



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Σωκράτης Αναστασίου

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΕΦΗΜΕΡΙΔΟΠΩΛΗ:
ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΗΝ ΥΠΟ ΟΡΟΥΣ ΑΞΙΑ ΣΕ
ΚΙΝΔΥΝΟ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2026



UNIVERSITY OF IOANNINA
DEPARTMENT OF MATHEMATICS



Socrates Anastasiou

NEWSVENDOR PROBLEM: UNDER CONDITIONAL
VALUE-AT-RISK MINIMIZATION

MASTER'S THESIS

IOANNINA, 2026

Ο εχθρός του καλού – το καλύτερο

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 12/01/2026 από την εξεταστική επιτροπή:

Κωνσταντίνα Σκούρη Καθηγήτρια, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Κωνσταντίνος Παρσόπουλος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Ιωάννης Κωνσταντάρας Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

“Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.”

Σωκράτης Αναστασίου

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η συγγραφή της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής σηματοδοτεί και την ολοκλήρωση των υποχρεώσεών μου στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω ορισμένους ανθρώπους, οι οποίοι, ο καθένας με τον τρόπο του, συνέβαλαν αφενός στην εκπόνηση της διατριβής και αφετέρου στη δική μου επιστημονική και προσωπική διαμόρφωση.

Αρχικά, ευχαριστώ θερμά την επιβλέπουσα καθηγήτρια μου, κυρία Κωνσταντίνα Σκούρη, για την ευκαρία που μου έδωσε, για την υπομονή της, καθώς και για τις γνώσεις, την καθοδήγηση και τα σχόλια που μοιράστηκε μαζί μου καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας. Επίσης, ευχαριστώ τον κύριο Κωνσταντίνο Παρσόπουλο και τον κύριο Ιωάννη Κωνσταντάρα, μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής για το χρόνο που διάθεσαν. Τις υποψήφιες διδάκτορες, Δήμητρα Τριανταλή και Ειρήνη Τζιόρα, του τμήματος Η/Υ και Πληροφορικής και του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων αντίστοιχα, για την πολύτιμη βοήθειά τους σε κομβικά σημεία της διατριβής.

Οφείλω, επίσης, να ευχαριστήσω τα μέλη του Τομέα Πιθανοτήτων, Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, διδάσκοντες και φοιτητές, οι οποίοι άμεσα ή έμμεσα μου προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια γνώσεις, ιδέες και ερεθίσματα που συνέβαλαν ουσιαστικά στη μέχρι τώρα πορεία μου.

Τέλος, το μεγαλύτερο ευχαριστώ το οφείλω στους θείους μου, τον Σπύρο και τον Νάσο, και φυσικά στην οικογένειά μου, τον Θανάση, την Έμμη και τον Θοδωρή, για τη συνεχή και ανιδιοτελή στήριξη των επιλογών μου.

Ιωάννινα, Ιανουάριος 2026

Σ. Αναστασίου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διατριβή εξετάζει το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη, το οποίο αποτελεί κλασικό πρόβλημα διαχείρισης αποθεμάτων. Το πρόβλημα αφορά τη διαχείριση ενός μόνο προϊόντος για μια περίοδο (συγκεκριμένο χρονικό διάστημα). Τα μοντέλα μιας περιόδου εφαρμόζονται κυρίως σε ευπαθή προϊόντα, αλλά και προϊόντα που χάνουν την αξία τους μετά από μια συγκεκριμένη ημερομηνία. Για τη βελτιστοποίηση αυτού του προβλήματος ως κριτήριο χρησιμοποιείται η υπό όρους αξίας σε κίνδυνο (Conditional Value at Risk, CVaR), το οποίο χρησιμοποιείται ευρέως στη διαχείριση χρηματοοικονομικού κινδύνου. Η CVaR λαμβάνει υπόψη την απροθυμία για ρίσκο και βοηθά στη λήψη αποφάσεων υπό αβεβαιότητα όταν η οπτική λήψης απόφασης είναι η αποφυγή του ρίσκου. Σε ένα σύνολο πραγματικών δεδομένων της πρόσφατης βιβλιογραφίας, εξετάζεται η επίδραση της πρόβλεψης της ζήτησης και του ορίζοντα λήψης απόφασης στην πολιτική αποθεματοποίησης, επίσης προτείνονται και αξιολογούνται ευρετικές μέθοδοι για την επίλυση του προβλήματος.

ABSTRACT

The thesis examines the newsvendor problem, which is a classic inventory control problem. The problem involves managing a single product for single period (a given time horizon). Single-period models are mainly applied to perishable products, as well as products that lose their value after a certain date. For the optimization of this problem, the Conditional Value at Risk (CVaR) is used as a criterion, which is widely applied in financial risk management. CVaR accounts for risk aversion and assists in decision-making under uncertainty when the decision-making perspective is risk avoidance. Using a set of real data from recent literature, the effect of demand forecasting and the decision-making horizon on inventory policy is examined, also heuristic methods are proposed and evaluated for solving the problem.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	3
1 Τα μέτρα κινδύνου VaR και CVaR	7
1.1 Value at Risk & Conditional Value at Risk	7
1.2 Κανονική Κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	11
1.3 Προσδιορισμός ταυτόχρονα της VaR , $CVaR$ και S	13
2 Το πρόβλημα του Εφημεριδοπώλη υπό αδιάφορη ως προς το ρίσκο οπτική και επιφυλακτική ως προς το ρίσκο οπτική	17
2.1 Υποθέσεις και συμβολισμός	17
2.2 Προσδιορισμός βέλτιστου επιπέδου επαναφοράς αποθέματος	18
2.3 Το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη υπό $CVaR_\beta$	20
2.4 Εξασφάλιση ελάχιστου κέρδους	20
2.5 Προστασία από σημαντικά υψηλό κόστος	25
2.6 Σύγκριση βέλτιστων λύσεων	25
2.7 Διερεύνηση διάταξης βέλτιστων λύσεων	26

2.8	Αποτίμηση βέλτιστων λύσεων	28
3	Εφαρμογή risk neutral και risk averse μέτρων σε πραγματικό σύνολο δεδομένων	33
3.1	Περιγραφή του συνόλου δεδομένων	33
3.2	Μοντελοποίηση ζήτησης	34
3.3	Προσαρμογή κατάλληλης κατανομής	35
3.4	Ανάλυση χρονοσειράς ζήτησης	36
3.5	Autoregressive (SARIMA) μοντέλα ζήτησης	38
3.6	Προσδιορισμός ποσότητας παραγγελίας	39
3.7	Ορίζοντας σχεδιασμού μιας περιόδου	39
3.8	Ορίζοντας σχεδιασμού τεσσάρων περιόδων	41
3.9	Προγραμματισμός αποθεματοποίησης	43
3.10	Ορίζοντας σχεδιασμού μιας περιόδου	43
3.11	Ορίζοντας σχεδιασμού τεσσάρων περιόδων	47
	ΕΠΙΛΟΓΟΣ	51
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	53
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	71

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη είναι ένα κλασικό πρόβλημα διαχείρισης αποθεμάτων. Το πρόβλημα αφορά τη διαχείριση ενός μόνο προϊόντος για μια περίοδο (συγκεκριμένο χρονικό διάστημα). Τα μοντέλα μιας περιόδου εφαρμόζονται κυρίως σε ευπαθή προϊόντα, αλλά και προϊόντα που χάνουν την αξία τους μετά από μια συγκεκριμένη ημερομηνία, όπως εφημερίδες, υψηλής τεχνολογίας συσκευές, προϊόντα μόδας, εποχιακά είδη κ.α. Αυτό το πρόβλημα έχει τύχει προσοχής καθώς αποτελεί δομικό στοιχείο προβλημάτων διαχείρισης αποθεμάτων πολλών περιόδων, καταμερισμού αποθεμάτων και προγραμματισμού συμβάσεων σε συστήματα εφοδιαστικής αλυσίδας. Επιπλέον, το ενδιαφέρον για το εν λόγω πρόβλημα ενισχύει η ολοένα και πιο σύντομη διάρκεια ζωής πολλών προϊόντων. Το κύριο στοιχείο του μοντέλου είναι η δυνατότητα μόνο μιας παραγγελίας πριν παρατηρηθεί η τυχαία ζήτηση. Ακόμα και αν η πώληση του προϊόντος γίνεται σε πολλές περιόδους (όπως συνήθως συμβαίνει), οι αποφάσεις διαχείρισης του αποθέματος στις επόμενες περιόδους δεν συνδέονται μεταξύ τους: το απόθεμα που δε διατίθεται στο τέλος μιας περιόδου δεν μπορεί να μεταφερθεί στην επόμενη περίοδο, ούτε η ζήτηση της τρέχουσας περιόδου μπορεί να ικανοποιηθεί την επόμενη περίοδο. Συνεπώς, το μοντέλο πολλών περιόδων μπορεί να αποσυντεθεί σε πολλά ανεξάρτητα αντίγραφα του μοντέλου μιας περιόδου. Αυτό το μοντέλο είναι ένα από τα πιο θεμελιώδη στοχαστικά μοντέλα αποθεμάτων, και αφετηρία για τη μελέτη πιο σύνθετων μοντέλων αποθεμάτων. Το πρόβλημα αναφέρεται ως το μοντέλο του εφημεριδοπώλη (newsvendor ή newsboy) καθώς μπορεί να αντιστοιχηθεί στο καθημερινό πρόβλημα που έχει ο εφημεριδοπώλης. Συγκεκριμένα, ο εφημεριδοπώλης προμηθεύεται εφημερίδες κάθε μέρα και αντιμετωπίζει ημερήσια ζήτηση για εφημερίδες τυχαία κατανεμημένη. Αν ο εφημεριδοπώλης έχει αδιάθετες εφημερίδες στο τέλος της ημέρας, δεν μπορεί να τις διαθέσει την επόμενη ημέρα, αλλά υπάρχει δυνατότητα επιστροφής τους (αξία διάσωσης). Το ερώτημα είναι: Πόσες εφημερίδες να αγοράσει κάθε μέρα από τον εκδότη; Η μαθηματική ανάλυ-

ση του προβλήματος του εφημεριδοπώλη οφείλεται στους (Arrow et al., 1951), αν και κάποιες από τις ιδέες είναι πολύ παλαιότερες. Ο (Edgeworth, 1888) χρησιμοποιεί λογική τύπου newsvendor για να προσδιορίσει το ποσό μετρητών που πρέπει να κρατά μια τράπεζα για να καλύψει τυχαίες αναλήψεις από τους πελάτες. Οι (Morse and Kimball, 1951) εισήγαγαν τον όρο «πρόβλημα newsboy», και ο (Porteus, 2008) αναφέρει τον Matt Sobel ως εκείνον που προτείνει τον ουδέτερο προς το φύλο όρο «πρόβλημα newsvendor».

Η συνήθης αντιμετώπιση του προβλήματος του εφημεριδοπώλη είναι η μεγιστοποίηση/ελαχιστοποίηση του αναμενόμενου κέρδους/κόστους. Στη βιβλιογραφία, ωστόσο, έχει επισημανθεί ότι η μεγιστοποίηση/ελαχιστοποίηση του αναμενόμενου κέρδους/κόστους ίσως δεν είναι ικανοποιητική και είναι επιθυμητή η επίτευξη εναλλακτικού στόχου. Για παράδειγμα, μπορεί να επιδιωχθεί η επίτευξη ενός προκαθορισμένου κέρδους, όμως ένας τέτοιος στόχος μπορεί να οδηγήσει σε μια απαράδεκτα μεγάλη απώλεια. Έτσι, προκειμένου να μειωθεί ο κίνδυνος που προκύπτει από τη διακύμανση του κέρδους, έχει προταθεί η ελαχιστοποίηση της τυπικής απόκλισης του κέρδους (Lau, 1980). Από την άλλη πλευρά, όταν το κέρδος ξεπερνάει κάποιο προκαθορισμένο επίπεδο, δε θεωρείται πια ως κάτι που πρέπει να προστατευτεί ή να αντισταθμιστεί (όπως γίνεται με τον κίνδυνο), αλλά αντιμετωπίζεται ως κάτι θετικό. Υπό αυτή την οπτική, η μείωση του κινδύνου απώλειας κερδών ή μη επίτευξης ενός προκαθορισμένου στόχου είναι πιο επιθυμητή από την υιοθέτηση άλλων μεθόδων μέτρησης κινδύνου, όπως η τυπική απόκλιση. Στο πλαίσιο της βιβλιογραφίας του προβλήματος του εφημεριδοπώλη, έχει εξεταστεί η μείωση τέτοιων μέτρων κινδύνου ως εναλλακτικές μέθοδοι της μεγιστοποίησης του αναμενόμενου κέρδους. Οι (Lau and Lau, 1988), μελέτησαν ένα μοντέλο που μεγιστοποιεί την πιθανότητα υπέρβασης ενός προκαθορισμένου σταθερού στόχου κέρδους. Αυτοί οι στόχοι μολονότι είναι διαισθητικοί, τα προβλήματα βελτιστοποίησης που προκύπτουν δεν διατηρούν ιδιότητες κυρτότητας, έτσι είναι δύσκολο να αντιμετωπιστούν για γενικές συναρτήσεις κατανομής. Επιπλέον, αυτά τα μοντέλα επιδιώκουν υψηλότερο κέρδος, ενώ η πιθανότητα να υποστούν μεγάλη ζημιά δεν λαμβάνεται υπόψη.

Στην διατριβή αυτή εξετάζεται το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη στο πλαίσιο της βελτιστοποίησης της υπό όρους αξίας-σε-κίνδυνο (Conditional Value at Risk *CVaR*), ενός από τα πιο προτιμητέα μέτρα κινδύνου στη διαχείριση χρηματοοικονομικού κινδύνου. Το *CVaR* είναι γνωστό ως μέτρο κινδύνου που είναι συνεπές (Artzner et al., 1999) και συμβατό με την στοχαστική διάταξη δεύτερης τάξης (second-order stochastic dominance) (Pflug, 2000; Ogryczak and Ruszczyński, 2002). Αν X και Y δυο τυχαίες μεταβλητές λέμε ότι η X είναι μεγαλύτερη της Y κατά τη διάταξη δεύτερης τάξης $X \succeq_2 Y$ αν ικανοποιείται η συνθήκη: $\int_{-\infty}^t F_X(u)du \leq \int_{-\infty}^t F_Y(u)du, \forall t \in \mathbb{R}$ με αυστηρή ανισότητα για τουλάχιστον

ένα t , όπου $F_X(\cdot)$ και $F_Y(\cdot)$ είναι οι αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής της X και Y , αντίστοιχα. Η διάταξη δεύτερης τάξης δεν εξετάζει μόνο τη θέση των κατανομών αλλά και την διακύμανση. Μια μεταβλητή με κατανομή με μικρότερη διακύμανση και περισσότερο βάρος σε μεγαλύτερες τιμές μπορεί να είναι μεγαλύτερη μιας άλλης ως προς τη διάταξη δεύτερης τάξης. Η διάταξη αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη λήψη αποφάσεων υπό ρίσκο, καθώς λαμβάνει υπόψη την απροθυμία για ρίσκο (risk averse) και βοηθά στον προσδιορισμό της κατανομής που είναι καλύτερη από την άποψη της χρησιμότητας (utility). Ας θεωρηθούν δύο επενδυτικές επιλογές:

- ο Επιλογή Α: μια ασφαλής, χαμηλής απόδοσης επένδυση (με μικρότερη διακύμανση).
- ο Επιλογή Β: μια πιο ριψοκίνδυνη επένδυση με υψηλότερες πιθανές αποδόσεις αλλά και μεγαλύτερη πιθανότητα απώλειας.

Αν η Επιλογή Α είναι μεγαλύτερη, κατά τη διάταξη δεύτερης τάξης, της Επιλογής Β, τότε ένας επενδυτής που είναι απρόθυμος να αναλάβει ρίσκο (risk averse), ήτοι η συνάρτηση χρησιμότητάς του είναι κοίλη, θα προτιμήσει την Επιλογή Α, ακόμα και αν η Επιλογή Β προσφέρει υψηλότερη αναμενόμενη απόδοση. Αυτό συμβαίνει γιατί το προφίλ κινδύνου της Επιλογής Α (με μικρότερη διακύμανση) είναι πιο ευνοϊκό όταν λαμβάνεται υπόψη τον τρόπο που ένα άτομο με απροθυμία για ρίσκο αξιολογεί τις πιθανές εκβάσεις. Αυτές οι ιδιότητες συνέπειας της $CVaR$ και συμβατότητάς της με τη στοχαστική διάταξη δεύτερης τάξης προκύπτουν από μια αξιωματοποίηση της συμπεριφοράς των λογικών επενδυτών υπό αβεβαιότητα και, συνεπώς, είναι σημαντικές και για την αντιμετώπιση αβέβαιων καταστάσεων κέρδους/κόστους, όπως στο πρόβλημα του εφημεριδοπώλη. Υπό αυτό το πρίσμα, η ελαχιστοποίηση του $CVaR$ δεν έρχεται σε σύγκρουση με τη μεγιστοποίηση της αναμενόμενης τιμής οποιασδήποτε συνάρτησης χρησιμότητας του που εκφράζει αποφυγή κινδύνου (Ogryczak and Ruszczyński, 2002). Αν και ερευνητές έχουν αντιμετωπίσει άμεσα το πρόβλημα μέσω της συνάρτησης χρησιμότητας του εφημεριδοπώλη που εκφράζει αποφυγή κινδύνου (Eeckhoudt et al., 1995), στην πράξη, η συνάρτηση χρησιμότητας είναι αρκετά αφηρημένη για να προσδιοριστεί και, συνεπώς, η χρήση μέτρων κινδύνου έχει πλεονέκτημα σε σχέση με τη χρήση συναρτήσεων χρησιμότητας.

Η διατριβή δομείται ως εξής:

Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζεται το μέτρο κινδύνου *CVaR* και ο τρόπος ενσωμάτωσής του σε προβλήματα βελτιστοποίησης. Δείχνεται ότι το πρόβλημα μπορεί να μετασχηματιστεί κατάλληλα, ώστε αφενός να διατηρείται η ιδιότητα κυρτότητας της αρχικής συνάρτησης απώλειας, αφετέρου να είναι δυνατός και ο προσδιορισμός της ίδιας της *CVaR*, παρακάμπτοντας δυσκολίες που υπάρχουν κατά τον υπολογισμό της.

Στο Κεφάλαιο 2, παρουσιάζεται το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη τόσο κάτω από την κλασική αντιμετώπιση ελαχιστοποίησης του αναμενόμενου κόστους και μεγιστοποίησης του αναμενόμενου κέρδους, όσο και όταν στόχος είναι η βελτιστοποίηση της *CVaR*. Επίσης, πραγματοποιείται αποτίμηση των βέλτιστων επιπέδων επαναφοράς. Τέλος, αναλύεται η κατανομή της ζήτησης και συγκεκριμένα οι ουρές της, όπου οδηγούν τα δυσμενή σενάρια.

Στο Κεφάλαιο 3, χρησιμοποιώντας δεδομένα που υπάρχουν στη βιβλιογραφία, γίνεται χρήση της *CVaR* ως κριτήριο απόφασης για τη διερεύνηση της επίδρασης της πρόβλεψης της ζήτησης καθώς και του ορίζοντα σχεδιασμού λήψης απόφασης (εύρος περιόδου) στην πολιτική αποθεματοποίησης. Πέραν των πολιτικών αποθεματοποίησης που προέρχονται από τη βελτιστοποίηση της *CVaR* προτείνονται και αξιολογούνται ευρετικές μέθοδοι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΑ ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ VAR ΚΑΙ CVAR

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα μέτρα κινδύνου Value-at-Risk (Var) και Conditional Value-at-Risk ($CVaR$). Επιπλέον, δίνονται τα πλεονεκτήματα του $CVaR$ σε σχέση με το Var , καθώς ποσοτικοποιεί τον κίνδυνο πέρα από το Var και επιπλέον είναι συνεκτικό.

1.1 Value at Risk & Conditional Value at Risk

Τα μέτρα κινδύνου έχουν καθοριστικό ρόλο στη βελτιστοποίηση υπό αβεβαιότητα. Η απώλεια μπορεί να θεωρηθεί ως μια βαθμωτή συνάρτηση $L : \mathcal{S} \times \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^q \rightarrow \mathbb{R}$ ενός διανύσματος αποφάσεων $\mathbf{S}$, με τους περιορισμούς $\mathbf{S} \geq \mathbf{0}$, και ενός διανύσματος $\mathbf{d}$ που αντιπροσωπεύει τις μελλοντικές τιμές διαφόρων μεταβλητών $\{d_t\}_{t=1}^q$. Αν $\mathbf{d}$ θεωρείται τυχαίο διάνυσμα με γνωστή κατανομή, η $L(\mathbf{S}, \mathbf{d})$ γίνεται τυχαία μεταβλητή, της οποίας η κατανομή εξαρτάται από την επιλογή του $\mathbf{d}$. Οποιοδήποτε πρόβλημα βελτιστοποίησης που περιλαμβάνει την $L(\mathbf{S}, \mathbf{d})$ σε σχέση με το $\mathbf{d}$ πρέπει να λαμβάνει υπόψη όχι μόνο τις προσδοκίες, αλλά και την «επικινδυνότητα» της επιλογής $\mathbf{S}$. Ας είναι, $F_L(\mathbf{S}, \eta) := Pr(L(\mathbf{S}, \mathbf{d}) \leq \eta)$ η συνάρτηση κατανομής της απώλειας $L(\mathbf{S}, \mathbf{d})$, ακολουθεί ο ορισμός του $Var(S)$ για την περίπτωση βαθμωτών μεγεθών S, d .

Ορισμός 1.1. Για $\beta \in [0, 1)$ η αξία σε κίνδυνο της απώλειας σχετικά με την απόφαση S ορίζεται ως

$$Var_\beta(S) := \inf\{\eta \in \mathbb{R} : F_L(S, \eta) \geq \beta\}. \quad (1.1)$$

Το β συνήθως παίρνει τις τιμές 0.90, 0.95, 0.99 και ουσιαστικά το $Var_\beta(S)$ απαντά στο ερώτημα: «Με πιθανότητα β , ποιά είναι η μέγιστη απώλεια που δεν θα

ξεπεραστεί για δεδομένη απόφαση S ;» Μολονότι, το VaR_β είναι ένα δημοφιλές μέτρο κινδύνου που έχει ενσωματωθεί ακόμη και σε βιομηχανικούς κανονισμούς (Jorion, 1996); (Pritsker, 1997), παρουσιάζει προβλήματα: είναι ασταθές και δύσκολο στη χρήση όταν η κατανομή πιθανότητας των απωλειών δεν ανήκει στην οικογένεια ελλειπτικών κατανομών, κάτι που συχνά ισχύει, καθώς οι κατανομές απωλειών τείνουν να έχουν «παχιές ουρές» ή διακριτές τιμές. Επιπλέον, ένα μέτρο κινδύνου οφείλει να ικανοποιεί τον κανόνα: Το συνολικό ρίσκο δύο απωλειών δεν μπορεί να υπερβαίνει το άθροισμα αυτών, με το VaR_β να μην τον ικανοποιεί εν γένει, καθιστώντας το ένα μη συνεκτικό μέτρο. Ακολουθεί ο ορισμός ενός συνεκτικού μέτρου κινδύνου όπως παρουσιάστηκε από τους (Artzner et al., 1999).

Ορισμός 1.2. *Ας είναι $\mathcal{G}$ το σύνολο που αναπαριστά απώλειες και $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ ένα μέτρο κινδύνου, αυτό λέγεται συνεκτικό εάν:*

- $\forall X \in \mathcal{G}$ και $\forall c \in \mathbb{R}$ σταθερά: $\rho(X + c) = \rho(X) + c$.
- $\forall \lambda \geq 0$ και $\forall X \in \mathcal{G}$: $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$.
- $\forall X, Y \in \mathcal{G}$ ώστε $X \leq Y$ (σ.β): $\rho(X) \leq \rho(Y)$.
- $\forall X, Y \in \mathcal{G}$: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

Επίσης, ένα σοβαρό μειονέκτημά του VaR_β είναι ότι δεν παρέχει καμία πληροφορία για το μέγεθος των απωλειών πέρα από το όριο που καθορίζει, αδυνατώντας να διακρίνει μεταξύ περιπτώσεων όπου οι χειρότερες απώλειες είναι λίγο μεγαλύτερες ή πολύ σημαντικά μεγαλύτερες. Το VaR_β παρέχει απλά ένα κατώτατο όριο για τις απώλειες στην ουρά της κατανομής και έχει μια τάση προς αισιοδοξία αντί της συντηρητικότητας που ενδεχομένως απαιτεί η διαχείριση κινδύνου. Στη συνέχεια δίνεται ο ορισμός της $CVaR_\beta$:

Ορισμός 1.3. *Για $\beta \in [0, 1)$, η υπο συνθήκη αξία σε κίνδυνο, σχετικά με την απόφαση S ορίζεται $CVaR_\beta(S) :=$ αναμενόμενη τιμή της β -ουράς της κατανομής της $L(S, d)$. (Rockafellar and Uryasev, 1999), (Rockafellar and Uryasev, 2002) όπου η αναφερόμενη κατανομή είναι εκείνη με συνάρτηση πιθανότητας $F_L^\beta(S, \cdot)$*

$$F_L^\beta(S, \eta) = \begin{cases} 0, & \eta < VaR_\beta(S) \\ \frac{F_L(S, \eta) - \beta}{1 - \beta}, & \eta \geq VaR_\beta(S) \end{cases}$$

Σημειώνεται ότι η $F_L^\beta(\cdot)$ είναι συνάρτηση κατανομής αφού είναι μη φθίνουσα και συνεχής από δεξιά με $F_L^\beta(S, \eta) \rightarrow 1$ καθώς το $\eta \rightarrow \infty$, όπου συμπερένεται ότι η

κατανομή της β -ουράς της Z είναι καλά ορισμένη. Η $CVaR_\beta$ της L για δοσμένο επίπεδο $\beta \in [0, 1)$ δίνεται ως:

$$CVaR_\beta(S) := \int_{-\infty}^{\infty} \eta dF_L^\beta(S, \eta) \quad (1.2\alpha')$$

Για απώλειες με συνεχή συνάρτηση κατανομής, η $CVaR_\beta(S)$ είναι ακριβώς η μέση τιμή της $L(S, d)$ δοθέντος ότι $L(S, d) \geq VaR_\beta(S)$

$$\begin{aligned} CVaR_\beta(S) &= \mathbb{E}[L(S, d) \mid L(S, d) \geq VaR_\beta(S)] = \\ &= (1 - \beta)^{-1} \int_{L(S, x) \geq VaR_\beta(S)} L(S, x) f(x) dx \end{aligned} \quad (1.2\beta')$$

Εκφράζοντας τη $CVaR_\beta$ σε όρους ποσοστημορίων, και για σταθερό S το μέτρο κινδύνου γράφεται ως

$$CVaR_\beta(S) = \frac{1}{1 - \beta} \int_\beta^1 F_L^{-1}(p) dp, \quad (1.2\gamma')$$

Αξιοποιώντας την αναπαράσταση μιας τυχαίας μεταβλητής μέσω δείκτριων συναρτήσεων των εκβάσεων και για σταθερό S , το επόμενο Λήμμα παρέχει μια εναλλακτική μορφή του μέτρου κινδύνου $CVaR_\beta$.

Λήμμα 1.1. Έστω τυχαία μεταβλητή απώλειας $L(S, d)$, εν συντομία $L(S, d) \equiv L$. Ας είναι πιθανότητα $\beta \in [0, 1)$ και ενδεχόμενο η ώστε να ισχύει $F_L(S, d) := Pr(L \leq \eta) = \beta$ τότε

$$\mathbb{E}[L \mid L > \eta] = \eta + \frac{1}{1 - \beta} \mathbb{E}[L - \eta]^+ \quad (1.2\delta')$$

όπου $[x]^+ = \max(0, x)$

Απόδειξη. Η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή ορίζεται ως

$$\mathbb{E}[L \mid L > \eta] = \frac{\mathbb{E}[L \mathcal{I}_{\{L > \eta\}}]}{Pr(L > \eta)}$$

Γράφοντας $L = \eta + (L - \eta)$ τότε $L \mathcal{I}_{\{L > \eta\}} = \eta \mathcal{I}_{\{L > \eta\}} + (L - \eta) \mathcal{I}_{\{L > \eta\}}$. Από τον ορισμό του $[x]^+ = \max(0, x)$ προκύπτει $(L - \eta) \mathcal{I}_{\{L > \eta\}} = [L - \eta]^+$, συνεπώς

$$\mathbb{E}[L \mathcal{I}_{\{L > \eta\}}] = \eta Pr(L > \eta) + \mathbb{E}[L - \eta]^+ = \eta(1 - \beta) + \mathbb{E}[L - \eta]^+$$

και τελικά

$$\mathbb{E}[L|L > \eta] = \frac{\eta(1 - \beta) + \mathbb{E}[L - \eta]^+}{1 - \beta} = \eta + \frac{1}{1 - \beta} \mathbb{E}[L - \eta]^+$$

□

Η συγκεκριμένη φόρμουλα είναι χρήσιμη σε προβλήματα βελτιστοποίησης όταν λαμβάνεται υπόψη η $CVaR$.

Στη περίπτωση όπου η κατανομή εμφανίζει ασυνέχεια στο σημείο VaR_β εν γένει ισχύει $Pr(L > \eta) < 1 - \beta$ τότε οι (Rockafellar and Uryasev, 2002) προτείνουν τον ορισμό της $CVaR_\beta$ ως ένα κυρτό συνδυασμό των $CVaR_\beta^+ = E[L|L > VaR_\beta]$ και VaR_β .

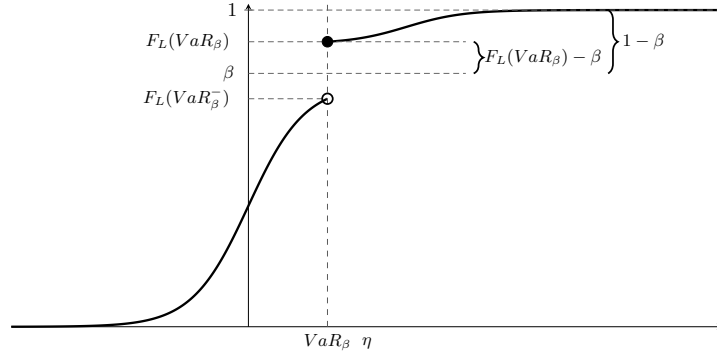
$$CVaR_\beta := \lambda_\beta VaR_\beta + (1 - \lambda_\beta) CVaR_\beta^+ \quad (1.2\epsilon')$$

Η ισοδύναμη αυτή γραφή προκύπτει αφενός από το γεγονός ότι το β -ποσοστιμόριο αντιστοιχεί σε σημείο ασυνέχειας, αφετέρου από το ποσοστό που αποδίδεται στο VaR_β για να συμπληρωθεί το $1 - \beta$ % της ουράς. Από το Σχήμα 1.1 φαίνεται ότι $F_L(VaR_\beta) - \beta < 1 - \beta$ αντιστοιχεί στην πιθανότητα του β -ποσοστημορίου, συνεπώς το ποσοστό του συνολικού $1 - \beta$ της ουράς που καταλαμβάνει είναι ακριβώς ο λόγος,

$$\lambda_\beta = \frac{F_L(VaR_\beta) - \beta}{1 - \beta} \in [0, 1]$$

Προκύπτει εύκολα ότι,

- Εάν $F_L(VaR_\beta) = \beta$ ήτοι συνεχής στο VaR_β , έπεται $\lambda_\beta = 0$ και ο ορισμός ταυτίζεται με τον (1.2β').
- Εάν $F_L(VaR_\beta) = 1$ τότε το VaR_β είναι η μέγιστη απώλεια, έπεται $\lambda_\beta = 1$ και τελικά $CVaR_\beta = VaR_\beta$



Σχήμα 1.1: Ασυνέχεια της $F_L(S, \cdot)$ στο VaR_β , όπου $F_L(VaR_\beta^-) := Pr(L(S, d) < VaR_\beta)$.

1.2 Κανονική Κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα VaR_β και $CVaR_\beta$ για την περίπτωση που $L \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Για επίπεδο $\beta \in [0, 1)$ η VaR_β δίνεται από την:

$$\beta = Pr(L(S, d) \leq VaR_\beta) \Leftrightarrow VaR_\beta = F^{-1}(\beta)$$

Σε όρους της τυπικής Κανονικής κατανομής $\mathcal{N}(0, 1)$ δίνεται

$$VaR_\beta = \mu + \Phi^{-1}(\beta)\sigma$$

όπου $\Phi^{-1}(\cdot)$ η αντίστροφη συνάρτηση κατανομής της $\mathcal{N}(0, 1)$.

Για τον υπολογισμό της $CVaR_\beta$ σύμφωνα με την προηγούμενη σχέση και την γραμμικότητα του τελεστή $E[\cdot]$ προκύπτει

$$CVaR_\beta := E[L|L \geq VaR_\beta] = \mu + \sigma E[Y|Y \geq \Phi^{-1}(\beta)], \text{ όπου } Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Συνεπώς αρκεί μόνο ο υπολογισμός της $E[Y|Y \geq \Phi^{-1}(\beta)]$.

$$E[Y|Y \geq \Phi^{-1}(\beta)] = \frac{\int_{\Phi^{-1}(\beta)}^{\infty} u\phi(u)du}{Pr(Y \geq \Phi^{-1}(\beta))}$$

Όπου $\phi(\cdot)$ η συνάρτηση πυκνότητας της $\mathcal{N}(0, 1)$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότη-

τα $\phi'(y) = -y\phi(y)$ τελικά

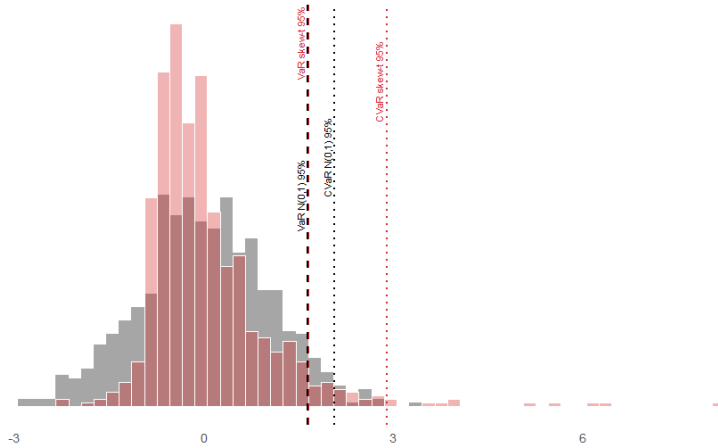
$$\begin{aligned} (1 - \beta)^{-1} \int_{\Phi^{-1}(\beta)}^{\infty} u\phi(u) du &= (-1)(1 - \beta)^{-1} \int_{\Phi^{-1}(\beta)}^{\infty} \phi'(u) du \\ &= (-1)(1 - \beta)^{-1} \left[\phi(u) \right]_{\Phi^{-1}(\beta)}^{\infty} \\ &= \frac{\phi(\Phi^{-1}(\beta))}{1 - \beta}. \end{aligned}$$

Άρα

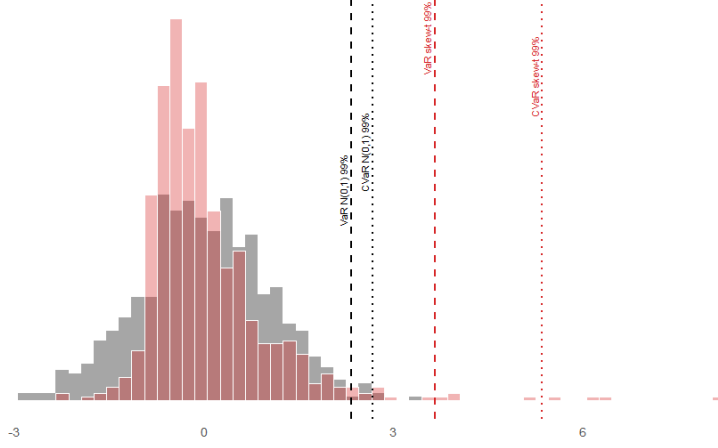
$$CVaR_{\beta} = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\beta))}{1 - \beta}$$

□

Οι (Rachev et al., 2005) επισημαίνουν ότι κατανομές με βαρύτερες ουρές μοντελοποιούν ορθότερα τυχαίες μεταβλητές απωλειών. Ας είναι δύο τυχαίες μεταβλητές απώλειας, $L_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ και $L_2 \sim t(3)$, στα Σχήματα 1.2 και 1.3 απεικονίζονται τα ιστογράμματα των κατανομών τους και σημειώνονται οι δείκτες κινδύνου VaR_{β} και $CVaR_{\beta}$ για δύο επίπεδα κινδύνου $\beta = 0.95$ και $\beta = 0.99$, όπου είναι προφανής η εξάρτηση τους από την δομή της κατανομής στην ουρά.



Σχήμα 1.2: VaR_{β} και $CVaR_{\beta}$ των κατανομών $\mathcal{N}(0, 1)$ έναντι $t(3)$ για $\beta = 0.95$.



Σχήμα 1.3: VaR_β και $CVaR_\beta$ των κατανομών $\mathcal{N}(0, 1)$ έναντι $t(3)$ για $\beta = 0.99$.

Ο δείκτης VaR_β παρέχει απλά ένα κατώφλι στην ουρά της κατανομής, αγνοώντας το μέγεθος των απωλειών μετά από αυτό, ενώ αντίθετα ο δείκτης $CVaR_\beta$ εστιάζει ρητά στην ουρά της κατανομής, παρέχοντας τη μέση τιμή των απωλειών δοθέντος ότι υπερβαίνουν το VaR_β . Κατα συνέπεια, για κατανομές με βαρύτερες ουρές ο δείκτης $CVaR_\beta$ λαμβάνει σημαντικά υψηλότερες τιμές, αναδεικνύοντας πιο καθαρά τον κίνδυνο ακραίων απωλειών.

1.3 Προσδιορισμός ταυτόχρονα της VaR , $CVaR$ και S

Στο πρόβλημα εύρεσης της απόφασης S όπου ελαχιστοποιεί το μέτρο κινδύνου $CVaR_\beta(S)$, παρουσιάζεται η προσέγγιση των (Rockafellar and Uryasev, 1999). Συγκεκριμένα προτείνουν τον από κοινού προσδιορισμό των δύο μέτρων μέσω της ελαχιστοποίησης της συνάρτησης

$$V_\beta(S, \eta) := \eta + (1 - \beta)^{-1} \mathbb{E}[L(S, d) - \eta]^+ \quad (1.3)$$

Ο ελαχιστοποιητής η^* της (1.3) αποδεικνύεται ότι είναι ένα β -ποσοστιμόριο της $F_L(\cdot)$ (Pflug, 2000) δίχως να απαιτείται η διάκριση συνεχών ή διακριτών κατανομών. Ένα χαρακτηριστικό της $V_\beta(S, \eta)$ είναι ότι με την επιπλέον υπόθεση της κυρτότητας ως προς S της $L(S, d)$ η εύρεση οποιουδήποτε τοπικού βελτίστου οδηγεί σε ολικό βέλτιστο. Ακολουθεί ο από κοινού προσδιορισμός των VaR_β και $CVaR_\beta$ για τη συνεχή περίπτωση.

Θεώρημα 1.1. Η $V_\beta(S, \eta)$ είναι κυρτή και συνεχώς διαφορίσιμη ως προς η . Η $CVaR_\beta(S)$ προκύπτει ως

$$CVaR_\beta(S) = \min_{\eta \in \mathbb{R}} \{ \eta + (1 - \beta)^{-1} \int_{x \in \mathcal{D}} [L(S, x) - \eta]^+ f(x) dx \} \quad (1.4)$$

με

$$\eta^* \in \inf_{\eta \in \mathbb{R}} \{ F_L(S, \eta) \geq \beta \} = \mathcal{L}_\beta(S) \quad (1.5)$$

το οποίο είναι μη κενό και συπαγές σύνολο σημείων

$$VaR_\beta(S) := \min \mathcal{L}_\beta(S) \quad (1.6)$$

Απόδειξη. Από την συνθήκη πρώτης τάξης $\frac{\partial}{\partial \eta} V_\beta(S, \eta) = 0$ προκύπτει

$$(1 - \beta)^{-1} [1 - F_L(S, \eta)] = 1$$

συνεπώς

$$F_L(S, \eta) = \beta$$

καθώς

$$\eta^* = F_L^{-1}(\beta)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} V_\beta(S, \eta) = (1 - \beta)^{-1} f_L(\eta) > 0$$

Άρα δείχθηκε ότι

$$\eta^* = \arg \min_{\eta} V_\beta(S, \eta)$$

Τέλος αντικαθιστώντας στη συνάρτηση $V_\beta(S, \eta)$ το η^* προκύπτει

$$V_\beta(S, \eta^*) = \eta^* + (1 - \beta)^{-1} \int_{L \geq \eta^*} (l - \eta^*) dF_L(l)$$

αναλύοντας το ολοκλήρωμα

$$\int_{\eta^*}^{\infty} l dF_L(l) = (1 - \beta) CVaR_\beta(S) \text{ και } \eta^* \int_{\eta^*}^{\infty} dF_L(l) = \eta^* (1 - F_L(\eta^*)) = \eta^* (1 - \beta)$$

και τελικά

$$V_\beta(S, \eta^*) = CVaR_\beta(S)$$

□

Αν η συνάρτηση κατανομής της ζήτησης $F(\cdot)$ δεν είναι γνωστή, η $V_\beta(S, \eta)$ μπορεί να προσεγγιστεί μέσω ενός δειγματικού αναλόγου, δοθέντος του δείγματος $d_1, \dots, d_q$ του τυχαίου παράγοντα d :

$$\tilde{V}_\beta(S, \eta) = \eta + \frac{1}{1-\beta} \sum_{i=1}^q p_i [L(S, d_i) - \eta]^+, \quad p_i > 0 \quad \forall i, \quad \sum_{i=1}^q p_i = 1 \quad (1.7)$$

Η (1.7) διατηρεί όλες τις ιδιότητες της $V_\beta(S, \eta)$ εκτός αυτής της διαφορισμότητας. Στην περίπτωση (δίκλαδης) γραμμικής απώλειας $L(S, d)$, η αναγωγή του προβλήματος μέσω της παρακάτω γραφής σε προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού εξασφαλίζει πως αυτό δέχεται βέλτιστη λύση.

$$\eta + \frac{1}{(1-\beta)q} \sum_{i=1}^q u_i,$$

όπου $u_i \geq 0$, $p_i = 1/q$ και $-L(S, d_i) + \eta + u_i \geq 0$, για $i = 1, \dots, q$

Αυτό είναι και το υπολογιστικό πλεονέκτημα της $CVaR_\beta$, καθώς η VaR_β οδηγεί γενικά σε μη-κυρτές διατυπώσεις. Επιπλέον, όταν το ενδιαφέρον εστιάζεται στη δεξιά (αντίστοιχα, αριστερή) ουρά της κατανομής, για κάθε απόφαση S ισχύει

$$VaR_\beta(S) \leq CVaR_\beta(S) \quad (\text{αντίστοιχα, } VaR_\beta(S) \geq CVaR_\beta(S)).$$

Συνεπώς, βελτιστοποιητές S^* του (1.7) παρέχουν, έμμεσα, έναν έλεγχο και ως προς το αντίστοιχο κριτήριο $VaR_\beta(S)$.

Θεώρημα 1.2. Η ελαχιστοποίηση της $CVaR_\beta(S)$ προκύπτει μέσω της ελαχιστοποίησης της συνάρτησης $V_\beta(S, \eta^*)$ ως προς S .

$$\min_S CVaR_\beta(S) \equiv \min_S V_\beta(S, \eta^*)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΕΦΗΜΕΡΙΔΟΠΩΛΗ ΥΠΟ ΑΔΙΑΦΟΡΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΡΙΣΚΟ ΟΠΤΙΚΗ ΚΑΙ ΕΠΙΦΥΛΑΚΤΙΚΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΡΙΣΚΟ ΟΠΤΙΚΗ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη, ένα από τα πιο γνωστά προβλήματα της διαχείρισης αποθεμάτων, το οποίο αποτελεί συνιστώσα πολλών άλλων πιο σύνθετων προβλημάτων της διαχείρισης αποθεμάτων. Συγκεκριμένα παρουσιάζεται ο προσδιορισμός του σημείου επαναφοράς του αποθέματος που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο κόστος το οποίο ταυτίζεται με εκείνο που προκύπτει από το αντίστοιχο πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους. Επιπλέον παρουσιάζεται η παραλαγή του μοντέλου κάτω από την θεώρηση ως αντικειμενικής συνάρτησης του προβλήματος την $CVaR_\beta$.

2.1 Υποθέσεις και συμβολισμός

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι υποθέσεις και ο συμβολισμός που χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη του μοντέλου.

Υποθέσεις

1. Η ζήτηση, d , είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(\cdot)$ και συνάρτηση κατανομής $F(\cdot)$.
2. Ο εφημεριδοπώλης έχει τη δυνατότητα τοποθέτησης μίας και μόνο παραγγελίας στην αρχή της περιόδου και προτού εμφανιστεί η στοχαστική ζήτηση.
3. Μηδενικό αρχικό απόθεμα.
4. Μηδενικό κόστος παραγγελίας.
5. Απόθεμα που δεν έχει διατεθεί στο τέλος της περιόδου είτε πωλείται με μειωμένη τιμή, είτε απορρίπτεται.
6. Η ζήτηση δεν ικανοποιείται με καθυστέρηση, συνεπώς ελλειμματική ποσότητα αποθέματος έχει ως αποτέλεσμα σε διαφυγόν κέρδος και απώλεια αξιοπιστίας για τον εφημεριδοπώλη.

Συμβολισμός

d	τυχαία ζήτηση
S	ποσότητα παραγγελίας (Order-Up-To-Level)
c	κόστος αγοράς ανά μονάδα προϊόντος
r	τιμή πώλησης ανά μονάδα προϊόντος
v	κόστος απόσυρσης ανά μονάδα προϊόντος
g	κόστος έλλειψης ανά μονάδα προϊόντος
$r \geq c \geq v$ και $g \geq 0$	

2.2 Προσδιορισμός βέλτιστου επιπέδου επαναφοράς αποθέματος

Αρχικά θα χρησιμοποιηθεί ως αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος το αναμενόμενο κέρδος και στη συνέχεια του με αντικειμενική συνάρτηση εκείνη του αναμενόμενου κόστους.

Ας είναι, $R(S, d) = r \min\{S, d\}$, τα έσοδα όταν το επίπεδο αποθέματος είναι S . Το συνολικό κόστος αποθέματος S , $TC(S, d)$, είναι το άθροισμα του κόστους αγοράς, κόστους αδιάθετου και του κόστους ελλείψεως. Συγκεκριμένα, ορίζονται ως:

- Κόστος αγοράς αποθέματος: cS
- Κόστος αδιάθετου αποθέματος: $v[S - d]^+$
- Κόστος έλλειψης αποθέματος: $g[d - S]^+$

όπου $[x]^+ := \max(0, x)$. Έτσι η συνάρτηση κέρδους προκύπτει ως:

$$\Pi(S, d) = r \min\{S, d\} - TC(S, d) \quad (2.1)$$

$$\text{όπου } TC(S, d) = cS + v[S - d]^+ + g[d - S]^+$$

Οι ποσότητες $[S - d]^+$ και $[d - S]^+$ αποτυπώνουν αντίστοιχα το πλεόνασμα και την έλλειψη αποθέματος στο τέλος της περιόδου. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$S = \min\{S, d\} + [S - d]^+ \text{ και } \min\{S, d\} = d - [d - S]^+$$

η εξίσωση κέρδους γίνεται

$$\begin{aligned} \Pi(S, d) &= (r - c) \min\{S, d\} - (c + v)[S - d]^+ - g[d - S]^+ \\ &= (r - c)(d - [d - S]^+) - (c + v)[S - d]^+ - g[d - S]^+ \\ &= (r - c)d - (c + v)[S - d]^+ - (r - c + g)[d - S]^+ \end{aligned}$$

θέτοντας $W = r - c$, $E = c + v$ και $U = r - c + g$ προκύπτει

$$\Pi(S, d) = Wd - E[S - d]^+ - U[d - S]^+$$

συνεπώς το κέρδος ισούται με έναν όρο που εξαρτάται μόνο από τη ζήτηση, μείον το κόστος απόκλισης αποθέματος;ζήτησης:

$$\Pi(S, d) = Wd - TC(S, d)$$

Άρα, για δεδομένη κατανομή ζήτησης $F(\cdot)$, η μεγιστοποίηση του αναμενόμενου κέρδους $\mathbb{E}[\Pi(S, d)]$ είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση του αναμενόμενου κόστους $\mathbb{E}[TC(S, d)]$. Το αναμενόμενο κόστος της περιόδου, $C(S)$, δίνεται ως

$$C(S) = W\mathbb{E}[d] - \Pi(S) \quad \text{όπου} \quad C(S) = \mathbb{E}[TC(S, d)]$$

$$C(S) = E \int_0^S (S - x)f(x)dx + U \int_S^\infty (x - S)f(x)dx$$

ή ισοδύναμα

$$C(S) = (E + U)SF(S) - E \int_0^S xf(x)dx + U \int_S^\infty xf(x)dx - US \quad (2.2)$$

Στόχος πλέον

$$\min_S C(S) \quad (2.3)$$

Από την (2.2) προκύπτει εύκολα το επόμενο Λήμμα.

Λήμμα 2.1. Η συνάρτηση $C(S)$ είναι κυρτή ως προς S .

Στο επόμενο Θεώρημα δίνεται το βέλτιστο σημείο επαναφοράς (Order-Up-To-Level) S .

Θεώρημα 2.1. Το βέλτιστο Order Up To Level, S , για το πρόβλημα (2.3) είναι

$$S^* = F^{-1}\left(\frac{U}{E + U}\right) \quad (2.4\alpha')$$

Η σχέση (2.4α') σε όρους των αρχικών παραμέτρων r, c, v και g γράφεται ως

$$S^* = F^{-1}\left(\frac{r - c + g}{r + v + g}\right) \quad (2.4\beta')$$

Δεδομένης της διάταξης των r, c, v έπεται ότι, $0 < \frac{r - c + g}{r + v + g} < 1$, έτσι η τελευταία εξίσωση είναι καλά ορισμένη. Το S^* πρόκειται για ένα ποσοστμόριο της κατανομής της ζήτησης και εξασφαλίζει την ικανοποίηση της με πιθανότητα $\frac{U}{U + E}$, ενώ η πιθανότητα της έλλειψης

είναι $\frac{E}{E+U}$. Το μέγεθος αυτό αντιστοιχεί στο επίπεδο εξυπηρέτησης α , όπου εξ ορισμού, δεν λαμβάνει υπόψη τη τάξη μεγέθους της $|d-S|$. Κατα συνέπεια, σπάνιες αλλά ακραίες πραγματοποιήσεις της ζήτησης, ενδέχεται να οδηγήσουν σε πολύ υψηλό κόστος ή/και πολύ χαμηλό κέρδος.

Στη συνέχεια εξετάζεται η μεταβολή της βέλτιστης λύσης του (2.3) ως προς τις παραμέτρους κόστους/κέρδους του πρόβληματος. Τα αποτελέσματα δίνονται στο επόμενο πόρισμα. Η θεώρηση αφορά τη μεταβολή μιας μόνο παραμέτρου κάθε φορά.

Πόρισμα 2.1. *Το βέλτιστο επίπεδο επαναφοράς S του (2.3) μειώνεται ως προς το κόστος αγοράς c και απόσυρσης v ενώ αντίθετα αυξάνεται ως προς το κόστος έλλειψης g και τιμή πώλησης r .*

Απόδειξη. Η αύξηση του κόστους έλλειψης g οδηγεί σε αύξηση της ποσότητας επαναφοράς του αποθέματος $\frac{\partial S^*}{\partial g} = \frac{1}{f(F^{-1}(\frac{r-c+g}{r+v+g}))} \frac{v+c}{(r+v+g)^2} > 0$. Η αύξηση του κόστους αγοράς και του κόστους αδιάθετου αποθέματος c , v , αντίστοιχα, οδηγούν σε μείωση του επιπέδου αποθέματος S^* καθώς: $\frac{\partial S^*}{\partial c} = \frac{1}{f(F^{-1}(\frac{r-c+g}{r+v+g}))} (-\frac{1}{r+v+g}) < 0$ και $\frac{\partial S^*}{\partial v} = \frac{1}{f(F^{-1}(\frac{r-c+g}{r+v+g}))} (-\frac{r-c+g}{(r+v+g)^2}) < 0$. Τέλος, αύξηση της τιμής πώλησης r αυξάνει τη ποσότητα επαναφοράς του S^* : $\frac{\partial S^*}{\partial r} = \frac{1}{f(F^{-1}(\frac{r-c+g}{r+v+g}))} (\frac{c+v}{(r+v+g)^2}) > 0$. $\square$

2.3 Το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη υπό $CVaR_\beta$

Στην ενότητα αυτή θα θεωρηθεί ως κριτήριο απόφασης το μέτρο κινδύνου $CVaR_\beta$. Ως συνάρτηση απώλειας ορίζεται είτε το $-\Pi(S, d)$ ή το $TC(S, d)$, και αναζητείται το επίπεδο επαναφοράς του αποθέματος S , που ελαχιστοποιεί το $CVaR_\beta$ της $L(S, d)$. Κατα συνέπεια, το βέλτιστο Order-Up-To-Level, S , παρέχει προστασία έναντι σπάνιων αλλά ακραίων πραγματοποιήσεων της ζήτησης.

2.4 Εξασφάλιση ελάχιστου κέρδους

Ας είναι η συνάρτηση απώλειας $L(S, d) = -\Pi(S, d)$ η αντίθετη της συνάρτησης κέρδους. Ακολουθώντας την προσέγγιση της υποενότητας 1.3, στόχος είναι να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα

$$\min_{S \geq 0} \min_{\eta \in \mathbb{R}} \{ \eta + (1 - \beta)^{-1} \int_0^\infty [L(S, x) - \eta]^+ f(x) dx \} \quad (2.5)$$

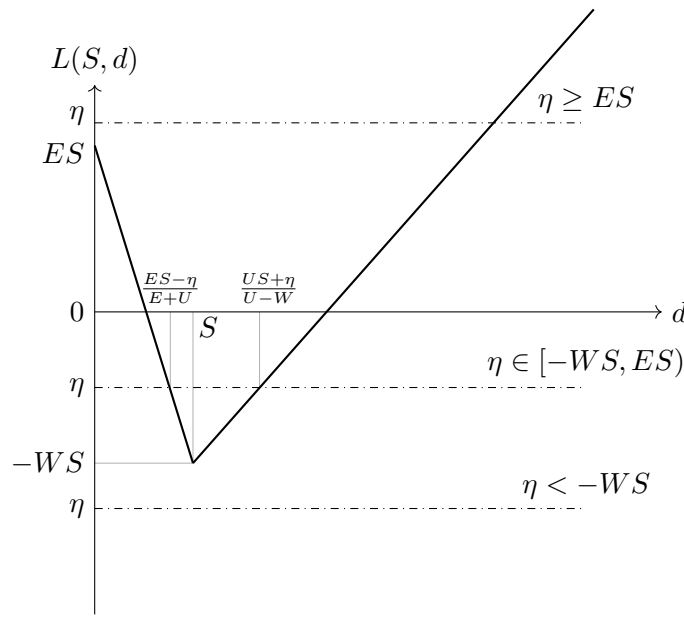
Μέσω του επόμενου Θεωρήματος δίνεται η βέλτιστη λύση για το πρόβλημα (2.5) (Gotoh and Takano, 2007).

Θεώρημα 2.2. *Η βέλτιστη λύση του (2.5) δίνεται σε κλειστή μορφή μέσω των σχέσεων*

$$S^* = \frac{E+W}{E+U} F^{-1}\left(\frac{U(1-\beta)}{E+U}\right) + \frac{U-W}{E+U} F^{-1}\left(\frac{E\beta+U}{E+U}\right) \quad (2.6\alpha')$$

$$\eta^* = \frac{E(U-W)}{E+U} F^{-1}\left(\frac{E\beta+U}{E+U}\right) - \frac{U(E+W)}{E+U} F^{-1}\left(\frac{U(1-\beta)}{E+U}\right) \quad (2.6\beta')$$

Απόδειξη. Το γράφημα της συνάρτησης απώλειας, μέσω του Σχήματος 2.1 θα μας υποδείξει τρεις περιπτώσεις έτσι ώστε να εξετασθεί τότε ικανοποιείται η συνθήκη $L(S, d) \geq \eta$.



Σχήμα 2.1: Το γράφημα της $L(S, d) = -\Pi(S, d)$.

Περίπτωση 1. $\eta < -WS, \forall d \geq 0 : L(S, d) \geq \eta$ οπότε

$$V_\beta(S, \eta) = \eta + (1-\beta)^{-1} \int_0^\infty [L(S, d) - \eta]^+ f(x) dx$$

αναλύοντας

$$\eta + (1-\beta)^{-1} \left\{ \int_0^S (ES - (E+W)x - \eta) f(x) dx + \int_S^\infty ((U-W)x - US - \eta) f(x) dx \right\}$$

Από την συνθήκη πρώτης τάξεως του προβλήματος (2.5), $\frac{\partial}{\partial S} V_\beta(S, \eta) = 0$ και $\frac{\partial}{\partial \eta} V_\beta(S, \eta) = 0$ προκύπτουν αντίστοιχα οι εξισώσεις

$$(1-\beta)^{-1} \{EF(S) - U + UF(S)\} = 0$$

$$1 + (1 - \beta)^{-1} \{-F(S) - 1 + F(S)\} = 0$$

όπου προκύπτει η βέλτιστη λύση, $S^* = F^{-1}(\frac{U}{E+U})$ και $\eta^* \leq -WS^*$ αν και μόνον εαν $\beta = 0$.

Περίπτωση 2. $\eta \in [-WS, ES]$

Σε αυτή την περίπτωση αναζητείται το διάστημα του d όπου ικανοποιείται η συνθήκη $L(S, d) \geq \eta$. Για τον πρώτο κλάδο έχουμε

$$ES - (E + W)d \geq \eta \Leftrightarrow d \leq \frac{ES - \eta}{E + W}$$

Αντίστοιχα για τον δεύτερο κλάδο η συνθήκη ικανοποιείται για εκείνα τα d και η με

$$(U - W)d - US \geq \eta \Leftrightarrow d \geq \frac{US + \eta}{U - W}$$

Συνεπώς, η $V_\beta(S, d)$ γίνεται,

$$V_\beta(S, d) = \eta + \frac{1}{1 - \beta} \left\{ \int_0^{\frac{ES - \eta}{E + W}} (ES - (E + W)x - \eta) f(x) dx + \int_{\frac{US + \eta}{U - W}}^\infty ((U - W)x - US - \eta) f(x) dx \right\}.$$

Από τις συνθήκες πρώτης τάξης του προβλήματος (2.5), $\frac{\partial}{\partial S} V_\beta(S, \eta) = 0$ και $\frac{\partial}{\partial \eta} V_\beta(S, \eta) = 0$, προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις,

$$(1 - \beta)^{-1} \left\{ EF\left(\frac{ES - \eta}{E + W}\right) - U + UF\left(\frac{US + \eta}{U - W}\right) \right\} = 0$$

$$1 + (1 - \beta)^{-1} \left\{ F\left(\frac{US + \eta}{U - W}\right) - 1 - F\left(\frac{ES - \eta}{E + W}\right) \right\} = 0$$

και τελικά

$$EF\left(\frac{ES - \eta}{E + W}\right) - U + UF\left(\frac{US + \eta}{U - W}\right) = 0 \text{ και } F\left(\frac{US + \eta}{U - W}\right) = \beta - F\left(\frac{ES - \eta}{E + W}\right)$$

Αντικαθιστώντας την δεύτερη εξίσωση στην πρώτη

$$EF\left(\frac{ES - \eta}{E + W}\right) - U + U(\beta + F\left(\frac{ES - \eta}{E + W}\right)) = 0$$

όπου προκύπτει

$$ES - \eta = (E + W)F^{-1}\left(\frac{U(1 - \beta)}{E + U}\right) \quad (i)$$

Επιστρέφοντας στην δεύτερη εξίσωση, $F\left(\frac{US + \eta}{U - W}\right) = \beta + \frac{U(1 - \beta)}{E + U} = \frac{E\beta + U}{E + U}$ προκύπτει,

$$US + \eta = (U - W)F^{-1}\left(\frac{E\beta + U}{E + U}\right) \quad (ii)$$

Προσθέτοντας κατα μέλη τις (i) και (ii):

$$(E + U)S = (E + W)F^{-1}\left(\frac{U(1 - \beta)}{E + U}\right) + (U - W)F^{-1}\left(\frac{E\beta + U}{E + U}\right)$$

όπου τελικά

$$S^* = \frac{E + W}{E + U} F^{-1}\left(\frac{U(1 - \beta)}{E + U}\right) + \frac{U - W}{E + U} F^{-1}\left(\frac{E\beta + U}{E + U}\right)$$

αντικαθιστώντας στην (i)

$$\eta^* = \frac{E(U - W)}{E + U} F^{-1}\left(\frac{E\beta + U}{E + U}\right) - \frac{U(E + W)}{E + U} F^{-1}\left(\frac{U(1 - \beta)}{E + U}\right)$$

Περίπτωση 3. $\eta \geq ES$

Αυτή η περίπτωση έχει νόημα όταν $d > S$ αφού μόνο τότε ικανοποιείται η συνθήκη $L(S, d) \geq \eta$. Συγκεκριμένα ενδιαφερόμαστε για εκείνα τα d που ικανοποιούν την σχέση $d \geq \frac{US + \eta}{U - W}$. Συνεπώς η $V_\beta(S, \eta)$ απλοποιείται στη μορφή

$$V_\beta(S, \eta) = \eta + (1 - \beta)^{-1} \int_{\frac{US + \eta}{U - W}}^{\infty} ((U - W)x - US - \eta) f(x) dx$$

Απο την συνθήκη πρώτης τάξης του προβλήματος (2.5) προκύπτουν αντίστοιχα οι εξισώσεις

$$(1 - \beta)^{-1} U \left(F\left(\frac{US + \eta}{U - W}\right) - 1 \right) = 0 \text{ και } (1 - \beta)^{-1} \left(F\left(\frac{US + \eta}{U - W}\right) - 1 \right) = -1$$

οι οποίες αντίστοιχα θα δώσουν

$$F\left(\frac{US + \eta}{U - W}\right) = 1 \text{ και } F\left(\frac{US + \eta}{U - W}\right) = \beta$$

Άτοπο, κατα συνέπεια το πρόβλημα υπό την συνθήκη $\eta \geq ES$ είναι αδύνατο. $\square$

Συμπερασματικά, η ύπαρξη της βέλτιστης λύσης (S^*, η^*) του (2.5) οφείλει να ικανοποιεί την συνθήκη $\eta^* \leq ES^*$. Συγκεκριμένα για απώλειες της τάξεως $\eta^* \leq WS^*$ αποδεικνύεται ταυτόσημη με εκείνη της σχέσης (2.4β'), δηλώνοντας πως οποιαδήποτε προσπάθεια περιορισμού των κινδύνων καθίσταται χωρίς όφελος. Όταν η απώλεια κυμαίνεται $\eta^* \in [WS^*, ES^*]$ έχει νόημα η στρατηγική περιορισμού επικινδυνότητας της S όπως διαπιστώνεται από τις σχέσεις (2.6α') και (2.6β').

Ακολουθεί μέσω των Πορισμάτων 2.2–2.3 η μεταβολή της βέλτιστης λύσης του προβλήματος (2.5) ως προς τις οικονομικές παραμέτρους και επίπεδο κινδύνου β .

Πόρισμα 2.2. Θέτοντας στις σχέσεις (2.6α') και (2.6β') $g = 0$ προκύπτει

$$S^* = F^{-1}\left(\frac{U}{E+U}(1-\beta)\right) \text{ και } \eta^* = -US^* \quad (2.7)$$

ενώ, ή/και $\beta = 0$, προκύπτει η λύση της σχέσης (2.4β') με το η να ικανοποιεί τη συνθήκη $\eta^* \leq US^*$.

Στη συνέχεια εξετάζεται η μεταβολή της βέλτιστης λύσης του (2.3) ως προς τις παραμέτρους κόστους/κέρδους του πρόβληματος και β . Τα αποτελέσματα δίνονται στο επόμενο πόρισμα. Η θεώρηση αφορά τη μεταβολή μιας μόνο παραμέτρου κάθε φορά.

Πόρισμα 2.3. Το βέλτιστο επίπεδο επαναφοράς του (2.5) αυξάνεται με το κόστος έλλειψης, μειώνεται με τα κόστη αγοράς και απόσυρσης και εξαρτάται από την γεωμετρία της συνάρτησης πυκνότητας $f(\cdot)$ για την τιμή πώλησης r και επιπέδου σημαντικότητας β .

Απόδειξη. Καθώς

$$\frac{\partial S^*}{\partial \beta} = \frac{1}{(E+U)^2} \left(\frac{E(U-W)}{f(F^{-1}(p_2))} - \frac{U(E+W)}{f(F^{-1}(p_1))} \right)$$

όπου $p_1 = \frac{U(1-\beta)}{E+U}$ και $p_2 = \frac{E\beta+U}{E+U}$, το πρόσημο της εξαρτάται από την εκάστοτε συνάρτηση πυκνότητας $f(\cdot)$ γύρω από τα σημεία $F^{-1}(p_i)$, $i = 1, 2$. Για

$$\frac{\partial S^*}{\partial r} = \frac{U-W}{(E+U)^2} (F^{-1}(p_1) - F^{-1}(p_2)) + \frac{E(1-\beta)}{(E+U)^3} \left(\frac{E+W}{f(F^{-1}(p_1))} + \frac{U-W}{f(F^{-1}(p_2))} \right)$$

Το οποίο αποτελεί ένα άθροισμα ενός αρνητικού και ενός θετικού όρου αντίστοιχα μιας και η διαφορά $F^{-1}(p_1) - F^{-1}(p_2)$ είναι αρνητική ως συνέπεια αντίστροφης συνέχους συνάρτησης και διάταξης σημείων $p_1 < p_2$. Ως προς την παράμετρο του κόστους αγοράς c αναμένεται ότι αύξηση του θα προκαλεί μείωση της ποσότητας παραγγελίας S , όπως και αποδεικνύεται μέσω του προσήμου της παραγώγου ως προς αυτήν

$$\frac{\partial S^*}{\partial c} = -\frac{1-\beta}{(E+U)^2} \left[\frac{E+W}{f(F^{-1}(p_1))} + \frac{U-W}{f(F^{-1}(p_2))} \right] < 0$$

Για την παράμετρο του κόστους διατηρήσεως v το αποτέλεσμα είναι ανάλογο και συγκεκριμένα

$$\frac{\partial S^*}{\partial v} = \frac{U-W}{(E+U)^2} (F^{-1}(p_1) - F^{-1}(p_2)) - \frac{U(1-\beta)}{(E+U)^3} \left(\frac{E+W}{f(F^{-1}(p_1))} + \frac{U-W}{f(F^{-1}(p_2))} \right) < 0$$

Τέλος, και για την αύξηση της παραμέτρου g του κόστους ελλείψεως αρνητικού τελικού αποθέματος αναμένεται αύξηση της ποσότητας παραγγελίας S όπως και αποδεικνύεται μέσω του προσήμου της παραγώγου ως προς αυτήν

$$\frac{\partial S^*}{\partial g} = \frac{E+W}{(E+U)^2} (F^{-1}(p_2) - F^{-1}(p_1)) + \frac{E(1-\beta)}{(E+U)^3} \left(\frac{E+W}{f(F^{-1}(p_1))} + \frac{U-W}{f(F^{-1}(p_2))} \right) > 0$$

□

2.5 Προστασία από σημαντικά υψηλό κόστος

Στη συνέχεια παρουσιάζεται το πρόβλημα θεωρώντας ως συνάρτηση απώλειας την $L(S, d) = TC(S, d)$. Στόχος να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα

$$\min_{S \geq 0} \min_{\eta \in \mathbb{R}} \{ \eta + (1 - \beta)^{-1} \int_0^\infty [TC(S, x) - \eta]^+ f(x) dx \} \quad (2.8)$$

Μέσω του επόμενου θεωρήματος δίνεται η βέλτιστη λύση για το πρόβλημα (2.8) του οποίου η απόδειξη παραλείπεται διότι ταυτίζεται με εκείνη του Θεωρήματος 2.2 θέτοντας $W = 0$.

Θεώρημα 2.3. Η βέλτιστη λύση του (2.8) δίνεται σε κλειστή μορφή μέσω των σχέσεων

$$S^* = \frac{E}{E+U} F^{-1}\left(\frac{U(1-\beta)}{E+U}\right) + \frac{U}{E+U} F^{-1}\left(\frac{E\beta+U}{E+U}\right) \quad (2.9\alpha')$$

$$\eta^* = \frac{EU}{E+U} (F^{-1}\left(\frac{E\beta+U}{E+U}\right) - F^{-1}\left(\frac{U(1-\beta)}{E+U}\right)) \quad (2.9\beta')$$

Μέσω του Πίνακα 2.1 δίνονται συγκεντρώνονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης ευαισθησίας ως προς τις παραμέτρους των τριών βέλτιστων λύσεων.

	$\frac{\partial S^*}{\partial \beta}$	$\frac{\partial S^*}{\partial r}$	$\frac{\partial S^*}{\partial c}$	$\frac{\partial S^*}{\partial v}$	$\frac{\partial S^*}{\partial g}$
$S_{\mathbb{E}[\cdot]}$		+	-	-	+
$S_{CVaR_\beta}^{-\Pi}$	$\mp$	$\mp$	-	-	+
$S_{CVaR_\beta}^{TC}$	$\mp$	$\mp$	-	-	+

Πίνακας 2.1: Πρόσημα παραγώγων μεταξύ βέλτιστων λύσεων.

2.6 Σύγκριση βέλτιστων λύσεων

Ο σκοπός της ενότητας αυτής είναι να συγκρίνει τις βέλτιστες λύσεις διαφορετικών κριτηρίων στο πρόβλημα του εφημεριδοπώλη. Η διάταξη των βέλτιστων λύσεων επαναφοράς του αποθέματος συνδέεται άμεσα, με τη σχέση του ατόμου που αποφασίζει με

το ρίσκο. Συγκεκριμένα, ένας αδιάφορος του ρίσκου (risk-neutral) επιλέγει μια στρατηγική ώστε να ελαχιστοποιήσει την $\mathbb{E}[TC(S, d)]$. Επιφυλακτικός ως προς το ρίσκο (risk-averse) επιλέγει στρατηγική ώστε να προστατευτεί από τις χειρότερες των περιπτώσεων, μέσω της $CVaR_\beta$. Αξιολογούνται εμπειρικά τα βέλτιστα επίπεδα αποθέματος σε ένα στοχαστικό περιβάλλον τονίζοντας τον συμβιβασμό που δέχεται ο αποφασίζων υιοθετώντας μια από αυτές. Τέλος, πραγματοποιείται μια ανάλυση της κατανομής ζήτησης όπου μέσω αυτής προσδιορίζονται τα σενάρια της ζήτησης που παράγουν τις πιο δυσμενείς καταστάσεις κέρδους και κόστους.

2.7 Διερεύνηση διάταξης βέλτιστων λύσεων

Αρχικά συγκρίνονται οι βέλτιστες λύσεις των προβλημάτων που παρουσιάστηκαν στις Ενότητες 2.1 και 2.2. Ο σκοπός αυτής της σύγκρισης είναι να εξεταστεί η διαφορά των επιπέδων επαναφοράς του αποθέματος κάθε στρατηγικής. Η ακόλουθη πρόταση έχει ως σκοπό να διερευνήσει την πιθανή διάταξη μεταξύ των δύο βέλτιστων λύσεων της ελαχιστοποίησης του αναμενόμενου κόστους $\mathbb{E}[TC(S, d)]$ (2.4β') και της ελαχιστοποίησης του $CVaR_\beta(-\Pi(S, d))$ (2.6α').

Πρόταση 2.1. Έστω $a = \frac{U}{E+U}$, $p_1 = \frac{U(1-\beta)}{E+U}$, $p_2 = \frac{E\beta+U}{E+U}$ και $\lambda = \frac{U-W}{E+U}$. Για κάθε συνεχής συνάρτηση κατανομής $F(\cdot)$ της στοχαστικής ζήτησης, για κάθε $E, U, W > 0$ και $\beta \in (0, 1)$ προκύπτει

$$S_{CVaR_\beta}^{-\Pi} \geq S_{\mathbb{E}[\cdot]} \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{F^{-1}(a) - F^{-1}(p_1)}{F^{-1}(p_2) - F^{-1}(p_1)} \quad (2.10)$$

Απόδειξη. Η $S_{CVaR_\beta}^{-\Pi}$ αποτελεί έναν κυρτό συνδιασμό δύο ποσοστιμορίων κατανομής ζήτησης αφού αυτή ισοδύναμα γράφεται

$$S_{CVaR_\beta}^{-\Pi} = (1 - \lambda)F^{-1}(p_1) + \lambda F^{-1}(p_2)$$

όπου $[0, 1] \ni \lambda = \frac{U-W}{E+U} = \frac{g}{r+v+g} = 1 - \frac{r+v}{r+v+g}$, $r, v, g \geq 0$. Άμεσα έπεται το αποτέλεσμα ότι, $F^{-1}(p_1) \leq S_{CVaR_\beta}^{-\Pi} \leq F^{-1}(p_2)$. Ακολούθως διακρίνονται τρεις περιπτώσεις όπου ικανοποιείται καθολικά η διάταξη.

- $\beta = 0$: Ισχύει η ισότητα $S_{CVaR_\beta}^{-\Pi} = S_{\mathbb{E}[\cdot]}$.
- $g = 0$: Ισχύει ότι $E, U > 0$ και $\beta \in [0, 1)$ τότε $p_1 - a = -\frac{U}{E+U}\beta < 0$ και άρα λόγω της μονοτονίας της $F^{-1}(\cdot)$ έπεται $S_{CVaR_\beta}^{-\Pi} = F^{-1}(\frac{U(1-\beta)}{U+E}) \leq F^{-1}(\frac{U}{U+E}) = S_{\mathbb{E}[\cdot]}$.
- $\lambda \rightarrow 1$: Ο λόγος $\lambda = \frac{g}{r+v+g}$ για ρεαλιστικές τιμές r, v εξαρτάται κυρίως δια της παραμέτρου g . Συνεπώς, $\lambda \rightarrow 1 \Leftrightarrow g \rightarrow \infty$ και σε συνδιασμό $p_2 - a = \frac{E\beta}{E+U} > 0$, έπεται η διάταξη $S_{cvar}^{-\Pi} \rightarrow F^{-1}(p_2) \geq F^{-1}(a)$.

Για την περίπτωση όπου $\beta \in (0, 1)$ και $g > 0$ η διάταξη τους σχετίζεται αυστηρά με τις τιμές των παραμέτρων E, U, W και τη γεωμετρία της $F^{-1}(\cdot)$.

$$S_{CVaR_\beta}^{-\Pi} = (1 - \lambda)F^{-1}(p_1) + \lambda F^{-1}(p_2) = F^{-1}(p_1) + \lambda[F^{-1}(p_2) - F^{-1}(p_1)]$$

Τότε η διαφορά $S_{CVaR_\beta}^{-\Pi} - S_{cl} \geq 0$ ισοδύναμα γράφεται

$$F^{-1}(p_1) + \lambda[F^{-1}(p_2) - F^{-1}(p_1)] - F^{-1}(a) \geq 0$$

Λύνοντας ως προς τη παράμετρο λ

$$\lambda \geq \frac{F^{-1}(a) - F^{-1}(p_1)}{F^{-1}(p_2) - F^{-1}(p_1)}$$

Δείχθηκε λοιπόν το αποτέλεσμα

$$S_{CVaR_\beta}^{-\Pi} \geq S_{\mathbb{E}[\cdot]} \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{F^{-1}(a) - F^{-1}(p_1)}{F^{-1}(p_2) - F^{-1}(p_1)}$$

□

Η ακόλουθη πρόταση έχει ως σκοπό να διερευνήσει πιθανή διάταξη μεταξύ των δύο βέλτιστων λύσεων της ελαχιστοποίησης του αναμενόμενου κόστους $\mathbb{E}[TC(S, d)]$ (2.4β') και της ελαχιστοποίησης του $CVaR_\beta(TC(S, d))$ (2.9α').

Πρόταση 2.2. Έστω $a = \frac{U}{E+U}, p_1 = \frac{U(1-\beta)}{E+U}, p_2 = \frac{E\beta+U}{E+U}$. Για κάθε συνεχή συνάρτηση κατανομής $F(\cdot)$ της στοχαστικής ζήτησης, για κάθε $E, U > 0$ και $\beta \in (0, 1)$ προκύπτει

$$S_{CVaR_\beta}^{TC} \geq S_{\mathbb{E}[\cdot]} \Leftrightarrow a \geq \frac{F^{-1}(a) - F^{-1}(p_1)}{F^{-1}(p_2) - F^{-1}(p_1)} \quad (2.11)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη παραλείπεται μιας και είναι όμοια της προηγούμενης θέτοντας $W = 0$. □

Η ακόλουθη πρόταση έχει ως σκοπό να διερευνήσει πιθανή διάταξη μεταξύ των δύο βέλτιστων λύσεων της ελαχιστοποίησης του $CVaR_\beta(-\Pi(S, d))$ (2.6α') και της ελαχιστοποίησης του $CVaR_\beta(TC(S, d))$ (2.9α').

Πρόταση 2.3. Έστω $p_1 = \frac{U(1-\beta)}{E+U}, p_2 = \frac{E\beta+U}{E+U}$. Για κάθε συνεχή συνάρτηση κατανομής $F(\cdot)$ της στοχαστικής ζήτησης, για κάθε $E, U, W > 0$ και $\beta \in (0, 1)$ προκύπτει

$$S_{CVaR_\beta}^{TC} \geq S_{CVaR_\beta}^{-\Pi} \quad (2.12)$$

Απόδειξη. Αρχικά, για κάθε $\beta \in [0, 1)$ ισχύει $p_2 \geq p_1$, ακόμη η $F^{-1}(\cdot)$ είναι μια μη-φθίνουσα συνεχής συνάρτηση, οπότε $F^{-1}(p_2) \geq F^{-1}(p_1)$, συνεπώς για τη διαφορά των $S_{CVaR_\beta}^{TC}$ και $S_{CVaR_\beta}^{-\Pi}$ προκύπτει πάντοτε

$$S_{CVaR_\beta}^{TC} - S_{CVaR_\beta}^{-\Pi} = \frac{W}{E + U} (F^{-1}(p_2) - F^{-1}(p_1)) \geq 0$$

□

Δείχθηκε λοιπόν, πως ισχύει καθολικά ότι το πρόβλημα $CVaR_\beta(TC)$ προτείνει υψηλότερο επίπεδο επαναφοράς του προβλήματος $CVaR_\beta(-\Pi)$, ενώ η διάταξη καθεμίας έναντι του επιπέδου επαναφοράς της ελαχιστοποίησης του αναμενόμενου κόστους (κέρδους) $\mathbb{E}[TC(S, d)]$ εξαρτάται από το εκάστοτε περιβάλλον, δηλαδή της γεωμετρίας της $F^{-1}(\cdot)$ στα σημεία a και p_i , $i = 1, 2$, και των παραμέτρων κόστους E, U και W .

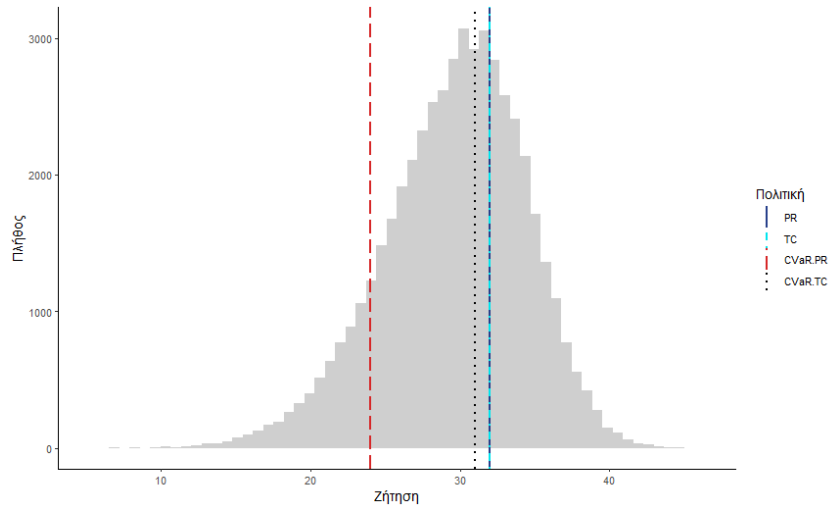
2.8 Αποτίμηση βέλτιστων λύσεων

Στην παρούσα ενότητα γίνεται σύγκριση των λύσεων που προκύπτουν από τις σχέσεις (2.3), (2.5) και (2.8) οι οποίες αντιστοιχούν στα διαφορετικά κριτήρια λήψης απόφασης που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται για την περιγραφή της κατανομής της ζήτησης η αριστερή Λοξή Κανονική κατανομή με παραμέτρους $\xi = 34.37$, $\omega = 6.74$ και $\alpha = -1.94$. Η επιλογή της συγκεκριμένης κατανομής γίνεται γιατί είναι η κατανομή που προσαρμόζεται στα δεδομένα του Κεφαλαίου 3, όπως επίσης και οι τιμές των παραμέτρων κόστους (κέρδους) ($r = 20, c = 8, v = 3, g = 7$) είναι εκείνες που χρησιμοποιούνται στο Κεφάλαιο 3. Για το επίπεδο κινδύνου, β , εξετάζονται δύο εναλλακτικές τιμές, $\beta = 0.95$ και $\beta = 0.99$.

Η επιλογή του κριτηρίου βελτιστοποίησης (αναμενόμενο κέρδος ή $CVaR_\beta$) προφανώς εξαρτάται από την οπτική του ατόμου που παίρνει απόφαση ως προς το ρίσκο: αδιάφορο ως προς το ρίσκο (χρήση αναμενόμενου κέρδους/κόστους) η επιφυλακτικό ως προς το ρίσκο (χρήση $CVaR_\beta$). Όταν χρησιμοποιείται το κριτήριο $CVaR_\beta$, η απώλεια ορίζεται κάτω από δυο αντικειμενικούς στόχους. Αν ο στόχος είναι η μεγιστοποίηση των μικρότερων 5% κερδών η απώλεια ορίζεται ως $L(S, d) = -\Pi(S, d)$, αντιστοιχεί στο πρόβλημα $CVaR_{1-\beta}(\Pi)$, και δηλώνει προσπάθεια εξασφάλισης μέγιστου κέρδους στις πιο δυσμενείς καταστάσεις κέρδους. Αν ο στόχος είναι η ελαχιστοποίηση των μεγαλύτερων 5% απωλειών στοχαστική απώλεια ορίζεται ως $L(S, d) = TC(S, d)$, αντιστοιχεί στο πρόβλημα $CVaR_\beta(TC)$, και δηλώνει προσπάθεια εξασφάλισης ελάχιστου κόστους στις πιο δυσμενείς καταστάσεις κόστους. Επιπλέον η επιλογή των παραμέτρων κόστους E και U επηρεάζουν επίσης το ύψος του αποθέματος ορίζοντας το επίπεδο εξυπηρέτησης (στην περίπτωση του αναμενόμενου κέρδους/κόστους).

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.2 και στο Σχήμα 2.2. Από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι το βέλτιστο που προκύπτει από την μεγιστοποίηση των μικρότερων 5% κερδών είναι μικρότερο από αυτό που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση των μεγαλύτερων 5% απωλειών και μικρότερο από το αυτό που προκύπτει από τη μεγιστοποίηση (ελαχιστοποίηση) του μέσου κέρδους (κόστους). Όπως έχει σημειωθεί δεν υπάρχει κανόνας για τη διάταξη του βέλτιστου επιπέδου επαναφοράς του αποθέματος. Σημειώνεται ότι με βάση το κριτήριο του μέσου κόστους (κέρδους) το επίπεδο εξυπηρέτησης a είναι

στο 0.63 ενώ με τα άλλα δυο κριτήρια γίνεται σαφώς μικρότερο. Συγκεκριμένα, η χρήση του κριτηρίου $CVaR_{1-\beta}(\Pi)$ οδηγεί σε επαναφορά του αποθέματος στις 24 μονάδες, σε αντίθεση με τις 32 μονάδες όταν το κριτήριο είναι το αναμενόμενο κόστος. Σε αυτή την περίπτωση θυσιάζεται 21.7% του αναμενόμενου κέρδους για να εξασφαλιστεί αύξηση 49.7% στο 5% των πιο δυσμενών σεναρίων κέρδους. Αντίθετα η χρήση του κριτηρίου $CVaR_{\beta}(TC)$ οδηγεί σε επαναφορά του αποθέματος στις 31 μονάδες. Η συγκεκριμένη στρατηγική αποδίδει σχεδόν όμοια με εκείνη του αναμενόμενου κόστους (κέρδους) σε όρους της μέσης επίδοσης και αυτής των δυσμενών καταστάσεων κόστους, επιφέροντας βελτίωση στο δυσμενέστερο 5% των περιπτώσεων με κατά μέσο όρο 153 χρ. μον. Επίσης, επιτυγχάνει σχεδόν 10% αύξηση από 134 χρηματικές μονάδες σε 145 του 5% των πιο δυσμενών σεναρίων κέρδους, γεγονός που υποδηλώνει υψηλότερο κατώφλι στο χειρότερο 5% των σεναρίων κέρδους.



Σχήμα 2.2: Βέλτιστα επίπεδα επαναφοράς έναντι αριστερής Λοξής Κανονικής κατανομής για επίπεδο κινδύνου $\beta = 0.95$.

Στρατηγική	S	Αναμ. κέρδος	$VaR_{1-\beta}(\Pi)$	$CVaR_{1-\beta}(\Pi)$	Αναμ. κόστος	$VaR_{\beta}(TC)$	$CVaR_{\beta}(TC)$
$\mathbb{E}[TC(S, d)]$	32	303.58	134.36	77.01	51.97	129.18	155.16
$CVaR_{1-\beta}(\Pi)$	24	237.81	188.39	153.23	117.73	241.91	271.65
$CVaR_{\beta}(TC)$	31	303.39	145.36	88.01	52.15	130.29	153.35

Πίνακας 2.2: Αποτίμηση πολιτικών με $\beta = 0.95$.

Μέσω του Πίνακα 2.3 παρουσιάζονται τα απολέσματα για $\beta = 0.99$ όπου λειτουργούν ως έλεγχος ευαισθησίας ως προς το επίπεδο του κινδύνου. Για το συγκεκριμένο περιβάλλον του προβλήματος (κατανομή ζήτησης και παράμετροι κόστους) το βέλτιστο

επίπεδο επαναφοράς του κριτηρίου $CVaR_{\beta}(TC)$ επηρεάζεται κυρίως από τη δεξιά ουρά της κατανομής της ζήτησης, ως ο κυρτός συνδιασμός δύο ποσοστιμόριων αυτής, με βάρος $\frac{U}{E+U} = 0.63$ στο υψηλό ποσοστιμόριο. Από το ιστόγραμμα της ζήτησης μέσω του Σχήματος 2.2 τα υψηλά ποσοστιμόρια δεν διαφοροποιούνται έντονα μεταξύ τους, ελαφριά δεξιά ουρά, όπου κατα συνέπεια η αύξηση του β δεν μεταβάλλει ουσιαστικά το αντίστοιχο ποσοστιμόριο, οδηγώντας σε σταθερότητα του βέλτιστου επιπέδου επαναφοράς.

Αντίθετα, για το κριτήριο $CVaR_{1-\beta}(\Pi)$, το βέλτιστο επίπεδο επαναφοράς επηρεάζεται περισσότερο από την αριστερή ουρά της κατανομής της ζήτησης, αφού το αντίστοιχο βάρος στο χαμηλό ποσοστιμόριο είναι $\frac{E+W}{E+U} = 0.76$. Μέσω του ιστογράμματος διαπύκνωσης ελαφρώς βαρύτερη με αποτέλεσμα τα χαμηλά ποσοστιμόρια να διαφοροποιούνται περισσότερο καθώς αυξάνεται το β . Συνεπώς, το βέλτιστο επίπεδο επαναφοράς τείνει να γίνεται μικρότερο καθώς αυξάνεται το β δίνοντας περισσότερη έμφαση στα δυσμενή χαμηλά σενάρια ζήτησης.

Στρατηγική	S	Αναμ. κέρδος	$VaR_{1-\beta}(\Pi)$	$CVaR_{1-\beta}(\Pi)$	Αναμ. κόστος	$VaR_{\beta}(TC)$	$CVaR_{\beta}(TC)$
$E[TC(S, d)]$	32	303.58	39.45	-6.50	51.97	172.48	192.76
$CVaR_{1-\beta}(\Pi)$	22	205.38	131.72	98.79	150.16	327.82	351.86
$CVaR_{\beta}(TC)$	31	303.39	50.45	4.50	52.15	172.39	192.06

Πίνακας 2.3: Αποτίμηση πολιτικών με $\beta = 0.99$.

Για $\beta = 0.99$, η ανάλυση επικεντρώνεται στη πλέον δυσμενή κατάσταση, στα χειρότερα 1% των σεναρίων, με αποτέλεσμα οι δείκτες ουράς να διαφοροποιούνται έντονα σε σχέση με την περίπτωση $\beta = 0.95$. Συγκεκριμένα, η βελτιστοποίηση μέσω του $CVaR_{1-\beta}(\Pi)$ οδηγεί σε επίπεδο επαναφοράς 22 μονάδες, έναντι 32 μονάδων όταν το κριτήριο είναι η μέση τιμή (ελαχιστοποίηση αναμενόμενου κόστους). Για την επιλογή αυτή εκτιμάται ικανοποιητική βελτίωση της επίδοσης στην αριστερή ουρά της κατανομής του κέρδους και στα 1% χειρότερα σενάρια, καθώς το $CVaR_{1-\beta}(\Pi)$ ανέρχεται σε 98.79 χρηματικές μονάδες, έναντι -6.50 χρηματικών μονάδων για την πολιτική μέσης τιμής, όπου εκτιμάται καθαρή απώλεια. Το όφελος αυτό, συνοδεύεται από σημαντικό κόστος σε όρους μέσης επίδοσης, καθώς το μέσο κέρδος μειώνεται σε 205.38 χρηματικές μονάδες, 32% χαμηλότερα από τις 303.58 χρηματικές μονάδες, ενώ το μέσο κόστος εκτιμάται το υψηλότερο και εκτιμάται στις 150.16 χρηματικές μονάδες.

Τέλος, μέσω των Πινάκων 2.2–2.3 καθίσταται εμφανές και εμπειρικά ότι ο τελευταίος $CVaR_{\beta}$, υπό εναλλακτικές συναρτήσεις απώλειας $L(S, d)$, αποτυπώνει διαφορετικές στρατηγικές βελτιστοποίησης και συνεπώς οδηγεί σε διαφορετικές βέλτιστες αποφάσεις, καταδεικνύοντας έτσι ότι η μεγιστοποίηση των χαμηλότερων κερδών και η ελαχιστοποίηση των υψηλότερων κοστών συνιστούν διακριτούς αντικειμενικούς στόχους.

Στη συνέχεια μελετώνται οι τιμές ζήτησης που οδηγούν στις χειρότερες πραγματοποιήσεις κέρδους και κόστους.

Η βέλτιστη λύση του $CVaR_{5\%}(\Pi)$ για το συγκεκριμένο σύνολο δεδομένων, παραμέτρων κόστους E, U, W και $\beta = 0.95$ είναι ($S^* = 24, \eta^* = 188.39$). Για να προσδιορι-

στούν οι περιοχές του δειγματικού χώρου ζήτησης που γεννούν το 5% του χαμηλότερου κέρδους, λύνεται η ανίσωση $\Pi(S, d) \leq \eta$

$$\Pi(S, d) \leq \eta \Leftrightarrow d_L \leq \frac{ES+\eta}{E+W} \text{ και } \Pi(S, d) \leq \eta \Leftrightarrow d_R \geq \frac{US-\eta}{U-W}$$

Προκύπτει το σύνολο σημείων $(0, d_L) \cup (d_R, \infty)$. Αξιοποιώντας τη βέλτιστη λύση (S^*, η^*) τα σενάρια ζήτησης που παράγουν το χειρότερο 5% των πραγματοποιημένων κερδών ανήκουν στο $(0, 19.16) \cup (38.23, \infty)$. Επιπλέον για να προσδιοριστεί το ποσοστό της κάθε ουράς της κατανομής ζήτησης που παράγει τα σενάρια $\Pi(S^*, d) \leq \eta^*$, αξιοποιείται η σχέση,

$$5\% = Pr(\Pi(S, d) \leq \eta) = Pr(d \leq d_L + d \geq d_R) = p_L + p_R$$

Οι πιθανότητες p_L, p_R υπολογίζονται παραμετρικά μέσω της συνάρτησης κατανομής της προσαρμοσμένης Λοξής Κανονικής $F(d_L)$ και $1 - F(d_R)$. Τέλος, υπολογίζεται ο λόγος $\frac{F(d_L)}{0.05}$ έτσι ώστε να αποφανθεί το ποσοστό κάθε ουράς της κατανομής ζήτησης που οδηγεί το 5% των χειρότερων πραγματοποιήσεων κέρδους. Ανάλογη είναι η διαδικασία για τον προσδιορισμό του συνόλου ζήτησης που οδηγεί το 5% των χειρότερων πραγματοποιήσεων κόστους.

Στρατηγική	S	d_L	d_R	p_L	p_R	$Var(\cdot)$
$CVaR_{1-\beta}(\Pi)$	24	19.67	38.22	0.029	0.021	188.39
$CVaR_{\beta}(TC)$	31	19.15	37.86	0.023	0.027	130.29

Πίνακας 2.4: Περιοχές ζήτησης και μάζες ουράς για τα κριτήρια $CVaR_{1-\beta}(\Pi)$ και $CVaR_{\beta}(TC)$ με $\beta = 0.95$.

Από τον Πίνακα 2.4 παρατηρούμε ότι το 5% των χαμηλότερων κερδών προέρχεται κυρίως από την αριστερή ουρά της κατανομής ζήτησης (το 58%), δικαιολογώντας τη μείωση του επιπέδου επαναφοράς του αποθέματος όταν το $CVaR_{\beta}(-\Pi)$ είναι το κριτήριο απόφασης. Επίσης, φαίνεται ότι το 5% του υψηλότερου κόστους προέρχεται εξίσου από τις δύο ουρές της κατανομής ζήτησης δικαιολογώντας την αύξηση του επιπέδου επαναφοράς του αποθέματος όταν το $CVaR_{\beta}(C)$ είναι το κριτήριο απόφασης συγκριτικά με το $CVaR_{\beta}(-\Pi)$ αλλά όχι περισσότερο από το επίπεδο επαναφοράς όταν το κριτήριο είναι το μέσο κόστος (κέρδος).

Στρατηγική	S	d_L	d_R	p_L	p_R	$Var(\cdot)$
$CVaR_{1-\beta}(\Pi)$	22	16.25	40.90	0.00718	0.00282	131.72
$CVaR_{\beta}(TC)$	31	15.33	40.07	0.00444	0.00556	172.38

Πίνακας 2.5: Περιοχές ζήτησης και μάζες ουράς για τα κριτήρια $CVaR_{1-\beta}(\Pi)$ και $CVaR_{\beta}(TC)$ με $\beta = 0.99$.

Ανάλογη διαδικασία πραγματοποιείται για το επίπεδο κινδύνου $\beta = 0.99$. Μέσω του Πίνακα 2.5 παρουσιάζονται οι περιοχές των ουρών της κατανομής της ζήτησης που γεννούν τα 1% χειρότερα σενάρια κέρδους/κόστους. Η μεγιστοποίηση του 1% χαμηλότερου κέρδους, προκύπτει τόσο από πολύ χαμηλά σενάρια ζήτησης όσο και από πολύ υψηλά. Η εμπειρική κατανομή του κέρδους δείχνει πως το μεγαλύτερο μέρος της αριστερής ουράς της προέρχεται κυρίως από την αριστερή ουρά της κατανομής της ζήτησης, το 72% των δυσμενών σεναρίων κέρδους οφείλεται σε χαμηλή ζήτηση. Συνεπώς, στην προσπάθεια αύξησης τους προτείνεται χαμηλότερο επίπεδο επαναφοράς, $S = 22$ μονάδες, έτσι ώστε να περιοριστεί το κόστος αδιάθετου αποθέματος. Αντίθετα, η εμπειρική κατανομή του κόστους δείχνει πως το 1% της δεξιάς ουράς προκαλείται σχεδόν ισομερώς και από τις δύο ουρές της κατανομής της ζήτησης, υποδεικνύοντας ότι τόσο το κόστος αδιάθετου αποθέματος όσο και το κόστος έλλειψης συμβάλλουν ουσιαστικά στη διαμόρφωση της. Το γεγονός ότι το κόστος έλλειψης είναι υψηλότερο ($U = 19 > E = 11$), η επαναφορά του αποθέματος τείνεται σε υψηλότερο επίπεδο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΦΑΡΜΟΓΗ RISK NEUTRAL ΚΑΙ RISK AVERSE ΜΕΤΡΩΝ ΣΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

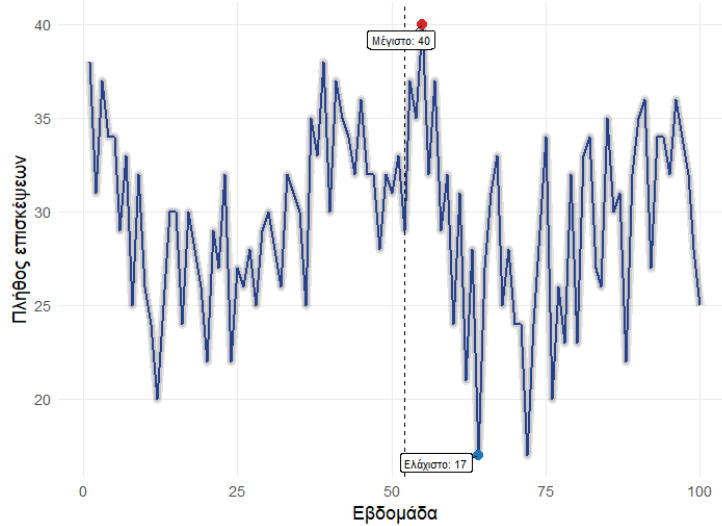
Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο χρησιμοποιείται ένα σύνολο πραγματικών δεδομένων από την βιβλιογραφία (Liu and Zhu, 2024), που αφορά τη ζήτηση για γεύματα σε μια τράπεζα τροφίμων, για την εφαρμογή των αποτελεσμάτων των προηγούμενων κεφαλαίων. Αφού γίνει η μοντελοποίηση της ζήτησης, προτείνονται τρόποι αναπλήρωσης του αποθέματος για συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα σχεδιασμού. Για αυτόν τον ορίζοντα λαμβάνονται αποφάσεις είτε για μία μελλοντική περίοδο και χρήση της πληροφορίας για τη ζήτηση μόλις είναι διαθέσιμη είτε λήψη απόφασης για όλο τον ορίζοντα σχεδιασμού. Η συνολική ανάλυση υλοποιείται στο περιβάλλον της R.

3.1 Περιγραφή του συνόλου δεδομένων

Τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται προέρχονται από μια τράπεζα τροφίμων στο Durham της Αγγλίας. Μια τράπεζα τροφίμων είναι ένας οργανισμός επείγουσας επισιτιστικής βοήθειας που παρέχει ανακούφιση από την πείνα σε οικογένειες που ζουν σε συνθήκες φτώχειας. Κάθε τράπεζα τροφίμων καλύπτει μια συγκεκριμένη περιοχή και ο υπεύθυνος λήψης αποφάσεων πρέπει να προετοιμάζει τρόφιμα σε εβδομαδιαία βάση για την ημέρα διανομής τους (συνήθως την Κυριακή). Αυτό το πρόβλημα προετοιμασίας τροφίμων εντός της τράπεζας τροφίμων μπορεί να προσαρμοστεί κατά προσέγγιση από το μοντέλο του εφημεριδοπώλη. Ο στόχος του προβλήματος είναι να προσδιοριστεί η ποσότητα τροφίμων που πρέπει να παρασκευαστεί για την ικανοποίηση της ζήτησης. Στην απλούστερη περίπτωση, η κατανάλωση κάθε ατόμου θεωρείται ίδια και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο «αριθμός επισκέψεων» ως η ζήτηση. Σε αυτό το πλαίσιο, τα δεδομένα περιλαμβάνουν αριθμό επισκέψεων σε κάθε ημέρα διανομής για 104 εβδομάδες από τον Ιούλιο του 2020 έως τον Ιούνιο του 2022 σε εβδομαδιαία βάση. Επιπλέον, δίνονται 10 ακόμη τύποι χαρακτηριστικών εντός του ίδιου χρονικού διαστήματος, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.19 στο ;; A, τα οποία αφορούν μακροοικονομικά στοιχεία όπως ποσοστό πληθωρισμού, ποσοστού ανεργίας, δύο οικονομικούς δείκτες καθώς και κοινωνικά χαρακτηριστικά όπως πλήθος γεννήσεων, θανάτων και αριθμού κρουσμάτων Covid. Ε-

πίσης, συμπεριλαμβάνονται ημερολογιακοί δείκτες οι οποίοι μοντελοποιούν αργίες και την εβδομάδα του μήνα.

Ακολουθεί το γράφημα ανα εβδομάδα των δεδομένων της ζήτησης μέσω του Σχήματος 3.1 καθώς και περιγραφικά μέτρα αυτής μέσω του Πίνακα 3.1.



Σχήμα 3.1: Γράφημα της χρονοσειράς ζήτησης.

	Μέση τιμή	Τυπ. απ.	Διάμεσος	Ελάχ.	Μέγ.	$q_{5\%}$	$q_{95\%}$	$ d < q_{5\%} $	$ d > q_{95\%} $	Συντ. λοξότητας	Συντ. κυρτότητας
Ζήτηση	29.58	4.84	30	17	40	22	37	8	7	-0.32	-0.39

Πίνακας 3.1: Περιγραφικά μέτρα ζήτησης.

3.2 Μοντελοποίηση ζήτησης

Για τον προσδιορισμό του επιπέδου του αποθέματος απαιτείται αρχικά η μοντελοποίηση της ζήτησης. Για να ελεγχθεί το πως η μοντελοποίηση της ζήτησης όσο και ο ορίζοντας σχεδιασμού επηρεάζει την πολιτική αποθεματοποίησης χρησιμοποιούνται οι 100 πρώτες παρατηρήσεις με τις επόμενες 4 να διατηρούνται ως ορίζοντας λήψης αποφάσεων και ελέγχου των αποτελεσμάτων. Σύμφωνα με την ανάλυση στο B.2 Παράρτημα, ο ορίζοντας σχεδιασμού τεσσάρων περιόδων επιλέγεται έτσι ώστε να ταυτίζεται με έναν πλήρη εποχικό κύκλο. Για τις τέσσερις εβδομάδες $t = 101, \dots, 104$ εξετάζονται δύο ορίζοντες λήψης αποφάσης:

- ο Ανα εβδομάδα, άρα λαμβάνεται απόφαση για την εβδομάδα $t = 101$ στη συνέχεια

αφού γίνει γνωστή η ζήτηση της, αυτή λαμβάνεται υπόψη για την λήψη απόφασης για την περίοδο $t = 102$ κ.ο.κ.

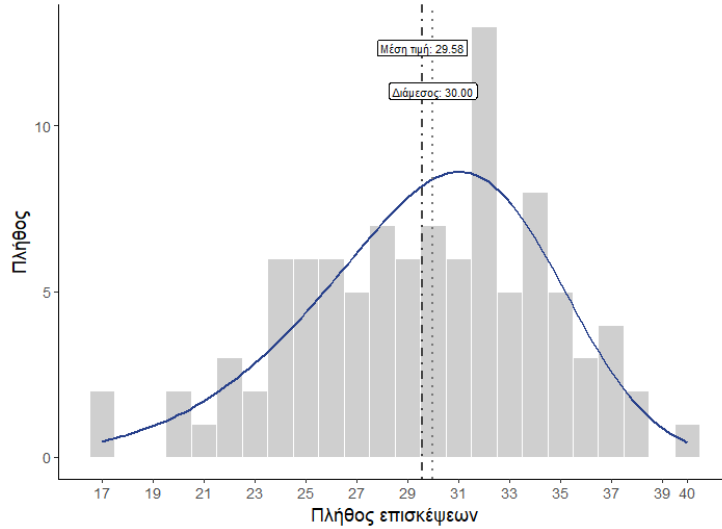
- ο Για όλο τον ορίζοντα των τεσσάρων εβδομάδων, λαμβάνεται μια απόφαση στο τέλος της περιόδου $t = 100$ για ολόκληρο το διάστημα περιόδων $t = 101, \dots, 104$.

Στο πλαίσιο αυτό εξετάζονται τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις για την μοντελοποίηση της ζήτησης:

- ο Προσαρμογή στα δεδομένα κατάλληλης κατανομής.
- ο Προσαρμογή κατάλληλου μοντέλου SARIMA($p, 0, q$)($P, 1, Q$)_[4] για κάθε ορίζοντα λήψης απόφασης.
- ο Χρήση της αντίστοιχης τιμής του περσινού έτους ($d_t = d_{t-52}$).

3.3 Προσαρμογή κατάλληλης κατανομής

Στην ενότητα αυτή προσαρμόζεται στα δεδομένα κατάλληλη κατανομή. Αρχικά, από τον Πίνακα 3.1 προκύπτει ότι η μέση ζήτηση είναι 30 μονάδες, με διάμεσο επίσης 30 μονάδων και τυπική αποκλίση περίπου 4.8 μονάδων γεγονός που υποδηλώνει ήπια μεταβλητότητα. Η ελάχιστη και μέγιστη τιμή, είναι 17 και 40 μονάδες αντίστοιχα, και το πλήθος των μονάδων άνω και κάτω του 5% και 95% ποσοστιμορίου της κατανομής υποδηλώνουν πως το μεγαλύτερο ποσοστό των μονάδων συγκεντρώνεται κοντά στα μέτρα θέσης της κατανομής με λίγες μόνο παρατηρήσεις να βρίσκονται σε ακραία επίπεδα. Τέλος, οι δειγματικοί δείκτες του συντελεστή λοξότητας και κυρτότητας, -0.32 και -0.39 αντίστοιχα, έναντι 0 και 3 μιας συμμετρικής Κανονικής, επιβεβαιώνουν αφενός την μικρή αριστερή ασυμμετρία αφετέρου την απουσία βαρίων ουρών. Το ιστόγραμμα της χρονοσειράς, Σχήμα 3.2, υποδεικνύει επίσης μια μονοκόρυφη ελαφρώς αριστερή ασύμμετρη κατανομή.



Σχήμα 3.2: Ιστόγραμμα της χρονοσειράς ζήτησης.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που επιλέχθηκε είναι μια Λοξή Κανονική κατανομή με παραμέτρους $(\hat{\xi}, \hat{\omega}, \hat{\alpha}) = (34.71, 7.04, -2.16)$. Οι λεπτομέρειες της επιλογής της συγκεκριμένης κατανομής παρουσιάζονται στο Β.1 Παράρτημα.

3.4 Ανάλυση χρονοσειράς ζήτησης

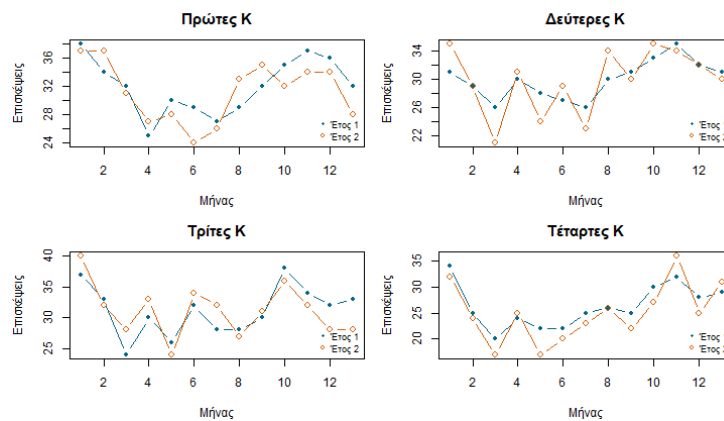
Στην ενότητα αυτή γίνεται η προσαρμογή ενός κατάλληλου μοντέλου χρονοσειράς για την περιγραφή της ζήτησης. Αρχικά από το Σχήμα 3.1 αποτυπώνεται η εξέλιξη της ζήτησης στο χρόνο. Διακρίνεται αρχικά μια καθοδική τάση όπου μετά τις πρώτες 10 εβδομάδες γίνεται ανοδική μέχρι και την ολοκλήρωση του έτους (εβδομάδα 52), με το μοτίβο να δείχνει να επαναλαμβάνεται υποδεικνύοντας ετήσια εποχικότητα. Ακόμη, διακρίνεται μια βραχύτερη περιοδικότητα περίπου 4-5 εβδομάδων, υποδηλώνοντας μηνιαία εποχικότητα. Η διερεύνηση των ιδιοτήτων της χρονοσειράς ζήτησης, αυτοσυσχέτιση, στασιμότητα και εποχικότητα, πραγματοποιείται στο δείγμα περιόδων, $\{d_t\}_{t=1}^{100}$. Ο έλεγχος της αυτοσυσχέτισης πραγματοποιείται μέσω των διαγραμμάτων ACF, PACF και του στατιστικού ελέγχου Box-Ljung. Τα αποτελέσματα των ελέγχων δίνονται στο Α.3 Παράρτημα, όπου επιβεβαιώνουν την ύπαρξη αυτοσυσχέτισης.

Ο έλεγχος την στασιμότητας πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τους στατιστικούς ελέγχους Augmented Dickey-Fuller (ADF) και του Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS). Τα ευρήματα είναι αντικρουόμενα, ο έλεγχος ADF υποδεικνύει οριακή απόρριψη της μη στασιμότητας, ενώ ο έλεγχος KPSS δεν απορρίπτει την υπόθεση στασιμότητας. Τα αποτελέσματα συνδιάζονται με το γράφημα της χρονοσειράς ζήτησης 3.1, όπου και

υιοθετείται η υπόθεση της στασιμότητας.

Για την ανάλυση της εποχικότητας, πραγματοποιείται η αθροιστική αποσύνθεση της χρονοσειράς, $d_t = T_t + S_t + e_t$, καθώς και ο έλεγχος Kruskal-Wallis. Παρατηρώντας, τον υψηλό δείκτη αυτοσυσχέτισης της τέταρτης υστέρησης και το επαναλαμβανόμενο βραχυπρόθεσμο περιοδικό μοτίβο μέσω του γραφήματος της χρονοσειράς ζήτησης, εξετάζεται η εποχικότητα περιόδου $s = 4$. Η αθροιστική αποσύνθεση επιτρέπει την ανεξάρτητη εξέταση των συνιστωσών της, τάση, εποχικότητα, σφάλμα. Ένα σταθερό ομοιογενές μοτίβο στον εποχικό όρο υποδηλώνει την ορθότητα της υπόθεσης εποχικότητας τεσσάρων περιόδων. Ο έλεγχος Kruskal-Wallis ομαδοποιεί τη χρονοσειρά σε τέσσερις κλάσεις των 25 παρατηρήσεων και ελέγχει εάν διαφέρουν στατιστικά σημαντικά οι διάμεσοι μεταξύ κλάσεων. Ο έλεγχος απορρίπτεται κατηγορηματικά, ενισχύοντας την ύπαρξη εποχικότητας περιόδου $s = 4$. Τόνιζεται ότι ο έλεγχος απαιτεί ανεξαρτησία των παρατηρήσεων και για το λόγω αυτό αποτελεί έναν συμπληρωματικό έλεγχο όπου τα αποτελέσματα με επιφύλαξη, το πόρισμα της τεσσάρων περιόδων εποχικότητας είναι αρκετό μέσω του δείκτη αυτοσυσχέτισης της τέταρτης υστέρησης και του σταθερού μοτίβου του εποχικού όρου.

Ο έλεγχος της μακροχρόνιας (ετήσιας) εποχικότητας $s = 52$, απαιτεί τουλάχιστον δύο πλήρεις εποχικούς κύκλους, το οποίο δεν είναι εφικτό με διαθέσιμο δείγμα πλήθους 100. Ωστόσο, μέσω των γραφημάτων που παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.3 και δείχνει τη ζήτηση ανα πρώτες, δευτέρες, τρίτες και τέταρτες Κυριακές για τα υπάρχοντα δεδομένα μπορεί να θεωρηθεί η υπόθεση εποχικότητας περιόδου $s = 52$ έτσι ώστε να χρησιμοποιηθεί ως μια ευρετική μέθοδος.



Σχήμα 3.3: Ετήσια εποχικότητα.

3.5 Autoregressive (SARIMA) μοντέλα ζήτησης

Στην ενότητα αυτή γίνεται προσαρμογή στα δεδομένα ζήτησης ενός μοντέλου Αυτοπαλίνδρομου Ολοκληρώμενου Κινούμενου Μέσου Εποχικότητα (Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average, SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)). Για τον προσδιορισμό του κατάλληλου μοντέλου γίνεται χρήση κινούμενου παραθύρου w , επιτρέποντας έτσι τη χρήση της πιο πρόσφατης πληροφορίας σε κάθε επανάληψη, αποτυπώνοντας καλύτερα τη δυναμική της χρονοσειράς (Tashman, 2000). Η επιλογή των τελικών μοντέλων έγινε αποκλειστικά στο σύνολο εκπαίδευσης εξετάζοντας τις τάξεις $p, q, P, Q \in \{0, 1, 2\}$ και μήκος παραθύρου $w = 36, 48, 52$. Τα αποτελέσματα που ακολουθούν συνοψίζουν τα βέλτιστα μοντέλα όταν ο ορίζοντας λήψης απόφασης είναι ένα και τέσσερα, με τις λεπτομέρειες να παρουσιάζονται στο Β.2 Παράρτημα.

Όταν το πρόβλημα λήψης απόφασης γίνεται ανα εβδομάδα, συνεπώς η πρόβλεψη αφορά την επόμενη περίοδο και μόνο, χρησιμοποιείται το μοντέλο SARIMA(2,0,0)(2,1,1)_[4]. Μόλις είναι διαθέσιμη η πιο πρόσφατη πληροφορία, οι παράμετροι ϕ, Φ, Θ εκτιμούνται εκ νέου. Στον Πίνακα 3.2 παρουσιάζονται οι εκτιμώμενοι παράμετροι των μοντέλων ζήτησης των περιόδων $t = 101, 102, 103, 104$.

Παράμετρος	$t = 100$	$t = 101$	$t = 102$	$t = 103$
ϕ_1	0.45 (0.18)	0.46 (0.18)	0.47 (0.18)	0.45 (0.18)
ϕ_2	0.01 (0.20)	0.06 (0.21)	-0.01 (0.21)	0.04 (0.23)
Φ_1	-0.48 (0.34)	-0.37 (0.43)	-0.55 (0.37)	-0.43 (0.44)
Φ_2	-0.32 (0.25)	-0.30 (0.28)	-0.40 (0.24)	-0.36 (0.25)
Θ_1	-0.27 (0.35)	-0.36 (0.48)	-0.14 (0.41)	-0.24 (0.50)

Πίνακας 3.2: Παράμετροι του μοντέλου SARIMA(2,0,0)(2,1,1)_[4] για ορίζοντα σχεδιασμού μιας εβδομάδας.

Όταν το πρόβλημα αφορά τον προσδιορισμό της ποσότητας παραγγελίας για ορίζοντα τεσσάρων εβδομάδων προσαρμόζονται δύο διαφορετικά μοντέλα που βελτιστοποιήθηκαν για το αντίστοιχο h -βήμα σφάλμα πρόβλεψης. Συγκεκριμένα, η πρόβλεψη των περιόδων $t = 101$ και $t = 102$ πραγματοποιείται βάση του μοντέλου SARIMA(2,0,0)(2,1,1)_[4] ενώ η πρόβλεψη των περιόδων $t = 103$ και $t = 104$ σύμφωνα με το μοντέλο SARIMA(1,0,0)(2,1,0)_[4]. Οι παράμετροι των μοντέλων δίνονται στον Πίνακα 3.3.

Παράμετρος	SARIMA(2,0,0)(2,1,1) _[4]	SARIMA(1,0,0)(2,1,0) _[4]
ϕ_1	0.45 (0.18)	0.46 (0.17)
ϕ_2	0.01 (0.20)	—
Φ_1	-0.48 (0.34)	-0.63 (0.17)
Φ_2	-0.32 (0.25)	-0.43 (0.17)
Θ_1	-0.27 (0.35)	—

Πίνακας 3.3: Παράμετροι των μοντέλων SARIMA(2,0,0)(2,1,1)_[4] και SARIMA(1,0,0)(2,1,0)_[4] για ορίζοντα σχεδιασμού τεσσάρων εβδομάδων.

3.6 Προσδιορισμός ποσότητας παραγγελίας

Στη παρούσα ενότητα παρουσιάζονται οι μέθοδοι επαναφοράς του επιπέδου αποθέματος για τους δύο ορίζοντες σχεδιασμού καθώς και εκ των προτέρων μέτρα αξιολόγησης κάθε απόφασης. Για τις αποφάσεις του ορίζοντα σχεδιασμού μιας περιόδου, η ανάλυση εξ ολοκλήρου πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τα ιστορικά δεδομένα. Για κάθε στιγμή λήψης απόφασης $t = 101, 102, 103, 104$ χρησιμοποιείται η μέχρι τότε διαθέσιμη πληροφορία $d_1, \dots, d_{t-1}$. Αντιθέτως, για τις αποφάσεις του ορίζοντα σχεδιασμού τεσσάρων περιόδων παράγονται τεχνητά σενάρια πλήθους $N = 5000$ σύμφωνα με δύο εναλλακτικές γεννήτριες διαδικασίες:

- Χρήση της προσαρμοσμένης Λοξής Κανονικής κατανομής $SN(\xi, \omega, \alpha)$ με παραμέτρους μέγιστης πιθανοφάνειας $(\hat{\xi}, \hat{\omega}, \hat{\alpha}) = (34.71, 7.04, -2.16)$ και παραγωγή δείγματος ζήτησης $\{(d_{101}^j, d_{102}^j, d_{103}^j, d_{104}^j)\}_{j=1}^N$ αγνοώντας τη χρονική εξάρτηση μεταξύ των περιόδων.
- Προσαρμόζεται το μοντέλο SARIMA(2,0,0)(2,1,1)_[4] στο δείγμα ζήτησης $\{d_i\}_{i=65}^{100}$ και υπολογίζεται η ακολουθία υπολοίπων $\{\hat{\varepsilon}_i\}_{i=65}^{100}$. Έπειτα, παράγεται δείγμα ζήτησης $\{(d_{101}^j, d_{102}^j, d_{103}^j, d_{104}^j)\}_{j=1}^N$, όπου το σφάλμα προστίθεται με επανάληψη από την $\{\hat{\varepsilon}_i\}_{i=65}^{100}$. Η εξάρτηση μεταξύ περιόδων t αποτυπώνεται μέσω της αναδρομικής δομής του μοντέλου. Δες Β.4 Παράρτημα.

Σε κάθε περίπτωση, οι υποψήφιες ποσότητες αποθεματοποίησης αξιολογούνται εκ των προτέρων ως προς το αναμενόμενο κέρδος, κόστος, θετικό/αρνητικό τελικό απόθεμα, την πιθανότητα έλλειψης και τους δείκτες κινδύνου Var_β και $CVaR_\beta$.

3.7 Ορίζοντας σχεδιασμού μιας περιόδου

Για τον προσδιορισμό του σημείου επαναφοράς του αποθέματος S_t , των εβδομάδων $t = 101, 102, 103, 104$ γίνεται χρήση των δεδομένων $(\mathbf{z}_i, d_i)$, $i = 1, \dots, 100$ όπου $\mathbf{z}$ το

διάλυμα που αντιστοιχεί στις υπόλοιπες διαθέσιμες παρατηρήσεις (χαρακτηριστικά).

Ο προσδιορισμός του S_t γίνεται μέσω των παρακάτω μεθόδων:

- (Δ1) Προσέγγιση της $F^{-1}(\cdot)$ της ζήτησης εμπειρικά και επαναφορά του επιπέδου του αποθέματος βάσει της σχέσης 2.5: $S_{t,\Delta 2} = \frac{E+W}{E+U} \hat{F}^{-1}\left(\frac{U(1-\beta)}{E+U}\right) + \frac{U-W}{E+U} \hat{F}^{-1}\left(\frac{E\beta+U}{E+U}\right)$.
- (Δ2) Χρήση της $F^{-1}(\cdot)$ που προκύπτει από τη Λοξή Κανονική και επαναφορά του επιπέδου του αποθέματος βάσει της σχέσης 2.3: $S_{t,\Delta 3} = \frac{E+W}{E+U} \hat{F}^{-1}\left(\frac{U(1-\beta)}{E+U}\right) + \frac{U-W}{E+U} \hat{F}^{-1}\left(\frac{E\beta+U}{E+U}\right)$.
- (Δ3) Προσέγγιση της $F^{-1}(\cdot)$ της ζήτησης εμπειρικά και επαναφορά του επιπέδου του αποθέματος βάσει της σχέσης 2.3: $S_{t,\Delta 1} = \hat{F}^{-1}\left(\frac{U}{E+U}\right)$.
- (E1) Το επίπεδο αποθέματος τη στιγμή t αντιστοιχεί στη ζήτηση της περιόδου $t - 52$: $S_{t,E1} = d_{t-52}$.
- (E2) Το επίπεδο αποθέματος τη στιγμή t αντιστοιχεί στη πρόβλεψη της ζήτησης του μοντέλου SARIMA(2,0,0)(2,1,1)_[4]: $S_{t,E2} = \hat{d}_{t+1|t}$.
- (B1) Χρήση του εμπειρικού αναλόγου του $CVaR_\beta$, $\widehat{CVaR}_\beta = \{\eta + \frac{1}{(1-\beta)t} \sum_{i=1}^t [L(S, d_i) - \eta]^+\}$. Όποτε αν $(\eta, S_{B1}) = \arg \min_{\eta, S_{B1}} \widehat{CVaR}_\beta$, το επίπεδο επαναφοράς του αποθέματος τίθεται ως: $S_{t,B1}$.
- (B2) Προσδιορισμός του επιπέδου σύμφωνα με τη γραμμική σχέση $h_\gamma(\mathbf{z}_t) = \mathbf{z}_t^\top \gamma$ (Liu and Zhu, 2024). Με αυτό το τρόπο δίνεται η δυνατότητα σύνδεσης της ποσότητας παραγγελίας με άλλα χαρακτηριστικά $\mathbf{z}$, από τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί. Ο υπολογισμός του γ προκύπτει ελαχιστοποιώντας το εμπειρικό ανάλογο της $\widehat{CVaR}_\beta = \{\eta + \frac{1}{(1-\beta)t} \sum_{i=1}^t [L(h_\gamma(\mathbf{z}_i), d_i) - \eta]^+\}$ ως προς (η, γ) μέσω του αλγορίθμου L-BFGS-B. Το επίπεδο επαναφοράς του αποθέματος τίθεται ως: $S_{t,B2} = \mathbf{z}_t^\top \gamma$.
- (Π1) Μέ χρήση ποσοστιμότητας παλινδρόμησης, κατα την οποία προσεγγίζεται η υπο συνθήκη συνάρτηση ποσοστιμοτήτων $F^{-1}(p|\mathbf{z})$. Το επίπεδο επαναφοράς του αποθέματος τίθεται ως: $S_{t,\Pi 1} = \frac{E+W}{E+U} \hat{F}^{-1}\left(\frac{U(1-\beta)}{E+U}|\mathbf{z}_t\right) + \frac{U-W}{E+U} \hat{F}^{-1}\left(\frac{E\beta+U}{E+U}|\mathbf{z}_t\right)$.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται μέτρα εκ των προτέρων αξιολόγησης και εκτίμησης του κινδύνου των προτεινόμενων επιπέδων επαναφοράς $S_{t,x}$ για κάθε περίοδο t όπου $x = \Delta 1, \dots, \Pi 1$.

- Αναμενόμενο κέρδος $\mathbb{E}[\Pi(S_{t,x}, d)]: \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^{t-1} \Pi(S_{t,x}, d_i)$.
- Αναμενόμενο κόστος $\mathbb{E}[TC(S_{t,x}, d)]: \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^{t-1} TC(S_{t,x}, d_i)$.
- Αναμενόμενο θετικό τελικό αποθέμα $\mathbb{E}[(S_{t,x} - d)^+]: \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^{t-1} (S_{t,x} - d_i)^+$.
- Αναμενόμενο αρνητικό τελικό αποθέμα $\mathbb{E}[(d - S_{t,x})^+]: \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^{t-1} (d_i - S_{t,x})^+$.
- Εμπειρική πιθανότητα έλλειψης $Pr(d > S_{t,x}): \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^{t-1} \mathcal{I}\{d_i > S_{t,x}\}$.
- Εμπειρικός προσδιορισμός $\widehat{VaR}_{1-\beta}(\Pi)$ κερδών για $\beta = 0.95$: Αφού γίνει διάταξη των κερδών για σταθερό $S_{t,x}$: $\Pi_{(1)}(S_{t,x}) < \dots < \Pi_{(t-1)}(S_{t,x})$ προσδιορίζεται το $\widehat{VaR}_{1-\beta} = \Pi_{(m)}(S_{t,x})$ όπου $m = \lceil (1-\beta)(t-1) \rceil$.
- Εμπειρικός προσδιορισμός $\widehat{CVaR}_{1-\beta}(\Pi)$ κερδών για $\beta = 0.95$: Αφού γίνει διάταξη των κερδών για σταθερό $S_{t,x}$: $\Pi_{(1)}(S_{t,x}) < \dots < \Pi_{(t-1)}(S_{t,x})$ προσδιορίζεται το $\widehat{VaR}_{1-\beta}(\Pi)$, έπειτα υπολογίζεται ο μέσος όρος κερδών που βρίσκονται κάτω από το όριο αυτό. $\widehat{CVaR}_{1-\beta}(\Pi) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Pi_{(i)}(S_{t,x})$ όπου $m = \lceil (1-\beta)(t-1) \rceil$.

Κατόπιν γίνεται η αποτίμηση της έκβασης των παραπάνω μεθόδων προσδιορισμού των $S_{t,x}$, $t = 101, \dots, 104$, $x = \Delta 1, \dots, \Pi 1$ ως προς το πραγματοποιηθέν κέρδος και τις επιμέρους συνιστώσες του κόστους.

3.8 Ορίζοντας σχεδιασμού τεσσάρων περιόδων

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι μέθοδοι για τον από κοινού προσδιορισμό του επιπέδου επαναφοράς του αποθέματος για τις περιόδους 101, 102, 103, 104. Στο εξής θα χρησιμοποιηθεί ο εκθέτης μ όπου συμβολίζει το αντίστοιχο μέτρο για τον ορίζοντα σχεδιασμού τεσσάρων περιόδων.

Ακολουθεί αναλυτική παρουσίαση κάθε μεθόδου.

- (E1) Το επίπεδο αποθέματος τις στιγμές 101, 102, 103, 104 αντιστοιχεί στη ζήτηση της περιόδου $t - 52$: $\mathbf{S}_{E1} = (d_{49}, d_{50}, d_{51}, d_{52})$.
- (E3) Το επίπεδο αποθέματος τις στιγμές 101, 102 αντιστοιχεί στη πρόβλεψη της ζήτησης του μοντέλου $SARIMA(2, 0, 0)(2, 1, 1)_{[4]}$ για $h = 1, 2$ και τις στιγμές 103, 104 του μοντέλου $SARIMA(1, 0, 0)(2, 1, 0)_{[4]}$ για $h = 3, 4$, αξιοποιώντας τις ιστορικές παρατηρήσεις $\{d_i\}_{i=65}^{100}$: $\mathbf{S}_{E3} = (d_{t+1|t}, d_{t+2|t}, d_{t+3|t}, d_{t+4|t})$.

- (E4) Προσδιορίζοντας το γ^* ελαχιστοποιώντας το εμπειρικό ανάλογο της $\widehat{CVaR}_\beta$
 $= \{\eta + \frac{1}{(1-\beta)100} \sum_{i=1}^{100} [L(h_\gamma(\mathbf{z}_i), d_i) - \eta]^+\}$, χρησιμοποιώντας τις ιστορικές παρατηρήσεις $\{\mathbf{z}_i, d_i\}_{i=1}^{100}$, ως προς (η, γ) μέσω του αλγοριθμού L-BFGS-B. Προβλέπονται τα συνεχή χαρακτηριστικά από τη εβδομάδα $t = 100$ μέσω των μοντέλων Naive, SNaive για κάθε εβδομάδα 101, 102, 103, 104. Το επίπεδο επαναφοράς κάθε εβδομάδας ορίζεται ως: $S_t = h_\gamma(\mathbf{z}_t) = \hat{\mathbf{z}}_t^\top \gamma^*$ για $t = 101, \dots, 104$.
- (B3) Για κάθε εβδομάδα $t = 101, 102, 103, 104$ δημιουργούνται δείγματα $d_{j101}, \dots, d_{j104}$ όπου $j = 1, \dots, N$ σύμφωνα δύο γεννήτριων διαδικασιών, αυτής της Λοξής Κανονικής και ενός μοντέλου SARIMA. Το N επιλέγεται στις 5000 ώστε να επιφέρει σταθερή εκτίμηση για $\beta = 0.95$. Χρήση του εμπειρικού τεσσάρων περιόδων αναλόγου $\widehat{CVaR}_{1-\beta}^{(\mu)} = \{\eta^* + \frac{1}{(1-\beta)N} \sum_{j=1}^N [\sum_{t=101}^{104} L(S_t, d_t^j) - \eta^*]^+\}$. Όποτε, αν $(\eta, \mathbf{S}) = \arg \min_{\eta, \mathbf{S}} \widehat{CVaR}_{1-\beta}^{(\mu)}$, το επίπεδο επαναφοράς του αποθέματος τίθεται ως: $\mathbf{S}_{B3}$.
- (B4) Για κάθε εβδομάδα $t = 101, 102, 103, 104$ δημιουργούνται δείγματα $d_{j101}, \dots, d_{j104}$ όπου $j = 1, \dots, N$ σύμφωνα δύο γεννήτριων διαδικασιών, αυτής της Λοξής Κανονικής και ενός μοντέλου SARIMA. Χρήση του εμπειρικού μηνιαίου αναλόγου $\bar{\Pi}^{(\mu)} = \{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [\sum_{t=101}^{104} \Pi(S_t, d_t^j)]\}$. Οπότε, αν $\mathbf{S} = \arg \max_{\mathbf{S}} \bar{\Pi}^{(\mu)}$, το επίπεδο επαναφοράς του αποθέματος τίθεται ως: $\mathbf{S}_{B4}$.

Για την εκ των προτέρων αξιολόγηση και εκτίμηση του κινδύνου των S_t από κάθε μια από τις παραπάνω μεθόδους δημιουργείται εκ νέου δείγμα ζήτησης $\{(d_{101}^j, d_{102}^j, d_{103}^j, d_{104}^j)\}_{j=1}^N$ από κάθε γεννήτρια διαδικασία εξασφαλίζοντας την αμεροληψία των εκτιμήσεων. Τα μέτρα εκ των προτέρων αξιολόγησης ορίζονται ως:

- Αναμενόμενο κέρδος $\mathbb{E}[\Pi^{(\mu)}(\mathbf{S}, d)]: \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Pi_j^{(\mu)}(\mathbf{S})$, όπου $\Pi_j^{(\mu)}(\mathbf{S}) = \sum_{t=101}^{104} \Pi(S_t, d_{jt})$.
- Αναμενόμενο κόστος $\mathbb{E}[TC^{(\mu)}(\mathbf{S}, d)]: \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N TC_j^{(\mu)}(\mathbf{S})$, όπου $TC_j^{(\mu)}(\mathbf{S}) = \sum_{t=101}^{104} TC(S_t, d_{jt})$.
- Αναμενόμενο θετικό τελικό απόθεμα $\mathbb{E}[(\mathbf{S} - d)^+]: \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{t=101}^{104} (S_t - d_{jt})^+$.
- Αναμενόμενο αρνητικό τελικό απόθεμα $\mathbb{E}[(d - \mathbf{S})^+]: \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{t=101}^{104} (d_{jt} - S_t)^+$.
- Προσδιορισμός εμπειρικά της πιθανότητας έλλειψης τουλάχιστον σε μια εβδομάδα από τις τέσσερις. Για τον υπολογισμό αυτής της πιθανότητας γίνεται θεώρηση τόσο για ανεξάρτητη ζήτηση στις τέσσερις περιόδους όσο και για εξαρτημένη

$$\Pr(\exists t : d_t > S_t) = 1 - \Pr(\forall t : d_t \leq S_t) = \begin{cases} 1 - \prod_{t=101}^{104} \Pr(d_t \leq S_t), & \text{ανεξ. (1)} \\ 1 - \Pr(\forall t : d_t \leq S_t), & \text{εξαρτ. (2)} \end{cases}$$

Για τον υπολογισμό της (1):

$\widehat{\Pr}(\exists t : d_t > S_t) = 1 - \prod_{t=101}^{104} p_t$, $p_t := F(S_t)$ όπου $F(\cdot)$ η κατανομή της Λοζής Κανονικής κατανομής $\forall t = 101, \dots, 104$.

Για τον υπολογισμό της (2):

$$1 - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathcal{I}\{d_{j101} < S_{101}, \dots, d_{j104} < S_{104}\}$$

- Υπολογισμός εμπειρικά της $VaR_{1-\beta}(\Pi^{(\mu)})$ για $\beta = 0.95$: Διάταξη των μηνιαίων κερδών για σταθερό $\mathbf{S}$: $\Pi_{(1)}^{(\mu)}(\mathbf{S}) < \dots < \Pi_{(N)}^{(\mu)}(\mathbf{S})$ και επιλογή του σημείου $\widehat{VaR}_{1-\beta} = \Pi_{(m)}^{(\mu)}(\mathbf{S})$ όπου $m = \lceil (1 - \beta)N \rceil$.
- Υπολογισμός εμπειρικά της $CVaR_{1-\beta}(\Pi^{(\mu)})$ για $\beta = 0.95$: Διάταξη των μηνιαίων κερδών για σταθερό $\mathbf{S}$: $\Pi_{(1)}^{(\mu)}(\mathbf{S}) < \dots < \Pi_{(N)}^{(\mu)}(\mathbf{S})$ προσδιορισμός του εμπειρικού $VaR_{1-\beta}$ και υπολογισμός του μέσου όρου κερδών που βρίσκονται κάτω από το όριο αυτό. $\widehat{CVaR}_{1-\beta}(\Pi^{(\mu)}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Pi_{(i)}^{(\mu)}(\mathbf{S})$ όπου $m = \lceil (1 - \beta)N \rceil$.

Κατόπιν γίνεται αποτίμηση της έκβασης των παραπάνω μεθόδων προσδιορισμού των S_t , $t = 101, \dots, 104$ αφού γίνουν γνωστές οι τιμές της ζήτησης ως προς το πραγματοποιηθέν κέρδος και τις επιμέρους συνιστώσες του κόστους.

3.9 Προγραμματισμός αποθεματοποίησης

Στη ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή των μεθόδων που παρουσιάστηκαν στις Ενότητες 3.3.1 και 3.3.2, μαζί με την εκ των προτέρων αξιολόγησή τους. Για τον ορίζοντα σχεδιασμού μιας περιόδου τα αποτελέσματα κέρδους/κόστους αθροίζονται ώστε να είναι συγκρίσιμα με εκείνα του ορίζοντα σχεδιασμού τεσσάρων περιόδων.

3.10 Ορίζοντας σχεδιασμού μιας περιόδου

Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εκ των προτέρων εκτίμησης του κινδύνου που αφορά το σχεδιασμό μιας περιόδου. Για κάθε περίοδο $t = 101, \dots, 104$ εκτιμήθηκε τι πιθανόν θα συμβεί χρησιμοποιώντας την μέχρι τότε διαθέσιμη πληροφορία ήτοι $\{d_i\}_{i=1}^{t-1}$. Αφού πραγματοποιηθεί η ζήτηση d_t γίνεται η εκ των υστέρων αποτίμηση της έκβασης κάθε μεθόδου. Σημειώνεται ότι εξαιτίας περιορισμένου αριθμού παρατηρήσεων, οι εκτιμήσεις των μέτρων υπόκεινται σε υψηλό σφάλμα και συνεπώς τα αποτελέσματα ερμηνεύονται με σχετική επιφύλαξη.

Στον Πίνακα 3.4 παρουσιάζεται το επίπεδο επαναφοράς για την περίοδο 101 χρησιμοποιώντας τις μεθόδους που περιγράφηκαν. Επιπλέον υπολογίζονται τα μέτρα ρίσκου που παρουσιάστηκαν στην Ενότητα 3.3.1. Οι μέθοδοι έχουν ένα εύρος επιπέδου αποθέματος από 24 έως 32 μονάδες, οδηγώντας σε αναμενόμενο κέρδος από 239.04 έως

301.94 χρηματικές μονάδες και πιθανότητα έλλειψης από 0.28 έως 0.84. Αν έπρεπε να χρησιμοποιηθεί το κριτήριο $CVaR$ τότε θα επιλεγόταν η τιμή 24 οδηγώντας σε μέγιστη πιθανότητα έλλειψης και μείωση κατά 20% των αναμενόμενων εσόδων. Οι μέθοδοι ($\Delta 1$), ($\Delta 2$) και (B1) οδηγούν σε αυτήν την επιλογή. Από τον Πίνακα 3.5 φαίνεται ότι η επιλογή αυτή θα οδηγούσε σε ένα κέρδος 260 χρηματικών μονάδων ενώ η (B2) θα οδηγούσε στη βέλτιστη επιλογή.

Μέθοδος	S	$\mathbb{E}[\Pi(S, d)]$	$\mathbb{E}[TC(S, d)]$	$VaR_{0.05}(\Pi)$	$CVaR_{0.05}(\Pi)$	$\mathbb{E}[(d - S)^+]$	$\mathbb{E}[(S - d)^+]$	$\Pr(d > S)$
($\Delta 1$)	24	239.04	115.92	195.70	162.00	5.91	0.33	0.84
($\Delta 2$)	24	239.04	115.92	195.70	162.00	5.91	0.33	0.84
($\Delta 3$)	32	301.94	53.02	152.85	85.00	0.88	3.30	0.28
(E1)	32	301.94	53.02	152.85	85.00	0.88	3.30	0.28
(E2)	32	301.94	53.02	152.85	85.00	0.88	3.30	0.28
(B1)	24	239.04	115.92	195.70	162.00	5.91	0.33	0.84
(B2)	27	276.24	78.72	207.85	140.00	0.99	3.57	0.67
(Π1)	26	265.64	89.32	213.15	151.00	4.29	0.71	0.72

Πίνακας 3.4: Εκτίμηση κινδύνου της κάθε μεθόδου για $t = 101$.

Η ζήτηση της εβδομάδας $t = 101$ καταγράφηκε σε $d_{101} = 28$ μονάδες. Συνεπώς προκύπτουν για κάθε μέθοδο τα κάτωθεν αποτελέσματα.

Μέθοδος	$\Pi(S_{101}, d_{101})$	$\mathbb{I}\{\Pi < VaR_{0.05}(\Pi)\}$	$S - d$	$d - S$	$E(S - d)$	$U(d - S)$	$TC(S_{101}, d_{101})$
($\Delta 1$)	260	0	0	4	0	79	79
($\Delta 2$)	260	0	0	4	0	79	79
($\Delta 3$)	292	0	4	0	44	0	44
(E1)	292	0	4	0	44	0	44
(E2)	292	0	4	0	44	0	44
(B1)	260	0	0	4	0	79	79
(B2)	317	0	0	1	0	19	19
(Π1)	298	0	0	2	0	38	38

Πίνακας 3.5: Έχβαση κάθε μεθόδου για την περίοδο 101.

Μέθοδος	S	$\mathbb{E}[\Pi(S, d)]$	$\mathbb{E}[TC(S, d)]$	$VaR_{0.05}(\Pi)$	$CVaR_{0.05}(\Pi)$	$\mathbb{E}[(d - S)^+]$	$\mathbb{E}[(S - d)^+]$	$\Pr(d > S)$
($\Delta 1$)	24	239.25	115.52	196	171.71	5.89	0.33	0.84
($\Delta 2$)	24	239.25	115.52	196	171.71	5.89	0.33	0.84
($\Delta 3$)	32	301.84	52.93	154	110.88	0.87	3.31	0.28
(E1)	31	300.66	54.11	165	121.88	1.28	2.71	0.41
(E2)	31	300.66	54.11	165	121.88	1.28	2.71	0.41
(B1)	24	239.25	115.52	196	171.71	5.89	0.33	0.84
(B2)	23	223.22	131.55	178	165.22	6.79	0.23	0.90
(Π1)	27	276.64	78.13	209	165.88	3.54	0.98	0.67

Πίνακας 3.6: Εκτίμηση κινδύνου της κάθε μεθόδου για $t = 102$.

Η ζήτηση της εβδομάδας $t = 102$ καταγράφηκε σε $d_{102} = 30$ μονάδες. Συνεπώς προκύπτουν για κάθε μέθοδο τα κάτωθεν αποτελέσματα.

Μέθοδος	$\Pi(S_{102}, d_{102})$	$\mathbb{I}\{\Pi < \text{VaR}_{0.05}(\Pi)\}$	$S - d$	$d - S$	$E(S - d)$	$U(d - S)$	$TC(S_{102}, d_{102})$
(Δ1)	246	0	0	6	0	114	114
(Δ2)	246	0	0	6	0	144	114
(Δ3)	338	0	2	0	22	0	22
(E1)	349	0	1	0	11	0	11
(E2)	349	0	1	0	11	0	11
(B1)	246	0	0	6	0	114	114
(B2)	227	0	0	7	0	133	133
(Π1)	303	0	0	3	0	57	57

Πίνακας 3.7: Έκβαση κάθε μεθόδου για την περίοδο 102.

Μέθοδος	S	$\mathbb{E}[\Pi(S, d)]$	$\mathbb{E}[TC(S, d)]$	$\text{VaR}_{0.05}(\Pi)$	$\text{CVaR}_{0.05}(\Pi)$	$\mathbb{E}[(d - S)^+]$	$\mathbb{E}[(S - d)^+]$	$\Pr(d > S)$
(Δ1)	24	239.31	115.51	196	171.71	5.89	0.32	0.84
(Δ2)	24	239.31	115.51	196	171.71	5.89	0.32	0.84
(Δ3)	32	302.20	52.63	154	110.88	0.86	3.29	0.27
(E1)	33	299.43	55.39	143	99.88	0.59	4.02	0.23
(E2)	31	301.14	53.69	165	121.88	1.26	2.70	0.40
(B1)	24	239.31	115.51	196	171.71	5.89	0.32	0.84
(B2)	27	276.90	77.92	209	165.87	3.53	0.97	0.67
(Π1)	25	253.61	101.22	208.05	167.50	5.05	0.48	0.78

Πίνακας 3.8: Εκτίμηση κινδύνου της κάθε μεθόδου για $t = 103$.

Η ζήτηση της εβδομάδας $t = 103$ καταγράφηκε σε $d_{103} = 28$ μονάδες. Συνεπώς προκύπτουν για κάθε μέθοδο τα κάτωθεν αποτελέσματα.

Μέθοδος	$\Pi(S_{103}, d_{103})$	$\mathbb{I}\{\Pi < \text{VaR}_{0.05}(\Pi)\}$	$S - d$	$d - S$	$E(S - d)$	$U(d - S)$	$TC(S_{103}, d_{103})$
(Δ1)	260	0	0	4	0	76	76
(Δ2)	260	0	0	4	0	76	76
(Δ3)	292	0	4	0	44	0	44
(E1)	281	0	5	0	55	0	55
(E2)	303	0	3	0	33	0	33
(B1)	260	0	0	4	0	76	76
(B2)	317	0	0	1	0	19	19
(Π1)	279	0	0	3	0	57	57

Πίνακας 3.9: Έκβαση κάθε μεθόδου για την περίοδο 103.

Μέθοδος	S	$\mathbb{E}[\Pi(S, d)]$	$\mathbb{E}[TC(S, d)]$	$VaR_{0.05}(\Pi)$	$CVaR_{0.05}(\Pi)$	$\mathbb{E}[(d - S)^+]$	$\mathbb{E}[(S - d)^+]$	$\Pr(d > S)$
(Δ1)	24	239.51	115.13	196	171.71	5.87	0.32	0.84
(Δ2)	24	239.51	115.13	196	171.71	5.87	0.32	0.84
(Δ3)	32	302.10	52.54	154	110.88	0.85	3.30	0.27
(E1)	29	293.45	61.19	187	143.88	2.24	1.69	0.54
(E2)	25	253.85	100.79	208.1	167.50	5.03	0.48	0.79
(B1)	24	239.51	115.13	196	171.71	5.87	0.32	0.84
(B2)	18	134.54	220.10	83	78	11.57	0.01	0.98
(Π1)	20	171.38	183.26	121	116.00	9.61	0.06	0.96

Πίνακας 3.10: Εκτίμηση κινδύνου της κάθε μεθόδου για $t = 104$.

Η ζήτηση της εβδομάδας $t = 104$ καταγράφηκε σε $d_{104} = 31$ μονάδες. Συνεπώς προκύπτουν για κάθε μέθοδο τα κάτωθεν αποτελέσματα.

Μέθοδος	$\Pi(S_{104}, d_{104})$	$\mathbb{I}\{\Pi < VaR_{0.05}(\Pi)\}$	$S - d$	$d - S$	$E(S - d)$	$U(d - S)$	$TC(S_{104}, d_{104})$
(Δ1)	239	0	0	7	0	133	133
(Δ2)	239	0	0	7	0	133	133
(Δ3)	361	0	1	0	11	0	11
(E1)	334	0	0	2	0	38	38
(E2)	258	0	0	6	0	54	54
(B1)	239	0	0	7	0	133	133
(B2)	125	0	0	13	0	247	247
(Π1)	163	0	0	11	0	209	209

Πίνακας 3.11: Έκβαση κάθε μεθόδου για την περίοδο 104.

Στον Πίνακα 3.12 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν για το συνολικό κέρδος/κόστος. Οι μέθοδοι (Δ1), (Δ2) και (B1) που θα επιλέγονταν βάση της $CVaR$ θα οδηγούσαν σε κέρδος 1005 χρηματικών μονάδων ενώ το μέγιστο κέρδος θα δινόταν με χρήση της μεθόδου (Δ3).

Μέθοδος	$\Pi_1^{(\mu)}$	$S - d$	$d - S$	$E(S - d)$	$U(d - S)$	$TC_1^{(\mu)}$
(Δ1)	1005 (677.13)	0	21	0	399	399
(Δ2)	1005 (677.13)	0	21	0	399	399
(Δ3)	1283 (405)	11	0	121	0	121
(E1)	1256 (450.64)	10	2	110	38	148
(E2)	1202 (492)	8	6	88	114	222
(B1)	1005 (677.13)	0	21	0	399	399
(B2)	986 (549.09)	0	22	0	418	418
(Π1)	1043 (600)	0	19	0	361	361

Πίνακας 3.12: Αποτελέσματα αθροιστικά στις τέσσερις περιόδους.

- Οι $CVaR_\beta$ πολιτικές επιτυγχάνουν 22% λιγότερο πραγματοποιηθέν κέρδος (1005 χρ. μον.) έναντι πιο επιθετικών πολιτικών (1283 χρ. μον.)
- Αντίθετα, εκτιμάται υψηλότερη τιμή στα χειρότερα 5% του κέρδους συνολικά έως και 67% (677.13 έναντι 405 χρ. μον.)

- ο Το πραγματοποιηθέν κέρδος (1005 χρ. μον.) είναι 48% υψηλότερο από το ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο κέρδους στο 5% των χειρότερων σεναρίων (677.13 χρ. μον.), γεγονός που υποδηλώνει ότι οι συνθήκες ζήτησης δεν ήταν τόσο δυσμενείς κατά τις τέσσερις περιόδους.

Για τον ορίζοντα σχεδιασμού μίας περιόδου συγκρίνονται οκτώ μέθοδοι επαναφοράς του αποθέματος. Από τους Πίνακες 3.4, 3.6, 3.8 και 3.10 προκύπτει ότι οι ευρετικές μέθοδοι (E1–E2), οι οποίες βασίζονται σε απλές προβλέψεις (περσινή τιμή ή σημειακή πρόβλεψη του μοντέλου SARIMA), επιτυγχάνουν σχετικά υψηλό αναμενόμενο κέρδος και χαμηλό συνολικό κόστος, αλλά δεν παρέχουν τη βέλτιστη θωράκιση έναντι των δυσμενών εκβάσεων. Συγκεκριμένα, δεν καταφέρνουν να βελτιώσουν σημαντικά το $CVaR_{0.05}$ του κέρδους σε σχέση με τις συντηρητικές πολιτικές.

Αντίθετα, οι μέθοδοι που βασίζονται ρητά σε κριτήριο $CVaR$ (B1–B2) ή σε ποσοστιαία παλινδρόμηση (Π1) καταφέρνουν να αυξήσουν αισθητά το κέρδος στις χειρότερες εβδομάδες: το $CVaR_{0.05}$ βελτιώνεται έως και κατά περίπου 50% σε σχέση με τις πιο επιθετικές πολιτικές, με αντάλλαγμα μία μείωση της τάξης του 10;20% στο αναμενόμενο μέσο κέρδος.

Συνολικά, τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ένα σαφές συμβιβασμό μεταξύ μέσης απόδοσης και προστασίας έναντι των σπάνιων αλλά ιδιαίτερα ζημιογόνων σεναρίων ζήτησης. Ως εκ τούτου, οι $CVaR$ -βασισμένες πολιτικές αποτελούν κατάλληλο προληπτικό πλαίσιο για λήπτες αποφάσεων με υψηλή αποστροφή προς τον κίνδυνο.

3.11 Ορίζοντας σχεδιασμού τεσσάρων περιόδων

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η αποθεματοποίηση βάση των μεθόδων που προτάθηκαν στην Ενότητα 3.3.2 και η εκ των προτέρων αποτίμησή τους. Για την αποτίμηση χρησιμοποιήθηκαν δείγματα που παρήχθησαν από δύο γεννήτριες διαδικασίες (Λοξή Κανονική /SARIMA). Λεπτομέρειες στο Β.4 Παράρτημα.

Στον Πίνακα 3.13 παρουσιάζονται τα επίπεδα επαναφοράς για τις περιόδους 101 – 104 χρησιμοποιώντας τις μεθόδους που περιγράφηκαν. Στον Πίνακα 3.14 υπολογίζονται τα μέτρα ρίσκου για τον ορίζοντα σχεδιασμού τεσσάρων περιόδων όπως παρουσιάστηκαν στην Ενότητα 3.3.2. Από τα αποτελέσματα διαπιστώνεται ο ρόλος της χρονικής εξάρτησης μεταξύ των περιόδων ιδίως μέσω των μέτρων $VaR_{0.05}$ και $CVaR_{0.05}$. Επίσης, τείνουν να υποπαραγγέλλουν με συνέπεια υψηλής πιθανότητας τουλάχιστον μιας περιόδου σε έλλειψη. Χρησιμοποιώντας το $CVaR_{0.05}$ ως κριτήριο απόφασης, τότε μέσω της (B3) προτείνεται η επαναφορά των επιπέδων αποθέματος για τις περιόδους 101 – 104 στις (28/30, 28/30, 29/29, 28/26) εκτιμώντας το υψηλότερο 5% των δυσμενών σεναρίων κέρδους με σχετικά ήπια απώλεια, περίπου 10%, μέσου κέρδους. Από τον Πίνακα 3.15 φαίνεται ότι η επιλογή αυτή θα οδηγούσε και στη βέλτιστη επιλογή αποδίδοντας έσοδα 1325.00/1284.00 χρηματικών μονάδων έναντι της (B4) που επικεντρώνεται στην μεγιστοποίηση του μέσου κέρδους της κατανομής των τεσσάρων περιόδων κέρδους.

Εβδομάδα	Ζήτηση	(E1)	(E3)	(E4)	(B3)	(B4)
101	28	32	32	25	28/30	32/33
102	30	31	33	23	28/30	32/35
103	28	33	32	25	29/29	32/34
104	31	29	29	22	28/26	32/29

Πίνακας 3.13: Επίπεδα αποθέματος για τον ορίζοντα σχεδιασμού τεσσάρων περιόδων.

Μέθοδος	$\mathbb{E}[\Pi^{(\mu)}]$	$\mathbb{E}[TC^{(\mu)}]$	$Var_{0.05}(\Pi^{(\mu)})$	$CVaR_{0.05}(\Pi^{(\mu)})$	$\mathbb{E}[(d - S)^+]$	$\mathbb{E}[(S - d)^+]$	$\Pr(d > S)$
(E1)	1197.34/1303.18	222.23/ 201.92	910.85/ 1076.10	814.89/ 996.93	4.95/ 6.89	11.65/6.46	0.88/ 0.87
(E3)	1196.37/ 1315.13	223.19/ 189.97	899.72/ 1069.02	805.07/ 985.89	4.53/ 6.03	12.47/ 6.85	0.86/ 0.80
(E4)	951.47/ 949.24	468.09/ 555.85	829.06/822.51	766.17/ 787.14	23.61/ 29.15	1.78/ 0.19	1.00/ 1.00
(B3)	1174.41/ 1250.24	245.15/ 254.85	948.94/ 1115.85	861.48/ 1058.63	9.01/ 12.95	6.72/ 3.54	0.97/ 0.97
(B4)	1207.70/ 1317.70	211.85/ 187.40	900.66/ 1017.43	800.92/ 935.57	3.5/4.2	13.2/9.78	0.80/0.70

Πίνακας 3.14: Εκτίμηση κινδύνου.

Στον Πίνακα 3.15 ακολουθεί συνολικά η έκβαση των μεθόδων του ορίζοντα σχεδιασμού τεσσάρων περιόδων.

Μέθοδος	$\Pi^{(\mu)}$	$\mathbb{I}\{\Pi^{(\mu)} < VaR_{0.05}^{(\mu)}\}$	$S - d$	$d - S$	$E(S - d)$	$U(d - S)$	$TC^{(\mu)}$
(E1)	1256.00	0	10.00	2.00	110.00	38.00	148.00
(E3)	1236.05	0	11.45	2.21	125.93	42.02	167.95
(E4)	1013.85	0	0.00	20.53	0.00	390.15	390.15
(B3)	1325.00/1284.00	0/0	2.00/4.00	3.00/4.00	22.00/44.00	57.00/76.00	79.00/120.00
(B4)	1283.00/1180.00	0/0	11.00/16	0/2.00	121.00/176.00	0/38.00	121.00/214.00

Πίνακας 3.15: Εκβάσεις μεθόδων του ορίζοντα σχεδιασμού τεσσάρων περιόδων.

Για τον ορίζοντα σχεδιασμού τεσσάρων περιόδων, τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.14 δείχνουν ότι οι δύο μέθοδοι βελτιστοποίησης (B3) και (B4) εμφανίζουν την πιο ισορροπημένη συμπεριφορά μεταξύ αναμενόμενου μηνιαίου κέρδους και κινδύνου. Και στις δύο γεννήτριες διαδικασίες (Λοξή Κανονική / SARIMA) εκτιμάται ικανοποιητική θωράκιση του χειρότερου 5% των μηνιαίων κερδών, επιτυγχάνοντας ταυτόχρονα υψηλό συνολικό κέρδος.

Η μέθοδος (B4), που μεγιστοποιεί το εμπειρικό μηνιαίο κέρδος, τείνει να επιλέγει κάπως πιο ;επιθετικές; πολιτικές, με ελαφρώς υψηλότερο αναμενόμενο κέρδος και μικρότερο κόστος σε σχέση με την (B3), αλλά με αντίστοιχα χαμηλότερο $CVaR_{0.05}(\Pi^{(\mu)})$ και μικρότερη πιθανότητα έλλειψης. Η (B3), που ελαχιστοποιεί το $CVaR_{0.05}(\Pi^{(\mu)})$ τεσσάρων περιόδων, είναι περισσότερο συντηρητική, θυσιάζοντας μέρος του αναμενόμενου κέρδους για να βελτιώσει τις εκβάσεις στην αριστερή ουρά της κατανομής.

Σημαντική διαφοροποίηση προκύπτει και από τον τρόπο παραγωγής των σεναρίων. Όταν χρησιμοποιείται η γεννήτρια σεναρίων βάση του μοντέλου SARIMA (εξαρτημένα

μονοπάτια), τόσο το αναμενόμενο κέρδος όσο και το $CVaR_{0.05}$ εμφανίζονται αυξημένα σε σχέση με την προσέγγιση μέσω της Λοξής Κανονικής (ανεξάρτητα μονοπάτια), γεγονός που αναδεικνύει τη σημασία της χρονικής εξάρτησης στη διαχείριση κινδύνου. Οι πολιτικές που αγνοούν την εξάρτηση υποεκτιμούν συστηματικά τον κίνδυνο.

Μέσω των Πινάκων 3.16–3.17 συγκρίνονται τα αποτελέσματα ως προς τον ορίζοντα σχεδιασμού και την κατανομή της ζήτησης. Η μέθοδος (Δ3) όπου στοχεύει στη μεγιστοποίηση του κέρδους της επόμενης περιόδου επιτυγχάνει συνολικά κέρδη 1283 χρηματικές μονάδες και συνολικά κόστη 121 χρηματικές μονάδες. Η αντίστοιχη μέθοδος (B4), όπου ως στόχο της έχει την μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους τεσσάρων περιόδων αποδίδει συνολικά κέρδη 1283 χρηματικές μονάδες υπό δειγματοληψία από την Λοξή Κανονική κατανομή και 1180 χρηματικές μονάδες υπό δειγματοληψία από το μοντέλο SARIMA. Επιπλέον, η μέθοδος (B1) η οποία στοχεύει στην μεγιστοποίηση των χειρότερων 5% κερδών της επόμενης περιόδου επιτυγχάνει συνολικά κέρδη 1005 χρηματικές μονάδες με συνολικά κόστη 399 χρηματικές μονάδες, ενώ η αντίστοιχη εκδοχή της, (B3), με στόχο τη μεγιστοποίηση συνολικά των χειρότερων 5% κερδών τεσσάρων περιόδων, αποδίδει 1325 χρηματικές μονάδες συνολικά κέρδη και 79 χρηματικές μονάδες συνολικά κόστη υπό τη Λοξή Κανονική και 1284 χρηματικές μονάδες συνολικά κέρδη και 120 χρηματικές μονάδες συνολικά κόστη υπό το μοντέλο SARIMA. Παρατηρείται, σημαντική αύξηση των συνολικών κερδών της (B3) έναντι της (B1), κατά περίπου 32% υπό τη Λοξή Κανονική και κατά περίπου 28% υπό το μοντέλο SARIMA, με ταυτόχρονη μείωση του συνολικού κόστους. Το αποτέλεσμα αυτό ενδέχεται να οφείλεται στην εξομάλυνση των αποφάσεων μεταξύ των περιόδων, κατανέμοντας το απόθεμα αφενός βέλτιστα αφετέρου ομοιόμορφα, αποφεύγοντας κόστη από μεγάλες αποκλίσεις στη ζήτηση.

Εβδομάδα	Ζήτηση	Μία περίοδος		Τέσσερις περίοδοι	
		(Δ3)	(B1)	(B4)	(B3)
101	28	32	24	32/33	28 /30
102	30	32	24	32/35	28 /30
103	28	32	24	32/34	29 /29
104	31	32	24	32/29	28 /26

Πίνακας 3.16: Επίπεδα αποθέματος των μεθόδων (B1), (B3), (Δ3) και (B4) στις περιόδους 101 – 104.

	Μία περίοδος		Τέσσερις περίοδοι	
	(Δ3)	(B1)	(B4)	(B3)
$\sum \Pi(\cdot)$	1283	1005	1283/1180	1325 / 1284
$\sum TC(\cdot)$	121	399	121/214	79/120

Πίνακας 3.17: Συνολικό κέρδος και κόστος στο τέλος του σχεδιασμού.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στην παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή εξετάστηκε το πρόβλημα του εφημεριοπώλη όταν η υπό όρους αξία σε κίνδυνο ($CVaR$) θεωρείται ως κριτήριο βελτιστοποίησης, τόσο από την οπτική της μεγιστοποίησης κέρδους όσο και εκείνης της ελαχιστοποίησης κόστους. Έτσι, στα δυο πρώτα κεφάλαια της διατριβής παρουσιάζεται η έννοια του $CVaR$ καθώς και το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη με κριτήριο την ελαχιστοποίησης (μεγιστοποίηση) αναμενόμενου κόστους (κέρδους) όσο και της ελαχιστοποίησης (μεγιστοποίηση) της $CVaR$ κόστους (κέρδους). Σημειώνεται η διαφοροποίηση στη βέλτιστη λύση στην περίπτωση χρήσης του $CVaR$ κόστους (κέρδους) σε αντίθεση με τη μη διαφοροποίηση στην περίπτωση χρήσης του αναμενόμενου κόστους (κέρδους).

Στο Κεφάλαιο 3, χρησιμοποιούνται δεδομένα (σε εβδομαδιαία βάση) που προέρχονται από τράπεζα τροφίμων. Καθώς τα τρόφιμα αποτελούν προϊόντα με πεπερασμένη διάρκεια ζωής το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη βρίσκει εφαρμογή. Η ζήτηση μοντελοποιήθηκε μέσω μιας αριστερής λοξής Κανονικής κατανομής και με την προσαρμογή κατάλληλων μοντέλων $SARIMA$, ώστε να ληφθούν υπόψη η λοξότητα, η αυτοσυσχέτιση και η εποχικότητα. Επίσης, ελήφθησαν υπόψη χαρακτηριστικά που μπορούν να επηρεάσουν τη ζήτηση και συνακόλουθα τις αποφάσεις για την επαναφορά του αποθέματος. Οι αποφάσεις για το επίπεδο επαναφοράς του αποθέματος (ουσιαστικά ποσότητας παραγγελίας λόγω απόσυρσης οποιουδήποτε εναπομείναντος αποθέματος προηγούμενης περιόδου) αφορούσαν είτε μια εβδομάδα είτε 4 εβδομάδες. Ο λόγος για την επιλογή ορίζοντα απόφασης 4 εβδομάδων δίνει τη δυνατότητα ποιο μακροπρόθεσμου σχεδιασμού και θα μπορούσε να οδηγήσει σε οικονομίες κλίμακος. Για αυτούς τους ορίζοντες σχεδιασμού (μιας ή τεσσάρων περιόδων) προτείνονται τρόποι προσδιορισμού της ποσότητας παραγγελίας καθώς και μέτρα εκ των προτέρων και εκ των υστέρων αξιολόγησης τους. Επίσης, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων για τους δυο ορίζοντες σχεδιασμού, όπου τονίζεται η σημαντικότητα της χρονικής εξάρτησης μεταξύ των περιόδων στην ορθή διαχείριση του κινδύνου.

Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι η επιλογή κριτηρίου βελτιστοποίησης (για παράδειγμα αναμενόμενο κέρδος έναντι $CVaR$) δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητη από το περιβάλλον του προβλήματος, όπως η κατανομή της ζήτησης και οι παράμετροι κόστους. Ενώ όταν υιοθετείται το κριτήριο $CVaR$, απαιτείται να οριστεί προσεκτικά το κριτήριο

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

λήψης απόφασης: εξασφάλιση ελάχιστου κέρδους ή προστασία από υψηλό κόστος. Επιπλέον, η θεώρηση και μελέτη χαρακτηριστικών που επηρεάζουν τη ζήτηση βοηθούν στην κατανόηση λειτουργίας του συστήματος. Ωστόσο σημειώνεται ότι η ανάλυση του Κεφαλαίου 3 βασίζεται σε ένα σχετικά μικρό δείγμα (104 εβδομαδιαίες παρατηρήσεις), γεγονός που καθιστά ασταθείς τις εκτιμήσεις των μέτρων αποτίμησης, ιδίως του *CVaR*. Έτσι η αύξηση των παρατηρήσεων του δείγματος κρίνεται απαραίτητη για την ασφάλεια και σταθερότητα των αποτελεσμάτων.

Το μοντέλο του Κεφαλαίου 3 θα μπορούσε να επεκταθεί για τη διαχείριση περισσότερων του ενός προϊόντων, με τη θεώρηση διαφορετικών μορφών για τα εμπλεκόμενα είδη κόστους και με πιθανούς περιορισμούς (χωρητικότητας ή/και οικονομικούς). Περαιτέρω, η μοντελοποίηση της ουράς της κατανομής ζήτησης μέσω ημι-παραμετρικών τεχνικών και θεωρίας ακραίων τιμών (Extreme Value Theory) θα μπορούσε να είναι μια ακόμη πρόταση για περαιτέρω έρευνα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

A Παρουσίαση δεδομένων

A.1 Σύνολο δεδομένων και μεταβλητές

Στον Πίνακα 3.18 παρουσιάζονται οι μεταβλητές που αφορούν τα δεδομένα της τράπεζας τροφίμων.

α/α	Μεταβλητή
1	Δείκτης πληθωρισμού H.B. (UK inflation)
2	Δείκτης ανεργίας H.B. (UK unemployment rate)
3	Οικονομικός δείκτης H.B. (UK economics index)
4	Τιμή κλεισίματος του FTSE 100 δείκτη (FTSE 100 close price)
5	Αριθμός γεννήσεων στην περιοχή (Durham birth registered)
6	Αριθμός θανάτων στην περιοχή (Durham death registered)
7	Αριθμός κρουσμάτων Covid (Durham Covid-19 cases)
8	Δείκτης εγκληματικότητας (Durham crime index)
9	Ημερολογιακή δείκτρια διακοπών (UK Bank holidays dummies)
10	Ημερολογιακή εβδομαδιαία δείκτρια (Seasonality dummies)
11	Αριθμός επισκέψεων (Visit)
12	Αριθμός εβδομάδας (Week)

Πίνακας 3.18: Μεταβλητές για τα δεδομένα σε εβδομαδιαία κλίμακα.

Τα δεδομένα αφορούν οκτώ χρονοσειρές. Συγκεκριμένα, μακροοικονομικά και κοινωνικά χαρακτηριστικά που σχετίζονται με τη ζήτηση, όπως ο δείκτης πληθωρισμού (Inflation), ο δείκτης ανεργίας (Unemployment) το πλήθος θανάτων (Death) κ.α. καθώς και μεταβλητές που κωδικοποιούν εποχικότητα. Τέλος, η μεταβλητή Visit θα αποτελέσει την κύρια χρονοσειρά προς μοντελοποίηση και πρόβλεψη, οι υπόλοιπες θα χρησιμοποιηθούν ως επεξηγηματικές μεταβλητές. Στον Πίνακα 3.19 παρουσιάζεται το σύνολο δεδομένων.

Πίνακας 3.19: Σύνολο δεδομένων Foodbank.

Inflation	Unemployment	Economics	FTSE 100	Birth	Death	Covid	Crime	Holiday	Season_1	Season_2	Season_3	Visit	Week
108.6	7.6	-6.49	5454.57	0	174	34	246	0	1	0	0	38	1
108.6	7.6	-8.77	5677.73	1	198	64	243	1	0	1	0	31	2
108.6	7.6	-9.28	5597.65	0	192	55	252	1	0	0	0	1	37
108.6	7.6	-9.43	5770.63	0	184	43	248	0	0	0	0	34	4
108.6	7.6	-9.48	6115.25	1	168	41	242	1	1	0	0	34	5
108.6	7.6	-8.53	5853.76	1	144	35	225	1	0	1	0	29	6
108.6	7.6	-8.58	5741.54	2	142	32	257	0	0	0	1	33	7
108.6	7.6	-8.06	6015.25	1	123	21	245	0	0	0	0	25	8
108.8	7.6	-7.84	6076.6	1	113	14	216	1	1	0	0	32	9
108.8	7.6	-7.45	6484.3	3	109	12	276	0	0	1	0	26	10
108.8	7.6	-6.65	6105.18	2	103	6	267	0	0	0	1	24	11
108.8	7.6	-6.03	6292.6	2	107	4	257	0	0	0	0	20	12
109.2	7.6	-5.82	6159.3	11	101	3	262	0	1	0	0	25	13
109.2	7.6	-5.29	6157.3	239	98	2	271	0	0	1	0	30	14
109.2	7.6	-5.05	6095.41	226	98	3	273	0	0	0	1	30	15
109.2	7.6	-5.82	6290.3	207	103	2	234	0	0	0	0	24	16
108.8	7.5	-5.16	6123.82	173	96	3	253	0	1	0	0	30	17
108.8	7.5	-4.88	5897.76	171	104	0	257	0	0	1	0	28	18
108.8	7.5	-4.38	6032.18	157	101	1	212	0	0	1	1	26	19
108.8	7.5	-4.32	6090.04	141	93	0	235	0	0	0	0	22	20
109.2	7.5	-3.51	6001.89	170	105	0	225	0	1	0	0	29	21
109.2	7.5	-2.77	5963.57	135	103	1	214	0	0	1	0	27	22
109.2	7.5	-2.93	5937.4	131	105	0	242	1	0	0	1	32	23
109.2	7.5	-4.18	6026.25	144	107	0	219	0	0	0	0	22	24
109.2	7.5	-3.07	5804.29	136	95	0	199	0	1	0	0	27	25
109.2	7.5	-3.11	5927.93	116	93	0	227	0	0	1	0	26	26
109.2	7.5	-2.73	5942.94	142	120	3	226	0	0	0	1	28	27
109.2	7.5	-2.33	6001.38	133	107	5	229	0	0	0	0	25	28
109.1	7.5	-2.4	5884.65	106	113	6	168	0	1	0	0	29	29
109.1	7.5	-1.9	5792.01	123	119	10	172	0	0	1	0	30	30
109.1	7.5	-1.65	5654.97	113	126	7	142	0	0	0	1	28	31
109.1	7.5	-1.62	6186.29	116	125	7	195	0	0	0	0	26	32
109.4	7.5	-1.7	6421.29	110	134	8	209	0	1	0	0	32	33
109.4	7.5	-1.61	6333.84	106	136	9	175	0	0	1	0	31	34
109.4	7.5	-0.82	6266.19	98	133	6	217	0	0	0	1	30	35
109.4	7.5	-1.23	6555.39	92	130	5	202	0	0	0	0	25	36
109.3	7.5	-1.44	6531.83	94	128	16	237	0	1	0	0	35	37
109.3	7.5	-0.73	6416.32	94	130	15	182	0	0	1	0	33	38
109.3	7.5	0.65	6555.82	62	121	16	236	1	0	0	1	38	39
109.3	7.5	-0.8	6856.96	21	118	11	196	1	0	0	0	30	40
109.4	7.5	-0.19	6801.96	71	172	15	226	0	1	0	0	37	41
109.4	7.5	-0.17	6715.42	111	155	14	242	0	0	1	0	35	42
109.4	7.5	-0.09	6526.15	99	156	12	254	0	0	0	1	34	43
109.4	7.5	-0.56	6503.72	92	160	19	220	0	0	0	0	32	44
109.7	7.5	-0.58	6528.72	89	151	13	242	0	1	0	0	36	45
109.7	7.5	0.06	6617.15	71	141	7	270	0	0	1	0	32	46
109.7	7.5	-1.6	6651.96	99	142	9	241	0	0	0	1	32	47
109.7	7.5	-0.39	6650.88	103	133	9	243	0	0	0	0	28	48
110.4	7.5	0.65	6736.96	89	120	5	226	0	1	0	0	32	49
110.4	7.5	0.87	6779.68	95	115	7	249	0	0	1	0	31	50
110.4	7.5	3.77	6674.83	91	111	10	233	0	0	0	1	33	51
110.4	7.5	6.82	6713.63	86	110	6	225	0	0	0	0	29	52
111.0	7.7	10.99	6737.3	0	176	9	244	0	1	0	0	37	53
111.0	7.6	11.22	6942.22	0	194	2	240	1	0	1	0	35	54
111.0	7.5	11.28	6983.5	0	188	2	247	1	0	0	1	40	55
111.0	7.6	11.3	6938.24	1	187	9	248	0	0	0	0	32	56

Inflation	Unemployment	Economics	FTSE 100	Birth	Death	Covid	Crime	Holiday	Season_1	Season_2	Season_3	Visit	Week
111.4	7.6	10.47	6961.48	4	165	7	239	1	1	0	0	37	57
111.4	7.6	10.49	7129.71	3	144	0	224	1	0	1	0	29	58
111.4	7.5	10.38	7043.61	1	144	0	252	0	0	0	1	32	59
111.4	7.5	10.49	7018.05	4	125	9	247	0	0	0	0	24	60
111.4	7.5	8.65	7022.61	3	115	1	215	1	1	0	0	31	61
111.4	7.5	9.57	7077.22	7	105	9	273	0	0	1	0	21	62
111.4	7.7	9.21	7146.68	4	104	7	268	0	0	0	1	28	63
111.4	7.6	8.74	7062.29	5	106	8	259	0	0	0	0	17	64
112.1	7.7	9.16	7072.97	9	100	6	265	0	1	0	0	27	65
112.1	7.5	7.06	7164.91	234	96	0	267	0	0	1	0	31	66
112.1	7.5	7.75	7125.42	226	93	5	274	0	0	0	1	33	67
112.1	7.5	7.66	6844.39	209	103	6	232	0	0	0	0	25	68
112.4	7.5	7.64	7025.43	169	97	6	248	0	1	0	0	28	69
112.4	7.5	6.96	7081.72	166	100	8	261	0	0	1	0	24	70
112.4	7.5	7.39	7132.3	160	99	3	208	0	0	0	1	24	71
112.4	7.6	6.68	7153.98	138	95	6	233	0	0	0	0	17	72
113.4	7.5	7.43	7109.02	172	109	7	225	0	1	0	0	24	73
113.4	7.5	7.04	7119.7	139	102	1	213	0	0	1	0	29	74
113.4	7.5	7.07	7149.37	131	109	0	241	1	0	0	1	34	75
113.4	7.6	6.92	7034.06	147	109	5	223	0	0	0	0	20	76
114.1	7.5	6.91	6980.98	131	98	2	202	0	1	0	0	26	77
114.1	7.5	6.94	7028.1	111	97	0	229	0	0	1	0	23	78
114.1	7.5	6.29	7077.1	139	117	0	227	0	0	0	1	32	79
114.1	7.6	6.76	7130.23	128	109	0	230	0	0	0	0	23	80
114.7	7.5	5.67	7217.53	109	114	0	172	0	1	0	0	33	81
114.7	7.5	6.08	7277.62	120	118	0	170	0	0	1	0	34	82
114.7	7.5	5.57	7274.81	110	129	0	137	0	0	0	1	27	83
114.7	7.5	5.52	7274.04	116	128	0	197	0	0	0	0	26	84
114.6	7.4	5.99	7326.97	112	132	0	206	0	1	0	0	35	85
114.6	7.5	6.7	7266.69	105	137	0	178	0	0	1	0	30	86
114.6	7.4	5.84	7059.45	98	137	0	221	0	0	0	1	31	87
114.6	7.5	6.41	7339.9	88	127	0	200	0	0	0	0	22	88
115.4	7.4	5.58	7218.64	91	123	0	237	0	1	0	0	32	89
115.4	7.4	6.64	7297.41	94	132	0	182	0	0	1	0	35	90
115.4	7.5	5.76	7372.1	57	117	0	236	1	0	0	1	36	91
115.4	7.4	4.63	7516.87	21	114	0	195	1	0	0	0	27	92
116.5	7.5	5.29	7551.72	70	170	0	226	0	1	0	0	34	93
116.5	7.4	5.56	7589.66	115	159	0	240	0	0	1	0	34	94
116.5	7.4	5.35	7469.78	100	153	0	252	0	0	0	1	32	95
116.5	7.4	5.33	7583.0	93	158	0	222	0	0	0	0	36	96
119.0	7.5	5.31	7643.42	90	150	0	239	0	1	0	0	34	97
119.0	7.5	5.1	7603.78	71	136	0	267	0	0	1	0	32	98
119.0	7.5	5.34	7498.18	102	146	0	238	0	0	0	1	28	99
119.0	7.5	5.35	7429.56	99	134	0	244	0	0	0	0	25	100
120.0	7.5	6.36	7190.72	84	116	0	222	0	1	0	0	28	101
120.0	7.4	5.36	7291.68	99	112	0	249	0	0	1	0	30	102
120.0	7.5	6.37	7460.63	92	110	0	228	0	0	0	1	28	103
120.0	7.5	5.9	7578.75	89	105	0	227	0	0	0	0	31	104

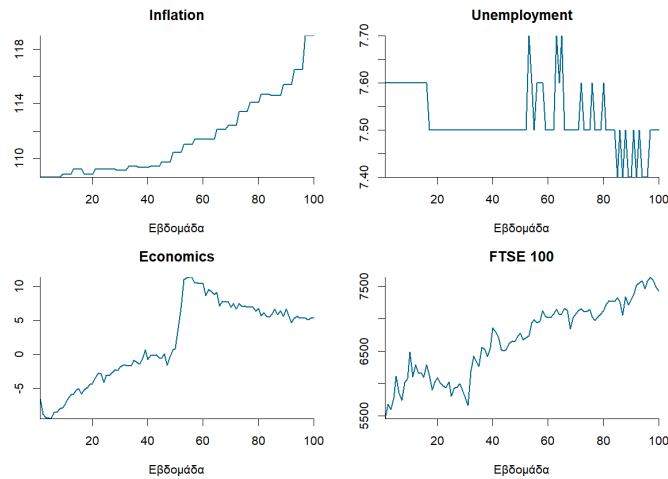
	Inflation	Unemployment	Economics	FTSE 100	Birth	Death	Covid	Crime	Visit
Inflation	1.00	-0.41	0.63	0.84	0.10	-0.02	-0.46	-0.09	0.01
Unemployment	-0.41	1.00	-0.21	-0.35	-0.38	0.09	0.41	0.35	-0.15
Economics	0.63	-0.21	1.00	0.84	0.02	-0.01	-0.53	-0.05	0.00
FTSE 100	0.84	-0.35	0.84	1.00	0.04	-0.01	-0.52	-0.01	0.03
Birth	0.10	-0.38	0.02	0.04	1.00	-0.53	-0.44	-0.15	-0.20
Death	-0.02	0.09	-0.01	-0.01	-0.53	1.00	0.52	0.03	0.62
Covid	-0.46	0.41	-0.53	-0.52	-0.44	0.52	1.00	0.17	0.25
Crime	-0.09	0.35	-0.05	-0.01	-0.15	0.03	0.17	1.00	0.02
Visit	0.01	-0.15	0.00	0.03	-0.20	0.62	0.25	0.02	1.00

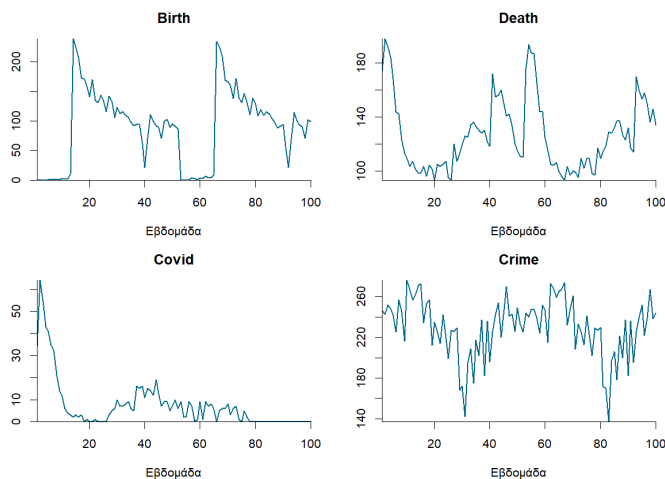
Πίνακας 3.20: Πίνακας συσχετίσεων.

Από τον Πίνακα 3.20 παρατηρείται ότι η ζήτηση εμφανίζει ισχυρή θετική συσχέτιση με τους θανάτους, $\rho \approx 0.62$ και μέτρια θετική συσχέτιση με τα χρούσματα Covid, $\rho \approx 0.25$ και ασθενώς αρνητική συσχέτιση με τις γεννήσεις, $\rho \approx -0.20$ και την ανεργία, $\rho \approx -0.15$. Αντίθετα, οι μακροοικονομικοί δείκτες (Inflation, Economics, FTSE 100) παρότι είναι έντονα συσχετισμένοι μεταξύ τους, $|\rho| \geq 0.6$, εμφανίζουν πολύ μικρούς συντελεστές συσχέτισης με τη ζήτηση. Αυτό υποδηλώνει ότι, σε επίπεδο γραμμικής συσχέτισης, δεν προκύπτει ισχυρή γραμμική σχέση με τη ζήτηση. Ωστόσο, η απουσία γραμμικής συσχέτισης δεν αποκλείει την ύπαρξη πιο σύνθετων (μη γραμμικών) σχέσεων.

Α.2 Περιγραφική ανάλυση χαρακτηριστικών

Στην ενότητα αυτή γίνεται παρουσίαση των επεξηγηματικών μεταβλητών των δεδομένων ως προς το χρόνο.





Σχήμα 3.4: Χαρακτηριστικά ως προς το χρόνο.

Από το Σχήμα 3.4 φαίνεται ότι κάποιες μεταβλητές (π.χ. Inflation, FTSE 100) εμφανίζουν σταθερή ανοδική τάση, ενώ άλλες (π.χ. Death, Birth, Crime) δείχνουν να επαναλαμβάνονται με ετήσια περιοδικότητα. Επίσης, η Covid για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα 20 περίπου εβδομάδων πρόκειται να είναι μηδενική.

Στον Πίνακα 3.21 συνοψίζονται βασικά περιγραφικά μέτρα για κάθε ένα χαρακτηριστικό του συνόλου δεδομένων.

Χαρακτηριστικά	Μέση τιμή	Τυπ. απ.	Ελάχ.	Μέγ.	$q_5\%$	$q_{95}\%$	Συντ. λοξότητας	Συντ. κυρτότητας
Inflation	111.76	3.24	108.60	120.00	108.60	119.00	1.08	0.24
Unemployment	7.52	0.06	7.40	7.70	7.40	7.60	0.53	0.85
Economics	1.99	5.96	-9.48	11.30	-8.46	10.49	-0.30	-1.15
FTSE 100	6707.87	579.94	5454.57	7643.42	5773.84	7546.49	-0.31	-1.10
Birth	89.84	62.96	0.00	239.00	0.15	201.90	0.08	-0.50
Death	126.04	26.46	93.00	198.00	96.00	182.80	0.96	0.18
Covid	7.16	11.34	0.00	64.00	0.00	33.70	2.89	9.54
Crime	229.55	28.39	137.00	276.00	172.45	269.70	-0.89	0.94

Πίνακας 3.21: Βασικά περιγραφικά μέτρα των συνεχών χαρακτηριστικών.

Προκειμένου τα χαρακτηριστικά αυτά να χρησιμοποιηθούν στο προγραμματισμό αποθεματοποίησης θα απαιτηθεί η μοντελοποίηση τους μέσω κατάλληλων μοντέλων πρόβλεψης. Στις μεταβλητές Birth, Death, Crime χρησιμοποιείται το μοντέλο Seasonal Naive με περίοδο 52 εβδομάδων, καθώς τα αντίστοιχα γραφήματα υποδεικνύουν σχετικά σταθερή ετήσια περιοδικότητα. Για τις σειρές FTSE 100, Economics, Unemployment εφαρμόζεται το Naive, δεδομένου ότι αποτελούν οικονομικούς δείκτες και συνεπώς η βραχυχρόνια δυναμική τους μπορεί ικανοποιητικά να προσεγγιστεί από μια διαδικασία τυχαίου περιπάτου. Τέλος, η χρονοσειρά Inflation μοντελοποιείται επίσης με την διαδι-

κασία Naive.

Παρατηρείται πως τα χαρακτηριστικά ορίζονται σε ετερογενείς κλίμακες, οι δείκτες Inflation και Unemployment εκφράζονται σε ποσοστιαίες μονάδες, ενώ μεταβλητές όπως οι Birth, Death, Covid και Crime αναφέρονται σε καταγεγραμμένα περιστατικά. Ορισμένα χαρακτηριστικά μεταβάλλονται ομαλά στο χρόνο, μικρή μεταβολή διαδοχικών τιμών, ενώ π.χ. η Covid παρουσιάζει απότομη πτώση με έντονη βραχυπρόθεσμη μεταβλητότητα μετά τις πρώτες εβδομάδες. Μολονότι ένα τέτοιο φαινόμενο είναι αναμενόμενο η ετερογένεια αυτή δυσχεραίνει την άμεση σύγκριση τους και δημιουργεί προβλήματα σύγκλισης στον αλγόριθμο βελτιστοποίησης. Για τον λόγο αυτό, και στην περίπτωση όπου πραγματοποιείται βελτιστοποίηση και δοθέντος των χαρακτηριστικών, κρίνεται σκόπιμη η κανονικοποίηση των συνεχών χαρακτηριστικών μέσω του μετασχηματισμού $\frac{z_j - \bar{z}_j}{\sigma(z_j)}$ όπου $\bar{z}_j$ και $\sigma(z_j)$ είναι η δειγματική μέση τιμή και τυπική απόκλιση του j -οστού χαρακτηριστικού. Με αυτόν τον τρόπο όλες οι μεταβλητές εκφράζονται σε συγκρίσιμη κλίμακα και περιορίζεται η επίδραση των πολύ μεγάλων ή πολύ μικρών μονάδων μέτρησης στη διαδικασία προσαρμογής των μοντέλων.

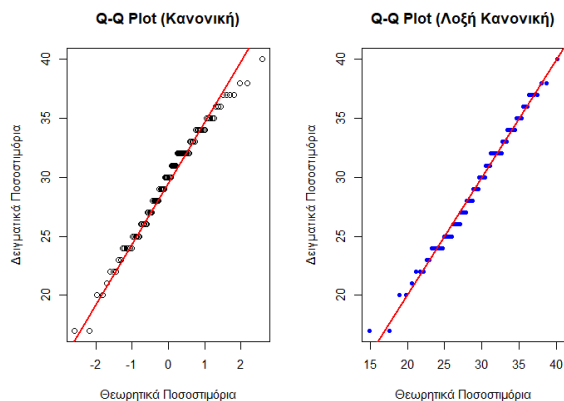
B Μοντελοποίηση ζήτησης

B.1 Προσαρμογή Λοξής Κανονικής

Αρχικά εκτιμούνται οι παράμετροι με την μέθοδο της Μέγιστης Πιθανοφάνειας χρησιμοποιώντας δείγμα τις 100 πρώτες διαθέσιμες παρατηρήσεις, $\{d_t\}_{t=1}^{100}$ και έπειτα ελέγχεται η σημαντικότητα της υπόθεσης μέσω του ελέγχου καλής προσαρμογής χ^2 Pearson, Anderson Darling, τον έλεγχο του πηλίκου των λογαρίθμων πιθανοφάνειας καθώς και του γραφήματος ποσοστιμορίων. Στον ακόλουθο Πίνακα, δίνονται οι ΕΜΠ των παραμέτρων καθώς και τα αποτελέσματα των ελέγχων.

ΕΜΠ Λοξής Κανονικής (ξ, ω, α)		Έλεγχοι προσαρμογής		
Παράμετρος	Εκτίμηση	Έλεγχος	Στατιστικό	p-value
ξ	34.38	LR (Κανονική έναντι Λοξής)	2.44	0.12
ω	6.74	Anderson–Darling	0.39	0.86
α	-1.95	χ^2 Pearson	8.20	0.22

Πίνακας 3.22: Εκτιμήσεις μέγιστης πιθανοφάνειας και έλεγχοι προσαρμογής της κατανομής της ζήτησης.



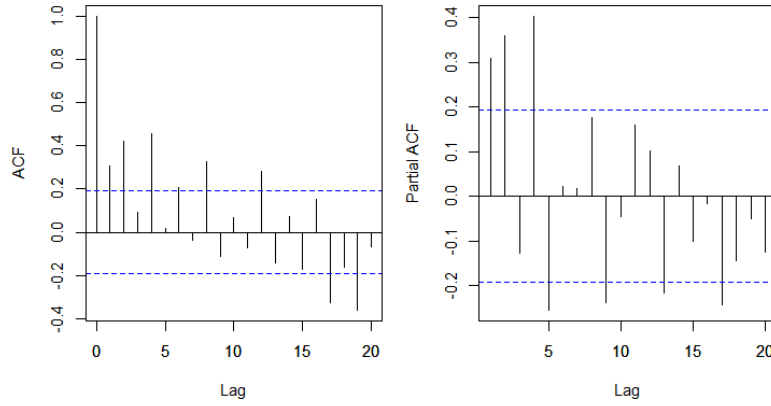
Σχήμα 3.5: Γράφημα ποσοστιμορίων.

- ο Οι έλεγχοι Anderson-Darling, χ^2 Pearson υποδεικνύει ότι τα δεδομένα είναι συμβατά με τη Λοξή αριστερή Κανονική κατανομή σε επίπεδο σημαντικότητας 0.95.
- ο Ο LR έλεγχος της υπόθεσης $H_0 : \alpha = 0$ δεν είναι στατιστικά σημαντικός, η προσαρμογή της Λοξής δεν υπερέρχει της συμμετρικής σε επίπεδο σημαντικότητας 0.95.
- ο Το γράφημα ποσοστιμορίων δίνει σχεδόν άρτια ευθυγράμμιση, ειδικά στις ουρές της κατανομής.

B.2 Επιλογή και αξιολόγηση SARIMA μοντέλων ανά ορίζοντα πρόβλεψης

Η διερεύνηση των ιδιοτήτων της χρονοσειράς ζήτησης (αυτοσυσχέτιση, στασιμότητα, εποχικότητα) πραγματοποιείται στο πλήρες δείγμα των 104 εβδομαδιαίων παρατηρήσεων, προκειμένου τα συμπεράσματα να αντανακλούν το σύνολο της διαθέσιμης περιόδου, μιας και αυτές οι ιδιότητες αποτελούν περιγραφικό κομμάτι της ανάλυσης και όχι κάποια επιλογή (υπερ)παραμέτρων σε μοντέλα πρόβλεψης.

Αρχικά γίνεται έλεγχος της αυτοσυσχέτισης των δεδομένων μέσω του έλεγχου Ljung-Box ενώ στο Σχήμα 3.6 δίνονται τα Autocorrelation Function (ACF) και Partial Autocorrelation Function (PACF).



Σχήμα 3.6: Διαγράμματα υστερήσεων.

Στον Πίνακα 3.23 δίνονται τα αποτελέσματα του ελέγχου Ljung-Box, σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$, για τις υστερήσεις $l \in \{4, 8, 12\}$. Ο έλεγχος για τις υστερήσεις αυτές θα εξετάσει αν υπάρχει αυτοσυσχέτιση στο σύνολο των υστερήσεων από 1 έως 4, 1 έως 8 και 1 έως 12. Αυτό επιτρέπει την συγκεντρωτική εκτίμηση της αυτοσυσχέτισης στις εν λόγω σειρές υστερήσεων. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι απορρίπτεται η υποθεση της συνολικής αυτοσυσχέτισης και για τις τρεις υστερήσεις.

Υστερήσεις	$Q(l)$	β.ε.	p-values
4	53.20	4	$7.737;10^{-11}$
8	70.56	8	$3.793;10^{-11}$
12	82.75	12	$1.229;10^{-11}$

Πίνακας 3.23: Αποτελέσματα των Box-Ljung ελέγχων.

Στο ερώτημα, εάν η στοχαστική διαδικασία αποτελεί έναν τυχαίο περίπατο ή απλώς κυμαίνεται σταθερά γύρω από κάποιο σημείο διεξήχθησαν δύο συμπληρωματικού στατιστικοί έλεγχοι στασιμότητας, Augmented Dickey-Fuller (ADF) και KPSS. Οι δύο έλεγχοι έχουν αντίθετες μηδενικές υποθέσεις και κατα συνέπεια παρέχουν μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για την υιοθέτηση ή μη της ιδιότητας της στασιμότητας. Μια χρονοσειρά $\{d_t\}_{t=1}^n$ ονομάζεται ασθενώς στάσιμη όταν δεν παρουσιάζει σημαντική μακροχρόνια τάση ή μεταβολή της έντασης της διασποράς καθώς και όταν το επίπεδο της αυτοεξάρτησης εξαρτάται μόνο της υστέρησης.

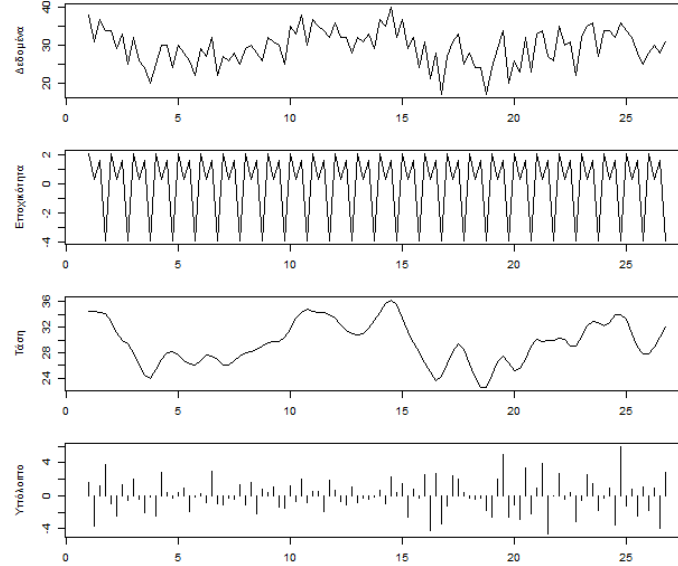
Έλεγχος	H_0	p-value
ADF	Μη στάσιμη χρονοσειρά	0.078
KPSS	Στάσιμη χρονοσειρά	> 0.10

Πίνακας 3.24: p-values ελέγχων στασιμότητας.

Ο έλεγχος ADF, με τιμή p-value 0.078, δεν παρέχει επαρκή ένδειξη για την απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης, ενώ ο έλεγχος KPSS, με p-value > 0.10, δεν οδηγεί σε απόρριψη της υπόθεσης στάσιμης χρονοσειράς. Συνεπώς, δεν εντοπίζεται σημαντική ένδειξη στασιμότητας, αλλά ταυτόχρονα ούτε και στοιχεία εναντίον αυτής. Τελικά και σε συνδυασμό με την οπτική επιθεώρηση της χρονοσειράς, θα υιοθετηθεί η υπόθεση (ασθενούς) στασιμότητας της χρονοσειράς ζήτησης.

Με εβδομαδιαία δεδομένα η μοντελοποίηση της ετήσιας εποχικότητας ($s = 52$) απαιτεί τουλάχιστον δύο πλήρεις κύκλους για σταθερή εκτίμηση της, συνθήκη που δεν ικανοποιείται με 104 παρατηρήσεις. Επιπλέον το γράφημα της χρονοσειράς 3.1 και η στατιστικά σημαντική τιμή του δείκτη r_k για $k = 4$ υποδεικνύουν μιας βραχύτερης (μηνιαίας) περιοδικότητας τεσσάρων περιόδων.

Επιλέγεται η αθροιστική αποσύνθεση της χρονοσειράς $d_t = T_t + S_t + e_t$, διότι αυτή επιτρέπει την εξέταση των διαφορετικών συνιστωσών της χρονοσειράς – την τάση T_t , την εποχικότητα S_t , και τα υπολοιπα e_t . Αυτή η προσέγγιση διασφαλίζει ότι ικανοποιείται η ιδιότητα της στασιμότητας, καθώς η εποχικότητα S_t παρουσιάζει ένα σταθερό πλάτος σε τακτά χρονικά διαστήματα, δηλαδή το εύρος των εποχικών διακυμάνσεων παραμένει περίπου το ίδιο με την πάροδο του χρόνου. Η αποσύνθεση επιτρέπει την απομόνωση των εποχικών μοτίβων, τα οποία μπορεί να προκαλούν μη στασιμότητα εάν δεν ληφθούν υπόψη. Η αποσύνθεση πραγματοποιείται μέσω της συνάρτησης $stl()$ της R θέτοντας εποχική περίοδο $s = 4$. Μέσω του Σχήματος 3.7 προβάλλονται οι εκτιμώμενες συνιστώσες της αθροιστικής αποσύνθεσης.



Σχήμα 3.7: Αποσύνθεση χρονοσειράς.

Ο οπτικός έλεγχος, Σχήμα 3.7, του εποχικού όρου υποδεικνύει ομοιογενές επαναλαμβανόμενο μοτίβο κάθε τέσσερις εβδομάδες, ενισχύοντας την μηνιαία εποχικότητα. Συμπληρωματικά πραγματοποιείται ο μη παραμετρικός στατιστικός έλεγχος Kruskal–Wallis όπου η χρονοσειρά ομαδοποιείται σε τέσσερα τμήματα των 25 παρατηρήσεων και ελέγχεται η υπόθεση της ισότητας των διαμέσων H_0 : οι διάμεσοι των 2 τεσσάρων ομάδων είναι ίσοι, έναντι της εναλλακτικής ότι τουλάχιστον μία ομάδα παρουσιάζει διαφορετικό επίπεδο. Ο έλεγχος υλοποιείται μέσω της συνάρτησης `kruskal.wallis()` και παρήγαγε p-values $\ll 0.01$, οπότε απορρίπτεται η H_0 και συμπεραίνεται στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ των τμημάτων. Συνεπώς η ύπαρξη μιας μηνιαίας, τεσσάρων περιόδων εποχικότητας υιοθετείται. Τονίζεται πως η χρήση του ελέγχου Kruskal–Wallis απαιτεί ανεξαρτησία μεταξύ των παρατηρήσεων, υπόθεση η οποία παραβιάζεται, και κατα συνέπεια τα αποτελέσματα του ελέγχου χρησιμοποιούνται συμπληρωματικά. Το συμπέρασμα της τεσσάρων περιόδων εποχικότητας είναι αρκετό μέσω του υψηλού δείκτη αυτοσυσχέτισης για την τέταρτη υστέρηση καθώς και του σταθερού επαναλαμβανόμενου μοτίβου της εποχικής συνιστώσας.

Συνοψίζοντας, σε συνδυασμό με τα ευρήματα των ελέγχων στασιμότητας, υιοθετείται η υπόθεση (ασθενούς) στασιμότητας γύρω από σταθερό μέσο και εποχικότητας περιόδου $s = 4$. Στο στάδιο της μοντελοποίησης αυτό οδηγεί στην διερεύνηση αυτοπαλινδρομικών μοντέλων της κλάσης $SARIMA(p, 0, q)(P, 1, Q)_{[4]}$, με εποχική διαφοροποίηση πρώτης τάξης ($D = 1$) για την απομάκρυνση της μηνιαίας εποχικότητας.

Για κάθε χρονικό ορίζοντα πρόβλεψης $h = 1, 2, 3, 4$ εκτιμάται ξεχωριστό μοντέλο

$SARIMA(p, 0, q)(P, 1, Q)_{[4]}$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο σταθερού κυλιόμενου παραθύρου w , Tashman (2000), ώστε το μοντέλο να ενημερώνεται συνεχώς με την πιο πρόσφατη διαθέσιμη πληροφορία. Για κάθε ορίζοντα h , η τάξη των υπερπαραμέτρων p, q, P, Q και το μήκος w επιλέγεται ώστε να ελαχιστοποιείται το σφάλμα της h βηματικής πρόβλεψης Chevillon (2006), Marcellino et al. (2006), Hyndman and Athanasopoulos (2021).

Συγκεκριμένα για δοσμένο ορίζοντα h και μήκος παραθύρου w , στο j -οστό βήμα του συνόλου εκπαίδευσης θεωρείται ως δείγμα το υποσύνολο $d_j, \dots, d_{j+w-1}$, μέσω της αρχής μεγίστης πιθανοφάνειας εκτιμούνται οι παράμετροι $\phi, \Phi, \theta, \Theta$ και προκύπτει η h βημάτων πρόβλεψη $d_{j+w-1+h|j+w-1}^{(h)}$, η οποία συγκρίνεται με την αντίστοιχη πραγματική τιμή $d_{j+w-1+h}$ όπου τελικώς παράγεται το σφάλμα $e_{j+w-1+h}^{(h)} = d_{j+w-1+h} - d_{j+w-1+h|j+w-1}^{(h)}$.

Ενδεικτικά για $h = 2, w = 36, j = 1$ μέσω του δείγματος $d_1, \dots, d_{36}$ πραγματοποιείται η πρόβλεψη της $\hat{d}_{38}$ με σφάλμα πρόβλεψης $e_{38}^{(2)} = d_{38} - \hat{d}_{38|36}$. Για $j = 2$ το παράθυρο μετακινείται κατά μία περίοδο, συνεπώς το δείγμα είναι $d_2, \dots, d_{37}$, οι παράμετροι επανεκτιμώνται και υπολογίζεται η πρόβλεψη $\hat{d}_{39|37}$ κ.ο.κ. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία έως ότου παραχθούν όλες οι προβλέψεις εντός του συνόλου εκπαίδευσης, προκύπτει η ακολουθία σφαλμάτων h βημάτων $e_{j+w-1+h}^{(h)}$.

Η διαμέριση του συνόλου δεδομένων πραγματοποιείται σύμφωνα με τη διάταξη: οι 70 πρώτες αποτελούν το σύνολο εκπαίδευσης ενώ οι επόμενες 30 το σύνολο αξιολόγησης. Η επιλογή των p, q, P, Q, w γίνεται αποκλειστικά στο σύνολο εκπαίδευσης μέσω grid search περιορισμένο στην κλάση μοντέλων

$$\mathcal{C} := \left\{ SARIMA(p, 0, q)(P, 1, Q)_{[4]}^{(h)} : p, q, P, Q \in \{0, 1, 2\}, h \in \{1, 2, 3, 4\}, w \in \{36, 48, 52\} \right\}$$

Για κάθε συνδυασμό p, q, P, Q, w και κάθε ορίζοντα h υπολογίζονται οι δείκτες MAE_h , $RMSE_h$ και ο μέσος AIC στο σύνολο εκπαίδευσης. Ως βέλτιστο μοντέλο ανα ορίζοντα h επιλέγεται εκείνο με το μικρότερο $RMSE_h$. Σημειώνεται πως για $h > 1$ και δοσμένο μήκος παραθύρου w , το πρώτο σημείο πρόβλεψης γίνεται για την περίοδο $t = w + h$. (πχ για $h = 2, w = 36$ και $j = 1$: δείγμα $d_1, \dots, d_{36}$ πρόβλεψη της $\hat{d}_{38}$ και σφάλμα πρόβλεψης $e_{38}^{(2)} = d_{38} - \hat{d}_{38|36}$, $j = 2$: δείγμα $d_2, \dots, d_{37}$ πρόβλεψη της $\hat{d}_{39}$ και σφάλμα πρόβλεψης $e_{39}^{(2)} = d_{39} - \hat{d}_{39|37}$ κ.ο.κ.)

Αφού επιλεγούν τα βέλτιστα μοντέλα για κάθε ορίζοντα $h = 1, 2, 3, 4$ καταγράφεται η απόδοση τους στο σύνολο αξιολόγησης ($t = 70, \dots, 100$) χρησιμοποιώντας την ίδια κυλιόμενη διαδικασία. Στο σύνολο αξιολόγησης, σε κάθε περίοδο χρησιμοποιούνται όλες οι διαθέσιμες πραγματικές τιμές μέχρι εκείνη τη στιγμή ώστε να σχηματιστεί δείγμα παρατηρήσεων μήκους w , πάνω στο οποίο οι παράμετροι $\phi, \Phi, \theta, \Theta$ επανεκτιμώνται εκ νέου και παράγεται η h -βηματική πρόβλεψη. Με τον τρόπο αυτό, αποφεύγεται τυχόν διαρροή πληροφορίας στη φάση επιλογής μοντέλου (καθώς οι υπερπαραμέτροι έχουν επιλεγεί μόνο από το σύνολο εκπαίδευσης), ενώ η διαδικασία πρόβλεψης παραμένει προσαρμοστική, αντανακλώντας ένα σύστημα SARIMA που ενημερώνεται δυναμικά με

την πιο πρόσφατη πληροφορία.

Στο σύνολο εκπαίδευσης και για κάθε ορίζοντα h αναζητείται ο συνδιασμός των τάξεων p, q, P, Q και w μεταξύ 5^3 πιθανον μοντέλων όπου έχει ως αποτέλεσμα το μικρότερο $RMSE_h$. Παρουσιάζονται τα νικητήρια μοντέλα καθώς και ένας αριθμός μοντέλων για κάθε ορίζοντα.

Μοντέλο	Μήκος παραθύρου	MAE	RMSE	Mean AIC
(2,0,0)(2,1,1)[4]	36	2.50	3.26	162.34
(1,0,1)(1,1,0)[4]	52	3.52	4.52	252.05
(2,0,2)(0,1,2)[4]	52	3.18	4.06	241.85
(0,0,1)(1,1,0)[4]	52	4.20	5.00	258.79
(2,0,2)(1,1,1)[4]	36	2.70	3.75	165.23
(0,0,2)(0,1,2)[4]	48	3.07	3.94	223.76
(0,0,0)(0,1,0)[4]	36	4.29	5.03	176.74
(1,0,0)(2,1,2)[4]	48	3.17	4.02	220.57
(1,0,0)(2,1,2)[4]	36	2.61	3.50	163.79
(1,0,0)(2,1,2)[4]	48	2.90	3.93	220.20

Πίνακας 3.25: Απόδοση 10 συνδιασμών τάξεων στο σύνολο εκπαίδευσης (ορίζοντας $h = 1$).

Μοντέλο	Μήκος παραθύρου	MAE	RMSE	Mean AIC
(2,0,0)(2,1,1)[4]	36	3.24	3.97	162.33
(2,0,0)(2,1,0)[4]	48	3.73	4.31	224.23
(2,0,0)(2,1,0)[4]	48	3.69	4.33	224.77
(2,0,0)(2,1,0)[4]	48	3.70	4.44	223.93
(2,0,0)(2,1,0)[4]	52	4.20	4.80	244.79

Πίνακας 3.26: Απόδοση 5 συνδυασμών στο σύνολο εκπαίδευσης (ορίζοντας $h = 2$).

Μοντέλο	Μήκος παραθύρου	MAE	RMSE	Mean AIC
(1,0,0)(2,1,0)[4]	36	3.95	4.76	164.71
(2,0,0)(2,1,0)[4]	36	4.12	4.87	164.50
(2,0,0)(2,1,1)[4]	36	4.11	4.98	162.33
(1,0,0)(2,1,0)[4]	48	4.57	5.30	224.28
(2,0,0)(2,1,0)[4]	48	4.66	5.33	223.93

Πίνακας 3.27: Απόδοση 5 συνδυασμών στο σύνολο εκπαίδευσης (ορίζοντας $h = 3$).

Μοντέλο	Μήκος παραθύρου	MAE	RMSE	Mean AIC
(1,0,0)(2,1,0)[4]	36	4.01	4.82	164.71
(2,0,0)(2,1,0)[4]	36	4.26	4.93	164.50
(1,0,0)(2,1,0)[4]	48	4.84	5.60	224.28
(2,0,0)(2,1,0)[4]	48	4.95	5.62	223.93
(1,0,0)(0,1,1)[4]	52	5.46	5.92	241.64

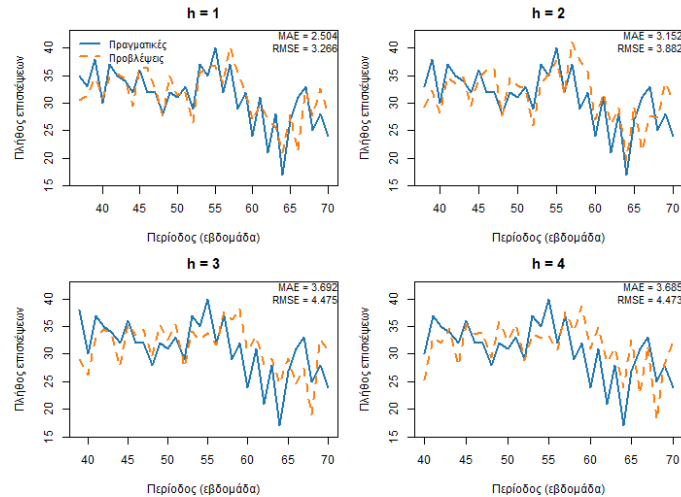
Πίνακας 3.28: Απόδοση 5 συνδυασμών στο σύνολο εκπαίδευσης (ορίζοντας $h = 4$).

Τα μοντέλα που τελικά επιλέγονται για κάθε ορίζοντα πρόβλεψης δίνονται στον Πίνακα 3.29.

Ορίζοντας	Μοντέλο	Μήκος παραθύρου	MAE	RMSE	Mean AIC
1	(2,0,0)(2,1,1)[4]	36	2.50	3.26	162.34
2	(2,0,0)(2,1,1)[4]	36	3.11	3.88	161.90
3	(1,0,0)(2,1,1)[4]	36	3.69	4.47	164.00
4	(1,0,0)(2,1,0)[4]	36	3.68	4.47	163.64

Πίνακας 3.29: Απόδοση μοντέλων ανα ορίζοντα στο σύνολο εκπαίδευσεως.

Ακολουθούν τα γραφήματα των πραγματικών έναντι των προβλέψεων για τα μοντέλα του Πίνακα 3.29.



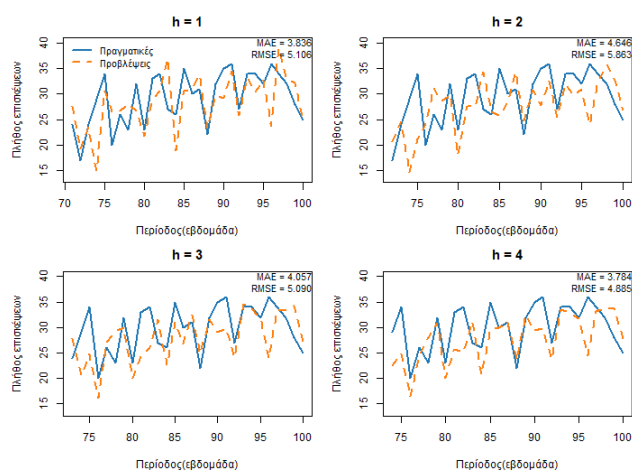
Σχήμα 3.8: Προβλέψεις έναντι πραγματικών ανα ορίζοντα στο σύνολο εκπαίδευσεως.

Μέσω του επόμενου Πίνακα συνοψίζεται η επίδοση των μοντέλων στο σύνολο αξιολόγησης.

Ορίζοντας	Μοντέλο	Μήκος παραθύρου	MAE	RMSE
1	(2,0,0)(2,1,1)[4]	36	3.39	5.11
2	(2,0,0)(2,1,1)[4]	36	4.65	5.86
3	(1,0,0)(2,1,0)[4]	36	4.06	5.09
4	(1,0,0)(2,1,0)[4]	36	3.78	4.88

Πίνακας 3.30: Απόδοση μοντέλων ανα ορίζοντα στο σύνολο αξιολόγησης.

Ακολουθούν τα γραφήματα των πραγματικών έναντι των προβλέψεων για τα μοντέλα του Πίνακα 3.30.



Σχήμα 3.9: Προβλέψεις έναντι πραγματικών στο σύνολο αξιολόγησης για κάθε ορίζοντα h .

B.3 Προβλέψεις χαρακτηριστικών

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της πρόβλεψης των χαρακτηριστικών για τις περιόδους 101, ..., 104. Οι προβλέψεις αυτές θα αποτελέσουν μέρος της ευρετικής μεθόδου για τον ορίζοντα σχεδιασμού τεσσάρων περιόδων και συγκεκριμένα της (E4).

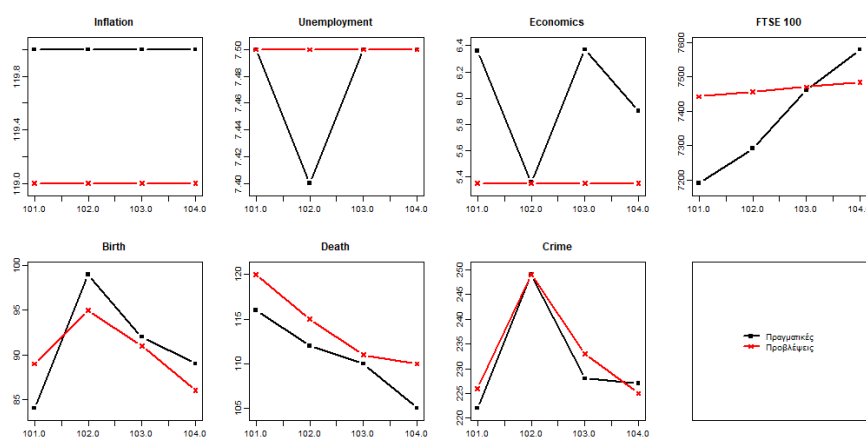
Χαρακτηριστικό	Μοντέλο	Ορίζοντας	MAE	RMSE
Births	Seasonal-Naive	1	2.37	2.93
Births	Seasonal-Naive	2	2.35	2.92
Births	Seasonal-Naive	3	2.37	2.95
Births	Seasonal-Naive	4	2.30	2.90
Crime	Seasonal-Naive	1	1.96	2.38
Crime	Seasonal-Naive	2	1.96	2.39
Crime	Seasonal-Naive	3	2.03	2.44
Crime	Seasonal-Naive	4	2.07	2.48
Deaths	Seasonal-Naive	1	2.75	3.02
Deaths	Seasonal-Naive	2	2.78	3.05
Deaths	Seasonal-Naive	3	2.74	3.01
Deaths	Seasonal-Naive	4	2.80	3.07
Economics	Naive	1	0.46	0.57
Economics	Naive	2	0.38	0.56
Economics	Naive	3	0.49	0.64
Economics	Naive	4	0.50	0.67
FTSE	Naive	1	72.14	95.56
FTSE	Naive	2	96.37	120.51
FTSE	Naive	3	114.96	139.85
FTSE	Naive	4	124.94	158.38
Inflation	Naive	1	0.29	0.54
Inflation	Naive	2	0.51	0.73
Inflation	Naive	3	0.65	0.840
Inflation	Naive	4	0.68	0.87
Unemployment	Naive	1	0.05	0.07
Unemployment	Naive	2	0.04	0.06
Unemployment	Naive	3	0.05	0.07
Unemployment	Naive	4	0.04	0.06

Πίνακας 3.31: Απόδοση μοντέλων ανά ορίζοντα στο σύνολο αξιολόγησης.

Οι πρόβλεψεις των χαρακτηριστικών θα αποτελέσουν μέρος της ευρετικής μεθόδου (E4) για τη μηνιαία επαναφορά του επιπέδου αποθέματος. Παρουσιάζονται οι σημειακές προβλέψεις των μεθόδων ανα χρονικό ορίζοντα για τα επτά συνεχή χαρακτηριστικά.

Εβδομάδα	Inflation	Unemployment	Economics	Ftse	Birth	Death	Crime
101	119	5.35	5.35	7443.14	89	120	226
102	119	5.35	5.35	7456.72	95	115	249
103	119	5.35	5.35	7470.30	91	111	233
104	119	5.35	5.35	7483.88	86	110	225

Πίνακας 3.32: Προβλέψεις χαρακτηριστικών για τις εβδομάδες 101,102,103,104.



Σχήμα 3.10: Προβλέψεις χαρακτηριστικών έναντι πραγματικών για τις εβδομάδες 101,102,103,104.

B.4 Παραγωγή τεχνητών δειγμάτων ζήτησης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η διαδικασία παραγωγής δειγμάτων ζήτησης για το πρόβλημα σχεδιασμού τεσσάρων περιόδων. Θεωρούνται δύο ειδών γεννήτριες διαδικασίες οι οποίες παράγουν δείγμα για κάθε μια εκ των εβδομάδων 101, 102, 103, 104.

Η πρώτη γεννήτρια διαδικασία βασίζεται στην Λοξή Κανονική κατανομή. Από την εβδομάδα $t = 100$ χρησιμοποιείται το δείγμα των ιστορικών παρατηρήσεων $d_1, \dots, d_t$ για την εκτίμηση των παραμέτρων της Λοξής Κανονικής μέσω της μεθόδου μεγίστης πιθανοφάνειας όπου προκύπτει $(\hat{\xi}, \hat{\omega}, \hat{\alpha}) = (34.71, 7.04, -2.16)$. Στη συνέχεια παράγονται $N = 5000$ ανεξάρτητα μονοπάτια ζήτησης $d_{j101}, \dots, d_{j104}$ όπου $j = 1, \dots, N$.

Η δεύτερη γεννήτρια διαδικασία χρησιμοποιεί το μοντέλο $SARIMA(2, 0, 1)(2, 1, 1)_{[4]}$ και το δείγμα μήκους $w = 36$ δηλαδή τις πρόσφατες 36 παρατηρήσεις $d_{65}, \dots, d_{100}$. Βάση αυτών εκτιμώνται οι παράμετροι σύμφωνα της αρχής μεγίστης πιθανοφάνειας από όπου προκύπτει η ακολουθία υπολοίπων $\hat{\varepsilon}_{65}, \dots, \hat{\varepsilon}_{100}$ η οποία αποτελεί φυσικό εκτιμητή του όρου σφάλματος. Στη συνέχεια και από την εβδομάδα $t = 100$ παράγονται $N = 5000$ σενάρια ζήτησης για κάθε μια από τις εβδομάδες 101, ..., 104. Συγκεκριμένα για την εβδομάδα 101: $d_{101}^j = \hat{d}_{101|100} + \hat{\varepsilon}_{101}^j$. Για κάθε $j = 1, \dots, N$ δεδομένης της υπο συνθήκης μέσης πρόβλεψης ενός βήματος $\hat{d}_{101|100}$ η αβεβαιότητα ενσωματώνεται μέσω επανατοποθέτησης N φορές (διαδικασία Bootstrap) των υπολοίπων $\{\hat{\varepsilon}_t\}_{t=65}^{100}$ Hyndman and Athanasopoulos (2021). Κατα συνέπεια δημιουργείται το δείγμα ζήτησης της περιόδου 101 μεγέθους N . Για την εβδομάδα 102, η διαδικασία πραγματοποιείται αναδρομικά (recursive) ως εξής: για κάθε $j = 1, \dots, N$ το σενάριο d_{101}^j ενσωματώνεται στο μοντέλο ως η πιο πρόσφατη διαθέσιμη πληροφορία, όπου υπολογίζεται η $\hat{d}_{102|101}^j$. Στη συνέχεια, η τυχαιότητα προστίθεται επιλέγοντας ένα υπόλοιπο από την $\{\hat{\varepsilon}_t\}_{t=65}^{100}$.

Για την εβδομάδα 102, η διαδικασία πραγματοποιείται σύμφωνα με: Κάθε σενάριο d_{101}^j ενσωματώνεται στο μοντέλο ως η πιο πρόσφατη πληροφορία, όπου υπολογίζεται η $\hat{d}_{102}^j$ (recursive). Στη συνέχεια, προστίθεται η τυχαιότητα επιλέγοντας ένα υπόλοιπο από την $\{\hat{\varepsilon}_t\}_{t=65}^{100}$. Η διαδικασία είναι κοινή και για τις υπόλοιπες περιόδους 103, 104.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- C. Acerbi and D. Tasche, “On the Coherence of Expected Shortfall,” *Journal of Banking & Finance*, vol. 26, pp. 1487–1503, 2002.
- M. M. Aldaihani and M. A. Darwish. Service level enhancement in newsvendor model. *Computers & Industrial Engineering*, 98:164–170, 2016.
- K. J. Arrow, T. Harris, and J. Marschak. Optimal Inventory Policy. *Econometrica*, 19(3):250–272, 1951.
- P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9(3):203–228, 1999.
- G.-Y. Ban and C. Rudin. The Big Data Newsvendor: Practical Insights from Machine Learning. *Operations Research*, 67(1):90–108, 2019.
- D. Bertsimas and N. Kallus. From Predictive to Prescriptive Analytics. *Management Science*, 66(3):1025–1044, 2020.
- D. Bertsimas and A. Thiele. A Data-Driven Approach to Newsvendor Problems. Working paper, May 2005.
- G. Chevillon. *Direct multi-step estimation and forecasting*. Manuscript, University of Oxford and OFCE, February 2006.
- X. Chen, M. Sim, D. Simchi-Levi, and P. Sun. Risk Aversion in Inventory Management. *Operations Research*, 55(5):828–842, 2007.
- Y. F. Chen, M. Xu, and Z. G. Zhang. A Risk-Averse Newsvendor Model Under CVaR Decision Criterion. Working paper (SSRN), August 2007.
- T.-M. Choi and C.-H. Chiu. Mean-downside-risk and mean-variance newsvendor models: Implications for sustainable fashion retailing. *International Journal of Production Economics*, 135:552–560, 2012.

- T.-M. Choi, D. Li, and H. Yan. Mean–Variance Analysis for the Newsvendor Problem. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part A: Systems and Humans*, 38(5):1169–1180, 2008.
- S. Y. Chun, A. Shapiro, and S. Uryasev. Conditional Value-at-Risk and Average Value-at-Risk: Estimation and Asymptotics. *Operations Research*, 60(4):739–756, 2012.
- F. Y. Edgeworth. The Mathematical Theory of Banking. *Journal of the Royal Statistical Society*, 51(1):113–127, 1888.
- L. Eeckhoudt, C. Gollier, and H. Schlesinger. The Risk-Averse (and Prudent) Newsboy. *Management Science*, 41(5):786–794, 1995.
- J.-y. Gotoh and Y. Takano. Newsvendor solutions via conditional value-at-risk minimization. *European Journal of Operational Research*, 179:80–96, 2007.
- H. Grootveld and W. Hallerbach. Variance vs downside risk: Is there really that much difference? *European Journal of Operational Research*, 114:304–319, 1999.
- P. Guo and Y. (Frank) Chen. Possibility Approach to Newsboy Problem. In: *Proceedings of the First International Conference on Electronic Business (ICEB)*. Hong Kong, 2001.
- J. Huber, S. M?ller, M. Fleischmann, and H. Stuckenschmidt. A data-driven newsvendor problem: From data to decision. *European Journal of Operational Research*, 278(3):904–915, 2019.
- R. J. Hyndman and G. Athanasopoulos. *Forecasting: Principles and Practice* (3rd ed.). OTexts, 2021.
- W. Jammerneegg and P. Kischka. Risk-averse and risk-taking newsvendors: a conditional expected value approach. *Review of Managerial Science*, 1:93–110, 2007.
- W. Jammerneegg and P. Kischka. Newsvendor Problems with VaR and CVaR Consideration. In: T.-M. Choi (ed.), *Handbook of Newsvendor Problems*, International Series in Operations Research & Management Science, vol. 176, pp. 197–221. Springer, 2012.
- W. Jammerneegg, P. Kischka, and L. Silbermayr. Risk preferences, newsvendor orders and supply chain coordination using the Mean-CVaR model. *International Journal of Production Economics*, 270:109171, 2024.
- P. Jorion. Risk²: Measuring the Risk in Value at Risk. *Financial Analysts Journal*, 52(6):47–56, 1996.

- A. P. Katariya, S. Çetinkaya, and E. Tekin. On the comparison of risk-neutral and risk-averse newsvendor problems. *Journal of the Operational Research Society*, 65(7):1090–1107, 2014.
- B. Keren and J. S. Pliskin. A benchmark solution for the risk-averse newsvendor problem. *European Journal of Operational Research*, 174:1643–1650, 2006.
- M. Khouja. The single-period (news-vendor) problem: literature review and suggestions for future research. *Omega*, 27:537–553, 1999.
- H.-S. Lau. *The Newsboy Problem under Alternative Optimization Objectives*. *Journal of the Operational Research Society*, 31(6):525–535, 1980.
- A. H.-L. Lau and H.-S. Lau. *Maximizing the Probability of Achieving a Target Profit in a Two-Product Newsboy Problem*. *Decision Sciences*, 1988.
- C. Liu, A. N. Letchford, and I. Svetunkov. Newsvendor problems: An integrated method for estimation and optimisation. *European Journal of Operational Research*, 300(2):590–601, 2022.
- C. Liu and W. Zhu. Newsvendor conditional value-at-risk minimisation: A feature-based approach under adaptive data selection. *European Journal of Operational Research*, 313:548–564, 2024.
- M. Marcellino, J. H. Stock, and M. W. Watson. *A comparison of direct and iterated multistep AR methods for forecasting macroeconomic time series*. *Journal of Econometrics*, 135(1–2):499–526, 2006.
- D. C. Montgomery, C. L. Jennings, and M. Kulahci. *Introduction to Time Series Analysis and Forecasting* (2nd ed.). John Wiley & Sons, 2015.
- P. M. Morse and G. E. Kimball. *Methods of Operations Research*. The Technology Press of MIT and John Wiley & Sons, 1951.
- F. Peracchi and A. V. Tanase. On estimating the conditional expected shortfall. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 24(5):471–493, 2008.
- F. Petropoulos, D. Apiletti, V. Assimakopoulos, *et al.* Forecasting: theory and practice. *International Journal of Forecasting*, 38(3):705–871, 2022.
- Georg Ch. Pflug. Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. In: S. Uryasev (ed.), *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000, pp. 272–281.
- E. L. Porteus. The Newsvendor Problem. In: J. D. C. Little and S. C. Graves (eds.), *Building Intuition: Insights from Basic Operations Management Models and Principles*, pp. 115–134. Springer, 2008.

- M. Pritsker. Evaluating Value at Risk Methodologies: Accuracy versus Computational Time. *Journal of Financial Services Research*, 12(2–3):201–242, 1997.
- Y. Qin, R. Wang, A. J. Vakharia, Y. Chen, and M. M. H. Seref. The newsvendor problem: Review and directions for future research. *European Journal of Operational Research*, 213:361–374, 2011.
- S. T. Rachev, C. Menn, and F. J. Fabozzi. *Fat-Tailed and Skewed Asset Return Distributions: Implications for Risk Management, Portfolio Selection, and Option Pricing*. John Wiley & Sons, 2005.
- R. T. Rockafellar and S. Uryasev. Optimization of Conditional Value-at-Risk. Technical report, September 1999.
- R. T. Rockafellar and S. Uryasev. Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions. *Journal of Banking & Finance*, 26(7):1443–1471, 2002.
- R. T. Rockafellar, J. O. Royset, and S. I. Miranda. Superquantile regression with applications to buffered reliability, uncertainty quantification, and conditional value-at-risk. *European Journal of Operational Research*, 234(1):140–154, 2014.
- E. Sankarasubramanian and S. Kumaraswamy. Note on “Optimal Ordering Quantity to Realize a Pre-Determined Level of Profit”. *Management Science*, 29(4):512–514, 1983.
- S. Sarykalin, G. Serraino, and S. Uryasev. Value-at-Risk vs. Conditional Value-at-Risk in Risk Management and Optimization. *Tutorials in Operations Research*, INFORMS, 2008.
- W. Shih. A General Decision Model for Cost-Volume-Profit Analysis under Uncertainty. *The Accounting Review*, 54(4):687–706, 1979.
- E. A. Silver, D. F. Pyke, and R. Peterson. *Inventory Management and Production Planning and Scheduling* (3rd ed.). John Wiley & Sons, 1998.
- L. Tashman. Out-of-sample tests of forecasting accuracy: an analysis and review. *International Journal of Forecasting*, 16(4):437–450, 2000.
- S. Uryasev. Conditional Value-at-Risk: Optimization Algorithms and Applications. Technical report / tutorial, 2000.
- C. X. Wang and S. Webster. The loss-averse newsvendor problem. *Omega*, 37:93–105, 2009.
- M. Wu, S. X. Zhu, and R. H. Teunter. A risk-averse competitive newsvendor problem under the CVaR criterion. *International Journal of Production Economics*, 156:13–23, 2014.

- X. Xinsheng, Z. Meng, R. Shen, M. Jiang, and P. Ji. Optimal decisions for the loss-averse newsvendor problem under CVaR. *International Journal of Production Economics*, 164:146–159, 2015.
- G. Ch. Pflug. Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. In: S. Uryasev (ed.), *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- W. Ogryczak and A. Ruszczyński. Dual stochastic dominance and related mean-risk models. *SIAM Journal on Optimization*, 13(1):60–78, 2002.
- L. Eeckhoudt, C. Gollier, and H. Schlesinger. The Risk-Averse (and Prudent) Newsboy. *Management Science*, 41(5):786–794, 1995.