

ΑΠΟΣΤ. ΧΑΤΖΗΔΗΜΟΥ

Τακτικού Καθηγητή
Αριθμητικής Αναλύσεως
Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Δεύτερη Έκδοση

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1981

ΑΠΟΣΤ. ΧΑΤΖΗΔΗΜΟΥ

Τακτικού Καθηγητή

Ἀριθμητικῆς Ἀναλύσεως

Πανεπιστημίου Ἰωαννίνων

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΚΔΟΣΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1981



Ἀφιερώνεται
σ' όλους ὅσους
θέλουν (νά μάθουν) καί ἄρα μποροῦν .

Κάθε γνήσιο αντίτυπο πρέπει να έχει την υπογραφή του συγγραφέα.

Δέν επιτρέπεται ή μερική ή όλική ανατύπωση ή μετάφραση του παρόντος βιβλίου.

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	xi
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1.1. Γενικά	1
1.2. Σφάλματα	1
1.2.1. Έννοιες και όρισμοί	1
1.2.2. Σφάλματα στους υπολογισμούς	2
1.2.3. Μετάδοση σφαλμάτων κατά τους υπολογισμούς ...	4
1.3. Ύπολογισμός της τιμής πολυωνύμου, με πραγματικούς συντελεστές, και των παραγώ- γων του σέ γνωστό σημείο	13
1.3.1. Ύπολογισμός της τιμής πολυωνύμου για μία πραγματική τιμή της μεταβλητής του	13
1.3.2. Ύπολογισμός των τιμών των παραγώγων πολυ- ωνύμου για μία πραγματική τιμή της μετα- βλητής του	16
1.3.3. Ύπολογισμός της τιμής πολυωνύμου για μία μιγαδική τιμή της μεταβλητής του	18
1.3.4. Ύπολογισμός της τιμής της πρώτης παραγώ- γου πολυωνύμου για μία μιγαδική τιμή της μεταβλητής του	20
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	22
2. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ	27
2.1. Γενικά	27
2.2. Έννοιες, όρισμοί και σχέσεις πεπερασμένων διαφορών	27

2.3.	Μετάδοση σφαλμάτων σε διαφορές ανώτερης τάξης	34
2.3.1.	Γενικά	35
2.3.2.	Μετάδοση σφαλμάτων	35
2.3.3.	Μετάδοση σφαλμάτων στρογγυλεύσεως	36
2.3.4.	Μετάδοση ενός απομονωμένου σφάλματος	37
2.4.	Γραμμικοί Τελεστές Διαφορών	39
2.4.1.	Γενικά	39
2.4.2.	Βασικές έννοιες και όρισμοί για τους τελεστές	40
2.4.3.	Λογισμός των τελεστών Δ, ∇, δ, ε και D	41
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	48
3.	ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ	53
3.1.	Γενικά	53
3.2.	Τύποι παρεμβολής που χρησιμοποιούν πεπερασμένες διαφορές	54
3.2.1.	Τύπος παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton - Gregory	54
3.2.2.	Τύπος παρεμβολής των προς τα πίσω διαφορών των Newton - Gregory	56
3.2.3.	Τύπος παρεμβολής των κεντρικών διαφορών του Bessel	57
3.2.4.	Πλήθος όρων που χρησιμοποιούνται στους τύπους παρεμβολής	58
3.3.	Τύπος παρεμβολής του Lagrange	60
3.4.	Διόρθωση στους τύπους παρεμβολής	62
3.5.	Διηρημένες διαφορές	65
3.5.1.	Έννοιες, όρισμοί και σχέσεις διηρημένων και πεπερασμένων διαφορών	65
3.5.2.	Τύπος παρεμβολής των διηρημένων διαφορών	

	του Newton	70
3.5.3.	Εύρεση εκφράσεων για τη διηρημένη διαφορά $f(x, x_0, \dots, x_n)$ και την πρώτη παράγωγό της	74
3.5.4.	Τύποι παρεμβολής των διηρημένων δια- φορών του Newton για τιμές της ανε- ξάρτητης μεταβλητής που ισαπέχουν	76
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	77
4.	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ	81
4.1.	Γενικά	81
4.2.	Τύποι αριθμητικής παραγωγίσεως για τι- μές της ανεξάρτητης μεταβλητής που ισα- πέχουν, με τη βοήθεια πολυωνύμων παρεμ- βολής	81
4.3.	Τύποι αριθμητικής παραγωγίσεως, για τι- μές της ανεξάρτητης μεταβλητής που ισα- πέχουν, με τη βοήθεια συμβολικών μεθόδων	83
4.4.	Τύποι αριθμητικής παραγωγίσεως για τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής που δεν ισαπέ- χουν	84
4.5.	Σφάλμα αποκοπής της πρώτης παραγώγου	87
4.6.	Αριθμητική παραγωγή με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών	89
4.6.1.	Περιγραφή της μεθόδου	89
4.6.2.	Σφάλμα αποκοπής της παραγώγου στη μέθο- δο των προσδιοριστέων συντελεστών	92
4.7.	Γενικές Παρατηρήσεις	94
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	96
5.	ΒΑΣΙΚΑ ΣΥΝΟΛΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ	99
5.1.	Γενικά	99

5.2.	Πολυώνυμα του Legendre	101
5.3.	Πολυώνυμα του Chebyshev	115
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	127
6.	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ	131
6.1.	Γενικά	131
6.2.	Τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης των Newton - Cotes	131
6.2.1.	Γενικά	131
6.2.2.	Κλειστοί τύποι αριθμητικής ολοκλήρω- σεως των Newton - Cotes	132
6.2.3.	Άνοικτοί τύποι αριθμητικής ολοκλήρω- σεως των Newton - Cotes	136
6.2.4.	Τύποι μερικής έκτασης αριθμητικής ό- λοκλήρωσης των Newton - Cotes	137
6.3.	Σφάλμα αποκοπής κατά την αριθμητική ολοκλήρωση των Newton - Cotes	138
6.4.	Τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης, για τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής που ίσαπέχουν, με τη βοήθεια συμβολικών μεθόδων	144
6.5.	Αριθμητική ολοκλήρωση με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών	146
6.5.1.	Γενικά	146
6.5.2.	Τό γενικότερο πρόβλημα της αριθμητικής ολοκλήρωσης	147
6.5.2.1.	Γενικά	147
6.5.2.2.	1η Περίπτωση: $x_i i=0(1)n$ δεδομένα και $a_i i=0(1)n$ προσδιοριστέα	149
6.5.2.2.1.	Γενικά	149
6.5.2.2.2.	Κλειστοί και άνοικτοί τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης των Newton - Cotes	150

6.5.2.3.	2η Περίπτωση: $\alpha_i i=0(1)n$ δεδομένα καί $x_i i=0(1)n$ προσδιοριστέα	153
6.5.2.3.1.	Γενικά	153
6.5.2.3.2.	Αριθμητική Ολοκλήρωση του Chebyshev	155
6.5.2.3.3.	Σφάλμα αποκοπής στην αριθμητική ολο- κλήρωση του Chebyshev	158
6.5.2.4.	3η Περίπτωση: α_i καί $x_i i=0(1)n$ προσδιοριστέα. Αριθμητική Ολοκλήρωση του Gauss	161
6.5.2.4.1.	Γενικά	161
6.5.2.4.2.	Αριθμητική Ολοκλήρωση των Gauss - Legendre	162
6.5.2.4.3.	Σφάλμα αποκοπής στην αριθμητική ολο- κλήρωση των Gauss - Legendre	166
6.5.2.4.4.	Αριθμητική Ολοκλήρωση των Gauss - Chebyshev	169
6.5.2.4.5.	Σφάλμα αποκοπής στην αριθμητική ολο- κλήρωση των Gauss - Chebyshev	172
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	173
7.	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	179
7.1.	Γενικά	179
7.2.	Μέθοδος της διχοτομήσεως ή Μέθοδος του Bolzano	181
7.2.1.	Περιγραφή της μεθόδου	181
7.2.2.	Γεωμετρική έρμηνεία της μεθόδου της διχοτομήσεως	184
7.3.	Μέθοδος της γραμμικής παρεμβολής ή Μέθοδος της έσφαλμένης θέσης (Regula Falsi)	185
7.3.1.	Περιγραφή της μεθόδου	185
7.3.2.	Γεωμετρική έρμηνεία της μεθόδου Re- gula - Falsi	190

7.4.	Γενική επαναληπτική μέθοδος ή Μέθοδος των Picard - Peano	191
7.4.1.	Περιγραφή της μεθόδου	192
7.4.2.	Σύγκλιση της γενικής επαναληπτικής με- θόδου	193
7.4.3.	Γεωμετρική έρμηνεία της γενικής επανα- ληπτικής μεθόδου	199
7.4.4.	Είδος συγκλίσεως της γενικής επαναλη- πτικής μεθόδου	203
7.5.	Μέθοδος των Newton - Raphson	206
7.5.1.	Περιγραφή της μεθόδου	206
7.5.2.	Μέθοδος των Newton - Raphson για την εύρεση της τετραγωνικής ρίζας	209
7.5.3.	Σύγκλιση της μεθόδου των Newton - Raphson ...	212
7.5.4.	Γεωμετρική έρμηνεία της μεθόδου των New- ton - Raphson	213
7.6.	Η δ^2 - μέθοδος του Aitken και η Μέθοδος του Steffensen	215
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	220
8.	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ	227
8.1.	Γενικά	227
8.2.	Γενική επαναληπτική μέθοδος για την επί- λυση ενός μη γραμμικού συστήματος δύο έ- ξισώσεων με δύο άγνωστους	228
8.2.1.	Γενικά	228
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	233

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ Ἀριθμητικὴ Ἀνάλυση (Α.Α.) ἀποτελεῖ ἕναν ἀπὸ τοὺς κλάδους τῶν Σύγχρονων Ἐφαρμοσμένων Μαθηματικῶν πού, ὅπως καὶ οἱ ἄλλοι κλάδοι τους, ἔχει τὶς ρίζες τῆς στῆν ἀρχαιότητα. Πρῶτα οἱ Βαβυλώνιοι, ἔπειτα οἱ Αἰγύπτιοι καὶ τέλος οἱ Ἕλληνες ἀσχολήθηκαν μὲ μεθόδους, πού θά μπορούσαν νά χαρακτηριστοῦν σάν πρόδρομοι τῶν ἀντιστοίχων τῆς Α.Α. Ἰδιαίτερα ἀπὸ τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνες ἀναφέρουμε χαρακτηριστικὰ τὸν Ἀρχιμήδη, ὁ ὁποῖος, χρησιμοποιώντας τὴν κλασικὴ πιά στῆν Α.Α. μέθοδο τῶν προσεγγίσεων, βρῆκε γιὰ τὸν π τιμὴ μεταξὺ $3\frac{10}{71}$ καὶ $3\frac{1}{7}$. Ἡ ἀνάπτυξη τῆς Α.Α. διαμέσου τῶν αἰῶνων ἔγινε μὲ ἀργό ρυθμὸ καὶ ἀποτελοῦσε πάντοτε αὐτὴ ἕνα παρακλάδι τῶν ἄλλων Μαθηματικῶν μέχρις ὅτου δύο ἀπὸ τοὺς μεγαλύτερους μαθηματικούς ὁ Newton πρῶτα καὶ ὁ Gauss ἀργότερα ἔθεσαν τὶς βάσεις γιὰ τὴ θεωρητικὴ θεμελίωσή της.

Οἱ ἀνάγκες τῶν ἐφαρμογῶν τῶν Μαθηματικῶν στὶς ἄλλες Ἐπιστῆμες καὶ ἡ ὕπαρξη τῶν θεωρητικῶν βάσεων ἀποτέλεσαν τὴν ἀρχὴ τῆς ἀναπτύξεως τῆς Α.Α. σὲ ἀνεξάρτητο κλάδο. Ἡ ἀρχὴ αὐτὴ μπορεῖ νά τοποθετηθεῖ στὰ μέσα μὲ τέλη τοῦ περασμένου αἰῶνα. Ἡ ἐκρηκτικὴ ὁμως ἀνάπτυξη τῆς Α.Α. ἔγινε ἀμέσως μετὰ τὸν Δεύτερο Παγκόσμιον Πόλεμον παράλληλα μὲ τὴν ἀνάπτυξη τῶν Ἡλεκτρονικῶν Ὑπολογιστῶν (Η.Υ.), ἔτσι ὥστε ἡ μία ἀνάπτυξη ἐπηρέασε καὶ βοήθησε τὴν ἄλλη. Ἡ ἐξήγηση τοῦ φαινομένου αὐτοῦ βρίσκεται στὸ γεγονὸς ὅτι οἱ μαθηματικὲς δυνατότητες τῶν Η.Υ. ἐξαντλιοῦνται στὶς τέσσερις στοιχειώδεις πράξεις τῆς Ἀριθμητικῆς. Εἶναι γνωστὸ, πῶς σέ ὅ,τι ἀφορᾷ ἀριθμητικὲς πράξεις, οἱ (ψηφιακοί) Η.Υ. μποροῦν νά ἐκτελοῦν μόνον πρόσθεση καὶ κατὰ κάποιον τρόπο (σάν συμ-

πλήρωμα της προσθέσεως) αφαίρεση. Έχοντας τή δυνατότητα προσθέσεως και αφαιρέσεως μπορούν ακόμη νά έκτελοῦν πολλαπλασιασμό και διαίρεση, άποῦ οἱ δύο τελευταῖες πράξεις γίνονται μέ έπαναληπτική έφαρμογή τῶν αντίστοιχων δύο προηγουμένων. Τά προβλήματα ὅμως και οἱ έφαρμογές τῶν Μαθηματικῶν στήν πράξη περιέχουν και άλλες πράξεις πέρα από τίς τέσσερις βασικές τῆς Ἀριθμητικῆς. Π.χ. εύρεση τετραγωνικῆς ρίζας, λογαρίθμου, φυσικῶν τριγωνομετρικῶν αριθμῶν, παραγώγου, ὁλοκληρώματος κλπ. Ἐτσι ἡ έφαρμογή και ἡ έξάπλωση τῶν Η.Υ. θά ἦταν πάρα πολύ περιορισμένη άν δέν ὑπῆρχε ἡ Α.Α. τῆς ὁποίας βασικός σκοπός εἶναι ἡ ανάπτυξη μεθόδων, πού περιέχουν τίς τέσσερις πράξεις τῆς Ἀριθμητικῆς και μόνο (ἀριθμητικῶν μεθόδων), γιά τήν εύρεση ἀριθμητικῶν αποτελεσμάτων από ἀριθμητικά δεδομένα, φτάνοντας στό ἀποτέλεσμα μέ τόν συντομότερο και ἀκριβέστερο δυνατό τρόπο. Μέ άλλα λόγια βασικός σκοπός και προσπάθεια τῆς Α.Α. εἶναι ἡ μετατροπή ὅλων τῶν γνωστῶν Μαθηματικῶν σέ άλλα, ἰσοδύναμα κατά κάποια έννοια, στά ὁποῖα ὅμως μόνο οἱ τέσσερις πράξεις τῆς Ἀριθμητικῆς θά περιέχονται. Ἐτσι εκπληρώντας τόν σκοπό αὐτό ἡ Α.Α. κατορθώνει πολλές φορές και δίνει λύσεις και σέ προβλήματα στά ὁποῖα ἡ Ἀνάλυση και ἡ Ἀλγεβρα ἀδυνατοῦν νά δώσουν ἢ οἱ λύσεις πού δίνουν αὐτοῖ οἱ δύο σπουδαῖοι κλάδοι τῶν θεωρητικῶν Μαθηματικῶν εἶναι πρακτικά ἀνεφάρμοστες. Σάν συνέπεια αὐτῶν, πού μόλις ἀναφέραμε, έχουμε ἀμέσως ὅτι οἱ έφαρμογές τῶν Μαθηματικῶν στήν πράξη καθώς και τά αντίστοιχα προβλήματα μπορούν νά καταστοῦν έπεξεργάσιμα από ἕναν Η.Υ. μόνο μέ τή βοήθεια και τή συνδρομή τῆς Α.Α. Αὐτός εἶναι βασικά ὁ λόγος, πού ἡ Α.Α. εἶναι ὄχι μόνο χρήσιμη και ἀπαραίτητη στούς άλλους κλάδους τῶν Ἐφαρμοσμένων Μαθηματικῶν, ὅπως εἶναι ἡ Μηχανική, ἡ Στατιστική, ἡ Ἐπιστήμη τῶν Ἡλεκτρονικῶν Ὑπολογιστῶν, ἡ Ἐπιχειρησιακή Ἐρευνα κλπ, ἀλλά και σέ ὅλους τούς κλάδους τῶν Ἐφαρμοσμένων Ἐπιστημῶν πού εἰσχωρεῖ ὁ Η.Υ., γιά τήν επίλυση τῶν προβλημάτων τους, ὅπως

είναι η Φυσική, η Αστρονομία, η Μετεωρολογία, η Ναυπηγική, η Τοπογραφία κλπ.

Επηρεασμένοι ίσως από την ορολογία που ισχύει στους Η.Υ. χρησιμοποιούμε και την έκφραση πληροφορίες είσοδου για τα αριθμητικά δεδομένα ενός προβλήματος, ενώ για τα αριθμητικά αποτελέσματα την έκφραση πληροφορίες έξοδου. Η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείται για την επίλυση ενός προβλήματος (δηλαδή με τις μεθόδους της Α.Α.) καλείται συνήθως αλγόριθμος. Οι αντίστοιχοι υπολογισμοί γίνονται είτε με το χέρι είτε με μία αριθμομηχανή είτε με έναν Η.Υ. Την έκλογή καθορίζουν από το ένα μέρος το είδος και το πλήθος των πράξεων που περιέχονται στον αλγόριθμο του προβλήματος, που επιλύεται, και από το άλλο μέρος τα διαθέσιμα μέσα.

Τό παρόν βιβλίο μαζί με ένα δεύτερο που ακολουθεί, (και που θα πρέπει να τά βλέπει κανείς σαν ένα ενιαίο διτομο έργο) γράφτηκε καταρχήν με σκοπό να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις του νέου προγράμματος των τριτοετών και τεταρτοετών φοιτητών του Μαθηματικού Τμήματος της Φυσικομαθηματικής Σχολής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, που θα επιλέξουν την κατεύθυνση Αριθμητική Ανάλυσις - Ηλεκτρονικοί Υπολογισταί, από τα ακαδημαϊκά έτη 1978-79 και 1979-80 αντίστοιχα.

Ο συγγραφέας, δεχόμενος σαν αξίωμα το γεγονός ότι "η επανάληψη είναι η αρχή της μαθήσεως", προσπάθησε ώστε η συγγραφή του όλου έργου να γίνει με τέτοιο τρόπο που η ύλη του να αποτελεί μία επέκταση σε βάθος και σε πλάτος της ύλης (που διδάχτηκε στο δεύτερο έτος) του βιβλίου "Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση". Αυτό, πιστεύει ότι, θα βοηθήσει τους φοιτητές με μία έμμεση επανάληψη γνωστής ύλης στην πλήρη συνειδητοποίηση της παλιάς, που θα έχει σαν αποτέλεσμα την καλύτερη αφομοίωση της ύλης του νέου βιβλίου.

ου. Ἡ ἀρχὴ αὐτὴ ἀκολουθεῖται ἀπὸ πολλὰ Πανεπιστήμια προηγμένων ἐπιστημονικὰ χωρῶν καὶ βρίσκεται ὅπωςδὴποτε σὲ ἀντίθεση μὲ αὐτὸ πού συνήθως ἐφαρμόζεται στὴ χώρα μας. Ἐδῶ, μὲ τὴν ἐναρξὴ τῶν παραδόσεων ἐνὸς μαθήματος πού ἔρχεται σάν συνέχεια κάποιου ἄλλου, θεωρεῖται τὸ δεύτερο σάν γνωστό, ἢ στὴν καλύτερη περίπτωσι δίνεται μία σύντομη ἐπανάληψη μερικῶν βασικῶν ἐννοιῶν του, καὶ προχωροῦμε στὴν παράδοσι τῆς νέας ὕλης. Ἀποτέλεσμα τῆς τακτικῆς αὐτῆς εἶναι νὰ δημιουργεῖται ἓνα χάσμα μεταξὺ τῶν παλιῶν (καὶ ἐπομένως θεωρούμενων ἀποκτημένων!) γνώσεων καὶ τῶν νέων μὲ ἄμεση συνέπεια τὴ δυσκολία παρακολουθήσεως τῆς νέας προσφερόμενης ὕλης μὲ ὅλες τὶς γνωστὲς ἐπιπτώσεις. Τὸ ἀντελίκον δὲ σκοπὸς τῆς καλύτερης ἀφομοιώσεως πετυχαίνεται μὲ τὸν τρόπο προσπάθειας συγγραφῆς τοῦ νέου βιβλίου ἀφήνεται στὴν κρίσι τῶν μαθητῶν μας.

Ὁ τρόπος τῆς συγγραφῆς τοῦ νέου βιβλίου, ὅπως ἐγίνε, πετυχαίνει καὶ ἓνα δεύτερο σκοπὸ. Πιὸ συγκεκριμένα, πετυχαίνει τὴν πλήρη ἀνεξαρτητοποίηση τοῦ παρόντος βιβλίου ἀπὸ τὸ προηγούμενον "Εἰσαγωγή στὴν Ἀριθμητικὴ Ἀνάλυσι". Αὐτὸ ἔχει σάν ἀποτέλεσμα, γιὰ τὸ παρὸν βιβλίο, νὰ μπορεῖ νὰ ἀπευθυνθεῖ κατευθεῖαν σὲ πιὸ ἀπαιτητικούς ἀναγνώστες, πού θὰ ἤθελαν νὰ ἀποκτήσουν τὶς βασικὲς γνώσεις τῆς Α.Α. σὲ κάποιο βάθος καὶ πλάτος, χωρὶς νὰ περάσουν ἀναγκαστικά ἀπὸ τὴν ὕλη τοῦ προηγούμενου βιβλίου. Ἔτσι νομίζουμε ὅτι προσφέρεται αὐτὸ σάν βασικὸ βοήθημα πρὸς ὅλους ἐκείνους πού θὰ ἤθελαν νὰ συνεχίσουν σὲ σπουδὲς μεταπτυχιακοῦ ἐπιπέδου εἴτε στὴν Α.Α. εἴτε σὲ ἄλλο κλάδο τῆς Ἐπιστήμης πού χρησιμοποιεῖ σάν βασικὸ ἐργαλεῖο τὴν Α.Α.

Γιὰ τὴν καλύτερη κατανόηση καὶ ἐμπέδωσι τῆς ὕλης ἔχει δοθεῖ στὸ τέλος κάθε κεφαλαίου ἓνας ἀριθμὸς ἁλυτῶν ἀσκήσεων θεωρητικῶν καὶ ἀριθμητικῶν ἀρκετὲς ἀπὸ τὶς ὁποῖες εἶναι πρωτότυπες. Σὲ ὅλες δίνονται ἄμεσα ἢ ἔμμεσα καὶ οἱ ἀπαντήσεις τους ἔτσι ὥστε νὰ βοηθήσουν ἐκείνους πού θὰ ἀσχοληθοῦν μὲ τὴ

λύση τους. Από τις αριθμητικές ασκήσεις οι περισσότερες μπορούν να λυθούν με το χέρι, λιγότερες με τη βοήθεια μιας αριθμομηχανής και ελάχιστες με τη βοήθεια ενός Η.Υ. Καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια ώστε οι αριθμητικές ασκήσεις που λύνονται με το χέρι με μία μικρή μεταβολή στις αριθμητικές παραμέτρους τους να μετατρέπονται σε άλλες, που για να λυθούν, να απαιτείται η βοήθεια είτε μιας αριθμομηχανής είτε ενός Η.Υ. Αυτό θεωρήθηκε σκόπιμο ώστε εκείνοι που θα έχουν στη διάθεσή τους ένα από τα δύο αυτά μέσα να βοηθηθούν στην εξοικειώσή τους με αυτά και έμμεσα με την ακόμη καλύτερη έμπέδωση και αφομοίωση της ύλης του βιβλίου.

Επειδή αποτελεί πίστη του συγγραφέα ότι μία ατομική προσπάθεια για την επίτευξη ενός αντικειμενικού σκοπού, όσο φιλότιμη και καλή κι αν είναι, θα είναι πάντοτε κατώτερη μιας αντίστοιχης συλλογικής θεωρεί ότι η συγγραφή του παρόντος βιβλίου δεν θα γινόταν πραγματικότητα αν στηριζόταν αποκλειστικά και μόνο στις δυνάμεις. Έτσι από τη θέση αυτή, νομίζω ότι είναι καθήκον και υποχρέωσή μου να εύχαριστήσω όλους αυτούς, που με τόν έναν ή τόν άλλον τρόπο, συνέβαλαν στην όλη προσπάθεια της συγγραφής του παρόντος βιβλίου.

Καταρχήν εύχαριστώ όλο το προσωπικό της Έδρας και του Έργαστηρίου Α.Α., για τη με τόν οποιοδήποτε τρόπο συμβολή του στη συγγραφή του βιβλίου.

Ιδιαίτερα εύχαριστώ τούς αγαπητούς φίλους και συνεργάτες δρα Γ. Αβδελά, Επιμελητή της Έδρας Α.Α. και κ.κ. Σ. Γαλάνη και Α. Γέγιο, Βοηθούς του Έργαστηρίου Α.Α., όχι μόνο για τόν πολύτιμο χρόνο τους που αφιέρωσαν συζητώντας μαζί μου πάνω στη συγγραφή και διαμόρφωση της ύλης του κειμένου αλλά και για τη βοήθειά τους με παρατηρήσεις, υποδείξεις και διορθώσεις για την καλύτερη παρουσίαση του κειμένου και στην επιλογή και λύση τών προτεινόμενων ασκήσε-

ων, από τις οποίες αρκετές πρωτότυπες όφειλονται σ'αυτούς. 'Ακόμη τούς εύχαριστώ γιατί, μέ τή φετεινή άπουσία μου από τό Πανεπιστήμιο εξαιτίας τής έτήσιας εκπαιδευτικής άδειάς μου, ανέλαβαν μέ προθυμία τό βαρύ έργο τής έπιμέλειας τής έκδόσεως του παρόντος.

Εύχαριστώ επίσης τήν άνώδυμη μάζα των φοιτητών του Πανεπιστημίου μας, που μέ τίς έρωτήσεις και τίς παρατηρήσεις τους στή διάρκεια των μαθημάτων, των φροντιστηριακών και εργαστηριακών ασκήσεων κλπ, μέ βοήθησαν έμμεσα στή διαμόρφωση τής ύλης του όλου βιβλίου.

Τέλος εύχαριστώ ιδιαίτερα τήν κ. 'Αναστασία Μπαλάνα - Παππά, Παιδαγωγική του 'Εργαστηρίου Α.Α., γιά τήν άφοσίωση, προθυμία, έπιμέλεια και πρωτοβουλία που επέδειξε στή δακτυλογράφηση των δυσανάγνωστων και μέ πλήθος μαθηματικών συμβόλων και τύπων χειρογράφων γιά τή μεταμόρφωσή τους στο παρόν.

Πιστεύοντας ότι τό παρόν βιβλίο θα πρέπει νά απέχει πολύ από τήν τελειότητα, όπως άλλωστε και όλα τά ανθρώπινα κατασκευάσματα, παρακαλώ θερμά τούς άναγνώστες στήν αντίληψη των όποιων θα υποπέσουν λάθη, σφάλματα ή παραλείψεις νά μή διστάσουν νά μου τά υποδείξουν. Θα τούς είμαι άπάνταστα υποχρεωμένος και θα προσπαθήσω νά λάβω υπόψη μου τίς υποδείξεις τους σέ μία πιθανή δεύτερη και ίσως καλύτερη έκδοση.

Loughborough ('Αγγλίας) - Μάϊος 1973

Α. Χατζηδημος

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

'Η παρούσα δεύτερη έκδοση δέν διαφέρει από τήν προηγούμενη παρά μόνο στο γεγονός ότι διορθώθηκαν όσα από τά

λάθη, σφάλματα και παραλείψεις της παλιᾶς βρέθηκαν. Έτσι, αίσθάνομαι την υποχρέωση, από τη θέση αυτή, να εύχαριστήσω θερμότατα όλους τούς επώνυμους και ανώνυμους φίλους, πού ανταποκρίθηκαν στην παράκλησή μου να μοῦ ἀνουν τίς σχετικές υποδείξεις.

Ἰωάννινα - Φεβρουάριος 1981

Α. Χατζηδημος

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Γενικά

Στό παρόν Κεφάλαιο θα ασχοληθούμε καταρχήν με μιά στοιχειώδη ανάπτυξη τών στοιχείων τής θεωρίας τών σφαλμάτων, πού, όπως είναι γνωστό γι' αυτά, είςχωρούν τόσο κατά τή μέτρηση μιάς ποσότητας όσο καί κατά τόν υπολογισμό τής τιμής μιάς αριθμητικής παραστάσεως. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τόν υπολογισμό τής τιμής ενός πολυωνύμου (μέ πραγματικούς συντελεστές) καί τών παραγώγων του γιά κάποια πραγματική ή μιγαδική τιμή τής μεταβλητής του δίνοντας υπολογιστικές μεθόδους μέ τό μικρότερο δυνατό αριθμό πράξεων. Ειδικά έδώ ασχολούμαστε μέ τά πολυώνυμα, γιατί, όπως θα δοϋμε στά έπόμενα Κεφάλαια, αυτά αποτελοϋν τίς απλούστερες μαθηματικές έκφράσεις, πού χρησιμοποιοϋνται γιά νά παραστήσουν ή καλύτερα νά προσεγγίσουν άλλες συναρτήσεις.

1.2. Σφάλματα

1.2.1. Έννοιες καί όρισμοί

Αν x είναι ή άκριβής (ή άληθής) τιμή μιάς ποσότητας καί x^* ή τιμή πού μετρήθηκε ή υπολογίστηκε (προσεγγιστική τιμή) τής ίδιας ποσότητας, τότε καλοϋμε σφάλμα ϵ τή διαφορά

$$\epsilon = x^* - x. \quad (*)$$

Τήν ποσότητα $x - x^*$, πού είναι αντίθετη πρός τό σφάλμα, καλοϋμε διόρθωση. Στην πράξη χρησιμοποιείται πολλές φορές ή απόλυτη τιμή τοϋ σφάλματος ή τής διορθώσεως. Αύτήν καλοϋμε απόλυτο σφάλμα. Ακόμη μιά έννοια, πού παίζει πρωταρχικό

⊕ Μερικοί συγγραφείς όρίζουν σάν σφάλμα ϵ άκριβώς τήν αντίθετη ποσότητα $x - x^*$.

ρόλο στην πράξη, είναι η έννοια του σχετικού σφάλματος, που μας δίνει μια ιδέα για το μέγεθος του σφάλματος, που κάνουμε, σε σχέση με την ποσότητα, που μετράμε, ή υπολογίζουμε. Καλούμε σχετικό σφάλμα δ την ποσότητα, που ορίζεται από τη σχέση

$$\delta = \frac{\varepsilon}{x} \approx \frac{\varepsilon}{x^*},$$

όπου υποτίθεται ότι $x, x^* \neq 0$. Στην πράξη όμως θα χρησιμοποιήσουμε αδιάκριτα οποιαδήποτε από τις δύο εκφράσεις $\frac{\varepsilon}{x}$ και $\frac{\varepsilon}{x^*}$ για την εύρεση του σχετικού σφάλματος. Αντίστοιχα προς τα προηγούμενα μπορεί, τέλος, να εισαχτεί και η έννοια του απόλυτου σχετικού σφάλματος.

1.2.2. Σ φ ά λ μ α τ α σ τ ο ύ ς ύ π ο λ ο γ ι σ μ ο ύ ς

Αν υποθέσουμε ότι τα δεδομένα ενός προβλήματος είναι ακριβή, τότε τα είδη των σφαλμάτων, που εισχωρούν στους υπολογισμούς είναι δύο κατηγοριών. Τα σφάλματα αποκοπής και τα σφάλματα στρογγυλεύσεως.

Σφάλμα αποκοπής καλούμε το σφάλμα, που κάνουμε, όταν αντικαθιστούμε μία σειρά (άθροισμα άπειρου πλήθους όρων) με ένα μερικό άθροισμά της (άθροισμα πεπερασμένου πλήθους όρων). Όπως π.χ., όταν θέλουμε να βρούμε το $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ για κάποιο γνωστό x ($-1 < x \leq 1$). Επειδή είναι πρακτικά αδύνατο να υπολογίσουμε τους άπειρους όρους του δεύτερου μέλους και στη συνέχεια να τους προσθέσουμε, γι' αυτό χρησιμοποιούμε κατά την κρίση μας ένα κατάλληλο πλή-

⊗ Το σύμβολο $\approx$ σημαίνει περίπου ίσον ή κατά προσέγγιση ίσον. Ίσοδύναμα με το σύμβολο αυτό θεωρούνται και $\simeq$, $\underline{\approx}$ και $\overline{\approx}$ πιθανόν άλλα, που χρησιμοποιούνται από διάφορους συγγραφείς.

θος όρων, έστω τών n πρώτων. Έτσι αυτόματα είσχωρεϊ ένα σφάλμα ε (σφάλμα άποκοπής), πού, στην προκείμενη περίπτωση, είναι ίσο μέ

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} = - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}.$$

Σφάλμα στρογγυλεύσεως καλοϋμε τό σφάλμα, πού κάνουμε, όταν αντικαθιστούμε έναν πραγματικό άριθμό μέ έναν άλλο, πού έχει όμως ένα περιορισμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων (δ.ψ.). Η αντικατάσταση αυτή, πού καλεϊται στρογγύλευση, είναι αναγκαία στην πράξη είτε έργαζόμαστε μέ τό χέρι είτε μέ τή βοήθεια μιās άριθμομηχανής ή ενός Ηλεκτρονικού Υπολογιστή (Η.Υ.). Αυτό δέ γιατί, όπως είναι φανερό, δέν μπορούμε νά κάνουμε πράξεις μέ άριθμούς πού έχουν άπειρα δ.ψ., ούτε μέ άριθμούς πού έχουν δ.ψ. περισσότερα από ένα περιορισμένο καί προκαθορισμένο πλήθος, οποιοδήποτε μέσο καί αν χρησιμοποιούμε. Ο τρόπος τής στρογγυλεύσεως ενός άριθμού σέ k δ.ψ. είναι λίγο-πολύ γνωστός. Συγκεκριμένα παραλείπουμε τά δ.ψ. πού είναι πέρα από τήν k δεκαδική θέση, καί τό ψηφίο τής k δεκαδικής θέσης τό αφήνουμε άμετάβλητο ή τό αύξάνουμε κατά μία μονάδα, αντίστοιχα μέ τό αν τό μέρος, πού παραλείπεται, είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από μισή μονάδα τής k δεκαδικής τάξης. Στην είδική περίπτωση, όπου τό μέρος πού παραλείπεται είναι ίσο μέ μισή μονάδα τής k δεκαδικής τάξης, τότε τό ψηφίο τής k δεκαδικής τάξης τό αφήνουμε όπως είναι ή τό αύξάνουμε κατά μία μονάδα αντίστοιχα μέ τό αν αυτό είναι άρτιο ή περιττό. Είναι φανερό, από τόν τρόπο πού γίνεται ή στρογγύλευση σέ k δ.ψ. ότι, αν ε είναι τό αντίστοιχο σφάλμα στρογγυλεύσεως θά ισχύει γι' αυτό

$$|\varepsilon| \leq 0.5 \times 10^{-k}. \quad (1.1)$$

Έκτός από τήν έννοια τών δ.ψ., στην παράσταση τών ά-

ριθμών. Είσχωρεῖ καί ἡ ἔννοια τῶν σημαντικῶν ψηφίων (σ.ψ.). Ἕνας πρῶτος ὁρισμός γιά τά σ.ψ. εἶναι αὐτός, πού λέει ὅτι: σ.ψ. ἑνός ἀριθμοῦ καλοῦνται ὅλα τά ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ, πού δίνονται, ἐκτός ἀπό τυχόν μηδενικά πού ὑπάρχουν στήν ἀρχή τοῦ ἀριθμοῦ. Ἕνας δεύτερος καί ἀκριβέστερος ὁρισμός μπορεῖ νά δοθεῖ, ἀφοῦ ὁμως προηγηθεῖ ἕνας ἄλλος τρόπος γραφῆς τῶν ἀριθμῶν. Συγκεκριμένα κάθε πραγματικός ἀριθμός $y (\neq 0)$ μπορεῖ νά γραφεῖ μονοσήμαντα ὑπό τή μορφή

$$y = \pm 0.y_1 y_2 y_3 \dots \times 10^l, \quad (1.2)$$

ὅπου $y_1, y_2, y_3, \dots$ ψηφία μέ $y_1 \neq 0$ καί l κατάλληλο ἀκέραιο ἀριθμός. Μέ τή μορφή (1.2) ἀπομνημονεύονται οἱ πραγματικοί ἀριθμοί ἐσωτερικά ἀπό ἕνα δεκαδικό ψηφιακό Η.Υ. (Ἀντίστοιχη ἐσωτερική ἀπομνημόνευση μέ τή μόνη ἐξαίρεση ὅτι ἡ βάση τῆς δυνάμεως εἶναι ὁ 2 (ἀντί τοῦ 10) καί συνεπῶς τά ψηφία $y_1, y_2, y_3, \dots$ εἶναι ψηφία τοῦ δυαδικοῦ συστήματος ἀριθμῆσεως (δηλαδή 0 καί 1) γίνεται ἀπό τούς συνηθισμένους δυαδικούς ψηφιακούς Η.Υ.). Μέ τή νέα αὐτή μορφή τοῦ ἀριθμοῦ y μποροῦμε νά μιλάμε γιά τό πλῆθος τῶν σ.ψ. του σάν τό πλῆθος τῶν δ.ψ. τοῦ y πού δίνονται. Ἀντίστοιχα μποροῦμε νά μιλάμε γιά στρογγύλευση σέ k σ.ψ., πού εἶναι στήν οὐσία στρογγύλευση σέ k δ.ψ., καί ἐπομένως νά ἔχουμε ἀμέσως ἀπό τίς (1.1) καί (1.2) γιά τό σφάλμα στρογγυλεῦσεως ϵ σέ k σ.ψ. ὅτι

$$|\epsilon| \leq 0.5 \times 10^{l-k}.$$

1.2.3. Μ ε τ ά δ ο σ η σ φ α λ μ ά τ ω ν κ α τ ά τ ο ύ ς ὑ π ο λ ο γ ι σ μ ο ύ ς

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι, κατά τήν ἐκτέλεση τῶν τεσσάρων πράξεων τῆς Ἀριθμητικῆς δέν εἰσχωροῦν νέα σφάλματα στοῦς ὑπολογισμοῦς, πράγμα πού δέν εἶναι ἀλήθεια, τότε τά σφάλματα πού ὑπάρχουν στά δεδομένα ἑνός προβλήματος (ή μιᾶς ἐκ-

φράσεως) μεταδίδονται κατά τη διάρκεια των υπολογισμών με άμεση συνέπεια να λαβαίνουμε τα αποτελέσματα του προβλήματος (ή την τιμή της έκφρασης) με σφάλματα. Για τον τρόπο που μεταδίδονται τα αρχικά σφάλματα ισχύει η παρακάτω ανάλυση.

Έστω ότι καλούμε τις ακριβείς τιμές αριθμών με $x_i \mid i=1(1)n$ με $x_i^* \mid i=1(1)n$ τις αντίστοιχες προσεγγιστικές τιμές τους. Έστω ακόμη ότι ζητούμε να βρούμε την τιμή της έκφρασης $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ των n αριθμών που δόθηκαν, και ότι $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ είναι η τιμή της ίδιας έκφρασης που βρίσκεται μετά από τους υπολογισμούς. Για την ανάπτυξη της αντίστοιχης θεωρίας υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f έχει όλες τις δυνατές μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης και ότι αυτές είναι συνεχείς σε μία περιοχή του σημείου $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, του n -διάστατου πραγματικού χώρου, στην οποία ανήκει και το σημείο $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Αν καλέσουμε με ϵ το σφάλμα στην τιμή της έκφρασης f μετά τους υπολογισμούς και με $\epsilon_i = x_i^* - x_i \mid i=1(1)n$ τα σφάλματα των αριθμών που δόθηκαν, τότε χρησιμοποιώντας και το θεώρημα του Taylor μπορούμε να πάρουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned} \epsilon &= f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= [f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)] = \\ &= -(x_1 - x_1^*) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) - (x_2 - x_2^*) \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) - \dots - (x_n - x_n^*) \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) - \\ &\quad - \frac{1}{2!} [(x_1 - x_1^*)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x^* + \theta(x - x^*)) + (x_2 - x_2^*)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x^* + \theta(x - x^*)) + \\ &\quad + \dots + 2(x_{n-1} - x_{n-1}^*)(x_n - x_n^*) \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n}(x^* + \theta(x - x^*))] \end{aligned}$$

*Ο συμβολισμός $1(1)n$ δίνει σε συντομογραφία όλους τους όρους της αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο 1 λόγο 1 και τελευταίο όρο n .

όπου $0 < \theta < 1$. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) + \varepsilon_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) + \dots + \varepsilon_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) - \\ &- \frac{1}{2!} \left[\varepsilon_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x^* - \theta \varepsilon^*) + \varepsilon_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x^* - \theta \varepsilon^*) + \dots + \right. \\ &\left. + 2\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\partial x_n}(x^* - \theta \varepsilon^*) \right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

όπου ε^* τό σημείο του n -διάστατου χώρου μέ συνιστώσες ε_i $|i=1(1)n$. Αν τώρα στήν ισότητα (1.2) παραλείψουμε όλους τούς όρους τής άγκύλης, λαβαίνουμε μία κατά προσέγγιση ισότητα, πού είναι ή παρακάτω

$$\begin{aligned} \varepsilon &\approx \varepsilon_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) + \varepsilon_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) + \dots + \varepsilon_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) = \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Τήν κατά προσέγγιση ισότητα (1.4) θά θεωρούμε σάν βασική για τήν εύρεση του σφάλματος κατά τόν ύπολογισμό τής τιμής μιās έκφράσεως. Από αύτήν, είναι εύκολο νά βρούμε σχέσεις για τό σχετικό, καθώς επίσης καί για τό απόλυτο καί απόλυτο σχετικό σφάλμα. Έτσι διαιρώντας τά μέλη τής (1.4) διά $f(x^*)$ βρίσκουμε

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f} \approx \varepsilon_1 \frac{f_{x_1}}{f} + \varepsilon_2 \frac{f_{x_2}}{f} + \dots + \varepsilon_n \frac{f_{x_n}}{f} = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_{x_i}, \quad (1.5)$$

όπου για χάρη εύκολίας παραλείψαμε τήν άναφορά στό σημείο x^* , πού έξυπακούεται, καί χρησιμοποιήσαμε τούς συμβολισμούς $f_{x_i} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}$ $|i=1(1)n$. Παίρνοντας τώρα απόλυτες τιμές τών μελών τών (1.4) καί (1.5), καί εφαρμόζοντας άπλές ιδιότητες τούς, βρίσκουμε αντίστοιχα ότι

$$|\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| |f_{x_1}| + |\varepsilon_2| |f_{x_2}| + \dots + |\varepsilon_n| |f_{x_n}| = \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i| |f_{x_i}| \quad (1.6)$$

και

$$\begin{aligned} |\delta| &\leq |\varepsilon_1| \frac{|f_{x_1}|}{|f|} + |\varepsilon_2| \frac{|f_{x_2}|}{|f|} + \dots + |\varepsilon_n| \frac{|f_{x_n}|}{|f|} = \\ &= \frac{1}{|f|} \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i| |f_{x_i}|. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Οι τύποι (1.4) - (1.7) είναι αυτοί που χρησιμοποιούνται στην πράξη, για την κατά προσέγγιση εύρεση των σφαλμάτων και σχετικών σφαλμάτων καθώς και φραγμάτων για τα απόλυτα και απόλυτα σχετικά σφάλματα μιας συγκεκριμένης έκφρασης. Σε μία και μόνο περίπτωση οι κατά προσέγγιση ισότητες και ανισότητες, που βρήκαμε, γίνονται ακριβείς. Αύτη η περίπτωση δίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1

Όταν η συνάρτηση $f \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι γραμμική ως προς όλες τις μεταβλητές της και με συντελεστές ακριβείς, και μόνο τότε, οι κατά προσέγγιση σχέσεις (1.4)-(1.7) είναι ακριβείς.

Απόδειξη

Είναι φανερό ότι αρκεί να αποδειχτεί η ισχύς του θεωρήματος για τη σχέση (1.4), αφού οι άλλες σχέσεις προέρχονται κατευθείαν απ'αυτήν. Η σχέση (1.4) όμως, που προήρθε από την (1.3), είναι κατά προσέγγιση, γιατί στην (1.3) παραλείφτηκε η άγκύλη του δευτέρου μέλους. Πρέπει και αρκεί λοιπόν όλοι οι όροι της άγκυλης να είναι μηδέν. Αυτό είναι ισοδύναμο, με το να είναι μηδέν όλες οι δευτερες μερικές παράγωγοι, που περιέχονται στην άγκύλη. Το τελευταίο όμως συμβαίνει, όπως είναι γνωστό, για τη γραμμική συνάρτηση $f \equiv c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + c_{n+1}$ και μόνο, όπου οι συντελεστές $c_i | i=1(1)n+1$ πρέπει να είναι ακριβείς. Αυτό δέ γιατί αν κάποιος από τους συντελεστές της $c_i | i=1(1)n$ δέν είναι ακρι-

βής, τότε αυτός θα παίζει τό ρόλο μεταβλητῆς, ὁ ἀντίστοιχος ὅρος θά εἶναι δεύτερου βαθμοῦ, καί ἡ συνάρτηση θέν θά εἶναι πιά γραμμική ὡς πρὸς τίς μεταβλητές της. Ἄν ὁ συντελεστής c_{n+1} θέν ἦταν ἀκριβής, τότε θά ἐπαιζε τό ρόλο μεταβλητῆς, καί ἡ συνάρτηση θά εἶχε $n+1$ μεταβλητές.

Πόρισμα

Τό σφάλμα τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος n ἀριθμῶν εἶναι ἴσο μέ τό ἀντίστοιχο ἀλγεβρικό ἀθροισμα τῶν σφαλμάτων τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, ἐνῶ τό μέγιστο ἀπόλυτο σφάλμα τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος n ἀριθμῶν εἶναι ἴσο μέ τό ἀθροισμα τῶν ἀπόλυτων σφαλμάτων τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

Ἀπόδειξη

Τό ἀλγεβρικό ἀθροισμα n ἀριθμῶν ἔχει τή γενική μορφή

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n,$$

ὅπου οἱ συντελεστές c_i $|i=1(1)n$ εἶναι ἴσοι μέ 1 ἢ μέ -1 καί ἐπομένως εἶναι σταθεροί καί ἀκριβεῖς. Ἔτσι ἔχει ἀμέσῃ ἐφαρμογή τό θεώρημα, σέ ὅ,τι ἀφορᾷ τήν ἀκρίβεια τῶν σχέσεων (1.4) - (1.7). Ἐπειδὴ δέ στή συγκεκριμένη περίπτωση ἔχουμε $f_{x_i} = c_i$ $|i=1(1)n$, ἡ σχέση (1.4) δίνει

$$e = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n. \quad (1.8)$$

Αὐτό ἀποδείχνει τόν πρῶτο ἰσχυρισμό τοῦ παρόντος πορίσματος. Χρησιμοποιώντας τώρα τή σχέση (1.8), μέ τόν ἴδιο τρόπο πού χρησιμοποιήθηκε ἡ σχέση (1.4) γιά νά προκύψει ἡ (1.6), εἶναι εὐκόλο νά ἀποδειχτεῖ καί ὁ δεύτερος ἰσχυρισμός τοῦ πορίσματος.

Τό προηγούμενο θεώρημα 1 καί ἰδιαίτερα τό ἀντίστοιχο Πόρισμα, μᾶς δίνουν κατευθείαν ἀκριβεῖς καί ἀπλές ἐκφράσεις γιά τό σφάλμα καί τό μέγιστο ἀπόλυτο σφάλμα στήν περίπτωση τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος n ἀριθμῶν. Ἀπλές, ἀλλά κα-

τά προσέγγιση εκφράσεις, είναι δυνατό νά βρεθοῦν καί γιά τά ἀντίστοιχα σχετικά σφάλματα στήν περίπτωση τοῦ γινομένου n ἀριθμῶν, καθώς ἐπίσης καί στήν περίπτωση τοῦ πηλί-
κου δύο ἀριθμῶν. Γιά τό σκοπό αὐτό ἀποδείχνουμε καταρχήν τό παρακάτω γενικότερο θεώρημα.

Θεώρημα 2

Με τήν προϋπόθεση ὅτι ἡ ἐκφραση

$$f \equiv x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \quad (1.9)$$

ἔχει ἔννοια, ὅπου x_i $|i=1(1)n$ ἀριθμοί διάφοροι ἀπό τό μη-
δέν καί k_i $|i=1(1)n$ ἀκριβεῖς ἀριθμοί καί διάφοροι ἀπό τό
μηδέν, ἰσχύουν οἱ σχέσεις

$$\delta \approx k_1 \delta_1 + k_2 \delta_2 + \dots + k_n \delta_n \quad (1.10)$$

καί

$$|\delta| \leq |k_1| |\delta_1| + |k_2| |\delta_2| + \dots + |k_n| |\delta_n|, \quad (1.11)$$

ὅπου δ εἶναι τό σχετικό σφάλμα τῆς ἐκφράσεως f καί δ_i $|i=$
 $=1(1)n$ τά σχετικά σφάλματα τῶν ἀριθμῶν x_i $|i=1(1)n$.

Ἀπόδειξη

Ὅπως εἶναι γνωστό, γιά τά σχετικά καί τά ἀπόλυτα
σχετικά σφάλματα, ἰσχύουν οἱ σχέσεις (1.5) καί (1.7). Στήν
παρούσα περίπτωση θά ἔχουμε καταρχήν ὅτι

$$f_{x_i} = k_i x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_i^{k_i-1} \dots x_n^{k_n} \quad |i=1(1)n$$

καί ἐπομένως

$$\frac{f_{x_i}}{f} = \frac{k_i}{x_i} \quad |i=1(1)n.$$

Ἀντικαθιστώντας τοῦς παραπάνω λόγους στή σχέση (1.5) παίρ-
νουμε ἀμέσως ὅτι

$$\delta \approx \varepsilon_1 \frac{k_1}{x_1} + \varepsilon_2 \frac{k_2}{x_2} + \dots + \varepsilon_n \frac{k_n}{x_n}.$$

Ἡ ἐπειδὴ $\delta_i = \frac{\varepsilon_i}{x_i} \mid i=1(1)n$ λαβαίνουμε

$$\delta \approx k_1 \delta_1 + k_2 \delta_2 + \dots + k_n \delta_n,$$

δηλαδή τὴ σχέση (1.10). Παίρνοντας ἀπόλυτες τιμές στήν (1.10) καί ἐφαρμόζοντας ἀπλές ιδιότητές τους βρίσκουμε ἀμέσως τὴν (1.11).

Πόρισμα 1

Τὸ σχετικό σφάλμα τοῦ γινομένου n ἀριθμῶν εἶναι κατὰ προσέγγιση ἴσο μέ τὸ ἄθροισμα τῶν σχετικῶν σφαλμάτων τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, ἐνῶ τὸ μέγιστο ἀπόλυτο σχετικό σφάλμα τοῦ γινομένου n ἀριθμῶν εἶναι κατὰ προσέγγιση ἴσο μέ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπόλυτων σχετικῶν σφαλμάτων τῶν ἰδίων ἀριθμῶν.

Ἀπόδειξη

Ἡ ἔκφραση f ἔχει τὴ μορφή

$$f \equiv x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n,$$

ἐπομένως ἀποτελεῖ μιά μερική περίπτωση τῆς ἐκφράσεως (1.9), ὅπου $k_i = 1 \mid i=1(1)n$. Συνεπῶς τὰ συμπεράσματα (1.10) καί (1.11) τοῦ θεωρήματος γιὰ τὴ συγκεκριμένη περίπτωση γίνονται ἀντίστοιχα

$$\delta \approx \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n \quad (1.12)$$

καί

$$|\delta| \leq |\delta_1| + |\delta_2| + \dots + |\delta_n|, \quad (1.13)$$

πού ἀποδείχνουν τοὺς ἰσχυρισμοὺς τοῦ παρόντος πορίσματος.

Πόρισμα 2

Τὸ σχετικό σφάλμα τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν εἶναι κατὰ

προσέγγιση ίσο με τη διαφορά του σχετικού σφάλματος του παρονομαστή από το σχετικό σφάλμα του αριθμητή, ενώ το μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα του πηλίκου δύο αριθμών είναι κατά προσέγγιση ίσο με το άθροισμα των απόλυτων σχετικών σφαλμάτων των αριθμών αυτών.

Απόδειξη

Στην παρούσα περίπτωση έχουμε ότι

$$f = \frac{x_1}{x_2}$$

ή ακόμη ότι

$$f = x_1 x_2^{-1} \quad (1.14)$$

Η έκφραση όμως (1.14) είναι μία μερική περίπτωση της έκφρασεως (1.9), όπου $n=2$, $k_1=1$ και $k_2=-1$. Συνεπώς οι σχέσεις (1.10) και (1.11) γίνονται αντίστοιχα

$$\delta \approx \delta_1 - \delta_2$$

και

$$|\delta| \leq |\delta_1| + |\delta_2|$$

πού αποδείχνουν τα ζητούμενα.

Η μέχρι τώρα θεωρία, πού αναπτύχτηκε στην παράγραφο αυτή, ισχύει βέβαια μόνο εάν θεωρία και όχι στην πράξη. Αυτό δέ γιατί, κατά τη διάρκεια των υπολογισμών στην πράξη οποιοδήποτε μέσο και αν χρησιμοποιούμε γι' αυτούς, είμαστε αναγκασμένοι νά εργαζόμαστε πάντοτε με ένα περιορισμένο και προκαθορισμένο πλήθος δ . ή σ.ψ.. Αυτό έχει σάν άμεση συνέπεια τήν άπαραίτητη στρογγύλευση των ενδιάμεσων αποτελεσμάτων, πού προκύπτουν, στο αντίστοιχο πλήθος των δ . ή σ.ψ., πού εργαζόμαστε. Τό τελευταίο έχει σάν αποτέλεσμα τήν είσαγωγή νέων σφαλμάτων (στρογγυλεύσεως) κατά τη διάρκεια των υπολογισμών. Τά αναπόφευκτα αυτά σφάλματα, έκτός

από τό γεγονός ότι μεταδίδονται, καί επομένως αλλοιώνουν τά αποτελέσματα πού παίρνουμε, έπηρεάζουν ακόμη καί τή σειρά τών πράξεων. Αυτό έχει σάν μία δεύτερη συνέπεια νά μήν ισχύουν πιά οι νόμοι τής 'Αριθμητικής ακόμη καί οι πιό άπλοι άπ'αυτούς, όπως είναι π.χ. ο προσεταιριστικός. Γι' αυτό χρειάζεται μεγάλη προσοχή, όταν έκτελούμε πράξεις καί κυρίως μέ μέσο, όπου είναι δύσκολο, νά έλέγχουμε τά ένδιάμεσα αποτελέσματα, όπως είναι ο Η.Υ. Για τήν καλύτερη κατανόηση αυτών, πού μόλις λέχτηκαν, αναφερόμαστε παρακάτω σέ μία συγκεκριμένη περίπτωση.

"Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε ένα δεκαδικό ψηφιακό Η.Υ., πού μπορεί νά άπομνημονεύσει σέ μία θέση τής μνήμης του άριθμούς μέ έξη τό πολύ σ.ψ. καί ότι ζητούμε νά βρούμε, μέ τή χρησιμοποίηση αυτού, τό άθροισμα

$$S = 0.000001 + 0.000001 + \dots + 0.000001,$$

πού άποτελεΐται από δύο έκατομμύρια όρους ίσους μέ 0.000001. Είναι φανερό ότι $S=2$. "Αν όμως χρησιμοποιήσουμε τόν Η.Υ., πού διαθέτουμε, καί τόν προσεταιριστικό νόμο τής 'Αριθμητικής για τήν εύρεση του άθροίσματος, δηλαδή στον πρώτο όρο προσθέτουμε τόν δεύτερο, στο άθροισμα αυτών τόν τρίτο κ.ο.κ., τότε ο Η.Υ. θά δώσει σάν άθροισμα S τόν άριθμό 1 καί όχι τόν 2. Αυτό έξηγεΐται άν αναφερθοΐμε στην παράσταση (1.2), πού χρησιμοποιεΐ ο συγκεκριμένος Η.Υ. για τήν άπομνημόνευση τών άριθμών, όπου ο άριθμός 0.000001 θά άπομνημονεύεται σάν 0.1×10^{-5} . "Αν για τήν εύρεση του άθροίσματος S χρησιμοποιηθεΐ ο τρόπος, πού αναφέραμε προηγουμένως, τότε όλα θά πηγαίνουν κανονικά μέχρι καί τήν πρόσθεση του έκατομμυριοστού όρου, όποτε τό μέχρι τότε μερικό άθροισμα θά είναι ίσο μέ $0.1 \times 10^1 = 1$. Αυτό δέ γιατί όλα τά ένδιάμεσα μερικά άθροίσματα θά έχουν μέχρις έξη τό πολύ σ.ψ. καί επομένως θά μπορούν νά άπομνημονευτούν άκριβώς από τόν χρησιμοποιούμενο Η.Υ.. Μέ τήν πρόσθεση όμως του έκατομμυριοστού

πρώτου όρου στο μερικό άθροισμα, πού ήδη βρέθηκε, έχουμε νά παρατηρήσουμε ότι τό σωστό μερικό άθροισμα είναι βέβαια τό 0.1000001×10^1 , πού έχει όμως έπτά σ.ψ.. Έξαιτίας όμως τής συγκεκριμένης δυνατότητας του Η.Υ., τ' παραπάνω μερικό άθροισμα θά στρογγυλευτεί καί θά άπομνημονευτεί σαν 0.100000×10^1 . Δηλαδή ή πρόσθεση του έκατομμυριοστού πρώτου όρου θά άφήσει τό μερικό άθροισμα των 1000000 πρώτων όρων άνολλοίωτο καί ίσο μέ 1. Φυσικά τό ίδιο θά συμβαίνει καί στή συνέχεια μέχρι καί τήν πρόσθεση του τελευταίου όρου. Έτσι σαν τελικό άθροισμα θά βρεθεί τό 1 αντί του σωστού 2. Θά μπορούσαμε βέβαια νά βρούμε τό σωστό άθροισμα 2 μέ πολλούς τρόπους. Ένας από αυτούς είναι νά προσθέσουμε χωριστά τους ένα έκατομμύριο πρώτους όρους καί χωριστά τους ένα έκατομμύριο τελευταίους όρους. Τά δύο σωστά τώρα μερικά άθροίσματα 0.1×10^1 αν προστεθούν θά δώσουν καί τό σωστό άθροισμα $S = 0.2 \times 10^1 = 2$.

1.3. Έπολογισμός τής τιμής πολυωνόμου, μέ πραγματικούς συντελεστές, καί των παραγώγων του σε γνωστό σημείο

1.3.1. Έπολογισμός τής τιμής πολυωνόμου για μία πραγματική τιμή τής μεταβλητής του

Ας υποθέσουμε ότι δίνεται τό πολυώνυμο

$$p(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n \quad (1.15)$$

βαθμού n ($a_0 \neq 0$) μέ πραγματικούς συντελεστές καί ότι ζητούμε νά βρούμε τήν τιμή του, σε κάποιο γνωστό πραγματικό σημείο x_0 . Ο συνηθέστερος τρόπος πού, νομίζουμε ότι, άπαιτεί τις λιγότερες πράξεις, για τήν εύρεση τής τιμής $p(x_0)$, είναι ο ακόλουθος. Σχηματίζουμε καί φυλάσσουμε τις διαδο-

χικές δυνάμεις του x_0 πολλαπλασιάζοντας τό x_0 επί x_0 για τήν εύρεση του x_0^2 , τό x_0^2 επί x_0 για τήν εύρεση του x_0^3 κ. ο.κ.. Απαιτούνται έτσι $n-1$ συνολικά πολλαπλασιασμοί. Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τις δυνάμεις του x_0 , x_0^k $|k=1(1)n$, επί τούς αντίστοιχους συντελεστές a_{n-k} $|k=1(1)n$ βρίσκοντας έτσι τούς όρους $a_{n-k}x_0^k$ $|k=1(1)n$ και κάνοντας συνολικά άλλους n πολλαπλασιασμούς. Για τήν εύρεση τώρα του $p(x_0) = a_n + a_{n-1}x_0 + \dots + a_1x_0^{n-1} + a_0x_0^n$ άρκεί στον a_n να προσθέσουμε στη σειρά τούς όρους πού βρήκαμε. Έτσι κάνουμε n άλγεβρικές προσθέσεις (ή προσθαφαιρέσεις). Βρίσκουμε δηλαδή τήν τιμή $p(x_0)$ κάνοντας συνολικά $2n-1$ πολλαπλασιασμούς και n προσθαφαιρέσεις.

Ένας άλλος όμως τρόπος, πού άπαιτεί ακόμη μικρότερο πλήθος πράξεων, είναι αυτός, πού θα περιγράψουμε στη συνέχεια. Εγκινούμε από τήν ταυτότητα της διαιρέσεως του πολωνύμου $p(x)$ διά του διωνύμου $x-x_0$. Έχουμε

$$p(x) \equiv (x-x_0)q(x) + r \quad (1.16)$$

όπου r σταθερά. θέτοντας στην παραπάνω ταυτότητα $x=x_0$, βρίσκουμε ότι $r=p(x_0)$. Δηλαδή ή τιμή, πού ζητούμε να βρούμε ($p(x_0)$) δέν είναι παρά τό υπόλοιπο της διαιρέσεως του $p(x)$ διά $x-x_0$. Εκμεταλλευόμαστε τό γεγονός αυτό θεωρώντας ότι ή μορφή του πηλίκου $q(x)$ είναι ή

$$q(x) \equiv \beta_0x^{n-1} + \beta_1x^{n-2} + \dots + \beta_{n-2}x + \beta_{n-1}, \quad (1.17)$$

όποτε αντικαθιστώντας τις έκφράσεις (1.15) και (1.17) στην (1.16), εκτελώντας όλες τις πράξεις στο δεύτερο μέλος και τέλος εξισώνοντας τούς συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του x στα δύο μέλη, βρίσκουμε τελικά ότι

$$\beta_0 = a_0$$

$$\beta_1 = a_1 + \beta_0x_0$$

$$\begin{aligned}
 \beta_2 &= \alpha_2 + \beta_1 x_0 \\
 &\vdots \\
 \beta_{n-1} &= \alpha_{n-1} + \beta_{n-2} x_0 \\
 p(x_0) &= \alpha_n + \beta_{n-1} x_0
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

Οι παραπάνω σχέσεις (1.18) μπορούν νά γραφτούν συνοπτικά και ως εξής

$$\beta_i = \alpha_i + \beta_{i-1} x_0 \quad | i = 0(1)n, \tag{1.19}$$

όπου θέσαμε $\beta_{-1} = 0$ και $\beta_n = p(x_0)$. Όπως φαίνεται από τις (1.19) ή από τις (1.18), η τιμή $p(x_0)$ βρίσκεται, αφού βρεθούν διαδοχικά οι συντελεστές $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ από τις ενδιάμεσες ιδιότητες. Έπειδή για τον υπολογισμό καθενός από τούς συντελεστές $\beta_i \quad | i = 1(1)n-1$ καθώς και του συντελεστή $\beta_n = p(x_0)$ απαιτούνται ένας πολλαπλασιασμός και μία προσθαφαίρεση έχουμε ότι τό συνολικό πλήθος τών πράξεων, πού χρειάζονται είναι n πολλαπλασιασμοί και n προσθαφαιρέσεις. Συγκρίνοντας τόν τρόπο, πού μόλις περιγράψαμε, μέ τόν τρόπο, πού περιγράψαμε στην άρχή τής παραγράφου βλέπουμε ότι, ενώ έχουμε και στίς δύο μεθόδους τόν ίδιο αριθμό προσθαφαιρέσεων, στή δεύτερη περίπτωση έχουμε $n-1$, για $n > 1$, λιγότερους πολλαπλασιασμούς. Συνεπώς ή δεύτερη μέθοδος απαιτεί λιγότερες πράξεις και γι' αυτό εά πρέπει νά τήν προτιμούμε.

Γιά τόν απλούστερο υπολογισμό τών συντελεστών $\beta_0, \beta_1, \dots$ και άπ' αυτούς τοῦ $\beta_n = p(x_0)$ ακολουθεῖται συνήθως ή επόμενη διαγραμματική διάταξη, τής οποίας ή κατασκευή και ή χρησιμότητα είναι φανερές

	α_0	α_1	α_2	$\dots$	α_{n-1}	α_n
x_0		$\beta_0 x_0$	$\beta_1 x_0$	$\dots$	$\beta_{n-2} x_0$	$\beta_{n-1} x_0$
	β_0	β_1	β_2	$\dots$	β_{n-1}	$\beta_n = p(x_0)$

Ἡ μέθοδος πού ἐκτέθηκε εἶναι γνωστή σάν μέθοδος ἢ ἀλγόριθμος ἢ σχῆμα τοῦ Horner. Ἡ ἴδια μέθοδος εἶναι γνωστή καί σάν μέθοδος τῆς συνθετικῆς διαιρέσεως.

Παρατήρηση:

Ἡ μέθοδος τοῦ Horner ἐκτός ἀπό τό ὅτι δίνει τήν τιμή $p(x_0)$ μέ τίς λιγότερες πράξεις ἔχει τό πλεονέκτημα ἀκόμη νά δίνει τούς συντελεστές β_i $| i=0(1)n-1$ τοῦ πολυωνύμου $q(x)$ (τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ $p(x)$ διὰ $x-x_0$), ὅπως φαίνεται ἀπό τίς (1.16) καί (1.17). Τό πλεονέκτημα ἀκριβῶς αὐτό ἐκμεταλλευόμαστε γιά τήν εὑρεση τῶν τιμῶν τῶν παραγώγων τοῦ $p(x)$ στό πραγματικό σημεῖο x_0 , ὅπως θά δοῦμε στήν ἐπόμενη παράγραφο.

1.3.2. Ὑπολογισμός τῶν τιμῶν τῶν παραγώγων πολυωνύμου γιά μιᾶ πραγματική τιμή τῆς μεταβλητῆς του

Γιά τήν εὑρεση τῶν τιμῶν τῶν παραγώγων τοῦ πολυωνύμου $p(x)$, ὅπως δίνεται στήν (1.15), ξεκινοῦμε καταρχήν ἀπό τό θεώρημα τοῦ Taylor καί ἀναπτύσσουμε τό πολώνυμο αὐτό γύρω ἀπό τό σημεῖο x_0 . θά ἔχουμε

$$p(x) \equiv p(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} p'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} p''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} p^{(n)}(x_0). \quad (1.20)$$

Ἐφαρμόζοντας τώρα τήν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ $p(x)$ διὰ $x-x_0$ καί στή συνέχεια τῶν διαδοχικῶν πηλίκων διὰ $x-x_0$ λαβαίνουμε

$$p(x) \equiv (x-x_0)q_1(x) + r_0$$

$$q_1(x) \equiv (x-x_0)q_2(x) + r_1$$

$$q_2(x) \equiv (x-x_0)q_3(x) + r_2$$

$$\begin{aligned}
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & q_{n-1}(x) \equiv (x-x_0)q_n(x) + r_{n-1} \\
 & q_n(x) \equiv (x-x_0) \cdot 0 + r_n
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις και με διαδοχικές αντικαταστάσεις παίρνουμε τελικά

$$p(x) \equiv r_n(x-x_0)^n + r_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \dots + r_1(x-x_0) + r_0. \tag{1.22}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του $x-x_0$ στα δύο αναπτύγματα (1.20) και (1.22) λαβαίνουμε

$$r_k = \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} \quad |k=0(1)n$$

ή ακόμη

$$p^{(k)}(x_0) = k! r_k \quad |k=0(1)n. \tag{1.23}$$

Από τις σχέσεις (1.23) και από το γεγονός ότι, όπως φαίνεται από τις (1.21), τα $r_k \quad |k=0(1)n$ είναι τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των πολωνύμων $q_k(x) \quad |k=0(1)n$ ($q_0(x) \equiv p(x)$) διά $x-x_0$ δηλαδή οι τιμές $q_k(x_0) \quad |k=0(1)n$, συμπεραίνουμε ότι με επανειλημμένες εφαρμογές του σχήματος του Horner είναι δυνατό νά βρούμε την τιμή οποιασδήποτε παραγώγου του πολωνύμου $p(x)$ στο σημείο x_0 . Π.χ. η διαγραμματική διάταξη για την περίπτωση της $p''(x_0)$ θα είναι η ακόλουθη

	α_0	α_1	$\dots$	α_{n-2}	α_{n-1}	α_n
x_0		$\beta_0 x_0$	$\dots$	$\beta_{n-3} x_0$	$\beta_{n-2} x_0$	$\beta_{n-1} x_0$
	β_0	β_1	$\dots$	β_{n-2}	β_{n-1}	$\beta_n = r_0$
x_0		$\gamma_0 x_0$	$\dots$	$\gamma_{n-3} x_0$	$\gamma_{n-2} x_0$	
	γ_0	γ_1	$\dots$	γ_{n-2}	$\gamma_{n-1} = r_1$	
x_0		$\delta_0 x_0$	$\dots$	$\delta_{n-3} x_0$		
	δ_0	δ_1	$\dots$	$\delta_{n-2} = r_2$		

οπότε από την αντίστοιχη σχέση (1.23) ($p''(x_0) = 2!r_2$) βρίσκουμε την τιμή $p''(x_0)$.

Παρατηρήσεις:

i) 'Αν μᾶς ενδιαφέρει αποκλειστικά καί μόνο ἡ τιμή μιᾶς συγκεκριμένης παραγώγου τάξης ἔστω $k \geq 1$, καί ὄχι συγχρόνως καί ἡ τιμή τοῦ πολυωνύμου καί τῶν προηγούμενων παραγώγων $p^{(\ell)}(x_0) \mid \ell=1(1)k-1$, τότε εἶναι δυνατό νά ἐλαττώσουμε ἀκόμη τό πλῆθος τῶν ἀπαιτούμενων πράξεων παραλείποντας ἀπό τή διαγραμματική διάταξη τοῦς τελευταίους k συντελεστές τοῦ ἀρχικοῦ πολυωνύμου καί ἐπομένως ὅσους ἄλλους προκύπτουν μέ πράξεις ἀπ' αὐτούς. Π.χ. στήν περίπτωση τῆς προηγούμενης διαγραμματικῆς διατάξεως εἶναι δυνατό νά παραλειφτεῖ ὅ,τι ὑπάρχει δεξιά τῆς κατακόρυφης διακεκομμένης γραμμῆς, χωρίς αὐτό νά ἔχει συνέπειες στήν εὑρεση τοῦ r_2 . Ἀντίστοιχα ἐργαζόμαστε ὅταν μᾶς ενδιαφέρουν οἱ τιμές ὁρισμένων μόνον παραγώγων καί ὄχι ἡ τιμή $p(x_0)$.

ii) Ἡ ἐργασία, πού ἀκολουθεῖται γιά τήν εὑρεση ὅλων τῶν τιμῶν $p^{(k)}(x_0) \mid k=0(1)n$, μᾶς δίνει πρῶτα τίς τιμές $r_k \mid k=0(1)n$, πού δέν ἀποτελοῦν παρά, ὅπως εἶναι φανερό ἀπό τήν (1.22), τοῦς συντελεστές τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ πολυωνύμου $p(x)$ κατά τίς ἀντιθέσεις δυνάμεις τοῦ διωνύμου $x-x_0$.

1.3.3. Ὑπολογισμός τῆς τιμῆς πολυωνύμου γιά μιᾶ μιγαδική τιμή τῆς μεταβλητῆς τοῦ

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι δίνεται τό πολυώνυμο $p(x)$, ὅπως στήν (1.15), καί ὅτι ζητοῦμε νά βροῦμε τήν τιμή $p(a+bi)$, ὅπου a, b πραγματικοί ἀριθμοί καί $i=\sqrt{-1}$. Γιά τήν εὑρεση τῆς ζητούμενης τιμῆς εἶναι δυνατό νά χρησιμοποιήσουμε πολλές μεθόδους. Οἰκονομικότερη σέ πλῆθος πράξεων εἶναι μία μέθοδος, πού ἀποτελεῖ γενίκευση τῆς μεθόδου τοῦ Horner, τήν ὁποία περιγράφουμε στή συνέχεια.

Καταρχήν σχηματίζουμε τό δευτεροβάθμιο τριώνυμο, μέ ρίζες τούς άριθμούς $\alpha \pm \beta i$

$$[x - (\alpha + \beta i)][x - (\alpha - \beta i)] = x^2 - rx - s, \quad (1.24)$$

όπου τέθηκε

$$r = 2\alpha, \quad s = -(\alpha^2 + \beta^2). \quad (1.25)$$

Αν τώρα καλέσουμε μέ $q(x)$ καί $Rx + S$, τό πηλίκο καί τό υπόλοιπο τής διαιρέσεως τοῦ πολωνύμου $p(x)$, πού έχει πραγματικούς συντελεστές, διά τοῦ τριωνύμου $x^2 - rx - s$, πού έχει επίσης πραγματικούς συντελεστές, ἡ ἀντίστοιχη ταυτότητα τής διαιρέσεως θά εἶναι

$$p(x) \equiv (x^2 - rx - s)q(x) + Rx + S, \quad (1.26)$$

όπου τόσο οἱ συντελεστές $\beta_i \mid i = 0(1)n-2$ τοῦ πηλίκου $q(x)$ μέ

$$q(x) \equiv \beta_0 x^{n-2} + \beta_1 x^{n-3} + \beta_2 x^{n-4} + \dots + \beta_{n-4} x^2 + \beta_{n-3} x + \beta_{n-2} \quad (1.27)$$

όσο καί οἱ συντελεστές R καί S τοῦ ὑπολοίπου θά εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί. Θέτοντας $x = \alpha + \beta i$ στήν ταυτότητα (1.26), καί ἔχοντας ὑπόψη τήν (1.24), παίρνουμε ὅτι

$$p(\alpha + \beta i) = R\alpha + S + R\beta i. \quad (1.28)$$

Ἐπομένως ἡ τιμή $p(\alpha + \beta i)$ μπορεῖ νά βρεθεῖ ἀμέσως ἀρκεῖ νά εἶναι γνωστοί οἱ ἀριθμοί R καί S . Γιά τήν εὑρεση τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν ἐργαζόμαστε μέ τόν ἴδιο τρόπο, ὅπως καί στήν περίπτωση τής εὐρέσεως τής τιμῆς $p(x_0)$. Δηλαδή ἀντικαθιστοῦμε τίς ἐκφράσεις (1.15) καί (1.27) στήν (1.26), ἐκτελοῦμε ὅλες τίς πράξεις στό δεύτερο μέλος, ἐξισώνουμε τούς συντελεστές τῶν ἰσίων δυνάμεων τοῦ x στά δύο μέλη, ὁπότε βρίσκουμε τελικά

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \alpha_0 \\ \beta_1 &= \alpha_1 + r\beta_0 \\ \beta_2 &= \alpha_2 + r\beta_1 + s\beta_0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned}\beta_{n-2} &= \alpha_{n-2} + r\beta_{n-3} + s\beta_{n-4} \\ R &= \alpha_{n-1} + r\beta_{n-2} + s\beta_{n-3} \\ S &= \alpha_n + s\beta_{n-2}\end{aligned}$$

Οι παραπάνω σχέσεις (1.29) μπορούν νά γραφτούν συνοπτικά ως εξής

$$\beta_i = \alpha_i + r\beta_{i-1} + s\beta_{i-2} \quad | i = 0(1)n \quad (1.30)$$

άρκει νά θέσουμε $\beta_{-2} = \beta_{-1} = 0$, $\beta_{n-1} = R$ καί $\beta_n = rR + S$. Είναι φανερό ότι από τίς σχέσεις (1.29), ή τίς ισόδυναμές τους (1.30), μπορούν νά βρεθοῦν οἱ ἀριθμοί R καί S ἀρκεῖ προηγουμένως νά βρεθοῦν στή σειρά οἱ συντελεστές $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-2}$ τοῦ πηλίκου $q(x)$. Ἡ εὕρεση τῶν συντελεστῶν αὐτῶν καθώς καί τῶν β_{n-1} καί β_n γίνεται εὐκολότερα μέ τήν παρακάτω διαγραμματική διάταξη τῶν συντελεστῶν καί τῶν πράξεων, ἀπό τίς ὁποῖες προκύπτουν αὐτοί.

	α_0	α_1	α_2	α_3	$\dots$	α_{n-2}	α_{n-1}	α_n
r		$r\beta_0$	$r\beta_1$	$r\beta_2$	$\dots$	$r\beta_{n-3}$	$r\beta_{n-2}$	$r\beta_{n-1}$
s			$s\beta_0$	$s\beta_1$	$\dots$	$s\beta_{n-4}$	$s\beta_{n-3}$	$s\beta_{n-2}$
	β_0	β_1	β_2	β_3	$\dots$	β_{n-2}	β_{n-1}	β_n

Μετά τήν εὕρεση τῶν συντελεστῶν $\beta_i \quad | i = 0(1)n$, ἐπανερχόμαστε στήν ἔκφραση (1.28) καί ἀντικαθιστοῦμε τίς τιμές τῶν R, S καί r μέ τίς $\beta_{n-1}, \beta_n - r\beta_{n-1}$ καί 2α ἀντίστοιχα, ὁπότε τελικά παίρνουμε ὅτι

$$p(\alpha + \beta i) = (\beta_n - \alpha\beta_{n-1}) + \beta\beta_{n-1} i. \quad (1.31)$$

1.3.4. Ὑπολογισμός τῆς τιμῆς τῆς πρώτης παραγώγου πολυωνύμου γιά

μια μιγαδική τιμή της μεταβλη-
της του

Για την εύρεση της τιμής $p'(x)$ στο σημείο $a+bi$ ξεκί-
νοουμε από την (1.26), όπου οι συντελεστές r και s δίνονται
από τις (1.25) και οι R και S από τις εκφράσεις, που βρή-
καμε στην προηγούμενη παράγραφο, και παραγωγίζουμε τα δύο
μέλη αψής. Έτσι παίρνουμε

$$p'(x) \equiv (2x-r)q(x) + (x^2-rx-s)q'(x) + R$$

και επομένως

$$p'(a+bi) = 2biq(a+bi) + R. \quad (1.32)$$

Άρκει συνεπώς να βρούμε την τιμή $q(a+bi)$. Μέ αυτόν τον
τρόπο το πρόβλημά μας βασικά ανάγεται στο πρόβλημα της
προηγούμενης παραγράφου, στην εύρεση δηλαδή της τιμής του
πολυωνύμου $q(x)$, για μια μιγαδική τιμή της μεταβλητής του
 $(a+bi)$. Η τιμή αυτή θα βρίσκεται από μια σχέση της μορφής
(1.31), όπου όμως στη θέση των β_{n-1} και β_n θα υπάρχουν συν-
τελεστές γ_{n-3} και γ_{n-2} , αφού το πολυώνυμο $q(x)$ είναι $n-2$
βαθμού. Οι νέοι συντελεστές $\gamma_i \mid i=0(1)n-2$ θα έχουν προκύ-
ψει από τους συντελεστές $\beta_i \mid i=0(1)n-2$ με τον ίδιο τρόπο,
πού οι $\beta_i \mid i=0(1)n$ βρέθηκαν από τους $\alpha_i \mid i=1(1)n$. Συγκεκριμέ-
να από σχέσεις της μορφής (1.30), που για την προκείμενη
περίπτωση θα είναι οι ακόλουθες

$$\gamma_i = \beta_i + r\gamma_{i-1} + s\gamma_{i-2} \quad \mid i=0(1)n-2$$

μέ $\gamma_{-2} = \gamma_{-1} = 0$. Μετά την εύρεση των συντελεστών $\gamma_i \mid i=1(1)n-2$
θα μπορούμε, ανάλογα προς την (1.31), να βρούμε την τιμή
 $q(a+bi)$ από τη σχέση

$$q(a+bi) = (\gamma_{n-2} - a\gamma_{n-3}) + b\gamma_{n-3}i,$$

οπότε αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην (1.32) βρίσκουμε
τελικά ότι

$$p'(a+bi) = (\beta_{n-1} - 2\gamma_{n-3}\beta^2) + 2(\gamma_{n-2} - \alpha\gamma_{n-3})\beta i$$

Παρατήρηση:

Γιά τήν εύρεση τών τιμών παραγώγων ανώτερης τάξης, έστω $k \geq 2$, στό σημείο $a+bi$, ανάγουμε συνήθως τό όλο πρόβλημα, στό πρόβλημα τής παρούσας παραγράφου, άφοϋ πρώτα βρούμε αναλυτικά τήν παράγωγο τάξης $k-1$ τοϋ πολυωνύμου, πού δόθηκε.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Υποτίθεται πώς, έκτός από τό σφάλμα άποκοπής, δέν είσχωρεϊ άλλου είδους σφάλμα στόν ύπολογισμό τοϋ $\log(1+x)$, όταν χρησιμοποιείται τό άνάπτυγμα τοϋ Taylor γύρω από τό σημείο 0, πού είναι

$$\log(1+x) \approx \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$

Ποιό είναι τό ελάχιστο πλήθος όρων, πού πρέπει νά χρησιμοποιηθεϊ, ώστε νά βρίσκεται ό $\log(1+x)$ γιά κάθε $x \in (0,1)$ μέ ακρίβεια τεσσάρων δ.ψ., όταν τό ύπόψη σφάλμα άποκοπής δίνεται από τήν έκφραση

$$E_n = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}} \mid 0 < \theta < 1.$$

(Ή έκφραση "μέ ακρίβεια τεσσάρων δ.ψ." σημαίνει $|E_n| \leq 0.5 \times 10^{-4}$). ('Απ. 19.999).

2. Νά αποδειχτεϊ ότι άν ένας πραγματικός αριθμός στρογγυλευτεϊ πρώτα σέ k δ.ψ. καί στή συνέχεια ό ήδη στρογγυλεμένος αριθμός στρογγυλευτεϊ σέ l δ.ψ. ($l < k$), τότε τό μέγιστο δυνατό απόλυτο σφάλμα είναι $0.5 \times (10^{-k} + 10^{-l})$.

3. Ένας πραγματικός αριθμός του δυαδικού συστήματος αριθμώσεως με k σ.ψ. πριν και l σ.ψ. μετά την υποδιαστολή απομνημονεύεται από ένα δυαδικό ψηφιακό Η.Υ. με δυνατότητα απομνημονεύσεως σε μία θέση της μνήμης του αριθμού με m σ.ψ. ($m < k+l$), όλα μετά την υποδιαστολή. Νά βρεθεί τό μέγιστο δυνατό απόλυτο σφάλμα κατά την υπόψη απομνημόνευσή. ('Απ. 2^{k-m-1}).
4. Δίνονται οι αριθμοί $x_1 \approx 1.00$, $x_2 \approx 2.00$ και $x_3 \approx 3.00$ στρογγυλεμένοι σε δύο δ.ψ. ο καθένας. Νά βρεθούν με προσέγγιση τριών δ.ψ. τό μέγιστο απόλυτο και τό μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα της έκφράσεως $x_1 + x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3$. ('Απ. 0.075, 0.008).
5. Δίνονται οι αριθμοί $x_1 = 1.0$, $x_2 = 2.0$, $x_3 = 3.0$, $x_4 = 4.0$ στρογγυλεμένοι σε ένα δ.ψ. ο καθένας. 'Αφοῦ βρεθοῦν κατὰ προσέγγιση τά μέγιστα απόλυτα σχετικά σφάλματα τῶν ἐκφράσεων $y_1 = x_1 + 2x_2$ καί $y_2 = 3x_3 + 4x_4$ νά βρεθεῖ στή συνέχεια κατὰ προσέγγιση τό μέγιστο απόλυτο σχετικό σφάλμα τῆς ἐκφράσεως $y = y_1^3 / y_2^4$. ('Απ. 0.03, 0.014, 0.146).
6. Στίς τέσσερις θέσεις μνήμης a, b, c, d , ενός δεκαδικού ψηφιακού Η.Υ., με δυνατότητα απομνημονεύσεως πραγματικῶν ἀριθμῶν με ἑπτὰ σ.ψ. εἶναι ἀπομνημονεμένοι οἱ ἀριθμοί 1, 3, 4, 10 ἀντίστοιχα. Νά βρεθεῖ τό ἀποτέλεσμα, πού θά δώσει ὁ Η.Υ., ὅταν ἐκτελέσει τίς πράξεις $a/b + c/b + d/b$. ('Απ. 0.4999999×10^1).
7. Με διαδοχικές ἐφαρμογές τοῦ σχήματος τοῦ Horner καί μόνο νά βρεθοῦν οἱ ἀκόλουθες τιμές τοῦ πολυωνύμου $p(x) \equiv 3x^5 - 2x^3 + 2x - 1$ καθώς καί τῶν ἀντίστοιχων παραγῶ-
γων του $p(-2)$, $p'(-1)$, $p''(0)$, $p'''(1)$, $p^{(4)}(2)$, $p^{(5)}(3)$. ('Απ. -85, 11, 0, 168, 720, 360).

8. Μέ την εφαρμογή του σχήματος του Horner και μόνο νά βρεθούν οι παράμετροι a, b, c, d και e ώστε νά μπορεί νά τεθεῖ τό πολυώνυμο $p(x) \equiv x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1$ μέ τή μορφή $p(x) \equiv a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 + e(x-1)^4$. ('Απ. 8, 17, 16, 7, 1).
9. Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τοῦ κλάσματος
$$\frac{x^3 - 3x^2 - 2x + 8}{x^2 + x - 6}$$
 στό σημείο $x=2$, ἐφαρμόζοντας τό σχῆμα τοῦ Horner καί μόνο. ('Απ. $-2/5$).
10. Νά βρεθεῖ τό εἶδος καί τό πλῆθος τῶν πράξεων, πού ἀπαιτοῦνται, γιά τήν εὑρεση τῆς τιμῆς τῆς δεύτερης παραγώγου καί μόνο πολυωνύμου βαθμοῦ n , σέ γνωστό σημείο, ἐφαρμόζοντας διαδοχικά τό σχῆμα τοῦ Horner καί ἀπαφεύγοντας τελείως τίς περιττές πράξεις. ('Απ. $3n-6$ προσθαφαιρέσεις, $3n-5$ πολλαπλασιασμοί).
11. Νά ἀναπτυχτεῖ ἀντίστοιχη θεωρία γιά τήν εὑρεση τοῦ πηλίκου καί τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως ἐνός πολυωνύμου $p(x)$, μέ πραγματικούς συντελεστές, διά τοῦ γινομένου $(x-a)(x-b)$ (a, b πραγματικοί), ἐφαρμόζοντας δύο φορές διαδοχικά τό σχῆμα τοῦ Horner. Νά γίνεῖ ἐφαρμογή στήν περίπτωση τῆς διαιρέσεως τοῦ $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ διά τοῦ $(x-1)(x-2)$. ('Απ. Πηλ. $x^2 + x + 4$, 'Υπ. $6x - 3$).
12. Μέ διαδοχικές ἐφαρμογές τοῦ σχήματος τοῦ Horner καί μόνο νά βρεθοῦν οἱ συντελεστές a, b, c ἔτσι ὥστε τό πολυώνυμο $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 8$ νά διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό διώνυμο $(x+2)^3$. ('Απ. 5, 6, -4).
13. Ἐφαρμόζοντας ἐπανειλημμένα τήν επέκταση τοῦ σχήματος τοῦ Horner νά βρεθεῖ ἡ τιμή τοῦ πολυωνύμου $p(x) \equiv 3x^5 - 2x^3 + x^2 - 4x + 3$ καί τῆς πρώτης παραγώγου του στό σημείο

$$x=1-i. \text{ ('Απ. } -9+18i, -62+10i)$$

14. Νά βρεθεῖ τό εἶδος καί τό πλῆθος τῶν πράξεων κατὰ τήν εὕρεση τῆς τιμῆς ἑνός πολυωνύμου βαθμοῦ n μέ πραγματικούς συντελεστές, γιά κάποια τιμή $a+bi$ τῆς μεταβλητῆς του, ὅπου a καί b πραγματικοί ἀριθμοί καί $i=\sqrt{-1}$. ('Απ. $2n+1$ προσθαφαιρέσεις, $2n+4$ πολλαπλασιασμοί).

— / —

2. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ

2.1. Γενικά

Οι πεπερασμένες διαφορές παίζουν μεγάλο ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας, που θα ακολουθήσει στα άμεσα επόμενα κεφάλαια, και αποτελούν ένα από τα πιο σημαντικά εργαλεία της Α.Α.. Διακρίνουμε τρεις τύπους διαφορών ανάλογα με το συμβολισμό, που χρησιμοποιούμε για να τις παραστήσουμε. Τίς προς τα εμπρός, τίς προς τα πίσω και τίς κεντρικές διαφορές.

2.2. Έννοιες, όρισμοί και σχέσεις πεπερασμένων διαφορών

Υποθέτουμε ότι έχουμε έναν πίνακα τιμών μιᾶς συναρτήσεως $f(x)$, που ορίζεται σε ένα πλήθος διακεκριμένων σημείων της ανεξάρτητης μεταβλητής, έστω x_i , όπου ο δείκτης i παίρνει αδιαίρετες, αλλά ορισμένες διαδοχικές ακέραιες τιμές.

Οι πρώτες προς τα εμπρός διαφορές στο σημείο x_n ορίζονται από τη σχέση

$$\Delta f_n = f(x_{n+1}) - f(x_n) = f_{n+1} - f_n \quad (2.1)$$

και επαγωγικά οι προς τα εμπρός διαφορές k τάξης στο σημείο x_n από τις προς τα εμπρός διαφορές $k-1$ τάξης. Συγκεκριμένα

$$\Delta^k f_n = \Delta(\Delta^{k-1} f_n) = \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n.$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται οι πρώτες προς τα πίσω διαφορές στο σημείο x_n

$$\nabla f_n = f(x_n) - f(x_{n-1}) = f_n - f_{n-1} \quad (2.2)$$

και επαγωγικά οι προς τα πίσω διαφορές k τάξης στο σημείο

x_n από τή σχέση

$$\nabla^k f_n = \nabla(\nabla^{k-1} f_n) = \nabla^{k-1} f_n - \nabla^{k-1} f_{n-1}.$$

Τέλος οι πρώτες κεντρικές διαφορές, στο σημείο $x_{n+1/2}$ ὀρίζονται από τή σχέση

$$\delta f_{n+1/2} = f(x_{n+1}) - f(x_n) = f_{n+1} - f_n \quad (2.3)$$

καί οι δεύτερες κεντρικές διαφορές στο σημείο x_n από τή σχέση

$$\delta^2 f_n = \delta(\delta f_n) = \delta f_{n+1/2} - \delta f_{n-1/2}.$$

Ἐπαγωγικά ὀρίζονται οι κεντρικές διαφορές περιττῆς καί ὀρτιας τάξης στά σημεία $x_{n+1/2}$ καί x_n από τίς σχέσεις

$$\delta^{2k-1} f_{n+1/2} = \delta(\delta^{2k-2} f_{n+1/2}) = \delta^{2k-2} f_{n+1} - \delta^{2k-2} f_n$$

καί

$$\delta^{2k} f_n = \delta(\delta^{2k-1} f_n) = \delta^{2k-1} f_{n+1/2} - \delta^{2k-1} f_{n-1/2}.$$

Ἀπό τούς ὀρισμούς τῶν τριῶν τύπων διαφορῶν παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἴδια ποσότητα μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ (ἢ νά συμβολιστεῖ) μέ τρεῖς διαφορετικούς τρόπους. Ἔτσι εἶναι εὐκόλο, νά διαπιστώσουμε ὅτι ἀπό τίς σχέσεις (2.1), (2.2) καί (2.3) παίρνουμε

$$\Delta f_n = \nabla f_{n+1} = \delta f_{n+1/2} \quad (2.4)$$

καί στή συνέχεια νά ἀποδείξουμε ἐπαγωγικά ὅτι

$$\Delta^k f_n = \nabla^k f_{n+k} = \delta^k f_{n+k/2}. \quad (2.5)$$

Ἡ ἰσχὺς τῶν σχέσεων (2.4) καί (2.5) μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ἀμέσως μέ τήν κατασκευή τῶν λεγόμενων πινάκων διαφορῶν, πού θά ἀποβοῦν χρησιμότεροι στή συνέχεια καί ἰδιαίτερα στίς ἐφαρμογές. Ἡ κατασκευή ἐνός πίνακα διαφορῶν γίνεται μέ ἁ-

πλό τρόπο. θεωρούμε καταρχήν τις τιμές της συναρτήσεως, πού δόθηκαν, γραμμένες σε μία στήλη (άν θέλουμε μπορούμε να γράψουμε άριστερά της στήλης των τιμών της συναρτήσεως τις αντίστοιχες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής, οι όποιες όμως δεν έπηρεάζουν τόν πίνακα διαφορών). Στη συνέχεια κατασκευάζουμε δεξιά της στήλης των τιμών της συναρτήσεως μία νέα στήλη, τή στήλη των πρώτων διαφορών (πρός τά έμπρός, προς τά πίσω ή κεντρικών), σχηματίζοντας τις διαφορές, πού προκύπτουν άν από μία τιμή της συναρτήσεως στον πίνακα άφαιρέσουμε τήν άμέσως προηγούμενη τιμή. Ή τιμή της πρώτης διαφοράς, πού προκύπτει, γράφεται στη νέα στήλη καί μάλιστα μεταξύ των τιμών της συναρτήσεως από τις όποιες προήρθε. Ή συνέχεια της κατασκευής του πίνακα διαφορών είναι φανερή. Κατασκευάζουμε τή στήλη των δεύτερων διαφορών από τή στήλη των πρώτων διαφορών άκριβώς μέ τόν ίδιο τρόπο, πού ή στήλη των πρώτων διαφορών κατασκευάστηκε από τις τιμές της συναρτήσεως κ. ο.κ. Ή χρησιμοποίηση των συμβολισμών των προς τά έμπρός, των προς τά πίσω καί των κεντρικών διαφορών μπορεί να δώσει τις ακόλουθες τρεις μορφές, όπως φαίνεται παρακάτω στον μονοσήμαντα όρισμένο, από τόν τρόπο της κατασκευής του, πίνακα διαφορών.

i)

x_{n-2}	f_{n-2}	Δf_{n-2}	$\Delta^2 f_{n-2}$	$\Delta^3 f_{n-2}$
x_{n-1}	f_{n-1}	Δf_{n-1}	$\Delta^2 f_{n-1}$	$\Delta^3 f_{n-1}$
x_n	f_n	Δf_n	$\Delta^2 f_n$	
x_{n+1}	f_{n+1}	Δf_{n+1}		
x_{n+2}	f_{n+2}			

$$\begin{array}{rcl}
 \text{ii)} & x_{n-2} & f_{n-2} \\
 & & \nearrow \nabla f_{n-1} \\
 & x_{n-1} & f_{n-1} \nearrow \nabla^2 f_n \\
 & & \nearrow \nabla f_n \nearrow \nabla^3 f_{n+1} \\
 & x_n & f_n \nearrow \nabla^2 f_{n+1} \\
 & & \nearrow \nabla f_{n+1} \nearrow \nabla^3 f_{n+2} \\
 & x_{n+1} & f_{n+1} \nearrow \nabla^2 f_{n+2} \\
 & & \nearrow \nabla f_{n+2} \\
 & x_{n+2} & f_{n+2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{iii)} & x_{n-2} & f_{n-2} \\
 & & \delta f_{n-3/2} \\
 & x_{n-1} & f_{n-1} \delta^2 f_{n-1} \\
 & & \delta f_{n-1/2} \delta^3 f_{n-1/2} \\
 & x_n & f_n \delta^2 f_n \\
 & & \delta f_{n+1/2} \delta^3 f_{n+1/2} \\
 & x_{n+1} & f_{n+1} \delta^2 f_{n+1} \\
 & & \delta f_{n+3/2} \\
 & x_{n+2} & f_{n+2}
 \end{array}$$

Όπως είναι δυνατό νά παρατηρήσει κανείς ίδιοι δείκτες εμφανίζονται στον πίνακα τών προς τά εμπρός διαφορών κατά μήκος παραλλήλων μέ φορά από πάνω άριστερά προς τά κάτω δεξιά, στον πίνακα τών προς τά πίσω διαφορών κατά μήκος παραλλήλων μέ φορά από κάτω άριστερά προς τά πάνω δεξιά καί τέλος στον πίνακα τών κεντρικών διαφορών κατά μήκος οριζόντιων γραμμών. Ή παρατήρηση αύτή μπορεί νά δώσει μία εύκολη καί άπλή απόδειξη τών σχέσεων (2.4) καί (2.5), αφού καί στίς τρεῖς περιπτώσεις πρόκειται γιά τόν ίδιο άκριβώς πίνακα.

Άπό τόν τρόπο κατασκευής ενός πίνακα διαφορών είναι φανερό, ότι ή οποιαδήποτε διαφορά στον πίνακα θά μπορεί νά

έκφραστεϊ σάν συνάρτηση τών τιμών τῆς συναρτήσεως καί μόνο. Τό παρακάτω θεώρημα δίνει καί τήν ἀντίστοιχη έκφραση.

Θεώρημα

Ἡ ὁποιαδήποτε πρὸς τὰ ἐμπρός διαφορά k τάξης έκφράζεται σάν συνάρτηση τών τιμών τῆς συναρτήσεως καί μόνο. Συγκεκριμένα ἔχουμε ὅτι

$$\Delta^k f_n = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} f_{n+k-i} . \quad (2.6)$$

Ἀπόδειξη

Ἡ ἀπόδειξη γίνεται μέ τήν τέλεια ἐπαγωγή. Γιά $k=1$ πρέπει νά ἀποδείξουμε ὅτι

$$\Delta f_n = \sum_{i=0}^1 (-1)^i \binom{1}{i} f_{n+1-i}$$

ἢ ἐκτελώντας τίς πράξεις σὺν δεύτερο μέλος

$$\Delta f_n = (-1)^0 \binom{1}{0} f_{n+1-0} + (-1)^1 \binom{1}{1} f_{n+1-1} = f_{n+1} - f_n ,$$

πράγμα πού ἰσχύει ἀπὸ τὸν ἀντίστοιχο ὁρισμό. Ὑποθέτουμε τώρα ὅτι ἡ σχέση (2.6) εἶναι ἀληθὴς γιὰ ὅλες τίς πρὸς τὰ ἐμπρός διαφορές $k \geq 1$ τάξης καί ζητοῦμε νά ἀποδείξουμε τήν ἰσχύ της γιὰ τίς πρὸς τὰ ἐμπρός διαφορές $k+1$ τάξης. Ζητοῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι

$$\Delta^{k+1} f_n = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{k+1}{i} f_{n+k+1-i} .$$

Παίρνουμε τὸ πρῶτο μέλος τῆς σχέσης πού θέλουμε νά ἀποδείξουμε. Αὐτό γράφεται

$$\Delta^{k+1} f_n = \Delta^k f_{n+1} - \Delta^k f_n ,$$

ἀπὸ τὸν ὁρισμό τῶν πρὸς τὰ ἐμπρός διαφορῶν τάξης $k+1$, ἢ

$$\Delta^{k+1} f_n = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} f_{n+k+1-i} - \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} f_{n+k-i} ,$$

από την υπόθεση της τέλει επαγωγής. Το δεύτερο μέλος όμως γίνεται με διαδοχικούς μετασχηματισμούς

$$\begin{aligned}
 \Delta^{k+1} f_n &= (-1)^0 \binom{k}{0} f_{n+k+1-0} + \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} f_{n+k+1-i} - \\
 &\quad - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} f_{n+k-i} - (-1)^k \binom{k}{k} f_{n+k-k} = \\
 &= f_{n+k+1} + \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} f_{n+k+1-i} + \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} \binom{k}{i} f_{n+k-i} + (-1)^{k+1} f_n = \\
 &= f_{n+k+1} + \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} f_{n+k+1-i} + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i-1} f_{n+k+1-i} + (-1)^{k+1} f_n = \\
 &= f_{n+k+1} + \sum_{i=1}^k (-1)^i \left[\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} \right] f_{n+k+1-i} + (-1)^{k+1} f_n = \\
 &= (-1)^0 \binom{k+1}{0} f_{n+k+1-0} + \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k+1}{i} f_{n+k+1-i} + \\
 &\quad + (-1)^{k+1} \binom{k+1}{k+1} f_{n+k+1-k-1} = \\
 &= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{k+1}{i} f_{n+k+1-i}
 \end{aligned}$$

τό όποιο αποδεικνύει τό ζητούμενο.

Τό θεώρημα, πού αποδείχτηκε μάς δίνει μία έκφραση για τίς πρός τά έμπρός διαφορές k τάξης. Στο παρακάτω πόρισμα δίνουμε τίς αντίστοιχες έκφράσεις για τίς πρός τά πίσω καθώς επίσης και τίς αντίστοιχες κεντρικές διαφορές.

Πόρισμα

Οί όποιοσδήποτε πρός τά πίσω και κεντρικές διαφορές

k τάξης δίνονται εάν συναρτήσεις των τιμών της συναρτήσεως από τις εκφράσεις

$$V^k f_{n+k} = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} f_{n+k-i}$$

και

$$V^k f_{n+k/2} = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} f_{n+k-i}.$$

Απόδειξη

οι παραπάνω σχέσεις λαβαίνονται άμέσως, αν τό πρώτο μέλος της (2.6) αντικαταστήσουμε μέ τά [σα του από τις σχέσεις (2.5).

Η παραπέρα ανάλυση καθώς επίσης και η παραγωγή άλλων τύπων διευκολύνεται πάρα πολύ, αν υποθέσουμε ότι οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής, για τις όποιες δίνονται οι αντίστοιχες τιμές της συναρτήσεως, ισαπέχουν. Η υπόθεση αυτή θά θεωρείται, σιωπηρά, ότι ισχύει έκτός και αν σαφώς τονίζεται τό αντίθετο. Η διαφορά $x_{n+1} - x_n$ δύο διαδοχικών τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής θά καλεΐται βήμα πινακοποιήσεως και θά συμβολίζεται μέ τό γράμμα h . Όταν στα παρακάτω δέν αναφέρεται κάτι σχετικό για τό h θά υποτίθεται ότι $h > 0$. Έτσι μέ όσα μέχρι τώρα αναπτύξαμε στό παρόν Κεφάλαιο είμαστε σέ θέση νά διατυπώσουμε και νά αποδείξουμε ένα βασικό θεώρημα, πού αναφέρεται στις διαφορές.

Θεώρημα

Οι διαφορές n τάξης ενός πολυωνύμου βαθμού n είναι σταθερές.

Απόδειξη

Έστω

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

τό πολυώνυμο βαθμού n . Άρκεϊ τό θεώρημα νά αποδειχτεί για τίς πρὸς τά ἐμπρὸς διαφορές, μιά καί ὅπως ἔχουμε ἤδη τονίσει οἱ τρεῖς τύποι διαφορῶν συμπίπτουν ἀπόλυτα καί μόνόν ὁ συμβολισμός τους καί οἱ σχετικοί δείκτες ἀλλάζουν (σχέσεις (2.5)). Ἔτσι παίρνουμε τήν πρώτη πρὸς τά ἐμπρὸς διαφορά στό ὁποιοδήποτε σημείο x τοῦ πίνακα διαφορῶν, ὁπότε χρησιμοποιώντας καί τό ἀνάπτυγμα τοῦ διωνύμου τοῦ Newton βρίσκουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= f(x+h) - f(x) = [a_0(x^n + nhx^{n-1} + \dots) + a_1(x^{n-1} + (n-1)hx^{n-2} + \dots) + \dots + a_{n-1}(x+h) + a_n] - (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n) = \\ &= a_0nhx^{n-1} + \text{ὅροι βαθμοῦ} < n-1 \text{ ἂν ὑπάρχουν.}\end{aligned}$$

Ἀποδείξαμε δηλαδή ὅτι οἱ διαφορές πρώτης τάξης ἑνὸς πολυωνύμου βαθμοῦ n , μέ συντελεστή μεγιστοβάθμιου ὅρου a_0 , στό ὁποιοδήποτε σημείο πινακοποιήσεως x , ἀποτελοῦν πολυώνυμο βαθμοῦ $n-1$ μέ συντελεστή μεγιστοβάθμιου ὅρου a_0nh , ὅπου h τό βῆμα τῆς πινακοποιήσεως. Μέ βάση τό συμπέρασμα αὐτό, μπορούμε νά βροῦμε, ἀφοῦ τό ἐφαρμόσουμε διαδοχικά n φορές ὅτι

$\Delta^n f(x) = a_0nh(n-1)h \dots 2h1hx^{n-n} + \text{ὅροι βαθμοῦ} < n-n$ ἂν ὑπάρχουν ἢ τέλος

$$\Delta^n f(x) = a_0 n! h^n$$

δηλαδή σταθερό.

Πόρισμα

Οἱ διαφορές $n+1$ καί ἀνώτερης τάξης ἑνὸς πολυωνύμου βαθμοῦ n εἶναι ἴσες μέ μηδέν.

2.3. Μετάδοση σφαλμάτων σέ διαφορές ἀνώτερης τάξης

2.3.1. Γενικά

Αν υπάρχουν σφάλματα σε μία ή περισσότερες από τις τιμές της συναρτήσεως αυτό έχει σαν συνέπεια τη μετάδοσή τους στις διαφορές ανώτερης τάξης, επομένως και στον αντίστοιχο πίνακα διαφορών. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη γενική περίπτωση, όπου υπάρχουν σφάλματα σ' όλες τις τιμές της συναρτήσεως και από τα συμπεράσματα, που θα προκύψουν, θα αναφερθούμε σε δύο συγκεκριμένες περιπτώσεις.

2.3.2. Μετάδοση σφαλμάτων

Ας υποθέσουμε ότι οι τιμές της συναρτήσεως $f(x)$, που δίνονται, περιέχουν σφάλματα. Πιο συγκεκριμένα ας υποθέσουμε ότι αντί της οποιασδήποτε αληθοῦς τιμής f_n της συναρτήσεως, δίνεται η f_n^* με αντίστοιχο σφάλμα $\epsilon_n^0 = f_n^* - f_n$, που μπορεί να είναι και μηδέν. Είναι φυσικό, πώς αν επιζητούμε να βρούμε, έστω, την προς τα εμπρός διαφορά m τάξης στο σημείο x_n , δηλαδή την $\Delta^m f_n$, αντί αυτής θα μπορούμε να βρούμε μία τιμή [σημείωση] με $(\Delta^m f_n)^* = \Delta^m f_n^*$, αφού, όπως είναι γνωστό οι διαδεξιμες τιμές της συναρτήσεως είναι οι f_n^* και η αντίστοιχη έκφραση από τη σχέση (2.6), είναι γραμμική με συντελεστές ακριβείς. Έτσι όμως κάνουμε ένα σφάλμα ϵ_n^m , το οποίο θα είναι ίσο με

$$\epsilon_n^m = \Delta^m f_n^* - \Delta^m f_n$$

ή αν χρησιμοποιήσουμε την έκφραση (2.6) θα έχουμε ότι

$$\epsilon_n^m = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} f_{n+m-i}^* - \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} f_{n+m-i}$$

Κάνοντας τις αναγωγές στο δεύτερο μέλος βρίσκουμε ότι

$$\epsilon_n^m = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (f_{n+m-i}^* - f_{n+m-i})$$

ή τέλος

$$\varepsilon_n^m = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} \varepsilon_{n+m-i}^0. \quad (2.7)$$

Ο τύπος (2.7) δίνει το σφάλμα ε_n^m , πού θα υπάρχει στην πρόσ-
τά εμπρός διαφορά m τάξης στο σημείο x_n εάν συνάρτηση των
σφαλμάτων ε_j^0 $|j=n(1)n+m$, πού υπάρχουν στίς αντίστοιχες τι-
μές της συναρτήσεως. Από τον τύπο (2.7) μπορούμε νά βροϋ-
με ένα φράγμα για τό αντίστοιχο απόλυτο σφάλμα. Για τό σκο-
πό αυτό αρκεί νά πάρουμε τίς απόλυτες τιμές των δύο μελών
της σχέσεως (2.7) καί στή συνέχεια νά εφαρμόσουμε απλές
ιδιότητες τους.

Έτσι λαβαίνουμε

$$|\varepsilon_n^m| \leq \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} |\varepsilon_{n+m-i}^0|. \quad (2.8)$$

Οι τύποι (2.7) καί (2.8) είναι χρησιμότετοι στην πράξη, ό-
πως θα δοϋμε στίς επόμενες δύο παραγράφους, όπου θα δώσου-
με δύο από τίς πιο συνηθισμένες εφαρμογές τους.

2.3.3. Μετάδοση σφαλμάτων στρογγυ- λεύσεως

Ας υποθέσουμε ότι οι τιμές της συναρτήσεως δίνονται
στρογγυλεμένες σε k δ.ψ. με αντίστοιχα σφάλματα στρογγυ-
λεύσεως ε_n^0 , για την τιμή f_n , καί ότι εκτός από τά σφάλμα-
τα στρογγυλεύσεως δέν υπάρχουν σφάλματα άλλου είδους. Αν
τώρα θέλουμε νά βροϋμε την πρόσ τά εμπρός διαφορά m τάξης
στο σημείο x_n , ή αντίστοιχη τιμή της θα βρεθεί με σφάλμα,
πού θα δίνεται από την έκφραση (2.7). Έπειδή όμως, όπως
είναι γνωστό, στην περίπτωση των σφαλμάτων στρογγυλεύσεως
αριθμών σε k δ.ψ. δέν είναι γνωστά τά σφάλματα αυτά, αλλά
απόλυτα φράγματά τους, πού ικανοποιούν τίς σχέσεις

$$|\varepsilon_j^0| \leq 0.5 \times 10^{-k} \quad |j=n(1)n+m, \quad (2.9)$$

ο τύπος (2.8) ίσως είναι χρησιμότερος. Στην προκειμένη περίπτωση, χρησιμοποιώντας τις (2.9), ο (2.8) δίνει διαδοχικά

$$\begin{aligned} |\varepsilon_n^m| &\leq \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} 0.5 \times 10^{-k} = \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \right) 0.5 \times 10^{-k} = \\ &= \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \cdot 1^{m-i} \cdot 1^i \right) 0.5 \times 10^{-k} = (1+1)^m 0.5 \times 10^{-k} \end{aligned}$$

και τελικά λαβαίνουμε ότι

$$|\varepsilon_n^m| \leq 2^{m-1} \times 10^{-k}.$$

2.3.4. Μετάδοση ενός απομονωμένου σφάλματος

Ας υποθέσουμε ότι όλες οι τιμές της συναρτήσεως $f(x)$ είναι ακριβείς, εκτός από μία, έστω την f_n , στην οποία υπάρχει σφάλμα ίσο με ε . Έκείνο, που θα προσπαθήσουμε να βρούμε είναι πώς το σφάλμα αυτό θα επηρεάσει τις προς τα εμπρός διαφορές m τάξης.

Είναι φανερό ότι η θεωρία, που αναπτύχθηκε στην παράγραφο 2.3.2. θα ισχύει και τώρα με την προϋπόθεση όμως ότι $\varepsilon_n^0 = \varepsilon$ και $\varepsilon_j^0 = 0$ για κάθε $j \neq n$. Έτσι θα ισχύει η σχέση (2.7) σε κάθε σημείο x_ℓ , που θα είναι αντίστοιχα ή

$$\varepsilon_\ell^m = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} \varepsilon_{\ell+m-i}^0. \quad (2.10)$$

Στό δεύτερο μέλος της παραπάνω σχέσης, σύμφωνα με τις υποθέσεις, όλες οι τιμές $\varepsilon_{\ell+m-i}^0$ $|i=0(1)m$ είναι ίσες με μηδέν εκτός από την $\varepsilon_n^0 = \varepsilon$, εφόσον φυσικά αυτή περιέχεται στην έκφραση του δεύτερου μέλους. Τό τελευταίο συμβαίνει αν και μόνο αν

$$\ell \leq n \leq \ell+m$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$n-m \leq l \leq n. \quad (2.11)$$

Επομένως οι προς τα εμπρός διαφορές m τάξης στο σημείο x_l θα είναι άκριβεις για όλες τις τιμές $l < n-m$ και $l > n$. Για τις υπόλοιπες τιμές του l , που δίνονται από τις (2.11), οι αντίστοιχες διαφορές θα περιέχουν ένα σφάλμα, που, από τη (2.10) προκύπτει άμέσως ότι, θα έχει την έκφραση

$$e_{\lambda}^m = (-1)^{l+m-n} \binom{m}{l+m-n} \epsilon \quad |l = n-m(1)n. \quad (2.12)$$

Έχοντας υπόψη τις παραπάνω εκφράσεις (2.12) μπορούμε να δώσουμε παραστατικά την μετάδοση ενός απομονωμένου σφάλματος στις διαφορές ανώτερης τάξης διά μέσου του παρακάτω πίνακα, που δείχνει τα σφάλματα, που θα υπάρχουν στις αντίστοιχες διαφορές.

$\vdots$					
x_{n-4}	0		0		0
		0		0	
x_{n-3}	0		0		0
		0		0	
x_{n-2}	0		0		ϵ
		0		ϵ	
x_{n-1}	0		ϵ		-4ϵ
		ϵ		-3ϵ	
x_n	ϵ		-2ϵ		6ϵ
		$-\epsilon$		3ϵ	
x_{n+1}	0		ϵ		-4ϵ
		0		$-\epsilon$	
x_{n+2}	0		0		ϵ
		0		0	
x_{n+3}	0		0		0
		0		0	
x_{n+4}	0		0		0
$\vdots$					

Παρατήρηση:

Η παρουσία των συντελεστών του άναπτύγματος του δι-

ωνύμου του Newton στις σχέσεις (2.12) ή, όπως φαίνεται παραστατικότερα, στον πίνακα της προηγούμενης σελίδας, μάς επιτρέπει να ανακαλύπτουμε την ύπαρξη ενός απομονωμένου σφάλματος και συγκεκριμένα, όταν η συνάρτηση $f(x)$ είναι πολυώνυμο γνωστού βαθμού m ή μπορεί να θεωρηθεί με μεγάλη προσέγγιση πολυώνυμο γνωστού βαθμού m . Αυτό δε γιατί τότε, ενώ θα έπρεπε στον πίνακα διαφορών οι αντίστοιχες διαφορές τάξης $n+1$ να ήταν ίσες με μηδέν ή κατά προσέγγιση ίσες με μηδέν, θα παρουσιάζονται ποσότητες διάφορες από το μηδέν, οι οποίες θα είναι ίσες ή κατά προσέγγιση ίσες αντίστοιχα με τα γινόμενα των δυωνυμικών συντελεστών επί το απομονωμένο σφάλμα ϵ .

2.4. Γ ρ α μ μ ι κ ο ί Τ ε λ ε σ τ έ ς Δ ι α φ ο ρ ῶ ν

2.4.1. Γ ε ν ι κ ά

Τά σύμβολα Δ , ∇ και δ , πού χρησιμοποιήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους, αποτελούν τελεστές. Όπως είναι δε φυσικό καλούνται τελεστές διαφορών. Έκείνο, πού μπορεί να αποδειχτεί εύκολα, για τούς τελεστές διαφορών, είναι ότι αυτοί είναι γραμμικοί τελεστές. Δηλαδή ό όποιοσδήποτε τελεστής T από αυτούς ικανοποιεί τη σχέση

$$T(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha T f(x) + \beta T g(x),$$

όπου α και β σταθερές και $f(x)$ και $g(x)$ συναρτήσεις. Υποτίθεται ακόμη ότι τόσο οι συναρτήσεις f και g όσο και τά αποτελέσματα της εφαρμογής του τελεστή T σ'αυτές, δηλαδή τά Tf και Tg , είναι ορισμένα στο σημείο x .

Στά παρακάτω θα υποτίθεται σιωπηρά ότι, τόσο η συνάρτηση, πού δά αναφέρεται, όσο και τό αποτέλεσμα της εφαρμογής του τελεστή σ'αυτήν, στο οποιοδήποτε σημείο αναφοράς x , έχουν έννοια, δηλαδή είναι ορισμένα.

Στήν παρούσα παράγραφο εισάγουμε δύο ακόμη τελεστές,

πού, όπως είναι εύκολο νά αποδειχτεί, είναι γραμμικοί. Τόν τελεστή μετατοπίσεως E , πού ορίζεται από τή σχέση

$$Ef(x) = f(x+h),$$

όπου h τό βήμα τής πινακοποιήσεως, καί τόν γνωστό από τήν 'Ανάλυση τελεστή παραγωγίσεως ή τελεστή τής παραγώγου D , πού ορίζεται από τή σχέση

$$Df(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Οι πέντε τελεστές Δ , ∇ , δ , E καί D σχετίζονται μεταξύ τους καί μάλιστα υπακούουν λίγο - πολύ στους νόμους τής 'Αλγεβρας. Έτσι είναι δυνατό νά αναπτύξουμε ένα Λογισμό, πού θά καλεΐται Λογισμός τών Τελεστών, καί νά χρησιμοποιήσουμε μεθόδους, μέ βάση αυτόν, πού θά καλούνται Συμβολικές Μέθοδοι. Γιά τήν ανάπτυξη όμως τοῦ συγκεκριμένου Λογισμοῦ τών Τελεστών μᾶς χρειάζονται ὁρισμένες ἐννοιες καί ὁρισμοί ἀπό τή βασική θεωρία τών Τελεστών σέ σχέση πάντοτε μέ τούς πέντε τελεστές, πού μᾶς ἐνδιαφέρουν καί, πού δίνουμε στήν ἐπόμενη παράγραφο.

2.4.2. Βασικές ἐννοιες καί ὁρισμοί γιά τούς τελεστές

Στή συνέχεια θά ἀναφερόμαστε πάντοτε σέ κάθε συνάρτηση $f(x)$ καί σέ κάθε σημείο x αὐτῆς, μέ τήν ἐννοια, πού ἐπεξηγήσαμε στήν ἀρχή τῆς προηγούμενης παραγράφου, καί θά λέμε ὅτι:

- i) Οἱ τελεστές T_1 καί T_2 εἶναι ἴσοι καί γράφουμε $T_1 = T_2$, ὅταν ἰσχύει ἡ σχέση $T_1 f(x) = T_2 f(x)$.
- ii) Ὁ τελεστής T εἶναι τό ἄθροισμα (ἢ ἡ διαφορά) τῶν τελεστών T_1 καί T_2 καί γράφουμε $T = T_1 + T_2$ (ἢ $T_1 - T_2$), ὅταν ἰσχύει ἡ σχέση $Tf(x) = T_1 f(x) + T_2 f(x)$ (ἢ $T_1 f(x) - T_2 f(x)$).
- iii) Ὁ τελεστής T εἶναι τό γινόμενο τῶν τελεστών T_1

καί T_2 , στη σειρά αυτή, καί γράφουμε $T = T_1 T_2$, όταν ισχύει ή σχέση $Tf(x) = T_1(T_2 f(x))$.

- iv) 'Ο τελεστής T είναι ο ταυτοτικός ή μοναδιαίος τελεστής καί τόν συμβολίζουμε συνήθως μέ I ή ακόμη καί μέ τόν αριθμό 1 (όταν δέν υπάρχει περίπτωση συγχύσεως), όταν ισχύει ή σχέση $Tf(x) = f(x)$ καί
- v) 'Ο τελεστής T_1 είναι ο δεξιός αντίστροφος του τελεστή T , όταν ισχύει ή σχέση $TT_1 = 1$. 'Ο δεξιός αντίστροφος συμβολίζεται συνήθως μέ T^{-1} . 'Εδω θά πρέπει νά προσθέσουμε, πώς αν ο δεξιός αντίστροφος του τελεστή T , ο T^{-1} , συμβαίνει νά είναι συγχρόνως καί άριστερός αντίστροφος του T , ισχύει δηλαδή καί ή σχέση $T^{-1}T = 1$, τότε λέμε απλά ότι ο T^{-1} είναι αντίστροφος του T . Στην περίπτωση αυτή, είναι φανερό ότι, ισχύει ή αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού μεταξύ T καί T^{-1} καί πιο συγκεκριμένα $T^{-1}T = TT^{-1} = 1$.

2.4.3. Λογισμός των τελεστών Δ , ∇ , δ , E καί D

Είναι φανερό πώς ότι αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο για τους τελεστές T , T_1 , T_2 κλπ, μπορεί κάλλιστα νά αναφερθεί για τόν καθένα από τους πέντε συγκεκριμένους τελεστές Δ , ∇ , δ , E καί D . 'Εκείνο, πού έχει ιδιαίτερη σημασία καί αξίζει νά τονιστεί είναι ότι, από τους πέντε τελεστές μόνο ο τελεστής E έχει αντίστροφο. Οι άλλοι τέσσερις έχουν μόνο δεξιό αντίστροφο, πού έχει όμως μιá βασική ιδιότητα. 'Η απόδειξη των δύο αυτών ισχυρισμών γίνεται στά παρακάτω θεωρήματα 1 καί 2.

Θεώρημα 1

'Ο τελεστής μετατοπίσεως E έχει αντίστροφο.

Απόδειξη

Αν E^{-1} είναι ο δεξιός αντίστροφος του E θα ισχύει από τον ορισμό (v) της προηγούμενης παραγράφου ότι $EE^{-1} = 1$. Για να είναι αυτός, δηλαδή ο E^{-1} , αντίστροφος του E αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι και αριστερός αντίστροφος αυτού. Για τó σκοπό αυτό θεωρούμε τον τελεστή $E^{-1}E$ και τον εφαρμόζουμε στην οποιαδήποτε συνάρτηση $f(x)$ και στο οποιοδήποτε σημείο x αυτής (μέ την προϋπόθεση ότι έχει έννοια ό,τι κάνουμε). Τó αποτέλεσμα μπορεί να γραφτεί με τή μορφή $f(x) + g(x)$, όπου $g(x)$ πρέπει να προσδιοριστεί. Έτσι έχουμε

$$(E^{-1}E)f(x) = f(x) + g(x) \quad (2.13)$$

ή επειδή ισχύει ο ορισμός (iii), της προηγούμενης παραγράφου, θα έχουμε

$$E^{-1}(Ef(x)) = f(x) + g(x) .$$

Εφαρμόζουμε και στά δύο μέλη της παραπάνω ισότητας τον τελεστή E και παίρνουμε

$$E(E^{-1}(Ef(x))) = E(f(x) + g(x)) .$$

Εφαρμόζουμε ξανά τήν ιδιότητα (iii) στό πρώτο μέλος και τή γραμμική ιδιότητα του τελεστή E στό δεύτερο. Λαβαίνουμε έτσι ότι

$$(EE^{-1})(Ef(x)) = Ef(x) + Eg(x) .$$

Επειδή $EE^{-1} = 1$ ή παραπάνω σχέση γράφεται

$$Ef(x) = Ef(x) + Eg(x) ,$$

πού δίνει τελικά

$$Eg(x) = g(x+h) = 0. \quad (2.14)$$

Η σχέση (2.14) ισχύει φυσικά για κάθε x , άρα και για $x = x-h$. Βρίσκουμε λοιπόν ότι $g(x) \equiv 0$, πράγμα πού απλοποιεί τή

(2.13) στη

$$(E^{-1}E)f(x) = f(x) .$$

Τό τελευταίο συμπέρασμα όμως αποδείχνει ότι ο τελεστής $E^{-1}E$ είναι ο μοναδιαίος. Αυτό σημαίνει ότι, ο E έχει αντίστροφο.

Θεώρημα 2

Αν T^{-1} είναι ο δεξιός αντίστροφος του T , όπου T ένας οποιοσδήποτε από τους τέσσερις τελεστές Δ , ∇ , ο και D , τότε ισχύει η σχέση

$$T^{-1}Tf(x) = f(x) + C ,$$

όπου C αθαιρέτη σταθερά.

Απόδειξη

(Η απόδειξη θα γίνει στην περίπτωση του τελεστή Δ και μόνο).

Εστω ότι

$$(\Delta^{-1}\Delta)f(x) = f(x) + g(x) . \quad (2.15)$$

Εφαρμόζουμε και στα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας τον τελεστή Δ . Εργαζόμενοι τώρα ακριβώς όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος 1 καταλήγουμε στην αντίστοιχη προς τό (2.14) σχέση, πού θα είναι ή

$$\Delta g(x) = g(x+h) - g(x) = 0 . \quad (2.16)$$

Η (2.16) ισχύει για κάθε x και κάθε h . Αυτό όμως σημαίνει ότι

$$g(x) = C$$

όπου C αθαιρέτη σταθερά. Εάν συνέπεια του τελικού συμπε-
ράσματος έχουμε άμέσως ότι ή (2.15) γίνεται

$$\Delta^{-1}\Delta f(x) = f(x) + C ,$$

μέ c αὐθαίρετη σταθερά.

Ἐπειτα ἀπὸ τὴν ἀπόδειξη τῶν θεωρημάτων 1 καὶ 2, ποὺ ἀποτελοῦν τὴ βάση τοῦ Λογισμοῦ τῶν Τελεστῶν, ποὺ μᾶς ἐνδιαφέρει, εἶναι δυνατό νά ἀποδείξουμε ὅτι γιὰ τοὺς πέντε τελεστές Δ , ∇ , δ , E καὶ D , ἰσχύουν ὅλοι οἱ νόμοι τῆς Ἀριθμητικῆς, μέ τὴ μόνη ἐπιφύλαξη τοῦ ἀντιστρόφου, ὅπως ἐπεξηγήθηκε στὰ παραπάνω θεωρήματα. Ἔτσι π.χ. μπορούμε νά ἀποδείξουμε ὅτι δύο ὁποιοιδήποτε ἀπὸ αὐτοὺς ἀντιμετατίθενται στὴν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἔστω οἱ Δ καὶ ∇ . Πραγματικά ἔχουμε

$$\begin{aligned}(\Delta \nabla)f(x) &= \Delta(\nabla f(x)) = \Delta(f(x) - f(x-h)) = \Delta f(x) - \Delta f(x-h) = \\&= [f(x+h) - f(x)] - [f(x) - f(x-h)] = \\&= f(x+h) - 2f(x) + f(x-h),\end{aligned}$$

ὅπου ἐφαρμόσαμε στὴ σειρά τὴν ἰδιότητα (iii) τοῦ γινομένου δύο τελεστῶν, τὸν ὁρισμὸ τῆς πρώτης πρὸς τὰ πίσω διαφορᾶς, τὴ γραμμικὴ ἰδιότητα τοῦ τελεστῆ Δ , τὸν ὁρισμὸ τῆς πρώτης πρὸς τὰ ἔμπρὸς διαφορᾶς καὶ τέλος κάναμε τίς ἀναγωγές. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ἐργαζόμενοι βρίσκουμε στὴ σειρά

$$\begin{aligned}(\nabla \Delta)f(x) &= \nabla(\Delta f(x)) = \nabla(f(x+h) - f(x)) = \nabla f(x+h) - \nabla f(x) = \\&= [f(x+h) - f(x)] - [f(x) - f(x-h)] = \\&= f(x+h) - 2f(x) + f(x-h).\end{aligned}$$

Ἀπὸ τὴν ταύτιση τῶν δύο ἀποτελεσμάτων ἔχουμε ἀμέσως ὅτι

$$(\Delta \nabla)f(x) = (\nabla \Delta)f(x)$$

καὶ συνεπῶς

$$\Delta \nabla = \nabla \Delta.$$

Εἶναι δυνατό ἀκόμη νά εἰσαγάγουμε ἀρκετά εὐκόλα τὴν ἐννοια τῶν δυνάμεων τῶν πέντε τελεστῶν μέ ἐκθέτες φυσικοὺς μεγαλύτερους ἢ ἴσους τοῦ 2, μέ ἐκθέτη τὴ μονάδα, ἀρκεῖ νά

ορίσουμε τή δύναμη αυτή ίση με τόν υπόψη τελεστή, με έκ-
θέτη τό μηδέν, αρκεῖ νά ὀρίσουμε τήν αντίστοιχη δύναμη ί-
ση με τόν ταυτοτικό τελεστή καί τέλος με έκθέτες ἀκέραι-
ους ἀρνητικούς ἀρκεῖ νά ὀρίσουμε ὅτι $T^{-n} = (T^{-1})^n$ (n φυσι-
κός) με ὅλες τίς ἐπιφυλάξεις καί ἐπιπτώσεις, πού θά ἔχει
ὁ δεξιός ἀντίστροφος T^{-1} σέ μιὰ συγκεκριμένη περίπτωση.

Τέλος ἡ ρίζα n τάξης ($n \geq 2$), ἑνός τελεστή T , μπορεῖ
ἀλλάστει νά ὀριστεῖ σάν ἐκεῖνος ὁ τελεστής, ὁ ὁποῖος, ὁ-
ταν ὠφθεῖ στήν n δύναμη μᾶς δίνει τόν ἀρχικό T κ.ο.κ.
Συγκεκριμένα στήν περίπτωση τῆς τετραγωνικῆς ρίζας (ἢ τῆς
ὁποιασδήποτε ἄλλης ρίζας) τοῦ τελεστή μετατοπίσεως E ἔχου-
με μιὰ ἔννοια ἀντίστοιχη με αὐτήν τοῦ ἀρχικοῦ τελεστή E .
Μποροῦμε καταρχήν νά παρατηρήσουμε ὅτι ἂν ὀρίσουμε ἕναν
τελεστή T_1 τέτοιον ὥστε νά μετατοπίζει τήν ἀρχική τιμή
τῆς συναρτήσεως $f(x)$ ἀπό τό σημεῖο x στό σημεῖο $x + \frac{h}{2}$, ὁ-
που h τό βῆμα τῆς πινακοποιήσεως, τότε θά ἔχουμε

$$\begin{aligned} T_1^2 f(x) &= (T_1 \cdot T_1) f(x) = T_1 (T_1 f(x)) = T_1 f(x + \frac{h}{2}) = \\ &= f(x+h) = E f(x). \end{aligned}$$

Συνεπῶς

$$T_1^2 = E$$

καί ἐπομένως ἡ τετραγωνική ρίζα τοῦ E ($T_1 = E^{1/2}$) μετατοπίζει
τήν ἀρχική συνάρτηση κατά $h/2$.

Γενικά μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι οἱ πέντε τελεστές ὑπα-
κούουν σχεδόν σ' ὅλους τοὺς νόμους τῆς Ἀλγεβρας, με μόνη
ἐξαίρεση τήν ιδιότητα τοῦ ἀντιστρόφου (βλέπε θεώρημα 2)
καί τά συνεπακόλουθά του. Ἔτσι μποροῦμε νά κάνουμε πρά-
ξεις, με σχετική φυσικά προσοχή, ὥπως θά κάναμε πράξεις
μεταξὺ πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ὁ ἀντίστοιχος λογισμός θά εἴ-
ναι ὁ λογισμός τῶν τελεστῶν, πού μᾶς ἐνδιαφέρουν, καί οἱ
ἀντίστοιχες μέθοδοι, θά εἶναι οἱ καλούμενες συμβολικές μέ-

θοδοί.

Χρησιμοποιώντας τό λογισμό τών τελεστών μπορούμε άλλοτε εύκολα καί άλλοτε σχετικά δύσκολα νά βροῦμε τίς σχέσεις, πού έκφράζουν τόν ὁποιοδήποτε ἀπό τούς πέντε τελεστές Δ , ∇ , δ , E καί D σάν συνάρτηση ἑνός ὁποιοδήποτε ἀπό τούς ἄλλους. Οἱ ἀντίστοιχες, σχέσεις δίνονται στόν παρακάτω πίνακα. Τόν πίνακα αὐτόν παραθέτουμε μέ μιὰ πρώτη παρατήρηση ὅτι οἱ σχέσεις, πού περιέχονται σ' αὐτόν προκύπτουν εύκολα (ὅπως καί κάθε ἄλλη σχέση μεταξύ έκφράσεων τελεστών), ὅταν τά δύο ἀντίστοιχα μέλη έκφραστούν σάν συναρτήσεις τοῦ τελεστή μετατοπίσεως E καί μέ μιὰ δεύτερη, πού ἀναφέρεται στήν ἔννοια πού ἔχουν οἱ διάφορες συναρτήσεις πού εἰσχωροῦν στόν πίνακα, ὅπως ἐπεξηγεῖται ἀμέσως μετά τήν παράθεση αὐτοῦ

	Δ	∇	δ	E	D
Δ		$(1-\nabla)^{-1}-1$	$\frac{1}{2}\delta^2+\delta(1+\frac{\delta^2}{4})^{1/2}$	$E-1$	$e^{hD}-1$
∇	$1-(1+\Delta)^{-1}$		$-\frac{1}{2}\delta^2+\delta(1+\frac{\delta^2}{4})^{1/2}$	$1-E^{-1}$	$1-e^{-hD}$
δ	$\Delta(1+\Delta)^{-1/2}$	$\nabla(1-\nabla)^{-1/2}$		$E^{1/2}-E^{-1/2}$	$2\sinh(\frac{hD}{2})$
E	$\Delta+1$	$(1-\nabla)^{-1}$	$1+\frac{1}{2}\delta^2+\delta(1+\frac{\delta^2}{4})^{1/2}$		e^{hD}
D	$\frac{1}{h}\log(1+\Delta)$	$-\frac{1}{h}\log(1-\nabla)$	$\frac{2}{h}\sinh^{-1}(\frac{\delta}{2})$	$\frac{1}{h}\log E$	

Καταρχήν παρατηροῦμε ὅτι στόν παραπάνω πίνακα ὑπάρχουν έκφράσεις ὅπως π.χ. οἱ $(1+\Delta)^{-1}$, $(1-\nabla)^{-1/2}$, $(1+\frac{\delta^2}{4})^{1/2}$, $\log E$, e^{hD} κλπ. Φυσικά μ' αὐτές δέν ἐννοοῦμε τόν ἀντίστροφο τοῦ τελεστή $1+\Delta$ ἢ τόν ἀντίστροφο τῆς τετραγωνικῆς ρίζας τοῦ τελεστή $1-\nabla$ κλπ, ἀλλά τίς ἀντίστοιχες σειρές τοῦ τελεστή, πού συνδέονται ἀπό τήν Ἀνάλυση μέ τίς ἀντίστοιχες συναρτήσεις.

Π.χ. ο συμβολισμός $(1+\Delta)^{-1}$ δέν σημαίνει τίποτε άλλο παρά τή σειρά $1-\Delta+\Delta^2-\Delta^3+\dots$. Τό έρώτημα όμως, πού γεννιέται, είναι άν μπορούμε νά χρησιμοποιούμε τίς σειρές αυτές. 'Η άπάντηση είναι καταφατική κάτω, όμως, από δύο προϋποθέσεις. Συγκεκριμένα: i) 'Η σειρά του τελεστή πρέπει νά εφαρμόζεται σέ συνάρτηση, πού νά είναι πολυώνυμο καί ii) ή σειρά νά έχει διαταχτεί κατά τίς άντιθέσες δυνάμεις του τελεστή, ό όποίος όταν εφαρμόζεται σέ πολυώνυμο πρέπει νά λατάνει τό βαθμό του. Είναι φανερό, πώς άν ικανοποιούνται οι δύο αυτές προϋποθέσεις καί ή υπόψη συνάρτηση είναι πολυώνυμο η βαθμού, τότε τό άθροισμα τών άπειρων όρων τής σειράς είναι στήν ούσία ένα άθροισμα $n+1$ τό πολύ όρων, άφοϋ οι δυνάμεις του τελεστή τάξης $n+1$ καί άνώτερης, όταν εφαρμόζονται στό πολυώνυμο, θά δίνουν έξαγόμενα μηδέν. Σύμφωνα μέ τό θεώρημα τής σελίδας 33 οι τελεστές Δ , ∇ καί ο ικανοποιούν τήν προϋπόθεση (ii) καθώς επίσης καί ο τελεστής D , όπως είναι γνωστό από τήν 'Ανάλυση. 'Ακόμη είναι φανερό ότι ο τελεστής E , όπως έχει όριστεί στήν παράγραφο 2.4.1., δέν τήν ικανοποιεί. "Έτσι ένώ οι έκφράσεις πού δόθηκαν προηγουμένως, δηλαδή οι $(1+\Delta)^{-1}$ κλπ επιτρέπεται νά χρησιμοποιούνται μέ τήν έννοια, πού έπεξηγήσαμε, άλλες έκφράσεις π.χ. ή έκφραση $\log(2+\Delta)=\log(1+E)=E-\frac{E^2}{2}+\frac{E^3}{3}-\dots$ δέν επιτρέπεται νά χρησιμοποιείται. "Ένα δεύτερο έρώτημα, πού επίσης γεννιέται αυτόματα, είναι ότι στήν πράξη οι τελεστές καί οι συναρτήσεις τους εφαρμόζονται σέ συναρτήσεις $f(x)$, πού δέν είναι συνήθως πολυώνυμα. Αυτό όμως δέν έπηρεάζει καί πολύ τήν κατάσταση γιατί σύμφωνα μέ τό θεώρημα πολυωνυμικής προσεγγίσεως του Weierstrass: "Γιά μιά συνάρτηση $f(x)$ όρισμένη καί συνεχή στό διάστημα $[a,b]$ καί για κάθε αύθαίρετο $\epsilon>0$ υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$, κατάλληλου βαθμού, τέτοιο ώστε $|f(x)-p(x)|<\epsilon$ για όλα τά $x\in[a,b]$ " είναι δυνατό ή οποιαδήποτε συνάρτηση (όρισμένη καί συνεχής πάντα σέ

ένα κλειστό διάστημα) να θεωρείται με μεγάλη προσέγγιση, στο διάστημα αυτό, σαν πολυώνυμο. Τέλος θα πρέπει να προσθέσουμε, πώς όταν χρησιμοποιούμε τη σειρά ενός τελεστή σε μία συνάρτηση χρειάζεται μεγάλη προσοχή. Αυτό δέ γιατί, ενώ υπό το ένα μέρος προσπαθούμε να χρησιμοποιήσουμε όσο το δυνατό περισσότερους όρους από τη σειρά του τελεστή, για να πετύχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια, από το άλλο μέρος αυτή ή χρησιμοποίηση περισσότερων όρων εισάγει διαφορές ανώτερης τάξης. Οι τελευταίες, όπως είδαμε, κυριαρχούνται από σφάλματα, που προέρχονται τουλάχιστον από τα αναπόφευκτα σφάλματα στρογγυλεύσεως στις αρχικές τιμές της συναρτήσεως πράγμα που καθιστά την επιζητούμενη ακρίβεια μικρότερη. Φυσικά στην πράξη προσπαθούμε να συμβιβάσουμε τα δύο αλληλοσυγκρουόμενα στοιχεία, χρησιμοποιώντας ένα μερικό άθροισμα της σειράς του τελεστή. Προσπαθούμε δέ να δίνουμε αντίστοιχες εκφράσεις, τόσο για το σφάλμα αποκοπής, που όπως ούποτε είσχωρεί, όσο και για το σφάλμα, που προέρχεται από τα αρχικά σφάλματα των τιμών της συναρτήσεως, εφόσον αυτά είναι δυνατό να βρεθούν.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. "Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι πολυώνυμο τέταρτου βαθμού και δίνονται οι τιμές της στα σημεία $x = -2(1)2$, που είναι αντίστοιχα $-12, -6, 4, 6, 12$, να βρεθούν οι τιμές της για $x = -4, -3, 3$ και 4 χωρίς να βρεθεί αναλυτικά το πολυώνυμο. (Απ. 156, 22, 58, 204).
2. Μέ επανειλημμένες κατασκευές πινάκων διαφορών να βρεθεί πολυώνυμο τρίτου βαθμού, το οποίο να παίρνει τις τιμές 1, 3, 13 και 61 στα σημεία 0, 1, 2, και 3 αντίστοιχα.
(Υπόδειξη: "Αν $p_3(x) \equiv a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ το ζητούμενο πολυώνυμο με την κατασκευή ενός πίνακα διαφορών και με εφαρ-

μογή βασικού θεωρήματος βρίσκεται η τιμή α_0 . Στη συνέχεια θεωρείται το πολυώνυμο $p_2(x) \equiv p_3(x) - \alpha_0 x^3$ κατασκευάζεται νέος πίνακας διαφορών κ.ο.κ.). ('Απ. $5x^3 - 11x^2 + 8x + 1$).

3. Νά βρεθεί το απομονωμένο σφάλμα που υπάρχει σε μία από τις παρακάτω τιμές της συναρτήσεως $f(x)$, με την προϋπόθεση ότι αυτή είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού και να διορθωθεί ή αντίστοιχη τιμή

x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$f(x)$	2.64	2.49	2.35	2.25	2.16	2.09

('Απ. $-0.01, 2.36$).

4. Νά βρεθεί το απομονωμένο σφάλμα, που υπάρχει σε μία από τις παρακάτω τιμές της συναρτήσεως $f(x)$, με την προϋπόθεση ότι αυτή μπορεί να θεωρηθεί, με μεγάλη προσέγγιση, σαν πολυώνυμο τρίτου βαθμού, και να διορθωθεί ή αντίστοιχη τιμή της

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	0.6812412	0.6857417	0.6901961	0.6946052	0.6989700

x	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$f(x)$	0.7032894	0.7075702	0.7118072	0.7160033	0.7201593

('Απ. $-0.0000020, 0.7032914$).

5. Νά δειχτεί ότι οι τελεστές διαφορών Δ , ∇ και δ , όταν ορίζονται, είναι γραμμικοί ακόμη και στην περίπτωση, που οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής δεν ισαπέχουν.

6. "Αν οι τιμές $f_0, f_1, f_2, \dots$ μιας συναρτήσεως είναι οι διαδοχικοί όροι μιας ακολουθίας του Fibonacci (δηλαδή f_0 και f_1 δίνονται, όποτε κάθε άλλος όρος της ακολουθίας βρίσκεται από τη σχέση $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k \mid k = 0, 1, 2, \dots$) να απο-

δειχτεί ότι, και η ακολουθία $\{\Delta^n f_\ell\} \mid \ell=0,1,2,\dots$ και n οποιοσδήποτε μη άρνητικός ακέραιος είναι μία ακολουθία του Fibonacci.

7. Νά δειχτεί η σχέση

$$f_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \Delta^i f_0$$

για τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής, που γενικά δέν ίσαπέχουν.

8. "Αν στις τιμές f_0 και f_1 μιās συναρτήσεως $f(x)$ υπάρχουν σφάλματα ε_0 και ε_1 αντίστοιχα, νά βρεθεί σε ποιές διαφορές n τάξης θά υπάρχουν σφάλματα και ποιά θά είναι αυτά. ("Απ. στις διαφορές $\Delta^n f_k$, $k=-n(1)1$, $\varepsilon_k^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \varepsilon_{k+n-i}^0$, $k=-n(1)1$ με $\varepsilon_0^0 = \varepsilon_0$, $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1$ και $\varepsilon_j^0 = 0$ για $j \neq 0,1$).

9. Για τον τελεστή Δ νά δειχτεί ότι

$$\frac{\Delta}{\log(1+\Delta)} = 1 + \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{12}\Delta^2 + \frac{1}{24}\Delta^3 - \frac{19}{720}\Delta^4 + \dots$$

10. Νά βρεθοῦν οί έκφράσεις τῶν τελεστῶν Δ, ∇, δ καί D , σάν συναρτήσεις τοῦ τελεστῆ E , πού δίνονται στὸν πίνακα τῆς σελίδας 46 ("Υπόδειξη: Για τήν έκφραση τοῦ D σάν συνάρτηση τοῦ E νά χρησιμοποιηθεῖ τό ἀνάπτυγμα

$$f(x+h) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(x),$$

μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ἡ ἀνάπτυξη αὐτή (σχύει).

11. Νά δειχτεί ὅτι

$$\nabla \Delta \nabla + \Delta \nabla \Delta = \Delta^2 - \nabla^2.$$

12. Ἀφοῦ δειχτοῦν οἱ σχέσεις $\Delta = \nabla E = \delta E^{1/2}$, νά δειχτεῖ στή συνέχεια πῶς εἶναι δυνατό νά προκύψει ἀπ' αὐτές ὅτι

$$\Delta^k f_n = \nabla^k f_{n+k} = \delta^k f_{n+k/2} .$$

13. Νά ἀποδειχτοῦν οἱ παρακάτω σχέσεις μεταξύ τῶν τελεστῶν πού δίνονται στόν πίνακα τῆς σελίδας 46

$$i) \quad \nabla = -\frac{1}{2} \delta^2 + \delta \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4}} \quad \text{καί}$$

$$ii) \quad \delta = 2 \sinh \left(\frac{\hbar D}{2} \right) .$$

_____ / _____

φαρμογής του τύπου παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton - Gregory με $0 < \theta < 1$ ή μέγιστη απόλυτη τιμή που μπορεί να πάρει ή $\Delta^2 f_0$ ($\Delta^3 f_0$) ώστε ο αντίστοιχος όρος να είναι απόλυτως μικρότερος ή ίσος από μισή μονάδα της τελευταίας δεκαδικής τάξης του πίνακα διαφορών είναι 4(8).

3. Άφοῦ βρεθοῦν οἱ τιμές τῆς συναρτήσεως $f(x) = x^3 | x = 2.3(0.2)3.7$ νά στρογγυλετοῦν στή συνέχεια σέ δύο δ.ψ. καί νά σχηματιστεῖ ὁ πίνακας τῶν διαφορῶν, πού ἀντιστοιχεῖ σ'αὐτές. Ἐπειτα, ἔχοντας ὑπόψη καί τόν πίνακα τῆς σελίδας 59 νά βρεθοῦν οἱ τιμές τῆς $f(x)$ στό σημεῖο $x = 3.0$ χρησιμοποιώντας τοὺς τύπους παρεμβολῆς τῶν Newton - Gregory (καί τοὺς δύο) καί τοῦ Bessel. (Ἀπ. 26.99625, 27.00375, 27.00).
4. Νά βρεθεῖ πολυώνυμο τό πολύ τέταρτου βαθμοῦ πού νά παίρνει στά σημεία $x = -2, -1, 1, 2, 3$ τίς τιμές $-1, 4, 2, 7, 24$ ἀντίστοιχα. (Ἀπ. $x^3 - 2x + 3$).
5. Γιά τοὺς συντελεστές $L_i(x) | i = 0(1)n$ τοῦ Lagrange νά ἀποδειχτεῖ ἡ σχέση

$$\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1.$$

6. Γιά τόν συντελεστή $L_0(x)$ τοῦ Lagrange νά δειχτεῖ ὅτι

$$L_0(x) = 1 + \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \dots + \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)}.$$

7. Νά γραφεῖ ὁ τύπος τοῦ Lagrange γιά τὰ τρία σημεία $x_0, x_0 + \epsilon, x_1$. Στή συνέχεια νά βρεθεῖ τό ὄριο τοῦ τύπου αὐτοῦ ὅταν $\epsilon \rightarrow 0$ καθώς καί ἡ ἀντίστοιχη διόρθωση κάτω ἀπὸ τίς

3. ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ

3.1. Γενικά

Ἡ παρεμβολή εἶναι ἓνα ἀπό τὰ σπουδαιότερα θέματα τῆς Α.Α. κι αὐτό γιατί ἀποτελεῖ μιά πρώτη εἰσαγωγή στήν ἀνάπτυξη τῆς θεωρίας τῆς πολυωνυμικῆς προσεγγίσεως, στή θεωρία δηλαδή πού ἀναφέρεται στήν παράσταση ἢ ἀντικατάσταση ἑνός πλήθους ἐμπειρικῶν δεδομένων, πού προέρχονται ἀπό μετρήσεις ἢ παρατηρήσεις, ἢ μιᾶς συναρτήσεως, ἀπό ἓνα πολυώνυμο. Πιο συγκεκριμένα, καί γιά τό πρόβλημα τῆς παρεμβολῆς πού θά ἐξετάσουμε στό παρόν Κεφάλαιο, θά ὑποθέτουμε ὅτι δίνονται οἱ τιμές μιᾶς συναρτήσεως $f(x)$ σέ $n+1$ σημεία, ἔστω τά $x_i \mid i=0(1)n$, καί θά ζητοῦμε νά κατασκευάσουμε ἓνα πολυώνυμο $p_n(x)$, βαθμοῦ τό πολύ n , τέτοιο ὥστε οἱ τιμές του στά σημεία $x_i \mid i=0(1)n$ νά συμπίπτουν μέ τίς ἀντίστοιχες τιμές τῆς συναρτήσεως. Τά σημεία $x_i \mid i=0(1)n$ θά καλοῦνται σημεία παρεμβολῆς, τό δέ πολυώνυμο $p_n(x)$, πολυώνυμο παρεμβολῆς. Τό πολυώνυμο παρεμβολῆς $p_n(x)$ εἶναι φανερό πώς εἶναι μονοσήμαντα ὁρισμένο. Αὐτό γιατί, ὅπως εἶναι γνωστό ἀπό τή Στοιχειώδη Ἀλγεβρα, ἂν δύο πολυώνυμα βαθμοῦ τό πολύ n παίρνουν τίς ἴδιες τιμές γιά $n+1$ διαφορετικές τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς τους, τότε αὐτά ταυτίζονται. Ἡ εὕρεση τοῦ πολυωνύμου παρεμβολῆς $p_n(x)$ θά μᾶς ἐπιτρέψει νά βρῖσκουμε ἐξάλλου μέ προσέγγιση τήν τιμή τῆς συναρτήσεως $f(x)$ στό ὁποιοδήποτε σημείο x . Ἀπλούστεροι τύποι παρεμβολῆς μποροῦν νά βρεθοῦν στήν περίπτωση πού τὰ σημεία παρεμβολῆς ἰσαπέχουν. Γιά τό λόγο αὐτό ἀρχίζουμε μέ τήν εὕρεση τέτοιων τύπων παρεμβολῆς. Γιά τήν παραγωγή τῶν τύπων αὐτῶν χρησιμοποιοῦνται πεπερασμένες διαφορές καί ἔτσι μπορεῖ νά γίνει χρήση τοῦ Λογισμοῦ τῶν Τελεστών, πού ἀναπτύξαμε στό προηγούμενο Κεφάλαιο.

3.2. Τύποι παρεμβολής που χρησιμο- ποιούν πεπερασμένες διαφορές

3.2.1. Τύπος παρεμβολής των προς τα έ- μπρός διαφορών των Newton - Gre- gory

Έστω ότι $x_i = x_0 + ih$ $|i|=0(1)n$ είναι τα $n+1$ γνωστά ση-
μεία παρεμβολής και $f(x)$ η τιμή της συναρτήσεως στο τυ-
χόν σημείο x . Αν καλέσουμε με θ το λόγο

$$\theta = (x - x_0) / h \quad (3.1)$$

και εφαρμόσουμε συμβολικές μεθόδους, μπορούμε να πάρουμε
διαδοχικά

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0 + \theta h) = E^\theta f(x_0) = (1 + \Delta)^\theta f_0 = \\ &= \left[1 + \binom{\theta}{1} \Delta + \binom{\theta}{2} \Delta^2 + \dots \right] f_0 \end{aligned}$$

και τελικά

$$f(x) = f_0 + \binom{\theta}{1} \Delta f_0 + \binom{\theta}{2} \Delta^2 f_0 + \dots \quad (3.2)$$

Ο τύπος αυτός μπορεί να γραφτεί και ως εξής

$$f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x), \quad (3.3)$$

όπου $p_n(x)$ το πολυώνυμο παρεμβολής, που δίνεται από την έκ-
φραση

$$p_n(x) \equiv f_0 + \binom{\theta}{1} \Delta f_0 + \binom{\theta}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \binom{\theta}{n} \Delta^n f_0 \quad (3.4)$$

και $R_{n+1}(x)$ η διόρθωση, που θα βρεθεί αργότερα αναλυτικά.

Ο τύπος, που βρήκαμε γράφεται ακόμη και προσεγγιστικά ως

$$f(x) \approx p_n(x) \quad (3.5)$$

Ο οποιοσδήποτε από τους τύπους (3.2), (3.3) ή (3.5) είναι
γνωστός σαν ο τύπος των προς τα έμπρός διαφορών των New-

ton - Gregory. Έκεῖνο φυσικά πού ἀπομένει νά ἀποδειχτεῖ εἶναι ὁ βασικός ἰσχυρισμός μας ὅτι, τό $p_n(x)$ εἶναι τό πολυώνυμο παρεμβολῆς τῶν σημείων $x_i \mid i=0(1)n$. Γιά τό σκοπό, αὐτό ἀπό τό δεύτερο μέλος τῆς (3.4) παρατηροῦμε καταρχήν, χρησιμοποιώντας τήν (3.1), ὅτι τό $p_n(x)$ εἶναι βαθμοῦ τό πολύ n ὡς πρός x . Παίρνοντας τώρα τό τυχόν σημεῖο ἀπό τά $x_i \mid i=0(1)n$ καί βρίσκοντας τήν ἀντίστοιχη τιμή τοῦ πολυωνύμου ἀπό τήν (3.4) ἔχουμε·

$$p_n(x_i) = f_0 + \binom{i}{1} \Delta f_0 + \binom{i}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \binom{i}{i} \Delta^i f_0.$$

Αὐτό γιατί $\theta=i$ καί οἱ ἐπὶ πλέον ὅροι, ἀν ὑπάρχουν, θά μηδενίζονται, ἀφοῦ θά ἔχουν σάν παράγοντα τήν ἔκφραση $\binom{i}{j} \mid j=i+1(1)n$. Ἡ ἰσότητα, πού βρέθηκε, γράφεται διαδοχικά

$$\begin{aligned} p_n(x_i) &= [1 + \binom{i}{1} \Delta + \binom{i}{2} \Delta^2 + \dots + \binom{i}{i} \Delta^i] f_0 = (1+\Delta)^i f_0 = \\ &= E^i f(x_0) = f(x_0 + ih) = f(x_i). \end{aligned}$$

Δηλαδή οἱ τιμές τοῦ πολυωνύμου $p_n(x)$ συμπίπτουν μέ τίς ἀντίστοιχες τιμές τῆς συναρτήσεως $f(x)$ στά σημεῖα $x_i \mid i=0(1)n$ καί ἄρα αὐτό εἶναι τό ζητούμενο πολυώνυμο παρεμβολῆς.

Παρατηρήσεις:

i) Τό ἀθροῖσμα τοῦ δεύτερου μέλους τοῦ τύπου (3.2) ἀποτελεῖται ἀπό ἓνα πεπερασμένο πλῆθος ὁρων, ὅταν ἡ $f(x)$ εἶναι πολυώνυμο. Συγκεκριμένα τό ἀθροῖσμα περιορίζεται στοὺς $n+1$ πρώτους ὅρους του, γιά πολυώνυμο n βαθμοῦ.

ii) Ὅταν μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ εὕρεση μιᾶς καί μόνο τιμῆς τῆς συναρτήσεως $f(x)$ στό συγκεκριμένο σημεῖο x εἶναι προτιμότερο νά χρησιμοποιεῖται ὁ τύπος (3.2) μέ x_0 τό ἀμέσως μικρότερο σημεῖο τοῦ πίνακα τιμῶν τῆς $f(x)$, ἀνεξάρτητα ἀπό τό πόσα σημεῖα παρεμβολῆς εἶναι δυνατό νά διαθέτουμε. Ἐτσι πετυχαίνουμε νά ἔχουμε $0 < \theta < 1$ πράγμα πού στήν πράξη ἀποβαίνει χρήσιμο μερικές φορές, ὅπως θά δοῦμε στήν παρά-

γραφο 3.2.4. . Μέ την έννοια αυτή, η παρεμβολή εφαρμόζεται καλύτερα στην αρχή ενός πίνακα γιατί μπορούν να χρησιμοποιηθούν περισσότεροι όροι στο δεύτερο μέλος του (3.2). Τό τελευταίο σημαίνει χρησιμοποίηση περισσότερων τιμών της συναρτήσεως και επομένως περισσότερων πληροφοριών για τη συμπεριφορά της.

iii) Αν περιοριστούμε σε πρωτοβάθμιο πολυώνυμο παρεμβολής $p_1(x)$, τότε αυτό θα δίνεται από την έκφραση

$$p_1(x) = f_0 + \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix} \Delta f_0 = f_0 + \theta(f_1 - f_0) = f_0 + \frac{x-x_0}{h} (f_1 - f_0)$$

ή τέλος από την

$$p_1(x) = f_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} (f_1 - f_0) .$$

Ο παραπάνω τύπος όμως δεν είναι παρά αυτός που χρησιμοποιούμε στο Γυμνάσιο ή στο Λύκειο για να βρούμε την τιμή για ένα τριγωνομετρικό αριθμό τόξου, για ένα λογάριθμο αριθμού κλπ όταν τό τόξο, ο αριθμός κλπ δεν υπήρχε στον πίνακα που διαθέταμε, αλλά βρισκόταν μεταξύ δύο διαδοχικών τόξων, αριθμών κλπ αυτού.

3.2.2. Τύπος παρεμβολής των προς τα πίσω διαφορών των Newton - Gregory

Τό πρόβλημα παραμένει τό ίδιο, όπως διατυπώθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, μόνο που για λόγους απλοποίησης του τελικού τύπου, καλούμε με x_i $| i=0(-1)-n$ τά $n+1$ σημεία παρεμβολής και με θ τό λόγο

$$\theta = (x_0 - x) / h .$$

Έτσι τή φορά αυτή παίρνουμε διαδοχικά

$$f(x) = f(x_0 - \theta h) = E^{-\theta} f(x_0) = [(1-\nabla)^{-1}]^{-\theta} f_0 = (1-\nabla)^{\theta} f_0 =$$

$$= \left[1 - \binom{\theta}{1} \nabla + \binom{\theta}{2} \nabla^2 - \dots \right] f_0$$

καί τέλος

$$f(x) = f_0 - \binom{\theta}{1} \nabla f_0 + \binom{\theta}{2} \nabla^2 f_0 - \dots \quad (3.6)$$

Ο παραπάνω τύπος, πού αποτελεί τόν τύπο παρεμβολής τών πρὸς τὰ πίσω διαφορῶν τῶν Newton - Gregory, μπορεί νά γραφτεῖ ἀντίστοιχα, ὅπως καί προηγουμένως ὡς ἑξῆς

$$f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x)$$

ἢ ὡς

$$f(x) \approx p_n(x) .$$

Φυσικά τώρα τό πολυώνυμο παρεμβολής $p_n(x)$, πού μπορεί εὐκολά νά ἀποδειχτεῖ ὅτι εἶναι βαθμοῦ τό πολύ n , δίνεται ἀπό τήν ἔκφραση

$$p_n(x) = f_0 - \binom{\theta}{1} \nabla f_0 + \binom{\theta}{2} \nabla^2 f_0 - \dots + (-1)^n \binom{\theta}{n} \nabla^n f_0 ,$$

ἐνῶ τό $R_{n+1}(x)$ ἀποτελεῖ καί πάλι τή διόρθωση.

Παρατηρήσεις:

Μποροῦν νά γίνουν οἱ ἀντίστοιχες τῆς προηγούμενης παραγράφου. Ἡ μόνη διαφορά στήν παρατήρηση (ii) εἶναι ὅτι ἀπό τό ἓνα μέρος καλοῦμε μέ x_0 τήν ἀμέσως ἐπόμενη τιμή στόν πίνακα καί ἀπό τό ἄλλο μέρος μέ τήν ἐννοια, πού ἐπεξηγήθηκε, ἡ ἀντίστοιχη παρεμβολή ἐφαρμόζεται καλύτερα στό τέλος ἑνός πίνακα.

3.2.3. Τύπος παρεμβολής τῶν κεντρικῶν διαφορῶν τοῦ Bessel

Ο τύπος παρεμβολής τοῦ Bessel, πού χρησιμοποιεῖ κεντρικές διαφορές καί εἶναι ἀντίστοιχος τῶν τύπων (3.2) καί (3.5) τῶν Newton - Gregory, εἶναι τῆς ἀκόλουθης μορφῆς

$$f(x) = B_0(f_0 + f_1) + B_1 \delta f_{1/2} + B_2(\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1) + B_3 \delta^3 f_{1/2} + \dots \quad (3.7)$$

Είναι δυνατό να αποδειχτεί με ένα μεγάλο πλήθος απλών δοκιμικών μετασχηματισμών που δεν θα παραθέσουμε εδώ, χρησιμοποιώντας συμβολικές μεθόδους, ότι i) οι συντελεστές B_i $i=0,1,2,\dots$ στον τύπο (3.7) δίνονται από τις σχέσεις

$$B_{2k} = \frac{1}{2} \binom{\theta+k-1}{2k}, \quad B_{2k+1} = \frac{(2\theta-1)}{2k+1} B_{2k} \quad |k=0,1,2,\dots \quad (3.8)$$

μέθ το λόγο (3.1) και ii) για $n(=2k+1, k \geq 0)$ περιττό και μόνο οι $n+1$ πρώτοι όροι του αναπτύγματος (3.7) αποτελούν το πολυώνυμο παρεμβολής του Bessel, με σημεία παρεμβολής x_i $i=-k(1)k+1$. Το πολυώνυμο αυτό συμπίπτει με τα αντίστοιχα πολυώνυμα παρεμβολής των Newton - Gregory που χρησιμοποιούν ακριβώς τα ίδια σημεία παρεμβολής.

Παρατήρηση:

Ίσχύουν οι αντίστοιχες με τις παρατηρήσεις των δύο προηγούμενων παραγράφων με την εξής ανάλογη διαφορά.

Αν με x_0 ονομαστεί το σημείο το άμεσως προηγούμενο της τιμής x στον πίνακα, όπως δηλαδή στην περίπτωση των προς τα εμπρός διαφορών, τότε η παρούσα παρεμβολή εφαρμόζεται καλύτερα στη μέση ενός πίνακα.

3.2.4. Πλήθος όρων που χρησιμοποιούνται στους τύπους παρεμβολής

Όταν ζητούμε, στην πράξη, να βρούμε την τιμή $f(x)$ για κάποιο x , που δεν υπάρχει στον πίνακα τιμών της συνάρτησεως, χωρίς όμως να βρούμε πρώτα το αντίστοιχο πολυώνυμο παρεμβολής, τότε χρησιμοποιούμε φυσικά έναν από τους τύπους παρεμβολής (3.2), (3.6) και (3.7). Το ερώτημα, που γεν-

νιέται άμέσως, είναι τό πόσους όρους από τό άνάπτυγμα του δεύτερου μέλους θά χρησιμοποιήσουμε. 'Η άπάντηση σ' αυτό δίνεται, στην πράξη πάντοτε, υιοθετώντας την ακόλουθη σύμβαση. Χρησιμοποιούμε στη σειρά όλους τούς πρώτους όρους του άναπτύγματος, πού ή άπόλυτη τιμή τους είναι μεγαλύτερη από μισή μονάδα της τελευταίας δεκαδικής τάξης του πίνακα διαφορών. Όλοι οι έπόμενοι όροι παραλείπονται. Μέ άλλες μεθόδους της Άναλύσεως μπορούμε νά βρούμε μέγιστες τιμές, από τίς όποιες, άν οι αντίστοιχες διαφορές είναι άπόλυτα μικρότερες ή ίσες, ό αντίστοιχος όρος στό άνάπτυγμα θά είναι άπόλυτα μικρότερος ή ίσος από μισή μονάδα της τελευταίας δεκαδικής τάξης του πίνακα διαφορών. Έτσι μπορεί νά καθοριστεί προκαταβολικά τό μέγιστο πλήθος όρων πού θά χρησιμοποιηθούν.

Στόν παρακάτω πίνακα δίνονται για $0 < \theta < 1$, όπου θ ό αντίστοιχος γνωστός λόγος, οι πρώτες στη σειρά μέγιστες άπόλυτες τιμές για τίς διαφορές, σέ μονάδες της τελευταίας δεκαδικής τάξης του πίνακα διαφορών, για τίς όποιες τιμές ό αντίστοιχος όρος στόν τύπο παρεμβολής καθώς και όλοι οι έπόμενοι του παραλείπονται στην πράξη.

Τύπος παρεμβολής	δ^2	δ^3	δ^4	δ^5	δ^6
Newton - Gregory (και οι δύο)	4	8	12	16	21
Bessel [⊗]	4	60	20	500	100

⊗ Στόν τύπο παρεμβολής του Bessel, όταν εμφανίζεται άθροισμα διαφορών, οι τιμές του παραπάνω πίνακα θά πρέπει νά διπλασιάζονται για όλόκληρο τό αντίστοιχο άθροισμα.

3.3. Τύπος παρεμβολής του Lagrange

Ἡ παρούσα παρεμβολή ἀντιμετωπίζει τὸ γενικότερο πρόβλημα, ὅπως διατυπώθηκε στὴν πρώτη παράγραφο τοῦ παρόντος κεφαλαίου, δηλαδή τὸ πρόβλημα, ὅπου τὰ σημεῖα παρεμβολῆς, γενικά, δὲν ἴσαπέχουν.

Γιὰ τὴν εὑρεση τοῦ πολυωνύμου παρεμβολῆς $p_n(x)$ τοῦ Lagrange ξεκίνοῦμε ἀπὸ τίς σχέσεις πού πρέπει νὰ ἱκανοποιεῖ αὐτὸ στὰ σημεῖα παρεμβολῆς $x_i \mid i=0(1)n$. Ἐχουμε συγκεκριμένα ὅτι

$$p_n(x_i) = f_i \quad | i=0(1)n, \quad (3.9)$$

ὅπου f_i οἱ τιμές τῆς ὑπόψῃ συναρτήσεως $f(x)$ στὰ ἀντίστοιχα σημεῖα. Εἶναι φανερό ὅτι, μία ἀπὸ τίς μορφές πού θά μπορεῖ νὰ γραφεῖ τὸ $p_n(x)$, ἐξαιτίας τῶν σχέσεων (3.9), εἶναι ἡ παρακάτω

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f_i \quad (3.10)$$

μέ $L_i(x) \mid i=0(1)n$ πολυώνυμα βαθμοῦ n , πού καλοῦνται συντελεστές τοῦ Lagrange, καὶ ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις

$$L_i(x_i) = 1 \quad \text{καὶ} \quad L_i(x_j) = 0 \quad | i, j=0(1)n, j \neq i. \quad (3.11)$$

Ἡ μορφή (3.10) θά εἶναι φυσικὰ δυνατὴ, ἀρκεῖ οἱ συντελεστές τοῦ Lagrange νὰ μποροῦν νὰ προσδιοριστοῦν ἀπὸ τίς σχέσεις (3.11). Πραγματικά, ἀπὸ τὴ δεύτερη ὁμάδα τῶν σχέσεων (3.11) καὶ γιὰ τὸν τυχόντα δείκτη $i \mid i=0(1)n$, ἔχουμε ἀμέσως ὅτι ὁ ἀντίστοιχος συντελεστής τοῦ Lagrange θά διαιρεῖται μέ τὸ γινόμενο

$$(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)$$

καὶ θά εἶναι ἐπομένως τῆς μορφῆς

$$L_i(x) \equiv A_i(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)$$

μέ A_i σταθερά. Ο προσδιορισμός της σταθεράς A_i γίνεται με τη βοήθεια της πρώτης από τις σχέσεις (3.11). Έτσι βρίσκουμε τελικά ότι

$$L_i(x) \equiv \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \quad (3.12)$$

$i = 0(1)n$.

Επομένως το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange δίνεται από την (3.10) με συντελεστές του τις εκφράσεις (3.12).

Η έκφραση (3.12) για τους συντελεστές μπορεί να γραφτεί με διάφορους ισοδύναμους τρόπους. Ένας απ'αυτούς είναι προφανώς ο παρακάτω

$$L_i(x) \equiv \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right) \quad i = 0(1)n. \quad (3.13)$$

Ένας δεύτερος προκύπτει ως εξής. Αν καλέσουμε

$$\varphi(x) \equiv \prod_{j=0}^n (x-x_j) \quad (3.14)$$

και παραγωγίσουμε ως προς x βρίσκουμε

$$\varphi'(x) \equiv \sum_{i=0}^n \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x-x_j) \right). \quad (3.15)$$

Έτσι από την (3.14) έχουμε άμεσα ότι ο αριθμητής των εκφράσεων (3.12) είναι ίσος με $\varphi(x)/(x-x_i)$ ενώ από την (3.15) ότι ο παρονομαστής είναι $\varphi'(x_i)$. Συνεπώς μία άλλη έκφραση για τους συντελεστές είναι η ακόλουθη

$$L_i(x) \equiv \frac{\varphi(x)}{(x-x_i)\varphi'(x_i)} \quad i = 0(1)n. \quad (3.16)$$

Έπειτα από όλα τα παραπάνω μπορούμε να πούμε ότι ο τύπος παρεμβολής του Lagrange είναι ο

$$f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x) \quad (3.17)$$

ή ο

$$f(x) \approx p_n(x),$$

όπου $R_{n+1}(x)$ η αντίστοιχη διόρθωση, που θα βρεθεί αναλυτικά στην επόμενη παράγραφο.

Στην περίπτωση, που τα σημεία παρεμβολής x_i $i=0(1)n$ ισαπέχουν και δίνονται από τις σχέσεις $x_i = x_0 + ih$ $i=0(1)n$, τότε είναι δυνατό να προκύψει μία νέα έκφραση για τους συντελεστές του Lagrange επομένως και για το πολυώνυμο καθώς επίσης και για τον αντίστοιχο τύπο παρεμβολής. Αν καλέσουμε πάλι με θ το λόγο (3.1) είναι εύκολο να βρούμε με απλούς μετασχηματισμούς ότι

$$L_i(x) \equiv L_i(x(\theta)) \equiv (-1)^{n-i} (n+1) \binom{n}{i} \left(\frac{\theta}{n+1} \right) / (\theta - i).$$

Παρατήρηση:

Στην περίπτωση των σημείων παρεμβολής, που ισαπέχουν και όταν ζητούμε να βρούμε την τιμή της συναρτήσεως σε κάποιο σημείο x , τότε αν θέλουμε περισσότερη ακρίβεια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα ακόμη σημείο παρεμβολής (το επόμενο έστω στον πίνακα). Έτσι υπολογίζουμε απλώς έναν επί πλέον όρο του αντίστοιχου αναπτύγματος, αν εργαζόμαστε με τον τύπο παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton - Gregory. Στην περίπτωση όμως που εργαζόμαστε με το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange, εκτός από τον υπολογισμό του επί πλέον όρου, πρέπει να ξαναυπολογίσουμε και όλους τους άλλους, αφού αλλάζουν οι αντίστοιχοι συντελεστές.

3.4. Διόρθωση στους τύπους παρεμβολής

Η διόρθωση $R_{n+1}(x)$, επομένως και το αντίστοιχο σφάλ-

μα, στους διάφορους τύπους παρεμβολής που βρήκαμε μέχρι τώρα και για το τυχόν σημείο x , μπορεί φυσικά να δοθεί από τη διαφορά

$$R_{n+1}(x) = f(x) - p_n(x). \quad (3.18)$$

Είναι όμως δυνατό, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, που δεν απαιτούν την εύρεση του $p_n(x)$ ή της τιμής του, όπως στον τύπο (3.13), να βρεθεί μια άλλη έκφραση για τη διόρθωση, που πολλές φορές είναι πάρα πολύ χρήσιμη στην πράξη. Η έκφραση αυτή δίνεται με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα

Αν I είναι το μικρότερο διάστημα που περιέχει όλα τα σημεία παρεμβολής x_i $|i=0(1)n$ και το τυχόν σημείο x (δηλαδή $I \equiv [\min(x, x_0, \dots, x_n), \max(x, x_0, \dots, x_n)]$) και η συνάρτηση $f(x)$ είναι τέτοια ώστε $f(x) \in C^{n+1}(I)^{\textcircled{*}}$, τότε η διόρθωση $R_{n+1}(x)$ του τύπου παρεμβολής του Lagrange (έπομένως και των άλλων τύπων παρεμβολής) δίνεται από την έκφραση

$$R_{n+1}(x) \equiv \prod_{i=0}^n (x - x_i) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad (3.19)$$

όπου $\xi \in I^{\textcircled{*}\textcircled{*}}$.

$\textcircled{*}$ Η σχέση $f(x) \in C^{n+1}(I)$ δηλώνει ότι η $f(x)$ έχει παραγώγους μέχρι και $n+1$ τάξης και μάλιστα συνεχείς στο διάστημα I .

$\textcircled{*}\textcircled{*}$ Το σημείο ξ ανήκει στην πραγματικότητα στο άνοικτο διάστημα που αντιστοιχεί στο I . Ακόμη τονίζεται ότι η βασική υπόθεση του θεωρήματος (δηλαδή η $f(x) \in C^{n+1}(I)$) μπορεί να γίνει ασθενέστερη, αρκεί να υποτεθεί ότι $f(x) \in C^0(I)$ και ότι η $f^{(n+1)}(x)$ υπάρχει στο άνοικτο διάστημα, που αντιστοιχεί στο I . Το συμπέρασμα παραμένει το ίδιο.

Απόδειξη

Κατασκευάζουμε τη συνάρτηση

$$g(t) \equiv R_{n+1}(t) - \frac{R_{n+1}(x)}{\prod_{i=0}^n (x-x_i)} \cdot \prod_{i=0}^n (t-x_i), \quad (3.20)$$

όπου t είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και $x \neq x_i \quad | i=0(1)n$ ένα οποιοδήποτε σημείο. Από την (3.17), που δίνει ότι $R_{n+1}(t) = f(t) - p_n(t)$, και σάν συνέπεια της βασικής υποθέσεως $f(t) \in C^{n+1}(I)$ έχουμε άμέσως ότι $R_{n+1}(t) \in C^{n+1}(I)$. Επομένως, από την (3.20), και ότι $g(t) \in C^{n+1}(I)$. Επειδή τώρα είναι φανερό ότι

$$R_{n+1}(x_j) = f(x_j) - p_n(x_j) = 0 \quad | j=0(1)n$$

έχουμε σάν συμπέρασμα πάλι από την (3.20) ότι

$$g(x_j) = 0 \quad | j=0(1)n. \quad (3.21)$$

Ακόμη για τό τυχόν σημείο $x \neq x_j \quad | j=0(1)n$ έχουμε προφανώς ότι

$$g(x) = 0. \quad (3.22)$$

Από τις (3.21) και (3.22) προκύπτει ότι η συνάρτηση $g(t)$ έχει $n+2$ τουλάχιστον διαφορετικές ρίζες στο διάστημα I . Επομένως σύμφωνα μέ τό θεώρημα του Rolle η $g'(t)$ θά έχει $n+1$ τουλάχιστον διαφορετικές ρίζες στο αντίστοιχο άνοιχτό διάστημα. Για τόν ίδιο λόγο η $g''(t)$ θά έχει n τουλάχιστον διαφορετικές ρίζες στο ίδιο διάστημα και επαγωγικά θά έχουμε ότι η $g^{(n+1)}(t)$ θά έχει μία τουλάχιστον ρίζα, πού καλοῦμε ξ , στό υπόψη διάστημα. Παραγωγίζουμε τώρα τή σχέση (3.20) $n+1$ φορές, αντικαθιστούμε τήν τιμή

$$R_{n+1}^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - p_n^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)$$

στή σχέση πού έχει προκύψει και θέτουμε όπου $t=\xi$. Έτσι παίρνουμε

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{R_{n+1}(x)}{\prod_{i=0}^n (x-x_i)} (n+1)!$$

καί 'άπ' αὐτήν, λύνοντας ὡς πρὸς $R_{n+1}(x)$, τήν (3.19).

Παρατήρηση:

Ἡ σχέση (3.19) μπορεῖ νά μᾶς δώσει στήν πράξη ἓνα ἀπόλυτο φράγμα γιά τό ἀντίστοιχο σφάλμα ἀποκοπῆς (ἢ τή διόρθωση) ἀρκεῖ νά ξέρουμε ἓνα ἀπόλυτο φράγμα γιά τή συνάρτηση $f^{(n+1)}(x)$ στό διάστημα I .

3.5. Διηρημένες διαφορές

3.5.1. Ἐννοιες, ὁρισμοί καί σχέσεις διηρημένων καί πεπερασμένων διαφορῶν

Ἐκτός ἀπό τίς πεπερασμένες διαφορές πού μελετήσαμε στό προηγούμενο Κεφάλαιο, στήν πράξη, χρησιμοποιεῖται καί ἓνα ἄλλο εἶδος διαφορῶν πού καλοῦνται διηρημένες διαφορές. Αὐτές, ὅπως θά δοῦμε ἀπό τόν ἀντίστοιχο ὁρισμό, εἶναι συναρτήσεις τόσο τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως ὅσο καί τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς. Τό τελευταῖο ἀποτελεῖ καί τό κύριο χαρακτηριστικό τῶν διηρημένων διαφορῶν σέ σχέση μέ τίς ἀντίστοιχες πεπερασμένες, πού ἦταν συναρτήσεις τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως καί μόνο.

Γιά τόν ὁρισμό τῶν διηρημένων διαφορῶν θά ὑποθέσουμε ὅτι δίνονται οἱ τιμές μιᾶς συναρτήσεως $f(x)$ σέ ἓνα πλῆθος τιμῶν τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς πού χαρακτηρίζονται ἀπό δείκτες. Τότε ὀρίζουμε τήν πρώτη διηρημένη διαφορά τῆς συναρτήσεως $f(x)$ σέ δύο ὁποιαδήποτε σημεία, ἔστω στά σημεία x_0 καί x_1 , ἢ ἀλλιῶς τή διηρημένη διαφορά πρώτης τάξης στά ἴδια σημεία σάν τό λόγο

$$f(x_0, x_1) = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1}$$

Επαγωγικά ορίζονται οι διηρημένες διαφορές k τάξης ($k \geq 2$) σέ οποιαδήποτε $k+1$ σημεία, έστω σά $x_i \mid i=0(1)k$, άπό τίς διηρημένες διαφορές $k-1$ τάξης ώς έξής

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k) = \frac{f(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) - f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k)}{x_0 - x_k}$$

Αν χρησιμοποιούμε διαδοχικά σημεία $x_0, x_1, x_2, \dots$, γιά τόν όρισμό τών διηρημένων διαφορών, τότε μπορούμε νά κατασκευάσουμε καί πίνακες διηρημένων διαφορών αντίστοιχους πρός τούς πίνακες τών πεπερασμένων διαφορών. Αύτοί θά έχουν τήν ακόλουθη γενική μορφή

i	x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$
0	x_0	$f(x_0)$			
1	x_1	$f(x_1)$	$f(x_0, x_1)$	$f(x_0, x_1, x_2)$	
2	x_2	$f(x_2)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$
3	x_3	$f(x_3)$	$f(x_2, x_3)$	$f(x_2, x_3, x_4)$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
4	x_4	$f(x_4)$	$f(x_3, x_4)$		

Στόν παραπάνω πίνακα χρησιμοποιήσαμε μία επί πλέον στήλη δεικτών i (πού δέν είναι υποχρεωτική) κι αυτό γιά νά μπόρουμε νά συμβολίσουμε μέ γενικό τρόπο τίς διηρημένες διαφορές όποιασδήποτε τάξης, όπως κάνουμε στήν πρώτη γραμμή (πού έπίσης δέν είναι υποχρεωτική). Ακόμη χρησιμοποιήσαμε τό συμβολισμό $f(x_i)$ γιά τίς τιμές τής συναρτήσεως γιά νά τονίσουμε τό γεγονός ότι αυτές μπορούν νά θεωρηθοούν σάν διηρημένες διαφορές μηδενικής τάξης.

Ένα χαρακτηριστικό τών διηρημένων διαφορών n τάξης είναι ότι αυτές είναι ανεξάρτητες άπό τή σειρά πού παίρ-

νονται τὰ σημεῖα ἀπὸ τὰ ὁποῖα ὁρίζονται. Αὐτὸ διατυπώνεται καὶ ἀποδείχεται στὸ παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1

Ἡ διηρημένη διαφορὰ n τάξης, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα $x_i \mid i=0(1)n$, εἶναι μία συμμετρικὴ ἐκφραση τῶν σημείων αὐτῶν καὶ τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τῆς συναρτήσεως. Συγκεκριμένα ἔχουμε

$$f(x_0 x_1 \dots x_n) = \sum_{i=0}^n \frac{f_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} . \quad (3.23)$$

Ἀπόδειξη

Ἡ ἀπόδειξη τῆς σχέσης (3.23) γίνεται ἐπαγωγικά.

Γιὰ $n=1$ ἔχουμε ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῶν διηρημένων διαφορῶν πρώτης τάξης ὅτι

$$f(x_0 x_1) = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} = \frac{f_0}{x_0 - x_1} + \frac{f_1}{x_1 - x_0} = \sum_{i=0}^1 \frac{f_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^1 (x_i - x_j)} .$$

Δηλαδή ἡ (3.23) ἀληθεύει γιὰ $n=1$.

ὑποθέτουμε τώρα ὅτι ἡ (3.23) ἀληθεύει γιὰ $n=k \geq 1$ καὶ πλεὶς συγκεκριμένα ὅτι ἡ (3.23) ἀληθεύει γιὰ ὅλες τὶς διηρημένες διαφορὰς k τάξης. Θά ἀποδείξουμε ὅτι αὐτὴ ἀληθεύει καὶ γιὰ $n=k+1$, δηλαδή ὅτι

$$f(x_0 x_1 \dots x_k x_{k+1}) = \sum_{i=0}^{k+1} \frac{f_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k+1} (x_i - x_j)} . \quad (3.24)$$

Τὸ πρῶτο μέλος τῆς (3.24), ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς διηρημένης διαφορὰς $k+1$ τάξης, γράφεται

$$f(x_0 x_1 \dots x_k x_{k+1}) = \frac{1}{x_0 - x_{k+1}} (f(x_0 x_1 \dots x_k) - (f(x_1 \dots x_k x_{k+1}))),$$

όποτε χρησιμοποιώντας την υπόθεση της τέλει επαγωγής για διηρημένες διαφορές k τάξης βρίσκουμε

$$f(x_0 x_1 \dots x_k x_{k+1}) = \frac{1}{x_0 - x_{k+1}} \left\{ \sum_{i=0}^k \frac{f_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k (x_i - x_j)} - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{f_i}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k+1} (x_i - x_j)} \right\}.$$

Εφαρμόζοντας απλούς μετασχηματισμούς στο δεύτερο μέλος της παραπάνω ισότητας παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} f(x_0 x_1 \dots x_k x_{k+1}) &= \frac{1}{x_0 - x_{k+1}} \left\{ \frac{f_0}{\prod_{j=1}^k (x_0 - x_j)} + \sum_{i=1}^k \frac{f_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k (x_i - x_j)} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{f_i}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k+1} (x_i - x_j)} - \frac{f_{k+1}}{\prod_{j=1}^k (x_{k+1} - x_j)} \right\} = \\ &= \frac{f_0}{\prod_{j=1}^{k+1} (x_0 - x_j)} + \frac{1}{x_0 - x_{k+1}} \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{f_i (x_i - x_{k+1})}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k+1} (x_i - x_j)} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^k \frac{f_i (x_i - x_0)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k+1} (x_i - x_j)} \right\} + \frac{f_{k+1}}{\prod_{j=0}^k (x_{k+1} - x_j)} = \\ &= \frac{f_0}{\prod_{j=1}^{k+1} (x_0 - x_j)} + \sum_{i=1}^k \frac{f_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k+1} (x_i - x_j)} + \frac{f_{k+1}}{\prod_{j=0}^k (x_{k+1} - x_j)} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} \frac{f_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k+1} (x_i - x_j)} .$$

Αποδείξαμε δηλαδή έτσι την (3.24).

Επομένως ισχύει η σχέση (3.23) του θεωρήματος. Η έκφραση του αντίστοιχου δεύτερου μέλους, είναι φανερό ότι αποτελεί μία συμμετρική έκφραση των $x_i \mid i=0(1)n$ και των αντίστοιχων $f_i \mid i=0(1)n$.

Άμεση συνέπεια αυτού που αποδείξαμε, και που αποτελεί το κύριο χαρακτηριστικό των διηρημένων διαφορών, είναι ότι οποιαδήποτε μετάθεση των δεικτών $i=0(1)n$ (ή αντίστοιχα των σημείων $x_i \mid i=0(1)n$) δεν μεταβάλλει την τιμή της αντίστοιχης διηρημένης διαφοράς n τάξης.

Στήν περίπτωση που οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής ισαπέχουν και βρίσκονται στη φυσική τους σειρά σε σχέση με τους δείκτες τους, τότε είναι δυνατό να βρούμε απλές σχέσεις που να συνδέουν τις διηρημένες διαφορές n τάξης με τις αντίστοιχες πεπερασμένες διαφορές. Σχετικά διατυπώνουμε χωρίς απόδειξη (που μπορεί να γίνει πολύ εύκολα με την τέλεια επαγωγή) μία σχέση μεταξύ διηρημένων διαφορών n τάξης και αντίστοιχων προς τα εμπρός διαφορών, στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2

Η διηρημένη διαφορά n τάξης, που ορίζεται από τα σημεία $x_i = x_0 + ih \mid i=0(1)n$ με h το βήμα της πινακοποίησης, συνδέεται με την προς τα εμπρός διαφορά n τάξης στο σημείο x_0 με τη σχέση

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n} . \quad (3.25)$$

Είναι φανερό ότι με μία παράλληλη μεταφορά όλων των δεικτών κατά k , έστω, μπορούμε νά βρούμε μία σχέση ίδια με την (3.25), με τή μόνη διαφορά ότι θά έχουμε $\Delta^n f_k$ αντί $\Delta^n f_0$, και ακόμη ότι χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.5) του προηγούμενου κεφαλαίου θά μπορούμε νά εκφράσουμε άμέσως τό πρώτο μέλος της (3.25) είτε σαν συνάρτηση της αντίστοιχης προς τά πίσω διαφοράς είτε της αντίστοιχης κεντρικής διαφοράς.

3.5.2. Τύπος παρεμβολής των διηρημένων διαφορών του Newton

Ας υποθέσουμε ότι δίνονται $n+1$ τιμές της συνάρτησεως $f(x)$ στα σημεία $x_i \mid i=0(1)n$, πού γενικά δέν ίσαπέχουν, και ότι ζητούμε νά βρούμε ένα πολυώνυμο παρεμβολής $p_n(x)$ βαθμού τό πολύ n , πού νά ορίζεται από τά $n+1$ σημεία πού δόθηκαν, με τή βοήθεια των διηρημένων διαφορών. Για τό σκοπό αύτό εργαζόμαστε ως εξής.

Έστω x τό τυχόν σημείο στο όποίο ορίζεται ή συνάρτηση $f(x)$. Καλούμε, για χάρη εύκολίας στους συμβολισμούς, $x_{-1} \equiv x$ και σχηματίζουμε τή διηρημένη διαφορά $k+1$ τάξης πού ορίζεται από τά $k+2$ σημεία $x_i \mid i=-1(1)k$. (Στό εξής θά χρησιμοποιούμε είτε x_{-1} είτε x ανάλογα με τήν περίπτωση). Από τόν αντίστοιχο όρισμό έχουμε ότι

$$f(x_{-1}x_0 \dots x_{k-1}x_k) = \frac{1}{x_{-1}-x_k} (f(x_{-1}x_0 \dots x_{k-1}) - f(x_0 \dots x_{k-1}x_k)).$$

Από τήν παραπάνω σχέση λαβαίνουμε άμέσως

$$f(x_{-1}x_0 \dots x_{k-1}) = f(x_0 \dots x_{k-1}x_k) + (x_{-1}-x_k)f(x_{-1}x_0 \dots x_{k-1}x_k)$$

και άπ'αυτήν, για $k=0(1)n$ παίρνουμε διαδοχικά

$$f(x_{-1}) = f(x_0) + (x_{-1}-x_0)f(x_{-1}x_0)$$

$$f(x_{-1}x_0) = f(x_0x_1) + (x_{-1}-x_0)f(x_{-1}x_0x_1)$$

$$\vdots \quad (3.26)$$

$$f(x_{-1}x_0 \dots x_{n-1}) = f(x_0 \dots x_{n-1}x_n) + (x_{-1} - x_n)f(x_{-1}x_0 \dots x_{n-1}x_n).$$

Αν τώρα στήν πρώτη από τίς (3.26) αντικαταστήσουμε τό $f(x_{-1}x_0)$ από τή δεύτερη, μετά τό $f(x_{-1}x_0x_1)$, πού θά παρουσιαστεῖ, από τήν τρίτη κ.ο.κ. παίρνουμε τελικά ὅτι

$$f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x) \quad (3.27)$$

μέ

$$p_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0x_1) + (x-x_0)(x-x_1)f(x_0x_1x_2) + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f(x_0x_1\dots x_n) \quad (3.28)$$

καί

$$R_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x-x_i) \cdot f(x_0\dots x_n) \quad (3.29)$$

ὅπου ἔχουμε ἐπανέρθει στόν ἀρχικό συμβολισμό βάζοντας x στή θέση τοῦ x_{-1} . Εἶναι φανερό τώρα ὅτι τό πολυώνυμο $p_n(x)$ εἶναι βαθμοῦ τό πολύ n . Γιά νά εἶναι ὁμως καί τό ἀντίστοιχο πολυώνυμο παρεμβολῆς τῶν σημείων $x_i \mid i=0(1)n$ θά πρέπει νά ἰσχύουν οἱ σχέσεις

$$p_n(x_k) = f_k \mid k=0(1)n$$

ἢ, πράγμα πού εἶναι ἰσοδύναμο ἀπό τήν (3.27), οἱ σχέσεις

$$R_{n+1}(x_k) = 0 \mid k=0(1)n.$$

Τό τελευταῖο φυσικά δέν εἶναι φανερό ἀπό τήν (3.29), ἀν καί ὁ πρῶτος παράγοντας μηδενίζεται γιά $x=x_k \mid k=0(1)n$. Αὐτό γιὰτί ὁ δεύτερος παράγοντας $f(x_0\dots x_n)$ ἢ ὁ $f(x_{-1}x_0\dots x_n)$, ἀνθυμηθοῦμε τήν ἀντίστοιχη ἐκφραση τῆς (3.23), θά περιέχει παρονομαστές μέ παράγοντες διώνυμα τῆς μορφῆς $x_{-1}-x_j$ πού θά μηδενίζονται γιά $x=x_{-1}=x_j \mid j=0(1)n$. Αὐτό ὁμως ὁδηγεῖ σέ ἀ-

οριστία για την έκφραση (3.29). Για την άρση αυτής της αοριστίας εργαζόμαστε όπως στη συνέχεια. Από την (3.29), με κατάλληλες αντικαταστάσεις, χρησιμοποιώντας ένδιάμεσα και την αντίστοιχη σχέση προς την (3.23), παίρνουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \prod_{i=0}^n (x-x_i) \cdot f(x_{-1}, x_0, \dots, x_n) = \prod_{i=0}^n (x-x_i) \cdot \sum_{i=-1}^n \frac{f_i}{\prod_{\substack{j=-1 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} = \\ &= \prod_{i=0}^n (x-x_i) \left[\frac{f_{-1}}{\prod_{j=0}^n (x_{-1} - x_j)} + \sum_{i=0}^n \frac{f_i}{(x_i - x_{-1}) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \right] = \\ &= f_{-1} + \prod_{j=0}^n (x_{-1} - x_j) \sum_{i=0}^n \frac{f_i}{(x_i - x_{-1}) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} = \\ &= f(x) - \sum_{i=0}^n \left(\frac{\prod_{j=0}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \cdot f_i \right) = f(x) - \sum_{i=0}^n \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \cdot f_i \right). \end{aligned}$$

Ο δεύτερος όρος, όμως, της διαφοράς στην οποία καταλήξαμε δέν είναι παρά το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange, έστω $p_n^L(x)$, βαθμού τό πολύ n μέ σημεία παρεμβολής τά $x_i \mid i=0(1)n$. Επομένως

$$R_{n+1}(x_k) = f(x_k) - p_n^L(x_k) = 0 \mid k=0(1)n,$$

καί συνεπώς τό πολυώνυμο $p_n(x)$, πού δίνεται από την έκφραση (3.28), είναι ένα πολυώνυμο παρεμβολής μέ σημεία παρεμβολής τά $x_i \mid i=0(1)n$. Τό πολυώνυμο αυτό φυσικά θά συμπίπτει μέ τό αντίστοιχο πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange

$p_n^L(x)$ για τό λόγο, πού αναφέρθηκε στην πρώτη παράγραφο του παρόντος Κεφαλαίου 3.1. . Τό πολυώνυμο $p_n(x)$ είναι γνωστό σάν τό πολυώνυμο παρεμβολής τών διηρημένων διαφορών του Newton. Αντίστοιχα δέ ο τύπος (3.27) ή ο κατά προσέγγιση

$$f(x) \approx p_n(x), \quad (3.30)$$

μέ $p_n(x)$ νά δίνεται πάντα από την (3.28), είναι γνωστός σάν ο τύπος παρεμβολής τών διηρημένων διαφορών του Newton. Τέλος ή έκφραση $R_{n+1}(x)$, πού δίνεται από την (3.29), αποτελεί τή διόρθωση. Έδω θά πρέπει νά τονιστεί πώς αν συντρέχουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος της σελίδας 63 ή διόρθωση $R_{n+1}(x)$ μπορεί νά δοθεί καί από την έκφραση της σχέσης (3.19).

Παρατηρήσεις:

i) Όταν έχουμε νά βρούμε την τιμή μιᾶς συναρτήσεως σέ κάποιο σημείο x χρησιμοποιώντας ορισμένα σημεία παρεμβολής καί ζητήσουμε αύξημένη ακρίβεια της τιμής αὐτῆς μέ την προσθήκη ἑνός ἐπί πλέον σημείου παρεμβολής ή χρησιμοποίηση του πολυωνύμου παρεμβολής τών διηρημένων διαφορών του Newton πλεονεκτεῖ ἐναντι του ἀντιστοίχου του Lagrange. Αὐτό γιατί, ὅπως είναι φανερό από την (3.28), ή εὐρεση της νέας τιμῆς πετυχαίνεται μέ την προσθήκη ἑνός μόνο ὄρου, ἐνῶ στην περίπτωση του πολυωνύμου του Lagrange, ὅπως ἐξάλλου τονίστηκε καί προηγουμένως, ἐκτός από την προσθήκη του ἐπί πλέον ὄρου χρειάζεται νά ξαναυπολογίσουμε καί ὅλους τούς ἄλλους, ἀφοῦ ἀλλάζουν οἱ ἀντίστοιχοι συντελεστές.

ii) Τό πολυώνυμο παρεμβολής τών διηρημένων διαφορών του Newton, της ἐκφράσεως (3.28), ἐπομένως καί οἱ ἀντίστοιχοι τύποι παρεμβολής, μπορεί νά γραφτεῖ μέ $(n+1)!$ διαφορετικές ἰσοδύναμες μορφές, πού προκύπτουν ἀν στή θέση

των δεικτών $(0, 1, \dots, n)$ χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε μετάθεσή τους $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ (ή στή θέση των σημείων $x_0, x_1, \dots, x_n$, οποιαδήποτε μετάθεσή τους). Είναι φανερό ότι δύο όποιεσδήποτε μορφές από αυτές είναι ισοδύναμες, αφού αποτελούν πολυώνυμα παρεμβολής βαθμού τό πολύ n μέ σημεία παρεμβολής τό ίδια σημεία $x_i \mid i=0(1)n$. Έδω σημειώνουμε άπλως ότι αντίστοιχη μετάθεση των δεικτών στήν έκφραση τοῦ πολυωνύμου παρεμβολής τοῦ Lagrange (3.10) θά μεταθέσει μόνο τούς ὅρους τοῦ καί ἐπομένως ἡ μορφή του δέν θά αλλάξει.

3.5.3. Εὕρεση ἐκφράσεων γιά τή διηρημένη διαφορά $f(x_0 \dots x_n)$ καί τήν πρώτη παράγωγό της

Γιά τήν εὕρεση ἐκφράσεων τόσο γιά τή διηρημένη διαφορά $f(x_0 \dots x_n)$ ὅσο καί γιά τήν πρώτη παράγωγό της ὡς πρός x διατυπώνουμε καί ἀποδείχνουμε παρακάτω δύο θεωρήματα: Οἱ ἐκφράσεις, πού θά βρεθοῦν θά εἶναι πάρα πολύ χρήσιμες στή συνέχεια καί ιδιαίτερα στό ἐπόμενο Κεφάλαιο, ὅπως θά δοῦμε.

Θεώρημα 1

Ἄν I εἶναι τό μικρότερο διάστημα πού περιέχει ὅλα τά σημεία παρεμβολής $x_i \mid i=0(1)n$ καί τό τυχόν σημείο x (δηλαδή $I \equiv [\min(x_0, \dots, x_n), \max(x_0, \dots, x_n)]$) καί ἡ συνάρτηση $f(x)$ ἱκανοποιεῖ τή σχέση $f(x) \in C^{n+1}(I)$, τότε ἡ διηρημένη διαφορά $f(x_0 \dots x_n)$ δίνεται ἀπό τήν έκφραση

$$f(x_0 \dots x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (3.31)$$

ὅπου $\xi \in I$ $\odot$.

$\odot$ Ἡ δεύτερη σημείωση πού ἐγίνε γιά τό θεώρημα τῆς σελίδας 63 ἰσχύει ἀκριβῶς ἡ ἴδια καί στήν παρούσα περίπτωση.

Απόδειξη

Αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος της σελίδας 63 ισχύει και η σχέση (3.19). Εξισώνοντας τώρα τα δεύτερα μέλη των (3.29) και (3.19) και λύνοντας ως προς τη διηρημένη διαφορά που μας ενδιαφέρει λαβαίνουμε άμεσα την (3.31).

Θεώρημα 2

Αν $f(x) \in C^{n+2}(I)$, όπου I το διάστημα που ορίστηκε στο προηγούμενο θεώρημα 1, τότε

$$\frac{d}{dx} f(x, x_0, \dots, x_n) = \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!} \quad (3.32)$$

όπου $\eta \in I$.

Απόδειξη

Από τον ορισμό της παραγώγου της συναρτήσεως $f(x, x_0, \dots, x_n)$ στο τυχόν σημείο x έχουμε ότι

$$\frac{d}{dx} f(x, x_0, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, x_0, \dots, x_n) - f(x, x_0, \dots, x_n)}{h}.$$

Παρατηρούμε όμως ότι ο λόγος του δεύτερου μέλους δεν είναι παρά η διηρημένη διαφορά των $n+2$ σημείων $x+h, x, x_0, \dots, x_n$. Επομένως

$$\frac{d}{dx} f(x, x_0, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h, x, x_0, \dots, x_n).$$

Με την προϋπόθεση βέβαια ότι $x+h \in I$ και τόσο η συνάρτηση $f(x)$ όσο και τα $n+2$ σημεία που αναφέρθηκαν προηγουμένως ικανοποιούν τις απαιτήσεις του προηγούμενου θεωρήματος 1 λαβαίνουμε

$$\frac{d}{dx} f(x, x_0, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n+2)}(\xi(h))}{(n+2)!},$$

όπου τό άγνωστο σημείο ξ γράφτηκε σάν συνάρτηση τοῦ h γιατί όλα τά άλλα σημεία $x, x_0, \dots, x_n$ εἶναι σταθερά. Σάν συνέπεια τῆς ὑποθέσεως ὅτι ἡ $f^{(n+2)}(x)$ εἶναι συνεχῆς στό διάστημα I καί ἂν συμβολίσουμε μέ $\eta = \lim_{h \rightarrow 0} \xi(h)$ παίρνουμε τή σχέση (3.32), πού θέλουμε νά ἀποδείξουμε.

3.5.4. Τύποι παρεμβολῆς τῶν διηρημένων διαφορῶν τοῦ Newton γιά τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς πού ἰσαπέχουν

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι τά σημεία παρεμβολῆς $x_i \mid i=0(1)n$ ἰσαπέχουν καί δίνονται ἀπό τήν ἐκφραση $x_i = x_0 + ih \mid i=0(1)n$, μέ h τό βῆμα τῆς πινακοποιήσεως, τότε τό πολυώνυμο παρεμβολῆς τῶν διηρημένων διαφορῶν τοῦ Newton, πού δίνεται ἀπό τήν ἐκφραση (3.28), ὅπως καί οἱ ἀντίστοιχοι τύποι παρεμβολῆς (3.27) καί (3.30), εἶναι δυνατὸ νά ἀπλοποιηθοῦν σημαντικά. Ἐτσι ἂν θέσουμε μέ θ τό γνωστὸ λόγο

$$\theta = \frac{x - x_0}{h}$$

παίρνουμε ἀμέσως $x = x_0 + \theta h$ καί οἱ ἀντίστοιχοι συντελεστὲς στὲς γνωστὲς διηρημένες διαφορὲς $f(x_0, x_1, \dots, x_k) \mid k=1(1)n$, πού εἶναι γινόμενα τῆς μορφῆς $\prod_{i=0}^k (x - x_i) \mid k=0(1)n-1$ γράφονται τώρα ὡς ἑξῆς

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^k (x - x_i) &= (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k) = \\ &= \theta h \cdot (\theta - 1)h \dots (\theta - k)h = \left[\begin{matrix} \theta \\ k+1 \end{matrix} \right] (k+1)! h^{k+1} . \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τή σχέση, πού μόλις βρήκαμε, καθὼς καί τὸν τύπο (3.25) γιά τίς διάφορες τιμές τοῦ k παίρνουμε τελικὰ γιά τό πολυώνυμο παρεμβολῆς τῶν διηρημένων διαφορῶν τοῦ Newton ὅτι

$$p_n(x) = p_n(x(\theta)) = f_0 + \binom{\theta}{1} 1!h \frac{\Delta f_0}{1!h} + \binom{\theta}{2} 2!h^2 \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2} + \dots + \binom{\theta}{n} n!h^n \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}$$

καί συνεπώς

$$f(x) \approx p_n(x) = f_0 + \binom{\theta}{1} \Delta f_0 + \binom{\theta}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \binom{\theta}{n} \Delta^n f_0.$$

Ερήκαμε δηλαδή τον τύπο παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton - Gregory.

Θά μπορούσαμε, τό ίδιο εύκολα καί άπλά, νά βρούμε καί τον τύπο των προς τα πίσω διαφορών των Newton - Gregory. Για τό σκοπό αυτό άρκει νά καλούσαμε μέ $x_i = x_0 + ih \quad |i=0(-1)-n$ τά $n+1$ σημεία παρεμβολής, μέ θ τό λόγο $(x_0 - x)/h$, όποτε χρησιμοποιώντας καί τήν ίσοδύναμη προς τήν (3.25) σχέση, δηλαδή τήν

$$f(x_0 x_{-1} \dots x_{-n}) = f(x_{-n} \dots x_{-1} x_0) = \frac{\Delta^n \bar{f}_{-n}}{n!h^n} = \frac{\nabla^n f_0}{n!h^n},$$

στό αντίστοιχο προς τό (3.28) πολώνυμο παρεμβολής των διηρημένων διαφορών του Newton, θά παίρναμε τον τύπο που θέλαμε.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Χρησιμοποιώντας τούς τύπους παρεμβολής των Newton - Gregory (καί τούς δύο) καί Bessel νά κατασκευαστεί πολώνυμο τό πολύ τρίτου βαθμού, τό όποιο νά παίρνει στά σημεία $x=0,1,2,3$ τίς τιμές $y=-1,1,7,17$ αντίστοιχα). (*Απ. $2x^2-1$).
2. Νά βρεθοϋν οί δύο πρώτες τιμές του πίνακα της σελίδας 59. Συγκεκριμένα νά δειχτεί ότι στην περίπτωση έ-

φαρμογής του τύπου παρεμβολής των προς τα εμπρός διαφορών των Newton - Gregory με $0 < \theta < 1$ ή μέγιστη απόλυτη τιμή που μπορεί να πάρει ή $\Delta^2 f_0$ ($\Delta^3 f_0$) ώστε ο αντίστοιχος όρος να είναι απόλυτως μικρότερος ή ίσος από μισή μονάδα της τελευταίας δεκαδικής τάξης του πίνακα διαφορών είναι 4(8).

3. 'Αφού βρεθούν οι τιμές της συναρτήσεως $f(x) = x^3/x = 2.3(0.2)3.7$ να στρουγγυλευτούν στη συνέχεια σε δύο δ.ψ. και να σχηματιστεί ο πίνακας των διαφορών, που αντιστοιχεί σ'αυτές. Έπειτα, έχοντας υπόψη και τον πίνακα της σελίδας 59 να βρεθούν οι τιμές της $f(x)$ στο σημείο $x = 3.0$ χρησιμοποιώντας τους τύπους παρεμβολής των Newton - Gregory (και τους δύο) και του Bessel. ('Απ. 26.99625, 27.00375, 27.00).

4. Να βρεθεί πολυώνυμο τό πολύ τέταρτου βαθμού που να παίρνει στα σημεία $x = -2, -1, 1, 2, 3$ τις τιμές $-1, 4, 2, 7, 24$ αντίστοιχα. ('Απ. $x^3 - 2x + 3$).

5. Για τους συντελεστές $L_i(x) \mid i = 0(1)n$ του Lagrange να αποδειχτεί η σχέση

$$\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1.$$

6. Για τον συντελεστή $L_0(x)$ του Lagrange ναδειχτεί ότι

$$L_0(x) = 1 + \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \dots + \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)}.$$

7. Να γραφτεί ο τύπος του Lagrange για τα τρία σημεία $x_0, x_0 + \epsilon, x_1$. Στη συνέχεια να βρεθεί το όριο του τύπου αυτού όταν $\epsilon \rightarrow 0$ καθώς και η αντίστοιχη διορθωση κάτω από τις

κατάλληλες προϋποθέσεις.

$$\begin{aligned} (\text{'Απ. } f(x) \approx & -\frac{(x-x_1)(x-2x_0+x_1)}{(x_1-x_0)^2} f(x_0) - \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{x_1-x_0} f'(x_0) + \\ & + \frac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)^2} f(x_1), \frac{1}{6} (x-x_0)^2 (x-x_1) f'''(\xi), \xi \in [\min(x, x_0, x_1), \\ & \max(x, x_0, x_1)]). \end{aligned}$$

8. Όπως στην προηγούμενη άσκηση νά γραφτεί ο τύπος του Lagrange για τα τέσσερα σημεία $x_0, x_0+\varepsilon, x_1, x_1+\eta$. Στη συνέχεια νά βρεθεί το όριο του τύπου αυτού όταν $\varepsilon, \eta \rightarrow 0$ καθώς και η αντίστοιχη διόρθωση, όταν ισχύουν οι κατάλληλες προϋποθέσεις.

$$\begin{aligned} (\text{'Απ. } f(x) \approx & \frac{(x-x_0)(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)^2} f'(x_0) - \frac{(x-x_1)^2(2x-3x_0+x_1)}{(x_0-x_1)^3} f(x_0) + \\ & + \frac{(x-x_0)^2(x-x_1)}{(x_1-x_0)^2} f'(x_1) - \frac{(x-x_0)^2(2x-3x_1+x_0)}{(x_1-x_0)^3} f(x_1), \\ & \frac{1}{24} [(x-x_0)(x-x_1)]^2 f^{(4)}(\xi), \xi \in [\min(x, x_0, x_1), \max(x, x_0, x_1)]). \end{aligned}$$

9. "Αν $x_i \mid i=0(1)n$ είναι $n+1$ διαφορετικά σημεία και $f(x) \equiv \prod_{i=0}^n (x-x_i)$ νά δειχθούν οι παρακάτω σχέσεις για τις διηρημένες διαφορές

- i) $f(x_0, x_1, \dots, x_m) = 0$ για $m=0(1)n$
- ii) $f(x_0, x_1, \dots, x_n, x) = 1$ για κάθε $x \neq x_i \mid i=0(1)n$
- iii) $f(x_0, x_1, \dots, x_n, xy) = 0$ για κάθε x και y με $x, y \neq x_i \mid i=0(1)n$.

10. "Αν η έννοια της διηρημένης διαφοράς n τάξης επεκταθεί και στην περίπτωση που δύο από τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής συμπίπτουν σάν το όριο

$$f(x_0, x_0, x_2, \dots, x_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x_0, x_0+\varepsilon, x_2, \dots, x_n) = f'(x, x_2, \dots, x_n) \big|_{x=x_0},$$

μέ την προϋπόθεση ότι η αντίστοιχη παράγωγος υπάρχει, να βρεθεί πώς μετασχηματίζεται ο τύπος παρεμβολής των διηρημένων διαφορών του Newton καθώς και η αντίστοιχη διόρθωση. ('Απ. $p_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x)|_{x=x_0} + (x-x_0)^2 f'(x|x_2)|_{x=x_0} + \dots + (x-x_0)^2(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})f'(x|x_2, x_3, \dots, x_n)|_{x=x_0}$, $R_{n+1}(x) = (x-x_0)^2(x-x_2)\dots(x-x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, $\xi \in I$).

11. Μέ βάση την προηγούμενη άσκηση 10-νά βρεθεί με τον τροποποιημένο τύπο παρεμβολής των διηρημένων διαφορών του Newton η τιμή της συναρτήσεως $f(x)$ στο σημείο $x=0.5$, όταν δίνονται οι τιμές $f(0)=-2$, $f'(0)=0$, $f(1)=-2$ και $f(3)=178$. ('Απ. -3.25).
12. Νά βρεθεί τό μέγιστο απόλυτο σφάλμα στο σημείο $x=9$, όταν χρησιμοποιείται ένα πολυώνυμο παρεμβολής τό πολύ δεύτερου βαθμού (χωρίς νά βρεθεί αυτό) γιά νά προσεγγίσει τή συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}$, μέ σημεία παρεμβολής τά $x=1, 8, 27$. ('Απ. $80/9$).
13. "Αν x_0, x_1 είναι δύο διακεκριμένα σημεία της συναρτήσεως $f(x) = \sin x$, νά βρεθεί τό πολυώνυμο $p(x)$ γιά τό όποιο ισχύει $p(x_i) = f(x_i)$ $|i=0,1$. Στη συνέχεια νά δειχτεί ότι, τό μέγιστο απόλυτο σφάλμα της προσεγγίσεως $f(x) \approx p(x)$, στο διάστημα $[x_0, x_1]$, είναι ίσο μέ $(x_1-x_0)^2/8$. ('Απ. $\frac{1}{x_1-x_0} [(\sin x_1 - \sin x_0)x + (x_1 \sin x_0 - x_0 \sin x_1)]$).

4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

4.1. Γενικά

Έπειτα από όσα έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα και ιδιαίτερα από όσα έχουμε αναπτύξει στο προηγούμενο Κεφάλαιο 3, η βασική ιδέα της αριθμητικής παραγωγίσεως είναι στην ουσία της απλή. Συγκεκριμένα, αντί να θεωρήσουμε ή να βρούμε την παράγωγο μιας συναρτήσεως σε ένα σημείο x (μέ την προϋπόθεση ότι υπάρχει) θεωρούμε ή βρίσκουμε την παράγωγο ενός πολυωνύμου παρεμβολής της συναρτήσεως (πού πάντα υπάρχει) στο ίδιο σημείο x . Έτσι χρησιμοποιώντας τις διάφορες μορφές των πολυωνύμων παρεμβολής, πού βρήκαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο, μπορούμε αντίστοιχα να βρούμε και διάφορους τύπους για την εύρεση της παραγώγου. Απλούστεροι και, περισσότερο ίσως, εύχρηστοι τύποι αριθμητικής παραγωγίσεως προκύπτουν στην περίπτωση πού τα σημεία παρεμβολής ίσαπέχουν. Έτσι αρχίζουμε με την εύρεση τύπων για ίσαπέχοντα σημεία παρεμβολής.

4.2. Τύποι αριθμητικής παραγωγίσεως για τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής πού ίσαπέχουν, με τη βοήθεια πολυωνύμων παρεμβολής

Υποθέτουμε ότι ζητούμε να βρούμε την τιμή της πρώτης παραγώγου της συναρτήσεως $f(x)$, σε ένα σημείο x , όταν η συνάρτηση δίνεται με τις τιμές της σε $n+1$ σημεία πού ίσαπέχουν, έστω τά $x_i = x_0 + ih$ $|i=0(1)n$. Από όσα αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο έχουμε άμέσως ότι

$$f'(x) \approx p'_n(x), \quad (4.1)$$

όπου $p_n(x)$ τό πολυώνυμο παρεμβολής, βαθμού τό πολύ n , πού ορίζεται από τά $n+1$ δοθέντα σημεία x_i $|i=0(1)n$. Αν καλέ-

σουμε μέ θ τό λόγο $\frac{x-x_0}{h}$ καί χρησιμοποιήσουμε στή θέση τοῦ δεύτερου μέλους τῆς (4.1) τό ἀντίστοιχο πολυώνυμο παρεμβολῆς τῶν πρὸς τὰ ἐμπρὸς διαφορῶν τῶν Newton-Gregory παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} f'(x) &\approx \frac{dp_n(x)}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{h} \frac{d}{d\theta} \left[f_0 + \binom{\theta}{1} \Delta f_0 + \binom{\theta}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \binom{\theta}{n} \Delta^n f_0 \right] = \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{1}{1!} \Delta f_0 \cdot \frac{d(\theta)}{d\theta} + \frac{1}{2!} \Delta^2 f_0 \frac{d}{d\theta} [\theta(\theta-1)] + \dots + \frac{1}{n!} \Delta^n f_0 \frac{d}{d\theta} \right. \\ &\quad \left. [\theta(\theta-1) \dots (\theta-n+1)] \right] \end{aligned}$$

ἢ τέλος

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{i!} \Delta^i f_0 \sum_{\substack{j=0 \\ k \neq j}}^{i-1} \prod_{k=0}^{i-1} (\theta-k) \right], \quad (4.2)$$

ὅπου $\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 0}}^0 (\theta-k) = 1$. Ὁ παραπάνω τύπος μπορεῖ νά ἀπλοποιηθεῖ, ὅταν ζητοῦμε τὴν πρώτη παράγωγο σέ ἓνα ἀπὸ τὰ σημεῖα παρεμβολῆς καί ἰδιαίτερα στό σημεῖο $x=x_0$. Στὴ περίπτωση αὐτὴ ἔχουμε ἀμέσως ὅτι $\theta=0$ καί ὁ τύπος μετατρέπεται, ἐπειτα ἀπὸ ἀπλοὺς μετασχηματισμοὺς, στὸν παρακάτω

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{i} \cdot \Delta^i f_0. \quad (4.3)$$

Ἄν τώρα ἀναφερθοῦμε σέ διάφορες συγκεκριμένες τιμές τοῦ n μποροῦμε νά βροῦμε διάφορους ἀπλοποιημένους τύπους τῆς μορφῆς (4.3). Π.χ. γιὰ $n=1,2$, κ.ο.κ. μποροῦμε νά πάρουμε, σέ τιμές τῆς συναρτήσεως $f(x)$, τελικὰ ὅτι

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h} (f_1 - f_0), \quad f'(x_0) \approx -\frac{1}{2h} (f_2 - 4f_1 + 3f_0) \quad (4.4)$$

κ.ο.κ.

Για την παραγωγή τύπων, πού νά δίνουν τή δεύτερη, τήν τρίτη κλπ παράγωγο τής $f(x)$ στό τυχόν σημείο x παραγωγίζουμε τά μέλη τής σχέσης (4.2) διαδοχικά ώς πρὸς x . Καί πάλι τονίζουμε τό γεγονός ὅτι καί σ'αυτές τίς περιπτώσεις ἀπλούστεροι τύποι μπορεῖ νά προκύψουν, ὅταν ζητοῦμε τήν τιμή τής ἀντίστοιχης παραγωγῆς σέ ἓνα ἀπό-τά σημεία παρεμβολῆς καί ἰδιαίτερα στό σημείο x_0 . Π.χ. εἶναι εὐκόλο νά βρεῖ κανεῖς ὅτι γιά τή δεύτερη παράγωγο στό σημείο x_0 καί γιά $n=2$ μπορούμε νά πάρουμε

$$f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2} (f_2 - 2f_1 + f_0) . \quad (4.5)$$

4.3. Τύποι ἀριθμητικῆς παραγωγίσεως, γιά τιμές τής ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς πού ἴσαπέχουν, μέ τή βοήθεια συμβολικῶν μεθόδων

Ἄν καί οἱ τύποι ἀριθμητικῆς παραγωγίσεως πού βρέθηκαν στήν προηγούμενη παράγραφο προέκυψαν ἑμμεσα μέ τή χρησιμοποίηση συμβολικῶν μεθόδων, κι αὐτό γιατί τό πολυώνυμο παρεμβολῆς τῶν πρὸς τά ἑμπρὸς διαφορῶν τῶν Newton - Gregory, τοῦ ὁποῖου ἐγίνε χρήση, ἔχει προκύψει μέ τίς μεθόδους αὐτές, εἶναι δυνατό νά βροῦμε τοὺς ἴδιους τύπους χρησιμοποιώντας συμβολικὲς μεθόδους κατευθείαν καί ἰδιαίτερα τὸν τελεστή παραγωγίσεως D . Γιά τό σκοπὸ αὐτό δίνουμε ἀπλῶς μιά σκιαγράφηση τοῦ πῶς εἶναι δυνατό νά προκύψουν οἱ τύποι (4.3), (4.4) καί (4.5).

Γιά τήν εὑρεση τοῦ τύπου (4.3) ξεκινοῦμε ἀπὸ τό πρῶτο μέλος, ἐκφράζουμε τὸν τελεστή τής παραγωγῆς σάν συνάρτηση τοῦ τελεστή Δ , ἀναπτύσσουμε σέ σειρά, ὁπότε καί λαβαίνουμε διαδοχικά

$$f'(x_0) = Df_0 = \frac{1}{h} \log (1+\Delta)f_0 = \frac{1}{h} \left(\Delta - \frac{1}{2} \Delta^2 + \frac{1}{3} \Delta^3 - \dots \right) f_0 =$$

$$= \frac{1}{h} (\Delta f_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 f_0 - \dots).$$

Έτσι αν περιοριστούμε στους n πρώτους όρους του ανάπτυγματος, στο όποιο καταλήξαμε, βρίσκουμε άμέσως τον τύπο (4.3). Είναι προφανές ότι για $n=1,2, \dots$ μπορούμε να βρούμε τους τύπους (4.4).

Για την εύρεση της δεύτερης παραγώγου στο σημείο x_0 μπορούμε να εργαστούμε ανάλογα. Τή φορά αυτή λαβαίνουμε αντίστοιχα ότι

$$\begin{aligned} f''(x_0) &= D^2 f_0 = \frac{1}{h^2} [\log(1+\Delta)]^2 f_0 = \frac{1}{h^2} (\Delta - \frac{1}{2} \Delta^2 + \frac{1}{3} \Delta^3 - \\ &\quad - \dots)^2 f_0 = \frac{1}{h^2} (\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12} \Delta^4 - \frac{5}{6} \Delta^5 + \dots) f_0 = \\ &= \frac{1}{h^2} (\Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 f_0 - \frac{5}{6} \Delta^5 f_0 + \dots). \end{aligned}$$

Αν τώρα περιοριστούμε, όπως και πριν, μόνο στον πρώτο όρο του ανάπτυγματος, πού βρήκαμε, παίρνουμε άμέσως τον τύπο (4.5).

4.4. Τύποι αριθμητικής παραγωγίσεως για τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής πού δεν ίσαπέχουν

Βασιζόμενοι στη γενική ιδέα της αριθμητικής παραγωγίσεως, πού αναφέρθηκε στην πρώτη παράγραφο 4.1. του παρόντος Κεφαλαίου, μπορούμε να βρούμε τύπους για την πρώτη κυρίως παράγωγο μιάς συναρτήσεως $f(x)$ σέ κάποιο σημείο x αυτής, όταν γνωρίζουμε τίς τιμές της συναρτήσεως σέ $n+1$ σημεία, έστω τά x_i $| i=0(1)n$, τά όποια γενικά δεν ίσαπέχουν. Στην περίπτωση αυτή παίρνουμε αντί για την παράγωγο της ύπόψη συναρτήσεως στο σημείο x την παράγωγο του πολυωνύμου παρεμβολής της, πού ορίζεται από τά σημεία $n+1$ πού δόθηκαν.

Σάν πολυώνυμο παρεμβολής θεωρούμε τό αντίστοιχο τοῦ Lagrange ἢ τό αντίστοιχο τῶν διηρημένων διαφορῶν τοῦ Newton.

Όταν γίνεται χρήση τοῦ πολυωνύμου παρεμβολῆς τοῦ Lagrange εἶναι εὐκόλο νά βροῦμε, χρησιμοποιώντας τις μία ἀπό τις ἰσοδύναμες ἐκφράσεις του, ὅτι,

$$f'(x) \approx \sum_{i=0}^n L'_i(x) \cdot f_i \quad (4.6)$$

μέ

$$L'_i(x) = \frac{1}{\varphi'(x_i)} \sum_{j=0}^n \left(\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i, j}}^n (x - x_k) \right) \quad | i = 0(1)n \quad (4.7)$$

ὅπου $\varphi(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$. Ἡ ἔκφραση (4.7), καί συνεπῶς καί ὁ τύπος ἀριθμητικῆς παραγωγίσεως (4.6), ἀπλουστεύεται σημαντικά, ὅταν τό σημεῖο x εἶναι ἓνα ἀπό τά σημεῖα παρεμβολῆς καί ἰδιαίτερα τό σημεῖο x_0 . Γιά τή συγκεκριμένη αὐτή περίπτωση ἡ ἔκφραση (4.7) ἀναλύεται στίς ἐκφράσεις

$$L'_0(x_0) = \frac{1}{\varphi'(x_0)} \sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x_0 - x_k) \right)$$

$$L'_i(x_0) = \frac{1}{\varphi'(x_i)} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (x_0 - x_k) \quad | i = 1(1)n .$$

Όταν γίνεται χρήση τοῦ πολυωνύμου παρεμβολῆς τῶν διηρημένων διαφορῶν τοῦ Newton μποροῦμε νά βροῦμε ἀμέσως γιά τήν ἀντίστοιχη ἔκφραση τῆς παραγώγου ὅτι

$$f'(x) \approx \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{j=0}^{i-1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{i-1} (x - x_k) \right) \cdot f(x_0 \dots x_i) \right] \quad (4.8)$$

μέ $\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 0}}^0 (x - x_k) = 1$. Ἄν ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ζητοῦμε τήν πα-

ράγωγο σέ ένα από τά σημεία παρεμβολής, έστω τό x_0 , τότε
 ο τύπος της προηγούμενης σελίδας απλοποιείται στον

$$f'(x_0) \approx \sum_{i=1}^n \left[\prod_{k=1}^{i-1} (x_0 - x_k) \cdot f(x_0 \dots x_i) \right] \quad (4.9)$$

μέ $\prod_{k=1}^0 (x_0 - x_k) = 1$. Στο σημείο αυτό διαπιστώνουμε ότι σύμφωνα
 να μέ την παρατήρηση (ii) της παραγράφου 3.5.2. μπορεί νά
 προκύψει εύκολα αντίστοιχος τύπος (4.9) για τό οποιοδήποτε
 άλλο σημείο παρεμβολής x_ℓ $\ell = 1(1)n$, άρκεί νά θεωρή-
 σουμε τή μετάθεση τών δεικτών πού βασικά θά έναλλάσσει
 μόνον τούς δείκτες 0 καί ℓ τόσο στον τύπο (4.8) όσο καί
 στον τύπο πού προκύπτει άπ'αυτόν, τόν (4.9).

Αν θεωρήσουμε ότι τά σημεία παρεμβολής x_i ίσαπέχουν
 καί δίνονται άπό τή γενική έκφραση $x_i = x_0 + ih$, τότε άπό
 τούς τύπους (4.8) καί (4.9) μπορούν άμέσως νά προκύψουν
 οί τύποι (4.2) καί (4.3) πού βρήκαμε στην παράγραφο 4.2..
 Πραγματικά αν καλέσουμε μέ θ τό λόγο $\frac{x-x_0}{h}$ έχουμε άμέσως
 ότι $x - x_k = h(\theta - k)$. Έξάλλου άπό τήν (3.25) έχουμε ότι

$$f(x_0 \dots x_i) = \frac{\Delta^i f_0}{i! h^i},$$

έπομένως αντικαθιστώντας στο δεύτερο μέλος της (4.8) λα-
 βαίνουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &\approx \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{\substack{j=0 \\ k \neq j}}^{i-1} \prod_{k=0}^{i-1} h(\theta - k) \right) \cdot \frac{\Delta^i f_0}{i! h^i} \right] = \\ &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i!} \Delta^i f_0 \sum_{\substack{j=0 \\ k \neq j}}^{i-1} \prod_{k=0}^{i-1} (\theta - k) \right) \end{aligned}$$

δηλαδή τόν τύπο (4.2). Είναι τώρα φανερό πώς άπό τόν τύ-
 πο (4.9) είναι δυνατό νά βρεθεί ο τύπος (4.3) εργαζόμε-

νοι με τόν ίδιο τρόπο και κάνοντας τις αντίστοιχες αντι-
καταστάσεις.

4.5. Σφάλμα αποκοπής της πρώτης πα- ραγώγου.

Αν με E_n συμβολίσουμε το σφάλμα αποκοπής κατά την
εύρεση της πρώτης παραγώγου είναι φανερό, από τη θεωρία
που αναπτύχθηκε μέχρι τώρα, πως αυτό θα δίνεται από την
έκφραση

$$E_n = p'_n(x) - f'(x).$$

Επειδή όμως για τη συνάρτηση $f(x)$ και το πολυώνυμο πα-
ρεμβολής της $p_n(x)$ έχουμε πάντοτε $f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x)$, ο-
που $R_{n+1}(x)$ η αντίστοιχη διορθωση, ή παραπάνω έκφραση για
το σφάλμα αποκοπής παίρνει τη μορφή

$$E_n = -R'_{n+1}(x).$$

Αν τώρα σάν πολυώνυμο παρεμβολής $p_n(x)$ θεωρηθεί εκείνο των
διηρημένων διαφορών του Newton (ή ακόμη και οποιοδήποτε
άλλο), τότε για τη διορθωση $R_{n+1}(x)$ μπορούμε να χρησιμοποιή-
σουμε την έκφραση (3.29), όποτε παίρνουμε

$$E_n = -\frac{d}{dx} \left[\prod_{i=0}^n (x - x_i) \cdot f(x, x_0, \dots, x_n) \right]$$

ή

$$E_n = - \left[f(x, x_0, \dots, x_n) \frac{d}{dx} \prod_{i=0}^n (x - x_i) + \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{d}{dx} f(x, x_0, \dots, x_n) \right]. \quad (4.10)$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ ικανοποιεί τις
προϋποθέσεις του θεωρήματος 2 της σελίδας 75, δηλαδή ότι
 $f(x) \in C^{n+2}(I)$, όπου $I \equiv [\min(x, x_0, \dots, x_n), \max(x, x_0, \dots, x_n)]$, τότε

θά ισχύουν τὰ συμπεράσματα, τόσο τοῦ θεωρήματος 2, ὥς καί τοῦ προηγούμενου τοῦ θεωρήματος 1, καί ἔτσι ἡ ἐκφραση (4.10), μετά τήν εὑρεση καί τῆς ἄλλης παραγώγου, πού ὑπάρχει σ' αὐτήν θά μπορεῖ τελικά νά γραφεῖ ὡς ἑξῆς

$$E_n = - \frac{1}{(n+1)!} \left[f^{(n+1)}(\xi) \sum_{i=0}^n \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{n+2} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \cdot f^{(n+2)}(\eta) \right], \quad (4.11)$$

μέ $\xi, \eta \in I$ καί μέ τήν πρόσθετη παρατήρηση ὅτι τό σημεῖο ξ ἀνήκει στό ἀντίστοιχο ἀνοικτό διάστημα τοῦ I .

Ἄν ἡ πρώτη παράγωγος τῆς συναρτήσεως $f(x)$, ἀντί νά βρίσκεται στό τυχόν σημεῖο x , βρίσκεται σέ ένα ἀπό τὰ $n+1$ σημεῖα παρεμβολῆς $x_i \mid i=0(1)n$, ἔστω τό x_k , τότε ὁ τύπος (4.11) γιά τό ἀντίστοιχο σφάλμα ἀποκοπῆς ἀπλοποιεῖται σημαντικά. Συγκεκριμένα λαβαίνουμε

$$E_n = - \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x_k - x_j) \quad (4.12)$$

μέ $\xi \in I$ (καί ἰδιαίτερα στό ἀντίστοιχο ἀνοικτό διάστημα).

Στήν περίπτωση, πού τὰ σημεῖα παρεμβολῆς ἰσαπέχουν καί δίνονται ἀπό τήν ἐκφραση $x_i = x_0 + ih \mid i=0(1)n$ μέ $h>0$ τό βῆμα τῆς πινακοποιήσεως, τότε οἱ τύποι (4.11) καί (4.12) εἶναι δυνατό νά δώσουν ἀκόμη πιά ἀπλοποιημένες ἐκφράσεις. Ἰδιαίτερα μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ ἐκφραση γιά τό σφάλμα ἀποκοπῆς στήν περίπτωση τοῦ τύπου (4.3), πού ἀναφέρεται στήν τιμή τῆς παραγώγου στό σημεῖο x_0 . Ἐτσι ἀπό τόν τύπο (4.12) καί γιά $k=0$ μπορούμε εὐκόλα νά πάρουμε ὅτι

$$E_n = \frac{(-1)^{n+1} h^n}{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_n). \quad (4.13)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τώρα τον τύπο (4.13) για $n=1,2,\kappa.\sigma.$ κ., δηλαδή για την περίπτωση των τύπων αριθμητικής παραγωγίσεως (4.4), μπορούμε να πάρουμε για τα αντίστοιχα σφάλματα αποκοπής ότι

$$E_1 = \frac{h}{2} f^{(2)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1)$$

$$E_2 = -\frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_2)$$

κ.ο.κ.

4.6. Αριθμητική παραγωγή με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών

4.6.1. Περιγραφή της μεθόδου

Εκτός από την κατηγορία των τύπων, πού βρήκαμε μέχρι τώρα στο παρόν Κεφάλαιο και πού στηρίζονται στη βασική ιδέα της αντίστοιχης παραγωγίσεως ενός κατάλληλου πολυωνύμου παρεμβολής, είναι δυνατό να βρούμε μία άπειρία ακόμη τύπων αριθμητικής παραγωγίσεως (όπως αντίστοιχα και αριθμητικής ολοκληρώσεως, πού θα δούμε στο Κεφάλαιο 6) με μία μέθοδο, πού καλεϊται μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών. Η μέθοδος αυτή συνίσταται στο εξής. θεωρούμε έναν προσέγγιστικό τύπο, για την εύρεση μιᾶς παραγώγου ιδιαίτερα σε κάποιο γνωστό σημείο, μιᾶς προκαθορισμένης μορφής, όπου στο δεύτερο μέλος του, πού αποτελεί μιᾶ συνάρτηση (συνήθως γραμμική) τιμών της συναρτήσεως σε διάφορα σημεία, περιέχεται ένα πλήθος, έστω n , παραμέτρων. Τό πρόβλημα πού τίθεται είναι ὁ προσδιορισμός των n αὐτῶν παραμέτρων, ἔτσι ὥστε ὁ τύπος πού δόθηκε νά εἶναι ἀκριβής (καί ὄχι κατά προσέγγιση) γιά πολυώνυμα βαθμοῦ ὅσο τό δυνατό μεγαλύτερου. Γιά τό σκοπό αὐτό ἀπαιτοῦμε ὁ τύπος, πού δόθηκε, νά εἶναι ἀκριβής γιά

τίς στοιχειώδεις συναρτήσεις $f(x) \equiv 1, x, x^2, \dots$ μέχρις ότου, από τίς αντίστοιχες ταυτότητες, πού θά προκύψουν πάρουμε η ανεξάρτητες μεταξύ τους εξισώσεις, ή επίλυση τοῦ συστήματος τῶν όποίων θά δώσει τίς τιμές τῶν η παραμέτρων. Ἡ παραπάνω εργασία εἶναι φανερό ότι θά χρησιμοποιήσῃ κατά σειρά τίς στοιχειώδεις συναρτήσεις $x^k \mid k=0(1)m \geq n-1$ καί ότι τελικά, καί σάν συνέπεια τῆς γραμμικότητας τοῦ τελεστή τῆς παραγώγου, ό τύπος άριθμητικῆς παραγωγίσεως, πού θά βρεθεῖ, θά εἶναι άκριβῆς γιά πολυώνυμα μέχρι καί βαθμοῦ ἔστω l , όπου $l \geq m \geq n-1$. Γιά τήν καλύτερη κατανόηση τῆς μεθόδου τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν, πού σκιαγραφήθηκε παραπάνω, δίνουμε ἕνα συγκεκριμένο παράδειγμα.

Ἐστω ότι ζητᾶμε νά προσδιορίσουμε τούς συντελεστές α καί β στόν παρακάτω προσεγγιστικό τύπο άριθμητικῆς παραγωγίσεως

$$f'_0 \approx \alpha f_{-1} + \beta f_1 \quad (4.14)$$

ἔτσι ώστε αὐτός νά εἶναι όσο τό δυνατό πιό άκριβῆς, όπου $x_i = x_0 + ih$ καί $f_i = f(x_i) \mid i=-1(1)1$. Σύμφωνα μέ τή θεωρία, πού αναπτύξαμε, άπαιτοῦμε ό τύπος (4.14) νά εἶναι άκριβῆς γιά $f(x) \equiv 1, x, x^2, \dots$. Ἐτσι γιά $f(x) \equiv 1$, όπότε $f'(x) \equiv 0$, τό πρώτο μέλος A τοῦ τύπου (4.14) γίνεται

$$A = 0, \quad (4.15)$$

ένῳ τό δεύτερο μέλος B γίνεται

$$B = \alpha + \beta. \quad (4.16)$$

Ἐξισώνοντας τά δύο μέλη τῶν (4.15) καί (4.16) βρίσκουμε τήν πρώτη εξίσωση, πού συνδέει τίς παραμέτρους α καί β . Συγκεκριμένα

$$\alpha + \beta = 0. \quad (4.17)$$

Γιά $f(x) \equiv x$, όπότε $f'(x) \equiv 1$ ἡ (4.14) δίνει γιά τό πρώτο μέλος

$$A = 1 \quad (4.18)$$

και για το δευτερο μελος

$$B = \alpha(x_0 - h) + \beta(x_0 + h) = (\alpha + \beta)x_0 + (-\alpha + \beta)h. \quad (4.19)$$

Εξισώνοντας εκ ταυτότητας τα τελευταία μέλη των (4.18) και (4.19) και λαβαίνοντας υπόψη και την (4.17) παίρνουμε

$$(-\alpha + \beta)h = 1, \quad (4.20)$$

βρίσκοντας έτσι τη δεύτερη εξίσωση μεταξύ των παραμέτρων, που είναι ανεξάρτητη από την προηγούμενη (4.17). Τέλος επιλύοντας το σύστημα των ανεξάρτητων μεταξύ τους εξισώσεων (4.17) και (4.20) έχουμε άμεσα

$$\beta = -\alpha = \frac{1}{2h}$$

και επομένως ο τύπος (4.14) παίρνει τη μορφή

$$f'_0 \approx \frac{1}{2h} (f_1 - f_{-1}). \quad (4.21)$$

Όπως διαπιστώσαμε ήδη ο τύπος (4.21) είναι ακριβής για πολυώνυμα βαθμού πρώτου ($m = n-1 = 1$). Για να εξακριβώσουμε αν είναι ακριβής και για πολυώνυμα μεγαλύτερου βαθμού αρκεί να συνεχίσουμε την προηγούμενη διαδικασία για $f(x) \equiv x^2, x^3, \dots$. Για $f(x) \equiv x^2$, οπότε $f'(x) = 2x$ έχουμε για τα δύο μέλη της (4.21)

$$A = 2x_0,$$

$$B = \frac{1}{2h} [(x_0 + h)^2 - (x_0 - h)^2] = 2x_0$$

και άρα $A \equiv B$. Για $f(x) \equiv x^3$, οπότε $f'(x) = 3x^2$ βρίσκουμε αντίστοιχα

$$A = 3x_0^2,$$

$$B = \frac{1}{2h} [(x_0 + h)^3 - (x_0 - h)^3] = 3x_0^2 + h^2$$

και άρα $A \neq B$. Σάν τελικό συμπέρασμα προκύπτει ότι ο τύπος

(4.21) είναι ακριβής για πολυώνυμα μέχρι δεύτερου βαθμού ($\lambda=2 > m=n-1=1$).

4.6.2. Σφάλμα αποκοπής της παραγώγου στη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών

Το σφάλμα αποκοπής E στη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών δίνεται φυσικά από τη διαφορά που βρίσκουμε αν από το δεύτερο μέλος του συγκεκριμένου τύπου αφαιρέσουμε το πρώτο. Εάν συνέπεια της ποικιλίας των τύπων στη περίπτωση αυτής της μεθόδου αριθμητικής παραγωγίσεως δεν μπορεί να δοθεί γενικός κανόνας, που να εκφράζει με καλύτερο τρόπο τη διαφορά, που αναφέρθηκε προηγούμενα. Σε όρισμένες περιπτώσεις και ιδιαίτερα, όταν τα σημεία στά οποιαδήποτε αναφέρονται οι τιμές της συναρτήσεως και της παραγώγου ισαπέχουν και ικανοποιούνται επιπρόσθετα συγκεκριμένες προϋποθέσεις, είναι δυνατό χρησιμοποιώντας κατάλληλα το θεώρημα του Taylor και απλά θεώρημα της Αναλύσεως, που προκύπτουν από τη συνέχεια συναρτήσεως σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα, να βρίσκουμε απλοποιημένες εκφράσεις για το αντίστοιχο σφάλμα αποκοπής. Αυτό φαίνεται χαρακτηριστικά στην εύρεση του σφάλματος αποκοπής του τύπου (4.21) της προηγούμενης παραγράφου με την προϋπόθεση, που θα δικαιολογηθεί αργότερα, ότι $f(x) \in C^3([x_{-1}, x_1])$. Πραγματικά για το αντίστοιχο σφάλμα αποκοπής E έχουμε

$$E = \frac{1}{2h} (f_1 - f_{-1}) - f'_0 \quad (4.22)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Taylor και αναπτύσσοντας, τόσο την $f_1 = f(x_0+h)$, όσο και την $f_{-1} = f(x_0-h)$, γύρω από το σημείο x_0 παίρνουμε αντίστοιχα

$$f_1 = f_0 + \frac{h}{1!} f'_0 + \frac{h^2}{2!} f''_0 + \frac{h^3}{3!} f'''(\xi_1) \quad (4.23)$$

μέ $\xi_1 \in (x_0, x_1)$ και

$$f_{-1} = f_0 - \frac{h}{1!} f'_0 + \frac{h^2}{2!} f''_0 - \frac{h^3}{3!} f'''(\xi_2) \quad (4.24)$$

μέ $\xi_2 \in (x_{-1}, x_0)$. Αντικαθιστώντας τώρα τις εκφράσεις (4.23) και (4.24) στην (4.22) λαβαίνουμε άμέσως ότι

$$E = \frac{h^2}{12} [f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)]. \quad (4.25)$$

Για την παραπάνω απλοποίηση της εκφράσεως (4.25) χρησιμοποιούμε την υπόθεση ότι η $f'''(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x_{-1}, x_1]$. Συνέπεια αυτού είναι ότι θα παρουσιάζει η συνάρτηση αυτή, $f'''(x)$, μία ελάχιστη και μία μέγιστη τιμή στο ίδιο διάστημα, έστω m και M αντίστοιχα. Έτσι θα ισχύει

$$m \leq f'''(\xi_1) \leq M$$

και

$$m \leq f'''(\xi_2) \leq M,$$

οπότε βρίσκουμε εύκολα ότι

$$m \leq \frac{1}{2} (f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)) \leq M.$$

Επειδή όμως η τιμή $\frac{1}{2}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2))$ βρίσκεται μεταξύ της ελάχιστης και μέγιστης τιμής m και M αντίστοιχα της συνεχούς συνάρτησεως $f'''(x)$, όπως είναι γνωστό από την Ανάλυση, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi \in [x_{-1}, x_1]$ τέτοιο ώστε

$$f'''(\xi) = \frac{1}{2} (f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)),$$

οπότε τελικά η (4.25) γίνεται

$$E = \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \quad (4.26)$$

μέ $\xi \in [x_{-1}, x_1]$. Η έκφραση (4.26) για το σφάλμα αποκοπής του

τύπου (4.21) μᾶς δίνει συγχρόνως καί τό συμπέρασμα τῆς προηγούμενης παραγράφου, ὅτι δηλαδή, ὁ τύπος (4.21) εἶναι ἀκριβής γιά πολυώνυμα μέχρι καί δεύτερου βαθμοῦ. Αὐτό δέ' γιατί, ἡ ἀντίστοιχη τρίτη παράγωγος τοῦ τύπου (4.26) εἶναι ἐκ ταυτότητας μηδέν γιά πολυώνυμα μέχρι καί δεύτερου βαθμοῦ.

4.7. Γενικές Παρατηρήσεις

Ἄν θεωρήσουμε τίς διάφορες ἐκφράσεις γιά τό σφάλμα ἀποκοπῆς στήν ἀριθμητική εὔρεση τῆς πρώτης παραγώγου, πού ἀντιστοιχοῦν ἀπό τούς πιό γενικούς ὡς τούς πιό συγκεκριμένους τύπους ((4.11), (4.12), (4.13) καί (4.26)) καί ὑποθέσουμε, γιά τούς πιό γενικούς ἀπ' αὐτούς, ὅτι τά χρησιμοποιοῦμενα σημεῖα x_i βρίσκονται σέ μία διάταξη μεγέθους ἀντίστοιχη μέ τούς δείκτες τους καί ἀκόμη ὅτι τό σημεῖο x στό ὁποῖο ζητοῦμε τήν παράγωγο ἀνήκει στό μικρότερο διάστημα πού περιέχει τά σημεῖα x_i , παρατηροῦμε ἀμέσως τά ἑξῆς. Εἶναι φανερό, καί ἀπό τό γενικότερο ἀκόμη τύπο (4.11), πώς ὅσο τά σημεῖα x_i τείνουν στό σημεῖο x , χωρίς νά ἀλλάζει ἡ διάταξή τους, τόσο οἱ διάφοροι ὅροι πού περιέχονται σ' αὐτόν μικραίνουν ἀπολύτως μέ συνέπεια νά μικραίνει τό ἀντίστοιχο ἀπόλυτο φράγμα γιά τό σφάλμα ἀποκοπῆς. Τό χαρακτηριστικό αὐτό φαίνεται πιό καθαρά στούς πιό ἀπλοῦς τύπους γιά τό σφάλμα ἀποκοπῆς. Π.χ. στόν τύπο (4.13). Ὅσο μικραίνει τό h , ἐπομένως καί τό ἀντίστοιχο διάστημα (x_0, x_n) , τόσο μικραίνει ὁ ὅρος h^n , καθώς καί τό ἀπόλυτο φράγμα γιά τήν $f^{(n+1)}(\xi)$, μέ ἀποτέλεσμα νά μικραίνει καί τό ἀντίστοιχο ἀπόλυτο φράγμα γιά τό σφάλμα ἀποκοπῆς. Ἐπομένως θεωρητικά θά πετυχαίναμε καλύτερα ἀποτελέσματα, δηλαδή μικρότερα ἀπόλυτα φράγματα γιά τά σφάλματα ἀποκοπῆς, ἂν ἐπιτρέπαμε στό βῆμα πινακοποίησης h , νά ἔτεινε στό μηδέν. Αὐτό στήν πράξη δέν ἐπιτρέπεται νά γίνεται πέρα ἴσως ἀπό μία ὀρισμένη

τιμή του h , πού δέν εἶναι εὐκολο νά καθοριστεῖ, ἐξαιτίας τῶν εἰδικῶν προβλημάτων, πού δημιουργοῦνται. Αὐτά ὀφείλονται στήν παρουσία τῶν ἀναπόφευκτων σφαλμάτων στρογγυλεύσεως. Συγκεκριμένα, ἂν ἀναφερθοῦμε στόν ἀπλούστερο τύπο ἀριθμητικῆς παραγωγίσεως, πού βρήκαμε-μέχρι τώρα, δηλαδή στόν πρῶτο ἀπό τούς (4.4), ἔχουμε νά παρατηρήσουμε τά ἑξῆς. Στήν πράξη φυσικά καί στή θέση τῶν τιμῶν τῆς ἐκφράσεως $\frac{1}{h} (f_1 - f_0)$ τοῦ δεύτερου μέλους, σάν συνέπεια τοῦ γεγονότος ὅτι εἴμαστε ὑποχρεωμένοι νά ἐργαζόμαστε μέ περιορισμένο ἔστω k ἀριθμό δ.ψ., ἔχουμε ὅτι ἀντί γιά τίς τιμές f_1, f_0 καί h θά χρησιμοποιοῦμε ἀντίστοιχες προσεγγιστικές f_1^*, f_0^* καί h^* μέ σφάλματα $\varepsilon_1, \varepsilon_0$ καί ε_h . Ἔτσι τό ἀντίστοιχο σφάλμα στρογγυλεύσεως γιά τήν ἐκφραση πού χρησιμοποιοῦμε θά εἶναι

$$\frac{1}{h^*} (f_1^* - f_0^*) - \frac{1}{h} (f_1 - f_0) \approx \frac{1}{h^*} (\varepsilon_1 - \varepsilon_0).$$

Ἐπειδή δέ $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_0| \leq 0.5 \times 10^{-k}$ ἔχουμε ἀμέσως ὅτι

$$\left| \frac{1}{h^*} (f_1^* - f_0^*) - \frac{1}{h} (f_1 - f_0) \right| \leq \frac{10^{-k}}{h^*}.$$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση προκύπτει πῶς τό κατά προσέγγιση φράγμα γιά τό ἀπόλυτο σφάλμα, πού ὀφείλεται στά σφάλματα στρογγυλεύσεως καί μόνο τῶν τιμῶν τῆς ἐκφράσεως, πού χρησιμοποιοῦμε γιά τήν ἀριθμητική εὕρεση τῆς ἀντίστοιχης παραγώγου, τείνει στό ἀπειρο καθώς τό h καί συνεπῶς καί τό h^* τείνουν στό μηδέν. Αὕτη ἡ ἀντίφαση μεταξύ σφάλματος ἀποκοπῆς καί σφάλματος στρογγυλεύσεως, πού στήν πράξη μεταφράζεται στό γεγονός ὅτι, ὅταν προσπαθοῦμε νά μηδενίσουμε τό πρῶτο, τότε ἀπειρίζουμε πιθανόν τό δεύτερο, πρέπει νά μᾶς καθιστᾷ πολύ προσεκτικούς καί πολύ ἐπιφυλακτικούς στή χρησιμοποίηση τύπων ἀριθμητικῆς παραγωγίσεως γιά τήν κατά προσέγγιση εὕρεση τῆς παραγώγου σέ κάποιο σημείο x .

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. "Αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού να βρεθούν οι σημειωμένες με x τιμές στον παρακάτω πίνακα διαφορών και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας όλες τις πληροφορίες του πίνακα, και χωρίς να βρεθεί το αντίστοιχο πολυώνυμο παρεμβολής, να υπολογιστεί η $f'(0.5)$.

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
-1	X				
0	X	3	X		
1	0	X	4	X	X
2	X	X	X	6	
3	X	X			

('Απ. 0.75).

2. Να αποδειχτεί ο προσεγγιστικός τύπος αριθμητικής παραγωγίσεως

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{6h} (2f_3 - 9f_2 + 18f_1 - 11f_0),$$

όπου $x_i = x_0 + ih$ και $f_i = f(x_i) \quad | i = 0(1)3$.

3. Να αποδειχτεί με οποιοδήποτε τρόπο ότι

$$f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2} (2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3),$$

όπου $x_i = x_0 + ih$ και $f_i = f(x_i) \quad | i = 0(1)3$.

4. Παραγωγίζοντας τον τύπο παρεμβολής των προς τα πίσω διαφορών των Newton - Gregory να βρεθούν προσεγγιστικές εκφράσεις για τις τρεις πρώτες παραγώγους της συναρτήσεως $f(x)$, στο τυχόν σημείο x , χρησιμοποιώντας διαφορές μέχρι

καί τρίτης τάξης. (Απ. $f'(x) \approx -\frac{1}{h} [-\nabla f_0 + \frac{1}{2} (2\theta-1)\nabla^2 f_0 - \frac{1}{6} (3\theta^2-6\theta+2)\nabla^3 f_0]$, $f''(x) \approx \frac{1}{h^2} [\nabla^2 f_0 - (\theta-1)\nabla^3 f_0]$, $f'''(x) \approx \frac{1}{h^3} \nabla^3 f_0$).

5. Νά γίνει η ίδια εργασία, όπως στην προηγούμενη άσκηση 4, με άφετηρία τόν τύπο παρεμβολής των κεντρικών διαφορών του Bessel. (Απ. $f'(x) \approx \frac{1}{h} [\delta f_{1/2} + \frac{1}{4}(2\theta-1)(\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1) + \frac{1}{6}(3\theta^2-3\theta+\frac{1}{2})\delta^3 f_{1/2}]$, $f''(x) \approx \frac{1}{h^2} [\frac{1}{2}(\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1) + \frac{1}{2}(2\theta-1)\delta^3 f_{1/2}]$, $f'''(x) \approx \frac{1}{h^3} \delta^3 f_{1/2}$).

6. Για την εύρεση της τιμής της πρώτης παραγώγου του πολυωνύμου $f(x) \equiv x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ στο σημείο $x=1.5$, με σημεία παρεμβολής τα $x_0=0$, $x_1=1$ και $x_2=2$, χρησιμοποιείται ο τύπος $f'(x) \approx \frac{1}{h} [\Delta f_0 + (\theta - \frac{1}{2}) \Delta^2 f_0]$ με $\theta = (x-x_0)/h$. Χωρίς να υπολογιστούν οι αντίστοιχες ακριβής και προσεγγιστική τιμή της παραγώγου στο 1.5 να βρεθεί το αντίστοιχο σφάλμα άποκοπής. (Απ. 0.25).

7. Νά αποδειχτεί με οποιοδήποτε τρόπο ο τύπος άριθμητικής παραγωγίσεως

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [x-h, x+h]$$

με την προϋπόθεση ότι $f(x) \in C^4([x-h, x+h])$.

8. Νά προσδιοριστούν οι συντελεστές α και β έτσι ώστε ο παρακάτω τύπος άριθμητικής παραγωγίσεως να είναι όσο το δυνατό πιο ακριβής

$$f'(x) \approx \alpha f(x) + \beta f(x-h).$$

Ποιό είναι το αντίστοιχο σφάλμα άποκοπής με την προϋπόθεση ότι

$$f(x) \in C^2([x-h, x]);$$

(*Απ. $1/h, -1/h, -h/2 F''(\xi)$ με $\xi \in (x-h, x)$).

_____ / _____

5. ΒΑΣΙΚΑ ΣΥΝΟΛΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

5.1. Γενικά

Τά βασικά σύνολα πολυωνύμων παίζουν ένα σπουδαίο ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας της Α.Α.. Ίδιαίτερα δύο βασικά σύνολα πολυωνύμων, πού θα μελετήσουμε στις επόμενες δύο παραγράφους, τά βασικά σύνολα πολυωνύμων ή, απλά, πολυώνυμα του Legendre καί του Chebyshev, βοηθοῦν σημαντικά στην ανάπτυξη της θεωρίας της Ἀριθμητικῆς Ὀλοκληρώσεως (Κεφάλαιο 6) καί της θεωρίας της Προσεγγίσεως (Κεφάλαιο 14).

Γενικά, ἓνα βασικό σύνολο πολυωνύμων εἶναι μία ἀκολουθία γνωστῶν πολυωνύμων $\{P_n(x)\}$ $|n=0,1,2,\dots$, μέ τό μόνο περιορισμό τό κάθε πολυώνυμο $P_n(x)$ τῆς ἀκολουθίας νά εἶναι βαθμοῦ n . Ἀπό τόν ὁρισμό, πού μόλις δόθηκε, εἶναι δυνατό νά διαπιστώσουμε ὅτι μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ἀπειρα βασικά σύνολα πολυωνύμων, πού νά ἐξυπηρετοῦν, ἴσως ἐπί πλέον, συγκεκριμένους σκοπούς. Τό ἀπλούστερο ἀπό τά βασικά σύνολα πολυωνύμων εἶναι ἐκεῖνο γιά τό ὁποῖο $P_n(x) \equiv x^n$ $|n=0,1,2,\dots$. Τά πρῶτα στοιχεῖα τοῦ βασικοῦ αὐτοῦ συνόλου πολυωνύμων, ὅπως εἶναι ἤδη γνωστό, χρησιμοποιήθηκαν στό προηγούμενο Κεφάλαιο καί συγκεκριμένα στην ἀριθμητική παραγωγή μέ τή μέθοδο τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν. Στή συνέχεια διατυπώνουμε καί ἀποδείχνουμε ἓνα θεμελιῶδες θεώρημα πού ἀναφέρεται στό ὁποιοδήποτε, συγκεκριμένο ὅμως, βασικό σύνολο πολυωνύμων.

Θεώρημα

Ὅποιοδήποτε πολυώνυμο $Q_m(x)$ (βαθμοῦ m) μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ μόνοσήμεντα σάν γραμμικός συνδυασμός πολυωνύμων ἀπό ἓνα βασικό σύνολο πολυωνύμων.

Ἀπόδειξη

Ἐστω

$$Q_m(x) \equiv \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad (\alpha_m \neq 0) \quad (5.1)$$

τό πολυώνυμο, πού δόθηκε, καί $\{P_n(x)\} \mid n=0,1,2,\dots$, τό βασικό σύνολο πολυωνύμων, μέ

$$P_n(x) \equiv \alpha_{nn} x^n + \alpha_{n,n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_{n1} x + \alpha_{n0} \quad (\alpha_{nn} \neq 0) \quad (5.2)$$

$$\mid n=0,1,2,\dots$$

Γιά νά αποδείξουμε τό θεώρημα, άρκεϊ νά αποδείξουμε ότι ισχύει ή σχέση

$$Q_m(x) \equiv \sum_{i=0}^m c_{m-i} P_{m-i}(x) \quad (5.3)$$

μέ τούς συντελεστές $c_i \mid i=m(-1)0$ μονοσήμαντα ορισμένους καί ιδιαίτερα μέ $c_m \neq 0$. Για τό σκοπό αυτό αντικαθιστούμε τίς εκφράσεις (5.1) καί (5.2) για $n=0(1)m$ στά δύο μέλη της (5.3), όποτε εξισώνοντας κατά σειρά τούς συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του x , από τή μεγαλύτερη πρός τή μικρότερη, παίρνουμε τό παρακάτω σύστημα των $m+1$ εξισώσεων μέ άγνώστους τούς συντελεστές $c_i \mid i=m(-1)0$.

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{mm} c_m & & = \alpha_m \\ \alpha_{m,m-1} c_m + \alpha_{m-1,m-1} c_{m-1} & & = \alpha_{m-1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \alpha_{m0} c_m + \alpha_{m-1,0} c_{m-1} + \dots + \alpha_{10} c_1 + \alpha_{00} c_0 & = & \alpha_0 \end{array} \quad (5.4)$$

Τό σύστημα (5.4), όπως είναι φανερό, έχει πίνακα συντελεστών άγνώστων έναν κάτω τριγωνικό καί επομένως ή τιμή της αντίστοιχης όρίζουσας θά είναι ίση μέ τό γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του κάτω τριγωνικού πίνακα. Συγκεκριμένα θά είναι ίση μέ $\prod_{i=0}^m \alpha_{m-i,m-i}$. Τό γινόμενο αυτό είναι διάφορο από τό μηδέν, αφού οί παράγοντές του, $\alpha_{m-i,m-i} \mid i=0(1)m$

δέν είναι παρά οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων των αντίστοιχων πολυωνύμων $P_{m-i}(x) \mid i=0(1)m$ του βασικού συνόλου πολυωνύμων. Άρα τό σύστημα (5.4) έχει μία καί μόνο λύση καί επομένως οι συντελεστές, πού μᾶς ενδιαφέρουν, στό ανάπτυγμα (5.3), όρίζονται μονοσήμαντα. Έπιπρόσθετα καί από τήν πρώτη έξίσωση τοῦ συστήματος (5.4) είναι δυνατό νά διαπιστώσουμε ότι $c_m \neq 0$.

5.2. Πολυώνυμα τοῦ Legendre

Τά πολυώνυμα τοῦ Legendre μπορούν νά όριστοῦν μέ πολλούς ισοδύναμους τρόπους. Ένας ἀπ'αυτούς είναι ἐκεῖνος, πού τά όρίζει ἀπό τίς παρακάτω σχέσεις.

$$\begin{aligned} P_0(x) &\equiv 1 \\ P_n(x) &\equiv \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \quad | n=1,2,3,\dots \end{aligned} \quad (5.5)$$

γιά κάθε $x \in (-\infty, \infty)$.

Χρησιμοποιώντας τόν παραπάνω όρισμό, μπορούμε εύκολα νά βρούμε γιά τά, πρώτα τουλάχιστον στή σειρά, πολυώνυμα τοῦ Legendre τίς ἐκφράσεις

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2} (3x^2-1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2} (5x^3-3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8} (35x^4-30x^2+3) \\ P_5(x) &= \frac{1}{8} (63x^5-70x^3+15x) \dots \text{κλπ.} \end{aligned}$$

Άπό τόν όρισμό (5.5) τῶν πολυωνύμων τοῦ Legendre μπορούμε νά διαπιστώσουμε μέ μορφή θεωρημάτων τίς παρακάτω δύο ιδιότητες, πού δίνονται μέ τίς ἀντίστοιχες ἀποδείξεις τους.

Θεώρημα 1

Τά πολυώνυμα του Legendre περιέχουν είτε μόνο άρτιες δυνάμεις του x εφόσον είναι άρτιου βαθμού είτε μόνο περιττές δυνάμεις του x εφόσον είναι αντίστοιχα περιττού βαθμού.

Απόδειξη

Ο ισχυρισμός του θεωρήματος είναι προφανής για $n=0$, από την πρώτη σχέση (5.5). Για τις άλλες τιμές του $n=1, 2, 3, \dots$ και από τις δεύτερες σχέσεις (5.5) μπορούμε καταρχήν να παρατηρήσουμε ότι ο ισχυρισμός του θεωρήματος που θέλουμε να αποδείξουμε, δεν επηρεάζεται αν αγνοήσουμε τελείως το συντελεστή $\frac{1}{2^n n!}$. Για την έκφραση, που απομένει, έχουμε ότι

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \frac{d^n}{dx^n} (x^{2n} + c_1 x^{2n-2} + c_2 x^{2n-4} + \dots + c_n),$$

όπου οι συντελεστές $c_i \mid i=1(1)n$ είναι γνωστοί και διάφοροι μάλιστα από το μηδέν. Βρίσκοντας τώρα την παράγωγο n τάξης του πολυωνύμου της παρενθέσεως παίρνουμε τελικά την έκφραση

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = d_0 x^n + d_1 x^{n-2} + d_2 x^{n-4} + \dots + d_{\left[\frac{n}{2}\right]} x^{n-2\left[\frac{n}{2}\right]},$$

όπου πάλι οι συντελεστές $d_i \mid i=0(1)\left[\frac{n}{2}\right]$, με το σύμβολο $[a]$ να παριστάνει το ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού a , είναι γνωστοί και διάφοροι από το μηδέν. Η παραπάνω έκφραση για την παράγωγο n τάξης πολλαπλασιασμένη επί το συντελεστή $\frac{1}{2^n \cdot n!}$ μας δίνει τη μορφή του πολυωνύμου $P_n(x) \mid n=1, 2, 3, \dots$ του Legendre, που αποδείχνει το ζητούμενο.

Θεώρημα 2

Ο συντελεστής a_n του μεγιστοβάθμιου όρου ενός πολυ-

ωνύμου $P_n(x)$ του Legendre δίνεται από την έκφραση

$$\frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2}.$$

Απόδειξη

Γιά $n=0$ η απόδειξη είναι άμεση. Γιά $n \geq 1$ παίρνουμε την αντίστοιχη έκφραση για το πολυώνυμο του Legendre από τις (5.5) και με διαδοχικούς μετασχηματισμούς βρίσκουμε

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{2n} + \dots) = \\ &= \frac{1}{2^n \cdot n!} [(2n)(2n-1)\dots(n+1)x^n + \dots] = \\ &= \frac{(2n)(2n-1)\dots(n+1) \cdot n!}{2^n \cdot (n!)^2} x^n + \dots = \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2} x^n + \dots \end{aligned}$$

Η τελευταία έκφραση για το πολυώνυμο $P_n(x)$ $| n=1,2,3,\dots$ αποδείχνει το ζητούμενο.

Στη συνέχεια της παρούσας παραγράφου αποδείχνουμε ακόμη μερικές βασικές ιδιότητες, που αποτελούν θεωρήματα των πολυωνύμων του Legendre, και που θα αποδειχτούν χρησιμότητες στα αντίστοιχα Κεφάλαια, όταν θα γίνει χρήση των πολυωνύμων αυτών. Γιά να μην αναγκαστούμε να λέμε πολλές φορές τα ίδια πράγματα, τονίζουμε στο σημείο αυτό ότι στο υπόλοιπο μέρος της παραγράφου ο συμβολισμός $P_n(x)$ θα αναφέρεται στο πολυώνυμο του Legendre βαθμού n .

Θεώρημα 3

Γιά $m=0(1)n-1$ ισχύει ότι $\int_{-1}^1 x^m P_n(x) dx = 0$ [⊕] $| n \geq 1$.

⊕ Το θεώρημα αυτό μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: Το μονώνυμο x^m $| m=0(1)n-1$ είναι ορθογώνιο προς το πολυώνυμο του Legendre $P_n(x)$ στο διάστημα $[-1,1]$.

Απόδειξη

Γιά $m=0$, και πολλαπλασιάζοντας τά δύο μέλη τής ισότη-
τας πού πρέπει νά αποδείξουμε επί $2^n \cdot n!$ μπορούμε νά βροῦμε
ὅτι

$$2^n \cdot n! \int_{-1}^1 P_n(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n dx = \left. \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n \right|_{-1}^1 = 0 \quad (5.6)$$

Ἡ προτελευταία ἔκφραση εἶναι ἴση μέ τό μηδέν κι αὐτό για-
τί ἡ εὕρεση τής παραγώγου $n-1$ τάξης τής n δυνάμεως τοῦ δι-
ωνύμου x^2-1 θά μᾶς δώσει σάν ἀποτέλεσμα ἕνα γινόμενο, πού
θά ἀποτελεῖται, ἀπό ἕνα πολὺώνυμο βαθμοῦ $n-1$ ἐπὶ τόν παρά-
γοντα x^2-1 . Ὁ τελευταῖος παράγοντας, ὅπως εἶναι φανερό, μη-
δενίζεται τόσο γιά $x=1$ ὅσο καί γιά $x=-1$, συνεπῶς θά μηδε-
νίζεται καί ἡ διαφορά τῶν ἀντίστοιχων γινομένων.

Γιά $m>0$, ξεκινοῦμε πάλι μέ τόν ἴδιο τρόπο, πολλαπλα-
σιάζοντας ἐπὶ $2^n \cdot n!$ τά μέλη τής ισότητος, πού θέλουμε νά
ἀποδείξουμε, ὅποτε ἐφαρμόζοντας κατάλληλα τήν ὁλοκλήρωση
κατά παράγοντες λαβαίνουμε

$$\begin{aligned} 2^n \cdot n! \int_{-1}^1 x^m P_n(x) dx &= \int_{-1}^1 x^m \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n dx = \\ &= \int_{-1}^1 x^m d \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n \right) = x^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n \Big|_{-1}^1 - \\ &\quad - \int_{-1}^1 m x^{m-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n dx = \\ &= -m \int_{-1}^1 x^{m-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n dx, \end{aligned} \quad (5.7)$$

ὅπου ὁ ὅρος $x^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n \Big|_{-1}^1$ εἶναι ἴσος μέ τό μηδέν γιά λό-
γο ἀντίστοιχο μέ αὐτόν πού ἦταν μηδέν τό προτελευταῖο μέ-
λος τῶν (5.6). Ἄν παρατηρήσουμε τώρα προσεκτικά τό δεῦτερο

μέλος τών (5.7) καί τήν έκφραση στήν όποία καταλήξαμε βλέπουμε ότι αύτή, έκτός από τόν παράγοντα $-m$, πού έκφράζει τόν έκθέτη τοῦ x^m , εἶναι τῆς ἴδιας μορφῆς μέ τό δεύτερο μέλος έκτός από τό γεγονός ότι τόσο ό έκθέτης τοῦ μονωνύμου όσο καί ἡ τάξη τῆς παραγώγου, πού περιέχεται στήν έκφραση, ἐλαττώθηκαν κατά μία μονάδα. Συνεπώς ἀν συνεχίσουμε από τό τελευταῖο μέλος τών σχέσεων (5.7) καί ἐφαρμόσουμε τή διαδικασία, πού ἀκολουθήσαμε γιά τήν παραγωγή τών σχέσεων (5.7), ἄλλες $m-1$ φορές συνολικά, θά πάρουμε τελικά ότι

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^m \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n dx &= \dots = (-1)^{m \cdot m!} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^2-1)^n dx = \\ &= (-1)^{m \cdot m!} \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} (x^2-1)^n \Big|_{-1}^1 = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Θεώρημα 4

Ένα πολυώνυμο $Q_m(x)$ βαθμοῦ $m < n$ εἶναι ὀρθογώνιο πρὸς τό πολυώνυμο $P_n(x)$ τοῦ Legendre στό διάστημα $[-1,1]$. Ἰσχύει δηλαδή ἡ σχέση

$$\int_{-1}^1 Q_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad | m < n.$$

Ἀπόδειξη

Έστω ότι τό $Q_m(x)$ ἔχει τή μορφή

$$Q_m(x) \equiv \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \equiv \sum_{i=0}^m \alpha_i x^i.$$

Ἀντικαθιστώντας στό πρῶτο μέλος τῆς ἰσότητος πού θέλουμε νά βροῦμε, παίρνουμε διαδοχικά

$$\int_{-1}^1 Q_m(x) P_n(x) dx = \int_{-1}^1 \left(\sum_{i=0}^m \alpha_i x^i \right) P_n(x) dx = \sum_{i=0}^m \alpha_i \int_{-1}^1 x^i P_n(x) dx = 0,$$

όπου καθένα από τα $m+1$ ολοκληρώματα της προτελευταίας έκφράσεως είναι ίσο με το μηδέν σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα 3.

Θεώρημα 5

Δύο διαφορετικά πολυώνυμα του Legendre είναι όρθογώνια μεταξύ τους στο διάστημα $[-1, 1]$. Ίσχύει δηλαδή η σχέση

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad |m \neq n.$$

Απόδειξη

Αν υποθέσουμε ότι $m < n$ (άλλιως εναλλάσσουμε τούς δείκτες) ο ισχυρισμός του θεωρήματος ισχύει σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα 4.

Θεώρημα 6

Αν $P_n(x)$ είναι ένα οποιοδήποτε πολυώνυμο του Legendre, θα ισχύει η σχέση

$$\int_{-1}^1 x^n P_n(x) dx = \frac{2^{n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Απόδειξη

Η ισχύς της σχέσης είναι προφανής για $n=0$. Έστω τώρα ότι έχουμε $n \geq 1$. Από τις σχέσεις (5.8) έχουμε

$$\int_{-1}^1 x^m \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n dx = (-1)^m m! \int_{-1}^1 \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^2-1)^n dx$$

και για $m=n$ λαβαίνουμε άμέσως

$$\int_{-1}^1 x^n P_n(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^n} \int_{-1}^1 (x^2-1)^n dx. \quad (5.9)$$

Το δεύτερο μέλος της παραπάνω σχέσης γράφεται διαδοχικά

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{2^n} \int_{-1}^1 (x^2-1)^n dx &= \frac{1}{2^n} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t dt, \end{aligned} \quad (5.10)$$

όπου θέσαμε $x = \sin t$. Καταρχήν έχουμε για $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} I_n &\equiv \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t d \sin t = \cos^{2n} t \sin t \Big|_0^{\pi/2} - \\ &- \int_0^{\pi/2} \sin t d \cos^{2n} t = 2n \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^{2n-1} t dt = \\ &= 2n \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \cos^{2n-1} t dt = 2n \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} t dt - 2n I_n. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Από το πρώτο και τελευταίο μέλος των παραπάνω ισοτήτων, επιλύνοντας ως προς I_n παίρνουμε

$$I_n \equiv \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} t dt \equiv \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}. \quad (5.12)$$

Από την αναδρομική σχέση (5.12) είναι εύκολο νά βρούμε ότι

$$I_n = \frac{2n(2n-2)(2n-4) \dots 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3) \dots 3} I_0 = \frac{2n(2n-2)(2n-4) \dots 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3) \dots 3} \cdot 1$$

ή με πολλαπλασιασμό των δύο όρων του τελευταίου κλάσματος επί

$$2n(2n-2)(2n-4) \dots 2 = 2^n \cdot n!$$

λαβαίνουμε τελικά ότι

$$I_n = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}. \quad (5.13)$$

Τώρα, από τις σχέσεις (5.9), (5.10), (5.11) και (5.13) παίρνου-

με

$$\int_{-1}^1 x^n P_n(x) dx = \frac{1}{2^{n-1}} I_n = \frac{2^{n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

δηλαδή τη σχέση, πού θέλαμε νά αποδείξουμε.

Θεώρημα 7

“Αν $P_n(x)$ είναι ένα οποιοδήποτε πολυώνυμο του Legendre, θά ισχύει η σχέση

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Απόδειξη

Παίρνουμε τό πρώτο μέλος της ισότητας, πού θέλουμε νά αποδείξουμε, καί μέ βάση τά θεωρήματα 2 καί 1 γράφουμε τόν έναν παράγοντα σάν άθροισμα του μεγιστοβάθμιου όρου του καί ενός πολυωνύμου $Q_{n-2}(x)$ βαθμού $n-2$, όποτε εφαρμόζοντας τά θεωρήματα 6 καί 4 αντίστοιχα λαβαίνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \int_{-1}^1 \left[\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n + Q_{n-2}(x) \right] P_n(x) dx = \\ &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \int_{-1}^1 x^n P_n(x) dx + \int_{-1}^1 Q_{n-2}(x) P_n(x) dx = \\ &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \cdot \frac{2^{n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

Θεώρημα 8

Μεταξύ τριών διαδοχικών πολυωνύμων του Legendre ισχύει η αναδρομική σχέση

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \quad (*) \quad | n = 1, 2, 3, \dots$$

Απόδειξη

Γιά να αποδείξουμε την αναδρομική σχέση του θεωρήματος αρκεί να αποδείξουμε τη σχέση

$$xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x) \quad (5.14)$$

ή πράγμα που είναι ισοδύναμο αρκεί να εκφράσουμε τό πολυώνυμο του πρώτου μέλους της, $xP_n(x)$, σαν γραμμικό συνδυασμό των πολυωνύμων του Legendre, όποτε σαν αποτέλεσμα θά πρέπει να βρούμε τό δεύτερο μέλος της (5.14). Από τό θεμελιώδες θεώρημα της πρώτης παραγράφου 5.1., του παρόντος Κεφαλαίου, έχουμε άμέσως ότι τό πολυώνυμο $xP_n(x)$, που είναι βαθμού $n+1$, μπορεί να εκφραστεί μονοσήμαντα σαν ένας γραμμικός συνδυασμός των πολυωνύμων του Legendre $P_i(x)$ $| i = 0(1)n+1$. Έτσι θά έχουμε

$$xP_n(x) \equiv \sum_{i=0}^{n+1} c_i P_i(x), \quad (5.15)$$

όπου c_i $| i = 0(1)n+1$ προσδιοριστέοι συντελεστές. Για τόν προσδιορισμό των συντελεστών εργαζόμαστε καταρχήν ως έξης. Πολλαπλασιάζουμε τά μέλη της (5.15) επί τό πολυώνυμο του Legendre κατάλληλου βαθμού m , $P_m(x)$, καί ολοκληρώνουμε τίς δύο ισοδύναμες συναρτήσεις, που προκύπτουν, από -1 έως 1. Έτσι λαβαίνουμε

$$\int_{-1}^1 xP_m(x)P_n(x)dx = \int_{-1}^1 \left(\sum_{i=0}^{n+1} c_i P_i(x) \right) P_m(x)dx =$$

- ⊕ Η αναδρομική αυτή σχέση μάς υποδείχνει έναν εύκολο τρόπο σχηματισμού των πολυωνύμων του Legendre, από τά δύο πρώτα $P_0(x) = 1$ καί $P_1(x) = x$.

$$= \sum_{i=0}^{n+1} c_i \int_{-1}^1 P_i(x) P_m(x) dx = c_m \int_{-1}^1 P_m^2(x) dx, \quad (5.16)$$

όπου η τελευταία στη σειρά ισότητα προκύπτει με βάση το θεώρημα 5. Αν τώρα στο πρώτο μέλος των σχέσεων (5.16) θεωρήσουμε το πολυώνυμο $Q_{m+1}(x) \equiv xP_m(x)$, βαθμού $m+1$, τότε είναι φανερό, από το θεώρημα 4, πως αν ο βαθμός του πολυωνύμου αυτού είναι τέτοιος ώστε $m+1 < n$ ή $m < n-1$, το πρώτο μέλος θα είναι ίσο με μηδέν. Επειδή δέ για το τελευταίο μέλος των (5.16) έχουμε, από το προηγούμενο θεώρημα 7,

$$\int_{-1}^1 P_m^2(x) dx = \frac{2}{2m+1} \neq 0,$$

συμπεραίνουμε άμέσως ότι

$$c_m = 0 \quad | m = 0(1)n-2. \quad (5.17)$$

Για τον προσδιορισμό του συντελεστή c_{n-1} θεωρούμε την ισότητα των πρώτου και τελευταίου μελών των (5.16) για $m=n-1$.

Έχουμε έτσι ότι

$$\int_{-1}^1 xP_{n-1}(x)P_n(x) dx = c_{n-1} \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x) dx. \quad (5.18)$$

Είναι φανερό τώρα πως αν στο πρώτο μέλος της παραπάνω ισότητας θεωρήσουμε το πολυώνυμο $Q_n(x) \equiv xP_{n-1}(x)$, βαθμού n , αυτό θα έχει συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου, τον αντίστοιχο του πολυωνύμου $P_{n-1}(x)$, που είναι γνωστός από το θεώρημα 2. Συνεπώς αν γράψουμε το πολυώνυμο $Q_n(x)$ σαν άθροισμα του μεγιστοβάθμιου όρου του σύν ένα άλλο πολυώνυμο βαθμού $n-2$, έστω $Q_{n-2}(x)$, εφαρμόσουμε στο πρώτο μέλος της (5.18) τα θεωρήματα 6 και 4 και αντικαταστήσουμε το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους με βάση το θεώρημα 7 ή σχέση αυτή δίνει διαδοχικά

$$\int_{-1}^1 Q_n(x) P_n(x) dx = c_{n-1} \frac{2}{2n-1}$$

ή

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{(2n-2)!}{2^{n-1} [(n-1)!]^2} x^n + Q_{n-2}(x) \right] P_n(x) dx = c_{n-1} \frac{2}{2n-1}$$

ή

$$\frac{(2n-2)!}{2^{n-1} [(n-1)!]^2} \int_{-1}^1 x^n P_n(x) dx = c_{n-1} \frac{2}{2n-1},$$

πού τελικά δίνει

$$c_{n-1} = \frac{n}{2n+1}. \quad (5.19)$$

Η εύρεση του συντελεστή c_n προκύπτει άμέσως από την (5.15) ή οποία σάν συνέπεια των (5.17) γράφεται

$$x P_n(x) \equiv c_{n+1} P_{n+1}(x) + c_n P_n(x) + c_{n-1} P_{n-1}(x). \quad (5.20)$$

Όπως είναι γνωστό τό πολυώνυμο $P_n(x)$ έχει όρους μέ εκθέτες του x τούς αριθμούς $n(-2)n-2, \left[\frac{n}{2}\right]$. Συνεπώς τό πρώτο μέλος της (5.20) θά έχει όρους μέ εκθέτες μόνο τούς $n+1(-2)n-2, \left[\frac{n}{2}\right]+1$. Αυτό σημαίνει πώς δέν υπάρχει στό πρώτο μέλος όρος μέ εκθέτη του x τόν n . Είναι φανερό τώρα ότι τόσο από τή μορφή του $P_{n+1}(x)$, όσο καί από τό βαθμό του $P_{n-1}(x)$, ο μόνος όρος, πού θά περιέχει τόν x^n , είναι ο μεγιστοβάθμιος του $P_n(x)$ πολλαπλασιασμένος επί c_n . Έτσι θά ισχύει εξαιτίας της ταυ-τότητας (5.20)

$$0 = c_n \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

Από τή σχέση αυτή έχουμε

$$c_n = 0. \quad (5.21)$$

Τέλος η εύρεση του συντελεστή c_{n+1} βρίσκεται από την εξίσωση των συντελεστών των μεγιστοβάθμιων όρων των δύο μελών της ταυτότητας (5.20). Η αντίστοιχη σχέση είναι

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = c_{n+1} \cdot \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}[(n+1)!]^2}$$

που δίνει

$$c_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \quad (5.22)$$

Η αντικατάσταση των τιμών των τριών συντελεστών από τις (5.19), (5.21) και (5.22) στην (5.20) δίνει την (5.14) και επομένως αποδεικνύει το θεώρημα.

Θεώρημα 9

Εκτός από ένα σταθερό παράγοντα, το πολυώνυμο $P_{n+1}(x)$, του Legendre, είναι το μόνο πολυώνυμο βαθμού $n+1$, που είναι ορθογώνιο στο διάστημα $[-1, 1]$ προς όλα τα πολυώνυμα βαθμού $m \leq n$ (δηλαδή βαθμού μικροτέρου του).

Απόδειξη

Εστω $Q_{n+1}(x)$ πολυώνυμο βαθμού $n+1$, το οποίο, σύμφωνα με την υπόθεση του θεωρήματος, είναι ορθογώνιο στο διάστημα $[-1, 1]$ προς όλα τα πολυώνυμα βαθμού $m \leq n$. Εστω $R_m(x)$ ένα οποιοδήποτε πολυώνυμο βαθμού $m \leq n$. Θα ισχύει ότι

$$\int_{-1}^1 R_m(x) Q_{n+1}(x) dx = 0 \quad (5.23)$$

Εξάλλου από το θεμελιώδες θεώρημα της πρώτης παραγράφου του παρόντος Κεφαλαίου θα έχουμε ότι τα δύο πολυώνυμα $R_m(x)$ και $Q_{n+1}(x)$ μπορούν να εκφραστούν μονοσήμαντα, αντίστοιχα, σαν γραμμικοί συνδυασμοί των πολυωνύμων του Legendre. Εστω ότι

$$R_m(x) \equiv \sum_{i=0}^m c_i P_i(x) \quad \text{και} \quad Q_{n+1}(x) \equiv \sum_{i=0}^{n+1} d_i P_i(x) \quad (5.24)$$

είναι οι αντίστοιχες εκφράσεις με $c_m, d_{n+1} \neq 0$. Αν τώρα αντικαταστήσουμε τις εκφράσεις (5.24) στο πρώτο μέλος της (5.23), κάνουμε πράξεις, λαβαίνοντας βασικά υπόψη το θεώρημα 5 καθώς επίσης και το θεώρημα 7, παίρνουμε τελικά ότι

$$\sum_{i=0}^m \frac{2}{2i+1} c_i d_i = 0. \quad (5.25)$$

Αν τώρα σάν πολυώνυμο $R_m(x)$ πάρουμε το αντίστοιχο πολυώνυμο του Legendre βαθμού m , για κάθε $m=0(1)n$, ή πρώτη ταυτότητα από τις (5.24) θα γράφεται ως εξής

$$R_m(x) \equiv P_m(x) \quad | m=0(1)n,$$

πράγμα που σημαίνει, για τους αντίστοιχους συντελεστές, ότι

$$c_i = 0 \quad | i=0(1)m-1 \quad \text{και} \quad c_m = 1 \quad | m=0(1)n.$$

Οι παραπάνω σχέσεις δίνουν για την (5.25)

$$\frac{2}{2m+1} \cdot d_m = 0 \quad | m=0(1)n,$$

από τις οποίες παίρνουμε ότι

$$d_m = 0 \quad | m=0(1)n.$$

Ο μηδενισμός, έτσι, όλων των συντελεστών του αναπτύγματος $Q_{n+1}(x)$, εκτός από αυτόν του μεγιστοβάθμιου πολυωνύμου του Legendre, μετασχηματίζει την αντίστοιχη ταυτότητα από τις (5.24) στην παρακάτω

$$Q_{n+1}(x) \equiv d_{n+1} P_{n+1}(x),$$

ή οποία αποδείχνει τον ισχυρισμό του θεωρήματος.

Θεώρημα 10

Οι ρίζες ενός πολυωνύμου του Legendre $P_n(x)$, βαθμού $n \geq 1$, είναι πραγματικές, διακεκλιμένες και ανήκουν στο διάστημα $(-1, 1)$.

Απόδειξη

Τό Θεώρημα 3 για $m=0$ δίνει

$$\int_{-1}^1 P_n(x) dx = 0 \quad |n \geq 1. \quad (5.26)$$

Η παραπάνω σχέση, (5.26), δείχνει ότι η συνεχής συνάρτηση (πολυώνυμο όχι μηδενικό) $P_n(x)$ θα αλλάξει σημείο στο διάστημα $(-1, 1)$ τουλάχιστον μία φορά. Αυτό δέ γιατί, αν δεν άλλαζε, θα ήταν μόνιμα μη αρνητική (ή μη θετική) στο αντίστοιχο κλειστό διάστημα $[-1, 1]$, όποτε σύμφωνα με τα γνωστά από την Ανάλυση, το ολοκλήρωμα στη σχέση (5.26) θα ήταν ένας θετικός (ή ένας αρνητικός) αριθμός και όχι μηδέν. Η αλλαγή όμως του σημείου της συναρτήσεως $P_n(x)$ στο διάστημα $(-1, 1)$ τουλάχιστον μία φορά σημαίνει αντίστοιχη ύπαρξη ριζών περιττών πολλαπλοτήτων στο ίδιο διάστημα. Έστω, λοιπόν, ότι $x_i \quad |i=1(1)m$ είναι όλες οι διάφορες μεταξύ τους ρίζες του πολυωνύμου $P_n(x)$, που ανήκουν στο διάστημα $(-1, 1)$ και είναι αντίστοιχων περιττών πολλαπλοτήτων $2\ell_i+1 \quad |i=1(1)m$ με $\ell_i \quad |i=1(1)m$ μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς και $\sum_{i=1}^m (2\ell_i+1) \leq n$. Χρησιμοποιώντας τις ρίζες $x_i \quad |i=1(1)m$, το $P_n(x)$ μπορεί να γραφτεί σαν

$$P_n(x) \equiv (x-x_1)^{2\ell_1+1} \cdot (x-x_2)^{2\ell_2+1} \dots (x-x_m)^{2\ell_m+1} \cdot R(x), \quad (5.27)$$

όπου $R(x)$ πολυώνυμο βαθμού $n - \sum_{i=1}^m (2\ell_i+1)$, που δεν έχει ρίζες περιττής πολλαπλότητας στο διάστημα $(-1, 1)$ (ούτε ακόμη άρτιας πολλαπλότητας ίδιες με τις $x_i \quad |i=1(1)m$ και συνεπώς

δέν αλλάζει σημείο στο διάστημα αυτό. Σχηματίζουμε τώρα το γινόμενο $Q_m(x)P_n(x)$, όπου $Q_m(x)$ το παρακάτω πολυώνυμο

$$\text{βαθμού } m \leq \sum_{i=1}^m (2\ell_i + 1) \leq n$$

$$Q_m(x) \equiv (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m). \quad (5.28)$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις εκφράσεις (5.27) και (5.28) στο γινόμενο, που σχηματίσαμε, βρίσκουμε ότι

$$Q_m(x)P_n(x) \equiv (x-x_1)^{2\ell_1+2}(x-x_2)^{2\ell_2+2}\dots(x-x_m)^{2\ell_m+2}R(x). \quad (5.29)$$

Είναι φανερό καταρχήν ότι $m \leq n$ και ακόμη ότι το γινόμενο (5.29) δέν αλλάζει σημείο στο διάστημα $(-1,1)$. Συνέπεια του τελευταίου είναι ότι το ολοκλήρωμα του γινομένου $Q_m(x)P_n(x)$ στο διάστημα $[-1,1]$ θά είναι ένας θετικός (ή ένας αρνητικός) αριθμός. Όπωςδήποτε λοιπόν θά έχουμε

$$\int_{-1}^1 Q_m(x)P_n(x)dx \neq 0. \quad (5.30)$$

Αν τώρα $m < n$, τότε το ολοκλήρωμα στην παραπάνω σχέση (5.30) σύμφωνα με το θεώρημα 4 θά έπρεπε νά ήταν ίσο με μηδέν.

Επειδή όμως αυτό είναι διάφορο από το μηδέν το μόνο, που απομένει είναι νά έχουμε $m=n$. Αφού δέ n είναι σέ πλήθος όλες οι ρίζες του πολωνύμου $P_n(x)$ έχουμε σάν συμπέρασμα τόν ισχυρισμό του θεωρήματος ότι οι n ρίζες του $P_n(x)$ είναι πραγματικές, διακεκριμένες και ανήκουν στο διάστημα $(-1,1)$.

5.3 Πολυώνυμα του Chebyshev

Τά πολυώνυμα του Chebyshev, που αποτελούν ένα βασικό σύνολο πολωνύμων, που έξυπηρετεῖ συγκεκριμένους σκοπούς, μπορούν νά όριστοῦν με διάφορους ισοδύναμους τρόπους. Ο

απλούστερος είναι ίσως αυτός, που δίνουμε άμέσως παρακάτω

$$T_n(x) \equiv \cos(n \arccos x) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.31)$$

για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω όρισμό και αναπτύσσοντας την έκφραση $\cos(n \arccos x)$ σαν συνάρτηση μόνο του $\cos(\arccos x) = x$, που όπως είναι γνωστό από την Τριγωνομετρία είναι πάντοτε δυνατό, είναι εύκολο να βρούμε τά, πρώτα τουλάχιστον στη σειρά, πολυώνυμα του Chebyshev. Αύτά είναι τά ακόλουθα

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \quad \text{κλπ.}$$

Από τον όρισμό (5.31) των πολυωνύμων του Chebyshev είναι δυνατό να αποδείξουμε ένα πλήθος βασικών ιδιοτήτων για αυτά, που αποτελούν θεωρήματα. Τά θεωρήματα, που θα αποδείξουμε είναι, λίγο-πολύ, αντίστοιχα των θεωρημάτων που αναφέρονται στα πολυώνυμα του Legendre. Η σειρά με την οποία θα τά δώσουμε θα είναι ίσως διαφορετική κι αυτό γιατί έτσι θα διευκολύνουμε και θα απλουστέψουμε τις αποδείξεις στη συγκεκριμένη περίπτωση των πολυωνύμων του Chebyshev.

Θεώρημα 1

Μεταξύ τριών διαδοχικών πολυωνύμων του Chebyshev ισχύει η αναδρομική σχέση

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \quad \textcircled{*} \quad | n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.32)$$

Απόδειξη

Γιά την απόδειξη της σχέσης (5.32) ξεκινάμε από τη στοιχειώδη τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},$$

την οποία εφαρμόζουμε με βάση τον όρισμό (5.31) στους δύο άκραίους όρους της σχέσης, που θέλουμε να αποδείξουμε. Με απλούς μετασχηματισμούς παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= \cos[(n+1)\arccos x] + \cos[(n-1)\arccos x] = \\ &= 2 \cos \frac{(n+1)\arccos x + (n-1)\arccos x}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)\arccos x - (n-1)\arccos x}{2} = \\ &= 2 \cos(n \arccos x) \cdot \cos(\arccos x) = 2 T_n(x) \cdot x. \end{aligned}$$

Η ισότητα των δύο άκραιων μελών των παραπάνω διαδοχικών σχέσεων μας δίνει άμέσως τη σχέση (5.32).

Θεώρημα 2

Τά πολυώνυμα του Chebyshev περιέχουν είτε μόνο άρτιες δυνάμεις του x εφόσον είναι άρτιου βαθμού είτε μόνο περιττές δυνάμεις του x εφόσον είναι, αντίστοιχα, περιττού βαθμού.

Απόδειξη

Γιά να αποδείξουμε τό παρόν θεώρημα αρκεί να αποδεί-

$\textcircled{*}$ Όπως στά πολυώνυμα του Legendre, έτσι καί τώρα, ή αναδρομική αυτή σχέση μάς δίνει έναν εύκολο τρόπο σχηματισμού των πολυωνύμων του Chebyshev, από τά δύο πρώτα $T_0(x) = 1$ καί $T_1(x) = x$.

ξουμε, όπως και στην περίπτωση των πολυωνύμων του Legendre, ότι το οποιοδήποτε πολυώνυμο του Chebyshev $T_n(x)$, βαθμού n , περιέχει δυνάμεις του x , των οποίων αντίστοιχοι εκθέτες, είναι οι αριθμοί $i = n(-2)^{n-2} \left[\frac{n-1}{2} \right]$. Η απόδειξη αυτή θα γίνει επαγωγικά. Πραγματικά για τις πρώτες τουλάχιστον τιμές του $n=0,1,2,\dots$, από την παράθεση των πρώτων στη σειρά πολυωνύμων του Chebyshev, που δώσαμε στην αρχή της παρούσας παραγράφου, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η πρόταση ισχύει. Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για δύο διαδοχικές τιμές του n έστω $n=k-1$ και $n=k$ θα αποδείξουμε ότι αυτή ισχύει και για $n=k+1$ με $k \geq 1$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο $T_{k-1}(x)$ έχει όρους με εκθέτες του x τους αριθμούς $k-1(-2)^{k-1-2} \left[\frac{k-1}{2} \right]$, το πολυώνυμο $T_k(x)$ έχει όρους με αντίστοιχους εκθέτες τους $k(-2)^{k-2} \left[\frac{k}{2} \right]$ και θα αποδείξουμε ότι το πολυώνυμο $T_{k+1}(x)$ έχει όρους με εκθέτες $k+1(-2)^{k+1-2} \left[\frac{k+1}{2} \right]$. Πραγματικά από τη σχέση (5.32) έχουμε για $n=k$

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x). \quad (5.33)$$

Από την παραπάνω σχέση και σύμφωνα με την υπόθεση της τέλει επαγωγής παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος της διαφοράς θα έχει όρους με εκθέτες του x τους αριθμούς $k+1(-2)^{k+1-2} \left[\frac{k}{2} \right]$. Επομένως η διαφορά θα δώσει, όπως είναι φανερό, ένα πολυώνυμο, το $T_{k+1}(x)$, με εκθέτες του x στους όρους του, τους αριθμούς $k+1(-2)^{k+1-2} \left[\frac{k+1}{2} \right]$ ή, πράγμα που είναι το ίδιο, τους $k+1(-2)^{k+1-2} \left[\frac{k+1}{2} \right]$. Το τελευταίο ισχύει γιατί είναι εύκολο να επαληθεύσουμε την ισότητα $k-1-2 \left[\frac{k-1}{2} \right] = k+1-2 \left[\frac{k+1}{2} \right]$ διακρίνοντας τις δύο περιπτώσεις: 1) k άρτιος και 11) k περιττός.

Θεώρημα 3

Ο συντελεστής a_n του μεγιστοβάθμιου όρου ενός πολυωνύμου $T_n(x)$ του Chebyshev, για $n \geq 1$, ισοϋται με 2^{n-1} .

Απόδειξη

Ἡ πρόταση εἶναι φανερή, τουλάχιστον γιὰ τίς πρῶτες στή σειρά τιμές τοῦ $n=1,2,3,\dots$, ἀπό τίς ἀναλυτικές ἐκφράσεις τῶν πρῶτων στή σειρά πολυωνύμων τοῦ Chebyshev, πού δώσαμε. Ὑποθέτουμε τήν πρόταση ἀληθὴ γιὰ $n=k \geq 1$ καί θά ἀποδείξουμε τήν ἀλήθεια τῆς γιὰ $n=k+1$. Πραγματικά, ἀπὸ τήν (5.32), γιὰ $n=k$, παίρνουμε τήν (5.33). Ἀπὸ τήν τελευταία εἶναι φανερό ὅτι, ὁ μεγιστοβάθμιος ὅρος τοῦ πολυωνύμου $T_{k+1}(x)$ θά προκύπτει ἀπὸ τὸ γινόμενο τοῦ παράγοντα $2x$ ἐπὶ τὸ μεγιστοβάθμιο ὅρο τοῦ $T_k(x)$. Λαβαίνοντας ὑπόψη καί τήν ὑπόθεση τῆς τέλει ἐπαγωγῆς ἔχουμε ἀμέσως ὅτι ὁ συντελεστὴς τοῦ μεγιστοβάθμιου ὅρου a_{k+1} τοῦ $T_{k+1}(x)$ θά ἰσοῦται μέ $2a_k = 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$, πράγμα, πού ἀποδείχνει τὸ ζητούμενο.

Θεώρημα 4

Δύο διαφορετικὰ πολυώνυμα τοῦ Chebyshev εἶναι ὀρθογώνια μεταξὺ τους στὸ διαστήμα $[-1,1]$ σὲ σχέση μέ τὴ συνάρτηση βάρους $(1-x^2)^{-1/2}$. Ἰσχύει δηλαδὴ ἡ σχέση

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} T_m(x) T_n(x) dx = 0 \quad |m \neq n|. \quad (5.34)$$

Απόδειξη

Θέτοντας

$$\arccos x = y \quad \text{ἢ} \quad x = \cos y \quad \text{μέ} \quad 0 \leq y \leq \pi$$

ἔχουμε

$$(1-x^2)^{-1/2} = \frac{1}{\sin y}, \quad T_m(x) = \cos my, \quad T_n(x) = \cos ny \quad \text{καί} \quad dx = -\sin y dy.$$

Καλώντας μέ I τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς σχέσης, πού θέλουμε νά ἀποδείξουμε, καί ἀντικαθιστώντας σ'αὐτὴ, παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
 I &= - \int_{\pi}^0 \cos my \cos ny \, dy = \int_0^{\pi} \cos my \cos ny \, dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(m+n)y + \cos(m-n)y] \, dy .
 \end{aligned}
 \tag{5.35'}$$

Από την υπόθεση $m \neq n$ μπορούμε εύκολα να βρούμε το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους των σχέσεων (5.35) και να λάβουμε έτσι ότι

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m+n} \sin(m+n)y + \frac{1}{m-n} \sin(m-n)y \right] \Big|_0^{\pi} = 0$$

δηλαδή αυτό, που θέλαμε να αποδείξουμε.

Θεώρημα 5

Ένα πολυώνυμο $Q_m(x)$ βαθμού $m < n$ είναι όρθογώνιο προς το πολυώνυμο $T_n(x)$ του Chebyshev στο διάστημα $[-1, 1]$ σε σχέση με την συνάρτηση βάρους $(1-x^2)^{-1/2}$. Ισχύει δηλαδή η σχέση

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} Q_m(x) T_n(x) \, dx = 0 \quad |m < n.$$

Απόδειξη

Με βάση το θεμελιώδες θεώρημα της πρώτης παραγράφου του παρόντος Κεφαλαίου έχουμε ότι το πολυώνυμο $Q_m(x)$ μπορεί να γραφτεί κατά ένα και μόνο τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός πολυωνύμων του Chebyshev. Έστω

$$Q_m(x) \equiv \sum_{i=0}^m c_i T_i(x)$$

ή αντίστοιχη μονοσήμαντη έκφραση του υπόψη πολυωνύμου. Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στο ολοκλήρωμα της σχέσης, που θέλουμε να αποδείξουμε με απλούς μετασχηματισμούς και εφαρμόζοντας ενδιάμεσα το θεώρημα 4 λαβαίνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} Q_m(x) T_n(x) dx &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} \left(\sum_{i=0}^m c_i T_i(x) \right) T_n(x) dx = \\ &= \sum_{i=0}^m c_i \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} T_i(x) T_n(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Θεώρημα 6

“Αν $T_n(x)$ είναι ένα οποιοδήποτε πολυώνυμο του Chebyshev θα έχουμε

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} T_n^2(x) dx = \begin{cases} = \pi, & \text{αν } n=0 \\ = \frac{\pi}{2}, & \text{αν } n \neq 0 \end{cases}$$

Απόδειξη

“Αν καλέσουμε με I το ολοκλήρωμα των σχέσεων, πού θέλουμε νά αποδείξουμε, τότε παρατηρούμε άμέσως πώς αυτό δεν είναι παρά το ολοκλήρωμα της σχέσης (5.34) με την προϋπόθεση φυσικά ότι $m=n$. Έτσι αν κάνουμε ακριβώς τις ίδιες αντικαταστάσεις, όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 4, και έκτελέσουμε τους ίδιους μετασχηματισμούς θα καταλήξουμε σέ μία σχέση αντίστοιχη της (5.35), ή οποία στην προκείμενη περίπτωση (έπειδή $m=n$) θα είναι η παρακάτω

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos 2ny + 1) dy.$$

Τώρα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

“Αν $n=0$ τότε

$$I = \int_0^\pi dy = y \Big|_0^\pi = \pi,$$

ένω αν $n \neq 0$ τότε

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2n} \sin 2ny + y \right] \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Θεώρημα 7

Έκτός από ένα σταθερό παράγοντα, το πολυώνυμο $T_{n+1}(x)$, του Chebyshev, είναι το μόνο πολυώνυμο βαθμού $n+1$, που είναι ορθογώνιο στο διάστημα $[-1,1]$, σε σχέση με τη συνάρτηση βάρους $(1-x^2)^{-1/2}$, προς όλα τα πολυώνυμα βαθμού $m \leq n$ (δηλαδή βαθμού μικρότερου του).

Απόδειξη

Η απόδειξη ακολουθεί ακριβώς τα ίδια βήματα εκείνης του θεωρήματος 9, που αναφέρεται στα πολυώνυμα του Legendre. Οι μόνες, προφανείς, διασφορές είναι ότι, όπου είχαμε τότε πολυώνυμα του Legendre τώρα έχουμε τα αντίστοιχα πολυώνυμα του Chebyshev και όπου τότε παρουσιαζόταν κάποιο ολοκλήρωμα, τώρα θα υπάρχει το αντίστοιχο ολοκλήρωμα με επί πλέον τη συνάρτηση βάρους $(1-x^2)^{-1/2}$ σ' αυτό. Έτσι μιά και η απόδειξη παραμένει ή ίδια παραλείπεται.

Θεώρημα 8

Οι ρίζες ενός πολυωνύμου του Chebyshev $T_n(x)$, βαθμού $n \geq 1$, είναι πραγματικές, διακεκριμένες και ανήκουν στο διάστημα $(-1,1)$. Συγκεκριμένα δέ δίνονται από τις εκφράσεις

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad |k=0(1)n-1. \quad (5.36)$$

Απόδειξη

Είναι φανερό, πώς αν απόδείξουμε ότι, οι n ρίζες του πολυωνύμου $T_n(x)$ ($n \geq 1$) του Chebyshev δίνονται από τις εκφράσεις (5.36), τότε αυτές θα είναι πραγματικές, διακεκριμένες και θα ανήκουν στο διάστημα $(-1,1)$. Για την εύρεση των ριζών του $T_n(x)$ θέτουμε

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 0.$$

Από την παραπάνω τριγωνομετρική εξίσωση λαβαίνουμε τις λύσεις

$$\arccos x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad | k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ή

$$x = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad | k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Για τις άπειρες τιμές του k οι παραπάνω εκφράσεις για τις λύσεις x , είναι εύκολο να διαπιστώσουμε, δίνουν n διαφορετικές μεταξύ τους τιμές. Α αυτές μπορούμε να τις πάρουμε άμέσως δίνοντας n οποιοσδήποτε διαδοχικές τιμές στον άκε-
ραίο k π.χ. $k = 0(1)n-1$. Έτσι βρίσκουμε τις εκφράσεις (5.35). Για κάθε άλλη τιμή του k διαφορετική από τις παρα-
πάνω, θα έχουμε αν διαιρέσουμε τον k με τον n και καλέσου-
με με ℓ το πηλίκο και με m το υπόλοιπο ($0 \leq m \leq n-1$) της αν-
τίστοιχης διαιρέσεως

$$x = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} = \cos \left(\ell\pi + \frac{(2m+1)\pi}{2n} \right) = (-1)^\ell \cos \frac{(2m+1)\pi}{2n}.$$

Έτσι, αν ℓ είναι άρτιος τότε

$$x = \cos \frac{(2m+1)\pi}{2n}$$

με $0 \leq m \leq n-1$ και συνεπώς η τιμή αυτή θα συμπεριλαμβάνεται στις (5.36). Αν ℓ είναι περιττός τότε

$$x = -\cos \frac{(2m+1)\pi}{2n} = \cos \frac{[2(n-1-m)+1]\pi}{2n},$$

όπου πάλι $0 \leq n-1-m \leq n-1$ και επομένως και η τιμή αυτή συμπε-
ριλαμβάνεται στις εκφράσεις (5.36).

Θεώρημα 9

Από όλα τα πολυώνυμα $Q_m(x)$ βαθμού πρώτου μέχρι και n ,
με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα, το πολυώνυμο

$T_n(x)$ του Chebyshev επί τόν παράγοντα $\frac{1}{2^{n-1}}$ έχει τή μικρότερη μέγιστη απόλυτη τιμή στο διάστημα $[-1,1]$. Έτσι νοποιεῖ δηλαδή τή σχέση

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \right| \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |Q_m(x)| \quad |1 \leq m \leq n \quad (5.37)$$

Απόδειξη

Καταρχήν βρίσκουμε τά σημεία x του διαστήματος $[-1,1]$ στά όποῖα τό πολυώνυμο $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$, ἡ πράγμα πού εἶναι ἰσοδύναμο, τό πολυώνυμο $T_n(x)$ παίρνει ἀπολύτως τή μέγιστη δυνατή τιμή. Ἀπό τόν ὁρισμό (5.31) τῶν πολυωνύμων τοῦ Chebyshev μπορούμε ἀμέσως νά διαπιστώσουμε ὅτι ἡ ἀπολύτως μέγιστη δυνατή τιμή εἶναι ἴση μέ 1. Γιά τήν εὑρεση λοιπόν, τῶν σημείων x ἀρκεῖ νά λύσουμε τήν τριγωνομετρική ἐξίσωση

$$|T_n(x)| = |\cos(n \arccos x)| = 1 \quad |n \geq 1$$

ἡ τίς ἐξισώσεις

$$\cos(n \arccos x) = \begin{cases} = 1 \\ = -1 \end{cases} \quad |n \geq 1.$$

Οἱ λύσεις τῶν παραπάνω ἐξισώσεων δίνονται ἀπό τίς ἐκφράσεις

$$n \arccos x = \begin{cases} = 2k\pi \\ = (2k+1)\pi \end{cases} \quad |k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, n \geq 1,$$

πού μπορούν νά συμπυχθοῦν στίς ἀκόλουθες

$$n \arccos x = k\pi \quad |k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n \geq 1.$$

⊛ Ἡ ιδιότητα αὐτή τῶν πολυωνύμων τοῦ Chebyshev εἶναι γνωστή σάν minimax ἢ min-max ιδιότητα.

Από αυτές βρίσκουμε άμέσως ότι

$$x = \cos \frac{k\pi}{n} \quad | \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n \geq 1.$$

Οι παραπάνω άπειρες, φαινομενικά, τιμές του $x \in [-1, 1]$ είναι στην πραγματικότητα, όπως είναι εύκολο να διαπιστώσουμε, πλήθους $n+1$ που μπορούν να βρεθούν για $n+1$ διαδοχικές τιμές του k π.χ. για $k=0(1)n$. Έτσι οι τιμές του $x=x_k | k=0(1)n$ του διαστήματος $[-1, 1]$, όπου το πολυώνυμο $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ παίρνει την απόλυτως μέγιστη τιμή, δίνονται από τις εκφράσεις

$$x = x_k = \cos \frac{k\pi}{n} \quad | \quad k=0(1)n, \quad n \geq 1. \quad (5.38)$$

Στά παραπάνω σημεία $x_k | k=0(1)n$ το πολυώνυμο $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ λαμβάνει τις τιμές

$$\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x_k) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos k\pi = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} \quad | \quad k=0(1)n \geq 1, \quad (5.39)$$

ένω όπως τονίστηκε και στην αρχή θα ισχύει η σχέση

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \right| = \frac{1}{2^{n-1}} \quad | \quad n \geq 1. \quad (5.40)$$

Για την απόδειξη της (5.37) διακρίνουμε τις δύο περιπτώσεις $m=n$ και $m < n$. Στην πρώτη περίπτωση, του $m=n$, υποθέτουμε ότι δεν ισχύει η σχέση (5.37), που θέλουμε να αποδείξουμε. Δεχόμαστε δηλαδή ότι

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |Q_n(x)| < \max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \right|. \quad (5.41)$$

Είναι φανερό, πως για το οποιοδήποτε σημείο $x_k | k=0(1)n$, που δίνεται από τις (5.38) και έξαιτίας των (5.39), (5.40) και (5.41) θα ισχύουν οι σχέσεις

$$Q_n(x_k) \leq |Q_n(x_k)| \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |Q_n(x)| < \max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \right| = \frac{1}{2^{n-1}} \quad (5.42)$$

καθώς επίσης και οι σχέσεις

$$\begin{aligned} Q_n(x_k) &\geq -|Q_n(x_k)| \geq -\max_{-1 \leq x \leq 1} |Q_n(x)| > -\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \right| = \\ &= -\frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Από τις (5.42) και (5.43) μπορούμε να πάρουμε αντίστοιχα τις σχέσεις

$$\frac{1}{2^{n-1}} - Q_n(x_k) > 0 \quad |k = 0(1)n \quad (5.44)$$

και

$$-\frac{1}{2^{n-1}} - Q_n(x_k) < 0 \quad |k = 0(1)n. \quad (5.45)$$

Τώρα σχηματίζουμε τό πολυώνυμο

$$P_{n-1}(x) \equiv \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) - Q_n(x), \quad (5.46)$$

πού θα είναι βαθμού τό πολύ $n-1$, αφού οί μεγιστοβάθμιοι όροι τών δύο πολυωνύμων τής διαφορᾶς εἶναι ἴσοι, μιά καί οί δύο ἔχουν συντελεστή τή μονάδα. Ἀκόμη μπορούμε νά ποῦμε γιά τό πολυώνυμο $P_{n-1}(x)$ ὅτι ἀποκλείεται νά εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο, γιατί τότε ἡ σχέση (5.41) θά ἦταν ἀτοπή. Σάν συνέπεια τών σχέσεων (5.39), (5.44) καί (5.45) μπορούμε νά βροῦμε γιά τίς τιμές τοῦ πολυωνύμου $P_{n-1}(x)$, πού ὁρίστηκε ἀπό τήν έκφραση (5.46), στά σημεία $x_k \quad |k = 0(1)n$, ὅτι

$$P_{n-1}(x_0) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x_0) - Q_n(x_0) = \frac{1}{2^{n-1}} - Q_n(x_0) > 0$$

$$P_{n-1}(x_1) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x_1) - Q_n(x_1) = -\frac{1}{2^{n-1}} - Q_n(x_1) < 0$$

$$P_{n-1}(x_2) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x_2) - Q_n(x_2) = \frac{1}{2^{n-1}} - Q_n(x_2) > 0$$

κ.ο.κ. Από τις σχέσεις της προηγούμενης σελίδας συμπε-
ραίνουμε, πώς το πολυώνυμο $P_{n-1}(x)$ έχει ένα περιττό ά-
ριθμό ριζών (τουλάχιστον μία) σε κάθε ένα από τα διαστή-
ματα (x_{k+1}, x_k) $|k=0(1)n-1$. Έτσι το πολυώνυμο $P_{n-1}(x)$,
πού δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο και είναι βαθμού το
πολύ $n-1$, θα έχει n ρίζες τουλάχιστον. Αυτό είναι άτοπο.
Άρα αποκλείεται να ισχύει η σχέση (5.41) και συνεπώς για
 $m=n$ θα ικανοποιείται η σχέση (5.37) του θεωρήματος. Στην
περίπτωση τώρα πού είναι $m < n$, και με βάση την ισχύ της
(5.37) για $m=n$, παίρνουμε άμέσως ότι

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \right| < \max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{2^{m-1}} T_m(x) \right| \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |Q_m(x)|,$$

$$\text{άφοϋ } \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{m-1}} \quad \text{και} \quad \max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |T_m(x)| = 1.$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Αφοϋ έκφραστεϊ το πολυώνυμο $q(x) \equiv 3x^2 - 2x + 1$ σάν γραμ-
μικός συνδυασμός πολυωνύμων $P_n(x)$ του Legendre, νά υπο-
λογιστεϊ στή συνέχεια ή τιμή τοϋ ολοκληρώματος

$$\int_{-1}^1 q^2(x) dx$$

χρησιμοποιώντας τις παρακάτω ιδιότητες τών πολυωνύμων
τοϋ Legendre

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

και μόνο. (Απ. $2P_0(x) - 2P_1(x) + 2P_2(x), \frac{184}{15}$).

2. Νά βρεθεῖ ἡ τιμὴ τοῦ ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 P_n'(x) P_{n-1}(x) dx$,
ὅπου $P_k(x)$ παριστάνει τὸ πολυώνυμο τοῦ Legendre βαθμοῦ k
καὶ $P_k'(x)$ τὴν παράγωγο τοῦ ἑαυτοῦ πολυωνύμου. ('Απ. 2).
3. Γιὰ τὰ πολυώνυμα τοῦ Legendre $P_n(x)$, βαθμοῦ n , νά
δειχτοῦν οἱ σχέσεις $P_n(1) = 1$ καὶ $P_n(-1) = (-1)^n$ $| n = 0, 1, 2, \dots$
4. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι τὰ πολυώνυμα $P_n(x) | n = 0, 1, 2, \dots$ ποῦ
ορίζονται ἀπὸ τὶς παρακάτω σχέσεις

$$P_0(x) = 1 \quad \text{καὶ}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{[n/2]} (-1)^i \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-2i-1)}{2^i i! (n-2i)!} x^{n-2i} \quad | n = 1, 2, 3, \dots,$$
γιαὶ κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$, δέν εἶναι παρὰ τὰ πολυώνυμα τοῦ Le-
gendre.
5. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα τὴν ταυτότητα τοῦ De Moire

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta),$$
καθὼς ἐπίσης καὶ τὸ ἀντίστοιχο ἀνάπτυγμα τοῦ διωνύμου τοῦ
Newton, γιὰ $n=4$, νά βρεθεῖ τὸ πολυώνυμο τοῦ Chebyshev
 $T_4(x)$ τέταρτου βαθμοῦ.
6. Νά ἐκφραστεῖ τὸ πολυώνυμο τοῦ Chebyshev τρίτου βαθ-
μοῦ $T_3(x)$ σάν ἕνα γραμμικὸς συνδυασμὸς πολυωνύμων τοῦ Le-
gendre $P_n(x)$ καὶ μόνο. ('Απ. $-\frac{3}{5} P_1(x) + \frac{8}{5} P_3(x)$).
7. Νά ἐκφραστεῖ ἡ παράγωγος τοῦ πολυωνύμου τοῦ Legen-
dre βαθμοῦ πέντε σάν γραμμικὸς συνδυασμὸς πολυωνύμων τοῦ
Chebyshev καὶ μόνο. ('Απ. $\frac{1}{64} [315T_4(x) + 420T_2(x) + 225T_0(x)]$).
8. Ἀφοῦ ἐκφραστεῖ τὸ πολυώνυμο $q(x) \equiv -x+1$ σάν γραμμι-
κὸς συνδυασμὸς τῶν πολυωνύμων $T_n(x)$ τοῦ Chebyshev, νά ὑ-

πολογιστεί η τιμή του ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} q^2(x) dx$ χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πολυωνύμων του Chebyshev

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} T_m(x) T_n(x) dx = \begin{cases} = 0 & \text{αν } m \neq n \\ = \pi & \text{αν } m=n=0 \\ = \frac{\pi}{2} & \text{αν } m=n>0 \end{cases}$$

καί μόνο. ('Απ. $-T_1(x) + T_0(x)$, $\frac{3\pi}{2}$).

9. Νά δειχτεί ότι

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} x^n T_n(x) dx = \pi/2^n \quad |n=0,1,2,\dots,$$

όπου $T_n(x)$ τό πολυώνυμο του Chebyshev βαθμού n .

10. 'Αν $T_n(x)$ είναι τό πολυώνυμο του Chebyshev βαθμού n νά βρεθεί η τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} T_n(x) dx$$

έφαρμόζοντας ιδιότητες των πολυωνύμων του Chebyshev καί μόνο. ('Απ. π για $n=0$, 0 για $n>0$).

11. Νά βρεθεί η τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} x^4 T_2(x) dx,$$

όπου $T_2(x)$ είναι τό πολυώνυμο του Chebyshev βαθμού δύο. ('Απ. $\pi/4$).

12. Νά βρεθούν οι τιμές των ολοκληρωμάτων

$$\int_{-1}^1 P_n(x) T_n(x) dx \quad \text{καί} \quad \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} P_n(x) T_n(x) dx,$$

όπου $P_n(x)$ καί $T_n(x)$ τά πολυώνυμα του Legendre καί Chebyshev αντίστοιχα βαθμού $n \geq 1$.

$$(\text{'Απ. } \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}, \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \pi).$$

13. Μέ βάση τή θεωρία τών πολυωνύμων τοῦ Chebyshev καί μόνο νά βρεθεῖ, ἄν ὑπάρχει, πολυώνυμο τῆς μορφῆς $ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta$, μέ $|b| + |\delta| > 0$, πού νά εἶναι ὀρθογώνιο πρὸς ὅλα τὰ πολυώνυμα μέχρι δευτέρου βαθμοῦ στό διάστημα $[-1, 1]$ σέ σχέση μέ τή συνάρτηση βάρους $(1-x^2)^{-1/2}$. ('Απ. Δέν ὑπάρχει).

14. Μέ τή χρησιμοποίηση τῆς minimax ιδιότητας τών πολυωνύμων τοῦ Chebyshev νά βρεθοῦν τὰ σημεῖα x_i $|i=0(1)n$ ($n \geq 1$) τέτοια ὥστε ἡ ἔκφραση

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| \prod_{i=0}^n (x-x_i) \right|$$

νά ἐλαχιστοποιεῖται. Ποιά εἶναι τότε ἡ ἐλάχιστη τιμή τῆς ἐκφράσεως; ('Απ. $x_i = \frac{1}{2} \left[b+a-(b-a)\cos \left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)} \right) \right] |i=0(1)n$, $2 \left(\frac{b-a}{4} \right)^{n+1}$).

15. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι τὰ πολυώνυμα $T_n(x)$ $|n=0,1,2,\dots$, πού ὀρίζονται ἀπό τίς παρακάτω σχέσεις

$$T_0(x) = 1 \quad \text{καί}$$

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{[n/2]} (-1)^i \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i} 2^{n-2i-1} x^{n-2i} \quad |n=1,2,3,\dots,$$

γιά κάθε $x \in [-1, 1]$, δέν εἶναι παρὰ τὰ πολυώνυμα τοῦ Chebyshev.

— / —

6. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

6.1. Γενικά

Η βασική ιδέα για την αριθμητική ολοκλήρωση, δηλαδή για την εύρεση ενός ορισμένου ολοκληρώματος με μεθόδους της Α.Α., είναι ακριβώς η ίδια με εκείνη της αριθμητικής παραγωγίσεως. Αντί δηλαδή να βρίσκουμε τό ορισμένο ολοκλήρωμα μιās συναρτήσεως, πού δίνεται είτε με τίς τιμές της σέ ένα σύνολο σημείων είτε με την αναλυτική έκφρασή της, βρίσκουμε τό αντίστοιχο ολοκλήρωμα ενός πολυωνύμου παρεμβολής της. Έτσι προκύπτουν τύποι άπλοι, πού χρησιμοποιούνται πάρα πολύ στην πράξη. Οι απλούστεροι τύποι αριθμητικής ολοκληρώσεως προκύπτουν, φυσικά, όταν τά σημεία παρεμβολής, από τά όποια κατασκευάζεται τό αντίστοιχο πολυώνυμο, ισαπέχουν. Καταρχήν θά ασχοληθοῦμε με την εύρεση τέτοιων τύπων.

6.2. Τύποι αριθμητικής ολοκληρώσεως των Newton-Cotes

6.2.1. Γενικά

Στήν περίπτωση της αριθμητικής ολοκληρώσεως των Newton-Cotes έχουμε να υπολογίσουμε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα της γενικής μορφής

$$\int_{x_a}^{x_{n-a}} f(x) dx, \quad \text{μέ } \alpha = 0, -1 \text{ ή } 1,$$

όπου τή συνάρτηση $f(x)$ προσεγγίζουμε πάντοτε με τό πολυώνυμο παρεμβολής της, πού ορίζεται από τά $n+1$ σημεία x_i , $i=0(1)n$, ανεξάρτητα από τή συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου α . Υποτίθεται, όπως λέχτηκε καί προηγούμενα, πώς όλα τά σημεία, πού αναφέρονται σάν σημεία παρεμβολής καί σάν όρια του όρισμένου ολοκληρώματος (όταν τά τελευταία δέν ανήκουν στά ση-

μεϊα παρεμβολής) ίσαπέχουν, τό δέ αντίστοιχο βήμα τής πι-
νακοποιήσεως είναι ίσο μέ h . 'Ανάλογα μέ τό άν ή παράμε-
τρος α παίρνει τήν τιμή 0, -1 ή 1 έχουμε καί τούς αντί-
στοιχους τύπους άριθμητικής ολοκληρώσεως τών Newton - Co-
tes, πού καλοϋνται κλειστοί, άνοικτοί ή μερικής έκτάσεως.
Οί κλειστοί τύποι είναι οί πιο συνηθισμένοι καί οί περισ-
σότερο χρησιμοποιούμενοι στήν πράξη. Οί άνοικτοί τύποι εί-
ναι γενικά λιγότερο άκριβείς από τούς αντίστοιχους κλει-
στούς. Χρησιμοποιούνται όμως στήν παραγωγή μιās κατηγορίας τύ-
πων γιά τήν άριθμητική επίλυση τών συνήθων διαφορικών έ-
ξισώσεων, όπως θά δοϋμε στό αντίστοιχο κεφάλαιο. Τέλος οί
τύποι μερικής έκτάσεως άν καί γενικά είναι πιο άκριβείς
από τούς αντίστοιχους κλειστούς χρησιμοποιούνται λιγότερο
στήν πράξη. Στή συνέχεια θά ασχοληθοϋμε μέ τήν ανάπτυξη
τών τριών κατηγοριών τύπων τών Newton - Cotes.

6.2.2. Κ λ ε ι σ τ ο ί τ ύ π ο ι ά ρ ι θ μ η τ ι κ ή ς ο - λ ο κ λ η ρ ώ σ ε ω ς τ ώ ν N e w t o n - C o t e s

Στήν παρούσα περίπτωση έχουμε γιά υπολογισμό τό ολο-
κληρωμα $\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$ καί γιά τήν προσέγγιση τής $f(x)$, άρα
καί τής τιμής τοϋ ολοκληρώματος, χρησιμοποιούμε τό πολυ-
ώνυμο παρεμβολής $p_n(x)$, πού ορίζεται από τά $n+1$ σημεία $x_i =$
 $= x_0 + ih \quad | i = 0(1)n$. 'Αν γιά τήν αναλυτική έκφραση τοϋ πολυ-
ωνύμου παρεμβολής χρησιμοποιήσουμε τόν τύπο παρεμβολής τών
πρός τά έμπρός διαφορών τών Newton - Gregory θά έχουμε

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_n} p_n(x)dx = h \int_0^n \left[f_0 + \binom{\theta}{1} \Delta f_0 + \dots + \right. \\ \left. + \binom{\theta}{n} \Delta^n f_0 \right] d\theta \quad (6.1)$$

Γιά τίς διάφορες τιμές τοϋ n μπορούμε νά βροϋμε καί διάφο-

ρους τύπους. Έτσι:

Γιά $n=1$ έχουμε

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx h \int_0^1 \left[f_0 + \left(\frac{\theta}{1} \right) \Delta f_0 \right] d\theta = h \left(f_0 \theta + \Delta f_0 \frac{\theta^2}{2} \right) \Big|_0^1$$

και τελικά

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f_0 + f_1). \quad (6.2)$$

Ο τύπος (6.2) είναι γνωστός σαν κανόνας του τραπεζίου.

Γιά $n=2$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx h \int_0^2 \left[f_0 + \left(\frac{\theta}{1} \right) \Delta f_0 + \left(\frac{\theta}{2} \right) \Delta^2 f_0 \right] d\theta = h \left[f_0 \theta + \Delta f_0 \frac{\theta^2}{2} + \right. \\ \left. + \Delta^2 f_0 \left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^2}{4} \right) \right] \Big|_0^2 \end{aligned}$$

και τέλος παίρνουμε τον τύπο

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2), \quad (6.3)$$

πού είναι γνωστός σαν κανόνας του $1/3$ του Simpson.

Γιά $n=3$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx h \int_0^3 \left[f_0 + \left(\frac{\theta}{1} \right) \Delta f_0 + \left(\frac{\theta}{2} \right) \Delta^2 f_0 + \left(\frac{\theta}{3} \right) \Delta^3 f_0 \right] d\theta = h \left[f_0 \theta + \Delta f_0 \frac{\theta^2}{2} + \right. \\ \left. + \Delta^2 f_0 \left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^2}{4} \right) + \Delta^3 f_0 \frac{1}{6} \left(\frac{\theta^4}{4} - \theta^3 + \theta^2 \right) \right] \Big|_0^3 \end{aligned}$$

πού δίνει σαν τύπο τον

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3), \quad (6.4)$$

γνωστό σαν κανόνα των $3/8$.

Ἡ εὕρεση κλειστῶν τύπων τῶν Newton - Cotes, ἀπὸ τὸ γενικό τύπο (6.1), γιὰ $n=4,5,\dots$ μπορεῖ νὰ συνεχιστεῖ μετὸν ἴδιο τρόπο.

Οἱ παραπάνω κλειστοὶ τύποι, ποὺ βρέθηκαν, μποροῦν κατὰ κάποια ἔννοια νὰ γενικευτοῦν πράγμα, ποὺ βοηθάει πολὺ στὴν πράξη. Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι τὸ διάστημα ὁλοκληρώσεως ἀποτελεῖται ἀπὸ k ἴσα διαδοχικά διαστήματα, ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ τὰ σημεῖα x_i $|i=0(1)k$, καὶ θέλουμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὸν κανόνα τοῦ τραπεζοῦ (6.2) γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ ἀντίστοιχου ὁλοκληρώματος, τότε εἶναι φανερό πὺς μποροῦμε νὰ καταλήξουμε, με ἀπλὲς ἀντικαταστάσεις, στὸν παρακάτω τύπο

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_k} f(x)dx &\approx \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \\ &\approx \frac{h}{2} (f_0+f_1) + \frac{h}{2} (f_1+f_2) + \dots + \frac{h}{2} (f_{k-1}+f_k)\end{aligned}$$

ἢ τελικὰ στὸν

$$\int_{x_0}^{x_k} f(x)dx \approx h \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_{k-1} + \frac{f_k}{2} \right), \quad (6.5)$$

ποὺ εἶναι γνωστός ὡς ὁ γενικεμένος κανόνας τοῦ τραπεζοῦ. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νὰ βροῦμε γενικεμένους τύπους γιὰ τὸν κανόνα τοῦ $1/3$ τοῦ Simpson, τὸν κανόνα τῶν $3/8$, κλπ ἂν τὸ ἀντίστοιχο διάστημα ὁλοκληρώσεως ἀποτελεῖται ἀπὸ $2k, 3k$, κλπ ἴσα διαστήματα. Ἔτσι ὁ γενικεμένος κανόνας τοῦ $1/3$ τοῦ Simpson θὰ εἶναι ὁ ἀκόλουθος

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_{2k}} f(x)dx &\approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{2k-2} + \\ &\quad + 4f_{2k-1} + f_{2k}),\end{aligned} \quad (6.6)$$

ὁ γενικεμένος κανόνας τῶν $3/8$ θὰ εἶναι ὁ

$$\int_{x_0}^{x_{3k}} f(x) dx \approx \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + 2f_6 + \dots + 2f_{3k-3} + 3f_{3k-2} + 3f_{3k-1} + f_{3k}), \quad (6.7)$$

κλπ.

Παρατήρηση:

Για να υπολογίσουμε στην πράξη τό όρισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) dx$, όταν η συνάρτηση $f(x)$ δίνεται με την έκφραση της αναλυτικά, εργαζόμαστε πάντοτε ως εξής. Καταρχήν αποφασίζουμε για τό ποιόν από τούς τρεις άπλους τύπους αριθμητικής ολοκληρώσεως (6.2), (6.3) ή (6.4) θά χρησιμοποιήσουμε. Στη συνέχεια παίρνουμε σάν διάστημα (βήμα) h τό $b-a$ αν χρησιμοποιούμε τόν κανόνα τοῦ τραπεζίου, τό $(b-a)/2$ αν χρησιμοποιούμε τόν κανόνα τοῦ $1/3$ τοῦ Simpson καί τό $(b-a)/3$ αν χρησιμοποιούμε τόν κανόνα τῶν $3/8$ καί εφαρμόζουμε τόν τύπο αριθμητικής ολοκληρώσεως, πού διαλέξαμε. Μετά επαναλαμβάνουμε τήν αριθμητική ολοκλήρωση, χρησιμοποιώντας τόν αντίστοιχο γενικευμένο κανόνα (6.5), (6.6) ή (6.7) μέ νέο διάστημα (βήμα) h τό μισό τοῦ προηγουμένου. Ἡ τελευταία αὐτή φάση τῆς εργασίας, πού περιγράψαμε, εφαρμόζεται επαναληπτικά. Ἡ επαναληπτική εργασία σταματᾷ, όταν δύο διαδοχικές τιμές τοῦ ολοκληρώματος, πού προκύπτουν ἀπ' αὐτήν, συμπίπτουν σέ ἕνα προκαθορισμένο πλῆθος δ.ψ. Συγκεκριμένα αν ζητοῦμε ἕνα ἀποτέλεσμα μέ προσέγγιση k δ.ψ., τότε ἡ επαναληπτική εργασία, πού περιγράψαμε, σταματᾷ, όταν ἡ ἀπόλυτη τιμή τῆς διαφορᾶς δύο διαδοχικῶν τιμῶν τοῦ ολοκληρώματος, πού προκύπτουν μέ τόν παραπάνω τρόπο, εἶναι μικρότερη ἢ ἴση ἀπό μισή μονάδα τῆς k δεκαδικῆς τάξης. Ὄταν αὐτό συμβαίνει, τότε τήν τελευταία τιμή τοῦ ολοκληρώματος, πού βρήκαμε, τή δεχόμαστε σάν τήν τιμή τοῦ δοσμένου ὁρισμένου ολοκληρώματος.

θά πρέπει νά τονιστεῖ ἐδῶ, πῶς ἡ παραπάνω παρατήρηση ἐφαρμόζεται μέ τίς προφανεῖς τῆς τροποποιήσεις, τόσο στήν περίπτωση τῶν ἀνοικτῶν τύπων, ὅσο καί στήν περίπτωση τῶν τύπων μερικῆς ἐκτάσεως, πού θά δώσουμε στίς δύο ἐπόμενες παραγράφους.

6.2.3. Ἀνοικτοί τύποι ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως τῶν Newton-Cotes

Τό ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα, πού ἔχουμε τώρα γιά ὑπολογισμό εἶναι τό $\int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x) dx$. Τό χρησιμοποιούμενο πολυώνυμο παρεμβολῆς εἶναι τό ἴδιο, ὅπως καί στήν περίπτωση τῶν κλειστῶν τύπων, μέ τά αὐτά σημεῖα παρεμβολῆς $x_i = x_0 + ih$ $|i=0(1)n$, ὅπου, ὅπως τονίστηκε, θά ἔχουμε ἀκόμη ὅτι $x_{-1} = x_0 - h$ καί $x_{n+1} = x_n + h$. Ὁ τύπος ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως, ὁ ἀντίστοιχος πρός τόν (6.1), θά εἶναι τώρα ὁ ἀκόλουθος

$$\int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x) dx \approx h \int_{-1}^{n+1} \left[f_0 + \binom{\theta}{1} \Delta f_0 + \dots + \binom{\theta}{n} \Delta^n f_0 \right] d\theta. \quad (6.8)$$

Ἔτσι, γιά τίς διάφορες συγκεκριμένες τιμές τοῦ $n=0,1,2, \dots$, μποροῦμε νά πάρουμε, ἀπό τόν (6.8), καί διάφορους ἀνοικτούς τύπους ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως τῶν Newton-Cotes Π.χ.

Γιά $n=0$ ἔχουμε

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x) dx \approx h \int_{-1}^1 f_0 d\theta = h f_0 \theta \Big|_{-1}^1 = 2h f_0. \quad (6.9)$$

Γιά $n=1$ ἔχουμε

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x) dx \approx h \int_{-1}^2 \left[f_0 + \binom{\theta}{1} \Delta f_0 \right] d\theta = h \left[f_0 \theta + \Delta f_0 \frac{\theta^2}{2} \right] \Big|_{-1}^2 = \frac{3h}{2} (f_0 + f_1).$$

Γιά $n=2$ ἔχουμε

$$\int_{x_{-1}}^{x_3} f(x) dx \approx h \int_{-1}^3 \left[f_0 + \left(\frac{\theta}{1} \right) \Delta f_0 + \left(\frac{\theta}{2} \right) \Delta^2 f_0 \right] d\theta = h \left[f_0 \theta + \Delta f_0 \frac{\theta^2}{2} + \right. \\ \left. + \Delta^2 f_0 \left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^2}{4} \right) \right] \Big|_{-1}^3$$

ή μετά τρεις πράξεις

$$\int_{x_{-1}}^{x_3} f(x) dx \approx \frac{4h}{3} (2f_0 - f_1 + 2f_2), \quad (6.10)$$

κλπ. Ο τύπος (6.10) είναι ο γνωστός σαν τύπος του Milne.

Σημειώνουμε απλώς το γεγονός ότι, όπως οι αντίστοιχοι κλειστοί τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης μπορούν να επεκταθούν και να δώσουν γενικευμένους τύπους, με την ίδια έννοια μπορούν και οι ανοικτοί τύποι, να επεκταθούν και να δώσουν αντίστοιχους γενικευμένους τύπους. Π.χ. ο τύπος (6.9) μπορεί να επεκταθεί σε διάστημα ολοκλήρωσης, που να αποτελείται από $2k$ ίσα διαστήματα και να δώσει τελικά τον εξής αντίστοιχο γενικευμένο τύπο

$$\int_{x_{-1}}^{x_{2k-1}} f(x) dx \approx 2h(f_0 + f_2 + f_4 + \dots + f_{2k-4} + f_{2k-2}).$$

6.2.4. Τύποι μερικής εκτάσεως αριθμητικής ολοκλήρωσης των Newton - Cotes

Στην προκείμενη περίπτωση το δορισμένο ολοκλήρωμα, που μας ενδιαφέρει, είναι το $\int_{x_1}^{x_{n-1}} f(x) dx$, ενώ όλα τα άλλα, που αναφέρονται τόσο στο πολυώνυμο, όσο και στα σημεία παρεμβολής, παραμένουν τα ίδια. Οι αντίστοιχοι τύποι μερικής εκτάσεως προκύπτουν με την ίδια εύκολία όπως οι κλειστοί και ανοικτοί τύποι των Newton - Cotes για τις διάφορες τιμές του

n, αρχίζοντας, όπως είναι φανερό, από την τιμή n=3. Π.χ. για την τιμή αυτή θα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx &\approx h \int_1^2 \left[f_0 + \left(\frac{\theta}{1}\right) \Delta f_0 + \left(\frac{\theta}{2}\right) \Delta^2 f_0 + \left(\frac{\theta}{3}\right) \Delta^3 f_0 \right] d\theta = \\ &= h \left[f_0 \cdot \theta + \Delta f_0 \frac{\theta^2}{2} + \Delta^2 f_0 \left(\frac{\theta^3}{3} - \frac{\theta^2}{4} \right) + \Delta^3 f_0 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{\theta^4}{4} - \theta^3 + \theta^2 \right) \right] \Big|_1^2 = \\ &= \frac{h}{24} (-f_0 + 13f_1 + 13f_2 - f_3). \end{aligned}$$

Η επέκταση σε γενικευμένους τύπους γίνεται με τρόπο ανάλογο, προς εκείνους των δύο προηγούμενων παραγράφων.

6.3. Σφάλμα αποκοπής κατά την αριθμητική ολοκλήρωση των Newton-Cotes

Αν καλέσουμε με $E_{n,\alpha}$ το σφάλμα αποκοπής κατά την εύρεση του ολοκληρώματος $\int_{x_\alpha}^{x_{n-\alpha}} f(x) dx$ με τον αντίστοιχο τύπο των Newton-Cotes, τότε έχουμε άμεσα μία πρώτη έκφραση για το υπόψη σφάλμα από τη διαφορά

$$E_{n,\alpha} = \int_{x_\alpha}^{x_{n-\alpha}} p_n(x) dx - \int_{x_\alpha}^{x_{n-\alpha}} f(x) dx,$$

όπου βέβαια $p_n(x)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της συνάρτησεως $f(x)$ με σημεία παρεμβολής τα x_i $|i=0(1)n$, πού, όπως έχουμε τονίσει, ισαπέχουν. Η παραπάνω έκφραση για το σφάλμα αποκοπής μπορεί να γραφτεί πιο συνοπτικά ως εξής

$$E_{n,\alpha} = \int_{x_\alpha}^{x_{n-\alpha}} [p_n(x) - f(x)] dx = - \int_{x_\alpha}^{x_{n-\alpha}} R_{n+1}(x) dx,$$

όπου $R_{n+1}(x)$ η διόρθωση κατά την αντίστοιχη παρεμβολή. Αν τώρα συντρέχουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος της σελίδας 63, με διάστημα $I \equiv [\min(x_0, x_\alpha), \max(x_n, x_{n-\alpha})]$, τότε μπορούμε

νά χρησιμοποιήσουμε την έκφραση (3.19) για τη διόρθωση και
νά πάρουμε τελικά

$$E_{n,\alpha} = - \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_\alpha}^{x_{n-\alpha}} \prod_{i=0}^n (x-x_i) \cdot f^{(n+1)}(\xi) dx \quad \text{μέ } \xi \in I. \quad (6.11)$$

Από την έκφραση (6.11) μπορούμε νά δώσουμε άμέσως, ένα χον-
δρικό κάπως, απόλυτο φράγμα για τό σφάλμα αποκοπής. Πραγ-
ματικά, εάν συνέπεια της συνέχειας της παραγώγου $f^{(n+1)}(x)$
στό διάστημα I , έχουμε άμέσως ότι ή $f^{(n+1)}(x)$ θά είναι φραγ-
μένη στο διάστημα αυτό. Αν M λοιπόν καλέσουμε ένα απόλυ-
το φράγμα αυτής στο υπόψη διάστημα, πάρουμε απόλυτες τι-
μές στα μέλη της σχέσης (6.11) και εφαρμόσουμε απλές ιδιό-
τητες, βρίσκουμε τελικά ότι

$$|E_{n,\alpha}| \leq \frac{M}{(n+1)!} \int_{x_\alpha}^{x_{n-\alpha}} \left| \prod_{i=0}^n (x-x_i) \right| dx.$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε τό γνωστό λόγο $\theta = \frac{x-x_\alpha}{h}$, ή παρα-
πάνω σχέση γράφεται

$$|E_{n,\alpha}| \leq \frac{h^{n+2} M}{(n+1)!} \int_{\alpha}^{n-\alpha} |\prod_n(\theta)| d\theta, \quad (6.12)$$

όπου

$$\prod_k(\theta) = \prod_{i=0}^k (\theta-i). \quad (6.13)$$

Είναι φανερό, πώς τό ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους θά μπο-
ρεϊ νά βρεθεϊ σχετικά εύκολα. Αυτό δέ γιατί, αν ή συνάρτη-
ση $\prod_n(\theta)$ δέν αλλάζει σημείο στο διάστημα $[a, n-a]$, τότε
μπορούμε νά απαλλαγούμε άμέσως από την απόλυτη τιμή και στή
συνέχεια νά υπολογίσουμε τό ορισμένο ολοκλήρωμα του αντί-
στοιχου πολυωνύμου. Αν όμως ή συνάρτηση $\prod_n(\theta)$ αλλάζει ση-
μείο μία ή περισσότερες φορές στο υπόψη διάστημα, τότε τό

δλοκλήρωμα, πού έχουμε, θά μπορεί νά γραφτεί σάν άθροισμα δύο ή περισσότερων δλοκληρωμάτων στά αντίστοιχα διαστήματα στά όποια ή συνάρτηση δέν θά αλλάζει σημείο. Έτσι θά μπορούμε νά εργαστούμε γιά τόν ύπολογισμό τοῦ καθενός δλοκληρώματος, πού θά έχουμε, όπως στήν προηγούμενη περίπτωση. Συγκεκριμένα γιά τόν κανόνα τοῦ τραπεζίου θά έχουμε, από τήν (6.12),

$$|E_{1,0}| \leq \frac{h^3 M}{2} \int_0^1 |\Pi_1(\theta)| d\theta.$$

Επειδή τώρα ή συνάρτηση $\Pi_1(\theta) = \theta(\theta-1)$ δέν αλλάζει σημείο στό διάστημα $[0,1]$ καί είναι πάντα μή θετική λαβαίνουμε

$$\int_0^1 |\Pi_1(\theta)| d\theta = - \int_0^1 \theta(\theta-1) d\theta = - \left(\frac{\theta^3}{3} - \frac{\theta^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

όποτε αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$|E_{1,0}| \leq \frac{h^3 M}{12}, \quad \text{μέ } |f^{(2)}(x)| \leq M \quad |x \in [x_0, x_1]|. \quad (6.14)$$

Γιά τόν κανόνα τοῦ $1/3$ τοῦ Simpson έχουμε αντίστοιχα

$$|E_{2,0}| \leq \frac{h^4 M}{6} \int_0^2 |\Pi_2(\theta)| d\theta,$$

όπου όμως ή συνάρτηση $\Pi_2(\theta) = \theta(\theta-1)(\theta-2)$ αλλάζει σημείο στό διάστημα $[0,2]$ στό σημείο $\theta=1$. Επειδή όμως στά διαστήματα $[0,1]$ καί $[1,2]$ ή ύπόψη συνάρτηση δέν αλλάζει σημείο, τό δρισμένο δλοκλήρωμα τοῦ φράγματος γράφεται καί ύπολογίζεται ως ακόλουθος

$$\begin{aligned} \int_0^2 |\Pi_2(\theta)| d\theta &= \int_0^1 |\Pi_2(\theta)| d\theta + \int_1^2 |\Pi_2(\theta)| d\theta = \int_0^1 \theta(\theta-1)(\theta-2) d\theta - \\ &\quad - \int_1^2 \theta(\theta-1)(\theta-2) d\theta = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς γιά τό απόλυτο σφάλμα θά έχουμε

$$|E_{2,0}| \leq \frac{h^4 M}{12}, \text{ με } |f^{(3)}(x)| \leq M, \quad x \in [x_0, x_2]. \quad (6.15)$$

Με ανάλογο τρόπο μπορεί νά βρεθεί απλουστευμένη έκφραση για τό δεύτερο μέλος της (6.12) σε οποιαδήποτε άλλη συγκεκριμένη περίπτωση.

Παρατηρώντας προσεκτικά τό δεύτερο μέλος της έκφράσεως (6.11) μπορούμε νά διαπιστώσουμε, πώς αν ή συνάρτηση $\prod_{i=0}^n (x-x_i)$ δέν αλλάζε πρόσημο στό διάστημα I, τότε σάν συνέπεια καί της συνέχειας της συναρτήσεως $f^{(n+1)}(x)$ στό ίδιο διάστημα καί μέ βάση τό γνωστό θεώρημα μέσης τιμής του 'Α-πειροστικού Λογισμού θά είχαμε

$$E_{n,\alpha} = - \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \int_{\alpha}^{n-\alpha} \prod_n(\theta) d\theta, \quad \eta \in I \quad (6.16)$$

μέ $\prod_n(\theta)$ την έκφραση (6.13). Δυστυχώς, μόνο σε ορισμένες απλές περιπτώσεις, ή συνάρτηση $\prod_{i=0}^n (x-x_i)$ δέν αλλάζει σημείο στό διάστημα I. Έτσι ή έκφραση (6.16) δέν μπορεί νά χρησιμοποιηθεί γενικά. Παρά τό γεγονός αυτό όμως, χρησιμοποιώντας σειρά λημμάτων καί θεωρημάτων, των οποίων ή διατύπωση καί απόδειξη έδω θά ήταν έξω από τό σκοπό του παρόντος βιβλίου, είναι δυνατό νά βρεθούν έκφράσεις ανάλογες προς τίς (6.16). Οι έκφράσεις αυτές είναι οι ακόλουθες

$$E_{n,\alpha} = \begin{cases} = - \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \int_{\alpha}^{n-\alpha} \prod_n(\theta) d\theta, & \text{για } n \text{ περιττό} \\ \\ = - \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!} \int_{\alpha}^{n-\alpha} \prod_{n+1}(\theta) d\theta, & \text{για } n \text{ άρτιο} \end{cases} \quad (6.17)$$

όπου ηεί καί $\prod_k(\theta)$ δίνεται από την έκφραση (6.13). Θά πρέπει φυσικά νά τονιστεί ότι στην περίπτωση του n άρτιος άπαιτού-

με επί πλέον ή $f^{(n+2)}(x)$ νά υπάρχει καί νά εἶναι συνεχής στοῦ αντίστοιχο διάστημα I. Ἔτσι γιά τίς διάφορες συγκεκριμένες τιμές τῶν n καί α μπορούμε νά βροῦμε ἀπό τίς σχέσεις (6.17) τίς ἀντίστοιχες ἀπλοποιημένες ἐκφράσεις γιά τό σφάλμα ἀποκοπῆς $E_{n,\alpha}$. Π.χ.

Γιά τόν κανόνα τοῦ τραπεζίου, ἔχουμε γιά τό ὁλοκλήρωμα τῆς ἀντίστοιχης ἐκφράσεως, ἀπό τίς πρώτες σχέσεις (6.17), ὅτι

$$\int_0^1 \Pi_1(\theta) d\theta = \int_0^1 \theta(\theta-1) d\theta = \left[\frac{\theta^3}{3} - \frac{\theta^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{6},$$

καί ἐπομένως

$$E_{1,0} = \frac{h^3 f^{(2)}(\eta)}{12}, \quad \eta \in [x_0, x_1]. \quad (6.18)$$

Γιά τόν κανόνα τοῦ $1/3$ τοῦ Simpson, ἔχουμε, τώρα, γιά τό ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα, ἀπό τίς δευτέρες σχέσεις (6.17), ὅτι

$$\int_0^2 \Pi_3(\theta) d\theta = \int_0^2 \theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3) d\theta = \left[\frac{\theta^5}{5} - \frac{3\theta^4}{2} + \frac{11\theta^3}{3} - 3\theta^2 \right]_0^2 = -\frac{4}{15}$$

καί ἐπομένως γιά τό ἀντίστοιχο σφάλμα ἀποκοπῆς παίρνουμε ὅτι

$$E_{2,0} = \frac{h^5 f^{(4)}(\eta)}{90}, \quad \eta \in [x_0, x_2].$$

Μέ ἀνάλογο τρόπο μπορούμε νά βροῦμε, ἀπό τίς σχέσεις (6.17), τό σφάλμα ἀποκοπῆς ὁποιοδήποτε, συγκεκριμένου τύπου ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως τῶν Newton - Cotes, κλειστοῦ, ἀνοικτοῦ ἢ μερικῆς ἐκτάσεως.

Μέ βάση, πάλι, τίς σχέσεις (6.17) καί μέ τίς ἴδιες πάντοτε προϋποθέσεις εἶναι δυνατό νά βροῦμε ἐκφράσεις γιά τό σφάλμα ἀποκοπῆς στήν περίπτωση, πού χρησιμοποιοῦμε ἕνα ὁποιοδήποτε γενικευμένο τύπο ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως. Αὐτό πετυχαίνεται ἀρκετά εὐκόλα ἀρκεῖ νά θεωρήσουμε τό γενικευμένο τύπο σάν τό ἄθροισμα τῶν k ἀπλῶν τύπων ἀριθμητικῆς ὁ-

λοκληρώσεως, από τούς οποίους παράγεται, όποτε τό σφάλμα άποκοπής αυτού θά είναι ίσο μέ τό άθροισμα τών σφαλμάτων άποκοπής τών μερικών τύπων. Άν στό τελευταίο άθροισμα έφαρμόσουμε κατάλληλα τό θεώρημα τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ, πού χρησιμοποιήσαμε ήδη καί στή συγκεκριμένη περίπτωση τοῦ παραδείγματος γιά τό σφάλμα άποκοπής στήν άριθμητική παραγωγή της παραγράφου 4.6.2., παίρνουμε σάν αποτέλεσμα μία τιμή παραγώγου ίδιας τάξης μέ αυτήν, πού περιέχεται στα σφάλματα τών άπλών τύπων, πολλαπλασιασμένη επί k . Η προηγούμενη περιγραφή φαίνεται καθαρά στήν περίπτωση π.χ. τοῦ σφάλματος άποκοπής τοῦ γενικευμένου κανόνα τοῦ τραπεζίου. Άν καλέσουμε μέ $E_{1,0}^k$ τό σφάλμα άποκοπής στήν περίπτωση τοῦ γενικευμένου κανόνα τοῦ τραπεζίου (6.5), έχουμε άμέσως ότι τό σφάλμα $E_{1,0}^k$ θά είναι ίσο μέ τό άθροισμα τών μερικών σφαλμάτων τών άπλών κανόνων τοῦ τραπεζίου, πού έφαρμόστηκαν γιά νά προκύψει ό τύπος (6.5). Τά μερικά σφάλματα δίνονται από τή σχέση (6.18), όποτε αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$E_{1,0}^k = \frac{h^3}{12} f^{(2)}(\eta_1) + \frac{h^3}{12} f^{(2)}(\eta_2) + \dots + \frac{h^3}{12} f^{(2)}(\eta_k),$$

όπου η_i $| i=1(1)k$ σημαί, αντίστοιχα, τών διαστημάτων $[x_{i-1}, x_i]$ $| i=1(1)k$, μέ τήν προυπόθεση φυσικά ότι $f(x) \in C^2([x_{i-1}, x_i])$ $| i=1(1)k$, (άρα καί $f(x) \in C^2([x_0, x_k])$). Από τήν τελευταία υπόθεση καί χρησιμοποιώντας τό θεώρημα τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ, πού άναφέραμε, μπορούμε νά λάβουμε άμέσως ότι

$$f^{(2)}(\eta_1) + f^{(2)}(\eta_2) + \dots + f^{(2)}(\eta_k) = kf^{(2)}(\eta),$$

καί έπομένως βρίσκουμε τελικά ότι

$$E_{1,0}^k = \frac{h^3}{12} kf^{(2)}(\eta), \quad \eta \in [x_0, x_k].$$

Παρατήρηση:

Ο τρόπος παραγωγής τών διάφορων τύπων άριθμητικής δ-

λοκληρώσεως τῶν Newton - Cotes μᾶς ἔδινε συγχρόνως καί τόν ἐλάχιστο βαθμό n (ἀφοῦ χρησιμοποιοῦσαμε πολυώνυμο παρεμβολῆς $p_n(x)$ βαθμοῦ τό πολὺ n) γιά τόν ὁποῖο, ὁ παραγόμενος τύπος ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως, ἴσως ἢ γενικευμένος, ἦταν ἀκριβής γιά πολυώνυμα μέχρι καί τοῦ βαθμοῦ αὐτοῦ τουλάχιστον. Οἱ ἐκφράσεις ὅμως (6.17), γιά τὰ σφάλματα ἀποκοπῆς, καθώς καί οἱ ἀντίστοιχες τῶν γενικευμένων τύπων ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως, πού προκύπτουν ἀπ' αὐτές, ἐξαιτίας τῆς παρουσίας τῆς παραγώγου, μᾶς δίνουν ἀκριβῶς τό βαθμό m γιά τόν ὁποῖο θά ἰσχύει ὅτι, ὁ ἀντίστοιχος τύπος ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως θά εἶναι ἀκριβής γιά πολυώνυμα μέχρι καί τοῦ βαθμοῦ αὐτοῦ. Ἔτσι, ἂν n εἶναι περιττός, τότε $m=n$, ἐνῶ ἂν n εἶναι ἄρτιος, τότε $m=n+1$, πού προκύπτουν ἀμέσως σάν συνέπεια τῶν μηδενισμῶν τῶν ἀντίστοιχων παραγώγων.

6.4. Τύποι ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως, γιά τιμές τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς πού ἰσαπέχουν, μέ τή βοήθεια συμβολικῶν μεθόδων

Χρησιμοποιώντας τό Λογισμό τῶν Τελεστῶν εἶναι δυνατό νά βροῦμε τύπους ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως σάν συναρτήσεις τῶν διαφορῶν τῆς συναρτήσεως, πού ὁλοκληρώνουμε, στό ὁποιοδήποτε σημεῖο καί ἰδιαίτερα στό σημεῖο x_0 . Ἔτσι στήν παρούσα παράγραφο θά δώσουμε, ὑπό τύπον παραδείγματος, τόν τρόπο εὐρέσεως τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος $\int_{x_0}^x f(x)dx$, σάν συνάρτηση τῶν πρὸς τὰ ἐμπρός διαφορῶν τῆς συναρτήσεως $f(x)$, στό σημεῖο x_0 , χρησιμοποιώντας συμβολικές μεθόδους καί μόνο.

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι $F(x)$ εἶναι ἡ παράγουσα τῆς συναρτήσεως $f(x)$, τότε γιά τό ἄοριστο ὁλοκλήρωμα $\int f(x)dx$ θά ἔχουμε

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad (6.19)$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά. Από την παραπάνω σχέση προκύπτει άμέσως ότι

$$DF(x) = f(x)$$

και από αυτήν ότι

$$F(x) + c = D^{-1}f(x), \quad (6.20)$$

όπου D^{-1} είναι ο δεξιός αντίστροφος του τελεστή D . Αν επανέρθουμε τώρα στο δορισμένο ολοκλήρωμα, που μας ενδιαφέρει, και χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (6.19) και (6.20) μπορούμε να πάρουμε διαδοχικά

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = F(x_1) + c - [F(x_0) + c] = D^{-1}f_1 - D^{-1}f_0 = \Delta(D^{-1}f_0).$$

Αν δέ στην τελευταία παράσταση, που καταλήξαμε, εκφράσουμε τον τελεστή D σαν συνάρτηση του τελεστή Δ και αναπτύξουμε σε σειρά θά βρούμε

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = h\Delta \left(\frac{1}{\log(1+\Delta)} \right) f_0 = h\Delta \left(\frac{1}{\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \frac{\Delta^5}{5} - \dots} \right) f_0$$

ή

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = h \left(\frac{1}{1 - \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta^2}{3} - \frac{\Delta^3}{4} + \frac{\Delta^4}{5} - \dots} \right) f_0.$$

Στο δεύτερο μέλος της παραπάνω ισότητας, αν αναπτύξουμε το κλάσμα του τελεστή Δ σε σειρά κατά τις ανιούσες δυνάμεις του τελεστή Δ (μέ τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών της στοιχειώδους Άλγεβρας) ή αν εκτελέσουμε τη διαίρεση του αριθμητή 1 διά του παρονομαστή, όπως είναι γραμμένος κατά τις ανιούσες δυνάμεις του Δ , μπορούμε εύκολα να λάβουμε

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = h \left(1 + \frac{1}{2} \Delta - \frac{1}{12} \Delta^2 + \frac{1}{24} \Delta^3 - \frac{19}{720} \Delta^4 + \dots \right) f_0$$

ή τέλος

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = h \left(f_0 + \frac{1}{2} \Delta f_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 f_0 + \frac{1}{24} \Delta^3 f_0 - \frac{19}{720} \Delta^4 f_0 + \dots \right). \quad (6.21)$$

Ο παραπάνω τύπος (6.21) μπορεί να μας δώσει άπειρους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης, για το υπόψη ορισμένο ολοκλήρωμα, αν περιοριστούμε στον πρώτο όρο του αναπτύγματος της παρενθέσεως, στους δύο πρώτους όρους, στους τρεις κλπ. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός, πώς αν περιοριστούμε στους δύο πρώτους όρους, βρίσκουμε τον κανόνα του τραπέζιου. Σημειώνουμε ακόμη το γεγονός, πώς αν περιοριστούμε μόνο στον πρώτο όρο του αναπτύγματος, βρίσκουμε τον τύπο,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx hf_0,$$

πού είναι γνωστός στη βιβλιογραφία σαν κανόνας του ορθογωνίου.

Με παραπλήσιους τρόπους εργαζόμενοι μπορούμε να βρούμε για το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$ εκφράσεις, που να είναι συναρτήσεις είτε των προς τα πίσω διαφορών είτε ακόμη και των κεντρικών διαφορών. Τέλος θα μπορούσαμε με αντίστοιχους κατάλληλους τρόπους, χρησιμοποιώντας τις συμβολικές μεθόδους, να βρούμε όλους ίσως τους τύπους των Newton - Cotes, που βρήκαμε στην παράγραφο 6.2. .

6.5. Αριθμητική ολοκλήρωση με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών

6.5.1. Γενικά

Η αριθμητική ολοκλήρωση με τη μέθοδο των προσδιορι-

στέων συντελεστών αποτελεί μία μέθοδο, ή όποία, στην περιγραφή της, συμπίπτει απόλυτα μέ τήν αντίστοιχη της αριθμητικής παραγωγίσεως της παραγράφου 4.6.. Τή μόνη φυσικά διαφορά αποτελεί τό γεγονός ότι, αντί νά έχουμε έναν προσεγγιστικό τύπο αριθμητικής παραγωγίσεως έχουμε τώρα έναν προσεγγιστικό τύπο αριθμητικής ολοκληρώσεως. Ό σκοπός καί ή περιγραφή της μεθόδου παραμένουν ακριβώς, όπως στην παράγραφο 6.4.. Έπομένως δέν θεωρούμε σκόπιμο, πώς χρειάζεται νά λεχτεί κάτι περισσότερο, πού νά αφορά είτε στή μέθοδο είτε στόν προσδιορισμό τών περιεχόμενων παραμέτρων στό δεύτερο μέλος είτε ακόμη στό βαθμό τών πολυωνύμων γιά τά όποια ό συγκεκριμένος τύπος θά είναι ακριβής.

Τό μεγάλο πλεονέκτημα της αριθμητικής ολοκληρώσεως μέ τή μέθοδο τών προσδιοριστέων συντελεστών είναι ότι μπορούμε νά βρούμε εύκολα μία μεγάλη κατηγορία τύπων συγκεκριμένης απλής μορφής, οί όποιοι είναι πάρα πολύ χρήσιμοι στην πράξη είτε έξαιτίας της απλότητάς τους είτε έξαιτίας της ύψηλης ακρίβειάς τους. Μέ τή βοήθεια, δηλαδή, της αριθμητικής ολοκληρώσεως μέ τή μέθοδο τών προσδιοριστέων συντελεστών μάς επιτρέπεται νά αντιμετωπίσουμε τό πρόβλημα της αριθμητικής ολοκληρώσεως κατά κάποιο γενικότερο καί χρησιμότερο ίσως τρόπο από ότι τό ίδιο πρόβλημα αντιμετωπίστηκε στις προηγούμενες παραγράφους του παρόντος Κεφαλαίου.

6.5.2. Τό γενικότερο πρόβλημα της αριθμητικής ολοκληρώσεως

6.5.2.1. Γενικά

Άς υποθέσουμε ότι μάς ενδιαφέρει ό υπολογισμός του όρισμένου ολοκληρώματος $\int_a^b g(t)dt$, όπου τά a καί b είναι γνωστοί πεπερασμένοι πραγματικοί αριθμοί ($a < b$) καί ή συνάρτηση $g(t)$ δίνεται είτε μέ τίς τιμές της σέ ένα πλήθος σημείων είτε μέ τήν αναλυτική έκφρασή της. Για λόγους, πού

θά δικαιολογηθοῦν ἀπὸ τὰ πράγματα ἀργότερα (καί κυρίως γιὰ νά ἀναφερόμαστε πάντα στοῦ ἴδιου διαστήματος ολοκληρώσεως καί ὅχι στοῦ ὁποιοδήποτε διαστήματος $[a, b]$ κάθε φορά)· προβαί-
νουμε σέ μία ἀλλαγὴ τῆς μεταβλητῆς ὥστε τὸ νέο διάστημα
ολοκληρώσεως νά εἶναι τὸ $[-1, 1]$. Ἔτσι μὲ τὸ γραμμικὸ με-
τασχηματισμὸ $t = cx + d$, ἀπαιτώντας νά ἔχουμε $t = a$, γιὰ $x = -1$,
καί $t = b$ γιὰ $x = 1$, πετυχαίνουμε νά βροῦμε ἀμέσως ὅτι

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}. \quad (6.22)$$

Ἐφαρμόζοντας τὸ μετασχηματισμὸ (6.22), τὸ ἀρχικὸ ὁρισμέ-
νο ολοκλήρωμα μετατρέπεται στοῦ ἰσοδύναμὸ του

$$\int_a^b g(t)dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(x)dx, \quad (6.23)$$

ὅπου τέθηκε

$$f(x) \equiv g\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right). \quad (6.24)$$

Μέ βάση τὰ παραπάνω ἔχουμε ὅτι ὁ ὑπολογισμὸς κάθε ὁρισμέ-
νου ολοκληρώματος τῆς ὁποιασδήποτε γενικῆς μορφῆς $\int_a^b g(t)dt$,
ἀνάγεται τελικὰ σύμφωνα μὲ τὴ σχέση (6.23), ἔχοντας ὑπόψη
καί τὴν (6.24), στὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 f(x)dx$.
Γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ τελευταίου προτείνεται ἕνας ἀπλὸς
τύπος ἀριθμητικῆς ολοκληρώσεως τῆς μορφῆς

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i), \quad (6.25)$$

ὅπου, ὅπως παρατηροῦμε τὸ δεύτερο μέλος τοῦ (6.25) δέν εἶ-
ναι παρά μία ἀπλὴ γραμμικὴ ἔκφραση $n+1$ τιμῶν τῆς συναρτή-
σεως $f(x)$. Ἔὰ πρέπει νά τονίσουμε, πὼς τόσο οἱ συντελεστές
 $a_i \quad | i=0(1)n$ ὅσο καί τὰ σημεῖα $x_i \quad | i=0(1)n$ τὰ θεωροῦμε
σταθερές. Γιὰ τὰ τελευταῖα ἀπαιτοῦμε μόνον νά ἰσχύει ὁ πε-
ριορισμὸς

$$-1 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n \leq 1 \quad (6.26)$$

και αυτό γιατί είναι δυνατό να μην υπάρχουν στη διάθεσή μας τιμές της $f(x)$ και κατ' επέκταση της $g(t)$ έξω από το διάστημα ολοκλήρωσεως.

Στό δεύτερο μέλος του τύπου αριθμητικής ολοκλήρωσεως (6.25) υπάρχουν συνολικά $2n+2$ παράμετροι. Είναι δυνατό μερικές από αυτές να θεωρηθούν γνωστές (δεδομένες), οπότε οι υπόλοιπες θα είναι άγνωστες (προσδιοριστέες) και έτσι το όλο πρόβλημα του προσδιορισμού των άγνωστων παραμέτρων καταλήγει τελικά σε ένα πρόβλημα αριθμητικής ολοκλήρωσεως με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Από το πλήθος των δεδομένων και προσδιοριστέων συντελεστών στον τύπο (6.25) θα διακρίνουμε ιδιαίτερα τρεις κατηγορίες περιπτώσεων, τις οποίες θα μελετήσουμε μία - μία στις επόμενες παραγράφους. Στην πρώτη περίπτωση τα σημεία x_i $i=0(1)n$ θα θεωρηθούν δεδομένα, τέτοια όμως ώστε να ικανοποιούν τον περιορισμό (6.26), οι δέ συντελεστές a_i $i=0(1)n$ προσδιοριστέοι. Στη δεύτερη περίπτωση οι συντελεστές a_i $i=0(1)n$ θα είναι δεδομένοι και τα σημεία x_i $i=0(1)n$ προσδιοριστέα. Στην τρίτη περίπτωση τόσο οι συντελεστές a_i $i=0(1)n$ όσο και τα σημεία x_i $i=0(1)n$ θα είναι προσδιοριστέα.

6.5.2.2. 1^η Περίπτωση: x_i $i=0(1)n$ δεδομένα και a_i $i=0(1)n$ προσδιοριστέα

6.5.2.2.1. Γενικά

Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε να προσδιορίσουμε $n+1$ παραμέτρους, τους συντελεστές a_i $i=0(1)n$, στον τύπο (6.25). Έτσι ώστε αυτός να είναι όσο το δυνατό πιο ακριβής. Σύμφωνα με τα γνωστά, απαιτούμε ο τύπος αυτός να είναι ακριβής, και όχι κατά προσέγγιση, για τις πρώτες στη σειρά

έκφράσεις των βασικών πολυωνύμων $x^k \mid k=0,1,2,\dots$ μέχρις
 ότου βρούμε $n+1$ εξισώσεις, πού θά είναι μεταξύ τους γραμ-
 μικά άνεξάρτητες. Τότε ή επίλυση τοῦ αντίστοιχου συστήμα-
 τος θά μās δίνει τίς τιμές των άγνωστων παραμέτρων. Είναι
 δυνατό νά παρατηρήσουμε ότι, για $k=0(1)n$ παίρνουμε ένα
 γραμμικό σύστημα $n+1$ εξισώσεων με άγνώστους τά $a_i \mid i=0(1)n$,
 στό όποιο ή εξίσωση, πού θά αντιστοιχεϊ στή συγκεκριμένη
 τιμή k θά είναι τής μορφής

$$x_0^k a_0 + x_1^k a_1 + \dots + x_{n-1}^k a_{n-1} + x_n^k a_n = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} \mid k=0(1)n. \quad (6.27)$$

Τό γραμμικό σύστημα των εξισώσεων (6.27) έχει μία και μόνο
 λύση ως προς τά $a_i \mid i=0(1)n$. Αυτό δέ γιατί, ή όρίζουσα των
 συντελεστών των άγνώστων είναι ή

$$D \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \\ x_0^n & x_1^n & & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix},$$

πού είναι ή γνωστή όρίζουσα τοῦ Vandermonde με τιμή $D =$
 $\prod_{i>j=0}^n (x_i - x_j) \neq 0$, άφοῦ όλα τά $x_i \mid i=0(1)n$ είναι διαφορετικά
 μεταξύ τους, σύμφωνα με τόν περιορισμό (6.26). Οι τιμές των
 συντελεστών $a_i \mid i=0(1)n$, μπορούν νά προκύψουν εύκολα από τό
 σύστημα των εξισώσεων (6.27) για τίς δεδομένες τιμές των x_i
 $\mid i=0(1)n$. Σημειώνουμε ακόμη ότι ό τύπος αριθμητικής ολοκλη-
 ρώσεως (6.25) θά είναι άκριβής για πολώνυμα μέχρι και βαθ-
 μού n τουλάχιστον.

6.5.2.2.2. Κλειστοί και άνοικτοί τύποι

ἀριθμητικῆς δλοκληρώσεως τῶν Newton - Cotes

Στὴν παρούσα παράγραφο διατυπώνουμε καὶ ὑποδείχνουμε ἓνα θεώρημα, πού φανερώνει ὅτι οἱ κλειστοὶ καὶ ἀνοικτοὶ τύποι τῶν Newton - Cotes δέν ἀποτελοῦν παρά μία μερική περίπτωση τοῦ προβλήματος τῆς ἀριθμητικῆς δλοκληρώσεως, πού ἐξετάσθηκε στὴν προηγούμενη παράγραφο.

Θεώρημα

Ἄν ὑποτεθεῖ ὅτι τὰ δεδομένα σημεῖα $x_i \mid i=0(1)n$ ἐκλέγονται κατὰ τέτοιο τρόπο ὥστε

$$x_i = -1 + \frac{2}{n}i \mid i=0(1)n, \quad (6.28)$$

τότε οἱ ἀντίστοιχοι τύποι ἀριθμητικῆς δλοκληρώσεως (6.25), πού προκύπτουν ἀπὸ τὴν ἐπίλυση τοῦ συστήματος (6.27), δέν δίνουν παρά τοὺς κλειστοὺς τύπους τῶν Newton - Cotes, ἐνῶ ἂν ἡ ἐκλογή τῶν σημείων $x_i \mid i=0(1)n$ γίνεῖ μετὰ τὸν ἀκόλουθο τρόπο

$$x_i = -1 + \frac{2}{n+2}(i+1) \mid i=0(1)n,$$

τότε μπορούμε νὰ πάρουμε, τοὺς ἀντίστοιχους ἀνοικτοὺς τύπους τῶν Newton - Cotes.

Ἀπόδειξη

Στὴ συνέχεια ἀποδείχνουμε τὴν περίπτωση τῆς παραγωγῆς τῶν κλειστῶν τύπων τῶν Newton - Cotes, καὶ μόνο (ἡ ἀντίστοιχη ἀπόδειξη γιὰ τοὺς ἀνοικτοὺς τύπους γίνεται μετὰ τὸν ἴδιο τρόπο). Γιὰ τὴν ἀπόδειξη ξεκινοῦμε ἀπὸ τὴν περιληπτικὴ περιγραφή τοῦ τρόπου παραγωγῆς τοῦ γενικοῦ κλειστοῦ τύπου τῶν Newton - Cotes, πού δόθηκε στὴν παράγραφο 6.2.2. θεωρώντας ὡς σημεῖα παρεμβολῆς τὰ $x_i \mid i=0(1)n$, πού δίνονται ἀπὸ τὴν (6.28). Ὅπως εἶναι γνωστό, χρησιμοποιήσαμε τὰ

δύο άκραία μέλη τοῦ τύπου (6.1), πού ξαναγράφουμε έδῶ, χρησιμοποιώντας τά νέα στοιχεῖα. Έτσι έχουμε

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n} \int_0^n \left[f_0 + \binom{\theta}{1} \Delta f_0 + \dots + \binom{\theta}{n} \Delta^n f_0 \right] d\theta \quad | n=1,2,3,\dots (6.29)$$

μέ $\theta = n(x+1)/2$. Τό δεύτερο μέλος τοῦ τύπου (6.29) ὑπολογί-
στηκε, στήν παράγραφο 6.2.2. καί γιά τίς διάφορες συγκε-
κριμένες τιμές τοῦ n , σάν ἕνα άθροισμα $n+1$ ὄρων, ὅπου τό
καθένα άπό τά $n+1$ παρουσιαζόμενα ὁλοκληρώματα ὑπολογιζό-
ταν εύκολα. Συγκεκριμένα είχαμε

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n} \left[f_0 \int_0^n d\theta + \frac{1}{1!} \Delta f_0 \int_0^n \theta d\theta + \dots + \right. \\ \left. + \frac{1}{n!} \Delta^n f_0 \int_0^n \theta(\theta-1)\dots(\theta-n+1) d\theta \right]. \end{aligned}$$

Τό δεύτερο μέλος τῆς παραπάνω κατά προσέγγιση ισότητας δέν
εἶναι παρά, μετά τῶν ὑπολογισμῶ τῶν ὁλοκληρωμάτων, ἕνας
γραμμικός συνδυασμός τῶν $f_0, \Delta f_0, \dots, \Delta^n f_0$. Ἐπειδή ὅμως κά-
θε διαφορά τῆς μορφῆς $\Delta^k f_0 \quad | k=0(1)n$ εἶναι μέ τή σειρά
τῆς ἕνας γραμμικός συνδυασμός τῶν τιμῶν $f_i \quad | i=0(1)n$ τῆς
συναρτήσεως, ὅπως εἶναι γνωστό άπό τόν τύπο (2.6), έχουμε
σέ τελευταία ἀνάλυση ὅτι, τό δεύτερο μέλος τοῦ παραπάνω τύ-
που θά εἶναι ἕνας γραμμικός συνδυασμός τῶν τιμῶν $f_i \quad | i=0(1)n$.
Ἐπομένως ὁ τύπος (6.29) θά καταλήγει στή μορφή

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n \beta_i f(x_i), \quad (6.30)$$

ὅπου τά $\beta_i \quad | i=0(1)n$ θά εἶναι σταθερές, ἀνεξάρτητες δηλαδή
τῶν $f(x_i) \quad | i=0(1)n$. Ἀρκεῖ λοιπόν νά ἀποδείξουμε ὅτι τά β_i
 $| i=0(1)n$ εἶναι ἴσα μέ τά αντίστοιχα $\alpha_i \quad | i=0(1)n$, πού προ-
κύπτουν άπό τή λύση τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (6.27).
Πραγματικά, άπό τόν τρόπο τῆς παραγωγῆς του, ὁ τύπος (6.1),

ή ο αντίστοιχος του (6.29), διαμέσου του πολυωνύμου παρεμβολής, $p_n(x)$, της συναρτήσεως $f(x)$, με σημεία παρεμβολής τὰ $x_i \mid i=0(1)n$, θά είναι άκριβής για πολώνυμα μέχρι και n βαθμού τουλάχιστον. Θά είναι επομένως άκριβής, τόσον ο (6.29), όσον και ο ισόδυναμός του (6.30) και για τὰ πρώτα $n+1$ βασικά πολώνυμα $x^k \mid k=0(1)n$ τουλάχιστον. Έτσι για $f(x) \equiv x^k \mid k=0(1)n$ θά μπορούμε νά πάρουμε από τήν (6.30) $n+1$ εξισώσεις, πού θά ικανοποιούν οι συντελεστές $\beta_i \mid i=0(1)n$. Οι εξισώσεις αυτές θά είναι οι ακόλουθες

$$x_0^k \beta_0 + x_1^k \beta_1 + \dots + x_{n-1}^k \beta_{n-1} + x_n^k \beta_n = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} \mid k=0(1)n. (6.31)$$

Οι συντελεστές $\beta_i \mid i=0(1)n$ θά προκύπτουν σάν λύσεις του συστήματος τών εξισώσεων (6.31), πού, όπως παρατηρούμε, συμπίπτει άπόλυτα με τό σύστημα τών εξισώσεων (6.27) με άγνώστους τὰ $\alpha_i \mid i=0(1)n$. Έπειδή δέ τό σύστημα (6.27), όπως άποδείχτηκε, έχει μία και μόνο λύση, συμπεραίνουμε ότι $\beta_i = \alpha_i \mid i=0(1)n$. Αποδείξαμε δηλαδή τό ζητούμενο.

6.5.2.3. 2^η Περίπτωση: $\alpha_i \mid i=0(1)n$ δεδομένα
να και $x_i \mid i=0(1)n$ προσδιοριστέα

6.5.2.3.1. Γενικά

Καταρχήν μπορούμε νά παρατηρήσουμε ότι στην περίπτωση, πού τὰ $\alpha_i \mid i=0(1)n$ είναι δεδομένα, δέν μπορεί συγχρόνως νά είναι και τελείως αυθαίρετα. Αυτό δέ γιατί άν θέλουμε ο τύπος άριθμητικής ολοκληρώσεως (6.25) νά είναι άκριβής για πολώνυμα μέχρι κάποιου (όποιουδήποτε) βαθμού m θά πρέπει ο ίδιος τύπος νά είναι όπωσδήποτε άκριβής και για πολώνυμα βαθμού μηδενικού. Με άλλα λόγια θά πρέπει όπωσδήποτε νά είναι άκριβής για $f(x) \equiv 1$. Η άπαίτηση αυτή δίνει άμέσως ότι

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i = 2. (6.32)$$

Έτσι τὰ $\alpha_i \mid i=0(1)n$ μπορεί νά εἶναι δεδομένα, σάν ὁποιοῖδήποτε ἀριθμοί, ἀρκεῖ νά πληροῦν τόν περιορισμό (6.32), πράγμα τό ὁποῖο σημαίνει πῶς n ἀπό τούς συντελεστές μποροῦν νά ὁριστοῦν τελείως αὐθαίρετα ἐνῶ αὐτός, πού ἀπομένει, θά ὁρίζεται διὰ μέσου τῆς σχέσης (6.32).

Γιά τόν προσδιορισμό τῶν $n+1$ σημείων $x_i \mid i=0(1)n$, θά ἐργαστοῦμε μέ τήν κλασική πιά μέθοδο τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν καί θά ἀπαιτήσουμε ἡ σχέση (6.25) νά εἶναι ἀκριβής γιά τὰ πρῶτα στή σειρά βασικά πολυώνυμα $x^k \mid k=0,1,2,\dots$ μέχρις ὅτου βροῦμε ἓνα σύστημα $n+1$ ἀνεξάρτητων ἐξισώσεων μέ ἀγνώστους τὰ $x_i \mid i=0(1)n$, ἡ ἐπίλυση τοῦ ὁποίου καί θά μᾶς δώσει τίς τιμές τους. Γιά νά δοῦμε τίς δυσκολίες, πού παρουσιάζει, ἡ ἐπίλυση ἐνός τέτοιου συστήματος στήν πράξη θά ὑποθέσουμε ὅτι γιά $f(x) \equiv x^k \mid k=1(1)n+1$, καί ἀπό τήν ἀπαίτηση νά ἰσχύει σάν ἀκριβής ἰσότητα ἡ (6.25), παίρνουμε $n+1$ ἀνεξάρτητες ἐξισώσεις (γιά $k=0$ ἡ ἰσότητα εἶναι ἀκριβής ἐξαιτίας τῆς (6.32)) τῆς ἀκόλουθης γενικῆς μορφῆς

$$\alpha_0 x_0^k + \alpha_1 x_1^k + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}^k + \alpha_n x_n^k = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} \quad (6.33)$$

$$\mid k=1(1)n+1.$$

Πρῶτα ἀπ' ὅλα παρατηροῦμε ὅτι ἡ μορφή τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (6.33) εἶναι τέτοια ὥστε εἶναι πολύ ἀμφίβολο ἀν αὐτό θά μπορεῖ νά ἐπιλυθεῖ μέ τίς κλασικές μεθόδους τῆς Ἀλγεβρας. Ἄν δεχτοῦμε ὅτι μποροῦμε νά βροῦμε μέθοδο ἐπιλύσεως, εἶναι ἀμφίβολο κατά πόσο θά βροῦμε μία τουλάχιστον λύση, στήν ὁποία ὅλα τὰ $x_i \mid i=0(1)n$ θά εἶναι πραγματικά, διακεκριμένα καί θά ἀνήκουν στό διάστημα $[-1,1]$. Οἱ δυσκολίες, πού μποροῦν νά παρουσιαστοῦν, στήν πράξη, στήν περίπτωση ἐνός συστήματος ἐξισώσεων τῆς μορφῆς (6.33), συνιστοῦν ἀπλῶς τήν ἀποφυγή τῆς θεωρήσεως τῆς μεθόδου στή γενική τουλάχιστον μορφή της, πού ἐξετάσαμε ἐδῶ. Μία εἰδι-

κή περίπτωση, πού έχει σχετική εφαρμογή, είναι εύτη, πού εξετάζουμε στην επόμενη παράγραφο και πού είναι γνωστή σαν αριθμητική ολοκλήρωση του Chebyshev. Ανεξάρτητα πάντως των συγκεκριμένων δυσκολιών, πού εκθέσαμε παραπάνω, αν τό γενικότερο πρόβλημα, όπως τέθηκε και εξετάστηκε στην παρούσα παράγραφο, δίνει μία λύση, πού να ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις για τά $x_i \mid i=0(1)n$, τότε ο αντίστοιχος τύπος αριθμητικής ολοκληρώσεως (6.25) θα είναι ακριβής για πολυώνυμα μέχρι και βαθμού $n+1$ τουλάχιστον.

6.5.2.3.2. Αριθμητική Ολοκλήρωση του Chebyshev

Στην ολοκλήρωση του Chebyshev, πού, όπως τονίστηκε ήδη, είναι μία μερική περίπτωση αυτής της προηγούμενης παραγράφου, όλοι οι συντελεστές $a_i \mid i=0(1)n$ είναι ίσοι μεταξύ τους, έστω ίσοι μέ α . Τότε, από τόν περιορισμό (6.32), βρίσκουμε άμέσως ότι

$$\alpha = (\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = \alpha_n) = \frac{2}{n+1} \quad (6.34)$$

Τά σημεία $x_i \mid i=0(1)n$ θα είναι οι λύσεις ενός συστήματος εξισώσεων της μορφής (6.33), όπου όμως οι συντελεστές θα δίνονται από την (6.34). Η μορφή του συστήματος αυτού, την οποία γράφουμε αναλυτικά, θα είναι ή ακόλουθη

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + \dots + x_n &= 0 \\ x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 &= \frac{n+1}{3} \\ x_0^3 + x_1^3 + \dots + x_n^3 &= 0 \\ &\vdots \\ x_0^{n+1} + x_1^{n+1} + \dots + x_n^{n+1} &= \frac{[1 - (-1)^{n+2}](n+1)}{2(n+2)} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Όπως είναι γνωστό από την Άλγεβρα οι λύσεις του συστήματος (6.35) αποτελούν τις ρίζες ενός πολυωνύμου βαθμού $n+1$. Το πολυώνυμο αυτό κατασκευάζεται σχετικά εύκολα, αφού με τις εξισώσεις (6.35) δίνονται όλ. τα άθροίσματα των k ($k = 1(1)n+1$) δυνάμεων των ριζών του. Συνεπώς μπορούν απ'αυτά νά προκύψουν οι στοιχειώδεις συμμετρικές συναρτήσεις των ριζών του και επομένως οι συντελεστές του. Πραγματικά αν με $\sigma_i \mid i=1(1)n+1$ καλέσουμε τό άθροισμα των γινομένων των ριζών ανά i , με όλους τούς δυνατούς τρόπους, και με $s_i \mid i=1(1)n+1$ τό άθροισμα των i δυνάμεων των ριζών, πού δίνονται από τις εξισώσεις (6.35), τότε χρησιμοποιώντας τό γνωστό τύπο του Newton, από την Άλγεβρα,

$$\sigma_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k} [s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} - \dots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} s_1] \quad (6.36)$$

$$\mid k=1(1)n+1$$

(μέ $\sigma_0=1$), μπορούμε νά βρούμε τά $\sigma_i \mid i=1(1)n+1$, όποτε τό αντίστοιχο πολυώνυμο θά είναι τό

$$x^{n+1} - \sigma_1 x^n + \sigma_2 x^{n-1} - \sigma_3 x^{n-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n x + (-1)^{n+1} \sigma_{n+1}. \quad (6.37)$$

Γιά τό πολυώνυμο (6.37) έχει αποδειχτεί ότι, για $n=8$ και $n \geq 10$ έχει μεταξύ των ριζών του και ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών. Επομένως για τις τιμές αυτές του n οι τύποι αριθμητικής ολοκληρώσεως του Chebyshev δέν χρησιμοποιούνται στην πράξη. Αντίθετα για $n \leq 7$ και $n=9$, έχει αποδειχτεί ότι, όλες οι ρίζες είναι πραγματικές, διακεκριμένες και ανήκουν στο διάστημα $[-1,1]$. Εκείνο, πού μπορούμε έμεις νά αποδείξουμε έδω, είναι ότι, τό πολυώνυμο (6.37) ή καλύτερα τό σύστημα (6.35), έφόσον έχει όλες τις ρίζες του πραγματικές, αυτές θά ανήκουν στο διάστημα $[-1,1]$. Πραγματικά για $n=0$, από την πρώτη και μοναδική εξίσωση, από τις (6.35), έχουμε ότι $x_0 = 0 \in [-1,1]$. Για $n \geq 1$ διακρίνουμε δύο

περιπτώσεις. Αν δ n είναι άρτιος, τότε παίρνουμε την προ-
τελευταία εξίσωση του συστήματος (6.35), όποτε έχουμε

$$x_0^n + x_1^n + \dots + x_n^n = 1.$$

Επειδή κάθε όρος του άθροίσματος του πρώτου μέλους x_k^n |
 $k=0(1)n$ είναι μη άρνητικός αριθμός λαβαίνουμε ότι $x_k^n \leq 1$ |
 $k=0(1)n$, από τό όποιο συμπεραίνουμε άμέσως ότι $-1 \leq x_k \leq 1$ |
 $k=0(1)n$. Αν δ n , τώρα, είναι περιττός αριθμός, τότε παίρ-
νουμε την τελευταία από τίς εξισώσεις του συστήματος (6.35)
καί βρίσκουμε

$$x_0^{n+1} + x_1^{n+1} + \dots + x_n^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} < 1.$$

Επειδή πάλι κάθε όρος του πρώτου μέλους είναι μη άρνητι-
κός, έχουμε άμέσως ότι $x_k^{n+1} < 1$ | $k=0(1)n$ καί από αύτήν
 $-1 < x_k < 1$ | $k=0(1)n$.

Στή συνέχεια βρίσκουμε τούς πρώτους στή σειρά τύπους
του Chebyshev για $n=0,1$ καί 2.

Γιά $n=0$ έχουμε από την (6.34), $\alpha=2$ καί από την πρώτη καί μό-
ναδική από τίς εξισώσεις του συστήματος (6.35), $x_0=0$. Έτσι
ο αντίστοιχος τύπος αριθμητικής ολοκληρώσεως του Chebyshev
θά είναι ο ακόλουθος

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2f(0).$$

Γιά $n=1$, από την (6.34) βρίσκουμε, $\alpha=1$, καί από τίς δύο
πρώτες καί μόνες εξισώσεις του συστήματος έχουμε

$$s_1 = x_0 + x_1 = 0$$

$$s_2 = x_0^2 + x_1^2 = \frac{2}{3}.$$

Μέ βάση τίς παραπάνω τιμές για τά s_1 καί s_2 μπορούμε εύκο-
λα νά βρούμε από τίς σχέσεις (6.36) ότι $\sigma_1 = 0$ καί $\sigma_2 = -\frac{1}{3}$.

Επομένως τό αντίστοιχο πολυώνυμο (6.37) είναι τό $x^2 - \frac{1}{3}$,

μέ ρίζες τις $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Συνεπώς ο τύπος αριθμητικής ολοκληρώσεως του Chebyshev, στην προκείμενη περίπτωση, θα είναι ο παρακάτω

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Για $n=2$, έχουμε άμεσα από την (6.34) ότι, $\alpha = \frac{2}{3}$, ενώ από τις πρώτες εξισώσεις του συστήματος (6.35) βρίσκουμε ότι

$$s_1 = x_0 + x_1 + x_2 = 0$$

$$s_2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$s_3 = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0.$$

Με βάση τις παραπάνω τιμές για τα s_1, s_2 και s_3 και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.36) βρίσκουμε, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -\frac{1}{2}$ και $\sigma_3 = 0$. Έτσι το αντίστοιχο πολυώνυμο του (6.37), στην παρούσα περίπτωση είναι το $x^3 - \frac{1}{2}x$, με ρίζες τις $x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_1 = 0$ και $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Επομένως ο αντίστοιχος τύπος αριθμητικής ολοκληρώσεως του Chebyshev θα είναι ο παρακάτω

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{3} \left[f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right].$$

Παρατήρηση:

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι ο πρώτος τύπος αριθμητικής ολοκληρώσεως του Chebyshev, για $n=0$, συμπίπτει με τον αντίστοιχο ανοικτό τύπο αριθμητικής ολοκληρώσεως των Newton - Cotes (6.9) της παραγράφου 6.2.3..

6.5.2.3.3. Σ φ ά λ μ α ά π ο κ ο π ή ς σ τ ή ν ά ρ ι θ μ η τ ι κ ή ό λ ο κ λ ή ρ ω σ η τ ο ύ C h e b y - s h e v

Τό σφάλμα άποκοπή ς στήν άριθμητική ολοκλήρωση του Chebyshev θά δίνεται καταρχήν από τή διαφορά

$$E_n = \alpha \sum_{i=0}^n f(x_i) - \int_{-1}^1 f(x) dx,$$

όπου $\alpha = \frac{2}{n+1}$ και $x_i \mid i=0(1)n$ οι λύσεις του σ. πτήματος (6.35) ή οι ρίζες του αντίστοιχου πολυωνύμου (6.37). Για την άπλοποίηση της παραπάνω έκφράσεως εργαζόμαστε ως εξής. Έστω $p_{n+1}(x)$ τό πολυώνυμο παρεμβολής της συναρτήσεως $f(x)$, βαθμού τό πολύ $n+1$, πού χρησιμοποιειτ'όαν $n+2$ σημεία παρεμβολής, από τό ένα μέρος τά $n+1$ σημεία $x_i \mid i=0(1)n$ και από τό άλλο μέρος ένα αόθαίρετο σημείο ξ_0 τέτοιο 'ώστε $[-1,1] \ni \xi_0 \neq x_i \mid i=0(1)n$. Αν καλέσουμε μέ $R_{n+2}(x)$ τή διόρθωση κατά τήν αντίστοιχη παρεμβολή θά έχουμε

$$f(x) = p_{n+1}(x) + R_{n+2}(x),$$

και μέ βάση τήν έκφραση αούτή, τό σφάλμα άποκοπής E_n γίνεται

$$E_n = \alpha \sum_{i=0}^n p_{n+1}(x_i) + \alpha \sum_{i=0}^n R_{n+2}(x_i) - \int_{-1}^1 p_{n+1}(x) dx - \int_{-1}^1 R_{n+2}(x) dx.$$

Έπειδή όμως έχουμε ότι

$$\int_{-1}^1 p_{n+1}(x) dx = \alpha \sum_{i=0}^n p_{n+1}(x_i),$$

άφοι ό τύπος άριθμητικής ολοκληρώσεως του Chebyshev είναι άκριβής για πολυώνυμα μέχρι και βαθμού $n+1$ τουλάχιστον, και άκόμη ότι

$$R_{n+2}(x_i) = 0 \mid i=0(1)n,$$

γιατί ή διόρθωση-του τύπου παρεμβολής μηδενίζεται στα σημεία παρεμβολής, ή τελευταία έκφραση, πού βρήκαμε για τό σφάλμα άποκοπής E_n , θά άπλοποιείται στην άκόλουθη

$$E_n = - \int_{-1}^1 R_{n+2}(x) dx. \quad (6.38)$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $f(x) \in C^{n+2}([-1,1])$, τότε με βάση τον τύπο (3.19) ή διόρθωση $R_{n+2}(x)$ θα δίνεται από την έκφραση

$$R_{n+2}(x) = (x - \xi_0) \prod_{i=0}^n (x - x_i) \cdot \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \quad (6.39)$$

μέ $\xi \in (-1,1)$. Αν τώρα, από τη σχέση (6.39), αντικαταστήσουμε το $R_{n+2}(x)$ στην (6.38) θα πάρουμε

$$E_n = - \frac{1}{(n+2)!} \int_{-1}^1 (x - \xi_0) \prod_{i=0}^n (x - x_i) \cdot f^{(n+2)}(\xi) dx.$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι μία συνεχής συνάρτηση του σημείου ξ_0 , που κλέχτηκε αυθαίρετα. Έτσι, αν θεωρήσουμε ότι το σημείο ξ_0 μεταβάλλεται συνεχώς και τείνει σε κάποιο από τα σημεία x_i $|i=0(1)n$, έστω στο x_0 θα βρούμε τελικά στο όριο ότι

$$E_n = - \frac{1}{(n+2)!} \int_{-1}^1 (x - x_0) \prod_{i=0}^n (x - x_i) \cdot f^{(n+2)}(\xi^*) dx, \xi^* \in [-1,1]. \quad (6.40)$$

Από την έκφραση (6.40) μπορούμε να πάρουμε άμεσα απόλυτα φράγματα για το σφάλμα αποκοπής E_n . Έτσι αν $|f^{(n+2)}(x)| \leq M$, για κάποιο γνωστό M , που θα ισχύει, αφού έχουμε υποθέσει ότι η $f^{(n+2)}(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-1,1]$, εύκολα είναι δυνατό να λάβουμε, όπως στην παράγραφο 6.3., μία σχέση αντίστοιχη προς την (6.12), που, στην προκειμένη περίπτωση, θα είναι η ακόλουθη

$$|E_n| \leq \frac{M}{(n+2)!} \int_{-1}^1 |(x - x_0) \prod_{i=0}^n (x - x_i)| dx. \quad (6.41)$$

Είναι εύνοητο, πώς για τις διάφορες συγκεκριμένες τιμές του n θα βρίσκονται, από την (6.41), και διάφορα συγκεκριμένα φράγματα για το απόλυτο σφάλμα αποκοπής E_n .

Από όσα γνωρίζουμε η σχέση (6.40) δεν μπορεί να α-

πλοποιηθεῖ παραπέρα καί νά δώσει ἐκφράσεις ἀντίστοιχες πρὸς τίς (6.17) τῆς παραγράφου 6.3., παρὰ μόνο στήν περίπτωση $n=0$. Γιά τήν περίπτωση αὐτή θά ἔχουμε ὅτι

$$E_0 = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x-x_0)^2 f^{(2)}(\xi^*) dx.$$

Ἐπειδὴ δὲ τώρα ἡ $f^{(2)}(x)$ εἶναι συνεχὴς στό διάστημα $[-1,1]$ καί ἡ συνάρτηση $(x-x_0)^2$ εἶναι συνεχὴς καί μὴ ἀρνητική στό ἴδιο διάστημα, ἐφαρμόζοντας τὸ θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ Ὀλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ θά ἔχουμε

$$E_0 = -\frac{f^{(2)}(\eta)}{2} \int_{-1}^1 (x-x_0)^2 dx, \quad \eta \in [-1,1].$$

Λαβαίνοντας ὑπόψη ὅτι $x_0=0$, καί ὀλοκληρώνοντας βρίσκουμε τελικὰ ὅτι

$$E_0 = -\frac{f^{(2)}(\eta)}{3}, \quad \eta \in [-1,1].$$

6.5.2.4. 3ῃ Περίπτωση: α_i καί x_i $| i=0(1)n$ προσδιοριστέα. Ἀριθμητική Ὀλοκλήρωση τοῦ Gauss

6.5.2.4.1. Γενικά

Στὴν παρούσα περίπτωση $2n+2$ τὸ πλῆθος παρὰμετροι εἶναι προσδιοριστέες. Ἀπαιτοῦμε λοιπὸν ὁ τύπος ἀριθμητικῆς ὀλοκληρώσεως (6.25) νά εἶναι ἀκριβὴς γιὰ τὰ πρῶτα στή σειρά $2n+2$ βασικά πολυώνυμα x^k $| k=0(1)2n+1$. Ἡ ἀπαίτησή μας αὐτή μᾶς δίνει ἕνα σύστημα $2n+2$ ἐξισώσεων μέ $2n+2$ ἀγνώστους, ἡ λύση τοῦ ὁποῖου (ἐφόσον οἱ ἐξισώσεις τοῦ ὑποτεθοῦν ἀνεξάρτητες) θά μᾶς προσδιορίζει τίς τιμές τῶν $2n+2$ παραμέτρων, πού θά γίνονται φυσικά δεκτές ἀν οἱ ἀντίστοιχες τιμές γιὰ τὰ x_i $| i=0(1)n$ ικανοποιοῦν

τόν περιορισμό (6.26). Τό σύστημα, πού θά πρέπει νά θεωρήσουμε, είναι (άναλυτικά γραμμένο) τό ακόλουθο

$$\begin{aligned} \alpha_0 &+ \alpha_1 + \dots + \alpha_n &= 2 \\ \alpha_0 x_0 &+ \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n &= 0 \\ \alpha_0 x_0^2 &+ \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2 &= \frac{2}{3} \\ &\vdots \\ \alpha_0 x_0^{2n+1} &+ \alpha_1 x_1^{2n+1} + \dots + \alpha_n x_n^{2n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (6.42)$$

Αν κατορθώσουμε καί επίλυσουμε τό παραπάνω σύστημα (6.42) καί βρούμε λύση ή λύσεις, πού νά ικανοποιούν τούς περιορισμούς πού άναφέραμε προηγουμένως, τότε θά έχουμε βρεϊ καί μία αντίστοιχη κατηγορία τύπων άριθμητικής ολοκληρώσεως (6.25), πού είναι γνωστοί σάν τύποι του Gauss. Οί τύποι άριθμητικής ολοκληρώσεως του Gauss θά είναι προφανώς άκριβεϊς για πολώνυμα μέχρι καί βαθμού $2n+1$ τουλάχιστον. Η επίλυση του συστήματος (6.42) πετυχαίνεται έμμεσα, όπως θά δοϋμε στην έπόμενη παράγραφο, με τη βοήθεια των πολωνύμων του Legendre. Γι' αυτό καί η αντίστοιχη άριθμητική ολοκλήρωση είναι γνωστή σάν άριθμητική ολοκλήρωση των Gauss - Legendre.

6.5.2.4.2. Άριθμητική Όλοκλήρωση των Gauss - Legendre

Η βασική ιδέα πάνω στην οποία στηρίζεται η έμμεση εύρεση της λύσης του συστήματος (6.42) είναι η ακόλουθη. Αντί νά απαιτήσουμε ο τύπος άριθμητικής ολοκληρώσεως (6.25) νά είναι άκριβής για $f(x) \equiv x^k \mid k=0(1)2n+1$, απαιτούμε, για τόν ίδιο τύπο, νά είναι άκριβής για $f(x) \equiv Q_\ell(x)$, όπου $Q_\ell(x)$ οποιοδήποτε αύθαίρετο πολώνυμο βαθμού $\ell \leq 2n+1$. Οί δύο απαιτήσεις είναι προφανώς ισοδύναμες. Αυτό δέ γιατί, αν ο τύπος (6.25) είναι άκριβής για $f(x) \equiv x^k \mid k=0(1)2n+1$,

τότε, εξαιτίας της γραμμικής ιδιότητας του ολοκληρώματος, θα είναι ακριβής και για κάθε γραμμικό συνδυασμό αυτών, όπως είναι το πολυώνυμο $Q_\ell(x)$. Αντίστροφα, αν ο (6.25) είναι ακριβής για $f(x) \equiv Q_\ell(x)$, με $Q_\ell(x)$, όπως ορίστηκε προηγούμενα, τότε θα είναι ακριβής και για $f(x) \equiv x^k \mid k=0(1)2n+1$, αφού τα τελευταία πολυώνυμα αποτελούν μερικές περιπτώσεις του αὐθαίρετου $Q_\ell(x)$. Έστω τώρα $p_n(x)$ το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange, βαθμού το πολύ n , που προσεγγίζει το πολυώνυμο $Q_\ell(x)$, με σημεία παρεμβολής τα προσδιοριστέα σημεία $x_i \mid i=0(1)n$. Εξαιτίας της παρεμβολής θα έχουμε $Q_\ell(x_i) = p_n(x_i) \mid i=0(1)n$. Επομένως η διαφορά $Q_\ell(x) - p_n(x)$ θα διαιρείται ακριβώς διά του γινομένου $\prod_{i=0}^n (x - x_i)$. Έστω $Q_m(x)$ το μονόσημαντα ορισμένο πηλίκο της διαιρέσεως (πού μπορεί να είναι και μηδέν αν $\ell \leq n$) βαθμού $m \leq n$ της διαφοράς $Q_\ell(x) - p_n(x)$ διά του $\prod_{i=0}^n (x - x_i)$. Θα έχουμε

$$Q_\ell(x) \equiv p_n(x) + Q_m(x) \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (6.43)$$

Από την απαίτησή μας, ο τύπος (6.25) να είναι ακριβής για $f(x) \equiv Q_\ell(x)$ και από τη μορφή (6.43), που έχει το $Q_\ell(x)$, παίρνουμε

$$\int_{-1}^1 p_n(x) dx + \int_{-1}^1 Q_m(x) \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i Q_\ell(x_i). \quad (6.44)$$

Επειδή το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange έχει τη μορφή (3.10) και στη συγκεκριμένη περίπτωση τη μορφή

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) Q_\ell(x_i),$$

με τους συντελεστές του Lagrange $L_i(x) \mid i=0(1)n$ να δίνονται από τις εκφράσεις (3.12) ή (3.13) ή (3.16), η σχέση (6.44) γράφεται

$$\sum_{i=0}^n \left\{ \int_{-1}^1 L_i(x) dx \right\} Q_\ell(x_i) + \int_{-1}^1 Q_m(x) \prod_{i=0}^n (x-x_i) dx = \sum_{i=0}^n a_i Q_\ell(x_i). \quad (6.45)$$

Μπορούμε άμέσως νά παρατηρήσουμε ότι ικανές συνθήκες γιά τήν ισχύ τῆς ισότητας (6.45) εἶναι οἱ ακόλουθες

$$\int_{-1}^1 Q_m(x) \prod_{i=0}^n (x-x_i) dx = 0 \quad (6.46)$$

γιά κάθε αὐθαίρετο πολυώνυμο $Q_m(x)$ βαθμοῦ $m \leq n$, ὅπου τό αὐθαίρετο τοῦ πολυωνύμου $Q_m(x)$ εἶναι συνάρτηση τοῦ αὐθαίρετου τοῦ $Q_\ell(x)$ (ὅπως φαίνεται ἀπό τή σχέση (6.43)), καί

$$a_i = \int_{-1}^1 L_i(x) dx \quad | i = 0(1)n. \quad (6.47)$$

Ἡ συνθήκη (6.46) ἀπαιτεῖ, στήν οὐσία, τήν ὀρθογωνιότητα τοῦ πολυωνύμου $\prod_{i=0}^n (x-x_i)$, βαθμοῦ $n+1$, πρός ὅλα τά πολυώνυμα $Q_m(x)$, βαθμοῦ $m \leq n$, στό διάστημα $[-1,1]$. Σύμφωνα, ὅμως, μέ τό θεώρημα 9 τῶν πολυωνύμων τοῦ Legendre τῆς παραγράφου 5.2., ἐκτός ἀπό ἕνα σταθερό παράγοντα, τό $\prod_{i=0}^n (x-x_i)$ πρέπει νά εἶναι τό πολυώνυμο $P_{n+1}(x)$ τοῦ Legendre, βαθμοῦ $n+1$. Συνέπεια τοῦ τελευταίου εἶναι ὅτι τά σημεία $x_i \quad | i = 0(1)n$ δέν εἶναι παρά οἱ ρίζες τοῦ πολυωνύμου $P_{n+1}(x)$ τοῦ Legendre, πού ὅπως εἶναι γνωστό ἀπό τό θεώρημα 10, τῆς ἴδιας παραγράφου 5.2., εἶναι πραγματικές, διακεκριμένες καί ἀνήκουν στό διάστημα $(-1,1)$. Ἀφοῦ προσδιορίστηκαν μέ τόν τρόπο αὐτόν τά σημεία $x_i \quad | i = 0(1)n$, οἱ συντελεστές $a_i \quad | i = 0(1)n$ εἶναι εὐκόλο νά βρεθοῦν τώρα ἀπό τίς σχέσεις (6.47) καί ἔτσι νά ἰσχύουν καί οἱ δύο ικανές συνθήκες ὥστε μέ τή σειρά της νά ἰσχύει καί ἡ ισότητα (6.45), πού ἀπαιτεῖται γιά τή λύση τοῦ προβλήματος.

Στή συνέχεια βρίσκουμε τούς τύπους ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως τῶν Gauss - Legendre στίς συγκεκριμένες περιπτώσεις

$n=0, 1$ και 2 .

Γιά $n=0$ έχουμε για το πολυώνυμο του Legendre $p_{n+1}(x) = P_1(x) = x$, με ρίζα $x_0 = 0$. Για τον προσδιορισμό του συντελεστή α_0 έχουμε από την (6.47) ότι

$$\alpha_0 = \int_{-1}^1 L_0(x) dx = \int_{-1}^1 dx = 2,$$

άρα φυσικά $L_0(x) \equiv 1$, από την αντίστοιχη σχέση (3.10). Έπομένως ο τύπος των Gauss - Legendre για $n=0$ θα είναι

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2f(0).$$

Γιά $n=1$ έχουμε $P_{n+1}(x) = P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, με ρίζες $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Για τους συντελεστές α_0 και α_1 παίρνουμε διαδοχικά, αντικαθιστώντας στις (6.47)

$$\alpha_0 = \int_{-1}^1 L_0(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} dx = \frac{1}{x_0-x_1} \left[\frac{x^2}{2} - x_1 x \right]_{-1}^1 = \frac{-2x_1}{x_0-x_1} = 1$$

και

$$\alpha_1 = \int_{-1}^1 L_1(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0} dx = \frac{1}{x_1-x_0} \left[\frac{x^2}{2} - x_0 x \right]_{-1}^1 = \frac{-2x_0}{x_1-x_0} = 1.$$

Συνεπώς για $n=1$, ο τύπος των Gauss - Legendre είναι ο ακόλουθος

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Γιά $n=2$ έχουμε $P_{n+1}(x) = P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$, με ρίζες $x_0 = -\frac{\sqrt{15}}{5}$, $x_1 = 0$ και $x_2 = \frac{\sqrt{15}}{5}$. Για τους συντελεστές έχουμε

$$\alpha_0 = \int_{-1}^1 L_0(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} dx = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \left[\frac{x^3}{3} - \right.$$

$$\left. - (x_1+x_2) \frac{x^2}{2} + x_1 x_2 x \right]_{-1}^1 = \frac{\frac{2}{3} + 2x_1 x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{5}{9}$$

και με ανάλογους τρόπους βρίσκουμε

$$\alpha_1 = \frac{8}{9} \quad \text{και} \quad \alpha_2 = \frac{5}{9}.$$

Άρα, για $n=2$, ο τύπος των Gauss - Legendre είναι

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right).$$

Παρατήρηση:

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι δύο πρώτοι τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης των Gauss - Legendre για $n=0$ και 1 συμπίπτουν απόλυτως με τους αντίστοιχους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης του Chebyshev της παραγράφου 6.5.2.3.2..

6.5.2.4.3. Σφάλμα αποκοπής στην αριθμητική ολοκλήρωση των Gauss - Legendre

Ο τρόπος εργασίας για την εύρεση έκφρασης για το σφάλμα αποκοπής στην αριθμητική ολοκλήρωση των Gauss - Legendre ακολουθεί, τουλάχιστον στην αρχή του, τα βήματα για την εύρεση της αντίστοιχης έκφρασης στην ολοκλήρωση του Chebyshev της παραγράφου 6.5.2.3.3.. Έτσι αν συμβολίσουμε με E_n τό υπόψη σφάλμα αποκοπής θα έχουμε από τον τύπο (6.25) ότι

$$E_n = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) - \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

Έστω τώρα $p_{2n+1}(x)$ το πολυώνυμο παρεμβολής βαθμού τό πολύ $2n+1$, πού προσεγγίζει τή συνάρτηση $f(x)$ και χρησιμοποιεί σάν σημεία παρεμβολής τά $x_i \mid i=0(1)n$, πού είναι ρίζες του πολυωνύμου $P_{n+1}(x)$ του Legendre και τά αύθαίρετα σημεία $\xi_j \mid j=0(1)n$ τέτοια ώστε $\xi_j \neq x_i \mid i, j=0(1)n$ και $[-1,1] \ni \xi_j \mid j=0(1)n$.

Αν με $R_{2n+2}(x)$ κληθεῖ ἡ ἀντίστοιχη διορθωση γιὰ τὴν παρεμβολή θὰ ἔχουμε

$$f(x) = p_{2n+1}(x) + R_{2n+2}(x),$$

ὁπότε ἀντικαθιστώντας στὴν ἔκφραση τοῦ σφάλματος ἀποκοπῆς λαβαίνουμε

$$E_n = \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^n a_i p_{2n+1}(x_i) + \sum_{i=0}^n c_i R_{2n+2}(x_i) - \int_{-1}^1 p_{2n+1}(x) dx - \\ - \int_{-1}^1 R_{2n+2}(x) dx.$$

Ἐπειδὴ ὁ τύπος ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως τῶν Gauss - Legendre εἶναι ἀκριβὴς γιὰ πολυώνυμα βαθμοῦ μέχρι καὶ $2n+1$ τουλάχιστον θὰ ἔχουμε

$$\int_{-1}^1 p_{2n+1}(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i p_{2n+1}(x_i).$$

Ἐπὶ πλέον γιὰ τὴ διορθωση $R_{2n+2}(x)$ στὰ σημεῖα παρεμβολῆς $x_i \mid i=0(1)n$, θὰ ἰσχύει προφανῶς ὅτι.

$$R_{2n+2}(x_i) = 0 \mid i=0(1)n.$$

Λαβαίνοντας ὑπόψην τίς δύο παραπάνω διαπιστώσεις καὶ ἀντικαθιστώντας στὴν ἔκφραση γιὰ τὸ σφάλμα ἀποκοπῆς E_n παίρνουμε

$$E_n = - \int_{-1}^1 R_{2n+2}(x) dx.$$

Αν τώρα ὑποθέσουμε ὅτι ἡ συνάρτηση $f(x)$ εἶναι τέτοια ὥστε $f(x) \in C^{2n+2}([-1,1])$, τότε με βάση τὸν τύπο (3.19), ἡ διορθωση $R_{2n+2}(x)$, θὰ δίνεται ἀπὸ τὴν παρακάτω ἔκφραση

$$R_{2n+2}(x) = \prod_{i=0}^n [(x-x_i)(x-\xi_i)] \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}$$

μέ $\xi \in (-1, 1)$. Έτσι έχουμε τώρα για τό σφάλμα άποκοπής E_n ότι

$$E_n = - \frac{1}{(2n+2)!} \int_{-1}^1 \prod_{i=0}^n [(x-x_i)(1-\xi_i)] f^{(2n+2)}(\xi) dx.$$

Τό ολοκλήρωμα στην παραπάνω έκφραση άποτελεί μία συνεχή συνάρτηση τών σημείων ξ_i $| i=0(1)n$, πού έκλέχτηκαν αύθαίρετα. Έτσι άν υποθέσουμε ότι τά σημεία ξ_i μεταβάλλονται συνεχώς καί κατά τέτοιο τρόπο ώστε $\xi_i \rightarrow x_i$ $| i=0(1)n$, τότε όριακά θά έχουμε

$$E_n = - \frac{1}{(2n+2)!} \int_{-1}^1 \left[\prod_{i=0}^n (x-x_i) \right]^2 f^{(2n+2)}(\xi^*) dx, \quad \xi^* \in [-1, 1].$$

Έπειδή ή συνάρτηση $\left[\prod_{i=0}^n (x-x_i) \right]^2$ είναι συνεχής καί μή άρνητική ένώ ή $f^{(2n+2)}(x)$ είναι συνεχής, εφαρμόζουμε τό θεώρημα μέσης τιμής τοϋ Όλοκληρωτικοϋ Λογισμοϋ καί λαβαίνουμε

$$E_n = - \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_{-1}^1 \left[\prod_{i=0}^n (x-x_i) \right]^2 dx, \quad \eta \in [-1, 1]. \quad (6.48)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι στην παραπάνω έκφραση (6.48) τό πολυώνυμο $\prod_{i=0}^n (x-x_i)$, πού έχει τίσ ίδιες ρίζες μέ τό πολυώνυμο $P_{n+1}(x)$ τοϋ Legendre, έχει συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τή μονάδα ένώ τό $P_{n+1}(x)$, άπό τό θεώρημα 2 τών πολυωνύμων τοϋ Legendre τής παραγράφου 5.2., έχει αντίστοιχο συντελεστή $\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}[(n+1)!]^2}$. Έπομένως θά ισχύει ή σχέση

$$\prod_{i=0}^n (x-x_i) = \frac{2^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} P_{n+1}(x).$$

Μέ βάση τήν παραπάνω σχέση ή (6.48) γίνεται

$$E_n = - \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \left[\frac{2^{n+1} [(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \right]^2 \int_{-1}^1 P_{n+1}^2(x) dx, \eta \in [-1, 1].$$

Επειδή όμως τώρα, από το θεώρημα 7 των πολυνομίων του Legendre της παραγράφου 5.2., η τιμή του ολοκληρώματος

$\int_{-1}^1 P_{n+1}^2(x) dx$ είναι γνωστή και ίση με $\frac{2}{2n+3}$, η έκφραση για το σφάλμα απόκοπης γίνεται τελικά

$$E_n = - \frac{2}{(2n+3)!} \left[\frac{2^{n+1} [(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \right]^2 f^{(2n+2)}(\eta), \eta \in [-1, 1].$$

6.5.2.4.4. Αριθμητική Όλοκληρωση των Gauss - Chebyshev

Ο βασικός τύπος, που αποτελεί το ξεκίνημα για την αριθμητική ολοκλήρωση των Gauss - Chebyshev, που θα περιγράψουμε στην παρούσα παράγραφο, είναι μία παραλλαγή του τύπου αριθμητικής ολοκλήρωσεως (6.25). Συγκεκριμένα είναι ο ακόλουθος

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i), \quad (6.49)$$

όπου $(1-x^2)^{-1/2}$ μία συνάρτηση βάρους. Είναι προφανές ότι οι παράμετροι a_i και x_i $|i=0(1)n$ είναι προσδιοριστέες, όπως ακριβώς και στη βασική περίπτωση της ολοκλήρωσεως του Gauss, που περιγράψαμε στην παράγραφο 6.5.2.4.1.. Τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσεως του Gauss της μορφής (6.49) είναι χρήσιμοι στην πράξη. Αυτό γιατί, ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int_{-1}^1 g(x) dx$ θεωρούμενο με τη νέα μορφή $\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} f(x) dx$, όπου $f(x) \equiv (1-x^2)^{1/2} g(x)$, είναι δυνατόν να δίνει μία συνάρτηση $f(x)$ απλούστερη από την αρχική $g(x)$ και επομένως ο τύπος των Gauss-

Chebyshev να απαιτεί λιγότερους υπολογισμούς από τον αντίστοιχο των Gauss - Legendre. Από το άλλο δέ μέρος ο τύπος των Gauss - Chebyshev συμβαίνει να είναι απλούστερος από εκείνον των Gauss - Legendre τόσο ως προς τους συντελεστές $\alpha_i \mid i = 0(1)n$ όσο και ως προς τα σημεία $x_i \mid i = 0(1)n$, ενώ είναι της ίδιας ακρίβειας, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Οι τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης (6.49) με α_i και $x_i \mid i = 0(1)n$ προσδιορίζονται ονομάζονται τύποι των Gauss - Chebyshev, γιατί στην προκειμένη περίπτωση είσχωρούν τα πολώνυμα του Chebyshev, που μελετήσαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο.

Για τον προσδιορισμό των $2n+2$ παραμέτρων ακολουθούμε το ίδιο σκεπτικό, που ακολουθήσαμε στην παράγραφο 6.5.2.4.2., όταν μελετήσαμε την αριθμητική ολοκλήρωση των Gauss - Legendre. Μια και άφετηρία για την αριθμητική ολοκλήρωση των Gauss - Legendre αποτελούσε ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης (6.25), ενώ στην προκειμένη περίπτωση αποτελεί ο τύπος (6.49), που όπως είναι φανερό διαφέρει από τον (6.25) μόνο ως προς τη συνάρτηση βάρους $(1-x^2)^{-1/2}$, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό μοιραία θα βρούμε και τα ίδια ενδιάμεσα αποτελέσματα, με τη μόνη προφανή διαφορά την παρουσία της συναρτήσεως βάρους $(1-x^2)^{-1/2}$ σε όλους τους αντίστοιχους τύπους, που θα περιέχουν ολοκληρώματα. Έτσι η απαίτηση ικανοποίησης των συνθηκών (6.46) και (6.47) της παραγράφου 6.5.2.4.2., στις οποίες είχαμε καταλήξει τότε, θα αντιστοιχεί στην προκειμένη περίπτωση με την ικανοποίηση των συνθηκών

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} Q_m(x) \prod_{i=0}^n (x-x_i) dx = 0 \quad (6.50)$$

για κάθε αύθαιρето πολώνυμο $Q_m(x)$, βαθμού $m \leq n$ και

$$\alpha_i = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} L_i(x) dx \quad \mid i = 0(1)n. \quad (6.51)$$

Για την ικανοποίηση της συνθήκης (6.50), και με βάση το θεώρημα 7 των πολυωνύμων του Chebyshev της παραγράφου 5.3., έχουμε ότι εκτός από ένα σταθερό παράγοντα, το πολυώνυμο

$\prod_{i=0}^n (x-x_i)$ είναι το πολυώνυμο $T_{n+1}(x)$ του Chebyshev και επομένως τα σημεία $x_i \mid i=0(1)n$ θα είναι οι ρίζες του $T_{n+1}(x)$. Αιτίες δίνονται αναλυτικά από το θεώρημα 8 των πολυωνύμων του Chebyshev και είναι πραγματικές, διακεκριμένες και ανήκουν στο διάστημα $(-1,1)$. Οι αντίστοιχες αναλυτικές εκφράσεις (5.36) θα είναι τώρα οι

$$x_i = -\cos \frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)} \quad \mid i=0(1)n,$$

όπου δώσαμε μια διαφορετική ισοδύναμη έκφραση στις ρίζες αυτές έτσι ώστε να έχουμε $x_i < x_{i+1} \mid i=0(1)n-1$, όπως απαιτεί ο περιορισμός (6.26). Αφού προσδιοριστούν τα $x_i \mid i=0(1)n$, από τις παραπάνω σχέσεις, μπορούμε τώρα να προσδιορίσουμε τους συντελεστές $\alpha_i \mid i=0(1)n$ από τις (6.51). Είναι δυνατό να αποδειχτεί με μία σειρά λημμάτων και θεωρημάτων, ή παραθεση και μόνο των οποίων θα ήταν έξω από το σκοπό του παρόντος βιβλίου, ότι η τελική έκφραση, που δίνει τους συντελεστές $\alpha_i \mid i=0(1)n$, είναι ανεξάρτητη του δείκτη i , πράγμα, που σημαίνει ότι όλοι οι συντελεστές είναι ίσοι μεταξύ τους. Συγκεκριμένα μπορεί να βρεθεί ότι

$$\alpha_i = \frac{\pi}{n+1} \quad \mid i=0(1)n$$

και επομένως οι τύποι αριθμητικής ολοκληρώσεως των Gauss - Chebyshev παίρνουν την παρακάτω απλή γενική μορφή.

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} f(x) dx \approx \frac{\pi}{n+1} \sum_{i=0}^n f\left(-\cos \frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right).$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τους πρώτους στη σειρά τύπους αριθμητικής ολοκληρώσεως των Gauss - Chebyshev για $n=0,1$

καί 2.

Γιά $n=0$ έχουμε $x_i = -\cos \frac{(2i+1)\pi}{2} \mid i=0(1)0$, δηλαδή, $x_0 = 0$,
καί επομένως

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} f(x) dx \approx \pi f(0).$$

Γιά $n=1$ έχουμε $x_i = -\cos \frac{(2i+1)\pi}{4} \mid i=0(1)1$, δηλαδή $x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ καί συνεπώς

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} f(x) dx \approx \frac{\pi}{2} \left[f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right].$$

Τέλος γιά $n=2$ βρίσκουμε ότι $x_i = -\cos \frac{(2i+1)\pi}{6} \mid i=0(1)2$, πού
δίνει $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_1 = 0$ καί $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Επομένως

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} f(x) dx \approx \frac{\pi}{3} \left[f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right].$$

6.5.2.4.5. Σ φ ά λ μ α ά πο κο π ή ς σ τ ή ν ά ρ ι θ μ η - τ ι κ ή ό λ ο κ λ ή ρ ω σ η τ ώ ν G a u s s - - C h e b y s h e v

Ἡ θεωρία, πού πρέπει νά ἀναπτυχτεῖ στήν παρούσα πε-
ρίπτωση, εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἴδια μέ τήν ἀντίστοιχη, πού ἀνα-
πτύχθηκε στήν παράγραφο 6.5.2.4.3.. Στήν περίπτωση δηλαδή
τῆς εὐρέσεως ἐκφράσεως γιά τό σφάλμα ἀποκοπῆς στήν ἀριθμη-
τική ολοκλήρωση τῶν Gauss - Legendre. Ἡ μόνη διαφορά φυ-
σικά θά εἶναι τό γεγονός ὅτι ὁ τύπος ἀριθμητικῆς ολοκληρώ-
σεως, πού μάς ἐνδιαφέρει, εἶναι ὁ (6.49) καί ὄχι ὁ (6.25)
καί ἀκόμη ὅτι τά σημεῖα $x_i \mid i=0(1)n$ εἶναι, στήν προκείμενη
περίπτωση, οἱ ρίζες τοῦ πολυωνύμου $T_{n+1}(x)$ τοῦ Chebyshev.
Ἐπομένως ἀν ἐκολουθήσουμε τό ἴδιο σκεπτικό, καί συνεπῶς τά
ἴδια βασικά βήματα, ὅπως καί στήν παράγραφο 6.5.2.4.3., εἴ-
ναι εὐκόλο νά διαπιστώσουμε ὅτι, θά καταλήξουμε σέ μία ἐκ-
φραση γιά τό σφάλμα ἀποκοπῆς E_n ἀντίστοιχη πρός τήν (6.48),

πού θα είναι η ακόλουθη

$$E_n = - \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} \left[\prod_{i=0}^n (x-x_i) \right]^2 dx, \quad \eta \in [-1,1] .$$

Τώρα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το πολυώνυμο $\prod_{i=0}^n (x-x_i)$ διαφέρει από το πολυώνυμο $T_{n+1}(x)$ του Chebyshev, σύμφωνα με το θεώρημα 3 των πολυωνύμων του Chebyshev, κατά τον παράγοντα 2^n . Επομένως έχουμε ότι

$$E_n = - \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{2^{2n} \cdot (2n+2)!} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} T_{n+1}^2(x) dx, \quad \eta \in [-1,1] .$$

Επειδή δέ, σύμφωνα με το θεώρημα 6 των πολυωνύμων του Chebyshev, το ολοκλήρωμα στην έκφραση του σφάλματος αποκοπής είναι ίσο με $\frac{\pi}{2}$, αντικαθιστώντας βρίσκουμε τελικά ότι

$$E_n = - \frac{\pi}{2^{2n+1} \cdot (2n+2)!} f^{(2n+2)}(\eta), \quad \eta \in [-1,1] .$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Νά βρεθεί ο κλειστός τύπος αριθμητικής ολοκληρώσεως των Newton - Cotes για $n=4$.

$$(\text{'Απ. } \int_{x_0}^{x_4} f(x) dx \approx \frac{2h}{45} (7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) .$$

2. Εφαρμόζοντας επαναληπτικά τους κανόνες του τραπεζίου, του $\frac{1}{3}$ του Simpson και των $\frac{3}{8}$ νά βρεθεί η τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 (1+x)^4 dx$ με ακρίβεια δύο δ.ψ. Σε κάθε περίπτωση νά δοθεί ο απαιτούμενος αριθμός επαναλήψεων καθώς και το αντίστοιχο σφάλμα. ('Απ. (6.20,7,0), (6.20,3,0), (6.20,2,0)).

3. Για την εύρεση του ολοκληρώματος $\int_0^1 1.2x^2 dx$ με ακρίβεια πέντε δ.ψ. πρόκειται να εφαρμοστεί ο γενικευμένος κανόνας του τραπεζίου μία και μόνο φορά. Πόσο πρέπει να εκλεγεί το βήμα ολοκλήρωσης h ; (*Απ. 0.005).
4. "Αν υποτεθεί ότι το βήμα πινακοποίησης μιας συναρτήσεως $f(x)$ μπορεί πάντοτε να δίνεται ακριβώς, ενώ οι τιμές της στρογγυλεμένες σε l δ.ψ. να βρεθεί το μέγιστο απόλυτο σφάλμα, που οφείλεται στα σφάλματα στρογγυλεύσεως και μόνο των τιμών της συναρτήσεως, κατά την εφαρμογή των γενικευμένων κανόνων του τραπεζίου, του $\frac{1}{2}$ του Simpson και των $\frac{3}{8}$ για την εύρεση του ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)dx$, χρησιμοποιώντας k , $2k$ και $3k$ ίσα διαστήματα αντίστοιχα. (*Απ. $0.5(b-a)10^{-l}$, $0.5(b-a)10^{-l}$, $0.5(b-a)10^{-l}$ δηλαδή τό ίδιο).
5. Χρησιμοποιώντας τους τύπους (6.17) να βρεθούν τα σφάλματα αποκοπής στις περιπτώσεις του κανόνα των $\frac{3}{8}$ και του τύπου του Milne. (*Απ. $\frac{8}{30} h^5 f^{(4)}(\eta)$, $\eta \in [x_0, x_3]$ και $-\frac{14}{45} h^5 f^{(4)}(\eta)$, $\eta \in [x_{-1}, x_3]$).
6. Να βρεθεί με οποιοδήποτε τρόπο ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{24} (9f_0 + 19f_1 - 5f_2 + f_3),$$
 όπου $x_i = x_0 + ih$ και $f(x_i) = f_i$ $|i = 0(1)3$.
7. Χρησιμοποιώντας συμβολικές μεθόδους να αποδειχτεί ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$\int_{x_0-h}^{x_0} f(x)dx = h(f_0 - \frac{1}{2} \Delta f_0 + \frac{5}{12} \Delta^2 f_0 - \frac{3}{8} \Delta^3 f_0 + \frac{251}{720} \Delta^4 f_0 + \dots).$$
8. Να προσδιοριστούν οι συντελεστές a_0, a_1 και a_2 στον

προσεγγιστικό τύπο

$$\int_{-h}^h f(x)dx \approx h[a_0 f_0 + a_1(f_{-1} + f_1) + a_2(f_{-2} + f_2)] ,$$

όπου $f_i = f(ih) \mid i = -2(1)2$, έτσι ώστε αυτός να είναι όσο το δυνατό πιο ακριβής. ('Απ. 114/90, 34/90, -1/90).

9. Νά προσδιοριστούν οι συντελεστές a_0, a_1, a_2 και a_3 στον παρακάτω προσεγγιστικό τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης έτσι ώστε αυτός να είναι όσο το δυνατό πιο ακριβής

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx h(a_0 f_0 + a_1 f_1) + h^2(a_2 f'_0 + a_3 f'_1),$$

όπου $h = x_1 - x_0$ και $f_i = f(x_i), f'_i = f'(x_i) \mid i = 0, 1$.
('Απ. 1/2, 1/2, 1/12, -1/12).

10. Νά προσδιοριστούν οι συντελεστές α, β, γ , εάν συναρτήσεις του δ , στον παρακάτω τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \alpha f(-1) + \beta f(\delta) + \gamma f(1)$$

έτσι ώστε αυτός να είναι όσο το δυνατό πιο ακριβής, όταν $\delta \in (-1, 1)$. Ποιός γνωστός τύπος μπορεί να βρεθεί για κατάλληλη τιμή του δ και ποιά είναι η τιμή αυτή;
('Απ. $(1+3\delta)/3(1+\delta), 4/3(1-\delta^2), (1-3\delta)/3(1-\delta)$, Για $\delta=0$ ο κανόνας του $1/3$ του Simpson).

11. Νά προσδιοριστούν τα σημεία x_0 και x_1 έτσι ώστε ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx 1/2 f(x_0) + 3/2 f(x_1)$$

νά είναι όσο το δυνατό πιο ακριβής. Για πολυώνυμα μέχρι και ποιοῦ βαθμοῦ θά είναι αυτός ακριβής;
('Απ. -1, $1/3$ ή 1, $-1/3$, 2ου).

12. Νά δειχτεί, με οποιοδήποτε τρόπο, ο τύπος αριθμητικής ολοκληρώσεως

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f(-\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$$

καί νά βρεθεί για πολώνυμα μέχρι ποιοῦ βαθμοῦ εἶναι ἀκριβής. (*Απ. 1ου).

13. Νά ἀποδειχτεί ὅτι στοὺς τύπους αριθμητικῆς ολοκληρώσεως

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i),$$

ὅπου τὰ x_i $| i=0(1)n$ εἶναι γνωστὰ καὶ ικανοποιοῦν τίς σχέσεις $-1 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1$, τὰ δὲ a_i $| i=0(1)n$ προσδιοριστέα οἱ συντελεστές a_i $| i=0(1)n$ μποροῦν νά προκύψουν ἀπὸ τίς ἐκφράσεις

$$a_i = \int_{-1}^1 L_i(x) dx \quad | i=0(1)n,$$

μέ $L_i(x)$ $| i=0(1)n$ τοὺς συντελεστές τοῦ Lagrange στό πολώνυμο παρεμβολῆς

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

τῆς συναρτήσεως $f(x)$ μέ σημεία παρεμβολῆς τὰ x_i $| i=0(1)n$, ὅταν οἱ τιμές $f(x_i)$ $| i=0(1)n$ εἶναι γνωστές.

14. Νά βρεθεῖ ὁ τύπος αριθμητικῆς ολοκληρώσεως τοῦ Chebyshev γιά $n=3$.

$$(*\text{Απ. } \frac{1}{2} \left[f\left(-\sqrt{\frac{5+\sqrt{30}}{15}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{5-\sqrt{30}}{15}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{30}}{15}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{30}}{15}}\right) \right]).$$

15. Νά ἐφαρμοστεῖ ὁ τύπος αριθμητικῆς ολοκληρώσεως τοῦ Chebyshev μέ δύο σημεία

$$\left(\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right)$$

γιά την εύρεση του ολοκληρώματος $\int_2^3 x^2 dx$. Είναι τό άποτέλεσμα άκριβές ή όχι καί γιατί; ²
(Άπ. 19/3, είναι άκριβές).

16. Για την εύρεση του ολοκληρώματος $\int_3^4 f(x)dx$ πρόκειται νά χρησιμοποιηθεῖ ὁ τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσεως τοῦ Chebyshev μέ δύο σημεῖα τῆς προηγούμενης άσκησης 15. Για ποιές τιμές τοῦ x θά πρέπει νά εἶναι γνωστή ἡ συνάρτηση $f(x)$;
(Άπ. $-\frac{\sqrt{3}+21}{6}$, $\frac{\sqrt{3}+21}{6}$).

17. Νά υπολογιστεῖ τό ολοκλήρωμα

$$\int_{-3}^3 \frac{1}{1+x^2} dx$$

μέ τή μέθοδο τῶν Gauss - Legendre γιά $n=1$.
(Άπ. 3/2).

18. Νά βρεθεῖ τό ελάχιστο απόλυτο φράγμα γιά τό σφάλμα άποκοπῆς στήν περίπτωση έφαρμογῆς τοῦ τύπου αριθμητικής ολοκλήρωσεως τῶν Gauss - Legendre μέ $n=3$ γιά τήν εύρεση τοῦ ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2+x)^2}$. (Άπ. 128/1225).

19. Νά δειχτεῖ μέ τή μέθοδο τῆς αριθμητικής ολοκλήρωσεως τῶν Gauss - Chebyshev γιά $n=1$ ὅτι $\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} x^2 dx \approx \frac{\pi}{2}$. Είναι τό άποτέλεσμα αὐτό άκριβές ή όχι καί γιατί;
(Άπ. ναι).

20. Νά εφαρμοστεῖ ὁ τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσεως τῶν Gauss - Chebyshev μέ $n=1$ γιά τήν εύρεση τῆς τιμῆς τοῦ ολοκληρώματος $\int_{-2}^2 x^2 dx$. (Άπ. $2\sqrt{2} \pi$).

21. Νά βρεθεί τό ελάχιστο απόλυτο ωράγμα γιά τό σφάλμα αποκοπής στήν περίπτωση εφαρμογής τοῦ τύπου άοιθυητικής ολοκληρώσεως τῶν Gauss - Chebyshev μέ $n=3$ γιά τήν εύρεση τοῦ ολοκληρώματος $\int_0^1 \frac{dt}{(2t+1)\sqrt{t-t^2}}$. (Άπ. $\pi/128$).

22. Νά δοθοῦν οἱ συγκεκριμένες έκφράσεις γιά τό σφάλμα αποκοπής στήν περίπτωση εφαρμογής τῶν τύπων άοιθυητικής ολοκληρώσεως τῶν Gauss - Legendre καί Gauss - Chebyshev γιά $n=0,1$ καί 2.

(Άπ. $-\frac{1}{3}f^{(2)}(\eta)$ καί $-\frac{\pi}{4}f^{(2)}(\eta)$, $-\frac{1}{135}f^{(4)}(\eta)$ καί $-\frac{\pi}{192}f^{(4)}(\eta)$, $-\frac{1}{15750}f^{(6)}(\eta)$ καί $-\frac{\pi}{23040}f^{(6)}(\eta)$, $\eta \in [-1,1]$).

————— / —————

7. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

7.1. Γενικά

Στό παρόν Κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την αριθμητική εύρεση μιᾶς οποιασδήποτε πραγματικής, ἀπλῆς (ἢ τὸ πολὺ περιττῆς πολλαπλότητας) ρίζας ξ τῆς ἐξισώσεως τῆς παρακάτω γενικῆς μορφῆς

$$f(x) = 0, \quad (7.1)$$

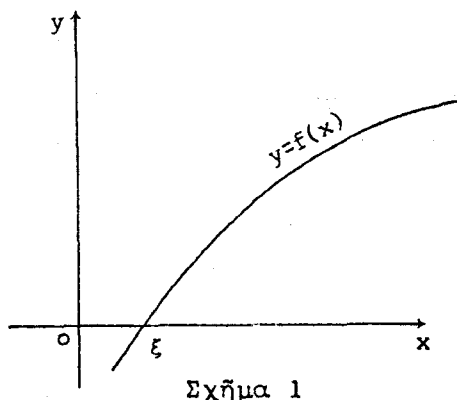
ὅπου $f(x)$ μία συνεχῆς συνάρτηση μὲ πραγματικούς συντελεστές. Γιὰ τὴν ἐφαρμογὴ μιᾶς ἀριθμητικῆς μεθόδου, γιὰ τὴν εύρεση τῆς ρίζας ξ , εἶναι ἀπαραίτητος ἓνας προηγούμενος ἐντοπισμὸς τῆς. Μὲ ἄλλα λόγια, γιὰ νὰ ἀρχίσουμε νὰ ἐφαρμόζουμε τὴν οποιαδήποτε ἀριθμητικὴ μέθοδο θὰ πρέπει νὰ ξέρουμε ἓνα διάστημα I , στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ ὁποίου νὰ βρίσκεται μόνον ἡ ρίζα ξ τῆς ἐξισώσεως, πού μᾶς ἐνδιαφέρει καὶ καμιά ἄλλη. Ἡ εύρεση τοῦ διαστήματος αὐτοῦ μπορεῖ νὰ γίνῃ μὲ ἀναλυτικὲς ἢ γραφικὲς μεθόδους.

Ἀπὸ τίς ἀναλυτικὲς μεθόδους ἀναφέρουμε τὴν ἀκόλουθη. Ἐάν $f(a)f(b) < 0$ ($a < b$) καὶ ἡ συνάρτηση $f(x)$ ἐκτός ἀπὸ συνεχῆς εἶναι καὶ γνήσια μονότονη στὸ διάστημα $I = [a, b]$, τότε εἶναι γνωστὸ ἀπὸ τὴν Ἀνάλυση ὅτι θὰ ὑπάρχει μία καὶ μόνον ρίζα ξ , περιττῆς πολλαπλότητας, τῆς ἐξισώσεως (7.1), τέτοια ὥστε $\xi \in (a, b)$. Ἔτσι τὸ διάστημα I ἀποτελεῖ ἓνα διάστημα ἐντοπισμοῦ τῆς ρίζας.

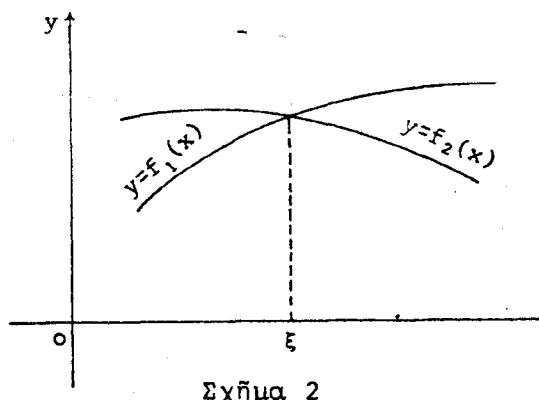
Ἀπὸ τίς γραφικὲς μεθόδους ἀναφέρουμε τίς ἀκόλουθες δύο:

α) Παρασταίνουμε γραφικὰ τὴ συνάρτηση $y = f(x)$. Τότε οἱ τετμημένες τῶν σημείων τομῆς τῆς καμπύλης $y = f(x)$ μὲ τὸν ἄξονα τῶν x ($y=0$), ἂν ὑπάρχουν, δίνουν τίς πραγματικὲς ρίζες τῆς ἐξισώσεως (7.1) (Σχῆμα 1), ὅποτε εὐκόλα μπορεῖ νὰ βρεθεῖ διάστημα I , πού νὰ περιέχει μία ρίζα ξ .

β) "Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι σχετικό πολύπλοκης μορφής και μπορεί να γραφτεί σαν διαφορά δύο απλούστερων συνεχών συναρτήσεων $f_1(x)$ και $f_2(x)$ ($f(x) \equiv f_1(x) - f_2(x)$), τότε παρασταίνουμε γραφικά τις συναρτήσεις $y=f_1(x)$ και $y=f_2(x)$, όποτε οι τετμημένες των σημείων τομής των δύο καμπύλων, αν υπάρχουν, θα δίνουν τις πραγματικές ρίζες της εξίσωσης (7.1) (Σχήμα 2). Έτσι, και στην περίπτωση αυτή, μπορεί εύκολα να βρεθεί αντίστοιχο διάστημα I.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Όταν βρεθεί ένα διάστημα έντοπισμού I της ρίζας ξ , της εξίσωσης (7.1), τότε παίρνουμε σαν μία πρώτη προσέγγιση x_0 της άγνωστης ρίζας ένα σημείο του διαστήματος αυτού. Μετά εφαρμόζουμε την υπόψη αριθμητική μέθοδο και βρίσκουμε με βάση την αρχική προσέγγιση x_0 και την εξίσωση (7.1) μία νέα προσέγγιση x_1 κ.ο.κ. Έτσι εφαρμόζοντας την αριθμητική μέθοδο επαναληπτικά δημιουργούμε μία ακολουθία $\{x_n\}|n=0,1,2,\dots$, η οποία κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις συγκλίνει στη ρίζα ξ . Στην πράξη, η εργασία των επαναλήψεων σταματά μόλις βρεθούν δύο διαδοχικές προσεγγίσεις (ή επαναλήψεις, όπως μπορούμε ακόμη να τις καλούμε) x_n και x_{n+1} , που να συμπίπτουν σε ένα προκαθορισμένο πλήθος, έστω k, δ. ή σ.ψ.. Όταν αυτό συμβεί δεχόμαστε την τιμή x_{n+1} σαν την κατά προσ-

έγγιση τιμή της ρίζας ξ σε k δ. ή σ.ψ., χωρίς αυτό φυσικά να σημαίνει ότι οι αντίστοιχες τιμές συμπίπτουν στα k ψηφία (της x_{n+1} και ξ).

Για να απλουστέψουμε τη θεωρία, πού θα αναπτύξουμε στη συνέχεια, θα αγνοήσουμε την παρουσία των αναπόφευκτων σφαλμάτων στρογγυλεύσεως και θα υποθέτουμε σιωπηρά ότι δ-λως οι πράξεις μπορούν να εκτελεστούν χρησιμοποιώντας άπειρο πλήθος δ.ψ.. Έτσι προχωρούμε στην παρουσίαση και ανάπτυξη των διάφορων μεθόδων.

7.2. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΕΩΣ ή ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ BOLZANO

7.2.1. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Η μέθοδος, πού θα περιγράψουμε σ' αυτή την παράγραφο, αποτελεί την παλιότερη και απλούστερη μέθοδο για την αριθμητική επίλυση εξισώσεων. Η μέθοδος της διχοτομήσεως συγκλίνει πάντοτε, αλλά πολύ αργά, και συγχρόνως είναι η μόνη μέθοδος για την οποία ξέρουμε προκαταβολικά μετά από πόσες επαναλήψεις πετυχαίνουμε την επιζητούμενη ακρίβεια. Δηλαδή βρίσκουμε προσέγγιση x_n , πού συμπίπτει με τη ρίζα ξ (και όχι μόνο με την προηγούμενη προσέγγισή της) σ' ένα προκαθορισμένο πλήθος δ.ψ..

Αρχίζουμε την εφαρμογή της μεθόδου καλώντας με $I_0 \equiv [a_0, \beta_0]$ τό αρχικό διάστημα έντοπισμοῦ $I \equiv [a, \beta]$ ($a < \beta$), στο ὁποῖο βρίσκεται ἡ μία καί μόνο ρίζα ξ , ἀπλή (ἢ γενικότερα περιττῆς πολλαπλότητας), τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$. Εἶναι φανερό ὅτι θά ἔχουμε $f(a_0)f(\beta_0) < 0$. Θεωροῦμε τώρα σάν μία ἀρχική προσέγγιση x_0 τό μέσο τοῦ διαστήματος I_0 . Δηλαδή $x_0 = \frac{a_0 + \beta_0}{2}$. Ἄν ἔχουμε $f(x_0) = 0$, τότε $\xi = x_0$, ἀλλιῶς θέτουμε

$$\alpha_1 = a_0 \quad \text{καί} \quad \beta_1 = x_0 \quad \text{ἂν} \quad f(a_0)f(x_0) < 0$$

ή

$$\alpha_1 = x_0 \quad \text{και} \quad \beta_1 = \beta_0 \quad \text{αν} \quad f(x_0)f(\beta_0) < 0.$$

Έτσι ορίζουμε ένα νέο διάστημα $I_1 \equiv [\alpha_1, \beta_1]$, έντοπισμού της ρίζας, μέσα στο οποίο εξακολουθεί να βρίσκεται η ξ . Έπομένως $f(\alpha_1)f(\beta_1) < 0$. Επιπρόσθετα, για τα άκρα του νέου διαστήματος, σε σχέση με τα παλιά, θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \beta_0 \quad \text{και} \quad \beta_1 - \alpha_1 = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2}.$$

Η νέα προσέγγιση x_1 ορίζεται σαν το μέσο του νέου διαστήματος I_1 , δηλαδή $x_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}$ κ.ο.κ. Έτσι δημιουργούμε, μία ακολουθία $\{x_n\}$ $n=0,1,2,\dots$ κάθε όρος της οποίας ορίζεται σαν το μέσο του αντίστοιχου διαστήματος $I_n \equiv [\alpha_n, \beta_n]$, δηλαδή $x_n = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2}$, όπου τα άκρα α_n και β_n του τελευταίου διαστήματος ορίστηκαν από τα άκρα α_{n-1} και β_{n-1} του προηγούμενου I_{n-1} με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, πού τα άκρα του διαστήματος I_1 ορίστηκαν από τα αντίστοιχα του I_0 , και με την προϋπόθεση φυσικά ότι $f(x_{n-1}) \neq 0$. Το τελευταίο το υποθέτουμε, γιατί άλλιως θα είχαμε $\xi = x_{n-1}$ και οι επαναλήψεις θα σταματούσαν. Επαγωγικά μπορεί ναδειχτεί ότι

$$\alpha_{n-1} \leq \alpha_n < x_n < \beta_n \leq \beta_{n-1} \quad \text{και} \quad \beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n} \quad | n=1,2,3,\dots \quad (7.2)$$

και ότι $f(\alpha_n)f(\beta_n) < 0$. Όπως είναι γνωστό από την Ανάλυση, οι δύο ακολουθίες $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ $| n=0,1,2,\dots$, πού περιγράψαμε τον τρόπο παραγωγής τους και ικανοποιούν τις σχέσεις (7.2), αποτελούν έναν κιβωτισμό του Cantor. Ορίζεται συνεπώς ένα σημείο ξ^* τέτοιο ώστε $\alpha_n < \xi^* < \beta_n$ $| n=0,1,2,\dots$ και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \xi^*. \quad (7.3)$$

Εξαιτίας της συνέχειας της συναρτήσεως $f(x)$ και του γεγονότος ότι

$$f(\alpha_n)f(\beta_n) < 0 \quad |n=0,1,2,\dots, \quad (7.4)$$

παίρνοντας τό όριο της ακολουθίας των πρώτων μελών της (7.4) και κάνοντας χρήση της (7.3) λαβαίνουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(\alpha_n)f(\beta_n)) = f^2(\xi^*) \leq 0.$$

Άρα $f(\xi^*) = 0$ και επομένως $\xi^* = \xi$. Εξάλλου από τις πρώτες σχέσεις (7.2), τις σχέσεις (7.3) και τό συμπέρασμα στο όποιο καταλήξαμε, έχουμε άμέσως ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$. Δηλαδή κάτω από τις άπλές προϋποθέσεις, πού άπαιτήσαμε νά ισχύουν, συγκεκριμένα της συνέχειας της $f(x)$ και του ότι μία και μόνο ρίζα ξ βρίσκεται στο έσωτερικό του άρχικοϋ διαστήματος I , ή μέθοδος της διχοτομήσεως, όπως την περιγράψαμε, παράγει ακολουθία $\{x_n\} \quad |n=0,1,2,\dots$, πού συγκλίνει πάντοτε στη ρίζα ξ .

Όπως τονίστηκε και στην άρχή της παρούσας παραγράφου, στη μέθοδο της διχοτομήσεως είναι δυνατό νά ξέρουμε προκαταβολικά τό έλάχιστο άπαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων για την εύρεση της ρίζας ξ με προσέγγιση k έστω δ.ψ.. Πραγματικά, αν ϵ_n είναι τό σφάλμα στην n επανάληψη θά ισχύουν οι σχέσεις

$$|\epsilon_n| = |x_n - \xi| = \left| \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} - \xi \right| < \frac{\beta_n - \alpha_n}{2} = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^{n+1}}.$$

Έτσι αν άπαιτήσουμε νά έχουμε

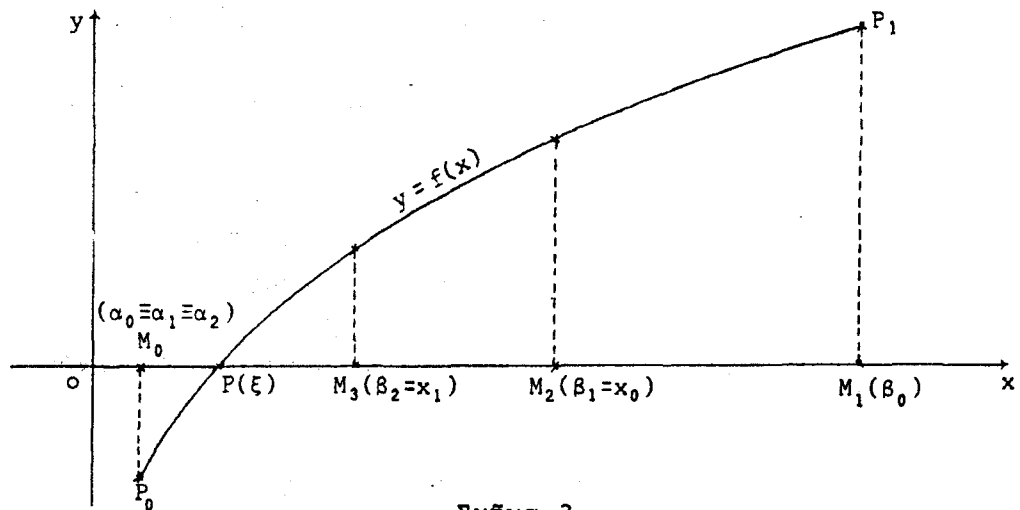
$$\frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^{n+1}} \leq 0.5 \times 10^{-k}$$

βρίσκουμε άμέσως ότι

$$n \geq \frac{\log(10^k(\beta_0 - \alpha_0))}{\log 2}$$

7.2.2. Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου της διχοτομήσεως

Έστω ότι η καμπύλη $y=f(x)$ (Σχήμα 3) παριστάνει γραφικά τη συνάρτηση $f(x)$. Όπως ήδη γνωρίζουμε η τετμημένη του σημείου τομής της P με τον άξονα των x είναι η ρίζα ξ της εξισώσεως $f(x)=0$. Αυτή θα βρίσκεται στο διάστημα $I_0 \equiv [\alpha_0, \beta_0]$, που ορίζεται από τα σημεία M_0 και M_1 στο σχήμα, με αντίστοιχες τετμημένες α_0 και β_0 . Η αρχική προσέγγιση $x_0 = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}$ είναι η τετμημένη του μέσου M_2 του εθύγραμμου τμήματος M_0M_1 . Επειδή το σημείο P περιέχεται μεταξύ M_0 και M_2 και όχι μεταξύ M_2 και M_1 καλούμε $\alpha_1 = \alpha_0$ και $\beta_1 = x_0$. Για την εύρεση της επόμενης προσεγγίσεως (επαναλήψεως) x_1 εργαζόμαστε με τον



Σχήμα 3

ίδιο τρόπο. Παίρνουμε τό μέσο M_3 του διαστήματος $I_1 \equiv [\alpha_1, \beta_1]$, που ορίζεται στο σχήμα, από τα σημεία M_0 και M_2 . Η

νέα επανάληψη $x_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}$ είναι η τετμημένη του σημείου M_3 . Έπειδή το σημείο P βρίσκεται μεταξύ M_0 και M_3 και όχι μεταξύ M_3 και M_2 καλούμε $\alpha_2 = \alpha_1$ και $\beta_2 = x_1$ κ.ο.κ.. Είναι φανερό στο Σχήμα 3 ότι οι επαναλήψεις $x_0, x_1, x_2, \dots$ συγκλίνουν στη ρίζα ξ .

7.3. Μέθοδος της γραμμικής παρεμβολής ή μέθοδος της έσφαλμένης θέσης (Regula Falsi)

7.3.1. Περιγραφή της μεθόδου

Υποθέτουμε όπως και στην προηγούμενη μέθοδο της διχοτομήσεως, ότι γνωρίζουμε ένα αρχικό διάστημα $I_0 \equiv [\alpha_0, \beta_0]$ μέσα στο οποίο βρίσκεται ή μία και μόνο ρίζα ξ , άπλή ή περιττής πολλαπλότητας, της εξίσωσης $f(x) = 0$. Έχουμε $f(\alpha_0)f(\beta_0) < 0$. Σάν αρχική προσέγγιση της ρίζας ξ παίρνουμε τη ρίζα x_0 του πρωτοβάθμιου πολυωνύμου παρεμβολής με σημεία παρεμβολής τὰ α_0 και β_0 . Αν χρησιμοποιήσουμε τό αντίστοιχο πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange, ή έκφραση αυτού θά είναι ή ακόλουθη

$$p_1^0(x) = \frac{x - \beta_0}{\alpha_0 - \beta_0} f(\alpha_0) + \frac{x - \alpha_0}{\beta_0 - \alpha_0} f(\beta_0)$$

και επομένως ή ρίζα του x_0 , πού θά αποτελεί και την αρχική προσέγγιση της ξ , θά βρίσκεται από τόν τύπο

$$x_0 = \frac{\alpha_0 f(\beta_0) - \beta_0 f(\alpha_0)}{f(\beta_0) - f(\alpha_0)}$$

Αν έχουμε $f(x_0) = 0$, τότε $\xi = x_0$ άλλιώς θέτουμε, όπως και στην προηγούμενη μέθοδο,

$$\alpha_1 = \alpha_0 \quad \text{και} \quad \beta_1 = x_0 \quad \text{άν} \quad f(\alpha_0)f(x_0) < 0$$

ή

$$\alpha_1 = x_0 \quad \text{και} \quad \beta_1 = \beta_0 \quad \text{αν} \quad f(x_0)f(\beta_0) < 0.$$

Έτσι βρίσκουμε ένα νέο διάστημα $I_1 \equiv [\alpha_1, \beta_1]$ μέσα στο οποίο βρίσκεται η ρίζα ξ και επομένως θα ισχύει $f(\alpha_1)f(\beta_1) < 0$. Ακόμη τονίζουμε ότι τα άκρα του νέου διαστήματος, σε σχέση με το προηγούμενο, θα ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \beta_0.$$

Τέλος επαγωγικά μπορεί να αποδειχτεί ότι η προσέγγιση x_n δίνεται σαν συνάρτηση των άκρων του αντίστοιχου διαστήματος $I_n \equiv [\alpha_n, \beta_n]$ από την έκφραση

$$x_n = \frac{\alpha_n f(\beta_n) - \beta_n f(\alpha_n)}{f(\beta_n) - f(\alpha_n)} \quad | n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.5)$$

όπου τα άκρα του I_n $| n = 1, 2, 3, \dots$ βρέθηκαν από τα αντίστοιχα του I_{n-1} με τον ίδιο τρόπο, πού τα α_1, β_1 βρέθηκαν από τα α_0, β_0 και με την προϋπόθεση ότι $f(x_{n-1}) \neq 0$ θα ισχύουν και πάλι οι σχέσεις $f(\alpha_n)f(\beta_n) < 0$ καθώς επίσης και οι $\alpha_{n-1} \leq \alpha_n < x_n < \beta_n \leq \beta_{n-1}$ $| n = 1, 2, 3, \dots$. Η ακολουθία $\{x_n\} | n = 0, 1, 2, \dots$ πού παράγεται από τη σχέση (7.5), δέν συγκλίνει γενικά στη ρίζα ξ . Κάτω όμως από ορισμένες προϋποθέσεις, πού αφορούν τη συνάρτηση $f(x)$ (έκτός από τη συνέχειά της) είναι δυνατό η υπόψη ακολουθία να συγκλίνει στη μία και μόνο ρίζα ξ του αρχικού διαστήματος I_0 . Έτσι στη συνέχεια διατυπώνουμε και αποδείχνουμε σέ ένα θεώρημα, ικανές συνθήκες, για τις όποιες πετυχαίνεται η σύγκλιση αυτή.

Θεώρημα

Έστω ότι $I_0 \equiv [\alpha_0, \beta_0]$ και $f(x) \in C^2(I_0)$ με $f(\alpha_0)f(\beta_0) < 0$, $f''(x) \neq 0$ $| I_0$ και $f(\alpha_0)f''(\alpha_0) > 0$. Τότε η ακολουθία πού ορίζεται από τον αλγόριθμο (7.5) και ο οποίος στην προκείμενη περίπτωση απλοποιείται στον

$$x_0 = \frac{\alpha_0 f(\beta_0) - \beta_0 f(\alpha_0)}{f(\beta_0) - f(\alpha_0)}$$

και

(7.6)

$$x_n = \frac{\alpha_0 f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(\alpha_0)}{f(x_{n-1}) - f(\alpha_0)} \quad | n=1,2,3,\dots,$$

συγκλίνει στη μία και μόνο απλή ρίζα ξ της εξισώσεως $f(x)=0$, που ανήκει στο έσωτερικό του διαστήματος I_0 .

Απόδειξη

Από την υπόθεση $f(\alpha_0)f(\beta_0) < 0$ έχουμε άμέσως ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ένα περιττό αριθμό ριζών στο έσωτερικό του I_0 . Εφόσον η $f''(x)$ δεν μηδενίζεται στο διάστημα I_0 και είναι συνεχής σ' αυτό, εξαιτίας των αντίστοιχων υποθέσεων, συμπεραίνουμε άμέσως ότι η $f''(x)$ διατηρεί τό σημείο της στο I_0 . Αυτό σημαίνει ότι η $f'(x)$ θα είναι γνήσια μονότονη. Συνέπεια αυτού είναι ότι η $f(x)$ δεν μπορεί να έχει τρεις και παραπάνω ρίζες στο έσωτερικό του I_0 , γιατί τότε η $f'(x)$ θα μηδενιζόταν τουλάχιστον δύο φορές και συνεπώς δεν θα ήταν γνήσια μονότονη. Αφοῦ λοιπόν η $f(x)$ έχει περιττό αριθμό ριζών στο I_0 θα έχει μία και μόνο. Έστω ξ η ρίζα αυτή, η οποία δεν μπορεί να είναι περιττής πολλαπλότητας $k \geq 3$, γιατί τότε θα είχαμε $f''(\xi)=0$, πράγμα που δεν ισχύει από την υπόθεσή μας. Άρα θα είναι απλή. Καταρχήν αποδείχνουμε έπαγωγικά ότι

$$\alpha_0 = \alpha_n = \alpha_{n+1} < \xi < x_n = \beta_{n+1} < x_{n-1} = \beta_n < \beta_0 \quad | n=1,2,3,\dots \quad (7.7)$$

Πραγματικά για $n=1$ έχουμε να αποδείξουμε ότι $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 < \xi < \beta_2 < \beta_1 < \beta_0$. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο (7.5) και κάνοντας τούς κατάλληλους μετασχηματισμούς λαβαίνουμε

$$\beta_0 - x_0 = \frac{(\beta_0 - \alpha_0)f^2(\beta_0)}{f^2(\beta_0) - f(\alpha_0)f(\beta_0)} > 0,$$

άφοῦ $f(\alpha_0)f(\beta_0) < 0$. Ἀρα $x_0 < \beta_0$. Ἐξάλλου βρίσκουμε μέ ἀντίστοιχο τρόπο ὅτι

$$x_0 - \alpha_0 = \frac{-(\beta_0 - \alpha_0)f(\alpha_0)f(\beta_0)}{f^2(\beta_0) - f(\alpha_0)f(\beta_0)} > 0$$

καί συνεπῶς $\alpha_0 < x_0$. Ἐπειδή γνωρίζουμε ὅτι τό x_0 εἶναι ἡ ρίζα τοῦ πολυωνύμου παρεμβολῆς $p_1^0(x)$ μέ σημεῖα παρεμβολῆς α_0 καί β_0 καί ἐξαιτίας τῶν ὑποθέσεων τοῦ θεωρήματος, ἡ διόρθωση τῆς ἀντίστοιχης παρεμβολῆς θά δίνεται ἀπό τήν ἐκφραση (3.19). Συγκεκριμένα θά ἔχουμε

$$f(x) - p_1^0(x) = (x - \alpha_0)(x - \beta_0) \frac{f''(\xi_0)}{2}, \quad \xi_0 \in (\alpha_0, \beta_0).$$

Ἡ παραπάνω ἐκφραση γιά $x = x_0$ γίνεται

$$f(x_0) = (x_0 - \alpha_0)(x_0 - \beta_0) \frac{f''(\xi_0)}{2}$$

καί ἐπειδή ἀποδείχτηκαν οἱ σχέσεις $\alpha_0 < x_0 < \beta_0$ συμπεραίνουμε ἀμέσως ὅτι $f(x_0)f''(\xi_0) < 0$. Ἀπό τό τελευταῖο συμπέρασμα καί ἀπό τό γεγονός ὅτι ἀπό τό ἕνα μέρος ἔχουμε $f(\alpha_0)f''(\alpha_0) > 0$ καί ἀπό τό ἄλλο μέρος ἡ $f''(x)$ δέν ἀλλάζει σημεῖο στό διάστημα I_0 καταλήγουμε στό $f(\alpha_0)f(x_0) < 0$. Ἔτσι ἔχοντας ὑπόψη τήν περιγραφή τῆς μεθόδου Regula Falsi φτάνουμε ἀμέσως στό συμπέρασμα ὅτι

$$\alpha_0 = \alpha_1 < \xi < x_0 = \beta_1 < \beta_0.$$

Ἀκολουθώντας τό [διο σκεπτικό, ὅπως προηγουμένως μέ τό νέο διάστημα $I_1 \equiv [\alpha_1, \beta_1]$ τή φορά αὐτή, μπορούμε εὐκολα νά καταλήξουμε στίς σχέσεις

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 < \xi < x_1 = \beta_2 < x_0 = \beta_1 < \beta_0. \quad (7.8)$$

Συνεπώς οι σχέσεις (7.8) αποδείχνουν τις (7.7) για $n=1$. Υποθέτοντας τώρα ότι οι (7.7) ισχύουν για $n=k \geq 1$ μπορούμε εύκολα, ακολουθώντας πάλι το ίδιο σκεπτικό, να αποδείξουμε την ισχύ αυτών για $n=k+1$. Έδω παραλείπουμε την αντίστοιχη απόδειξη για να αποφύγουμε επανάληψη της ίδιας διαδικασίας. Έτσι έχουμε κατορθώσει, μέχρι στιγμής, να αποδείξουμε ότι ο αλγόριθμος (7.5), απλοποιείται στον (7.6), αφού, από τις σχέσεις (7.7) που αποδείχτηκαν, έχουμε ότι

$$\alpha_n = \alpha_0 \quad \text{και} \quad \beta_n = x_{n-1} \quad | n=1,2,3,\dots,$$

και συνεπώς ο (7.6) προκύπτει από τον (7.5) με απλή αντικατάσταση. Το δεύτερο μέρος του θεωρήματος, ότι δηλαδή η ακολουθία $\{x_n\} | n=0,1,2,\dots$, που ορίζεται από τον αλγόριθμο (7.6), συγκλίνει στη ρίζα ξ αποδεικνύεται ως εξής. Από τις σχέσεις (7.7) έχουμε άμεσα ότι η υπόψη ακολουθία είναι γνήσια φθίνουσα και φραγμένη από κάτω από τη ρίζα ξ . Επομένως αυτή θα συγκλίνει σε αριθμό έστω $\xi^* \geq \xi$. Παίρνοντας τα όρια των μελών της δεύτερης των σχέσεων (7.6) για $n \rightarrow \infty$ και εάν συνέπεια της συνέχειας της $f(x)$ λαβαίνουμε

$$\xi^* = \frac{\alpha_0 f(\xi^*) - \xi^* f(\alpha_0)}{f(\xi^*) - f(\alpha_0)},$$

και απ'αυτήν $f(\xi^*) = 0$, αφού $\xi^* \geq \xi > \alpha_0$. Επειδή δε τώρα η ρίζα ξ είναι η μόνη ρίζα της $f(x)$ στο διάστημα I_0 συμπεραίνουμε ότι $\xi^* = \xi$.

Παρατηρήσεις:

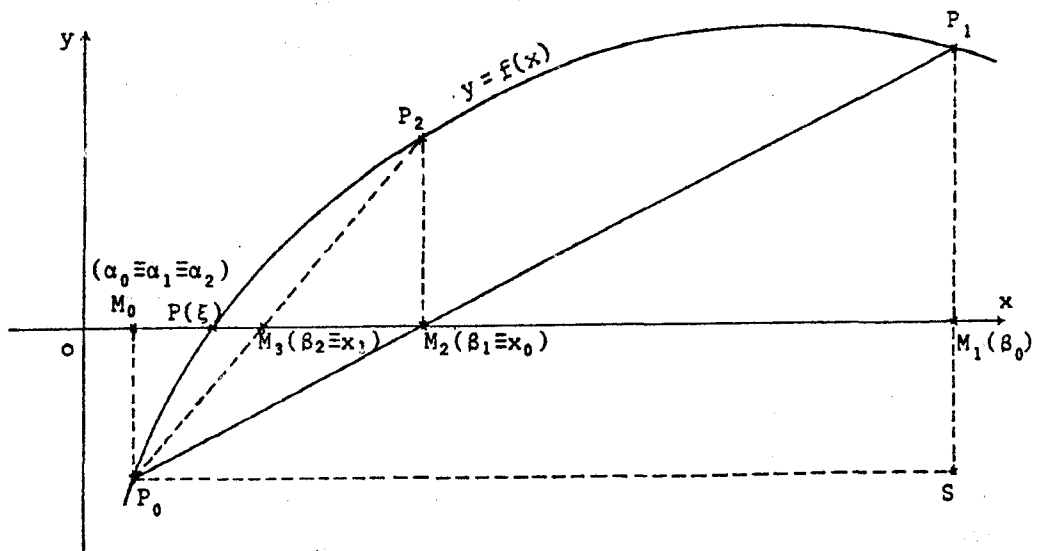
i) Αν οι υποθέσεις του θεωρήματος, που μόλις αποδείξαμε παραμείνουν οι ίδιες, με τη μόνη διαφορά ότι αντί της $f(\alpha_0)f''(\alpha_0) > 0$ υποθέσουμε την ισχύ της $f(\alpha_0)f''(\alpha_0) < 0$, τότε το δεύτερο μέρος του αλγόριθμου (7.6) της μεθόδου Regula Falsi μετατρέπεται στο

$$x_n = \frac{x_{n-1}f(\beta_0) - \beta_0f(x_{n-1})}{f(\beta_0) - f(x_{n-1})} \quad | n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.9)$$

ii) "Αν και πάλι όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος παραμείνουν οι ίδιες, με τη μόνη διαφορά ότι η γνώση του σημείου του γινομένου $f(\alpha_0)f''(\alpha_0)$ ισχύει για τό άκρο β_0 του διαστήματος I_0 είναι φανερό ότι η σχέση $f(\beta_0)f''(\beta_0) > 0$ (-σοδυναμεί με την $f(\alpha_0)f''(\alpha_0) < 0$ και επομένως έχει εφαρμογή ή προηγούμενη παρατήρηση (i) ενώ αν $f(\beta_0)f''(\beta_0) < 0$, ισχύουν ακριβώς τά συμπεράσματα του θεωρήματος.

7.3.2. Γεωμετρική έρμηνεία της μεθόδου Regula Falsi

Στήν προκείμενη περίπτωση, αν $y=f(x)$ είναι ή γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x)$ (Σχήμα 4), τότε ή τετμημένη ξ του σημείου τομής της P, με τόν άξονα τών x, θα άποτελεί τή ρίζα της εξισώσεως $f(x)=0$.



Σχήμα 4

Ἡ καμπύλη $y = f(x)$, πού ὁρίζεται μεταξύ τῶν σημείων P_0 καί P_1 , ἀντίστοιχων τετμημένων α_0 καί β_0 καί τεταγμένων πού πληροῦν τή σχέση $f(\alpha_0)f(\beta_0) < 0$, θεωρήθηκε τέτοια ὥστε νά παριστάνει γραφικά μία συνάρτηση, πού νά ικανοποιεῖ στό διάστημα $I_0 \equiv [\alpha_0, \beta_0]$ ὅλες τίς ἀπαιτήσεις τοῦ θεωρήματος τῆς προηγούμενης παραγράφου. Ἡ χορδή, πού ὁρίζεται τώρα ἀπό τά σημεία P_0, P_1 , καί ὁ ἀξονας τῶν x ἔχουν σημείο τομῆς τό M_1 μέ τετμημένη ἔστω x_0 . Ἡ τετμημένη αὕτη δίνεται ἀπό τή διαφορά

$$x_0 = (OM_1) - (M_2M_1).$$

Ἀπό τά ὁμοία τρίγωνα $M_2M_1P_1$ καί P_0SP_1 ἔχουμε ὅτι

$$\frac{(M_2M_1)}{(P_0S)} = \frac{(M_1P_1)}{(SP_1)}$$

ἢ λύνοντας ὡς πρός (M_2M_1) καί ἀντικαθιστώντας στήν παραπάνω ἔκφραση βρίσκουμε τελικά

$$x_0 = \frac{\alpha_0 f(\beta_0) - \beta_0 f(\alpha_0)}{f(\beta_0) - f(\alpha_0)}.$$

Ἐστω τώρα P_2 τό σημείο τῆς καμπύλης μέ τετμημένη x_0 . Ἡ χορδή, πού ὁρίζεται ἀπό τά σημεία P_0 καί P_2 , μέ τετμημένες $\alpha_1 = \alpha_0$ καί $\beta_1 = x_0$, καί ὁ ἀξονας τῶν x ἔχουν σημείο τομῆς τό M_3 μέ τετμημένη x_1 . Ἀπό τό σχῆμα εἶναι εὐκόλο νά βρεθεῖ ὅτι

$$x_1 = \frac{\alpha_1 f(\beta_1) - \beta_1 f(\alpha_1)}{f(\beta_1) - f(\alpha_1)} = \frac{\alpha_0 f(x_0) - x_0 f(\alpha_0)}{f(x_0) - f(\alpha_0)}$$

κ.ο.κ. Ἔτσι ὁρίζεται ἡ ἀκολουθία $\{x_n\} \mid n=0,1,2,\dots$, πού, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα, συγκλίνει στή ρίζα ξ .

7.4. Γενική ἐπαναληπτική μέθοδος ἢ Μέθοδος τῶν Picard - Peano

7.4.1. Περιγραφή της μεθόδου

Στις δύο προηγούμενες μεθόδους, που μελετήσαμε στις παραγράφους 7.2. και 7.3., τη οποιαδήποτε προσέγγιση x_n $|n=1,2,3,\dots$ την βρίσκαμε σάν συνάρτηση τών άκρων ενός διαστήματος, ένα από τά όποια ήταν ή προηγούμενη επανάληψη x_{n-1} . Στη μέθοδο, που θά περιγράψουμε στή συνέχεια, ή οποιαδήποτε επανάληψη x_n $|n=1,2,3,\dots$ βρίσκεται σάν συνάρτηση μόνο της προηγούμενης επαναληψέως x_{n-1} . Γιά τήν παραγωγή του αντίστοιχου επαναληπτικού σχήματος αναχωρούμε από τήν εξίσωση $F(x)=0$, της οποίας ζητάμε νά βρούμε τή ρίζα ξ , και προβαίνουμε σέ μία αναδιάταξη αύτης γράφοντάς την μέ τή μορφή

$$x = g(x). \quad (7.10)$$

Είναι φανερό ότι μία αναδιάταξη της μορφής (7.10), από τήν άρχική εξίσωση $F(x)=0$, είναι δυνατό νά παραχτεῖ μέ άπειρους τρόπους. Γιά τήν οποιαδήποτε όμως άπ'αύτές τίς αναδιατάξεις ή ρίζα ξ θά ικανοποιεῖ τή σχέση $\xi = g(\xi)$. Ἡ εξίσωση (7.10) υποδειχνει τήν εφαρμογή του παρακάτω επαναληπτικού σχήματος

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad |n=0,1,2,\dots, \quad (7.11)$$

όπου x_0 δεδομένο (άρχική προσέγγιση). Κάτω από όρισμένες συνθήκες τό σχήμα (7.11) παράγει μία άκολουθία $\{x_n\}|n=0,1,2,\dots$, που συγκλίνει στή ρίζα ξ . Μία τέτοια σύγκλιση δέν πετυχαίνεται πάντοτε. Ἐξαρτιέται καταρχήν από τή συνάρτηση $g(x)$ και στή συνέχεια από τήν έκλογή της άρχικής προσεγγίσεως x_0 . Ἐτσι στήν επόμενη παράγραφο θά διατυπώσουμε όρισμένες προτάσεις (θεωρήματα κλπ.), που θά δίνουν ικανές συνθήκες γιά τή σύγκλιση της άκολουθίας, που παράγεται από τόν άλγόριθμο (7.11), στή ρίζα ξ της άρχικής εξισώσεως $F(x)=0$ ή της ισοδύναμής της $x=g(x)$.

7.4.2. Σύγκλιση της γενικής επαναληπτικής μεθόδου

Θεώρημα 1

Αν η συνάρτηση $g(x)$ (της άναδιατάξεως $x=g(x)$ της εξίσωσης $f(x)=0$) ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz

$$|g(x) - g(x')| \leq \lambda |x - x'| \quad (7.12)$$

για όλες τις τιμές $x, x' \in I = [a, b]$, όπου η σταθερά λ του Lipschitz είναι τέτοια ώστε $0 < \lambda < 1$, και η αρχική προσέγγιση x_0 εκλεγεί σαν τό μέσο του διαστήματος I και ικανοποιεί επί πλέον τη σχέση

$$|x_0 - g(x_0)| \leq (1-\lambda) \frac{(b-a)}{2}, \quad (7.13)$$

τότε οι επαναλήψεις, πού παράγονται από τόν άλγόριθμο $x_{n+1} = g(x_n)$ $|n=0,1,2,\dots$, βρίσκονται στό έσωτερικό του I και η ακολουθία τους συγκλίνει σέ κάποιο άριθμό ξ , πού άποτελεί και τη μόνη ρίζα της εξίσωσης $x=g(x)$ στό I .

Απόδειξη

Η απόδειξη για τόν πρώτο ισχυρισμό του θεωρήματος, ότι δηλαδή $x_n \in (a,b)$ $|n=0,1,2,\dots$, γίνεται έπαγωγικά ως έξης. Για $n=0$ έχουμε $x_0 = \frac{a+b}{2} \in (a,b)$. Για $n=1$, χρησιμοποιώντας τόν άλγόριθμο και τη σχέση (7.13) βρίσκουμε

$$|x_0 - x_1| = |x_0 - g(x_0)| \leq (1-\lambda) \frac{(b-a)}{2} < \frac{b-a}{2},$$

πού σημαίνει ότι $x_1 \in (a,b)$. Υποθέτουμε τώρα ότι όλες οι επαναλήψεις x_n $|n=0(1)k$ ($k \geq 1$) ανήκουν στό (a,b) . Αποδείχνουμε στη συνέχεια ότι και η επανάληψη $x_{k+1} \in (a,b)$. Για τό σκοπό αυτό σχηματίζουμε την έκφραση $|x_{k+1} - x_k|$, η οποία μέ βάση τόν άλγόριθμο, την υπόθεση της τέλει έπαγωγής, τη διαδοχική έφαρμογή της συνθήκης (7.12) του Lipschitz και τέλος

της σχέσης (7.13), δίνει

$$\begin{aligned}
 |x_{k+1} - x_k| &= |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq \lambda |x_k - x_{k-1}| \\
 &\leq \lambda^2 |x_{k-1} - x_{k-2}| \\
 &\vdots \\
 &\leq \lambda^k |x_1 - x_0| \\
 &\leq \lambda^k (1-\lambda) \frac{(b-a)}{2}.
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα κατάλληλα την τελική σχέση (7.14) μπορούμε νά πάρουμε ότι

$$\begin{aligned}
 |x_{k+1} - x_0| &= |(x_{k+1} - x_k) + (x_k - x_{k-1}) + \dots + (x_1 - x_0)| \\
 &\leq |x_{k+1} - x_k| + |x_k - x_{k-1}| + \dots + |x_1 - x_0| \\
 &\leq (\lambda^k + \lambda^{k-1} + \dots + 1)(1-\lambda) \frac{(b-a)}{2}
 \end{aligned}$$

ή τέλος

$$|x_{k+1} - x_0| \leq (1-\lambda^{k+1}) \frac{(b-a)}{2} < \frac{b-a}{2},$$

πράγμα πού αποδειχνει ότι $x_{k+1} \in (a,b)$. Αφού τώρα αποδείξαμε ότι οι όροι της ακολουθίας $\{x_n\} \mid n=0,1,2,\dots$ ανήκουν στο έσωτερικό του I είναι σχετικά εύκολο νά αποδείξουμε ότι η ακολουθία αυτή συγκλίνει. Για τό σκοπό αυτό αρκεϊ νά αποδείξουμε ότι αυτή είναι μία βασική ακολουθία (ή ακολουθία του Cauchy). Αρκεϊ δηλαδή νά αποδείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $N(\varepsilon)$, πού εξαρτιέται από τό ε , τέτοιος ώστε για κάθε ζεύγος φυσικών $l, m > N(\varepsilon)$ νά συμπεραίνεται ότι $|x_l - x_m| < \varepsilon$. Αν υποθέσουμε ότι $m > l$ καί χρησιμοποιήσουμε τό συμπέρασμα από τίς σχέσεις (7.14) έχουμε

$$|x_l - x_m| = |(x_l - x_{l+1}) + (x_{l+1} - x_{l+2}) + \dots + (x_{m-1} - x_m)| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq |x_\ell - x_{\ell+1}| + |x_{\ell+1} - x_{\ell+2}| + \dots + |x_{m-1} - x_m| \\ &\leq (\lambda^\ell + \lambda^{\ell+1} + \dots + \lambda^{m-1})(1-\lambda) \frac{(b-a)}{2} \quad (7.15) \\ &= (1-\lambda^{m-\ell})\lambda^\ell \frac{(b-a)}{2}. \end{aligned}$$

Έτσι αν πάρουμε $N(\varepsilon) = \lceil \frac{\log(2\varepsilon) - \log(b-a)}{\log \lambda} \rceil$, όπου τό σύμβολο $\lceil a \rceil$ παριστάνει τό μικρότερο φυσικό πού δέν είναι μικρότερος άπό τόν πραγματικό άριθμό a , τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ καί φυσικούς άριθμούς $\ell, m > N(\varepsilon)$ θά έχουμε άπό τόν όρισμό τοῦ $N(\varepsilon)$ καί τίς σχέσεις (7.15) ότι

$$|x_\ell - x_m| \leq (1-\lambda^{m-\ell})\lambda^\ell \frac{(b-a)}{2} < \lambda^{N(\varepsilon)} \frac{(b-a)}{2} \leq \frac{2\varepsilon}{b-a} \cdot \frac{b-a}{2} = \varepsilon.$$

Έστω ξ τό όριο τής άκολουθίας $\{x_n\}_{n=0,1,2,\dots}$, πού θά ανήκει φυσικά στό έσωτερικό τοῦ I . Σάν συνέπεια τής συνέχειας τής συναρτήσεως $g(x)$ καί παίρνοντας όρια στή σχέση τοῦ άλγόριθμου $x_{n+1} = g(x_n)$ μέ $n \rightarrow \infty$ βρίσκουμε άμέσως ότι $\xi = g(\xi)$ καί άρα ή ξ είναι ρίζα τής έξισώσεως $x = g(x)$. Άν τέλος υπήρχε καί άλλη ρίζα $\xi^* \neq \xi$ τής άρχικής έξισώσεως στό διάστημα I , τότε εφαρμόζοντας τή συνθήκη τοῦ Lipschitz βρίσκουμε

$$|\xi^* - \xi| = |g(\xi^*) - g(\xi)| \leq \lambda |\xi^* - \xi| < |\xi^* - \xi|,$$

πράγμα πού είναι άτοπο. Τέλος σημειώνουμε τό γεγονός πώς είναι δυνατό νά άποδειχτεῖ ότι ή ρίζα ξ είναι άπλή.

Πόρισμα

Άν ή συνάρτηση $g(x)$ είναι συνεχής, στό διάστημα I (όπου $I \equiv [a, b]$) καί ύπάρχει ή παράγωγός της στό αντίστοιχο άνοικτό διάστημα καί ικανοποιεῖ τή σχέση $|g'(x)| \leq \lambda < 1$, για κάθε $x \in (a, b)$, ή δέ άρχική προσέγγιση x_0 έκλεγεῖ, όπως στό θεώρημα, καί επί πλέον ικανοποιεῖ τήν ίδια σχέση (7.13),

τότε έχουμε τά ίδια συμπεράσματα με αυτά του θεωρήματος.

Απόδειξη

Εφαρμόζοντας τό θεώρημα έσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για δύο όποιεσδήποτε τιμές $x, x' \in I$ έχουμε

$$g(x) - g(x') = g'(\xi^*)(x - x'), \quad \min(x, x') < \xi^* < \max(x, x')$$

καί έπομένως

$$|g(x) - g(x')| \leq \lambda |x - x'|$$

μέ $0 < \lambda < 1$ (τήν περίπτωση $\lambda = 0$ αποκλείουμε σάν τετριμμένη).

Έτσι ικανοποιείται ή συνθήκη του Lipschitz (7.12) του θεωρήματος καί έπομένως τά συμπεράσματα ακολουθούν τά ίδια με σταθερά Lipschitz τόν άριθμό λ .

Θεώρημα 2

Αν $I \equiv [\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$ $|\epsilon > 0$ είναι μία περιοχή [⊗] της ρίζας ξ της έξισώσεως $x = g(x)$, όπου για κάθε $x \in I$ έχουμε

$$|g(x) - g(\xi)| \leq \lambda |x - \xi|, \quad (7.16)$$

μέ $0 < \lambda < 1$, τότε, για κάθε $x_0 \in I$, ο άλγόριθμος $x_{n+1} = g(x_n)$ $|$ $n = 0, 1, 2, \dots$ παράγει άκολουθία $\{x_n\} | n = 0, 1, 2, \dots$, της όποιας όλοι οί όροι άνήκουν στό διάστημα I . Επί πλέον ή άκολουθία αύτή συγκλίνει στη ρίζα ξ , πού είναι καί ή μόνη ρίζα της έξισώσεως $x = g(x)$ στό I .

Απόδειξη

Έχουμε ότι $x_0 \in I$. Έστω τώρα ότι $x_k \in I$ ($k \geq 0$). Θα άποδείξουμε ότι καί $x_{k+1} \in I$. Αν καλέσουμε μέ $\epsilon_n = x_n - \xi$ τό αρά-

[⊗] Αν καί στην Ανάλυση σάν περιοχή ενός σημείου ξ με άκτίνα $\epsilon > 0$ θεωρείται τό άνοικτό διάστημα $(\xi - \epsilon, \xi + \epsilon)$ έμεϊς έδω θά θεωρούμε τό αντίστοιχο κλειστό.

μα στην n επανάληψη, τότε, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο και το γεγονός ότι η ξ είναι ρίζα της $x = g(x)$, βρίσκουμε από τη σχέση (7.16) ότι

$$|\varepsilon_{k+1}| = |x_{k+1} - \xi| = |g(x_k) - g(\xi)| \leq \lambda |x_k - \xi| = \lambda |\varepsilon_k| \stackrel{\textcircled{*}}{<} |\varepsilon_k|. \quad (7.17)$$

Οι παραπάνω σχέσεις αποδείχνουν ότι $x_{k+1} \in I$. Χρησιμοποιώντας τώρα το αποτέλεσμα των σχέσεων (7.17) ειαδοχικά λαβαίνουμε

$$|\varepsilon_n| \leq \lambda |\varepsilon_{n-1}| \leq \lambda^2 |\varepsilon_{n-2}| \leq \dots \leq \lambda^n |\varepsilon_0|.$$

Επειδή δέ $0 < \lambda < 1$ έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = 0$. Άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$. Το γεγονός ότι η ρίζα ξ είναι η μόνη στο διάστημα I αποδεικνύεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, όπως και στο Θεώρημα 1.

Πόρισμα

Αν στις υποθέσεις του θεωρήματος αντικαταστήσουμε την (7.16), με τις υποθέσεις $g(x)$ συνεχής στο I και υπάρχει η παράγωγός της στο $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ και ικανοποιεί τη σχέση $|g'(x)| \leq \lambda < 1$, τότε τα συμπεράσματα παραμένουν τα ίδια.

Θεώρημα 3 (Παραλλαγή του θεωρήματος 2)

Αν $I \equiv [a, b]$ είναι ένα διάστημα, που περιέχει τη μία και μόνο ρίζα ξ της εξίσωσης $x = g(x)$, όπου για κάθε $x \in I$ ισχύει η (7.16) δηλαδή

⊛ θα πρέπει να τονιστεί το γεγονός πως η τελευταία σχέση στις (7.17) γίνεται ισότητα αν $\varepsilon_k = 0$, που σημαίνει $x_k = \xi$. Τότε όμως το αντίστοιχο μέρος του θεωρήματος θα έχει αποδειχτεί με την επανάληψη x_{k+1} . Αυτό δέ γιατί πετυχαίνουμε άμεσα τη σύγκλιση στη ρίζα ξ , αφού $x_{k+1} = g(x_k) = g(\xi) = \xi$ και συνεπώς $|x_{k+1} - x_k| = 0$. Η ίδια παρατήρηση ισχύει σε όλες τις αντίστοιχες σχέσεις του παρόντος.

$$|g(x) - g(\xi)| \leq \lambda |x - \xi|,$$

μέ $0 < \lambda < 1$, καί σάν x_0 έκλεγεῖ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο ἀπό τό μικρότερο ἀπό τά δύο διαστήματα $[a, \xi]$ καί $[\xi, b]$ ἢ ἀπό τό συμμετρικό τοῦ μικρότερου διαστήματος ὡς πρός τή ρίζα ξ [⊕], τότε ὅλες οἱ ἐπαναλήψεις, πού παράγονται ἀπό τόν ἀλγόριθμο $x_{n+1} = g(x_n)$ $|n=0,1,2,\dots$ ἀνήκουν στό διάστημα I καί ἡ ἀκολουθία τους συγκλίνει στή ρίζα ξ .

Πόρισμα (Παραλλαγή τοῦ Πορίσματος τοῦ θεωρήματος 2)

Ἄν στίς ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος ἀντικαταστήσουμε τήν (7.16) μέ τίς ὑποθέσεις $g(x)$ συνεχῆς στό I καί ὑπάρχει ἡ παράγωγός της στό (a,b) καί ικανοποιεῖ τή σχέση $|g'(x)| \leq \lambda < 1$, τότε τά συμπεράσματα παραμένουν τά ἴδια.

Παρατηρήσεις:

i) Ἡ ὑπόθεση (7.16) τοῦ θεωρήματος 2 εἶναι ἀσθενέστερη ἀπό τήν ἀντίστοιχη συνθήκη τοῦ Lipschitz (7.12) τοῦ θεωρήματος 1 καί αὐτό γιατί στήν (7.16) τό ἕνα ἀπό τά δύο σημεῖα x καί x' τῆς (7.12) εἶναι σταθερό καί συγκεκριμένα ἡ ἀγνωστη ρίζα ξ .

ii) Τό θεώρημα 3 γενικεύει σημαντικά τήν ὑπόθεση τοῦ θεωρήματος 2, ὅπου ἀντί γιά τό διάστημα $I \equiv [\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$ τῆς ρίζας θεωρεῖται τό γενικότερο $I \equiv [a, b]$, πού περιέχει τή ρίζα ξ . Αὐτό εἶναι φυσικά πιό ρεαλιστικό, γιατί στήν πράξη ἡ ρίζα ξ εἶναι ἀγνωστη, ὅπως τονίστηκε στήν προηγούμενη παρατήρηση.

⊕ Ἡ διατύπωση τοῦ θεωρήματος μέ τόν τρόπο αὐτό εἶναι πρακτικά πολύ χρήσιμη γιατί μπορούμε εὐκόλα νά διαλέξουμε τό x_0 σάν τό γνωστό ἔκρο τοῦ μικρότερου ἀπό τά δύο διαστήματα $[a, \xi]$ καί $[\xi, b]$. Τό μικρότερο διάστημα βρίσκεται ἀμέσως μέ τήν ἐξέταση τῆς θέσης τοῦ μέσου $\frac{a+b}{2}$ τοῦ διαστήματος I ὡς πρός τή ρίζα ξ .

iii) Τά πορίσματα τών θεωρημάτων 1,2 καί 3 άν καί άσθενέστερα τών αντίστοιχων θεωρημάτων τους άποβαίνουν πιά χρήσιμα στήν πράξη, γιατί πολλές φορές γνωρίζουμε άρκετά για τήν $g'(x)$ καί τή συμπεριφορά της στά άντίστοιχα διαστήματα. Οί προηγούμενες παρατηρήσεις (i) καί (ii) ισχύουν φυσικά καί για τά άντίστοιχα πορίσματα έπεξηγούμενες άνάλογα.

iv) Άν είναι γνωστό ότι $|g'(\xi)| < 1$ καί ή συνάρτηση $g'(x)$ είναι συνεχής στό ξ , τότε, σύμφωνα μέ τήν άντίστοιχη θεωρία τής Άναλύσεως, είναι δυνατό νά άποδειχτεί ότι ύπάρχει μία περιοχή τής ρίζας ξ τέτοια ώστε νά ικανοποιούνται οί προϋποθέσεις τοϋ Πορίσματος τοϋ θεωρήματος 2 καί έπομένως αύτό νά έφαρμόζεται.

v) Άν είναι γνωστό ότι $|g'(\xi)| \geq 1$ ή $|g'(x)| \geq 1$ σέ ένα διάστημα $I \equiv [a,b] \ni \xi$, τότε, έκτός έξαιρέσεων, για όποιαδήποτε έκλογή τοϋ x_0 ή άκολουθία, πού παράγεται άπό τόν άλγόριθμο $x_{n+1} = g(x_n) \quad |n=0,1,2,\dots$, δέν θά συγκλίνει στή ρίζα ξ .

7.4.3. Γεωμετρική έρμηνεία τής γενικής έπαναληπτικής μεθόδου

Καταρχήν δίνουμε μία γεωμετρική έρμηνεία τοϋ θεωρήματος 1. Όπως είναι γνωστό, άπό τήν άνάπτυξη τής θεωρίας στίς δύο προηγούμενες παραγράφους 7.4.1. καί 7.4.2., ή ρίζα ξ τής έξιśώσεως $x = g(x)$, πού γράφεται καί σάν $x - g(x) = 0$, είναι ή τετμημένη τοϋ σημείου τομής (έφόσον ύπάρχει) τών καμπύλων $y = x$ καί $y = g(x)$. Σύμφωνα μέ τίς άπαιτήσεις τοϋ θεωρήματος 1 περιορίζουμε τή μελέτη μας στό διάστημα $I \equiv [a,b]$ (Σχήμα 5). θεωρούμε τό μέσο M_0 τοϋ διαστήματος I τετμημένης $x_0 = \frac{a+b}{2}$ καί τό άντίστοιχο σημείο P_0 τής καμπύλης $g(x)$ τεταγμένης $g(x_0)$. Άπό τό σημείο P_0 φέρνουμε τίς εύθείες άντίστοιχων κλίσεων λ καί $-\lambda$ ($0 < \lambda < 1$). Έτσι όρίζονται τά τρίγωνα P_0CE καί P_0DF άπό τά σημεία τομής τών εύθειών, πού

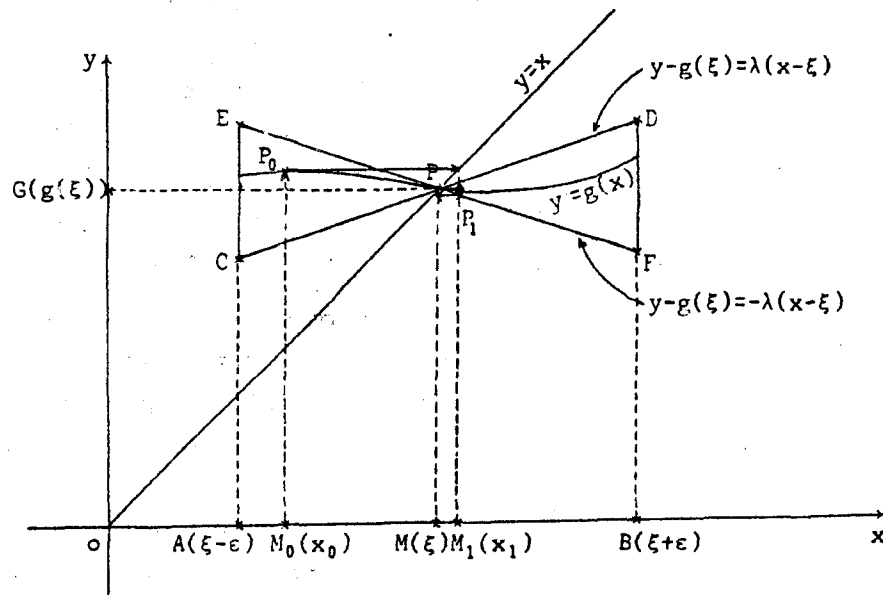
θεία $y=x$ θά συναντᾷ τὴν πλευρὰ P_0D (συνεπῶς καὶ τὴν P_0F) τοῦ τριγώνου P_0DF ἄρα καὶ τὸ τμήμα τῆς καμπύλης $y=g(x)$, πού βρίσκεται μέσα στοῦ τρίγωνο αὐτό. Τό σημεῖο τομῆς P θά ἔχει τετμημένη ξ , πού θά εἶναι ἡ μία καὶ μόνι ἀπλή ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x=g(x)$ στοῦ διαστήματος I . Ἄν ἡ διαφορά y_0 συνέβαινε νά εἶναι ἀρνητική, τότε ἡ εὐθεία $y=x$ θά συναντοῦσε τὴν πλευρὰ CP_0 τοῦ τριγώνου P_0CE , ἄρα καὶ τὴν πλευρὰ EP_0 , καὶ συνεπῶς τὸ τμήμα τῆς καμπύλης $y=g(x)$, πού θά βρισκόταν μέσα στοῦ τρίγωνο αὐτό. Γιά τὴν ἐφαρμογή τώρα τῆς γενικῆς ἐπαναληπτικῆς μεθόδου ξεκινοῦμε ἀπὸ τὸ σημεῖο P_0 καὶ φέρνουμε παράλληλη πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x . Αὕτη συναντᾷ τὴν εὐθεία $y=x$ στοῦ σημεῖο, πού ἔχει τετμημένη $g(x_0)=x_1$. Βρίσκουμε τώρα τὸ σημεῖο τῆς καμπύλης $y=g(x)$, πού ἔχει τετμημένη x_1 καὶ συνεπῶς τεταγμένη $g(x_1)$ καὶ συνεχίζουμε μέ τὸν ἴδιο τρόπο. Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἀκολουθία $\{x_n\} | n=0,1,2,\dots$, πού παράγεται ἀπὸ τὸν ἀλγόριθμο $x_{n+1}=g(x_n) | n=0,1,2,\dots$, στὴν περίπτωση τοῦ σχήματος, συγκλίνει στὴ ρίζα ξ . Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι ἂν στὴν περίπτωση τοῦ σχήματος, εἶχαμε $\lambda \geq 1$, τότε ἡ εὐθεία $y=x$ ἐνῶ θά συναντοῦσε τὴν P_0F δέν θά συναντοῦσε τὴν πλευρὰ P_0D τοῦ τριγώνου P_0DF καὶ ἐπομένως θά ἦταν ἐνδεχόμενον νά μὴν συναντοῦσε καὶ τὸ τμήμα τῆς $y=g(x)$, πού θά βρισκόταν μέσα στοῦ P_0DF μέ συνέπεια νά μὴν ὑπῆρχε ρίζα τῆς $x=g(x)$ στοῦ διαστήματος I . Γιά τὸν ἴδιο λόγο ἂν $\lambda < 1$ καὶ $y_0 >$

$> (1-\lambda) \frac{(b-a)}{2}$ φτάνουμε στοῦ ἴδιο συμπέρασμα. Ἔτσι μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι οἱ συνθήκες $0 < \lambda < 1$ καὶ ἡ (7.13) εἶναι ἱκανές γιὰ τὴν ἐξασφάλιση τῆς ὑπάρξεως ρίζας ξ τῆς ἐξισώσεως $x=g(x)$, γιὰ κάθε συνάρτηση $g(x)$, πού ἱκανοποιεῖ τὴ συνθήκη (7.12) τοῦ Lipschitz.

Ἡ γεωμετρικὴ ἐρμηνεία τοῦ Πορίσματος τοῦ θεωρήματος 1 μπορεῖ νά γίνει μέ τὸν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο, ὅπως καὶ προηγούμενα στὴν περίπτωση τοῦ Σχήματος 5, μέ τὴ μόνη διαφορά ὅτι οἱ παραδεκτές συναρτήσεις $g(x)$ θά εἶναι τέτοιες ὥστε ἡ

κλίση τους σε κάθε σημείο να είναι απόλυτα μικρότερη ή ίση του λ , πράγμα που δεν ήταν απαραίτητο πριν.

Η γεωμετρική έρμηνεία του θεωρήματος 2 δίνεται στο επόμενο Σχήμα 6. Υπάρχει βέβαια κάποια αντιστοιχία με εκείνη του προηγούμενου Σχήματος 5 με μερικές τροποποιήσεις. Το διάστημα, στο οποίο περιορίζουμε τη μελέτη μας, είναι το διάστημα $I \equiv [\xi - \epsilon, \xi + \epsilon] \mid \epsilon > 0$ της ρίζας ξ της εξισώσεως $x = g(x)$ με άκρα τα σημεία A και B αντίστοιχα. Από το σημείο $P(\xi, g(\xi))$ φέρνουμε τώρα τρεις ευθείες κλίσεων λ και $-\lambda$ ($0 < \lambda < 1$) και ορίζουμε με τον ίδιο τρόπο τα τρίγωνα PCE και PDF. Είναι φανερό ότι οι γραφικές παραστάσεις των καμπύλων $y=x$ και $y=g(x)$ θα διέρχονται από το σημείο P και άκομη ότι η καμπύλη $y=g(x)$, που από τη συνθήκη (7.16) ξέρουμε ότι, είναι συνεχής μόνο στο σημείο P, θα βρίσκεται ολόκληρη μέσα στα τρίγωνα PCE και PDF με τα άκρα της και πάλι στα ερθύγραμμα τμήματα CE και FD. Στο σχήμα η συνάρτηση $g(x)$



Σχήμα 6

σχεδιάστηκε συνεχώς. Για την εφαρμογή τώρα της γενικής επαναληπτικής μεθόδου παίρνουμε τυχαίο σημείο της $y=g(x)$ τετμημένης $x_0 \in I$ και φέρνουμε παράλληλη, όπως και πριν, προς τον άξονα των x . Βρίσκουμε έτσι το σημείο, πού συναντά η παράλληλη την ευθεία $y=x$, το οποίο θα έχει τετμημένη $g(x_0)=x_1$. Στη συνέχεια βρίσκουμε το σημείο της $y=g(x)$ με τετμημένη x_1 κ.ο.κ. Είναι φανερό, στο σχήμα, ότι η ακολουθία $\{x_n\} | n=0,1,2,\dots$, πού παράγεται από τον αλγόριθμο, συγκλίνει στη ρίζα ξ .

Η γεωμετρική έρμηνεία του Πορίσματος του θεωρήματος 2 είναι, σε σχέση με το θεώρημα, ανάλογη με τη γεωμετρική έρμηνεία του Πορίσματος του θεωρήματος I προς εκείνη του αντίστοιχου θεωρήματος.

Η γεωμετρική έρμηνεία του θεωρήματος 3 και του Πορίσματος του αντίστοιχου σχεδόν απόλυτα σ'αυτήν του Σχήματος 6.

7.4.4. ΕΙΔΟΣ ΣΥΓΚΛΙΣΕΩΣ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Υποθέτουμε ότι $I \equiv [a,b]$ είναι ένα διάστημα, πού περιέχει στο έσωτερικό του τη ρίζα ξ της εξισώσεως $x=g(x)$ για τη συνάρτηση $g(x)$ της οποίας ισχύει $g(x) \in C^k(I)$ με $k>1$. Υποθέτουμε ακόμη ότι ισχύουν οι σχέσεις $g^{(m)}(\xi)=0 | m=1(1)k-1$ και $g^{(k)}(\xi) \neq 0$ και ότι τόσο η άρχική προσέγγιση όσο και οι επαναλήψεις, πού παράγονται από τον αλγόριθμο $x_{n+1}=g(x_n) | n=0,1,2,\dots$, ανήκουν στο I και η ακολουθία τους συγκλίνει στη ρίζα ξ . Τότε αν θεωρήσουμε το σφάλμα ϵ_{n+1} κατά την $n+1$ επανάληψη και χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Taylor μπορούμε νά πάρουμε

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1} = x_{n+1} - \xi = g(x_n) - g(\xi) &= (x_n - \xi)g'(\xi) + \frac{1}{2!}(x_n - \xi)^2 g''(\xi) + \\ &+ \dots + \frac{1}{(k-1)!}(x_n - \xi)^{k-1} g^{(k-1)}(\xi) + \frac{1}{k!}(x_n - \xi)^k g^{(k)}(\xi_n), \end{aligned} \quad (7.18)$$

όπου $\min(x_n, \xi) < \xi_n < \max(x_n, \xi)$. Λαβαίνοντας υπόψη τις υποθέσεις, αναδιατάσσοντας και παίροντας όρια, με $n \rightarrow \infty$, και θεωρώντας και τη συνέχεια της $g^{(k)}(x)$ στο I , προκύπτει τελικά ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^k} = \frac{1}{k!} g^{(k)}(\xi).$$

Δηλαδή όριακά (ή στην πράξη για πολύ μεγάλες τιμές του n), τό σφάλμα σε μία επανάληψη είναι ανάλογο της k δυνάμεως του σφάλματος της προηγούμενης επαναλήψεως.

Με όσα αναπτύξαμε στην προηγούμενη παράγραφο (κυρίως με τά Πορίσματα των θεωρημάτων 1, 2 και 3 και την Παρατήρηση (iv)) μπορούμε νά πούμε πώς αν $k=1$ (πράγμα πού δέν υπερ-ρισταίνεται στην ανάπτυξη της θεωρίας της παρούσας παραγράφου) και επί πλέον $|g'(\xi)| < 1$, τότε υπάρχει περιοχή της ρίζας ξ , έστω I_1 , τέτοια ώστε αν ή άρχική προσέγγιση έκλεγεϊ άπ'αυτήν, ή γενική επαναληπτική μέθοδος δίνει ακολου-θία, πού συγκλίνει πάντοτε στην ξ . Η σύγκλιση, πού πετυ-χαίνεται με τόν τρόπο αυτό καλεϊται σύγκλιση πρώτης τάξης ή γραμμική σύγκλιση. Στην περίπτωση όμως πού είναι $k>1$ ή σχέση $|g'(\xi)| < 1$ ικανοποιείται αυτόματα, αφού $g'(\xi) = 0$. Έτσι είμαστε σε θέση νά ξέρουμε ότι σε μία μέθοδο k τάξης συγ-κλίσεως ($k>1$) υπάρχει πάντοτε περιοχή I_1 της ρίζας τέτοια ώστε αν ή άρχική προσέγγιση έκλεγεϊ άπ' αυτή, ή μέθοδος νά συγκλίνει. Βασιζόμενοι στην παρατήρηση, πού μόλις κάνα-με, οδηγούμαστε στην πράξη στην κατασκευή γενικών επαναλη-πτικών μεθόδων, πού νά είναι τουλάχιστον δεύτερης τάξης (τε-τραγωνικής) σύγκλίσεως.

Στή συνέχεια περιγράφουμε την πορεία, πού ακολουθοϋ-με στην πράξη για νά διαλέξουμε τό x_0 στην περίπτωση μι-ας μεθόδου τουλάχιστον δεύτερης τάξης σύγκλίσεως έτσι ώστε ή γενική επαναληπτική μέθοδος νά συγκλίνει.

"Αν $I \equiv [a, b]$ είναι τό διάστημα στό έσωτερικό του οποίου βρίσκεται ή μία καί μόνο ρίζα ξ τής έξισώσεως $x = g(x)$ καί είναι τέτοιο ώστε $g(x) \in C^2(I)$, τότε άφοϋ $g'(\xi) = 0$ άν εφαρμόσουμε τόν άλγόριθμο $x_{n+1} = g(x_n) \mid n = 0, 1, 2, \dots$ μέ $x_0 \in I$ δεδομένο (άλλά άγνωστο πρός τό παρόν), θά ισχύει τό άποτέλεσμα τής σχέσης (7.18), πού γιά $k=2$ (άσχετο μέ τήν τιξη συγκλίσεως τής μεθόδου) καί $n=0$ θά δίνει

$$e_1 = \frac{1}{2} e_0^2 g''(\xi_0), \min(x_0, \xi) < \xi_0 < \max(x_0, \xi). \quad (7.19)$$

Η συνάρτηση $g''(x)$ είναι συνεχής στό κλειστό διάστημα I , άρα καί φραγμένη. θά ισχύει, λοιπόν γιά κάθε $x \in I$, ή σχέση

$$\frac{1}{2} |g''(x)| \leq M, \quad (7.20)$$

όπου M γνωστός θετικός άριθμός. Χρησιμοποιώντας τήν (7.20) στήν (7.19) μπορούμε νά πάρουμε διαδοχικά

$$|e_1| \leq M |e_0|^2 < M(b-a) |e_0| = \lambda |e_0|, \quad (7.21)$$

όπου θέσαμε $\lambda = M(b-a)$. "Αν $\lambda < 1$, τότε ή σχέση των δύο άκράων μελών των (7.21) είναι τής ίδιας μορφής μέ τή γενική σχέση των άκράων μελών των (7.17). Συνεπώς $|e_1| < |e_0|$ καί άρα $x_1 \in I$. Έπαγωγικά μπορούμε τότε νά αποδείξουμε, όπως παραπάνω, ότι ισχύουν τά συμπεράσματα των σχέσεων (7.17) του θεωρήματος 2 τής προηγούμενης παραγράφου. Δηλαδή ότι

$$|e_{k+1}| < \lambda |e_k| \quad \text{καί} \quad |e_{k+1}| < |e_k|. \quad (7.22)$$

"Αρα από τή δεύτερη σχέση των (7.22) έχουμε άμέσως ότι άν $x_k \in I$ ($k \geq 0$), τότε καί $x_{k+1} \in I$. Η πρώτη σχέση δίνει σάν άποτέλεσμα

$$|e_n| < \lambda^n |e_0|,$$

όπως ακριβώς στο θεώρημα 2. Έπομένως η μέθοδος θα συγκλίνει στη ρίζα ξ για κάθε x_0 , που θα ανήκει στο μικρότερο από τα δύο διαστήματα $[a, \xi]$ και $[\xi, b]$, όπως συμβαίνει στο θεώρημα 3 της ίδιας παραγράφου. Αν όμως $\lambda \geq 1$, τότε μικραίνουμε (συνήθως διχοτούμε) το αρχικό διάστημα έντοπισμού της ρίζας ξ . Έτσι βρίσκουμε ένα νέο διάστημα έντοπισμού της, I , ένα νέο M (δέν είναι απαραίτητο, αν η $g''(x)$ είναι πολύπλοκης σχετικά μορφής, γιατί μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο) ένα νέο λ (που στην περίπτωση της διχοτομήσεως θα είναι τουλάχιστον το μισό του προηγούμενου) κ.ο.κ. Η επαναληπτική αυτή εργασία σταματά μόλις βρεθεί $\lambda < 1$.

7.5. Μέθοδος των Newton - Raphson

7.5.1. Περιγραφή της μεθόδου

Η γενική επαναληπτική μέθοδος, που αναπτύχτηκε στην προηγούμενη παράγραφο 7.4., είναι βέβαια απλή στην εφαρμογή της. Παρουσιάζει όμως μία σημαντική δυσκολία τουλάχιστον στο ξεκίνημά της. Κι αυτό γιατί, όπως είδαμε, από τις άπειρες αναδιατάξεις της εξισώσεως $f(x) = 0$ της μορφής $x = g(x)$, θα πρέπει να βρούμε μία τέτοια ώστε $|g'(\xi)| < 1$. Εκτός από τη δυσκολία αυτή υπάρχει πάντοτε και το αναμφισβήτητο γεγονός της άργης σχετικά συγκλίσεως της μεθόδου, αφού, εκτός εξαιρέσεων ίσως, η σύγκλιση θα είναι γραμμική. Σέ αντιδιαστολή προς αυτά, που μόλις αναφέραμε, η μέθοδος των Newton - Raphson είναι της γενικής μορφής $x = g(x)$, αλλά η $g(x)$ είναι πάντα η ίδια συνάρτηση των x , $f(x)$ και $f'(x)$. Συγκριμένα είναι

$$g(x) \equiv x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (7.23)$$

Επιπρόσθετα η νέα μέθοδος είναι τουλάχιστον τετραγωνικής συγκλίσεως στην περίπτωση μιας απλής ρίζας ξ . Για τούς πα-

ραπάνω λόγους και ακόμη για τό λόγο ότι ή μέθοδος προγραμ-
ματίζεται εύκολα σέ έναν Η.Υ. αποτελεί αυτή τήν πιο δημο-
φιλή μέθοδο, για τήν εύρεση των ριζών των εξισώσεων, μετα-
ξύ όλων των επαναληπτικών μεθόδων. Έχοντας υπόψη τήν εκ-
φραση (7.23) για τή συνάρτηση $g(x)$ έχουμε άμέσως ότι ο άλ-
γόριθμος των Newton - Raphson είναι ο ακόλουθος

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad | n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.24)$$

μέ x_0 δεδομένο. Για τήν έκλογή φυσικά του x_0 ισχύει ό,τι ά-
ναφέραμε στό τέλος της προηγούμενης παραγράφου, άφοϋ, ό-
πως θά άποδείξουμε, ή μέθοδος είναι τουλάχιστον δεύτερης
τάξης συγκλίσεως στήν περίπτωση της άπλης ρίζας. Στή συ-
νέχεια διατυπώνουμε και άποδείχνουμε δύο θεωρήματα για τή
σύγκλιση της μεθόδου των Newton - Raphson στήν περίπτωση
της άπλης και πολλαπλής ρίζας ξ .

Θεώρημα 1

Αν $I \equiv [a, b]$ είναι διάστημα τέτοιο ώστε $f(x) \in C^2(I)$
και $\xi \in I$, όπου ξ είναι ή άπλή ρίζα της εξισώσεως $f(x) = 0$, τό-
τε αν ή άκολουθία, που παράγεται από τόν άλγόριθμο των Ne-
wton - Raphson (7.24), συγκλίνει, ή σύγκλιση θά είναι τουλά-
χιστον τετραγωνική.

Απόδειξη

Για τήν άπόδειξη του ισχυρισμού του θεωρήματος άρκει
νά άποδειχτεί ότι για τή συνάρτηση $g(x)$, που δίνεται από τήν
έκφραση (7.23), θά έχουμε $g'(\xi) = 0$. Πραγματικά παραγωγίζοντας
τήν (7.23) βρίσκουμε

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \quad (7.25)$$

και έπειδή ή ξ είναι άπλή ρίζα (δηλαδή $f'(\xi) \neq 0$) προκύπτει

άμέσως ότι

$$g'(\xi) = \frac{f(\xi)f''(\xi)}{[f'(\xi)]^2} = 0. \quad (7.26)$$

Έδω θα πρέπει να επισημάνουμε το γεγονός ότι η μέθοδος των Newton - Raphson είναι τουλάχιστον τετραγωνικής συγκλίσεως. Η έκφραση τουλάχιστον σημαίνει ότι είναι δυνατόν η τάξη της συγκλίσεως της να είναι ανώτερη της δεύτερης. Δηλαδή, κάτω από κατάλληλες προϋποθέσεις είναι δυνατό να έχουμε $g''(\xi) = 0$. Πραγματικά, υποθέτοντας ότι $f(x) \in C^3(I)$ και παραγωγίζοντας την (7.25) βρίσκουμε

$$g''(x) = \frac{[f'(x)]^2 f''(x) + f(x)f'(x)f'''(x) - 2f(x)[f''(x)]^2}{[f'(x)]^3},$$

οπότε

$$g''(\xi) = \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)},$$

πού μπορεί να είναι μηδέν αν $f''(\xi) = 0$.

Θεώρημα 2

Αν $I \equiv [a, b]$ διάστημα τέτοιο ώστε $f(x) \in C^2(I)$ και $\xi \in I$, όπου ξ είναι η ρίζα της εξισώσεως $f(x) = 0$, βαθμού πολλαπλότητας $k > 1$, τότε αν η ακολουθία, πού παράγεται από τον αλγόριθμο των Newton - Raphson, συγκλίνει, η σύγκλιση θα είναι γραμμική.

Απόδειξη

Όπως είναι φανερό στην απόδειξη του θεωρήματος 1 η σχέση (7.26) προκύπτει από την (7.25) εάν συνέπεια της συνέχειας των $f(x)$, $f'(x)$ και $f''(x)$ και του γεγονότος ότι η ρίζα ξ είναι άπλη. Ισχύει δηλαδή $f'(\xi) \neq 0$. Στην προκείμενη περίπτωση έχουμε, εξαιτίας της πολλαπλότητας της ρίζας ξ , ότι $f'(\xi) = 0$, και έτσι βρισκόμαστε πάλι περίπτωση άοριστίας

γιά $x=\xi$. Γιά τήν άρση αúτης τής άοριστίας έργαζόμαστε ώς έξής. Άφοϋ ή ξ είναι ρίζα τής $f(x)$ πολλαπλότητας $k>1$ ή $f(x)$ θά γράφεται

$$f(x) = (x-\xi)^k h(x), \quad h(\xi) \neq 0 \quad (7.27)$$

καί έπομένως εύκολα μπορούμε νά βρούμε άπ'αúτην ότι

$$f'(x) = (x-\xi)^{k-1} [kh(x) + (x-\xi)h'(x)] \quad (7.28)$$

καί

$$f''(x) = (x-\xi)^{k-2} [k(k-1)h(x) + 2k(x-\xi)h'(x) + (x-\xi)^2 h''(x)] \quad (7.29)$$

Γιά τήν εύρεση τής $g'(\xi)$ έχουμε προφανώς ότι

$$g'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} g'(x),$$

όποτε αντικαθιστώντας στό δεύτερο μέλος τής παραπάνω ισότητας τό δεύτερο μέλος τής (7.25) καί στή συνέχεια τίς άντίστοιχες έκφράσεις γιά τίς $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ άπό τίς (7.27), (7.28), (7.29), κάνοντας τίς δυνατές άπλοποιήσεις καί παίρνοντας τό όριο τής $g'(x)$, όταν $x \rightarrow \xi$, βρίσκουμε τελικά ότι

$$g'(\xi) = \frac{k-1}{k}.$$

Άφοϋ δέ $k>1$ έχουμε ότι

$$0 \neq |g'(\xi)| = \frac{k-1}{k} < 1$$

καί έπομένως ή μέθοδος είναι γραμμικής συγκλίσεως.

7.5.2. Μ έ θ ο δ ο ς τ ῶ ν Ν e w t o n - R a p h s o n γ ι á τ ή ν ε ύ ρ ε σ η τ ή ς τ ε τ ρ α γ ω ν ι - κ ή ς ρ ί ζ α ς

Είναι φανερό ότι ό άλγόριθμος τῶν Ν e w t o n - R a p h s o n

(7.24) για συγκεκριμένες εκφράσεις της συναρτήσεως $f(x)$ παίρνει και συγκεκριμένες μορφές. Έκμετάλλευση του γεγονότος αυτού γίνεται στην περίπτωση της εύρεσεως της τετραγωνικής ρίζας ενός θετικού αριθμού α . Στην περίπτωση αυτή αν καλέσουμε με x την τετραγωνική ρίζα του α θα έχουμε

$$f(x) \equiv x^2 - \alpha = 0, \quad f'(x) \equiv 2x,$$

και επομένως το σχήμα των Newton - Raphson θα είναι το ακόλουθο

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + \alpha}{2x_n} \quad | n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.30)$$

μέ x_0 κατάλληλη αρχική προσέγγιση. Στην πράξη αντί του σχήματος (7.30) χρησιμοποιούμε το ισοδύναμό του

$$x_{n+1} = 0.5 \left(x_n + \frac{\alpha}{x_n} \right) \quad | n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.31)$$

κι αυτό γιατί το δεύτερο σχήμα είναι οικονομικότερο σε πράξεις, αφού απαιτεί έναν πολλαπλασιασμό λιγότερο για την εύρεση της τιμής x_{n+1} απ' ό,τι το σχήμα (7.30). Σύμφωνα με αυτά που αναπτύχθηκαν στην παράγραφο 7.4.4. για την έκλογή του x_0 , καθίσταται φανερό, πώς αν η έκλογή αυτή γίνει από την περιοχή, που θα περιέχει στο έσωτερικό της την $\sqrt{\alpha}$, τότε ο αλγόριθμος (7.31) θα συγκλίνει στην $\sqrt{\alpha}$, ενώ αν γίνει από την περιοχή, που θα περιέχει στο έσωτερικό της την $-\sqrt{\alpha}$, τότε ο αλγόριθμος θα συγκλίνει στην $-\sqrt{\alpha}$.

Ειδικά για την έκλογή της αρχικής προσεγγίσεως x_0 στην περίπτωση της χρησιμοποίησεως του αλγορίθμου (7.31), για την εύρεση της τετραγωνικής ρίζας του θετικού αριθμού α , μπορούμε να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα, που όπως γίνεται φανερό από τη διατύπωσή του, έχει τεράστια

πρακτική αξία.

Θεώρημα

Για κάθε $x_0 > 0$, ο αλγόριθμος (7.31), παράγει ακολουθία που συγκλίνει στην $\sqrt{a}$ ($a > 0$).

Απόδειξη

Για ένα οποιοδήποτε $x_0 > 0$ και χρησιμοποιώντας την έκφραση (7.31) μπορούμε πολύ εύκολα να αποδείξουμε επαγωγικά ότι

$$x_n > 0 \quad | n = 0, 1, 2, \dots$$

Στη συνέχεια είναι δυνατό να παρατηρήσουμε ότι

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = 0.5(x_n + \frac{a}{x_n}) - \sqrt{a} = 0.5\left(\sqrt{x_n} - \sqrt{\frac{a}{x_n}}\right)^2 \geq 0 \quad | n = 0, 1, 2, \dots$$

και επομένως

$$x_n \geq \sqrt{a} \quad | n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.32)$$

Ακόμη είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι σύμφωνα με την (7.32) έχουμε

$$x_n - x_{n+1} = 0.5\left(\frac{x_n^2 - a}{x_n}\right) \geq 0.$$

Αρα

$$x_n \geq x_{n+1} \quad | n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.33)$$

Από τις σχέσεις (7.32) και (7.33) συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $\{x_n\} \quad | n = 1, 2, 3, \dots$ είναι φθίνουσα και φραγμένη από κάτω από την $\sqrt{a}$. Επομένως θα συγκλίνει σε αριθμό $\xi \geq \sqrt{a}$. Επειδή όμως είναι γνωστό ότι ο αλγόριθμος (7.31) συγκλίνει σε μία από τις ρίζες $\pm \sqrt{a}$ της αρχικής εξίσωσης $f(x) \equiv x^2 - a = 0$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\xi = \sqrt{a}$.

Παρατήρηση:

Ο αλγόριθμος (7.31) μαζί με τη βοήθεια του θεωρήματος, που μόλις αποδείξαμε, χρησιμοποιούνται στην Ανάλυση για τον όρισμό της τετραγωνικής ρίζας θετικού αριθμού a σαν τό όριο ακολουθίας θετικών αριθμών, που προκύπτουν χρησιμοποιώντας τις τέσσερις πρώτες πράξεις της Στοιχειώδους Άλγεβρας.

7.5.3. Σ ύ γ κ λ ι σ η τ η ς μ ε θ ό δ ο υ τ ω ν N e w -
t o n - R a p h s o n

Όπως αποδείχτηκε στην παράγραφο 7.5.1. η μέθοδος των Newton - Raphson είναι τουλάχιστον τετραγωνικής συγκλίσεως στην περίπτωση απλής ρίζας ξ . Αυτό σημαίνει ότι για κατάλληλο x_0 , που θα εκλέγεται με τον τρόπο, που αναπτύχτηκε στο τέλος της παραγράφου 7.4.4., η μέθοδος των Newton - Raphson θα συγκλίνει στη ρίζα ξ . Για να εφαρμοστεί όμως η μέθοδος της παραγράφου 7.4.4. χρειάζεται να βρεθεί ένα άπολυτο άνω φράγμα της συναρτήσεως $g''(x)$. Έπειδή στην προκειμένη περίπτωση η $g(x)$ δίνεται από την έκφραση (7.23) είναι πολύ πιθανό στις διάφορες συγκεκριμένες περιπτώσεις η έκφραση για την $g''(x)$ να είναι σχετικά πολύπλοκης μορφής και συνεπώς η εύρεση του φράγματος δύσκολη. Γι' αυτό, και ειδικά για τη μέθοδο των Newton - Raphson και μόνο, περιγράφουμε στη συνέχεια την πορεία που μπορούμε να ακολουθήσουμε για την έκλογή του x_0 , βασιζόμενοι στη συνάρτηση $f(x)$ και όχι στην $g(x)$.

Υποθέτουμε ότι $I \equiv [a, b]$ είναι ένα διάστημα έντοπισμού της απλής ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$ και ακόμη ότι $f(x) \in C^2(I)$ με $|f'(x)| \geq K > 0$ και $|f''(x)| \leq \Lambda$ για όλα τα $x \in I$. Αν εφαρμόσουμε τώρα τον αλγόριθμο των Newton - Raphson με $x_0 \in I$ δεδομένο (άλλά άγνωστο προς τό παρόν) θα έχουμε

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (7.34)$$

Έξάλλου ξεκινώντας από την προφανή σχέση $f(\xi) = 0$, που τη γράφουμε σαν $f(x_0 - \varepsilon_0) = 0$, όπου ε_0 το αντίστοιχο σφάλμα, μπορούμε να πάρουμε, αν αναπτύξουμε σύμφωνα με το θεώρημα του Taylor, ότι

$$f(x_0) - \varepsilon_0 f'(x_0) + \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 f''(\xi_0) = 0 \quad (7.35)$$

μέ $\min(x_0, \xi) < \xi_0 < \max(x_0, \xi)$. Αντικαθιστώντας στην (7.35) την $f(x_0)$ από την (7.34), κάνοντας πράξεις και αναδιατάσσοντας βρίσκουμε

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)} \varepsilon_0^2.$$

Παίρνοντας στην παραπάνω σχέση απόλυτες τιμές και χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα φράγματα K και Λ από τις υποθέσεις, που κάναμε, λαβαίνουμε τελικά ότι

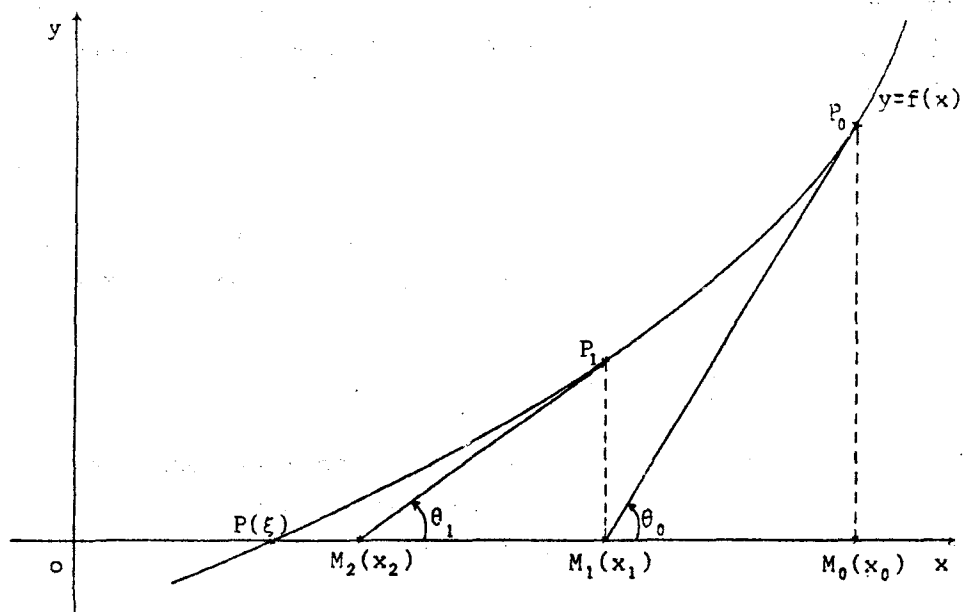
$$|\varepsilon_1| \leq M |\varepsilon_0|^2,$$

όπου θέσαμε $M = \frac{\Lambda}{2K}$. Έτσι καταλήξαμε στην ίδια ακριβώς σχέση μεταξύ ε_1 και ε_0 , που είχαμε καταλήξει και στην παράγραφο 7.4.4., με τη μόνη διαφορά στον όρισμό του φράγματος M . Επομένως από έδω και πέρα η ανάπτυξη της αντίστοιχης θεωρίας, και συνεπώς η εργασία για τον προσδιορισμό της αρχικής προσεγγίσεως x_0 , είναι ταυτόσημη εκείνης της παραγράφου 7.4.4., για αυτό και παραλείπεται.

7.5.4. Γεωμετρική έρμηνεία της μεθόδου των Newton - Raphson

Έστω $y = f(x)$ η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $f(x)$ (Σχήμα 7). Αν ξ είναι η ρίζα της εξισώσεως $f(x) = 0$, τότε αυτή θα είναι η τετμημένη της τομής P της καμπύλης $y = f(x)$

μέ τον άξονα των x . Έστω P_0 στο σχήμα, τό σημείο τής καμπύλης, πού έχει τετμημένη τήν άρχική προσέγγιση x_0 . Άν τώρα M_1 είναι τό σημείο τομής τής έφαπτομένης τής καμπύλης στο P_0 μέ τον άξονα των x , τετμημένης x_1 , θα έχουμε



Σχήμα 7

$$x_1 = x_0 - (M_1 M_0) = x_0 - \frac{(M_0 P_0)}{\tan \theta_0} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} .$$

Δηλαδή, όπως παρατηρούμε, ή τετμημένη του σημείου M_1 είναι ή επανάληψη, πού προκύπτει, μετά από μία έφαρμογή τής μεθόδου των Newton - Raphson. Συνεχίζοντας μέ τον ίδιο τρόπο φέρνουμε τώρα τήν έφαπτομένη τής καμπύλης στο σημείο P_1 , τετμημένης x_1 , πού συναντά τον άξονα των x στο σημείο M_2 , τετμημένης x_2 . Η τετμημένη x_2 βρίσκεται, μέ ανάλογο, όπως και πριν, τρόπο και δίνεται από τήν έκφραση

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

κ.ο.κ. Όπως βλέπουμε στο σχήμα, η ακολουθία $\{x_n\}|n=0,1,2, \dots$, που παράγεται από τον αλγόριθμο των Newton - Raphson, συγκλίνει στη ρίζα ξ .

7.6. Η δ^2 - μέθοδος του Aitken και η μέθοδος του Steffensen

Η δ^2 - μέθοδος του Aitken, που είναι η παρακάτω

$$y_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{\delta^2 x_{n+1}} \quad |n=0,1,2,\dots, \quad (7.36)$$

καί με την οποία δεν θα ασχοληθούμε ειδικά εδώ, προτάθηκε καταρχήν για την εύρεση μιᾶς ακολουθίας $\{y_n\}|n=0,1,2,\dots$, που νά συγκλίνει ταχύτερα από μία ήδη γνωστή και συγκλίνουσα ακολουθία $\{x_n\}|n=0,1,2,\dots$. Με βάση την δ^2 - μέθοδο και με την παρατήρηση ότι, αν οι όροι της ακολουθίας $\{x_n\}|n=0,1,2,\dots$ προέρχονται από τη γενική επαναληπτική μέθοδο, που αντιστοιχεί στην εξίσωση $x=g(x)$, τότε το δεύτερο μέλος της (7.36) μπορεί νά γραφτεί σαν

$$x_n - \frac{(g(x_n) - x_n)^2}{g(g(x_n)) - 2g(x_n) + x_n} \quad |n=0,1,2,\dots,$$

αναπτύχτηκε η μέθοδος του Steffensen. Έτσι η τελευταία στηρίζεται στον αλγόριθμο

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(g(x_n) - x_n)^2}{g(g(x_n)) - 2g(x_n) + x_n} \quad |n=0,1,2,\dots \quad (7.37)$$

μέ x_0 δεδομένο. Ο αλγόριθμος αυτός, που είναι γνωστός και σαν αλγόριθμος ή σχήμα του Steffensen, μπορεί νά θεωρηθεί ότι έχει προέρθει από την εξίσωση

$$x = x - \frac{(g(x) - x)^2}{g(g(x)) - 2g(x) + x} \equiv h(x). \quad (7.38)$$

Γιά να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος (7.37), για τη λύση της εξισώσεως $x = g(x)$, θα πρέπει καταρχήν να αποδειχτεί ότι οι ρίζες αυτής είναι και ρίζες της $x = h(x)$ και αντίστροφα. Αυτό διατυπώνουμε και αποδειχνουμε στο παρακάτω θεώρημα 1 στην ειδική όμως περίπτωση, που όλες οι ρίζες της $x = g(x)$ είναι απλές.

Θεώρημα 1

Αν όλες οι ρίζες της εξισώσεως $x = g(x)$ είναι απλές, τότε οι εξισώσεις $x = g(x)$ και $x = h(x)$ έχουν τις ίδιες ρίζες.

Απόδειξη

Εστω ότι ξ είναι μία απλή ρίζα της εξισώσεως $x = g(x)$. Τότε θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\xi = g(\xi) \quad \text{και} \quad 1 \neq g'(\xi). \quad (7.39)$$

Χρησιμοποιώντας την τιμή $x = \xi$ στην (7.38), το δεύτερο μέλος παίρνει την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Για την έρση της άοριστίας εφαρμόζουμε τον κανόνα του L'Hospital. Σύμφωνα μ'αυτόν θα έχουμε ότι το όριο του λόγου των δύο όρων του πηλίκου στην έκφραση $h(x)$, στην (7.38), όταν $x \rightarrow \xi$, θα είναι ίσο με το όριο του λόγου των παραγώγων των ίδιων όρων, με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν, όταν $x \rightarrow \xi$. Έτσι βρίσκουμε ότι

$$h(\xi) = \xi - \frac{2(g(\xi) - \xi) \cdot (g'(\xi) - 1)}{g'(g(\xi))g'(\xi) - 2g'(\xi) + 1}$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (7.39), λαβαίνουμε τελικά ότι

$$h(\xi) = \xi.$$

Άρα αν ξ είναι απλή ρίζα της $x = g(x)$ θα είναι και ρίζα της $x = h(x)$. Έστω τώρα ότι ξ είναι μία ρίζα της $x = h(x)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν $g(g(\xi)) - 2g(\xi) + \xi \neq 0$, τότε αντικαθιστώντας με ξ τό x στην (7.38), βρίσκουμε τελικά ότι $(\xi - g(\xi))^2 = 0$. Έρα $\xi = g(\xi)$ πράγμα που δίνει άτοση την υπόθεσή μας. Άρα $g(g(\xi)) - 2g(\xi) + \xi = 0$, όποτε θα πρέπει και ο αριθμητής του κλάσματος στην (7.38) νά είναι μηδέν για $x = \xi$. Θα έχουμε δηλαδή επί πλέον ότι $(g(\xi) - \xi)^2 = 0$. Η τελευταία ισότητα δίνει $\xi = g(\xi)$, που καθιστά συγχρόνως και την έκφραση $g(g(\xi)) - 2g(\xi) + \xi$ μηδέν. Συνεπώς ή ξ είναι ρίζα της $x = g(x)$.

Στή συνέχεια διατυπώνουμε και αποδείχνουμε τό θεώρημα 2, που αφορά μιá ειδική πάλι περίπτωση.

Θεώρημα 2

Υποθέτουμε ότι $I \equiv [a, b]$ είναι ένα διάστημα, που περιέχει στο έσωτερικό του τή μία και μόνο απλή ρίζα ξ της εξίσωσης $x = g(x)$, για τή συνάρτηση $g(x)$ της όποίας ισχύει $g(x) \in C^5(I)$, $g'(\xi) \neq 0$ και ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας, που παράγονται από τόν αλγόριθμο $y_{n+1} = g(y_n) \mid n = 0, 1, 2, \dots$ και ή άρχική προσέγγιση ανήκουν στο I (άνεξάρτητα με τό αν ή ακολουθία αυτή συγκλίνει στην ξ). Τότε αν οι όροι της ακολουθίας $\{x_n\} \mid n = 1, 2, 3, \dots$, που δίνονται από τήν (7.37) και ή άρχική προσέγγιση ανήκουν στο I , ή σύγκλιση του έπαναληπτικού αυτού σχήματος στή ρίζα ξ είναι τετραγωνική.

Απόδειξη

Εφόσον ή ξ είναι απλή ρίζα της εξίσωσης $x = g(x)$ θα έχουμε $g'(\xi) \neq 1$. Για τήν απόδειξη του ισχυρισμού ότι, ή μέθοδος (7.37) είναι δεύτερης τάξης συγκλίσεως θα πρέπει νά αποδειχτούν οι σχέσεις $h'(\xi) = 0$ και $h''(\xi) \neq 0$. Για τό σκοπό αυτό καλούμε με A και B τούς όρους του κλάσματος της (7.38),

άφοῦ κάνουμε τήν ἀφαίρεση, ὁπότε

$$A \equiv A(x) \equiv xg(g) - g^2, \quad B \equiv B(x) \equiv g(g) - 2g+x, \quad (7.40)$$

ὅπου γιά συντομογραφία θέσαμε $\xi \equiv g(x)$ καί $g(g) \equiv g(g(x))$. Καταρχήν εἶναι εὐκόλο νά διαπιστώσουμε, ὅπως καί στό προηγούμενο θεώρημα 1, ὅτι

$$A(\xi) = 0, \quad B(\xi) = 0, \quad (7.41)$$

πράγμα, πού θά χρησιμοποιήσουμε στή συνέχεια. Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $h(x)$ ἐξαιτίας τῶν (7.40) θά δίνεται ἀπό τήν ἐκφραση

$$h'(x) = \frac{BA' - AB'}{B^2}. \quad (7.42)$$

Σάν συνέπεια τῶν σχέσεων (7.41) ἔχουμε ὅτι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος στήν (7.42) μηδενίζονται γιά $x=\xi$. Γιά τήν ἀρση τῆς ἀοριστίας, ἐφαρμόζουμε τόν κανόνα τοῦ L'Hospital. Ἔτσι παίρνουμε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} h'(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{BA'' - AB''}{2BB'}. \quad (7.43)$$

Καί πάλι ὅμως οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος στήν σχέση (7.43) μηδενίζονται γιά $x=\xi$ καί ἐπομένως ἐφαρμόζουμε γιά μία δεύτερη φορά τόν κανόνα τοῦ L'Hospital. Ἔτσι βρίσκουμε

$$\lim_{x \rightarrow \xi} h'(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{B'A'' + BA''' - A'B'' - AB'''}{2(B'^2 + BB'')},$$

ἡ ὁποία, ἀπό τίς (7.41) δίνει

$$h'(\xi) = \frac{\lim_{x \rightarrow \xi} (B'A'' - A'B'')}{2 \lim_{x \rightarrow \xi} B'^2}. \quad (7.44)$$

Παραγωγίζοντας τίς (7.40) διαδοχικά παίρνουμε

$$\begin{aligned} A' &\equiv A'(x) \equiv g(g) + xg'(g)g' - 2gg', \\ B' &\equiv B'(x) \equiv g'(g)g' - 2g' + 1 \end{aligned} \quad (7.45)$$

και

$$\begin{aligned} A'' &\equiv A''(x) \equiv 2g'(g)g' + xg''(g)g'^2 + xg'(g)g'' - 2g'^2 - 2gg'', \\ B'' &\equiv B''(x) \equiv g''(g)g'^2 + g'(g)g'' - 2g''. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Χρησιμοποιώντας τις (7.45) και (7.46) καθώς και τη σχέση $\xi = g(\xi)$ και ξανά τη συντομογραφία g για να συμβολίσουμε όμως την τιμή $g(\xi)$, αυτή τη φορά, όπως επίσης και τις τιμές των άλλων παραγώγων στο ξ , λαβαίνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \xi} A' &= \xi + \xi g'^2 - 2\xi g' = \xi(g' - 1)^2 \\ \lim_{x \rightarrow \xi} B' &= g'^2 - 2g' + 1 = (g' - 1)^2 \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow \xi} A'' &= \xi g'^2 g' + \xi g' g'' - 2\xi g'' = \xi g''(g' - 1)(g' + 2) \\ \lim_{x \rightarrow \xi} B'' &= g'^2 g'' + g' g'' - 2g'' = g''(g' - 1)(g' + 2). \end{aligned} \quad (7.47)$$

Από τις σχέσεις (7.47) βρίσκουμε άμέσως ότι

$$\lim_{x \rightarrow \xi} (B'A'' - A'B'') = 0.$$

Λαβαίνοντας δέ υπόψη τη δεύτερη από τις (7.47) και αντικαθιστώντας στην (7.44) παίρνουμε ότι $h'(\xi) = 0$. Παραθέσαμε αναλυτικά παραπάνω την απόδειξη της σχέσης $h'(\xi) = 0$, για να δείξουμε κυρίως τη δυσκολία, πού θά έχει η αντίστοιχη απόδειξη, από την άποψη του πλήθους και του είδους των πράξεων, της σχέσης $h''(\xi) \neq 0$. Η απόδειξη για την $h''(\xi) \neq 0$ θά παραληφτεί αφού όμως τονίσουμε τό γεγονός ότι γι'αυτήν χρειάζεται να παραγωγίσουμε την (7.42) για την εύρεση της $h''(x)$ και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε τρεις φορές τόν κανόνα του

L'Hospital για την εύρεση της τιμής $h''(\xi) \neq 0$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Αφού δειχτεί ότι η εξίσωση $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ έχει μία και μόνο πραγματική ρίζα ξ τέτοια ώστε $\xi \in (2, 3)$ νά βρεθεί αυτή με τη μέθοδο της διχοτομήσεως και με ακρίβεια τεσσάρων δ.ψ.. Νά δοθούν ακόμη τό απαιτούμενο ελάχιστο πλήθος επαναλήψεων στην πράξη καθώς και τό αντίστοιχο θεωρητικό για την εύρεση της ρίζας ξ με την επιζητούμενη ακρίβεια. (*Απ. $\xi \approx 2.2056$, 15, 14).
2. Αν υποτεθεί ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος, πού αναφέρονται στη μέθοδο Regula Falsi, και κληθούν με $\varepsilon_n \mid n=0, 1, 2, \dots$ τό σφάλμα στην n επανάληψη και με $x_{n-1} = \beta_0$ νά δειχτεί ότι υπάρχουν άριθμοί $\eta, \theta \in (\alpha_0, x_{n-1})$ τέτοιοι ώστε νά ισχύει ή σχέση

$$\varepsilon_n = (\alpha_0 - \xi) \cdot \varepsilon_{n-1} \cdot \frac{f''(\eta)}{2f'(\theta)} \mid n=0, 1, 2, \dots$$
3. Για την εύρεση της θετικής ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x) \equiv x^2 - 2 = 0$ προτείνεται ο άλγόριθμος $x_{n+1} = 0.2 + x_n - 0.1x_n^2 \mid n=0, 1, 2, \dots$ και x_0 δοσμένο. Αφού άποδειχτεί ότι ο άλγόριθμος, πού δόθηκε, ικανοποιεί τίς προϋποθέσεις του Πορίσματος του θεωρήματος 3 της παραγράφου 7.4.2. στο διάστημα $[1, 2]$, νά έκλεγεί σαν x_0 τό γνωστό άκρο του μικρότερου άπό τά δύο διαστήματα $[1, \xi]$ και $[\xi, 2]$ και νά βρεθεί ή ρίζα ξ με προσέγγιση 3 δ.ψ. (*Απ. $\xi \approx 1.414$).
4. Αφού άποδειχτεί ότι ή συνάρτηση $f(x) \equiv 3x^3 + 2x - 1$ έχει μία μόνο πραγματική ρίζα ξ , ή όποία και άνήκει στο διάστημα $I \equiv [0.2, 0.45]$, νά δειχτεί στη συνέχεια ότι ή $f(x)$ ι-

κανοποιεί τις απαιτήσεις του θεωρήματος 3 (ή του Πορίσματος του) της παραγράφου 7.4.2. και νά εφαρμοστεί ο αντίστοιχος αλγόριθμος για την εύρεση της ρίζας ξ με προσέγγιση τεσσάρων δ.ψ.. Νά δοθεί ακόμη τό απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων για τό σκοπό αυτό.

(Απ. $\xi \approx 0.4023$, 25).

5. Για την εύρεση της θετικής ρίζας της εξίσωσης $ax^2+x-b=0$ ($a, b > 0$) προτείνεται ο αλγόριθμος $x_{n+1} = b - ax_n^2$ $| n=0,1,2,\dots$ με x_0 δοσμένο. Ποιά συνθήκη πρέπει νά ικανοποιούν οι σταθερές a και b ώστε νά υπάρχει περίπτωση συγκλίσεως; (Απ. $ab < 3/4$).
6. Για την εύρεση μιᾶς τουλάχιστον από τίς πραγματικές και άνισες ρίζες της εξίσωσεως $x^2+bx+c=0$ ($b^2 > 4c$) προτείνεται ο αλγόριθμος $x_{n+1} = ax_n^2 + bx_n + c$ $| n=0,1,2,\dots$ με x_0 κατάλληλη άρχική προσέγγιση. Νά αποδειχτεῖ ότι για $0 < a < 2/\sqrt{b^2-4c}$ ο αλγόριθμος εἶναι δυνατό νά συγκλίνει στη ρίζα $(-b - \sqrt{b^2-4c})/2$, ενώ για $-2/\sqrt{b^2-4c} < a < 0$ εἶναι δυνατό νά συγκλίνει στη ρίζα $(-b + \sqrt{b^2-4c})/2$.
7. Αφοῦ δειχτεῖ σέ τί μπορεῖ νά χρησιμέψει ο αλγόριθμος $x_{n+1} = 0.5 + x_n - 0.1x_n^3 \equiv g(x_n)$ $| n=0,1,2,\dots$ και x_0 δοσμένο νά εξεταστεῖ στή συνέχεια άν εἶναι δυνατό νά συγκλίνει. Συγκλίνει αὐτός για $x_0=2$ και γιατί; Νά βρεθοῦν οι διαδοχικοί ὅροι της ακολουθίας πού παράγεται από τόν αλγόριθμο, πού δόθηκε, με την άρχική προσέγγιση $x_0=2$ και νά βρεθεῖ απ'αὐτήν τό ὄριο ξ της ακολουθίας με προσέγγιση τεσσάρων δ.ψ. (Απ. Στην εύρεση της $\sqrt[3]{5}$, εἶναι δυνατό γιατί $|g(\sqrt[3]{5})| < 1$, συγκλίνει για $x_0=2, 2, 1.7, 1.70870, 1.70982, 1.70996, 1.70997, \xi \approx 1.7100$).
8. Δίνεται ἡ ἐξίσωση $x - e^{-x} = 0$. Νά δειχτεῖ καταρχήν ὅ-

τι αυτή έχει μία και μόνο απλή πραγματική ρίζα ξ και ότι αυτή βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$. Στη συνέχεια να κατασκευαστεί με βάση τη γενική επαναληπτική μέθοδο ένας προφανής αλγόριθμος που να συγκλίνει για κάθε πραγματικό $x_0 > 0$, και τέλος να βρεθεί η ρίζα ξ , με τη βοήθεια ενός Η.Υ. και με προσέγγιση πέντε δ.ψ. ('Απ. $\xi \approx 0.56714$).

9. 'Αφού αποδειχτεί ότι η εξίσωση $f(x) \equiv 4x - 7 + \cos x = 0$ έχει μία και μόνο πραγματική ρίζα ξ , να κατασκευαστεί στη συνέχεια, με βάση τη γενική επαναληπτική μέθοδο, ένας αλγόριθμος που να συγκλίνει στη ρίζα ξ , για κάθε εκλογή της αρχικής προσεγγίσεως x_0 . Τέλος, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο αυτό και με τη βοήθεια ενός Η.Υ. να βρεθεί η ρίζα ξ με προσέγγιση έξι δ.ψ. ('Απ. $\xi \approx 1.808986$).

10. 'Η εξίσωση $f(x) \equiv x^2 - 7x + 12 = 0$ έχει σαν ρίζες τους αριθμούς $\xi_1 = 3$ και $\xi_2 = 4$. Νά βρεθεί μία αναδιάρθρωση αυτής της μορφής $x = ax^2 + bx + c \equiv g(x)$, τέτοια ώστε ο αλγόριθμος $x_{n+1} = g(x_n) \mid n = 0, 1, 2, \dots$, με κατάλληλο x_0 , να συγκλίνει στη ρίζα $\xi_2 = 4$ με σύγκλιση τετραγωνική. ('Απ. $x = -x^2 + 8x - 12$).

11. Δίνεται ο αλγόριθμος

$$x_{n+1} = x_n^3 + 6x_n^2 + (\beta + 1)x_n + \gamma \mid n = 0, 1, 2, \dots, \text{ με } x_0 \text{ δοσμένο,}$$

για την εύρεση της απλής ρίζας της εξισώσεως $f(x) \equiv x^3 + 6x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Νά βρεθούν τα β και γ έτσι ώστε, ο αλγόριθμος, που δόθηκε, να είναι τρίτης τάξης συγκλίσεως. ('Απ. 11,6).

12. Νά αποδειχτεί ότι, αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει σαν ρίζα την ξ με βαθμό πολλαπλότητας $k > 1$, τότε το σχήμα

$$x_{n+1} = x_n - k \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \mid n = 0, 1, 2, \dots \text{ με } x_0 \text{ δοσμένο,}$$

γιά τήν εύρεση τῆς ρίζας ξ , εἶναι τουλάχιστον τετραγωνικῆς συγκλίσεως.

13. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι τό σχῆμα

$$x_{n+1} = 2a / (x_n + \frac{a}{x_n}) \quad | n = 0, 1, 2, \dots$$

μέ $a > 0$ ἀποτελεῖ ἓνα σχῆμα τετραγωνικῆς συγκλίσεως, γιά τήν εύρεση τῆς $\sqrt{a}$, πού συγκλίνει σ' αὐτήν γιά κάθε $x_0 > 0$. Ἐπί πλέον, ἂν ε_n εἶναι τό σφάλμα κατά τήν n ἐπανάληψη τοῦ προηγούμενου σχήματος καί ε'_n τό ἀντίστοιχο σφάλμα στήν περίπτωση τοῦ γνωστοῦ σχήματος

$$x_{n+1} = 0.5(x_n + \frac{a}{x_n}) \quad | n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{μέ τό ἴδιο } x_0$$

νά δειχτεῖ ὅτι $|\varepsilon_n| \leq |\varepsilon'_n| \quad | n = 1, 2, 3, \dots$.

14. Δίνεται ἡ ἐξίσωση $f(x) \equiv (x-a)(x-b) = 0$ μέ ρίζες a καί b ($a < b$). Νά δειχτεῖ ὅτι ἡ μέθοδος τῶν Newton-Raphson, ὅταν ἐφαρμόζεται στήν ἐξίσωση πού δόθηκε, γιά κάθε $x_0 > \frac{a+b}{2}$, παράγει ἀκολουθία πού συγκλίνει στή ρίζα b , ἐνῶ γιά κάθε $x_0 < \frac{a+b}{2}$, παράγει ἀκολουθία πού συγκλίνει στή ρίζα a .

15. Νά βρεθεῖ καί νά μελετηθεῖ ὡς πρός τή σύγκλιση ὁ ἀλγόριθμος τῶν Newton-Raphson γιά τήν εύρεση τῆς $\sqrt[m]{a}$ ($a > 0, m > 2$) γιά κάθε ἐκλογή $x_0 > \sqrt[m]{a}$. (Ἄπ.

$$x_{n+1} = \frac{1}{m} [(m-1)x_n + a/x_n^{m-1}] \quad | n = 0, 1, 2, \dots, \text{ συγκλίνει στήν } \sqrt[m]{a}.$$

16. Νά ἐφαρμοστεῖ ὁ ἀλγόριθμος τῶν Newton-Raphson, τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως, γιά τήν εύρεση τῆς $\sqrt[3]{2}$ μέ προσέγγιση τριῶν δ.ψ., παίρνοντας σάν $x_0 = 2$. (Ἄπ. $\sqrt[3]{2} \approx 1.260$).

17. Ἀφοῦ δειχτεῖ ὅτι ὁ ἀλγόριθμος

$$x_{n+1} = x_n(2 - \alpha x_n) \quad |n=0,1,2,\dots \quad \text{μέ } x_0 \text{ δοσμένα,}$$

δέν ἀποτελεῖ παρά ἓναν ἀλγόριθμο τῶν Newton - Raphson γιὰ τήν εὕρεση τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha \neq 0$, νά δειχθεῖ στή συνέχεια ὅτι ὁ ἀλγόριθμος, ποῦ δόθηκε, συγκλίνει τότε καί μόνο τότε ἂν $|1 - \alpha x_0| < 1$.

18. Νά δειχτεῖ, χωρίς νά ἐξεταστεῖ ἡ σύγκλιση, πῶς ἡ μέθοδος τῶν Newton - Raphson γιὰ τήν εὕρεση μιγαδικῶν ριζῶν τῆς μορφῆς $z = \alpha + \beta i$ τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$, μέ πραγματικούς συντελεστές εἶναι ἡ ἀκόλουθη

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \alpha_n - \frac{A_n C_n + B_n D_n}{C_n^2 + D_n^2} \\ \beta_{n+1} &= \beta_n + \frac{A_n D_n - B_n C_n}{C_n^2 + D_n^2} \end{aligned} \quad |n=0,1,2,\dots,$$

ὅπου $x_n = \alpha_n + \beta_n i$, $f(x_n) = A_n + B_n i$, $f'(x_n) = C_n + i D_n$ $|n=0,1,2,\dots$, $x_0 = \alpha_0 + \beta_0 i$ δοσμένη ἀρχική προσέγγιση καί $\alpha_n, \beta_n, A_n, B_n, C_n, D_n$ $|n=0,1,2,\dots$ πραγματικοί ἀριθμοί.

19. Νά χρησιμοποιηθεῖ κατευθεῖαν ἡ μέθοδος τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως 18, γιὰ τήν εὕρεση μιᾶς μιγαδικῆς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $f(x) \equiv x^4 - 8x^3 + 23x^2 + 16x - 50 = 0$ μέ προσέγγιση δύο δ.ψ., ὅταν σάν ἀρχική προσέγγιση θεωρηθεῖ ὁ ἀριθμός $3.5 + 3.5i$. (Ἀπ. $4.00 + 3.00i$).

20. Ἀφοῦ δειχτεῖ ὅτι τό τριώνυμο $f(x) \equiv x^3 + 3x^2 - 1$ ἔχει τρεῖς πραγματικές ρίζες μία ἀπό τίς ὁποῖες εἶναι τέτοια ὥστε $\xi \in (0.5, 0.7)$, νά δειχτεῖ στή συνέχεια ὅτι παίρνοντας σάν ἀρχική προσέγγιση $x_0 = 0.5$ ὁ ἀλγόριθμος τῶν Newton - Raphson συγκλίνει καί νά ἐφαρμοστεῖ αὐτός γιὰ τήν

εύρεση της ξ με προσέγγιση τριών δ.ψ.

(Απ. $\xi \approx 0.532$).

21. Αφού δειχτεί ότι η εξίσωση $f(x) \equiv x^2 - 2x - 1 = 0$ έχει μία και μόνο πραγματική ρίζα ξ τέτοια ώστε $\xi \in (1, 2)$, νά εφαρμοστεί στη συνέχεια το κριτήριο συγκλίσεως της μεθόδου των Newton - Raphson με αρχικό διάστημα το $[1, 2]$. Αν το κριτήριο συγκλίσεως δεν ικανοποιείται νά διχοτομηθεί το αρχικό διάστημα και νά εξεταστεί η ικανοποίησή του στο μισό διάστημα, πού περιέχει τη ρίζα ξ κ.ο.κ. Όταν τέλος βρεθεί το αντίστοιχο διάστημα νά ληφτεί σαν x_0 το γνωστό άκρο του μικρότερου από τα δύο διαστήματα, πού θα περιέχει τη ρίζα, και νά εφαρμοστεί ο αλγόριθμος των Newton - Raphson για την εύρεση αυτής με προσέγγιση τεσσάρων δ.ψ.
(Απ. $\xi \approx 1.6180$).
22. Νά χρησιμοποιηθούν οι διαδοχικοί όροι της ακολουθίας του αλγορίθμου της άσκησης 7 και η δ^2 - μέθοδος του Aitken για την επιτάχυνση της συγκλίσεως. Ποιά είναι η νέα ακολουθία και ποιά το όριο ξ με προσέγγιση τεσσάρων δ.ψ.; (Απ. 2, 1.7, 1.70870, 1.70982, 1.70998, 1.70998, $\xi \approx 1.7100$).
23. Νά χρησιμοποιηθεί το γενικό επαναληπτικό σχήμα της άσκησης 7 και ο αντίστοιχος αλγόριθμος του Steffensen με $x_0 = 2$ για την εύρεση της τιμής ξ . Ποιοί είναι οι όροι της νέας ακολουθίας και ποιά η ξ με προσέγγιση τεσσάρων δ.ψ.;
(Απ. 2, 1.70846, 1.70998, 1.70998, $\xi \approx 1.7100$).

8. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

8.1. Γενικά

“Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να επιλύσουμε ένα σύστημα n μη γραμμικών [⊕] εξισώσεων, με δεύτερα μέλη μηδέν, με n άγνωστους. Τό σύστημα αυτό θα μπορεί να γραφτεί με τη γενική μορφή

$$f(x) = 0, \quad (8.1)$$

όπου η συνάρτηση f , τό x κί τό 0 είναι n -διάστατα διανύσματα. Με άλλα λόγια η διανυσματική εξίσωση (8.1) έχει σάν πρώτο μέλος ένα διάνυσμα f , τοῦ οποίου οί n συνιστώσες είναι τά πρώτα μέλη τῶν n μη γραμμικῶν εξισώσεων, πού δόθηκαν, καί ἀποτελοῦν συναρτήσεις τῶν n άγνωστών, πού μέ τή σειρά τους ἀποτελοῦν τίς συνιστώσες τοῦ άγνωστου n -διάστατου διανύσματος x , ενώ τό δεύτερο μέλος είναι τό n -διάστατο μηδενικό διάνυσμα. Ἡ τετριμμένη περίπτωση $n=1$ καθιστά τήν εξίσωση (8.1) βαθμωτή καί ἐπομένως ἀποτελεῖ τήν περίπτωση, πού ἐξετάσαμε στό προηγούμενο Κεφάλαιο 7. Ἡ ἀνάπτυξη μεθόδων γιά τήν επίλυση τῆς (8.1) στηρίζεται βασικά στήν επέκταση καί γενίκευση μερικῶν ἀπό τίς βασικές μεθόδους, πού ἐξετάσαμε στό προηγούμενο Κεφάλαιο, ὅπως είναι ἡ γενική ἐπαναληπτική μέθοδος καί ἡ μέθοδος τῶν Newton - Raphson. Ἐπειδή ἡ γενικότερη ἀνάπτυξη τῆς ἀντίστοιχης θεωρίας ἐκφεύγει ἀπό τό σκοπό τοῦ παρόντος βιβλίου, γι'αυτό στή συνέχεια θά περιοριστοῦμε στήν ἀναφορά τῆς γενικῆς ἐπαναληπτικῆς με-

⊕ Οί μέθοδοι τοῦ παρόντος Κεφαλαίου μποροῦν νά ἐφαρμοσθοῦν καί στή περίπτωση τῶν γραμμικῶν συστημάτων. Γι'αυτά ὁμως, θά ἀναπτύξουμε ἀπλούστερες μεθόδους ἐπιλύσεως των στό Κεφάλαιο 10 τοῦ βιβλίου "Αριθμητική Ἀνάλυση II".

θόδου ενός συστήματος δύο μη γραμμικών εξισώσεων με δύο άγνωστους και θα δώσουμε σέ ένα θεώρημα, πού αποτελεί κατὰ κάποιο τρόπο επέκταση του Πορίσματος του θεωρήματος 2 της παραγράφου 7.4.2., ικανές συνθήκες για τή σύγκλιση τής μεθόδου αυτής.

8.2. Γενική επαναληπτική μέθοδος
για τήν επίλυση ενός μη γραμμι-
κοῦ συστήματος δύο εξισώσεων
μέ δύο άγνωστους

8.2.1. Γενικά

Έστω τό σύστημα τών δύο μη γραμμικών εξισώσεων μέ δύο άγνωστους

$$\begin{aligned}f_1(x,y) &= 0 \\f_2(x,y) &= 0.\end{aligned}\tag{8.2}$$

Όπως καί στο προηγούμενο Κεφάλαιο, θα περιοριστούμε στην εύρεση τών πραγματικών ριζών του συστήματος αυτού. Ύπεν-
θυμίζουμε ότι τό διατεταγμένο ζεύγος τών πραγματικών άριθ-
μών (ξ,η) [⊗] θα αποτελεί ρίζα του συστήματος (8.2) εφόσον
ικανοποιεί τίσ σχέσεις

$$f_1(\xi,\eta) = f_2(\xi,\eta) = 0.$$

Γιά τήν άριθμητική επίλυση του συστήματος (8.2) αναδιατάσ-

[⊗] Όπως θα δοῦμε στή συνέχεια ή ανάπτυξη τής θεωρίας, πού
θα άκολουθήσει, άπλουστεύεται κατά πολύ, στην περίπτωση
πάντα τών δύο μη γραμμικών εξισώσεων μέ δύο άγνωστους,
άν αντί νά θεωρούμε διανυσματικές συναρτήσεις καί διανύ-
σματα του διδιάστατου χώρου, όπως αναφέραμε στην πρώτη
παράγραφο (8.1), θεωρούμε τό σύστημα τών δύο εξισώσεων (8.2) καί
αντίστοιχα διατεταγμένα ζεύγη.

σουμε τόσο την πρώτη όσο και τη δεύτερη εξίσωση και τις γράφουμε με τις αντίστοιχες μορφές

$$\begin{aligned} x &= g_1(x, y) \\ y &= g_2(x, y) \end{aligned} \quad (8.3)$$

Είναι φανερό ότι η λύση (ξ, η) του συστήματος (8.2) θα ικανοποιεί και τις εξισώσεις (8.3) και συνεπώς θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\xi = g_1(\xi, \eta), \quad \eta = g_2(\xi, \eta). \quad (8.4)$$

Οι εξισώσεις (8.3) συνιστούν την εφαρμογή του ακόλουθου αλγόριθμου

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= g_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g_2(x_n, y_n) \end{aligned} \quad | \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.5)$$

όπου (x_0, y_0) μία δεδομένη αρχική προσέγγιση. Κάτω από ορισμένες υποθέσεις, που αφορούν καταρχήν τις συναρτήσεις $g_1(x, y)$ και $g_2(x, y)$ και στη συνέχεια την αρχική προσέγγιση (x_0, y_0) ή ακολουθία $\{(x_n, y_n)\} | n = 0, 1, 2, \dots$, που παράγεται από τον αλγόριθμο (8.5), συγκλίνει στη ρίζα (ξ, η) . Τονίζουμε το γεγονός ότι στην πράξη οι επαναλήψεις σταματούν μόλις βρεθούν δύο διαδοχικές προσεγγίσεις (x_n, y_n) και (x_{n+1}, y_{n+1}) , που να συμφωνούν σε ένα προκαθορισμένο αριθμό δ . ή σ.ψ. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει τόσο οι όροι x_n, x_{n+1} όσο και οι όροι y_n, y_{n+1} , να συμφωνούν στο προκαθορισμένο πλήθος των ψηφίων, ενώ την τελευταία επανάληψη (x_{n+1}, y_{n+1}) δεχόμαστε σαν την ζητούμενη προσέγγιση της ρίζας (ξ, η) .

Θεώρημα

Έστω $I \equiv \{(x, y) : |x - \xi| \leq \varepsilon \text{ και } |y - \eta| \leq \varepsilon\} | \varepsilon > 0$ μία ορθογώνια περιοχή της ρίζας (ξ, η) του συστήματος των εξισώσεων $x = g_1(x, y)$ και $y = g_2(x, y)$, όπου $g_1 \equiv g_1(x, y)$ και $g_2 \equiv g_2(x, y)$ εἰ-

ναι συνεχείς συναρτήσεις στην περιοχή I. Αν υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι, πρώτης τάξης, των g_1, g_2 , στην αντίστοιχη ανοικτή περιοχή I, είναι συνεχείς και ικανοποιούν σ'αυτήν την περιοχή τις σχέσεις

$$\left| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial g_2}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial g_1}{\partial y} \right|, \left| \frac{\partial g_2}{\partial y} \right| \leq \frac{\lambda}{2}, \text{ όπου } 0 < \lambda < 1, \quad (8.6)$$

τότε για κάθε $(x_0, y_0) \in I$ ο αλγόριθμος $x_{n+1} = g_1(x_n, y_n)$, $y_{n+1} = g_2(x_n, y_n)$ $|n=0, 1, 2, \dots$ παράγει ακολουθία $\{(x_n, y_n)\} | n=0, 1, 2, \dots$ που συγκλίνει στη ρίζα (ξ, η) .

Απόδειξη

Αποδείχνουμε πρώτα έπαγωγικά ότι όλες οι επαναλήψεις $(x_n, y_n) \in I$ $|n=0, 1, 2, \dots$. Πραγματικά για $n=0$ ισχύει σύμφωνα με την υπόθεση. Για $n=1$ έχουμε

$$x_1 - \xi = g_1(x_0, y_0) - g_1(\xi, \eta) = (x_0 - \xi) \frac{\partial g_1}{\partial x} + (y_0 - \eta) \frac{\partial g_1}{\partial y}, \quad (8.7)$$

όπου οι τιμές των μερικών παραγώγων υπολογίζονται σε ένα σημείο $(\xi + \theta_0(x_0 - \xi), \eta + \theta_0(y_0 - \eta))$ $|0 < \theta_0 < 1$. Παίρνοντας απόλυτες τιμές στη σχέση (8.7) και λαβαίνοντας υπόψη τις (8.6) βρίσκουμε

$$|x_1 - \xi| \leq |x_0 - \xi| \left| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right| + |y_0 - \eta| \left| \frac{\partial g_1}{\partial y} \right| \leq \frac{\lambda}{2} |x_0 - \xi| + \frac{\lambda}{2} |y_0 - \eta|$$

συνεπώς

$$|x_1 - \xi| \leq \frac{\lambda}{2} (\epsilon + \epsilon) = \lambda \epsilon < \epsilon.$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να βρούμε

$$|y_1 - \eta| \leq \lambda \epsilon < \epsilon$$

άρα $(x_1, y_1) \in I$. Αν δεχτούμε τώρα την αλήθεια της προτάσεως για $n=k \geq 1$, δηλαδή ότι $(x_k, y_k) \in I$, αποδείχνουμε αυτή για $n=k+1$. Έχουμε αντίστοιχα προς την (8.7) ότι

$$x_{k+1} - \xi = g_1(x_k, y_k) - g_1(\xi, \eta) = (x_k - \xi) \frac{\partial g_1}{\partial x} + (y_k - \eta) \frac{\partial g_1}{\partial y},$$

όπου οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται σέ ένα σημείο $(\xi + \theta_k(x_k - \xi), \eta + \theta_k(y_k - \eta))$ | $0 < \theta_k < 1$. Λαβαίνοντας άποδύτες τιμές, όπως καί πρίν, έχουμε ότι

$$|x_{k+1} - \xi| \leq |x_k - \xi| \left| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right| + |y_k - \eta| \left| \frac{\partial g_1}{\partial y} \right| \leq \frac{\lambda}{2} (|x_k - \xi| + |y_k - \eta|) \quad (8.8)$$

όρα

$$|x_{k+1} - \xi| \leq \frac{\lambda}{2} (\epsilon + \epsilon) = \lambda \epsilon < \epsilon.$$

Μέ άνάλογο τρόπο άποδείχνεται ότι

$$|y_{k+1} - \eta| \leq \frac{\lambda}{2} (|x_k - \xi| + |y_k - \eta|) \leq \lambda \epsilon < \epsilon$$

καί άρα $(x_{k+1}, y_{k+1}) \in I$. Από τήν έπαγωγική άπόδειξη, πού κάναμε, καί βρήκαμε ότι όλες οι έπαναλήψεις $(x_n, y_n) \in I$ | $n = 0, 1, 2, \dots$, μπορεί νά προκύψει καί κατι άκόμη άπό τίς ένδειάμεσες σχέσεις, πού χρησιμοποιήσαμε. Συγκεκριμένα άπό τά δύο άκραιά μέλη τής (8.8) καί άπό τά αντίστοιχα γιά τή διαφορά $|y_{k+1} - \eta|$, πού όπως είναι φανερό, έξαιτίας τής έπαγωγικής άποδείξεως, θά ισχύουν γιά κάθε τιμή $n \geq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \xi| &\leq \frac{\lambda}{2} (|x_n - \xi| + |y_n - \eta|) \\ |y_{n+1} - \eta| &\leq \frac{\lambda}{2} (|x_n - \xi| + |y_n - \eta|) \end{aligned} \quad |n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.9)$$

Οί παραπάνω σχέσεις (8.9) μπορούν άμέσως νά δώσουν ότι

$$\max(|x_{n+1} - \xi|, |y_{n+1} - \eta|) \leq \lambda \max(|x_n - \xi|, |y_n - \eta|) \quad |n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.10)$$

καί οι (8.10) χρησιμοποιούμενες διαδοχικά

$$\max(|x_n - \xi|, |y_n - \eta|) \leq \lambda^n \max(|x_0 - \xi|, |y_0 - \eta|) \quad (8.11)$$

Παίρνοντας όρια στήν (8.11) καί έξαιτίας τής $0 < \lambda < 1$ έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max(|x_n - \xi|, |y_n - \eta|) = 0$$

ή ακόμη

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi \quad \text{και} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \eta \quad (8.12)$$

και τέλος

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (\xi, \eta). \quad (8.13)$$

Λαβαίνοντας τώρα τὰ ὅρια τῶν δύο μελῶν τῶν ἐξισώσεων τοῦ ἀλγορίθμου καί ἔχοντας ὑπόψη τόσο τίς σχέσεις (8.12) (ἢ τήν (8.13)) ὅσο καί τή συνέχεια τῶν συναρτήσεων g_1 καί g_2 στήν περιοχή I προκύπτει καταρχήν ὅτι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} g_1(x_n, y_n) = g_1(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n)$$

καί συνεπῶς

$$\xi = g_1(\xi, \eta).$$

Ὀμοίως βρίσκουμε ὅτι

$$\eta = g_2(\xi, \eta)$$

δηλαδή ἐπαληθεύονται οἱ σχέσεις (8.4). Ἐδῶ σημειώνουμε ὅτι τό τελευταῖο τμήμα τῆς ἀποδείξεως πού παραθέσαμε, μετά τή σχέση (8.13), δέν εἶναι ἀπαραίτητο γιά νά ἀποδείξουμε τό γεγονός ὅτι ἡ ἀκολουθία, πού παράγεται ἀπό τόν ἀλγόριθμο, συγκλίνει στή ρίζα (ξ, η) τοῦ συστήματος, ἀφοῦ αὐτό ἀποδείχνεται ἀπό τή σχέση (8.13) καί τήν παραδοχή ὅτι ἡ (ξ, η) ἀποτελεῖ ρίζα τοῦ συστήματος. Ἀπλῶς μέ τήν παράθεση αὐτοῦ τοῦ μέρους κάνουμε μία ἐπαλήθευση αὐτῶν πού ἀποδείξαμε.

Κάτι ακόμη πού θά ἔπρεπε ἴσως νά προσθέσουμε, καί πού προκύπτει ἔμμεσα ἀπό τίς ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος, εἶναι τό γεγονός ὅτι στό ἐσωτερικό τῆς περιοχῆς I δέν εἶναι δυνατό

νά υπάρχει άλλη ρίζα του άρχικου συστήματος διάφορη από την (ξ, η) . Αυτό αποδεικνύεται ως έξης. Αν υποθέσουμε ότι στο έσωτερικό της περιοχής I υπάρχει άλλη ρίζα $(\xi^*, \eta^*) \neq (\xi, \eta)$ του συστήματος των άρχικων εξισώσεων $x = g_1(x, y)$ και $y = g_2(x, y)$, τότε θα ικανοποιεί τις σχέσεις $\xi^* = g_1(\xi^*, \eta^*)$ και $\eta^* = g_2(\xi^*, \eta^*)$. Επομένως

$$\xi^* - \xi = g_1(\xi^*, \eta^*) - g_1(\xi, \eta) = (\xi^* - \xi) \frac{\partial g_1}{\partial x} + (\eta^* - \eta) \frac{\partial g_1}{\partial y},$$

όπου οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται σε ένα σημείο $(\xi + \theta(\xi^* - \xi), \eta + \theta(\eta^* - \eta))$ | $0 < \theta < 1$. Παίρνοντας απόλυτες τιμές βρίσκουμε εύκολα όπως και προηγούμενα ότι

$$|\xi^* - \xi| \leq \frac{\lambda}{2} (|\xi^* - \xi| + |\eta^* - \eta|). \quad (8.14)$$

Αντίστοιχα μπορούμε νά βρούμε

$$|\eta^* - \eta| \leq \frac{\lambda}{2} (|\xi^* - \xi| + |\eta^* - \eta|). \quad (8.15)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (8.14) και (8.15) και λαβαίνοντας υπόψη ότι $0 < \lambda < 1$ παίρνουμε τελικά

$$|\xi^* - \xi| + |\eta^* - \eta| < |\xi^* - \xi| + |\eta^* - \eta|,$$

δηλαδή μιá σχέση που είναι άτοπη.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Τό σύστημα των εξισώσεων $x^2 - 5x - y^2 = 0$ και $x^2 + y^2 - 8y = 0$ έχει την προφανή λύση $(\xi, \eta) = (0, 0)$. Αφού αποδειχτεί ότι οι άναδιατάξεις $x = 0.2(x^2 - y^2)$ και $y = 0.125(x^2 + y^2)$ των άρχικων εξισώσεων ικανοποιούν τις άπαιτήσεις του θεωρήματος της σελίδας 229 στην όρθογώνια περιοχή $I \equiv \{(x, y) : |x| \leq 1 \text{ και } |y| \leq 1\}$, νά εφαρμοστεί ό αντίστοιχος άλγόριθμος μέ $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$ για την εύρεση της ρίζας $(0, 0)$ μέ προσέγγιση δύο δ.ψ.. (Απ. $(0.00, 0.00)$ σε τρεις επαναλήψεις).

2. Τό γραμμικό σύστημα των εξισώσεων $4x+y-5=0$ και $3x-6y+3=0$ έχει την προφανή λύση $(\xi, \eta) = (1, 1)$. Για τή λύση αυτού με τήν επέκταση τής γενικής επαναληπτικής μεθόδου του παρόντος Κεφαλαίου προτείνεται ο αλγόριθμος $x_{n+1} = 0.25(5-y_n)$ και $y_{n+1} = 0.5(x_n + 1)$ $| n=0, 1, 2, \dots$ με (x_0, y_0) δοσμένη αρχική προσέγγιση. Αφοῦ δειχτεῖ ὅτι ὁ αλγόριθμος, πού δόθηκε, ικανοποιεῖ τίς ἀπαιτήσεις τοῦ θεωρήματος τής σελίδας 229 σέ κάθε ὁρθογώνια περιοχή τής ρίζας $(1, 1)$ νά ἐφαρμοστεῖ αὐτός με $(x_0, y_0) = (0, 0)$ γιά τήν εὕρεση τής λύσης με προσέγγιση δύο δ.ψ. (*Απ. (1.00, 1.00) σέ ἐπτά ἐπαναλήψεις).
3. Ἐστω ὅτι ἡ διατεταγμένη τριάδα (ξ, η, ζ) ἀποτελεῖ μία πραγματική λύση τοῦ συστήματος τῶν τριῶν μή γραμμικῶν εξισώσεων $f_i(x, y, z) = 0$ $| i = 1(1)3$. Νά δοθεῖ ἡ ἀντίστοιχη επέκταση τής γενικής επαναληπτικής μεθόδου τῶν δύο εξισώσεων στήν περίπτωση τῶν παρουσῶν τριῶν καί ἀκόμη νά διατυπωθεῖ καί νά ἀποδειχτεῖ θεώρημα ἀντίστοιχο τοῦ θεωρήματος τής σελίδας 229 γιά τήν περίπτωση τοῦ αλγόριθμου τοῦ συστήματος τῶν τριῶν μή γραμμικῶν εξισώσεων.

———— / ————



ΕΚΤΥΠΩΣΗ
Τυπογραφείο
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΟΑΝΝΙΝΩΝ