ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΝΕ'Α ΤΑ'ΞΕΙ ΤΕ ΚΑΙ' ΜΕΘΟ'ΔΩ, ΛΑΤΙΝΙΣΤΙ'
ΣΥΝΤΕΘΕΙ῀ΣΑ ΠΑΡΑ' ΚΥΡΙ'ΟΥ

Ο'ΚΤΑΒΙΑΝΟΥ῀ ΚΑΜΕΤΙ'ΟΥ,

Εἰς δὲ τὴν Ἑλλάδα μετενεχθεῖσα φωνὴν,
καὶ προσφωνηθεῖσα, τῷ Ἐξοχωτάτῳ ἐν
Ἰατροφιλοσόφοις Κυρίῳ Κυρίῳ

ΦΙΛΙ'ΠΠΩ ΓΟΒΙ'Ω,

ΤΗ῀Σ Ο'ΘΩΜΑΝΙΚΗ῀Σ ΑΥ'ΛΗ῀Σ Α'ΡΧΙΑΤΡΩ῀
ΠΕΡΙΒΛΕ'ΠΤΩ

Π Α Ρ Α'

Δ'ΗΜΗΤΡΙ'ΟΥ Ρ'ΑΖΗ

ΤΟΥ῀ Ε'Ν Ι'ΑΤΡΟΙ῀Σ Ε'ΛΑΧΙ'ΣΤΟΥ.

αψπζ. Ε'ΝΕΤΙ'ΗΣΙΝ. 1787.

ΠΑΡΑ' ΝΙΚΟΛΑ'Ω ΓΛΥΚΕΙ῀ ΤΩ῀ Ε'Ξ Ι'ΩΑΝΝΙ'ΝΩΝ.

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

ILLUSTRISS. ATQUE EXCELLENTISS. DOMINO

PHILIPPO DE GOBBIS

Medicinæ Professori, ac Excelsæ Aulæ Magnique Sultani Abdulhamidæ Archiatro Benemeritissimo.

DEMETRIUS RHASIS.

AB omni ævo, Excellentissime Doctor, Scientiarum Studiosis solenne fuit labores suos Mæcenatibus, aut Viris doctrina, virtute, dignitate, aut nobilitate Claris consecrasecrare; Paucis tamen ea felicitas, quæ mea nunc est, obtigit, omnibus his instructum Virum invenire: mihi vero hujusmodi Tutelam sollicita mente pro hoc libello perquirenti, hanc sub tuis auspiciis obtineri posse facile apparuit; quia non solum tua in me collata beneficia, quæ nec sum solvendo, nec ut sim optare quidem fas est, infinita sunt, atque memori stant in pectore, sed etiam tua Doctrina, tua Virtus ubique relucet: Te enim dulces occuparunt Musæ, Te facundia, morum suavitate, & docendi dotibus egregie decorarunt, & ni vanum auguror, non inter maximas tuas laudes recensebitur, quod tuis non minus consiliis & observationibus, quam maxima ad medendum diligentia Medicinæ nimium in Byzantio languescens decus resuscitari tandem inceperat: Te denique, nobili de gente satum esse, maximaque dignitate in hac inclyta Urbe gaudere, omnibus innotescit. Quamobrem tibi, Germaniæ decus & Ornamentum, consecrare decreverim

verim hoc opusculum, quod nihil aliud est, ut vides, quam Euclidea Elementa secundum novum ordinem a Reverendissimo Archimandrita Dametio Publico Professore in Pisano Lycæo demonstrata, in patriam linguam sine verborum fulminibus translata, dum Curriculum Medicinæ in ipsamet celeberrima Universitate diligenter absolverem, quæ nunc consilio Amicorum, qui hujusmodi materiei inexpertes non sunt, Publici juris ausus sum facere, ut quemdam studii ardorem Achivæ juventuti excitarem, eodemque tempore faciliorem illis sternerem viam, qui ad Archigymnasia Europea avolare cupiunt. Perhumaniter idcirco, Excellentissime Doctor, excipias velim hoc opusculum, nec non auctoritate Sapientiæ tuæ lividos ejusdem censores deterrere minime dedigneris; quod si non ad tenuitatem, nec ad minus elegantem dicendi formam respiciens, meum tantummodo laborem, & erga te obsequium æqui bonique consules, nihil a me peroptandum supereſſe videtur, & hujus beneficii indelebilis erit in me, & jucundiſſima recordatio. Vale.

DABAM.

ΕʼΠΙʼΤΟΜΟΣ

Ἱστορία τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης ἐκ τῶν τοῦ Σοφωτάτου Μπαλαίου ἐρανισθεῖσα.

ΠΑʼντων τῶν ἀνθρωπίνων ἐφευρημάτων τὸ κατὰ τὴν μάθησιν ἐφεύρημα ἀρχαιότατον εἶναι φαίνεται, καθὰ καὶ Ἰώσηπος ὁ Φλάβιος μαρτυρεῖ Βιβλίῳ πρώτῳ Κεφαλαίῳ τρίτῳ. „Σοφίαν τε γάρ, φησιν, οἱ ἀπὸ Σήθου τὴν περὶ
„ τὰ οὐράνια καὶ τὴν τούτων διακόσμησιν ἐπενόησαν· ὑπὲρ
„ δὲ τοῦ μὴ διαφυγεῖν τοὺς μεταγενεστέρους τὰ εὑρημένα, μηδὲ

„ πρὶν εἰς γνῶσιν ἐλθεῖν φθαρῆναι, προειρηκότος ἀφανισμὸν Ἀδάμου τῶν ὅλων ἔσεσθαι, τὸν μὲν κατ' ἰσχὺν πυρὸς, τὸν δ' ἕτερον κατὰ πλῆθος καὶ βίαν ὑδάτων, στήλας δύο ἀναστήσαντες, τὴν μὲν ἐκ πλίνθου, τὴν δ' ἑτέραν ἐκ λίθων, ἀμφοτέραις ἐνεχάραξαν τὰ εὑρημένα, ἵνα καὶ τῆς πλινθίνης ἀφανισθείσης ὑπὸ τῆς ἐπομβρίας ἡ λιθίνη μείνασα παράσχῃ μαθεῖν τοῖς ἀνθρώποις τὰ ἐγγεγραμμένα δηλοῦσα. Ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ πλίνθειος ἐμπρησμοῦ τῆς ἑτέρας ἀπολεσθείσης". Μένει δ' ἄχρι τοῦ δεῦρο, ἤ φασιν, ἡ λιθίνη κατὰ τὴν Συριάδα.

Μετὰ δὲ τὸν κατακλυσμὸν πρώτους τοὺς Ἀσυρίους καὶ Χαλδαίους φασὶ σέβεσθαι τὰς μαθήσεις, καὶ περιφήμους τὰ Ἀστρονομικὰ γεγονέναι, ἥπερ Πλινίῳ ἱστόρηται. ἀφ' ὧν οἱ Αἰγύπτιοι παιδευθέντες εἰς τοσοῦτον προήεσαν τῆς περὶ τὴν μάθησιν ἐπιδόσεως, ὥστε πιστεύεσθαι αὐτοὺς πατέρας μαθήσεως. Τῆς δὲ κατὰ τὴν Γεωμετρίαν Ἐπιστήμης τὴν εὕρεσιν οὐδεὶς αὐτοὺς ἀφαιρήσεται χρόνος. οὐ μόνον γὰρ τοῖς παρ' αὐτοῖς Ἱερεῦσι τὸ κατὰ σχολὴν τὸν βίον διάγειν εἰς εὕρεσιν μαθηματικῶν τεχνῶν συνεβάλλετο, ἀλλὰ καὶ ἀνάγκη αὐτοὺς συνῆγεν εἰς τὸ Γεωμετρεῖν κατεπείγουσα, ἵν' ἀκριβῶς διακρίνειν ἔχοιεν τοὺς τῶν ἀγρῶν αὐτοῖς συγχεομένους ὅρους ὑπὸ τῆς ἐτησίας τοῦ Νείλου ἐπικλύσεως, ὡς τῷ Ἡροδότῳ, βιβλίῳ δευτέρῳ, ἱστόρηται.

Ἐξ

Ἐξ Αἰγύπτου δ' ἡ Μάθησις παντοπορήσασα ἀφίκετο εἰς Ἑλλάδα, καὶ τοῖς ἐκεῖ φιλοσόφοις ἐπαυλίσατο. Ἥγε μὴν Ἑλλὰς τοσούτους ἤνεγκε τοὺς ἐπὶ φρενῶν ὀξύτητι καὶ φύσεως ἐξαιρέτῳ τάχει τῶν πολλῶν διοίσαντας, ὡς ἐπὶ τῇ Εὐκληρίᾳ τῶν ἀνὰ πᾶσαν τὴν γῆν ἐθνῶν φέρειν τὰ πρῶτα, καὶ μήτηρ καὶ τροφὸς ἀκούειν τῆς ἐν τοῖς λόγοις δυνάμεως, παντοίας τε ἐπιστήμης καὶ τέχνης.

Θαλῆς μὲν γὰρ ὁ Μιλήσιος πρῶτος τῶν Ἑλλήνων κατὰ πόθον μαθήσεως ἀπελθὼν εἰς Αἴγυπτον, καὶ ἐκδιδαχθεὶς κἀκεῖθι τὴν μάθησιν ἀκριβῶς παρὰ τῶν Ἱερέων μετήγαγεν εἰς Ἑλλάδα ἀρχόμενος δημοσιεύειν πρῶτον τὴν Γεωμετρίαν. Τούτου παρατηρήματά ἐστιν οἱ Ἰσημερίαι, τὰ Ἡλιοστάσια, αἱ τροπαί, καὶ ἡ τοῦ Ἡλίου καὶ Σελήνης ἔκλειψις (μάρτυς ὁ Λαέρτιος). Οὗ χάριν ὁ Θαλῆς πατὴρ καὶ εὑρετὴς τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης παρὰ τοῖς Ἕλλησιν ἤκουσε.

Μετὰ δὲ τοῦτον Πυθαγόρας ὁ Σάμιος Ἀρχαιότατος Φιλόσοφος καὶ τῷ Θαλεῖ σύγχρονος παρά τε Αἰγυπτίους καὶ Χαλδαίους ἐπιδημήσας, κἀκ τούτων πολλὰ μυηθεὶς, ηὔξησε καὶ κατεκόσμησεν ἱκανῶς τὰς μαθηματικὰς ἐπιστήμας, ὑπερβαλλόντως δὲ τὴν Ἀριθμητικὴν καὶ τὴν Μουσικήν. Οὗτος πρὸς τοῖς ἄλλοις ἐφευρήμασι τῇ ἀγχινοίᾳ τοῦ νοὸς τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ἐν τριγώνοις Ὀρθογωνίου ἴσα δύνασθαι ταῖς περιεχούσαις τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευραῖς ἔδειξεν, ἐφ' ᾧ εὑ-

ρήμα-

ρήματι μεγάλῃ διαχυθεὶς τῇ ἡδονῇ Ἑκατόμβην θῦσαι παρὰ Λαερτίῳ φαίνεται, ὡς δηλοῖ καὶ τοὐπίγραμμα.

„ Ἡνίκα Πυθαγόρης τὸ περικλεὲς εὕρατο γράμμα,
„ Κεῖν' ἐφ' ὅτῳ κλεινὴν ἤγαγε βουθυσίην.

Μετὰ τὸν Πυθαγόραν ἤκμασε Πλάτων ὁ Ἀθηναῖος, Ἀριστοκλῆς τὸ πρῶτον καλούμενος, Πλάτων δ' ἔπειτα περὶ τὴν εὐεξίαν, ἢ διὰ τὸ πλατὺ καὶ εὐρὺ τῆς ἐν τῷ λέγειν ἑρμηνείας, ἢ ὅτι πλατὺς ἦν τὸ μέτωπον προσηγορεύθη. Οὗτος διεδέξατο τὴν τοῦ Σωκράτους διδασκαλίαν, καὶ ἦν τὰς φιλοσοφικὰς ποιῶν διατριβὰς ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ, (τοῦτο δέ ἐστι γυμνάσιον προάστειον ἀπό τινος Ἥρωος Ἀκαδήμου παρωνύμως οὕτω καλούμενον) ἐν ᾗ τὴν Ἀναλυτικὴν μέθοδον ἐμηχανήσατο, ἀληθεστάτην ὄντως ἐπιστήμην τοῦ εὑρίσκειν, καὶ λογίζεσθαι, καὶ διαλύειν τὰ περιπεπλεγμένα τῶν προβλημάτων. Τρισκαίδεκα οἰκείους τοῦ Πλάτωνος μαθητὰς παραδίδωσιν ὁ Πρόκλος, ὧν ἦν Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος, ὃς τοῖς Χειροτέχναις τὴν μαθηματικὴν χρήσιμον παραδέδωκεν. ὅθεν καὶ παρὰ Γελλίῳ φαίνεται περιστερὰν ξυλίνην κατασκευασθῆναι παρ' αὐτοῦ καὶ ἀφίπτασθαι. Εὔδοξος ὁ Κνίδιος, ὃς ἅπαν τὸ κατ' Εὐκλείδην πέμπτον βιβλίον συνέγραψε, καὶ ὁ τοῦ Ἀριστοτέλους Διδάσκαλος ὁ σοφὸς Ξενοκράτης.

Τού-

Τούτοις κατηκολούθησεν ὁ πολὺς τὸ κλέος Ἀριστοτέλης ὁ ἐκ Σταγείρων τῆς Μακεδονίας καταγόμενος, ὃς Πλάτωνι τὸ πρῶτον φιλοσοφίας ἕνεκα ἑαυτὸν ἀναθέμενος, ἀπελάκτισεν ὕστερον τοῦ καθηγησαμένου οὐκ ἐπ' ὀλίγων ἀντιδοξάσας. Ἀριστοτέλης, φησὶν ὁ Πλάτων, ἡμᾶς ἀπελάκτισεν ὥσπερεὶ τὰ πωλάρια τὴν ἑαυτοῦ μητέρα. Οὗτος οὖν τὸ Λύκειον τῇ Ἀκαδημίᾳ ἀντιπαρατάξας, (ἦν δὲ τὸ Λύκειον χωρίον Ἀθήνησι κάλλιστον, ἀπὸ Λυκίου τοῦ Πανδίονος τοὔνομα ἔχον) ἐν αὐτῷ τὰς φιλοσοφικὰς ἐποιεῖτο ἐξασκήσεις, ὡς δὲ δὴ περιπάτῳ χρῆσθαι εἰώθει τοῖς συνοῦσι διαλεγόμενος, ἐντεῦθεν καὶ τοῖς ὀπαδοῖς παρέσχε περιπατητικοὺς ὀνομάζεσθαι. Ἐγένοντο δὲ τῶν Ἀριστοτέλους ὁμιλητῶν καὶ γνωρίμων οἱ γνησιώτατοι Ἀλέξανδρος ὁ Μακεδών, καὶ Θεόφραστος ὁ Ἐφέσιος, ὃς δισχιλίους ἠρίθμει ἀκροωμένους αὐτοῦ μαθητὰς, ἐν οἷς ἦν καὶ Δημήτριος ὁ Φαληρεὺς, καὶ Ἐρασίστρατος ὁ Γαζὸς, ὃς Ἰσίδωρος διεδέχθη καὶ Ὑψικλῆς, ἄμφω ἐν Γεωμετρίαις ἄριστοι, ὧν εἰσι συγγράμματα τὰ κατ' Εὐκλείδην πέντε περὶ στερεῶν βιβλία.

Ὁ δ' Εὐκλείδης, ὃς ἤκμασε μετ' αὐτοὺς, ἐντυχὼν αὐτοῖς τοῖς βιβλίοις, καὶ ἄλλοις παρ' ἄλλων φιλοπονηθεῖσι στοιχείοις, καὶ ἀκριβῶς αὐτὰ θεωρήσας, τὸ μὲν ἐλλειπὲς ἀνεπλήρωσε, τὸ δὲ συνεπτυγμένον καὶ ἀσαφὲς εἰς κρείττονα μετήγαγε τὴν σαφήνειαν, καὶ ἐδωρήσατο τοῖς φιλομαθέσι ταῦ-

τα

τὰ τὰ Γεωμετρικὰ στοιχεῖα, τὰ πανταχοῦ τῆς οἰκουμένης γνωστὰ καὶ ἀξιάγαστα.

Εἷς δέ τις τῶν νεωτέρων φιλοσόφων ἐκ τῆς Μεγάλης Βρυτανίας καταγόμενος, Σίμψων τοὔνομα, καὶ μετ᾽ αὐτὸν Ἀρχιμανδρίτης τις Καμέτιος ὀνομαζόμενος ἐν τῷ τῶν Πισῶν κλεινῷ Μουσοξοφείῳ τῆς μαθήσεως Διδάσκαλος, εἰς νέαν τάξιν καὶ εὐληπτοτέραν μέθοδον ταῦτα τὰ Εὐκλείδεια στοιχεῖα μεθαρμόσαντες, ἕκαστος ἐν τῇ ἰδίᾳ πατρίδι παῤῥησίᾳ ἐδίδασκον. Ἣν μέθοδον ὡς ἀρίστην καὶ τοῖς νέοις ἁρμοδιωτέραν οἱ πλεῖστοι τῶν ἐν τῇ Εὐρώπῃ μαθηματικῶν ἡδέως περιεπτύξαντο.

Ταῦτα τοίνυν τὰ νεωστὶ κατασρωθέντα Γεωμετρικὰ στοιχεῖα (ἅπερ Πίσησι, τὸ τῆς Ἰατρικῆς στάδιον τρέχων, ἐξεπαιδεύθην) ἀπὸ τῆς Λατινίδος εἰς τὴν Ἑλληνίδα μετήγαγον διάλεκτον τὴν γνησίαν, ἵν᾽ οὕτως εἴπω, μητέρα αὐτῶν τε τούτων καὶ παντὸς ἄλλου ἐπιστήμης εἴδους, μεταφρασάμενος, ὡς εἶχον δυνάμεως, καὶ τύποις προήχθην ἐκδοῦναι. Μηδεὶς δὲ τὸ ταπεινὸν ἐγκαλείτω μοι τῆς φράσεως. οὐ γὰρ ἔπαινον τὸν ἐκ τῆς εὐφραδίας καὶ δεινότητος θηρώμενος, ἀλλὰ τὴν τῶν ὁμογενῶν σκοπούμενος ὠφέλειαν τουτωὶ ἐμαυτὸν τῷ ἔργῳ ἐπέδωκα. Διὸ δὴ καὶ τὸ ταπεινὸν καὶ σαφὲς τῆς φράσεως ὡς ὠφελιμώτερον προειλόμην. Καὶ γὰρ, ὡς ἔμοιγε δοκεῖ, τοὺς ἐπιστημονικόν τι φιλοπονοῦντας σύνταγμα φεύγειν δεῖ, καθ᾽ ὅσον οἷόν τε,

τὴν

τὴν τοῦ λέγειν δυσχέρειαν, ἵνα μὴ πρὸς τῷ φύσει δυσεφίκτῳ τοῦ νοήματος, καὶ αὕτη προστιθεμένη, δυσληπτότερα καὶ ἀσαφέστερα τὰ ἐν αὐτῷ ἀπεργάζηται, κεχηνότας καταλείπουσα τοὺς προσέχοντας μηδὲν ἐξ αὐτοῦ ἐπικαρπώσασθαι δυναμένους.

Τῷ Εὐκλείδει κατηκολούθησεν Ἀρχιμήδης, ὃς τὸν Κολοφῶνα τῆς ἀνθρωπίνης ἔφθασεν ἀγχινοίας. Τούτου ἐφεύρημά ἐστιν ἡ θαυμάσιος ἐκείνη μηχανὴ ἡ καλουμένη Παγκράτιον, ἣ τῇ ὑδρογείῳ σφαίρᾳ κίνησιν δοῦναι ὑπέσχετο. Δὸς, εἰπών, ποῦ στῶ καὶ τὴν γῆν κινήσω. Οὗτος αὐτὸς τὸν τῶν Ῥωμαίων στόλον, πόῤῥω που τῆς Συρακούσης τὰς ἀγκύρας χαλάσαντα, κατόπτροις καυστικοῖς ἐνέπρησεν, ὅπερ ἐμπράκτως καὶ ὁ φυσικώτατος Βουφὼν ἐν τοῖς αὐτοῦ ὀπτικοῖς πειράμασιν ἀληθέστατον ἔδειξεν, ὃς οὐ μόνον ξύλα ἐν τῷ ἰδίῳ διαστήματι τεθέντα ἐνέπρησεν, ἀλλὰ καὶ αὐτὸν τὸν μόλυβδον διέλυσε. Τῆς τούτου ἀγχινοίας μηχάνημά ἐστι καὶ τὸ Πλανητεῖον, (τοῦτο δὲ μηχανή τίς ἐστι σφαιρική, ἐξ ὑέλου κατεσκευασμένη, ἐν ᾗ αἱ τῶν Πλανητῶν, Δορυφόρων τε, καὶ Κομητῶν περὶ τὸν ἥλιον κινήσεις ἐπιτηδείως φαίνονται) ὅπερ παρὰ πάντων τῶν Νεωτέρων μηχανικῶν θαυμάζεται καὶ ἐπαινεῖται.

Μετὰ δὲ τὸν Ἀρχιμήδην, μικροῦ παραδραμόντος χρόνου, ἐξῆλθεν εἰς φῶς Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος, μέγας Γεωμέτρης ἐπονομαζόμενος. Τούτου σῴζονται ἑπτὰ βιβλία περὶ Κωνικῶν τομῶν.

Τοῦ

Τούτῳ κατηκολούθησαν Ἵππαρχός τε καὶ Μενέλαος, ὧν ὁ μὲν ἕξ, ὁ δὲ τέσσαρα συνέγραψε βιβλία περὶ τῶν ὑποτεινουσῶν ἐν τῷ κύκλῳ, δι' ἃ μεγίστην ἀμφοτέρῳ ἴσμεν τὴν χάριν. Τούτοις συνακμάζων ἦν καὶ Θεοδόσιος ὁ Τριπολίτης, ὃς τρία περὶ σφαιρικῶν ἐπωφελέστατα βιβλία ἡμῖν κατέλιπεν, ἅπερ ὁσημέραι μετὰ χεῖρας φέρουσι Γεωμετρῶν παῖδες.

Μετ' αὐτοὺς ἤκμασε Πτολεμαῖος ὁ Κλαύδιος ὁ Κορυφαῖος τῶν Ἀστρονόμων καὶ ἐν Γεωμέτραις Ἄριστος, ὃς τὸ Ἀστρονομικὸν ἐκεῖνο συνέγραψε βιβλίον, οὗ ἡ ἐπιγραφὴ Μεγάλη Σύνταξις, βαρβαρικῶς δὲ Ἀλμαγέστον· ὅπερ ὅσον πάλαι μέγιστον ἦν, τοσοῦτον νῦν ἐλάχιστον κρίνεται. Τὸ γὰρ Κοπερνίκειον σύστημα, ὅπερ κατὰ διάμετρον τῷ Πτολεμαϊκῷ ἀντίκειται πολὺ ἐκείνου ὑπερέχει, διόπερ τῶν Νεωτέρων οἱ Ἀστρόνομοι Κοπερνίκειοι καὶ οὐ Πτολεμαϊκοὶ καλεῖσθαι ἐθέλουσι.

Τῷ Πτολεμαίῳ συνήκμασε Πρόκλος τις Μαθηματικώτατος, (ὃς τὸν τοῦ Βιταλιανοῦ στόλον τὴν Κωνσταντινούπολιν πολιορκοῦντα τῇ ὀπτικῇ μηχανῇ τῶν κατόπτρων ἐνέπρησεν, ἐπὶ βασιλείας Ἀναστασίου, καθὰ ἱστορεῖ ὁ Ζωναρᾶς) καὶ Πάππος, ὃς συνέγραψε συλλογὴν τῶν Μαθηματικῶν εἰς ὀκτὼ βιβλία συμποσουμένην, ὧν τὰ μὲν δύω ἀπώλετο, τὰ δὲ λοιπὰ ἓξ ὑπὸ πάντων τοῖς πάλαι ἀπομνημονεύμασι συνα-

ριθμού·

ριθμούμενά ἐστι. Καὶ ταῦτα μὲν ἅλις περὶ τῶν τῆς Ἑλλάδος Φιλοσόφων.

Τῶν δέ γε Ἑλληνικῶν πραγμάτων ἐν καταπτώσει ἐλθόντων, συνέβη τὴν μάθησιν ἐν Εὐρώπῃ ἐπιδημήσασαν ἐπιξενωθῆναι, ἔνθα λαμπροτάτου ἀσύλου ἐντυχοῦσα, τοὺς ταύτην οἰκοῦντας θαυμασίοις καὶ περιφανέσι κατελάμπρυνε κάλλεσι, πανσόφους τε αὐτοὺς ἐν παντὶ εἴδει μαθήσεως ποιουμένη.

Οὕτω τοίνυν ἡ τὸ πάλαι ἀκμάζουσα καὶ ἐπανθοῦσα τοῖς Ἕλλησι Μαθηματικὴ ἐπιστήμη ἤδη σχεδὸν ἐξέλιπε, καὶ οἱονεὶ ἐκ τῶν Ἑώων ἀνατείλασα εἰς τὰ δυτικὰ μέρη κατέδυ· ἥτις καὶ ἐπανατελεῖ, εὔελπίς εἰμι, πρὸς τὰ Ἀνατολικὰ μέρη, τὴν παλαιὰν μητέρα, τὸν Ἥλιον μιμουμένη, ὅστις ἀπ' Ἀνατολῶν πρὸς δυσμάς, ἀπὸ δὲ δυσμῶν πρὸς Ἀνατολὰς καθ' ἑκάστην περιφερόμενος φαίνεται.

ΝΟΙ

NOI RIFORMATORI

Dello Studio di Padova.

Avendo veduto per la Fede di Revisione, ed Approvazione del Pubblico Revisor Dottor Natal dalle Laste nel Libro intitolato Geometria. Manoscritta in Greco, non v' esser cosa alcuna contra la Santa Fede Cattolica, e parimente per Attestato del Segretario Nostro, niente contro Principi, e buoni costumi concediamo Licenza a Nicolò Glichì Stampator di Venezia che possi essere stampato, osservando gli ordini in materia di Stampe, e presentando le solite Copie alle Pubbliche Librarie di Venezia, e di Padova.

Data li 6. Agosto 1787.

(Andrea Querini Riformator.

(Zacaria Vallaresso Rif.

(Francesco Pesaro Kav. Proc. Riform.

Registrato in Libro a Carte 231. al Num. 2144.

Guseppe Gradenigo Segr.

Addi 7. Agosto. 1787.
Registrato a Carte 1440. nel Libro del Mag. Eccellentissimo contro la Bestemmia.

Gio: Antonio Maria Cosfali Nod.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ.

ΠΕΡΙ ἘΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΠΕΡΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ἈΡΧΩΝ.

Ὅρος Α'.

§. 1. Γεωμετρία ἐστὶν Ἐπιστήμη περὶ τὸ συνεχὲς ποσὸν καταγινομένη μήκους, πλάτους, καὶ βάθους μέτρον διερευνῶσα,

Ὅρος Β'.

§. 2. Στερεόν ἐστι ποσότης, κατὰ μῆκος ΑΦ, κατὰ Σχῆμα 1. πλάτος ΑΛ, καὶ κατὰ βάθος ΑΡ ἐκτεινομένη.

Κεφ. α'.

Ὅρος Γ'.

Σχ. 2. §. 3. Ἐπιφάνεια δ' ἐστὶ ποσότης κατὰ μῆκος ΑΦ, καὶ κατὰ πλάτος ΑΛ μόνον ἐκτεταμένη. Ἔστι δὲ καὶ στερεοῦ πέρας.

Ὅρος Δ'.

Σχ. 3. §. 4. Γραμμὴ δ' ἐστὶ ποσότης κατὰ μῆκος ΑΦ μόνον ἐκτεταμένη. Ἔστι δὲ καὶ πέρας Ἐπιφανείας.

Ὅρος Ε'.

§. 5. Σημεῖον δ' ἐστὶν οὗ μέρος οὐθέν. Ἔστι δὲ καὶ Γραμμῆς πέρας.

Ὅρος ϛ'.

Σχ. 4. §. 6. Εὐθεῖα Γραμμὴ ἐστὶν ἡ ἐλαχίστη τῶν ἀπὸ τῶν αὐτῶν περάτων ἀχθῆναι δυναμένων γραμμῶν, οἷον ἡ ΑΒ. Αἱ δὲ ΑΕΒ, ΑΔΒ Καμπύλαι προσαγορεύονται.

Ὅρος Ζ'.

§. 7. Ἐπίπεδος Ἐπιφάνειά ἐστιν ἡ ἐλαχίστη τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν ἐπιφανειῶν.

Ὅρος Η'.

Σχ. 5. §. 8. Ἐπίπεδος Γωνία ἐστὶ κλίσις δύω γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, οἷον ἡ ΕΑΚ. Κ' ἢν μὲν αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ

Γω-

κία, ἢν δὲ Καμπύλαι καμπυλόγραμμος, οἷον ἡ ΒΑΓ. Καὶ τὸ μὲν Α σημεῖον Κορυφὴ ἤκουσεν, αἱ δὲ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ σκέλη προσαγορεύονται. Κεφ. α'.

Ὅρος Θ'.

§. 9. Ἐὰν εὐθεῖα Γραμμὴ ἡ ΡΑ ἐπ' εὐθεῖαν γραμμὴν τὴν ΚΜ σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ΡΑΚ, ΡΑΜ ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. Ἡ δ' ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα ΡΑ κάθετος καλεῖται. Σχ. 6.

Ὅρος Ι'.

§. 10. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς, οἷον ἡ ΕΑΜ. Ὀξεῖα δὲ ἡ ὀρθῆς ἐλάσσων, οἷον ἡ ΕΑΚ. Σχ. 6.

Ὅρος ΙΑ'.

§. 11. Παράλληλοι εὐθεῖαί εἰσιν αἱ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐπ' ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη τὴν αὐτὴν πρὸς ἀλλήλας φυλάττουσαι διάστασιν, οἷον αἱ ΑΒ, ΕΖ. Σχ. 7.

Ὅρος ΙΒ'.

§. 12. Σχῆμα δ' ἐστὶ τὸ ὑπό τινων γραμμῶν περιεχόμενον χωρίον· Ὅπερ εὐθύγραμμον καλεῖται, ἢν αἱ τὸ χωρίον περικλείουσαι γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσι· καμπυλόγραμμον δέ, ἢν καμπύλαι.

Ὅρος ΙΓ'.

§. 13. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς Σχ. 8.

Α 2 Γραμ-

Κεφ. α'. Γραμμῆς περιεχόμενον, ἣν περιφέρειαν καλοῦσι, πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου ἐντὸς τοῦ κύκλου κειμένου πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Κέντρον μὲν τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον Κ καλεῖται. αἱ δὲ ἴσαι γραμμαὶ ἀκτῖνες, καὶ ἡμιδιάμετροι τοῦ κύκλου προσαγορεύονται, οἷον αἱ ΚΑ, ΚΣ εὐθεῖαι.

Ὅρος ΙΔ'.

Σχ. 8 §. 14. Διάμετρος λέγεται τοῦ κύκλου εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις τὸν κύκλον, καὶ τὴν περιφέρειαν δίχα τέμνει. οἷον ἡ ΑΡ εὐθεῖα.

Ὅρος ΙΕ'.

Σχ. 8. §. 15. Χορδὴ κύκλου λέγεται εὐθεῖά τις ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη περατουμένη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, καὶ μὴ διὰ τοῦ Κέντρου ἠγμένη, ἥτις ἀνίσως τέμνει τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν, οἷον ἡ ΣΡ εὐθεῖα.

Ὅρος Ιϛ'.

§. 16. Κύκλου τόξον ἐστὶ μέρος περιφερείας ὁπηλικονοῦν. Μοῖρα δὲ περιφερείας μέρος τριακοσιοστὸν ἑξηκοστόν. Ἑκάστη δὲ μοῖρα εἰς ἑξήκοντα λεπτὰ πρῶτα ὑποδιαιρεῖται. τούτων δ' ἕκαστον εἰς ἑξήκοντα λεπτὰ δεύτερα αὖθις διαιρεῖται. καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ὅρος ΙΖ'.

Σχ. 9. §. 17. Ἡμικύκλιόν ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς Διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης περι-

φερείας, οἷον τὸ ΑΚΕΜ, ὅπερ μοίρας ἑκατὸν καὶ ὀγδοήκοντα περιέχει. Κεφ. α'.

Ὅρος ΙΗ'.

§. 18. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε χορδῆς καὶ τόξου τινός, οἷον τὸ ΑΒΓ, ὅπερ εἰ μὲν ἔλαττον ἡμικυκλίου, τμῆμα ἔλαττον λέγεται, οἷον τὸ ΑΒΓ. εἰ δὲ μεῖζον ἡμικυκλίου, τμῆμα μεῖζον, οἷον τὸ ΑΔΓ. Σχ. 10.

Ὅρος ΙΘ'.

§. 19. Τεταρτημόριόν ἐστι κύκλου τόξον ἐμπεριλαμβανόμενον μεταξὺ δύο ἀκτίνων πρὸς ὀρθὰς συνισταμένων, οἷον τὸ ΑΚΜ, ὅπερ μοίρας ἐννενήκοντα περιέχει. Σχ. 11.

Ὅρος Κ'.

§. 20. Ἐν τῇ περιφερείᾳ Γωνία λέγεται, ἧς ἡ κορυφὴ καὶ τὰ σκέλη ἐν τῇ περιφερείᾳ εἰσίν, οἷον ἡ ΑΡΣ. Γωνία δ' ἐν Κέντρῳ καλεῖται, ἧς ἡ μὲν κορυφὴ ἐν τῷ κέντρῳ, τὰ δὲ σκέλη ἐν τῇ περιφερείᾳ ἐστίν, οἷον ἡ ΑΚΣ. Σχ. 8.

Ὅρος ΚΑ'.

§. 21. Εὐθεῖα κύκλου ἐφαπτομένη ἐστίν, ἥτις ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον, οἷον ἡ ΛΟ εὐθεῖα, ἥτις τοῦ κύκλου ἐφάπτεται κατὰ τὸ Α σημεῖον, ὅπερ ἐπαφῆς σημεῖον ἤκουσεν. Σχ. 8.

Κεφ. α.

Ὅρος ΚΒ'.

§. 22. Τρίγωνον Εὐθύγραμμόν ἐστι σχῆμα ὑπὸ
τριῶν εὐθειῶν, ἃς πλευρὰς ἐκάλεσαν, περιεχό-
Σχ. 12. μενον, οἷον τὸ ΑΒΓ. Κ᾽ ἂν μὲν αἱ περικλείουσαι
τὸ σχῆμα πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι τρίγωνον ἰσό-
Σχ. 13. πλευρον λέγεται, οἷον τὸ ΑΒΓ. Ἢν δὲ τὰς δύω
μόνον ἴσας ἀλλήλαις ἔχῃ, τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἤκου-
Σχ. 14. σεν, οἷον τὸ ΚΒΓ. Τὸ δὲ καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς
ἀνίσους ἔχον, τρίγωνον σκαληνὸν προσηγορεύθη, οἷον
τὸ ΖΚΟ.

Ὅρος ΚΓ'.

Σχ. 12. §. 23. Ὑποτείνουσα τριγώνου λέγεται μία τῶν αὐτοῦ
πλευρῶν, ὑφ᾽ ἧς αἱ λοιπαὶ πλευραὶ περιέχονται, οἷον
ἡ ΑΓ πλευρά, ἥτις ἐλάσσων ἐστὶ τῶν δύω πλευρῶν
συνάμα λαμβανομένων.

Ὅρος ΚΔ'.

Σχ. 15. §. 24. Τρίγωνον Ὀρθογώνιόν ἐστι τὸ μίαν γωνίαν
Σχ. 14. ὀρθὴν ἔχον, οἷον τὸ ΜΝΠ. Ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ
Σχ. 13. μίαν ἀμβλεῖαν, οἷον τὸ ΚΖΟ. τὸ δὲ καὶ τὰς τρεῖς
ὀξείας ἔχον ὀξυγώνιον ἤκουσεν, οἷον τὸ ΒΓΚ.

Ὅρος ΚΕ'.

Σχ. 16. §. 25. Τετράγωνόν δέ ἐστι σχῆμα τετράπλευρον, ἰ-
σόπλευρόν τε καὶ ὀρθογώνιον, οἷον τὸ ΠΚΛΣ.

Ὅρος Κϛ'.

Σχ. 17. §. 26. Παραλληλόγραμμόν ἐστι σχῆμα τετράπλευ-
ρον,

ρον, ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, οἷον τὸ Κεφ. α.
ΑΕΚΛ, ὅπερ τὰς ἀπ᾽ ἐναντίον πλευρὰς ἴσας καὶ
παραλλήλους ἔχει.

Ὅρος ΚΖ'.

§. 27. Τραπέζιόν ἐστι σχῆμα τετράπλευρον, ὃ μήτε Σχ. 18.
ἰσόπλευρόν ἐστι μήτε ἰσογώνιον, οἷον τὸ ΑΒΔΕ.

Ὅρος ΚΗ'.

§. 28. Ῥόμβος ἐστὶ σχῆμα τετράπλευρον, ἰσόπλευ- Σχ. 19.
ρον μέν, οὐκ Ὀρθογώνιον δέ, οἷον τὸ ΠΚΛΣ σχῆ-
μα.

Ὅρος ΚΘ'.

§. 29. Ῥομβοειδές ἐστι σχῆμα τετράπλευρον τὸ τὰς Σχ. 20.
ἀπ᾽ ἐναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις
ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον, οἷον
τὸ ΑΒΥΤ.

Ὅρος Λ'.

§. 30. Σχῆμα εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περι- Σχ. 21.
γράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τοῦ περιγραφομένου
πλευρὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἐφάπτηται, οἷον
τὸ ΚΡΖΛ. Σχῆμα δ᾽ εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγ-
γράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφο-
μένου τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἅπτηται, οἷον τὸ
ΑΕΟΧ.

Ὅρος ΛΑ'.

§. 31. Κύκλος περὶ σχῆμα περιγράφεται, ὅταν ἡ
τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περι-
γράφεται, ἐφάπτηται. Κύκλος δ᾽ ἐν σχήματι ἐγγρά-

Κεφ. α'. φεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ ἐν ᾧ ἐγγράφεται, ἐφάπτηται.

Ὅρος ΛΒ'.

Σχ. 22. §. 32. Σχῆμα πολύγωνόν ἐστι τὸ πλείοσιν ἢ τέσσαρσι πλευραῖς περιεχόμενον σχῆμα, ὅπερ εἰ μὲν ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιόν ἐστι πολύγωνον κανονικὸν ἤκουσεν, οἷον τὸ ΚΑ.

Ὅρος ΛΓ'.

§. 33. Σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, Ἀσύμμετρα δὲ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

Ὅρος ΛΔ'.

§. 34. Μέτρον γραμμῶν ἐστὶν εὐθεῖα γραμμὴ τὸ μῆκος ἀδιώριστος, ἥτις διαιρεῖται εἰς δέκα ἴσα μέρη, ἅπερ πόδας ἐκάλεσαν. Ἕκαστος δὲ ποῦς διαιρεῖται εἰς δακτύλους δέκα· ὁ δὲ δάκτυλος εἰς δέκα γραμμάς· ἡ δὲ γραμμὴ εἰς δέκα μόρια. Ἕκαστος οὖν ποῦς περιέχει μόρια 1000., ὁ δὲ τοῦ Παρισίου ποῦς περιέχει μόρια 1440.

Ὅρος ΛΕ'.

§. 35. Μέτρον ἐπιφανειῶν ἐστὶ τετραγωνικὴ ἐπιφάνεια ἐκ δέκα τετραγωνικῶν ποδῶν συνισταμένη, ἥτις καὶ ὑποδιαιρεῖται εἰς πόδας, εἰς δακτύλους καὶ εἰς μόρια, ὡς καὶ ἡ γραμμή.

Ὅρος

Ὅρος ΛϚ'.

§. 36. Θεώρημά ἐστι πρότασις δειχθησόμενόν τι προτείνουσα. Πρόβλημά ἐστι πρότασις πραχθησόμενόν τι προβάλλουσα. Λῆμμά δέ ἐστι πρότασις εἰς ἀπόδειξιν ἄλλης προτάσεως λαμβανομένη. Τὸ δὲ πόρισμα θεώρημά ἐστιν ἐκ προβλήματός τινος ἢ θεωρήματος ἀναφαινόμενον.

Ὅρος ΛΖ'.

§. 37. Αἴτημά ἐστι γνῶσις ἀναπόδεικτος, λαμβανομένη εἰς κατασκευήν τινος καὶ ἀρχήν.

Αἴτημα Α'.

§. 38. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Αἴτημα Β'.

§. 39. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν.

Αἴτημα Γ'.

§. 40. Καὶ παντὶ κέντρῳ, καὶ διαστήματι κύκλον γεγράφθαι.

Ὅρος ΛΗ'.

§. 41. Ἀξίωμά ἐστι γνῶσις γνώριμος, τὸ ἐναργές

τε καὶ

Κεφ. α'. τε καὶ αὐτόπιστον καθ' ἑαυτὴν ἔχουσα, εἰς ἀρχὴν λαμβανομένη.

Ἀξίωμα Α'.

§. 42. Ἐὰν τοῖς ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

Ἀξίωμα Β'.

§. 43. Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

Ἀξίωμα Γ'.

§. 44. Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἄνισα ἀφαιρεθῇ τὰ καταλειπόμενα ἔσται ἄνισα.

Ἀξίωμα Δ'.

§. 45. Ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ τὰ ὅλα ἔσται ἄνισα.

Ἀξίωμα Ε'.

§. 46. Ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ τὰ καταλειπόμεναι ἔσται ἄνισα.

Ἀξίωμα ϛ'.

§. 47. Τὸ ὅλον τοῦ ἰδίου μέρους μεῖζόν ἐστιν, ἴσον δὲ τοῖς ἰδίοις μέρεσι συνάμα ληφθεῖσι.

Ἀξίω-

Κεφ. α'.

Ἀξίωμα Ζ'.

§. 48. Τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἀξίωμα Η'.

§. 49. Καὶ τὰ ἀλλήλοις ἴσα ἐπ' ἄλληλα ἐφαρμόζει.

Ἀξίωμα Θ'.

§. 50. Τὰ σὺν τρίτῳ ταυτὰ, καὶ ἀλλήλοις ταυτά.

Ἀξίωμα Ι'.

§. 51. Τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἢ τριπλάσια ἢ ἡμίσεα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἀξίωμα ΙΑ'.

§. 52. Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ΚΕ-

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Β'.

ΠΕΡΙ' ΣΥΜΠΤΩΜΑ'ΤΩΝ

ΓΡΑΜΜΩ͂Ν ΤΕ ΚΑΙ' ΤΡΙΓΩ'ΝΩΝ.

Πρότασις Α'. Θεώρημα.

Σχ. 23. §. 53. ΕΆν ἐντὸς κέντρου κύκλου ΒΓΖ ληφθῇ τὸ Α σημεῖον, ἀπὸ δὲ τούτου πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΑΒ, ΑΡ, ΑΖ, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχεν, ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη ΑΡ πασῶν μεγίστη ἐστί.

Δεῖξις.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κ κέντρου ἡ ΚΖ ἡμιδιάμετρος. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΚΡ, ΚΖ εὐθεῖαι ἴσαι (13) ἀλλή-

λαις

λαις εἰσί, κοινῆ προστεθείσης τῆς ΑΚ, ἡ ΑΚ μετὰ Κεφ. β'.
τῆς ΚΡ, ἤτοι ὅλη ἡ ΑΡ ταῖς ΑΚ, ΚΖ ἴση (42) ἔσται. Ἀλλ' ἐν τῷ ΑΚΖ τριγώνῳ αἱ δύω πλευραὶ ΑΚ, ΚΖ συνάμα ληφθεῖσαι τῆς ΑΖ πλευρᾶς μείζονές (23) εἰσι· καὶ ἡ ΑΡ ἄρα τῆς ΑΖ μείζων ἔσται. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον ἡ ΑΡ εὐθεῖα πάσης ἄλλης εὐθείας μείζων δειχθήσεται. Ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἄρα ἠγμένη πασῶν μεγίστη ἐστίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

§. 54. Ἐν παντὶ ἄρα κύκλῳ ἡ Διάμετρος πασῶν τῶν χορδῶν μεγίστη ἐστί.

Πρότασις Β'. Θεώρημα.

§. 55. Τῶν αὐτῶν δοθέντων, ἐὰν τὸ ΡΖ τόξον τοῦ ΡΕ τόξου ἔλαττον ᾖ· ἡ ΑΖ εὐθεῖα τῆς ΑΕ εὐθείας μείζων ἔσται. Σχ. 23.

Δεῖξις.

Ἔστω τὸ ΡΒ τόξον τῷ ΡΖ τόξῳ ἴσον, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΒ, ταύτῃ ἴση κατεσκευάσθω ἡ ΑΖ, καὶ διήχθω ἡ ΚΕ τὴν ΑΒ κατὰ τὸ Ι σημεῖον τέμνουσα. Ἐν τῷ τριγώνῳ ΚΙΒ, ἡ ΚΙ εὐθεῖα συνάμα τῇ ΙΒ τῆς ΚΒ μείζων (23) ἐστίν. Ἀλλὰ μὴν αἱ ΚΒ, ΚΕ εὐθεῖαι ἴσαι (13) ἀλλήλαις εἰσίν· ἡ ΚΙΒ ἄρα τῆς ΚΕ μείζων ἔσται· κοινῆ δ' ἀφαιρεθείσης τῆς ΚΙ, ἔσται ἡ ΙΒ τῆς ΙΕ (46) μείζων. Ἐὰν ἄρα ταῖς ΙΒ, ΙΕ εὐθείαις ἡ ΙΑ κοινῆ προστεθῇ, ἡ ΑΙΒ τῆς ΑΙΕ μείζων (45) ἐστίν. Ἀλλ' ἐν τῷ τριγώνῳ ΕΙΑ,

ἡ ΑΙΕ

Κεφ. β'. ἡ ΑΙΕ τῆς ΑΕ μείζων (23) ἐστίν· ἡ ΑΒ ἄρα, ἢ ἡ ταύτῃ ἴση ΑΖ πολλῷ μείζων ἔσαι τῆς ΑΕ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Σχ. 23. §. 56. Τῶν αὐτῶν δοθέντων, ἐὰν ἡ ΑΖ εὐθεῖα τῇ ΑΒ εὐθείᾳ ἴση ᾖ, καὶ τὸ ΡΖ τόξον ἴσον ἔσαι τῷ ΡΒ τόξῳ.

Δεῖξις.

Τὸ ΡΖ τόξον τοῦ ΡΒ τόξου ἔλαττον ἔσω, ἢ μεῖζον. Καὶ εἰ μὲν ἔλαττον, ἡ ΑΖ εὐθεῖα τῆς ΑΒ εὐθείας μείζων (55) ἂν εἴη· κατὰ τῆς ὑποθέσεως. Εἰ δὲ μεῖζον, ἡ ΑΖ εὐθεῖα τῆς ΑΒ εὐθείας ἐλάσσων (55) ἂν εἴη· αὖθις κατὰ τῆς ὑποθέσεως. Ἐπεὶ οὖν οὐδέτερον συμβῆναι δυνατόν, ἴσα ἄρα ἀλλήλοις ἐστὶ τὰ ΡΒ, ΡΖ τόξα. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Σχ. 24. §. 57. Ἐντεῦθεν συνάγεται τὰς ἴσας χορδὰς ΑΖ, ΑΒ ἴσα τόξα ὑποτείνειν. Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς ΑΚΡ Διαμέτρου, ἡ ΑΖΡ ἡμιπεριφέρεια τῇ ΑΒΡ ἡμιπεριφερείᾳ ἴση (14) ἐστίν. Ἀλλὰ μὴν τὸ ΡΖ τόξον ἴσον (56) ἐστὶ τῷ ΡΒ τόξῳ, ἄρα καὶ τὸ ΑΖ τόξον τῷ ΑΒ τόξῳ ἴσον ἔσαι.

Πρότασις Δ'. Θεώρημα.

Σχ. 24. §. 58. Ἐὰν τοῦ ΑΚΖ τριγώνου αἱ πλευραὶ ΑΚ, ΚΖ, ΖΑ ἴσαι ὦσι ταῖς πλευραῖς ΑΚ, ΚΒ, ΒΑ

ΒΑ

ΒΑ τοῦ ΑΚΒ τριγώνου ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· αἱ ὑπὸ Κεφ. β'.
τῶν ἴσων πλευρῶν ὑποτεινόμεναι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, καὶ ὅλα τὰ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἔσαι.

Δεῖξις.

Κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΖ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΖΕΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΚ κατὰ τὸ Ρ σημεῖον. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΖ τῇ ΑΒ ἴση ὑποτίθεται, τὰ τόξα ΡΖ, ΡΒ ἴσα (56) ἀλλήλοις ἐστί. Ἔτι δὲ καὶ τὰ τόξα ΑΖ, ΑΒ ἴσα (57) ἐστί. Τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΖΚ ἐπιτιθέμενον τῷ τριγώνῳ ΑΒΚ ἐφαρμόσει αὐτῷ. Ἀλλὰ μὴν τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπάλληλα ἴσα ἐστί, τὰ τρίγωνα ἄρα ἴσα ἀλλήλοις ἔσαι. Καὶ διὰ ταῦτα ἡ ΑΚΖ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ΑΒΚ γωνίᾳ, ἡ δὲ ΑΖΚ γωνία τῇ ΑΒΚ γωνίᾳ ἴση, ἔτι δὲ καὶ ἡ ΚΑΖ γωνία τῇ ΚΑΒ γωνίᾳ ἴση ἐστίν. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 59. Ἐκ ταύτης τῆς προτάσεως δίχα τέμνειν Σχ. 25.
μεμαθήκαμεν οἵαν δή ποτε Εὐθύγραμμον γωνίαν φέρε τὴν ΕΑΛ. Εἰλήφθω γὰρ ἡ ΑΚ εὐθεῖα τῇ ΑΣ εὐθείᾳ ἴση, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΚΣ, κέντροις μὲν τοῖς Κ, Σ, κοινῇ δὲ ἀκτῖνι τῇ ΚΣ, γεγράφθωσαν δύο κύκλοι οἱ ΣΟΤ, ΚΟΤ ἀλλήλους κατὰ τὸ Ο σημεῖον τέμνοντες, καὶ ἤχθω ἡ ΑΟ, ἥτις διχοτομήσει τὴν ΕΑΛ γωνίαν. Αἱ ΚΟ, ΚΣ ἀκτῖνες ἴσαι (13) ἀλλήλαις εἰσί. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν λόγον καὶ αἱ ΣΟ, ΣΚ εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἡ ΚΟ ἄρα τῇ ΣΟ ἴση (50) ἐστίν.

Κεφ. β'. ἐστίν. Εἰσὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ πλευραὶ ΚΑ, ΑΟ τριγώνου τοῦ ΟΑΚ, ταῖς πλευραῖς ΣΑ ΑΟ τοῦ ΟΣΑ τριγώνου (ἐκ κατασκευῆς). Τὸ τρίγωνον ἄρα ΟΚΑ τῷ ΟΣΑ τριγώνῳ ἴσον (58) ἐστὶν, ἡ δὲ ΚΑΟ γωνία τῇ ΣΑΟ γωνίᾳ ἴση ἐστί· Καὶ διὰ ταῦτα ἡ ΑΟ εὐθεῖα δίχα τέτμηκε τὴν ΚΑΣ γωνίαν, τουτέστι τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ΕΑΛ.

Πόρισμα Β'.

Σχ. 25. §. 60. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης ΚΣ τρίγωνον ἰσόπλευρον εὐμαρῶς ἐκ τοῦ πρώτου πορίσματος συστήσασθαι δυνάμεθα.

Πόρισμα Γ'.

Σχ. 26. §. 61. Καὶ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΟΡ ἀπὸ τοῦ ἐν αὐτῇ δοθέντος σημείου Β κάθετον Γραμμὴν ἀναγαγεῖν. Εἰλήφθωσαν ἑκατέρωθεν τοῦ δοθέντος σημείου ἴσαι Εὐθεῖαι αἱ ΒΞ, ΒΝ, ἐπὶ δὲ τῆς ΞΝ εὐθείας συνεστάθω (60) Τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΝΑΞ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὸ δοθὲν σημεῖον Β, ἥτις ἔσται ἡ ποθουμένη. Ἐπεὶ γὰρ τοῦ ΞΑΒ τριγώνου αἱ πλευραὶ ΒΞ, ΞΑ, ΑΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ταῖς πλευραῖς ΒΝ, ΝΑ, ΑΒ τριγώνου τοῦ ΝΑΒ· ἄρα καὶ ἡ γωνία ΑΒΝ ἴση (58) ἐστὶ τῇ ΑΒΞ γωνίᾳ. Καὶ διὰ ταῦτα ἡ ΑΒ εὐθεῖα κάθετός (9) ἐστιν ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΟΡ.

Πρό-

Πρότασις Ε'. Θεώρημα.

§. 62. Πάσης πρὸς τὸ κέντρον εὐθυγράμμου γωνίας ΑΚΥ μέτρον ἐστὶ τόξον κύκλου ὑπὸ τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν ἐμπεριλαμβανόμενον, οἷον τὸ ΑΥ τόξον. Σχ. 28.

Δεῖξις.

Ἤχθω ἡ ΥΑ χορδὴ, καὶ ταύτῃ ἴση εἰλήφθω ἡ ΥΡ, καὶ ἔσται τὰ τόξα ΥΑ, ΥΡ ἴσα (57) ἀλλήλοις. τὸ ΑΡ ἄρα τόξον τοῦ ΑΥ τόξου διπλάσιόν ἐστι, καὶ τοῦ ΑΚΥ τριγώνου αἱ πλευραὶ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ταῖς πλευραῖς τοῦ ΡΥΚ τριγώνου. Γωνία ἄρα ἡ ΑΚΥ τῇ ΡΚΥ γωνίᾳ ἴση (58) ἐστίν. Ἀλλὰ μὴν τὸ ΑΡ τόξον τοῦ ΑΥ τόξου διπλάσιον κατεσκεύασται, ἄρα ἡ ΑΚΡ γωνία τῆς γωνίας ΑΚΥ διπλασία ἐστί. τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον καὶ ἡ ΑΚΓ γωνία τριπλασία δειχθήσεται τῆς ΑΚΥ γωνίας, ἐὰν τὸ ΑΓ τόξον τοῦ ΑΥ τόξου τριπλάσιον ληφθῇ. Τὸ ΑΥ ἄρα τόξον τὴν ποσότητα τῆς γωνίας παρίστησι, τουτέστι μέτρον ἐστὶ τῆς γωνίας ΑΚΥ· εἰ γὰρ μὴ οὕτως εἶχε, διπλασιασθέντος, ἢ τριπλασιασθέντος τοῦ ΑΥ τόξου, οὐκ ἐδιπλασιάζετο, οὐδὲ μὴν ἐτριπλασιάζετο ἡ ΑΚΥ γωνία. Πάσης ἄρα πρὸς τὸ κέντρον γωνίας μέτρον καὶ τ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 63. Ἡ ὀρθὴ ἄρα γωνία ΚΜΕ ἐννενήκοντα μοίρας περιέχει. Κατασκευασθείσης γὰρ τῆς ΚΜΑ γωνίας τῇ ΚΜΕ γωνίᾳ ἴσης, ἐπὶ τῆς ΑΕ ἡμι- Σχ. 27.

Κεφ. β'. κύκλιον γεγράφθω τὸ ΑΚΕ. Ἐπεὶ δὲ αἱ γωνίαι ΚΜΕ, ΚΜΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ τὰ τούτων μέτρα, τουτέστι τὰ τόξα ΑΚ, ΚΕ, ἴσα (62) ἀλλήλοις ἔσται. Τὸ ΕΚ ἄρα τόξον τοῦ ΑΚΕ ἡμικυκλίου ἥμισύ ἐστιν· ἀλλὰ μὴν τὸ ἡμικύκλιον ἑκατὸν καὶ ὀγδοήκοντα μοίρας (17) περιέχει· ἄρα τὸ ΚΕ τόξον ἐννενήκοντα μοιρῶν περιεκτικόν ἐστι, καὶ διὰ ταῦτα ἡ ὀρθὴ γωνία ΚΜΕ ἐννενήκοντα μοιρῶν ἔσται.

Πόρισμα Β'.

§. 64. Ἡ ὀξεῖα ἄρα γωνία ὀρθῆς ἐλάττων (10) οὖσα, μοίρας ἧττον τῶν ἐννενήκοντα περιέχει. Ἡ δ' ἀμβλεῖα ὀρθῆς μείζων (10) οὖσα, μοίρας πλεῖον τῶν ἐννενήκοντα περιέχει.

Πόρισμα Γ'.

Σχ. 29. §. 65. Καὶ ἐὰν δύω εὐθεῖαι ΡΟ, ΚΦ ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον τέμνωσι, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ΦΕΡ, ΚΕΡ ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσιν. Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἡμικύκλια ΚΡΦ, ΡΚΟ ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ, κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΚΡ τόξου, τὰ τόξα ΡΦ, ΚΟ ἴσα (43) ἀλλήλοις καταληφθήσεται. Γωνία ἄρα ἡ ΡΕΦ τῇ ΚΕΟ γωνίᾳ ἴση (62) ἔσται. Τοῦτον δὴ τὸν τρόπον καὶ αἱ γωνίαι ΡΕΚ, ΦΕΟ ἴσαι ἀλλήλαις δειχθήσονται.

Σχόλιον.

Σχ. 30. §. 66. Ἐκ ταύτης τῆς προτάσεως οἵας δήποτε γωνίας τὰς μοίρας εὐμαρῶς θηρεύειν μεμαθήκαμεν. Ἔστω δὴ ἐπὶ τοῦ παρόντος θηρεῦσαι τὰς μοίρας

τῆς ΧΑΖ γωνίας, ἥτις περιεκτική ἐστι τοῦ διαστή- Κεφ. β'.
ματος ΧΖ τῶν ὑψωμάτων ΧΔ, ΖΓ. Εἰλήφθω τὸ ΚΒΛ ἡμικύκλιον εἰς μοίρας καὶ λεπτὰ διῃρημένον, ὅπερ οὕτως ἐπὶ τῆς ΧΑΖ γωνίας ἐπιθέσθω, ὥστε τὸ μὲν κέντρον ἐπὶ τὴν Α κορυφὴν, τὴν δὲ ἀκτῖνα ἐπὶ τὴν ΑΧ πλευρὰν ἐφαρμόζειν, καὶ ἔσται τὸ ποθούμενον· τὸ γὰρ ἀπὸ τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν ἀποτμηθὲν τόξον ΚΒ τῆς δοθείσης γωνίας τὰς μοίρας (62) παρίστησι.

Πρότασις ς'. Θεώρημα.

§. 67. Ἐὰν ἡ ΡΕ εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ΚΦ εὐθείας Σχ. 29.
ὁπωσοῦν σταθῇ· τὰς ἐφεξῆς γωνίας ΡΕΚ, ΡΕΦ συνάμα ληφθείσας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

Δεῖξις.

Κέντρῳ μὲν τῷ Ε, διαστήματι δὲ τῷ ΕΚ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΡΦΟ. Ἐπεὶ δὲ τῆς ΡΕΚ γωνίας μέτρον (62) ἐστὶ τὸ ΡΚ τόξον, τῆς δὲ ΡΕΦ γωνίας μέτρον (62) ἐστὶ τὸ ΡΦ τόξον· Δῆλον, τῶν δύω γωνιῶν ΡΕΚ, ΡΕΦ συνάμα ληφθεισῶν μέτρον εἶναι τὸ ἡμικύκλιον ΚΡΦ. Ἀλλὰ μὴν τὸ ἡμικύκλιον δύω ὀρθὰς καταμετρεῖ (63), ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἔσονται αἱ γωνίαι ΡΕΚ, ΡΕΦ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 68. Δύω ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΡΟ, ΚΦ ἀλλήλας Σχ. 29.
τέμνουσαι πρὸς τὴν κοινὴν τομὴν Ε γωνίας τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσιν. Ὃν γὰρ λόγον αἱ γωνίαι ΡΕΚ, ΡΕΦ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι (67) εἰσὶ,

Κεφ. β'. τοῦ αὐτοῦ δὴ καὶ αἱ λοιπαὶ δύω ΟΕΚ, ΟΕΦ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἔσονται. Πᾶσαι ἄρα αἱ πρὸς τῷ Ε γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Σχ. 24. §. 69. Ἐὰν αἱ πλευραὶ ΑΚ, ΚΖ τριγώνου τοῦ ΑΚΖ ἴσαι ὦσι ταῖς πλευραῖς ΑΚ, ΚΕ τριγώνου τοῦ ΑΚΕ, ἡ δὲ ΑΚΖ γωνία μείζων ᾖ τῆς ΑΚΕ γωνίας· καὶ ἡ ΑΖ πλευρὰ τῆς ΑΕ πλευρᾶς μείζων ἔσται.

Δεῖξις.

Κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΖ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΖΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΚ πρὸς τὸ Ρ σημεῖον. Ἐπεὶ οὖν αἱ γωνίαι ΑΚΖ, ΖΚΡ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι (67) εἰσιν, ἔτι δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΑΚΕ, ΕΚΡ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι (67) εἰσιν. ἄρα αἱ γωνίαι ΑΚΖ, ΖΚΡ ἴσαι ἔσονται ταῖς γωνίαις ΑΚΕ, ΕΚΡ· ἀλλὰ μὴν ἡ ΑΚΖ γωνία μείζων (ἐξ ὑπ.) ἐστὶ τῆς ΑΚΕ γωνίας, ἄρα ἡ ΖΚΡ γωνία τῆς γωνίας ΕΚΡ ἐλάττων (44) ἔσται, καὶ διὰ ταῦτα τὸ ΡΖ τόξον ἔλαττόν (62) ἐστι τοῦ ΡΕ τόξου, καὶ ἑπομένως ἡ ΑΖ εὐθεῖα τῆς ΑΕ μείζων (55) ἔσται. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Σχ. 31. §. 70. Ἐκ τούτων δῆλον ὅτι ἐὰν τὸ ΑΕ τόξον τοῦ ΟΡ τόξου μεῖζον ᾖ, καὶ ἡ ΑΕ χορδὴ τῆς ΡΟ χορδῆς μείζων ἔσται. Ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν ΚΑ, ΚΕ, ΚΡ, ΚΟ ἡμιδιαμέτρων, αἱ ΑΚ, ΚΕ πλευραὶ τοῦ ΕΑΚ τριγώνου ἴσαι εἰσὶ ταῖς πλευραῖς

ΡΚ,

ΡΚ, ΚΟ τριγώνου τοῦ ΟΡΚ. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ Κεφ. β'. ΑΚΕ γωνία τῆς ΡΚΟ γωνίας μείζων ἐστί, (διὰ τὸ μεῖζον εἶναι τὸ τόξον ΑΕ τοῦ ΡΟ τόξου) ἄρα ἡ ΑΕ χορδὴ τῆς ΡΟ χορδῆς μείζων (69) ἐστί.

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

§. 71. Ἐὰν τοῦ ΑΚΖ τριγώνου αἱ πλευραὶ ΑΚ, Σχ. 24. ΚΖ ἴσαι ὦσι ταῖς πλευραῖς ΑΚ, ΚΒ τοῦ ΑΚΒ τριγώνου, ἡ δὲ ΑΚΖ γωνία τῇ ΑΚΒ γωνίᾳ ἴση ᾖ· καὶ ἡ ΑΖ πλευρὰ τῇ ΑΒ πλευρᾷ ἴση ἔσται, καὶ ὅλα τὰ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἔσται.

Δεῖξις.

Κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΖ κύκλος γεγράφθω ὁ ΖΕΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΚ πρὸς τὸ Ρ σημεῖον. Αἱ δύω γωνίαι ΑΚΖ, ΖΚΡ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι (67) εἰσιν, ἔτι δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΑΚΒ, ΒΚΡ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι (67) εἰσιν. Αἱ ἄρα γωνίαι ΑΚΖ, ΖΚΡ ἴσαι εἰσὶ ταῖς γωνίαις ΑΚΒ, ΒΚΡ. ἀλλὰ μὴν ἡ ΑΚΖ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ΑΚΒ, ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ΖΚΡ ἴση ἐστὶ τῇ ΒΚΡ. καὶ διὰ ταῦτα τὰ τόξα ΖΡ, ΒΡ ἴσα (62) ἀλλήλοις ἐστί, καὶ ἡ ΑΖ εὐθεῖα τῇ ΑΒ εὐθείᾳ ἴση (53) ἐστίν. Εἰσὶ δὲ ἴσαι (ἐξ ὑπ.) καὶ αἱ πλευραὶ ΑΚ, ΚΖ τοῦ ΑΚΖ τριγώνου ταῖς πλευραῖς ΑΚ, ΚΒ τοῦ ΑΚΒ τριγώνου. ἄρα καὶ ὅλα τὰ τρίγωνα (58) ἴσα ἀλλήλοις ἔσται. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

§. 72. Ἐὰν ἄρα δύω τοῦ αὐτοῦ κύκλου τόξα ΑΕ, Σχ. 32.

 ΡΟ

Κεφ. β'. ΡΟ ἴσα ἀλλήλοις ᾖ, καὶ αἱ ἐπὶ τούτοις χορδαὶ ΑΕ, ΡΟ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. Αἱ γὰρ πλευραὶ ΑΚ, ΚΕ τοῦ τριγώνου ΕΑΚ ἴσαι (13) εἰσὶ ταῖς πλευραῖς ΚΡ, ΚΟ τοῦ τριγώνου ΟΡΚ, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΑΚΕ γωνία τῇ ΡΚΟ γωνίᾳ ἴση (62) ἐστὶν, (διὰ τὸ ἴσα εἶναι τὰ ΑΕ, ΡΟ τόξα) ἄρα καὶ ἡ ΑΕ χορδὴ τῇ ΡΟ χορδῇ ἴση (71) ἐστί.

Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

Σχ. 24. §. 73. Ἐὰν αἱ πλευραὶ ΑΚ, ΚΖ τοῦ ΑΚΖ τριγώνου ἴσαι ὦσι ταῖς πλευραῖς ΑΚ, ΚΕ τοῦ ΑΚΕ τριγώνου, ἡ δὲ ΑΖ πλευρὰ μείζων ᾖ τῆς ΑΕ πλευρᾶς· καὶ ἡ ΑΚΖ γωνία τῆς ΑΚΕ γωνίας μείζων ἔσται.

Δεῖξις.

Ἡ ΑΚΖ γωνία τῆς ΑΚΕ γωνίας ἐλάττων εἶναι ἀδύνατον· ἡ γὰρ ΑΖ πλευρὰ τῆς ΑΕ πλευρᾶς ἐλάττων (69) ἂν εἴη· κατὰ τῆς ὑποθέσεως· Οὐδὲ μὴν ἴση· αἱ γὰρ ΑΖ, ΑΕ πλευραὶ ἴσαι ἂν (71) ἀλλήλαις εἶεν· αὖθις κατὰ τῆς ὑποθέσεως· ταύτῃ ἄρα γωνία ἡ ΑΚΖ τῆς ΑΚΕ γωνίας μείζων ἔσται. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Ι'. Πρόβλημα.

Σχ. 33. §. 74. Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ΚΕ δίχα τεμεῖν.

Δεῖξις.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΚΕ συνεστάθω (60) τρί-

τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΚΦΕ, καὶ διήχθω ἡ ΦΑ, Κεφ. β'.
ἥτις δίχα τέμνουσα (59) τὴν ΚΦΕ γωνίαν, δίχα τεμεῖ καὶ τὴν ΚΕ εὐθεῖαν κατὰ τὸ Α σημεῖον· Αἱ γὰρ πλευραὶ ΚΦ, ΦΑ τοῦ ΚΑΦ τριγώνου ἴσαι (ἐκ κατ.) εἰσὶ ταῖς ΕΦ, ΦΑ πλευραῖς τοῦ ΕΑΦ τριγώνου· Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΚΦΑ γωνία τῇ ΕΦΑ γωνίᾳ ἴση κατεσκεύασται, ἄρα καὶ ἡ ΑΚ εὐθεῖα τῇ ΑΕ εὐθείᾳ ἴση (71) ἔσται· τουτέστιν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΚΕ δίχα κατὰ τὸ Α σημεῖον ἐτμήθη. Ο. Ε. Π.

Πρότασις ΙΑ'. Πρόβλημα.

§. 75. Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΛΗ ἀπὸ τοῦ Σχ. 34.
δοθέντος Κ σημείου, ὃ μὴ ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Δεῖξις.

Κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΦ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΦΕ, τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΛΗ κατὰ τὰ σημεῖα Α, Ε τέμνων. Εἶτα τῆς χορδῆς ΑΕ δίχα (74) τμηθείσης, διήχθω ἡ ΚΓ, ἥτις ἔσται ἡ ζητουμένη. Ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν ΚΑ, ΚΕ εὐθειῶν, αἱ ΑΚ, ΚΓ, ΓΑ πλευραὶ τοῦ Μ τριγώνου ἴσαι εἰσὶν (ἐκ κατ.) ταῖς πλευραῖς ΕΚ, ΚΓ, ΓΕ τοῦ Ν τριγώνου ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· διὰ δὲ ταῦτα καὶ ἡ ΚΓΑ γωνία τῇ ΚΓΕ γωνίᾳ ἴση (58) ἔσται. Ἡ ΚΓ ἄρα εὐθεῖα κάθετός (9) ἐστιν ἐπὶ τῆς ΑΕ χορδῆς, ἤτοι ἐπὶ τῆς ΛΗ δοθείσης εὐθείας. Ο. Ε. Π.

Κεφ. β'.

Πόρισμα Α'.

§. 76. Πᾶσα ἄρα ἀπὸ τοῦ Κέντρου κύκλου τινὸς ἀχθεῖσα εὐθεῖα, ἣν δίχα τὴν χορδὴν τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ· Κ' ἣν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα τεμεῖ αὐτήν.

Πόρισμα Β'.

Σχ. 34. §. 77. Ἔτι δὲ ἡ ΚΟ εὐθεῖα, ἥτις δίχα τὴν χορδὴν ΑΕ τέμνει, καὶ τὸ ΑΟΕ τόξον δίχα τεμεῖ. Ἐπεὶ γὰρ ἐν τοῖς ἰσοπλεύροις τριγώνοις Μ, Ν ἴσαι (58) εἰσὶν ἀλλήλαις αἱ γωνίαι ΑΚΓ, ΕΚΓ, καὶ τὰ τούτων μέτρα ΑΟ, ΕΟ ἴσα (62) ἀλλήλοις ἔσται.

Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

Σχ. 35. §. 78. Ἡ ΑΡ εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ Α σημείου κάθετος ἐπὶ τῆς ΣΗ εὐθείας ἀχθεῖσα, πασῶν ἐστὶ βραχυτάτη τῶν ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπὶ τῆς εὐθείας ἀποτεινομένων εὐθειῶν.

Δεῖξις.

Ἤχθω ἡ ΑΚ εὐθεῖα, καὶ διπλασιασθείσης τῆς ΡΑ κατὰ τὸ Φ, ἐπεζεύχθω ἡ ΦΚ. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΡ, ΡΚ πλευραὶ τοῦ Μ τριγώνου ἴσαι εἰσὶ ταῖς πλευραῖς ΦΡ, ΡΚ τοῦ Ν τριγώνου, αἱ δὲ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ αἱ ΑΚ, ΚΦ πλευραὶ ἴσαι (71) ἀλλήλαις ἔσονται. ἡ ΑΚΦ ἄρα γραμμὴ τῆς ΑΚ διπλασία ἐστὶν, ἔτι δὲ καὶ ἡ ΑΦ τῆς ΑΡ. ἐν δὲ τῷ τριγώνῳ ΚΑΦ, ἡ ΑΚΦ

γραμ-

γραμμὴ τῆς ΑΦ μείζων (23) ἐστίν. ἄρα καὶ ἡ ΑΚ Κεφ. β'.
τῆς ΑΡ μείζων ἔσται. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τῆς ΣΗ εὐθείας ἀχθεῖσα μείζων εἶναι τῆς καθέτου ΑΡ. Πασῶν ἄρα βραχυτάτη ἐστὶν ἡ κάθετος ΑΡ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 79. Ἐπεὶ οὖν ἡ διάστασις παντὸς σημείου ἀπὸ τῆς εὐθείας γραμμῆς, ἡ βραχυτάτη ἐστὶ γραμμὴ, ἑπόμενόν ἐστι τὴν κάθετον, ἥτις βραχυτάτη ἐστὶ, διάστασιν εἶναι τοῦ σημείου ἀπὸ τῆς εὐθείας.

Πόρισμα Β'.

§. 80. Ἐπεὶ δὲ παντὸς σχήματος τὸ ὕψος ἡ διά- Σχ. 33.
στασίς ἐστι τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῆς ἰδίας βάσεως, ἐπαναγκές ἐστι τὴν κάθετον ΦΑ τοῦ σχήματος τὸ ὕψος παριστᾶναι.

Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

§. 81. Ἐὰν ἐπὶ τὴν ἡμιδιάμετρον ΚΟ ἀχθῇ Σχ. 36.
κάθετος ἡ ΡΚ εὐθεῖα, αὕτη ἐκβληθεῖσα κατὰ τὸ Φ καθ' ἓν μόνον σημεῖον τοῦ κύκλου ἐφάπτεται.

Δεῖξις.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΡΚ εὐθείας τὸ Η σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΗ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΡΚ κάθετός (ἐξ ὑπ.) ἐστι τῇ ΟΚ, καὶ ἡ ΟΚ κάθετος ἔσται τῇ ΡΚ καὶ διὰ ταῦτα βραχυτάτη ἐστὶ τῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο ἐπὶ τῆς ΡΚ εὐθείας ἀποτεινομένων (78) εὐθειῶν, Κεφ. β'. εὐθειῶν, ἡ δ' εὐθεῖα ΟΣ (τῇ ΟΚ ἴση) τῆς ΟΗ ἐλάττων ἐστίν. Ἀλλὰ μὴν τῆς ΟΣ εὐθείας τὸ πέρας Ο ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐστίν. Ἄρα τὸ πέρας Η τῆς ΟΗ μείζονος εὐθείας ἐκτὸς ἔσαι τῆς περιφερείας. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον δείξω καὶ τὰ λοιπὰ σημεῖα τῆς ΡΚ εὐθείας, πλὴν τοῦ Κ, ἐκτὸς τῆς περιφερείας ἐκπίπτειν. Εὐθείας ἄρα τῆς ΡΚ τὰ σημεῖα ἐκτὸς τῆς περιφερείας πάντα ἐκπίπτει, πλὴν τοῦ Κ, καὶ διὰ ταῦτα τοῦ κύκλου ἐφάπτεται κατὰ τὸ Κ σημεῖον. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 82. Ἡ ἀκτὶν ἄρα ΟΚ ἐπὶ τὸ τῆς ἐπαφῆς σημεῖον ἀχθεῖσα κάθετος ἔσαι τῇ ἐφαπτομένῃ ΦΡ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΟΚ βραχυτάτη ἐστὶ τῶν ἀπὸ τοῦ Κ σημείου ἐπὶ τῆς εὐθείας ΦΡ ἀποτεινομένων εὐθειῶν, πάντως κάθετος ταύτῃ (78) ἔσαι. Ἡ δὲ ΟΚΡ γωνία ὀρθή ἐστι.

ΚΕ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΠΕΡΙ ΤΑΞΙΩΜΑΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ ΑΠΤΟΜΕΝΩΝ ΤΕ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.

Πρότασις ΙΔ'. Θεώρημα.

§. 83. Ἐὰν δύο Εὐθεῖαι ΛΦ, ΑΕ παράλληλοι ὦσιν, ἡ δὲ ΗΚ κάθετος ᾖ τῇ μιᾷ ΑΕ, κάθετος ἔσαι καὶ τῇ ἑτέρᾳ ΛΦ. Σχ. 37.

Δεῖξις.

Εἰλήφθωσαν δύο εὐθεῖαι ἴσαι αἱ ΚΣ, ΚΥ, ἐπὶ δὲ τῆς ΑΕ ἐγερθήτωσαν (61) κάθετοι αἱ ΣΙ, ΥΓ, αἵτινες ἴσαι εἰσί, διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ΛΦ, ΑΕ εὐθείας, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΙ, ΚΓ. Ἐπεὶ οὖν αἱ πλευραὶ ΙΣ, ΣΚ τοῦ Μ τριγώνου ἴσαι εἰσὶ ταῖς πλευραῖς ΓΥ, ΥΚ τοῦ Ν τριγώνου, ἡ δ' ὀρθὴ γωνία ΙΣΚ ἴση ἐστὶ τῇ ΓΥΚ ὀρθῇ γωνίᾳ, καὶ αἱ ΚΙ, ΚΓ εὐθεῖαι

ἴσαι

Κεφ. γ'. ἴσαι (71) ἀλλήλαις ἔσονται, ἔτι δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΙΚΣ ΓΚΥ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ τῶν ἴσων γωνιῶν ΗΚΣ, ΗΚΥ ἀφαιρεθῶσιν αἱ γωνίαι ΙΚΣ, ΓΚΥ, ἴσαι (43) καταλειφθήσονται αἱ γωνίαι ΗΚΙ, ΗΚΓ. Εἰσὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ πλευραὶ ΙΚ, ΚΗ ταῖς ΓΚ, ΚΗ πλευραῖς· ἄρα καὶ ἡ ΚΗΙ γωνία τῇ ΚΗΓ γωνίᾳ ἴση (71) ἔσαι. ταῦτ' ἄρα ἡ ΚΗ εὐθεῖα κάθετός ἐστι καὶ τῇ ΛΦ εὐθείᾳ Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΕ'. Θεώρημα.

Σχ. 38. §. 84. Ἐὰν ἡ ΗΕ εὐθεῖα τέμνῃ τὰς παραλλήλους ΑΤ, ΚΣ, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων Η, Ε ἐγερθῶσι κάθετοι αἱ ΗΦ, ΕΟ· ἡ ΟΕΗ γωνία τῇ ΕΗΦ γωνίᾳ ἴση ἔσαι.

Δεῖξις.

Γενέσθωσαν αἱ ΗΛ, ΕΓ εὐθεῖαι τῶν ΗΦ, ΕΟ εὐθειῶν διπλάσιαι· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΛ, ΓΗ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΟΕ εὐθεῖα κάθετος (ἐξ ὑπ.) ἐστιν ἐπὶ τῆς ΑΤ, κάθετος ἔσαι (83) καὶ ἐπὶ τῆς ΚΣ, καὶ διὰ ταῦτα ἴσαι ἔσονται αἱ ΗΦ, ΟΕ οἷα παραλλήλων διαστήματα. Ἀλλὰ μὴν αἱ πλευραὶ ΕΦ, ΦΛ τοῦ τριγώνου ΦΕΛ ἴσαι εἰσὶ ταῖς πλευραῖς ΕΦ, ΦΗ τοῦ ΦΕΗ τριγώνου, ἡ δὲ ὀρθὴ γωνία ΕΦΛ ἴση ἐστὶ τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ ΕΦΗ· ἄρα καὶ ἡ ΕΛ ἴση (71) ἐστὶ τῇ ΕΗ. τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον καὶ ἡ ΓΗ εὐθεῖα ἴση δειχθήσεται τῇ ΕΗ εὐθείᾳ. Αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΕΛ, ΓΗ ἴσαι (50) ἀλλήλαις ἔσονται. Εἰσὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ εὐθεῖαι ΗΕ, ΕΓ ταῖς εὐθείαις ΗΕ, ΗΛ, τὸ τρίγωνον ἄρα ΕΗΓ ἴσον (58) ἐστὶ τῷ ΛΕΗ

τει-

τριγώνῳ, διόπερ καὶ ἡ γωνία ΓΕΗ ἴση ἐστὶ τῇ Κεφ. γ'.
ΕΗΛ γωνίᾳ· τουτέστιν ἡ ΟΕΗ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ΕΗΦ γωνίᾳ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Ιϛ'. Θεώρημα.

§. 85. Ἐὰν ἡ ΡΕ εὐθεῖα τέμνῃ δύω παραλλή- Σχ. 39.
λους τὰς ΑΤ, ΚΣ κατὰ τὰ σημεῖα Η, καὶ Ε. Α'. ποιήσει τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ΑΗΕ, ΗΕΣ ἀλλήλαις ἴσας. Β'. τὴν ἐκτὸς γωνίαν ΡΗΤ τῇ ἐντὸς γωνίᾳ ΗΕΣ ἴσην. Καὶ Γ'. τὰς δύω ἐντὸς γωνίας ΤΗΕ, ΗΕΣ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Δεῖξις.

Α'. Ἀπὸ τῶν σημείων Η καὶ Ε ἤχθωσαν ἐπ' ἀμφοτέραις ταῖς παραλλήλοις κάθετοι (75) αἱ ΗΦ, ΕΟ εὐθεῖαι, αἵτινες ἴσαι εἰσὶν, οἷα παραλλήλων διαστήματα· καὶ διὰ ταῦτα αἱ πλευραὶ ΕΟ, ΕΗ τοῦ ΕΟΗ τριγώνου ἴσαι εἰσὶ ταῖς πλευραῖς ΦΗ, ΗΕ τοῦ ΕΦΗ τριγώνου ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ γωνία ΟΕΗ τῇ ΕΗΦ γωνίᾳ ἴση (84) ἐστὶν, ἄρα καὶ ἡ ΘΗΕ γωνία τῇ ΗΕΦ γωνίᾳ ἴση (71) ἔσαι· τουτέστιν, ἡ ἐναλλὰξ γωνία ΑΗΕ τῇ ἐναλλὰξ γωνίᾳ ΗΕΣ ἴση ἐστίν. Ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Β'. Ἡ ἐκτὸς γωνία ΡΗΓ ἴση (65) ἐστὶ τῇ κατὰ κορυφὴν γωνίᾳ ΑΗΕ. Ἀλλὰ μὴν τῇ ΑΗΕ γωνίᾳ ἴση (Α'.) ἐστὶν ἡ ἐναλλὰξ γωνία ΗΕΣ, ἄρα καὶ ἡ ἐκτὸς γωνία ΡΗΤ τῇ ἐκτὸς γωνίᾳ ΗΕΣ ἴση ἐστίν. Ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον.

Γ'. Ἡ ΤΗ εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ΡΕ εὐθείας σαθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ΡΗΤ, ΤΗΕ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας (67) ποιεῖ. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΡΗΤ γωνία τῇ ΗΕΣ γωνίᾳ ἴση (Β'.) ἐστίν· ἄρα αἱ

ἐντὸς

Κεφ. γ'. ἐντὸς γωνίαι ΤΗΕ, ΗΕΣ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἔσονται. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Σχ. 40. §. 86. Ἐκ τούτων δῆλον ὅτι παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ἀπ' ἐναντίον γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ διαγώνιος ΑΦ τέμνει τὰς παραλλήλους ΕΦ, ΑΚ, ἡ ΕΦΑ γωνία ἴση (85) ἐστὶ τῇ ΦΑΚ· ἔτι δὲ καὶ ἡ ΑΦΚ τῇ ΕΑΦ ἴση ἐστίν· ὅλη ἄρα ἡ γωνία ΕΦΚ ὅλη τῇ γωνίᾳ ΕΑΚ ἴση ἔσαι.

Πρότασις ΙΖ'. Θεώρημα.

Σχ. 41. §. 87. Τῆς περιεχομένης γωνίας ΡΟΗ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΟΡ καὶ τῆς ΟΗ χορδῆς μέτρον ἐσὶ τὸ ἥμισυ τοῦ τὴν χορδὴν ὑποτείνοντος τόξου ΟΖΗ.

Δεῖξις.

Τῆς ΟΗ χορδῆς δίχα κατὰ τὸ Λ σημεῖον (74) τμηθείσης διὰ τῆς ΚΖ ἡμιδιαμέτρου, ἥτις καὶ τὸ τόξον ΗΟ (77) διχοτομήσει κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, ἤχθω ἡ ΚΓ παράλληλος τῇ ΗΟ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΚΛ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς ΟΗ, κάθετος (83) ἔσαι καὶ ἐπὶ τῆς ΚΓ, καὶ διὰ ταῦτα ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ΛΚΓ γωνία. Ἀλλαμὴν καὶ ἡ ΡΟΚ γωνία ὀρθή (82) ἐστιν, ἄρα ἡ ΡΟΚ γωνία τῇ ΖΚΓ γωνίᾳ ἴση ἔσαι. Ἐπεὶ δὲ ἡ ΚΟ εὐθεῖα τέμνει τὰς παραλλήλους ΚΓ, ΟΗ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΗΟΚ ΟΚΓ ἴσαι (85) εἰσιν. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ τῶν ἴσων γωνιῶν ΡΟΚ, ΖΚΓ ἀφαιρεθῶσιν αἱ ἴσαι γωνίαι ΗΟΚ, ΟΚΓ, ἴσαι καταληφθή- Κεφ. γ'. σονται αἱ γωνίαι ΡΟΗ, ΟΚΖ. Ἀλλαμὴν τὸ ΟΖ τόξον, ὅπερ ἥμισυ ἐστὶ τοῦ ΟΗ τόξου, μέτρον ἐσὶ τῆς ΟΚΖ (62) γωνίας, ἄρα καὶ τῆς ΡΟΗ γωνίας μέτρον ἔσαι. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΗ'. Θεώρημα.

§. 88. Τῆς πρὸς τὴν περιφέρειαν γωνίας ΗΚΦ Σχ. 42. μέτρον ἐσὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπὸ τῶν σκελῶν ἐμπεριλαμβανομένου τόξου ΗΦ.

Δεῖξις.

Διὰ τῆς Κ κορυφῆς ἤχθω (81) ἡ ἐφαπτομένη ΡΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΚ ἡμιδιάμετρος. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΕ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΣΠΟ τῷ ΗΚΦ ἴσος. Ἐπεὶ δὲ ἑκάστης τῶν γωνιῶν ΡΚΗ, ΗΚΦ, ΦΚΑ μέτρον ἐσὶν (62) ἕκαστον τῶν τόξων ΣΛ, ΛΥ, ΥΟ, πάντως τὸ ἡμικύκλιον ΣΛΥΟ πασῶν τῶν γωνιῶν ἔσαι μέτρον. Ἀλλαμὴν τὸ ΣΕΟ ἡμικύκλιον ἴσον (ἐκ κατ.) ἐστὶ τῷ τοῦ κύκλου ΗΚΦ ἡμικυκλίῳ, ἄρα καὶ τὸ ἡμικύκλιον τοῦ ΗΚΦ κύκλου μέτρον ἐσὶ τῶν ΡΚΗ, ΗΚΦ, ΦΚΑ γωνιῶν. Ἔσι δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ΚΗ τόξου (87) μέτρον τῆς ΡΚΗ γωνίας· καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ΚΦ τόξου μέτρον ἐσὶ τῆς ΦΚΑ γωνίας, ἄρα καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ΗΦ τόξου μέτρον ἐσὶ τῆς ΗΚΦ γωνίας. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα. Α'.

§. 89. Αἱ ἐν τῷ αὐτῷ ἄρα τμήματι γωνίαι Σχ. 43. ΗΣΕ, ΗΦΕ, ΗΡΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐπεὶ-

Κεφ. γ'. Ἑκάστης γὰρ μέτρον ἐστὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ΗΕ τόξου (88).

Πόρισμα. Β'.

Σχ. 44. §. 90. Δύω ἄρα παράλληλοι καὶ ἴσαι χορδαὶ ΑΣ, ΛΗ ἴσα ἐμπεριλαμβάνουσι τόξα τὰ ΑΛ, ΣΗ· Ἀχθείσης γὰρ τῆς ΣΛ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΣΛ, ΣΛΗ (85) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, ταῦτ' ἄρα καὶ τὰ τόξα ΑΛ, ΣΗ ἴσα (88) ἀλλήλοις ἐστί.

Πόρισμα. Γ'.

Σχ. 45. §. 91. Ἡ περιεχομένη ἄρα γωνία, ὑπό τε τῆς ἐφαπτομένης ΚΑ καὶ τῆς τεμνούσης ΚΦ, ἴση ἐστὶ τῇ ΚΗΦ γωνίᾳ· ἑκατέρας γὰρ κοινὸν μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ΚΦ τόξου (87, 88) ἐστί.

Πρότασις ΙΘ'. Θεώρημα.

Σχ. 46. §. 92. Ἐὰν δύω χορδαὶ ΒΕ, ΔΚ ἀλλήλαις ἐντὸς κύκλου συμπίπτωσι κατὰ τὸ σημεῖον Α, τῆς ΒΑΔ γωνίας μέτρον ἐστὶ τὸ ἥμισυ τῆς συνάψεως τῶν τόξων ΒΔ, ΚΕ.

Δεῖξις.

Ἤχθω ἡ ΕΦ τῇ ΚΔ παράλληλος· καὶ ἔσται (90) ἴσα τὰ τόξα ΔΦ, ΚΕ. Ἐπεὶ οὖν παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι ΕΦ, ΚΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ΒΑΔ τῇ ἐντὸς γωνίᾳ ΒΕΦ ἴση (85) ἐστίν. Ἀλλὰ μὴν τῆς ΒΕΦ γωνίας μέτρον (88) ἐστὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΔΦ τόξου. Ἄρα καὶ τῆς ΒΑΔ γωνίας μέτρον ἔσται τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΔΦ τόξου.

τόξου. Ἐπεὶ δὲ τὰ τόξα ΔΦ, ΚΕ ἴσα ἀλλήλοις (90) ἐστί, τὸ ΒΔΦ τόξον ἰσοῦται τῇ συνάψει τῶν ΒΔ, ΚΕ τόξων. Τῆς ἄρα γωνίας ΒΑΔ τὸ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς συνάψεως τῶν τόξων ΒΔ, ΚΕ ἐστίν. Ο. Ε. Δ. Κεφ. γ'.

Πρότασις Κ'. Θεώρημα.

§. 93. Ἐὰν δύω χορδαὶ ΒΕ, ΔΚ ἀλλήλας ἐκτὸς Σχ. 47.
κύκλου τέμνωσι κατὰ τὸ Α σημεῖον· τῆς ΒΑΔ γωνίας τὸ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν ΒΔ, ΕΚ τόξων ἐστί.

Δεῖξις.

Ἤχθω ἡ ΕΦ τῇ ΑΔ παράλληλος· καὶ ἔσται ἴσα τὰ τόξα (90) ΦΔ, ΕΚ. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΕΦ, ΑΔ παράλληλοί εἰσιν, ἡ ΒΑΔ ἐντὸς γωνία ἴση (85) ἐστὶ τῇ ἐκτὸς γωνίᾳ ΒΕΦ: Ἀλλὰ μὴν τῆς ΒΕΦ γωνίας μέτρον (88) ἐστὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΦ τόξου, ἄρα καὶ τῆς γωνίας ΒΑΔ μέτρον ἔσται τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΦ τόξου. Καὶ διὰ ταῦτα τῆς ΒΑΔ γωνίας μέτρον ἐστὶ τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν τόξων ΒΔ, ΕΚ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΑ'. Θεώρημα.

§. 94. Ἐὰν εἰς δύω εὐθείας ΑΥ, ΖΦ ἡ εὐ- Σχ. 48.
θεῖα ΟΕ ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ΑΡΕ, ΡΕΦ ἴσας ποιῇ· ἢ τὴν ἐκτὸς ΟΡΥ τῇ ἐντὸς ΡΕΦ ἴσην ποιῇ· ἢ τὰς δύω ἐντὸς ΥΡΕ, ΡΕΦ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ· παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι ΑΥ, ΖΦ.

Δεῖξις.

Α'. Ἐπὶ τῆς ΡΕ εὐθείας κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΛΡΚ, καὶ ἐπιζευχθῶσαν αἱ ΛΕ, ΡΚ εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν (ἐξ ὑπ.) αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΡΕ, ΡΕΦ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ τὰ τόξα ΛΕ, ΡΚ ἴσα (88) ἀλλήλοις ἐστίν, οἷς προστιθεμένου τοῦ ΛΡ τόξου, τὸ ΕΛΡ τόξον, ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΡΚ τόξῳ. Ἀλλὰ μὴν τὸ ΕΛΡ τόξον μοιρῶν ἑκατὸν καὶ ὀγδοήκοντά (ἐκ κατ.) ἐστιν, ἄρα καὶ τὸ ΛΡΚ τόξον μοιρῶν ἑκατὸν καὶ ὀγδοήκοντα ἔσται· καὶ διὰ ταῦτα ἡ ἐν τούτῳ γωνία ΛΕΚ ὀρθὴ (88) ἐστιν· ἀλλ' ὀρθὴ ἐστι καὶ ἡ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ΡΚΕ, ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΡΚ, ΛΕ κάθετοί εἰσι τῇ ΖΦ εὐθείᾳ. Εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι, διὰ τὸ ἴσα εἶναι τὰ τόξα ΡΚ, ΛΕ, ἄρα ἔσονται καὶ παράλληλοι. Ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Β'. Γωνία ἡ ΑΡΕ τῇ ΟΡΥ γωνίᾳ ἴση (65) ἐστίν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΡΕΦ γωνία ἐντὸς ἴση (ἐξ ὑπ.) ἐστὶ τῇ ἐκτὸς γωνίᾳ ΟΡΥ, ἄρα καὶ ἡ ΑΡΕ γωνία τῇ ΡΕΦ γωνίᾳ ἴση ἔσται. διὰ δὲ ταῦτα παράλληλοί (α.) εἰσιν αἱ ΑΥ, ΖΦ εὐθεῖαι. Ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον.

Γ'. Γωνίαι αἱ ΟΡΥ, ΥΡΕ δυσὶν ὀρθαῖς (67) ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ μὴν καὶ αἱ γωνίαι ΥΡΕ, ΡΕΦ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι (ἐξ ὑπ.) εἰσιν, ἄρα αἱ γωνίαι ΟΡΥ, ΥΡΕ ἴσαι εἰσὶ ταῖς γωνίαις ΥΡΕ, ΡΕΦ. κοινῆς δὲ ἀφαιρεθείσης τῆς ΥΡΕ γωνίας, ἡ ΟΡΥ γωνία τῇ ΡΕΦ γωνίᾳ ἴση ἔσται· καὶ διὰ ταῦτα παράλληλοι (β.) ἔσονται αἱ ΑΥ, ΖΦ εὐθεῖαι. Ο. Ε. Δ.

Πό-

Πόρισμα.

§. 95. Πᾶν ἄρα ὀρθογώνιόν ἐστι καὶ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν αἱ ἐντὸς γωνίαι Ε, Α ἴσαι ἀλλήλαις (ἐξ ὑπ.) εἰσί, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἔσονται· καὶ διὰ ταῦτα αἱ ΕΦ, ΑΚ εὐθεῖαι παράλληλοι (94) ἔσονται. Ὁμοίως δὴ δείξω καὶ τὰς ΕΑ, ΦΚ παραλλήλους εἶναι. Πᾶν ἄρα ὀρθογώνιον, καὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι. Σχ. 40.

Πρότασις ΚΒ'. Θεώρημα.

§. 96. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΗΦ, ΛΑ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΟΚ ὦσι παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι ἔσονται. Σχ. 49.

Δεῖξις.

Τὰς ΗΦ, ΛΑ εὐθείας τεμνέτω ἡ πλάγιος ΣΡ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΣΡ εὐθεῖα τέμνει τὰς παραλλήλους ΗΦ, ΟΚ, ἡ ἐκτὸς γωνία ΣΥΦ τῇ ἐντὸς γωνίᾳ ΣΡΚ ἴση (85) ἔσται. Διὰ δὲ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς εὐθείας ΛΑ, ΟΚ, ἡ ἐκτὸς γωνία ΣΕΑ τῇ ἐντὸς γωνίᾳ ΣΡΚ ἴση ἐστί. Γωνία ἄρα ἡ ΣΥΦ τῇ ΣΕΑ γωνίᾳ ἴση (50) ἔσται, καὶ διὰ ταῦτα παράλληλοι (94) ἔσονται αἱ ΗΦ, ΛΑ εὐθεῖαι. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΓ'. Θεώρημα.

§. 97. Ἐὰν ἡ ΗΑ εὐθεῖα, τὰς ΚΡ, ΑΕ εὐθείας κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Α τέμνουσα, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ΡΚΑ, ΚΑΕ Σχ. 50.

δύο

Κεφ. γ'. δύω ὀρθῶν ἐλάττους ποιῇ· αἱ Εὐθεῖαι ΚΡ, ΑΕ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύω ὀρθῶν ἐλάττονες γωνίαι.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν αἱ γωνίαι ΡΚΑ, ΚΑΕ δύω ὀρθῶν ἐλάττονες ὑποτίθενται, κατασκευασθήτω ἐπὶ τὸ Α σημεῖον ἡ ΚΑΖ γωνία τοιαύτη, ὥστε μετὰ τῆς ΡΚΑ γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσα δύνασθαι, καὶ ἔσονται παράλληλοι (94) αἱ ΚΡ, ΑΖ εὐθεῖαι. Μετὰ δὲ ταῦτα εἰλήφθω ὥσπερ ἀξίωμα καθ' ἑαυτὸ γνώριμον, τό, μεταξὺ δύω εὐθειῶν ΑΕ, ΑΖ ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλομένων ἀγαγεῖν δυνατὸν εὐθεῖαν τινα τῇ ΑΗ παράλληλον, φέρε τὴν ΛΥ, ἥτις τῆς ΑΚ μείζων ἔστω. ληφθείσης δὲ εἶτα τῆς ΑΦ τῇ ΛΥ ἴσης, ἐπεζεύχθω ἡ ΦΥ εὐθεῖα, ἥτις συμπληροῖ τὸ ΦΥΛΑ παραλληλόγραμμον, τὰς ἀπ' ἐναντίον πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους (ἐκ κατ.) ἔχον· Ἡ ΦΥ ἄρα παράλληλός ἐστι τῇ ΑΛ· Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΚΡ παράλληλος ἐστὶ τῇ ΑΛ, ἄρα καὶ ἡ ΦΥ παράλληλος (96) τῇ ΚΡ ἔσται. Διόπερ ἡ ΚΡ, καὶ παράλληλος τῇ ΦΥ ἐστί, καὶ ἔσω τοῦ τριγώνου ΑΦΥ κεῖται, καὶ ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλομένη, ἐπάναγκές ἐστι τῇ ΑΕ συμπεσεῖν κατὰ τὸ Ο σημεῖον. Εἰ γὰρ μὴ οὕτως εἶχεν, ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ΚΡ ἐκβαλλομένη, ἢ τῇ ἑαυτῇ παραλλήλῳ ΦΥ συνέπιπτεν ἄν, ὅπερ (11) ἄτοπον, ἢ τὴν ΚΑ εὐθεῖαν διέτεμεν, ὅπερ ἀδύνατον. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Σχ. 51. §. 98. Ἐὰν ἄρα δύω εὐθεῖαι ΑΕ, ΗΕ, κατὰ τὸ Ε σημεῖον συμπίπτουσαι, τμηθῶσιν ὁπωσοῦν κατὰ

τὰ

τὰ σημεῖα Φ, καὶ Λ, ἀπὸ δὲ τούτων τῶν σημείων Κεφ. γ'. ἐγερθῶσι κάθετοι (61) αἱ ΦΚ, ΛΣ, αὗται ἐκβληθεῖσαι κατὰ τὸ Ο σημεῖον συμπεσοῦνται. Ἐπεζεύχθω ἡ ΦΛ γραμμή. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΚΦ γωνία ὀρθὴ ὑπετέθη, ἡ ΛΦΚ γωνία ὀρθῆς ἐλάττων ἐστίν. Ἡ ΦΛ ἄρα εὐθεῖα, ἡ τὰς εὐθείας ΦΚ, ΛΣ τέμνουσα, τὰς δύω ἐντὸς γωνίας ΛΦΚ, ΦΛΣ δύω ὀρθῶν ἐλάττους ποιεῖ. Αἱ ΦΚ, ΛΣ ἄρα εὐθεῖαι, ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ Ο σημεῖον (97) συμπεσοῦνται.

Πρότασις ΚΔ'. Πρόβλημα.

§. 99. Τοῦ Δοθέντος κύκλου ΑΕΗ τὸ κέντρον Σχ. 52. εὑρεῖν.

Δεῖξις.

Εἰλήφθωσαν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ δοθέντος κύκλου τρία ὁποιαοῦν σημεῖα, φέρε τὰ, Α, Ε, Η, καὶ ἤχθωσαν αἱ χορδαὶ ΕΑ, ΕΗ, ἐφ' ὧν δίχα, κατὰ τὰ σημεῖα Φ, Λ, (74), τμηθεισῶν, ἐγερθήτωσαν κάθετοι (61) αἱ ΦΟ, ΛΟ εὐθεῖαι, ἀλλήλαις συμπίπτουσαι (98) κατὰ τὸ Ο σημεῖον, ὅπερ ἔσται τὸ ζητούμενον κέντρον. Ἤχθωσαν γὰρ αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΕ, ΟΗ. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΦ, ΦΟ πλευραὶ τοῦ ΑΟΦ τριγώνου ἴσαι (ἐκ κατ.) εἰσὶ ταῖς ΕΦ, ΦΟ πλευραῖς τοῦ ΕΟΦ τριγώνου, ἡ δὲ ὀρθὴ γωνία ΑΦΟ τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ ΕΦΟ ἴση ἐστί, καὶ ἡ ΟΑ πλευρὰ τῇ ΟΕ πλευρᾷ ἴση (71) ἔσται. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον δείξω καὶ τὴν ΟΗ εὐθεῖαν τῇ ΟΕ εὐθείᾳ ἴσην εἶναι. Αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΕ, ΟΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ διὰ ταῦτα τὸ Ο σημεῖον κέντρον (13) ἔσται τοῦ δοθέντος κύκλου ΑΕΗ. Ο. Ε. Π.

Πόρισμα.

§. 100. Καὶ τῦ δοθέντος ἄρα τόξε καὶ τριγώνε τὸ κέντρον ὁμαρῶς ἐκ τύτων θηρεύεται.

Πρότασις ΚΕ'. Θεώρημα.

Σχ. 53. §. 101. Παντὸς τριγώνε ἡ σύναψις τῶν τριῶν γωνιῶν δυσὶν ὀρθαῖς ἴση ἐςί.

Δεῖξις.

Περὶ τὸ ΡΑΚ τρίγωνον κύκλος περιγεγράφθω ὁ ΡΑΚ. Ἐπεὶ ὖν τὸ ἥμισυ τῦ ΡΚ τόξε μέτρον (88) ἐςὶ τῆς Α γωνίας, καὶ τὸ ἥμισυ τῦ ΡΑ τόξε μέτρον ἐςὶ τῆς Κ γωνίας, καὶ τὸ ἥμισυ τῦ ΑΚ τόξε μέτρον ἐςὶ τῆς Ρ γωνίας· πάντως τὸ ἥμισυ πάσης τῆς ΡΑΚ περιφερείας μέτρον ἔςαι τῆς συνάψεως τῶν τριῶν γωνιῶν Ρ, Α, Κ. Ἀλλὰ μὴν τὸ τοιῦτον τόξον δύω ὀρθὰς γωνίας (63) καταμετρεῖ· ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται αἱ Α, Κ, Ρ γωνίαι σύναμα ληφθεῖσαι. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 102. Ἡ σύναψις ἄρα τριῶν γωνιῶν τριγώνε οἱυδήποτε ἴση ἐςὶ τῇ συνάψει τῶν τριῶν γωνιῶν τριγώνε οἱυδήποτε.

Πόρισμα Β'.

§. 103. Ἐὰν ἄρα δύω γωνίαι τριγώνε τινὸς ἴσαι ὦσι δυσὶ γωνίαις τριγώνε τινὸς, καὶ ἡ λοιπὴ γωνία τῇ λοιπῇ γωνίᾳ ἴση ἔςαι.

Πό-

Πόρισμα Γ'.

§. 104. Δύω ἄρα γωνιῶν τριγώνε τινὸς ἐγνωσμένων, καὶ ἡ λοιπὴ ὁμαρῶς γνωσθήσεται.

Πόρισμα Δ'.

§. 105. Καὶ ἐὰν τριγώνε τινὸς ἡ μία γωνία ὀρθὴ, ἢ ἀμβλεῖα ᾖ, αἱ λοιπαὶ δύω γωνίαι ὀξεῖαι ἔσονται.

Πόρισμα Ε'.

§. 106. Τελευταῖον δὲ, ἐὰν τριγώνε τινὸς ἡ μία γωνία ὀρθὴ ᾖ, τὸ ἄθροισμα τῶν δύω λοιπῶν γωνιῶν ὀρθῇ γωνίᾳ ἴσον ἐςί.

Σχόλιον.

§. 107. Ἐκ τῦ τρίτε πορίσματος ταύτης τῆς προτάσεως τὴν τῆς γῆς περίμετρον ὁ ἐν Γεωμέτραις ἄριςος Κεπλέρος εὐμεθόδως τε καὶ ἐπιτηδείως συνήγε. Σχ. 54.

Παριςάτω τοίνυν ὁ μὲν ΔΗΖ κύκλος, ὖ κέντρον τὸ Α, τὴν ὑδρόγειον σφαῖραν, τὰ δὲ Κ, Β σημεῖα δύω ὑψωμάτων τὰς κορυφὰς ἱκανῶς ἀλλήλων διϊςαμένας, τὸ δὲ ΔΗ τόξον τὸ ἐμπεριλαμβανόμενον διάςημα ὑπὸ τῶν ὑψωμάτων ΚΔ, ΒΗ, ὅπερ μέτρῳ τινὶ γεωμετρικῷ γνωςὸν γινέσθω. Εἶτα παρατηρηθήτωσαν αἱ ΚΒΑ, ΒΚΑ γωνίαι, αἱ περιεχόμεναι ὑπό τε τῆς ὀπτικῆς ἀκτῖνος ΚΒ, καὶ τῶν σπαρτίων, ΒΗ, ΚΔ, ἅπερ πρὸς τὸ τῆς γῆς κέντρον Α ςαθερῶς κατατείνει, καὶ ἀφαιρεθείσης τῶν δύω ἐγνωσμένων γωνιῶν τῆς συνάψεως ἀπὸ τῶν ἑκα-

τὸν

Κεφ. γ'. τῶν ὀγδοήκοντα μοιρῶν, γνωστὴ καταλειφθήσεται (104) ἡ ΒΑΚ γωνία, ἥτις ὅσων οὖν μοιρῶν καὶ λεπτῶν εὑρεθῇ τοσούτων ἔσαι (62) καὶ τὸ ΛΗ τόξον, οὗ γ' ἐγνωσμένου καὶ ὅλη ἡ τῆς γῆς περίμετρος ῥᾷστα γνωσθήσεται. Εἰς σαφεστέραν δὲ τῶν εἰρημένων κατάληψιν, φέρε δὴ τοῦτο αὐτὸ τοῦ Κεπλέρου παράδειγμα εἰς μέσον ἀγάγωμεν. Ἔστω οὖν τὸ ΒΗ τὸ τοῦ Κεπλέρου Ὄρος, ἐν ᾧ ἡ παρατήρησις ἐγένετο, ἡ δὲ ΚΛ Ἀκρόπολίς τις, τὸ δὲ ΛΗ τόξον τὸ τούτων διάστημα, ὅπερ πέντε μιλίων Γερμανικῶν περιεκτικὸν εὑρέθη. Ἔτι δ' εὑρέθη ἡ μὲν γωνία ΒΚΑ εἶναι μοιρῶν 89, λεπτῶν 46, ἡ δὲ ΚΒΑ γωνία μοιρῶν 89, λεπτῶν 55, ἡ ΚΑΒ ἄρα γωνία λεπτῶν 19 (104) ἔσαι, καὶ διὰ ταῦτα τὸ ΛΗ τόξον 19 λεπτῶν περιεκτικόν ἐστι. Ἐὰν οὖν τὸ ΛΗ τόξον λεπτῶν 19, 5 μιλίων Γερμανικῶν ἐστι, πάντως ἡ τῆς γῆς περίμετρος, ἥτις περιεκτική ἐστι λεπτῶν 21600, ἔσαι μιλίων Γερμανικῶν 5684, ἤτοι Ἰταλικῶν 22736. Ἀκριβέστερον ὅμως καὶ ἀστρονομικώτερον ἡ τῆς Γῆς περίμετρος περιεκτικὴ εὑρέθη μιλίων Ἰταλικῶν 24649 καὶ βημάτων 940.

Πρότασις Κϛ'. Θεώρημα.

Σχ. 55. §. 108. Παντὸς τριγώνου ΑΚΦ μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, φέρε τῆς ΑΦ, κατὰ τὸ Η σημεῖον, ἡ ἐκτὸς γωνία ΚΦΗ ταῖς δυσὶν ἐντὸς γωνίαις Α, Κ συνάμα ληφθείσαις ἴση ἐστί.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ ἡ ΚΦ εὐθεῖα ἐφίσαται τῇ ΑΗ εὐθείᾳ, αἱ γωνίαι ΚΦΗ, ΚΦΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι (67) εἰσιν. Ἀλλὰ μὴν ἡ σύναψις τῶν τριῶν γωνιῶν

Α, Κ, Φ

Α, Κ, Φ δυσὶν ὀρθαῖς ἴση (101) ἐστὶν, ἄρα καὶ ἡ σύναψις τῶν δύω γωνιῶν ΚΦΗ, ΚΦΑ ἴση (50) ἐσὶ τῇ συνάψει τῶν τριῶν γωνιῶν Α, Κ, Φ. κοινῆ δ' ἀφαιρεθείσης τῆς ΚΦΑ γωνίας, ἡ ΚΦΗ γωνία ἴση (43) καταλειφθήσεται τῇ συνάψει τῶν δύω γωνιῶν Α, Κ. Ο. Ε. Δ. Κεφ. γ'.

Πόρισμα.

§. 109. Ἡ ἐκτὸς ἄρα γωνία ΚΦΗ μείζων ἔσαι πάσης ἄλλης ἐντὸς γωνίας Α, ἢ Κ. Σχ. 55.

Πρότασις ΚΖ'. Θεώρημα.

§. 110. Ἐὰν δύω τρίγωνα ΑΦΚ, ΣΟΗ τὰς δύω γωνίας Α, Κ ταῖς δυσὶ γωνίαις Σ, Η ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὰς πρὸς τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ΑΚ, ΣΗ ἀλλήλαις ἴσας· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ἴσας ἀλλήλαις ἕξει, καὶ ὅλα τὰ τρίγωνα ἴσα ἔσαι. Σχ. 56.

Δεῖξις.

Ἔστωσαν, εἰ δυνατὸν, ἄνισοι αἱ ΑΦ, ΣΟ πλευραὶ, ἀπὸ δὲ τῆς μείζονος ΑΦ, ἀφαιρεθείσης τῆς ΑΡ τῇ ΣΟ ἴσης, ἐπεζεύχθω ἡ ΚΡ. Ἐπεὶ οὖν αἱ πλευραὶ ΡΑ, ΑΚ τριγώνου τοῦ ΑΡΚ ἴσαι εἰσιν (ἐκ κατ. καὶ ὑπ.) ταῖς πλευραῖς ΟΣ, ΣΗ τοῦ ΣΟΗ τριγώνου, ἡ δὲ Α γωνία τῇ Σ γωνίᾳ ἴση (ἐξ ὑπ.) ἐσί· πάντως τὰ τρίγωνα ΑΡΚ, ΣΟΗ ἴσα (71) ἀλλήλοις ἔσαι, ἡ δὲ ΡΚΑ γωνία τῇ ΟΗΣ γωνίᾳ ἴση ἔσαι· Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ γωνία ΦΚΑ ἴση (ἐξ ὑπ.) ἐσὶ τῇ ΟΗΣ γωνίᾳ· ἄρα καὶ ἡ ΡΚΑ γωνία τῇ γωνίᾳ ΦΚΑ

ἴση

Κεφ. γ'. ἴση ἔσαι μέρει τὸ ὅλον· ὅπερ ἄτοπον. Οὐκ ἄρα ἄνισοι ἀλλ' ἴσαι ἔσονται αἱ πλευραὶ ΑΦ, ΣΟ. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον ἴσαι δειχθήσονται καὶ αἱ πλευραὶ ΦΚ, ΟΗ, ἴσαι δὲ εἰσιν (ἐξ ὑπ.) καὶ αἱ ΑΚ, ΣΗ πλευραί. Τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΦΚ, ΣΟΗ ἴσα (58) ἀλλήλοις ἐςίν. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Σχ. 57. §. 111. Ἐὰν ἄρα διά τινος σημείου Φ τῆς διαμέτρου τοῦ παραλληλογράμμου ΣΟΑΚ διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες αἱ ΕΥ, ΡΓ παράλληλοι ταῖς ΟΑ, ΑΚ εὐθείαις, τὸ ΟΡΦΕ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐςὶ τῷ ΦΥΚΓ παραλληλογράμμῳ. Τὸ γὰρ τρίγωνον ΣΟΑ ἴσον (110) ἐςὶ τῷ ΣΚΑ τριγώνῳ· Τὸ δὲ ΣΕΦ τρίγωνον ἴσον (110) ἐςὶ τῷ ΣΓΦ τριγώνῳ, ἔτι δὲ καὶ τὸ ΦΡΑ τρίγωνον ἴσον (110) ἐςὶ τῷ ΦΥΑ τριγώνῳ· Τὸ ἐναπολειφθὲν ἄρα ΟΡΦΕ παραλληλόγραμμον ἴσον (43) ἔσαι τῷ ἐναπολειφθέντι παραλληλογράμμῳ ΦΥΚΓ.

Σχόλιον.

Σχ. 58. §. 112. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἰρημένων οἱ περὶ τὰ τοιαῦτα ἐνασχολούμενοι τὴν ἄβατον διάςασιν μετρεῖν μεμαθήκασιν. Ἔςω τοίνυν ἐπὶ τοῦ παρόντος μετρῆσαι τὴν ἄβατον διάςασιν ΑΕ, ποταμοῦ φέρε, ἢ ἄλλου τοῦ Αὔλακος τὸ πλάτος παριςῶσαν. Σταθήτω ὁ παρατηρητὴς ΑΒ κατὰ τὸ Α σημεῖον, πῖλον, ἢ ἄλλο τοιοῦτον κάλυμμα ἐπὶ κεφαλῆς ἔχων, ὃς τοιαύτην κατὰ θέσιν φυλάττειν, ὥστε, τοῦ ὀφθαλμοῦ κατὰ τὸ Β σημεῖον ἀκινήτου μένοντος, ὀρθὴν εἶναι τὴν ΒΑΕ γωνίαν. Εἶτα τὸν πῖλον πρὸς τὰ ἄνω, ἢ κάτω φερέτω, ἄχρις οὗ ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶν τοῦ πίλου ἐφα-

ἐφα-

ἐφαπτομένη ἐπὶ τὸ Ε σημεῖον ἐπιπέσῃ. Τούτων δ' Κεφ. γ'. οὖν ἐντελεσθέντων, ἀσόχως ςραφήτω ὁ Γεωμέτρης κατὰ τὸ Σ σημεῖον, καὶ παρατηρηθέντος τοῦ Φ σημείου, ἔνθα ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶν ΒΦ ἐπιπίπτει, μετρηθήτω ἡ ΑΦ εὐθεῖα, ἥτις δώσει σοι τὴν ζητουμένην ἄβατον διάςασιν ΑΕ. Ἐν γὰρ τοῖς τριγώνοις ΒΑΕ, ΒΑΦ, ἴσαι (ἐκ κατ.) εἰσὶν αἱ γωνίαι ΕΒΑ, ΦΒΑ, ἔτι δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΒΑΕ, ΒΑΦ ἴσαι εἰσίν, ἡ δὲ ΒΑ πλευρὰ κοινή, ἄρα ἡ ΑΕ πλευρὰ τῇ ΑΦ πλευρᾷ ἴση (110) ἔσαι. μετρηθείσης δ' οὖν τῆς ΑΦ διαςάσεως, γνωσθήσεται ἡ ἄβατος διάςασις ΑΕ. Ὅσων γὰρ ποδῶν περιεκτική ἐςιν ἡ ΦΑ, τοσούτων ἔσαι καὶ ἡ ΑΕ διάςασις.

Πρότασις ΚΗ'. Θεώρημα.

§. 113. Ἐν παντὶ τριγώνῳ ΡΑΚ, ἐὰν ἡ ΑΚ πλευρὰ Σχ. 59. τῆς ΑΡ πλευρᾶς μείζων ᾖ, καὶ ἡ Ρ γωνία τῆς Κ γωνίας μείζων ἔσαι· Καὶ ἀνάπαλιν. Ἐὰν ἡ Ρ γωνία τῆς Κ γωνίας μείζων ᾖ, καὶ ἡ ΑΚ πλευρὰ τῆς ΑΡ πλευρᾶς μείζων ἔσαι.

Δεῖξις.

Α'. Περὶ τὸ ΡΑΚ τρίγωνον κύκλος (100) περιγεγράφθω ὁ ΡΑΚ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ πλευρὰ τῆς ΑΡ πλευρᾶς μείζων ἐςί, καὶ τὸ ΑΚ τόξον τοῦ ΑΡ τόξου μεῖζον (73) ἔσαι. Ἡ Ρ ἄρα γωνία μείζων (70) ἐςὶ τῆς Κ γωνίας. Ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Β'. Ἐπεὶ οὖν ἡ Ρ γωνία τῆς Κ γωνίας μείζων (ἐξ ὑπ.) ἐςί, καὶ τὸ ΑΚ τόξον τοῦ ΑΡ τόξου μεῖζον (88) ἔσαι· ἄρα καὶ ἡ ΑΚ χορδὴ τῆς ΑΡ χορ-

χορ-

Κεφ. γ'. χορδῆς μείζων (70) ἔσαι. Διὰ δὲ ταῦτα καὶ ἡ ΑΚ πλευρὰ τῆς ΑΡ πλευρᾶς μείζων ἐστίν. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΘ'. Θεώρημα.

Σχ. 53. §. 114. Ἐὰν ἐν τῷ τριγώνῳ ΡΑΚ, ἡ ΑΚ πλευρὰ τῇ ΑΡ πλευρᾷ ἴση ᾖ, καὶ ἡ Ρ γωνία τῇ Κ γωνίᾳ ἴση ἔσαι· Καὶ ἀνάπαλιν. Ἐὰν ἡ Ρ γωνία τῇ Κ γωνίᾳ ἴση ᾖ, καὶ ἡ ΑΚ πλευρὰ τῇ ΑΡ πλευρᾷ ἴση ἔσαι.

Δεῖξις.

Α'. Περὶ τὸ τρίγωνον ΡΑΚ κύκλος (100) περιγεγράφθω ὁ ΡΚΑ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ πλευρὰ τῇ ΑΡ πλευρᾷ ἴση ὑποτίθεται, καὶ τὸ ΑΚ τόξον τῷ ΑΡ τόξῳ ἴσόν (57) ἐστι. διὰ δὴ ταῦτα ἡ Ρ γωνία τῇ Κ γωνίᾳ ἴση (88) ἔσαι. Ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Β'. Ἐπεὶ οὖν ἡ Ρ γωνία τῇ Κ γωνίᾳ ἴση ὑπετέθη, καὶ τὸ ΑΚ τόξον τῷ ΑΡ τόξῳ ἴσόν (88) ἐστιν. ἡ ΑΚ ἄρα πλευρὰ τῇ ΑΡ πλευρᾷ ἴση (72) ἐστίν. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Σχ. 60. §. 115. Ἐκ τούτου συνάγεται τὴν ΑΦ πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑΦΥΣΚΤ ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου ἴσην εἶναι τῇ ἡμιδιαμέτρῳ ΑΟ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΦ τόξον ἑκτημόριόν ἐστιν (ἐξ ὑπ.) περιφερείας, τουτέστι μοιρῶν ἑξήκοντα, καὶ ἡ γωνία ΦΟΑ μοιρῶν ἑξήκοντα (62) ἔσαι. Ἀλλ' ἡ σύναψις τῶν τριῶν γωνιῶν Ο, Φ, Α μοιρῶν ἑκατὸν καὶ ὀγδοήκοντά (101) ἐστιν. ἄρα ἡ σύναψις τῶν δύω γωνιῶν Φ, Α μοιρῶν ἑκατὸν καὶ εἴκοσι ἔσαι. Ἐπεὶ δὲ ἡ ΟΦ πλευρὰ τῇ ΟΑ πλευρᾷ ἴση ἐστίν, ἡ Φ γωνία τῇ Α γωνίᾳ ἴση (114) ἔσαι. ἑκατέρα ἄρα μοιρῶν ἑξήκοντά ἐστι. διὸ καὶ ἰσογώνιον καὶ ἰσόπλευρόν (114) ἐστι τὸ τρίγωνον ΦΟΑ. τοῦ ἑξαγώνου ἄρα ἡ ΑΦ πλευρὰ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ ΟΑ ἴση ἔσαι.

Κεφ. γ'.

Σχόλιον.

§. 116. Ἐκ ταύτης τῆς προτάσεως Γεωμετρῶν παῖδες παντὸς πύργου, ἢ Ὄρους, ἢ ἄλλου οἱουδήποτε ὑψώματος τὸ ὕψος θηρεύειν μεμαθήκασιν. Ἔσω τοίνυν ἐπὶ τοῦ παρόντος τοῦ ΒΑ Κωδονοσασίου τὸ ὕψος θηρεῦσαι. Εἰλήφθω ῥάβδος τὶς ἡ ΔΕ τοσαύτη τὸ μῆκος, ὥστε, πρὸς ὀρθὰς τῇ γῇ ἐμπηχθεῖσα, ἴση εἶναι τῷ ὕψει τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ παρατηρητοῦ, τουτέστι τὸ ἄκρον τῆς ῥάβδου καὶ ὁ τοῦ παρατηρητοῦ ὀφθαλμὸς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μένειν. Εἶτα ὁ παρατηρῶν καταβαλλέτω ἑαυτὸν ὕπτιον ἐπὶ τοῦ ΑΔ ἐπιπέδου, ὥστε, τοὺς μὲν πόδας πρὸς τὴν βάσιν Δ τῆς ῥάβδου, τὴν δὲ κεφαλὴν κατὰ τὸ Κ σημεῖον ἔχων, τὰ σημεῖα Κ, Ε, Β ἐπὶ τῆς αὐτῆς εἶναι εὐθείας. Μετὰ δὲ ταῦτα μετρηθήτω ἡ ΑΚ γραμμὴ, τουτέστιν ἡ διάσασις τοῦ ὀφθαλμοῦ ἀπὸ τῆς τοῦ Κωδονοσασίου βάσεως, ἥτις παρασατική ἐστι τοῦ ὕψους τοῦ Κωδονοσασίου ΒΑ. Ἐν γὰρ τῷ τριγώνῳ ΕΔΚ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι (ἐκ κατ.) τὰς πλευρὰς ΕΔ, ΔΚ, καὶ ὀρθὴν τὴν ΕΔΚ γωνίαν, ἡ ΔΚΕ γωνία ἡμιορθή (106) ἐστι, τουτέστι μοιρῶν τεσσαράκοντα καὶ πέντε. Ἀλλὰ μὴν ἡ ΔΚΕ γωνία ἡ αὐτή ἐστι τῇ ΑΚΒ γωνίᾳ, ἄρα καὶ ἡ ΑΚΒ γωνία ἡμιορθή ἐστιν. Ὀρθὴ δέ ἐστι καὶ ἡ ΒΑΚ γωνία, ἄρα ἡ ΑΒΚ γωνία ἡμιορθὴ (106) ἔσαι Σχ. 61.

Κεφ. γ'. ἔσαι. Διὰ δὲ ταῦτα ἡ ΑΚΒ γωνία τῇ ΑΒΚ γωνίᾳ ἴση ἐστὶ, καὶ ἡ ΑΚ πλευρὰ τῇ ΑΒ πλευρᾷ ἴση (114) ἐστί. Γνωστῆς δὲ, μέτρῳ τινὶ, γενομένης τῆς ΑΚ διαστάσεως γνωσθήσεται καὶ ἡ ΑΒ πλευρὰ, ἤτοι τὸ ὕψος τοῦ ΑΒ Κωδωνοστασίου.

Πρότασις Λ'. Θεώρημα.

Σχ. 62. §. 117. Ἐν παντὶ Ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ ΡΑΚ, ἐὰν ἀπὸ τῆς κατὰ κορυφὴν γωνίας Α ἡ ΑΗ εὐθεῖα κάθετος ἐπιζευχθῇ τῇ βάσει ΡΚ, αὕτη δίχα τὴν βάσιν κατὰ τὸ Η σημεῖον τεμεῖ.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΡ πλευρὰ ἴση (ἐξ ὑπ.) ἐστὶ τῇ ΑΚ πλευρᾷ, καὶ ἡ ΑΡΗ γωνία τῇ ΑΚΗ γωνίᾳ ἴση (114) ἔσαι. Ἄρα ἐν τοῖς τριγώνοις ΡΑΗ, ΚΑΗ, αἱ γωνίαι Ρ, Η ἴσαι εἰσὶ ταῖς γωνίαις Κ, Η ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. Ἐπεὶ δὲ καὶ αἱ πλευραὶ ΑΡ, ΑΚ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ ΡΗ πλευρὰ ἴση (110) ἔσαι τῇ ΚΗ πλευρᾷ, τουτέστι δίχα ἡ βάσις ἐτμήθη. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Σχ. 34. §. 118. Ἐὰν ἄρα ἐν τῷ κύκλῳ ΦΑΕ ἀπὸ τοῦ Κ κέντρου ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΕ ἀχθῇ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΚΓ εὐθεῖα, αὕτη δίχα κατὰ τὸ Γ τεμεῖ τὴν ΑΕ χορδήν. Κατασκευασθέντος γὰρ τοῦ Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΚΕ, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Κ σημεῖον, βάσις δὲ ἡ ΑΕ εὐθεῖα, ἡ ΚΓ κάθετος δίχα (117) τὴν χορδὴν κατὰ τὸ Γ σημεῖον τεμεῖ.

ΚΕ-

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΠΕΡΙ ἘΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑΣ.

Πρότασις ΛΑ'. Θεώρημα.

§. 119. Παντὸς ὀρθογωνίου ΚΑΙΗ τὸ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς ΚΗ βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος ΚΑ. Σχ. 63.

Δεῖξις.

Ἀπὸ τοῦ Υ σημείου ἤχθω ἡ ΥΡ τῇ ΑΚ παράλληλος, ἀπὸ δὲ τῶν Φ, Σ σημείων ἤχθωσαν αἱ ΦΛ, ΣΟ εὐθεῖαι τῇ ΚΗ παράλληλοι, καὶ διαιρεθήσεται ὅλον τὸ ὀρθογώνιον εἰς τετραγωνικὰς πόδας. Τούτων οὖν τῶν τετραγωνικῶν ποδῶν αἱ σειραί εἰσι τρεῖς ΑΛ, ΦΟ, ΣΗ ὅσων δηλ. ποδῶν περιεκτικόν ἐστι τὸ ΚΑ ὕψος, ἐν ἑκάστῃ δὲ σειρᾷ εἰσι πόδες δύω, ὅσους δηλ. περιέχει ἡ ΚΗ βάσις. Ἐν τῷ Ὀρθογωνίῳ ἄρα ΚΑΙΗ ἓξ πόδες τετράγωνοι περιέχονται, ὅπερ ἐστὶ τὸ γενόμενον ἐκ τοῦ δύω ἐπὶ τὸν τρία ἀριθμὸν, τουτέστιν ἐκ τῆς βάσεως

ἐπὶ

Κεφ. δ'. ἐπὶ τὸ ὕψος. Τὸ ἐμβαδὸν ἄρα παντὸς ὀρθογωνίου ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Σχ. 64. §. 120. Ἐπεὶ δὲ πᾶν τετράγωνόν ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, καὶ τοῦ τετραγώνου ἄρα ΚΑΙΗ τὸ ἐμβαδὸν ἴσον (119) ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΚΗ ἐπὶ τὸ ΚΑ ὕψος, ἢ τῷ γινομένῳ ἐκ μιᾶς τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἐφ' ἑαυτὴν ἀχθείσης.

Πρότασις ΛΒ'. Θεώρημα.

Σχ. 65. §. 121. Παντὸς τριγώνου ΦΑΗ τὸ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΦΗ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΟ ὕψους.

Δεῖξις.

Προσγεγράφθωσαν τὰ ΑΟΗΕ, ΑΟΦΣ ὀρθογώνια. Ἐπεὶ δὲ τὸ ΑΟΗ τρίγωνον ἥμισύ (110) ἐστι τοῦ ὀρθογωνίου ΑΟΗΕ, ὁμοίως δὲ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΟΦ ἥμισύ (110) ἐστι τοῦ ΑΟΦΣ ὀρθογωνίου, τὸ ΦΑΗ ἄρα τρίγωνον ἥμισυ ἔσται τοῦ ὀρθογωνίου ΣΕΗΦ. Ἀλλὰ μὴν τοῦ ὀρθογωνίου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον (119) ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΦΗ ἐπὶ τὸ ΣΦ ὕψος, ἄρα τοῦ τριγώνου ΦΑΗ τὸ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΦΗ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ΑΟ. Ο. Ε. Δ.

Πό-

Πόρισμα Α'.

§. 122. Τὰ ἰσοϋψῆ ἄρα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΕΔ, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΔ ὄντα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἑκατέρου γὰρ τὸ ἐμβαδὸν ἴσον (121) ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΑΔ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ΓΒ. Σχ. 66.

Πόρισμα Β'.

§. 123. Ἔτι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΕΔ, τὰ μεταξὺ δύω παραλλήλων ΒΕ, ΑΔ, καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΔ ὄντα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Διὰ γὰρ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ΒΕ, ΑΔ εὐθείας, τὰ τῶν τριγώνων ὕψη ΒΓ, ΕΦ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί, ταῦτ' ἄρα τὰ τρίγωνα ἴσα (122) ἀλλήλοις ἔσται. Σχ. 66.

Πρότασις ΛΓ'. Θεώρημα.

§. 124. Παντὸς παραλληλογράμμου ΦΑΡΗ τὸ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΦΗ ἐπὶ τὸ ΑΟ ὕψος. Σχ. 67.

Δεῖξις.

Ἤχθω ἡ ΑΗ διαγώνιος, ἥτις τὸ παραλληλόγραμμον εἰς δύω ἴσα τρίγωνα (110) τεμεῖ. Ἀλλὰ μὴν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΦΑΗ τριγώνου ἴσον (121) ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ΦΗ βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΟ ὕψους, ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΦΑΡΗ παραλληλογράμμου (ὅπερ διπλάσιόν ἐστι τοῦ τριγώνου) ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ΦΗ βάσεως ἐφ' ὅλον τὸ ΑΟ ὕψος. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

Σχ. 68. §. 125. Τὰ παραλληλόγραμμα ἄρα ΑΒΚΔ, ΔΚΦΓ, τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ΑΔ, ΔΓ ὄντα, καὶ ἴσα ὕψη ἔχοντα τὰ ΒΕ, ΚΗ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Τὸ γὰρ γινόμενον ἐκ τῆς ΑΔ ἐπὶ τὴν ΒΕ ἴσον (124) ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ΔΓ ἐπὶ τὴν ΚΗ. Ταῦτ' ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΚΔ, ΔΚΦΓ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Πόρισμα Β'.

Σχ. 69. §. 126. Ἔτι δὲ ἐὰν τὸ ΦΑΗ τρίγωνον διπλῆν ἔχῃ βάσιν τῆς βάσεως τοῦ ἰσοϋψοῦς παραλληλογράμμου ΦΑΛΣ, τὸ τρίγωνον τῷ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστί. Τοῦ μὲν γὰρ παραλληλογράμμου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον (124) ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ΣΦ βάσεως ἐπὶ τὸ ΑΟ ὕψος, τοῦ δὲ τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον (121) ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὕψους ΑΟ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως ΦΗ, ἤτοι ἐπὶ τὴν ΣΦ βάσιν.

Πρότασις ΛΔ'. Θεώρημα.

Σχ. 70. §. 127. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΕΣΚ, οὗ αἱ ἀπ' ἐναντίον πλευραὶ ΕΣ, ΑΚ παράλληλοί εἰσιν, ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ἡμισείας τῆς συνάψεως τῶν παραλλήλων πλευρῶν ΕΣ, ΑΚ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΕΒ, κάθετον τῇ ΑΚ ἀχθεῖσαν.

Δεῖ-

Δεῖξις.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου τῇ ΕΣ εὐθείᾳ κάθετος ἡ ΚΟ, ἥτις κάθετος (83) ἔσται καὶ τῇ ΑΚ. διόπερ καὶ τῇ ΕΒ ἴση ἐστί, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΚ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΕΚ τριγώνου ἴσον (121) ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τοῦ ΕΒ ὕψους ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς ΑΚ βάσεως. Ἔτι δὲ καὶ τοῦ τριγώνου ΕΚΣ τὸ ἐμβαδὸν ἴσον (121) ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τοῦ ΚΟ ὕψους ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς ΕΣ βάσεως. Ἀλλὰ μὴν τὰ δύο τρίγωνα ΑΕΚ, ΕΚΣ τὸ τραπέζιον συνιστῶσι. Καὶ τοῦ τραπεζίου ἄρα τὸ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ἡμισείας τῆς συνάψεως τῶν παραλλήλων πλευρῶν ΑΚ, ΕΣ ἐπὶ τὸ ΕΒ ὕψος. Ο. Ε. Δ.

Σχόλιον.

§. 128. Ἐκ ταύτης τῆς προτάσεως οἱουδήποτε ἀγροῦ, ἤτοι βατοῦ, ἢ ἀβάτου τὸ ἐμβαδὸν θηρεύειν μεμαθήκαμεν. Σχ. 71. Ἔστω οὖν πρῶτον θηρεῦσαι τὸ ἐμβαδὸν βατοῦ ἀγροῦ τοῦ ΑΜΒΚΕΤ. Διαιρεθέντος τοῦ ἀγροῦ εἰς ὁσαοῦν τρίγωνα τὰ Ξ, Ψ, Ζ, Χ, καὶ εὑρεθέντος ἑκάστου τῶν τριγώνων (121) τὸ ἐμβαδὸν, ἔσται σοι τὸ ποθούμενον· τῶν γὰρ εὑρεθέντων τριγωνικῶν ἐμβαδῶν ἡ σύναψις τοῦ ἀγροῦ τὸ ἐμβαδὸν παρίστησιν.

Ἔστω δ' εἶτα Ἀβάτου ἀγροῦ τὸ ἐμβαδὸν ΑΒΚΔΕ Σχ. 72. ἐξιχνεῦσαι. Περιγεγράφθω περὶ τὸν ἀγρὸν Ὀρθογώνιον τὸ ΜΙΝΛ, οὗ ἡ ὑπεροχὴ, ᾗ ὑπερέχει τὸν ἄβατον ἀγρὸν διαιρεθήτω εἰς ὁσαοῦν τρίγωνα. Εὑρεθήτω δέ σοι τοῦ Ὀρθογωνίου (119), καὶ τῶν τριγώνων (121) τὸ ἐμβαδὸν, τῆς δέγε συνάψεως

 τῶν

Κεφ. δ'. τῶν τριγωνικῶν ἐμβαδῶν ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὅλου Ὀρθογωνίου, τὸ ἐναπολειφθὲν τοῦ ἀβάτου ἀγροῦ τοῦ ἐμβαδοῦ παραστατικόν ἐστι.

Πρότασις ΛΕ'. Θεώρημα.

Σχ. 73. §. 129. Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς πολυγώνου περὶ κύκλον περιγεγραμμένου ΑΦΥΣΚ ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς συνάψεως πασῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν.

Δεῖξις.

Ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Ο κέντρου πρὸς πάσας τοῦ πολυγώνου γωνίας εὐθεῖαι αἱ ΟΦ, ΘΥ, ΟΣ, ΟΚ, ΟΑ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν πρὸς τὰ τῶν ἐπαφῶν σημεῖα ἡμιδιάμετροι αἱ ΟΛ, ΟΜ, ΟΤ, ΟΖ, ΟΡ, αἵτινες, κάθετοι (82) ἔσαι ταῖς πλευραῖς, τὰ ὕψη παριστῶσι τῶν τριγώνων, ὧν ἑκάστου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον (121) ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ΘΛ ἡμιδιαμέτρου ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς τοῦ πολυγώνου πλευρᾶς. Ἀλλ' ἡ σύναψις πάντων τῶν τριγωνικῶν ἐμβαδῶν τοῦ πολυγώνου τὸ ἐμβαδὸν συνίστησιν, ἄρα καὶ τοῦ πολυγώνου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ἡμιδιαμέτρου ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς συνάψεως τῶν ἰδίων πλευρῶν. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Λϛ'. Λῆμμα.

Σχ. 74. §. 130. Κύκλον ἐγγράψαι εἰς τὸ δοθὲν κανονικὸν πολύγωνον ΑΦΥΣΧ.

Δεῖξις.

Τῶν γωνιῶν Α, Χ δίχα τμηθησῶν ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΟ, ΧΟ κατὰ τὸ Ο σημεῖον συμπιπτουσῶν, ἤχθω τῇ ΑΧ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΟΡ. Καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ο, διαστήματι δὲ τῷ ΟΡ κύκλος γεγράφθω ὁ ΡΛΚΤΖ, ὅστις ἐγγραφήσεται περὶ τὸ δοθὲν πολύγωνον. Ἀπὸ γὰρ τῶν γωνιῶν Φ, Υ, Σ ἤχθωσαν πρὸς τὸ Ο σημεῖον εὐθεῖαι αἱ ΦΟ, ΥΟ, ΣΟ: Ἐπεὶ οὖν αἱ ΧΑ, ΑΟ πλευραὶ τοῦ ΑΟΧ τριγώνου ἴσαι εἰσὶ ταῖς πλευραῖς ΦΑ, ΑΟ τοῦ ΦΟΑ τριγώνου, ἡ δὲ ΧΑΟ γωνία τῇ ΦΑΟ γωνίᾳ ἴση (ἐκ κατ.) ἐστὶ, καὶ ἡ ΑΧΟ γωνία τῇ ΑΦΟ γωνίᾳ ἴση (71) ἔσαι· ἴσαι δέ εἰσιν (ἐξ ὑπ.) καὶ ὅλαι αἱ γωνίαι ΑΧΣ, ΑΦΥ, ἄρα, ἐπεὶ ἡ ΑΧΟ γωνία ἡμίσειά ἐστι τῆς ΑΧΣ γωνίας, καὶ ἡ γωνία ΑΦΟ ἡμίσεια ἔσαι τῆς ΑΦΥ λοιπῆς γωνίας, ἣν δίχα τέμνει ἡ ΟΦ εὐθεῖα. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον δείξω καὶ τὰς εὐθείας ΟΥ, ΟΣ δίχα τέμνειν τὰς λοιπὰς τοῦ πολυγώνου γωνίας Υ, Σ. Μετὰ δὲ ταῦτα διήχθωσαν ἀπὸ τοῦ Ο κέντρου πρὸς τὰς πλευρὰς κάθετοι αἱ ΟΛ, ΟΚ, ΟΤ, ΟΖ. Ἐπεὶ οὖν τὰ τρίγωνα ΟΡΑ, ΟΛΑ οὐ μόνον τὰς Ρ, Α γωνίας ἴσας (ἐκ κατ.) ἔχει ταῖς γωνίαις Λ, Α, ἀλλὰ καὶ κοινὴν πλευρὰν τὴν ΑΟ, ἄρα καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ΟΡ, ΟΛ ἴσας (110) ἀλλήλαις ἕξει. Ὁμοίως δὲ δειχθήσονται ἴσαι καὶ αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι ΟΛ, ΟΚ, ΟΤ, ΟΖ: Κύκλος ἄρα ὁ τῇ ΟΡ ἡμιδιαμέτρῳ γραφεὶς διελεύσεται καὶ διὰ τῶν σημείων Λ, Κ, Τ, Ζ. Ἐπεὶ δὲ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ὀρθαὶ κατεσκευάσθησαν κατὰ τὰ σημεῖα Λ, Κ, Τ, Ζ, πάντως ὁ κύκλος

Κεφ. δ'. πασῶν τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν (81) ἐφάπτεται, καὶ διὰ ταῦτα ἐνεγράφη (31) εἰς τὸ πολύγωνον. Ο. Ε. Π.

Πόρισμα.

Σχ. 74. §. 131. Κύκλος ἄρα ὁ τῇ ΟΑ ἡμιδιαμέτρῳ γραφεὶς περὶ τὸ πολύγωνον ΦΥΣΧΑ περιγραφήσεται. Ἐπεὶ γὰρ αἱ Α, Φ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ αἱ τούτων ἡμίσειαι ΟΑΦ, ΟΦΑ ἴσαι ἔσονται. Ταῦτ' ἄρα καὶ ἡ ΟΦ εὐθεῖα τῇ ΟΑ εὐθείᾳ ἴση (110) ἔσται. ὁμοίως δὲ καὶ τῇ ΟΑ ἴσαι δειχθήσονται αἱ ΟΥ, ΟΣ, ΟΧ εὐθεῖαι. διὰ δὲ ταῦτα κύκλος ὁ τῇ ΟΑ ἡμιδιαμέτρῳ γραφεὶς πασῶν τοῦ πολυγώνου γωνιῶν ἐφάπτεται, τουτέστι περὶ τὸ πολύγωνον (31) περιγράφεται.

Πρότασις ΛΖ'. Θεώρημα.

Σχ. 75. §. 132. Παντὸς κύκλου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ἡμιδιαμέτρου ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς ἰδίας περιφερείας.

Δεῖξις.

Ἔστω περὶ κύκλον περιγεγραμμένον κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΑΦΛΨΤ, ὅπερ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μεῖζόν ἐστιν. Ἐὰν δὲ περὶ τὸν κύκλον περιγραφῇ ἄλλο πολύγωνον τὸ ΚΕΝΙΟΠΡΣΥΧ ὑπὸ πλειόνων πλευρῶν συγκροτούμενον, τοῦτο ἧττον τοῦ πρώτου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ὑπερέχει. Τελευταῖον δὲ ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν τοῦ περιγραφέντος πολυγώνου πλευρῶν ἀπειράριθμος γίνηται, τὸ πολύγωνον οἷα κύκλος, ἡ δ' αὐτοῦ περίμετρος οἷα κύ-

κλου

κλου περιφέρεια λαμβάνεται. Ἀλλὰ μὴν τοῦ πολυγώνου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον (129) ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς συνάψεως τῶν αὐτοῦ πλευρῶν. Ἄρα καὶ τοῦ κύκλου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ἡμιδιαμέτρου ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς αὐτοῦ περιφερείας. Ο. Ε. Δ. Κεφ. δ'.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕ'ΡΟΣ ΔΕΥ'ΤΕΡΟΝ.

ΠΕΡΙ' ΕΥ'ΘΕΙΩ'Ν ΚΑΙ' Ε'ΠΙΠΕ'ΔΩΝ ΣΧΗΜΑ'ΤΩΝ Α'ΝΑΛΟΓΙ'ΑΣ.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Α'.

ΠΕΡΙ' Α'ΝΑΛΟΓΙΚΩ'Ν Α'ΡΧΩ'Ν.

Ὅρος Α'.

§. 133. Ὁμογενῆ μεγέθη ἐστὶ τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ διαστατὸν θεωρούμενα. Ἑτερογενῆ δὲ τὰ μὴ ὑπὸ τὸ αὐτὸ διαστατὸν θεωρούμενα.

Ὅρος Β'.

§. 134. Λόγος δέ ἐστι σύγκρισις κατὰ πηλικότητα δύω ὁμογενῶν μεγεθῶν ἀλλήλοις παραβαλλομένων.

Ὅρος

Ὅρος Γ'.

§. 135. Τῶν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγεθῶν, τὰ μὲν προλαμβανόμενα, ἡγούμενα καλεῖται· τὰ δὲ προσλαμβανόμενα, ἑπόμενα λέγεται. Τὰ δ' ἡγούμενα, καὶ τὰ ἑπόμενα, λόγου πέρατα καλεῖν εἰώθασιν.

Ὅρος Δ'.

§. 136. Λόγος ἰσότητος λέγεται, οὗ τὰ πέρατα ἴσα ἐστί. Λόγος δ' ἀνισότητος, οὗ τὰ πέρατα ἄνισά ἐστιν.

Ὅρος Ε'.

§. 137. Λόγος μείζονος ἀνισότητός ἐστιν, οὗ τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου μεῖζόν ἐστι. Λόγος δ' ἐλάττονος ἀνισότητος, οὗ τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου ἔλαττόν ἐστιν.

Ὅρος ϛ'.

§. 138. Δύω λόγοι ἴσοι λέγονται, ὅταν ἑκατέρων τὰ ἡγούμενα τὸν αὐτὸν τρόπον περιέχῃ τὰ ἴσα ἑπόμενα, ἢ ὑπ' αὐτῶν περιέχηται.

Πόρισμα Α'.

§. 139. Ἴσα ἄρα μεγέθη Α, Η τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸ Κ μέγεθος. Τὰ γὰρ ἡγούμενα Α, Η τὸν αὐτὸν τρόπον περιέχει τὸ κοινὸν ἑπόμενον Κ. Σχ. 70.

Πό-

Κεφ. α'.

Πόρισμα Β'.

Σχ. 76. §. 140. Καὶ Ἀνάπαλιν· Τὸ Κ μέγεθος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὰ ἴσα μεγέθη Α, Η. Τὸ γὰρ κοινὸν ἡγούμενον Κ τὸν αὐτὸν τρόπον περιέχεται ὑπὸ τῶν ἴσων ἑπομένων Α, Η.

Ὅρος Ζ'.

§. 141. Ἐὰν δύω λόγοι μείζονος ἀνισότητος ἀλλήλοις παραβληθῶσι, μείζων λέγεται λόγος, οὗ τὸ ἡγούμενον πλεονάκις περιέχει τὸ ἴδιον ἑπόμενον, ἢ τὸ ἕτερον ἡγούμενον τὸ ἴδιον ἑπόμενον.

Πόρισμα Α'.

Σχ. 77. §. 142. Δύω ἄρα ἀνίσων μεγεθῶν Α, Η· Τὸ μεῖζον Α μείζονα ἔχει λόγον πρὸς τὸ Κ, ἢ τὸ ἔλαττον Η πρὸς τὸ αὐτὸ Κ. Τὸ γὰρ μεῖζον Α πλεονάκις περιέχει τὸ Κ, ἢ τὸ ἔλαττον Η τὸ αὐτὸ Κ περιέχει.

Πόρισμα Β'.

Σχ. 77. §. 143. Καὶ ἀνάπαλιν· Ἐὰν ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Κ μείζων ᾖ τοῦ λόγου τοῦ Η πρὸς τὸ Κ, τὸ Α μεῖζον ἔσται τοῦ Η, πλεονάκις γὰρ τὸ Α περιέχει τὸ αὐτὸ Κ, ἢ τὸ Η περιέχει τὸ Κ.

Ὅρος Η'.

§. 144. Ἐὰν δύω λόγοι ἐλάττονος ἀνισότητος ἀλλήλοις παραβληθῶσι μείζων λέγεται λόγος, οὗ τὸ ἡγού-

ἡγούμενον ἧττον περιέχεται ὑπὸ τοῦ ἰδίου ἑπομένου, Κεφ. α'. ἢ τὸ ἕτερον ἡγούμενον ὑπὸ τοῦ ἰδίου ἑπομένου.

Ὅρος Θ'.

§. 145. Ὅταν δύω λόγοι ἴσοι ὦσι πρὸς ἀλλήλους τὰ τέσσαρα αὐτῶν πέρατα ἀνάλογα καλεῖται.

Ὅρος Ι'.

§. 146. Ὅταν δύω λόγοι ἴσοι τοιαύτην πρὸς ἀλλήλους θέσιν ἔχωσιν, ὥστε τὸ ἑπόμενον τοῦ πρώτου λόγου ἡγούμενον τοῦ δευτέρου γίνεσθαι, τὰ τρία αὐτῶν πέρατα συνεχῶς ἀνάλογα λέγεται. τὸ δὲ δὶς ἐπαναλαμβανόμενον μέσον ἀνάλογον καλεῖται.

Ὅρος ΙΑ'.

§. 147. Λόγος σύνθετος ἐκ πολλῶν λόγων λέγεται, ὃν ἔχει τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἰδίων ἡγουμένων πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἰδίων ἑπομένων. Κἂν μὲν οἱ συντιθέντες δύω, ἢ τρεῖς λόγοι ἴσοι ὦσιν, ὁ ἐξ αὐτῶν σύνθετος λόγος διπλάσιος, ἢ τριπλάσιος ἑνὸς τούτων λέγεται.

Ὅρος ΙΒ'.

§. 148. Ὅμοια σχήματά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχει, καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς, τουτέστι τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἀναλόγους.

Ὅρος

Ο῞ρος ΙΓ'.

Σχ. 83. §. 149. Α᾽ντιπεπονθότα σχήματα λέγεται, ὅταν ἐν ἀμφοτέρῳ ἡγέμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν· οἷον τὰ Λ, Υ ὀρθογώνια, ἐν οἷς δειχθήσεται, ὅτι ὡς ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΚ, οὕτως ἡ ΟΣ πρὸς τὴν ΣΗ.

Ο῞ρος ΙΔ'.

Σχ. 78. §. 150. Ο᾽ρθογώνιον ΑΣΚ ἐστὶν, οὗ βάσις μὲν ἡ ΑΣ, ὕψος δὲ ἡ ΣΚ. Ο᾽ρθογώνιον δὲ ΑΚΣ ἐστὶν, οὗ βάσις μὲν ἡ ΑΚ, ὕψος δὲ ἡ ΚΣ.

ΚΕ-

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β.

ΠΕΡΙ᾽ ΣΥΜΠΤΩΜΑ΄ΤΩΝ Ο᾽ΡΘΟΓΩΝΙ΄ΩΝ ΤΕ ΚΑΙ᾽ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑ΄ΜΜΩΝ.

Πρότασις Α'. Θεώρημα.

§. 151. ΤΑ᾽ Ι᾽σοϋψῆ παραλληλόγραμμα ΚΒΙΑ, ΑΙΕΦ τὸν αὐτὸν πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν αἱ τούτων βάσεις ΚΑ, ΑΦ. Σχ. 79.

Δεῖξις.

Ε῎στωσαν σύμμετροι αἱ βάσεις ΚΑ, ΑΦ, τὸ δὲ ΑΣ ἔστω κοινὸν μέτρον, ὅπερ δὶς μὲν τῇ ΑΦ, τρὶς δὲ τῇ ΚΑ περιεχέσθω, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Σ σημείου ἡ ΣΟ εὐθεῖα τῇ ΦΕ παράλληλος. Ε᾽πεὶ οὖν ἡ ΚΑ τῆς ΑΣ τριπλασία ἐστὶ, τὸ ΚΙ παραλληλόγραμμον τρία παραλληλόγραμμα περιέξει, ὧν ἕκαστον ἴσον (124) ἐστὶ τῷ ΑΟ παραλληλογράμμῳ. Ταῦτ᾽ ἄρα τὸ ΚΙ παραλληλόγραμμον τοῦ ΑΟ παραλληλογράμμου τρι-

πλά-

Κεφ. β′. πλάσιόν ἐστι. Τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον καὶ τὸ ΑΕ παραλληλόγραμμον τοῦ ΑΟ παραλληλογράμμου διπλάσιον δειχθήσεται. Τὸ παραλληλόγραμμον ἄρα ΚΙ λόγον ἔχει πρὸς τὸ ΑΕ, ὃν τὰ τρία πρὸς τὰ δύω. Ἀλλαμὴν καὶ αἱ τούτων βάσεις τὸν αὐτὸν πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσιν, ὃν τὰ τρία πρὸς τὰ δύω, ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα ΚΙ, ΑΕ τὸν αὐτὸν πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν αἱ τούτων βάσεις ΚΑ, ΑΦ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α′.

Σχ. 80. §. 152. Ἐπεὶ δὲ καὶ τὰ τρίγωνα ΚΙΗ, ΗΙΦ ἡμίσεά ἐστι τῶν ἰσοϋψῶν παραλληλογράμμων ΚΑΙΗ, ΗΙΕΦ· καὶ τὰ τρίγωνα ἄρα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα ὃν αἱ τούτων βάσεις ΚΗ, ΗΦ.

Πόρισμα Β′.

§. 153. Ἐπεὶ οὖν πᾶν ὀρθογώνιόν ἐστι καὶ παραλληλόγραμμον· καὶ τὰ Ὀρθογώνια ἄρα λόγον πρὸς ἄλληλα ἔχει, ὃν αἱ τούτων βάσεις.

Πρότασις Β′. Θεώρημα.

Σχ. 81. §. 154. Τῶν ἰσωντε παραλληλογράμμων καὶ τρι-
Σχ. 82. γώνων Α, Υ ἀντιπεπόνθασιν αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραί· καὶ ὧν παραλληλογράμμων καὶ τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Δεῖξις.

Α′. Κείσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας αἱ ΑΦ, ΦΚ εὐθεῖαι,

θεῖαι, ἔτι δὲ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΟΦ, ΦΗ. Καὶ Κεφ. β′.
ἐν μὲν τοῖς παραλληλογράμμοις ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΣΗ, ΠΚ εὐθεῖαι κατὰ τὸ Ε σημεῖον συμπιπτουσαι. ἐν δὲ τοῖς τριγώνοις ἐπεζεύχθω ἡ ΗΚ. Ἐπεὶ δὲ τὸ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ τρίγωνον Λ ἴσον (ἐξ ὑπ.) ἐστι τῷ Υ, πάντως ὡς τὸ Λ πρὸς τὸ Ρ (139) τὸ Υ πρὸς τὸ Ρ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ Λ πρὸς τὸ Ρ ἡ ΑΦ (151, 152) πρὸς τὴν ΦΚ, καὶ ὡς τὸ Υ πρὸς τὸ Ρ ἡ ΟΦ πρὸς τὴν ΦΗ. ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΦΚ, οὕτως ἡ ΟΦ πρὸς τὴν ΦΗ. Ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Β′. Τὸ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ τρίγωνον Λ λόγον ἔχει πρὸς τὸ ἰσοϋψὲς Ρ (151, 152) ὃν ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΦΚ; τὸ δὲ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ τρίγωνον Υ λόγον ἔχει πρὸς τὸ Ἰσοϋψὲς Ρ, ὃν ἡ ΟΦ πρὸς τὴν ΦΗ. Ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΦΚ, οὕτως ἡ ΟΦ (ἐξ ὑπ.) πρὸς τὴν ΦΗ, ἄρα καὶ ὡς τὸ Λ πρὸς τὸ Ρ, τὸ Υ πρὸς τὸ Ρ. ταῦτ᾽ ἄρα ἴσα ἀλλήλοις (139) ἐστὶ τὰ παραλληλόγραμμα καὶ τὰ τρίγωνα Λ, Υ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Γ′. Θεώρημα.

§. 155. Ἐὰν τέσσαρες Εὐθεῖαι ΑΣ, ΣΚ, ΟΣ, Σχ. 85.
ΣΗ ἀνάλογοι ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον Σχ. 86.
ὀρθογώνιον Λ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ὀρθογωνίῳ Υ· καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον Λ ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ὀρθογωνίῳ Υ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογοι ἔσονται.

Δεῖξις.

Α′. Ὧν παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ περὶ

Κεφ. β'. περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ἴσα (154) ἀλλήλοις ἐστίν· Ἀλλὰ μὴν τὰ ὀρθογώνια Λ, Υ παραλληλόγραμμά ἐστιν (95) ἀναλόγως τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἔχοντα, ἄρα τὰ ὀρθογώνια Λ, Υ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. Ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Β'. Ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν (ἐξ ὑπ.) τὰ ὀρθογώνια Λ, Υ, τὰς γωνίας ΑΣΗ, ΟΣΚ ἴσας ἀλλήλαις ἔχοντα, πάντως ἀντιπεπόνθασιν αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ (154), καὶ διὰ ταῦτα ὡς ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΚ, οὕτως ἡ ΟΣ πρὸς τὴν ΣΗ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 156. Ἐκ τούτων δῆλον ὅτι ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογοι ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἴσον (155) ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. Ἐπεὶ οὖν ὡς τὰ 2 πρὸς τὰ 4, οὕτω τὰ 4 πρὸς τὰ 8, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον, τουτέστι 16, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, ἤτοι 16.

Πόρισμα Β'.

§. 157. Δοθέντων ἄρα τριῶν ἀριθμῶν 2, 4, 8, ῥᾴστα ὁ τέταρτος ἀνάλογος θηρεύεται. Ἐπεὶ γὰρ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν μέσων ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν ἄκρων· πάντως ἐὰν τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν μέσων διὰ τοῦ πρώτου διαιρεθῇ ὁ τέταρτος ἀνάλογος ἐξαχθήσεται.

Πόρισμα Γ'.

Σχ. 84. §. 158. Ἔτι δὲ ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι Α, Σ, Η συνεχῶς ἀνάλογοι ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ΑΗ ὀρθο-

γώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης Σ τετραγώνῳ. Κεφ. β'. Ἔστω γὰρ ἡ Ο τῇ μέσῃ Σ ἴση. Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Σ, οὕτως (ἐξ ὑπ.) ἡ Σ πρὸς τὴν Η, καὶ ἡ Α ἔσται πρὸς τὴν Σ ὡς ἡ Ο πρὸς τὴν Η. Ταῦτ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῶν ἄκρων Α, Η ὀρθογώνιον ἴσον (155) ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῶν μέσων Ο, Σ ὀρθογωνίῳ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς μέσης Σ τετραγώνῳ.

Πόρισμα Δ'.

§. 159. Καὶ ἀνάπαλιν· ἐὰν τὸ ἀπὸ τῶν ἄκρων Σχ. 84. Α, Η ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης Σ τετραγώνῳ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι Α, Σ, Η συνεχῶς ἀνάλογοι ἔσονται. Ἔστω γὰρ ἡ Ο τῇ Σ ἴση. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ὀρθογώνιον ἴσον (ἐξ ὑπ.) ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, ἴσον ἔσται καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Σ, Ο ὀρθογωνίῳ. Ταῦτ' ἄρα, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Σ (155) οὕτως ἡ Σ πρὸς τὴν Η.

Πόρισμα Ε'.

§. 160. Ἐὰν οὖν τρεῖς ἀριθμοὶ συνεχῶς ἀνάλογοι ὦσι τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τοῦ μέσου τετραγώνου. Ἐπεὶ γὰρ ὡς τὰ 3 πρὸς τὰ 6, οὕτω τὰ 6 πρὸς τὰ 12, πάντως τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν ἄκρων 3, καὶ 12, ἀμέλει 36, ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἀπὸ τοῦ μέσου 6, τουτέστι 36.

Σχόλιον Α'.

§. 161. Ἐκ ταύτης τῆς προτάσεως τὴν τῆς γῆς Σχ. 54. διάμετρον εὐστόχως οἱ Γεωμέτραι συνῆγον. Δέδεικται ἐν τοῖς ἀνωτέρω (107) τὴν περίμετρον τοῦ μεγίστου τῆς γῆς κύκλου περιεκτικὴν εἶναι βημάτων Πα-

Κεφ. β'. Παρισιανῶν 24649940. Εὗρε δὲ καὶ ὁ Ἀρχιμήδης ἐν τοῖς αὐτοῦ πονήμασι τὴν περιφέρειαν παντὸς κύκλου λόγον ἔχειν πρὸς τὴν Διάμετρον, ὃν τὰ 22 πρὸς τὰ 7 ὡς ἔγγιστα. Ἐὰν τοίνυν ποιήσωμεν ὡς τὰ 22 πρὸς τὰ 7, οὕτω τὰ 24649940 πρὸς ἄλλο τι, εὑρήσομεν τὴν τῆς Γῆς Διάμετρον περιεκτικὴν εἶναι βημάτων Παρισιακῶν 7843156, ἤτοι μιλλίων Παρισιακῶν 7843, καὶ προσέτι βημάτων 156.

Σχόλιον Β'.

§. 162. Ἐκ τούτου τοῦ Θεωρήματος ἑπτὰ Κανόνες παράγονται τῇ Γεωμετρίᾳ τὰ μάλιστα χρήσιμοι.

Κανὼν Α'.

Σχ. 85. §. 163. Ἐὰν ὡς ἡ πρώτη ΑΣ πρὸς τὴν δευτέραν ΣΚ, οὕτως ἡ τρίτη ΟΣ πρὸς τὴν τετάρτην ΣΗ· καὶ ἀνάπαλιν· ἡ δευτέρα ΣΚ ἔσται πρὸς τὴν πρώτην ΑΣ, ὡς ἡ τετάρτη ΣΗ πρὸς τὴν τρίτην ΟΣ.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ ὡς ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΚ, οὕτως ἡ ΟΣ πρὸς τὴν ΣΗ, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ΑΣ, ΣΗ ὀρθογώνιον Λ ἴσον (155) ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ΣΚ, ΟΣ ὀρθογωνίῳ Υ. καὶ διὰ ταῦτα ὡς τὸ Ρ ὀρθογώνιον πρὸς τὸ Λ ὀρθογώνιον (140), οὕτω τὸ Ρ πρὸς τὸ Υ. Ἀλλ' ὡς τὸ Ρ πρὸς τὸ Λ, οὕτως ἡ ΣΚ (153) πρὸς τὴν ΑΣ, καὶ ὡς τὸ Ρ πρὸς τὸ Υ, οὕτως ἡ ΣΗ (153) πρὸς τὴν ΟΣ. ἄρα καὶ ἡ ΣΚ ἔσται πρὸς τὴν ΑΣ, ὡς ἡ ΣΗ πρὸς τὴν ΟΣ. Ο. Ε. Δ.

Κα-

Κανὼν Β'.

§. 164. Ἐὰν ὡς ἡ πρώτη ΑΣ πρὸς τὴν δευτέραν ΣΟ, οὕτως ἡ τρίτη ΣΚ πρὸς τὴν τετάρτην ΣΗ· καὶ ἐναλλάξ· ὡς ἡ πρώτη ΑΣ πρὸς τὴν τρίτην ΣΚ, οὕτως ἡ δευτέρα ΣΟ πρὸς τὴν τετάρτην ΣΗ. Σχ. 85.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΟ, οὕτως ἡ ΣΚ πρὸς τὴν ΣΗ, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ὀρθογώνιον Λ ἴσον (155) ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ὀρθογωνίῳ Υ. Ταῦτ' ἄρα ὡς τὸ Λ πρὸς τὸ Ρ, (139) οὕτω τὸ Υ πρὸς τὸ αὐτὸ Ρ. ἀλλ' ὡς τὸ Λ πρὸς τὸ Ρ (153) οὕτως ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΚ· καὶ ὡς τὸ Υ πρὸς τὸ αὐτὸ Ρ, οὕτως ἡ ΟΣ πρὸς τὴν ΣΗ. ἄρα καὶ ἡ ΑΣ ἔσται πρὸς τὴν ΣΚ, ὡς ἡ ΟΣ πρὸς τὴν ΣΗ. Ο. Ε. Δ.

Κανὼν Γ'.

§. 165. Ἐὰν ὡς ἡ πρώτη Α πρὸς τὴν δευτέραν Κ, οὕτως ἡ πρώτη Φ πρὸς τὴν δευτέραν Η· καὶ ὡς ἡ δευτέρα Κ πρὸς τὴν τρίτην Ε, οὕτως ἡ δευτέρα Η πρὸς τὴν τρίτην Ρ, καὶ καθεξῆς ὁμοίως· καὶ δίισου, ὡς ἡ πρώτη Α πρὸς τὴν ἐσχάτην Ε, οὕτως ἡ πρώτη Φ πρὸς τὴν ἐσχάτην Ρ. Σχ. 87.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Κ (ἐξ ὑπ.) οὕτως ἡ Φ πρὸς τὴν Η, καὶ ἐναλλὰξ (164) ἡ Α

Ε ἔσται

Κεφ. β'. ἔσαι πρὸς τὴν Φ ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Η. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν λόγον, καὶ ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Η, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ρ. Ὡς ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Φ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Η, καὶ ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Ρ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Η. καὶ διὰ ταῦτα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Φ (50), οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ρ. καὶ ἐναλλὰξ· ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ Φ πρὸς τὴν Ρ. Ο. Ε. Δ.

Κανὼν Δ'.

Σχ. 85. §. 166. Ἐὰν ὡς ἡ πρώτη ΑΣ, πρὸς τὴν δευτέραν ΣΚ, οὕτως ἡ τρίτη ΟΣ πρὸς τὴν τετάρτην ΣΗ· καὶ ἐν συνθέσει· ἔσαι ἡ πρώτη συνάμα τῆς δευτέρας πρὸς τὴν δευτέραν, ὡς ἡ τρίτη συνάμα τῆς τετάρτης πρὸς τὴν τετάρτην· τουτέσιν ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΣΚ, οὕτως ἡ ΟΗ πρὸς τὴν ΣΗ.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΚ (ἐξ ὑπ.), οὕτως ἡ ΟΣ πρὸς τὴν ΣΗ, τὸ Λ ὀρθογώνιον ἴσον (155) ἐστὶ τῷ Υ ὀρθογωνίῳ. κοινῇ δὲ προστεθέντος τοῦ Ρ ὀρθογωνίου· τὸ ΛΡ ὀρθογώνιον ἴσον (42) ἔσαι τῷ ΥΡ ὀρθογωνίῳ. Ταῦτ' ἄρα ὡς τὸ ΛΡ πρὸς τὸ Ρ (139), οὕτω τὸ ΥΡ πρὸς τὸ Ρ. Ἀλλ' ὡς τὸ ΛΡ πρὸς τὸ Ρ, (153) οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΣ, καὶ ὡς τὸ ΥΡ πρὸς τὸ Ρ, οὕτως ἡ ΟΗ πρὸς τὴν ΗΣ. ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΣ, οὕτως ἡ ΟΗ πρὸς τὴν ΗΣ. Ο. Ε. Δ.

Κανὼν Ε'.

Σχ. 88. §. 167. Ἐὰν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Κ, οὕτως ἡ Ε

πρὸς

πρὸς τὴν Η, καὶ ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Η, οὕτως ἡ Κεφ. β'. Ρ πρὸς τὴν Φ, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως· καὶ ἐν συνάψει· ἔσαι τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἡγουμένων Α, Ε, Ρ πρὸς τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἑπομένων Κ, Η, Φ, ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων Α πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων Κ.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Κ (ἐξ ὑπ.), οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Η, καὶ ἡ Α ἔσαι πρὸς τὴν Ε (164) ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Η. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν λόγον, καὶ ἡ Ε ἔσαι πρὸς τὴν Ρ, ὡς ἡ Η πρὸς τὴν Φ. Αὖθις, ἐπεὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Η. καὶ ἐν συνθέσει, (166) ἔσαι ἡ Α συνάμα τῆς Ε πρὸς τὴν Ε, ὡς ἡ Κ συνάμα τῆς Η πρὸς τὴν Η. Εἴδομεν δὲ καὶ τὴν Ε ἔχειν πρὸς τὴν Ρ, ὡς τὴν Η πρὸς τὴν Φ. ἄρα δι' ἴσου, ἔσαι ἡ Α μετὰ τῆς Ε πρὸς τὴν Ρ, (165) ὡς ἡ Κ μετὰ τῆς Η πρὸς τὴν Φ, καὶ ἐν συνάψει· ἔσαι τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων Α, Ε, Ρ πρὸς τὴν Ρ, ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων Κ, Η, Φ πρὸς τὴν Φ. καὶ ἐναλλὰξ· ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν Α, Ε, Ρ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Κ, Η, Φ, οὕτως ἡ Ρ πρὸς τὴν Φ, ἢ ἡ Α πρὸς τὴν Κ. Ο. Ε. Δ.

Κανὼν ϛ'.

§. 168. Ἐὰν ὡς ἡ πρώτη ΑΚ πρὸς τὴν δευτέραν ΚΣ, οὕτως ἡ τρίτη ΟΗ πρὸς τὴν τετάρτην ΗΣ. καὶ ἐν διαιρέσει· ὡς ἡ ὑπεροχὴ τῆς πρώτης ἐπὶ τῆς δευτέρας πρὸς τὴν δευτέραν, οὕτως ἡ ὑπεροχὴ τῆς τρίτης ἐπὶ τῆς τετάρτης πρὸς τὴν τετάρτην· Σχ. 85.

τουτέ-

Κεφ. β΄. τουτέστιν, ἡ ΑΣ ἔσαι πρὸς τὴν ΣΚ, ὡς ἡ ΟΣ πρὸς τὴν ΣΗ.

Δεῖξις.

Κατασκευασθήτωσαν τὰ ὀρθογώνια ΑΡ, ΥΡ. τὸ μὲν ἐπὶ τῆς πρώτης καὶ τετάρτης, τὸ δὲ ἐπὶ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης, ἅπερ ἴσα (155) ἀλλήλοις ἔσαι. κοινῦ δὲ ἀφαιρεθέντος τοῦ Ρ ὀρθογωνίου· τὰ ἐναπολειφθέντα ὀρθογώνια Α, Υ ἴσα (43) ἀλλήλοις ἔσαι. ἄρα ὡς ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΚ (155), ὅτως ἡ ΟΣ πρὸς τὴν ΣΗ. Ο. Ε. Δ.

Κανὼν Ζ΄.

Σχ. 89. §. 169. Ἐὰν ὡς ὅλη ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ἀφαιρεθεῖσαν ΚΣ, ὅτως ὅλη ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ἀφαιρεθεῖσαν ΗΡ. Καὶ ἀντισρόφως, ἔσαι ὅλη ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ἐναπολειφθεῖσαν ΣΑ, ὡς ὅλη ἡ ΟΗ πρὸς τὴν ἐναπολειφθεῖσαν ΡΟ.

Δεῖξις.

Ἐπείπερ ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΣ, ὅτως (ἐξ ὑπ.) ἡ ΟΗ πρὸς τὴν ΗΡ. καὶ ἐν διαιρέσει (168) ἔσαι ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΚ, ὡς ἡ ΟΡ πρὸς τὴν ΡΗ. καὶ ἀνάπαλιν (163) ὡς ἡ ΚΣ πρὸς τὴν ΣΑ, ὅτως ἡ ΗΡ πρὸς τὴν ΡΟ. καὶ ἐν συνθέσει (166) ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΣΑ, ὅτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΡΟ. Ο. Ε. Δ.

ΚΕ-

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

ΠΕΡΙ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ὉΜΟΙΟΤΗΤΟΣ.

Πρότασις Δ΄. Θεώρημα.

§. 170. Ἐὰν ἐν τριγώνῳ ΗΑΕ ἀχθῇ τις εὐθεῖα ἡ ΦΚ παράλληλος τῇ ΗΕ. ἡ ΑΦ ἔσαι πρὸς τὴν ΦΗ, ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΕ. Κ᾽ἂν μὲν ᾖ ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΦΗ, ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ἡ ἀχθεῖσα εὐθεῖα ΦΚ τῇ ΗΕ παράλληλος ἔσαι. Σχ. 90.

Δεῖξις.

Α΄. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΦ, ΗΚ εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν τὰ τρίγωνα ΦΗΚ, ΦΕΚ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ΦΚ, καὶ μεταξὺ δύω παραλλήλων ΦΚ, ΗΕ κεῖνται, ἴσα ἀλλήλοις (123) ἐσί. τὸ ἄρα Υ τρίγωνον ἔσαι πρὸς τὸ ΦΗΚ (140) ὡς τὸ αὐτὸ

Κεφ. γ'. αὐτὸ Υ πρὸς τὸ ΦΕΚ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς τὸ Υ τρίγωνον πρὸς τὸ ἰσοϋψὲς τρίγωνον ΦΗΚ (152), οὕτως ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΦΗ, καὶ ὡς τὸ Υ τρίγωνον πρὸς τὸ ἰσοϋψὲς ΦΕΚ τρίγωνον, οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΕ. Ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΦΗ, οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΕ. Ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Β'. Ὡς τὸ Υ τρίγωνον πρὸς τὸ ἰσοϋψὲς τρίγωνον ΦΗΚ, οὕτως (152) ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΦΗ, καὶ ὡς τὸ αὐτὸ τρίγωνον Υ πρὸς τὸ ΦΕΚ τρίγωνον, οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΕ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΦΗ, οὕτως (ἐξ ὑπ.) ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ἄρα καὶ ὡς τὸ τρίγωνον Υ πρὸς τὸ ΦΗΚ τρίγωνον, οὕτω τὸ αὐτὸ Υ πρὸς τὸ ΦΕΚ. καὶ διὰ ταῦτα τὰ τρίγωνα ΦΗΚ, ΦΕΚ ἴσα (140) ἀλλήλοις ἐστίν. ἔχει δὲ καὶ κοινὴν βάσιν τὴν ΦΚ, ἄρα παράλληλοι ἔσονται (123) αἱ ΦΚ, ΗΕ εὐθεῖαι. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

Σχ. 90. §. 171. Ἐὰν ἄρα ἐν παντὶ τριγώνῳ ΗΑΕ ἀχθῇ τις εὐθεῖα ἡ ΦΚ τῇ ΗΕ παράλληλος, ἡ ΗΦ ἔσται πρὸς τὴν ΦΑ, ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΑ. Ἐπεὶ γὰρ ὡς ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΦΗ (170), οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΕ. καὶ ἡ ΗΦ ἔσται πρὸς τὴν ΦΑ (163), ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΑ.

Πόρισμα Β'.

Σχ. 90. §. 172. Ἔτι δὲ καὶ ἡ ΗΑ ἔσται πρὸς τὴν ΑΦ, ὡς ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΚ. Ἐπεὶ γὰρ ὡς ἡ ΗΦ πρὸς τὴν ΦΑ, οὕτως (171) ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΑ. καὶ ἐν συνθέσει (166) ἡ ΗΑ ἔσται πρὸς τὴν ΑΦ, ὡς ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΚ.

Πό-

Πόρισμα Γ'.

§. 173. Καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἔσται πρὸς τὴν ΗΦ, Σχ. 90.
ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ. Ἐπεὶ γὰρ ὡς ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΦΗ, οὕτως (170) ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΕ, καὶ ἐν συνθέσει (166) ἡ ΑΗ ἔσται πρὸς τὴν ΗΦ, ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ.

Πόρισμα Δ'.

§. 174. Ἔτι δὲ καὶ ἡ ΑΗ ἔσται πρὸς τὴν ΑΦ, Σχ. 91.
ὡς ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΦΚ. Ἤχθω γὰρ ἡ ΦΡ τῇ ΑΕ παράλληλος· καὶ ἔσται ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΦ (173), ὡς ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΡ. ἀλλ' ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ ΡΦΚΕ, ἡ ΡΕ ἴση (26) ἐστὶ τῇ ΦΚ. ἄρα ἡ ΗΑ ἔσται πρὸς τὴν ΑΦ, ὡς ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΦΚ.

Πόρισμα Ε'.

§. 175. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΑ ἔσται πρὸς τὴν ΑΦ Σχ. 91.
(172), ὡς ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΚ. καὶ ἡ ΕΑ ἔσται πρὸς τὴν ΑΚ (174), ὡς ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΦΚ.

Σχόλιον.

§. 176. Ἐκ τοῦ τετάρτου πορίσματος ταύτης τῆς Σχ. 92.
προτάσεως τὴν τῆς Γεωμετρικῆς κλίμακος (ἧς ἡ χρῆσις παμμεγίστη ἐστὶ) κατασκευὴν οἱ περὶ τὰ τοιαῦτα δεινοὶ σοφῶς συνῆγον. Ἐπί τινος οὖν ὕλης στερεᾶς ἀκριβῶς κατειργασμένης γραφήτωσαν γραμμαὶ αἱ ΑΦ, ΑΚ εἰς ὁποιανοῦν γωνίαν ἐπιζευ-

χθεῖ-

Κεφ. γ'. χθεῖσαι, ἐπὶ δὲ τῆς ΑΒ εἰλήφθωσαν δέκα μέρη ἴσα τὰ ΑΛ, Λ 2, 2 3, 3 4, 4 5, καὶ τ. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΚ εἰλήφθωσαν δέκα μέρη ἴσα τὰ Α 1, 1 2, 2 3, 3 4, 4 5, καὶ τ. καὶ συμπληρούσθω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΚΙΦ. Μετὰ δὲ ταῦτα ἤχθωσαν διὰ τῶν σημείων τῶν τομῶν τῆς ΑΚ εὐθείας παράλληλοι τῇ ΑΦ πλευρᾷ, τὰ δὲ κατάλληλα σημεῖα Κ καὶ Λ, 1 καὶ 2, 2 καὶ 3, 3 καὶ 4, 4 καὶ 5 καὶ τ. εὐθείαις γραμμαῖς συζευχθήτωσαν, καὶ κατασκευασθήσεται Κλίμαξ Γεωμετρική, ἐν ᾗ δειχθήσεται, ὅτι, ἐὰν ἡ ΑΒ Δεκάπους ᾖ, ἡ ΑΛ ποῦς ἔσται, ἡ 99 Δάκτυλος, ἡ 88 Δάκτυλοι δύω, ἡ 77 Δάκτυλοι τρεῖς, καὶ τ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ Δεκάπους ἐστὶ, ποδὸς Δεκαπλασία ἔσται. ἀλλ' ἔστι Δεκαπλασία καὶ τῆς ΑΛ (ἐκ κατ.), ἄρα ἡ ΑΛ ποῦς ἔσται. Ἐπεὶ δὲ ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΚΛ, ἡ 99 εὐθεῖα τῇ ΑΛ παράλληλός ἐστιν· ἡ ΑΛ ἔσται πρὸς τὴν 99 (174), ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν Κ9· ἀλλὰ μὴν ἡ ΑΚ τῆς Κ9 δεκαπλασία (ἐκ κατ.) ἐστὶν, ἄρα καὶ ἡ ΑΛ δεκαπλασία ἔσται τῆς 99. Ἡ δὲ ΑΛ ποῦς ἐδείχθη, ἡ 99 ἄρα Δάκτυλος (34) ἔσται. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον δείξαι καὶ τὴν 88 δακτύλους δύω περιέχειν, τὴν 77 δακτύλους τρεῖς καὶ τ.

Πρότασις Ε'. Θεώρημα.

Σχ. 93. §. 177. Ἐὰν ἡ Α γωνία τοῦ ΗΑΚ τριγώνου δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα ἡ ΑΕ τέμνῃ καὶ τὴν ΗΚ βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα ΕΗ, ΕΚ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ λοιπαὶ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ΗΑ, ΑΚ· Κ'ἂν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ λοι-

παὶ

παὶ τοῦ τριγώνου πλευραὶ, ἡ ΑΕ εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν Α γωνίαν. Κεφ. γ'.

Δεῖξις.

Α'. Ἤχθω ἡ ΚΦ τῇ ΕΑ παράλληλος, ἥτις τὴν ΗΑ ἐκβληθεῖσαν, κατὰ τὸ Φ σημεῖον τέμνει. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΦ τέμνει τὰς παραλλήλους ΑΕ, ΦΚ, ἡ ἐκτὸς γωνία ΗΑΕ, ἴση (85) ἐστὶ τῇ ἐντὸς ΑΦΚ. Ἔτι δὲ ἐπεὶ ἡ ΑΚ τέμνει τὰς παραλλήλους ΑΕ, ΦΚ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΕΑΚ, ΑΚΦ ἴσαι (85) ἀλλήλαις εἰσίν· ἀλλ' ἡ ΗΑΕ γωνία τῇ ΕΑΚ ἴση (ἐξ ὑπ.) ἐστὶν, ἄρα καὶ ἡ ΑΦΚ τῇ ΑΚΦ ἴση ἔσται. Ταῦτ' ἄρα αἱ ΑΚ, ΑΦ εὐθεῖαι ἴσαι (114) ἀλλήλαις ἔσονται· καὶ ὡς ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΦ (140), οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΚ (170), οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΦ, ἄρα καὶ ἡ ΗΕ ἔσται πρὸς τὴν ΕΚ, ὡς ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ.

Β'. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΕ, ΦΚ παράλληλοί εἰσιν· ἡ ΗΕ ἔσται πρὸς τὴν ΕΚ, (170), ὡς ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΦ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως (ἐξ ὑπ.) ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ, ἄρα καὶ ἡ ΗΑ ἔσται πρὸς τὴν ΑΦ, ὡς ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ. Καὶ διὰ ταῦτα αἱ ΑΦ, ΑΚ ἴσαι (140) ἔσονται, ἡ δὲ ΑΦΚ γωνία τῇ ΑΚΦ γωνίᾳ ἴση (114) ἔσται. Ἀλλ' ἡ ΗΑΕ γωνία ἴση (85) ἐστὶ τῇ ΑΦΚ γωνίᾳ, ἡ δὲ ΕΑΚ γωνία τῇ ΑΚΦ ἐναλλὰξ γωνίᾳ ἴση ἐστίν. ἄρα καὶ ἡ ΗΑΕ γωνία τῇ ΕΑΚ γωνίᾳ ἴση ἔσται. Ο. Ε. Δ.

Πρό-

Πρότασις ϛ'. Θεώρημα.

Σχ. 94. §. 178. Ἐὰν δύω τρίγωνα ΦΑΟ, ΚΕΡ πά-
Σχ. 95. σας τὰς ἑαυτῶν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὰ τρίγωνα ἔσαι ὅμοια, τουτέστιν αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ἀνάλογοι ἔσονται.

Δεῖξις.

Περὶ τὴν Α γωνίαν εἰλήφθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΣ εὐθεῖαι ταῖς ΕΚ, ΕΡ ἴσαι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΣ, ἥτις ἴση (71) ἐστὶ τῇ ΚΡ, ἡ δὲ Η γωνία ἴση ἐστὶ τῇ Κ γωνίᾳ. Ἀλλαμὴν καὶ ἡ Φ γωνία ἴση (ἐξ ὑπ.) ἐστὶ τῇ Κ γωνίᾳ, ἄρα ἡ ἐκτὸς γωνία ΑΗΣ τῇ ἐντὸς γωνίᾳ Φ ἴση (50) ἐστί· καὶ διὰ ταῦτα ἡ ΗΣ παράλληλος (94) ἔσαι τῇ ΦΟ· καὶ ὡς ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως (174) ἡ ΦΟ πρὸς τὴν ΗΣ· καὶ ὡς ἡ ΦΟ πρὸς τὴν ΗΣ, οὕτως (175) ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΑΣ. Ἡ ΑΦ ἄρα ἔσαι πρὸς τὴν ΕΚ, ὡς ἡ ΦΟ πρὸς τὴν ΚΡ, καὶ ἡ ΦΟ ἔσαι πρὸς τὴν ΚΡ, ὡς ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΕΡ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

Σχ. 94. §. 179. Ἐὰν ἄρα δύω τρίγωνα τὰ ΦΑΟ, ΚΕΡ
Σχ. 95. τὰς δύω γωνίας Φ, Ο ἴσας ἔχῃ ταῖς δυσὶ γωνίαις Κ, Ρ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ὅμοια ἔσαι. Ἐπεὶ γὰρ καὶ ἡ λοιπὴ γωνία Α τῇ λοιπῇ γωνίᾳ Ε ἴση (103) ἐστί, τὰ τρίγωνα ἔσαι ἰσογώνια, καὶ διὰ ταῦτα (178) ὅμοια.

Πό-

Πόρισμα Β'.

§. 180. Ἐν παντὶ ἄρα τριγώνῳ ΦΑΟ, ἐὰν Σχ. 94.
μιᾷ τῶν αὐτοῦ πλευρῶν, φέρε τῇ ΦΟ, ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΗΣ, τὸ ΗΑΣ τρίγωνον ὅμοιον ἔσαι τῷ ὅλῳ τριγώνῳ ΦΑΟ. διὰ γὰρ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ΗΣ, ΦΟ εὐθείας, ἡ ἐκτὸς γωνία ΑΗΣ τῇ ἐντὸς γωνίᾳ Φ ἴση (85) ἐστί. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν λόγον, καὶ ἡ ἐκτὸς γωνία Σ τῇ ἐντὸς γωνίᾳ Ο ἴση ἔσαι. Τὸ τρίγωνον ἄρα ΗΑΣ τῷ ΦΑΟ τριγώνῳ ὅμοιόν (171) ἐστί.

Πόρισμα Γ'.

§. 181. Ἔτι δὲ ἐὰν ἀπὸ τῶν ἴσων γωνιῶν Β, Φ Σχ. 96.
τῶν ὁμοίων τριγώνων ἐπὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ΑΔ, ΕΗ ἀχθῶσι κάθετοι αἱ εὐθεῖαι ΒΚ, ΦΓ, αὗται τὸν αὐτὸν πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσιν, ὃν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ΑΔ, ΕΗ. Ἐπεὶ γὰρ τὰ τρίγωνα ὅμοιά (ἐξ ὑπ.) ἐστι, πάντως καὶ αἱ Α,Ε γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ἀλλαμὴν καὶ αἱ γωνίαι ΒΚΑ, ΦΓΕ ὀρθαί, καὶ διὰ ταῦτα ἴσαι εἰσί, τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΒΚ, ΕΦΓ ὅμοια (179) ἔσαι. Ταῦτ' ἄρα ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΦΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΦΕ, καὶ ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΕΗ (διὰ τὴν τῶν τριγώνων ὁμοιότητα) οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΦΕ· ἄρα καὶ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΦΓ (50), οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΕΗ.

Σχόλιον Α'.

§. 182. Ῥάδιον ἐκ τύπων, δύω τόπων τὸ διάστη- Σχ. 97.
μα ΑΒ προσιτὸν μὲν κατὰ τὸ Α, ἀπρόσιτον δὲ

κατὰ

Κεφ. γ'. ἐκεῖ τὸ Β θηρεύεται. Ἔςω δὴ πρῶτον θηρεῦσαι νηός τινος ΒΝ, ἐν αἰγυπτίῳ θαλάσσῃ ἠρεμούσης, τὸ διάςημα ΑΒ ἀπὸ τῆς Ἀκροπόλεως ΑΜ. Εἰλήφθω οὖν τόπος τις ὁ Δ, οὗ τὸ διάςημα ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἔςω (ὡς ὑπ.) ποδῶν 40, καὶ παρατηρηθήτω διὰ τοῦ ἡμικυκλίου ἑκάςη τῶν γωνιῶν Α, Δ πόσων ἂν εἴη μοιρῶν. Μετὰ δὲ ταῦτα γραφήτω ἐπί τινος χάρτου ἡ ΕΗ εὐθεῖα τοσούτων μερῶν περιεκτικὴ ἐκ τῆς Κλίμακος, ὅσων εὑρέθη ποδῶν ἡ ΑΔ, δηλ. 40, καὶ κατασκευασθεισῶν (66) τῶν Ε, Η γωνιῶν ταῖς Α, Δ γωνίαις ἴσων, συμπληρούσθω τὸ τρίγωνον ΕΦΗ. Παρατηρηθήτω δ' εἶτα ἡ ΕΦ πλευρά, ἥτις 60 περιεχέτω μόρια ἐκ τῆς Κλίμακος, καὶ οὕτω γνωςὸν γενήσεται τὸ διάςημα ΑΒ. Ἐπεὶ γὰρ αἱ Α, Δ γωνίαι τοῦ ΑΒΔ τριγώνου ἴσαι (ἐκ κατ.) εἰσὶ ταῖς Ε, Η γωνίαις τοῦ ΕΦΗ τριγώνου ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ὅμοιόν (179) ἐςι τῷ ΕΦΗ τριγώνῳ. Ἄρα ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΕΦ, καὶ ἐναλλὰξ (164) ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΕΦ. ἀλλ' ἡ ΕΗ ἔςαι πρὸς τὴν ΕΦ, ὡς τὰ 40 πρὸς τὰ 60, ἄρα καὶ ἡ ΑΔ ἔςαι πρὸς τὴν ΑΒ, ὡς τὰ 40 πρὸς τὰ 60. Εὑρήκαμεν δὲ τὴν ΑΔ ποδῶν 40 περιεκτικὴν εἶναι, ἡ ΑΒ ἄρα πόδας 60 περιέχειν ἀναγκαῖόν ἐςι.

Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Σχ. 98. §. 183. Ἐὰν ἐν κύκλῳ τινὶ δύω χορδαὶ αἱ ΚΛ, ΗΦ ἀλλήλας τέμνωσι κατὰ τὸ Ο σημεῖον, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ΚΟΛ ἴσον ἔςαι τῷ ὀρθογωνίῳ ΗΟΦ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ.

Δεῖ-

Δεῖξις.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ, ΛΦ εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν αἱ γωνίαι Η, Λ ἴσαι (89) ἀλλήλαις εἰσίν, ἔτι δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΚΟΗ, ΛΟΦ ἴσαι (65) ἀλλήλαις εἰσίν, ὅμοια ἔςαι (179) τὰ τρίγωνα ΚΟΗ, ΛΟΦ, ἅπερ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· τουτέςιν, ὡς ἡ ΚΟ πρὸς τὴν ΟΦ, οὕτως ἡ ΟΗ πρὸς τὴν ΟΛ. καὶ διὰ ταῦτα τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ὀρθογώνιον ΚΟΛ ἴσον (155) ἐςὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ὀρθογωνίῳ ΗΟΦ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 184. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ παντὸς περιφερείας σημείου Σχ. 99.
τοῦ Κ πρὸς τὴν Διάμετρον ΗΦ ἀχθῇ κάθετος ἡ ΚΟ εὐθεῖα, τὸ ἀπὸ τῆς ΚΟ τετράγωνον ἴσον ἐςὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΗΟΦ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς Διαμέτρου τμημάτων περιεχομένῳ. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΚΟ πρὸς τὸ Λ, καὶ ἔςαι ἡ ΛΟ (118) τῇ ΚΟ ἴση, καὶ διὰ ταῦτα τὸ ΚΟΛ ὀρθογώνιον ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΟ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ μὴν τὸ ΚΟΛ ὀρθογώνιον ἴσον (183) ἐςὶ τῷ ΗΟΦ ὀρθογωνίῳ, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΟ τετράγωνον ἴσον ἔςαι τῷ ΗΟΦ ὀρθογωνίῳ, ἡ δὲ ΚΟ μέση ἀνάλογος ἔςαι (159) μεταξὺ τῶν δύω τμημάτων ΗΟ, ΟΦ τῆς ΗΦ διαμέτρου.

Πόρισμα Β'.

§. 185. Δύω ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΗΟ, Σχ. 99.
ΟΦ, μέσην ἀνάλογον εὐμαρῶς καταγράφειν δυνά-

μι-

Κεφ. γ΄. μεθα, ἐὰν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας τεθῶσιν, ἐπὶ δὲ τούτων, ἡμικυκλίου γραφέντος τοῦ ΗΚΦ, ἐγερθῇ ἀπὸ τοῦ Ο σημείου κάθετος ἡ ΟΚ εὐθεῖα, ἥτις μέση ἀνάλογος δειχθήσεται (184) μεταξὺ τῶν ΗΟ, ΟΦ εὐθειῶν.

Πρότασις Η΄. Θεώρημα.

Σχ. 94. §. 186. Ἐὰν δύω τρίγωνα τὰ ΦΑΟ, ΚΕΡ
Σχ. 95. ἀναλόγους ἔχῃ τὰς ἑαυτῶν πλευράς, τὰ τρίγωνα ἰσογώνια, καὶ ὅμοια ἔσται.

Δεῖξις.

Εἰλήφθω ἡ ΑΗ τῇ ΕΚ ἴση, καὶ ἤχθω τῇ ΦΟ παράλληλος ἡ ΗΣ. Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως (ἐξ ὑπ.) ἡ ΦΟ πρὸς τὴν ΚΡ, ἡ δὲ ΑΗ ἴση ἐστὶ τῇ ΕΚ· ἄρα καὶ ἡ ΑΦ ἔσται πρὸς τὴν ΑΗ ὡς ἡ ΦΟ πρὸς τὴν ΚΡ. Ἀλλ' ἔσται καὶ ἡ ΑΦ πρὸς τὴν ΑΗ (174) ὡς ἡ ΦΟ πρὸς τὴν ΗΣ, ἄρα καὶ ἡ ΦΟ ἔσται πρὸς τὴν ΗΣ (50) ὡς ἡ ΦΟ πρὸς τὴν ΚΡ, καὶ διὰ ταῦτα ἴσαι ἀλλήλαις (140) ἔσονται αἱ ΗΣ, ΡΚ εὐθεῖαι. Αὖθις ἡ ΦΟ ἔσται πρὸς τὴν ΗΣ (175) ὡς ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΑΣ, καὶ ἡ ΦΟ ἔσται πρὸς τὴν ΚΡ (ἐξ ὑπ.), ὡς ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΕΡ. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΦΟ ἔσται πρὸς τὴν ΗΣ, ὡς ἡ ΦΟ πρὸς τὴν ΚΡ, ἄρα καὶ ἡ ΑΟ ἔσται πρὸς τὴν ΑΣ (50), ὡς ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΕΡ, καὶ διὰ ταῦτα ἴσαι ἔσονται καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΣ, ΕΡ. Ἰσόπλευρα ἄρα ἔσται τὰ τρίγωνα ΗΑΣ, ΚΕΡ, οὗ χάριν καὶ (58) ἰσογώνια, καὶ ὅμοια (178) ἔσται. Τὸ δὲ τρίγωνον ΦΑΟ ὅμοιόν (180) ἐστι τῷ ΗΑΣ τριγώνῳ, ἄρα ὅμοιον ἔσται καὶ τῷ ΚΕΡ τριγώνῳ. Ο. Ε. Δ.

Πρό-

Πρότασις Θ΄. Θεώρημα.

§. 187. Ἐὰν δύω τρίγωνα ΦΑΟ, ΚΕΡ μίαν Σχ. 94.
μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, ἔχῃ δὲ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας Σχ. 95.
γωνίας πλευρὰς ἀναλόγους· ὅμοια ἔσται.

Δεῖξις.

Περὶ τὴν Α γωνίαν, τῇ Ε γωνίᾳ ἴσην, εἰλήφθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΣ, ταῖς ΕΚ, ΕΡ ἴσαι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΣ, ἥτις ἴση (71) ἐστὶ τῇ ΚΡ. Ἰσόπλευρα ἄρα ἔσται τὰ τρίγωνα ΗΑΣ, ΚΕΡ, διόπερ καὶ ἰσογώνια (58) καὶ ὅμοια (178) ἔσται. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΦ ἐστὶ πρὸς τὴν ΕΚ, ὡς ἡ ΑΟ (ἐξ ὑπ.) πρὸς τὴν ΕΡ, καὶ ἡ ΑΦ ἔσται πρὸς τὴν ΑΗ, ὡς ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΑΣ, καὶ ἐν διαιρέσει, (168) ἡ ΦΗ ἔσται πρὸς τὴν ΗΑ, ὡς ἡ ΟΣ πρὸς τὴν ΣΑ, καὶ ἀνάπαλιν, (165) ἡ ΑΗ ἔσται πρὸς τὴν ΗΦ, ὡς ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΟ. Ἡ ΗΣ ἄρα τῇ ΦΟ παράλληλος (170) ἔσται. Ἀλλὰ μὴν τὸ τρίγωνον ΦΑΟ ὅμοιόν (180) ἐστι τῷ ΗΑΣ τριγώνῳ, ἄρα καὶ τῷ ΚΕΡ τριγώνῳ ὅμοιον ἔσται Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α΄.

§. 188. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας ΑΚ τὸ Σχ. 100.
ΑΦΚ τρίγωνον εὐμαρῶς κατασκευασθήσεται ὅμοιον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ΛΡΟ, ἐὰν ἡ ΚΑΗ γωνία ἴση γένηται τῇ Λ γωνίᾳ, ἡ δὲ ΛΟ πρὸς τὴν ΑΚ (187), ὡς ἡ ΛΡ πρὸς τὴν ΑΦ. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον καὶ παντὸς ἄλλου εἴδους σχῆμα ὅμοιον τῷ δοθέντι κατασκευασθήσεται.

 Πό-

Πόρισμα Β'.

Σχ. 101. §. 189. Ὅμοια ἄρα ἔσαι τὰ παραλληλόγραμμα ΡΣΑΚ, ΦΕΑΟ τὰ περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον περιγεγραμμένα. Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΣΡ, ΕΦ παράλληλοί εἰσι, τὸ ΑΣΡ τρίγωνον τῷ ΑΕΦ τριγώνῳ ὅμοιον (180) ἔσαι. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν λόγον καὶ τὸ ΑΚΡ τρίγωνον τῷ ΑΟΦ τριγώνῳ ὅμοιον ἔσαι. Ἀλλαμὴν τὰ τέτταρα τρίγωνα τὰ παραλληλόγραμμα συνισῶσιν, ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα ΡΣΑΚ, ΦΕΑΟ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Πρότασις Ι'. Θεώρημα.

Σχ. 102. §. 190. Ἐὰν ἐκτὸς κύκλου τινὸς ληφθῇ τι σημεῖον τὸ Κ, ἀπὸ δὲ τούτου πρὸς τὸν κύκλον ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι αἱ ΚΗ, ΚΑ, ὧν ἡ μὲν τέμνει τὸν κύκλον, ἡ δὲ τούτου ἐφάπτεται, ἡ ἐφαπτομένη μέση ἀνάλογός ἐστι μεταξὺ ὅλης τῆς τεμνούσης, καὶ τῆς ἐκτὸς τοῦ κύκλου ἀπολαμβανομένης, τουτέστι μεταξὺ τῆς ΗΚ, καὶ τῆς ΚΣ.

Δεῖξις.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΣ εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΚΑΣ γωνία ἴση (91) ἐστὶ τῇ ΑΗΚ γωνίᾳ, ἀλλαμὴν καὶ ἡ γωνία ΑΚΣ ἴση ἐστὶ τῇ ΑΚΗ· ἄρα τὰ τρίγωνα ΗΑΚ, ΑΣΚ ὅμοια (179) ἔσαι· καὶ διὰ ταῦτα ὡς ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΚΑ, οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΚΣ· ἡ ἐφαπτομένη ἄρα ΚΑ μέση ἀνάλογος (146) ἔσαι μεταξὺ τῆς ΗΚ καὶ τῆς ΚΣ εὐθείας. Ο. Ε. Δ.

Πό-

Πόρισμα. Α'.

§. 191. Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΗΚ πρὸς τὴν ΚΑ, ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΚΣ, τὸ ὑπὸ τῆς ΚΑ τετράγωνον ἴσον (158) ἐστὶ τῷ ΗΚΣ ὀρθογωνίῳ. Σχ. 102.

Πόρισμα Β'.

§. 192. Ἔτι δὲ ἐὰν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ ἀχθῇ ἑτέρα τέμνουσα ἡ ΚΟ, τὸ ὑπὸ τῆς ΚΑ τετράγωνον ἴσον (191) ἐστὶ τῷ ΟΚΛ ὀρθογωνίῳ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΟΚΛ ἴσον (50) ἐστὶ τῷ ΗΚΣ ὀρθογωνίῳ. Σχ. 102.

Πόρισμα Γ'.

§. 193. Δύω ἄρα ἐπτόμεναι ΚΑ, ΚΡ, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ ἠγμέναι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα ἴσα (191) ἐστι τῷ ὀρθογωνίῳ ΗΚΣ, καὶ ἀλλήλοις ἴσα (50) ἔσαι. διὰ δὲ ταῦτα καὶ αἱ γραμμαὶ ΚΑ, ΚΡ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. Σχ. 103.

Πόρισμα Δ'.

§. 194. Καὶ ἐὰν ἀπὸ τῆς τῶν ἐφαπτομένων συνδρομῆς Κ ἀχθῇ πρὸς τὸ Ο κέντρον εὐθεῖα ἡ ΚΟ, αὕτη δίχα τεμεῖ τὴν ΑΚΡ γωνίαν. Ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν ΟΑ, ΟΡ εὐθειῶν, αἱ ΚΑ, ΑΟ πλευραὶ τοῦ ΟΑΚ τριγώνου ἴσαι (193) εἰσι ταῖς πλευραῖς ΚΡ, ΡΟ τοῦ ΟΡΚ τριγώνου. Γωνία ἄρα ἡ ΑΚΟ ἴση (58) ἐστὶ τῇ ΡΚΟ γωνίᾳ, τουτέστιν ἡ ΚΟ εὐθεῖα τέτμηκε τὴν ΑΚΡ γωνίαν. Σχ. 103.

Πρό-

Κεφ. γ'.

Πρότασις ΙΑ'. Θεώρημα.

Σχ. 103. §. 195. Ἐὰν ἡ ΚΡ εὐθεῖα οὕτω τοῦ κύκλου ἅπτηται κατὰ τὸ Ρ σημεῖον, ὥστε τὸ ταύτης τετράγωνον ἴσον εἶναι τῷ ΗΚΣ ὀρθογωνίῳ, αὕτη τοῦ κύκλου ἐφαπτομένη ἐστί.

Δεῖξις.

Ἐπιζευχθείσης τῆς ΚΑ ἐφαπτομένης, ἤχθωσαν αἱ ΟΑ, ΟΡ. Ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς ΚΑ τετράγωνον ἴσον (191) ἐστὶ τῷ ΗΚΣ ὀρθογωνίῳ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΡ τετράγωνον ἴσον (ἐξ ὑπ.) ἐστὶ τῷ αὐτῷ ὀρθογωνίῳ ΗΚΣ, τὰ τετράγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἔσται, διόπερ καὶ αἱ τούτων βάσεις ΚΡ, ΚΑ εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἀλλὰ μὴν καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ΟΡ, ΟΚ τοῦ ΚΡΟ τριγώνου ἴσαι εἰσὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ΟΑ, ΟΚ τοῦ ΚΑΟ τριγώνου, ἄρα καὶ ἡ ΚΡΟ γωνία ἴση (58) ἐστὶ τῇ ΚΑΟ γωνίᾳ· Ἔστι δὲ (82) καὶ ὀρθὴ ἡ ΚΑΟ γωνία, ἄρα καὶ ἡ ΚΡΟ γωνία ὀρθὴ ἔσται· καὶ διὰ ταῦτα ἡ ΚΡ εὐθεῖα ἐφαπτομένη (81) ἐστὶ τοῦ κύκλου. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

Σχ. 104. §. 196. Τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν ΑΚΛ οὕτω κατὰ τὸ Κ σημεῖον τεμεῖν, ὥστε τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ΛΚ μέσον ἀνάλογον εἶναι μεταξὺ τῆς ὅλης ΛΑ, καὶ τοῦ ἐλάττονος τμήματος ΚΑ.

Δεί-

Κεφ. γ'.

Δεῖξις.

Ἤχθω ἐπὶ τῆς ΛΑ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΛΦ, ἴση τῷ ἥμισυ τῆς ΛΑ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Φ, διαστήματι δὲ τῷ ΦΛ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΛΗΡ, οὗ τινος ἡ ΑΛ ἐφάπτεται (81) κατὰ τὸ Λ σημεῖον. Εἶτα ἐπιζευχθείσης, διὰ τῶν σημείων Α, Φ, τῆς ΑΗ εὐθείας, ἤχθωσαν αἱ ΗΛ, ΡΚ παράλληλοι, ὧν ἡ ΡΚ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΛ τεμεῖ κατὰ τὸν ζητούμενον λόγον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΛΦ ἡμιδιάμετρος ἡμίσεια (ἐκ κατ.) ἐστὶ τῆς ΛΑ εὐθείας, ὅλη ἡ διάμετρος ΗΡ τῇ ΛΑ ἴση ἔσται. Ἀλλ' ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΑΛ (190), οὕτως ἡ ΑΛ πρὸς τὴν ΑΡ, ἄρα καὶ ἡ ΑΗ ἔσται πρὸς τὴν ΗΡ, ὡς ἡ ΗΡ πρὸς τὴν ΡΑ. διὰ δὲ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ΡΚ, ΗΛ εὐθείας, ἡ ΑΛ ἔσται πρὸς τὴν ΛΚ (173), ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΡ, καὶ ἡ ΛΚ πρὸς τὴν ΚΑ, ὡς (171) ἡ ΗΡ πρὸς τὴν ΡΑ. διὰ δὲ ταῦτα καὶ ἡ ΑΛ ἔσται πρὸς τὴν ΛΚ (50) ὡς ἡ ΛΚ πρὸς τὴν ΚΑ. Ο. Ε. Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ.

ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ἸΔΙΩΜΑΤΩΝ.

Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Σχ. 105. §. 197. Ἐὰν ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας Φ τοῦ ΑΦΚ τριγώνου ὀρθογωνίου τῇ ὑποτεινούσῃ ΑΚ κάθετος ἀχθῇ ἡ ΦΟ. Ἔσαι, Α'. τὸ ὑπὸ τῆς ΦΚ τετράγωνον ἴσον τῷ ΑΚΟ ὀρθογωνίῳ. Β'. τὸ ὑπὸ τῆς ΦΑ τετράγωνον ἴσον τῷ ΚΑΟ ὀρθογωνίῳ. Καὶ Γ'. τὸ ὑπὸ τῆς ΦΟ τετράγωνον ἴσον τῷ ΑΟΚ ὀρθογωνίῳ.

Δεῖξις.

Α'. Ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ΦΟΑ γωνία, κύκλος ὁ ἐπὶ τῆς ΦΑ γραφεὶς διελεύσεται διὰ τοῦ Ο σημείου. Ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ ΑΦΚ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ ΦΚ εὐθεῖα κάθετος ἔσαι τῇ ΦΑ διαμέτρῳ, διὸ καὶ τοῦ κύκλου κατὰ τὸ σημεῖον Φ (81) ἐφάπτεται, ὃν τέμνει ἡ ΚΟΑ εὐθεῖα. Τὸ ὑπὸ τῆς ΦΚ ἄρα τετράγωνον ἴσον

ἴσον (191) ἐστὶ τῷ ΑΚΟ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἦν Κεφ. δ'. τὸ πρῶτον.

Β'. Ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ΦΟΚ γωνία, ὁ ἐπὶ τῆς ΦΚ κύκλος γραφεὶς διελεύσεται διὰ τοῦ Ο σημείου, ταῦτ᾽ ἄρα, ὡς ἀνωτέρω ἐδείχθη, τὸ ὑπὸ τῆς ΦΑ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΑΟ ὀρθογωνίῳ (191). ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον.

Γ'. Τελευταῖον δὲ ὀρθῆς οὔσης (ἐξ ὑπ.) τῆς ΑΦΚ γωνίας, κύκλος ὁ ἐπὶ τῆς ΑΚ γραφεὶς διὰ τοῦ Φ σημείου διελεύσεται. ταῦτ᾽ ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς ΟΦ τετράγωνον ἴσον (184) ἐστὶ τῷ ΑΟΚ ὀρθογωνίῳ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 198. Ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς ΦΚ τετράγωνον ἴσον (197) ἐστὶ τῷ ΑΚΟ ὀρθογωνίῳ, ἡ ΑΚ ἔσαι πρὸς τὴν ΦΚ (159), ὡς ἡ ΦΚ πρὸς τὴν ΚΟ· καὶ διὰ ταῦτα ἡ ΦΚ μέση ἀνάλογός ἐστι μεταξὺ τῆς ΑΚ, ΚΟ, ἡ δὲ ΦΑ μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ΚΑ, καὶ ΑΟ. καὶ ἡ ΟΦ μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ΑΟ, καὶ ΟΚ. Σχ. 105.

Πόρισμα Β'.

§. 199. Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΟ, ΟΦ τρίτη ἀνάλογος ῥᾳστα εὑρεθήσεται. Συζευχθήτωσαν γὰρ πρὸς ὀρθὴν γωνίαν αἱ ΑΟ, ΟΦ εὐθεῖαι· εἶτα ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΦ, ἤχθω ἐπ᾽ αὐτῆς κάθετος ἡ ΦΚ εὐθεῖα, τὴν ΑΟ ἐκβληθεῖσαν κατὰ τὸ Κ σημεῖον τέμνουσα, καὶ ἔσαι τὸ ποθούμενον. ὡς γὰρ ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΟΦ, οὕτως (198) ἡ ΟΦ πρὸς τὴν ΟΚ. Σχ. 105.

Πρότασις ΙΔ'. Θεώρημα.

Σχ. 106. §. 200. Ἐν παντὶ Ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΦΚ, τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν πλευρῶν τετραγώνοις συνάμα ληφθεῖσι ΦΑ, ΦΚ.

Δεῖξις.

Ἔστω τὸ ΡΑΚΗ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ΑΚ, ὅπερ διὰ τῆς ΦΣ εὐθείας, πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΚ ἠγμένης, διῃρημένον ἐστὶν εἰς δύω ὀρθογώνια τὰ ΗΚΟΣ, ΣΟΑΡ. Ἐπεὶ οὖν τοῦ ΡΑΚΗ τετραγώνου ἴσαι εἰσιν αἱ πλευραὶ ΗΚ, ΑΚ, τὸ ΗΚΟΣ ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΚΟ ὀρθογωνίῳ. Ἀλλὰ μὴν τὸ ΑΚΟ ὀρθογώνιον ἴσον (197) ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΦΚ πλευρᾶς τετραγώνῳ, ἄρα καὶ τὸ ΗΚΟΣ ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΦΚ πλευρᾶς τετραγώνῳ. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον δείξω καὶ τὸ ΣΟΑΡ ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΦΑ πλευρᾶς τετραγώνῳ. Ἄρα τὸ τετράγωνον ΡΑΚΗ τῆς ὑποτεινούσης ΑΚ ἴσον ἐστὶ τῇ συνάψει τῶν ἀπὸ τῶν λοιπῶν πλευρῶν τετραγώνων. Ο. Ε. Δ. Αὕτη ἐστὶν ἡ πολυθρύλλητος Ἑκατόμβη.

Πόρισμα Α'.

Σχ. 107. §. 201. Τὸ τετράγωνον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς διαγωνίου ΦΗ τετραγώνου οἱουδήποτε διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΗ πλευρᾶς τετραγώνου.

Πό-

Πόρισμα Β'.

§. 202. Ἐὰν ἡ ΑΚ εὐθεῖα τμηθῇ κατὰ τὸ Σ σημεῖον ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης ΑΚ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ὀρθογωνίοις ΑΚΣ, ΚΑΣ συνάμα ληφθεῖσι. Γεγράφθω γὰρ ἐπ' αὐτῆς τὸ ΑΗΚ ἡμικύκλιον, καὶ ἐγερθείσης πρὸς ὀρθὰς τῆς ΣΗ εὐθείας, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΚΗ εὐθεῖαι. Ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ ἡ ΑΗΚ γωνία. Τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ τετράγωνον ἴσον (200) ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΗΚ, ΗΑ πλευρῶν τετραγώνοις συνάμα ληφθεῖσιν. ἀλλὰ μὴν τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ τετράγωνον ἴσον (197) ἐστὶ τῷ ΑΚΣ ὀρθογωνίῳ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΗ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΑΣ (197) ὀρθογωνίῳ. ἄρα τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ὀρθογωνίοις ΑΚΣ, ΚΑΣ συνάμα ληφθεῖσι. Σχ. 108.

Πόρισμα Γ'.

§. 203. Ἔτι τε τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης ΑΚ καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων ΚΣ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΑΣΚ μετὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ΚΣ τμήματος. τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΚ, καὶ ΚΣ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον (197) ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΚ πλευρᾶς τετραγώνῳ, τουτέστι τοῖς τετραγώνοις (200) ΗΣ, ΚΣ συνάμα ληφθεῖσιν, ἤτοι (197) τῷ ΑΣΚ ὀρθογωνίῳ συνάμα τῷ ΚΣ τετραγώνῳ. Σχ. 108.

Πόρισμα Δ'.

§. 204. Ἔτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τμημάτων ΑΣ, ΣΚ τετραγώνοις, Σχ. 108.
καὶ

Κεφ. δ'. καὶ τῷ δὶς ἀπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ΑΣΚ. τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΚ τετράγωνον ἴσον (200) ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΗΚ, ΗΑ τετραγώνοις. Ἀλλὰ μὴν τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ τετράγωνον ἴσον (200) ἐστὶ τοῖς ΣΚ, ΣΗ τετραγώνοις, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΑ τετράγωνον ἴσον (200) ἐστὶ τοῖς ΑΣ, ΣΗ τετραγώνοις, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τετραγώνοις ΑΣ, ΣΚ καὶ τῷ δὶς τετραγώνῳ ΣΗ, ἤτοι τῷ δὶς (197) ὀρθογωνίῳ ΑΣΚ.

Πόρισμα Ε'.

Σχ. 108. §. 205. Τελευταῖον δὲ ἐὰν ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΚ τμηθῇ εἰς ἴσα κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἄνισα κατὰ τὸ Σ σημεῖον, τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ΡΚ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΡΣ τετραγώνῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ΑΣΚ. Τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς ΡΗ τετράγωνον ἴσον (200) ἐστὶ τοῖς τετραγώνιος ΡΣ, ΣΗ, ἤτοι τῷ τετραγώνῳ ΡΣ (197) συνάμα τῷ ὀρθογωνίῳ ΑΣΚ. Ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΡΚ τετράγωνον ἴσον ἔσαι τῷ ΡΣ τετραγώνῳ συνάμα τῷ ΑΣΚ ὀρθογωνίῳ.

Πρότασις ΙΕ'. Θεώρημα.

Σχ. 109. §. 206. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ΑΣ ὑποτεινούσης τριγώνου ὀξυγωνίου ἢ ἀμβλυγωνίου ΑΥΣ ἡμικύκλιον γραφῇ τὸ ΑΡΣ, τὸ ἀπὸ τῆς ΑΣ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῇ συνάψει τῶν δύο ὀρθογωνίων ΥΣΛ, ΥΑΡ.

Δεῖξις.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Υ τῇ ΑΣ κάθετος ἡ ΥΕ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΑΛ εὐθεῖα κάθετος τῇ ΣΛ. Ἐπεὶ
οὖν

οὖν ἡ ΑΛΣ γωνία ὀρθὴ (ἐκ κατ.) ἐστὶ, καὶ ἡ ΑΛΥ γωνία ὀρθὴ ἔσαι. ὀρθὴ δὲ κατεσκευάσθη καὶ ἡ ΑΕΥ γωνία, ἄρα κύκλος ὁ ἐπὶ τῆς ΑΥ γραφεὶς διελεύσεται διὰ τῶν σημείων Ε, Λ. Ἀλλὰ μὴν αἱ εὐθεῖαι ΣΑ, ΣΥ τέμνουσι τὸν κύκλον κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Α, Λ, Υ. Ἄρα τὸ ΑΣΕ ὀρθογώνιον ἴσον (192) ἐστὶ τῷ ΥΣΛ ὀρθογωνίῳ. Προσήχθω δ' ἔτι ἡ ΣΡ εὐθεῖα, καὶ ἔσαι ὀρθὴ ἡ ΣΡΑ γωνία, ὀρθὴ δὲ κατεσκευάσθη καὶ ἡ ΣΕΥ γωνία, ἄρα κύκλος ὁ ἐπὶ τῆς ΣΥ γραφεὶς διελεύσεται διὰ τῶν σημείων Ρ, Ε. καὶ διὰ ταῦτα τὸ ΣΑΕ ὀρθογώνιον ἴσον (192) ἐστὶ τῷ ΥΑΡ ὀρθογωνίῳ. Ἡ συνάψις ἄρα τῶν δύο ὀρθογωνίων ΑΣΕ, ΣΑΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης ΑΣ (202) τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῇ συνάψει τῶν δύο ὀρθογωνίων ΥΣΛ, ΥΑΡ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Ις'.

§. 207. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ΥΣ πλευρᾶς τριγώνου ὀξυγωνίου ΑΥΣ κάθετος ἀχθῇ ἡ ΑΛ, τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ΑΣ συνάμα τῷ δὶς ὀρθογωνίῳ ΣΥΛ ἴσον ἐστὶ τῇ συνάψει τῶν ἀπὸ τῶν λοιπῶν πλευρῶν ΥΑ, ΥΣ τετραγώνων. Σχ. 109.

Δεῖξις.

Τὸ ἀπὸ τῆς ΥΑ τετράγωνον ἴσον (202) ἐστὶ τοῖς ὀρθογωνίοις ΥΑΡ, ΑΥΡ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΥΣ τετράγωνον ἴσον (202) ἐστὶ τοῖς ὀρθογωνίοις ΥΣΛ, ΣΥΛ. ἡ συνάψις ἄρα τῶν δύο τετραγώνων ΥΑ, ΥΣ ἴσα δύναται τῇ συνάψει τῶν τεττάρων ὀρθογωνίων ΥΑΡ, ΥΣΛ, ΑΥΡ, ΣΥΛ. Ἀλλὰ μὴν ἡ συνάψις τῶν δύο ὀρθογωνίων ΥΑΡ, ΥΣΛ
ἴση

Κεφ. δ'. ἴση (206) ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΣ τετραγώνῳ, καὶ ἡ σύναψις τῶν ὀρθογωνίων ΑΥΡ, ΣΥΛ, ἴση ἐστὶ (192) τῷ δὶς ὀρθογωνίῳ ΣΥΛ. Ἄρα ἡ σύναψις τῶν δύο τετραγώνων ΥΑ, ΥΣ ἴσα δύναται τῷ ΑΣ τετραγώνῳ σὺν τῷ δὶς ὀρθογωνίῳ ΣΥΛ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Σχ. 109. §. 208. Ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς ΑΣ τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν λοιπῶν πλευρῶν τετραγώνων σύναμα λαμβανομένων.

Πρότασις ΙΖ'. Θεώρημα.

§. 209. Ἐὰν τῇ ΥΣ πλευρᾷ ἀμβλυγωνίου τριγώνου ΑΥΣ κάθετος ἀχθῇ ἡ ΑΛ, τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ΑΣ ἴσον ἐστὶ τῇ συνάψει τῶν τετραγώνων ΥΣ, ΥΑ, καὶ τῷ δὶς ὀρθογωνίῳ ΛΥΣ.

Δεῖξις.

Τὸ ἀπὸ τῆς ΑΣ τετράγωνον ἴσον (207) ἐστὶ τοῖς ὀρθογωνίοις ΥΑΡ, ΥΣΛ, ἤτοι τοῖς ὀρθογωνίοις ΛΣΥ, ΡΑΥ. Ἀλλὰ μὴν τὸ ΛΣΥ ὀρθογώνιον ἴσον (203) ἐστὶ τῷ ΥΣ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ ὀρθογωνίου ΛΥΣ, τὸ δὲ ΡΑΥ ὀρθογώνιον ἴσον (203) ἐστὶ τῷ ΑΥ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ ὀρθογωνίου ΡΥΑ, ἄρα τὸ ΑΣ τετράγωνον ἴσα δύναται τῇ συνάψει τῶν τετραγώνων ΥΣ, ΥΑ, καὶ τῶν ὀρθογωνίων ΛΥΣ, ΡΥΑ. Τὰ δὲ ὀρθογώνια ΛΥΣ, ΡΥΑ ἴσα (183) ἀλλήλοις ἐστί. Τὸ ΑΣ ἄρα τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῇ συνάψει τῶν ΥΣ, ΥΑ τετραγώνων μετὰ τοῦ δὶς ὀρθογωνίου ΛΥΣ. Ο. Ε. Δ.

Πό-

Κεφ. δ'.

Πόρισμα.

§. 210. Ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν Σχ. 109.
ὑποτεινούσης ΑΣ τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῆς συνάψεως τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν λοιπῶν πλευρῶν ΑΥ, ΥΣ περιεχομένων.

Πρότασις ΙΗ'.

§. 211. Ἐὰν τὸ τετράγωνον τῆς ΑΚ πλευρᾶς Σχ. 106.
τριγώνου οἱουδήποτε ἴσον ᾖ τῇ συνάψει τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν λοιπῶν πλευρῶν ΑΦ, ΦΚ περιεχομένων, ὀρθή ἐστιν ἡ Φ γωνία, ἣν ἡ ΑΚ πλευρὰ ὑποτείνει.

Δεῖξις.

Ἡ Φ γωνία οὐδ' ἀμβλεῖα, οὐδὲ μὴν ὀξεῖα εἶναι δύναται. Εἰ μὲν γὰρ ἀμβλεῖα, τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ τετράγωνον μεῖζον ἂν εἴη (210) τῆς συνάψεως τῶν τετραγώνων ΑΦ, ΦΚ. Εἰ δ' ὀξεῖα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ τετράγωνον ἔλαττον ἂν εἴη (208) τῆς συνάψεως τῶν τετραγώνων ΑΦ, ΦΚ. Ἑκάτερον κατὰ τῆς ὑποθέσεως. Ἐπεὶ οὖν ἡ Φ γωνία οὐδ' ἀμβλεῖα, οὐδὲ μὴν ὀξεῖα εἶναι δύναται, ὀρθὴ ἐπάναγκές ἐστιν. Ο. Ε. Δ.

ΚΕ-

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'

ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΩΝ

ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ.

Πρότασις ΙΘ'. Θεώρημα.

Σχ. 110. Σχ. 111. §. 212. Παραλληλόγραμμα ὁποιαοῦν τὰ ΑΚΦΗ, ΥΕΓΣ λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν βάσεων ΑΗ, ΥΣ, καὶ τῶν ὑψῶν ΚΛ, ΕΟ.

Δεῖξις.

Ὁ συγκείμενος λόγος τῆς βάσεως ΑΗ πρὸς τὴν βάσιν ΥΣ, καὶ τοῦ ὕψους ΚΛ πρὸς τὸ ὕψος ΕΟ ἐστὶν, ὃν ἔχει τὸ γινόμενον (147) ἐκ τῶν ἡγουμένων ΑΗ, ΚΛ, τουτέστιν ἐκ τῆς βάσεως ΑΗ ἐπὶ τὸ ὕψος ΚΛ, πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἑπομένων, ἤτοι ἐκ τῆς βάσεως ΥΣ ἐπὶ τὸ ὕψος ΕΟ. Ἀλλὰ μὴν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΚΦΗ ἴσον ἐστὶ

τῷ

τῷ γινομένῳ (124) ἐκ τῆς βάσεως ΑΗ ἐπὶ τὸ Κεφ. ι'. ὕψος ΚΛ, καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΥΕΓΣ ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΥΣ ἐπὶ τὸ ὕψος ΕΟ, ἄρα ὁ συγκείμενος λόγος τῆς βάσεως ΑΗ πρὸς τὴν βάσιν ΥΣ, καὶ τοῦ ὕψους ΚΛ πρὸς τὸ ὕψος ΕΟ ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΚΦΗ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΥΕΓΣ. ταῦτ' ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν.

Πόρισμα Α'.

§. 213. Ἐπεὶ δὲ καὶ τὰ τρίγωνα ἡμίσεά ἐστι Σχ. 110. (110) τῶν παραλληλογράμμων· πάντως καὶ τὰ τρίγωνα Σχ. 111. λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὃν καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τουτέστι τὸν συγκείμενον λόγον ἐκ τῶν βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν.

Πόρισμα Β'.

§. 214. Ἔτι δὲ καὶ τὰ ὀρθογώνια Φ, Λ, οἷα Σχ. 112. παραλληλόγραμμα (95) λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα Σχ. 113. τὸν συγκείμενον ἐκ τῆς βάσεως Α πρὸς τὴν βάσιν Κ, καὶ τοῦ Σ ὕψους πρὸς τὸ Η ὕψος.

Πόρισμα Γ'.

§. 215. Ὁμοίως δὲ καὶ τὰ τετράγωνα Φ, Λ λόγον Σχ. 114. ἔχει πρὸς ἄλληλα τὸν συγκείμενον ἐκ τῆς βά- Σχ. 115. σεως πρὸς τὴν βάσιν, καὶ τοῦ ὕψους πρὸς τὸ ὕψος.

Πό-

Πόρισμα Δ′.

Σχ. 114. §. 216. Ἐπεὶ δὲ ἐν τοῖς τετραγώνοις Φ, Λ, ὁ
Σχ. 115. λόγος τῆς βάσεως πρὸς τὴν βάσιν ἴσος ἐστὶ τῷ λόγῳ τοῦ ὕψους πρὸς τὸ ὕψος, πάντως τὰ τετράγωνα Φ, Λ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῆς βάσεως ΑΚ πρὸς τὴν βάσιν ΕΗ, ἢ τοῦ ὕψους ΚΒ πρὸς τὸ ΗΓ ὕψος.

Πόρισμα Ε′.

Σχ. 114. §. 217. Ὁ Διπλασίων ἄρα λόγος δύω εὐθειῶν
Σχ. 115. ΑΚ, ΕΗ ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ τῶν Φ, Λ τετραγώνων ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν κατασκευασθέντων.

Πρότασις Κ′.

Σχ. 116. §. 218. Τριῶν εὐθειῶν δοθεισῶν τῶν Α, Κ, Ε,
Σχ. 117. ἡ πρώτη Α ἔσαι πρὸς τὴν τρίτην Ε ἐν συγκειμέ-
Σχ. 118. νῳ λόγῳ ἐκ τῶν δύω μεταξὺ λόγων, τουτέστιν ἐκ τοῦ λόγου τῆς πρώτης Α πρὸς τὴν δευτέραν Κ, καὶ ἐκ τοῦ λόγου τῆς δευτέρας Κ πρὸς τὴν τρίτην Ε.

Δεῖξις.

Κατασκευασθήτωσαν, ἐπὶ μὲν τῶν ἄκρων εὐθειῶν Α, Ε, τὰ ὀρθογώνια Φ, Υ, (ὧν τὸ ὕψος τῇ Κ ἴσον ἔσω) ἐπὶ δὲ τῆς μέσης Κ, κατασκευασθήτω τὸ Λ ὀρθογώνιον (οὗ τὸ ὕψος τῇ Ε ἴσον ἔσω). Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ Ο πρὸς τὴν Η (ἐκ κατ.), τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ὀρθογώνιον Δ ἴσον (155) ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ὀρθογωνίῳ Υ. Τὸ Φ ἄρα ὀρθογώνιον ἔσαι πρὸς τὸ Υ ὀρθογώνιον (140)

(140) ὡς τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον Φ πρὸς τὸ Λ ὀρθο- Κεφ. ε.
γώνιον. Ἀλλ' ὡς τὸ Φ πρὸς τὸ Υ, οὕτως (153) ἡ Α πρὸς τὴν Ε, καὶ τὸ αὐτὸ Φ ἔχει πρὸς τὸ Λ (214) τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκτε τοῦ λόγου τῆς Α πρὸς τὴν Κ, καὶ τῆς Σ πρὸς τὴν Η. ἄρα καὶ ἡ Α πρὸς τὴν Ε λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκτε τοῦ λόγου, τῆς Α πρὸς τὴν Κ, καὶ τῆς Σ πρὸς τὴν Η. αἱ δ' εὐθεῖαι Σ, Η ἴσαι (ἐκ κατ.) εἰσι ταῖς Κ, Ε εὐθείαις. Ἄρα καὶ ἡ Α ἔχει πρὸς τὴν Ε τὸν συγκείμενον λόγον ἔκτε τοῦ λόγου τῆς Α πρὸς τὴν Κ, καὶ τῆς Κ πρὸς τὴν Ε. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΑ′. Θεώρημα.

§. 219. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΔ, ΕΦΗ λό- Σχ. 96.
γον ἔχει πρὸς ἄλληλα ὃν τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΑΔ, ΕΗ.

Δεῖξις.

Ἀπὸ τῶν ἴσων γωνιῶν Β, Φ ἤχθωσαν πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ΑΔ, ΕΗ κάθετοι αἱ ΒΚ, ΦΓ εὐθεῖαι, τὰ ὕψη τῶν τριγώνων παριστάνουσαι. Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΕΦΗ λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα (213) τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ λόγου τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΕΗ, καὶ τῆς ΒΚ πρὸς τὴν ΦΓ. Ἀλλ' ὁ λόγος τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΕΗ ἴσος (181) ἐστὶ τῷ λόγῳ τῆς ΒΚ πρὸς τὴν ΦΓ, ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΕΦΗ ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ (216) τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΕΗ, τουτέστι λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα ὃν τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΑΔ, ΕΗ (217).

Πρότασις ΚΒ΄. Θεώρημα.

Σχ. 110. §. 220. Τὰ ὅμοια παραλληλόγραμμα ΑΦ, ΥΓ
Σχ. 111. λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὃν τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΑΗ, ΥΣ.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ τὰ ΑΦ, ΥΓ παραλληλόγραμμα ὅμοιά (ἐξ ὑπ.) ἐστιν, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ἀνάλογοι (148) ἔσονται. Ἀχθεισῶν δὲ τῶν διαγωνιῶν ΚΗ, ΕΣ, καὶ τὰ τρίγωνα ΑΚΗ, ΥΕΣ ὅμοια (187) ἔσται. Ταῦτ᾽ ἄρα ὡς τὸ ΑΚΗ τρίγωνον πρὸς τὸ ΤΕΣ τρίγωνον (219), οὕτω τὸ ΑΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ΥΣ τετράγωνον. Ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΑΦ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΥΓ παραλληλόγραμμον, οὕτω τὸ ΑΚΗ τρίγωνον πρὸς τὸ ΤΕΣ τρίγωνον, ἄρα καὶ ὡς τὸ ΑΦ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΥΓ παραλληλόγραμμον, οὕτω τὸ ΑΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ΥΣ τετράγωνον. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΓ΄. Θεώρημα.

Σχ. 119. §. 221. Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι Α, Ε, Φ ὦσι συνεχεῖς ἀνάλογοι, ἡ πρώτη Α ἔσται πρὸς τὴν τρίτην Φ, ὡς τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης Α πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας Ε, ἢ ὡς τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας Ε πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης Φ.

Δεῖξις.

Ἡ πρώτη Α ἔσται πρὸς τὴν τρίτην Φ ἐν συγ-
κειμένῳ

κειμένῳ λόγῳ (218) ἐκ τῶν λόγων τῆς Α πρὸς τὴν Ε, καὶ τῆς Ε πρὸς τὴν Φ. Ἀλλ᾽ ἐπεὶ αἱ Α, Ε, Φ εὐθεῖαι συνεχεῖς ἀνάλογοί εἰσιν, ὁ λόγος τῆς Α πρὸς τὴν Ε ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ τῆς Ε πρὸς τὴν Φ. Ἄρα ἡ πρώτη Α ἔχει πρὸς τὴν τρίτην Φ ἐν διπλασίονι λόγῳ (217) τῆς πρώτης Α πρὸς τὴν δευτέραν Ε, ἢ τῆς δευτέρας Ε πρὸς τὴν τρίτην Φ, ἤτοι ὡς τὸ τῆς Α τετράγωνον (217) πρὸς τὸ τῆς Ε τετράγωνον, ἢ ὡς τὸ τῆς Ε τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς Φ τετράγωνον. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΔ΄. Θεώρημα.

§. 222. Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ Α, Ε, Κ, Η Σχ. 88.
ἀνάλογοι ὦσι, καὶ τὰ τούτων τετράγωνα ἀνάλογα ἔσται. Καὶ ἀνάπαλιν. Ἐὰν τεσσάρων εὐθειῶν τὰ τετράγωνα ἀνάλογα ᾖ, ἀνάλογοι ἔσονται καὶ αἱ εὐθεῖαι.

Δεῖξις.

Α΄. Γενέσθω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε (199), οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ρ, καὶ ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Η, οὕτως ἡ Η πρὸς τὴν Φ, καὶ ἔσται ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Ρ, οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Ε, ἢ ἡ Κ πρὸς τὴν Η (ἐξ ὑπ.), ἢ ἡ Η πρὸς τὴν Φ (ἐκ κατ.). Ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Η, καὶ ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Ρ, οὕτως ἡ Η πρὸς τὴν Φ. Καὶ δι᾽ ἴσου (165), ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ρ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Φ. Ἀλλ᾽ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ρ, οὕτω (221) τὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς Ε τετράγωνον· καὶ ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Φ, οὕτω τὸ τῆς Κ τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς Η τετράγωνον, ἄρα καὶ τὸ τῆς Α τετράγωνον ἔσται πρὸς τὸ τῆς Ε τετράγωνον,

ὡς

Κεφ. έ. ὡς τὸ τῆς Κ τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς Η τετράγωνον. Ὅπερ ἦν τὸ Α΄.

Β΄. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι Α, Ε, Κ, Η μὴ ὦσιν ἀνάλογοι, γενέσθω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Φ. καὶ ἔσται τὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς Ε τετράγωνον (α.), ὡς τὸ τῆς Κ τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς Φ τετράγωνον. Ἀλλ' ὡς τὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς Ε τετράγωνον, οὕτως (ἐξ ὑπ.) τὸ τῆς Κ τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς Η τετράγωνον, ἄρα καὶ ὡς τὸ τῆς Κ τετράγωνον (50) πρὸς τὸ τῆς Φ τετράγωνον, οὕτω τὸ τῆς Κ τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς Η τετράγωνον, καὶ διὰ ταῦτα τὰ τετράγωνα τῶν Φ, Η εὐθειῶν ἴσα (140) ἀλλήλοις ἔσται, ἑπομένως δὲ καὶ αἱ τούτων βάσεις Φ, Η ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε, οὕτως (ἐκ κατ.) ἡ Κ πρὸς τὴν Φ, ἄρα καὶ ἡ Α ἔσται πρὸς τὴν Ε, ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Η. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΕ΄. Θεώρημα.

Σχ. 120. §. 223. Τὰ ὅμοια πολύγωνα ΑΡΚΥΕ, ΦΙΛΣΗ λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὃν τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΕΥ, ΗΣ.

Δεῖξις.

Ἀπὸ τῶν ἴσων γωνιῶν Α, Φ ἐπεζεύχθωσαν αἱ διαγώνιοι ΑΥ, ΑΚ, ΦΣ, ΦΛ, αἵτινες τέμνουσι τὰ πολύγωνα (186) εἰς ὅμοια τρίγωνα. Ἐπεὶ οὖν τὰ πολύγωνα ὅμοιά (ἐξ ὑπ.) ἐστιν, ἡ ΕΥ ἔσται πρὸς τὴν ΗΣ (148), ὡς ἡ ΥΚ πρὸς τὴν ΣΛ, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΕΥ πρὸς τὸ τῆς ΗΣ τετράγωνον (222), ὡς τὸ τετράγωνον τῆς ΥΚ πρὸς τὸ τῆς ΣΛ τετράγωνον. Ἀλλὰ μὴν τὰ ὅμοια τρίγω-

να

να Κ, Π λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα (219), ὃν τὰ Κεφ. έ.
τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΕΥ, ΗΣ, ἔτι δὲ καὶ τὰ ὅμοια τρίγωνα Ο, Ρ λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα (219) ὃν τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΥΚ, ΣΛ, ἄρα τὸ Κ τρίγωνον ἔσται πρὸς τὸ Π, ὡς τὸ Ο τρίγωνον πρὸς τὸ Ρ τρίγωνον. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν λόγον, καὶ ὡς τὸ Ο τρίγωνον πρὸς τὸ Ρ τρίγωνον, οὕτω τὸ Γ τρίγωνον πρὸς τὸ Τ τρίγωνον. Ἅπαντα οὖν τὰ ἡγούμενα Κ, Ο, Γ, ἤτοι τὸ πολύγωνον ΕΡ, ἔσται πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα Π, Ρ, Τ (167), ἤτοι πρὸς τὸ πολύγωνον ΗΙ, ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων Κ, πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων Π. τουτέστιν ὡς τὸ τῆς ΕΥ τετράγωνον (219) πρὸς τὸ τῆς ΗΣ τετράγωνον. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Κς΄. Θεώρημα.

§. 224. Τὰ κανονικὰ πολύγωνα ΑΕΦΗΛ, ΡΖΓΚΙ περὶ κύκλον περιγεγραμμένα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα ὃν τὰ τετράγωνα τῶν ἡμιδιαμέτρων ΚΟ, ΥΣ. Σχ. 121.

Δεῖξις.

Ἤχθωσαν πρὸς τὰ τῶν ἐπαφῶν σημεῖα ἀκτῖνες αἱ ΚΟ, ΥΣ, αἵτινες κάθετοι (82) ἔσονται ταῖς ΑΕ, ΡΖ εὐθείαις. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΑ, ΚΕ, ΥΡ, ΥΖ εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΚ, ΡΥ εὐθεῖαι δίχα τέμνουσι (194) τὰς ἴσας γωνίας ΕΑΛ, ΖΡΙ, ἡ ΕΑΚ γωνία ἴση ἔσται τῇ ΖΡΥ γωνίᾳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΕΚ γωνία ἴση ἔσται τῇ ΡΖΥ γωνίᾳ, ἄρα ὅμοια (179) ἔσται τὰ τρίγωνα ΑΚΕ, ΡΥΖ, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΡΖ εὐθεῖαι, ὕψη δὲ αἱ ΚΟ, ΥΣ αἵ-

τινες,

Κεφ. ε. τίνες. Ταῦτ' ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΡΖ, οὕτως (181) ἡ ΚΟ πρὸς τὴν ΥΣ, καὶ ὡς τὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς ΡΖ τετράγωνον (222), οὕτω τὸ τῆς ΚΟ τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς ΥΣ τετράγωνον. Ἀλλὰ μὴν τὸ πολύγωνον ΑΗ ἐστι πρὸς τὸ πολύγωνον ΡΚ (223) ὡς τὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς ΡΖ τετράγωνον. Τὰ πολύγωνα ἄρα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὃν τὰ τῶν ἡμιδιαμέτρων ΚΟ, ΥΣ τετράγωνα. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

§. 225. Ἐπείπερ καὶ οἱ κύκλοι πολύγωνά εἰσιν, ὑπ' ἀπειραρίθμων πλευρῶν συγκροτούμενα· Δῆλον, ὅτι καὶ οἱ κύκλοι λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὃν τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων ἡμιδιαμέτρων, ἢ καὶ διαμέτρων.

Πρότασις ΚΖ'. Θεώρημα.

Σχ. 121. §. 226. Τὰ κανονικὰ πολύγωνα ΑΕΦΗΛ, ΡΖΓΚΙ περὶ κύκλον περιγεγραμμένα τὴν περίμετρον ἀνάλογον ἔχει ταῖς ἰδίαις ἡμιδιαμέτροις.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν τὰ κανονικὰ πολύγωνα ὅμοιά (148) ἐστι, πάντως ἡ ΑΕ ἔσται πρὸς τὴν ΡΖ, ὡς ἡ ΕΦ πρὸς τὴν ΖΓ, ἡ δὲ ΦΗ ἔσται πρὸς τὴν ΓΚ, ὡς ἡ ΗΛ πρὸς τὴν ΚΙ, καὶ τ. Ἅπαντα ἄρα τὰ ἡγούμενα, ἤτοι ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου ΑΗ, ἔσται πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα (167), ἤτοι πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου ΡΚ, ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων

μένων ΑΕ πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων ΡΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ Κεφ. ε. ΑΕ πρὸς τὴν ΡΖ (181), οὕτως ἡ ΚΟ ἡμιδιάμετρος, πρὸς τὴν ΥΣ ἡμιδιάμετρον, ἄρα καὶ ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου ΑΗ ἔσται πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ ΡΚ πολυγώνου, ὡς ἡ ΚΟ ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν ΥΣ ἡμιδιάμετρον. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

§. 227. Ἐπεὶ οὖν καὶ οἱ κύκλοι ὡς πολύγωνα λογίζονται ὑπ' ἀπειραρίθμων πλευρῶν συγκροτούμενα· δῆλον, ὅτι καὶ αἱ τῶν κύκλων περιφέρειαι λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὃν αἱ ἴδιαι ἡμιδιάμετροι, ἢ καὶ αἱ διάμετροι.

Τέλος τοῦ Δευτέρου Μέρους.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕ'ΡΟΣ ΤΡΙ'ΤΟΝ.

ΠΕΡΙ' ΣΤΕΡΕΩ'Ν.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Α'.

ΠΕΡΙ' ΟΡΩΝ.

Ο'ρος Α'.

Σχ. 122. §. 228. Ε'ν μετεώρῳ εὐθεῖα γραμμὴ ΦΕ κάθετός ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ΑΒΚΔ, ἐὰν ἐπὶ πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας ΕΒ, ΕΚ, ΕΔ, ΕΑ, καὶ ὅσας ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.

Ο'ρος

Ο'ρος Β'.

§. 229. Κ'ἂν μὲν ἡ ΦΓ εὐθεῖα μὴ ᾖ ὀρθὴ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ΚΕΟΠ, ἀπὸ δὲ τοῦ Φ σημείου κάθετος ἀχθῇ ἡ ΦΙ, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΙ, ἡ ΦΓΙ γωνία κλίσις λέγεται τῆς ΦΓ εὐθείας πρὸς τὸ ΚΟ ἐπίπεδον. Σχ. 123.

Ο'ρος Γ'.

§. 230. Ε'ὰν δύω ἐπίπεδα ΚΥ, ΓΟ τέμνῃ ἄλληλα, ἡ ΛΓ γραμμὴ κοινὴ τομὴ λέγεται. Σχ. 124.

Ο'ρος Δ'.

§. 231. Τὸ ΓΡΟΛ ἐπίπεδον ὀρθὸν λέγεται πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΚΣΥΕ, ἐὰν αἱ πρὸς τὴν κοινὴν τομὴν κάθετοι ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι ΦΑ, ΙΗ κάθετοι ὦσι τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ΚΣΥΕ. Σχ. 124.

Ο'ρος Ε'.

§. 232. Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι τὰ ἐκβαλλόμενα ἐπ' ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ μηδέποτε συμπίπτοντα, ἀλλὰ τὴν αὐτὴν ἀεὶ πρὸς ἄλληλα διάστασιν τηροῦντα.

Ο'ρος ϛ'.

§. 233. Πρίσμα δέ ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ τοσούτων ἐπιπέδων συγκροτούμενον, ὅσας περιέχει πλευρὰς ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος, οἷον τὸ σχῆμα ΑΟ. Σχ. 125.

Ο'ρος

Ὅρος Ζ'.

Σχ. 126. §. 234. Παραλληλεπίπεδόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἓξ παραλληλογράμμων περατούμενον, οἷον τὸ ΕΚ σχῆμα, ὅπερ ὀρθὸν λέγεται, ἐὰν τὰ περιέχοντα ἐπίπεδα ὀρθὰ ᾖ τῇ βάσει, πλάγιον δὲ ἐὰν πλάγια. Τὰ δὲ ἀπεναντίον παραλληλόγραμμα ἴσα, ὅμοια, καὶ παράλληλά ἐστιν.

Ὅρος Η'.

Σχ. 127. §. 235. Κύβος δέ ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων τῷ μεγέθει περιεχόμενον, οἷον τὸ ΓΛ σχῆμα. Τὸ δὲ ἐν ἐκείνῳ σημεῖον Ι, ὅπερ ἀπὸ τῶν ἓξ τετραγώνων τῶν τὸν κύβον περιεχόντων ἴσως ἀφιστάμενόν ἐστι, κέντρον καλεῖται τοῦ κύβου. τὰ δὲ ἀπεναντίον τετράγωνα παράλληλά ἐστιν.

Ὅρος Θ'.

Σχ. 128. §. 236. Πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ τοσούτων τὸ πλῆθος ἐπιπέδων περιεχόμενον, καὶ τὸ Κ σημεῖον συμπιπτόντων, ὅσας περιέχει πλευρὰς ἡ ΦΕΑ βάσις, οἷον τὸ ΚΦΕΑ σχῆμα. ἡ δὲ ΚΣ εὐθεῖα ἄξων τῆς Πυραμίδος λέγεται.

Ὅρος Ι'.

Σχ. 128. §. 237. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων, ἢ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν περιεχομένη, οἷον ἡ Κ γωνία.

Ὅρος

Ὅρος ΙΑ'.

§. 238. Δύο στερεαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐὰν ὑπὸ ἐπιπέδων ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει περιέχωνται.

Ὅρος ΙΒ'.

§. 239. Κῶνος δέ ἐστι σχῆμα στερεὸν, οὗ βάσις μὲν Σχ. 129.
κύκλος τὶς, Κορυφὴ δὲ εἰς σημεῖον λήγουσα, ἡ δὲ Κορυφὴ Ρ. καὶ ἡ τῆς βάσεως περιφέρεια ΑΣΕ ὑπ' ἀπειραρίθμων εὐθειῶν γραμμῶν συζεύγνυνται, οἷον τὸ ΑΡΕΣ σχῆμα.

Ὅρος ΙΓ'.

§. 240. Ἄξων τοῦ Κώνου ἐστὶν ἡ ΡΚ εὐθεῖα ἀπὸ Σχ. 129.
τῆς κορυφῆς Ρ πρὸς τὸ κέντρον Κ τῆς βάσεως ἀχθεῖσα, ἥτις ἐὰν κάθετος ᾖ τῇ βάσει, ὀρθογώνιός ἐστιν ὁ Κῶνος, ἐὰν δὲ μὴ, ὀξυγώνιος λέγεται.

Ὅρος ΙΔ'.

§. 241. Σφαῖρα δέ ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπ' ἀπειρα- Σχ. 130
ρίθμων ὁμοκέντρων κύκλων, καὶ ἴσων τῷ μεγέθει περιεχόμενον, οἷον τὸ σχῆμα ΚΡ.

Ὅρος ΙΕ'.

§. 242. Ἄξων τῆς Σφαίρας ἐστὶν ἡ Διάμετρος τῶν Σχ. 130.
περιεχόντων κύκλων, οἷον ἡ ΑΣ εὐθεῖα, Κέντρον δὲ τῆς Σφαίρας ἐστὶ τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ τῶν περιεχόντων κύκλων, τουτέστι τὸ Β σημεῖον.

Ὅρος

Ὅρος Ις'.

§. 243. Κῶνοι καὶ Κύλινδροι ὀρθοί, ὅμοιοι λέγονται, ὅταν οἵ τε ἄξονες, καὶ αἱ τῶν βάσεων διάμετροι ἀνάλογοι ὦσιν· οἱ δὲ πλάγιοι κῶνοι, καὶ κύλινδροι ὅμοιοί εἰσιν, ἐὰν οἵτε ἄξονες καὶ αἱ τῶν βάσεων διάμετροι ἀνάλογοι ὦσι, καὶ πρὸς τὰς ἰδίας βάσεις ἴσως κλίνωσιν.

Ὅρος ΙΖ'.

§. 244. Ὅμοια στερεά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων, καὶ ἴσων τῷ πλήθει περιεχόμενα.

Ὅρος ΙΗ'.

§. 245. Ὅμοια δὲ καὶ ἴσα στερεά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ἴσων τῷ πλήθει, καὶ τῷ μεγέθει περιεχόμενα.

Ὅρος ΙΘ'.

Σχ. 131. §. 246. Κύλινδρός ἐστι σχῆμα στερεόν, οὗ ἡ βάσις, καὶ τὸ ὕψος ὑπὸ δύω παραλλήλων καὶ ἴσων τῷ μεγέθει περατοῦνται κύκλων, ὧν αἱ περιφέρειαι ὑπ' ἀπειραρίθμων εὐθειῶν γραμμῶν συζευγνύμεναί εἰσιν. Ἡ δὲ ΡΚ εὐθεῖα, ἡ διὰ τῶν κυκλικῶν κέντρων διαχθεῖσα, ἄξων λέγεται τοῦ κυλίνδρου, ἥτις ἐὰν κάθετος ᾖ τῇ βάσει, ὀρθὸν τὸν κύλινδρον καλεῖν εἰώθασιν, ἐὰν δὲ μή, πλάγιον.

ΚΕ-

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΠΕΡΙ ΣΥΜΠΤΩΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ.

Πρότασις Α'. Θεώρημα.

§. 247. Εὐθείας Γραμμῆς μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ κεῖσθαι ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ ἀδύνατον. Σχ. 132.

Δεῖξις.

Ἔστω, εἰ δυνατόν, τῆς ΕΦΓ εὐθείας τὸ μὲν ΕΦ μέρος ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ΑΚΙΗ, τὸ δὲ ΦΓ ἐν τῷ μετεώρῳ ΛΣΟΡ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΦ εὐθεῖα κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΚΙΗ, αὕτη ἐκβληθεῖσα ἐπ' εὐθείας (39) κατὰ τὸ Π σημεῖον, εὐθεῖα ἐξαχθήσεται ἡ ΕΦΠ. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΕΦΓ γραμμὴ εὐθεῖά (ἐξ ὑπ.) ἐστι, δύω ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΕΦΠ, ΕΦΓ διὰ δύω σημείων Ε, Φ διέρχονται, οὐδὲ ἐπ' ἀλλήλας ἐφαρμόσαι, ὅπερ ἄτοπον. Εὐθείας ἄρα γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν

τῷ

Κεφ. β'. τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

Σχ. 133. §. 248. Ὅλον ἄρα τὸ τρίγωνον ΡΑΚ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ἐστίν. Εἰ γὰρ μέρος μέν τι τούτου τὸ ΡΣΗΚ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ εἴη αὖ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι τὸ ΣΑΗ ἐν τῷ μετεώρῳ, πάντως τῆς ΑΡ εὐθείας μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ αὖ ἔκειτο ἐπιπέδῳ, ὅπερ (247) ἄτοπον.

Πόρισμα Β'.

Σχ. 134. §. 249. Καὶ ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΚΑ, ΣΦ ἀλλήλας κατὰ τὸ Ρ σημεῖον τέμνωσιν, ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ἔσονται. Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς ΚΣ εὐθείας, αἱ ΚΡ, ΡΣ εὐθεῖαι ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ ΚΡΣ τριγώνου (248) κεῖνται. Ταῦτ' ἄρα καὶ ὅλαι αἱ εὐθεῖαι ΚΑ, ΣΦ ἐν τῷ αὐτῷ τοῦ τριγώνου ἔσονται (247) ἐπιπέδῳ, τουτέστιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.

Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Σχ. 135. §. 250. Ἡ ΗΙ εὐθεῖα τὰς ΑΓ, ΦΣ εὐθείας, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσας, τέμνουσα, ἐν τῷ αὐτῷ καὶ ἐκείναις ἔσται ἐπιπέδῳ.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν ἀλλήλας τέμνουσιν αἱ ΗΙ, ΑΓ εὐθεῖαι, αὗται ἐν τῷ αὐτῷ ἔσονται (249) ἐπιπέδῳ. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν λόγον καὶ αἱ ΗΙ, ΦΣ εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔσονται. Ἡ ΗΙ ἄρα ἐν ἑκα-

τέροις

τέροις κεῖται τοῖς ἐπιπέδοις τῶν ΑΓ, ΦΣ εὐθειῶν. Κεφ. β'. Ἀλλ' αὗται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (ἐξ ὑπ.) εἰσίν, ἄρα καὶ ἡ ΗΙ ἐν τῷ αὐτῷ τούτῳ ἐπιπέδῳ ἔσται. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

§. 251. Ἐὰν ὁποιονοῦν ἐπίπεδον ΕΦΗΓ τέμνῃ Σχ. 136. δύο παράλληλα ἐπίπεδα ΑΣ, ΚΡ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ ΕΦ, ΓΗ παράλληλοι ἔσονται.

Δεῖξις.

Εἰ γὰρ δυνατὸν μὴ ἔστωσαν παράλληλοι αἱ εὐθεῖαι ΕΦ, ΓΗ, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ οὖσαι ἐπιπέδῳ ΕΦΗΓ συμπεσοῦνται κατὰ τὸ Ι σημεῖον (97). Ἐπεὶ οὖν αἱ ΕΦ, ΓΗ εὐθεῖαι ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ΑΣ, ΚΡ εἰσίν, ἄρα, τῶν ἐπιπέδων ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλομένων, καὶ ὅλαι αἱ εὐθεῖαι ΕΦΙ, ΓΗΙ ἐν τοῖς αὐτοῖς ἔσονται (247) ἐπιπέδοις. Διὸ καὶ ταῦτα καὶ τὰ ἐπίπεδα κατὰ τὸ Ι σημεῖον συμπεσοῦνται, ὅπερ (232) ἀδύνατον. Παράλληλοι ἄρα ἔσονται αἱ εὐθεῖαι ΕΦ, ΓΗ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Δ'. Λῆμμα.

§. 252. Ἐὰν ἐκ τῆς Ρ κορυφῆς τριγώνου ἰσοσ- Σχ. 137.
κελοῦς ΑΡΚ ἀχθῇ ἡ ΡΣ εὐθεῖα τὴν ΑΚ βά- Σχ. 138.
σιν, ὡς ἔτυχε, τέμνουσα κατὰ τὸ Σ σημεῖον, τὸ ἀπὸ τῆς ΡΑ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ συνάψει τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΣ τετραγώνου, καὶ τοῦ ΑΣΚ ὀρθογωνίου.

Δεῖ-

Δεῖξις.

Σχ. 137. Α'. Ἔςω ἡ ΡΣ κάθετος πρὸς τὴν ΑΚ βάσιν, ἥτις δίχα (117) κατὰ τὸ σημεῖον Σ τμηθήσεται. Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ ΑΣ, ΣΚ εὐθεῖαι, τὸ ἀπὸ τῆς ΑΣ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΑΣΚ. Κοινοῦ δὲ προστεθέντος τοῦ ΡΣ τετραγώνου· Ἡ συνάψις τῶν τετραγώνων ΡΣ, ΑΣ ἴσα δύναται τῇ συνάψει τοῦ ΡΣ τετραγώνου, καὶ τοῦ ΑΣΚ ὀρθογωνίου. Ἀλλὰ μὴν τὰ ΡΣ, ΑΣ τετράγωνα ἴσα (215) δύναται τῷ ΡΑ τετραγώνῳ, ἄρα τὸ ΡΑ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῇ συνάψει τοῦ ΡΣ τετραγώνου, καὶ τοῦ ΑΣΚ ὀρθογωνίου.

Σχ. 138. Β'. Ἔςω ἡ ΡΣ πλάγιος πρὸς τὴν ΑΚ βάσιν, πρὸς ἣν ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ρ σημείου κάθετος ἡ ΡΕ, ἥτις δίχα ταύτην κατὰ τὸ Ε σημεῖον (117) τεμεῖ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ εὐθεῖα εἰς ἴσα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἄνισα κατὰ τὸ Σ ἐτμήθη, τὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον ἴσα (205) δύναται τῇ συνάψει τοῦ ΣΕ τετραγώνου, καὶ τοῦ ΑΣΚ ὀρθογωνίου· Κοινοῦ δὲ προστεθέντος τοῦ ΡΕ τετραγώνου· Τὰ ΑΕ, ΡΕ τετράγωνα, ἤτοι (200) τὸ ΡΑ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ΣΕ ΡΕ τετραγώνοις σὺν τῷ ΑΣΚ ὀρθογωνίῳ, τουτέστι τῷ ΡΣ τετραγώνῳ (200) μετὰ τοῦ ΑΣΚ ὀρθογωνίου. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Ε'. Θεώρημα.

Σχ. 139. §. 253. Ἐὰν Εὐθεῖα γραμμὴ ΑΚ κάθετος ᾖ πρὸς δύο εὐθείας ΘΕ, ΣΧ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἀχθείσας, κάθετος ἔσται καὶ πρὸς πάσας διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἀχθείσας εὐθείας.

Δεῖ-

Δεῖξις.

Εἰλήφθωσαν αἱ ΚΕ, ΚΡ εὐθεῖαι ἴσαι, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΡΕ, ἥτις τὴν ΤΦ τέμνει κατὰ τὸ Η σημεῖον, ἤχθωσαν αἱ ΑΡ, ΑΗ, ΑΕ. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΚ, ΚΡ πλευραὶ τοῦ ΑΚΡ τριγώνου ἴσαι (ἐκ κατ.) εἰσὶ ταῖς ΑΚ, ΚΕ πλευραῖς τοῦ ΑΚΕ τριγώνου, ἡ δ' ὀρθὴ γωνία ΑΚΡ ἴση (ἐξ ὑπ.) ἐστὶ τῇ ΑΚΕ ὀρθῇ γωνίᾳ, καὶ ἡ ΑΡ πλευρὰ ἴση (71) ἔσαι· καὶ διὰ ταῦτα τὸ ΡΑΕ τρίγωνον ἰσοσκελές ἐστιν. Ἡ συνάψις ἄρα τοῦ ΑΗ τετραγώνου, καὶ τοῦ ΡΗΕ ὀρθογωνίου ἴση (252) ἐστὶ τῷ ΑΡ τετραγώνῳ, ἤτοι (200) τῇ συνάψει τῶν ΑΚ, ΚΡ τετραγώνων. Ἀλλ' ἐν τῷ Ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ ΡΚΕ, τὸ ΚΡ τετράγωνον ἴσον (252) ἐστὶ τῇ συνάψει τοῦ ΚΗ τετραγώνου καὶ τοῦ ΡΗΕ ὀρθογωνίου, ἄρα ἡ συνάψις τοῦ ΑΗ τετραγώνου καὶ τοῦ ΡΗΕ ὀρθογωνίου ἴσα δύναται τῇ συνάψει τῶν ΑΚ, ΚΗ τετραγώνων καὶ τοῦ ΡΗΕ ὀρθογωνίου. Κοινοῦ δ' ἀφαιρεθέντος τοῦ ΡΗΕ ὀρθογωνίου, τὸ ΑΗ τετράγωνον ἴσα δύναται τοῖς ΑΚ, ΚΗ τετραγώνοις· Διὰ δὲ ταῦτα ὀρθὴ (212) ἐστιν ἡ ΑΚΗ γωνία, ἡ δὲ ΑΚ κάθετός ἐστι τῇ ΤΚΦ εὐθείᾳ, καὶ πάσῃ ἄλλῃ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἀχθείσῃ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ς'. Πρόβλημα.

§. 254. Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἐν μετεώρῳ σημείου Ο πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ΑΓ κάθετον γραμμὴν ἀγαγεῖν τὴν ΟΡ. Σχ. 140.

 Δεῖ-

Δεῖξις.

Ἐπεζεύχθω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΦΛ εὐθεῖα, ἐφ' ἧς καθέτω ἀπὸ μὲν τοῦ Ο σημείου κάθετος ἡ ΟΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ Σ σημείου κάθετος ἡ ΣΗ, πρὸς ἣν διήχθω ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο κάθετος εὐθεῖα ἡ ΟΡ, ἥτις κάθετος δειχθήσεται καὶ πρὸς τὸ ΑΓ ἐπίπεδον. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΟΛ, ΛΡ. Ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν (ἐκ κατ.) ἡ ΟΗΛ γωνία, τὸ ΟΛ τετράγωνον ἴσα (200) δύναται τοῖς τετραγώνοις ΟΗ, ΗΛ συνάμα ληφθεῖσι. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν λόγον, καὶ τὸ ΟΗ τετράγωνον ἴσα (200) δύναται τῇ συνάψει τῶν τετραγώνων ΟΡ, ΡΗ. Τὸ τετράγωνον ἄρα ΟΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς τετραγώνοις ΟΡ, ΡΗ, ΗΛ. Ἔτι δὲ, ὀρθῆς οὔσης (ἐκ κατ.) τῆς γωνίας ΡΗΛ, τὰ δύω τετράγωνα ΡΗ, ΗΛ ἴσα (200) δύναται τῷ ΡΛ τετραγώνῳ. Τὸ τετράγωνον ἄρα ΟΛ ἴσον ἐστὶ τῇ συνάψει τῶν τετραγώνων ΟΡ, ΡΛ, καὶ διὰ ταῦτα ὀρθή (211) ἐστι καὶ ἡ γωνία ΟΡΛ. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ γωνία ΟΡΗ ὀρθὴ κατεσκεύασαι, ἄρα ἡ ΟΡ εὐθεῖα κάθετός ἐστι πρὸς δύω εὐθείας ΡΛ, ΡΗ, διόπερ καὶ πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (253) ΑΓ κάθετος ἐσαι. Ο. Ε. Π.

Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Σχ. 123. §. 255. Ἡ ΦΙ εὐθεῖα κάθετος ἀχθεῖσα ἀπὸ τοῦ Φ σημείου πρὸς τὸ ΚΟ ἐπίπεδον πασῶν βραχυτάτη ἐστὶ τῶν μεταξὺ τοῦ Φ σημείου καὶ τοῦ ΚΟ ἐπιπέδου ἀποτεινομένων εὐθειῶν.

Δεῖξις.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Φ σημείου πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἡ ΦΓ εὐθεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΙ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΦΙ εὐθεῖα κάθετός ἐστι τῷ ΚΟ ἐπιπέδῳ, ἡ ΦΙΓ γωνία ὀρθή (228) ἐστι· καὶ διὰ ταῦτα ἡ ΦΓΙ γωνία ὀξεῖα (105) ἐστιν, ἡ δὲ ΦΙ πλευρὰ ἐλάσσων (113) ἔσαι τῆς ΦΓ πλευρᾶς. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον δείξω τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΦΙ καὶ πάσης ἄλλης εὐθείας ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἠγμένης ἐλάσσονα εἶναι· Πασῶν ἄρα βραχυτάτη ἐστὶν ἡ ΦΙ κάθετος εὐθεῖα. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

§. 256. Ἐν παντὶ ἄρα στερεῷ σχήματι ΚΦΕΑ, ἡ ΚΣ κάθετος ἀπὸ τῆς κορυφῆς Κ πρὸς τὴν βάσιν ΦΑΕ ἀχθεῖσα τοῦ στερεοῦ τὸ ὕψος παρίστησι. Σχ. 128.

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

§. 257. Ἐὰν δύω εὐθεῖαι ΙΓ, ΟΕ ἐν μετεώρῳ κάθετοι ὦσι τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ΚΗ, αὗται παράλληλοι ἔσονται. Σχ. 141.

Δεῖξις.

Ἐπιζευχθείσης τῆς ΓΕ εὐθείας, καθέτω ἐπὶ ταύτης ἡ ΕΦ εὐθεῖα τῇ ΙΓ ἴση, καὶ διήχθωσαν αἱ ΕΙ, ΦΙ, ΦΓ εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν τὰ τρίγωνα ΙΓΕ, ΓΕΦ τὰς δύω πλευρὰς ΙΓ, ΓΕ ἴσας ἔχει (ἐκ κατ.) ταῖς δυσὶ πλευραῖς ΦΕ, ΕΓ, τὴν δὲ ΙΓΕ γωνίαν ἴσην (228) τῇ ΦΕΓ

Κεφ. β'. γωνία, πάντως καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ΙΕ, ΓΦ ἴσας (71) ἀλλήλαις ἕξει. Τὰ τρίγωνα ἄρα ΙΓΦ, ΙΕΦ, Ἰσόπλευρά ἐστι, καὶ διὰ ταῦτα αἱ γωνίαι ΙΓΦ, ΙΕΦ ἴσαι (58) εἰσιν. ἀλλ' ἡ γωνία ΙΓΦ ὀρθὴ (228) ἐστιν, ἄρα καὶ ἡ γωνία ΙΕΦ ὀρθὴ ἔσαι. Ὀρθαὶ δὲ κατεσκευάσθησαν καὶ αἱ Γωνίαι ΓΕΦ, ΟΕΦ, ἡ ΦΕ ἄρα εὐθεῖα κάθετος ἔσαι πρὸς τρεῖς εὐθείας ΕΓ, ΕΙ, ΕΟ, αἵ τινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (253) κεῖνται. Ἔτι δὲ καὶ ἡ ΙΓ εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (247) τῶν ΕΙ, ΕΓ εὐθειῶν, ἄρα αἱ ΙΓ, ΟΕ εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κεῖνται· διὰ δὲ ταῦτα, τῶν ἐντὸς γωνιῶν ΙΓΕ, ΟΕΓ ὀρθῶν (228) οὐσῶν αἱ εὐθεῖαι ΙΓ, ΟΕ παράλληλοι (94) ἔσονται. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

Σχ. 141. §. 258. Ἐὰν δύω παραλλήλων ΙΓ, ΟΕ μία ἡ ΙΓ κάθετος ᾖ τῷ ΚΗ ἐπιπέδῳ, καὶ ἡ ἑτέρα ΟΕ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κάθετος ἔσαι.

Δεῖξις.

Διὰ τῶν ΙΓ, ΟΕ εὐθειῶν διήχθω ἐπίπεδον τὸ ΓΙΟΕ, ὅπερ τεμεῖ τὸ ΚΗ ἐπίπεδον ἐν εὐθείᾳ γραμμῇ ΓΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΙΕ, ἥτις κεῖται (249) ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ΓΙΟΕ. Εἶτα καθέσθω ἐν τῷ ΚΗ ἐπιπέδῳ τῇ ΓΕ κάθετος ἡ ΕΦ, ἴση τῇ ΙΓ, καὶ ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΦΙ, ΦΓ εὐθειῶν, ὀρθὴ ἔσαι (257) ἡ ΦΕΙ γωνία· Ἀλλὰ μὴν ὀρθὴ κατεσκευάσθη καὶ ἡ ΦΕΓ γωνία, ἄρα ἡ ΦΕ εὐθεῖα κάθετός ἐστι πρὸς δύω εὐθείας ΕΙ, ΕΓ, καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΓΙΟΕ (253),

Ταῦτ'

Ταῦτ' ἄρα ὀρθή ἐστιν ἡ ΦΕΟ γωνία (228), ἡ γωνία ΟΕΦ. Διὰ δὲ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς Κεφ. β'. ΙΓ, ΟΕ εὐθείας, καὶ ὀρθὴν τὴν γωνίαν (228) ΙΓΕ, ὀρθὴ ἔσαι (84) καὶ ἡ γωνία ΟΕΓ. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΟΕ κάθετός ἐστι πρὸς δύω εὐθείας ΕΦ, ΕΓ, διόπερ καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον (253) ΚΗ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 259. Τῷ δοθέντι ἄρα ἐπιπέδῳ ΚΗ ἀπὸ τοῦ Σχ. 141. ἐν αὐτῷ δοθέντος σημείου Γ κάθετος γραμμὴ ΓΙ εὐμαρῶς ἐγερθήσεται, ἐὰν ἀπὸ τοῦ Ο σημείου ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ληφθέντος ἀχθῇ (254) κάθετος ἡ ΟΕ, καὶ ταύτῃ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου παράλληλος ἐγερθῇ ἡ ΓΙ εὐθεῖα.

Πόρισμα Β'.

§. 260. Ἐὰν ἄρα δύω εὐθεῖαι ΚΟ, ΗΦ ὦσι Σχ. 142. παράλληλοι τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΓΡ, μὴ οὔσῃ ἐν τῷ αὐτῷ τούτων ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. Ἐὰν γὰρ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν ΚΟ, ΓΡ παραλλήλων ἀχθῇ ἡ ΑΛ εὐθεῖα κάθετος, (75) τῇ ΓΡ, καὶ ταύτῃ ἐγερθῇ ἀπὸ τοῦ Λ σημείου (61) κάθετος ἡ ΛΕ, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΕ, ἡ ΓΡ εὐθεῖα κάθετος ἔσαι πρὸς δύω εὐθείας ΛΑ, ΛΕ, διὸ καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον (253) τοῦ ΑΛΕ τριγώνου. Αἱ ΚΟ, ΗΦ ἄρα εὐθεῖαι, τῇ ΓΡ παράλληλοι, κάθετοι ἔσονται τῷ αὐτῷ (258) ἐπιπέδῳ, καὶ διὰ ταῦτα ἀλλήλαις παράλληλοι (257) ἔσονται.

Κεφ. β'.

Πρότασις Ι'. Θεώρημα.

Σχ. 143. §. 261. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΟΕ κάθετος ᾖ πρὸς δύω ἐπίπεδα ΜΝ, ΡΣ, τὰ ἐπίπεδα παράλληλα ἔσαι.

Δεῖξις.

Εἰλήφθω ἐν τῷ ΜΝ ἐπιπέδῳ τὸ Φ σημεῖον, ἀπὸ δὲ τούτου ἤχθω πρὸς τὸ ἕτερον ἐπίπεδον ΡΣ κάθετος ἡ ΦΗ, ἥτις ἔσαι (257) τῇ ΟΕ παράλληλος, καὶ τῷ ΜΝ ἐπιπέδῳ (258) κάθετος. Ἐπιζευχθεισῶν δὲ τῶν εὐθειῶν ΟΦ, ΕΗ, ὀρθαὶ ἔσονται αἱ τέσσαρες γωνίαι Ε, Η, Φ, Ο. Τὸ τετράπλευρον ἄρα ΕΟΦΗ ὀρθογώνιον (26) ἐστιν, ἡ δὲ ΦΗ εὐθεῖα, τῷ ΡΣ ἐπιπέδῳ κάθετος, ἴση ἔσαι τῇ ΟΕ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἀχθείσῃ τῷ ΡΣ ἐπιπέδῳ. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον δείξω, καὶ πάσῃ ἄλλῃ εὐθείᾳ μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων ἀχθείσῃ ἴσην εἶναι τὴν ΟΕ εὐθεῖαν. καὶ διὰ ταῦτα τὰ δύω ἐπίπεδα ΜΝ, ΡΣ παράλληλα (232) ἔσαι. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΑ'. Θεώρημα.

Σχ. 143. §. 262. Ἐὰν δύω εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΥ ἀλλήλων ἁπτόμεναι παράλληλοι ὦσι πρὸς δύω ἀλλήλων ἁπτομένας εὐθείας ΡΙ, ΡΠ, τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα παράλληλα ἔσαι.

Δεῖξις.

Ἀπὸ τοῦ Ο σημείου ἤχθω πρὸς τὸ ΡΣ ἐπίπεδον

(254) κάθετος ἡ ΟΕ εὐθεῖα, ἔτι δὲ καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΛ παράλληλος τῇ ΡΙ. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΟΑ, ΕΛ τῇ ΡΙ παράλληλοί εἰσι, καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι (260) ἔσονται, διόπερ αἱ ἐντὸς γωνίαι ΑΟΕ, ΟΕΛ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι (85) εἰσίν. Ἀλλὰ μὴν ἡ ΟΕΛ γωνία ὀρθὴ (228) ἐστιν, ἄρα καὶ ἡ ΑΟΕ ὀρθὴ ἔσαι. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον καὶ ἡ ΥΟΕ γωνία ὀρθὴ δειχθήσεται. Ἡ ΕΟ ἄρα εὐθεῖα, κάθετος οὖσα πρὸς δύω εὐθείας ΟΑ, ΟΥ, κάθετος (253) ἔσαι καὶ πρὸς τὸ ΜΝ ἐπίπεδον, ἔστι δὲ καὶ πρὸς τὸ ΡΣ ἐπίπεδον (ἐκ κατ.) κάθετος, ἄρα πρὸς ἑκάτερα τὰ ἐπίπεδα κάθετος ἔσαι. καὶ διὰ ταῦτα τὰ ΜΝ, ΡΣ ἐπίπεδα παράλληλα (261) ἔσαι. Ο. Ε. Δ. Κεφ. β'.

Πρότασις ΙΒ'. Λῆμμα.

§. 263. Ἐὰν δύω Εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΥ ἀλλήλων ἁπτόμεναι παράλληλοι ὦσι πρὸς δύω ἀλλήλων ἁπτομένας εὐθείας ΡΙ, ΡΠ, ὦσι δὲ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, αὗται ἴσας περικλείουσι γωνίας ΑΟΥ, ΙΡΠ. Σχ. 144.

Δεῖξις.

Διήχθω διὰ τῶν σημείων Ο, Ρ εὐθεῖα ἡ ΟΗ. Ἡ ἐντὸς γωνία ΑΟΗ ἴση (85) ἐστὶ τῇ ἐκτὸς γωνίᾳ ΙΡΗ. Ὁμοίως δὴ δείξω καὶ τὴν ἐντὸς γωνίαν ΥΟΗ ἴσην εἶναι τῇ ἐκτὸς γωνίᾳ ΠΡΗ. Ὅλη ἄρα ἡ γωνία ΑΟΥ ὅλῃ τῇ γωνίᾳ ΙΡΠ ἴση ἔσαι. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Σχ. 143. §. 264. Ἐὰν δύω εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΥ, ἀλλήλων ἐφαπτόμεναι, παράλληλοι ὦσι πρὸς δύω ἀλλήλων ἐφαπτομένας εὐθείας ΡΙ, ΡΠ, καὶ μὴ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, αὗται ἴσας περιλαμβάνουσι γωνίας ΑΟΥ, ΙΡΠ.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν αἱ δύω εὐθεῖαι ΑΟ, ΟΥ παράλληλοί εἰσι πρὸς δύω εὐθείας ΡΙ, ΡΠ, τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα παράλληλα (232) ἐστί. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ τῶν σημείων Ο, Φ, Γ πρὸς τὸ ΡΣ ἐπίπεδον ἀχθῶσι κάθετοι αἱ ΟΕ, ΦΗ, ΓΛ, αὗται ἴσαι (232), καὶ παράλληλοι (237) ἔσονται. διόπερ καὶ αἱ ταύτας ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι ΟΦ καὶ ΕΗ, ΦΓ καὶ ΗΛ, ΟΓ καὶ ΕΛ ἴσαι τε καὶ παράλληλοι ἔσονται. Τὰ τρίγωνα ἄρα ΓΟΦ, ΛΕΗ ἰσόπλευρά ἐστιν, ἡ δὲ ΓΟΦ γωνία, ἢ ἡ ταύτῃ ἴση γωνία ΑΟΥ ἴση (58) ἐστὶ τῇ γωνίᾳ ΛΕΗ. Ἀλλὰ μὴν (ἐξ ὑπ.) αἱ ΡΠ, ΕΗ εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσι τῇ ΟΦ εὐθείᾳ, ἄρα καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι (260) ἔσονται. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν τρόπον δείξω καὶ τὰς ΡΙ, ΕΛ εὐθείας παραλλήλους εἶναι. Ταὐτ' ἄρα ἡ ΛΕΗ γωνία ἴση (263) ἐστὶ τῇ ΙΡΠ γωνίᾳ. Ἀλλὰ μὴν ἡ ΑΟΥ γωνία ἴση ἐδείχθη τῇ ΛΕΗ γωνίᾳ, ἄρα καὶ τῇ ΙΡΠ γωνίᾳ ἴση (50) ἐστί. Ο. Ε. Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ.

ΠΕΡΙ ΣΥΜΠΤΩΜΑΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΩΝ ΤΕ ΚΑΙ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ.

Πρότασις ΙΔ'. Θεώρημα.

§. 265. Ἐὰν διὰ τῶν διαγωνίων ΑΚ, ΕΓ ἐπίπεδόν τι διέλθῃ τὸ ΕΑΚΓ, τὸ παραλληλεπίπεδον ΦΛ διαιρεθήσεται εἰς δύω ἴσα καὶ ὅμοια πρίσματα. Σχ. 145.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ τέμνει τὰς παραλλήλους ΑΡ, ΛΚ, ἡ ΡΑΚ γωνία τῇ ΑΚΛ γωνίᾳ ἴση (85) ἐστί. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν λόγον καὶ ἡ ΑΚΡ γωνία τῇ ΚΑΛ γωνίᾳ ἴση ἐστί. Τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΡΚ ἴσον (110), καὶ ὅμοιόν (178) ἐστι τῷ ΑΛΚ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τρίγωνα ΕΦΓ, ΕΗΓ ἴσα καὶ ὅμοια ἐστί. Ἴσα δὲ καὶ ὅμοιά ἐστι

Κεφ. γ'. (234) τὰ ἀπ' ἐναντίον παραλληλόγραμμα ΡΑΕΦ, ΚΛΗΓ, ἔτι δὲ καὶ τὰ ΡΚΓΦ, ΑΛΗΕ. Τὸ δὲ ΑΚΓΕ παραλληλόγραμμον ἑκατέρῳ τοῦ πρίσματι κοινόν ἐστιν. Ἄρα τὰ πρίσματα ΑΡΚΓΦΕ, ΑΛΚΓΗΕ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περατοῦται ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει, καὶ διὰ ταῦτα ἴσα ἀλλήλοις (245) καὶ ὅμοια ἔσαι. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

§. 266. Πᾶν ἄρα πρίσμα ἥμισύ ἐστι τοῦ ἰσοϋψοῦς καὶ διπλασίαν βάσιν ἔχοντος παραλληλεπιπέδου.

Πρότασις ΙΕ'. Θεώρημα.

Σχ. 146. §. 267. Τὰ ἰσοϋψῆ καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα παραλληλεπίπεδα ΦΠΚΗΛΟΓΑ, ΦΡΞΗΛΥΕΑ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Δεῖξις.

Τοῦ παραλληλεπιπέδου ΦΠΚΗΛΟΓΑ δίχα τμηθέντος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΣΧΡΕ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΡΗ, ΕΛ εὐθεῖαι. Τὸ πρίσμα ΦΡΧΣΕΑ ἥμισύ (266) ἐστι τοῦ παραλληλεπιπέδου ΦΠΡΧΣΕΓΑ, ὁμοίως δὲ καὶ τὸ πρίσμα ΧΡΗΛΕΣ ἥμισύ (266) ἐστι τοῦ παραλληλεπιπέδου ΧΡΚΗΛΟΕΣ. Ὅλον ἄρα τὸ πρίσμα ΦΡΗΛΕΑ ἥμισύ ἐστι τοῦ παραλληλεπιπέδου ΦΠΚΗΛΟΓΑ, ἔστι δ' ἥμισυ καὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΦΡΞΗΛΥΕΑ, ἄρα τὰ παραλληλεπίπεδα ΦΠΚΗΛΟΓΑ, ΦΡΞΗΛΥΕΑ ἴσα ἀλλήλοις (51) ἐστίν. Ο. Ε. Δ.

Πρό-

Πρότασις Ις'. Θεώρημα.

§. 268. Παντὸς ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου ΡΓ τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΑΡΟΕ ἐπὶ τὸ ΡΑ ὕψος. Σχ. 147.

Δεῖξις.

Αἱ τῆς βάσεως πλευραὶ καὶ τὸ ὕψος εἰς ἴσα μέρη διαιρεθήτωσαν, ὧν τρία μὲν περιεχέτω ἡ ΡΛ, δύο δ' ἡ ΡΟ, καὶ τέτταρα, ἡ ΡΑ, τουτέστιν ἡ βάσις ΑΡΟΕ δὶς τέτταρα, ἤτοι 8 περιεχέτω μέρη. Εἶτα ἐννοείσθω τὴν αὐτὴν βάσιν παραλλήλῳ κινήσει οὕτω πρὸς τὰ ἄνω καὶ τὸ ΛΣΓ ἐπίπεδον φέρεσθαι, ὥστε τὸ ὅλον παραλληλεπίπεδον καταγράψαι. Ἐκ τῆς κατασκευῆς δῆλον τὸ παραλληλεπίπεδον ΡΓ τρὶς 8, ἤτοι 24 κυβικὰ μέρη περιέχειν, ὅπερ ἐστὶ τὸ γινόμενον ἐκ τῆς βάσεως ΑΡΟΕ ἐπὶ τὸ ΡΛ ὕψος. Τὸ στερεὸν ἄρα τοῦ ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 269. Καὶ τοῦ κύβου ἄρα ΡΟ, παραλληλεπιπέδου (235) ὄντος, τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΞΡΛΟ, ἐπὶ τὸ ὕψος ΞΓ, ἢ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΞΟ. Σχ. 127.

Πόρισμα Β'.

§. 270. Παντὸς οὖν ἀκανονίστου σώματος Σ τὸ στερεὸν θηρεύειν μεμαθήκαμεν. Εἰλήφθω τοίνυν σκεῦός τι Σχ. 148.

Κεφ. γ'. σκεῦός τι τὸ ΧΔΙΕΛΑ ἐξ οἱασδήποτε ὕλης κατεσκευασμένον, καὶ εὑρεθήτω ἡ αὐτοῦ κοιλότης πόσων ἂν εἴη ποδῶν περιεκτική. Εἶτα ἐμπληθέντος τοῦ σκεύους ὕδατος ἢ ἄλλου τινὸς ὑγροῦ, καὶ ἐμβληθέντος τοῦ Σ σώματος ἐν αὐτῷ, γνωστὸν γενήσεται τὸ τοῦ σώματος στερεόν. Τοῦ γὰρ Σ σώματος τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῇ ποσότητι τοῦ ἐκχυθέντος ὕδατος μετὰ τὴν τοῦ σώματος εἰσβολήν, ἀλλὰ μὴν ἡ ποσότης τοῦ ἐκχυθέντος ὕδατος ἴση ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς τοῦ σκεύους βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος ΦΔ τῆς κενῆς κοιλότητος μετὰ τὴν ἐκβολὴν τοῦ αὐτοῦ σώματος Σ, ἄρα καὶ τοῦ Σ σώματος τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς τοῦ σκεύους βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς κενῆς κοιλότητος. Τοῦτον τὸν τρόπον ὁ πολὺς τὸ κλέος Ἀρχιμήδης τοῦ χρυσοχόου τὴν πανουργίαν ἐν τῷ βαλανείῳ ἀνεκάλυψε.

Πρότασις ΙΖ'. Θεώρημα.

Σχ. 149. §. 271. Παντὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου ΚΕ τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΓΗΕΦ ἐπὶ τὸ ὕψος ΡΝ.

Δεῖξις.

Ἐπὶ τῆς ΓΗΕΦ βάσεως συσταθήτω παραλληλεπίπεδον ὀρθόν, καὶ ἴσον (267) τῷ ΚΕ πλαγίῳ παραλληλεπιπέδῳ. Ἐπεὶ οὖν τοῦ ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου τὸ στερεὸν ἴσον (268) ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΓΗΕΦ ἐπὶ τὸ ὕψος ΡΝ, καὶ τοῦ πλαγίου ἄρα ΚΕ τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐπὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΙΗ'. Θεώρημα.

§. 272. Παντὸς τριγωνικοῦ πρίσματος ΚΑΡΦΕΓ τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ΓΕΦ ἐπὶ τὸ ΡΝ ὕψος. Σχ. 149.

Δεῖξις.

Συμπληρούσθω τὸ ΓΗΕΦ παραλληλόγραμμον, ἐπὶ δὲ τούτου κατεσκευάσθω τὸ ΚΕ παραλληλεπίπεδον ἰσοϋψὲς τῷ πρίσματι. Τὸ πρίσμα ΚΑΡΦΕΓ ἥμισύ (266) ἐστι τοῦ ΚΕ παραλληλεπιπέδου. Ἀλλὰ μὴν τοῦ τοιούτου παραλληλεπιπέδου τὸ στερεὸν ἴσον (271) ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς ὅλης βάσεως ΓΗΕΦ ἐπὶ τὸ ΡΝ ὕψος, ἄρα καὶ τοῦ πρίσματος τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως ΓΗΕΦ, τουτέστιν ἐκ τῆς ΓΦΕ βάσεως ἐπὶ τὸ ΡΝ ὕψος. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 273. Παντὸς ἄρα πολυγώνου πρίσματος ΑΗ τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. Διαιρεθέντος γὰρ τοῦ πολυγώνου πρίσματος εἰς τριγωνικὰ καὶ ἰσοϋψῆ πρίσματα βάσεις ἔχοντα τὰς ΣΤΟ, ΟΤΗ, ΗΤΓ, εὑρεθήτω ἑκάστου τῶν τριγωνικῶν πρισμάτων (272) τὸ στερεόν, καὶ ἔσται τὸ ποθούμενον. Ἡ γὰρ σύναψις τῶν εὑρεθέντων στερεῶν, τοῦ πολυγώνου πρίσματος τὸ στερεὸν παρίστησι. Σχ. 150.

Κεφ. γ'.

Πόρισμα Β'.

Σχ. 150. §. 274. Ἐὰν δὲ τοῦ πρίσματος ἡ βάσις ΣΥΓΗΟ κανονικὸν ἢ πολύγωνον περὶ κύκλον περιγεγραμμένον, ὑπ' ἀπειραρίθμων πλευρῶν συγκροτούμενον, δῆλον, ὅτι τὸ πολύγωνον οἷα (132) κύκλος, τὸ δὲ πρίσμα οἷα κύλινδρος λαμβάνεται. Ταῦτ' ἄρα καὶ παντὸς κυλίνδρου τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς ἰδίας βάσεως ἐπὶ τὸ ἴδιον ὕψος.

Πρότασις ΙΘ'.

Σχ. 151. §. 275. Κύλινδροι, Πρίσματα, καὶ Παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν.

Δεῖξις.

Ἔστωσαν οὖν δύω παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΦ, ΕΥ, ὧν βάσεις μὲν αἱ Λ, Σ, ὕψη δὲ τὰ ΑΗ, ΕΓ. Ὁ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ λόγου τῆς Λ βάσεως πρὸς τὴν Σ βάσιν, καὶ τοῦ ΑΗ ὕψους πρὸς τὸ ΕΓ ὕψος ἐστίν, ὃν ἔχει τὸ γενόμενον ἐκ τῶν ἡγουμένων (147), ἤτοι ἐκ τῆς Λ βάσεως ἐπὶ τὸ ΑΗ ὕψος, πρὸς τὸ γενόμενον ἐκ τῶν ἑπομένων, ἤτοι ἐκ τῆς Σ βάσεως πρὸς τὸ ΕΓ ὕψος. Ἀλλὰ μὴν τοῦ ΑΦ σχήματος τὸ στερεὸν ἴσον (268) ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς Λ βάσεως ἐπὶ τὸ ΑΗ ὕψος, τοῦ δὲ ΕΥ σχήματος τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς Σ βάσεως ἐπὶ τὸ ΕΓ ὕψος, ἄρα ὁ συγκείμενος λόγος τῆς Λ βάσεως πρὸς τὴν Σ βάσιν, καὶ τοῦ ΑΗ ὕψους πρὸς τὸ ΕΓ ὕψος ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ τοῦ ΑΦ σχήματος πρὸς τὸ ΕΥ σχῆμα. Διὰ

δὴ

δὴ ταῦτα τὰ παραλληλεπίπεδα ἐν συγκειμένῳ λόγῳ Κεφ. γ'.
ἐστὶ τῶν βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν. Ταυτὰ δὴ ἐννοητέον περὶ τε κυλίνδρων καὶ πρισμάτων Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

§. 276. Ἐπεὶ οὖν ὁ συγκείμενος λόγος τῶν τετρα- Σχ. 151.
γωνικῶν βάσεων, Λ, Σ σύγκειται (215) ἐκ τῶν λόγων τῆς ΗΡ πρὸς τὴν ΓΠ, καὶ τῆς ΗΟ πρὸς τὴν ΓΙ, δῆλον, ὅτι ὁ λόγος ὃν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους οἱ Κύβοι ΑΦ, ΕΥ σύγκειται ἐκ τριῶν ἴσων λόγων, ἐκ τοῦ λόγου τῆς ΗΡ πρὸς τὴν ΓΠ, τῆς ΗΟ πρὸς τὴν ΓΙ, καὶ τῆς ΑΗ πρὸς τὴν ΕΓ, τουτέστι τριπλασιάζεται (147) ὁ λόγος τῆς ΗΟ πλευρᾶς πρὸς τὴν ΓΙ πλευράν. Ταῦτ' ἄρα οἱ κύβοι ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων πλευρῶν.

Πρότασις Κ'.

§. 277. Οἱ Κύβοι ΑΦ, ΕΥ πρὸς ἀλλήλους λό-
γον ἔχουσι τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τετραγώνου τῆς Σχ. 151.
ΗΟ πλευρᾶς πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΙ πλευρᾶς, καὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς ΗΟ πρὸς τὴν ΓΙ πλευράν.

Δεῖξις.

Οἱ κύβοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ἐν συγκειμένῳ λόγῳ (275) τῶν βάσεων Λ, Σ, καὶ τῶν ὑψῶν ΑΗ, ΕΓ. Ἀλλ' ἡ Λ βάσις ἔσται πρὸς τὴν Σ βάσιν (220), ὡς τὸ τῆς ΗΟ τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς ΓΙ τετράγωνον, τὸ δὲ ΑΗ ὕψος ἔσται πρὸς τὸ ΕΓ ὕψος, ὡς ἡ ΗΟ πλευρὰ πρὸς τὴν ΓΙ πλευράν, ἄρα καὶ ὁ ΑΦ κύβος ἔσται πρὸς τὸν ΕΥ κύβον

βον

Κεφ. γ'. βον ἐν συγκειμένῳ λόγῳ τοῦ ΗΟ τετραγώνου πρὸς τὸ ΓΙ τετράγωνον, καὶ τῆς ΗΟ πλευρᾶς πρὸς τὴν ΓΙ πλευράν. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΑ'. Θεώρημα.

Σχ. 152. §. 278. Ἐὰν τέσσαρες Εὐθεῖαι Α, Ε, Κ, Φ ἀνάλογοι ὦσι, καὶ οἱ τούτων Κῦβοι ἀνάλογοι ἔσονται.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε (ἐξ ὑπ.), οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Φ, ὁ λόγος τῆς Α πρὸς τὴν Ε ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ τῆς Κ πρὸς τὴν Φ· ὁ δὲ λόγος τοῦ Α τετραγώνου πρὸς τὸ Ε τετράγωνον ὁ αὐτός ἐστι (222) τῷ λόγῳ τοῦ Κ τετραγώνου πρὸς τὸ Φ τετράγωνον. Ἄρα ὁ συγκείμενος λόγος τοῦ Α τετραγώνου πρὸς τὸ Ε τετράγωνον, καὶ τῆς Α εὐθείας πρὸς τὴν Ε εὐθεῖαν ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ λόγῳ τοῦ Κ τετραγώνου πρὸς τὸ Φ τετράγωνον καὶ τῆς Κ εὐθείας πρὸς τὴν Φ εὐθεῖαν· Ἀλλὰ μὴν καὶ οἱ Κῦβοι τῶν εὐθειῶν Α, Ε, Κ, Φ ἐν συγκειμένῳ λόγῳ (277) εἰσὶ τῶν ἰδίων πλευρῶν καὶ τῶν τούτων τετραγώνων, ἄρα καὶ οἱ κῦβοι ἀνάλογοι ἔσονται· τουτέστιν ὡς ὁ κῦβος Α πρὸς τὸν κῦβον Ε, οὕτως ὁ κῦβος Κ πρὸς τὸν κῦβον Φ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΒ'.

Σχ. 151. §. 279. Παραλληλεπιπέδων, Κυλίνδρων τε, καὶ πρισμάτων ἀναλογίαν εὐθείαις γραμμαῖς παραστῆσαι.

Δεῖ-

Δεῖξις.

Ἔστω οὖν παραστῆσαι εὐθείαις γραμμαῖς τὴν ἀναλογίαν τῶν παραλληλεπιπέδων ΑΦ, ΕΤ. Γενέσθω ὡς ἡ Λ βάσις πρὸς τὴν Σ βάσιν, οὕτως ἡ ΗΟ εὐθεῖα πρὸς τὴν Ζ εὐθεῖαν, καὶ ὡς τὸ ΑΗ ὕψος πρὸς τὸ ΕΓ ὕψος, οὕτως ἡ εὑρεθεῖσα Ζ πρὸς τὴν Μ. Ἄρα τὸ στερεὸν ΑΦ ἔχει πρὸς τὸ στερεὸν ΕΤ τὸν συγκείμενον λόγον (275) ἐκ τῆς Λ βάσεως πρὸς τὴν Σ βάσιν, καὶ τοῦ ΑΗ ὕψους πρὸς τὸ ΕΓ ὕψος. Ἀλλ' ὁ λόγος τῆς Λ βάσεως πρὸς τὴν Σ βάσιν ὁ αὐτός (ἐκ κατ.) ἐστι τῷ λόγῳ τῆς ΗΟ πρὸς τὴν Ζ, καὶ ὁ λόγος τοῦ ΑΗ ὕψους πρὸς τὸ ΕΓ ὕψος ὁ αὐτός (ἐκ κατ.) ἐστι τῷ λόγῳ τῆς Ζ πρὸς τὴν Μ, ἄρα τὰ στερεὰ ΑΦ, ΕΤ πρὸς ἄλληλά ἐστιν ἐν συγκειμένῳ λόγῳ τῆς ΗΟ εὐθείας πρὸς τὴν Ζ εὐθεῖαν, καὶ τῆς Ζ πρὸς τὴν Μ, ἤτοι ὡς ἡ ΗΟ πρὸς τὴν Μ (218). Ἡ αὐτὴ δὲ δεῖξις οὕτε κυλίνδροις καὶ πρισμάτοις ἐστίν. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

§. 280. Τὰ Ἰσοϋψῆ ἄρα παραλληλεπίπεδα ΑΦ, ΕΤ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν αἱ ἴδιαι βάσεις. Σχ. 151.
Ἐὰν γὰρ γένηται ὡς ἡ Λ βάσις πρὸς τὴν Σ βάσιν, οὕτως ἡ ΗΟ πρὸς τὴν Ζ, καὶ ὡς τὸ ΑΗ ὕψος πρὸς τὸ ΕΓ ὕψος, οὕτως ἡ Ζ πρὸς τὴν Μ, τὸ ΑΦ παραλληλεπίπεδον ἔσται πρὸς τὸ ΕΤ παραλληλεπίπεδον (278), ὡς ἡ ΗΟ εὐθεῖα πρὸς τὴν Μ εὐθεῖαν. Ἐπεὶ δὲ ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΕΓ, οὕτως ἡ Ζ πρὸς τὴν Μ, αἱ δὲ ΑΗ, ΕΓ ἴσαι (ἐξ ὑπ.) εἰσί, καὶ αἱ Ζ, Μ ἴσαι ἔσονται. Διόπερ ὡς ἡ ΗΟ πρὸς τὴν Ζ (140), οὕτως ἡ

αὐτὴ

Κεφ. γ΄. αὐτὴ ΗΟ πρὸς τὴν Μ. Εἴδομεν δὲ καὶ τὸ στερεὸν ΑΦ ἔχειν πρὸς τὸ στερεὸν ΕΤ (279), ὡς τὴν ΗΟ πρὸς τὴν Μ. Ἄρα τὸ ΑΦ στερεὸν ἔσται πρὸς τὸ ΕΤ στερεὸν, ὡς ἡ ΗΟ εὐθεῖα πρὸς τὴν Ζ εὐθεῖαν, ἤτοι ὡς ἡ Λ βάσις (ἐκ κατ.) πρὸς τὴν Σ βάσιν. Ἡ αὐτὴ δὲ δεῖξις ἐπὶ κυλίνδροις καὶ πρισμάτοις ἐστί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΠΕΡΙ ΣΥΜΠΤΩΜΑΤΩΝ

ΠΥΡΑΜΙΔΩΝ ΤΕ ΚΑΙ ΚΩΝΩΝ.

Πρότασις ΚΓ΄. Θεώρημα.

§. 281. ἘΆν αἱ τῶν Πυραμίδων πλευραὶ ΦΚ, ΛΞ οὕτω τμηθῶσι κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, ὥστε τὴν ΦΕ ἔχειν πρὸς τὴν ΦΚ, ὡς τὴν ΛΖ πρὸς τὴν ΛΞ, διὰ δὲ τούτων τῶν σημείων διέλθῃ δύω ἐπίπεδα ταῖς ἰδίαις βάσεσι παράλληλα, αἱ τομαὶ ΣΟΕ, ΧΡΖ ἀνάλογοι ἔσονται ταῖς ἰδίαις βάσεσι ΓΑΚ, ΥΙΞ. Σχ. 153.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΦΕ πρὸς τὴν ΦΚ, οὕτως (ἐξ ὑπ.) ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ΛΞ, καὶ τὸ ΦΕ τετράγωνον ἔσται πρὸς τὸ ΦΚ τετράγωνον (222) ὡς τὸ ΛΖ τετράγωνον πρὸς τὸ ΛΞ τετράγωνον. Ἀλλα-

Κεφ. δ'. μιῶ τὸ ΦΕ τετράγωνον ἔσται πρὸς τὸ ΦΚ, ὡς τὸ ΣΕ (222) πρὸς τὸ ΓΚ. Τὸ δὲ ΛΖ ἔσται πρὸς τὸ ΛΞ ὡς τὸ ΧΖ πρὸς τὸ ΥΞ. Ἄρα καὶ τὸ ΣΕ ἔσται πρὸς τὸ ΓΚ, ὡς τὸ ΧΖ πρὸς τὸ ΥΞ καὶ τὰ ἀπὸ τούτων τετράγωνα ἀνάλογα (222) ἔσται. Ἀλλ' ὡς ἡ ΣΟΕ τομὴ πρὸς τὴν ΓΑΚ βάσιν, οὕτω τὸ ΣΕ τετράγωνον (219) πρὸς τὸ ΓΚ τετράγωνον, καὶ ὡς ἡ ΧΡΖ τομὴ πρὸς τὴν ΥΙΞ βάσιν, οὕτω τὸ ΧΖ τετράγωνον (219) πρὸς τὸ ΥΞ τετράγωνον, ἄρα καὶ ὡς ἡ ΣΟΕ τομὴ πρὸς τὴν ΓΑΚ βάσιν, οὕτως ἡ ΧΡΖ τομὴ πρὸς τὴν ΥΙΞ βάσιν. Καὶ ἐναλλὰξ (164) ὡς ἡ ΣΟΕ τομὴ πρὸς τὴν ΧΡΖ τομὴν, οὕτως ἡ ΓΑΚ βάσις πρὸς τὴν ΥΙΞ βάσιν. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΔ'. Θεώρημα.

Σχ. 154. §. 282. Ἐὰν εἰς τριγωνικὴν Πυραμίδα ΖΧΑΦ ἀπειράριθμα πρίσματα ἐγγραφῇ, ἡ σύναψις πάντων τῶν ἐγγεγραμμένων πρισμάτων τῇ πυραμίδι ὡς ἔγγιστα ἴση ἐστί.

Δεῖξις.

Διαιρεθήτω ἡ ΑΦ πλευρὰ εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη τὰ ΑΣ, ΣΓ, ΓΦ, καὶ γενομένων διὰ τῶν σημείων, Σ, Γ, τῶν τομῶν ΣΕΡ, ΓΛΞ τῇ βάσει παραλλήλων, ἐγγραφήσεται εἰς τὴν Πυραμίδα τὰ τριγωνικὰ πρίσματα ΥΕΣΑ, ΚΛΓΣ, ὧν περ ἐκβληθέντων ἐκτὸς τῆς Πυραμίδος, περὶ τὴν Πυραμίδα περιγραφήσεται πρίσματα τὰ ΧΙΣΑ, ΡΟΓΣ, ΞΗΦΓ. Ἡ ὑπεροχὴ τῶν περιγεγραμμένων πρισμάτων ἐπὶ τοῖς ἐγγεγραμμένοις πρίσμασι μία ἐστὶ στερεὰ τὰ ΗΓ, ΟΚ, ΙΥ, ἅπερ σύναμα ληφ-

θέν-

θέντα ἴσα δύναται τῷ πρίσματι ΧΙΣΑ. Τὸ γὰρ Κεφ. δ'. ΗΓ πρίσμα ἰσόν ἐστι τῷ πρίσματι ΛΣ, καὶ διὰ ταῦτα τὰ πρίσματα ΗΓ, ΟΚ ἴσα δύναται τῷ ΡΟΓΣ πρίσματι, τουτέστι τῷ πρίσματι ΥΕΣΑ. Ἡ σύναψις ἄρα τῶν τριῶν στερεῶν ΗΓ, ΟΚ, ΙΥ ἴση ἐστὶ τῷ πρίσματι ΧΙΣΑ. Ἐὰν ἄρα ὁ ἀριθμὸς τῶν πρισμάτων ἀπειράριθμος γένηται τὸ πρίσμα ΧΙΣΑ ἀπείρως ἐλαττωθήσεται, διόπερ ἡ ὑπεροχὴ τῶν περιγεγραμμένων πρισμάτων (πολλῷ δὲ μᾶλλον τῆς Πυραμίδος, ἥτις μέρος ἐστὶ τῶν περιγεγραμμένων πρισμάτων) ἐπὶ τοῖς ἐγγεγραμμένοις πρίσμασιν ἴση ἔσται τῷ πρίσματι ΧΙΣΑ, ταῦτ' ἄρα καὶ καταφρονητέα. Ἡ σύναψις οὖν τῶν ἀπείρων πρισμάτων εἰς τὴν πυραμίδα ἐγγεγραμμένων ὡς ἔγγιστα τῇ πυραμίδι ἴση ἐστίν. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΚΕ'. Θεώρημα.

§. 283. Αἱ ἰσοϋψεῖς τριγωνικαὶ πυραμίδες Σχ. 155. ΞΡΑΚ, ΣΦΕΖ λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὃν αἱ ἴδιαι βάσεις ΞΡΑ, ΣΦΕ.

Δεῖξις.

Διαιρεθήτωσαν τὰ τῶν πυραμίδων ὕψη ΚΑ, ΖΕ εἰς ὁσαοῦν μέρη ἴσα τῷ μεγέθει καὶ τῷ πλήθει, καὶ γενομένων, διὰ τῶν σημείων τῶν διαιρέσεων, τῶν τομῶν τῇ βάσει παραλλήλων, ἐννοείσθω ἐν ἑκατέρᾳ πυραμίδι ἐγγεγραμμένα ἰσοϋψῆ πρίσματα ἴσα τῷ πλήθει. Ἐπεὶ οὖν αἱ πλευραὶ ΚΑ, ΖΕ οὕτω διῃρέθησαν κατὰ τὰ σημεῖα Υ, Η, ὥστε τὴν ΚΥ ἔχειν πρὸς τὴν ΚΑ (ἐκ κατ.) ὡς τὴν ΖΗ πρὸς τὴν ΖΕ, αἱ τομαὶ ΛΟΥ, ΙΚΗ πρὸς ἀλλήλας εἰ-

Κεφ. δ'. εἰσὶν (281), ὡς αἱ βάσεις ΞΡΑ, ΣΦΕ. Ἀλλὰ μὴν τὰ ἰσοϋψῆ πρίσματα ΛΟΥΑ, ΙΚΗΕ πρὸς ἄλληλά ἐστιν (280) ὡς αἱ τομαὶ ΛΟΥ, ΙΚΗ, ἄρα ἔσται καὶ ὡς αἱ βάσεις ΞΡΑ, ΣΦΕ. Τὸν αὐτὸν δὴ τὸν λόγον καὶ τὸ πρίσμα ΓΠΝΥ ἔσται πρὸς τὸ πρίσμα ΧΔΤΗ, ὡς ἡ βάσις ΞΡΑ πρὸς τὴν βάσιν ΣΦΕ. Ὡς τὸ πρίσμα ἄρα ΛΟΥΑ πρὸς τὸ πρίσμα ΙΚΗΕ (50), οὕτω τὸ πρίσμα ΓΠΝΥ πρὸς τὸ πρίσμα ΧΔΤΗ, καὶ ἐν τοῖς λοιποῖς ὁμοίως. Ἡ σύναψις οὖν τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν πυραμίδα ΞΡΑΚ πρισμάτων ἔσται πρὸς τὴν σύναψιν τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν πυραμίδα ΣΦΕΖ πρισμάτων (167) ὡς τὸ πρίσμα ΛΟΥΑ πρὸς τὸ πρίσμα ΙΚΗΕ, ἤτοι ὡς ἡ βάσις ΞΡΑ πρὸς τὴν βάσιν ΣΦΕ. Ἀλλ' ἡ σύναψις τῶν ἐγγεγραμμένων πρισμάτων ἴση (282) ἐστὶ τῇ πυραμίδι, ἄρα καὶ αἱ πυραμίδες ΞΡΑΚ, ΣΦΕΖ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσιν, ὃν αἱ ἴδιαι βάσεις ΞΡΑ, ΣΦΕ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις Κϛ'. Θεώρημα.

Σχ. 156. §. 284. Ἡ τετράπλευρος πυραμὶς ΗΓΡΣΚ ἔσται πρὸς τὴν ἰσοϋψῆ τριγωνικὴν πυραμίδα ΕΚΦΑ, ὡς ἡ βάσις τῆς τετραπλεύρου πυραμίδος πρὸς τὴν βάσιν τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος.

Δεῖξις.

Ἡ τετράπλευρος πυραμὶς διαιρεθήτω εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας τὰς ΗΣΡΚ, ΗΓΡΚ. Ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ πυραμὶς ΗΣΡΚ πρὸς τὴν ἰσοϋψῆ πυραμίδα ΗΓΡΚ, οὕτως (283) ἡ Λ βάσις πρὸς τὴν Υ βάσιν· ἐν συνθέσει (166), ἡ σύναψις

τῶν

τῶν δύο πυραμίδων ΗΣΡΚ, ΗΓΡΚ, ἤτοι Κεφ. δ'. ὅλη ἡ πυραμὶς ΗΓΡΣΚ ἔσται πρὸς τὴν πυραμίδα ΗΓΡΚ ὡς αἱ ἴδιαι βάσεις Λ, Υ, τουτέστιν ὡς ὅλη ἡ βάσις ΗΓΡΣ πρὸς τὴν Υ βάσιν. Ἀλλ' ὡς ἡ πυραμὶς ΗΓΡΚ (283) πρὸς τὴν ἰσοϋψῆ πυραμίδα ΕΚΦΑ, οὕτως ἡ Υ βάσις πρὸς τὴν βάσιν ΕΚΦ, ἄρα δι' ἴσου (165) ὡς ἡ πυραμὶς ΗΓΡΣΚ πρὸς τὴν πυραμίδα ΕΚΦΑ, οὕτως ἡ βάσις ΗΓΡΣ πρὸς τὴν βάσιν ΕΚΦ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 285. Ἐκ τούτων δῆλον, ὅτι αἱ τετράπλευροι Σχ. 156. ἰσοϋψεῖς πυραμίδες ΗΓΡΣΚ, ΞΒΛΟΙ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσιν ὃν αἱ ἴδιαι βάσεις. Ὡς γὰρ ἡ πυραμὶς ΗΓΡΣΚ πρὸς τὴν ἰσοϋψῆ τριγωνικὴν πυραμίδα ΕΚΦΑ οὕτως (284) ἡ ΗΓΡΣ βάσις πρὸς τὴν βάσιν ΕΚΦ. Καὶ ὡς ἡ πυραμὶς ΕΚΦΑ, πρὸς τὴν ἰσοϋψῆ πυραμίδα ΞΒΛΟΙ, οὕτως (284) ἡ βάσις ΕΚΦ πρὸς τὴν βάσιν ΞΒΛΟ, ἄρα δι' ἴσου (165) ὡς ἡ πυραμὶς ΗΓΡΣΚ πρὸς τὴν πυραμίδα ΞΒΛΟΙ, οὕτως ἡ βάσις ΗΓΡΣ πρὸς τὴν βάσιν ΞΡΛΟ.

Πόρισμα Β'.

§. 286. Ἐπεὶ οὖν αἱ ἰσοϋψεῖς πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ ἴδιαι βάσεις, δῆλον, ὅτι αἱ ἰσοϋψεῖς καὶ ἴσας βάσεις ἔχουσαι πυραμίδες ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Πρότασις ΚΖ'. Θεώρημα.

Σχ. 127. §. 287. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου Ι τοῦ Κύβου ΓΛ ἀχθῶσι πρὸς τὰς τέσσαρας γωνίας Ξ, Ρ, Λ, Ο εὐθεῖαι αἱ ΙΞ, ΙΡ, ΙΛ, ΙΟ, ἡ ἐντεῦθεν τετράπλευρος πυραμὶς ΙΞΡΛΟ ἑκτημόριον ἔσται τοῦ κύβου ΓΛ.

Δεῖξις.

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου Ι πρὸς πάσας τοῦ κύβου γωνίας ἡγμέναι ἐννοηθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὁ κύβος διαιρεθήσεται εἰς ἓξ ἰσοϋψεῖς καὶ ἴσας βάσεις ἐχούσας, καὶ διὰ ταῦτα (286) ἴσας, πυραμίδας, ὧν βάσεις μὲν τὰ τοῦ κύβου τετράγωνα, ὕψη δὲ τὰ τῶν βάσεων διαστήματα ἀπὸ τοῦ κυβικοῦ κέντρου. Ἀλλαμὴν τὰ τοῦ κύβου τετράγωνα, ἅπερ τὰς ἐντεῦθεν πυραμίδας συναίρουσιν, ἓξ τὸν ἀριθμόν ἐστιν, ἄρα ἡ πυραμὶς ΞΡΛΟΙ ἑκτημόριόν ἐστι τοῦ κύβου ΓΛ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

Σχ. 127. §. 288. Ἐπεὶ οὖν τοῦ κύβου τὸ στερεὸν ἴσον (269) ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, δῆλον, ὅτι τὸ στερεὸν τῆς τετραπλεύρου πυραμίδος ΞΡΛΟΙ, ἥτις ἑκτημόριόν ἐστι (287) τοῦ κύβου, ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς ἰδίας βάσεως ἐπὶ τὸ ἕκτον μέρος τοῦ κυβικοῦ ὕψους ΗΠ, τουτέστιν ἐπὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἰδίου ὕψους ΙΠ.

Πρό-

Πρότασις ΚΗ'.

Σχ. 128. Σχ. 127. §. 289. Πάσης τριγωνικῆς πυραμίδος ΑΕΦΚ τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς ἰδίας βάσεως ΑΕΦ ἐπὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἰδίου ὕψους ΚΣ.

Δεῖξις.

Κατασκευασθήτω ὁ ΓΛ κύβος, καὶ τὸ ὕψος διπλάσιον ἔστω τοῦ ὕψους τῆς τριγωνικῆς ΑΕΦΚ πυραμίδος, εἶτα ἀπὸ τοῦ κέντρου Ι συναχθήτω ἡ τετράπλευρος πυραμὶς ΞΡΛΟΙ. Ἐπεὶ οὖν ἑκατέρας τῆς πυραμίδος τὸ ὕψος ἥμισυ (ἐκ κατ.) ἐστι τοῦ κυβικοῦ ὕψους, δῆλον, ὅτι αἱ πυραμίδες ἰσοϋψεῖς ἔσονται, καὶ διὰ ταῦτα ὡς ἡ τετράπλευρος πυραμὶς ΞΡΛΟΙ πρὸς τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΑΕΦΚ, οὕτως (284) ἡ βάσις ΞΡΛΟ πρὸς τὴν βάσιν ΑΕΦ, ἤτοι οὕτω τὸ γενόμενον ἐκ τῆς βάσεως ΞΡΛΟ ἐπὶ τὸ τρίτον μέρος τῆς ΙΠ εὐθείας πρὸς τὸ γενόμενον ἐκ τῆς βάσεως ΑΕΦ ἐπὶ τὸ τρίτον μέρος τῆς ΚΣ εὐθείας. Ἀλλαμὴν τὸ στερεὸν τῆς πυραμίδος ΞΡΛΟΙ ἴσον (288) ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς ἰδίας βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον μέρος τῆς ΙΠ εὐθείας, ἄρα καὶ τῆς πυραμίδος ΑΕΦΚ τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς ἰδίας βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον μέρος τῆς ΚΣ εὐθείας, ἤτοι τοῦ ἰδίου ὕψους. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

§. 290. Ἁπάσης ἄρα πολυγώνου πυραμίδος τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς ἰδίας βάσεως

ἐπὶ

 ἐπὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἰδίου ὕψους. Διαιρεθείσης γὰρ τῆς πολυγώνου πυραμίδος εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας, καὶ ἑκάστης τοῦ στερεοῦ θηρευθέντος (289) ἔσαι τὸ ποθούμενον. Τὸ γὰρ ἄθροισμα πάντων τῶν εὑρεθέντων στερεῶν τὸ τῆς πολυγώνου πυραμίδος τὸ στερεὸν παρίστησι.

Πόρισμα Β'.

§. 291. Ἐὰν δὲ ἡ βάσις τῆς πολυγώνου πυραμίδος κανονικὸν ἢ πολύγωνον περὶ κύκλον περιγεγραμμένον ὑπ' ἀπειραρίθμων πλευρῶν συγκροτούμενον, δῆλον, ὅτι τὸ πολύγωνον ὡς κύκλος (132), τὸ δὲ πρίσμα ὡς κύλινδρος, καὶ ἡ πυραμὶς ὡς κῶνος ληφθήσεται. Ταῦτ' ἄρα καὶ ὁ κῶνος τριτημόριόν ἐστι τοῦ ἰσοΰψους καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντος κυλίνδρου.

Πόρισμα Γ'.

§. 292. Ἐπεὶ οὖν τοῦ κυλίνδρου τὸ στερεὸν ἴσον (274) ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς ἰδίας βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, δῆλον, ὅτι καὶ τοῦ κώνου τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ ἐκ τῆς ἰδίας βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἰδίου ὕψους.

Πόρισμα Δ'.

§. 293. Ἐπεὶ οὖν οἱ κύλινδροι καὶ τὰ πρίσματα ἐν συγκειμένῳ λόγῳ (275) εἰσὶ τῶν βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν, δῆλον, ὅτι καὶ αἱ πυραμίδες καὶ οἱ κῶνοι ἐν τῷ αὐτῷ συγκειμένῳ λόγῳ εἰσὶ τῶν βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν.

Πόρισμα Ε'.

§. 294. Τελευταῖον δέ, ἐπεὶ τὰ ἰσοϋψῆ πρίσματα, καὶ κύλινδροι (280) τὸν αὐτὸν πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν αἱ ἴδιαι βάσεις, καὶ αἱ ἰσοϋψεῖς, ἄρα πυραμίδες καὶ κῶνοι τὸν αὐτὸν πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν αἱ ἴδιαι βάσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

ΠΕΡΙ' Ο'ΜΟΙ'ΩΝ ΣΤΕΡΕΩ'Ν

Α'ΝΑΛΟΓΙ'ΑΣ.

Πρόπασις ΚΘ'. Θεώρημα.

Σχ. 151. §. 295. Ο'Μοια παραλληλεπίπεδα, πρίσματα, καὶ πυραμίδες τὸν αὐτὸν πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν οἱ κῦβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Δεῖξις.

Ε'ςω παραλληλεπίπεδα ὅμοια τὰ ΑΦ, ΕΥ. Ε'πεὶ οὖν τὸ ΑΦ ἐςὶ πρὸς τὸ ΕΥ (275) ἐν συγκειμένῳ λόγῳ τῶν βάσεων Λ, Σ, καὶ τῶν ὑψῶν ΑΗ, ΕΓ. Διὰ δὲ τὸ ὁμοίας εἶναι τὰς βάσεις Λ, Σ. Ο' λόγος τῆς βάσεως Λ πρὸς τὴν βάσιν Σ, ὁ αὐτός ἐςι τῷ λόγῳ τοῦ ΗΟ τετραγώνου (220) πρὸς τὸ ΓΙ τετράγωνον: καὶ διὰ τὴν τῶν ἐπιπέδων ὁμοιό-

ὁμοιότητα, ὁ λόγος τοῦ ΑΗ ὕψους πρὸς τὸ ΕΓ Κεφ. ε. ὕψος ὁ αὐτός ἐςι τῷ λόγῳ τῆς ΗΟ πλευρᾶς πρὸς τὴν ΓΙ πλευράν, ἄρα καὶ τὸ στερεὸν ΑΦ ἔςαι πρὸς τὸ στερεὸν ΕΥ ἐν συγκειμένῳ λόγῳ τοῦ ΗΟ τετραγώνου πρὸς τὸ ΓΙ τετράγωνον, καὶ τῆς ΗΟ πλευρᾶς πρὸς τὴν ΓΙ πλευράν, ἤτοι ὡς οἱ κῦβοι τῶν ὁμολόγων (277) πλευρῶν. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

§. 296. Ο'μοια ἄρα παραλληλεπίπεδα, πρίσματα, καὶ πυραμίδες ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Πρόπασις Λ'. Θεώρημα.

§. 297. Ο'μοιοι κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους λόγον Σχ. 157. ἔχουσιν, ὃν οἱ κῦβοι τῶν διαμέτρων τῶν ἰδίων βάσεων.

Δεῖξις.

Ε'ςωσαν κύλινδροι ὅμοιοι οἱ ΥΣ, ΓΙ, ὧν ὕψη μὲν τὰ ΑΚ, ΕΚ, βάσεις δὲ αἱ ΦΛΣ, ΞΠΙ. Ο' ΥΣ κύλινδρος ἔςαι πρὸς τὸν ΓΙ κύλινδρον (275) ἐν συγκειμένῳ λόγῳ τῆς βάσεως ΦΛΣ πρὸς τὴν βάσιν ΞΠΙ, καὶ τοῦ ΑΚ ὕψους πρὸς τὸ ΕΚ ὕψος. Α'λλ' ὁ λόγος τῆς βάσεως ΦΛΣ πρὸς τὴν βάσιν ΞΠΙ, ὁ αὐτός (225) ἐςι τῷ λόγῳ τοῦ ΦΣ τετραγώνου πρὸς τὸ ΞΙ τετράγωνον. Καὶ διὰ τὴν τῶν κυλίνδρων ὁμοιότητα. Ο' λόγος τοῦ ΑΚ ὕψους πρὸς τὸ ΕΚ ὕψος, ὁ αὐτός (243) ἐςὶ τῷ λόγῳ τῆς ΦΣ πλευρᾶς πρὸς τὴν ΞΙ πλευράν,

ἄρα

Κεφ. ε'. ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος ΥΣ ἔσται πρὸς τὸν κύλινδρον ΓΙ ἐν συγκειμένῳ λόγῳ τοῦ ΦΣ τετραγώνου πρὸς τὸ ΞΙ τετράγωνον, καὶ τῆς ΦΣ εὐθείας πρὸς τὴν ΞΙ εὐθεῖαν, τουτέστιν ὡς ὁ ΦΣ κύβος (277) πρὸς τὸν ΞΙ κύβον. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα Α'.

Σχ. 157. §. 298. Ἐπεὶ οὖν καὶ οἱ κῶνοι ΦΑΣ, ΞΕΙ τριτημόρια (291) εἰσι τῶν περιγεγραμμένων κυλίνδρων, δῆλον, ὅτι καὶ οἱ ὅμοιοι κῶνοι πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν ἰδίων βάσεων.

Πόρισμα Β'.

§. 299. Ὅμοιοι ἄρα κύλινδροι καὶ κῶνοι ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν διαμέτρων (276) τῶν ἰδίων βάσεων.

Πρότασις ΛΑ'. Λῆμμα.

Σχ. 158. §. 300. Ἐὰν εἰς κύκλου τεταρτημόριον ΝΑΓ ἀπειράριθμα ὀρθογώνια ἐγγραφῇ, ἁπάντων τὸ ἄθροισμα ἔγγιστα ἴσον ἐστὶ τῷ τεταρτημορίῳ.

Δεῖξις.

Τμηθείσης τῆς ΑΝ ἡμιδιαμέτρου κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Μ, ἐγγεγράφθω εἰς τὸ τεταρτημόριον ὀρθογώνια τὰ ΜΚΔΗ, ΑΜΒΡ, ὧν ἐκβληθέντων, περὶ τὸ τεταρτημόριον περιγραφήσονται ὀρθογώνια τὰ ΚΝΕΔ, ΜΚΥΒ, ΑΜΤΓ. Ἡ ὑπεροχὴ τῶν περιγεγραμμένων ὀρθογωνίων ἐπὶ τοῖς ἐγγεγραμμένοις συνί-

συνίσταται ἐκ τῶν ὀρθογωνίων ΚΝΕΔ, ΗΔΥΒ, Κεφ. ε'. ΡΒΤΓ, ἅπερ συνάμα ληφθέντα ἴσα δύναται τῷ περιγεγραμμένῳ ὀρθογωνίῳ ΑΜΤΓ. Τὸ γὰρ ὀρθογώνιον ΚΝΕΔ ἴσον (125) ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΜΚΔΗ, κοινῇ δὲ προστεθέντος τοῦ ὀρθογωνίου ΗΔΥΒ, ἡ σύναψις τῶν δύω ὀρθογωνίων ΚΝΕΔ, ΗΔΥΒ ἴση ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΜΚΥΒ, ἢ τῷ ὀρθογωνίῳ (125) ΑΜΒΡ. Διὰ δὲ ταῦτα ἡ σύναψις τῶν τριῶν ὀρθογωνίων ΚΝΕΔ, ΗΔΥΒ, ΡΒΤΓ, ἴση ἐστὶ τῷ περιγεγραμμένῳ ὀρθογωνίῳ ΑΜΤΓ. Ἐὰν οὖν ἡ ΑΝ ἡμιδιάμετρος εἰς ἄπειρα μέρη διαιρεθῇ, τὸ ὕψος ΜΑ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΜΤΓ ἀπείρως ἐλαττωθήσεται, διόπερ τὸ ὀρθογώνιον ΑΜΤΓ ὡς οὐδὲν λογίζεται. Ἄρα ἡ ὑπεροχὴ τῶν περιγεγραμμένων ὀρθογωνίων (πολλῷ δὲ μᾶλλον τοῦ τεταρτημορίου) ἐπὶ τοῖς ἐγγεγραμμένοις ὡς οὐδὲν λογίζεται, ὅθεν καὶ καταφρονητέα. Ταὐτ' ἄρα ἡ σύναψις τῶν ἐγγεγραμμένων ἀπειραρίθμων ὀρθογωνίων ἴση ἔγγιστα ἐστὶ τῷ τεταρτημορίῳ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

§. 301. Ὡς οὖν ἡ σύναψις τῶν ἀπειραρίθμων ὀρθογωνίων εἰς τὸ τεταρτημόριον ἐγγεγραμμένων ἴση ἔγγιστα (300) ἐστὶ τῷ τεταρτημορίῳ, οὕτω καὶ ἡ σύναψις τῶν ἀπειραρίθμων κυλίνδρων εἰς τὸ ἡμισφαίριον ἐγγεγραμμένων τῷ ἡμισφαιρίῳ ἔγγιστά ἐστιν ἴση.

Πρότασις ΛΒ'. Θεώρημα.

§. 302. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΜ, ΡΥ εἰς ἴσα Σχ. 159. μέρη διαιρεθῶσιν, ἐν δὲ τοῖς τεταρτημορίοις ΑΜΝ, Σχ. 160.

ΡΥγ

Κεφ. ε. ΡΥυ ἐγγραφῇ ὀρθογώνια ἴσα τῷ πλήθει, ἅπερ περὶ τὰς ἀκτῖνας ΑΜ, ΡΥ περιελθόντα ἐγγράφει εἰς ἑκάτερα τὰ ἡμισφαίρια κυλίνδρους ἴσους τῷ πλήθει· Ὁ κύλινδρος τοῦ ὀρθογωνίου ΔΚΕΦ ἔσται πρὸς τὸν κύλινδρον τοῦ ὀρθογωνίου ΤΣΙΖ, ὡς ὁ κύβος τῆς ΑΖ διαμέτρου πρὸς τὸν κύβον τῆς διαμέτρου ΡΒ.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν αἱ εὐθεῖαι ΑΚ, ΡΣ τὸν αὐτὸν τρόπον περιέχονται ὑπὸ τῶν διαμέτρων ΑΖ, ΡΒ, πάντως ἡ ΖΑ ἔσται πρὸς τὴν ΑΚ, ὡς ἡ ΒΡ πρὸς τὴν ΡΣ, καὶ ἐν διαιρέσει (168) ἡ ΖΚ ἔσται πρὸς τὴν ΚΑ, ὡς ἡ ΒΣ πρὸς τὴν ΣΡ. Καὶ διὰ τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν (184) τῶν εὐθειῶν ΖΚ, ΚΗ, ΚΑ, ἡ ΖΚ ἔσται πρὸς τὴν ΚΑ (221, ὡς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΗ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΑ. Διὰ δὲ τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν (184) τῶν εὐθειῶν ΒΣ, ΣΛ, ΣΡ, ἡ ΒΣ ἔσται πρὸς τὴν ΣΡ, ὡς τὸ τετράγωνον τῆς ΣΛ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΣΡ. Ἐπεὶ δὲ, ὡς ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΑ, οὕτως ἡ ΒΣ πρὸς τὴν ΣΡ, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΚΗ ἔσται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΑ, (50) ὡς τὸ τετράγωνον τῆς ΣΛ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΣΡ. καὶ ἡ ΚΗ ἔσται πρὸς τὴν ΚΑ (222), ὡς ἡ ΣΛ πρὸς τὴν ΣΡ. Καὶ ἐναλλὰξ (164), ἡ ΚΗ ἔσται πρὸς τὴν ΣΛ, ὡς ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΣΡ, ἢ ὡς ἡ ΚΔ πρὸς τὴν ΣΤ (ἐξ ὑπ.). Ἄρα καὶ ἡ ΗΕ (τῆς ΚΗ διπλασία) ἔσται πρὸς τὴν ΛΙ (τῆς ΣΛ διπλασίαν), ὡς ἡ ΚΔ πρὸς τὴν ΣΤ. Καὶ διὰ ταῦτα οἱ ὀρθοὶ κύλινδροι τῶν ὀρθογωνίων ΔΚΕΦ, ΤΣΙΖ ὅμοιοί (243) εἰσι, καὶ τὸν αὐτὸν πρὸς ἀλλήλους (297) λόγον ἔχουσιν, ὃν οἱ κύβοι τῶν εὐθειῶν ΗΕ, ΛΙ. Κεφ. ε. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΕ ἔχει πρὸς τὴν ΛΙ, ὡς ἡ ΚΔ πρὸς τὴν ΣΤ, ἢ ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΡΣ, ἢ ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΡΒ· Πάντως καὶ ὁ κύβος ΗΕ ἔσται πρὸς τὸν κύβον ΛΙ (278), ὡς ὁ ΑΖ κύβος πρὸς τὸν ΡΒ κύβον. Ταῦτ' ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ ὀρθογωνίου ΔΚΕΦ ἔσται πρὸς τὸν κύλινδρον τοῦ ὀρθογωνίου ΤΣΙΖ, ὡς ὁ κύβος τῆς διαμέτρου ΑΖ πρὸς τὸν κύβον τῆς διαμέτρου ΡΒ. Ο. Ε. Δ.

Πρότασις ΛΓ'. Θεώρημα.

§. 303. Αἱ σφαῖραι ΠΑΝΖ, ΓΡυΒ τὸν αὐτὸν πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσιν, ὃν οἱ κύβοι τῶν ἰδίων διαμέτρων. Σχ. 159. Σχ. 160.

Δεῖξις.

Ἐπεὶ οὖν ὡς ὁ κύλινδρος ΔΚΕΦ πρὸς τὸν κύλινδρον ΤΣΙΖ (302), οὕτως ὁ ΑΖ κύβος πρὸς τὸν ΡΒ κύβον, καὶ ὡς ὁ κύλινδρος ΥΔ εφ πρὸς τὸν κύλινδρον ΧΤ ιζ, οὕτως ὁ ΑΖ κύβος πρὸς τὸν ΡΒ κύβον· πάντως ὁ κύλινδρος ΔΚΕΦ ἔσται πρὸς τὸν κύλινδρον ΤΣΙΖ (50), ὡς ὁ κύλινδρος ΥΔ εφ πρὸς τὸν κύλινδρον ΧΤ ιζ. Ταὐτὰ δὴ δειχθήσεται καὶ ἐν τοῖς λοιποῖς ἐγγεγραμμένοις κυλίνδροις. Ταῦτ' ἄρα ὡς ἡ σύναψις τῶν ἐγγεγραμμένων κυλίνδρων εἰς τὸ ΠΑΝ ἡμισφαίριον πρὸς τὴν σύναψιν τῶν ἐγγεγραμμένων κυλίνδρων εἰς τὸ ΓΡυ ἡμισφαίριον, οὕτως ὁ κύλινδρος ΔΚΕΦ πρὸς τὸν κύλινδρον ΤΣΙΖ, ἤτοι οὕτως ὁ κύβος ΑΖ (302) πρὸς τὸν ΡΒ κύβον. Ἀλλ' ἀμὴν ἡ σύναψις τῶν ἐγγεγραμμένων κυλίνδρων εἰς τὰ ἡμισφαίρια τοῖς ἡμι-

Κεφ. ί. ἡμισφαιρίοις ὡς ἔγγυστα ἴση (301) ἐςὶν, ἄρα ὡς τὸ ἡμισφαίριον ΠΑΝ πρὸς τὸ ἡμισφαίριον ΓΡυ, ἤτοι ὡς ἡ σφαῖρα πρὸς τὴν σφαῖραν, ὕπως ὁ κύβος τῆς ΑΖ διαμέτρου πρὸς τὸν κύβον τῆς ΡΒ διαμέτρου. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.

§. 304. Αἱ σφαῖραι ἄρα πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ἐν τριπλασίονι λόγῳ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

ΤΕ'ΛΟΣ ΤΗ͂Σ ΓΕΩΜΕΤΡΙ'ΑΣ.

ΠΙ'ΝΑΞ

ΤΩ͂Ν ΠΕΡΙΕΧΟΜΕ'ΝΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙ'ΩΝ.

Γεωμετρίας Μέρος Α'. Περὶ ἐπιπέδων σχημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

Γεωμετρείας Μέρος Β'. Περὶ Ἀναλογίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

Γεωμετρείας Μέρος Γ'. Περὶ στερεῶν σχημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

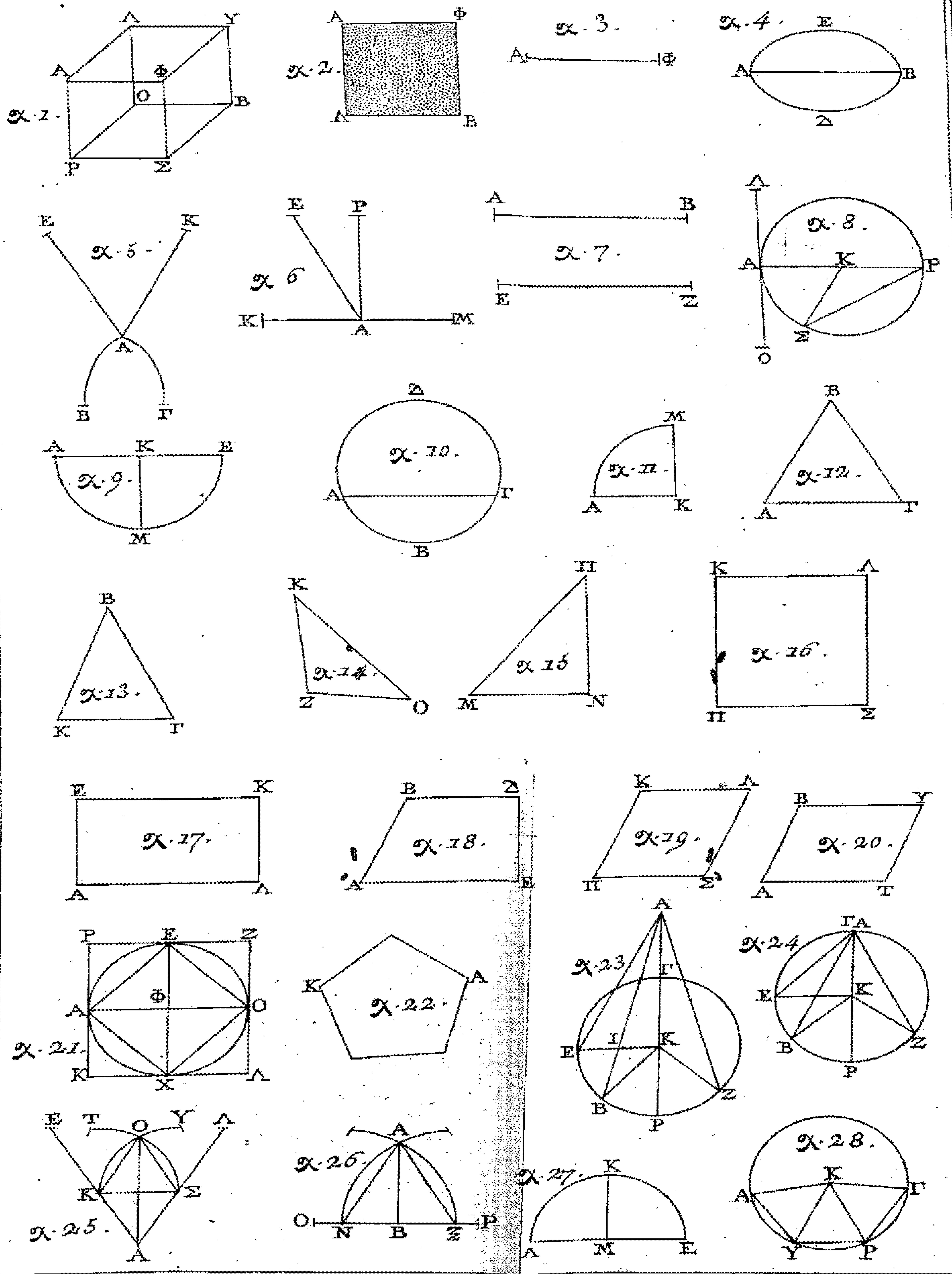
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Δ'.

ΚΕΦΑ'ΛΑΙΟΝ Ε'.

ΤΕ'ΛΟΣ.

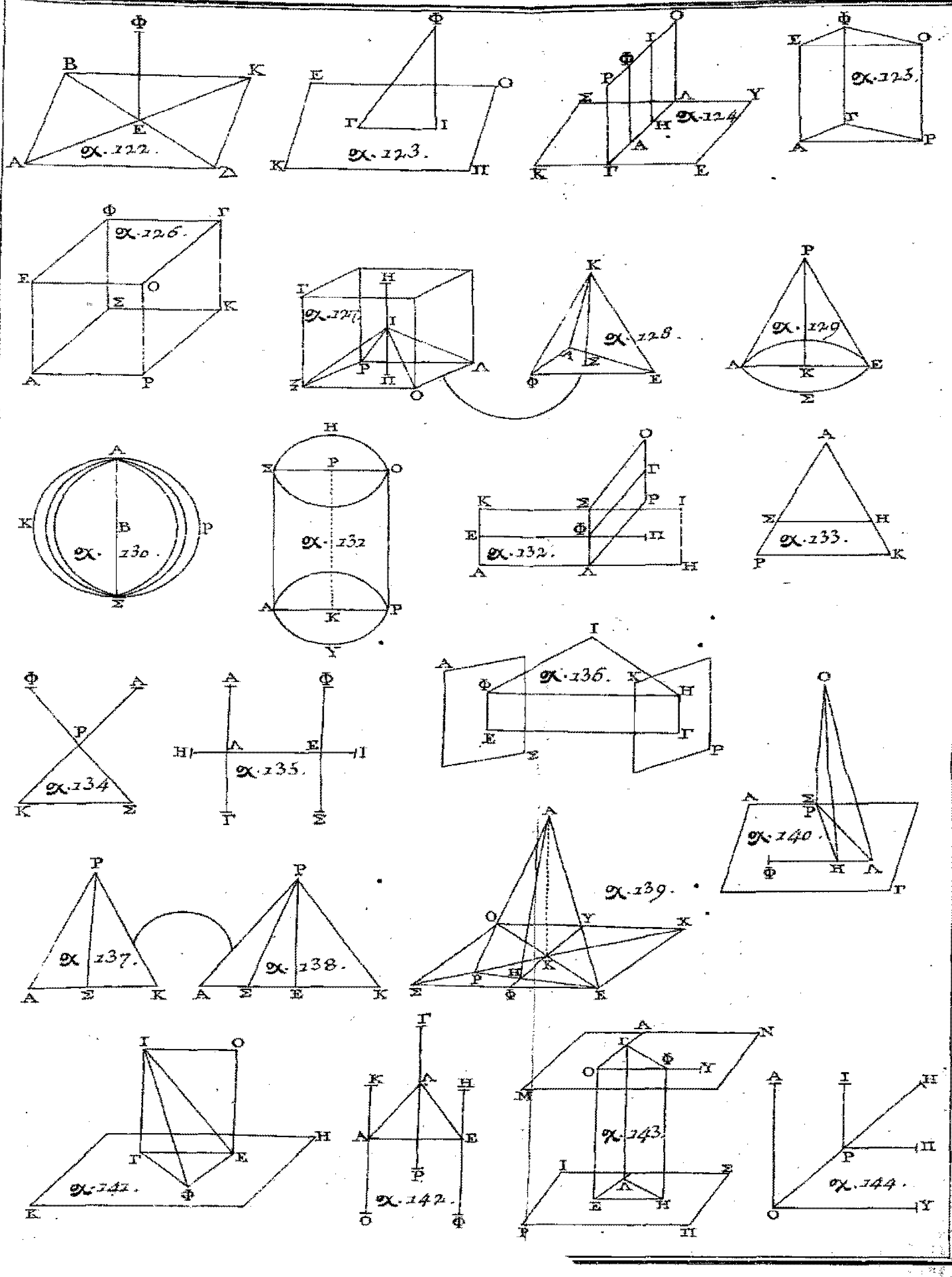

Σχ. 1.
Σχ. 2.
Σχ. 3.
Σχ. 4.
Σχ. 5.
Σχ. 6
Σχ. 7.
Σχ. 8.
Σχ. 9.
Σχ. 10.
Σχ. 11.
Σχ. 12.
Σχ. 13.
Σχ. 14.
Σχ. 15
Σχ. 16.
Σχ. 17.
Σχ. 18.
Σχ. 19.
Σχ. 20.
Σχ. 21.
Σχ. 22.
Σχ. 23
Σχ. 24
Σχ. 25.
Σχ. 26.
Σχ. 27.
Σχ. 28.


σχ. 29.
σχ. 30.
σχ. 31.
σχ. 32.
σχ. 33
σχ. 34.
σχ. 35.
σχ. 36
σχ. 37
σχ. 38.
σχ. 39.
σχ. 40.
σχ. 41.
σχ. 42.
σχ. 43.
σχ. 44.
σχ. 45.
σχ. 46.
σχ. 47.
σχ. 48
σχ. 49
σχ. 50.
σχ. 51.
σχ. 52.


σχ. 53.
σχ. 54.
σχ. 55
σχ. 56.
σχ. 57
σχ. 58
σχ. 59
σχ. 60.
σχ. 61.
σχ. 62.
σχ. 63.
σχ. 64.
σχ. 65.
σχ. 66.
σχ. 67.
σχ. 68.
σχ. 69.
σχ. 70.
σχ. 71.
σχ. 72.
σχ. 73.
σχ. 74.
σχ. 75.


σχ. 76.
σχ. 77.
σχ. 78.
σχ. 79.
σχ. 80
σχ. 81.
σχ. 82.
σχ. 83.
σχ. 84.
σχ. 85.
σχ. 86.
σχ. 87.
σχ. 88.
σχ. 89.
σχ. 90.
σχ. 91.
σχ. 92.
σχ. 93.
σχ. 94.
σχ. 95.
σχ. 96.
σχ. 97.


Σχ. 98.
Σχ. 99.
Σχ. 100.
Σχ. 101.
Σχ. 102.
Σχ. 103.
Σχ. 104.
Σχ. 105.
Σχ. 106.
Σχ. 107.
Σχ. 108.
Σχ. 109.
Σχ. 110.
Σχ. 111.
Σχ. 112.
Σχ. 113.
Σχ. 114.
Σχ. 115.
Σχ. 116.
Σχ. 117.
Σχ. 118.
Σχ. 119.
Σχ. 120.


Σχ. 122.
Σχ. 123.
Σχ. 124.
Σχ. 125.
Σχ. 126.
Σχ. 127.
Σχ. 128.
Σχ. 129.
Σχ. 130.
Σχ. 131.
Σχ. 132.
Σχ. 133.
Σχ. 134.
Σχ. 135.
Σχ. 136.
Σχ. 137.
Σχ. 138.
Σχ. 139.
Σχ. 140.
Σχ. 141.
Σχ. 142.
Σχ. 143.
Σχ. 144.