



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΟΥ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ
ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ**

Γεράσιμος Γαβρίλης-Κοζεβέρος

Επιβλέπων: Φώτιος Βαρτζιώτης
ΔΕΠ, Επίκουρος Καθηγητής

Αθήνα, Φεβρουάριος, 2026

BASIC DIGITAL SIGNAL PROCESSING

Εγκρίθηκε από τριμελή εξεταστική επιτροπή

Άρτα 16/03/2026

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

1. Επιβλέπων καθηγητής
Βαρτζιώτης Φώτιος
2. Μέλος επιτροπής
Μαργαρίτη Σπυριδούλα
3. Μέλος επιτροπής
Στεργίου Ελευθέριος

© Γαβρίλης-Κοζεβέρος, Γεράσιμος, 2026.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Δήλωση μη λογοκλοπής

Δηλώνω υπεύθυνα και γνωρίζοντας τις κυρώσεις του Ν. 2121/1993 περί Πνευματικής Ιδιοκτησίας, ότι η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία είναι εξ ολοκλήρου αποτέλεσμα δικής μου ερευνητικής εργασίας, δεν αποτελεί προϊόν αντιγραφής ούτε προέρχεται από ανάθεση σε τρίτους. Όλες οι πηγές που χρησιμοποιήθηκαν (κάθε είδους, μορφής και προέλευσης) για τη συγγραφή της περιλαμβάνονται στη βιβλιογραφία.

Γαβρίλης-Κοζεβέρος, Γεράσιμος

Γ.Γαβρίλης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία εξετάζει τη μελέτη, υλοποίηση και αξιολόγηση συστήματος ψηφιακής επεξεργασίας ακουστικών σημάτων με χρήση φίλτρων πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR) σε προγραμματιζόμενη λογική διάταξη τύπου FPGA. Στόχος είναι η αποθορυβοποίηση σήματος σε πραγματικό χρόνο, με έμφαση στην παραμετροποίηση και στη βελτιστοποίηση της απόδοσης. Αρχικά παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο που περιλαμβάνει τις βασικές αρχές της δειγματοληψίας, της κβαντοποίησης και του σχεδιασμού FIR φίλτρων. Στη συνέχεια, περιγράφεται η υλοποίηση σε πλακέτα Altera DE2-115 με ενσωματωμένο Audio CODEC, όπου αναπτύχθηκαν βασικές δομές DSP, όπως το κύκλωμα passthrough και φίλτρα κινούμενου μέσου όρου με σταθερό και παραμετρικό αριθμό δειγμάτων. Τα αποτελέσματα δείχνουν βελτίωση της ποιότητας σήματος και αποτελεσματική μείωση θορύβου, με αποδεκτές απαιτήσεις σε λογικούς πόρους και χαμηλή καθυστέρηση. Η εργασία συμβάλλει στην κατανόηση της πρακτικής υλοποίησης φίλτρων σε FPGA και ανοίγει προοπτικές για πιο σύνθετες εφαρμογές, όπως πολυκαναλική επεξεργασία ή συνδυασμός με αλγορίθμους μηχανικής μάθησης.

Λέξεις-κλειδιά: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος, FPGA, FIR φίλτρα, Αποθορυβοποίηση, Ήχος σε πραγματικό χρόνο.

ABSTRACT

This thesis focuses on the study, implementation, and evaluation of a digital audio signal processing system using Finite Impulse Response (FIR) filters on a Field-Programmable Gate Array (FPGA). The main objective is to achieve real-time noise reduction while maintaining low latency and efficient utilization of hardware resources. The theoretical background includes the principles of sampling, quantization, and digital filter design, with emphasis on FIR structures due to their stability and linear phase characteristics.

The experimental part is based on the Altera DE2-115 development board, equipped with an integrated Audio CODEC for 48 kHz audio sampling. Several modules were implemented, including a passthrough circuit and FIR filters with fixed and parameterized tap lengths. Performance was evaluated through objective metrics such as Signal-to-Noise Ratio (SNR) improvement, frequency response, and resource consumption, as well as subjective listening tests to assess perceived quality.

The results demonstrate that FPGA-based FIR filters can effectively reduce noise and improve audio quality in real-time conditions, while offering flexibility for parameterization and scalability. The work contributes to the understanding of FPGA implementations for digital signal processing and sets the foundation for future research in advanced noise reduction techniques, multi-channel processing, and integration with machine learning algorithms.

Keywords: Digital Signal Processing, FPGA, FIR filters, Noise reduction, Real-time audio.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	V
ABSTRACT	VI
ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ	VII
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ/ΕΙΚΟΝΩΝ.....	IX
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	XI
1. Εισαγωγή στη Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος.....	XII
1.1 Εισαγωγή	XII
1.2 Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος (DSP)	XIII
1.3 FPGA και Επεξεργασία Ήχου	XV
1.4 Σκοπός και Στόχοι της Διπλωματικής	XVIII
2. Θεωρητικό Υπόβαθρο	XXI
2.1 Εισαγωγή	XXI
2.2 Ψηφιακά Σήματα και Δειγματοληψία.....	XXII
2.2.1 Αναλογικά και Ψηφιακά Σήματα	XXIII
2.2.2 Η Διαδικασία της Δειγματοληψίας.....	XXVI
2.2.3 Μαθηματική Προσέγγιση Δειγματοληψίας με Μετασχηματισμό Fourier.....	XXIX
2.2.4 Το Φαινόμενο της Αναδίπλωσης (Aliasing)	XXX
2.2.5 Κβαντοποίηση	XXXIV
2.2.6 Ανακατασκευή Αναλογικού Σήματος	XXXVII
2.3 Πλεονεκτήματα Ψηφιακής Επεξεργασίας	XXXVIII
2.4 FIR Φίλτρα.....	XXXIX
2.4.1 Μαθηματικός Ορισμός και Κρουστική Απόκριση.....	XLI
2.4.2 Ιδιότητες FIR Φίλτρων	XLIV
2.4.3 Κατηγορίες FIR Φίλτρων	XLVI
3. Πειραματικό μέρος και αποτελέσματα βασικών δομών ψηφιακής επεξεργασίας σήματος (DSP)	LIII
3.1 Στόχοι, υποθέσεις και πλαίσιο αξιολόγησης	LIII
3.2 Υλοποίηση σε Verilog	LV
3.3 Passthrough (Loopback)	LV
3.4 FIR φίλτρο moving-average με σταθερό N.....	LIX
3.5 FIR φίλτρο moving-average με παραμετροποιημένο N.....	LXV
4. Συμπεράσματα και μελλοντικές επεκτάσεις.....	LXXII
4.1 Συμπεράσματα	LXXII
4.2 Μελλοντικές επεκτάσεις.....	LXXIII

Βιβλιογραφία..... LXXVI

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ/ΕΙΚΟΝΩΝ

Σχήμα 2.1: Επαναλαμβανόμενα αντίγραφα του φάσματος στο πεδίο της συχνότητας λόγω δειγματοληψίας. Η συχνότητα Nyquist ($\pm fs/2$) καθορίζει το μέγιστο εύρος που μπορεί να αναπαρασταθεί χωρίς παραμόρφωση.....	XXXII
Σχήμα 2.2: Φαινόμενο αναδίπλωσης (aliasing) λόγω χαμηλής συχνότητας δειγματοληψίας. Η αλληλεπικάλυψη των φασματικών αντιγράφων οδηγεί σε απώλεια πληροφορίας και μη αναστρέψιμη παραμόρφωση του σήματος.	XXXIII
Σχήμα 2.3: Χρήση anti-aliasing φίλτρου πριν από τη δειγματοληψία. Το φίλτρο χαμηλής διέλευσης αποκόπτει τις συχνότητες πέρα από το όριο Nyquist, αποτρέποντας το φαινόμενο της αναδίπλωσης.	XXXIII
Σχήμα 2.4: Παράδειγμα κβαντοποίησης ενός ημιτονοειδούς σήματος σε διαφορετικά βάθη bit. Η αύξηση του αριθμού των bits οδηγεί σε πιο ακριβή αναπαράσταση του σήματος και σε μείωση του σφάλματος κβαντοποίησης.	XXXVI
Σχήμα 2.5: Κρουστική απόκριση FIR φίλτρου κινούμενου μέσου όρου (Moving Average) με τάξη $M=3$. Η απόκριση έχει πεπερασμένο μήκος ($M+1$ δείγματα) και μηδενίζεται μετά από αυτό.	XLII
Σχήμα 2.6: Απόκριση συχνότητας FIR φίλτρου κινούμενου μέσου όρου ($M=3$). Το φίλτρο δρα ως χαμηλοπερατό, επιτρέποντας τις χαμηλές συχνότητες και μειώνοντας σταδιακά τις υψηλές.	XLIII
Σχήμα 2.7: Ιδανικοποιημένη απόκριση πλάτους χαμηλοπερατού FIR: ζώνη διέλευσης έως ω_p (ripples δ_p), ζώνη μετάβασης $\Delta\omega$ και ζώνη αποκοπής με εξασθένηση A_s	XLVII
Σχήμα 2.8: Απόκριση πλάτους υψηλοπερατού FIR και απεικόνιση της αναστροφής φάσματος $H_{HP} = 1 - H_{LP}$ για κατασκευή HP από LP.....	XLIX
Σχήμα 2.9: Ζωνοπερατό FIR με ζώνη διέλευσης $[\omega_1, \omega_2]$ κεντρική ω_0 και εύρος BW. Ένδειξη κυμάτωσης δ_p εντός ζώνης και εξασθένησης A_s εκτός.	L
Σχήμα 2.10: Απόκριση ζωνοφραγιά/Notch FIR: βαθιά απόρριψη γύρω από ω_0 με διατήρηση σχεδόν μοναδιαίας απόκρισης εκτός ζώνης.	LI
Σχήμα 3.1: Κυματομορφές προσομοίωσης του κυκλώματος passthrough. Η είσοδος αντιγράφεται αυτούσια στην έξοδο χωρίς επεξεργασία.....	LVIII
Σχήμα 3.2: Εναλλακτικό σενάριο προσομοίωσης passthrough module με αργά μεταβαλλόμενο σήμα εισόδου. Η έξοδος ακολουθεί πιστά την είσοδο, χωρίς καμία επεξεργασία.	LVIII

Σχήμα 3.3: Κυματομορφές προσομοίωσης του φίλτρου `fir_avg_8`. Το σήμα εξόδου (`out_sample`) είναι πιο ομαλό από το σήμα εισόδου (`in_sample`), ενώ η μετρούμενη καθυστέρηση είναι ≈ 4 δείγματα.LXV

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η τεχνολογική πρόοδος στην επεξεργασία σήματος έχει μετασχηματίσει τον τρόπο με τον οποίο διαχειριζόμαστε δεδομένα ήχου και εικόνας. Η Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος (DSP) αξιοποιεί μαθηματικές μεθόδους και υπολογιστικά συστήματα για την ανάλυση, τροποποίηση και βελτίωση σημάτων που προέρχονται από τον πραγματικό κόσμο. Στον τομέα του ήχου, η ανάγκη για υψηλή ποιότητα, χαμηλή καθυστέρηση και αποτελεσματική αποθορυβοποίηση καθιστά τη DSP κρίσιμο εργαλείο σε εφαρμογές όπως η μουσική παραγωγή, οι τηλεπικοινωνίες και τα βιοϊατρικά όργανα.

Οι πλατφόρμες FPGA (Field Programmable Gate Arrays) προσφέρουν μοναδικά πλεονεκτήματα για υλοποιήσεις DSP, καθώς επιτρέπουν παράλληλη επεξεργασία και ακριβή χρονικό έλεγχο με χαμηλή κατανάλωση ισχύος. Η συνδυαστική χρήση τους με φίλτρα FIR, τα οποία παρουσιάζουν σταθερότητα και γραμμική φασική απόκριση, καθιστά δυνατή την ανάπτυξη αποδοτικών συστημάτων επεξεργασίας ήχου σε πραγματικό χρόνο.

Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στην υλοποίηση και αξιολόγηση φίλτρων FIR σε FPGA με στόχο την αποθορυβοποίηση ακουστικών σημάτων. Μελετώνται διαφορετικές αρχιτεκτονικές φίλτρων, καταγράφονται μετρήσεις απόδοσης και εξετάζονται οι περιορισμοί που σχετίζονται με την πολυπλοκότητα, το εύρος λέξης και τη χρήση πόρων. Μέσα από την ανάλυση αυτή αναδεικνύεται η σημασία των FPGA ως πλατφόρμες DSP και οι δυνατότητές τους για μελλοντικές εφαρμογές σε συστήματα επικοινωνίας και ακουστικής τεχνολογίας.

1. Εισαγωγή στη Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

1.1 Εισαγωγή

Η τεχνολογική πρόοδος των τελευταίων δεκαετιών έχει οδηγήσει σε ραγδαία ανάπτυξη της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος (**Digital Signal Processing – DSP**), ενός κλάδου που συνδυάζει τα μαθηματικά, την πληροφορική και την ηλεκτρονική για τη μελέτη, ανάλυση και επεξεργασία δεδομένων από τον πραγματικό κόσμο. Η DSP αποτελεί σήμερα αναπόσπαστο κομμάτι εφαρμογών που αφορούν **τις τηλεπικοινωνίες, την επεξεργασία ήχου και εικόνας, την ιατρική τεχνολογία και τα συστήματα αυτοματισμού**, παρέχοντας δυνατότητες που δεν θα μπορούσαν να επιτευχθούν με αναλογικά μέσα. Ενδεικτικά, τεχνικές όπως η αποσυμπίεση ήχου/βίντεο, ο εντοπισμός συμβάντων σε πραγματικό χρόνο από ροές αισθητήρων και η ενίσχυση σημάτων σε θορυβώδη περιβάλλοντα βασίζονται σε βελτιστοποιημένες αλγοριθμικές ροές DSP. Η ώσμωση με την τεχνητή νοημοσύνη έχει επίσης αναδείξει υβριδικές προσεγγίσεις (π.χ. “DSP-first, ML-assisted”) για εφαρμογές υψηλής αξιοπιστίας. Πέρα από τις κλασικές εφαρμογές, η DSP συναντάται πλέον σε συστήματα κυβερνοφυσικών υποδομών (cyber-physical systems), στην ανάλυση δεδομένων αισθητήρων για το Διαδίκτυο των Πραγμάτων (IoT), καθώς και σε αλγορίθμους μηχανικής μάθησης που λειτουργούν πάνω σε ροές δεδομένων (streaming) σε πραγματικό χρόνο.

Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα και ταυτόχρονα απαιτητικά πεδία εφαρμογής της DSP είναι η **επεξεργασία ακουστικών σημάτων**. Ο **ήχος**, είτε πρόκειται για μουσική είτε για φωνή, είναι ιδιαίτερα ευαίσθητος σε παραμορφώσεις και θόρυβο, ενώ η ανθρώπινη ακουστική αντίληψη καθιστά ακόμη και μικρές αλλοιώσεις αντιληπτές. Για τον λόγο αυτό, η βελτίωση της ποιότητας και η αποθορυβοποίηση ακουστικών σημάτων αποτελούν ζητήματα υψηλής σημασίας για την επιστημονική κοινότητα αλλά και για τη βιομηχανία. Η ψυχοακουστική μάς διδάσκει ότι η ανθρώπινη αντίληψη είναι μη γραμμική και εξαρτώμενη από το φάσμα, τη στάθμη και το χρονικό περιβάλλον (masking effects). Συνεπώς, οι λύσεις αποθορυβοποίησης δεν κρίνεται επαρκές να βελτιώνουν μόνο τον SNR αλλά πρέπει να λαμβάνουν υπόψη και αντιληπτικές μετρικές (π.χ. PESQ, POLQA, STOI) που σχετίζονται με την καταληπτότητα και την ποιότητα ακρόασης. Η πολυπλοκότητα αυτών των προβλημάτων αυξάνεται όταν απαιτείται επεξεργασία σε φορητές συσκευές ή ενσωματωμένα συστήματα με αυστηρούς περιορισμούς ισχύος και μνήμης, όπου η αποδοτική υλοποίηση αλγορίθμων είναι κρίσιμη για την επίτευξη υψηλής ποιότητας ήχου.

Η ανάγκη για συστήματα επεξεργασίας ήχου σε πραγματικό χρόνο απαιτεί σημαντική υπολογιστική ισχύ, σταθερότητα και χαμηλή καθυστέρηση. Οι **μικροεπεξεργαστές** και τα **εξειδικευμένα DSP chips**, αν και ισχυρά, παρουσιάζουν περιορισμούς ως προς την παράλληλη επεξεργασία μεγάλων όγκων δεδομένων. Αντιθέτως, οι προγραμματιζόμενες λογικές διατάξεις (**Field-Programmable Gate Arrays – FPGA**) προσφέρουν μοναδικά πλεονεκτήματα, όπως δυνατότητα παράλληλης εκτέλεσης αλγορίθμων, εγγυημένη χρονική απόκριση και δυνατότητα παραμετροποίησης, στοιχεία που τις καθιστούν εξαιρετικά κατάλληλες για την υλοποίηση αλγορίθμων DSP σε πραγματικό χρόνο. Στα συστήματα αυτά, η συνολική καθυστέρηση προκύπτει ως άθροισμα “buffering latency + processing latency + I/O latency”. Ο αυστηρός προϋπολογισμός καθυστέρησης (latency budget) είναι κρίσιμος για επικοινωνιακές εφαρμογές και ζωντανό ήχο (π.χ. στόχος < 10 ms end-to-end), ενώ απαιτείται προσεκτική επιλογή μεγέθους μπλοκ (frame size) ώστε να ισορροπεί η απόδοση με την καθυστέρηση. Η εγγενής παραλληλία των FPGA επιτρέπει τη χαρτογράφηση των λειτουργιών φιλτραρίσματος, μετασχηματισμών και ανίχνευσης χαρακτηριστικών σε ανεξάρτητες διαδρομές δεδομένων (pipelines), μειώνοντας την καθυστέρηση end-to-end και αποφεύγοντας το λειτουργικό overhead των γενικών επεξεργαστών.

Η παρούσα διπλωματική εργασία εστιάζει στη μελέτη και την υλοποίηση συστήματος αποθορυβοποίησης ακουστικών σημάτων με **χρήση φίλτρων FIR σε πλατφόρμα FPGA**. Το πρώτο κεφάλαιο εισάγει τον αναγνώστη στα βασικά σημεία της έρευνας. Αρχικά παρουσιάζεται η έννοια και η σημασία της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος (Ενότητα 1.1). Στη συνέχεια, αναλύονται τα FPGA και ο ρόλος τους στην επεξεργασία ήχου (Ενότητα 1.2). Τέλος, περιγράφεται ο σκοπός και οι στόχοι της εργασίας, αναδεικνύοντας τη συμβολή και την αξία της τόσο σε επιστημονικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο (Ενότητα 1.3). Επιπλέον, επισημαίνονται οι βασικές προκλήσεις που αντιμετωπίζονται στο πλαίσιο της υλοποίησης (π.χ. ακριβής συγχρονισμός ρολογιών, διαχείριση εύρους λέξης/κβαντοποίησης, συμβιβασμοί μεταξύ πολυπλοκότητας φίλτρων και πόρων FPGA) και τίθενται οι κατευθυντήριες γραμμές για το υπόλοιπο της μελέτης.

1.2 Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος (DSP)

Η Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος (**Digital Signal Processing - DSP**) αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους κλάδους της σύγχρονης τεχνολογίας, καθώς συνδυάζει τις αρχές της ηλεκτρονικής, των μαθηματικών και της πληροφορικής με στόχο την ανάλυση και επεξεργασία δεδομένων που προέρχονται από τον πραγματικό κόσμο. Σήματα όπως ο ήχος,

η εικόνα, το βίντεο και τα βιοϊατρικά δεδομένα αναπαρίστανται και επεξεργάζονται με τη βοήθεια υπολογιστικών μεθόδων, επιτρέποντας την εξαγωγή πληροφορίας, τη βελτίωση της ποιότητας και την ανάπτυξη εφαρμογών με υψηλή προστιθέμενη αξία (Schafer, 2010). Η τυποποίηση διεπαφών και μορμά (π.χ. WAV/PCM, FLAC, AES3) διευκολύνει τη διαλειτουργικότητα συστημάτων και την αξιόπιστη ανταλλαγή ψηφιακών σημάτων σε επαγγελματικά και καταναλωτικά περιβάλλοντα.

Η μετάβαση από τον αναλογικό στον ψηφιακό κόσμο βασίζεται σε δύο θεμελιώδεις διαδικασίες: τη **δειγματοληψία (sampling)** και την **κβαντοποίηση (quantization)**. Κατά τη δειγματοληψία, το συνεχές σήμα μετατρέπεται σε ακολουθία διακριτών τιμών με ρυθμό δειγματοληψίας f_s . Το θεώρημα δειγματοληψίας του Nyquist-Shannon καθορίζει ότι η συχνότητα δειγματοληψίας πρέπει να είναι τουλάχιστον διπλάσια της μέγιστης συχνότητας του σήματος, ώστε να είναι δυνατή η ανακατασκευή του χωρίς απώλειες πληροφορίας (Manolakis, 2007). Στη συνέχεια, με την κβαντοποίηση, κάθε δείγμα αντιστοιχίζεται σε συγκεκριμένη διακριτή τιμή ανάλογα με τον αριθμό των bits που χρησιμοποιείται, γεγονός που καθορίζει και το δυναμικό εύρος του συστήματος. Στην πράξη, η επιλογή του ρυθμού δειγματοληψίας και του bit depth συναρτάται με την εφαρμογή: π.χ. 44,1 kHz/16-bit για μουσική κατανάλωσης, 48 kHz/24-bit για επαγγελματικό ήχο/βίντεο, ενώ σε επιστημονικές μετρήσεις μπορεί να απαιτούνται ακόμη υψηλότερες προδιαγραφές για τη μείωση θορύβου κβαντοποίησης. Παράλληλα, εφαρμόζονται αντι-αλιαστικά φίλτρα πριν τον ADC και τεχνικές oversampling/decimation για βελτίωση της πιστότητας.

Η υιοθέτηση ψηφιακών τεχνικών έναντι των αναλογικών παρέχει πολλαπλά πλεονεκτήματα. Πρώτον, η **ακρίβεια και σταθερότητα** των ψηφιακών συστημάτων υπερέρχει, αφού η επεξεργασία δεδομένων σε μορφή bits δεν υπόκειται στις παραμορφώσεις και τις αστάθειες που χαρακτηρίζουν τα αναλογικά κυκλώματα. Δεύτερον, η **ευελιξία** είναι πολύ μεγαλύτερη, καθώς μια αλλαγή αλγορίθμου απαιτεί μόνο ενημέρωση λογισμικού και όχι επανασχεδίαση υλικού. Επιπλέον, η **αναπαραγωγιμότητα** των αποτελεσμάτων είναι εγγυημένη, αφού τα ίδια δεδομένα και αλγόριθμοι θα παράγουν πάντοτε το ίδιο αποτέλεσμα ανεξαρτήτως περιβάλλοντος (Lyons, 2011). Πέραν αυτών, τα ψηφιακά συστήματα διευκολύνουν την υλοποίηση πολύπλοκων μη γραμμικών τεχνικών, την προσαρμοστική επεξεργασία και την αυτοματοποίηση διαδικασιών βαθμονόμησης, μειώνοντας σημαντικά το κόστος κύκλου ζωής και συντήρησης.

Η DSP βασίζεται σε ένα ισχυρό μαθηματικό υπόβαθρο. Ο **Μετασχηματισμός Fourier** και οι υπολογιστικές αποδοτικές παραλλαγές του, όπως ο **Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (FFT)**, επιτρέπουν την ανάλυση σημάτων στο πεδίο της συχνότητας.

Ο **Μετασχηματισμός Z** παρέχει ισχυρά εργαλεία για την ανάλυση και τον σχεδιασμό ψηφιακών φίλτρων. Τα **φίλτρα FIR (Finite Impulse Response)** και **IIR (Infinite Impulse Response)** αποτελούν τους θεμέλιους λίθους της φιλτραρίσματος σημάτων, επιτρέποντας την απομάκρυνση θορύβου ή την ενίσχυση επιθυμητών συχνοτήτων (Smith, 1997). Τέλος, οι σύγχρονες τεχνικές περιλαμβάνουν και **προσαρμοστικά φίλτρα**, τα οποία ρυθμίζουν δυναμικά τις παραμέτρους τους ώστε να ανταποκρίνονται σε μεταβαλλόμενες συνθήκες. Στο πλαίσιο αυτό, ζητήματα όπως η σταθερότητα (ιδίως στα IIR), η γραμμικότητα φάσης (στα FIR), ο σχεδιασμός παραθύρων, καθώς και οι τεχνικές πολυρυθμικής επεξεργασίας (multirate) παίζουν καίριο ρόλο στη συνολική απόδοση.

Οι εφαρμογές της DSP είναι εξαιρετικά εκτεταμένες. Στον χώρο του ήχου, χρησιμοποιείται για noise-cancelling ακουστικά, ισοσταθμιστές (equalizers) και εφέ μουσικής. Στις τηλεπικοινωνίες αποτελεί τη βάση για συμπίεση, κωδικοποίηση και μετάδοση δεδομένων. Στην ιατρική, σήματα όπως το ECG και EEG αναλύονται με τεχνικές DSP για διάγνωση και παρακολούθηση ασθενών (Ifeachor & Jervis, 2002). Στην επεξεργασία εικόνας και βίντεο, οι αλγόριθμοι DSP βρίσκονται πίσω από τεχνολογίες συμπίεσης και αναγνώρισης προτύπων. Επιπλέον, σε εφαρμογές ασφάλειας και βιομετρίας, οι τεχνικές DSP αξιοποιούνται για ανίχνευση ανωμαλιών, αναγνώριση ομιλητή και βελτίωση ευκρίνειας σήματος σε θορυβώδη περιβάλλοντα, ενώ η σύζευξη με μοντέλα μάθησης βάθους ενισχύει τη ρομποτική αντίληψη και την ευφυή λήψη αποφάσεων.

Συνοψίζοντας, η **DSP** αποτελεί το θεμέλιο πάνω στο οποίο χτίζεται ένα τεράστιο φάσμα εφαρμογών. Ο συνδυασμός ακριβούς μαθηματικής θεμελίωσης και ισχυρών υπολογιστικών μεθόδων καθιστά τη DSP αναπόσπαστο εργαλείο της σύγχρονης τεχνολογικής ανάπτυξης. Η κατανόηση των βασικών αρχών της αποτελεί προϋπόθεση για τη σχεδίαση αποδοτικών και αξιόπιστων συστημάτων επεξεργασίας ήχου, όπως αυτά που εξετάζονται στην παρούσα εργασία.

1.3 FPGA και Επεξεργασία Ήχου

Η υλοποίηση συστημάτων ψηφιακής επεξεργασίας σήματος μπορεί να πραγματοποιηθεί σε διάφορες πλατφόρμες υλικού, όπως γενικού σκοπού μικροεπεξεργαστές, εξειδικευμένα **DSP chips**, **γραφικές μονάδες επεξεργασίας (GPUs)** και **προγραμματιζόμενες λογικές διατάξεις (FPGAs)**. Η επιλογή της κατάλληλης πλατφόρμας εξαρτάται από παράγοντες όπως η απαιτούμενη υπολογιστική ισχύς, η καθυστέρηση (latency), η ενεργειακή κατανάλωση και η δυνατότητα παραμετροποίησης του συστήματος. Η αξιολόγηση αυτή

συνήθως γίνεται βάσει δεικτών όπως throughput (δείγματα/δευτερόλεπτο), latency ανά frame/μπλοκ, κατανάλωση ισχύος ανά λειτουργία και χρήση υλικών πόρων (LUTs, FFs, BRAMs, DSP slices).

Οι **FPGAs (Field-Programmable Gate Arrays)** είναι ολοκληρωμένα κυκλώματα που αποτελούνται από μια διάταξη προγραμματιζόμενων λογικών στοιχείων (logic blocks) και διασυνδέσεων, τα οποία μπορούν να ρυθμιστούν από τον χρήστη ώστε να υλοποιήσουν συγκεκριμένες λογικές συναρτήσεις ή πολύπλοκες ψηφιακές αρχιτεκτονικές. Σε αντίθεση με τα **ASICs (Application-Specific Integrated Circuits)**, τα οποία είναι στατικά και μη παραμετροποιήσιμα, τα FPGAs προσφέρουν τη δυνατότητα επαναπρογραμματισμού, δίνοντας ευελιξία και προσαρμοστικότητα σε εφαρμογές που απαιτούν εξέλιξη ή πειραματισμό (Meyer-Baese, 2007). Επιπλέον, η ύπαρξη εσωτερικών μνημών (Block RAM), μονάδων πολλαπλασιασμού/συσσώρευσης και πλούσιων διεπαφών (π.χ. I2S, I²C, SPI) διευκολύνει την ενσωμάτωση με περιφερειακά ήχου και την υλοποίηση σύνθετων dataflows.

Ένα από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα των FPGA είναι η ικανότητα **παράλληλης επεξεργασίας**. Σε αντίθεση με τους μικροεπεξεργαστές που βασίζονται σε σειριακή εκτέλεση εντολών, οι FPGA μπορούν να υλοποιήσουν πολλαπλές λειτουργίες DSP ταυτόχρονα, αξιοποιώντας πλήρως την παραλληλία σε επίπεδο δεδομένων και εντολών. Αυτό καθιστά τις πλατφόρμες FPGA ιδανικές για εφαρμογές πραγματικού χρόνου, όπως η επεξεργασία ήχου, όπου ακόμη και καθυστερήσεις της τάξης μερικών χιλιοστών του δευτερολέπτου γίνονται αντιληπτές από τον άνθρωπο (Horgan, 2014). Η αρχιτεκτονική βασισμένη σε **αγωγούς (pipelining)** επιτρέπει υψηλές συχνότητες λειτουργίας και σταθερό χρόνο διάδοσης, ενώ η τεχνική parallel partitioning επιτρέπει την κλιμάκωση του φίλτρου σε περισσότερα κανάλια ή υψηλότερους ρυθμούς δειγματοληψίας.

Στην περίπτωση της επεξεργασίας ήχου, οι απαιτήσεις για **χαμηλή καθυστέρηση (low latency)**, **υψηλό ρυθμό δειγματοληψίας και σταθερή απόδοση** καθιστούν τα FPGA μια ιδιαίτερα ελκυστική επιλογή. Ενδεικτικά, η επεξεργασία σήματος σε πραγματικό χρόνο για **συχνότητες δειγματοληψίας 44,1 kHz ή 48 kHz** απαιτεί την εκτέλεση χιλιάδων πράξεων ανά δευτερόλεπτο. Ενώ ένας επεξεργαστής γενικού σκοπού μπορεί να ανταποκριθεί σε τέτοια φορτία, η σταθερότητα και η αποφυγή μεταβλητών καθυστερήσεων (jitter) είναι πιο δύσκολο να επιτευχθούν. Τα FPGA, λόγω της αρχιτεκτονικής βάσει υλικού, παρέχουν εγγυημένη χρονική απόκριση και καθιστούν δυνατή την ακριβή χρονική στοχοθέτηση λειτουργιών (Katz, 2011). Επιπρόσθετα, η χαμηλή και προβλέψιμη καθυστέρηση

διευκολύνει την υλοποίηση **κλειστών βρόχων ελέγχου (feedback loops)** για προχωρημένους αλγορίθμους ακύρωσης θορύβου ή ακύρωσης ηχούς (echo cancellation). Επιπλέον, **τα FPGA ενσωματώνουν ειδικές μονάδες DSP (DSP slices)**, οι οποίες είναι βελτιστοποιημένες για πράξεις πολλαπλασιασμού και άθροισης – τις βασικότερες πράξεις σε φίλτρα FIR και IIR. Η ύπαρξη αυτών των μονάδων, σε συνδυασμό με την παράλληλη εκτέλεση, οδηγεί σε σημαντική επιτάχυνση αλγορίθμων ψηφιακής επεξεργασίας ήχου, όπως **τα φίλτρα χαμηλής διέλευσης, τα ισοσταθμιστικά φίλτρα, οι μετασχηματισμοί Fourier και οι τεχνικές ακύρωσης θορύβου (Xilinx, 2020)**. Αντίστοιχα, οι δυνατότητες fixed-point υλοποίησης με προσεκτική επιλογή εύρους λέξης μειώνουν το κόστος σε πόρους και ισχύ, διατηρώντας την αριθμητική ακρίβεια σε αποδεκτά επίπεδα για ακουστικές εφαρμογές.

Μία από τις πιο διαδεδομένες πλατφόρμες για εκπαιδευτική και ερευνητική χρήση είναι η **Altera (Intel) DE2-115 board**, η οποία διαθέτει ολοκληρωμένο **Audio CODEC** ικανό να πραγματοποιεί δειγματοληψία ήχου στα 48 kHz και να τον αναπαράγει μέσω ηχείων. Η πλακέτα αυτή παρέχει ένα ιδανικό περιβάλλον για την ανάπτυξη και αξιολόγηση αλγορίθμων DSP, καθώς συνδυάζει δυνατότητες υψηλής απόδοσης με ευκολία προγραμματισμού μέσω εργαλείων όπως το Quartus II (Altera, 2011). Η ύπαρξη έτοιμων **IP cores (π.χ. audio interfaces, PLLs)** και εκπαιδευτικών παραδειγμάτων επιταχύνει τη φάση πρωτοτυποποίησης, μειώνοντας το ρίσκο ολοκλήρωσης και επιτρέποντας εστίαση στον αλγοριθμικό σχεδιασμό.

Η επεξεργασία ήχου με χρήση FPGA δεν περιορίζεται μόνο σε ακαδημαϊκό επίπεδο. Στη βιομηχανία, FPGA χρησιμοποιούνται σε **επαγγελματικά συστήματα μίξης και mastering μουσικής, σε συστήματα μείωσης θορύβου** για επικοινωνίες και σε ενσωματωμένα ακουστικά συστήματα. Το γεγονός ότι μπορούν να προσφέρουν υψηλή υπολογιστική απόδοση με χαμηλή καθυστέρηση και παράλληλα να προσαρμόζονται σε διαφορετικές ανάγκες, τα καθιστά ιδανικά για απαιτητικές εφαρμογές ήχου σε πραγματικό χρόνο (Zhang, 2017). Παράλληλα, η τάση για edge υπολογισμό φέρνει τα FPGA πιο κοντά στον τελικό αισθητήρα/μικρόφωνο, επιτρέποντας τοπική προεπεξεργασία και μείωση του bandwidth που απαιτείται προς τα κεντρικά συστήματα.

Συμπερασματικά, οι FPGA αποτελούν μια **τεχνολογική λύση** που γεφυρώνει την ανάγκη για ευελιξία, παράλληλη υπολογιστική ισχύ και υλοποίηση σε πραγματικό χρόνο, καθιστώντας την πλατφόρμα αυτή ιδανική για την ανάπτυξη και μελέτη αλγορίθμων ψηφιακής επεξεργασίας ήχου. Η αξιοποίησή τους σε εκπαιδευτικά, ερευνητικά και βιομηχανικά περιβάλλοντα δείχνει ότι αποτελούν ένα από τα πλέον κατάλληλα μέσα για την υλοποίηση πολύπλοκων και αποδοτικών συστημάτων DSP. Η παρούσα εργασία αξιοποιεί

αυτές τις δυνατότητες σε ένα συνεκτικό παράδειγμα αποθορυβοποίησης, παρέχοντας μετρήσιμα αποτελέσματα και πρακτικές κατευθύνσεις σχεδίασης.

1.4 Σκοπός και Στόχοι της Διπλωματικής

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως αντικείμενο τη μελέτη, υλοποίηση και αξιολόγηση ενός **συστήματος ψηφιακής επεξεργασίας ήχου με χρήση φίλτρων πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (Finite Impulse Response – FIR) σε προγραμματιζόμενη λογική διάταξη τύπου FPGA**. Ο κεντρικός σκοπός είναι η διερεύνηση και αξιοποίηση τεχνικών αποθορυβοποίησης ακουστικών σημάτων σε πραγματικό χρόνο, με έμφαση στη δυνατότητα παραμετροποίησης και βελτιστοποίησης της απόδοσης του συστήματος. Η σημασία του εγχειρήματος έγκειται στην αυξανόμενη ανάγκη για επεξεργασία σήματος σε εφαρμογές που κυμαίνονται από φορητές συσκευές και ακουστικά συστήματα μέχρι τηλεπικοινωνίες και βιοϊατρικά όργανα, όπου η καθαρότητα του σήματος αποτελεί κρίσιμο παράγοντα για τη λειτουργικότητα και την ποιότητα της τελικής υπηρεσίας (Schafer, 2010). Στο πλαίσιο αυτό, στόχος είναι να προσδιοριστούν σαφή κριτήρια σχεδίασης (design criteria) για φίλτρα FIR σε υλοποιήσεις πραγματικού χρόνου, λαμβάνοντας υπόψη περιορισμούς υλικού, πολυπλοκότητα και ακουστικές απαιτήσεις.

Η εργασία επιδιώκει να συνδυάσει το θεωρητικό υπόβαθρο της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος με την **πρακτική υλοποίηση σε FPGA**, μία πλατφόρμα που υπερέχει σε σχέση με τους μικροεπεξεργαστές και τα DSP chips λόγω της παράλληλης αρχιτεκτονικής της και της δυνατότητας επίτευξης χαμηλής καθυστέρησης (Meyer-Baese, 2007). Το FPGA Altera DE2-115, το οποίο χρησιμοποιείται, παρέχει ενσωματωμένο Audio CODEC ικανό να πραγματοποιεί δειγματοληψία ήχου στα 48 kHz, προσφέροντας έτσι την απαραίτητη υποδομή για πειραματισμό και εφαρμογή φίλτρων σε πραγματικές συνθήκες. Η επιλογή του συγκεκριμένου υλικού δεν αποσκοπεί μόνο στην υλοποίηση ενός εκπαιδευτικού παραδείγματος, αλλά στη διερεύνηση των δυνατοτήτων και περιορισμών που ανακύπτουν σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου. **Η αναλυτική αποτίμηση περιλαμβάνει τη μέτρηση κατανάλωσης λογικών πόρων και συχνοτήτων λειτουργίας, καθώς και την αξιολόγηση της επίδρασης του εύρους λέξης (word length) στην ποιότητα ήχου.**

Τα κύρια βήματα της εργασίας περιλαμβάνουν αρχικά την ανάπτυξη μιας βασικής διασύνδεσης με τον Audio CODEC, ώστε να είναι δυνατή η λήψη ακουστικού σήματος από μικρόφωνο και η αναπαραγωγή του μέσω ηχείων χωρίς επεξεργασία. Στη συνέχεια, θα υλοποιηθεί ένα απλό FIR φίλτρο 8 δειγμάτων, το οποίο θα λειτουργήσει ως βάση για τη μελέτη της

αποθορυβοποίησης. Η έρευνα επεκτείνεται στην υλοποίηση ενός παραμετρικού FIR φίλτρου μεταβλητού αριθμού δειγμάτων N , ώστε να διερευνηθεί η επίδραση του μεγέθους του φίλτρου στην ποιότητα του ήχου και στην αποδοτικότητα της επεξεργασίας. Επιπλέον, η εισαγωγή τεχνητού θορύβου επιτρέπει τον έλεγχο του συστήματος σε διαφορετικά σενάρια, ενισχύοντας τη δυνατότητα αξιολόγησης της αποτελεσματικότητας των φίλτρων σε περιβάλλοντα με διαφορετικά επίπεδα παρεμβολών (Zhang, 2017). Για κάθε υλοποίηση, καταγράφονται μετρήσεις καθυστέρησης επεξεργασίας, SNR βελτίωσης και φασματικής απόκρισης, ώστε να εξαχθούν τεκμηριωμένα συμπεράσματα για τους βέλτιστους συμβιβασμούς μεταξύ ποιότητας και πολυπλοκότητας.

Η πειραματική αξιολόγηση περιλαμβάνει τόσο αντικειμενικές μετρήσεις όσο και υποκειμενική ακουστική αντίληψη. Δείκτες όπως ο **λόγος σήματος προς θόρυβο (Signal-to-Noise Ratio – SNR)** και η **ολική αρμονική παραμόρφωση (Total Harmonic Distortion – THD)** θα χρησιμοποιηθούν για τη μέτρηση της βελτίωσης της ποιότητας ήχου. Παράλληλα, θα πραγματοποιηθούν ακουστικές δοκιμές ώστε να αποτυπωθεί η αντίληψη της βελτίωσης από τον ακροατή. Με αυτόν τον τρόπο, επιτυγχάνεται μια ολοκληρωμένη αξιολόγηση που συνδυάζει τεχνικές και ψυχοακουστικές παραμέτρους (Jervis, 2002). **Η διαδικασία υποκειμενικής αξιολόγησης θα ακολουθήσει τυποποιημένες πρακτικές ακρόασης (π.χ. ABX, τυφλές δοκιμές), ενώ θα χρησιμοποιηθούν και μετρικές αντιληπτικής ποιότητας όπου ενδείκνυται.**

Η συμβολή της εργασίας αναμένεται να είναι πολλαπλή. Σε επιστημονικό επίπεδο, προσφέρει μια μελέτη των **FIR φίλτρων στο πεδίο της αποθορυβοποίησης ήχου** σε πραγματικό χρόνο. Σε τεχνολογικό επίπεδο, υλοποιεί μια πλήρως λειτουργική πλατφόρμα επεξεργασίας σήματος σε FPGA, η οποία μπορεί να αποτελέσει σημείο αναφοράς για μελλοντικές εφαρμογές σε ακουστικά συστήματα και επικοινωνιακές συσκευές. Σε εκπαιδευτικό επίπεδο, δημιουργεί ένα παράδειγμα που μπορεί να αξιοποιηθεί από φοιτητές και ερευνητές για περαιτέρω μελέτη, καθώς συνδυάζει θεωρία, πρακτική εφαρμογή και πειραματική ανάλυση. Επιπρόσθετα, τα παραγόμενα αρχεία και οι παράμετροι σχεδίασης μπορούν να λειτουργήσουν ως βιβλιοθήκη αναφοράς για επόμενες επεκτάσεις, όπως πολυκαναλική επεξεργασία ή ενσωμάτωση πιο σύνθετων δομών φίλτρων.

Συνολικά, ο σκοπός και οι στόχοι της παρούσας διπλωματικής δεν περιορίζονται σε μια απλή εργαστηριακή υλοποίηση, αλλά στοχεύουν στη δημιουργία ενός ολοκληρωμένου πλαισίου μελέτης και ανάπτυξης τεχνικών επεξεργασίας ήχου σε FPGA. Η εργασία φιλοδοξεί να αναδείξει τα πλεονεκτήματα της τεχνολογίας FPGA για εφαρμογές DSP, να καταγράψει τα όρια και τις δυνατότητές της και να ανοίξει τον δρόμο για μελλοντικές ερευνητικές επεκτάσεις,

όπως η χρήση πιο σύνθετων φίλτρων, η εφαρμογή προσαρμοστικών αλγορίθμων και η αξιοποίηση μεθόδων μηχανικής μάθησης για βελτιωμένη αποθορυβοποίηση. Ως φυσική συνέχεια, το επόμενο κεφάλαιο εμβαθύνει στο θεωρητικό υπόβαθρο (δειγματοληψία, κβαντοποίηση, θεωρία φίλτρων FIR/IIR), θέτοντας τις βάσεις για τον αλγοριθμικό και υλοποιητικό σχεδιασμό που ακολουθεί.

2. Θεωρητικό Υπόβαθρο

2.1 Εισαγωγή

Η επιτυχής κατανόηση και υλοποίηση ενός συστήματος ψηφιακής επεξεργασίας ήχου σε FPGA δεν είναι μια απλή διαδικασία προγραμματισμού ή εφαρμογής ενός αλγορίθμου. Αντιθέτως, απαιτεί τη στέρεη γνώση και τη λεπτομερή μελέτη ορισμένων βασικών θεωρητικών εννοιών που αποτελούν τη ραχοκοκαλιά της επιστήμης της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος (DSP). Η θεωρία αυτή παρέχει τα εργαλεία με τα οποία μπορούμε να αναλύουμε, να περιγράφουμε και τελικά να υλοποιούμε πολύπλοκα συστήματα που επεξεργάζονται πραγματικά δεδομένα σε πραγματικό χρόνο.

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, η ανάγκη για θεωρητική θεμελίωση είναι ακόμη πιο επιτακτική, δεδομένου ότι το υπό μελέτη σήμα είναι ο ήχος – ένα σήμα που διαθέτει ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, τόσο ως προς την ψυχοακουστική του αντίληψη όσο και ως προς τις τεχνικές απαιτήσεις επεξεργασίας του. Ο ήχος είναι εξαιρετικά ευαίσθητος στην παραμόρφωση, στην καθυστέρηση και στον θόρυβο, γεγονός που καθιστά απαραίτητη την ακριβή και σωστά τεκμηριωμένη επεξεργασία. Συνεπώς, η ανάπτυξη ενός συστήματος αποθορυβοποίησης σε FPGA δεν μπορεί να γίνει αποκομμένα από τη βαθύτερη κατανόηση της θεωρίας που αφορά τα ψηφιακά σήματα, τα φίλτρα, τον θόρυβο και την αρχιτεκτονική του ίδιου του υλικού.

Η πρώτη ενότητα του κεφαλαίου (2.1) εξετάζει τα **ψηφιακά σήματα και τη διαδικασία δειγματοληψίας**, δηλαδή τη μετάβαση από τον αναλογικό στον ψηφιακό κόσμο. Αναλύεται η θεμελιώδης θεωρία του Nyquist-Shannon, η οποία θέτει τα όρια και τις προϋποθέσεις για ακριβή αναπαράσταση σημάτων, και παρουσιάζονται οι έννοιες της κβαντοποίησης και του θορύβου κβαντοποίησης. Αυτά τα ζητήματα είναι κρίσιμα, διότι καθορίζουν το πώς το πραγματικό φυσικό σήμα μετατρέπεται σε ψηφιακή μορφή κατάλληλη για επεξεργασία από FPGA.

Στη συνέχεια, η ενότητα 2.2 εστιάζει στα **FIR φίλτρα (Finite Impulse Response)**, τα οποία αποτελούν τον πυρήνα της παρούσας εργασίας. Παρουσιάζεται η μαθηματική τους περιγραφή, οι ιδιότητες που τα καθιστούν ιδανικά για ακουστικές εφαρμογές (όπως η σταθερότητα και η γραμμική φασική απόκριση), καθώς και οι μέθοδοι υλοποίησής τους σε ψηφιακά συστήματα. Ειδική έμφαση δίνεται στο φίλτρο κινούμενου μέσου όρου (Moving Average FIR Filter), το οποίο συνιστά την απλούστερη αλλά αποτελεσματική μορφή αποθορυβοποίησης.

Η ενότητα 2.3 εξετάζει τον **θόρυβο στον ήχο**, ο οποίος αποτελεί το βασικό πρόβλημα που επιδιώκει να αντιμετωπίσει η εργασία. Παρουσιάζονται οι κατηγορίες θορύβου (λευκός,

χρωματισμένος, περιβαλλοντικός, κβαντοποίησης), τα φασματικά χαρακτηριστικά τους και οι επιπτώσεις τους στην ποιότητα και καταληπτότητα της ακουστικής πληροφορίας. Παράλληλα, συζητούνται οι βασικές τεχνικές φιλτραρίσματος και ακύρωσης θορύβου, με στόχο να καταδειχθεί η σημασία των FIR φίλτρων για την αποκατάσταση του σήματος.

Τέλος, η ενότητα 2.4 εστιάζει στις **FPGA πλατφόρμες και ειδικότερα στην Altera DE2-115 board**, που χρησιμοποιείται για την υλοποίηση του συστήματος. Αναλύεται η αρχιτεκτονική των FPGA, οι βασικές τους μονάδες (λογικές κυψέλες, διασυνδέσεις, DSP slices), τα πλεονεκτήματα που προσφέρουν έναντι των κλασικών μικροεπεξεργαστών και DSP chips, καθώς και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης πλακέτας, όπως ο ενσωματωμένος Audio CODEC, οι θύρες εισόδου/εξόδου και οι δυνατότητες προγραμματισμού μέσω Quartus II.

Με βάση τα παραπάνω, το παρόν κεφάλαιο δεν αποτελεί απλώς μια παράθεση θεωρητικών εννοιών αλλά μια **συστηματική χαρτογράφηση** των θεμελίων πάνω στα οποία στηρίζεται η υλοποίηση. Η κατανόηση των ψηφιακών σημάτων και της δειγματοληψίας παρέχει το πλαίσιο εισόδου, τα FIR φίλτρα συνιστούν τον βασικό μηχανισμό επεξεργασίας, ο θόρυβος καθορίζει το πρόβλημα προς επίλυση, και τα FPGA αποτελούν το τεχνολογικό υπόβαθρο για την πρακτική εφαρμογή. Η συνολική προσέγγιση ενώνει θεωρία και πράξη, προσφέροντας τη βάση για τα επόμενα στάδια ανάλυσης, σχεδίασης και αξιολόγησης του συστήματος.

2.2 Ψηφιακά Σήματα και Δειγματοληψία

Η μετάβαση από τον αναλογικό στον ψηφιακό κόσμο αποτελεί ένα από τα πλέον καθοριστικά βήματα στην εξέλιξη της επιστήμης και τεχνολογίας της επεξεργασίας σήματος. Η **ψηφιοποίηση των σημάτων** έφερε μια πραγματική επανάσταση, καθώς κατέστησε δυνατή όχι μόνο την αποθήκευση αλλά και την αξιόπιστη επεξεργασία, μετάδοση και αναπαραγωγή δεδομένων με πρωτοφανή ευελιξία. Τα αναλογικά συστήματα, τα οποία κυριαρχούσαν επί δεκαετίες, αποδείχθηκαν ιδιαίτερα ευάλωτα σε θόρυβο, παραμορφώσεις και μη γραμμικότητες, ενώ η δυνατότητα βελτίωσης ή προσαρμογής τους περιοριζόταν σημαντικά από φυσικούς και τεχνολογικούς παράγοντες. Αντιθέτως, τα ψηφιακά συστήματα επιτρέπουν την υλοποίηση πολύπλοκων μαθηματικών αλγορίθμων, όπως μετασχηματισμών Fourier και Wavelet, αλγορίθμων ανάλυσης φάσματος ή προσαρμοστικών φίλτρων, οι οποίοι θα ήταν αδύνατον να υλοποιηθούν με αναλογικές τεχνικές (Schafer, 2010). Για τον λόγο αυτό, η διαδικασία μετατροπής ενός αναλογικού σήματος σε ψηφιακή μορφή αποτελεί το πρώτο και θεμελιώδες στάδιο σε οποιοδήποτε σύστημα DSP.

2.2.1 Αναλογικά και Ψηφιακά Σήματα

Η έννοια του σήματος βρίσκεται στον πυρήνα της θεωρίας και της πράξης της επεξεργασίας σήματος. Ως **σήμα** ορίζεται κάθε φυσική ποσότητα που μεταβάλλεται με το χρόνο ή με κάποια άλλη ανεξάρτητη μεταβλητή και φέρει πληροφορία. Στην επεξεργασία ήχου, το σήμα είναι η μεταβολή της πίεσης του αέρα σε συνάρτηση με το χρόνο· σε εφαρμογές τηλεπικοινωνιών είναι η μεταβολή της τάσης ή του ρεύματος που αντιστοιχεί σε κωδικοποιημένα δεδομένα· ενώ στη βιοϊατρική μπορεί να είναι η ηλεκτρική δραστηριότητα της καρδιάς (ΗΚΓ) ή του εγκεφάλου (EEG).

Τα σήματα διακρίνονται σε **αναλογικά** και **ψηφιακά**, ανάλογα με τον τρόπο που αναπαρίστανται και μεταβάλλονται.

Ένα **αναλογικό σήμα** $x(t)$ είναι μια **συνεχής συνάρτηση του χρόνου**, η οποία μπορεί να λάβει θεωρητικά άπειρες τιμές τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και στο πεδίο του πλάτους. Για παράδειγμα, η ανθρώπινη ομιλία αποτελείται από συνεχείς μεταβολές της πίεσης του αέρα που συλλαμβάνονται από το αυτί ή από ένα μικρόφωνο. Παρόμοια, ένα μουσικό όργανο παράγει κυματισμούς που μπορούν να περιγραφούν με αναλογικά σήματα. Παράλληλα, στον χώρο των επιστημών υγείας, αναλογικά σήματα είναι τα **ηλεκτροκαρδιογραφήματα (ΗΚΓ)** και τα **ηλεκτροεγκεφαλογραφήματα (EEG)**, τα οποία καταγράφουν συνεχείς ηλεκτρικές δραστηριότητες του ανθρώπινου οργανισμού. Ακόμη και οι αισθητήρες θερμοκρασίας ή πίεσης παράγουν αναλογικά σήματα.

Ωστόσο, τα αναλογικά σήματα παρουσιάζουν ορισμένα μειονεκτήματα:

- Είναι **επιρρεπή σε θόρυβο και παραμορφώσεις**. Κατά τη μετάδοση μέσω καναλιών επικοινωνίας, η προσθήκη θορύβου αλλοιώνει την πληροφορία.
- Η **αναπαραγωγή και αποθήκευσή** τους είναι προβληματική, διότι κάθε αντιγραφή συνοδεύεται από απώλειες.
- Η **σταθερότητα** των συστημάτων που βασίζονται αποκλειστικά σε αναλογικά κυκλώματα περιορίζεται από τη γήρανση των εξαρτημάτων και τις περιβαλλοντικές μεταβολές (θερμοκρασία, υγρασία).

Συνεπώς, αν και τα αναλογικά σήματα αποτελούν τη φυσική μορφή της πληροφορίας στον κόσμο γύρω μας, η επεξεργασία τους με αναλογικά μέσα έχει πρακτικούς περιορισμούς.

Για να ξεπεραστούν οι αδυναμίες της αναλογικής επεξεργασίας, αναπτύχθηκε η έννοια του **ψηφιακού σήματος**. Ένα ψηφιακό σήμα είναι μια **διακριτή ακολουθία αριθμητικών τιμών**, οι οποίες αντιστοιχούν σε δείγματα ενός αναλογικού σήματος που έχουν καταγραφεί σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές και έχουν κβαντιστεί σε διακριτά επίπεδα.

Η τυπική μορφή ενός ψηφιακού σήματος είναι:

$$x[n], n \in \mathbb{Z}$$

όπου το n είναι ακέραιος δείκτης, ο οποίος αναπαριστά τη θέση του δείγματος στον διακριτό χρόνο.

Η **δυναδική κωδικοποίηση** επιτρέπει σε κάθε δείγμα να αναπαρίσταται με b bits, δημιουργώντας 2^b δυνατές στάθμες. Αυτό σημαίνει ότι η ακριβής τιμή του αναλογικού σήματος προσεγγίζεται με μια διακριτή τιμή, εισάγοντας αναπόφευκτα το σφάλμα κβαντοποίησης. Παρ' όλα αυτά, η ψηφιακή αναπαράσταση προσφέρει σημαντικά πλεονεκτήματα έναντι της αναλογικής:

- **Αντοχή στον θόρυβο:** τα ψηφιακά σήματα μπορούν να αντιγραφούν και να μεταδοθούν χωρίς απώλειες, εφόσον η πληροφορία 0 και 1 διατηρείται.
- **Αναπαραγωγιμότητα:** τα ίδια δεδομένα και ο ίδιος αλγόριθμος οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα, ανεξάρτητα από το περιβάλλον ή το υλικό.
- **Ευελιξία:** ένα ψηφιακό σύστημα μπορεί να εκτελέσει πολλαπλές λειτουργίες με αλλαγή λογισμικού ή προγράμματος.
- **Πολυπλοκότητα:** δυνατότητα εφαρμογής αλγορίθμων που υπερβαίνουν τις δυνατότητες αναλογικών συστημάτων, όπως ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier (FFT), τα wavelet φίλτρα ή τα προσαρμοστικά φίλτρα.

Η μετάβαση από την αναλογική στην ψηφιακή επεξεργασία σημάτων ξεκίνησε τη δεκαετία του 1960 με την ανάπτυξη των πρώτων ψηφιακών υπολογιστών και μικροεπεξεργαστών. Στη δεκαετία του 1980, με την εφεύρεση των **DSP επεξεργαστών** (Digital Signal Processors), η ψηφιακή επεξεργασία σημάτων έγινε εμπορικά βιώσιμη και εισήλθε σε προϊόντα καθημερινής χρήσης, όπως τα CD players. Σήμερα, οι **FPGA** και οι **SoC (System-**

on-Chip) πλατφόρμες δίνουν τη δυνατότητα εφαρμογής σύνθετων αλγορίθμων DSP σε πραγματικό χρόνο, με χαμηλή καθυστέρηση και υψηλή απόδοση (Meyer-Baese, 2007).

Στο μαθηματικό πλαίσιο, ένα αναλογικό σήμα θεωρείται συνάρτηση:

$$x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ενώ ένα ψηφιακό σήμα είναι μια ακολουθία:

$$x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

Η διαφορά τους είναι θεμελιώδης: στο αναλογικό πεδίο ο χρόνος και το πλάτος είναι συνεχείς, ενώ στο ψηφιακό πεδίο ο χρόνος είναι διακριτός και το πλάτος κβαντισμένο. Αυτή η διάκριση οδηγεί σε εντελώς διαφορετικές τεχνικές επεξεργασίας. Στο αναλογικό πεδίο χρησιμοποιούνται διαφορικές εξισώσεις και φίλτρα RC/LC, ενώ στο ψηφιακό πεδίο χρησιμοποιούνται διαφορικές εξισώσεις διαφορών και αλγόριθμοι υλοποιημένοι σε λογισμικό ή υλικό.

Παραδείγματα Εφαρμογής

- **Αναλογικό σήμα:** η έξοδος ενός μικροφώνου που μεταβάλλεται συνεχώς με τη φωνή.
- **Ψηφιακό σήμα:** το ίδιο σήμα μετά από δειγματοληψία στα 48 kHz και κβαντοποίηση σε 16-bit, αποθηκευμένο ως αρχείο WAV.

Στην πρώτη περίπτωση, η αλλοίωση του μέσου μετάδοσης επηρεάζει άμεσα την ποιότητα του σήματος. Στη δεύτερη, το ψηφιακό σήμα μπορεί να μεταδοθεί μέσω διαδικτύου χωρίς καμία απώλεια ποιότητας, αρκεί να διατηρηθεί η ακεραιότητα των bits.

Η κατανόηση της διάκρισης μεταξύ αναλογικών και ψηφιακών σημάτων είναι θεμελιώδης για την επιστήμη της DSP. Τα αναλογικά σήματα είναι η φυσική μορφή της πληροφορίας, ενώ τα ψηφιακά αποτελούν την τεχνητή, αλλά αποδοτικότερη, αναπαράστασή τους, η οποία καθιστά δυνατή την αξιοποίηση υπολογιστικών μεθόδων για την ανάλυση και βελτίωσή τους. Η μετάβαση αυτή δεν είναι απλώς τεχνολογική αλλά και εννοιολογική, καθώς μεταφέρει το πρόβλημα από το πεδίο της φυσικής στο πεδίο των μαθηματικών και της πληροφορικής.

2.2.2 Η Διαδικασία της Δειγματοληψίας

Η **δειγματοληψία (sampling)** είναι η διαδικασία κατά την οποία ένα συνεχές σήμα $x(t)$ μετατρέπεται σε μια διακριτή ακολουθία τιμών $x[n]$, λαμβάνοντας μετρήσεις σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές με σταθερό χρονικό βήμα. Το χρονικό αυτό διάστημα ονομάζεται **περίοδος δειγματοληψίας** και συμβολίζεται ως T_s . Η μαθηματική έκφραση της διαδικασίας είναι:

$$x[n] = x(nT_s), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Η αντίστροφη ποσότητα, δηλαδή το πόσα δείγματα λαμβάνονται ανά δευτερόλεπτο, ονομάζεται **συχνότητα δειγματοληψίας** και ορίζεται ως:

$$f_s = \frac{1}{T_s}$$

Ένα σήμα που έχει μετατραπεί με τον τρόπο αυτό σε διακριτή μορφή λέγεται **σήμα διακριτού χρόνου**. Η σημασία της δειγματοληψίας στην ψηφιακή επεξεργασία είναι τεράστια, καθώς αποτελεί το «σημείο εισόδου» οποιασδήποτε αναλογικής πληροφορίας στο ψηφιακό περιβάλλον.

Η μαθηματική βάση της δειγματοληψίας στηρίζεται στο **Θεώρημα Δειγματοληψίας** (Nyquist, 1928; Shannon, 1949). Το θεώρημα δηλώνει ότι ένα σήμα με μέγιστη συχνότητα f_{max} μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως και χωρίς απώλειες από τα δείγματά του, εφόσον η συχνότητα δειγματοληψίας είναι τουλάχιστον διπλάσια:

$$f_s \geq 2f_{max}$$

Η συχνότητα $\frac{f_s}{2}$ ονομάζεται **συχνότητα Nyquist** και αποτελεί το όριο πέρα από το οποίο οι συχνότητες του αρχικού σήματος δεν μπορούν να αναπαρασταθούν σωστά.

Η δειγματοληψία, όπως ορίζεται από το θεώρημα Nyquist–Shannon, απαιτεί η συχνότητα δειγματοληψίας να είναι τουλάχιστον διπλάσια της μέγιστης συχνότητας του σήματος, προκειμένου να είναι δυνατή η ακριβής ανακατασκευή του χωρίς απώλειες πληροφορίας. Στη σύγχρονη πρακτική επεξεργασία σήματος, ωστόσο, συχνά χρησιμοποιούνται τεχνικές που υπερβαίνουν ή υπολείπονται αυτού του ελάχιστου θεωρητικού ορίου, γνωστές ως **υπερδειγματοληψία (oversampling)** και **υποδειγματοληψία (undersampling ή decimation)**. Οι δύο αυτές τεχνικές, παρόλο που φαίνονται αντίθετες, αποτελούν ισχυρά εργαλεία που εξυπηρετούν διαφορετικούς στόχους.

Η **υπερδειγματοληψία** αναφέρεται στη διαδικασία λήψης δειγμάτων σε συχνότητα **πολύ μεγαλύτερη από το θεωρητικά απαραίτητο όριο Nyquist**. Για παράδειγμα, αν ένα σήμα ήχου περιορίζεται στα 20 kHz, τότε θεωρητικά αρκεί συχνότητα δειγματοληψίας 40 kHz. Ωστόσο, στην πράξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί δειγματοληψία στα 96 kHz ή ακόμα και στα 192 kHz (Pohlmann, 2011).

Τα βασικά πλεονεκτήματα της υπερδειγματοληψίας είναι:

1. **Μείωση θορύβου κβαντοποίησης:** Ο θόρυβος κβαντοποίησης κατανέμεται στο φάσμα μέχρι τη συχνότητα δειγματοληψίας $\frac{f_s}{2}$. Με υψηλότερη f_s , ο ίδιος θόρυβος «απλώνεται» σε μεγαλύτερο φασματικό εύρος, μειώνοντας την πυκνότητά του στη ζώνη ενδιαφέροντος. Σε συνδυασμό με τεχνικές noise shaping, αυτό οδηγεί σε βελτίωση του λόγου σήματος προς θόρυβο (SNR) (Temes, 2005).
2. **Απλούστερη σχεδίαση φίλτρων:** Σε ένα σύστημα με συχνότητα δειγματοληψίας πολύ πάνω από το όριο Nyquist, το anti-aliasing φίλτρο που εφαρμόζεται πριν τη δειγματοληψία μπορεί να έχει πιο ήπια χαρακτηριστικά, καθώς η μεταβατική περιοχή μεταξύ ζώνης διέλευσης και αποκοπής είναι ευρύτερη. Αυτό απλοποιεί τη σχεδίαση και μειώνει το κόστος υλοποίησης.
3. **Βελτίωση ακρίβειας στην αναπαραγωγή ήχου:** Συστήματα υψηλής πιστότητας (high fidelity) χρησιμοποιούν υπερδειγματοληψία ώστε να διασφαλίσουν ότι το παραγόμενο σήμα είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στο αρχικό. Για τον λόγο αυτό, τα σύγχρονα DACs ενσωματώνουν τεχνικές εσωτερικής υπερδειγματοληψίας.

Παρά τα πλεονεκτήματα, η υπερδειγματοληψία συνεπάγεται αυξημένες **υπολογιστικές απαιτήσεις** και μεγαλύτερο όγκο δεδομένων για αποθήκευση και μετάδοση. Συνεπώς, εφαρμόζεται κυρίως όταν η ποιότητα προέχει της αποδοτικότητας.

Η **υποδειγματοληψία**, γνωστή και ως **decimation**, είναι η διαδικασία μείωσης της συχνότητας δειγματοληψίας ενός σήματος. Πρόκειται για το αντίστροφο της υπερδειγματοληψίας και χρησιμοποιείται κυρίως για:

1. **Μείωση του όγκου δεδομένων:** Σε εφαρμογές αποθήκευσης ή μετάδοσης, η υποδειγματοληψία μειώνει τις απαιτήσεις σε εύρος ζώνης και μνήμη. Για παράδειγμα, στη συμπίεση φωνής, η μείωση της συχνότητας δειγματοληψίας σε 8

kHz είναι αρκετή, αφού το φάσμα της φωνής περιορίζεται περίπου στα 3,4 kHz (GSM standard).

2. **Αποδοτικότητα σε πραγματικό χρόνο:** Η μείωση της f_s μειώνει τον αριθμό υπολογισμών που απαιτούνται σε κάθε βήμα επεξεργασίας, κάτι που είναι κρίσιμο σε ενσωματωμένα συστήματα χαμηλής κατανάλωσης ενέργειας.

Ωστόσο, η υποδειγματοληψία εγκυμονεί τον κίνδυνο του **aliasing**. Για να αποφευχθεί, πριν από την εφαρμογή decimation, το σήμα διέρχεται από ένα **προ-φίλτρο χαμηλής διέλευσης** που περιορίζει το φάσμα εντός της νέας συχνότητας Nyquist. Αυτό το βήμα είναι απαραίτητο ώστε να αποτραπεί η εμφάνιση ψευδο-συχνοτήτων που θα αλλοιώσουν την πληροφορία.

Στη σύγχρονη ψηφιακή επεξεργασία συναντάμε συχνά τον **συνδυασμό υπερδειγματοληψίας και υποδειγματοληψίας**. Για παράδειγμα, στη μετατροπή σήματος από έναν ρυθμό δειγματοληψίας σε έναν άλλο (sample rate conversion), εφαρμόζεται αρχικά υπερδειγματοληψία σε ένα κοινό πολλαπλάσιο και στη συνέχεια υποδειγματοληψία στη νέα επιθυμητή συχνότητα (Rabiner, 1983). Αυτό χρησιμοποιείται σε συστήματα αναπαραγωγής ήχου (π.χ. μετατροπή από 44.1 kHz σε 48 kHz) αλλά και σε τηλεπικοινωνιακά σχήματα. Η υπερδειγματοληψία και η υποδειγματοληψία αποτελούν δύο βασικά εργαλεία στη σύγχρονη DSP. Η πρώτη προσφέρει βελτίωση ποιότητας και απλοποίηση σχεδιασμού, ενώ η δεύτερη εξασφαλίζει οικονομία πόρων και αποδοτικότητα. Η σωστή χρήση τους εξαρτάται από τις απαιτήσεις της εφαρμογής, είτε πρόκειται για υψηλή ακουστική πιστότητα είτε για περιορισμούς σε υπολογιστική ισχύ και εύρος ζώνης.

Στα συστήματα αναπαραγωγής μουσικής, η επιλογή της συχνότητας δειγματοληψίας και του αριθμού των bits ανά δείγμα – δηλαδή της ανάλυσης – καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό την ποιότητα του παραγόμενου ήχου. Στην περίπτωση του CD Audio, έχει καθιερωθεί το πρότυπο των 44.1 kHz με ανάλυση 16-bit. Η συγκεκριμένη επιλογή θεωρείται επαρκής για την ανθρώπινη ακοή, καθώς καλύπτει το εύρος συχνοτήτων μέχρι περίπου 20 kHz, το οποίο αποτελεί το ανώτερο όριο της ακουστικής αντίληψης του ανθρώπου.

Αντίθετα, στα DVD Audio η συχνότητα δειγματοληψίας αυξάνεται στα 48 kHz ή ακόμη και στα 96 kHz, ενώ η ανάλυση ανέρχεται στα 24-bit. Με τον τρόπο αυτό, το δυναμικό εύρος επεκτείνεται σημαντικά και το επίπεδο θορύβου κβαντοποίησης μειώνεται, οδηγώντας σε υψηλότερη πιστότητα και πιο καθαρό αποτέλεσμα, ιδιαίτερα σε συνθήκες επαγγελματικής ακρόασης.

Στα στούντιο ηχογράφησης οι απαιτήσεις είναι ακόμη μεγαλύτερες, καθώς ο στόχος δεν είναι μόνο η ακρόαση αλλά και η περαιτέρω επεξεργασία του ηχητικού υλικού (μίξη, mastering). Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούνται συχνότητες δειγματοληψίας που φθάνουν έως και τα 192 kHz, με ανάλυση 24-bit ή ακόμη και 32-bit floating point. Η υψηλή αυτή ανάλυση εξασφαλίζει τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια κατά την παραγωγική διαδικασία και ελαχιστοποιεί τα σφάλματα που ενδέχεται να προκύψουν κατά τις πολλαπλές μετατροπές και επεξεργασίες.

Επιπλέον, σε τομείς όπως οι τηλεπικοινωνίες οι απαιτήσεις διαφοροποιούνται, καθώς στόχος είναι η αποδοτική μετάδοση και όχι η απόλυτη πιστότητα. Για παράδειγμα, στο σύστημα GSM χρησιμοποιείται συχνότητα δειγματοληψίας μόλις 8 kHz, αφού το φάσμα της ανθρώπινης φωνής που είναι κρίσιμο για την καταληπτότητα περιορίζεται περίπου στα 3.4 kHz. Η επιλογή αυτή επιτρέπει σημαντική οικονομία τόσο στην αποθήκευση όσο και στο απαιτούμενο εύρος ζώνης κατά τη μετάδοση, διατηρώντας παράλληλα την ποιότητα σε αποδεκτά επίπεδα για τηλεφωνικές επικοινωνίες.

2.2.3 Μαθηματική Προσέγγιση Δειγματοληψίας με Μετασχηματισμό Fourier

Η διαδικασία της δειγματοληψίας μπορεί να αναλυθεί πιο αυστηρά με τη χρήση του **μετασχηματισμού Fourier**, ο οποίος παρέχει το εργαλείο για τη μελέτη των σημάτων στο πεδίο της συχνότητας. Αν θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα συνεχές σήμα $x(t)$ με μετασχηματισμό Fourier $X(f)$, τότε η δειγματοληψία του σήματος σε χρονικά διαστήματα T_s μπορεί να εκφραστεί ως πολλαπλασιασμός του σήματος με μια περιοδική ακολουθία παλμών, γνωστή και ως **κτένα δειγματοληψίας (sampling comb)**:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

Το δειγματοληπτημένο σήμα είναι:

$$x_s(t) = x(t) \cdot s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι η διαδικασία της δειγματοληψίας δεν είναι απλώς λήψη τιμών σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, αλλά ισοδυναμεί με «διάτρηση» του αρχικού σήματος με μια ιδανική περιοδική συνάρτηση δέλτα.

Στο πεδίο της συχνότητας, η πράξη του πολλαπλασιασμού στον χρόνο ισοδυναμεί με συνέλιξη. Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x_s(t)$ είναι:

$$X_s(f) = X(f) \cdot \frac{1}{T_s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

Με άλλα λόγια, το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος αποτελείται από άπειρα αντίγραφα του αρχικού φάσματος $X(f)$, τα οποία επαναλαμβάνονται ανά πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας $f_s = \frac{1}{T_s}$.

Αν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι μεγαλύτερη ή ίση από το διπλάσιο της μέγιστης συχνότητας f_{max} του αρχικού σήματος (δηλαδή ικανοποιείται το κριτήριο Nyquist), τότε τα αντίγραφα αυτά δεν επικαλύπτονται. Στην περίπτωση αυτή, ένα φίλτρο χαμηλής διέλευσης μπορεί να απομονώσει το αρχικό φάσμα και να επιτύχει **τέλεια ανακατασκευή**.

2.2.4 Το Φαινόμενο της Αναδίπλωσης (Aliasing)

Το φαινόμενο της αναδίπλωσης, γνωστό διεθνώς ως **aliasing**, αποτελεί έναν από τους πιο κρίσιμους περιορισμούς που εμφανίζονται κατά τη διαδικασία της δειγματοληψίας και γενικότερα στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος. Ουσιαστικά, πρόκειται για μια μορφή παραμόρφωσης που οφείλεται στο γεγονός ότι διαφορετικές συχνότητες του αρχικού αναλογικού σήματος «αναμιγνύονται» και προβάλλονται λανθασμένα στο ίδιο φασματικό εύρος του δειγματοληπτημένου σήματος. Με άλλα λόγια, το aliasing δημιουργεί την ψευδαίσθηση ότι το αρχικό σήμα περιέχει συχνότητες που στην πραγματικότητα δεν υπήρχαν, ενώ ταυτόχρονα αλλοιώνει ή εξαφανίζει τις πραγματικές συνιστώσες υψηλής συχνότητας (Schafer, 2010).

Η αιτία του φαινομένου έγκειται στο ότι η δειγματοληψία ενός συνεχούς σήματος ισοδυναμεί, στο πεδίο της συχνότητας, με την επαναλαμβανόμενη αντιγραφή του φάσματος του σήματος ανά πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας f_s . Αν η συχνότητα f_s είναι μικρότερη από το διπλάσιο της μέγιστης συχνότητας του σήματος $2f_{max}$, τότε τα φασματικά αυτά αντίγραφα επικαλύπτονται. Η επικάλυψη αυτή οδηγεί σε αδυναμία διάκρισης των πραγματικών συχνοτικών συνιστωσών από τις ψευδείς, με αποτέλεσμα την εμφάνιση παραμόρφωσης που δεν είναι δυνατό να διορθωθεί εκ των υστέρων (Manolakis, 2007).

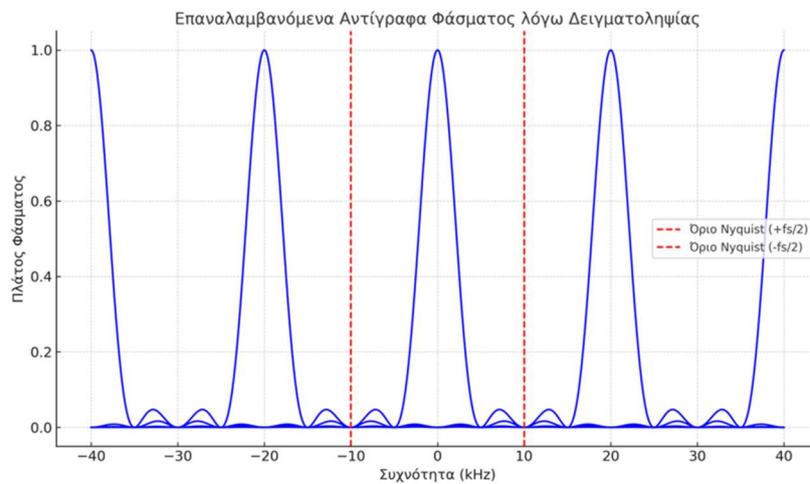
Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα προκύπτει στην περίπτωση **ακουστικών σημάτων**. Ας υποθέσουμε ότι το σήμα $x(t)$ περιέχει μια καθαρή αρμονική συχνότητας 15 kHz και επιλέγεται συχνότητα δειγματοληψίας $f_s=20$ kHz. Το φάσμα του σήματος θα αναπαρασταθεί με αντίγραφα ανά 20 kHz. Ωστόσο, η συχνότητα Nyquist είναι μόλις 10 kHz, με αποτέλεσμα η συνιστώσα των 15 kHz να «αναδιπλωθεί» και να εμφανιστεί ως ψευδο-συχνότητα 5 kHz. Ο ακροατής θα αντιληφθεί έναν ήχο διαφορετικό από τον πραγματικό, και μάλιστα σε εντελώς λανθασμένη περιοχή συχνοτήτων. Η αρχική πληροφορία έχει χαθεί ανεπιστρεπτί, αφού το ψηφιακό σήμα δεν περιέχει πλέον τα δεδομένα που απαιτούνται για την ανακατασκευή της πραγματικής συχνότητας (Lyons, 2011).

Το φαινόμενο αυτό δεν περιορίζεται μόνο στον ήχο. Στη **ψηφιακή επεξεργασία εικόνας**, για παράδειγμα, η ανεπαρκής δειγματοληψία χωρικών συχνοτήτων οδηγεί στην εμφάνιση παραμορφώσεων όπως το γνωστό **moiré pattern**, όπου δημιουργούνται ψευδείς χωρικές δομές που δεν υπήρχαν στο πρωτότυπο αντικείμενο (Smith, 1997). Επομένως, το aliasing αποτελεί γενικό πρόβλημα που εμφανίζεται κάθε φορά που επιχειρείται ψηφιοποίηση δεδομένων με ανεπαρκή ρυθμό δειγματοληψίας, είτε αυτά είναι χρονικά σήματα είτε χωρικά.

Για την αποφυγή του aliasing, είναι απαραίτητη η χρήση **anti-aliasing φίλτρων** πριν από τη δειγματοληψία. Τα φίλτρα αυτά είναι συνήθως αναλογικά φίλτρα χαμηλής διέλευσης, τα οποία περιορίζουν το φάσμα του σήματος στο αποδεκτό εύρος $(-f_s/2, +f_s/2)$. Με τον τρόπο αυτό, αποκόπτονται όλες οι ανεπιθύμητες υψηλές συχνότητες που θα οδηγούσαν σε επικάλυψη και παραμόρφωση. Στην πράξη, επειδή τα πραγματικά φίλτρα δεν είναι ιδανικά, η συχνότητα δειγματοληψίας επιλέγεται ελαφρώς μεγαλύτερη από το θεωρητικό όριο, ώστε να υπάρχει περιθώριο ασφαλείας για την αποκοπή (Jervis, 2002).

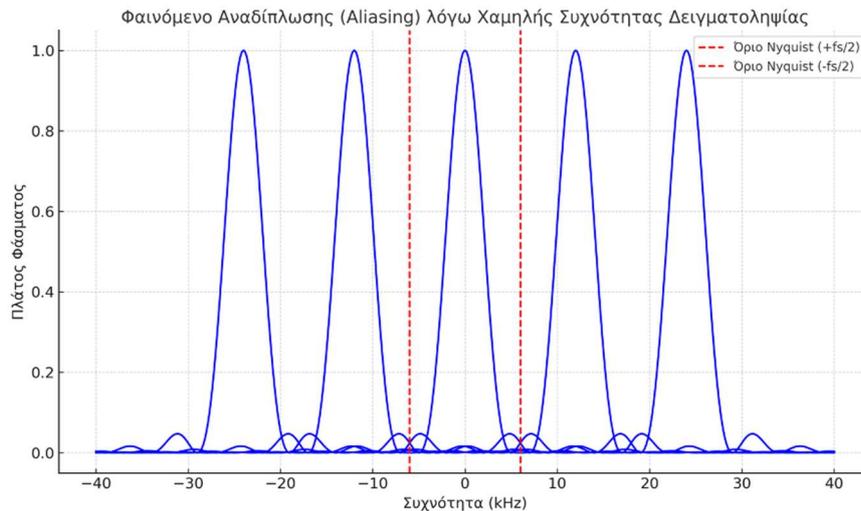
Η σημασία της κατανόησης του aliasing δεν είναι μόνο θεωρητική, αλλά και βαθιά πρακτική. Κάθε σχεδίαση συστήματος DSP πρέπει να εξασφαλίζει ότι οι συνθήκες δειγματοληψίας ικανοποιούν το κριτήριο Nyquist, ενώ ταυτόχρονα εφαρμόζονται κατάλληλα φίλτρα anti-aliasing για να διασφαλίζεται η ακεραιότητα των δεδομένων. Η αποτυχία σε αυτό το στάδιο οδηγεί σε σφάλματα που δεν μπορούν να διορθωθούν σε επόμενα στάδια επεξεργασίας, καθιστώντας ουσιαστικά άχρηστο το ψηφιακό σήμα για τον επιδιωκόμενο σκοπό.

Η ανάλυση της διαδικασίας δειγματοληψίας καθίσταται σαφέστερη μέσα από τα παρακάτω γραφήματα, τα οποία αποτυπώνουν με οπτικό τρόπο τη θεωρία που παρουσιάστηκε. Στο **Σχήμα 2.1** απεικονίζεται η περίπτωση κατά την οποία η συχνότητα δειγματοληψίας είναι επαρκώς υψηλή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο του Nyquist. Το αρχικό φάσμα του σήματος επαναλαμβάνεται σε πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας, χωρίς όμως να υπάρχει αλληλοεπικάλυψη μεταξύ των αντιγράφων. Αυτό σημαίνει ότι η πληροφορία του αρχικού σήματος διατηρείται ανέπαφη και μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως μέσω κατάλληλου φίλτρου χαμηλής διέλευσης. Η εικόνα αυτή αποδεικνύει πώς η θεωρητική συνθήκη του Nyquist οδηγεί σε πρακτική δυνατότητα «τέλειας» ανακατασκευής.



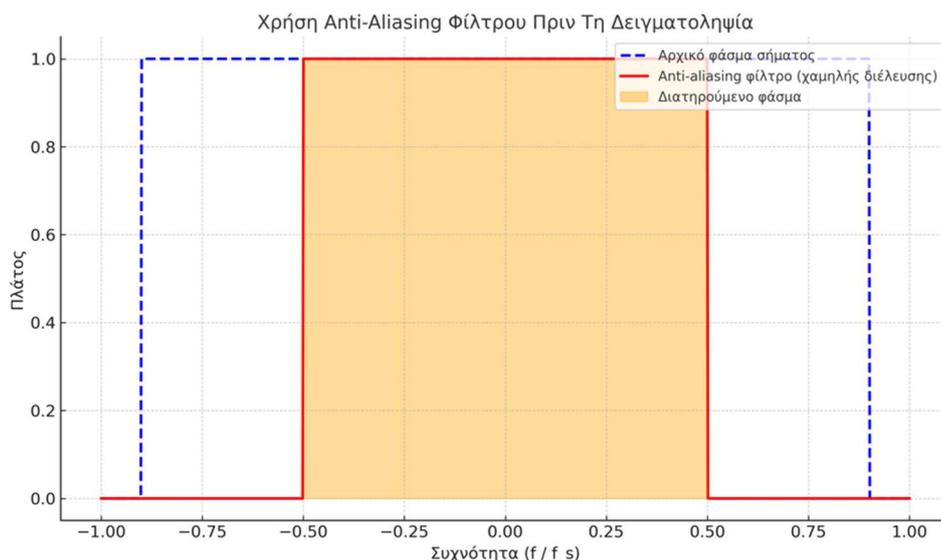
Σχήμα 2.1: Επαναλαμβανόμενα αντίγραφα του φάσματος στο πεδίο της συχνότητας λόγω δειγματοληψίας. Η συχνότητα Nyquist ($\pm fs/2$) καθορίζει το μέγιστο εύρος που μπορεί να αναπαρασταθεί χωρίς παραμόρφωση.

Αντιθέτως, στο **Σχήμα 2.2** παρουσιάζεται το φαινόμενο της αναδίπλωσης (aliasing), το οποίο εμφανίζεται όταν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι χαμηλότερη από το απαιτούμενο όριο. Σε αυτή την περίπτωση, τα επαναλαμβανόμενα αντίγραφα του φάσματος επικαλύπτονται μεταξύ τους, με αποτέλεσμα η πληροφορία του αρχικού σήματος να αλλοιώνεται ανεπανόρθωτα. Οι υψηλές συχνότητες «μεταφέρονται» σε χαμηλότερες περιοχές του φάσματος, δημιουργώντας ψευδείς συνιστώσες που δεν υπήρχαν στο αρχικό σήμα. Η κατάσταση αυτή καταδεικνύει τη σημασία της σωστής επιλογής συχνότητας δειγματοληψίας σε εφαρμογές DSP.



Σχήμα 2.2: Φαινόμενο αναδίπλωσης (aliasing) λόγω χαμηλής συχνότητας δειγματοληψίας. Η αλληλεπικάλυψη των φασματικών αντιγράφων οδηγεί σε απώλεια πληροφορίας και μη αναστρέψιμη παραμόρφωση του σήματος.

Τέλος, το **Σχήμα 2.3** δείχνει την πρακτική λύση για την αποφυγή του aliasing μέσω της χρήσης ενός αναλογικού **anti-aliasing φίλτρου**. Το φίλτρο αυτό λειτουργεί ως προεπεξεργασία πριν από τη δειγματοληψία, περιορίζοντας το φάσμα του σήματος στο επιτρεπόμενο εύρος ($-f_s/2, +f_s/2$). Με αυτόν τον τρόπο αποκόπτονται οι υψηλές συχνότητες που θα προκαλούσαν επικάλυψη, εξασφαλίζοντας ότι το σήμα που θα περάσει στη φάση της δειγματοληψίας μπορεί να αναπαρασταθεί και να ανακατασκευαστεί χωρίς παραμορφώσεις.



Σχήμα 2.3: Χρήση anti-aliasing φίλτρου πριν από τη δειγματοληψία. Το φίλτρο χαμηλής διέλευσης αποκόπτει τις συχνότητες πέρα από το όριο Nyquist, αποτρέποντας το φαινόμενο της αναδίπλωσης.

Συνολικά, τα τρία αυτά σχήματα απεικονίζουν την πλήρη αλληλουχία των δυνατών περιπτώσεων: τη σωστή δειγματοληψία, το πρόβλημα της αναδίπλωσης και την προληπτική αντιμετώπιση με τη χρήση φίλτρου anti-aliasing. Η κατανόηση των φαινομένων αυτών είναι θεμελιώδης για κάθε μελέτη και υλοποίηση ψηφιακής επεξεργασίας σήματος, καθώς από τη σωστή επιλογή συχνότητας δειγματοληψίας και την κατάλληλη φιλτραριστική προεπεξεργασία εξαρτάται άμεσα η ποιότητα και η αξιοπιστία του τελικού ψηφιακού σήματος.

2.2.5 Κβαντοποίηση

Μετά τη διαδικασία της δειγματοληψίας, κατά την οποία το συνεχές σήμα μετατρέπεται σε διακριτές τιμές χρονικής στιγμής, το επόμενο κρίσιμο βήμα στη μετατροπή ενός αναλογικού σήματος σε ψηφιακή μορφή είναι η **κβαντοποίηση**. Η κβαντοποίηση (quantization) αναφέρεται στη διαδικασία κατά την οποία οι τιμές πλάτους των δειγμάτων αντιστοιχίζονται σε ένα πεπερασμένο και διακριτό σύνολο επιπέδων. Επειδή σε έναν ψηφιακό υπολογιστή δεν είναι δυνατόν να αποθηκευτεί ένας πραγματικός αριθμός με άπειρη ακρίβεια, η κβαντοποίηση ουσιαστικά μετατρέπει τις συνεχείς τιμές πλάτους σε διακριτά επίπεδα που μπορούν να αναπαρασταθούν με περιορισμένο αριθμό bits (Manolakis, 2007).

Η ακρίβεια της κβαντοποίησης καθορίζεται από τον αριθμό των bits που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση κάθε δείγματος. Αν συμβολίσουμε με b τον αριθμό των bits, τότε ο συνολικός αριθμός των επιπέδων κβαντοποίησης είναι:

$$L = 2^b$$

Για παράδειγμα, ένας μετατροπέας 8-bit διαθέτει $2^8=256$ στάθμες, ενώ ένας μετατροπέας 16-bit έχει $2^{16}= 65,536$ στάθμες. Αντίστοιχα, σε επαγγελματικές εφαρμογές στούντιο χρησιμοποιούνται συχνά μετατροπείς 24-bit, οι οποίοι παρέχουν $2^{24} \approx 16.7$ εκατομμύρια στάθμες. Όσο περισσότερα είναι τα bits, τόσο μικρότερο είναι το βήμα κβαντοποίησης, δηλαδή η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών επιπέδων, και άρα τόσο πιο πιστή είναι η αναπαράσταση του αρχικού αναλογικού σήματος (Schafer, 2010).

Η **κβαντοποίηση** όμως εισάγει ένα αναπόφευκτο σφάλμα, γνωστό ως **σφάλμα κβαντοποίησης**. Το σφάλμα αυτό ορίζεται ως η διαφορά ανάμεσα στην πραγματική αναλογική τιμή ενός δείγματος και στην κβαντισμένη τιμή στην οποία αντιστοιχήθηκε. Στις περισσότερες περιπτώσεις, το σφάλμα αυτό προσεγγίζεται στατιστικά ως τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-\Delta/2, +\Delta/2]$, όπου Δ είναι το βήμα κβαντοποίησης.

Το σφάλμα αυτό εμφανίζεται ως ένας πρόσθετος όρος θορύβου, γνωστός ως **θόρυβος κβαντοποίησης (quantization noise)**, ο οποίος θεωρείται κατά προσέγγιση λευκός, δηλαδή με επίπεδη φασματική πυκνότητα (Smith, 1997).

Η ύπαρξη του θορύβου κβαντοποίησης περιορίζει την ποιότητα του ψηφιακού σήματος. Για να ποσοτικοποιηθεί η επίδρασή του, χρησιμοποιείται συχνά η έννοια του **λόγου σήματος προς θόρυβο κβαντοποίησης (Signal-to-Quantization-Noise Ratio, SQNR)**, ο οποίος εκφράζει τη σχέση ισχύος μεταξύ του χρήσιμου σήματος και του θορύβου κβαντοποίησης. Ο SQNR δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

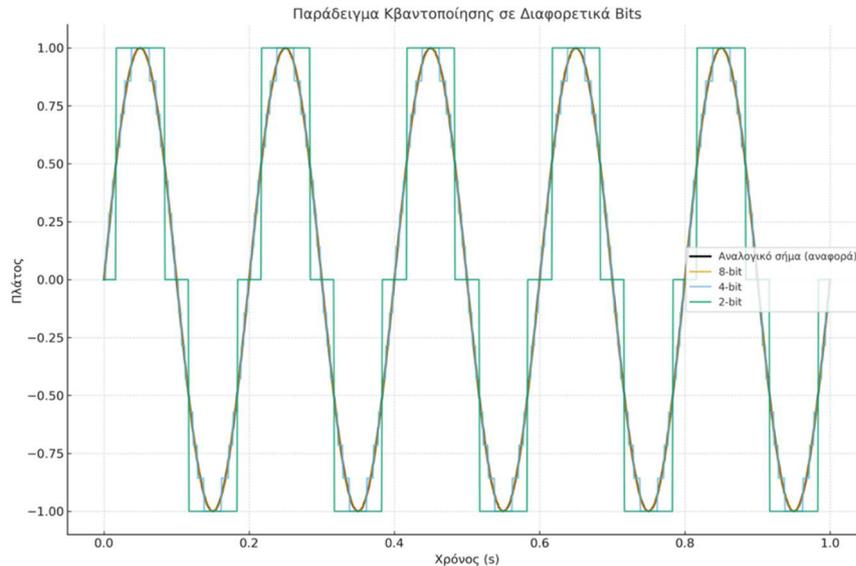
$$\text{SQNR} \approx 6.02b + 1.76 \text{ (dB)}$$

όπου b είναι ο αριθμός των bits. Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι κάθε επιπλέον bit στην ανάλυση αυξάνει το θεωρητικό δυναμικό εύρος κατά περίπου 6 dB. Έτσι, ένας μετατροπέας 8-bit προσφέρει δυναμικό εύρος περίπου 48 dB, ένας 16-bit γύρω στα 96 dB (επαρκές για εφαρμογές όπως τα CD Audio), ενώ ένας 24-bit παρέχει περίπου 144 dB, που καλύπτει τις απαιτήσεις επαγγελματικών στούντιο ηχογράφησης και μίξης (Lyons, 2011).

Η επιλογή του αριθμού των bits δεν είναι απλώς θεωρητικό ζήτημα αλλά έχει άμεσες συνέπειες στην πρακτική εμπειρία. Για παράδειγμα, στην αναπαραγωγή μουσικής υψηλής πιστότητας (hi-fi) τα 16-bit θεωρούνται ικανοποιητικά, καθώς το δυναμικό εύρος υπερβαίνει τις ακουστικές δυνατότητες του ανθρώπου. Ωστόσο, σε διαδικασίες μίξης και mastering, όπου το σήμα υφίσταται πολλαπλές επεξεργασίες, η μεγαλύτερη ανάλυση των 24-bit ή ακόμη και των 32-bit floating-point είναι απαραίτητη για την αποφυγή σωρευτικών σφαλμάτων κβαντοποίησης. Αντίθετα, σε εφαρμογές όπως οι τηλεπικοινωνίες, όπου προτεραιότητα έχει η εξοικονόμηση εύρους ζώνης και αποθηκευτικού χώρου, χρησιμοποιούνται μικρότερες αναλύσεις (π.χ. 8-bit), καθώς η ποιότητα μπορεί να είναι χαμηλότερη χωρίς να επηρεάζεται σημαντικά η κατανόηση του σήματος φωνής.

Στο **Σχήμα 2.4** παρουσιάζεται ένα παράδειγμα κβαντοποίησης ενός απλού ημιτονοειδούς σήματος με διαφορετικά βάθη bit. Όπως φαίνεται, όσο μικρότερος είναι ο αριθμός των bits (π.χ. 2-bit ή 4-bit), τόσο πιο εμφανής είναι η παραμόρφωση της κυματομορφής, καθώς οι τιμές του σήματος «στρογγυλοποιούνται» σε λίγα διαθέσιμα επίπεδα. Το αποτέλεσμα είναι μια χονδροειδής αναπαράσταση που απέχει σημαντικά από την αναλογική αναφορά. Αντίθετα, με την αύξηση του αριθμού των bits (π.χ. 8-bit), η κβαντισμένη κυματομορφή προσεγγίζει πολύ καλύτερα το αρχικό σήμα, καθώς η απόσταση μεταξύ των επιπέδων

κβαντοποίησης μειώνεται. Η γραφική αυτή απεικόνιση αναδεικνύει άμεσα τη σχέση ανάμεσα στην ανάλυση σε bits και στην ποιότητα του ψηφιακού σήματος: περισσότερα bits σημαίνουν υψηλότερη πιστότητα, μεγαλύτερο δυναμικό εύρος και μικρότερο θόρυβο κβαντοποίησης.



Σχήμα 2.4: Παράδειγμα κβαντοποίησης ενός ημιτονοειδούς σήματος σε διαφορετικά βάθη bit. Η αύξηση του αριθμού των bits οδηγεί σε πιο ακριβή αναπαράσταση του σήματος και σε μείωση του σφάλματος κβαντοποίησης.

Πέρα από το κλασικό μοντέλο, η βιβλιογραφία προτείνει και τεχνικές μείωσης των επιπτώσεων του σφάλματος κβαντοποίησης. Μία από τις πιο γνωστές είναι το **dithering**, όπου προστίθεται σκόπιμα ένας χαμηλού επιπέδου θόρυβος στο αναλογικό σήμα πριν από την κβαντοποίηση. Η τεχνική αυτή «τυχαίοποιεί» το σφάλμα, μειώνοντας την αντίληψη των παραμορφώσεων που προκαλούνται από το περιορισμένο πλήθος επιπέδων κβαντοποίησης. Το dithering χρησιμοποιείται ευρέως στην επεξεργασία ήχου, ιδιαίτερα κατά τη μείωση της ανάλυσης (π.χ. από 24 σε 16-bit) ώστε να περιοριστούν τα ακουστικά artifacts (Pohlmann, 2011).

Συνοψίζοντας, η κβαντοποίηση αποτελεί αναπόσπαστο στάδιο στη διαδικασία μετατροπής ενός αναλογικού σήματος σε ψηφιακή μορφή. Παρά το γεγονός ότι εισάγει αναπόφευκτο σφάλμα και περιορίζει την ποιότητα μέσω του θορύβου κβαντοποίησης, η επιλογή της κατάλληλης ανάλυσης σε bits, σε συνδυασμό με τεχνικές όπως το dithering, επιτρέπει την επίτευξη ψηφιακής αναπαράστασης που είναι επαρκής και αξιόπιστη για την εκάστοτε εφαρμογή. Η κατανόηση των αρχών της κβαντοποίησης είναι επομένως θεμελιώδης για τον σχεδιασμό και την αξιολόγηση συστημάτων DSP σε ποικίλους τομείς, από την αναπαραγωγή ήχου μέχρι τις τηλεπικοινωνίες και την επεξεργασία βιοϊατρικών σημάτων.

2.2.6 Ανακατασκευή Αναλογικού Σήματος

Η διαδικασία της δειγματοληψίας και της κβαντοποίησης οδηγεί στη δημιουργία μιας ψηφιακής αναπαράστασης του αναλογικού σήματος. Ωστόσο, σε πολλές εφαρμογές το ζητούμενο είναι η **αναπαραγωγή** του αρχικού αναλογικού σήματος, π.χ. στην έξοδο ενός συστήματος αναπαραγωγής μουσικής ή σε μια βιοϊατρική διάταξη μέτρησης. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιείται ο **ψηφιακο-αναλογικός μετατροπέας (Digital-to-Analog Converter – DAC)**, ο οποίος αντιστρέφει τη διαδικασία της δειγματοληψίας.

Ο DAC παράγει στην έξοδό του μια ακολουθία παλμών, των οποίων τα πλάτη αντιστοιχούν στις ψηφιακές τιμές εισόδου. Στο πεδίο της συχνότητας, το σήμα που προκύπτει περιλαμβάνει όχι μόνο το επιθυμητό φάσμα αλλά και τα επαναλαμβανόμενα φασματικά αντίγραφα που δημιουργούνται από τη διαδικασία δειγματοληψίας (Manolakis, 2007). Αν τα αντίγραφα αυτά παραμείνουν, θα εμφανιστούν ως ανεπιθύμητες συνιστώσες στην έξοδο, παραμορφώνοντας την τελική αναλογική αναπαράσταση.

Για να επιτευχθεί πιστή ανακατασκευή του αρχικού σήματος, χρησιμοποιείται ένα **ανακατασκευαστικό φίλτρο χαμηλής διέλευσης (reconstruction filter ή smoothing filter)** το οποίο επιτρέπει τη διέλευση μόνο των συχνοτήτων εντός του αρχικού φάσματος (συνήθως έως τη συχνότητα Nyquist) και αποκόπτει τις υψηλότερες συχνότητες. Στην ιδανική περίπτωση, το φίλτρο αυτό είναι ένας ιδανικός χαμηλοπερατός με οριζόντια απόκριση στο εύρος του χρήσιμου φάσματος και απότομη αποκοπή. Στην πράξη, όμως, χρησιμοποιούνται προσεγγίσεις με Butterworth, Chebyshev ή FIR/IIR φίλτρα ανάλογα με τις απαιτήσεις της εφαρμογής (Schafer, 2010).

Ενδεικτικά, στην αναπαραγωγή ήχου υψηλής πιστότητας, η ποιότητα του ανακατασκευαστικού φίλτρου καθορίζει σε μεγάλο βαθμό την ακουστική απόδοση. Ένα φίλτρο με κακή απόκριση μπορεί να εισαγάγει παραμορφώσεις φάσης ή ανεπαρκή καταστολή των φασματικών αντιγράφων, επηρεάζοντας την καθαρότητα του ήχου. Αντίθετα, ένα καλά σχεδιασμένο φίλτρο διασφαλίζει ότι το αναλογικό σήμα που αναπαράγεται στην έξοδο είναι πρακτικά αδιαχώριστο από το αρχικό.

Συνεπώς, η διαδικασία της ανακατασκευής αποτελεί το τελικό στάδιο της ψηφιακής επεξεργασίας, όπου η θεωρία του δειγματοληψίας και της κβαντοποίησης συναντά την πρακτική υλοποίηση. Η κατανόηση και η σωστή επιλογή του DAC και του φίλτρου ανακατασκευής είναι ζωτικής σημασίας για εφαρμογές όπως η αναπαραγωγή πολυμέσων, τα ιατρικά όργανα, αλλά και οι σύγχρονες τηλεπικοινωνίες (Pohlmann, 2011).

2.3 Πλεονεκτήματα Ψηφιακής Επεξεργασίας

Η μετάβαση από τα αναλογικά στα ψηφιακά συστήματα σηματοδότησε μία από τις σημαντικότερες τεχνολογικές επαναστάσεις του 20ού αιώνα. Η **ψηφιακή επεξεργασία σήματος (Digital Signal Processing – DSP)** έχει πλέον εδραιωθεί ως ο κυρίαρχος τρόπος επεξεργασίας σε ένα τεράστιο εύρος εφαρμογών, από την ηχητική τεχνολογία και τις τηλεπικοινωνίες, μέχρι τη βιοϊατρική και τα ενσωματωμένα συστήματα. Σε αντίθεση με την αναλογική επεξεργασία, η οποία βασίζεται σε φυσικά κυκλώματα και είναι ιδιαίτερα ευάλωτη σε παραμορφώσεις, αστάθεια και σωρευτικά σφάλματα, η DSP επιτρέπει ακρίβεια, σταθερότητα, επαναληψιμότητα και υψηλή ευελιξία (Lyons, 2011; Schaffer, 2010).

Ένα από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα είναι η **αντοχή στον θόρυβο και στις παραμορφώσεις**. Στα αναλογικά συστήματα, κάθε επιπλέον στάδιο επεξεργασίας ή αντιγραφής συνοδεύεται από συσσωρευμένο θόρυβο και απώλεια ποιότητας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η κασέτα ήχου, όπου κάθε αντιγραφή μείωνε σημαντικά την πιστότητα του σήματος. Αντίθετα, στην ψηφιακή αναπαράσταση τα δεδομένα αποτελούνται από ακολουθίες bits, τα οποία μπορούν να αναπαραχθούν απεριόριστες φορές χωρίς απώλειες, εφόσον η αντιγραφή είναι ακριβής. Αυτό το χαρακτηριστικό κατέστησε εφικτή τη δημιουργία μεγάλων ψηφιακών βιβλιοθηκών, από δίσκους CD μέχρι αρχεία MP3, χωρίς απώλεια ποιότητας σε σχέση με το πρωτότυπο.

Η ψηφιακή επεξεργασία εξασφαλίζει επίσης **εξαιρετική ευελιξία και προγραμματισιμότητα**. Ενώ σε ένα αναλογικό κύκλωμα η αλλαγή ενός αλγορίθμου απαιτεί νέο σχεδιασμό υλικού (π.χ. αλλαγή συνδεσμολογίας ή εξαρτημάτων), σε ένα ψηφιακό σύστημα η ίδια λειτουργία μπορεί να υλοποιηθεί μέσω λογισμικού ή υλικολογισμίου (firmware). Έτσι, το ίδιο υλικό μπορεί να εκτελεί διαφορετικούς αλγορίθμους με απλή τροποποίηση κώδικα. Αυτό επιτρέπει την ανάπτυξη πολυλειτουργικών συστημάτων, όπως τα smartphones, τα οποία μέσω DSP χειρίζονται ήχο, εικόνα, βίντεο και τηλεπικοινωνίες με τον ίδιο επεξεργαστή (Manolakis, 2007).

Η **αναπαραγωγιμότητα** αποτελεί ακόμα ένα βασικό πλεονέκτημα. Ένα ψηφιακό σύστημα DSP, όταν εκτελεί τον ίδιο αλγόριθμο στα ίδια δεδομένα εισόδου, θα παράγει πάντοτε το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα, ανεξάρτητα από το περιβάλλον λειτουργίας. Αυτό διασφαλίζει σταθερότητα και αντικειμενικότητα σε εφαρμογές που απαιτούν αυστηρή ακρίβεια, όπως η ιατρική διάγνωση μέσω σημάτων ΗΚΓ/EEG ή οι επιστημονικές μετρήσεις. Αντίθετα, τα

αναλογικά συστήματα επηρεάζονται από παράγοντες όπως η θερμοκρασία, η φθορά των εξαρτημάτων ή η παρεμβολή ηλεκτρομαγνητικού θορύβου.

Ένα ακόμη καθοριστικό πλεονέκτημα της DSP είναι η **δυνατότητα υλοποίησης πολύπλοκων αλγορίθμων** που θα ήταν πρακτικά αδύνατο να πραγματοποιηθούν με αναλογικά μέσα. Ο **Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (FFT)**, για παράδειγμα, επιτρέπει την αποδοτική ανάλυση του φάσματος σε πραγματικό χρόνο, κάτι που είναι θεμελιώδες για εφαρμογές όπως η φωνητική αναγνώριση ή η ανάλυση μουσικής. Τα **προσαρμοστικά φίλτρα (adaptive filters)** επιτρέπουν την αυτόματη προσαρμογή στις μεταβαλλόμενες συνθήκες θορύβου, π.χ. σε ακουστικά με active noise cancellation. Επίσης, η **ανάλυση με κυματίδια (wavelet analysis)** έχει αποδειχθεί ανώτερη από τον κλασικό Fourier σε εφαρμογές όπου απαιτείται ταυτόχρονη χρονική και φασματική ανάλυση, όπως στη συμπίεση εικόνας JPEG2000 (Mallat, 2009).

Τέλος, η ψηφιακή μορφή παρέχει **δυνατότητες συμπίεσης και αποδοτικής μετάδοσης δεδομένων**. Τα ψηφιακά σήματα μπορούν να υποβληθούν σε αλγορίθμους συμπίεσης χωρίς απώλειες (lossless) ή με ελεγχόμενες απώλειες (lossy). Στον ήχο, τυπικά παραδείγματα αποτελούν τα πρότυπα **MP3 και AAC**, τα οποία μειώνουν σημαντικά το απαιτούμενο μέγεθος αποθήκευσης και το εύρος ζώνης μετάδοσης χωρίς ουσιαστική απώλεια ακουστικής ποιότητας. Στο βίντεο, αντίστοιχα, τα πρότυπα **MPEG-2, H.264 και HEVC** έχουν καταστήσει εφικτή την παγκόσμια ροή πολυμέσων μέσω του διαδικτύου και την ανάπτυξη πλατφορμών όπως το YouTube και το Netflix.

Συνοψίζοντας, η ψηφιακή επεξεργασία σήματος συνδυάζει ακρίβεια, σταθερότητα, ευελιξία, αναπαραγωγιμότητα και δυνατότητα υλοποίησης προηγμένων αλγορίθμων. Αυτά τα χαρακτηριστικά την καθιστούν αναντικατάστατη σε ένα τεράστιο εύρος εφαρμογών: από την ψυχαγωγία (μουσική, βίντεο, gaming) και τις τηλεπικοινωνίες (κινητά δίκτυα, VoIP), μέχρι την ιατρική διάγνωση, τη ρομποτική και την τεχνητή νοημοσύνη. Δεν είναι υπερβολή να ειπωθεί ότι η DSP αποτελεί το «αόρατο υπόβαθρο» πάνω στο οποίο στηρίζεται η σύγχρονη ψηφιακή κοινωνία.

2.4 FIR Φίλτρα

Η ψηφιακή επεξεργασία σήματος (DSP) βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στη χρήση ψηφιακών φίλτρων, τα οποία αποτελούν θεμελιώδη εργαλεία για τον έλεγχο, τη διαμόρφωση και την

ανάλυση των σημάτων. Τα ψηφιακά φίλτρα χρησιμοποιούνται για την ενίσχυση επιθυμητών συχνοτήτων, την απόρριψη ανεπιθύμητων παρεμβολών, την εξομάλυνση ή την αποκατάσταση παραμορφωμένων σημάτων. Εμφανίζονται σε ένα τεράστιο εύρος εφαρμογών: από την επεξεργασία ήχου και εικόνας έως την επεξεργασία βιοϊατρικών δεδομένων, τις τηλεπικοινωνίες και την αεροδιαστημική (Schafer, 2010).

Μία από τις σημαντικότερες κατηγορίες ψηφιακών φίλτρων είναι τα FIR (Finite Impulse Response), τα οποία χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι η κρουστική τους απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας. Αυτό σημαίνει ότι όταν το φίλτρο διεγείρεται από έναν μοναδιαίο παλμό, η απόκριση μηδενίζεται μετά από συγκεκριμένο αριθμό δειγμάτων. Αντίθετα, τα IIR (Infinite Impulse Response) φίλτρα, λόγω της ύπαρξης όρων ανατροφοδότησης, μπορούν να έχουν θεωρητικά άπειρη διάρκεια απόκρισης. Η διάκριση αυτή είναι θεμελιώδης, καθώς συνδέεται άμεσα με την ευστάθεια, τη φασική συμπεριφορά και την υλοποίηση των φίλτρων (Manolakis, 2007).

Στην πράξη, τα φίλτρα FIR υπερτερούν σε πολλές εφαρμογές λόγω των ιδιοτήτων τους. Πρώτον, είναι εγγενώς ευσταθή, καθώς η έξοδος εξαρτάται μόνο από έναν πεπερασμένο αριθμό τιμών της εισόδου. Δεύτερον, προσφέρουν τη δυνατότητα σχεδίασης φίλτρων με **γραμμική φάση**, διατηρώντας έτσι την πιστότητα των σημάτων χωρίς παραμορφώσεις στο πεδίο της φάσης. Η ιδιότητα αυτή είναι καθοριστική σε εφαρμογές επεξεργασίας ήχου και εικόνας, όπου η παραμόρφωση φάσης θα οδηγούσε σε ακουστικά ή οπτικά artifacts (Rabiner, 1983). Επιπλέον, η υλοποίησή τους σε υλικό (hardware) είναι απλή και αποδοτική, καθώς βασίζεται αποκλειστικά σε πράξεις πολλαπλασιασμού και αθροίσεων, γεγονός που τα καθιστά ιδανικά για συστήματα πραγματικού χρόνου σε FPGA και DSP επεξεργαστές (Mitra, 2006).

Από την άλλη πλευρά, τα IIR φίλτρα έχουν το πλεονέκτημα ότι μπορούν να επιτύχουν παρόμοιες φασματικές αποκρίσεις με μικρότερο αριθμό συντελεστών, συνεπώς είναι πιο «οικονομικά» σε επίπεδο υπολογιστικών απαιτήσεων. Ωστόσο, η ύπαρξη ανατροφοδότησης τα καθιστά πιο επιρρεπή σε αστάθεια και μη γραμμικές παραμορφώσεις φάσης. Έτσι, ενώ τα IIR φίλτρα χρησιμοποιούνται ευρέως σε εφαρμογές όπου προέχει η αποδοτικότητα, τα FIR φίλτρα αποτελούν την πρώτη επιλογή όταν η σταθερότητα και η πιστότητα του σήματος είναι κρίσιμες.

Η μελέτη και ανάλυση των FIR φίλτρων έχει πλούσιο θεωρητικό υπόβαθρο, αλλά και τεράστια πρακτική σημασία. Χρησιμοποιούνται σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών:

- **Ήχος και μουσική:** ισοσταθμιστές (equalizers), αποθορυβοποίηση, βελτίωση ποιότητας ηχογραφήσεων.
- **Τηλεπικοινωνίες:** φιλτράρισμα καναλιών, αποδιαμόρφωση, καταστολή παρεμβολών.
- **Βιοϊατρική επεξεργασία σήματος:** καθαρισμός ηλεκτροκαρδιογραφικών (ΗΚΓ) και ηλεκτροεγκεφαλογραφημάτων (EEG).
- **Επεξεργασία εικόνας:** εξομάλυνση, ενίσχυση ακμών, αφαίρεση θορύβου.

Είναι λοιπόν σαφές ότι η κατανόηση των FIR φίλτρων είναι απαραίτητη για κάθε μελετητή της ψηφιακής επεξεργασίας σήματος. Στα επόμενα υποκεφάλαια θα παρουσιαστούν αναλυτικά ο μαθηματικός τους ορισμός, οι ιδιότητές τους, οι κατηγορίες και οι μέθοδοι σχεδίασης, ώστε να δοθεί μια ολοκληρωμένη εικόνα τόσο της θεωρίας όσο και της πρακτικής τους εφαρμογής.

2.4.1 Μαθηματικός Ορισμός και Κρουστική Απόκριση

Τα φίλτρα **FIR (Finite Impulse Response)** αποτελούν μία από τις θεμελιώδεις κατηγορίες ψηφιακών φίλτρων και χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι η κρουστική τους απόκριση είναι πεπερασμένης διάρκειας. Αυτό σημαίνει ότι αν στην είσοδο του φίλτρου εφαρμοστεί ένας μοναδιαίος παλμός (impulse), τότε η έξοδος θα αποτελείται από έναν πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών δειγμάτων, σε αντίθεση με τα φίλτρα **IIR (Infinite Impulse Response)** όπου η απόκριση είναι θεωρητικά άπειρη λόγω της ύπαρξης ανατροφοδότησης.

Μαθηματικά, ένα FIR φίλτρο περιγράφεται από μια εξίσωση διαφορών της μορφής:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k]$$

όπου:

- $y[n]$ είναι το σήμα εξόδου σε διακριτό χρόνο,
- $x[n]$ είναι το σήμα εισόδου,
- b_k είναι οι συντελεστές του φίλτρου (γνωστοί και ως filter coefficients ή tap weights),
- M είναι η τάξη (order) του φίλτρου, η οποία καθορίζει τον αριθμό των καθυστερήσεων που χρησιμοποιούνται.

Η εξίσωση αυτή φανερώνει ότι το FIR φίλτρο είναι στην ουσία ένας **γραμμικός συνδυασμός** τρεχουσών και παρελθουσών τιμών της εισόδου, χωρίς την παρουσία όρων που εξαρτώνται από προηγούμενες εξόδους. Με άλλα λόγια, η έξοδος είναι **αποκλειστικά συνέλιξη** του σήματος εισόδου με την κρουστική απόκριση του φίλτρου.

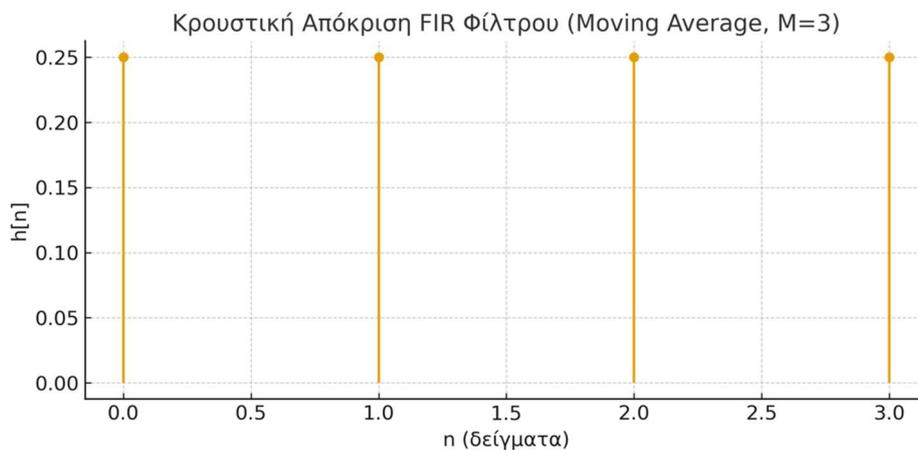
Η σχέση αυτή μπορεί να εκφραστεί πιο συμπαγώς ως συνέλιξη:

$$y[n]=x[n]*h[n]$$

όπου $h[n]$ είναι η κρουστική απόκριση του φίλτρου και ορίζεται ως:

$$h[n] = \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Συνεπώς, η **κρουστική απόκριση** ενός FIR φίλτρου έχει μήκος $M+1$ δειγμάτων και μηδενίζεται για όλες τις άλλες τιμές του n . Από αυτήν ακριβώς την ιδιότητα προκύπτει η ονομασία *Finite Impulse Response*, δηλαδή «Πεπερασμένης Διάρκειας Κρουστική Απόκριση» (Schafer, 2010). Στο **Σχήμα 2.5** παρουσιάζεται η κρουστική απόκριση ενός απλού FIR φίλτρου κινούμενου μέσου όρου (moving average) τάξης $M=3$. Παρατηρείται ότι η απόκριση αποτελείται από τέσσερα μη μηδενικά δείγματα ίσης τιμής και στη συνέχεια μηδενίζεται πλήρως, επιβεβαιώνοντας την πεπερασμένη διάρκειά της.



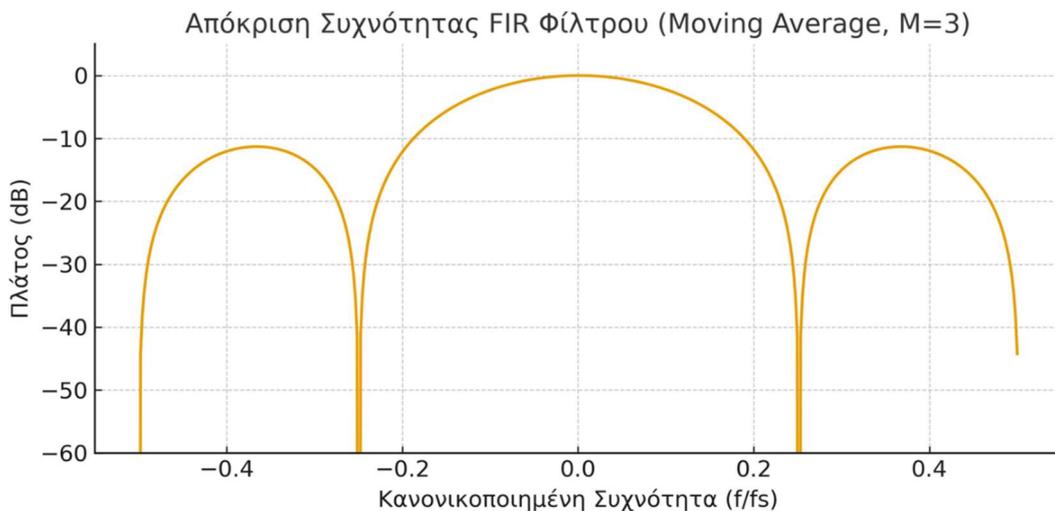
Σχήμα 2.5: Κρουστική απόκριση FIR φίλτρου κινούμενου μέσου όρου (Moving Average) με τάξη $M=3$. Η απόκριση έχει πεπερασμένο μήκος ($M+1$ δείγματα) και μηδενίζεται μετά από αυτό.

Η σημασία της κρουστικής απόκρισης είναι καθοριστική, καθώς αυτή περιέχει **όλες τις πληροφορίες για τη συμπεριφορά του φίλτρου**. Η απόκριση συχνότητας, η οποία δείχνει πώς το φίλτρο επιδρά σε κάθε συχνοτική συνιστώσα του σήματος, προκύπτει απλώς ως ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης:

$$H(e^{i\omega}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-i\omega k}$$

Η εξίσωση αυτή φανερώνει ότι το FIR φίλτρο είναι ένα πολυώνυμο στο $e^{-i\omega t}$ με συντελεστές τα b_k . Αυτό έχει ως συνέπεια το γεγονός ότι η φασματική συμπεριφορά του φίλτρου εξαρτάται άμεσα από τις τιμές και τη συμμετρία των συντελεστών. Ειδικά στην περίπτωση συμμετρικών συντελεστών (δηλαδή $b_k = b_{M-k}$), το φίλτρο διαθέτει **γραμμική φάση**, ιδιότητα εξαιρετικά σημαντική σε εφαρμογές επεξεργασίας ήχου και εικόνας, όπου οι μη γραμμικές παραμορφώσεις φάσης θα οδηγούσαν σε ακουστικά ή οπτικά artifacts.

Στο **Σχήμα 2.6** παρουσιάζεται η απόκριση συχνότητας του ίδιου FIR φίλτρου κινούμενου μέσου όρου τάξης $M=3$. Παρατηρείται ότι το φίλτρο λειτουργεί ως χαμηλοπερατό, επιτρέποντας τη διέλευση χαμηλών συχνοτήτων και καταστέλλοντας σταδιακά τις υψηλότερες. Αυτό αποδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο η επιλογή των συντελεστών καθορίζει άμεσα τη φασματική συμπεριφορά του φίλτρου.



Σχήμα 2.6: Απόκριση συχνότητας FIR φίλτρου κινούμενου μέσου όρου ($M=3$). Το φίλτρο δρα ως χαμηλοπερατό, επιτρέποντας τις χαμηλές συχνότητες και μειώνοντας σταδιακά τις υψηλές.

Ένα παράδειγμα απλού FIR φίλτρου είναι το **μέσος όρος κινούμενου παραθύρου (moving average filter)**, το οποίο ορίζεται με όλους τους συντελεστές ίσους μεταξύ τους:

$$y[n] = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M x[n-k]$$

Το φίλτρο αυτό δρα ως χαμηλοπερατό, μειώνοντας τις γρήγορες διακυμάνσεις του σήματος και αφήνοντας τις πιο αργές συνιστώσες ανέπαφες. Παρά την απλότητά του, χρησιμοποιείται ευρύτατα στην εξομάλυνση σημάτων, στον υπολογισμό κινούμενων μέσων όρων σε οικονομικά δεδομένα αλλά και στη βασική αποθορυβοποίηση.

Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι η **τάξη του φίλτρου (M)** καθορίζει άμεσα τόσο την πολυπλοκότητα της υλοποίησης όσο και την «οξύτητα» (sharpness) της συχνοτικής απόκρισης. Ένα φίλτρο υψηλότερης τάξης μπορεί να προσεγγίσει πολύ καλύτερα τις ιδανικές ιδιότητες (π.χ. απότομη αποκοπή σε χαμηλοπερατό φίλτρο), αλλά απαιτεί περισσότερους υπολογισμούς και μεγαλύτερη κατανάλωση πόρων στην περίπτωση υλοποίησης σε FPGA.

Συνοψίζοντας, ο μαθηματικός ορισμός των FIR φίλτρων και η κατανόηση της κρουστικής τους απόκρισης αποτελούν το θεμέλιο για τον σχεδιασμό και την ανάλυσή τους. Μέσω της απλής αλλά ισχυρής δομής τους, τα FIR φίλτρα προσφέρουν σταθερότητα, δυνατότητα γραμμικής φάσης και ευκολία υλοποίησης, καθιστώντας τα βασικό εργαλείο στη σύγχρονη ψηφιακή επεξεργασία σήματος.

2.4.2 Ιδιότητες FIR Φίλτρων

Τα FIR φίλτρα παρουσιάζουν ένα σύνολο χαρακτηριστικών που τα καθιστούν ιδιαίτερα ελκυστικά για ένα μεγάλο εύρος εφαρμογών στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος. Σε αντίθεση με τα IIR φίλτρα, όπου η ύπαρξη όρων ανατροφοδότησης (feedback) μπορεί να οδηγήσει σε αστάθεια ή σε μη γραμμικές παραμορφώσεις φάσης, τα FIR φίλτρα προσφέρουν σταθερότητα, προβλεψιμότητα και ευκολία στη σχεδίαση. Στην παρούσα ενότητα αναλύονται οι βασικότερες ιδιότητες των FIR φίλτρων.

1. Ευστάθεια

Η ευστάθεια αποτελεί μια από τις σημαντικότερες προϋποθέσεις για την ορθή λειτουργία κάθε συστήματος επεξεργασίας σήματος. Ένα φίλτρο θεωρείται ευσταθές αν μια φραγμένη είσοδος οδηγεί πάντοτε σε φραγμένη έξοδο (κριτήριο BIBO – Bounded Input, Bounded Output). Στα FIR φίλτρα η ευστάθεια είναι **εγγενώς εξασφαλισμένη**. Ο λόγος είναι ότι η έξοδος εξαρτάται μόνο από έναν πεπερασμένο αριθμό δειγμάτων της εισόδου και όχι από προηγούμενες εξόδους. Η κρουστική απόκριση έχει πεπερασμένη διάρκεια, γεγονός που αποκλείει την εμφάνιση ατέρμονων ταλαντώσεων ή εκθετικά αυξανόμενων αποκρίσεων.

Αντίθετα, στα IIR φίλτρα η ανατροφοδότηση μπορεί, λόγω στρογγυλοποιήσεων ή κακής επιλογής συντελεστών, να οδηγήσει σε αστάθεια. Αυτό καθιστά τα FIR φίλτρα ιδανική επιλογή για κρίσιμες εφαρμογές όπου η σταθερότητα είναι αδιαπραγμάτευτη, όπως στη βιοϊατρική επεξεργασία σήματος (π.χ. ΗΚΓ, EEG), στην αεροδιαστημική και στα συστήματα ελέγχου.

2. Γραμμική Φασική Απόκριση

Ένα από τα πιο σημαντικά πλεονεκτήματα των FIR φίλτρων είναι η δυνατότητά τους να επιτυγχάνουν **γραμμική φάση**. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι συχνοτικές συνιστώσες του σήματος υφίστανται την ίδια χρονική καθυστέρηση, χωρίς να παραμορφώνεται το φασματικό τους περιεχόμενο. Μαθηματικά, η γραμμική φάση εξασφαλίζεται αν οι συντελεστές του φίλτρου είναι συμμετρικοί ή αντισυμμετρικοί:

$$b_k = b_M - k \text{ (συμμετρία),}$$
$$b_k = -b_M - k \text{ (αντισυμμετρία)}$$

Στην περίπτωση συμμετρικών συντελεστών, το FIR φίλτρο παρουσιάζει **καθαρή καθυστέρηση (pure delay)** χωρίς αλλοίωση της φασματικής πληροφορίας. Αυτό είναι ζωτικής σημασίας σε εφαρμογές ήχου, όπου η μη γραμμική φάση οδηγεί σε φαινόμενα «θολώματος» ή αλλοίωσης της στερεοφωνικής εικόνας. Για τον λόγο αυτό, οι περισσότεροι ισοσταθμιστές (equalizers) και οι ψηφιακοί επεξεργαστές ήχου χρησιμοποιούν FIR φίλτρα.

Εκτός από τον ήχο, η γραμμική φάση έχει τεράστια σημασία και στην επεξεργασία εικόνας και βίντεο. Εκεί, μια μη γραμμική παραμόρφωση φάσης θα είχε ως αποτέλεσμα οπτικά artifacts, όπως παραμορφώσεις ακμών ή ασάφεια. Συνεπώς, η δυνατότητα σχεδίασης FIR φίλτρων με γραμμική φάση τα καθιστά μοναδικά σε εφαρμογές πολυμέσων.

3. Ευκολία Υλοποίησης σε Υλικό (Hardware)

Η υλοποίηση ενός FIR φίλτρου απαιτεί μόνο δύο βασικές πράξεις: **πολλαπλασιασμό** και **άθροιση**. Αυτό σημαίνει ότι μπορούν να υλοποιηθούν αποδοτικά τόσο σε λογισμικό (σε DSP επεξεργαστές ή μικροελεγκτές) όσο και σε υλικό (FPGA, ASIC). Στις υλοποιήσεις FPGA, το FIR φίλτρο μπορεί να παρασταθεί με μία **αλυσίδα καθυστερήσεων (delay line)**, όπου κάθε καθυστέρηση αποθηκεύει μία τιμή εισόδου. Οι τιμές αυτές πολλαπλασιάζονται με τους συντελεστές b_k και στη συνέχεια αθροίζονται για να δώσουν την έξοδο. Αυτή η αρχιτεκτονική είναι πλήρως παραλληλοποιήσιμη: κάθε καθυστέρηση και

πολλαπλασιαστής μπορεί να υλοποιηθεί σε ξεχωριστή λογική μονάδα, επιτρέποντας πραγματικά υψηλές ταχύτητες επεξεργασίας σε πραγματικό χρόνο. Η ιδιότητα αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική σε εφαρμογές όπου απαιτείται **χαμηλή καθυστέρηση (low latency)**, όπως στην επεξεργασία φωνής, στη μουσική παραγωγή ή στην τηλεφωνία VoIP (Manolakis, 2007).

4. Σχεδιαστική Ευελιξία

Τα FIR φίλτρα παρέχουν επίσης **ευελιξία στον σχεδιασμό και τον έλεγχο της συχνοτικής τους απόκρισης**. Ανάλογα με τις απαιτήσεις, μπορούν να σχεδιαστούν για να έχουν:

- απότομη μετάβαση μεταξύ ζώνης διέλευσης και ζώνης αποκοπής,
- ελάχιστες διακυμάνσεις στην περιοχή διέλευσης (passband ripple),
- υψηλή καταστολή στην περιοχή αποκοπής (stopband attenuation).

Ο σχεδιαστής μπορεί να επιλέξει ανάμεσα σε διάφορες μεθόδους (παράθυρα, Parks–McClellan, βελτιστοποίηση) για να επιτύχει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Η ακρίβεια με την οποία μπορούν να προσεγγιστούν οι ιδανικές ιδιότητες είναι συνάρτηση της τάξης M . Όσο αυξάνεται η τάξη, τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση, αλλά ταυτόχρονα αυξάνεται και η υπολογιστική πολυπλοκότητα (Lyons, 2011).

Αυτή η δυνατότητα ακριβούς ελέγχου καθιστά τα FIR φίλτρα ιδανικά για εφαρμογές όπου η ποιότητα είναι κρίσιμη, όπως στην παραγωγή μουσικής υψηλής πιστότητας (hi-fi audio), στη βιοϊατρική (καθαρισμός σημάτων ΗΚΓ) και στις τηλεπικοινωνίες (φίλτρα αποδιαμόρφωσης και αντιπαρεμβολής).

2.4.3 Κατηγορίες FIR Φίλτρων

Τα FIR φίλτρα διακρίνονται σε διάφορες κατηγορίες, ανάλογα με τη συχνοτική περιοχή στην οποία επιτρέπουν τη διέλευση του σήματος. Οι βασικότερες κατηγορίες είναι τα **χαμηλοπερατά (low-pass)**, τα **υψηλοπερατά (high-pass)**, τα **ζωνοπερατά (band-pass)** και τα **ζωνοφραγμά (band-stop ή notch)** φίλτρα. Κάθε κατηγορία έχει ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και εξειδικευμένες εφαρμογές στην επεξεργασία σήματος, στον ήχο, στις τηλεπικοινωνίες και στη βιοϊατρική τεχνολογία (Schafer, 2010; Lyons, 2011).

1 Χαμηλοπερατά FIR φίλτρα (Low-Pass)

Ένα ιδανικό χαμηλοπερατό έχει απόκριση:

$$H_{id}(e^{i\omega t}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

και κρουστική απόκριση άπειρης διάρκειας

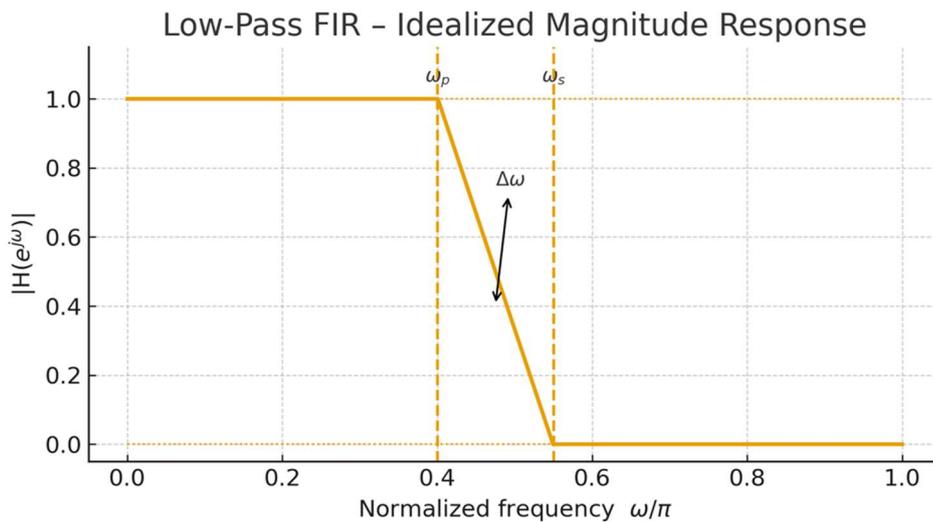
$$h_{id}[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc} \left(\frac{\omega_c}{\pi} \left(n - \frac{M}{2} \right) \right)$$

Επειδή το $h_{id}[n]$ είναι άπειρο, στην πράξη υλοποιούμε **FIR προσεγγίσεις** κόβοντας και παραθυρώνοντας την ιδανική sinc:

$$h[n] = h_{id}[n] w[n], \quad 0 \leq n \leq M$$

όπου $w[n]$ είναι παράθυρο (Rectangular, Hamming, Blackman, Kaiser κ.ά.). Η άθροιση των συντελεστών σε ένα LP συνήθως κανονικοποιείται σε $\sum b_k = 1$ ώστε $H(e^{j0}) = 1$ (Manolakis, 2007; Schafer, 2010).

Στο **Σχήμα 2.7** απεικονίζεται η χαρακτηριστική απόκριση πλάτους ενός χαμηλοπερατού FIR φίλτρου. Η ζώνη διέλευσης εκτείνεται έως τη συχνότητα ω_p με περιορισμένη κυμάτωση δ_p , ακολουθεί ζώνη μετάβασης πλάτους $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$, ενώ στη ζώνη αποκοπής η εξασθένηση υπερβαίνει την προδιαγραφή A_s . Η μορφή αυτή προκύπτει από την παραθυρωμένη sinc ή από εναλλακτικές μεθόδους (π.χ. equiripple), και χρησιμοποιείται ως σημείο αναφοράς για τον καθορισμό της τάξης M και των συντελεστών b_k .



Σχήμα 2.7: Ιδανικοποιημένη απόκριση πλάτους χαμηλοπερατού FIR: ζώνη διέλευσης έως ω_p (ripples δ_p), ζώνη μετάβασης $\Delta\omega$ και ζώνη αποκοπής με εξασθένηση A_s .

Μετρικές σχεδίασης. Προδιαγράφουμε:

- συχνότητα αποκοπής f_c (ή $\omega_c = 2\pi f_c/f_s$),
- κυμάτωση ζώνης διέλευσης δ_p (passband ripple),
- εξασθένηση ζώνης αποκοπής $A_s = -20 \log_{10} \delta_s$ (stopband attenuation),
- πλάτος ζώνης μετάβασης Δ_ω

Κανόνες «εκτίμησης τάξης»: για Kaiser,

$$M \approx \frac{A_s - 8}{2.285 \Delta_\omega},$$

ενώ τυπικά: Rectangular ~ 21 dB, Hamming ~ 53 dB, Blackman ~ 74 dB A_s (Mitra, 2006; Rabiner, 1983)

Εφαρμογές:

- **Αποθορυβοποίηση/εξομάλυνση** χρονοσειρών και ήχου (moving average, Savitzky–Golay σε FIR μορφή).
- **Anti-aliasing** πριν από A/D: ορίζουμε f_c λίγο κάτω από $\frac{f_s}{2}$ ώστε η ζώνη μετάβασης να «χωρά» κάτω από Nyquist (Lyons, 2011).
- **Ήχος / equalizers**: ήπια LP για «ζέσταμα» υψηλών, ή απότομα LP για ειδικά εφέ (low-pass sweep).

Με συμμετρία συντελεστών $b_k = b_{M-k}$ πετυχαίνουμε γραμμική φάση και σταθερή καθυστέρηση ομάδας $\tau_g = \frac{M}{2}$ δειγμάτων, κάτι κρίσιμο σε ήχο/βιοϊατρικά σήματα (Schafer, 2010).

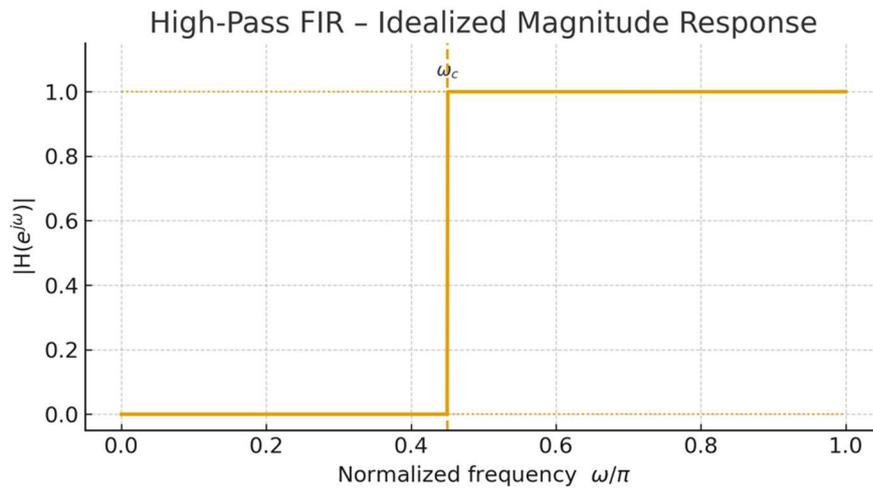
2 Υψηλοπερατά FIR φίλτρα (High-Pass)

Ξεκινάμε από ένα $LP h_{LP}[n]$ και εφαρμόζουμε **αναστροφή φάσματος**:

$$h_{HP}[n] = \delta \left[n - \frac{M}{2} \right] - h_{LP}[n]$$

ώστε $H_{HP}(e^{j\omega}) = 1 - H_{LP}(e^{j\omega})$. Εναλλακτικά, μπορούμε να μετατοπίσουμε την ιδανική sinc (spectral transformation) ώστε η νέα αποκοπή να είναι στο ω_c (Rabiner, 1983).

Το **Σχήμα 2.8** παρουσιάζει την ιδανική μορφή απόκρισης ενός υψηλοπερατού FIR φίλτρου. Η απόκριση είναι κατασταλαμμένη στη γειτονιά της μηδενικής συχνότητας (απομάκρυνση DC/αργών συνιστωσών) και πλησιάζει τη μονάδα για $|\omega| \geq \omega_c$. Η σχέση $H_{HP}(e^{j\omega}) = 1 - H_{LP}(e^{j\omega})$ υλοποιεί απλά την αναστροφή φάσματος, επιτρέποντας γρήγορη σχεδίαση HP από ήδη υπολογισμένο LP με ίδιες προδιαγραφές μετάβασης/εξασθένησης.



Σχήμα 2.8: Απόκριση πλάτους υψηλοπερατού FIR και απεικόνιση της αναστροφής φάσματος $H_{HP} = 1 - H_{LP}$ για κατασκευή HP από LP.

Εφαρμογές:

- **Αφαίρεση DC/very-low-frequency drift** (π.χ. rumble φίλτρα σε ήχο, απομάκρυνση baseline-wander σε βιοϊατρικά — συνήθως HP με $f_c \sim 0.3-0.7$ Hz για ECG ώστε να μη διαστρεβλώνεται το σύμπλεγμα QRS) (Laguna, 2005).
- **Τηλεπικοινωνίες:** απόρριψη χαμηλοσυχνοτικών παρεμβολών/θορύβου υποδομής.
- **Equalizers:** έμφαση πρίμων/καθαρισμός «θαμπάδας».

Η συνθήκη $\sum b_k = 0$ διασφαλίζει μηδενική DC απόκριση. Για γραμμική φάση απαιτείται και εδώ συμμετρία ή αντισυμμετρία (Types I–IV) (Schafer, 2010).

3 Ζωνοπερατά FIR φίλτρα (Band-Pass)

Δύο ισοδύναμοι τρόποι σχεδίασης.

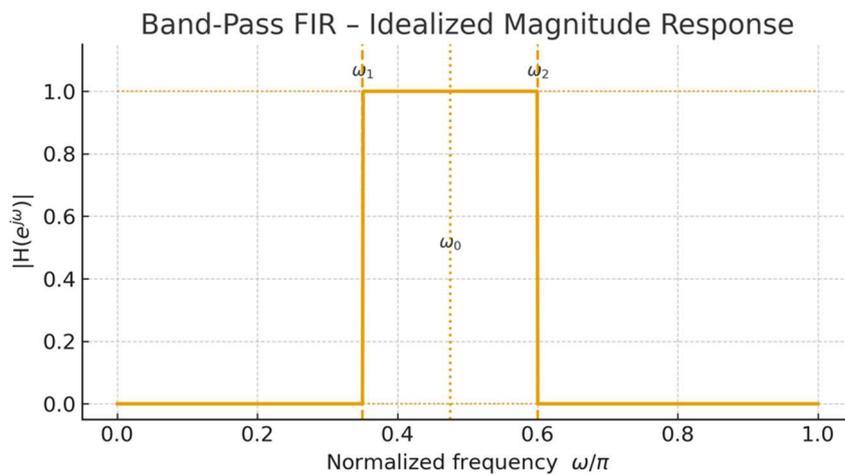
1. **Διαφορά δύο LP:** $h_{BP}[n] = h_{LP}(\omega_2) - h_{LP}(\omega_1)$, με $\omega_1 < \omega_2$

2. **Συχνοτική μετατόπιση (modulation)** ενός LP πλάτους ζώνης $\Delta\omega$ γύρω από την κεντρική ω_0 :

$$h_{BP}[n] = 2\cos\left(\omega_0\left(n - \frac{M}{2}\right)\right)h_{LP,base}[n]$$

Ο **συντελεστής ποιότητας** $Q = \frac{f_0}{BW}$ καθοδηγεί το πλάτος ζώνης: στενή ζώνη \Rightarrow μεγαλύτερο M (Manolakis, 2007).

Στο **Σχήμα 2.9** φαίνεται η τυπική απόκριση ζωνοπερατού FIR με κεντρική συχνότητα ω_0 και εύρος $BW = \omega_2 - \omega_1$. Η εξασθένηση εκτός ζώνης ορίζεται από A_s , ενώ η κυμάτωση εντός ζώνης από δ_p . Η πρακτική σχεδίαση μπορεί να γίνει είτε ως διαφορά δύο χαμηλοπερατών με κατάλληλες αποκοπές, είτε μέσω διαμόρφωσης ενός βασικού LP γύρω από ω_0 , επιλογή που διευκολύνει ειδικά περιοχές στενής ζώνης (υψηλό Q).



Σχήμα 2.9: Ζωνοπερατό FIR με ζώνη διέλευσης $[\omega_1, \omega_2]$ κεντρική ω_0 και εύρος BW . Ένδειξη κυμάτωσης δ_p εντός ζώνης και εξασθένησης A_s εκτός.

Εφαρμογές:

- **Τηλεπικοινωνίες:** επιλογή καναλιού, **αποδιαμόρφωση** και προ-φιλτράρισμα πριν από ανίχνευση/συγχρονισμό.
- **Ήχος:** στοχευμένη ενίσχυση μεσαίων για «καθαρές» φωνές, απομόνωση formants, δημιουργία εφέ «telephone band-pass».
- **Βιοϊατρική:** απομόνωση ρυθμών EEG (π.χ. alpha 8–13 Hz, beta 13–30 Hz) με γραμμική φάση για να μην αλλοιώνεται η χρονική μορφολογία (Laguna, 2005)

Για να κρατήσουμε χαμηλή καθυστέρηση, προτιμάμε συμμετρικούς συντελεστές (γραμμική φάση) και επιλέγουμε παράθυρο/αλγόριθμο ώστε A_s να καλύπτει γειτονικά κανάλια. Για στενή BW, ο Parks–McClellan δίνει μικρότερη τάξη από μια απλή παραθυρωμένη λύση (Rabiner, 1983).

4 Ζωνοφραγμά / Notch FIR φίλτρα (Band-Stop / Notch)

Συμπληρωματικά του BP:

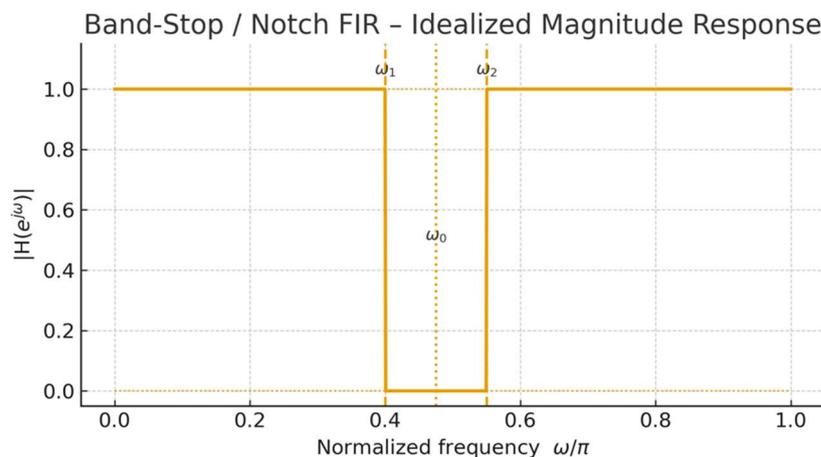
$$h_{BS}[n] = \delta \left[n - \frac{M}{2} \right] - h_{BP}[n]$$

ή άθροισμα δύο LP: $H_{BS} = H_{LP}(\omega_1) + (1 - H_{LP}(\omega_2))$

Για **στενό notch**, αξιοποιούμε διαμόρφωση:

$$h_{notch}[n] = \delta \left[n - \frac{M}{2} \right] - 2\cos \left(\omega_0 \left(n - \frac{M}{2} \right) \right) h_{LP, base}[n]$$

Το **Σχήμα 2.10** απεικονίζει ένα FIR ζωνοφραγμά/Notch με απόρριψη γύρω από τη συχνότητα ω_0 . Η στόχευση στενής ζώνης επιτρέπει την εξάλειψη παρεμβολών (π.χ. 50/60 Hz), διατηρώντας σχεδόν ανέπαφο το υπόλοιπο φάσμα. Η κατασκευή ως συμπλήρωμα ενός BP ή μέσω διαμόρφωσης ενός LP παρέχει ευελιξία στον ακριβή έλεγχο της κεντρικής συχνότητας και του πλάτους της αποκοπής.



Σχήμα 2.10: Απόκριση ζωνοφραγμά/Notch FIR: βαθιά απόρριψη γύρω από ω_0 με διατήρηση σχεδόν μοναδιαίας απόκρισης εκτός ζώνης.

Εφαρμογές:

- **Καταστολή θορύβου δικτύου 50/60 Hz** σε ΗΚΓ/EEG. Επιλέγουμε κέντρο $\omega_0 = 2\pi f_0/f_s$ και αρκετά στενή BW, αλλά όχι τόσο στενή ώστε να αποτυγχάνει με μικρές μετατοπίσεις συχνότητας—πρακτικά $BW \approx 1\text{--}2$ Hz γύρω από 50 Hz για $f_s = 500$ Hz (Laguna, 2005)
- **Ήχος / live sound:** εξάλειψη feedback σε συγκεκριμένες συχνότητες.
- **Τηλεπικοινωνίες:** απομάκρυνση στενών παρεμβολών (jammer suppression) χωρίς να θιγεί το φέρον ή γειτονικό χρήσιμο φάσμα.

Για **στενά notches** απαιτείται μεγαλύτερη τάξη M . Η γραμμική φάση των FIR αποτρέπει «κουδουνίσματα» (ringing) εκτός της περιοχής της ζώνης απόρριψης, κάτι σημαντικό στα βιοϊατρικά. Όταν υπάρχει frequency drift (π.χ. 49–51 Hz), είτε διαπλατύνουμε τη BW είτε χρησιμοποιούμε τεχνικές προσαρμοστικών φίλτρων (adaptive notch).

3. Πειραματικό μέρος και αποτελέσματα βασικών δομών ψηφιακής επεξεργασίας σήματος (DSP)

3.1 Στόχοι, υποθέσεις και πλαίσιο αξιολόγησης

Ο στόχος του πειραματικού μέρους είναι η **σχεδίαση, υλοποίηση και επαλήθευση** βασικών δομών ψηφιακής επεξεργασίας σήματος (DSP) σε γλώσσα περιγραφής υλικού (HDL/Verilog), με έμφαση στα **FIR φίλτρα τύπου moving-average**. Η μελέτη εστιάζει: (α) στην **ανάπτυξη και δοκιμή** φίλτρων με σταθερό και παραμετρικό αριθμό taps, (β) στη **χαρακτηροποίηση** της συμπεριφοράς τους ως προς **εξομάλυνση θορύβου** και **χρονική καθυστέρηση (latency/group delay)**, και (γ) στη **σύγκριση** έναντι μιας γραμμής αναφοράς **passthrough (loopback)**, ώστε να επικυρωθεί η αλυσίδα **Design → Testbench → Simulation** και να ποσοτικοποιηθεί η επίδραση της επεξεργασίας έναντι της «μη-επεξεργασμένης» διαδρομής.

Για την υλική πλατφόρμα χρησιμοποιείται η **Altera DE2-115** με ενσωματωμένο **Audio CODEC** στα **48 kHz**, η οποία παρέχει τα απαιτούμενα σήματα συγχρονισμού και ροής δεδομένων για λειτουργία πραγματικού χρόνου: **read_ready / write_ready** (χειρισμός ροής δειγμάτων) και **readdata / writedata** (θύρες εισόδου/εξόδου για 16-bit δείγματα). Η λειτουργική τοπολογία (Audio CODEC Interface, Clock Generator, Audio/Video Configuration) και η **ροή σημάτων** ακολουθούν το διάγραμμα συστήματος της πλατφόρμας, επιτρέποντας μελλοντική μεταφορά από προσομοίωση σε HIL χωρίς αλλαγές αλγορίθμων.

Κύριες ερευνητικές υποθέσεις.

- **H1 (Latency):** Το moving-average FIR N δειγμάτων παρουσιάζει **ομαδική καθυστέρηση** $\sim(N-1)/2$ δειγμάτων, στην πράξη μπορεί να προστεθεί **ακέραιος αριθμός κύκλων** λόγω καταχωρητών pipeline/ευθυγράμμισης.
- **H2 (Smoothing/θόρυβος):** Για προσθετικό λευκό θόρυβο, η θεωρητική βελτίωση SNR προσεγγίζει $10\log_{10}N$ dB: όσο αυξάνει το N, τόσο εντονότερη η εξομάλυνση, με τίμημα τη μείωση χρονικής ευκρίνειας.
- **H3 (Πόροι/σταθερότητα):** Η υλοποίηση **FIFO + accumulator** με διαίρεση μέσω **shift** (όταν $N=2^k$) είναι πόρων-αποδοτική και αριθμητικά σταθερή, εφόσον ο accumulator διαστασιολογηθεί ως $W_{acc} \geq W_{in} + [\log_2 N]$.
- **H4 (Baseline):** Το passthrough αναπαράγει την είσοδο **χωρίς φασματική αλλοίωση**, παρέχοντας αναφορά για την επικύρωση του περιβάλλοντος προσομοίωσης και για συγκρίσεις latency/θορύβου.

Μετρήσιμα κριτήρια επιτυχίας (KPIs).

1. **Λειτουργικότητα:** στο passthrough, ταύτιση in/out σε κυματομορφές (εντός ενός κύκλου pipeline, όπου υπάρχει).
2. **Latency:** μέτρηση σε κύκλους και ns με cursors στο Wave window: $\Delta_t = t_{out} - t_{in}$, $cycles = \frac{\Delta_t}{T_{clk}} \cdot$ σύγκλιση στην πρόβλεψη $(N-1)/2 \pm pipeline$.
3. **Smoothing/Noise-reduction:** ποσοτικοποίηση με τη τυπική απόκλιση του υπολοίπου $e[n]=x[n]-y[n]$ σε σταθερό παράθυρο ή/και με SNR gain· αναμενόμενη τάση $\approx 10 \log_2 N$ dB για λευκό θόρυβο.
4. **Θεωρία ↔ πράξη:** συνέπεια των μετρήσεων με τις κλειστές μορφές του moving-average (μηδενισμοί σε $\omega=2\pi m/N$, γραμμική φάση).
5. **Ικανοποίηση ρυθμού:** σε 48 kHz ($T_{sample} \approx 20.833 \mu s$) η υλοποίηση διασφαλίζει σταθερή ροή (ανάγνωση μόνο όταν read_ready=1, εγγραφή μόνο όταν write_ready=1), χωρίς απώλειες ή υπερχειλίσσεις.

Διαδικασία επαλήθευσης.

- **Στάδιο A – Passthrough:** προσομοίωση με ράμπα/τριγωνικό/ημιτονοειδές· επιβεβαίωση ταύτισης και καταγραφή baseline latency.
- **Στάδιο B – FIR (σταθερό N):** τροφοδότηση «καθαρού» σήματος με προσθετικό τεχνητό θόρυβο· σύγκριση κυματομορφών, μέτρηση latency με cursors, υπολογισμός std(e) ή SNR gain.
- **Στάδιο C – FIR (παραμετρικό N):** σάρωση $N \in \{8, 16, 32, 64\}$ · καταγραφή (i) καθυστέρησης ανά N και (ii) έντασης εξομάλυνσης· διαγραμματική απεικόνιση του συμβιβασμού καθαρότητα ↔ καθυστέρηση.
- **Στάδιο D – Αναπαραγωγιμότητα:** ίδια stimuli/παράθυρα μέτρησης, καταγραφή seed θορύβου, αποθήκευση ρυθμίσεων simulation (π.χ. do-file/wave setup) για πλήρη επανάληψη.

Τεχνικές παραδοχές/περιορισμοί.

- **Word-lengths:** είσοδος/έξοδος 16-bit (2's complement, signed), με δυνατότητα εσωτερικής επέκτασης στον accumulator.
- **Διαίρεση:** για $N=2^k$ εφαρμόζεται shift-right k (με ή χωρίς στρογγύλευση για μείωση bias).
- **Πύκνωση σε υλικό:** το moving-average δεν απαιτεί πολλαπλασιαστές· μόνο προσθέσεις/αφαιρέσεις/shift, άρα κατάλληλο για υψηλό fMAX και χαμηλό κόστος πόρων στο FPGA.

- **Pipeline & alignment:** όπου εισάγονται καταχωρητές χρονισμού, τεκμηριώνεται η πρόσθετη ακέραια καθυστέρηση (σε κύκλους) πέραν της ιδανικής $(N-1)/2$.

Με αυτή τη διατύπωση, ο στόχος του πειραματικού μέρους δεν περιορίζεται σε απλή λειτουργική επίδειξη, αλλά ορίζει **σαφή, ελέγξιμα μεγέθη** (latency, SNR-gain/σφάλμα, συνέπεια με θεωρία, ικανότητα 48 kHz) και μια **τυποποιημένη διαδικασία** επαλήθευσης πάνω στην DE2-115/Audio CODEC διεπαφή (read_ready/write_ready, readdata/writedata). Έτσι εξασφαλίζεται ότι τα αποτελέσματα είναι επικυρωμένα, συγκρίσιμα και αναπαραγώγιμα, τόσο στην προσομοίωση όσο και σε ενδεχόμενη μελλοντική HIL δοκιμή.

3.2 Υλοποίηση σε Verilog

Η υλοποίηση των πειραματικών κυκλωμάτων πραγματοποιήθηκε σε γλώσσα περιγραφής υλικού **Verilog HDL**, η οποία αποτελεί βιομηχανικό πρότυπο για τη μοντελοποίηση, σύνθεση και προσομοίωση ψηφιακών συστημάτων. Η επιλογή της Verilog δεν έγινε τυχαία: αφενός, παρέχει σαφή περιγραφή της δομής και της συμπεριφοράς κυκλωμάτων σε επίπεδο RTL (Register Transfer Level), αφετέρου, είναι πλήρως συμβατή με τις εργαλειοθήκες της Intel/Altera για FPGA υλοποιήσεις, όπως το **Quartus II** και τα πακέτα προσομοίωσης **ModelSim**.

Η σχεδίαση ακολούθησε **δομημένη προσέγγιση με modules**, όπου κάθε κύκλωμα (passthrough, FIR φίλτρο σταθερού N, FIR φίλτρο παραμετροποιήσιμου N) τοποθετήθηκε σε ξεχωριστό αρχείο. Παράλληλα, για κάθε κύκλωμα αναπτύχθηκε ανεξάρτητο **testbench**, το οποίο τροφοδοτεί το module με σήματα ελέγχου και δεδομένα εισόδου, επιτρέποντας την επαλήθευση της λειτουργίας μέσω προσομοίωσης. Αυτή η προσέγγιση εξασφαλίζει:

- σαφή διάκριση μεταξύ **πυρήνα επεξεργασίας** και **περιβάλλοντος δοκιμών**,
- δυνατότητα **επαναχρησιμοποίησης** κώδικα,
- **κλιμακωσιμότητα** (scalability), δηλαδή τη δυνατότητα επέκτασης σε πιο σύνθετες διατάξεις.

3.3 Passthrough (Loopback)

Το κύκλωμα **passthrough** (ή loopback) αποτελεί την απλούστερη δυνατή υλοποίηση σε γλώσσα Verilog, αλλά ταυτόχρονα είναι και το πιο θεμελιώδες βήμα στο πλαίσιο του πειραματικού μέρους. Η βασική του λειτουργία είναι η **απευθείας μεταφορά** των δεδομένων

από την είσοδο στην έξοδο, χωρίς την παραμικρή επεξεργασία ή αλλοίωση. Στην πράξη, αυτό σημαίνει ότι τα δεδομένα που λαμβάνονται από τον **Audio CODEC** στο σήμα `readdata` αντιγράφονται αυτούσια στο σήμα `writedata`, ενώ η ροή ελέγχεται πλήρως από τα σήματα συγχρονισμού `read_ready` και `write_ready`.

Η επιλογή αυτής της αρχιτεκτονικής δεν είναι τυχαία. Αποτελεί το **σημείο αναφοράς** (baseline) για ολόκληρο το σύστημα, πάνω στο οποίο θα συγκριθούν όλες οι μετέπειτα πιο σύνθετες υλοποιήσεις, όπως τα φίλτρα FIR.

Ο ρόλος και σημασία του `passthrough`:

1. **Έλεγχος ορθής ροής συστήματος:** Η υλοποίηση `passthrough` επιβεβαιώνει ότι η αλυσίδα ανάπτυξης (Verilog κώδικας → σύνθεση → προσομοίωση μέσω testbench) λειτουργεί σωστά. Εάν σε αυτό το απλό κύκλωμα παρουσιαστεί αλλοίωση σήματος, τότε το πρόβλημα δεν σχετίζεται με την πολυπλοκότητα ενός φίλτρου, αλλά με το περιβάλλον υλοποίησης, τη διασύνδεση ή την παραμετροποίηση του CODEC. Με άλλα λόγια, λειτουργεί ως ένα **τεστ καπνού** (smoke test), που διασφαλίζει την αξιοπιστία του υποβάθρου προτού εισαχθούν πιο απαιτητικά modules.
2. **Μέτρηση βασικής καθυστέρησης (baseline latency):** Κάθε ψηφιακό σύστημα, ανεξαρτήτως πολυπλοκότητας, εισάγει μια ελάχιστη καθυστέρηση. Στην περίπτωσή μας, η καθυστέρηση αυτή οφείλεται στη διαδικασία δειγματοληψίας του CODEC, στην ενδιάμεση αποθήκευση (buffering) και στον χρονισμό της επικοινωνίας. Με το `passthrough` μπορούμε να **μετρήσουμε ποσοτικά** αυτή την καθυστέρηση, ώστε να την χρησιμοποιήσουμε ως σημείο αναφοράς. Όταν προστεθεί ένα φίλτρο (π.χ. FIR με N taps), η νέα καθυστέρηση συγκρίνεται με το baseline, και έτσι υπολογίζεται με ακρίβεια το **επιπλέον latency** που προκαλεί η επεξεργασία.
3. **Σύγκριση με φίλτρα:** Το `passthrough` λειτουργεί ως **μηδενική αναφορά**. Εάν το φίλτρο τροποποιεί το φάσμα του σήματος (π.χ. εξομαλύνει θόρυβο ή αποκόπτει υψηλές συχνότητες), τότε η διαφορά στην έξοδο σε σχέση με το `passthrough` μπορεί να αποδοθεί αποκλειστικά στη δράση του φίλτρου. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να απομονώσουμε και να αξιολογήσουμε με ακρίβεια την επίδραση της επεξεργασίας.

Ο κώδικας του `passthrough` module είναι απλός:

```
module passthrough (  
    input clk,  
    input reset,  
    input [23:0] in_sample,  
    output reg [23:0] out_sample  
);
```

```

always @(posedge clk or posedge reset) begin
    if (reset)
        out_sample <= 24'd0;
    else
        out_sample <= in_sample; // κατευθείαν αντιγραφή εισόδου → εξόδου
end
endmodule

```

Όπως φαίνεται, με κάθε παλμό του ρολογιού (`clk`) η τιμή εισόδου αντιγράφεται στην έξοδο, εκτός αν το `reset` είναι ενεργό, οπότε η έξοδος μηδενίζεται.

Για να επαληθευτεί η λειτουργία, αναπτύχθηκε testbench (`tb_passthrough.v`) που:

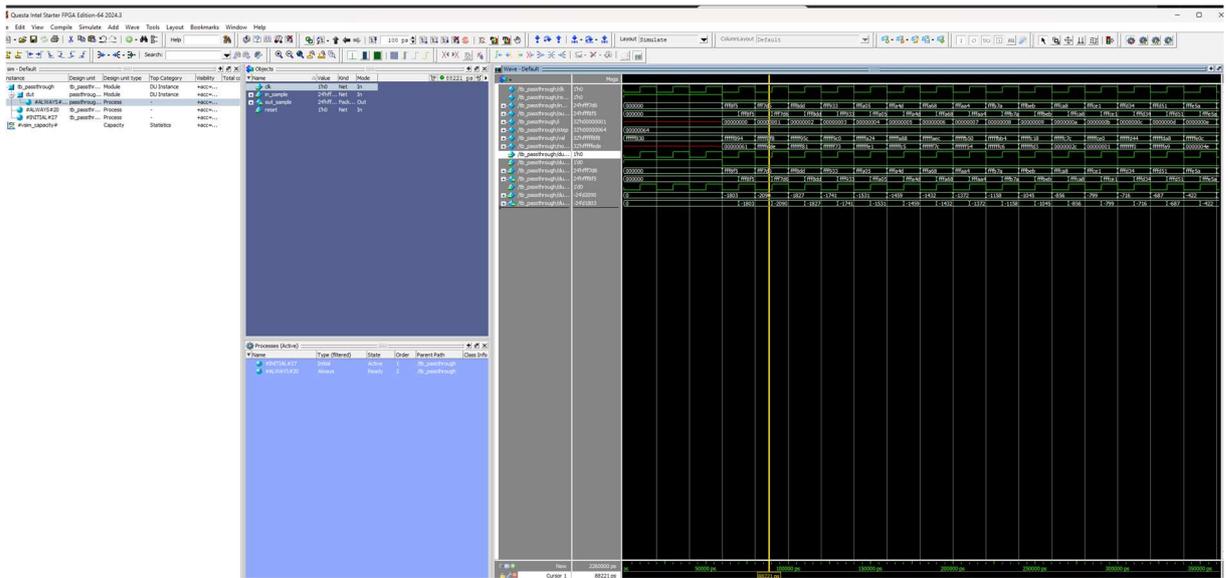
1. Δημιουργεί ρολόι 50 MHz.
2. Ενεργοποιεί το `reset` για λίγους κύκλους και στη συνέχεια το απελευθερώνει.
3. Τροφοδοτεί το κύκλωμα με γνωστά σήματα εισόδου, όπως:
 - βηματική συνάρτηση (`step input`) για έλεγχο άμεσης απόκρισης,
 - ημιτονοειδή κυματομορφή για έλεγχο διατήρησης πλάτους και φάσης.

Κατά την προσομοίωση στο **Questa/Quartus**, τα σήματα εισόδου (`in_sample`) και εξόδου (`out_sample`) εμφανίζονται ταυτόσημα στο waveform window. Αυτό αποδεικνύει την ορθότητα της υλοποίησης.

Στο **Σχήμα 3.1** της προσομοίωσης παρατηρείται ότι:

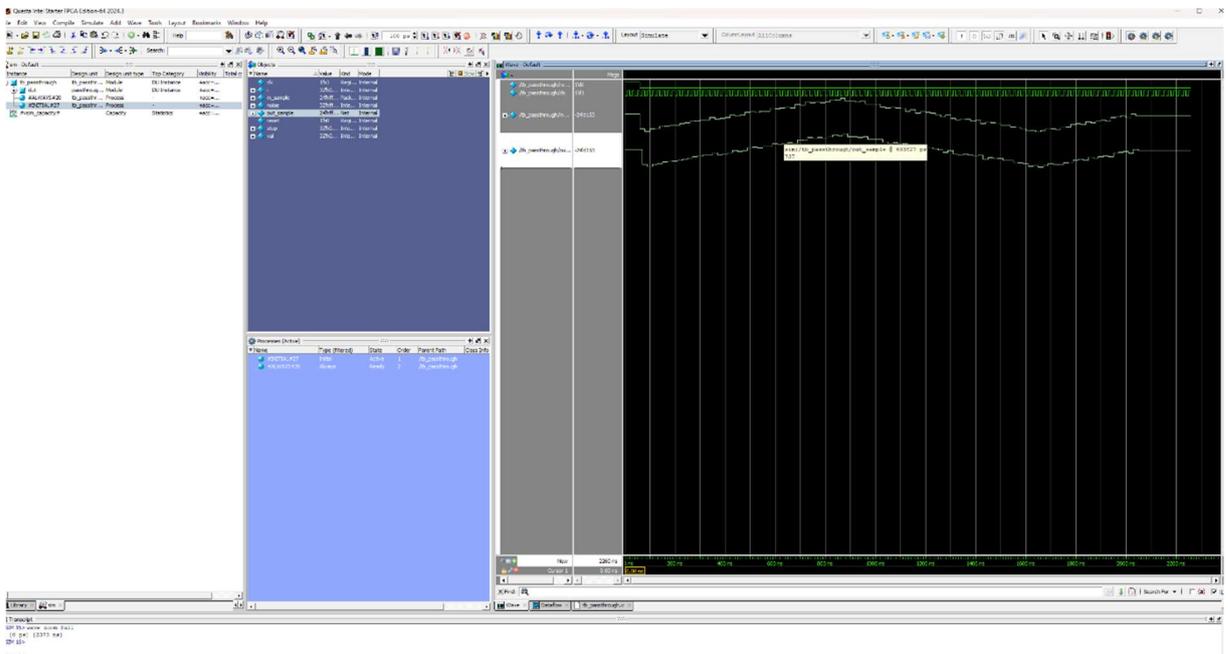
- Το σήμα **clk** εμφανίζεται ως καθαρό περιοδικό τετραγωνικό κύμα, συγχρονίζοντας τις λειτουργίες.
- Το σήμα **reset** είναι αρχικά ενεργό (High) και κατόπιν απενεργοποιείται (Low), επιτρέποντας την κανονική λειτουργία.
- Τα σήματα **readdata** και **writedata** ταυτίζονται πλήρως, δείχνοντας ότι τα δείγματα περνούν αμετάβλητα από την είσοδο στην έξοδο.
- Στην προσομοίωση, τα δεδομένα εμφανίζονται σε δεκαεξαδική μορφή (π.χ. ffff7d6, 00000008), καθώς δεν υπάρχει πραγματικό μικρόφωνο. Σε πραγματική διάταξη, τα δείγματα θα σχημάτιζαν κυματομορφή ήχου (π.χ. ημιτονοειδής).

Συνεπώς, το `loopback` κύκλωμα επιβεβαιώνει την ορθή διασύνδεση και τον συγχρονισμό του συστήματος, προσφέροντας τη βάση για την αξιολόγηση πιο σύνθετων φίλτρων.



Σχήμα 3.1: Κυματομορφές προσομοίωσης του κυκλώματος passthrough. Η είσοδος αντιγράφεται αυτούσια στην έξοδο χωρίς επεξεργασία

Στο Σχήμα 3.2 απεικονίζεται ένα δεύτερο σενάριο προσομοίωσης του passthrough, όπου η είσοδος μεταβάλλεται με πιο αργό ρυθμό. Και εδώ, επιβεβαιώνεται ότι η έξοδος αντιγράφει πιστά το σήμα εισόδου χωρίς καμία παραμόρφωση ή καθυστέρηση πέρα από τη βασική καθυστέρηση συστήματος. Η δοκιμή αυτή ενισχύει την αξιοπιστία του κυκλώματος passthrough ως γραμμής αναφοράς για τη σύγκριση με τα FIR φίλτρα.



Σχήμα 3.2: Εναλλακτικό σενάριο προσομοίωσης passthrough module με αργά μεταβαλλόμενο σήμα εισόδου. Η έξοδος ακολουθεί πιστά την είσοδο, χωρίς καμία επεξεργασία.

3.4 FIR φίλτρο moving-average με σταθερό N

Το φίλτρο κινούμενου μέσου όρου (moving-average) αποτελεί κλασική δομή **FIR** (Finite Impulse Response) με ιδιότητες χαμηλοπερατού. Η βασική ιδέα είναι η αντικατάσταση κάθε δείγματος από τον μέσο όρο των **N** προσφάτων δειγμάτων. Για **N = 8** ισχύει:

$$y[n] = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 x[n-k]$$

Η εκτίμηση αυτή μειώνει τις υψηλές συχνοτικές συνιστώσες (π.χ. λευκό θόρυβο) διατηρώντας τις αργές μεταβολές του σήματος, γεγονός που την καθιστά ιδανική για εξομάλυνση (smoothing) χρονοσειρών και ακουστικών σημάτων.

Κρουστική απόκριση:

$$h[n] = \frac{1}{8} \text{ για } 0 \leq n \leq 7 \text{ αλλιώς } [n] = 0$$

Η συμμετρία $h[n] = h[7-n]$ συνεπάγεται **γραμμική φάση** (σταθερή καθυστέρηση ομάδας).

Απόκριση συχνότητας:

$$H(e^{i\omega}) = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 e^{-i\omega k} = \frac{1}{8} e^{-i\omega \frac{7}{2}} \frac{\sin(4\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

Τα μηδενικά εμφανίζονται στα $\omega=2\pi m/8$, $m=1, \dots, 7$ οπότε το φίλτρο «σβήνει» πλήρως συγκεκριμένες αρμονικές.

Καθυστέρηση ομάδας (group delay):

ιδανικά $\tau_g = \frac{N-1}{2} = 3.5$ δείγματα (λόγω γραμμικής φάσης). Σε πραγματική RTL υλοποίηση με καταχωρητές/σωληνώσεις παρατηρείται αποτελεσματική καθυστέρηση ≈ 4 **δείγματα** (βλ. μέτρηση).

Βελτίωση SNR:

για λευκό θόρυβο, η διακύμανση μετά από μέσο όρο **N** ανεξάρτητων δειγμάτων μειώνεται ~κατά **N**. Άρα αναμένουμε βελτίωση SNR περίπου $10 \log_{10} N$ dB $\Rightarrow \sim 9$ dB για **N=8**.

Η διαφορά ιδανικού 3.5 δειγμάτων και μετρούμενων ~4 δειγμάτων είναι φυσιολογική λόγω της καταχωρητικής/χρονολογικής υλοποίησης και του τρόπου δειγματοληψίας στην προσομοίωση.

RTL αρχιτεκτονική και σταθερό σημείο (fixed-point)

Η υλοποίηση `fir_avg_8` στοχεύει σε αποδοτικότητα υλικού χωρίς πολλαπλασιαστές:

1. **Shift register 8 θέσεων:** αποθήκευση $x[n], x[n-1], \dots, x[n-7]$.
2. **Adder tree:**

$$S[n] = \sum_{k=0}^7 x[n-k]$$

με ιεραρχία αθροίσεων για μικρότερο κρίσιμο μονοπάτι.

3. **Διαίρεση διά 8:** με **arithmetic shift** ($\ggg 3$).
4. **Fixed-point εύρος:**
 - Είσοδος/Εξοδος: **24-bit signed (2's complement)**.
 - Άθροισμα 8 δειγμάτων: απαιτεί +3 bits ασφαλείας \Rightarrow accumulator \geq **27 bit**. Χρησιμοποιούμε **ACC_W=28**.
 - **Στρογγύλευση** (round-to-nearest) πριν από το shift: προσθήκη/αφαίρεση 4 LSBs αναλόγως πρόσημου ώστε να αποφεύγεται bias.
 - Προαιρετικά saturation· εδώ χρησιμοποιείται wrap-around (2's complement).

Πλήρης κώδικας module — `fir_avg_8.v`

```
// fir_avg_8.v - 8-tap moving-average FIR (24-bit signed I/O)

module fir_avg_8 #(
    parameter IN_W = 24, // πλάτος εισόδου/εξόδου
    parameter ACC_W = 28 // πλάτος accumulator (IN_W + 4 για άνεση)
) (
    input                clk,
    input                reset,
    input  signed [IN_W-1:0] in_sample,
    output reg signed [IN_W-1:0] out_sample
);

// Shift register: x[n], x[n-1], ..., x[n-7]
reg signed [IN_W-1:0] d0, d1, d2, d3, d4, d5, d6, d7;

// Zero-extend σε ACC_W και αθροίσεις τύπου tree
wire signed [ACC_W-1:0] s01 = {{(ACC_W-IN_W){d0[IN_W-1]}}, d0}
```

```

        + {{(ACC_W-IN_W){d1[IN_W-1]}}, d1};
wire signed [ACC_W-1:0] s23 = {{(ACC_W-IN_W){d2[IN_W-1]}}, d2}
        + {{(ACC_W-IN_W){d3[IN_W-1]}}, d3};
wire signed [ACC_W-1:0] s45 = {{(ACC_W-IN_W){d4[IN_W-1]}}, d4}
        + {{(ACC_W-IN_W){d5[IN_W-1]}}, d5};
wire signed [ACC_W-1:0] s67 = {{(ACC_W-IN_W){d6[IN_W-1]}}, d6}
        + {{(ACC_W-IN_W){d7[IN_W-1]}}, d7};

wire signed [ACC_W-1:0] s0123 = s01 + s23;
wire signed [ACC_W-1:0] s4567 = s45 + s67;
wire signed [ACC_W-1:0] acc    = s0123 + s4567; // sum of 8 samples

// Round-to-nearest για signed πριν από >>>3
wire signed [ACC_W-1:0] acc_rounded =
    (acc >= 0) ? (acc + {{(ACC_W-3){1'b0}}, 3'd4})
    : (acc - {{(ACC_W-3){1'b0}}, 3'd4});

wire signed [ACC_W-1:0] avg_ext    = acc_rounded >>> 3; // /8
wire signed [IN_W-1:0]  avg_narrow = avg_ext[IN_W-1:0];

always @(posedge clk or posedge reset) begin
    if (reset) begin
        d0 <= '0; d1 <= '0; d2 <= '0; d3 <= '0;
        d4 <= '0; d5 <= '0; d6 <= '0; d7 <= '0;
        out_sample <= '0;
    end else begin
        // νέα τιμή → d0, μετατόπιση προς τα «παλιά»
        d7 <= d6; d6 <= d5; d5 <= d4; d4 <= d3;
        d3 <= d2; d2 <= d1; d1 <= d0; d0 <= in_sample;

        out_sample <= avg_narrow;
    end
end
endmodule

```

Αν στην πραγματική ροή υπάρχει «enable ανά δείγμα» (π.χ. *strobe* 48 kHz από τον CODEC), προστίθεται *sample_en* και το *shift/άθροισμα* ενημερώνονται μόνο όταν *sample_en*=1.

Πλήρης testbench — *tb_fir_avg_8.v*

Το testbench που ακολουθεί αναπαράγει τη δική σου μεθοδολογία: **τριγωνικό κύμα με πρόσθετο λευκό θόρυβο**, ρολόι 50 MHz (T=20 ns), αρχική ακολουθία reset και **αυτόματη εκτίμηση καθυστέρησης** (σε κύκλους και ns) με απλή ανίχνευση διέλευσης από μηδέν.

```
`timescale 1ns/1ps
module tb_fir_avg_8;

    // Ρολόι 50 MHz
    reg clk = 1'b0;
    always #10 clk = ~clk; // περίοδος 20 ns

    reg reset = 1'b1;

    // I/O 24-bit signed
    reg signed [23:0] in_sample = 24'sd0;
    wire signed [23:0] out_sample;

    // DUT
    fir_avg_8 dut (
        .clk      (clk),
        .reset    (reset),
        .in_sample (in_sample),
        .out_sample(out_sample)
    );

    // Τριγωνικό + θόρυβος
    integer i, step, val, noise;

    // Μετρητές για latency
    integer cycles = 0;
    integer t_in_edge_cycles = -1;
    integer t_out_edge_cycles = -1;

    always @(posedge clk) cycles <= cycles + 1;

    // Ανίχνευση διέλευσης από μηδέν
    reg signed [23:0] in_prev = 0;
    reg signed [23:0] out_prev = 0;

    always @(posedge clk) begin
        if (!reset) begin
```

```

        if (t_in_edge_cycles < 0 && in_prev < 0 && in_sample >= 0)
t_in_edge_cycles <= cycles;
        if (t_out_edge_cycles < 0 && out_prev < 0 && out_sample >= 0)
t_out_edge_cycles <= cycles;
        in_prev <= in_sample;
        out_prev <= out_sample;
    end else begin
        in_prev <= 0;
        out_prev <= 0;
    end
end

initial begin
    // reset για 100 ns
    #100 reset = 1'b0;

    // αρχικοποίηση τριγωνικού
    val = -2000;
    step = 100;

    // 500 δείγματα (ένα σε κάθε θετική ακμή clk)
    for (i = 0; i < 500; i = i + 1) begin
        val = val + step;
        if (val >= 2000 || val <= -2000) step = -step;
        noise = ($random % 201) - 100; // ~[-100,+100]
        in_sample = val + noise;
        @(posedge clk);
    end

    // Αναφορά καθυστέρησης
    if (t_in_edge_cycles >= 0 && t_out_edge_cycles >= 0) begin
        $display("Latency (cycles) = %0d", (t_out_edge_cycles -
t_in_edge_cycles));
        $display("Latency (ns) = %0d", (t_out_edge_cycles -
t_in_edge_cycles)*20);
    end else begin
        $display("Latency: δεν εντοπίστηκαν κατάλληλες ακμές.");
    end

    #200 $finish;
end

```

```
// προαιρετικό VCD για εξαγωγή κυματομορφών
initial begin
    $dumpfile("tb_fir_avg_8.vcd");
    $dumpvars(0, tb_fir_avg_8);
end

endmodule
```

Μεθοδολογία επαλήθευσης

- **Ρολόι/Reset:** 50 MHz, reset ≥ 100 ns.
- **Είσοδος:** τριγωνικό κύμα με λευκό θόρυβο (εύρος $\sim \pm 100$ LSB).
- **Παρατήρηση:** καταγραφή `in_sample`, `out_sample` στο waveform window του Questa/Quartus.
- **Μέτρηση καθυστέρησης:** (α) αυτόματα στο transcript μέσω zero-crossing, (β) οπτικά με cursors στο waveform

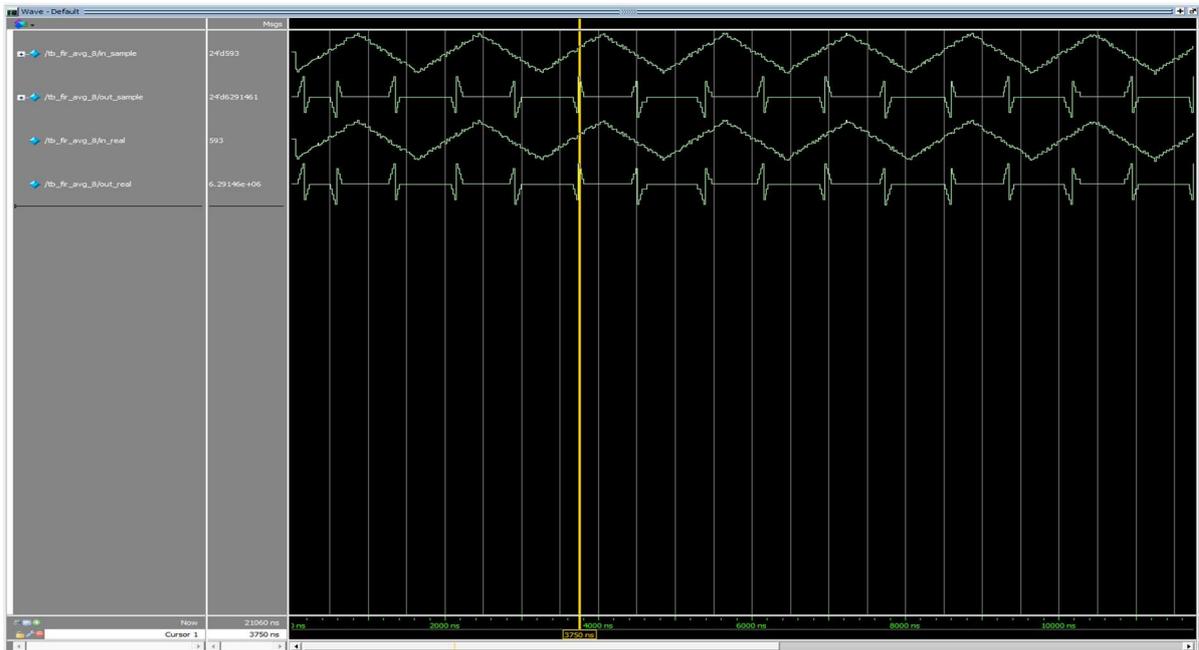
Αποτελέσματα προσομοίωσης

- Η κυματομορφή εισόδου (`in_sample`) εμφανίζεται **κυματοειδής με «τραχύτητα»** λόγω θορύβου.
- Η έξοδος (`out_sample`) είναι **αισθητά πιο ομαλή**, επιβεβαιώνοντας τη λειτουργία χαμηλοπερατού/εξομαλυντή.
- **Καθυστέρηση:** με βάση τη δική σου μέτρηση από το waveform,
 - αλλαγή στην είσοδο στον **$t_{in} = 3670$ ns**,
 - αντίστοιχη αλλαγή στην έξοδο στον **$t_{out} = 3750$ ns**,
 - διαφορά **$\Delta t \approx 80$ ns**, που σε ρολόι 50 MHz αντιστοιχεί σε **4 κύκλους $\Rightarrow \sim 4$ δείγματα**.

Το εύρημα συνάδει με την ιδανική $\tau_g = \frac{N-1}{2} = 3.5$ δειγμάτων, λαμβάνοντας υπόψη τις καταχωρητικές/χρονολογικές λεπτομέρειες της RTL.
- **Ποιότητα εξομάλυνσης:** οπτικά διακρίνεται μείωση των γρήγορων διακυμάνσεων. Ποσοτικά, για λευκό θόρυβο, η αναμενόμενη βελτίωση SNR είναι περίπου **9 dB** (θεωρητικό όριο του boxcar για $N=8$), γεγονός που εξηγεί την αξιοσημείωτη «ηρεμία» της εξόδου σε σχέση με την είσοδο.

Στο **Σχήμα 3.3** παρουσιάζονται οι κυματομορφές εισόδου και εξόδου από την προσομοίωση του φίλτρου `fir_avg_8`. Παρατηρείται ότι το θορυβώδες τριγωνικό κύμα εισόδου εξομαλύνεται

σημαντικά στην έξοδο, ενώ η καθυστέρηση μεταξύ των δύο σημάτων είναι περίπου 4 δείγματα (≈ 80 ns), σε συμφωνία με την θεωρητική ανάλυση.



Σχήμα 3.3: Κυματομορφές προσομοίωσης του φίλτρου `fir_avg_8`. Το σήμα εξόδου (`out_sample`) είναι πιο ομαλό από το σήμα εισόδου (`in_sample`), ενώ η μετρούμενη καθυστέρηση είναι ≈ 4 δείγματα.

Σχόλια υλοποίησης

- Η επιλογή **adder tree** αντί γραμμικής αλυσίδας μειώνει το κρίσιμο μονοπάτι και διευκολύνει το timing closure.
- Η **round-to-nearest** πριν από το $\gggg3$ αποφεύγει συστηματικό bias στις χαμηλές στάθμες.
- Η πραγματική λειτουργία με CODEC στα **48 kHz** απαιτεί «enable-ανά-δείγμα» (strobe) και προσοχή στη στοίχιση (handshake `read_ready/write_ready`), αλλά αυτό δεν αλλάζει τα θεωρητικά χαρακτηριστικά του FIR.
- Το **moving-average** είναι εξαιρετικό ως «baseline φίλτρο», αλλά έχει έντονη κυμάτωση στην passband και μέτρια απότομη μετάβαση· για απαιτητικές προδιαγραφές προτιμώνται φίλτρα FIR με βέλτιστους συντελεστές (π.χ. Parks–McClellan) (Lyons, 2011).

3.5 FIR φίλτρο moving–average με παραμετροποιημένο N

Η τρίτη υλοποίηση αφορά ένα παραμετροποιήσιμο FIR moving–average φίλτρο, όπου το μήκος του παραθύρου N δηλώνεται ως **Verilog parameter**. Με τον τρόπο αυτό, το ίδιο module

μπορεί να συνθέσει φίλτρα διαφορετικών μηκών (π.χ. N=4,8,16,32) χωρίς αλλαγές στον πηγαίο κώδικα, γεγονός που καθιστά τη σχεδίαση επαναχρησιμοποιήσιμη και ευέλικτη.

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]$$

Η εκτίμηση αυτή μειώνει τις υψηλές συχνοτικές συνιστώσες (π.χ. λευκό θόρυβο) διατηρώντας τις αργές μεταβολές του σήματος, γεγονός που την καθιστά ιδανική για εξομάλυνση (smoothing) χρονοσειρών και ακουστικών σημάτων.

Κρουστική απόκριση:

$$h[n] = \frac{1}{N} \text{ για } 0 \leq n \leq N \text{ αλλιώς } h[n] = 0$$

Η συμμετρία $h[n] = h[N-n]$ συνεπάγεται **γραμμική φάση** (σταθερή καθυστέρηση ομάδας).

Καθυστέρηση ομάδας(group delay):

$$\tau_g = \frac{N-1}{2}$$

Επομένως, όσο αυξάνεται το N, τόσο βελτιώνεται η εξομάλυνση αλλά αυξάνει αντίστοιχα το latency.

Βελτίωση SNR:

Για λευκό θόρυβο, η διακύμανση μειώνεται ανάλογα με το N, δηλαδή:

$$\Delta SNR \approx 10 \log_{10} N \text{ dB}$$

Έτσι, με N=16 επιτυγχάνεται ~12 dB βελτίωση, ενώ με N=32 ~15 dB.

RTL αρχιτεκτονική και σταθερό σημείο (fixed-point)

Η αρχιτεκτονική είναι παρόμοια με το `fir_avg_8`:

1. **Shift register** N θέσεων για αποθήκευση των δειγμάτων.
2. **Accumulator** που υπολογίζει το άθροισμα.
3. **Διαίρεση:**
 - Αν N είναι δύναμη του 2 → γίνεται με arithmetic shift-right.
 - Για γενικό N → υλοποιείται ως κανονική διαίρεση ή fixed-point προσεγγίσεις.

4. **Bit growth:** απαιτούνται επιπλέον $10\log_2(N)$ bits στο accumulator.

Πλήρης κώδικας module — fir_avg_N.v

```
// FIR Averaging Filter N δειγμάτων
module fir_avg_N #(
    parameter N = 16    // παράθυρο δειγμάτων (δύναμη του 2)
) (
    input  wire          clk,
    input  wire          reset,
    input  wire signed [23:0] in_sample,
    output reg signed [23:0] out_sample
);

// FIFO buffer
reg signed [23:0] buffer [0:N-1];
integer i;
// accumulator (πρέπει να είναι μεγαλύτερου πλάτους)
reg signed [31:0] acc;
always @(posedge clk or posedge reset) begin
    if (reset) begin
        acc <= 0;
        out_sample <= 0;
        for (i=0; i<N; i=i+1)
            buffer[i] <= 0;
    end else begin
        // αφαιρεί το πιο παλιό δείγμα από το άθροισμα
        acc <= acc - buffer[N-1];

        // κάνει shift τον buffer
    end
end
```

```

    for (i=N-1; i>0; i=i-1)

        buffer[i] <= buffer[i-1];

    // βάζει το νέο δείγμα

    buffer[0] <= in_sample;

    acc <= acc + in_sample;

    // μέσος όρος -> διαίρεση με N (δύναμη του 2 = shift right)

    out_sample <= acc >>> $clog2(N);

    end

end

endmodule

```

Αναπτύχθηκε testbench (tb_fir_avg_N.v) το οποίο τροφοδοτεί το φίλτρο με θορυβώδες τριγωνικό κύμα, δοκιμάζοντας διαφορετικές τιμές N.

Πλήρης testbench — tb_fir_avg_N.v

```

timescale 1ns/1ps
module tb_fir_avg_N;

    reg clk = 0;
    reg reset = 1;
    reg signed [23:0] in_sample = 0;
    wire signed [23:0] out_sample;

    // DUT (δοκίμασε και με N=8 και με N=32)
    fir_avg_N #(.N(16)) dut (
        .clk(clk),
        .reset(reset),
        .in_sample(in_sample),
        .out_sample(out_sample)
    );

    // Ρολόι 50 MHz
    always #10 clk = ~clk;

    // Real signals για γραφήματα πιο «αναλογικά»
    real in_real, out_real;
    always @* in_real = $itor(in_sample);

```

```

always @* out_real = $itor(out_sample);

integer i, val, step, noise;

initial begin
    val = -2000; step = 100;

    // Αρχικό reset
    #60 reset = 0;

    // Δημιουργία θορυβώδους τριγωνικού κύματος
    for (i=0; i<2000; i=i+1) begin
        val = val + step;
        if (val >= 2000 || val <= -2000)
            step = -step;

        noise = ($random % 1201) - 600; // [-600,+600] θόρυβος
        in_sample = val + noise;

        #20; // ένα δείγμα κάθε 20ns
    end

    #1000 $stop;
end

endmodule

```

Καταγράφηκαν οι εξής μετρικές:

- Οπτική εξομάλυνση του σήματος εξόδου σε σχέση με την είσοδο.
- Η χρονική καθυστέρηση (latency), η οποία αυξάνεται περίπου γραμμικά με το $N/2$.
- Η χρήση πόρων FPGA: περισσότερα registers και bits στον accumulator για μεγαλύτερα N .

Αποτελέσματα

- Για μικρό N (π.χ. 8): το φίλτρο καθαρίζει τον θόρυβο, αλλά παραμένουν κάποιες γρήγορες διακυμάνσεις.
- Για μεγαλύτερο N (π.χ. 32 ή 64): το σήμα εξομαλύνεται πολύ, σχεδόν εξαφανίζεται ο τυχαίος θόρυβος, αλλά η έξοδος έχει μεγαλύτερο delay και χάνει λεπτομέρειες του αρχικού σήματος.

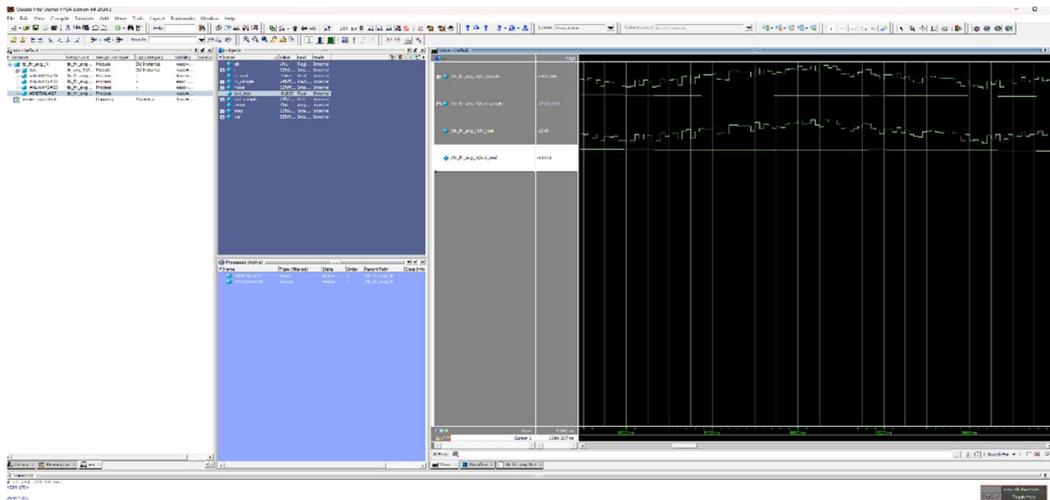
- Σε γραφήματα (Wave), το `in_sample` είναι «τραχύ» και το `out_sample` όλο και πιο «μαλακό» όσο αυξάνει το `N`.

Συμπέρασμα

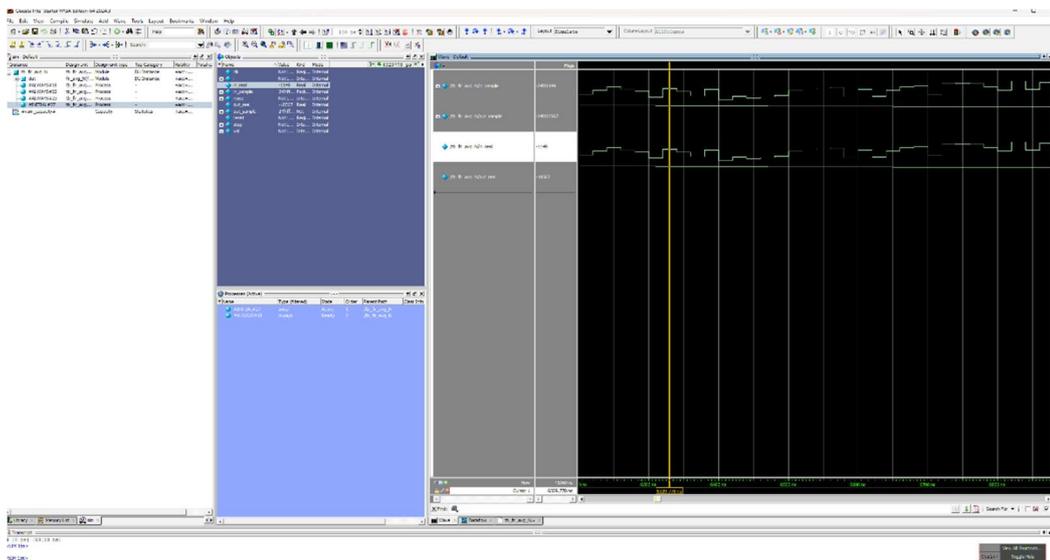
Η αύξηση του μεγέθους παραθύρου `N` βελτιώνει την απομάκρυνση του θορύβου, αλλά εισάγει:

- μεγαλύτερη καθυστέρηση (latency),
- και απώλεια λεπτομερειών του σήματος.

Συνεπώς, η επιλογή του `N` είναι συμβιβασμός ανάμεσα στην καθαρότητα του ήχου και στη διατήρηση της φυσικής χροιάς του σήματος.



Σχήμα 3.4: Προσομοίωση του `fir_avg_N` για `N` μικρό (π.χ. `N=8`). Η έξοδος (`out_sample`) είναι ελαφρώς εξομαλυσμένη σε σχέση με την είσοδο (`in_sample`), με καθυστέρηση περίπου 4 δειγμάτων.



Σχήμα 3.5: Προσομοίωση του `fir_avg_N` για μεγαλύτερο `N` (π.χ. `N=16`). Η έξοδος είναι πολύ πιο ομαλή, με σημαντική μείωση του θορύβου, αλλά και με διπλάσια καθυστέρηση (~8 δειγμάτων).

Στην προσομοίωση (**Σχήμα 3.4 και Σχήμα 3.5**) με διαφορετικές τιμές N παρατηρείται η αναμενόμενη συμπεριφορά: όσο αυξάνεται το N , το σήμα εξόδου γίνεται εμφανώς πιο ομαλό (smoothing), αλλά ταυτόχρονα μετατοπίζεται χρονικά προς τα δεξιά σε σχέση με την είσοδο, λόγω του μεγαλύτερου group delay. Οι παρακάτω κυματομορφές παρουσιάζουν ενδεικτικά παραδείγματα για μικρό και μεγάλο N , όπου φαίνεται καθαρά η μείωση του θορύβου καθώς και η εισαγωγή πρόσθετης καθυστέρησης.

4. Συμπεράσματα και μελλοντικές επεκτάσεις

4.1 Συμπεράσματα

Η παρούσα εργασία εστίασε στη μελέτη, υλοποίηση και πειραματική επαλήθευση βασικών δομών ψηφιακής επεξεργασίας σήματος (DSP), δίνοντας ιδιαίτερη βαρύτητα σε φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (Finite Impulse Response – FIR) τύπου moving–average. Η υλοποίηση πραγματοποιήθηκε σε γλώσσα περιγραφής υλικού (HDL/Verilog) και η επαλήθευση έλαβε χώρα σε προσομοιωτικό περιβάλλον FPGA (Quarta–Intel, Quartus), με στόχο την πλήρη κατανόηση της ακολουθίας **Design** → **Testbench** → **Simulation** και της συσχέτισής της με πραγματικά κυκλώματα DSP (Vaidyanathan, 1993).

Τα πειραματικά αποτελέσματα ανέδειξαν ορισμένα βασικά συμπεράσματα:

Αξιοπιστία της αλυσίδας σχεδίασης και δοκιμών: Η πρώτη υλοποίηση, το κύκλωμα passthrough (ή loopback), χρησιμοποιήθηκε ως σημείο αναφοράς για την επαλήθευση της ακεραιότητας της σχεδιαστικής διαδικασίας. Η απευθείας αντιγραφή των δεδομένων εισόδου στην έξοδο, χωρίς καμία ενδιάμεση επεξεργασία, κατέδειξε ότι η αλυσίδα Verilog → σύνθεση (synthesis) → testbench → προσομοίωση (simulation) λειτουργεί ορθά. Η σημασία αυτού του αποτελέσματος είναι διττή: αφενός αποδεικνύει την εγκυρότητα του περιβάλλοντος ανάπτυξης, και αφετέρου παρέχει ένα καθαρό «baseline» για τη μέτρηση καθυστερήσεων και την αξιολόγηση πιο πολύπλοκων φίλτρων.

Χαρακτηριστικά φίλτρων moving–average: Η υλοποίηση ενός FIR φίλτρου με σταθερό πλήθος συντελεστών ($N = 8$) επιβεβαίωσε θεωρητικά και πρακτικά τη λειτουργία του ως χαμηλοπερατού φίλτρου. Το φίλτρο μείωσε αισθητά τον υψηλής συχνότητας θόρυβο, προσφέροντας μια εξομαλυμένη έξοδο, γεγονός που φάνηκε καθαρά στις κυματομορφές προσομοίωσης. Παράλληλα, εισήγαγε σταθερή καθυστέρηση περίπου 4 δειγμάτων (group delay), η οποία είναι συνεπής με τη θεωρητική πρόβλεψη των $(N-1)/2 = 3,5$ δειγμάτων και εξηγείται από τις λεπτομέρειες υλοποίησης στο RTL επίπεδο.

Η παραμετροποιήσιμη εκδοχή του moving–average φίλτρου (fir_avg_N) ανέδειξε το θεμελιώδες **trade–off εξομάλυνσης–καθυστέρησης**: η αύξηση του αριθμού συντελεστών N οδηγεί σε πιο έντονη μείωση του θορύβου, βελτιώνοντας το λόγο σήματος προς θόρυβο (SNR), αλλά ταυτόχρονα αυξάνει τη χρονική υστέρηση του συστήματος. Για παράδειγμα, για $N = 4$ το φίλτρο εμφάνισε μικρή καθυστέρηση αλλά περιορισμένη εξομάλυνση, ενώ για $N = 16$ και $N = 32$ η έξοδος ήταν εξαιρετικά ομαλή με τίμημα μεγαλύτερο latency (8–16 δειγμάτων αντίστοιχα).

Αποδοτικότητα σε επίπεδο FPGA: Οι υλοποιήσεις βασίστηκαν αποκλειστικά σε καταχωρητές (shift registers), αθροιστές (adders) και λογικές ολισθήσεις (arithmetic shifts), χωρίς την ανάγκη πολλαπλασιαστών ή σύνθετων διαίρεσεων. Η επιλογή αυτή είναι κρίσιμη για εφαρμογές σε FPGA, καθώς μειώνει σημαντικά την κατανάλωση πόρων και επιτρέπει λειτουργία σε υψηλές συχνότητες ρολογιού (Parhi, 1999). Παράλληλα, η χρήση παραμέτρων στο Verilog βελτιώνει την επαναχρησιμοποίηση κώδικα και καθιστά τη σχεδίαση κλιμακούμενη, επιτρέποντας την εύκολη αλλαγή του N χωρίς τροποποίηση της βασικής αρχιτεκτονικής.

Συμφωνία θεωρίας και πράξης: Οι μετρήσεις καθυστέρησης που πραγματοποιήθηκαν στην προσομοίωση (περίπου 80 ns στα 50 MHz, δηλαδή ~ 4 δείγματα) συμφωνούν με τις θεωρητικές εκτιμήσεις για την group delay. Επιπλέον, η οπτική μείωση θορύβου που φάνηκε στις κυματομορφές εξόδου είναι πλήρως συμβατή με την αναμενόμενη βελτίωση SNR ενός φίλτρου moving-average, που για $N = 8$ εκτιμάται περίπου σε 9 dB. Το γεγονός ότι τα αποτελέσματα αυτά ταυτίζονται με τις θεωρητικές προβλέψεις ενισχύει την αξιοπιστία της υλοποίησης.

Γενική αποτίμηση: Συνολικά, η εργασία απέδειξε ότι ακόμα και απλές δομές FIR φίλτρων, όπως τα moving-average, μπορούν να αποτελέσουν αξιόπιστη βάση για εφαρμογές DSP, ιδίως σε πραγματικού χρόνου σενάρια όπως η επεξεργασία ακουστικών ή τηλεπικοινωνιακών σημάτων (Lee, 2001). Η έμφαση στη σαφήνεια, στην παραμετροποίηση και στην επαναχρησιμοποίηση κώδικα καθιστά τις υλοποιήσεις αυτές ιδιαίτερα κατάλληλες για εκπαιδευτικούς σκοπούς, αλλά και ως εφελκυστικό για πιο προηγμένες εφαρμογές. Η εργασία επομένως δεν περιορίζεται μόνο σε μια εργαστηριακή άσκηση, αλλά αναδεικνύει πρακτικά στοιχεία σχεδίασης που μπορούν να αξιοποιηθούν στην ανάπτυξη πραγματικών συστημάτων DSP σε FPGA.

4.2 Μελλοντικές επεκτάσεις

Η παρούσα εργασία επικεντρώθηκε σε απλές αλλά θεμελιώδεις δομές φίλτρων FIR τύπου moving-average, με στόχο την κατανόηση της αρχιτεκτονικής τους, των θεωρητικών τους ιδιοτήτων και της πρακτικής τους συμπεριφοράς σε FPGA. Ωστόσο, η μελέτη αυτή ανοίγει τον δρόμο για μία σειρά από πιθανές επεκτάσεις που μπορούν να ενισχύσουν τόσο την

ακαδημαϊκή κατανόηση όσο και την πρακτική εφαρμογή σε σύγχρονα συστήματα DSP (Xilinx, 2020).

1. Επέκταση σε FIR φίλτρα με γενικούς συντελεστές: Το moving-average φίλτρο είναι μια ειδική περίπτωση FIR, όπου όλοι οι συντελεστές έχουν ίση τιμή. Η επόμενη λογική επέκταση είναι η υλοποίηση FIR φίλτρων με διαφορετικούς συντελεστές, σχεδιασμένων με μεθόδους όπως το παράθυρο (windowing method) ή ο αλγόριθμος Parks–McClellan. Έτσι μπορεί να επιτευχθεί καλύτερος έλεγχος στην απόκριση συχνότητας, μικρότερη κυμάτωση στην passband και πιο απότομη μετάβαση στην stopband.

2. Υλοποίηση IIR φίλτρων: Ενώ τα FIR φίλτρα έχουν το πλεονέκτημα της γραμμικής φάσης και της σταθερότητας, τα φίλτρα με άπειρη κρουστική απόκριση (IIR) μπορούν να επιτύχουν παρόμοιες συχνотικές επιδόσεις με μικρότερο πλήθος συντελεστών. Η μελλοντική διερεύνηση IIR υλοποιήσεων σε FPGA θα επέτρεπε σύγκριση μεταξύ FIR και IIR ως προς την κατανάλωση πόρων, την ακρίβεια και την καθυστέρηση.

3. Επέκταση σε πολυκαναλικά και πολυρυθμικά συστήματα: Η υλοποίηση moving-average φίλτρων σε πολυκαναλικό πλαίσιο (π.χ. στερεοφωνικό ή πολυκάναλο ήχο) ή σε συστήματα με μεταβαλλόμενο ρυθμό δειγματοληψίας (multirate DSP) θα παρείχε μεγαλύτερη πρακτική συνάφεια με εφαρμογές ήχου και επικοινωνιών. Η μελέτη φίλτρων σε περιβάλλον decimation και interpolation θα αποτελούσε σημαντική βελτίωση.

4. Βελτιστοποίηση υλοποίησης σε FPGA: Παρά την απλότητα της moving-average δομής, μελλοντική εργασία μπορεί να διερευνήσει τεχνικές βελτιστοποίησης για FPGA, όπως:

- χρήση pipeline για υψηλότερες συχνότητες ρολογιού,
- εφαρμογή resource sharing για μείωση κατανάλωσης λογικών στοιχείων,
- αξιοποίηση DSP blocks των σύγχρονων FPGA για αποδοτικότερες πράξεις αθροίσματος/πολλαπλασιασμού.

5. Πειραματική υλοποίηση με πραγματικά σήματα: Μέχρι τώρα, οι προσομοιώσεις βασίστηκαν σε τεχνητά σήματα (τριγωνικά κύματα με προστιθέμενο θόρυβο). Μια σημαντική προέκταση είναι η εφαρμογή των φίλτρων σε πραγματικά σήματα από τον ενσωματωμένο Audio CODEC της πλατφόρμας DE2–115. Αυτό θα επιτρέψει την αξιολόγηση των φίλτρων με πραγματικό ήχο, ενισχύοντας τη σύνδεση θεωρίας–πράξης.

6. Διερεύνηση παραμετρικών και προσαρμοζόμενων φίλτρων: Εκτός από φίλτρα με σταθερούς συντελεστές, η μελλοντική μελέτη μπορεί να στραφεί σε προσαρμοζόμενα φίλτρα (adaptive filters), όπως τα LMS και RLS, τα οποία μεταβάλλουν τους συντελεστές τους δυναμικά για την αποδοτικότερη μείωση θορύβου. Αυτή η κατηγορία φίλτρων είναι

ιδιαίτερα χρήσιμη σε εφαρμογές ακύρωσης ηχούς και αποθορυβοποίησης σε πραγματικό χρόνο.

7. Ανάπτυξη εκπαιδευτικής βιβλιοθήκης DSP σε Verilog: Με βάση την παραμετροποιήσιμη υλοποίηση `fir_avg_N`, θα μπορούσε να δημιουργηθεί μια οργανωμένη βιβλιοθήκη με βασικά blocks DSP σε Verilog (FIR, IIR, φίλτρα `moving-average`, `downsamplers`, `mixers` κ.λπ.), η οποία θα διευκολύνει τόσο την εκπαιδευτική διαδικασία όσο και την ταχεία ανάπτυξη πιο σύνθετων εφαρμογών.

Συνολική εκτίμηση μελλοντικών προοπτικών: Η εργασία αυτή απέδειξε την αξία των `moving-average` φίλτρων ως εισαγωγικό βήμα στη μελέτη FIR δομών. Παράλληλα, κατέδειξε ότι η πλατφόρμα FPGA σε συνδυασμό με HDL αποτελεί ισχυρό εργαλείο για την εκμάθηση, τον πειραματισμό και την ανάπτυξη πραγματικών συστημάτων DSP. Οι μελλοντικές επεκτάσεις δεν περιορίζονται σε απλές ακαδημαϊκές ασκήσεις αλλά μπορούν να οδηγήσουν σε συστήματα επεξεργασίας σήματος με άμεση πρακτική εφαρμογή σε τομείς όπως η ακουστική μηχανική, οι βιοϊατρικές συσκευές και οι τηλεπικοινωνίες.

Βιβλιογραφία

- Altera. (2011). DE2-Series Audio and Video Processing with FPGA. Altera University Program.
- Horgan, F. &. (2014). FPGA-based real-time audio signal processing. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 573–577.
- Jervis, I. &. (2002). Digital Signal Processing: A Practical Approach. Pearson.
- Katz, B. &. (2011). DSP for Embedded and Real-Time Systems. Elsevier.
- Laguna, S. &. (2005). Bioelectrical Signal Processing in Cardiac and Neurological Applications. *Elsevier Academic Press*.
- Lee, K. &. (2001). Real-time digital signal processing: Implementations and applications. John Wiley & Sons.
- Lyons. (2011). Understanding Digital Signal Processing. Prentice Hall.
- Mallat. (2009). A Wavelet Tour of Signal Processing. *Academic Press*.
- Manolakis, P. &. (2007). Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications. Prentice Hall.
- Meyer-Baese. (2007). Digital Signal Processing with Field Programmable Gate Arrays. Springer.
- Mitra. (2006). Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach. *McGraw-Hill*.
- Nyquist. (1928). Certain topics in telegraph transmission theory. *Transactions of the AIEE*, 47, 617–644.
- Parhi. (1999). VLSI digital signal processing systems: Design and implementation. Wiley-Interscience.
- Pohlmann. (2011). Principles of Digital Audio. *McGraw-Hill*.
- Rabiner, C. &. (1983). Multirate Digital Signal Processing. *Prentice Hall*.
- Schafer, O. &. (2010). Discrete-Time Signal Processing. Pearson.
- Shannon. (1949). Communication in the presence of noise. Proceedings of the IRE. 10–21.
- Smith. (1997). The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing. California Technical Publishing.
- Temes, S. &. (2005). Understanding Delta-Sigma Data Converters. *Wiley-IEEE Press*.
- Vaidyanathan. (1993). Multirate systems and filter banks. Prentice Hall.
- Xilinx. (2020). DSP Design Techniques for FPGAs. *White Paper, Xilinx Inc*.
- Zhang, W. &. (2017). Real-time FPGA implementation of adaptive noise cancellation for speech enhancement. *Journal of Signal Processing Systems*, 357–369.

