



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Μαρία Ζυγόρη

---

ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΥΔΑΤΙΝΑ ΚΥΜΑΤΑ  
ΥΠΟ ΤΗΝ ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΣΤΡΟΒΙΛΙΣΜΟΥ

---

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2025





UNIVERSITY OF IOANNINA  
Department of Mathematics



Maria Zygori

---

PERIODIC WATER WAVES  
UNDER THE PRESENCE OF VORTICITY

---

Master's Thesis

Ioannina, 2025



Στη μητέρα και τον πατέρα μου



Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα Μαθηματικά που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 24/01/2025 από την εξεταστική επιτροπή:

|                                             |                                                        |
|---------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| Γιαννούλης Ιωάννης<br>Ιωαννίνων (Επιβλέπων) | Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο |
| Μαυρίδης Κυριάκος                           | Λέκτορας, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων    |
| Πουρναράς Ιωάννης                           | Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων   |

#### ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διπλωματική εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.

Μαρία Ζυγόρη





---

# ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

---

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα της Διπλωματικής Εργασίας, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Ιωάννη Γιαννούλη, για την ευκαιρία που μου προσέφερε να ασχοληθώ με το παρόν θέμα, την πολύτιμη καθοδήγησή του, την ανεξάντλητη υπομονή του και την καθοριστική συμβολή του στην αντιμετώπιση των προβλημάτων που ανέκυψαν κατά τη συγγραφή της εργασίας. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα μέλη της Τριμελούς Επιτροπής, Καθηγητή κ. Ιωάννη Πουρναρά και Λέκτορα κ. Κυριάκο Μαυρίδη, για τις ενδιαφέρουσες επισημάνσεις τους. Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την αμέριστη στήριξή τους, χάρη στην οποία έχω τη χαρά και την τιμή να επιτυγχάνω τους στόχους μου.



---

# ΠΕΡΙΛΗΨΗ

---

Αντικείμενο της παρούσας διατριβής είναι η εφαρμογή ενός αποτελέσματος της Τοπικής Θεωρίας Διακλάδωσης, μιας υποπεριοχής της Μη Γραμμικής Συναρτησιακής Ανάλυσης, σε ένα πρόβλημα υδάτινων κυμάτων.

Πιο συγκεκριμένα, στη διατριβή αποδεικνύεται η ύπαρξη σταθερών περιοδικών οδευόντων υδάτινων κυμάτων πεπερασμένου βάθους υπό την επίδραση της βαρύτητας και υπό την παρουσία στροβιλισμού, τα οποία είναι μη τετριμμένα και έχουν μικρό πλάτος, αλλά συγκεκριμένη μορφή.

Στο πρώτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται καταρχάς το πρόβλημα και το αποτέλεσμα που αποδεικνύεται. Εν συνεχεία, το πρόβλημα αυτό, που είναι αρχικά ένα πρόβλημα ελεύθερου συνόρου, μετασχηματίζεται σε ένα πρόβλημα πάνω από ένα σταθερό πεπερασμένο χωρίο για μία οιονεί-γραμμική ελλειπτική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με εν μέρει πλήρως μη γραμμικές συνοριακές συνθήκες πρώτης τάξης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, αποδεικνύεται καταρχάς η ύπαρξη μίας μονοπαραμετρικής οικογένειας τετριμμένων λύσεων του προβλήματος. Εν συνεχεία, το πρόβλημα μεταφράζεται στη γλώσσα κατάλληλων χώρων και τελεστών και εφαρμόζεται το Θεώρημα Crandall-Rabinowitz της τοπικής Θεωρίας Διακλάδωσης για να αποδειχθεί ότι από μία συγκεκριμένη τιμή αυτής της παραμέτρου διακλαδώνεται μία χαμπύλη μη τετριμμένων λύσεων. Το δεύτερο κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τη μελέτη της μορφής των λύσεων αυτών.

Η εργασία αυτή στηρίχθηκε στο άρθρο των Constantin A., Strauss W.: *Exact Steady Periodic Water Waves with Vorticity*, *Comm. Pure Appl. Math.* 57, 481–527, 2004 [3] καθώς και στο βιβλίο του Constantin A.: *Nonlinear water waves with applications to wave-currents interactions and tsunamis*, SIAM, 2011 [5].



---

# ABSTRACT

---

The subject matter of the present thesis is the application of a result of local bifurcation theory, a subfield of Nonlinear Functional Analysis, to a problem for water waves.

More precisely, in the thesis it is proven that there exist steady periodic traveling water waves of finite depth due to the impact of gravity and under the presence of vorticity, which are non-trivial and of small amplitude, but of a certain form.

In the first chapter, at first the problem and the obtained result are presented. Then, this problem, which is initially a free boundary problem, is transformed into a problem over a fixed bounded domain for a quasi-linear elliptic partial differential equation of second order which has partly non-linear first order boundary conditions.

In the second chapter, at first it is proven that there exists a one-parametric family of trivial solutions of the problem. Then, the problem is translated into the language of suitable spaces and operators and the Crandall-Rabinowitz Theorem of local bifurcation theory is applied in order to prove that from a certain value of this parameter bifurcates a curve of non-trivial solutions. The second chapter is completed with a study of the form of these solutions.

This thesis was based on the article Constantin A., Strauss W.: Exact Steady Periodic Water Waves with Vorticity, *Comm. Pure Appl. Math.* 57, 481–527, 2004 [3] and the book Constantin A.: *Nonlinear water waves with applications to wave-currents interactions and tsunamis*, SIAM, 2011 [5].



---

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

---

|          |                                                      |           |
|----------|------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Εισαγωγή</b>                                      | <b>3</b>  |
| 1.1      | Η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος . . . . . | 4         |
| 1.2      | Ισοδύναμη διατύπωση του προβλήματος . . . . .        | 9         |
| <b>2</b> | <b>Τοπική Διακλάδωση</b>                             | <b>23</b> |
| 2.1      | Προκαταρκτικά . . . . .                              | 23        |
| 2.2      | Διακλάδωση . . . . .                                 | 36        |
| 2.3      | Μορφή των λύσεων . . . . .                           | 45        |
|          | <b>Βιβλιογραφία</b>                                  | <b>50</b> |





# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το 1847 ο Stokes [17] μελέτησε τα περιοδικά κύματα νερού που ταξιδεύουν με περιστροφική κίνηση και μερικές από τις μη γραμμικές προσεγγίσεις τους. Οι πρώτες αυστηρές κατασκευές τέτοιων λύσεων, με χρήση σειρών, διατυπώθηκαν τη δεκαετία του 1920 στο έργο των Nekrasov [16], Levi-Civita [13] και Struik [18]. Αυτές οι κατασκευές ήταν τοπικές, υπό την έννοια ότι τα προφίλ των κυμάτων ήταν σχεδόν επίπεδα. Κατασκευές των περιστροφικών κυμάτων μεγάλου πλάτους επιχειρήθηκαν πρώτη φορά από τον Krasovskii [12] το 1961. Τα αποτελέσματα αυτά βελτιώθηκαν σημαντικά από τους Keady και Norbury [11] το 1978, χρησιμοποιώντας τις μεθόδους της θεωρίας ολικής διακλάδωσης. Λίγο αργότερα, αποδείχθηκε από τους Toland [20] και McLeod ([14], [15]) ότι στην κλειστότητα του συνεχούς (continuum) των λύσεων που βρέθηκαν στο [11], υπάρχουν κύματα με σημεία στασιμότητας (stagnation points), δηλαδή σημεία όπου η κατακόρυφη συνιστώσα του πεδίου ταχύτητας του ρευστού είναι μηδενική, ενώ η οριζόντια συνιστώσα ισούται με την ταχύτητα του προφίλ του κύματος, στις κορυφές τους. Στη φύση παρατηρούνται συνήθως κύματα με στροβιλισμό (περιστροφικά κύματα), όπως για παράδειγμα σε διατμητικά ρεύματα (τρεχούμενο νερό με ανομοιόμορφη ταχύτητα). Επιπλέον, σε κάθε περιοχή όπου πνέει άνεμος, υπάρχει επιφανειακή μετατόπιση του νερού. Η παραδοχή της μη περιστροφικής ροής είναι ακατάλληλη για τέτοιες καταστάσεις, παρόλο που είναι κατάλληλη για κύματα που προχωρούν σε ακίνητο νερό [10],[19]. Το 1802 ο Gerstner [8] κατασκεύασε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα περιοδικού κύματος που ταξιδεύει σε νερό άπειρου βάθους με συγκεκριμένη μη μηδενική στροβιλότητα. Το 1934 η Dubreil-Jacotin [7] εξέτασε το πρόβλημα της ύπαρξης σταθερών, περιοδικών, υδάτινων κυμάτων με γενική στροβιλότητα και χρησιμοποιώντας δυναμοσειρές, κατασκεύασε λύσεις που είναι κοντά σε μια επίπεδη επιφάνεια. Η ύπαρξη τέτοιων κυμάτων που είναι κανονικά (διδιάστατα περιοδικά επιφανειακά κύματα που ταξιδεύουν με σταθερή ταχύτητα, με μία κορυφή ανά περίοδο και ένα προφίλ που φθίνει από την κορυφή προς την κοιλάδα) είναι ακόμα ένα αμφιλεγόμενο θέμα. Γενικά, έχει αποδειχθεί η ύπαρξη

πολλών τέτοιων κανονικών κυμάτων κατασκευάζοντας το ολικό συνεχές (global continuum) κανονικών λύσεων με γενική στροβιλικότητα. Ένα μέρος αυτών των αποτελεσμάτων που περιέχονται στα [3] και [5], ανακοινώθηκε στο [4].

## 1.1 Η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος

Εξετάζουμε το κλασικό πρόβλημα των κυμάτων που οδεύουν στην ελεύθερη επιφάνεια νερού πάνω από έναν επίπεδο πυθμένα (flat bed). Στη μαθηματική διατύπωση, το πρόβλημα είναι η εύρεση λύσεων της εξίσωσης Euler για το πεδίο ταχύτητας  $(u, v)$  και το πεδίο πίεσης  $P$ , δεδομένων των σχετικών συνοριακών συνθηκών, σε ένα άγνωστο πεδίο στο επίπεδο.

Το πρόβλημα των υδάτινων κυμάτων συνίσταται στην περιγραφή της κίνησης του νερού υπό την επίδραση της βαρύτητας, σε περιοχή που οριοθετείται μεταξύ του σταθερού πυθμένα και της ελεύθερης επιφάνειας που το χωρίζει από το κενό (δηλαδή από ένα ρευστό του οποίου η πυκνότητα θεωρείται αμελητέα, όπως για παράδειγμα ο αέρας· η ελεύθερη επιφάνεια είναι τότε η διεπιφάνεια αέρα-νερού).

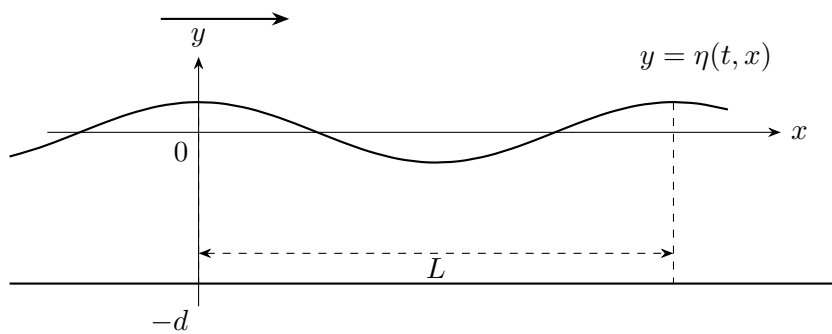
Για το νερό -έτσι θα ονομάζουμε ενίοτε το υγρό(fluid)- και τη ροή (flow) γίνονται οι ακόλουθες παραδοχές:

1. Το νερό είναι ομογενές και μη ιξώδες (inviscid).
2. Το νερό είναι ασυμπίεστο.
3. Η ροή είναι μη περιστροφική.
4. Η επιφάνεια και ο πυθμένας μπορούν να παραμετροποιηθούν ως γραφικές παραστάσεις πάνω από τη στάθμη του ήρεμου νερού.
5. Τα σωματίδια του νερού δε διαπερνούν τον πυθμένα.
6. Τα σωματίδια του νερού δε διαπερνούν την επιφάνεια.
7. Δεν υπάρχει επιφανειακή τάση και η εξωτερική πίεση είναι σταθερή.
8. Το νερό ηρεμεί στο άπειρο.
9. Το βάθος του νερού οριοθετείται πάντοτε από κάτω με μια μη αρνητική σταθερά.

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- α. Οι παραδοχές (1) και (2) υποδηλώνουν ότι η κίνηση του νερού διέπεται από την ασυμπίεστη εξίσωση Euler στο εσωτερικό του πεδίου του.
- β. Η παραδοχή (3) για την έλλειψη περιστροφικότητας είναι χρήσιμη, αλλά όχι απαραίτητη. Στην παρούσα εργασία η (3) δεν απαιτείται.
- γ. Η υπόθεση (4) αποκλείει το ενδεχόμενο τα κύματα να «σπάνε» (overhanging waves).
- δ. Οι υποθέσεις (5) και (6) παρέχουν τις συνοριακές συνθήκες στις εξισώσεις Euler: η (5) συνεπάγεται ότι η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας πρέπει να εξαφανίζεται στον πυθμένα, ενώ η (6) παρέχει μια (μη γραμμική) κινηματική οριακή συνθήκη στην επιφάνεια.

Η κίνηση είναι πανομοιότυπη σε οποιαδήποτε κατεύθυνση παράλληλη προς τη γραμμή κορυφής, δηλαδή το γράφημα της συνάρτησης  $y = \eta(t, x)$ , οπότε αρκεί να αναλυθεί μια διατομή της ροής που είναι κάθετη στις κορυφές των κυμάτων. Επιλέγουμε καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y)$ , έτσι ώστε ο οριζόντιος άξονας  $x$  να βρίσκεται στη διεύθυνση διάδοσης των κυμάτων, ο άξονας  $y$  να δείχνει κατακόρυφα προς τα πάνω και η αρχή να βρίσκεται στη μέση στάθμη του νερού. Στην αδιατάρακτη κατάσταση (χωρίς κύματα) η εξίσωση της επίπεδης επιφάνειας είναι  $y = 0$  και ο επίπεδος πυθμένας δίνεται από τη σχέση  $y = -d$ , για κάποιο  $d > 0$ . Με την παρουσία κυμάτων, έστω  $y = \eta(t, x)$  η ελεύθερη επιφάνεια και έστω  $(u(t, x, y), v(t, x, y))$  το πεδίο ταχύτητας.



Από την παραδοχή (1), η ιδιότητα της ομογένειας του νερού συνεπάγεται την εξίσωση διατήρησης της μάζας (mass conservation),

$$u_x + v_y = 0 \quad (1.1)$$

Από την ιδιότητα του μη ιζώδους του νερού, εξάγεται ότι η εξίσωση της κίνησης είναι η εξίσωση του Euler,

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vv_y = -P_x \\ v_t + uv_x + vv_y = -P_y - g \end{cases} \quad (1.2)$$

όπου  $P$  είναι η ατμοσφαιρική πίεση και  $g$  η βαρυτική σταθερά.

Η παραδοχή (7), συμβολίζοντας με  $P_{atm}$  την ατμοσφαιρική πίεση, μετασχηματίζεται στη μαθηματική έκφραση για τη δυναμική συνοριακή συνθήκη του προβλήματος,

$$P = P_{atm} \text{ στο } y = \eta(t, x) \quad (1.3)$$

Οι παραδοχές (5) και (6) συνεπάγονται τις κινηματικές συνοριακές συνθήκες του προβλήματος,

$$v = \eta_t + u\eta_x \text{ στο } y = \eta(t, x) \quad (1.4)$$

$$v = 0 \text{ στο } y = -d \quad (1.5)$$

Πράγματι, έστω  $H_t$  η υπερεπιφάνεια (εδώ: η καμπύλη) που δίνεται από τη σχέση  $\gamma(t, x, y) = 0$ . Έστω ότι η θέση κάθε σωματιδίου του νερού για κάθε χρόνο  $t$  δίνεται ως  $P(t) = (x(t), y(t))$ . Τότε, ένα σωματίδιο ανήκει στην υπερεπιφάνεια  $H_t$  αν-ν  $\gamma(t, P(t)) = 0$ , ενώ παραμένει σε αυτή για κάθε χρόνο  $t$  αν-ν  $\frac{d}{dt}\gamma(t, P(t)) = 0$ . Η τελευταία σχέση γράφεται αξιοποιώντας τον Κανόνα της Αλυσίδας ως  $\gamma_t + \frac{d}{dt}P(t) \cdot \nabla_{x,y}\gamma = 0$ , όπου  $\frac{d}{dt}P(t) = (u, v)$  το διάνυσμα ταχύτητας του σωματιδίου. Για την παραδοχή (5), δηλαδή για το γεγονός ότι το νερό δεν διαπερνά τον πυθμένα, θεωρούμε ως  $\gamma = y + d = 0$ , οπότε  $\frac{d}{dt}\gamma = 0$  και  $\nabla_{x,y}\gamma = (0, 1)$ , άρα από την παραπάνω σχέση εύκολα προκύπτει ότι  $v = 0$  στο  $y = -d$ . Ακριβώς αντίστοιχα, για την παραδοχή (6) θεωρούμε ως  $\gamma = y - \eta(t, x)$ , οπότε  $\frac{d}{dt}\gamma = -\eta_t$  και  $\nabla_{x,y}\gamma = (-\eta_x, 1)$ , άρα  $v = \eta_t + u\eta_x$  στο  $y = \eta(t, x)$ .

Έστω δοσμένο  $c > 0$ . Αναζητούμε περιοδικές λύσεις που ταξιδεύουν με ταχύτητα  $c$ , οπότε, η χωροχρονική εξάρτηση της ελεύθερης επιφάνειας, της πίεσης και της ταχύτητας έχει τη μορφή  $(x - ct)$ . Για ευκολία, θα θεωρήσουμε ότι η περίοδος του κύματος είναι  $L$ . Το προφίλ  $\eta$  που αναπαριστά την ελεύθερη επιφάνεια του νερού, ταλαντώνεται γύρω από την επίπεδη επιφάνεια  $y = \int_0^L \eta(x) dx = 0$ , και τέλος η οριζόντια ταχύτητα  $u$  του ρευστού είναι μικρότερη από το  $c$  σε κάθε σημείο.

Ορίζεται η σχετική συνάρτηση ροής (stream function) ως

$$\psi_x = -v, \quad \psi_y = u - c$$

και ο στροβιλισμός ως

$$\omega = v_x - u_y$$

Οπότε,

$$\Delta\psi = -\omega$$

Υπό την προϋπόθεση ότι  $u < c$  εγγυόμαστε ότι υπάρχει συνάρτηση  $\gamma$  που καλείται συνάρτηση στροβιλισμού, τέτοια ώστε

$$\omega = \gamma(\psi), \text{ σε όλο το υγρό}$$

Οπότε,

$$-\Delta\psi = \gamma(\psi) = \omega = v_x - u_y$$

Η ροή μάζας στο  $x = x_0$ , τη χρονική στιγμή  $t_0$  σε σχέση με την ομοιόμορφη ροή ταχύτητας  $c$  δίνεται από τη σχέση

$$\int_{-d}^{\eta(x_0 - ct_0)} [u(x_0 - ct_0, y) - c] dy$$

Οπότε, ορίζεται η σχετική ροή μάζας  $p_0$  ως

$$p_0 = \int_{-d}^{\eta(x)} [u(x, y) - c] dy$$

το οποίο είναι ανεξάρτητο του  $x$ , λόγω των σχέσεων (1.4), (1.5).

Εφόσον  $u < c$ , τότε  $p_0 < 0$ .

Η συνάρτηση ροής  $\psi$  προσδιορίζεται μοναδικά από μία σταθερά και λόγω των σχέσεων (1.4), (1.5) είναι σταθερή στην ελεύθερη επιφάνεια και κατ' επέκταση στον ελεύθερο πυθμένα. Επιλέγουμε  $\psi = 0$  στην ελεύθερη επιφάνεια, οπότε έχουμε  $\psi = -p_0$  στον επίπεδο πυθμένα, όπως θα δούμε παρακάτω. Έστω

$$\Gamma(p) = \int_0^p \gamma(-s) ds$$

Η ελάχιστη τιμή  $\Gamma_{min}$  της συνάρτησης  $\Gamma$  λαμβάνεται για  $p_0 \leq p \leq 0$ .

Έστω  $\overline{D_\eta}$  η κλειστότητα του συνόλου

$$D_\eta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}, -d < y < \eta(x)\}$$

Για ακέραιο  $m \geq 1$  και  $\alpha \in (0, 1)$ , ένα χωρίο  $D \subset \mathbb{R}^2$  είναι  $C^{m+\alpha}$ -χωρίο, αν κάθε σημείο του συνόρου του,  $\partial D$ , έχει μια περιοχή στην οποία το  $\partial D$  είναι το γράφημα μιας συνάρτησης με Hoelder-συνεχείς  $m$ -τάξης παραγώγους, με εκθέτη  $\alpha$ .

Ορίζουμε για ακέραιο  $m \geq 1$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  και  $C^{m+\alpha}$ -χωρίο  $D$ , τον χώρο  $C_{per}^{m+\alpha}$  των συναρτήσεων  $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  με Hoelder-συνεχείς παραγώγους τάξης  $m$ , με εκθέτη  $\alpha$  και  $L$ -περιοδικότητα ως προς την  $x$ -μεταβλητή. Ο συμβολισμός είναι εντελώς αντίστοιχος για την περίπτωση  $\alpha = 0$  και για Hoelder χώρους συναρτήσεων μίας μεταβλητής.

Το κύριο αποτέλεσμά μας είναι το εξής:

**Θεώρημα 1.1.1.** Δίνονται η ταχύτητα του κύματος  $c > 0$ , το μήκος κύματος  $L$  και η ροή μάζας  $p_0 < 0$ . Για σταθερά  $\alpha \in (0, 1)$ , έστω ότι η συνάρτηση  $\gamma \in C^{1+\alpha}([0, p_0])$  ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\int_{p_0}^0 \left[ \frac{4\pi^2(p - p_0)^2}{L^2} (2\Gamma(p) - 2\Gamma_{min})^{\frac{1}{2}} + (2\Gamma(p) - 2\Gamma_{min})^{\frac{3}{2}} \right] dp < gp_0^2 \quad (1.0)$$

Αναζητούμε  $L$ -περιοδικές οδεύουσες λύσεις του προβλήματος (1.1)-(1.5) που ταξιδεύουν με ταχύτητα  $c$  και με σχετική ροή μάζας  $p_0$  και συνάρτηση στροβιλισμού  $\gamma$  η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη (1.0), για τις οποίες ισχύει  $u < c$  σε όλο το υγρό.

Αποδεικνύεται ότι πράγματι υπάρχει ένα συνεκτικό σύνολο  $C$  τέτοιων λύσεων  $(u, v, \eta) \in C_{per}^{2+\alpha}(\bar{D}_\eta) \times C_{per}^{2+\alpha}(\bar{D}_\eta) \times C_{per}^{3+\alpha}(\mathbb{R})$  με τις ακόλουθες ιδιότητες:

i) Το σύνολο λύσεων  $C$  περιέχει μία τετριμμένη λύση στρωτής ροής, δηλαδή με  $\eta \equiv 0$  και καμπύλες ροής παράλληλες στον πυθμένα.

Επιπροσθέτως, κάθε μη τετριμμένη λύση  $(u, v, \eta) \in C$  ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

ii) οι  $u, v, \eta$  είναι  $L$ -περιοδικές ως προς τη  $x$ -μεταβλητή.

iii) εντός κάθε περιόδου, το προφίλ του κύματος  $\eta$  έχει μοναδικό μέγιστο (κορυφή) και μοναδικό ελάχιστο (κοιλιά). ας είναι η κορυφή του κύματος στο  $x = 0$ .

iv) οι  $u, \eta$  είναι συμμετρικές, ενώ η  $v$  αντισυμμετρική ως προς την ευθεία  $x = 0$ .

vi) ένα σωματίδιο νερού που βρίσκεται στο σημείο  $(x, y)$  με  $0 < x < \frac{L}{2}$  και  $y > -d$ , έχει θετική κάθετη συνιστώσα ταχύτητας  $v > 0$  και

vii)  $\eta'(x) < 0$  για  $x \in (0, \frac{L}{2})$ , δηλαδή το προφίλ κύματος είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση από την κορυφή στην κοιλιά.

## 1.2 Ισοδύναμη διατύπωση του προβλήματος

Όπως αναφέρθηκε στο κεντρικό αποτέλεσμα, αναζητούμε λύσεις της μορφής  $L$ -περιοδικών οδευόντων κυμάτων. Στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα (1.1)-(1.5) απλοποιείται σημαντικά απαλείφοντας τον παράγοντα του χρόνου θεωρώντας τον μετασχηματισμό  $(x - ct, y) \rightarrow (x, y)$ .

Τότε, το προηγούμενο σύστημα γράφεται ως

$$u_x + v_y = 0 \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} (u - c)u_x + vu_y = -P_x \\ (u - c)v_x + uv_y = -P_y - g \end{cases} \quad (1.2)$$

$$P = P_{atm} \text{ στο } y = \eta(t, x) \quad (1.3)$$

$$v = (u - c)\eta_x \text{ στο } y = \eta(t, x) \quad (1.4)$$

$$v = 0 \text{ στο } y = -d \quad (1.5)$$

Στο καινούριο σύστημα αναφοράς όπου η αρχή  $O(0, 0)$  κινείται στη διεύθυνση της διάδοσης του κύματος με ταχύτητα  $c$ , το κύμα είναι στάσιμο (stationary) και η ροή σταθερή (steady).

Σε αυτό το κινούμενο σύστημα αναφοράς, ορίζουμε τη συνάρτηση ροής (stream function)  $\psi$ , θέτοντας

$$\psi = 0 \text{ στην ελεύθερη επιφάνεια}$$

και απαιτώντας

$$\psi_x = -v, \quad \psi_y = u - c \quad (1.6)$$

Από τη σχέση (1.1) το  $\int_0^L v(\xi, y) d\xi$  είναι ανεξάρτητο του  $y$ .

Πράγματι,

$$\frac{d}{dy} \int_0^L v(\xi, y) d\xi = \int_0^L v_y(\xi, y) d\xi = - \int_0^L u_\xi(\xi, y) d\xi = -u(L, y) + u(0, y) = 0$$

καθώς  $u$  είναι περιοδική ως προς την  $x$  μεταβλητή.

Άρα, για κάθε  $y_1, y_2 \in [-d, \eta(x)]$  ισχύει

$$\int_0^L v(\xi, y_1) d\xi = \int_0^L v(\xi, y_2) d\xi$$

Άρα,

$$\int_0^L v(\xi, y) d\xi = \int_0^L v(\xi, -d) d\xi \stackrel{(1.5)}{=} \int_0^L 0 d\xi = 0$$

Από τη σχέση (1.6) η  $\psi$  είναι περιοδική ως προς  $x$ .

Πράγματι, είναι  $\psi_x = -v$  και  $\psi_y = u - c$ .

Οπότε,  $\int_0^L \psi_x(x, y) dx = - \int_0^L v(x, y) dx + c(y)$ .

Όπως ήδη αποδείξαμε,  $\int_0^L v(x, y) dx = 0$

Αφού,  $c'(y) = u - c$  τότε,

$$\int_{-d}^y c'(s) ds = \int_{-d}^y [u(x, s) - c] ds + C, \text{ για κάθε } y \in [-d, \eta(x)] \text{ και όπου } C : \text{ σταθερά}$$

Άρα,

$$\psi(x, y) = \int_{-d}^y [u(x, s) - c] ds + C$$

Όμως, για  $y = \eta(x)$  επιλέγουμε  $\psi(x, \eta(x)) = 0$ .

Άρα,

$$C = - \int_{-d}^{\eta(x)} [u(x, y) - c] dy = -p_0$$

Τελικά,

$$\psi(x, y) = -p_0 + \int_{-d}^y [u(x, s) - c] ds$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι  $\psi$  είναι  $L$ -περιοδική ως προς  $x$  μεταβλητή, εφόσον η  $u$  είναι  $L$ -περιοδική ως προς  $x$  μεταβλητή.

Η εξίσωση της κίνησης (1.2) με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες (1.3)-(1.5) μετασχηματίζονται σε

$$\begin{cases} \psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} = -P_x \\ -\psi_y \psi_{xx} + \psi_x \psi_{xy} = -P_y - g \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} \psi_x = -\psi_y \eta_x & \text{στο } y = \eta(x) \\ P = P_{atm} & \text{στο } y = \eta(x) \\ \psi_x = 0 & \text{στο } y = -d \end{cases}$$



Οι συναρτήσεις  $P$ ,  $\psi$ ,  $\eta$  απαιτείται να είναι  $L$ -περιοδικές και άρτιες ως προς την  $x$  μεταβλητή. Για τη μελέτη στην παρούσα εργασία, επιλέγουμε  $L = 2\pi$ .

Παρακάτω θα δείξουμε ότι  $\omega = \gamma(\psi)$  σε όλο το υγρό.

Οι παραπάνω συνθήκες συνόρου δείχνουν ότι η  $\psi$  είναι σταθερή στο  $y = \eta(x)$  και στο  $y = -d$ .

Κανονικοποιούμε την  $\psi$ , επιλέγοντας  $\psi = 0$  στο  $y = \eta(x)$ .

Ως συνέπεια του ορισμού του  $p_0$  έχουμε  $\psi = -p_0$  στο  $y = -d$ .

Έστω ότι η κορυφή του κύματος βρίσκεται στο  $x = 0$ .

Από τον νόμο του Bernoulli, η ποσότητα

$$E = \frac{(u - c)^2 + v^2}{2} + gy + P - \Gamma(-\psi)$$

είναι σταθερή σε όλο το υγρό, όπου

$$\Gamma(p) = \int_0^p \gamma(-s)ds, \text{ για } p_0 \leq p \leq 0$$

Στην έκφραση της  $E$  οι πρώτοι τέσσερις όροι που προστίθενται είναι το σύνολο της μηχανικής ενέργειας της ροής.

$$\frac{(c - u)^2 + v^2}{2} : \text{κινητική ενέργεια}$$

$$gy : \text{δυναμική ενέργεια}$$

$$P : \text{ενέργεια της πίεσης του ρευστού που ασκείται σε ένα σωματίδιο}$$

Όταν  $y = \eta(x)$ ,

$$P = P_{atm}, \text{ από τη σχέση (1.3)}$$

$$\psi = 0, \text{ από τον ορισμό της } \psi$$

$$\Gamma(-\psi) = 0, \text{ από τον ορισμό της } \Gamma$$

οπότε, η  $E$  όταν αποτιμάται στην ελεύθερη επιφάνεια είναι

$$E = \frac{(u - c)^2 + v^2}{2} + gy + P_{atm}$$

Οπότε, η συνοριακή συνθήκη (1.3) είναι ισοδύναμη της έκφρασης

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 + 2g(y + d) = Q, \text{ στο } y = \eta(x),$$

όπου  $Q = 2(E - P_{atm} + gd)$ .

Η ποσότητα  $E$  και κατ' επέκταση το  $Q$  έχουν για κάθε ροή, μία σταθερή τιμή που θα θεωρηθεί παράμετρος για την οικογένεια λύσεων που θα κατασκευάσουμε.

Από τα παραπάνω έχουμε πλέον το πρόβλημα

$$\begin{cases} \Delta\psi = -\gamma(\psi) & \text{στο } -d < y < \eta(x) \\ |\nabla\psi|^2 + 2g(y+d) = Q & \text{στο } y = \eta(x) \\ \psi = 0 & \text{στο } y = \eta(x) \\ \psi = -p_0 & \text{στο } y = -d \end{cases} \quad (1.7)$$

για το οποίο αναζητούμε λύσεις στην κλάση των  $2\pi$ -περιοδικών και άρτιων συναρτήσεων ως προς την  $x$  μεταβλητή.

Οι βασικές δυσκολίες σχετικά με το (1.7) είναι ο μη γραμμικός χαρακτήρας του προβλήματος και το γεγονός ότι η ελεύθερη επιφάνεια του νερού  $y = \eta(x)$  είναι άγνωστη. Η τελευταία δυσκολία αντιμετωπίζεται εισάγοντας ένα μετασχηματισμό που εμπνεύστηκε η Dubreil-Jacotin [7].

Παρατηρούμε ότι η  $\psi$  είναι σταθερή και στην ελεύθερη επιφάνεια και στον πυθμένα. Επιπλέον, η  $\psi$  είναι μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ως προς  $y$ , από υπόθεση.

Πράγματι, για τυχόν αλλά σταθεροποιημένο  $x_0$ , έπεται από τον ορισμό της  $\psi$ ,

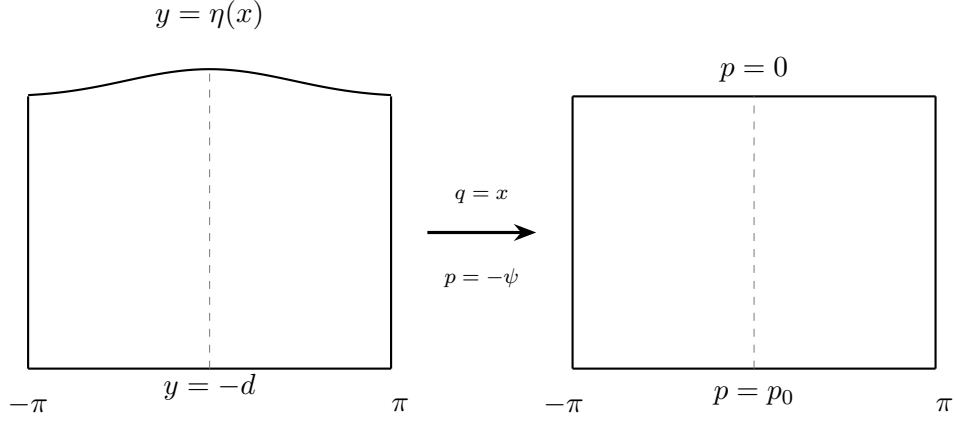
$$\begin{aligned} \psi(x_0, y_1) &> \psi(x_0, y_2), \text{ για κάθε } y_1 < y_2 \\ -p_0 + \int_{-d}^{y_1} [u(x_0, s) - c] ds &> -p_0 + \int_{-d}^{y_2} [u(x_0, s) - c] ds, \text{ για κάθε } y_1 < y_2 \\ \int_{-d}^{y_1} [u(x_0, s) - c] ds - \int_{-d}^{y_2} [u(x_0, s) - c] ds &> 0, \text{ για κάθε } y_1 < y_2 \\ \int_{y_2}^{y_1} [u(x_0, s) - c] ds &> 0, \text{ για κάθε } y_1 < y_2 \\ \int_{y_1}^{y_2} [c - u(x_0, s)] ds &> 0, \text{ για κάθε } y_1 < y_2 \end{aligned}$$

όπου το τελευταίο ισχύει γιατί η ποσότητα  $c - u(x_0, s)$  είναι παντού θετική στο χωρίο  $[y_1, y_2]$ .

Οπότε, για κάθε  $x$ , το ύψος  $h$  πάνω από τον πυθμένα είναι μια μονότιμη (single-valued) συνάρτηση του  $\psi$ .

Θέτουμε

$$q = x \text{ και } p = -\psi$$



και θεωρούμε τον μετασχηματισμό σε ένα μήκος κύματος, λόγω της περιοδικότητας του φαινομένου. Το μετασχηματισμένο χωρίο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και είναι γνωστό.

Το αρχικό υπό μελέτη χωρίο

$$\bar{D}_\eta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi \leq x \leq \pi \text{ και } -d \leq y \leq \eta(x)\}$$

μετασχηματίζεται στο

$$\bar{R} = \{(q, p) \mid -\pi \leq q \leq \pi \text{ και } 0 \leq p \leq -p_0\}$$

Έστω η συνάρτηση  $h(q, p) = y + d$ , που περιγράφει το ύψος από τον πυθμένα.

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$(x, y) \rightarrow (q, p) = (x, -\psi(x, y))$$

από το χωρίο  $\bar{D}_\eta$  στο χωρίο  $\bar{R}$ , η οποία είναι αμφιμονοσήμαντη, και την αντίστροφη της απεικόνιση από το  $\bar{R}$  στο  $\bar{D}_\eta$

$$(q, p) \rightarrow (x, y) = (q, h(q, p) - d)$$

Πράγματι, η  $\bar{P} : \bar{D}_\eta \rightarrow \bar{R}$  με  $\bar{P} := (q, p)$ , είναι η αντίστροφη της  $\bar{H} : \bar{R} \rightarrow \bar{D}_\eta$  με  $\bar{H} := (x, y)$  αφού για κάθε  $(x_1, y_1) \in \bar{D}_\eta$

$$\begin{aligned} ((x, y) \circ (p, q))(x_1, y_1) &= (x(q(x_1, y_1), p(x_1, y_1)), y(q(x_1, y_1), p(x_1, y_1))) \\ &= (x(x_1, -\psi(x_1, y_1)), y(x_1, -\psi(x_1, y_1))) = (x_1, h(x_1, -\psi(x_1, y_1)) - d) = (x_1, y_1) \end{aligned}$$

Άρα,

$$Id(x, y) = ((x, y) \circ (q, p))(x, y), \quad \forall (x, y) \in \bar{D}_\eta$$

Οπότε, από τον Κανόνα της Αλυσίδας, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{(x,y)} Id &= \mathbb{J}_{(q,p)} \bar{H} \mathbb{J}_{(x,y)} \bar{P} \\ \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h_q & h_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\psi_x & -\psi_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Απ' όπου

$$h_q - h_p \psi_x = 0 \iff h_q = \frac{-\psi_x}{\psi_y} = \frac{v}{u - c}$$

$$-h_p \psi_y = 1 \iff h_p = -\frac{1}{\psi_y} = -\frac{1}{u - c}$$

$$\text{και } \psi_x = \frac{h_q}{h_p}, \quad \psi_y = -\frac{1}{h_p}$$

Ακόμα,

$$\begin{aligned} \partial_x &= \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p} \\ &= \partial_q - \psi_x \partial_p \\ &= \partial_q - \frac{h_q}{h_p} \partial_p \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \partial_y &= \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial}{\partial p} \\ &= -\psi_y \partial_p \\ &= \frac{1}{h_p} \partial_p \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \partial_q &= \frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial q} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= \partial_x + h_q \partial_y \\ &= \partial_x - \frac{\psi_x}{\psi_y} \partial_y \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \partial_p &= \frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial p} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= h_p \partial_y \\ &= -\frac{1}{\psi_y} \partial_y \end{aligned}$$

Υπενθυμίζεται ότι ο στροβιλισμός ορίζεται ως

$$\omega = v_x - u_y$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (1.2) παρατηρούμε ότι

$$\begin{cases} u_y u_x + (u - c)u_{xy} + v_y u_y + v u_{yy} = -P_{xy} \\ u_x v_x + (u - c)v_{xx} + v_x v_y + v v_{xx} = -P_{xy} \end{cases}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} u_y u_x + (u - c)u_{xy} + v_y u_y + v u_{yy} - u_x v_x - (u - c)v_{xx} - v_x v_y - v v_{xx} &= 0 \\ -u_x(v_x - u_y) - v_y(v_x - u_y) - ((u - c)v_{xx} - (u - c)u_{xy} + v v_{xx} - v u_{yy}) &= 0 \\ -(u_x + v_y)\omega - (u - c)\left(\frac{\partial}{\partial x}\omega\right) - v\left(\frac{\partial}{\partial y}\omega\right) &= 0, \\ \text{απ' όπου ο πρώτος όρος είναι 0 λόγω της (1.1)} \end{aligned}$$

Τελικά,

$$(u - c)\omega_x + v\omega_y = 0 \quad (*)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\partial_q \omega = \left(\partial_x - \frac{\psi_x}{\psi_y} \partial_y\right) \omega = \left(\partial_x - \frac{v}{c - u} \partial_y\right) \omega$$

Όμως, λόγω της σχέσης (\*), η μερική παράγωγος του  $\omega$  ως προς  $q$  είναι 0, οπότε  $\omega$  είναι συνάρτηση μόνο του  $p$ .

Τελικά,

$$\omega = \gamma(-p) \text{ σε όλο το υγρό.}$$

Τότε,

$$\gamma(-p) = \gamma(\psi) = \partial_x v - \partial_y u = \left(\partial_q - \frac{h_q}{h_p} \partial_p\right) \left(-\frac{h_q}{h_p}\right) - \frac{1}{h_p} \partial_p \left(c - \frac{1}{h_p}\right)$$

Οπότε το πρόβλημα (1.7), έπειτα από απλές πράξεις, μετασχηματίζεται στο

$$\begin{cases} (1 + h_q^2)h_{pp} - 2h_p h_q h_{pq} + h_p^2 h_{qq} = -\gamma(-p)h_p^3 \text{ στο } p_0 \leq p \leq 0 \\ 1 + h_q^2 + (2gh - Q)h_p^2 = 0 \text{ στο } p = 0 \\ h = 0 \text{ στο } p = p_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

με

$$h_p > 0$$

και  $h$  2π-περιοδική και άρτια ως προς την  $q$  μεταβλητή.

**Λήμμα 1.** Το πρόβλημα (1.1)-(1.5) είναι ισοδύναμο με την (1.8).

*Απόδειξη.* Το γεγονός ότι το πρόβλημα (1.1)-(1.5) μετασχηματίζεται στο (1.8) έχει ήδη αποδειχθεί, οπότε εκκρεμεί μόνο η αντίθετη κατεύθυνση.

Έστω

$$R = \{(q, p) \mid 0 < q < 2\pi \text{ και } 0 < p < -p_0\}$$

και  $h$  μία λύση του (1.8) τάξης  $C_{per}^2(\bar{R})$  με  $h_p > 0$  σε όλο το  $\bar{R}$ , όπου  $\bar{R}$  η κλειστότητα του  $R$ . Από την (1.8), η  $\gamma \in C[0, |p_0|]$ .

Ορίζουμε τις  $C_{per}^1(\bar{R})$  συναρτήσεις

$$F(q, p) = \frac{1}{h_p(q, p)} \text{ και } G(q, p) = -\frac{h_q(q, p)}{h_p(q, p)} \quad (1.9)$$

Για τη συνάρτηση  $h$  ισχύει  $h_{qp} = h_{pq}$ , άρα

$$F_q + F_p G - G_p F = 0 \text{ στο } R \quad (1.10)$$

Πράγματι,

$$G = -F h_q = -\frac{h_q(q, p)}{h_p(q, p)}$$

Οπότε, παραγωγίζοντας ως προς  $p$ , έχουμε

$$G_p = -F_p h_q - F h_{qp} \iff F G_p = -F F_p h_q - F^2 h_{qp}$$

Όμως, αφού  $F^2 h_{qp} = \frac{1}{h_p^2} h_{qp} = -F_q$ , έχουμε

$$G_p F = (-F h_q) F_p + F_q \iff F_q + F_p G - G_p F = 0$$

Είναι θέμα απλής παρατηρήσης και αντικατάστασης από τη σχέση

$$(1 + h_q^2) h_{pp} - 2 h_p h_q h_{pq} + h_p^2 h_{qq} = -\gamma(-p) h_p^3,$$

λόγω των (1.9), να αποκομίσουμε την

$$G_q + G G_p + F F_p = \gamma(-p) \text{ στο } R \quad (1.11)$$

Η ελεύθερη επιφάνεια δίνεται από τη σχέση  $\eta(x) = h(x, 0) - d$ .

Επιθυμούμε να ανακτήσουμε τη  $\psi$ .

Έστω τυχόν και σταθεροποιημένο  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Θεωρούμε τη Σ.Δ.Ε. με την αρχική συνθήκη

$$\begin{cases} \psi_y(x_0, y) = -F(x_0, -\psi(x_0, y)), & \forall y \in (-d, \eta(x_0)) \\ \psi(x_0, \eta(x_0)) = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Εφόσον η  $F$  είναι λεία και  $2\pi$ -περιοδική ως προς την  $q$ -μεταβλητή είναι και Lipschitz, άρα υπάρχει μοναδική τοπική λύση  $\psi(x_0, y)$  της (1.12).

Επιπλέον, εφόσον  $h_p > 0 \Rightarrow F \geq \delta > 0$  σε όλο το  $R$ , για κάποιο  $\delta > 0$ .

Εξάγεται -για όσο ορίζεται η  $\psi(x, y)$ -, ότι η εν λόγω συνάρτηση αυξάνει κατά ένα βαθμό μεγαλύτερο του  $\delta$ , όσο το  $y$  μειώνεται.

Πράγματι,

$$-\psi_y(x_0, y) = F(x_0, -\psi(x_0, y)) > 0, \quad \forall -\psi = p \in [0, |p_0|]$$

απ' όπου  $-\psi$  : αύξουσα

Οπότε, η (1.12) επιλύεται έως ότου  $\psi(x_0, y)$  να γίνει ίση με  $-p_0$ , όπου έχουμε βρει κάποιο  $y_0 < \eta(x_0)$  τέτοιο ώστε  $\psi(x_0, y(x_0)) = -p_0 > 0$ .

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  μπορούμε να ορίσουμε  $\psi(x, y)$ , σε κάποιο διάστημα  $[y(x), \eta(x)]$  με  $y(x) < \eta(x)$ .

Εφόσον η (1.12) έχει μοναδική τοπική λύση, έπεται ότι η  $\psi$  είναι περιοδική ως προς  $x$ . Πράγματι,

$$\begin{aligned} & \text{αφού, } F \in C_{per}^1(\bar{R}), \\ & F(x_0, -\psi(x_0, y)) = F(x_0 + 2\pi, -\psi(x_0 + 2\pi, y)) \\ & F(x_0, -\psi(x_0, y)) = F(x_0, -\psi(x_0 + 2\pi, y)) \\ & \psi(x_0, y) = \psi(x_0 + 2\pi, y) \\ \implies & \psi : 2\pi\text{-περιοδική ως προς την } x \text{ μεταβλητή} \end{aligned}$$

Όπως παρατηρήσαμε προηγούμενως, μπορούμε να βρούμε για σταθεροποιημένο και τυχόν  $x \in \mathbb{R}$  κάποιο  $y(x)$  με  $y(x) < \eta(x)$  ώστε η  $\psi(x, y)$  να ορίζεται στο διάστημα  $[y(x), \eta(x)]$ .

Ισχυρισμός:  $y(x) = -d, \forall x \in \mathbb{R}$

Απόδειξη. Αρχικά, θα δείξουμε ότι

$$\psi_x(x, y) = -G(x, -\psi(x, y)), \quad \forall y \in [y(x), \eta(x)] \quad (1.13)$$

Θέτουμε

$$H(x, y) = -G(x, -\psi(x, y)), \quad \forall y \in [y(x), \eta(x)]$$

Τότε, λόγω των σχέσεων (1.10) και (1.12) έχουμε

$$H_y = G_p \psi_y = -G_p F = -F_q - F_p G = -F_q + F_p H$$

Πράγματι,

$$\frac{\partial}{\partial y} H(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \{-G(x, -\psi(x, y))\}$$

Οπότε, ενθυμούμενοι τον μετασχηματισμό  $x = q$  και  $-\psi(x, y) = p$  έχουμε

$$H_y = -\frac{\partial G}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y}$$

Όμως, προφανώς  $\frac{\partial q}{\partial y} = 0$  και  $\psi_y = -F$  λόγω της (1.12), οπότε,

$$H_y = G_p \psi_y = -G_p F \stackrel{(1.10)}{=} -F_q - F_p G \stackrel{H=-G}{=} -F_q + F_p H$$

Επίσης, λόγω της (1.12) και της  $C^1$ -εξάρτησης της λύσης  $\psi$  από το  $x$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \psi_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} \psi_y = -\frac{\partial}{\partial x} F(x, -\psi(x, y)) \stackrel{x=q, -\psi=p}{=} \\ &= -\frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = -F_q + F_p \psi_x \end{aligned}$$

Οπότε, οι  $H$  και  $\psi_x$  ικανοποιούν την ίδια διαφορική εξίσωση.

Από την αρχική συνθήκη της Σ.Δ.Ε. (1.12)  $\psi(x, \eta(x)) = 0$ , οπότε,

$$\frac{d}{dx} \psi(x, \eta(x)) = 0$$

Δηλαδή,

$$\frac{d}{dx} \psi(x, \eta(x)) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{d\eta(x)}{dx} = 0$$

Δηλαδή,

$$\psi_x(x, \eta(x)) = -\psi_y(x, \eta(x)) \eta'(x) \stackrel{(1.12)}{=} F(x, -\psi(x, \eta(x))) \eta'(x)$$

Επιπλέον,

$$H(x, \eta(x)) = -G(x, -\psi(x, \eta(x))) = \eta'(x) F(x, -\psi(x, \eta(x)))$$



λαμβάνοντας υπόψιν τις (1.9), δηλαδή το γεγονός ότι  $G = -h_q F$  και τη σχέση  $\eta(x) = h(q, 0) - d$ .

Τελικά, οι  $H$  και  $\psi_x$  ικανοποιούν την ίδια αρχική συνθήκη στο  $y = \eta(x)$ , οπότε  $H \equiv \psi_x$  και έχουμε αποδείξει την (1.13).

Η  $C^1$ -εξάρτηση του  $y(x)$  από το  $x$ , επιτρέπει να διαφορίσουμε τη σχέση

$$\psi(x, y(x)) = -p_0$$

Οπότε,

$$\frac{d}{dx}\psi(x, y(x)) = \psi_x(x, y(x)) + \psi_y(x, y(x))y'(x) = 0$$

Λόγω των (1.12) και (1.13)

$$\begin{aligned} -G(x, -\psi(x, y(x))) - F(x, -\psi(x, y(x)))\frac{dy(x)}{dx} &= 0, \text{ για } x \in \mathbb{R} \\ -G(x, p_0) - F(x, p_0)\frac{dy(x)}{dx} &= 0, \text{ για } x \in \mathbb{R}(**) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι  $G(x, p_0) = 0$  λόγω των (1.8) και (1.9).

Πράγματι,

$$\begin{aligned} h(q(x, y(x)), p(x, y(x))) &= 0 \text{ λόγω της (1.8),} \\ \text{όπου } q(x, y(x)) &= x \text{ και } p(x, y(x)) = -\psi(x, y(x)) = p_0 \\ \text{Θέτω } g(x) &= h(q(x, y(x)), p(x, y(x))) = 0 \\ \text{Τότε, } \frac{dg}{dx} = 0 &\iff \frac{\partial h}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial h}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial h}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial h}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \\ &h_q + h_p(-\psi_x) + h_p(-\psi_y)y' = 0 \\ &\stackrel{h_p > 0}{\iff} \frac{h_q}{h_p} = \psi_x + \psi_y y' \stackrel{\psi = -p_0}{=} 0 \iff -G(q, p) = 0 \\ &G(q, p) = 0 \text{ για } p(x, y(x)) = -\psi(x, y(x)) = p_0 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ακόμη ότι  $F(x, p_0) \geq \delta > 0 \forall x \in R$ .

Τελικά, από την (\*\*) ισχύει  $\frac{d}{dx}y(x) = 0$ .

Οπότε,

$$y(x) = y_0, \text{ όπου } y_0 \in \mathbb{R}$$

Μένει να δείξουμε ότι  $y_0 = -d$ .

Έστω  $x_0 = 0$ .

Τότε,

$$\eta(0) + d = h(0, 0) = \int_{p_0}^0 h_p(0, p) dp = \int_{p_0}^0 \frac{1}{F(0, p)} dp$$

Θέτουμε  $p = -\psi(0, y)$ .

Τότε,

$$\psi(x_0, y) \text{ για } x_0 = 0$$

θεωρείται συνάρτηση μόνο της  $y$ -μεταβλητής και ολοκληρώνεται μεταξύ των άκρων

$$p_0 = -\psi(0, y(0)) \iff y(0) = y_0 \text{ και } 0 = -\psi(0, y(0)) \iff y(0) = \eta(0)$$

Οπότε το παραπάνω ολοκλήρωμα ισούται με

$$\begin{aligned} & \int_{y_0}^{\eta(0)} \frac{1}{F(0, -\psi(0, y))} [-d\psi(0, y)] \\ &= \int_{y_0}^{\eta(0)} \frac{1}{F(0, -\psi(0, y))} \left[-\frac{d\psi}{dy} dy\right] \\ &= \int_{y_0}^{\eta(0)} \frac{1}{F(0, -\psi(0, y))} [-\psi_y dy] \\ &\stackrel{\psi_y = -F}{=} \int_{y_0}^{\eta(0)} \frac{1}{F(0, -\psi(0, y))} F(0, -\psi(0, y)) dy \\ &= \int_{y_0}^{\eta(0)} 1 dy = \eta(0) - y(0) \end{aligned}$$

Τελικά,  $\eta(0) + d = \eta(0) - y_0 \iff y_0 = -d.$  □

Στοχεύουμε να αποδείξουμε ότι η  $\psi$  είναι λύση του (1.7).

Από την αρχική συνθήκη του Σ.Δ.Ε. γνωρίζουμε ότι  $\psi(x, y) = 0$ , για  $y = \eta(x)$  και αποδείξαμε μόλις ότι  $\psi(x, y) = -p_0$ , για  $y = -d$ .

Επίσης, εφόσον  $F = -\psi_y$  και  $G = -\psi_x$  και καθώς

$$\nabla\psi = (\psi_x, \psi_y) \implies |\nabla\psi|^2 = \psi_x^2 + \psi_y^2$$

έχουμε

$$F^2 + G^2 = \psi_x^2 + \psi_y^2 = |\nabla\psi|^2$$

Εχμεταλλευόμενοι τη συνοριακή συνθήκη της (1.8) στο  $p = 0$ , έχουμε

$$F^2 + G^2 + 2(gh - Q) = 0, \text{ στο } y = \eta(x)$$

Λόγω των σχέσεων  $F^2 + G^2 = |\nabla\psi|^2$  και  $h(q, p) = y + d$ , αποδείξαμε τη σχέση

$$|\nabla\psi|^2 + 2g(y + d) = Q \text{ για } y = \eta(x)$$

Διαφορίζουμε τη σχέση (1.12) ως προς  $y$ ,

$$\psi_{yy} = -\frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} = F_p \psi_y = F_p(-F)$$

Διαφορίζουμε τη σχέση (1.13) και ως προς  $x$ ,

$$\psi_{xx} = -\frac{\partial G}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = -G_q - G_p(-\psi_x) = -G_q - G_p G$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο προηγούμενες σχέσεις,

$$\Delta\psi = \psi_{xx} + \psi_{yy} = -G_q - G G_p - F F_p \stackrel{(1.11)}{=} -\gamma(\psi)$$

Τελικά,

$$\Delta\psi = -\gamma(\psi) \text{ σε όλο το υγρό.}$$

Τελικά, η  $\psi$  είναι λύση του (1.7).

Θέτουμε

$$u = \psi_y + c \text{ και } v = -\psi_x$$

Οπότε, μία  $(u, v, \eta) \in C_{per}^1(\bar{D}) \times C_{per}^1(\bar{D}) \times C_{per}^2(\mathbb{R})$  είναι λύση για το αρχικό πρόβλημα συνοριακών τιμών (1.1)-(1.5).  $\square$

Σημείωση: Αν  $h \in C_{per}^{3+\alpha}(\bar{R})$ , για κάποιο  $\alpha \in (0, 1)$ , τότε  $\gamma \in C^{1+\alpha}[0, |p_0|]$  και  $(u, v, \eta) \in C_{per}^{2+\alpha}(\bar{D}) \times C_{per}^{2+\alpha}(\bar{D}) \times C_{per}^{3+\alpha}(\mathbb{R})$ .



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## ΤΟΠΙΚΗ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗ

Στο παρόν κεφάλαιο θα αποδείξουμε την ύπαρξη λύσεων μικρού πλάτους του προβλήματος (1.1)-(1.5). Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα

**Θεώρημα 2.0.1.** *Τοπική Διακλάδωση*

Έστω  $c > 0, p_0 < 0, \alpha \in (0, 1)$  και  $\gamma$  μία  $C^{1+\alpha}$  δοσμένη συνάρτηση, ορισμένη στο  $[0, p_0]$  που ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\int_{p_0}^0 \left[ \frac{4\pi^2(p-p_0)^2}{L^2} (2\Gamma(p) - 2\Gamma_{\min})^{\frac{1}{2}} + (2\Gamma(p) - 2\Gamma_{\min})^{\frac{3}{2}} \right] dp < gp_0^2$$

Αναζητούμε  $L$ -περιοδικές οδεύουσες λύσεις του προβλήματος (1.1)-(1.5) που ταξιδεύουν με ταχύτητα  $c$  και με σχετική ροή μάζας  $p_0$  και συνάρτηση στροβιλισμού  $\gamma$  τέτοιες ώστε  $u < c$  σε όλο το υγρό.

Εφόσον η  $\gamma$  ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη, τότε υπάρχει μία  $C^1$ -καμπύλη  $C_{loc}$  λύσεων μικρού πλάτους  $(u, v, \eta)$  στο χώρο  $C_{per}^{2+\alpha}(\bar{D}_\eta) \times C_{per}^{2+\alpha}(\bar{D}_\eta) \times C_{per}^{3+\alpha}(\mathbb{R})$ . Η καμπύλη λύσεων  $C_{loc}$  περιέχει ακριβώς μία τετριμμένη λύση ( $\eta \equiv 0$ ) του προβλήματος (1.1)-(1.5).

Το Θεώρημα θα αποδειχθεί με χρήση της Θεωρίας Τοπικής Διακλάδωσης. Για να επιτευχθεί αυτό, θα πρέπει πρώτα να αποδείξουμε ότι το πρόβλημά μας ικανοποιεί τις αντίστοιχες προϋποθέσεις. Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζουμε κάποιες προκαταρκτικές θεωρήσεις στην κατεύθυνση αυτή. Στη συνέχεια, στην ενότητα (2.2) θα παρουσιάσουμε το Θεώρημα Crandall-Rabinowitz το οποίο και θα εφαρμόσουμε.

### 2.1 Προκαταρκτικά

Εισάγουμε αρχικά, μία Hoelder παράμετρο  $\alpha \in (0, 1)$  που αργότερα θα χρησιμοποιήσουμε για τις εκτιμήσεις Schauder.

Η απαίτηση της ισχύος της ιδιότητας (1.0) για τη συνάρτηση  $\gamma$  (για  $L = 2\pi$ )

$$\int_{p_0}^0 [(p - p_0)^2(2\Gamma(p) - 2\Gamma_{min})^{\frac{1}{2}} + (2\Gamma(p) - 2\Gamma_{min})^{\frac{3}{2}}]dp < gp_0^2,$$

εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας ιδιοτιμής της γραμμικοποίησης (2.8) του προβλήματος (1.8), την οποία θα δώσουμε παρακάτω.

Όπως ορίστηκε στην προηγούμενη ενότητα,

$$\Gamma(p) = \int_0^p \gamma(-p)dp$$

με  $\Gamma_{min} = \min_{p \in [p_0, 0]} \Gamma(p) \leq 0$ .

Το αρχικό πρόβλημα ισοδυναμεί με το πρόβλημα εύρεσης μιας καμπύλης λύσεων της οιονεί-γραμμικής εξίσωσης 2ης τάξης του ύψους  $h$  με μη γραμμικές συνοριακές συνθήκες,

$$(1 + h_q^2)h_{pp} - 2h_ph_qh_{pq} + h_p^2h_{qq} = -\gamma(-p)h_p^3, \text{ για } p_0 \leq p \leq 0 \quad (2.1)$$

$$1 + h_q^2 + (2gh - Q)h_p^2 = 0, \text{ στο } p = 0 \quad (2.2)$$

$$h = 0, \text{ στο } p = p_0 \quad (2.3)$$

**Λήμμα 2.** (Τετριμμένες Λύσεις) Οι τετριμμένες λύσεις (παράλληλες διαμητικές ροές με επίπεδη επιφάνεια  $\eta \equiv 0$ ) του προβλήματος (2.1)-(2.3) είναι οι  $h(q, p) \equiv H(p)$ , όπου

$$H(p) = \int_0^p \frac{1}{\sqrt{\lambda + 2\Gamma(s)}} ds + \frac{Q - \lambda}{2g} \quad (2.4)$$

με  $\lambda$  τέτοιο ώστε  $0 \leq -2\Gamma_{min} < \lambda < Q$  και το οποίο σχετίζεται με το  $Q$  μέσω της (2.5).

*Απόδειξη.* Οι τετριμμένες λύσεις, δεν εξαρτώνται από το  $q$ . Οπότε, η (2.1) μετσχηματίζεται στην εξίσωση

$$H_{pp} = -\gamma(-p)H_p^3$$

Θέτοντας  $H_p = U$ ,

$$\begin{aligned}
 U_p &= -\gamma(-p)U^3 \\
 \frac{dU}{dp} &= -\gamma(-p)U^3 \\
 \frac{1}{U^3}dU &= -\gamma(-p)dp \\
 \int \frac{1}{U^3}dU &= -\int_0^{\bar{p}} \gamma(-p)dp \\
 -\frac{1}{2} \frac{1}{U^2} + c' &= -\int_0^{\bar{p}} \gamma(-p)dp \\
 \frac{1}{U^2} &= 2c' + 2 \int_0^p \gamma(-s)ds, \quad p_0 < p < 0 \\
 U &= (\lambda + 2\Gamma(p))^{-\frac{1}{2}}, \\
 \text{όπου } \lambda &= 2c', \quad c' \in \mathbb{R} \text{ και } p_0 < p < 0
 \end{aligned}$$

Εφόσον  $\Gamma_{min} \leq 0$  και καθώς απαιτείται  $\lambda + 2\Gamma(p) \geq 0$ ,  $\forall p$  για να έχει νόημα η  $H_p$ , έχουμε  $0 \leq -2\Gamma_{min} < \lambda$ . Οπότε, έχουμε λύσεις της μορφής

$$H_p = [\lambda + 2\Gamma(p)]^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{για } \lambda > -2\Gamma_{min}$$

Ολοκληρώνοντας την προτελευταία σχέση έχουμε

$$H(p) = \int_0^p \frac{1}{\sqrt{\lambda + 2\Gamma(s)}} ds + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Η συνοριακή συνθήκη δίνει

$$\begin{aligned}
 H_p^2(0) &= \frac{1}{Q - 2gH(0)} \\
 \frac{1}{\lambda + 2\Gamma(0)} &= \frac{1}{Q - 2gc} \\
 c &= \frac{Q - \lambda}{2g},
 \end{aligned}$$

απ' όπου αποδεικνύεται η σχέση (2.4).

Από την συνοριακή συνθήκη (2.3) στην κοιλάδα ( $p = p_0$ ), η  $H(p_0) = 0$  γράφεται ως

$$0 < \int_{p_0}^0 \frac{1}{\sqrt{\lambda + 2\Gamma(s)}} ds = \frac{Q - \lambda}{2g} \quad (2.5)$$

η οποία σχέση προσφέρει τη σύνδεση μεταξύ του  $\lambda$  και του  $Q$ .

Τελικά,  $p_0 < 0$  και  $\lambda < Q$ .

Αποδεικνύεται αμέσως, ότι το  $\lambda$  δεν είναι μονότιμη συναρτήση του  $Q$ .

Για κάθε  $\lambda > -2\Gamma_{min}$ , υπάρχει ένα μοναδικό  $Q(\lambda)$  που ικανοποιεί την (2.5).

Εφόσον,

$$\begin{aligned} Q &= \lambda + 2g \int_{p_0}^0 \frac{1}{\sqrt{\lambda + 2\Gamma(p)}} dp \\ \frac{dQ}{d\lambda} &= 1 - g \int_{p_0}^0 (\lambda + 2\Gamma(p))^{-\frac{3}{2}} dp, \quad \lambda > 0 \\ \frac{d^2Q}{d\lambda^2} &= -\frac{3g}{2} \int_{p_0}^0 (\lambda + 2\Gamma(p))^{-\frac{5}{2}} dp < 0 \end{aligned}$$

Οπότε, η συνάρτηση  $\lambda \mapsto Q(\lambda)$  είναι κυρτή για  $\lambda > 0$ . Η ελάχιστη τιμή της  $Q$  λαμβάνεται για  $\lambda_0 > 0$  κρίσιμο σημείο της  $Q$  ( $\frac{dQ}{d\lambda}(\lambda_0) = 0$ ),

$$\int_{p_0}^0 (\lambda_0 + 2\Gamma(p))^{-\frac{3}{2}} dp = \frac{1}{g} \quad (2.6)$$

Για κάθε  $Q > Q(\lambda_0)$  υπάρχει ακριβώς ένα  $\lambda > \lambda_0$  που ικανοποιεί την (2.5) και για συγκεκριμένα  $Q > Q(\lambda_0)$  υπάρχει ένα διαφορετικό  $\lambda$  που ικανοποιεί την (2.5) και ανήκει στο διάστημα  $(-2\Gamma_{min}, \lambda_0)$ .

Αξιοποιώντας την έκφραση για το  $c$  και τη σχέση (2.4) η  $H$  γράφεται ως

$$H(p) = \int_{p_0}^p \frac{1}{\sqrt{\lambda + 2\Gamma(s)}} ds$$

□

Θα γραμμικοποιήσουμε το πρόβλημα (2.1)-(2.3) γύρω από τις τετριμμένες λύσεις  $H(p)$ .

Θέτουμε  $h(q, p) = H(p) + \epsilon m(q, p)$ ,  $\epsilon > 0$

Τότε,

$$\begin{aligned} h_p &= H_p + \epsilon m_p, \\ h_{pp} &= H_{pp} + \epsilon m_{pp}, \\ h_q &= \epsilon m_q, \\ h_{qq} &= \epsilon m_{qq}, \\ h_{pq} &= \epsilon m_{pq} \end{aligned}$$



Οπότε, η (2.1) γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned} & H_{pp} + \epsilon m_{pp} + \epsilon^2 m_q^2 H_{pp} + \epsilon^3 m_q^2 m_{pp} - 2(H_p + \epsilon m_p) \epsilon^2 m_q m_{pq} \\ & \quad + H^2 \epsilon m_{qq} + 2\epsilon^2 m_p H_p m_{qq} + \epsilon^3 m_p^2 m_{qq} \\ & = -\gamma(-p)(H_p^3 + 3\epsilon H_p^2 m_p + 3\epsilon^2 H_p m_p^2 + \epsilon^3 m_p^3) \end{aligned}$$

Διατηρώντας μόνο τους όρους τάξης  $\epsilon$ , καθώς οι όροι μεγαλύτερης τάξης τείνουν γρηγορότερα στο 0, έχουμε

$$H_{pp} + \epsilon H_p^2 m_{qq} + o(\epsilon^2) = -\gamma(-p)(H_p^3 + 3\epsilon H_p^2 m_p + o(\epsilon^2))$$

Δηλαδή,

$$H_{pp} + \epsilon(m_{pp} + H_p^2 m_{qq}) = -\gamma(-p)H_p^3 + \epsilon(-\gamma(-p)3H_p^2 m_p)$$

Άρα,

$$m_{pp} + H_p^2 m_{qq} = -3\gamma(-p)H_p^2 m_p$$

αφού  $H_{pp} = -\gamma(-p)H_p^3$ , λόγω της (2.1).

Η συνοριακή συνθήκη (2.2) στην κορυφή ( $p = 0$ ), διατυπώνεται ως εξής

$$\begin{aligned} & 1 + \epsilon^2 m_{qq}^2 + (2g(H + \epsilon m) - Q)(H_p + \epsilon m_p)^2 = 0 \\ & 1 + 2gHH_p^2 + \epsilon 2gmH_p^2 - QH_p^2 + 4\epsilon gHH_p m_p - 2\epsilon H_p m_p Q + o(\epsilon^2) = 0 \end{aligned}$$

απ' όπου

$$gH_p^2 m + 2gHH_p m_p - QH_p m_p = 0, \text{ για } p = 0$$

αφού  $1 + 2gHH_p^2 - QH_p^2 = 0$ , λόγω της (2.2). Άρα, η συνοριακή συνθήκη στο  $p = 0$ , αξιοποιώντας το γεγονός ότι  $2gH - Q = \lambda$  λόγω της (2.4) και  $\Gamma(0) = 0$ , γράφεται ως

$$gm = \lambda^{\frac{3}{2}} m_p$$

ενώ, από την συνοριακή συνθήκη στην κοιλάδα ( $p = p_0$ ), επειδή  $H(p_0) = 0$ , έχουμε ότι

$$m = 0$$

Τελικά, το γραμμικοποιημένο πρόβλημα εκφράζεται ως

$$m_{pp} + H_p^2 m_{qq} = -3\gamma(-p)H_p^2 m_p \quad (2.7\alpha')$$

$$gm = \lambda^{\frac{3}{2}} m_p, \text{ για } p = p_0 \quad (2.7\beta')$$

$$m = 0, \text{ για } p = 0 \quad (2.7\gamma')$$

όπου  $m$  μία άρτια και  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση ως προς την  $q$ -μεταβλητή.  
Για τυχόν αλλά σταθεροποιημένο  $\lambda$ , ορίζουμε

$$\alpha_\lambda(p) = \{\lambda + 2\Gamma(p)\}^{\frac{1}{2}}$$

Τότε,

$$H_p = \{\lambda + 2\Gamma(p)\}^{-\frac{1}{2}} \implies H_p^2 = \alpha_\lambda^{-2}$$

οπότε η (2.7) γράφεται στην αυτοπροσαρτημένη μορφή,

$$\{\alpha_\lambda^3 m_p\}_p + \{\alpha_\lambda m_q\}_q = 0 \quad (2.8\alpha')$$

$$\alpha_\lambda^3 m_p = gm \text{ για } p = 0, \quad m = 0 \text{ για } p = p_0 \quad (2.8\beta')$$

όπου ικανοποιείται η  $2\pi$ -περιοδικότητα και αρτιότητα ως προς την  $q$ -μεταβλητή.

Ισχυρισμός: Έστω η συνάρτηση  $m \in C_{per}^{3,\alpha}(\bar{R})$ , άρτια ως προς την  $q$ -μεταβλητή, μία λύση του (2.7).

Τότε, η  $m$  μπορεί να αναπαρασταθεί ως σειρά Fourier και το Fourier ανάπτυγμά της στον  $C_{per}^2(\bar{R})$ , είναι

$$m(q, p) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k(p) \cos(kq) \quad (2.9)$$

όπου  $m_k \in C_{per}^{3,\alpha}([p_0, 0])$  οι συντελεστές Fourier,

$$m_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} m(q, p) dq$$

$$m_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} m(q, p) \cos(kq) dq, \text{ για } k \geq 1$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι η σειρά  $\sum_{k=0}^{\infty} m_k(p) \cos(kq)$  συγκλίνει στον  $C_{per}^2(\bar{R})$ . Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι η σειρά  $\sum_{k=0}^{\infty} m'_k(p) \cos(kq)$  συγκλίνει στον χώρο  $C_{per}(\bar{R})$ .

Πράγματι,

$$\begin{aligned} |m'_0(p)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} m_p(q, p) dq \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |m_p(q, p)| dq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|m\|_{C_{per}^1(\bar{R})} dq \leq \|m\|_{C_{per}^1(\bar{R})} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} m'_k(p) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} m_p(q, p) \cos(kq) dq \\ &= \frac{1}{k\pi} [m_p(q, p) \sin(kq)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} m_{pq}(q, p) \sin(kq) dq \end{aligned}$$

άρα, για  $N \geq n \geq 1$  έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^N m'_k(p) \cos(kq) \right|^2 &\leq \left( \sum_{k=n}^N |m'_k(p)| \right)^2 \\ &= \left( \sum_{k=n}^N \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} m_{pq}(q, p) \sin(kq) dq \right)^2 \\ &\leq \left( \sum_{k=n}^N \frac{1}{k} \right)^2 \left\{ \frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^N \int_{-\pi}^{\pi} (m_{pq}(q, p) \sin(kq))^2 dq \right\} \\ &\leq \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=n}^N \int_{-\pi}^{\pi} (m_{pq}(q, p))^2 dq \\ &\leq \frac{1}{6} \sum_{k=n}^N \int_{-\pi}^{\pi} \|m\|_{C_{per}^2(\bar{R})}^2 dq \leq \frac{1}{6} \|m\|_{C_{per}^2(\bar{R})}^2 \sum_{k=n}^N \int_{-\pi}^{\pi} dq \\ &\leq \frac{2\pi}{6} \|m\|_{C_{per}^2(\bar{R})}^2 = \frac{\pi}{3} \|m\|_{C_{per}^2(\bar{R})}^2 \end{aligned}$$

Εντελώς αντίστοιχα, ελέγχουμε ότι η σειρά  $\sum_{k=0}^{\infty} m''_k(p) \cos(kq)$  συγκλίνει στον χώρο  $C_{per}(\bar{R})$ .

Επίσης, για τυχόν αλλά σταθεροποιημένο  $p \in [p_0, 0]$ , η σειρά  $\sum_{k=0}^{\infty} m_k(p) \cos(kq)$  συγκλίνει στον  $L^2[-\pi, \pi]$  στην  $m(\cdot, p)$ . Από τα παραπάνω, η σειρά  $\sum_{k=0}^{\infty} m_k(p) \cos(kq)$  συγκλίνει στον  $C_{per}(\bar{R})$  στο όριό της, οπότε  $m(q, p) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k(p) \cos(kq)$ .

Τέλος, παρατηρούμε ότι η σειρά  $\sum_{k=0}^{\infty} m'_k(p) \cos(kq)$  συγκλίνει υπό την έννοια των κατανομών στην  $m_p(q, p)$ , καθώς η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{p_0}^0 \int_{-\pi}^{\pi} m'_k(p) \cos(kq) \phi(q, p) dq dp$$

συγκλίνει απόλυτα για κάθε  $\phi \in C_0^{\infty}(\bar{R})$ , γεγονός που μας επιτρέπει να θεωρήσουμε την  $m_p$  ως ακριβώς το όριό της.

Αντίστοιχα, η σειρά  $\sum_{k=0}^{\infty} m''_k(p) \cos(kq)$  συγκλίνει υπό την έννοια των κατανομών στην  $m_{pp}(q, p)$ , γεγονός που ολοκληρώνει τον ισχυρισμό.  $\square$

**Λήμμα 3.** (Πρόβλημα Ιδιοτιμών)

Έστω ότι ισχύει η (1.6), τότε υπάρχει  $\lambda^* > -2\Gamma_{min}$  στο οποίο αντιστοιχεί μία μη μηδενική συνάρτηση  $m(q, p)$  η οποία είναι λύση του (2.7), άρτια και  $2\pi$ -περιοδική ως προς την  $q$ -μεταβλητή.

Απόδειξη. Αναζητούμε μια λύση της μορφής

$$m(q, p) = M(p) \cos kq$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} \{\alpha_\lambda^3 [M(p) \cos kq]_p\}_p + \{\alpha_\lambda [M(p) \cos kq]_q\}_q &= 0 \\ \{\alpha_\lambda^3 M_p \cos kq\}_p - \{k\alpha_\lambda M \sin kq\}_q &= 0 \\ \{\alpha_\lambda M_p\}_p \cos kq - k^2 \alpha_\lambda M \cos kq &= 0 \\ \{\alpha_\lambda^3 M_p\}_p &= k^2 \alpha_\lambda M \end{aligned}$$

όπου  $k \in \mathbb{Z}$ , λόγω της  $2\pi$ -περιοδικότητας των συναρτήσεων  $m(q, p)$  και  $\cos kq$  ως προς  $q$ . Οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες είναι

$$\begin{aligned} \alpha_\lambda^3 M_p &= gM, \text{ για } p = 0 \\ M &= 0, \text{ για } p = p_0 \end{aligned}$$

Για διαφορετικά  $k$  προκύπτουν διαφορετικές λύσεις, αλλά εμείς αναζητούμε λύσεις με περίοδο  $2\pi$ , οπότε αρκεί  $k = 1$ .

Θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\begin{aligned} \mu &= \mu(\lambda) = \inf \mathcal{R}(\phi), \text{ όπου} \\ \mathcal{R}(\phi) &= \mathcal{R}(\phi; \lambda) = \frac{-g\phi^2(0) + \int_{p_0}^0 \alpha^3 \phi_p^3 dp}{\int_{p_0}^0 \alpha_\lambda \phi^2 dp} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση  $\mu$  είναι καλά ορισμένη, δηλαδή το ελάχιστο της ποσότητας  $\mathcal{R}$  υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Πράγματι, για  $\lambda \geq -\Gamma_{min}$ , έχουμε  $\epsilon(\lambda) = \inf_{p \in [0, p_0]} \alpha(p, \lambda) > 0$  άρα

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^0 \alpha^3 \phi_p^2 dp + \frac{4g^2}{\epsilon^4(\lambda)} \int_{p_0}^0 \alpha \phi^2 dp &\geq \epsilon^3(\lambda) \int_{p_0}^0 \phi_p^2 dp + \frac{4g^2}{\epsilon^3(\lambda)} \int_{p_0}^0 \phi^2 dp \\ &\geq \int_{p_0}^0 2 \left( \epsilon^{\frac{3}{2}} \phi_p \right) \left( \frac{1}{\epsilon^{\frac{3}{2}}} 2g\phi \right) dp \geq 4g \int_{p_0}^0 \phi_p \phi dp = 2g\phi^2(0) \end{aligned}$$

για κάθε  $\phi \in H^1(p_0, 0)$  με  $\phi(p_0) = 0$ .

Τελικά,

$$\int_{p_0}^0 \alpha^3 \phi_p^2 dp + \frac{4g^2}{\epsilon^4(\lambda)} \int_{p_0}^0 \alpha \phi^2 dp \geq 2g\phi^2(0)$$

από όπου παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\phi; \lambda) &= \frac{-g\phi^2(0) + \int_{p_0}^0 \alpha^3 \phi_p^2 dp}{\int_{p_0}^0 \alpha \phi^2 dp} \\ &\geq \frac{-g\phi^2(0) + 2g\phi^2(0) - \frac{4g^2}{\epsilon^4(\lambda)} \int_{p_0}^0 \alpha \phi^2 dp}{\int_{p_0}^0 \alpha \phi^2 dp} \\ &= \frac{g\phi^2(0)}{\int_{p_0}^0 \alpha \phi^2 dp} - \frac{4g^2}{\epsilon^4(\lambda)} \end{aligned}$$

Άρα,

$$\mathcal{R}(\phi) \geq -\frac{4g^2}{\epsilon^4(\lambda)}$$

καθώς ο πρώτος όρος είναι μη αρνητικός, για κάθε συνάρτηση  $\phi \in H^1(p_0, 0)$  με  $\phi(p_0) = 0$ . Τελικά,

$$\mu = \mu(\lambda) = \inf \mathcal{R}(\phi) \geq -\frac{4g^2}{\epsilon^4(\lambda)}$$

Η συνάρτηση  $M(p)$  η οποία επιλύει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης, είναι λεία και ικανοποιεί το πρόβλημα Sturm-Liouville

$$\{\alpha^3 M_p\}_p = -\mu(\lambda)\alpha M$$

με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες. Η ύπαρξη της συνάρτησης  $M$  αποδεικνύεται αυστηρά στο [5] (βλ. μετά την εξίσωση 3.15 εκεί).

Η  $\mu$  είναι μια  $C^1$ -συνάρτηση του  $\lambda$  και  $\alpha \in C^{2+\alpha}([p_0, 0])$ , για  $\lambda \geq -2\Gamma_{min}$ .

Μία μη τετριμμένη λύση  $M$  του (2.8) εξασφαλίζεται από την ύπαρξη μιας ιδιοτιμής  $\mu = -1$  για το παραπάνω πρόβλημα, δηλαδή απαιτείται να

$$\exists \lambda^* \geq -2\Gamma_{min} : \mu(\lambda^*) = -1$$

Ακολούθως, θα μελετήσουμε τη σχέση με την οποία εξαρτάται το  $\mu$  από το  $\lambda$ .

Ισχυρισμός: Για  $\lambda \geq g - 2\Gamma_{min}$ ,  $\mu \geq -1$ .

Απόδειξη. Έστω  $\lambda \geq g - 2\Gamma_{min}$ .

Τότε,

$$\lambda + 2\Gamma_{min} \geq g$$

$$\lambda + 2\Gamma(p) \geq \lambda + 2\Gamma_{min} \geq g$$

Άρα,  $\alpha_\lambda(p) = (\lambda + 2\Gamma(p))^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{g}$ , οπότε

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^0 (\alpha_\lambda w^2 + \alpha_\lambda^3 w_p^2) dp &\geq \sqrt{g} \int_{p_0}^0 (w^2 + g w_p^2) dp \\ &\stackrel{C-S}{\geq} 2\sqrt{g}\sqrt{g} \int_{p_0}^0 w w_p dp = g[w^2]_{p_0}^0 = g w^2(0) \end{aligned}$$

με  $w \neq 0$ ,  $w \in H^1((p_0, 0))$ ,  $w(p_0) = 0$ . Τότε,

$$\frac{-g w^2(0) + \int_{p_0}^0 \alpha_\lambda^3 w_p^2 dp}{\int_{p_0}^0 \alpha_\lambda w^2 dp} \geq -1$$

Τελικά, για κάθε  $0 \neq w \in H^1((p_0, 0))$ , με  $w(p_0) = 0$ ,  $\mathcal{R}(w) \geq -1$ , άρα  $\mu \geq -1$ .  $\square$

Ο στόχος είναι να αποδειχθεί ότι υπάρχει  $\lambda^*$  ώστε  $\mu(\lambda^*) = -1$ . Αποδεικνύεται ότι υπάρχουν  $\lambda$  τέτοια ώστε  $\mu(\lambda) \geq -1$  και  $\lambda_0$  τέτοια ώστε  $\mu(\lambda_0) < -1$ , οπότε λαμβάνοντας υπόψη τη συνέχεια της  $\mu$ , έχουμε το ζητούμενο.

Ισχυρισμός 2:  $\mu(-2\Gamma_{min}) < -1$

Απόδειξη. Για  $\lambda = -2\Gamma_{min}$  και  $w(p) = p - p_0$  και λόγω της σχέσης (1.0),

$$\mu(-2\Gamma_{min}) \leq \mathcal{R}(w) = \frac{-g p_0^2(0) + \int_{p_0}^0 \alpha_\lambda^3(p) dp}{\int_{p_0}^0 (p - p_0)^2 \alpha_\lambda dp} < -1$$

όπου  $\alpha_\lambda(p) = \sqrt{2\Gamma(p) - 2\Gamma_{min}}$ .  $\square$

Τελικά,  $\exists \lambda^* : \mu(\lambda^*) = -1$ .

Εφόσον υπάρχει  $\lambda^*$  λύση του προβλήματος ιδιοτιμών, υπάρχει  $\lambda^* > -2\Gamma_{min}$  ώστε μία μη μηδενική συνάρτηση  $m(q, p)$  να είναι λύση του (2.7), άρτια και  $2\pi$ -περιοδική ως προς την  $q$ -μεταβλητή.  $\square$

*Παρατήρηση* Η προηγούμενη απόδειξη μας δείχνει ότι η συνθήκη (1.0) είναι μια ικανή συνθήκη για τον ισχυρισμό του Λήμματος 3, ότι το γραμμικοποιημένο πρόβλημα έχει ιδιοτιμές. Για γενικεύσεις αυτής της συνθήκης, βλ. [3, Remark, p. 495] και [5, Remark, p.51, Conclusion, p. 63]

**Λήμμα 4.** (Μονοτονία) Η  $\mu(\lambda)$  είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του  $\lambda$ , οπουδήποτε  $\mu(\lambda) < 0$ .

*Απόδειξη.* Συμβολίζουμε με  $\mathcal{L}w = -(\alpha^3 w_p)_p$ , τον διαφορικό τελεστή  $\mathcal{L}$  επί της  $w$ , όπου  $\alpha = \alpha_\lambda(p) = \sqrt{\lambda + 2\Gamma(p)}$ . Για κάθε  $\lambda$ , έστω  $w(p) = w(p; \lambda)$  να είναι η λύση του τυπικού προβλήματος ιδιοτιμών

$$\mathcal{L}(w) = \mu\alpha w,$$

$$w(p_0) = 0 \text{ και } w_p(0) = \lambda^{-\frac{3}{2}} g w(0)$$

όπου  $\mu = \mu(\lambda)$  είναι η μικρότερη ιδιοτιμή.

Συμβολίζουμε με  $\dot{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}$ , οπότε  $\dot{\alpha} = \frac{\partial \sqrt{\lambda + 2\Gamma(p)}}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda + 2\Gamma(p)}} = \frac{1}{2\alpha}$

Οπότε, διαφορίζοντας ως προς  $\lambda$ , τη σχέση  $\mathcal{L}(w) = \mu\alpha w$  έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda}(\mathcal{L}w) &= \frac{\partial}{\partial \lambda}(\mu\alpha w) \\ \frac{\partial}{\partial \lambda}(-\alpha^3 w_p)_p &= \frac{\partial}{\partial \lambda}\mu(\alpha w) + \mu \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} w + \mu \alpha \frac{\partial w}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial \lambda}(-\alpha^3 w_p) &= \dot{\mu}\alpha w + \frac{1}{2\alpha}\mu w + \mu \alpha \dot{w} \\ \frac{\partial}{\partial p}(-\frac{3}{2\alpha}\alpha^2 w_p - \alpha^3(\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial p} w)) &= \dot{\mu}\alpha w + \frac{\mu}{2\alpha} w + \mu \alpha \dot{w} \\ (-\frac{3}{2}\alpha w_p)_p + (-\alpha^3 \dot{w}_p)_p &= \dot{\mu}\alpha w + \frac{\mu}{2\alpha} w + \mu \alpha \dot{w} \end{aligned}$$

Παρατηρώντας ότι  $\mathcal{L}\dot{w} = (-\alpha^3 \dot{w}_p)_p$ ,

$$\mathcal{L}\dot{w} - (\frac{3}{2}\alpha w_p)_p = \dot{\mu}\alpha w + \frac{\mu}{2\alpha} w + \mu \alpha \dot{w}$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι

$$\begin{aligned} \dot{w}_p(0) &= -\frac{3}{2}\lambda^{-\frac{5}{2}} g w(0) + \lambda^{-\frac{3}{2}} g \dot{w}(0), \\ \dot{w}(p_0) &= 0 \end{aligned}$$

Παρακάτω συμβολίζεται με  $(\cdot, \cdot)$  το εσωτερικό γινόμενο στον  $L^2[p_0, 0]$ . Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση  $\mathcal{L}w = \mu\alpha w$  με  $\dot{w}$  έχουμε

$$\dot{w}\mathcal{L}w = \dot{w}\mu\alpha w$$

και πολλαπλασιάζοντας με  $w$  την  $\mathcal{L}\dot{w} - (\frac{3}{2}\alpha w_p)_p = \dot{\mu}\alpha w + \frac{\mu}{2\alpha}w^2 + \mu\alpha\dot{w}$ ,

$$w\mathcal{L}\dot{w} - \frac{3}{2}(\alpha w_p)_p w = \dot{\mu}\alpha w^2 + \frac{\mu}{2\alpha}w^2 + \mu\alpha\dot{w}w$$

Ολοκληρώνοντας την πρώτη σχέση ως προς  $p$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^0 \dot{w}\mathcal{L}w dp &= \int_{p_0}^0 \mu\dot{w}\alpha w dp \\ (\dot{w}, \mathcal{L}w) &= \mu(\dot{w}, \alpha w) \end{aligned}$$

ενώ ολοκληρώνοντας τη δεύτερη ως προς  $p$ , έχουμε

$$\int_{p_0}^0 w\mathcal{L}\dot{w} dp - \frac{3}{2} \int_{p_0}^0 w(\alpha w_p)_p dp = \int_{p_0}^0 \dot{\mu}\alpha w^2 + \frac{\mu}{2} \frac{1}{\alpha} w^2 dp + \mu \int_{p_0}^0 \alpha\dot{w}w dp$$

όπου λόγω της ακόλουθης σχέσης που προκύπτει με ολοκλήρωση κατά παράγωγο-ντες,

$$\int_{p_0}^0 w(\alpha w_p)_p dp = [w\alpha w_p]_{p_0}^0 - \int_{p_0}^0 \alpha w_p^2 dp = w(0)\alpha w_p(0) - \int_{p_0}^0 \alpha w_p^2 dp$$

έχουμε

$$(\mathcal{L}\dot{w}, w) + \frac{3}{2} \int_{p_0}^0 \alpha w_p^2 dp - \frac{3}{2} \alpha w_p w \big|_{p=0} = \dot{\mu} \int_{p_0}^0 \alpha w^2 dp + \frac{\mu}{2} \int_{p_0}^0 \frac{1}{\alpha} w^2 dp + \mu(\alpha\dot{w}, w)$$

Παρατηρούμε

$$(\dot{w}, \mathcal{L}w) - (\mathcal{L}\dot{w}, w) = \int_{p_0}^0 \{-\dot{w}(\alpha^3 w_p)_p + (\alpha^3 \dot{w}_p)_p w\} dp$$

όπου

$$\int_{p_0}^0 -\dot{w}(\alpha^3 w_p)_p + (\alpha^3 \dot{w}_p)_p w dp = -[\alpha^3 \dot{w}w_p - \alpha^3 w\dot{w}_p]_{p_0}^0 = -\alpha^3 \dot{w}w_p + \alpha^3 w\dot{w}_p \big|_{p=0}$$

Άρα,

$$(\dot{w}, \mathcal{L}w) - (\mathcal{L}\dot{w}, w) = -\alpha^3 \dot{w}w_p + \alpha^3 w\dot{w}_p \big|_{p=0}$$



Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις,

$$(\dot{w}, \mathcal{L}w) = \mu(\dot{w}, \alpha w)$$

$$(\mathcal{L}\dot{w}, w) + \frac{3}{2} \int_{p_0}^0 \alpha w_p^2 dp - \frac{3}{2} \alpha w_p w|_{p=0} = \dot{\mu} \int_{p_0}^0 \alpha w^2 dp + \frac{\mu}{2} \int_{p_0}^0 \frac{1}{\alpha} w^2 dp + \mu(\alpha \dot{w}, w)$$

$$(\dot{w}, \mathcal{L}w) - (\mathcal{L}\dot{w}, w) = -\alpha^3 \dot{w} w_p + \alpha^3 w \dot{w}_p|_{p=0}$$

έχουμε έπειτα από στοιχειώδεις πράξεις,

$$\frac{3}{2} \int_{p_0}^0 \alpha w_p^2 dp - \frac{3}{2} \alpha w_p w|_{p=0} = \dot{\mu} \int_{p_0}^0 \alpha w^2 dp + \int_{p_0}^0 \frac{\mu}{2\alpha} w^2 dp + \alpha^3 (\dot{w}_p w - \dot{w} w_p)|_{p=0}$$

Η συνοριακή συνθήκη για  $p = 0$ , δίνει

$$-\frac{3}{2} \alpha(0) w_p(0) w(0) = -\frac{3}{2} \lambda^{\frac{1}{2}} (\lambda^{-\frac{3}{2}} g w(0)) = -\frac{3}{2} \lambda^{-1} g w^2(0)$$

και

$$\begin{aligned} & \alpha^3(0) \dot{w}_p(0) w(0) - \alpha^3(0) \dot{w}(0) w_p(0) \\ &= \lambda^{\frac{3}{2}} \left( -\frac{3}{2} \lambda^{-\frac{5}{2}} g w(0) + \lambda^{-\frac{3}{2}} g \dot{w}(0) \right) w(0) - \lambda^{\frac{3}{2}} \dot{w}(0) (\lambda^{-\frac{3}{2}} g w(0)) \\ &= -\frac{3}{2} \lambda^{-1} g w^2(0) + g \dot{w}(0) w(0) - g \dot{w}(0) w(0) \\ &= -\frac{3}{2} \lambda^{-1} g w^2(0) \end{aligned}$$

Τελικά,

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \int_{p_0}^0 \alpha w_p^2 dp &= \dot{\mu} \int_{p_0}^0 \alpha w^2 dp + \int_{p_0}^0 \frac{\mu}{2\alpha} w^2 dp \\ \dot{\mu} \int_{p_0}^0 \alpha w^2 dp &= -\mu \int_{p_0}^0 \frac{1}{2\alpha} w^2 dp + \frac{3}{2} \int_{p_0}^0 \alpha w_p^2 dp \\ \dot{\mu}(\alpha w, w) &= -\mu \int_{p_0}^0 \frac{1}{2\alpha} w^2 dp + \frac{3}{2} \int_{p_0}^0 \alpha w_p^2 dp \end{aligned}$$

άρα  $\dot{\mu} > 0$ , για κάθε  $\lambda$  με  $\mu(\lambda) < 0$ . □

**Λήμμα 5.** (Θέση του  $\lambda^*$ ) Η λύση  $\lambda^*$  ώστε  $\mu(\lambda^*) = -1$  είναι μοναδική και επιπλέον,  $\lambda^* < \lambda_0$ .

Απόδειξη. Ο χώρος των λύσεων περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο της μορφής  $M(p) \cos q$ .

Η  $M(p)$  είναι 0, για  $p = p_0$ , από τη συνθήκη του άνω συνόρου.

Υπενθυμίζεται ότι το  $\lambda_0$  είναι εκείνο για το οποίο  $Q(\lambda_0) = Q_{min}$ .

Η τιμή  $\lambda^*$  είναι μοναδική επειδή η  $\mu$  είναι μονότονη σε κάθε διάστημα όπου  $\mu < 0$ .

Άρα,  $\lambda^* < \lambda_0$ , αν  $\mu(\lambda_0) = 0$ .

Παρατηρούμε αρχικά,

$$\mathcal{R}(\int_{p_0}^p \alpha_{\lambda_0}(s)ds; \lambda_0) = 0$$

λόγω της (2.6).

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\int_{p_0}^p \alpha_{\lambda_0}(s)ds; \lambda_0) &= \frac{-g(\int_{p_0}^0 \alpha_{\lambda_0}^{-3}(p)dp)^2 + \int_{p_0}^0 \alpha_{\lambda_0}^3 [\frac{\partial}{\partial p} \int_{p_0}^p \alpha_{\lambda_0}^{-3}(s)ds]^2 dp}{\int_{p_0}^0 \alpha_{\lambda_0} (\int_{p_0}^p \alpha_{\lambda_0}^{-3}(s)ds)^2 dp} \\ &= \frac{-g\frac{1}{g^2} + \int_{p_0}^0 \alpha_{\lambda_0}^{-3}(p)dp}{\int_{p_0}^0 \alpha_{\lambda_0} (\int_{p_0}^p \alpha_{\lambda_0}^{-3}(s)ds)^2 dp} \\ &= \frac{-\frac{1}{g} + \frac{1}{g}}{\int_{p_0}^0 \alpha_{\lambda_0} (\int_{p_0}^p \alpha_{\lambda_0}^{-3}(s)ds)^2 dp} = 0 \end{aligned}$$

Εφόσον  $\mu(\lambda_0) = \inf \mathcal{R}(\phi, \lambda_0)$  και  $\mathcal{R}(\int_{p_0}^p \alpha_{\lambda_0}(s)ds; \lambda_0) \equiv 0$  έχουμε  $\mu(\lambda_0) \leq 0$ .

Από την άλλη, για κάθε  $\phi \in H^1((p_0, 0))$ ,  $\phi \not\equiv 0$ , με  $\phi(p_0) = 0$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \phi^2(0) &= (\int_{p_0}^0 \phi_p(p)dp)^2 = (\int_{p_0}^0 \alpha_{\lambda_0}^{\frac{3}{2}} \phi_p \alpha_{\lambda_0}^{-\frac{3}{2}} dp)^2 \\ &\leq \int_{p_0}^0 \alpha_{\lambda_0}^3 \phi_p^2 dp \int_{p_0}^0 \alpha_{\lambda_0}^{-3} \phi_p^2 dp \\ &\stackrel{(2.6)}{=} \frac{1}{g} \int_{p_0}^0 \alpha_{\lambda_0}^3 \phi_p^2 dp \end{aligned}$$

Τελικά,

$$-g\phi^2(0) + \int_{p_0}^0 \alpha_{\lambda_0}^3 \phi_p^2 dp \geq 0$$

άρα,  $\mathcal{R}(\phi; \lambda_0) \geq 0$ , για κάθε  $\phi \in H^1((p_0, 0))$ ,  $\phi \not\equiv 0$ ,  $\phi(p_0) = 0$ .

Τελικά,  $\mu(\lambda_0) = 0$  και άρα  $\lambda^* < \lambda_0$ . □

## 2.2 Διακλάδωση

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 2.0.1 και συνεπώς το Θεώρημα 1.1.1, θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Crandall-Rabinowitz [6] για διακλάδωση από μία απλή

ιδιοτιμή. Αν  $\mathcal{L}$  ένας γραμμικός τελεστής μεταξύ δύο χώρων Banach, θα συμβολίζεται με  $\mathcal{N}(\mathcal{L})$  ο πυρήνας και με  $\mathcal{R}(\mathcal{L})$  η εικόνα του.

**Θεώρημα 2.2.1.** (Crandall-Rabinowitz) Έστω  $X$  και  $Y$  χώροι Banach,  $I$  ένα ανοικτό διάστημα του  $\mathbb{R}$  που περιέχει το  $\lambda^*$ , και  $\mathcal{F} : I \times X \rightarrow Y$  μία συνεχής απεικόνιση με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- i.  $\mathcal{F}(\lambda, 0) = 0$ , για κάθε  $\lambda \in I$ .
- ii.  $\mathcal{F}_\lambda, \mathcal{F}_w, \mathcal{F}_{\lambda w}$  υπάρχουν και είναι συνεχείς.
- iii. Οι  $\mathcal{N}(\mathcal{F}_w(\lambda^*, 0))$  και  $Y/\mathcal{R}(\mathcal{F}_w(\lambda^*, 0))$  είναι μονοδιάστατοι χώροι, με τον πυρήνα να παράγεται από την  $w^*$ .
- iv.  $\mathcal{F}_{w\lambda}(\lambda^*, 0)w^* \notin \mathcal{R}(\mathcal{F}_w(\lambda^*, 0))$

Τότε, υπάρχει μία συνεχής, τοπική καμπύλη διακλάδωσης

$$\{(\lambda(s), w(s)) : |s| < \epsilon\}$$

με  $\epsilon > 0$  αρκετά μικρό έτσι ώστε  $(\lambda(0), w(0)) = (\lambda^*, 0)$  και

$$\{(\lambda, w) \in \mathcal{U} : w \neq 0, \mathcal{F}(\lambda, w) = 0\} = \{(\lambda(s), w(s)) : 0 < |s| < \epsilon\}$$

για κάποια περιοχή  $\mathcal{U}$  του  $(\lambda^*, 0) \in I \times X$ . Επιπλέον,

$$w(s) = sw^* + o(s), \text{ στο } X, |s| < \epsilon$$

- v. Αν  $\mathcal{F}_{ww}$  είναι και αυτή συνεχής, τότε η καμπύλη είναι τάξης  $C^1$ .

Στη συνέχεια γίνεται η κατάλληλη προεργασία για την εφαρμογή του Θεωρήματος Crandall-Rabinowitz.

Έστω το ορθογώνιο  $R := (0, 2\pi) \times (p_0, 0)$  και  $\bar{R}$  η κλειστή του θήκη. Επίσης, έστω  $T := \{p = 0\}$  το άνω σύνορο του  $\bar{R}$  και  $B := \{p = p_0\}$  το κάτω σύνορο του  $\bar{R}$ .

Ορίζουμε ακόμα, τους χώρους

$$X := \{h \in C_{per}^{3+\alpha}(\bar{R}) : h = 0 \text{ στο } B, h \text{ άρτια και } 2\pi\text{-περιοδική}\},$$

$$Y := C_{per}^{1+\alpha}(\bar{R}) \times C_{per}^{2+\alpha}(T),$$

όπου "per": περιοδική και άρτια ως προς  $q$ . Εισάγουμε την συνάρτηση  $w$  ως  $h(q, p) = H(p) + w(q, p)$ , οπότε το μη γραμμικό σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων (2.1)-(2.3) γράφεται ως

$$\begin{aligned} (1 + w_q^2)(H_{pp} + w_{pp}) - 2w_q(H_p + w_p)w_{pq} + (H_p + w_p)^2 w_{qq} \\ + \gamma(-p)(H_p + w_p)^3 = 0, \text{ στο } R \\ 1 + w_q^2 + (2g(H + w) - Q)(H_p + w_p)^2 = 0, \text{ στο } T \end{aligned}$$

από κοινού με τον μηδενισμό στο  $B$  και την περιοδικότητα και αρτιότητα ως προς την  $q$ -μεταβλητή.

Εισάγεται ο μη γραμμικός τελεστής  $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}(\lambda, w) = (\mathcal{F}_1(\lambda, w), \mathcal{F}_2(\lambda, w))$$

για  $w \in X$  και  $\lambda \in I = (-2\Gamma_{min}, \infty)$  όπου

$$\mathcal{F}_1(\lambda, w) = (1 + w_q^2)(H_{pp} + w_{pp}) - 2w_q(H_p + w_p)w_{pq} \quad (2.10\alpha')$$

$$+ (H_p + w_p)^2 w_{qq} + \gamma(-p)(H_p + w_p)^3$$

$$\mathcal{F}_2(\lambda, w) = 1 + w_q^2 + (2g(H + w) - Q)(H_p + w_p)^2 \quad (2.10\beta')$$

Προφανώς  $\mathcal{F}(\lambda, 0) \equiv 0$ , επειδή η  $H$  ικανοποιεί την εξίσωση (2.2).

Για να ελέγξουμε τη δεύτερη συνθήκη του θεωρήματος υπολογίζουμε τη *Frèchet*-παράγωγο του τελεστή  $\mathcal{F}$ . Οπότε για  $w = 0$ , εισάγεται ο γραμμικός τελεστής  $\mathcal{F}_w = (\mathcal{F}_{1w}, \mathcal{F}_{2w})$ , όπου

$$\mathcal{F}_{1w}(\lambda, 0) = \partial_p^2 + H_p^2 \partial_q^2 + 3\gamma(-p)H_p^2 \partial_p \text{ στο } R,$$

$$\mathcal{F}_{2w}(\lambda, 0) = 2(g\lambda^{-1} - \lambda^{\frac{1}{2}} \partial_p)|_T$$

Πράγματι, έστω  $w_0(p, q) = w(p_0, q_0)$ .

Θεωρούμε τυχόν αλλά σταθεροποιημένο  $\lambda_r \in I$ . Παρακάτω,  $\mathcal{F}(\lambda_r; w) = \mathcal{F}(w)$  για απλότητα στον συμβολισμό. Η *Frèchet*-παράγωγος του τελεστή  $\mathcal{F}$  ως προς  $w$  είναι ο γραμμικός τελεστής  $D\mathcal{F} : I \times X \longrightarrow Y$ , για κάθε "μικρή διαταραχή"  $h$ ,  $\|h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  της  $w$ ,

$$\mathcal{F}(w_0 + h) = \mathcal{F}(w_0) + D\mathcal{F}(w_0)h + o(\|h\|)$$

όπου ο το μικρό-ο του  $h$ . Άρα,

$$\begin{aligned}
D\mathcal{F}_1(w_0)(h) &= \mathcal{F}_1(w_0 + h) - \mathcal{F}_1(w_0) \\
&= \{(1 + (w_0 + h)_q^2)(H_{pp} + (w_0 + h)_{pp}) \\
&\quad - 2(w_0 + h)_q(H_p + (w_0 + h)_p)(w_0 + h)_{pq} \\
&\quad + (H_p + (w_0 + h)_p)^2(w_0 + h)_{qq} + \gamma(-p)(H_p + (w_0 + h)_p)^3\} \\
&\quad - \{(1 + w_0_q^2)(H_{pp} + w_{0pp}) - 2w_{0q}(H_p + w_{0p})w_{0pq} \\
&\quad + (H_p + w_{0p})^2w_{0qq} + \gamma(-p)(H_p + w_{0p})^3\} \\
&= (1 + w_0_q^2)(H_{pp} + w_{0pp}) + 2w_{0q}h_q(H_{pp} + w_{0pp}) + (1 + w_0_q^2)h_{pp} \\
&\quad - 2w_{0q}(H_p + w_{0p})w_{0pq} - 2h_q(H_p + w_{0p})w_{0pq} - 2w_{0q}h_pw_{0pq} \\
&\quad + (H_p + w_{0p})^2w_{0qq} + 2(H_p + w_{0p})w_{0qq}h_p + (H_p + w_{0p})^2h_{qq} \\
&\quad + \gamma(-p)(H_p + w_{0p})^3 + 3\gamma(-p)(H_p + w_{0p})^2h_p - (1 + w_0_q^2)(H_{pp} + w_{0pp}) \\
&\quad + 2w_{0q}(H_p + w_{0p})w_{0pq} - (H_p + w_{0p})^2w_{0qq} - \gamma(-p)(H_p + w_{0p})^3 + o(\|h\|)
\end{aligned}$$

Τελικά,

$$\begin{aligned}
D\mathcal{F}_1(w_0)(h) &= 2w_{0q}h_q(H_{pp} + w_{0pp}) + (1 + w_0_q^2)h_{pp} - 2h_q(H_p + w_{0p})w_{0pq} \\
&\quad - 2w_{0q}h_pw_{0pq} + 2(H_p + w_{0p})w_{0qq}h_p + (H_p + w_{0p})^2h_{qq} + 3\gamma(-p)(H_p + w_{0p})^2h_p
\end{aligned}$$

Τελικά, για  $w \equiv 0$ ,

$$\mathcal{F}_{1w}(\lambda, 0)(h) = D\mathcal{F}_1(0)(h) = h_{pp} + H_p^2h_{qq} + 3\gamma(-p)H_p^2h_p \text{ στο } R$$

Εντελώς αντίστοιχα,

$$\begin{aligned}
D\mathcal{F}_2(w_0)(h) &= \mathcal{F}_2(w_0 + h) - \mathcal{F}_2(w_0) \\
&= 1 + (w_{0q} + h_q)^2 + (2g(H_0 + w_0 + h) - Q)(H_p + w_{0p} + h_p)^2 \\
&\quad - 1 - w_{0q}^2 - (2g(H_0 + w_0) - Q)(H_p + w_{0p})^2 \\
&= 2w_{0q}h_q + (2g(H + w_0) - Q)(H_p + w_{0p})^2 + 2gh(H_p + w_{0p})^2 \\
&\quad + 2(2g(H + w_0) - Q)(H_p + w_{0p})h_p - (2g(H + w_0) - Q)(H_p + w_{0p})^2 + o(\|h\|) \\
&= 2w_{0q}h_q + 2gh(H_p + w_{0p})^2 + 2(2g(H + w_0) - Q)(H_p + w_{0p})h_p + o(\|h\|)
\end{aligned}$$

Τελικά, για  $w \equiv 0$ ,

$$D\mathcal{F}_2(0)(h) = 2ghH_p^2 + 2(2gH - Q)H_ph_p$$

όπου  $H_p(0) = \lambda^{-\frac{1}{2}}$  και  $H(0) = \frac{Q-\lambda}{2g}$ , άρα

$$\mathcal{F}_{2w}(\lambda, 0)(h) = D\mathcal{F}_2(0)(h) = 2(g\lambda^{-1}h - \lambda^{\frac{1}{2}}h_p) \text{ στο } T$$

Το γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών (2.7), ισοδυναμεί με την εύρεση εκείνων των  $\lambda$ , για τα οποία ο πυρήνας του τελεστή  $\mathcal{F}$  είναι μη τετριμμένος.

**Λήμμα 6.** (Πυρήνας) Για  $\lambda = \lambda^*$ , ο χώρος των λύσεων της (2.7) είναι μονοδιάστατος. Ισοδύναμα, ο πυρήνας του  $\mathcal{F}_w(\lambda^*, 0)$  είναι μονοδιάστατος.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε  $\lambda = \lambda^*$ .

Ήδη γνωρίζουμε από τη σχέση (2.8) ότι υπάρχει το στοιχείο  $M(p) \cos q$  του χώρου  $\mathcal{N}(\mathcal{F}_w(\lambda^*, 0))$ . Αρκεί να αποδειχθεί η μοναδικότητα.

Έστω  $m \in \mathcal{N}(\mathcal{F}_w(\lambda^*, 0))$ .

Όπως αποδείχθηκε προηγουμένως, αν η περιοδική ως προς την  $q$ -μεταβλητή συνάρτηση  $m(q, p)$  με το Fourier ανάπτυγμα στον  $C_{per}^2(\bar{R})$ ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k(p) \cos kq$$

όπου

$$m_0(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} m(q, p) dq$$

$$m_k(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} m(q, p) \cos kq dq, k \geq 1$$

είναι λύση του (2.7), τότε οι συντελεστές Fourier  $m_k$  ικανοποιούν το πρόβλημα (2.7) με τις συνοριακές συνθήκες.

Δηλαδή,

$$\{\partial_p(\alpha^3 \partial_p) - k^2 \alpha\} m_k = 0,$$

$$(m_k)_p(0) - g\lambda^{-\frac{3}{2}} m_k(0) = 0, \quad m_k(p_0) = 0$$

Εφόσον  $\lambda = \lambda^*$ , η  $m_1(p)$  είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο της  $M(p)$ .

Για  $k \geq 2$  έχουμε

$$\frac{-gm_k^2(0) + \int_{p_0}^0 \alpha^3 (\partial_p m_k)^2 dp}{\int_{p_0}^0 \alpha m_k^2 dp} = -k^2 < -1$$

λόγω της (2.7) που ικανοποιεί η  $m_k$ . Ωστόσο, το  $\lambda^*$  είναι η ελάχιστη ιδιοτιμή που είναι λύση στο πρόβλημα, άρα  $m_k \equiv 0$ .

Για την περίπτωση που  $k = 0$ , από τη διαφορική εξίσωση έχουμε

$$\begin{aligned} \forall p, \quad (\alpha^3 (m_0)_p)_p &= 0 \\ \implies \alpha^3 (m_0)_p &= A_0, \quad \text{όπου } A_0 \in \mathbb{R} \\ \implies m_0(p) &= A_0 \int_{p_0}^p \alpha^{-3}(s, \lambda^*) ds + c, \quad p \in [p_0, 0] \end{aligned}$$

όπου  $c = 0$ , λόγω της συνοριακής συνθήκης στο  $p = p_0$ . Τέλος, από τη συνοριακή συνθήκη στο  $p = 0$  έχουμε

$$\begin{aligned} (m_0)_p(0) - g\alpha^{-3}m_0(0) &= 0 \\ \alpha^3(m_0)_p(0) - gm_0(0) &= 0 \\ A_0 - gA_0 \int_{p_0}^0 \alpha^{-3}(p, \lambda^*) dp &= 0 \\ A_0 \left( g \int_{p_0}^0 \alpha^{-3}(p, \lambda^*) dp - 1 \right) &= 0 \end{aligned}$$

απ' όπου  $A_0 = 0$ , διαφορετικά

$$\frac{1}{g} = \int_{p_0}^0 \alpha^{-3}(p, \lambda^*) dp$$

το οποίο αντίκειται στον τρόπο ορισμού του  $\lambda_0$ .

Τελικά, η συνάρτηση  $m(q, p)$  είναι σταθερό πολλαπλάσιο της  $M(p) \cos kq$ .  $\square$

**Λήμμα 7.** (Εικόνα) Το ζεύγος  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ , ανήκει στην εικόνα του τελεστή  $\mathcal{F}_w(\lambda^*, 0)$  αν και μόνο αν ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνιότητας

$$\iint_R \mathcal{A} \alpha^3 \phi^* dq dp + \frac{1}{2} \int_T \mathcal{B} \alpha^2 \phi^* dq = 0 \quad (2.11)$$

όπου η  $\phi^*$  παράγει τον πυρήνα του  $\mathcal{F}_w(\lambda^*, 0)$ .

*Απόδειξη.* Το  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  ανήκει στην εικόνα του τελεστή  $\mathcal{F}_w(\lambda^*, 0)$  αν και μόνο αν  $\mathcal{A} := \mathcal{F}_{1w}(\lambda, 0)v$  και  $\mathcal{B} := \mathcal{F}_{2w}(\lambda, 0)v$ , για κάποια  $v$  περιοδική ως προς  $q$ -μεταβλητή με  $v = 0$  στο  $B = \{p = p_0\}$ . Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \alpha^{-3} \{ \alpha^3 v_p \}_p + \alpha^{-2} v_{qq}, \text{ στο } R \\ \mathcal{B} &:= 2(g\alpha^{-2}v - \alpha v_p) \text{ στο } T \end{aligned}$$

Η αναγκαιότητα της συνθήκης της ορθογωνιότητας έπεται πολλαπλασιάζοντας τη μερική διαφορική εξίσωση με τον όρο  $\alpha^3 \phi^*$  και κατόπιν ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, λαμβάνοντας υπόψη την 2π-περιοδικότητα ως προς την  $q$ -μεταβλητή

των συναρτήσεων  $v, \phi^*$ . Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\iint_R \alpha^3 \mathcal{A} \phi^* dq dp &= \iint_R \{(\alpha^3 v_p)_p + \alpha v_{qq}\} \phi^* dq dp \\
&= \int [\alpha^3 v_p \phi^*]_{p=p_0}^{p=0} dq - \iint_R \alpha^3 v_p \phi_p^* dq dp + \int [\alpha v_q \phi^*]_{q=-\pi}^{q=\pi} dp - \iint_R \alpha v_q \phi_q^* dq dp \\
&= \int [\alpha^3 v_p \phi^* - \alpha^3 v \phi_p^*]_{p=p_0}^{p=0} dq + \iint_R (\alpha^3 \phi_p)_p v dq dp \\
&\quad - \int [\alpha v_q \phi^* - \alpha v \phi_q^*]_{q=-\pi}^{q=\pi} dp + \iint_R \alpha \phi_{qq}^* v dq dp = \iint_R \{(\alpha^3 \phi_p^*)_p + \alpha \phi_{qq}^*\} v dq dp \\
&\quad + \int_T \{\alpha^3 v_p \phi^* - \alpha^3 v \phi_p^*\} dq - \int_B \{\alpha^3 v_p \phi^* - \alpha^3 v \phi_p^*\} dq
\end{aligned}$$

Όμως,  $v = \phi^* = 0$  στο  $B$ , οπότε το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ίσο με 0. Επίσης, το πρώτο ολοκλήρωμα είναι επίσης 0, λόγω της μερικής διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί η  $\phi^*$ .

Στο  $T$ , λόγω της σχέσης  $2v_p = (-\alpha^{-1}\mathcal{B} + 2g\alpha^{-3}v)\phi^*$  καθώς και της (2.8)  $\phi_p^* = \alpha^{-3}g\phi^*$ , έχουμε

$$\begin{aligned}
2(v_p \phi^* - v \phi_p^*) &= 2v_p \phi^* - 2v \phi_p^* = (2g\alpha^{-3}v - \alpha^{-1}\mathcal{B})\phi^* - 2v(\alpha^{-3}g\phi^*) \\
&= 2v\alpha^{-3}g\phi^* - \alpha^{-1}\mathcal{B}\phi^* - 2v\alpha^{-3}g\phi^* \\
&= -\alpha^{-1}\mathcal{B}\phi^*
\end{aligned}$$

Τελικά,

$$\int_T \{\alpha^3 v_p \phi^* - \alpha^3 v \phi_p^*\} dq = \frac{1}{2} \int_T \alpha^3 (-\alpha^{-1}\mathcal{B}\phi^*) dq = -\frac{1}{2} \int_T \alpha^2 \mathcal{B} \phi^* dq$$

Το γεγονός ότι η συνθήκη είναι ικανή, το οποίο ολοκληρώνει το λήμμα, αποδεικνύεται αυστηρά στο [5] (βλ. εν.3.1.2 σελ.57). Η απόδειξη απαιτεί επιχειρήματα θεωρίας ελλειπτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης (Θεώρημα Λαξ-Μιλγραμ και εκτιμήσεις Σζηαυδερ) και είναι αρκετά πεπλεγμένη καθώς η σχετική ζοερσιτψ ζονδιτιον δεν ικανοποιείται αυτόματα.  $\square$

Από την ισχύ της (2.11) παρατηρούμε ότι η εικόνα του τελεστή  $\mathcal{F}_w(\lambda^*, 0)$  είναι ακριβώς ο πυρήνας, οπότε από τη λειότητα του τελεστή, η εικόνα είναι κλειστό σύνολο. Προφανώς  $\alpha(p, \lambda^*) > 0, \forall p \in [p_0, 0]$  οπότε η σχέση  $\mu(\lambda^*) = -1$ ,



εξασφαλίζει ότι  $M(0) \neq 0$ . Παρατηρούμε τέλος, ότι το στοιχείο  $(0, \cos q) \notin \mathcal{R}[\mathcal{F}_w(\lambda^*, 0)]$ . Πράγματι,

$$\begin{aligned} \iint_R 0 dq dp + \frac{1}{2} \int_T \cos q \alpha^2(0, \lambda^*) \phi^* dq \\ = \lambda^* M(0) \int_T \cos^2 q dq > 0 \end{aligned}$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι  $\alpha^2(0, \lambda^*) = \lambda^*$ .

Τότε, για  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1), (\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2) \in Y \setminus \mathcal{R}[\mathcal{F}_w(\lambda^*, 0)]$ ,

$$(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1) - c(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2) \in \mathcal{R}[\mathcal{F}_w(\lambda^*, 0)]$$

για

$$c = \frac{\iint_R \mathcal{A}_1 \alpha^3 \phi^* dq dp + \frac{1}{2} \int_T \mathcal{B}_1 \alpha^2 \phi^* dq}{\iint_R \mathcal{A}_2 \alpha^3 \phi^* dq dp + \frac{1}{2} \int_T \mathcal{B}_2 \alpha^2 \phi^* dq} \in \mathbb{R}$$

το οποίο είναι καλά ορισμένο, εφόσον έχουμε υποθέσει  $(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2) \notin \mathcal{R}[\mathcal{F}_w(\lambda^*, 0)]$ . Τελικά, το συμπλήρωμα της εικόνας του τελεστή έχει διάσταση 1, άρα ο χώρος πηλίκου  $Y/\mathcal{R}[\mathcal{F}_w(\lambda^*, 0)]$  έχει διάσταση 1 και ο χώρος  $\mathcal{R}[\mathcal{F}_w(\lambda^*, 0)]$  έχει συνδιάσταση 1.

*Απόδειξη του Θεωρήματος 2.0.1.* Αποδεικνύουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (i)–(iv) του Crandall-Rabinowitz για  $\lambda = \lambda^*$ . Προφανώς, η (i) ισχύει λόγω της σχέσης που ικανοποιεί η  $H$ . Η λειότητα του τελεστή είναι προφανής, άρα ισχύει η (ii). Η (iii) αποδείχθηκε στα δύο προηγούμενα λήμματα, αφού αυτά οδήγησαν στον συλλογισμό που παρουσιάσαμε μόλις πιο πάνω. Μένει να αποδειχθεί η (iv). Έχουμε υπολογίσει ότι

$$\mathcal{F}_w(\lambda, 0) = (\partial_p^2 + H_p^2 \partial_q^2 + 3\gamma(-p)H_p^2 \partial_p, 2(\lambda^{-1}g - \lambda^{\frac{1}{2}}\partial_p)|_T) \quad (2.12)$$

όπου  $H_p^2 = \alpha^{-2}$ , οπότε

$$\mathcal{F}_{w\lambda}(\lambda, 0) = (-\alpha^{-4}\partial_q^2 - 3\gamma\alpha^{-4}\partial_p, (-\alpha^{-4}g - \frac{1}{2}\alpha^{-1}\partial_p)|_T) \quad (2.13)$$

Η συνθήκη (iv) απαιτεί ότι η  $\mathcal{F}_{w\lambda}(\lambda, 0)\phi^* \equiv (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \notin \mathcal{R}[\mathcal{F}_w(\lambda^*, 0)]$ . Οπότε, απαιτούμε η ποσότητα  $\Xi$  να μην είναι ταυτοτικά μηδέν, όπου

$$\begin{aligned} \Xi = \iint_R \alpha^3 \phi^* (-\alpha^{-4}\phi_{qq}^* - 3\gamma(-p)\alpha^{-4}\phi_p^*) dq dp \\ + \int_T \alpha^2 \phi^* (-\alpha^{-4}g\phi^* - (2\alpha)^{-1}\phi_p^*) dq \end{aligned}$$

Η  $\phi^*(q, p) = M(p)\cos q$  (με  $M \not\equiv 0$ ) ικανοποιεί το Sturm-Liouville πρόβλημα με  $\mu = -1$ ,

$$\begin{cases} \{\alpha^3 \phi_p^*\}_p + \{\alpha \phi_q^*\}_q = 0 & \Longleftrightarrow \{\alpha^3 \phi_p^*\}_p = \alpha \phi^*, \text{ στο } (p_0, 0) \\ \alpha^3 \phi_p^* = g \phi^* & \text{ στο } p = 0 \\ \phi^* = 0 & \text{ στο } p = p_0 \end{cases}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις  $\alpha_p = \gamma(-p)\alpha^{-1}$  και τη μερική διαφορική εξίσωση

$$3\alpha^2 \alpha_p \phi_p^* + \alpha^3 \phi_{pp}^* - \alpha \phi^* = 0$$

που ικανοποιεί η  $\phi^*$  στο  $R$ , η ποσότητα  $\Xi$  γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \Xi = & - \iint_R \alpha^{-1} \phi^* \phi_{qq}^* dq dp - 3 \iint_R \alpha_p \phi^* \phi_p^* dq dp \\ & + \int_T \alpha^2 \phi^* (-\alpha^{-4} g \phi^* - (2\alpha)^{-1} \phi_p^*) dq \end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες τον δεύτερο όρο της  $\Xi$  και λαμβάνοντας υπόψη τη μερική διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η  $\phi^*$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_R \alpha_p \phi^* \phi_p^* dq dp &= \int_{-\pi}^{\pi} [\alpha \phi_p^* \phi^*]_{p_0}^0 dq - \iint_R \alpha \phi^* \phi_{pp}^* dp dq - \iint_R \alpha (\phi_p^*)^2 dp dq \\ &= \int_T \alpha \phi^* \phi_p^* dq - \iint_R \alpha^{-2} \phi^* \alpha^3 \phi_{pp}^* dp dq - \iint_R \alpha (\phi_p^*)^2 dp dq \\ &= \int_T \alpha \phi^* \phi_p^* dq - \iint_R \alpha^{-2} \phi^* (-3\alpha_p \alpha^2 \phi_p^* + \alpha \phi^*) dp dq - \iint_R \alpha (\phi_p^*)^2 dp dq \\ &= \int_T \alpha \phi^* \phi_p^* dq + 3 \iint_R \alpha_p \phi^* \phi_p^* dp dq - \iint_R \alpha^{-1} \phi^{*2} dp dq - \iint_R \alpha (\phi_p^*)^2 dp dq \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \iint_R \alpha_p \phi^* \phi_p^* dq dp &= -\frac{1}{2} \int_T \alpha \phi^* \phi_p^* dq + \frac{1}{2} \iint_R \alpha^{-1} \phi^{*2} dq dp \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint_R \alpha (\phi_p^*)^2 dq dp \end{aligned}$$

Λόγω της συνοριακής συνθήκης στο  $T$ , ο τρίτος και τέταρτος όρος της  $\Xi$  συνδυάζονται ως εξής

$$\begin{aligned} \int_T \alpha^2 \phi^* (-\alpha^{-4} g \phi^* - (2\alpha)^{-1} \phi_p^*) dq &= - \int_T \alpha^{-2} \alpha^3 \phi_p^* \phi^* dq - \frac{1}{2} \int_T \alpha \phi^* \phi_p^* dq \\ &= -\frac{3}{2} \int_T \alpha \phi^* \phi_p^* dq \end{aligned}$$

Επίσης, λόγω του συνημιτόνου  $\phi_{qq} = -\phi$ .

Τελικά,

$$\begin{aligned} \Xi &= \iint_R \alpha^{-1} \phi^{*2} + \frac{3}{2} \int_T \alpha \phi^* \phi_p^* dq - \frac{3}{2} \iint_R \alpha^{-1} \phi^{*2} dq dp \\ &\quad - \frac{3}{2} \iint_R \alpha (\phi_p^*)^2 dq dp - \frac{3}{2} \int_T \alpha \phi^* \phi_p^* dq \\ &= -\frac{1}{2} \iint_R \alpha^{-1} \phi^{*2} dq dp - \frac{3}{2} \iint_R \alpha \phi_p^{*2} dq dp < 0 \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 2.2.1 συμπεραίνουμε την ύπαρξη μιας καμπύλης τοπικής διακλάδωσης  $\mathcal{C}_0$  του προβλήματος  $\mathcal{F}(\lambda, w) = 0 \iff (\mathcal{F}_1(\lambda, w), \mathcal{F}_2(\lambda, w)) = (0, 0)$ , όπου  $F_i$  όπως στις (2.10α')-(2.10β'). Εφόσον,  $h = H + w$  και  $H_p > 0$ , σε όλο το κλειστό χωρίο  $\bar{R}$ , τότε  $h_p > 0$  στο  $\bar{R}$ , για όλα τα  $(\lambda, w) \in \mathcal{C}_0$  που είναι αρκετά κοντά στο  $(\lambda^*, 0) \in \mathbb{R} \times X$ . Οπότε, μπορούμε να περιοριστούμε σε μια  $C^1$  καμπύλη  $\mathcal{C}_{loc} \subset \mathcal{C}_0$  που περιέχει το  $(\lambda^*, 0)$ , στην οποία  $h_p > 0$  σε όλο το  $\bar{R}$ .

Η συζήτηση που έγινε στις Ενότητες 1.2, 2.1 μας επιτρέπει να περάσουμε από τις λύσεις του προβλήματος  $\mathcal{F}(\lambda, w) = 0$ , στις λύσεις του αρχικού προβλήματος (1.1)-(1.5). Εφόσον  $h = H + w$  με  $H \in C_{per}^{3+\alpha}$  και καθώς  $u, v$  και  $\eta$  όπως ορίστηκαν στις προηγούμενες ενότητες, επάγεται η λειότητα της λύσης  $(u, v, \eta)$  του προβλήματος (1.1)-(1.5) και το γεγονός ότι  $u < c$  σε όλο το υγρό.  $\square$

*Παρατήρηση* Η τοπική διακλάδωση εφαρμόζεται αν και μόνο αν  $\mu(-2\Gamma_{min}) \leq -1$ . Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [3, Proposition 3.9] και στο [5, §3.1.2, Conclusion].

## 2.3 Μορφή των λύσεων

Σε αυτή την ενότητα, αποδεικνύουμε ότι η καμπύλη τοπικής διακλάδωσης  $\mathcal{C}_0$  διατηρεί τη μορφή των λύσεων που κληρονομήθηκε από την ιδιοσυνάρτηση του

γραμμικοποιημένου προβλήματος στο σημείο διακλάδωσης  $(\lambda^*, 0)$ .

Έστω  $\Omega$  το ανοιχτό ορθογώνιο  $(0, \pi) \times (p_0, 0)$  που έχει το μισό μέγεθος του  $R$ , με τα ακόλουθα σύνορα

$$\begin{aligned}\partial\Omega_t &= \{(q, 0) : q \in (0, \pi)\} \\ \partial\Omega_b &= \{(q, p_0) : q \in (0, \pi)\} \\ \partial\Omega_l &= \{(0, q) : p \in (p_0, 0)\} \\ \partial\Omega_r &= \{(\pi, p) : p \in (p_0, 0)\}\end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι  $h = 0$  στο  $\partial\Omega_b$  για  $(\lambda^*, 0) \in \mathcal{C}_{loc} \subset \mathbb{R} \times X$ .

Αν  $h \in X$  έχουμε ότι η  $h(q, p)$  είναι μια άρτια και  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση ως προς  $q$ , με  $h_q = 0$  στο  $\partial\Omega_l \cup \partial\Omega_r$ .

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις για κάθε σημείο στην καμπύλη εκτός του σημείου διακλάδωσης  $(\lambda^*, 0)$ ,

$$\begin{aligned}h_q &< 0, \text{ στο } \Omega \cup \Omega_t \\ h_{qp} &< 0, \text{ στο } \partial\Omega_b \\ h_{qq} &< 0, \text{ στο } \partial\Omega_l \\ h_{qq} &> 0, \text{ στο } \partial\Omega_r\end{aligned}\tag{2.14}$$

Στον πυθμένα έχουμε

$$h_{qp}(0, p_0) < 0, \quad h_{qp}(\pi, 0) > 0\tag{2.15}$$

ενώ στο δεξί άκρο

$$\text{είτε } h_{qq} > 0, \quad \text{είτε } h_{qp} < 0\tag{2.16}$$

με τις συνθήκες στο αριστερό άκρο να είναι οι ακριβώς αντίθετες. Οι παραπάνω ανισοτικές σχέσεις ορίζουν ένα ανοιχτό σύνολο στο  $X$ .

**Λήμμα 8.** Οι ιδιότητες (2.14)-(2.16) ισχύουν σε μια μικρή περιοχή του  $(\lambda^*, 0)$  στον χώρο  $\mathbb{R} \times C_{per}^{3+\alpha}(\bar{\Omega})$  κατά μήκος της καμπύλης διακλάδωσης  $\mathcal{C}_{loc} \setminus \{(\lambda^*, 0)\}$  που παράγεται από το  $(\lambda^*, 0)$ .

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε ότι η ιδιοσυνάρτηση  $w^*(q, p) = M(p)\cos q$  του γραμμικοποιημένου προβλήματος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $(\lambda^*, 0)$  ικανοποιεί τις σχέσεις (2.14)-(2.16), καθώς  $M(p) > 0$ , για κάθε  $p \in (p_0, 0]$  και  $M(p_0) = 0$ ,  $M'(p_0) > 0$ , εφόσον  $M(0) > 0$  και  $M'(0) > 0$ . Πράγματι, τα παραπάνω προκύπτουν από τη σχέση  $M'(0) = g(\lambda^*)^{-\frac{3}{2}}M(0)$  και το γεγονός ότι η  $M$  είναι μια μη τετριμμένη λύση της γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης. Η εναλλακτική της (2.16) ισχύει αφού  $w_{qp}^*(0, 0) < 0$  και  $w_{qp}(\pi, 0) > 0$ .

Από το Θεώρημα Crandall-Rabinowitz εξασφαλίσαμε την ύπαρξη μιας συνάρτησης  $w$ , για  $\epsilon > 0$  αρκετά μικρό, κατά μήκος της καμπύλης  $C_{loc}$  τέτοια ώστε

$$w(q, p) = \epsilon M(p) \cos q + o(\epsilon) \text{ στον } C^{3+\alpha}(\bar{\Omega}) \quad (2.17)$$

όπου

$$M(p_0) = 0, \quad M'(0) = g(\lambda^*)^{-\frac{3}{2}} M(0) > 0, \quad M'(p_0) > 0 \quad (2.18)$$

$$M(p) > 0, \quad \text{για κάθε } p \in (p_0, 0] \quad (2.19)$$

Από τη σχέση (2.17) έχουμε

$$\begin{cases} w_q = -\epsilon M(p) \sin q + o(\epsilon), & \text{στον } C^{2+\alpha}(\Omega \cup \bar{\Omega}) \\ w_{qp}(q, p_0) = -\epsilon M'(p_0) \sin q + o(\epsilon), & \text{στον } C^{1+\alpha}(\partial\Omega) \\ w_{qq}(0, p) = -\epsilon M(p) + o(\epsilon), & \text{στον } C^{1+\alpha}(\partial\Omega) \\ w_{qq}(\pi, q) = \epsilon M(p) + o(\epsilon), & \text{στον } C^{1+\alpha}(\partial\Omega) \\ w_{qpp}(q, p) = -\epsilon M'(p) \cos q + o(\epsilon), & \text{στον } C^\alpha(\bar{\Omega}) \end{cases} \quad (2.20)$$

Θέτουμε  $l = \sqrt{(\pi - q)^2 + (p - p_0)^2}$  την απόσταση του σημείου  $(q, p)$  από το κάτω άκρο  $(\pi, p_0)$  του  $\Omega$ .

Το ανάπτυγμα Taylor της  $w_q$ , γύρω από το σημείο  $(\pi, p_0)$  είναι

$$w_q(q, p) = (q - \pi)(p - p_0)w_{qpp}(\pi, p_0) + O(l^3) \quad (2.21)$$

καθώς

$$\begin{aligned} w_q(\pi, p_0) &= w_{qq}(\pi, p_0) = w_{qp}(\pi, p_0) \\ &= w_{qqq}(\pi, p_0) = w_{qpp}(\pi, p_0) = 0 \end{aligned}$$

αφού  $w_q(q, p_0) = 0, \forall q \in [0, \pi]$  και  $w_q(\pi, p) = 0, \forall p \in [p_0, 0]$ .

Από τη (2.21) έχουμε

$$w_{qq}(q, p) = (p - p_0)w_{qpp}(\pi, p_0) + O(l^2) \quad (2.22)$$

και

$$w_{qp}(q, p) = (q - \pi)w_{qpp}(\pi, p_0) + O(l^2) \quad (2.23)$$

Στο άνω άκρο  $(\pi, 0)$  του  $\Omega$  εργαζομαστε αναλόγως. Εφόσον  $w_q(\pi, p) = 0$ , για κάθε  $p \in [p_0, 0]$  και  $w(q, 0)$  μία άρτια και  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση έχουμε

$$w_q(\pi, 0) = w_{qp}(\pi, 0) = w_{qqq}(\pi, 0) = w_{qpp}(\pi, 0) = 0$$

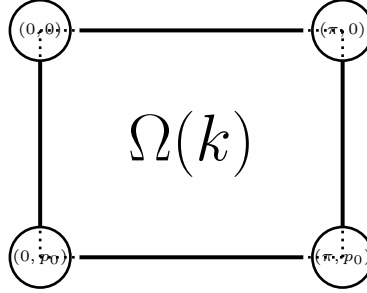
Οπότε, το ανάπτυγμα Taylor της  $w_q$ , γύρω από το σημείο  $(\pi, 0)$  είναι

$$w_q(q, p) = (q - \pi)w_{qq}(\pi, 0) + (q - \pi)p w_{qpp}(\pi, 0) + O(l_1^2) \quad (2.24)$$

όπου  $l_1 = \sqrt{(q - \pi)^2 + p^2}$  η απόσταση του σημείου  $(q, p)$  από το  $(\pi, 0)$ . Άρα,

$$w_{qq}(q, p) = w_{qq}(\pi, 0) + pw_{qp}(\pi, 0) + O(l_1^2) \quad (2.25)$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι η μορφή των λύσεων (2.14)-(2.16) ισχύει κατά μήκος της  $C_{loc} \setminus \{(\lambda^*, 0)\}$  σε μια μικρή περιοχή του  $(\lambda^*, 0)$ . Για  $k > 0$ , έστω  $\Omega(k)$  το σύνολο των σημείων  $(q, p) \in \bar{\Omega}$  τα οποία απέχουν απόσταση μεγαλύτερη ή ίση με  $\frac{1}{k}$  από κάθε γωνία του ορθογώνιου  $\Omega$ . Από τις σχέσεις (2.18)-(2.20), συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν  $k_1 \in \mathbb{N}$  και  $\epsilon_1 > 0$  τέτοια ώστε, για κάθε  $(\lambda, w) \in C_{loc} \setminus \{(\lambda^*, 0)\}$  που βρίσκονται στην  $\epsilon_1$ -περιοχή του  $(\lambda^*, 0) \in \mathbb{R} \times C^{3+\alpha}(\bar{\Omega})$ , η (2.14) να ισχύει για την  $w$  περιορισμένη στο  $\Omega(k_1)$ . Πράγματι,  $w_q(q, p) \leq -Cq(\pi - q)(p - p_0)$  στο  $\Omega(k_1)$  για κάποιο  $C > 0$ , λαμβάνοντας υπόψη ότι  $w_q = 0$  για  $p = p_0$ .



Το συμπλήρωμα  $\Omega(k_1)$  στο  $\bar{\Omega}$  περιέχει τις τέσσερις μπάλες με κέντρο τις γωνίες του ορθογώνιου  $\Omega$ .

Για την κάτω γωνία  $(\pi, p_0)$ , από τη σχέση (2.18) έχουμε  $M'(p_0) > 0$ , οπότε από τη (2.19) έχουμε ότι η  $w_{qp}(\pi, p_0) \geq \frac{\epsilon}{2}M'(p_0) > 0$  σε μια μικρή περιοχή του  $(\lambda^*, 0)$  στο  $\mathbb{R} \times C^{3+\alpha}(\bar{\Omega})$  κατά μήκος της  $C_{loc} \setminus \{(\lambda^*, 0)\}$  όπου ισχύει η (2.17). Οπότε, από τις σχέσεις (2.21)-(2.23) εξασφαλίζουμε ότι υπάρχει  $k_2 \in \mathbb{N}$  αρκετά μεγάλο και  $\epsilon_2 > 0$  αρκετά μικρό ώστε για κάθε  $(\lambda, w) \in C_{loc} \setminus \{(\lambda^*, 0)\}$  στην  $\epsilon_2$ -περιοχή του  $(\lambda^*, 0)$  στο  $\mathbb{R} \times C^{3+\alpha}(\bar{\Omega})$  το μοτίβο που περιγράφεται από τις (2.14)-(2.16) να ισχύει σε μια  $\frac{1}{k_2}$ -περιοχή του  $(\pi, p_0) \in \bar{\Omega}$ . Αναλόγως, βρίσκουμε  $k_3 \in \mathbb{N}$  και  $\epsilon_3 > 0$  που αντιστοιχούν στη γωνία  $(0, p_0)$  στο  $\Omega$ .

Για τις άνω γωνίες του  $\Omega$ , από τις σχέσεις (2.18)-(2.20) έχουμε ότι για όσο ισχύει η (2.17) κατά μήκος της καμπύλης  $C_{loc} \setminus \{(\lambda^*, 0)\}$ ,

$$w_{qq}(0, 0) \leq -\frac{\epsilon}{2}M(0) < 0, \quad w_{qq}(\pi, 0) \geq \frac{\epsilon}{2}M(0) > 0$$

$$w_{qp}(0, 0) \geq \frac{\epsilon}{2}M'(0) > 0, \quad w_{qp}(\pi, 0) \leq -\frac{\epsilon}{2}M'(0) < 0$$

για  $\epsilon$  αρκετά μικρό. Από τις σχέσεις (2.24), (2.25) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει  $k_4 \in \mathbb{N}$  και  $\epsilon_4 > 0$  τέτοια ώστε σε μια περιοχή του  $(\lambda^*, 0)$  στο  $\mathbb{R} \times C^{3+\alpha}(\bar{\Omega})$ , οι σχέσεις

(2.14)-(2.16) να ισχύουν κατά μήκος της  $C_{loc} \setminus \{(\lambda^*, 0)\}$  για τον περιορισμό της  $w$  σε μια  $\frac{1}{k_4}$ -περιοχή του  $(\pi, 0)$  στο  $\bar{\Omega}$ .

Για το άνω άκρο  $(0, 0)$ , βρίσκουμε αντιστοίχως  $k_5 \in \mathbb{N}$  και  $\epsilon_5 > 0$ .

Τέλος, για  $\epsilon = \min_{i=1, \dots, 5} \{\epsilon_i\}$ , εκφράζουμε το  $\bar{\Omega}$  ως  $\Omega(k) \cup [\bar{\Omega} - \Omega(k)]$  με  $k = \max_{1, \dots, 5} \{k_i\}$  από όπου λαμβάνουμε τον ισχυρισμό του λήμματος.  $\square$

**Θεώρημα 2.3.1.** Κάθε λύση που αντιστοιχεί σε ένα σημείο της  $C_{loc}$  ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) – (v) του Θεωρήματος (1.1.1).

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός προκύπτει από τις σχέσεις

$$h_q = \frac{v}{u - c}, \quad h_p = \frac{1}{c - u}$$

και το γεγονός ότι  $h = H + w$ ,  $\eta(x) = h(q, 0) + d$ , λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (2.14)-(2.16) που ικανοποιεί η  $w$ . Τότε, επειδή  $h_q < 0$  στο  $\partial\Omega_t$ , συμπεραίνουμε ότι το προφίλ κάθε μη τετριμμένης λύσης είναι γνησίως φθίνον από την κορυφή στην κοιλάδα. Οι υπόλοιπες ιδιότητες ακολουθούν από τις σχέσεις  $h_q = \frac{v}{u - c}$ ,  $h_p = \frac{1}{c - u}$ , εφόσον η  $h(\cdot, p)$  είναι άρτια και 2 $\pi$ -περιοδική για κάθε σταθεροποιημένο  $p \in [p_0, 0]$ .  $\square$





## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Γιαννούλης Ι.: *Διανυσματική ανάλυση*, Κάλλιπος Ανοιχτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις, 2015
- [2] Constantin A.: On the deep water wave motion, *J. Phys. A* *34*, 1405–1417, 2001
- [3] Constantin A., Strauss W.: Exact Steady Periodic Water Waves with Vorticity, *Comm. Pure Appl. Math.* *57*, 481–527, 2004
- [4] Constantin A., Strauss W.: Exact periodic traveling water waves with vorticity, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* *335*, 797–800, 2002
- [5] Constantin A.: *Nonlinear water waves with applications to wave-currents interactions and tsunamis*, SIAM, 2011
- [6] Crandall M., Rabinowitz P.: Bifurcation from simple eigenvalues, *J. Funct. Anal.* *8*, 321–340, 1971
- [7] Dubreil-Jacotin M.-L.: Sur la détermination rigoureuse des ondes permanentes périodiques d’amplitude finie, *J. Math. Pures Appl.* *13*, 217–291, 1934
- [8] Gerstner F.: Theorie der Wellen samt einer daraus abgeleiteten Theorie der Deichprofile, *Ann. Phys.* *2*, 412–445, 1809
- [9] Gilbarg D., Trudinger N. S.: *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, 2001
- [10] Jonsson I. G.: Wave-current interactions, *Ocean Engineering Science* *9*, 65–120, 1990

- [11] Keady G., Norbury J.: On the existence theory for irrotational water waves, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 83, 137–157, 1978
- [12] Krasovskii J. P.: On the theory of steady-state waves of finite amplitude, *Comput. Math. and Math. Phys.* 1, 996–1018, 1961
- [13] Levi-Civita T.: Determinazione rigorosa delle onde irrotazionali periodiche in acqua profonda, *Rend. Accad. Lincei* 33, 141–150, 1924
- [14] McLeod J.B.: The Stokes and Krasovskii conjectures for the wave of greatest height, *University of Wisconsin Mathematics Research Center Report 2041*, 1979
- [15] McLeod J.B.: The Stokes and Krasovskii conjectures for the wave of greatest height, *Stud. Appl. Math.* 98, 311–333, 1997
- [16] Nekrasov A. I.: On steady waves, *Izv. Ivanovo-Voznesenk. Politekh. 3*, 52–65, 1921
- [17] Stokes G.: On the theory of oscillatory waves, *Trans. Cambridge Phil. Soc.* 8, 441–455, 1847
- [18] Struik D.: Détermination rigoureuse des ondes irrotationnelles périodiques dans un canal à profondeur finie, *Math. Ann.* 95, 595–634, 1926
- [19] Teles da Silva A. F., Peregrine D. H.: Steep steady surface waves on water of finite depth with constant vorticity, *J. Fluid Mech.* 195, 281–302, 1988
- [20] Toland J. F.: On the existence of a wave of greatest height and Stokes’s conjecture, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 363, 469–485, 1978