



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΝΗΠΙΑΓΩΓΩΝ**



Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

«Στρατηγικές Προσέγγισης και Διαχείρισης Επαναλαμβανόμενων
και Αναπτυσσόμενων Μοτίβων από Μαθητές και Μαθήτριες Δ΄
Δημοτικού:
Μια Διερευνητική Μελέτη»

Αηδόνη Χριστιάνα Θεοδώρα

A.M.:202

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Βαμβακούση Ξανθή

Ιωάννινα, Απρίλιος, 2026

Η συλλογή και η επεξεργασία των δεδομένων προσωπικού χαρακτήρα που υποβάλλονται πραγματοποιείται σύμφωνα με τα οριζόμενα στις διατάξεις του Ν.4624/19 και του Κανονισμού (ΕΕ)2016/2019. Το Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων συλλέγει και επεξεργάζεται τα δεδομένα προσωπικού χαρακτήρα αποκλειστικά στο πλαίσιο της υλοποίησης του σκοπού της παρούσας διαδικασίας. Για το χρονικό διάστημα που τα προσωπικά δεδομένα θα παραμείνουν στη διάθεση του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων το υποκείμενο έχει τη δυνατότητα να ασκήσει τα δικαιώματά του σύμφωνα με τους όρους του Γενικού Κανονισμού Προστασίας Δεδομένων Προσωπικού Χαρακτήρα 2016/679 (Ε.Ε.) και τα οριζόμενα στα άρθρα 34 και 35 Ν. 4624/2019. Υπεύθυνη Προσωπικών Δεδομένων του Ιδρύματος είναι η κα. Σταυρούλα Σταθαρά (email: dpo@uoi.gr).



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΝΗΠΙΑΓΩΓΩΝ**



**«Στρατηγικές Προσέγγισης και Διαχείρισης Επαναλαμβανόμενων
και Αναπτυσσόμενων Μοτίβων από Μαθητές και Μαθήτριες Δ΄
Δημοτικού:
Μια Διερευνητική Μελέτη»**

Αηδόνη Χριστιάνα Θεοδώρα

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια
Βαμβακούση Ξανθή, Καθηγήτρια Π.Τ.Ν.
Ιωαννίνων

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή:

1. **Βαμβακούση Ξανθή, Καθηγήτρια**
Π.Τ.Ν. Ιωαννίνων
2. **Αθηνά Κορνελάκη, Επικ. Καθηγήτρια**
Π.Τ.Ν. Ιωαννίνων
3. **Ελένη Κολοκούρη, Επικ. Καθηγήτρια**
Π.Τ.Ν. Ιωαννίνων

Ιωάννινα, Απρίλιος, 2026

Ευχαριστίες

Η εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελεί καρπό μιας ουσιαστικής και γόνιμης συνεργασίας μου με την επιβλέπουσα καθηγήτρια, κα. Ξένια Βαμβακούση. Αισθάνομαι την ανάγκη να την ευχαριστήσω θερμά, τόσο για την τιμή που μου έκανε να αναλάβει την επίβλεψη της εργασίας μου, όσο και για την αμέριστη και πολύτιμη υποστήριξή της, καθ' όλη τη διάρκεια της συγγραφής της.

Η συνεχής ενθάρρυνση, η καθοδήγηση και η εμπιστοσύνη που μου έδειξε, δημιούργησαν ιδανικές συνθήκες συνεργασίας, καλλιέργησαν το ενδιαφέρον μου να μελετήσω σε βάθος το θέμα και με γέμισαν θέληση, πίστη και προσμονή για την ολοκλήρωσή της. Είμαι πραγματικά χαρούμενη που βρέθηκα κοντά της, που δέχτηκε να με καθοδηγήσει και μοιράστηκε απλόχερα μαζί μου τις γνώσεις, το πνεύμα και την εμπειρία της.

Η συμμετοχή μου στο συγκεκριμένο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων αποτέλεσε μια σπουδαία διαδρομή για την προσωπική μου εξέλιξη και την αυτοβελτίωσή μου ως εκπαιδευτικός. Οι δεξιότητες και οι γνώσεις που αποκόμισα από τη συνολική μου εμπειρία, μου πρόσφεραν πολύτιμα εφόδια και με μύησαν σε έναν πρωτόγνωρο για μένα κόσμο, αυτόν της έρευνας.

Βαθιά ευγνωμοσύνη θα ήθελα επίσης να εκφράσω προς όλους τους καθηγητές του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Επιστήμες της Εκπαίδευσης και της Αγωγής: Διεπιστημονικές Προσεγγίσεις στην Προσχολική και Πρώτη Σχολική Ηλικία». Η συμβολή κάθε μαθήματος και η βοήθεια κάθε διδάσκοντος σε γνωστικό και παιδαγωγικό επίπεδο, με οδήγησαν σταδιακά στην επίτευξη του στόχου μου και την πραγμάτωση αυτού του κύκλου σπουδών.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω θερμά τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, Αθηνά Κορνελάκη και Ελένη Κολοκούρη για την προθυμία τους να συμβάλλουν και να συμμετέχουν στη διαδικασία αξιολόγησης της παρούσας εργασίας, καθώς και για τον πολύτιμο χρόνο που αφιέρωσαν στη μελέτη της.

Περίληψη

Η ενασχόληση με τα μοτίβα θεωρείται σημαντική για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και, ιδιαίτερα, της ικανότητας για γενίκευση. Η εύρεση του επόμενου, «κοντινών» και «μακρινών» όρων ενός μοτίβου τεκμηριώνει ικανότητες γενίκευσης διαφορετικών επιπέδων.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να διερευνήσει αν και με ποιες στρατηγικές παιδιά Δ' Δημοτικού προσδιορίζουν τον επόμενο, «κοντινούς» και «μακρινούς» όρους επαναλαμβανόμενων και αναπτυσσόμενων μοτίβων. Για το σκοπό αυτό, σχεδιάστηκε ένα εργαλείο με σχετικά έργα. Η συλλογή δεδομένων πραγματοποιήθηκε με τη μέθοδο της βασισμένης σε έργα συνέντευξης, με συμμετοχή 15 παιδιών Δ' Δημοτικού που εξετάστηκαν ατομικά. Τα παιδιά κλήθηκαν να «σκεφτούν φωναχτά» κατά την επίλυση των έργων και η διαδικασία βιντεοσκοπήθηκε. Εξετάστηκαν η επίδοση των παιδιών και οι στρατηγικές που εφάρμοσαν.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η εύρεση «μακρινού» όρου ήταν το πιο απαιτητικό ζητούμενο, όπως αναμενόταν με βάση τη βιβλιογραφία. Ένα μη αναμενόμενο εύρημα ήταν ότι η επίδοση ήταν πιο υψηλή στα αναπτυσσόμενα, σε σχέση με τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα. Ο τύπος του μοτίβου επηρέασε την επίδοση και τις στρατηγικές των παιδιών, τόσο για τα επαναλαμβανόμενα, όσο και για τα αναπτυσσόμενα μοτίβα. Ανιχνεύτηκε μια ποικιλία στρατηγικών, από στοιχειώδεις μέχρι προηγμένες, με ενδιάμεσες ορθές αλλά και λανθασμένες στρατηγικές. Τέλος, εντοπίστηκαν διαφορές μεταξύ των παιδιών, τόσο ως προς την επίδοση (πιο έντονα στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα), όσο και ως προς τις στρατηγικές που εφάρμοσαν. Συνολικά, η ικανότητα εύρεσης μακρινών όρων ήταν σχετικά περιορισμένη και εξαρτώμενη από τα χαρακτηριστικά των δεδομένων μοτίβων.

Τα αποτελέσματα υπογραμμίζουν την ανάγκη συστηματικής και ποιοτικής διδασκαλίας των μοτίβων στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και αξιοποίησής τους ως μέσο ανάπτυξης ικανοτήτων γενίκευσης.

Λέξεις – Κλειδιά

Επαναλαμβανόμενα μοτίβα, αναπτυσσόμενα μοτίβα, στρατηγικές, πρωτοβάθμια εκπαίδευση

«Fourth Grade Students’ Strategies for Repeating and Growing Patterns: An Exploratory Study»

Abstract

Patterning is considered important for the development of mathematical thinking, particularly for the development of generalization ability. Identifying the next term, “near,” and “far” terms of a pattern reflects different levels of generalization ability.

The aim of this study is to investigate whether, and through which strategies, fourth-grade students determine the next term, “near,” and “far” terms of repeating and growing patterns. To this end, an instrument consisting of relevant tasks was designed. Data were collected using a task-based interview method, with the participation of 15 fourth-grade students who were individually assessed. The students were asked to “think aloud” while solving the tasks, and the process was video-recorded. Both students’ performance and the strategies they employed were examined.

The results showed that identifying a “far” term was the most demanding task, as expected based on the literature. An unexpected finding was that performance was higher in growing patterns compared to repeating patterns. The type of pattern influenced both students’ performance and the strategies they used, for repeating as well as growing patterns. A variety of strategies was identified, ranging from elementary to advanced, including intermediate correct as well as incorrect strategies. Finally, differences were observed among students both in terms of performance (more pronounced in repeating patterns) and in the strategies they employed. Overall, the ability to identify far terms was relatively limited and dependent on the characteristics of the given patterns.

The findings highlight the need for systematic and high-quality teaching of patterns in elementary education as a means of developing generalization abilities.

Keywords

repeating patterns, growing patterns, patterning strategies, elementary education

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	2
Abstract	3
Περιεχόμενα	5
Κατάλογος Εικόνων	7
Κατάλογος Πινάκων	8
Συντομογραφίες & Ακρωνύμια.....	9
1. Θεωρητικό μέρος	10
1.1 Εισαγωγή.....	10
1.2 Θεωρητική υπόσταση της έννοιας του μοτίβου.....	11
1.2.1 Προσδιορισμός του όρου «Μαθηματικό Μοτίβο»	11
1.2.2 Η έννοια του μοτίβου στην μαθηματική εκπαίδευση	12
1.3 Διαφορετικές μορφές εμφάνισης των μοτίβων	14
1.4 Βασική διάκριση σε επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα	16
1.4.1. Επαναλαμβανόμενα μοτίβα και η διδακτική σημασία τους.....	16
1.4.2. Αναπτυσσόμενα μοτίβα και η διδακτική σημασία τους	18
1.5 Μοτίβα και Αλγεβρική σκέψη	19
1.5.1 Ο ρόλος των μοτίβων στην καλλιέργεια αλγεβρικής σκέψης.....	19
1.5.2 Εμπειρικές μελέτες και ερευνητικά δεδομένα για τη συμβολή των μοτίβων στη διαμόρφωση αλγεβρικής λογικής.....	20
1.6 Μοτίβα και Έργα διερεύνησης του πεδίου	22
1.6.1 Έργα μοτίβων ως εργαλεία διερεύνησης της γνωστικής εξέλιξης (από την αναγνώριση στη γενίκευση)	22
1.6.2 Έργα μοτίβων ως εργαλεία αξιολόγησης της γνωστικής εξέλιξης (από την αναγνώριση στην γενίκευση)	23
Μοτίβα και Στρατηγικές προσέγγισης των παιδιών	29
1.7.1 Η μαθηματική διάσταση της έννοιας της στρατηγικής.....	29
1.7.2 Στρατηγικές στο πεδίο των μοτίβων	30
1.7.3 Γενικές Κατηγορίες Στρατηγικών Προσέγγισης Μοτίβων	31
1.7.4 Ειδικές στρατηγικές προσέγγισης μοτίβων	33
1.7.5 Δυσκολίες και περιορισμοί στη διαχείριση των μοτίβων	37
1.7.6 Εμπειρικά ερευνητικά δεδομένα για τις στρατηγικές προσέγγισης μοτίβων	38
2. Εμπειρικό μέρος.....	41
2.1 Σκοπός της έρευνας	41
2.2 Ερευνητικά ερωτήματα.....	41
2.3 Μεθοδολογία της έρευνας	42
2.3.1 Ερευνητικός σχεδιασμός.....	42
2.3.2 Συμμετέχοντες.....	43
2.3.3 Ερευνητικά εργαλεία	43
2.3.4 Διαδικασία συλλογής δεδομένων	47
2.3.5 Διαδικασία ανάλυσης δεδομένων	48
3. Αποτελέσματα.....	49
3.1 Επαναλαμβανόμενα μοτίβα	49
3.1.1 Επίδοση	49
3.1.2 Στρατηγικές προσέγγισης	50
Α «Επόμενος όρος»	50

B. «Κοντινός όρος»	53
Γ. «Μακρινός όρος»	57
3.2 Αναπτυσσόμενα μοτίβα	61
3.2.1 Επίδοση	61
3.2.2 Στρατηγικές προσέγγισης	63
A. «Επόμενος όρος»	63
B. «Κοντινός όρος»	66
Γ. «Μακρινός όρος»	71
3.3 Επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα μοτίβα: Προφίλ των παιδιών	77
4. Συζήτηση- Συμπεράσματα	82
4.1 Επαναλαμβανόμενα μοτίβα	82
4.2 Αναπτυσσόμενα μοτίβα	84
4.3 Ο ρόλος του τύπου μοτίβου	85
4.4. Προφίλ των παιδιών	87
4.4 Περιορισμοί και προτάσεις	88
Βιβλιογραφία	89
Παράρτημα Α: Ερευνητικό εργαλείο -Έργα	92

Κατάλογος Εικόνων

Εικόνα 1. Ενδεικτικό παράδειγμα έργου αναγνώρισης επαναλαμβανόμενου μοτίβου (από τη μελέτη των Hutchinson και Pournara, 2011, σελ.100). Τα παιδιά καλούνται να παρατηρήσουν τη διάταξη των στοιχείων και να αναγνωρίσουν την ύπαρξη κανονικότητας, χωρίς να απαιτείται επέκταση, συμπλήρωση ή ρητή διατύπωση κανόνα.	24
Εικόνα 2. Ενδεικτικό παράδειγμα έργου επέκτασης μοτίβου από τη μελέτη των Fyfe et al. (2017, σελ. 3), όπου τα παιδιά καλούνται να προβλέψουν το επόμενο στοιχείο σε ακολουθίες που οργανώνονται ταυτόχρονα ως προς δύο διαστάσεις (σχήμα και μέγεθος). Τα έργα αυτά καθιστούν ορατό τον βαθμό στον οποίο τα παιδιά μπορούν να συντονίσουν περισσότερες από μία μεταβαλλόμενες ιδιότητες κατά την εφαρμογή της κανονικότητας.	25
Εικόνα 3. Ενδεικτικό παράδειγμα έργου εντοπισμού και περιγραφής κανονικότητας σε αναπτυσσόμενο μοτίβο (από τη μελέτη των Pang και Sunwoo, 2022, σελ.13). Τα παιδιά καλούνται να παρατηρήσουν τη διαδοχική μεταβολή της δομής του σχήματος και να περιγράψουν τον κανόνα ανάπτυξης (π.χ. την προσθήκη ενός στοιχείου σε κάθε βήμα), χωρίς να απαιτείται ακόμη η διατύπωση γενικού κανόνα θέσης-τιμής. Το έργο καθιστά ορατή τη μετάβαση από επιφανειακές και αναδρομικές προσεγγίσεις προς δομικές στρατηγικές και λειτουργεί ως προπαρασκευαστικό στάδιο για τη γενίκευση.	27
Εικόνα 4. Ενδεικτικό παράδειγμα έργου γενίκευσης αποτελεί το “Eyes and Tails”(από Blanton και Karut ,2004, σελ. 2-137), όπου η εικονική αναπαράσταση ενισχύει τη συσχέτιση μεταβλητών και προάγει τη μετάβαση από αναδρομικές σε συναρτησιακές στρατηγικές.	28
Εικόνα 5. Επαναλαμβανόμενο μοτίβο της μορφής ABΓABΓ (Έργο 1).....	44
Εικόνα 6. Επαναλαμβανόμενο μοτίβο της μορφής ABAB (Έργο 2).....	44
Εικόνα 7. Επαναλαμβανόμενο μοτίβο μορφής ABBABB (Έργο 3).....	45
Εικόνα 8. Αναπτυσσόμενο μοτίβο (2n-1) Έργου 4 (Από Warren & Cooper, 2008, σ. 32)..	45
Εικόνα 9. Αναπτυσσόμενο μοτίβο (n) Έργου 5	46
Εικόνα 10. Αναπτυσσόμενο μοτίβο (2n+2) Έργου 6.....	46
Εικόνα 11. Λανθασμένη συμπλήρωση του 4 ^{ου} δεδομένου όρου για την απευθείας αναπαράσταση του (κοντινού όρου)10 ^{ου} (Αννέτα, E4.2)	69

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1. Επίδοση ανά παιδί και ανά ερώτημα στα έργα των επαναλαμβανόμενων μοτίβων.	49
Πίνακας 2. Κατανομή των παιδιών στις κατηγορίες στρατηγικών προσέγγισης του επόμενου όρου στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα.	52
Πίνακας 3. Κατανομή των παιδιών στις κατηγορίες στρατηγικών προσέγγισης του κοντινού όρου στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα.	56
Πίνακας 4. Κατανομή των παιδιών στις κατηγορίες στρατηγικών προσέγγισης του μακρινού όρου στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα.	60
Πίνακας 5. Επίδοση συμμετεχόντων στα έργα των αναπτυσσόμενων μοτίβων	62
Πίνακας 6. Κατανομή των παιδιών στις κατηγορίες στρατηγικών προσέγγισης του επόμενου όρου στα αναπτυσσόμενα μοτίβα.	65
Πίνακας 7. Κατανομή των παιδιών στις κατηγορίες στρατηγικών προσέγγισης του κοντινού όρου (10 ^{ος} όρος) στα αναπτυσσόμενα μοτίβα.	70
Πίνακας 8. Κατανομή των παιδιών στις κατηγορίες στρατηγικών προσέγγισης του μακρινού όρου (31 ^{ος} όρος) στα αναπτυσσόμενα μοτίβα.....	75
Πίνακας 9. Κατανομή των παιδιών ανάλογα με τη συνολική τους επίδοση στα επαναλαμβανόμενα και τα αναπτυσσόμενα μοτίβα.....	77

Συντομογραφίες & Ακρωνύμια

PASA: Pattern and Structure Assessment

PASMAP: Pattern and Structure Mathematics Awareness Program

1. Θεωρητικό μέρος

1.1 Εισαγωγή

Η διδασκαλία των Μαθηματικών κατά την πρωτοβάθμια εκπαίδευση αποτελεί θεμελιώδη συνιστώσα της μαθησιακής διαδικασίας, καθώς καλλιεργεί βασικές νοητικές λειτουργίες, δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων και λογικές δομές που συνοδεύουν τα παιδιά σε όλη τη μαθηματική τους πορεία. Ανάμεσα στις έννοιες που υποστηρίζουν ουσιαστικά αυτή την ανάπτυξη, τα μαθηματικά μοτίβα κατέχουν εξέχουσα θέση. Αποτελούν όχι μόνο εργαλείο για την ενίσχυση της μαθηματικής σκέψης, αλλά και πυλώνα για τη μετάβαση από την αριθμητική στην αλγεβρική κατανόηση (Warren & Cooper, 2008).

Η έννοια του μοτίβου δεν ταυτίζεται με μια απλή επανάληψη ή την ακολουθία στοιχείων· πρόκειται για μια σύνθετη μαθησιακή διεργασία που περιλαμβάνει την αναγνώριση κανονικοτήτων, την αναζήτηση σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων και την πρόβλεψη της εξέλιξης μιας ακολουθίας. Οι Vale και Pimentel (2009) επισημαίνουν ότι τα μοτίβα διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στη γεφύρωση αριθμητικών και αλγεβρικών εννοιών, υποστηρίζοντας δομημένες μαθηματικές σκέψεις και διαδικασίες γενίκευσης.

Η διεθνής βιβλιογραφία έχει αναδείξει σημαντικά την αξία των μοτίβων ως βασικού μαθηματικού αντικειμένου. Μελέτες δείχνουν ότι ακόμη και παιδιά προσχολικής ηλικίας διαθέτουν την ικανότητα αναγνώρισης, επέκτασης και αναπαράστασης μοτίβων (Papic & Mulligan, 2007). Παρεμβάσεις όπως το πρόγραμμα PSMAP (Mulligan, Oslington & English, 2020) καταδεικνύουν πως η συστηματική και οργανωμένη έκθεση των παιδιών σε δραστηριότητες μοτίβων ενισχύει σημαντικά τη μαθηματική ωριμότητα και συμβάλλει στην ανάπτυξη πρόωπης αλγεβρικής σκέψης.

Σχετικές έρευνες, όπως αυτές των Blanton et al. (2019), επισημαίνουν ότι η εργασία με ακολουθίες και μοτίβα επιταχύνει την ανάπτυξη στρατηγικών δομικής ανάλυσης και ενισχύει την ετοιμότητα των παιδιών για αλγεβρική συλλογιστική. Παρόμοια ευρήματα παρουσιάζουν οι Fyfe et al. (2017) και οι Pang & Sunwoo (2022), οι οποίοι συσχετίζουν την ενασχόληση με μοτίβα –κυρίως αναπτυσσόμενα– με τη βελτίωση της συναρτησιακής σκέψης και της ικανότητας κατανόησης αναλογιών στις μαθηματικές σχέσεις..

Παρά τον πλούτο της διεθνούς έρευνας, η ελληνική βιβλιογραφία παραμένει περιορισμένη ως προς τη μελέτη των στρατηγικών που επιστρατεύουν τα παιδιά όταν εργάζονται με μοτίβα. Η έλλειψη εμπειρικών δεδομένων καθιστά αναγκαία τη συστηματική διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο τα παιδιά αναγνωρίζουν, περιγράφουν και επεξεργάζονται

επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα μοτίβα. Εφόσον τα μοτίβα αποτελούν αφετηρία για την ανάπτυξη αναλογικής σκέψης και κατανόησης συναρτησιακών σχέσεων και αλγεβρικών δομών, η κατανόηση των μαθητικών στρατηγικών είναι κρίσιμη για τον σχεδιασμό αποτελεσματικών διδακτικών παρεμβάσεων.

Η παρούσα ερευνητική εργασία επιδιώκει να συμβάλει στον εμπλουτισμό της ελληνικής βιβλιογραφίας, διερευνώντας τον τρόπο με τον οποίο παιδιά Δ΄ Δημοτικού προσεγγίζουν και διαχειρίζονται δραστηριότητες μοτίβων. Το ενδιαφέρον εστιάζεται στις στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα παιδιά, στις δυσκολίες που αναδύονται και στις νοητικές διαδρομές που ακολουθούν.

1.2 Θεωρητική υπόσταση της έννοιας του μοτίβου

1.2.1 Προσδιορισμός του όρου «Μαθηματικό Μοτίβο»

Στη διεθνή βιβλιογραφία δεν αποδίδεται ένας ενιαίος και απόλυτα καθορισμένος ορισμός για τον όρο «μαθηματικό μοτίβο». Όπως επισημαίνει και ο Κυλάφης (2009) η αναζήτηση ενός ακριβούς ορισμού αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την κατανόηση της λειτουργίας των μοτίβων, καθώς τα παιδιά έρχονται αντιμέτωποι με διαφορετικές μορφές και εκδοχές τους σε ποικίλα μαθησιακά περιβάλλοντα. Ο όρος *pattern* χρησιμοποιείται σε διαφορετικά επίπεδα μαθηματικής πολυπλοκότητας και με ποικίλες σημασιολογικές αποχρώσεις, γεγονός που καθιστά αναγκαία την αποσαφήνιση των βασικών χαρακτηριστικών του. Στην ελληνική βιβλιογραφία, ο όρος *pattern* έχει αποδοθεί ως «μοτίβο», «κανονικότητα» ή «πρότυπο», με τις διαφορετικές αυτές αποδόσεις να αντανακλούν το εύρος των χρήσεων του όρου στη μαθηματική εκπαίδευση (Τζεκάκη κ.ά., 2019).

Η δυσκολία προσδιορισμού οφείλεται επίσης στο ότι τα μοτίβα μπορεί να εμφανίζονται σε αριθμητική, γεωμετρική, λεκτική ή εικονική μορφή, ενώ παράλληλα υπηρετούν διαφορετικούς μαθησιακούς στόχους. Τα μοτίβα δεν περιορίζονται στις αριθμητικές ή γεωμετρικές ακολουθίες, αλλά αντιμετωπίζονται ως τρόποι οργάνωσης στοιχείων που εκφράζουν σταθερές σχέσεις (Papic & Mulligan, 2007).

Σύμφωνα με τον ευρέως αποδεκτό ορισμό των Papic και Mulligan (2007), ένα μαθηματικό μοτίβο μπορεί να περιγραφεί ως μία «ακολουθία στοιχείων που οργανώνεται με βάση έναν αναγνωρίσιμο κανόνα». Ο κανόνας αυτός μπορεί να αφορά επανάληψη ή μεταβολή και αποτελεί το βασικό χαρακτηριστικό που επιτρέπει στο παιδί να προβλέπει την επόμενη ροή της ακολουθίας και να αναγνωρίζει τη δομή που τη διέπει. Από αυτή τη σκοπιά, το μοτίβο

δεν αποτελεί μια απλή αλληλουχία στοιχείων αλλά μια μαθηματική οργάνωση που αποτυπώνει σταθερές σχέσεις.

Οι Mitchelmore και Mulligan (2009) με ένα ειδικό εργαλείο αξιολόγησης που δημιούργησαν, το PASA (Pattern and Structure Assessment), προσεγγίζουν τα μοτίβα ως δομές των οποίων η κατανόηση απαιτεί διερεύνηση των εσωτερικών χαρακτηριστικών και όχι μόνο αναγνώριση επιφανειακών επαναλήψεων. Η έμφαση στη δομή προκύπτει από την παραδοχή ότι τα μοτίβα εκφράζουν σταθερές σχέσεις, οι οποίες συγκροτούν ένα συνεκτικό σύστημα κανονικότητας. Στο ίδιο πνεύμα, οι Fyfe και συνεργάτες αναδεικνύουν τα μοτίβα ως οργανωτικά σχήματα που αποδίδουν εξαρτήσεις και μεταβολές, στοιχεία που αποτελούν θεμέλιο της πρώιμης συναρτησιακής σκέψης. Επιπλέον, η έρευνα των Pang και Sunwoo (2022) καταδεικνύει ότι η κατανόηση ενός μοτίβου συνδέεται άμεσα με την ικανότητα των παιδιών να εντοπίζουν αναλογίες και να κατασκευάζουν κανόνες μεταβολής μεταξύ ποσοτήτων.

Με βάση τις παραπάνω θεωρήσεις, το μαθηματικό μοτίβο μπορεί να προσδιοριστεί ως:

μια δομημένη ακολουθία ποσοτικών, γεωμετρικών, λεκτικών ή συμβολικών στοιχείων, η οποία διέπεται από έναν κανόνα που επιτρέπει την αναγνώριση κανονικότητας, την πρόβλεψη της συνέχειας και τη διατύπωση γενικεύσεων.

Ο προσδιορισμός αυτός συμπυκνώνει τις βασικές συνιστώσες που αναδεικνύονται στη βιβλιογραφία:

- την κανονικότητα,
- τη δομή,
- τον κανόνα,
- και τη δυνατότητα γενίκευσης.

Αποτελεί, επομένως, το εννοιολογικό υπόβαθρο για τη μελέτη των τύπων μοτίβων και των στρατηγικών που επιστρατεύουν τα παιδιά κατά την επεξεργασία τους.

1.2.2 Η έννοια του μοτίβου στην μαθηματική εκπαίδευση

Η έννοια του μοτίβου είναι πρωταρχικής σημασίας για την αφύπνιση και την καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης, καθώς και για την ενίσχυση της μαθηματικής εκπαίδευσης σε γενικότερο βαθμό. Διεθνώς, τα μοτίβα αναγνωρίζονται ως ένα μαθηματικό αντικείμενο που προάγει τη σύνθεση και δημιουργία δομών, δημιουργεί κανονικότητες και αναπτύσσει δεσμούς μεταξύ στοιχείων, δηλαδή σχέσεις που μπορούν να λάβουν συναρτησιακό

χαρακτήρα. Δεν αποτελούν απλώς μία διδακτική πρακτική, αλλά συνιστούν δομικό στοιχείο των μαθηματικών γνώσεων και εννοιών που διέπουν τη μαθηματική επιστήμη. Οι Warren και Cooper (2008) επισημαίνουν ότι τα μοτίβα δεν βασίζονται μόνο σε απλές επαναλήψεις, αλλά συμβάλλουν ουσιαστικά στην ανάπτυξη σχέσεων, στην κατανόηση κανονικοτήτων και στην εξαγωγή γενικεύσεων, ανοίγοντας τον δρόμο για τη διαμόρφωση αλγεβρικής σκέψης. Ο Steen (1988) χαρακτηρίζει τα μοτίβα ως την «καρδιά» των μαθηματικών, υπογραμμίζοντας τον κεντρικό τους ρόλο στον συνολικό μαθηματικό «οργανισμό». Υποστηρίζει ότι τα μοτίβα δεν είναι απλώς επαναλήψεις, αλλά δομές που οργανώνουν πληροφορίες και επιτρέπουν την κατανόηση πολύπλοκων συστημάτων. Τα ευρήματά του συμφωνούν με την άποψη ότι τα μοτίβα διαθέτουν δομικό χαρακτήρα μέσα στο μαθηματικό σύστημα και λειτουργούν ως εργαλείο πρόβλεψης και γενίκευσης. Παρόμοια, οι Vale και Pimentel (2009) αποσαφηνίζουν το πλαίσιο οργάνωσης των κανόνων που δημιουργούν τα αναπτυσσόμενα και οπτικά μοτίβα, καθώς και τις αλγεβρικές σκέψεις που ενεργοποιούν. Οι Papic και Mulligan (2007) υποστηρίζουν ότι τα παιδιά προσχολικής ηλικίας μπορούν να αναγνωρίζουν, να επεκτείνουν και να αναπαριστούν μοτίβα με ευχέρεια, αξιοποιώντας προϋπάρχουσες εμπειρίες και έμφυτες ικανότητες. Αντίστοιχα, οι Blanton και συνεργάτες (2019), εξετάζοντας στρατηγικές παιδιών Δημοτικού, ανέδειξαν τη συμβολή των μοτίβων στη διαμόρφωση πρώιμων αλγεβρικών μηχανισμών.

Η βιβλιογραφία συγκλίνει στο ότι τα μοτίβα φέρουν διττή διάσταση: αφενός αποτελούν ένα αυτόνομο μαθηματικό αντικείμενο με εσωτερικά δομικά χαρακτηριστικά και κανονικότητες, και αφετέρου λειτουργούν ως σημαντικό παιδαγωγικό εργαλείο για την καλλιέργεια δεξιοτήτων. Συνδυάζουν, επομένως, τη λειτουργία τους ως αυτοτελές μαθηματικό πεδίο με εκείνη του μέσου μάθησης, συμβάλλοντας ουσιαστικά στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και της ικανότητας γενίκευσης των παιδιών.

1.3 Διαφορετικές μορφές εμφάνισης των μοτίβων

Η διεθνής ερευνητική κοινότητα έχει στρέψει το ενδιαφέρον της στην κατηγοριοποίηση των μοτίβων ανάλογα με το είδος τους. Το πεδίο αυτό απασχόλησε τη βιβλιογραφία κυρίως γιατί η ταξινόμησή τους σε είδη συνέβαλε στη λεπτομερή μελέτη τους και στη σύνδεσή τους με διαφορετικές γνωστικές λειτουργίες. Έχει επικρατήσει να διακρίνονται σε επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα, που όμως εμφανίζονται ποικιλοτρόπως. Οι εκφάνσεις των μοτίβων και των δύο κατηγοριών έχουν απασχολήσει τις διεθνείς μελέτες, οι οποίες και τα ξεχωρίζουν σε αριθμητικά, γεωμετρικά, οπτικά και λεκτικά μοτίβα.

Οι Mulligan και Mitchelmore (2009) παρουσιάζουν διεξοδικές μελέτες σχετικά με τα αριθμητικά μοτίβα. Η ανάλυση των δεδομένων οδηγεί στο συμπέρασμα πως η αριθμητική μορφή μοτίβων συνδέει την αρίθμηση με την άλγεβρα. Τα παιδιά έχουν ήδη αναπτύξει εμπειρίες και γνώσεις ως προς τη διαχείριση αριθμών, γεγονός που επιτρέπει την επίτευξη ανώτερων στόχων. Μέσα από την ενασχόλησή τους με αριθμητικές καταστάσεις, οδηγούνται στην εξαγωγή κανόνων και γενικεύσεων. Παρακολουθώντας τις μεταβολές που υφίστανται οι αριθμοί σε ένα αριθμητικό μοτίβο, αφυπνίζεται ο μηχανισμός αντίληψης του ρυθμού μεταβολής του μοτίβου.

Στη βιβλιογραφία αναγνωρίζονται και διδιάστατα μοτίβα, τα οποία οργανώνονται μέσω της διαδοχικής εφαρμογής μιας μονάδας επανάληψης σε δύο κατευθύνσεις. Στα διδιάστατα μοτίβα, η μονάδα επανάληψης επεκτείνεται τόσο οριζόντια όσο και κατακόρυφα, σχηματίζοντας επαναλαμβανόμενα πρότυπα σε μορφή πλέγματος. Η δομή αυτή διατηρεί όλα τα βασικά χαρακτηριστικά των γραμμικών μοτίβων —τη σταθερή περιοδικότητα και την κανονικότητα— ενώ παράλληλα προσδίδει μεγαλύτερη πολυπλοκότητα, καθώς οι μεταβλητές μπορεί να αλλάζουν σε δύο διαστάσεις (Κυλάφης, 2009).

Στις πολύ μικρές ηλικίες, τα οπτικά και εικονικά μοτίβα (patterns of pictures) ενδείκνυνται και υπόσχονται να συμβάλλουν στην κατανόηση των συμβολισμών ενός μοτίβου. Οι Papic, Mulligan και Mitchelmore (2009) προβάλλουν μια σειρά από επιχειρήματα, στηρίζοντας την ανάγκη αξιοποίησης των οπτικών μοτίβων στη μαθηματική εκπαίδευση των νηπίων. Οδηγήθηκαν στην άποψη πως η ενασχόληση των μικρών παιδιών με τα μοτίβα εικόνων αποδεικνύεται αποτελεσματική και ωφέλιμη για τη μετάβαση των παιδιών από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο.

Ακόμη μία μορφή παρουσίασης μοτίβων, που αποτέλεσε πεδίο ενδιαφέροντος ερευνητών, αφορά τα λεκτικά μοτίβα. Η συστηματική επανάληψη λέξεων ή φράσεων, δημιουργώντας έναν σταθερό κανόνα, υπάγεται σε αυτή την κατηγορία. Το πλαίσιο είναι ευρύτερο, καθώς

περιλαμβάνει και συνδυάζει τη γλώσσα με τα μαθηματικά. Οι Vale και Pimentel (2009) τόνισαν την ανάγκη χρήσης λεκτικών μοτίβων για την ενίσχυση της μαθηματικής έκφρασης καθώς και για την κατανόηση συμβολισμών.

Η ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων έχει εκτενώς μελετηθεί και σε σχέση με τα μουσικά μοτίβα. Η σχέση του ήχου με τα μοτίβα έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον της έρευνας, χωρίς ωστόσο οι μουσικές ακολουθίες να συμπεριλαμβάνονται πάντα στα είδη μαθηματικών μοτίβων. Το αξιοσημείωτο είναι πως έχουν διεθνώς συνδεθεί με την ενίσχυση μαθηματικών διεργασιών. Πλούσια βιβλιογραφία κάνει λόγο για καλλιέργεια του ρυθμού και της κανονικότητας μέσω της μουσικής εκπαίδευσης. Η ερευνητική κοινότητα αναγνωρίζει την επίδραση της ενασχόλησης με μουσικά θέματα στην κατανόηση της μαθηματικής αρμονίας των μοτίβων, ενώ μελέτες όπως των Papic και Mulligan (2007) προάγουν τη χρήση ήχων και μουσικών μοτίβων προς αξιοποίηση στη μαθηματική εκπαίδευση, αναδεικνύοντας την ευεργετική συμβολή της διαθεματικότητας για την επίτευξη μαθηματικών στόχων.

Εν κατακλείδι, είναι ωφέλιμο για τα παιδιά να έρχονται σε ουσιώδη επαφή με διαφορετικές εκφάνσεις των μοτίβων και να οικοδομούν πολλαπλές και ποικίλες εμπειρίες, ώστε να οδηγηθούν με αποτελεσματικότητα στην επιθυμητή κατασκευή μαθηματικών δομών και δεξιοτήτων. Η αναγνώριση και η επέκταση κανονικοτήτων δομείται ήδη από την προσχολική εκπαίδευση (Papic & Mulligan, 2007). Η ικανότητα γενίκευσης προωθεί και προετοιμάζει την αλγεβρική σκέψη (Warren & Cooper, 2008). Επιπλέον, η τακτική ενασχόληση με μοτίβα βελτιώνει τη δεξιότητα αριθμητικών υπολογισμών και στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων (Fyfe et al., 2017). Μαθηματικές αναλογίες και σχέσεις αναδύονται και εντοπίζονται με ευκολία από παιδιά που είναι εξοικειωμένοι και έχουν εξασκηθεί στη διαχείριση αναπτυσσόμενων μοτίβων (Blanton et al., 2019· Pang & Sunwoo, 2022), ενώ δεξιότητες όπως η χωρική αντίληψη και η οπτικοποίηση ενισχύονται με δραστηριότητες γεωμετρικών μοτίβων (Mulligan & Mitchelmore, 2009). Παράλληλα, η διδασκαλία μοτίβων ενθαρρύνει την καλλιέργεια μεταγνωστικών δεξιοτήτων και στρατηγικών, μηχανισμών δηλαδή που επιτρέπουν στα παιδιά να επεξεργάζονται, να αναλύουν και να οικοδομούν συνειδητά κανονικότητες (Vale & Pimentel, 2009).

1.4 Βασική διάκριση σε επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα

Η συστηματική μελέτη των μοτίβων από τη διεθνή ερευνητική κοινότητα καταλήγει στη βασική διάκρισή τους σε επαναλαμβανόμενα (repeating patterns) και αναπτυσσόμενα ή εξελισσόμενα μοτίβα (growing patterns). Η διάκριση αυτή αφορά τον πυρήνα της δομής των μοτίβων και διαφοροποιείται από τις επιμέρους μορφές εμφάνισης και αναπαράστασής τους, όπως αυτές παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη υποενότητα. Το κοινό σημείο μεταξύ των δύο αυτών ειδών είναι ότι η διαδοχή των όρων τους δεν είναι τυχαία, αλλά διέπεται από συγκεκριμένη κανονικότητα. Στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα η μονάδα επανάληψης παραμένει σταθερή και επανεμφανίζεται κυκλικά, ενώ στα αναπτυσσόμενα μοτίβα σταθερός παραμένει ο κανόνας μεταβολής που καθορίζει την παραγωγή κάθε νέου όρου.

Τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα ανήκουν σε εκείνο το είδος μοτίβου που θεωρείται περισσότερο βατό και κατανοητό για τα παιδιά. Η εμπειρική τους γνώση και η καθημερινή τους τριβή με ρυθμικές επαναλήψεις, από τα πρώτα κιόλας χρόνια της ζωής τους, τοποθετούν αυτό το είδος μοτίβου σε κυρίαρχη θέση ανάμεσα στη σφαίρα κατανόησης των παιδιών. Θεωρούνται, επομένως, ένα γνώριμο και οικείο φαινόμενο, εισάγοντας το παιδί στον κόσμο των μαθηματικών.

Τα αναπτυσσόμενα ή και εξελισσόμενα μοτίβα (growing patterns) θεωρούνται ως η πιο σύνθετη κατηγορία μοτίβων, καθώς η ακολουθία παρουσιάζει αύξηση ή μείωση και συχνά εξελίσσεται σε δύο ή και περισσότερες διαστάσεις. Ένα αναπτυσσόμενο μοτίβο μπορεί να εμφανίζεται ως μία απλούστερη αριθμητική διάταξη, όπως 1, 3, 5, 7, ..., αλλά και να έχει πιο περίπλοκη μορφή, για παράδειγμα με σχήματα που μεγαλώνουν με σταθερό ρυθμό ως προς τις διαστάσεις τους. Τα αναπτυσσόμενα μοτίβα απαιτούν την εφαρμογή και τον συνδυασμό περισσότερων μαθηματικών διεργασιών, ώστε να γίνουν κατανοητά από τα παιδιά.

1.4.1. Επαναλαμβανόμενα μοτίβα και η διδακτική σημασία τους

Από πολύ νωρίς στη ζωή των παιδιών εμφανίζονται επαναλαμβανόμενα μοτίβα μέσα από παιχνίδια, τραγούδια, χειρονομίες και επαναλαμβανόμενες λεκτικές ακολουθίες. Αυτές οι καθημερινές εμπειρίες καθιστούν τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα άμεσα αναγνωρίσιμα και διευκολύνουν την ομαλή εισαγωγή των παιδιών στο μαθηματικό περιβάλλον. Κεντρικό στοιχείο αυτών των μοτίβων είναι η «μονάδα επανάληψης», δηλαδή το μικρότερο σύνολο στοιχείων που επαναλαμβάνεται σταθερά. Η αναγνώριση αυτής της μονάδας αποτελεί κρίσιμο βήμα για τη διαμόρφωση και την οργάνωση της αντίληψης κανονικοτήτων,

ενεργοποιώντας μηχανισμούς ανάλυσης, οργάνωσης και γενίκευσης (Papic & Mulligan, 2007).

Στα μαθηματικά, όταν ένα στοιχείο επαναλαμβάνεται με συστηματικό και συνεπή τρόπο, σχηματίζεται μια ακολουθία, ένας ρυθμός που εδράζεται σε αυτή τη μονάδα επανάληψης. Τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα (repeating patterns) αφορούν αυτή την περιοδική εμφάνιση στοιχείων και γίνονται οικεία στα παιδιά από πολύ μικρή ηλικία. Ένα μοτίβο της μορφής ABAB μπορεί να εντοπιστεί σε χρωματικά μοτίβα (άσπρο–μαύρο–άσπρο–μαύρο) ή ακόμη και σε ήχους της καθημερινότητας, όπως το ρυθμικό κλάμα ενός μωρού. Μελέτες δείχνουν ότι τα παιδιά προσχολικής ηλικίας μπορούν να αναγνωρίζουν, να προβλέπουν και να επεκτείνουν τη μονάδα επανάληψης, γεγονός που εξηγεί τη σημασία τους για την εισαγωγή των παιδιών σε βασικές μαθηματικές έννοιες (Papic & Mulligan, 2007).

Σε θεωρητικό επίπεδο, η κυκλική ροή αποτελεί τη θεμελιώδη αρχή των επαναλαμβανόμενων μοτίβων. Σε ένα μοτίβο με μονάδα επανάληψης μήκους n , κάθε στοιχείο αντιστοιχεί σε εκείνο που βρίσκεται n θέσεις πριν, γεγονός που προσδίδει σταθερότητα και προβλεψιμότητα στη δομή (Κυλάφης, 2009). Αυτή η προβλεψιμότητα ενισχύει τη μαθηματική σκέψη, επιτρέποντας στα παιδιά να αναπτύσσουν δεξιότητες πρόβλεψης και να αναγνωρίζουν σταθερές σχέσεις.

Τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα συναντώνται σε πολλές μορφές: χρωματικά μοτίβα, σχηματικά μοτίβα ή μοτίβα με αντικείμενα. Τέτοιες αναπαραστάσεις βοηθούν τα παιδιά να οργανώνουν οπτικά την επανάληψη και να αντιληφθούν με σαφήνεια τη μονάδα επανάληψης. Η συνθετότητα ενός μοτίβου μπορεί να αυξηθεί μέσω μεταβολών σε χαρακτηριστικά όπως το χρώμα, το σχήμα, το μέγεθος ή η κατεύθυνση, οδηγώντας σε πιο απαιτητικές μορφές γραμμικών ή διδιάστατων μοτίβων (Hutchinson & Pournara, 2011).

Η αξία των επαναλαμβανόμενων μοτίβων εκτείνεται σημαντικά πέρα από την αναπαραγωγή ενός ρυθμού. Αποτελούν θεμέλιο για την ανάπτυξη δομικής σκέψης (structural thinking), δημιουργώντας ένα αναλυτικό πλαίσιο στο οποίο τα παιδιά μαθαίνουν να αναζητούν σχέσεις, να οργανώνουν δεδομένα και να διατυπώνουν κανόνες. Έρευνες (Fyfe et al., 2017· Blanton et al., 2019) καταδεικνύουν ότι τα παιδιά που κατανοούν τη δομή των επαναλαμβανόμενων μοτίβων αναπτύσσουν δεξιότητες ανάλυσης και σύνθεσης, οικοδομούν αριθμητικές και γεωμετρικές στρατηγικές και παρουσιάζουν ενισχυμένη ετοιμότητα για πιο σύνθετες μαθηματικές διαδικασίες.

Η συστηματική ενασχόληση με επαναλαμβανόμενα μοτίβα δεν λειτουργεί απλώς ως εισαγωγικό στάδιο αλλά συμβάλλει στην κατανόηση μεταβλητών, στη διαμόρφωση σχέσεων και στη δημιουργία αλγεβρικών κανόνων. Μελέτες όπως των Warren και Cooper

(2008) και των Mulligan και Vergnaud (2006) αναδεικνύουν τον ρόλο των επαναλαμβανόμενων μοτίβων στην καλλιέργεια πολλαπλασιαστικής σκέψης, στην οικοδόμηση αλγεβρικών συλλογισμών και στην καλλιέργεια δομικής επίγνωσης.

1.4.2. Αναπτυσσόμενα μοτίβα και η διδακτική σημασία τους

Τα αναπτυσσόμενα μοτίβα (growing patterns) αποτελούν μία περισσότερο σύνθετη κατηγορία μοτίβων, καθώς τα στοιχεία τους μεταβάλλονται συστηματικά και η εξέλιξή τους διέπεται από έναν κανόνα που περιγράφει την αύξηση ή τη μείωση της ακολουθίας. Η μεταβολή αυτή μπορεί να εκδηλώνεται είτε με αριθμητική πρόοδο (π.χ. 1, 3, 5, 7, ...) είτε με εικονιστικές δομές που επεκτείνονται σταδιακά ως προς το μέγεθος, το πλήθος ή τις διαστάσεις τους. Η πολυπλοκότητά τους καθιστά αναγκαία την ενεργοποίηση πιο ώριμων μαθηματικών διεργασιών, όπως η συναρτησιακή σκέψη και η αλγεβρική λογική.

Τα παιδιά καλούνται να αναγνωρίζουν σχέσεις μεταβολής ανάμεσα στους όρους, να εντοπίζουν τον κανόνα ανάπτυξης και να προβλέπουν μελλοντικούς όρους, κοντινούς ή απομακρυσμένους (Blanton et al., 2019· Pang & Sunwoo, 2022). Η διαδικασία αυτή στηρίζεται στη διάκριση «θέσης-τιμής», σύμφωνα με την οποία κάθε όρος συνδέεται με τη θέση που κατέχει στην ακολουθία. Η κατανόηση της σχέσης αυτής αποτελεί κεντρικό βήμα για τη μετάβαση από την περιγραφική αναγνώριση της μεταβολής στη διατύπωση γενικευμένων συναρτησιακών σχέσεων.

Στη σχετική βιβλιογραφία τα αναπτυσσόμενα μοτίβα εμφανίζονται σε δύο κύριες μορφές: εικονιστικά μοτίβα, που αποδίδονται με σχήματα, κουκκίδες ή αντικείμενα, και αριθμητικά μοτίβα, τα οποία εκφράζονται ως αριθμητικές ακολουθίες. Στα αριθμητικά περιλαμβάνονται γνωστές ακολουθίες, όπως οι αριθμητικές και γεωμετρικές πρόοδοι, οι ακολουθίες άρτιων ή περιττών αριθμών, η Fibonacci ή οι τετραγωνικοί αριθμοί. Συχνά, η ίδια ακολουθία μπορεί να αναπαρασταθεί τόσο εικονιστικά όσο και αριθμητικά, ενισχύοντας την ανάπτυξη πολλαπλών αναπαραστάσεων και διαφορετικών τρόπων σκέψης (Κυλάφης, 2009).

Η συστηματική ενασχόληση των παιδιών με αναπτυσσόμενα μοτίβα ενισχύει κρίσιμες γνωστικές λειτουργίες. Οι Blanton et al. (2019) και οι Warren & Cooper (2008) καταδεικνύουν ότι η ανάλυση της μεταβολής οδηγεί τα παιδιά στην κατανόηση συμμεταβολής, στη διατύπωση κανόνων και στη σύλληψη της σχέσης ανάμεσα σε μεταβλητές.

Συνολικά, τα αναπτυσσόμενα μοτίβα λειτουργούν ως ισχυρός μηχανισμός καλλιέργειας της γενίκευσης, της συναρτησιακής σκέψης και της αλγεβρικής λογικής. Η ενασχόληση με αυτά

υπερβαίνει την απλή αναγνώριση μιας ακολουθίας· καθιστά ορατές τις σχέσεις που συνδέουν τους όρους, ενισχύει τη δυνατότητα πρόβλεψης και προετοιμάζει το εννοιολογικό υπόβαθρο για πιο προχωρημένες μαθηματικές έννοιες.

1.5 Μοτίβα και Αλγεβρική σκέψη

1.5.1 Ο ρόλος των μοτίβων στην καλλιέργεια αλγεβρικής σκέψης

Η αλγεβρική λογική θεωρείται μία από τις σημαντικότερες γνωστικές λειτουργίες που τα παιδιά αναπτύσσουν σταδιακά κατά τη μαθηματική τους πορεία. Από τον συμβολισμό έως την επίλυση εξισώσεων, τα παιδιά καλούνται να οικοδομήσουν μηχανισμούς που θα τους στηρίζουν σε κάθε αλγεβρική πρόκληση. Στο απαιτητικό αυτό πλαίσιο, τα μοτίβα διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο. Η διδασκαλία τους εκπαιδεύει και θωρακίζει τα παιδιά με δεξιότητες που σχετίζονται με την αναγνώριση αναλογιών, την ανάλυση και σύνθεση δομών και τη διατύπωση γενικεύσεων. Παρότι η άλγεβρα εισάγεται συστηματικά στο Γυμνάσιο, η προετοιμασία και η αλγεβρική ωριμότητα καλλιεργούνται ήδη από την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία μέσω της ενασχόλησης με μοτίβα (Blanton et al., 2019).

Η εργασία με επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα μοτίβα ενισχύει την ικανότητα των παιδιών να διακρίνουν σταθερές σχέσεις ανάμεσα σε μεταβαλλόμενα στοιχεία και να διαμορφώνουν κανόνες της μεταβολής (Fyfe et al., 2017). Η αναγνώριση τέτοιων κανονικοτήτων οδηγεί σταδιακά στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης, καθώς το παιδί παύει να αντιμετωπίζει τα στοιχεία του μοτίβου ως ανεξάρτητες μορφές και αρχίζει να τα αντιλαμβάνεται ως μέρη ενός δομημένου συστήματος σχέσεων.

Ο Karut (2008) τονίζει ότι η συμβολική σκέψη αποτελεί τη βάση της γενίκευσης, αφού επιτρέπει τη μετάβαση από το «συγκεκριμένο μοτίβο» στον «γενικό τύπο». Τα παιδιά σε αυτό το γνωστικό επίπεδο μπορούν να εντοπίζουν τα ουσιώδη χαρακτηριστικά μιας κατάστασης, να παραβλέπουν επιφανειακές διαφοροποιήσεις και να παράγουν συμβολικές εκφράσεις που περιγράφουν τη δομή και την ανάπτυξη των σχέσεων. Η διαδικασία αυτή οδηγεί ομαλά από την αριθμητική στην προ-αλγεβρική και τελικά στην αλγεβρική κατανόηση.

Τα μοτίβα αποτελούν διεθνώς αναγνωρισμένο πεδίο οικοδόμησης της αλγεβρικής σκέψης, με κυρίαρχους άξονες την εύρεση σχέσεων, την αναγνώριση κανονικοτήτων και την πρόβλεψη επόμενων όρων. Η διαδικασία επέκτασης ενός μοτίβου προϋποθέτει τη γενίκευση και τη διατύπωση του κανόνα, διαδικασίες που αποτελούν «την καρδιά της άλγεβρας»

(Warren & Cooper, 2008). Οι Pang και Sunwoo (2022) επισημαίνουν ότι η συστηματική διδασκαλία μοτίβων ενισχύει τη συναρτησιακή σκέψη, την αναγνώριση μεταβλητών και την κατανόηση εννοιών όπως η εξάρτηση και η συμμεταβολή. Αντίστοιχα, οι Fyfe et al. (2017) εντόπισαν σημαντική βελτίωση στις μαθηματικές επιδόσεις όταν τα παιδιά εργάζονται με μοτίβα, τεκμηριώνοντας τη σύνδεση μεταξύ των μεταβλητών και της ανάπτυξης αλγεβρικής σκέψης.

Η Ντάντου (2017), στο πλαίσιο της διπλωματικής της εργασίας, ανέλυσε τις στρατηγικές γενίκευσης παιδιών Δημοτικού κατά την αλληλεπίδρασή τους με μοτίβα και αναδεικνύει τη συμβολή τους στη διαμόρφωση πρώιμων αλγεβρικών συλλογισμών. Οι διαφορετικοί τρόποι προσέγγισης των μοτίβων αποκαλύπτουν τη σταδιακή οικοδόμηση αλγεβρικής σκέψης.

Η σπουδαιότητα των μοτίβων στη μαθηματική εκπαίδευση επιβεβαιώνεται και από τα ερευνητικά δεδομένα των Blanton et al. (2019), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι τα μοτίβα πρέπει να αποτελούν αναπόσπαστο μέρος του αναλυτικού προγράμματος στο Δημοτικό, καθώς ενισχύουν την αλγεβρική αντίληψη και διευκολύνουν την οικοδόμηση πιο σύνθετων μαθηματικών εννοιών. Τα μοτίβα νοούνται ως «δομικό υλικό» της μαθηματικής μάθησης, καθώς οι συλλογισμοί που καλλιεργούνται κατά τη διδασκαλία τους προετοιμάζουν τα παιδιά για την κατανόηση αφηρημένων μαθηματικών μοντέλων.

Συνολικά, τα μοτίβα αποτελούν ισχυρό μέσο καλλιέργειας της αλγεβρικής σκέψης. Αναπτύσσουν δεξιότητες γενίκευσης, συναρτησιακής σκέψης και αναγνώρισης σχέσεων, οικοδομώντας το εννοιολογικό υπόβαθρο που απαιτείται για την κατανόηση πιο προχωρημένων μαθηματικών εννοιών.

1.5.2 Εμπειρικές μελέτες και ερευνητικά δεδομένα για τη συμβολή των μοτίβων στη διαμόρφωση αλγεβρικής λογικής

Σε διεθνές επίπεδο, οι ερευνητές αναγνωρίζουν τα θετικά αποτελέσματα των δραστηριοτήτων με μοτίβα στην ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων. Στη διαπίστωση αυτή οδηγούνται πολυάριθμες μελέτες που χρησιμοποιούν ως μέθοδο την παρέμβαση. Η έρευνα με παρέμβαση προσφέρει τη δυνατότητα συγκέντρωσης πολύτιμων δεδομένων τόσο για τη θεωρητική όσο και για την πρακτική προσέγγιση του πεδίου. Τα αποτελέσματα των παρεμβάσεων, όπως αυτά παρουσιάζονται στη διεθνή βιβλιογραφία, δείχνουν να αναδεικνύουν την αναγκαιότητα συστηματικής και μεθοδευμένης αξιοποίησης των μοτίβων στην τάξη.

Στα πλαίσια της προσχολικής και πρώτης σχολικής εκπαίδευσης, πραγματοποιήθηκε παρέμβαση από τους Papic και Mulligan (2007), με την οποία θέλησαν να ελέγξουν την ικανότητα κατανόησης και αναπαράστασης μοτίβων από παιδιά προσχολικής ηλικίας. Τα αποτελέσματα της παρέμβασης οδήγησαν στην επιβεβαίωση των υποθέσεών τους για τις αναπτυγμένες ικανότητες των μικρών παιδιών. Παρατήρησαν πως τα παιδιά ήταν σε θέση να διαχειρίζονται απλές καταστάσεις με μοτίβα και να αναγνωρίζουν μάλιστα, τον κανόνα της ακολουθίας. Στο ίδιο πεδίο αναζήτησης, κινήθηκαν και οι Mulligan και Mitchelmore (2009) με το ερευνητικό πρόγραμμα «PASA» (Pattern and Structure Assessment). Ο τίτλος του προγράμματος παραπέμπει ακριβώς στο ερευνητικό περιεχόμενο της παρέμβασης. Τα στοιχεία που συγκεντρώθηκαν, φανέρωσαν την αποδοτική συμβολή των μοτίβων στην οικοδόμηση μαθηματικών γνώσεων καθώς και στις επιδόσεις των παιδιών σε επόμενες τάξεις.

Σε επίπεδο πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, έρχονται οι Blanton et al.(2019) να παρουσιάσουν τα αποτελέσματα μιας εκτεταμένης έρευνας με παρεμβάσεις πάνω στη διδασκαλία των μοτίβων. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν, αναδεικνύουν την εποικοδομητική προσφορά των μοτίβων στην κατάκτηση μαθηματικών δεξιοτήτων και στην κατανόηση μαθηματικών σχέσεων και αναλογιών. Πιο συγκεκριμένα, διαπίστωσαν πως η συστηματική διδασκαλία των μοτίβων οδήγησε τα παιδιά στην ανάπτυξη πρώιμων αλγεβρικών γνωστικών μηχανισμών και στρατηγικών γενίκευσης. Στην ίδια εκπαιδευτική βαθμίδα, έσπευσαν να λάβουν απαντήσεις στα ερευνητικά τους ερωτήματα οι Fyfe et al.(2017). Επιχείρησαν να συσχετίσουν την ενασχόληση με μοτίβα, με την επίδοση των παιδιών σε άλλες μαθηματικές προκλήσεις. Διεξάγοντας μια εκτενή απαιτητική παρέμβαση, επιβεβαιώθηκαν οι εκτιμήσεις τους και οδηγήθηκαν σε σπουδαία αποτελέσματα. Η συνδιαλλαγή των παιδιών με το αντικείμενο των μοτίβων φαίνεται να επιδρά θετικά στην ανταπόκριση των παιδιών σε άλλες μαθηματικές περιοχές, όπως είναι η αριθμητική και η γεωμετρία.

Η ελληνική βιβλιογραφία προσδίδει παιδαγωγική αξία στο πεδίο των μοτίβων. Η Ντάντου (2017) διεκρίνει την αλληλένδετη σχέση δραστηριοτήτων μοτίβων σε παιδιά Δημοτικού με την ενίσχυση της μαθηματικής τους ανάπτυξης. Η εφαρμογή των μοτίβων στην μαθησιακή διαδικασία δείχνει να υπόσχεται το προπαρασκευαστικό στάδιο της αλγεβρικής λογικής. Η συστηματική εμπλοκή των παιδιών σε καταστάσεις μοτίβων όχι μόνο βελτιώνει τις μαθηματικές επιδόσεις τους, αλλά και βοηθάει στη σύνθεση γνωστικών δομών και μαθηματικής σκέψης.

Οι Rizos & Gkrekas (2024) πραγματοποίησαν πρόσφατα μία μελέτη, κάνοντας παρέμβαση σε παιδιά Δημοτικού ηλικίας 8-11 ετών. Αντικείμενο της μελέτης αποτέλεσε η ικανότητα

αναγνώρισης μοτίβων σε σχέση με την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως η ενσωμάτωση των μοτίβων στο μαθησιακό αντικείμενο ενισχύει σε μεταγνωστικό επίπεδο την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Τελικά, προκύπτει πως η επίδραση της παρέμβασης με μοτίβα στη μαθησιακή διαδικασία, ενδεχομένως εξασφαλίζει μία πιο αποτελεσματική εμπειρία στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, μέσα από την αναγνώριση και αξιοποίηση κανονικοτήτων.

1.6 Μοτίβα και Έργα διερεύνησης του πεδίου

1.6.1 Έργα μοτίβων ως εργαλεία διερεύνησης της γνωστικής εξέλιξης (από την αναγνώριση στη γενίκευση)

Η διερεύνηση των μαθηματικών μοτίβων στη διδακτική και ερευνητική πρακτική βασίζεται σε κατάλληλα σχεδιασμένα έργα (tasks), τα οποία λειτουργούν ως εργαλεία αποκάλυψης της μαθηματικής σκέψης των παιδιών. Η μελέτη των μοτίβων δεν στηρίζεται αποκλειστικά στη διαπίστωση της επανάληψης ή της αύξησης, αλλά εμπλέκει γνωστικές διεργασίες όπως η παρατήρηση, η ταξινόμηση, η οργάνωση δεδομένων και η διατύπωση σχέσεων ποσοτήτων (Τζεκάκη κ.ά., 2019· Blanton et al., 2019).

Τα έργα που αξιοποιούνται από τους ερευνητές δεν αποσκοπούν πρωτίτως στον έλεγχο της ορθότητας των απαντήσεων, αλλά στη διερεύνηση των στρατηγικών που υιοθετούν τα παιδιά, ώστε να αναγνωρίσουν, να επεκτείνουν και να γενικεύσουν κανονικότητες. Μέσα από την επίλυση τέτοιων έργων γίνεται ορατό πώς τα παιδιά αντιλαμβάνονται τη δομή του μοτίβου, ποιες αναπαραστάσεις επιλέγουν και σε ποιο βαθμό μπορούν να υπερβούν επιφανειακά χαρακτηριστικά για να στραφούν σε δομικές σχέσεις.

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, ο σχεδιασμός των έργων στηρίζεται στην αρχή της γνωστικής προοδευτικότητας (learning progression), με τρόπο που να κινητοποιεί σταδιακά ολόένα και πιο σύνθετες μορφές σκέψης· από την αρχική αναγνώριση των δομικών στοιχείων έως τη ρητή διατύπωση γενικευμένων μαθηματικών κανόνων (Stephens et al., 2017). Υπό αυτήν την οπτική, τα έργα μοτίβων λειτουργούν ως κρίσιμος σύνδεσμος ανάμεσα στις διδακτικές πρακτικές και στα θεωρητικά πορίσματα για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης.

Κατά συνέπεια, τα έργα διερεύνησης μοτίβων δεν συνιστούν απλές ασκήσεις εξάσκησης, αλλά λογίζονται ως δομημένα πλαίσια διερεύνησης και αποκαλύπτουν:

- τον τρόπο οργάνωσης της μαθηματικής σκέψης,
- την ωριμότητα των στρατηγικών που εφαρμόζουν τα παιδιά,
- τις δυσκολίες που παρεμποδίζουν την κατανόηση της δομής και της μεταβολής.

Η σημασία των έργων και του σχεδιασμού τους, είναι επομένως διττή: αφενός προσφέρουν αξιοποιήσιμα δεδομένα στην έρευνα και αφετέρου καθοδηγούν τον εκπαιδευτικό σχεδιασμό, ώστε η διδασκαλία των μοτίβων να υπηρετεί συστηματικά τη μετάβαση από την αριθμητική στην πρώιμη αλγεβρική σκέψη (Blanton & Kaput, 2004· Pang & Sunwoo, 2022).

1.6.2 Έργα μοτίβων ως εργαλεία αξιολόγησης της γνωστικής εξέλιξης (από την αναγνώριση στην γενίκευση)

Η ανάλυση των μαθηματικών μοτίβων μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένα έργα επιτρέπει την αποτύπωση της εξελικτικής πορείας των παιδιών από την απλή αναγνώριση επιφανειακών χαρακτηριστικών προς τη δομική, συναρτησιακή και τελικά συμβολική κατανόηση των μαθηματικών σχέσεων. Τα έργα μοτίβων οργανώνονται με βάση τη λογική της γνωστικής προοδευτικότητας (learning progression), έτσι ώστε κάθε δραστηριότητα να ενεργοποιεί πιο σύνθετους μηχανισμούς συλλογισμού και να καθιστά δυνατή την εκτίμηση του επιπέδου ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης των παιδιών (Blanton et al., 2019). Στο πλαίσιο αυτό, η διεθνής βιβλιογραφία διακρίνει τέσσερις βασικές κατηγορίες έργων μοτίβων, οι οποίες αντανακλούν διακριτά αλλά αλληλοσυνδεόμενα επίπεδα μαθηματικής ωριμότητας:

1. έργα αναγνώρισης,
2. έργα επέκτασης και συμπλήρωσης,
3. έργα εντοπισμού και περιγραφής κανόνα
4. έργα γενίκευσης (με διατύπωση κανόνα)

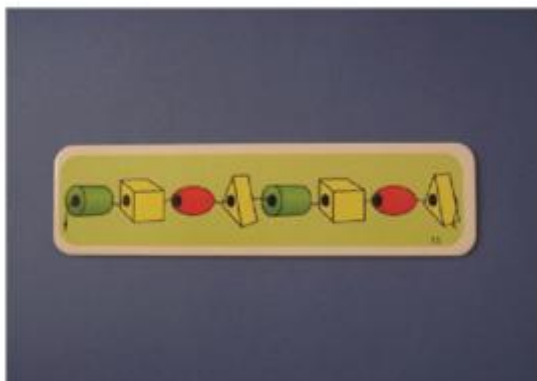
Οι τέσσερις αυτές κατηγορίες συγκροτούν μια αναπτυξιακή διαδρομή που εκκινεί από τη συγκεκριμένη παρατήρηση της κανονικότητας και οδηγεί σταδιακά στη ρητή διατύπωση γενικευμένων σχέσεων θέσης–τιμής και στη συναρτησιακή κατανόηση των μοτίβων (Kaput, 2008). Κάθε τύπος έργου ενεργοποιεί διαφορετικές γνωστικές δεξιότητες και στρατηγικές, επιτρέποντας τη διερεύνηση της μετάβασης των παιδιών από αντιληπτικές και αναδρομικές προσεγγίσεις προς δομικές και συναρτησιακές μορφές σκέψης.

Υπό αυτή την οπτική, τα έργα μοτίβων δεν λειτουργούν μόνο ως διδακτικές δραστηριότητες, αλλά και ως εργαλεία αξιολόγησης της γνωστικής εξέλιξης των παιδιών, καθώς αποκαλύπτουν τον τρόπο με τον οποίο οικοδομείται σταδιακά η έννοια της δομής, της μεταβολής και της γενίκευσης. Στις υποενότητες που ακολουθούν παρουσιάζονται

αναλυτικά οι τέσσερις βασικοί τύποι έργων, καθώς και οι γνωστικές και στρατηγικές διαστάσεις που αναδεικνύουν.

Αναγνώριση μοτίβων ως ζητούμενο σε έργα (Recognition tasks)

Η αναγνώριση αποτελεί το πρώτο στάδιο κατανόησης των μαθηματικών μοτίβων και στηρίζεται στην ικανότητα των παιδιών να εντοπίζουν κανονικότητες σε εικονικά, σχηματικά ή αριθμητικά σύνολα. Στο πλαίσιο των έργων αναγνώρισης, τα παιδιά καλούνται να παρατηρήσουν μια ακολουθία και να εντοπίσουν είτε το στοιχείο που επαναλαμβάνεται είτε τη μεταβολή που οργανώνει τη διαδοχή των όρων (Papic & Mulligan, 2007). Η διαδικασία αυτή ενεργοποιεί βασικές γνωστικές λειτουργίες, όπως η ταξινόμηση, η σύγκριση και η αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών, χωρίς να απαιτείται απαραίτητα ρητή διατύπωση κανόνα (Mulligan & Mitchelmore, 2009).



Εικόνα 1. Ενδεικτικό παράδειγμα έργου αναγνώρισης επαναλαμβανόμενου μοτίβου (από τη μελέτη των Hutchinson και Pourhara, 2011, σελ.100). Τα παιδιά καλούνται να παρατηρήσουν τη διάταξη των στοιχείων και να αναγνωρίσουν την ύπαρξη κανονικότητας, χωρίς να απαιτείται επέκταση, συμπλήρωση ή ρητή διατύπωση κανόνα.

Στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, το ζητούμενο των έργων αναγνώρισης εστιάζει στον εντοπισμό της μονάδας επανάληψης ως ενιαίου δομικού τμήματος της ακολουθίας (π.χ. $ABABAB \rightarrow AB$). Αντίθετα, στα αναπτυσσόμενα μοτίβα, η αναγνώριση αφορά κυρίως την παρατήρηση της κανονικότητας της μεταβολής, όπως η σταδιακή προσθήκη στοιχείων ή ποσοτήτων, χωρίς να απαιτείται η γενίκευση της σχέσης θέσης–τιμής (Warren & Cooper, 2008).

Τα έργα αναγνώρισης δεν αποσκοπούν στη διαπίστωση πλήρους κατανόησης της δομής του μοτίβου, αλλά λειτουργούν ως διαγνωστικά εργαλεία πρώιμης γνωστικής επεξεργασίας. Αποκαλύπτουν αν τα παιδιά μπορούν να αποδεσμευτούν από μεμονωμένα στοιχεία και να

εστιάζουν σε κανονικότητες, γεγονός που αποτελεί αναγκαία –αλλά όχι επαρκή– προϋπόθεση για τη μετάβαση σε δομικές και συναρτησιακές στρατηγικές.

Η ικανότητα αναγνώρισης μοτίβων έχει συσχετιστεί στη βιβλιογραφία με την ανάπτυξη πρώιμης αλγεβρικής σκέψης, καθώς συνιστά το θεμέλιο πάνω στο οποίο οικοδομούνται πιο απαιτητικές μορφές συλλογισμού, όπως η επέκταση, ο εντοπισμός κανόνα και η γενίκευση (Warren & Cooper, 2008). Υπό αυτή την έννοια, τα recognition tasks επιτρέπουν στους ερευνητές και στους εκπαιδευτικούς να εκτιμήσουν την ετοιμότητα των παιδιών για εμπλοκή σε πιο σύνθετες μαθηματικές διαδικασίες και να εντοπίσουν πρώιμους δείκτες δομικής επίγνωσης.

Επέκταση και συμπλήρωση μοτίβων ως ζητούμενο σε έργα (Extension / Completion tasks)

Η επέκταση ενός μοτίβου αποτελεί το επόμενο γνωστικό βήμα μετά την αναγνώριση και προϋποθέτει την εφαρμογή της εντοπισμένης κανονικότητας, ώστε η ακολουθία να συνεχιστεί με συνέπεια. Σε αντίθεση με τα έργα αναγνώρισης, τα έργα επέκτασης και συμπλήρωσης απαιτούν από τα παιδιά να εργαστούν ενεργά με τη δομή του μοτίβου και όχι απλώς να την παρατηρήσουν (Papic & Mulligan, 2007).

Same-Same Patterns	Same-Different Patterns	Different-Different Patterns
Shape: ABBABBA Size: ABBABBA	Shape: ABAABAA Size: ABBABBA	Shape: AABAABA Size: ABABABA
● ■ ■ ● ■ ■ ● _	● ■ ● ● ■ ● ● _	■ ■ ● ■ ■ ● ■ _

Εικόνα 2. Ενδεικτικό παράδειγμα έργου επέκτασης μοτίβου από τη μελέτη των Fyfe et al. (2017, σελ. 3), όπου τα παιδιά καλούνται να προβλέψουν το επόμενο στοιχείο σε ακολουθίες που οργανώνονται ταυτόχρονα ως προς δύο διαστάσεις (σχήμα και μέγεθος). Τα έργα αυτά καθιστούν ορατό τον βαθμό στον οποίο τα παιδιά μπορούν να συντονίσουν περισσότερες από μία μεταβαλλόμενες ιδιότητες κατά την εφαρμογή της κανονικότητας.

Στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, η επέκταση αφορά τη συνέχιση της μονάδας επανάληψης, ενώ στις δραστηριότητες συμπλήρωσης τα παιδιά καλούνται να αποκαταστήσουν ελλείποντα στοιχεία, γεγονός που απαιτεί σαφέστερη επίγνωση της δομικής οργάνωσης της ακολουθίας. Στα αναπτυσσόμενα μοτίβα, η επέκταση προϋποθέτει τον εντοπισμό και την εφαρμογή του κανόνα μεταβολής, συνήθως με αναδρομικό τρόπο (π.χ. «κάθε φορά προσθέτω δύο»), χωρίς να απαιτείται ακόμη ρητή γενίκευση της σχέσης θέσης–τιμής.

Τα έργα αυτού του τύπου αναδεικνύουν σημαντικές διαφοροποιήσεις στο επίπεδο γνωστικής επεξεργασίας των παιδιών. Σε πρώιμα στάδια, η επέκταση συχνά βασίζεται σε πρωταρχικές στρατηγικές, όπως η απαρίθμηση ή η ρυθμική απαγγελία, οι οποίες επιτρέπουν την τοπική συνέχιση της ακολουθίας αλλά δεν στηρίζονται απαραίτητα σε συνειδητή κατανόηση της δομής. Σε πιο ώριμες περιπτώσεις, τα παιδιά αρχίζουν να εφαρμόζουν τη μεταβολή με μεγαλύτερη συνοχή, γεγονός που υποδηλώνει μετάβαση προς δομικές μορφές σκέψης και προετοιμάζει το έδαφος για συναρτησιακή κατανόηση (Blanton et al., 2019).

Ιδιαίτερη ερευνητική αξία παρουσιάζουν οι δραστηριότητες συμπλήρωσης μοτίβων, όπου λείπουν όροι από την ακολουθία. Τέτοια έργα απαιτούν από τα παιδιά να αιτιολογήσουν τη θέση και την τιμή των ελλειπόντων στοιχείων και καθιστούν ορατό τον βαθμό δομικής ανάλυσης που έχουν αναπτύξει. Σύμφωνα με τους Vale και Pimentel (2009), οι δραστηριότητες αυτές λειτουργούν ως ισχυρά εργαλεία διερεύνησης της συνειδητής κατανόησης της σχέσης μεταξύ των στοιχείων του μοτίβου.

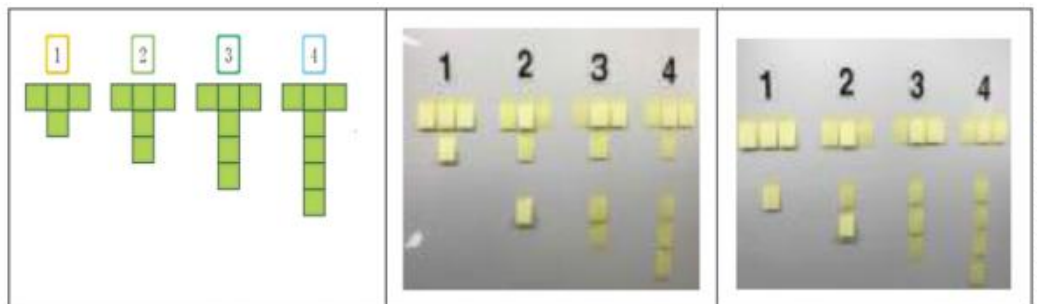
Συνολικά, τα έργα επέκτασης και συμπλήρωσης λειτουργούν ως κρίσιμο ενδιάμεσο στάδιο ανάμεσα στην απλή αναγνώριση και στη γενίκευση. Δεν αποκαλύπτουν ακόμη πλήρη συναρτησιακή σκέψη, αλλά επιτρέπουν την εκτίμηση του βαθμού μετάβασης των παιδιών από τη μηχανική αναπαραγωγή προς τη δομική κατανόηση, αναδεικνύοντας το επίπεδο εννοιολογικής ωρίμανσης στο οποίο βρίσκονται.

Εντοπισμός κανονικότητας ως ζητούμενο σε έργα (Pattern rule identification tasks)

Ο εντοπισμός της κανονικότητας συνιστά κρίσιμο μεταβατικό στάδιο στη γνωστική επεξεργασία των μοτίβων, καθώς σηματοδοτεί τη μετάβαση από την απλή περιγραφική παρατήρηση προς τη συνειδητή κατανόηση της σχέσης που οργανώνει την ακολουθία. Σε αυτό το είδος έργων, τα παιδιά καλούνται να εκφράσουν ρητά τον κανόνα που διέπει το μοτίβο, χωρίς ωστόσο να απαιτείται ακόμη η διατύπωση γενικού κανόνα για οποιαδήποτε θέση της ακολουθίας (Warren & Cooper, 2008).

Ο εντοπισμός της κανονικότητας αποτελεί αναγνωρισμένο δείκτη ετοιμότητας για την εισαγωγή σε έννοιες μεταβλητής και συνάρτησης, καθώς προϋποθέτει τη συνειδητή αναγνώριση της σταθερότητας ή της συστηματικής μεταβολής που χαρακτηρίζει το μοτίβο (Karut, 2008· Warren & Cooper, 2008). Σε αντίθεση με τα έργα επέκτασης, όπου ο κανόνας μπορεί να εφαρμόζεται άρρητα ή αναδρομικά, εδώ ζητείται η λεκτική ή αναπαραστατική διατύπωσή του.

Στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, η κανονικότητα συνδέεται με τη σταθερή επανεμφάνιση της μονάδας επανάληψης και τα παιδιά καλούνται να την κατονομάσουν ή να την περιγράψουν ως ενιαία δομή.

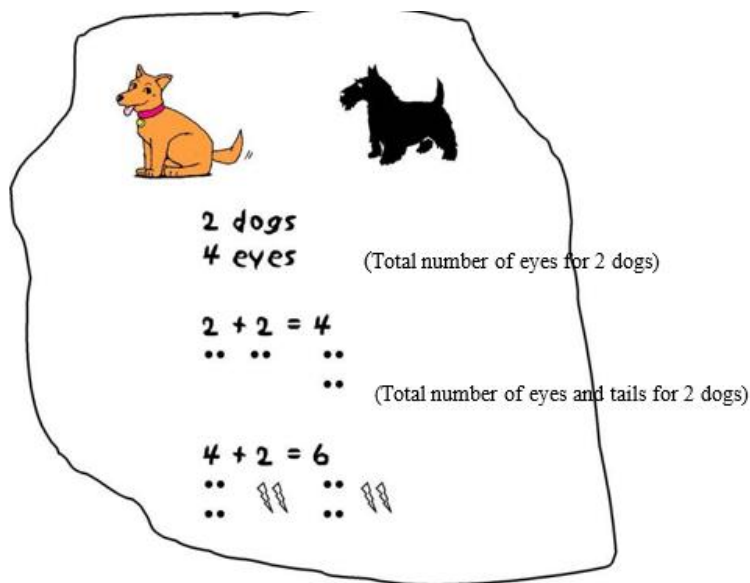


Εικόνα 3. Ενδεικτικό παράδειγμα έργου εντοπισμού και περιγραφής κανονικότητας σε αναπτυσσόμενο μοτίβο (από τη μελέτη των Pang και Sunwoo, 2022, σελ.13). Τα παιδιά καλούνται να παρατηρήσουν τη διαδοχική μεταβολή της δομής του σχήματος και να περιγράψουν τον κανόνα ανάπτυξης (π.χ. την προσθήκη ενός στοιχείου σε κάθε βήμα), χωρίς να απαιτείται ακόμη η διατύπωση γενικού κανόνα θέσης–τιμής. Το έργο καθιστά ορατή τη μετάβαση από επιφανειακές και αναδρομικές προσεγγίσεις προς δομικές στρατηγικές και λειτουργεί ως προπαρασκευαστικό στάδιο για τη γενίκευση.

Στα αναπτυσσόμενα μοτίβα, ο εντοπισμός της κανονικότητας αφορά την περιγραφή της μεταβολής μεταξύ διαδοχικών όρων (π.χ. «κάθε φορά προσθέτουμε δύο»), συνήθως με αναδρομικό τρόπο. Η περιγραφή αυτή δεν συνιστά ακόμη γενίκευση, αλλά λειτουργεί ως προπαρασκευαστικό στάδιο για τη μετάβαση σε στρατηγικές σχέσης θέσης–τιμής (Blanton et al., 2019). Η διάκριση αυτή είναι κρίσιμη, καθώς στην ερευνητική πράξη παρατηρείται συχνά υπερεκτίμηση της μαθητικής κατανόησης όταν η περιγραφική διατύπωση του κανόνα συγχέεται με τη γενίκευση.

Γενίκευση ως ζητούμενο σε έργα (Generalization tasks)

Η γενίκευση συνιστά την ανώτερη μορφή αλληλεπίδρασης των παιδιών με τα μαθηματικά μοτίβα και αποτελεί βασικό στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης στο πλαίσιο της ανάπτυξης αλγεβρικής συλλογιστικής (Blanton et al., 2019).



Εικόνα 4. Ενδεικτικό παράδειγμα έργου γενίκευσης αποτελεί το “Eyes and Tails” (από Blanton και Kaput ,2004, σελ. 2-137), όπου η εικονική αναπαράσταση ενισχύει τη συσχέτιση μεταβλητών και προάγει τη μετάβαση από αναδρομικές σε συναρτησιακές στρατηγικές.

Στα έργα γενίκευσης, τα παιδιά καλούνται να διατυπώσουν έναν κανόνα και σε ακόμη πιο απαιτητικό βαθμό έναν μαθηματικό τύπο, που να ισχύει για οποιαδήποτε θέση της ακολουθίας, ανεξάρτητα από το αν αυτή είναι κοντινή ή μακρινή, χωρίς την ανάγκη διαδοχικής απαρίθμησης ή αναδρομικής επέκτασης προηγούμενων όρων.

Σε αντίθεση με τα έργα εντοπισμού κανονικότητας, όπου η περιγραφή της μεταβολής μπορεί να παραμένει τοπική ή αναδρομική, τα έργα γενίκευσης απαιτούν τη ρητή διατύπωση μιας σχέσης θέσης-τιμής. Η μετάβαση αυτή προϋποθέτει διδιάστατη σκέψη, καθώς τα παιδιά οφείλουν να συσχετίσουν δύο μεταβλητές και να εκφράσουν τη μεταξύ τους σχέση με γενικό τρόπο (Warren & Cooper, 2008).

Στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, η γενίκευση αφορά την κατανόηση της περιοδικότητας της μονάδας επανάληψης και τη δυνατότητα πρόβλεψης του στοιχείου που αντιστοιχεί σε οποιαδήποτε θέση της ακολουθίας. Στα αναπτυσσόμενα μοτίβα, η γενίκευση απαιτεί τον εντοπισμό μιας σταθερής σχέσης μεταξύ της θέσης και της τιμής του όρου και συχνά οδηγεί σε λεκτική, εικονική ή και συμβολική διατύπωση του κανόνα (π.χ. μέσω τύπων ή πινάκων τιμών) (Warren & Cooper, 2008).

Η χρήση αναπαραστάσεων, όπως πίνακες, σχήματα και γραφήματα, έχει αναδειχθεί ως καθοριστικός παράγοντας για την υποστήριξη της γενίκευσης, καθώς διευκολύνει την απεικόνιση της σχέσης θέσης-τιμής και την αναγνώριση γραμμικών ή άλλων μορφών μεταβολής (Mulligan & Mitchelmore, 2009). Μέσα από τη μετακίνηση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων, τα παιδιά μπορούν να διατηρήσουν τη δομή του μοτίβου

ανεξάρτητα από τη μορφή έκφρασής του και να υποστηρίζουν τη διατύπωση γενικών κανόνων.

Η ικανότητα γενίκευσης δεν αναπτύσσεται αυθόρμητα, αλλά απαιτεί στοχευμένες διδακτικές παρεμβάσεις και κατάλληλα σχεδιασμένα έργα που προκαλούν τα παιδιά να υπερβούν τις αναδρομικές και περιγραφικές προσεγγίσεις. Η γενίκευση αποτελεί σημείο καμπής στη μετάβαση από την αριθμητική στη συναρτησιακή και αλγεβρική σκέψη και, ως εκ τούτου, τα έργα αυτού του τύπου παρέχουν ισχυρές ενδείξεις για το επίπεδο εννοιολογικής κατανόησης και μαθηματικής ωρίμανσης των παιδιών (Blanton et al., 2019).

Μοτίβα και Στρατηγικές προσέγγισης των παιδιών

1.7.1 Η μαθηματική διάσταση της έννοιας της στρατηγικής

Οι μαθηματικές διεργασίες και η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων προϋποθέτουν τον συνδυασμό ενεργοποίησης μιας σειράς γνωστικών δομών, αφενός των κατάλληλων μαθηματικών γνώσεων και αφετέρου της οργανωμένης εφαρμογής τους. Στο πλαίσιο αυτό, τα μαθηματικά είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με την έννοια της στρατηγικής, η οποία περιλαμβάνει τους τρόπους με τους οποίους τα παιδιά προσεγγίζουν ένα μαθηματικό αντικείμενο, σχεδιάζουν τη διαχείρισή του και τελικά επιλύουν μια προβληματική κατάσταση.

Ως στρατηγικές νοούνται τα στάδια που αφορούν στις διαδικασίες, στους στόχους, στις κινήσεις και στις αναπαραστάσεις που το παιδί χρησιμοποιεί για την κατανόηση και την επίλυση ενός προβλήματος. Η μελέτη των στρατηγικών δεν περιορίζεται στις μηχανικές μεθόδους που εφαρμόζουν τα παιδιά, αλλά επεκτείνεται στο σκεπτικό επιλογής των κατάλληλων γνώσεων και στον τρόπο αξιοποίησής τους μέσα σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο επίλυσης (Lesh & Zawojewski, 2013).

Οι στρατηγικές που υιοθετούν τα παιδιά αντανακλούν το επίπεδο κατανόησης της δομής μιας μαθηματικής κατάστασης, τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνονται τις σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία της, καθώς και τον βαθμό γνωστικής και μαθηματικής ωριμότητας που έχουν αναπτύξει. Υπό αυτή την έννοια, η ανάλυση των στρατηγικών προσφέρει πολύτιμες πληροφορίες για τις νοητικές διαδρομές που ακολουθούν τα παιδιά από την πρώτη επαφή με το μαθηματικό ερέθισμα έως την τελική τους επίδοση (Stephens et al., 2017).

Η σπουδαιότητα της έννοιας της στρατηγικής στη μαθηματική εκπαίδευση δεν εξαντλείται στην αξιολόγηση της ορθότητας των απαντήσεων. Η καταμέτρηση των «σωστών» και των

«λανθασμένων» απαντήσεων δεν αποτελεί αυτοσκοπό της ερευνητικής μελέτης, καθώς η διερεύνηση των στρατηγικών επιδιώκει να φωτίσει τον τρόπο σκέψης, τα επίπεδα μαθηματικής ευελιξίας και τις γνωστικές επιλογές των παιδιών κατά την πορεία επίλυσης ενός προβλήματος.

Η διεθνής βιβλιογραφία έχει αναδείξει τη σχέση ανάμεσα στην ορθή επιλογή στρατηγικής και στην αποτελεσματικότερη οργάνωση και διαχείριση των μαθηματικών ζητούμενων. Οι επιδόσεις των παιδιών βασίζονται σε μεγάλο βαθμό στην ικανότητά τους να επιλέγουν, να ελέγχουν και να αναπροσαρμόζουν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν. Επομένως, η έννοια της στρατηγικής δεν αφορά μόνο τη διαδικασία επίλυσης, αλλά και την ικανότητα αναστοχασμού και ρύθμισης της μαθηματικής δραστηριότητας.

1.7.2 Στρατηγικές στο πεδίο των μοτίβων

Η ενασχόληση των παιδιών με μαθηματικά μοτίβα δεν περιορίζεται στη διαπίστωση ότι «κάτι επαναλαμβάνεται» ή ότι «κάτι αυξάνεται». Κάθε παιδί επιστρατεύει συγκεκριμένους τρόπους σκέψης και δράσης, δηλαδή στρατηγικές, προκειμένου να αναγνωρίσει, να περιγράψει, να επεκτείνει ή να γενικεύσει μια ακολουθία. Οι στρατηγικές αυτές αντανakλούν το επίπεδο κατανόησης της δομής του μοτίβου, τον τρόπο με τον οποίο το παιδί αντιλαμβάνεται τις σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία του, καθώς και τον βαθμό αλγεβρικής ωριμότητας που έχει αναπτύξει.

Στη διεθνή βιβλιογραφία, ο όρος «στρατηγική» χρησιμοποιείται για να περιγράψει τα συνειδητά ή ημισυνειδητά μονοπάτια σκέψης που ακολουθούν τα παιδιά κατά τη διαχείριση ενός μοτίβου· από την απλή αναγνώριση της επανάληψης ή της αύξησης, έως τη διατύπωση γενικευμένων κανόνων και συναρτησιακών σχέσεων. Οι στρατηγικές αυτές εκτείνονται από επιφανειακές, αντιληπτικές και εμπειρικές προσεγγίσεις έως δομικές και συναρτησιακές μορφές συλλογιστικής, οι οποίες συνδέονται άμεσα με την ανάπτυξη πρώιμης αλγεβρικής σκέψης (Papic & Mulligan, 2007· Lüken & Tiedemann, 2019).

Τα μοτίβα έχουν αναδειχθεί ως κατεξοχήν πεδίο καλλιέργειας δομικής σκέψης και πρώιμης αλγεβρικής λογικής. Υπό αυτήν την οπτική, οι στρατηγικές που υιοθετούν τα παιδιά όταν εργάζονται με επαναλαμβανόμενα ή αναπτυσσόμενα μοτίβα δεν αποτελούν απλώς τεχνικές επίλυσης, αλλά λειτουργούν ως παράθυρο στη μαθηματική τους σκέψη.

Οι έρευνες σε διεθνές επίπεδο έχουν στραφεί στη συστηματική μελέτη των στρατηγικών που εφαρμόζουν τα παιδιά σε καταστάσεις διερεύνησης μοτίβων. Η ανάλυση των στρατηγικών εξυπηρετεί την ανάγκη της επιστημονικής κοινότητας να ερμηνεύσει τόσο τις διαδικασίες όσο και τους αιτιολογικούς παράγοντες που καθορίζουν την επιλογή κάθε

στρατηγικής. Οι γνώσεις που προκύπτουν από την κατανόηση των μαθηματικών συλλογισμών και ενεργειών των παιδιών αποτελούν σημαντική βάση για την παιδαγωγική αξιοποίηση των μοτίβων και τη βελτίωση της διδακτικής πράξης. Από τη μελέτη των στρατηγικών εξάγονται συμπεράσματα που αφορούν όχι μόνο τις μηχανικές διαδικασίες, αλλά και την ικανότητα των παιδιών να αναγνωρίζουν, να επεκτείνουν και να γενικεύουν κανονικότητες, αναδεικνύοντας τη σημασία των στρατηγικών αυτών για την ανάπτυξη της αλγεβρικής και συναρτησιακής σκέψης (Τζεκάκη κ.ά., 2019· Stephens et al., 2017).

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η διερεύνηση των στρατηγικών που αναπτύσσουν παιδιά Δ' Δημοτικού κατά την επεξεργασία μαθηματικών μοτίβων. Έμφαση δίνεται στη διάκριση μεταξύ στρατηγικών που βασίζονται σε επιφανειακά χαρακτηριστικά — όπως η απλή αντιγραφή ή η μηχανική αναπαραγωγή της ακολουθίας — και στρατηγικών που αποκαλύπτουν την κατανόηση της δομής, του κανόνα και των σχέσεων θέσης–τιμής. Για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας, οι στρατηγικές αναλύονται με βάση ένα πολυδιάστατο σχήμα (φακός ανάλυσης), το οποίο καθοδηγεί την κατηγοριοποίηση και την ερμηνεία τους. Ειδικότερα, οι στρατηγικές εξετάζονται: (α) ως προς το επίπεδο επέκτασης και γενίκευσης στο οποίο οδηγούν, (β) ως προς το είδος της στρατηγικής που ενεργοποιείται, (γ) ως προς το είδος του μοτίβου στο οποίο εφαρμόζονται και (δ) ως προς τη χρήση και τη μεταβολή των αναπαραστάσεων. Οι άξονες αυτοί δεν λειτουργούν ανεξάρτητα, αλλά αλληλοσυμπληρώνονται, επιτρέποντας τη συστηματική οργάνωση των στρατηγικών σε γενικές και ειδικές κατηγορίες.

1.7.3 Γενικές Κατηγορίες Στρατηγικών Προσέγγισης Μοτίβων

Η έρευνα για τα μαθηματικά μοτίβα καταγράφει μια σαφή αναπτυξιακή πορεία στις στρατηγικές που υιοθετούν τα παιδιά. Η πορεία αυτή εκτείνεται από αντιληπτικές και επιφανειακές προσεγγίσεις προς δομικές και, τελικά, συναρτησιακές μορφές σκέψης (Parić & Mulligan, 2007· Lüken & Tiedemann, 2019).

Παράλληλα, μελέτες εστιάζουν σε μία επίσης ουσιαστική διάκριση των στρατηγικών ως προς το πλήθος των μεταβλητών με τις οποίες εργάζονται τα παιδιά. Σύμφωνα με το αναπτυξιακό μοντέλο των Stephens et al. (2017), τα παιδιά αρχικά προσεγγίζουν τα μοτίβα μονοδιάστατα, εστιάζοντας στη διαδοχική μεταβολή μιας μόνο ποσότητας. Σε πιο ώριμα στάδια, αναπτύσσουν διδιάστατη σκέψη, συνδέοντας ρητά τη θέση ενός όρου με την τιμή του και επεξεργαζόμενοι ταυτόχρονα δύο μεταβλητές.

Με βάση αυτή τη σύνθεση, οι στρατηγικές προσέγγισης των μοτίβων οργανώνονται σε τρεις ευρείες κατηγορίες: αντιληπτικές, δομικές και συναρτησιακές, οι οποίες συνδέονται κατά

κανόνα με διαφορετικά επίπεδα γνωστικής επεξεργασίας (από βασική συνέχιση/επέκταση έως γενίκευση). Οι κατηγορίες αυτές δεν αποτελούν διακριτά και ασύνδετα στάδια, αλλά συνιστούν ένα συνεχές μαθηματικής ωρίμανσης. Η βιβλιογραφία διακρίνει μεταξύ κοντινών επεκτάσεων και μακρινών γενικεύσεων, με τις τελευταίες να προϋποθέτουν συναρτησιακή σκέψη (Warren & Cooper, 2008· Blanton et al., 2019)

A. Αντιληπτικές στρατηγικές (μονοδιάστατη προσέγγιση)

Οι αντιληπτικές στρατηγικές χαρακτηρίζονται από εστίαση σε άμεσα ορατά χαρακτηριστικά των μοτίβων, όπως το χρώμα, το σχήμα, τη διάταξη ή τη συνολική μορφή. Σε αυτό το επίπεδο, τα παιδιά δεν εργάζονται με τη δομή του μοτίβου ως σύστημα σχέσεων, αλλά μεμονωμένα με στοιχεία που αντιλαμβάνονται οπτικά. Η σκέψη παραμένει μονοδιάστατη, καθώς η προσοχή κατευθύνεται σε μία μόνο διάσταση κάθε φορά (π.χ. «ποιο χρώμα έρχεται μετά»), χωρίς σύνδεση με τη θέση ή τον κανόνα της ακολουθίας.

Η έρευνα των Lüken και Tiedemann (2019) δείχνει χαρακτηριστικά ότι τα παιδιά συχνά αποδίδουν στα μοτίβα ερμηνείες βασισμένες στη συνολική τους εικόνα («μοιάζει με φίδι», «είναι σαν τοίχος»), γεγονός που αποκαλύπτει αντιληπτική και όχι δομική κατανόηση. Παρόμοια, οι Papic και Mulligan (2007) επισημαίνουν ότι η επιτυχής αντιγραφή ή επέκταση ενός μοτίβου μπορεί να βασίζεται αποκλειστικά στη μίμηση και στη μνήμη, χωρίς αναγνώριση της μονάδας επανάληψης.

B. Δομικές στρατηγικές (μεταβατική μονοδιάστατη–διδιάστατη προσέγγιση)

Οι δομικές στρατηγικές σηματοδοτούν μια σημαντική ποιοτική μετατόπιση στη μαθηματική σκέψη. Οι στρατηγικές αυτές λειτουργούν ως γέφυρα ανάμεσα στη μονοδιάστατη προσέγγιση της μεταβολής και στη διδιάστατη κατανόηση της σχέσης θέσης–τιμής. Σε αυτό το επίπεδο, τα παιδιά αρχίζουν να αναγνωρίζουν τη μονάδα επανάληψης ή τον τρόπο μεταβολής του μοτίβου και να αντιλαμβάνονται ότι η ακολουθία διέπεται από κάποια σταθερότητα. Παρότι η σκέψη συχνά παραμένει αναδρομική (step-by-step), δηλαδή βασισμένη στη σύγκριση διαδοχικών όρων («κάθε φορά προσθέτω δύο»), αρχίζει να διαφαίνεται η μετατόπιση της εργασίας με τη δομή. Η αναδρομική περιγραφή της μεταβολής («κάθε φορά +2») αποτελεί χαρακτηριστική μεταβατική στρατηγική, καθώς επιτρέπει την τοπική πρόβλεψη χωρίς να οδηγεί απαραίτητα σε γενικευμένο κανόνα θέσης–τιμής (Stephens et al., 2017).

Στο πλαίσιο αυτό, τα παιδιά εστιάζουν τόσο στα στοιχεία όσο και στις σχέσεις μεταξύ τους, χωρίς όμως να έχουν ακόμη πλήρη επίγνωση της σχέσης θέσης-τιμής. Επιχειρείται δηλαδή η διδιάστατη κατανόηση της μεταβολής των στοιχείων του μοτίβου, ανεξαρτήτου έκβασης της προσπάθειας. Οι Stephens et al. (2017) περιγράφουν αυτό το στάδιο ως κρίσιμο μεταβατικό επίπεδο, στο οποίο τα παιδιά μπορούν να περιγράψουν τη μεταβολή, αλλά δυσκολεύονται να γενικεύσουν ή να συνδέσουν ρητά δύο μεταβλητές. Πολλές φορές μάλιστα στην προσπάθειά τους να προβλέψουν επόμενους, κοντινούς ή μακρινούς όρους στα μοτίβα παρατηρείται η χρήση αριθμητικών πράξεων (προσθετικών ή πολλαπλασιαστικών). Η επιλογή εκτέλεσης πράξεων έχει καταγραφεί εκτενώς στη διεθνή βιβλιογραφία ως στρατηγική επίλυσης καταστάσεων με μοτίβα, ως πρόωμη μορφή γενίκευσης και μετάβασης από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη (Zazkis & Liljedahl, 2002· Blanton & Kaput, 2004)

Γ. Συναρτησιακές στρατηγικές (διδιάστατη προσέγγιση)

Οι συναρτησιακές στρατηγικές αντιπροσωπεύουν την πιο ώριμη μορφή προσέγγισης των μοτίβων. Σε αυτό το επίπεδο, τα παιδιά εργάζονται ταυτόχρονα με δύο μεταβλητές, συνδέοντας ρητά τη θέση ενός όρου με την τιμή του και αναζητώντας γενικούς κανόνες που ισχύουν για οποιαδήποτε θέση της ακολουθίας. Η σκέψη γίνεται σαφώς διδιάστατη, καθώς η μεταβολή της μιας ποσότητας νοείται σε συνάρτηση με τη μεταβολή της άλλης (Stephens et al., 2017).

Η βιβλιογραφία για τη συναρτησιακή σκέψη υπογραμμίζει ότι σε αυτό το στάδιο τα παιδιά μπορούν να διατυπώνουν γενικεύσεις, να χρησιμοποιούν πίνακες ή συμβολικές αναπαραστάσεις και να αιτιολογούν τις προβλέψεις τους με αναφορά σε σχέσεις και όχι σε διαδοχικά βήματα (Warren & Cooper, 2008· Kaput, 2008). Η μετάβαση αυτή αποτελεί θεμέλιο για την ανάπτυξη πρόωμης αλγεβρικής σκέψης.

1.7.4 Ειδικές στρατηγικές προσέγγισης μοτίβων

Μια σειρά από ειδικές στρατηγικές προσέγγισης των μοτίβων, όπως περιγράφονται στη διεθνή βιβλιογραφία, δεν λειτουργούν ανεξάρτητα από τις γενικές κατηγορίες στρατηγικών, αλλά συνιστούν ιδιαίτερες εκφάνσεις αυτών σε διαφορετικές μαθηματικές καταστάσεις. Κάθε ειδική στρατηγική μπορεί να νοηθεί ως επιμέρους γνωστικός μηχανισμός ενταγμένος στο ευρύτερο πλαίσιο των αντιληπτικών, δομικών ή συναρτησιακών στρατηγικών, ανάλογα με το είδος της συλλογιστικής που ενεργοποιεί και το πλήθος των μεταβλητών με τις οποίες εργάζεται το παιδί. Με αυτή την έννοια, στρατηγικές όπως η απαρίθμηση ή η μηχανική

αντιγραφή, ή ρυθμική απαγγελία εντάσσονται κυρίως στο πλαίσιο των αντιληπτικών στρατηγικών και συνδέονται με μονοδιάστατες μορφές σκέψης, ενώ προσεγγίσεις όπως η ανάλυση δομής και η αξιοποίηση της μονάδας επανάληψης αποτελούν εφαρμογές δομικής αντίληψης και λειτουργούν ως μεταβατικές μορφές προς τη διδιάστατη κατανόηση. Αντίστοιχα, στρατηγικές αντιστοίχισης και συσχέτισης μεταβλητών υπάγονται στις συναρτησιακές στρατηγικές και προϋποθέτουν διδιάστατη επεξεργασία των μοτίβων. Η διάκριση αυτή επιτρέπει την ανάλυση των ειδικών στρατηγικών όχι ως αποσπασματικών τεχνικών, αλλά ως ενδείξεων του επιπέδου μαθηματικής και αλγεβρικής ωρίμανσης των παιδιών.

Η μελέτη των στρατηγικών που υιοθετούν τα παιδιά κατά την επεξεργασία μοτίβων αναδεικνύει ότι η κατανόηση των επαναλαμβανόμενων και των αναπτυσσόμενων μοτίβων δεν συνιστά δύο ανεξάρτητες διαδικασίες, αλλά ένα ενιαίο αναπτυξιακό πλαίσιο με αλληλένδετα γνωστικά επίπεδα. Τα παιδιά ξεκινούν με αντιληπτικές και μηχανικές στρατηγικές όπως είναι η ρυθμική απαγγελία και η εναλλαγή των ορατών στοιχείων, προχωρούν σε δομικές και αναδρομικές μορφές σκέψης και, σταδιακά, αναπτύσσουν συναρτησιακή, συμβολική και μεταγνωστική κατανόηση. Στη διεθνή βιβλιογραφία έχουν περιγραφεί επανειλημμένα στρατηγικές όπως ρυθμική απαγγελία, η απαρίθμηση, η σύνδεση θέσης- τιμής, η ανάλυση της δομής και η χρήση αναπαραστάσεων ως βασικοί μηχανισμοί σκέψης κατά τη διαχείριση μοτίβων (Papic & Mulligan, 2007· Mulligan & Mitchelmore, 2009· Warren & Cooper, 2008· Blanton et al., 2019).

Οι στρατηγικές αυτές δεν νοούνται ως αυστηρά διακριτά στάδια μαθηματικής ανάπτυξης, αλλά ως αναλυτικά εργαλεία για την ερμηνεία της μαθητικής σκέψης, τα οποία συχνά συνυπάρχουν και αλληλοεπιδρούν. Η απαρίθμηση για παράδειγμα, είναι συχνή αρχική στρατηγική στα μοτίβα, καθώς τα παιδιά στηρίζονται στη μέτρηση για να εντοπίσουν θέση ή να προβλέψουν επόμενο όρο. Στα επαναλαμβανόμενα εμφανίζεται ως «μέτρημα μέσα στη μονάδα» (π.χ. μέχρι το 2 σε AB), ενώ στα αναπτυσσόμενα συχνά χρησιμοποιείται για να εντοπιστεί η διαφορά διαδοχικών όρων (Papic & Mulligan, 2007). Παρότι λειτουργική σε κοντινές προβλέψεις, περιορίζεται σε «μακρινούς» όρους λόγω χρόνου και λαθών, γι' αυτό και η διδασκαλία στοχεύει στη μετάβαση προς δομικές και στρατηγικές γενίκευσης (Warren & Cooper, 2008· Blanton et al., 2019).

Στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, οι στρατηγικές των παιδιών συνδέονται κυρίως με την αναγνώριση και κατανόηση της μονάδας επανάληψης. Τα μοτίβα αυτού του τύπου αποτελούν πρώιμο και θεμελιώδες πεδίο για την ανάπτυξη δομικής σκέψης, καθώς τα παιδιά καλούνται να εντοπίσουν το μικρότερο τμήμα που επανέρχεται σταθερά. Σε αρχικά στάδια,

τα παιδιά υιοθετούν αντιληπτικές στρατηγικές, εστιάζοντας σε επιφανειακά χαρακτηριστικά του μοτίβου, όπως το χρώμα, το σχήμα ή τη συνολική εικόνα, και προχωρούν σε μηχανική αναπαραγωγή ή αντιγραφή της ακολουθίας, συχνά μέσω μίμησης ή μνήμης, χωρίς δομική επίγνωση. Η στρατηγική της εναλλαγής στοιχείων, στο διαδοχικό δηλαδή, προσδιορισμό των όρων, χωρίς ρητή αναφορά στη μονάδα επανάληψης αναδεικνύεται από τη διεθνή βιβλιογραφία (Papic και Mulligan 2007), περιγράφοντας αυτήν την προσέγγιση ως *element-by-element strategy*. Κατά τη ρητή εναλλαγή των στοιχείων η προσοχή των παιδιών κατευθύνεται στα επιμέρους στοιχεία και στα οπτικά τους χαρακτηριστικά, γεγονός που επιτρέπει τη σωστή συνέχιση του μοτίβου σε άμεσες θέσεις, αλλά δεν συνεπάγεται κατανόηση της μονάδας επανάληψης ως δομικού συνόλου. (Papic & Mulligan, 2007· Mulligan & Mitchelmore, 2009).

Η μετάβαση προς βαθύτερη κατανόηση σηματοδοτείται από τη στρατηγική της αναγνώρισης και αξιοποίησης της μονάδας επανάληψης, κατά την οποία τα παιδιά εντοπίζουν το επαναλαμβανόμενο τμήμα και αρχίζουν να το αντιλαμβάνονται ως ενιαία δομή. Η στρατηγική αυτή αποτελεί κρίσιμο σημείο μετάβασης από την αντιληπτική στη δομική κατανόηση και έχει αναδειχθεί ως βασικός δείκτης μαθηματικής ωρίμανσης σε μικρές ηλικίες. Σε πιο προχωρημένα επίπεδα, τα παιδιά εφαρμόζουν δομικές στρατηγικές, όπως η ταξινόμηση στοιχείων και οι απλές μετατροπές της μονάδας επανάληψης (π.χ. αλλαγή χρώματος ή σχήματος), γεγονός που υποδηλώνει σταθερή αντίληψη της δομής πέρα από εξωτερικά χαρακτηριστικά (Mulligan & Mitchelmore, 2009). Παράλληλα, η χρήση αναπαραστάσεων, όπως πίνακες ή σχηματικές απεικονίσεις, ενισχύει τη ρητή διατύπωση και την κατανόηση της μονάδας επανάληψης, λειτουργώντας υποστηρικτικά για τη δομική κατανόηση.

Στα αναπτυσσόμενα μοτίβα, το γνωστικό βάρος μετατοπίζεται από την αναγνώριση της επανάληψης στον εντοπισμό του κανόνα μεταβολής και στη σύνδεση της θέσης ενός όρου με την τιμή του. Το φάσμα των στρατηγικών είναι εδώ ευρύτερο και πιο σύνθετο, καθώς εμπλέκονται μορφές συλλογιστικής που συνδέονται με τη συναρτησιακή σχέση. Ιδιαίτερα στα γραμμικά αναπτυσσόμενα μοτίβα, πολλά παιδιά περιγράφουν την εξέλιξη με αναδρομικούς (recursive) κανόνες τύπου «κάθε φορά +2», μετακινούμενοι από την απλή απαρίθμηση σε πιο δομική περιγραφή της κανονικότητας (Stephens et al., 2017). Η στρατηγική αυτή θεωρείται μεταβατική, επειδή συχνά παραμένει *step-by-step* και δεν μετατρέπεται αυτόματα σε γενικό κανόνα θέσης-τιμής, ενώ σε μη γραμμικές αυξήσεις μπορεί να οδηγήσει και σε σφάλματα (Blanton et al., 2019· Mulligan & Mitchelmore, 2009). Οι στρατηγικές αυτές αποτελούν μεταβατικό στάδιο από την αριθμητική προς τη

συναρτησιακή κατανόηση και, παρότι δεν οδηγούν άμεσα σε γενίκευση, προετοιμάζουν το έδαφος για πιο σύνθετες μορφές σκέψης (Stephens et al., 2017).

Σε επόμενο επίπεδο, τα παιδιά αρχίζουν να εφαρμόζουν στρατηγικές αντιστοίχισης, αναγνωρίζοντας σχέσεις μεταξύ δύο ποσοτήτων, όπως «ένα προς ένα» ή «δύο προς ένα», γεγονός που υποδηλώνει πρώιμη αλγεβρική και συναρτησιακή σκέψη (Blanton & Karut, 2004). Η δομική ανάλυση αφορά την ικανότητα να «διαβάζεται» το μοτίβο ως οργανωμένη δομή και όχι ως σειρά μεμονωμένων στοιχείων: τα παιδιά εστιάζουν σε ομαδοποιήσεις, χωρικές/αριθμητικές σχέσεις και σταθερότητες που εξηγούν την κανονικότητα. Η βιβλιογραφία τη συνδέει με αυξημένη μαθηματική ωριμότητα και με ευκολότερη μετάβαση προς γενίκευση, καθώς τα παιδιά μπορούν να αιτιολογούν τον κανόνα με αναφορά στη δομή (Mulligan & Mitchelmore, 2009· Blanton et al., 2019). Η κατανόηση της ταυτόχρονης μεταβολής των ποσοτήτων (συμμεταβολή) οδηγεί στη στρατηγική της συσχέτισης μεταβλητών (covariation), η οποία θεωρείται θεμέλιο της συναρτησιακής σκέψης και προϋπόθεση για τη ρητή διατύπωση σχέσεων θέσης–τιμής. Η πιο ώριμη μορφή κατανόησης εκφράζεται μέσω της γενίκευσης, όπου τα παιδιά είναι σε θέση να περιγράψουν τον κανόνα λεκτικά, οπτικο-δομικά ή συμβολικά, επεκτείνοντάς τον σε οποιαδήποτε θέση της ακολουθίας.

Τέλος, η χρήση αναπαραστάσεων και στρατηγικών οπτικοποίησης διατρέχει την επεξεργασία τόσο επαναλαμβανόμενων όσο και αναπτυσσόμενων μοτίβων. Οι αναπαραστατικές στρατηγικές (πίνακες, σχήματα, διαγράμματα/γραφήματα) λειτουργούν ως εργαλείο οργάνωσης και ανάδειξης σχέσεων: στα επαναλαμβανόμενα μπορούν να στηρίξουν τη ρητή αναγνώριση της μονάδας επανάληψης, ενώ στα αναπτυσσόμενα διευκολύνουν τη σύνδεση θέσης–τιμής και άρα τη συναρτησιακή κατανόηση (Warren & Cooper, 2008). Όταν τα παιδιά χρησιμοποιούν συστηματικά τέτοιες αναπαραστάσεις, ενισχύεται η δυνατότητα γενίκευσης και αιτιολόγησης των προβλέψεών τους (Vale & Pimentel, 2009· Blanton et al., 2019). Η βιβλιογραφία υπογραμμίζει ότι η συστηματική καλλιέργεια τέτοιων στρατηγικών υποστηρίζει ουσιαστικά τη μετάβαση από περιγραφικές προσεγγίσεις σε γενικεύσιμες, συναρτησιακές μορφές σκέψης, συμβάλλοντας αποφασιστικά στην ανάπτυξη της πρώιμης αλγεβρικής κατανόησης. Η ικανότητα μετατόπισης (shifting) μεταξύ διαφορετικών τρόπων γενίκευσης και συλλογιστικής, όπως η μετάβαση από αναδρομικές ή συμμεταβολικές (covariational) στρατηγικές προς στρατηγικές αντιστοίχισης θέσης–τιμής (correspondence), αποτελεί κρίσιμο δείκτη εννοιολογικού βάθους και συναρτησιακής ωρίμανσης. Η βιβλιογραφία δείχνει ότι τέτοιες μετατοπίσεις ενεργοποιούνται κυρίως όταν τα παιδιά καλούνται να διαχειριστούν

«μακρινές» γενικεύσεις, όπου οι τοπικές, step-by-step προσεγγίσεις δεν επαρκούν πλέον (Wilkie & Clarke, 2016). Σε αυτήν την εργασία ο όρος shifting χρησιμοποιείται τόσο για τη μετατόπιση μεταξύ αναπαραστάσεων (εικονική–λεκτική–αριθμητική–συμβολική), όσο και για τη μετατόπιση μεταξύ τύπων συλλογιστικής (αναδρομική → αντιστοίχιση θέσης–τιμής).

1.7.5 Δυσκολίες και περιορισμοί στη διαχείριση των μοτίβων

Η καθολική αναγνώριση της αξίας των μοτίβων από τη διεθνή επιστημονική κοινότητα και η προώθησή τους ως διδακτικό αντικείμενο δικαιολογείται από πληθώρα ερευνών που τεκμηριώνουν τη συμβολή τους στη μαθηματική ανάπτυξη. Παρά τη σημαντική αυτή προσφορά, η κατανόηση και η επεξεργασία των μοτίβων συνοδεύονται από μια σειρά δυσκολιών και περιορισμών. Οι δυσκολίες αυτές δεν εμφανίζονται αποσπασματικά, αλλά συνδέονται άμεσα με το επίπεδο γνωστικής επεξεργασίας στο οποίο λειτουργεί το παιδί, το είδος της στρατηγικής που ενεργοποιεί, τον τύπο του μοτίβου και τον τρόπο χρήσης των αναπαραστάσεων. Υπό αυτή την οπτική, μπορούν να ερμηνευτούν ως ενδείξεις περιορισμένης δομικής ή συναρτησιακής κατανόησης.

Η βασικότερη δυσκολία που εμφανίζεται στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα αφορά τον εντοπισμό της μονάδας επανάληψης και συνδέεται με την κυριαρχία αντιληπτικών στρατηγικών έναντι δομικών μορφών σκέψης. Τα παιδιά συχνά επικεντρώνονται σε επιφανειακά χαρακτηριστικά, όπως το χρώμα ή το σχήμα, παραβλέποντας την ενιαία δομή του μοτίβου. Η προσκόλληση στα εξωτερικά χαρακτηριστικά οδηγεί συχνά σε λάθη κατά την επέκταση ή ανάλυση της ακολουθίας. Τα παιδιά συχνά αδυνατούν να εντοπίσουν τον κανόνα του μοτίβου όταν δεν κατανοούν τη δομή και προσκολλώνται σε οπτικά χαρακτηριστικά χωρίς μαθηματική σημασία (Papic & Mulligan, 2007).

Στο πεδίο των αναπτυσσόμενων μοτίβων οι δυσκολίες είναι ακόμη πιο πολύπλοκες. Πολλά παιδιά βασίζονται σε στρατηγικές απαρίθμησης χωρίς να εξετάζουν την εσωτερική λογική της μεταβολής, με αποτέλεσμα να αδυνατούν να εντοπίσουν τις σχέσεις που διέπουν την ανάπτυξη της ακολουθίας (Warren & Cooper, 2008). Η απόσταση μεταξύ της απλής περιγραφής του μοτίβου («προσθέτω κάθε φορά 2») και της διατύπωσης ενός γενικευμένου κανόνα («η τιμή του n -οστού όρου δίνεται από $2n + 1$ ») είναι μεγάλη και αντιστοιχεί στη μετάβαση από κοντινές επεκτάσεις σε μακρινές γενικεύσεις. Ιδιαίτερα στις μικρότερες ηλικίες, η διατύπωση γενικού κανόνα αποτελεί απαιτητική και χρονοβόρα γνωστική διαδικασία (Blanton et al., 2019).

Ένα ακόμη σημαντικό εμπόδιο αφορά την τάση των παιδιών να αντιμετωπίζουν το μοτίβο ως ακολουθία μεμονωμένων στοιχείων και όχι ως σύστημα με εσωτερική συνοχή. Η

Mulligan και ο Mitchelmore (2009) επισημαίνουν ότι η εστίαση σε επιφανειακά χαρακτηριστικά εμποδίζει την ανάπτυξη δομικής σκέψης και στρατηγικών γενίκευσης. Παράλληλα, οι Papic και Mulligan (2007) παρατηρούν ότι η περιορισμένη έκθεση των παιδιών σε διαφορετικού τύπου μοτίβα στις πρώτες τάξεις εντείνει τις δυσκολίες κατανόησης της ενιαίας δομής.

Μερικές δυσκολίες φαίνεται να απορρέουν και από το ίδιο το αναλυτικό πρόγραμμα. Σε αρκετές περιπτώσεις τα μοτίβα αντιμετωπίζονται ως δραστηριότητες «εισαγωγικού χαρακτήρα» και όχι ως κεντρικό μαθησιακό αντικείμενο (Vale & Pimentel, 2009). Αυτό οδηγεί συχνά είτε σε αποσπασματική διδασκαλία είτε σε υποτίμηση της γνωστικής αξίας τους από εκπαιδευτικούς και παιδιά. Συνεπώς, η επιτυχής αξιοποίηση των μοτίβων στη διδασκαλία εξαρτάται και από την εφαρμογή διαφοροποιημένων διδακτικών πρακτικών που λαμβάνουν υπόψη αυτές τις παραμέτρους.

1.7.6 Εμπειρικά ερευνητικά δεδομένα για τις στρατηγικές προσέγγισης μοτίβων

Η διεθνής βιβλιογραφία περιλαμβάνει πληθώρα εμπειρικών μελετών που διερευνούν τις στρατηγικές επιλογές παιδιών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης κατά τη διαχείριση δραστηριοτήτων με μαθηματικά μοτίβα. Οι έρευνες αυτές δεν εστιάζουν αποκλειστικά στο αν τα παιδιά δίνουν «σωστές» απαντήσεις, αλλά κυρίως στον τρόπο με τον οποίο οργανώνουν τη σκέψη τους, στις στρατηγικές που ενεργοποιούν και στο επίπεδο γενίκευσης στο οποίο μπορούν να φτάσουν. Τα ευρήματα αναδεικνύουν τόσο τις δυνατότητες όσο και τις δυσκολίες των παιδιών και προσφέρουν κρίσιμα δεδομένα για τη διδακτική αξιοποίηση των μοτίβων. Στην παρούσα εργασία, τα ερευνητικά δεδομένα ερμηνεύονται υπό το πρίσμα των γενικών και ειδικών κατηγοριών στρατηγικών, καθώς και των τεσσάρων αξόνων ανάλυσης: επίπεδο γενίκευσης, είδος στρατηγικής, είδος μοτίβου και χρήση αναπαραστάσεων.

Η μελέτη των Papic και Mulligan (2007) αποτελεί μία από τις πρώιμες συστηματικές παρεμβάσεις στον χώρο των μοτίβων σε παιδιά προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας. Στις δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν, τα παιδιά εργάστηκαν με επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα μοτίβα μέσω ποικίλων υλικών, εικόνων και σχηματικών αναπαραστάσεων. Κλήθηκαν να συμπληρώσουν ακολουθίες, να τις επεκτείνουν και να περιγράψουν λεκτικά τον κανόνα που αναγνώριζαν. Τα έργα αυτά ανέδειξαν ένα ευρύ φάσμα στρατηγικών, από μηχανική αντιγραφή και απαρίθμηση έως την αναγνώριση της μονάδας επανάληψης και τη δομική οργάνωση της ακολουθίας. Οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι η δυνατότητα των παιδιών να μετακινούνται μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων ενίσχυε τη μετάβαση από

αντιληπτικές σε δομικές στρατηγικές, θέτοντας θεμέλια για πιο σύνθετες μορφές μαθηματικής σκέψης.

Σε παρόμοιο αναπτυξιακό πλαίσιο, οι Lüken και Tiedemann (2019) μελέτησαν τις στρατηγικές που αναπτύσσουν παιδιά προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας κατά την επεξεργασία οπτικών και σχηματικών μοτίβων. Τα παιδιά κλήθηκαν να επεκτείνουν μοτίβα, να τα αναπαραστήσουν με διαφορετικούς τρόπους και να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα παιδιά συχνά βασίζονται αρχικά σε αντιληπτικές στρατηγικές, στρέφοντας την προσοχή τους σε εξωτερικά χαρακτηριστικά του μοτίβου, γεγονός που οδηγεί σε επιφανειακή κατανόηση. Όταν όμως τα έργα υποστήριζαν την εστίαση στη δομή και την αλλαγή αναπαραστάσεων, παρατηρήθηκε σταδιακή μετατόπιση προς δομικές στρατηγικές. Η μελέτη αναδεικνύει ότι η αποδέσμευση από επιφανειακά χαρακτηριστικά και η διατήρηση της δομής του μοτίβου ανεξάρτητα από τη μορφή έκφρασής του αποτελούν κρίσιμους παράγοντες για την ανάπτυξη μαθηματικής κατανόησης.

Ιδιαίτερη έμφαση στις διαδικασίες γενίκευσης δίνεται από τους Warren και Cooper (2008), οι οποίοι μελέτησαν παιδιά Δ' Δημοτικού σε έργα αναπτυσσόμενων μοτίβων. Τα παιδιά κλήθηκαν αρχικά να επεκτείνουν ακολουθίες για κοντινές θέσεις και στη συνέχεια να προβλέψουν μακρινούς όρους. Τα δεδομένα έδειξαν ότι οι περισσότερα παιδιά χρησιμοποιούσαν αναδρομικές στρατηγικές τύπου «κάθε φορά προσθέτω...», οι οποίες ήταν αποτελεσματικές για κοντινές επεκτάσεις αλλά ανεπαρκείς για τη διατύπωση γενικού κανόνα. Μέσα από τη χρήση πινάκων και άλλων αναπαραστάσεων, ορισμένα παιδιά μπόρεσαν να μετακινηθούν προς συναρτησιακές στρατηγικές, συνδέοντας ρητά τη θέση με την τιμή. Η μελέτη αναδεικνύει το χάσμα μεταξύ κοντινών επεκτάσεων και μακρινών γενικεύσεων και υπογραμμίζει τον ρόλο της υποστηρικτικής διδασκαλίας στη μετάβαση αυτή.

Στο ίδιο πνεύμα, οι Blanton et al. (2019) διερεύνησαν τη συμβολή των μοτίβων στην ανάπτυξη συναρτησιακής σκέψης μέσα από διδακτικές παρεμβάσεις στο Δημοτικό. Τα έργα απαιτούσαν από τα παιδιά να συνδέσουν τη θέση ενός όρου με την τιμή του χρησιμοποιώντας πίνακες, γραφήματα και συμβολικές αναπαραστάσεις. Τα ευρήματα έδειξαν ότι τα παιδιά που χρησιμοποιούσαν συστηματικά τέτοιες αναπαραστάσεις μπορούσαν ευκολότερα να διατυπώσουν γενικούς κανόνες και να προχωρήσουν σε μακρινές γενικεύσεις. Η χρήση αναπαραστάσεων λειτούργησε ως καταλύτης για τη μετάβαση από αναδρομικές περιγραφές σε ρητές συναρτησιακές σχέσεις.

Σημαντική είναι και η συμβολή των Zazkis και Liljedahl (2002), οι οποίοι μελέτησαν τη διαδικασία της γενίκευσης σε αναπτυσσόμενα μοτίβα μέσα από έργα που απαιτούσαν από τα παιδιά να εξηγήσουν και να αιτιολογήσουν τις γενικεύσεις τους. Από τη μελέτη τους αναδείχθηκε ότι σε αρκετές περιπτώσεις τα παιδιά παράγουν γενικεύσεις χωρίς να τεκμηριώνουν επαρκώς τη δομή που τις στηρίζει, γεγονός που αναδεικνύει τη διάκριση μεταξύ επιφανειακής και δομικής αντίληψης. Η μελέτη αυτή τονίζει τη σημασία της αιτιολόγησης και της δομικής ανάλυσης ως κριτηρίων αξιολόγησης της ποιότητας μιας στρατηγικής.

Οι Wilkie και Clark (2016) εστίασαν σε παιδιά που εργάζονταν με αναπτυσσόμενα μοτίβα και ανέλυσαν τον ρόλο των αναπαραστάσεων στη μετάβαση από αναδρομικές σε συναρτησιακές στρατηγικές. Τα έργα περιλάμβαναν αριθμητικά, οπτικά και συμβολικά μοτίβα, και τα παιδιά ενθαρρύνονταν να μετακινούνται μεταξύ αυτών. Τα ευρήματα έδειξαν ότι η ευελιξία στη χρήση και την αλλαγή αναπαραστάσεων υποστήριζε τη βαθύτερη κατανόηση των σχέσεων και διευκόλυνε τη διατύπωση γενικών κανόνων.

Αντίστοιχα, η μελέτη των Somasundram et al. (2019) ανέδειξε τη σημασία της συμμεταβολής (covariation) και της σύνδεσης μεταβλητών σε αναπτυσσόμενα μοτίβα. Τα παιδιά εργάστηκαν με έργα που απαιτούσαν ταυτόχρονη παρακολούθηση δύο ποσοτήτων και οι στρατηγικές τους ανέδειξαν τη σταδιακή μετάβαση από μονοδιάστατες περιγραφές σε διδιάστατη σκέψη. Η έρευνα υπογραμμίζει ότι η κατανόηση της ταυτόχρονης μεταβολής αποτελεί κρίσιμο βήμα για την ανάπτυξη στρατηγικών γενίκευσης.

Στο ελληνικό ερευνητικό πλαίσιο, η μελέτη των Ρίζου και Γκρέκα (2024) έδειξε ότι η στρατηγική αναγνώρισης μοτίβων σχετίζεται άμεσα με την επιτυχία στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, επιβεβαιώνοντας ότι οι στρατηγικές στα μοτίβα δεν αποτελούν απομονωμένη δεξιότητα αλλά συνδέονται με ευρύτερες μαθηματικές ικανότητες. Παράλληλα, οι Vale και Pimentel (2009) ανέδειξαν τον καθοριστικό ρόλο της δομικής ανάλυσης και των αναπαραστάσεων στην ανάπτυξη αλγεβρικής σκέψης.

Συνολικά, τα ερευνητικά δεδομένα συγκλίνουν στο συμπέρασμα ότι οι στρατηγικές που εφαρμόζουν τα παιδιά κατά την ενασχόληση με μοτίβα αποτελούν δείκτες του επιπέδου μαθηματικής τους σκέψης. Η συστηματική ανάλυση των στρατηγικών αυτών, σε συνδυασμό με τη μελέτη των έργων που τις ενεργοποιούν, καθίσταται κεντρική τόσο για τον σχεδιασμό διδακτικών παρεμβάσεων όσο και για την ερμηνεία εμπειρικών δεδομένων, όπως επιχειρείται στην παρούσα έρευνα.

2. Εμπειρικό μέρος

2.1 Σκοπός της έρευνας

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να συμβάλει ερευνητικά στον εμπλουτισμό της ελληνικής βιβλιογραφίας στο πεδίο των μαθηματικών μοτίβων, αλλά και επικουρικά στην αξιοποίησή τους στη σχολική τάξη, επιδιώκοντας την επίτευξη ποικίλων μαθηματικών στόχων. Ο συνολικός σχεδιασμός της έρευνας οργανώθηκε, εστιάζοντας στον τρόπο με τον οποίο παιδιά της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης προσεγγίζουν και διαχειρίζονται δραστηριότητες που εμπεριέχουν μοτίβα. Η μελέτη επικεντρώνεται τόσο στα επαναλαμβανόμενα όσο και στα αναπτυσσόμενα μοτίβα, τα οποία αποτελούν βασικό πυρήνα ανάπτυξης της μαθηματικής και, ιδιαίτερα, της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης.

Ειδικότερα, η έρευνα αποσκοπεί στη διερεύνηση των διαφορετικών στρατηγικών που υιοθετούν τα παιδιά κατά την ενασχόλησή τους με δραστηριότητες μοτίβων. Μέσα από την ανάλυση των λεκτικών εξηγήσεων και των ενεργειών των παιδιών, επιδιώκεται η ανάδειξη του τρόπου με τον οποίο αντιλαμβάνονται τη δομή των μοτίβων και επιχειρούν να τα επεκτείνουν ή να τα γενικεύσουν.

Παράλληλα, η μελέτη στοχεύει στον εντοπισμό των περιορισμών και των δυσκολιών που αναδύονται κατά την ενασχόληση των παιδιών με δραστηριότητες επαναλαμβανόμενων και αναπτυσσόμενων μοτίβων. Η διερεύνηση αυτών των δυσκολιών κρίνεται ιδιαίτερα σημαντική, καθώς μπορεί να προσφέρει χρήσιμες ενδείξεις για τη φύση των εμποδίων που αντιμετωπίζουν τα παιδιά και να συμβάλει στον αναστοχασμό σχετικά με τον ρόλο των μοτίβων στη μαθηματική διδασκαλία.

Τέλος, τα ευρήματα της έρευνας ενδέχεται να προσφέρουν χρήσιμες πληροφορίες τόσο σε ερευνητές όσο και σε εκπαιδευτικούς και γονείς, συμβάλλοντας ενδεχομένως σε μια πιο ουσιαστική και παιδαγωγικά τεκμηριωμένη ένταξη των δραστηριοτήτων μοτίβων στο πρόγραμμα σπουδών των Μαθηματικών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης.

2.2 Ερευνητικά ερωτήματα

Με βάση τον σκοπό της παρούσας έρευνας, διατυπώθηκαν τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα, τα οποία κατεύθυναν τον σχεδιασμό και τη ροή της έρευνας, τη συλλογή των δεδομένων και τη διαδικασία ανάλυσής τους. Τα ερωτήματα έχουν διερευνητικό χαρακτήρα και αποσκοπούν στην εις βάθος κατανόηση των τρόπων με τους οποίους τα παιδιά της

Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης προσεγγίζουν και ανταποκρίνονται κατά την ενασχόλησή τους σε δραστηριότητες που εμπεριέχουν μαθηματικά μοτίβα.

Τα ερευνητικά ερωτήματα της μελέτης είναι τα εξής:

- α) Μπορούν τα παιδιά της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης να βρουν τον επόμενο, έναν κοντινό όρο και έναν μακρινό όρο σε επαναλαμβανόμενα μοτίβα; Αν ναι, με ποιες στρατηγικές;
- β) Μπορούν τα παιδιά της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης να βρουν τον επόμενο, έναν κοντινό όρο και έναν μακρινό όρο σε αναπτυσσόμενα μοτίβα; Αν ναι, με ποιες στρατηγικές;
- γ) Τι ρόλο παίζει ο τύπος του μοτίβου στον τρόπο με τον οποίον ανταποκρίνονται τα παιδιά;

Τα παραπάνω ερευνητικά ερωτήματα επιδιώκουν να φωτίσουν τις στρατηγικές, που ενεργοποιούνται κατά την επίλυση έργων γενίκευσης επαναλαμβανόμενων και αναπτυσσόμενων μοτίβων, καθώς και να αναδείξουν πιθανά εμπόδια που επηρεάζουν την κατανόηση και τη γενίκευση των μοτίβων από τα παιδιά.

2.3 Μεθοδολογία της έρευνας

2.3.1 Ερευνητικός σχεδιασμός

Η παρούσα μελέτη υιοθετεί διερευνητικό χαρακτήρα και ποιοτική ερευνητική προσέγγιση, με αντικείμενο τη διερεύνηση της ανταπόκρισης παιδιών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης κατά την ενασχόλησή τους με έργα γενίκευσης μοτίβων.

Η έρευνα έχει ποιοτικά κυρίαρχο χαρακτήρα, καθώς η κύρια έμφαση δίνεται στην ανάλυση των στρατηγικών που υιοθετούν τα παιδιά, των λεκτικών τους εξηγήσεων και των ενεργειών τους κατά την επίλυση των δραστηριοτήτων. Η ποιοτική προσέγγιση κρίνεται κατάλληλη όταν το ενδιαφέρον εστιάζεται στις διαδικασίες σκέψης, στις νοητικές διαδρομές και στον τρόπο με τον οποίο οι συμμετέχοντες αποδίδουν νόημα στις καταστάσεις με τις οποίες έρχονται σε επαφή, όπως επισημαίνεται και στη σχετική μεθοδολογική βιβλιογραφία (Creswell, 2016).

Παράλληλα, αξιοποιούνται συμπληρωματικά ποσοτικά στοιχεία, τα οποία αφορούν την επίδοση των παιδιών στα επιμέρους έργα. Η ποσοτική αυτή διάσταση της έρευνας δεν λειτουργεί αυτόνομα, αλλά υποστηρικτικά, καθώς προσφέρει μια αριθμητική αποτύπωση των αποτελεσμάτων και συμβάλλει στην ανάδειξη τάσεων και συχνοτήτων εμφάνισης συγκεκριμένων στρατηγικών, ενισχύοντας την ποιοτική ερμηνεία των δεδομένων.

Στο πλαίσιο αυτό, η έρευνα οργανώθηκε ως μελέτη πολλαπλών περιπτώσεων (multiple case study), δεδομένου ότι κάθε παιδί αντιμετωπίζεται ως ξεχωριστή περίπτωση προς διερεύνηση. Ο συγκεκριμένος ερευνητικός σχεδιασμός επιτρέπει την εις βάθος ανάλυση των

ατομικών στρατηγικών και μορφών σκέψης των παιδιών, καθώς και τη σύγκριση μεταξύ διαφορετικών τρόπων προσέγγισης των μαθηματικών μοτίβων, μέσα στο φυσικό πλαίσιο στο οποίο αυτές οι στρατηγικές αναπτύσσονται.

Ο συνδυασμός ποιοτικών και ποσοτικών δεδομένων επιτρέπει μια πιο ολοκληρωμένη και σφαιρική προσέγγιση του υπό μελέτη φαινομένου, χωρίς να αλλοιώνεται ο ποιοτικός προσανατολισμός της έρευνας. Με τον τρόπο αυτό, ο ερευνητικός σχεδιασμός της παρούσας μελέτης ευθυγραμμίζεται τόσο με τη γενική μεθοδολογική θεωρία όσο και με τις πρακτικές που ακολουθούνται στη διεθνή βιβλιογραφία της Διδακτικής των Μαθηματικών, όπου η διερεύνηση των στρατηγικών των παιδιών βασίζεται κυρίως σε ποιοτικά δεδομένα, τα οποία ενισχύονται από συμπληρωματικά ποσοτικά δεδομένα.

2.3.2 Συμμετέχοντες

Το δείγμα της παρούσας έρευνας αποτέλεσαν 15 παιδιά της Δ' τάξης του Δημοτικού Σχολείου. Η επιλογή της συγκεκριμένης τάξης κρίθηκε σκόπιμη, καθώς τα παιδιά βρίσκονται περίπου στο μέσο της φοίτησής τους στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση και έχουν ήδη αποκτήσει σχετικές εμπειρίες με τα μαθηματικά μοτίβα από προηγούμενες σχολικές τάξεις. Το γεγονός αυτό επιτρέπει τη διερεύνηση πιο σύνθετων στρατηγικών προσέγγισης και γενίκευσης των μοτίβων.

Το δείγμα ήταν δείγμα ευκαιρίας και προερχόταν από ιδιωτικό Κέντρο Δημιουργικής Απασχόλησης Παιδιών (ΚΔΑΠ) και αξίζει να σημειωθεί πώς τα παιδιά φοιτούσαν σε διαφορετικά δημοτικά σχολεία ή τμήματα. Η επιλογή του συγκεκριμένου χώρου υπαγορεύτηκε από πρακτικούς λόγους πρόσβασης στα παιδιά και δυνατότητας ατομικής ενασχόλησης με το κάθε ένα παιδί σε συνθήκες που ευνοούν την ερευνητική διαδικασία.

Όλοι οι συμμετέχοντες είχαν ως μητρική γλώσσα τα ελληνικά και δεν υπήρχε διάγνωση μαθησιακών δυσκολιών. Η συμμετοχή των παιδιών στην έρευνα ήταν εθελοντική, ενώ είχε προηγηθεί γραπτή συγκατάθεση των γονέων ή κηδεμόνων τους. Κατά τη διεξαγωγή της έρευνας τηρήθηκαν οι βασικές αρχές της ερευνητικής δεοντολογίας, διασφαλίζοντας την ανωνυμία των συμμετεχόντων και την εμπιστευτικότητα των δεδομένων.

2.3.3 Ερευνητικά εργαλεία

Για τη συλλογή των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν έργα μαθηματικών μοτίβων, τα οποία αφορούσαν επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα μοτίβα. Τα έργα σχεδιάστηκαν με στόχο τη διερεύνηση των τρόπων με τους οποίους τα παιδιά σκέφτονται, περιγράφουν και

διαχειρίζονται διαφορετικού τύπου μοτίβα, καθώς και την ανάδειξη των στρατηγικών που επιστρατεύουν.

Σχεδιάστηκαν τρία έργα για επαναλαμβανόμενα μοτίβα (E1, E2, E3) και τρία για αναπτυσσόμενα μοτίβα (E3, E4, και E5). Όλα τα έργα περιλάμβαναν τρία υποέργα: α) Εύρεση του επόμενου όρου, β) Εύρεση ενός «κοντινού» όρου και γ) Εύρεση ενός «μακρινού» όρου. Με τους όρους «κοντινός» και «μακρινός», υποδηλώνεται ένας όρος που μπορεί (ή όχι, αντίστοιχα) σχετικά εύκολα να εντοπιστεί με συνέχιση της ακολουθίας μέχρι τον ζητούμενο όρο. Τα έργα επιδόθηκαν ως εξής:

Πρώτα επιδόθηκε το E1. Αν το παιδί δεν επιτύγχανε στη μακρινή γενίκευση, τότε του δινόταν το E2, με ένα πιο απλό μοτίβο. Αν επιτύγχανε, τότε του δινόταν το E3, με ένα πιο απαιτητικό μοτίβο.

Παρόμοια επιδόθηκαν τα έργα των αναπτυσσόμενων μοτίβων: Πρώτα επιδόθηκε το E4. Αν το παιδί δεν επιτύγχανε στη μακρινή γενίκευση, τότε του δινόταν το E5 με ένα πιο απλό μοτίβο. Αν επιτύγχανε, τότε του δινόταν το E6 με ένα πιο απαιτητικό μοτίβο.

Πιο συγκεκριμένα, το πρώτο έργο (E1) είχε ως στόχο να ελέγξει τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά αναγνωρίζουν και διαχειρίζονται επαναλαμβανόμενα μοτίβα με μονάδα επανάληψη τριών διαφορετικών στοιχείων ABΓ, (βλ. Εικόνα 4).



Εικόνα 5. Επαναλαμβανόμενο μοτίβο της μορφής ABΓABΓ (Έργο 1)

Τα παιδιά κλήθηκαν αρχικά να προβλέψουν τον επόμενο όρο (E.1.1) και στη συνέχεια, έναν κοντινό όρο (E.1.2, τον 20^ο όρο) και έναν μακρινό όρο (E.1.3, τον 100^ο όρο). Το έργο επέτρεψε την παρατήρηση τόσο βασικών στρατηγικών συνέχισης όσο και πιο σύνθετων τρόπων σκέψης που σχετίζονται με τη γενίκευση και την κατανόηση της περιοδικότητας του μοτίβου, μέσα από τις λεκτικές εξηγήσεις και τις ενέργειες των παιδιών.

Το δεύτερο Έργο (E.2) αφορούσε επαναλαμβανόμενο μοτίβο με μονάδα επανάληψης δύο στοιχείων (AB) και δόθηκε στα παιδιά που δεν απάντησαν και στα τρία ερωτήματα του E1.



Εικόνα 6. Επαναλαμβανόμενο μοτίβο της μορφής ABAB (Έργο 2)

Σε αντίθεση με το πρώτο έργο, η ακολουθία δεν δόθηκε σε πλήρη μορφή της μονάδας επανάληψης, αλλά περιλάμβανε έναν επιπλέον όρο από την τρίτη μονάδα επανάληψης

(ABABA, βλ. Εικόνα 5). Η επιλογή αυτή στόχευε στη διερεύνηση του κατά πόσο ο τρόπος παρουσίασης ενός κατά τα άλλα απλού μοτίβου επηρεάζει την ανταπόκριση των παιδιών. Τα παιδιά κλήθηκαν να προβλέψουν τον επόμενο όρο (E.2.1), καθώς και όρους σε κοντινές (E.2.2, τον 20^ο όρο) και μακρινές (E.2.3, τον 100^ο όρο) θέσεις της ακολουθίας, αιτιολογώντας τις απαντήσεις τους. Το έργο επέτρεψε τη σύγκριση των προσεγγίσεων των παιδιών σε μοτίβα διαφορετικής δομικής πολυπλοκότητας, αλλά και την παρατήρηση ενδεχόμενων διαφοροποιήσεων που σχετίζονται με τη μορφή παρουσίασης του μοτίβου. Το τρίτο έργο (E.3) βασίστηκε σε επαναλαμβανόμενο μοτίβο μονάδας επανάληψης τριών στοιχείων (ABB, βλ. Εικόνα 6), με στόχο να εξεταστεί αν τα παιδιά μπορούν να διαχειριστούν δομές όπου εμφανίζεται επανάληψη ίδιου στοιχείου μέσα στη μονάδα.



Εικόνα 7. Επαναλαμβανόμενο μοτίβο μορφής ABBABB (Έργο 3)

Η δραστηριότητα περιλάμβανε τρία διαβαθμισμένα ζητούμενα: επέκταση στον επόμενο όρο (E.3.1), καθώς και πρόβλεψη όρων σε κοντινές (E.3.2) και μακρινές (E.3.3) θέσεις (20ός και 100ός, αντίστοιχα), με αίτημα αιτιολόγησης. Το έργο επέτρεψε την παρατήρηση του τρόπου με τον οποίο τα παιδιά αξιοποιούν ή παραλείπουν τη μονάδα επανάληψης όταν η δομή δεν είναι απλή εναλλαγή, καθώς και τη σύγκριση των στρατηγικών τους με εκείνες που ενεργοποιήθηκαν στα προηγούμενα επαναλαμβανόμενα μοτίβα.

Το τέταρτο έργο (E.4, βλ. Εικόνα 7) επικεντρώθηκε σε αναπτυσσόμενο μοτίβο μέσα από διαδοχικές αναπαραστάσεις με κουκίδες, με σκοπό να διερευνηθεί πώς τα παιδιά εντοπίζουν τη μεταβολή από βήμα σε βήμα και πώς διατυπώνουν τον κανόνα που τη διέπει.



Εικόνα 8. Αναπτυσσόμενο μοτίβο ($2n-1$) Έργου 4 (Από Warren & Cooper, 2008, σ. 32)

Οι ερωτήσεις οργανώθηκαν πάλι κλιμακωτά και όλες αφορούσαν το πλήθος των κουκκίδων για τον επόμενο όρο (E.4.1), για έναν κοντινό όρο (10^{ος}, E.4.2,) και αμέσως μετά για έναν μακρινό (31^{ος}, E.4.3). Στο τέλος ζητήθηκε ρητή προφορική διατύπωση του κανόνα. Με τον τρόπο αυτό, το έργο επέτρεψε να καταγραφούν διαφορετικές προσεγγίσεις, από διαδικασίες επέκτασης έως προσπάθειες γενίκευσης και λεκτικής περιγραφής της σχέσης που παράγει την αύξηση.

Το πέμπτο έργο (E5, βλ. Εικόνα 8) αφορούσε αναπτυσσόμενο μοτίβο, οργανωμένο σε διαδοχικές σειρές κουκίδων, σχηματίζοντας μια τριγωνική διάταξη («δεντράκι»).

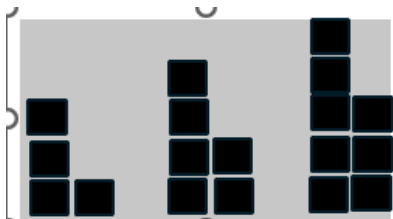
Υπενθυμίζεται ότι το έργο αυτό δόθηκε στα παιδιά που δεν ολοκλήρωσαν επιτυχώς όλα τα ερωτήματα του Ε4.



Εικόνα 9. Αναπτυσσόμενο μοτίβο (n) Έργου 5

Τα παιδιά κλήθηκαν να παρατηρήσουν τη δομή των ήδη δοσμένων σειρών και να προβλέψουν τον αριθμό των κουκίδων της επόμενης σειράς, καθώς και αριθμό κουκίδων ενός κοντινού και ενός μακρινού όρου (Ε.5.2, τον 10ο και Ε.5.3 τον 35ο). Παράλληλα, ζητήθηκε η προφορική διατύπωση του κανόνα που διέπει την αύξηση. Το έργο επέτρεψε την καταγραφή του επιπέδου κατανόησης της σταδιακής μεταβολής, την αναγνώριση αριθμητικών σχέσεων μεταξύ των σειρών και του πλήθους κουκίδων (θέσης- τιμής) και την προσπάθεια γενίκευσης πέρα από τις άμεσα ορατές αναπαραστάσεις.

Το έκτο έργο (Ε6) βασίστηκε σε αναπτυσσόμενο μοτίβο που οργανώνεται μέσω διαδοχικών κατασκευών («πυργάκια») από τετράγωνα τούβλα.



Εικόνα 10. Αναπτυσσόμενο μοτίβο ($2n+2$) Έργου 6

Τα παιδιά κλήθηκαν να παρατηρήσουν τις ήδη δοσμένες κατασκευές και να προβλέψουν τη μορφή στο αμέσως επόμενο πυργάκι (Ε.6.1), καθώς και τη μορφή κατασκευών σε πιο απομακρυσμένες θέσεις (Ε.6.2:10ο και Ε.6.3: 31ο). Το έργο δεν απαιτούσε αριθμητικό υπολογισμό πλήθους, αλλά εστίαζε στην λεκτική περιγραφή των κατασκευών, με δυνατότητα σχεδίασης και αναπαράστασης. Το έργο επεδίωκε να μετατοπίσει το κέντρο προσοχής των συμμετεχόντων στη μεταβολή της δομής από κατασκευή σε κατασκευή. Με τον τρόπο αυτό δόθηκε η δυνατότητα απεικόνισης και λεκτικής αναφοράς στον κανόνα μεταβολής, ενισχύοντας τις προσπάθειες γενίκευσης.

Το σύνολο των έργων, στην ακριβή μορφή που δόθηκαν στα παιδιά, παρατίθεται στο Παράρτημα Α της εργασίας.

2.3.4 Διαδικασία συλλογής δεδομένων

Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε σε μία ήσυχη αίθουσα του Κ.Δ.Α.Π., η οποία χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικά για τη διεξαγωγή των συνεντεύξεων και την εκτέλεση των δραστηριοτήτων. Όλοι τα παιδιά εργάστηκαν ατομικά, καθισμένοι στην ίδια θέση και υπό τις ίδιες συνθήκες, ώστε να περιοριστεί η επίδραση εξωτερικών παραγόντων. Τα έργα δόθηκαν σε φυλλάδιο (βλ. Παράρτημα Α) και στον χώρο υπήρχαν διαθέσιμα βοηθητικά υλικά, όπως ξυλομπογιές, μαρκαδόροι και τουβλάκια, τα οποία τα παιδιά μπορούσαν να αξιοποιήσουν προαιρετικά κατά τη διάρκεια της ενασχόλησής τους με τα έργα.

Η διαδικασία βασίστηκε σε συνεντεύξεις βασισμένες σε έργα (task-based interviews). Τα παιδιά ασχολήθηκαν με τα έργα διαδοχικά, ακολουθώντας προκαθορισμένη σειρά. Αρχικά δόθηκαν τα έργα επαναλαμβανόμενων μοτίβων και στη συνέχεια τα έργα αναπτυσσόμενων μοτίβων. Τα έργα είχαν διαβαθμισμένη δυσκολία, ώστε να είναι δυνατή η προσαρμογή της διαδικασίας στις δυνατότητες των παιδιών, χωρίς να αλλοιώνεται ο ερευνητικός σχεδιασμός. Υπενθυμίζεται ότι σε κάθε κατηγορία (επαναλαμβανόμενων και αναπτυσσόμενων μοτίβων), το πρώτο έργο (1^ο για επαναλαμβανόμενα και 4^ο για αναπτυσσόμενα) δόθηκε σε όλους τα παιδιά.

Τα επόμενα έργα (2^ο για επαναλαμβανόμενα και 5^ο για αναπτυσσόμενα) παρουσίαζαν διαφοροποιημένη δυσκολία και θεωρήθηκαν λιγότερο απαιτητικά. Τα έργα αυτά (2^ο και 5^ο) δόθηκαν στα παιδιά που δεν ολοκλήρωσαν επιτυχώς τις πρώτες δραστηριότητες κάθε κατηγορίας. Αντίστοιχα το τρίτο έργο τόσο στα επαναλαμβανόμενα (3ο), όσο και στα αναπτυσσόμενα (δηλαδή 6^ο Έργο), είχε αυξημένο βαθμό δυσκολίας και δόθηκε μόνο στα παιδιά που έδωσαν σωστές απαντήσεις στα αρχικά έργα των δύο κατηγοριών.

Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας, τα παιδιά ενθαρρύνονταν να εκφράζουν προφορικά τη σκέψη τους, σύμφωνα με τη μέθοδο του think aloud, με στόχο την καταγραφή των στρατηγικών και των νοητικών διεργασιών που ενεργοποιούνταν κατά την επίλυση των δραστηριοτήτων. Οι συνεντεύξεις βιντεοσκοπήθηκαν αποκλειστικά για σκοπούς απομαγνητοφώνησης και λεπτομερέστερης παρατήρησης λεκτικών και μη λεκτικών στοιχείων της συμπεριφοράς των παιδιών.

Η διάρκεια κάθε συνεδρίας ήταν περίπου μία ώρα, με μικρές αποκλίσεις, και αντίστοιχο χρονικό διάστημα απαιτήθηκε για όλους τους συμμετέχοντες. Η παρέμβαση της ερευνήτριας ήταν περιορισμένη και αφορούσε μόνο διευκρινιστικές ή ενθαρρυντικές παρεμβάσεις, όταν αυτό κρινόταν απαραίτητο.

2.3.5 Διαδικασία ανάλυσης δεδομένων

Η ανάλυση των δεδομένων βασίστηκε σε ποιοτική προσέγγιση, με εστίαση στη διερεύνηση των στρατηγικών και τη διαδικασία λήψης αποφάσεων των παιδιών κατά την ενασχόλησή τους με τα έργα μοτίβων. Τα δεδομένα προήλθαν από τις απομαγνητοφωνημένες συνεντεύξεις, τις βιντεοσκοπήσεις, τις γραπτές απαντήσεις ή τα σχέδια που έφτιαζαν τα παιδιά.

Αρχικά, τα δεδομένα μελετήθηκαν επανειλημμένα, ώστε να εντοπιστούν τα κοινά ή τα διαφορετικά σημεία σκέψης του κάθε παιδιού ξεχωριστά σε κάθε τύπο έργου αλλά και συγκριτικά και μεταξύ των παιδιών, καθώς και χαρακτηριστικές στρατηγικές προσέγγισης των δραστηριοτήτων. Η ανάλυση επικεντρώθηκε στον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά αντιλαμβάνονταν τη δομή των μοτίβων, περιέγραφαν τον κανόνα που τα διέπει και επιχειρούσαν τη συνέχιση, επέκταση ή τη γενίκευσή τους.

Για την κατηγοριοποίηση των στρατηγικών αξιοποιήθηκε αναλυτικό πλαίσιο βασισμένο σε ποιοτικά διαφοροποιημένα επίπεδα προσέγγισης και κατανόησης των μοτίβων. Το πλαίσιο αυτό επέτρεψε τη συστηματική οργάνωση των δεδομένων και τη συγκριτική ανάλυση των απαντήσεων των παιδιών τόσο στα επαναλαμβανόμενα όσο και στα αναπτυσσόμενα μοτίβα. Παράλληλα, πραγματοποιήθηκε συμπληρωματική ποσοτική ανάλυση, η οποία αφορούσε τόσο τη συχνότητα εμφάνισης συγκεκριμένων στρατηγικών όσο και την επίδοση των παιδιών στα επιμέρους έργα. Η ποσοτική αυτή αποτύπωση λειτούργησε υποστηρικτικά της ποιοτικής ανάλυσης, συμβάλλοντας στην ανάδειξη τάσεων και στη συνοπτική παρουσίαση των ευρημάτων.

3. Αποτελέσματα

3.1 Επαναλαμβανόμενα μοτίβα

3.1.1 Επίδοση

Για την εξέταση της επίδοσης, οι σωστές απαντήσεις σε κάθε ερώτημα βαθμολογήθηκαν με 1, ενώ οι λανθασμένες απαντήσεις βαθμολογήθηκαν με 0. Στον Πίνακα 1 παρουσιάζεται η επίδοση ανά παιδί και ανά ερώτημα του κάθε έργου για τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα.

Παιδί	Έργο									Σύνολο
	E1 (ΑΒΓΑΒΓ)			E2 (ΑΒΑΒ)			E3 (ΑΒΒΑΒΒ)			
	E1.1 ^α	E1.2 ^β	E1.3 ^γ	E2.1 ^α	E2.2 ^β	E2.3 ^γ	E3.1 ^α	E3.2 ^β	E3.3 ^γ	
Αντρέας	1	1	0	0	0	0				2
Ελένη	1	0	0	0	0	0				1
Ειρήνη	1	0	0	1	0	0				2
Μαρία	1	1	0	1	1	1				5
Κική	1	1	0	1	1	0				4
Πόπη	1	1	0	1	1	0				4
Πέτρος	1	1	1				1	1	0	5
Γιάννης	1	0	0	1	0	0				2
Βασιλική	1	0	0	1	1	0				3
Θοδωρής	1	1	0	1	1	1				5
Καίτη	1	1	0	1	1	1				5
Θανάσης	1	1	0	1	1	1				5
Κώστας	1	1	0	1	1	0				4
Νίκος	1	1	0	1	1	0				4
Αννέτα	1	1	0	1	0	0				3
Σύνολο	15	11	1	12	9	4	1	1	0	54

Σημειώσεις

^α Επόμενος όρος

^β Κοντινός όρος

^γ Μακρινός όρος

Πίνακας 1. Επίδοση ανά παιδί και ανά ερώτημα στα έργα των επαναλαμβανόμενων μοτίβων.

Από τον Πίνακα 1 φαίνεται ότι το E1.1 που αφορούσε την εύρεση του επόμενου όρου του μοτίβου, ολοκληρώθηκε επιτυχώς από το σύνολο των παιδιών. Αναφορικά με το E1.2 (κοντινή πρόβλεψη), 4 από τα 15 παιδιά οδηγήθηκαν σε λανθασμένη απάντηση. Τέλος, η μεγαλύτερη δυσκολία εντοπίζεται στο E1.3, της μακρινής πρόβλεψης, όπου μόνο 1 παιδί (Πέτρος) κατάφερε να απαντήσει σωστά.

Στο E2, από τα 14 παιδιά που εργάστηκαν με αυτό (N=14), τα 12 βρήκαν σωστά τον επόμενο όρο στο μοτίβο ΑΒΑΒ (E2.1). Στο ζήτημα της κοντινής πρόβλεψης (E2.2), 5 από τα 14

παιδιά δεν κατάφεραν να εντοπίσουν τον ζητούμενο όρο. Τέλος, στο E2.3 (μακρινή πρόβλεψη), 4 παιδιά κατάφεραν να βρουν τον ζητούμενο μακρινό όρο. Το E3 δόθηκε μόνο σε ένα παιδί (Πέτρος), το οποίο είχε ολοκληρώσει όλα τα ερωτήματα του E1 σωστά. Ο Πέτρος εντόπισε επιτυχώς τον επόμενο όρο (E3.1) , καθώς και τον 20° (E3.2). Ωστόσο, στο E3.3 (μακρινή γενίκευση- 100° όρο), ο Πέτρος έδωσε λανθασμένη απάντηση.

Από τον Πίνακα 1 φαίνεται, επίσης, ότι υπάρχουν δι-ατομικές διαφορές των παιδιών ως προς τη συνολική τους επίδοση. Στο σύνολο των 6 ζητούμενων που αντιμετώπισαν όλα τα παιδιά, 4 παιδιά (Αντρέας, Ελένη, Ειρήνη, Γιάννης) απάντησαν σωστά σε 1 ή 2 ζητούμενα, με δύο από αυτά (Αντρέας, Ελένη) να απαντούν λανθασμένα και για τον επόμενο όρο.

Δύο παιδιά (Βασιλική, Αννέτα) απάντησαν σωστά σε 3 από τα 6 ζητούμενα, χωρίς να εντοπίσουν κάποιον μακρινό όρο και κάνοντας λάθος και σε έναν κοντινό. Τέσσερα παιδιά (Νίκος, Κώστας, Πόπη, Κική) απάντησαν σωστά σε 4 από τα 6 ζητούμενα, κάνοντας λάθος μόνο για τον μακρινό όρο. Τέλος, 5 παιδιά (Μαρία, Πέτρος, Θοδωρής, Καίτη, Θανάσης) απάντησαν σωστά σε 5 από τα 6 ζητούμενα, κάνοντας λάθος στο ένα από τα δύο ζητούμενα για τον μακρινό όρο. Ο Πέτρος ήταν το μόνο παιδί που απάντησε σωστά σε όλα τα ζητούμενα του μοτίβου με μονάδα επανάληψης τριών στοιχείων (ΑΒΓΑΒΓ).

3.1.2 Στρατηγικές προσέγγισης

Πέραν της καταγραφής της επίδοσης, η παρούσα μελέτη επικεντρώθηκε στον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά προσέγγισαν τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα. Για την ανίχνευση των στρατηγικών των παιδιών ελήφθησαν υπόψη οι λεκτικές περιγραφές τους και οι εικονικές αναπαραστάσεις, στην περίπτωση που κατασκεύαζαν τέτοιες (π.χ. επέκταση μέσω σχεδίασης). Για κάθε παιδί και για κάθε ερώτημα, διατηρήθηκε και αναφέρθηκε η στρατηγική με την οποία έδωσε την τελική του απάντηση (σωστή ή λανθασμένη).

Οι στρατηγικές προσέγγισης που καταγράφηκαν κατά την ενασχόληση των παιδιών με τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα εξετάστηκαν σύμφωνα με τον τύπο ζητούμενου στα έργα, δηλαδή με βάση α) τον επόμενο, β) τον κοντινό και γ) τον μακρινό όρο.

A «Επόμενος όρος»

Για την εύρεση του επόμενου όρου ανιχνεύθηκαν τέσσερις κατηγορίες στρατηγικών.

Στην πρώτη κατηγορία (**Ρυθμική Απαγγελία**) , το παιδί απαγγέλει ρυθμικά τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα των όρων του μοτίβου που παρατηρεί. Τα παιδιά που ακολούθησαν αυτήν τη στρατηγική κατέληξαν σε σωστή απάντηση. Ενδεικτικά παραδείγματα είναι τα ακόλουθα:

Ακολουθήσα το μοτίβο. Κόκκινο-πράσινο-μωβ, κόκκινο-πράσινο-μωβ, κόκκινο-πράσινο-μωβ, κόκκινο. Άρα κόκκινο. (Νίκος, E1.1)

Κόκκινο-πράσινο-μωβ, κόκκινο. Άρα κόκκινο. (Κώστας, E1.1)

Μοτίβο είναι. Μαύρο-άσπρο, μαύρο-άσπρο. (Μαρία, E2.1)

Στη δεύτερη κατηγορία (**Μερική ή Πλήρης Εναλλαγή**) το παιδί περιγράφει τη διαδοχική εμφάνιση είτε επιμέρους στοιχείων της ακολουθίας είτε και ολόκληρης της μονάδας επανάληψης. Σημειώνεται ότι η Μερική Εναλλαγή μπορεί να παρατηρηθεί μόνο στην περίπτωση που η μονάδα έχει πάνω από δύο στοιχεία, δηλαδή, στα έργα E1 και E3. Σε κάποιες περιπτώσεις, τα παιδιά περιέγραψαν την εναλλαγή, αφού είχαν απαγγείλει ρυθμικά τα χαρακτηριστικά στοιχεία του μοτίβου. Ορισμένα παιδιά αναφέρθηκαν στην επανάληψη με εκφράσεις του τύπου «κάθε φορά», «και πάλι».

Επιπλέον, ορισμένα παιδιά κατά την εναλλαγή προσδιορίζουν το 1^ο στοιχείο της μονάδας. Τέλος, κάποια παιδιά απαγγέλλουν και τη μονάδα επανάληψης (βλ. Πέτρος παρακάτω). Η στρατηγική αυτή οδήγησε σε σωστές απαντήσεις.

Ενδεικτικά παραδείγματα είναι τα ακόλουθα:

Το μοτίβο έτσι ξεκινάει. Ξαναξεκινάει με κόκκινο, μετά το μωβ, πάλι κόκκινο. Άρα κόκκινο μετά το μωβ. Μετά το μωβ, ζωγραφίζω κόκκινο. (Ελένη, E1.1)

Μετά το κόκκινο, πάει πράσινο και μετά μωβ, γιατί είναι μοτίβο, και μετά κόκκινο. (Καίτη, E1.1)

Καινούργιο μοτίβο, πράσινο, κόκκινο, μωβ. Ξεκινάει με το κόκκινο, πάει πράσινο και μετά μωβ. Και μετά πάλι κόκκινο. (Πέτρος, E1.1)

Κάθε φορά μετά το μαύρο έρχεται το άσπρο. Άσπρο θα είναι. (Ειρήνη, E2.1)

Έχουμε ένα μοτίβο. Μετά τα δύο μπλε, πάει κίτρινο. Ξεκινάει με μπλε. Μπλε, μπλε, κίτρινο, μπλε, μπλε, κίτρινο. (Πέτρος, E3.1)

Στην τρίτη κατηγορία (**Συναρτησιακή**) το παιδί διατυπώνει κι εφαρμόζει έναν γενικό κανόνα που περιγράφει τη δομή του μοτίβου και βασίζεται στη σύνδεση του όρου με τη θέση του. Μόνο ένα παιδί εφάρμοσε γενικό κανόνα για την εύρεση του επόμενου όρου, στην περίπτωση του μοτίβου της μορφής ABAB:

Άσπρο. Είναι μοτίβο και συνεχίζει πάντα με μαύρο στους μονούς και άσπρο στους ζυγούς. (Θοδωρής, E2.1)

Τέλος, στην τέταρτη κατηγορία (**Άλλο**) τοποθετήθηκαν δύο περιπτώσεις στις οποίες δόθηκε λανθασμένη απάντηση στο μοτίβο της μορφής ABAB. Τα παιδιά που έκαναν αυτό το λάθος προσδιόρισαν (σωστά) ως πρώτο όρο του μοτίβου το «μαύρο» (Α), αλλά πρότειναν ως επόμενο όρο πάλι το «μαύρο»:

Μαύρο, γιατί το μοτίβο ξεκινάει με μαύρο. (Αντρέας, E2.1)

Μαύρο, επειδή είναι πρώτο. (Ελένη, E2.1)

Το λάθος αυτό ενδεχομένως οφείλεται στο γεγονός ότι το δεδομένο μέρος του μοτίβου δεν τελειώνει με ολοκληρωμένη μονάδα επανάληψης. Αυτό μπορεί να οδήγησε τα δύο αυτά παιδιά στο να θεωρήσουν ότι όλο το δεδομένο μέρος του μοτίβου πρέπει να επαναληφθεί. Ο Πίνακας 2 που ακολουθεί, αποτυπώνει τις στρατηγικές που ενεργοποιήθηκαν από τα παιδιά κατά την αναζήτηση του επόμενου όρου στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα.

	Ρυθμική Απαγγελία	Μερική Εναλλαγή	Πλήρης Εναλλαγή	Συναρτησιακή	Άλλο
ABΓABΓ	Νίκος Γιάννης ³	Κική ¹ Μαρία ¹ Θανάσης ¹ Ελένη ^{1,3} Αντρέας ^{2,3} Πόπη ³ Θοδωρής	Ειρήνη ² Πέτρος ^{3,4} Βασιλική ^{2,3} Καίτη Κώστας ⁴ Αννέτα ^{3,4}		
ABAB	Μαρία Γιάννης Νίκος Πόπη		Ειρήνη ² Κική Βασιλική ^{2,4} Θανάσης ¹ Κώστας Αννέτα Καίτη ⁴	Θοδωρής	Αντρέας Ελένη
ABBABB			Πέτρος ^{1,3}		

Σημείωση.

¹ Και ρυθμική απαγγελία

² Ρητή αναφορά στην επανάληψη

³ Προσδιορισμός 1^{ου} στοιχείου της Μονάδας Επανάληψης

⁴ Απαγγελία της Μονάδας Επανάληψης

Πίνακας 2. Κατανομή των παιδιών στις κατηγορίες στρατηγικών προσέγγισης του επόμενου όρου στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα.

Από τον Πίνακα 2 προκύπτει ότι δύο παιδιά (Νίκος, Γιάννης) στηρίζονται αποκλειστικά στη ρυθμική απαγγελία για να βρουν τον επόμενο όρο και στα δύο επαναλαμβανόμενα μοτίβα που τους δόθηκαν (ΑΒΓΑΒΓ, ΑΒΑΒ). Ωστόσο, περισσότερα παιδιά φαίνεται να αξιοποιούν τη ρυθμική απαγγελία πριν διαπιστώσουν και εκφράσουν την εναλλαγή των στοιχείων, είτε στο ΑΒΓΑΒΓ (Κική, Μαρία, Ελένη) είτε στο ΑΒΑΒ (Θανάσης). Αντίστοιχη στρατηγική παρατηρήθηκε και στην περίπτωση του Πέτρου, ο οποίος ήταν ο μόνος που εργάστηκε με το μοτίβο μορφής ΑΒΒΑΒΒ.

Στο μοτίβο ΑΒΓΑΒΓ, επτά παιδιά περιγράφουν τη διαδοχή δύο εκ των τριών στοιχείων της μονάδας επανάληψης (Μερική Εναλλαγή). Έξι παιδιά περιγράφουν τη διαδοχή και των τριών στοιχείων (Πλήρης Εναλλαγή). Κάποια από αυτά τα παιδιά απαγγέλουν και τη μονάδα επανάληψης (Πέτρος, Κώστας, Αννέτα), δίνοντας μια ένδειξη ότι την αντιλαμβάνονται.

Στο μοτίβο ΑΒΑΒ, δεν είναι δυνατόν να διαχωριστεί η Μερική από την Πλήρη Εναλλαγή. Δυο άλλα παιδιά (Βασιλική, Καίτη) απαγγέλουν και τη μονάδα επανάληψης.

Παιδιά που προσδιορίζουν το πρώτο στοιχείο της μονάδας (με εκθέτη 3 στον Πίνακα 2), παρατηρούνται στην περίπτωση των μοτίβων με 3 στοιχεία, ενώ καταγράφεται ρητή αναφορά στην επανάληψη (με δείκτη 2 στον Πίνακα 2) και στους δύο τύπους μοτίβων, αλλά όχι από τα παιδιά που βασίζονται στη ρυθμική απαγγελία.

Τέλος, μόνο ένα παιδί (Θοδωρής) εφάρμοσε μια συναρτησιακή στρατηγική, επικαλούμενος έναν γενικό κανόνα, στην περίπτωση του ΑΒΑΒ.

B. «Κοντινός όρος»

Οι στρατηγικές των παιδιών για την εύρεση του «κοντινού» όρου στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα μπορούν να διακριθούν σε τρεις αρχικές κατηγορίες, τις αναδρομικές, τις μεταβατικές (δομικές) και τις συναρτησιακές στρατηγικές.

Αναδρομικές στρατηγικές

Στην κατηγορία των αναδρομικών στρατηγικών τα παιδιά προσδιορίζουν τον ζητούμενο κοντινό όρο αντιστοιχίζοντας μέσω της διαδικασίας αρίθμησης τη θέση του όρου με το αντίστοιχο στοιχείο του μοτίβου.

Καταγράφηκαν δύο επιμέρους μορφές αναδρομικής στρατηγικής, η Αναδρομική 1 και η Αναδρομική 2, οι οποίες διαφοροποιούνται ως προς το βήμα της αρίθμησης.

Στην Αναδρομική 1 τα παιδιά αντιστοιχίζουν τη θέση με τον όρο αριθμώντας με βήμα 1 μέχρι να φτάσουν στον ζητούμενο. Αυτή η στρατηγική εμφανίστηκε στα μοτίβα με μονάδα επανάληψης τόσο τριών όσο και δύο στοιχείων.

Η εφαρμογή της στρατηγικής αυτής έγινε με δύο τρόπους: Κάποια παιδιά σχεδίασαν όλους τους όρους, μέχρι τον ζητούμενο ενώ άλλα αντιστοίχισαν αριθμούς στους δεδομένους ορατούς, ξαναγυρίζοντας στον πρώτο δεδομένο όρο για να συνεχίσουν την αρίθμηση. Ο Κώστας και ο Θοδωρής στα παρακάτω παραδείγματα εφάρμοσαν τη στρατηγική με τον πρώτο και τον δεύτερο τρόπο, αντίστοιχα.

Ζωγραφίζω το μοτίβο πολλές φορές, κάνω το ίδιο σχέδιο κόκκινο, πράσινο, μωβ, για να δω σε ποιο χρώμα φτάνει. Στο πράσινο.
(Κώστας, E1.2)

Μετράω, ένα, δύο, τρία, τέσσερα (...) είκοσι. Κόκκινο, μετά πράσινο, μετά μωβ, κόκκινο, μετά πράσινο και το τελευταίο πράσινο. Έχω εννιά.
Ανεβαίνω έντεκα και είναι πράσινο. (Θοδωρής, E1.2)

Κατά την Αναδρομική 2, η αρίθμηση πραγματοποιείται με βήμα n , όπου το n αντιστοιχεί στο πλήθος των στοιχείων της μονάδας επανάληψης. Αυτή η στρατηγική εμφανίστηκε στα μοτίβα με μονάδα επανάληψης τόσο τριών, όσο και δύο στοιχείων. Για την εφαρμογή αυτής της στρατηγικής τα παιδιά απαγγέλουν τα πολλαπλάσια του 3 ή του 2, είτε ως απόλυτα είτε ως τακτικά αριθμητικά. Ο Νίκος και η Καίτη αποτελούν ενδεικτικά παραδείγματα εφαρμογής αυτής της στρατηγικής:

Τρίτο μωβ, έκτο, ένατο, δωδέκατο, δέκατο πέμπτο, δέκατο όγδοο, δέκατο ένατο, εικοστό, πράσινο. (Νίκος, E1.2)

Δύο, τέσσερα, έξι, οχτώ, δέκα, δώδεκα, δεκατέσσερα, δεκαέξι, δεκαοχτώ, είκοσι. Άσπρο, γιατί ανά δύο είναι άσπρο. (Καίτη, E2.2)

Μεταβατικές στρατηγικές

Οι Μεταβατικές στρατηγικές δεν προϋποθέτουν την εύρεση όλων των προηγούμενων όρων, προκειμένου να βρεθεί ο ζητούμενος. Τα παιδιά ξεκινούν με ένα μέρος της ακολουθίας που τελειώνει σε ολοκληρωμένη μονάδα, συνδέουν τον τελευταίο όρο με τη θέση του, και προσεγγίζουν σταδιακά τη θέση του ζητούμενου όρου, με χρήση αριθμητικών πράξεων που υλοποιούν την επανάληψη. Στην κατηγορία αυτή καταγράφηκαν δύο υποκατηγορίες στρατηγικής, η Μεταβατική 1 και η Μεταβατική 2. Στη Μεταβατική 1, το μέρος της ακολουθίας που επαναλαμβάνουν τα παιδιά περιλαμβάνει περισσότερες από μία ολοκληρωμένες μονάδες επανάληψης. Για παράδειγμα, ο Αντρέας στο μοτίβο του τύπου ABΓABΓ, ξεκίνησε από τους δεδομένους εννιά πρώτους όρους:

Το εικοστό είναι πράσινο αφού κι άλλα εννιά κάνει δεκαοχτώ. Το δέκατο ένατο είναι κόκκινο και το εικοστό πράσινο. (Αντρέας, E1.2)

Παρόμοια, ο Πέτρος στο μοτίβο του τύπου ABBABB ξεκίνησε επίσης από τους δεδομένους εννιά πρώτους όρους:

Αυτά εδώ είναι εννιά, κίτρινο, προσθέτω ένα μπλε και άλλα οχτώ και άλλα δύο, πάω στο είκοσι. Άρα κίτρινο. (Πέτρος, E3.2)

Στη Μεταβατική 2, το μέρος της ακολουθίας που επαναλαμβάνεται αντιστοιχεί στη μονάδα επανάληψης. Ενδεικτικό παράδειγμα αποτελεί η Αννέτα στο μοτίβο ABΓABΓ:

Πράσινο. Έβαλα ανά τρία τα μπαλόνια εφτά φορές και έφτασα στο είκοσι ένα. Πλην ένα, βγάζεις το μοβ και είναι πράσινο. (Αννέτα, E2.2)

Συναρτησιακές στρατηγικές

Μόνο ένα παιδί διατύπωσε έναν γενικό κανόνα για την εύρεση κοντινού όρου, στην περίπτωση του ABAB, συνδέοντας οποιονδήποτε όρο με τη θέση του:

Οι μονοί είναι μαύρα, οι ζυγοί άσπρα. Άρα το εικοστό είναι άσπρο. (Θοδωρή, E2.2)

Λανθασμένες στρατηγικές

Από την εξέταση των ενεργειών και των λεκτικών αναφορών των παιδιών προέκυψαν δύο μορφές λανθασμένων στρατηγικών: Λανθασμένη 1 και Λανθασμένη 2.

Κατά τη Λανθασμένη 1, ο ζητούμενος όρος θεωρήθηκε ως «τελευταίος» όρος της ακολουθίας και ταυτίστηκε με τον τελευταίο δεδομένο όρο, είτε αυτός ταυτιζόταν με το τελευταίο στοιχείο της μονάδας επανάληψης (για τα ABΓABΓ, ABBABB), είτε όχι (ABAB): Για παράδειγμα:

Το τελευταίο θα είναι μοβ, αρχίζει με κόκκινο και τελειώνει με μοβ., (Γιάννης, E1.2)

Μαύρο, επειδή είναι τελευταίο. (Ελένη, E2.2)

Θα είναι μαύρο. Τελειώνει με μαύρο. (Γιάννης, E2.2)

Η Λανθασμένη 2 παρουσιάζει ομοιότητες με τη Μεταβατική 1, με τη διαφορά ότι το κομμάτι της ακολουθίας που (στην ουσία) επαναλαμβάνουν τα παιδιά μέσω αριθμητικών πράξεων δεν αντιστοιχεί σε ένα πλήθος ολοκληρωμένων μονάδων επανάληψης. Για παράδειγμα, η Βασιλική στο ABΓABΓ, ξεκινά από τους δεδομένους 9 πρώτους όρους του

μοτίβου, προσδιορίζει τον «βολικό» 10^ο όρο και εικάζει ότι ο 20^{ος} θα είναι ίδιος με τον 10^ο όρο:

Αφού τελειώνει σε μοβ το μοτίβο και το επόμενο (δέκατο) είναι κόκκινο, προσθέτω δέκα. Άρα στα είκοσι μπαλόνια το τελευταίο θα είναι κόκκινο. (Βασιλική, E1.2)

Παρόμοια, ο Ανδρέας στο μοτίβο ABAB, ξεκινάει από τους δεδομένους 5 πρώτους όρους του μοτίβου και διατυπώνει ένα παρόμοιο σκεπτικό.

Μαύρο γιατί τέσσερις φορές το πέντε κάνει είκοσι, άρα τέσσερις φορές το μοτίβο θα καταλήγει στο μαύρο. (Ανδρέας, E2.2)

Θα πρέπει να επισημανθεί, ωστόσο, ότι ο Ανδρέας πιθανά θεωρεί ότι τα 5 δεδομένα στοιχεία αποτελούν τη μονάδα επανάληψης, καθώς ήταν ανάμεσα στα παιδιά που αντιμετώπισαν με αυτόν τον τρόπο και το πρόβλημα της εύρεσης του επόμενου όρου.

Ο Πίνακας 3 παρουσιάζει την κατανομή των παιδιών στις κατηγορίες στρατηγικών που ενεργοποιήθηκαν κατά την αναζήτηση του κοντινού όρου στα έργα με επαναλαμβανόμενα μοτίβα με μονάδα ABΓ, AB και ABB.

ΑΒΓΑΒΓ	Αναδρομική		Μεταβατική		Συναρτησιακή	Λανθασμένη	
	1	2	1	2		1	2
	Μαρία	Πόπη	Αντρέας	Ανέτα		Ελένη	Βασιλική
	Κική	Νίκος	Πέτρος			Ειρήνη	
	Καίτη		Θανάσης			Γιάννης	
	Κώστας						
	Θοδωρής						
ABAB	Μαρία	Καίτη	Βασιλική	Θανάσης	Θοδωρής	Ελένη	Αντρέας
	Κική	Νίκος				Γιάννης	Ειρήνη
		Κώστας				Ανέτα	
		Πόπη					
ABBABB			Πέτρος				

Πίνακας 3. Κατανομή των παιδιών στις κατηγορίες στρατηγικών προσέγγισης του κοντινού όρου στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα.

Από τον Πίνακα 3 φαίνεται ότι η επικρατούσα κατηγορία στρατηγικών για την εύρεση ενός κοντινού όρου των δεδομένων μοτίβων ήταν εκείνη των αναδρομικών στρατηγικών με συνολικά 13 εμφανίσεις, (7 στα 15 παιδιά στο ΑΒΓΑΒΓ και 6 στα 14 παιδιά στο ΑΒΑΒ). Η Αναδρομική 1 επικρατεί έναντι της Αναδρομικής 2 στο ΑΒΓΑΒΓ, και το αντίθετο στην περίπτωση του ΑΒΑΒ. Τα παιδιά που εφάρμοσαν αναδρομική στρατηγική το έκαναν και

στους δύο τύπους μοτίβων, με εξαίρεση τον Θωδωρή, ο οποίος ήταν και το μόνο παιδί που βρέθηκε στην κατηγορία των Συναρτησιακών στρατηγικών για το ABAB.

Η κατηγορία Μεταβατική έχει συνολικά 7 εμφανίσεις από 5 διαφορετικά παιδιά, 5 εκ των οποίων αντιστοιχούν στην Μεταβατική 1. Ο Θανάσης και ο Πέτρος είναι τα μόνα παιδιά που εφαρμόζουν Μεταβατικές στρατηγικές και στους δύο τύπους μοτίβων που αντιμετώπισαν. Ο Αντρέας, η Βασιλική και η Αννέτα βρέθηκαν στην κατηγορία Λανθασμένη για έναν από τους δύο τύπους μοτίβων που αντιμετώπισαν.

Εκτός από αυτά τα τρία παιδιά, στην κατηγορία Λανθασμένη εμφανίστηκαν τρία ακόμα παιδιά (Ελένη, Ειρήνη, Γιάννης) που εφάρμοσαν λανθασμένη στρατηγική και για τους δύο τύπους μοτίβων που αντιμετώπισαν. Καθένα από αυτά τα παιδιά εφάρμοσε τουλάχιστον μία φορά τη στρατηγική Λανθασμένη 1, που αντιστοιχεί στο πιο στοιχειώδες λάθος.

Συνολικά, στην κατηγορία Λανθασμένη εντάχθηκαν 9 περιπτώσεις, κάνοντάς τη δεύτερη σε συχνότητα κατηγορία.

Γ. «Μακρινός όρος»

Για την παρουσίαση των κατηγοριών των στρατηγικών που εφάρμοσαν τα παιδιά για την εύρεση μακρινού όρου θα διατηρήσουμε κατά το δυνατόν την ονομασία των κατηγοριών που ανιχνεύτηκαν και στην περίπτωση του κοντινού όρου.

Καταρχάς, επισημαίνουμε ότι για την εύρεση του μακρινού όρου δεν εφαρμόστηκαν εξολοκλήρου αναδρομικές στρατηγικές. Εμφανίστηκαν Μεταβατικές και Συναρτησιακές στρατηγικές, καθώς και Λανθασμένες.

Μεταβατικές Στρατηγικές

Παρόμοια με το ζητούμενο της εύρεσης κοντινού όρου, τα παιδιά εφάρμοσαν Μεταβατικές στρατηγικές, στις οποίες ξεκινούν με ένα μέρος της ακολουθίας (που τελειώνει σε ολοκληρωμένη μονάδα επανάληψης), συνδέουν τον τελευταίο όρο με τη θέση του, και προσεγγίζουν σταδιακά τη θέση του ζητούμενου όρου, με χρήση αριθμητικών πράξεων που υλοποιούν την επανάληψη. Σε αντίθεση με το ζητούμενο της εύρεσης κοντινού όρου, δεν εμφανίστηκε στρατηγική στην οποία το αρχικό μέρος της ακολουθίας να ταυτίζεται με τη μονάδα επανάληψης (Μεταβατική 2).

Εμφανίστηκε η αντίστοιχη της Μεταβατικής 1, στην οποία το μέρος της ακολουθίας που επαναλαμβάνουν τα παιδιά περιλαμβάνει περισσότερες από μία ολοκληρωμένες μονάδες επανάληψης. Στην περίπτωση του ABΓABΓ, το μόνο παιδί που εφάρμοσε επιτυχώς τη στρατηγική αυτή ήταν ο Πέτρος, ο οποίος ξεκίνησε με τους δεδομένους πρώτους 9 όρους του μοτίβου:

Κόκκινο. Είπα ότι δέκα φορές το εννιά κάνει ενενήντα. Με άλλα εννιά πάω στο ενενήντα εννιά, έντεκα φορές το εννιά κάνει ενενήντα εννιά και μετά είναι κόκκινο. (Πέτρος, E1.3)

Στην περίπτωση του ABAB, δύο παιδιά που κατέληξαν σε σωστή απάντηση με αυτή τη στρατηγική ξεκίνησαν από τον 20^ο όρο που είχαν ήδη προσδιορίσει σωστά ως «κοντινό όρο» στο προηγούμενο ερώτημα. Για παράδειγμα:

Είκοσι άσπρο. Είκοσι φορές το πέντε πάει εκατό. Άσπρο. (Καίτη, E2.3)

Συναρτησιακές στρατηγικές

Συναρτησιακή στρατηγική παρατηρήθηκε μόνο στην περίπτωση του ABAB και από δύο μόνο παιδιά. Τα παιδιά αυτά παρατήρησαν ότι σε κάθε θέση με άρτιο αριθμό αντιστοιχεί το B:

Το εκατό είναι ζυγός, άσπρο. (Θανάσης, E2.3)

Το εκατό είναι ζυγός. Άρα άσπρο. Όλοι οι ζυγοί θα έχουν άσπρο. (Θοδωρής, E2.3)

Λανθασμένες στρατηγικές

Για την εύρεση του «μακρινού» όρου παρατηρήθηκαν οι εξής λανθασμένες στρατηγικές:

Παρόμοια με το προηγούμενο ζητούμενο του «κοντινού» όρου, κατά τη Λανθασμένη 1, ο ζητούμενος όρος θεωρήθηκε ως «τελευταίος» όρος της ακολουθίας και θεωρήθηκε ίδιος με τον τελευταίο δεδομένο όρο, είτε αυτός ταυτιζόταν με το τελευταίο στοιχείο της μονάδας επανάληψης (για τα ABΓABΓ, ABBABB), είτε όχι (ABAB):

Το τελευταίο θα είναι μωβ, αρχίζει με κόκκινο και τελειώνει με μωβ.

Άρα τελειώνει σε μωβ. (Γιάννης, E1.3)

Το τελευταίο είναι μωβ, μωβ θα είναι αφού τελειώνει σε μωβ το μοτίβο. (Ειρήνη, E1.3)

Πάλι μαύρο αφού είναι τελευταίο (Ελένη, E2.3)

Η στρατηγική Λανθασμένη 2 (όπως και η αντίστοιχη στρατηγική για την εύρεση του «κοντινού όρου») είναι παρόμοια με τη Μεταβατική 1, με τη διαφορά ότι το κομμάτι της ακολουθίας που (στην ουσία) επαναλαμβάνουν τα παιδιά δεν αντιστοιχεί σε ένα πλήθος ολοκληρωμένων μονάδων επανάληψης. Κάποια παιδιά ξεκινούν από τους δεδομένους όρους της ακολουθίας, όπως ο Νίκος στο ABAB:

Το πέμπτο τελειώνει σε μαύρο, επί είκοσι κάνει εκατό. Άρα μαύρο, όπως το πέντε. (Νίκος, E2.3)

Άλλα παιδιά ξεκινούν με το μέρος της ακολουθίας που αντιστοιχεί τους 20 πρώτους όρους, συχνά έχοντας επιπλέον προσδιορίσει λανθασμένα τον 20^ο όρο από το προηγούμενο ερώτημα. Για παράδειγμα:

Αφού το εικοστό είναι πράσινο, άρα και το εκατοστό είναι πράσινο γιατί πέντε φορές το είκοσι κάνει εκατό. (Αντρέας, E1.3)

Μαύρο, γιατί είκοσι φορές το πέντε κάνει εκατό. Αφού το εικοστό είναι μαύρο. (Αννέτα, E2.3)

Τέλος, στην κατηγορία Λανθασμένη 2 εντάχθηκαν οι περιπτώσεις στρατηγικών για τις οποίες τα παιδιά που τις εφάρμοσαν έφτασαν απευθείας στο συμπέρασμα ότι ο 100^{ος} όρος είναι ίδιος με τον 20^ο όρο, χωρίς να αναφέρουν αν έκαναν πράξεις και ποιες. Για παράδειγμα, ο Ανδρέας στο ABAB ξεκίνησε με λανθασμένο 20^ο όρο και δήλωσε ότι:

Το εικοστό είναι μαύρο, άρα το εκατοστό κι αυτό μαύρο. (Αντρέας, E2.3)

Στη Λανθασμένη 3 εντάχθηκαν οι στρατηγικές στις οποίες τα παιδιά ξεκίνησαν με ένα σωστό σκεπτικό, αλλά κατέληξαν να το εγκαταλείπουν, ή να το παραβιάζουν στο τελευταίο βήμα. Για παράδειγμα, η Κική (και παρόμοια η Μαρία) στο ABΓABΓ ξεκίνησε να εφαρμόζει μια αναδρομική στρατηγική αντιστοιχώντας το Γ στα πολλαπλάσια του 3, αλλά σταμάτησε στο 45 και απέδωσε λανθασμένα στην 100^η θέση το Γ:

Κάθε τρίτο και ένατο είναι μωβ, το δέκατο όγδοο μωβ, εικοστό έβδομο μωβ. Μετά, τριάντα έξι, σαράντα πέντε, το εκατοστό μωβ, αφού επαναλαμβάνεται. (Κική, E1.3)

Η Αννέτα στο ABΓABΓ ξεκίνησε να «χτίζει» το 100 προσθέτοντας διαδοχικά «εννιάρια», αλλά στο τέλος εγκατέλειψε και φάνηκε να ακολουθεί το σκεπτικό της Λανθασμένης 1 στρατηγικής:

Εννιά και εννιά και εννιά και εννιά... Ωχ! Εκατό. Δεν μπορώ. Μωβ; Τελειώνει στο μωβ, μωβ θα είναι. (Αννέτα, E1.3).

Τέλος, ο Πέτρος, στο ABBABB ξεκίνησε εφαρμόζοντας μια στρατηγική του τύπου Μεταβατική 1, προσδιόρισε σωστά τον 99^ο όρο ως B, αλλά έκανε λάθος στον προσδιορισμό του 100^{ου} όρου:

Εννιά φορές το έντεκα βγαίνει ενενήντα εννιά. Κάθε ένατο είναι κίτρινο κι άλλο ένα πάει εκατό. Λοιπόν τελειώνει σε κίτρινο, άρα κίτρινο. Άρα το εκατοστό θα είναι κίτρινο. (Πέτρος, Ε3.3)

Ο Πίνακας 4 παρουσιάζει την κατανομή των παιδιών στις κατηγορίες στρατηγικών που ενεργοποιήθηκαν κατά την αναζήτηση του μακρινού όρου στα έργα με επαναλαμβανόμενα μοτίβα μορφής ABΓ, AB και ABB.

	Μεταβατικές	Συναρτησιακές	Λανθασμένες		
ΑΒΓΑΒΓ	1 Πέτρος		1 Ελένη Ειρήνη Γιάννης Θανάσης	2 Αντρέας Πόπη Θοδωρής Κώστας Νίκος Βασιλική	3 Μαρία Κική Καίτη Αννέτα
ΑΒΑΒ	Μαρία Καίτη	Θανάσης Θοδωρής	Ελένη Ειρήνη Κική Γιάννης Βασιλική Κώστας	Αντρέας Πόπη Νίκος Αννέτα	
ΑΒΒΑΒΒ					Πέτρος

Πίνακας 4. Κατανομή των παιδιών στις κατηγορίες στρατηγικών προσέγγισης του μακρινού όρου στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα.

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 4, η εύρεση του μακρινού όρου επέσυρε λανθασμένες στρατηγικές από τα περισσότερα παιδιά. Η κατηγορία Λανθασμένη 1 εμφανίστηκε με συνολική συχνότητα 10, από 6 διαφορετικά παιδιά. Τρία από αυτά τα παιδιά (Ελένη, Ειρήνη, Γιάννης) εφάρμοσαν αυτή τη στρατηγική και στους δύο τύπους μοτίβων που αντιμετώπισαν, όπως ακριβώς είχαν κάνει και στην εύρεση του κοντινού όρου. Η στρατηγική Λανθασμένη 2 εμφανίστηκε επίσης με συχνότητα 10, από 7 διαφορετικά παιδιά. Τρία από αυτά τα παιδιά την εφάρμοσαν και στους δύο τύπους μοτίβων που αντιμετώπισαν (Ανδρέας, Πόπη, Νίκος). Η κατηγορία Λανθασμένη 3 δεν είχε εμφανιστεί στα προηγούμενα ζητούμενα. Πέντε παιδιά εφάρμοσαν από μία στρατηγική αυτής της κατηγορίας, μόνο στην περίπτωση των μοτίβων με μονάδα επανάληψης τριών στοιχείων (ΑΒΓΑΒΓ, ΑΒΒΑΒΒ).

Εστιάζοντας στις σωστές απαντήσεις και τις στρατηγικές που τις συνόδευσαν, παρατηρούμε ότι η Μεταβατική 1 εφαρμόστηκε από τον Πέτρο στην περίπτωση του ΑΒΓΑΒΓ και από τη Μαρία και την Καίτη στο ΑΒΑΒ. Και τα τρία αυτά παιδιά βρέθηκαν στην κατηγορία

Λανθασμένη 3 στο δεύτερο πρόβλημα που αντιμετώπισαν, δηλαδή, ξεκίνησαν με σωστό σκεπτικό, το οποίο όμως δεν ολοκλήρωσαν επιτυχώς. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι η Μαρία και η Καίτη είχαν βασιστεί σε αναδρομικές στρατηγικές για την εύρεση του κοντινού όρου. Συναρτησιακή στρατηγική εφάρμοσαν δύο παιδιά (Θοδωρής, Θανάσης) στην περίπτωση του ABAB. Ο Θοδωρής είχε κάνει το ίδιο και στην εύρεση του κοντινού όρου. Και τα δύο αυτά παιδιά εφάρμοσαν λανθασμένες στρατηγικές στο ABΓABΓ, με τον Θανάση να εφαρμόζει την Λανθασμένη 1.

Πέρα από τα ευρήματα που καταγράφηκαν παραπάνω, αξίζει να σημειωθεί ότι στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα (E1, E2, E3), τα παιδιά σε ορισμένες περιπτώσεις δεν περιορίστηκαν στη χρήση μίας και μόνο στρατηγικής. Συχνή τακτική που εφαρμόστηκε από την πλειοψηφία των παιδιών ήταν η εικονική αναπαράσταση μέσω σχεδίασης επόμενων ή κοντινών όρων του μοτίβου.

Επιπλέον, σε καθένα από τα τρία έργα επαναλαμβανόμενων μοτίβων, το σύνολο των παιδιών αναγνώρισε και ονομάτισε ως μοτίβο το μαθηματικό φαινόμενο. Η ρητή αναγνώριση της δραστηριότητας ως «μοτίβο» καταγράφηκε σε όλες τις περιπτώσεις, ωστόσο δεν κωδικοποιήθηκε ως στρατηγική επίλυσης, καθώς δεν διαφοροποιούσε τις επιλογές των παιδιών.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι αντιληπτικές στρατηγικές (ρυθμική απαγγελία, εναλλαγή στοιχείων) εμφανίστηκαν κυρίως στα ζητούμενα άμεσης επέκτασης (E1.1, E2.1), ενώ οι αναδρομικές και συναρτησιακές στρατηγικές ενεργοποιήθηκαν κυρίως στα ζητούμενα κοντινού και μακρινού όρου.

3.2 Αναπτυσσόμενα μοτίβα

3.2.1 Επίδοση

Οι απαντήσεις των παιδιών αξιολογήθηκαν και βαθμολογήθηκαν με 0 (λανθασμένη) ή 1 (σωστή). Στον Πίνακα 5 παρουσιάζεται η επίδοση ανά παιδί και ανά ζητούμενο του κάθε έργου. Υπενθυμίζεται ότι, σύμφωνα με τον σχεδιασμό, το E6 επιδόθηκε μόνο στην περίπτωση που το παιδί έχει ολοκληρώσει το E4 σωστά. Με γκρι σκίαση στον πίνακα σημαίνονται τα παιδιά που δεν έλαβαν το E6.

Παιδί	Έργα									Σύνολο
	E4 ($2n-1$)			E5 (n)			E6 ($2n+2$)			
	E4.1	E4.2	E4.3	E5.1	E5.2	E5.3	E6.1	E6.2	E6.3	
Αντρέας	1	1	0	1	1	1				5
Ελένη	1	1	0	1	1	1				5
Ειρήνη	1	1	0	1	1	1				5
Μαρία	1	0	0	1	1	1				4
Κική	1	1	0	1	1	1				5
Πόπη	1	1	0	1	1	1				5
Θοδωρής	1	1	1				1	1	0	5
Γιάννης	1	0	0	1	1	1				4
Βασιλική	1	1	0	1	1	1				5
Θανάσης	1	0	0	1	1	1				4
Καίτη	1	1	0	1	1	1				5
Πέτρος	1	0	0	1	0	0				2
Κώστας	1	1	0	1	1	1				5
Νίκος	1	1	0	1	1	1				5
Αννέτα	1	0	0	1	1	1				4
Σύνολο	15	10	1	14	13	13	1	1	0	68

Πίνακας 5. Επίδοση συμμετεχόντων στα έργα των αναπτυσσόμενων μοτίβων

Από τον Πίνακα 5 φαίνεται ότι το E4.1 (2n-1), το οποίο αφορούσε την εύρεση του επόμενου όρου, απαντήθηκε σωστά από το σύνολο των παιδιών (N=15). Αναφορικά με το E4.2 (κοντινή πρόβλεψη), 5 από τα 15 παιδιά δεν κατάφεραν να εντοπίσουν ορθά τον ζητούμενο όρο. Η μεγαλύτερη δυσκολία εντοπίζεται στο E4.3 (μακρινή πρόβλεψη), όπου μόνο 1 παιδί απάντησε σωστά, ενώ οι υπόλοιποι 14 οδηγήθηκαν σε λανθασμένη απάντηση.

Το Έργο 5 (n), δόθηκε στα παιδιά που δεν ολοκλήρωσαν επιτυχώς το Έργο 4. Τα 14 παιδιά που εργάστηκαν με το συγκεκριμένο μοτίβο, επέκτειναν σωστά στον αμέσως επόμενο όρο (E5.1). Στο E5.2 (κοντινή πρόβλεψη), ένα παιδί δεν κατάφερε να εντοπίσει τον ζητούμενο όρο, ενώ τα υπόλοιπα 13 απάντησαν σωστά. Παρόμοια εικόνα παρουσιάζεται και στο E5.3 (μακρινή πρόβλεψη), όπου 13 από τα 14 παιδιά εντόπισαν σωστά τον μακρινό όρο και μόνο ένα απέτυχε.

Το Έργο 6 (2n+2) δόθηκε σε ένα παιδί (Θοδωρή), ο οποίος είχε ολοκληρώσει επιτυχώς όλα τα ζητούμενα του Έργου 4. Το παιδί εντόπισε επιτυχώς τόσο τον επόμενο όρο (E6.1) όσο και τον κοντινό (E6.2). Ωστόσο, στο E6.3 (μακρινή πρόβλεψη), έδωσε λανθασμένη απάντηση.

Από τον Πίνακα 5 προκύπτει, επίσης, ότι με εξαίρεση τον Πέτρο, ο οποίος απάντησε σωστά σε 2 μόνο από τα 6 ζητούμενα των αναπτυσσόμενων μοτίβων και μόνο για τον επόμενο όρο, μικρές διαφορές παρατηρούνται μεταξύ των παιδιών ως προς τη συνολική τους επίδοση,

καθώς τα περισσότερα απαντούν σωστά σε 4 ή 5 ζητούμενα. Θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι ο Θωδωρής αντιμετώπισε ένα πιο απαιτητικό έργο (E6) σε σχέση με τα υπόλοιπα παιδιά, στα οποία επιδόθηκε το E5. Το μοτίβο αυτό ήταν, κατά τα φαινόμενα, προσιτό στα παιδιά.

3.2.2 Στρατηγικές προσέγγισης

Πέραν της καταγραφής της επίδοσης, η παρούσα μελέτη επικεντρώθηκε στον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά προσέγγισαν τα αναπτυσσόμενα μοτίβα και κυρίως στον τρόπο με τον οποίο προσδιόρισαν τον κανόνα ανάπτυξής τους. Για την ανίχνευση των στρατηγικών των παιδιών ελήφθησαν υπόψη οι λεκτικές περιγραφές τους και οι εικονικές αναπαραστάσεις, στην περίπτωση που κατασκεύασαν τέτοιες, σχεδιάζοντας τα μοτίβα με τις ξυλομπογιές που τους ήταν διαθέσιμες.

Για κάθε παιδί ανά ερώτημα, διατηρήθηκε και αναφέρθηκε η στρατηγική με την οποία έδωσε την τελική του απάντηση (σωστή ή λανθασμένη). Κατά την ενασχόληση των παιδιών με τα αναπτυσσόμενα μοτίβα, καταγράφηκαν οι παρακάτω στρατηγικές προσέγγισης και κωδικοποιήθηκαν σύμφωνα με τον τύπο του ζητούμενου στα έργα, δηλαδή με βάση α) τον επόμενο, β) τον κοντινό και γ) τον μακρινό ζητούμενο όρο.

A. «Επόμενος όρος»

Κατά την αναζήτηση του επόμενου όρου, τα παιδιά προσέγγισαν το ζητούμενο με αναδρομικές στρατηγικές. Όλα τα παιδιά χρησιμοποίησαν, είτε ρητά είτε άρρητα, κάποιον αναδρομικό κανόνα. Λίγα παιδιά, επιπλέον, διατύπωσαν ρητά μια αντιστοίχιση των όρων με τη θέση του. Πιο αναλυτικά, εντοπίστηκαν οι παρακάτω κατηγορίες, με ενδεχόμενες υποκατηγορίες:

Ρητός αναδρομικός κανόνας

Στην κατηγορία αυτή τα παιδιά εκφράζουν ρητά έναν αναδρομικό κανόνα, τον οποίο εφαρμόζουν για τον προσδιορισμό του επόμενου όρου. Διακρίνονται δύο υποκατηγορίες αυτή της κατηγορίας.

Στην πρώτη υποκατηγορία («Με σχέση»), τα παιδιά προσδιορίζουν τη σχέση μεταξύ διαδοχικών όρων (π.χ. «ανεβαίνει ανά δύο», «κάθε φορά προσθέτω ένα»). Για παράδειγμα:

Κάθε φορά ανεβαίνει δύο. Άρα βάζω δύο στα επτά. Εννιά. (Αντρέας, E4.1)

Μία παραπάνω κουκίδα σε κάθε επόμενη σειρά. (Ειρήνη, E5.1)

Αξιίζει να σημειωθεί ότι στο E4.1, όλα τα παιδιά εξέφρασαν αριθμητικά το μοτίβο υπολογίζοντας το συνολικό πλήθος των κουκκίδων, με εξαίρεση τον Θοδωρή. Το παιδί αυτό αναφέρθηκε στην ανάπτυξη του μοτίβου στις δύο γραμμές ξεχωριστά:

Έχετε ένα και κανένα, μετά δύο και προσθέτετε ένα πάνω, μετά τρία και προσθέτετε δύο πάνω, μετά τέσσερα και τρία πάνω. Εννιά κουκίδες στο επόμενο λοιπόν. (Θοδωρής, E4.1)

Ο Θοδωρής διατήρησε το ίδιο σκεπτικό και στο E6.1 ($2n+2$), στο οποίο, επιπλέον, αντιστοίχισε τους όρους με τη θέση τους, ως εξής:

Και οι δύο πύργοι αυξάνονται κατά ένα και το μόνο κοινό στα σχέδια είναι ότι όλοι έχουν δύο κενά στον δεξιό πύργο. Τρία και ένα ο πρώτος, τέσσερα και δύο ο δεύτερος, πέντε και τρία, άρα έξι και τέσσερα. (Θοδωρής, E6.1)

Στη δεύτερη υποκατηγορία («Χωρίς σχέση») δεν προσδιορίζεται ρητά η σχέση μεταξύ των διαδοχικών όρων. Τα παιδιά φαίνεται να αναφέρονται στην ακολουθία των φυσικών αριθμών και είτε εντοπίζουν τους αριθμούς που «λείπουν» (E4.1), είτε δηλώνουν ποιος θα είναι ο επόμενος «στη σειρά» (E5.1). Επιπλέον, απαιτείται η εύρεση των προηγούμενων όρων, ώστε να προσδιοριστούν οι επόμενοι. Παραδείγματα αυτής της υποκατηγορίας είναι τα ακόλουθα:

Δεν βάζετε το δύο, το τέσσερα, το έξι, το οχτώ και θα πάει εννιά. (Κική, E4.1)

Μία κουκίδα, τρεις, πέντε και εφτά. Λείπει το δύο, τέσσερα, έξι. Αφήνετε ανάμεσα αριθμούς. Λείπει το οχτώ και πάμε στο εννιά. (Βασιλική, E4.1)

Ένα, δύο, τρία, τέσσερα, άρα πέντε. Με τη σειρά. (Κώστας, E5.1)

Άρρητος αναδρομικός κανόνας

Το παιδί αναφέρει τον επόμενο όρο, χωρίς να εξηγεί τον κανόνα που χρησιμοποιεί. Τα παιδιά δείχνουν να εργάζονται με βάση την αριθμητική ακολουθία ή την ακολουθία των περιττών αριθμών. Για παράδειγμα:

Ένα, τρία, πέντε, εφτά, εννιά. Το επόμενο σχέδιο έχει εννιά δηλαδή. (Κώστας, E4.1)

Ένα, μετά δύο, μετά τρία, μετά τέσσερα, μετά πέντε δηλαδή. (Πόπη, E5.1)

Και σε αυτή την υποκατηγορία, υπήρξαν παιδιά που αντιστοίχισαν τους όρους με τη θέση τους. Η στρατηγική αυτή εφαρμόστηκε κυρίως στο E4.1 (n). Τα παιδιά που την εφάρμοσαν αναφέρθηκαν στη θέση της κάθε γραμμής από κουκκίδες («πρώτη σειρά», «δεύτερη σειρά») και ταυτόχρονα στο πλήθος των κουκκίδων της κάθε σειράς. Για παράδειγμα:

Η πρώτη σειρά ένα, μετά δεύτερη δύο, μετά τρίτη τρεις. Άρα στην πέμπτη σειρά έχουμε πέντε. (Αννέτα, E5.1)

Ο Πίνακας 6 που ακολουθεί, παρουσιάζει την κατανομή των παιδιών στις κατηγορίες στρατηγικών που ενεργοποιήθηκαν κατά την προσέγγιση του επόμενου όρου στα έργα με αναπτυσσόμενα μοτίβα.

	Ρητός Κανόνας		Άρρητος Κανόνας
E4.1 (2n-1)	Με σχέση	Χωρίς Σχέση	
	Αντρέας	Κική	Κώστας
	Ελένη	Βασιλική	
	Ειρήνη	Θανάσης	
	Μαρία		
	Πόπη		
	Πέτρος		
	Γιάννης		
	Θοδωρής		
	Καίτη		
	Νίκος		
	Αννέτα		
E5.1 (n)	Αντρέας	Γιάννης	Πόπη
	Ελένη	Κώστας	Βασιλική ¹
	Ειρήνη	Νίκος	Θανάσης ¹
	Μαρία		Αννέτα ¹
	Πέτρος		Κική ¹
	Καίτη		
E6.1 (2n+2)	Θοδωρής ¹		

Σημείωση.

¹ Με αντιστοίχιση όρου θέσης

Πίνακας 6. Κατανομή των παιδιών στις κατηγορίες στρατηγικών προσέγγισης του επόμενου όρου στα αναπτυσσόμενα μοτίβα.

Από τον Πίνακα 6 προκύπτει ότι η επικρατούσα στρατηγική ήταν η εφαρμογή ενός αναδρομικού κανόνα που διατυπώθηκε ρητά, η οποία εμφανίστηκε συνολικά 18 φορές, από 11 διαφορετικά παιδιά, 6 εκ των οποίων την εφαρμόσαν και στα δύο μοτίβα που αντιμετώπισαν. Έξι φορές, από 6 διαφορετικά παιδιά, διατυπώθηκε ένας κανόνας, χωρίς να περιγράφεται η σχέση μεταξύ διαδοχικών όρων. Τέλος, η χρήση αναδρομικού κανόνα χωρίς τη ρητή διατύπωσή του εμφανίστηκε συνολικά 6 φορές από διαφορετικά μεταξύ τους παιδιά.

Από τον Πίνακα 6 φαίνεται, επίσης, ότι στο E5.1 (n), λιγότερα παιδιά διατύπωσαν ρητά έναν αναδρομικό κανόνα με σχέση, συγκρίνοντας με το E4.1 (2n-1).

Τέλος, 5 παιδιά αντιστοίχισαν τον όρο της ακολουθίας με τη θέση του. Τέσσερα από αυτά το έπραξαν στο απλούστερο μοτίβο (E5, n) χωρίς να διατυπώσουν ρητά τον αναδρομικό κανόνα που χρησιμοποίησαν. Το πέμπτο παιδί ήταν ο Θοδωρής, ο οποίος ήταν και το μόνο παιδί που ανέλυσε τα μοτίβα $2n-1$ και $2n+2$ (E4.1 και E6.1, αντίστοιχα) σε δύο συνιστώσες («γραμμές»).

Συνοπτικά, για τον προσδιορισμό του επόμενου όρου στα αναπτυσσόμενα μοτίβα τα παιδιά αξιοποίησαν αναδρομικές στρατηγικές. Στις περισσότερες περιπτώσεις ο κανόνας διατυπώθηκε ρητά, είτε με αναφορά στη σχέση μεταξύ διαδοχικών όρων είτε μέσω περιγραφής της διαδοχικής σειράς των όρων. Σε ορισμένες περιπτώσεις τα παιδιά χρησιμοποίησαν αναδρομικό κανόνα συνδέοντας τη θέση με τον όρο μέσα στη σειρά, ενώ καταγράφηκαν και περιπτώσεις στις οποίες ο επόμενος όρος προσδιορίστηκε χωρίς ρητή διατύπωση του κανόνα.

B. «Κοντινός όρος»

Κατά την αναζήτηση του κοντινού όρου στα αναπτυσσόμενα μοτίβα, οι στρατηγικές που καταγράφηκαν μπορούν να διακριθούν σε τρεις αρχικές κατηγορίες: τις αναδρομικές, τις συναρτησιακές και τις λανθασμένες.

Αναδρομικές στρατηγικές

Στην κατηγορία αυτή τα παιδιά εφαρμόζουν αναδρομικό κανόνα άλλοτε σε αμιγώς αριθμητικό επίπεδο κι άλλοτε σχεδιάζοντας ενδιάμεσους όρους, προσεγγίζοντας τελικά τον ζητούμενο. Παρόμοια με το προηγούμενο ζητούμενο, οι αναδρομικές στρατηγικές διαφέρουν ως προς την ρητή έκφραση του αναδρομικού κανόνα ή/και της σχέσης που συνδέει τους διαδοχικούς όρους. Έτσι προκύπτουν οι ακόλουθες κατηγορίες και υποκατηγορίες:

Ρητός αναδρομικός κανόνας

Τα παιδιά διατυπώνουν τον αναδρομικό κανόνα και είτε περιγράφουν τη σχέση που συνδέει τους διαδοχικούς όρους («Με σχέση»), είτε όχι («Χωρίς σχέση»).

Στην πρώτη περίπτωση («Με σχέση») τα παιδιά περιγράφουν ρητά τη σχέση μεταξύ των διαδοχικών όρων (π.χ. «Δύο ανεβαίνει κάθε φορά»). Για παράδειγμα:

Θα ανέβω κάθε φορά ανά δύο. Εννιά και δύο ίσον έντεκα. Και δύο ίσον δεκατρία. Και δύο ίσον δεκαπέντε. Και δύο δεκαεφτά. Και δύο δεκαεννιά. Άρα δεκαεννιά στο δέκατο σχέδιο. (Ελένη, E4.2)

Δέκα. Γιατί μετά το πέντε γίνεται έξι, επτά, οκτώ, εννιά και δέκα. Όσο κατεβαίνω προσθέτω μία. Το σχεδιάζω για επαλήθευση. (Αντρέας, E5.2)

Μετά το πέντε πάει έξι, μετά εφτά, μετά οχτώ, μετά εννιά, μετά δέκα.

Κάθε φορά σχεδιάζω μία παραπάνω. (Ειρήνη, E5.2)

Αφού κάθε σειρά μεγαλώνει με μία κουκίδα, πάει έξι, εφτά, οχτώ, εννιά, δέκα. (Αννέτα, E5.2)

Στη δεύτερη περίπτωση («Χωρίς σχέση»), δεν προσδιορίζεται ρητά η σχέση μεταξύ των διαδοχικών όρων. Τα παιδιά φαίνεται να αναφέρονται στην ακολουθία των φυσικών αριθμών και είτε εντοπίζουν τους αριθμούς που «λείπουν» (E4.2), είτε δηλώνουν ποιος θα είναι ο επόμενος «στη σειρά» (E5.2). Για παράδειγμα:

Δεν βάζετε ένα κάθε φορά και βάζετε τον επόμενο. Θα φτιάξω κι άλλα πέντε. Όχι το δέκα, φτιάχνω το έντεκα, όχι το δώδεκα, φτιάχνω δεκατρία, μετά δεκαπέντε, δεκαεπτά και το τελευταίο δεκαεννιά. Ένα αφήνω, ένα βάζω. (Κική, E4.2)

Μετά το πέντε, πάει έξι και με τη σειρά το σχεδιάζω. Επτά οκτώ, εννιά, δέκα (Νίκος, E5.2)

Άρρητος αναδρομικός κανόνας

Σε αυτήν την υποκατηγορία το παιδί καταλήγει στο συμπέρασμα χωρίς να περιγράφει τον αναδρομικό κανόνα που χρησιμοποιεί. Τα παιδιά φαίνεται να αναγνωρίζουν την ακολουθία των περιττών (E5.2) ή των φυσικών αριθμών (E6.2).

Για παράδειγμα:

Άλλα πέντε σχέδια δηλαδή. Είχα μείνει στο εννιά, μετά πάει έντεκα, δεκατρία, δεκαπέντε, δεκαεφτά, δεκαεννιά. Δεκαεννιά λοιπόν. (Κώστας, E4.2)

Είμαι στο πέντε, το επόμενο έξι. Θα το σχεδιάσω καλύτερα. Άρα πέντε, έξι, εφτά, οχτώ, εννιά και η τελευταία σειρά δέκα κουκίδες. (Καίτη, E5.2)

Θα σχεδιάσω έντεκα, μετά δεκατρία, δεκαπέντε, δεκαεφτά. Δεκαεννιά θα είναι. (Βασιλική, E4.2)

Μετά συνεχίζει έξι, εφτά, οχτώ, εννιά και δέκα. Άρα δέκα. (Γιάννης, E5.2)

Αξιοσημείωτη είναι η μοναδική περίπτωση του Θοδωρή, ο οποίος, όπως έκανε στον επόμενο όρο, αναφέρεται στην ανάπτυξη του μοτίβου στις δύο στήλες ξεχωριστά:

Δέκα έχουμε εδώ δεξιά, δεξιά έχουμε στα προηγούμενα οχτώ και μετά εννιά και μετά δέκα. Δώδεκα αριστερά γιατί δεξιά λείπουν δύο.
(Θοδωρή, E6.2)

Το παιδί αυτό φαίνεται να αναλύει τη δομή του μοτίβου και να εφαρμόζει αναδρομικό κανόνα που δεν προσδιορίζει, όσον αφορά τους διαδοχικούς όρους, Ωστόσο, προσδιορίζει μια σχέση ανάμεσα στις δύο στήλες του κάθε όρου. Πιο συγκεκριμένα, φαίνεται να παρατηρεί ότι η δεύτερη στήλη είναι κατά δύο μικρότερη από την πρώτη.

Συναρτησιακές στρατηγικές

Στην κατηγορία αυτή εντάσσονται οι στρατηγικές των παιδιών που προσδιόρισαν τον ζητούμενο κοντινό όρο συνδέοντας τη θέση (σειρά) με τον αντίστοιχο όρο του μοτίβου. Η στρατηγική αυτή εμφανίζεται αποκλειστικά στο μοτίβο μορφής n (E5.2), όπου η σχέση θέσης με τον όρο στο μοτίβο αυτό γίνεται πιο άμεσα αντιληπτή. Τα παιδιά φαίνεται να παρατηρούν πως η θέση ταυτίζεται με το πλήθος των στοιχείων. Σε δύο περιπτώσεις παιδιών ο κανόνας εκφράζεται με σαφή και ικανοποιητικό τρόπο, όπως για παράδειγμα κατά τη διατύπωση του Θανάση:

Αρα κάθε φορά ίδιος αριθμός κουκίδων με τη σειρά. Αυτόν τον κανόνα έχετε. Δέκα κουκίδες στην δέκατη σειρά. (Θανάσης, E5.2)

Παράλληλα σε δύο άλλες περιπτώσεις παιδιών εφαρμόζεται μεν συναρτησιακός κανόνας αλλά δεν διατυπώνεται με πληρότητα και σαφήνεια. Για παράδειγμα η λεκτική εξήγηση της Βασιλικής δείχνει να εκφράζει την κατανόηση της σχέσης μεταξύ θέσης (σειράς) με το πλήθος στοιχείων:

Δέκα έχει η δέκατη σειρά. (Βασιλική, E5.2)

Λανθασμένες στρατηγικές

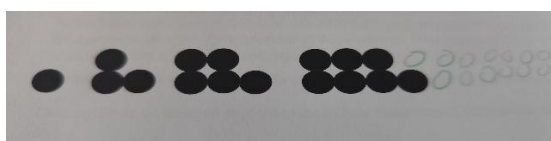
Κατά τον προσδιορισμό του κοντινού ζητούμενου όρου στην κατηγορία των αναπτυσσόμενων μοτίβων, καταγράφηκαν 4 περιπτώσεις παιδιών που οδηγήθηκαν σε λανθασμένες απαντήσεις, καθώς και ένα παιδί (Μαρία) που δεν έδωσε καμία απάντηση. Στο E4.2 τρία παιδιά αναζήτησαν τον δέκατο ζητούμενο όρο μετά τους δεδομένους τέσσερις πρώτους όρους. Αντί δηλαδή για τον πραγματικό δέκατο όρο του μοτίβου αναζήτησαν τον δέκατο τέταρτο όρο.

Αφού έχει επτά το τελευταίο, και προσθέτω δύο κάθε φορά, για να φτάσω στο δέκα είναι είκοσι επτά. Δηλαδή δύο φορές το δέκα κάνει είκοσι, συν επτά το τελευταίο κάνει είκοσι επτά. (Πέτρος, E4.2)

Εννιά, έντεκα, δεκατρία, δεκαπέντε, δεκαεφτά, δεκαεννιά, είκοσι ένα, είκοσι τρία, είκοσι πέντε, είκοσι εφτά. Θα είχε είκοσι εφτά, το βρήκα μετρώντας. Στα δέκα σχέδια έχουμε είκοσι εφτά. (Γιάννης, E4.2)

Μία ακόμη προσπάθεια, της Αννέτας οδηγήθηκε σε λανθασμένη απάντηση, καθώς για να βρει τον δέκατο όρο σχεδίασε λανθασμένα επάνω στον τελευταίο δεδομένο, συμπληρώνοντας το σχήμα και αναπαριστώντας ανεπιτυχώς τον δέκατο ζητούμενο όρο. Η συμπλήρωση του δοθέντος στοιχείου, καθώς και η λεκτική αναφορά της φαίνεται στην Εικόνα 10, αφού όπως παρατηρούμε στον τέταρτο όρο συμπληρώνει με γκρι ξυλομπογιά 13 επιπλέον κουκίδες.

Είκοσι. Το σχεδίασα και είναι είκοσι. (Αννέτα, E5.2)



Εικόνα 11. Λανθασμένη συμπλήρωση του 4^{ου} δεδομένου όρου για την απευθείας αναπαράσταση του (κοντινού όρου)10^{ου} (Αννέτα, E4.2)

Τέλος, θα πρέπει να σημειωθεί ότι και στο πρόβλημα του κοντινού όρου, εντός της κάθε κατηγορίας προκύπτουν διαφοροποιήσεις, με τους εξής τρόπους: Σε κάποιες περιπτώσεις αναφέρθηκε η αντιστοίχιση του όρου με τη θέση του, ενώ σε κάποιες περιπτώσεις τα παιδιά σχεδίασαν τους επόμενους όρους του μοτίβου. Για την ακρίβεια, τα περισσότερα παιδιά σχεδίασαν τους επόμενους όρους και βασίστηκαν σε αυτά τα σχέδια για να προσδιορίσουν τον μακρινό όρο, ή τα επαληθεύσουν την πρόβλεψή τους.

Στον Πίνακα 7 παρουσιάζεται η κατανομή των παιδιών ανά κατηγορία στρατηγικής προσέγγισης του κοντινού όρου στα έργα με αναπτυσσόμενα μοτίβα. Με εκθέτες σημαίνονται οι περιπτώσεις των παιδιών που αναφέρθηκαν στην αντιστοίχιση των όρων με τη θέση τους (1) και αυτές στις οποίες τα παιδιά δεν σχεδίασαν τους επόμενους όρους (2).

Έργο	Αναδρομική		Άρρητος Κανόνας	Συναρτησιακή	Λανθασμένη
	Ρητός Κανόνας	Χωρίς Σχέση			
2n-1	Με σχέση	Χωρίς Σχέση			
	Αντρέας	Κική	Βασιλική ²		Πέτρος ²
	Ελένη		Θοδωρής		Γιάννης ²
	Ειρήνη		Καίτη ¹		Θανάσης ²
	Πόπη		Κώστας		Αννέτα
			Νίκος		Μαρία ²
n	Αντρέας	Κώστας ²	Γιάννης ²	Κική ¹	Πέτρος ²
	Ελένη	Νίκος	Καίτη	Πόπη ^{1,2}	
	Ειρήνη			Βασιλική ^{1,2}	
	Μαρία ¹			Θανάσης ^{1,2}	
	Αννέτα ²				
2n+2	Θοδωρής				

Σημείωση

¹ Με αντιστοίχιση

² Χωρίς σχεδίαση

Πίνακας 7. Κατανομή των παιδιών στις κατηγορίες στρατηγικών προσέγγισης του κοντινού όρου (10^{ος} όρος) στα αναπτυσσόμενα μοτίβα.

Από τον Πίνακα 7 προκύπτει πως η επικρατούσα στρατηγική προσδιορισμού του κοντινού όρου αφορούσε την εφαρμογή ενός ρητού ή άρρητου αναδρομικού κανόνα, είτε με περιγραφή της σχέσης μεταξύ διαδοχικών όρων, είτε όχι. Δεκατέσσερα από τα 15 παιδιά εφάρμοσαν αναδρομική στρατηγική σε τουλάχιστον ένα από τα δύο αναπτυσσόμενα μοτίβα που τους δόθηκαν, ενώ 7 από αυτά την εφάρμοσαν και στα δύο. Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων (9 περιπτώσεις) διατυπώθηκε ρητά ο αναδρομικός κανόνας και η σχέση μεταξύ των διαδοχικών όρων (από 6 διαφορετικά παιδιά). Σε 8 περιπτώσεις, ο κανόνας που χρησιμοποιήθηκε δεν διατυπώθηκε ρητά (από 7 διαφορετικά παιδιά).

Συναρτησιακή στρατηγική εφάρμοσαν 4 παιδιά και μόνο στο E5.2 (n). Τρία από αυτά τα παιδιά δεν σχεδίασαν τους όρους του μοτίβου.

Στο E4 (2n-1) καταγράφηκαν 5 περιπτώσεις παιδιών που ακολούθησαν λανθασμένες στρατηγικές, εκ των οποίων ο Πέτρος την εφάρμοσε και στη συνέχεια στο E5 στο μοτίβο μορφής n. Επισημαίνεται ότι με την εξαίρεση ενός παιδιού (Αννέτα), κανένα από τα παιδιά που ακολούθησε λανθασμένη στρατηγική δεν αποπειράθηκε να σχεδιάσει τους όρους.

Επιπλέον, στο E5, 4 παιδιά στράφηκαν σε συναρτησιακές στρατηγικές.

Συνολικά, για τον προσδιορισμό του κοντινού όρου στα αναπτυσσόμενα μοτίβα κυριάρχησε η χρήση αναδρομικών στρατηγικών, με τα παιδιά να επεκτείνουν βήμα προς βήμα το μοτίβο μέχρι τη ζητούμενη θέση και μάλιστα σε 16 τέτοιες προσεγγίσεις

αναδρομικού κανόνα (από τις 20 συνολικά) παρατηρήθηκε παράλληλη σχεδίαση. Σε μικρότερο βαθμό εμφανίστηκαν συναρτησιακές στρατηγικές, μόνο στο μοτίβο η με το δεντράκι, όπου η σχέση μεταξύ θέσης και όρου θεωρείται πιο άμεσα αντιληπτή. Παράλληλα καταγράφηκαν λανθασμένες προσεγγίσεις, οι οποίες πιθανώς σχετίζονται κυρίως με εσφαλμένη εντύπωση της θέσης του ζητούμενου όρου, καθώς και μία περίπτωση απουσίας απάντησης.

Γ. «Μακρινός όρος»

Για την κατηγοριοποίηση των στρατηγικών που εφάρμοσαν τα παιδιά για την εύρεση του μακρινού όρου, διατηρείται κατά το δυνατόν η ονομασία των κατηγοριών που ανιχνεύτηκαν και στην περίπτωση του κοντινού όρου. Πέραν αυτών, ωστόσο, η κατηγοριοποίηση ενισχύθηκε με προσθήκη των νέων στρατηγικών που εμφανίστηκαν στην αναζήτηση του μακρινού όρου στα έργα με αναπτυσσόμενα μοτίβα.

Συναρτησιακές στρατηγικές

Στην κατηγορία αυτή τα παιδιά προσεγγίζουν τον ζητούμενο μακρινό όρο, συνδέοντας απευθείας τη θέση του όρου με την τιμή του, αξιοποιώντας έναν γενικό συναρτησιακό κανόνα. Στο E4 η στρατηγική αυτή εμφανίζεται σε μία μόνο περίπτωση, αυτή του Θοδωρή. Το παιδί φαίνεται να εντοπίζει τη σχέση μεταξύ θέσης και πλήθους στοιχείων, αναλύοντας παράλληλα το μοτίβο σε επιμέρους τμήματα (άνω και κάτω γραμμή). Δείχνει να αναγνωρίζει την ταύτιση του πλήθους των στοιχείων της κάτω γραμμής με την αριθμητική σειρά της θέσης, χωρίς, ωστόσο, να τη διατυπώνει ρητά. Η συναρτησιακή στρατηγική του εκφράζεται από τη λεκτική του εξήγηση:

*Δυσκολεύουν τα πράγματα. Όταν κάνω κάτω δέκα, επάνω είναι εννιά.
Αν κάνω τριάντα ένα δηλαδή πάνω, θα έχει τριάντα κάτω. Άρα εξήντα
ένα. (Θοδωρής, E4.3)*

Αντιθέτως, στο E5 η χρήση συναρτησιακού κανόνα εμφανίζεται σε περισσότερες περιπτώσεις, όπου τα παιδιά αναγνωρίζουν ότι στη θέση k αντιστοιχούν k κουκίδες. Ο συναρτησιακός κανόνας είτε αναδύεται ξεκάθαρα από την πλήρη και σαφή διατύπωσή του είτε υπονοείται με τέτοιο τρόπο, ώστε να αναδεικνύεται, όπως στην περίπτωση του Θανάση. Παρακάτω παρατίθενται ορισμένα τέτοια παράδειγμα απαντήσεων:

*Σε κάθε σειρά, ο ίδιος αριθμός κουκίδων. Τριάντα πέντε τότε. (Αντρέας,
E5.3)*
*Το ίδιο με κάθε αριθμό. Στην τριακοστή πέμπτη σειρά θα έχει τριάντα
πέντε κουκίδες. (Βασιλική, E5.3)*

Τριάντα πέντε. Κάθε φορά βάζω τον αριθμό της σειράς που είναι.

(Αννέτα, E5.3)

Αν συνεχίσω να σχεδιάζω θα φτιάχνω μία ακόμη. Οι κουκίδες είναι όσες οι σειρές. Τριάντα θα είναι όταν φτάσω στις 35 σειρές. (Καίτη, E5.3)

Τριάντα πέντε κουκίδες γιατί είναι η τριακοστή πέμπτη σειρά. (Θανάσης, E5.3)

Μεικτές στρατηγικές

Η κατηγορία αυτή αφορά δύο περιπτώσεις παιδιών που συνδυάζουν στοιχεία αναδρομικής και συναρτησιακής σκέψης. Συγκεκριμένα, αρχικά εκφράζουν και εφαρμόζουν έναν αναδρομικό κανόνα, ενώ στη συνέχεια προχωρούν σε γενίκευση, αξιοποιώντας τη σχέση μεταξύ θέσης και όρου. Η μεικτή στρατηγική εμφανίστηκε στον εντοπισμό του μακρινού όρου στο αναπτυσσόμενο μοτίβο μορφής n. Συγκεκριμένα ο Νίκος και η Ειρήνη, με αφετηρία έναν αναδρομικό κανόνα, τον οποίο και αρχικά εφάρμοσαν, στη συνέχεια αξιοποίησαν συναρτησιακές σχέσεις μεταξύ θέσης και πλήθους κουκίδων. Έπειτα κατέληξαν στην υιοθέτηση ενός συναρτησιακού κανόνα, τον οποίο και ανέφεραν ρητά στις απαντήσεις τους:

Αφού κάθε φορά βάζω ένα, όσες σειρές και να κάνω θα έχουν ένα παραπάνω από την προηγούμενη. Άρα μετά έντεκα, δώδεκα, μέχρι το τριάντα πέντε έτσι θα γίνεται, το ίδιο. Άρα τριάντα πέντε. (Νίκος, E5.3)

Κάθε σειρά που μεγαλώνει, παίρνει μία παραπάνω. Δέκα μετά έντεκα, μετά δώδεκα, μετά δεκατρία. Με τη σειρά. Άρα τριάντα πέντε. Ανεβαίνει ένα – ένα. (Ειρήνη, E5.3)

Γραμμικό μοντέλο

Η στρατηγική αυτή στηρίζεται στην υπόθεση ότι οι αριθμητικές τιμές της θέσης και του όρου μεταβάλλονται με αναλογικό τρόπο. Ειδικότερα, σύμφωνα με αυτήν, αν ένας όρος εμφανίζεται σε μια συγκεκριμένη θέση, τότε στα πολλαπλάσια της θέσης αντιστοιχούν τα πολλαπλάσια της τιμής του όρου. Η υπόθεση αυτή δεν είναι ορθή γενικά. Όσον αφορά στα συγκεκριμένα μοτίβα που δόθηκαν στα παιδιά, στο E4 η προσέγγιση αυτή οδηγεί σε λανθασμένες απαντήσεις, ενώ στο E5 σε σωστές. Τα παιδιά προσεγγίζουν την τιμή του ζητούμενου όρου με πολλαπλασιασμούς ή επαναλαμβανόμενες προσθέσεις και στα δύο μοτίβα, παρά τη διαφορετική μορφή τους.

Πιο συγκεκριμένα, στο E5.3, τα παιδιά χρησιμοποιούν ως δεδομένο ότι ο 10^{ος} όρος αντιστοιχεί σε 19 κουκίδες (από το προηγούμενο ερώτημα). Στη συνέχεια, εφαρμόζουν μια διαδικασία που προσομοιάζει στην «απλή μέθοδο των τριών»: Αφού ο 10^{ος} όρος αντιστοιχεί στο 19, ο 30^{ος} όρος (3x10) αντιστοιχεί στο 3x19=57. Για να βρουν τον 31^ο όρο, κάνουν ακόμα

ένα λάθος: Προσθέτουν στο 57 το 7, που αντιστοιχεί στον τελευταίο δεδομένο εξαρχής όρο (4^ο) ή έναν άλλο όρο που έχουν ήδη υπολογίσει.

Στα τριάντα ένα για να φτάσω, θα πολλαπλασιάσω το δέκατο που έχει δεκαεννιά με το τρία. Και βρίσκω το τριακοστό που έχει πενήντα επτά. Κι άλλα επτά, πάμε στο εξήντα τέσσερα. (Κική, E4.3)

Αφού τα δέκα έχουν δεκαεννιά, τα τριάντα έχουν πενήντα επτά. Δεκαεννιά επί τρία. Και επτά κουκίδες ακόμη, πάω στα εξήντα τέσσερα. (Νίκος, E4.3)

Αφού έχει δεκαεννιά στο δέκατο, και δεκαεννιά πάει τριάντα οκτώ στο εικοστό και δεκαεννιά πάει πενήντα επτά στο τριακοστό και άλλο ένα μοτίβο, επτά, πάει εξήντα τέσσερα. (Καίτη, E4.3).

Στην περίπτωση του E5.3, παρατηρήθηκε ένα παρόμοιο σκεπτικό, όπως στο παράδειγμα του Κώστα παρακάτω, ο οποίος φαίνεται να χρησιμοποιεί την αναλογία δέκα σειρές – δέκα κουκίδες, τριάντα σειρές-τριάντα κουκίδες. Στη συνέχεια βρίσκει τον αριθμό κουκκίδων που αντιστοιχεί στην 35^η σειρά προσθέτοντας τη διαφορά (1) βήμα-βήμα. Έτσι, η στρατηγική του Κώστα είναι και εν μέρει αναδρομική.

Στις δέκα σειρές έχουμε δέκα κουκίδες, επί τρεις θα γίνουν τριάντα κουκίδες, συν ένα πάει τριάντα ένα, με τη σειρά τριάντα δύο κουκίδες, τριάντα τρεις, τριάντα τέσσερα, τριάντα πέντε κουκίδες στις τριάντα πέντε σειρές. (Κώστας, E5.3)

Σε (δύο) άλλες περιπτώσεις, τα παιδιά κάνουν αρχικά τη (σωστή) αντιστοιχία πέντε κουκίδες-πέντε σειρές, δέκα κουκίδες-δέκα σειρές. Στη συνέχεια, συνθέτουν σταδιακά το 30 ως $10+10+10+5$, χωρίς να είναι εμφανές αν αναφέρονται στις τιμές των θέσεων ή στο πλήθος των κουκκίδων.

Πέντε όταν έκανα πέντε, μετά δέκα όταν έκανα δέκα. Βάζω κι άλλα δέκα, κι άλλα δέκα και πέντε. Δηλαδή τριάντα πέντε. (Ελένη, E5.3)

Το ίδιο κάνουμε. Στην δέκατη έχει δέκα, στην τριακοστή έχει τριάντα και άλλες πέντε κουκίδες κάνει τριάντα πέντε. Έκανα δέκα και δέκα και δέκα και πέντε. (Πόπη, E5.3)

Στα δύο παραπάνω παραδείγματα και ειδικά στο δεύτερο, δεν είναι απολύτως σαφές ότι τα παιδιά βασίζονται στην υπόθεση που είναι σαφής στις άλλες περιπτώσεις. Ωστόσο, το γεγονός ότι συγχέουν τις αριθμητικές τιμές των θέσεων και των όρων, δεν αξιοποιούν την αντιστοίχιση θέσης-τιμής στην οποία αναφέρονται, καθώς και το ότι στο τελευταίο βήμα

προσθέτουν «πέντε» χωρίς να είναι σαφές από πού προκύπτει αυτός ο αριθμός, μας οδήγησε να τις τοποθετήσουμε στη συγκεκριμένη κατηγορία του «Γραμμικού Μοντέλου».

Λανθασμένος όρος

Η κατηγορία αυτή εμφανίστηκε μόνο στο E4.3 (2n-1). Η στρατηγική που εφαρμόστηκε οδηγεί στον υπολογισμό ενός όρου διαφορετικού από τον ζητούμενο και αντιστοιχεί στο εξής σκεπτικό: Το παιδί αναγνωρίζει ότι ο αναδρομικός κανόνας που διέπει το μοτίβο είναι «κάθε φορά προσθέτω 2». Πολλαπλασιάζει τη διαφορά 2 με τον αριθμό που αντιστοιχεί στη θέση του ζητούμενου όρου (31), υπολογίζοντας πόσα «δυάρια» αντιστοιχούν στους 31 όρους. Τέλος, προσθέτει στο γινόμενο τον αριθμό των κουκκίδων που αντιστοιχούν στον τελευταίο δεδομένο όρο. Αυτός μπορεί να είναι είτε ο τελευταίος όρος που δόθηκε αρχικά (όπως εξηγούν ο Αντρέας και ο Πέτρος στα παραδείγματα που ακολουθούν), είτε ο τελευταίος όρος που το παιδί είχε υπολογίσει στο προηγούμενο ερώτημα (όπως εξηγεί η Ελένη παρακάτω)::

Τριάντα ένα! Κάθε φορά δύο! Άρα τριάντα ένα επί δύο. Δηλαδή εξήντα δύο και τα επτά είναι εξήντα εννιά. (Αντρέας, E4.3)

Θα το βρω με ακρίβεια. Εξήντα εννιά. Ανέβηκα δυάρια και επτά κάνει εξήντα εννιά. (Πέτρος, E4.3)

Κάπως αλλιώς θα μπορούσα να ανέβω, όχι ένα '-ένα βήμα. Τριάντα ένα επί δύο ίσον εξήντα δύο. Συν δεκαεννιά, ίσον ογδόντα ένα. Πρόσθεσα αυτό που βρήκα πριν, αφού πρώτα έκανα δυο βήματα μέχρι το 31 (Ελένη, E4.3)

Η στρατηγική αυτή θα μπορούσε να καταλήξει σε σωστή απάντηση, αν ο αρχικός όρος (1) και το πλήθος των «δυναριών» που πρέπει να προστεθούν για να φτάσουμε μέχρι τη θέση 31 (30x2) είχαν προσδιοριστεί σωστά.

Άλλα λάθη

Στην κατηγορία αυτή τοποθετήθηκαν δύο περιπτώσεις που δεν ανήκαν σε καμία από τις παραπάνω κατηγορίες.

Στην πρώτη περίπτωση, το παιδί αξιοποιεί τη σύνδεση θέση τιμής σωστά αρχικά, ωστόσο προσθέτει στο τέλος το πλήθος των κουκκίδων που αντιστοιχούν στον τελευταίο δεδομένο όρο (4^{ος}).

Τριάντα πέντε σειρές άρα τριάντα πέντε κουκκίδες, συν τις τέσσερις τελευταίες, άρα τριάντα εννιά. (Πέτρος, E5.3)

Στη δεύτερη περίπτωση, το παιδί προσθέτει την αριθμητική τιμή της ζητούμενης θέσης με την τιμή του τελευταίου όρου (10^{05}) που είχε σχεδιάσει σε προηγούμενο ερώτημα. Συγχέει τη θέση του όρου ($31^{\text{η}}$) με τον ίδιο τον ζητούμενο όρο, προσθέτοντας, μάλιστα σε αυτόν τον πιο αναπτυγμένο ορατό όρο της (τον πέμπτο).

Δεν μπορώ να σχεδιάσω τόσα πολλά. Νομίζω τριάντα ένα και εννιά που έμειναν, κάνουν σαράντα. (Βασιλική, E4.3)

Καμία απάντηση

Στο E4 και στο E5 υπάρχουν παιδιά που τελικά δεν καταλήγουν σε απάντηση ή που εξ αρχής επιλέγουν να μην εργαστούν για την αναζήτηση του μακρινού ζητούμενου όρου. Οι λεκτικές αναφορές τους δείχνουν την τάση για εγκατάλειψη της προσπάθειας σε αυτήν τη φάση της δοκιμασίας:

Δεν γίνεται να το βρω. Έκανα τα δέκα, αλλά μέχρι το τριάντα ένα είναι πολλά.. Δεν ξέρω. (Πόπη, E4.3)

Δεν μπορώ τριάντα ένα. Είναι πολλά. (Αννέτα, E4.3)

Ένα, δύο, τρία, τέσσερα, πέντε, έξι, επτά, οχτώ, εννιά, δέκα, έντεκα, δώδεκα, δεκατρία, δεκατέσσερα, δεκαπέντε, δεκαέξι. Τα παρατάω.

Μέχρι το 31 είναι πολλά. (Θοδωρής, E6.3)

Ο Πίνακας 8 παρουσιάζει την κατανομή των παιδιών στις κατηγορίες στρατηγικών που ενεργοποιήθηκαν κατά την αναζήτηση του μακρινού όρου στα έργα με αναπτυσσόμενα μοτίβα.

Έργο		Στρατηγικές				
E4.3 (2n-1)	Συναρτησιακές	Μεικτές	Γραμμικό μοντέλο	Λανθασμένος όρος	Άλλο Λάθος	Καμία απάντηση
	Θοδωρής		Κική Γιάννης Καίτη Νίκος Κώστας	Αντρέας Ελένη Πέτρος Θανάσης	Βασιλική	Ειρήνη Πόπη Αννέτα Μαρία
E5.3 (n)	Αντρέας Μαρία Κική Γιάννης Βασιλική Καίτη Θανάσης Αννέτα	Νίκος Ειρήνη	Ελένη Πόπη Κώστας		Πέτρος	
E6.3 (2n+2)						Θοδωρής

Πίνακας 8. Κατανομή των παιδιών στις κατηγορίες στρατηγικών προσέγγισης του μακρινού όρου (31^{05} όρος) στα αναπτυσσόμενα μοτίβα.

Όπως προκύπτει από τον Πίνακα 8, για την εύρεση του μακρινού όρου η επικρατούσα στρατηγική ήταν η συναρτησιακή (συνολικά 9 παρατηρήσεις, από διαφορετικά παιδιά), η οποία όμως εμφανίστηκε στο πιο απλό μοτίβο E5.3 (n), με μία μόνο εξαίρεση, τον Θοδωρή. Το παιδί αυτό απάντησε σωστά το E4.3(2n-1), αλλά εγκατέλειψε την προσπάθεια στο δεύτερο μοτίβο που του δόθηκε (E5.3, 2n+2).

Τα υπόλοιπα παιδιών στο αναπτυσσόμενο μοτίβα πιο περίπλοκης μορφής E4 (2n-1) κατέληξαν σε λανθασμένη ή και καμία τελική απάντηση, εφαρμόζοντας λανθασμένες στρατηγικές ή εγκαταλείποντας την προσπάθεια. Πέντε παιδιά ακολούθησαν το Γραμμικό Μοντέλο, 4 παιδιά κατέληξαν να υπολογίζουν Λανθασμένο όρο, ενώ η Βασιλική φάνηκε να συγχέει τις αριθμητικές τιμές των θέσεων με τις τιμές των όρων (βλ. παραπάνω).

Στο πιο απλό μοτίβο (E4.3, n), δύο παιδιά συνδύασαν αναδρομική και συναρτησιακή στρατηγική (Μεικτές) και έφτασαν σε σωστή απάντηση. Τρία ακόμα παιδιά ακολούθησαν το Γραμμικό Μοντέλο. Στην ειδική αυτή περίπτωση, η στρατηγική αυτή κατέληξε σε σωστές απαντήσεις.

Συνολικά, το ζητούμενο του μακρινού όρου ήταν, αναμενόμενα, το πιο απαιτητικό από τα τρία ζητούμενα για τα αναπτυσσόμενα μοτίβα και επέσυρε μεγαλύτερη ποικιλία στρατηγικών σε σχέση με τον επόμενο και τον κοντινό όρο. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μετατόπιση της πλειοψηφίας των λανθασμένων απαντήσεων σε πλειονότητα σωστών καθώς αλλάζει η δομή των μοτίβων στα οποία εργάζονται τα παιδιά, δηλαδή από 2n-1 σε n. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα παιδιά, σε ορισμένες περιπτώσεις, πέρα από τη στρατηγική επιλογή τους, εφάρμοσαν και εικονική αναπαράσταση ως μέσο επαλήθευσης, όπως προκύπτει από τις λεκτικές τους εξηγήσεις. Αξιοσημείωτο είναι, επίσης, ότι σχεδόν όλα τα παιδιά αντιμετώπισαν τα δεδομένα μοτίβα ως αριθμητικά. Εξαίρεση αποτέλεσε ο Θοδωρής που αξιοποίησε την εικονική αναπαράσταση των δύο μοτίβων που του δόθηκαν, αναγνώρισε ότι κάθε μοτίβο αναλύεται σε δύο συνιστώσες (E4: πάνω γραμμή- κάτω γραμμή και E6: δεξιά στήλη-αριστερή στήλη).

Θα πρέπει να σημειωθεί, ωστόσο, ότι στην περίπτωση του E5.2 (n), η αναπαράσταση του μοτίβου σε σειρές ενδεχομένως βοήθησε πολλά από τα παιδιά να συνδέσουν τον όρο με τη θέση του (σειρά).

3.3 Επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα μοτίβα: Προφίλ των παιδιών

Στον Πίνακα 9 διασταυρώνονται οι τιμές της συνολικής ατομικής επίδοσης στα επαναλαμβανόμενα (συνολικά, 6 ζητούμενα) και στα αναπτυσσόμενα μοτίβα (συνολικά, 6 ζητούμενα). Όπως έχει ήδη παρουσιαστεί στους πίνακες επίδοσης, η μέγιστη τιμή που παρατηρήθηκε και στις δύο περιπτώσεις ήταν 5. Τα παιδιά κατανέμονται σε κελιά, με βάση την επίδοσή τους στα δύο είδη μοτίβων. Έτσι, για παράδειγμα, η Βασιλική βρίσκεται στο κελί (5, 3), που σημαίνει ότι είχε συνολική επίδοση 5 στα αναπτυσσόμενα και 3 στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα.

5		Πέτρος*		Θανάσης, Μαρία	Θοδωρής**, Καίτη
4					Κική, Κώστας, Νίκος, Πόπη
3				Αννέτα	Βασιλική
2				Γιάννης	Αντρέας, Ειρήνη
1					Ελένη
Επίδοση στα Επαναλαμβανόμενα	1	2	3	4	5
	Επίδοση στα Αναπτυσσόμενα				

Σημείωση.

* Του δόθηκε το μοτίβο ABBABB

** Του δόθηκε το μοτίβο $2n+2$

Πίνακας 9. Κατανομή των παιδιών ανάλογα με τη συνολική τους επίδοση στα επαναλαμβανόμενα και τα αναπτυσσόμενα μοτίβα.

Από τα στοιχεία του Πίνακα 9 φαίνεται ότι ο Θοδωρής και η Καίτη είναι τα παιδιά με την υψηλότερη επίδοση (5) τόσο στα επαναλαμβανόμενα, όσο και στα αναπτυσσόμενα μοτίβα. Και τα δύο αυτά παιδιά απέτυχαν να βρουν τον μακρινό όρο στο μοτίβο της μορφής ABΓABΓ, αλλά πέτυχαν στο πιο απλό ABAB. Επιπλέον βρήκαν έναν μακρινό όρο στα αναπτυσσόμενα μοτίβα. Θα πρέπει να επισημανθεί, ωστόσο, ότι ο Θοδωρής αντιμετώπισε ως δεύτερο μοτίβο το $2n+2$, ενώ η Καίτη το μοτίβο n . Ο Θοδωρής εμφάνισε πιο εκλεπτυσμένες στρατηγικές γενικά, καθώς ήταν το μόνο παιδί που έκανε τη σύνδεση θέσης-όρου ήδη από το ζητούμενο του κοντινού όρου στο ABAB. Επιπλέον, ήταν το μόνο παιδί που ανέλυσε τα αναπτυσσόμενα μοτίβα που του δόθηκαν σε δύο συνιστώσες, αξιοποιώντας την εικονική αναπαράσταση των όρων. Από την άλλη μεριά, η Καίτη εφάρμοσε μια ποικιλία στρατηγικών στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα (π.χ. εναλλαγή, αναδρομική και μεταβατική στρατηγική). Επίσης, κινήθηκε με αναδρομικές στρατηγικές για την εύρεση του επόμενου

και του κοντινού όρου στα αναπτυσσόμενα και εφάρμοσε συναρτησιακή στρατηγική μόνο στην περίπτωση του μακρινού όρου για το μοτίβο τύπου n .

Από τον Πίνακα 9 προκύπτει επίσης ότι 10 από τα 15 παιδιά έχουν υψηλότερη συνολική επίδοση στα αναπτυσσόμενα, σε σχέση με τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, στα οποία αντιμετώπισαν το μοτίβο τύπου n . Οκτώ από αυτά τα παιδιά έχουν τη μέγιστη επίδοση (5) στα αναπτυσσόμενα μοτίβα. Αξιοσημείωτο είναι ότι σε αυτή την ομάδα των παιδιών, το εύρος της επίδοσης στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα κυμαίνεται από 1 (Ελένη) έως 4 (Κική, Κώστας, Νίκος, Πόπη).

Η Ελένη απάντησε σωστά μόνο στην περίπτωση του επόμενου όρου του ΑΒΓΑΒΓ, καθώς ήταν από τα παιδιά που παρερμήνευσαν το δεδομένο μέρος του μοτίβου ΑΒΑΒ ως τη μονάδα επανάληψης, πιθανόν γιατί δεν τελείωνε σε ολοκληρωμένη μονάδα. Επιπλέον, έκανε ένα από τα πιο στοιχειώδη λάθη, ταυτίζοντας τον τελευταίο δεδομένο όρο με τον οποιοδήποτε ζητούμενο όρο ενός επαναλαμβανόμενου μοτίβου. Στα αναπτυσσόμενα μοτίβα, χρησιμοποίησε αναδρομικές στρατηγικές αλλά και το γραμμικό μοντέλο για τον μακρινό όρο του μοτίβου n (αποκτώντας μια μονάδα για μια απάντηση που μάλλον βασίστηκε σε λανθασμένο σκεπτικό).

Ο Αντρέας και η Ειρήνη είχαν από δύο μόνο σωστές απαντήσεις στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα. Η Ειρήνη βρήκε μόνο τον επόμενο όρο στα δύο μοτίβα που αντιμετώπισε, ενώ ο Αντρέας βρήκε τον επόμενο και τον κοντινό όρο μόνο στο ΑΒΓΑΒΓ, καθώς παρερμήνευσε το δεδομένο μέρος του ΑΒΑΒ με τον ίδιο τρόπο όπως η Ελένη παραπάνω. Η Ειρήνη, παρόμοια με την Ελένη, έκανε το πιο στοιχειώδες λάθος, ταυτίζοντας τον τελευταίο δεδομένο όρο του μοτίβου με τον ζητούμενο όρο. Στα αναπτυσσόμενα μοτίβα, και τα δύο παιδιά χρησιμοποίησαν αναδρομικές στρατηγικές (με σχεδίαση) για τον κοντινό όρο. Ο Αντρέας χρησιμοποίησε συναρτησιακή στρατηγική για τον μακρινό όρο στο πιο απλό μοτίβο (n), ενώ η Ειρήνη μεικτή στρατηγική.

Η Βασιλική είχε 3 σωστές απαντήσεις στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, καμία εκ των οποίων δεν αφορούσε τον μακρινό όρο. Δεν βρήκε τον κοντινό όρο στο ΑΒΓΑΒΓ, καθώς εφάρμοσε μια λανθασμένη στρατηγική εικάζοντας ότι ο ζητούμενος 20^{ος} όρος θα είναι ίδιος με τον 10^ο εφαρμόζοντας παρόμοιο σκεπτικό και για τον μακρινό όρο, και για τα δύο μοτίβα. Στα αναπτυσσόμενα μοτίβα, η Βασιλική φάνηκε να βασίζεται στην αναγνώριση της ακολουθίας των φυσικών ή των περιττών αριθμών (π.χ. βασίστηκε στον κανόνα «ένα παρά ένα» για το μοτίβο του τύπου $2n-1$) και εφάρμοσε συναρτησιακή στρατηγική μόνο για το απλό μοτίβο τύπου n .

Η Κική, ο Κώστας, ο Νίκος και η Πόπη είχαν επίδοση 4 στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, δίνοντας λανθασμένες απαντήσεις για τον μακρινό όρο και στα δύο μοτίβα που αντιμετώπισαν. Και τα 4 παιδιά ακολούθησαν στοιχειώδεις (αντιληπτικές) στρατηγικές όπως η ρυθμική απαγγελία και η εναλλαγή για τον επόμενο όρο και αναδρομικές στρατηγικές για τον κοντινό όρο, και στα δύο μοτίβα. Στα αναπτυσσόμενα μοτίβα, τα δυο αγόρια φαίνεται να βασίζονται στην αναγνώριση των ακολουθιών των περιττών και των φυσικών αριθμών για να προσδιορίσουν τον κοντινό όρο και στα δύο μοτίβα που τους δόθηκαν. Αντίθετα, τα δύο κορίτσια εφαρμόζουν συναρτησιακή στρατηγική, στην περίπτωση του μοτίβου τύπου n . Για τον μακρινό όρο, στην περίπτωση του μοτίβου $2n-1$ η Πόπη δεν κατάφερε να απαντήσει, ενώ τα άλλα τρία παιδιά ακολούθησαν το γραμμικό μοντέλο, καταλήγοντας σε λανθασμένη απάντηση. Στο πιο απλό μοτίβο τύπου n , η Πόπη και ο Κώστας διατήρησαν το γραμμικό μοντέλο, οπότε τους πιστώθηκε μια σωστή απάντηση που πιθανότατα δόθηκε με λανθασμένο σκεπτικό. Ο Νίκος εφάρμοσε μια μεικτή στρατηγική, καταλήγοντας σε σωστή απάντηση, ενώ η Κική ήταν η μόνη που εφάρμοσε συναρτησιακή στρατηγική.

Δύο ακόμα παιδιά, ο Γιάννης και η Αννέτα, είχαν υψηλότερη επίδοση (4) στα αναπτυσσόμενα, σε σχέση με τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα (2 και 3, αντίστοιχα). Ο Γιάννης βρήκε μόνο τον επόμενο όρο στα δύο επαναλαμβανόμενα μοτίβα με ρυθμική απαγγελία. Επιπλέον, έκανε το στοιχειώδες λάθος της ταύτισης του τελευταίου δεδομένου όρου με τον ζητούμενο όρο για τον προσδιορισμό τόσο του κοντινού, όσο και του μακρινού όρου, και για τα δύο μοτίβα.

Η Αννέτα προσδιόρισε σωστά τον επόμενο και τον κοντινό όρο στο ABΓABΓ, αλλά μόνο τον επόμενο του ABAB. Ενώ εφάρμοσε μια μεταβατική στρατηγική για τον κοντινό όρο του ABΓABΓ, προσομοιώνοντας την επανάληψη της μονάδας ABΓ με πράξεις, στο μοτίβο ABAB επανέλαβε ένα ακατάλληλο μέρος του μοτίβου με πράξεις – το ίδιο έκανε και για τον μακρινό όρο. Για την εύρεση του μακρινού όρου στο ABΓABΓ ξεκίνησε να εφαρμόζει μια παρόμοια (σωστή) στρατηγική, αλλά εγκατέλειψε την προσπάθεια και απάντησε κάνοντας το στοιχειώδες λάθος της ταύτισης του τελευταίου δεδομένου όρου με τον ζητούμενο όρο. Από την άλλη μεριά, 3 παιδιά (Θανάσης, Μαρία, Πέτρος) είχαν υψηλότερη επίδοση (5) στα επαναλαμβανόμενα, σε σχέση με τα αναπτυσσόμενα μοτίβα.

Ο Θανάσης και η Μαρία είχαν επίδοση 4 στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, καθώς δεν κατάφεραν να προσδιορίσουν τον μακρινό όρο στο ABΓABΓ. Και τα δύο αυτά παιδιά βασίστηκαν σε απλές στρατηγικές (ρυθμική απαγγελία, εναλλαγή) για να προσδιορίσουν τον επόμενο όρο και στα δύο μοτίβα. Η Μαρία εφάρμοσε αναδρομικές στρατηγικές για την

εύρεση του κοντινού όρου, ενώ ο Θανάσης μεταβατικές, και στα δύο μοτίβα. Η Μαρία πέρασε σε μεταβατική στρατηγική για την εύρεση του μακρινού όρου στο ABAB, ενώ ο Θανάσης εφάρμοσε συναρτησιακή στρατηγική. Στο ABΓABΓ, ο Θανάσης έκανε το στοιχειώδες λάθος να ταυτίσει τον τελευταίο δεδομένο όρο με τον ζητούμενο όρο του μοτίβου, και η Μαρία κατέληξε στο ίδιο λάθος, αφού πρώτα προσπάθησε να εφαρμόσει μια αναδρομική στρατηγική. Στα αναπτυσσόμενα μοτίβα, και τα δύο παιδιά βρήκαν μόνο τον επόμενο για το μοτίβο του τύπου $2n-1$, ενώ βρήκαν άλλον όρο αντί του ζητούμενου μακρινού, καθώς προσπάθησαν ανεπιτυχώς να προσδιορίσουν πόσα «δυάρια» προστέθηκαν και σε ποιον αρχικό όρο για να φτάσουν στη ζητούμενη θέση. Το ίδιο λάθος έκανε ο Θανάσης και για τον μακρινό όρο, ενώ η Μαρία δεν απάντησε. Ο Θανάσης εφάρμοσε συναρτησιακή στρατηγική σε όλα τα ζητούμενα για το πιο απλό μοτίβο (n), ενώ η Μαρία μόνο για τον μακρινό όρο.

Τέλος, ο Πέτρος αποτελεί μια ενδιαφέρουσα περίπτωση. Το παιδί αυτό είχε επίδοση 5 στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα και, μάλιστα, ήταν το μόνο παιδί το οποίο ολοκλήρωσε όλα τα ζητούμενα για το ABΓABΓ και του επιδόθηκε το δεύτερο μοτίβο με τρία στοιχεία στη μονάδα, τα δύο επαναλαμβανόμενα (ABBABB). Ωστόσο, ο Πέτρος είχε τη χαμηλότερη επίδοση (2) από όλα τα παιδιά στα αναπτυσσόμενα μοτίβα, καθώς απάντησε σωστά μόνο για τον κοντινό όρο στα δύο μοτίβα. Ο Πέτρος προσδιόρισε τον επόμενο στα δύο μοτίβα εντοπίζοντας την εναλλαγή των όρων, δίνοντας ενδείξεις αναγνώρισης της μονάδας επανάληψης (π.χ., προσδιορισμός του πρώτου στοιχείου της μονάδας). Για την εύρεση του κοντινού όρου εφάρμοσε μια μεταβατική στρατηγική και στα δύο μοτίβα, προσομοιώνοντας την επανάληψη ενός μέρους του μοτίβου (δύο πλήρεις μονάδες) με πράξεις, μέχρι να φτάσει στον ζητούμενο όρο. Την ίδια ακριβώς στρατηγική εφάρμοσε με επιτυχία και για τον μακρινό όρο του ABΓABΓ. Ξεκίνησε να την εφαρμόζει και για το ABBABB, αλλά στο τελευταίο βήμα κι ενώ είχε προσδιορίσει σωστά τον αμέσως προηγούμενο του ζητούμενου όρου, έκανε λάθος δηλώνοντας τον προηγούμενο όρο ως απάντηση. Στα αναπτυσσόμενα μοτίβα, εφάρμοσε έναν αναδρομικό κανόνα για να βρει τον επόμενο όρο, τόσο στο μοτίβο $2n-1$, όσο και στο $2n$. Για την εύρεση του κοντινού όρου, βρήκε τη διαφορά των διαδοχικών όρων και αποπειράθηκε να προσδιορίσει πόσες φορές και σε ποιον όρο πρέπει να την προσθέσει για να βρει τον ζητούμενο όρο, βασιζόμενος σε πράξεις. Ωστόσο, δεν προσδιόρισε σωστά το ένα, ούτε το άλλο, καταλήγοντας σε λανθασμένη απάντηση και στα δύο μοτίβα. Με τον ίδιο τρόπο αντιμετώπισε το ζητούμενο του μακρινού όρου για το $2n-1$, ενώ στην περίπτωση του n , εφάρμοσε αρχικά συναρτησιακή στρατηγική συνδέοντας τη θέση (σειρά) με το πλήθος των κουκκίδων, αλλά στο τέλος πρόσθεσε την τιμή ενός όρου

επιπλέον. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Πέτρος δεν αποπειράθηκε να σχεδιάσει τους όρους, ενδεχομένως γιατί αισθανόταν ασφαλής προσεγγίζοντας τα ζητούμενα με «αλγεβρικό» τρόπο.

Από τα παραπάνω διαπιστώνεται ότι εν γένει οι επιδόσεις των παιδιών ήταν υψηλότερες στα αναπτυσσόμενα, σε σχέση με τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα. Αυτό οφείλεται κατά κύριο λόγο στο γεγονός ότι το μοτίβο της μορφής η επέσυρε πολλές σωστές απαντήσεις για όλα τα ζητούμενα. Φαίνεται ότι το συγκεκριμένο αναπτυσσόμενο μοτίβο ήταν προσιτό στα παιδιά, ενδεχομένως για δύο λόγους: Αφενός γιατί το γεγονός ότι οι τιμές των θέσεων και των αντίστοιχων όρων ταυτίζονται ευνοεί τη σύνδεση μεταξύ της θέσης και του όρου, που φαίνεται και από την αυξημένη χρήση συναρτησιακών στρατηγικών από τα παιδιά. Αφετέρου, γιατί η αναπαράσταση του μοτίβου σε γραμμές είναι πιθανόν να ευνόησε την αναγνώριση της θέσης (ως «σειρά», όπως αναφέρθηκε κατά κύριο λόγο από τα παιδιά).

Επιπλέον, φαίνεται ότι υπάρχουν διαφορές ως προς την επίδοση μεταξύ των παιδιών, οι οποίες είναι πιο έντονες στην περίπτωση των επαναλαμβανόμενων μοτίβων.

Πέρα από τις διαφορές ως προς την επίδοση, υπάρχουν διαφορές ως προς τις στρατηγικές προσέγγισης μεταξύ των παιδιών. Αυτό γίνεται πιο φανερό εξετάζοντας τις στρατηγικές παιδιών με παρόμοια επίδοση (όπως η Κική, ο Κώστας, ο Νίκος και η Πόπη παραπάνω).

Φαίνεται, επίσης, ότι κάποια παιδιά χρησιμοποιούν μια ποικιλία στρατηγικών (όπως η Μαρία και ο Θανάσης), ενώ άλλα, όπως ο Πέτρος, εφαρμόζουν πιο συστηματικά λιγότερες στρατηγικές.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι ακόμα και παιδιά με εξελιγμένες στρατηγικές, όπως ο Θοδωρής, δυσκολεύονται να τις εφαρμόσουν αποτελεσματικά στην περίπτωση του μακρινού όρου.

4. Συζήτηση- Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία διερευνήθηκαν οι τρόποι με τους οποίους παιδιά Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης προσεγγίζουν δραστηριότητες που εμπεριέχουν επαναλαμβανόμενα και αναπτυσσόμενα μοτίβα, καθώς και οι στρατηγικές που ενεργοποιούν κατά την επίλυσή τους. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στη μελέτη των στρατηγικών που χρησιμοποιούνται για την εύρεση επόμενων, κοντινών και μακρινών όρων, καθώς και στον ρόλο που διαδραματίζει ο τύπος του μοτίβου στα έργα διερεύνησης.

Συνολικά, τα ευρήματα της έρευνας μαρτυρούν την ικανοποιητική ανταπόκριση των παιδιών σε δραστηριότητες που απαιτούν τον προσδιορισμό επόμενων και κοντινών όρων, ενώ εμφανίζουν σημαντικά μεγαλύτερες δυσκολίες όταν καλούνται να προσδιορίσουν μακρινούς όρους. Η διαφοροποίηση αυτή αναδεικνύει τη διάκριση μεταξύ κοντινών επεκτάσεων και μακρινών γενικεύσεων, όπως επισημαίνεται και στη διεθνή βιβλιογραφία (Warren & Cooper, 2008· Blanton et al., 2019), και υποδηλώνει ότι τα παιδιά σταδιακά μεταβαίνουν από αναδρομικές σε συναρτησιακές προσεγγίσεις.

Παράλληλα, η επίδοση των παιδιών διαφοροποιήθηκε ανάλογα με τη δομή του μοτίβου, γεγονός που δείχνει ότι η κατανόηση επηρεάζεται σε σημαντικό βαθμό από τη μορφή παρουσίας και τον τύπο του. Το εύρημα αυτό αναδεικνύει τον κρίσιμο ρόλο της δομής του έργου στην ενεργοποίηση διαφορετικών στρατηγικών (Vale & Pimentel, 2009).

4.1 Επαναλαμβανόμενα μοτίβα

Αναφορικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, που αφορά τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, διαπιστώθηκε ότι τα παιδιά βασίζονται κυρίως σε αντιληπτικές και αναδρομικές στρατηγικές, ενώ η εμφάνιση συναρτησιακών στρατηγικών είναι περιορισμένη και εντοπίζεται μόνο σε μεμονωμένες περιπτώσεις.

Κατά τον προσδιορισμό του επόμενου όρου, η πλειονότητα των παιδιών ανταποκρίθηκε με επιτυχία. Οι σωστές απαντήσεις συνοδεύτηκαν από αντιληπτικές στρατηγικές, όπως η ρυθμική απαγγελία και η εναλλαγή στοιχείων, έως πιο σύνθετες μορφές προσέγγισης. Ωστόσο, οι στρατηγικές αυτές στηρίζονται κυρίως σε επιφανειακά χαρακτηριστικά του μοτίβου και δεν συνεπάγονται απαραίτητα δομική κατανόηση (Papic & Mulligan, 2007). Σε αρκετές περιπτώσεις, τα παιδιά φαίνεται να αντιλαμβάνονται την εναλλαγή των στοιχείων χωρίς να τεκμαίρεται σαφής επίγνωση της μονάδας επανάληψης, αν και εντοπίζονται

ορισμένες ενδείξεις πρώιμης δομικής κατανόησης μέσα από λεκτικές αναφορές στην επανάληψη.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι, ακόμη και σε απλό μοτίβο όπως είναι το ABAB, καταγράφηκαν αποτυχίες. Η δυσκολία αυτή φαίνεται να σχετίζεται με τον τρόπο παρουσίασης του μοτίβου, καθώς όταν το δοθέν τμήμα δεν ολοκληρώνεται σε πλήρη μονάδα επανάληψης, ορισμένα παιδιά το αντιμετωπίζουν ως ενιαία μονάδα προς επανάληψη. Το εύρημα αυτό αναδεικνύει ότι η επιτυχία στον επόμενο όρο δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη κατανόηση της δομής και ότι η μορφή παρουσίασης επηρεάζει ουσιαστικά τη μαθητική σκέψη.

Κατά τον προσδιορισμό κοντινών όρων, τα παιδιά βασίστηκαν κυρίως σε αναδρομικές στρατηγικές, εφαρμόζοντας αντιστοίχιση θέσης-όρου μέσω απαρίθμησης, είτε βήμα προς βήμα είτε με βάση το πλήθος των στοιχείων της μονάδας επανάληψης. Οι στρατηγικές αυτές αποδείχθηκαν αποτελεσματικές για κοντινές επεκτάσεις, ωστόσο έχουν περιορισμούς, καθώς σε μεγαλύτερες θέσεις απαιτούν περισσότερο χρόνο και αυξάνουν την πιθανότητα σφάλματος. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με τους Warren και Cooper (2008), οι οποίοι επισημαίνουν ότι οι αναδρομικές στρατηγικές δεν οδηγούν κατ' ανάγκη σε γενίκευση.

Παράλληλα, εμφανίστηκαν μεταβατικές ή δομικές στρατηγικές, στις οποίες τα παιδιά επιχειρούν να προσεγγίσουν τον ζητούμενο όρο μέσω αριθμητικών πράξεων, αξιοποιώντας τμήματα της ακολουθίας. Οι στρατηγικές αυτές έχουν ιδιαίτερη σημασία, καθώς υποδηλώνουν μετακίνηση προς πιο συμπυκνωμένες μορφές επεξεργασίας. Ωστόσο, δεν εφαρμόζονται με σταθερότητα: όταν βασίζονται σε πλήρεις μονάδες επανάληψης οδηγούν σε σωστές απαντήσεις, ενώ σε αντίθετη περίπτωση καταλήγουν σε σφάλματα. Η αστάθεια αυτή αναδεικνύει τον μεταβατικό χαρακτήρα της στρατηγικής.

Αντίθετα, ο προσδιορισμός μακρινού όρου αποτέλεσε το πιο απαιτητικό ζητούμενο. Η πλειονότητα των παιδιών δεν κατάφερε να οδηγηθεί σε σωστή απάντηση, γεγονός που υποδηλώνει ότι η μετάβαση από διαδοχικές διαδικασίες σε γενικευμένες μορφές σκέψης δεν έχει ακόμη εδραιωθεί. Οι λανθασμένες προσεγγίσεις συνδέθηκαν είτε με εστίαση σε επιφανειακά χαρακτηριστικά, όπως το τελευταίο στοιχείο του μοτίβου, είτε με χρήση αριθμητικών πράξεων χωρίς σωστή αξιοποίηση της μονάδας επανάληψης. Οι περιπτώσεις αυτές δείχνουν ότι κάποια παιδιά αντιμετωπίζουν το μοτίβο ως ακολουθία μεμονωμένων στοιχείων και όχι ως δομημένο σύστημα σχέσεων.

Συνολικά, τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα φαίνεται να προσεγγίζονται κυρίως με αντιληπτικές, αναδρομικές και μεταβατικές στρατηγικές, ενώ η συναρτησιακές στρατηγικές είναι περιορισμένες. Τα παιδιά μπορούν να διαχειριστούν αποτελεσματικά άμεσες και

κοντινές επεκτάσεις, αλλά δυσκολεύονται σημαντικά όταν το ζητούμενο απαιτεί σταθερή σύνδεση θέσης-όρου, εύρημα που συνάδει με τη σχετική βιβλιογραφία (Blanton et al., 2019).

4.2 Αναπτυσσόμενα μοτίβα

Σε ό,τι αφορά το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, σχετικά με τα αναπτυσσόμενα μοτίβα, διαπιστώθηκε μεγαλύτερη ποικιλία στρατηγικών σε σύγκριση με τα επαναλαμβανόμενα. Παρότι οι αναδρομικές στρατηγικές εξακολουθούν να κυριαρχούν, καταγράφονται συχνότερα συναρτησιακές και μεικτές προσεγγίσεις, ιδιαίτερα σε έργα όπου η σχέση μεταξύ θέσης και όρου είναι άμεσα αντιληπτή.

Κατά τον προσδιορισμό του επόμενου όρου, τα παιδιά ανταποκρίθηκαν σε μεγάλο βαθμό με επιτυχία, αξιοποιώντας κυρίως αναδρομικούς κανόνες μεταβολής. Οι κανόνες αυτοί άλλοτε διατυπώνονταν ρητά και άλλοτε εφαρμόζονταν χωρίς σαφή λεκτική τεκμηρίωση. Σε ορισμένες περιπτώσεις, η αναδρομική σκέψη συνδυάστηκε με στοιχεία αντιστοίχισης θέσης-όρου, ιδιαίτερα στο μοτίβο μορφής n, γεγονός που δείχνει ότι ορισμένες δομές ευνοούν τη μετάβαση προς γενικευμένη κατανόηση.

Ανάλογη εικόνα παρατηρήθηκε και στον προσδιορισμό του κοντινού όρου, όπου τα παιδιά εργάστηκαν κυρίως αναδρομικά. Σημαντικό εύρημα αποτελεί η συστηματική χρήση αναπαραστάσεων, κυρίως σχεδίασης, η οποία φαίνεται να λειτουργήσει υποστηρικτικά στην οργάνωση και επαλήθευση της σκέψης. Ωστόσο, παρά τη συμβολή των αναπαραστάσεων, η προσέγγιση παρέμεινε κατά κύριο λόγο αναδρομική και δεν οδήγησε απαραίτητα σε γενίκευση, εύρημα που συμφωνεί με τη σχετική βιβλιογραφία (Warren & Cooper, 2008· Blanton et al., 2019).

Η διαφοροποίηση στα αναπτυσσόμενα μοτίβα εντοπίζεται κυρίως στην εμφάνιση συναρτησιακών στρατηγικών. Οι στρατηγικές αυτές καταγράφηκαν κυρίως στο μοτίβο μορφής n, όπου η σχέση θέσης-τιμής είναι άμεσα προσβάσιμη. Στις περιπτώσεις αυτές, τα παιδιά συνέδεσαν τη θέση του όρου με το πλήθος των στοιχείων του και διατύπωσαν, ρητά ή έμμεσα, γενικευμένους κανόνες. Το εύρημα αυτό αναδεικνύει τον καθοριστικό ρόλο της δομικής διαφάνειας του μοτίβου και συνάδει με το μοντέλο των Stephens et al. (2017), σύμφωνα με το οποίο η ανάπτυξη συναρτησιακής σκέψης διευκολύνεται όταν οι σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών είναι εμφανείς.

Παράλληλα, καταγράφηκαν μεικτές στρατηγικές, στις οποίες τα παιδιά ξεκινούν με αναδρομική προσέγγιση και στη συνέχεια μετατοπίζονται προς μια πιο γενική στρατηγική.

Οι στρατηγικές αυτές αποτελούν ένδειξη μεταβατικού σταδίου, όπου η συναρτησιακή κατανόηση δεν εμφανίζεται άμεσα, αλλά αναδύεται σταδιακά μέσα από τη διαδικασία επίλυσης.

Όπως και στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, η μεγαλύτερη δυσκολία εντοπίστηκε στον προσδιορισμό του μακρινού όρου. Ιδιαίτερα στα μοτίβα μορφής $2n-1$ και $2n+2$, όπου η σχέση θέσης-όρου είναι λιγότερο εμφανής, αρκετά παιδιά είτε κατέφυγαν σε αναδρομικές διαδικασίες που δεν μπορούσαν να ολοκληρώσουν είτε εφάρμοσαν ακατάλληλες στρατηγικές. Σε ορισμένες περιπτώσεις εμφανίστηκε το φαινόμενο της εφαρμογής ενός γραμμικού μοντέλου συμμεταβολής των αριθμητικών τιμών των θέσεων και των όρων, που βασίστηκε στην υπόθεση ότι αν μια στη θέση x αντιστοιχεί η τιμή y , τότε στη θέση kx αντιστοιχεί η τιμή ky , ενδεχομένως με την πρόσθεση κάποιας άλλης τιμής. Η αποτελεσματικότητα των στρατηγικών αυτών αποδείχθηκε εξαρτώμενη από τη δομή του μοτίβου, καθώς οδήγησαν σε σωστές απαντήσεις μόνο στη συγκεκριμένη περίπτωση του μοτίβου της μορφής n .

Αντίθετα, στο μοτίβο μορφής n , η άμεση σχέση θέσης-τιμής ευνόησε την εμφάνιση συναρτησιακών στρατηγικών και οδήγησε σε υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας, τόσο στον κοντινό όσο και στον μακρινό όρο. Το εύρημα αυτό υπογραμμίζει ότι η κατανόηση δεν εξαρτάται αποκλειστικά από τις γνωστικές δυνατότητες των παιδιών, αλλά και από τα χαρακτηριστικά του ίδιου του έργου (Mulligan & Mitchelmore, 2009).

Συνολικά, τα αναπτυσσόμενα μοτίβα ανέδειξαν ένα ευρύτερο φάσμα στρατηγικών και σαφέστερες ενδείξεις μετάβασης προς συναρτησιακή σκέψη. Ωστόσο, η μετάβαση αυτή δεν εμφανίζεται ομοιόμορφα, αλλά επηρεάζεται έντονα από τον τύπο και τη δομή του μοτίβου. Η ανάπτυξη γενικευμένων μορφών σκέψης φαίνεται να προϋποθέτει τη συνειδητή σύνδεση μεταξύ θέσης και όρου, όπως επισημαίνεται και στη σχετική βιβλιογραφία (Stephens et al., 2017).

4.3 Ο ρόλος του τύπου μοτίβου

Αναφορικά με το τρίτο ερευνητικό ερώτημα, τα δεδομένα της έρευνας ανέδειξαν ότι ο τύπος του μοτίβου επηρεάζει ουσιαστικά τόσο την επιτυχία των παιδιών όσο και το είδος των στρατηγικών που ενεργοποιούν. Η επίδραση αυτή διαπιστώθηκε τόσο στη σύγκριση μεταξύ επαναλαμβανόμενων και αναπτυσσόμενων μοτίβων όσο και στη σύγκριση μεταξύ διαφορετικών μορφών μοτίβων εντός της ίδιας κατηγορίας.

Στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, καθοριστικό ρόλο διαδραμάτισε η σαφήνεια της μονάδας επανάληψης. Όταν το δοθέν τμήμα του μοτίβου επέτρεπε τον εύκολο εντοπισμό της μονάδας, τα παιδιά ανταποκρίνονταν αποτελεσματικά. Αντίθετα, όταν η μονάδα δεν ήταν πλήρως εμφανής ή ολοκληρωμένη, εμφανίστηκαν παρερμηνείες, ακόμη και σε δομικά απλά μοτίβα. Το εύρημα αυτό δείχνει ότι η δυσκολία δεν εξαρτάται αποκλειστικά από την πολυπλοκότητα της μονάδας, αλλά και από τον τρόπο παρουσιάσής της.

Στα αναπτυσσόμενα μοτίβα, η επίδραση της δομής αποδείχθηκε ακόμη εντονότερη. Το μοτίβο μορφής n , στο οποίο η σχέση θέσης-όρου είναι άμεσα αντιληπτή, ευνόησε την εμφάνιση συναρτησιακών στρατηγικών και οδήγησε σε υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας, ιδιαίτερα στον κοντινό και στον μακρινό όρο. Αντίθετα, στα μοτίβα μορφής $2n-1$ και $2n+2$, όπου η σχέση αυτή είναι λιγότερο εμφανής, τα παιδιά βασίστηκαν κυρίως σε αναδρομικές ή ατελείς προσεγγίσεις, με αυξημένα ποσοστά σφαλμάτων. Το εύρημα αυτό επιβεβαιώνει τη σημασία της δομικής διαφάνειας του έργου για την ενεργοποίηση γενικευμένων μορφών σκέψης (Mulligan & Mitchelmore, 2009).

Παράλληλα, διαπιστώθηκε ότι τα παιδιά συχνά μεταφέρουν στρατηγικές από ένα μοτίβο σε άλλο. Η μεταφορά αυτή δεν είναι πάντοτε λειτουργική, καθώς στρατηγικές που αποδείχθηκαν αποτελεσματικές σε ένα πλαίσιο εφαρμόζονται αυτούσιες και σε διαφορετικά μοτίβα, χωρίς να είναι συμβατές με τη νέα δομή. Το εύρημα αυτό δείχνει ότι η επιλογή στρατηγικής δεν εξαρτάται μόνο από το επίπεδο κατανόησης των παιδιών, αλλά και από τα χαρακτηριστικά του εκάστοτε έργου. Παράλληλα, αναδεικνύεται ότι οι στρατηγικές δεν εξελίσσονται γραμμικά, αλλά συνυπάρχουν και μετασχηματίζονται ανάλογα με τις απαιτήσεις του προβλήματος (Wilkie & Clarke, 2016).

Συνολικά, ο τύπος του μοτίβου δεν λειτουργεί ως ουδέτερο πλαίσιο, αλλά ως καθοριστικός παράγοντας που διαμορφώνει τη μαθητική σκέψη. Η σαφήνεια της δομής, η μορφή παρουσίασης και η ορατότητα της σχέσης θέσης-όρου επηρεάζουν ουσιαστικά τόσο την επιτυχία όσο και τη φύση των στρατηγικών που ενεργοποιούνται. Τα ευρήματα αυτά υπογραμμίζουν τη σημασία της επιλογής κατάλληλων έργων, καθώς διαφορετικοί τύποι μοτίβων μπορούν να υποστηρίξουν ή να περιορίσουν τη μετάβαση από αναδρομικές σε συναρτησιακές μορφές σκέψης.

4.4. Προφίλ των παιδιών

Από τη συνδυαστική εξέταση της επίδοσης των παιδιών στα επαναλαμβανόμενα και τα αναπτυσσόμενα μοτίβα αναδεικνύονται διακριτά προφίλ ως προς τον τρόπο προσέγγισης και το επίπεδο κατανόησης των μοτίβων.

Αρχικά, εντοπίζονται παιδιά με υψηλή επίδοση και στους δύο τύπους μοτίβων (Θοδωρής, Καίτη), οι οποίοι φαίνεται να διαθέτουν πιο ανεπτυγμένες μορφές σκέψης. Παρά τη συνολικά υψηλή τους επίδοση, και οι δύο παιδιά αντιμετώπισαν δυσκολίες στον προσδιορισμό του μακρινού όρου σε πιο σύνθετα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, γεγονός που επιβεβαιώνει ότι η γενίκευση σε μεγαλύτερες θέσεις αποτελεί απαιτητική διαδικασία ακόμη και για παιδιά με υψηλές επιδόσεις. Ωστόσο, διαφοροποιούνται ως προς τις στρατηγικές που εφαρμόζουν: ο Θοδωρής φαίνεται να αξιοποιεί πιο εκλεπτυσμένες και συναρτησιακές προσεγγίσεις, συνδέοντας τη θέση με τον όρο και αναλύοντας τα μοτίβα σε επιμέρους συνιστώσες, ενώ η Καίτη εμφανίζει μεγαλύτερη ποικιλία στρατηγικών, ταλαντεύοντας μεταξύ αναδρομικών και συναρτησιακών προσεγγίσεων.

Παράλληλα, η πλειονότητα των παιδιών εμφανίζει υψηλότερη επίδοση στα αναπτυσσόμενα μοτίβα σε σύγκριση με τα επαναλαμβανόμενα. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν παιδιά με διαφορετικά επίπεδα επίδοσης στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, γεγονός που δείχνει ότι η επιτυχία στα αναπτυσσόμενα δεν συνεπάγεται αντίστοιχη κατανόηση των επαναλαμβανόμενων. Η διαφοροποίηση αυτή φαίνεται να συνδέεται με τη δομή των μοτίβων, καθώς το μοτίβο μορφής η ευνόησε τη σύνδεση θέσης-όρου και την εμφάνιση συναρτησιακών στρατηγικών.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν παιδιά με χαμηλή επίδοση στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα αλλά υψηλή στα αναπτυσσόμενα (π.χ. Ελένη, Αντρέας, Ειρήνη). Στις περιπτώσεις αυτές, παρατηρούνται χαρακτηριστικά σφάλματα, όπως η ταύτιση του τελευταίου δεδομένου όρου με τον ζητούμενο ή η παρερμηνεία της μονάδας επανάληψης, που υποδηλώνουν εστίαση σε επιφανειακά χαρακτηριστικά του μοτίβου. Αντίθετα, στα αναπτυσσόμενα μοτίβα τα ίδια παιδιά, φαίνεται να αξιοποιούν πιο αποτελεσματικά αναδρομικές ή και συναρτησιακές στρατηγικές.

Μια ακόμη κατηγορία αφορά παιδιά με παρόμοια επίδοση αλλά διαφορετικές στρατηγικές (όπως η Κική, ο Κώστας, ο Νίκος και η Πόπη). Το εύρημα αυτό αναδεικνύει ότι η επίδοση δεν αποτυπώνει πλήρως τον τρόπο σκέψης των παιδιών, καθώς διαφορετικές στρατηγικές μπορούν να οδηγήσουν στο ίδιο αποτέλεσμα. Επιπλέον, παρατηρείται ότι ορισμένα παιδιά

χρησιμοποιούν ποικιλία στρατηγικών, ενώ άλλοι βασίζονται πιο συστηματικά σε συγκεκριμένες προσεγγίσεις.

Τέλος, αναδεικνύονται περιπτώσεις παιδιών με αντίστροφο προφίλ, δηλαδή υψηλή επίδοση στα επαναλαμβανόμενα και χαμηλή στα αναπτυσσόμενα μοτίβα (π.χ. Πέτρος). Τα παιδιά αυτά φαίνεται να έχουν αναπτύξει αποτελεσματικές στρατηγικές για την αναγνώριση και επέκταση επαναλαμβανόμενων δομών, χωρίς όμως να έχουν εδραιώσει τη σύνδεση θέσης-όρου που απαιτείται για τα αναπτυσσόμενα μοτίβα.

Συνολικά, τα προφίλ των παιδιών δείχνουν ότι η κατανόηση των μοτίβων δεν εξελίσσεται γραμμικά, αλλά διαφοροποιείται ανάλογα με τον τύπο του μοτίβου και τις στρατηγικές που ενεργοποιούνται. Η επίδοση επηρεάζεται τόσο από τις γνωστικές δυνατότητες των παιδιών όσο και από τα χαρακτηριστικά του ίδιου του έργου, γεγονός που υπογραμμίζει τη σημασία της ποικιλίας των δραστηριοτήτων στη μαθησιακή διαδικασία.

4.4 Περιορισμοί και προτάσεις

Το μικρό μέγεθος του δείγματος περιορίζει τη δυνατότητα γενίκευσης των ευρημάτων. Επιπλέον, η χρήση συγκεκριμένων τύπων έργων φάνηκε να επηρεάζει σημαντικά τις στρατηγικές που εμφανίστηκαν. Επομένως, περαιτέρω έρευνα, με μεγαλύτερο δείγμα και μεγαλύτερη ποικιλία έργων είναι απαραίτητη.

Μελλοντικές έρευνες θα μπορούσαν να εστιάσουν σε παρεμβάσεις που ενισχύουν τη μετάβαση από αναδρομικές σε συναρτησιακές στρατηγικές, καθώς και στη μελέτη διαφορετικών ηλικιακών ομάδων.

Σε διδακτικό επίπεδο, τα ευρήματα υποδεικνύουν την ανάγκη για δραστηριότητες που αναδεικνύουν τη δομή των μοτίβων και υποστηρίζουν τη διατύπωση γενικευμένων κανόνων, με αξιοποίηση πολλαπλών αναπαραστάσεων.

Βιβλιογραφία

Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135–142). Bergen, Norway.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Murphy Gardiner, A., Isler, I., & Kim, J. S. (2019). Implementing a framework for early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 101(1), 43–67.

Creswell, J. W. (2016). Η έρευνα στην εκπαίδευση: Σχεδιασμός, διεξαγωγή και αξιολόγηση ποσοτικής και ποιοτικής έρευνας.

Fyfe, E. R., McNeil, N. M., Son, J. Y., & Goldstone, R. L. (2017). Concreteness fading in mathematics and science instruction: A systematic review. *Educational Psychology Review*, 26(1), 9–25.

Hutchinson, E. (2011). Pre-school children's understanding of mathematical patterns. *South African Journal of Childhood Education*, 1(2), 20–30.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763–804). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lüken, M. M., & Tiedemann, K. (2019). Young children's reasoning about growing patterns. *ZDM Mathematics Education*, 51(2), 261–275.

Mitchelmore, M., & Mulligan, J. (2009). Patterns and structure in early mathematics: The role of patterning in early mathematical development. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), 1–17.

Mulligan, J., Oslington, G., & English, L. (2020). Supporting early mathematical development through a “pattern and structure” intervention program. *ZDM Mathematics Education*, 52(4), 607–619. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01147-9>

Mulligan, J., & Vergnaud, G. (2006). Research on children's early mathematical development: Towards integrated perspectives. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 117–146). Rotterdam: Sense Publishers.

Pang, J., & Sunwoo, J. (2022). Pattern generalization and proportional reasoning in elementary students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(6), 1485–1503.

Papic, M., & Mulligan, J. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 129–136). Seoul, Korea.

Pimentel, T., & Vale, I. (2009). The discovery of patterns in the development of mental calculation: An experience with primary school teachers. *Meeting on Research in Mathematics Education*, 19.

Rizos, I., & Gkrekas, N. (2024). Pattern recognition among primary school students: The relationship with mathematical problem-solving. *Contemporary Mathematics and Science Education*, 5(2), ep24010. <https://doi.org/10.30935/conmaths/14689>

Somasundram, P., Sharifah Norul Akmar, S. N., & Leong, K. E. (2019). Pattern generalisation by Year Five pupils. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(2), 353–362. <https://doi.org/10.29333/iejme/571>

Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science*, 240(4852), 611–616.

Stephens, A. C., Ellis, A. B., Blanton, M., & Brizuela, B. M. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 386–420). Reston, VA: NCTM.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8-year-olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67(2), 171–185.

Wilkie, K. J., & Clarke, D. M. (2016). Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. *Mathematics Education Research Journal*, 28(2), 223–243. <https://doi.org/10.1007/s13394-015-0146-y>

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 379–402. <https://doi.org/10.1023/A:1020291317178>

Κυλάφης, Π. (2009). *Ο ρόλος των patterns στη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα* (Διπλωματική εργασία). Πανεπιστήμιο Αθηνών & Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Ντάντου, Γ. (2017). *Διερεύνηση της αλγεβρικής συλλογιστικής σε μαθητές Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης μέσα από τις κανονικότητες και τη συμμεταβολή* (Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία). Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών.

Τζεκάκη, Μ., Βαμβακούση, Ξ., & Καλδρυμίδου, Μ. (2019). Κανονικότητες (patterning) στις μικρές ηλικίες – Συνθετική παρουσίαση ερευνών. Στο *Πρακτικά 8ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών* (σ. 276–284). Λευκωσία, Κύπρος: ΕΝΕΔΙΜ.

Παράρτημα Α: Ερευνητικό εργαλείο -Έργα

ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ

Έργο 1

Τα παιδιά ετοιμάζουν το αποκριάτικο πάρτι στο προαύλιο του σχολείου. Για το στολισμό, φτιάχνουν γιρλάντες, χρησιμοποιώντας μπαλόνια. Παρατήρησε προσεκτικά το σχέδιο που ακολουθεί η Μαρίνα. Τι παρατηρείς;

Προσπάθησε να απαντήσεις στις παρακάτω ερωτήσεις, εξηγώντας κάθε φορά τη σκέψη σου.

Μαρίνα



Α. Μπορείς να βρεις το χρώμα του επόμενου μπαλονιού στη γιρλάντα της Μαρίνας;

.....

Β. Η πρώτη γιρλάντα που έφτιαξε η Μαρίνα, είχε συνολικά 20 μπαλόνια. Μπορείς να μαντέψεις το χρώμα που είχε το τελευταίο μπαλόνι της ;

.....

Γ. Τώρα φτιάχνει μία δεύτερη γιρλάντα, ακόμη μεγαλύτερη, ακολουθώντας το ίδιο σχέδιο, που θα έχει συνολικά 100 μπαλόνια. Μπορείς να μαντέψεις το χρώμα που θα έχει το τελευταίο μπαλόνι σε αυτήν την μεγάλη γιρλάντα ;

.....

Πώς σκέφτηκες; Εξήγησε τις απαντήσεις σου.

Έργο 2

Τα παιδιά ετοιμάζουν το αποκριάτικο πάρτι στο προαύλιο του σχολείου. Για το στολισμό, φτιάχνουν γιρλάντες, χρησιμοποιώντας μπαλόνια. Παρατήρησε προσεκτικά το σχέδιο που ακολουθεί ο Θοδωρής. Τι παρατηρείς;

Προσπάθησε να απαντήσεις στις παρακάτω ερωτήσεις, εξηγώντας κάθε φορά τη σκέψη σου.



A. Μπορείς να βρεις το χρώμα του επόμενου μπαλονιού στη γιρλάντα του Θοδωρή;

.....

B. Η πρώτη γιρλάντα που έφτιαξε ο Θοδωρής, είχε συνολικά 20 μπαλόνια. Μπορείς να μαντέψεις το χρώμα που είχε το τελευταίο μπαλόνι του ;

.....

Γ. Τώρα φτιάχνει μία δεύτερη γιρλάντα, ακόμη μεγαλύτερη, ακολουθώντας το ίδιο σχέδιο, που θα έχει συνολικά 100 μπαλόνια. Μπορείς να μαντέψεις το χρώμα που θα έχει το τελευταίο μπαλόνι σε αυτήν την μεγάλη γιρλάντα ;

.....

Πώς σκέφτηκες; Εξήγησε τις απαντήσεις σου.

Έργο 3

Τα παιδιά ετοιμάζουν το αποκριάτικο πάρτι στο προαύλιο του σχολείου. Για το στολισμό, φτιάχνουν γιρλάντες, χρησιμοποιώντας μπαλόνια. Παρατήρησε προσεκτικά το σχέδιο που ακολουθεί η Άννα. Τι παρατηρείς;

Προσπάθησε να απαντήσεις στις παρακάτω ερωτήσεις, εξηγώντας κάθε φορά τη σκέψη σου.

Άννα



A. Μπορείς να βρεις το χρώμα του επόμενου μπαλονιού στη γιρλάντα της Άννας;

.....

B. Η πρώτη γιρλάντα που έφτιαξε η Άννα, είχε συνολικά 20 μπαλόνια. Μπορείς να μαντέψεις το χρώμα που είχε το τελευταίο μπαλόνι της ;

.....

Γ. Τώρα φτιάχνει μία δεύτερη γιρλάντα, ακόμη μεγαλύτερη, ακολουθώντας το ίδιο σχέδιο, που θα έχει συνολικά 100 μπαλόνια. Μπορείς να μαντέψεις το χρώμα που θα έχει το τελευταίο μπαλόνι σε αυτήν την μεγάλη γιρλάντα ;

.....

Πώς σκέφτηκες; Εξήγησε τις απαντήσεις σου.

ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΜΕΝΑ

Έργο 4

Έχω στο μυαλό μου έναν κρυφό κανόνα, με βάση τον οποίο φτιάχνω σχέδια με κουκίδες.



Παρατήρησε καλά όσα σχεδίασα και προσπάθησε, τόσο να μαντέψεις τον κανόνα μου, όσο και να απαντήσεις στις ερωτήσεις.

A. Αν συνέχιζα με το επόμενο σχέδιο, πόσες κουκίδες θα είχε; Πώς το ξέρεις;

.....

B. Αν έφτιαχνα συνολικά 10 τέτοια σχέδια, πόσες κουκίδες θα είχε το τελευταίο μου; Πώς σκέφτηκες;

.....

Γ. Αν έφτιαχνα συνολικά 31 τέτοια σχέδια, πόσες κουκίδες θα είχε το τελευταίο μου; Πώς σκέφτηκες;

.....

Δ. Μπορείς να διατυπώσεις προφορικά τον κανόνα μου;

Έργο 5

Βάζω στη σειρά κουκίδες και φτιάχνω δέντράκι. Δεν τις βάζω τυχαία, αλλά ακολουθώ έναν κανόνα. Έχω ήδη φτιάξει 4 σειρές. Παρατήρησε το δέντράκι μου και προσπάθησε να απαντήσεις στις ερωτήσεις.



Α. Μπορείς να βρεις πόσες κουκίδες θα έχει η επόμενη σειρά;

.....

Β. Αν φτιάξω συνολικά 10 σειρές, πόσες κουκίδες θα έχει η τελευταία σειρά; Πώς το ξέρεις;

.....

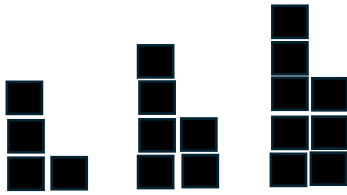
Γ. Αν φτιάξω συνολικά 35 σειρές, πόσες κουκίδες θα έχει η τελευταία σειρά; Πώς το ξέρεις;

.....

Δ. Μπορείς να διατυπώσεις προφορικά τον κανόνα μου;

Έργο 6

Χτίζω πυργάκια με τετράγωνα τούβλα, έχοντας στο μυαλό μου έναν κρυφό κανόνα.
Παρατήρησε παρακάτω όσα πυργάκια έχω ήδη φτιάξει και προσπάθησε να απαντήσεις στις
ερωτήσεις ,αλλά και να ανακαλύψεις τον κανόνα μου.



A. Αν φτιάξω ένα ακόμη πυργάκι, πώς θα είναι ; Πώς το ξέρεις;

B. Αν φτιάξω συνολικά 10 πυργάκια, πώς θα είναι το τελευταίο ; Πώς σκέφτηκες;

Γ. Αν φτιάξω συνολικά 31 πυργάκια, πώς θα είναι το τελευταίο ; Πώς σκέφτηκες;

A	B	Γ

Δ Μπορείς να διατυπώσεις προφορικά τον κανόνα;