



ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
“Διδακτική και τεχνολογίες μάθησης των Φυσικών Επιστημών”

Μεταπτυχιακή εργασία

*Ο συνδυαστικός συλλογισμός νηπίων
κατά τη συνεργατική επίλυση ενός προβλήματος*

Ματιάκη Αικατερίνη

Επιβλέπων Καθηγητής: Τάσης Κωνσταντίνος

Εξεταστική επιτροπή: Τάσης Κωνσταντίνος

Βαμβακούση Ξανθή

Σκουμπουρδή Χρυσάνθη

Ιωάννινα 2025



**DEPARTMENT OF PRIMARY EDUCATION
POSTGRADUATE PROGRAMME
"Didactics and Learning Technologies in Natural Sciences"**

Postgraduate work

*The combinatorial reasoning of kindergartners
during cooperative problem solving*

Matiaki Aikaterini

Supervisor: Tatsis Konstantinos

Committee of examiners: Tatsis Konstantinos
Vamvakoussi Xanthi
Skoumpourdi Chrysanthi

Ioannina 2025

Περίληψη

Ο συνδυαστικός συλλογισμός αποτελεί βασικό στοιχείο της μαθηματικής σκέψης, επιτρέποντας στα παιδιά να εξερευνούν πιθανούς συνδυασμούς, να αναλύουν καταστάσεις και να αναπτύσσουν λογικές στρατηγικές. Σκοπός της παρούσας μελέτης ήταν ο εντοπισμός των βασικών χαρακτηριστικών του συνδυαστικού συλλογισμού παιδιών 4-6 χρονών. Η έρευνα περιλάμβανε μια δραστηριότητα όπου τα παιδιά καλούνταν να συνεργαστούν σε ζευγάρια για να βρουν τους διαφορετικούς συνδυασμούς που μπορούσαν να δημιουργήσουν από τέσσερα καπέλα και τρεις μάσκες. Μέσα από την έρευνα που διεξήχθη διακρίθηκαν οι ιδιότητες του συνδυαστικού συλλογισμού νηπίων, παρατηρώντας τις κινήσεις τους και αναλύοντας τη λεκτική τους επικοινωνία. Αναλύθηκε, επιπλέον, το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης μεταξύ των παιδιών στην επίλυση ενός συνδυαστικού προβλήματος. Το δείγμα αποτελούνταν από πέντε νήπια και πέντε προνήπια. Για τη συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε ημιδομημένη συνέντευξη. Στα παιδιά δόθηκαν πλαστικοποιημένα τα εξής υλικά: ένα αγόρι, τρεις μάσκες και τέσσερα καπέλα. Τα παιδιά διαχειρίστηκαν τα υλικά και συνεργάστηκαν σε ζεύγη για να βρουν τους συνδυασμούς. Έγινε καταγραφή των διαλόγων, καθώς και των συνδυασμών που σχημάτισαν. Η ανάλυση έγινε σε δύο επίπεδα: στο πρώτο επίπεδο αναλύθηκαν οι στρατηγικές επίλυσης και στο δεύτερο επίπεδο αναλύθηκαν χαρακτηριστικά της αλληλεπίδρασης, με έμφαση στους ρόλους που υιοθέτησαν τα παιδιά. Οι ομάδες που συμμετείχαν στην έρευνα ακολούθησαν τις δύο λιγότερο αποτελεσματικές στρατηγικές επίλυσης προβλήματος, την Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα και τη Συστηματική Δοκιμή. Όσον αφορά στους ρόλους που υιοθέτησαν τα παιδιά κατά την επίλυση του προβλήματος, ένα παιδί ήταν συνεργατικός αξιολογητής, δύο παιδιά ήταν παθητικοί συνεργάτες, τρία παιδιά ήταν εγωκεντρικοί καθοδηγητές και τέσσερα παιδιά ήταν συνεργατικοί καθοδηγητές. Τρεις ομάδες κατάφεραν να βρουν και τους

12 διαφορετικούς συνδυασμούς. Τα αποτελέσματα της μελέτης δείχνουν ότι υπήρξε σύνδεση ανάμεσα στις στρατηγικές επίλυσης και στους ρόλους που ανέλαβαν τα παιδιά.

Λέξεις κλειδιά

Συνδυαστικός συλλογισμός, Προσχολική αγωγή, Συνεργατική επίλυση προβλημάτων

Abstract

Combinatorial reasoning is a key element of mathematical thinking, allowing children to explore possible combinations, analyze situations and develop logical strategies. The purpose of this study was to identify the key features of combinatorial reasoning in 4–6-year-old children. The research involved an activity where children were asked to work in pairs to find the different combinations they could create from four hats and three masks. Through the research conducted, the qualities of kindergartners' combinatorial reasoning were discerned by observing their movements and analyzing their verbal communication. Furthermore, the effect that the interaction between children had in solving the combinatorial problem was analyzed. The sample consisted of five pre-kindergarten students and five kindergarten students. A playful interview was conducted to collect the data. The children were given laminated materials: one boy, three masks and four hats. The children handled the materials and worked in pairs to find the combinations. A record was made of the dialogues and the combinations they formed. The analysis was done in two levels: in the first level we analyzed the solution strategies and in the second level we analyzed the characteristics of the interaction, focusing on the roles adopted by the children. The groups that participated in the study followed the two least effective problem-solving strategies, namely Random Trial and Error and Systematic Trial. In terms of the roles adopted by the children during problem solving, one child was a collaborative evaluator, two children were passive collaborators, three children were egocentric leaders, and four children were collaborative leaders. Three groups managed to find all 12 different combinations. The results of the study show that there was a link between the adopted solution strategies and the roles the children took on.

Key words

Combinatorial reasoning, Pre-school education, Cooperative problem solving

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή	7
1.1 Πλαίσιο της έρευνας.....	7
1.2 Ερευνητικό πρόβλημα και στόχοι	8
1.3 Δομή της διπλωματικής.....	9
2. Θεωρητικό πλαίσιο	10
2.1 Η Συνδυαστική για την ηλικία 4-6 ετών	10
2.2 Η μάθηση ως κοινωνικο-πολιτισμική κατασκευή	14
2.3 Πλαίσιο με νόημα.....	15
2.4 Συσχέτιση της βιβλιογραφίας με τα ερευνητικά ερωτήματα.....	16
3. Μεθοδολογία	18
3.1 Σχεδιασμός έρευνας	18
3.2 Συλλογή δεδομένων	18
3.3 Ανάλυση δεδομένων	19
3.3.1 Στρατηγικές.....	19
3.3.2 Αλληλεπίδραση	20
3.3.3 Επίδραση.....	22
4. Αποτελέσματα	23
4.1 Παρουσίαση των ευρημάτων	23
4.2 Συσχέτιση των ευρημάτων με τα ερευνητικά ερωτήματα	23
4.2.1 Πρώτο ερευνητικό ερώτημα	28
4.2.2 Δεύτερο ερευνητικό ερώτημα	29
4.2.3 Τρίτο ερευνητικό ερώτημα.....	30
4.3 Επισκόπηση των ευρημάτων	31
4.4 Ποιοτικά ευρήματα	32
5. Συζήτηση	34
5.1 Ερμηνεία των αποτελεσμάτων	34
5.2 Σύγκριση με την υπάρχουσα βιβλιογραφία	35
6. Συμπεράσματα.....	41
6.1 Κύρια ευρήματα	41
6.2 Επιπτώσεις των ευρημάτων.....	42
6.3 Σημασία της έρευνας.....	42
6.4 Πλεονεκτήματα και περιορισμοί της μελέτης	43
6.5 Βασικά συμπεράσματα.....	44
Παράρτημα	46
Βιβλιογραφικές αναφορές	61

1. Εισαγωγή

1.1 Πλαίσιο της έρευνας

Το ευρύτερο πλαίσιο του ερευνητικού θέματος είναι ο συνδυαστικός συλλογισμός των παιδιών 4-6 χρονών. Στην εργασία αυτή θα γίνει λόγος για την διδακτική των Μαθηματικών στο νηπιαγωγείο γενικότερα, δηλαδή για το πλαίσιο με νόημα που είναι σκόπιμο να έχουν οι δραστηριότητες για τους μαθητές αυτούς και για τη μάθηση ως κοινωνικο-πολιτισμική κατασκευή, αλλά το επίκεντρο της προσοχής αφορά τον συνδυαστικό συλλογισμό. Η έρευνα που θα παρουσιαστεί θα αφορά τον συνδυαστικό συλλογισμό των παιδιών 4-6 ετών, τις στρατηγικές που ακολουθούν τα παιδιά αυτά όταν επιλύουν ένα συνδυαστικό πρόβλημα, καθώς και τους ρόλους που αναλαμβάνουν κατά την επίλυση αυτή.

Τα Μαθηματικά είναι ένα γνωστικό αντικείμενο που κρίνεται απαραίτητο να ξεκινήσει από την προσχολική ηλικία (Scweinhart & Weikart, 1986), έτσι ώστε τα παιδιά να μπορέσουν να έχουν μια θετική στάση απέναντι σε αυτά και να καλλιεργήσουν τις κατάλληλες βάσεις γνώσεων και δεξιοτήτων, τις οποίες θα έχουν την ευκαιρία να διεκδικούν στις επόμενες σχολικές τάξεις. Χρειάζεται να δοθεί μεγαλύτερη προσοχή στα συνδυαστικά προβλήματα στα πρώτα χρόνια της σχολικής εκπαίδευσης, καθώς πρόκειται για μια πλούσια μαθηματική θεματική, σύμφωνα με τον Höveler (2018) και τους Wathne and Carlsen (2024). Τα παιδιά ήδη από την προσχολική ηλικία είναι σε θέση να επιλύουν συνδυαστικά προβλήματα διαφόρων τύπων (Pessoa and Borba, 2012). Ο συλλογισμός είναι σημαντικός για την εκμάθηση των Μαθηματικών (Barnes, 2021). Ερευνητές και εκπαιδευτικοί διεθνώς έχουν υποστηρίξει ότι ένας πρωταρχικός στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης των μαθητών από το νηπιαγωγείο μέχρι και το λύκειο θα πρέπει να είναι η ανάπτυξη του συλλογισμού (Ball et al., 2002). Ο συλλογισμός είναι μια δεξιότητα στην οποία βασίζεται η χρήση των Μαθηματικών από τα παιδιά και οι Ball and Bass (2003) υποστηρίζουν ότι χωρίς συλλογισμό «η μαθηματική κατανόηση δεν έχει νόημα». Η έμφαση στην ανάπτυξη του συλλογισμού από τις πρώτες σχολικές τάξεις θεωρήθηκε ζωτικής σημασίας για την προώθηση της κατανόησης και της ικανότητας επικοινωνίας της (Hanna & Jahnke, 1996 · Polya, 1981· Stylianides, 2007). Οι προσεκτικά σχεδιασμένες ασκήσεις μπορούν να επιτρέψουν στους μαθητές να συλλογίζονται αποτελεσματικά και στοχευμένα, σύμφωνα με τους Yankelewitz et al. (2010). Η εύρεση ασκήσεων που μπορούν, με φυσικό τρόπο, να προκαλούν τον συλλογισμό των παιδιών, είναι πολύτιμη καθώς μπορεί να παρέχει εμπειρίες με διάφορα είδη συλλογισμού, εμπειρίες που θα χρειαστούν για να γίνουν τα παιδιά επιδέξια στον συλλογισμό με ποικίλους τρόπους (Yankelewitz et al. 2010). Ο συνδυαστικός συλλογισμός, όπως και κάθε άλλο είδος

συλλογισμού, είναι σημαντικό να ξεκινήσει να αναπτύσσεται από μικρές ηλικίες, καθώς όπως αναφέρει η Τζεκάκη (2007), αν στην εκπαίδευση επιθυμούμε να παρέχουμε στα παιδιά μαθηματική γνώση που έχει νόημα για αυτά, χρειάζεται να δομηθεί μια πορεία ανάπτυξης των εννοιών και διαδικασιών από την προσχολική ηλικία. Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν ακόμη και προχωρημένοι μαθητές των Μαθηματικών στην επίλυση συνδυαστικών προβλημάτων σχετίζονται με τον τρόπο διδασκαλίας της συνδυαστικής (Roa et al., 2001). Τα παιδιά μπορούν να αναπτύξουν γνώσεις και δεξιότητες, γενικότερα, στο οικογενειακό και σχολικό περιβάλλον. Επειδή, όμως, δεν έχουν όλοι οι μαθητές τις ίδιες ευκαιρίες και ερεθίσματα από την οικογένειά τους, είναι ευθύνη των εκπαιδευτικών να τους τις παρέχουν στο σχολείο.

Είναι, λοιπόν, ξεκάθαρο ότι η συνδυαστική είναι μια σύνθετη θεματική, η οποία προσφέρεται για διερεύνηση ακόμη και από το Νηπιαγωγείο. Όμως, ένα βασικό ζήτημα που σχετίζεται με το θέμα αυτό είναι ότι η μελέτη του συλλογισμού των παιδιών είναι ένα δύσκολο εγχείρημα. Τα παιδιά ηλικίας 4-6 ετών δεν έχουν την ευχέρεια του λόγου που διαθέτουν μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας. Επομένως, αυτό οδηγεί σε μια σειρά προκλήσεων που σχετίζονται με τη μελέτη του συνδυαστικού συλλογισμού των νηπίων.

1.2 Ερευνητικό πρόβλημα και στόχοι

Υπάρχουν λίγες πηγές ικανές να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς να υποστηρίξουν τα μικρά παιδιά να βελτιώσουν το συνδυαστικό τους συλλογισμό, σύμφωνα με την Zapata-Cardona, (2018). Δεν υπάρχουν πολλές μελέτες για τις προσεγγίσεις των νεαρών μαθητών κατά την επίλυση συνδυαστικών προβλημάτων (Höveler, 2018). Έχουν γίνει κάποιες έρευνες (Wathne & Carlsen, 2024· Zapata-Cardona, 2018) που αφορούν τον συνδυαστικό συλλογισμό, αλλά περιλάμβαναν κυρίως μαθητές μεγαλύτερης εκπαιδευτικής βαθμίδας. Επίσης, δεν υπάρχουν αρκετές έρευνες που να καλύπτουν τους ρόλους που αναλαμβάνουν τα παιδιά νηπιακής ηλικίας καθώς επιλύουν προβλήματα συνεργατικά. Τέλος, δεν υπάρχουν πολλές έρευνες, ειδικά στην Ελλάδα, που να αφορούν τις στρατηγικές που ακολουθούν οι μαθητές 4-6 ετών κατά τη διάρκεια επίλυσης ενός συνδυαστικού προβλήματος.

Ο κύριος στόχος της έρευνας αυτής είναι λοιπόν ο εντοπισμός των βασικών χαρακτηριστικών του συνδυαστικού συλλογισμού των παιδιών 4-6 χρονών. Συγκεκριμένα, σκοπός είναι η διάκριση των χαρακτηριστικών του συνδυαστικού συλλογισμού των νηπίων, παρατηρώντας τις κινήσεις τους και αναλύοντας τη λεκτική και μη λεκτική επικοινωνία τους. Επιπλέον, μας απασχολεί το πώς η αλληλεπίδραση των παιδιών επηρεάζει τη συνεργατική λύση ενός

προβλήματος. Επιπρόσθετα, θα διακριθούν οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα παιδιά όταν επιλύουν ένα συνδυαστικό πρόβλημα συνεργατικά, καθώς και οι ρόλοι που αναλαμβάνουν κατά την επίλυση αυτή. Τα ερευνητικά ερωτήματα αυτής της εργασίας είναι:

- Ποιες στρατηγικές ακολούθησαν παιδιά 4-6 ετών κατά την επίλυση ενός προβλήματος συνδυαστικής σε ζεύγη;
- Ποια ήταν τα χαρακτηριστικά της αλληλεπίδρασης μεταξύ των μελών του ζεύγους των παιδιών κατά τη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος συνδυαστικής;
- Ποια ήταν η επίδραση των χαρακτηριστικών της αλληλεπίδρασης στις στρατηγικές που ακολουθήθηκαν;

1.3 Δομή της διπλωματικής

Το επόμενο κεφάλαιο της εργασίας αυτής αφορά το Θεωρητικό Πλαίσιο, όπου θα αναλυθούν οι βασικές θεωρίες που στηρίζουν την έρευνα που θα ακολουθήσει, τα κύρια ευρήματα από τις προηγούμενες σχετικές μελέτες και θα προσδιοριστούν τα κενά της βιβλιογραφίας. Ακολουθεί το κεφάλαιο των Μεθόδων, όπου θα προσδιοριστεί ο σχεδιασμός της έρευνας, οι συμμετέχοντες, η συλλογή και ανάλυση των δεδομένων, καθώς και οι περιορισμοί της μεθοδολογίας. Στο κεφάλαιο των Αποτελεσμάτων, θα γίνει επισκόπηση των ευρημάτων, περιγραφική και συμπερασματική ανάλυση των δεδομένων και παρουσίαση αυτών. Στο κεφάλαιο της Συζήτησης, θα γίνει ερμηνεία των αποτελεσμάτων και σύγκριση αυτών με την υπάρχουσα βιβλιογραφία και θα αναλυθούν οι επιπτώσεις των ευρημάτων, οι περιορισμοί και τα πλεονεκτήματα αυτών, καθώς και θα γίνουν συστάσεις για μελλοντικές έρευνες. Το τελευταίο κεφάλαιο αφορά τα Συμπεράσματα της έρευνας. Εκεί θα γίνει μια περίληψη των βασικών ευρημάτων, των επιπτώσεων και συνεισφορών της έρευνας, καθώς και των περιορισμών και προβληματισμών που προέκυψαν από αυτή.

2. Θεωρητικό πλαίσιο

2.1 Η Συνδυαστική για την ηλικία 4-6 ετών

Η Συνδυαστική είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με τους διαφορετικούς τρόπους επιλογής αντικειμένων από ένα σύνολο ή με την ταξινόμηση αντικειμένων (Wallis & George, 2016). Η Συνδυαστική συχνά περιγράφεται συνοπτικά ως η επιστήμη της μέτρησης, και πράγματι η μέτρηση αποτελεί μεγάλο μέρος της συνδυαστικής. Ωστόσο, όπως υποδηλώνει το όνομά της, είναι κάτι ευρύτερο από αυτό: αφορά τον συνδυασμό πραγμάτων. Τα ερωτήματα που προκύπτουν περιλαμβάνουν προβλήματα μέτρησης: «Με πόσους τρόπους μπορούν να συνδυαστούν αυτά τα στοιχεία;». Υπάρχουν όμως και άλλα ερωτήματα, όπως το αν ένας συγκεκριμένος συνδυασμός είναι εφικτός ή ποιος συνδυασμός είναι ο «καλύτερος» από κάποια άποψη (Guichard, 2017).

Ο Kapur (1970) ανέφερε τους λόγους για τους οποίους η Συνδυαστική ανάλυση είναι σημαντική για τα μαθηματικά στο σχολείο. Κάποιοι από αυτούς είναι οι εξής:

- Δεδομένου ότι η Συνδυαστική δεν εξαρτάται από τον λογισμό (Calculus), τα προβλήματά της μπορούν να αντιμετωπιστούν από μαθητές μικρών, κιόλας, τάξεων. Στην πραγματικότητα, έχει προβλήματα κατάλληλα για όλες τις ηλικίες.
- Η Συνδυαστική μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκπαίδευση των μαθητών στις έννοιες της απαρίθμησης, της διατύπωσης υποθέσεων, της γενίκευσης, της συστηματικής σκέψης κ.λπ.
- Εφαρμογές της Συνδυαστικής στη Φυσική, τη Χημεία, τη Βιολογία, το σχεδιασμό πειραμάτων, τις πιθανότητες κ.λπ. μπορούν να επισημανθούν.
- Οι μαθητές μπορούν να εκτιμήσουν τις δυνατότητες και τους περιορισμούς των μαθηματικών μέσω των συνδυαστικών μαθηματικών.
- Η ενασχόληση με συνδυαστικά προβλήματα μπορεί να βοηθήσει στην ανάπτυξη μιας συνδυαστικής νοοτροπίας, η οποία εξετάζει όλες τις πιθανότητες, τις απαριθμεί και εντοπίζει την καλύτερη.

Η Συνδυαστική είναι μια θεματική που πρέπει οπωσδήποτε να συμπεριλαμβάνεται σε όλες τις σχολικές βαθμίδες, καθώς σύμφωνα με την English (2005), η Συνδυαστική συνιστά μια πλούσια δομή σημαντικών μαθηματικών αρχών, οι οποίες αποτελούν τη βάση πολλαπλών άλλων τομέων μελέτης, όπως είναι οι πιθανότητες, οι υπολογισμοί και η μέτρηση. Επιπλέον, τα προβλήματα συνδυαστικής μπορούν να διευκολύνουν τους μαθητές να διατυπώνουν

υποθέσεις, να σκέφτονται συστηματικά και να κάνουν γενικεύσεις στα Μαθηματικά. Καθώς οι συνδυαστικές διαδικασίες είναι υπεύθυνες για σημαντικά ορόσημα στη γνωστική ανάπτυξη, επιβάλλεται η μαθηματική εκπαίδευση να ασχοληθεί με τις δεξιότητες των παιδιών στη Συνδυαστική (English, 1991).

Τα συνδυαστικά προβλήματα είναι μια πολύ καλή ευκαιρία για μαθηματική εξερεύνηση. Η Συνδυαστική είναι ένας τομέας των μαθηματικών με πολλές εφαρμογές και συνδέεται με διάφορους άλλους κλάδους. Στις τάξεις του δημοτικού, ο στόχος είναι οι μαθητές να μάθουν βασικές έννοιες και μεθόδους, να τις χρησιμοποιούν για να λύνουν απλά καθημερινά προβλήματα και να καλλιεργούν τη λογική και τη συνδυαστική τους σκέψη. Σε αυτή την ηλικία, δεν χρειάζεται να απομνημονεύουν τύπους, αλλά να αναγνωρίζουν και να λύνουν προβλήματα με τρόπο διαισθητικό, διερευνητικό και δημιουργικό. Ο πειραματισμός με συνδυασμούς πολλών μεταβλητών, που βοηθά τα παιδιά να ανακαλύψουν πώς αλληλεπιδρούν διάφορα στοιχεία μεταξύ τους, είναι ένας τομέας της γνωστικής τους ανάπτυξης, στον οποίο παλιότερα δεν είχε δοθεί αρκετή σημασία. Τέτοιες δραστηριότητες, λοιπόν, μπορούν να είναι πολύ ενδιαφέρουσες για τους μικρούς μαθητές και να αποτελέσουν τη βάση για την ανάπτυξη της συστημικής τους σκέψης (Φραντζεσκάκη κ.ά., 2018).

Ο συνδυαστικός συλλογισμός είναι η διαδικασία δημιουργίας σύνθετων κατασκευών από ένα σύνολο στοιχείων που ικανοποιούν τις συνθήκες ή συνάγονται από την κατάσταση. Στη διαδικασία αυτή χρησιμοποιούνται γνωστικές λειτουργίες, όπως συνδυασμοί, διατάξεις, μεταθέσεις, συμβολισμοί και τύποι (Wu et al., 2022). Ο συνδυαστικός συλλογισμός είναι ένα σημαντικό προαπαιτούμενο για τον λογικό συλλογισμό (Millán, 2013). Ο συνδυαστικός συλλογισμός μπορεί να ευνοηθεί από απλές δραστηριότητες συνδυαστικής καταμέτρησης. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να προωθούν τις συνδυαστικές ασκήσεις από τα πρώτα σχολικά χρόνια για να ενθαρρύνουν τον στοχασμό και τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων που συμβάλλουν στην ανάπτυξη της συνδυαστικού συλλογισμού (Zapata-Cardona, 2018).

Τι είναι όμως ένα συνδυαστικό πρόβλημα; Ένα συνδυαστικό πρόβλημα περιλαμβάνει τον συνδυασμό κάθε στοιχείου ενός συνόλου με κάθε στοιχείο ενός άλλου συνόλου, σύμφωνα με τους Wathne and Carlsen (2024). Για παράδειγμα, αν υπάρχουν 4 στοιχεία στο ένα σύνολο και 5 στοιχεία στο άλλο σύνολο, το γινόμενο γίνεται $4 \times 5 = 20$ συνδυασμοί.

Τα προβλήματα συνδυαστικής καταμέτρησης απαιτούν πολλές συνδεδεμένες ενέργειες. Αρχικά, τα παιδιά πρέπει να ασχοληθούν με τις μονάδες της απροσδιόριστης ποσότητας που πρέπει να καταμετρηθεί- στη συνέχεια, πρέπει να συνδυάσουν σωστά στοιχεία από τα

διαφορετικά σύνολα για να δημιουργήσουν τις νέες μονάδες καταμέτρησης- τέλος, πρέπει να ελέγξουν τι έχουν μετρήσει για να αποφασίσουν πότε θα σταματήσουν (Shin & Steffe, 2009). Η ανάπτυξη της συνδυαστικής καταμέτρησης είναι σημαντική επειδή αποτελεί τη βάση για πιο σύνθετα θέματα (Ura et al., 2011).

Τα αποτελέσματά της έρευνας των Wathne and Carlsen (2024) δείχνουν τους τρόπους με τους οποίους οι εκφράσεις, τα σχέδια και οι χειρονομίες, όπως το να δείχνεις και να σύρεις ένα αντικείμενο, εμφανίζονται και λειτουργούν μαζί στο συνδυαστικό συλλογισμό. Ο πολυτροπικός συλλογισμός των μαθητών κατέστησε σαφή τη συνδυαστική τους σκέψη και διευκόλυνε την επίλυση των συγκεκριμένων συνδυαστικών προβλημάτων. Τα αποτελέσματα της μελέτης των van Bommel and Palmér (2018) έδειξαν ότι υπάρχουν κάποιες συνδέσεις μεταξύ της συστηματοποίησης και των αναπαραστάσεων και ότι και οι δύο επιδρούν στις λύσεις των παιδιών. Σύμφωνα με αυτούς, οι εικονογραφικές αναπαραστάσεις οδηγούν σε λιγότερες επαναλήψεις κι εφόσον χρησιμοποιείται μια προσέγγιση δοκιμής και λάθους, οι εικονογραφικές αναπαραστάσεις φαίνεται να λειτουργούν καλύτερα από τις εικονικές.

Σύμφωνα με την English (1991) και τους Piaget and Inhelder (1975) υπάρχουν έξι στρατηγικές επίλυσης των συνδυαστικών προβλημάτων, οι οποίες ποικίλουν από την τυχαία επιλογή αντικειμένων μέχρι ένα συστηματικό μοτίβο στην επιλογή αντικειμένων.

- Στρατηγική λύσης Α: τυχαία επιλογή στοιχείων χωρίς απόρριψη ακατάλληλων στοιχείων (random selection of items with no rejection of inappropriate items).
- Στρατηγική λύσης Β: διαδικασία δοκιμής και σφάλματος με τυχαία επιλογή στοιχείων και απόρριψη ακατάλληλων στοιχείων (trial-and-error procedure with random item selection and rejection of inappropriate items).
- Στρατηγική λύσης Γ: αναπτυσσόμενο μοτίβο στην επιλογή στοιχείων, με απόρριψη ακατάλληλων στοιχείων (emerging pattern in item selection, with rejection of inappropriate items).
- Στρατηγική λύσης Δ: σταθερό και ολοκληρωμένο κυκλικό μοτίβο στην επιλογή στοιχείων, με απόρριψη των ακατάλληλων στοιχείων (consistent and complete cyclical pattern in item selection, with rejection of inappropriate items).
- Στρατηγική λύσης Ε: εμφάνιση ενός μοτίβου «οδόμετρου» στην επιλογή στοιχείων, με πιθανή απόρριψη στοιχείων (emergence of an 'odometer' pattern in item selection, with possible item rejection).

- Στρατηγική λύσης ΣΤ: ολοκληρωμένο μοτίβο οδόμετρου στην επιλογή στοιχείων, χωρίς απόρριψη στοιχείων (complete odometer pattern in item selection, with no rejection of items).

Με την έννοια *αναπτυσσόμενο μοτίβο*, η English αναφέρεται στην προσπάθεια κάποιων παιδιών να κρατούν ένα στοιχείο σταθερό και να εναλλάσσουν συστηματικά όλα τα στοιχεία του άλλου συνόλου. Προχωρώντας, στη συνέχεια, σε νέο σταθερό στοιχείο, όταν όλοι οι συνδυασμοί του πρώτου στοιχείου εξαντλήθηκαν.

Οι Piaget and Inhelder (1969) υποστήριξαν ότι τα συνδυαστικά προβλήματα δεν ενδείκνυνται για παιδιά ηλικίας 7-8 χρονών. Αλλά αργότερα, η English (1991, 2005) έδειξε ότι όταν υπάρχει ένα πλαίσιο με νόημα, τα μικρά παιδιά είναι ικανά να επιλύσουν συνδυαστικά προβλήματα. Στην έρευνα των Φραντζεσκάκη κ.ά. (2018) όλα τα παιδιά ήταν ικανά να παράγουν διατάξεις, είτε εντοπίζοντας ένα μικρό αριθμό διατάξεων, είτε εντοπίζοντας όλες τις διατάξεις.

Η Συνδυαστική είναι ένα από τα πιο ενδιαφέροντα και πολύπλευρα θέματα στο πρόγραμμα σπουδών, και προσφέρεται εύκολα για την κατασκευή νέων προβλημάτων που είναι κατάλληλα για τα πρώτα σχολικά χρόνια (English, 1991). Σύμφωνα με την ίδια, η Συνδυαστική είναι η κατάλληλη θεματική για τη δημιουργία πρωτότυπων προβλημάτων σε ένα ουσιαστικό πλαίσιο.

Τα παιδιά ήδη από το νηπιαγωγείο διαθέτουν τις λειτουργικές δομές που χρειάζονται για την επιτυχή αντιμετώπιση ασκήσεων συνδυαστικής καταμέτρησης (Zapata-Cardona, 2018). Ο συνδυαστικός συλλογισμός αναπτύσσεται πλήρως κατά το στάδιο της λογικής σκέψης (ηλικίες 11-15), σύμφωνα με τον Piaget (1969). Ωστόσο, οι Cañadas and Figueiras (2010) δήλωσαν ότι ορισμένες στρατηγικές διδασκαλίας θα μπορούσαν να προκαλέσουν τα μικρά παιδιά να αναπτύξουν το συνδυαστικό τους συλλογισμό πριν φτάσουν στο στάδιο αυτό.

Όταν παιδιά ηλικίας 6 χρονών αντιμετωπίζουν συνδυαστικά προβλήματα, οι προσεγγίσεις τους δεν είναι συστηματικές, σύμφωνα με τους van Bommel and Palmér (2018). Το ίδιο υποστήριξε και η English (1991, 1993), καθώς σε όλα τα προβλήματα της έρευνάς της, τα μικρά παιδιά προτιμούσαν λιγότερο αποτελεσματικές στρατηγικές, απλά συστήματα καταμέτρησης και εμπειρικές προσεγγίσεις. Ωστόσο, φαίνεται ότι τα συνδυαστικά προβλήματα είναι απαιτητικά και για μεγαλύτερους μαθητές, όπως φαίνεται στην έρευνα των Batanero et al. (1997), όπου παιδιά ηλικίας 14-15 χρονών έκαναν διάφορα λάθη στις συνδυαστικές διαδικασίες. Κατά τη διάρκεια ενός συνδυαστικού έργου, ακόμα κι όταν τα παιδιά δεν χρησιμοποιούν μια δομημένη

μέθοδο, η αλληλεπίδραση με τον εκπαιδευτικό μπορεί να βελτιώσει το συλλογισμό των μαθητών (Zapata-Cardona, 2018).

2.2 Η μάθηση ως κοινωνικο-πολιτισμική κατασκευή

Τα παιδιά δεν κατασκευάζουν τη γνώση μόνα τους, αλλά αλληλοεπιδρώντας με το κοινωνικό τους περιβάλλον. Οι διαφορές στην απόδοση που μπορεί να επιδεικνύουν όταν επιλύουν ασκήσεις στην τάξη μπορούν να αποδοθούν σε διάφορες επιρροές που έχουν δεχθεί τα παιδιά, για παράδειγμα από την οικογένεια ή την κουλτούρα τους. Τα παιδιά πριν ξεκινήσουν το σχολείο έχουν προηγούμενες γνώσεις που δεν μπορούν να διαχωριστούν από την ουσία τους και επηρεάζουν το πώς μαθαίνουν (Zapata-Cardona, 2018).

Ο Vygotsky ανέδειξε το σημαντικό ρόλο της εκπαίδευσης και εισήγαγε την έννοια της *ζώνης της επικείμενης ανάπτυξης* η οποία αποτελεί «την απόσταση ανάμεσα στη δεδομένη ανάπτυξη του ατόμου και το επίπεδο της δυνητικής ανάπτυξης που μπορεί να επιτευχθεί με την καθοδήγηση των ενηλίκων ή την ανταλλαγή με άλλα άτομα πιο ικανά» (Vygotsky, 1934). Επομένως, βλέπουμε πως είναι υψίστης σημασίας τα νήπια να αλληλοεπιδρούν με πιο προχωρημένους συνομηλίκους τους, καθώς και με τον εκπαιδευτικό, κατά την επίλυση προβλημάτων, έτσι ώστε να εμπλουτίζουν τις γνώσεις τους και τις στρατηγικές επίλυσής τους.

Όλοι οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να συλλογίζονται, καθώς και να διατυπώνουν και να αντικρούουν συλλογισμούς, όταν το περιβάλλον τους είναι υποστηρικτικό, σύμφωνα με τους Yackel and Hanna (2003). Άρα γονείς και εκπαιδευτικοί οφείλουν να υποστηρίζουν τα παιδιά, από μικρή ηλικία, ώστε αυτά να μπορέσουν να αναπτυχθούν στο μέγιστο βαθμό.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να υποστηρίξει τους μαθητές με τέσσερις τύπους ενεργειών: ενέργειες πρόσκλησης, με στόχο οι μαθητές να προβούν σε συζητήσεις, ενέργειες ενημέρωσης/υπόδειξης, με στόχο την παροχή πληροφοριών ή την επικύρωση των δηλώσεων των μαθητών, ενέργειες υποστήριξης/καθοδήγησης, με στόχο την υποστήριξη των μαθητών καθώς αυτοί παρουσιάζουν τις ιδέες τους, και ενέργειες πρόκλησης, με στόχο την ενθάρρυνση των μαθητών να υπερβούν τις υπάρχουσες γνώσεις τους, σύμφωνα με τους Mata-Pereira and da Ponte (2017).

Οι εκπαιδευτικοί, πέρα από τις ενέργειές τους, μπορούν να υποστηρίξουν τα παιδιά και μέσα από τις ερωτήσεις τους. Οι ερωτήσεις αυτές είναι απαραίτητες για να εστιάσουν την προσοχή των παιδιών και να προκαλέσουν το συλλογισμό τους. Οι ερωτήσεις των δασκάλων μπορεί να είναι διαφορετικών τύπων: κλειστές ερωτήσεις, διερευνητικές ερωτήσεις ή προκλητικές

ερωτήσεις που απαιτούν από τα παιδιά να υπερβούν την πραγματική τους κατάσταση (Zapata-Cardona, 2018).

Όταν οι εκπαιδευτικοί κατανοούν το πώς σκέφτονται οι μαθητές τους και τους προσφέρουν ευκαιρίες να οικοδομήσουν τις δικές τους γνώσεις, είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς πόσα μπορούν να μάθουν τα παιδιά από μικρή ηλικία (Zapata-Cardona, 2018).

2.3 Πλαίσιο με νόημα

Για να κινητοποιηθούν τα παιδιά και να ασχοληθούν με τις ασκήσεις ή τα προβλήματα που τους θέτουν οι εκπαιδευτικοί πρέπει αυτά να έχουν νόημα για αυτά. Αυτό ισχύει για τους/τις μαθητές/τριες όλων των ηλικιών, αλλά κυρίως για τα παιδιά προσχολικής ηλικίας. Συγκεκριμένα, οι μαθητές/τριες ηλικίας 4,5 έως 10 ετών μπορεί να είναι σε θέση να συλλογίζονται και να επιλύουν συνδυαστικά προβλήματα, εάν αυτά περιλαμβάνουν περιεχόμενο που έχει νόημα (English, 1991 & 1993). Στο άρθρο της English (1991), παιδιά ηλικίας 4-9 χρονών ασχολήθηκαν ατομικά με ένα έργο όπου ζητούνταν να βρουν τους συνδυασμούς χάρτινων ρούχων για να ντύσουν ξύλινα αρκουδάκια.

Ο σχεδιασμός των μαθηματικών έργων είναι λοιπόν ζωτικής σημασίας για τη διευκόλυνση της εμπλοκής των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων και την ενθάρρυνση του μαθηματικού συλλογισμού (Francisco & Maher, 2005).

Τα σχολικά μαθηματικά είναι συχνά αποσυνδεδεμένα από τον τρόπο με τον οποίο τα μικρά παιδιά λύνουν προβλήματα στην καθημερινή τους ζωή και οι άτυπες γνώσεις των μαθητών σπάνια λαμβάνονται υπόψη κατά την οικοδόμηση νέων γνώσεων (Bosch, 2012). Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να προτείνουν ασκήσεις που είναι, σε κάποιο βαθμό, οικείες για τα μικρά παιδιά, καθώς αυτό μπορεί να ενεργοποιήσει την άτυπη γνώση των παιδιών για την οικοδόμηση νέας γνώσης, σύμφωνα με τους Falk et al. (2012).

Υπάρχουν διάφοροι λόγοι που υποστηρίζουν τη χρήση ελκυστικών υλικών στα μαθηματικά προβλήματα. Με τη χρήση των παρεχόμενων υλικών, τα μικρά παιδιά είναι σε θέση να οπτικοποιήσουν, να εξερευνήσουν και να μοντελοποιήσουν διαφορετικές στρατηγικές και ο ερευνητής είναι σε θέση να καταλάβει και να παρακολουθήσει τους συλλογισμούς των μικρών παιδιών ενώ εξερευνούν το πρόβλημα (Zapata-Cardona, 2018). Στην έρευνα της Zapata-Cardona (2018), παιδιά ηλικίας 6-8 ετών εργάστηκαν ατομικά για να βρουν τους συνδυασμούς χάρτινων ρούχων. Τα υλικά που παρέχονται στους μαθητές για την επίλυση προβλημάτων διεγείρουν τη σκέψη των παιδιών και τα βοηθούν να εξερευνήσουν διαφορετικές λύσεις, χωρίς

να τους δίνουν τον ακριβή τρόπο επίλυσης, σύμφωνα με τους Ura et al. (2011). Όταν τα παιδιά εκτίθενται σε ασκήσεις που είναι ελκυστικές για αυτά, αυξάνονται οι πιθανότητες να παρουσιάσουν προχωρημένες λύσεις (English, 1993· Falk et al., 2012· Ura et al., 2011). Για το λόγο αυτό, στα άρθρα που αναφέρουμε παρακάτω, οι ερευνητές/τριες επέλεξαν υλικά και προβλήματα που εντάσσονταν μέσα στα ενδιαφέροντα των παιδιών. Στο άρθρο των Maj-Tatsis and Tatsis (υπό κρίση), παιδιά 8-9 ετών συνεργάστηκαν, χωρισμένα κυρίως σε ζευγάρια, με σκοπό το χρωματισμό ψαριών σε μια εικόνα με τρία διαθέσιμα χρώματα (πράσινο, πορτοκαλί, μπλε), ώστε κάθε ψάρι να έχει μοναδικό χρωματικό συνδυασμό. Στο άρθρο των Wathne and Carlsen (2024), παιδιά 8-9 χρονών, συνεργάστηκαν σε ομάδες 3 και 4 ατόμων για να βρουν τους συνδυασμούς σε δύο προβλήματα: το ένα αφορούσε εορταστικές κάρτες και το άλλο ψωμιά. Στις ομάδες δόθηκαν χαρτιά μεγέθους A3 και μολύβια, ώστε τα παιδιά να σχεδιάσουν τους διαφορετικούς συνδυασμούς. Στο άρθρο των Palmér and van Bommel (2018), εξάχρονα παιδιά εργάστηκαν αρχικά ατομικά, τους είχαν δοθεί χαρτιά και ξυλομπογιές, χωρίς οδηγίες για το πώς να τα χρησιμοποιήσουν. Στη συνέχεια δούλεψαν σε ζευγάρια, συγκρίνοντας τα σχέδιά τους και τελικά έγινε συζήτηση στην ολομέλεια πάνω στους διαφορετικούς συνδυασμούς τοποθέτησης πλαστικών αρκουδιών πάνω σε καναπέ. Η ανάλυση των δεδομένων πραγματοποιήθηκε σε δύο άξονες, τη συστηματοποίηση και τις αναπαραστάσεις. Στη συστηματοποίηση αναλύθηκε ο τρόπος με τον οποίο τα παιδιά οργάνωσαν τις λύσεις τους. Οι λύσεις κατηγοριοποιήθηκαν σε τρία επίπεδα: τυχαία προσέγγιση (trial-and-error), μεταβατική προσέγγιση (transition approach) και πλήρης χρήση συστηματικού προτύπου (odometer approach). Στις αναπαραστάσεις αναλύθηκε ο τύπος των γραφικών αναπαραστάσεων που χρησιμοποίησαν τα παιδιά: εικονογραφικές αναπαραστάσεις (pictographic representations) – σχέδια που μοιάζουν με τις πραγματικές αρκούδες και εικονικές αναπαραστάσεις (iconic representations) – σύμβολα ή σχήματα (όπως κύκλοι, τελείες ή καρδιές) που αναπαριστούν τις αρκούδες.

2.4 Συσχέτιση της βιβλιογραφίας με τα ερευνητικά ερωτήματα

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, δεν έχει δοθεί στην βιβλιογραφία σχετικά με το συνδυαστικό συλλογισμό πολύ έμφαση στα παιδιά νηπιακής ηλικίας. Η ηλικία αυτή εμφανίζει κάποιες προκλήσεις, καθώς τα παιδιά μπορεί να μην καταλαβαίνουν απόλυτα τι σημαίνει «διαφορετικό», και επομένως να μη μπορούν να ολοκληρώσουν την άσκηση όπου τους ζητείται να βρουν όλους τους διαφορετικούς συνδυασμούς. Επιπλέον, οι μαθητές του Νηπιαγωγείου ενδεχομένως δεν είναι σε θέση να επεξηγήσουν τις πράξεις τους ή να

περιγράψουν τον τρόπο σκέψης τους, τόσο αποτελεσματικά όσο οι μαθητές υψηλότερων βαθμίδων. Επιπρόσθετα, όπως προαναφέρθηκε, μέχρι τώρα δεν έχει υπάρξει επαρκής αριθμός ερευνών που να αφορά τους ρόλους που αναλαμβάνουν τα παιδιά 4-6 ετών όταν επιλύουν συνεργατικά ένα πρόβλημα, ή τις στρατηγικές που ακολουθούν όταν επιλύουν ένα συνδυαστικό πρόβλημα (τουλάχιστον στην Ελλάδα).

Η έρευνα αυτή έχει σκοπό λοιπόν να μελετήσει τα χαρακτηριστικά του συνδυαστικού συλλογισμού των παιδιών 4-6 ετών, μέσα από την επίλυση ενός συνδυαστικού προβλήματος. Τα παιδιά εργάστηκαν σε ζευγάρια. Καθώς, λοιπόν, υπήρχε συνεργασία, οι μαθητές/τριες είχαν την ευκαιρία να μοιράζονται τον τρόπο σκέψης τους, να επεξηγούν τις επιλογές τους, ακόμα και να διορθώνουν τις πράξεις του ζευγαριού τους. Τα άλλα κενά που αντιμετωπίζει η έρευνα αυτή αφορούν τους ρόλους που αναλαμβάνουν τα νήπια, καθώς και τις στρατηγικές επίλυσης που ακολουθούν.

Σύμφωνα με τη σχετική βιβλιογραφία αναδείχθηκε το ότι τα μαθηματικά προβλήματα που τίθενται σε μαθητές όλων των βαθμίδων, αλλά ιδίως στα νήπια πρέπει να είναι προσεκτικά σχεδιασμένα, να βρίσκονται σε ένα πλαίσιο που έχει νόημα και να είναι οικεία για τα παιδιά, κοντά στην καθημερινή τους ζωή. Στον σχεδιασμό των ασκήσεων είναι σημαντική η χρήση ελκυστικών υλικών, τα οποία κάνουν τα συνδυαστικά προβλήματα πιο ενδιαφέροντα και βοηθούν τα παιδιά στην επίλυσή τους.

Φάνηκε, ακόμα, στο κομμάτι της βιβλιογραφίας ότι τα μικρά παιδιά χρησιμοποιούν λιγότερο αποτελεσματικές στρατηγικές, αλλά είναι ικανά να εμπλακούν στη λύση συνδυαστικών προβλημάτων. Η αλληλεπίδραση με πιο ικανούς/ές συμμαθητές/τριες, καθώς και με τον/την εκπαιδευτικό, μπορεί να βοηθήσει τους μικρούς/ές μαθητές/τριες να είναι πιο αποτελεσματικοί/ές στην επίλυση συνδυαστικών προβλημάτων. Το υποστηρικτικό περιβάλλον παίζει μεγάλο ρόλο στην εξέλιξη του συνδυαστικού συλλογισμού των παιδιών.

3. Μεθοδολογία

3.1 Σχεδιασμός έρευνας

Στην έρευνα αυτή εφαρμόστηκε ποιοτικό ερευνητικό σχέδιο, καθώς τα δεδομένα αναφέρονται στη λεκτική και μη λεκτική επικοινωνία μιας μικρής ομάδας συμμετεχόντων και η ανάλυση περιλαμβάνει τη σύνοψη και την ερμηνεία αυτών των δεδομένων.

Όσον αφορά τη δειγματοληψία, οι συμμετέχοντες της μελέτης είναι οι μαθητές/τριες μιας τάξης ενός νηπιαγωγείου της Πτολεμαΐδας. Επομένως παιδιά ηλικίας 4-6 χρόνων. Πιο συγκεκριμένα, το δείγμα της έρευνας περιλαμβάνει 10 παιδιά, 4 κορίτσια και 6 αγόρια, εκ των οποίων 5 είναι προνήπια και 5 είναι νήπια.

Στην έρευνα συμμετείχαν σχεδόν όλοι οι μαθητές/τριες ενός τμήματος. Η κάθε ομάδα αποτελούνταν από δύο άτομα. Τα παιδιά της τάξης αυτής ήταν συνηθισμένα στην εργασία σε ζευγάρια. Τα ζευγάρια που δημιουργήθηκαν έγιναν σε συνεργασία με τη νηπιαγωγό της τάξης, έτσι ώστε να μην υπάρχουν προβλήματα συνεργασίας και τα παιδιά να μπορούν να αλληλοβοηθηθούν για τη λύση του προβλήματος.

Τα κριτήρια ένταξης στην έρευνα ήταν: παιδιά ηλικίας 4-6 ετών που φοιτούν στο νηπιαγωγείο. Αποκλείστηκαν τα παιδιά με ζητήματα συμπεριφοράς που δεν ήταν διατεθειμένα να συνεργαστούν ομαλά.

3.2 Συλλογή δεδομένων

Για τη συλλογή των δεδομένων, έγινε ημιδομημένη συνέντευξη. Τα παιδιά διαχειρίστηκαν τα υλικά (πλαστικοποιημένα αποκόμματα των εξής: τρεις μάσκες, τέσσερα καπέλα και ένα αγόρι) και συνεργάστηκαν σε ζευγάρια, για να βρουν τους συνδυασμούς. Έγινε καταγραφή των διαλόγων των παιδιών, καθώς και των συνδυασμών που σχημάτισαν.

Η διαδικασία συλλογής δεδομένων που ακολουθήθηκε ήταν η εξής:

Πραγματοποιήθηκε συνέντευξη με κάθε ζευγάρι, καθώς έλυναν την ακόλουθη συνδυαστική άσκηση:

Έχετε αυτό το αγόρι και 4 καπέλα και 3 μάσκες. Αν έπρεπε να βάλετε στο αγόρι αυτά τα αξεσουάρ, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορείτε να συνδυάσετε αυτές τις μάσκες με αυτά τα καπέλα;

Πέρα από την κύρια ερώτηση, τέθηκαν και κάποιες ερωτήσεις προτροπής εύρεσης και άλλων συνδυασμών.

Τα παρακάτω υλικά χρησιμοποιήθηκαν για να βοηθήσουν στην οπτικοποίηση, εξερεύνηση και επίλυση της συνδυαστικής άσκησης. Συγκεκριμένα, τα πλαστικοποιημένα στοιχεία που χειρίστηκαν τα παιδιά κατά την επίλυση του προβλήματος ήταν τα εξής:

K1 – πορτοκαλί καπέλο

K2 – κίτρινο καπέλο

K3 – καπέλο με τα αστεράκια

K4 – ριγέ καπέλο

M1 – μάσκα λαγός

M2 – μάσκα ζέβρα

M3 – μάσκα λιοντάρι

Και το αγόρι



Η αλληλεπίδραση του κάθε ζευγαριού

βιντεοσκοπήθηκε, με την κάμερα τοποθετημένη έτσι ώστε να καταγράφει τις κινήσεις των χεριών και τη χρήση των αντικειμένων.

Μία από τις δεοντολογικές εκτιμήσεις που ελήφθησαν υπόψη είναι η συγκατάθεση στην έρευνα. Η «συνειδητή συγκατάθεση» σημαίνει πως όσοι συμμετέχουν σε ερευνητικά έργα θα πρέπει να είναι ενήμεροι σχετικά με τους στόχους της έρευνας, τη δυνατότητα άρνησης συμμετοχής ή αποχώρησης, ανά πάσα στιγμή, χωρίς καμία συνέπεια κ.λπ. Η συγκατάθεση πρέπει να δίνεται από άτομα που μπορούν ελεύθερα να κατανοήσουν την ερώτηση και να συμφωνήσουν. Εφόσον το δείγμα της έρευνας αυτής αποτελείται από μικρά παιδιά, η συγκατάθεση δόθηκε από τους κηδεμόνες τους.

3.3 Ανάλυση δεδομένων

3.3.1 Στρατηγικές

Για να εντοπιστούν οι στρατηγικές που ακολούθησαν τα μέλη της κάθε ομάδας, έγινε ανάλυση των εκφράσεων και των κινήσεων των παιδιών. Στη συνέχεια, τα στοιχεία της ανάλυσης αυτής αξιολογήθηκαν με βάση τις στρατηγικές επίλυσης της English. Σημειώθηκε, λοιπόν, ποια/ποιες στρατηγικές επίλυσης ακολούθησε η κάθε ομάδα.

Η Στρατηγική Α χαρακτηρίζεται από τυχαία επιλογή στοιχείων, κατά την οποία δεν υπάρχει απόρριψη στοιχείων. Συγκεκριμένα, σε σχέση με το συγκεκριμένο πρόβλημα, η συγκεκριμένη στρατηγική απαρτιζόταν από τις ακόλουθες ενέργειες:

1. επιλογή μιας τυχαίας μάσκας M1
2. επιλογή ενός τυχαίου καπέλου K1
3. συνδυασμός της μάσκας M1 με το καπέλο K1
4. επιλογή μιας τυχαίας μάσκας M2
5. επιλογή ενός τυχαίου καπέλου K2
6. συνδυασμός της μάσκας M2 με το καπέλο K2
7. ...

Η Στρατηγική Β είναι μια διαδικασία δοκιμής και λάθους με τυχαία επιλογή στοιχείων και απόρριψη ακατάλληλων στοιχείων. Τα παιδιά που ακολούθησαν την στρατηγική αυτή, μπόρεσαν να κρατήσουν ένα στοιχείο σταθερό και να εναλλάσσουν το άλλο. Συγκεκριμένα, σε σχέση με το συγκεκριμένο πρόβλημα, η συγκεκριμένη στρατηγική απαρτιζόταν από τις ακόλουθες ενέργειες:

1. συνδυασμός της μάσκας M3 με το καπέλο K1
2. συνδυασμός της μάσκας M3 με το καπέλο K2
3. συνδυασμός της μάσκας M3 με το καπέλο K3
4. συνδυασμός της μάσκας M3 με το καπέλο K4
5. ...

3.3.2 Αλληλεπίδραση

Για την ανάλυση της αλληλεπίδρασης που αναπτύχθηκε ανάμεσα στα μέλη κάθε ζεύγους, επικεντρωθήκαμε στους ρόλους που υιοθέτησαν τα παιδιά. Συγκεκριμένα, αναλύσαμε τις λεκτικές και μη λεκτικές ενέργειες εντός του συνεργαζόμενου ζεύγους, πάντα σε σχέση με την επίλυση του προβλήματος. Συγκεκριμένα, κάθε λεκτική και μη ενέργεια κατηγοριοποιήθηκε ως εξής:

Λεκτική ενέργεια	Μη λεκτική ενέργεια
Έκφραση με σιγουριά	Παρατήρηση του άλλου

Καθοδήγηση του άλλου	Αντιγραφή των κινήσεων του άλλου
Έκφραση με διστακτικότητα	Λήψη πρωτοβουλίας
Δήλωση ολοκλήρωσης	Δημιουργία συνδυασμού συνεργατικά
	Θετική ανταπόκριση σε συνεργασία
	Επιβολή μέσω των πράξεων
	Ανάληψη ελέγχου
	Αγνόηση των προτάσεων του άλλου
	Διόρθωση των ενεργειών του άλλου
	Ενθάρρυνση του άλλου

Πίνακας 1: Λεκτικές και μη λεκτικές ενέργειες

- Έκφραση με σιγουριά: το παιδί απαντά με σιγουριά στις ερωτήσεις της ερευνήτριας.
- Καθοδήγηση του άλλου: το ένα παιδί λέει στο άλλο ποιο στοιχείο να χρησιμοποιήσει για τον συνδυασμό του.
- Έκφραση με διστακτικότητα: το παιδί λέει ποια στοιχεία επιθυμεί να συνδυάσει, αλλά δεν δημιουργεί τον συνδυασμό.
- Δήλωση ολοκλήρωσης: το παιδί δηλώνει ότι έχουν ολοκληρώσει την επίλυση του προβλήματος.
- Παρατήρηση του άλλου: το ένα παιδί παρατηρεί τις ενέργειες του άλλου χωρίς να κάνει κάποια άλλη ενέργεια.
- Αντιγραφή των κινήσεων του άλλου: το ένα παιδί αντιγράφει τον συνδυασμό που μόλις δημιούργησε το άλλο παιδί.
- Λήψη πρωτοβουλίας: το παιδί αναλαμβάνει την πρωτοβουλία να ξεκινήσει τη δραστηριότητα ή τολμά να δοκιμάσει μια διαφορετική μέθοδο επίλυσης.
- Δημιουργία συνδυασμού συνεργατικά: το ένα παιδί βάζει το ένα μέρος του συνδυασμού και το άλλο παιδί το άλλο μέρος του συνδυασμού.
- Θετική ανταπόκριση σε συνεργασία: το ένα παιδί δέχεται την πρόταση του άλλου παιδιού να χρησιμοποιήσει ένα συγκεκριμένο αντικείμενο στο συνδυασμό του.
- Επιβολή μέσω των πράξεων: το ένα παιδί κάνει πολλούς συνδυασμούς γρήγορα και αποφασιστικά, χωρίς να αφήνει στο ζευγάρι του πολλά περιθώρια να συμμετέχει.
- Ανάληψη ελέγχου: το παιδί αναλαμβάνει έναν πρωταρχικό ρόλο στη δραστηριότητα, δοκιμάζει κάτι διαφορετικό.

- Αγνόηση των προτάσεων του άλλου: το ένα παιδί δεν δέχεται την πρόταση του άλλου να χρησιμοποιήσει ένα συγκεκριμένο αντικείμενο στο συνδυασμό του.
- Διόρθωση των ενεργειών του άλλου: το ένα παιδί αφαιρεί το στοιχείο που επέλεξε να χρησιμοποιήσει το άλλο παιδί και το αντικαθιστά με κάποιο άλλο.
- Ενθάρρυνση του άλλου: το ένα παιδί κάνει έναν συνδυασμό και μετά περιμένει από το ζευγάρι του να κάνει κι αυτό έναν συνδυασμό, ενθαρρύνοντάς το με αυτόν τον τρόπο.

Στη συνέχεια, εντάξαμε τις παραπάνω ενέργειες στις κατηγορίες ρόλων των Τάτση και Κολέζα (2006) ως εξής:

- Συνεργατικός αξιολογητής: Το παιδί παρατηρεί τις ενέργειες του άλλου παιδιού προσεκτικά, κάνει παύσεις πριν δράσει, αντιγράφει τις κινήσεις του άλλου παιδιού και ανταποκρίνεται θετικά σε προτάσεις συνεργασίας.
- Συνεργατικός καθοδηγητής: Το παιδί δείχνει στον άλλον τι να κάνει, πρωτοστατεί σε μια δραστηριότητα και ενθαρρύνει (μέσω πράξεων) τον άλλον να συμμετάσχει και συχνά παίρνει πρωτοβουλία, αλλά επιτρέπει στο άλλο παιδί να ακολουθήσει.
- Εγωκεντρικός καθοδηγητής: Το παιδί παίρνει τον έλεγχο μιας δραστηριότητας χωρίς να περιμένει αντίδραση από το άλλο παιδί, μετακινεί τα αντικείμενα χωρίς να συμβουλευτεί τον άλλον, αγνοεί τις προσπάθειες του άλλου να συνεισφέρει και ενδεχομένως παίρνει από τα χέρια του άλλου αντικείμενα ή προσπαθεί να διορθώσει κάτι που κάνει.
- Παθητικός συνεργάτης: Το παιδί δεν παίρνει πρωτοβουλίες, αλλά ακολουθεί το άλλο παιδί στις δράσεις του, δεν προσπαθεί να κατευθύνει την αλληλεπίδραση, αλλά απλά αποδέχεται ό,τι συμβαίνει, δείχνει αβεβαιότητα ή διστακτικότητα πριν κάνει κάτι και περιμένει από το άλλο παιδί να ξεκινήσει ή να οργανώσει τη δραστηριότητα.

3.3.3 Επίδραση

Τέλος, ερευνήθηκε αν υπήρχε επίδραση των χαρακτηριστικών της αλληλεπίδρασης και συγκεκριμένα των ρόλων που υιοθετήθηκαν στις στρατηγικές που ακολουθήθηκαν. Η διερεύνηση αυτή πραγματοποιήθηκε παρατηρώντας και συγκρίνοντας τους ρόλους που εμφανίστηκαν σε κάθε ζεύγος με τις στρατηγικές που ακολουθήθηκαν.

4. Αποτελέσματα

4.1 Παρουσίαση των ευρημάτων

Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει τα ευρήματα της μελέτης αυτής. Στην 2^η στήλη φαίνονται οι στρατηγικές που ακολούθησαν τα παιδιά. Στην 3^η στήλη σημειώνονται οι ρόλοι που ανέλαβαν τα παιδιά κάθε ομάδας κατά την επίλυση του προβλήματος. Τέλος, στην 4^η στήλη αναφέρεται η επίδραση των ρόλων που ανέλαβαν τα παιδιά στις στρατηγικές που ακολούθησαν.

Ομάδες	Στρατηγικές	Ρόλοι	Επίδραση
Ομάδα Α: Άρης και Άγγελος	<i>Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα & Συστηματική Δοκιμή</i>	Παθητικός συνεργάτης & Συνεργατικός καθοδηγητής	Μόνο ο Συνεργατικός καθοδηγητής έφτασε μέχρι τη <i>Συστηματική Δοκιμή</i>
Ομάδα Β: Βαλέρια και Βαγγέλης	<i>Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα & Συστηματική Δοκιμή</i>	Συνεργατικοί καθοδηγητές	Οι Συνεργατικοί καθοδηγητές έφτασαν μαζί μέχρι τη <i>Συστηματική Δοκιμή</i>
Ομάδα Γ: Γιώργος και Γιάννης	<i>Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα & Συστηματική Δοκιμή</i>	Εγωκεντρικοί καθοδηγητές	Οι Εγωκεντρικοί καθοδηγητές μπόρεσαν να φτάσουν μέχρι τη <i>Συστηματική Δοκιμή</i>
Ομάδα Δ: Δανάη και Δέσποινα	<i>Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα</i>	Παθητικός συνεργάτης & Συνεργατικός καθοδηγητής	Ο Παθητικός συνεργάτης και ο Συνεργατικός καθοδηγητής ακολούθησαν μόνο την <i>Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα</i>
Ομάδα Ε: Ελένη και Ευθύμης	<i>Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα</i>	Εγωκεντρικός καθοδηγητής & Συνεργατικός αξιολογητής	Ο Εγωκεντρικός καθοδηγητής και ο Συνεργατικός αξιολογητής ακολούθησαν μόνο την <i>Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα</i>

Πίνακας 2: Στρατηγικές, Ρόλοι και Επίδραση

4.2 Συσχέτιση των ευρημάτων με τα ερευνητικά ερωτήματα

- Ποιες στρατηγικές ακολούθησαν παιδιά 4-6 ετών κατά την επίλυση ενός προβλήματος συνδυαστικής σε ζεύγη;

Οι ομάδες που συμμετείχαν στην έρευνα αυτή ακολούθησαν τις δύο λιγότερο αποτελεσματικές στρατηγικές επίλυσης προβλήματος, την *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα* και τη *Συστηματική Δοκιμή*. Συγκεκριμένα, και οι πέντε ομάδες ακολούθησαν την πιο πρώιμη στρατηγική *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα* και τρεις από αυτές κατάφεραν να προχωρήσουν στην πιο δομημένη στρατηγική *Συστηματική Δοκιμή*.

- Ποια ήταν τα χαρακτηριστικά της αλληλεπίδρασης μεταξύ των μελών του ζεύγους των παιδιών κατά τη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος συνδυαστικής;

Ανάμεσα στα μέλη της ομάδας Α' δεν υπήρχε διάλογος. Ο Άγγελος φαίνεται ότι ήταν συνεργατικός καθοδηγητής, καθώς εκφραζόταν με σιγουριά, πήρε πρωτοβουλίες, πρωτοστάτησε στην δραστηριότητα και ενθάρρυνε, μέσω των πράξεών του, τον Άρη να συμμετέχει. Ο Άρης μπορεί να χαρακτηριστεί παθητικός συνεργάτης, καθώς δεν πήρε πρωτοβουλίες, αλλά ακολούθησε τον Άγγελο στις δράσεις του, δεν προσπάθησε να κατευθύνει την αλληλεπίδραση, αλλά απλά αποδεχόταν ό,τι συνέβαινε.

Παρακάτω παρατίθεται ένα κομμάτι από την επίλυση του προβλήματος, στο οποίο μπορούμε να δούμε ότι ο Άρης δεν συμμετείχε καν, ενώ ο Άγγελος δημιουργούσε συνδυασμούς μόνος του και δήλωσε ότι ολοκληρώθηκε η επίλυση του προβλήματος.

(A19) Άγγελος: (συνδυάζει τη μάσκα ζέβρα με το καπέλο με τα αστεράκια)(6ος συνδυασμός).

(A20) Άγγελος: (συνδυάζει τη μάσκα λαγός με το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνοντας τον 5ο συνδυασμό).

(A21) Ε: Κάποιον άλλο συνδυασμό;

(A22) Άγγελος: (συνδυάζει τη μάσκα λιοντάρι με το καπέλο με τα αστεράκια) (7ος συνδυασμός).

(A23) Ε: Έχετε κάποιον άλλον;

(A24) Άγγελος: Όχι.

Υπήρχε μια ομαλή συνεργασία ανάμεσα στα μέλη της ομάδας Β', όπου και τα δύο παιδιά έκαναν προσπάθειες. Όσον αφορά τους ρόλους που ανέλαβαν κατά την επίλυση, φαίνεται πως η Βαλέρια και ο Βαγγέλης ήταν συνεργατικοί καθοδηγητές, επειδή έδειξαν (ή προσπάθησαν να δείξουν) στον άλλον τι να κάνει, πήραν πρωτοβουλίες, αλλά επέτρεπαν στο άλλο παιδί να ακολουθήσει.

Στο απόσπασμά αυτό, φαίνεται η ομαλή συνεργασία που αναπτύχθηκε ανάμεσα στα παιδιά αυτά. Στην κίνηση (B29) μπορούμε να δούμε ότι ο Βαγγέλης έδωσε το αγόρι στη Βαλέρια, κάτι που μπορεί να παρατηρηθεί και σε άλλα σημεία επίλυσης του προβλήματος και στην κίνηση (B24) ο Βαγγέλης προτείνει στην Βαλέρια ποιο στοιχείο να χρησιμοποιήσει και εκείνη τον ακούει (B25).

(B22) Ε: Τι άλλο;

(B23) Βαλέρια: Εγώ αυτό (φοράει το καπέλο με τα αστεράκια στο αγόρι).

(B24) Βαγγέλης: Τη ζέβρα.

(B25) Βαλέρια: (το σκέφτεται και τελικά το συνδυάζει όντως με τη μάσκα ζέβρα) (επαναλαμβάνει δηλαδή τον 2ο συνδυασμό).

(B26) Ε: Κάτι άλλο μπορείτε να συνδυάσετε;

(B27) Βαγγέλης: Αυτό εδώ (φοράει τη μάσκα λιοντάρι στο αγόρι και μετά από σκέψη το συνδυάζει με το ριγέ καπέλο) (επαναλαμβάνει δηλαδή τον 3ο συνδυασμό).

(B28) Ε: Κάτι άλλο;

(B29) (Ο Βαγγέλης δίνει στην Βαλέρια το αγόρι.)

Η αλληλεπίδραση ανάμεσα στα μέλη της ομάδας Γ' χαρακτηρίστηκε από κάποιες ιδιαιτερότητες. Από τη μία πλευρά, φαίνεται ότι τα παιδιά ήταν ανταγωνιστικά μεταξύ τους και εξέφρασαν κάποια ενόχληση προς το ζευγάρι τους. Από την άλλη, όμως, συνεργάστηκαν όταν ακολουθούσαν την πιο προχωρημένη στρατηγική επίλυσης και έφτιαζαν κάποιους συνδυασμούς μαζί. Φαίνεται πως ο Γιώργος και ο Γιάννης ήταν εγωκεντρικοί καθοδηγητές, αφού προσπαθούσαν να επιβληθούν μέσα από τις πράξεις τους, έπαιρναν τον έλεγχο της δραστηριότητας, χωρίς να περιμένουν αντίδραση από το άλλο παιδί.

Στο απόσπασμα που ακολουθεί, μπορούμε να παρατηρήσουμε την ενόχληση του Γιώργου (Γ41) για το γεγονός ότι ο Γιάννης έχει δημιουργήσει αρκετούς συνδυασμούς. Μετά από το σημείο αυτό, και τα δύο παιδιά έκαναν μια πληθώρα συνδυασμών (επαναλήψεων), συμπεριφορά που εύκολα μπορεί να αποδοθεί στον ανταγωνισμό που υπήρχε ανάμεσά τους.

(Γ33) (Ο Γιώργος κρατάει το πορτοκαλί καπέλο.)

(Γ34) Ε: Έχεις κι ένα που κρατάς στα χέρια σου. Μπορείς να το βάλεις κάπου αλλού;

(Γ35) Γιώργος: Όχι.

(Γ36) Ε: Γιάννη, εσύ μπορείς να κάνεις κάτι άλλο;

(Γ37) Γιάννης: Ναι.

(Γ38) Ε: Για δείξε μου.

(Γ39) Γιάννης: (συνδυάζει το πορτοκαλί καπέλο με τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας έτσι τον 3ο συνδυασμό.)

(Γ40) Γιάννης: (συνδυάζει το κίτρινο καπέλο με τη μάσκα λαγός, επαναλαμβάνοντας τον 10ο συνδυασμό.)

(Γ41) Γιώργος: Κυρία, ο Γιάννης όλο τα αλλάζει.

Ανάμεσα στα μέλη της ομάδας Δ' δεν υπήρχε διάλογος. Η Δανάη μπορεί να χαρακτηριστεί παθητικός συνεργάτης, καθώς δεν πήρε πρωτοβουλίες, έδειχνε διστακτικότητα πριν κάνει κάτι, περίμενε από τη Δέσποινα να ξεκινήσει την δραστηριότητα. Η Δέσποινα πήρε πρωτοβουλία, πρωτοστάτησε στην δραστηριότητα και ενθάρρυνε, μέσω των πράξεων της, την Δανάη να συμμετέχει, επομένως θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως συνεργατικός καθοδηγητής.

Παρακάτω, μπορούμε να εντοπίσουμε την διστακτικότητα της Δανάης, η οποία προτίμησε να δείξει ποια στοιχεία επιθυμούσε να συνδυάσει, αντί να φτιάξει τον συνδυασμό (Δ12). Παρατηρούμε, επίσης, ότι η Δανάη δε μίλησε καθόλου κατά τη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος, σε αντίθεση με την Δέσποινα, η οποία δήλωσε ποια στοιχεία θα συνδυάσει (Δ10) και δημιουργούσε συνδυασμούς με περισσότερη σιγουριά.

(Δ10) Δέσποινα: Αυτό με αυτό (συνδυάζει τη μάσκα ζέβρα με το καπέλο με τα αστεράκια) (3ος συνδυασμός).

(Δ11) Ε: Τι άλλο;

(Δ12) Δανάη: (δείχνει τη μάσκα λιοντάρι και το ριγέ καπέλο.)

(Δ13) Ε: Για κάνε το συνδυασμό.

(Δ14) Δανάη: (συνδυάζει τη μάσκα λιοντάρι με το ριγέ καπέλο) (4ος συνδυασμός).

(Δ15) Ε: Τι άλλο μπορείτε να κάνετε;

(Δ16) Δέσποινα: (συνδυάζει τη μάσκα ζέβρα με το πορτοκαλί καπέλο) (5ος συνδυασμός).

Η αλληλεπίδραση ανάμεσα στα μέλη της ομάδας Ε' είχε κάποια ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά. Τα παιδιά έκαναν πολλούς συνδυασμούς μαζί και η Ελένη είχε μια ηγετική στάση στην επίλυση. Φαίνεται πως η Ελένη ήταν εγωκεντρικός καθοδηγητής και ο Ευθύμης ήταν συνεργατικός αξιολογητής. Η Ελένη προσπαθούσε να διορθώσει αυτά που έκανε ο Ευθύμης, αγνόησε τις προτάσεις του, έδινε βάση μόνο στις δικές της απόψεις. Ο Ευθύμης παρατηρούσε τις ενέργειες της Ελένης προσεκτικά, αντέγραφε τις κινήσεις της, ανταποκρινόταν θετικά σε προτάσεις συνεργασίας, χωρίς να επιβάλλει δική του άποψη.

Στο παρακάτω απόσπασμα μπορεί να παρατηρηθεί η Ελένη να αγνοεί την πρόταση του Ευθύμη (E14), καθώς και να «διορθώνει» τις επιλογές του (E18). Οι ενέργειές της αυτές είναι ενδεικτικές του ρόλου του εγωκεντρικού καθοδηγητή που ανέλαβε.

(E13) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι).

(E14) (Ο Ευθύμης κυλάει προς το μέρος της το κίτρινο καπέλο. Η Ελένη το κυλάει προς το αγόρι, αλλά τελικά επιλέγει το πορτοκαλί καπέλο) (4ος συνδυασμός).

(E15) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα ζέβρα.)

(E16) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι το καπέλο με τα αστεράκια) (5ος συνδυασμός).

(E17) Ε: Τι άλλο μπορείτε να κάνετε;

(E18) (Ο Ευθύμης φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι, αλλά η Ελένη την αφαιρεί και βάζει τη μάσκα λαγός στο αγόρι.)

- Ποια ήταν η επίδραση των χαρακτηριστικών της αλληλεπίδρασης στις στρατηγικές που ακολουθήθηκαν;

Στη ομάδα Α', ο Άρης που ανέλαβε τον ρόλο του παθητικού συνεργάτη, ακολούθησε την λιγότερο προχωρημένη στρατηγική (*Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα*). Ενώ ο Άγγελος που είχε τον πιο καθοδηγητικό ρόλο του συνεργατικού καθοδηγητή, μπόρεσε να ακολουθήσει μια πιο οργανωμένη στρατηγική (*Συστηματική Δοκιμή*).

Στην ομάδα Β', υπήρχε μια ισότιμη προσπάθεια στην επίλυση από τα δύο παιδιά. Ανέλαβαν τον ίδιο ρόλο και ακολούθησαν τις ίδιες στρατηγικές. Φαίνεται να υπάρχει μια σύνδεση ανάμεσα στους ρόλους που ανέλαβαν τα παιδιά και τις στρατηγικές που εμφανίστηκαν, καθώς οι ρόλοι που ανέλαβαν ήταν ίδιοι και ισότιμοι, αυτοί του συνεργατικού καθοδηγητή, γεγονός που τους βοήθησε να προχωρήσουν στην πιο δομημένη μέθοδο της *Συστηματικής Δοκιμής*.

Στην ομάδα Γ', φαίνεται πως ο ανταγωνισμός που υπήρχε ανάμεσα στα παιδιά, τους οδήγησε να δημιουργήσουν πάρα πολλούς συνδυασμούς (επαναλήψεις), κάθε παιδί έδειχνε να προσπαθεί να δημιουργήσει περισσότερους συνδυασμούς από το ζευγάρι του. Τα παιδιά ακολούθησαν την λιγότερο αποτελεσματική μέθοδο *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα* για το πρώτο μισό της επίλυσης. Μετά από δεκάδες επαναλήψεις, έφτασαν στην πιο εκλεπτυσμένη στρατηγική *Συστηματική Δοκιμή*. Επομένως, η αλληλεπίδραση ανάμεσα στα παιδιά, τους οδήγησε τελικά σε μια πιο προχωρημένη μέθοδο επίλυσης του προβλήματος.

Στην ομάδα Δ', η έλλειψη αλληλεπίδρασης ανάμεσα στα παιδιά τους οδήγησε στη δημιουργία συνδυασμών χωρίς να ακολουθούν κάποιο εμφανές μοτίβο, χρησιμοποίησαν δηλαδή τη μέθοδο *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα*. Δεν υπήρχε κάποια συνεργασία ανάμεσα στα παιδιά, δεν έφτιαζαν συνδυασμούς μαζί. Μάλλον ο ρόλος της Δανάης ως παθητικός συνεργάτης δεν τους βοήθησε στο να προχωρήσουν σε μια πιο δομημένη μέθοδο επίλυσης, καθώς απλά ακολουθούσε ότι έκανε η Δέσποινα.

Στην ομάδα Ε', φαίνεται πως οι ρόλοι που ανέλαβαν τα παιδιά δεν τους βοήθησαν στο να προχωρήσουν σε μια πιο οργανωμένη μέθοδο επίλυσης. Η Ελένη, ως εγωκεντρικός καθοδηγητής, μάλλον ενδιαφερόταν περισσότερο για την επιβολή των δικών της επιλογών. Ο Ευθύμης, ως συνεργατικός αξιολογητής, ακολουθούσε τα βήματα της Ελένης και δεν τόλμησε να δοκιμάσει κάτι διαφορετικό. Οι ρόλοι αυτοί των παιδιών τους οδήγησαν στη χρήση της μεθόδου *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα* καθ' όλη τη διάρκεια της επίλυσης.

Τα αποτελέσματα της έρευνας παρουσιάζονται με βάση τα ερευνητικά μας ερωτήματα.

4.2.1 Πρώτο ερευνητικό ερώτημα

- Ποιες στρατηγικές ακολούθησαν παιδιά 4-6 ετών κατά την επίλυση ενός προβλήματος συνδυαστικής σε ζεύγη;

Παρατίθεται ένα απόσπασμα της ομάδας Δ', όπου βλέπουμε τα παιδιά να συνδυάζουν στοιχεία τυχαία, χωρίς να ακολουθούν κάποιο μοτίβο. Επομένως, η στρατηγική που ακολουθείται είναι η *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα*.

(Δ16) Δέσποινα: (συνδυάζει τη μάσκα ζέβρα με το πορτοκαλί καπέλο) (5ος συνδυασμός).

(Δ17) Δανάη: (συνδυάζει τη μάσκα λαγός με το καπέλο με τα αστεράκια) (6ος συνδυασμός).

(Δ18) Δέσποινα: (συνδυάζει τη μάσκα λιοντάρι με το ριγέ καπέλο, επαναλαμβάνει δηλαδή τον 4ο συνδυασμό.)

(Δ19) Δανάη: (συνδυάζει τη μάσκα ζέβρα με το κίτρινο καπέλο) (7ος συνδυασμός).

(Δ20) Δέσποινα: (συνδυάζει τη μάσκα λαγός με το κίτρινο καπέλο) (8ος συνδυασμός).

(Δ21) Δανάη: (συνδυάζει τη μάσκα λαγός με το πορτοκαλί καπέλο, επαναλαμβάνοντας έτσι το 2ο συνδυασμό.)

Παρακάτω παρατίθεται ένα απόσπασμα της επίλυσης του προβλήματος από την ομάδα Γ'. Σε αυτό, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα παιδιά κράτησαν ένα στοιχείο σταθερό (τη μάσκα

λιοντάρι) και ενάλλαξαν όλα τα καπέλα. Αυτό επιδεικνύει μια πιο προχωρημένη στρατηγική επίλυσης, τη *Συστηματική Δοκιμή*.

(Γ76) Γιώργος: (συνδυάζει το πορτοκαλί καπέλο με τη μάσκα λιοντάρι, επαναλαμβάνοντας τον 12^ο συνδυασμό ξανά.)

(Γ77) (Ο Γιάννης αλλάζει το καπέλο με το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνοντας τον 9^ο συνδυασμό.)

(Γ78) (Ο Γιώργος αλλάζει το καπέλο με το κίτρινο καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 7^ο συνδυασμό.)

(Γ79) (Ο Γιώργος αλλάζει το καπέλο με το πορτοκαλί καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 12^ο συνδυασμό για άλλη μια φορά.)

(Γ80) (Ο Γιάννης αλλάζει το καπέλο με το ριγέ καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 2^ο συνδυασμό ξανά.)

4.2.2 Δεύτερο ερευνητικό ερώτημα

- Ποια ήταν τα χαρακτηριστικά της αλληλεπίδρασης μεταξύ των μελών του ζεύγους των παιδιών κατά τη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος συνδυαστικής;

Ανάμεσα στα μέλη της κάθε ομάδας, υπήρξε διαφορετική αλληλεπίδραση. Εδώ παρατίθεται ένα απόσπασμα από την ομάδα Ε, όπου η Ελένη είχε μια ηγετική στάση κατά την επίλυση του προβλήματος, καθώς έδινε στον Ευθύμη ποιο στοιχείο να χρησιμοποιήσει και άλλαζε τους συνδυασμούς του.

(Ε54) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι και το πορτοκαλί καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 4^ο συνδυασμό.)

(Ε55) Ελένη: Βάλε αυτό το καπέλο. (Αλλάζει το καπέλο με το κίτρινο καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 12^ο συνδυασμό).

Παρακάτω, μπορούμε να παρατηρήσουμε ένα διαφορετικό είδος αλληλεπίδρασης. Παρατίθεται ένα απόσπασμα από την ομάδα Γ, όπου τα δύο παιδιά δημιουργούν συνδυασμούς συνεργατικά.

(Γ73) (Μετά, τα αγόρια δημιουργούν ένα συνδυασμό μαζί, καθώς ο Γιώργος φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι και ο Γιάννης το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνοντας τον 9^ο συνδυασμό ξανά.)

(Γ74) Γιάννης: (συνδυάζει το κίτρινο καπέλο με τη μάσκα λιοντάρι, επαναλαμβάνοντας τον 7ο συνδυασμό.)

(Γ75) (Τα παιδιά δημιουργούν πάλι μαζί ένα συνδυασμό, καθώς ο Γιώργος φοράει στο αγόρι το πορτοκαλί καπέλο και ο Γιάννης τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 3ο συνδυασμό.)

4.2.3 Τρίτο ερευνητικό ερώτημα

- Ποια ήταν η επίδραση των χαρακτηριστικών της αλληλεπίδρασης στις στρατηγικές που ακολουθήθηκαν;

Η αλληλεπίδραση που αναπτύχθηκε ανάμεσα στα μέλη κάθε ζευγαριού επηρέασε τις στρατηγικές που ακολουθήθηκαν. Όσον αφορά τις ομάδες που βρήκαν και τους 12 διαφορετικούς συνδυασμούς (ομάδες Β, Γ' και Ε'), όταν τα παιδιά μιας ομάδας ανέλαβαν και τα δύο έναν καθοδηγητικό ρόλο (ομάδες Β' και Γ') μπόρεσαν να προχωρήσουν στην πιο οργανωμένη μέθοδο επίλυσης της *Συστηματικής Δοκιμής*. Ενώ, όταν το ένα μέλος της ομάδας ακολούθησε έναν εγωκεντρικό ρόλο και το άλλο έναν αξιολογητικό ρόλο (ομάδα Ε'), η ομάδα αυτή καθ' όλη τη διάρκεια επίλυσης ακολούθησε την πιο πρώιμη στρατηγική *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα*.

Όσον αφορά τις ομάδες που βρήκαν λιγότερους συνδυασμούς (ομάδες Α' και Δ'), αυτές περιλάμβαναν έναν παθητικό συνεργάτη κι έναν συνεργατικό καθοδηγητή και δεν αναπτύχθηκε διάλογος ανάμεσα στα μέλη των ομάδων. Η ομάδα Δ' ακολούθησε μόνο την στρατηγική *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα*. Στην ομάδα Α' μπορεί να παρατηρηθεί ότι ο παθητικός συνεργάτης ακολούθησε μόνο την στρατηγική *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα*. Ενώ ο συνεργατικός καθοδηγητής μπόρεσε να προχωρήσει στην πιο δομημένη στρατηγική, τη *Συστηματική Δοκιμή*.

Παρακάτω παρατίθεται ένα απόσπασμα της επίλυσης του προβλήματος από την ομάδα Β', η οποία αποτελείται από δύο συνεργατικούς καθοδηγητές. Μπορούμε να παρατηρήσουμε το ένα παιδί να προτείνει στο άλλο ποιο στοιχείο να χρησιμοποιήσει (Β24), καθώς και να του δίνει το αγόρι (Β29) για να δημιουργήσει και το άλλο μέλος της ομάδας τον δικό του συνδυασμό. Όπως προαναφέρθηκε, η ομάδα αυτή μπόρεσε να προχωρήσει στη στρατηγική *Συστηματική Δοκιμή*. Επομένως, η ομάδα αυτή περιλαμβάνει έναν ευνοϊκό συνδυασμό ρόλων.

(Β24) Βαγγέλης: Τη ζέβρα.

(Β25) Βαλέρια: (το σκέφτεται και τελικά το συνδυάζει όντως με τη μάσκα ζέβρα) (επαναλαμβάνει δηλαδή τον 2ο συνδυασμό).

(B26) E: Κάτι άλλο μπορείτε να συνδυάσετε;

(B27) Βαγγέλης: Αυτό εδώ (φοράει τη μάσκα λιοντάρι στο αγόρι και μετά από σκέψη το συνδυάζει με το ριγέ καπέλο) (επαναλαμβάνει δηλαδή τον 3ο συνδυασμό).

(B28) E: Κάτι άλλο;

(B29) (Ο Βαγγέλης δίνει στην Βαλέρια το αγόρι.)

Ένα παράδειγμα μη ευνοϊκής αλληλεπίδρασης θα μπορούσαμε να πούμε ότι παρατηρείται στην ομάδα Δ', η οποία αποτελείται από έναν παθητικό συνεργάτη και έναν συνεργατικό καθοδηγητή.

(Δ16) Δέσποινα: (συνδυάζει τη μάσκα ζέβρα με το πορτοκαλί καπέλο) (5ος συνδυασμός).

(Δ17) Δανάη: (συνδυάζει τη μάσκα λαγός με το καπέλο με τα αστεράκια) (6ος συνδυασμός).

(Δ18) Δέσποινα: (συνδυάζει τη μάσκα λιοντάρι με το ριγέ καπέλο, επαναλαμβάνει δηλαδή τον 4ο συνδυασμό.)

(Δ19) Δανάη: (συνδυάζει τη μάσκα ζέβρα με το κίτρινο καπέλο) (7ος συνδυασμός).

(Δ20) Δέσποινα: (συνδυάζει τη μάσκα λαγός με το κίτρινο καπέλο) (8ος συνδυασμός).

(Δ21) Δανάη: (συνδυάζει τη μάσκα λαγός με το πορτοκαλί καπέλο, επαναλαμβάνοντας έτσι το 2ο συνδυασμό.)

Όπως φαίνεται στο απόσπασμα το οποίο σχολιάστηκε και παραπάνω, το κάθε παιδί έκανε λίγους, τυχαίους συνδυασμούς και δεν αναπτύχθηκε καμία συζήτηση ανάμεσα στο ζευγάρι. Η ομάδα αυτή βρήκε μονάχα 8 συνδυασμούς και καθ' όλη τη διάρκεια της επίλυσης ακολούθησε μόνο την στρατηγική *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα*.

4.3 Επισκόπηση των ευρημάτων

Οι ομάδες που συμμετείχαν στην έρευνα ακολούθησαν τις δύο λιγότερο αποτελεσματικές στρατηγικές επίλυσης προβλήματος, την *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα* και τη *Συστηματική Δοκιμή*. Συγκεκριμένα, και οι πέντε ομάδες ακολούθησαν την πιο πρώιμη στρατηγική *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα* και τρεις από αυτές (ομάδες: Α', Β', Γ') κατάφεραν να προχωρήσουν στην πιο δομημένη στρατηγική *Συστηματική Δοκιμή*.

Όσον αφορά στους ρόλους που υιοθέτησαν τα παιδιά κατά την επίλυση του προβλήματος, ένα παιδί ήταν συνεργατικός αξιολογητής, δύο παιδιά ήταν παθητικοί συνεργάτες, τρία παιδιά ήταν εγωκεντρικοί καθοδηγητές και τέσσερα παιδιά ήταν συνεργατικοί καθοδηγητές.

Τρεις ομάδες (ομάδες: Β', Γ', Ε') κατάφεραν να βρουν και τους 12 διαφορετικούς συνδυασμούς. Οι δύο ομάδες (ομάδες: Α', Δ') που βρήκαν λιγότερους συνδυασμούς περιλάμβαναν έναν παθητικό συνεργάτη. Οι δύο ομάδες που δεν μπόρεσαν να βρουν όλους τους διαφορετικούς συνδυασμούς, είχαν την ιδιαιτερότητα ότι δεν αναπτύχθηκε κανένας διάλογος ανάμεσα στα μέλη των ομάδων.

Οι ομάδες που μπόρεσαν να βρουν όλους τους διαφορετικούς συνδυασμούς περιλάμβαναν:

- α) δύο συνεργατικούς καθοδηγητές,
- β) δύο εγωκεντρικούς καθοδηγητές και
- γ) έναν εγωκεντρικό καθοδηγητή και έναν συνεργατικό αξιολογητή.

Τα αποτελέσματα της μελέτης δείχνουν ότι υπήρξε μια σύνδεση ανάμεσα στις στρατηγικές επίλυσης και στους ρόλους που ανέλαβαν τα παιδιά.

4.4 Ποιοτικά ευρήματα

Η συμμετοχή των παιδιών στην έρευνα αυτή προσφέρει κάποιες πληροφορίες για τον συνδυαστικό συλλογισμό των νηπίων, καθώς συνεργάζονται για να λύσουν ένα συνδυαστικό πρόβλημα. Μας επιτρέπει να δούμε ότι παιδιά ηλικίας 4-6 ετών ξεκίνησαν να λύνουν ένα συνδυαστικό πρόβλημα χρησιμοποιώντας την πιο πρώιμη στρατηγική επίλυσης *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα*. Όταν, όμως, υπήρχε η κατάλληλη αλληλεπίδραση ανάμεσα στα μέλη του ζευγαριού, τα παιδιά μπόρεσαν να προχωρήσουν στην πιο δομημένη στρατηγική επίλυσης, τη *Συστηματική Δοκιμή*.

Από το δείγμα της έρευνας αυτής, μπορούμε, ακόμα, να παρατηρήσουμε ότι κάποιοι συνδυασμοί ρόλων ήταν πιο αποτελεσματικοί από άλλους. Δηλαδή, κάποιοι ρόλοι που ανέλαβαν τα παιδιά καθώς συνεργάστηκαν για την επίλυση ενός προβλήματος τους βοήθησαν να βρουν όλους τους διαφορετικούς συνδυασμούς, ενώ κάποιοι άλλοι όχι. Πιο συγκεκριμένα, οι δύο ομάδες που δεν κατάφεραν να βρουν όλους τους διαφορετικούς συνδυασμούς, περιλάμβαναν έναν παθητικό συνεργάτη κι έναν συνεργατικό καθοδηγητή. Δεν αναπτύχθηκε διάλογος ανάμεσα στις ομάδες αυτές και ο συνδυασμός των ρόλων που ανέλαβαν δεν τους βοήθησε ώστε να βρουν όλους τους συνδυασμούς. Όσον αφορά τις ομάδες που μπόρεσαν να

δημιουργήσουν όλους τους διαφορετικούς συνδυασμούς: η ομάδα Β' περιλάμβανε δύο συνεργατικούς καθοδηγητές, οι οποίοι μπόρεσαν να ακολουθήσουν την *Συστηματική Δοκιμή*. Η ομάδα Γ' περιλάμβανε δύο εγωκεντρικούς καθοδηγητές, οι οποίοι μπόρεσαν να προχωρήσουν στην *Συστηματική Δοκιμή*. Η ομάδα Ε' περιλάμβανε έναν εγωκεντρικό καθοδηγητή και έναν συνεργατικό αξιολογητή, οι οποίοι δεν κατάφεραν να ακολουθήσουν την πιο δομημένη στρατηγική της *Συστηματικής Δοκιμής*. Επομένως, όσον αφορά τα παιδιά της μελέτης αυτής, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι όταν τα παιδιά μιας ομάδας ανέλαβαν τον ίδιο ρόλο (αρκεί αυτός ο ρόλος να είναι καθοδηγητικός) μπόρεσαν να βρουν όλους τους διαφορετικούς συνδυασμούς του προβλήματος και να προχωρήσουν στην πιο οργανωμένη μέθοδο επίλυσης της *Συστηματικής Δοκιμής*. Ενώ, όταν το ένα μέλος της ομάδας ακολούθησε έναν εγωκεντρικό ρόλο και το άλλο έναν αξιολογητικό ρόλο, η ομάδα αυτή, ακόμη κι αν μπόρεσε να βρει όλους τους διαφορετικούς συνδυασμούς, καθ' όλη τη διάρκεια επίλυσης ακολούθησε την πιο πρώιμη στρατηγική *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα*.

5. Συζήτηση

5.1 Ερμηνεία των αποτελεσμάτων

Τα ευρήματα της μελέτης αυτής απαντούν στα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν. Οι στρατηγικές που ακολούθησαν τα παιδιά του δείγματος της έρευνας κατά την επίλυση ενός προβλήματος συνδυαστικής σε ζεύγη ήταν η *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα* και η *Συστηματική Δοκιμή*, οι οποίες είναι οι δύο πιο πρώιμες στρατηγικές επίλυσης συνδυαστικών προβλημάτων. Όσον αφορά την αλληλεπίδραση μεταξύ των μελών των ζευγών των παιδιών κατά τη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος, η κάθε ομάδα διακρίθηκε από διαφορετικά χαρακτηριστικά. Σε κάποιες ομάδες, τα παιδιά δεν μίλησαν καθόλου, στην ουσία το κάθε μέλος επίλυε το πρόβλημα μόνο του. Σε άλλες, τα παιδιά έκαναν πολλούς συνδυασμούς μαζί, συνεργατικά. Ενώ σε άλλες ομάδες υπήρχε ανταγωνισμός ανάμεσα στα μέλη. Τέλος, φαίνεται ότι η αλληλεπίδραση ανάμεσα στα παιδιά είχε επίδραση πάνω στις στρατηγικές που ακολουθήθηκαν. Για παράδειγμα, όταν ανάμεσα στα μέλη μιας ομάδας δεν υπήρχε διάλογος και το ένα μέλος ήταν παθητικός συνεργάτης, η στρατηγική που ακολουθήθηκε ήταν μόνο η *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα*. Ενώ, όταν τα μέλη μιας ομάδας παρατηρούσαν τι έκανε το ζευγάρι τους και συνεργάζονταν ομαλά, οδηγήθηκαν και στην πιο σύνθετη στρατηγική, τη *Συστηματική Δοκιμή*.

Μη αναμενόμενη ήταν η επιθυμία κάποιων παιδιών να δημιουργούν πάρα πολλούς συνδυασμούς, δηλαδή, πολλαπλές επαναλήψεις συνδυασμών. Αυτό μπορεί να αποδοθεί σε κάποιο από τα παρακάτω:

- Τα παιδιά πιθανά ήθελαν να κάνουν περισσότερους συνδυασμούς από το ζευγάρι τους, για ανταγωνιστικούς λόγους. Αυτό αφορά συγκεκριμένα τους εγωκεντρικούς καθοδηγητές.
- Τα παιδιά δεν είχαν στη διάθεσή τους υλικά καταγραφής για να μπορέσουν να σημειώσουν τους συνδυασμούς που δημιουργούν, με αποτέλεσμα, να δυσκολεύονται να θυμηθούν ποιους συνδυασμούς έχουν ήδη δημιουργήσει.
- Είναι πιθανό τα παιδιά να έβλεπαν το πρόβλημα αυτό σαν παιχνίδι και να μην ήθελαν να σταματήσουν να ασχολούνται με τα υλικά, τα οποία ήταν επιλεγμένα ώστε να είναι ελκυστικά για αυτά.

Επιπλέον, απροσδόκητο ήταν το γεγονός ότι τρεις ομάδες μπόρεσαν να βρουν και τους δώδεκα διαφορετικούς συνδυασμούς. Στην έρευνα των van Bommel and Palmér (2018), μόνο τέσσερα από τα 114 παιδιά βρήκαν όλους τους διαφορετικούς συνδυασμούς που έψαχναν, καθώς

επιλύαν ατομικά το πρόβλημα που τους είχε δοθεί. Η απόδοση των παιδιών της παρούσας έρευνας μπορεί να εξηγηθεί, είτε από τη χρήση της στρατηγικής *Συστηματική Δοκιμή*, είτε από τη δημιουργία πάρα πολλών συνδυασμών, συμπεριλαμβανομένων δεκάδων επαναλήψεων. Όταν τα παιδιά προβαίνουν στη δημιουργία δεκάδων συνδυασμών, λογικό είναι, μέσα σε αυτούς να συμπεριλαμβάνονται και οι δώδεκα διαφορετικοί συνδυασμοί που έψαχναν.

5.2 Σύγκριση με την υπάρχουσα βιβλιογραφία

Όπως προαναφέρθηκε, οι ομάδες του δείγματος ακολούθησαν τις δύο λιγότερο αποτελεσματικές στρατηγικές επίλυσης, την *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα* και τη *Συστηματική Δοκιμή*. Παρόμοια, στο άρθρο των Φραντζεσκάκη κ.ά. (2018), η διαδικασία με την οποία τα παιδιά παρήγαγαν διατάξεις, ήταν επιλέγοντας με τυχαίο τρόπο στοιχεία, δηλαδή ακολουθώντας την 1η Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων συνδυαστικής, σύμφωνα με την English. Παρατηρείται, επίσης, ομοιότητα με το άρθρο της Zapata-Cardona (2018), όπου αναφέρεται ότι μια κοινή στρατηγική για τα μικρά παιδιά καθώς λύνουν συνδυαστικά προβλήματα είναι να κάνουν λίγους συνδυασμούς και όταν τους τελειώνουν τα στοιχεία του μικρότερου σετ, να σταματούν. Ένα από τα παιδιά της έρευνας εκείνης, δεν χρησιμοποίησε κάποιον συστηματικό τρόπο για να απαριθμήσει τους συνδυασμούς ή να παρακολουθήσει τις διαφορετικές επιλογές. Ένα άλλο παιδί από την έρευνα εκείνη ταίριαξε τυχαία (αδόμητα) τα στοιχεία του ενός σετ με τα στοιχεία του άλλου σετ χωρίς να είναι συστηματική στην προσέγγισή της. Με αυτόν τον τρόπο, το παιδί εκείνο βρήκε δέκα συνδυασμούς αλλά δεν ήταν όλοι διαφορετικοί. Στην έρευνα της Zapata-Cardona (2018), τα μικρά παιδιά δεν χρησιμοποίησαν δομημένες στρατηγικές για να βρουν όλους τους διαφορετικούς συνδυασμούς. Παρατηρήθηκε διαφορά με το άρθρο των Maj-Tatsis και Tatsis (υπό κρίση), όπου όλες οι ομάδες μαθητών προχώρησαν σταδιακά από μια τυχαία επιλογή αντικειμένων χωρίς απόρριψη ακατάλληλων αντικειμένων (στρατηγική A) σε ένα συνεπές και πλήρες κυκλικό μοτίβο επιλογής αντικειμένων, με απόρριψη ακατάλληλων αντικειμένων (στρατηγική D). Βέβαια, στην έρευνα των Maj-Tatsis και Tatsis (υπό κρίση), οι συμμετέχοντες ήταν 8-9 ετών, οπότε είναι λογικό να κατάφεραν να προχωρήσουν σε μια πιο δομημένη στρατηγική, σε σχέση με τα νήπια της δικής μας έρευνας. Στην έρευνα της English (1991), παρατηρήθηκε ότι τα παιδιά άλλαζαν τις στρατηγικές τους συχνά. Στη μελέτη εκείνη, τα μικρότερα παιδιά (4-6 ετών) προτιμούσαν τις λιγότερο αποτελεσματικές στρατηγικές (A, B και C), με μια γενική προτίμηση για τις στρατηγικές A και B. Στην έρευνα της English (1991), τα παιδιά 4-6 χρονών

χρησιμοποίησαν αναποτελεσματικές στρατηγικές και παρουσίασαν μικρή αλλαγή στη συμπεριφορά τους, κατά την επίλυση των προβλημάτων.

Κάποιες ομάδες της έρευνάς μας ακολούθησαν μόνο μία στρατηγική. Ενώ οι ομάδες που ακολούθησαν τις δύο πιο πρώιμες στρατηγικές, φαίνεται να πηγαίνουν από την μία στην άλλη, όμοια με την έρευνα της English (1991). Τα παιδιά που κατάφεραν να προχωρήσουν στην στρατηγική B, δεν το έκαναν στην αρχή της επίλυσης, αλλά από τη μέση και μετά. Επομένως, φάνηκε ότι τα παιδιά αυτά ξεκίνησαν από την πιο πρώιμη στρατηγική επίλυσης και προχώρησαν αργότερα σε μια πιο δομημένη. Στην έρευνα της English (1991), παρατηρήθηκε ότι οι τελικές στρατηγικές των παιδιών ήταν λιγότερο αποτελεσματικές από τις αρχικές τους στρατηγικές, σε αντίθεση με τη δική μας έρευνα.

Στην ομάδα A της έρευνάς μας, ένα από τα παιδιά μπόρεσε να προχωρήσει στην *Συστηματική Δοκιμή*, αλλά η ομάδα δεν μπόρεσε να βρει όλους τους διαφορετικούς συνδυασμούς. Επομένως, η χρήση μιας πιο δομημένης στρατηγικής δεν οδήγησε στην ολοκληρωμένη επίλυση. Παρόμοια, στην έρευνα της English (1991), η βελτίωση της στρατηγικής που χρησιμοποιούσαν τα παιδιά δεν οδηγούσε πάντα στην επιτυχημένη επίλυση του προβλήματος.

Μερικά παιδιά της έρευνάς μας ακολούθησαν κάποιο μοτίβο στην επιλογή στοιχείων και κάποιες φορές δεν το ολοκλήρωναν. Στην έρευνα της English (1991), μόνο μερικά παιδιά έδειξαν κάποια προσπάθεια στο να ακολουθήσουν ένα μοτίβο στην επιλογή των στοιχείων, αλλά σπάνια ακολούθησαν αυτό το μοτίβο μέχρι την ολοκλήρωσή του.

Όσον αφορά τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά δημιουργούν συνδυασμούς, μερικά παιδιά συνδύαζαν την κάθε μάσκα με ένα καπέλο και σταμάτησαν. Παρατηρείται λοιπόν ομοιότητα με την έρευνα της Zapata-Cardona (2018), όπου ένα από τα παιδιά συνδύασε τα παντελόνια με τα μπλουζάκια και σταμάτησε όταν της τελείωσαν τα παντελόνια. Αυτό δίνει την εντύπωση ότι τα παιδιά βλέπουν μια εννοούμενη αντιστοιχία ένα-προς-ένα ανάμεσα στα μπλουζάκια και στα παντελόνια, και τα μεμονωμένα στοιχεία (που δεν έχουν το αντίστοιχο ζεύγος τους) απλά παραλείπονται.

Κάτι που μπορεί να επισημανθεί για όλες τις ομάδες της δικής μας έρευνας είναι ότι κανένα παιδί δεν ανέφερε την λέξη «συνδυασμοί». Παρατηρείται διαφορά με το άρθρο των Maj-Tatsis και Tatsis (υπό κρίση), όπου ένα παιδί χρησιμοποίησε αυτό τον όρο. Το παιδί αυτό, όμως, ήταν 8 ή 9 ετών, επομένως ήταν περισσότερο αναμενόμενο να χρησιμοποιήσει αυτή τη λέξη, σε σχέση με τα παιδιά 4-6 ετών του δικού μας δείγματος. Επιπλέον, όπως προαναφέραμε, στη δική μας έρευνα, τρεις από τις πέντε ομάδες κατάφεραν να βρουν και τους 12 διαφορετικούς

συνδυασμούς, ενώ στην έρευνα των Maj-Tatsis και Tatsis (υπό κρίση), όλες οι ομάδες έλυσαν το πρόβλημα σωστά, βρίσκοντας όλους τους διαφορετικούς συνδυασμούς. Η συγκεκριμένη διαφορά πιθανότητα οφείλεται στη διαφορά στην ηλικία των παιδιών που συμμετείχαν. Στην έρευνα των van Bommel and Palmér (2018), μόνο τέσσερα από τα 114 παιδιά βρήκαν όλους τους διαφορετικούς συνδυασμούς που έψαχναν, καθώς επιλύαν ατομικά το πρόβλημα που τους είχε δοθεί.

Στην παρούσα έρευνα μπορεί να σημειωθεί ότι τα παιδιά δεν μέτρησαν (τουλάχιστον δυνατά) τους συνδυασμούς που δημιουργούσαν, δεν έδωσαν κάποιο νούμερο των συνδυασμών που μπορούν να σχηματίσουν. Στην έρευνα των Wathne and Carlsen (2024), ένα παιδί μέτρησε όλους τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να συνδυάσει δύο σετ στοιχείων. Βέβαια, στη συγκεκριμένη έρευνα, όπως προαναφέραμε, οι συμμετέχοντες ήταν 8-9 ετών, επομένως είναι αναμενόμενο ένα παιδί τέτοιας ηλικίας να μπόρεσε να μετρήσει τους συνδυασμούς του, σε αντίθεση με τα παιδιά νηπιακής ηλικίας της δικής μας έρευνας.

Κάτι ακόμα που μπορούμε να εντοπίσουμε στην έρευνά μας είναι οι κινήσεις των παιδιών. Μερικές φορές τα παιδιά έδειχναν (pointed) ποια στοιχεία επιθυμούσαν να συνδυάσουν. Κυρίως, όμως, έσερναν (slided) τα στοιχεία που ήθελαν να συνδυάσουν μαζί. Στην πλειοψηφία των κινήσεων των παιδιών είναι δύσκολο να διακριθεί κάποιο μοτίβο. Στο άρθρο των Wathne and Carlsen (2024), κάποια παιδιά έσερναν τα αντικείμενα για να μετρήσουν τους διαφορετικούς συνδυασμούς αυτών, ωστόσο, από το βίντεο είναι αδύνατο να διακριθεί κάποιο μοτίβο σε αυτές τους τις κινήσεις. Στο άρθρο των Wathne and Carlsen (2024), η κίνηση των παιδιών να δείχνουν (point) στοιχεία, εστίαζε την κοινή προσοχή των παιδιών στα ίδια αντικείμενα. Στην έρευνα των Wathne and Carlsen (2024), ο συλλογισμός των παιδιών χαρακτηρίστηκε από τη χρήση των χειρονομιών δείξιμο (pointing) και ολίσθηση (sliding). Αυτές οι κινήσεις, σε συνδυασμό με τις εκφράσεις των παιδιών μετέφεραν το μαθηματικό τους νόημα. Στο άρθρο των Wathne and Carlsen (2024), η χρήση χειρονομιών (pointing, sliding) ήταν σκόπιμη για να δείξει το συλλογισμό των παιδιών καθώς εργάζονταν πάνω σε ένα συνδυαστικό πρόβλημα.

Στην έρευνά μας επίσης παρατηρήθηκαν πολλές επαναλήψεις συνδυασμών από κάποια από τα παιδιά. Φαίνεται πως επειδή στα παιδιά δεν είχε δοθεί γραφική ύλη για να σημειώσουν με κάποιο τρόπο τους συνδυασμούς που έκαναν, το πρόβλημα μετατράπηκε από «βρείτε όλους τους διαφορετικούς συνδυασμούς που μπορείτε να δημιουργήσετε από αυτά τα στοιχεία» σε «συνδυάστε αυτές τις μάσκες με αυτά τα καπέλα όσες πιο πολλές φορές μπορείτε». Παρατηρείται ομοιότητα με την έρευνα των van Bommel and Palmér (2018), όπου τα παιδιά

που σχεδίασαν συμβολικές αναπαραστάσεις έκαναν περισσότερες επαναλήψεις, καθώς δεν δόθηκε αρκετός χρόνος για το πρόβλημα να εσωτερικευθεί και επομένως το πρόβλημα «με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν τρεις αρκούδες να κάτσουν στον καναπέ;» μπορεί να άλλαξε σε «ζωγραφίζοντας τρεις πολύχρωμες κουκίδες σε ένα χαρτί».

Από τα ευρήματα της έρευνάς μας, μπορούμε να πούμε ότι η συστηματικότητα λειτούργησε βοηθητικά κατά τη δημιουργία συνδυασμών. Παρατηρείται ομοιότητα με τα αποτελέσματα της έρευνας των Wathne and Carlsen (2024), τα οποία δείχνουν ότι η συστηματικότητα ευνοεί τη δημιουργία συνδυασμών.

Η επίδραση της ερευνήτριας ήταν σημαντική στη δική μας έρευνα, καθώς όταν τα παιδιά σταματούσαν τις κινήσεις τους, οι ερωτήσεις της τα οδηγούσαν στην δημιουργία νέων συνδυασμών. Παρόμοια, στην έρευνα της Zapata-Cardona (2018), οι ερωτήσεις του ερευνητή βοήθησαν ένα παιδί στο να παράγει περισσότερους συνδυασμούς. Ωστόσο, οι ίδιες ερωτήσεις που τέθηκαν στα παιδιά του δείγματός μας, δεν οδήγησαν στο ίδιο αποτέλεσμα σε όλες τις ομάδες. Δηλαδή, μερικές ομάδες προχώρησαν στην δημιουργία πολλών ακόμα συνδυασμών, ενώ άλλες σταμάτησαν, έχοντας δημιουργήσει λίγους συνδυασμούς. Παρόμοια, στην έρευνα της Zapata-Cardona (2018), η ίδια ερώτηση τέθηκε σε δύο παιδιά (για το τι θα κάνουν με το στοιχείο που περίσσευε). Το ένα παιδί κινητοποιήθηκε και εξερεύνησε περισσότερους συνδυασμούς, ενώ το άλλο όχι. Και στις δύο αυτές έρευνες, λοιπόν, οι ερωτήσεις του ερευνητή δεν οδήγησαν απαραίτητα τα παιδιά στην ολοκληρωμένη επίλυση του προβλήματος, αλλά τουλάχιστον δημιουργήθηκε μια πρόκληση για αυτά χωρίς να διδαχθούν ρητά. Επιπρόσθετα, και στις δύο αυτές έρευνες, οι ερωτήσεις του ερευνητή ήταν απαραίτητες για να εστιάσουν την προσοχή των παιδιών και να προκαλέσουν τον συλλογισμό τους.

Στην παρούσα έρευνα, ο ρόλος της ερευνήτριας ποίκιλε στις εξής μορφές: έθετε το πρόβλημα στα παιδιά, τους έδινε ένα παράδειγμα όταν δεν το κατανοούσαν, τους ρωτούσε εάν μπορούν να κάνουν κι άλλους συνδυασμούς. Οι προτροπές της ερευνήτριας βοήθησαν κάποια από τα παιδιά να επιμείνουν στην επίλυση του προβλήματος, το οποίο είχε ως αποτέλεσμα να προχωρήσουν σε μια πιο δομημένη στρατηγική επίλυσης. Στην έρευνα των Maj-Tatsis και Tatsis (υπό κρίση), ο ρόλος του ερευνητή ποίκιλε από απλές προτροπές για να ξαναδιαβάσουν τα παιδιά τη διατύπωση του προβλήματος, έως ερωτήσεις που προκαλούν περαιτέρω διερεύνηση και ερωτήσεις που ζητούν αιτιολόγηση. Και στις δύο αυτές έρευνες, ο ρόλος του ερευνητή ήταν κρίσιμος.

Φαίνεται ότι οι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα μέλη κάθε ομάδας, καθώς και ανάμεσα στα παιδιά και στην ερευνήτρια ήταν σημαντικές και ευνόησαν την εμφάνιση του μαθηματικού συλλογισμού, κάτι που συμφωνεί και με άλλες έρευνες (Maj-Tatsis και Tatsis, υπό κρίση).

Ένα από τα βασικά ευρήματα της μελέτης μας αφορά τα παιδιά που ανέλαβαν το ρόλο του παθητικού συνεργάτη, τα οποία μερικές φορές έδειχναν απλώς να αποδέχονται αυτά που έλεγε ή έκανε το ζευγάρι τους. Όμοια, στην έρευνα των Wathne and Carlsen (2024), σε κάποιο σημείο, ένα παιδί μάλλον δεν κατανόησε το επιχείρημα ενός άλλου παιδιού της ομάδας του και απλώς αποδέχτηκε το συμπέρασμα που άκουσε.

Κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας παρατηρήθηκε πως αν και τα παιδιά ήταν χωρισμένα σε ζευγάρια, κάποιες ομάδες όντως συνεργάστηκαν για την επίλυση του προβλήματος, ενώ σε κάποιες άλλες, το κάθε παιδί εργαζόταν στην ουσία ατομικά. Στη μελέτη των Wathne and Carlsen (2024), φάνηκε ότι η εξεύρεση λύσης στο συγκεκριμένο συνδυαστικό πρόβλημα ήταν μια συλλογική διαδικασία.

Διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές/τριες του δείγματός μας δεν μίλησαν για τον αριθμό των συνδυασμών που μπορούν να δημιουργήσουν (εκτός από ένα παιδί που στην αρχή του προβλήματος νόμιζε ότι μπορεί να φτιάξει μόνο ένα συνδυασμό). Αντίθετα, στο άρθρο των Wathne and Carlsen (2024), μία ομάδα κατέληξε σε ομοφωνία σχετικά με τον σωστό αριθμό συνδυασμών που μπορούν να δημιουργηθούν.

Η χρήση υλικών κοντά στα ενδιαφέροντα των μαθητών/τριων της έρευνάς μας αποδείχθηκε κρίσιμη στην παρακίνησή τους να ασχοληθούν με το πρόβλημα. Παρόμοια, στην έρευνα της Zapata-Cardona (2018), η πλαisiώση του προβλήματος σε μία οικεία κατάσταση ήταν απαραίτητη για τα μικρά παιδιά ώστε να κατανοήσουν και να εμπλακούν στην επίλυση αυτού. Επιπλέον, τα αντικείμενα που δόθηκαν στα παιδιά ήταν πολύ βοηθητικά για την επίλυση του προβλήματος από τους μαθητές της μελέτης μας και για να μπορεί η ερευνήτρια να παρατηρήσει τις στρατηγικές που ακολουθούνται. Όμοια, στη μελέτη της Zapata-Cardona (2018), το γεγονός ότι δόθηκαν στα μικρά παιδιά υλικά για να τα υποστηρίξουν στη διερεύνηση του προβλήματος ήταν ζωτικής σημασίας για την παρακολούθηση των προσεγγίσεών τους για την εξεύρεση μιας λύσης.

Κατά τη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος που δόθηκε στα παιδιά, μπορεί να παρατηρηθεί ο μαθηματικός συλλογισμός τους καθώς αυτά ασχολούνται με ένα μαθηματικό πρόβλημα που είχε νόημα για αυτά. Εδώ παρατηρείται ομοιότητα με την έρευνα των Maj-Tatsis και Tatsis (υπό κρίση), όπου σημειώνεται ότι ο μαθηματικός συλλογισμός μπορεί να παρατηρηθεί σε

προβλήματα που έχουν ουσιαστικό και παιγνιώδη χαρακτήρα. Φαίνεται λοιπόν ότι η πλαισίωση του προβλήματος με τέτοιο τρόπο ώστε να έχει νόημα για τους μαθητές ήταν πολύ σημαντική και τους βοήθησε να ακολουθήσουν συνδυαστικές διαδικασίες που, συχνά, οδήγησαν στο να βρουν όλους τους διαφορετικούς συνδυασμούς. Όμοια, στο άρθρο της English (1991), υπογραμμίζεται ότι η χρήση υλικών μέσα σε ένα ουσιαστικό πλαίσιο προβλήματος φαίνεται να συμβάλλει στην υιοθέτηση αποτελεσματικών συνδυαστικών διαδικασιών από τα παιδιά.

6. Συμπεράσματα

6.1 Κύρια ευρήματα

Τα κύρια ευρήματα της έρευνας αυτής είναι τα εξής: το δείγμα των παιδιών 4-6 ετών ακολούθησε τις δύο πιο πρώιμες στρατηγικές επίλυσης, την *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα* και τη *Συστηματική Δοκιμή*, καθώς επίλυε ένα συνδυαστικό πρόβλημα. Η κάθε ομάδα μπόρεσε να βρει από επτά έως και όλους τους διαφορετικούς συνδυασμούς, που ήταν δώδεκα. Όσον αφορά στους ρόλους που υιοθέτησαν τα παιδιά κατά την επίλυση του προβλήματος, ένα παιδί ήταν συνεργατικός αξιολογητής, δύο παιδιά ήταν παθητικοί συνεργάτες, τρία παιδιά ήταν εγωκεντρικοί καθοδηγητές και τέσσερα παιδιά ήταν συνεργατικοί καθοδηγητές. Τα αποτελέσματα της μελέτης δείχνουν ότι υπήρξε μια σύνδεση ανάμεσα στις στρατηγικές επίλυσης και στους ρόλους που ανέλαβαν τα παιδιά.

Τα ευρήματα της εργασίας αυτής απαντούν στα ερευνητικά ερωτήματα με τον εξής τρόπο:

- *Ποιες στρατηγικές ακολούθησαν παιδιά 4-6 ετών κατά την επίλυση ενός προβλήματος συνδυαστικής σε ζεύγη;*

Το δείγμα των παιδιών 4-6 ετών ακολούθησε τις δύο πιο πρώιμες στρατηγικές επίλυσης, την *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα* και τη *Συστηματική Δοκιμή*, καθώς επίλυε ένα συνδυαστικό πρόβλημα.

- *Ποια ήταν τα χαρακτηριστικά της αλληλεπίδρασης μεταξύ των μελών του ζεύγους των παιδιών κατά τη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος συνδυαστικής;*

Η αλληλεπίδραση ανάμεσα στα μέλη της κάθε ομάδας χαρακτηρίστηκε από διαφορετικά χαρακτηριστικά. Κάποιες ομάδες συνεργάστηκαν για τη δημιουργία συνδυασμών, ενώ σε άλλες ομάδες, το κάθε παιδί δρούσε στην ουσία ατομικά. Σε ορισμένες ομάδες, τα νήπια φάνηκαν να δρουν ομαδικά για την ολοκληρωμένη επίλυση του προβλήματος, ενώ σε άλλες ομάδες, πιθανά να υπήρξε ανταγωνισμός ανάμεσα στα μέλη.

- *Ποια ήταν η επίδραση των χαρακτηριστικών της αλληλεπίδρασης στις στρατηγικές που ακολουθήθηκαν;*

Η αλληλεπίδραση που αναπτύχθηκε ανάμεσα στα μέλη του κάθε ζευγαριού επηρέασε τις στρατηγικές που ακολουθήθηκαν. Πιο συγκεκριμένα, στην ομάδα Α', ο συνεργατικός καθοδηγητής μπόρεσε να προχωρήσει στη *Συστηματική Δοκιμή*, ενώ ο παθητικός συνεργάτης έμεινε στην *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα*. Οι ομάδες που περιλάμβαναν δύο συνεργατικούς καθοδηγητές (ομάδα Β') ή δύο εγωκεντρικούς καθοδηγητές (ομάδα Γ') κατάφεραν να

προχωρήσουν στην στρατηγική *Συστηματική Δοκιμή*. Ενώ τα μέλη της ομάδας Δ', ένας παθητικός συνεργάτης και ένας συνεργατικός καθοδηγητής, και της ομάδας Ε', ένας εγωκεντρικός καθοδηγητής και ένας συνεργατικός αξιολογητής μπόρεσαν να ακολουθήσουν μονάχα την πιο πρόιμη στρατηγική επίλυσης, την *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα*.

6.2 Επιπτώσεις των ευρημάτων

Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής θα μπορούσαν να συμβάλλουν στην μελλοντική εκπαιδευτική πρακτική, ενθαρρύνοντας τους νηπιαγωγούς και τους εκπαιδευτικούς των μικρών τάξεων να προετοιμάζουν υλικό για τους μαθητές τους, με σκοπό να αναπτύξουν τον συνδυαστικό συλλογισμό. Οι ποικίλες δραστηριότητες που μπορούν να διεξαχθούν, είτε ατομικά, είτε σε ολιγομελείς ομάδες, έχουν τη δυνατότητα να διευρύνουν τον συνδυαστικό συλλογισμό των παιδιών και να τα οδηγήσουν στη χρήση ολοένα και πιο σύνθετων στρατηγικών επίλυσης συνδυαστικών προβλημάτων. Πέρα από αυτό, μπορούν να τους βοηθήσουν να βελτιώσουν και τις συνεργατικές τους ικανότητες.

Επιπρόσθετα, η μελλοντική έρευνα ή και η εκπαιδευτική πρακτική θα μπορούσαν να περιλαμβάνουν συνθήκες διαφορετικές από την παρούσα έρευνα. Δηλαδή, θα μπορούσαν να δοθούν στους μαθητές διαφορετικά υλικά διαχείρισης, καθώς και υλικά καταγραφής για να μπορούν τα παιδιά να αναπαριστούν τους διαφορετικούς συνδυασμούς. Ο ερευνητής θα μπορούσε να αναλάβει ένα διαφορετικό ρόλο, η σύνθεση των ομάδων θα μπορούσε να είναι διαφορετική και φυσικά μια δραστηριότητα σαν αυτή της παρούσας έρευνας θα μπορούσε να αποτελέσει την αρχή μιας σειράς δραστηριοτήτων συνδυαστικής.

6.3 Σημασία της έρευνας

Η έρευνα αυτή είναι σημαντική γιατί είναι υψίστης σημασίας να γνωρίζουμε τα χαρακτηριστικά του συλλογισμού των παιδιών, εφόσον θέλουμε να τον εξελίξουμε. Ευελπιστούμε πως η μελέτη αυτή θα συμβάλλει στην έρευνα που αφορά τον συνδυαστικό συλλογισμό των παιδιών και θα ενισχύσει το ενδιαφέρον για τον σχεδιασμό κατάλληλων δραστηριοτήτων με απώτερο σκοπό την ανάπτυξη του συνδυαστικού συλλογισμού των μαθητών. Επιπρόσθετα, είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί των μικρών τάξεων να γνωρίζουν τις στρατηγικές που ακολουθούν κατά την επίλυση συνδυαστικών προβλημάτων, ώστε να μπορούν να ωθήσουν τους μαθητές προς τις πιο προχωρημένες στρατηγικές επίλυσης. Ακόμα, οι Νηπιαγωγοί και οι δάσκαλοι του Δημοτικού είναι σημαντικό να γνωρίζουν τους ρόλους που

αναλαμβάνουν οι μαθητές όταν επιλύουν προβλήματα συνεργατικά, ώστε να μπορούν να δημιουργούν κατάλληλα ζευγάρια και ομάδες για την επίλυση προβλημάτων, τα οποία θα είναι τα πιο επωφελή για τα παιδιά.

Η έρευνα αυτή συμβάλλει στην υπάρχουσα γνώση, προσφέροντας πληροφορίες για τον συνδυαστικό συλλογισμό των νηπίων καθώς επιλύουν συνεργατικά ένα πρόβλημα. Συμβάλλει στη βιβλιογραφία που αφορά τις στρατηγικές επίλυσης που ακολουθούν τα παιδιά, καθώς και τους ρόλους που αναλαμβάνουν αυτά, καθώς συμμετέχουν στην επίλυση ενός συνεργατικού προβλήματος. Η παρούσα μελέτη μπορεί να συμβάλλει στη μελλοντική πρακτική παρέχοντας στους εκπαιδευτικούς πληροφορίες σχετικά με το συνδυαστικό συλλογισμό των παιδιών 4-6 ετών, έτσι ώστε αυτοί να μπορέσουν να σχεδιάσουν δραστηριότητες Συνδυαστικής με σκοπό να εξελίσσουν τον συνδυαστικό συλλογισμό των μαθητών τους.

6.4 Πλεονεκτήματα και περιορισμοί της μελέτης

Η βιντεοσκόπηση των συνεντεύξεων με τα παιδιά ήταν βοηθητική, καθώς τα νήπια έκαναν, συχνά, πολύ γρήγορα τους συνδυασμούς τους και με τη μέθοδο αυτή μπόρεσε να καταγραφεί κάθε κίνηση και έκφραση των παιδιών. Ακόμα, η επιλογή των υλικών μάλλον κίνησε το ενδιαφέρον των μαθητών και τους παρακίνησε να συμμετέχουν στη δραστηριότητα. Ο διαχωρισμός των ομάδων με βάση τις φιλικές σχέσεις των παιδιών φαίνεται να συνείσφερε στην, κυρίως, ομαλή διεκπεραίωση της δραστηριότητας.

Πρέπει, εδώ, να αναφερθούν οι περιορισμοί της μεθοδολογίας που έχει επιλεγεί. Καταρχάς, με το κάθε ζευγάρι έγινε μόνο μία συνάντηση, επομένως τα δεδομένα που συλλέχθηκαν είναι περιορισμένα. Ένας ακόμα περιορισμός είναι το γεγονός ότι οι μαθητές που αποτελούν το δείγμα αυτής της έρευνας δεν είχαν κάποια εμπειρία με τη συνδυαστική. Επιπλέον, περιοριστικό παράγοντα αποτελεί, φυσικά, και ο μικρός αριθμός του δείγματος. Επιπρόσθετα, η Συνδυαστική συνιστά ένα πολυδιάστατο φαινόμενο, το οποίο η μελέτη αυτή επιχειρεί να διερευνήσει, μέσα από μία μόνο δραστηριότητα και έναν τύπο υλικού.

Οι παραπάνω περιορισμοί έχουν τη δυνατότητα να επηρεάσουν αρνητικά τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής. Πρέπει, λοιπόν, να ληφθούν υπόψη, έτσι ώστε να είναι ξεκάθαρο το γεγονός ότι τα αποτελέσματα δεν μπορούν να γενικευθούν, καθώς, όπως προαναφέρθηκε, το δείγμα είναι μικρό και η μελέτη περιλαμβάνει μόνο μία δραστηριότητα και έναν τύπο υλικού.

Οι περιορισμοί αυτοί θα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν σε μελλοντικές έρευνες με τους εξής τρόπους: Να γίνουν περισσότερες συναντήσεις με το δείγμα της κάθε έρευνας. Τα παιδιά που

θα συμμετέχουν να έχουν, ήδη, κάποια εμπειρία με τη συνδυαστική. Ο αριθμός του δείγματος των μελλοντικών ερευνών να περιλαμβάνει πολύ περισσότερα παιδιά. Οι έρευνες αυτές να διερευνήσουν το φαινόμενο της Συνδυαστικής μέσα από πολλαπλές δραστηριότητες και ποικίλα υλικά, δισδιάστατα, τρισδιάστατα, ακόμα και σε ηλεκτρονική μορφή.

6.5 Βασικά συμπεράσματα

Το βασικό συμπέρασμα της έρευνας αυτής είναι ότι τα παιδιά, από τη νηπιακή ηλικία κιόλας, είναι ικανά, όχι μόνο να συμμετέχουν στην επίλυση ενός συνδυαστικού προβλήματος, αλλά να βρουν και όλους τους διαφορετικούς συνδυασμούς, και να προχωρήσουν στη δεύτερη στρατηγική επίλυσης, την *Συστηματική Δοκιμή*. Φαίνεται ότι βοηθάει η επίλυση να γίνεται σε ομάδες των δύο ατόμων, με τα άτομα αυτά να είναι σε θέση να συνεργαστούν. Για την επιλογή των υλικών, είναι σκόπιμο να ληφθεί υπόψη η ηλικία των συμμετεχόντων, ώστε αυτά να συμπεριλαμβάνονται μέσα στα ενδιαφέροντα των μαθητών, για να τους παρακινήσουν να συμμετέχουν στη δραστηριότητα, με σκοπό να την επιλύσουν ολοκληρωμένα. Ένα ακόμα βασικό συμπέρασμα της έρευνας αυτής είναι ότι οι ρόλοι που ανέλαβαν τα παιδιά κατά την επίλυση του συνδυαστικού προβλήματος επηρέασαν τον αριθμό των διαφορετικών συνδυασμών που δημιουργήθηκαν, καθώς και των στρατηγικών που ακολουθήθηκαν. Μάλιστα, διαφορετικοί συνδυασμοί ρόλων οδήγησαν στην πιο χαμηλή στρατηγική, δηλαδή, τα μέλη της ομάδας Δ', ένας παθητικός συνεργάτης και ένας συνεργατικός καθοδηγητής, και της ομάδας Ε', ένας εγωκεντρικός καθοδηγητής και ένας συνεργατικός αξιολογητής μπόρεσαν να ακολουθήσουν μονάχα την πιο πρώιμη στρατηγική επίλυσης, την *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα*. Ενώ οι ομάδες που περιλάμβαναν δύο συνεργατικούς καθοδηγητές (ομάδα Β') ή δύο εγωκεντρικούς καθοδηγητές (ομάδα Γ') κατάφεραν να βρουν όλους τους διαφορετικούς συνδυασμούς και να προχωρήσουν στην στρατηγική *Συστηματική Δοκιμή*. Στην ομάδα Α', ο συνεργατικός καθοδηγητής μπόρεσε να προχωρήσει στη *Συστηματική Δοκιμή*, ενώ ο παθητικός συνεργάτης έμεινε στην *Τυχαία Δοκιμή και Σφάλμα*. Η αλληλεπίδραση αυτών των ρόλων οδήγησε τα παιδιά να βρουν μονάχα 7 συνδυασμούς.

Σχετικά με την ερευνητική διαδικασία, η βιντεοσκόπηση των συνεντεύξεων αποδείχτηκε χρήσιμη για την ανάλυση των δεδομένων. Ο διαχωρισμός των παιδιών σε ζευγάρια ήταν, μάλλον, ωφέλιμος, καθώς τα παιδιά, γενικά, παρακινούσαν ο ένας τον άλλον να συμμετέχει στην επίλυση του προβλήματος. Συγκεκριμένα, το γεγονός ότι τα μέλη της κάθε ομάδας είχαν φιλικές σχέσεις μεταξύ τους, βοήθησε στην ομαλή επίλυση του προβλήματος. Η χρήση υλικών

που ήταν κοντά στα ενδιαφέροντα των νηπίων ήταν, μάλλον, κρίσιμη για να προσπαθήσουν τα παιδιά να λύσουν το πρόβλημα. Τα ευρήματα στα οποία καταλήξαμε φαίνονται ενδιαφέροντα, καθώς αυτά μας παρέχουν πληροφορίες για το πόσους συνδυασμούς μπορούν να δημιουργήσουν παιδιά 4-6 ετών, για τους ρόλους που αναλαμβάνουν καθώς επιλύουν συνεργατικά ένα πρόβλημα, καθώς και για τις στρατηγικές τις οποίες ακολουθούνται.

Παράρτημα

Ομάδα Α:

- (A1) Ερευνήτρια: Έχετε αυτό το αγόρι και 4 καπέλα και 3 μάσκες. Αν έπρεπε να βάλετε στο αγόρι αυτά τα αξεσουάρ, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορείτε να συνδυάσετε αυτές τις μάσκες με αυτά τα καπέλα;
- (A2) Άγγελος: (συνδυάζει τη μάσκα λιοντάρι με το κίτρινο καπέλο) (1ος συνδυασμός).
- (A3) Ε: Αυτός είναι ένας συνδυασμός. Τι άλλο μπορείτε να κάνετε;
- (A4) Άρης: (συνδυάζει τη μάσκα ζέβρα με το ριγέ καπέλο) (2ος συνδυασμός).
- (A5) Άγγελος: (συνδυάζει τη μάσκα λαγός με το ριγέ καπέλο) (3ος συνδυασμός).
- (A6) Άρης: (συνδυάζει τη μάσκα ζέβρα με το ριγέ καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 2ο συνδυασμό).
- (A7) Ε: Κι αυτά εδώ; *[δείχνοντας τα καπέλα που δεν έχουν χρησιμοποιήσει]*.
- (A8) Άρης: (συνδυάζει τη μάσκα λαγός με το πορτοκαλί καπέλο) (4ος συνδυασμός).
- (A9) Άγγελος: (συνδυάζει τη μάσκα λαγός με το ριγέ καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 3ο συνδυασμό).
- (A10) Άρης: (συνδυάζει τη μάσκα ζέβρα με το ριγέ καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 2ο συνδυασμό ξανά).
- (A11) Άρης: (συνδυάζει τη μάσκα λαγός με το καπέλο με τα αστεράκια) (5ος συνδυασμός).
- (A12) Άρης: (συνδυάζει τη μάσκα λαγός με το πορτοκαλί καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 4ο συνδυασμό).
- [Οι συνδυασμοί που ήταν ορατοί σε αυτό το σημείο περιλάμβαναν όλα τα στοιχεία, εκτός από το καπέλο με τα αστεράκια.]*
- (A13) Άγγελος: Αυτό; (δείχνοντας το καπέλο που περισσεύει).
- (A14) Ε: Αυτό που περισσεύει τι θα το κάνετε;
- (A15) Άρης: (βάζει το καπέλο πάνω στο κεφάλι του αγοριού).
- (A16) Ε: Αλλά αυτό εδώ *[δείχνοντας το καπέλο με τα αστεράκια]* με ποια μάσκα το συνδυάζετε;
- (A17) Άγγελος: Με αυτό (δείχνοντας τη μάσκα ζέβρα).
- (A18) Ε: Γιαβάλτο με αυτό το καπέλο.

- (A19) Άγγελος: (συνδυάζει τη μάσκα ζέβρα με το καπέλο με τα αστεράκια)(6ος συνδυασμός).
- (A20) Άγγελος: (συνδυάζει τη μάσκα λαγός με το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνοντας τον 5ο συνδυασμό).
- (A21) Ε: Κάποιον άλλο συνδυασμό;
- (A22) Άγγελος: (συνδυάζει τη μάσκα λιοντάρι με το καπέλο με τα αστεράκια) (7ος συνδυασμός).
- (A23) Ε: Έχετε κάποιον άλλον;
- (A24) Άγγελος: Όχι.
- (A25) Ε: Σας ευχαριστώ.

Ομάδα Β:

- (B1) Ερευνήτρια: Έχετε αυτό το αγόρι και 4 καπέλα και 3 μάσκες. Αν έπρεπε να βάλετε στο αγόρι αυτά τα αξεσουάρ, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορείτε να συνδυάσετε αυτές τις μάσκες με αυτά τα καπέλα;

[Επειδή τα παιδιά δεν είπαν και δεν έκαναν τίποτα, η ερευνήτρια είπε:]

- (B2) Ε: Θέλετε να σας δείξω ένα παράδειγμα για να καταλάβετε;
- (B3) Βαγγέλης και Βαλέρια: Ναι.
- (B4) Ε: Εγώ θα πάρω αυτή τη μάσκα, το λιοντάρι και θα τη φορέσω στο αγόρι και μαζί μ' αυτή τη μάσκα θα του βάλω κι αυτό το καπέλο [το ριγέ]. Επομένως τώρα έχω συνδυάσει ένα καπέλο με μία μάσκα. Μπορείτε να κάνετε και άλλους συνδυασμούς;
- (B5) Βαλέρια: Ναι.
- (B6) Ε: Για δείξε μου.
- (B7) Βαλέρια: Αυτό με αυτό (συνδυάζει τη μάσκα λαγός με το πορτοκαλί καπέλο) (1ος συνδυασμός).
- (B8) Ε: Αυτός είναι ένας συνδυασμός. Τι άλλο; Βαγγέλη κι εσύ αν θέλεις μπορείς να δείξεις.
- (B9) Βαγγέλης: (συνδυάζει τη μάσκα ζέβρα με το καπέλο με τα αστεράκια) (2ος συνδυασμός).
- (B10) Ε: Τι άλλο μπορείτε να κάνετε;
- (B11) Βαγγέλης: (επαναλαμβάνει τον συνδυασμό που τους έδειξα εγώ, τη μάσκα λιοντάρι με το ριγέ καπέλο) (3ος συνδυασμός).

- (B12) Βαλέρια: Α ξέρω. Αυτό με αυτό που ταιριάζει πιο πολύ (συνδυάζει τη μάσκα λιοντάρι με το πορτοκαλί καπέλο) (4ος συνδυασμός).
- (B13) Βαγγέλης: (συνδυάζει τη μάσκα ζέβρα με το ριγέ καπέλο) (5ος συνδυασμός).
- (B14) Βαγγέλης: (συνδυάζει τη μάσκα λαγός με το καπέλο με τα αστεράκια) (6ος συνδυασμός).
- (B15) [*Ο Βαγγέλης φαίνεται να σκέφτεται κάτι.*]
- (B16) E: Τι λες Βαγγέλη;
- (B17) Βαγγέλης: Αυτό με αυτό (συνδυάζει τη μάσκα λαγός με το πορτοκαλί καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 1ο συνδυασμό).
- (B18) E: Κάτι άλλο μπορείτε να συνδυάσετε;
- (B19) Βαλέρια: Αυτό με αυτό (συνδυάζει τη μάσκα λαγός με το ριγέ καπέλο) (7ος συνδυασμός).
- (B20) E: Κάτι άλλο;
- (B21) Βαγγέλης: Αυτό και αυτό (συνδυάζει τη μάσκα ζέβρα με το κίτρινο καπέλο) (8ος συνδυασμός).
- (B22) E: Τι άλλο;
- (B23) Βαλέρια: Εγώ αυτό (φοράει το καπέλο με τα αστεράκια στο αγόρι).
- (B24) Βαγγέλης: Τη ζέβρα.
- (B25) Βαλέρια: (το σκέφτεται και τελικά το συνδυάζει όντως με τη μάσκα ζέβρα) (επαναλαμβάνει δηλαδή τον 2ο συνδυασμό).
- (B26) E: Κάτι άλλο μπορείτε να συνδυάσετε;
- (B27) Βαγγέλης: Αυτό εδώ (φοράει τη μάσκα λιοντάρι στο αγόρι και μετά από σκέψη το συνδυάζει με το ριγέ καπέλο) (επαναλαμβάνει δηλαδή τον 3ο συνδυασμό).
- (B28) E: Κάτι άλλο;
- (B29) (Ο Βαγγέλης δίνει στην Βαλέρια το αγόρι.)
- (B30) Βαλέρια: (φοράει στο αγόρι το κίτρινο καπέλο και αφού το σκεφτεί λίγο, το συνδυάζει με τη μάσκα λιοντάρι) (9ος συνδυασμός).
- (B31) Βαγγέλης: Με το λιοντάρι.
- (B32) Βαγγέλης: Μοιάζει πολύ το χρώμα [*εννοώντας του κίτρινου καπέλου με τη μάσκα λιοντάρι*].
- (B33) E: Ναι. Κάτι άλλο;
- (B34) (Ο Βαγγέλης παίρνει το αγόρι μπροστά του.)
- (B35) Βαγγέλης: (συνδυάζει τη μάσκα ζέβρα με το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνοντας τον 2ο συνδυασμό).

- (B36) E: Κάτι άλλο;
- (B37) (Η Βαλέρια παίρνει το αγόρι.)
- (B38) Βαλέρια: (φοράει στο αγόρι το ριγέ καπέλο και μετά από σκέψη το συνδυάζει με τη μάσκα λαγός, επαναλαμβάνοντας τον 7ο συνδυασμό).
- (B39) (Ο Βαγγέλης παίρνει το αγόρι μπροστά του.)
- (B40) Βαγγέλης: (σκέφτεται και μετά φοράει στο αγόρι τη μάσκα ζέβρα και σταματάει)
- (B41) Βαλέρια: Να σου πω;
- (B42) Βαγγέλης: (πάει να βάλει το καπέλο με τα αστεράκια, να επαναλάβει δηλαδή ξανά τον 2ο συνδυασμό, αλλά αλλάζει γνώμη και το βγάζει. Μετά δοκιμάζει με το πορτοκαλί καπέλο (10ος συνδυασμός), και κρατώντας ακόμα σταθερή τη μάσκα ζέβρα, αλλάζει το πορτοκαλί με το κίτρινο καπέλο, επαναλαμβάνει δηλαδή τον 8^ο συνδυασμό.)
- (B43) (Η Βαλέρια παίρνει το αγόρι μπροστά της.)
- (B44) Βαλέρια: (μετά από σκέψη φοράει στο αγόρι τη μάσκα λαγός με το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνει δηλαδή τον 6ο συνδυασμό. Μετά, κρατώντας σταθερή τη μάσκα, αλλάζει το καπέλο με τα αστεράκια με το πορτοκαλί καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 1ο συνδυασμό. Στη συνέχεια, αντικαθιστά αυτό το καπέλο με το ριγέ, επαναλαμβάνοντας δηλαδή τον 7ο συνδυασμό).
- (B45) (Ο Βαγγέλης παίρνει το αγόρι μπροστά του.)
- (B46) Βαγγέλης: (φοράει στο αγόρι τη μάσκα λαγός και μετά από αρκετή σκέψη το συνδυάζει με το κίτρινο καπέλο) (11ος συνδυασμός).
- (B47) (Η Βαλέρια παίρνει το αγόρι μπροστά της.)
- (B48) Βαλέρια: (φοράει στο αγόρι τη μάσκα λαγός και το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνει δηλαδή τον 6ο συνδυασμό ξανά. Κρατώντας σταθερή τη μάσκα, πάει να τη συνδυάσει με το ριγέ καπέλο, αλλά αλλάζει γνώμη και ξαναφοράει το καπέλο με τα αστεράκια).
- (B49) (Ο Βαγγέλης παίρνει πάλι το αγόρι μπροστά του.)
- (B50) Βαγγέλης: (φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι, και αφού μελετήσει τις επιλογές που έχει για τα καπέλα, επιλέγει το πορτοκαλί για να φορέσει στο αγόρι, επαναλαμβάνει δηλαδή τον 4ο συνδυασμό)
- (B51) E: Κάτι άλλο;
- (B52) Βαγγέλης: (φοράει στο αγόρι τη μάσκα ζέβρα και το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνει δηλαδή τον 2ο συνδυασμό ξανά).

- (B53) E: Κάτι άλλο;
- (B54) Βαγγέλης: Αυτό (φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι με το κίτρινο καπέλο, επαναλαμβάνει δηλαδή τον 9ο συνδυασμό).
- (B55) (Ο Βαγγέλης δίνει στη Βαλέρια το αγόρι.)
- (B56) Βαλέρια: (φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι και το κίτρινο καπέλο, επαναλαμβάνοντας ξανά τον 9ο συνδυασμό).
- (B57) Βαλέρια: (φοράει στο αγόρι το ριγέ καπέλο και τη μάσκα λαγός, επαναλαμβάνοντας ξανά τον 7ο συνδυασμό).
- (B58) Βαλέρια: (φοράει στο αγόρι το καπέλο με τα αστεράκια και τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 2ο συνδυασμό για άλλη μία φορά).
- (B59) (Η Βαλέρια δίνει το αγόρι στον Βαγγέλη.)
- (B60) E: Έχετε κι άλλους συνδυασμούς;
- (B61) Βαγγέλης: Ναι. Εγώ θα πάρω (φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι και το καπέλο με τα αστεράκια) (12ος συνδυασμός).
- (B62) E: Ευχαριστώ πολύ.

Ομάδα Γ:

- (Γ1) Ερευνήτρια: Έχετε αυτό το αγόρι και 4 καπέλα και 3 μάσκες. Αν έπρεπε να βάλετε στο αγόρι αυτά τα αξεσουάρ, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορείτε να συνδυάσετε αυτές τις μάσκες με αυτά τα καπέλα;
- (Γ2) Γιώργος: Μία.
- (Γ3) E: Για δείξε μου αυτή τη μία.
- (Γ4) Γιώργος: (βάζει τη μάσκα λαγός πάνω στο αγόρι και σταματάει).
- (Γ5) E: Του έβαλες μια μάσκα, για βάλε του κι ένα καπέλο.
- (Γ6) (Ο Γιάννης του δείχνει το καπέλο με τα αστεράκια.)
- (Γ7) (Ο Γιώργος επιλέγει αυτό το καπέλο και το φοράει στο αγόρι) (1^{ος} συνδυασμός).
- (Γ8) E: Αυτός είναι ένας συνδυασμός. Βάλαμε μία μάσκα μαζί με ένα καπέλο. Μπορείτε να κάνετε κι άλλους συνδυασμούς;
- (Γ9) Γιάννης: (συνδυάζει το ριγέ καπέλο με τη μάσκα λιοντάρι) (2^{ος} συνδυασμός).
- (Γ10) E: Κι αυτός είναι ένας συνδυασμός.
- (Γ11) Γιάννης: (συνδυάζει το πορτοκαλί καπέλο με τη μάσκα ζέβρα) (3^{ος} συνδυασμός)
- (Γ12) Γιώργος: (συνδυάζει το κίτρινο καπέλο με τη μάσκα ζέβρα) (4^{ος} συνδυασμός)
- (Γ13) Γιώργος: (κρατάει στα χέρια του το πορτοκαλί καπέλο).

- (Γ14) E: Αυτό που περισεύει; Που θα το βάλεις;
- (Γ15) Γιώργος: (συνδυάζει το πορτοκαλί καπέλο με τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 3ο συνδυασμό).
- (Γ16) E: Πιστεύετε ότι μπορείτε να βρείτε κάτι άλλο;
- (Γ17) Γιώργος: Ναι.
- (Γ18) E: Για δείξε μου.
- (Γ19) Γιώργος: (συνδυάζει το πορτοκαλί καπέλο με τη μάσκα λαγός) (5^{ος} συνδυασμός)
- (Γ20) Γιώργος: (συνδυάζει το καπέλο με τα αστεράκια με τη μάσκα ζέβρα) (6^{ος} συνδυασμός).
- (Γ21) Γιάννης: (συνδυάζει το κίτρινο καπέλο με τη μάσκα λιοντάρι) (7^{ος} συνδυασμός).
- (Γ22) E: Κάτι άλλο;
- (Γ23) Γιώργος: (συνδυάζει το ριγέ καπέλο με τη μάσκα ζέβρα) (8^{ος} συνδυασμός).
- (Γ24) (Ο Γιώργος κρατάει το καπέλο με τα αστεράκια.)
- (Γ25) E: Αυτό που κρατάς που θα το βάλεις;
- (Γ26) Γιώργος: (συνδυάζει το καπέλο με τα αστεράκια με τη μάσκα λιοντάρι) (9^{ος} συνδυασμός).
- (Γ27) E: Κάτι άλλο;
- (Γ28) Γιώργος: (συνδυάζει το κίτρινο καπέλο με τη μάσκα λαγός) (10^{ος} συνδυασμός).
- (Γ29) E: Κάτι άλλο μπορείτε να συνδυάσετε;
- (Γ30) Γιώργος: Ναι.
- (Γ31) E: Για δείξε μου.
- (Γ32) Γιάννης: Κι εγώ μπορώ. (αλλάζει τα καπέλα από 2 συνδυασμούς, δημιουργώντας τώρα τους συνδυασμούς: μάσκα λαγός-ριγέ καπέλο (11^{ος} συνδυασμός) και μάσκα ζέβρα-κίτρινο καπέλο, που είναι επανάληψη του 4^{ου} συνδυασμού).
- (Γ33) (Ο Γιώργος κρατάει το πορτοκαλί καπέλο.)
- (Γ34) E: Έχεις κι ένα που κρατάς στα χέρια σου. Μπορείς να το βάλεις κάπου αλλού;
- (Γ35) Γιώργος: Όχι.
- (Γ36) E: Γιάννη, εσύ μπορείς να κάνεις κάτι άλλο;
- (Γ37) Γιάννης: Ναι.
- (Γ38) E: Για δείξε μου.
- (Γ39) Γιάννης: (συνδυάζει το πορτοκαλί καπέλο με τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας έτσι τον 3^ο συνδυασμό.)

- (Γ40) Γιάννης: (συνδυάζει το κίτρινο καπέλο με τη μάσκα λαγός, επαναλαμβάνοντας τον 10^ο συνδυασμό.)
- (Γ41) Γιώργος: Κυρία, ο Γιάννης όλο τα αλλάζει.
- (Γ42) Ε: Ναι αυτό προσπαθούμε να κάνουμε. Να τα αλλάξουμε όλα για να βρούμε όλους τους συνδυασμούς.
- (Γ43) Γιώργος: (συνδυάζει το ριγέ καπέλο με τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 8^ο συνδυασμό.)
- (Γ44) Γιώργος: (συνδυάζει το πορτοκαλί καπέλο με τη μάσκα λιοντάρι) (12^{ος} συνδυασμός).
- (Γ45) Γιώργος: (συνδυάζει το καπέλο με τα αστεράκια με τη μάσκα λαγός, επαναλαμβάνοντας τον 1^ο συνδυασμό.)
- (Γ46) Γιώργος: (συνδυάζει το κίτρινο καπέλο με τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 4^ο συνδυασμό.)
- (Γ47) Γιώργος: (συνδυάζει το ριγέ καπέλο με τη μάσκα λαγός, επαναλαμβάνοντας τον 11^ο συνδυασμό.)
- (Γ48) Γιώργος: (συνδυάζει το καπέλο με τα αστεράκια με τη μάσκα λιοντάρι, επαναλαμβάνοντας τον 9^ο συνδυασμό.)
- (Γ49) Γιάννης: (συνδυάζει το κίτρινο καπέλο με τη μάσκα λιοντάρι, επαναλαμβάνοντας τον 7^ο συνδυασμό.)
- (Γ50) Γιάννης: (συνδυάζει το καπέλο με τα αστεράκια με τη μάσκα λαγός, επαναλαμβάνοντας τον 1^ο συνδυασμό.)
- (Γ51) Γιώργος: (συνδυάζει το ριγέ καπέλο με τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 8^ο συνδυασμό ξανά.)
- (Γ52) Γιάννης: (συνδυάζει το πορτοκαλί καπέλο με τη μάσκα λαγός, επαναλαμβάνοντας τον 5^ο συνδυασμό.)
- (Γ53) Γιώργος: (συνδυάζει το ριγέ καπέλο με τη μάσκα λαγός, επαναλαμβάνοντας τον 11^ο συνδυασμό ξανά.)
- (Γ54) Γιάννης: (συνδυάζει το καπέλο με τα αστεράκια με τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 6^ο συνδυασμό.)
- (Γ55) Γιάννης: (συνδυάζει το ριγέ καπέλο με τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 8^ο συνδυασμό.)
- (Γ56) Γιάννης: (συνδυάζει το ριγέ καπέλο με τη μάσκα λαγός, επαναλαμβάνοντας τον 11^ο συνδυασμό.)

- (Γ57) Γιάννης: (συνδυάζει το καπέλο με τα αστεράκια με τη μάσκα λιοντάρι, επαναλαμβάνοντας τον 9^ο συνδυασμό.)
- (Γ58) Γιώργος: (συνδυάζει το πορτοκαλί καπέλο με τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 3^ο συνδυασμό.)
- (Γ59) Γιάννης: (συνδυάζει το κίτρινο καπέλο με τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 4^ο συνδυασμό.)
- (Γ60) Γιώργος: (συνδυάζει το κίτρινο καπέλο με τη μάσκα λαγό, επαναλαμβάνοντας τον 10^ο συνδυασμό.)
- (Γ61) Γιώργος: (συνδυάζει το κίτρινο καπέλο με τη μάσκα λιοντάρι, επαναλαμβάνοντας τον 7^ο συνδυασμό.)
- (Γ62) Γιάννης: (συνδυάζει το καπέλο με τα αστεράκια με τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 6^ο συνδυασμό ξανά.)
- (Γ63) Γιάννης: (συνδυάζει το καπέλο με τα αστεράκια με τη μάσκα λαγό, επαναλαμβάνοντας τον 1^ο συνδυασμό ξανά.)
- (Γ64) Γιώργος: (συνδυάζει το πορτοκαλί καπέλο με τη μάσκα λιοντάρι, επαναλαμβάνοντας τον 12^ο συνδυασμό.)
- (Γ65) Γιάννης: (συνδυάζει το πορτοκαλί καπέλο με τη μάσκα λιοντάρι, επαναλαμβάνοντας τον 12^ο συνδυασμό κι αυτός.)
- (Γ66) Γιώργος: (συνδυάζει το κίτρινο καπέλο με τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 4^ο συνδυασμό.)
- (Γ67) Γιώργος: (συνδυάζει το ριγέ καπέλο με τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 8^ο συνδυασμό για άλλη μια φορά.)
- (Γ68) Γιάννης: (συνδυάζει το κίτρινο καπέλο με τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 4^ο συνδυασμό κι αυτός.)
- (Γ69) Γιάννης: (συνδυάζει το ριγέ καπέλο με τη μάσκα λιοντάρι, επαναλαμβάνοντας τον 2^ο συνδυασμό.)
- (Γ70) Γιώργος: (συνδυάζει το πορτοκαλί καπέλο με τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 3^ο συνδυασμό ξανά.)
- (Γ71) (Ο Γιάννης αλλάζει τις μάσκες από τους τελευταίους του συνδυασμούς που έχει μπροστά του κι έτσι δημιουργεί τους συνδυασμούς ριγέ καπέλο-μάσκα λαγός και καπέλο με αστεράκια-μάσκα λιοντάρι, προφανώς και οι δύο συνδυασμοί έχουν επαναληφθεί.)
- (Γ72) Γιώργος: (συνδυάζει το κίτρινο καπέλο με τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 4^ο συνδυασμό ξανά.)

- (Γ73) (Μετά, τα αγόρια δημιουργούν ένα συνδυασμό μαζί, καθώς ο Γιώργος φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι και ο Γιάννης το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνοντας τον 9^ο συνδυασμό ξανά.)
- (Γ74) Γιάννης: (συνδυάζει το κίτρινο καπέλο με τη μάσκα λιοντάρι, επαναλαμβάνοντας τον 7^ο συνδυασμό.)
- (Γ75) (Τα παιδιά δημιουργούν πάλι μαζί ένα συνδυασμό, καθώς ο Γιώργος φοράει στο αγόρι το πορτοκαλί καπέλο και ο Γιάννης τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 3^ο συνδυασμό.)
- (Γ76) Γιώργος: (συνδυάζει το πορτοκαλί καπέλο με τη μάσκα λιοντάρι, επαναλαμβάνοντας τον 12^ο συνδυασμό ξανά.)
- (Γ77) (Ο Γιάννης αλλάζει το καπέλο με το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνοντας τον 9^ο συνδυασμό.)
- (Γ78) (Ο Γιώργος αλλάζει το καπέλο με το κίτρινο καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 7^ο συνδυασμό.)
- (Γ79) (Ο Γιώργος αλλάζει το καπέλο με το πορτοκαλί καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 12^ο συνδυασμό για άλλη μια φορά.)
- (Γ80) (Ο Γιάννης αλλάζει το καπέλο με το ριγέ καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 2^ο συνδυασμό ξανά.)
- (Γ81) Γιώργος: (συνδυάζει το ριγέ καπέλο με τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 8^ο συνδυασμό για πολλαπλή φορά.)
- (Γ82) Ε: Πιστεύετε τους κάναμε όλους τους συνδυασμούς;
- (Γ83) Γιώργος: Όχι.
- (Γ84) Ε: Όχι; Ποιος άλλος έμεινε;
- (Γ85) (Ο Γιάννης φοράει στο αγόρι το ριγέ καπέλο και τη μάσκα λιοντάρι, επαναλαμβάνοντας τον 2^ο συνδυασμό ξανά.)
- (Γ86) (Ο Γιάννης αλλάζει το καπέλο με το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνοντας τον 9^ο συνδυασμό.)
- (Γ87) (Ο Γιώργος αλλάζει τη μάσκα με τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 6^ο συνδυασμό.)
- (Γ88) (Ο Γιώργος αλλάζει τη μάσκα με τη μάσκα λαγό, επαναλαμβάνοντας τον 1^ο συνδυασμό.)
- (Γ89) (Ο Γιάννης αλλάζει τη μάσκα με τη μάσκα λιοντάρι, επαναλαμβάνοντας τον 9^ο συνδυασμό για άλλη μια φορά.)

- (Γ90) (Ο Γιώργος αλλάζει τη μάσκα με τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 6^ο συνδυασμό ξανά.)
- (Γ91) (Ο Γιάννης αλλάζει πάλι τη μάσκα με τη μάσκα λιοντάρι, επαναλαμβάνοντας τον 9^ο συνδυασμό.)
- (Γ92) (Ο Γιώργος αλλάζει τη μάσκα με τη μάσκα λαγός, επαναλαμβάνοντας τον 1^ο συνδυασμό ξανά.)
- (Γ93) (Ο Γιάννης αλλάζει πάλι τη μάσκα με τη μάσκα λιοντάρι, επαναλαμβάνοντας τον 9^ο συνδυασμό ξανά.)
- (Γ94) Ε: Τώρα ακόμα αυτό το καπέλο φοράει [*με τα αστεράκια*];
- (Γ95) (Ο Γιώργος το αλλάζει με το ριγέ καπέλο, επαναλαμβάνοντας το 2^ο συνδυασμό.)
- (Γ96) (Ο Γιάννης αλλάζει το καπέλο με το κίτρινο καπέλο, επαναλαμβάνοντας το 7^ο συνδυασμό.)
- (Γ97) (Τα παιδιά σταματούν.)
- (Γ98) Ε: Ευχαριστώ πολύ.

Ομάδα Δ:

- (Δ1) Ερευνήτρια: Έχετε αυτό το αγόρι και 4 καπέλα και 3 μάσκες. Αν έπρεπε να βάλετε στο αγόρι αυτά τα αξεσουάρ, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορείτε να συνδυάσετε αυτές τις μάσκες με αυτά τα καπέλα;
- (Δ2) Δέσποινα: Αυτό με αυτό (δείχνοντας τη μάσκα λιοντάρι και το κίτρινο καπέλο).
- (Δ3) Ε: Θέλεις να μου το δείξεις; Μπορείς να τα βάλεις πάνω στο αγόρι αν θες.
- (Δ4) Δέσποινα: (φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι με το κίτρινο καπέλο) (1^{ος} συνδυασμός).
- (Δ5) Ε: Αυτός είναι ένας συνδυασμός. Μπορείτε να κάνετε κάποιον άλλον;
- (Δ6) Δανάη: (δείχνει τη μάσκα λαγός και το πορτοκαλί καπέλο.)
- (Δ7) Ε: Για βάλε τα μαζί.
- (Δ8) Δανάη: (φοράει στο αγόρι τη μάσκα λαγός με το πορτοκαλί καπέλο) (2^{ος} συνδυασμός).
- (Δ9) Ε: Κι αυτός είναι ένας συνδυασμός. Τι άλλο μπορείτε να κάνετε;
- (Δ10) Δέσποινα: Αυτό με αυτό (συνδυάζει τη μάσκα ζέβρα με το καπέλο με τα αστεράκια) (3^{ος} συνδυασμός).
- (Δ11) Ε: Τι άλλο;
- (Δ12) Δανάη: (δείχνει τη μάσκα λιοντάρι και το ριγέ καπέλο.)

- (Δ13) E: Για κάνε το συνδυασμό.
- (Δ14) Δανάη: (συνδυάζει τη μάσκα λιοντάρι με το ριγέ καπέλο) (4^{ος} συνδυασμός).
- (Δ15) E: Τι άλλο μπορείτε να κάνετε;
- (Δ16) Δέσποινα: (συνδυάζει τη μάσκα ζέβρα με το πορτοκαλί καπέλο) (5^{ος} συνδυασμός).
- (Δ17) Δανάη: (συνδυάζει τη μάσκα λαγός με το καπέλο με τα αστεράκια) (6^{ος} συνδυασμός).
- (Δ18) Δέσποινα: (συνδυάζει τη μάσκα λιοντάρι με το ριγέ καπέλο, επαναλαμβάνει δηλαδή τον 4^ο συνδυασμό.)
- (Δ19) Δανάη: (συνδυάζει τη μάσκα ζέβρα με το κίτρινο καπέλο) (7^{ος} συνδυασμός).
- (Δ20) Δέσποινα: (συνδυάζει τη μάσκα λαγός με το κίτρινο καπέλο) (8^{ος} συνδυασμός).
- (Δ21) Δανάη: (συνδυάζει τη μάσκα λαγός με το πορτοκαλί καπέλο, επαναλαμβάνοντας έτσι το 2^ο συνδυασμό.)
- (Δ22) E: Μπορείτε να κάνετε άλλους συνδυασμούς;
- (Δ23) Δέσποινα: Όχι.
- (Δ24) E: Σας ευχαριστώ πολύ.

Ομάδα Ε:

- (E1) Ερευνήτρια: Έχετε αυτό το αγόρι και 4 καπέλα και 3 μάσκες. Αν έπρεπε να βάλετε στο αγόρι αυτά τα αξεσουάρ, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορείτε να συνδυάσετε αυτές τις μάσκες με αυτά τα καπέλα;

[Επειδή τα παιδιά δεν είπαν και δεν έκαναν τίποτα, η ερευνήτρια είπε:]

- (E2) E: Θέλετε να σας δείξω ένα παράδειγμα για να καταλάβετε;
- (E3) E: Εγώ θα πάρω τη μάσκα λαγός και θα τη φορέσω στο αγόρι και μ' αυτή τη μάσκα θα βάλω αυτό το καπέλο *[το κίτρινο]*. Αυτός είναι ένας συνδυασμός. Μπορείτε να κάνετε κι άλλους;
- (E4) Ελένη και Ευθύμης: Ναι.
- (E5) E: Για να δω.
- (E6) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα ζέβρα.)
- (E7) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι το πορτοκαλί καπέλο) (1^{ος} συνδυασμός).
- (E8) E: Μπορείτε να κάνετε κάποιον άλλον;
- (E9) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι.)

- (E10) (Και τα δυο παιδιά μαζί φοράνε στο αγόρι το καπέλο με τα αστεράκια) (2^{ος} συνδυασμός).
- (E11) Ε: Κάτι άλλο;
- (E12) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα ζέβρα και το ριγέ καπέλο) (3^{ος} συνδυασμός).
- (E13) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι).
- (E14) (Ο Ευθύμης κυλάει προς το μέρος της το κίτρινο καπέλο. Η Ελένη το κυλάει προς το αγόρι, αλλά τελικά επιλέγει το πορτοκαλί καπέλο) (4^{ος} συνδυασμός).
- (E15) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα ζέβρα.)
- (E16) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι το καπέλο με τα αστεράκια) (5^{ος} συνδυασμός).
- (E17) Ε: Τι άλλο μπορείτε να κάνετε;
- (E18) (Ο Ευθύμης φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι, αλλά η Ελένη την αφαιρεί και βάζει τη μάσκα λαγός στο αγόρι.)
- (E19) (Ο Ευθύμης το συνδυάζει με το πορτοκαλί καπέλο) (6^{ος} συνδυασμός).
- (E20) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι.)
- (E21) Ευθύμης: (Το συνδυάζει με το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνοντας τον 2^ο συνδυασμό.)
- (E22) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι το πορτοκαλί καπέλο.)
- (E23) Ευθύμης: (Το συνδυάζει με τη μάσκα λαγός, επαναλαμβάνοντας τον 6^ο συνδυασμό.)
- (E24) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα ζέβρα.)
- (E25) Ελένη: (Το συνδυάζει με το πορτοκαλί καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 1^ο συνδυασμό.)
- (E26) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λαγός.)
- (E27) Ελένη: (Το συνδυάζει με το κίτρινο καπέλο) (7^{ος} συνδυασμός).
- (E28) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι και το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνοντας τον 2^ο συνδυασμό.)
- (E29) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα ζέβρα.)
- (E30) Ευθύμης: (Το συνδυάζει με το κίτρινο καπέλο) (8^{ος} συνδυασμός).
- (E31) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λαγός και το κίτρινο καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 7^ο συνδυασμό.)
- (E32) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα ζέβρα, σκέφτεται προς στιγμήν να επιλέξει το καπέλο με τα αστεράκια και το πορτοκαλί καπέλο, αλλά τελικά επιλέγει το ριγέ καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 3^ο συνδυασμό.)

- (E33) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λαγός, σκέφτεται να το συνδυάσει με το κίτρινο καπέλο, αλλά αλλάζει γνώμη και επιλέγει το πορτοκαλί, και οι δύο αυτοί συνδυασμοί ήταν επαναλήψεις προηγούμενων συνδυασμών.)
- (E34) Ελένη: Βάλε αυτό το καπέλο άμα θες (συνδυάζει, λοιπόν, τη μάσκα λαγός με το καπέλο με τα αστεράκια) (9^{ος} συνδυασμός).
- (E35) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι.)
- (E36) Ευθύμης: (Τη συνδυάζει με το ριγέ καπέλο) (10^{ος} συνδυασμός).
- (E37) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα ζέβρα.)
- (E38) Ελένη: (Τη συνδυάζει με το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνοντας τον 5^ο συνδυασμό.)
- (E39) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λαγός και το ριγέ καπέλο) (11^{ος} συνδυασμός).
- (E40) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα ζέβρα.)
- (E41) Ελένη: (Τη συνδυάζει με το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνοντας τον 5^ο συνδυασμό.)
- (E42) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι.)
- (E43) Ελένη: (Τη συνδυάζει με το πορτοκαλί καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 4^ο συνδυασμό.)
- (E44) Ε: Έχετε να κάνετε άλλο συνδυασμό ή τελειώσατε;
- (E45) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λαγός.)
- (E46) Ελένη: (Τη συνδυάζει με το ριγέ καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 11^ο συνδυασμό.)
- (E47) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι το πορτοκαλί καπέλο και τη μάσκα λαγός, επαναλαμβάνοντας τον 6^ο συνδυασμό.)
- (E48) (Ο Ευθύμης παίρνει το αγόρι μπροστά του.)
- (E49) Ε: Μπορείς να κάνεις κι άλλον Ευθύμη;
- (E50) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα ζέβρα και το κίτρινο καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 8^ο συνδυασμό.)
- (E51) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λαγός και το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνοντας τον 9^ο συνδυασμό.)
- (E52) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι και το κίτρινο καπέλο) (12^{ος} συνδυασμός).
- (E53) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα ζέβρα και το κίτρινο καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 8^ο συνδυασμό.)

- (E54) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι και το πορτοκαλί καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 4^ο συνδυασμό.)
- (E55) Ελένη: Βάλε αυτό το καπέλο. (Αλλάζει το καπέλο με το κίτρινο καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 12^ο συνδυασμό.)
- (E56) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λαγός.)
- (E57) Ευθύμης: (Τη συνδυάζει με το κίτρινο καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 7^ο συνδυασμό.)
- (E58) (Η Ελένη το αφαιρεί και βάζει το πορτοκαλί καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 6^ο συνδυασμό.)
- (E59) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι το πορτοκαλί καπέλο.)
- (E60) Ευθύμης: (Το συνδυάζει με τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 1^ο συνδυασμό.)
- (E61) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι και το ριγέ καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 10^ο συνδυασμό.)
- (E62) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα ζέβρα.)
- (E63) (Η Ελένη του δίνει το πορτοκαλί καπέλο και αυτός το βάζει στο αγόρι, επαναλαμβάνοντας τον 1^ο συνδυασμό.)
- (E64) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα ζέβρα και το πορτοκαλί καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 1^ο συνδυασμό ξανά.)
- (E65) (Ο Ευθύμης παίρνει το αγόρι μπροστά του.)
- (E66) Ε: Έχετε κι άλλους συνδυασμούς να κάνετε;
- (E67) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι.)
- (E68) Ελένη: Αυτό βάλε. (Τη συνδυάζει με το πορτοκαλί καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 4^ο συνδυασμό.)
- (E69) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι και το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνοντας τον 2^ο συνδυασμό.)
- (E70) Ε: Τελειώσατε ή έχετε κι άλλους;
- (E71) (Ο Ευθύμης παίρνει το αγόρι μπροστά του.)
- (E72) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λαγός.)
- (E73) (Η Ελένη του δίνει το καπέλο με τα αστεράκια κι αυτός το βάζει στο αγόρι, επαναλαμβάνοντας τον 9^ο συνδυασμό.)
- (E74) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι και το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνοντας τον 2^ο συνδυασμό.)

- (E75) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι το ριγέ καπέλο και τη μάσκα λιοντάρι, επαναλαμβάνοντας τον 10^ο συνδυασμό.)
- (E76) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι το ριγέ καπέλο και τη μάσκα λαγός, επαναλαμβάνοντας τον 11^ο συνδυασμό.)
- (E77) (Ο Ευθύμης παίρνει το αγόρι μπροστά του.)
- (E78) Ε: Κι άλλους έχετε;
- (E79) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι και το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνοντας τον 2^ο συνδυασμό.)
- (E80) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λαγός και το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνοντας τον 9^ο συνδυασμό.)
- (E81) (Ο Ευθύμης παίρνει το αγόρι μπροστά του.)
- (E82) Ε: Πιστεύετε ότι βρίσκετε καινούργιους συνδυασμούς τώρα ή ότι κάνετε ξανά τους ίδιους;
- (E83) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα ζέβρα και το κίτρινο καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 8^ο συνδυασμό.)
- (E84) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λαγός και το κίτρινο καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 7^ο συνδυασμό.)
- (E85) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα ζέβρα.)
- (E86) Ελένη: (Τη συνδυάζει με το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνοντας τον 5^ο συνδυασμό.)
- (E87) (Ο Ευθύμης αλλάζει το καπέλο με το ριγέ καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 3^ο συνδυασμό.)
- (E88) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι το ριγέ καπέλο και τη μάσκα ζέβρα, επαναλαμβάνοντας τον 3^ο συνδυασμό ξανά.)
- (E89) Ευθύμης: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα λιοντάρι και το καπέλο με τα αστεράκια, επαναλαμβάνοντας τον 2^ο συνδυασμό.)
- (E90) Ελένη: (Φοράει στο αγόρι τη μάσκα ζέβρα και το κίτρινο καπέλο, επαναλαμβάνοντας τον 8^ο συνδυασμό.)
- (E91) Ε: Σας ευχαριστώ πολύ.

Βιβλιογραφικές αναφορές

- Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In L. I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the international congress of mathematicians* (pp. 907–920). Higher Education Press.
- Ball, D., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In W. Kilpatrick (Ed.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27–44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Barnes, A. (2021). Enjoyment in learning mathematics: Its role as a potential barrier to children's perseverance in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 106(1), 45–63.
- Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 181–199.
- Bosch, M. (2012). Apuntes teóricos sobre el pensamiento matemático y multiplicativo en los primeros niveles [Theoretical notes on mathematical and multiplicative thinking in the first levels]. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(1), 15–37.
- English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational studies in Mathematics*, 22(5), 451–474.
- English, L. D. (1993). Children's strategies for solving two- and three-dimensional combinatorial problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3), 255–273. <https://doi.org/10.2307/749347>
- English, L. D. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 121–141). Springer.
- Falk, R., Yudilevich-Assouline, P., & Elstein, A. (2012). Children's concept of probability as inferred from their binary choices—Revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 81(2), 207–233.
- Fernández Millán, E. (2013). Razonamiento Combinatorio y el currículo español [Combinatorial reasoning and the curriculum in Spain]. In J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea, & P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 539–545). Granada, Spain: Departamento de Matemáticas de la Universidad de Granada.
- Figueiras, L., & Cañadas, M. C. (2010). Reasoning on transition from manipulative strategies to general procedures in solving counting problems. In *Proceedings of the 7th British Congress of Mathematics Education* (Vol. 30, pp. 89–96).
- Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 361–372.
- Guichard, D. (2017). An introduction to combinatorics and graph theory. *Whitman College-Creative Commons*.

- Hanna, G., Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving .In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877–908). Kluwer.
- Höveler, K. (2018). Children’s combinatorial counting strategies and their relationship to conventional mathematical counting principles. In E. W. Hart & J. Sandefur (Eds.), *Teaching and learning discrete mathematics worldwide: Curriculum and research* (pp. 81–92). Springer International Publishing.
- Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 3(1), 111-127.
- Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning*. NCTM.
- Maj-Tatsis, B., & Tatsis, K. (υπό κρίση). Exploring the use of a colouring task to elicit young students’ mathematical reasoning.
- Mata-Pereira, J., & da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students’ mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 169-186.
- Pessoa, C., & Borba, R. (2012). Do young children notice what combinatorial situations require? In T. Y. Tso, *36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 261). PME.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1969). *The Psychology of the Child*. Basic Books.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The Origin of the Idea of Chance in Children*. W.W. Norton & Company.
- Polya, G. (1981). *Mathematical discovery*. Wiley.
- Roa, R., Batanero, C., & Godino, J. (2001). Dificultad de los problemas combinatorios en estu diantes con preparación matemática avanzada [Difficulty of combinatorial problems in students with advanced mathematical preparation]. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 47, 33–47.
- Scweinhar, L. J., & Weikart, D. P. (1986). Early Childhood development programs: a public investment. *Educational Leadership*, 44 (3), 4-12.
- Shin, J., & Steffe, L. (2009). Seventh graders’ use of additive and multiplicative reasoning for enumerative combinatorial problems. In *31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 170–177). Georgia State University.
- Stylanides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289–321.
- Ura, S. K., Stein-Barana, A. C., & Munhoz, D. P. (2011). Fashion, paper dolls and multiplicatives. *Mathematics Teaching*, 221, 32–33.

van Bommel, J., & Palmér, H. (2018). Paper or and digital: A study of combinatorics in preschool class. In E. Norén, H. Palmér, & A. Cooke (Eds.), *Nordic research in mathematics education. papers of NORMA 17 - the eighth Nordic conference on mathematics education Stockholm*, May 30 - 2 June, 2017 (pp. 11–20). Swedish Society for Research in Mathematics Education.

Vygotsky, L. (1934). *Σκέψη και γλώσσα*. Γνώση.

Wallis, W. D., & George, J. C. (2016). *Introduction to combinatorics*. Chapman and hall/crc.

Wathne, U., & Carlsen, M. (2024). Third grade students' multimodal mathematical reasoning when collaboratively solving combinatorial problems in small groups. *Mathematical Thinking and Learning*, 26(3), 258-277.

Wu, H., Saleh, A. R., & Molnár, G. (2022). Inductive and combinatorial reasoning in international educational context: assessment, measurement invariance, and latent mean differences. *Asia Pacific Education Review*, 23(2), 297-310.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 227–236). NCTM.

Yankelewitz, D., Mueller, M., & Maher, C. A. (2010). A task that elicits reasoning: A dual analysis. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(2), 76-85.

Zapata-Cardona, L. (2018). Supporting young children to develop combinatorial reasoning. *Statistics in Early Childhood and Primary Education: Supporting Early Statistical and Probabilistic Thinking*, 257-272.

Τάτσης, Κ. & Κολέζα, Ε. (2005). Η Επίδραση Γλωσσικών και άλλων Κοινωνικών Παραγόντων στη Συγκρότηση από Κοινού Γνώσης κατά τη Συνεργατική Επίλυση Προβλημάτων. Στο Χ. Κυνηγός (Επιμ.), *Πρακτικά 1^{ου} Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών: Η Διδακτική Μαθηματικών ως Πεδίο Έρευνας στην Κοινωνία της Γνώσης* (σσ. 373-382). Αθήνα.

Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά παιδιά μεγάλα μαθηματικά νοήματα: Προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία*. Gutenberg.

Φραντζεσκάκη, Κ., Καφούση, Σ., & Φεσάκης, Γ. (2018). Ανάπτυξη συνδυαστικής σκέψης νηπίων με τη βοήθεια ΤΠΕ: Παραγωγή διατάξεων με επανάληψη. *Ευκλείδης γ'*, 88, 1-30.

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.