επομένως, στην απόπειρα να συνδυαστούν συστηματικά αυτά τα χαρακτηριστικά σε ένα ενιαίο πλαίσιο, κάτι που —απ' όσο γνωρίζουμε— δεν έχει αποτελέσει μέχρι σήμερα αντικείμενο συστηματικού σχεδιασμού και διερεύνησης στην έρευνα για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης στις μικρές ηλικίες.

6.4 Περιορισμοί και περαιτέρω έρευνα

Μέχρι στιγμής, έχουμε αναδείξει περιορισμούς της έρευνας, όσον αφορά τον σχεδιασμό και την υλοποίησή της (§6.1-6.3).

Έχουμε, επίσης, αναδείξει μεθοδολογικούς περιορισμούς. Συγκεκριμένα, δεν εξετάσαμε παραμέτρους που ενδεχομένως σχετίζονται με τις διατομικές διαφορές που αναμέναμε στον Κύκλο ΙΙ, όπως η γλωσσική ικανότητα, ή η γενικότερη ικανότητα επίλυσης προβλήματος. Επομένως, δεν μπορούμε να εξηγήσουμε τις διαφορές αυτές. Επιπλέον, το ερευνητικό εργαλείο που χρησιμοποιήσαμε για την ατομική εξέταση των παιδιών δεν συμπεριλάμβανε έργα που να εξετάζουν στοχευμένα την κατανόηση της αντιστρεψιμότητας των ενεργειών σύνθεσης/ ανάλυσης στο πλαίσιο των πολλαπλασιαστικών προβλημάτων. Παρόμοια, κατά την εξέταση, ρωτήθηκε μόνο η σχέση της ζητούμενης με τη δεδομένη ποσότητα και όχι και η αντίστροφη, όπως γινόταν συστηματικά στην παρέμβαση. Επομένως, το ερευνητικό μας εργαλείο είναι πολύ πιθανόν να υποεκτιμά την κατανόηση των παιδιών για τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, ενέργειες και σχέσεις που αντιμετώπισαν. Από την άλλη μεριά, δεν θα ήταν σκόπιμη η προσθήκη έργων, καθώς το ερευνητικό εργαλείο περιλαμβάνει πολλά προβλήματα και απαίτησε δύο συναντήσεις για κάθε παιδί. Επομένως, το εργαλείο πρέπει να σχεδιαστεί εξαρχής, ώστε να είναι πιο λειτουργικό στη χορήγηση και, ταυτόχρονα, εξετάζει πτυχές της πολλαπλασιαστικής σκέψης που θεωρήσαμε σημαντικά στον σχεδιασμό.

Τα αποτελέσματα που παρουσιάσαμε ασφαλώς δεν είναι γενικεύσιμα. Θα πρέπει να επισημανθεί ότι ο σχεδιασμός των Κύκλων Ι & ΙΙ έχει υλοποιηθεί σε ένα ευνοϊκό πλαίσιο, υπό

την εξής έννοια: Η ερευνήτρια ήταν ταυτόχρονα και η νηπιαγωγός των παιδιών που συμμετείχαν.

Ωστόσο, στη μεθοδολογία που επιλέξαμε τα ευρήματα δεν αποσκοπούν σε άμεση γενίκευση, αλλά στη διαμόρφωση και σταδιακή βελτίωση θεωρητικά τεκμηριωμένων αρχών σχεδιασμού, οι οποίες μπορούν να εξεταστούν περαιτέρω σε διαφορετικά πλαίσια (Gravemeijer & Prediger, 2019). Μετά τον Κύκλο ΙΙ, ο σχεδιασμός είναι υπό επανεξέταση, ώστε να ευθυγραμμιστεί σε πιο ικανοποιητικό βαθμό με τις θεωρητικά τεκμηριωμένες αρχές του. Μέχρι στιγμής έχουν αναθεωρηθεί τοπικές υποθέσεις. Οι θεωρητικές αρχές έχουν αποσαφηνιστεί, αλλά όχι ακόμα τροποποιηθεί.

Θα πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι η πραγμάτευση της πολλαπλασιαστικής σχέσης Α=ν x β στο πλαίσιο των ομοειδών ποσοτήτων δεν καλύπτει μια εξίσου σημαντική συνιστώσα της πολλαπλασιαστικής σκέψης στις μικρές ηλικίες, που αφορά τον λόγο μεταξύ ετεροειδών ποσοτήτων και τη συμμεταβολή τους (Confrey, 2009; Nunes & Bryant, 2015). Μια ολοκληρωμένη προσέγγιση στην ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης στις μικρές ηλικίες απαιτεί και τις δύο συνιστώσες.

Ένα ερώτημα που απαιτεί περαιτέρω έρευνα είναι κατά πόσο ο σχεδιασμός μας, εφόσον ευθυγραμμιστεί με τις θεωρητικές του αρχές και υλοποιηθεί με συνέπεια, μπορεί να οδηγήσει σε μακροπρόθεσμα οφέλη για τα παιδιά. Για το ερώτημα αυτό απαιτείται διαχρονική μελέτη της πορείας των παιδιών.

Μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να διερευνήσει την περαιτέρω ανάπτυξη του σχεδιασμού και την επέκτασή του στις Α΄ και Β΄ τάξεις του Δημοτικού. Με βάση την προοπτική αναπτυξιακή προσέγγιση που υιοθετούμε (Sophian, 2006), το πιο ενδιαφέρον ερώτημα για μελλοντική έρευνα είναι κατά πόσο η συστηματική υποστήριξη της πολλαπλασιαστικού σκέψης, με βάση τις αρχές του σχεδιασμού μας, ήδη από το νηπιαγωγείο και σε συνέχεια στην Α΄ και Β΄ τάξη του Δημοτικού, θα μπορούσε να διαφοροποιήσει ουσιαστικά τη μετέπειτα μαθηματική πορεία των παιδιών.

Παράρτημα 1

Παρουσίαση ιστορίας πλαισίου των δραστηριοτήτων

Δραστηριότητα 1

Σε μία χώρα μακρινή ζουν κάτι παράξενα πλασματάκια: οι Παμ. Αυτές συνεχώς μπλέκουν σε μπελάδες και επειδή μοιάζουν μεταξύ τους μπερδεύουν τους πάντες. Θέλετε να σας δείξω μερικά από αυτά; *[Παρουσιάζονται τα πλάσματα 1-5]*. Μπορούμε να βάλουμε στη σειρά τα πλασματάκια αυτά από το πιο κοντό στο πιο ψηλό; Τι παρατηρείτε; Έχουν κάποια σχέση τα πλάσματα αυτά μεταξύ τους; Για δείτε το πρώτο (στη σειρά) με το δεύτερο. Θέλετε να τα γνωρίσουμε λίγο καλύτερα; Δείτε τι μας λέει η πρώτη Παμ: «Γεια σας! Είμαι η Παμ και μαζί με τις φίλες μου που είδατε και πριν ετοιμαζόμαστε να παίξουμε ποδόσφαιρο αλλά δεν έχουμε ούτε φανέλες, ούτε μπάλα, ούτε και τέρμα. Εγώ βέβαια σκέφτηκα τον αριθμό που θέλω για την δική μου φανέλα. Είναι ο αριθμός 1 γιατί και όταν κάποιος με φωνάζει μπορεί να μετρήσει το όνομα μου με ένα παλαμάκι, αφού έχει μόνο μία συλλαβή. Δείτε και μόνοι σας!» *[Χτυπάμε ένα παλαμάκι.]* Θέλετε να φτιάξουμε την φανέλα του; *[Η Παμ παρουσιάζει και την Παμ- Παμ.]* «Σας παρουσιάζω την Παμ-Παμ.» *[Φωνάζουμε το όνομά του χτυπώντας παλαμάκια για κάθε του συλλαβή για να τον υποδεχτούμε]* Η Παμ- Παμ λέει: «Οι φίλοι μου με φωνάζουν Δι-Παμ» *[Φτιάχνουμε τη φανέλα της.]* Η Δι-Παμ λέει: «Είμαι διπλάσια από σένα!» και η Παμ απαντάει: «Ναι αλλά χωρίς εμένα κανείς δεν μπορεί ούτε το όνομα σου να βρει ούτε το πόσο ψηλή είσαι! Είμαι το ένα σου δεύτερο!» *[Η δραστηριότητα συνεχίζει όπως έχει περιγραφεί στην §3.1.1 και η ιστορία ξαναξεκινά με την ομάδα των Πομ]*. Μαζί με τις Παμ θα παίξουν ποδόσφαιρο και οι Πομ. Να κάποιοι ήδη έρχονται! Ποιος είναι ο αρχηγός; *[Ακολουθεί η δραστηριότητα όπως έχει περιγραφεί στην §3.1.1]*.

Δραστηριότητα 2

Η Παμ μαζί με τις φίλες της σκέφτηκαν πως πριν τον αγώνα θα έπρεπε να ρωτήσουν το γιατρό της ομάδας αν χρειάζονται τίποτα βιταμίνες. Ήθελαν η ομάδα τους να είναι όσο πιο δυνατή γίνεται. Έτσι και έκαναν. Τότε, ο σοφός γερο-γιατρός της ομάδας μάζεψε τα πιο υγιεινά φρούτα, τα πιο δυναμωτικά λαχανικά, τα πιο θρεπτικά όσπρια και σιτηρά. Μπήκε στο εργαστήριό του μαζί με τους βοηθούς του – έστυψαν, έλιωσαν, έκοψαν, ανακάτεψαν, έψησαν, έβρασαν, πάγωσαν, ξεπάγωσαν, έβγαλαν τα πιο πολύτιμα συστατικά και έφτιαξαν σούπερ-βιταμίνες και υπερ-ενεργειακές μπάρες. «Τώρα πρέπει να βρούμε και τη σωστή δόση για τον καθένα», είπε ο γιατρός. «Αν είναι πολύ μικρή, δεν κάνουμε τίποτα. Αν είναι

πολύ μεγάλη, κινδυνεύουμε όποιος την πάρει να τρέχει πάνω-κάτω, να χοροπηδάει, να μιλάει ασταμάτητα και να γελάει συνεχώς για ώρες πολλές, ίσως και για μέρες! Θέλουμε έναν εθελοντή». Η Παμ: Την ζύγισαν, μέτρησαν το ύψος της, το πλάτος της, την περιφέρειά της. Ξεκίνησαν με μικρές δόσεις, και την παρακολούθησαν πολλές μέρες στη σειρά – πώς αισθάνεσαι; Κοιμάσαι καλά; Μια χαρά είμαι, είπε την πρώτη μέρα η Παμ – δε βλέπω και καμία διαφορά! Το ίδιο είπε και τη δεύτερη, το ίδιο και την τρίτη. Την τέταρτη μέρα, είπε: Σήμερα ξύπνησα πολύ κεφάτη και με μια μεγάλη όρεξη να πάω για τρέξιμο πρωί-πρωί. «Ωπ! Εδώ είμαστε», είπε ο γιατρός, «στο σχολείο πώς τα πήγες;». «Πολύ καλά, δε νύσταξα καθόλου και έλυσα και τα πιο δύσκολα προβλήματα στα μαθηματικά». «Πάρα πολύ ωραία! Για να δούμε και πώς θα κοιμηθείς» Και κοιμήθηκε σαν το πουλάκι, κι έτσι ήξεραν ότι είχαν βρει τη σωστή δόση για την Παμ. Τότε αποφάσισαν πως ήρθε η ώρα να φτιάξουν σούπερ-βιταμίνες και υπερ-ενεργειακές μπάρες για όλη την ομάδα, μη σας πως και όλα τα πλάσματα στην χώρα! Ναι ναι! Σούπερ- βιταμίνες και ενεργειακές μπάρες για όλους! «Δηλαδή τώρα θα πρέπει έναν-έναν να τους ζυγίζουμε, να τους μετράμε, να τους παρακολουθούμε κάθε μέρα και να ρωτάμε αν κοιμούνται καλά;» δυσανασχέτησαν κάπως οι βοηθοί του γιατρού. «Όχι βέβαια, είναι όλα υπολογισμένα στην εντέλεια». Ο πρώτος που ήρθε στο εργαστήριο ήταν ο Πιμ (ίδιο ύψος με την Παμ). Για στάσου εδώ δίπλα στην Παμ να δούμε τι δόση θα χρειαστείς! Α… Ευκολάκι! Μπορείτε να σκεφτείτε τι δόση θα χρειαστεί ο Πιμ; Γιατί; Έρχεται μέσα και η Δι- Παμ και λέει ο γιατρός: «Για έλα κι εσύ και στάσου δίπλα στον Παμ. Για να δω τι θα χρειαστείς εσύ…» Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να καταλάβετε ποιος είναι; Πώς τον λένε; Πώς τον φωνάζουν οι φίλοι του; Πώς το καταλάβατε; Πόσες σούπερ-βιταμίνες και ποια υπερ-ενεργειακή μπάρα θα του δώσει ο γιατρός; *[πρόβλεψη για κάθε είδος ξεχωριστά].* Για να δούμε και τι είπε ο γιατρός: «Α, ώστε εσένα σε φωνάζουνε Δι-Παμ. Είσαι διπλάσιος από τον Παμ, θα πάρεις τις διπλάσιες υπερ-βιταμίνες και τη διπλάσια υπερ-ενεργειακή μπάρα» *[Ακολουθεί η κατασκευή πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων για συνεχείς και διακριτές ποσότητες].*

Δραστηριότητα 3

Η Παμ μαζί με τον Πομ θέλουν να βρουν ένα πιο γρήγορο τρόπο για να φτιάξουν τις μαγικές βιταμίνες. Έχουν ακούσει πως υπάρχει ένα ζευγάρι η κ. Διάνοια και ο κ. Εύστροφος που έχουν κάτι μαγικές μηχανές. Ίσως αυτοί μπορούν να τους βοηθήσουν. Τρέχοντας έφτασαν στο μεγάλο εργαστήριο του Εύστροφου και της Διάνοιας. Η κ. Διάνοια ακούει το πρόβλημα

των παιδιών και τους οδηγεί μπροστά από μία τεράστια μηχανή. «Η μηχανή αυτή δουλεύει μόνο με τις βιταμίνες. Δεν αλλάζει την γεύση και την μυρωδιά τους παρά μόνο την ποσότητα τους. Έχετε καθόλου από αυτές τις βιταμίνες που μου είπατε; Δώστε μου μία να δείτε τι θα βγει. Αν βάλουμε 1 βιταμίνη, η μηχανή τη σκανάρει και βγάζει από την άλλη βγάζει 2. Αν βάλουμε 3 βιταμίνες, τις σκανάρει και βγάζει 6. Για πείτε μου ξεφτέρια μου καταλάβατε τι κάνει αυτή η μηχανή;». Αφού τα παιδιά προσπαθήσουν να εξηγήσουν τι κάνει αυτή η πρώτη μηχανή και συζητούν η κ. Διάνοια παίρνει τον λόγο και εξηγεί: «Η μηχανή αυτή παίρνει τις βιταμίνες που τις βάζει και φτιάχνει τις φτιάχνει 2 φορές, φτιάχνει δηλαδή τις διπλάσιες. Για δείτε, από τις 2 πήραμε 4, σαν να βάλαμε τις 2 βιταμίνες 2 φορές. Έτσι δεν είναι;». «Δεν είναι υπέροχη αυτή η μηχανή;», ρώτησε η κ. Διάνοια την Παμ και τον Πομ. «Ναι ναι! Με αυτή μπορούμε να φτιάξουμε όσες βιταμίνες θέλουμε!», είπαν και οι δύο με μια φωνή. «Και που να δεις και πως δουλεύει από την άλλη πλευρά. 2 βιταμίνες βάζω και βγάζει 1, 4 καραμέλες βάζω και βγάζει 2.» είπε με πονηρό ύφος η κ. Διάνοια. «Τι κάνει λέει;», είπε η Παμ. Αφού τα παιδιά προσπαθήσουν να εξηγήσουν τι κάνει η μηχανή τον λόγο παίρνει η κ. Διάνοια και εξηγεί στα παιδιά: «Αν βάλουμε από την μεγάλη πλευρά τις 6 βιταμίνες, από την μικρή βγαίνουν 3. Είναι δηλαδή σαν να μοιράζει η μηχανή δίκαια τις 6 καραμέλες σε δύο ανθρώπους για παράδειγμα σε σένα και τον Πομ. Αν κάναμε αυτή την μοιρασιά δε θα δίναμε 3 στον έναν και 3 στον άλλον; Ε αυτό κάνει και αυτή η μηχανή;» «Θέλετε να δοκιμάσετε και εσείς», ρωτάει η κ. Διάνοια. *[Ακολουθούν προβλήματα κατασκευής πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων για διακριτές ποσότητες.]* Λίγο πιο πέρα στο εργαστήριο περίμενε και ο κ. Εύστροφος ο οποίος τόση ώρα ακούει πολύ προσεκτικά τα όσα γίνονται. Η Παμ και ο Πομ τον πλησιάζουν και τότε εκείνος γελώντας πονηρά τους λέει: «Η μηχανή η δική μου δεν δουλεύει με βιταμίνες αλλά μπορεί να σας βοηθήσει να φτιάξετε τις μπάρες που θέλετε. Δεν αλλάζει την γεύση και την μυρωδιά τους παρά μόνο την ποσότητα τους. Έχετε καθόλου από αυτές τις μπάρες που θέλετε να φτιάξετε; Δώστε μου ένα κομμάτι να δείτε τι θα βγει. Αν βάλουμε αυτό το κομμάτι, η μηχανή τη σκανάρει και βγάζει από την άλλη βγάζει αυτό και αν βάλουμε αυτό το κομμάτι θα το σκανάρει, θα το πολλαπλασιάσει και θα βγάλει αυτό. Ε τώρα μη μου πείτε πως δυσκολεύεστε… Τι κάνει η μηχανή μου; Αφού τα παιδιά προσπαθήσουν να εξηγήσουν τι κάνει αυτή η πρώτη μηχανή ο κ. Εύστροφος παίρνει τον λόγο και εξηγεί: «Η μηχανή αυτή παίρνει τις μπάρες που βάζεις και φτιάχνει τις φτιάχνει 2 φορές, φτιάχνει δηλαδή τις διπλάσιες. Για δείτε, από αυτή πήραμε αυτή, σαν να βάλαμε την μπάρα που μου δώσατε 2 φορές. Έτσι δεν είναι;». «Τέλεια!», φώναξε η Παμ και συνέχισε: «Τώρα θα

φτιάξουμε γρήγορα όλες τις μπάρες που χρειαζόμαστε.» «Σταθείτε! Δουλεύει και από την άλλη πλευρά η μηχανή μου! Για δείτε! Αν βάλω αυτό εδώ το κομμάτι θα βγάλει αυτό και αν βάλω αυτό εδώ το κομμάτι θα βγάλει αυτό. Καταλάβατε τι κάνει», είπε μισογελώντας ο κ. Ευστροφος. Αφού τα παιδιά προσπαθήσουν να εξηγήσουν τι κάνει η μηχανή τον λόγο παίρνει ο κ. Ευστροφος και εξηγεί στα παιδιά: «Αν βάλουμε από την μεγάλη αυτό το κομμάτι από την μικρή θα βγάλει αυτό. Είναι δηλαδή σαν να μοιράζει η μηχανή δίκαια το κομμάτι της μπάρας που της δίνουμε σε δύο ανθρώπους, για παράδειγμα σε σένα και τον Πομ. Αν κάναμε αυτή την μοιρασιά δε θα δίναμε από ένα τέτοιο κομμάτι και στους δύο; Ίδιο κομμάτι και στους δύο εννοείται… Ε αυτό κάνει και αυτή η μηχανή. Και τα μερίδια που φτιάχνει είναι το ένα δεύτερο.» «Θέλετε να δοκιμάσετε και εσείς», ρωτάει ο κ. Εύστροφος. *[Ακολουθούν προβλήματα κατασκευής πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων για συνεχείς ποσότητες.]*

Παράρτημα 2

Περιγραφή εκφωνήσεων έργων προελέγχου και μεταελέγχου

Κατηγορία έργου	Έργο	Ποσότητα	Σχέση (δοκιμή) 1↔2	1↔3	1↔4	Εκφώνηση
Π	**Π1- Αναλογικά (Μερισμού)**	Συνεχής	Π1.1	Π1.3		Μπορείς να μου δείξεις ποιο κομμάτι μπαρας θα πάρει η Παμ αν η η Διπάμ/ Τριπάμ έχει αυτή την μπάρα;
		Διακριτές	Π1.2 (6:2)	Π1.4 (6:3)		Μπορείς να μου δείξεις πόσες βιταμίνες θα πάρει η Παμ αν η Διπάμ πάρει 6;
	Π1- Αναλογικά (Επανάληψη)	Συνεχής	Π1.5	Π1.7		Μπορείς να μου δείξεις ποια θα πάρει η Διπαμ/ Τριπάμ αν η η Πάμ έχει αυτό το κομμάτι μπάρας;
		Διακριτές	Π1.6 (2*2)	Π1.8 (3*3)		Μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες θα πάρει η Διπάμ/Τριπάμ αν η Παμ πάρει 2/3;
	Π2- "Κλασματομηχανές"/ Υποπολλαπλάσια	Συνεχής	Π2.1	Π2.3		Μπορείς να μου δείξεις ποιο κομμάτι θα βγει από τη μικρή πλευρά της μηχανής αυτής αν από τη μεγάλη βάλω αυτή τη μπάρα;
		Διακριτές	Π2.2 (8:2)	Π2.4 (9:3)		Μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες θα βγουν από τη μικρή πλευρά αν από τη μεγάλη βάλω 8/9;
	Π2- "Κλασματομηχανές"/ Πολλαπλάσια	Συνεχής	Π2.5	Π2.7		Μπορείς να μου δείξεις ποια μπάρα θα βγει από τη μεγάλη πλευρά της μηχανής αν από τη μικρή βάλω αυτό το κομμάτι;

		Διακριτές	Π2.6 (2*3)	Π2.8 (3*2)		Μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες θα βγουν από τη μεγάλη πλευρά της μηχανής αν από τη μικρή βάλω 2/3;
Α	**Α1 - Μερισμού**	Συνεχής	Α1.1	Α1.3	Α1.5	Δύο/Τρία/ Τέσσερα παιδιά θα μοιραστούν δίκαια αυτή την σοκολάτα. Μπορείς να μου δείξεις ποιο κομμάτι θα πάρει κάθε παιδί;
		Διακριτή	Α1.2 (6:2)	Α1.4 (6:3)	Α1.6 (8:4)	Δύο/Τρία/ Τέσσερα παιδιά θα μοιραστούν δίκαια αυτές τις καραμέλες. Μπορείς να μου δείξεις πόσες καραμέλες θα πάρει κάθε παιδί;
	Α2 -Πολ/σμού	Συνεχής	Α2.1	Α2.3	Α2.5	Δύο/Τρία/Τέσσερα παιδιά μοιράστηκαν μία σοκολάτα. Η Ελένη πήρε αυτό το κομμάτι. Μπορείς να μου πεις ποια ήταν η σοκολάτα που μοιράστηκαν τα παιδιά;
		Διακριτή	Α2.2 (2:2)	Α2.4 (3*3)	Α2.6 (4*2)	Δύο/Τρία/Τέσσερα παιδιά μοιράστηκαν ένα πακέτο καραμέλες. Η Ελένη πήρε αυτές τις δύο. Μπορείς να μου πεις πόσες καραμέλες είχε το πακέτο που μοιράστηκαν τα παιδιά;
	Α3 - Μέτρησης	Συνεχής	Α3.1	Α3.3	Α3.5	Μια παρέα παιδιών μοιράστηκε δίκαια αυτή την σοκολάτα. Δεν ξέρω πόσα ήταν, αλλά ξέρω ότι η Ελένη πήρε αυτό το κομμάτι. Μπορείς να μου πεις πόσα ήταν τα παιδιά της παρέας;

		Διακριτή	A3.2 (8:4)	A3.4 (9:3)	A3.6 (8:2)	Μια παρέα παιδιών μοιράστηκε δίκαια αυτές τις καραμέλες. Δεν ξέρω πόσα ήταν, αλλά ξέρω ότι η Ελένη πήρε αυτές τις δύο/ τρεις/ τέσσερις. Μπορείς να μου πεις πόσα ήταν τα παιδιά της παρέας;
Β	**Β1 -Υποπολλαπλάσιο**	Συνεχής	Β1.1	Β1.3	Β1.5	Έχω αυτή τη σοκολάτα (χάρτινη ορθογώνια ράβδος). Θα δώσω στον Γιάννη το ένα δεύτερο/τρίτο/ τέταρτο της σοκολάτας. Ποιο από αυτά τα κομμάτια (4 επιλογές) λες ότι θα πάρει ο Γιάννης;
		Διακριτή	Β1.2 (4:2)	Β1.4 (6:3)	Β1.6 (8:4)	Έχω αυτές τις καραμέλες. Θα δώσω στον Γιάννη το ένα δεύτερο/τρίτο/ τέταρτο της σοκολάτας. Πόσες καραμέλες λες ότι θα πάρει ο Γιάννης;
	Β2 -Πολλαπλάσιο	Συνεχής	Β2.1	Β2.3	Β2.5	Έχω αυτή το κομμάτι σοκολάτας και έδωσα στον Γιάννη το διπλάσιο/τριπλάσιο/τετραπλάσιο Ποιο από αυτά τα κομμάτια (4 επιλογές) λες ότι θα πάρει ο Γιάννης;
		Διακριτή	Β2.2 (2*3)	Β2.4 (3*2)	Β2.6 (4*2)	Έχω 2,3,4 καραμέλες και θα δώσω στον Γιάννη τις διπλάσιες/τριπλάσιες/τετραπλάσιες. Πόσες καραμέλες λες ότι θα δώσω στον Γιάννη

Σημείωση.

Τα έργα των κατηγοριών Α και Β χρησιμοποιήθηκαν στον προέλεγχο και μεταέλεγχο των Κύκλων Ι και ΙΙ ενώ τα έργα της κατηγορίας Π στον μεταέλεγχο του Κύκλου ΙΙ

Παράρτημα 3

Περιγραφή έργων ανά ημέρα για τον Κύκλο Ι εφαρμογής του προγράμματος

Ημέρα	Δραστηριότητα	Έργο	Συνοπτική Περιγραφή	Ποσότητα	Σχέση	Όρος	Ενέργεια
1η	Δ.1	Δ.1.1	Παρουσίαση Αρχηγού (μονάδας) και παίκτη 2:1/ Σύγκριση με παίκτη 2:1(διπλάσιο)/ Παρουσίαση σχέσης και όρων	Συνεχής	1:2/2:1	Διπλάσιο/ Ένα δεύτερο	Επανάληψη μονάδας/ Μέτρηση
		Δ.1.2	Παρουσίαση παίκτη 3:1/ Σύγκριση με αρχηγό- μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:3/3:1	Τριπλάσιο / Ένα τρίτο	Επανάληψη μονάδας/Μέτρηση
		Δ.1.3	Παρουσίαση παίκτη 4:1/ Σύγκριση με αρχηγό- μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:4/4:1	Τετραπλάσιο/ Ένα τέταρτο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
		Δ.1.4	Εκτίμηση επόμενου παίκτη (επιλογή από διαθέσιμο υλικό)	Συνεχής			Ενδιάμεσο

Δ.1.5	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 5:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:5/5:1	Πενταπλάσιο/ Ένα πέμπτο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
Δ.1.6	Εκτίμηση επόμενου παίκτη (επιλογή από διαθέσιμο υλικό)	Συνεχής			Ενδιάμεσο
Δ.1.7	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 6:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:6/6:1	Εξαπλάσιο/ Ένα έκτο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
Δ.1.8	Επανάληψη της προηγούμενης ημέρας με τυχαία παρουσίαση παικτών	Συνεχής	1:ν/ν:1 (ν=2,3,4,5,6)	Ένα δεύτερο/ Διπλάσιο έως Ένα έκτο/ Εξαπλάσιο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
Δ.1.9	Εκτίμηση επόμενου παίκτη (επιλογή από διαθέσιμο υλικό)	Συνεχής			Ενδιάμεσο
Δ.1.10	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 7:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης	Συνεχής	1:7/7:1	Επταπλάσιο/ Ένα έβδομο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός

	και κατασκευή όρων από τα παιδιά				
Δ.1.11	Εκτίμηση επόμενου παίκτη (επιλογή από διαθέσιμο υλικό)	Συνεχής			Ενδιάμεσο
Δ.1.12	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 8:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:8/8:1	Οκταπλάσιο/ Ένα όγδοο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
Δ.1.13	Εκτίμηση επόμενου παίκτη (επιλογή από διαθέσιμο υλικό)	Συνεχής			Ενδιάμεσο
Δ.1.14	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 9:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:9/9:1	Εννιαπλάσιο/ Ένα ένατο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
Δ.1.15	Εκτίμηση επόμενου παίκτη (επιλογή από διαθέσιμο υλικό)	Συνεχής			Ενδιάμεσο

		Δ.1.16	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 10:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:10/10:1		Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
		Δ.1.17	Αναγνώριση παικτών με τυχαία σειρά/ Αναγνώριση σχέσης και αναφορά όρων	Συνεχής	1:ν/ν:1 (ν=2,3,4,5,6,7,8,9,10)	Ένα δεύτερο/ Διπλάσιο έως Ένα δέκατο/ Δεκαπλάσιο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
2η	Δ.1	Δ.1.18	Αναγνώριση παικτών με τυχαία σειρά/ Αναγνώριση σχέσης και αναφορά όρων	Συνεχής	1:ν/ν:1 (ν=2,3,4,5,6,7,8,9,10)	Ένα δεύτερο/ Διπλάσιο έως Ένα δέκατο/ Δεκαπλάσιο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
		Δ.1.19	Παρουσίαση αρχηγού-μονάδας δεύτερης ομάδας/ Κατασκευή και επιλογή παίκτη 2:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης	Συνεχής	1:2/2:1	Διπλάσιο/ Ένα δέκατο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός

	και κατασκευή όρων από τα παιδιά				
Δ.1.20	Κατασκευή παίκτη 3:1/ Σύγκριση με αρχηγό- μονάδα/Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:3/3:1	Τριπλάσιο / Ένα τρίτο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
Δ.1.21	Κατασκευή παίκτη 4:1/ Σύγκριση με αρχηγό- μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:4/4:1	Τετραπλάσιο/ Ένα τέταρτο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
Δ.1.22	Εκτίμηση επόμενου παίκτη (επιλογή από διαθέσιμο υλικό)	Συνεχής			Ενδιάμεσο
Δ.1.23	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 5:1/ Σύγκριση με αρχηγό- μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:5/5:1	Πενταπλάσιο/ Ένα πέμπτο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός

Δ.1.24	Εκτίμηση επόμενου παίκτη (επιλογή από διαθέσιμο υλικό)	Συνεχής			Ενδιάμεσο
Δ.1.25	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 6:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:6/6:1	Εξαπλάσιο/ Ένα έκτο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
Δ.1.26	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 7:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:7/7:1	Επταπλάσιο/ Ένα έβδομο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
Δ.1.27	Εκτίμηση επόμενου παίκτη (επιλογή από διαθέσιμο υλικό)	Συνεχής			Ενδιάμεσο
Δ.1.28	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 8:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:8/8:1	Οκταπλάσιο/ Ένα όγδοο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
Δ.1.29	Εκτίμηση επόμενου παίκτη (επιλογή από διαθέσιμο υλικό)	Συνεχής			Ενδιάμεσο

		Δ.1.30	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 9:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:9/9:1	Εννιαπλάσιο/ Ένα ένατο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
		Δ.1.31	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 10:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:10/10:1		Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
3η	Δ.1	Δ.1.32	Αναγνώριση παικτών με τυχαία σειρά/ Αναγνώριση σχέσης και αναφορά όρων	Συνεχής	1:ν/ν:1 (ν=2,3,4,5,6,7,8,9,10)	Ένα δεύτερο/ Διπλάσιο έως Ένα δέκατο/ Δεκαπλάσιο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
	Δ.2	Δ.2.1.	Παρουσίαση ιστορίας/ Σύγκριση παίκτη-μονάδα με παίκτη μονάδα	Συνεχής	1:1		Ενδιάμεσο

Δ.2.2	Αναγνώριση σχέσης ανάμεσα στους παίκτες (σχέση μονάδας-πολλαπλασίου)/ Κατασκευή ποσότητας παίκτη	Συνεχής	1:1		Ενδιάμεσο
Δ.2.3	Κατασκευή ποσότητας παίκτη	Διακριτή	1:1		Ενδιάμεσο
Δ.2.4	Αναγνώριση παίκτη 2:1 και σύγκριση του με παίκτη μονάδα	Συνεχής	1:2/2:1	Διπλάσιο/ Ένα δεύτερο	Μέτρηση
Δ.2.5	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.6	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Συνεχής	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
Δ.2.7	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την	Συνεχής	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας

	ποσότητα του παίκτη-μονάδας				
Δ.2.8	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Συνεχής	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
Δ.2.9	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.10	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Συνεχής	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
Δ.2.11	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.12	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Συνεχής	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός

Δ.2.13	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.14	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Συνεχής	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
Δ.2.15	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.16	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Συνεχής	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
Δ.2.17	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.18	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Διακριτή	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός

Δ.2.19	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.20	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Διακριτή	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
Δ.2.21	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.22	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Διακριτή	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
Δ.2.23	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.24	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Διακριτή	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός

		Δ.2.25	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
		Δ.2.26	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Διακριτή	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
4η	Δ.2	Δ.2.27	Αναγνώριση παίκτη 3:1 και σύγκριση του με παίκτη μονάδα	Συνεχής	1:3/3:1	Τριπλάσιο	Μέτρηση
		Δ.2.28	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
		Δ.2.29	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Συνεχής	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
		Δ.2.30	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την	Συνεχής	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας

	ποσότητα του παίκτη-μονάδας				
Δ.2.31	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Συνεχής	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
Δ.2.32	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.33	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Συνεχής	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
Δ.2.34	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.35	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Συνεχής	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός

Δ.2.36	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.37	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Συνεχής	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
Δ.2.38	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.39	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Συνεχής	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
Δ.2.40	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.41	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Διακριτή	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός

Δ.2.42	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.43	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Διακριτή	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
Δ.2.44	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.45	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Διακριτή	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
Δ.2.46	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.47	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Διακριτή	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός

		Δ.2.48	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
		Δ.2.49	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Διακριτή	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
5η	Δ.2	Δ.2.50	Αναγνώριση παίκτη 4:1 και σύγκριση του με παίκτη μονάδα	Συνεχής	1:4/4:1	Τετραπλάσιο	Μέτρηση
		Δ.2.51	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
		Δ.2.52	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Συνεχής	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
		Δ.2.53	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την	Συνεχής	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας

	ποσότητα του παίκτη-μονάδας				
Δ.2.54	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Συνεχής	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
Δ.2.55	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.56	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Συνεχής	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
Δ.2.57	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.58	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Συνεχής	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός

Δ.2.59	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.60	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Συνεχής	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
Δ.2.61	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.62	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Συνεχής	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
Δ.2.63	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.64	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Διακριτή	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός

Δ.2.65	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.66	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Διακριτή	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
Δ.2.67	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.68	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Διακριτή	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
Δ.2.69	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.70	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Διακριτή	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός

		Δ.2.71	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
		Δ.2.72	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Διακριτή	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός

Παράρτημα 4

Περιγραφή έργων ανά ημέρα για τον Κύκλο ΙΙ εφαρμογής του προγράμματος

Ημέρα	Δραστηριότητα	Έργο	Συνοπτική Περιγραφή	Ποσότητα	Σχέση	Όρος	Ενέργεια
1η	Δ.1	Δ.1.1	Παρουσίαση Αρχηγού (μονάδας) και παίκτη 2:1/ Σύγκριση με παίκτη 2:1(διπλάσιο)/ Παρουσίαση σχέσης και όρων	Συνεχής	1:2/2:1	Διπλάσιο/ Ένα δεύτερο	Επανάληψη μονάδας/ Μέτρηση

Δ.1.2	Παρουσίαση εμπράγματης αναπαράστασης του λόγου/ Κατασκευή λόγου ανάμεσα σε παίκτη-μονάδα και παίκτη-μονάδα	Συνεχής	1:3/3:1	Τριπλάσιο/ Ένα τρίτο	Επανάληψη μονάδας/ Μέτρηση
Δ.1.3	Παρουσίαση παίκτη 4:1/ Σύγκριση με αρχηγό- μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:4/4:1	Τετραπλάσιο / Ένα τέταρτο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
Δ.1.4	Εκτίμηση επόμενου παίκτη (επιλογή από διαθέσιμο υλικό)	Συνεχής			Ενδιάμεσο
Δ.1.5	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 5:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:5/5:1	Πενταπλάσιο / Ένα πέμπτο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
Δ.1.6	Εκτίμηση επόμενου παίκτη (επιλογή από διαθέσιμο υλικό)	Συνεχής			Ενδιάμεσο

		Δ.1.7	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 6:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:6/6:1	Εξαπλάσιο/ Ένα έκτο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
2η	Δ.1	Δ.1.8	Επανάληψη της προηγούμενης ημέρας με τυχαία παρουσίαση παικτών	Συνεχής	1:ν/ν:1 (ν=2,3,4, 5,6)	Ένα δεύτερο/ Διπλάσιο έως Ένα έκτο/ Εξαπλάσιο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
		Δ.1.9	Εκτίμηση επόμενου παίκτη (επιλογή από διαθέσιμο υλικό)	Συνεχής			Ενδιάμεσο
		Δ.1.10	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 7:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:7/7:1	Επταπλάσιο/ Ένα έβδομο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
		Δ.1.11	Εκτίμηση επόμενου παίκτη (επιλογή από διαθέσιμο υλικό)	Συνεχής			Ενδιάμεσο

Δ.1.12	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 8:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:8/8:1	Οκταπλάσιο/ Ένα όγδοο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
Δ.1.13	Εκτίμηση επόμενου παίκτη (επιλογή από διαθέσιμο υλικό)	Συνεχής			Ενδιάμεσο
Δ.1.14	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 9:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:9/9:1	Εννιαπλάσιο/ Ένα ένατο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
Δ.1.15	Εκτίμηση επόμενου παίκτη (επιλογή από διαθέσιμο υλικό)	Συνεχής			Ενδιάμεσο
Δ.1.16	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 10:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:10/10:1		Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός

		Δ.1.17	Αναγνώριση παικτών με τυχαία σειρά/ Αναγνώριση σχέσης και αναφορά όρων	Συνεχής	1:ν/ν:1 (ν=2,3,4, 5,6,7,8,9, 10)	Ένα δεύτερο/ Διπλάσιο έως Ένα δέκατο/ Δεκαπλάσιο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
3η	Δ.1	Δ.1.18	Αναγνώριση παικτών με τυχαία σειρά/ Αναγνώριση σχέσης και αναφορά όρων	Συνεχής	1:ν/ν:1 (ν=2,3,4, 5,6,7,8,9, 10)	Ένα δεύτερο/ Διπλάσιο έως Ένα δέκατο/ Δεκαπλάσιο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
		Δ.1.19	Παρουσίαση αρχηγού-μονάδας δεύτερης ομάδας/ Κατασκευή και επιλογή παίκτη 2:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:2/2:1	Διπλάσιο/ Ένα δέκατο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
		Δ.1.20	Κατασκευή παίκτη 3:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:3/3:1	Τριπλάσιο/ Ένα τρίτο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός

Δ.1.21	Κατασκευή παίκτη 4:1/ Σύγκριση με αρχηγό- μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:4/4:1	Τετραπλάσιο / Ένα τέταρτο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
Δ.1.22	Εκτίμηση επόμενου παίκτη (επιλογή από διαθέσιμο υλικό)	Συνεχής			Ενδιάμεσο
Δ.1.23	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 5:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:5/5:1	Πενταπλάσιο / Ένα πέμπτο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
Δ.1.24	Εκτίμηση επόμενου παίκτη (επιλογή από διαθέσιμο υλικό)	Συνεχής			Ενδιάμεσο
Δ.1.25	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 6:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:6/6:1	Εξαπλάσιο/ Ένα έκτο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός

Δ.1.26	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 7:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:7/7:1	Επταπλάσιο/ Ένα έβδομο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
Δ.1.27	Εκτίμηση επόμενου παίκτη (επιλογή από διαθέσιμο υλικό)	Συνεχής			Ενδιάμεσο
Δ.1.28	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 8:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:8/8:1	Οκταπλάσιο/ Ένα όγδοο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
Δ.1.29	Εκτίμηση επόμενου παίκτη (επιλογή από διαθέσιμο υλικό)	Συνεχής			Ενδιάμεσο
Δ.1.30	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 9:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:9/9:1	Εννιαπλάσιο/ Ένα ένατο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός

		Δ.1.31	Κατασκευή και επιλογή παίκτη 10:1/ Σύγκριση με αρχηγό-μονάδα/ Αναγνώριση σχέσης και κατασκευή όρων από τα παιδιά	Συνεχής	1:10/10:1		Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
4η	Δ.1	Δ.1.32	Αναγνώριση παικτών με τυχαία σειρά/ Αναγνώριση σχέσης και αναφορά όρων	Συνεχής	1:ν/ν:1 (ν=2,3,4,5,6,7,8,9,10)	Ένα δεύτερο/ Διπλάσιο έως Ένα δέκατο/ Δεκαπλάσιο	Επανάληψη μονάδας/ Ισομερισμός
	Δ.2	Δ.2.1.	Παρουσίαση ιστορίας/ Σύγκριση παίκτη-μονάδα με παίκτη μονάδα	Συνεχής	1:1		Ενδιάμεσο
		Δ.2.2	Αναγνώριση σχέσης ανάμεσα στους παίκτες (σχέση μονάδας-πολλαπλασίου)/ Κατασκευή λόγου με την χρήση εμπράγματης αναπαράστασης/ Κατασκευή ποσότητας παίκτη	Συνεχής	1:1		Ενδιάμεσο
		Δ.2.3	Κατασκευή ποσότητας παίκτη	Διακριτή	1:1		Ενδιάμεσο

Δ.2.4	Αναγνώριση παίκτη 2:1 και σύγκριση του με παίκτη μονάδα/ Κατασκευή λόγου ανάμεσα στους παίκτες με τη χρήση εμπράγματης αναπαράστασης	Συνεχής	1:2/2:1	Διπλάσιο/ Ένα δεύτερο	Μέτρηση
Δ.2.5	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.6	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Συνεχής	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
Δ.2.7	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.8	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Συνεχής	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός

Δ.2.9	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.10	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Συνεχής	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
Δ.2.11	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.12	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Συνεχής	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
Δ.2.13	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.14	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Συνεχής	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός

Δ.2.15	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.16	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Συνεχής	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
Δ.2.17	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.18	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Διακριτή	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
Δ.2.19	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.20	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Διακριτή	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός

Δ.2.21	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.22	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Διακριτή	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
Δ.2.23	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.24	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Διακριτή	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
Δ.2.25	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 2:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.26	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 2:1	Διακριτή	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός

5η	Δ.2	Δ.2.27	Αναγνώριση παίκτη 3:1 και σύγκριση του με παίκτη μονάδα/ Κατασκευή λόγου ανάμεσα στους παίκτες με τη χρήση εμπράγματης αναπαράστασης	Συνεχής	1:3/3:1	Τριπλάσιο	Μέτρηση
		Δ.2.28	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
		Δ.2.29	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Συνεχής	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
		Δ.2.30	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
		Δ.2.31	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Συνεχής	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός

Δ.2.32	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.33	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Συνεχής	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
Δ.2.34	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.35	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Συνεχής	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
Δ.2.36	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.37	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Συνεχής	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός

Δ.2.38	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.39	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Συνεχής	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
Δ.2.40	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.41	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Διακριτή	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
Δ.2.42	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.43	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Διακριτή	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός

Δ.2.44	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.45	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Διακριτή	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
Δ.2.46	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.47	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Διακριτή	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
Δ.2.48	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 3:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.49	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 3:1	Διακριτή	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός

6η	Δ.2	Δ.2.50	Αναγνώριση παίκτη 4:1 και σύγκριση του με παίκτη μονάδα/ Κατασκευή λόγου ανάμεσα στους παίκτες με τη χρήση εμπράγματης αναπαράστασης	Συνεχής	1:4/4:1	Τετραπλάσιο	Μέτρηση
		Δ.2.51	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
		Δ.2.52	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Συνεχής	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
		Δ.2.53	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
		Δ.2.54	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Συνεχής	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός

Δ.2.55	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.56	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Συνεχής	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
Δ.2.57	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.58	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Συνεχής	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
Δ.2.59	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.60	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Συνεχής	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός

Δ.2.61	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Συνεχής	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.62	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Συνεχής	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
Δ.2.63	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.64	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Διακριτή	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
Δ.2.65	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.66	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Διακριτή	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός

Δ.2.67	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.68	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Διακριτή	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
Δ.2.69	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.70	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Διακριτή	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
Δ.2.71	Κατασκευή ποσότητας παίκτη 4:1 με γνωστή την ποσότητα του παίκτη-μονάδας	Διακριτή	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.2.72	Κατασκευή ποσότητας παίκτη-μονάδας με γνωστή την ποσότητα του παίκτη 4:1	Διακριτή	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός

7η	Δ.3	Δ.3.1	Παρουσίαση ιστορίας/ Σύγκριση ποσοτήτων και αναγνώριση μηχανής/ Χρήση εμπράγματης αναπαράστασης του λόγου	Συνεχής	2:1/1:2	Διπλάσιο/ Ένα δεύτερο	Μέτρηση/ Επανάληψη μονάδας
		Δ.3.2	Κατασκευή ποσότητας για την σχέση 2:1 με γνωστή την ποσότητα 1:2	Συνεχής	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
		Δ.3.3	Κατασκευή ποσότητας 1:2 με γνωστή την ποσότητα 2:1	Συνεχής	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
		Δ.3.4	Κατασκευή ποσότητας για την σχέση 2:1 με γνωστή την ποσότητα 1:2	Συνεχής	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
		Δ.3.5	Κατασκευή ποσότητας 1:2 με γνωστή την ποσότητα 2:1	Συνεχής	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
		Δ.3.6	Κατασκευή ποσότητας για την σχέση 2:1 με γνωστή την ποσότητα 1:2	Συνεχής	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας

Δ.3.7	Κατασκευή ποσότητας 1:2 με γνωστή την ποσότητα 2:1	Συνεχής	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
Δ.3.8	Κατασκευή ποσότητας για την σχέση 2:1 με γνωστή την ποσότητα 1:2	Συνεχής	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.9	Κατασκευή ποσότητας 1:2 με γνωστή την ποσότητα 2:1	Συνεχής	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
Δ.3.10	Κατασκευή ποσότητας για την σχέση 2:1 με γνωστή την ποσότητα 1:2	Συνεχής	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.11	Κατασκευή ποσότητας 1:2 με γνωστή την ποσότητα 2:1	Συνεχής	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
Δ.3.12	Κατασκευή ποσότητας για την σχέση 2:1 με γνωστή την ποσότητα 1:2	Συνεχής	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.13	Κατασκευή ποσότητας 1:2 με γνωστή την ποσότητα 2:1	Συνεχής	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός

Δ.3.14	Κατασκευή ποσότητας 2:1 με γνωστή την ποσότητα 1:2	Διακριτή	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.15	Κατασκευή ποσότητας 1:2 με γνωστή την ποσότητα 2:1	Διακριτή	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
Δ.3.16	Κατασκευή ποσότητας 2:1 με γνωστή την ποσότητα 1:2	Διακριτή	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.17	Κατασκευή ποσότητας 1:2 με γνωστή την ποσότητα 2:1	Διακριτή	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
Δ.3.18	Κατασκευή ποσότητας 2:1 με γνωστή την ποσότητα 1:2	Διακριτή	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.19	Κατασκευή ποσότητας 1:2 με γνωστή την ποσότητα 2:1	Διακριτή	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
Δ.3.20	Κατασκευή ποσότητας 2:1 με γνωστή την ποσότητα 1:2	Διακριτή	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.21	Κατασκευή ποσότητας 1:2 με	Διακριτή	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός

			γνωστή την ποσότητα 2:1				
		Δ.3.22	Κατασκευή ποσότητας 2:1 με γνωστή την ποσότητα 1:2	Διακριτή	2:1	Διπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
		Δ.3.23	Κατασκευή ποσότητας 1:2 με γνωστή την ποσότητα 2:1	Διακριτή	1:2	Ένα δεύτερο	Ισομερισμός
8η	Δ.3	Δ.3.24	Παρουσίαση ιστορίας/ Σύγκριση ποσοτήτων και αναγνώριση μηχανής/ Χρήση εμπράγματης αναπαράστασης του λόγου	Συνεχής	1:3/3:1	Τριπλάσιο/Ένα τρίτο	Μέτρηση
		Δ.3.25	Κατασκευή ποσότητας 3:1 με γνωστή την ποσότητα 1:3	Συνεχής	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
		Δ.3.26	Κατασκευή ποσότητας 1:3 με γνωστή την ποσότητα 3:1	Συνεχής	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
		Δ.3.27	Κατασκευή ποσότητας 3:1 με	Συνεχής	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας

	γνωστή την ποσότητα 1:3				
Δ.3.28	Κατασκευή ποσότητας 1:3 με γνωστή την ποσότητα 3:1	Συνεχής	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
Δ.3.29	Κατασκευή ποσότητας 3:1 με γνωστή την ποσότητα 1:3	Συνεχής	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.30	Κατασκευή ποσότητας 1:3 με γνωστή την ποσότητα 3:1	Συνεχής	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
Δ.3.31	Κατασκευή ποσότητας 3:1 με γνωστή την ποσότητα 1:3	Συνεχής	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.32	Κατασκευή ποσότητας 1:3 με γνωστή την ποσότητα 3:1	Συνεχής	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
Δ.3.33	Κατασκευή ποσότητας 3:1 με γνωστή την ποσότητα 1:3	Συνεχής	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.33	Κατασκευή ποσότητας 1:3 με γνωστή την ποσότητα 3:1	Συνεχής	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός

Δ.3.34	Κατασκευή ποσότητας 3:1 με γνωστή την ποσότητα 1:3	Συνεχής	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.35	Κατασκευή ποσότητας 1:3 με γνωστή την ποσότητα 3:1	Συνεχής	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
Δ.3.36	Κατασκευή ποσότητας 3:1 με γνωστή την ποσότητα 1:3	Διακριτή	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.37	Κατασκευή ποσότητας 1:3 με γνωστή την ποσότητα 3:1	Διακριτή	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
Δ.3.38	Κατασκευή ποσότητας 3:1 με γνωστή την ποσότητα 1:3	Διακριτή	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.39	Κατασκευή ποσότητας 1:3 με γνωστή την ποσότητα 3:1	Διακριτή	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
Δ.3.40	Κατασκευή ποσότητας 3:1 με γνωστή την ποσότητα 1:3	Διακριτή	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.41	Κατασκευή ποσότητας 1:3 με	Διακριτή	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός

			γνωστή την ποσότητα 3:1				
		Δ.3.42	Κατασκευή ποσότητας 3:1 με γνωστή την ποσότητα 1:3	Διακριτή	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
		Δ.3.43	Κατασκευή ποσότητας 1:3 με γνωστή την ποσότητα 3:1	Διακριτή	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
		Δ.3.44	Κατασκευή ποσότητας 3:1 με γνωστή την ποσότητα 1:3	Διακριτή	3:1	Τριπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
		Δ.3.45	Κατασκευή ποσότητας 1:3 με γνωστή την ποσότητα 3:1	Διακριτή	1:3	Ένα τρίτο	Ισομερισμός
9η	Δ.3	Δ.3.46	Παρουσίαση ιστορίας/ Σύγκριση ποσοτήτων και αναγνώριση μηχανής/ Χρήση εμπράγματης αναπαράστασης του λόγου	Συνεχής	1:4/4:1	Τετραπλάσιο / Ένα τέταρτο	Μέτρηση/ Επανάληψη μονάδας
		Δ.3.47	Κατασκευή ποσότητας 4:1 με	Συνεχής	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας

	γνωστή την ποσότητα 1:4				
Δ.3.48	Κατασκευή ποσότητας 1:4με γνωστή την ποσότητα 4:1	Συνεχής	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
Δ.3.49	Κατασκευή ποσότητας 4:1 με γνωστή την ποσότητα 1:4	Συνεχής	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.50	Κατασκευή ποσότητας 1:4με γνωστή την ποσότητα 4:1	Συνεχής	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
Δ.3.51	Κατασκευή ποσότητας 4:1 με γνωστή την ποσότητα 1:4	Συνεχής	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.52	Κατασκευή ποσότητας 1:4με γνωστή την ποσότητα 4:1	Συνεχής	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
Δ.3.53	Κατασκευή ποσότητας 4:1 με γνωστή την ποσότητα 1:4	Συνεχής	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.54	Κατασκευή ποσότητας 1:4με γνωστή την ποσότητα 4:1	Συνεχής	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός

Δ.3.55	Κατασκευή ποσότητας 4:1 με γνωστή την ποσότητα 1:4	Συνεχής	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.56	Κατασκευή ποσότητας 1:4με γνωστή την ποσότητα 4:1	Συνεχής	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
Δ.3.57	Κατασκευή ποσότητας 4:1 με γνωστή την ποσότητα 1:4	Συνεχής	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.58	Κατασκευή ποσότητας 1:4με γνωστή την ποσότητα 4:1	Συνεχής	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
Δ.3.59	Κατασκευή ποσότητας 4:1 με γνωστή την ποσότητα 1:4	Διακριτή	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.60	Κατασκευή ποσότητας 1:4 με γνωστή την ποσότητα 4:1	Διακριτή	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
Δ.3.61	Κατασκευή ποσότητας 4:1 με γνωστή την ποσότητα 1:4	Διακριτή	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.62	Κατασκευή ποσότητας 1:4 με	Διακριτή	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός

	γνωστή την ποσότητα 4:1				
Δ.3.63	Κατασκευή ποσότητας 4:1 με γνωστή την ποσότητα 1:4	Διακριτή	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.64	Κατασκευή ποσότητας 1:4 με γνωστή την ποσότητα 4:1	Διακριτή	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
Δ.3.65	Κατασκευή ποσότητας 4:1 με γνωστή την ποσότητα 1:4	Διακριτή	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.66	Κατασκευή ποσότητας 1:4 με γνωστή την ποσότητα 4:1	Διακριτή	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός
Δ.3.67	Κατασκευή ποσότητας 4:1 με γνωστή την ποσότητα 1:4	Διακριτή	4:1	Τετραπλάσιο	Επανάληψη ποσότητας
Δ.3.68	Κατασκευή ποσότητας 1:4 με γνωστή την ποσότητα 4:1	Διακριτή	1:4	Ένα τέταρτο	Ισομερισμός

Βιβλιογραφία

Ελληνική Βιβλιογραφία

Βαμβακούση, Ξ., & Καλδρυμίδου, Μ. (2018). Το αναλυτικό πρόγραμμα ως εκπαιδευτικό υλικό: Το παράδειγμα του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου. Στο Χ. Σκουμπουρδή & Μ. Σκουμιός (Επιμ.), *Πρακτικά 3ου Πανελλήνιου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή: Εκπαιδευτικό υλικό Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών: Διαφορετικές χρήσεις, διασταυρούμενες πορείες μάθησης* (σσ. 302–311). Εργαστήριο Μαθησιακής Τεχνολογίας και Διδακτικής Μηχανικής του Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ. και Εργαστήριο Φυσικών Επιστημών του Π.Τ.Δ.Ε. του Πανεπιστημίου Αιγαίου.

Βράκα, Λ. (2018). *Ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης στην πρωτοσχολική ηλικία* [Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων]. Αποθετήριο Ολυμπιάς. https://doi.org/10.26268/heal.uoi.2955

Καλδρυμίδου, Μ. (1999). Διαχείριση προβληματικών καταστάσεων στο Νηπιαγωγείο: Από τη μοιρασιά της τούρτας στη μελέτη γεωμετρικών εννοιών. Στο VII Πανελλήνιο Συνέδριο Ψυχολογικής Έρευνας, Λευκωσία, Μάρτιος 1999.

Καλδρυμίδου, Μ. (2009). *Διδακτική Μαθηματικών Ι* [Πανεπιστημιακές σημειώσεις]. Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Καπέλου, Α. (2004). *Διδακτική των αριθμητικών εννοιών για παιδιά 5–6 ετών* [Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Αιγαίου]. Εθνικό Αρχείο Διδακτορικών Διατριβών. https://phdtheses.ekt.gr/eadd/handle/10442/15660

Λεμονίδης, Χ. Ε. (2016). *Στην τροχιά των ρητών*. Εκδόσεις Κυριακίδη.

Πήττα, Γ. (2019). *Υποστηρίζοντας την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης των νηπίων* [Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων]. Αποθετήριο Ολυμπιάς. https://doi.org/10.26268/heal.uoi.9699

Πήττα, Γ., Καλδρυμίδου, Μ., & Βαμβακούση, Ξ. (2019). Υποστηρίζοντας την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης των νηπίων: Μια μελέτη περίπτωσης. Στο *Πρακτικά 8ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών*

(Εν.Ε.Δι.Μ.): Σύγχρονες προσεγγίσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών (σσ. 314–323). ΕΝ.Ε.Δι.Μ.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

Avgeri, T., Bempeni, M., Tatsis, K., & Vamvakoussi, X. (2025). Teaching fraction multiplication and fraction division to prospective teachers: A design research study. In *Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14)*. Free University of Bozen-Bolzano; ERME.

Bakker, A., & van Eerde, H. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Doing qualitative research: Methodology and methods in mathematics education* (pp. 429–466). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_16

Bicknell, B., Young-Loveridge, J., & Nguyen, N. (2016). A design study to develop young children's understanding of multiplication and division. *Mathematics Education Research Journal, 28*(4), 567–583. https://doi.org/10.1007/s13394-016-0180-4

Björklund, C. (2016). Challenges and virtues of theory-driven education: A meta-study of variation theory implemented in early childhood mathematics education. *Education Inquiry, 7*(4), 405–419. https://doi.org/10.3402/edui.v7.28773

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511–558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Bobos, G., & Sierpinska, A. (2017). Measurement approach to teaching fractions: A design experiment in a pre-service course for elementary teachers. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 18*(2), 203–239. https://doi.org/10.4256/ijmtl.v18i2.65

Boyer, T. W., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2008). Development of proportional reasoning: Where young children go wrong. *Developmental Psychology, 44*(5), 1478–1490. https://doi.org/10.1037/a0013110

Callingham, R., & Siemon, D. (2021). Connecting multiplicative thinking and mathematical reasoning in the middle years. *The Journal of Mathematical Behavior, 61*, 100837. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100837

Cartwright, K. (2024). Interpreting young children's multiplicative strategies through their drawn representations. *Mathematics Education Research Journal, 36*, 367–397. https://doi.org/10.1007/s13394-023-00450-4

Charles, K., & Nason, R. (2000). Young children's partitioning strategies. *Educational Studies in Mathematics, 43*(2), 191–221. https://doi.org/10.1023/A:1017513716026

Cheeseman, J., Downton, A., Ferguson, S., & Roche, A. (2023). Meeting multiplicative thinking through thought-provoking tasks. *Mathematics Education Research Journal, 35*, 789–820. https://doi.org/10.1007/s13394-022-00413-1

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM Mathematics Education, 47*(5), 747–758. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0675-6

Christou, K. P., & Vamvakoussi, X. (2021). Natural number bias on evaluations of the effect of multiplication and division: The role of the type of numbers. *Mathematics Education Research Journal, 35*, 1–24. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00398-3

Clark, F. B., & Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1–5. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 41–51. https://doi.org/10.2307/749196

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203883389

Confrey, J. (1995). Student voice in examining "splitting" as an approach to ratio, proportions and fractions. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3–29). Universidade Federal de Pernambuco.

Confrey, J. (2008). *A synthesis of the research on rational number reasoning: A learning progression approach to synthesis* [Paper presentation]. International Congress of Mathematics Instruction, Monterrey, Mexico.

Confrey, J., Maloney, A. P., Nguyen, K. H., Mojica, G., & Myers, M. (2009). Equipartitioning/splitting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 345–352). International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Davis, G. (1991). A fraction of epistemology. In R. P. Hunting & G. Davis (Eds.), *Early fraction learning* (pp. 225–236). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3194-3_14

Davis, G. E., & Pepper, K. L. (1992). Mathematical problem solving by pre-school children. *Educational Studies in Mathematics, 23*(4), 397–415. https://doi.org/10.1007/BF00302442

Davydov, V. V. (1975). Logical and psychological problems of elementary mathematics as an academic subject. In L. P. Steffe (Ed.), *Children's capacity for learning mathematics: Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics* (Vol. 7, pp. 55–107). University of Chicago.

De Keersmaeker, K., Vanluydt, E., Onghena, P., & Van Dooren, W. (2024). The relation between proportional vocabulary and proportional reasoning abilities in young children. *European Journal of Psychology of Education, 39*, 2201–2221. https://doi.org/10.1007/s10212-023-00767-5

Degrande, T. (2019). *To add or to multiply? An investigation of children's preference for additive or multiplicative relations* [Doctoral dissertation], KU Leuven.

Desforges, A., & Desforges, C. (1980). Number-based strategies of sharing in young children. *Educational Studies, 6*, 97–109. https://doi.org/10.1080/0305569800060201

Ding, R., Tzur, R., Davis, A., Wei, B., Jin, X., & Jin, X. (2022). Distinguishing conceptions of multiplicative reasoning in Chinese elementary students: What sense correct and incorrect solutions might make to them? *Asian Journal for Mathematics Education, 1*(2), 175–195. https://doi.org/10.1177/27527263221110629

Dougherty, B. J., & Zilliox, J. (2003). Voyaging from theory to practice in teaching and learning: A view from Hawai'i. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics*

Education (Vol. 1, pp. 17–32). University of Hawai'i, Curriculum Research & Development Group.

Empson, S. B. (1995). Research into practice: Using sharing situations to help children learn fractions. *Teaching Children Mathematics, 2*(2), 110–114.

Empson, S. B. (1999). Equal sharing and shared meaning: The development of fraction concepts in a first-grade classroom. *Cognition and Instruction, 17*(3), 283–342. https://doi.org/10.1207/S1532690XCI1703_3

Eysenck, M. W., & Keane, M. T. (2010). *Cognitive psychology: A student's handbook* (6th ed.). Psychology Press.

Fereday, J., & Muir-Cochrane, E. (2006). Demonstrating rigor using thematic analysis: A hybrid approach of inductive and deductive coding and theme development. *International Journal of Qualitative Methods, 5*(1), 80–92. https://doi.org/10.1177/160940690600500107

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 3–17. https://doi.org/10.2307/748969

Fitzpatrick, C. L., & Hallett, D. (2019). Early understanding of fractions via early understanding of proportion and division. In K. M. Robinson, H. P. Osana, & D. Kotsopoulos (Eds.), *Mathematical learning and cognition in early childhood: Integrating interdisciplinary research into practice* (pp. 249–271). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-12895-1_14

Goodwin, K. (2008). The impact of interactive multimedia on kindergarten students' representations of fractions. *Issues in Educational Research, 18*(2), 103–117.

Gravemeijer, K., & Prediger, S. (2019). Topic-specific design research: An introduction. In G. Kaiser & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education* (pp. 33–57). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_2

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276–295). Macmillan.

Greer, B. (1994). Extending the meaning of multiplication and division. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 61–85). State University of New York Press.

Greer, B. (2012). Inversion in mathematical thinking and learning. *Educational Studies in Mathematics, 79*(3), 429–438. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9317-2

Hackenberg, A. J. (2010). Students' reasoning with reversible multiplicative relationships. *Cognition and Instruction, 28*(4), 383–432. https://doi.org/10.1080/07370008.2010.511565

Hackenberg, A. J., Norton, A., & Wright, R. J. (2016). *Developing fractions knowledge*. SAGE Publications.

Hackenberg, A. J., & Sevinç, Ş. (2024). Students' units coordinations. In P. C. Dawkins, A. J. Hackenberg, & A. Norton (Eds.), *Piaget's genetic epistemology for mathematics education research* (pp. 371–411). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-47386-9_11

Hunting, R. P., & Davis, G. (1991). *Early fraction learning*. Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3194-3

Hunting, R. P., Davis, G., & Bigelow, J. C. (1991). Higher order thinking in young children's engagements with a fraction machine. In R. P. Hunting & G. Davis (Eds.), *Early fraction learning* (pp. 73–90). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3194-3_5

Hunting, R. P., & Sharpley, C. (1991). Pre-fraction concepts of preschoolers. In R. P. Hunting & G. Davis (Eds.), *Early fraction learning* (pp. 9–26). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3194-3_2

Hurst, C. (2017). Children have the capacity to think multiplicatively, as long as …. *European Journal of STEM Education, 2*(3), Article 7. https://doi.org/10.20897/ejsteme/78169

Iannece, D., Mellone, M., & Tortora, R. (2010). Early multiplicative thought: A kindergarten path. In M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 121–127). PME.

Jacob, L., & Willis, S. (2003). The development of multiplicative thinking in young children. In L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert, & J. Mousley (Eds.), *Mathematics education research:*

Innovation, networking, opportunity: Proceedings of the 26th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (pp. 460–467). MERGA.

Jeong, Y., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2007). The development of proportional reasoning: Effect of continuous versus discrete quantities. *Journal of Cognition and Development, 8*(2), 237–256. https://doi.org/10.1080/15248370701202471

Koichu, B., & Harel, G. (2007). Triadic interaction in clinical task-based interviews with mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics, 65*(3), 349–365. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9054-0

Kornilaki, E., & Nunes, T. (2005). Generalising principles in spite of procedural differences: Children's understanding of division. *Cognitive Development, 20*(3), 388–406. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2005.05.004

Kouba, V. L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(2), 147–158. https://doi.org/10.2307/749279

Kullberg, A., Runesson Kempe, U., & Marton, F. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics? *ZDM Mathematics Education, 49*, 559–569. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0858-4

Lamon, S. J., & Lesh, R. (1992). Interpreting responses to problems with several levels and types of correct answers. In R. Lesh & S. J. Lamon (Eds.), *Assessment of authentic performance in school mathematics* (pp. 319–342). AAAS Press.

Lemonidis, C. E., & Gkolfos, A. (2020). Number line in the history and the education of mathematics. *Inovacije u Nastavi, 33*(1), 36–56. https://doi.org/10.5937/inovacije2001036L

Long, M. C. (2011). *Mathematical, cognitive and didactic elements of the multiplicative conceptual field investigated within a Rasch assessment and measurement framework* [Unpublished doctoral dissertation]. University of Cape Town.

Lucas, J. R. (2000). *Conceptual roots of mathematics*. Routledge.

Mamede, E. (2018). Young children can learn to reason and to name fractions. In B. Maj-Tatsis, K. Tatsis, & E. Swoboda (Eds.), *Mathematics in real world* (pp. 195–205). Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Mamede, E., & Nunes, T. (2008). Building on children's informal knowledge in the teaching of fractions. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 30th North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 345–352). Cinvestav-UMSNH.

Maher, C. A., & Sigley, R. (2020). Task-based interviews in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 821–824). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_147

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge.

McCrink, K., & Spelke, E. S. (2016). Non-symbolic division in childhood. *Journal of Experimental Child Psychology, 142*, 66–82. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2015.09.015

McCrink, K., & Wynn, K. (2007). Ratio abstraction by 6-month-old infants. *Psychological Science, 18*(8), 740–745. https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.2007.01969.x

Mellone, M., Spadea, M., & Tortora, R. (2013). A story-telling approach to the introduction of the multiplicative structure at kindergarten. *Didactica Mathematicae, 35*. https://doi.org/10.14708/dm.v35i0.531

Mellone, M., Spadea, M., Lo Sapio, R. M., & Artiano, G. (2026). Storytelling activity for stimulating proportional reasoning in young children. In T. Meaney, C. Benz, M. G. Fiorentino, A. Montone, & B. Di Paola (Eds.), *Engaging with mathematics in the early years: Results from the POEM6 Conference* (pp. 79–93). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-032-16065-2_6

Misailidou, C., & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(3), 335–368. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00025-7

Mix, K. S., Huttenlocher, J., & Levine, S. C. (2002). *Quantitative development in infancy and early childhood*. Oxford University Press.

Mononen, R., Aunio, P., & Koponen, T. (2014). Investigating RightStart Mathematics kindergarten instruction in Finland. *Journal of Early Childhood Education Research, 3*(1), 2–26.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. In S. Donovan & J. D. Bransford (Eds.), *How students learn: History, mathematics, and science in the classroom* (pp. 309–349). National Academies Press.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 309–330. https://doi.org/10.2307/749783

Mulligan, J. T., & Watson, J. M. (1998). A developmental multi-modal model for multiplication and division. *Mathematics Education Research Journal, 10*(2), 61–86. https://doi.org/10.1007/BF03217343

Ng, S. F. (2018). Function tasks, input, output, and the predictive rule: How some Singapore primary children construct the rule. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 167–193). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_7

Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27–52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3

Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Blackwell.

Nunes, T., & Bryant, P. (2010). *Understanding relations and their graphical representation*. Nuffield Foundation.

Nunes, T., & Bryant, P. (2015). The development of mathematical reasoning. In L. S. Liben, U. Müller, & R. M. Lerner (Eds.), *Handbook of child psychology and developmental science: Vol. 2. Cognitive processes* (7th ed., pp. 715–764). John Wiley & Sons. https://doi.org/10.1002/9781118963418.childpsy217

Nunes, T., Bryant, P., & Watson, A. (2009). *Key understandings in mathematics learning*. Nuffield Foundation.

Papic, M. M., Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 237–268. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237

Papic, M., & Mulligan, J. T. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice: Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 591–600). MERGA.

Park, J., & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development, 16*(3), 763–773. https://doi.org/10.1016/S0885-2014(01)00058-2

Piaget, J. (1952). *The child's conception of number*. Routledge & Kegan Paul.

Pitta, G., Kaldrimidou, M., & Vamvakoussi, X. (2021). Enhancing the development of multiplicative reasoning in early childhood education: A case study. In *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Mathematics Education in the 4th Industrial Revolution: Thinking Skills for the Future*, July 19–23, Khon Kaen, Thailand.

Polotskaia, E., & Savard, A. (2021). Some multiplicative structures in elementary education: A view from relational paradigm. *Educational Studies in Mathematics, 106*(3), 447–469. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09979-8

Purpura, D. J., Baroody, A. J., Eiland, M. D., & Reid, E. E. (2016). Fostering first graders' reasoning strategies with basic sums: The value of guided instruction. *The Elementary School Journal, 117*(1), 72–100. https://doi.org/10.1086/687809

Rakison, D. H., & Woodward, A. L. (2008). New perspectives on the effects of action on perceptual and cognitive development. *Developmental Psychology, 44*(5), 1209–1213. https://doi.org/10.1037/a0012999

Sarama, J., DiBiase, A. M., Clements, D. H., & Spitler, M. E. (Eds.). (2004). *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Routledge.

Siegler, R. S. (2007). Cognitive variability. *Developmental Science, 10*(1), 104–109. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2007.00571.x

Siemon, D. (2013). Launching mathematical futures: The key role of multiplicative thinking. In S. Herbert, J. Tilley, & T. Spencer (Eds.), *Mathematics: Launching futures: Proceedings of the 24th Biennial Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers* (pp. 36–52). Australian Association of Mathematics Teachers.

Siemon, D., Bleckly, J., & Neal, D. (2012). Working with the big ideas in number and the Australian Curriculum: Mathematics. In B. Atweh, M. Goos, R. Jorgensen, & D. Siemon (Eds.), *Engaging the Australian Curriculum: Mathematics—Perspectives from the field* (pp. 19–45). Mathematics Education Research Group of Australasia.

Siemon, D., Breed, M., & Virgona, J. (2005). From additive to multiplicative thinking: The big challenge of the middle years. In J. Mousley, L. Bragg, & C. Campbell (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the Mathematical Association of Victoria* (pp. 278–286). Mathematical Association of Victoria.

Siemon, D., Izard, J., Breed, M., & Virgona, J. (2006). [Conference paper]. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 113–120). PME.

Singer, J. A., & Resnick, L. B. (1992). Representations of proportional relationships: Are children part-part or part-whole reasoners? *Educational Studies in Mathematics, 23*, 231–246. https://doi.org/10.1007/BF02309531

Singer-Freeman, K. E., & Goswami, U. (2001). Does half a pizza equal half a box of chocolates? Proportional matching in an analogy task. *Cognitive Development, 16*(3), 811–829. https://doi.org/10.1016/S0885-2014(01)00064-6

Skoumpoudi, C., & Sofikiti, D. (2009). Young children's material manipulating strategies in division task. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 137–145). PME.

Sophian, C. (2003). Young children's reasoning about many-to-one correspondences. *Child Development, 74*(5), 1418–1432. https://doi.org/10.1111/1467-8624.00615

Sophian, C. (2004). Mathematics for the future: Developing a Head Start curriculum to support mathematics learning. *Early Childhood Research Quarterly, 19*(1), 59–81. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2004.01.015

Sophian, C. (2008). *The origins of mathematical knowledge in childhood*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315085654

Steffe, L. P. (1992). Schemes of action and operation involving composite units. *Learning and Individual Differences, 4*(3), 259–309. https://doi.org/10.1016/1041-6080(92)90005-Y

Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 3–39). State University of New York Press.

Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9562-7

Steffe, L. P. (2012). On children's construction of quantification. In R. L. Mayes & L. L. Hatfield (Eds.), *Quantitative reasoning in mathematics and science education: Papers from an international STEM research symposium* (Vol. 3, pp. 143–148). University of Wyoming Press.

Steffe, L. P. (2013). On children's construction of quantification. In R. L. Mayes & L. L. Hatfield (Eds.), *Quantitative reasoning in mathematics and science education: Papers from an international STEM research symposium* (WISDOMe Monographs, Vol. 3, pp. 13–41). University of Wyoming.

Sun, X. (2011). "Variation problems" and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook examples. *Educational Studies in Mathematics, 76*(1), 65–85. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9263-4

Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics, 25*(3), 165–208. https://doi.org/10.1007/BF01273861

Tzur, R. (2019). Developing fractions as multiplicative relations: A model of cognitive reorganization: Merging perspectives from psychology and mathematics education. In A. H. Norton & M. W. Alibali (Eds.), *Constructing number* (pp. 163–191). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00491-0_8

Tzur, R., Johnson, H. L., McClintock, E., Kenney, R. H., Xin, Y. P., Si, L., Woodward, J., Hord, C., & Jin, X. (2013). Distinguishing schemes and tasks in children's development of multiplicative reasoning. *PNA, 7*(3), 85–101. https://doi.org/10.30827/pna.v7i3.6128

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14*(5), 453–467. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.013

Vamvakoussi, X. (2016). *The natural number bias: What do we know and where do we go from here?* [Keynote address]. 10th International Conference on Conceptual Change, Florina, Greece.

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2018). Bridging psychological and educational research on rational number knowledge. *Journal of Numerical Cognition, 4*(1), 84–106. https://doi.org/10.5964/jnc.v4i1.82

Vamvakoussi, X. (2019). The use of analogies in mathematics instruction: Affordances and challenges. In D. C. Geary, D. B. Berch, R. J. Ochsendorf, & K. Mann Koepke (Eds.), *Cognitive foundations for improving mathematical learning* (Vol. 5, pp. 247–267). Academic Press. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-815952-1.00010-4

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Elia, I. (2020). Mapping kindergartners' quantitative competence. *ZDM Mathematics Education, 52*, 805–819. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01146-0

Vanluydt, E., Degrande, T., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2020). Early stages of proportional reasoning: A cross-sectional study with 5- to 9-year-olds. *European Journal of Psychology of Education, 35*(3), 529–547. https://doi.org/10.1007/s10212-019-00434-8

Vanluydt, E., Supply, A.-S., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2021). The importance of specific mathematical language for early proportional reasoning. *Early Childhood Research Quarterly, 55*, 193–200. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2020.12.003

Vanluydt, E., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2022a). The role of relational preference in early proportional reasoning. *Learning and Individual Differences, 93*, 102108. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2021.102108

Vanluydt, E., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2022b). The early development of proportional reasoning: A longitudinal study of 5- to 8-year-olds. *Journal of Educational Psychology, 114*(6), 1343–1358. https://doi.org/10.1037/edu0000734

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127–174). Academic Press.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41–60). State University of New York Press.

Vogler, A.-M. (2021). Indirect learning processes as key variable in early mathematics learning. In M. Inprasitha, N. Changsri, & N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 639–647). PME.

Warren, E., & Cooper, T. J. (2007). Repeating patterns and multiplicative thinking: Analysis of classroom interactions with 9-year-old students that support the transition from the known to the novel. *Journal of Classroom Interaction, 41/42*(2/1), 7–17.

Watson, A. (2017). Pedagogy of variations: Synthesis of various notions of variation pedagogy. In R. Huang & Y. Li (Eds.), *Teaching and learning mathematics through variation: Confucian heritage meets Western theories* (pp. 85–103). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-782-5_5

Wilkins, J. L. M., & Norton, A. (2018). Learning progression toward a measurement concept of fractions. *International Journal of STEM Education, 5*, Article 27. https://doi.org/10.1186/s40594-018-0119-2

Wright, V. J. (2011). *The development of multiplicative thinking and proportional reasoning: Models of conceptual learning and transfer* [Doctoral dissertation, University of Waikato]. https://hdl.handle.net/10289/5984

Zwanch, K., & Wilkins, J. L. M. (2021). Releasing the conceptual spring to construct multiplicative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 106*(1), 151–170. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09999-4

Ηλεκτρονικές Πηγές

American Psychological Association. (2018). Schema. In *APA dictionary of psychology*. Retrieved August 10, 2026, from https://dictionary.apa.org/schema

Common Core State Standards Initiative. (n.d.). *Mathematics standards: Kindergarten—Counting and cardinality*. https://corestandards.org/wp-content/uploads/2023/09/Math_Standards1.pdf

Curriculum Development Council. (2017). *Kindergarten education curriculum guide: Joyful learning through play, balanced development all the way*. Education Bureau, The Government of the Hong Kong Special Administrative Region. https://www.edb.gov.hk/attachment/en/curriculum-development/major-level-of-edu/preprimary/ENG_KGECG_2017.pdf

Finnish National Agency for Education. (2022). *National core curriculum for early childhood education and care 2022*. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/National%20core%20curriculum%20for%20ECEC%202022.pdf

FutureSchool. (n.d.). *China curriculum*. https://www.futureschool.com/china-curriculum/#552f66315fc24