



Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Σχολή Επιστημών Αγωγής
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Διδακτική και Τεχνολογίες Μάθησης των Φυσικών Επιστημών».

Κατανόηση αυθεντικών ρεαλιστικών μαθηματικών προβλημάτων από
μελλοντικούς εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία
Καββαδάς Οδυσσέας

Συμβουλευτική επιτροπή

Τάτσης Κωνσταντίνος, Καθηγητής

Βαμβακούση Ξανθή, Καθηγήτρια

Σκουμπουρδή Χρυσάνθη, Καθηγήτρια

Ιωάννινα, 2026

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή.....	6
2. Θεωρητικό πλαίσιο.....	8
2.1 Προσέγγιση και βασικές αρχές των Ρεαλιστικών Μαθηματικών.....	8
2.1.1 Αρχή της φαινομενολογικής εξερεύνησης.....	8
2.1.2 Αρχή της γεφύρωσης των επιπέδων.....	8
2.1.3 Αρχή της δραστηριότητας.....	9
2.1.4 Αρχή της αλληλεπίδρασης.....	9
2.1.5 Αρχή της συνύφανσης.....	9
2.1.6 Αρχή της αυτοδυναμίας.....	9
2.2 Σημασία των Ρεαλιστικών Μαθηματικών.....	10
2.3 Τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών.....	11
2.4 Προώθηση της ρεαλιστικότητας κατά τη διδασκαλία.....	11
2.5 Ο ρόλος του πλαισίου.....	12
2.6 Ανάγκη επέκτασης του όρου «Ρεαλιστικά Μαθηματικά».....	13
2.7 Κριτήρια Αυθεντικότητας.....	13
2.7.1 Γεγονός.....	13
2.7.2 Ερώτημα.....	14
2.7.3 Σκοπός.....	14
2.7.4 Χρήση της γλώσσας.....	14
2.7.5 Ρεαλισμός των πληροφοριών.....	15
2.7.6 Ρεαλιστική παράθεση των πληροφοριών.....	15
2.7.7 Ενδιαφέρον για τους/τις μαθητές/τριες.....	15
2.8 Το ζήτημα της ανοικτότητας.....	16
2.9 Μελλοντικοί/ες εκπαιδευτικοί.....	16
3. Ερευνητικά Ερωτήματα.....	18
4. Μεθοδολογία.....	18
4.1 Πλαίσιο της έρευνας.....	18
4.2 Πρώτο μέρος ερωτηματολογίου.....	20
4.3 Προβλήματα ερωτηματολογίου.....	21
4.3.1 Ανοικτό αυθεντικό.....	21
4.3.2 Κλειστό αυθεντικό.....	22
4.3.3 Μη αυθεντικό βάσει του ερωτήματος.....	22
4.3.4 Μη αυθεντικό βάσει της ρεαλιστικότητας των πληροφοριών.....	23
4.3.5 Μη αυθεντικό βάσει του ενδιαφέροντος για τα παιδιά.....	24
4.3.6 Μη αυθεντικό βάσει του σκοπού.....	24

4.3.7 Μη αυθεντικό βάσει του γεγονότος.....	25
4.3.8 Μη αυθεντικό βάσει της χρήσης της γλώσσας.....	26
4.3.9 Μη αυθεντικό βάσει της ρεαλιστικής παράθεσης των πληροφοριών	26
4.4 Δεύτερο μέρος ερωτηματολογίου.....	27
4.5 Ανάλυση δεδομένων.....	27
5. Αποτελέσματα	29
6. Συμπεράσματα – Συζήτηση.....	34
7. Περιορισμοί της έρευνας.....	35
8. Προτάσεις	35
9. Βιβλιογραφία	37

Περίληψη

Στη συγκεκριμένη εργασία εξετάζεται ο βαθμός εξοικείωσης μελλοντικών εκπαιδευτικών στα αυθεντικά ρεαλιστικά προβλήματα. Δείγμα της έρευνας ήταν 31 τεταρτοετείς φοιτητές/τριες του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, που παρακολουθούσαν μάθημα επιλογής που πραγματεύεται σχετικά ζητήματα. Η έρευνα είναι ποσοτική και αποτελείται από δύο μετρήσεις. Δόθηκε μια σειρά μαθηματικών προβλημάτων και ζητήθηκε να χαρακτηριστούν ως αυθεντικά ή όχι. Επιπλέον, ζητήθηκε από τους/τις φοιτητές/τριες να αξιολογήσουν μια σειρά κριτηρίων αυθεντικότητας τα οποία είχαν παρουσιαστεί κατά τη διάρκεια του μαθήματος. Τα ίδια ερωτήματα τέθηκαν και μία ημέρα μετά. Τα αποτελέσματα έδειξαν επιτυχή αναγνώριση των πραγματικά αυθεντικών προβλημάτων. Επίσης, η συχνότητα επιτυχούς αναγνώρισης παρουσίασε διαφοροποίηση ανάλογα με το κριτήριο, ενώ όλα τα κριτήρια αυθεντικότητας θεωρήθηκαν κατά βάση σημαντικά για όσους/ες συμμετείχαν. Τέλος, εξετάστηκε η ύπαρξη συσχέτισης ανάμεσα στην προηγούμενη επίδοση στα μαθηματικά και στην ικανότητα ορθής αναγνώρισης της αυθεντικότητας ενός προβλήματος. Με εξαίρεση το κριτήριο του σκοπού επίλυσης του προβλήματος, δεν εντοπίστηκε στατιστικά σημαντική συσχέτιση.

Abstract

This study examines the degree to which future teachers are familiar with authentic, real-world problems. The research sample consisted of 31 fourth-year students in the Department of Primary Education at the University of Ioannina, who were taking an elective course on related topics. The study is quantitative and consists of two assessments. The students were given a series of mathematics problems and asked to classify them as authentic or not. In addition, the students were asked to evaluate a set of authenticity criteria that had been presented during the course. The same questions were posed again one day later. The results showed successful identification of the truly authentic problems. Furthermore, the frequency of successful identification varied depending on the criterion, while all authenticity criteria were generally considered important by the participants. Finally, we examined whether there was a correlation between previous performance in mathematics and the ability to correctly identify the

authenticity of a problem. With the exception of the criterion of the purpose of solving the problem, no statistically significant correlation was found.

1. Εισαγωγή

Η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση προτείνει μαθηματικά προβλήματα που έχουν σύνδεση με την πραγματικότητα, τα οποία δεν υπερβαίνουν τις ικανότητες επίλυσης που διαθέτουν οι εκπαιδευτικοί και οι εκπαιδευόμενοι/νες (Κολέζα, 2000). Πλήθος σχετικών ερευνών επικεντρώνονται στο τι θεωρείται ρεαλιστικό μαθηματικό πλαίσιο (Boaler, 1993α, 1993β· Clarke & Roche, 2018), αλλά και στο πώς μαθητές/τριες ή/και εκπαιδευτικοί αντιμετωπίζουν τα ρεαλιστικά προβλήματα (Greer, 1997· Inoue, 2005· Verschaffel et al., 1997).

Ωστόσο, δεν είναι πάντα βέβαιο ότι μέσω ενός πλαισίου θα επιτευχθεί η σύνδεση με την πραγματικότητα. Το πλαίσιο μπορεί να λειτουργήσει ως τροχοπέδη στην κατανόηση των μαθητών/τριών, αν δεν προσομοιάζει επαρκώς τη ρεαλιστική κατάσταση. Η επαρκής αυτή προσομοίωση επιτυγχάνεται μέσω της ικανοποίησης μιας σειράς κριτηρίων. Στη βιβλιογραφία γίνεται πλέον λόγος για αυθεντικά ρεαλιστικά μαθηματικά προβλήματα (Palm, 2007), τα οποία δεν περιορίζονται στην παράθεση ενός γεγονότος που είναι πιθανό να λάβει χώρα. Περιλαμβάνουν – μεταξύ άλλων – ρεαλιστικές αριθμητικές τιμές, προσελκύουν το ενδιαφέρον των μαθητών/τριών και δίνουν έμφαση στο σκοπό της επίλυσης του εκάστοτε προβλήματος. Με άλλα λόγια, τα αυθεντικά μαθηματικά εξετάζουν σφαιρικότερα την καθημερινή ζωή, συγκριτικά με ένα απλό ρεαλιστικό πλαίσιο, το οποίο ενδέχεται να αγνοεί πτυχές της πραγματικότητας.

Οι μελλοντικοί/κές εκπαιδευτικοί αναμένεται να κληθούν να προωθήσουν τα ρεαλιστικά μαθηματικά και να ικανοποιήσουν τις επιταγές της αυθεντικότητας στη διδασκαλία τους. Κατά τη μελέτη της βιβλιογραφίας, εντοπίστηκαν αρκετές έρευνες που είχαν ως επίκεντρο τον τρόπο που οι μαθητές/τριες κατανοούν ή/και επιλύουν αυθεντικά ρεαλιστικά προβλήματα. Αναφορικά με τους μελλοντικούς/κές εκπαιδευτικούς, εντοπίστηκαν κυρίως έρευνες που ενώ απευθύνονται σε αυτούς/αυτές, στην πραγματικότητα τους/τις ρωτούν πως αναμένουν ότι θα ανταποκριθούν οι μαθητές/τριες, σε διαφορετικές εκφάνσεις της διδασκαλίας των αυθεντικών ρεαλιστικών μαθητών. Σε άλλες έρευνες, δίνεται έμφαση στον τρόπο που οι μελλοντικοί/κές εκπαιδευτικοί επιλύουν αυθεντικά μαθηματικά προβλήματα.

Με βάση τα παραπάνω, αποφασίσαμε να εξετάσουμε το επίπεδο ετοιμότητας μελλοντικών εκπαιδευτικών στην αναγνώριση αυθεντικών ρεαλιστικών μαθηματικών

προβλημάτων, τυχόν επίδραση που ασκεί σε αυτό η προηγούμενη επίδοση στα μαθηματικά, αλλά και να διερευνήσουμε τις απόψεις τους, σχετικά με το πώς συγκεκριμένα κριτήρια επηρεάζουν τη συνολική αυθεντικότητα ενός προβλήματος.

2. Θεωρητικό πλαίσιο

2.1 Προσέγγιση και βασικές αρχές των Ρεαλιστικών Μαθηματικών

Οι Van Den Heuvel-Panhuizen and Drijvers (2014) αναγνωρίζουν ως βασικό χαρακτηριστικό της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (PME) το ότι αξιοποιεί ρεαλιστικές καταστάσεις, προκειμένου να εισάγει μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες. Δημιουργείται λοιπόν ένα πλαίσιο εντός του οποίου οι μαθητές/τριες καλούνται να εφαρμόσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις, με απώτερο στόχο αυτές να γενικευτούν και να καταστούν σταδιακά αξιοποιήσιμες και εκτός του πλαισίου. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο όρος «ρεαλιστικός» προτιμήθηκε έναντι του όρου «πραγματικός», διότι περιγράφει μία ευρύτερη έννοια. Με άλλα λόγια, δεν είναι απαραίτητο όσα περιγράφονται στο πλαίσιο να έχουν συμβεί στη πραγματικότητα. Ωστόσο, απαιτείται να μπορούν να συμβούν ως βιωματικές καταστάσεις.

2.1.1 Αρχή της φαινομενολογικής εξερεύνησης

Σύμφωνα με την Κολέζα (2000), όταν εισάγεται ένα νέο μαθηματικό αντικείμενο, είναι απαραίτητο να διατυπώνεται μέσα σε ένα πλαίσιο. Ένα πρόβλημα πλαισίου αναφέρεται σε μία πραγματική κατάσταση και αποτελεί επέκταση ενός απλού λεκτικού προβλήματος. Η όλη διαδικασία αποσκοπεί στο να γίνει κατανοητή η σημασία της νέας μαθηματικής έννοιας για την επίλυση προβλημάτων που μπορεί να προκύψουν στην καθημερινότητα. Έτσι, η διαίρεση για παράδειγμα, δεν διδάσκεται ως αφηρημένη έννοια, διότι έχει την έννοια μίας «δίκαιης μοιρασιάς» που λαμβάνει χώρα στην καθημερινότητα. Μάλιστα, ανάλογα με το πλαίσιο μπορεί να υπάρξουν διαφοροποιήσεις και στην επίλυση ενός προβλήματος, αν λόγου χάρη η «δίκαιη μοιρασιά» καταλήγει σε δεκαδικό αριθμό, ο οποίος αναφέρεται σε οντότητες που δεν μπορούν να χωριστούν σε τμήματα.

2.1.2 Αρχή της γεφύρωσης των επιπέδων

Κατά την εκμάθηση μίας νέας έννοιας, οι εκπαιδευόμενοι/νες περνούν από διάφορα επίπεδα κατανόησης. Ξεκινούν στο πρώτο επίπεδο από άτυπες λύσεις, που σχετίζονται με το πλαίσιο, προχωρούν στο ενδιάμεσο επίπεδο όπου δημιουργούν συντομεύσεις και σχηματοποιήσεις για να καταλήξουν τελικά στο τελευταίο επίπεδο κατανόησης και αναστοχασμού, όπου ανακαλύπτουν τη συσχέτιση μεταξύ εννοιών και στρατηγικών επίλυσης. Πρόκειται, για μία διαδικασία μετάβασης από άτυπα σε τυπικά μαθηματικά, μία διαδικασία οριζόντιας και κατακόρυφης μαθηματικοποίησης. Αξίζει ακόμη να

αναφερθεί η σημασία των διάφορων μοντέλων, σχημάτων και διαγραμμάτων στη γεφύρωση του χάσματος μεταξύ των επιπέδων (Κολέζα, 2000· Van Den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014).

2.1.3 Αρχή της δραστηριότητας

Οι εκπαιδευόμενοι/νες αντιμετωπίζονται ως ενεργοί συμμετέχοντες στην εκπαιδευτική διαδικασία. Μία πιο απλή διατύπωση θα ήταν ότι τα μαθηματικά μαθαίνονται κάνοντας μαθηματικά (Van Den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014).

2.1.4 Αρχή της αλληλεπίδρασης

Η εκμάθηση των μαθηματικών δεν είναι μία ατομική, αλλά μία κοινωνική δραστηριότητα. Στο πλαίσιο της διδασκαλίας οι μαθητές/τριες έρχονται σε επαφή με τις «νοητικές κατασκευές» των συμμαθητών/τριών τους. Μέσω της συζήτησης προωθείται η γόνιμη αντιπαράθεση για τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευόμενοι/ες. Ταυτόχρονα, υπάρχει η έννοια της συλλογικής προσπάθειας, όπου γίνεται διαμοιρασμός ιδεών και από κοινού ανάπτυξη στρατηγικών. Τα παραπάνω υπόκεινται σε συλλογική κρίση και επιχειρηματολογία, με αποτέλεσμα η ομάδα να κατακτά υψηλότερα επίπεδα κατανόησης και αναστοχασμού (Κολέζα, 2000· Van Den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014).

2.1.5 Αρχή της συνύφανσης

Η εν λόγω αρχή πηγάζει από την αρχή της φαινομενολογικής εξερεύνησης. Τα πραγματικά φαινόμενα συνήθως δεν μπορούν να αποτυπωθούν πλήρως αποκλειστικά από μία μαθηματική έννοια. Ο πραγματικός κόσμος είναι ιδιαίτερα σύνθετος. Έτσι, στα προβλήματα πλαισίου ενδέχεται να εμπλέκονται διάφορες μαθηματικές έννοιες. Τα κλάσματα επί παραδείγματι, συνυπάρχουν με τους λόγους, τις αναλογίες και τους δεκαδικούς αριθμούς. Τόσο κατά την επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων, όσο και εν γένει κατά τη διδασκαλία αναδεικνύονται οι συνδέσεις μεταξύ των εννοιών (Κολέζα, 2000).

2.1.6 Αρχή της αυτοδυναμίας

Όταν ο μαθητής/τρια ενεργεί κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, ο/η εκπαιδευτικός έχει την ευκαιρία να αναγνωρίσει το βαθμό στον οποίο όσα διδάσκονται έχουν γίνει κατανοητά. Οι σκέψεις που διατυπώνει, οι στρατηγικές επίλυσης που αναπτύσσει και τα εργαλεία αποτελούν ισχυρές ενδείξεις για τον/την εκπαιδευτικό, ενώ δίνουν και

στο/στη μαθητή/τρια τη δυνατότητα να αποκτήσει μία εικόνα για τον εαυτό του. Τελικά, το έργο που παράγει ο/η μαθητής/τρια αποτελεί μαθησιακό και διδακτικό εργαλείο, καθώς έχει ως αποτέλεσμα την προσαρμογή της εκπαιδευτικής διαδικασίας στις ανάγκες του/της (Κολέζα, 2000).

2.2 Σημασία των Ρεαλιστικών Μαθηματικών

Στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι οι αυριανοί πολίτες να καταστούν μαθηματικά εγγράμματοι, που σημαίνει να μπορούν να αξιοποιήσουν τα μαθηματικά για να αντιμετωπίσουν αποτελεσματικά τις απαιτήσεις της πραγματικής ζωής (De Lange, 1999). Ανάλογη προσέγγιση δίνεται και στο νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών για τη διδασκαλία των μαθηματικών, όπου τονίζεται η χρήση των μαθηματικών για την ερμηνεία του κοινωνικού περιβάλλοντος, αλλά και για τη λήψη αποφάσεων εντός αυτού (Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, 2022). Ταυτόχρονα, μέσω των ρεαλιστικών πλαισίων, η εκμάθηση των μαθηματικών γίνεται μία διαδικασία καθοδηγούμενης ανακάλυψης, όπου η οριζόντια και η κατακόρυφη μαθηματικοποίηση αποκτούν νόημα (Gravemeijer & Doorman, 1999). Στη μελέτη των Dickinson and Hough (2012), παρατίθεται πλήθος ερευνών όπου παρατηρήθηκε – μεταξύ άλλων – βελτίωση της επίδοσης των μαθητών/τριών που έχουν εμπλακεί στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση, βελτίωση του επιπέδου κατανόησής τους, αλλά και θετικός αντίκτυπος για τους/τις εκπαιδευτικούς, αναφορικά με το σχεδιασμό και το παρεχόμενο εκπαιδευτικό έργο. Ακόμη, η μάθηση με τη χρήση των ρεαλιστικών μαθηματικών, ενισχύει την κριτική σκέψη (Dapueto & Parenti, 1999).

Τα ρεαλιστικά μαθηματικά καθίστανται λοιπόν απαραίτητα, χωρίς αυτό να σημαίνει απαραίτητα, ότι έχουν ενταχθεί στην εκπαιδευτική διαδικασία με ομαλό τρόπο. Ειδικότερα, δεν αποκλείεται οι μαθητές/τριες να επιδεικνύουν περισσότερο ενδιαφέρον για τα παραδοσιακά μαθηματικά προβλήματα σε σχέση με τα ρεαλιστικά, όταν δεν είναι εξοικειωμένοι με τα τελευταία (Rellensmann & Schukajlow, 2016). Ωστόσο, θα πρέπει να υποστηριχθεί η μετατόπιση της μαθηματικής εκπαίδευσης από τα παραδοσιακά στα ρεαλιστικά μαθηματικά, ειδάλλως ελλοχεύει ο κίνδυνος το γενικότερο ενδιαφέρον των εκπαιδευόμενων για τα μαθηματικά να περιοριστεί δραστικά (Verschaffel et al., 2009).

2.3 Τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών

Στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών (ΠΣ) για τα μαθηματικά (Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, 2022) γίνεται μία αποσαφήνιση του όρου μαθηματικός γραμματισμός: πρόκειται για την ικανότητα ερμηνείας του κοινωνικού περιβάλλοντος με βάση τα μαθηματικά, αλλά και τη λήψη αποφάσεων εντός του περιβάλλοντος αυτού. Από την μελέτη του ΠΣ, προκύπτει ότι δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στο ρόλο των πλαισίων και πιο συγκεκριμένα στην εφαρμογή των διδασκόμενων μεθόδων και διαδικασιών σε διαφορετικά πλαίσια.

Ο όρος ρεαλιστικά πλαίσια εντοπίζεται για πρώτη φορά στη Στ' Δημοτικού. Ωστόσο, ήδη από την Α' δημοτικού υπάρχει αναφορά σε «καταστάσεις της καθημερινής ζωής». Με άλλα λόγια, χρησιμοποιούνται αρκετά περισσότερο ορολογίες όπως «καθημερινά πλαίσια» ή «πραγματικές καταστάσεις». Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα λοιπόν είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με την προετοιμασία των μαθητών για την καθημερινή ζωή. Οι σχετικές δραστηριότητες γίνονται πιο απαιτητικές και εξειδικευμένες, όσο μεγαλώνουν οι τάξεις.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί, ότι σε αρκετά μέρη του νέου ΠΣ δεν γίνεται χρήση της προαναφερθείσας ορολογίας, αλλά παρατίθενται ενδεικτικές δραστηριότητες και προτεινόμενα προβλήματα, τα οποία σχετίζονται άμεσα με την αντιμετώπιση πραγματικών καταστάσεων. Ταυτόχρονα, ενθαρρύνεται η αξιοποίηση και η δημιουργία μοντέλων, όπως επίσης και η τεκμηρίωση των εκάστοτε απαντήσεων που προκύπτουν με βάση τη λογική.

2.4 Προώθηση της ρεαλιστικότητας κατά τη διδασκαλία

Δεδομένου ότι η σχολική κουλτούρα ωθεί τους εκπαιδευόμενους/μενες να αγνοούν τις γνώσεις τους για τον πραγματικό κόσμο, όταν επιλύουν μαθηματικά προβλήματα (Verschaffel & De Corte, 1997· Wisenöcker et al., 2023), είναι λογικό να αναζητηθούν πρακτικές προώθησης της ρεαλιστικότητας. Μία θεμελιώδης τέτοια πρακτική είναι η μοντελοποίηση. Μέσω αυτής επιτυγχάνεται η σύνδεση ανάμεσα στην περιγραφή του πραγματικού κόσμου και τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες (Novotná, 2001).

Σε άλλες πρακτικές, οι Wisenöcker et al. (2023), εξέτασαν την επίδραση που έχουν οι προτροπές που δίνονται κατά την επίλυση προβλημάτων. Στην έρευνά τους, η οποία περιλάμβανε τόσο μαθητές/τριες δημοτικού όσο και ενήλικες, διαπίστωσαν πως η ύπαρξη προτροπών του τύπου «εξετάστε τις ρεαλιστικές παραμέτρους του

προβλήματος», δεν είχαν ως αποτέλεσμα αύξηση των ρεαλιστικών απαντήσεων. Ταυτόχρονα, η ύπαρξη προτροπών του τύπου «δώστε έμφαση στις μαθηματικές πράξεις», οδήγησε σε στατιστικά σημαντική πτώση των ρεαλιστικών απαντήσεων.

Προχωρώντας, οι Verschaffel et al. (1994) παρατήρησαν ότι σε περιπτώσεις προβλημάτων που απαιτείται η διατύπωση απάντησης, το ποσοστό των τελικών ρεαλιστικών απαντήσεων ενδέχεται να είναι υψηλότερο. Κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί σε περιπτώσεις όπου η μαθηματική λύση που προκύπτει από τα αριθμητικά δεδομένα είναι για παράδειγμα 13,5 και η απάντηση που καλούνται να γράψουν τα παιδιά είναι: «Άρα θα χρειαστούν 13,5 λεωφορεία για τη μεταφορά των στρατιωτών».

Οι Boonen et al. (2014) με τη σειρά τους εξέτασαν την επίδραση της δημιουργίας οπτικών και σχηματικών αναπαραστάσεων σε χαρτί εκ μέρους των μαθητών/τριών με σκοπό να οδηγηθούν ευκολότερα στη λύση ενός λεκτικού προβλήματος. Η έρευνα έδειξε ότι όσοι/ες έκαναν ακριβείς αναπαραστάσεις αύξησαν την πιθανότητα να λύσουν σωστά το πρόβλημα κατά σχεδόν έξι φορές, σε σχέση με αυτούς/ές που δεν έκαναν καθόλου. Ενδιαφέρον είναι ακόμη πως η δημιουργία λανθασμένης (ανακριβούς) αναπαράστασης συνδέεται με χαμηλότερα αποτελέσματα, συγκριτικά με τη μη δημιουργία αναπαράστασης. Υπάρχει λοιπόν θετική συσχέτιση μεταξύ ορθού σχήματος και σωστής επίλυσης. Βέβαια, η ικανότητα δημιουργίας ενός σχηματικού μοντέλου συνδέεται με τις επιμέρους δεξιότητες του εκάστοτε υποκειμένου. Συνακόλουθα, δεν πρέπει να αποκλειστεί η πιθανότητα, κάποιος/α να δημιουργεί εσωτερική (νοητική) αναπαράσταση.

Αναφορικά με τη συνεισφορά της τεχνολογίας, οι Lin et al. (2024) εξέτασαν τα αποτελέσματα που είχε η ανάλυση λαθών, στα οποία υπέπεσε η τεχνητή νοημοσύνη κατά την επίλυση αυθεντικών προβλημάτων, από μαθητές/τριες δημοτικού. Όπως προέκυψε, στην πειραματική ομάδα επιτεύχθηκε καλύτερη ενίσχυση των δεξιοτήτων επίλυσης αυθεντικών μαθηματικών προβλημάτων, σε σχέση με την ομάδα ελέγχου, για την οποία ακολουθήθηκε παραδοσιακή μέθοδος διδασκαλίας. Στην πειραματική ομάδα μάλιστα, βελτιώθηκαν και οι επιδόσεις των πιο αδύναμων μαθητών/τριών και συνολικά η αυτοπεποίθηση των μελών της ομάδας.

2.5 Ο ρόλος του πλαισίου

Ο ρόλος του πλαισίου κατά την Boaler (1993β) είναι να διευκολύνει τη μετάβαση από τα παραδοσιακά σχολικά μαθηματικά στα ρεαλιστικά μαθηματικά. Το πλαίσιο

πρέπει να ξεκινά από το/τη μαθητή/τρια και να ενθαρρύνει την εμπλοκή του/της. Αν και δίνεται πλαίσιο ο/η μαθητής/τρια ακολουθεί τη δική του/της διαδρομή. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές/τριες πρέπει να διδάσκονται παραδείγματα μεθόδων τα οποία στη συνέχεια προσαρμόζουν και θέτουν σε διαπραγμάτευση, για την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου. Σε αντίθετη περίπτωση, διδάσκονται απλώς μαθηματικές διαδικασίες και τεχνικές, χωρίς τελικά να γνωρίζουν τι σημαίνουν αυτές ή πού χρησιμεύουν. Βέβαια, είναι σημαντικό να αποσαφηνιστεί ότι το πλαίσιο, μπορεί να λειτουργήσει και ως εμπόδιο, καθώς η ύπαρξή του δεν συνεπάγεται απαραίτητα ότι οι μαθητές/τριες θα μεταφέρουν επιτυχώς τις μαθηματικές τους γνώσεις σε αυτό.

2.6 Ανάγκη επέκτασης του όρου «Ρεαλιστικά Μαθηματικά»

Στο σημείο αυτό αξίζει να αποσαφηνιστεί με ποιο τρόπο ενδέχεται το πλαίσιο να λειτουργεί ανασταλτικά του ρόλου του. Αρχικά, μπορεί να αγνοεί εκδοχές της πραγματικότητας ή/και να δημιουργεί παράλογες καταστάσεις. Παραδείγματος χάρη, υπάρχουν προβλήματα που αφορούν αγορές αγαθών (πραγματικό σενάριο), αλλά οι τιμές των αγαθών δεν ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα. Ακόμη, προβλήματα που αφορούν πληρωμή λογαριασμών είναι μεν ρεαλιστικά, αλλά αφορούν κυρίως ενήλικες (Boaler, 1993α). Προχωρώντας, σύμφωνα με τον Palm (2007), απαιτούνται συγκεκριμένες πληροφορίες, που είναι χρήσιμες στην πραγματική κατάσταση, και όσο πιο κοντά γίνεται στις πραγματικές τιμές. Επιπλέον, οι μαθητές/τριες πρέπει να συμμετέχουν στην υποτιθέμενη κατάσταση, και η επίλυση του προβλήματος είναι απαραίτητο να εξυπηρετεί ένα σκοπό, ο οποίος θα είχε νόημα στην πραγματική ζωή.

2.7 Κριτήρια Αυθεντικότητας

Δεδομένου ότι ο όρος αυθεντικά μαθηματικά αποτελεί επέκταση του όρου ρεαλιστικά μαθηματικά, βασικό κριτήριο αυθεντικότητας ενός προβλήματος είναι η ύπαρξη ρεαλιστικού πλαισίου. Υπάρχει όμως και πλήθος άλλων κριτηρίων που εντοπίζονται στη βιβλιογραφία.

2.7.1 Γεγονός

Προσδίδει το ρεαλιστικό πλαίσιο. Η συνθήκη που περιγράφεται πρέπει να έχει λάβει χώρα ή να περιγράφει κάτι που είναι πιθανό να συμβεί στην πραγματική/καθημερινή ζωή (Palm, 2007). Τονίζεται ότι το πλαίσιο δεν πρέπει να αγνοεί πτυχές της πραγματικότητας, διότι τότε καθίσταται ψευδορεαλιστικό (Boaler, 1993α).

2.7.2 Ερώτημα

Το ερώτημα πρέπει να είναι ξεκάθαρο και να μπορεί να τεθεί στην πραγματικότητα, όταν λάβει χώρα η συνθήκη που περιγράφεται. Επίσης, είναι απαραίτητο η εκάστοτε απάντηση να μπορεί να προκύψει με λογική συνέχεια, εντός του δοθέντος πλαισίου (Palm, 2007).

2.7.3 Σκοπός

Απαιτείται να είναι σαφές, γιατί χρειάζεται η απάντηση στο ερώτημα που τίθεται. Με άλλα λόγια, δεν αρκεί ένα ερώτημα να είναι ξεκάθαρο, αλλά η απάντησή του να είναι χρήσιμη στην πραγματική ζωή (Özgün-Koca et al., 2019).

2.7.4 Χρήση της γλώσσας

Η ποσότητα και η ποιότητα του κειμένου έχουν ιδιαίτερη σημασία. Το κείμενο πρέπει να είναι προσεκτικά γραμμένο και να έχει ορθή δομή προτάσεων. Η ορολογία προτείνεται να είναι αντίστοιχη εκείνης που θα χρησιμοποιούνταν στην καθημερινή ζωή, και όχι ιδιαίτερα εξειδικευμένη. Η αποφυγή πλατειασμών και παράθεσης περιττών πληροφοριών, συνιστούν καλές πρακτικές (Palm, 2007). Επιπρόσθετα, το λεξιλόγιο μπορεί υπό προϋποθέσεις, να αποτελέσει παράγοντα πρόβλεψης της επίδοσης των εκπαιδευομένων, κατά την επίλυση ορισμένων μαθηματικών προβλημάτων (Park & Matthews, 2025).

Γενικότερα, οι Verschafel et al. (2000 όπως αναφ. στο Verschafel et al., 2020) ορίζουν τα λεκτικά μαθηματικά προβλήματα ως λεκτικές περιγραφές καταστάσεων, οι οποίες έχουν προσαρμοστεί με βάση τη σχολική διδασκαλία. Οι ερωτήσεις που τίθενται μπορούν να απαντηθούν, μέσω της διεξαγωγής μαθηματικών πράξεων, με τα αριθμητικά δεδομένα που δίνονται, ή με δεδομένα που προκύπτουν κατά τη διαδικασία επίλυσης.

Οι Verschaffel et al. (2020) προχωρούν επίσης σε διαχωρισμό μεταξύ των προαναφερθέντων σχολικών προβλημάτων και των αυθεντικών προβλημάτων που αντιμετωπίζουμε στην πραγματική ζωή. Στην πρώτη περίπτωση, απαιτούνται απλές μαθηματικές πράξεις. Στην δεύτερη περίπτωση, η επίλυση είναι σύνθετη, περιλαμβάνει πληθώρα δεδομένων, ενώ η ορθότητα του αποτελέσματος μπορεί να αμφισβητηθεί. Η

ειδοποιός διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι πρέπει να ληφθεί υπόψη η πολυπλοκότητα του πραγματικού κόσμου.

Στο πλαίσιο της παρούσας έρευνας, η πολυπλοκότητα του πραγματικού κόσμου αντικατοπτρίζεται μέσω της ικανοποίησης του συνόλου των κριτηρίων αυθεντικότητας. Για το κριτήριο της γλώσσας λοιπόν δόθηκε έμφαση στην ποσότητα και την ποιότητα του κειμένου, ως προς τη χρησιμότητά τους για την επίλυση, και όχι ως προς την επίτευξη ρεαλιστικού πλαισίου, δεδομένου ότι το τελευταίο αποτελεί διαφορετικό κριτήριο αυθεντικότητας.

2.7.5 Ρεαλισμός των πληροφοριών

Αφορά τις αριθμητικές τιμές που περιλαμβάνει ένα πρόβλημα. Οι εν λόγω τιμές πρέπει να είναι κατά το δυνατόν ρεαλιστικές. Έτσι, η τιμή ενός προϊόντος ή η ποσότητα ενός αγαθού που αγοράζει κάποιος, δεν μπορούν να είναι αυθαίρετες. Επίσης, η άκριτη μεταβολή των αριθμητικών τιμών, με σκοπό να καταστεί η διεξαγωγή πράξεων ευκολότερη, αποτελεί κακή πρακτική (Palm, 2007).

2.7.6 Ρεαλιστική παράθεση των πληροφοριών

Σχετίζεται με το βαθμό στον οποίο τα δεδομένα που δίνονται, είναι αντίστοιχα εκείνων που θα δινόντουσαν στην πραγματική κατάσταση. Εκφάνσεις αυτού του κριτηρίου είναι για παράδειγμα η χρήση ρεαλιστικών μονάδων μέτρησης ή ρεαλιστικών μαθηματικών τρόπων αναπαράστασης των αριθμητικών τιμών (Palm, 2007).

2.7.7 Ενδιαφέρον για τους/τις μαθητές/τριες

Το πλαίσιο και το περιεχόμενο του προβλήματος πρέπει να έχει ενδιαφέρον για τους/τις μαθητές/τριες, να σχετίζεται δηλαδή με αυτούς/ές (Özgün-Koca et al., 2019). Το ενδιαφέρον είναι σημαντικό για τη μαθηματική εκπαίδευση, διότι συμβάλλει στη μάθηση των μαθηματικών (Murayama et al., 2013), καθώς και στην ανάπτυξη μαθηματικού γραμματισμού (Carmichael et al., 2009 όπως ανάφ. στο Rellensmann & Schukajlow, 2016). Μάλιστα, οι Marsh et al. (2005) στη μελέτη τους, εντοπίζουν συσχέτιση ανάμεσα στο ενδιαφέρον που επιδεικνύει ο/η μαθητής/τρια, την αυτοεικόνα του/της και την επίδοσή του/της. Στη βιβλιογραφία ωστόσο, γίνεται αναφορά και σε ρεαλιστικά προβλήματα που αφορούν ενήλικες (Boaler, 1993α), τα οποία δεν

επιτρέπουν στους/στις εκπαιδευόμενους/ες να αναπτύξουν το δικό τους νόημα, και επομένως να καταπιαστούν ουσιαστικά με την επίλυσή τους.

2.8 Το ζήτημα της ανοικτότητας

Η ανοικτότητα αφορά το αν η απάντηση σε ένα πρόβλημα επιδέχεται συζήτηση ή όχι (Özgün-Koca et al., 2019). Ωστόσο, δεν θεωρούμε ότι ένα πρόβλημα που επιδέχεται μία και μοναδική σωστή αριθμητική λύση, αλλά ικανοποιεί τα υπόλοιπα κριτήρια, καθίσταται λιγότερο αυθεντικό σε σχέση με κάποιο που επιδέχεται δύο ή περισσότερες. Ως εκ τούτου, η ανοικτότητα δεν εξετάστηκε ως αυτοτελές κριτήριο στην έρευνά μας. Φροντίσαμε όμως το εργαλείο συλλογής δεδομένων να περιλαμβάνει τόσο ένα κλειστό αυθεντικό πρόβλημα, όσο και ένα ανοικτό.

2.9 Μελλοντικοί/ες εκπαιδευτικοί

Έχοντας αποσαφηνίσει τη σημασία των αυθεντικών ρεαλιστικών μαθηματικών, γεννάται το ερώτημα σε ποιο βαθμό οι μελλοντικοί/ές εκπαιδευτικοί είναι έτοιμοι να καταπιαστούν με αυτά. Οι Rellensmann and Schukajlow (2016) συμπέραναν ότι οι προβλέψεις των μελλοντικών εκπαιδευτικών για το ενδιαφέρον που επρόκειτο να δείξουν οι μαθητές/τριες για ένα πρόβλημα ήταν εσφαλμένες. Οι μελλοντικοί/ές εκπαιδευτικοί υπερεκτιμούν το ενδιαφέρον που πρόκειται να προκαλέσει ένα ρεαλιστικό πρόβλημα, και αντίστοιχα υποεκτιμούν την πρόκληση ενδιαφέροντος μέσω παραδοσιακών μαθηματικών προβλημάτων. Οι προβλέψεις αυτές μάλιστα, ενδέχεται να είναι σε διαφωνία μεταξύ τους και να διαφοροποιούνται έντονα από εκπαιδευτικό σε εκπαιδευτικό.

Επιπλέον, η τάση των μαθητών/τριών να δίνουν απαντήσεις που δεν συνάδουν με το ρεαλιστικό πλαίσιο του εκάστοτε προβλήματος, παρατηρείται και στους/στις μελλοντικούς/ές εκπαιδευτικούς (Verschaffel et al., 2000 όπως αναφ. στο Palm, 2007). Ουσιαστικά, προπτυχιακοί/ές φοιτητές/τριες δίνουν μη ρεαλιστικές απαντήσεις γιατί προσαρμόζονται στη σχολική κουλτούρα (Inoue, 2005). Με άλλα λόγια, έχουν την τάση να «αποκλείουν» τις γνώσεις του πραγματικού κόσμου όταν επιλύουν σχολικά προβλήματα. Βέβαια, η τάση αυτή μπορεί να περιοριστεί ανάλογα με το περιεχόμενο του προβλήματος, όπως για παράδειγμα αν περιλαμβάνονται διαιρέσεις με υπόλοιπο (Verschaffel et al., 1997). Στο ίδιο μήκος κύματος, σε ορισμένους/ες εκπαιδευτικούς παρατηρείται η μη ενθάρρυνση της προσωπικής εμπλοκής των μαθητών/τριών με τα

μαθηματικά προβλήματα. Εστιάζουν δηλαδή στα μαθηματικά αυτά καθ' αυτά. Πρόκειται και πάλι βέβαια για μία μη απόλυτη τάση (Chapman, 2006).

Γεννάται επίσης το ερώτημα αν οι διάφορες τάσεις επιδόσεων ή/και προβλέψεων μπορούν να επηρεαστούν από προϋπάρχουσες γνώσεις και επιδόσεις. Οι Hailikari et al. (2007) διερεύνησαν τις σχέσεις μεταξύ προηγούμενων γνώσεων, ακαδημαϊκών αυτοπεποιθήσεων και προηγούμενης μαθησιακής επιτυχίας. Τα αποτελέσματά τους κατέδειξαν ότι υπάρχει αλληλοεπικάλυψη της επίδρασης που ασκούν οι τρεις παράγοντες, όπως και αλληλεξάρτηση μεταξύ τους. Ταυτόχρονα, κατέδειξαν πως η προγενέστερη επιτυχία αποτελεί ισχυρό παράγοντα πρόβλεψης της επίδοσης ενός/μίας φοιτητή/τριας.

Όλα τα παραπάνω δημιουργούν ένα είδος διδακτικού συμβολαίου. Σύμφωνα με τον Skovsmose (2001), στην παραδοσιακή μαθηματική εκπαίδευση, ο/η εκπαιδευτικός διδάσκει μεθόδους τις οποίες τα παιδιά πρέπει απλώς να εφαρμόσουν, για να οδηγηθούν στη μία και μοναδική σωστή απάντηση. Το εν λόγω γεγονός έχει δημιουργήσει μία ημι-πραγματικότητα στα σχολικά μαθηματικά. Απαιτείται λοιπόν ρήξη του υπάρχοντος διδακτικού συμβολαίου και υιοθέτηση ενός εκπαιδευτικού μοντέλου, εντός του οποίου μαθητές/τριες και εκπαιδευτικοί θα λειτουργούν παραγωγικά, αντιμετωπίζοντας ερωτήσεις ανοικτού τύπου. Τέτοιου είδους ερωτήσεις θα μπορούσαν να έχουν τη μορφή «τι θα συνέβαινε αν;». Προχωρώντας, είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να συμμετέχουν στην επιλογή και στη δημιουργία ρεαλιστικών προβλημάτων. Καίριο ρόλο στην αποτελεσματική προετοιμασία των εκπαιδευτικών, μπορεί να διαδραματίσει η μοντελοποίηση (Sevinc & Lesh, 2017· Verschaffel et al., 2009).

3. Ερευνητικά Ερωτήματα

- Είναι σε θέση οι μελλοντικοί/ές εκπαιδευτικοί να διακρίνουν αυθεντικά ρεαλιστικά προβλήματα;
- Ποια κριτήρια αυθεντικότητας τείνουν να αναγνωρίζουν πιο αποτελεσματικά οι μελλοντικοί/ές εκπαιδευτικοί;
- Υπάρχει συσχέτιση μεταξύ της προηγούμενης επίδοσης στα μαθηματικά με την ορθή αναγνώριση της αυθεντικότητας ενός προβλήματος;
- Ποια κριτήρια αυθεντικότητας θεωρούν πιο κρίσιμα/σημαντικά;

4. Μεθοδολογία

4.1 Πλαίσιο της έρευνας

Δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 26 φοιτήτριες και 5 φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Πρόκειται για μελλοντικούς/ές εκπαιδευτικούς που παρακολούθησαν το μάθημα «Ειδικά θέματα Μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο» κατά το εαρινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2025-2026. Το μάθημα πραγματεύεται – μεταξύ άλλων – ζητήματα γύρω από τη ρεαλιστικότητα των μαθηματικών προβλημάτων και προσαρμόστηκε κατάλληλα με σκοπό να αναλυθούν περαιτέρω ζητήματα αυθεντικότητας. Επιπλέον, οι συμμετέχοντες/ουσες στην παρούσα έρευνα έχουν παρακολουθήσει υποχρεωτικά μαθήματα μαθηματικών κατά το παρελθόν. Σε ένα από αυτά, γίνονται έμμεσες αναφορές στην έννοια της ρεαλιστικότητας. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε μέσω ερωτηματολογίου. Αρχικά, το ερωτηματολόγιο δόθηκε κατά τη διάρκεια διάλεξης, στην οποία είχε παρουσιαστεί η έννοια της αυθεντικότητας, καθώς και τα κριτήρια που την επηρεάζουν. Το ίδιο ερωτηματολόγιο δόθηκε μία ημέρα μετά και οι συμμετέχοντες/ουσες κλήθηκαν να το συμπληρώσουν στο δικό τους χρόνο. Τα αποτελέσματα της έρευνας προέκυψαν μέσω της σύγκρισης των αποτελεσμάτων των δύο αυτών μετρήσεων.

Η σημασία της μέτρησης μία ημέρα μετά, έγκειται στο να διερευνηθεί αν οι απαντήσεις που δόθηκαν κατά τη διάρκεια της διάλεξης διαφοροποιήθηκαν ουσιαστικά αργότερα. Ουσιαστική διαφοροποίηση σημαίνει ένδειξη ότι η παρουσίαση της

αυθεντικότητας που προηγήθηκε της πρώτης μέτρησης, είναι ιδιαίτερα σημαντική για τον τρόπο απόκρισης των φοιτητών/τριών. Μη ουσιαστική διαφοροποίηση σημαίνει ότι το αρχικό επίπεδο κατανόησης που καταγράφεται, διατηρείται σε πρώτη φάση, ακόμη κι αν δεν προσφερθεί επιπλέον υποστήριξη στους συμμετέχοντες/ουσες.

Επίσης, υπήρξε ο σχεδιασμός, το ερωτηματολόγιο να δοθεί και τρίτη φορά. Η τρίτη μέτρηση έλαβε χώρα μία εβδομάδα μετά την πρώτη κι αποσκοπούσε στο να γίνει καλύτερη σύγκριση μεταξύ των συνολικών αποτελεσμάτων. Οι φοιτητές/τριες κλήθηκαν και πάλι να απαντήσουν στο δικό τους χρόνο. Δυστυχώς, τα αποτελέσματα της τελευταίας αυτής μέτρησης απορρίφθηκαν, διότι συμμετείχε ελάχιστος αριθμός φοιτητών/τριών. Η πλειοψηφία των συμμετεχόντων/ουσών μάλιστα, δεν είχε συμπληρώσει τα δύο πρώτα ερωτηματολόγια. Συνεπώς, ακόμα και αν ο μικρός αριθμός απαντήσεων της τρίτης μέτρησης είχε συμπεριληφθεί στην έρευνα, τα αποτελέσματα θα ήταν μη συγκρίσιμα μεταξύ τους.

Ένα άλλο κρίσιμο ζήτημα για το σχεδιασμό της έρευνας ήταν ο χρόνος διεξαγωγής της πρώτης μέτρησης. Σε πρώτη φάση, εξετάστηκε το ενδεχόμενο να διεξαχθεί η μέτρηση, πριν την αναλυτική παρουσίαση της έννοιας της αυθεντικότητας στο αμφιθέατρο. Με αυτό τον τρόπο, θα είχε καταστεί πιο σαφές ποιες είναι οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μελλοντικών εκπαιδευτικών και ποια η επίδραση της παρουσίας στην ικανότητα αναγνώρισης της αυθεντικότητας, αλλά και στις απόψεις τους. Ωστόσο, δεδομένου ότι στα προηγούμενα μαθήματα μαθηματικών του Τμήματος γίνεται εισαγωγική αναφορά των εννοιών, δίχως πλήρεις ορισμούς και ονομαστική αναφορά των κριτηρίων αυθεντικότητας, θεωρήθηκε ότι οι ερωτώμενοι/νες δεν είχαν το απαιτούμενο υπόβαθρο για να ανταποκριθούν κατευθείαν στο ερωτηματολόγιο. Ως εκ τούτου, το συγκεκριμένο ενδεχόμενο απορρίφθηκε.

Το πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου περιείχε εννέα προβλήματα, τα οποία προσομοίωναν καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Οι συμμετέχοντες/ουσες κλήθηκαν να αποφανθούν αν κάθε ένα από τα προβλήματα είναι αυθεντικό ή μη. Το δεύτερο μέρος περιείχε τα κριτήρια αυθεντικότητας ενός μαθηματικού προβλήματος και το ζητούμενο ήταν να επιλέξουν – κατά την κρίση τους – πόσο σημαντικό θεωρούσαν καθένα από αυτά για τη συνολική αυθεντικότητα ενός προβλήματος. Μέσω του α' μέρους αναμέναμε να προκύψουν συμπεράσματα για τα δύο πρώτα ερευνητικά ερωτήματα, ενώ το β' μέρος αντιστοιχούσε στο τελευταίο ερώτημα. Για το τρίτο

ερώτημα αξιοποιήθηκαν οι απαντήσεις του α' μέρους, καθώς και οι απαντήσεις εισαγωγικής ερώτησης σχετικά με την επίδοση στο υποχρεωτικό μάθημα «Διδακτική των Μαθηματικών – Πρακτική Άσκηση». Η επιτυχής ολοκλήρωση του συγκεκριμένου μαθήματος, αποτελεί μάλιστα προϋπόθεση για την παρακολούθηση του επιλεγόμενου μαθήματος, κατά το οποίο διεξήχθη η έρευνα.

4.2 Πρώτο μέρος ερωτηματολογίου

Ορισμένα από τα προβλήματα εντοπίστηκαν στη βιβλιογραφία και προσαρμόστηκαν για τους σκοπούς της έρευνας. Τα υπόλοιπα δημιουργήθηκαν στο πλαίσιο της εργασίας, πάντα με γνώμονα την αντίστοιχη βιβλιογραφία. Υπήρχαν δύο κατηγορίες:

A) Αυθεντικά ρεαλιστικά προβλήματα.

B) Μη αυθεντικά προβλήματα με ρεαλιστικό ή ψευδορεαλιστικό πλαίσιο.

Στην κατηγορία A, τα προβλήματα έπρεπε να ικανοποιούν όλα τα κριτήρια αυθεντικότητας (§1.7). Στην κατηγορία B έπρεπε να ικανοποιούνται όλα τα κριτήρια αυθεντικότητας πλην ενός.

Βάσει της συγκεκριμένης στρατηγικής, αναμέναμε από τους/τις συμμετέχοντες/ουσες να εξετάσουν σε βάθος τα προβλήματα προτού αποφανθούν για την αυθεντικότητά τους, καθώς η σωστή απάντηση δεν ήταν ξεκάθαρη με την πρώτη ματιά. Επίσης, αναμέναμε να συγκεντρωθούν χρήσιμα δεδομένα για το αν υπάρχει η τάση ορισμένα κριτήρια αυθεντικότητας να αναγνωρίζονται πιο συχνά από άλλα.

Τα προβλήματα παρουσιάστηκαν με τυχαία σειρά σε κάθε συμμετέχων/ουσα. Για κάθε πρόβλημα υπήρχαν οι επιλογές «Αυθεντικό» και «Μη αυθεντικό». Το ερωτηματολόγιο περιείχε το ακόλουθο εισαγωγικό κείμενο πριν από τα προβλήματα: «Προβλήματα της καθημερινής ζωής. Ακολουθεί μία σειρά μαθηματικών προβλημάτων, που προσομοιάζουν καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Καλείστε να απαντήσετε αν τα προβλήματα αυτά είναι αυθεντικά ή όχι. Η σύνθεση των προβλημάτων αποτελεί συνδυασμό μελέτης της σχετικής βιβλιογραφίας και εργασίας του ερευνητή».

4.3 Προβλήματα ερωτηματολογίου

4.3.1 Ανοικτό αυθεντικό

Τρεις φίλοι επιθυμούν να αγοράσουν μία τούρτα για ένα πάρτυ έκπληξη. Πάνε λοιπόν σε ένα ζαχαροπλαστείο, συνοδευόμενοι από ένα γονιό. Έχουν συνολικά 30€. Η τούρτα Α κοστίζει 18€ και ζυγίζει 1κ. Η τούρτα Β κοστίζει 24€ και ζυγίζει 1,5κ. Δεδομένου ότι στο πάρτυ θα βρεθούν 10 άτομα, και ένα μέσο κομμάτι τούρτα ζυγίζει 100γρ, ποια τούρτα συμφέρει περισσότερο να αγοραστεί;

Πρόβλημα κατηγορίας Α. Προτείνεται ως αυθεντικό ρεαλιστικό πρόβλημα.

Το πρόβλημα παρουσιάζει μία κατάσταση στην οποία ενδέχεται να βρεθούν νεαροί/ρες μαθητές και μαθήτριες. Η παρουσία του γονιού ενισχύει το ρεαλιστικό πλαίσιο. Οι τιμές που έχουν οι τούρτες προσομοιάζουν επαρκώς την πραγματικότητα, κατά το χρόνο συγγραφής της εργασίας, ενώ τα 100γρ. τούρτας θεωρούνται ρεαλιστική μέση κατανάλωση ανά άτομο. Επίσης, ένα παιδικό πάρτυ αποτελεί γεγονός που ενδιαφέρει τα παιδιά του δημοτικού. Το πρόβλημα ικανοποιεί όλα τα κριτήρια αυθεντικότητας. Πρόκειται για λήψη μίας απόφασης εντός κοινωνικού πλαισίου, με βάση τα μαθηματικά. Η μαθηματοποίησή του λοιπόν έχει νόημα. Τέλος, χαρακτηρίζεται ως «ανοικτό», καθώς η απάντηση επιδέχεται συζήτηση. Η μία τούρτα είναι πιο φθηνή, αλλά η άλλη προσφέρει καλύτερη σχέση ποσότητας τιμής. Συνεπώς, οι τρεις φίλοι θα πρέπει να αξιολογήσουν τη συνολική κατάσταση και να αποφασίσουν. Για παράδειγμα, αποτελεί προτεραιότητα για αυτούς να πληρώσουν λιγότερα χρήματα συνολικά, ή μήπως προτιμούν να έχουν περισσότερη τούρτα αν κάποιος/α θελήσει δεύτερο κομμάτι;

Το παραπάνω πρόβλημα βασίζεται μερικώς στο ακόλουθο πρόβλημα της έρευνας του Palm (2007), το οποίο είχε την εξής διατύπωση: «Αγοράζετε καραμέλες σε ένα ζαχαροπλαστείο. Η καραμέλα κοστίζει 12,50 Κτ, και δίνετε στον υπάλληλο του καταστήματος 20 Κτ. Πόσα χρήματα πρέπει να πάρετε πίσω;» (σ. 41). Βέβαια, είναι απαραίτητο να τονιστεί ότι ο ερευνητής χαρακτηρίζει το πρόβλημα λιγότερο αυθεντικό. Ειδικότερα, συμπεριλήφθη στην έρευνά του με σκοπό να δώσει στους ερωτώμενους/μενες μια ομαλή εισαγωγή στη διαδικασία. Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας, αξιοποιήθηκε το πλαίσιο των αγορών σε ζαχαροπλαστείο, που δίνει ο ερευνητής.

4.3.2 Κλειστό αυθεντικό

Έξι συμμαθητές περπατούν μαζί επιστρέφοντας από το σχολείο. Περνούν έξω από το mini market και αποφασίζουν να πάρουν αναψυκτικά. Οι μεμονωμένες συσκευασίες έχουν τελειώσει και έτσι θα πρέπει να αγοράσουν μία πολυσυσκευασία των 6 αναψυκτικών, η οποία κοστίζει 4,8€. Πόσα χρήματα πρέπει να πληρώσει το κάθε παιδί;

Πρόβλημα κατηγορίας Α. Προτείνεται επίσης ως αυθεντικό ρεαλιστικό πρόβλημα και δημιουργήθηκε εξ' ολοκλήρου για τους σκοπούς της εργασίας.

Ικανοποιεί και αυτό με τη σειρά του όλα τα κριτήρια αυθεντικότητας. Πολλοί/ές μαθητές/τριες, περπατούν σε παρέες από και προς το σχολείο. Συνακόλουθα, η αγορά αγαθών σε παρέες από συνοικιακά καταστήματα αποτελεί συνήθη πρακτική. Οι πολυσυσκευασίες αναψυκτικών συχνά περιέχουν έξι τεμάχια και η τιμή που αναφέρεται ανταποκρίνεται – όπως προηγουμένως – στην πραγματικότητα. Η ειδοποιός διαφορά σε σχέση με το προηγούμενο πρόβλημα, είναι πως αυτό είναι κλειστό. Υπάρχει μία και μοναδική σωστή απάντηση για το πόσα χρήματα πρέπει να συνεισφέρει το κάθε άτομο. Η εν λόγω συνθήκη, προσομοιάζει μάλιστα καλύτερα τα παραδοσιακά μαθηματικά προβλήματα που διδάσκονται στο σχολείο, με αποτέλεσμα οι φοιτητές/τριες, να τα αντιμετωπίζουν με μεγαλύτερη ευχέρεια σε προηγούμενα μαθήματα μαθηματικών.

Όπως προαναφέρθηκε, η ανοικτότητα δεν θεωρήθηκε αυτοτελές κριτήριο για την έρευνα. Παρόλα αυτά, κρίθηκε ότι θα έχει ενδιαφέρον να εξεταστεί αν οι απαντήσεις των μελλοντικών εκπαιδευτικών διαφοροποιήθηκαν λόγω της ανοικτότητας. Το συγκεκριμένο πρόβλημα θα μπορούσε να καταστεί «πιο ανοικτό», αν υπήρχαν σε απόθεμα δύο ή τρεις μεμονωμένες συσκευασίες και πολυσυσκευασίες των έξι αναψυκτικών. Έτσι, ένα παιδί ίσως επέλεγε τη μεμονωμένη συσκευασία με σκοπό να αποφύγει για πρακτικούς λόγους την ανταλλαγή μετρητών με τα υπόλοιπα παιδιά. Δεδομένου όμως ότι οι μεμονωμένες συσκευασίες είναι πιο ακριβές, θα αναγκαζόταν να πληρώσει και περισσότερα χρήματα.

4.3.3 Μη αυθεντικό βάσει του ερωτήματος

Ο Κώστας είναι δρομέας και προετοιμάζεται για τους σχολικούς αγώνες στίβου. Το προσωπικό του ρεκόρ στα 100μ. είναι 10,00 δευτερόλεπτα. Σε πόσο χρόνο αναμένεται να τρέξει 1.000μ;

Πρόβλημα κατηγορίας Β. Η ερώτηση στερείται νοήματος, δεν μπορεί να τεθεί στην πραγματικότητα, στο περιγραφόμενο γεγονός, καθώς η απάντηση δεν μπορεί να προκύψει με λογική συνέχεια. Το πρόβλημα βασίζεται σε πρόβλημα της έρευνας του Greer (1993 όπως αναφέρεται στο Palm, 2007): «Ο καλύτερος χρόνος του Martin στα 100 μέτρα είναι 10,00 δευτερόλεπτα. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να τρέξει 10.000m;» (σ. 43).

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι είναι λογικό να επιθυμεί κανείς να γνωρίζει ποια θα ήταν η επίδοσή του στα 1.000μ. Ωστόσο σχετικά με το συγκεκριμένο είδος προβλήματος ο Palm (2007) υποστηρίζει ότι:

Σε τέτοιες περιπτώσεις η ερώτηση σε πραγματικές καταστάσεις δεν θα ήταν «Ποιος θα είναι ο χρόνος του;» αλλά «Ποιος νομίζετε ότι θα είναι ο χρόνος του;». Η λέξη «νομίζω» ανοίγει με μεγαλύτερη σαφήνεια τις δυνατότητες του να μη γνωρίζει ή να μην μπορεί να προσδιορίσει μια ακριβή ώρα. Η χρήση της διατύπωσης «θα είναι» σε συνδυασμό με τις πληροφορίες που παρέχονται στην εργασία είναι ένας συνδυασμός που υπονοεί, με τρόπο που μια ερώτηση στη ζωή πέρα από το σχολείο δεν θα υπονοούσε, ότι υπάρχει μια συγκεκριμένη σωστή απάντηση στην εργασία (σ. 46).

Κατά τα άλλα, οι αθλητικές δραστηριότητες είναι μία θεματική που ενδιαφέρει τα παιδιά. Η αναφορά στους σχολικούς αγώνες στίβου προστέθηκε για να ενισχυθεί ο βαθμός εμπλοκής των παιδιών στο πλαίσιο του περιγράφεται. Επίσης, ο χρόνος που αναφέρεται ότι απαιτείται για τα 100 μέτρα (10 δευτερόλεπτα), είναι γενικά χαμηλός, ωστόσο το πρόβλημα καθίσταται ξεκάθαρα μη αυθεντικό εξαιτίας του ερωτήματος, αλλά και εξαιτίας του γεγονότος ότι η διατύπωση παραπέμπει στην ύπαρξη μοναδικής ορθής απάντησης.

4.3.4 Μη αυθεντικό βάσει της ρεαλιστικότητας των πληροφοριών

Δύο φίλοι πάνε στο λούνα παρκ για να παίξουν ποδοσφαιράκι. Ο ένας έχει 3,5€ και ο άλλος 5€. Πόσους γύρους μπορούν να παίξουν αν κάθε γύρος κοστίζει 0,25€;

Πρόβλημα κατηγορίας Β. Υπάρχει ζήτημα με τον ρεαλισμό των πληροφοριών του προβλήματος. Το πρόβλημα δημιουργήθηκε κατά τη συγγραφή της εργασίας.

Πιο συγκεκριμένα, η τιμή 0,25€/γύρο στο ποδοσφαιράκι είναι υπερβολικά χαμηλή, σε σημείο που καθίσταται μη ρεαλιστική. Δεν μπορεί να βρεθεί στην καθημερινή ζωή. Μία αντίστοιχη περίπτωση θα ήταν, λόγου χάρη, να αναφέρεται σε κάποια άσκηση αγορά βενζίνης με τιμή 1,2 ευρώ ανά λίτρο. Ακόμη, δεδομένου ότι τα ποδοσφαιράκια

λειτουργούν με κερματοδέκτη, θα έπρεπε να απαιτούνται ένα κέρμα των 20 λεπτών κι ένα των 5 λεπτών για κάθε γύρο. Η προαναφερθείσα συνθήκη είναι και αυτή με τη σειρά της εξαιρετικά σπάνια στη καθημερινή ζωή, σε σημείο που δημιουργεί επιπλέον προβληματισμούς για τη ρεαλιστικότητα της τιμής.

4.3.5 Μη αυθεντικό βάσει του ενδιαφέροντος για τα παιδιά

Ο πατέρας της Μαρίας λαμβάνει 2 προσφορές από εταιρείες προμήθειας ηλεκτρικής ενέργειας. Η πρώτη προσφορά αφορά σε πάγιο 3,6€/μήνα και 0,14€/KWh. Η δεύτερη πάγιο 9,5€/μήνα και 0,09€/KWh. Αν η μέση μηνιαία κατανάλωση του σπιτιού είναι περίπου 230 KWh, ποια προσφορά είναι πιο συμφέρουσα;

Πρόβλημα κατηγορίας Β. Το πρόβλημα δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον για τους/τις μαθητές/τριες. Δημιουργήθηκε στο πλαίσιο της εργασίας.

Πρόκειται για ένα «πρόβλημα ενηλίκων», το οποίο οι ενήλικες εκπαιδευόμενοι/ες πιθανότατα θα θεωρήσουν ότι σχετίζεται με αυτούς/ές. Το πρόβλημα χαρακτηρίζεται από ένα πλήρως ρεαλιστικό πλαίσιο. Σχεδόν κάθε ενήλικας θα αντιμετωπίσει στη ζωή του την κατάσταση που περιγράφεται. Επιπρόσθετα, οι προσφορές και η κατανάλωση που αναφέρονται είναι αντιπροσωπευτικές στην αγορά ενέργειας, για μία μέση οικογένεια, κατά το χρόνο συγγραφής της εργασίας.

Ωστόσο, παιδιά δημοτικού δεν μπορούν να βρουν κανένα νόημα στην εν λόγω άσκηση. Πιστεύουν πως το συγκεκριμένο ζήτημα αφορά τους γονείς τους, κι όχι τα ίδια, ενώ – μεταξύ άλλων – η έννοια της κιλοβατώρας είναι δυσνόητη για την ηλικία τους. Ένα αντίστοιχο παράδειγμα κακής πρακτικής θα ήταν η αναφορά τραπεζικών δανείων και επιτοκίων σε σχολικές ασκήσεις. Προκύπτει βέβαια το ερώτημα, γιατί να μην προωθηθεί η καλλιέργεια χρήσιμων δεξιοτήτων για την ενήλικη ζωή. Είναι απαραίτητο λοιπόν να διευκρινιστεί, ότι προτείνεται η ανάπτυξη των δεξιοτήτων, αρκεί αυτή να υποστηριχθεί μέσω θεματικών που ενδιαφέρουν τα παιδιά.

4.3.6 Μη αυθεντικό βάσει του σκοπού

Ο κύριος Παπαδόπουλος έχει διορθώσει συνολικά 23 από τα 97 γραπτά της εξέτασης τους μαθήματος «Διδακτική των Μαθηματικών». Να βρείτε το ποσοστό (%) των γραπτών που απομένει να διορθωθούν.

Πρόβλημα κατηγορίας Β. Το ερώτημα στερείται σκοπού. Το πλαίσιο του προβλήματος αντλήθηκε από τη μελέτη των Özgün-Koca et al. (2019).

Η απάντηση σε αυτή την ερώτηση δεν θα ενδιέφερε τον καθηγητή, διότι απλά θα υπολόγιζε τα γραπτά που απομένουν μέσω της αφαίρεσης $97-23=74$. Με άλλα λόγια, δεν αναμένεται κάποιος/α στην καθημερινή ζωή να υπολογίσει το 23 ως ποσοστό του 97, κι έπειτα να υπολογίσει το ποσοστό των γραπτών που απομένουν. Ένα τέτοιος υπολογισμός δεν θα είχε καμία πρακτική χρησιμότητα. Άρα αυτή η άσκηση δεν είναι η καλύτερη δυνατή για τη διδασκαλία της έννοιας του ποσοστού. Θα είχε περισσότερο νόημα μία αναφορά σε ποσοστά εκπτώσεων, που σχετίζονται με αγορές αγαθών.

4.3.7 Μη αυθεντικό βάσει του γεγονότος

Ένα σχολείο με 220 μαθητές και μαθήτριες, πρόκειται να πραγματοποιήσει μία εκδρομή με αφορμή την ημέρα σχολικού αθλητισμού. Πόσα λεωφορεία θα απαιτηθούν για την εκδρομή, αν κάθε λεωφορείο διαθέτει 55 θέσεις;

Πρόβλημα κατηγορίας Β. Οι μαθητές/τριες δεν μπορούν να πάνε εκδρομή μόνοι/ες τους. Απαιτείται η συνοδεία τους από εκπαιδευτικούς. Για τη δημιουργία του προβλήματος τροποποιήθηκε το εξής πρόβλημα της έρευνας του Palm (2007)

Όλοι οι μαθητές του σχολείου θα πάνε μαζί σε σχολική εκδρομή στις 15 Μαΐου. Εσείς και οι υπόλοιποι μαθητές που οργανώνουν την εκδρομή αποφασίσατε ότι όλοι θα πάνε με λεωφορείο και ότι εσείς θα παραγγείλετε τα λεωφορεία. Έχετε δει στους πίνακες των μαθητών ότι υπάρχουν 360 μαθητές στο σχολείο. Ο καθηγητής σας είπε ότι μπορείτε να παραγγείλετε τα λεωφορεία από τη Swebus και ότι κάθε λεωφορείο μπορεί να χωρέσει 48 μαθητές (σ. 43).

Αρχικά, πρέπει να τονιστεί ότι ο Palm έδωσε μία αυθεντική άσκηση κι επιθυμούσε να εξετάσει αν οι μαθητές/τριες θα καταφέρουν να την επιλύσουν σωστά, σκεπτόμενοι ότι $360/48=7,5$ επομένως αναγκαστικά θα χρειαστούν 8 λεωφορεία.

Στην παρούσα εργασία, το πλαίσιο μεταφέρθηκε στην ελληνική πραγματικότητα. Σκοπός δεν ήταν αιτία κρίσης του προβλήματος ως μη αυθεντικό να αποτελέσει ένα δεκαδικό αποτέλεσμα, που θα αντιπροσωπεύει αριθμό λεωφορείων. Άλλωστε κι αυτή η συνθήκη θα ήταν πλήρως ρεαλιστική. Για την ορθή επίλυσή της θα απαιτούσε απλώς ο αριθμός των λεωφορείων να στρογγυλοποιηθεί προς τα πάνω. Επιχειρήθηκε, το πρόβλημα να αγνοεί ξεκάθαρα βασικές πτυχές της πραγματικότητας, σε σημείο που το πλαίσιο να καταστεί ψευδορεαλιστικό.

Σε αυτό το πλαίσιο λοιπόν, η λύση $220/55=4$ λεωφορεία που προκύπτει από τα δεδομένα του προβλήματος είναι μη ρεαλιστική, παρότι αποτελεί ακέραιο αριθμό.

Όπως προαναφέρθηκε, σε όλες τις σχολικές εκδρομές υπάρχουν συνοδοί εκπαιδευτικοί, όμως αυτή η συνθήκη αγνοείται στη διατύπωση. Σε αυτό το σημείο, θα μπορούσε να υπάρξει το αντεπιχείρημα, ότι κάποια υπεραστικά λεωφορεία έχουν ανακλινόμενη θέση δίπλα στον οδηγό. Η θέση αυτή δεν περιλαμβάνεται στην αρίθμηση. Όμως και πάλι η παρουσία ενός εκπαιδευτικού σε αυτή, δεν θα επαρκούσε για τη συνοδεία 55 παιδιών. Βάσει αυτών το πρόβλημα αξιολογείται μη αυθεντικό εξαιτίας ελλιπούς ρεαλιστικού πλαισίου στο περιγραφόμενο γεγονός.

4.3.8 Μη αυθεντικό βάσει της χρήσης της γλώσσας

Το σχολείο της Παναγιώτας συμμετέχει στην εθελοντική αναδάσωση της κοντινής δασικής περιοχής. Το δάσος αποτελούταν κυρίως από πεύκα και κάηκε το περασμένο καλοκαίρι. Τα πεύκα είναι γυμνόσπερμα, αειθαλή, ρητινοφόρα κωνοφόρα δέντρα. Η συνολική έκταση της περιοχής αναδάσωσης είναι 20 στρέμματα. Το σχολείο αναλαμβάνει να φυτεύσει πεύκα σε ευθεία γραμμή μήκους 75 μέτρων, καθώς τα υπόλοιπα τμήματα της περιοχής αναδασώνονται από άλλους φορείς. Αν τα νέα πεύκα πρέπει να απέχουν μεταξύ τους τουλάχιστον 6 μέτρα, ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός πεύκων που μπορεί να φυτευτεί;

Πρόβλημα κατηγορίας Β. Το πρόβλημα συντάχθηκε για τη μελέτη του συγκεκριμένου κριτηρίου. Στην εν λόγω περίπτωση έχουμε προβληματική χρήση της γλώσσας. Περιλαμβάνεται πλήθος ανούσιων πληροφοριών. Τα εξειδικευμένα χαρακτηριστικά ενός πεύκου δεν εξυπηρετούν σε κάτι όποιον/α επιθυμεί να λύσει την άσκηση. Το ίδιο ισχύει για την πλειοψηφία των λεκτικών δεδομένων που παρατίθενται. Ωστόσο, η μη χρησιμότητα λεκτικών πληροφοριών στο πρόβλημα δεν επεκτείνεται απαραίτητα στα αριθμητικά δεδομένα. Η παράθεση εύλογης περίσσειας αριθμητικών δεδομένων, εισάγει τα παιδιά σε μία διαδικασία αξιολόγησης της χρησιμότητάς τους για την επίλυση και για αυτό αποτελεί μία καλή πρακτική. Επίσης, οι σχολικές δραστηριότητες κεντρίζουν σε γενικές γραμμές την προσοχή των παιδιών.

4.3.9 Μη αυθεντικό βάσει της ρεαλιστικής παράθεσης των πληροφοριών

Ο πατέρας του Γιάννη είναι ράφτης και κάποιες φορές χρειάζεται τη βοήθειά του, για να κόψει τα υφάσματα. Από ένα ύφασμα με μήκος $12 \frac{3}{4}$ μέτρα, έκοψαν ένα κομμάτι μήκους $3 \frac{2}{5}$ μέτρα για μία πρώτη παραγγελία και ένα κομμάτι μήκους $4 \frac{1}{4}$ μέτρα για μία δεύτερη. Μπορούν με το ύφασμα που περίσσεψε να εξυπηρετήσουν μία νέα παραγγελία, που απαιτεί ύφασμα μήκους $4 \frac{3}{7}$ μέτρα;

Πρόβλημα κατηγορίας Β. Στο διατυπωθέν πρόβλημα οι αριθμητικές τιμές παρατίθενται με τρόπο που δεν συνάδει με την πραγματική/καθημερινή ζωή. Το πρόβλημα δημιουργήθηκε κατά τη συγγραφή της εργασίας.

Η χρήση μεικτών κλασμάτων, ειδικά για την τιμή $4 \frac{3}{7}$ μέτρα, αποτελεί μία μη συνιστώμενη πρακτική. Κατ' επέκταση, οι μονάδες μέτρησης προτείνεται να είναι αντίστοιχες των μονάδων που θα χρησιμοποιούνταν στην πραγματικότητα, όχι μόνο για το μήκος, αλλά για το σύνολο των φυσικών μεγεθών. Με αυτό τον τρόπο, αποφεύγονται συγχύσεις σχετικά με το τι αντιπροσωπεύει πραγματικά μία αριθμητική τιμή, ενώ παράλληλα τονίζεται η σημασία ύπαρξης διαφορετικών μονάδων μέτρησης και υποδιαίρεσεων, ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του αντικειμένου, που επιθυμεί κάποιος/α να προσδιορίσει.

4.4 Δεύτερο μέρος ερωτηματολογίου

Το ερώτημα που τέθηκε στους/στις ερωτώμενους/ες ήταν το εξής: «Πόσο σημαντική θεωρείτε την ικανοποίηση καθενός από τα κριτήρια αυθεντικότητας για το συνολικό πρόβλημα; Στην παρούσα ενότητα καλείστε να δηλώσετε την προσωπική σας άποψη. Εξετάστε τα κριτήρια αυθεντικότητας μεμονωμένα. Για παράδειγμα, ένας φοιτητής ή μία φοιτήτρια ενδέχεται να θεωρεί το κριτήριο Α πολύ σημαντικό και το κριτήριο Β ελάχιστα ή λίγο σημαντικό. Για να καταστεί λοιπόν ένα πρόβλημα αυθεντικό, πόσο σημαντικό είναι να ικανοποιείται κάθε κριτήριο ξεχωριστά;»

Στη συνέχεια, κάθε συμμετέχων/ουσα κλήθηκε να επιλέξει σε μία κλίμακα από το 1 (καθόλου) μέχρι το 4 (πάρα πολύ) ανάλογα με το πόσο σημαντικό θεωρούσε καθένα από τα κριτήρια αυθεντικότητας (§1.7). Τονίζεται ότι η σειρά με την οποία κλήθηκαν να αξιολογήσουν τα κριτήρια ήταν τυχαία, προκειμένου να μην δημιουργηθούν εσφαλμένες εντυπώσεις, ότι λόγω χάρη το κριτήριο που εμφανίζεται πρώτο είναι ίσως πιο σημαντικό από τα υπόλοιπα.

4.5 Ανάλυση δεδομένων

Για την στατιστική επεξεργασία των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό IBM SPSS Statistics®. Απορρίφθηκαν συμμετέχοντες/ουσες που δεν είχαν απαντήσει και στα δύο ερωτηματολόγια. Έτσι, προέκυψαν οι τελικές 31 απαντήσεις. Αρχικά, έγινε αντιστοίχιση των δεδομένων των δύο μετρήσεων, με τα υποκείμενα που απάντησαν. Ακολούθησε έλεγχος κανονικότητας Shapiro-Wilk, λόγω του μεγέθους του δείγματος. Διαπιστώθηκε ότι τα δεδομένα δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή. Στη συνέχεια,

για κάθε ένα από τα εννέα προβλήματα (δύο αυθεντικά και επτά μη αυθεντικά) που δόθηκαν έγινε McNemar Test, για να εξεταστεί αν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο μετρήσεων. Έπειτα, επιχειρήθηκε να εξεταστεί αν υπήρξε διαφοροποίηση ανάμεσα στις απόψεις των φοιτητών/τριών, για τα κριτήρια αυθεντικότητας, στις μετρήσεις. Πραγματοποιήθηκε έλεγχος Wilcoxon Signed-Rank Test, συνοδευόμενος από Holm-Bonferroni διόρθωση. Τέλος, πραγματοποιήθηκε έλεγχος Mann-Whitney-U, για να διαπιστωθεί πιθανή συσχέτιση μεταξύ προηγούμενης επίδοσης και ικανότητας αναγνώρισης της αυθεντικότητας ενός προβλήματος. Για τον συγκεκριμένο έλεγχο επιλέχθηκαν τα δεδομένα της πρώτης μέτρησης σχετικά με την αυθεντικότητα.

5. Αποτελέσματα

Η ανάλυση των δεδομένων δεν κατέδειξε σημαντική διαφοροποίηση. Τα περισσότερα προβλήματα αναγνωρίστηκαν σωστά, βάσει της αυθεντικότητάς τους, από την πλειοψηφία των συμμετεχόντων/ουσών. Επίσης, δεν παρατηρήθηκε περίπτωση προβλήματος, όπου η πλειοψηφική απάντηση ανετράπη, ανάμεσα στις δύο μετρήσεις.

Πίνακας 1. *McNemar Test: Ανοικτό αυθεντικό πρόβλημα (Τρεις φίλοι επιθυμούν...)*

Προ-μέτρηση \ Μετα-μέτρηση	Αυθεντικό	Μη αυθεντικό	Σύνολο
Αυθεντικό	18	7	25
Μη αυθεντικό	3	3	6
Σύνολο	21	10	31

Σημείωση. $N = 31$. Έλεγχος McNemar: $p = .344$.

Τα προβλήματα που δεν αναγνωρίστηκαν σωστά ήταν αυτά που εξέταζαν τα ακόλουθα κριτήρια: Γεγονός/Ρεαλιστικό πλαίσιο, Ενδιαφέρον για τους/τις μαθητές/τριες και Ρεαλισμός των πληροφοριών. Οι ερωτώμενοι/ες αναγνώρισαν το πρόβλημα που εξέταζε το κριτήριο του γεγονότος – εσφαλμένα – ως αυθεντικό σε ποσοστό που προσεγγίζει το 90% και στις δύο μετρήσεις. Για τα άλλα δύο κριτήρια, οι φοιτητές/τριες απάντησαν εσφαλμένα σε ποσοστά της τάξης του 60%.

Ακόμη, το πρόβλημα που εξέταζε τη χρήση της γλώσσας αξιολογήθηκε ορθά ως μη αυθεντικό, αλλά με ποσοστό μόλις 54%. Τα υπόλοιπα προβλήματα αξιολογήθηκαν σωστά με υψηλότερα ποσοστά. Τα πλέον υψηλά ποσοστά συγκέντρωσαν τα κριτήρια της ρεαλιστικής παράθεσης των πληροφοριών και του ερωτήματος.

Αξίζει να σημειωθεί ότι και τα δύο αυθεντικά προβλήματα αναγνωρίστηκαν επιτυχώς. Μάλιστα, το κλειστού τύπου αυθεντικό πρόβλημα δεν αναγνωρίστηκε από μόλις έναν υποψήφιο και στις δύο μετρήσεις. Το ανοικτού τύπου είχε μικρότερα, αλλά επίσης ισχυρά ποσοστά αναγνώρισης.

Πίνακας 2. *McNemar Test: για το κριτήριο του γεγονότος (Ένα σχολείο με 220...)*

Προ-μέτρηση \ Μετα-μέτρηση	Αυθεντικό	Μη αυθεντικό	Σύνολο
Αυθεντικό	27	1	28
Μη αυθεντικό	0	3	3
Σύνολο	27	4	31

Σημείωση. $N = 31$. Έλεγχος McNemar: $p = 1$.

Σχετικά με την ύπαρξη διαφοροποίησης ανάμεσα στις απόψεις των φοιτητών/τριών, για τα κριτήρια αυθεντικότητας, στις μετρήσεις, όπως προαναφέρθηκε, επιλέχθηκε ο έλεγχος Wilcoxon Signed-Rank Test, ο οποίος δεν ανέδειξε στατιστικά σημαντικές μεταβολές σε καμία ερώτηση. Μάλιστα, μετά από Holm-Bonferroni διόρθωση, τα αποτελέσματα παρέμειναν μη σημαντικά.

Για όλα τα κριτήρια αυθεντικότητας, η συντριπτική πλειοψηφία των απαντήσεων καταγράφεται και στις δύο μετρήσεις στις θέσεις 3 και 4 της κλίμακας Likert. Το υψηλότερο ποσοστό καταγράφεται στο κριτήριο του ενδιαφέροντος για τους/τις μαθητές/τριες, όπου το αθροιστικό ποσοστό των απαντήσεων στις θέσεις 3 και 4 είναι 96% στην προ-μέτρηση και 100% στην μετα-μέτρηση.

Πίνακας 3. Περιγραφικά στατιστικά απόψεων φοιτητών/τριων στις δύο μετρήσεις

Μεταβλητή	Πλήθος (N)	Διάμεσος (M)	Τυπική απόκλιση (SD)	Ελάχιστο	Μέγιστο
Γεγονός <i>Pre</i>	31	3.29	0.588	2	4
Ερώτημα <i>Pre</i>	31	3.52	0.626	2	4
Σκοπός <i>Pre</i>	31	3.42	0.620	2	4
Χρήση γλώσσας <i>Pre</i>	31	3.32	0.748	2	4
Ενδιαφέρον <i>Pre</i>	31	3.74	0.514	2	4
Ρεαλισμός πληρ. <i>Pre</i>	31	3.48	0.769	1	4
Ρεαλιστική παράθ. <i>Pre</i>	31	3.39	0.615	2	4
Γεγονός <i>Post</i>	31	3.26	0.514	2	4
Ερώτημα <i>Post</i>	31	3.52	0.677	2	4
Σκοπός <i>Post</i>	31	3.23	0.669	2	4
Χρήση γλώσσας <i>Post</i>	31	3.32	0.832	1	4
Ενδιαφέρον <i>Post</i>	31	3.68	0.475	3	4
Ρεαλισμός πληρ. <i>Post</i>	31	3.55	0.675	2	4
Ρεαλιστική παράθ. <i>Post</i>	31	3.55	0.624	2	4

Πίνακας 4. *Wilcoxon Signed Ranks Test* για τις απόψεις φοιτητών/τριών

Σύγκριση	Z	p
Γεγονός <i>Post</i> – Γεγονός <i>Pre</i>	-0.187	.851
Ερώτημα <i>Post</i> – Ερώτημα <i>Pre</i>	0.000	1.000
Σκοπός <i>Post</i> – Σκοπός <i>Pre</i>	-1.500	.134
Χρήση γλώσσας <i>Post</i> – Χρήση γλώσσας <i>Pre</i>	-0.030	.976
Ενδιαφέρον <i>Post</i> – Ενδιαφέρον <i>Pre</i>	-0.632	.527
Ρεαλισμός των πληροφοριών <i>Post</i> – Ρεαλισμός των πληροφοριών <i>Pre</i>	-0.577	.564
Ρεαλιστική παράθεση πληροφοριών <i>Post</i> – Ρεαλιστική παράθεση πληροφοριών <i>Pre</i>	-1.387	.166

Γίνεται εύκολα κατανοητό ότι τα ποσοστά στις θέσεις 1 και 2 της κλίμακας είναι ιδιαίτερα χαμηλά. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι μόνο το κριτήριο της χρήσης της γλώσσας συγκέντρωσε αθροιστικό ποσοστό 16% στις θέσεις 1 και 2, με όλα τα υπόλοιπα κριτήρια να εμφανίζουν ακόμα μικρότερα ποσοστά στις αντίστοιχες θέσεις.

Η προηγούμενη επίδοση στα μαθηματικά είχε στατιστικά μη σημαντική επίδραση στην επιτυχή αναγνώριση της αυθεντικότητας, για την μεγάλη πλειοψηφία των προβλημάτων. Ειδικότερα, μόνο στο πρόβλημα που αφορούσε το κριτήριο του σκοπού, παρατηρήθηκε στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση $U = 39$, $Z = -2.753$, $p = .006$. Η ομάδα «Μη αυθεντικό» εμφάνισε υψηλότερο μέσο rank (18,40) από την ομάδα «Αυθεντικό» (10,00). Δεδομένου ότι το πρόβλημα δεν ήταν αυθεντικό, οι ερωτώμενοι/μενες με υψηλότερη προηγούμενη επίδοση στα μαθηματικά, το αναγνώρισαν ορθότερα. Σημειώνεται επίσης, ότι στην περίπτωση του προβλήματος που εξετάζει τον ρεαλισμό των πληροφοριών, δεν προέκυψε στατιστικά

σημαντική διαφορά, αν και το αποτέλεσμα ήταν οριακό, $U = 48,5$, $Z = -1,86$, $p = 0,063$.

Πίνακας 5. *Mann-Whitney Test: Συσχέτιση προηγούμενης επίδοσης και ικανότητας αναγνώρισης αυθεντικότητας*

Αναγνώριση προβλήματος σκοπού / Ο βαθμός μου στη Διδακτική Μαθηματικών	N	Mean Rank	Sum of Ranks
Αυθεντικό	13	10.00	130.00
Μη αυθεντικό	15	18.40	276.00
Σύνολο	28		

Πίνακας 6. *Αποτελέσματα Mann-Whitney Test*

Στατιστικά στοιχεία ελέγχου	Τιμή
Mann-Whitney U	39.000
Wilcoxon W	130.000
Z	-2.753
Asymp. Sig. (2-tailed)	.006
Exact Sig. [2*(1-tailed Sig.)]	.006

6. Συμπεράσματα – Συζήτηση

Γενικά παρατηρήθηκε ότι το επίπεδο αναγνώρισης των αυθεντικών μαθηματικών προβλημάτων που καταγράφηκε κατά τη διάρκεια της διάλεξης, παρέμεινε αμετάβλητο και αργότερα. Αυτό ισχύει ανεξαρτήτως από την ορθότητα ή μη των απαντήσεων. Επίσης, το κλειστού τύπου αυθεντικό πρόβλημα έγινε ευρύτερα κατανοητό. Το παραπάνω γεγονός υποδηλώνει εξοικείωση με τις πρακτικές επίλυσης των παραδοσιακών μαθηματικών προβλημάτων.

Η αναγνώριση ορισμένων κριτηρίων αυθεντικότητας δυσκόλεψε τους/τις ερωτώμενους/ες. Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί πως οι φοιτητές/τριες δεν αναγνώρισαν αποτελεσματικά κριτήρια τα οποία δήλωσαν ότι θεωρούν ως τα πλέον σημαντικά. Για παράδειγμα, η συντριπτική πλειοψηφία δήλωσε ότι το κριτήριο του ενδιαφέροντος για τους/τις μαθητές/τριες είναι σημαντικό/πολύ σημαντικό, ταυτόχρονα όμως αναγνώρισε ως αυθεντικό, ένα πρόβλημα που δεν ικανοποιούσε το συγκεκριμένο κριτήριο. Μία αντίστοιχη περίπτωση είχαμε στο κριτήριο του ρεαλισμού των πληροφοριών.

Συνεπώς, τα χαρακτηριστικά που συνηγορούν στην ικανοποίηση ορισμένων κριτηρίων, δεν έγιναν επαρκώς κατανοητά. Ακόμη, το να θεωρεί κάποιος ένα κριτήριο σημαντικό, δεν συνεπάγεται απαραίτητα επιτυχή αναγνώριση του κριτηρίου. Η παραπάνω σχέση ισχύει και αντιστρόφως. Απαιτείται περαιτέρω διερεύνηση, για να διαπιστωθεί αν οι απόψεις επηρεάζουν την ικανότητα αναγνώρισης και με ποιο τρόπο.

Πέρα από το επίπεδο εμπέδωσης, διατηρήθηκαν και οι απόψεις των ερωτώμενων, μεταξύ των δύο μετρήσεων. Ενδεικτικά, μεταβολές παρατηρήθηκαν κυρίως μεταξύ των θέσεων σημαντικό/πολύ σημαντικό. Οι περιπτώσεις μεταβολών μεταξύ των θέσεων 2 και 3 ήταν περιορισμένες. Επιπλέον, η επιλογή 1 της κλίμακας (το κριτήριο δεν είναι καθόλου σημαντικό για την αυθεντικότητα) χρησιμοποιήθηκε ελάχιστα, γεγονός που υποδηλώνει ότι οι φοιτητές/τριες αναγνώρισαν τη συνεισφορά κάθε κριτηρίου στη συνολική αυθεντικότητα του προβλήματος.

Τέλος, το κριτήριο του σκοπού συγκεντρώνει ένα πλήθος αξιοσημείωτων χαρακτηριστικών. Χωρίς να αποτελεί το πλέον σημαντικό – για τους/τις ερωτώμενους/μενες – κριτήριο, αναγνωρίζεται ορθά από την πλειοψηφία, ενώ ταυτοχρόνως για όσοι/όσες το αναγνώρισαν ορθά, έχουν καλύτερη προηγούμενη επίδοση στα μαθηματικά.

7. Περιορισμοί της έρευνας

Δεδομένου ότι η συγκεκριμένη εργασία είχε διερευνητικό χαρακτήρα και περιορισμένο δείγμα δεν επιτρέπει τη διεξαγωγή ασφαλών αιτιακών σχέσεων. Επίσης, το δείγμα έχει προκύψει από μάθημα επιλογής, σε ένα και μόνο πανεπιστημιακό τμήμα.

Το εν λόγω μάθημα δεν πραγματεύεται αποκλειστικά ζητήματα αυθεντικότητας. Για τους σκοπούς της έρευνας προσαρμόστηκε μία σειρά διαλέξεων, σε περιορισμένο χρονικό διάστημα.

Ακόμη, δεν υπήρξε σύγκριση των αποτελεσμάτων με ομάδα ελέγχου. Ως εκ τούτου, η ικανότητα αναγνώρισης της αυθεντικότητας των προβλημάτων, αλλά και οι απόψεις των φοιτητών/τριών, ενδέχεται να επηρεάστηκαν από εξωτερικούς παράγοντες.

Τέλος, θεωρήθηκαν μη αυθεντικά τα προβλήματα που περιείχαν μη χρήσιμες για την επίλυσή τους λεκτικές πληροφορίες, με γνώμονα ότι το ερωτηματολόγιο, αλλά και η παρουσίαση της έννοιας της αυθεντικότητας, αποτελούνταν από λεκτικά, αυθεντικά ή μη μαθηματικά προβλήματα. Δεν υπήρξε διερεύνηση σχετικά με περιπτώσεις όπου περιλαμβάνεται πληθώρα αριθμητικών δεδομένων, οπότε είναι απαραίτητο για παράδειγμα, να επιλεγούν τα κατάλληλα εξ' αυτών, για την επίλυση διαφορετικών υποερωτημάτων. Ενδεχομένως οι δυνητικές αποκρίσεις των συμμετεχόντων/ουσών για την αυθεντικότητα προβλημάτων με πληθώρα αριθμητικών δεδομένων να διέφεραν από εκείνες για τα αντίστοιχα λεκτικά προβλήματα, που απαιτούν ξεκάθαρες απλές πράξης ώστε να επιλυθούν.

8. Προτάσεις

Μελλοντικές έρευνες θα μπορούσαν να εξετάσουν το ζήτημα σε μεγαλύτερο βάθος. Σε αυτό θα συνέδραμε ένα μεγαλύτερο και πιο αντιπροσωπευτικό δείγμα, με μελλοντικούς/κες εκπαιδευτικούς από διαφορετικά πανεπιστημιακά τμήματα.

Ακόμη, η συμπερίληψη ποιοτικών δεδομένων σε μελλοντικές έρευνες, θα μπορούσε να αποτελέσει καλή πρακτική, για την περαιτέρω διερεύνηση των απόψεων των εκπαιδευτικών και των τρόπου που αυτές διαμορφώνονται.

Επιπρόσθετα, είναι ιδιαίτερα σημαντικό να διερευνηθούν τα αίτια που οδηγούν σε αποτελεσματικότερη αναγνώριση ορισμένων κριτηρίων αυθεντικότητας, έναντι άλλων, όπως επίσης και αν ορισμένα κριτήρια είναι πιο κρίσιμα για τη συνολική

αυθεντικότητα ενός προβλήματος ή όχι. Σε αυτό το πλαίσιο, μπορεί να εξεταστεί πληρέστερα και το κριτήριο που αφορά τη χρήση της γλώσσας.

Καταληκτικά, προτείνεται να εξεταστεί η σχέση της προηγούμενης επίδοσης με τις απόψεις των μελλοντικών εκπαιδευτικών, με γνώμονα αν αποτελεί καίριο παράγοντα που επιδρά στην ικανότητά τους να αναγνωρίζουν την αυθεντικότητα ενός προβλήματος. Στο ίδιο μήκος κύματος, προτείνεται να δοθεί έμφαση στο πεδίο του ενδιαφέροντος και των κινήτρων, λόγω των ιδιαίτερων παρατηρήσεων που έλαβαν χώρα γύρω από αυτά στην παρούσα εργασία.

9. Βιβλιογραφία

- Boaler, J. (1993a). The role of contexts in the mathematics classroom: Do they make mathematics more "real"? *For the Learning of Mathematics*, 13(2), 12–17.
- Boaler, J. (1993b). Encouraging the transfer of 'school' mathematics to the 'real world' through the integration of process and content, context and culture. *Educational Studies in Mathematics*, 25(4), 341–373. <https://doi.org/10.1007/bf01273906>
- Boonen, A. J., Van Wesel, F., Jolles, J., & Van Der Schoot, M. (2014). The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children. *International Journal of Educational Research*, 68, 15–26. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2014.08.001>
- Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of Mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics*, 62(2), 211–230. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-7834-1>
- Clarke, D., & Roche, A. (2018). Using contextualized tasks to engage students in meaningful and worthwhile mathematics learning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 51, 95–108. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.006>
- Dapueto, C., & Parenti, L. (1999). Contributions and obstacles of contexts in the development of mathematical knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 39(1–3), 1–21. <https://doi.org/10.1023/a:1003702003886>
- Dickinson, P., & Hough, S. (2012). Using realistic mathematics education in UK classrooms. Anchor Books.
- Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction*, 7(4), 293–307. [https://doi.org/10.1016/s0959-4752\(97\)00006-6](https://doi.org/10.1016/s0959-4752(97)00006-6)
- Hailikari, T., Nevgi, A., & Komulainen, E. (2007). Academic self-beliefs and prior knowledge as predictors of student achievement in Mathematics: a structural model. *Educational Psychology*, 28(1), 59–71. <https://doi.org/10.1080/01443410701413753>

- Inoue, N. (2005). The realistic reasons behind unrealistic solutions: the role of interpretive activity in word problem solving. *Learning and Instruction*, 15(1), 69–83. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.12.004>
- Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής. (2022). *Πρόγραμμα σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στο δημοτικό* (2η έκδ.).
- Κολέζα, Γ. (2000). Πρόλογος του επιμελητή. Στο L. Streefland (Επιμ.), *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση* (Μ. Μανσόλα, Μεταφρ., σσ. 4–20). Leader Books.
- Lin, Y., Yang, E. F., Wu, J., Yeh, C. Y. C., Liao, C., & Chan, T. (2024). Enhancing students' authentic mathematical problem-solving skills and confidence through error analysis of GPT-4 solutions. *Research and Practice in Technology Enhanced Learning*, 20, 034. <https://doi.org/10.58459/rptel.2025.20034>
- Marsh, H. W., Trautwein, U., Lüdtke, O., Köller, O., & Baumert, J. (2005). Academic Self-Concept, interest, Grades, and Standardized test Scores: Reciprocal Effects Models of Causal Ordering. *Child Development*, 76(2), 397–416. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2005.00853.x>
- Murayama, K., Pekrun, R., Lichtenfeld, S., & Hofe, R. V. (2012). Predicting Long-Term Growth in Students' Mathematics Achievement: The unique contributions of motivation and cognitive Strategies. *Child Development*, 84(4), 1475–1490. <https://doi.org/10.1111/cdev.12036>
- Novotná, J. (2001). *Making sense of word problems* [Book review]. *ZDM*, 33(1), 27–29.
- Özgün-Koca, S. A., Chelst, K., Edwards, T., & Lewis, J. (2019). A framework for authentic mathematics problems. *Mathematics Teaching*, 267, 17–20.
- Palm, T. (2007). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 37–58. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9083-3>
- Park, Y., & Matthews, P. G. (2025). Math language matters: math-specific verbal skills, not analog representation of non-symbolic magnitudes, predict symbolic fraction abilities in primary school children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 260, 106349. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2025.106349>

- Rellensmann, J., & Schukajlow, S. (2016). Does students' interest in a mathematical problem depend on the problem's connection to reality? An analysis of students' interest and pre-service teachers' judgments of students' interest in problems with and without a connection to reality. *ZDM Mathematics Education*, 49(3), 367–378. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0819-3>
- Sevinc, S., & Lesh, R. (2017). Training mathematics teachers for realistic math problems: a case of modeling-based teacher education courses. *ZDM*, 50(1–2), 301–314. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0898-9>
- Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigation. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 33(4), 123–132. <https://doi.org/10.1007/bf02652747>
- Van Den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521–525). https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_170
- Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Teaching Realistic Mathematical Modeling in the Elementary School: A Teaching Experiment with Fifth Graders. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 577. <https://doi.org/10.2307/749692>
- Verschaffel, L., De Corte, E., & Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. *Learning and Instruction*, 7(4), 339–359. [https://doi.org/10.1016/s0959-4752\(97\)00008-x](https://doi.org/10.1016/s0959-4752(97)00008-x)
- Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, 4(4), 273–294. [https://doi.org/10.1016/0959-4752\(94\)90002-7](https://doi.org/10.1016/0959-4752(94)90002-7)
- Verschaffel, L., Greer, B., Van Dooren, W., & Mukhopadhyay, S. (2009). *Words and worlds*. Sense Publishers.
- Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: a survey. *ZDM*, 52(1), 1–16. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4>
- Wisenöcker, A. S., Binder, S., Holzer, M., Valentic, A., Wally, C., & Große, C. S. (2023). Mathematical problems in and out of school: The impact of considering mathematical operations and reality on real-life solutions. *European Journal of*

Psychology of Education, 39(2), 767–783. <https://doi.org/10.1007/s10212-023-00718-0>