Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μαρία Γιολδάση

Καμπυλότητα Gauss Επιφανειών του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^4$ με Ισόπεδη Κάθετη Δέσμη

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2026

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 25/6/2026 από την εξεταστική επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
Θεόδωρος Βλάχος	Καθηγητής (Επιβλέπων)
Παναγιώτης Πολυμεράκης	Επίκουρος Καθηγητής
Ανδέας Σάββας-Χαλιλάι	Αναπληρωτής Καθηγητής

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.

Αφιερώνεται στην οικογένειά μου.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της μεταπτυχιακής μου διατριβής, κ. Θεόδωρο Βλάχο, Καθηγητή, Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, που με την πολύτιμη βοήθειά του και τις παραγωγικές υποδείξεις του συνέβαλε καθοριστικά στην επιτυχή περάτωση της παρούσας εργασίας. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον κ. Παναγιώτη Πολυμεράκη Επίκουρο Καθηγητή και τον κ. Ανδρέα Σάββα-Χαλιλάι, Αναπληρωτή Καθηγητή. Θα ήθελα επιπλέον να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τα φιλικά μου πρόσωπα για την πολύτιμη στήριξη που μου προσέφεραν καθ΄ όλη την διάρκεια του μεταπτυχιακού.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Είναι γνωστό ότι δεν υπάρχουν συμπαγείς επιφάνειες στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ με παντού αρνητική καμπυλότητα Gauss. Ο D. Hilbert απέδειξε ότι το υπερβολικό επίπεδο $\mathbb{H}^2$ δεν επιδέχεται ισομετρική εμβάπτιση στον $\mathbb{R}^3$. Αργότερα, ο Efimov έδωσε μια ισχυρή γενίκευση του θεωρήματος του Hilbert, αποδεικνύοντας ότι ένα πλήρες $2-$διάστατο πολύπτυγμα Riemann με καμπυλότητα Gauss φραγμένη από πάνω από αρνητικό αριθμό δεν επιδέχεται ισομετρική εμβάπτιση στον $\mathbb{R}^3$. Ο Chern έθεσε το ερώτημα αν υπάρχουν συμπαγείς επιφάνειες του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^4$, των οποίων η καμπυλότητα Gauss K πληροί την ανισότητα max $K < 0$. Το ερώτημα αυτό παραμένει αναπάντητο.

Στόχος της παρούσας Μεταπτυχιακής Διατριβής είναι η απόδειξη κάποιων γνωστών αποτελεσμάτων τα οποία δίνουν μερική απάντηση στο ερώτημα του Chern, για επιφάνειες στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$, των οποίων η κάθετη δέσμη υπόκειται σε διάφορους περιορισμούς, μεταξύ των οποίων να είναι ισόπεδη.

Abstract

It is well known that there are no compact surfaces in Euclidean space $\mathbb{R}^3$ with everywhere negative Gaussian curvature. D. Hilbert proved that the hyperbolic plane $\mathbb{H}^2$ does not admit an isometric immersion into $\mathbb{R}^3$. Later, Efimov gave a strong generalization of Hilbert's theorem, proving that a complete 2-dimensional Riemannian manifold with Gaussian curvature bounded above by a negative number does not admit an isometric immersion into $\mathbb{R}^3$. Chern raised the question of whether there exist compact surfaces in $\mathbb{R}^4$ whose Gaussian curvature K satisfy the inequality max $K < 0$. The problem remain open.

The aim of this Master's Thesis is to prove some known results for surfaces in Euclidean space $\mathbb{R}^4$, that partially answer the question of Chern under additional assumptions on the normal bundle of the surface.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγη

Ένα θεμελιώδες πρόβλημα της Διαφορικής Γεωμετρίας είναι κατά πόσο ένα δοθέν πολύπτυγμα Riemann δέχεται ισομετρική εμβάπτιση σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο. Για χαμηλές συνδιαστάσεις η ύπαρξη τέτοιων εμβαπτίσεων συνεπάγεται συχνά περιορισμούς στην καμπυλότητα του πολυπτύγματος. Ειδικώς για συμπαγή διδιάστατα πολυπτύγματα Riemann $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι γνωστό ότι μια αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ισομετρικής εμβάπτισής του στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ είναι η ανισότητα $\max K > 0$, όπου K είναι η καμπυλότητα Gauss του πολυπτύγματος. Γενικεύοντας το Θεώρημα του Hilbert [1, σελ. 91], ότι το υπερβολικό επίπεδο δεν επιδέχεται ισομετρική εμβάπτιση στον $\mathbb{R}^3$, ο Efimov [1, σελ. 44] απέδειξε ότι ένα πλήρες διδιάστατο πολύπτυγμα του οποίου η καμπυλότητα Gauss K πληροί την συνθήκη $\sup K < 0$ δεν επιδέχεται ισομετρική εμβάπτιση στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$.

Σε αντίθεση με τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$, υπάρχουν συμπαγή διδιάστατα πολυπτύγματα Riemann με καμπυλότητα Gauss $K \equiv 0$ τα οποία εμβαπτίζονται ισομετρικά στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$. Τέτοια παραδείγματα είναι τα καρτεσιανά γινόμενα δύο οποιονδήποτε κλειστών επίπεδων καμπυλών. Κατόπιν των ανωτέρω, ο Chern [2, σελ. 43] έθεσε το ακόλουθο ερώτημα:

Ερώτημα 1. *Υπάρχουν συμπαγή διδιάστατα πολυπτύγματα Riemann με καμπυλότητα Gauss $K < 0$ παντού τα οποία να επιδέχονται ισομετρική εμβάπτιση στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$;*

Το ερώτημα αυτό δεν έχει απαντηθεί έως τώρα. Έχουν μόνο δοθεί κάποια αποτελέσματα κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις.

Το ερώτημα του Chern ισοδυνάμως διατυπώνεται ως εξής

Ερώτημα 2. *Έστω M συμπαγές διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann με καμπυλότητα Gauss K. Αν υπάρχει ισομετρική εμβάπτιση $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ τότε ισχύει* $\max K \geq 0$;

Στόχος της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής είναι να παρουσιάσουμε και να αποδείξουμε αποτελέσματα των Κουτρουφιώτη, Χασάνη και Πάμφιλου [5], τα οποία δίνουν μερικές απαντήσεις στο ερώτημα του Chern για ισομετρικές εμβαπτίσεις $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$, όπου M είναι συμπαγές ή πλήρες διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann, κάτω από πρόσθετες υποθέσεις που αφορούν στην κάθετη δέσμη της εμβάπτισης.

Η διατριβή διαρθρώνεται ως ακολούθως. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρατίθενται εισαγωγικές έννοιες και προαπαιτούμενες γνώσεις οι οποίες αφορούν στα πολυπτύγματα Riemann, τις διαφορικές μορφές και τις ισομετρικές εμβαπτίσεις. Ιδιαίτερη μνεία γίνεται στη μέθοδο του κινουμένου πλαίσιου, καθώς και στις εξισώσεις δομής του Cartan οι οποίες και θα αποτελέσουν ένα σημαντικό εργαλείο στις αποδείξεις των αποτελεσμάτων. Στο τρίτο κεφάλαιο παραθέτουμε αποτελέσματα τα οποία δίνουν απάντηση στο ερώτημα του Chern κάτω από υποθέσεις που αφορούν στην μέση καμπυλότητα και στην ύπαρξη μη ιδιάζοντος καθέτου διανυσματικού πεδίου το οποίο είναι παράλληλο στη κάθετη δέσμη.

Στο τέταρτο κεφάλαιο δίνεται μια μερική απάντηση στο ερώτημα του Chern για ισομετρικές εμβαπτίσεις συμπαγών διδιάστατων πολυπτυγμάτων Riemann των οποίων η ένωση όλων των εφαπτομένων επιπέδων δεν καλύπτει τον περιβάλλοντα χώρο $\mathbb{R}^4$. Σε όλα αυτά τα αποτελέσματα οι υποθέσεις συνεπάγονται ότι η κάθετη δέσμη είναι ισόπεδη. Τέλος στο πέμπτο κεφάλαιο επιχειρείται μια μελέτη ισομετρικών εμβαπτίσεων ισόπεδων διδιάστατων πολυπτυγμάτων Riemann στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$ των οποίων η κάθετη δέσμη είναι επίσης ισόπεδη. Αποδεικύεται ένα θεώρημα το οποίο περιγράφει τοπικά όλες αυτές τις ισομετρικές εμβαπτίσεις. Ακολούθως δίνονται δύο ολικά αποτελέσματα με τα οποία επιτυγχάνεται η ταξινόμηση των ισομετρικών εμβαπτίσεων πλήρων ισόπεδων πολυπτυγμάτων Riemann στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$ με ισόπεδη κάθετη δέσμη υπό την υπόθεση ότι ο πρώτος κάθετος χώρος έχει σταθερή διάσταση, δηλαδή ανεξάρτητη του τυχόντος σημείου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Εισαγωγικες Εννοιες

Σε αυτή την ενότητα θα αναφέρουμε βασικά στοιχεία από τη θεωρία των διαφορίσιμων πολυπτυγμάτων (Βλ. [6]).

2.1 Διαφορίσιμα πολυπτύγματα

Ορισμός 2.1.1. *Ένα $n-$διάστατο πολύπτυγμα M είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff με αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του το οποίο έχει τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Υπάρχει οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ του τοπολογικού χώρου M τέτοια ώστε $\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha = M$ και αντίστοιχων ομοιομορφισμών*

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \subseteq M \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n,$$

*όπου $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ ανοικτό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$. Το ζεύγος $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ονομάζεται **χάρτης ή σύστημα συντεταγμένων** του πολυπτύγματος M.*

(ii) *Για κάθε $\alpha, \beta \in I$ με $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, η απεικόνιση*

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n$$

*είναι $C^\infty-$διαφορίσιμη. Η οικογένεια $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ καλείται **άτλας** του πολυπτύγματος M.*

(iii) *Η οικογένεια χαρτών $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ είναι **μεγιστοτική ως προς τις ιδιότητες** (i) **και** (ii), δηλαδή εάν (U, φ) είναι χάρτης τέτοιος ώστε οι απεικονίσεις $\varphi\circ\varphi_\alpha^{-1}$ και $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ να είναι $C^\infty-$διαφορίσιμες για κάθε $\alpha \in I$, τότε ο χάρτης (U, φ) ανήκει στην οικογένεια $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$.*

Ένα $n-$διάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα M ονομάζεται **προσανατολίσιμο** αν υπάρχει άτλας $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\alpha, \beta \in I$ με $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ να ισχύει $\det d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$ στο $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, όπου $d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})$ είναι το διαφορικό της απεικόνισης $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$. Ο άτλας αυτός ονομάζεται **προσανατολισμός**. Ένα προσανατολίσιμο πολύπτυγμα εφοδιασμένο με έναν προσανατολισμό καλείται **προσανατολισμένο** πολύπτυγμα.

Ορισμός 2.1.2. *Έστω διαφορίσιμο πολύπτυγμα M. Μια συνάρτηση $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **διαφορίσιμη** στο σημείο $x \in M$, αν υπάρχει ανοιχτή περιοχή U του σημείου x τέτοια ώστε η συνάρτηση $f|_U$ να είναι διαφορίσιμη, δηλαδή για κάθε χάρτη (V, φ) με $U \cup V \neq \varnothing$ η συνάρτηση*

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cup V) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

είναι διαφορίσιμη.

Ορισμός 2.1.3. *Έστω $n-$διάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα M, ένα σημείο $x \in M$ και $U \subset M$ μια ανοιχτή περιοχή του σημείου x. Θεωρούμε το σύνολο*

$$D_x = \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, f \text{ διαφορίσιμη στο } x\}.$$

*Καλούμε **εφαπτόμενο διάνυσμα** του πολυπτύγματος M στο σημείο x κάθε απεικόνιση $v : D_x \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί της ιδιότητες:*

$$v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g),$$
$$v(fg) = v(f)g(x) + f(x)v(g),$$

για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και για κάθε $f, g \in D_x$.

Το σύνολο των εφαπτομένων διανυσμάτων στο σημείο x ονομάζεται **εφαπτόμενος χώρος του πολυπτύγματος** M και συμβολίζεται με T_xM. Είναι γνωστό ότι δέχεται κατά φυσικό τρόπο δομή διανυσματικού χώρου υπεράνω του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε χάρτη (U, φ) του πολυπτύγματος M με συναρτήσεις συντεταγμένων $x^1, \ldots, x^n$. Για κάθε σημείο $x \in U$, τα εφαπτόμενα διανύσματα

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_x \in T_xM,$$

τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x (f) := D_i(f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(x)}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

όπου $f \in D_x$ και D_i είναι η συνήθης μερική παράγωγος της συνάρτησης $f \circ \varphi^{-1}$ ως προς την συντεταγμένη x^i του $\mathbb{R}^n$, συνιστούν μια βάση του εφαπτομένου χώρου T_xM.

Υπενθυμίζουμε ότι η **εφαπτόμενη δέσμη** TM του πολυπτύγματος M ορίζεται ως η ξένη ένωση όλων των εφαπτομένων χώρων του πολυπτύγματος M, δηλαδή

$$TM = \bigsqcup_{x \in M} T_xM = \{(x, v) : x \in M,\ v \in T_xM\}.$$

Ορισμός 2.1.4. *Έστω M^n, N^m διαφορίσιμα πολυπτύγματα διάστασης n και m αντίστοιχα και $f : M^n \longrightarrow N^m$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Καλούμε* ***διαφορικό*** *της f στο σημείο $x \in M$ τη γραμμική απεικόνιση $df_x : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$ η οποία ορίζεται ως*

$$df_x(v)(g) = v(g \circ f),$$

για κάθε $v \in T_xM$ και κάθε $g \in D_{f(x)}$.

Υπενθυμίζουμε ακολούθως την έννοια της εμβάπτισης-εμφύτευσης, καθώς και αυτή του διανυσματικού πεδίου.

Ορισμός 2.1.5. *Έστω $f : M^n \longrightarrow N^m$ διαφορίσιμη απεικόνιση.*

(i) *Η απεικόνιση f καλείται* ***εμβάπτιση*** *αν για κάθε σημείο $x \in M$ το διαφορικό*

$$df_x : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$$

είναι $1-1$, δηλαδή $\mathrm{rank}(df_x) = n$.

(ii) *Η απεικόνιση f καλείται* ***εμφύτευση*** *αν είναι εμβάπτιση και η απεικόνιση $f : M^n \longrightarrow f(M^n)$ είναι ομοιομορφισμός, όπου το σύνολο $f(M^n)$ είναι εφοδιασμένο με την επαγόμενη τοπολογία του πολυπτύγματος N^m.*

Ορισμός 2.1.6. *Ονομάζουμε* ***διανυσματικό πεδίο*** *ενός πολυπτύγματος M κάθε απεικόνιση X η οποία σε κάθε σημείο $x \in M$ αντιστοιχεί ένα διάνυσμα $X_x \in T_xM$. Το διανυσματικό πεδίο X καλείται* ***διαφορίσιμο*** *αν η συνάρτηση*

$$Xf : M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (Xf)(x) = X_xf, \quad x \in M,$$

είναι διαφορίσιμη για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

$$X(\lambda f + \mu g) = \lambda X(f) + \mu X(g),$$

$$X(fg) = (Xf)g + f(Xg),$$

για κάθε $f, g \in C^{\infty}(M)$ και $X \in \mathfrak{X}(M)$, όπου

$$C^{\infty}(M) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ διαφορίσιμη}\}$$

και $\mathfrak{X}(M)$ είναι το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων του πολυπτύγματος M.

Ονομάζουμε **γινόμενο Lie** δυο διανυσματικών πεδίων $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ το διανυσματικό πεδίο $[X, Y]$ το οποίο ορίζεται ως:

$$[X, Y]_x(f) = X_x(Yf) - Y_x(Xf), \qquad x \in M, f \in C^{\infty}(M).$$

Είναι γνωστό ότι ισχύουν οι εξής ιδιότητες για κάθε $X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ και $f, g \in C^{\infty}(M)$:

(i) $[X, Y] = -[Y, X]$,

(ii) $[\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y] = \lambda_1[X_1, Y] + \lambda_2[X_2, Y]$, για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

(iii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$,

(iv) $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$,

(v) Για κάθε χάρτη (U, φ) με συναρτήσεις συντεταγμένων $x^1, \ldots, x^n$ έχουμε

$$[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0,$$

για κάθε $1 \leq i, j \leq n$.

Ορισμός 2.1.7. *Μια **γραμμική συνοχή** ενός πολυπτύγματος M είναι μια απεικόνιση*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y,$$

η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

(i) $\nabla_{X_1 + X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$,

(ii) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,

(iii) $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$,

(iv) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$,

για κάθε $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$. *Το διανυσματικό πεδίο* $\nabla_X Y$ *ονομάζεται* ***συναλλοιώτη παράγωγος*** *του* Y ***στη διεύθυνση*** X ***ως προς τη συνοχή*** ∇.

Έστω $n-$διάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα M. Ένα **τανυστικό πεδίο τύπου** $(r, 1)$ του πολυπτύγματος M είναι μια απεικόνιση

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{r-\text{φορές}} \longrightarrow \mathfrak{X}(M),$$

η οποία είναι $C^\infty(M)-$γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της, ενώ ένα **τανυστικό πεδίο τύπου** $(r, 0)$ στο M είναι μια απεικόνιση

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{r-\text{φορές}} \longrightarrow C^\infty(M),$$

η οποία είναι $C^\infty(M)-$γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της.

Θεωρούμε ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \mathfrak{X}(M)$ και ένα $(r, s)-$τανυστικό πεδίο T ενός πολυπτύγματος M όπου $s = 0, 1$. Η **συναλλοίωτη παράγωγος του πεδίου** T **στη διεύθυνση ενός διανυσματικού πεδίου** X είναι το $(r, s)-$τανυστικό πεδίο $\nabla_X T$ το οποίο ορίζεται ως:

$$\begin{aligned}(\nabla_X T)(X_1, X_2, \ldots, X_r) = \nabla_X(T(X_1, \ldots, X_r)) - \\ \sum_{i=1}^{r} T(X_1, \ldots, X_{i-1}, \nabla_X X_i, X_{i+1}, \ldots, X_r),\end{aligned}$$

όπου θέτουμε

$$\nabla_X T(X_1, X_2, \ldots, X_r) = X(T(X_1, X_2, \ldots, X_r))$$

όταν $s = 0$, και $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$.

Ορισμός 2.1.8. *Έστω* M *ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα εφοδιασμένο με μια συνοχή* ∇. *Η απεικόνιση* $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ *με*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

καλείται ***τανυστής καμπυλότητας του πολυπτύγματος*** M ***ως προς τη συνοχή*** ∇.

Αποδεικνύεται ότι ο τανυστής καμπυλότητας είναι τανυστικό πεδίου τύπου $(3,1)$.

Υπενθυμίζουμε την έννοια της μετρικής Riemann. Μια **μετρική Riemann** $\langle\cdot,\cdot\rangle$ σε ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα M είναι ένα τανυστικό πεδίο τύπου $(2,0)$, το οποίο είναι:

(i) **συμμετρικό**, δηλαδή $\langle X,Y\rangle = \langle Y,X\rangle$ για κάθε $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$,

(ii) **θετικώς οριστικό**, δηλαδή $\langle X,X\rangle(x) > 0$ για κάθε $X \in \mathfrak{X}(M)$ για κάθε $x \in M$ με $X_x \neq 0$.

Ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα M εφοδιασμένο με μια μετρική Riemann ονομάζεται **πολύπτυγμα Riemann**. Το ακόλουθο είναι γνωστό ως θεμελειώδες θεώρημα της Γεωμετρίας Riemann [6].

Θεώρημα 2.1.9. *Για κάθε πολύπτυγμα Riemann $\big(M,\langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ υπάρχει μοναδική συνοχή ∇ η οποία πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

$$\begin{aligned}
&\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y],\\
&X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle,
\end{aligned}$$

*για κάθε $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$. Η συνοχή αυτή ονομάζεται **συνοχή Levi-Civita**.*

Η απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος βασίζεται στην παρακάτω σχέση η οποία είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως **τύπος Koszul** [4].

$$\begin{aligned}
2\langle \nabla_Y X, Z\rangle = {} & X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \big\langle [X,Z],Y\big\rangle\\
& - \big\langle [Y,Z],X\big\rangle - \big\langle [X,Y],Z\big\rangle.
\end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε την έννοια της καμπυλότητας τομής.

Ορισμός 2.1.10. *Ονομάζουμε **καμπυλότητα τομής** ενός πολυπτύγματος Riemann M διάστασης $n \geq 2$, στο τυχόν σημείο $x \in M$ για έναν διδιάστατο υπόχωρο $\sigma \subset T_xM$ τον αριθμό*

$$K(x,\sigma) = \langle R(X,Y)Y, X\rangle,$$

όπου $\{X,Y\}$ είναι μια ορθομοναδιαία βάση του υποχώρου σ.

Ο ορισμός αυτός είναι καλός, δηλαδή είναι ανεξάρτητος της ορθομοναδιαίας βάσης $\{X,Y\}$.

Αν $\{X, Y\}$ είναι τυχούσα βάση του διδιάστατου υπόχωρου $\sigma \subset T_x M$, τότε ισχύει ότι

$$K(x, \sigma) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X\rangle}{||X \wedge Y||^2},$$

όπου

$$||X \wedge Y||^2 = ||X||^2||Y||^2 - \langle X, Y\rangle^2.$$

Αν $n = 2$, τότε η καμπυλότητα τομής καλείται **καμπυλότητα Gauss** και είναι συνάρτηση μόνο του τυχαίου σημείου $x \in M$. Το πολύπτυγμα M καλείται **ισόπεδο** αν η καμπυλότητα Gauss είναι μηδέν παντού.

Παραθέτουμε το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα των Bonnet και Myers [4] το οποίο θα χρειαστούμε στις αποδείξεις.

Θεώρημα 2.1.11. *Έστω $\big(M, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ ένα πλήρες πολύπτυγμα Riemann. Αν η καμπυλότητα τομής του πληροί*

$$K \geq c > 0,$$

όπου c σταθερά, τότε το πολύπτυγμα M είναι συμπαγές.

Θα χρειαστούμε επίσης το ακόλουθο κριτήριο για την πληρότητα πολυπτυγμάτων Riemann.

Πρόταση 2.1.12. *Έστω $\big(M, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ ένα πλήρες πολύπτυγμα Riemann και $\widetilde{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ μια άλλη μετρική Riemann επί του πολυπτύγματος M. Αν υπάρχει θετικός αριθμός λ τέτοιος ώστε:*

$$\widetilde{\langle X, X\rangle} \geq \lambda\langle X, X\rangle,$$

για κάθε $X \in \mathfrak{X}(M)$, τότε το πολύπτυγμα Riemann $\big(M, \widetilde{\langle\cdot,\cdot\rangle}\big)$ είναι επίσης πλήρες.

2.2 Διαφορικές μορφές

Σε αυτή την ενότητα θα αναφέρουμε στοιχεία από τη θεωρία των διαφορικών μορφών σε πολυπτύγματα (Βλ. [6]). Υπενθυμίζουμε την έννοια του τανυστή.

Ορισμός 2.2.1. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$. Αν $r \geq 1$ είναι φυσικός αριθμός τότε ονομάζουμε $r-$**τανυστή** κάθε απεικόνιση*

$$\tau : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r-\text{φορές}} \longrightarrow \mathbb{R},$$

για την οποία ισχύουν:

$$\tau(v_1,\ldots,v_i+v_i',\ldots,v_r)=\tau(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_r)+\tau(v_1,\ldots,v_i',\ldots,v_r),$$
$$\tau(v_1,\ldots,\lambda v_i,\ldots,v_r)=\lambda\tau(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_r),$$

για κάθε $i\in\{1,\ldots,r\}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ και $v_1,\ldots,v_i,v_{i'},\ldots v_r\in V$.

Ορισμός 2.2.2. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$, τ ένας $r-$τανυστής και σ ένας $s-$τανυστής στο V. Ονομάζουμε **τανυστικό γινόμενο** των τανυστών τ και σ τον $(r+s)-$τανυστή $\tau\otimes\sigma$ ο οποίος ορίζεται ως:*

$$(\tau\otimes\sigma)(v_1,\ldots,v_r,v_{r+1},\ldots,v_{r+s})=\tau(v_1,\ldots,v_r)\sigma(v_{r+1},\ldots,v_{r+s}),$$

όπου $v_1,\ldots,v_r,\ldots,v_{r+s}\in V$.

Ορισμός 2.2.3. *Ένας $r-$τανυστής $\tau:V\times\cdots\times V\longrightarrow\mathbb{R}$ ονομάζεται **αντισυμμετρικός** αν ισχύει*

$$\tau(v_{\pi(1)},\ldots,v_{\pi(r)})=(-1)^{\pi}\tau(v_1,\ldots,v_r),$$

για κάθε $v_1,\ldots,v_r\in V$, όπου π είναι τυχόν στοιχείο της ομάδας S_r των $r-$μεταθέσεων και $(-1)^{\pi}=\mathrm{sgn}(\pi)$ είναι το πρόσημο της μετάθεσης π.

Ακολούθως, υπενθυμίζουμε τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου αντισυμμετρικών τελεστών.

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$ και τ ένας $r-$τανυστής. Τότε, ορίζεται ο αντισυμμετρικός $r-$τανυστής $A\tau$ ως εξής:

$$(A\tau)(v_1,\ldots,v_r)=\frac{1}{r!}\sum_{\pi\in S_r}(-1)^{\pi}\tau\big(v_{\pi(1)},\ldots,v_{\pi(r)}\big),\quad r\geq 1.$$

όπου $v_1,\ldots,v_r\in V$.

Ορισμός 2.2.4. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$, τ ένας αντισυμμετρικός $r-$τανυστής και σ ένας αντισυμμετρικός $s-$τανυστής. Ονομάζουμε **εξωτερικό γινόμενο** των τανυστών τ και σ τον αντισυμμετρικό $(r+s)-$τανυστή*

$$\tau\wedge\sigma=\frac{(r+s)!}{r!s!}A(\tau\otimes\sigma).$$

Είναι γνωστό ότι για το εξωτερικό γινόμενο ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\tau\wedge\sigma=(-1)^{rs}\sigma\wedge\tau$, όπου τ είναι $r-$τανυστής και σ είναι $s-$τανυστής,

(ii) $\tau \wedge \tau = 0$, όπου τ είναι 1-τανυστής,

(iii) $\tau \wedge \sigma = \tau \otimes \sigma - \sigma \otimes \tau$, όπου τ, σ είναι 1-τανυστές,

(iv) $(\tau \wedge \sigma) \wedge \phi = \tau \wedge (\sigma \wedge \phi)$.

Ορισμός 2.2.5. *Ονομάζουμε $r-$* ***μορφή*** *ενός πολυπτύγματος M κάθε αντισυμμετρικό $(r,0)-$τανυστικό πεδίο του M, δηλαδή μια απεικόνιση:*

$$\omega : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{r-\varphi o\rho \acute{\varepsilon}\varsigma} \longrightarrow C^{\infty}(M),$$

η οποία είναι $C^{\infty}(M)$ γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή και αντισυμμετρική.

Συμβολίζουμε με $\Lambda^r M$ το σύνολο των $r-$μορφών του πολυπτύγματος M, όπου $r \geq 1$. Για $r = 0$, θέτουμε $\Lambda^0 M = C^{\infty}(M)$. Ισχύει ότι $\Lambda^r M = \{0\}$ όταν $r > \dim M$.

Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη την ακόλουθη γνωστή πρόταση [6].

Πρόταση 2.2.6. *Για κάθε πολύπτυγμα M υπάρχει μοναδικός τελεστής d τέτοιος ώστε*

$$d : \Lambda^r M \longrightarrow \Lambda^{r+1} M, \quad \omega \mapsto d\omega,$$

για κάθε $0 \leq r \leq \dim M$ ο οποίος σε κάθε $r-$μορφή ω αντιστοιχεί μια $(r+1)-$μορφή $d\omega$ έτσι ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $d(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1 d\omega_1 + \lambda_2 d\omega_2$, *για κάθε* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\omega_i \in \Lambda^r M$,

(ii) $d(f) = df$, *για κάθε* $f \in C^{\infty}(M)$,

(iii) $d(\omega \wedge \phi) = d\omega \wedge \phi + (-1)^r \omega \wedge d\varphi, \quad \omega \in \Lambda^r M, \varphi \in \Lambda^s M$,

(iv) $d^2 = 0$, *δηλαδή* $d(d\omega) = 0$ *για κάθε* $\omega \in \Lambda^r M$.

Ο τελεστής d καλείται ***τελεστής εξωτερικής παραγώγου*** *και για κάθε ω η μορφή $d\omega$ καλείται* ***εξωτερική παράγωγος*** *της ω.*

Ειδικά, για την εξωτερική παράγωγο 1-μορφών ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.2.7. *Για κάθε μορφή $\omega \in \Lambda^1 M$ τυχόντος πολυπτύγματος M έχουμε ότι*

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega\big([X,Y]\big),$$

για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Θα αναφερθούμε στην έννοια της ανάσυρσης μιας απεικόνισης f. Έστω $f : M \longrightarrow N$ διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ δυο πολυπτυγμάτων M και N. Η απεικόνιση f επάγει για κάθε ακέραιο $r \geq 0$ μια απεικόνιση

$$f^* : \Lambda^r N \longrightarrow \Lambda^r M$$

η οποία ονομάζεται **ανάσυρση** της απεικόνισης f και η οποία ορίζεται ως ακολούθως: Αν $\omega \in \Lambda^r N$, τότε η μορφή $f^*\omega \in \Lambda^r M$ ορίζεται ως:

$$f^*\omega(X_1, \dots, X_r) = \begin{cases} g \circ f, & \text{αν } r = 0, \omega = g \in C^\infty(M) \\ \omega(df(X_1), \dots, df(X_r)), & \text{αν } r \geq 1, \end{cases}$$

όπου $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$.

Είναι γνωστό ότι η ανάσυρση πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $f^*(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1 f^*\omega_1 + \lambda_2 f^*\omega_2$, για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \omega_1, \omega_2 \in \Lambda^r N$,

(ii) $f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)$, για κάθε $\omega \in \Lambda^r N, \eta \in \Lambda^s N$.

(iii) $f^*(d_N\omega) = d_M f^*\omega$, όπου d_M, d_N οι τελεστές εξωτερικής παραγώγου των πολυπτυγμάτων M, N αντίστοιχα.

Μια μορφή ω ενός πολυπτύγματος M καλείται **κλειστή**, αν ισχύει ότι $d\omega = 0$. Μια μορφή ω ενός πολυπτύγματος M καλείται **ακριβής**, αν υπάρχει μορφή φ του M τέτοια ώστε $\omega = d\varphi$.

Προκύπτει από την Πρόταση 2.2.6 ότι κάθε ακριβής μορφή είναι κλειστή, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Μια συνθήκη για την ισχύ του αντιστρόφου δίνεται από το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 2.2.8 (Λήμμα Poincare). *Έστω M ένα απλά συνεκτικό πολύπτυγμα και $\omega \in \Lambda^1 M$. Αν η μορφή ω είναι κλειστή, τότε υπάρχει λεία συνάρτηση $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $du = \omega$.*

2.3 Κλίση, Λαπλασιανή και παραβολικά πολυπτύγματα

Για τυχούσα συνάρτηση $u \in C^\infty(M)$ ενός πολυπτύγματος Riemann $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ το διανυσματικό πεδίο **κλίσης** grad u ορίζεται από την ισότητα

$$\langle \operatorname{grad} u, X\rangle = du(X), \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Η **απόκλιση** ενός διανυσματικού πεδίου $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ ορίζεται ως

$$\operatorname{div} X = \operatorname{tr}(\nabla X) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle,$$

όπου ∇ είναι η συνοχή Levi-Civita του πολυπτύγματος M και $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο.

Η Λαπλασιανή Δu μιας συνάρτησης $u \in C^\infty(M)$ ορίζεται ως

$$\Delta u = \operatorname{divgrad} f.$$

Μια συνάρτηση $u \in C^\infty(M)$ καλείται **υφαρμονική** αν $\Delta u \geq 0$.

Ένα πολύπτυγμα M καλείται **παραβολικό** αν κάθε άνω φραγμένη υφαρμονική συνάρτηση είναι σταθερή. Για παράδειγμα ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένος με την επαγόμενη μετρική είναι παραβολικό πολύπτυγμα.

2.4 Ισομετρικές εμβαπτίσεις

Σε αυτή την ενότητα θα αναφερθούμε σε στοιχεία της θεωρίας των ισομετρικών εμβαπτίσεων διδιάστατων πολυπτυγμάτων στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$ ο οποίος είναι εφοδιασμένος με τη συνήθη μετρική (Βλ. [4, 6]).

Ορισμός 2.4.1. *Μια εμβάπτιση $f : \big(M, \langle\cdot,\cdot\rangle\big) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ενός πολυπτύγματος Riemann $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ονομάζεται **ισομετρική εμβάπτιση** αν ισχύει*

$$\langle df_x(v), df_x(w)\rangle = \langle v, w\rangle_x,$$

για κάθε σημείο $x \in M$ και κάθε διανύσματα $v, w \in T_xM$.

Έστω $f : \big(M, \langle\cdot,\cdot\rangle\big) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ μια ισομετρική εμβάπτιση. Η **επαγόμενη δέσμη** της εμβάπτισης f είναι η διανυσματική δέσμη

$$f^*\big(T\mathbb{R}^4\big) := \big\{(x, v) : x \in M, v \in T_{f(x)}\mathbb{R}^4\big\}.$$

Το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων κατά μήκος της εμβάπτισης f είναι εξ ορισμού το σύνολο

$$\mathfrak{X}(f) = \Gamma\big(f^*\big(T\mathbb{R}^4\big)\big).$$

Προφανώς, αν $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4)$, τότε $Z \circ f \in \mathfrak{X}(f)$.

Για κάθε σημείο $x \in M$, ο εφαπτόμενος χώρος $T_{f(x)}\mathbb{R}^4$ αναλύεται σε ορθογώνιο ευθύ άθροισμα

$$T_{f(x)}\mathbb{R}^4 = df_x\big(T_xM\big) \oplus \Big(df_x\big(T_xM\big)\Big)^{\perp}.$$

Ο υπόχωρος $\big(df_x(T_xM)\big)^{\perp}$ ονομάζεται **κάθετος χώρος** της ισομετρικής εμβάπτισης f στο σημείο x και συμβολίζεται με $N_fM(x)$.

Αντίστοιχα, η **κάθετη δέσμη** της ισομετρικής εμβάπτισης f είναι η διανυσματική δέσμη

$$N_fM = \big\{(x,\xi) : x \in M,\, \xi \in N_fM(x)\big\} \subset f^*\big(T\mathbb{R}^4\big)$$

και το σύνολο των κάθετων διανυσματικών πεδίων της εμβάπτισης f είναι το σύνολο

$$\mathfrak{X}^{\perp}(f) = \Gamma\big(N_fM\big).$$

Ο υπόχωρος $df_x(T_xM)$ καλείται **εφαπτόμενο επίπεδο** της ισομετρικής εμβάπτισης f στο σημείο $x \in M$. Η **εφαπτόμενη δέσμη** της ισομετρικής εμβάπτισης f είναι το σύνολο

$$df(TM) = \big\{(x,v) : x \in M,\, v \in df_x(T_xM)\big\}.$$

Η συνοχή Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$ του $\mathbb{R}^4$ επάγει μία μοναδική συνοχή στην επαγόμενη δέσμη $f^*\big(T\mathbb{R}^4\big)$, την οποία συμβολίζουμε χάριν απλότητας με το ίδιο σύμβολο $\widetilde{\nabla}$, και για την οποία ισχύει:

$$\widetilde{\nabla}_X(Z \circ f) = \widetilde{\nabla}_{df(X)}Z,$$

για κάθε διανυσματικό πεδίο $X \in \mathfrak{X}(M)$ και για κάθε $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4)$.

Θεωρούμε διανυσματικά πεδία $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Το διανυσματικό πεδίο $\widetilde{\nabla}_X df(Y)$ αναλύεται σε εφαπτομενική και σε κάθετη συνιστώσα:

$$\widetilde{\nabla}_X df(Y) = (\widetilde{\nabla}_X df(Y))^{\top} + (\widetilde{\nabla}_X df(Y))^{\perp}.$$

Αποδεικνύεται ότι

$$(\widetilde{\nabla}_X df(Y))^{\top} = df(\nabla_X Y),$$

όπου ∇ είναι η συνοχή Levi-Civita του πολυπτύγματος M.

Ακολούθως, υπενθυμίζουμε τη σημαντική για τη θεωρία των ισομετρικών εμβαπτίσεων έννοια της δεύτερης θεμελιώδους μορφής.

Ορισμός 2.4.2. *Ονομάζουμε **δεύτερη θεμελιώδη μορφή** μιας ισομετρικής εμβάπτισης $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ την απεικόνιση*

$$\alpha_f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^{\perp}(f), \quad \alpha_f(X,Y) = (\widetilde{\nabla}_X df(Y))^{\perp},$$

για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Ισχύει ότι

$$\widetilde{\nabla}_X df(Y) = df(\nabla_X Y) + \alpha_f(X,Y), \tag{2.1}$$

για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Η ισότητα η οποία είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως **τύπος του Gauss** [3, σελ. 3].

Μια ισομετρική εμβάπτιση καλείται **ολικά γεωδαισιακή** αν η δεύτερη θεμελειώδης μορφή είναι παντού μηδέν. Τα ολικά γεωδαισιακά πολυπτύγματα των Ευκλείδιων χώρων είναι αφφινικοί υπόχωροι.

Ορισμός 2.4.3. *Η* ***απεικόνιση Weingarten (ή τελεστής σχήματος) μιας ισομετρικής εμβάπτισης*** $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ***στην διεύθυνση*** $\xi \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$ *είναι το* $(1,1)-$*τανυστικό πεδίο*

$$A_\xi : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \quad df(A_\xi X) = -(\widetilde{\nabla}_X \xi)^{\top},$$

όπου $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Είναι γνωστό ότι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή είναι συμμετρική και $C^{\infty}(M)-$διγραμμική. Από τη συμμετρία της προκύπτει ότι ο τελεστής σχήματος A_ξ είναι αυτοπροσαρτημένος. Οι δύο ιδιοτιμές του καλούνται **κύριες καμπυλότητες** της εμβάπτισης στη διεύθυνση ξ.

Η απεικόνιση Weingarten πληροί τη σχέση

$$\langle \alpha_f(X,Y), \xi \rangle = \langle A_\xi X, Y \rangle, \tag{2.2}$$

για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ και για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$.

Για κάθε ισομετρική εμβάπτιση f ορίζεται η απεικόνιση:

$$\nabla^{\perp} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^{\perp}(f) \longrightarrow \mathfrak{X}^{\perp}(f), \quad \nabla^{\perp}_X \xi = (\widetilde{\nabla}_X \xi)^{\perp},$$

όπου $X \in \mathfrak{X}(M), \xi \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$.

Αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση αυτή πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\nabla^{\perp}_{X_1+X_2}\xi = \nabla^{\perp}_{X_1}\xi + \nabla^{\perp}_{X_2}\xi$,

(ii) $\nabla^{\perp}_{uX}\xi = u\nabla^{\perp}_X \xi$,

(iii) $\nabla^{\perp}_X(\xi_1+\xi_2) = \nabla^{\perp}_X\xi_1 + \nabla^{\perp}_X\xi_2$,

(iv) $\nabla^{\perp}_X(u\xi) = (Xu)\xi + u\nabla^{\perp}_X\xi$,

$(v)\;\; X\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \big\langle \nabla^{\perp}_X \xi_1, \xi_2 \big\rangle + \big\langle \xi_1, \nabla^{\perp}_X \xi_2 \big\rangle,$

για κάθε $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M), \xi, \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$ και $u \in C^{\infty}(M)$.

Τα ανωτέρω δηλώνουν ότι η απεικόνιση αυτή είναι μια συνοχή στην κάθετη δέσμη $N_f M$ της εμβάπτισης f, η οποία καλείται **κάθετη συνοχή.**

Ένα κάθετο διανυσματικό πεδίο $\xi \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$ καλείται **παράλληλο** στην κάθετη δέσμη αν

$$\nabla^{\perp}_X \xi = 0,$$

για κάθε $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Επιπλέον, είναι φανερό ότι

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -df(A_\xi X) + \nabla^{\perp}_X \xi, \tag{2.3}$$

για κάθε $X \in \mathfrak{X}(M)$ και για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$. Η ισότητα αυτή είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως **τύπος Weingarten** [3, σελ. 4].

Για κάθε διανυσματικό πεδίο $\xi \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$ το συμμετρικό $(2,0)-$τανυστικό πεδίο II_ξ το οποίο ορίζεται ως

$$II_\xi(X, Y) = \langle A_\xi X, Y \rangle,$$

όπου $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, ονομάζεται **δεύτερη θεμελιώδης μορφή** στη διεύθυνση του διανυσματικού πεδίου ξ.

Ορισμός 2.4.4. *Έστω $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ισομετρική εμβάπτιση. Το **διάνυσμα μέσης καμπυλότητας** της f στο σημείο $x \in M$ είναι το διάνυσμα*

$$H(x) = \frac{1}{2}(\alpha_f(X_1, X_1) + \alpha_f(X_2, X_2)),$$

όπου $\{X_1, X_2\}$ είναι μια ορθομοναδιαία βάση του εφαπτομένου χώρου $T_x M$.

Αποδεικνύεται ότι

$$\langle \xi, H(x) \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(A_\xi\big), \tag{2.4}$$

για κάθε διάνυσμα $\xi \in N_f M(x)$. Επομένως το διάνυσμα μέσης καμπυλότητας είναι ανεξάρτητο της επιλογής της βάσης $\{X_1, X_2\}$. Επίσης, από το παραπάνω έχουμε ότι:

$$H(x) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(A_{\xi_1}\big)\xi_1 + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(A_{\xi_2}\big)\xi_2,$$

όπου $\{\xi_1, \xi_2\}$ μια ορθομοναδιαία βάση του κάθετου χώρου $N_f M(x)$.

Ορίζεται κατ' αυτόν τον τρόπο ένα κάθετο διανυσματικό πεδίο $H \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$, το οποίο καλείται **διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας**.

Ο διανυσματικός υπόχωρος του κάθετου χώρου $N_f M(x)$ ο οποίος παράγεται από το σύνολο
$$\left\{\alpha_f(v, w) : v, w \in T_x M\right\}$$
καλείται **πρώτος κάθετος χώρος** της ισομετρικής εμβάπτισης f στο σημείο x και συμβολίζεται με $N_1^f(x)$.

Είναι γνωστό (Βλ. [3]) ότι ισχύουν οι ακόλουθες εξισώσεις.

(i) **Η εξίσωση Gauss**:

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \left\langle \alpha_f(X,W), \alpha_f(Y,Z)\right\rangle - \left\langle \alpha_f(X,Z), \alpha_f(Y,W)\right\rangle, \tag{2.5}$$

για κάθε $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, όπου R είναι ο τανυστής καμπυλότητας του πολυπτύγματος M (Βλ. Ορισμό 2.1.8).

(ii) **Η εξίσωση Codazzi**:

$$(\nabla^{\perp}_X \alpha_f)(Y, Z) = (\nabla^{\perp}_Y \alpha_f)(X, Z), \tag{2.6}$$

για κάθε $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, όπου

$$(\nabla^{\perp}_X \alpha_f)(Y, Z) = \nabla^{\perp}_X \alpha_f(Y, Z) - \alpha_f(\nabla_X Y, Z) - \alpha_f(Y, \nabla_X Z).$$

Η εξίσωση Codazzi ισοδύναμα γράφεται ως:

$$(\nabla_X A_\xi)Y - (\nabla_Y A_\xi)X = A_{\nabla^{\perp}_X \xi} Y - A_{\nabla^{\perp}_Y \xi} X, \tag{2.7}$$

για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ και κάθε $\xi \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$.

Υπενθυμίζουμε ότι η συναλλοίωτη παράγωγος του τελεστή σχήματος A_ξ ορίζεται ως:
$$(\nabla_X A_\xi)Y = \nabla_X A_\xi Y - A_\xi(\nabla_X Y).$$

(iii) **Η εξίσωση Ricci**:

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta\rangle = \left\langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\right\rangle, \tag{2.8}$$

για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ και για κάθε $\xi, \eta \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$, όπου

$$R^{\perp} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^{\perp}(f) \longrightarrow \mathfrak{X}^{\perp}(f)$$

είναι ο τανυστής κάθετης καμπυλότητας ο οποίος ορίζεται ως:

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y \xi - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi,$$

και

$$[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi.$$

2.5 Οι εξισώσεις δομής του Cartan για τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$

Έστω V ανοιχτό υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^4$ και $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4 \in \mathfrak{X}(V)$ ορθομοναδιαία διανυσματικά πεδία. Θεωρούμε το δυϊκό πλαίσιο $\{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3, \tilde{\omega}_4\} \subset \Lambda^1 V$ του $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$, δηλαδή τις 1-μορφές $\tilde{\omega}_i$ με

$$\tilde{\omega}_i(X) = \langle X, \tilde{e}_i \rangle, \quad X \in \mathfrak{X}(V), 1 \leq i \leq 4.$$

Οι μορφές συνοχής $\tilde{\omega}_{ij} \in \Lambda^1(V)$, $1 \leq i, j \leq 4$ του πλαισίου $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$ ορίζονται ως:

$$\tilde{\omega}_{ij}(X) = \langle \widetilde{\nabla}_X \tilde{e}_i, \tilde{e}_j \rangle,$$

όπου $\widetilde{\nabla}$ είναι η συνοχή Levi-Civita του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^4$. Προφανώς ισχύει

$$\widetilde{\nabla}_X \tilde{e}_i = \sum_{j=1}^{4} \tilde{\omega}_{ij}(X)\tilde{e}_j$$

και

$$\tilde{\omega}_{ij} = -\tilde{\omega}_{ji},$$

για κάθε $1 \leq i, j \leq 4$.

Αναφέρουμε τις εξισώσεις δομής του Cartan για τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$ οι οποίες γράφονται ως ακολούθως:

$$d\tilde{\omega}_i = \sum_{\kappa=1}^{4} \tilde{\omega}_{i\kappa} \wedge \tilde{\omega}_\kappa, \qquad 1 \leq i \leq 4, \tag{2.9}$$

$$d\tilde{\omega}_{ij} = \sum_{\kappa=1}^{4} \tilde{\omega}_{i\kappa} \wedge \tilde{\omega}_{\kappa j}, \qquad 1 \leq i, j \leq 4. \tag{2.10}$$

2.6 Η μέθοδος του κινούμενου πλαισίου για ισομετρικές εμβαπτίσεις

Έστω M ένα διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann και $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ μια ισομετρική εμβάπτιση. Γύρω από κάθε σημείο του πολυπτύγματος M υπάρχει αρκούντως μικρή περιοχή U έτσι ώστε ο περιορισμός $f|_U$ να είναι εμφύτευση.

Θεωρούμε ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_1, e_2\}$ στην περιοχή $U \subset M$ και κάθετα ορθομοναδιαία διανυσματικά πεδία $e_3, e_4 \in \mathfrak{X}^{\perp}(f|_U)$.

Σε κατάλληλη περιοχή V του $\mathbb{R}^4$ τέτοια ώστε $f(U) \cap V \neq \varnothing$ υπάρχει ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\} \subset \mathfrak{X}(V)$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$\tilde{e}_1(f(x)) = df_x(e_1), \quad \tilde{e}_2(f(x)) = df_x(e_2)$$

και

$$\tilde{e}_3(f(x)) = e_3(x), \quad \tilde{e}_4(f(x)) = e_4(x).$$

για κάθε $x \in U$.

Από τα ανωτέρω προκύπτουν οι ακόλουθες ισότητες.

$$\begin{aligned}
f^*\tilde{\omega}_1(X) &= \tilde{\omega}_1(df(X)) = \langle df(X), \tilde{e}_1\rangle = \langle df(X), df(e_1)\rangle = \langle X, e_1\rangle = \omega_1(X),\\
f^*\tilde{\omega}_2(X) &= \tilde{\omega}_2(df(X)) = \langle df(X), \tilde{e}_2\rangle = \langle df(X), df(e_2)\rangle = \langle X, e_2\rangle = \omega_2(X),\\
f^*\tilde{\omega}_3(X) &= \tilde{\omega}_3(df(X)) = \langle df(X), \tilde{e}_3\rangle = \langle df(X), e_3\rangle = 0,\\
f^*\tilde{\omega}_4(X) &= \tilde{\omega}_4(df(X)) = \langle df(X), \tilde{e}_4\rangle = \langle df(X), e_4\rangle = 0.
\end{aligned}$$

όπου οι μορφές ω_1, ω_2 είναι το δυϊκό πλαίσιο του πλαισίου $\{e_1, e_2\}$, δηλαδή

$$\omega_i(X) = \langle X, e_i\rangle \quad X \in X(U), i = 1, 2.$$

Επομένως,

$$f^*\widetilde{\omega}_i = \omega_i, \quad i = 1, 2,$$

και

$$f^*\widetilde{\omega}_a = 0, \quad a = 3, 4.$$

Ομοίως βρίσκουμε,

$$\begin{aligned}
f^*\widetilde{\omega}_{12}(X) &= \widetilde{\omega}_{12}(df(X)) = \langle \widetilde{\nabla}_{df(X)}\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\rangle\\
&= \langle \widetilde{\nabla}_{df(X)} df(e_1), df(e_2)\rangle\\
&= \langle df(\nabla_X e_1) + \alpha_f(X, e_1), df(e_2)\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle df(\nabla_X e_1), df(e_2)\rangle = \langle \nabla_X e_1, e_2\rangle \\
&= \omega_{12}(X),
\end{aligned}
$$

όπου ω_{12} είναι η μορφή συνοχής του πλαισίου $\{e_1, e_2\}$, δηλαδή

$$\omega_{12}(X) = \langle \nabla_X e_1, e_2\rangle \quad X \in \mathfrak{X}(M)$$

και ∇ είναι η συνοχή Levi-Civita του πολυπτύγματος Riemann M.

Ορίζουμε τις μορφές

$$\omega_{ia} = f^*\tilde{\omega}_{ia}, \quad i = 1, 2, \quad a = 3, 4.$$

Θεωρούμε τους τελεστές σχήματος A_3, A_4 στις διευθύνσεις e_3, e_4 όπου $\{e_3, e_4\}$ είναι ένα κάθετο ορθομοναδιαίο πλαίσιο της κάθετης δέσμης $N_f M$ της ισομετρικής εμβάπτισης f. Τότε έχουμε

$$
\begin{aligned}
f^*\widetilde{\omega}_{13}(X) &= \widetilde{\omega}_{13}(df(X)) = \big\langle \widetilde{\nabla}_{df(X)}\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_3\big\rangle \\
&= \big\langle \widetilde{\nabla}_{df(X)} df(e_1), e_3\big\rangle \\
&= \big\langle df(\nabla_X e_1) + \alpha_f(X, e_1), e_3\big\rangle \\
&= \big\langle \alpha_f(X, e_1), e_3\big\rangle = \big\langle A_3 X, e_1\big\rangle \\
&= \omega_{13}(X),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^*\widetilde{\omega}_{14}(X) &= \widetilde{\omega}_{14}(df(X)) = \big\langle \widetilde{\nabla}_{df(X)}\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_4\big\rangle \\
&= \big\langle \widetilde{\nabla}_{df(X)} df(e_1), e_4\big\rangle \\
&= \big\langle df(\nabla_X e_1) + \alpha_f(X, e_1), e_4\big\rangle \\
&= \big\langle A_4 X, e_1\big\rangle \\
&= \omega_{14}(X),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_{23}(df(X)) &= \big\langle \widetilde{\nabla}_{df(X)}\widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3\big\rangle = \big\langle \widetilde{\nabla}_{df(X)} df(e_2), e_3\big\rangle \\
&= \big\langle df(\nabla_X e_2) + \alpha_f(X, e_2), e_3\big\rangle \\
&= \big\langle A_3 X, e_2\big\rangle \\
&= \omega_{23}(X),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^*\widetilde{\omega}_{24}(X) &= \widetilde{\omega}_{24}(df(X)) = \big\langle \widetilde{\nabla}_{df(X)}\widetilde{e}_2, \widetilde{e}_4\big\rangle \\
&= \big\langle \widetilde{\nabla}_{df(X)} df(e_2), e_4\big\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \big\langle df(\nabla_X e_2) + \alpha_f(X, e_2), e_4 \big\rangle \\
&= \big\langle A_4 X, e_2 \big\rangle \\
&= \omega_{24}(X),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^*\widetilde{\omega}_{34}(X) = \widetilde{\omega}_{34}(df(X)) &= \big\langle \widetilde{\nabla}_{df(X)} \widetilde{e}_3, \widetilde{e}_4 \big\rangle \\
&= \big\langle \widetilde{\nabla}_{df(X)} e_3, e_4 \big\rangle \\
&= \langle -df(A_3 X) + \nabla^{\perp}_X e_3, e_4 \rangle \\
&= \langle \nabla^{\perp}_X e_3, e_4 \rangle \\
&= \omega_{34}(X).
\end{aligned}
$$

Συνεπώς,

$$
f^*\widetilde{\omega}_{12} = \omega_{12}, \quad f^*\widetilde{\omega}_{34} = \omega_{34},
$$

όπου ω_{34} είναι η μορφή κάθετης συνοχής για το κάθετο ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_3, e_4\}$.

Θεωρώντας την ανάσυρση στις εξισώσεις Cartan (2.9) και (2.10) και λαμβάνοντας υπόψιν τους ανωτέρω υπολογισμούς προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις δομής του Cartan για την ισομετρική εμβάπτιση f:

$$
d\omega_i = \sum_{\kappa=1}^{2} \omega_{i\kappa} \wedge \omega_\kappa, \qquad i = 1, 2, \tag{2.11}
$$

$$
d\omega_{AB} = \sum_{C=1}^{4} \omega_{AC} \wedge \omega_{CB}, \qquad 1 \leq A, B, C \leq 4. \tag{2.12}
$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, για τους τελεστές σχήματος έχουμε

$$
\begin{aligned}
A_3(X) &:= A_{e_3}(X) = \omega_{13}(X)e_1 + \omega_{23}(X)e_2, \\
A_4(X) &:= A_{e_4}(X) = \omega_{14}(X)e_1 + \omega_{24}(X)e_2,
\end{aligned}
$$

για κάθε $X \in \mathfrak{X}(U)$.

Είναι γνωστό ότι η καμπυλότητα Gauss του πολυπτύγματος M πληροί την ισότητα:

$$
d\omega_{12} = -K\, \omega_1 \wedge \omega_2. \tag{2.13}
$$

Με τους ανωτέρω συμβολισμούς, η επόμενη πρόταση εκφράζει την καμπυλότητα Gauss μέσω των τελεστών σχήματος.

Πρόταση 2.6.1. *Έστω $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ μια ισομετρική εμβάπτιση. Η καμπυλότητα Gauss του πολυπτύγματος M δίνεται από την ισότητα:*

$$K = \det A_3 + \det A_4. \tag{2.14}$$

Απόδειξη. Από την ανωτέρω εξίσωση (2.12) έχουμε

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32} + \omega_{14} \wedge \omega_{42}.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned}
\omega_{13} &= \omega_{13}(e_1)\omega_1 + \omega_{13}(e_2)\omega_2 = \langle A_3e_1, e_1\rangle\omega_1 + \langle A_3e_1, e_2\rangle\omega_2,\\
\omega_{32} &= \omega_{32}(e_1)\omega_1 + \omega_{32}(e_2)\omega_2 = -\langle A_3e_1, e_2\rangle\omega_1 - \langle A_3e_2, e_2\rangle\omega_2,\\
\omega_{14} &= \omega_{14}(e_1)\omega_1 + \omega_{14}(e_2)\omega_2 = \langle A_4e_1, e_1\rangle\omega_1 + \langle A_4e_1, e_2\rangle\omega_2,\\
\omega_{42} &= \omega_{42}(e_1)\omega_1 + \omega_{42}(e_2)\omega_2 = -\langle A_4e_1, e_2\rangle\omega_1 + \langle A_4e_2, e_2\rangle\omega_2.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
d\omega_{12} =& \big(- \langle A_3e_1, e_1\rangle\langle A_3e_2, e_2\rangle + \langle A_3e_1, e_2\rangle^2\big)\, \omega_1 \wedge \omega_2\\
&+ \big(- \langle A_4e_1, e_1\rangle\langle A_4e_2, e_2\rangle + \langle A_4e_1, e_2\rangle^2\big)\, \omega_1 \wedge \omega_2.
\end{aligned}$$

Οι πίνακες των τελεστών σχήματος A_3 και A_4 ως προς το πλαίσιο $\{e_1, e_2\}$ είναι

$$A_3 \sim \begin{pmatrix} \langle A_3e_1, e_1\rangle & \langle A_3e_1, e_2\rangle \\ \langle A_3e_1, e_2\rangle & \langle A_3e_2, e_2\rangle \end{pmatrix}$$

και

$$A_4 \sim \begin{pmatrix} \langle A_4e_1, e_1\rangle & \langle A_4e_1, e_2\rangle \\ \langle A_4e_1, e_2\rangle & \langle A_4e_2, e_2\rangle \end{pmatrix}.$$

Άρα έχουμε

$$d\omega_{12} = -\big(\det A_3 + \det A_4\big)\omega_1 \wedge \omega_2.$$

Οπότε από τη σχέση (2.13) έπεται το ζητούμενο. □

Η κάθετη καμπυλότητα K_n της ισομετρικής εμβάπτισης f είναι η συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$d\omega_{34} = -K_n\, \omega_1 \wedge \omega_2. \tag{2.15}$$

Είναι γνωστό ότι η κάθετη καμπυλότητα είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ανεξάρτητη των πλαισίων $\{e_1, e_2\}$ και $\{e_3, e_4\}$. Θα λέμε ότι η ισομετρική εμβάπτιση f έχει ισόπεδη κάθετη δέσμη αν $K_n = 0$ παντού.

Ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.6.2. *Έστω $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ μια ισομετρική εμβάπτιση. Η κάθετη καμπυλότητα K_n πληροί τη σχέση:*

$$K_n = -\langle [A_3, A_4] e_1, e_2 \rangle,$$

όπου A_3, A_4 οι τελεστές σχήματος στις διευθύνσεις e_3, e_4.

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$d\omega_{34} = -K_n \, \omega_1 \wedge \omega_2$$

και λόγω της σχέσης (2.12)

$$d\omega_{34} = \omega_{31} \wedge \omega_{14} + \omega_{32} \wedge \omega_{24} = -\omega_{13} \wedge \omega_{14} - \omega_{23} \wedge \omega_{24}.$$

Επίσης, είναι

$$\begin{aligned}
\omega_{13} &= \omega_{13}(e_1)\omega_1 + \omega_{13}(e_2)\omega_2, \\
\omega_{14} &= \omega_{14}(e_1)\omega_1 + \omega_{14}(e_2)\omega_2, \\
\omega_{23} &= \omega_{23}(e_1)\omega_1 + \omega_{23}(e_2)\omega_2, \\
\omega_{24} &= \omega_{24}(e_1)\omega_1 + \omega_{24}(e_2)\omega_2.
\end{aligned}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}
-\omega_{13} \wedge \omega_{14} - \omega_{23} \wedge \omega_{24} =& \big(-\omega_{13}(e_1)\omega_{14}(e_2) + \omega_{13}(e_2)\omega_{14}(e_1) \\
& - \omega_{23}(e_1)\omega_{24}(e_2) + \omega_{23}(e_2)\omega_{24}(e_1) \big) \, \omega_1 \wedge \omega_2 \\
=& \big(\langle A_3 e_2, e_1 \rangle \langle A_4 e_1, e_1 \rangle - \langle A_3 e_1, e_1 \rangle \langle A_4 e_2, e_1 \rangle \\
& + \langle A_3 e_2, e_2 \rangle \langle A_4 e_1, e_2 \rangle - \langle A_3 e_1, e_2 \rangle \langle A_4 e_2, e_2 \rangle \big) \, \omega_1 \wedge \omega_2 \\
=& \big(\langle A_4 e_1, \langle A_3 e_2, e_1 \rangle e_1 + \langle A_3 e_2, e_2 \rangle e_2 \rangle \\
& - \langle A_4 e_2, \langle A_3 e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle A_3 e_1, e_2 \rangle e_2 \rangle \big) \, \omega_1 \wedge \omega_2 \\
=& \big(\langle A_4 e_1, A_3 e_2 \rangle - \langle A_4 e_2, A_3 e_1 \rangle \big) \, \omega_1 \wedge \omega_2 \\
=& \big(\langle A_4 e_1, A_3 e_2 \rangle - \langle A_4 e_2, A_3 e_1 \rangle \big) \, \omega_1 \wedge \omega_2 \\
=& \big(\langle A_3 (A_4 e_1), e_2 \rangle - \langle e_2, A_4 (A_3 e_1) \rangle \big) \, \omega_1 \wedge \omega_2 \\
=& \big(\langle A_3 \circ A_4 (e_1), e_2 \rangle - \langle A_4 \circ A_3 (e_1), e_2 \rangle \big) \, \omega_1 \wedge \omega_2 \\
=& \big(\langle (A_3 \circ A_4 - A_4 \circ A_3) \rangle (e_1), e_2 \rangle \big) \, \omega_1 \wedge \omega_2 \\
=& - K_n \, \omega_1 \wedge \omega_2.
\end{aligned}$$

Από τα ανωτέρω προκύπτει η ζητούμενη σχέση. □

Από την Πρόταση 2.6.2 έπεται ότι $K_n = 0$ αν και μόνο αν $[A_3, A_4] = 0$.

Έστω ότι σε κάθε σημείο $x \in M$ ισχύει $K_n(x) = 0$. Τότε επειδή οι τελεστές σχήματος A_3 και A_4 μετατίθενται, υπάρχει σε κάθε σημείο $x \in M$ ορθομοναδιαία βάση $\{E_1, E_2\}$ του εφαπτομένου επιπέδου T_xM η οποία τους διαγωνιοποιεί ταυτόχρονα.

Αν η εμβάπτιση f έχει κάθετη καμπυλότητα μηδέν και το ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_1, e_2\}$ διαγωνιοποιεί ταυτόχρονα τους τελεστές σχήματος A_3, A_4, τότε ισχύει

$$A_3 \sim \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A_4 \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

όπου κ_i, λ_i είναι οι κύριες καμπυλότητες στις κάθετες διευθύνσεις e_3 και e_4. Επομένως, έχουμε ότι

$$A_3 = \kappa_1 \omega_1 \otimes e_1 + \kappa_2 \omega_2 \otimes e_2.$$

και

$$A_4 = \lambda_1 \omega_1 \otimes e_1 + \lambda_2 \omega_2 \otimes e_2.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Επιφανειες οι Οποιες Διαθετουν Ενα Παραλληλο Καθετο Διανυσματικο Πεδιο

Υπενθυμίζουμε το ερώτημα του Chern το οποίο ισοδυνάμως διατυπώνεται ως εξής

Ερώτημα 3. *Έστω M συμπαγές διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann με καμπυλότητα Gauss K. Αν υπάρχει ισομετρική εμβάπτιση $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ τότε ισχύει* $\max K \geq 0$;

Θεωρούμε ένα συνεκτικό και προσανατολισμένο διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann M και $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ μια ισομετρική εμβάπτιση. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε το ερώτημα του Chern για ισομετρικές εμβαπτίσεις με την υπόθεση ότι διαθέτουν ένα ολικά ορισμένο μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο $e \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$, το οποίο είναι παράλληλο στη κάθετη δέσμη. Μια τέτοια κατηγορία εμβαπτίσεων είναι αυτές των οποίων η εικόνα $f(M)$ περιέχεται μέσα σε μια σφαίρα του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^4$. Πράγματι, αν η εικόνα μιας εμβάπτισης περιέχεται σε μια σφαίρα του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^4$, τότε το κάθετο διάνυσμα της σφαίρας ορίζει ένα κάθετο διανυσματικό πεδίο στην εμβάπτιση το οποίο είναι παράλληλο στην κάθετη δέσμη της.

Για τη διατύπωση των κύριων αποτελεσμάτων αυτού του κεφαλαίου, τα οποία δίνουν μερική απάντηση στο ερώτημα του Chern, χρειαζόμαστε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.1.1. *Έστω $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ μια ισομετρική εμβάπτιση. Ένα κάθετο διανυσματικό πεδίο $e \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$ της f καλείται:*

(i) ***Μη-ιδιάζον***, *αν για τον αντίστοιχο τελεστή σχήματος A_e ισχύει* $\det A_e \neq 0$ *παντού.*

(ii) ***Ιδιάζον***, *αν ισχύει* $\det A_e = 0$ *παντού.*

Τα κύρια αποτελέσματα του παρόντος κεφαλαίου διατυπώνονται ως ακολούθως:

Θεώρημα 3.1.2. *Θεωρούμε μια ισομετρική εμβάπτιση $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ενός πλήρους διδιάστατου προσανατολισμένου πολυπτύγματος Riemann M. Αν η εμβάπτιση f έχει φραγμένη μέση καμπυλότητα και διαθέτει ένα ολικά ορισμένο παράλληλο, μη ιδιάζον, κάθετο, μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο $e \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$ τέτοιο ώστε $\det A_e > 0$ παντού, τότε η καμπυλότητα Gauss K του πολυπτύγματος M πληροί $\sup K \geq 0$.*

Θεώρημα 3.1.3. *Θεωρούμε μια ισομετρική εμβάπτιση $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ενός πλήρους διδιάστατου προσανατολισμένου πολυπτύγματος Riemann M. Αν η εμβάπτιση f έχει φραγμένη μέση καμπυλότητα και διαθέτει ένα ολικά ορισμένο, παράλληλο, μη ιδιάζον κάθετο, μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο $e \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$ τέτοιο ώστε $\sup \det A_e < 0$, τότε η καμπυλότητα Gauss K του πολυπτύγματος M πληροί $\sup K \geq 0$.*

Παραθέτουμε τα ακόλουθα πορίσματα αυτών.

Πόρισμα 3.1.4. *Έστω M ένα πλήρες διδιάστατο προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann και $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^3$ μια ισομετρική εμβάπτιση στη μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$. Αν η f έχει φραγμένη μέση καμπυλότητα, τότε η καμπυλότητα Gauss K του πολυπτύγματος M πληροί $\sup K \geq 0$.*

Πόρισμα 3.1.5. *Θεωρούμε μια ισομετρική εμβάπτιση $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ενός συμπαγούς διδιάστατου προσανατολισμένου πολυπτύγματος Riemann M. Αν η εμβάπτιση f διαθέτει ένα ολικά ορισμένο, παράλληλο και μη-ιδιάζον κάθετο διανυσματικό πεδίο $e \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$, τότε η καμπυλότητα Gauss K του πολυπτύγματος M πληροί είτε $\max K > 0$, είτε $K \equiv 0$.*

Πόρισμα 3.1.6. *Έστω M ένα είναι συμπαγές διδιάστατο προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann με καμπυλότητα Gauss $K \leq 0$ και $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^3$ μια ισομετρική εμβάπτιση. Τότε η καμπυλότητα Gauss K του πολυπτύγματος M πληροί $K \equiv 0$.*

Πόρισμα 3.1.7. *Έστω M ένα συμπαγές διδιάστατο και προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann με καμπυλότητα Gauss $K \leq 0$. Αν το πολύπτυγμα M δέχεται ισομετρική εμβάπτιση στον $\mathbb{R}^4$ η οποία διαθέτει ένα ολικά ορισμένο παράλληλο και μη-ιδιάζον κάθετο διανυσματικό πεδίο $e \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$, τότε ισχύει $K \equiv 0$.*

Χρειαζόμαστε τα ακόλουθα λήμματα για την απόδειξη των παραπάνω αποτελεσμάτων.

Λήμμα 3.1.8. *Θεωρούμε ένα διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann $\big(M, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ και*

$$A : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

ένα αυτοπροσαρτημένο $(1,1)-$τανυστικό πεδίο τέτοιο ώστε $\det A \neq 0$ *παντού. Ορίζουμε την μετρική Riemann* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *με*

$$\langle X, Y\rangle_A = \langle AX, AY\rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Αν το τανυστικό πεδίο A είναι Codazzi, δηλαδή ισχύει η σχέση

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X,$$

για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*, τότε η καμπυλότητα Gauss* K_A *της μετρικής* $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ *δίνεται από την ισότητα*

$$K_A = \frac{K}{\det A},$$

όπου K η καμπυλότητα Gauss της μετρικής $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον τύπο Koszul έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 2\big\langle \nabla^A_Y X, Z\big\rangle_A &= X\big\langle Y, Z\big\rangle_A + Y\big\langle Z, X\big\rangle_A - Z\big\langle X, Y\big\rangle_A \\ &\quad - \big\langle [X,Z], Y\big\rangle_A - \big\langle [Y,Z], X\big\rangle_A - \big\langle [X,Y], Z\big\rangle_A. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Από τον ορισμό της μετρικής $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$, η ανωτέρω ισότητα γράφεται ως

$$\begin{aligned} 2\big\langle A\big(\nabla^A_Y X\big), AZ\big\rangle &= X\langle AY, AZ\rangle + Y\langle AZ, AX\rangle - Z\langle AX, AY\rangle \\ &\quad - \big\langle A[X,Z], AY\big\rangle - \big\langle A[Y,Z], AX\big\rangle - \big\langle A[X,Y], AZ\big\rangle. \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την ισότητα

$$\nabla_X(AY) = (\nabla_X A)Y + A(\nabla_X Y),$$

προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} 2\big\langle A\big(\nabla^A_Y X\big), AZ\big\rangle &= \big\langle (\nabla_X A)Y + A(\nabla_X Y), AZ\big\rangle + \big\langle AY, (\nabla_X A)Z + A(\nabla_X Z)\big\rangle \\ &\quad + \big\langle (\nabla_Y A)Z + A(\nabla_Y Z), AX\big\rangle + \big\langle AZ, (\nabla_Y A)X + A(\nabla_Y X)\big\rangle \\ &\quad - \big\langle (\nabla_Z A)X + A(\nabla_Z X), AY\big\rangle - \big\langle AX, (\nabla_Z A)Y + A(\nabla_Z Y)\big\rangle \\ &\quad - \langle A(\nabla_X Z - \nabla_Z X), AY\rangle - \langle A(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y), AX\rangle \\ &\quad - \langle A(\nabla_X Y - \nabla_Y X), AZ\rangle \\ = \Big\langle (\nabla_X A)Y &+ A(\nabla_X Y) + (\nabla_Y A)X + A(\nabla_Y X) + A(\nabla_X Y) - A(\nabla_Y X), AZ\Big\rangle \\ + \Big\langle (\nabla_X A)Z &+ A(\nabla_X Z) - (\nabla_Z A)X - A(\nabla_Z X) - A(\nabla_X Z) + A(\nabla_Z X), AY\Big\rangle \\ + \Big\langle (\nabla_Y A)Z &+ A(\nabla_Y Z) - (\nabla_Z A)Y - A(\nabla_Z Y) - A(\nabla_Y Z) + A(\nabla_Z Y), AX\Big\rangle \end{aligned}$$

$$= \big\langle (\nabla_X A)Y + (\nabla_Y A)X + 2A(\nabla_X Y), AZ \big\rangle + \big\langle (\nabla_X A)Z - (\nabla_Z A)X, AY \big\rangle$$
$$+ \big\langle (\nabla_Y A)Z - (\nabla_Z A)Y, AX \big\rangle.$$

Επειδή το τανυστικό πεδίο A είναι Codazzi, έχουμε ότι:

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X, \quad (\nabla_Y A)X = (\nabla_X A)Y, \quad (\nabla_Y A)Z = (\nabla_Z A)Y.$$

Επομένως η αρχική εξίσωση (3.1) γράφεται:

$$\big\langle A\big(\nabla^A_Y X\big), AZ \big\rangle = \big\langle (\nabla_X A)Y + A(\nabla_X Y), AZ \big\rangle,$$

ή ισοδύναμα,

$$\big\langle A\big(\nabla^A_Y X\big), AZ \big\rangle = \langle \nabla_Y (AX), AZ \rangle,$$

για κάθε $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Συνεπώς,

$$A\big(\nabla^A_Y X\big) = \nabla_Y (AX),$$

ή ισοδύναμα,

$$\nabla^A_Y X = A^{-1}(\nabla_Y (AX)), \tag{3.2}$$

για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, αφού το τανυστικό πεδίο A είναι μη-ιδιάζον.

Ακολούθως, κάνοντας χρήση της ισότητας (3.2) θα συσχετίσουμε τους τανυστές καμπυλότητας R και R^A των συνοχών ∇ και ∇^A. Εξ ορισμού, έχουμε ότι

$$R^A(X,Y)Z = \nabla^A_X \nabla^A_Y Z - \nabla^A_Y \nabla^A_X Z - \nabla^A_{[X,Y]} Z$$

για κάθε $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Άρα από το παραπάνω έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} A\big(R^A(X,Y)Z\big) &= A\big(\nabla^A_X\big(\nabla^A_Y Z\big)\big) - A\big(\nabla^A_Y\big(\nabla^A_X Z\big)\big) - A\big(\nabla^A_{[X,Y]} Z\big) \\ &= \nabla_X\big(A\big(\nabla^A_Y Z\big)\big) - \nabla_Y\big(A\big(\nabla^A_X Z\big)\big) - \nabla_{[X,Y]}(AZ) \\ &= \nabla_X(\nabla_Y(AZ)) - \nabla_Y(\nabla_X(AZ)) - \nabla_{[X,Y]}(AZ) \\ &= R(X,Y)AZ. \end{aligned}$$

Οπότε

$$A\big(R^A(X,Y)Z\big) = R(X,Y)AZ. \tag{3.3}$$

για κάθε $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Στο τυχόν σημείο $x \in M$ θεωρούμε ορθομοναδιαία βάση $\{X, Y\}$, ως προς την μετρική $\langle \cdot, \cdot \rangle$, του εφαπτομένου χώρου $T_x M$ η οποία διαγωνιοποιεί τον τελεστή A, δηλαδή

$$AX = \lambda X, \quad AY = \mu Y,$$

όπου λ, μ οι ιδιοτιμές του τελεστή A στο σημείο $x \in M$.

Εξ ορισμού στο σημείο $x \in M$ είναι

$$K = \frac{\langle R(X,Y)Y, X \rangle}{\|X \wedge Y\|^2}.$$

Επιπλέον, κάνοντας χρήση της ισότητας (3.3) έχουμε

$$\begin{aligned} K_A &= \frac{\big\langle R^A(X,Y)Y, X \big\rangle_A}{\|X \wedge Y\|_A^2} = \frac{\big\langle A\big(R^A(X,Y)Y\big), AX \big\rangle}{\|AX\|^2 \|AY\|^2 - \langle AX, AY \rangle^2} \\ &= \frac{\langle R(X,Y)AY, AX \rangle}{\|AX\|^2 \|AY\|^2 - \langle AX, AY \rangle^2} = \frac{\lambda\mu \langle R(X,Y)Y, X \rangle}{\lambda^2 \mu^2} \\ &= \frac{\langle R(X,Y)Y, X \rangle}{\det A} = \frac{K}{\det A}. \end{aligned}$$

□

Λήμμα 3.1.9. *Έστω $\big(M, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ ένα πλήρες διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann και $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ μια ισομετρική εμβάπτιση. Αν η f έχει φραγμένη μέση καμπυλότητα και διαθέτει ένα ολικά ορισμένο, μη-ιδιάζον, κάθετο, διανυσματικό πεδίο $e \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$, τέτοιο ώστε $\inf|\det A_e| > 0$, τότε το πολύπτυγμα M είναι πλήρες ως προς τη νέα μετρική $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$, η οποία ορίζεται ως*

$$\langle X, Y \rangle_e = \langle A_e X, A_e Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.12 αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει θετική σταθερά κ, έτσι ώστε

$$\langle X, X \rangle_e \geq \kappa \langle X, X \rangle,$$

για κάθε $x \in M$ και για κάθε $X \in T_x M$.

Έστω $x \in M$ και $\{X_1, X_2\}$ ορθομοναδιαία βάση ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή σχήματος A_e στο σημείο x ως προς τη μετρική $\langle \cdot, \cdot \rangle$ με αντίστοιχες ιδιοτιμές λ_1, λ_2, δηλαδή

$$A_e X_1 = \lambda_1 X_1, \quad A_e X_2 = \lambda_2 X_2.$$

Προφανώς $\det A_e = \lambda_1 \lambda_2$ και $\operatorname{tr}(A_e) = \lambda_1 + \lambda_2$.

Από την υπόθεση μας έχουμε ότι υπάρχει θετική σταθερά H_0 τέτοια ώστε

$$\|H\| \ \leq H_0.$$

Ακολούθως εργαζόμαστε στο τυχόν σημείο x. Θεωρούμε κάθετο διάνυσμα η τέτοιο ώστε τα διανύσματα $\{e, \eta\}$ να συνιστούν ορθομοναδιαία βάση του κάθετου χώρου $N_f M(x)$.

Ισχύει

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_e)e + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_\eta)\eta$$

και επομένως

$$\|H\| = \frac{1}{2}\sqrt{(\mathrm{tr}(A_e))^2 + (\mathrm{tr}(A_\eta))^2}.$$

Οπότε,

$$|\mathrm{tr}(A_e)| \leq \sqrt{(\mathrm{tr}(A_e))^2 + (\mathrm{tr}(A_\eta))^2} \leq 2H_0.$$

Άρα,

$$|\lambda_1 + \lambda_2| \leq 2H_0. \tag{3.4}$$

Επίσης, από υπόθεση υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ σταθερά τέτοια ώστε

$$|\lambda_1\lambda_2| = |\det A_e| \geq c > 0.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$. Από την τριγωνική ανισότητα και την ισότητα (3.4) έχουμε:

$$|\lambda_1| - |\lambda_2| \leq |\lambda_1 + \lambda_2| \leq 2H_0.$$

Άρα,

$$|\lambda_1| \leq 2H_0 + |\lambda_2|.$$

Συνεπώς,

$$c \leq |\lambda_1\lambda_2| = |\lambda_1|\,|\lambda_2| \leq |\lambda_2|\big(|\lambda_2| + 2H_0\big),$$

ή

$$|\lambda_2|^2 + 2H_0|\lambda_2| - c \geq 0.$$

Η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου $p(t) = t^2 + 2H_0 t^2 - c$ είναι

$$\Delta = 4(C^2 + c^2) > 0.$$

Επομένως,

$$|\lambda_2| \geq -H_0 + \sqrt{H_0^2 + c^2} > 0.$$

Για τυχόν εφαπτόμενο διάνυσμα $X = a_1X_1 + a_2X_2$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\langle X, X\rangle_e = \langle A_eX, A_eX\rangle &= \big\langle A_e(a_1X_1 + a_2X_2),\ A_e(a_1X_1 + a_2X_2)\big\rangle \\ &= \langle a_1\lambda_1X_1 + a_2\lambda_2X_2,\ a_1\lambda_1X_1 + a_2\lambda_2X_2\rangle \\ &= a_1^2\lambda_1^2 + a_2^2\lambda_2^2 \geq a_1^2\lambda_2^2 + a_2^2\lambda_2^2 \\ &= \lambda_2^2(a_1^2 + a_2^2) = \lambda_2^2\langle X, X\rangle \\ &\geq \kappa^2\langle X, X\rangle,\end{aligned}$$

όπου

$$\kappa = -H_0 + \sqrt{H_0^2 + c^2} > 0.$$

□

Υπενθυμίζουμε το Θεώρημα Gauss-Bonnet, το οποίο θα χρειαστούμε στις αποδείξεις.

Θεώρημα 3.1.10. *Έστω M ένα διδιάστατο συμπαγές προσανατολισμένο πολύπτυγμα Riemann με καμπυλότητα Gauss K. Τότε ισχύει η ισότητα*

$$\int_M K\,dA = 2\pi\chi(M),$$

όπου dA είναι το στοιχείο εμβαδού και $\chi(M)$ είναι η χαρακτηριστική Euler-Poincare του πολυπτύγματος M.

Προχωράμε λοιπόν στην απόδειξη των θεωρημάτων.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2. Έστω $H_0 = \sup \|H\|$. Από τη σχέση (2.4) έχουμε ότι

$$\mathrm{tr}\big(A_\xi\big) = 2\langle H, \xi\rangle$$

για κάθε μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(f)$. Άρα,

$$\big|\mathrm{tr}\big(A_\xi\big)\big| \leq 2\|H\| \leq 2H_0,$$

ή ισοδύναμα,

$$\big(\mathrm{tr}\big(A_\xi\big)\big)^2 \leq 4H_0^2. \tag{3.5}$$

Όμως για κάθε κάθετο διανυσματικό πεδίο ξ ισχύει

$$\det A_\xi \leq \frac{\big(\mathrm{tr}\big(A_\xi\big)\big)^2}{2}.$$

Άρα, από την υπόθεση και την ανισότητα (3.5) έχουμε ότι

$$0 < \det A_e \leq 2H_0^2. \tag{3.6}$$

Δια της απαγωγής εις άτοπο, υποθέτουμε ότι η καμπυλότητα Gauss K του πολυπτύγματος M πληροί

$$\sup K = -a < 0.$$

Θεωρούμε ένα μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο $\eta \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$ ορθογώνιο στο διανυσματικό πεδίο e. Λόγω της Πρότασης 2.6.1 για τη καμπυλότητα Gauss του πολυπτύγματος M έχουμε ότι:

$$K = \det A_e + \det A_\eta \leq -a < 0.$$

Άρα,

$$\det A_\eta = K - \det A_e < K \leq -a < 0. \tag{3.7}$$

Από υπόθεση

$$\nabla^{\perp}_X e = 0,$$

για κάθε $X \in \mathfrak{X}(M)$. Αφού $\{e, \eta\}$ είναι ορθομοναδιαίο πλαίσιο της κάθετης δέσμης, $N_f M$ το διανυσματικό πεδίο $\nabla^{\perp}_X \eta$ γράφεται

$$\nabla^{\perp}_X \eta = \langle \nabla^{\perp}_X \eta, e \rangle e + \langle \nabla^{\perp}_X \eta, \eta \rangle \eta.$$

Όμως,

$$X\langle \eta, \eta \rangle = 0.$$

Άρα,

$$2\langle \nabla^{\perp}_X \eta, \eta \rangle = 0.$$

Επίσης,

$$\langle \nabla^{\perp}_X \eta, e \rangle = X\langle \eta, e \rangle - \langle \eta, \nabla^{\perp}_X e \rangle = 0.$$

Άρα, το η είναι ολικά ορισμένο μοναδιαίο παράλληλο και μη-ιδιάζον, λόγω της (3.6).

Επίσης, έχουμε ότι $\det A_\eta \leq -a$ και επομένως είναι:

$$\inf |\det A_\eta| \geq a > 0.$$

Άρα, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Λήμματος 3.1.9 για το διανυσματικό πεδίο η. Επομένως η μετρική Riemann $\langle \cdot, \cdot \rangle_\eta$ η οποία ορίζεται ως

$$\langle X, Y \rangle_\eta = \langle A_\eta X, A_\eta Y \rangle,$$

για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, είναι πλήρης.

Επίσης, η εξίσωση Codazzi (2.7) για το διανυσματικό πεδίο $\eta \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$ είναι

$$(\nabla_X A_\eta)Y - (\nabla_Y A_\eta)X = A_{\nabla^{\perp}_X \eta}Y - A_{\nabla^{\perp}_Y \eta}X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Αφού το κάθετο διανυσματικό πεδίο η είναι παράλληλο στην κάθετη δέσμη, έχουμε

$$(\nabla_X A_\eta)Y = (\nabla_Y A_\eta)X,$$

για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, δηλαδή το τανυστικό πεδίο A_η είναι Codazzi. Επομένως, από το Λήμμα 3.1.8 προκύπτει ότι η καμπυλότητα Gauss K_η της μετρικής Riemann $\langle \cdot, \cdot \rangle_\eta$ δίνεται από τη σχέση

$$K_\eta = \frac{K}{\det A_\eta} = \frac{K}{K - \det A_e} = \frac{-K}{\det A_e - K}.$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης (3.6) και επειδή $K < 0$ ισχύει

$$K_\eta = \frac{-K}{\det A_e - K} \geq \frac{-K}{-K + 2H_0^2} = \frac{K}{K - 2H_0^2} \geq \frac{a}{a + 2H_0^2} > 0.$$

Από το Θεώρημα Bonnet-Myers 2.1.11 προκύπτει ότι το πολύπτυγμα M είναι συμπαγές και αφού η καμπυλότητα K_η της μετρικής Riemann $\langle \cdot, \cdot \rangle_\eta$ είναι θετική, από το Θεώρημα Gauss-Bonnet 3.1.10 έπεται ότι το πολύπτυγμα M είναι ομοιομορφικό με τη σφαίρα $\mathbb{S}^2$. Άρα, $\chi(M) = 2$. Όμως, πάλι από το Θεώρημα Gauss-Bonnet για την επαγόμενη μετρική του πολυπτύγματος M έχουμε

$$4\pi = 2\pi\chi(M) = \int_M K dA \leq -a \int_M dM,$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, τελικά $\sup K \geq 0$. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.3. Θέτουμε

$$\sup \|H\| = H_0 \quad \text{και} \quad \sup \det A_e = -c < 0.$$

Δια της απαγωγής εις άτοπο υποθέτουμε ότι η καμπυλότητα Gauss του πολυπτύγματος M πληροί

$$\sup K = -a < 0.$$

Αφού $\sup \det A_e = -c$, έχουμε ότι

$$|\det A_e| \geq c.$$

Επομένως, είναι
$$\inf |\det A_e| > 0.$$
Από υπόθεση το κάθετο διανυσματικό πεδίο e είναι ολικά ορισμένο παράλληλο και μηδενιζόν. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2, προκύπτει ότι το τανυστικό πεδίο A_e είναι Codazzi. Οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις των Λημμάτων 3.1.8 και 3.1.9. Άρα, το πολύπτυγμα $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle_e)$ είναι πλήρες με αντίστοιχη καμπυλότητα Gauss
$$K_e = \frac{K}{\det A_e}.$$
Θεωρούμε ένα μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο ξ της f ορθογώνιο στο e. Λόγω της Πρότασης 2.6.1 έχουμε
$$K_e = \frac{K}{\det A_e} = \frac{\det A_e + \det A_\xi}{\det A_e} = 1 + \frac{\det A_\xi}{\det A_e}.$$
Ισχυριζόμαστε ότι
$$K_e \geq \min(1, \frac{a}{a+2H_0^2}).$$
Εφόσον $\det A_e < 0$, στα σημεία όπου $\det A_\xi \leq 0$ ισχύει
$$K_e \geq 1 \geq \frac{a}{a+2H_0^2}.$$
Θα εργαστούμε σε σημεία όπου $\det A_\xi > 0$. Από την ανισότητα (3.6) και από τη σχέση
$$K_e = \frac{K}{\det A_e} = \frac{K}{K - \det A_\xi} = \frac{-K}{\det A_\xi - K}.$$
επειδή
$$\det A_\xi \leq \frac{(\operatorname{tr} A_\xi)^2}{2} \leq 2\langle H, \xi\rangle^2 \leq 2\|H\|^2 \leq 2H_0^2,$$
έχουμε
$$K_e = \frac{-K}{\det A_\xi - K} \geq \frac{-K}{-K + 2H_0^2} = \frac{K}{K - 2H_0^2} \geq \frac{a}{a+2H_0^2} > 0.$$
Άρα,
$$K_e \geq \min\big(1, \frac{a}{a+2h_0^2}\big) > 0.$$
Συνεπώς, από το Θεώρημα Bonnet-Myers 2.1.11, το πολύπτυγμα M είναι συμπαγές πολύπτυγμα Riemann. Επειδή η καμπυλότητα Gauss K_e της μετρικής Rieamnn $\langle\cdot,\cdot\rangle_e$ είναι θετική, από το Θεώρημα Gauss-Bonnet 3.1.10 προκύπτει ότι το πολύπτυγμα M είναι ομοιομορφικό με τη σφαίρα $\mathbb{S}^2$. Όμως πάλι από το Θεώρημα Gauss-Bonnet αυτό είναι άτοπο διότι $K \leq 0$ παντού. Άρα, $\sup K \geq 0$. □

Ακολουθούν οι αποδείξεις των πορισμάτων.

Απόδειξη του Πορίσματος 3.1.4. Έστω $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^3$ μια ισομετρική εμβάπτιση. Θεωρούμε την ισομετρική εμβάπτιση $g : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ με

$$g = j \circ f,$$

όπου

$$j : \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

είναι η συνήθης έγκλιση της μοναδιαίας σφαίρας $\mathbb{S}^3$ στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$ εφοδιασμένη με την επαγόμενη μετρική.

Το μοναδιαίο κάθετο ξ της ισομετρικής εμβάπτισης j είναι

$$\xi(x) = x, \quad x \in \mathbb{S}^3,$$

με αντίστοιχο τελεστή σχήματος A_j που δίνεται ως

$$A_j V = -\widetilde{\nabla}_V \xi = -d\xi(V) = -V, \tag{3.8}$$

για κάθε $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$.

Θεωρούμε το μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο $e \in \mathfrak{X}(g)$ με

$$e = f = \xi \circ f.$$

Ισχυριζόμαστε ότι $e \in \mathfrak{X}^{\perp}(g)$. Πράγματι, για τυχαίο σημείο $x \in M$ και διάνυσμα $v \in T_x M$ υπάρχει καμπύλη

$$c : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$$

τέτοια ώστε $c(0) = x$ και $c'(0) = v$. Τότε,

$$\langle e(x), df_p(v)\rangle = \langle f(x), (f \circ c)'(0)\rangle = \frac{1}{2}(\langle f \circ c, f \circ c\rangle)'(0) = 0.$$

Λόγω της (3.8) έχουμε

$$\widetilde{\nabla}_X e = \widetilde{\nabla}_X(\xi \circ f) = \widetilde{\nabla}_{df(X)}\xi = df(X) = dg(X), \tag{3.9}$$

για κάθε $X \in \mathfrak{X}(M)$. Όμως, από τον τύπο του Weingarten (2.3) για την εμβάπτιση g έχουμε

$$\widetilde{\nabla}_X e = -dg(A_e^g X) + \nabla_X^{\perp} e. \tag{3.10}$$

Από τις σχέσεις (3.9) και (3.10) έχουμε

$$A_e^g X = -X$$

και

$$\nabla_X^{\perp} e = 0$$

για κάθε $X \in \mathfrak{X}(M)$. Οπότε, $\det A_e = 1$.

Θεωρούμε μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο $\eta \in \mathfrak{X}^{\perp}(g)$ το οποίο είναι ορθογώνιο στο διανυσματικό πεδίο $e \in \mathfrak{X}^{\perp}(g)$. Ισχυριζόμαστε ότι $\eta \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$. Πράγματι,

$$\langle \eta(x), df_x(v) \rangle = \langle \eta(x), dg_x(v) \rangle = 0,$$

για κάθε $x \in M$ και $v \in TxM$. Άρα $\eta \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$.

Η ισομετρική εμβάπτιση $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^3$ έχει τελεστή σχήματος A_η^f που δίνεται ως

$$\nabla_X^{\mathbb{S}^3} \eta = -df(A_\eta^f X), \tag{3.11}$$

για κάθε $X \in \mathfrak{X}(M)$. Σύμφωνα με τον τύπο Gauss (2.1), για την εμβάπτιση g έχουμε

$$\widetilde{\nabla}_X \eta = -dg(A_\eta^g X) + \nabla_X^{\perp} \eta = -df(A_\eta^g X) + \nabla_X^{\perp} \eta. \tag{3.12}$$

Επίσης, από τον τύπο του Gauss για την εμβάπτιση j έχουμε

$$\widetilde{\nabla}_V dj(W) = dj(\nabla_V^{\mathbb{S}^3} W) + \alpha_j(V, W),$$

ή ισοδύναμα,

$$\widetilde{\nabla}_V W = \nabla_V^{\mathbb{S}^3} W + \langle A_j V, W \rangle \xi,$$

όπου $\nabla^{\mathbb{S}^3}$ είναι η συνοχή Levi-Civita της σφαίρας $\mathbb{S}^3$ για κάθε $V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$ και $\xi \in \mathfrak{X}^{\perp}(j)$. Επομένως

$$\nabla_{df(X)}^{\mathbb{S}^3} \eta = \tilde{\nabla}_X \eta + \langle df(X), \eta \rangle f,$$

και άρα η ισότητα (3.11) γράφεται

$$\widetilde{\nabla}_{df(X)} \eta + \langle df(X), \eta \rangle f = -df(A_\eta^f X),$$

ή ισοδύναμα

$$\widetilde{\nabla}_X \eta = -df(A_\eta^f X). \tag{3.13}$$

Από τις σχέσεις (3.12) και (3.13) έχουμε ότι

$$A_\eta^f X = A_\eta^g X,$$

για κάθε $X \in \mathfrak{X}(M)$. Επομένως,
$$A^f_\eta = A^g_\eta.$$

Ισχυριζόμαστε ότι η μέση καμπυλότητα H_g της εμβάπτισης g είναι φραγμένη. Έχουμε
$$H_g = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_e)e + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A^g_\eta)\eta.$$
Επειδή $A_e = -I_d$, έχουμε
$$H_g = -e + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A^g_\eta)\eta.$$
Οπότε,
$$\|H_g\| = \sqrt{1 + \|H_f\|^2}.$$
Συνεπώς η μέση καμπυλότητα της εμβάπτισης g είναι φραγμένη, αφού η μέση καμπυλότητα της f είναι φραγμένη από υπόθεση. Άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1.2, οπότε $\sup K \geq 0$. □

Απόδειξη του Πορίσματος 3.1.5. Λόγω της συμπάγειας έχουμε ότι το πολύπτυγμα είναι πλήρες και έχει φραγμένη μέση καμπυλότητα. Από τη συνεκτικότητα του πολυπτύγματος M έχουμε ότι η συνάρτηση $\det A_e$ διατηρεί πρόσημο στο M.

Υποθέτουμε ότι $\det A_e > 0$ παντού. Τότε, θεωρούμε ολικά ορισμένο μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο $\eta \in \mathfrak{X}^\perp(f)$ το οποίο είναι ορθογώνιο στο διανυσματικό πεδίο e. Επειδή το e είναι παράλληλο, τότε και το διανυσματικό πεδίο η είναι παράλληλο στην κάθετη δέσμη της f. Άρα, από το Θεώρημα 3.1.2 έχουμε ότι η καμπυλότητα Gauss K πληροί $\max K \geq 0$. Ας υποθέσουμε ότι $\max K = 0$ και άρα τότε $K \leq 0$ παντού. Από Πρόταση 2.6.1 έχουμε ότι η καμπυλότητα Gauss πληροί
$$K = \det A_e + \det A_\eta.$$
Αφού $K \leq 0$ και $\det A_e > 0$ έχουμε ότι $\det A_\eta < 0$. Επιπλέον ο τελεστής σχήματος A_η είναι Codazzi αφού το διανυσματικό πεδίο η είναι παράλληλο στην κάθετη δέσμη της f. Επομένως, από τα Λήμματα 3.1.8, 3.1.9 έχουμε ότι η μετρική $\langle\cdot,\cdot\rangle_\eta$ που ορίζεται
$$\langle X, Y\rangle_\eta = \langle A_\eta X, A_\eta Y\rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$
είναι πλήρης με καμπυλότητα Gauss
$$K_\eta = \frac{K}{\det A_\eta} \geq 0.$$

Άρα από Gauss-Bonnet 3.1.10 για το πολύπτυγμα Riemann $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle_\eta)$ έχουμε

$$2\pi\chi(M) = \int_M \frac{K}{\det A_e} dA \leq 0.$$

Όμως, από το ίδιο Θεώρημα για το πολύπτυγμα Riemann $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ και επειδή η καμπυλότητα Gauss K πληροί $K \leq 0$, λαμβάνουμε

$$0 \leq 2\pi\chi(M) = \int_M K dM \leq 0.$$

Άρα προκύπτει $K \equiv 0$.

Υποθέτουμε ότι $\det A_e < 0$ παντού. Οπότε από το Θεώρημα 3.1.3 έχουμε ότι η καμπυλότητα Gauss K πληροί τη σχέση $\max K \geq 0$. Επειδή ο τελεστής A_e είναι Codazzi, από το Λήμμα 3.1.8 προκύπτει ότι η μετρική $\langle\cdot,\cdot\rangle_e$ έχει καμπυλότητα Gauss

$$K_e = \frac{K}{\det A_e} \geq 0.$$

Από Θεώρημα Gauss-Bonnet 3.1.10 προκύπτει $\chi(M) \geq 0$. Όμως, πάλι από Θεώρημα Gauss-Bonnet προκύπτει

$$0 \leq 2\pi\chi(M) = \int_M K dM \geq 0.$$

Άρα $K \equiv 0$. □

Απόδειξη του Πορίσματος 3.1.6. Αφού η επιφάνεια είναι συμπαγής, είναι και πλήρης με φραγμένη μέση καμπυλότητα. Άρα, από το Πόρισμα 3.1.4 έχουμε ότι $\sup K \geq 0$. Όμως ισχύει ότι $K \leq 0$. Επομένως, έπεται ότι $K \equiv 0$. □

Απόδειξη του Πορίσματος 3.1.7. Αφού η επιφάνεια είναι συμπαγής, έχουμε ξανά ότι είναι και πλήρης με φραγμένη μέση καμπυλότητα. Επομένως, εφαρμόζεται το Πόρισμα 3.1.5 και αφού έχουμε ότι $K \leq 0$, έπεται ότι $K \equiv 0$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Επιφανειες οι Οποιες Διαθετουν Ενα Κανονικο Παραλληλο Καθετο Διανυσματικο Πεδιο

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε το ερώτημα του Chern για ισομετρικές εμβαπτίσεις $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$, όπου M είναι συμπαγές διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann, οι οποίες πληρούν δύο υποθέσεις.

Αρχικά υποθέτουμε ότι η ένωση όλων των εφαπτομένων επιπέδων της ισομετρικής εμβάπτισης $\bigcup_{x\in M} df_x(T_xM)$ δε καλύπτει ολόκληρο τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$. Τούτο σημαίνει ότι υπάρχει ένα σημείο $O \in \mathbb{R}^4$ το οποίο δεν ανήκει σε κανένα εφαπτόμενο επίπεδο της ισομετρικής εμβάπτισης f. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το σημείο αυτό είναι η αρχή των αξόνων. Αναλύουμε το διάνυσμα θέσης, σε κάθε σημείο $x \in M$,

$$f(x) = df_x(Z_x) + f^{\perp}(x), \quad Z_x \in T_xM$$

σε εφαπτομενική συνιστώσα $df_x(Z_x)$ και κάθετη συνιστώσα $f^{\perp}(x) \in N_fM(x)$. Οπότε, το σημείο O δεν ανήκει στην ένωση των εφαπτομένων χώρων της ισομετρικής εμβάπτισης f αν και μόνο αν η κάθετη συνιστώσα $f^{\perp}(x)$ είναι μη μηδενική, για κάθε $x \in M$.

Υπό την υπόθεση αυτή ορίζεται το λεγόμενο **κανονικό μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο** e_3 της εμβάπτισης f ως

$$e_3 = \frac{f^{\perp}}{\|f^{\perp}\|} \in \mathfrak{X}^{\perp}(f).$$

Το βασικό αποτέλεσμα του παρόντος κεφαλαίου διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 4.1.1. *Έστω M συμπαγές διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann με καμπυλότητα Gauss K και $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ μια ισομετρική εμβάπτιση. Αν η ένωση των εφαπτομένων επιπέδων της f παραλείπει ένα σημείο O και το αντίστοιχο κανονικό διανυσματικό πεδίο είναι παράλληλο στην κάθετη δέσμη της f, τότε τα ακόλουθα ισχύουν:*

(i) $\max K \geq 1/R_{\max}^2$, *όπου* $R_{\max} = \max\limits_{x\in M} d(O, f(x))$ *και d είναι η Ευκλείδεια απόσταση, εκτός αν η εικόνα $f(M)$ περιέχεται σε μια σφαίρα κέντρου O.*

(ii) $\min K \leq 1/R_{\min}^2$, *όπου* $R_{\min} = \min\limits_{x\in M} d(O, f(x))$, *εκτός αν η εικόνα $f(M)$ περιέχεται σε μια σφαίρα κέντρου O.*

(iii) *Αν $K \leq 0$ παντού τότε $K \equiv 0$ και η εικόνα $f(M)$ περιέχεται σε μια σφαίρα κέντρου O.*

4.1 Βασικές ταυτότητες

Έστω $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ μια ισομετρική εμβάπτιση για την οποία η αρχή των αξόνων O δεν ανήκει στην ένωση των εφαπτομένων επιπέδων της. Θεωρούμε μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο $e \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$ το οποίο είναι ορθογώνιο στο κανονικό διανυσματικό πεδίο e_3. Τότε τα διανυσματικά πεδία e_3, e_4 συνιστούν ένα ορθομοναδιαίο πλαίσιο της κάθετης δέσμης $N_f M$.

Θεωρούμε την θετική συνάρτηση $p \in C^{\infty}(M)$ η οποία ορίζεται ως

$$p(x) = \|f^{\perp}(x)\|, \quad x \in M.$$

Προφανώς

$$f = df(Z) + pe_3,$$

για κατάλληλο διανυσματικό πεδίο $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Παραγωγίζοντας ως προς τυχόν $X \in \mathfrak{X}(M)$ και κάνοντας χρήση των τύπων Gauss (2.1) και Weingarten (2.3), έχουμε

$$\begin{aligned} df(X) &= \widetilde{\nabla}_X df(Z) + (Xp)e_3 + p\widetilde{\nabla}_X e_3 \\ &= df(\nabla_X Z) + \alpha_f(X, Z) + (Xp)e_3 + p(-df(A_3 X) + \nabla_X^{\perp} e_3) \\ &= df(\nabla_X Z - pA_3 X) + \alpha_f(X, Z) + (Xp)e_3 + p\omega_{34}(X)e_4, \end{aligned} \tag{4.1}$$

όπου ω_{34} είναι η μορφή κάθετης συνοχής ως προς το ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_3, e_4\}$ της κάθετης δέσμης $N_f M$. Εξισώνοντας τις εφαπτομενικές και κάθετες συνιστώσες της σχέσης (4.1) αντίστοιχα, έχουμε:

$$\begin{aligned} X &= \nabla_X Z - pA_3X, \\ \alpha_f(X,Z) &+ p\omega_{34}(X)e_4 + (Xp)e_3 = 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

για κάθε $X \in \mathfrak{X}(M)$. Από την τελευταία σχέση, λαμβάνοντας εσωτερικό γινόμενο με το διανυσματικό πεδίο e_3 και λόγω της σχέσης (2.2), προκύπτει

$$\langle A_3Z, X\rangle + Xp = 0,$$

για κάθε $X \in \mathfrak{X}(M)$. Επειδή $Xp = \langle X, \operatorname{grad} p\rangle$ για κάθε $X \in \mathfrak{X}(M)$, όπου grand $p \in \mathfrak{X}(M)$ είναι το διανυσματικό πεδίο κλίσης της συνάρτησης p, έχουμε

$$A_3Z = -\operatorname{grad} p. \tag{4.3}$$

Λαμβάνοντας εσωτερικό γινόμενο στην σχέση (4.2) με το διανυσματικό πεδίο e_4 έχουμε αντίστοιχα ότι:

$$\omega_{34}(X) = -\frac{1}{p}\langle A_4Z, X\rangle, \tag{4.4}$$

για κάθε $X \in \mathfrak{X}(M)$.

4.2 Σφαιρική προβολή

Έστω $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ μια ισομετρική εμβάπτιση για την οποία η αρχή των αξόνων O δεν ανήκει στην ένωση των εφαπτομένων επιπέδων της. Θεωρούμε την σφαιρική προβολή της f, δηλαδή την απεικόνιση

$$\hat{f} : M \longrightarrow \mathbb{S}^3$$

με

$$\hat{f}(x) = \frac{f(x)}{r(x)}, \quad x \in M,$$

όπου $r \in C^\infty(M)$ είναι η θετική συνάρτηση με τύπο

$$r(x) = \|f(x)\|, \quad x \in M.$$

Το ακόλουθο συμπέρασμα μας δείχνει ότι η σφαιρική προβολή είναι εμβάπτιση.

Λήμμα 4.2.1. *Έστω M διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann και $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ μια ισομετρική εμβάπτιση. Αν το σημείο O δεν ανήκει στην ένωση των εφαπτομένων επιπέδων της f, τότε η σφαιρική προβολή $\hat{f}$ είναι εμβάπτιση.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχόν σημείο $x \in M$, τυχόν διάνυσμα $v \in T_xM$ και μια καμπύλη

$$c : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$$

τέτοια ώστε $c(0) = x, c'(0) = v$. Τότε για το διαφορικό $d\hat{f}_x$ της σφαιρικής προβολής $\hat{f}$

$$d\hat{f}_x : T_xM \longrightarrow T_{\hat{f}(x)}\mathbb{S}^3$$

γνωρίζουμε ότι

$$d\hat{f}_x(v) = (\hat{f} \circ c)(0).$$

Επειδή

$$\hat{f} \circ c(t) = \frac{(f \circ c)(t)}{(r \circ c)(t)},$$

έχουμε

$$\begin{aligned} d\hat{f}_x(v) &= \frac{(f \circ c)'(0)}{r(x)} - \frac{(r \circ c)'(0)}{r^2(x)} f(x) \\ &= \frac{1}{r(x)} df_x(v) - \frac{(r \circ c)'(0)}{r^2(x)} f(x). \end{aligned}$$

Όμως

$$r \circ c(t) = \|f \circ c(t)\| = \sqrt{\langle f \circ c(t), f \circ c(t) \rangle}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} (r \circ c(t))'(0) &= \frac{\langle f \circ c(0), (f \circ c)'(0) \rangle}{\sqrt{\langle (f \circ c(0), f \circ c(0)) \rangle}} \\ &= \frac{\langle f(x), df_x(v) \rangle}{r(x)}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$d\hat{f}_x(v) = \frac{1}{r(x)} \Big(df_x(v) - \frac{\langle f(x), df_x(v) \rangle}{r(x)} f(x) \Big).$$

Ισχυριζόμαστε ότι $\ker d\hat{f}_x = \{0\}$. Δια της απαγωγής εις άτοπου υποθέτουμε ότι υπάρχει διάνυσμα $v \in T_xM \setminus \{0\}$ τέτοιο ώστε

$$d\hat{f}_x(v) = 0,$$

ή ισοδύναμα,

$$0 \neq df_x(v) = \frac{\langle f(x), df_x(v)\rangle}{r^2(x)} f(x).$$

Τούτο θα σήμαινε ότι $f^{\perp}(x) = 0$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα η απεικόνιση $\hat{f}$ είναι εμβάπτιση. □

Στο ακόλουθο λήμμα υπολογίζουμε την καμπυλότητα Gauss της επαγόμενης μετρικής της σφαιρικής προβολής.

Λήμμα 4.2.2. *Έστω $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ μια ισομετρική εμβάπτιση ενός διδιάστατου πολυπτύγματος Riemann $(M, \langle, \cdot, \cdot\rangle)$. Υποθέτουμε ότι το σημείο O δεν ανήκει στην ένωση των εφαπτομένων επιπέδων της εμβάπτισης f. Τότε η καμπυλότητα Gauss $\hat{K}$ του πολυπτύγματος $(M, \widehat{\langle\cdot,\cdot\rangle})$, όπου $\widehat{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ είναι η επαγόμενη μετρική της σφαιρικής προβολής $\hat{f}$ της f, πληροί τη σχέση*

$$\hat{K} = 1 + \frac{r^2}{1 - \|\operatorname{grad} r\|^2} \det A_4,$$

όπου $\operatorname{grad} r \in \mathfrak{X}(M)$ είναι το διανυσματικό πεδίο κλίσης της συνάρτησης r ως προς τη μετρική $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Απόδειξη. Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ με παραμέτρους $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$, και θέτουμε

$$X = f \circ \phi \quad \text{και} \quad \widehat{X} = \hat{f} \circ \phi = \frac{X}{r \circ \phi}.$$

Τότε, έχουμε ότι:

$$X_u = df(\frac{\partial}{\partial u}), \qquad X_v = df(\frac{\partial}{\partial v})$$

και

$$\hat{X_u} = \big(\frac{X}{r}\big)_u = \frac{X_u}{r} - \frac{r_u}{r^2}X, \qquad \hat{X_v} = \big(\frac{X}{r}\big)_v = \frac{X_v}{r} - \frac{r_v}{r^2}X.$$

Αφού η f είναι εμβάπτιση έχουμε ότι τα διανύσματα X_u, X_v είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές της μετρικής Riemann και της δεύτερης θεμελειώδους μορφής της σφαιρικής προβολής συναρτήσει των αντίστοιχων συντελεστών της εμβάπτισης f.

Έστω $E, F, G : U \longrightarrow \mathbb{R}$ οι συντελεστές της μετρικής Riemann του πολυπτύγματος $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ως προς το χάρτη φ, δηλαδη

$$E = \langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \rangle, \quad F = \langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle, \quad G = \langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
E &= \langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \rangle = \langle df(\frac{\partial}{\partial u}), df(\frac{\partial}{\partial u}) \rangle, \\
F &= \langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle = \langle df(\frac{\partial}{\partial u}), df(\frac{\partial}{\partial v}) \rangle, \\
G &= \langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle = \langle df(\frac{\partial}{\partial v}), df(\frac{\partial}{\partial v}) \rangle.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle.$$

Έστω $\widehat{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ η επαγόμενη μετρική της σφαιρικής προβολής $\hat{f}$, η οποία είναι εμβάπτιση λόγω του Λήμματος 4.2.1. Οι συντελεστές της επαγόμενης μετρικής ως προς το χάρτη φ είναι οι συναρτήσεις $\hat{E}, \hat{F}, \hat{G} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$\hat{E} = \widehat{\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \rangle}, \hat{F} = \widehat{\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle}, \hat{G} = \widehat{\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\hat{E} &= \langle \hat{X}_u, \hat{X}_u \rangle = \langle \frac{X_u}{r} - \frac{r_u}{r^2}X, \ \frac{X_u}{r} - \frac{r_u}{r^2}X \rangle \\
&= \frac{E}{r^2} - 2\frac{r_u}{r^3}\langle X_u, X \rangle + \frac{(r_u)^2}{r^4}\langle X, X \rangle \\
&= \frac{E}{r^2} - 2\frac{r_u}{r^3}(rr_u) + \frac{r_u^2}{r^4}r^2 = \frac{E}{r^2} - 2\frac{r_u^2}{r^2} + \frac{r_u^2}{r^2} = \frac{E}{r^2} - \frac{r_u^2}{r^2}, \\
\hat{F} &= \langle \hat{X}_u, \hat{X}_v \rangle = \langle \frac{X_u}{r} - \frac{r_u}{r^2}X, \ \frac{X_v}{r} - \frac{r_v}{r^2}X \rangle \\
&= \frac{F}{r^2} - \frac{r_v}{r^3}\langle X_u, X \rangle - \frac{r_u}{r^3}\langle X, X_v \rangle + \frac{r_u r_v}{r^4}\langle X, X \rangle \\
&= \frac{F}{r^2} - 2\frac{r_u r_v}{r^2} + \frac{r_u r_v}{r^2} = \frac{F}{r^2} - \frac{r_u r_v}{r^2}, \\
\hat{G} &= \langle \hat{X}_v, \hat{X}_v \rangle = \langle \frac{X_v}{r} - \frac{r_v}{r^2}X, \ \frac{X_v}{r} - \frac{r_v}{r^2}X \rangle \\
&= \frac{G}{r^2} - 2\frac{r_v}{r^3}\langle X_v, X \rangle + \frac{(r_v)^2}{r^4}\langle X, X \rangle
\end{aligned}$$

$$= \frac{G}{r^2} - 2\frac{r_v}{r^3}(rr_v) + \frac{r_v^2}{r^4}r^2 = \frac{G}{r^2} - 2\frac{r_v^2}{r^2} + \frac{r_v^2}{r^2} = \frac{G}{r^2} - \frac{r_v^2}{r^2}.$$

Από τα παραπάνω παίρνουμε

$$\hat{E}\hat{G} - \hat{F}^2 = \frac{E - r_u^2}{r^2}\frac{G - r_v^2}{r^2} - \big(\frac{F - r_u r_v}{r^2}\big)^2,$$

ή ισοδύναμα

$$\hat{E}\hat{G} - \hat{F}^2 = \frac{EG - F^2 - \big(Er_v^2 + Gr_u^2 - 2Fr_u r_v\big)}{r^4}. \tag{4.5}$$

Θα δείξουμε ότι

$$\|\operatorname{grad} r\|^2 = \frac{Gr_u^2 - 2Fr_u r_v + Er_v^2}{EG - F^2}.$$

Εξ ορισμού,

$$\langle \operatorname{grad} r, X\rangle = dr(X),$$

για κάθε $X \in \mathfrak{X}(M)$. Προφανώς υπάρχουν συναρτήσεις $a, b \in C^\infty(U)$ τέτοιες ώστε

$$\operatorname{grad} r = aX_u + bX_v.$$

Λαμβάνοντας εσωτερικό γινόμενο με τα διανύσματα X_u και X_v προκύπτει ότι

$$aE + bF = r_u, \quad aF + \beta G = r_v.$$

Επειδή

$$EG - F^2 \neq 0,$$

από τον κανόνα του Cramer βρίσκουμε:

$$a = \frac{Gr_u - Fr_v}{EG - F^2}, \qquad b = \frac{Er_v - Fr_u}{EG - F^2}.$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\|\operatorname{grad} r\|^2 &= \langle \operatorname{grad} r, \operatorname{grad} r\rangle \\
&= a^2\langle X_u, X_u\rangle + 2ab\langle X_u, X_v\rangle + b^2\langle X_v, X_v\rangle \\
&= E\frac{(Gr_u - Fr_v)^2}{(EG - F^2)^2} + 2F\frac{(Gr_u - Fr_v)(Er_v - Fr_u)}{(EG - F^2)^2} + G\frac{(Er_v - Fr_u)^2}{(EG - F^2)^2}.
\end{aligned}$$

Μετά από πράξεις βρίσκουμε:

$$\|\operatorname{grad} r\|^2 = \frac{Gr_u^2 + Er_v^2 - 2Fr_u r_v}{EG - F^2}.$$

Άρα, από την ισότητα (4.5) έχουμε

$$\hat{E}\hat{G} - \hat{F}^2 = \frac{(EG - F^2)\big(1 - \|\operatorname{grad} r\|^2\big)}{r^4}. \tag{4.6}$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$f = df_x(Z) + pe_3,$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\langle f, e_4 \rangle = \langle e_4, df_x(Z) \rangle + p\langle e_3, e_4 \rangle = 0.$$

Ισχυριζόμαστε ότι το διανυσματικό πεδίο $e_4 \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$, το οποίο είναι ορθογώνιο στο κανονικό διανυσματικό πεδίο e_3, είναι το μοναδιαίο κάθετο της σφαιρικής προβολής $\hat{f}$, δηλαδή $e_4 \in \mathfrak{X}^{\perp}(\hat{f})$. Αφού $e_4 \in N_f M$ έχουμε $\langle e_4, X_u \rangle = 0, \ \langle e_4, X_v \rangle = 0$. Επομένως, είναι

$$\langle e_4, \hat{X}_u \rangle = \frac{1}{r}\langle e_4, X_u \rangle - \frac{r_u}{r^2}\langle e_4, X \rangle = 0.$$

και αντίστοιχα

$$\langle e_4, \hat{X}_v \rangle = \frac{1}{r}\langle e_4, X_v \rangle - \frac{r_v}{r^2}\langle e_4, X \rangle = 0.$$

Άρα, το διανυσματικό πεδίο e_4 είναι κάθετο στα διανυσματικά πεδία $\hat{X}_u, \hat{X}_v$. Επομένως, $e_4 \in \mathfrak{X}^{\perp}(\hat{f})$.

Θα υπολογίσουμε ακολούθως τους συντελεστές της δεύτερης θεμελιώδους μορφής της σφαιρικής προβολής $\hat{f}$.

Έστω $L, M, N : U \longrightarrow \mathbb{R}$ οι συντελεστές της δεύτερης θεμελιώδους μορφής της εμβάπτισης f στη διεύθυνση e_4 ως προς το χάρτη φ, δηλαδή:

$$L = \langle X_{uu}, e_4 \rangle, \quad M = \langle X_{uv}, e_4 \rangle, \quad N = \langle X_{vv}, e_4 \rangle.$$

Αντίστοιχα, θεωρούμε τους συντελεστές $\hat{L}, \hat{M}, \hat{N} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ της εμβάπτισης $\hat{f}$ ως προς το χάρτη φ, δηλαδή

$$\hat{L} = \langle \hat{X}_{uu}, e_4 \rangle, \quad M = \langle \hat{X}_{uv}, e_4 \rangle, \quad \hat{N} = \langle \hat{X}_{vv}, e_4 \rangle.$$

Επειδή

$$\begin{aligned} \hat{X}_{uu} &= \frac{X_{uu}}{r} - r_u\frac{X_u}{r^2} - \frac{r_{uu}}{r^2}X + 2\frac{r_u^2}{r^3}X, \\ \hat{X_{uv}} &= \frac{X_{uv}}{r} - r_v\frac{X_u}{r^2} - \frac{r_{uv}}{r^2}X + 2\frac{r_u r_v}{r^3}X, \end{aligned}$$

$$\hat{X_{vv}} = \frac{X_{vv}}{r} - r_v \frac{X_v}{r^2} - \frac{r_{vv}}{r^2} X + 2\frac{r_v^2}{r^3} X,$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \left\langle \frac{X_{uu}}{r} - r_u \frac{X_u}{r^2} - \frac{r_{uu}}{r^2} X + 2\frac{r_u^2}{r^3} X,\ e_4 \right\rangle = \frac{1}{r} \langle X_{uu}, e_4 \rangle = \frac{L}{r}, \\ M &= \left\langle \frac{X_{uv}}{r} - r_v \frac{X_u}{r^2} - \frac{r_{uv}}{r^2} X + 2\frac{r_u r_v}{r^3} X,\ e_4 \right\rangle = \frac{1}{r} \langle X_{uv}, e_4 \rangle = \frac{M}{r}, \\ \hat{N} &= \left\langle \frac{X_{vv}}{r} - r_v \frac{X_v}{r^2} - \frac{r_{vv}}{r^2} X + 2\frac{r_v^2}{r^3} X,\ e_4 \right\rangle = \frac{1}{r} \langle X_{vv}, e_4 \rangle = \frac{N}{r}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\hat{L}\hat{N} - \hat{M}^2 = \frac{LN - M^2}{r^2}. \tag{4.7}$$

Έστω $\hat{A}$ ο αντίστοιχος τελεστής σχήματος της σφαιρικής προβολής $\hat{f}$ ως προς το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο $e_4 \in \mathfrak{X}^{\perp}(\hat{f})$. Από την εξίσωση Gauss για την εμβάπτιση $\hat{f}$ έχουμε

$$\hat{K} = 1 + \kappa_1 \kappa_2,$$

όπου κ_1, κ_2 είναι οι κύριες καμπυλότητες της σφαιρικής προβολής $\hat{f}$. Επειδή $\det \hat{A} = \kappa_1 \kappa_2$, έχουμε

$$\hat{K} = 1 + \det \hat{A}. \tag{4.8}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις ισότητες (4.7) και (4.5), έχουμε

$$\begin{aligned} \det \hat{A} &= \frac{\hat{L}\hat{N} - \hat{M}^2}{\hat{E}\hat{G} - \hat{F}^2} \\ &= \frac{r^2 (LN - M^2)}{(EG - F^2)\big(1 - \|\operatorname{grad} r\|^2\big)}, \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\hat{K} = \frac{r^2}{1 - \|\operatorname{grad} r\|^2} \det A_4.$$

Χρησιμοποιώντας την ισότητα (4.8), έχουμε

$$\hat{K} = 1 + \frac{r^2}{1 - \|\operatorname{grad} r\|^2} \det A_4.$$

□

4.3 Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1

Χρειαζόμαστε το ακόλουθο γνωστό αποτέλεσμα [7, σελ. 92].

Θεώρημα 4.3.1. *Έστω M διδιάστατο συμπαγές πολύπτυγμα Riemann και $f : M \longrightarrow \mathbb{Q}^3_c$ μια ισομετρική εμβάπτιση με κύριες καμπυλότητες $\kappa_1 \geq \kappa_2$, όπου $\mathbb{Q}^3_c$ είναι ένα τριδιάστατο πολύπτυγμα Riemann με σταθερή καμπυλότητα c. Αν για τις κύριες καμπυλότητες ισχύει $\kappa_1\kappa_2 \geq 0$ και το πολύπτυγμα M έχει σταθερή καμπυλότητα Gauss $K \geq 0$, τότε ισχύει $\kappa_1 = \kappa_2$ παντού, δηλαδή όλα τα σημεία είναι ομφαλικά.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο e_4 ορθογώνιο στο κανονικό μοναδιαίο καθετο διανυσματικό πεδίο e_3 της εμβάπτισης f. Προφανώς είναι

$$\nabla^{\perp}_X e_3 = \omega_{34}(X)e_4,$$

για κάθε $X \in \mathfrak{X}(M)$. Επειδή το διανυσματικό πεδίο e_3 είναι παράλληλο στην κάθετη δέσμη της εμβάπτισης f προκύπτει ότι $\omega_{34} = 0$. Άρα από τη σχέση (4.4) έχουμε $A_4Z = 0$ παντού.

Θεωρούμε το κλειστό σύνολο

$$M_1 = \{x \in M \mid Z_x = 0\}$$

και το ανοιχτό σύνολο

$$M_2 = M \setminus M_1 = \{x \in M \mid Z_x \neq 0\}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι οι συνεκτικές συνιστώσες του εσωτερικού $\text{int}(M_1)$ του συνόλου M_1 περιέχονται σε σφαίρες με κέντρο το σημείο O. Πράγματι, για κάθε $X \in \mathfrak{X}(M)$ έχουμε

$$X(\|f\|^2) = 2\langle df(x), f\rangle = 2\langle df(x), f^{\perp}\rangle = 0.$$

Οπότε $\|f\| =$ σταθερό σε κάθε συνετική συνιστώσα του συνόλου $\text{int}(M_1)$. Άρα οι συνεκτικές συνιστώσες του συνόλου $\text{int}(M_1)$ περιέχονται σε σφαίρα κέντρου O.

Αφού $A_4Z = 0$ παντού, έχουμε ότι

$$Z \in \ker A_4.$$

Στο σύνολο M_2 έχουμε ότι $Z \neq 0$, και επομένως $\ker A_4 \neq \{0\}$. Συνεπώς,

$$\det A_4 = 0, \tag{4.9}$$

στο σύνολο M_2.

Θεωρούμε την σφαιρική προβολή

$$\hat{f} : M \longrightarrow \mathbb{S}^3$$

με

$$\hat{f}(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}, \quad x \in M.$$

Από το Λήμμα 4.2.1 γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση $\hat{f}$ είναι εμβάπτιση. Συμβολίζουμε με $\widehat{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ την επαγόμενη μετρική της $\hat{f}$.

Έστω U_a μια συνεκτική συνιστώσα του συνόλου $\mathrm{int}(M_1)$ η οποία περιέχεται σε μια σφαίρα ακτίνας $a > 0$. Προφανώς για κάθε $x \in U_a$ ισχύει

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{a} f(x).$$

Επομένως, στο σύνολο U_a η επαγόμενη μετρική είναι

$$\widehat{\langle \cdot, \cdot \rangle} = \frac{1}{a^2} \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

Άρα, η καμπυλότητα Gauss $\hat{K}$ του πολυπτύγματος Riemann $(U_a, \widehat{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ είναι

$$\hat{K} = a^2 K. \tag{4.10}$$

Λόγω της σχέσης (4.9) και του Λήμματος 4.2.2 προκύπτει ότι για την καμπυλότητα Gauss του πολυπτύγματος $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ισχύει

$$\hat{K} = 1, \tag{4.11}$$

στο σύνολο M_2. Για κάθε σημείο $x \in M$ έχουμε

$$R_{\text{min}} \leq \|f(x)\| \leq R_{\text{max}}.$$

Παρατηρούμε ότι στη συνεκτική συνιστώσα U_a του συνόλου $\mathrm{int}(M_1)$ έχουμε $\|f\| = a$. Άρα

$$R_{\text{min}} \leq a \leq R_{\text{max}}. \tag{4.12}$$

Ακολουθούν οι αποδείξεις των περιπτώσεων (i) και (ii) του θεωρήματος.

(i) Υποθέτουμε ότι $\max K < 1/R^2_{\max}$. Τότε, $KR^2_{\max} < 1$ παντού. Από τη σχέση (4.12) προκύπτει ότι $Ka^2 < 1$ παντού. Από τις σχέσεις (4.10) και (4.11) και επειδή η συνάρτηση $\hat{K}$ είναι συνεχής έχουμε ότι δεν μπορεί να ισχύει ταυτόχρονα $\mathrm{int}(M_1) \neq \varnothing$ και $M_2 \neq \varnothing$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Υποθέτουμε ότι $M_2 = \varnothing$, δηλαδή $M_1 = M$. Σε αυτή την περίπτωση η εικόνα $f(M)$ περιέχεται σε σφαίρα κέντρου O και ακτίνας $a = R_{\max} = R_{\min}$.

Υποθέτουμε ότι $\mathrm{int}(M_1) = \varnothing$. Τότε λόγω συνέχειας έχουμε $\hat{K} = 1$ στο πολύπτυγμα M. Όμως από την εξίσωση Gauss για την ισομετρική εμβάπτιση $\hat{f} : (M, \widehat{\langle \cdot, \cdot \rangle}) \longrightarrow \mathbb{S}^3$ προκύπτει ότι

$$\hat{K} = \kappa_1 \kappa_2 + 1,$$

όπου κ_1, κ_2 είναι οι κύριες καμπυλότητες της σφαιρικής προβολής $\hat{f}$. Άρα $\kappa_1\kappa_2 = 0$, οπότε σε κάθε σημείο του M τουλάχιστον μία από τις κύριες καμπυλότητες μηδενίζεται. Από το Θεώρημα 4.3.1 προκύπτει ότι η εμβάπτιση $\hat{f} : (M, \widehat{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ είναι ολική γεωδαισιακή, δηλαδή η εικόνα $\hat{f}(M)$ είναι μέγιστη σφαίρα $\mathbb{S}^2$ της $\mathbb{S}^3$. Άρα, η εικόνα $f(M)$ περιέχεται σε έναν 3-διάστατο υπόχωρο E^3 του $\mathbb{R}^4$. Συνεπώς,

$$\max K \geq \frac{1}{R^2_{\max}}.$$

Τότε η εικόνα $f(M)$ περιέχεται σε μια σφαίρα κέντρου O.

(ii) Υποθέτουμε ότι $\min K > 1/R^2_{\min}$. Άρα, $Ka^2 > 1$. Όπως πριν, από τις σχέσεις (4.10), (4.11) και από τη συνέχεια της συνάρτησης $\hat{K}$ δεν γίνεται να ισχύει ταυτόχρονα $\mathrm{int}(M_1) \neq \varnothing$ και $M_2 \neq \varnothing$.

Έστω ότι $M_2 = \varnothing$, δηλαδή $M_1 = M$. Τότε η $f(M)$ περιέχεται σε σφαίρα κέντρου O και ακτίνας $a = R_{\max} = R_{\min}$.

Υποθέτουμε ότι $\mathrm{int}(M_1) = \varnothing$. Τότε έχουμε $\hat{K} = 1$ παντού στο πολύπτυγμα M. Από την εξίσωση Gauss για την ισομετρική εμβάπτιση $\hat{f} : (M, \widehat{\langle \cdot, \cdot \rangle}) \longrightarrow \mathbb{S}^3$ προκύπτει ότι για τις κύριες καμπυλότητες κ_1, κ_2 της σφαιρικής προβολής $\hat{f}$ ισχύει $\kappa_1\kappa_2 = 0$ και πάλι από το Θεώρημα 4.3.1 προκύπτει ότι η εβάπτιση $\hat{f} : (M, \widehat{\langle \cdot, \cdot \rangle}) \longrightarrow \mathbb{S}^3$ είναι ολικά γεωδαισιακή. Όπως στην περίπτωση (i) προκύπτει ότι

$$\min K \leq \frac{1}{R^2_{\min}},$$

και άρα η εικόνα $f(M)$ περιέχεται σε μια σφαίρα κέντρου O.

(iii) Τέλος έστω ότι η καμπυλότητα Gauss πληροί $K \leq 0$. Τότε από τη συνέχεια της συνάρτησης $\hat{K}$ ισχύει είτε η σχέση (4.10) είτε η σχέση (4.11). Έστω ότι ισχύει η σχέση (4.11). Τότε επιχειρηματολογώντας όπως πριν, η εμβάπτιση $\hat{f}$ είναι ολικά γεωδαισιακή και άρα η εικόνα $\hat{f}(M)$ είναι μια μέγιστη σφαίρα του $\mathbb{S}^3$. Οπότε η εικόνα $f(M)$ περιέχεται σε κάποιον τριδιάστατο υπόχωρο E^3 του $\mathbb{R}^4$. Γνωρίζουμε τότε ότι υπάρχει σημείο του πολυπτύγματος M όπου $K > 0$. Άρα μόνο η ισότητα (4.10) μπορεί να ισχύει. Επομένως, η εικόνα $f(M)$ περιέχεται σε κάποια σφαίρα κέντρου O. Τότε, από το Πόρισμα 3.1.6 προκύπτει $K \equiv 0$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Ισοπεδες επιφανειες

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε ισομετρικές εμβαπτίσεις διδιάστατων ισόπεδων πολυπτυγμάτων Riemann $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ με ισόπεδη κάθετη δέσμη, υπό την υπόθεση ότι ο πρώτος κάθετος χώρος έχει την ίδια διάσταση σε κάθε σημείο. Τούτο σημαίνει ότι οι κάθετοι χώροι ορίζουν μια υποδέσμη N_1^f της κάθετης δέσμης $N_f M$.

Αρχικά αποδεικνύουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα, το οποίο περιγράφει τοπικά όλες τις ισόπεδες επιφάνειες του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^4$ με ισόπεδη κάθετη δέσμη και διδιάστατο πρώτο κάθετο χώρο.

Θεώρημα 5.0.1. *Έστω (u_1, u_2) καρτεσιανές συντεταγμένες του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι δίνεται κοντά στην αρχή των αξόνων μια ισόπεδη μετρική της μορφής*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = E\, du_1^2 + G\, du_2^2, \tag{5.1}$$

όπου οι συναρτήσεις E, G ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\Big(- \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial E}{\partial u_2}\Big) = \frac{\partial}{\partial u_2}\Big(\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial u_1}\Big). \tag{5.2}$$

Για έναν επαρκώς μικρό δίσκο $D \subset \mathbb{R}^2$ σε μια περιοχή της αρχής των αξόνων υπάρχει ισομετρική εμβάπτιση $X : (D, \langle \cdot, \cdot \rangle) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ με ισόπεδη κάθετη δέσμη της οποίας η διάσταση του πρώτου κάθετου χώρου να είναι $\dim N_1^X = 2$ παντού. Επιπλέον ισχύουν

$$4\|H\|^2 = \frac{1}{E} + \frac{1}{G}, \quad 2 \max_{\|\xi\|=1} \det A_\xi = \frac{1}{\sqrt{EG}}. \tag{5.3}$$

Αντίστροφα, δεδομένης μιας ισομετρικής εμβάπτισης $f : (M, \langle \cdot, \cdot \rangle) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ενός ισόπεδου διδιάστατου πολυπτύγματος Riemann M με ισόπεδη κάθετη δέσμη και $\dim N_1^f = 2$, υπάρχει τοπικά ένα σύστημα συντεταγμένων (u_1, u_2) τέτοιο ώστε να ισχύουν οι (5.1), (5.2) και (5.3).

Το ακόλουθο αποτέλεσμα δίνει ένα χαρακτηρισμό για τις επιφάνειες του $\mathbb{R}^4$ οι οποίες είναι γινόμενα δύο επίπεδων καμπυλών.

Θεώρημα 5.0.2. *Έστω $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ διδιάστατο ισόπεδο πολύπτυγμα και $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$μια ισομετρική εμβάπτιση. Η εμβάπτιση f είναι το καρτεσιανό γινόμενο δύο επίπεδων καμπυλών με καμπυλότητες διάφορες του 0 παντού αν και μόνο αν ο πρώτος κάθετος χώρος έχει παντού διάσταση δύο και υπάρχει ένα μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο της f το οποίο είναι ιδιάζον και παράλληλο στην κάθετη δέσμη.*

Για την παράθεση του επόμενου αποτελέσματος θα χρειαστούμε τον ακόλουθο ορισμό

Ορισμός 5.0.3. *Έστω $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ διδιάστατο πολύπτυγμα και $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ μια ισομετρική εμβάπτιση.*

(i) *Καλούμε **ομφαλική διεύθυνση** ένα κάθετο διανυσματικό πεδίο $e \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$ για το οποίο υπάρχει συνάρτηση $\lambda \in C^{\infty}(M)$ τέτοια ώστε ο αντίστοιχος τελεστής σχήματος να είναι $A_e = \lambda I$, όπου $I : TM \longrightarrow TM$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση.*

(ii) *Η εμβάπτιση f καλείται **ψευδομφαλική**, αν το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας $H \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$ είναι ομφαλική διεύθυνση.*

Όταν μια εμβάπτιση είναι ψευδομφαλική ισχύει $A_H = \|H\|^2 I$, δηλαδή $\lambda = \|H\|^2$. Πράγματι, έχουμε

$$\operatorname{tr} A_{\xi} = 2\langle H, \xi\rangle$$

για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$. Λαμβάνοντας $\xi = H$ έχουμε

$$\operatorname{tr} A_H = 2\langle H, H\rangle = 2\|H\|^2,$$

οπότε $\lambda = \|H\|^2$.

Θεώρημα 5.0.4. *Έστω $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ διδιάστατο πλήρες ισόπεδο πολύπτυγμα Riemann και $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ μια ισομετρική εμβάπτιση. Αν η εμβάπτιση f έχει ισόπεδη κάθετη δέσμη, δηλαδή $K_n = 0$, η μέση καμπυλότητα $\|H\|$ είναι φραγμένη και το διανυσματικό πεδίο H είναι μια ομφαλική διεύθυνση, τότε η εικόνα $f(M)$ είναι είτε επίπεδο, είτε καρτεσιανό γινόμενο δύο κύκλων με την ίδια ακτίνα.*

Ακολούθως, εξετάζουμε ισομετρικές εμβαπτίσεις ισόπεδων διδιάστατων πολυπτυγμάτων Riemann με ισόπεδη κάθετη δέσμη των οποίων ο πρώτος κάθετος χώρος είναι παντού μονοδιάστατος. Οι κύλινδροι υπεράνω καμπυλών του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ είναι τέτοια παραδείγματα. Με τον όρο αυτό έχουμε μια εμβάπτιση

$$f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(s,t) = (c(s), t),$$

όπου $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ είναι καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$. Το ακόλουθο αποτέλεσμα δίνει έναν χαρακτηρισμό αυτών των κυλίνδρων.

Θεώρημα 5.0.5. *Έστω $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ πλήρες ισόπεδο προσανατολισμένο διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann και $f : M \to \mathbb{R}^4$μια ισομετρική εμβάπτιση. Αν $\dim N_1^f = 1$ παντού, τότε η εμβάπτιση f είναι κύλινδρος $(s,t) \to (c(s), t)$, $-\infty < s, t < +\infty$ όπου $c(s)$ είναι μια πλήρης καμπύλη με καμπυλότητα $\kappa \neq 0$ παντού.*

5.1 Ισόπεδες επιφάνειες με ισόπεδη κάθετη δέσμη

Σε αυτή την ενότητα προβαίνουμε σε μια τοπική μελέτη των ισόπεδων επιφανειών με ισόπεδη κάθετη δέσμη, των οποίων ο πρώτος κάθετος χώρος είναι παντού διδιάστατος. Η μελέτη αυτή θα χρησιμοποιηθεί στις αποδείξεις των αποτελεσμάτων του παρόντος κεφαλαίου.

Έστω M συνεκτικό ισόπεδο διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann και $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ μια ισομετρική εμβάπτιση τέτοια ώστε $K_n = 0$ και $\dim N_1^f = 2$ παντού.

Θεωρούμε ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_1, e_2, \xi_1, \xi_2\}$ τέτοιο ώστε τα διανυσματικά πεδία e_1, e_2 να διαγωνιοποιούν όλους τους τελεστές σχήματος. Επομένως,

$$A_{\xi_1} \sim \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}, \qquad A_{\xi_2} \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

όπου κ_i, λ_i είναι οι κύριες καμπυλότητες στις διευθύνσεις ξ_1 και ξ_2 αντίστοιχα. Για τυχόν μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο

$$\xi = a_1\xi_1 + a_2\xi_2$$

έχουμε

$$A_\xi = a_1 A_{\xi_1} + a_2 A_{\xi_2},$$

ή ισοδύναμα

$$A_\xi \sim \begin{pmatrix} a_1\kappa_1 + a_2\lambda_1 & 0 \\ 0 & a_1\kappa_2 + a_2\lambda_2 \end{pmatrix},$$

ως προς το ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_1, e_2\}$. Έτσι,

$$\det A_\xi = a_1^2\kappa_1\kappa_2 + a_1a_2(\kappa_1\lambda_2 + \lambda_1\kappa_2) + a_2^2\lambda_1\lambda_2. \tag{5.4}$$

Κατόπιν στροφής στην κάθετη δέσμη, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ισχύει

$$\kappa_1\lambda_2 + \kappa_2\lambda_1 = 0. \tag{5.5}$$

Ένα τέτοιο ορθομοναδιαίο πλαίσιο καλείται πλαίσιο Otsuki. Από την Πρόταση 2.6.1 έχουμε ότι η καμπυλότητα Gauss K είναι

$$K = \det A_{\xi_1} + \det A_{\xi_2} = \kappa_1\kappa_2 + \lambda_1\lambda_2.$$

Αφού το πολύπτυγμα M είναι ισόπεδο, έχουμε

$$\kappa_1\kappa_2 + \lambda_1\lambda_2 = 0. \tag{5.6}$$

Επειδή από υπόθεση $\dim N_1^f = 2$ και

$$N_1^f = \mathrm{span}\{\alpha_f(e_1, e_1), \alpha_f(e_2, e_2)\},$$

προκύπτει ότι τα κάθετα διανύσματα

$$\alpha_f(e_1, e_1), \alpha_f(e_2, e_2)$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα σε κάθε σημείο. Γνωρίζουμε ότι

$$\langle \alpha^f(e_i, e_j), \xi\rangle = \langle A_\xi e_i, e_j\rangle, \quad i, j = 1, 2,$$

για κάθε διανυσματικό πεδίο $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(f)$. Άρα

$$\begin{aligned}\alpha_f(e_1, e_1) &= \langle A_{\xi_1}e_1, e_1\rangle\xi_1 + \langle A_{\xi_2}e_1, e_1\rangle\xi_2 = \kappa_1\xi_1 + \lambda_1\xi_2,\\ \alpha_f(e_2, e_2) &= \langle A_{\xi_1}e_2, e_2\rangle\xi_1 + \langle A_{\xi_2}e_2, e_2\rangle\xi_2 = \kappa_2\xi_1 + \lambda_2\xi_2.\end{aligned}$$

Επειδή τα διανυσματικά πεδία $\alpha_f(e_1, e_1)$ και $\alpha_f(e_2, e_2)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, έχουμε

$$\det\begin{pmatrix}\kappa_1 & \lambda_1\\ \kappa_2 & \lambda_2\end{pmatrix} = \kappa_1\lambda_2 - \kappa_2\lambda_1 \neq 0. \tag{5.7}$$

Από τις σχέσεις (5.5) και (5.7) παίρνουμε $\kappa_1\lambda_2 \neq 0$ και $\kappa_2\lambda_1 \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (5.5) με λ_1 παίρνουμε:

$$\kappa_1\lambda_1\lambda_2 = -\kappa_2\lambda_1^2.$$

Από τη σχέση (5.6) έχουμε
$$\kappa_1^2\kappa_2 = \kappa_2\lambda_1^2.$$
Οπότε,
$$\kappa_1 = \pm\lambda_1.$$

Κατόπιν ενδεχόμενης αντικατάστασης του διανυσματικού πεδίου ξ_1 από το $-\xi_1$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\kappa_1 = \lambda_1$. Επομένως, αντικαθιστώντας στη σχέση (5.6) παίρνουμε $\kappa_2 = -\lambda_2$. Άρα,
$$A_{\xi_1} \sim \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}, \qquad A_{\xi_2} \sim \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 \end{pmatrix}.$$
Αφού
$$A_\xi = a_1 A_{\xi_1} + a_2 A_{\xi_2},$$
έχουμε
$$A_\xi \sim \begin{pmatrix} \kappa_1(a_1+a_2) & 0 \\ 0 & \kappa_2(a_1-a_2) \end{pmatrix}.$$
Οπότε
$$\det A_\xi = \kappa_1\kappa_2(a_1^2 - a_2^2). \tag{5.8}$$
Επομένως
$$\max_{\|\xi\|=1} \det A_\xi = |\kappa_1\kappa_2| \max_{a_1^2+\alpha_2^2=1} |(a_1^2 - a_2^2)| = |\kappa_1\kappa_2| = |\det A_{\xi_1}|.$$

Θεωρούμε νέο τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_3, e_4\}$ της κάθετης δέσμης $N_f M$ με
$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + \xi_2), \qquad e_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 - \xi_2).$$
Τότε
$$A_{e_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_{\xi_1} + A_{\xi_2}), \qquad A_{e_4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A_{\xi_1} - A_{\xi_2}).$$
Άρα
$$A_{e_3} \sim \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
όπου $\kappa = \sqrt{2}\kappa_1$. Αντίστοιχα,
$$A_{e_4} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

όπου $\lambda = -\sqrt{2}\kappa_2$. Ισχυριζόμαστε ότι

$$\kappa^2 + \lambda^2 = 4\|H\|^2, \qquad |\kappa\lambda| = 2 \max_{\|\xi\|=1} \det A_\xi. \tag{5.9}$$

Για να αποδείξουμε την πρώτη σχέση υπολογίζουμε το μήκος $\|H\|^2$:

$$\begin{aligned}\|H\|^2 &= \big(\frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)\big)^2 + \big(\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)\big)^2 \\ &= \frac{1}{4}\big(\kappa_1^2 + 2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2 + \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2\big).\end{aligned}$$

Επειδή $\kappa_1 = \lambda_1,\ \kappa_2 = -\lambda_2$ έχουμε,

$$\|H\|^2 = \frac{1}{2}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2),$$

απ' όπου προκύπτει η πρώτη ισότητα στην σχέση (5.9).

Η δεύτερη ισότητα στη σχέση (5.9) προκύπτει από τη σχέση (5.8). Άρα, το ζευγάρι των συναρτήσεων κ, λ είναι αναλλοίωτες της εμβάπτισης ως προς το πρόσημο. Το ίδιο ισχύει για τις διευθύνσεις e_1, e_2 επειδή ο τελεστής A_3 έχει δύο διακριτές ιδιοτιμές, επομένως ορίζονται μοναδικές ιδιοδιευθύνσεις. Επιπλέον οι διευθύνσεις e_3, e_4 είναι επίσης καλώς ορισμένες αφού δίνουν τις ασυμπτωτικές διευθύνσεις της τετραγωνικής μορφής (5.8) και δεν εξαρτώνται από το πρόσημο.Υπενθυμίζουμε ότι ένα διανυσματικό πεδίο $0 \neq X \in \mathfrak{X}(M)$ καλείται ασυμπτωτική διεύθυνση αν ισχύει $\alpha_f(X, X) = 0$.

Στη συνέχεια, εργαζόμαστε με το ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned}\omega_{13}(X) &= \langle A_3X, e_1\rangle, \quad \omega_{23}(X) = \langle A_3X, e_2\rangle, \\ \omega_{14}(X) &= \langle A_4X, e_1\rangle, \quad \omega_{24}(X) = \langle A_4X, e_2\rangle.\end{aligned}$$

για κάθε $X \in \mathfrak{X}(M)$. Από αυτές προκύπτει ότι

$$\omega_{13} = \kappa\omega_1, \quad \omega_{23} = 0, \quad \omega_{14} = 0, \quad \omega_{24} = 0.$$

Από τις εξισώσεις του Cartan (2.12) έχουμε:

$$d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23} + \omega_{14} \wedge \omega_{43} = 0,$$

$$d\omega_{24} = \omega_{21} \wedge \omega_{14} + \omega_{23} \wedge \omega_{34} = 0.$$

Άρα από Λήμμα Poincaré 2.2.8, υπάρχουν τοπικά λείες συναρτήσεις u_1, u_2 τέτοιες ώστε

$$du_1 = \omega_{13} = \kappa\omega_1, \quad du_2 = \omega_{24} = \lambda\omega_2. \tag{5.10}$$

Αφού $K = 0,\ K_n = 0$ έχουμε $d\omega_{12} = 0$ και $d\omega_{34} = 0$ αντίστοιχα. Επομένως πάλι από Λήμμα Poincaré, υπάρχουν τοπικά λείες συναρτήσεις φ_1, φ_2 τέτοιες ώστε

$$d\varphi_1 = \omega_{12}, \quad d\varphi_2 = \omega_{34}. \tag{5.11}$$

Οπότε

$$du_1 \wedge du_2 = \kappa\lambda\, \omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0.$$

Τούτο μας επιτρέπει να θεωρήσουμε χάρτη με συναρτήσεις συντεταγμένων τις u_1, u_2. Επειδή $d\omega_{23} = 0$, έχουμε

$$d\omega_{23}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}\right) = 0$$

Από την εξίσωση του Cartan (2.12) και τις σχέσεις (5.10) και (5.11) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} d\omega_{23} &= \omega_{21} \wedge \omega_{13} + \omega_{22} \wedge \omega_{23} + \omega_{23} \wedge \omega_{33} + \omega_{24} \wedge \omega_{43} \\ &= (-\omega_{12}) \wedge \omega_{13} + \omega_{24} \wedge (-\omega_{34}) \\ &= (-d\varphi_1) \wedge du_1 + du_2 \wedge (-d\varphi_2) \\ &= du_1 \wedge d\varphi_1 + d\varphi_2 \wedge du_2. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά τους όρους:

$$du_1 \wedge d\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}\right) = du_1\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right) d\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right) - du_1\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right) d\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2},$$

$$d\varphi_2 \wedge du_2\left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}\right) = d\varphi_2\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right) du_2\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right) - d\varphi_2\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right) du_2\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}.$$

Επομένως από τα ανωτέρω προκύπτει

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} = 0. \tag{5.12}$$

Όμοια από την εξίσωση Cartan (2.12) και τις σχέσεις (5.10) και (5.11) έχουμε

$$d\omega_{14} = \omega_{12} \wedge \omega_{24} + \omega_{13} \wedge \omega_{34} = d\varphi_1 \wedge du_2 + du_1 \wedge d\varphi_2.$$

Αντίστοιχα,

$$d\varphi_1 \wedge du_2\left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}\right) = d\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right) du_2\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right) - d\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right) du_2\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1},$$

$$du_1 \wedge d\varphi_2\left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}\right) = du_1\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right) d\varphi_2\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right) - du_1\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right) d\varphi_2\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2}.$$

Επειδή $d\omega_{14} = 0$, έχουμε

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} = 0. \tag{5.13}$$

Όμως

$$d\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} du_2.$$

Από τις σχέσεις (5.12) και (5.13) έχουμε,

$$\omega_{12} = d\varphi_1 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} du_1 - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} du_2.$$

Τότε

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= d\big(-\frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} du_1\big) + d\big(-\frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} du_2\big) \\ &= \big(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial u_2^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial u_1^2}\big) du_1 \wedge du_2. \end{aligned}$$

Επειδή $d\omega_{12} = 0$, έχουμε

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial u_2^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial u_1^2} = 0.$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\varphi_2 = \tilde{f}(u_1 + u_2) + \tilde{g}(u_1 - u_2), \tag{5.14}$$

όπου $\tilde{f}, \tilde{g}$ είναι αυθαίρετες λείες συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Όμοια, επειδή, $\omega_{34} = d\varphi_2$,

$$d\varphi_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} du_2,$$

από τις σχέσεις (5.12) και (5.13) προκύπτει ότι

$$\omega_{34} = d\varphi_2 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} du_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} du_2.$$

Άρα,

$$d\omega_{34} = \big(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_2^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_1^2}\big) du_1 \wedge du_2.$$

Επειδή $d\omega_{34} = 0$, έχουμε ότι

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_2^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_1^2} = 0,$$

και επομένως η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\varphi_1 = f(u_1+u_2) + g(u_1-u_2), \tag{5.15}$$

όπου f, g είναι αυθαίρετες λείες συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.14) και (5.15) στις (5.12) και (5.13) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
(5.13):\quad & \frac{\partial}{\partial u_1}\big(f(u_1+u_2)+g(u_1-u_2)\big) + \frac{\partial}{\partial u_2}\big(\tilde f(u_1+u_2)+\tilde g(u_1-u_2)\big)\\
&= f'(u_1+u_2)+g'(u_1-u_2)+\tilde f'(u_1+u_2)-\tilde g'(u_1-u_2)=0,\\
(5.12):\quad & \frac{\partial}{\partial u_2}\big(f(u_1+u_2)+g(u_1-u_2)\big) + \frac{\partial}{\partial u_1}\big(\tilde f(u_1+u_2)+\tilde g(u_1-u_2)\big)\\
&= f'(u_1+u_2)-g'(u_1-u_2)+\tilde f'(u_1+u_2)+\tilde g'(u_1-u_2)=0.
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας τις σχέσεις βρίσκουμε

$$f' + \tilde f' = 0, \quad g' - \tilde g' = 0,$$

οπότε $\tilde f = -f + c,\ \tilde g = g + c$ για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{R}$.

Λόγω της σχέσης (5.10), η μετρική Riemann του πολυπτύγματος M ως προς το σύστημα συντεταγμένων (u_1, u_2) γράφεται ως

$$\langle \cdot,\cdot \rangle = \omega_1^2 + \omega_2^2 = \Big(\frac{du_1}{\kappa}\Big)^2 + \Big(\frac{du_2}{\lambda}\Big)^2. \tag{5.16}$$

Οι συναρτήσεις κ και λ δεν είναι ανεξάρτητες. Από τη σχέση (5.10) έχουμε

$$\begin{aligned}
d\omega_1 &= d\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)\wedge du_1 + \frac{1}{\kappa}d(du_1)\\
&= \Big(\frac{\partial}{\partial u_1}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)du_1 + \frac{\partial}{\partial u_2}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)du_2\Big)\wedge du_1\\
&= \frac{\partial}{\partial u_2}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)du_2\wedge du_1 = -\frac{\partial}{\partial u_2}\Big(\frac{1}{\kappa}du_1\wedge du_2\Big).
\end{aligned}$$

Επίσης, από τις σχέσεις (5.10) και (5.11) είναι

$$\omega_{12}\wedge\omega_2 = d\varphi_1 \wedge \frac{du_2}{\lambda} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}du_1 \wedge \frac{du_2}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}du_1\wedge du_2.$$

Επειδή από την εξίσωση Cartan (2.12) έχουμε $d\omega_1 = \omega_{12}\wedge\omega_2$, συνδυάζοντας τα ανωτέρω παίρνουμε

$$-\frac{\partial}{\partial u_2}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big) = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}. \tag{5.17}$$

Αντίστοιχα, από την σχέση (5.10) έχουμε

$$d\omega_2 = d(\frac{1}{\lambda}) \wedge du_2 + \frac{1}{\lambda} d(du_2) = \big(\frac{\partial}{\partial u_1}(\frac{1}{\lambda})du_1 + \frac{\partial}{\partial u_2}(\frac{1}{\lambda})du_2\big) \wedge du_2$$
$$= \frac{\partial}{\partial u_1}(\frac{1}{\lambda})du_1 \wedge du_2.$$

Επίσης, από τις σχέσεις (5.10) και (5.11) είναι

$$d\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_1 = \frac{du_1}{\kappa} \wedge d\varphi_1 = \frac{1}{\kappa} du_1 \wedge \big(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} du_2\big) = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} du_1 \wedge du_2.$$

Άρα,

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_1}(\frac{1}{\lambda}). \tag{5.18}$$

Παραγωγίζοντας την (5.17) ως προς u_2 και την (5.18) ως προς u_1, και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Schwarz παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial u_2}\big(- \lambda \frac{\partial}{\partial u_2}(\frac{1}{\kappa})\big) = \frac{\partial}{\partial u_1}\big(\kappa \frac{\partial}{\partial u_1}(\frac{1}{\lambda})\big),$$

η οποία είναι η συνθήκη $K = 0$ για την μετρική Riemann (5.16).

Επίσης έχουμε

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_2^2} = f'' + g'' = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_1^2}.$$

Οπότε από τις ισότητες (5.17) και (5.18) παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\big(- \lambda \frac{\partial}{\partial u_2}(\frac{1}{\kappa})\big) = \frac{\partial}{\partial u_1}\big(\kappa \frac{\partial}{\partial u_1}(\frac{1}{\lambda})\big). \tag{5.19}$$

5.2 Απόδειξη του Θεωρήματος 5.0.1

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.0.1. Η μία κατεύθυνση του θεωρήματος έχει αποδειχθεί στην Ενότητα 4.1.

Υποθέτουμε ότι ως προς το σύστημα συντεταγμένων μας δίνεται η ισόπεδη μετρική Riemann (5.1) η οποία ικανοποιεί την εξίσωση (5.2). Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων για την άγνωστη συνάρτηση φ_1

$$-\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial u_2} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}, \qquad \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial G}{\partial u_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}$$

είναι επιλύσιμο στον δίσκο B με δεδομένες τις συναρτήσεις E, G και έχει μια μοναδική λύση ως προς σταθερές. Τούτο είναι εφικτό διότι η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας του συστήματος είναι το Θεώρημα Egregium, δηλαδή

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\Big(\frac{\partial}{\partial u_2}(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial u_2}) + \frac{\partial}{\partial u_1}(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial G}{\partial u_1})\Big) = 0.$$

Ως προς την λύση φ_1 η συνθήκη (5.2) ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_2^2} = 0.$$

Άρα η συνάρτηση φ_1 έχει τη μορφή

$$\varphi_1(u_1, u_2) = f(u_1 + u_2) + g(u_1 - u_2),$$

όπου f, g είναι λείες συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Θεωρούμε τη συνάρτηση φ_2 με τύπο

$$\varphi_2(u_1, u_2) = -f(u_1 + u_2) + g(u_1 - u_2)$$

και τον πίνακα των 1-μορφών στον δίσκο B:

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} = \frac{1}{2}d\varphi_1 & \omega_{13} = du_1 & \omega_{14} = 0 \\ -d\varphi_1 & 0 & \omega_{23} = 0 & \omega_{24} = du_2 \\ -du_1 & 0 & 0 & \omega_{34} = d\varphi_2 \\ 0 & -du_2 & -d\varphi_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Το πλαίσιο

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u_1}, \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial u_2},$$

είναι ορθομοναδιαίο. Θεωρούμε το δυϊκό του πλαίσιο

$$\omega_1 = \sqrt{E}\, du_1,\ \omega_2 = \sqrt{G}\, du_2.$$

Οι 1-μορφές ω_i, ω_{ij} ικανοποιούν τις εξισώσεις του Cartan (2.11). Πράγματι,

$$d\omega_1 = d(\sqrt{E}du_1) = -\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial u_2}du_1 \wedge du_2 = -\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial u_2}du_1 \wedge du_2,$$

$$\omega_{12} \wedge \omega_2 = \frac{1}{2}d\varphi_1 \wedge \sqrt{G}du_2 = -\frac{\sqrt{G}}{2}\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial u_2}du_1 \wedge du_2 = -\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial u_2}du_1 \wedge du_2,$$

$$d\omega_2 = d(\sqrt{G}du_2) = \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u_1}du_1 \wedge du_2 = \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u_1}du_1 \wedge du_2,$$

$$\omega_{21}\wedge\omega_1 = -\frac{1}{2}d\varphi_1\wedge\sqrt{E}du_1 = -\frac{\sqrt{E}}{2}\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial G}{\partial u_1}du_2\wedge du_1 = \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u_1}du_1\wedge du_2.$$

Για τις δεύτερες εξισώσεις δομής έχουμε:

$$\begin{aligned}
0 = d\omega_{12} = \omega_{13}\wedge\omega_{32} + \omega_{14}\wedge\omega_{42} &= du_1\wedge(-\omega_{23}) + 0 = du_1\wedge 0 = 0,\\
0 = d\omega_{13} = \omega_{12}\wedge\omega_{23} + \omega_{14}\wedge\omega_{43} &= d\varphi_1\wedge 0 + 0 = 0,\\
0 = d\omega_{14} = \omega_{12}\wedge\omega_{24} + \omega_{13}\wedge\omega_{34} &= d\varphi_1\wedge du_2 + du_1\wedge d\varphi_2\\
&= (f'+g')du_1\wedge du_2 + (-f'-g')du_1\wedge du_2\\
&= 0,\\
0 = d\omega_{23} = \omega_{21}\wedge\omega_{13} + \omega_{24}\wedge\omega_{43} &= (-d\varphi_1)\wedge du_1 + du_2\wedge(-d\varphi_2)\\
&= -d\varphi_1\wedge du_1 - du_2\wedge d\varphi_2\\
&= (f'-g')du_1\wedge du_2 - (f'-g')du_1\wedge du_2\\
&= 0,\\
0 = d\omega_{24} = \omega_{21}\wedge\omega_{14} + \omega_{23}\wedge\omega_{34} &= (-d\varphi_1)\wedge 0 + 0\wedge d\varphi_2 = 0,\\
0 = d\omega_{34} = \omega_{31}\wedge\omega_{14} + \omega_{32}\wedge\omega_{24} &= (-du_1)\wedge 0 + (-\omega_{23})\wedge du_2 = 0.
\end{aligned}$$

Ακολούθως αποδεικνύουμε ότι υπάρχει μια ισομετρική εμβάπτιση του πολυπτύγματος Riemann $(B,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$ ακολουθώντας την εξής διαδικασία. Θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{\partial e_i}{\partial u_j} = \sum_{k=1}^{4}\omega_{ik}\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)e_k, \quad 1\le i\le 4,\ j=1,2, \tag{5.20}$$

για τις διανυσματικές απεικονίσεις $e_i(u_1,u_2) : B \longrightarrow \mathbb{R}^4$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Frobenius αυτό το σύστημα έχει μοναδική τοπική λύση, δοθέντων αρχικών δεδομένων $e_i(0,0), 1\le i\le 4$, αν οι συνθήκες ολοκληρωσιμότητας που προκύπτουν από τις σχέσεις

$$\frac{\partial^2 e_i}{\partial u_k\partial u_j} = \frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j\partial u_k} \tag{5.21}$$

ικανοποιούνται. Παρατηρούμε ότι αυτές οι συνθήκες ολοκληρωσιμότητας είναι οι εξισώσεις του Cartan (2.12).

Υποθέτουμε ότι οι αρχικές συνθήκες $e_i(0,0), 1\le i\le 4$, αποτελούν μια ορθομοναδιαία βάση του $\mathbb{R}^4$. Τότε οι διανυσματικές λύσεις $e_i(u_1,u_2), 1\le i\le 4$, αποτελούν μια ορθομοναδιαία βάση του $\mathbb{R}^4$ για όλες τις συναρτήσεις (u_1,u_2) σε μια περιοχή της αρχής. Πράγματι, αν θέσουμε $\langle e_i,e_j\rangle = g_{ij}$, και παραγωγίσουμε, παίρνουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_\kappa} = \sum_r \left(\omega_{ir}(\frac{\partial}{\partial u_\kappa})g_{rj} + \omega_{jr}(\frac{\partial}{\partial u_\kappa})g_{ir}\right).$$

Παρατηρούμε ότι οι συνθήκες ολοκληρωσιμότητας αυτού του συστήματος είναι ξανά οι εξισώσεις του Cartan (2.12). Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα Frobenius το σύστημα έχει μοναδική λύση αν απαιτήσουμε $g_{ij}(0,0) = \delta_{ij}$. Η σταθερά δ_{ij} είναι μια προφανής λύση του συστήματος και άρα $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Με δεδομένες τις διανυσματικές απεικονίσεις e_1, e_2, λύνουμε το σύστημα

$$\frac{\partial X}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{2} \omega_i(\frac{\partial}{\partial u_j})e_i, \quad j = 1, 2, \tag{5.22}$$

με άγνωστο τη διανυσματική απεικόνιση $X : D \longrightarrow \mathbb{R}^4$. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι οι συνθήκες ολοκληρωσιμότητας

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 X}{\partial u_2 \partial u_1} \tag{5.23}$$

του συστήματος (5.22) είναι οι εξισώσεις του Cartan (2.11). Δεδομένου του σημείου $X(0,0)$ μπορούμε να λύσουμε αυτό το σύστημα τοπικά με το Θεώρημα Frobenius λαμβάνοντας μια μοναδική λύση $X(u_1, u_2)$. Έχουμε ότι

$$\frac{\partial X}{\partial u_1} = \omega_1(\frac{\partial}{\partial u_1})e_1 + \omega_2(\frac{\partial}{\partial u_1})e_2 = \sqrt{E}\, du_1(\frac{\partial}{\partial u_1})e_1 + \sqrt{G}\, du_2(\frac{\partial}{\partial u_1})e_2 = \sqrt{E}\, e_1.$$

Όμοια,

$$\frac{\partial X}{\partial u_2} = \sqrt{G}\, e_2.$$

Άρα η επαγόμενη μετρική της εμβάπτισης $x : D \longrightarrow \mathbb{R}^4$ είναι

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \omega_1^2 + \omega_2^2 = E\, du_1^2 + G\, du_2^2.$$

Επιπλέον αφού

$$d\omega_{34} = d(d\varphi_2) = 0$$

έχουμε ότι $K_n = 0$. Επίσης, για τον τελεστή σχήματος έχουμε

$$A_3 e_1 = \omega_{13}(e_1)e_1 + \omega_{23}(e_1)e_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}e_1, \quad A_3 e_2 = \omega_{13}(e_2)e_1 + \omega_{23}(e_2)e_2 = 0,$$

οπότε
$$A_3 \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Ομοίως,
$$A_4 e_1 = \omega_{14}(e_1)e_1 + \omega_{24}(e_1)e_2 = 0, \quad A_4 e_2 = \omega_{14}(e_2)e_1 + \omega_{24}(e_2)e_2 = \frac{1}{\sqrt{G}}e_2,$$
οπότε
$$A_4 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{G}} \end{pmatrix}.$$
Επιπλέον
$$\begin{aligned}
\alpha_f(e_1, e_1) &= \langle A_{e_3} e_1, e_1 \rangle e_3 + \langle A_{e_4} e_1, e_1 \rangle e_4 = \frac{1}{\sqrt{E}}\, e_3, \\
\alpha_f(e_2, e_2) &= \langle A_3 e_2, e_2 \rangle e_3 + \langle A_{e_4} e_2, e_2 \rangle e_4 = \frac{1}{\sqrt{G}}\, e_4, \\
\alpha_f(e_1, e_2) &= 0.
\end{aligned}$$
Επομένως, $\dim N_1^f = 2$ παντού.

Το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας είναι
$$H = \frac{1}{2\sqrt{E}}e_3 + \frac{1}{2\sqrt{G}}e_4.$$
Άρα
$$4\|H\|^2 = \frac{1}{E} + \frac{1}{G}.$$
Έστω $\xi = ae_3 + be_4$, μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο. Τότε
$$A_\xi \sim aA_3 + bA_4 = \begin{pmatrix} a\frac{1}{\sqrt{E}} & 0 \\ 0 & b\frac{1}{\sqrt{G}} \end{pmatrix}.$$
Επειδή $a^2 + b^2 = 1$, θέτουμε $a = \cos\theta,\ b = \sin\theta$. Οπότε
$$\det A_\xi = \frac{ab}{\sqrt{EG}} = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \sin 2\theta,$$
και
$$\max_{\|\xi\|=1} \det A_\xi = \frac{1}{2\sqrt{EG}}.$$
□

5.3 Απόδειξη του Θεωρήματος 5.0.2

Παράδειγμα 5.3.1. *Θεωρούμε επίπεδες καμπύλες $C_1(s)$ και $C_2(s)$, αμφότερες με φυσική παράμετρο s και καμπυλότητες $\kappa(s)$ και $\lambda(s)$ αντίστοιχα, μη μηδενικές παντού. Ορίζουμε τις συναρτήσεις*

$$E(u_1) = \frac{1}{\kappa^2(u_1)}$$

και

$$G(u_2) = \frac{1}{\lambda^2(u_2)}.$$

Η μετρική Riemann

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = E\, du_1^2 + G\, du_2^2$$

είναι ισόπεδη και ικανοποιεί την σχέση (5.2). Η εμβάπτιση f με αυτή την επαγόμενη μετρική η οποία προκύπτει από το Θεώρημα 5.0.1 είναι το καρτεσιανό γινόμενο, των δύο καμπυλών. Πράγματι, θεωρούμε επίπεδες καμπύλες $c_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ c_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, με φυσική παράμετρο, ορίζουμε την απεικόνιση

$$f : I = I_1 \times I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^4, f(s_1, s_2) = (c_1(s_1), c_2(s_2)).$$

Υπολογίζουμε

$$df(\frac{\partial}{\partial s_1}) = (c_1'(s_1), 0), \qquad df(\frac{\partial}{\partial s_2}) = (0, c_2'(s_2)).$$

Προφανώς η f είναι εμβάπτιση της οποίας η επαγόμενη μετρική είναι

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = ds_1^2 + ds_2^2.$$

Τα διανυσματικά πεδία

$$\xi_1(s_1, s_2) = (n_1(s_1), 0), \quad \xi_2(s_1, s_2) = (0, n_2(s_2))$$

συνιστούν ορθομοναδιαίο πλαίσιο της κάθετης δέσμης $N_f I$, όπου n_1, n_2 είναι τα κάθετα διανύσματα των καμπυλών c_1 και c_2 αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Frenet για τις επίπεδες καμπύλες c_1, c_2 παίρνουμε

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s_1}} \xi_1 = (\dot{n}_1, 0) = (-\kappa_1 t_1, 0) = -\kappa_1 \frac{\partial}{\partial s_1}, \qquad \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s_2}} \xi_1 = (0, 0) = 0.$$

Άρα,

$$A_{\xi_1} \frac{\partial}{\partial s_1} = \kappa_1 \frac{\partial}{\partial s_1}, \quad A_{\xi_1} \frac{\partial}{\partial s_2} = 0,$$

ή

$$A_{\xi_1} \sim \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Αντίστοιχα,

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s_1}} \xi_2 = 0, \quad \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s_2}} \xi_2 = (0, \dot{n}_2) = -\kappa_2 \frac{\partial}{\partial s_2},$$

οπότε

$$A_{\xi_2} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}.$$

Άρα,

$$K = \det A_{\xi_1} + \det A_{\xi_2} = 0.$$

Επίσης,

$$N_1^f = \operatorname{span}\{\alpha_f(\tfrac{\partial}{\partial s_1}, \tfrac{\partial}{\partial s_1}),\ \alpha_f(\tfrac{\partial}{\partial s_1}, \tfrac{\partial}{\partial s_2}),\ \alpha_f(\tfrac{\partial}{\partial s_2}, \tfrac{\partial}{\partial s_2})\},$$

όπου

$$\alpha_f(\tfrac{\partial}{\partial s_1}, \tfrac{\partial}{\partial s_1}) = \langle A_{\xi_1} \tfrac{\partial}{\partial s_1}, \tfrac{\partial}{\partial s_1} \rangle \xi_1 + \langle A_{\xi_2} \tfrac{\partial}{\partial s_1}, \tfrac{\partial}{\partial s_1} \rangle \xi_2 = \kappa_1 \xi_1,$$
$$\alpha_f(\tfrac{\partial}{\partial s_1}, \tfrac{\partial}{\partial s_2}) = 0, \qquad \alpha_f(\tfrac{\partial}{\partial s_2}, \tfrac{\partial}{\partial s_2}) = \kappa_2 \xi_2.$$

Αφού $\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s_1}} \xi_1 = -\kappa_1 \frac{\partial}{\partial s_1}$, *από την εξίσωση Weingarten*

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s_1}} \xi_1 = -df(A_{\xi_1} \tfrac{\partial}{\partial s_1}) + \nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial s_1}} \xi_1$$

έχουμε ότι $\nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial s_1}} \xi_1 = 0$. *Αντίστοιχα,* $\nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial s_2}} \xi_1 = 0$.
Άρα, $\nabla^{\perp}_X \xi_1 = 0$ *για κάθε* $X \in df(T_{(s_1,s_2)} I)$. *Άρα υπάρχει τέτοιο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που να είναι ιδιάζον και παράλληλο στην κάθετη δέσμη.*

Είναι προφανές ότι αν οι καμπύλες c_1, c_2 *είναι κλειστές καμπύλες, τότε η εμβάπτιση* f *επάγει μια ισομετρική εμβάπτιση του ισόπεδου τόρου* $S^1 \times S^1$ *στον Ευκλείδειο χώρο* $\mathbb{R}^4$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.0.2. Έστω $e_3 \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$ το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο της f το οποίο είναι ιδιάζον, δηλαδή $\det A_3 = 0$, και παράλληλο στην κάθετη δέσμη, δηλαδή $\nabla^{\perp}_X e_3 = 0$ για όλα τα διανυσματικά πεδία $X \in \mathfrak{X}(M)$. Επιλέγουμε τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{e_1, e_2\}$ του πολυπτύγματος M με αντίστοιχο δυϊκό πλαίσιο $\{\omega_1, \omega_2\}$. Τότε το $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ είναι ορθομοναδιαίο πλαίσιο κατά μήκος της, για το οποίο ισχύουν οι εξισώσεις Cartan (2.11) και (2.12) της Παραγράφου 2.6. Προφανώς,

$$\omega_{34}(X) = \langle \nabla^{\perp}_X e_3, e_4 \rangle = 0,$$

για κάθε $X \in \mathfrak{X}(M)$, οπότε $\omega_{34} = 0$. Άρα $K_n = 0$.

Υποθέτουμε ότι τα διανυσματικά πεδία e_1, e_2 είναι τα κοινά ιδιοδιανύσματα όλων των τελεστών σχήματος και έστω κ_1, κ_2 να είναι οι κύριες καμπυλότητες στη διεύθυνση e_3 και λ_1, λ_2 οι αντίστοιχες κύριες καμπυλότητες στην διεύθυνση e_4. Από υπόθεση έχουμε

$$\kappa_1 \kappa_2 = 0.$$

Επιπλέον από υπόθεση και από την Πρόταση 2.6.1 ισχύει

$$K = \det A_3 + \det A_4 = 0.$$

Άρα

$$\lambda_1 \lambda_2 = 0.$$

Ισχυριζόμαστε ότι δεν υπάρχει σημείο $x \in M$ τέτοιο ώστε $\kappa_1(x) = \kappa_2(x) = 0$. Πράγματι, αν υπήρχε τέτοιο x, τότε $A_3(x) = 0$, οπότε

$$\alpha_f(v, w) = \langle A_4 v, w \rangle e_4 \in \operatorname{span}\{e_4(x)\},$$

για κάθε $v, w \in T_x M$. Άρα $\dim N_1^f(x) \leq 1$, το οποίο είναι άτοπο.

Έστω $\kappa_1 \neq 0$ σε ένα ανοιχτό υποσύνολο U του πολυπτύγματος M. Τότε $\kappa_2 = 0$ στο σύνολο U. Επιπλέον, $\lambda_2(x) \neq 0$. Πράγματι, αν $\lambda_2(x) = 0$ θα είχαμε $\alpha_f(e_2, e_2) = 0$ το οποίο θα αντιφάσκει με την υπόθεση $\dim N_1^f = 2$. Θέτουμε $\kappa = \kappa_1 \neq 0$ και $\lambda = \lambda_2 \neq 0$. Γνωρίζουμε ότι

$$\omega_{13} = \omega_{13}(e_1)\omega_1 + \omega_{13}(e_2)\omega_2 = \langle A_3 e_1, e_1 \rangle \omega_1 + \langle A_3 e_1, e_2 \rangle \omega_2 = \kappa \omega_1.$$

Όμοια,

$$\omega_{23} = 0, \quad \omega_{14} = 0, \quad \omega_{24} = \lambda \omega_2.$$

Τότε από την εξίσωση Cartan (2.12) έχουμε

$$d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23} + \omega_{14} \wedge \omega_{43} = 0.$$

και

$$d\omega_{24} = \omega_{21} \wedge \omega_{14} + \omega_{23} \wedge \omega_{34}.$$

Άρα, από το Λήμμα Poincaré 2.2.8 υπάρχουν τοπικές συναρτήσεις u_1, u_2 τέτοιες ώστε

$$du_1 = \omega_{13} = \kappa \omega_1, \qquad du_2 = \omega_{24} = \lambda \omega_2. \tag{5.24}$$

Επειδή $du_1 \wedge du_2 \neq 0$, εισάγουμε σύστημα συντεταγμένων με συναρτήσεις συντεταγμένων τις u_1, u_2. Θέτουμε

$$e_1 = \alpha \frac{\partial}{\partial u_1} + \beta \frac{\partial}{\partial u_2},$$

έχουμε

$$1 = \omega_1(e_1) = \frac{1}{\kappa} du_1(e_1) = \frac{\alpha}{\kappa}$$

και

$$0 = \omega_2(e_1) = \frac{1}{\lambda} du_2(e_1) = \frac{\beta}{\lambda}.$$

Οπότε

$$e_1 = \kappa \frac{\partial}{\partial u_1}.$$

Όμοια βρίσκουμε

$$e_2 = \lambda \frac{\partial}{\partial u_2}.$$

Κάνοντας χρήση της εξίσωσης Cartan (2.12) υπολογίζουμε

$$0 = d\omega_{14} = \omega_{12} \wedge \omega_{24} + \omega_{13} \wedge \omega_{34} = \lambda \omega_{12} \wedge \omega_2,$$

$$0 = d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13} + \omega_{24} \wedge \omega_{43} = -\kappa \omega_{12} \wedge \omega_1.$$

Επομένως, $\omega_{12} = 0$. Επειδή

$$\omega_{12}(X) = \langle \nabla_X e_1, e_2 \rangle, \quad X \in \mathfrak{X}(M),$$

τα διανυσματικά πεδία e_1, e_2 είναι παράλληλα ως προς τη συνοχή Levi-Civita του πολυπτύγματος M. Λαμβάνοντας τις εξωτερικές παραγώγους των μορφών στη σχέση (5.24) παίρνουμε

$$0 = d\kappa \wedge \omega_1 + \kappa \omega_{21} \wedge \omega_2 = d\kappa \wedge \omega_1 = d\kappa \wedge \big(\frac{du_1}{\kappa}\big),$$

$$0 = d\lambda \wedge \omega_2 + \lambda \omega_{21} \wedge \omega_1 = d\lambda \wedge \omega_2 = d\lambda \wedge \big(\frac{du_2}{\lambda}\big).$$

Τούτο σημαίνει ότι η συνάρτηση κ εξαρτάται μόνο από τη παράμετρο u_1 και η συνάρτηση λ μόνο από τη παράμετρο u_2.

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο θα δείξουμε ότι οι εικόνες κάτω από την εμβάπτιση f των ολοκληρωτικών καμπυλών του διανυσματικού πεδίου e_1 είναι επίπεδες και γεωμετρικώς ισότιμες καμπύλες του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^4$. Από υπόθεση έχουμε ότι $\alpha_f(e_1, e_2) = 0$ και $A_4 e_1 = 0$, και επειδή τα e_2, e_4 είναι παράλληλα διανυσματικά πεδία του πολυπτύγματος M και της κάθετης δέσμης $N_f M$ αντίστοιχα από τύπους Gauss (2.1) και Weingarten (2.3) έχουμε

$$\tilde{\nabla}_{e_1} df(e_2) = df(\nabla_{e_1} e_2) + \alpha_f(e_1, e_2) = 0, \quad \tilde{\nabla}_{e_1} e_4 = -df(A_4 e_1) + \nabla^{\perp}_{e_1} e_4 = 0.$$

Οπότε τα διανυσματικά πεδία $df(e_2), e_4 \in \mathfrak{X}(f)$ είναι παράλληλα στον $\mathbb{R}^4$ κατά μήκος των e_1-ολοκληρωτικών καμπυλών. Αυτό σημαίνει ότι κάθε e_1-ολοκληρωτική καμπύλη είναι κάθετη σε ένα σταθερό επίπεδο Π το οποίο παράγεται από τα $df(e_2), e_4$ κατά μήκος αυτής της καμπύλης. Αφού η e_1- ολοκληρωτική καμπύλη είναι κάθετη στο επίπεδο Π, θα περιέχεται σε επίπεδο κάθετο στο Π. Άρα, οι e_1-ολοκληρωτικές καμπύλες είναι επίπεδες. Το πλαίσιο Frenet για αυτές τις καμπύλες είναι

$$t(s) = df(e_1), \quad n(s) = e_3(c(s)).$$

Από τον τύπο του Gauss έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{t}_1(s) = \tilde{\nabla}_{e_1} df(e_1)|_{c(s)} &= df(\nabla_{e_1} e_1)|_{c(s)} + \alpha_f(e_1, e_1)|_{c(s)} \\ &= \kappa(c(s))e_3(c(s)) = \kappa(c(s))n_1(c(s)). \end{aligned}$$

Άρα, η καμπυλότητα των εικόνων των ολοκληρωτικών καμπυλών του διανυσματικού πεδίου e_1 παραμένει σταθερή κατά μήκος των ολοκληρωτικών καμπυλών του διανυσματικού πεδίου e_2, διότι εξαρτάται μόνο από την παράμετρο u_1. Επομένως οι εικόνες των ολοκληρωτικών καμπυλών του διανυσματικού πεδίου e_1 είναι επίπεδες και γεωμετρικώς ισότιμες καμπύλες. Όμοια συμπεράσματα εξάγουμε για τις ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου e_2, οι οποίες είναι επίπεδες, γεωμετρικώς ισότιμες και περιέχονται σε επίπεδα κάθετα προς τα επίπεδα που περιέχονται οι εικόνες μέσω της ισομετρικής εμβάπτισης f των ολοκληρωτικών καμπυλών του διανυσματικού πεδίου e_1. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

5.4 Απόδειξη του Θεωρήματος 5.0.4

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.0.4. Έστω $x \in M$. Υποθέτουμε ότι $H(x) \neq 0$ και θέτουμε $\hat{e}_3 = \frac{H}{\|H\|}$. Διαλέγουμε ένα μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο $\hat{e}_4$ με $\langle \hat{e}_3, \hat{e}_4 \rangle = 0$. Θεωρούμε μια ορθομοναδιαία βάση (e_1, e_2) η οποία είναι ιδιοβάση όλων των τελεστών σχήματος.

Έχουμε $A_{\hat{e}_3} = \frac{1}{\|H\|} A_H$ και επειδή το διανυσματικό πεδίο H είναι ομφαλική διεύθυνση ισχύει $A_H = \lambda I$ για κάποιο λ. Επομένως,

$$A_{\hat{e}_3} = \|H\| I.$$

Επιπλέον έχουμε ότι

$$H = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A_{\hat{e}_3})\hat{e}_3 + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A_{\hat{e}_4})\hat{e}_4.$$

Επειδή
$$H = \|H\|\hat{e}_3,$$
προκύπτει ότι $\operatorname{tr} A_{\hat{e}_4} = 0$. Αφού $K = 0$ και $\det A_{\hat{e}_3} = \|H\|^2$, έχουμε $\det A_{\hat{e}_4} = -\|H\|^2$. Οπότε
$$A_{\hat{e}_4} \sim \begin{pmatrix} \pm\|H\| & 0 \\ 0 & \mp\|H\| \end{pmatrix},$$
ως προς τη βάση $\{e_1, e_2\}$ του εφαπτομένου χώρου T_xM. Επομένως,

$$\begin{aligned}
&\alpha_f(e_1, e_1) = \langle A_{\hat{e}_3}e_1, e_1\rangle\hat{e}_3 + \langle A_{\hat{e}_4}e_1, e_1\rangle\hat{e}_4 = \|H\|\hat{e}_3 \pm \|H\|\hat{e}_4 = \|H\|(\hat{e}_3 \pm \hat{e}_4),\\
&\alpha_f(e_2, e_2) = \langle A_{\hat{e}_3}e_2, e_2\rangle\hat{e}_3 + \langle A_{\hat{e}_4}e_2, e_2\rangle\hat{e}_4 = \|H\|(\hat{e}_3 \mp \hat{e}_4),\\
&\alpha_f(e_1, e_2) = 0.
\end{aligned}$$

Άρα, $\dim N_1^f(x) = 2$.

Έστω U το ανοιχτό σύνολο σημείων όπου $H \neq 0$. Εφαρμόζουμε στο σύνολο U την τοπική ανάλυση που προηγήθηκε στην εισαγωγή. Το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας είναι
$$H = \frac{1}{2}(\kappa e_3 + \lambda e_4).$$
Ισχυριζόμαστε ότι
$$\kappa^2 = \lambda^2 = 2\|H\|^2.$$
Πράγματι, επειδή
$$2H = \kappa e_3 + \lambda e_4$$
είναι
$$4\|H\|^2 = \kappa^2 + \lambda^2.$$
Επιπλέον,
$$\hat{e}_3 = \frac{H}{\|H\|} = \frac{1}{2\|H\|}(\kappa e_3 + \lambda e_4),$$
οπότε
$$A_{\hat{e}_3} = \frac{1}{2\|H\|}(\kappa A_{e_3} + \lambda A_{e_4}) \sim \begin{pmatrix} \frac{\kappa^2}{2\|H\|} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2}{2\|H\|} \end{pmatrix}.$$
Όμως
$$A_{\hat{e}_3} = \|H\|I_2,$$
άρα
$$\|H\| = \frac{\kappa^2}{2\|H\|} = \frac{\lambda^2}{2\|H\|},$$

ή ισοδύναμα

$$\kappa^2 = \lambda^2 = 2\|H\|^2.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.0.1, υπάρχει τοπικά στο U ένα σύστημα συντεταγμένων (u_1, u_2) τέτοιο ώστε

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = E(du_1^2 + du_2^2)$$

με

$$E = \frac{1}{2\|H\|^2}.$$

Από το Έξοχο Θεώρημα έχουμε για την καμπυλότητα Gauss

$$K = -\frac{1}{2E}\Big(\frac{\partial^2}{\partial u_2^2}(\log E) + \frac{\partial^2}{\partial u_1^2}(\log E)\Big) = -\frac{1}{2E}\Delta \log \|H\|^2,$$

όπου Δ είναι η Λαπλασιανή του πολυπτύγματος Riemann $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Επειδή $K = 0$ προκύπτει ότι $\Delta \log \|H\|^2 = 0$ στο σύνολο U.

Επιπλέον ισχύει

$$\Delta \log \|H\|^2 = \frac{\Delta \|H\|^2}{\|H\|^2} - \frac{\| \operatorname{grad} \|H\|^2 \|^2}{\|H\|^4}.$$

Επομένως, $\Delta \|H\|^2 \geq 0$ στο σύνολο U.

Στο σύνολο $V = M \setminus U$ έχουμε $H = 0$. Προφανώς $\Delta \|H\|^2 = 0$ στο εσωτερικό $\operatorname{int} V$ του συνόλου V, αν αυτό είναι διάφορο του κενού. Επειδή η συνάρτηση $\Delta \|H\|^2$ είναι συνεχής, έχουμε $\Delta \|H\|^2 \geq 0$ σε ολόκληρο το πολύπτυγμα M. Συνεπώς, η συνάρτηση $\|H\|^2$ είναι υφαρμονική.

Αν το πολύπτυγμα M είναι συμπαγές, από την αρχή μεγίστου συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\|H\|^2$ είναι σταθερή. Αν το πολύπτυγμα M είναι πλήρες αλλά όχι συμπαγές, επειδή είναι ισόπεδο γνωρίζουμε ότι ο καθολικός χώρος κάλυψής του είναι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένος με την συνήθη μετρική. Επομένως, το πολύπτυγμα M είναι παραβολικό. Άρα η υφαρμονική και φραγμένη συνάρτηση $\|H\|^2$ πρέπει να είναι σταθερή.

Αν $\|H\| = 0$, τότε όλοι οι τελεστές σχήματος είναι 0 και άρα η εμβάπτιση f είναι ολικά γεωδαισιακή, δηλαδή η εικόνα $f(M)$ είναι επίπεδο.

Υποθέτου ότι $\|H\| \neq 0$, δηλαδή $\kappa = \pm\lambda = c \neq 0$, όπου $c \neq 0$ είναι σταθερά. Επιπλέον, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\kappa = \lambda$. Χρησιμοποιώντας την σχέση (5.11) υπολογίζουμε

$$0 = d(du_1) = d(\kappa\omega_1) = d\kappa \wedge \omega_1 + \kappa d\omega_1 = \kappa\omega_{12} \wedge \omega_2,$$

$$0 = d(du_2) = d(\kappa\omega_2) = d\kappa \wedge \omega_2 + \kappa d\omega_2 = \kappa\omega_{21} \wedge \omega_1.$$

Επομένως $\omega_{12} = 0$ και τα διανυσματικά πεδία e_1, e_2 είναι παράλληλα ως προς τη συνοχή Levi-Civita του πολυπτύγματος M. Αφού $\omega_{13} = \kappa\omega_1$, $\omega_{23} = \omega_{14} = 0$ και $\omega_{24} = \kappa\omega_2$, έχουμε

$$0 = d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13} + \omega_{24} \wedge \omega_{43} = \kappa\omega_2 \wedge \omega_{43},$$

$$0 = d\omega_{14} = \omega_{12} \wedge \omega_{24} + \omega_{23} \wedge \omega_{34} = \kappa\omega_1 \wedge \omega_{34}.$$

Άρα $\omega_{34} = 0$. Ο πίνακας των μορφών συνοχής είναι

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa\omega_2 \\ -\kappa\omega_1 & 0 & 0 & -\kappa\omega_2 \\ 0 & \kappa\omega_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

όπου κ είναι μια μη μηδενική σταθερά. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι η εικόνα $f(M)$ είναι γινόμενο καμπυλών ακτίνας $1/|\kappa|$. □

5.5 Απόδειξη του Θεωρήματος 5.0.5

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.0.5. Θεωρούμε ένα μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο $e_3 \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$ τέτοιο ώστε $e_3(x) \in N_1^f(x)$ για κάθε σημείο $x \in M$. Θεωρούμε επίσης κάθετο διανυσματικό πεδίο $e_4 \in \mathfrak{X}^{\perp}(f)$ έτσι ώστε $\{e_3, e_4\}$ να είναι ολικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο της κάθετης δέσμης $N_f M$. Επειδή ο πρώτος κάθετος χώρος N_1^f είναι $N_1^f = \text{span}\{e_3\}$ και

$$\alpha_f(X,Y) = \langle A_3 X, y\rangle e_3 + \langle A_4 X, Y\rangle e_4,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\langle A_4 X, Y\rangle = \langle \alpha^f(X,Y), e_4\rangle = 0,$$

για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Άρα, $A_4 = 0$. Από τα παραπάνω προκύπτει

$$K_n = -\langle [A_3, A_4]e_1, e_2\rangle = 0.$$

Επίσης, επειδή $K = 0$, από την Πρόταση 2.6.1 έχουμε $\det A_3 = 0$. Έστω κ η μη μηδενική ιδιοτιμή του τελεστή σχήματος A_3. Η συνάρτηση κ είναι ολικά ορισμένη και λεία, όπως είναι το αντίστοιχο μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο $e_1 \in \mathfrak{X}(M)$ τέτοιο ώστε $A_3 e_1 = \kappa e_1$. Συμπληρώνουμε το διανυσματικό πεδίο e_1 σε ορθομοναδιαίο πλαίσιο (e_1, e_2) της εφαπτόμενης δέσμης του πολυπτύγματος M. Στο ολικό μας πλαίσιο οι μορφές συνοχής είναι

$$\omega_{13} = \omega_{13}(e_1)\omega_1 + \omega_{13}(e_2)\omega_2 = \langle \kappa e_1, e_1 \rangle \omega_1 + 0 = \kappa \omega_1,$$

$$\omega_{23} = 0, \quad \omega_{14} = 0, \quad \omega_{24} = 0.$$

Κάνοντας χρήση της εξίσωσης Cartan (2.12)

$$0 = d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13} + \omega_{24} \wedge \omega_{43} = \kappa \omega_{21} \wedge \omega_1,$$

$$0 = d\omega_{14} = \omega_{12} \wedge \omega_{24} + \omega_{13} \wedge \omega_{34} = \kappa \omega_1 \wedge \omega_{34}.$$

Αφού $\kappa \neq 0$ υπάρχουν συναρτήσεις ρ και τ ολικά ορισμένες τέτοιες ώστε

$$\omega_{12} = \rho \omega_1, \quad \omega_{34} = \tau \omega_1 \tag{5.25}$$

Θα αποδείξουμε ότι $\rho = 0$ παντού. Έστω οι συναρτήσεις $|\kappa|$ και τ να είναι η καμπυλότητα και η στρέψη μιας καμπύλης του $\mathbb{R}^3$. Από τον τύπο του Gauss (2.1) έχουμε

$$\alpha_f(e_2, e_2) = \langle A_3 e_2, e_2 \rangle e_3 = 0$$

και

$$\nabla_{e_2} e_2 = -\omega_{12}(e_2) e_1 = 0$$

αφού $\omega_{12} = 0$. Άρα οι ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου e_2 είναι ολικά γεωδαισιακές, οι οποίες ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού το πολύπτυγμα M είναι πλήρες. Επομένως,

$$\tilde{\nabla}_{e_2} df(e_2) = df(\nabla_{e_2} e_2) + \alpha_f(e_2, e_2) = 0.$$

Συνεπώς οι εικόνες, κάτω από την εμβάπτιση f, των ολοκληρωτικών καμπυλών του διανυσματικού πεδίου e_2 είναι ευθείες του $\mathbb{R}^4$. Θεωρούμε τον περιορισμό $\rho = \rho(t)$ μιας από τις ευθείες αυτές με παράμετρο το μήκος τόξου $t \in \mathbb{R}$. Λόγω της σχέσης (5.25) και της εξίσωσης Cartan (2.12), έχουμε

$$0 = d\omega_{12} = d\rho \wedge \omega_1 + \rho d\omega_1 = d\rho \wedge \omega_1 + \rho \omega_{12} \wedge \omega_2 = d\rho \wedge \omega_1 + \rho^2 \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Επειδή

$$d\rho = e_1(\rho)\omega_1 + e_2(s)\omega_2$$

τελικά έχουμε

$$0 = d\omega_1 = (-e_2(\rho) + \rho^2)\omega_1 \wedge \omega_2,$$

ή ισοδύναμα
$$-e_2(\rho) + \rho^2 = 0.$$
Επιπλέον
$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho \circ \gamma}{dt} = d\rho(\gamma'(t)) = d\rho(e_2) = e_2(\rho).$$
Άρα
$$-\frac{d\rho}{dt} + \rho^2 = 0. \tag{5.26}$$
Υποθέτουμε $\rho(0) \neq 0$. Έστω (a, b) το μέγιστο διάστημα το οποίο περιέχει το 0 όπου $\rho(t) \neq 0$, για κάθε $t \in (a, b)$. Στο διάστημα (a, b) η διαφορική εξίσωση (5.26) έχει τη λύση
$$\rho(t) = \big(\frac{1}{\rho(0)} - t\big)^{-1}. \tag{5.27}$$

Αν $b < +\infty$, από τη συνέχεια της συνάρτησης ρ και τη μεγιστικότητα του (a, b) θα είχαμε
$$0 = \lim_{t \to \beta -} \rho(t) = \rho(b-) = \rho(b).$$
Αλλά
$$0 = \rho(b-) = \big(\frac{1}{\rho(0)} - b\big)^{-1} \neq 0,$$
το οποίο είναι άτοπο. Άρα $b = +\infty$. Εργαζόμενοι ομοίως βρίσκουμε ότι $a = -\infty$, δηλαδή $(a, b) = \mathbb{R}$. Επομένως $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ και $\rho(t) \neq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αυτό αντιφάσκει με την (5.27) διότι η συνάρτηση ρ δεν ορίζεται για $t = \frac{1}{\rho(0)}$.

Άρα, $\rho = 0$ πάνω σε κάθε ολοκληρωτική καμπύλη του διανυσματικού πεδίου $e_2 \in \mathfrak{X}(M)$. Επομένως,
$$\omega_{12} = 0.$$
Από την εξίσωση Cartan (2.11) λαμβάνουμε
$$d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 = 0, \quad d\omega_2 = -\omega_{12} \wedge \omega_1 = 0.$$
Από το Λήμμα Poincaré 2.2.8 υπάρχουν τοπικά συναρτήσεις u_1, u_2 τέτοιες ώστε
$$\omega_1 = du_1, \quad \omega_2 = du_2.$$
Επειδή $du_1 \wedge du_2 \neq 0$, μπορούμε να θεωρήσουμε σύστημα συντεταγμένων με αντίστοιχες συντεταγμένες τις συναρτήσεις u_1, u_2. Από τις εξισώσεις (5.25) και την εξίσωση του Cartan (2.12) έχουμε
$$d\kappa \wedge \omega_1 = d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23} + \omega_{14} \wedge \omega_{43} = 0,$$

$$d\tau \wedge \omega_1 = d\omega_{34} = \omega_{31} \wedge \omega_{14} + \omega_{32} \wedge \omega_{24} = 0.$$

Επομένως, οι συναρτήσεις κ, τ εξαρτώνται μόνο από το u_1. Από τον τύπο του Gauss (2.1) έχουμε

$$\tilde{\nabla}_{e_1} df(e_2) = df(\nabla_{e_1} e_2) + \alpha_f(e_1, e_2).$$

Τούτο σημαίνει ότι οι εικόνες των ολοκληρωτικών καμπυλών του διανυσματικού πεδίου e_2, οι οποίες είναι ευθείες του $\mathbb{R}^4$ είναι παράλληλες προς ένα σταθερό διάνυσμα $e \in \mathbb{R}^4$. Επιπλέον, οι εικόνες μέσω της εμβάπτισης f των ολοκληρωτικών καμπυλών του διανυσματικού πεδίου e_1 περιέχονται σε τριδιάστατα ολικά γεωδαισιακά πολυπτύγματα του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^4$ κάθετα στο διάνυσμα e.

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{e_1} df(e_1) &= df(\nabla_{e_1} e_1) + \alpha_f(e_1, e_1) = \langle A_3 e_1, e_1 \rangle e_3 = \kappa e_3, \\
\tilde{\nabla}_{e_1} e_3 &= -df(A_3 e_1) + \nabla^{\perp}_{e_1} e_3 = -\kappa df(e_1) + \omega_{34}(e_1) e_4 = -\kappa df(e_1) + \tau e_4, \\
\tilde{\nabla}_{e_1} e_4 &= -df(A_4 e_1) + \nabla^{\perp}_{e_1} e_4 = -\omega_{34}(e_1) e_4 = -\tau e_4.
\end{aligned}$$

Από αυτές τις σχέσεις προκύπτει ότι το ορθομοναδιαίο πλαίσιο $\{df(e_1), e_3, e_4\}$ είναι το πλαίσιο Frenet των εικόνων μέσω της εμβάπτισης f των ολοκληρωτικών καμπυλών του διανυσματικού πεδίου e_2 με καμπυλότητα και στρέψη κ και τ. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Βιβλιογραφια

[1] Yu. D. Burago and V. A. Zalgaller (Eds.), *Geometry III, Theory of Surfaces*, Springer-Verlag, 1992.

[2] S.S. Chern, *La géométrie des sous-variétés d'un espace euclidien à plusieurs dimensions*, Enseignement Math. **40** (1951-1954), 26-46.

[3] M. Dajczer and R. Tojeiro, *Submanifold theory beyond an introduction*, Universitext, Springer, New York, 2019.

[4] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, 2nd ed., Mathematics. Theory and Applications, Birkhäuser, 1992.

[5] Th. Hasanis, D. Koutroufiotis, and P. Pamfilos, *Surfaces of* E^4 *satisfying certain restrictions on their normal bundle*, Trans. Amer. Math. Soc. **319** (1990), 329-347.

[6] Δ. Κουτρουφιώτης, *Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 1994.

[7] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, 3rd ed., Vol. 4, Publish or Perish, Inc., 1999.