



ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΜΑΘΗΣΗΣ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Η Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού και η Εννοιολογική Μετάβαση
στους Ρητούς Αριθμούς στην Άλγεβρα:**

Διερεύνηση της Επίδρασης των Πλαισιοποιημένων Ασκήσεων.

ΑΡΓΥΡΙΟΥ ΜΑΓΔΑΛΗΝΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΤΑΤΣΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

Ιωάννινα, 2025



University Of
Ioannina

**EDUCATIONAL DEPARTMENT OF PRIMARY EDUCATION
POSTGRADUATE PROGRAMME
DIDACTICS AND LEARNING IN NATURAL SCIENCES**

POSTGRADUATE WORK

**The Natural Numbers Bias and the Conceptual Change to Rational
Numbers in Algebra.**

Investigating the effect of contextualized tasks.

ARGYRIOU MAGDALINI

SUPERVISOR: TATSIS KONSTANTINOS

COMMITTEE OF EXAMINERS: Tatsis Konstantinos, Professor

Vamvakoussi Xenia, Professor

Christou Konstantinos, Assistant Professor

Ioannina, 2025

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού και η Εννοιολογική Μετάβαση στους Ρητούς αριθμούς στην Άλγεβρα:

Διερεύνηση της Επίδρασης Πλαισιοποιημένων Ασκήσεων.

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή:

Τάτσης Κωνσταντίνος (Επιβλέπων), Καθηγητής, Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Βαμβακούση Ξανθή, Καθηγήτρια, Π. Τ. Ν. Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Χρήστου Κωνσταντίνος, Επίκουρος Καθηγητής Τ. Ε. Π. Α. Ε. Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου
Θεσσαλονίκης

Ιωάννινα, 2025

*Στους αγαπημένους μου,
Ευγενία, Βασίλη, Δημοσθένη*

Ευχαριστίες

Για την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και επιβλέποντα της μελέτης μου, κ. Τάτση Κωνσταντίνο, για την άψογη συνεργασία, την καθοδήγηση και την πολύτιμη υποστήριξη που μου προσέφερε καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησής της.

Ευχαριστώ θερμά τον Υποδιευθυντή και τον Διευθυντή του ΓΕΛ Ανατολής, κ. Κοσμά Ιωάννη και κ. Σκαργιώτη Γεώργιο, για την πολύτιμη συμβολή και υποστήριξή τους, καθώς και τις μαθήτριες και τους μαθητές της Α' Λυκείου για την πρόθυμη συμμετοχή τους και την παραχώρηση του ερευνητικού δείγματος της μελέτης. Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στη Μαθηματικό κα Κυρίτση Γεωργία και στη διδακτορική φοιτήτρια κα Ντάγκα Ηρώ, για τις σημαντικές συμβουλές τους και τον χρόνο που αφιέρωσαν.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής της μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας, την κα Βαμβακούση Ξανθή, Καθηγήτρια του Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, και τον κ. Χρήστου Κωνσταντίνο, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Επιστημών Προσχολικής Αγωγής και Εκπαίδευσης του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, για τις ουσιαστικές και εποικοδομητικές επισημάνσεις τους.

Τέλος, ευχαριστώ από καρδιάς τις φίλες, τους φίλους και την οικογένειά μου για την ηθική τους υποστήριξη και τη σταθερή τους συμπαράσταση.

Περιεχόμενα

Περίληψη	9
Abstract	10
1. Η Σημασία της Άλγεβρας στη Μαθηματική Εκπαίδευση.....	11
2. Ο Ρόλος των Μεταβλητών στην Άλγεβρα και οι Γνωστικές Προκλήσεις των Μαθητών ...	14
2.1. Τα Γράμματα ως Σύμβολα: Σημασιολογία και Παιδαγωγικές Προκλήσεις	14
2.2. Συνηθισμένες Παρανοήσεις και Πηγές Λαθών	15
2.2.1. Η Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού.....	16
2.2.2. Η Παρανόηση του Φαινομενικού Πρόσημου (PSE)	18
3. Η Εννοιολογική Αλλαγή στα Μαθηματικά.....	23
3.1. Βασικά Χαρακτηριστικά της Εννοιολογικής Αλλαγής	23
4. Ο Ρόλος Των Πλαισιοποιημένων Ασκήσεων	26
5. Σκοπός, Ερωτήματα και Μεθοδολογία της Έρευνας.....	28
5.1. Συμμετέχοντες.....	29
5.2 Ερευνητικό Εργαλείο	29
5.2.1 Ασκήσεις Αναπαραστάσεων, Φαινομενικού Προσήμου-Βαθμολόγηση	32
5.2.2 Ασκήσεις Διάταξης – Βαθμολόγηση	37
5.2.3 Ασκήσεις Διαχείρισης Πράξεων – Βαθμολόγηση	37
6. Στατιστική Ανάλυση – Αποτελέσματα.....	40
6.1 Στατιστική Ανάλυση Απαντήσεων στην Κατηγορία Αναπαραστάσεις- Προσήμου.....	40
6.1.1 Αναπαραστάσεις (Form) - Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού	43
6.1.2 Πρόσημο (Sign) – Παρανόηση Φαινομενικού Προσήμου	44
6.1.3 Συνολική Επίδοση (Grade).....	45
6.2. Στατιστική Ανάλυση Ερωτήσεων Διάταξης	50
7. Συμπεράσματα	66
7.1. Συνοπτικά Αποτελέσματα	66
7.2. Σύνδεση με Προγενέστερες Επιστημονικές Μελέτες	68
7.2. Περιορισμοί της Έρευνας.....	69
7.3. Εφαρμογές των αποτελεσμάτων της έρευνας στη διδασκαλία	70
Βιβλιογραφικές Αναφορές	72
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	77

Ευρετήριο Εικόνων

Εικόνα 1: Βιβλίο Β' Γυμνασίου σελ.14, Ερώτηση Κατανόησης 1	30
Εικόνα 2: Άσκηση Πυκνότητας Ρητών Αριθμών.....	31
Εικόνα 3: Ασκήσεις στις Αναπαραστάσεις και το Πρόσημο.....	32
Εικόνα 4: Ασκήσεις στη Διάταξη.....	37
Εικόνα 5: Ερωτήσεις στην Διαχείριση Πράξεων	38
Εικόνα 6: Ερωτήσεις που εξαιρέθηκαν.....	41
Εικόνα 7: Μη Πλαισιοποιημένες Ερωτήσεις (2α) και $(3/4x+5)$ – Μορφή	43
Εικόνα 8: Πλαισιοποιημένες Ερωτήσεις (2α) και $(5α/6+2,3)$ – Μορφή.....	43
Εικόνα 9: Μη Πλαισιοποιημένες Ερωτήσεις 1(2α) και $3(5α/6+2,3)$ - Πρόσημο.....	44
Εικόνα 10: Πλαισιοποιημένες Ερωτήσεις 4 (2α) και $6 (5α/6+2,3)$ - Πρόσημο	45
Εικόνα 11: Διαγράμματα Διαφοράς Αναδιαμορφωμένων Μ.Ο.....	47
Εικόνα 12: Μη Πλαισιοποιημένες Ερωτήσεις – Συνολική Επίδοση	48
Εικόνα 13: Πλαισιοποιημένες Ερωτήσεις – Συνολική Επίδοση	49
Εικόνα 14: Διαγράμματα Διαφοράς Μ.Ο. Διάταξης	53
Εικόνα 15: Ραβδογράμματα Συχνοτήτων Μέσου Όρου Επίδοσης Ανά κατηγορία Ερωτήσεων	54
Εικόνα 16: Ραβδογράμματα Πλαισιοποιημένων Κλάση Α.....	56
Εικόνα 17: Ραβδογράμματα Πλαισιοποιημένων Κλάση Β.....	56
Εικόνα 18: Ποσοστιαία Ραβδογράμματα Διάταξης (Μ.Ο.) Κλάση Γ.....	57
Εικόνα 19: Διαγράμματα Διαφοράς Μ.Ο. Πλαισιοποιημένων και Μη.....	63
Εικόνα 20: Μ.Ο. Βαθμολογίας Απλών - Εικόνα 21: Μ.Ο. Βαθμολογίας Πλαισιοποιημένων.....	64
Εικόνα 22: Ποσοστά Επιτυχίας Ερώτησης 12 - Εικόνα 23: Ποσοστά Επιτυχίας Ερώτησης 14	64

Ευρετήριο Πινάκων

Πίνακας 1: Λειτουργίες του Αρνητικού Προσήμου.....	22
Πίνακας 2: Βαθμολόγηση Απαντήσεων στη Διαχείριση Πράξεων.....	39
Πίνακας 3: Έγκυρες απαντήσεις κατηγορίας Αναπαραστάσεων-Προσήμου.....	41
Πίνακας 4: Συγκεντρωτικός Πίνακας Συχνοτήτων / Αναπαραστάσεις - Πρόσημο.....	42
Πίνακας 5: Τεστ Ελέγχου Κανονικής Κατανομής.....	46
Πίνακας 6: Πίνακας Συσχετίσεων Συνολικής Επίδοσης	46
Πίνακας 7: Έλεγχος Κανονικότητας Διαφορ.Αναδιαμορφωμένου Μ.Ο.....	47
Πίνακας 8: T-Τεστ Αναδιαμορφωμένου Μ.Ο. Συνολικής Επίδοσης(Grade)	48
Πίνακας 9: Τεστ Κανονικότητας Ερωτήσεων Διάταξης	50
Πίνακας 10: Τεστ Αξιοπιστίας - Διάταξη.....	50
Πίνακας 11: Έλεγχος Αξιοπιστίας Ανά Ερώτηση - Διάταξη.....	50
Πίνακας 12: Έλεγχος Συσχέτισης Ερωτήσεων Διάταξης.....	51
Πίνακας 13: Έλεγχος Κανονικότητας Μ.Ο.- Διάταξη	52
Πίνακας 14: Έλεγχος Συσχετίσεων - Διάταξη	52
Πίνακας 15: Έλεγχος Κανονικότητας Διαφοράς Μ.Ο. Διάταξης.....	53
Πίνακας 16: Δοκιμή Ζευγαρωτών Δειγμάτων / Διάταξη	54
Πίνακας 17: Χι-Τετράγωνο Τεστ στη Διάταξη	55
Πίνακας 18: Συγκεντρωτικός Πίνακας Συχνοτήτων - Διάταξη.....	58
Πίνακας 19: Συγκεντρωτικός Πίνακας Συχνοτήτων - Διαχείριση Πράξεων	58
Πίνακας 20: Τεστ Kolmogorov-Smirnov Ενός Δείγματος – Διαχείριση Πράξεων.....	59
Πίνακας 21: Έλεγχος Αξιοπιστίας- Διαχείριση Πράξεων.....	59
Πίνακας 22: Έλεγχος Αξιοπιστίας Ανά Ερώτηση - Διαχείριση Πράξεων.....	60
Πίνακας 23: Έλεγχος Συσχέτισης - Διαχείριση Πράξεων.....	60
Πίνακας 24: Έλεγχος Κανονικότητας - Διαχείριση Πράξεων.....	61
Πίνακας 25: Έλεγχος Συσχετίσεων - Διαχείριση Πράξεων	62
Πίνακας 26: Έλεγχος Κανονικότητας Διαφοράς Μ.Ο. - Διαχείρισης Πράξεων	62
Πίνακας 27: Έλεγχος Ζευγαρωτών Δειγμάτων - Διαχείρισης Πράξεων.....	63

Περίληψη

Η διδασκαλία της Άλγεβρας στο Γυμνάσιο και το Λύκειο αποτελεί θεμελιώδη άξονα της μαθηματικής εκπαίδευσης, συνεισφέροντας καθοριστικά στην ανάπτυξη αφαιρετικής και αναλυτικής σκέψης. Ωστόσο, η εκμάθησή της συνοδεύεται συχνά από σημαντικές δυσκολίες για τους/τις μαθητές/μαθήτριες. Τα προβλήματα αυτά αποδίδονται κυρίως στην επίμονη επίδραση της «Προκατάληψης του Φυσικού Αριθμού» καθώς και στην «Παρανόηση του Φαινομενικού Προσήμου», που επηρεάζουν τη μετάβαση από την αριθμητική σκέψη στην αλγεβρική. Η παρούσα μελέτη διερευνά τον βαθμό στον οποίο έχει επιτευχθεί η εννοιολογική μετάβαση από την αριθμητική στην Άλγεβρα έως το τέλος του Γυμνασίου. Εστιάζει συγκεκριμένα στην ύπαρξη παρανοήσεων που σχετίζονται με τις Αναπαραστάσεις και τη Διαχείριση ρητών αριθμών, τη Διάταξή τους, καθώς και την Εκτέλεση πράξεων σε βασικές αλγεβρικές παραστάσεις από μαθητές και μαθήτριες Λυκείου. Παράλληλα, εξετάζεται ο ρόλος της χρήσης *πλαισιοποιημένων* (contextualized) *ασκήσεων* στην ανάδειξη ή άμβλυνση των παραπάνω παρανοήσεων. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε μαθητές/τριες της Α΄ Λυκείου μέσω ερωτηματολογίου 14 ερωτήσεων, από τις οποίες επτά ήταν *πλαισιοποιημένες* και επτά *μη πλαισιοποιημένες*. Τα αποτελέσματα της έρευνας καταδεικνύουν ότι οι έννοιες της ακεραιότητας και του Φαινομενικού Προσήμου εξακολουθούν να δημιουργούν σημαντικά εμπόδια στη μαθηματική κατανόηση των μαθητών του Λυκείου. Εντοπίστηκε, επίσης, διαφοροποιημένη επίδραση της πλαισιοποίησης: ενώ σε περιπτώσεις όπως η διάταξη κλασμάτων και οι αναπαραστάσεις ρητών αριθμών η πλαισιοποίηση φάνηκε να διευκολύνει, σε άλλες, όπως η επίλυση προβλημάτων, φαίνεται να λειτουργεί περιοριστικά. Επιπρόσθετα, από τις ερωτήσεις ανοιχτού τύπου αναδείχθηκαν περαιτέρω παρανοήσεις, όπως η σύγχυση μεταξύ αλγεβρικών παραστάσεων και εξισώσεων, η προβληματική διαχείριση αλγεβρικών κλασμάτων και η εσφαλμένη χρήση των πράξεων. Τα προηγούμενα αποτελέσματα φανερώνουν τόσο τη σημασία των φαινομένων που αναλύθηκαν, όσο και την ανάγκη περαιτέρω διερεύνησής τους.

Λέξεις κλειδιά: προκατάληψη του φυσικού αριθμού, παρανόηση του φαινομενικού προσήμου, εννοιολογική μετάβαση, ρητοί αριθμοί, πλαισιοποιημένες ασκήσεις.

Abstract

The teaching of Algebra in Middle and High School is a fundamental pillar of mathematical education, contributing decisively to the development of abstract and analytical thinking. However, its learning is often accompanied by significant difficulties for students. These problems are mainly attributed to the persistent influence of the ‘Natural Number Bias’ and the ‘Phenomenal Sign Effect’, which affect the transition from numerical to algebraic thinking. This study investigates the extent to which the conceptual change from arithmetic to algebra has been achieved by the end of high school. Specifically, it focuses on misconceptions related to the representation and management of rational numbers, their ordering, and the execution of operations in basic algebraic expressions among high school students. At the same time, it examines the role of contextualized tasks in highlighting or mitigating the above misconceptions. The study surveyed 10th grade students with a 14-question questionnaire, seven of which were contextualized and seven of which were not. The results of the study demonstrate that the concepts of integrity and apparent signs continue to pose significant obstacles to high school students' mathematical understanding. A differentiated effect of contextualising was also identified, with contextualising seeming to facilitate learning in cases such as fraction ordering and rational number representations, but appearing to have a limiting effect on others, such as problem solving. Additionally, the open-ended questions revealed other misconceptions, including confusion between algebraic expressions and equations, difficulties with algebraic fractions, and misuse of operations. These results underscore the importance of the analyzed phenomena and the necessity of further investigation.

Keywords: natural number bias, phenomenal sign effect, conceptual change, rational numbers, contextualized tasks.

1. Η Σημασία της Άλγεβρας στη Μαθηματική Εκπαίδευση

Η Άλγεβρα δεν αποτελεί απλώς έναν επιμέρους κλάδο των μαθηματικών, αλλά μια γλώσσα που ενισχύει την αφαιρετική, λογική και αναλυτική ικανότητα. Αποτελεί βασικό εργαλείο στις επιστήμες, την τεχνολογία και την οικονομία, ενώ συνδέεται άρρηκτα με ζητήματα κοινωνικής δικαιοσύνης, όπως η ισότητα στην εκπαίδευση και η πρόσβαση σε επαγγελματικές ευκαιρίες. Η κατανόησή της είναι ζωτικής σημασίας τόσο για την ακαδημαϊκή επιτυχία, όσο και για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων σε πολλούς τομείς της ζωής.

Δεν είναι λοιπόν τυχαία η σταδιακή εισαγωγή των αλγεβρικών εννοιών ήδη από την προσχολική ηλικία, καθώς συμβάλλει ουσιαστικά στην καλλιέργεια δεξιοτήτων που είναι κρίσιμες για την κατανόηση πιο σύνθετων μαθηματικών εννοιών σε επόμενα στάδια. Στο NCTM τονίζεται ότι οι εκπαιδευτικοί των μικρών παιδιών θα πρέπει να θεωρούν την Άλγεβρα ως «ένα βασικό στοιχείο του προγράμματος σπουδών ήδη από την προσχολική ηλικία» (NCTM, 2000, σ. 37). Είναι εξαιρετικά σημαντικό να τεθούν τα θεμέλια της Άλγεβρας στα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης προκειμένου τα παιδιά να είναι σε θέση να κατανοήσουν πλήρως την εξέλιξη της Άλγεβρας στα μετέπειτα σχολικά έτη (NCTM, 2000). Παρέχοντας συγκεκριμένες εμπειρίες στα πρώτα χρόνια, μπορούμε να θέσουμε τις βάσεις που είναι απαραίτητες για την κατανόηση αφηρημένων μορφών της Άλγεβρας στα επόμενα στάδια της εκπαίδευσης (Lee et al., 2016). Στη συνέχεια, η συστηματική ενσωμάτωση της Άλγεβρας στο αναλυτικό πρόγραμμα από το Δημοτικό έως το Γυμνάσιο συμβάλλει καθοριστικά στη βαθμιαία οικοδόμηση σταθερών εννοιολογικών θεμελίων. Παράλληλα, ενισχύει την ικανότητα των μαθητών να γενικεύουν μαθηματικές έννοιες και να επιλύουν προβλήματα με μεγαλύτερη ευχέρεια (Blanton et al., 2015). Αντίστοιχη προσέγγιση ακολουθείται και στο ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, όπου η Άλγεβρα εντάσσεται συστηματικά από το Δημοτικό έως το Λύκειο, με στόχο την ανάπτυξη της αφαιρετικής και λογικής σκέψης των μαθητών. Η διδακτέα ύλη περιλαμβάνει την εισαγωγή σε βασικές αλγεβρικές έννοιες και συμβολισμούς ήδη από τα πρώτα σχολικά χρόνια, ενώ σταδιακά επεκτείνεται σε πιο σύνθετα θέματα, όπως οι εξισώσεις, οι ανισώσεις και οι συναρτήσεις (ΙΕΠ, 2023).

Η αλγεβρική σκέψη περιλαμβάνει διαδικασίες όπως η αναγνώριση προτύπων, η γενίκευση σχέσεων και η χρήση συμβολικών αναπαραστάσεων - στοιχεία που είναι θεμελιώδη για την

αφαιρετική συλλογιστική και την επίλυση προβλημάτων. Η ανάπτυξη των δεξιοτήτων αυτών, μέσω της διαρκούς ενασχόλησης με την Άλγεβρα, αποτελεί καθοριστικό παράγοντα για την επιτυχία στην τριτοβάθμια εκπαίδευση και την επαγγελματική ανέλιξη, λειτουργώντας ως βασική «πύλη» για τα μαθηματικά του λυκείου και τις επιστημονικές σπουδές γενικότερα (Carragher et al., 2006).

Είναι λοιπόν κρίσιμο οι μαθητές να έρχονται σε επαφή με αλγεβρικές έννοιες από νωρίς, ώστε να διευκολύνεται η μετάβαση σε πιο σύνθετες μαθηματικές έννοιες και να ενισχύεται η ικανότητα ανάλυσης και λογικού συλλογισμού (Barlund, 2023). Η ουσιαστική κατανόηση της Άλγεβρας προϋποθέτει σαφή γνώση των πραγματικών αριθμών και του ρόλου της μεταβλητής, κάτι που επιτυγχάνεται μέσα από στοχευμένες εννοιολογικές παρεμβάσεις κατά τη διάρκεια των σχολικών ετών, ιδιαίτερα στο Γυμνάσιο (Kieran, 2004).

Παρά τη σημασία της, η Άλγεβρα αποτελεί πηγή δυσκολιών για πολλούς μαθητές, λόγω λανθασμένων νοητικών μοντέλων, παρανοήσεων στις έννοιες και σφαλμάτων στις πράξεις. Αυτά τα εμπόδια μπορούν να περιορίσουν σημαντικά την περαιτέρω μαθηματική τους πορεία. Η αντιμετώπισή τους απαιτεί από τους εκπαιδευτικούς βαθιά κατανόηση των αλγεβρικών εννοιών, καθώς και γνώση κατάλληλων παιδαγωγικών στρατηγικών, προκειμένου να υποστηρίξουν αποτελεσματικά τη μάθηση (Booth et al., 2014). Η έγκαιρη εισαγωγή της αλγεβρικής σκέψης μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες και εργασίες μπορεί να ενισχύσει τη μαθηματική κατανόηση και να προλάβει την εμφάνιση μαθησιακών παρανοήσεων. Για τον σκοπό αυτό, είναι αναγκαία η εφαρμογή παιδαγωγικών πρακτικών που προάγουν την εννοιολογική κατανόηση (Blanton et al., 2015). Η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων - όπως λεκτικές περιγραφές, αριθμητικές εκφράσεις, διαγράμματα και φυσικά αντικείμενα - επιτρέπει στους μαθητές να προσεγγίσουν μια μαθηματική έννοια από διαφορετικές οπτικές, διευκολύνοντας τη μετάβαση από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο. Η ποικιλία αυτή ενισχύει τη σύνδεση μεταξύ εννοιών και προάγει την ευελιξία στη μαθηματική σκέψη (Carragher et al., 2006).

Εξίσου σημαντική είναι η ενίσχυση του διαλόγου και των μαθηματικών συζητήσεων στην τάξη. Η ενθάρρυνση των μαθητών να εξηγούν τη σκέψη τους, να διατυπώνουν ερωτήματα και να ερμηνεύουν τις απόψεις των συμμαθητών τους συμβάλλει ουσιαστικά στη διαμόρφωση μιας βαθύτερης μαθηματικής κατανόησης και στην αποκάλυψη πιθανών παρανοήσεων (Booth et al., 2014).

Σε αυτό το διδακτικό πλαίσιο, οι *πλαισιοποιημένες ασκήσεις*, δηλαδή μαθηματικά προβλήματα ενταγμένα σε αυθεντικά ή φανταστικά πλαίσια οικεία στα παιδιά, ενισχύουν την κινητοποίηση, την κατανόηση και τη μεταφορά της γνώσης. Μέσω αυτών, οι μαθητές μπορούν να συνδέσουν αλγεβρικές έννοιες - όπως οι μεταβλητές, οι σχέσεις και οι γενικεύσεις - με καταστάσεις της καθημερινής ζωής, αποκτώντας έτσι μια περισσότερο λειτουργική και ουσιαστική κατανόηση των μαθηματικών (Leinonen et al., 2021). Οι *πλαισιοποιημένες δραστηριότητες* προάγουν επίσης την ανάπτυξη δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων και υποστηρίζουν την κατανόηση του «γιατί» και όχι μόνο του «πώς» στα μαθηματικά. Αυτό ενδυναμώνει την αίσθηση του σκοπού και της αξίας της μάθησης, στόχος ιδιαίτερα κρίσιμος για μικρούς μαθητές που αναζητούν νόημα στα όσα μαθαίνουν (Leinonen et al., 2021).

Η πρόωπη και συστηματική διδασκαλία της Άλγεβρας είναι καθοριστική για την καλλιέργεια αφαιρετικής και λογικής σκέψης. Στο πλαίσιο αυτό, ιδιαίτερη βαρύτητα αποκτά η ερμηνεία και η χρήση των μεταβλητών, που αποτελούν θεμελιώδες στοιχείο της αλγεβρικής κατανόησης. Παρά την πρόοδο στον σχεδιασμό του αναλυτικού προγράμματος και τις παιδαγωγικές παρεμβάσεις, οι μεταβλητές εξακολουθούν να δυσκολεύουν σημαντικό αριθμό μαθητών. Αυτές οι δυσκολίες συνδέονται, συχνά, με τη μετάβαση από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη και με εδραιωμένες, αλλά εσφαλμένες, νοητικές αναπαραστάσεις.

2. Ο Ρόλος των Μεταβλητών στην Άλγεβρα και οι Γνωστικές Προκλήσεις των Μαθητών

Η Άλγεβρα αποτελεί μια γλώσσα μαθηματικής σκέψης, και τα σύμβολά της λειτουργούν ως μέσα ακριβούς και συνοπτικής επικοινωνίας (Rubenstein, & Thompson, 2020). Η ανάπτυξη αλγεβρικής σκέψης συνεπάγεται την καλλιέργεια αφαιρετικής και αναλυτικής ικανότητας, επιτρέποντας στους μαθητές να διαχειρίζονται αφηρημένες έννοιες πέρα από συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές.

Η χρήση γραμμάτων ως συμβόλων στην Άλγεβρα διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στην αναπαράσταση μεταβλητών, άγνωστων ποσοτήτων και γενικευμένων αριθμών - στοιχείων θεμελιώδους σημασίας για την έκφραση μαθηματικών σχέσεων και την επίλυση προβλημάτων. Ωστόσο, οι μαθητές αντιμετωπίζουν συχνά σοβαρές δυσκολίες στην κατανόηση και ορθή ερμηνεία αυτών των συμβόλων, γεγονός που οδηγεί σε πλήθος παρανοήσεων. Οι παρανοήσεις αυτές απορρέουν συχνά από προϋπάρχουσες εμπειρίες των μαθητών στην αριθμητική, διαισθητικές αλλά εσφαλμένες νοητικές αναπαραστάσεις, καθώς και από τη φύση της ίδιας της διδακτικής προσέγγισης. Η μετάβαση από την αριθμητική σκέψη στην αλγεβρική απαιτεί σημαντική γνωστική αναδόμηση, καθιστώντας την κατανόηση των συμβόλων κρίσιμη για την επιτυχή μαθηματική πορεία των μαθητών (Christou & Vosniadou 2005· Maracchia, 2013).

2.1. Τα Γράμματα ως Σύμβολα: Σημασιολογία και Παιδαγωγικές Προκλήσεις

Στο αλγεβρικό σύστημα, τα γράμματα χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν ποικίλες μαθηματικές οντότητες - μεταβλητές, άγνωστες ποσότητες, συναρτήσεις, ακόμη και πίνακες. Η κύρια λειτουργία τους, ωστόσο, είναι η έκφραση της έννοιας της μεταβλητής: μιας μαθηματικής οντότητας που μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή εντός ή εκτός καθορισμένου πεδίου.

Παρά τη χρησιμότητα και τη δύναμη της αλγεβρικής γλώσσας, πολλοί μαθητές αναφέρουν ότι η εισαγωγή των γραμμάτων αποτελεί σημείο καμπής στη μαθηματική τους εμπειρία. Τα

σύμβολα προκαλούν συχνά σύγχυση και γνωστικά προβλήματα, λειτουργώντας περισσότερο ως εμπόδια παρά ως εργαλεία σκέψης. Σύμφωνα με τους Bosch, Gutierrez και Llinares (2024), η εξοικείωση της χρήσης των γραμμάτων για την αναπαράσταση μεταβλητών, αγνώστων και πολυπλοκότερων αλγεβρικών εκφράσεων αποτελεί σταθερή πηγή δυσκολίας στην εκπαιδευτική διαδικασία. Οι μαθητές τείνουν να αντιμετωπίζουν τα γράμματα ως συγκεκριμένους αριθμούς που απλώς «κρύβονται», παραβλέποντας τη δυναμική φύση των μεταβλητών. Έτσι, δυσκολεύονται όχι μόνο στον χειρισμό εξισώσεων, αλλά και στην κατανόηση βασικών ιδιοτήτων, όπως ότι μια μεταβλητή μπορεί να εκφράζει σύνολα πιθανών τιμών, ή ότι η μεταβολή μίας ποσότητας μπορεί να επηρεάζει μία άλλη (Lucariello et al., 2014· Stacey & MacGregor, 1997). Έτσι λοιπόν, η συμβολική γλώσσα της Άλγεβρας αν και παρέχει έναν συνοπτικό και τυποποιημένο τρόπο επικοινωνίας σύνθετων μαθηματικών εννοιών, διευκολύνοντας το χειρισμό και την επίλυση αλγεβρικών εκφράσεων (Rubenstein & Thompson, 2020), καθιστά την επίλυση προβλημάτων ιδιαίτερα απαιτητική για πολλούς μαθητές (Meyer, 2013).

2.2. Συνηθισμένες Παρανοήσεις και Πηγές Λαθών

Πολλές από τις παρανοήσεις που καταγράφονται στη βιβλιογραφία σχετίζονται με την κυριολεκτική ερμηνεία των γραμμάτων. Ορισμένοι μαθητές θεωρούν ότι τα γράμματα αναπαριστούν πάντα έναν συγκεκριμένο αριθμό και ότι διαφορετικά γράμματα αντιστοιχούν υποχρεωτικά σε διαφορετικούς αριθμούς (Collis, 1975· Booth, 1984· Knuth et al., 2005· Kuchemann, 1978, όπως αναφέρεται στο Christou, Vosniadou & Vamvakousi, 2007). Άλλοι μαθητές αποδίδουν στα γράμματα αλφαβητική ή συντακτική αξία, ταυτίζοντάς τα με αντικείμενα ή λέξεις (π.χ. h για ύψος, N για Νίκος, γ για γιαούρτι ή γόμα), αποτυγχάνοντας να αντιληφθούν τη συμβολική και αφηρημένη φύση των μεταβλητών (MacGregor & Stacey, 1997· Christou & Vosniadou, 2005· Khalid, Yakop & Ibrahim, 2020). Επιπλέον, παρατηρούνται σφάλματα, όπως η αυθαίρετη ανάθεση τιμών στις μεταβλητές ή ο συνδυασμός ανόμοιων όρων (π.χ. $2x + 3y = 5xy$), καθώς και η παρερμηνεία του συμβόλου ισότητας ως σύμβολο αριθμητικού αποτελέσματος και όχι ως δήλωση ισοδυναμίας (Khalid, Yakop & Ibrahim, 2020).

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι ορισμένες από αυτές τις παρανοήσεις είναι εξαιρετικά ανθεκτικές. Η Booth (1982, 1984), για παράδειγμα, παρά τις στοχευμένες διδακτικές

παρεμβάσεις, διαπίστωσε ότι οι μαθητές εξακολουθούσαν να αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση του γραμματικού συμβόλου ως γενικευμένου αριθμού. Τέτοιου είδους παρανοήσεις είναι και αυτές που μελετούμε στην παρούσα έρευνα και αφορούν την Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού αλλά και την Παρανόηση του Φαινομενικού Προσήμου.

2.2.1. Η Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού

Ένα από τα πλέον τεκμηριωμένα εμπόδια που αντιμετωπίζουν συστηματικά οι μαθητές κατά τη μετάβασή τους από την αριθμητική στην άλγεβρα είναι αυτό που περιγράφεται ως «**Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού**» (*Natural Number Bias, NNB*). Ο όρος αυτός αναφέρεται στην τάση των μαθητών να εφαρμόζουν αυθαίρετα και εσφαλμένα ιδιότητες των φυσικών αριθμών σε περιπτώσεις όπου αυτές δεν ισχύουν, ιδιαίτερα στο πλαίσιο της αλγεβρικής σκέψης. Η τάση αυτή, να προσδίδεται στις πράξεις και στα σύμβολα η λογική των φυσικών αριθμών, μπορεί να οδηγήσει σε παρανοήσεις και σφάλματα, ειδικά όταν πρόκειται για ρητούς αριθμούς, όπως κλάσματα, δεκαδικούς, ρίζες, περιοδικούς δεκαδικούς κ.α., μέσα σε αλγεβρικές παραστάσεις (Christou et al., 2022).

Ερμηνεία και Αιτιολόγηση της Προκατάληψης

Η Προκατάληψη υπέρ του Φυσικού Αριθμού προκύπτει ως συνέπεια της μακρόχρονης και σχεδόν αποκλειστικής ενασχόλησης των μαθητών με αυτούς, ήδη από τα πρώτα μαθησιακά ερεθίσματα της προσχολικής ηλικίας και καθ' όλη τη διάρκεια του δημοτικού σχολείου. Οι φυσικοί αριθμοί (1, 2, 3, ...) διδάσκονται ως απόλυτες, θετικές και συγκεκριμένες ποσότητες, με σταθερές και «αυτονόητες» ιδιότητες - όπως ότι «το άθροισμα δύο αριθμών είναι πάντα μεγαλύτερο από κάθε έναν ξεχωριστά», ή ότι «δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε μεγαλύτερο αριθμό από μικρότερο». Αυτό διαμορφώνει ισχυρές νοητικές αναπαραστάσεις, που όμως δεν μεταφέρονται εύκολα σε πιο αφηρημένα ή γενικευμένα μαθηματικά πλαίσια, όπως η Άλγεβρα. Για παράδειγμα, όταν οι μαθητές συναντούν την έκφραση $x + \frac{3}{2} = 5$, δεν κατανοούν το γράμμα x ως μια άγνωστη μεταβλητή που μπορεί να πάρει διάφορες τιμές, αλλά συχνά προσπαθούν να το αντικαταστήσουν άμεσα με έναν φυσικό αριθμό, οδηγούμενοι από την εμπειρία τους σε απλές αριθμητικές εξισώσεις. Το γεγονός αυτό αντικατοπτρίζει την αδυναμία τους στην κατανόηση των ρητών αριθμών, καθώς και των αναπαραστάσεών τους (Bosch et al., 2024). Ένα άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η άρνηση ή η αδυναμία

αποδοχής αρνητικών αριθμών ως αποδεκτών λύσεων σε προβλήματα, διότι αυτοί συγκρούονται με την εμπειρική τους αντίληψη για τους αριθμούς, ως «ποσότητες» πραγμάτων στον πραγματικό κόσμο (π.χ. δεν μπορείς να έχεις -3 μήλα). Επιπλέον, η προσκόλληση στις αριθμητικές πράξεις με φυσικούς αριθμούς λειτουργεί ανασταλτικά στη μετάβαση προς τη χρήση και κατανόηση των ρητών αριθμών.

Διάταξη

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η τάση των μαθητών να εφαρμόζουν τους κανόνες των φυσικών αριθμών κατά την ενασχόλησή τους με κλάσματα - όπως όταν θεωρούν ότι το $\frac{1}{4}$ είναι μεγαλύτερο από το $\frac{1}{3}$, επειδή το 4 είναι μεγαλύτερο από το 3. Η αδυναμία εξήγησης αυτών των λανθασμένων συλλογισμών υποδηλώνει τη βαθιά ριζωμένη και αυτονόητη φύση της σκέψης που βασίζεται σε διακριτούς, μικρούς (1 έως 5), φυσικούς αριθμούς (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Επιπλέον, η Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού διαμορφώνει τις προσδοκίες των μαθητών ως προς τα αποτελέσματα αριθμητικών πράξεων, οδηγώντας τους στο να θεωρούν ότι ο πολλαπλασιασμός οδηγεί πάντα σε μεγαλύτερους αριθμούς και η διαίρεση σε μικρότερους - μια αντίληψη που δεν ισχύει σε περιβάλλοντα με ρητούς αριθμούς (Christou, 2015· Christou et al., 2020· Hoof et al., 2015).

Πυκνότητα

Ένα ακόμα χαρακτηριστικό παράδειγμα της επίδρασης της προκατάληψης αυτής είναι η δυσκολία κατανόησης της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Πολλοί μαθητές δεν αντιλαμβάνονται ότι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε ρητών αριθμών παρεμβάλλονται άπειροι άλλοι, καθώς επιχειρούν να εφαρμόσουν ιδιότητες των φυσικών αριθμών, όπου δεν υπάρχει τέτοια πυκνότητα. Όπως σημειώνουν οι Merenluoto και Lehtinen (2004), μια από τις πρώτες ουσιαστικές επεκτάσεις της έννοιας του αριθμού στα τυπικά μαθηματικά είναι η μετάβαση από αριθμητικές πράξεις μεταξύ φυσικών αριθμών σε πράξεις με ρητούς αριθμούς. Οι φυσικοί αριθμοί είναι διακριτοί: για κάθε αριθμό υπάρχει ένας και μόνος επόμενος. Αντίθετα, το πλήθος των ρητών είναι πυκνό και άπειρο μιας και ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχει πάντα ένας τρίτος. Αυτή η μετάβαση από διακριτό σε συνεχές (πυκνό) σύνολο αριθμών απαιτεί όχι μόνο την εκμάθηση νέων κανόνων πράξεων, αλλά και την εγκατάλειψη της λογικής των «απλών αριθμητικών κανόνων» των φυσικών (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

Διαχείριση Πράξεων

Αν και οι σύνθετες ιδιότητες των ρητών αριθμών δεν διδάσκονται ρητά στις πρώτες βαθμίδες της εκπαίδευσης, είναι ενσωματωμένες στους κανόνες πράξεων και στη μαθηματική λογική που διέπει την Άλγεβρα. Η ασυμβατότητα αυτών των ιδιοτήτων με εκείνες των φυσικών αριθμών συχνά οδηγεί σε σταθερά επαναλαμβανόμενα λάθη και παρανοήσεις προκαλώντας έντονη δυσκολία στην επιλογή των κατάλληλων πράξεων, η οποία διογκώνεται κατά την αντιμετώπιση δραστηριοτήτων ή προβλημάτων που περιλαμβάνουν κλάσματα (Bosch, et al., 2024).

Πέρα, όμως, από τις συγκεκριμένες δυσκολίες που απορρέουν από τις ιδιότητες των ρητών αριθμών και τη σύγκρουσή τους με τη γνώση των φυσικών, εξίσου σημαντικός είναι ο ρόλος της βαθιάς αριθμητικής προκατάληψης που διαμορφώνεται ήδη από τα πρώτα μαθησιακά στάδια. Ειδικότερα, οι φυσικοί αριθμοί, ως οι πρώτοι αριθμοί που διδάσκονται και χρησιμοποιούνται από όλους μας, διαμορφώνουν έναν διαισθητικό τρόπο σκέψης όπου οι αριθμοί νοούνται θετικοί και μετρήσιμοι.

2.2.2. Η Παρανόηση του Φαινομενικού Πρόσημου (PSE)

Σύμφωνα με τους Christou et al., (2022) η **Παρανόηση του Φαινομενικού Προσήμου** (Phenomenal Sign Effect, PSE) είναι μια εκδήλωση παρανόησης, όπου οι μαθητές υποθέτουν ότι οι αριθμητικές τιμές των αλγεβρικών παραστάσεων έχουν πρόσημο που ταυτίζεται με το εμφανές πρόσημο των παραστάσεων αυτών. Αυτή η βαθιά ριζωμένη μαθηματική διαίσθηση συχνά δυσκολεύει την αποδοχή και κατανόηση πιο αφηρημένων εννοιών, όπως οι αρνητικοί αριθμοί ή το πρόσημο στην Άλγεβρα και επηρεάζει την ικανότητά τους να αξιολογούν σωστά τις αλγεβρικές εκφράσεις. Σύμφωνα με αυτή την διαίσθηση, για τους μαθητές το θετικό θεωρείται «φυσιολογικό», ενώ το αρνητικό αποτελεί «εξάιρεση» ή «αφύσικη» περίπτωση. Έτσι, η παρανόηση του φαινομενικού προσήμου αποτελεί εν μέρει φυσική απόρροια της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, αφού το πρόσημο, σε μια μαθηματική έκφραση, εκλαμβάνεται ως ένδειξη αριθμητικής πράξης ή μεταβολής και όχι ως αναπόσπαστο μέρος του αριθμού. Συνεπώς, η έμφαση στους φυσικούς αριθμούς κατά την αρχική μαθησιακή πορεία δημιουργεί ένα νοητικό πλαίσιο που δυσκολεύει τους μαθητές να κατανοήσουν αφηρημένες μαθηματικές έννοιες, όπως οι αρνητικοί αριθμοί και τα πρόσημά τους.

Στην περίπτωση των αρνητικών αριθμών, η σχετική βιβλιογραφία καταγράφει ενδείξεις μαθητικών λαθών που απορρέουν από την προσπάθεια αφομοίωσης των νέων αυτών εννοιών

μέσω των γνώσεων που έχουν ήδη αποκτηθεί για τους φυσικούς αριθμούς (Gallardo, 2002· Gallardo & Rojano, 1994· Gallardo & Romero, 1999· Glaeser, 1981· Peled, Mukhopadhyay, & Resnick, 1989· Thompson & Dreyfus, 1988· Vergnaud, 1989, όπως αναφέρεται στην Vlassis, 2004). Κατά την εξέταση της μετάβασης από τους φυσικούς στους αρνητικούς αριθμούς, είναι σημαντικό να αναγνωρίσουμε ότι οι αρνητικοί αριθμοί δεν αποτελούν από μόνοι τους την πηγή δυσκολίας, καθώς αποτελούν «πλασματικές» οντότητες (Glaeser, 1981 όπως αναφέρεται στην Vlassis, 2004). Ωστόσο, όταν ενσωματώνονται σε αλγεβρικές πράξεις, όπως στην περίπτωση των πολυωνύμων, μεταβάλλουν το ρόλο του αρνητικού προσήμου, το οποίο παύει να είναι απλώς ένα «λειτουργικό» σύμβολο και αποκτά και «προγνωστικό» χαρακτήρα (Glaeser, 1981 όπως αναφέρεται στην Vlassis, 2004). Βάσει των μαθησιακών δυσκολιών που αναδεικνύονται στη σχετική βιβλιογραφία, υποστηρίζεται ότι το σύμβολο του μείον διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης και της αποτελεσματικής χρήσης των αρνητικών αριθμών.

Σύμφωνα με την Vlassis (2004), για να κατανοήσουμε σε βάθος τα ζητήματα που σχετίζονται με το σύμβολο του μείον, είναι σημαντικό να προσεγγίσουμε το θέμα μέσα από κοινωνικοπολιτισμικές προσεγγίσεις, όπως αυτή του Vygotsky (1997). Τέτοιες προσεγγίσεις θεωρούν τη γλώσσα, τους αλγεβρικούς συμβολισμούς, τα γραφήματα και τις γεωμετρικές αναπαραστάσεις ως ψυχολογικά εργαλεία, τα οποία μεσολαβούν σε κάθε μορφή σκέψης και επικοινωνίας. Μέσω των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων, οι ανθρώπινες νοητικές λειτουργίες διαμορφώνονται, καθώς οι διαπροσωπικές διαδικασίες εσωτερικεύονται και μετατρέπονται σε ενδοπροσωπικές. Από αυτή την οπτική, η χρήση των αρνητικών αριθμών δεν περιλαμβάνει, απλώς, την κατανόηση ενός μαθηματικού συμβόλου, αλλά μια βαθύτερη μεταβολή στον τρόπο χρήσης των προσήμων, με στόχο την πιο αποτελεσματική επικοινωνία και την οικοδόμηση της γνώσης.

Στην Άλγεβρα, αυτή η διαδικασία αποκτά ιδιαίτερη σημασία, δεδομένου ότι το αντικείμενο μελέτης αφορά αφηρημένες έννοιες (Saenz-Ludlow, 2001, όπως αναφέρεται στην Vlassis, 2004), οι οποίες δεν γίνονται άμεσα αντιληπτές μέσω των αισθήσεων (Sfard, 2000, όπως αναφέρεται στην Vlassis, 2004). Σε αυτό το πλαίσιο, τα πρόσημα λειτουργούν ως βασικά μέσα για την αναπαράσταση και κατανόηση αυτών των αφηρημένων οντοτήτων. Γι' αυτό, πολλοί ερευνητές, όπως οι Gravemeijer et al. (2000, σ. 232), υποστηρίζουν ότι «ο συμβολισμός αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της δημιουργίας νέων μαθηματικών οντοτήτων και, κατά συνέπεια, της διαδικασίας οικοδόμησης της γνώσης».

Με βάση την κατηγοριοποίηση των Gallardo και Rojano (1994), όπως αναφέρει η Vlassis (2004), η αρνητικότητα περιλαμβάνει τρεις κύριες λειτουργίες του προσήμου μείον «-»: Την μονομερή, την διττή και την συμμετρική (Πίνακας 1).

Μονομερής Λειτουργία

Στη συγκεκριμένη λειτουργία, το σύμβολο του μείον χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει την αρνητική τιμή ενός αριθμού, δηλαδή μετατρέπει έναν φυσικό αριθμό σε αρνητικό. Αυτή η χρήση του μείον αναφέρεται ως κατηγορικό πρόσημο (Glaeser, 1981). Σε αυτό το πλαίσιο, το μείον θεωρείται δομικό σύμβολο, δηλαδή ένα σύμβολο που εκφράζει μια μαθηματική ιδιότητα ή το χαρακτηριστικό ενός αντικειμένου (Sfard, 2000, σ. 49). Η εν λόγω λειτουργία αναλύεται περαιτέρω από τον Gallardo (2002, σ. 179), ο οποίος διακρίνει τέσσερα επίπεδα ερμηνείας:

- **Υποδιαστολή:** Η ερμηνεία του αριθμού εξαρτάται από το μέγεθός του. Για παράδειγμα, στην έκφραση $\alpha - \beta$, ο αριθμός α θεωρείται μεγαλύτερος του β , όταν πρόκειται για φυσικούς αριθμούς.
- **Σχετικός ή κατευθυνόμενος αριθμός:** Ο αρνητικός αριθμός νοείται ως αντίθετη ποσότητα, ανάλογα με το πλαίσιο αναφοράς. Τέτοιες περιπτώσεις παρατηρούνται κατά την περιγραφή θερμοκρασιών ή κινήσεων προς τα πίσω.
- **Απομονωμένος αριθμός:** Το σύμβολο του μείον υποδηλώνει το αποτέλεσμα κάποιας αριθμητικής πράξης ή τη λύση μιας εξίσωσης, όπως για παράδειγμα το $x = -3$.
- **Τυπικός αρνητικός αριθμός:** Η έννοια της αρνητικότητας εντάσσεται στο ευρύτερο μαθηματικό σύνολο των ακέραιων αριθμών, το οποίο περιλαμβάνει τόσο θετικούς όσο και αρνητικούς αριθμούς.

Διττή Λειτουργία

Στην διττή λειτουργία, το σύμβολο μείον «-» λειτουργεί ως πράξη, δηλαδή ως «λειτουργικό» σύμβολο (Glaeser, 1981). Η Sfard (2000, σ. 49) το χαρακτηρίζει ως «λειτουργικό πρόσημο», καθώς χρησιμοποιείται σε προτάσεις που αποτυπώνουν μαθηματικές πράξεις. Οι Gallardo και Rojano (1994) προσδιόρισαν τρεις βασικές μορφές της διττής λειτουργίας του μείον, οι οποίες αντανakλούν την πολυδιάστατη φύση της έννοιας της αφαίρεσης:

- **Αφαίρεση:** «Αφαιρούμε 6 μπάλες από 12».
- **Συμπλήρωση:** «Ποιος αριθμός πρέπει να προστεθεί στο 24 ώστε να προκύψει το 38;».

- **Διαφορά:** «Ποια είναι η διαφορά μεταξύ 16 και 22;».

Σε αυτό το πλαίσιο, προστίθεται και μία τέταρτη λειτουργική χρήση του μείον, η οποία συνδέεται με την έννοια της **κίνησης** στην αριθμογραμμή, όπως περιγράφεται από τους Thompson και Dreyfus (1988).

Συμμετρική Λειτουργία

Στην περίπτωση της συμμετρικής λειτουργίας, το αρνητικό σύμβολο χρησιμοποιείται για να δηλώσει την αντίθετη τιμή ενός αριθμού ή μιας μαθηματικής έκφρασης, δηλαδή την έννοια του «λαμβάνω το αντίθετο» ή «αντιστρέφω το πρόσημο» (Nunes, 1993). Συγκεκριμένα, στον τύπο $2\alpha - (4\alpha - 5\beta + 2\gamma)$, το πρώτο μείον υποδεικνύει την αντιστροφή των προσήμων της έκφρασης που περιέχεται εντός της παρένθεσης. Εν προκειμένω, το μείον λειτουργεί ως λειτουργικό πρόσημο, το οποίο ωστόσο πρέπει να διακριθεί από τη χρήση του σε σχετικούς αριθμούς, όπου το μείον αποτελεί δομικό πρόσημο. Για παράδειγμα, στην ισότητα $-x + x = 0$, το σύμβολο του μείον δηλώνει τον συμμετρικό αριθμό είτε του $+x$ είτε του $-x$ και όχι κάποια αριθμητική πράξη.

Ανακεφαλαιώνοντας, λοιπόν, η εισαγωγή των μεταβλητών στην Άλγεβρα αποτελεί για τους μαθητές μια κρίσιμη τομή, καθώς τους ζητείται να κινηθούν πέρα από τον συγκεκριμένο αριθμητικό υπολογισμό και να λειτουργήσουν σε ένα επίπεδο γενικευμένης και αφηρημένης σκέψης. Ωστόσο, η βαθιά ριζωμένη προκατάληψη υπέρ των φυσικού αριθμού, καθώς και η σύγχυση που προκαλεί το φαινομενικό πρόσημο, συνιστούν σημαντικά εμπόδια στην αλγεβρική κατανόηση. Τα εμπόδια αυτά δεν είναι απλώς γνώσεις που «λείπουν», αλλά ενδείξεις βαθύτερων εννοιολογικών τρόπων σκέψης - όπως η Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού - που έρχονται σε σύγκρουση με τις νέες μαθηματικές έννοιες. Για να προχωρήσουν οι μαθητές σε μια ουσιαστική κατανόηση του αλγεβρικού συμβολισμού και της γενίκευσης, απαιτείται μια Εννοιολογική Αλλαγή: μια μετατόπιση, δηλαδή, από το αριθμοκεντρικό, εμπειρικό μοντέλο σκέψης σε ένα πιο αφηρημένο, δομημένο και συμβολικό πλαίσιο. Στην επόμενη ενότητα, θα διερευνήσουμε ακριβώς αυτή τη διαδικασία της εννοιολογικής αλλαγής.

Πίνακας 1: Λειτουργίες του Αρνητικού Προσήμου

Λειτουργία	Χαρακτηριστικά	Τύπος συμβόλου	Παραδείγματα / Σχόλια
1. Μονομερής	Δηλώνει την αρνητικότητα ενός αριθμού	Δομικό	$-3, -x$: Το μείον "χαρακτηρίζει" τον αριθμό ως αρνητικό.
<i>Επίπεδα ερμηνείας Gallardo (2002)</i>			
	- Υποδιαστολή		Στο $\alpha-\beta$, το α θεωρείται μεγαλύτερο από το β (με α, β φυσικούς αριθμούς).
	- Σχετικός / κατευθυνόμενος αριθμός		Π.χ. αρνητική θερμοκρασία, χρέος.
	- Απομονωμένος αριθμός		Π.χ. αποτέλεσμα πράξης: $x = -5$.
	- Τυπικός αρνητικός αριθμός		Η έννοια του αρνητικού ως μέρος των ακεραίων.
2. Διττή	Δηλώνει την αφαίρεση (-) ως μαθηματική πράξη	Λειτουργικό	Π.χ. $12 - 6 = 6$
<i>Τύποι αφαιρέσεων Gallardo & Rojano, (1994)</i>			
	- Αφαίρεση		“Αφαιρώ 6 από 12”.
	- Συμπλήρωση		“Πόσο λείπει από το 24 για να φτάσω το 38;”
	- Διαφορά		“Ποια είναι η διαφορά μεταξύ 16 και 22;”
	- Κίνηση στην αριθμογραμμή		Π.χ. μετακινούμαι 5 μονάδες αριστερά από το 0.
<i>Thompson & Dreyfus (1988)</i>			
3. Συμμετρική	Δηλώνει την αντίθετη τιμή (αντιστροφή)	Λειτουργικό	Π.χ. $-(4\alpha-5\beta+2\gamma)$ σημαίνει αντιστροφή όλης της έκφρασης.
	Διαφορά από σχετικούς αριθμούς		Αν και χρησιμοποιείται με παρόμοιο τρόπο, στους σχετικούς αριθμούς το μείον είναι δομικό (π.χ. $-x + x = 0$).

3. Η Εννοιολογική Αλλαγή στα Μαθηματικά

Η Εννοιολογική Αλλαγή στα μαθηματικά περιλαμβάνει τον μετασχηματισμό της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών, απαιτώντας συχνά μια στροφή από την διαισθητική ή την προηγούμενη γνώση σε μια πιο τυπική, επιστημονικά ακριβέστερη και αφηρημένη συλλογιστική. Αυτή η διαδικασία χαρακτηρίζεται από την *συνεχή ανάπτυξη και την ασυνεχή αλλαγή* (Schnotz et al., 1999· Vosniadou, 1994), καθώς νέες μαθηματικές έννοιες μπορούν να έρχονται σε αντίθεση με προηγούμενες πεποιθήσεις. Οι θεωρίες της εννοιολογικής αλλαγής τονίζουν το ρόλο της προηγούμενης γνώσης, η οποία μπορεί να διευκολύνει αλλά και να εμποδίσει τη μάθηση, ιδιαίτερα όταν οι μαθητές συναντούν έννοιες που απαιτούν μια ριζική επανεξέταση της υπάρχουσας βάσης γνώσεων τους. Αυτό είναι εμφανές στη μετάβαση από τους φυσικούς στους ρητούς αριθμούς, όπου οι μαθητές συχνά δυσκολεύονται να αναδιαμορφώσουν την υπάρχουσα κατανόησή τους ώστε να ενσωματώσουν τα νέα, πιο σύνθετα λογικά πλαίσια (Merenluoto, 2004· Merenluoto & Lehtinen, 2002).

3.1. Βασικά Χαρακτηριστικά της Εννοιολογικής Αλλαγής

Η μετάβαση αυτή, όπως ήδη αναλύσαμε, εμποδίζεται από την Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού και την Παρανόηση του Φαινομενικού Προσήμου, όπου οι μαθητές εφαρμόζουν λανθασμένα ιδιότητες φυσικών αριθμών σε ρητούς αριθμούς και παρουσιάζει σε γενικές γραμμές τα ακόλουθα χαρακτηριστικά.

Αντίσταση στη γνώση

Σύμφωνα με τους Merenluoto και Lehtinen (2004), πολυάριθμες εμπειρικές μελέτες έχουν καταδείξει ότι οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών συχνά αντιστέκονται στις διδακτικές παρεμβάσεις. Ένα εξίσου σοβαρό ζήτημα είναι ότι οι μαθητές, συνήθως, δεν έχουν επίγνωση ούτε της ποιότητας των γνώσεων που έχουν ήδη αποκτήσει ούτε των αντιφάσεων τους με τις επιστημονικά τεκμηριωμένες αντιλήψεις. Αν και οι γνώσεις αυτές ενδέχεται να μην ευθυγραμμίζονται με την επιστημονική σκέψη, παρουσιάζουν εσωτερική συνοχή και βασίζονται σε προσωπικές εμπειρίες, γεγονός που τις καθιστά ιδιαίτερα ανθεκτικές στην αλλαγή. Ως αποτέλεσμα, οι μαθητές, αδυνατώντας να αντιληφθούν ή να κατανοήσουν την ανάγκη για αναθεώρηση, τείνουν να διατηρούν ή να εμπλουτίζουν τις ήδη υπάρχουσες αναπαραστάσεις τους, αντί να τις τροποποιούν (Duit et al., 2001· Guzzetti et al., 1993·

Vosniadou, 1999, όπως αναφέρεται στο Merenluoto & Lehtinen, 2004). Εμπειρικές έρευνες έχουν δείξει ότι η Εννοιολογική Αλλαγή είναι μια πολυδιάστατη και σύνθετη διαδικασία, η οποία πραγματοποιείται σταδιακά, μέσα από την αντικατάσταση προηγούμενων πεποιθήσεων και παραδοχών (π.χ. Vosniadou, 2003· Vosniadou et al., 2001, όπως αναφέρεται από τους Merenluoto & Lehtinen, 2004).

Γνωστική Σύγκρουση

Η γνωστική σύγκρουση, ως ένα ακόμη χαρακτηριστικό της Εννοιολογικής Αλλαγής, αποτελεί έναν βασικό και καλά μελετημένο μηχανισμό που βοηθά στην αλλαγή των ιδεών των μαθητών, ιδιαίτερα στη Φυσική και τα Μαθηματικά. Συμβαίνει όταν ο μαθητής ή η μαθήτρια συναντά μια αντίφαση ανάμεσα σε αυτό που ήδη πιστεύει και σε μια νέα πληροφορία ή παρατήρηση που δεν ταιριάζει με τις προσδοκίες του. Αυτή η σύγκρουση μπορεί να τον/την κάνει να αμφισβητήσει τις υπάρχουσες αντιλήψεις του και να αρχίσει να σκέφτεται διαφορετικά, αναζητώντας νέες, πιο σωστές και χρήσιμες εξηγήσεις (Strike & Posner, 1992). Η έρευνα έχει δείξει ότι όταν οι μαθητές ασχολούνται με εργασίες που έχουν σχεδιαστεί ειδικά για να αμφισβητήσουν την Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού - όπως αυτές που αφορούν συγκρίσεις πυκνότητας ή μεγέθους - μπορούν να ενισχύσουν σημαντικά στην ικανότητά τους να συλλογίζονται αποτελεσματικά για τους ρητούς αριθμούς (Alibali & Sidney, 2015· Hoof et al., 2015).

Για να μπορέσουν οι μαθητές να ξεπεράσουν τις προϋπάρχουσες προκαταλήψεις τους, οι Kuhn (1970) και Posner et al. (1982) υποστήριζαν ότι θα πρέπει: (α) να αντιληφθούν ότι το εννοιολογικό τους σχήμα είναι ανεπαρκές ή προβληματικό, (β) οι νέες έννοιες να παρουσιάζονται με τρόπο κατανοητό, (γ) να φαίνονται αληθοφανείς και λειτουργικά αποτελεσματικές, και (δ) να επιλύουν προβλήματα καλύτερα από τις προηγούμενες. Αν κάποιο από τα παραπάνω δεν ικανοποιείται, η σύγκρουση είτε παρακάμπτεται είτε οδηγεί σε συνύπαρξη εννοιών, όπου παλαιές και νέες γνώσεις υφίστανται χωρίς ενοποίηση.

Αναδόμηση Εννοιών

Η Εννοιολογική Αλλαγή στη μαθηματική μάθηση δεν αποτελεί μια απλή διαδικασία ενσωμάτωσης νέων πληροφοριών στις ήδη υπάρχουσες γνωστικές δομές του μαθητή. Αντιθέτως, προϋποθέτει μια βαθιά αναδιοργάνωση του τρόπου με τον οποίο ο μαθητής αντιλαμβάνεται, κατανοεί και ερμηνεύει μια έννοια. Η νέα γνώση δεν προστίθεται απλώς στην παλαιά ως συμπλήρωμα, αλλά απαιτεί την υπέρβαση και, πολλές φορές, την αποδόμηση των προηγούμενων τρόπων σκέψης και ερμηνείας.

Σύμφωνα με την Carey (1985), η ουσιαστική Εννοιολογική Αλλαγή περιλαμβάνει την μετακίνηση του μαθητή από έναν τρόπο σκέψης σε έναν εντελώς διαφορετικό, όπου ισχύουν διαφορετικές υποθέσεις, ορισμοί και ερμηνευτικά εργαλεία. Για παράδειγμα, η μετάβαση από τη «ρεαλιστική» σύλληψη του αριθμού (ως πλήθος συγκεκριμένων αντικειμένων) στην αλγεβρική προσέγγιση, όπου οι αριθμοί συνιστούν αφηρημένα αντικείμενα με ιδιότητες, αποτελεί ένα τέτοιο παράδειγμα αναδόμησης.

Αυτή η μετακίνηση δεν είναι εύκολη, καθώς οι μαθητές τείνουν να προβάλλουν τις παλαιές τους ερμηνείες πάνω στις νέες έννοιες, με αποτέλεσμα την εμφάνιση γνωστικών συγκρούσεων, παρανοήσεων ή υβριδικών μορφών σκέψης (Vosniadou, 1994). Η αναδόμηση απαιτεί την αποσαφήνιση και αμφισβήτηση των εννοιολογικών θεμελίων της παλαιάς γνώσης με σκοπό να καταλήξει στον επαναπροσδιορισμό των μαθηματικών εννοιών, όπου ο μαθητής αρχίζει να βλέπει την ίδια έννοια μέσα από μια νέα, πιο ορθή επιστημονικά οπτική. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της έννοιας της μεταβλητής, οι μαθητές συχνά ξεκινούν αποδίδοντάς της έναν στατικό ρόλο («το x είναι ένας άγνωστος αριθμός»). Με τη σωστή καθοδήγηση, μπορούν σταδιακά να επαναπροσεγγίσουν αυτή την έννοια και να την δουν ως μια γενικευμένη αναπαράσταση σχέσεων, όπως στην έκφραση « $y = 2x + 1$ », όπου το x και το y συνιστούν μεταβλητές σε ένα δυναμικό συσχετισμό.

Για να υποστηριχθεί αποτελεσματικά αυτή η Εννοιολογική Αλλαγή, είναι απαραίτητο το διδακτικό περιβάλλον να προσφέρει κατάλληλα μέσα που ενθαρρύνουν την αμφισβήτηση των αρχικών νοητικών μοντέλων των μαθητών.

4. Ο Ρόλος Των Πλαισιοποιημένων Ασκήσεων

Ένα τέτοιο μέσο είναι οι *πλαισιοποιημένες ασκήσεις*, οι οποίες λειτουργούν ως εκπαιδευτικά εργαλεία σχεδιασμένα να διευκολύνουν την Εννοιολογική Αλλαγή στην Άλγεβρα. Πρόκειται για προβλήματα ενταγμένα σε συγκεκριμένο, συχνά ρεαλιστικό πλαίσιο ή σενάριο, τα οποία συμβάλλουν στη μετάβαση των μαθητών από τη χρήση εννοιών που βασίζονται στους φυσικούς αριθμούς προς την κατανόηση πιο αφηρημένων μαθηματικών ιδεών, όπως οι μεταβλητές και οι αρνητικοί αριθμοί.

Οι ασκήσεις αυτές διαδραματίζουν καίριο ρόλο, καθώς βοηθούν στην άρση προκαταλήψεων που ενδέχεται να οδηγήσουν σε λανθασμένες στρατηγικές επίλυσης εξισώσεων και ανισοτήτων. Επιπλέον, ενισχύουν την ικανότητα των μαθητών να αντιλαμβάνονται τις μεταβλητές ως εκφραστές ενός ευρύτερου φάσματος αριθμών, όπως οι ρητοί, και να προσεγγίζουν τις ιδιότητες των αλγεβρικών εκφράσεων με μεγαλύτερη ευελιξία.

Έρευνες δείχνουν ότι, σε αντίθεση με τους μαθητές, οι ειδικοί στα μαθηματικά δεν εμφανίζουν τις ίδιες προκαταλήψεις, γεγονός που υποδηλώνει ότι η εμπειρία και η έκθεση σε ποικίλα μαθησιακά περιβάλλοντα μπορούν να συμβάλουν στον μετριασμό τους (Obersteiner et al., 2016). Οι *πλαισιοποιημένες ασκήσεις* μπορούν, επίσης, να βοηθήσουν στην αποσαφήνιση τέτοιων παρανοήσεων μέσω οπτικών και πρακτικών παραδειγμάτων, τα οποία ενισχύουν την ορθή ερμηνεία των προσήμων στις αλγεβρικές εκφράσεις (Vlassis, 2004). Η ενασχόληση με προβλήματα ενταγμένα σε ποικίλα πλαίσια ενισχύει την ικανότητα των μαθητών να αναπτύσσουν μια πιο εκλεπτυσμένη κατανόηση των αλγεβρικών συμβάσεων και των συνεπειών τους (Kieran, 1992). Έτσι, οι *πλαισιοποιημένες ασκήσεις* λειτουργούν ως γέφυρα ανάμεσα στις αφηρημένες αλγεβρικές έννοιες και τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις των μαθητών, διευκολύνοντας την ομαλή μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα (MacGregor & Stacey, 1997).

Για όλους τους παραπάνω λόγους, στο ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, οι *πλαισιοποιημένες ασκήσεις* αναγνωρίζονται ως βασικό εργαλείο για τη σύνδεση της θεωρίας με την πράξη και την ανάπτυξη κριτικής σκέψης σε όλα τα εκπαιδευτικά επίπεδα. Από το Δημοτικό έως το Λύκειο, το πρόγραμμα ενθαρρύνει τη χρήση ασκήσεων ενταγμένων σε συγκεκριμένα πλαίσια, ώστε οι μαθητές να κατανοούν βαθύτερα τις μαθηματικές έννοιες μέσα από ρεαλιστικά και πολυδιάστατα προβλήματα.

Η προσέγγιση αυτή στοχεύει στην ενίσχυση της ικανότητας των μαθητών να εφαρμόζουν τα μαθηματικά σε ποικίλες καταστάσεις, να αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων και να συνδέουν τις γνώσεις τους με την καθημερινή ζωή και άλλους επιστημονικούς κλάδους. (ΙΕΠ, 2023).

5. Σκοπός, Ερωτήματα και Μεθοδολογία της Έρευνας

Στην παρούσα έρευνα επιχειρήσαμε, αρχικά, να διερευνήσουμε εάν οι μαθητές και οι μαθήτριες της Α΄ Λυκείου εξακολουθούν να αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη διαχείριση των μεταβλητών. Η μελέτη επικεντρώθηκε, ειδικότερα, στην ανίχνευση της Προκατάληψης του Φυσικού Αριθμού και της Παρανόησης του Φαινομενικού Προσήμου. Παράλληλα, εξετάστηκε κατά πόσο οι *πλαισιοποιημένες* ασκήσεις μπορούν να λειτουργήσουν υποστηρικτικά ή να αποτελέσουν εμπόδιο σε βασικές μαθηματικές διαδικασίες όπως η Διάταξη αριθμών ή η Διαχείριση Πράξεων σε ρητές αλγεβρικές παραστάσεις. Πιο συγκεκριμένα, τα ερευνητικά μας ερωτήματα ήταν:

- Σε ποιο βαθμό έχουν υπερβεί οι μαθητές της Α΄ Λυκείου την Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού και την Παρανόηση του Φαινομενικού Προσήμου κατά την επίλυση ασκήσεων που αφορούν τις Αναπαραστάσεις και το Πρόσημο απλών αλγεβρικών εκφράσεων; Επηρεάζεται η απόδοσή τους από την πολυπλοκότητα των παραστάσεων και την εκφώνηση των *πλαισιοποιημένων* ασκήσεων;
- Πώς επηρεάζει η χρήση *πλαισιοποιημένων ασκήσεων* την συνολική επίδοση των μαθητών σε ερωτήσεις που αφορούν τις Αναπαραστάσεις και τη Διάταξη ρητών αριθμών και πώς διαφοροποιείται η επίδοσή τους σε αυτές, ανάλογα με το γνωστικό τους επίπεδο;
- Πώς ανταποκρίνονται οι μαθητές της Α΄ Λυκείου σε διαδικασίες Διαχείρισης Πράξεων απλών αλγεβρικών παραστάσεων σε *απλές* αλλά και *πλαισιοποιημένες* ασκήσεις; Σε ποιο βαθμό έχουν κατακτήσει την ικανότητα μετατροπής λεκτικών προβλημάτων σε αλγεβρικές εκφράσεις και πώς, η εξοικείωση με το πλαίσιο του προβλήματος, επηρεάζει την ικανότητα αυτή;

Η διατύπωση των ερευνητικών ερωτημάτων υπαγόρευσε και τον σχεδιασμό της παρούσας μελέτης, η οποία στόχευσε στη συστηματική διερεύνηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές της Α΄ Λυκείου σε βασικές αλγεβρικές έννοιες, όπως οι Αναπαραστάσεις και η κατανόηση του Προσήμου, η Διάταξη ρητών αριθμών και η Διαχείριση Πράξεων σε αλγεβρικές παραστάσεις. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στη διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο επηρεάζει η χρήση *πλαισιοποιημένων ασκήσεων* τις επιδόσεις των μαθητών στις παραπάνω κατηγορίες ασκήσεων, καθώς και στον βαθμό κατά τον οποίο παράγοντες όπως η

πολυπλοκότητα των παραστάσεων ή το επίπεδο εξοικείωσης με τα λεκτικά προβλήματα επηρεάζουν τη μαθησιακή διαδικασία. Για να απαντηθούν με σαφήνεια τα παραπάνω ερωτήματα, θεωρούμε απαραίτητο να προσδιορίσουμε τα βασικά χαρακτηριστικά των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα, καθώς και τις συνθήκες διεξαγωγής της έρευνας, οι οποίες παρουσιάζονται αναλυτικά στη συνέχεια.

5.1. Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 103 μαθητές και μαθήτριες της Α΄ τάξης του Γενικού Λυκείου Ανατολής Ιωαννίνων, εκ των οποίων 58 κορίτσια και 45 αγόρια. Το σχολείο βρίσκεται εντός του αστικού ιστού της πόλης των Ιωαννίνων, χωρίς ωστόσο να χαρακτηρίζεται ως σχολείο του κέντρου. Η ενασχόληση των μαθητών με τα ερωτηματολόγια διήρκεσε μία διδακτική ώρα και πραγματοποιήθηκε υπό την επίβλεψη της ερευνήτριας, καθώς και του αρμόδιου εκπαιδευτικού που είχε την ευθύνη της τάξης, κατά την συγκεκριμένη διδακτική ώρα.

Στους μαθητές και τις μαθήτριες ανακοινώθηκε ότι ζητούμε τη συμβολή τους στην προσπάθειά μας να διερευνήσουμε τις πτυχές της Άλγεβρας που τους δυσκολεύουν, με απώτερο στόχο τη βελτίωση της διδακτικής διαδικασίας. Τονίστηκε πως δεν υπάρχει πρόθεση άσκησης κριτικής και ότι το ερωτηματολόγιο δεν έχει χαρακτήρα αξιολόγησης, καθώς οι απαντήσεις δεν επηρεάζουν σε καμία περίπτωση τη σχολική βαθμολογία. Τέλος, εξηγήθηκε ο τρόπος συμπλήρωσης των ερωτήσεων – παρά τις ήδη υπάρχουσες οδηγίες που περιλαμβάνονται στο ερωτηματολόγιο – ζητώντας από τους μαθητές και τις μαθήτριες, στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, να επιλέξουν μία ή περισσότερες απαντήσεις, ανάλογα με το τι εκείνοι και εκείνες θεωρούσαν σωστό. Επιπλέον, για τις ερωτήσεις ανοιχτού τύπου διευκρινίστηκε ότι ακόμη και σε περιπτώσεις αδυναμίας απάντησης, θα μας ενδιέφερε η σύντομη καταγραφή του σκεπτικού τους. Με αυτόν τον τρόπο, επιδιώξαμε να συλλέξουμε περισσότερα στοιχεία σχετικά με τον τρόπο σκέψης τους και τη στάση τους απέναντι στην Άλγεβρα.

5.2 Ερευνητικό Εργαλείο

Στους μαθητές και τις μαθήτριες διανεμήθηκε ερωτηματολόγιο το οποίο περιλάμβανε συνολικά 14 ερωτήσεις/ασκήσεις, διαφόρων μορφών, όπως ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, κλειστού και ανοιχτού τύπου (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ). Από αυτές, επτά αφορούσαν *μη πλαισιοποιημένες* αλγεβρικές ασκήσεις (Μ.Π.), ενώ οι υπόλοιπες επτά αποτελούσαν

πλαισιοποιημένες ασκήσεις (Π.Α.), σχεδιασμένες με τέτοιο τρόπο ώστε να αντιστοιχούν πλήρως στις αντίστοιχες μη πλαισιοποιημένες. Η κατασκευή των ερωτήσεων στόχευε στην κάλυψη τριών βασικών κατηγοριών αλγεβρικών ασκήσεων: (α) ασκήσεις σχετικές με τις Αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών και το Φαινομενικό Πρόσημο, (β) ασκήσεις Διάταξης και (γ) ασκήσεις Διαχείρισης Πράξεων σε αλγεβρικές παραστάσεις.

Η τελική διαμόρφωση του ερωτηματολογίου πραγματοποιήθηκε μέσα από μια σειρά παρεμβάσεων και αποφάσεων. Ενδεικτικά παραθέτουμε ορισμένες από τις πιο χαρακτηριστικές ενέργειες που ακολουθήθηκαν κατά τη διαδικασία αυτή. Αρχικά, θεωρήσαμε απαραίτητο να δημιουργήσουμε ερωτήσεις που να καλύπτουν τέσσερις βασικές κατηγορίες αλγεβρικών ασκήσεων, με σκοπό να διερευνήσουμε όχι μόνο τις Αναπαραστάσεις, την Διάταξη και την Διαχείριση Πράξεων, αλλά και την έννοια της Πυκνότητας στους ρητούς αριθμούς. Για την άντληση ιδεών σχετικά με τη διαμόρφωση απλών και πλαισιοποιημένων ασκήσεων, μελετήσαμε διεξοδικά τα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και της Α' Λυκείου. Στόχος μας ήταν οι ασκήσεις να καλύψουν ένα ευρύτερο φάσμα πιθανών παρανοήσεων που πηγάζουν από την Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού και τη λανθασμένη ερμηνεία του Φαινομενικού Προσήμου.

Ενδεικτικά, στην κατηγορία «Αναπαραστάσεις-Πρόσημο», είχαμε αρχικά συμπεριλάβει δραστηριότητα διαγνωστικού χαρακτήρα (Εικόνα 1) που παρείχε τη δυνατότητα άμεσης αποτύπωσης της ικανότητας των μαθητών να αναγνωρίζουν σε ποιο αριθμητικό σύνολο - φυσικών, ακεραίων ή ρητών - ανήκει κάθε δοσμένος αριθμός.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα σημειώνοντας «x» στην κατάλληλη θέση.

	-3	$\frac{1}{2}$	6	$0,\bar{3}$	-0,8	$\sqrt{3}$	$\sqrt{16}$	3,14	π	$\frac{22}{7}$
Φυσικός										
Ακέραιος										
Ρητός										
Άρρητος										

Εικόνα 1:Βιβλίο Β' Γυμνασίου σελ.14, Ερώτηση Κατανόησης Ι

Στην **Διάταξη**, επιδιώξαμε να εντάξουμε δραστηριότητες σύγκρισης και ταξινόμησης ρητών παραστάσεων όπως οι $\frac{\kappa}{\lambda}$, $\frac{\kappa}{\lambda+1}$, $\frac{2\kappa}{\lambda}$, όπου κ και λ είναι φυσικοί αριθμοί, ενώ στην ενότητα της **Διαχείριση Πράξεων**, είχαμε ενσωματώσει πιο σύνθετες αλγεβρικές παραστάσεις της μορφής $\frac{4x-8y}{-6x+12y}$, ώστε να ανταποκρίνονται στο επίπεδο μαθηματικής ωριμότητας που

αντιστοιχεί στην ηλικία των 15-16 ετών. Τέλος, για την **Πυκνότητα**, είχαμε διαμορφώσει ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής μέσω των οποίων οι μαθητές/τριες καλούνταν να εντοπίσουν αριθμούς που παρεμβάλλονται μεταξύ δύο ακεραίων, δύο δεκαδικών ή δύο κλασματικών αριθμών (Maris & Christou, 2019, Εικόνα 2).

Αν ο αριθμός μ βρίσκεται μεταξύ των τιμών $\frac{3}{5}$ και $\frac{4}{5}$ θα μπορούσε να είναι:						
☐ $\frac{7}{10}$	☐ $\frac{2}{5}$	☐ 0,723	☐ 1	☐ 0,67	☐ 1,23	☐ $\frac{21}{25}$

Εικόνα 2: Άσκηση Πυκνότητας Πρώτων Αριθμών

Ωστόσο, αρκετές από τις αρχικές ιδέες εγκαταλείφθηκαν, καθώς διαπιστώθηκε ότι η δημιουργία *πλαισιοποιημένων* ασκήσεων, απολύτως αντίστοιχων με τις *μη πλαισιοποιημένες*, παρουσίαζε σημαντικές δυσκολίες. Ο απαιτούμενος όγκος ασκήσεων και υπολογιστικών πράξεων θα επιβάρυνε υπερβολικά τους μαθητές, καθιστώντας την εφαρμογή μη ρεαλιστική εντός του περιορισμένου χρόνου μιας διδακτικής ώρας. Στόχος μας παρέμενε η συλλογή όσο το δυνατόν περισσότερων αξιόπιστων δεδομένων με περιορισμένο αριθμό ασκήσεων, ώστε να ενισχυθεί η ουσιαστική εμπλοκή των μαθητών, χωρίς να προκαλείται κόπωση ή δυσαρέσκεια - παράγοντες που θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε τυχαίες ή μη αντιπροσωπευτικές απαντήσεις.

Για τους λόγους αυτούς, καταλήξαμε σε Αναπαραστάσεις όσο το δυνατόν απλούστερες και οικείες, αντίστοιχες με εκείνες που έχουν ήδη διδαχθεί στο Γυμνάσιο, αποφεύγοντας τη χρήση τετραγωνικών ριζών, περιοδικών δεκαδικών ή δυνάμεων. Με τον τρόπο αυτό, επιδιώξαμε να διασφαλίσουμε σαφέστερη αξιολόγηση και την σύγκριση των αποτελεσμάτων με ερευνητικές εργασίες που λειτούργησαν καθοδηγητικά (Christou & Vosniadou, 2005· Christou, Vosniadou, & Vamvakoussi, 2007· van Dooren et al., 2010· Christou et al., 2022), ως προς τον βαθμό επίτευξης της εννοιολογικής μετάβασης από το Γυμνάσιο στην Α' Λυκείου.

Πιλοτική χρήση πρώτου ερωτηματολογίου

Οι εν λόγω επιλογές τεκμηριώθηκαν περαιτέρω μέσω της εφαρμογής πιλοτικού ερωτηματολογίου αποτελούμενου από 24 ερωτήσεις. Το ερωτηματολόγιο δόθηκε σε τέσσερις μαθήτριες: τρεις με υψηλή επίδοση στα μαθηματικά του Α' τετραμήνου (βαθμός >17) και μία με μέτρια επίδοση (14<βαθμός<17). Έπειτα από ανάλυση των απαντήσεων, αξιολόγηση του

βαθμού δυσκολίας μέσω σύντομων ατομικών συνεντεύξεων, καθώς και χρονομέτρηση της διάρκειας συμπλήρωσής του, διαμορφώθηκε η τελική του μορφή. Το τελικό ερωτηματολόγιο περιλάμβανε 14 ερωτήσεις, με μειωμένες επιλογές στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Στη συνέχεια, το υλικό διανεμήθηκε στους μαθητές και τις μαθήτριες της Α΄ Λυκείου του ΓΕΛ Ανατολής Ιωαννίνων, έχοντας δημιουργήσει δύο ομάδες θεμάτων με ανακατανομή των ίδιων ερωτήσεων, στοχεύοντας στον περιορισμό των περιπτώσεων αντιγραφής.

5.2.1 Ασκήσεις Αναπαραστάσεων, Φαινομενικού Προσήμου-Βαθμολόγηση

Πιο αναλυτικά, στην κατηγορία «Αναπαραστάσεις & Πρόσημο» συμπεριλάβαμε έξι ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής (Εικόνα 3), εκ των οποίων οι τρεις ήταν απλές και οι άλλες τρεις *πλαισιοποιημένες*, με συγκεκριμένη μορφή αλγεβρικών παραστάσεων (Christou & Vosniadou, 2005· Christou et al., 2006· van Dooren et al., 2010· Christou et al., 2022).

1. Το 2α μπορεί να είναι:	☐ 8	☐ -4	☐ $\frac{1}{3}$	☐ -3,8	☐ 2,5	☐ $-\frac{2}{3}$	☐ όλες οι επιλογές
2. Από μία υπαίθρια δεξαμενή χάθηκαν από διαρροή, β λίτρα (lt) νερού και επισπύσαν 5 από εξάτμιση. Η ποσότητα νερού -β-5 που χάθηκε, ΔΕΝ μπορεί να είναι:	☐ 750 lt	☐ $\frac{1977}{3}$	☐ -1530 lt	☐ 251,6 lt	☐ $-\frac{917}{5}$ lt	☐ -343,7 lt	☐ μπορεί να είναι όλες οι επιλογές
3. Το $\frac{3}{4}x + 5$ μπορεί να είναι:	☐ 8	☐ -11,8	☐ $-\frac{7}{8}$	☐ 12,5	☐ -11	☐ $\frac{3}{4}$	☐ όλες οι επιλογές
4. Για την παρασκευή 6 κρεπών απαιτούνται α γραμμάρια (gr) ζάχαρης, ενώ αν φτιάξουμε διπλή δόση θα χρειαστούν 2α γραμμάρια (gr) ζάχαρης. Το 2α μπορεί να είναι:	☐ 80 gr	☐ -88,3 gr	☐ $-\frac{2}{3}$ Kg	☐ 153,6 gr	☐ -120 gr	☐ $\frac{3}{4}$ Kgr	☐ όλες οι επιλογές
5. Το -γ-8 ΔΕΝ μπορεί να είναι:	☐ 9	☐ -11,8	☐ $-\frac{7}{8}$	☐ 12,5	☐ -5	☐ $\frac{10}{9}$	☐ μπορεί να είναι όλες οι επιλογές
6. Οι ερευνητές ενός μετεωρολογικού σταθμού στην Φινλανδία μελέτησαν τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο Ελσίνκι (α) και στο Ροβανιέμι (β) της Φινλανδίας κατά την διάρκεια του χειμώνα, και διαμόρφωσαν τη σχέση $\beta = \frac{5\alpha}{6} + 2,3$. Το β μπορεί να είναι:	☐ -6 °C	☐ $\frac{102}{9}$ °C	☐ -2,8 °C	☐ 25 °C	☐ $-\frac{91}{18}$ °C	☐ 14,5 °C	☐ όλες οι επιλογές

Εικόνα 3: Ασκήσεις στις Αναπαραστάσεις και το Πρόσημο

Οι *μη πλαισιοποιημένες* ασκήσεις περιλάμβαναν τις παραστάσεις: 2α , $-y-8$, και $\frac{3}{4}x+5$. Οι μαθητές/τριες καλούνταν να επιλέξουν ποια αριθμητική τιμή θα μπορούσε να αντιστοιχεί σε κάθε παράσταση, χωρίς να δίνονται περιορισμοί. Οι διαθέσιμες επιλογές περιλάμβαναν θετικούς και αρνητικούς ακέραιους, δεκαδικούς ή κλασματικούς αριθμούς, ενώ υπήρχε ρητά και η δυνατότητα επιλογής της απάντησης «όλες οι επιλογές».

Αντίστοιχα, οι *πλαισιοποιημένες* ασκήσεις περιλάμβαναν τις παραστάσεις: 2α , $-\beta-5$ και $\frac{5\alpha}{6}+2,3$. Οι ασκήσεις αυτές σχεδιάστηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε η σωστή ερμηνεία του πλαισίου να μπορεί να οδηγήσει στην ορθή λύση, καθώς σε κάθε περίπτωση η σωστή επιλογή - η οποία επισημαίνεται ανά ερώτηση στην Εικόνα 1 - περιοριζόταν είτε σε θετικές είτε σε αρνητικές τιμές. Επιπλέον, δινόταν και εδώ η δυνατότητα επιλογής της απάντησης «μπορεί να είναι όλες οι επιλογές».

Για τη βαθμολόγηση των παραπάνω ερωτήσεων χρησιμοποιήσαμε τρεις κατηγορίες αξιολόγησης. Η πρώτη εστίαζε στη διάγνωση της Προκατάληψης του Φυσικού Αριθμού. Όταν οι απαντήσεις των μαθητών/τριών ήταν επηρεασμένες από τη μορφή της αλγεβρικής παράστασης (Form), καταγράφονταν με την ένδειξη +F. Αντίθετα, όταν η μορφή δεν φαινόταν να αποτελεί παράγοντα σύγχυσης, καταγράφονταν με την ένδειξη -F.

Στη συνέχεια, για τον έλεγχο ύπαρξης της Παρανόησης του Φαινομενικού Προσήμου, η καταγραφή ακολουθούσε την ίδια λογική. Ειδικότερα, οι απαντήσεις που πρόδιδαν την επίδραση του Φαινομενικού Προσήμου (Sign) επισημαίνονταν με την ένδειξη +S, ενώ σε περιπτώσεις όπου δεν παρατηρήθηκε κάτι τέτοιο καταγραφόταν η ένδειξη -S.

Τέλος, με στόχο τη διαμόρφωση μιας αντικειμενικής και συνολικής εικόνας του ποσοστού ορθών απαντήσεων των μαθητών/τριών, ορίσαμε σαφείς κλίμακες βαθμολόγησης. Συγκεκριμένα, για τις *μη πλαισιοποιημένες* (Μ.Π) ασκήσεις εφαρμόσαμε κλίμακα από το μηδέν (0) έως το έξι (6), αποδίδοντας μία μονάδα (1) για κάθε ορθή επιλογή, εξασφαλίζοντας έτσι ίση βαρύτητα σε όλες τις σωστές απαντήσεις. Αντίστοιχα, στις *πλαισιοποιημένες* (Π.Α.) ασκήσεις χρησιμοποιήσαμε διπολική κλίμακα, με τιμές από -3 έως 3, προσθέτοντας μία μονάδα για κάθε σωστή απάντηση και αφαιρώντας μία για κάθε λανθασμένη. Η επιλογή αυτής της μεθόδου επεδίωξε τη δίκαιη αποτίμηση της επίδοσης, λαμβάνοντας υπόψη τόσο την ορθότητα όσο και την εσφαλμένη κρίση.

Παρά τις διαφορές στο περιεχόμενο και τη μορφή των ερωτήσεων, προσαρμόσαμε την εφαρμογή των κλιμάκων με τρόπο που ανταποκρίνεται στις ιδιαιτερότητες κάθε άσκησης, χωρίς να διακυβεύεται η ενιαία και αντικειμενική καταγραφή των απαντήσεων.

Αναπαράσταση (2α) – Ζεύγος Ερωτήσεων 1 και 4

Κατά την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών στην Ερώτηση 1 (Μ.Π), εστιάσαμε σε δύο βασικές διαστάσεις: τη μορφή του μονωνύμου και το πρόσημο των τιμών. Όταν ένας μαθητής ή μια μαθήτρια επέλεγε δεκαδικούς αριθμούς ή κλάσματα για την παράσταση 2α, θεωρούσαμε ότι δεν επηρεαζόταν από τη μορφή της αλγεβρικής παράστασης και καταγράφαμε την απάντηση ως $-F$. Αντίθετα, όταν οι επιλογές περιορίζονταν αποκλειστικά σε ακέραιες τιμές, θεωρούσαμε ότι υπήρχε επίδραση από τη μορφή της παράστασης και σημειώναμε $+F$. Σχετικά με το πρόσημο, όταν οι απαντήσεις περιλάμβαναν μόνο θετικές τιμές, καταγράφονταν ως $+S$, υποδηλώνοντας επίδραση από το Φαινομενικό Πρόσημο. Αν στις απαντήσεις υπήρχε τουλάχιστον μία αρνητική τιμή, θεωρούσαμε ότι ο μαθητής δεν επηρεαζόταν και σημειώναμε $-S$. Για την αριθμητική βαθμολόγηση, εφαρμόσαμε κλίμακα 0-6, αποδίδοντας μία μονάδα για κάθε σωστή επιλογή.

Στην *πλαισιοποιημένη* εκδοχή της ίδιας άσκησης (Ερώτηση 4), όπου η παράσταση 2α αναπαριστούσε ποσότητα γραμμαρίων ζάχαρης, η αξιολόγηση ως προς τη μορφή (Form) του μονωνύμου παρέμεινε ίδια. Ωστόσο, η αξιολόγηση σε σχέση με το πρόσημο διαφοροποιήθηκε, καθώς το πρόσημο σε αυτή την περίπτωση καθοριζόταν αποκλειστικά από το πλαίσιο της άσκησης. Έτσι, όταν οι απαντήσεις περιλάμβαναν μόνο θετικές τιμές - σύμφωνα με την προσδοκία που απορρέει από το πλαίσιο της άσκησης - σημειώναμε $+ΠΛ$, υποδεικνύοντας ότι ο μαθητής επηρεάστηκε από το πλαίσιο. Αντίθετα, όταν οι απαντήσεις ήταν όλες λανθασμένες (αρνητικές τιμές) ή περιείχαν συνδυασμό θετικών και αρνητικών τιμών, καταγράφονταν ως $-ΠΛ$, υποδηλώνοντας ότι ο μαθητής δεν επηρεάστηκε από το πλαίσιο. Για την αριθμητική βαθμολόγηση της άσκησης αυτής, εφαρμόστηκε η κλίμακα από -3 έως 3, όπως έχει ήδη αναφερθεί.

Αναπαράστασεις ($-y-8$) & ($-\beta-5$) – Ζεύγος Ερωτήσεων 2 και 5

Βασιζόμενοι στις μελέτες των Christou και Vosniadou (2005) και Christou et al. (2007), επιλέξαμε, μεταξύ άλλων, να συμπεριλάβουμε ερωτήσεις αρνητικού χαρακτήρα (Ερωτήσεις 2 και 5). Στις συγκεκριμένες ερωτήσεις, ζητήσαμε από τους συμμετέχοντες να εντοπίσουν τις αριθμητικές τιμές που **ΔΕΝ** ταιριάζουν με τις αλγεβρικές παραστάσεις $-y-8$ και $-\beta-5$. Αυτό απαιτούσε από τους μαθητές μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση και αυξημένη συνειδητοποίηση της φύσης και των ιδιοτήτων των ρητών αριθμών.

Κατά τη βαθμολόγηση της *μη πλαισιοποιημένης* Ερώτησης 5, αποδώσαμε θετική αξιολόγηση (+F) στις απαντήσεις που περιλάμβαναν **μόνο** δεκαδικούς αριθμούς και κλάσματα. Η βαθμολόγηση αυτή βασίστηκε στην υπόθεση ότι, αν ένας μαθητής διατηρεί την Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού, θεωρεί εσφαλμένα ότι η μεταβλητή y μπορεί να λάβει μόνο θετικές ακέραιες τιμές. Συνεπώς, θεωρεί ότι η παράσταση $-y-8$ μπορεί να έχει μόνο ακέραιο αποτέλεσμα και απορρίπτει δεκαδικές ή κλασματικές απαντήσεις. Αντίστροφα, όταν στις απαντήσεις περιλαμβανόταν έστω και ένας ακέραιος αριθμός, αυτό ερμηνευόταν ως ένδειξη μη ύπαρξης της παραπάνω προκατάληψης και βαθμολογούνταν με αρνητικό χαρακτηρισμό $-F$. Όσον αφορά το πρόσημο, όταν οι απαντήσεις περιλάμβαναν **μόνο θετικούς αριθμούς**, αυτό υποδήλωνε ότι ο μαθητής θεωρούσε λανθασμένα πως η παράσταση $-y-8$ **δεν μπορεί** να έχει θετική τιμή. Στην περίπτωση αυτή αποδίδαμε τη βαθμολογική ένδειξη $+S$. Αντιθέτως, όταν οι επιλογές περιλάμβαναν και αρνητικούς αριθμούς, η ένδειξη ήταν $-S$. Για τη συνολική αριθμητική βαθμολόγηση της ερώτησης, λάβαμε υπόψη την ιδιαιτερότητα της άρνησης (ΔΕΝ) στην εκφώνηση. Η αξιολόγηση γινόταν σε κλίμακα από 0 έως 6, όπως σε όλες τις *μη πλαισιοποιημένες* ερωτήσεις, αποδίδοντας **έναν βαθμό (1)** για **κάθε τιμή που ο μαθητής ΔΕΝ είχε επιλέξει**. Οι μη επιλεγμένες τιμές θεωρούνταν, σύμφωνα με την ερώτηση, ότι ταιριάζουν με την παράσταση $-y-8$ και συνεπώς η **μη** επιλογή τους ήταν ενδεικτική ορθής κατανόησης.

Στην *πλαισιοποιημένη* εκδοχή (Ερώτηση 2), η αξιολόγηση σε σχέση με την Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού (+F/ $-F$) ακολούθησε την ίδια λογική όπως και στην Ερώτηση 5. Αναφορικά με το πρόσημο, εφαρμόσαμε την κατηγοριοποίηση $\pm\Pi\Lambda$. Όταν οι μαθητές επέλεξαν **μόνο θετικές τιμές**, θεωρούσαμε ότι είχαν επηρεαστεί από το πλαίσιο της εκφώνησης και αποδίδαμε βαθμολογία $+\Pi\Lambda$. Αντίθετα, όταν επέλεξαν **μόνο αρνητικές τιμές**, αυτό ερμηνευόταν ως ένδειξη ότι δεν είχαν δώσει την απαιτούμενη προσοχή στην εκφώνηση. Η εκτίμηση αυτή ενισχυόταν και από τις περιπτώσεις όπου συνδύαζαν θετικές και αρνητικές επιλογές. Σε περιπτώσεις όπως αυτές, η αξιολόγηση γινόταν με την ένδειξη $-\Pi\Lambda$. Όσον αφορά τη μαθηματική αποτίμηση των απαντήσεων, σε κάθε μαθητή αποδίδαμε το αλγεβρικό άθροισμα των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων, με κάθε σωστή να αντιστοιχεί σε $+1$ και κάθε λανθασμένη σε -1 .

Αναπαράσταση ($\frac{3}{4}x+5$) και ($\frac{5a}{6}+2,3$) – Ζεύγος Ερωτήσεων 3 και 6

Στις συγκεκριμένες ερωτήσεις, στόχος μας ήταν να διερευνήσουμε πώς ανταποκρίνονται οι μαθητές και οι μαθήτριες στη διαχείριση απλών αλγεβρικών παραστάσεων που περιλαμβάνουν κλασματικούς συντελεστές σε συνδυασμό με ακέραιους ή δεκαδικούς αριθμούς.

Ακολουθώντας παρόμοια στρατηγική βαθμολόγησης με αυτή που εφαρμόστηκε στις προηγούμενες ερωτήσεις, για τη *μη πλαισιοποιημένη* Ερώτηση 3 βαθμολογούσαμε τις απαντήσεις που περιείχαν μόνο δεκαδικούς ή και κλάσματα με +F (επηρεάζονται από την μορφή), ενώ όλους τους υπόλοιπους συνδυασμούς που περιείχαν τουλάχιστον έναν ακέραιο αριθμό, με -F (δεν επηρεάζονται από την μορφή). Σχετικά με το πρόσημο, καταχωρούσαμε +S (επηρεάζονται από το πρόσημο) για τις απαντήσεις των μαθητών/τριών που περιλάμβαναν μόνο θετικές τιμές και -S (δεν επηρεάζονται από το πρόσημο) όταν υπήρχε τουλάχιστον ένας αρνητικός αριθμός. Για την αριθμητική αξιολόγηση της ερώτησης, εφαρμόσαμε την βαθμολογική κλίμακα 0 έως 6 αποδίδοντας ένα βαθμό για την επιλογή οποιουδήποτε αριθμού. Η μέγιστη βαθμολογία (6) προέκυπτε είτε με την επιλογή όλων των αριθμητικών τιμών είτε με την επιλογή της απάντησης «όλες οι επιλογές».

Στην *πλαισιοποιημένη* Ερώτηση 6, η εκφώνηση προδιέθετε τους συμμετέχοντες για την επιλογή μόνο αρνητικών ρητών αριθμών, καθώς αναφέρεται σε ελάχιστες θερμοκρασίες ιδιαίτερα ψυχρών περιοχών της Βόρειας Ευρώπης κατά τη χειμερινή περίοδο. Ωστόσο, ένας παράγοντας που αναμέναμε ότι θα προκαλέσει σύγχυση, στους μαθητές και τις μαθήτριες που συμμετείχαν, είναι η μορφή της αλγεβρικής παράστασης $\beta = \frac{5a}{6} + 2,3$, η οποία περιλαμβάνει κλασματική παράσταση αλλά και δεκαδικό αριθμό.

Για την αξιολόγηση των απαντήσεων στην Ερώτηση 6, σημειώσαμε με +F εκείνες που περιείχαν κλάσματα ή/και δεκαδικούς αριθμούς, και με -F όσες περιλάμβαναν τουλάχιστον μία επιλογή ακέραιου αριθμού. Για να εκτιμήσουμε τον βαθμό στον οποίο το πλαίσιο της εκφώνησης επηρέασε τις επιλογές των μαθητών/τριών, χαρακτηρίσαμε ως +ΠΛ (επηρεάστηκαν από την εκφώνηση) τις απαντήσεις που περιλάμβαναν μόνο αρνητικούς αριθμούς, και ως -ΠΛ (δεν επηρεάστηκαν από την εκφώνηση) εκείνες που περιείχαν τουλάχιστον μία θετική απάντηση. Τέλος, για την αριθμητική αποτίμηση χρησιμοποιήσαμε, όπως και στις *πλαισιοποιημένες* Ερωτήσεις 2 και 4, την κλίμακα από -3 έως +3. Σε αυτήν,

κάθε αρνητική επιλογή βαθμολογούνται με +1 ως ορθή, ενώ κάθε θετική απάντηση με −1 ως λανθασμένη.

5.2.2 Ασκήσεις Διάταξης – Βαθμολόγηση

Στην κατηγορία ασκήσεων που αφορούν τη «Διάταξη» (Εικόνα 4), συμπεριλάβαμε δύο ασκήσεις χωρίς πλαίσιο, καθεμία από τις οποίες περιείχε τρία μονώνυμα με κλασματικό συντελεστή. Στόχος των ασκήσεων ήταν η ταξινόμηση των μονωνύμων από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο, με τη διευκρίνιση ότι η μεταβλητή αντιστοιχούσε σε φυσικό, μη μηδενικό αριθμό. Στις αντίστοιχες *πλαισιοποιημένες ασκήσεις* (Π.Α.), τα μονώνυμα αναπαριστούσαν, στη μία περίπτωση, ποσότητα σοκολάτας και στην άλλη, μήκος ξύλινων δοκών. Στην Εικόνα 4, που ακολουθεί, σημειώνονται οι σωστές απαντήσεις ανά ερώτηση.

7. Αν x φυσικός, μη μηδενικός αριθμός, να γράψετε την ακόλουθη τριάδα από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο αριθμό:				
$\frac{7}{6}x$	$\frac{6}{7}x$	x		$\frac{6}{7}x < x < \frac{7}{6}x$
8. Τα παιδιά της κας Αθηνάς της ζήτησαν να φτιάξει ένα κέικ όσο το δυνατόν πιο σοκολατένιο. Ψάχνοντας για συνταγές εντόπισε τρεις. Κάθε μία από αυτές απαιτούσε διαφορετική ποσότητα λιωμένης σοκολάτας μετρημένη με ένα φλιτζάνι β γραμμαρίων. Μπορείτε να ταξινομήσετε την ποσότητα σοκολάτας από την μικρότερη στην μεγαλύτερη για να βοηθήσετε την κα Αθηνά να αποφασίσει;				
1 ^η Συνταγή	2 ^η Συνταγή	3 ^η Συνταγή		$\frac{\beta}{2} < \frac{2\beta}{3} < \frac{3\beta}{4}$
$\frac{3\beta}{4}$ φλ.	$\frac{\beta}{2}$ φλ.	$\frac{2\beta}{3}$ φλ.		
9. Αν y φυσικός, μη μηδενικός αριθμός, να γράψετε την ακόλουθη τριάδα από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο αριθμό:				
y	$\frac{9y}{8}$	$\frac{5y}{6}$		$\frac{5y}{6} < y < \frac{9y}{8}$
10. Ο κύριος Βαγγέλης, ο ξυλουργός, χρησιμοποιεί στο εργαστήριό του δοκούς μήκους α μέτρων (m). Αν του έχουν περισσέψει ξύλινοι δοκοί μήκους $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{3\alpha}{5}$ και $\frac{3\alpha}{4}$ μπορείτε να τις γράψετε από την μεγαλύτερη προς την μικρότερη, χωρίς να τις έχετε δει;				
$\frac{\alpha}{2}$ m	$\frac{3\alpha}{4}$ m	$\frac{3\alpha}{5}$ m		$\frac{\alpha}{2} < \frac{3\alpha}{5} < \frac{3\alpha}{4}$

Εικόνα 4: Ασκήσεις στη Διάταξη

Η αξιολόγηση των απαντήσεων βασίστηκε σε διακριτή κλίμακα από 0 έως 3, με έναν βαθμό (1) να αποδίδεται σε κάθε σωστή ανισοτική σχέση. Σημειωτέον ότι απαιτούνταν συνολικά τρεις σωστές σχέσεις, ώστε η απάντηση να θεωρηθεί πλήρης και απολύτως ορθή.

5.2.3 Ασκήσεις Διαχείρισης Πράξεων – Βαθμολόγηση

Στην ενότητα «Διαχείριση Πράξεων» ζητήθηκε από τους μαθητές και τις μαθήτριες να εκτελέσουν τις απαραίτητες αλγεβρικές πράξεις. Στις *μη πλαισιοποιημένες* ερωτήσεις 11 και

13, προσδοκία μας ήταν κυρίως η σωστή αναγωγή ομοίων όρων και η εκτέλεση πράξεων με ομώνυμα κλάσματα, αντίστοιχα. Αντίθετα, στις *πλαισιοποιημένες* ασκήσεις, οι απαιτήσεις ήταν αυξημένες, καθώς οι συμμετέχοντες έπρεπε πρώτα να μετασχηματίσουν τα δεδομένα των προβλημάτων σε αλγεβρικές παραστάσεις και στη συνέχεια να υλοποιήσουν τις αντίστοιχες πράξεις.

11. Να γίνουν οι πράξεις:

$$3x + y - 5x = \dots\dots\dots -2x + y \dots\dots\dots$$

12. Αν η Αγγελική διαθέτει 410 ευρώ και αποφάσισε να αγοράσει δύο μπλούζες αξίας x ευρώ η κάθε μία, ένα παντελόνι αξίας $3x$ ευρώ και ένα φόρεμα αξίας y ευρώ, πόσα χρήματα θα της περισσέψουν; **(Να γίνουν και οι πράξεις όπου είναι εφικτό).**

$$\dots\dots\dots 410 - 2x - 3x - y = 410 - 5x - y \dots\dots\dots$$

13. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\beta - \frac{1}{4}\beta = \dots\dots\dots \frac{4\beta - \beta}{4} = \frac{3\beta}{4} \dots\dots\dots$$

14. Στο μάθημα της Περιβαλλοντικής Εκπαίδευσης, η Κατερίνα δήλωσε ότι σε διάστημα μίας εβδομάδας, κατάφερε να μειώσει το ενεργειακό της αποτύπωμα άνθρακα α , κατά τα $\frac{2}{3}$ αυτού. Πώς γράφεται το νέο ενεργειακό της αποτύπωμα; **(Να γίνουν και οι πράξεις όπου είναι εφικτό).**

$$\dots\dots\dots \alpha - \frac{2\alpha}{3} = \frac{3\alpha - 2\alpha}{3} = \frac{\alpha}{3} \dots\dots\dots$$

Εικόνα 5: Ερωτήσεις στην Διαχείριση Πράξεων

Η επιλογή του πλαισίου έγινε με τέτοιο τρόπο ώστε το θέμα της πρώτης ερώτησης (Ερώτηση 12, Εικόνα 5) να είναι πιο οικείο στους μαθητές σε σύγκριση με εκείνο της δεύτερης (Ερώτηση 14, Εικόνα 5), με σκοπό να διερευνηθεί κατά πόσο η εξοικείωση με το πλαίσιο μπορεί να επηρεάσει, θετικά ή μη, την απόδοσή τους. Η αξιολόγηση των απαντήσεων στην ενότητα αυτή έδωσε έμφαση, αφενός στην ορθή αναγωγή ομοίων όρων στην παράσταση $3x + y - 5x$, και αφετέρου στη σωστή εκτέλεση πράξεων με ομώνυμα κλάσματα στην παράσταση $\beta - \frac{1}{4}\beta$. Στον Πίνακα 2 εμφανίζεται ο τρόπος βαθμολόγησης όλων των απαντήσεων που δόθηκαν από τους μαθητές/τριες στην κατηγορία Διαχείρισης Πράξεων. Περισσότερες πληροφορίες για την συχνότητα των απαντήσεων εμφανίζονται στον Πίνακα 4 (σελ. 42).

Πίνακας 2: Βαθμολόγηση Απαντήσεων στη Διαχείριση Πράξεων

	Καμία Απάντηση	Λανθασμένη Απάντηση (0)	Μερικώς Σωστή (1)	Ολόσωστη (2)
Άσκηση 11: $3x+y-5x = \dots$	«Δεν ξέρω»	$3x+y$	$-2x+y = 0$	$-2x+y$
	«Δεν πρόλαβα»	$y^2-4\cdot 3\cdot (-5) = y^2+60$	$-2x = -y$	$x(3-5)+y$
	«Δεν κατάλαβα»	$4y-5x = 1yx$	$-2xy$	
		$2x+y = 0 / 2x+y$	$y = -3x+5x \Rightarrow y = 2x$	
		$3x^2+15x^2+5yx$	$-y-2x$	
		$y = -3x-5x \Rightarrow y = -8x$	$-2x/y$	
		$y(3x-5x) = 2xy$	$-2x = y$	
		$12-4\cdot 3\cdot (-5) = 19, x_{1,2} = \dots$		
Άσκηση 13: $\beta - (1/4)\beta = \dots$		$-15x+y$		
	«Δεν μπορώ τα κλάσματα»	$\dots = \pm 1/4$	$\dots = 4\beta - \beta = 3\beta$	$\dots = \frac{3}{4}\beta$
	«Δεν καταλαβαίνω»	$\dots = 4\beta - 2\beta = 2\beta$	$\dots = 0 \Leftrightarrow \frac{4\beta}{4} - \frac{1}{4}\beta = \frac{3\beta}{4}\beta$	$\dots = 0,75\beta$
	«Δεν πρόλαβα»	$\dots = 4\beta - 1 = 3\beta$ (γιαστί)	$\dots = 4\beta - \beta = 0 \Rightarrow 3\beta = 0$	$\dots = \frac{3\beta}{4}$
		$\dots = \beta(-\frac{1}{4} \cdot 1) \Rightarrow \beta(\frac{-1}{4} \cdot \frac{4}{4}) \Rightarrow B = -4$	$\dots = \beta(\frac{4}{4} - \frac{1}{4}) = \beta \frac{3}{4} = \frac{3\beta}{4} = \frac{3}{4}$	
		$\dots = \beta - \frac{\beta}{4\beta} \Rightarrow \frac{4\beta^2}{4\beta} - \frac{\beta}{4\beta} = 4\beta$	$\dots = \beta(1 - \frac{1}{4})$	
		$\dots = \frac{4}{4}\beta - \frac{1}{3}\beta \cdot \frac{3}{4}\beta$		
		$\beta - \frac{1}{4} - \beta$		

6. Στατιστική Ανάλυση – Αποτελέσματα

Η καταχώρηση των στοιχείων της έρευνας και η στατιστική ανάλυση των δεδομένων πραγματοποιήθηκαν με το λογισμικό IBM SPSS Statistics (Έκδοση 28). Οι μεταβλητές που αναλύθηκαν ήταν κυρίως ποιοτικές και διατακτικές. Η ανάλυση οργανώθηκε ανά κατηγορία ερωτήσεων, με στόχο την εξαγωγή πιο αναλυτικών και ακριβέστερων αποτελεσμάτων.

Για τη στατιστική ανάλυση των επί μέρους κατηγοριών ακολουθήθηκε μια σταθερή και συστηματική διαδικασία, με στόχο τη δημιουργία των κατάλληλων προϋποθέσεων για την εκτέλεση των απαραίτητων ελέγχων. Αρχικά, πριν από τη διερεύνηση κάθε κατηγορίας ερωτήσεων, πραγματοποιήθηκε έλεγχος αξιοπιστίας Cronbach's Alpha, προκειμένου να διαπιστωθεί η εσωτερική συνοχή των ερωτημάτων. Στη συνέχεια, διενεργήθηκαν έλεγχοι κανονικότητας για κάθε μεταβλητή που είτε υπήρχε εξαρχής είτε δημιουργήθηκε για τις ανάγκες της παρούσας έρευνας. Κεντρικό στοιχείο της ανάλυσης αποτέλεσαν οι έλεγχοι συσχετίσεων, με στόχο τη διασφάλιση ότι οι ερωτήσεις δεν ήταν απόλυτα ταυτισμένες, αλλά παρουσίαζαν, το πολύ, ήπια έως μέτρια συσχέτιση μεταξύ τους. Τέλος, όπου πληρούνταν οι απαραίτητες προϋποθέσεις, εφαρμόστηκε το T-τεστ ζευγαρωτών δειγμάτων για την εξέταση του τρίτου ερευνητικού ερωτήματος, που αφορά την επίδραση των *πλαισιοποιημένων* ερωτήσεων, συγκρίνοντας τους μέσους όρους μεταξύ *απλών* και *πλαισιοποιημένων* ερωτήσεων.

6.1 Στατιστική Ανάλυση Απαντήσεων στην Κατηγορία Αναπαραστάσεις-Προσήμου

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο της μεθοδολογία της έρευνας, για κάθε ερώτηση της κατηγορίας “Αναπαραστάσεις - Πρόσημο” δημιουργήσαμε τρεις διαστάσεις. Κάθε διάσταση μετρά την ανταπόκριση των μαθητών σε διαφορετικές πτυχές: η πρώτη αφορά την Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού (Form), η δεύτερη την Παρανόηση του Φαινομενικού Προσήμου (Sign), ενώ η τρίτη παρέχει πληροφόρηση για τον βαθμό επιτευξιμότητας του ορθού αποτελέσματος για κάθε μαθητή ή μαθήτρια.

Πριν προχωρήσουμε σε περαιτέρω ενέργειες, δώσαμε προτεραιότητα στον έλεγχο της συνοχής του ερωτηματολογίου, εξετάζοντας τη συνολική βαθμολογία των μαθητών. Ο

έλεγχος αξιοπιστίας με τη χρήση του δείκτη Cronbach's Alpha για τις ερωτήσεις 1 έως 6 ανέδειξε χαμηλή τιμή (0,338), γεγονός που μας οδήγησε στην διαδοχική εξαίρεση των ερωτήσεων 2 και 5 (Εικόνα 6).

2. Από μία υπαίθρια δεξαμενή χάθηκαν από διαρροή, β λίτρα (lt) νερού και επιπλέον 5 από εξάτμιση. Η ποσότητα νερού -β-5 που χάθηκε, ΔΕΝ μπορεί να είναι:						
☐ 750 lt	☐ $\frac{1977}{3}$ lt	☐ - 1530 lt	☐ 251,6 lt	☐ $-\frac{917}{5}$ lt	☐ - 343,7 lt	☐ μπορεί να είναι όλες οι επιλογές
5. Το -γ-8 ΔΕΝ μπορεί να είναι:						
☐ 9	☐ - 11,8	☐ $-\frac{7}{8}$	☐ 12,5	☐ - 5	☐ $\frac{10}{9}$	☐ μπορεί να είναι όλες οι επιλογές

Εικόνα 6: Ερωτήσεις που εξαιρέθηκαν

Η εξαίρεση των ανωτέρω ερωτήσεων, που περιλάμβαναν το χαρακτηριστικό της αρνητικής διατύπωσης, οδήγησε σε σημαντική βελτίωση του δείκτη Cronbach's Alpha (0,686). Αυτό υποδηλώνει ότι οι συγκεκριμένες ερωτήσεις δεν συνέβαλαν θετικά στην συνοχή του συνόλου των έξι ερωτήσεων και πιθανώς να αύξησαν τον βαθμό δυσκολίας ή παρερμηνείας για τους συμμετέχοντες.

Από τον πίνακα 3 που ακολουθεί διαπιστώνουμε ότι η συμμετοχή των μαθητών, στις τέσσερις ερωτήσεις που μελετάμε, είναι χαμηλότερη στις *πλαισιοποιημένες* ασκήσεις, γεγονός που μας δίνει μία πρώτη ένδειξη προτίμησης προς τις *μη πλαισιοποιημένες*.

Πίνακας 3: Έγκυρες απαντήσεις κατηγορίας Αναπαραστάσεων-**Προσέγγις**

Statistics					
		Μη Πλαισιοποιημένες Ερωτήσεις (2α) (3/4x+5)		Πλαισιοποιημένες Ερωτήσεις (2α) (5α/3+2,3)	
N	Valid	103	99	101	97
	Missing	0	4	2	6

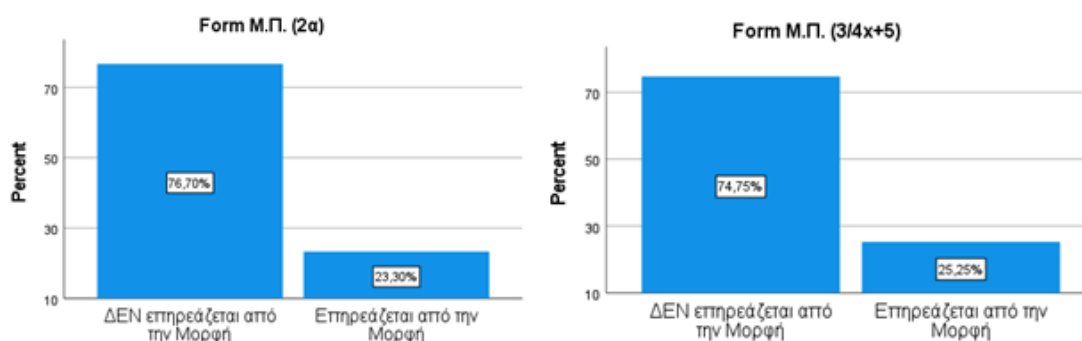
Πίνακας 4: Συγκεντρωτικός Πίνακας Συχνοτήτων / Αναπαραστάσεις - Πρόσημο

Αναπαραστάσεις – Πρόσημο / Μη Πλαισιοποιημένες Ερωτήσεις																	
Ερωτ.1 (2α)						Ερωτ.3 (3/4x+5)						Ερωτ.5 (-y-8)					
Μορφή (+F/-F)			Πρόσημο (+S/-S)			Συνολική Επίδοση			Μορφή (+F/-F)			Πρόσημο (+S/-S)			Συνολική Επίδοση		
Συχνότητα	v	%	v	%		v	%		v	%		v	%		v	%	
+F	24	23,3	+S	15	14,6	1	18	17,5	+F	25	25,3	+S	36	36,4	1	33	33,3
-F	79	76,7	-S	88	85,4	2	10	9,7	-F	74	74,7	-S	63	63,6	2	10	10,1
						3	14	13,6							3	8	8,08
						4	6	5,8							4	3	3,03
						5	2	1,9							5	6	6,06
						6	53	51,5							6	39	39,4
Έγκυρες						103			Έγκυρες						103		
Ελλείπουσες (99)						0			Ελλείπουσες (99)						4		
															3,9%		
															0		

Αναπαραστάσεις – Πρόσημο / Πλαισιοποιημένες Ερωτήσεις																	
Ερωτ. 4 (2α)						Ερωτ. 6 (5α/6 + 2,3)						Ερωτ. 2 (-β-5)					
Μορφή (+F/-F)			Πλαίσιο (+ΠΛ/-ΠΛ)			Συνολική Επίδοση			Μορφή (+F/-F)			Πλαίσιο (+ΠΛ/-ΠΛ)			Συνολική Επίδοση		
v	%		v	%		N	%		v	%		v	%		N	%	
+F	19	18,8	-ΠΛ	23	22,8	3Λ	1	0,99	+F	23	23,7	-ΠΛ	57	58,8	3Λ	4	4,1
-F	82	81,2	+ΠΛ	78	77,2	2Λ	1	0,99	-F	74	76,3	+ΠΛ	40	41,2	2Λ	5	5,2
						1Λ	4	3,96							1Λ	13	13,4
						Σ=Λ	15	14,9							Σ=Λ	33	34
						1Σ	24	23,8							1Σ	17	17,5
						2Σ	13	12,9							2Σ	7	7,2
						3Σ	43	42,6							3Σ	18	18,6
Έγκυρες						101			Έγκυρες						97		
Ελλείπουσες (99)						2			Ελλείπουσες (99)						6		
															5,8%		
															0		
															2,9%		

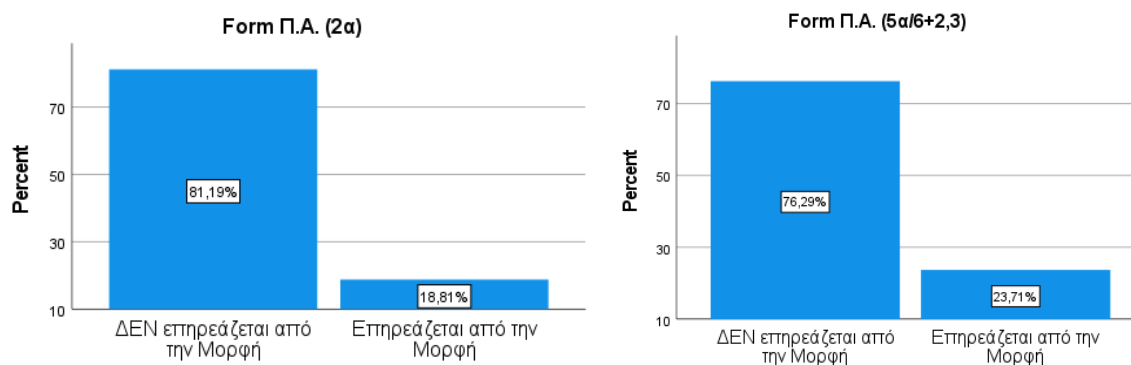
6.1.1 Αναπαραστάσεις (Form) - Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού

Από την εξέταση των τεσσάρων διαγραμμάτων που παρουσιάζονται στις επόμενες εικόνες 7 και 8 διαπιστώνουμε ότι, κατά μέσο όρο, το 77,2%, των μαθητών της Α΄ Λυκείου δεν επηρεάζεται από την μορφή της αλγεβρικής παράστασης. Αυτό υποδηλώνει ότι οι μαθητές, σε ποσοστό 77,2%, έχουν καταφέρει να ξεπεράσουν την Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού. Παρόλα αυτά, εξακολουθεί να υπάρχει και ένα σημαντικό ποσοστό μαθητών, περίπου 22,8%, το οποίο αντιμετωπίζει δυσκολίες λόγω αυτής της προκατάληψης.



Εικόνα 7: Μη Πλαισιοποιημένες Ερωτήσεις (2α) και $(\frac{3}{4}x+5)$ – Μορφή

Όσον αφορά τη σύγκριση μεταξύ των μη πλαισιοποιημένων και των πλαισιοποιημένων ασκήσεων, παρατηρούμε ότι ο μέσος όρος των ποσοστών των μαθητών που δεν επηρεάζονται από τη μορφή στις απλές ασκήσεις είναι $(76,7 + 74,8) : 2 = 75,6\%$. Αντίστοιχα, στις πλαισιοποιημένες ασκήσεις το μέσο ποσοστό ανέρχεται σε $(81,2 + 76,3) : 2 = 78,8\%$. Αυτό υποδηλώνει μια μικρή βελτίωση της τάξης του 3,2% υπέρ των πλαισιοποιημένων ασκήσεων σε σχέση με τις απλές.



Εικόνα 8: Πλαισιοποιημένες Ερωτήσεις (2α) και $(\frac{5\alpha}{6}+2,3)$ – Μορφή

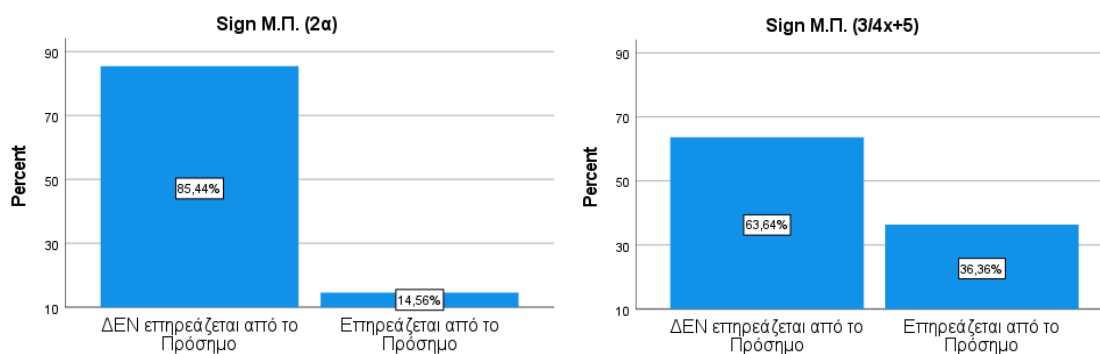
Επιπλέον, συγκρίνοντας τα ποσοστά των ερωτήσεων που περιέχουν την αλγεβρική παράσταση 2α (76,7% στις μη πλαισιοποιημένες και 81,19% στις πλαισιοποιημένες) με εκείνα που περιλαμβάνουν την παράσταση $\frac{3}{4}x+5$ (74,8% και 76,3% αντίστοιχα), διαπιστώνουμε ότι οι δυσκολίες των μαθητών αυξάνονται καθώς η αλγεβρική παράσταση γίνεται πιο σύνθετη.

6.1.2 Πρόσημο (Sign) – Παρανόηση Φαινομενικού Προσήμου

Στη συνέχεια, εξετάζουμε τα αποτελέσματα που αφορούν την Παρανόηση του Φαινομενικού Προσήμου. Παρατηρούμε ότι το μέσο ποσοστό των μαθητών που έχουν ξεπεράσει αυτήν την παρανόηση (Εικόνες 9, 10) ανέρχεται σε:

$$(85,44 + 63,64 + 77,23 + 41,24) : 4 = 66,89\%$$

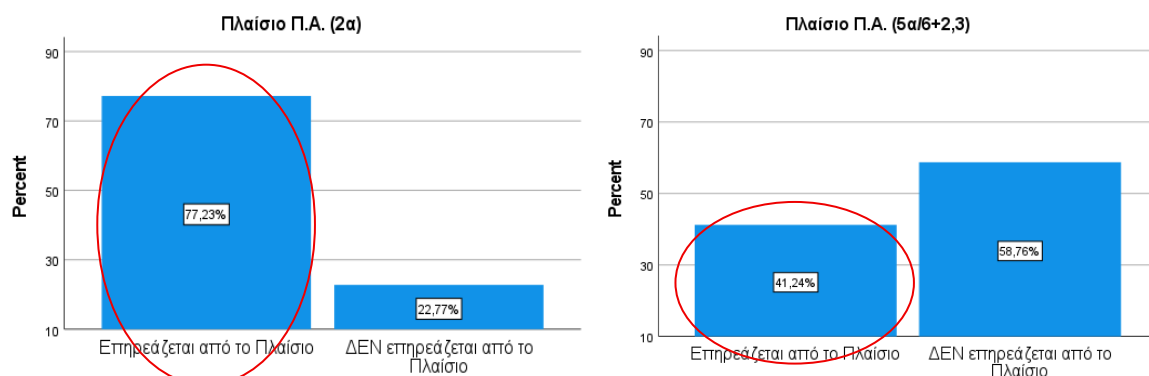
Συγκρίνοντας αυτό το ποσοστό με το αντίστοιχο για την Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού (77,2%), διαπιστώνουμε ένα σημαντικό έλλειμμα περίπου 10 ποσοστιαίων μονάδων. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει τη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την εννοιολογική τους μετάβαση στην Άλγεβρα, σχετικά με την Παρανόηση του Φαινομενικού Προσήμου, καθώς και την έντονη και σταθερή φύση αυτής της παρανόησης.



Εικόνα 9: Μη Πλαισιοποιημένες Ερωτήσεις 1(2α) και 3(5α/6+2,3) - Πρόσημο

Μελετώντας πιο αναλυτικά τις μη πλαισιοποιημένες ασκήσεις (Εικόνα 9), παρατηρούμε ότι ο μέσος όρος των μαθητών που δεν επηρεάζονται από το Φαινομενικό Πρόσημο είναι $(85,44+63,64):2=74,54\%$. Το ποσοστό αυτό προσεγγίζει, σημαντικά, το αντίστοιχο ποσοστό των απλών ασκήσεων όσον αφορά την Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού. Συγκρίνοντας το με το μέσο ποσοστό επιτυχίας στις πλαισιοποιημένες ασκήσεις, το οποίο υπολογίζεται ως $(77,23+41,24):2=59,24\%$ (Εικόνα 10), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η διαφορά των 10 ποσοστιαίων μονάδων, που εντοπίσαμε, παραπάνω, μεταξύ των δύο προκαταλήψεων,

οφείλεται κυρίως στις χαμηλές επιδόσεις των μαθητών, στην ανίχνευση της Παρανόησης του Φαινομενικού Προσήμου, στις *πλαισιοποιημένες* ασκήσεις.



Εικόνα 10: Πλαισιοποιημένες Ερωτήσεις 4 (2α) και 6 (5α/6+2,3) - Πρόσημο

Προσπαθώντας να ερμηνεύσουμε αυτή την απόκλιση, εστιάζουμε ξεχωριστά στα διαγράμματα των *μη πλαισιοποιημένων* ασκήσεων (Εικόνα 9), όπου παρατηρούμε ότι από την πρώτη ερώτηση (2α) στη δεύτερη ($\frac{5a}{6}+2,3$) η μείωση των ορθών απαντήσεων ξεπερνά το 20% ($85,44\% - 63,64\% = 22\%$). Παρόμοια αποτελέσματα έχουμε και στις *πλαισιοποιημένες* ασκήσεις (Εικόνα 10) όπου το αντίστοιχο ποσοστό είναι αρκετά μεγαλύτερο ($77,23\% - 41,24\% = 35,99\%$). Αυτή η διαπίστωση ενισχύει την προηγούμενη ένδειξη και υποδεικνύει ακόμη μια φορά ότι, καθώς οι αλγεβρικές παραστάσεις γίνονται πιο σύνθετες, οι μαθητές τείνουν να επιστρέφουν σε παλαιότερες προκαταλήψεις. Επιπλέον, το υψηλό ποσοστό του 58,76% των μαθητών που δεν επηρεάστηκαν από το πλαίσιο στην δεύτερη *πλαισιοποιημένη* ερώτηση ($\frac{5a}{6}+2,3$) αναδεικνύει ένα ακόμη σημαντικό ζήτημα που σχετίζεται με το κατά πόσο οι μαθητές δίνουν την απαιτούμενη προσοχή στην εκφώνηση κάθε άσκησης.

6.1.3 Συνολική Επίδοση (Grade)

Κατά την διερεύνηση του δεύτερου ερευνητικού μας ερωτήματος, εξετάζουμε την τρίτη διάσταση «Συνολική Επίδοση (Grade)», της κατηγορίας Αναπαραστάσεις – Πρόσημο και ελέγχουμε την ύπαρξη κανονικής κατανομής. Τα στατιστικά τεστ των Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-Wilk (Πίνακας 5) μας οδηγούν σε απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης:

H_0 : Τα δεδομένα μας ακολουθούν κανονική κατανομή.

Σε κάθε περίπτωση το γεγονός ότι το δείγμα μας ξεπερνά τις 30 παρατηρήσεις μας επέτρεψε να βασιστούμε στο κεντρικό οριακό θεώρημα και να συνεχίσουμε τους ελέγχους μας.

Πίνακας 5: Τεστ Ελέγχου Κανονικής Κατανομής

Τεστ Ελέγχου Κανονικής Κατανομής Συνολικής Επίδοσης (Grade)

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistic	Df	Sig.	Statistic	Df	Sig.
Επίδοση Μ.Π. (2α)	,334	92	<,001	,744	92	<,001
Επίδοση Μ.Π. ($\frac{3}{4}x+5$)	,256	92	<,001	,759	92	<,001
Επίδοση Π.Α. (2α)	,263	92	<,001	,834	92	<,001
Επίδοση Π.Α. ($\frac{5\alpha}{6}+2,3$)	,209	92	<,001	,911	92	<,001

a. Διόρθωση σημαντικότητας Lilliefors

Ο έλεγχος συσχέτισης - παραμετρικός (Pearson) ή μη παραμετρικός (Spearman)- μεταξύ των τεσσάρων υπό μελέτη ερωτήσεων (Πίνακας 6) έδειξε ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση:

- ανάμεσα στις ερωτήσεις 1 (Μ.Π. 2α) και 6 (Π.Α. $5\alpha/6+2,3$), με τιμή $p = 0,467$, που υπερβαίνει το επίπεδο σημαντικότητας του 5%, και
- ανάμεσα στις ερωτήσεις 3 (Μ.Π. $3/4x+5$) και 6 (Π.Α. $5\alpha/6+2,3$), με τιμή $p = 0,481$.

Και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις η μηδενική υπόθεση « H_0 : Η συσχέτιση ανάμεσα σε όλα τα ζεύγη των ερωτήσεων είναι μηδενική», απορρίφθηκε, διότι $p\text{-value} = \text{Sig. (2-tailed)} < 0.05$ (επίπεδο σημαντικότητας). Για τους υπόλοιπους συνδυασμούς ερωτήσεων, ο έλεγχος υπέδειξε την ύπαρξη στατιστικά σημαντικής συσχέτισης, μικρής έως μέτριας έντασης.

Πίνακας 6: Πίνακας Συσχετίσεων Συνολικής Επίδοσης

Πίνακας Συσχετίσεων Συνολικής Επίδοσης / Grade

		Επίδοση Μ.Π. (2α)	Επίδοση Μ.Π. ($3/4x+5$)	Επίδοση Π.Α. (2α)	Επίδοση Π.Α. ($5\alpha/6+2,3$)
Επίδοση Μ.Π. (2α)	Pearson/Spearman's Συσχέτιση	1	,450 ^{**} / ,463 ^{**}	,248 [*] / ,271 ^{**}	,075 / ,067
	Sig. (2-tailed)		<,001	,012	,467
	N	103	99	101	97
Επίδοση Μ.Π. ($3/4x+5$)	Pearson/Spearman's Συσχέτιση	,450 ^{**} / ,463 ^{**}	1	,350 ^{**} / ,422 ^{**}	,074 / ,076
	Sig. (2-tailed)	<,001		<,001	,481
	N	99	99	97	94
Επίδοση Π.Α. (2α)	Pearson/Spearman's Συσχέτιση	,248 [*] / ,271 ^{**}	,350 ^{**} / ,422 ^{**}	1	,296 ^{**} / ,319 ^{**}
	Sig. (2-tailed)	,012	<,001		,004
	N	101	97	101	95
Επίδοση Π.Α. ($5\alpha/6+2,3$)	Pearson/Spearman's Συσχέτιση	,075 / ,067	,074 / ,076	,296 ^{**} / ,319 ^{**}	1
	Sig. (2-tailed)	,467	,481	,004	
	N	97	94	95	97

**. Η συσχέτιση είναι σημαντική σε επίπεδο 0.01(Δίπλευρος έλεγχος).

*. Η συσχέτιση είναι σημαντική σε επίπεδο 0,05 (Δίπλευρος έλεγχος).

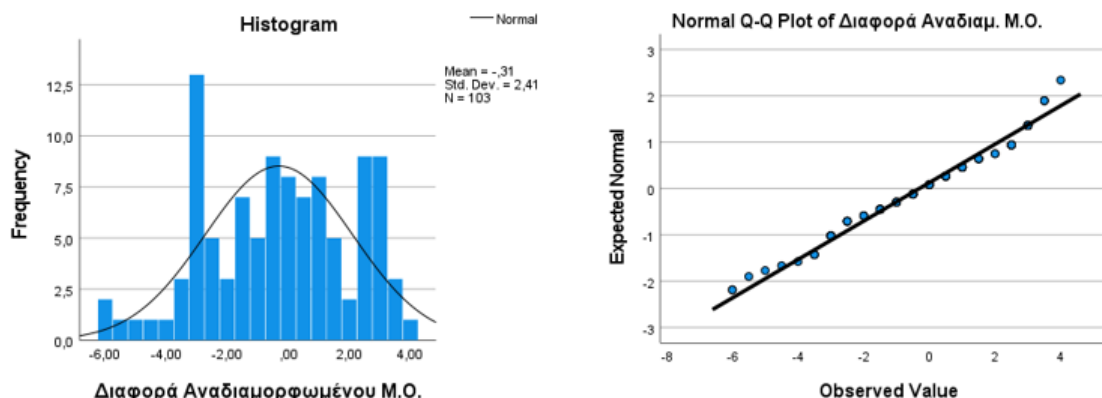
Για να συγκρίνουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα των μαθητών στην κατηγορία «Αναπαραστάσεις - Πρόσημο», επιλέξαμε να εξετάσουμε τις μέσες τιμές των επιδόσεών τους, δημιουργώντας δύο νέες μεταβλητές. Λόγω της διαφορετικής κλίμακας βαθμολόγησης - από -3 έως 3 για τις *πλαισιοποιημένες* ασκήσεις και από 0 έως 6 για τις *απλές* - κρίθηκε απαραίτητο να αναδιαμορφώσουμε (recode) τις τιμές των *πλαισιοποιημένων* ερωτήσεων, ώστε να αντισταθμιστεί η διαφορά αυτή. Στη συνέχεια, πραγματοποιήσαμε έλεγχο κανονικότητας για τη διαφορά των δύο νέων μέσων όρων (Πίνακας 7), ο οποίος ανέδειξε κανονική κατανομή. Το εύρημα αυτό επιβεβαιώθηκε και μέσω των αντίστοιχων διαγραμμάτων (Εικόνα 11).

Πίνακας 7: Έλεγχος Κανονικότητας Διαφορ.Αναδιαμορφωμένου Μ.Ο.

Έλεγχος Κανονικότητας Διαφορ.Αναδιαμορφωμένου Μ.Ο.

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	Df	Sig.
Διαφορά Αναδιαμορφωμένου Μ.Ο.	,077	103	,139	,977	103	,065

a. Διόρθωση σημαντικότητας Lilliefors



Εικόνα 11: Διαγράμματα Διαφοράς Αναδιαμορφωμένων Μ.Ο.

Αφού διασφαλίστηκε η απαραίτητη προϋπόθεση, προχωρήσαμε στη σύγκριση των μέσων όρων μεταξύ *απλών* (MO Grade_1_3) και *πλαισιοποιημένων* ερωτήσεων (MO Grade_1_3), εφαρμόζοντας T-Τεστ για ζευγαρωτά δείγματα (Πίνακας 8). Με το συγκεκριμένο τεστ εξετάσαμε τις υποθέσεις;

H_0 : Ο μέσος όρος της συνολικής επίδοσης των μαθητών στις *πλαισιοποιημένες ερωτήσεις* είναι ίσος με τον μέσο όρο της συνολικής επίδοσης στις απλές ερωτήσεις.

H_1 : Ο μέσος όρος της συνολικής επίδοσης των μαθητών στις *πλαισιοποιημένες ερωτήσεις* είτε έχει αυξηθεί είτε έχει μειωθεί.

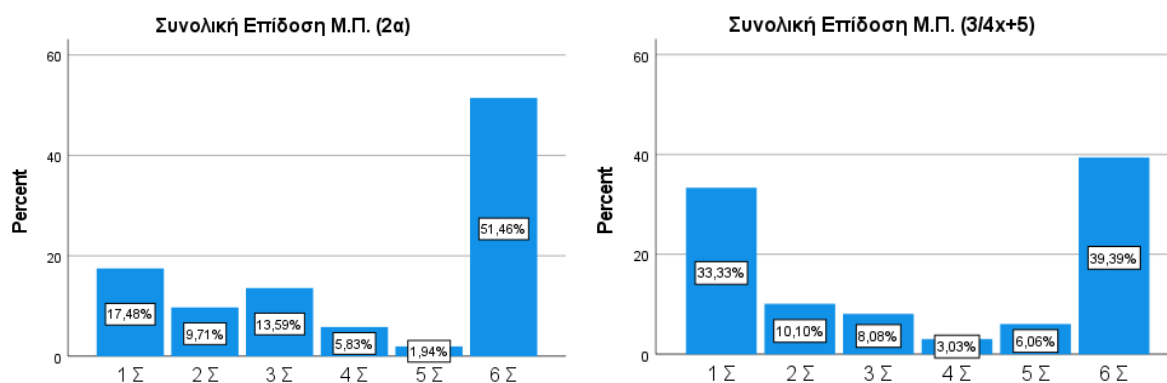
Η τιμή p του μονόπλευρου ελέγχου (One-Sided p) που μας ενδιαφέρει είναι 0,097 (>0.05), γεγονός που μας οδήγησε, οριακά, στην αποδοχή της μηδενικής υπόθεσης περί ισότητας των μέσων τιμών.

Πίνακας 8: T-Τεστ Αναδιαμορφωμένου Μ.Ο. Συνολικής Επίδοσης(Grade)

T-Τεστ ζευγαρωτών δειγμάτων

		Διαφορές ανά ζεύγη			t	Df	Σημαντικότητα	
		Μέσος όρος	Τυπική Απόκλιση	Std. Error Mean			One-Sided p	Two- Sided p
1 ^ο Ζεύγος	Αναδιαμορφ. MO_4_6 – MO Grade_1_3	-,3107	2,41027	,23749	-1,308	102	,097	,194

Παρά το γεγονός ότι η προηγούμενη διερεύνηση δεν απέδωσε κάποιο στατιστικά σημαντικό αποτέλεσμα προχωρήσαμε σε έναν πιο διεξοδικό έλεγχο των ποσοστών που συγκέντρωσαν οι μαθητές ανά κατηγορία απαντήσεων με τη βοήθεια των διαγραμμάτων που ακολουθούν (Εικόνες 12 και 13).



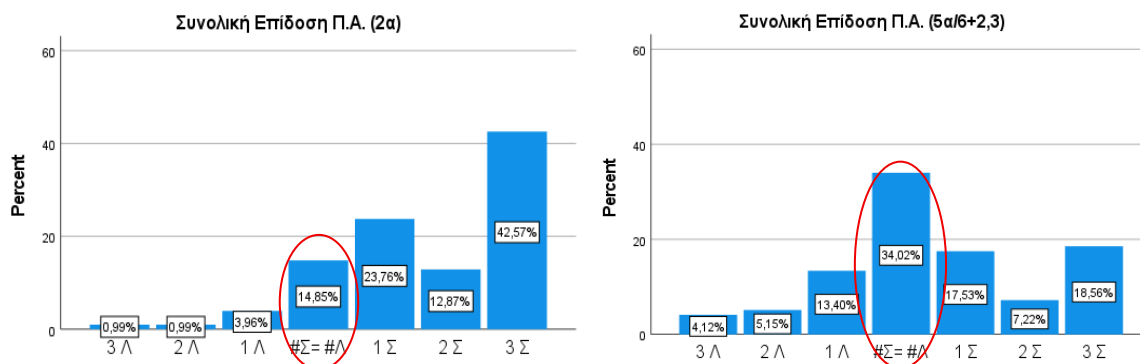
Εικόνα 12: Μη Πλαισιοποιημένες Ερωτήσεις – **Συνολική Επίδοση**

$$5,83\% + 1,94\% + 51,46\% = 59,23\% \quad 3,03\% + 6,06\% + 39,39\% = 48,48\%$$

$$(59,23 + 48,48) : 2 = 53,86\%$$

Επιλέξαμε, αρχικά, να εστιάσουμε στις μεγαλύτερες βαθμολογίες των απαντήσεων, καθώς αυτές αντιπροσωπεύουν μαθητές που είτε έχουν ξεπεράσει την Προκατάληψη τους Φυσικού Αριθμού και την παρανόηση του Φαινομενικού Προσήμου, είτε εξακολουθούν να τις διατηρούν, αλλά σε περιορισμένο βαθμό. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι για τις μη

πλαισιοποιημένες ερωτήσεις, τα υψηλά σκορ των τεσσάρων, πέντε ή έξι σωστών απαντήσεων (4Σ, 5Σ ή 6Σ) συγκέντρωσαν κατά μέσο όρο ποσοστό 53,86% (Εικόνα 12). Αντίστοιχα, στις πλαισιοποιημένες ερωτήσεις, το ποσοστό αυτό ανήλθε στο 61,3% (Εικόνα 13). Σημειώνεται ότι δεν συμπεριλήφθησαν οι περιπτώσεις στις οποίες οι σωστές και λανθασμένες επιλογές είναι ισάριθμες (#Σ = #Λ).



Εικόνα 13: Πλαισιοποιημένες Ερωτήσεις – Συνολική Επίδοση

$$23,76\% + 12,87\% + 42,57\% = 79,2\% \quad 17,53\% + 7,22\% + 18,56\% = 43,31\%$$

$$(79,2\% + 43,31\%) : 2 = \mathbf{61,26\%}$$

Η σαφής υπεροχή των πλαισιοποιημένων ερωτήσεων στα παραπάνω αποτελέσματα υποδηλώνει ότι η ενασχόληση των μαθητών με τέτοιου είδους ασκήσεις μπορεί να διευκολύνει την εννοιολογική αλλαγή, ιδιαίτερα όταν οι προϋπάρχουσες παρανοήσεις δεν είναι ιδιαίτερα ισχυρές.

Αντίστοιχα, εξετάσαμε τα ποσοστά των απαντήσεων με χαμηλή επίδοση – δηλαδή εκείνων που περιλαμβάνουν μία (1Σ) έως τρεις σωστές επιλογές (3Σ) στις απλές ερωτήσεις και, αντίστοιχα, μία (1Λ) έως τρεις (3Λ) λανθασμένες επιλογές στις πλαισιοποιημένες. Ο υπολογισμός του ποσοστιαίου μέσου όρου έδειξε ότι στις απλές ερωτήσεις το ποσοστό αυτό ανήλθε στο 46,15%, ενώ στις πλαισιοποιημένες περιορίστηκε σημαντικά στο 14,63%. Συνεπώς, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, σε περιπτώσεις όπου οι παρανοήσεις είναι βαθύτερα ριζωμένες, η παρουσία πλαισίου – όταν δεν συνοδεύεται από κατάλληλη γνωστική υποστήριξη – ενδέχεται να προκαλέσει περισσότερη σύγχυση, παρά να λειτουργήσει υποστηρικτικά.

6.2. Στατιστική Ανάλυση Ερωτήσεων Διάταξης

Για την διερεύνηση των ερωτήσεων Διάταξης πραγματοποιήθηκε έλεγχος κανονικότητας για κάθε ερώτηση ξεχωριστά (Πίνακας 9). Τα αποτελέσματα οδήγησαν στην απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης περί κανονικής κατανομής Ωστόσο, δεδομένου ότι το μέγεθος του δείγματος υπερβαίνει τις 90 παρατηρήσεις ($N > 90$), σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα δεδομένα μας προσεγγίζουν την κανονική κατανομή.

Πίνακας 9: Τεστ Κανονικότητας Ερωτήσεων Διάταξης

Τεστ Κανονικότητας Kolmogorov-Smirnov / Διάταξης			Ερωτ. 7 6/7,1,7/6	Ερωτ. 8 (gr) Σοκολάτας	Ερωτ. 9 5/6,1,9/8	Ερωτ. 10 Ξύλ. Δοκοί
N			93	95	95	90
Κανονικές παράμετροι ^{a,b}	Μέσος όρος		1,95	1,92	1,89	2,13
	Τυπική Απόκλιση		1,015	1,294	1,036	1,030
Ακραίες διαφορές	Απόλυτη		,227	,336	,236	,322
	Θετική		,150	,201	,185	,200
	Αρνητική		-,227	-,336	-,236	-,322
Στατιστικό τεστ			,227	,336	,236	,322
Asymp. Sig. (2-tailed) ^c			<,001	<,001	<,001	<,001
Monte Carlo Sig. (2-tailed) ^d	Sig.		,000	,000	,000	,000
	95% Διάστημα	Κάτω	,000	,000	,000	,000
	εμπιστοσύνης	Ανώ	,000	,000	,000	,000

a. Η κατανομή του τεστ είναι κανονική.

b. Υπολογισμός από δεδομένα.

c. Διόρθωση σημαντικότητας Lilliefors.

d. Η μέθοδος Lilliefors βασίζεται σε 10.000 δείγματα Monte Carlo με αρχικό αριθμό 624387341

Πίνακας 10: Τεστ Αξιοπιστίας - Διάταξη

Στατιστικά αξιοπιστίας

Cronbach's Alpha	Πλήθος Ερωτήσεων
,686	4

Κατά τον έλεγχο αξιοπιστίας των τεσσάρων ερωτήσεων της Διάταξης, διαπιστώσαμε ότι ο δείκτης Cronbach's Alpha, με τιμή 0,686 (Πίνακας 10), είναι επαρκώς υψηλός ώστε να θεωρήσουμε αξιόπιστα τα δεδομένα και των τεσσάρων ερωτήσεων. Επιπλέον, όπως φαίνεται

και από τον Πίνακα 11, η αφαίρεση οποιασδήποτε ερώτησης δεν θα οδηγούσε σε βελτίωση του δείκτη Cronbach's Alpha.

Πίνακας 11: Έλεγχος Αξιοπιστίας Ανά Ερώτηση - Διάταξη

Στατιστικά Στοιχεία Ανά Ερώτηση

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
6/7,1,7/6	6,01	6,797	,389	,668
Ποσότητα Σοκολάτας	6,19	4,797	,546	,573
5/6,1,9/8	6,09	5,991	,564	,565
Ξύλινες Δοκοί	5,88	6,581	,406	,658

Για τον έλεγχο της συσχέτισης μεταξύ των τεσσάρων ερωτήσεων στην κατηγορία "Διάταξη", χρησιμοποιήθηκε ο μη παραμετρικός συντελεστής συσχέτισης Spearman, καθώς οι απαντήσεις καταγράφηκαν σε διατακτική (ordinal) κλίμακα (Πίνακας 12). Αναλύοντας τις τιμές των p-value από τα τεστ ελέγχου της μηδενικής υπόθεσης,

H_0 : Υπάρχει μηδενική συσχέτιση μεταξύ των 4 ερωτήσεων της Διάταξης, παρατηρείται ότι, με επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 5%, οι περισσότερες συσχετίσεις είναι στατιστικά σημαντικές, παρουσιάζοντας ελάχιστη έως μέτρια θετική συσχέτιση ($0,270 < \rho < 0,493$) μεταξύ των ερωτήσεων. Η μόνη περίπτωση στην οποία η μηδενική υπόθεση δεν απορρίπτεται (οριακά), είναι η συσχέτιση μεταξύ των Ερωτήσεων 7 (κωδικοί 6/7, 1, 7/6) και 10 (Ξύλινες Δοκοί), καθώς το αντίστοιχο p-value είναι $0.065 > 0.05$.

Πίνακας 12: Έλεγχος Συσχέτισης Ερωτήσεων Διάταξης

Συσχετίσεις

			6/7,1,7/6	Ποσότητα Σοκολάτας	5/6,1,9/8	Ξύλινες Δοκοί
Spearman's rho	6/7,1,7/6	Συντελεστής συσχέτισης	1,000	,270*	,493**	,200
		Sig. (2-tailed)	.	,010	<,001	,065
		N	93	90	91	86
Ποσότητα Σοκολάτας	6/7,1,7/6	Συντελεστής συσχέτισης	,270*	1,000	,481**	,473**
		Sig. (2-tailed)	,010	.	<,001	<,001
		N	90	95	92	89
5/6,1,9/8	6/7,1,7/6	Συντελεστής συσχέτισης	,493**	,481**	1,000	,361**
		Sig. (2-tailed)	<,001	<,001	.	<,001
		N	91	92	95	89
Ξύλινες Δοκοί	6/7,1,7/6	Συντελεστής συσχέτισης	,200	,473**	,361**	1,000
		Sig. (2-tailed)	,065	<,001	<,001	.
		N	86	89	89	90

*. Η συσχέτιση είναι σημαντική σε επίπεδο 0,05 (2-πλευρος έλεγχος).

**. Η συσχέτιση είναι σημαντική σε επίπεδο 0,01 (2-πλευρος έλεγχος).

Για τον έλεγχο του ερευνητικού ερωτήματος σχετικά με την επίδραση των *πλαισιοποιημένων* ασκήσεων σε θέματα Διάταξης, δημιουργήσαμε ένα νέο ζεύγος μεταβλητών που εκφράζουν τον μέσο όρο επίδοσης των μαθητών στις *μη πλαισιοποιημένες* και στις *πλαισιοποιημένες* ερωτήσεις, αντίστοιχα. Ο έλεγχος κανονικής κατανομής (Asymp. Sig.=p-value<0.001, Πίνακας 13) για τις δύο νέες μεταβλητές δεν επιβεβαίωσε την ύπαρξή της, όμως η ισχύς του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος επιβεβαιώνει την προσέγγισή της λόγω του μεγέθους του δείγματος.

Πίνακας 13: Έλεγχος Κανονικότητας Μ.Ο. - Διάταξη

Έλεγχος Kolmogorov-Smirnov Ενός Δείγματος / Διάταξη

		M.O. Μη Πλαισιοποιημένων	M.O. Πλαισιοποιημένων
N		97	96
Κανονικές Παράμετροι ^{a,b}	Μέσος όρος	1,8918	2,0365
	Τυπική Απόκλιση	,92203	,99537
	Διάμεσος	2,000	2,000
Μέγιστες Διαφορές	Απόλυτη	,137	,229
	Θετική	,115	,167
	Αρνητική	-,137	-,229
Στατιστικό τεστ		,137	,229
Asymp. Sig. (2-tailed) ^c		<,001	<,001
Monte Carlo Sig. (2-tailed) ^d	Sig.	<,001	,000
	99% Διάστημα	Κάτω όριο	,000
	εμπιστοσύνης	Ανώτερο όριο	,000

a. Η κατανομή του τεστ είναι κανονική.

b. Υπολογισμός από δεδομένα.

c. Lilliefors Significance Correction.

d. Lilliefors' method based on 10000 Monte Carlo samples with starting seed 2000000.

Πίνακας 14: Έλεγχος Συσχετίσεων - Διάταξη

Συσχετίσεις / Διάταξη

		M.O. Απλών	M.O. Πλαισιοποιημένων
M.O. Απλές	Pearson/Spearman	1	,402 ^{**} / ,427 ^{**}
	Συσχέτιση		
	Sig. (2-tailed)		<,001
N		97	94
M.O. Πλαισιοποιημένες	Pearson/Spearman	,402 ^{**} / ,427 ^{**}	1
	Συσχέτιση		
	Sig. (2-tailed)	<,001	
N		94	96

**. Η συσχέτιση είναι σημαντική σε επίπεδο 0,01 (2-πλευρος έλεγχος).

Όσον αφορά τον έλεγχο συσχετίσεων οι συντελεστές Pearson ($r = 0,402$) και Spearman ($\rho = 0,427$) έδειξαν ότι υπάρχει μέτρια θετική συσχέτιση (Πίνακας 14).

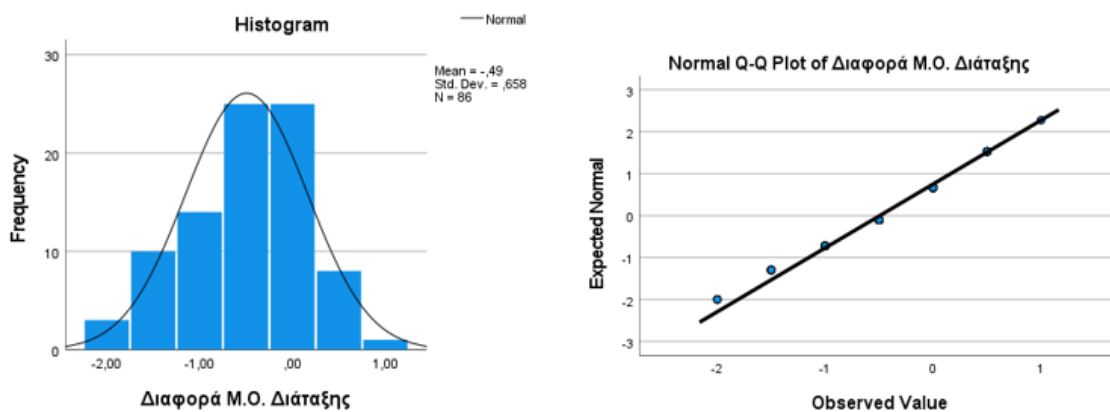
Για να εξετάσουμε τις διαφορές στις μέσες τιμές των απαντήσεων κάθε μαθητή, εφαρμόσαμε το T-Τεστ για ζευγαρωτά δείγματα (Paired Samples T-test). Για την εγκυρότητα του ελέγχου, απαιτείται η προϋπόθεση της κανονικότητας ως προς τις διαφορές των μέσων τιμών ανά μαθητή. Για το λόγο αυτό, δημιουργήσαμε μια νέα μεταβλητή που αποτυπώνει τις εν λόγω διαφορές και προχωρήσαμε στους απαραίτητους ελέγχους κανονικότητας. Παρά το γεγονός ότι το στατιστικό τεστ (Πίνακας 15) υπέδειξε απόκλιση από την κανονική κατανομή, η εφαρμογή του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, σε συνδυασμό με την οπτική αξιολόγηση του ιστογράμματος (Εικόνα 14), μας επέτρεψε να αποδεχθούμε την κανονικότητα των διαφορών ως ικανοποιητικά τεκμηριωμένη.

Πίνακας 15: Έλεγχος Κανονικότητας Διαφοράς Μ.Ο. Διάταξης

Τεστ κανονικότητας

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	Df	Sig.
Διαφορά Μ.Ο. Διάταξης	,183	86	<,001	,935	86	<,001

a. Διόρθωση σημαντικότητας Lilliefors



Εικόνα 14: Διαγράμματα Διαφοράς Μ.Ο. Διάταξης

Το τεστ ελέγχου της μηδενικής υπόθεσης,

H_0 : η μέση επίδοση των μαθητών στις *πλαισιοποιημένες* ερωτήσεις είναι ίση με τη μέση επίδοσή τους στις *απλές*,

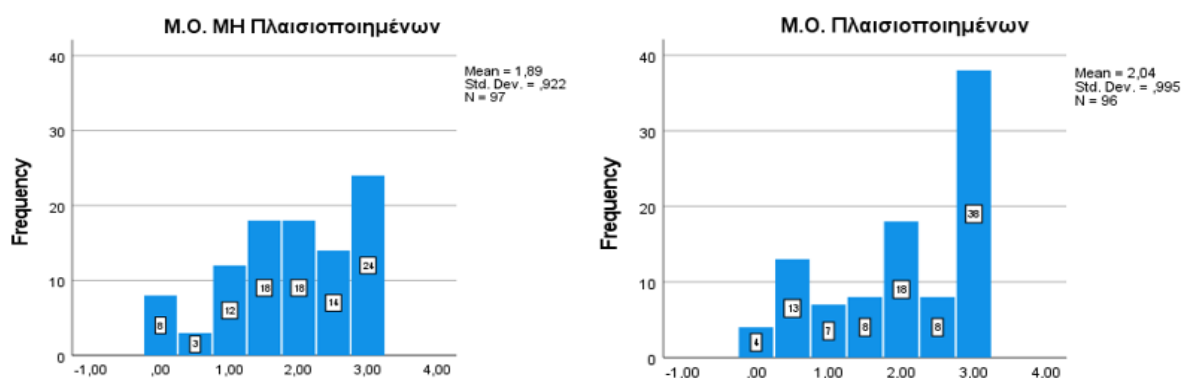
δείχνει ότι, αν και οι *πλαισιοποιημένες* ερωτήσεις παρουσιάζουν ελαφρώς καλύτερη επίδοση, η διαφορά αυτή είναι στατιστικά **μη** σημαντική ($p\text{-value} = 0,161 > 0,05$). Ωστόσο, η έντονα

αυξητική τάση στις ολόσωστες απαντήσεις των *πλαισιοποιημένων* ερωτήσεων αποτελεί ένδειξη που δικαιολογεί περαιτέρω διερεύνηση.

Πίνακας 16: Δοκιμή Ζευγαρωτών Δειγμάτων / Διάταξη

T-Τεστ Ζευγαρωτών Δειγμάτων / Διάταξη

		Διαφορές ανά ζεύγη			T	Df	Σημαντικότητα	
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean			One-Sided p	Two-Sided p
Ζεύγος 1	M.O. Πλαισιοπ. - M.O. Απλών	,10638	1,03662	,10692	,995	93	,161	,322



Εικόνα 15: Ραβδογράμματα Συχνοτήτων Μέσου Όρου Επίδοσης Ανά κατηγορία Ερωτήσεων

Με σκοπό μια πιο διεξοδική ανάλυση της προηγούμενης ένδειξης, δημιουργήσαμε δύο επιπλέον μεταβλητές που θα επέτρεπαν την σύγκριση μεταξύ *απλών* και *πλαισιοποιημένων* ασκήσεων. Η πρώτη αντιστοιχεί στο άθροισμα των επιδόσεων κάθε μαθητή στις *μη πλαισιοποιημένες* ερωτήσεις, ενώ η δεύτερη στο άθροισμα των επιδόσεών του στις *πλαισιοποιημένες* ερωτήσεις. Με αυτόν τον τρόπο προέκυψαν δύο διακριτές μεταβλητές, οι οποίες λαμβάνουν τιμές από 0 έως 6. Δεδομένου ότι οι τιμές αυτές προκύπτουν από το άθροισμα των βαθμολογιών σε δύο ερωτήσεις, είτε *απλές* είτε *πλαισιοποιημένες*, η ερμηνεία τους έχει ως εξής:

- τιμή έξι (6): Ο μαθητής απάντησε ολόσωστα και στις δύο ερωτήσεις,
- τιμή πέντε (5): Η μία απάντηση του μαθητή ήταν ολόσωστη και η άλλη περιλάμβανε δύο σωστές ανισοτικές σχέσεις.
- τιμή τέσσερα (4): Είτε και οι δύο απαντήσεις περιείχαν από δύο απαντήσεις με δύο σωστές ανισώσεις, είτε η μία ήταν ολόσωστη και η άλλη περιλάμβανε μία σωστή ανίσωση, κ.ο.κ.

Με παρόμοια λογική, οι υπόλοιπες τιμές αντιστοιχούν σε σταδιακά χαμηλότερες επιδόσεις, ανάλογα με τον αριθμό και την ακρίβεια των σωστών απαντήσεων.

Ακολούθως, πραγματοποιήθηκε έλεγχος συσχετίσεων χ^2 , με το κριτήριο του Pearson. Ο έλεγχος της υπόθεσης,

H_0 : Δεν υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα στην βαθμολογία των μαθητών στα Μαθηματικά και στην επίδοσή τους στις *πλαισιοποιημένες* ασκήσεις,

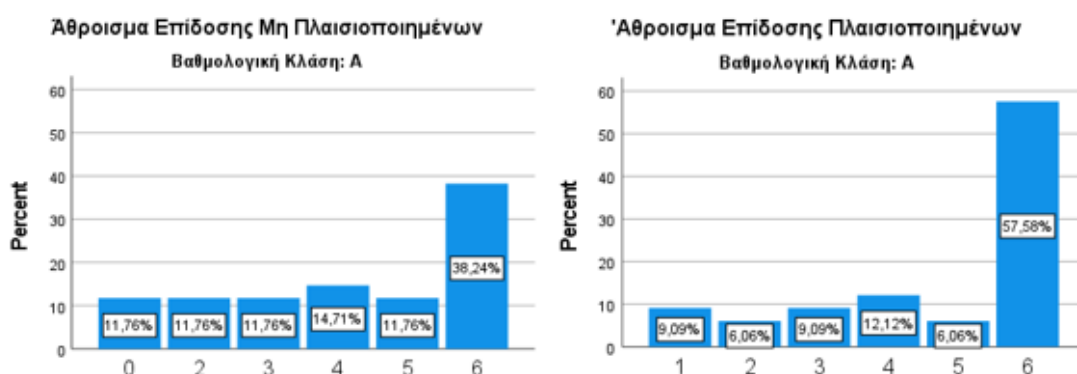
οδήγησε στην απόρριψή της και ανέδειξε στατιστικά σημαντική συσχέτιση (Πίνακας 17) μεταξύ των δύο μεταβλητών αφού $p\text{-value} = 0,01 < 0,05$ (επίπεδο σημαντικότητας). Αντιθέτως, για τις *μη πλαισιοποιημένες* ερωτήσεις, ο αντίστοιχος έλεγχος δεν κατέδειξε συσχέτιση, καθώς δεν απορρίφθηκε η υπόθεση περί ανεξαρτησίας της βαθμολογίας των μαθητών και των ασκήσεων αυτών ($p\text{-value} = 0,206 > 0,05$).

Πίνακας 17: Χι-Τετράγωνο Τεστ στη Διάταξη

χ^2 - Τεστ στη Διάταξη / Αθροισμα Μη Πλαισιοποιημένων				χ^2 - Τεστ στη Διάταξη / Αθροισμα Πλαισιοποιημ.			
	Value	Df	Asymptotic Significance (2-sided)		Value	Df	Asymptotic Significance (2-sided)
Pearson Chi-Square	15,686 ^a	12	,206		26,287 ^a	15	,010
Λόγος πιθανοφάνειας	17,187	12	,143		26,976	15	,008
Πλήθος έγκυρων περιπτώσεων	97				96		
a. 12 κελιά (57,1%) έχουν αναμενόμενο αριθμό μικρότερο από 5. Ο ελάχιστος αναμενόμενος αριθμός είναι 1,28.				a. 15 κελιά (71,4%) έχουν αναμενόμενο αριθμό μικρότερο από 5. Ο ελάχιστος αναμενόμενος αριθμός είναι 1,25.			

Η αρχική εντύπωση που δημιουργήθηκε από την Εικόνα 15 - ότι λανθασμένες απαντήσεις στις *απλές* ασκήσεις μετατρέπονται σε πλήρως ορθές στις *πλαισιοποιημένες* - σε συνδυασμό με την ισχυρή συσχέτιση ανάμεσα στη βαθμολογία των μαθητών στα Μαθηματικά και την επίδοσή τους στις *πλαισιοποιημένες* ασκήσεις, ανέδειξε την ανάγκη διερεύνησης της προέλευσης αυτού του φαινομένου. Για τον σκοπό αυτό, οι μαθητές χωρίστηκαν σε κλάσεις με βάση τη βαθμολογία τους στο μάθημα των Μαθηματικών κατά το Α' τετράμηνο του σχολικού έτους. Στη συνέχεια, συγκρίθηκαν τα ποσοστά που αντιστοιχούν στις τρεις υψηλότερες κατηγορίες επίδοσης (4, 5 και 6) για τις δύο νέες μεταβλητές που δημιουργήσαμε. Με τον τρόπο αυτό καταφέραμε να διαπιστώσουμε με μεγαλύτερη σαφήνεια

πώς αντιδρούν οι μαθητές κατά τη μετάβαση από τις απλές στις πλαισιοποιημένες ερωτήσεις, ανάλογα με το γνωστικό τους επίπεδο.



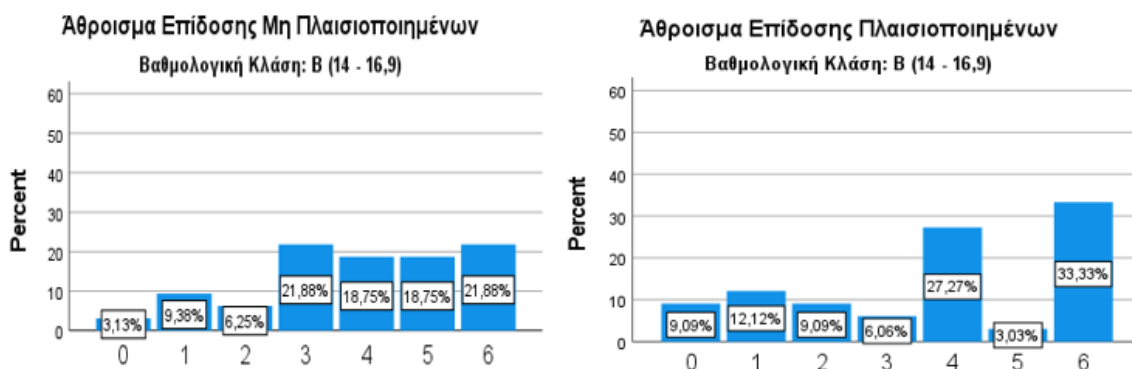
Εικόνα 16: Ραβδογράμματα Πλαισιοποιημένων Κλάση Α

$$14,71 + 11,76 + 38,24 = 64,71\%$$

$$12,12 + 6,06 + 57,58 = 75,76\%$$

$$\text{Π.Α.\%} - \text{Μ.Π.\%} = 75,76\% - 64,71\% = \mathbf{11,05\%}$$

Για τους μαθητές της κλάσης Α (με βαθμολογία τετραμήνου από 17 και άνω), παρατηρήθηκε συνολική βελτίωση της τάξεως του 11,05% στις υψηλές κατηγορίες επίδοσης, κατά τη μετάβαση από τις απλές στις πλαισιοποιημένες ερωτήσεις.



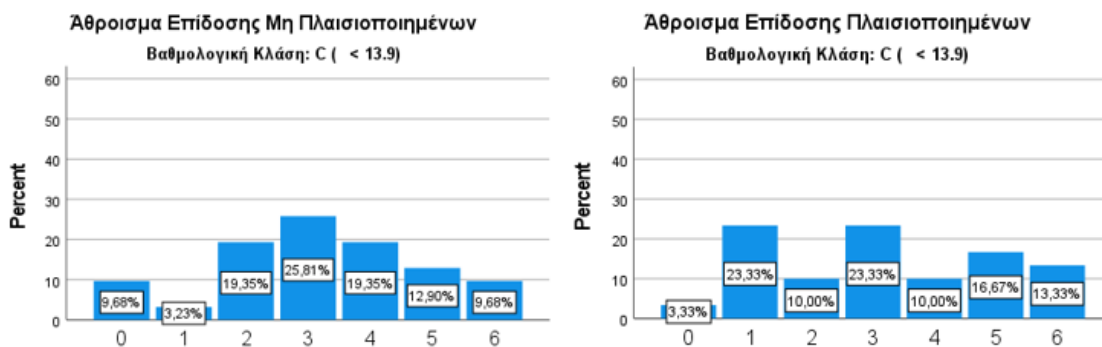
Εικόνα 17: Ραβδογράμματα Πλαισιοποιημένων Κλάση Β

$$18,75\% + 18,75\% + 21,88\% = 59,38\%$$

$$27,27\% + 3,03\% + 33,33\% = 63,63\%$$

$$\text{Π.Α.\%} - \text{Μ.Π.\%} = 63,63\% - 59,38\% = \mathbf{4,25\%}$$

Οι μαθητές της κλάσης Β (με βαθμολογία μεταξύ 14 και 17) παρουσίασαν μικρότερη βελτίωση, με ποσοστό 4,25% - λιγότερο από το μισό της επίδοσης της κλάσης Α. Αντιθέτως, οι μαθητές της κλάσης Γ (με βαθμολογία κάτω του 14) παρουσίασαν χειροτέρευση στην απόδοσή τους, με μείωση της τάξεως του 1,93% ανάμεσα στις ίδιες κατηγορίες ερωτήσεων (Εικόνα 18).



Εικόνα 18: Ποσοστιαία Ραβδογράμματα Διάταξης (Μ.Ο.) Κλάση Γ

$$19,35\% + 12,90\% + 9,68\% = 41,93\%$$

$$10,00\% + 16,67\% + 13,33\% = 40\%$$

$$\text{Π.Α.\%} - \text{Μ.Π.\%} = 40\% - 41,93\% = - 1,93\%$$

Μπορούμε, επομένως, να υποστηρίξουμε ότι όσο ισχυρότερες γνωστικές προκαταλήψεις διατηρούν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της σχολικής τους εκπαίδευσης, τόσο μεγαλύτερες δυσκολίες αντιμετωπίζουν στην επίλυση απλών, καθημερινών προβλημάτων. Παρ' όλα αυτά, τέτοια προβλήματα μπορούν να αξιοποιηθούν διδακτικά, καθώς προσφέρουν τη δυνατότητα να ενισχυθεί η κατανόηση βασικών αλγεβρικών εννοιών, όπως είναι η Διάταξη.

Πίνακας 18: Συγκεντρωτικός Πίνακας Συχνοτήτων - Διάταξη

Διάταξη											
Ερωτ.7 (6/7,1,7/6)			Ερωτ.8 (gr Σοκολάτας)			Ερωτ.9 (5/6,1,9/8)			Ερωτ.10 (Ξύλινες Δοκοί)		
v		%	v		%	V		%	v		%
0	10	10,8%	0	24	25,3%	0	10	10,5%	0	7	7,8%
1	20	21,5%	1	11	11,6%	1	26	27,4%	1	21	23,3%
2	28	30,1%	2	9	9,5%	2	23	24,2%	2	15	16,7%
3	35	37,6%	3	51	53,7%	3	36	37,9%	3	47	52,2%
Έγκυρες 93			Έγκυρες 95			Έγκυρες 95			Έγκυρες 90		
Ελλείπουσες (99)	10	9,7%	Ελλείπουσες (99)	8	7,77%	Ελλείπουσες (99)	8	7,77%	Ελλείπουσες (99)	13	12,6%

Πίνακας 19: Συγκεντρωτικός Πίνακας Συχνοτήτων - Διαχείριση Πράξεων

Διαχείριση Πράξεων											
Ερωτ.11 (3x+y-5x)			Ερωτ.12 (Ρέστα Αγγελικής)			Ερωτ.13(β-1/4β)			Ερωτ.14 (Περιβ. Αποτύπωμα)		
v		%	v		%	v		%	v		%
Λάθος	15	16,1%	Λάθος	27	31%	Λάθος	29	34,1%	Λάθος	43	61,4%
Μερικώς Σωστή	24	25,8%	Μερικώς Σωστή	41	47,1%	Μερικώς Σωστή	18	21,2%	Μερικώς Σωστή	10	14,3%
Σωστή	54	58,1%	Σωστή	19	21,8%	Σωστή	38	44,7%	Σωστή	17	24,3%
Έγκυρες 93			Έγκυρες 87			Έγκυρες 85			Έγκυρες 70		
Ελλείπουσες (99)	10	9,7%	Ελλείπουσες (99)	16	15,5%	Ελλείπουσες (99)	18	17,5%	Ελλείπουσες (99)	33	32%

6.3. Στατιστική Ανάλυση Ερωτήσεων Διαχείρισης Πράξεων

Παρόμοια στατιστικά αποτελέσματα παρατηρούνται και στις ερωτήσεις που αφορούν την κατηγορία της Διαχείρισης Πράξεων (Ερωτήσεις 11 έως 14, Εικόνα 5). Ο έλεγχος κανονικότητας δείχνει ότι τα δεδομένα δεν ακολουθούν κανονική κατανομή.

Πίνακας 20: Τεστ Kolmogorov-Smirnov Ενός Δείγματος – Διαχείριση Πράξεων

Τεστ Kolmogorov-Smirnov Ενός Δείγματος			Ερωτ. 11 3x+y-5x	Ερωτ. 12 Ρέστα Αγγελικής	Ερωτ. 13 β-1/4β	Ερωτ. 14 Περιβ. Αποτύπωμα
N			93	87	85	70
Κανονικές	Μέσος όρος		1,42	,91	1,11	,63
παράμετροι ^{a,b}	Τυπική Απόκλιση		,756	,725	,887	,854
Μέγιστες διαφορές	Απόλυτη		,359	,240	,290	,383
	Θετική		,221	,231	,235	,383
	Αρνητική		-,359	-,240	-,290	-,231
Στατιστικό τεστ			,359	,240	,290	,383
Asymp. Sig. (2-tailed) ^c			<,001	<,001	<,001	<,001
Monte Carlo Sig. (2-tailed) ^d	Sig.		,000	,000	,000	,000
	95% Διάστημα	Κάτω	,000	,000	,000	,000
	εμπιστοσύνης	όριο				
		Άνω	,000	,000	,000	,000
		όριο				

a. Η κατανομή του τεστ είναι κανονική.

b. Υπολογισμός από δεδομένα.

c. Διόρθωση σημαντικότητας κατά Lilliefors.

d. Η μέθοδος Lilliefors βασίζεται σε 10.000 δείγματα Monte Carlo με αρχικό αριθμό 92208573..

Ωστόσο, ο έλεγχος αξιοπιστίας επιβεβαιώνει ότι είναι δυνατή η επεξεργασία των δεδομένων και των τεσσάρων ερωτήσεων, καθώς ο δείκτης Cronbach's Alpha υπερβαίνει το όριο του 0,7, φτάνοντας στο 0,737 (Πίνακας 21). Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή η τιμή αποτελεί την υψηλότερη δυνατή αξιοπιστία για το σύνολο των ερωτήσεων στη συγκεκριμένη κατηγορία (Πίνακας 22).

Πίνακας 21: Έλεγχος Αξιοπιστίας- Διαχείριση Πράξεων

Στατιστικά αξιοπιστίας	
Cronbach's Alpha	Πλήθος Ερωτήσεων
,737	4

Πίνακας 22: Έλεγχος Αξιοπιστίας Ανά Ερώτηση - Διαχείριση Πράξεων

Στατιστικά Στοιχεία ανά Ερώτηση

	Μ.Ο. εάν η Ερώτηση διαγραφεί	Διακύμανση αν η Ερώτηση διαγραφεί	Διορθωμένη συσχέτιση ανά Ερώτηση	Cronbach's Alpha αν η Ερώτηση διαγραφεί
Ερωτήσεις				
3x+y-5x	2,62	3,808	,538	,675
Ρέστα Αγγελικής	3,20	3,884	,520	,685
β-1/4β	3,05	3,336	,555	,664
Περιβ. Αποτόπωμα	3,45	3,513	,515	,687

** . Η συσχέτιση είναι σημαντική σε επίπεδο 0,01 (2-πλευρος έλεγχος).

Ο έλεγχος των συσχετίσεων μεταξύ των ερωτήσεων, είτε με παραμετρικά είτε με μη παραμετρικά τεστ, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι οι ερωτήσεις παρουσιάζουν μεταξύ τους στατιστικά σημαντική συσχέτιση, αν και με μικρή έως μέτρια ένταση ($0,353 < r < 0,477$ και $0,331 < \rho < 0,464$). Το αποτέλεσμα αυτό θεωρείται αναμενόμενο, καθώς, όπως συμβαίνει και στις ερωτήσεις Διάταξης, έτσι και στις ερωτήσεις Διαχείρισης Πράξεων, αξιολογείται η ικανότητα των μαθητών να διαχειρίζονται απλές και παρόμοιες μεταξύ τους, αλγεβρικές παραστάσεις. Επιπλέον, οι *πλαισιοποιημένες* εκδοχές των ερωτήσεων έχουν σχεδιαστεί ώστε να βρίσκονται σε πλήρη αντιστοίχιση με τις μη *πλαισιοποιημένες*.

Πίνακας 23: Έλεγχος Συσχέτισης - Διαχείριση Πράξεων

Συσχετίσεις Διαχείριση Πράξεων

		3x+y-5x	Ρέστα Αγγελικής	β-1/4β	Περιβ. Αποτόπωμα
3x+y-5x	Pearson/Spearman's Συσχέτιση	1	,477**/,464**	,461**/,428**	,353**/,331**
	Sig. (2-tailed)		<,001	<,001	,003
	N	93	85	83	69
Ρέστα Αγγελικής	Pearson/Spearman's Συσχέτιση	,477**/,464**	1	,385**/,383**	,407**/,405**
	Sig. (2-tailed)	<,001		<,001	<,001
	N	85	87	80	70
β-1/4β	Pearson/Spearman's Συσχέτιση	,461**/,428**	,385**/,383**	1	,427**/,415**
	Sig. (2-tailed)	<,001	<,001		<,001
	N	83	80	85	67
Περιβ. Αποτόπωμα	Pearson/Spearman's Συσχέτιση	,353**/,331**	,407**/,405**	,427**/,415**	1
	Sig. (2-tailed)	,003	<,001	<,001	
	N	69	70	67	70

Με προσέγγιση ανάλογη με αυτή που ακολουθήθηκε για τις ερωτήσεις της κατηγορίας “Διάταξη”, επιδιώξαμε να εξετάσουμε το τρίτο ερευνητικό μας ερώτημα που αφορά την

επίδραση του πλαισίου στην κατηγορία “Διαχείριση Πράξεων”. Για τον σκοπό αυτό, δημιουργήθηκαν δύο νέες μεταβλητές: η πρώτη αποτυπώνει τον μέσο όρο επίδοσης κάθε μαθητή στις *μη* *πλαισιοποιημένες* ερωτήσεις, ενώ η δεύτερη τον μέσο όρο επίδοσής του στις *πλαισιοποιημένες*. Ο έλεγχος κανονικότητας (Πίνακας 24) των νέων μεταβλητών με το τεστ Kolmogorov-Smirnov ($p\text{-value} = < 0.001$) απορρίπτει την υπόθεση κανονικής κατανομής. Παράλληλα, παρατηρείται διαφοροποίηση στις μέσες τιμές, η οποία ενισχύεται περαιτέρω από τη διαφορά στις διαμέσους.

Πίνακας 24: Έλεγχος Κανονικότητας - Διαχείριση Πράξεων

<i>Έλεγχος Kolmogorov-Smirnov Ενός Δείγματος / Διαχείριση Πράξεων</i>			
		Mean Μη Πλαισιοποιημένων	Mean Πλαισιοποιημένων
N		95	87
Κανονικές παράμετροι ^{a,b}	Μέσος όρος	1,1789	,7069
	Διάμεσος	1,5000	-,5000
	Τυπική Απόκλιση	,69922	,62669
Ακραίες διαφορές	Απόλυτη	,193	,216
	Θετική	,120	,216
	Αρνητική	-,193	-,130
Στατιστικό τεστ		,193	,216
Asymp. Sig. (2-tailed) ^c		<,001	<,001
Monte Carlo Sig. (2- tailed) ^d	Sig.	,000	,000
	99% Διάστημα εμπιστοσύνης	Κάτω όριο	,000
		Άνω όριο	,000

a. Η κατανομή του τεστ είναι κανονική.

b. Υπολογισμός από δεδομένα.

c. Διόρθωση σημαντικότητας Lilliefors.

d. Η μέθοδος Lilliefors βασίζεται σε 10.000 δείγματα Monte Carlo με αρχικό αριθμό 2.000.000.

Και σε αυτή την κατηγορία, Διαχείρισης Πράξεων, παρατηρείται μέτρια συσχέτιση μεταξύ των ερωτήσεων, καθώς τόσο ο παραμετρικός συντελεστής συσχέτισης Pearson ($r = 0,516$) όσο και ο μη παραμετρικός συντελεστής Spearman ($\rho = 0,508$) παρουσιάζουν τιμές κοντά στο 0,5 (Πίνακας 25).

Πίνακας 25: Έλεγχος Συσχετίσεων - Διαχείριση Πράξεων

Συσχετίσεις / Διαχείριση Πράξεων

		M.O. Μη Πλαισιοποιημένων	M.O. Πλαισιοποιημένων
M.O. Μη Πλαισιοποιημένων	Pearson/Spearman's	1	,516 ^{**} / ,508 ^{**}
	Συσχέτιση		
	Sig. (2-tailed)		<,001
	atN	95	86
M.O. Πλαισιοποιημένων	Pearson/ Spearman's	,516 ^{**} / ,508 ^{**}	1
	Συσχέτιση		
	Sig. (2-tailed)	<,001	
	N	86	87

^{**}. Η συσχέτιση είναι σημαντική σε επίπεδο 0,01 (2-πλευρος έλεγχος).

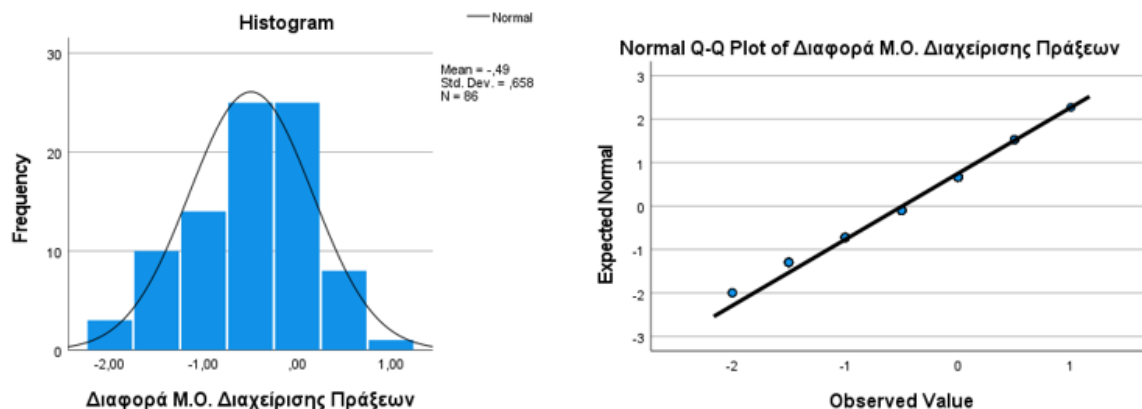
Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε έλεγχος των διαφορών μεταξύ των δύο νέων μεταβλητών μέσω T-Τεστ για ζευγαρωτά δείγματα, αφού πρώτα εξετάστηκε η προϋπόθεση της κανονικότητας των διαφορών. Όπως προκύπτει από τον Πίνακα 26, τόσο ο έλεγχος Kolmogorov-Smirnov (p-value = 0,001 < 0,05) όσο και ο έλεγχος Shapiro-Wilk (p-value = 0,001 < 0,05) κατέληξαν στην απόρριψη της υπόθεσης περί ύπαρξης κανονικής κατανομής. Ωστόσο, λαμβάνοντας υπόψη το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα και τη μορφή των κατανομών που απεικονίζονται στα διαγράμματα της Εικόνας 19, κρίθηκε ότι η προσέγγιση της κατανομής ως κανονικής είναι επαρκώς ικανοποιητική για την εφαρμογή του T-Τεστ.

Πίνακας 26: Έλεγχος Κανονικότητας Διαφοράς M.O. - Διαχείρισης Πράξεων

Τεστ Κανονικότητας

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	Df	Sig.
Διαφορά M.O. Διαχείρισης Πράξεων	,183	86	<,001	,935	86	<,001

a. Lilliefors Significance Correction



Εικόνα 19: Διαγράμματα Διαφοράς Μ.Ο. Πλαισιοποιημένων και Μη

Κατά την ολοκλήρωση του T-Τεστ ζευγαρωτών δειγμάτων (Πίνακας 27), διαπιστώθηκε ότι η μηδενική υπόθεση περί ισότητας των μέσων όρων απορρίπτεται, καθώς το $p\text{-value} < 0,001$ είναι μικρότερο από το προκαθορισμένο επίπεδο σημαντικότητας (5%). Συνεπώς, το πλεονέκτημα που παρουσιάζουν οι απλές ασκήσεις έναντι των πλαισιοποιημένων κρίνεται στατιστικά σημαντικό.

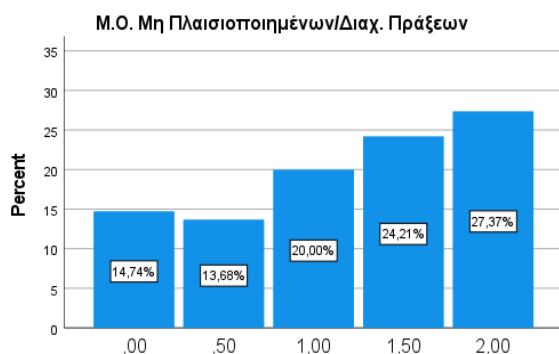
$$M.O. \text{ Μη Πλαισιοποιημένων} - M.O. \text{ Πλαισιοποιημένων} = 0,4942$$

Πίνακας 27: Έλεγχος Ζευγαρωτών Δειγμάτων - Διαχείρισης Πράξεων

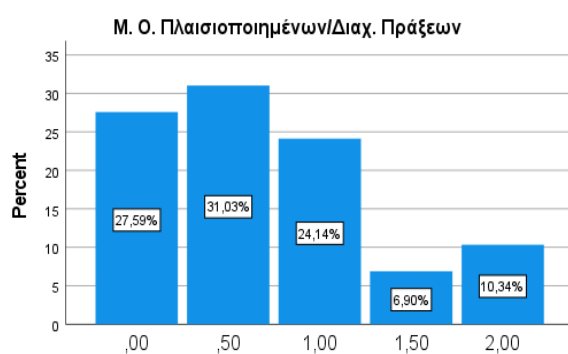
Δοκιμή Ζευγαρωτών Δειγμάτων / Διαχείριση Πράξεων

		Διαφορές ανά ζεύγη				Σημαντικότητα	
				95% Διάστημα εμπιστοσύνης της διαφοράς		1- πλευρο p	2-πλευρο p
		Std. Mean	Std. Error Deviation	Mean	Κάτωτερο Άνωτερο		
Ζεύγος	M.O. Πλαισιοποιημ. –	-,494	,658	,0709	-,635	-,353	<,001
1	M.O. Μη Πλαισιοπ.						<,001

Το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει εύκολα από την ανάλυση των ακόλουθων διαγραμμάτων. Στις απλές ερωτήσεις (Εικόνα 20), η κατανομή των επιδόσεων συγκεντρώνεται κυρίως σε βαθμολογίες μεγαλύτερες του 1, με συνολικό ποσοστό επιτυχίας που ανέρχεται στο 71,58% (20% + 24,21% + 27,37%). Αντιθέτως, η εικόνα μεταβάλλεται σημαντικά στις πλαισιοποιημένες ερωτήσεις (Εικόνα 21), όπου το αντίστοιχο ποσοστό επιτυχίας μειώνεται στο 41,38% (24,14% + 6,90% + 10,34%).

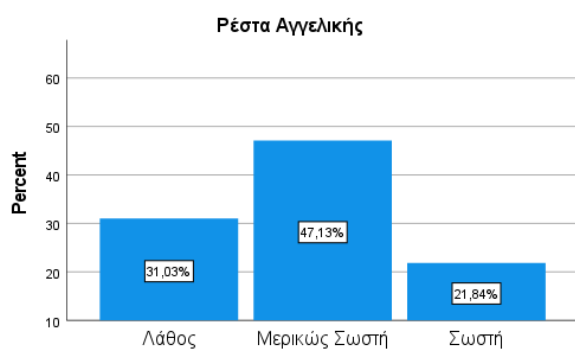


Εικόνα 20: Μ.Ο. Βαθμολογίας Απλών

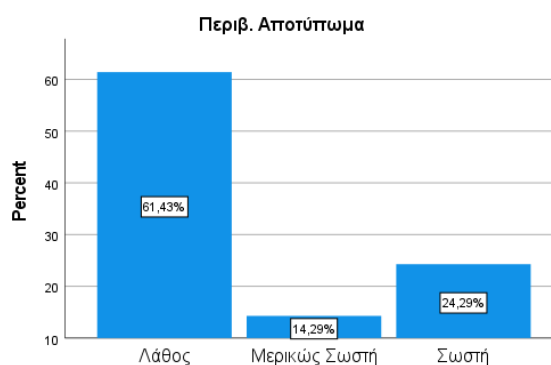


Εικόνα 21: Μ.Ο. Βαθμολογίας Πλαισιοποιημένων

Για να κατανοήσουμε την αιτία αυτής της διαφοροποίησης, στρέφουμε την προσοχή μας στα αποτελέσματα των συγκεκριμένων ερωτήσεων. Συγκρίνοντας τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών από το ένα πρόβλημα στο άλλο, διαπιστώνουμε έντονες διακυμάνσεις. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο πρόβλημα (Εικόνα 22) όπου ζητάμε μία αλγεβρική παράσταση που να περιγράφει «τα ρέστα της Αγγελικής», το συνολικό ποσοστό σωστών και μερικώς σωστών απαντήσεων φτάνει το **68,97%** (47,13% + 21,84%). Αντίθετα, στο πρόβλημα που αφορά το «ενεργειακό αποτύπωμα άνθρακα» (Εικόνα 23) παρατηρείται αισθητή μείωση, καθώς το αντίστοιχο ποσοστό περιορίζεται στο **38,58%** (14,29% + 24,29%).



Εικόνα 22: Ποσοστά Επιτυχίας Ερώτησης 12



Εικόνα 23: Ποσοστά Επιτυχίας Ερώτησης 14

Τα δεδομένα υποδεικνύουν ότι οι μαθητές παρουσιάζουν σαφώς υψηλότερες επιδόσεις σε ασκήσεις που αφορούν απλή διαχείριση αριθμητικών πράξεων, σε σύγκριση με προβλήματα ενταγμένα σε πλαίσιο. Τα πλαισιοποιημένα προβλήματα φαίνεται να αποτελούν γνωστική πρόκληση ακόμη και για μαθητές της Α' Λυκείου, κυρίως ως προς τη μετατροπή της λεκτικής διατύπωσης σε αλγεβρική παράσταση. Η συγκεκριμένη δεξιότητα αναδεικνύεται ως το κύριο διαφοροποιητικό στοιχείο μεταξύ των δύο τύπων ερωτήσεων που εξετάστηκαν. Παράλληλα,

αναδεικνύεται η ανάγκη για περαιτέρω διερεύνηση του βαθμού κατά τον οποίο η εξοικείωση των μαθητών με το εκάστοτε θεματικό πλαίσιο επηρεάζει την επίδοσή τους στην επίλυση προβλημάτων. Η διαπίστωση ότι ένα πρόβλημα με περιβαλλοντικό περιεχόμενο αποδείχθηκε πιο απαιτητικό απ' ό,τι είχε αρχικά εκτιμηθεί, υποδηλώνει ότι η ελλιπής ενημέρωση ή εξοικείωση των μαθητών με το συγκεκριμένο θέμα, ενδέχεται να επηρεάζει αρνητικά τη μαθησιακή τους απόδοση.

7. Συμπεράσματα

7.1. Συνοπτικά Αποτελέσματα

Η μετάβαση από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη συνιστά ένα σημαντικό βήμα στη μαθηματική εκπαίδευση, το οποίο συχνά συνοδεύεται από προκλήσεις και παγιωμένες παρανοήσεις. Η παρούσα μελέτη επεδίωξε να εξετάσει τον βαθμό στον οποίο έχει επιτευχθεί αυτή η Εννοιολογική Αλλαγή έως το τέλος του Γυμνασίου, δίνοντας έμφαση σε δυσκολίες που παρατηρούνται στη σκέψη μαθητών και μαθητριών της Α΄ Λυκείου. Συγκεκριμένα, μελετήθηκαν ζητήματα σχετικά με την Αναπαράσταση και κατανόηση των ρητών αριθμών, τη Διάταξή τους, καθώς και την Διαχείριση βασικών αλγεβρικών Πράξεων. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στον ρόλο των *πλαισιοποιημένων* (contextualized) *ασκήσεων*, οι οποίες ενδέχεται να εντείνουν ή να περιορίζουν αυτές τις δυσκολίες, συμβάλλοντας δυνητικά στη βαθύτερη κατανόηση αλγεβρικών εννοιών.

Τα ευρήματα της μελέτης υποδεικνύουν ότι η μετάβαση στην αλγεβρική σκέψη αποτελεί μια σύνθετη και πολυδιάστατη διαδικασία για τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Παρόλο που καταγράφεται πρόοδος, έως το τέλος του Γυμνασίου, διαπιστώθηκε ότι αρκετοί μαθητές και μαθήτριες της Α΄ Λυκείου εξακολουθούν να δυσκολεύονται με βασικές αλγεβρικές έννοιες, όπως οι Αναπαραστάσεις και το Πρόσημο, η Διάταξη των ρητών αριθμών και η Διαχείριση Αλγεβρικών Πράξεων.

Σε ό,τι αφορά τις Αναπαραστάσεις και το Πρόσημο, αν και η πλειοψηφία των μαθητών/τριών φαίνεται να ανταποκρίνεται ικανοποιητικά, ένα ποσοστό περίπου 23% εξακολουθεί να παρουσιάζει δυσκολίες. Το εύρημα αυτό δείχνει ότι ορισμένες παρανοήσεις που εδραιώνονται στα πρώτα σχολικά στάδια μπορεί να επιμείνουν, ιδιαίτερα σε πιο σύνθετες αλγεβρικές παραστάσεις. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι οι *πλαισιοποιημένες ασκήσεις* φάνηκε να συμβάλλουν με μια μικρή αλλά μετρήσιμη βελτίωση (3%) σε περιπτώσεις ήπιων παρανοήσεων. Ωστόσο, η παρατήρηση ότι οι μαθητές/τριες ενδέχεται να επανέρχονται σε λανθασμένες αντιλήψεις όταν αυξάνεται η δυσκολία των παραστάσεων καταδεικνύει την ανάγκη για στοχευμένη και συστηματική διδακτική υποστήριξη.

Η Παρανόηση του Φαινομενικού Προσήμου φάνηκε ακόμη πιο επίμονη, καθώς ένα μικρότερο ποσοστό μαθητών/τριών κατάφερε να μην επηρεαστεί από αυτήν, γεγονός που

ενισχύει την άποψη ότι πρόκειται για μια ιδιαίτερα σταθερή γνωστική προκατάληψη. Η διαφορά στις επιδόσεις μεταξύ *απλών* και *πλαισιοποιημένων ερωτήσεων* δείχνει ότι οι ορθές αντιλήψεις των μαθητών/τριών ενδέχεται να αποδυναμώνονται όταν καλούνται να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους σε πιο απαιτητικά ή λιγότερο οικεία πλαίσια. Παράλληλα, το ενδεχόμενο οι μαθητές/τριες να μην αποδίδουν την απαιτούμενη προσοχή στις διατυπώσεις των *πλαισιοποιημένων ερωτήσεων* αποτελεί παράγοντα σύγχυσης, ο οποίος ενδέχεται να επηρεάζει τα συμπεράσματα σχετικά με την Παρανόηση του Φαινομενικού Προσήμου και αναδεικνύει την ανάγκη για περαιτέρω διερεύνηση του φαινομένου.

Σχετικά με τον ρόλο των *πλαισιοποιημένων ασκήσεων*, τα δεδομένα έδειξαν ότι η επίδρασή τους διαφοροποιείται ανάλογα με την ένταση της παρανόησης. Αν και δεν προέκυψε στατιστικά σημαντική διαφορά στις μέσες επιδόσεις μεταξύ *απλών* και *πλαισιοποιημένων ερωτήσεων*, η ανάλυση των επιμέρους ομάδων έδειξε ότι οι *πλαισιοποιημένες ασκήσεις* ενδέχεται να είναι πιο αποτελεσματικές σε περιπτώσεις ήπιων παρανοήσεων, ενώ το όφελος φαίνεται περιορισμένο όταν οι παρανοήσεις είναι βαθύτερες.

Στην κατηγορία της Διάταξης, δεν καταγράφηκε στατιστικά σημαντική διαφορά στις μέσες επιδόσεις, ωστόσο η θετική συσχέτιση μεταξύ των επιδόσεων στις *πλαισιοποιημένες ερωτήσεις* και της βαθμολογίας των μαθητών/τριών στα Μαθηματικά, υποδηλώνει ότι όσοι και όσες διαθέτουν υψηλότερο γνωστικό υπόβαθρο φαίνεται να ωφελούνται περισσότερο από τη χρήση πλαισίου. Το στοιχείο αυτό ενισχύει την ιδέα ότι τόσο το επίπεδο γνώσεων όσο και η ένταση των προκαταλήψεων παίζουν ρόλο στην επιτυχή Εννοιολογική Αλλαγή.

Τέλος, στην Διαχείριση Αλγεβρικών Πράξεων, το στατιστικά σημαντικό πλεονέκτημα των *μη πλαισιοποιημένων ερωτήσεων* αποδόθηκε στις αυξημένες απαιτήσεις που ενέχουν οι *πλαισιοποιημένες*, καθώς προϋπέθεταν όχι μόνο γνώση των αλγεβρικών κανόνων αλλά και ικανότητα μετατροπής ενός ρεαλιστικού πλαισίου σε συμβολική αλγεβρική μορφή. Το εύρημα αυτό ανέδειξε τη σημασία της εξοικείωσης των μαθητών με το εκάστοτε πλαίσιο ως μέσο ενίσχυσης της ικανότητάς τους στην επίλυση προβλημάτων.

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα της μελέτης προσφέρουν μια πιο σύνθετη εικόνα της μετάβασης στην αλγεβρική σκέψη και τονίζουν τη σημασία της διαφοροποιημένης διδασκαλίας, της στοχευμένης παρέμβασης και της χρήσης ποικιλίας πλαισίων που συνδέονται με τον κόσμο και τις εμπειρίες των μαθητών και των μαθητριών, ώστε να διευκολυνθεί η ουσιαστική κατανόηση των βασικών αλγεβρικών εννοιών.

7.2. Σύνδεση με Προγενέστερες Επιστημονικές Μελέτες

Σε συμφωνία με τα παραπάνω, τα ευρήματα της παρούσας μελέτης συνάδουν με εκείνα προγενέστερων ερευνών που αναδεικνύουν τη μετάβαση από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη ως μία ιδιαίτερα απαιτητική και μακροχρόνια διαδικασία (Booth, 1988· Kieran, 1992). Όπως έχει διαπιστωθεί και από τους Sfard και Linchevski (1994), οι μαθητές συχνά διατηρούν αριθμητικοκεντρικές στρατηγικές και δυσκολεύονται να υιοθετήσουν αλγεβρικές αναπαραστάσεις, ακόμα και μετά από χρόνια ενασχόλησης με σχετικές δραστηριότητες. Η παρούσα μελέτη επιβεβαιώνει ότι οι παρανοήσεις που σχετίζονται με το Πρόσημο και τις Αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών παραμένουν ανθεκτικές, όπως είχε επισημανθεί και από τους Vlassis (2004) και MacGregor και Stacey (1997), οι οποίοι αναφέρουν ότι οι μαθητές συχνά προσδίδουν λανθασμένο νόημα στα σύμβολα και τις πράξεις, επηρεαζόμενοι από προϋπάρχουσες αριθμητικές αντιλήψεις.

Επιπλέον, τα αποτελέσματα σχετικά με την επίδραση των *πλαισιοποιημένων* ασκήσεων συμφωνούν με τη διεθνή βιβλιογραφία, που τονίζει τη σημασία του πλαισίου για την ενεργοποίηση γνωστικών πόρων και τη διευκόλυνση της Εννοιολογικής Αλλαγής (Nunes et al., 1993). Ωστόσο, όπως και στη μελέτη των Carraher et al. (2000), διαπιστώνεται ότι το πλαίσιο δεν αρκεί από μόνο του για την υπέρβαση βαθιά ριζωμένων παρανοήσεων, αλλά μπορεί να λειτουργήσει υποστηρικτικά σε περιπτώσεις ήπιων γνωστικών εμποδίων. Η διαφοροποίηση της επίδρασης του πλαισίου ανάλογα με το γνωστικό υπόβαθρο των μαθητών/τριών επιβεβαιώνει τα ευρήματα των Hiebert και Lefevre (1986), σύμφωνα με τα οποία η εννοιολογική κατανόηση απαιτεί τόσο γνωστική ευελιξία όσο και επαρκές υπόβαθρο.

Όσον αφορά τη Διαχείριση Αλγεβρικών Πράξεων, τα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης εναρμονίζονται με εκείνα των Blanton και Kaput (2005), που επισημαίνουν τη δυσκολία των μαθητών να μεταφέρουν αλγεβρικές γνώσεις σε σύνθετα ή πραγματικά πλαίσια, γεγονός που υπογραμμίζει την ανάγκη για συστηματική εξάσκηση στη μαθηματική μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.

Τέλος, η διαπίστωση ότι οι μαθητές με υψηλότερες ακαδημαϊκές επιδόσεις επωφελούνται περισσότερο από τις *πλαισιοποιημένες* ασκήσεις συνάδει με τα συμπεράσματα των Star και Rittle-Johnson (2008), οι οποίοι τονίζουν τη σημασία της διαφοροποιημένης διδασκαλίας και της ενίσχυσης της μεταγνωστικής επίγνωσης για την προώθηση της Εννοιολογικής Αλλαγής.

Συνολικά, η παρούσα μελέτη επιβεβαιώνει τη διαχρονικότητα και την πολυπλοκότητα των γνωστικών εμποδίων κατά τη μετάβαση στην αλγεβρική σκέψη, ενώ παράλληλα αναδεικνύει τη σημασία της στοχευμένης και διαφοροποιημένης διδακτικής παρέμβασης, της αξιοποίησης *πλαισιοποιημένων* δραστηριοτήτων και της συνεχούς εξοικείωσης των μαθητών και των μαθητριών με πολλαπλά γνωστικά πλαίσια. Πριν όμως εξαχθούν γενικεύσεις, είναι σημαντικό να ληφθούν υπόψη ορισμένοι περιορισμοί της μελέτης

7.2. Περιορισμοί της Έρευνας

Η παρούσα μελέτη συνοδεύεται από ορισμένους περιορισμούς, οι οποίοι θα πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά την ερμηνεία των αποτελεσμάτων και την εξαγωγή γενικευμένων συμπερασμάτων. Πρώτον, τα δεδομένα προέρχονται αποκλειστικά από μαθητές ενός μόνο σχολείου, το οποίο βρίσκεται στην πρωτεύουσα του Νομού Ιωαννίνων. Ο γεωγραφικός και δειγματοληπτικός αυτός περιορισμός μειώνει τον βαθμό αντιπροσωπευτικότητας του δείγματος και καθιστά πιο δύσκολη την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων για το σύνολο του μαθητικού πληθυσμού.

Επιπλέον, η έρευνα επικεντρώθηκε σε μαθητές και μαθήτριες μίας μόνο τάξης του Λυκείου. Η επέκταση της μελέτης και στις υπόλοιπες τάξεις θα μπορούσε να προσφέρει μια πιο σφαιρική και πολυδιάστατη εικόνα για την εξέλιξη της αλγεβρικής σκέψης σε διαφορετικά στάδια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Ακόμη, η προσέγγιση που ακολουθήθηκε στηρίχθηκε αποκλειστικά σε ποσοτικά δεδομένα, χωρίς να αξιοποιηθούν ποιοτικές μέθοδοι, όπως συνεντεύξεις, παρατηρήσεις ή αναλύσεις μαθητικών εργασιών. Η ενσωμάτωση τέτοιων μεθόδων θα μπορούσε να φωτίσει βαθύτερες πτυχές των μαθητικών στρατηγικών, των εννοιολογικών παρανοήσεων και των γνωστικών δυσκολιών.

Τέλος, κάθε μία από τις επιμέρους θεματικές ενότητες της έρευνας – Αναπαραστάσεις, Διάταξη και Διαχείριση Πράξεων – θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο εξειδικευμένης και εις βάθος μελέτης. Η ανάπτυξη περισσότερων και στοχευμένων δραστηριοτήτων ανά θεματική θα επέτρεπε την ακριβέστερη αποτύπωση τόσο των δυσκολιών όσο και των δυνατοτήτων γνωστικής ενίσχυσης σε κάθε πεδίο.

Συνοψίζοντας, οι παραπάνω περιορισμοί αναδεικνύουν την ανάγκη για περαιτέρω έρευνες με ευρύτερα και πιο ποικιλόμορφα δείγματα, την αξιοποίηση μικτών μεθοδολογιών και την εστίαση σε συγκεκριμένα εννοιολογικά πεδία. Με βάση αυτά τα συμπεράσματα, κρίνεται ουσιαστικό να διερευνηθούν διδακτικές προσεγγίσεις που μπορούν να υποστηρίξουν αποτελεσματικά τη μετάβαση από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη.

7.3. Εφαρμογές των αποτελεσμάτων της έρευνας στη διδασκαλία

Η Εννοιολογική Αλλαγή στα μαθηματικά είναι μια σύνθετη διαδικασία, που απαιτεί διδακτικές πρακτικές οι οποίες ενθαρρύνουν την ενεργό συμμετοχή των μαθητών και των μαθητριών, υποστηρίζονται από τον/την εκπαιδευτικό και επιτρέπουν την αμφισβήτηση, την αποτυχία και την αναδόμηση της γνώσης. Σύμφωνα με τους Vosniadou et al. (2001, όπως αναφέρεται στο van Dooren et al., 2004), η επίτευξη αυτού του στόχου προϋποθέτει:

- Διερεύνηση των προϋπαρχουσών αντιλήψεων μέσω ερωτήσεων και ανάλυσης λαθών,
- Ρητή αντιμετώπιση των προκαταλήψεων μέσα από συζητήσεις και ομαδική εργασία,
- Χρήση αναπαραστάσεων (διαγράμματα, γραφήματα, προσομοιώσεις),
- Σχεδιασμό προβλημάτων που προκαλούν τις υπάρχουσες αντιλήψεις και ενισχύουν τη μεταγνώση.

Η Εννοιολογική Αλλαγή δεν περιορίζεται στη διόρθωση λαθών, αλλά απαιτεί την αναδόμηση νοητικών μοντέλων. Παρανοήσεις όπως η Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού και η Παρανόηση του Φαινομενικού Προσήμου εμποδίζουν την κατανόηση των ρητών αριθμών και της Άλγεβρας (Thompson et al., 2023). Η έρευνα δείχνει ότι η ένταση αυτών των προκαταλήψεων εξαρτάται από τη φύση της εργασίας, π.χ. είναι εντονότερη σε προβλήματα πυκνότητας (Hoof et al., 2015).

Η αξιοποίηση *πλαισιοποιημένων* προβλημάτων, με σύνδεση σε εμπειρίες των μαθητών, βοηθά στην αποδόμηση εδραιωμένων αντιλήψεων, ενώ η συνεργατική μάθηση ενισχύει την κριτική σκέψη, την επικοινωνία και την εννοιολογική κατανόηση (Alibali & Sidney, 2015). Οι συζητήσεις γύρω από διαφορετικές στρατηγικές επιτρέπουν στους μαθητές να αναγνωρίσουν τα όρια της σκέψης τους και να αναπτύξουν εναλλακτικές προσεγγίσεις.

Παράλληλα, διδακτικές παρεμβάσεις που εστιάζουν στις διαφορές μεταξύ φυσικών και ρητών αριθμών, στις πράξεις και στην έννοια της πυκνότητας, μπορούν να ενισχύσουν τη

βαθύτερη κατανόηση (Kainulainen, 2017· Χρήστου, 2015). Ωστόσο, η επιτυχία τέτοιων παρεμβάσεων εξαρτάται από τον προσεκτικό σχεδιασμό των δραστηριοτήτων και την κατάλληλη επιμόρφωση των εκπαιδευτικών (McNeil & Alibali, 2005· Reinke, 2015).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι *πλαισιοποιημένες* και *συνεργατικές* διδακτικές προσεγγίσεις μπορούν να λειτουργήσουν ως καταλύτες Εννοιολογικής Αλλαγής, υπό την προϋπόθεση ότι εφαρμόζονται στοχευμένα και με κατάλληλη υποστήριξη. Η σταδιακή και υποστηριζόμενη μετάβαση από την αριθμητική στην αλγεβρική σκέψη προϋποθέτει αναστοχασμό, πολλαπλές στρατηγικές και ένα περιβάλλον όπου οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να ξανασκεφτούν, να συζητήσουν και να οικοδομήσουν τη γνώση εκ νέου.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ). (2023). *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Γενικού Λυκείου*. ΦΕΚ Β 1326/8-3-2023.
- Μαρής, Δ., & Χρήστου, Κ. (2019). Η μαθηματική λογοτεχνία ως εργαλείο για την κατανόηση των ρητών αριθμών. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (13), 46–67. <https://doi.org/10.12681/enedim.21967>
- Alibali, M. W., & Sidney, P. G. (2015). Variability in the natural number bias: Who, when, how, and why. *Learning and Instruction*, 37, 56–61. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.01.003>
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Developing elementary algebraic reasoning in the context of problem solving. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 321–357). Information Age Publishing.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5). <https://about.jstor.org/terms>
- Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(1), 39–87. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.1.0039>
- Booth, L. R. (1982). Developing a teaching module in beginning algebra. In *Proceedings of the 6th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 280–285). Antwerp.
- Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. NFER-Nelson
- Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In *The ideas of algebra*, K–12. National Council of Teachers of Mathematics.
- Booth, J. L., Barbieri, C., Eyer, F., & Paré-Blagoev, E. J. (2014). Persistent and pernicious errors in algebraic problem solving. *Journal of Problem Solving*, 7(1), 10–23. <https://doi.org/10.7771/1932-6246.1161>
- Bosch, M., Gutiérrez, A., & Llinares, S. (2024). A survey of Spanish research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 56, 1029–1044. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01638-z>
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. M. (2005). Chapter 1: Treating the operations of arithmetic as functions. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, 13
- Carraher, D., Schliemann, A., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(2), 87–115. <https://doi.org/10.2307/30034843>

- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. M. (2021). Early algebra and mathematical generalization. *Mathematics*, 9(17), 2117. <https://doi.org/10.3390/math9172117>
- Carey, S. (1985). *Conceptual change in childhood*. MIT Press
- Christou, K., & Vosniadou, S. (2005). How students interpret literal symbols in algebra: A conceptual change approach. Retrieved from <http://csjarchive.cogsci.rpi.edu/proceedings/2005/forms/index.htm>
- Christou, K., Vosniadou, S., & Vamvakoussi, X. (2007). Students' interpretations of literal symbols in algebra. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Re-framing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 283–297). Elsevier.
- Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM – Mathematics Education*, 47(5). <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0675-6>
- Christou, K. P., Pollack, C., van Hoof, J., & van Dooren, W. (2020). Natural number bias in arithmetic operations with missing numbers – a reaction time study. *Journal of Numerical Cognition*, 6(1). <https://doi.org/10.5964/jnc.v6i1.228>
- Christou, K. P., Kyrvei, D. I., & Vamvakoussi, X. (2022). Interpreting literal symbols in algebra under the effects of the natural number bias. *Mathematical Thinking and Learning*. <https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2128276>
- Gallardo, A., & Rojano, T. (1994). School algebra as the extension of arithmetic: A study of 12–13-year-old students.
- Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 49(2). <https://doi.org/10.1023/A:1016210906658>
- Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225–274). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (2013). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. <https://doi.org/10.4324/9780203063538>
- Kainulainen, M., McMullen, J., & Lehtinen, E. (2017). Early developmental trajectories toward concepts of rational numbers. *Cognition and Instruction*, 35(1). <https://doi.org/10.1080/07370008.2016.1251287>
- Khalid, M., Yakop, F. H., & Ibrahim, H. (2020). Year 7 students' interpretation of letters and symbols in solving routine algebraic problems. *Qualitative Report*, 25(11). <https://doi.org/10.46743/2160-3715/2020.4062>

- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). New York, NY: Macmillan.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *Mathematics Educator*, 8(1).
- Kieran, C. (2018). The early learning of algebra: A structural perspective. In *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra: The Research Agenda for Mathematics Education, Volume 4*. <https://doi.org/10.4324/9781315044378-4>
- Kuhn, T. (Ed.) (1970). *The structure of scientific revolutions* (2nd ed.). Chicago: Chicago Press. (First edition: 1962).
- Lee, J., Collins, D., & Melton, J. (2016). What does algebra look like in early childhood? *Childhood Education*, 92(4), 305–310. <https://doi.org/10.1080/00094056.2016.1208009>
- Leinonen, J., Denny, P., & Whalley, J. (2021). Exploring the effects of contextualized problem descriptions on problem solving. *ACM International Conference Proceeding Series*, 30–39. <https://doi.org/10.1145/3441636.3442302>
- Lucariello, J., Tine, M. T., & Ganley, C. M. (2014). A formative assessment of students' algebraic variable misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior*, 33(1). <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.09.001>
- Maracchia, S. (2013). The importance of symbolism in the development of algebra. *Lettera Matematica*, 1(3), 137–144. <https://doi.org/10.1007/s40329-013-0024-y>
- MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, 33. Kluwer Academic Publishers
- Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In *Reconsidering Conceptual Change: Issues in Theory and Practice*. https://doi.org/10.1007/0-306-47637-1_13
- Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: Towards a systemic model of the processes of change. *Learning and Instruction*, 14(5 SPEC.ISS.), 519–534. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.016>
- Meyer, A. (2013, Feb. 6-10). Algebraic thinking and formalized mathematics-formal reasoning and the contextual [Paper presentation]. CERME8, Manavgat-Side, Turkey. http://www.cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG3/WG3_Meyer.pdf
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Nunes, T., Schliemann, A., & Carraher, D. (1993). Street Mathematics and School Mathematics. <https://www.researchgate.net/publication/243772046>
- Obersteiner, A., Hoof, J. van, Verschaffel, L., & Dooren, W. van. (2016). Who can escape the natural number bias in rational number tasks? A study involving students and experts. *British Journal of Psychology*, 107(3), 537–555. <https://doi.org/10.1111/bjop.12161>
- Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W., & Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, 66(2), 211–227. <https://doi.org/10.1002/sce.3730660207>

- Rubenstein, R. N., & Thompson, D. R. (2020). Discuss with your colleagues: Learning mathematical symbolism: Challenges and instructional strategies. *The Mathematics Teacher*, 94(4). <https://doi.org/10.5951/mt.94.4.0265>
- Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being—or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 37–98). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification - The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2–3). <https://doi.org/10.1007/BF01273663>
- Stacey, K., & MacGregor, M. (2020). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher*, 90(2). <https://doi.org/10.5951/mt.90.2.0110>
- Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction*, 18(6). <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.018>
- Strike, K. A., & Posner, G. J. (1992). A revisionist theory of conceptual change. In R. A. Duschl & R. J. Hamilton (Eds.), *Philosophy of science, cognitive psychology, and educational theory and practice* (pp. 147–176). Albany: SUNY Press.
- Thompson, C. A., Mielicki, M. K., Rivera, F., Fitzsimmons, C. J., Scheibe, D. A., Sidney, P. G., Schiller, L. K., Taber, J. M., & Waters, E. A. (2023). Leveraging math cognition to combat health innumeracy. *Perspectives on Psychological Science*, 18(1), 152–177. <https://doi.org/10.1177/17456916221083277>
- Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14(5). <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.013>
- van Dooren, W., Christou, K. P., & Vamvakoussi, X. (2010). Greek and Flemish students' interpretation of literal symbols as variables (Vol. 4).
- van Hoof, J., Verschaffel, L., & van Dooren, W. (2015). Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: Characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education. *Educational Studies in Mathematics*, 90(1). <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9613-3>
- van Hoof, J., Verschaffel, L., de Neys, W., & van Dooren, W. (2020). Intuitive errors in learners' fraction understanding: A dual-process perspective on the natural number bias. *Memory and Cognition*, 48(7). <https://doi.org/10.3758/s13421-020-01045-1>
- Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in “negativity.” *Learning and Instruction*, 14(5). <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.012>
- Vosniadou, S. (1994). Capturing and modeling the process of conceptual change. *Learning and Instruction*, 4(1). [https://doi.org/10.1016/0959-4752\(94\)90018-3](https://doi.org/10.1016/0959-4752(94)90018-3)
- Vosniadou, S., Ioannides, C., Dimitrakopoulou, A., & Papademetriou, E. (2001). Designing learning environments to promote conceptual change in science. *Learning and Instruction*, 11(4–5). [https://doi.org/10.1016/S0959-4752\(00\)00038-4](https://doi.org/10.1016/S0959-4752(00)00038-4)

Vygotsky, L. (1997). *Pensée & Langage* (F. Sève, Trad.). (3rd ed.). Paris: La Dispute.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ερωτηματολόγιο

Ονοματεπώνυμο:

Βαθμός Μαθηματικών

☐ μικρότερος από 13,9

☐ από 14 έως 16,9

☐ από 17 έως 20

Τετραμήνιο:

Στις ερωτήσεις από 1 έως και 6 επιλέξτε μία ή περισσότερες σωστές απαντήσεις:

1. Το 2α μπορεί να είναι:

☐ 8 ☐ -4 ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ -3,8 ☐ 2,5 ☐ $-\frac{2}{3}$ ☐ όλες οι επιλογές

2. Από μία υπαίθρια δεξαμενή χάθηκαν από διαρροή, β λίτρα (lt) νερού και επιπλέον 5 από εξάτμιση. Η ποσότητα νερού -β-5 που χάθηκε, ΔΕΝ μπορεί να είναι:

☐ 750 lt ☐ $\frac{1977}{3}$ lt ☐ -1530 lt ☐ 251,6 lt ☐ $-\frac{917}{5}$ lt ☐ -343,7 lt ☐ μπορεί να είναι όλες οι επιλογές

3. Το $\frac{3}{4}x + 5$ μπορεί να είναι:

☐ 8 ☐ -11,8 ☐ $-\frac{7}{8}$ ☐ 12,5 ☐ -11 ☐ $\frac{3}{4}$ ☐ όλες οι επιλογές

4. Για την παρασκευή 6 κρεπών απαιτούνται α γραμμάρια (gr) ζάχαρης, ενώ αν φτιάξουμε δυτλή δόση θα χρειαστούν 2α γραμμάρια (gr) ζάχαρης. Το 2α μπορεί να είναι:

☐ 80 gr ☐ -88,3 gr ☐ $-\frac{2}{3}$ Kg ☐ 153,6 gr ☐ -120 gr ☐ $\frac{3}{4}$ Kgr ☐ όλες οι επιλογές

5. Το -γ-8 ΔΕΝ μπορεί να είναι:

☐ 9 ☐ -11,8 ☐ $-\frac{7}{8}$ ☐ 12,5 ☐ -5 ☐ $\frac{10}{9}$ ☐ μπορεί να είναι όλες οι επιλογές

6. Οι ερευνητές ενός μετεωρολογικού σταθμού στην Φινλανδία μελέτησαν τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο Ελσίνκι (α) και στο Ροβανιέμι (β) της Φινλανδίας κατά την διάρκεια του χειμώνα, και διαμόρφωσαν τη σχέση $\beta = \frac{5\alpha}{6} + 2,3$. Το β μπορεί να είναι:

☐ -6 °C ☐ $\frac{102}{9}$ °C ☐ -2,8 °C ☐ 25 °C ☐ $-\frac{91}{18}$ °C ☐ 14,5 °C ☐ όλες οι επιλογές

7. Αν x φυσικός, μη μηδενικός αριθμός, να γράψετε την ακόλουθη τριάδα από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο αριθμό:

$\frac{7}{6}x$ $\frac{6}{7}x$ x

8. Τα παιδιά της κας Αθηνάς της ζήτησαν να φτιάξει ένα κέικ όσο το δυνατόν πιο σοκολατένιο. Ψάχνοντας για συνταγές εντόπισε τρεις. Κάθε μία από αυτές απαιτούσε διαφορετική ποσότητα λιωμένης σοκολάτας μετρημένη με ένα φλιτζάνι β γραμμαρίων. Μπορείτε να ταξινομήσετε την ποσότητα σοκολάτας από την μικρότερη στην μεγαλύτερη για να βοηθήσετε την κα Αθηνά να αποφασίσει;

1^η Συνταγή

2^η Συνταγή

3^η Συνταγή

$\frac{3\beta}{4}$ φλ.

$\frac{\beta}{2}$ φλ.

$\frac{2\beta}{3}$ φλ.

9. Αν y φυσικός, μη μηδενικός αριθμός, να γράψετε την ακόλουθη τριάδα από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο αριθμό:

$$y \qquad \frac{9y}{8} \qquad \frac{5y}{6} \qquad \dots\dots\dots$$

10. Ο κύριος Βαγγέλης, ο ξυλουργός, χρησιμοποιεί στο εργαστήριό του δοκούς μήκους α μέτρων (m). Αν του έχουν περισσέψει ξύλινοι δοκοί μήκους $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{3\alpha}{5}$ και $\frac{3\alpha}{4}$ μπορείτε να τις γράψετε από την μεγαλύτερη προς την μικρότερη, χωρίς να τις έχετε δει;

$$\frac{\alpha}{2} \text{ m} \qquad \frac{3\alpha}{4} \text{ m} \qquad \frac{3\alpha}{5} \text{ m} \qquad \dots\dots\dots$$

11. Να γίνουν οι πράξεις:

$$3x + y - 5x = \dots\dots\dots$$

12. Αν η Αγγελική διαθέτει 410 ευρώ και αποφάσισε να αγοράσει δύο μπλούζες αξίας x ευρώ η κάθε μία, ένα παντελόνι αξίας $3x$ ευρώ και ένα φόρεμα αξίας y ευρώ, πόσα χρήματα θα της περισσέψουν; **(Να γίνουν και οι πράξεις όπου είναι εφικτό).**

.....

13. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\beta - \frac{1}{4}\beta = \dots\dots\dots$$

14. Στο μάθημα της Περιβαλλοντικής Εκπαίδευσης, η Κατερίνα δήλωσε ότι σε διάστημα μίας εβδομάδας, κατάφερε να μειώσει το ενεργειακό της αποτύπωμα άνθρακα α , κατά τα $\frac{2}{3}$ αυτού. Πώς γράφεται το νέο ενεργειακό της αποτύπωμα; **(Να γίνουν και οι πράξεις όπου είναι εφικτό).**

.....

Ευχαριστούμε για την συμμετοχή σας!