



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



ΜΑΡΙΟΣ ΓΙΩΤΗΣ

Πολική Παραγοντοποίηση και Μονότονη Αναδιάταξη
Διανυσματικών Συναρτήσεων

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2024

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα *Μαθηματικά (Ανάλυση-Άλγεβρα-Γεωμετρία)* που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 8/11/2024 από την Τριμελή Επιτροπή Εξέτασης:

Ιωάννης Γιαννούλης, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων (Επιβλέπων)

Χρήστος Σαρόγλου, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Μάριος Σταματάκης, Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.

Μάριος Γιώτης

Περίληψη

Στην παρούσα διατριβή παρουσιάζονται δύο αποτελέσματα του Yann Brenier από την εργασία του με τίτλο Polar Factorization and Monotone Rearrangement of Vector-Valued Functions, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XLIV, 375-417, 1991.

Σύμφωνα με το πρώτο αποτέλεσμα, το Θεώρημα Αναδιάταξης, αν (X, μ) είναι ένας χώρος πιθανότητας και $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ είναι ένας φραγμένος τόπος με σύνορο μηδενικού μέτρου Lebesgue, τότε για κάθε συνάρτηση $u \in L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d)$, $p \in [1, \infty)$, $d \geq 2$, υπάρχει μία μοναδική αναδιάταξη $u^\#$ της μορφής $\nabla \psi$ με $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ κυρτό και η απεικόνιση $u \mapsto u^\#$ είναι συνεχής.

Περαιτέρω, σύμφωνα με το δεύτερο αποτέλεσμα, το Θεώρημα Πολικής Παραγοντοποίησης, για u της ίδιας μορφής, τα οποία πληρούν επιπλέον μία συγκεκριμένη συνθήκη «μη εκφυλισμού», υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος $(u^\#, s)$, έτσι ώστε το $u^\#$ να είναι της πιο πάνω μορφής, s να είναι μία απεικόνιση από το (X, μ) στο Ω , η οποία διατηρεί το μέτρο, και $u = u^\# \circ s$. Αποδεικνύεται ακόμα, ότι η $u^\#$ είναι η πιο πάνω μοναδική αναδιάταξη του u , ότι η s είναι η μοναδική απεικόνιση που διατηρεί το μέτρο και μεγιστοποιεί το $\int_X u \cdot s d\mu$, καθώς και ότι η απεικόνιση $u \mapsto (u^\#, s)$ είναι συνεχής.

Η απόδειξη αυτών των αποτελεσμάτων γίνεται μέσω της μελέτης ενός κατάλληλου προβλήματος Monge-Kantorovich.

Η Διατριβή αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια. Στο πρώτο, εισαγωγικό, κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα δύο αποτελέσματα, δίνονται οι απαραίτητοι ορισμοί και περιγράφονται τα κίνητρα για τη θεμελίωση των αποτελεσμάτων αυτών, καθώς και η σχέση τους με το πρόβλημα Monge-Kantorovich. Το δεύτερο κεφάλαιο πραγματεύεται το πρόβλημα αυτό και θεμελιώνονται ιδιότητες της λύσης του, οι οποίες χρησιμοποιούνται στα επόμενα δύο κεφάλαια για την απόδειξη των δύο αποτελεσμάτων, αντίστοιχα.

Στο τέλος της διατριβής παρατίθεται η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε.

Abstract

In the present thesis two results of Yann Brenier are presented, from his article with title “Polar Factorization and Monotone Rearrangement of Vector-Valued Functions”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. XLIV, 375-417, 1991.

According to the first result, the Rearrangement Theorem, if (X, μ) is a probability space and $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ is a bounded domain with boundary of zero Lebesgue measure, then for every function $u \in L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d)$, $p \in [1, \infty)$, $d \geq 2$, there exists a unique rearrangement $u^\#$ of the form $\nabla \psi$ with $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ convex and the mapping $u \mapsto u^\#$ is continuous.

Furthermore, according to the second result, the Polar Factorization Theorem, for u of the same form which satisfy additionally a certain “nondegeneracy” condition, there exists a unique pair $(u^\#, s)$, such that $u^\#$ has the above form, s is a measure preserving mapping from (X, μ) to $\bar{\Omega}$, and $u = u^\# \circ s$. Moreover, it is shown, that $u^\#$ is the above unique rearrangement of u , that s is the unique measure preserving mapping that maximizes $\int_X u \cdot s d\mu$, and that the mapping $u \mapsto (u^\#, s)$ is continuous.

The proof of these results is carried out through the study of an appropriate Monge-Kantorovich problem.

The thesis consists of four chapters. In the first, introductory, chapter, the two results are presented, the needed definitions are given and the motivation for establishing these results is described together with their relation to the Monge-Kantorovich problem. The second chapter concerns this problem. Here, properties of its solution are established, which are then used in the next two chapters for the proof of the two main results, respectively.

At the end of the thesis the used bibliography is given.

1	Εισαγωγή	5
1.1	Προκαταρκτικά	5
1.1.1	Βασικές έννοιες	5
1.1.2	Η έννοια της αναδιάταξης	8
1.2	Τα κύρια αποτελέσματα	9
2	Το πρόβλημα Monge-Kantorovich	15
2.1	Οι διατυπώσεις των προβλημάτων MKP	15
2.2	Ύπαρξη λύσης του μεικτού MKP	16
2.2.1	Η περίπτωση συμπαγούς φορέα	16
2.2.2	Η γενική περίπτωση	24
3	Το Θεώρημα Αναδιάταξης	25
3.1	Συσχέτιση με ένα πρόβλημα Monge-Ampere	25
3.2	Απόδειξη του Θεωρήματος Αναδιάταξης	27
3.2.1	Δύο <i>a priori</i> αποτελέσματα	28
3.2.2	Ολοκλήρωση της απόδειξης του Θεωρήματος Αναδιάταξης	54
4	Το Θεώρημα Πολικής Παραγοντοποίησης	61
4.1	Ύπαρξη	61
4.2	Μοναδικότητα	66
4.3	Συνέχεια	67
4.4	Χαρακτηρισμός παραγόντων	71
	Βιβλιογραφία	75

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στόχος της εργασίας μας είναι η παρουσίαση και απόδειξη δύο βασικών θεωρημάτων, του Θεωρήματος Αναδιάταξης και του Θεωρήματος Πολικής Παραγοντοποίησης, σύμφωνα με το άρθρο [7] του Yann Brenier το 1989, το οποίο δίνει την ιστορικά πρώτη θεμελίωση αυτών των αποτελεσμάτων για διανυσματικές συναρτήσεις, τα οποία ανακοινώθηκαν από τον ίδιο συγγραφέα για πρώτη φορά στο [6] το 1987.

Η απόδειξη των θεωρημάτων αυτών θα γίνει με χρήση ενός προβλήματος της Θεωρίας Βέλτιστης Μεταφοράς, του προβλήματος Monge-Kantorovich, και πιο συγκεκριμένα μέσω της απόδειξης ύπαρξης λύσης του προβλήματος αυτού. Πιο κάτω, θα αναφέρουμε και στο ποιος είναι ο λόγος που η απόδειξη γίνεται κατά αυτόν τον τρόπο.

Τα κύρια αποτελέσματα αναφέρονται στην δεύτερη υποενότητα της παρούσας εισαγωγικής ενότητας, ενώ πριν αναφερθούμε σε αυτά, θα δώσουμε κάποιους χρήσιμους ορισμούς και κάποια γενικά αποτελέσματα που θα χρειαστούμε.

1.1 Προκαταρκτικά

1.1.1 Βασικές έννοιες

Αναφέρουμε εδώ κάποιες βασικές έννοιες Πραγματικών Συναρτήσεων, Τοπολογίας Μετρικών Χώρων, Θεωρίας Μέτρου και Συναρτησιακής Ανάλυσης, οι οποίες εμφανίζονται στην εργασία.

Ορισμός 1. Έστω $X, Y \subset \mathbb{R}$. Μία συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ ονομάζεται μη φθίνουσα, αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$. Μία συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ ονομάζεται μη αύξουσα, αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Ορισμός 2. Έστω $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ και $x \in D \subseteq \mathbb{R}^d$. Η f ονομάζεται κάτω ημισυνεχής (l.s.c.) στο x αν

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \tau.ω : \quad f(x) - \epsilon < f(y), \quad \forall y \in B(x, \delta) \cap D.$$

Ομοίως, η f ονομάζεται άνω ημισυνεχής (e.s.c.) στο x αν

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \tau.ω : \quad f(y) < f(x) + \epsilon, \quad \forall y \in B(x, \delta) \cap D.$$

Η f ονομάζεται συνεχής στο $x \Leftrightarrow$ αν η f είναι άνω και κάτω ημισυνεχής στο σημείο x .

Ορισμός 3. Μία ακολουθία (x_n) σε έναν μετρικό χώρο (X, δ) ονομάζεται ακολουθία *Cauchy* αν για κάθε πραγματικό αριθμό $r > 0$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος N τέτοιος ώστε: $\forall m \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow d(x_m, x_n) < r$. Ένας μετρικός χώρος (X, δ) ονομάζεται πλήρης αν κάθε ακολουθία *Cauchy* στον X συγκλίνει στον X .

Ορισμός 4. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $D \subseteq X$ λέγεται πυκνό αν ισχύει $\overline{D} = X$, όπου $\overline{D}$ η κλειστή θήκη του D . Ένας γραμμικός χώρος X με νόρμα λέγεται διαχωρίσιμος αν υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο το οποίο είναι πυκνό στον X .

Ορισμός 5. Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο. Μία κλάση $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του Ω λέγεται σ-άλγεβρα αν ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
3. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Η μικρότερη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ που περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ λέγεται σ-άλγεβρα *Borel* και τα σύνολα που περιέχονται σε αυτήν λέγονται σύνολα *Borel*.

Ορισμός 6. Έστω $(X, \mathcal{B})$ μετρήσιμος χώρος (δηλαδή το $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα του X) και έστω Y ένας τοπολογικός χώρος. Μία απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ με την ιδιότητα $f^{-1}(V) \in \mathcal{B}$ για όλα τα ανοικτά σύνολα V του Y λέγεται *Borel μετρήσιμη συνάρτηση*.

Ορισμός 7.¹ Το $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ονομάζεται χώρος μέτρου αν

- $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα στο Ω ,
- μ είναι μέτρο, δηλαδή $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ ικανοποιεί:
 1. $\mu(\emptyset) = 0$,
 2. $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, όπου (A_n) αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο στοιχείων του $\mathcal{M}$.

Τα στοιχεία του $\mathcal{M}$ ονομάζονται μετρήσιμα σύνολα.

- Το μέτρο μ λέγεται σ-πεπερασμένο, αν υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $(\Omega_n) \in \mathcal{M}$ τέτοια ώστε:

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$$

και

$$\mu(\Omega_n) < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

¹[8]

Τα σύνολα $E \in \mathcal{M}$ με την ιδιότητα $\mu(E) = 0$ ονομάζονται αμελητέα ή σύνολα μηδενικού μέτρου. Θα λέμε ότι μία ιδιότητα ισχύει σ.π. (σχεδόν παντού) ή για σχεδόν όλα τα $x \in \Omega$ ή για σχεδόν κάθε $x \in \Omega$, αν η ιδιότητα αυτή ισχύει σε όλο το Ω εκτός από ένα σύνολο μηδενικού μέτρου.

Ορισμός 8. Έστω $I = [a, b]$ κλειστό, φραγμένο διάστημα πραγματικών αριθμών και $\mathcal{B}(I)$ η συλλογή συνόλων Borel του I . Ένα πεπερασμένο μέτρο μ στο $\mathcal{B}(I)$, ονομάζεται μέτρο Borel.

Ορισμός 9. Έστω T γραμμικός τελεστής με $T : X \rightarrow Y$, όπου X, Y διανυσματικοί χώροι με νόρμες $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$. Θα ονομάζουμε τον T συμπαγή τελεστή αν κάθε φραγμένο σύνολο στον X είναι πλήρως φραγμένο στον Y , δηλαδή αν κάθε ακολουθία σε φραγμένο σύνολο του X έχει υπακοιουθία Cauchy στον Y με τη νόρμα $\|\cdot\|_Y$.

Ορισμός 10. Έστω X, Y δύο διανυσματικοί χώροι με νόρμες $\|\cdot\|_X$ και $\|\cdot\|_Y$ αντίστοιχα. Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι $X \subseteq Y$. Θα λέμε ότι ο X είναι συμπαγώς ενσωματωμένος στον Y και θα γράφουμε $X \subset\subset Y$ αν:

1. Ο X είναι συνεχώς ενσωματωμένος στον Y , δηλαδή αν υπάρχει σταθερά $c > 0$ τ.ω.
 $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$
2. Η ταυτοτική απεικόνιση $I : X \rightarrow Y$ είναι συμπαγής τελεστής.

Ορισμός 11. Έστω X τοπολογικός χώρος και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής πραγματική συνάρτηση. Τότε ο φορέας (ή στήριγμα, *support*) της f ορίζεται ως:

$$\text{supp}(f) := \text{cl}_X(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = \overline{f^{-1}(\{0\}^c)}.$$

Για παράδειγμα, έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & |x| < 2, \\ 0, & |x| \leq 2. \end{cases}$$

Τότε έχουμε ότι $f(x) \neq 0$ για $x \in (-2, 2)$, ενώ $f(x) = 0$ για $x \in (-2, 2)^c$ και άρα ισχύει $\text{supp}(f) = [-2, 2]$.

Ορισμός 12. Ο φορέας μίας συνάρτησης f είναι εξ ορισμού κλειστό σύνολο. Αν επιπλέον το σύνολο αυτό είναι και φραγμένο, η συνάρτηση λέμε ότι στηρίζεται συμπαγώς (*compactly supported*).

Η συνθήκη μια συνάρτηση να έχει συμπαγή φορέα είναι ισχυρότερη από τη συνθήκη μία συνάρτηση να τείνει στο 0, όπως φαίνεται και στο παράδειγμα

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Ισχύει ότι $f(x) \rightarrow 0$ για $|x| \rightarrow \infty$, όμως $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και συνεπώς $\text{supp}(f) = \mathbb{R}$. Άρα $\text{supp}(f)$ όχι συμπαγές.

1.1.2 Η έννοια της αναδιάρθρωσης

Σημαντικό ρόλο για την κατανόηση των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασία παίζουν οι ακόλουθες έννοιες:

Ορισμός 13. Μία απεικόνιση που διατηρεί το μέτρο από έναν χώρο πιθανότητας (X, μ) σε έναν άλλο χώρο πιθανότητας (Y, ν) είναι μία απεικόνιση $s : X \rightarrow Y$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &\text{για κάθε } \nu\text{-μετρήσιμο υποσύνολο } A \text{ του } Y, \\ &\text{το } s^{-1}(A) \text{ είναι } \mu\text{-μετρήσιμο και ισχύει } \mu(s^{-1}(A)) = \nu(A), \end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &\text{για κάθε } \nu\text{-ολοκληρώσιμη συνάρτηση } f, \\ &\eta \ f \circ s \text{ είναι } \mu\text{-ολοκληρώσιμη και ισχύει } \int_X f \circ s \, d\mu = \int_Y f \, d\nu. \end{aligned}$$

Μία απεικόνιση που διατηρεί το μέτρο δεν είναι απαραίτητα 1-1. Για παράδειγμα, έστω οι χώροι πιθανότητας $(X, \mu) = (Y, \nu) = ([0, 1], |\cdot|)$, όπου $|\cdot|$ το μέτρο Lebesgue. Ορίζουμε την απεικόνιση $s(x) = \min(2x, 2-2x)$, $s : X \rightarrow Y$ με $\mu = \nu = |\cdot|$ και $X \equiv Y \equiv [0, 1]$. Τότε:

$$\begin{aligned} s &: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ s(0) &= \min(0, 2) = 0 \\ s(1) &= \min(2, 0) = 0 \\ &\Rightarrow s(0) = s(1) \end{aligned}$$

(Μάλιστα ισχύει $s([0, 1/2]) = s([1/2, 0]) = [0, 1]$.) Άρα η s δεν είναι 1-1.

Ορισμός 14. Αν υπάρχει απεικόνιση $s : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ που είναι 1-1 και διατηρεί το μέτρο, όπου (X, μ) , (Y, ν) χώροι μέτρου πιθανότητας, τότε οι δύο χώροι λέγονται ισομορφικοί.

Σε αυτήν την εργασία θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με χώρους πιθανότητας που είναι ισομορφικοί με τον $([0, 1], |\cdot|)$. Ο περιορισμός αυτός ωστόσο δεν είναι ιδιαίτερα ισχυρός, αφού για παράδειγμα, κάθε διαχωρίσιμος πλήρης μετρικός χώρος X , εφοδιασμένος με ένα μέτρο Borel μ τέτοιο ώστε $\mu(X) = 1$ και $\mu(\{x\}) = 0$ για κάθε $x \in X$, είναι ισομορφικός με τον $([0, 1], |\cdot|)$, βλ. π.χ. [21].

Ορισμός 15. Έστω $p \in [1, +\infty)$ και $d \in \mathbb{N}$. Ονομάζουμε αναδιάρθρωση του $u \in L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d)$ στο (Y, ν) κάθε $v \in L^p(Y, \nu; \mathbb{R}^d)$ τέτοιο ώστε

$$\int_X f(u(x)) \, d\mu(x) = \int_Y f(v(y)) \, d\nu(y) \quad \forall f \in C(\mathbb{R}^d) \text{ τ.ω. } |f(\zeta)| \leq c \cdot (1 + \|\zeta\|^p).$$

Για μη φθίνουσες αναδιάρθρωσεις πραγματικών συναρτήσεων $u \in L^p(X, \mu; \mathbb{R})$ στο μοναδιαίο διάστημα (δηλαδή όταν $d = 1$ και $(Y, \nu) = ([0, 1], |\cdot|)$) υπάρχει το ακόλουθο κλασικό αποτέλεσμα:²

²[13],[5],[17],[3]

Πρόταση 1.1.1. Έστω (X, μ) χώρος πιθανότητας ισομορφικός με τον $([0, 1], |\cdot|)$ και $1 \leq p < +\infty$. Τότε, για κάθε $u \in L^p(X, \mu)$, υπάρχει μία μοναδική μη φθίνουσα αναδιάταξη $u^\# \in L^p(0, 1)$ και η απεικόνιση $u \rightarrow u^\#$ είναι συνεχής από τον $L^p(X, \mu)$ στον $L^p(0, 1)$.

Για μια τέτοια μη φθίνουσα αναδιάταξη $u^\#$ μιας πραγματικής συνάρτησης u αποδεικνύονται επιπλέον οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\|u_1^\# - u_2^\#\|_{L^p(0,1)} \leq \|u_1 - u_2\|_{L^p(X,\mu)}$,
2. $\int_0^1 u_1^\# u_2^\# dx \geq \int_X u_1 u_2 d\mu \quad \forall u_1, u_2 \in L^2(X, \mu)$,
3. Για κάθε $u \in L^p(X, \mu)$ υπάρχει μία απεικόνιση $s : (X, \mu) \rightarrow ([0, 1], |\cdot|)$ που διατηρεί το μέτρο, τέτοια ώστε $u = u^\# \circ s$.³

1.2 Τα κύρια αποτελέσματα

Αφότου παραθέσαμε τους ορισμούς και τις ιδιότητες που θα χρειαστούμε, αναφέρουμε τα δύο βασικά αποτελέσματα-θεωρήματα που θέλουμε να αποδείξουμε, δηλαδή το Θεώρημα Αναδιάταξης Διανυσματικών Συναρτήσεων αρχικά και το Θεώρημα της Πολυικής Παραγοντοποίησης Διανυσματικών Συναρτήσεων στη συνέχεια.

Στην προηγούμενη υποενότητα παρουσιάσαμε το Θεώρημα Αναδιάταξης για μη φθίνουσες πραγματικές συναρτήσεις, βλ. την Πρόταση 1.1.1. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία αναφέρονται σε διανυσματικές συναρτήσεις.

Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε συναρτήσεις $u \in L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d)$ με $d > 1$.

Στη θέση του ανοικτού διαστήματος $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ στην Πρόταση 1.1.1, θεωρούμε ένα ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ και στη θέση του μέτρου Lebesgue μ στην Πρόταση 1.1.1, θεωρούμε ένα μέτρο πιθανότητας β στον $\bar{\Omega}$ τέτοιο ώστε (τ.ω.) $\beta(\partial\Omega) = 0$ και υποθέτουμε ότι ισχύει $d\beta(z) = \beta(z)dz$, για κάποια Lebesgue ολοκληρώσιμη μη αρνητική συνάρτηση β , η οποία είναι φραγμένη μακριά από το 0 σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω . Αυτό συνεπάγεται ότι το β έχει τα ίδια αμελητέα σύνολα (σύνολα μηδενικού μέτρου) με το μέτρο Lebesgue, το οποίο σημαίνει πως το β είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, και αντίστροφα (Θεώρημα Radon-Nikodym). Παρατηρούμε ότι ο $(\bar{\Omega}, \beta)$ είναι ισομορφικός με το $([0, 1], |\cdot|)$, βλ. Ορισμό 14 και [21].

Στα επόμενα βασικό ρόλο θα έχει ο σταθμισμένος χώρος Sobolev

$$W^{1,p}(\Omega, \beta) = \{f \in L^p(\Omega, \beta), \nabla f \in L^p(\Omega, \beta; \mathbb{R}^d)\},$$

και υποθέτουμε ότι αυτός είναι συμπαγώς ενσωματωμένος (βλ. Ορισμό ;;) στον $L^p(\Omega, \beta)$, το οποίο ισχύει όταν το Ω είναι λείο και το β είναι φραγμένο μακριά από το 0 και το $+\infty$ στο $\bar{\Omega}$.

Υπό τις παραπάνω υποθέσεις, τα κύρια αποτελέσματα που θα αποδείξουμε σε αυτήν την εργασία είναι τα ακόλουθα:

³[22]

Θεώρημα 1.2.1. (Θεώρημα Αναδιάταξης) Για κάθε $u \in L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d)$, υπάρχει μοναδική αναδιάταξη (βλ. τον Ορισμό 15) $u^\#$ που ανήκει στην κλάση

$$K = \{\nabla\psi; \psi \in W^{1,p}(\Omega, \beta); \psi \text{ κυρτό}\} \subseteq L^p(\Omega, \beta; \mathbb{R}^d)$$

και η απεικόνιση $u \rightarrow u^\#$ είναι συνεχής από τον $L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d)$ στον $L^p(\Omega, \beta; \mathbb{R}^d)$.

Θεώρημα 1.2.2. (Θεώρημα Πολικής Παραγοντοποίησης) Έστω N το σύνολο όλων των $u \in L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d)$ για το οποίο η παρακάτω συνθήκη μη εκφυλισμού αποτυγχάνει:

$$\mu(u^{-1}(E)) = 0, \quad \forall \text{ Lebesgue αμελητέο } E \subseteq \mathbb{R}^d. \quad (1.2.1)$$

Τότε, για κάθε $u \in L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d) \setminus N$, υπάρχει μοναδικό ζεύγος $(u^\#, s)$, τέτοιο ώστε το $u^\#$ ανήκει στο K , s είναι απεικόνιση που διατηρεί το μέτρο από το (X, μ) στο $(\bar{\Omega}, \beta)$ και $u = u^\# \circ s$.

Επίσης:

1. η συνάρτηση $u^\#$ είναι η μοναδική αναδιάταξη του u στο K ,
2. η συνάρτηση s είναι η μοναδική απεικόνιση που διατηρεί το μέτρο και μεγιστοποιεί το $\int_X u(x) \cdot s(x) d\mu(x)$,
3. η απεικόνιση $u \rightarrow (u^\#, s)$ είναι συνεχής από τον $L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d) \setminus N$ στον $L^p(\Omega, \beta; \mathbb{R}^d) \times L^q(X, \mu; \mathbb{R}^d)$ για κάθε $q \in [1, +\infty)$.

Το K αποτελεί, ως προς τον $L^p(\Omega, \beta; \mathbb{R}^d)$, τη γενίκευση της κλάσης όλων των συναρτήσεων στον $L^p(0, 1)$ που είναι μη φθίνουσες. Το Θεώρημα 1.2.1 αποτελεί δηλαδή τη γενίκευση του κλασικού αποτελέσματος για μη φθίνουσες αναδιατάξεις σε πραγματικές συναρτήσεις, η οποία αντιστοιχεί στην ειδική περίπτωση $d = 1$ και $(\bar{\Omega}, \beta) = ([0, 1], |\cdot|)$.

Κίνητρο για τη μελέτη του Θεωρήματος Πολικής Παραγοντοποίησης 1.2.2 αποτέλεσε η μελέτη του προβλήματος προβολής (projection problem)⁴. Εδώ έχουμε $(X, \mu) = (\bar{\Omega}, \beta) = (\bar{\Omega}, |\cdot|)$ και $p = 2$. Ας ορίσουμε ως H τον χώρο Hilbert $L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ και ως S ένα σύνολο που περιέχει όλες τις απεικονίσεις που διατηρούν το μέτρο από τον $(X, |\cdot|)$ στον εαυτό του, το οποίο σημαίνει πως:

$$\forall f \in L^1(\Omega), \quad f \circ s \in L^1(\Omega) \quad \text{και} \quad \int_{\Omega} f \circ s dx = \int_{\Omega} f(x) dx. \quad (1.2.2)$$

Το σύνολο S είναι ένα κλειστό, μη κυρτό, μη συμπαγές και φραγμένο υποσύνολο του H και περιέχεται σε μία σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων. Πράγματι, από τη σχέση 1.2.2 έχουμε:

$$\|s\|^2 = \int_{\Omega} \|s(x)\|^2 dx = \int_{\Omega} \|x\|^2 dx = c,$$

όπου $c > 0$ σταθερά.

Ας ορίσουμε τώρα το πρόβλημα προβολής:

Πρόβλημα 1.2.1. Ζητείται $s \in S$ το οποίο ελαχιστοποιεί το $\|u - s\|^2 = \int_{\Omega} \|u(x) - s(x)\|^2 dx$ ή, ισοδύναμα, μεγιστοποιεί το $((u, s)) = \int_{\Omega} u(x) \cdot s(x) dx$.

⁴[6]

Όπως αναφέραμε και στο Θεώρημα 1.2.2, όταν ικανοποιείται η συνθήκη του μη εκφυλισμού 1.2.1, ο παράγοντας s στην πολική παραγοντοποίηση του $u = u^\# \circ s$, $\forall u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$, είναι ακριβώς ο μοναδικός μεγιστοποιητής στο S του $\int_\Omega u(x) \cdot s(x) dx$ και άρα είναι η μοναδική Hilbert προβολή του u στο S .

Το πρόβλημα προβολής, είναι καταλυτικό για να καταλάβουμε την έννοια της πολικής παραγοντοποίησης. Για παράδειγμα, το σύνολο K που ορίζεται εδώ ως

$$K = \{\nabla\psi; \psi \in W^{1,2}(\Omega); \psi \text{ κυρτή}\} \subseteq L^2(\Omega; \mathbb{R}^d),$$

είναι στενά συνδεδεμένο με το πρόβλημα προβολής. Πράγματι, μπορεί ναδειχθεί ότι το K είναι ακριβώς το σύνολο όλων των $u \in H^5$, για τα οποία η ταυτοτική απεικόνιση $\lceil$ είναι Hilbert προβολή του u στο S :

$$K = \{u \in H; \|u - \lceil\| \leq \|u - s\|, \forall s \in S\}$$

ή ισοδύναμα

$$K = \{u \in H; ((u, \lceil - s)) \geq 0, \forall s \in S\}.$$

Παρατηρούμε ότι στη γλώσσα της Κυρτής Ανάλυσης, το K είναι ένας πολικός κώνος του S (ή ισοδύναμα της κυρτής θήκης του S). Αυτή η γεωμετρική περιγραφή της πολικής παραγοντοποίησης μπορεί να γίνει ακόμα πιο ακριβής, παρατηρώντας ότι το S είναι ημιομάδα ως προς τη σύνθεση συναρτήσεων,

$$s_1 \circ s_2 \in S, \quad \forall s_1, s_2 \in S,$$

η οποία έχει την ταυτοτική απεικόνιση $\lceil$ ως ουδέτερο στοιχείο. Στην περίπτωση που το S ήταν ομάδα (το οποίο δεν είναι, αφού για παράδειγμα στην περίπτωση $(\bar{\Omega}, |\cdot|) = ([0, 1], |\cdot|)$, η $s(x) = \min(2x, 2-2x)$ δεν είναι αντιστρέψιμο στο S), το Θεώρημα Πολικής Παραγοντοποίησης θα προέκυπτε από τη μελέτη του προβλήματος προβολής. Πράγματι, αν το $u \in H$ έχει Hilbert προβολή $s \in S$, όπου το s είναι αντιστρέψιμο στο S , τότε το u επιδέχεται της πολικής παραγοντοποίησης $u = k \circ s$, όπου το k ορίζεται ως $k = u \circ s^{-1}$ και ανήκει στο K , αφού για κάθε $\sigma \in S$, λόγω της ιδιότητας 1.2.2 έχουμε

$$\|k - \sigma\| = \|u - \sigma \circ s\| \geq \|u - s\| = \|k - \lceil\|.$$

Υπάρχει και γενικότερη απάντηση στον πρόβλημα προβολής, η οποία δίνεται μέσω του Θεωρήματος Edelman⁶, το οποίο αναφέρει πως «σχεδόν κάθε» $u \in H$, υπό την έννοια του Baire, έχει μοναδική προβολή $s = \pi(u)$ στο S . Αυτό οφείλεται στο ότι το S είναι κλειστό, φραγμένο υποσύνολο του χώρου Hilbert. Στην περίπτωσή μας, ωστόσο, το S δεν είναι ομάδα και άρα δεν υπάρχει λόγος το s να είναι γενικά αντιστρέψιμο, και συνεπώς δεν υπάρχει τρόπος να ανακτήσουμε τον παράγοντα k της πολικής παραγοντοποίησης του u . Λόγω αυτής της δυσκολίας δεν μπορούμε να επιλύσουμε τα θεωρήματά μας μέσω του θεωρήματος προβολής. Τα κύρια αποτελέσματα της εργασίας μας και η απόδειξή τους βασίζονται στη μελέτη του προβλήματος Monge-Kantorovich. Να σημειωθεί ότι ακόμα και να αντικαθιστούσαμε το S με την ομάδα G , όλων των αντιστρέψιμων απεικονίσεων στο

⁵[7]

⁶[4]

S που διατηρούν το μέτρο, αυτό δεν θα μας βοηθούσε, αφού το G δεν είναι κλειστό στο H και άρα δεν θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Edelstein. Ακόμα και η αν «γεωμετρική» αυτή προσέγγιση προβλήματός μας μέσω μίας ομάδας και με προβολή Hilbert δεν μπορεί να μας οδηγήσει στα συμπεράσματα και αποτελέσματα στα οποία στοχεύουμε εδώ, δηλαδή στην απόδειξη των θεωρημάτων μας, είναι παρ' όλα αυτά ενδιαφέρουσα και παρουσιάζεται στο [7, Σελ. 2], με την οποία ωστόσο δεν θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία. Αναφέρουμε απλά ότι εκεί αποδεικνύεται το ακόλουθο αφηρημένο αποτέλεσμα: Έστω ένας χώρος Hilbert H , ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο S και ένας κανόνας σύνθεσης $*$ στον $S \times H$ έτσι ώστε το $(S, *)$ να είναι ομάδα και να ισχύει $\|s * u\| = \|u\|$ για κάθε $u \in H, s \in S$. Τότε, υπό πρόσθετες προϋποθέσεις, αποδεικνύεται ότι για σχεδόν κάθε $u \in H$ υπάρχει μοναδική πολική παραγοντοποίηση $u = s * k, s \in S, k \in K$. Επίσης, αποδεικνύεται πως η $u \rightarrow s$ είναι η κλίση της Lipschitz συνεχούς και κυρτής συνάρτησης $j(u) = \sup_{s \in S} ((u, s))$, η οποία είναι ο μετασχηματισμός Legendre-Fenchel της χαρακτηριστικής συνάρτησης του S .

Η απόδειξη των θεωρημάτων μας βασίζεται στην παρατήρηση πως το πρόβλημα προβολής (projection problem) είναι μία παραλλαγή του προβλήματος (βέλτιστης) μεταφοράς (μάζας) (mass transference problem) που διατυπώθηκε από τον Monge τον 18ο αι.⁷ και γενικεύτηκε στην συνέχεια από τον Kantorovich το 1940.⁸ Η σύγχρονη εκδοχή των προβλημάτων Monge (MP) και Monge-Kantorovich (MKP) είναι η εξής:

Πρόβλημα 1.2.2. Έστω δύο συμπαγείς μετρικοί χώροι πιθανότητας $(X, \mu), (Y, \nu)$ και μία συνεχής συνάρτηση κόστους (θετική και μη φθίνουσα) $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$. Ζητείται μία απεικόνιση $1 - 1$ που διατηρεί το μέτρο, από το (X, μ) στον (Y, ν) , η οποία ελαχιστοποιεί το κόστος μεταφοράς $\int_X c(x, s(x)) d\mu(x)$.

Πρόβλημα 1.2.3. Έστω δύο συμπαγείς μετρικοί χώροι πιθανότητας $(X, \mu), (Y, \mu)$ και μία συνεχής συνάρτηση κόστους $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$. Ζητείται ένα μέτρο πιθανότητας γ στον $X \times Y$ με περιθώρια τα μ και ν αντίστοιχα, δηλαδή:

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x) d\gamma(x, y), \quad \forall f \in C(X),$$

και

$$\int_Y g(y) d\nu(y) = \int_{X \times Y} g(y) d\gamma(x, y), \quad \forall g \in C(Y),$$

το οποίο ελαχιστοποιεί το γενικευμένο κόστος μεταφοράς, $\int c(x, y) d\gamma(x, y)$.

Το MKP είναι μία ασθενής έκδοση του MP, υπό την έννοια πως κάθε αποδεκτή λύση s στο MP δίνει μία αποδεκτή λύση γ στο MKP που ορίζεται ως:

$$d\gamma(x, y) = \delta(y - s(x)) d\mu(x).$$

Το MKP έχει πολλές εφαρμογές και μία πιο ολοκληρωμένη παρουσίασή του δίνεται στο βιβλίο του Rachev.⁹ Το MKP είναι ένα απειροδιάστατο γραμμικό πρόγραμμα (linear

⁷[16]

⁸[15]

⁹[19]

program) και κομβικό ρόλο στην ανάλυσή του, η οποία αναπτύχθηκε από τον Kantorovich, παίζει η μελέτη του δυϊκού γραμμικού προγράμματος:

$$I = \inf \left\{ \int f d\mu + \int g d\nu, \quad f \in C(X), g \in C(Y), \quad \tau.\omega. \quad f(x) + g(y) \leq c(x, y) \right\}$$

Το πρόβλημα προβολής αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου $(X, \mu) = (Y, \nu) = (\bar{\Omega}, |\cdot|)$ και $c(x, y) = \|u(x) - y\|^2$. Ζητείται μία απεικόνιση s που διατηρεί το μέτρο, όχι απαραίτητα $1-1$, με το s να ελαχιστοποιεί το κόστος $\int_{\Omega} c(x, s(x)) dx$. Στο αντίστοιχο πρόβλημα MKP, Ζητείται ένα «διπλά στοχαστικό» μέτρο πιθανότητας στο $\bar{\Omega} \times \Omega$, το οποίο σημαίνει ότι τα περιθώρια μέτρα στο γ είναι $|\cdot|$, το οποίο ελαχιστοποιεί το κόστος $I = \int \|u(x) - y\|^2 d\gamma$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση κόστους δεν είναι απαραίτητα συνεχής, αφού $u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Παρ' όλα αυτά, το MKP είναι ακόμα καλά τεθιμένο, αφού το c είναι αυτόματα ολοκληρώσιμο για κάθε διπλά στοχαστικό μέτρο πιθανότητας.

Στην παρούσα εργασία, θεωρούμε ένα διαφορετικό MKP το οποίο γενικεύει το πρόβλημα προβολής με έναν άλλο τρόπο. Ζητείται ένα μέτρο πιθανότητας p στον $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$, με τα ακόλουθα περιθώρια μέτρα (marginal measures ή marginals):

$$\int f(u(x)) dx = \int f(y) dp(x, y)$$

$$\int f(x) dx = \int f(x) dp(x, y)$$

$\forall f \in C(\bar{\Omega})$, το οποίο ελαχιστοποιεί το $I = \int \|x - y\|^2 dp(x, y)$. Κάθε αποδεκτή λύση s του προβλήματος προβολής, αντιστοιχεί σε μία αποδεκτή λύση p αυτού το «νέου» MKP, η οποία ορίζεται ως:

$$\int f(x, y) dp(x, y) = \int f(s(x), u(x)) dx, \quad \forall f \in C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}).$$

Το πλεονέκτημα του νέου αυτού MKP είναι ότι η συνάρτηση κόστους $c(x, y) = \|y - x\|^2$ είναι πλέον πολύ πιο απλή και είναι λεία.

Οι αποδείξεις των δύο κύριων θεωρημάτων αυτής της εργασίας, δίνονται στο τρίτο και τέταρτο κεφάλαιο, αντίστοιχα, και βασίζονται στη μελέτη του προβλήματος Monge-Kantorovich (MKP), το οποίο παρουσιάζεται και επιλύεται στο δεύτερο κεφάλαιο. Για να κάνουμε απλούστερη την απόδειξη, μελετάμε την περίπτωση $u \in L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d)$, όπου $p = 1$, η οποία είναι λιγότερο περιοριστική. Αυτό ισχύει, αφού ο χώρος πιθανότητας (X, μ) , αλλά και όλοι οι χώροι $L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d)$ περιέχονται στον $L^1(X, \mu; \mathbb{R}^d)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ MONGE-KANTOROVICH

2.1 Οι διατυπώσεις των προβλημάτων MKP

Η απόδειξή μας βασίζεται στη μελέτη του προβλήματος Monge-Kantorovich (MKP). Έχουμε ένα μέτρο πιθανότητας α στον $\mathbb{R}^d$ τ.ω. $\int (1 + \|y\|) d\alpha(y) < +\infty$ και υπάρχουν τρία προβλήματα για το MKP:

Πρόβλημα 2.1.1. (Το αρχικό MKP)

Ζητούνται $\phi \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d, \alpha)$ και $\psi \in C(\Omega) \cap L^1(\Omega, \beta)$ τα οποία ϕ, ψ ελαχιστοποιούν το $\int \phi d\alpha$ και ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\int \psi d\beta = 0$$

$$\phi(y) + \psi(z) \geq y \cdot z, \quad \forall (y, z) \in \mathbb{R}^d \times \Omega$$

Πρόβλημα 2.1.2. (Το δυϊκό MKP)

Ζητείται μέτρο πιθανότητας p στον $\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}$ το οποίο μεγιστοποιεί το $\int y \cdot z dp(y, z)$ υπό τις ακόλουθες συνθήκες:

$$\int \|y\| dp(y, z) < +\infty$$

Τα α, β είναι τα περιθώρια μέτρα του p στον $\mathbb{R}^d$ και $\bar{\Omega}$ αντίστοιχα, το οποίο σημαίνει:

$$\int f(y) dp(y, z) = \int f(y) d\alpha(y), \quad \forall f \in C(\mathbb{R}^d) \quad \text{τ.ω.} \quad |f(y)| \leq c \cdot (1 + \|y\|)$$

και

$$\int g(z) dp(y, z) = \int g(z) \beta(z) dz, \quad \forall g \in C(\bar{\Omega})$$

Τα δύο προηγούμενα προβλήματα μπορούν να συνδυαστούν στο ακόλουθο:

Πρόβλημα 2.1.3. (Το μεικτό MKP)

Ζητούνται $\phi \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d, \alpha)$ και $\psi \in C(\Omega) \cap L^1(\Omega, \beta)$ και μέτρο πιθανότητας p στον $\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}$ τ.ω. :

$$\phi(y) + \psi(z) \geq y \cdot z, \quad \forall (y, z) \in \mathbb{R}^d \times \Omega$$

$$\int \|y\| dp(y, z) < +\infty$$

Τα α, β είναι τα περιθώρια μέτρα του p στον $\mathbb{R}^d$ και $\bar{\Omega}$ αντίστοιχα

$$\int \psi d\beta = 0$$

και

$$\int \phi d\alpha \leq \int y \cdot z dp(y, z)$$

Πόρισμα 2.1.1. Παρατηρούμε ότι στο δυϊκό MKP και στο μεικτό MKP, το p είναι υποχρεωτικά ένα σφιχτό (*tight*) μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}$, αφού ισχύει $\int \|y\| dp(y, z) < +\infty$ και $p(\mathbb{R}^d \times \partial\Omega) = \beta(\partial\Omega) = 0$, επειδή το β είναι περιθώριο του p , από την υπόθεση στην εισαγωγή.

Η μελέτη των τριών αυτών προβλημάτων καθιστά αναγκαίο τον ορισμό του υποσυνόλου K_0 του χώρου Sobolev $W^{1,1}(\Omega, \beta)$ που ορίζεται ως:

$$K_0 = \{\psi \in W^{1,1}(\Omega, \beta) \cap C(\Omega); \int \psi d\beta = 0, \\ \exists \tilde{\psi} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \text{ κυρτό, l.s.c., τ.ω.: } \psi = \tilde{\psi} \text{ στο } \Omega.\}$$

2.2 Ύπαρξη λύσης του μεικτού MKP

Θα αποδείξουμε την ύπαρξη λύσης (ϕ, ψ, p) του μεικτού MKP, λύση στην οποία βασίζονται οι αποδείξεις των κύριων αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, ανάλογα με το αν το α έχει συμπαγή φορέα ή όχι.

2.2.1 Η περίπτωση συμπαγούς φορέα

Στην περίπτωση που το α έχει συμπαγή φορέα και περιέχεται σε κάποια μπάλα $B(0, R)$ (στηρίζεται συμπαγώς).

$$\text{supp}(\alpha) \subseteq B(0, R)$$

Από κλασικά αποτελέσματα Κυρτής Ανάλυσης, βλ. π.χ. [19], [10], έχουμε:

Πρόταση 2.2.1. (Ισχυρή αρχή δυϊκότητας)

Υπάρχει μέτρο πιθανότητας p στον $B(0, R) \times \bar{\Omega}$, με περιθώρια μέτρα τα α, β που ικανοποιούν τη σχέση :

$$\int yz dp(y, z) = I$$

Όπου I :

$$I = \inf \left\{ \int \phi d\alpha + \int \psi d\beta; \quad \phi \in C(B(0, R)), \psi \in C(\bar{\Omega}), \phi(y) + \psi(z) \geq yz, \forall (y, z) \in B(0, R) \times \bar{\Omega} \right\}$$

Απόδειξη της Πρότασης 2.2.1: Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1 και την Παρατήρηση 4.2 στο [10]

Θεώρημα 4.1

Ας υποθέσουμε ότι J είναι κυρτή, ότι $\inf P$ είναι πεπερασμένο και ότι

$$\exists u_0 \in V \text{ τέ.ω. } J(u_0, \Lambda u_0) < +\infty,$$

ώστε η συνάρτηση $p \rightarrow J(u_0, p)$ να είναι συνεχής στο Λu_0 .

Τότε:

$$\inf P = \sup P^*.$$

Παρατήρηση 4.2

Μπορούμε να γράψουμε το J ως:

$$J(u, \Lambda u) = F(u) + G(\Lambda u).$$

Τότε :

$$\inf P = \inf_{u \in V} [F(u) + G(\Lambda u)].$$

Ορίζουμε:

$$V = C(B(0, R)) \times C(\overline{\Omega}),$$

$$Y = C(B(0, R) \times \overline{\Omega})$$

και τον τελεστή Λ με :

$$\Lambda : V \rightarrow Y,$$

$$\Lambda(\phi, \psi)(y, z) = \phi(y) + \psi(z), \quad (y, z) \in B(0, R) \times \overline{\Omega}$$

και :

$$F : V \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad F(\phi, \psi)(y, z) = \int \phi d\alpha + \int \psi d\beta,$$

$$G : Y \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \{+\infty\}, \quad G(\theta) = \begin{cases} 0 & , \alpha \nu \quad \theta(y, z) \geq yz, \forall (y, z) \\ +\infty & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\theta = \Lambda(\phi, \psi).$$

Ισχυρισμός: Οι συνθήκες του Θεωρήματος 4.1 ικανοποιούνται.

Απόδειξη. J κυρτό, $J : V \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} : J(u, \Lambda u) = F(u), \quad u = (\phi, \psi)$

$\inf P < +\infty$ με

$$P = F(\phi, \psi) + G(\Lambda(\phi, \psi)) = F(u) + G(\Lambda u)$$

$$\Rightarrow \inf_{(\phi, \psi) \in V} P = \inf_{(\phi, \psi) \in V} [F(u) + G(\Lambda u)]^1$$

$$\Rightarrow J^*(u, p) = F^*(u) + G^*(p), \quad F^* \in \Gamma(V^*) \quad \text{συζυγής του} \quad F, G^* \in \Gamma(Y^*) \quad \text{συζυγής του} \quad G.^2$$

¹4.16 [10]

²4.17 [10]

$$\Rightarrow \sup_{p \in Y^*} P^* = \sup_{p \in Y^*} [-F^*(\Lambda^* p) - G^*(-p)].^3$$

Τα F, G, J είναι κυρτά σύνολα, $F \in \Gamma(V), G \in \Gamma(Y), J \in \Gamma(V \times Y)$

$$\Rightarrow \exists u_0 \in V : J(u_0, \Lambda u_0) < +\infty,$$

$$p \rightarrow J(u_0, p) \text{ συνεχής στο } \Lambda u_0.^4$$

Από το Θεώρημα 4.1 έχουμε:

$$\inf_{(\phi, \psi) \in V} P = \sup_{p \in Y^*} P^* \text{ έχει τουλάχιστον 1 λύση το } p, p \in B(0, R) \times \bar{\Omega}.$$

$$\Rightarrow \inf_{\phi, \psi \in V} [F(\phi, \psi) + G(\Lambda(\phi, \psi))] = \sup_{p \in Y^*} [-F^*(\Lambda^* p) - G^*(-p)]$$

με $Y^* = C(B(0, R) \times \bar{\Omega})'$, δυϊκός .

$$\text{άρα : } G^*(-p) = \begin{cases} -\int yz dp(y, z), & p \geq 0 \\ +\infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$F^*(\Lambda^* p) = \begin{cases} 0, & \alpha, \beta \text{ περιθωριακά} \\ +\infty, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\Theta = \Lambda(\phi, \psi)$$

$$G(\Theta) = G(\Lambda(\phi, \psi)) = \begin{cases} 0, & \Lambda(\phi, \psi)(y, z) \geq yz \\ +\infty, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Από τον ορισμό του $\Lambda(\phi, \psi)$:

$$G(\Lambda(\phi, \psi)) = \begin{cases} 0, & \phi(y) + \psi(z) \geq yz, (y, z) \in B(0, R) \times \bar{\Omega} \\ +\infty, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$F(\phi, \psi)(y, z) = \int \phi d\alpha + \int \psi d\beta,$$

Επειδή το α είναι περιθώριο του p :

$$\int \phi dp(y, z) = \int \phi d\alpha$$

Αφού β περιθώριο του p :

$$\int \psi dp(y, z) = \int \psi d\beta$$

Οπότε έχουμε λόγω α, β περιθωρίων του $p \geq 0$:

$$\sup_{p \in Y^*} [-F^*(\Lambda^* p) - G^*(-p)] = \sup_{p \in Y^*} [0 - (-\int yz dp(y, z))] = \int yz dp(y, z)$$

³4.18 [10]

⁴4.21 [10]

$$\begin{aligned}
I &= \inf_{(\phi, \psi) \in V} [F(\phi, \psi) + G(\Lambda(\phi, \psi))] = \\
&= \inf_{(\phi, \psi) \in V} \left[\int \phi d\alpha + \int \psi d\beta, \phi \in C(B(0, R)), \psi \in C(\bar{\Omega}), \phi(y) + \psi(z) \geq yz, \forall (y, z) \in B(0, R) \times \bar{\Omega} \right] \\
\text{με } G(\Lambda(\phi, \psi)) &= G(\theta) = 0, \quad \forall (y, z) \in B(0, R) \times \bar{\Omega} : \quad \phi(y) + \psi(z) \geq yz.
\end{aligned}$$

□

Η πρόταση αυτή δεν μας εξασφάλισε την ύπαρξη ζευγαριού (ϕ, ψ) που λαμβάνει το $\inf_{(\phi, \psi) \in V}$, δηλαδή την ύπαρξη ελαχίστου.
 Αν όμως υπάρχει τέτοιο ζεύγος, τότε το μεικτό MKP θα έχει λύση.
 Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$\begin{aligned}
&\exists \phi \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d, \alpha) \\
&\exists \psi \in C(\Omega) \cap L^1(\Omega, \beta)
\end{aligned}$$

Υπάρχει p μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}$ τ.ω. :

$$\phi(y) + \psi(z) \geq yz, \forall (y, z) \in \mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}.$$

Για το y υπάρχει συγκεκριμένα :

$$y \in B(0, R) \subseteq \mathbb{R}^d \Rightarrow \int \|y\| dp(y, z) < +\infty.$$

Τα α, β είναι περιθώρια του p στο $\mathbb{R}^d$ και $\bar{\Omega}$ αντίστοιχα .

$$\int yz dp(y, z) = \inf \left\{ \int \phi d\alpha + \int \psi d\beta \right\} \Rightarrow \int yz dp(y, z) \geq \int \phi d\alpha$$

Μας απομένει να δείξουμε ότι:

$$\int \psi d\beta = 0.$$

Δουλεύουμε στον χώρο K_0 και συγκεκριμένα $\psi \in K_0$.

Έστω ακολουθία ελαχιστοποίησης $(\phi_n, \psi_n), \phi_n \in C(B(0, R)), \psi_n \in C(\bar{\Omega})$ τ.ω.:

$$\phi_n(y) + \psi_n(z) \geq yz, \quad \forall (y, z) \in B(0, R) \times \bar{\Omega}.$$

$$\int \phi_n d\alpha + \int \psi_n d\beta \rightarrow I.$$

Υποθέτουμε ότι: $\min_{B(0, R)} \phi_n = 0$, χωρίς να επηρεάζονται οι παραπάνω ιδιότητες και :

$$\phi_n \rightarrow \inf_{B(0, R)} \phi_n = \min_{B(0, R)} \phi_n.$$

Από το βιβλίο του Rachev, υπάρχει φυσική τροποποίηση (regularization) της ακολουθίας ελαχιστοποίησης τ.ω. :

$$\tilde{\psi}_n(z) = \sup_{y \in B(0,R)} \{yz - \phi_n(y)\}, \forall z \in \mathbb{R}^d$$

$$\tilde{\phi}_n(y) = \sup_{z \in \bar{\Omega}} \{yz - \tilde{\psi}_n(z)\}, \forall y \in \mathbb{R}^d.$$

Επιπλέον, η ακολουθία $(\tilde{\phi}_n, \tilde{\psi}_n)$ έχει τις ιδιότητες:

- είναι ακολουθία ελαχιστοποίησης
- είναι συμπαγής για την ομοιόμορφα συγκλίνουσα τοπολογία στον $B(0, R) \times \bar{\Omega}$.

Θδο: $\tilde{\phi}_n, \tilde{\psi}_n$ ομοιόμορφα Lip συνεχής στον $\mathbb{R}^d$.

Έχουμε:

$$\min_{B(0,R)} \phi_n = 0 \Rightarrow \min_{y \in B(0,R)} \phi_n(y) = 0 \quad (2.2.1)$$

και από τη σχέση (2.2.1):

$$\tilde{\psi}_n(z) = \sup_{y \in B(0,R)} \{yz - \phi_n(y)\}, \forall z \in \mathbb{R}^d$$

$$\tilde{\psi}_n(0) = \sup_{y \in B(0,R)} \{-\phi_n(y)\} = 0. \quad (2.2.2)$$

Έστω τυχαία $z, x \in \mathbb{R}^d$ τ.ω. :

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}_n(z) - \tilde{\psi}_n(x)| &= \left| \sup_{y \in B(0,R)} yz - \phi_n(y) - \sup_{y \in B(0,R)} yx - \phi_n(y) \right| \\ \left| \sup_{y \in B(0,R)} yz - \phi_n(y) - \sup_{y \in B(0,R)} yx - \phi_n(y) \right| &= \left| \sup_{y \in B(0,R)} yz - \phi_n(y) - yx + \phi_n(y) \right| \\ \left| \sup_{y \in B(0,R)} yz - \phi_n(y) - yx + \phi_n(y) \right| &\leq \sup_{y \in B(0,R)} |yz - yx| \\ \sup_{y \in B(0,R)} |yz - yx| &= \sup_{y \in B(0,R)} |y(z - x)| \\ \sup_{y \in B(0,R)} |y(z - x)| &\leq \|y\| \sup_{y \in B(0,R)} \|z - x\| \\ \|y\| \sup_{y \in B(0,R)} \|z - x\| &= \|y\| \cdot \|z - x\| \end{aligned}$$

Επειδή $y \in B(0, R)$

$$\|y\| \cdot \|z - x\| \leq R \cdot \|z - x\|$$

$$\Rightarrow |\tilde{\psi}_n(z) - \tilde{\psi}_n(x)| \leq R \cdot \|z - x\|, \quad \forall z, x \in \mathbb{R}^d$$

Άρα αποδείξαμε ότι η $\tilde{\psi}_n$ είναι Lipschitz με $Lip(\tilde{\psi}_n) \leq R$.

Επιπλέον ισχύει:

$$\tilde{\phi}_n(0) = \sup_{z \in \bar{\Omega}} \{0 \cdot z - \tilde{\psi}_n(z)\} = \sup_{z \in \bar{\Omega}} \{-\tilde{\psi}_n(z)\} \geq -\tilde{\psi}_n(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}^d.$$

$$\Rightarrow \tilde{\phi}_n(0) \geq -\tilde{\psi}_n(z), \forall z$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για όλα τα z , άρα συγκεκριμένα για $z = 0$ έχουμε:

$$\tilde{\phi}_n(0) \geq -\tilde{\psi}_n(0) = 0.$$

Από την σχέση (2.2.2) αποδεικνύεται πως ισχύει :

$$\sup(A - B) = \sup A - \inf B.$$

Απόδειξη:

ορίζω:

$$k = \sup(A - B), z_A = \sup A, z_B = \inf B$$

$$\text{Έστω } x \in A - B \Rightarrow x = a - b, \quad a \in A, b \in B$$

$$b \in B \Rightarrow b \geq z_B \Rightarrow -b \leq -z_B$$

$$a \in A \Rightarrow a \leq z_A$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω σχέσεις:

$$\Rightarrow x \leq z_A - z_B$$

Τότε το $z_A - z_B$ είναι άνω φράγμα του $A - B \Rightarrow$

$$\sup(A - B) \leq \sup A - \inf B.$$

$z_A \in A, z_B \in B$ αφού παίρνουμε τα $\inf, \sup$ πάνω από το $\bar{\Omega}$, το οποίο είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο.

Οι ιδιότητες αυτές μας οδηγούν στα ακόλουθα συμπεράσματα:

$$\Rightarrow z_A - z_B \in A - B$$

$$\Rightarrow z_A - z_B \leq \sup(A - B)$$

Οπότε:

$$\sup A - \inf B \leq \sup(A - B).$$

Άρα:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_n(y) &= \sup_{z \in \bar{\Omega}} yz - \inf_{z \in \bar{\Omega}} \tilde{\psi}_n(z) \\ z \in \bar{\Omega} \subseteq B(0, R) &\Rightarrow \sup_{z \in \bar{\Omega}} \leq r \\ y &\leq \|y\|.\end{aligned}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_n(y) &\leq r\|y\| - \inf_{\bar{\Omega}} \tilde{\psi}_n \\ 0 = -\tilde{\psi}_n(0) &\leq \tilde{\phi}_n(y) \leq r\|y\| - \inf_{\bar{\Omega}} \tilde{\psi}_n\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

$$|\tilde{\psi}_n(z) - \tilde{\psi}_n(x)| \leq R \cdot \|z - x\|, \forall x, z \in \mathbb{R}^d$$

Η σχέση αυτή ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$, έτσι επιλέγουμε για $x = 0$.

$$\begin{aligned}|\tilde{\psi}_n(z) - \tilde{\psi}_n(0)| &\leq R \cdot \|z - 0\| \\ |\tilde{\psi}_n(z)|R \cdot \|z\| &\leq R \cdot r, \quad \forall z \in \mathbb{R}^d,\end{aligned}$$

αφού ισχύει ότι $z \in \bar{\Omega} \subseteq B(0, r)$.

Άρα

$$-rR \leq \tilde{\psi}_n(z) \leq rR, \quad \forall z \in \bar{\Omega}.$$

Άρα $-rR$ κάτω φράγμα του $\tilde{\psi}_n(z)$ και ισχύει:

$$-rR \leq \inf_{z \in \bar{\Omega}} \tilde{\psi}_n(z) \Rightarrow -\inf_{z \in \bar{\Omega}} \tilde{\psi}_n(z) \leq rR\tag{2.2.4}$$

από τις παραπάνω σχέσεις

$$0 \leq \tilde{\phi}_n(y) \leq r\|y\| + rR = r(\|y\| + R), \quad \forall y \in \mathbb{R}^d$$

οπότε :

$$\begin{aligned}|\tilde{\phi}_n(y) - \tilde{\phi}_n(x)| &= |\sup_{z \in \bar{\Omega}} \{yz - \tilde{\psi}_n(z) - xz + \tilde{\psi}_n(z)\}| = \\ &= |\sup_{z \in \bar{\Omega}} \{yz - xz\}| \leq \|z\| \cdot \|y - x\| \leq r \cdot \|y - x\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

Η τελευταία ανίσωση ισχύει διότι $z \in \bar{\Omega} \subseteq B(0, R)$

Άρα η συνάρτηση $\tilde{\phi}_n$ είναι Lipschitz στον $\mathbb{R}^d$ με $Lip(\tilde{\phi}_n) \leq r$.
Από το Θεώρημα Arzela-Ascoli, βλ. π.χ. [21], σελ. 208, έχουμε

Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $\{f_n\}$ ομοιόμορφα φραγμένη, ισοσυνεχής ακολουθία στον $C(X)$. Τότε υπάρχει υπακολουθία της $\{f_n\}$ η οποία συγγλίνει ομοιόμορφα στο X σε μία συνάρτηση f συνεχή στο X .

Οι συναρτήσεις (ϕ, ψ) είναι Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις τ.ω:

$$\phi_n \rightarrow \phi, \quad \text{ομοιόμορφα στο } B(0, R).$$

και :

$$\psi_n \rightarrow \psi, \quad \text{ομοιόμορφα στο } \overline{\Omega}.$$

Τα α, β έχουν συμπαγή φορέα από την εκφώνηση, άρα:

$$\psi \in C(\Omega) \cap L^1(\Omega, \beta)$$

$$\phi \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d, \alpha).$$

Επιπρόσθετα ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\tilde{\phi}_n(y) = \sup_{z \in \overline{\Omega}} \{yz - \tilde{\psi}_n(z)\}$$

$$\tilde{\phi}_n(y) \geq yz - \tilde{\psi}_n(z), \forall z \in \overline{\Omega}$$

$$\tilde{\phi}_n(y) + \tilde{\psi}_n(z) \geq yz, \forall z$$

Οπότε για $n \rightarrow +\infty$ έχουμε ότι:

$$\phi(y) + \psi(z) \geq yz, \forall (y, z) \in \mathbb{R}^d \times \overline{\Omega}.$$

Από τους ορισμούς των $\tilde{\phi}_n(y), \tilde{\psi}_n(z)$ έχουμε :

$$\tilde{\phi}_n(y) \leq \phi_n(y), \forall y \in B(0, R)$$

και

$$\tilde{\psi}_n(z) \leq \psi_n(z), \forall z \in \overline{\Omega}.$$

Άρα η ακολουθία $(\tilde{\phi}_n, \tilde{\psi}_n)$ είναι ακολουθία ελαχιστοποίησης, με $\int \phi d\alpha + \int \psi d\beta \leq I$, αφού το I είναι το $\inf$.

Επιπλέον μπορούμε να θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι:

$$\int \psi d\beta = 0 \Rightarrow (\phi, \psi, p) \text{ λύνει το μεικτό MKP.}$$

Η τελευταία πρόταση αποτελεί το τέλος της απόδειξης για την συμπαγή περίπτωση.

2.2.2 Η γενική περίπτωση

Στην γενική περίπτωση όπου δεν υπάρχει συμπαγεία, αν ικανοποιηθούν οι συνθήκες της Πρότασης 3.2.2, η ίδια η πρόταση εξασφαλίζει λύση για το μεικτό MKP. Οπότε θα δείξω ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες της πρότασης.

Μπορούμε να προσεγγίσουμε το α , από μία ακολουθία a_n , η οποία έχει συμπαγή φορέα και είναι ακολουθία μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^d$.

Τότε από την πρώτη περίπτωση της συμπαγείας, η a_n , έχει λύση (ϕ_n, ψ_n, p_n) για το μεικτό MKP, που αντιστοιχεί στην a_n . Άρα από την πρόταση 3.2.2:

$$\Rightarrow \exists (\phi, \psi, p) \text{ λύση του μεικτού MKP.}$$

Άρα:

$$\exists \alpha_n \rightarrow \alpha, \quad \alpha_n \text{ με συμπαγή φορέα.}$$

Ορίζω για $n \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο :

$$\int f d\alpha_n = c_n \int_{\|y\| \leq n} f(y) d\alpha, \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R}^d), \quad c_n = \alpha(B(0, n))^{-1}.$$

και:

$$\int f d\alpha_n \rightarrow \int f d\alpha, \quad \forall f \in C(\mathbb{R}^d) \quad \text{τ.ω:} \quad |f(y)| \leq c \cdot (1 + \|y\|).$$

Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 3.2.2, η οποία αναφέρεται στο επόμενο κεφάλαιο και μας εξασφαλίζει μία λύση για το μεικτό MKP που αντιστοιχεί στο α .

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξή μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗΣ

3.1 Συσχέτιση με ένα πρόβλημα Monge-Ampère

Το Θεώρημα Αναδιάταξης 1.2.1 μπορεί να θεωρηθεί ως θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας μιας γενικευμένης λύσης για το πρόβλημα Monge-Ampère, το οποίο είναι το ακόλουθο:

Πρόβλημα 3.1.1. (*Monge-Ampère Problem*)

Δίνεται $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\alpha \geq 0$ τέτοιο ώστε $\int (1 + \|y\|^p) \alpha(y) dy < +\infty$. Ζητείται μία *Lipschitz* συνεχής κυρτή συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί :

$$\beta(\nabla \phi(y)) \det D^2 \phi(y) = \alpha(y), \forall y \in \text{supp}(\alpha), \quad (3.1.1)$$

$$\nabla \phi \text{ απεικονίζει το } \text{supp}(\alpha) \text{ στο } \overline{\Omega}. \quad (3.1.2)$$

Συνήθως η εξίσωση Monge-Ampère στηρίζεται σε φραγμένο και κυρτό πεδίο ορισμού με συνοριακές συνθήκες Dirichlet ή Neumann.¹ Πιο συγκεκριμένα:

- Οι συνοριακές συνθήκες Dirichlet :

$$\phi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \text{στο } \partial\Omega.$$

- Οι συνοριακές συνθήκες Neumann:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu|_{\partial\Omega}} = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega.$$

Στην περίπτωση τη δική μας, τις συνοριακές αυτές συνθήκες αντικαθιστά η ιδιότητα (3.1.2).

Για να δούμε τη σχέση του προβλήματος Monge-Ampère με το Θεώρημα Αναδιάταξης 1.2.1 ορίζουμε μία διαφορετική εκδοχή του τελευταίου, που βασίζεται στην εξής παρατήρηση: αυτό που μας ενδιαφέρει στο Θεώρημα 1.2.1 είναι το μέτρο πιθανότητας α , το οποίο σχετίζεται με το $u \in L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d)$ και ορίζεται ως:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y) d\alpha(y) = \int_X f(u(x)) d\mu(x), \quad (3.1.3)$$

¹[9]

για κάθε $f \in C(\mathbb{R}^d)$ με την f να έχει συμπαγή φορέα.

Επιπλέον, $(1 + \|y\|^p) d\alpha(y)$ είναι ένα σφιχτό (tight) θετικό μέτρο, δηλαδή :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\|y\| \geq r} (1 + \|y\|^p) d\alpha(y) = 0$$

και η σχέση (3.1.3) ισχύει και για $\forall f \in C(\mathbb{R}^d)$ τέτοιο ώστε $|f(y)| \leq c \cdot (1 + \|y\|^p)$.

Επίσης, αν η ακολουθία u_n συγκλίνει στο $u \in L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d)$, τότε για το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας α_n ισχύει:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_n \int_{\|y\| \geq r} (1 + \|y\|^p) d\alpha_n(y) = 0.$$

Οπότε, το α_n συγκλίνει στο α υπό την έννοια: $\int f d\alpha_n \rightarrow \int f d\alpha$ για κάθε $f \in C(\mathbb{R}^d)$ για το οποίο ισχύει $|f(y)| \leq c \cdot (1 + \|y\|^p)$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε πως το Θεώρημα Αναδιάταξης 1.2.1 είναι συνέπεια του παρακάτω θεωρήματος:

Θεώρημα 3.1.1. Για κάθε μέτρο πιθανότητας α στον $\mathbb{R}^d$ που ικανοποιεί την συνθήκη $\int (1 + \|y\|^2) d\alpha(y) < +\infty$, υπάρχει μοναδικό $u^\# = \nabla \psi^\#$ στο K τέτοιο ώστε :

$$\int f(y) d\alpha(y) = \int_{\Omega} f(\nabla \psi^\#(z)) d\beta(z), \quad (3.1.4)$$

για κάθε $f \in C(\mathbb{R}^d)$ τέτοια ώστε $|f(y)| \leq c \cdot (1 + \|y\|^p)$.

Επιπλέον, αν $\int f d\alpha_n \rightarrow \int f d\alpha$ για ακολουθία α_n μέτρων πιθανότητας και για $f \in C(\mathbb{R}^d)$ τέτοια ώστε $|f(y)| \leq c \cdot (1 + \|y\|^p)$, τότε $\psi_n^\# \rightarrow \psi^\#$ στον $W^{1,p}(\Omega, \beta) \setminus \mathbb{R}$.

Για την απόδειξη του ότι το Θεώρημα Αναδιάταξης 1.2.1 προκύπτει από το Θεώρημα 3.1.1, παρατηρούμε τα εξής:

Έστω u όπως στο Θεώρημα 1.2.1 και έστω α το μέτρο πιθανότητας που ορίζεται στην (3.1.3) και το οποίο ικανοποιεί τη συνθήκη $\int (1 + \|y\|^p) d\alpha(y) < +\infty$. Τότε, το Θεώρημα 3.1.1 μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει μοναδικό $u^\# = \nabla \psi^\# \in K$ έτσι ώστε

$$\int_X f(u(x)) d\mu(x) = \int_{\Omega} f(u^\#(z)) d\beta(z)$$

για κάθε $f \in C(\mathbb{R}^d)$ τέτοια ώστε $|f(y)| \leq c \cdot (1 + \|y\|^p)$. Αυτό όμως σημαίνει, εξ ορισμού, ότι το $u^\#$ είναι η μοναδική αναδιάταξη του $u \in L^1(X, \mu; \mathbb{R}^d)$ στο $(\bar{\Omega}, \beta)$ και ισχύει:

$$u^\# = \nabla \psi^\# \in K.$$

Μένει να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση $u \rightarrow u^\#$ είναι συνεχής.

Έστω τυχαίο $u_n \rightarrow u \in L^1$.

Όπως είδαμε πιο πάνω αυτό συνεπάγεται την παρακάτω σύγκλιση:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y) d\alpha_n(y) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(y) d\alpha(y)$$

για κάθε $f \in C(\mathbb{R}^d)$ τέτοια ώστε $|f(y)| \leq c \cdot (1 + \|y\|^p)$.

Από το Θεώρημα (3.1.1) προκύπτει όμως τότε:

$$u_n^\# = \nabla \psi_n^\# \rightarrow \nabla \psi^\# = u^\#$$

στον $L^p(\Omega, \beta; \mathbb{R}^d)$ και άρα $u \rightarrow u^\#$ συνεχής.

Άρα αποδείχτηκε το Θεώρημα Αναδιάταξης 1.2.1.

Η συσχέτιση του Θεωρήματος 3.1.1 με το πρόβλημα Monge-Ampère μπορεί να γίνει στην περίπτωση όπου το α είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue υπό την έννοια: $d\alpha(y) = \alpha(y)dy$, $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\alpha \geq 0$. Η σχέση αυτή σημαίνει πως η συνάρτηση u ικανοποιεί την έννοια του μη εκφυλισμού της ιδιότητας (1.2.1).

Πράγματι, από το Θεώρημα 3.1.1 και τη σχέση (3.1.4) καταλήγουμε στο ότι η $\psi^\#$ είναι κυρτή συνάρτηση και η $\nabla \psi^\#$ απεικονίζει το $\bar{\Omega}$ στο $\text{supp}(\alpha)$.

Έστω ο μετασχηματισμός Legendre-Fenchel $\phi^\#$ της $\psi^\#$,² που ορίζεται ως:

$$\phi^\#(y) = \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi^\#(z)\}, \quad y \in \mathbb{R}^d$$

Θα δείξουμε στην απόδειξη ότι η $\phi^\#$ είναι Lipschitz συνεχής στον $\mathbb{R}^d$ και ότι η $\nabla \phi^\#$ είναι καλά ορισμένη σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^d$. Οπότε έχουμε ότι:

$$\nabla \phi^\#(\nabla \psi^\#(z)) = z, \text{ για } z \text{ σ.π. στο } \Omega.$$

$$\nabla \psi^\#(\nabla \phi^\#(y)) = y, \text{ για } \alpha\text{-σ.π. } y \in \mathbb{R}^d.$$

Έτσι, $\nabla \psi^\#$ και $\nabla \phi^\#$ είναι αντίστροφες η μία της άλλης και ειδικότερα για κάθε συνάρτηση με συμπαγή φορέα $f \in C(\mathbb{R}^d)$ ισχύει:

$$\int_{\Omega} f(\nabla \psi^\#(z)) \beta(z) dz = \int_{\text{supp}(\alpha)} f(y) \beta(\nabla \phi^\#(y)) \det D^2 \phi^\#(y) dy,$$

αποτέλεσμα που προκύπτει θέτοντας: $y = \nabla \psi^\#(z)$ και $z = \nabla \phi^\#(y)$.

Επιπλέον από τον ορισμό του $\psi^\#$ έχουμε :

$$\int_{\Omega} f(\nabla \psi^\#(z)) \beta(z) dz = \int f(y) \alpha(y) dy,$$

στην περίπτωση αυτή, η $\phi^\#$ ικανοποιεί, υπό τη γενικευμένη έννοια της συνθήκης (3.1.2), την εξίσωση Monge-Ampere (3.1.1).

3.2 Απόδειξη του Θεωρήματος Αναδιάταξης

,

²[10]

3.2.1 Δύο *a priori* αποτελέσματα

Για το μεικτό πρόβλημα MKP που διατυπώσαμε στην Ενότητα 2.1 θα δείξουμε εδώ δύο *a priori* αποτελέσματα των λύσεών του. Από αυτά, μαζί φυσικά με την απόδειξη ύπαρξης λύσης του μεικτού MKP που δώσαμε στην Ενότητα 2.2, θα ακολουθήσουν τα κύρια αποτελέσματα που θέλουμε να αποδείξουμε.

Πρόταση 3.2.1. Υποθέτουμε ότι το μεικτό MKP έχει μία λύση (ψ, ϕ, p) . Τότε:

1. Το ψ ανήκει στο K_0 και $\|\nabla\psi\|_{L^1(\Omega, \beta)} = \int \|y\| da(y)$.
2. $\phi = \psi^*$, *a σ.π.* στον $\mathbb{R}^d$, όπου ψ^* είναι ο μετασχηματισμός Legendre του ψ που ορίζεται ως:

$$\psi^*(y) = \sup_{z \in \Omega} y \cdot z - \psi(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^d.$$

3. $dp(y, z) = \delta(y - \nabla\psi(z))\beta(z) dz$.
4. $\int \phi d\alpha = \int y \cdot z dp(y, z)$ και $\int \psi d\beta = 0$.
5. (ψ, ϕ) είναι η μοναδική λύση του αρχικού MKP και p η μοναδική λύση του δυϊκού MKP.

Επιπλέον, αν το a είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue τότε:

1. $z = \nabla\psi^*(y), y = \nabla\psi(z)$, *p-σ.π.* στον $\mathbb{R}^d \times \overline{\Omega}$.
2. $\nabla\psi^*(\nabla\psi(z)) = z$, *β-σ.π.* στο $\overline{\Omega}$ και $\nabla\psi(\nabla\psi^*(y)) = y$, *a-σ.π.* στον $\mathbb{R}^d$.
3. $dp(y, z) = \delta(y - \nabla\psi^*(y)) d\alpha(y)$.

Πρόταση 3.2.2. Έστω (a_n) μία ακολουθία απο μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^d$ τ.ω

$$\int f da_n \rightarrow \int fa, \forall f \in C(\mathbb{R}^d) \text{ τ.ω. } |f(y)| \leq cst(1 + \|y\|).$$

Αν (ψ_n, ϕ_n, p_n) είναι μία λύση του μεικτού MKP που αντιστοιχεί στην a_n , τότε το μεικτό MKP που αντιστοιχεί στο a έχει μία μοναδική λύση (ψ, ϕ, p) και

1. $\phi_n \rightarrow \phi$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$,
2. $\psi_n \rightarrow \psi$ στον $W^{1,1}(\Omega, \beta)$,
3. $\int f dp_n \rightarrow \int f dp, \quad \forall f \in C(\mathbb{R}^d \times \overline{\Omega}) \text{ τ.ω. } |f(y, z)| \leq cst(1 + \|y\|).$

Από την ύπαρξη λύσης του μεικτού MKP, την οποία αποδείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, και τις παραπάνω προτάσεις καταλήγουμε στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.2.1. (Λύση του MKP) Το μεικτό MKP έχει μοναδική λύση (ψ, ϕ, p) , το (ψ, ϕ) είναι μοναδική λύση του αρχικού MKP και το p είναι μοναδική λύση του δυϊκού MKP. Όλες οι ιδιότητες των παραπάνω Προτάσεων 3.2.1, 3.2.2 ικανοποιούνται.

Στο τέλος της παρούσας Ενότητας 3.2, στην Υποενότητα 3.2.2, θα δούμε ότι το Θεώρημα 3.2.1 συνεπάγεται το Θεώρημα 3.1.1, από το οποίο, όπως είδαμε στην προηγούμενη Υποενότητα 3.1, προκύπτει το Θεώρημα Αναδιάταξης 1.2.1.

Περνάμε τώρα στην απόδειξη των Προτάσεων 3.2.1 και 3.2.2.

Το σύνολο Ω , είναι φραγμένο και το $\bar{\Omega}$ περιέχεται στην μπάλα $B(0, r)$ για κάποιο $r > 0$. Για να αποδείξουμε τις παραπάνω προτάσεις θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες του συνόλου K_0 , όπως έχει οριστεί.

Πρόταση 3.2.3.

(a) Για κάθε ψ στο K_0 , ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

1. $-2rM \leq \psi(z), \forall z \in \Omega$, όπου $M = \int \|\nabla \psi\| d\beta$.
2. (a') $\psi(z) \leq 2r\|\nabla \psi(z)\|$, σ.π. στο Ω .
(β') $\psi(z) \leq C(\delta)rM$, $\forall z \in \Omega$, όπου $\delta = \text{dist}(z, \partial\Omega)$
3. $\int |\psi| d\beta \leq 4rM$.
4. Ο μετασχηματισμός Legendre-Fenchel ψ^* του ψ που ορίζεται ως :

$$\psi^*(y) = \sup_{z \in \Omega} \{y \cdot z - \psi(z)\}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^d, \quad (3.2.1)$$

είναι Lipschitz συνεχής στον $\mathbb{R}^d$ και ικανοποιεί:

$$-r\|y\| \leq \psi^*(y) \leq r\|y\| + 2rM, \quad \forall y \in \mathbb{R}^d, \quad (3.2.2)$$

$$\text{Lip}(\psi^*) \leq r \quad (3.2.3)$$

και

$$\psi(z) = \psi^{**}(z) = \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \{y \cdot z - \psi^*(y)\}, \quad \forall z \in \Omega. \quad (3.2.4)$$

(β) Έστω (ψ_n) μία ακολουθία στο K_0 τ.ω. $\int \|\nabla \psi_n\| d\beta \leq M$. Τότε υπάρχει υπακολουθία, με δείκτη ν , και ζεύγος (ψ, ϕ) τ.ω.:

- $\psi \in C(\Omega) \cap L^1(\Omega, \beta), \phi \in C(\mathbb{R}^d)$,
- $\phi(y) + \phi(z) \geq y \cdot z, \forall z \in \Omega$,
- $\psi_n \rightarrow \psi$ στο $L^1(\Omega, \beta)$ και συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω ,
- $\psi_n^* \rightarrow \phi$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $L^1(\Omega, \beta)$,
- $|\psi_n^*(y)| \leq r(2M + \|y\|)$.

Απόδειξη. Το σύνολο Ω είναι φραγμένο, άρα $\Omega \subseteq B(0, r)$ για κάποιο $r > 0$, που συνεπάγεται ότι $\bar{\Omega}$ είναι φραγμένο, το οποίο σημαίνει ότι $\bar{\Omega} \subseteq B(0, r')$, για κάποιο $r' > 0$. Επίσης

ο $W^{1,1}(\Omega, \beta)$ υποτίθεται συμπαγώς ενσωματωμένος (ζομπαστλψ εμβεδδεδ) στον $L^1(\Omega, \beta)$.
Υπενθυμίζουμε ότι το K_0 ορίζεται ως :

$$K_0 = \{\psi \in W^{1,1}(\Omega, \beta) \cap C(\Omega); \int \psi d\beta = 0, \exists \tilde{\psi} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \text{κυρτή, 1.s.c, τ.ω. } \psi = \tilde{\psi} \text{ στο } \Omega\}.$$

Έστω $\psi \in K_0 \Rightarrow \psi \in C(\Omega) \Rightarrow \psi$ συνεχής συνάρτηση στο Ω και $\int \psi d\beta = 0$.

Άρα $\exists z_0 \in \Omega$ τέτοιο ώστε: $\psi(z_0) = 0$.

Αφού $c \in W^{1,1}(\Omega, \beta) \Rightarrow \nabla \psi$ ορίζεται σ.π στο Ω (το β και το μέτρο Lebesgue, αφού τα μέτρα αυτά έχουν τα ίδια αμελητέα σύνολα από την υπόθεση.)

$$W^{1,1}(\Omega, \beta) = \{f \in L^1(\Omega, \beta), \nabla f \in L^1(\Omega, \beta; \mathbb{R}^d)\}$$

όπου:

$$L^1(\Omega, \beta; \mathbb{R}^d) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \beta\text{-μέτρο πιθανότητας στο } \overline{\Omega}, \|f\|_{L^1(\Omega, \beta; \mathbb{R}^d)} < +\infty\}, \beta(\overline{\Omega}) = 1 \quad (3.2.5)$$

και

$$\|f\|_{L^1(\Omega, \beta; \mathbb{R}^d)} = \int_{\Omega} \|f\|_{\mathbb{R}^d} d\beta \quad (3.2.6)$$

Έστω $\psi \in K_0 \Rightarrow \psi \in C(\Omega) \Rightarrow \psi$ συνεχής στο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ και $\|\psi\|_{L^1(\Omega, \beta; \mathbb{R}^d)} = \int_{\Omega} \|\psi\|_{\mathbb{R}^d} d\beta < +\infty$

$\Rightarrow \nabla \psi \in L^1(\Omega, \beta; \mathbb{R}^d)$ και $\int \psi d\beta = 0 \Rightarrow \exists \zeta_0 \in \Omega$ τ.ω. $\psi(\zeta_0) = 0$.

ψ κυρτή $\Rightarrow \psi(\zeta) \geq y$, όπου y εφαπτομένη της ψ . ($\forall y$)

$z_0 \in \Omega \Rightarrow$

$$y - \psi(z_0) = \nabla \psi(z_0)(z - z_0) \quad (3.2.7)$$

εφαπτομένη στο $z_0 \Rightarrow$

$$y = \psi(z_0) + \nabla \psi(z_0)(z - z_0) \quad (3.2.8)$$

άρα $\psi(z) \geq \psi(z_0) + \nabla \psi(z_0)(z - z_0)(+)$

$\psi \in C(\Omega) \Rightarrow \psi$ συνεχής στο Ω . (1)

$\nabla \psi \in \Omega \Rightarrow \psi$ διαφορίσιμη στο Ω . (2)

$z_0 \in \Omega$ τ.ω. $\psi(z_0) = 0$

Θδο $\forall z \in \Omega, \psi(z_0) \geq \psi(z) + \nabla \psi(z)(z - z_0)$

- για $z = z_0$
 $\psi(z_0) \geq \psi(z_0) + \nabla \psi(z_0)(z - z_0)$
 $\psi(z_0) - \psi(z_0) \geq 0$
 $0 \geq 0$ που ισχύει.
- για $z > z_0$ Από τις σχέσεις (1),(2), ισχύει από ΘΜΤ
 $\text{άρα } \exists \xi \in (z_0, z) \Rightarrow z_0 < \xi < z \quad \text{τ.ω. } \nabla \psi(\xi) = \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}$
 $\xi < \zeta \Rightarrow \psi$ κυρτή.

Άρα $\psi(z_0) \geq \psi(z) + \nabla\psi(z)(z_0 - z)$ για ζ σ.π. στο Ω .

$$\psi(z) \leq \psi(z_0) - \nabla\psi(z)(z - z_0) = \nabla\psi(z)(z - z_0)$$

$$\psi(z_0) = 0$$

$$z, z_0 \in \Omega \subseteq B(0, r) \Rightarrow \|z\| \leq r, \|z_0\| \leq r.$$

Άρα:

$$\|z - z_0\| \leq \|z\| + \|z_0\| \leq r + r = 2r$$

$$\psi(z) \leq \nabla\psi(z)(z - z_0) \leq \|\nabla\psi(z)(z - z_0)\| = \|\nabla\psi(z)\| \cdot \|z - z_0\| \leq 2r\|\nabla\psi(z)\|$$

Άρα καταλήγουμε ότι:

$$\psi \leq 2r\|\nabla\psi(z)\|, z \text{ σ.π. στο } \Omega.$$

Η συνάρτηση ψ είναι κυρτή και $z, \tilde{z} \in \Omega$ και από την σχέση (+) έχουμε:
 $\psi(z) \geq \psi(\tilde{z}) + \nabla\psi(\tilde{z})(z - \tilde{z})$ εφαπτομένη της ψ στο $\tilde{z}$.
 Ολοκληρώνοντας πάνω απο το Ω , παίρνουμε ότι:

$$\int_{\Omega} \psi(z) d\beta(\tilde{z}) \geq \int_{\Omega} \psi(\tilde{z}) + \nabla\psi(\tilde{z})(z - \tilde{z}) d\beta(\tilde{z}).$$

Από την ιδιότητα $d\beta(\tilde{z}) = \beta(z)d\tilde{z}$ έχουμε:

$$\psi(z) \cdot \int_{\Omega} d\beta\tilde{z} \geq \int_{\Omega} \nabla\psi(\tilde{z})\beta(\tilde{z}) d\tilde{z} + \int_{\Omega} \nabla\psi(\tilde{z})(z - \tilde{z})\beta(\tilde{z}) d\tilde{z} \quad (1)$$

$$\int_{\Omega} d\beta(\tilde{z}) = \int_{\Omega} d\beta = 1, \text{ αφού το } \beta \text{ είναι μέτρο πιθανότητας.} \quad (2)$$

$$\int \psi d\beta = 0, \text{ επειδή } \psi \in K_0. \quad (3)$$

$$0 = \int_{\psi} d\beta = \int \psi(\tilde{z}) d\beta(\tilde{z}) = \int \psi(\tilde{z})\beta(\tilde{z}) d\tilde{z} \quad (4)$$

Άρα από (1),(2),(3),(4) έχουμε :

$$\psi(z) \geq 0 + \int \nabla\psi(\tilde{z})(z - \tilde{z})\beta(\tilde{z}) d\tilde{z} \quad (3.2.9)$$

και

$$\psi(z) \geq \int_{\Omega} \nabla\psi(\tilde{z})(z - \tilde{z})\beta(\tilde{z}) d\tilde{z} \geq -\left\| \int \nabla\psi(\tilde{z})(z - \tilde{z})\beta(\tilde{z}) d\tilde{z} \right\| \geq -\int \|\nabla\psi\| \cdot \|z - \tilde{z}\| d\beta,$$

$$\text{όπου } \beta(\tilde{z})d(\tilde{z}) = d\beta.$$

$$\|z - \tilde{z}\| \leq 2r, \text{ αφού } z, \tilde{z} \in \Omega \subseteq B(0, r),$$

Άρα

$$-\|z - \tilde{z}\| \leq -2r. \quad (3.2.10)$$

Από τις σχέσεις (3.2.9) , (3.2.10) παίρνουμε:

$$\psi(z) \geq -2r \cdot \int \|\nabla \psi\| d\beta \quad , \zeta \text{ σ.π. στο } \Omega.$$

θέτουμε:

$$M = \int \|\nabla \psi\| d\beta.$$

$$\int d\beta = \text{int}_{\Omega} d\beta$$

Άρα έχουμε $-2rM \leq \psi(z)$, z σ.π. στο Ω

άρα αποδείχτηκε η ιδιότητα (ι),(ιι-α).

Έχουμε δείξει ότι:

$$-2rM \leq \psi(z) \leq 2r\|\nabla \psi(z)\|, \quad \text{για } \zeta \text{ σ.π. στο } \Omega.$$

$$\psi(z) \leq 2r\|\nabla \psi(z)\|$$

$$\int_{\Omega} \psi(z) d\beta(z) \leq \int_{\Omega} 2r\|\nabla \psi(z)\| d\beta(z)$$

$$\int_{\Omega} \psi d\beta \leq 2r \int_{\Omega} \|\nabla \psi\| d\beta \leq 2rM.$$

$$\text{Όπου } M = \int_{\Omega} \|\nabla \psi\| d\beta.$$

Άρα:

$$\int_{\Omega} \psi d\beta \leq 2rM(*)$$

Επιπλέον έχουμε:

$$-2rM \leq \psi(z)$$

$$\int_{\Omega} -2rM d\beta(z) \leq \int_{\Omega} \psi(z) d\beta(z)$$

$$-2rM \int_{\Omega} d\beta \leq \int \psi d\beta$$

$$-2rM \leq \int \psi d\beta(**), \quad \int_{\Omega} d\beta = 1.$$

Από τις σχέσεις (*) και (**) προκύπτει:

$$-2rM \leq \int \psi d\beta \leq 2rM$$

$$|\int \psi d\beta| \leq 4rM$$

Η τελευταία ανίσωση ισχύει επειδή: $r > 0$ εξ ορισμού και $M = \int_{\Omega} \|\nabla \psi\| d\beta > 0$, διότι:

$$\|\nabla \psi\| \geq 0 \Rightarrow \int_{\Omega} \|\nabla \psi\| d\beta \geq \int_{\Omega} 0 d\beta = 0.$$

Άρα αποδείχτηκε η ιδιότητα (iii).

Πάμε τώρα να δείξουμε την ιδιότητα (ii-β) :
σταθεροποιούμε ένα $z \in \Omega$ και $\delta = \text{dist}(z, \partial\Omega) > 0$.
Ορίζουμε $z + \frac{\delta}{2}B$ και $\bar{w} = \{\tilde{z} \in \Omega : \text{dist}(\tilde{z}, \partial\Omega) \geq \frac{\delta}{2}\}$
 $B := \bar{B}(0, 1)$ η κλειστή μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^d$ και $\text{dist}(z, \partial\Omega) := \inf\{d(z, x) : x \in \partial\Omega\}$.
Από την υπόθεση έχουμε ότι το β είναι ουσιαστικά φραγμένο μακριά από το 0 στο $\bar{w}$ από μία σταθερά $\rho(\delta) > 0$.

$d\beta(z) = \beta(z)dz$, για β Lebesgue ολοκληρώσιμη, $\beta \geq 0$ συνάρτηση με β φραγμένη μακριά από το 0 σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω .

Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι το $\bar{w}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Ω .

Απόδειξη

Έστω:

$$\tilde{z} \in \bar{w} \Rightarrow \tilde{z} \in \Omega : \text{dist}(\tilde{z}, \partial\Omega) \geq \frac{\delta}{2} \Rightarrow \tilde{z} \in \Omega \Rightarrow \bar{w} \subseteq \Omega.$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε $\tilde{z}_n, z \in \bar{w}$ με $\tilde{z}_n \rightarrow \tilde{z}$, αρκεί να δείξουμε ότι $z \in \bar{w}$.

Έχουμε :

$$\bar{w} \subseteq \Omega \subseteq B(0, r) \subseteq \mathbb{R}^d$$

Άρα:

$$\tilde{z}_n \rightarrow \tilde{z} \Rightarrow \forall E > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : \|\tilde{z}_n - \tilde{z}\| < E$$

και

$$\|\tilde{z}_n - z\| \rightarrow 0.$$

$$\inf\{d(\tilde{z}_n, x) : x \in \partial\Omega\} = \text{dist}(\tilde{z}_n, \partial\Omega) \geq \frac{\delta}{2}.$$

Έστω $x \in \partial\Omega$,

$$d(\tilde{z}, x) = \|\tilde{z} - x\| = \|\tilde{z} - \tilde{z}_n + \tilde{z}_n - x\| = \|\tilde{z}_n - x - (\tilde{z}_n - \tilde{z})\| \geq \|\tilde{z}_n - x\| - \|\tilde{z}_n - \tilde{z}\| \geq \frac{\delta}{2} - \|\tilde{z}_n - \tilde{z}\|$$

$$x \in \partial\Omega \Rightarrow \|\tilde{z}_n - x\| \geq \frac{\delta}{2}$$

άρα: $d(\tilde{z}, x) \geq \frac{\delta}{2} - \|\tilde{z}_n - \tilde{z}\|$, και :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\tilde{z}, x) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\delta}{2} - \|\tilde{z}_n - \tilde{z}\| \Rightarrow d(\tilde{z}, x) \geq \frac{\delta}{2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{z}_n - \tilde{z}\|$$

$$d(\tilde{z}, x) \geq \frac{\delta}{2}, \text{ για τυχαίο } x \in \partial\Omega \Rightarrow d(\tilde{z}, x) \geq \frac{\delta}{2}, \forall x \in \partial\Omega \Rightarrow$$

$$\text{dist}(\tilde{z}, \partial\Omega) = \inf\{d(\tilde{z}, x) : x \in \partial\Omega\} \geq \frac{\delta}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{z}_n - \tilde{z}\| = 0, \quad d := \text{dist}$$

Άρα από την ανίσωση $d(\tilde{z}, \partial\Omega) \geq \frac{\delta}{2}$ και $\tilde{z} \in \Omega \Rightarrow \tilde{z} \in \bar{\omega}$.

Άρα για τυχαία $\tilde{z} \in \Omega$, $\tilde{z}_n \in \bar{\omega}$ με $\tilde{z}_n \rightarrow \tilde{z} \Rightarrow \tilde{z} \in \bar{\omega}$.

Οπότε $\bar{\omega} \subseteq \Omega$ συμπαγής και άρα $\bar{\omega}$ συμπαγές υποσύνολο του Ω .

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι : $z + \frac{\delta}{2}B \subseteq \Omega$ και $\bar{\omega} \subseteq \Omega$.

Απόδειξη

Ξέρουμε ότι: $B(0, 1) \subseteq \Omega$, $\bar{\omega} = \{\tilde{z} \in \Omega : d(\tilde{z}, \partial\Omega) \geq \frac{\delta}{2}\}$ και $\delta = d(z, \partial\Omega)$.

Έστω $z \in \Omega$, τότε:

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{2}B &= \frac{\delta}{2}B(0, 1) = B(0, \frac{\delta}{2}) \\ z + \frac{\delta}{2}B &= B(z, \frac{\delta}{2})\end{aligned}$$

Έστω

$$x \in B(z, \frac{\delta}{2}) \Rightarrow \|x - z\| \leq \frac{\delta}{2} < \delta \Rightarrow x \in B(z, \delta) \subseteq \Omega$$

Άρα:

$$z + \frac{\delta}{2}B \subseteq \Omega$$

Υποθέτουμε ότι $\tilde{z} \in \bar{\omega} \Rightarrow \tilde{z} \in \Omega \Rightarrow \bar{\omega} \subseteq \Omega$.

Η ψ είναι *Lebesgue* ολοκληρώσιμη στο Ω (1) και το $\bar{\omega}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Ω (2). Άρα η συνάρτηση ψ είναι *Lebesgue* ολοκληρώσιμη στο $\bar{\omega}$.

Άρα:

$\bar{\omega}$ συμπαγές $\Rightarrow \bar{\omega}$ κλειστό $\Rightarrow^3 \bar{\omega}$ μετρήσιμο (3).

Από σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε ότι η ψ είναι *Lebesgue* ολοκληρώσιμη στο $\bar{\omega}$.

Από τον ορισμό της συνάρτησης β , η β είναι φραγμένη μακριά από το 0 σε οποιοδήποτε συμπαγές υποσύνολο του Ω .

$\bar{\omega} \subseteq \Omega$ συμπαγές, άρα β φραγμένη στο $\bar{\omega} \subseteq \Omega$ που συνεπάγεται ότι:

$$\|\beta\| \leq \rho, \rho \in \mathbb{R} \quad \text{σταθερά.}$$

Επιπροσθέτως όλες οι νόρμες στον $\mathbb{R}^d$ είναι ισοδύναμες, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.

$$0 \leq \|\beta(z)\| \leq \rho, \forall z \in \bar{\omega} \subseteq \Omega$$

και

$$\beta(z) \geq 0, \forall z \in \bar{\omega}.$$

Θα δείξουμε ότι $\rho = \rho(\delta)$, δηλαδή ότι η σταθερά μας εξαρτάται από το δ .

Απόδειξη

έστω $z \in \bar{\omega} = \{\tilde{z} : d(\tilde{z}, \partial\Omega) \geq \frac{\delta}{2}\}$, ισχύει $\delta = d(z, \partial\Omega) \geq \frac{\delta}{2}$

και

³σελ. 17 Stein – Shakarchi.

$$z \in \overline{w} \subseteq \Omega \Rightarrow z \in \Omega.$$

$$\begin{aligned} \int |\psi| d\beta &= \int_{\overline{w}} |\psi(\tilde{z})| d\beta(\tilde{z}) = \int_{\overline{w}} |\psi(\tilde{z})| |\beta(\tilde{z})| d\tilde{z} \leq \\ \int_{\overline{w}} |\psi(\tilde{z})| |\beta(\tilde{z})| d\tilde{z} &\leq \int_{\overline{w}} |\psi(z)| \cdot \rho(\delta) d\tilde{z} = \rho(\delta) \int_{\overline{w}} |\psi(\tilde{z})| d\tilde{z} \end{aligned}$$

Όπου $d\beta(z) = \beta(z)dz$, ψ Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $\overline{w}$.

$|\beta(z)| = \beta(z) \leq \rho(\delta) > 0$ και $\beta(z) \geq 0$.

Άρα αφού ισχύει η σχέση $\rho(\delta) > 0$ έχουμε:

$$\int_{\overline{w}} |\psi(\tilde{z})| d\tilde{z} \geq \rho(\delta)^{-1} \int |\psi| d\beta \Rightarrow \leq \rho(\delta)^{-1} \int |\psi| d\beta \leq \rho(\delta)^{-1} 4rM \Rightarrow \int_{\overline{w}} |\psi(\tilde{z})| d\tilde{z} \leq 4rM\rho(\delta)^{-1}$$

ψ κυρτή $\Rightarrow \psi(z) \leq \oint_E \psi(\tilde{z}) d\tilde{z}$, με E μετρήσιμο, $\mu(E) < +\infty$

$$E = z + \frac{\delta}{2}B \subseteq \mathbb{R}^d$$

$$\mu(E) = |z + \frac{\delta}{2}B|$$

και

$$\oint_E \psi(\tilde{z}) d\tilde{z} = \frac{1}{\mu(E)} \int_E \psi(\tilde{z}) d\tilde{z}$$

Άρα:

$$\psi(z) \leq |z + \frac{\delta}{2}B|^{-1} \cdot \int_{z + \frac{\delta}{2}B} \psi(\tilde{z}) d\tilde{z}$$

Ισχύει ότι $z + \frac{\delta}{2}B \subseteq \overline{w}$, άρα:

$$\begin{aligned} |z + \frac{\delta}{2}B|^{-1} \cdot \int_{z + \frac{\delta}{2}B} \psi(\tilde{z}) d\tilde{z} &\leq |z + \frac{\delta}{2}B|^{-1} \cdot \int_{\overline{w}} \psi(\tilde{z}) d\tilde{z} \\ |z + \frac{\delta}{2}B|^{-1} \cdot \int_{\overline{w}} \psi(\tilde{z}) d\tilde{z} &\leq |z + \frac{\delta}{2}B|^{-1} \cdot \int_{\overline{w}} |\psi(\tilde{z})| d\tilde{z} \\ |z + \frac{\delta}{2}B|^{-1} \cdot \int_{\overline{w}} |\psi(\tilde{z})| d\tilde{z} &\leq |z + \frac{\delta}{2}B|^{-1} \cdot 4rM\rho(\delta)^{-1}. \end{aligned}$$

$$B = B_{\mathbb{R}^d}(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^d$$

$$\frac{\delta}{2}B = B(0, \frac{\delta}{2})$$

$$z + \frac{\delta}{2}B = B(z, \frac{\delta}{2})$$

Άρα

$$|z + \frac{\delta}{2}| = |B(z, \frac{\delta}{2})| = |B(0, \frac{\delta}{2})| = (\frac{\delta}{2})^d \cdot |B|$$

Όπου $|B|$, ο όγκος σφαίρας κέντρου $z \in \mathbb{R}^d$ και ακτίνας $r = \frac{\delta}{2}$.

π.χ

$|B_{\mathbb{R}^2}(0, r)| = \pi r^2$ σφαίρα ακτίνας r και κέντρου $O(0,0)$.
 $|B| = |B(0, 1)| = \pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$

,δηλαδή για $d = 2$ έχουμε: $r^d |B| = r^2 \cdot \pi = \pi r^2$ και άρα $|B_{\mathbb{R}^d}(0, r)| = |B| \cdot r^d$.
 Οπότε :

$$\psi(z) \leq \left(\frac{\delta^d}{2} \cdot |B|\right)^{-1} \cdot \rho(\delta)^{-1} \cdot 4rM = |B|^{-1} \cdot \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-d} \cdot \rho(\delta)^{-1} \cdot 4rM \quad (3.2.11)$$

Θέτουμε $C(\delta) = 4|B|^{-1} \cdot \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-d} \cdot \rho(\delta)^{-1}$, όπου $C(\delta)$ σταθερά που εξαρτάται μόνο από το δ .

$\delta = \text{dist}(z, \partial\Omega)$

$$\forall z \in \Omega, \psi(z) \leq C(\delta) \cdot rM$$

Αποδείχτηκε η ιδιότητα (ii - b).

ορίζουμε:

$$\psi^*(y) = \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\}, \forall y \in \mathbb{R}^d$$

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση ψ^* είναι καλά ορισμένη.

$$\psi^*(y) = \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\}, \forall y \in \mathbb{R}^d$$

$$\psi^* : y \in \mathbb{R}^d \rightarrow \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\}$$

Θδο:

$$\sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$y \in \mathbb{R}^d, z \in \Omega \Rightarrow yz \in \mathbb{R}$$

$$\psi(z) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Άρα :

$$yz - \psi(z) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \Rightarrow \psi^*(y) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

- αν $\sup \exists \Rightarrow \psi^* \in \mathbb{R}$
- αν $\sup \nexists \Rightarrow \psi^* = +\infty$

Άρα: $\psi^* \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \Rightarrow \psi^*$ είναι καλά ορισμένη.

Θδο :

$$\psi^*(y) \geq z_0 \cdot y - \psi(z_0) = z_0 y \geq -r\|y\|, \forall y \in \mathbb{R}^d$$

και

$$\psi^*(y) \leq r\|y\| - \inf_{\Omega} \psi \leq r(\|y\| + 2M), \forall y \in \mathbb{R}^d$$

$z_0 \in \Omega$ και ψ^* είναι το $\sup_{z \in \Omega} \Rightarrow$

$$\psi^*(y) \geq z_0 \cdot y - \psi(z_0)$$

Από την προηγούμενη απόδειξη έχουμε ότι:

$$\psi(z_0) = 0$$

Άρα: $\psi^*(y) \geq z_0 \cdot y$

$$z_0 \in \Omega \subseteq B(0, r) \Rightarrow \|z_0 - 0\| \leq r \Rightarrow_{\Omega \subseteq \mathbb{R}^d} |z_0| \leq r \Rightarrow -r \leq z_0 \leq r \quad (3.2.12)$$

Άρα

$$\psi^*(y) \geq -ry \geq -r\|y\|, \text{ με } y \leq \|y\|, \forall y \in \mathbb{R}^d, r > 0.$$

$$\psi^*(y) \leq -r\|y\|, \forall y \in \mathbb{R}^d.$$

$$\psi^*(y) = \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\}$$

$$\forall E > 0, \exists z \in \Omega \text{ τ.ω. : } \psi^*(y) - E \leq yz - \psi(z) \Rightarrow \psi^*(y) \leq yz - \psi(z) + E.$$

- $y \leq \|y\|$
- $z \in \Omega \subseteq B(0, r) \Rightarrow |z| \leq r \Rightarrow -r \leq z \leq r$
- $\psi(z) \geq \inf_{z \in \Omega} \psi(z) = \inf_{\Omega} \psi \Rightarrow -\psi(z) \leq -\inf_{\Omega} \psi$

$$\psi^*(y) \leq r\|y\| - \inf_{\Omega} \psi + E$$

και παίρνουμε $\lim_{E \rightarrow 0}$ στην ανίσωση $\Rightarrow$

$$\psi^*(y) \leq r\|y\| - \inf_{\Omega} \psi$$

από την ιδιότητα (ι) έχουμε:

$$-2rM \leq \psi(z), \forall z \in \Omega, M = \int \|\nabla \psi\| d\beta \Rightarrow 2rM \geq -\psi(z).$$

$$\text{άρα : } \psi^*(y) \leq r\|y\| + 2rM = r(\|y\| + 2M), \forall y \in \mathbb{R}^d.$$

Θδο: ψ^* Lipschitz συνεχής με $Lip(\psi^*) \leq r$ και $\psi^* : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

έστω $x, y \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} \|\psi^*(y) - \psi^*(x)\| &= |\psi^*(y) - \psi^*(x)| \\ |\psi^*(y) - \psi^*(x)| &= \left| \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\} - \sup_{z \in \Omega} \{xz - \psi(z)\} \right| \\ \left| \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\} - \sup_{z \in \Omega} \{xz - \psi(z)\} \right| &= \left| \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z) - xz + \psi(z)\} \right| \\ \left| \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z) - xz + \psi(z)\} \right| &= \left| \sup_{z \in \Omega} \{yz - xz\} \right| \\ \left| \sup_{z \in \Omega} \{yz - xz\} \right| &\leq \|yz - xz\| \|yz - xz\| \\ \|yz - xz\| \|yz - xz\| &= \|z\| \|y - x\| \\ \|z\| \|y - x\| &\leq r \cdot \|y - x\|. \end{aligned}$$

Από ορισμό του $\sup$ για $z \in \Omega$
 $\forall E > 0, \exists z \in \Omega : |\sup_{z \in \Omega} \{yz - xz\}| \leq \|yz - xz\| + E$ και παίρνουμε $E \rightarrow 0$.

και :

$z \in B(0, r)$, $z \in \Omega \subseteq B(0, r)$.

άρα ψ^* Lipschitz συνεχής με $Lip(\psi^*) \leq r$, επειδή μπορεί να υπάρξει καλύτερη προσέγγιση.

Από τον ορισμό του K_0 παίρνουμε:

$\psi = \tilde{\psi}$ στο Ω , όπου ψ κυρτή κάτω ημισυνεχής συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Αν $\psi^{**} = \tilde{\psi}$ με $\psi^{**}(z) = \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \{yz - \psi^*(y)\}$ τότε :

$$\psi^{**} = \psi \Rightarrow \psi(z) = \psi^{**}(z), \forall z \in \Omega$$

Τέλος αποδεικνύεται ότι: $\psi^{**} = \psi$ ή $\psi^{**} = \tilde{\psi} = \psi$. [10]

Θα αποδείξουμε την ιδιότητα $(iv - b)$ της πρότασης.

Έστω (ψ_n) ακολουθία του K_0 τ.ω. $\int \|\nabla \psi_n\| d\beta \leq M$,

$\psi_n \subseteq K_0$ άρα ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- $\psi_n \in W^{1,1}(0, \beta) \cap C(\Omega)$
- $\int \psi_n d\beta = 0$
- $\exists \tilde{\psi}_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ τ.ω. ψ_n κυρτή , κάτω ημισυνεχής και $\psi_n = \tilde{\psi}_n$ στο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

$$\psi_n \in W^{1,1}(0, \beta) \Rightarrow \psi_n \in L^1(\Omega, \beta)$$

και

$$\nabla \psi_n \in L^1(\Omega, \beta; \mathbb{R}^d)$$

με

$$\|\psi_n\|_{L^1(\Omega, \beta; \mathbb{R}^d)} = \int_{\Omega} |\psi_n| d\beta < +\infty$$

Όπου β , μέτρο πιθανότητας στο $\bar{\Omega}$, με $\beta(\bar{\Omega}) = 1$.

$\psi_n \in W^{1,1}(0, \beta)$ και $\psi_n \in C(\Omega)$,

$$\psi_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

ψ_n συνεχής , $\Omega \subseteq B(0, r)$ φραγμένο , άρα η ψ_n είναι φραγμένη ακολουθία.

Άρα η ψ_n έχει συγκλίνουσα υπακολουθία ψ_{k_n} που εξαρτάται από το n στο $L^1(\Omega, \beta)$

από ιδιότητες (i), (ii) :

$$-2rM \leq \psi_n(z) \leq C(\delta)rM, \forall z \in \Omega$$

$$\psi_n(z) \leq C(\delta)rM, \forall z \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$$

Το δεύτερο μέλος της ανίσωσης $C(\delta)rM$, δεν εξαρτάται από το z .

Συνεπώς η ψ_n είναι ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία.

θα δείξουμε ότι η ψ_n είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω . (Αν το δείξω για Ω , θα ισχύει για κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω .)

$\forall n \in \mathbb{N}$, έστω $x, z \in \Omega$

$$\|\psi_n(z) - \psi_n(x)\|_{\mathbb{R}} = |\psi_n(z) - \psi_n(x)| \quad (3.2.13)$$

Άρα η ψ_n είναι ομοιόμορφα φραγμένη και ομοιόμορφα Lipschitz συνεχής σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω .

από την ιδιότητα (u) :

ψ_n^* ομοιόμορφα Lipschitz συνεχής στον $\mathbb{R}^d$ και :

$$|\psi_n^*(y)| \leq r(2M + \|y\|), \forall y \in \mathbb{R}^d, \forall n \in \mathbb{N}. (1)$$

Όπως και πριν:

$$|\psi_n^*(y) - \psi_n^*(x)| \leq r\|y - x\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \forall n \in \mathbb{N}$$

Άρα $Lip(\psi_n^*) = r$ δεν εξαρτάται από το n .

Επομένως υπάρχει υπακολουθία της ψ_n^* , $\psi_{k_n}^*$ και ψ_{k_n} της ψ_n και

$$\phi \in C(\mathbb{R}^d), \psi \in C(\Omega) \cap L^1(\Omega, \beta) \text{ τ.ω. :}$$

1. $\psi_{k_n}^* \rightarrow \phi$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.
2. $\psi_{k_n} \rightarrow \psi$ στο $L^1(\Omega, \beta)$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω .

Ορίζουμε $k_n = n$ ακολουθία που εξαρτάται από n . Άρα

$$\psi_n^* \rightarrow \phi, \psi_n \rightarrow \psi$$

Παίρνοντας στην (1) $\lim$ για $n \rightarrow +\infty$ έχουμε:

$$|\phi(y)| \leq r(2M + \|y\|)$$

$$\psi_{k_n}^*(y) + \psi_{k_n}(z) = \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi_{k_n}(z)\} + \psi_{k_n}(z) \geq \sup_{z \in \Omega} yz - \psi_{k_n}(z) + \psi_{k_n}(z) = yz \quad (3.2.14)$$

Άρα παίρνοντας $\lim$ για $n \rightarrow +\infty$ στην παραπάνω σχέση έχουμε :

$$\phi(y) + \psi(z) \geq yz, \forall z \in \Omega, \forall y \in \mathbb{R}^d.$$

□

Θα αποδείξουμε τώρα την Πρόταση 3.2.1, την οποία επαναλαμβάνουμε εδώ.

Πρόταση 3.2.4. Υποθέτουμε ότι το μεικτό MKP έχει μία λύση (ψ, ϕ, p) . Τότε:

1. Το ψ ανήκει στο K_0 και $\|\nabla \psi\|_{L^1(\Omega, \beta)} = \int \|y\| d\alpha(y)$.
2. $\phi = \psi^*$ α-σ.π. στον $\mathbb{R}^d$, όπου ψ^* είναι ο μετασχηματισμός Legendre του ψ που ορίζεται ως:

$$\psi^*(y) = \sup_{z \in \Omega} \{y \cdot z - \psi(z)\}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^d.$$

3. $dp(y, z) = \delta(y - \nabla \psi(z)) \beta(z) dz$.

4. $\int \phi d\alpha = \int y \cdot z dp(y, z)$ και $\int \psi d\beta = 0$.
5. Το ζεύγος (ψ, ϕ) είναι η μοναδική λύση του αρχικού MKP και p η μοναδική λύση του δυϊκού MKP.

Επιπλέον, αν το α είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, τότε:

1. $z = \nabla \psi^*(y), y = \nabla \psi(z), p$ -σ.π. στον $\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}$.
2. $\nabla \psi^*(\nabla \psi(z)) = z, \beta$ -σ.π. στο $\bar{\Omega}$ και $\nabla \psi(\nabla \psi^*(y)) = y, \alpha$ -σ.π. στον $\mathbb{R}^d$.
3. $dp(y, z) = \delta(y - \nabla \psi^*(y)) d\alpha(y)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη αυτή βασίζεται στην παρακάτω γνωστή πρόταση:

$$\psi(z) + \psi^*(y) = yz \Leftrightarrow z \in \partial \psi^*(y), y \in \partial \psi(z)$$

$$\psi^*(y) = \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\} \quad \text{η κυρτή συζυγής συνάρτηση του } \psi.$$

Έστω (ϕ, ψ, p) μία λύση του μεικτού MKP. Άρα :

- p μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}$
- $\phi \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d, \alpha)$
- $\psi \in C(\Omega) \cap L^1(\Omega, \beta)$
- $\phi(y) + \psi(z) \geq yz, \forall (y, z) \in \mathbb{R}^d \times \Omega$ (1)
- $\int \|y\| dp(y, z) < +\infty$
- α, β περιθώρια μέτρα (marginal measures) του p στον $\mathbb{R}^d$ και Ω .
- $\int \psi d\beta = 0$
- $\int \phi d\alpha \leq \int yz dp(y, z)$
- $K_0 = \{\psi \in W^{1,1}(\Omega, \beta) \cap C(\Omega); \int \psi d\beta = 0, \exists \tilde{\psi} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \text{κυρτό, κ.η.μ. τ.ω. : } \psi = \tilde{\psi} \text{ στο } \Omega\}.$

Θδο : $\psi \in K_0$ και (ϕ, ψ, p) συνδέονται μεταξύ τους με : $\phi = \psi^*$ α.σ.π., $\int \phi d\alpha = \int yz dp(y, z)$ και $dp(y, z) = \delta(y - \nabla \psi(z)) \beta(z) dz$

Ορίζουμε : $\tilde{\phi}(y) = \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\}, \forall y \in \mathbb{R}^d$

(ϕ, ψ, p) λύση του μεικτού MKP $\Rightarrow^{(1)}$

$$\begin{aligned} \phi(y) + \psi(z) &\geq yz, \forall (y, z) \in \mathbb{R}^d \times \Omega, \quad \forall y \in \mathbb{R}^d, \quad \forall z \in \Omega \Rightarrow \\ \phi(y) &\geq yz - \psi(z), \forall y \in \mathbb{R}^d, \forall z \in \Omega \Rightarrow \phi(y) \geq \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\} = \tilde{\phi}(y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tilde{\phi}(y) \leq \phi(y), \forall y \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Σταθεροποιώ $z_0 \in \Omega$. Άρα :

$$\tilde{\phi}(y) \geq yz_0 - \psi(z_0), \forall y \in \mathbb{R}^d$$

$$-\infty < yz_0 - \psi(z_0) \leq \tilde{\phi}(y) \leq \phi(y) < +\infty.$$

Άρα : $\tilde{\phi}$ πεπερασμένο παντού, $\forall y \in \mathbb{R}^d$.

Η συνάρτηση ϕ είναι Lipschitz-συνεχής με $Lip(\phi) = r(+)$ και άρα :

$$|\tilde{\phi}(y) - \tilde{\phi}(x)| \leq |\phi(y) - \phi(x)| \leq^{(+)} r\|y - x\| \Rightarrow Lip(\tilde{\phi}) \leq r.$$

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}(y) - \tilde{\phi}(x)| &= \left| \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\} - \sup_{z \in \Omega} \{xz - \psi(z)\} \right| \\ &= \left| \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\} - \sup_{z \in \Omega} \{xz - \psi(z)\} \right| \leq \left| \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z) - xz + \psi(z)\} \right| \\ &= \left| \sup_{z \in \Omega} \{yz - xz - \psi(z) + \psi(z)\} \right| = \left| \sup_{z \in \Omega} \{yz - xz\} \right| \\ &= \left| \sup_{z \in \Omega} \{z(y - x)\} \right| = \left| \sup_{z \in \Omega} \{z(y - x)\} \right| \\ &\leq r\|y - x\|, \quad z \in \Omega \subseteq B(0, r) \end{aligned}$$

Άρα:

$$|z| \leq r.$$

Θδο: $\tilde{\phi}$ κυρτή, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη.

$$\tilde{\phi}((1 - \lambda)x + \lambda y) = \sup_{z \in \Omega} \{[(1 - \lambda)x + \lambda y]z - \psi(z)\} \quad (3.2.15)$$

$$(1 - \lambda)\tilde{\phi}(x) = (1 - \lambda) \sup_{z \in \Omega} \{xz - \psi(z)\} \quad (3.2.16)$$

$$\lambda\tilde{\phi}(y) = \lambda \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\} \quad (3.2.17)$$

από τις σχέσεις (3.2.16) και (3.2.17) έχουμε:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)\tilde{\phi}(x) + \lambda\tilde{\phi}(y) &= \sup_{z \in \Omega} \{(1 - \lambda)xz - (1 - \lambda)\psi(z)\} + \sup_{z \in \Omega} \{\lambda yz - \lambda\psi(z)\} \geq \\ &\geq \sup_{z \in \Omega} \{(1 - \lambda)xz + \lambda yz - \lambda\psi(z) + \lambda\psi(z) - \psi(z)\} = \\ &= \sup_{z \in \Omega} \{[(1 - \lambda)x + \lambda y]z - \psi(z)\} = \tilde{\phi}((1 - \lambda)x + \lambda y). \end{aligned}$$

Άρα :

$$\tilde{\phi}((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)\tilde{\phi}(x) + \lambda\tilde{\phi}(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Άρα $\tilde{\phi}$ κυρτή συνάρτηση. □

Ορίζουμε

$$\tilde{\psi}(z) = \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \{y \cdot z - \tilde{\phi}(y)\}$$

.

$$(y, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \Rightarrow y \cdot z \in \mathbb{R}$$

και

$$-\infty < \tilde{\phi}(y) < +\infty \Rightarrow \exists \sup_{y \in \mathbb{R}^d} (\in \mathbb{R}).$$

Άρα η συνάρτηση ψ^* είναι καλά ορισμένη για κάθε $z \in \mathbb{R}^d$.

Θδο: $\tilde{\psi}$ 1.s.c. (κάτω ημισυνεχής).

Έχουμε :

$$\tilde{\psi} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Οι συναρτήσεις $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}$ είναι συζυγείς και από προηγούμενους ορισμούς έχουμε:

$$\tilde{\psi} = \phi^{**} = (\tilde{\phi})^* = \tilde{\phi}^*$$

και

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &= \psi^{**} = (\tilde{\psi})^* = \tilde{\psi}^* \\ \tilde{\psi}(z) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \{yz - \tilde{\phi}(y)\} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \psi(y) &= \sup_{z \in \Omega} \{yz - \phi(z)\} \\ \psi(y) &= \sup_{z \in \Omega} \{yz - \phi(z)\} \\ \tilde{\psi}(z) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \{yz - \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\}\}. \end{aligned}$$

Επιπλέον έχουμε ότι :

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\} &\geq yz - \psi(z), \forall z \in \Omega \\ yz - \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\} &\leq yz - yz + \psi(z) \\ yz - \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\} &\leq \psi(z), \forall y \in \mathbb{R}^d \\ \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \{yz - \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\}\} &\leq \psi(z) \end{aligned}$$

Από τον ορισμό: $\sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\} = \tilde{\phi}(y)$ παίρνουμε ότι:

$$\tilde{\psi}(z) \leq \psi(z), \forall z \in \Omega, \quad y = 0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d.$$

$$\tilde{\phi}(y) = \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\}$$

Άρα :

$$\tilde{\phi}(0) = \sup_{z \in \Omega} \{0 - \psi(z)\} = \sup_{z \in \Omega} \{-\psi(z)\} = -\sup_{z \in \Omega} \{\psi(z)\}$$

$$\tilde{\psi}(z) \geq yz - \tilde{\phi}(y), \forall y \in \mathbb{R}^d \Rightarrow \tilde{\psi}(z) \geq \tilde{\phi}(0), \quad \tilde{\phi}(0) = -\sup_{z \in \Omega} \psi(z)$$

Όπου $\tilde{\phi}$ πεπερασμένη από προηγούμενη απόδειξη.

Άρα :

$$\tilde{\psi}(z) \geq \tilde{\phi}(0) > -\infty, \forall z \in \Omega.$$

Θδο : $\int (1 + \|y\|) d\alpha(y) < +\infty$.

Το α είναι περιθώριο μέτρο του p στο $\mathbb{R}^d$.

Θέτουμε :

$$f(y) = 1 + \|y\|, \forall y \in \mathbb{R}^d, f \in C(\mathbb{R}^d), \|y\| = \left(\sum_{i=1}^d y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ εξ ορισμού.}$$

$$|f(y)| = |1 + \|y\|| = 1 \cdot (1 + \|y\|) \leq 1 \cdot (1 + \|y\|)$$

$$\int f(y) d\alpha(y) = \int f(y) dp(y, z)$$

$$\int (1 + \|y\|) d\alpha(y) = \int (1 + \|y\|) dp(y, z) = \int (1 + \|y\|) dy < +\infty.$$

Από την ύπαρξη λύσης του MKP έχουμε:

$$\int \|y\| dp(y, z) < +\infty$$

Άρα :

$$\int (1 + \|y\|) dp(y, z) < +\infty$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int (1 + |\psi(z)|) \beta(z) dz < +\infty$ είναι β περιθωριακό του p στο Ω .

Θέτουμε λοιπόν :

$$g(z) = 1 + |\psi(z)|, z \in \Omega, g \in C(\Omega)$$

Επειδή:

$$\psi \in C(\Omega) \Rightarrow \int g(z) \beta(z) dz = \int g(z) dp(y, z) \Rightarrow \int (1 + |\psi(z)|) \beta(z) dz = \int (1 + |\psi(z)|) dp(y, z)$$

$$\psi \in W^{1,1}(\Omega, \beta) \Rightarrow \|\psi\|_{L^1(\Omega, \beta)} = \int |\psi(z)| dp(y, z) < +\infty$$

Άρα

$$\int (1 + |\psi(z)|) dp(y, z) < +\infty$$

, άρα

$$\int (1 + |\psi(z)|) \beta(z) dz < +\infty$$

Οπότε έχουμε:

$$\tilde{\psi}(z) = \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \{yz - \tilde{\phi}(y)\}$$

και

$$\tilde{\phi}(y) = \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\}.$$

Η $\tilde{\phi}$ είναι πεπερασμένη παντού $\Rightarrow \tilde{\phi}$ φραγμένη $\Rightarrow \|\tilde{\phi}\|_{L^1(\mathbb{R}^d, \alpha)} < +\infty \Rightarrow \tilde{\phi} \in L^1(\mathbb{R}^d, \alpha)$.

Παίρνουμε από την προηγούμενη απόδειξη και την σχέση $\psi \in L^1(\Omega, \beta)$, ότι :

$$\tilde{\psi} \leq \psi, \tilde{\psi}(z) \leq \psi(z), \forall z \in \Omega \Rightarrow \|\tilde{\psi}\|_{L^1(\Omega, \beta)} \leq \|\psi\|_{L^1(\Omega, \beta)} < +\infty \Rightarrow \tilde{\psi} \in L^1(\Omega, \beta).$$

$$\tilde{\phi}(y) \leq \phi(y), \forall y \in \mathbb{R}^d \Rightarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\phi}(y) d\alpha(y) \stackrel{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\phi}(y) dp(y, z) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y) dp(y, z) \stackrel{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y) d\alpha(y).$$

(*) το α είναι περιθωριακό του p στο $\mathbb{R}^d$.

Άρα

$$\int \tilde{\phi} d\alpha \leq \int \phi d\alpha$$

$$\tilde{\psi}(z) \leq \psi(z), \forall z \in \overline{\Omega} \Rightarrow \int_{\overline{\Omega}} \tilde{\psi}(z) d\beta(z) \leq \int_{\overline{\Omega}} \psi(z) d\beta(z) \Rightarrow \int \tilde{\psi} d\beta \leq \int \psi d\beta \quad (3.2.18)$$

$$\tilde{\phi}(y) + \tilde{\psi}(z) = \tilde{\phi}(y) + \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \{yz - \tilde{\phi}(y)\} \geq \tilde{\phi}(y) + yz - \tilde{\phi}(y) = yz$$

$$\tilde{\phi}(y) + \tilde{\psi}(z) \geq yz, \forall y \in \mathbb{R}^d, \forall z \in \overline{\Omega} \Rightarrow 0 \leq \tilde{\phi}(y) + \tilde{\psi}(z) - yz$$

$$0 \leq \int [\tilde{\phi}(y) + \tilde{\psi}(z) - yz] dp(y, z) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\phi}(y) dp(y, z) + \int_{\overline{\Omega}} \tilde{\psi}(z) dp(y, z) - \int_{\mathbb{R}^d} yz dp(y, z)$$

Τα α, β είναι περιθώρια μέτρα του p άρα:

$$0 = \int \tilde{\phi} d\alpha + \int \tilde{\psi} d\beta - \int yz dp(y, z) \leq \int \phi d\alpha + \int \psi d\beta - \int yz dp(y, z) \quad (3.2.19)$$

(ϕ, ψ, p) είναι λύση του μεικτού MKP άρα:

- $\int \psi d\beta = 0$, αυτό σημαίνει ότι από τη σχέση (3.2.19)

$$0 \leq \int \phi d\alpha - \int yz dp(y, z) \Rightarrow \int \phi d\alpha \geq \int yz dp(y, z)$$

- $\int \phi d\alpha \leq \int yz dp(y, z)$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε :

$$\int \phi d\alpha = \int yz dp(y, z)$$

άρα:

$$\int \phi d\alpha + \int \psi d\beta - \int yz dp(y, z) = 0 \quad (3.2.20)$$

$$\int \tilde{\phi} d\alpha + \int \tilde{\psi} d\beta - \int yz dp(y, z) = 0 \quad (3.2.21)$$

Επομένως :

- $\tilde{\phi} = \phi$, α -σ.π. $\Rightarrow \int \tilde{\phi} d\alpha = \int \phi d\alpha \stackrel{((3.2.20)), ((3.2.21))}{=} \int yz dp(y, z)$
- $\tilde{\psi} = \psi$, β -σ.π. $\Rightarrow \int \tilde{\psi} d\beta = \int \psi d\beta \stackrel{((3.2.20)), ((3.2.21))}{=} 0$

$$\int \tilde{\phi} d\alpha + \int \tilde{\psi} d\beta = \int yz dp(y, z)$$

Τελικά καταλήγουμε ότι:

- $\tilde{\phi} = \phi$, α -σ.π. στο $\mathbb{R}^d$.
- $\tilde{\psi} = \psi$, β -σ.π. στο $\overline{\Omega}$.
- $\int \tilde{\phi} d\alpha = \int \phi d\alpha \stackrel{((3.2.20)), ((3.2.21))}{=} \int yz dp(y, z)$.
- $\int \tilde{\psi} d\beta = \int \psi d\beta \stackrel{((3.2.20)), ((3.2.21))}{=} 0$.
- $\tilde{\phi}(y) + \tilde{\psi}(z) = yz$, p -σ.π. στο $\mathbb{R}^d \times \overline{\Omega}$.

Δείξαμε την ιδιότητα (iv) της πρότασης.

Από τον ορισμό του μεικτού MKP συνεπάγεται ότι $\psi \in C(\Omega)$ και $\tilde{\psi} = \psi$, β -σ.π. στο Ω , με $\tilde{\psi}$ κυρτή και ψ συνεχής.

Το β έχει τα ίδια σύνολα μηδενικού μέτρου με το μέτρο Lebesgue. Άρα η συνάρτηση $\tilde{\psi}$ είναι τοπικά Lipschitz συνεχής στο Ω όπως και η ψ , με $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ και $\nabla \psi$ καλά ορισμένη ως απεικόνιση Borel, με $\nabla \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, z \rightarrow \psi(z)$ και $\nabla \psi(z) = \partial \psi(z)$ σ.π. στο Ω , όπου ∂ η μερική παράγωγος κυρτής συνάρτησης.

Άρα αποδείξαμε ότι $\nabla \psi \in L^1(\Omega, \beta)$.

Οπότε :

$$\psi \in W^{1,1}(\Omega, \beta), \psi \in C(\Omega) \Rightarrow \psi \in W^{1,1}(\Omega, \beta) \cap C(\Omega) \quad (3.2.22)$$

και

$$\int \psi d\beta = 0. \quad (3.2.23)$$

και

$$\exists \tilde{\psi} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \text{τ.ω. : } \tilde{\psi} \text{ κυρτό, } \tilde{\psi} \text{ l.s.c κάτω ημισυνεχής, } \psi = \tilde{\psi} \text{ στο } \Omega.$$

Άρα από τις σχέσεις (3.2.22), (3.2.23), (3.2.1) ισχύει ότι:

$$\psi \in K_0$$

και

$$\phi = \tilde{\phi}, \quad \alpha\text{-σ.π. στο } \mathbb{R}^d$$

και

$$\tilde{\phi} = \psi^* = \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\}, \psi^* \quad \text{Legendre μετατροπή.}$$

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι ισχύει η ιδιότητα (ιβ):

$$\tilde{\phi}(y) + \tilde{\psi}(z) = yz, \quad \text{p-σ.π. στο } \mathbb{R}^d \times \overline{\Omega}.$$

Από [10] ισχύει ότι:

- $z \in \partial\tilde{\phi}(y)$, p-σ.π., $z \in \overline{\Omega}$.
- $y \in \partial\tilde{\psi}(z) = \partial\psi(z) \Rightarrow y \in \partial\psi(z)$, p σ.π., $y \in \mathbb{R}^d$.

Τα α, β είναι περιθωριακά του p στο $\mathbb{R}^d$ και $\overline{\Omega}$ αντίστοιχα. Το β έχει τα ίδια σύνολα μηδενικού μέτρου με το μέτρο Lebesgue. Άρα:

$$p(\mathbb{R}^d \times \partial\Omega) = \beta(\partial\Omega) = 0 \quad , \text{από την εισαγωγή.}$$

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- $\partial\psi(z) = \nabla\psi(z)$ στο Ω σ.π.
- ισχύει σ.π. άρα εκτός από ένα σύνολο μηδενικού μέτρου, ενώ στο $\partial\Omega$ ισχύει $p(\partial\Omega) = 0$.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι:

$$p(\{(y, z) \in \mathbb{R}^d \times \overline{\Omega}; \partial\psi(z) \neq \{\nabla\psi(z)\}\}) = 0.$$

Άρα $y = \nabla\psi(z)$, p-σ.π. στο $(y, z) \in \mathbb{R}^d \times \overline{\Omega}$ και $y \in \partial\psi(z)$, p-σ.π. στο $(y, z) \in \mathbb{R}^d \times \overline{\Omega}$. Έστω τυχαία $f \in C(\mathbb{R}^d \times \overline{\Omega})$ τ.ω. :

$$|f(y, z)| \leq c \cdot (1 + \|y\|), \forall (y, z) \in \mathbb{R}^d \times \overline{\Omega}, c \in \mathbb{R} \quad \text{σταθερά.}$$

Άρα:

$$\int |f(y, z)| dp(y, z) \leq c \int (1 + \|y\|) dp(y, z) < +\infty, \quad \forall (y, z) \in \mathbb{R}^d \times \overline{\Omega}, c \in \mathbb{R}$$

Επειδή (φ, ψ, p) είναι λύση του μεικτού MKP έχουμε ότι:

$$\int \|y\| dp(y, z) < +\infty.$$

Άρα

$$\int |f(y, z)| dp(y, z) < +\infty \Rightarrow f \text{ p- ολοκληρώσιμη.}$$

Από την Πρόταση (3.2.1) έχουμε:

$$\int f(y, z) dp(y, z) = \int f(\nabla\psi(z), z) dp(y, z) = \int f(\nabla\psi(z), z) \beta(z) dz$$

Όπου $g(z) = f(\nabla\psi(z), z)$ και β περιθωριακά του p στο $\overline{\Omega}$.

Θέτουμε στη συνέχεια:

$$\phi(y) = f(y, z)$$

Άρα

$$\phi(\nabla\psi(z)) = f(\nabla\psi(z), z).$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι :

$$dp(y, z) = \delta(y - \nabla\psi(z)) \beta(z) dz.$$

Αν ειδικότερα για την αυθαίρετη f που επιλέξαμε, χρησιμοποιήσουμε την $f(y, z) = \|y\|$, έχουμε :

$$\int f(y, z) dp(y, z) = \int f(\nabla\psi(z), z) \beta(z) dz = \int \|\nabla\psi(z)\| \beta(z) dz = \int \|\nabla\psi(z)\| dp(y, z).$$

Αφού το β είναι περιθωριακό του p και $\int f(y, z) dp(y, z) = \int \|y\| dp(y, z) = \int \|y\| d\alpha(y)$ (με $g(y) = \|y\|$, α περιθωριακό του p και $\int \|y\| dp(y, z) < +\infty$ από το μεικτό MKP.)
Συνεπάγεται λόγω του μεικτού MKP ότι:

$$\|\nabla\psi\|_{L^1(\Omega, \beta)} = \int \|\nabla\psi(z)\| dp(y, z) = \int \|y\| d\alpha(y) < +\infty$$

Και άρα τελικά προκύπτει :

$$\nabla\psi(z) \in L^1(\Omega, \beta) \Rightarrow \psi \in W^{1,1}(\Omega, \beta) \Rightarrow \psi \in K_0$$

οπότε :

$$\nabla\psi \in L^1(\Omega, \beta) \Rightarrow \|\nabla\psi\|_{L^1(\Omega, \beta)} = \int \|y\| d\alpha(y).$$

Στη συνέχεια στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι για κάθε (φ, ψ, p) λύση του μεικτού MKP, τα (φ, ψ) είναι μοναδική λύση του αρχικού MKP και η p η μοναδική λύση του δυϊκού MKP.

Απόδειξη. Έστω (ϕ, ψ, p) λύση του μεικτού MKP, (ϕ_1, ψ_1) λύση του αρχικού MKP, p_1 λύση του δυϊκού MKP. Θδο (ϕ, ψ, p) και (ϕ_1, ψ_1, p) λύσεις του μεικτού MKP.

$$\int yz dp(y, z) \leq \int yz dp_1(y, z)$$

Αφού p_1 λύση του δυϊκού MKP που μεγιστοποιεί το:

$$\int yz dp(y, z) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}} yz dp(y, z) \leq \int_{\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}} yz dp_1(y, z) \leq \int_{\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}} (\phi_1(y) + \psi_1(z)) dp_1(y, z)$$

Ισχύει επιπλέον η σχέση:

$$yz \leq \phi_1(y) + \psi_1(z), \forall (y, z) \in \mathbb{R}^d \times \Omega$$

και

$$p_1(\mathbb{R}^d \times \partial\Omega) = \beta(\partial\Omega) = 0.$$

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}} (\phi_1(y) + \psi_1(z)) dp_1(y, z) = \int_{\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}} \phi_1(y) dp_1(y, z) + \int_{\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}} \psi_1(z) dp_1(y, z)$$

Τα α, β είναι περιθωριακά του p_1 , άρα:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}} \phi_1(y) dp_1(y, z) + \int_{\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}} \psi_1(z) dp_1(y, z) &= \int \mathbb{R}^d \phi_1(y) d\alpha(y) + \int_{\bar{\Omega}} \psi_1(z) d\beta(z) \\ \int \mathbb{R}^d \phi_1(y) d\alpha(y) + \int_{\bar{\Omega}} \psi_1(z) d\beta(z) &= \int \phi_1 d\alpha + \int \psi_1 d\beta \end{aligned}$$

Το (ϕ_1, ψ_1) είναι λύση του αρχικού MKP άρα $\int \psi_1 d\beta = 0$.
Επομένως:

$$\int \phi_1 d\alpha + \int \psi_1 d\beta = \int \phi_1 d\alpha.$$

Αφού το ϕ_1 είναι λύση του αρχικού MKP που ελαχιστοποιεί το $\int \phi d\alpha$, έχουμε:

$$\int \phi_1 d\alpha \leq \int \phi d\alpha$$

Από την απόδειξη του μεικτού MKP :

$$\int \phi d\alpha = \int yz dp(y, z)$$

Άρα τελικά όλες οι ανισότητες γίνονται ισότητες, οπότε :

- $\int yz dp(y, z) = \int yz dp_1(y, z) \Rightarrow p = p_1$ σ.π. στο $\bar{\Omega}$
- $\int \phi_1 d\alpha = \int \phi d\alpha \Rightarrow \phi_1 = \phi$ α-σ.π.

- $\int \psi_1 d\beta = \int \psi d\beta \Rightarrow \psi_1 = \psi$ β -σ.π. (αφού ψ λύση του μεικτού MKP.)
- $(\phi, \psi, p_1), (\phi_1, \psi_1, p)$ λύσεις του μεικτού MKP.
- $\psi_1 = \psi$, β -σ.π. , $\psi \in K_0$ άρα $\psi_1 \in K_0$
-

$$\phi_1(y) + \psi_1(z) = yz, \forall (y, z) \in \mathbb{R}^d \times \Omega$$

$$\phi_1(y) = yz - \psi_1(z), \forall (y, z) \in \mathbb{R}^d \times \Omega$$

$$\phi_1(y) = \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi_1(z)\}$$

$$\phi_1(y) = \psi_1^*(y), \forall y \in \mathbb{R}^d$$

$$\phi_1 = \psi_1^* \quad , \alpha\text{-σ.π.}, \text{ αφού } \phi_1, \psi_1^* \in L^1(\mathbb{R}^d, \alpha)$$

Επίσης:

$$dp_1(y, z) = \delta(y - \nabla \psi(z)) \beta(z) dz = dp(y, z).$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει επειδή το (ϕ, ψ, p_1) λύση του μεικτού MKP και η δεύτερη ισότητα επειδή το (ϕ, ψ, p) είναι λύση του μεικτού MKP.

Το β είναι περιθωριακό του p στο $\bar{\Omega}$ άρα:

- $\psi = \psi_1 \Rightarrow \nabla \psi = \nabla \psi_1$, β -σ.π. στο $\bar{\Omega}$.
- $y = \nabla \psi_1(z)$, p -σ.π. στο $\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}$.
- $y = \nabla \psi(z)$, p -σ.π. στο $\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}$.

Συγκεντρωτικά έχουμε:

- $\psi \in K_0$
- $\psi_1 \in K_0$
- Ω συνεκτικό.
- $\phi_1 = \psi_1^*$, α -σ.π.
- $\phi_1 = \phi$, α -σ.π.
- $\phi = \psi^*$, α -σ.π.

Άρα :

$$\phi_1 = \psi_1^* = \psi^* = \phi, \quad \alpha\text{-σ.π. και } \psi_1 = \psi \text{ } \beta\text{-σ.π.}$$

Συνεπώς (ϕ, ψ) μοναδική λύση του αρχικού MKP και p η μοναδική λύση του δυϊκού MKP. $\square$

Στη συνέχεια, έστω α πλήρως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue. Η ψ^* είναι Lipschitz συνεχής, κυρτή συνάρτηση όπως δείξαμε πιο πριν και ισχύει:

$$\psi^* : y \in \mathbb{R}^d \rightarrow \psi^*(y) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Οπότε : $\nabla\psi$ καλά ορισμένη σε ένα Lebesgue αμελητέο σύνολο Borel απεικόνιση, με $\nabla\psi^* : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Από την Πρόταση (3.2.1) έχουμε ότι το σύνολο $\{y \in \mathbb{R}^d; \partial\psi^*(y) \neq \{\nabla\psi^*(y)\}\}$ είναι α -αμελητέο.

Άρα $\partial\psi^*(y) = \{\nabla\psi^*(y)\}$ ισχύει p-σ.π. για $(y, z) \in \mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}$ επειδή το α είναι περιθωριακό του p στον $\mathbb{R}^d$.

Ξέρουμε ότι $z \in \partial\psi^*(y)$ και $y = \nabla\psi(z)$ p-σ.π. για $(y, z) \in \mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}$.

Άρα απο τις σχέσεις (3.2.1) , (3.2.1) έχουμε $z = \nabla\psi^*(y)$ και $y = \nabla\psi(z)$ p-σ.π. για (y, z) και αφού τα α, β είναι περιθωριακά του p έχουμε με την σύνθεση:

$$z = \nabla\psi^*(\nabla\psi(z))$$

να είναι β -σ.π. $\forall z \in \bar{\Omega}$ και $y = \nabla\psi(\nabla\psi^*(y))$ α -σ.π. $\forall y \in \mathbb{R}^d$, άρα $\nabla\psi, \nabla\psi^*$ αντίστροφες η μία της άλλης και $dp(y, z) = \delta(z - \nabla\psi^*(y))d\alpha(y)$ όπως και πριν. $\square$

Ολοκληρώνουμε την παρούσα υποενότητα με την απόδειξη της Πρότασης (3.2.2), η οποία είναι η ακόλουθη:

Πρόταση 3.2.5. Έστω (a_n) μία ακολουθία απο μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^d$ τ.ω

$$\int f da_n \rightarrow \int f da, \quad \forall f \in C(\mathbb{R}^d) \text{ τ.ω. } |f(y)| \leq cst(1 + \|y\|).$$

Αν (ψ_n, ϕ_n, p_n) είναι μία λύση του μεικτού MKP που αντιστοιχεί στο a_n , τότε το μεικτό MKP που αντιστοιχεί στο a έχει μία μοναδική λύση (ψ, ϕ, p) και

1. $\psi_n \rightarrow \phi$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$,
2. $\psi_n \rightarrow \psi$ στον $W^{1,1}(\Omega, \beta)$,
- 3.

$$\int f dp_n \rightarrow \int f dp, \forall f \in C(\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}) \text{ τ.ω. } |f(y, z)| \leq cst(1 + \|y\|).$$

Απόδειξη. Έστω ακολουθία (a_n) μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^d$ τ.ω. :

$$\int f d\alpha_n \rightarrow \int f d\alpha, \forall f \in C(\mathbb{R}^d)$$

τ.ω.:

$$|f(y)| \leq c \cdot (1 + \|y\|)$$

Έστω (ϕ_n, ψ_n, p_n) λύση του μεικτού MKP που αντιστοιχεί στο (a_n) .

Από την πρόταση την προηγούμενη : 3.2.1

- $\psi_n \in K_0, \phi_n = \psi_n^*, a_n\text{-}\sigma.\pi.$
- $dp_n(y, z) = \delta(y - \nabla\psi_n(z))\beta(z) dz$
- $\int \|\nabla\psi_n\| d\beta = \int \|y\| d\alpha_n(y) \rightarrow \int \|y\| d\alpha(y)$

από την πρόταση 3.2.3 για υπακολουθία με δείκτη m , $\exists(\phi, \psi)$ τ.ω. :

- $\psi \in C(\Omega) \cap L^1(\Omega, \beta), \phi \in C(\mathbb{R}^d).$
- $\phi(y) + \psi(y) \geq yz, \forall(y, z) \in \mathbb{R}^d \times \Omega.$
- $\psi_m \rightarrow \psi$ στο $L^1(\Omega, \beta)$ και συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\Omega.$
- από την Πρόταση (3.2.1) ισχύει $\phi_m = \psi_m^* \rightarrow \phi$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d.$

Άρα $\phi_m \rightarrow \phi$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και :

$$|\phi_m(y)| = |\psi_m^*(y)| \leq r \cdot (2M + \|y\|).$$

Θα δείξουμε ότι :

$$|\phi_m(y)| \leq c \cdot (1 + \|y\|)$$

Έχουμε ότι :

$$|\phi_m(y)| \leq r \cdot (2M + \|y\|)$$

και

$$M = \int \|\nabla\psi\| d\beta = \int \|y\| d\alpha = \|\nabla\psi\| = \|y\|.$$

άρα

$$|\phi_m(y)| \leq c \cdot (1 + \|y\|)$$

Αφού (ϕ_n, ψ_n, p_n) είναι λύση του μεικτού MKP , έχουμε :

$$\phi_m d\alpha_m \leq \int yz dp_m(y, z)$$

και

$$\int \psi_m d\beta = 0$$

Με :

$$\psi_m \rightarrow \psi, \psi_m, \psi \in L^1(\Omega, \beta) \Rightarrow 0 = \int \psi_m d\beta \rightarrow \int \psi d\beta \Rightarrow \int \psi d\beta = 0.$$

$$|\phi_m(y)| \leq c \cdot (1 + \|y\|)$$

και

$$\int \|y\| dp(y, z) < +\infty.$$

Έστω:

$$f(y) = \|y\|, y \in \mathbb{R}^d,$$

Όπου $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$, άρα $f \in C(\mathbb{R}^d)$ και $|f(y)| = \|y\| \leq 1 + \|y\| \leq c \cdot (1 + \|y\|)$.

Μπορούμε να επιλέξουμε διαφορετικές σταθερές c_1, c_2, c_3 και στο τέλος θα επιλέξουμε $c = \max\{c_1, c_2, c_3, \dots, c_i\} \geq 0$ για $i \geq 1$.

Έστω ακολουθία p_m και αφού a_m, b_m περιθώρια μέτρα του p_m άρα:

$$\int (1 + \|y\|) dp_m(y, z) = \int [1 + \|y\|] d\alpha_m(y) \rightarrow \int [1 + \|y\|] d\alpha(y) < +\infty$$

, άρα : $\int [1 + \|y\|] d\alpha_m(y) \leq c, c \geq 0$ σταθερά , αφού το όριο είναι πεπερασμένο.
οπότε:

$$\int \phi d\alpha \leq \lim \int \phi_m d\alpha_m$$

$$|\phi_m(y)| \leq c \cdot (1 + \|y\|) \Rightarrow \int |\phi_m(y)| d\alpha_m(y) \leq c \cdot \int (1 + \|y\|) d\alpha_m(y) \leq c \cdot C < +\infty$$

Από την παραπάνω σχέση και $c, C \in \mathbb{R}^d$.

Άρα $\int \phi_m$ άνω φραγμένο και

$$\phi_m \rightarrow \phi \text{ ομοιόμορφα} \Rightarrow \int \phi_m \rightarrow \int \phi \Rightarrow \int \phi_m(y) d\alpha_m(y) \rightarrow \int \phi(y) d\alpha(y),$$

Άρα:

$$\int \phi d\alpha \leq \lim \int \phi_m d\alpha_m.$$

Για την υποακολουθία p_m υπάρχει θετικό μέτρο p στο $\mathbb{R}^d \times \Omega$ τ.ω:

$$\int f(y, z) dp_m(y, z) \rightarrow \int f(y, z) dp(y, z).$$

Ισχύει για κάθε συμπαγώς υποστηριζόμενη συνεχή συνάρτηση f στον $\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}$ και

$$\int [1 + \|y\|] dp_m(y, z) \rightarrow \int [1 + \|y\|] d\alpha(y).$$

από (3.2.1)

Θδο: p μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}$ με περιθώρια μέτρα τα α, β .

Θδο :

$$\int f(y, z) dp_m(y, z) \rightarrow \int f(y, z) dp(y, z)$$

ισχύει για κάθε συνεχή συνάρτηση στον $\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}$ τ.ω. :

$$|f(y, z)| \leq c \cdot (1 + \|y\|), \forall (y, z) \in \mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}$$

Αφού ισχύει για συμπαγώς υποστηριζόμενη συνεχή συνάρτηση και επιπλέον ισχύει ότι :

$$\int 1 + \|y\| dp_m(y, z) \rightarrow \int 1 + \|y\| d\alpha(y).$$

$$\int yz dp_m(y, z) \rightarrow \int yz dp(y, z)$$

$$\int \phi_m da_m \leq \int yz dp_m(y, z) \Rightarrow \lim_m \int \phi_m da_m \leq \lim_m \int yz dp_m(y, z)$$

και:

$$\int \phi d\alpha \leq \lim_m \int \phi_m da_m \text{ και}$$

$$\lim_m \int yz dp_m(y, z) = \int yz dp_m(y, z)$$

Άρα

$$\int \phi d\alpha \leq \int yz dp(y, z)$$

$$0 = \int \psi_m d\beta \rightarrow \int \psi d\beta \Rightarrow \int \psi d\beta = 0$$

Άρα : (φ, ψ, p) ικανοποιεί τις συνθήκες του μεικτού MKP και άρα λύση του MKP $\Rightarrow$ από την Πρόταση 3.2.1 ισχύει:

- (φ, ψ) μοναδική λύση του αρχικού MKP και $\phi = \psi^*$, άρα (ψ^*, ψ) μοναδική λύση του MKP.
- p μοναδική λύση του δυϊκού MKP και $dp(y, z) = \delta(y - \nabla\psi(z))\beta(z) dz$.
- $\psi_m \rightarrow \psi$ στο $L^1(\Omega, \beta)$.

Θα δείξουμε ότι συγκλίνει και στο $W^{1,1}(\Omega, \beta)$, αρκεί νδο $\nabla\psi_m \rightarrow \nabla\psi$ στο L^1 , άρα :

$$\|\nabla\psi_m\|_{L^1(\Omega, \beta)} \rightarrow \|\nabla\psi\|_{L^1(\Omega, \beta)}$$

και επίσης :

$$\int |\nabla\psi_m| d\beta \rightarrow \int |\nabla\psi| d\beta$$

$$\int \|\nabla\psi_m\| d\beta = \int \|y\| d\alpha_m(y) \rightarrow \int \|y\| d\alpha(y) = \int \|\nabla\psi\| d\beta \quad (3.2.24)$$

$$\int f(y, z) dp_m(y, z) \rightarrow \int f(y, z) dp(y, z) \quad (3.2.25)$$

$$|f(y, z)| \leq c \cdot (1 + \|y\|), \forall (y, z) \in \mathbb{R}^d \times \overline{\Omega} \quad (3.2.26)$$

$$dp(y, z) = \delta(y - \nabla\psi(z))\beta(z) dz = \{0, y \neq \nabla\psi(z) | 1, y = \nabla\psi(z)\} \quad (3.2.27)$$

Από τη σχέση (3.2.27) και την σχέση (3.2.24) παίρνουμε ότι:

$$\int f(y, z) dp_m(y, z) = \int f(\nabla\psi_m(z), z)\beta(z) dz \rightarrow \int f(\nabla\psi(z), z)\beta(z) dz \quad (3.2.28)$$

Η σύγκλιση ισχύει για κάθε συνεχής συνάρτηση f , άρα:

$$\int f(\nabla\psi_m(z), z) dz \rightarrow \int f(\nabla\psi(z), z) dz$$

Επιπλέον από τις σχέσεις (3.2.26), (3.2.26) για $y = \nabla\psi$ ισχύει:

$$|f(\nabla\psi_m(z), z)| \leq c \cdot (1 + \|\nabla\psi_m(z)\|)$$

και από (3.2.26), (3.2.25) για $y = \nabla\psi$

$$|f(\nabla\psi(z), z)| \leq c \cdot (1 + \|\nabla\psi(z)\|)$$

Η σχέση (3.2.28) ισχύει μόνο αν $\nabla\psi_m \rightarrow \nabla\psi$ στο $L^1(\Omega, \beta)$ και

$$\|\nabla\psi_m\| = \int |\nabla\psi_m| d\beta < +\infty$$

,

$$\|\nabla\psi\| = \int |\nabla\psi| d\beta < +\infty$$

Άρα $\psi_m \rightarrow \psi$ στο $W^{1,1}(\Omega, \beta)$ λόγω της μοναδικότητας της λύσης (φ, ψ, p) του MKP.

Άρα για $\psi_m = \psi_n \Rightarrow \psi_n \rightarrow \psi$ στο $W^{1,1}(\Omega, \beta)$ ολόκληρη η ψ_n .

Από τις σχέσεις (3.2.25), (3.2.26) έχουμε $p_m \rightarrow p$ και λόγω της μοναδικότητας ισχύει ότι $p_n \rightarrow p$.

Ομοίως με τα προηγούμενα ισχύει $\phi_m \rightarrow \phi$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και λόγω της μοναδικότητας ισχύει για $\phi_n \rightarrow \phi$. $\square$

3.2.2 Ολοκλήρωση της απόδειξης του Θεωρήματος Αναδιάταξης

Το Θεώρημα 3.2.1 μαζί με την Πρόταση 3.2.6 που ακολουθεί μας εξασφαλίζουν την ισχύ του Θεωρήματος 3.1.1, το οποίο όπως ήδη αναφέραμε και αποδείξαμε συνεπάγεται το Θεώρημα Αναδιάταξης 1.2.1.

Πρόταση 3.2.6. Έστω $\psi \in K_0$ τ.ω. :

$$\int_{\Omega} f(\nabla\psi(z))\beta(z) dz = \int f(y) d\alpha(y), \quad \forall f \in C(\mathbb{R}^d) \text{ τ.ω.: } |f(y)| \leq cst(1 + \|y\|). \quad (3.2.29)$$

Τότε η $(\phi = \psi^*, \psi, p)$ είναι η μοναδική λύση του MKP που ατιστοιχεί στο a όπου:

$$\phi(y) = \psi^*(y) = \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\}, \forall y \in \mathbb{R}^d$$

και

$$dp(y, z) = \delta(y - \nabla\psi(z))\beta(z)dz. \quad (3.2.30)$$

Απόδειξη. $\psi \in K_0 \Rightarrow \nabla\psi \in L^1(\Omega, \beta; \mathbb{R}^d)$, $\nabla\psi$ Borel απεικόνιση με $\nabla\psi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ αφού $\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d$ σύνολο Borel.

Το β έχει τα ίδια σύνολα μηδενικού μέτρου με το μέτρο Lebesgue και ισχύει $\beta(\partial\Omega) = 0$,

$$dp(y, z) = \delta(y - \nabla\psi(z))\beta(z)dz$$

Επιπλέον έχουμε $y \in \mathbb{R}^d, z \in \Omega, \beta(\partial\Omega) = 0$, άρα $z \in \overline{\Omega}$,

$$\delta = \begin{cases} 0, y \neq \nabla\psi(z) \\ 1, y = \nabla\psi(z) \end{cases}$$

και άρα :

$$dp(y, z) = \begin{cases} 0, y \neq \nabla\psi(z) \\ \beta(z)dz, y = \nabla\psi(z) \end{cases} \quad (3.2.31)$$

Άρα p καλά ορισμένο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^d \times \overline{\Omega}$.

Θδο:

$$\int f(y, z) dp(y, z) = \int f(\nabla\psi(z), z) d\beta(z), \quad \forall f \in C(\mathbb{R}^d \times \overline{\Omega}) \text{ τ.ω: } |f(y, z)| \leq c \cdot (1 + \|y\|).$$

Πράγματι, αφού $\psi \in K_0 \Rightarrow \psi \in W^{1,1}(\Omega, \beta) \Rightarrow \nabla\psi \in L^1(\Omega, \beta) \Rightarrow \|y\|_{L^1(\Omega, \beta)} < +\infty$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \|y\|_{L^1(\Omega, \beta)} < +\infty$$

όπου

$$\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \nabla\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d.$$

Από τη σχέση (3.2.30) παίρνουμε ότι:

$$\int (1 + \|y\|) dp(y, z) = \int (1 + \|y\|) \delta(y - \nabla\psi(z)) \beta(z) dz.$$

Επιλέγουμε τη σχέση (3.2.31) για $y \neq \nabla\psi(z) = 0$, άρα συνεχίζουμε με $y = \nabla\psi(z)$,

$$\int (1 + \|y\|) \delta(y - \nabla\psi(z)) \beta(z) dz = \int (1 + \|\nabla\psi(z)\|) \beta(z) dz < +\infty, \forall g(z) \in C(\overline{\Omega}).$$

Αυτό ισχύει καθώς :

$$\psi \in C(\overline{\Omega}) \Rightarrow 1 + \|\nabla\psi(z)\| \in C(\overline{\Omega}), \beta(z) \in C(\overline{\Omega}) \int C(\overline{\Omega}).$$

Άρα το β είναι περιθώριο μέτρο του p στο $\overline{\Omega}$, από τη σχέση (3.2.29) έχουμε ότι α περιθώριο μέτρο του p στον $\mathbb{R}^d$, άρα τα περιθώρια μέτρα του p είναι ακριβώς τα α , β και είναι και μοναδικά.

Επιπροσθέτως, $\psi \in K_0 \Rightarrow \psi$ κυρτή, τοπικά Lipschitz-συνεχής στο Ω και λόγω κυρτότητας έχουμε :

$$\psi(z) + \nabla\psi(z) \cdot (\tilde{z} - z) \leq \psi(\tilde{z}),$$

για κάθε $\tilde{z} \in \Omega$ και για κάθε $z \in \Omega \setminus E$, όπου E είναι ένα Lebesgue αμελητέο υποσύνολο του Ω . ($\beta(E) = \mu(E) = 0$, όπου μ το μέτρο Lebesgue. Η ισότητα ισχύει αφού το β έχει τα ίδια σύνολα μηδενικού μέτρου με το μέτρο Lebesgue.) Συνεπώς έχουμε

$$\psi(z) + \nabla\psi(z) \cdot (\tilde{z} - z) \leq \psi(\tilde{z}), \quad \forall \tilde{z} \in \Omega, \quad \forall z \in \Omega \setminus E, \quad \mu(E) = 0.$$

$$y = \nabla\psi(z)p - \sigma.p. \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}^d \times \overline{\Omega}. \quad (3.2.32)$$

Άρα υπάρχει F , σύνολο p - μηδενικού μέτρου, $p(F) = 0$, $F \subseteq \mathbb{R}^d \times \overline{\Omega}$ τ.ω. : $y = \nabla\psi(z), (y, z) \in (\mathbb{R}^d \times \overline{\Omega}) \setminus F$.

Άρα :

$$\psi(z) - z\nabla\psi(z) \leq \psi(\tilde{z}) - \tilde{z}\nabla\psi(z) \quad (3.2.33)$$

Παίρνουμε $\nabla\psi(z) = y$ και :

$$\psi(z) - zy \leq \psi(\tilde{z}) - zy \leq \psi(\tilde{z}) - \tilde{z} \cdot y \quad (3.2.34)$$

$$\Rightarrow \tilde{z}y - \psi(\tilde{z}) \leq yz - \psi(z), \quad \forall \tilde{z} \in \Omega$$

$$\phi(y) = \psi^*(y) := \sup_{\tilde{z} \in \Omega} \{y\tilde{z} - \psi(\tilde{z})\}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^d.$$

Από τη σχέση (3.2.34) έχουμε ότι : $\psi(z) + y(\tilde{z} - z) \leq \psi(\tilde{z}), \forall \tilde{z} \in \Omega, \forall (y, z) \in A$, όπου A ,

$$A = (\mathbb{R}^d \times (\Omega \setminus E)) \setminus F$$

$$\Theta\delta o : p(A) = 1$$

Το p είναι μέτρο άρα φανερά έχουμε $0 \leq p(A) \leq 1$.

$$1 - p(A) = 1 - p((\mathbb{R}^d \times (\Omega \setminus E)) \setminus F)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $p((\mathbb{R}^d \times (\Omega \setminus E)) \setminus F) = 1$, τότε φανερά $p(A) = 0$.

- $\beta(\partial\Omega) = 0$
- $\beta(\overline{\Omega}) = 1$
- $\beta(\overline{\Omega}) = \beta(\partial\Omega) + \beta(\Omega) = 0 + 1 = 1$, αφού $\overline{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega$, με $\partial\Omega \cap \Omega = \emptyset$.
- $\mu(E) = \beta(E) = 0 \Rightarrow \beta(\Omega \setminus E) = 1$
- $E \subseteq \Omega$ ανοιχτό.
- β, p μέτρα πιθανότητας.

- $p(F) = 0$
- $F \subseteq \mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}$
- $p(\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}) = 1$ επειδή $p : \mathbb{R}^d \times \bar{\Omega} \rightarrow [0, 1]$ και ο χώρος μας είναι ο $\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}$.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι :

$$p((\mathbb{R}^d \times (\Omega \setminus E)) \setminus F) = 1 \quad \text{και άρα } p(A) = 1.$$

$$p(F) = 0, p(\mathbb{R}^d \times (\partial\Omega \cup E)) = \beta(\partial\Omega \cup E), \text{ αφού } \beta \text{ περιθώριο μέτρο του } p.$$

$$\Theta\delta\sigma : \beta(\partial\Omega \cup E) = 0$$

$$E \subseteq \Omega \Rightarrow \partial\Omega \cap E = \emptyset$$

Τα σύνολα $\partial\Omega, E$ είναι ξένα, άρα:

$$\beta(\partial\Omega) + \beta(E) = 0 + 0 = 0 \quad \text{και άρα : } \beta(\partial\Omega \cup E) = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\beta\Omega \cap E \neq \emptyset$, τότε:

$$\begin{aligned} (\partial\Omega \cup E) &= \beta(\partial\Omega) + \beta(E) - \beta(\partial\Omega \cap E) \\ \Rightarrow 0 &\leq \beta(\partial\Omega \cup E) = -\beta(\partial\Omega \cap E) \leq 0 \\ \Rightarrow \beta(\partial\Omega \cup E) &= 0, \quad \beta(\partial\Omega) = 0, \quad \beta(E) \end{aligned}$$

Άρα $\beta(\partial\Omega \cap E) = 0 \Rightarrow \partial\Omega \cap E = \emptyset$, άτοπο ή $\partial\Omega \cap E$ σύνολο μηδενικού μέτρου που σημαίνει ότι $\beta(\partial\Omega \cap E) = 0$.

Οπότε : για $E \subseteq \Omega \Rightarrow \bar{\Omega} \cap E^C = \Omega \setminus E$, άρα:

$$\beta(\bar{\Omega} \setminus (\partial\Omega \cap E)) = 1$$

$$1 = \beta(\bar{\Omega} \cap (\partial\Omega \cap E)^C) = \beta(\bar{\Omega} \cap (\partial\Omega^C \cup E^C))$$

$$\beta(\bar{\Omega} \cap (\partial\Omega^C \cup E^C)) = \beta((\bar{\Omega} \cap \partial\Omega^C) \cup (\bar{\Omega} \cap E^C))$$

$$\beta((\bar{\Omega} \cap \partial\Omega^C) \cup (\bar{\Omega} \cap E^C)) = \beta(\Omega \cup (\bar{\Omega} \setminus E)) < \beta(\bar{\Omega}) = 1$$

Επειδή $\Omega \cup (\bar{\Omega} \setminus E) \subseteq \bar{\Omega} \Rightarrow 1 < 1$ άτοπο. □

$$\Theta\delta\sigma : 1 - p(A) \leq p(\mathbb{R}^d \times (\partial\Omega \cup E)) + p(E).$$

Απόδειξη. Τα σύνολα A, A^c είναι ξένα μεταξύ τους,

$$A \cup A^C = \mathbb{R}^d \times \bar{\Omega} \Rightarrow p(A) + p(A^C) = p(\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}) = 1 \Rightarrow p(A^C) = 1 - p(A) \quad (3.2.35)$$

$$\begin{aligned} A^C &= ((\mathbb{R}^d \times (\Omega \setminus E)) \setminus F)^C = (\mathbb{R}^d \times (\Omega \setminus E)^C) \cup F \\ (\mathbb{R}^d \times (\Omega \setminus E)^C) \cup F &= (\mathbb{R}^d \times (\Omega^C \cup E)) \cup F \\ (\mathbb{R}^d \times (\Omega^C \cup E)) \cup F &= (\mathbb{R}^d \times (\partial\Omega \cup E)) \cup F, \\ \partial\Omega \cup \Omega &= \bar{\Omega} \Rightarrow \Omega^C = \partial\Omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(A^c) &= p(\mathbb{R}^D \times (\partial\Omega \cup E)) + p(E) - p((\mathbb{R}^D \times (\partial\Omega \cup E)) \cap F) \leq \\ &\leq p(\mathbb{R}^D \times (\partial\Omega \cup E)) + p(F) = \beta(\partial\Omega \cup E) = 0, \quad p(F) = 0. \end{aligned}$$

Άρα

$$1 - p(A) \leq 0 \Rightarrow p(A) = 1$$

□

Τότε : $p(F) = 0 \Rightarrow p(\mathbb{R}^d \times (\partial\Omega \cup E)) = \beta(\partial\Omega \cup E) = 0$, αφού β περιθώριο μέτρο του p .

Άρα :

$$1 - p(A) \leq 0 \Rightarrow p(A) \geq 1, p(A) \leq 1 \Rightarrow p(A) = 1.$$

και για το

$$\phi(y) = \psi^*(y) = \sup_{\tilde{z} \in \Omega} \{y\tilde{z} - \psi(\tilde{z})\}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^d$$

έχουμε $\phi(y) + \psi(z) \leq yz, \forall (y, z) \in A$, άρα p-σ.π. στο $\mathbb{R}^d \times \overline{\Omega} \Rightarrow \int \phi(y) dp(y, z) + \int \psi(z) dp(y, z) \leq \int yz dp(y, z)$ (ολοκλήρωση στον $\mathbb{R}^d \times \overline{\Omega} \Rightarrow$) αφού α, β περιθώρια μέτρα του p και

$$\int \phi d\alpha + \int \psi d\beta \leq \int y \cdot z dp(y, z) \quad (3.2.36)$$

Εξ ορισμού, η ϕ ικανοποιεί

$$\phi(y) + \psi(z) \geq y \cdot z, \forall (y, z) \in \mathbb{R}^d \times \Omega \quad (3.2.37)$$

και

$$\int \psi d\beta = 0. \quad (3.2.38)$$

Από τις (3.2.36), (3.2.37), (3.2.38) έχουμε ότι:

$$\int \phi d\alpha = \int y \cdot z dp(y, z).$$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του μεικτού MKP, δηλαδή : $(\phi = \psi^*, \psi, p)$ λύση του μεικτού MKP που αντιστοιχεί στο α , και συνεπώς από την Πρόταση 3.2.1, το $(\phi = \psi^*, \psi, p)$ είναι μοναδική λύση του MKP. □

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1 από το Θεώρημα 3.2.1 και την Πρόταση 3.2.6 που μόλις αποδείξαμε, παρατηρούμε τα ακόλουθα:

- Υπαρξη
Το Θεώρημα 3.2.1 μας εξασφαλίζει ότι (ϕ, ψ, p) είναι λύση του μεικτού MKP

Άρα το p είναι λύση του δυϊκού MKP.

Από την Πρόταση 3.2.1 έχουμε ότι:

$$dp(y, z) = \delta(y - \nabla\psi(z))\beta(z) dz.$$

Επιπλέον από το δυϊκό MKP παίρνουμε ότι:

$$\int f(y) dp(y, z) = \int f(y) \alpha(y).$$

Όμως, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του δ ισχύει:

$$\int f(y) dp(y, z) = \int f(y) \delta(y - \nabla\psi(z))\beta(z) dz = \int f(\nabla\psi(z))\beta(z) dz$$

Και από τον ορισμό του β :

$$\int f(\nabla\psi(z))\beta(z) dz = \int f(\nabla\psi(z)) d\beta(z).$$

Δείξαμε τελικά ότι:

$$\int f(y) \alpha(y) = \int f(\nabla\psi(z)) d\beta(z).$$

Άρα $\exists u^\# = \nabla\psi \in K$, $\forall f$ με τις ιδιότητες του Θεωρήματος 3.1.1.

- Μοναδικότητα

Βρήκαμε $\nabla\psi \in K \Rightarrow \psi \in K_0$ με την επιπλέον ιδιότητα:

$$\int_{\Omega} f(\nabla\psi(z))\beta(z) dz = \int f(y) d\alpha(y).$$

Η Πρόταση 3.2.6 μας εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσης του μεικτού MKP και μας οδηγεί στον εξής συλλογισμό:

Αφού το (ϕ, ψ, p) είναι λύση του μεικτού MKP, συνεπάγεται ότι το ψ είναι μοναδικό. Επειδή υπάρχει μοναδικότητα του ψ , υπάρχει και μοναδικότητα του $\nabla\psi$. Ταυτόχρονα όμως, ισχύει η ισότητα $\nabla\psi = u^\#$, η οποία αποδεικνύει ότι το $u^\#$ μοναδικό.

Το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 3.1.1 προκύπτει από την Πρόταση 3.2.2 ως εξής:

Έστω a_n ακολουθία μέτρου πιθανότητας τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις της Πρότασης 3.2.2. Τότε προκύπτει ότι το 1.2.3 που αντιστοιχεί στην a_n έχει μοναδική λύση την $(\phi_n = \psi_n^*, \psi_n, p_n)$, η οποία συγκλίνει στην $(\phi = \psi^*, \psi, p)$, που αποτελεί μοναδική λύση του 1.2.3 που αντιστοιχεί στο α . Άρα από την σύγκλιση αυτή ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\psi_n \rightarrow \psi, \quad \text{στον } W^{1,1}(\Omega, \beta)$$

Η σχέση αυτή, αποδεικνύει και το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 3.1.1.

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΟΛΙΚΗΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Επαναδιατυπώνουμε εδώ το Θέωρημα Πολικής Παραγοντοποίησης 1.2.2 που θέλουμε να αποδείξουμε.

Θεώρημα 4.0.1. Έστω N το σύνολο όλων των $u \in L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d)$ για τα οποία η ακόλουθη συνθήκη μη εκφυλισμού δεν ισχύει: $\mu(u^{-1}(E)) = 0$ για κάθε αμελητέο Lebesgue σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^d$.

Τότε, για κάθε $u \in L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d) \setminus N$, υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος $(u^{\#}, s)$, τέτοιο ώστε το $u^{\#}$ να ανήκει στο K , το s να είναι απεικόνιση που διατηρεί το μέτρο από το (X, μ) στο (Ω, β) και να ισχύει $u = u^{\#} \circ s$.

Επιπλέον:

1. $u^{\#}$ είναι η μοναδική αναδιάταξη του u στο K .
2. s είναι η μοναδική απεικόνιση που διατηρεί τα μέτρα και μεγιστοποιεί το $\int_X u(x) \cdot s(x) d\mu(x)$.
3. η απεικόνιση $u \rightarrow (u^{\#}, s)$ είναι συνεχής από το $L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d) \setminus N$ στο $L^p(\Omega, \beta; \mathbb{R}^d) \times L^q(X, \mu; \mathbb{R}^d)$ για κάθε $q \in [1, +\infty)$.

4.1 Ύπαρξη

Απόδειξη. Βήμα 1ο ύπαρξη.

Έστω $u \in L^1(X, \mu; \mathbb{R}^d)$ τ.ω:

$\mu(u^{-1}(E)) = 0$, $\forall$ Lebesgue σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^d$ μηδενικού μέτρου.

Επιπλέον ισχύει ότι $\mu(u^{-1}(E)) = \mu(E)$.

Άρα το μέτρο πιθανότητας α είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue μ , με :

$$d\alpha(y) = \alpha(y)dy,$$

όπου $\alpha \geq 0$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^d$, που ορίζεται ως :

$$\int f(y) d\alpha(y) = \int_X f(u(x)) d\mu(x), \forall f \in C(\mathbb{R}^d). \quad (4.1.1)$$

Αφού το MKP έχει τουλάχιστον μία λύση, προκύπτει από την Πρόταση 3.2.1 και την Πρόταση 1.2.3 :

$$\begin{aligned} \exists(\psi, \phi, p) \quad \text{λύση του MKP} \\ \Rightarrow \exists \psi \in K_0 \end{aligned}$$

και

$\exists \phi$ συνάρτηση κυρτή και Lipschitz συνεχής με :

$$\phi(y) := \psi^*(y) = \sup_{z \in \Omega} \{yz - \psi(z)\}, \forall y \in \mathbb{R}^d,$$

τ.ω:

$$z = \nabla \psi^*(\nabla \psi(z)) = \nabla \psi(\nabla \psi(z)), \quad \beta\text{-σ.π. } \forall z \in \bar{\Omega},$$

Η σχέση αυτή ισχύει από την Πρόταση 3.2.1 (bii).

Από τον ορισμό της ϕ ισχύει επιπλέον:

$$y = \nabla \psi(\nabla \psi^*(y)) = \nabla \psi(\nabla \phi(y)), \quad \alpha\text{-σ.π. } \forall y \in \mathbb{R}^d, . \quad (4.1.2)$$

Από την Πρόταση 3.2.1 (aii) έχουμε ότι:

$$dp(y, z) = \delta(y - \nabla \psi(z))\beta(z) dz = \delta(y - \nabla \psi^*(y)) d\alpha(y) = \delta(y - \nabla \phi(y))\alpha(y) dy,$$

από ορισμό της ϕ και την ιδιότητα (bii).

Άρα:

$$dp(y, z) = \delta(y - \nabla \psi(z))\beta(z) dz = \delta(y - \nabla \phi(y))\alpha(y) dy$$

$$u : (X, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^d, T)$$

Η συνάρτηση u είναι Borel απεικόνιση, επίσης ο (X, μ) είναι τοπολογικός χώρος και ο $(\mathbb{R}^d, \tau)$ είναι τοπολογικός χώρος με τη συνήθη τοπολογία. Άρα η συνάρτηση ϕ είναι Borel απεικόνιση όπου:

$$\phi : (\mathbb{R}^d, T) \rightarrow (\mathbb{R}^d, T)$$

.

- $u : X \rightarrow \mathbb{R}^d$
- $\nabla \phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$
- $s := \nabla \phi \circ u : X \rightarrow \mathbb{R}^d$

Ορίζουμε :

$$s(x) = \nabla \phi(u(x)) \quad , x \in X.$$

$$s : (X, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^d, T) \text{ Borel απεικόνιση.}$$

Έχουμε αποδείξει ότι:

$$\phi : (\mathbb{R}^d, T) \rightarrow (\mathbb{R}^d, T) \quad \text{Borel απεικόνιση}$$

και άρα:

$$\nabla\phi : (\mathbb{R}^d, T) \rightarrow (\mathbb{R}^d, T) \text{Borel απεικόνιση.}$$

Άρα:

$$\nabla\phi^{-1}(A) \in T, \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^d$$

Οπότε το σύνολο αυτό είναι ανοιχτό.

Επιπλέον :

$$u : (X, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^d, T) \quad \text{Borel απεικόνιση.}$$

$$u^{-1}(B) \in \mu, \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}^d \quad \text{ανοιχτό,}$$

$$s : (X, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^d, T)$$

$$s(x) := \nabla\phi(u(x)) \quad , x \in X.$$

έστω τυχαίο $V \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοιχτό,

$$\nabla\phi^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}^d \in T, \quad \mu \in \nabla\phi^{-1} \quad \text{ανοιχτό,}$$

$$u^{-1}(\nabla\phi^{-1}(V)) \subseteq X \in \mu, \quad \text{ανοιχτό.}$$

άρα:

$$s^{-1}(V) = (\nabla\phi(u(V)))^{-1} = (\nabla\phi \circ u)^{-1}(V) = u^{-1} \circ \nabla\phi^{-1}(V) = u^{-1}(\nabla\phi^{-1}(V)).$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις και επειδή η επιλογή του V ήταν τυχαία, έχουμε ότι :

$$s^{-1}(V) \subseteq X \in \mu, \forall V \subseteq \mathbb{R}^d.$$

Οπότε το σύνολο $s^{-1}(V)$ είναι ανοιχτό και άρα s Borel απεικόνιση.

Η συνάρτηση $s(x) = \nabla\phi(u(x))$, $x \in X$ είναι απεικόνιση που διατηρεί το μέτρο.

$$s : (X, \mu) \rightarrow (\overline{\Omega}, \beta).$$

Απόδειξη. Έστω $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$,

όπου $C_c(A)$ είναι ο συμπαγής φορέας του A , δηλαδή :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \forall x \notin A \\ \neq 0, & \forall x \in A \end{cases}, \text{ με } A \text{ συμπαγές.}$$

Από τον ορισμό του s :

$$\int f(s(x)) d\mu(x) = \int f(\nabla\phi(u(x))) d\mu(x)$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση (4.1.1) :

$$\int f(\nabla\phi(u(x))) d\mu(x) = \int f(\nabla\phi(y)) d\alpha(y)$$

Από τον ορισμό του α :

$$\int f(\nabla\phi(y)) d\alpha(y) = \int f(\nabla\phi(y))\alpha(y) dy$$

Ισχύει η ισότητα $z = \nabla\phi(y)$, από την Πρόταση (4.1.3), άρα:

$$\int f(\nabla\phi(y))\alpha(y) dy = \int f(z) dp(y, z)$$

Επειδή το β είναι περιθώριο μέτρο του p στο $\bar{\Omega}$ και $f(z) \in L^1(\bar{\Omega}, \beta)$ έχουμε ότι:

$$\int f(z) dp(y, z) = \int f(z)\beta(z) dz, \quad \forall f \in C_C(\mathbb{R}^d).$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε την f έτσι ώστε να ισχύει η τελευταία ισότητα, $\forall f \in L^1(\Omega, \beta)$.

$$f \in C_C(\mathbb{R}^d) \quad , f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin A \\ g(x) \neq 0 & , x \in A \end{cases} \quad , A \text{ συμπαγές.}$$

Άρα αποδείξαμε ότι $s \in S := \{f : (X, \mu) \rightarrow (\bar{\omega}, \beta), \quad f \text{ διατηρεί το μέτρο.}\}$ □

Θα δείξουμε ότι υπάρχει η πολική παραγοντοποίηση της u .
Αρκεί να δείξουμε ότι :

$$u(x) = \nabla\psi(s(x)), \text{ μ-σ.π. } x \in X.$$

Ορίζουμε το σύνολο :

$$M = \{x \in X, u(x) \neq \nabla\psi(s(x))\}.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι : $\mu(M) = 0$ Τότε το σύνολο M θα είναι σύνολο μηδενικού μέτρου και άρα:

$$u(x) = \nabla\psi(s(x)) \text{ μ-σ.π. στο } x \in X.$$

Ας αποδείξουμε ότι $\mu(M) = 0$.

Όπου M , μ-αμελητέο σύνολο.

Απόδειξη.

$$M = \{x \in X; u(x) \neq \nabla\psi(s(x))\}$$

Ισχύει ότι : $s(x) = \nabla\phi(u(x))$ και άρα έχουμε :

$$\{x \in X; u(x) \neq \nabla\psi(s(x))\} = \{x \in X; u(x) \neq \nabla\psi(\nabla\phi(u(x)))\}$$

Επιπλέον έχουμε ότι : $u : X \rightarrow \mathbb{R}^d, y = u(x) \in \mathbb{R}^d$.

Αυτό συνεπάγεται ότι:

$$\begin{aligned} x &= u^{-1}(y)\{u^{-1}(y) \in X; y \neq \nabla\psi(\nabla\phi(y))\} \\ &= u^{-1}\{y \in \mathbb{R}^d; y \neq \nabla\psi(\nabla\phi(y))\}. \end{aligned}$$

Άρα καταλήγουμε ότι:

$$\mu(M) = \mu(\{x \in X; u(x) \neq \nabla\psi(s(x))\}).$$

Από τον ορισμό του α , ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$u(x) = y$$

και

$$s(x) = \nabla\phi(u(x))$$

Από τις παραπάνω σχέσεις αποδεικνύεται ότι :

$$\mu(M) = \alpha(\{y \in \mathbb{R}^d; y \neq \nabla\psi(\nabla\phi(y))\}) = 0.$$

Από την Πρόταση (4.1.2) και το γεγονός ότι το α είναι περιθώριο μέτρο του p στο $\mathbb{R}^d$ αποδείξαμε ότι:

$$\mu(M) = p(\{(y, z) \in \mathbb{R}^d \times \overline{\Omega}; y \neq \nabla\psi(\nabla\phi(y))\}) = 0.$$

Άρα:

$$\mu(m) = 0 \Rightarrow u(x) = \nabla\psi(s(x)) \quad , \mu\text{-σ.π. στο } x \in X. \quad (4.1.3)$$

Τέλος ισχύει:

$$\nabla\psi(s(x)) \in L^1(X, \mu; \mathbb{R}^d)$$

και

$$\mu(N) = 0.$$

Δείξαμε, λοιπόν, ότι:

$$\exists \quad u \in L^1(X, \mu; \mathbb{R}^d) \setminus N.$$

□

4.2 Μοναδικότητα

Βήμα 2ο μοναδικότητα

$$u(x) = \nabla\psi(s(x)), u = \nabla\psi \circ s, u \in L^1(X, \mu; \mathbb{R}^d)$$

Υποθέτουμε ότι:

$$u = \nabla\psi' \circ s', \psi' \in K_0, s' \in S. \quad (4.2.1)$$

Στόχος μας είναι να αποδείξουμε τις παρακάτω δύο σχέσεις :

- $\psi' = \psi$
- $s' = s = \nabla\phi \circ u$, μ -σ.π. στο X , $s' : (X, \mu) \rightarrow (\overline{\Omega}, \beta)$ απεικόνιση που διατηρεί το μέτρο.

Απόδειξη. Από τις ιδιότητες που αποδείξαμε στο 1ο βήμα έχουμε:

$$\forall f \in C(\mathbb{R}^d) \quad \text{τ.ω: } |f(y)| \leq c \cdot (1 + \|y\|) \text{ έχουμε:}$$

$$\int f(y) \alpha(y) dy = \int f(y) d\alpha(y) = \int_X f(u(x)) d\mu(x)$$

Από τη σχέση (4.2.1) έχουμε αποδείξει ότι:

$$\int_X f(u(x)) d\mu(x) = \int f(\nabla\psi'(s'(x))) d\mu(x)$$

Όπου η s' διατηρεί το μέτρο από $(X, \mu) \rightarrow (\overline{\Omega}, \beta)$.

Άρα :

$$\begin{aligned} \int f(s(x)) d\mu(x) &= \int f(z) \beta(z) dz \\ \int f(\nabla\psi'(s'(x))) d\mu(x) &= \int f(\nabla\psi'(z)) \beta(z) dz \end{aligned}$$

οπότε έχουμε:

$$\int f(\nabla\psi'(s'(x))) d\mu(x) = \int f(\nabla\psi'(z)) \beta(z) dz$$

Και λόγω της μοναδικότητας της λύσης από την Πρόταση 3.2.6 του ΜΚΡ ισχύει ότι:

$$\psi' = \psi.$$

□

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι : $s' = \nabla\phi \circ u = s$, μ-σ.π. στο X .
Από την υπόθεση και την ισότητα $\psi' = \psi$.

$$\nabla\psi \circ \psi' = u.$$

Αρκεί δηλαδή να δείξουμε ότι:

$$s' = \nabla\phi \circ \nabla\psi \circ s' \text{ μ-σ.π. στο } X.$$

Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\mu(\{x \in X; s'(x) \neq \nabla\phi(\nabla\psi(s'(x)))\}) = 0.$$

Απόδειξη. Το $s' : (X, \mu) \rightarrow (\bar{\Omega}, \beta)$ είναι συνάρτηση που διατηρεί το μέτρο, αυτό σημαίνει ότι:

$$\mu(\{x \in X; s'(x) \neq \nabla\phi(\nabla\psi(s'(x)))\}) = \beta(\{z \in \bar{\Omega}; z \neq \nabla\phi(\nabla\psi(z))\})$$

Το β είναι περιθώριο μέτρο του p στο $\bar{\Omega}$, άρα από την σχέση (4.1.2) έχουμε:

$$\beta(\{z \in \bar{\Omega}; z \neq \nabla\phi(\nabla\psi(z))\}) = p(\{(y, z) \in \mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}; z \neq \nabla\phi(\nabla\psi(z))\})$$

Από την Πρόταση (4.1.2) ισχύει ότι:

$$p(\{(y, z) \in \mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}; z \neq \nabla\phi(\nabla\psi(z))\}) = 0.$$

Άρα συνοψίζοντας τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε δείξει ότι :

$$\mu(\{x \in X; s'(x) \neq \nabla\phi(\nabla\psi(s'(x)))\}) = 0.$$

Άρα αποδείξαμε ότι το u είναι μοναδικό. □

4.3 Συνέχεια

Βήμα 3ο συνέχεια

Από το Θεώρημα Αναδιάταξης ξέρουμε ότι η απεικόνιση :

$$u \in L^1(X, \mu; \mathbb{R}^d) \rightarrow \psi \in W^{1,1}(\Omega, \beta) \text{ είναι συνεχής.}$$

Απόδειξη. για $p = 1$

Η συνάρτηση $u \rightarrow u^\#$ είναι συνεχής.

$$u^\# \in K = \{\nabla\psi; \psi \in W^{1,1}(\Omega, \beta); \psi \text{ κυρτή}\} \subseteq L^1(\Omega, \beta; \mathbb{R}^d)$$

Άρα επιλέγοντας $u^\# = \nabla\psi$, έχουμε ότι $\psi \in W^{1,1}(\Omega, \beta)$ και άρα η απεικόνιση: $u \rightarrow \psi$ είναι συνεχής.

□

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η απεικόνιση $u \rightarrow s$ είναι συνεχής από τον χώρο $L^1(X, \mu; \mathbb{R}^d) \setminus N$ στο $L^1(X, \mu; \mathbb{R}^d)$.

Απόδειξη. Έστω τυχαία ακολουθία $u_n \in L^1(X, \mu; \mathbb{R}^d) \setminus N$,

$$u_n = \nabla\psi_n \circ s_n,$$

$$u_n(x) = \nabla\psi_n(s_n(x))$$

με $u_n \rightarrow u \in L^1(X, \mu; \mathbb{R}^d) \setminus$ στον $L^1(X, \mu; \mathbb{R}^d)$.

Από την Πρόταση 3.2.6 έχουμε ότι η τριάδα $(\phi_n = \psi_n^*, \psi^*, p_n)$ αποτελεί μοναδική λύση του MKP που αντιστοιχεί στο α_n , το οποίο είναι μέτρο πιθανότητας και σχετίζεται με το u_n . Επιπλέον ισχύει:

$$\int f(\nabla\psi_n(z))\beta(z) dz \rightarrow \int f(\nabla\psi(z), z)\beta(z) dz$$

για κάθε συνεχή συνάρτηση f με συμπαγή φορέα στον $\mathbb{R}^d \times \overline{\Omega}$.

Επιπροσθέτως τα s, s_n διατηρούν τα μέτρα από (X, μ) στο $(\overline{\Omega}, \beta)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και

$$u_n = \nabla\psi_n \circ s_n, u = \nabla\psi \circ s$$

Αφού το β είναι περιθώριο μέτρο του p στο $\overline{\Omega}$ έχουμε:

$$\int f(\nabla\psi_n(z), z)\beta(z) dz = \int f(\nabla\psi_n(z), z) dp(y, z)$$

Από την Πρόταση (4.1.3) και την σχέση $z = \nabla\phi_n(y)$ ισχύει ότι:

$$\int f(\nabla\psi_n(z), z) dp(y, z) = \int f(\nabla\psi_n(\nabla\phi_n(y)), \nabla\phi_n(y))\alpha_n(y) dy$$

Από τον ορισμό του α και επιλέγοντας $y = u(x)$:

$$\int f(\nabla\psi_n(\nabla\phi_n(y)), \nabla\phi_n(y))\alpha_n(y) dy = \int f(\nabla\psi_n(\nabla\phi_n(u_n(x))), \nabla\phi_n(u_n(x))) d\mu(x)$$

Από τον ορισμό της s_n και την ισότητα $\nabla\phi_n(u_n(x)) = s_n(x)$ έχουμε:

$$\int f(\nabla\psi_n(\nabla\phi_n(u_n(x))), \nabla\phi_n(u_n(x))) d\mu(x) = \int f(\nabla\psi_n(s_n(x)), s_n(x)) d\mu(x)$$

Τέλος, από τον ορισμό της u_n και την ισότητα $u_n = \nabla\psi_n \circ s_n$:

$$\int f(\nabla\psi_n(s_n(x)), s_n(x)) d\mu(x) = \int f(u_n(x), s_n(x)) d\mu(x) \quad (4.3.1)$$

Ομοίως :

$$\int f(\nabla\psi(z), z)\beta(z) dz = \int f(u(x), s(x)) d\mu(x). \quad (4.3.2)$$

Από τις σχέσεις (4.3.1) και (4.3.2) ισχύει:

$$\int f(u_n(x), s_n(x)) d\mu(x) \rightarrow \int f(u(x), s(x)) d\mu(x)$$

επειδή $u_n \rightarrow u$ στο $L^1(x, \mu; \mathbb{R}^d)$ ισχύει:

$$\int f(u(x), s_n(x)) d\mu(x) \rightarrow \int f(u(x), s(x)) d\mu(x).$$

Άρα : $s_n \rightarrow s$ στο $L^1(X, \mu; \mathbb{R}^d)$. □

Θα δείξω ότι ισχύει και για $p > 1$.

Απόδειξη. Θα το επεκτείνουμε για κάθε f της μορφής : $f(y, z) = g(y)h(z)$,
όπου : $g \in L^1(\mathbb{R}^d, \alpha)$, $h \in C(\bar{\Omega})$.

Ορίζουμε g_ϵ λεία προσέγγιση του g . και $f_\epsilon(y, z) = g_\epsilon(y)h(z)$ τότε για $y = u(x), z = s_n(x)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} & \left| \int f_\epsilon(u(x), s_n(x)) d\mu(x) - \int f(u(x), s_n(x)) d\mu(x) \right| = \\ & = \left| \int g_\epsilon(u(x)) \cdot h(s_n(x)) d\mu(x) - \int g(u(x)) \cdot h(s_n(x)) d\mu(x) \right| \leq \\ & \leq \int |g_\epsilon(u(x)) \cdot h(s_n(x)) - g(u(x)) \cdot h(s_n(x))| d\mu(x) = \\ & = \int |h(s_n(x))| \cdot |g_\epsilon(u(x)) - g(u(x))| d\mu(x) \end{aligned}$$

$h \in C(\bar{\Omega}) \rightarrow$ συγκλίνει συμπαγώς στο $\bar{\Omega} \subseteq B(0, r) \Rightarrow h$ φραγμένη $\Rightarrow \exists \sup h \Rightarrow \exists \sup |h|$.
Άρα

$$\begin{aligned} & \int |h(s_n(x))| \cdot |g_\epsilon(u(x)) - g(u(x))| d\mu(x) \leq \\ & \leq \sup |h| \cdot \int |g_\epsilon(u(x)) - g(u(x))| d\mu(x) = \\ & = \sup |h| \cdot \int |g_\epsilon(u(x)) - g(u(x))| d\mu(x) = \\ & = \sup |h| \cdot \int |g_\epsilon(y) - g(y)| d\alpha(y) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Για $u(x) = y, \sup |h| \in \mathbb{R}^d$ και από τον ορισμό της g_ϵ . Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι:

$$0 \leq \left| \int f_\epsilon(u(x), s_n(x)) d\mu(x) - \int f(u(x), s_n(x)) d\mu(x) \right| \leq 0.$$

Από το θεώρημα ισοσυγκλινοσών η απόλυτη τιμή συκλίνει στο 0 και άρα:

$$\int f_\epsilon(u(x), s_n(x)) d\mu(x) \rightarrow \int f(u(x), s_n(x)) d\mu(x)$$

για $f(y, z) = \nabla\phi(y) \cdot z$ και θέτοντας $(y = u(x), z = s_n(x))$ έχουμε:

$$\int \nabla\phi(u(x)) \cdot s_n(x) d\mu(x) \rightarrow \int \nabla\phi(u(x)) \cdot s(x) d\mu(x)$$

Έχουμε δείξει ότι $s = \nabla\phi \circ u$ μ-σ.π. στο X

Άρα:

$$\int s(x) \cdot s_n(x) d\mu(x) \rightarrow \int s(x) \cdot s(x) d\mu(x)$$

$$\int s(x)(s_n(x) - s(x)) d\mu(x) \rightarrow 0$$

Ισχύει ότι $s(x) \neq 0$,

$$\int s_n(x) - s(x) d\mu(x) \rightarrow 0$$

$$\int s_n \rightarrow \int s$$

$$\int \|s_n(x) - s(x)\| d\mu(x) \rightarrow 0$$

$$s_n \rightarrow s \in L^1$$

Οι s, s_n διατηρούν το μέτρο από $(X, \mu) \rightarrow (\bar{\Omega}, \beta)$ και άρα:

$$x \in X \Rightarrow \exists z \in \bar{\Omega} \quad \text{τ.ω:} \quad x = s^{-1}(z) \quad \text{και} \quad s(x) = z,$$

$$\mu(x) = \mu(s^{-1}(z)) = \beta(z)$$

Η τελευταία σχέση ισχύει από τον ορισμό του s .

Ομοίως με την $s_n, s_n(x) = z$, από τον ορισμό του s_n ισχύει το ίδιο αποτέλεσμα και για το z .

Επομένως:

$$\int \|s_n(x)\|^2 d\mu(x) = \int \|z\|^2 d\beta(z) = \int \|s(x)\|^2 d\mu(x)$$

Χρησιμοποιώντας την ισότητα $(d\beta(z) = \beta(z)dz)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \int \|s_n(x)\|^2 d\mu(x) &= \int \|z\|^2 \beta(z) dz = \\ &= \int \|s(x)\|^2 d\mu(x) \Rightarrow \|s_n(x) - s(x)\|^2 = \|(s_n(x) - z) - (s(x) - z)\|^2 \leq \\ &\leq \|s_n(x) - z\|^2 + \|s(x) - z\|^2 \rightarrow 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Έχοντας $z = s(x), z = s_n(x)$, ισχύει:

$$\|s_n(x) - s(x)\|^2 \leq 0 \Rightarrow \int \|s_n(x) - s(x)\|^2 d\mu(x) \leq \int 0 d\mu(x) = 0$$

Άρα:

$$\int \|s_n(x) - s(x)\|^2 d\mu(x) \rightarrow 0$$

$$\int \|s_n - s\|^2 d\mu(x) \rightarrow 0$$

$$s_n \rightarrow s \quad \text{στο} \quad L^2(X; \mu; \mathbb{R}^d).$$

Για το Ω έχουμε υποθέσει ότι $\Omega \subseteq B(0, r)$,

άρα, κάθε απεικόνιση που διατηρεί τα μέτρα από $(X, \mu) \rightarrow (\bar{\Omega}, \beta)$ είναι μ-φραγμένη από την ίδια σταθερά r .

Αφού ο (X, μ) είναι χώρος πιθανότητας και οι χώροι $L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d)$, $\forall 1 \leq p \leq +\infty$, είναι ενσωματωμένοι στον $L^1(X, \mu; \mathbb{R}^d)$, τότε:

$$s_n \rightarrow s \quad \text{στον} \quad L^p(X, \mu; \mathbb{R}^d), \quad \forall 1 \leq p \leq +\infty.$$

□

4.4 Χαρακτηρισμός παραγόντων

Βήμα 4ο χαρακτηρισμός παραγόντων

Γνωρίζουμε από το θεώρημα αναδιάρθρωσης τον χαρακτηρισμό της $\nabla\psi$ ως η μοναδική αναδιάρθρωση του u στο $\{\nabla\psi, \psi \in K_0\}$.

Θα δείξουμε ότι το s είναι ο μοναδικός μεγιστοποιητής του $\int s(x) \cdot u(x) d\mu(x)$ στο S .

Απόδειξη. (ύπαρξη)

$$s(x) = \nabla\phi(u(x)), x \in X.$$

Η συνάρτηση ψ είναι κυρτή και τοπικά Lipschitz συνεχής στο Ω , άρα:

$$\forall s' : (X, \mu) \rightarrow (\bar{\Omega}, \beta) \quad \text{είναι απεικόνιση που διατηρεί το μέτρο.}$$

Από την κυρτότητα ισχύει ότι :

$$\psi(s'(x)) \geq \psi(s(x)) + \nabla\psi(s(x))(s'(x) - s(x)) \quad , \mu\text{-σ.π. στο } x \in X \quad , \psi(s(x)) : (\Omega, \beta) \rightarrow (X, \mu). \quad (4.4.1)$$

Τα Lebesgue (αμελητέα) υποσύνολα μηδενικού μέτρου του Ω , απεικονίζονται αντίστροφα

σε μ-αμελητέα υποσύνολα του X μέσω s, s' , (s, s' διατηρούν το μέτρο.)
Ολοκληρώνοντας την σχέση (4.4.1) έχουμε :

$$\int \psi \circ s' d\mu \geq \int \psi \circ s d\mu + \int \nabla \psi \circ s \circ (s' - s) d\mu$$

Αφού η σχέση ισχύει για μ-σ.π. στο $x \in X$. και $s, s' : (X, \mu) \rightarrow \bar{\Omega}, \beta$ διατηρούν τα μέτρα έχουμε ότι:

$$\int \psi \circ s d\mu = \int_X \psi \circ s d\mu = \int_{\bar{\Omega}} \psi d\beta \quad (4.4.2)$$

$$\int \psi \circ s' d\mu = \int_X \psi \circ s' d\mu = \int_{\bar{\Omega}} \psi d\beta \quad (4.4.3)$$

Από τις σχέσεις (4.4.2), (4.4.3) έχουμε :

$$\begin{aligned} \int \psi \circ s d\mu &= \int \psi \circ s' d\mu = \int_{\bar{\Omega}} \psi d\beta \\ \int_X \psi \circ s(x) d\mu(x) &= \int_X \psi \circ s'(x) d\mu(x) = \int_{\bar{\Omega}} \psi(z) d\beta(z) = \int_{\bar{\Omega}} \psi(z) \beta(z) dz, \forall z \in \bar{\Omega} \end{aligned}$$

Από την σχέση (4.4) έχουμε:

$$\int \psi \circ s d\mu \geq \int \psi \circ s d\mu + \int \nabla \psi \circ s \circ (s' - s) d\mu \Rightarrow \int \nabla \psi \circ s \circ (s' - s) d\mu \leq 0$$

Από την σχέση $u = \nabla \psi \circ s$ ισχύει:

$$\int u \cdot (s' - s) d\mu \leq 0,$$

Άρα:

$$\int u \circ s' d\mu \leq \int u \circ s d\mu, \forall s'. \quad (4.4.4)$$

Άρα το s μεγιστοποιεί το $\int u(x)s(x) d\mu(x)$. □

Αρκεί να αποδείξουμε επιπλέον ότι το s είναι μοναδικό.

Απόδειξη. Έστω p' στο $\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}$ μέτρο πιθανότητας τ.ω. :

$$\int f(y, z) dp'(y, z) = \int f(u(x), s'(x)) d\mu(x), \forall f \in C(\mathbb{R}^d \times \bar{\Omega}) \quad , \text{τ.ω.} \quad |f(y, z)| \leq s(1 + \|y\|).$$

Απαιτούμε p' ώστε να είναι η μοναδική λύση του δυϊκού MKP που σενδέεται με το α .
Από τον ορισμό του p' και το δυϊκό MKP αποδεικνύουμε ότι α, β είναι τα περιθώρια μέτρα στο $\mathbb{R}^d$ και $\bar{\Omega}$.

Από τον ορισμό του α και την Πρόταση 2.1.2 έχουμε:

$$\int f(y) dp'(y, z) = \int f(y) d\alpha(y) = \int f(u(x)) d\mu(x) \text{ αφού } f \in C(\mathbb{R}^d)$$

Επιπλέον:

$$\int f(y) dp'(y, z) = \int f(u(x)) d\mu(x) = \int f(y) d\alpha(y), \quad \forall f \in C(\mathbb{R}^d) \quad \text{τ.ω: } |f(y)| \leq c \cdot (1 + \|y\|).$$

Ισχύει ότι $f(z) \in C(\bar{\Omega})$, με:

$$\int f(z) d\beta(z) = \int f(s'(x)) d\mu(x)$$

$s' : (X, \mu) \rightarrow (\bar{\Omega}, \beta), \forall f \in C(\bar{\Omega}),$ όπου s' διατηρεί το μέτρο.

$$\int f(z) dp'(y, z) = \int f(z) \beta(z) dz = \int f(z) d\beta(z)$$

Ελέγχω το p' αν μεγιστοποιεί το $\int yz dp'(y, z)$,
 $\int yz dp'(y, z) = \int u(x)s'(x) d\mu(x)$ από τον αρχικό ορισμό του p' ,

$$y = u(x), z = y'(x), dp'(y, z) = d\mu(x)$$

και επειδή το s' είναι μεγιστοποιητής του $\int u(x)s(x) d\mu(x)$ ισχύει:

$$\int u(x)s'(x) d\mu(x) \geq \int u(x)s(x) d\mu(x)$$

Από την παραπάνω σχέση και την Πρόταση (4.4) έχουμε:

$$\int u \cdot s' d\mu = \int u \cdot s d\mu$$

Άρα $\int yz dp'(y, z) = \int u(x)s'(x) d\mu(x) = \int u(x)s(x) d\mu(x)$

Από την πολική παραγοντοποίηση και την ισότητα $u(x) = \nabla\psi(s(x))$ παίρνουμε:

$$\int u(x)s(x) d\mu(x) = \int \nabla\psi(s(x)) \cdot s(x) d\mu(x)$$

και s διατηρεί το μέτρο.

$$\int \nabla\psi(s(x)) \cdot s(x) d\mu(x) = \int \nabla\psi(z)z d\beta(z)$$

Από τον ορισμό του β ισχύει:

$$\int \nabla\psi(z)z d\beta(z) = \int \nabla\psi(z)z\beta(z) dz$$

Από την Πρόταση 1.2.3:

$$\int \nabla\psi(z)z\beta(z) dz = \int \nabla\psi(z)z dp(y, z)$$

Άρα

$$\int yz dp'(y, z) = \int yz dp(y, z) \quad (4.4.5)$$

Από τον ορισμό του p' και επειδή α, β περιθώρια μέτρα του p' , έχουμε:

$$\int f(y) dp'(y, z) = \int f(y) d\alpha(y), \forall f \in C(\mathbb{R}^d) : |f(y)| \leq c \cdot (1 + \|y\|)$$

και

$$\forall f \in C(\overline{\Omega}), \int f(z) dp'(y, z) = \int f(z) \beta(z) dz = \int f(z) d\beta(z)$$

Επομένως,

$$\forall g \in C(\overline{\Omega}) \quad \int g(z) dp'(y, z) = \int g(z) \beta(z) dz.$$

Από την σχέση αυτή και την Πρόταση (4.4.5) ισχύει:

p μεγιστοποιητής του $\int yz dp(y, z) \Rightarrow p'$ μεγιστοποιητής του $\int yz dp(y, z) \Rightarrow$

$$p' = p$$

αφού ο μεγιστοποιητής είναι μοναδικός.

Οπότε:

$$\int f(u(x), s'(x)) d\mu(x) = \int f(y, z) dp'(y, z) = \int f(y, z) dp(y, z) =^p \quad (4.4.6)$$

$$= \int f(u(x), s(x)) d\mu(x), \forall f \in C(\mathbb{R}^d \times \overline{\Omega}) \quad T.\omega. \quad |f(y, z)| \leq c \cdot (1 + \|y\|)$$

Επιλέγουμε $f(y, z) = \nabla \phi(y) \cdot z$, όπως και στο βήμα 3ο, οπότε:

$$\int f(u(x), s'(x)) d\mu(x) = \int f(u(x), s(x)) d\mu(x)$$

και

$$\int f(u(x), s'(x)) d\mu(x) = \int \nabla \phi(u(x)) \cdot s'(x) d\mu(x)$$

και

$$\int f(u(x), s(x)) d\mu(x) = \int \nabla \phi(u(x)) \cdot s(x) d\mu(x).$$

$$s(x) = \nabla \phi(u(x))$$

$$\int s(x) s'(x) d\mu(x) = \int s(x) s(x) d\mu(x)$$

$$\left\| \int s(x) s'(x) d\mu(x) \right\| = \left\| \int s(x) s(x) d\mu(x) \right\|$$

Από το βήμα 3ο, τα s, s' διατηρούν το μέτρο και άρα:

$$\int \|s'(x)\|^2 d\mu(x) = \int \|s(x)\|^2 d\mu(x) \Rightarrow \int \|s(X) - s'(x)\|^2 d\mu(x) = 0.$$

Άρα :

$$s(x) = s'(x), \forall x \Rightarrow s = s'.$$

Οπότε s μοναδικό. □

Αποδείξαμε έτσι το Θεώρημα Πολικής Παραγοντοποίησης. □

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Θ. Θεοχάρη-Αποστολίδη, Χ. Βαβατσούλας, Χ. Χαραλάμπους: Γραμμική Άλγεβρα, Εκδόσεις Τζιόλα, 2017
- [2] Abraham R., J.E. Marsden and T. Ratiu: Manifolds, Tensor Analysis and Applications, Reading MA Addison-Wesley, 1983.
- [3] Alvino A., G. Trombetti, P. L. Lions: On optimization problems with prescribed rearrangments, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 13, 185-220, 1989.
- [4] Aubin J.P.: Mathematical Methods of Game and Economic Theory, North-Holland Amsterdam, 1979.
- [5] Bandle C.: Isoperimetric Inequalities, Pitman London, 1980
- [6] Brenier Y.: Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs, C.R.Acad. Sci. Paris, 305, 805-808, 1987.
- [7] Brenier Y.: Polar Factorization and Monotone Rearrangements of Vector-Valued Functions, Commun. Pure Appl. Math. 44 , no. 4, 375-417, Wiley, 1991.
- [8] Brezis H.: Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, 2011.
- [9] Caffarelli L., L. Nirenberg, J. Spruck: *The Dirichlet Problem for Nonlinear second-Order Elliptic Equations I. Monge-Ampere Equation* vol.37 no.3, John Wiley and Sons, Inc, 369-402, 1984.
- [10] Ekeland I., R. Temam: Convex Analysis and Variational Problems, SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia), 1999.
- [11] Evans L. C. : Partial Differential Equations second edition, American Mathematical Society (AMS), Providence, 2010.
- [12] Figalli A., G. D. Philippis: The Monge-Ampere equation and its link to Optimal Transportation Vol. 51 no. 4, American Mathematical Society (AMS), 527-580, 2014.

- [13] Hardy G.H., J.E. Littlewood and G. Polya: Inequalities, Cambridge University Press, 1988.
- [14] Kantorovich L.V.: On the Translocation of Masses, Dok. Akad. Nauk SSSR 37 no. 7-8, 199-201, 1942.
- [15] Knott M., C.S. Smith: On the optimal mapping of distributions, J. Opt. Th. Appl. 43 no. 1, 39-49, 1984.
- [16] Monge G.: Memoire sur la theorie des deblais et de remblais, Memoires de l'Academie des Sciences, 666-704, 1781.
- [17] Mossino J.: Inegalites Isometriques et applications en physique, Hermann , Paris, 1997.
- [18] Munkres J., Topology (2nd edition), Prentice Hall, 2000.
- [19] Rachev S.T.: The Monge-Kantorovich mass transference problem, Volume II: Applications, Springer, 1998.
- [20] Rachev S.T., Ruschendorf L.: Recent results in the theory probability metrics, Statistics and Risk Modeling 9 no. 4, 327-373, 1991.
- [21] Royden H. L. , P. M. Fitzpatrick: Real Analysis Fourth Edition, Pearson, 2010.
- [22] Ryff J. V.: Orbits of L^1 -Functions under doubly stochastic operators, Transactions of the American Mathematical Society no. 117, 92-100, 1965.
- [23] Santambrogio F.: Optimal Transport for Applied Mathematicians- Calculus of Variations, PDEs and Modeling, Birkhäuser , 2015.
- [24] Villani C. : Optimal transport, old and new, Springer, 2018.