ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
Τμημα Μαθηματικων

Φωτεινή Σταυροπούλου

Μελετη των αναλυτικων λυσεων της μη-τοπικης εξισωσης Schrödinger

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2025

UNIVERSITY OF IOANNINA

Department of Mathematics

Foteini Stavropoulou

Study of the analytical solutions of the nonlocal Schrödinger equation

Master's Thesis

Ioannina, 2025

Αφιερώνεται στους γονείς μου.

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα "Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και Πληροφορική" που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 14/05/2025 από την εξεταστική επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
Θεόδωρος Χωρίκης	Καθηγητής (Επιβλέπων)
Μιχαήλ Ξένος	Καθηγητής
Φωτεινή Καρακατσάνη	Επίκουρη Καθηγήτρια

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

"Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή."

Φωτεινή Σταυροπούλου

Ευχαριστιες

Με την περάτωση της μεταπτυχιακής μου διατριβής, νιώθω την ανάγκη να εκφράσω την ειλικρινή μου ευγνωμοσύνη σε όλους όσους ήταν δίπλα μου και με στήριξαν σε αυτή τη διαδρομή. Η βοήθεια τους υπήρξε ανεκτίμητη και η στήριξή τους πολύτιμη σε κάθε στάδιο της προσπάθειάς μου.

Ιδιαίτερα, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον Επιβλέποντα Καθηγητή μου κύριο Θεόδωρο Χωρίκη, Καθηγητή του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, για την αμέριστη συμπαράσταση, την υπομονή και την επιστημονική καθοδήγηση που μου παρείχε, καθώς και για τις γόνιμες παρατηρήσεις και τις εποικοδομητικές συναντήσεις μας, που αποτέλεσαν πολύτιμο εφόδιο σε όλη τη διάρκεια της έρευνάς μου. Η συνεχής έμπνευση, η αφοσίωση στη διδασκαλία και η αγάπη του για το αντικείμενο με βοήθησαν να εξελιχθώ τόσο επαγγελματικά όσο και προσωπικά. Επιπλέον, η επιλογή του θέματος της διατριβής μου δεν ήταν απλώς μια ακαδημαϊκή κατεύθυνση, αλλά μία ευκαιρία να αποκτήσω νέες γνώσεις και να πιστέψω στις δυνατότητές μου.

Θα ήθελα επίσης να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στα άλλα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον Καθηγητή κύριο Μιχαήλ Ξένο και την Επίκουρη Καθηγήτρια κυρία Φωτεινή Καρακατσάνη, για το αμέριστο ενδιαφέρον τους, τον πολύτιμο χρόνο που αφιέρωσαν, καθώς και για τις εξαιρετικά χρήσιμες παρατηρήσεις και σχόλια που συνέβαλαν ουσιαστικά στην εξέλιξη της εργασίας μου.

Τέλος, η βαθύτερη ευγνωμοσύνη μου ανήκει στους γονείς μου, που είναι πάντα δίπλα μου, στηρίζοντάς με αδιάκοπα με κάθε δυνατό τρόπο. Η παρουσία τους και η αμέριστη υποστήριξή τους υπήρξαν θεμέλιο δύναμης και έμπνευσης σε όλη μου τη διαδρομή.

Περιληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία μελετά τη διάδοση σολιτονίων σε μη γραμμικά οπτικά μέσα, και συγκεκριμένα τη διάδοσή τους σε υγρούς κρυστάλλους. Τα σολιτόνια είναι μη γραμμικά, εντοπισμένα κύματα με ιδιαίτερες ιδιότητες, όπως η ελαστική αλληλεπίδραση, δηλαδή η διατήρηση του σχήματος και της ταχύτητάς τους μετά από τη μεταξύ τους σύγκρουση. Μαθηματικά, αποτελούν λύσεις μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, εξελικτικού τύπου, και στην δική μας περίπτωση, μιας παραλλαγής της μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger (NLS), κατάλληλα προσαρμοσμένης για τη μελέτη υγρών κρυστάλλων.

Η έρευνά μας επικεντρώνεται στην εξίσωση NLS, η οποία ενδείκνυται για την περιγραφή της διάδοσης φωτός σε μη γραμμικά μέσα, ενώ λαμβάνουμε υπόψη τη μη τοπική μη γραμμικότητα σε αντικατάσταση της κυβικής (Kerr nonlinearity). Η γενίκευση αυτή επιτρέπει την κατασκευή λύσεων που η αρχική εξίσωση δεν υποστηρίζει, τόσο στην εστιάζουσα (focusing) όσο και στην αφεστιάζουσα (defocusing) μορφή.

Ξεκινώντας από την ποιοτική ανάλυση των εξισώσεων αναλύουμε τις βασικές τους διαφορές καθώς και τις περιπλοκές που παρουσιάζονται εξαιτίας της μη τοπικότητας και κατασκευάζουμε τις, μέχρι τώρα, γνωστές αναλυτικές λύσεις τους. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας θεωρία διαταραχών, και πιο συγκεκριμένα την μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων, αντιστοιχούμε την αρχική εξίσωση σε μια εξίσωση Korteweg-de Vries (KdV), μέσω της οποίας κατασκευάζουμε λύσεις της μη τοπικής εξίσωσης. Η διαδικασία αυτή επεκτείνεται τόσο σε συζευγμένο σύστημα εξισώσεων, όσο και σε ανώτερες χωρικές διαστάσεις, όπου προκύπτει η εξίσωση Kadomtsev-Petviashvili (KP).

Abstract

This thesis examines the propagation of solitons in nonlinear optical media, specifically their propagation in liquid crystals. Solitons are nonlinear, localized waves with distinctive properties, such as elastic interaction, meaning they retain their shape and speed even after colliding with one another. Mathematically, they are solutions of nonlinear, evolutionary differential equations. In our case, they are solutions of a variation of the nonlinear Schrödinger equation (NLS), suitably adapted for studying liquid crystals.

Our research focuses on the NLS equation, which is ideal for describing light propagation in nonlinear media. We take into account non-local nonlinearity as a replacement for cubic (Kerr nonlinearity). This generalization enables the construction of solutions that the original equation does not support, both in the focusing and defocusing regimes.

Starting with a qualitative analysis of the equations, we examine their fundamental differences as well as the complexities introduced by non-locality, and we construct the currently known analytical solutions. Subsequently, using perturbation theory, specifically the multiple-scale method, we map the original equation to a Korteweg-de Vries (KdV) equation, through which solutions of the non-local equation are constructed. This process extends to both coupled systems of equations and higher spatial dimensions, where the Kadomtsev-Petviashvili (KP) equation emerges.

Περιεχομενα

Περίληψη **i**

Abstract **ii**

1 Εισαγωγή **3**

2 Ποιοτική μελέτη συστήματος **7**

2.1 Η τοπική εξίσωση $\nu = 0$ 8

2.2 Η μη τοπική εξίσωση $\nu \neq 0$ 15

2.2.1 Ποιοτική μελέτη 15

2.2.2 Ακριβείς λύσεις 18

3 Διάδοση σε μη-τοπικά μέσα: Μια χωρική διάσταση **27**

3.1 Αστάθεια διαμόρφωσης 27

3.2 Η αφεστιάζουσα εξίσωση 30

3.3 Συζευγμένες εξισώσεις 36

3.3.1 Αστάθεια διαμόρφωσης 36

3.3.2 Μηδενικές συνοριακές συνθήκες 38

3.3.3 Μη-μηδενικές συνοριακές συνθήκες 41

3.3.4 Μικτές συνοριακές συνθήκες 46

4 Γενίκευση σε δύο χωρικές διαστάσεις **51**

4.1 Κατασκευή των λύσεων 54

4.2 Αντί-σκοτεινά σολιτόνια και οι αλληλεπιδράσεις τους 55
4.3 Πιο περίπλοκες δομές 59

5 Συμπεράσματα **65**

Βιβλιογραφία **66**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγη

Η μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS) είναι ένα θεμελιώδες μοντέλο που περιγράφει τη διάδοση κυμάτων σε μη γραμμικά μέσα. Αυτή η εξίσωση εμφανίζεται σε ένα ευρύ φάσμα φυσικών συστημάτων, όπως τα μη γραμμικά οπτικά μέσα, τα ρευστά, κ.α. Στην πιο απλή μορφή της, μπορεί να γραφτεί ως

$$i\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \sigma|\psi|^2\psi = 0. \tag{1.1}$$

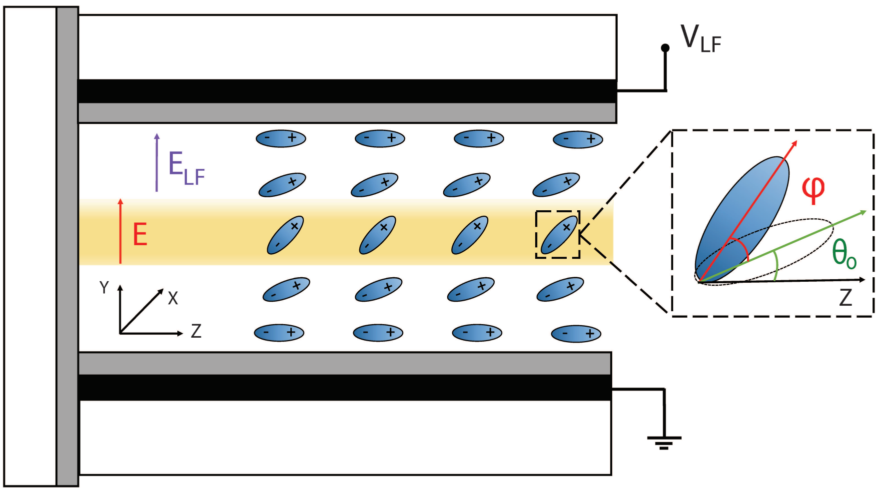
Ο πρώτος όρος αναπαριστά την εξέλιξη του κύματος στον χρόνο, ο δεύτερος (γραμμικός) όρος αναφέρεται στη διασπορά του κύματος, δηλαδή την τάση του κύματος να διασκορπίζεται καθώς διαδίδεται και ο τελευταίος είναι ο μη γραμμικός όρος που εισάγει αλληλεπιδράσεις στο σύστημα. Η σταθερή σ, και η σημασία της, εξηγείται παρακάτω στο κείμενο.

Μια ιδιαίτερη κλάση λύσεων της εξίσωσης αποτελούν τα λεγόμενα σολιτόνια. Το σολιτόνιο είναι ένα ιδιαίτερου τύπου κύμα που εμφανίζεται σε μη γραμμικά μέσα και διατηρεί το σχήμα και την ταχύτητά του κατά τη διάδοσή του. Αυτό συμβαίνει επειδή υπάρχει ισορροπία μεταξύ διασποράς, που τείνει να 'απλώσει' το κύμα, και μη γραμμικότητας, που τείνει να το 'συμπιέσει'. Τα σολιτόνια συναντώνται σε διάφορα φυσικά συστήματα, όπως στην οπτική (οπτικά σολιτόνια), την υδροδυναμική (μοναχικά κύματα σε νερό) κ.α. Ένα βασικό χαρακτηριστικό των σολιτονίων είναι ότι όταν συγκρούονται μεταξύ τους, δεν καταστρέφονται ούτε μεταβάλλονται, αλλά συνεχίζουν να διαδίδονται σαν ανεξάρτητες οντότητες.

Σκοπός της παρούσας διατριβής είναι η κατασκευή και μελέτη τέτοιων λύσεων σε μέσα με τοπική μη-γραμμικότητα, όπως οι υγροί κρύσταλλοι. Στους υγρούς κρυστάλλους, η διάδοση του φωτός εμφανίζει μη τοπικές μη-γραμμικότητες, όπου η αλληλεπίδραση δεν περιορίζεται μόνο στην περιοχή γύρω από το σημείο διέλευσης του φωτός, αλλά εκτείνεται και σε άλλες απομακρυσμένες περιοχές. Αυτό συμβαίνει λόγω της δομής των υγρών κρυστάλλων, όπου τα μόρια αλληλεπιδρούν όχι μόνο με τους κοντινούς γείτονές τους, αλλά και με μόρια σε μεγαλύτερες αποστάσεις.

Οι υγροί κρύσταλλοι είναι ένα από τα μέσα στα οποία οι μη γραμμικές και μη τοπικές εξισώσεις Schrödinger μπορούν να εφαρμοστούν για να περιγράψουν τη διάδοση του φωτός. Οι υγροί κρύσταλλοι έχουν δομή που επιτρέπει ισχυρές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μορίων τους, οι οποίες δεν περιορίζονται σε κοντινές αποστάσεις. Αυτές οι μη τοπικές αλληλεπιδράσεις κάνουν τους υγρούς κρυστάλλους ιδανικούς για τη μελέτη μη τοπικών σολιτονίων.

Τα μη τοπικά σολιτόνια είναι κυματοπακέτα που διατηρούνται σταθερά λόγω των μακρινών αλληλεπιδράσεων στο υλικό. Αυτά τα σολιτόνια είναι σημαντικά για την ανάπτυξη φωτονικών συσκευών που βασίζονται σε μη γραμμικά οπτικά φαινόμενα. Για να εξάγουμε τις εξισώσεις που περιγράφουν αυτά τα συστήματα, θεωρούμε τη διάδοση μιας δέσμης φωτός μέσα σε ένα επίπεδο γεμισμένο με νηματικό υγρό κρύσταλλο [1, 2], όπως στο παρακάτω Σχ. 1.1 [3].



Σχήμα 1.1: Σκίτσο ενός νεματικού κελιού.

Μια συνεκτική δέσμη φωτός (κίτρινη περιοχή), της οποίας το ηλεκτρικό πεδίο E είναι πολωμένο στην κατεύθυνση Y, διαδίδεται στην κατεύθυνση Z μέσω ενός κρυσταλλικού κελιού γεμάτο με ένα νηματικό υγρό με χρωστική ουσία. Ηλεκτρόδια λεπτής μεμβράνης (μαύρα) εναποτίθενται στο άνω και κάτω κυτταρικό τοίχωμα (γκρι). Ένα εξωτερικό χαμηλής συχνότητας δυναμικό τάσης V_{LF} δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο E_{LF} για να προ-κλίσει τα μόρια υπό γωνία θ_0 ως προς τον άξονα διάδοσης Z. Τα νηματικά μόρια που βρίσκονται στις άκρες συγκρατούνται σταθερά στη θέση τους χάρη σε φιλμ πρόσδεσης. Το δεξιότερο ένθετο (μαύρο) με την διακεκομμένη γραμμή δείχνει την γωνιακή περιστροφή ενός νηματικού μορίου σε σχέση με την κατεύθυνση διάδοσης Z στην απουσία (θ_0) και παρουσία $(\theta_0 + \varphi)$ της οπτικής δέσμης.

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το παραπάνω φαινόμενο στην περίπτωση των $(2+1)$ χωρικών και χρονικών διαστάσεων έχουν την μορφή,

$$iE_z + d\nabla^2 E + \sigma \sin(2\theta) E = 0, \tag{1.2α$'$}$$

$$\nu \nabla^2 \theta - q \sin(2\theta) = -2|E|^2 \cos(2\theta), \tag{1.2β$'$}$$

όπου $\nabla^2 = \partial_X^2 + \partial_Y^2$. Από το σύστημα (1.2) παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις E και θ στη διδιάστατη περίπτωση εξαρτώνται από τις χωρικές μεταβλητές X και Y, αλλά και τη μεταβλητή διάδοσης Z. Για τις σταθερές του συστήματος γνωρίζουμε ότι το d προσδιορίζει τον δείκτη διάθλασης, ενώ το q την μη-γραμμική σύζευξη. Εξίσου σημαντικό ρόλο στην ανάλυση μας παίζει η σταθερά ν, η οποία προσδίδει στο σύστημα την μη-τοπικότητα, και αποτελεί το μέτρο της απόκρισης των νηματικών κρυστάλλων στο χώρο. Όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή αυτής της σταθεράς, τόσο πιο σημαντική είναι η μη-τοπική απόκριση, ενώ η τάξη αυτής της σταθεράς σε πραγματικές καταστάσεις είναι της τάξης $\mathcal{O}(10^2)$. Η σταθερά σ του συστήματος μπορεί να πάρει δύο τιμές και είναι αυτή η οποία δημιουργεί δύο περιπτώσεις για τη μη-γραμμικότητα του συστήματος και κατά συνέπεια εμφανίζονται διαφορετικοί τύποι σολιτονίων. Πιο συγκεκριμένα για τις τιμές του σ ισχύουν τα εξής,

- $\sigma = 1$: τότε έχουμε εστιάζουσα (focusing) μη-γραμμικότητα ενώ οι λύσεις παριστάνουν φωτεινά σολιτόνια, δηλαδή κύματα τα οποία φθίνουν στο ∞.
- $\sigma = -1$: τότε έχουμε αφεστιάζουσα (defocusing) μη-γραμμικότητα ενώ οι λύσεις παριστάνουν σκοτεινά σολιτόνια, τα οποία θα μελετήσουμε στην συνέχεια της διατριβής.

Με χρήση της σειράς Taylor μπορούμε να απλοποιήσουμε το σύστημά μας για να διευκολύνουμε τη μελέτη μας. Δηλαδή, αν θεωρήσουμε μικρές αποκλίσεις θ, ώστε $\sin\theta \approx \theta$ και $\cos\theta \approx 1$ το σύστημα (1.2) γράφεται ως

$$iE_z + d\nabla^2 E + 2\sigma\theta E = 0, \tag{1.3α$'$}$$

$$\nu \nabla^2 \theta - 2q\theta = -2|E|^2. \tag{1.3β$'$}$$

Το σύστημα εξισώσεων (1.3) αποτελεί το θεμελιώδες μαθηματικό πλαίσιο που περιγράφει την εξέλιξη του φαινομένου που εξετάζουμε σε αυτήν τη διατριβή.

Κεφάλαιο 1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ποιοτική μελέτη συστήματος

Η ανάλυση του χώρου των φάσεων ενός συστήματος αποτελεί βασικό εργαλείο για τη διερεύνηση και τον προσδιορισμό χρήσιμων χαρακτηριστικών του. Αυτή η διαδικασία, γνωστή ως ποιοτική ανάλυση, δίνει τη δυνατότητα κατανόησης της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος, χωρίς να απαιτείται η ακριβής λύση των εξισώσεών του. Λαμβάνουμε μια βαθύτερη εικόνα για την εξέλιξη, την ευστάθεια, καθώς και για τα κρίσιμα σημεία και τις τροχιές του συστήματος, το οποίο βοηθά στην συνολική κατανόησή του.

Σε αυτήν την ενότητα θα εστιάσουμε στη μονοδιάστατη περίπτωση κατά την οποία το σύστημά μας γράφεται στη μορφή,

$$iu_z + du_{xx} + 2\sigma\theta u = 0, \tag{2.1α'}$$

$$\nu\theta_{xx} - 2q\theta = -2|u|^2, \tag{2.1β'}$$

όπου ν, d, σ, q αποτελούν πραγματικές σταθερές.

Για τη δημιουργία του χώρου φάσης ενός συστήματος είναι χρήσιμο να ελαχιστοποιήσουμε τις σταθερές με κάποιον μετασχηματισμό έτσι ώστε να είναι πιο εύκολη η μελέτη του. Στη δική μας περίπτωση, ξεκινώντας από το (2.1), εισάγουμε τους εξής μετασχηματισμούς για τις ανεξάρτητες και τις εξαρτημένες μεταβλητές του συστήματος,

$$X = \sqrt{2}x, \quad Z = 2dz, \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{d}}u, \quad \theta = \frac{1}{d}\theta.$$

Με την παραπάνω αλλαγή μεταβλητών διατηρούμε τις σταθερές q, ν, σ στο σύστημα μας διότι η καθεμία δίνει σημαντικές πληροφορίες για το πρόβλημά μας. Η σταθερά ν αποτελεί ένα δείκτη που μας δείχνει πόσο μακριά είμαστε από την κλασική εξίσωση του Schrödinger αφού για $\nu = 0$ το σύστημα ανάγεται σε αυτήν. Τέλος η σταθερά σ είναι αυτή που ξεχωρίζει την εστιάζουσα από την αφεστιάζουσα περίπτωση. Εισάγοντας τον παραπάνω μετασχηματισμό στο σύστημα

(2.1) καταλήγουμε ότι το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το,

$$i\psi_Z + \psi_{XX} + \sigma\theta\psi = 0, \tag{2.2α'}$$
$$\nu\theta_{XX} - q\theta = -|\psi|^2. \tag{2.2β'}$$

Το (2.2) αποτελεί μια ισοδύναμη μορφή του αρχικού συστήματος συνεπώς η μελέτη αυτού του κεφαλαίου θα στηριχθεί σε αυτή την μορφή.

2.1 Η τοπική εξίσωση $\nu = 0$

Αν στο σύστημα (2.2) θεωρήσουμε την σταθερά ν ίση με μηδέν παρατηρούμε ότι παίρνουμε τη μη-γραμμική εξίσωση του Schrödinger (NLS) η οποία αποτελεί μια θεμελιώδη εξίσωση τόσο για τις μαθηματικές της ιδιότητες όσο και για τις φυσικές εφαρμογές της. Η ποιοτική μελέτη του συστήματος μας θα ξεκινήσει από τη μελέτη αυτής της απλής περίπτωσης ($\nu = 0$) και στη συνέχεια θα επεκταθεί και στην περίπτωση $\nu \neq 0$.

Θέτουμε $\nu = 0$ στο σύστημα (2.2) και καταλήγουμε στην εξίσωση,

$$i\psi_Z + \psi_{XX} + \frac{\sigma}{q}|\psi|^2\psi = 0, \tag{2.3}$$

όπου σ, q αυθαίρετες σταθερές. Ορίζουμε

$$\psi(X, Z) = u(X, Z)e^{i\phi(X,Z)},$$

όπου u, ϕ πραγματικές συναρτήσεις.

Αφού αντικαταστήσουμε στην (2.3) έχουμε,

$$i\Big(u_Z + 2u_X\phi_X + u\phi_{XX}\Big) + \Big(\frac{\sigma}{q}u^3 - u\phi_X^2 + u_{XX} - u\phi_{XX}\Big) = 0. \tag{2.4}$$

Απο το φανταστικό μέρος της (2.4) παίρνουμε

$$u_Z + 2u_X\phi_X + u\phi_{XX} = 0 \Rightarrow uu_Z + 2uu_X\phi_X + u^2\phi_{XX} = 0.$$

ή ισοδύναμα

$$uu_Z + \big(u^2\phi_X\big)_X = 0. \tag{2.5}$$

Αντίστοιχα από το πραγματικό μέρος της (2.4) παίρνουμε

$$\frac{\sigma}{q}u^3 - u\phi_X^2 + u_{XX} - u\phi_Z = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{\sigma}{q}u^2 - \phi_X^2 + \frac{1}{u}u_{XX} - \phi_Z = 0. \tag{2.6}$$

Αναζητούμε λύσεις για τις οποίες ισχύει $u = u(X)$, δηλαδή λύσεις, οι οποίες είναι εντοπισμένες στον χώρο, συνεπώς $u_Z = 0$, και άρα η (2.5) γράφεται

$$\left(u^2\phi_X\right)_X = 0. \tag{2.7}$$

Έπειτα από ολοκλήρωση της σχέσης (2.7) προκύπτει,

$$u^2\phi_X = c(Z) \Leftrightarrow \phi_X = \frac{c(Z)}{u^2}. \tag{2.8}$$

Παραγωγίζουμε δύο φορές ως προς Z τη σχέση (2.8) και παίρνουμε,

$$\phi_{XZZ} = \frac{c_{ZZ}}{u^2}. \tag{2.9}$$

Παραγωγίζοντας την (2.6) δύο φορές παίρνουμε,

$$\phi_{XZZ} = \frac{4c_Z^2}{u^5}u_X. \tag{2.10}$$

Από τις σχέσεις (2.9) και (2.10) πρέπει να ισχύει,

$$\frac{c_{ZZ}}{u^2} = \frac{4c_Z^2}{u^5}u_X \Leftrightarrow \frac{c_{ZZ}}{c_Z^2} = \frac{4u_X}{u^4}. \tag{2.11}$$

Στην εξίσωση (2.11) παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος της ισότητας αποτελεί συνάρτηση των X, Z, ενώ το αριστερό αποτελεί συνάρτηση μόνο του Z, συνεπώς αυτή η ισότητα μπορεί να υφίσταται μόνο στην περίπτωση που ισχύει, $c(Z) = c_1 =$ σταθερό.
Τέλος, η σχέση (2.8) γίνεται,

$$\phi_X = \frac{c_1}{u^2},$$

και άρα

$$\phi = \int \frac{c_1}{u^2}dX + P(Z). \tag{2.12}$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (2.12) ως προς Z έχουμε ότι ισχύει $\phi_Z = P_Z$ όμως η ϕ είναι συνάρτηση του X άρα $P_Z = \mu =$ σταθερό. Τελικά,

$$\phi = \int \frac{c_1}{u^2}dX + \mu Z + \rho_0. \tag{2.13}$$

Η σχέση (2.6), σε συνδυασμό με την σχέση (2.13), γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{\sigma}{q}u^2 + \frac{1}{u}u_{XX} = \frac{c_1^2}{u^4} + \mu \tag{2.14}$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (2.14) με u_X, και αφού ολοκληρώσουμε μια φορά τη σχέση παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\left(u_X\right)^2 + \frac{\sigma}{4q}u^4 - \frac{\mu}{2}u^2 + \frac{c_1^2}{2u^2} = E, \tag{2.15}$$

όπου $c_1,\ \mu,\ E$ πραγματικές σταθερές.
Η σχέση αυτή θα χρησιμοποιηθεί για να σχεδιάσουμε τα διαγράμματα φάσης της εξίσωσης NLS για τις διάφορες τιμές των σταθερών παραμέτρων.

Στη μελέτη ενός διαγράμματος φάσης, σημαντικό ρόλο έχει η διαχωρίστρια καμπύλη. Συγκεκριμένα, αυτή η καμπύλη διαχωρίζει τις περιοχές του χώρου στις οποίες η δυναμική κατάσταση του συστήματος είναι διαφορετική. Για την διαχωρίστρια καμπύλη ενός διαγράμματος φάσης πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα $u_X = 0$ και $u_{XX} = 0$. Από τις σχέσεις (2.14) και (2.15), παίρνουμε τις εξής σχέσεις

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma}{q}u^6 - \mu u^4 - c_1^2 = 0 \\ \\ \dfrac{\sigma}{q}u^6 - 2\mu u^4 + 2c_1^2 - 4Eu^2 = 0. \end{cases}$$

Θέτουμε $u^2 = v$ ώστε το σύστημα να διαμορφωθεί ως

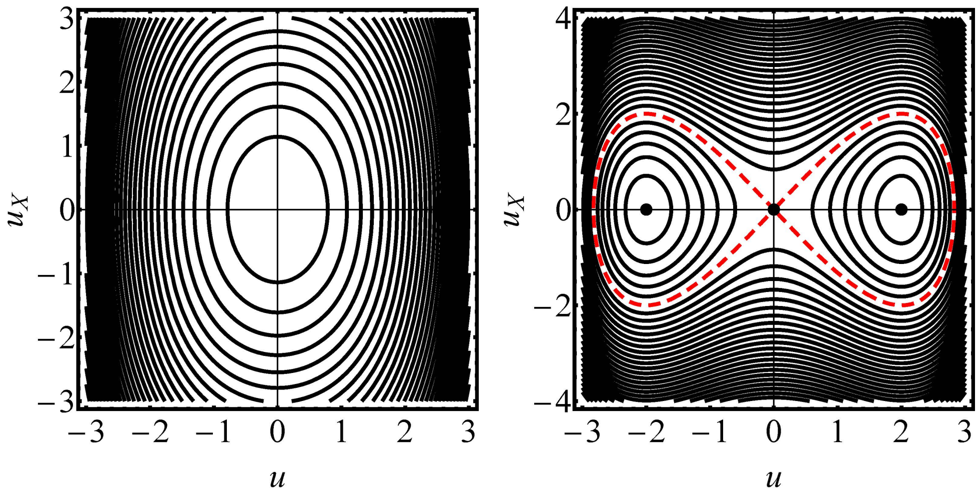
$$\begin{cases} \dfrac{\sigma}{q}v^3 - \mu v^2 - c_1^2 = 0 \\ \\ \dfrac{\sigma}{q}v^3 - 2\mu v^2 + 2c_1^2 - 4Ev = 0. \end{cases}$$

Η επίλυση του παραπάνω συστήματος μας δίνει τις τιμές για τις οποίες βρισκόμαστε πάνω σε αυτήν την καμπύλη ανάλογα τις τιμές των σταθερών του συστήματος.

Έχοντας βρει τη σχέση (2.15), και συνεχίζοντας τη μελέτη μας, παρατηρούμε ότι για την εύρεση όλων των πιθανών διαφορετικών χώρων φάσεων που μπορούμε να λάβουμε από το συγκεκριμένο σύστημα σημαντικό ρόλο παίζει το πρόσημο της ποσότητας (σ/q), στην οποία στηρίζεται η παρακάτω ανάλυση.

Η περίπτωση: $c_1 = 0$

(Α′) $\dfrac{\sigma}{q} > 0$

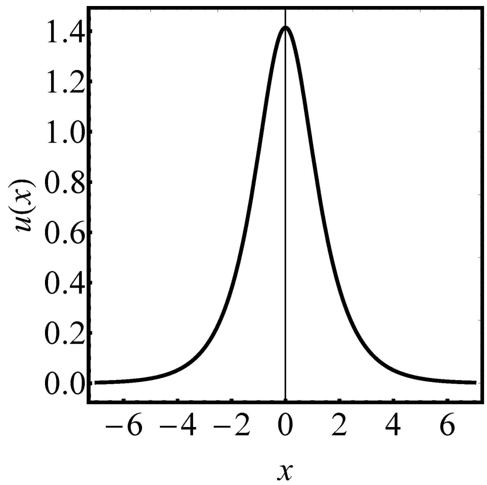


Σχήμα 2.1: Διάγραμμα φάσης για τη σχέση (2.15) με $\mu < 0$ ($\mu = -2$), $\sigma = 1$ και $q = 3$ (αριστερή εικόνα) και $\mu > 0$ ($\mu = 2$), $\sigma = 1$, $E = 0$ και $q = 2$ (δεξιά εικόνα).

Στο παραπάνω Σχήμα 2.1, το αριστερό διάγραμμα φάσης αποτελείται από μια περιοχή κλειστών καμπυλών, οι οποίες αντιστοιχούν σε περιοδικές λύσεις για το σύστημα μας. Αντίστοιχα το δεξί διάγραμμα φάσης αποτελείται από τρεις διαφορετικές περιοχές καμπύλων. Η πρώτη περιοχή αποτελείται από τη διαχωρίστρια καμπύλη, η οποία είναι η μοναδική καμπύλη που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η δεύτερη περιοχή αποτελείται από τις κλειστές καμπύλες που βρίσκονται εντός της διαχωρίστριας καμπύλης, ενώ η τρίτη από τις κλειστές καμπύλες είναι εκτός της διαχωρίστριας. Από τις κλειστές καμπύλες συμπεραίνουμε ότι οι λύσεις του συστήματός μας είναι περιοδικές. Οι ανοιχτές περιοχές περιγράφονται από συναρτήσεις τύπου Weierstrass για τις οποίες λεπτομέρειες μπορούμε να αντλήσουμε από το [4]. Στην περίπτωση των κλειστών τροχιών λαμβάνουμε την ελλειπτική συνάρτηση Jacobi Sn [4], ενώ η διαχωρίστρια μας δίνει το σολιτόνιο της NLS,

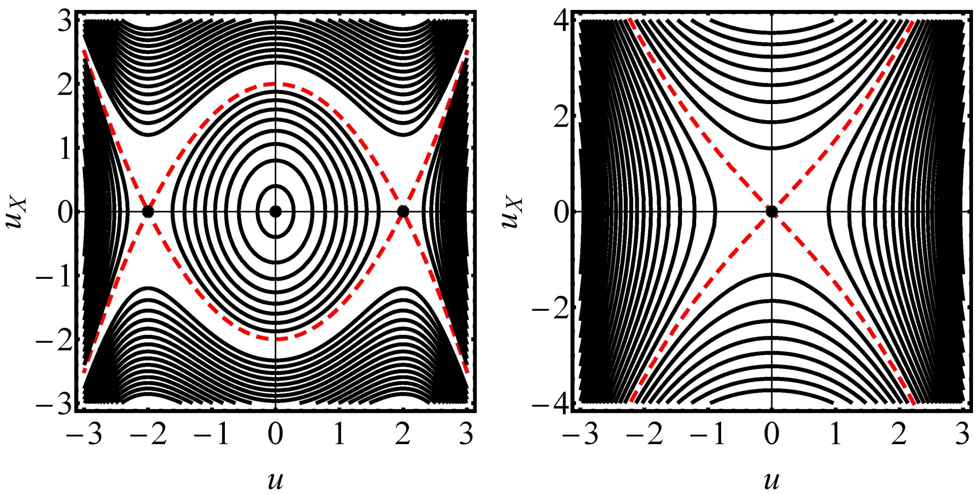
$$u(x) = \sqrt{\frac{2q}{\sigma}}\eta \,\mathrm{sech}(\eta x),$$

η αυθαίρετη σταθερά, το οποίο παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2: Σολιτονική λύση, φωτεινό σολιτόνιο, της εξίσωσης (2.3) για $\sigma = 1,\ q = 1,\ \eta = 1$.

(Β΄) $\dfrac{\sigma}{q} < 0$

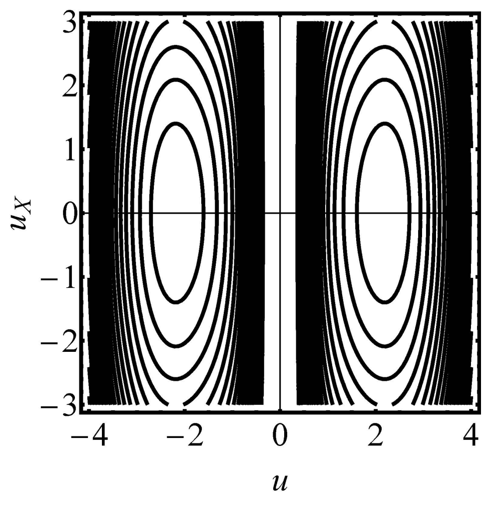


Σχήμα 2.3: Διάγραμμα φάσης για τη σχέση (2.15) με $\mu < 0$ ($\mu = -2$), $\sigma = -1$, $E = 2$ και $q = 2$ (αριστερή εικόνα) και $\mu > 0$ ($\mu = 2$), $\sigma = 1$, $E = 0$ και $q = -2$ (δεξιά εικόνα).

Στο Σχήμα 2.3, το αριστερό διάγραμμα φάσης αποτελείται από τρεις διαφορετικές περιοχές καμπυλών. Η πρώτη αποτελείται από τη διαχωρίστρια καμπύλη, ενώ υπάρχουν και δυο ακόμα περιοχές καμπύλων. Συγκεκριμένα έχουμε το σύνολο των καμπύλων που βρίσκονται έξω από την διαχωρίστρια καμπύλη οι οποίες είναι ανοιχτές καμπύλες, και οι καμπύλες εντός της διαχωρίστριας, που είναι κλειστές, συνεπώς εκεί έχουμε περιοδικές λύσεις. Αντίθετα για τις ανοιχτές καμπύλες εκτός της διαχωρίστριας παρατηρούμε ότι είναι φραγμένες στην κατεύθυνση u_X, ενώ απειρίζονται ως προς την u κατεύθυνση. Αντίστοιχα το δεξί διάγραμμα φάσης αποτελείται από δύο καμπύλες, που διέρχονται από την αρχή των αξόνων, ενώ όλες οι υπόλοιπες τροχιές είναι ανοιχτές καμπύλες. Οι ανοιχτές περιοχές περιγράφονται από συναρτήσεις τύπου Weierstrass, οι κλειστές από την ελλειπτική συνάρτηση Jacobi Sn λεπτομέρειες μπορούμε να αντλήσουμε από το [4]. Ειδικότερα, για τη διαχωρίστρια γνωρίζουμε ότι δεν αντιστοιχεί σε σολιτονικές λύσεις.

Η περίπτωση: $c_1 \neq 0$

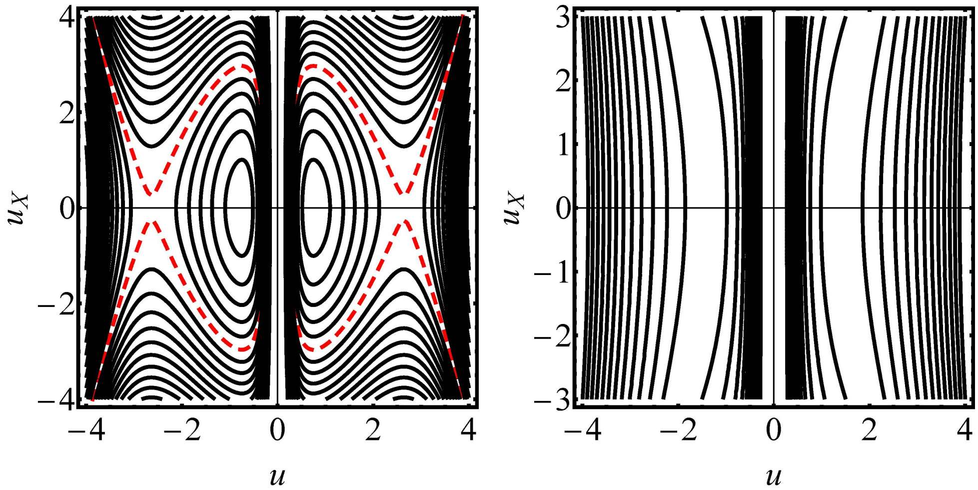
(Α′) $\dfrac{\sigma}{q} > 0$



Σχήμα 2.4: Διάγραμμα φάσης για τη σχέση (2.15) με $\mu \in \mathbb{R}$ ($\mu = 2$), $\sigma = 1$, $c_1 = 3$ και $q = 2$.

Στο διάγραμμα φάσης του σχήματος 2.4 παρατηρούμε την εμφάνιση κλειστών καμπύλων, γεγονός που μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι, σε αυτή την περίπτωση, η λύση του συστήματος είναι περιοδική. Εδώ δεν υπάρχουν σολιτόνια.

(Β′) $\dfrac{\sigma}{q} < 0$

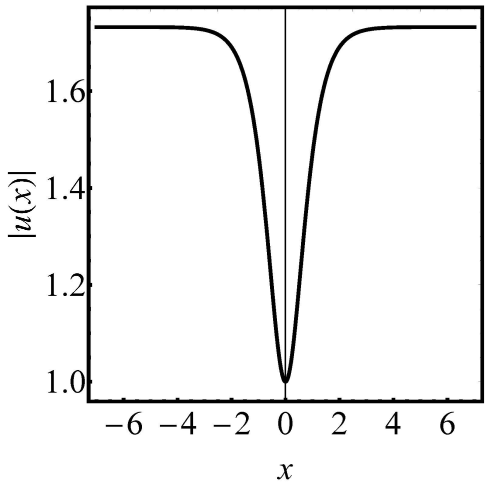


Σχήμα 2.5: Διάγραμμα φάσης για τη σχέση (2.15) με $\mu < 0$ ($\mu = -3.5$), $\sigma = 1$, $c_1 = 1$, $E = 0$ και $q = -2$. (αριστερή εικόνα) και $\mu > 0$ ($\mu = 2$), $\sigma = -1$, $c_1 = 3$ και $q = 2$ (δεξιά εικόνα).

Στο αριστερό διάγραμμα φάσης στο Σχήμα 2.5 διακρίνουμε τρεις περιοχές, τη διαχωρίστρια, τις καμπύλες μέσα από την διαχωρίστρια και τις καμπύλες έξω από αυτήν. Οι καμπύλες εντός της διαχωρίστριας είναι κλειστές και αντιστοιχούν σε περιοδικές λύσεις. Οι καμπύλες έξω από τη διαχωρίστρια είναι κλειστές και ανοιχτές, όπου οι κλειστές αντιστοιχούν σε περιοδικές λύσεις, ενώ οι ανοιχτές είναι φραγμένες στην κατεύθυνση u και απειρίζονται στην κατεύθυνση u_X. Αντίστοιχα, στο δεξί διάγραμμα φάσης παρατηρούμε ότι εμφανίζονται μόνο ανοιχτές καμπύλες. Επίσης, παρατηρούμε ότι όσο απομακρυνόμαστε από την αρχή των αξόνων οι τροχιές αποκτούν πιο γραμμική συμπεριφορά. Οι ανοιχτές περιοχές περιγράφονται από συναρτήσεις τύπου Weierstrass, για τις οποίες μπορούμε να αντλήσουμε λεπτομέρειες στο [4]. Αντίστοιχα, οι κλειστές περιοχές περιγράφονται από την ελλειπτική συνάρτηση Jacobi Sn, για την οποία επίσης μπορούμε να βρούμε περισσότερες πληροφορίες στο [4]. Ειδικότερα, η διαχωρίστρια, δηλαδή η σολιτονική λύση, δίνεται από τον τύπο

$$u(x) = \sqrt{\frac{2|q|}{|\sigma|}}\eta \tanh(\eta x) + ic,$$

όπου η, c αυθαίρετες σταθερές, και παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6: Σολιτονική λύση, σκοτεινό σολιτόνιο, της εξίσωσης (2.3) για $\sigma = 1,\ q = 1,\ c = 1,\ \eta = 1$.

2.2 Η μη τοπική εξίσωση $\nu \neq 0$

Αφού ολοκληρώθηκε η ανάλυση της περίπτωσης $\nu = 0$, η έρευνά μας επικεντρώνεται τώρα στην πιο γενική περίπτωση, όπου $\nu \neq 0$, με σκοπό την εξέταση των σημαντικών αλλαγών που επιφέρει η παρουσία αυτής της σταθεράς στη συμπεριφορά του συστήματος. Η εισαγωγή της σταθεράς ν αποτελεί σημαντική παρέμβαση στο σύστημα μας διότι προσδίδει στο σύστημα μας τη μη-τοπικότητα. Επίσης, από την μια δίνει στο σύστημα μας μια πιο περίπλοκη δομή, από την άλλη όμως εισάγει νέες λύσεις που δεν υπήρχαν στην περίπτωση $\nu = 0$, τις οποίες θα παρουσιάσουμε και θα μελετήσουμε παρακάτω.

2.2.1 Ποιοτική μελέτη

Η ποιοτική ανάλυση του συστήματος στην παρούσα περίπτωση αποτελεί μια πιο σύνθετη διαδικασία, η οποία απαιτεί την εισαγωγή συγκεκριμένων προϋποθέσεων σχετικά με τη μορφή των συναρτήσεών μας και της σχέσης που τις συνδέει, με στόχο την ορθή συσχέτιση των εξισώσεων. Η μελέτη του συστήματος μέσω του χώρου φάσης θα επικεντρωθεί αποκλειστικά στις περιπτώσεις όπου ισχύει η σχέση $\theta = A\psi + B$. Αυτή η παραδοχή βοηθά στη βαθύτερη κατανόηση της δυναμικής του συστήματος, επιτρέποντας την έρευνα να επικεντρωθεί σε συγκεκριμένες συνθήκες που οδηγούν στη διατύπωση πιο σαφών συμπερασμάτων. Για να γίνει αυτό ξεκινώντας από το σύστημα (2.2) και θέτοντας

$$\psi(X,Z) = u(X,Z)e^{i\phi(X,Z)},$$

έχουμε

$$\begin{cases} i(u_Z + iu\phi_Z) + (u_{XX} + 2iu_X\phi_X - u\phi_X^2 + iu\phi_{XX}) + \sigma\theta u = 0, \\ \nu\theta_{XX} - q\theta = -u^2. \end{cases} \tag{2.16}$$

Χωρίζοντας το φανταστικό και το πραγματικό μέρος στην πρώτη σχέση της (2.16), παίρνουμε

$$\begin{cases} u_Z + 2u_X\phi_X + u\phi_{XX} = 0, \\ -u\phi_Z + u_{XX} - u\phi_X^2 + \sigma\theta u = 0, \\ \nu\theta_{XX} - q\theta = -u^2. \end{cases} \tag{2.17}$$

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (2.17) είναι η ίδια με την αντίστοιχη εξίσωση της περίπτωσης $\nu = 0$, συνεπώς η σχέση (2.8) ισχύει και σε αυτήν την περίπτωση. Αντίστοιχα παρατηρούμε ότι και η δεύτερη σχέση του συστήματος (2.17) είναι παρόμοια με την αντίστοιχη εξίσωση της περίπτωσης $\nu = 0$. Καταλήγουμε συνεπώς ότι ισχύει

$$\phi = \int \frac{c_1}{u^2} dX + \mu Z + \phi_0.$$

Το σύστημα (2.17) παίρνει την παρακάτω μορφή

$$\begin{cases} -\mu u + u_{XX} - \dfrac{c_1^2}{u^4} u + \sigma\theta u = 0, \\ \nu\theta_{XX} - q\theta = -u^2. \end{cases} \tag{2.18}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση του συστήματος με u_X και τη δεύτερη με θ_X, και έπειτα από ολοκλήρωση και πράξεις καταλήγουμε στην εξής σχέση

$$-\frac{\mu}{\sigma}u^2 + \frac{1}{\sigma}(u_X)^2 + \frac{c_1^2}{2u^2} + \theta u^2 + \frac{\nu}{2}(\theta_X)^2 - \frac{q}{2}\theta^2 = E.$$

Η μελέτη μας επικεντρώνεται στην περίπτωση κατά την οποία η συνάρτηση θ γράφεται στη μορφή

$$\theta = A\psi + B,$$

όπου $A,\ B$, σταθερές.

Αντικαθιστώντας τη σχέση για το θ στο σύστημα (2.18) παίρνουμε

$$\begin{cases} -\mu u + u_{XX} - \dfrac{c_1^2}{u^4}u + \sigma(Au + B)u = 0, \\ \nu A u_{XX} - q(Au + B) = -u^2. \end{cases} \tag{2.19}$$

Η συμβιβαστότητα μεταξύ των δύο εξισώσεων του συστήματος (2.19) απαιτεί $c_1 = 0$. Συνεπώς

$$\begin{cases} -\mu u + u_{XX} + \sigma(Au + B)u = 0, \\ \nu A u_{XX} - q(Au + B) = -u^2. \end{cases}$$

Λύνοντας τη δεύτερη διαφορική εξίσωση ως προς u_{XX}, και αντικαθιστώντας στην πρώτη, καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$-\mu u + \frac{qAu}{\nu A} + \frac{qB}{\nu A} - \frac{u^2}{\nu A} + \sigma A u^2 + \sigma B u = 0. \tag{2.20}$$

Από τη σχέση (2.20) συμπεραίνουμε ότι πρέπει να ισχύουν τα εξής

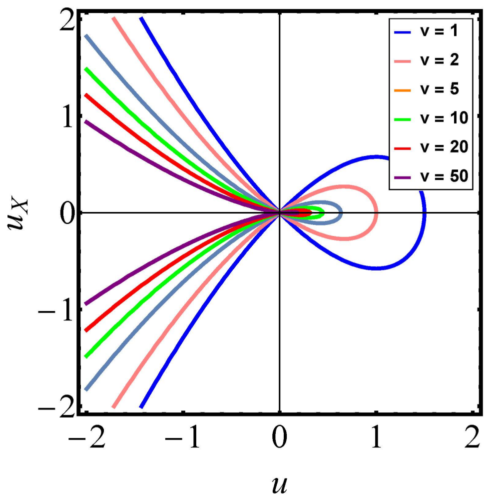
$$\begin{cases} \mu = \dfrac{q}{\nu}, \\ A = \sqrt{\dfrac{1}{\sigma\nu}}, \\ B = 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Εφαρμόζουμε τα παραπάνω στη σχέση (2.18) και καταλήγουμε ότι

$$-\frac{\mu}{\sigma}u^2 + \frac{1}{\sigma}u_X^2 + \frac{1}{\sqrt{\sigma\nu}}u^3 + \frac{\nu}{2}\frac{1}{\sigma\nu}u_X^2 - \frac{q}{2}\frac{1}{\sigma\nu}u^2 = E. \tag{2.22}$$

όπου $\mu,\ E$ πραγματικές σταθερές.

Η μελέτη μας, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, επικεντρώνεται στις σολιτονικές λύσεις, οι οποίες αποτελούν ένα αντικείμενο διερεύνησης λόγω της μοναδικής τους συμπεριφοράς και ευστάθειας. Στο παρακάτω διάγραμμα φάσης παρουσιάζονται οι περιοχές στις οποίες επικρατούν σολιτονικές λύσεις. Οι περιοχές αυτές καθορίζονται βάσει των παραμέτρων και των συνθηκών του συστήματος, και αναδεικνύουν τις περιπτώσεις όπου οι λύσεις διατηρούν τις χαρακτηριστικές ιδιότητες σολιτονίων κατά τη διάδοση και την αλληλεπίδρασή τους.



Σχήμα 2.7: Διάγραμμα φάσης για την σχέση (2.22) με $q = 1$ και $\sigma = 1$, $E = 0$ για τις διάφορες τιμές του ν.

Σημειώνουμε, ότι παραθέτουμε αποκλειστικά τις καμπύλες που αντιστοιχούν σε σολιτονικές λύσεις. Η παραπάνω διαδικασία είναι δυνατό να γίνει μόνο κάτω από περιορισμούς σχετικά με τη σχέση που συνδέει τα δυο πεδία ψ και θ. Στην επόμενη ενότητα παραθέτουμε όλες, τις μέχρι τώρα, γνωστές λύσεις του συστήματος (2.2) και τις αντίστοιχες φασικές καμπύλες, ώστε να είναι δυνατή η άμεση σύγκριση με την περίπτωση $\nu = 0$, δηλαδή την εξίσωση NLS.

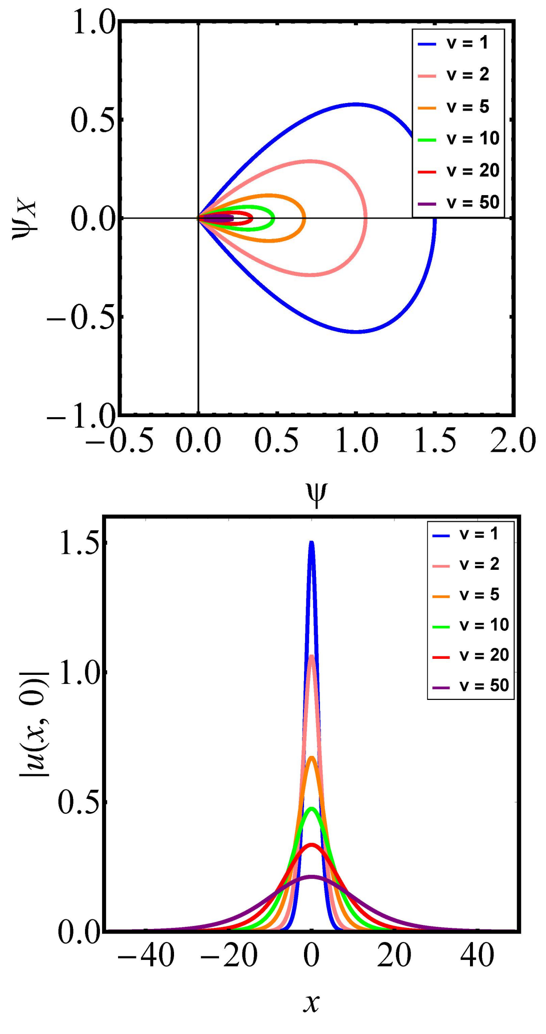
2.2.2 Ακριβείς λύσεις

Το σύστημα των λύσεων που ικανοποιεί τη σχέση (2.2) παρουσιάζει διαφοροποιήσεις ανάλογα με το πρόσημο των σταθερών του συστήματος. Σε αυτήν την ενότητα, σκοπός μας είναι η λεπτομερής καταγραφή όλων των πιθανών περιπτώσεων για τις λύσεις αυτές. Έχοντας ήδη προσδιορίσει τις δυνατές λύσεις για την ειδική περίπτωση όπου $\nu = 0$, εστιάζουμε τώρα στη διερεύνηση των λύσεων που παραμένουν έγκυρες όταν $\nu \neq 0$, καθώς και στην ανάδειξη νέων λύσεων που εμφανίζονται αποκλειστικά σε αυτή την περίπτωση. Τα γνωστά ζεύγη λύσεων που υπακούει το σύστημά μας ανάλογα με τις σταθερές είναι τα εξής [5]

(Α′) $\sigma = 1$, $q > 0$

$$\psi(x,z) = \frac{3q}{2\sqrt{\nu}}\,\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{q}{4\nu}}(x-2\kappa z)\right] e^{i\left[\kappa x - \left(\kappa^2 - \frac{q}{\nu}\right)z + \phi_0\right]}, \tag{2.23}$$

$$\theta(x,z) = \frac{3q}{2\nu}\,\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{q}{4\nu}}(x-2\kappa z)\right]. \tag{2.24}$$

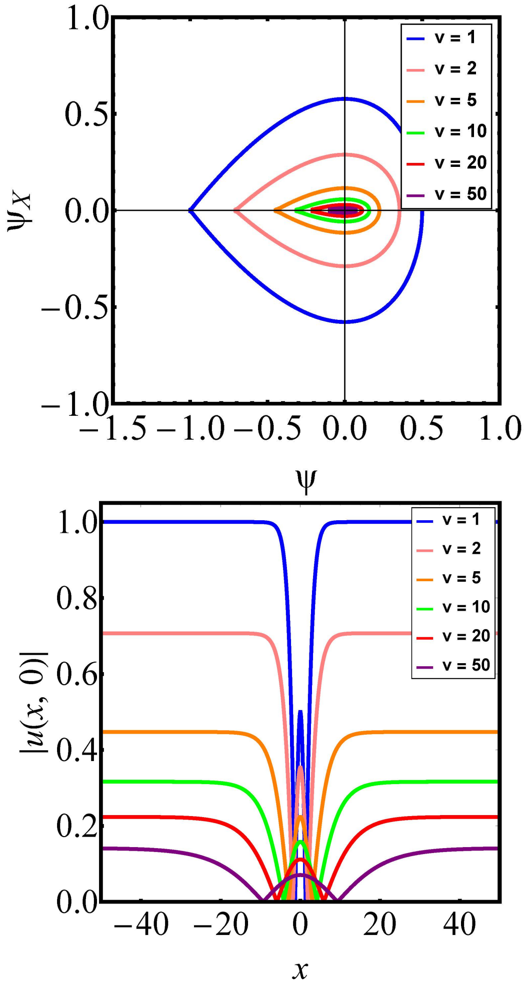


Σχήμα 2.8: Διάγραμμα φάσης, εξίσωση (2.23), για $\sigma = 1, q > 0$ για τις διάφορες τιμές του ν (πάνω εικόνα) και ακριβής λύση (κάτω εικόνα).

(Β′) $\sigma = 1,\ q < 0$

$$\psi(x,z) = \left(\frac{3|q|}{2\sqrt{\nu}} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{|q|}{4\nu}} (x - 2\kappa z) \right] - \frac{|q|}{\sqrt{\nu}} \right) e^{i\left[\kappa x - \left(\kappa^2 + \frac{|q|}{\nu}\right) z + \phi_0\right]}, \tag{2.25}$$

$$\theta(x,z) = \frac{3q}{2\nu} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{|q|}{4\nu}} (x - 2\kappa z) \right] - \frac{|q|}{\nu}. \tag{2.26}$$

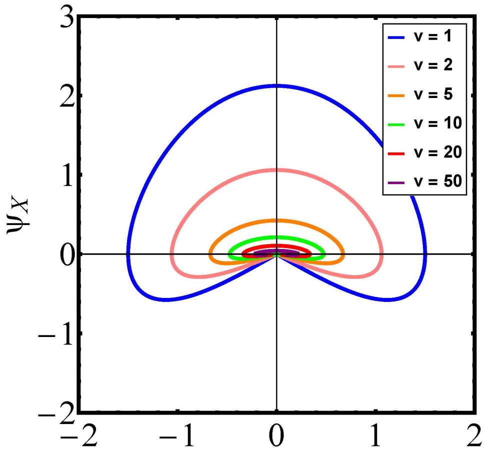


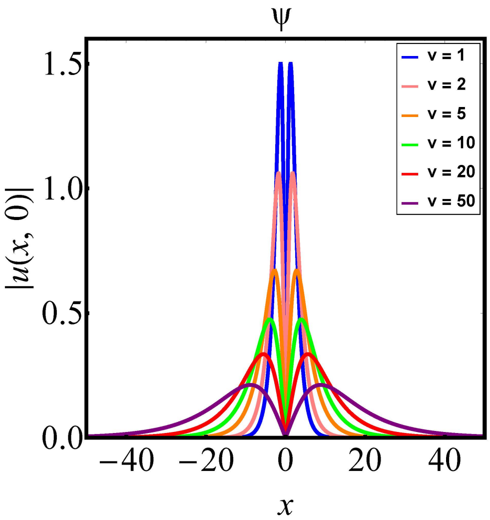
Σχήμα 2.9: Διάγραμμα φάσης, εξίσωση (2.25), για $\sigma = 1,\ q < 0$ για τις διάφορες τιμές του ν (πάνω εικόνα) και ακριβής λύση (κάτω εικόνα).

(Γ′) $\sigma = -1$, $q < 0$

$$\psi(x,z) = \left(\frac{3|q|}{\sqrt{\nu}} \operatorname{sech}\left[\sqrt{\frac{|q|}{2\nu}}(x-2\kappa z)\right] \tanh\left[\sqrt{\frac{|q|}{2\nu}}(x-2\kappa z)\right]\right) \times e^{i\left[\kappa x - \left(\kappa - \frac{|q|}{2\nu}\right)z + \phi_0\right]}, \tag{2.27}$$

$$\theta(x,z) = -\frac{3|q|}{\nu} \operatorname{sech}^2\left[\sqrt{\frac{|q|}{2\nu}}(x-2\kappa z)\right]. \tag{2.28}$$



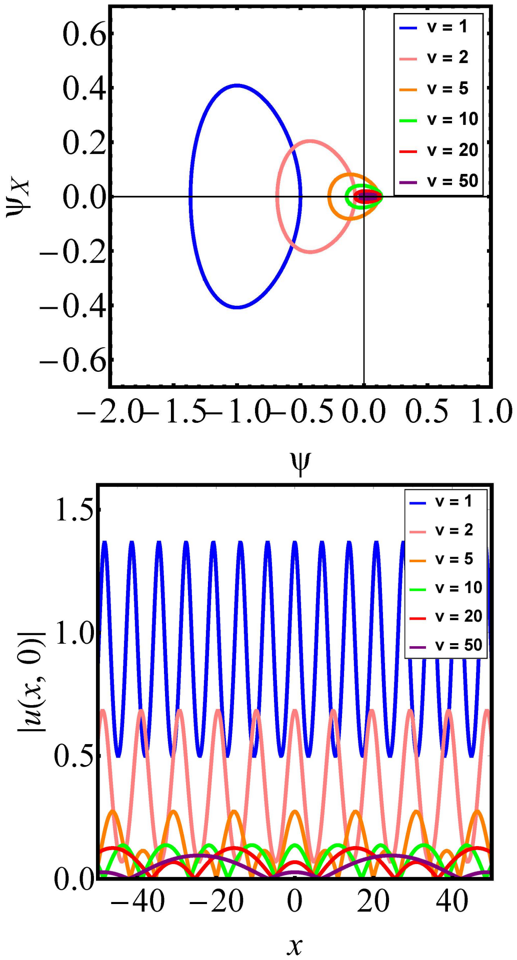


Σχήμα 2.10: Διάγραμμα φάσης, εξίσωση (2.27), για $\sigma = -1$, $q < 0$ για τις διάφορες τιμές του ν (πάνω εικόνα) και ακριβής λύση (κάτω εικόνα).

(Δ′) $\sigma = -1$, $q > 0$

$$\psi(x,z) = \frac{3mq}{2\sqrt{\nu(m^2-m+1)}}\,\mathrm{sn}^2\left[\frac{\sqrt{q}}{2\sqrt{\nu}(m^2-m+1)^{\frac{1}{4}}}(x-2\kappa z), m\right] - \frac{q}{2\nu}\left(1+\frac{m+1}{\sqrt{m^2-m+1}}\right)e^{i\left[\kappa x-\left(\kappa^2-\frac{q}{\nu}\right)z+\phi_0\right]}, \tag{2.29}$$

$$\theta(x,z) = -\frac{3mq}{2\nu\sqrt{(m^2-m+1)}}\,\mathrm{sn}^2\left[\frac{\sqrt{q}}{2\sqrt{\nu}(m^2-m+1)^{\frac{1}{4}}}(x-2\kappa z), m\right] - \frac{q}{2\nu}\left(1+\frac{m+1}{\sqrt{m^2-m+1}}\right). \tag{2.30}$$

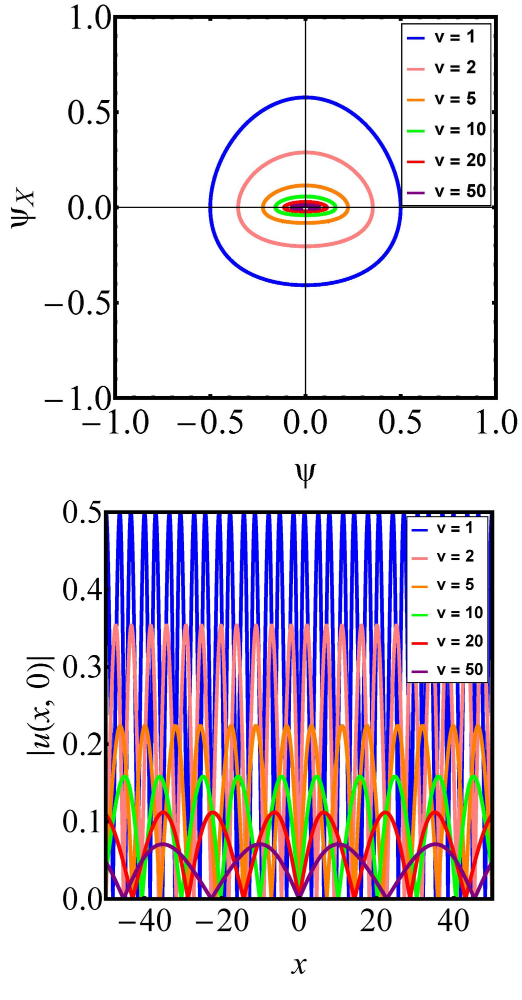


Σχήμα 2.11: Διάγραμμα φάσης, εξίσωση (2.29), για $\sigma = -1$, $q > 0$ για τις διάφορες τιμές του ν (πάνω εικόνα) και ακριβής λύση (κάτω εικόνα).

(Ε′) $\sigma = -1$, $q < 0$

$$\psi(x,z) = \frac{3mq}{\sqrt{\nu}(m-2)} \operatorname{cn}\left[\sqrt{\frac{q}{2\nu(m-2)}}(x-2\kappa z), m\right] \times \operatorname{sn}\left[\sqrt{\frac{q}{2\nu(m-2)}}(x-2\kappa z), m\right] e^{i\left[\kappa x - \left(\kappa^2 + \frac{q(m^2+8m-8)}{2\nu(m-2)^2}\right)z + \phi_0\right]}, \tag{2.31}$$

$$\theta(x,z) = \frac{3mq}{\nu(m-2)}\operatorname{sn}^2\left[\sqrt{\frac{q}{2\nu(m-2)}}(x-2\kappa z), m\right] + \frac{3mq}{\nu(m-2)^2}. \tag{2.32}$$

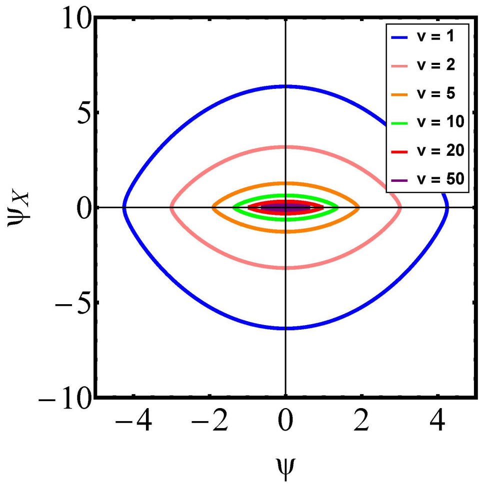


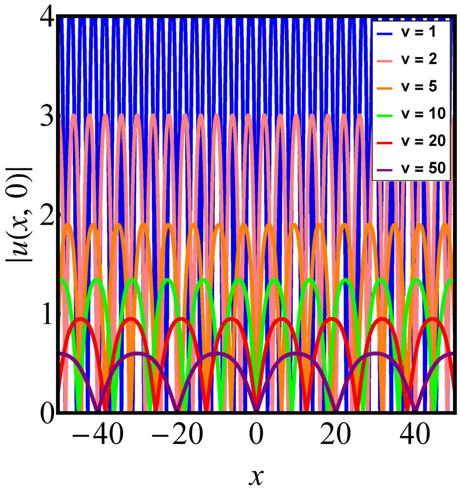
Σχήμα 2.12: Διάγραμμα φάσης, εξίσωση (2.31), για $\sigma = -1$, $q < 0$ για τις διάφορες τιμές του ν (πάνω εικόνα) και ακριβής λύση (κάτω εικόνα).

(Γ′) $\sigma = -1$, $q(1-2m) > 0$

$$\psi(x,z) = \frac{3q}{(1-2m)}\sqrt{\frac{m}{\nu}}\,\mathrm{dn}\left[\sqrt{\frac{q}{2\nu(1-2m)}}(x-2\kappa z), m\right] \times \mathrm{sn}\left[\sqrt{\frac{q}{2\nu(1-2m)}}(x-2\kappa z), m\right] e^{i\left[\kappa x - \left(\kappa^2 - \frac{q(8m^2-8m-1)}{2\nu(1-2m)^2}\right)z + \phi_0\right]}, \tag{2.33}$$

$$\theta(x,z) = \frac{3mq}{\nu(1-2m)}\,\mathrm{sn}^2\left[\sqrt{\frac{q}{2\nu(1-2m)}}(x-2\kappa z), m\right] + \frac{3mq}{\nu(1-2m)^2}. \tag{2.34}$$



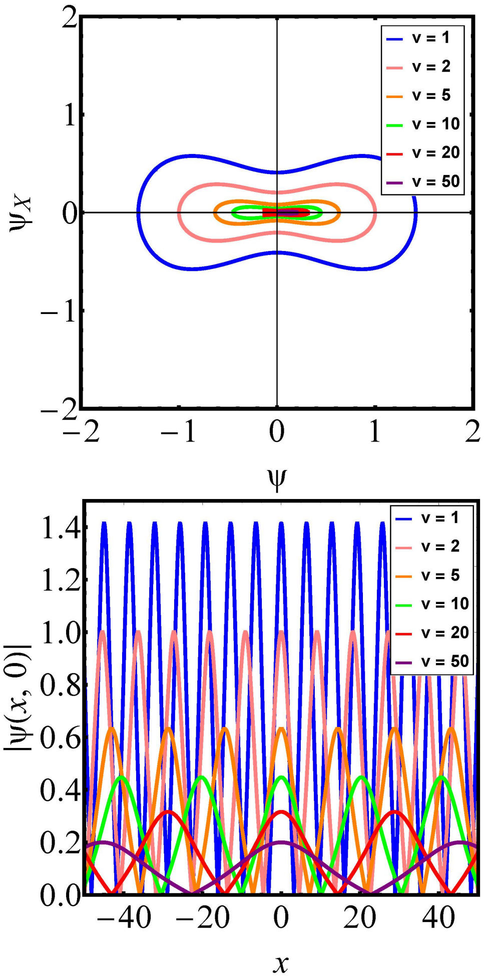


Σχήμα 2.13: Διάγραμμα φάσης, εξίσωση (2.33), για $\sigma = -1$, $q(1-2m) > 0$ για τις διάφορες τιμές του ν (πάνω εικόνα) και ακριβής λύση (κάτω εικόνα).

(Ζ′) $\sigma = 1$, $q > 0$

$$\psi(x,z) = \frac{3q}{(m+1)}\sqrt{\frac{m}{\nu}}\,\mathrm{dn}\left[\sqrt{\frac{q}{2\nu(m+1)}}(x-2\kappa z), m\right] \times \mathrm{cn}\left[\sqrt{\frac{q}{2\nu(m+1)}}(x-2\kappa z), m\right] e^{i\left[\kappa x - \left(\kappa^2 - \frac{q(m^2-10m+1)}{2\nu(m+1)^2}\right)z + \phi_0\right]}, \tag{2.35}$$

$$\theta(x,z) = -\frac{3mq}{\nu(m+1)}\mathrm{sn}^2\left[\sqrt{\frac{q}{2\nu(m+1)}}(x-2\kappa z), m\right] + \frac{6mq}{\nu(m+1)^2}. \tag{2.36}$$



Σχήμα 2.14: Διάγραμμα φάσης, εξίσωση (2.35), για $\sigma = 1$, $q > 0$ για τις διάφορες τιμές του ν (πάνω εικόνα) και ακριβής λύση (κάτω εικόνα).

Στην ανάλυση των περιπτώσεων $\nu = 0$ και $\nu \neq 0$, παρατηρούμε την ύπαρξη ορισμένων κοινών λύσεων, μεταξύ των οποίων συγκαταλέγονται τόσο φωτεινά σολιτόνια όσο και περιοδικές λύσεις. Αυτές οι λύσεις εμφανίζονται για διαφορετικές τιμές των σταθερών που χαρακτηρίζουν το πρόβλημα. Ωστόσο, υπάρχουν σημαντικές διαφοροποιήσεις μεταξύ των δύο περιπτώσεων, γεγονός που αναδεικνύει τη βαθύτερη επίδραση της παραμέτρου ν στο σύστημα. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση $\nu = 0$ εμφανίζεται ένα ιδιαίτερο είδος σολιτονικής λύσης που απουσιάζει από τις λύσεις της περίπτωσης $\nu \neq 0$. Πρόκειται για το σκοτεινό σολιτόνιο, το οποίο παρουσιάζει διαφορετικά χαρακτηριστικά συγκριτικά με τα φωτεινά σολιτόνια (είναι αυστηρά μιγαδική λύση με μη μηδενικές συνοριακές συνθήκες). Για να προσεγγίσουμε τέτοιου τύπου λύσεις υπό αυτές τις συνθήκες, απαιτείται η εφαρμογή της θεωρίας διαταραχών. Με αυτήν την προσέγγιση, μπορούμε να κατασκευάσουμε λύσεις που θα επιτρέψουν την εμφάνιση τέτοιων σολιτονικών δομών. Αντίστοιχα, στην περίπτωση $\nu \neq 0$, παρατηρούμε την παρουσία νέων λύσεων, οι οποίες δεν εμφανίζονται όταν $\nu = 0$. Αυτό συμβαίνει διότι η εισαγωγή της σταθεράς ν προσδίδει στο σύστημα μη τοπικό χαρακτήρα, καθιστώντας εφικτή την εμφάνιση λύσεων που δε θα μπορούσαν να υποστηριχθούν στην αρχική περίπτωση. Η επιρροή της παραμέτρου ν δημιουργεί ένα πλουσιότερο δυναμικό συμπεριφορών, που επιτρέπει την ύπαρξη περισσότερων τύπων λύσεων. Στόχος μας στα επόμενα κεφάλαια είναι να προσεγγίσουμε σολιτονικές λύσεις και στην περίπτωση $\nu \neq 0$, με στόχο να εντοπίσουμε μορφές σκοτεινών σολιτονίων και να μελετήσουμε τη δομή και τις ιδιότητές τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Διαδοση σε μη-τοπικα μεσα: Μια χωρικη διασταση

Περιοριζόμαστε, στο κεφάλαιο αυτό, σε $(1+1)$ χωρική και χρονική διάσταση. Όπως έχουμε ήδη αναλύσει, η διάδοση σε μη-τοπικά οπτικά μέσα μπορεί να περιγραφεί από το παρακάτω σύστημα

$$iu_z + du_{xx} + 2\sigma\theta u = 0, \tag{3.1α$'$}$$

$$\nu\theta_{xx} - 2q\theta = -2|u|^2. \tag{3.1β$'$}$$

Σημαντικό ρόλο παίζει στο σύστημα το πρόσημο της σταθερής σ, πιο συγκεκριμένα τα σχετικά πρόσημα διασποράς (γραμμικού όρου) και μη-γραμμικότητας. Το πρόσημο αυτό δεν μπορεί να απορροφηθεί με κάποιον μετασχηματισμό. Όπως έχουμε, ήδη, αναφέρει, αν $d\sigma > 0$ η εξίσωση καλείται εστιάζουσα και αν $d\sigma < 0$ αφεστιάζουσα. Η σημασία της θα γίνει κατανοητή παρακάτω.

3.1 Αστάθεια διαμόρφωσης

Αρχικό βήμα στη μελέτη ενός τέτοιου συστήματος είναι η μελέτη των ιδιοτήτων ευστάθειας του, θεωρώντας τις απλούστερες μη-τετριμμένες λύσεις του, οι οποίες χαρακτηρίζουν ένα συνεχές κύμα και είναι της μορφής

$$u(z) = u_0 e^{2i\sigma\theta_0 z}\ ,\ \theta_0 = \frac{1}{q}u_0^2,$$

όπου u_0 πραγματική σταθερά.

Για να ελέγξουμε αν αυτή η λύση υπόκειται σε αστάθεια διαμόρφωσης (Modulation Instability: MI) θεωρούμε μικρή διαταραχή $u_1(x,z)$ και αντικαθιστώντας στον τύπο της, η λύση παίρνει τη μορφή [6]

$$u(x,z) = [u_0 + u_1(x,z)]e^{2i\sigma\theta_0 z}.$$

Αντικαθιστώντας τη λύση $u(x,z)$ στην εξίσωση (3.1), λύνουμε την πρώτη εξίσωση του συστήματος ως προς θ και αντικαθιστούμε στην δεύτερη. Αγνοούμε τους μη-γραμμικούς όρους και λαμβάνουμε την εξής σχέση

$$4iq\frac{\partial u_1}{\partial z} - 2i\nu\frac{\partial^3 u_1}{\partial z\partial x^2} - d\nu\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + 2dq\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 8\sigma^2 u_0^2\left(u_1 + u_1^*\right) = 0. \tag{3.2}$$

Στην εξίσωση (3.2) παρατηρούμε ότι οι όροι που εισάγουν τον όρο της μη-τοπικότητας ν είναι παράγωγοι μεγαλύτερης τάξης συνεπώς για $\nu = 0$ το πρόβλημα μειώνεται στο κλασικό NLS πρόβλημα. Αυτό σημαίνει ότι η συνεισφορά τους είναι μη-τετριμμένη, όπως θα δείξουμε παρακάτω.
Θεωρούμε λύσεις της μορφής:

$$u_1(x,z) = C_1 e^{i(kx-\omega z)} + C_2 e^{-i(kx-\omega z)},$$

όπου C_1, C_2 μιγαδικές σταθερές. Με αντικατάσταση στην εξίσωση (3.2) βρίσκουμε τη λεγόμενη σχέση διασποράς (dispersion relation)

$$\omega^2 = \frac{dk^2(d\nu k^4 + 2dqk^2 - 8\sigma u_0^2)}{\nu k^2 + 2q}. \tag{3.3}$$

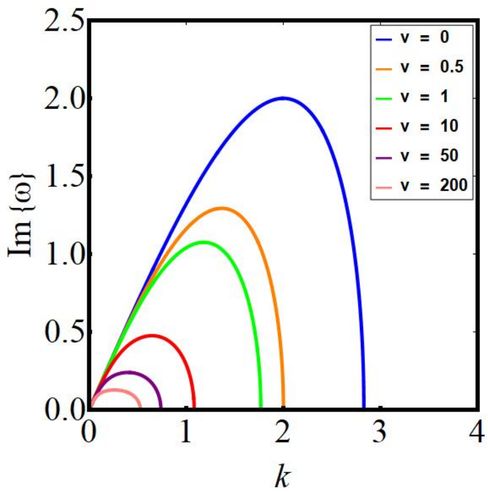
Για να είναι το σύστημα ευσταθές, απαιτείται να ισχύει ότι $\omega \in \mathbb{R}\ \forall k$. Από τη σχέση (3.3), προκύπτει ότι το σύστημα είναι ευσταθές στην αφεστιάζουσα περίπτωση ($d\sigma < 0$), ενώ στην εστιάζουσα περίπτωση ($d\sigma > 0$), το σύστημα γίνετε ασταθές. Η ευστάθεια του συστήματος περιγράφεται από τρεις κρίσιμες ποσότητες, οι οποίες προσδιορίζονται μέσω της σχέσης διασποράς:

- Μέγιστος ρυθμός αύξησης ($\mathrm{Im}\{\omega_{max}\}$): Αυτή η ποσότητα μετρά την απόσταση διάδοσης που απαιτείται ώστε να εμφανιστεί η αστάθεια στο σύστημα. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της, τόσο πιο γρήγορα το σύστημα καθίσταται ασταθές.

- Εύρος περιοχών αστάθειας (k_c): Αυτή η ποσότητα καθορίζει το πλήθος των κυματικών αριθμών k που μπορούν να προκαλέσουν αστάθεια στο σύστημα. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του k_c, τόσο πιο εύκολο είναι να υπάρξει αστάθεια στο σύστημα, καθώς περισσότερα κύματα συμβάλλουν στην ασταθή διάδοσή του.

- Κυματικός αριθμός (k_{max}): Αυτή είναι η τιμή του k για την οποία παρατηρείται ο μέγιστος ρυθμός αύξησης ω_{max}. Η εύρεση του k_{max} πραγματοποιείται μέσω της παραγώγισης της σχέσης διασποράς, όπως συμβαίνει και με τις συναρτήσεις. Αντικαθιστώντας τη τιμή του k_{max} στη σχέση (3.3), υπολογίζουμε την αντίστοιχη τιμή του ω_{max}.

Οι παραπάνω ποσότητες είναι σημαντικές για την ανάλυση της ευστάθειας του συστήματος διότι προσφέρουν πληροφορίες για τη δυναμική του συστήματος. Η ποσότητα $\mathrm{Im}\{\omega_{max}\}$ παριστάνει το φανταστικό μέρος του ω. Όπως φαίνεται στο σχήμα (3.1), καθώς αυξάνεται η τιμή της σταθεράς ν, οι τιμές του k για τις οποίες εμφανίζεται φανταστικό μέρος μειώνονται. Αυτό δείχνει ότι η σταθερά ν αποτελεί μια σταθερά η οποία παίζει σημαντικό ρόλο στην ευστάθεια του συστήματός μας, καθώς η παρουσία της περιορίζει τόσο το εύρος όσο και το μέγιστο του φανταστικού μέρους. Συνεπώς, η εισαγωγή της σταθεράς ν στην εξίσωση Schrödinger συνιστά μια σημαντική τροποποίηση, η οποία συμβάλλει στη σταθεροποίηση του συστήματος.



Σχήμα 3.1: Ρυθμός ανάπτυξης, $\mathrm{Im}\{\omega\}$, της εξίσωσης (3.1) για τις τιμές $d = 1/2, q = 1, u_0 = 1$ και για διαφορετικές τιμές της μη τοπικής παραμέτρου ν .

Στην περίπτωση που $d\sigma > 0$, δηλαδή έχουμε την εστιάζουσα εξίσωση, σολιτονικές λύσεις υπάρχουν ως φωτεινά σολιτόνια. Τα έχουμε ήδη βρει στο προηγούμενο κεφάλαιο. Εδώ θα εστιάσουμε στην αφεστιάζουσα περίπτωση, όπου σκοτεινά σολιτόνια δεν έχουν βρεθεί προς το παρόν. Από τη μελέτη της αστάθειας διαμόρφωσης ήδη γνωρίζουμε ότι οι λύσεις αυτές θα είναι ευσταθείς.

3.2 Η αφεστιάζουσα εξίσωση

Μια εξίσου κρίσιμη περίπτωση, που αποτελεί βασικό μέρος της μελέτης μας, είναι η αφεστιάζουσα περίπτωση ($\sigma d < 0$). Στη δική μας ανάλυση, συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι $\sigma = -1$ και $d > 0$, κάτι που καθορίζει τις παραμέτρους του συστήματος και επηρεάζει καθοριστικά τη συμπεριφορά του. Το σύστημα που μελετάμε γράφεται στη μορφή

$$iu_z + du_{xx} - 2\theta u = 0, \tag{3.4α$'$}$$

$$\nu\theta_{xx} - 2q\theta = -2|u|^2. \tag{3.4β$'$}$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση της εξίσωσης NLS, $\nu = 0$, έχουμε σκοτεινά σολιτόνια που όμως δεν αντιστοιχούν σε κανένα από τα διαγράμματα της ποιοτικής ανάλυσης φάσης. Θα κατασκευάσουμε αυτές τις λύσεις με τη χρήση θεωρίας διαταραχών στα επόμενα κεφάλαια.
Από την ανάλυση MI της προηγούμενης ενότητας γνωρίζουμε ότι το σύστημα (3.4) είναι ευσταθές, και γράφουμε

$$u(x,z) = u_b(z)\bar{u}(x,z),\ \theta(x,z) = \theta_b(z)\bar{\theta}(x,z), \tag{3.5}$$

όπου οι συναρτήσεις u_b, θ_b είναι συναρτήσεις μόνο του z, ώστε στα σύνορα ($|x| \to \infty$),

$$u = u_b(z),\ \theta = \theta_b(z).$$

Συνεπώς παίρνοντας το όριο στην (3.4) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι συναρτήσεις u_b, θ_b ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$\begin{cases} i\dfrac{\mathrm{d}u_b}{\mathrm{d}z} - 2\theta_b u = 0, \\ 2q\theta_b = 2|u_b|^2. \end{cases} \tag{3.6}$$

Γράφοντας $u_b = u_0 e^{i\phi}$, όπου $\phi = \phi(z)$, $u_0 \in \mathbb{R}$, και αντικαθιστώντας στην (3.6) βρίσκουμε ότι

$$\phi(z) = -2\frac{u_0^2}{q}z + \phi_0(0),\ \theta_b(z) = \frac{u_0^2}{q}. \tag{3.7}$$

Τέλος, αντικαθιστώντας την (3.5) στην (3.4) παίρνουμε τις εξής εξισώσεις για τις $\bar{u}(x,z)$, $\bar{\theta}(x,z)$,

$$\begin{cases} i\bar{u}_z + \dfrac{1}{2}\bar{u}_{xx} - 2\dfrac{u_0^2}{q}(\bar{\theta} - 1)\bar{u} = 0, \\ \nu\bar{\theta}_{xx} - 2q\bar{\theta} = -2q|\bar{u}|^2. \end{cases} \tag{3.8}$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Madelung, καθώς κάθε μιγαδική συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί σε αυτή τη μορφή, για τη συνάρτηση $\bar{u}$ ως εξής

$$\bar{u}(x,z) = \rho(x,z)e^{i\phi(x,z)}.$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση της $\bar{u}$ στο σύστημα (3.8) και διαχωρίζοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της πρώτης εξίσωσης, προκύπτει τελικά το σύστημα

$$\begin{aligned}
\rho_z + \frac{1}{2}\rho\rho_{xx} + \rho_x\phi_x &= 0, \\
\rho\phi_z + \frac{1}{2}\left[\rho\left(\phi_x\right)^2 - \rho_{xx}\right] + \frac{2u_0^2}{q}(\bar{\theta}-1)\rho &= 0, \\
\nu\bar{\theta}_{xx} - 2q\bar{\theta} &= -2q|\rho|^2,
\end{aligned}$$

όπου $\bar{\theta}(x,z) \in \mathbb{R}$.
Η μελέτη του συστήματος αυτού γίνεται με τη βοήθεια εργαλείων της θεωρίας διαταραχών και πιο συγκεκριμένα με τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων. Αρχικά είναι σημαντικό να γίνει η παρακάτω αλλαγή στις ανεξάρτητες μεταβλητές

$$Z = \varepsilon^3 z \ , \ X = \varepsilon(x - \mathcal{C}z)$$

όπου $\mathcal{C}$: σταθερά η οποία θα καθοριστεί αργότερα.
Αναπτύσσουμε τις συναρτήσεις του πλάτους και της φάσης σε δυνάμεις του ε ως εξής

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon^2\rho_2 + \varepsilon^4\rho_4 + \cdots , \tag{3.9}$$

$$\phi = \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^3\phi_3 + \varepsilon^5\phi_5 + \cdots , \tag{3.10}$$

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_0 + \varepsilon^2\bar{\theta}_2 + \varepsilon^4\bar{\theta}_4 + \cdots . \tag{3.11}$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές του ε παίρνουμε τα εξής

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(1): \quad \rho_0^2 &= \bar{\theta}_0, \\
\bar{\theta}_0 &= 1. \\
\mathcal{O}(\varepsilon^2): \frac{\partial\phi_1}{\partial X} &= \frac{4u_0^2\rho_0}{\mathcal{C}q}\rho_2, \\
\bar{\theta}_2 &= 2\rho_0\rho_2. \\
\mathcal{O}(\varepsilon^3): \mathcal{C}\frac{\partial\rho_2}{\partial X} &= \frac{\rho_0}{2}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial X^2}.
\end{aligned}$$

Για να υπάρχει συμβιβαστότητα ανάμεσα στις παραπάνω εξισώσεις πρέπει να ι-σχύει

$$\mathcal{C}^2 = \frac{2u_0^2\rho_0^2}{q} = \frac{2u_0^2}{q},$$

άρα υπολογίζουμε εδώ τη σταθερά που εισάγαμε στις νέες κλίμακες.
Από τις επόμενες τάξεις του ε παίρνουμε

$$\mathcal{O}(\varepsilon^4): \quad \rho_0\frac{\partial \phi_1}{\partial Z} + \frac{2u_0^2\nu}{q^2}\frac{\partial^2\rho_2}{\partial X^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho_2}{\partial X^2} - \mathcal{C}\frac{\partial\phi_3}{\partial X} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial X}\right)^2 - \mathcal{C}\rho_2\frac{\partial\phi_1}{\partial X} + \frac{4u_0^2}{q}\rho_4 + \frac{6u_0^2}{q}\rho_2^2 = 0, \tag{3.12}$$

$$\bar{\theta}_4 = 2\rho_4 + \rho_2^2 + \frac{\nu}{q}\frac{\partial^2\rho_2}{\partial X^2}. \tag{3.13}$$

$$\mathcal{O}(\varepsilon^5): \quad \frac{\partial\rho_2}{\partial Z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi_3}{\partial X^2} + \frac{1}{2}\rho_2\frac{\partial^2\phi_1}{\partial X^2} + \frac{\partial\rho_2}{\partial X}\frac{\partial\phi_1}{\partial X} - \mathcal{C}\frac{\partial\rho_4}{\partial X} = 0. \tag{3.14}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις που βρήκαμε από τις πρώτες τάξεις του ε, δια-φορίζοντας την εξίσωση (3.12) ως προς X, θεωρώντας ότι $\rho_0 = 1$, το οποίο λαμβάνουμε από την τάξη $\mathcal{O}(1)$ παραπάνω, και αθροίζοντας τη με την εξίσωση (3.14) έχουμε

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial Z} + \frac{\mathcal{C}(4u_0^2\nu - q^2)}{16u_0^2 q}\frac{\partial^3\rho_2}{\partial X^3} + \frac{6u_0^2}{\mathcal{C}q}\rho_2\frac{\partial\rho_2}{\partial X} = 0, \tag{3.15}$$

που είναι μια εξίσωση Korteweg-de Vries (KdV), της οποίας οι σολιτονικές λύσεις είναι γνωστές. Πράγματι, θέτοντας

$$a = \frac{\mathcal{C}(4u_0^2\nu - q^2)}{16u_0^2 q}, \;\; b = \frac{6u_0^2}{\mathcal{C}q},$$

η σολιτονική λύση της (3.15) δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$\rho_2 = \frac{2a}{b}\eta^2\,\mathrm{sech}^2(\eta X - 4\eta^3 aZ + X_0),$$

όπου η μια ελεύθερη παράμετρος.
Η αντίστοιχη φάση παίρνει πλέον τη μορφή

$$\phi_1 = \frac{8u_0^2 a}{\mathcal{C}qb}\eta\tanh(\eta X - 4\eta^3 aZ + X_0).$$

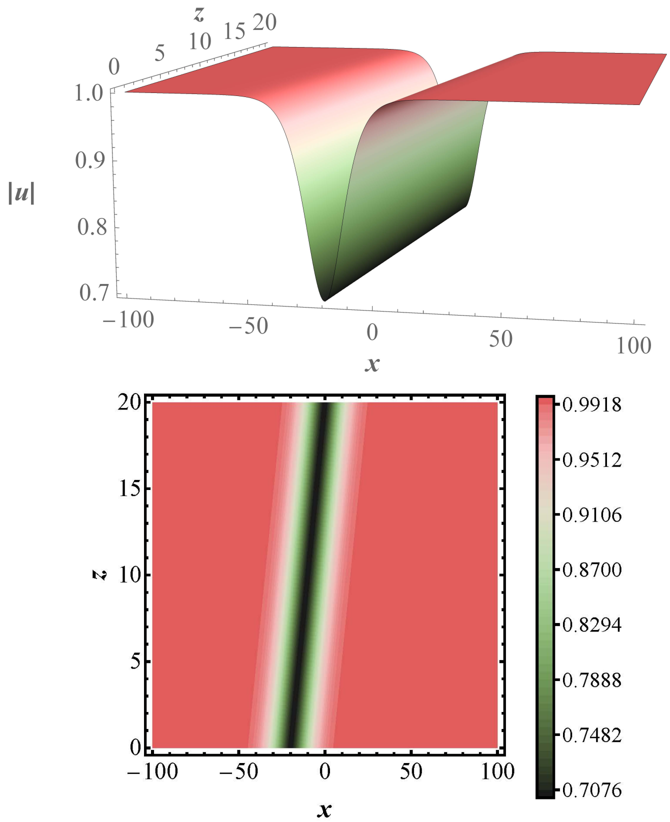
Συνολικά, η λύση του συστήματος που παράγεται από την παραπάνω διαδικασία μπορεί να γραφεί ως

$$u(x,z) = u_0(z)\left[1 + \varepsilon^2 \frac{2a}{b}\eta^2 \mathrm{sech}^2(\eta X - 4\eta^3 aZ + X_0)\right] e^{i[\theta(z)+\varepsilon\phi_1]}, \quad (3.16)$$

$$\phi_1 = \frac{8u_0^2 a}{\mathcal{C}qb}\eta \tanh(\eta X - 4\eta^3 aZ + X_0), \quad (3.17)$$

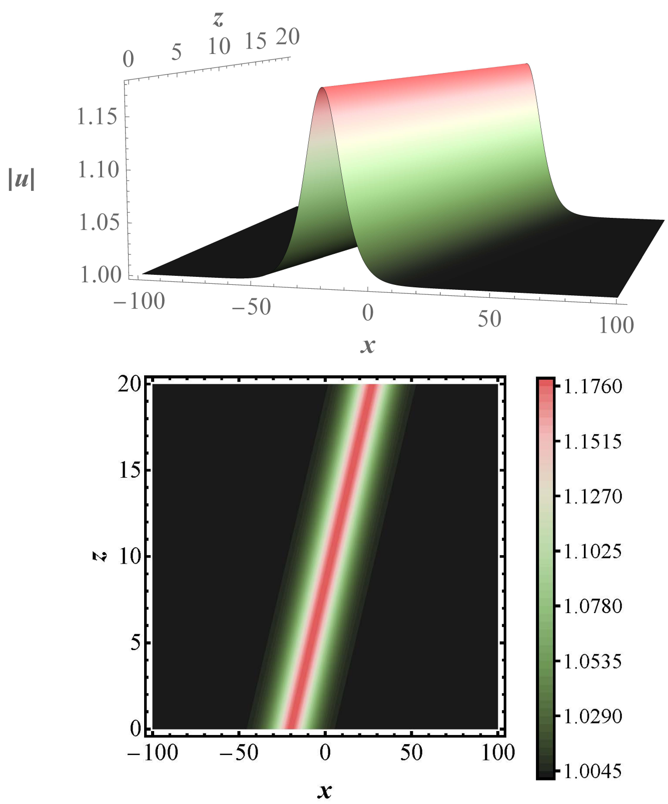
και αποτελεί τη λύση του στην περίπτωση των μη μηδενικών συνοριακών συνθηκών.

Εδώ πρέπει και πάλι να τονίσουμε τη σημασία του όρου της μη τοπικότητας ν. Πράγματι, είναι προφανές ότι το πρόσημο της ποσότητας $\frac{a}{b} = \frac{\mathcal{C}^2(4u_0^2\nu - q^2)}{16u_0^4}$, διαφοροποιεί δύο είδη λύσεων (σε αντίθεση με την περίπτωση $\nu = 0$). Πιο συγκεκριμένα, είναι εμφανές ότι όταν ισχύει $\gamma = u_0^2\nu/q^2 < 1/4$ οι λύσεις του συστήματος θα είναι τα σκοτεινά σολιτόνια, ενώ όταν έχουμε αντιστροφή της ανίσωσης οι λύσεις θα είναι τα λεγόμενα αντί-σκοτεινά σολιτόνια. Είναι προτιμότερο να περιγράψουμε τις διαφορές τους σχηματικά. Στο παρακάτω σχήμα 3.2 δείχνουμε ένα σκοτεινό σολιτόνιο, και τη διάδοσή του.



Σχήμα 3.2: Τυπική εξέλιξη σκοτεινού σολιτονίου για τη συνάρτηση u. Για τις σταθερές ισχύει: $q = 10, \eta = 1, \nu = 10, \mathcal{C} = -2, X_0 = 2, u_0 = 1, \gamma = 1/10$.

ενώ στο σχήμα 3.3 δείχνουμε ένα αντι-σκοτεινό σολιτόνιο, και τη διάδοσή του.



Σχήμα 3.3: Τυπική εξέλιξη αντί-σκοτεινού σολιτονίου για τη συνάρτηση v. Για τις σταθερές ισχύει: $q = 2, \eta = 1, \nu = 10, \mathcal{C} = 2, X_0 = 2, u_0 = 1, \gamma = 5/2$.

Τελειώνουμε με κάποιες σημαντικές παρατηρήσεις. Για την κρίσιμη τιμή $\gamma = \frac{1}{4}$ πρέπει να αναζητήσουμε λύσεις ανώτερης τάξης μιας και παρατηρούμε ότι όταν ισχύει $a = 0$, τόσο το ρ_2 όσο και το ϕ_1 είναι ίσα με μηδέν. Από την εξίσωση (3.16) παρατηρούμε ότι η σταθερά $\mathcal{C}$ επηρεάζει την κατεύθυνση της διάδοσης και την ταχύτητα του νηματικού υγρού. Πιο συγκεκριμένα, το γεγονός ότι το $\mathcal{C}$ μπορεί να έχει δύο πρόσημα υποδηλώνει ότι η εξίσωση KdV, στην οποία καταλήξαμε, περιγράφει κυματομορφές που διαδίδονται είτε προς τα αριστερά στην περίπτωση που ισχύει $\mathcal{C} > 0$ είτε προς τα δεξιά όταν $\mathcal{C} < 0$.

3.3 Συζευγμένες εξισώσεις

Μια εξίσου ενδιαφέρουσα μορφή του συστήματος που μελετάμε αποτελεί η διανυσματική του μορφή. Πιο συγκεκριμένα το σύστημα που θα μελετήσουμε περιγράφει δύο πολωμένες, συνεκτικές δέσμες φωτός με διαφορετικά μήκη κύματος που διαδίδονται μέσα σε ένα επίπεδο γεμάτο με νηματικό υγρό κρύσταλλο. Το σύστημα αποτελείται από δύο εξισώσεις συζευγμένες μεταξύ τους και από μια τρίτη η οποία περιγράφει τη γωνία του δείκτη διάθλασης και είναι το εξής

$$iu_z + \frac{d_1}{2}u_{xx} + 2\sigma_1\theta u = 0, \tag{3.18α'}$$

$$iv_z + \frac{d_2}{2}v_{xx} + 2\sigma_2\theta v = 0, \tag{3.18β'}$$

$$\nu\theta_{xx} - 2q\theta = -2(\sigma_1|u|^2 + \sigma_2|v|^2). \tag{3.18γ'}$$

Για τις μεταβλητές u και v όπως και πριν ισχύει ότι είναι μιγαδικές, χαρακτηρίζουν την περιβάλλουσα του οπτικού ηλεκτρικού πεδίου, ενώ το θ περιγράφει την οπτικά προκαλούμενη απόκλιση της γωνίας του άξονα διάδοσης. Αντίστοιχα με την προηγούμενη ανάλυση, οι σταθερές d_1, d_2 αναπαριστούν τον συντελεστή διάθλασης, ενώ τα σ_1, σ_2 τη μη-γραμμικότητα. Στην περίπτωση που ισχύει $d_1\sigma_1$, $d_2\sigma_2 < 0$ το σύστημα ονομάζεται αφεστιασμένο, ενώ στην περίπτωση που η ανισότητα αλλάζει κατεύθυνση, το σύστημα ονομάζεται εστιασμένο.
Η εισαγωγή δεύτερης εξίσωσης στο αρχικό σύστημα κάνει πιο περίπλοκη την ανάλυση, όμως παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον διότι το σύστημα (3.18) υποστηρίζει λύσεις, οι οποίες δεν υπήρχαν στο ανάλογο βαθμωτό σύστημα.

3.3.1 Αστάθεια διαμόρφωσης

Όπως και στην προηγούμενη ενότητα η ανάλυση μας είναι σημαντικό να ξεκινήσει από τη μελέτη των ιδιοτήτων ευστάθειας και στην περίπτωση που έχουμε ζεύγος κυμάτων. Συνεπώς θεωρούμε τη λύση συνεχούς κύματος των εξισώσεων του συστήματος (3.18) ως εξής:

$$u = u_0 e^{2i\sigma_1\theta_0 z} \ , \ v = v_0 e^{2i\sigma_2\theta_0 z} \ , \ \theta_0 = \frac{\sigma_1 u_0^2 + \sigma_2 v_0^2}{q},$$

όπου u_0 και v_0 πραγματικές σταθερές. Θεωρούμε μια μικρή διαταραχή στην παραπάνω λύση,

$$u(x,z) = [u_0 + u_1(x,z)]e^{2i\sigma_1\theta_0 z} \ , \ v(x,z) = [v_0 + v_1(x,z)]e^{2i\sigma_2\theta_0 z}, \tag{3.19}$$

και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την περίπτωση του ενός κύματος γραμμικοποιούμε τις παρακάτω εξισώσεις

$$
\begin{aligned}
&4iq\frac{\partial u_1}{\partial z} - 2i\nu\frac{\partial^3 u_1}{\partial z\partial x^2} - d_1\nu\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} \\
&\qquad + 2d_1 q\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 8\sigma_1^2 u_0^2\left(u_1 + u_1^*\right) + 8\sigma_1\sigma_2 u_0 v_0\left(v_1 + v_1^*\right) = 0, \qquad (3.20)\\
&4iq\frac{\partial v_1}{\partial z} - 2i\nu\frac{\partial^3 v_1}{\partial z\partial x^2} - d_2\nu\frac{\partial^4 v_1}{\partial x^4} \\
&\qquad + 2d_2 q\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + 8\sigma_2^2 v_0^2\left(v_1 + v_1^*\right) + 8\sigma_1\sigma_2 u_0 v_0\left(u_1 + u_1^*\right) = 0, \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

Οι εξισώσεις (3.20) και (3.21) δέχονται λύσεις της μορφής

$$
\begin{aligned}
u_1(x,z) &= C_1 e^{i(kx-\omega z)} + C_2 e^{-i(kx-\omega z)},\\
v_1(x,z) &= C_3 e^{i(kx-\omega z)} + C_4 e^{-i(kx-\omega z)},
\end{aligned}
$$

όπου C_1, C_2, C_3, C_4 μιγαδικές σταθερές.
Αντικαθιστώντας τις παραπάνω λύσεις στις εξισώσεις (3.20) και (3.21) λαμβάνουμε τη σχέση διασποράς

$$
p_1(k)\omega^4 + p_2(k)\omega^2 + p_3(k) = 0, \qquad (3.22)
$$

όπου

$$
\begin{aligned}
p_1(k) &= 16\left(k^2\nu + 2q\right),\\
p_2(k) &= -4\nu\left(d_1^2 + d_2^2\right)k^6 - 8q\left(d_1^2 + d_2^2\right)k^4 + 64\left(d_1\sigma_1^2 u_0^2 + d_2\sigma_2^2 v_0^2\right)k^2,\\
p_3(k) &= d_1^2 d_2^2 \nu k^{10} + 2d_1^2 d_2^2 q k^8 - 16 d_1 d_2\left(d_2\sigma_1^2 u_0^2 + d_1\sigma_2^2 v_0^2\right)k^6.
\end{aligned}
$$

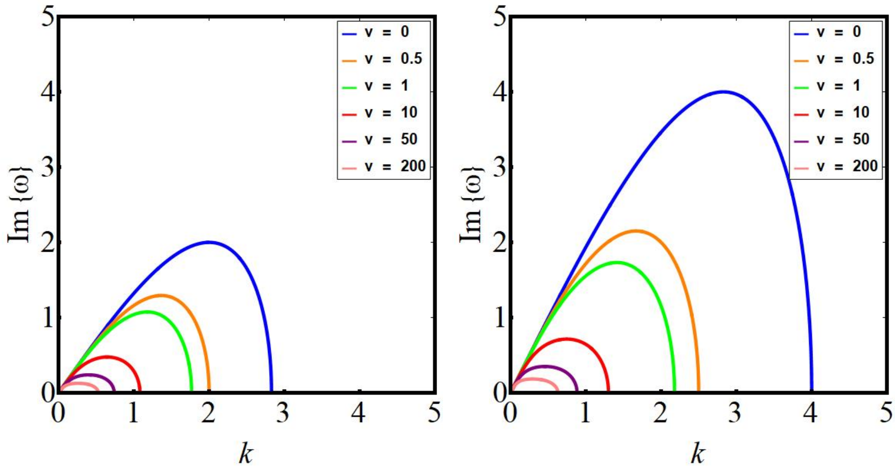
Η εξίσωση (3.22) μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά ως προς το $\omega = \omega(k)$ και τελικά να πάρουμε τη σχέση διασποράς

$$
\omega = \pm\sqrt{\frac{-p_2(k) \pm \sqrt{p_2^2(k) - 4p_1(k)p_3(k)}}{2p_1(k)}}.
$$

Το σύστημά μας υπόκειται σε MI εάν το ω έχει μιγαδικές λύσεις. Για να μπορέσουμε να ταξινομήσουμε τις λύσεις του ω, πρέπει να λύσουμε ένα σύστημα ανισοτήτων με σκοπό να διασφαλίσουμε ότι η εξίσωση (3.22) δέχεται μόνο πραγματικές λύσεις. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγουμε οποιαδήποτε εκθετική αύξηση. Συγκεκριμένα, υπάρχουν τρία πολυώνυμα του k που πρέπει να είναι θετικά για να διασφαλιστούν οι συνθήκες ευστάθειας. Η διαδικασία εύρεσης αυτών των συνθηκών είναι ιδιαίτερα περίπλοκη και δεν αποτελεί μέρος της παρούσας διατριβής. Για περισσότερες πληροφορίες, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο άρθρο [7]. Εμείς παραθέτουμε το αποτέλεσμα, ότι η συνθήκη ευστάθειας είναι

$$\frac{\sigma_1^2 u_0^2}{d_1} + \frac{\sigma_2^2 v_0^2}{d_2} < 0 \quad \text{και} \quad \sigma_1^2 d_1 u_0^2 + \sigma_2^2 d_2 v_0^2 < 0.$$

Όπως προκύπτει από το σχήμα (3.1), συγκρίνοντας την περίπτωση της μίας εξίσωσης με την τρέχουσα, παρατηρείται ότι η μέγιστη τιμή του φανταστικού μέρους $\mathrm{Im}\{\omega_{max}\}$ είναι διπλάσια από αυτή που εμφανίζεται στην περίπτωση της μίας εξίσωσης. Συνεπώς, η ύπαρξη δεύτερου πεδίου έχει καταστροφικά αποτελέσματα σε σχέση με την ευστάθειά του. Παρόλα αυτά, και πάλι, η σταθερά ν έχει την τάση να δρα ανταγωνιστικά στην αστάθεια, όπως και προηγούμενα.



Σχήμα 3.4: Ρυθμός ανάπτυξης, $\mathrm{Im}\{\omega\}$, στην περίπτωση της μια εξίσωσης (αριστερά εικόνα) για τις τιμές $d = 1/2, q = 1, u_0 = 1$ και στην περίπτωση του συζευγμένου συστήματος (δεξιά εικόνα) για τις τιμές $q = 1, d_1 = 1, d_2 = 1, g_1 = 1, g_2 = 1, u_0 = 1, v_0 = 1$.

3.3.2 Μηδενικές συνοριακές συνθήκες

Για την εύρεση τέτοιων λύσεων ξεκινάμε την ανάλυσή μας θεωρώντας ότι οι λύσεις του συστήματος (3.18) ικανοποιούν τις εξής συνοριακές συνθήκες

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,z) = \lim_{|x|\to\infty} v(x,z) = \lim_{|x|\to\infty} \theta(x,z) = 0.$$

Θεωρούμε λοιπόν ότι οι λύσεις του συστήματος (3.18) είναι της μορφής

$$\begin{aligned} u(x,z) &= a_1 \operatorname{sech}^2(bx) e^{i\mu_1 z}, \\ v(x,z) &= a_2 \operatorname{sech}^2(bx) e^{i\mu_2 z}, \\ \theta(x) &= a_3 \operatorname{sech}^2(bx), \end{aligned}$$

και με άμεση αντικατάσταση προκύπτει ότι

$$\mu_1 = \frac{qd_1}{\nu},\ \mu_2 = \frac{qd_2}{\nu},\ b = \sqrt{\frac{q}{2\nu}},\ a_3 = \frac{3q\lambda}{4\nu}, \tag{3.23}$$

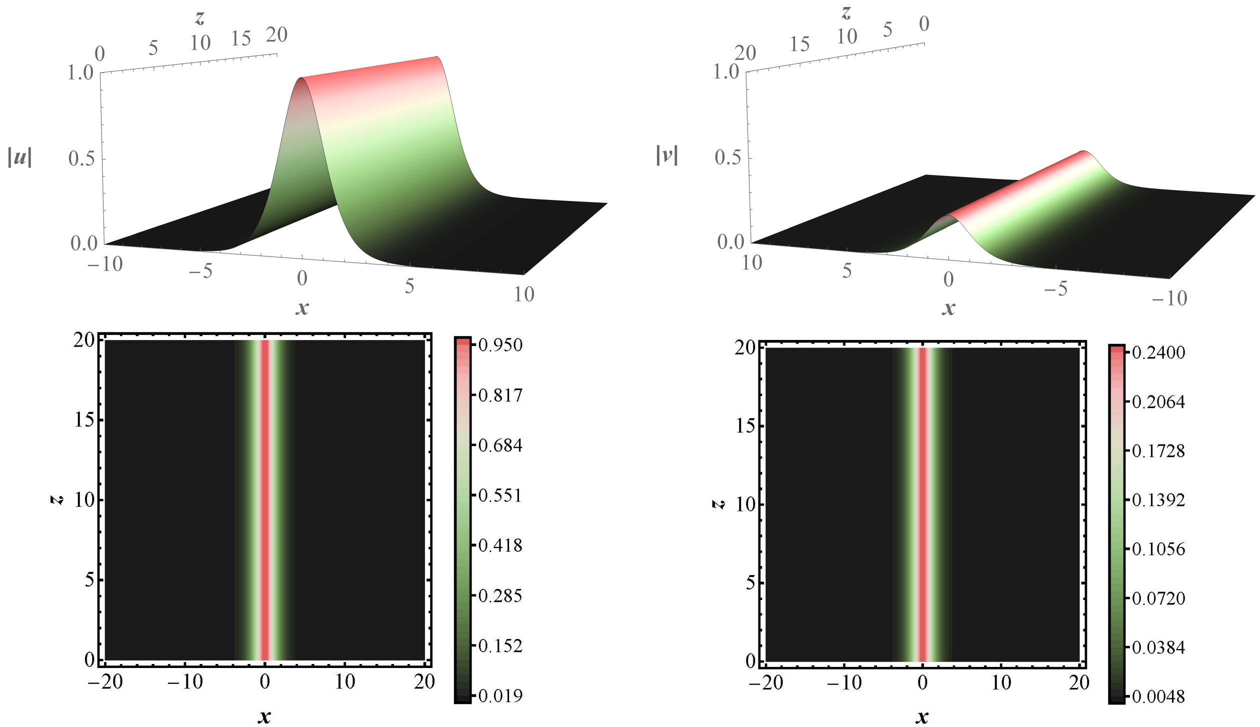
όπου

$$\frac{d_1}{\sigma_1} = \frac{d_2}{\sigma_2} = \lambda.$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω λύσεις καταλήγουμε ότι για τα πλάτη των σολιτονίων ισχύει η σχέση

$$\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 = \lambda \frac{9q^2}{8\nu}. \tag{3.24}$$

Στο Σχήμα 3.5, σχεδιάζουμε τα δυο πεδία και τη διάδοσή τους.



Σχήμα 3.5: Τυπική εξέλιξη σολιτονίου για το συζευγμένο σύστημα. Για τις σταθερές ισχύει: $d_1 = \sigma_1 = 1$, $d_2 = \sigma_2 = 2$, $q = 1, \nu = 1, a_1 = 1$.

3.3.3 Μη-μηδενικές συνοριακές συνθήκες

Στην περίπτωση που η μελέτη μας αφορά την αφεστιάζουσα περίπτωση γνωρίζουμε ότι το σύστημα δεν υπόκειται σε αστάθεια. Σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση, όπου οι ακριβείς λύσεις του συστήματος ήταν γνωστές, εδώ δεν διαθέτουμε αυτήν την πληροφορία. Συνεπώς, οι λύσεις του συστήματος (3.18) μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$
\begin{aligned}
u(x,z) &= u_b(z)\bar{u}(x,z),\\
v(x,z) &= v_b(z)\bar{v}(x,z),\\
\theta(x,z) &= \theta_b(z)w(x,z).
\end{aligned}
$$

Για τις συναρτήσεις $u_b(z)$, $v_b(z)$, αντικαθιστώντας στο σύστημα (3.18), ισχύει

$$
\begin{aligned}
u_b(z) &= u_0 \exp\left[-2i\sigma_1\theta_b z\right],\\
v_b(z) &= v_0 \exp\left[-2i\sigma_2\theta_b z\right],
\end{aligned}
$$

όπου u_0, v_0 πραγματικές σταθερές και $\theta_b = \dfrac{\sigma_1 u_0^2 + \sigma_2 v_0^2}{q}$.
Αντικαθιστώντας στο σύστημα (3.18) παίρνουμε τις παρακάτω εξισώσεις

$$
\begin{cases}
i\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \dfrac{d_1}{2}\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - 2\sigma_1\theta_b(w-1)\bar{u} = 0,\\
i\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \dfrac{d_2}{2}\dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - 2\sigma_2\theta_b(w-1)\bar{v} = 0,\\
\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2qw = -\dfrac{2}{\theta_b}(\sigma_1 u_0^2|\bar{u}|^2 + \sigma_2 v_0^2|\bar{v}|^2).
\end{cases}
\tag{3.25}
$$

Εισάγουμε τον μετασχηματισμό Madelung, όπου οι συναρτήσεις $\bar{u}$ και $\bar{v}$ εκφράζονται ως εξής

$$
\bar{u}(x,z) = \rho_1(x,z)e^{i\phi_1(x,z)}, \quad \bar{v}(x,z) = \rho_2(x,z)e^{i\phi_2(x,z)}. \tag{3.26}
$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στο σύστημα (3.25) και διαχωρίζοντας το πραγματικό από το φανταστικό μέρος κάθε εξίσωσης, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \rho_j}{\partial z} + d_j\dfrac{\partial \phi_j}{\partial x}\dfrac{\partial \rho_j}{\partial x} + \dfrac{d_j}{2}\rho_j\dfrac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} = 0,\\
d_j\dfrac{\partial^2 \rho_j}{\partial x^2} - 4\sigma_j\theta_b\rho_j(w-1) - 2\rho_j\dfrac{\partial \phi_j}{\partial z} - d_j\rho_j\left(\dfrac{\partial \phi_j}{\partial x}\right)^2 = 0,\\
\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2qw = -\dfrac{2}{\theta_b}(\sigma_1 u_0^2\rho_1^2 + \sigma_2 v_0^2\rho_2^2).
\end{cases}
$$

όπου $j = 1, 2$, και $w(x,z) \in \mathbb{R}$. Ο προσδιορισμός των συναρτήσεων ρ_j, ϕ_j, w θα γίνει με τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων συνεπώς ξεκινάμε θεωρώντας την αλλαγή των ανεξάρτητων μεταβλητών

$$X = \varepsilon(x - \mathcal{C}z), \quad Z = \varepsilon^3 z,$$

όπου $\mathcal{C}$ είναι η ταχύτητα διάδοσης, που θα υπολογιστεί αργότερα στην ανάλυση.

Αναλύουμε τις άγνωστες συναρτήσεις σε δυνάμεις του ε ως εξής

$$\rho_j = \rho_{j0} + \varepsilon^2\rho_{j2} + \varepsilon^4\rho_{j4} + \cdots, \tag{3.27}$$

$$\phi_j = \varepsilon\phi_{j1} + \varepsilon^3\phi_{j3} + \varepsilon^5\phi_{j5} + \cdots, \tag{3.28}$$

$$w = 1 + \varepsilon^2 w_2 + \varepsilon^4 w_4 + \cdots. \tag{3.29}$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές του ε από τις τάξεις $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ και $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ παίρνουμε τις εξής σχέσεις

$$w_2 = \frac{2}{q\theta_b}\left(\sigma_1 u_0^2\rho_{12} + \sigma_2 v_0^2\rho_{22}\right), \ \rho_{22} = \frac{\sigma_2 d_2}{\sigma_1 d_1}\rho_{12},$$

$$\phi_{21} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\phi_{11}, \ \frac{d_j}{2}\frac{\partial\phi_{j1}}{\partial X} = \mathcal{C}\rho_{j2}.$$

Επίσης η σχέση που ικανοποιεί η ταχύτητα είναι

$$\mathcal{C}^2 = \frac{2(\sigma_1^2 u_0^2 d_1 + \sigma_2^2 v_0^2 d_2)}{q}.$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων και συνεχίζοντας τη μελέτη σε μεγαλύτερες τάξεις του ε, από τις τάξεις $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ και $\mathcal{O}(\varepsilon^5)$, παίρνουμε την εξίσωση

$$\frac{\partial\rho_{12}}{\partial Z} + A_1\frac{\partial^3\rho_{12}}{\partial X^3} + 6A_2\rho_{12}\frac{\partial\rho_{12}}{\partial X} = 0, \tag{3.30}$$

όπου

$$A_1 = \frac{\nu\mathcal{C}^4 - (d_1^3\sigma_1^2u_0^2 + d_2^3\sigma_2^2v_0^2)}{4\mathcal{C}^2 q}, \ A_2 = \frac{d_1^2\sigma_1^3u_0^2 + d_2^2\sigma_2^3v_0^2}{\mathcal{C}d_1\sigma_1 q}.$$

Η εξίσωση (3.30) είναι και πάλι μια KdV εξίσωση, η οποία διαθέτει ως λύσεις σολιτόνια της μορφής

$$\rho_{12}(X,Z) = \frac{2A_1}{A_2}\eta^2\,\mathrm{sech}^2(\eta X - 4\eta^3 A_1 a Z + X_0),$$

όπου η και X_0 είναι ελεύθερες παράμετροι, που ορίζουν το πλάτος και την αρχική θέση του σολιτονίου, αντίστοιχα.

Με αντίστοιχο τρόπο βρίσκουμε ότι η φάση παίρνει τη μορφή

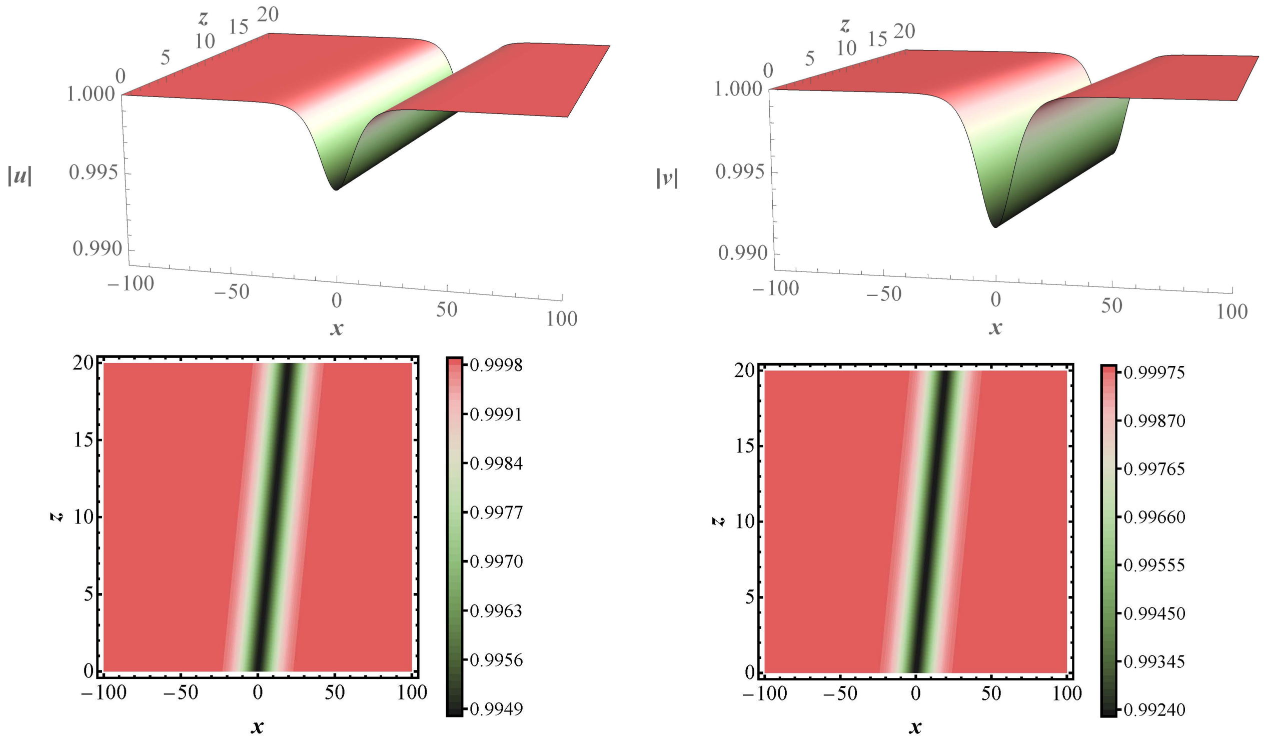
$$\phi_{11}(X,Z) = -\frac{4\mathcal{C}A_1}{A_2 d_1}\eta \tanh(\eta X - 4\eta^3 A_1 a Z + X_0).$$

Τελικά οι προσεγγιστικές λύσεις παίρνουν την εξής μορφή

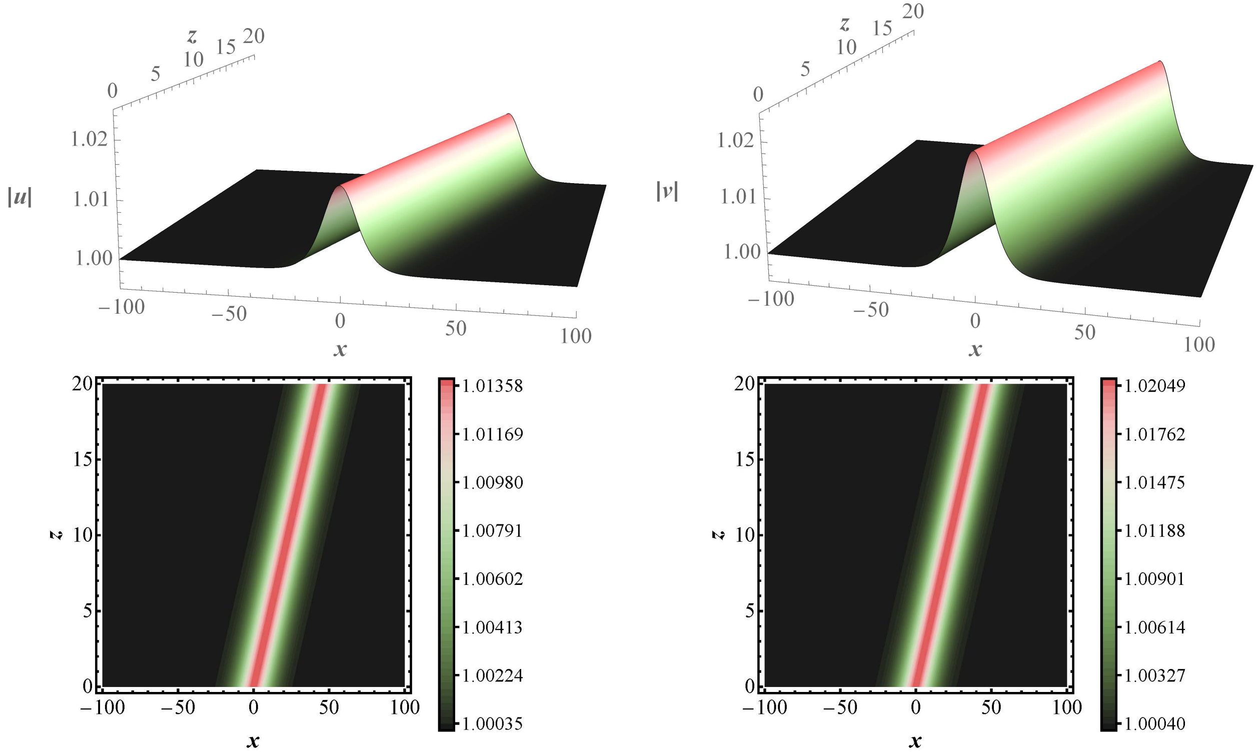
$$u(x,z) = u_b(z)(1+\varepsilon^2\rho_{12})\exp(i\varepsilon\phi_{12}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{3.31}$$

$$v(x,z) = v_b(z)\left(1+\varepsilon^2\frac{d_2\sigma_2}{d_1\sigma_1}\rho_{12}\right)\exp(i\varepsilon\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\phi_{12}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \tag{3.32}$$

Όπως και προηγούμενα, το είδος των λύσεων χαρακτηρίζεται από το πρόσημο του A_1/A_2. Δηλαδή, έχουμε και πάλι δύο είδη λύσεων, τα σκοτεινά σολιτόνια, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.6 και αντί σκοτεινά σολιτόνια, όπως στο Σχήμα 3.7.



Σχήμα 3.6: Τυπική εξέλιξη σκοτεινών σολιτονίων. Για τις σταθερές ισχύει: $d_1 = 1, \sigma_1 = 1$, $d_2 = 1.5, \sigma_2 = 1$, $q = 5, \nu = 1, u_0 = v_0 = 1$.



Σχήμα 3.7: Τυπική εξέλιξη αντι-σκοτεινού σολιτονίου. Για τις σταθερές ισχύει: $d_1 = 1, \sigma_1 = 1$, $d_2 = 1.5, \sigma_2 = 1$, $q = 1, \nu = 1, u_0 = v_0 = 1$.

3.3.4 Μικτές συνοριακές συνθήκες

Εξίσου ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση κατά την οποία γίνεται συνδυασμός των δύο παραπάνω περιπτώσεων, δηλαδή όταν τα είδη των σολιτονίων που συνδυάζουμε είναι διαφορετικού τύπου. Ακολουθώντας τη διαδικασία που εφαρμόσαμε και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις θεωρούμε ότι οι λύσεις είναι της μορφής

$$\begin{aligned} u(x,z) &= u_b(z)\bar{u}(x,z), \\ v(x,z) &= v_b(z)\bar{v}(x,z), \\ \theta(x,z) &= \theta_b(z)w(x,z), \end{aligned} \tag{3.33}$$

όμως τώρα οι συναρτήσεις u_b, v_b, θ_b γράφονται ως εξής

$$\begin{aligned} u_b(x,z) &= \exp\left[ikx - i(\omega - \varepsilon^2\Omega)z\right], \text{όπου } \omega = \frac{1}{2q}(d_1k^2q + 4\sigma_1\sigma_2 v_0^2), \\ v_b(z) &= v_0 \exp\left[-2i\sigma_2\theta_b z + i\psi_1\right], \\ \theta_b(z) &= \frac{\sigma_2 v_0^2}{q}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω λύσεις στο σύστημα (3.18) λαμβάνουμε το παρακάτω ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \dfrac{d_1}{2}\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - 2\sigma_1\theta_b(w-1)\bar{u} + id_1k\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \Omega\varepsilon^2\bar{u} = 0, \\[2ex] i\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \dfrac{d_2}{2}\dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - 2\sigma_2\theta_b(w-1)\bar{v} = 0, \\[2ex] \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2qw = -\dfrac{2}{\theta_b}(\sigma_1|\bar{u}|^2 + \sigma_2 v_0^2|\bar{v}|^2). \end{cases} \tag{3.34}$$

Στη συνέχεια εισάγουμε τον μετασχηματισμό του Madelung

$$\bar{u}(x,z) = \rho_1(x,z)e^{i\phi_1(x,z)}\ ,\ \bar{v}(x,z) = \rho_2(x,z)e^{i\phi_2(x,z)}, \tag{3.35}$$

αντικαθιστώντας αυτές τις σχέσεις στο σύστημα (3.34) και αφού χωρίσουμε το πραγματικό από το φανταστικό μέρος της κάθε εξίσωσης παίρνουμε το εξής σύστημα

$$\begin{cases} 2\sigma_1\theta_b\rho_1 - 2\sigma_1 w\theta_b\rho_1 - \rho_1\dfrac{\partial\phi_1}{\partial z} - d_1 k\rho_1\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x} \\ \qquad\qquad -\dfrac{d_1}{2}\rho_1\left(\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{d_1}{2}\dfrac{\partial^2\rho_1}{\partial x^2} - \varepsilon^2\Omega\rho_1 = 0, \\ \dfrac{\partial\rho_1}{\partial z} + d_1 k\dfrac{\partial\rho_1}{\partial x} + d_1\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial x} + \dfrac{d_1}{2}\rho_1\dfrac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2} = 0, \\ 2\sigma_2\theta_b\rho_2 - 2\sigma_2 w\theta_b\rho_2 - \rho_2\dfrac{\partial\phi_2}{\partial z} - \dfrac{d_2}{2}\rho_2\left(\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{d_2}{2}\dfrac{\partial^2\rho_2}{\partial x^2} = 0, \\ \dfrac{\partial\rho_2}{\partial z} + d_2\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial x} + \dfrac{d_2}{2}\rho_2\dfrac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2} = 0, \\ \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2qw = -\dfrac{2}{\theta_b}\left(\sigma_1\rho_1^2 + \sigma_2 v_0^2\rho_2^2\right). \end{cases}$$

Για τον προσδιορισμό των συναρτήσεων $\rho_1, \phi_1, \rho_2, \phi_2, w$ ένα εργαλείο που βοηθάει είναι η θεωρία διαταραχών και πιο συγκεκριμένα η ασυμπτωτική μέθοδος που δίνει λύση σε αυτό το πρόβλημα είναι η μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων. Ξεκινάμε θεωρώντας την αλλαγή των ανεξάρτητων μεταβλητών

$$X = \varepsilon(x - \mathcal{C}z), \quad Z = \varepsilon^3 z,$$

και αναλύουμε τις άγνωστες συναρτήσεις σε δυνάμεις του ε ως εξής

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_{10} + \varepsilon^2\rho_{12} + \varepsilon^4\rho_{14} + \cdots, \\ \phi_1 &= \varepsilon\phi_{11} + \varepsilon^3\phi_{13} + \varepsilon^5\phi_{15} + \cdots, \\ \rho_2 &= \rho_{20} + \varepsilon^2\rho_{22} + \varepsilon^4\rho_{24} + \cdots, \\ \phi_2 &= \varepsilon\phi_{21} + \varepsilon^3\phi_{23} + \varepsilon^5\phi_{25} + \cdots, \\ w &= 1 + \varepsilon^2 w_2 + \varepsilon^4 w_4 + \cdots. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις για τις διάφορες τάξεις του ε παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(1) : \rho_{10} &= 0, \\ \rho_{20} &= 1. \end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο από τις τάξεις $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ και $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ παίρνουμε τις εξής σχέσεις

$$w_2 = 2\rho_{22}, \; k = \frac{\mathcal{C}}{d_1},$$

$$\mathcal{C}\frac{\partial \phi_{21}}{\partial X} = \frac{4\sigma_2^2 v_0^2}{q}\rho_{22}, \;\; \frac{d_2}{2}\frac{\partial^2 \phi_{21}}{\partial X^2} = \mathcal{C}\frac{\partial \rho_{22}}{\partial X}.$$

Αντίστοιχα για τη ταχύτητα ισχύει η σχέση

$$\mathcal{C}^2 = \frac{2\sigma_2^2 v_0^2 d_2}{q}.$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων και συνεχίζοντας τη μελέτη σε μεγαλύτερες τάξεις του ε, από τις τάξεις $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ και $\mathcal{O}(\varepsilon^5)$, παίρνουμε το παρακάτω σύστημα

$$\begin{cases} \dfrac{8\sigma_2^2 v_0^2}{\mathcal{C}q}\dfrac{\partial \rho_{22}}{\partial Z} - \dfrac{\sigma_2 q^2 - 4\sigma_2^2 v_0^2 \nu}{2q^2}\dfrac{\partial^3 \rho_{22}}{\partial X^3} & + \dfrac{24\sigma_2^2 v_0^2}{q}\rho_{22}\dfrac{\partial \rho_{22}}{\partial X} \\ & + \dfrac{2\sigma_1\sigma_2}{q}\dfrac{\partial}{\partial X}\left(\rho_{12}^2\right) = 0, \\ \dfrac{d_1}{2}\dfrac{\partial^2 \rho_{12}}{\partial X^2} - \dfrac{4\sigma_1\sigma_2 v_0^2}{q}\rho_{12}\rho_{22} = \Omega\rho_{12}. \end{cases} \tag{3.36}$$

Το σύστημα (3.36) ονομάζεται σύστημα Mel'nikov και αποτελείται από μια εξίσωση KdV και μια εξίσωση Schrödinger. Το σύστημα αυτό είναι πλήρως ολοκληρώσιμο και αφού θεωρήσουμε ότι ισχύει $\Omega = \dfrac{\eta^2 d_1}{2}$ καταλήγουμε ότι υποστηρίζει σολιτονικές λύσεις της μορφής

$$\begin{aligned} \rho_{22}(X,Z) &= -\frac{d_1 q}{4\sigma_1\sigma_2 v_0^2}\eta^2 \operatorname{sech}^2(\eta X + SZ + X_0), \\ \rho_{12}(X,Z) &= A \operatorname{sech}(\eta X + SZ + X_0), \end{aligned}$$

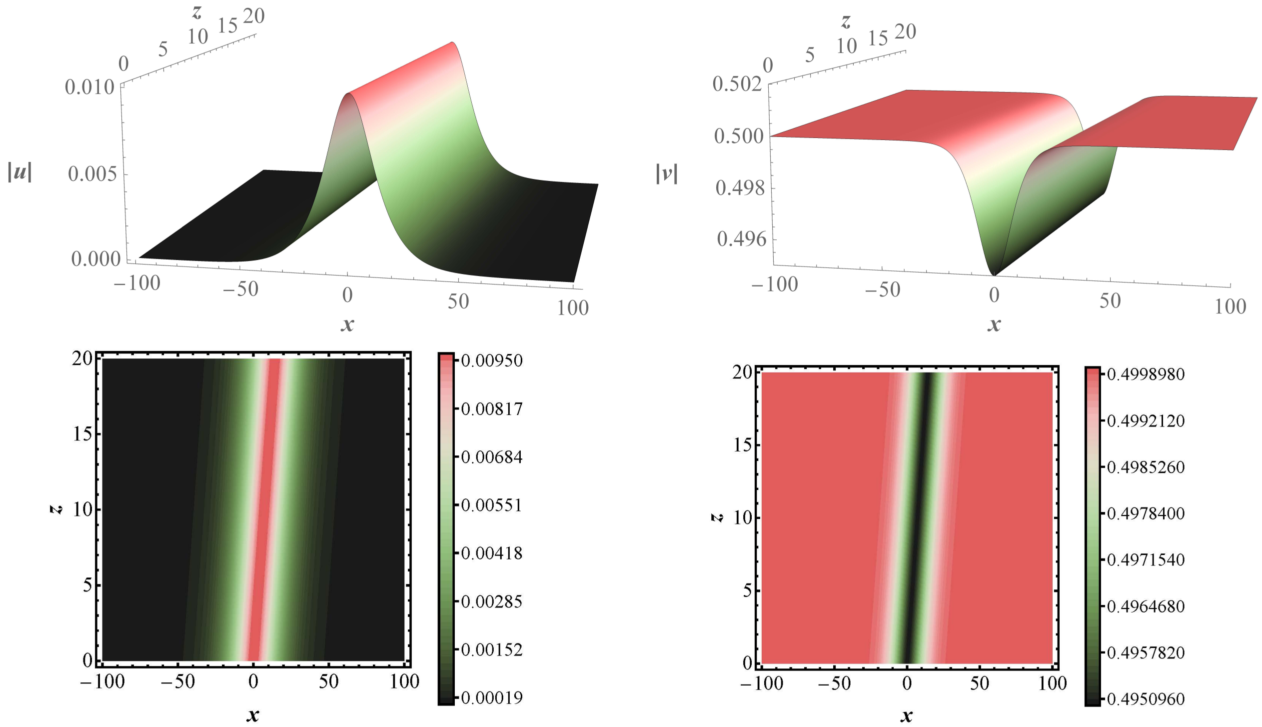
όπου οι σταθερές A, S συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\mathcal{C}d_1\left(4\nu\sigma_2^2 v_0^2 - d_2 q^2\right)\eta^4 + 4qd_1\sigma_2^2 v_0^2 S\eta - 4\mathcal{C}\sigma_1^2\sigma_2^2 v_0^2 A^2 = 0.$$

Χρησιμοποιώντας όλα τα παραπάνω καταλήγουμε ότι οι προσεγγιστικές λύσεις (3.33) γράφονται

$$\begin{aligned} u(x,z) &= \varepsilon^2 u_b(z)\rho_{12}\exp(i\varepsilon\phi_{12}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\ v(x,z) &= v_b(z)\left(1 + \varepsilon^2\rho_{22}\right)\exp(i\varepsilon\phi_{22}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Οι παραπάνω δύο λύσεις αναπαριστούν ένα φωτεινό-σκοτεινό σολιτονικό ζεύγος, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.8.



Σχήμα 3.8: Τυπική εξέλιξη φωτεινού-σκοτεινού σολιτονικού ζεύγους. Όλες οι σταθερές είναι ίσες με τη μονάδα, εκτός της $v_0 = \frac{1}{2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Γενίκευση σε δύο χωρικές διαστάσεις

Το ενδιαφέρον της μελέτης μας σε αυτό το κεφάλαιο στρέφεται στις $(2+1)$ χωρικές και χρονικές διαστάσεις [8]. Στη μελέτη αυτής της περίπτωσης εφόσον δεν είναι γνωστές οι ακριβείς λύσεις του συστήματός μας χρήσιμη είναι η θεωρία διαταραχών και πιο συγκεκριμένα η ασυμπτωτική μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων με την οποία ξεκινώντας από το διδιάστατο μη-τοπικό NLS σύστημα καταλήγουμε στην εξίσωση Kadomtsev-Petviashvili (KP), μια γενίκευση της εξίσωσης KdV σε δύο χωρικές διαστάσεις.

Από την ανάλυση των προηγούμενων κεφαλαίων παρατηρήσαμε ότι στην εστιάζουσα περίπτωση, το σύστημά μας είναι ασταθές, ενώ αντίθετα στην αφεστιάζουσα περίπτωση είναι ευσταθές. Για τον λόγο αυτόν η μελέτη μας σε αυτό το κεφάλαιο εστιάζει στην αφεστιάζουσα περίπτωση και πιο συγκεκριμένα το σύστημα μας παίρνει τη μορφή

$$iu_z + \frac{1}{2}\nabla^2 u - 2\theta u = 0, \tag{4.1α'}$$

$$\nu\nabla^2\theta - 2q\theta = -2|u|^2, \tag{4.1β'}$$

όπου $\nabla = (\partial_x\ ,\ \partial_y)$ και $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$.

Ξεκινώντας την ανάλυση χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό Madelung

$$u = u_0\sqrt{\rho}\exp(i\phi),$$

όπου η u_0 είναι μια μιγαδική σταθερά. Εισάγοντας τον μετασχηματισμό αυτόν στο σύστημα (4.1) και αφού χωρίσουμε πραγματικό και φανταστικό μέρος παίρνουμε

$$\phi_z + 2\theta + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}\rho^{-1/2}\left(\nabla^2\rho^{1/2}\right) = 0, \tag{4.2}$$

$$\rho_z + \nabla\cdot(\rho\nabla\phi) = 0, \tag{4.3}$$

$$\nu\nabla^2\theta - 2q\theta + 2|u_0|^2\rho = 0. \tag{4.4}$$

Το σύστημα (4.1) διαθέτει μια ακριβή σταθερή λύση για την οποία ισχύει

$$\phi = -\frac{2}{q}|u_0|^2 z, \quad \rho = 1, \quad \theta = \frac{1}{q}|u_0|^2.$$

Τελικά όλα τα παραπάνω δίνουν τη λύση του συνεχούς κύματος η οποία έχει τη μορφή

$$u = u_0 \exp\left(-\frac{2i}{q}|u_0|^2 z\right), \quad \theta = \frac{1}{q}|u_0|^2, \tag{4.5}$$

η οποία είναι ευσταθής.

Σκοπός μας σε αυτήν την ενότητα είναι να καταλήξουμε σε μια εξίσωση KP η οποία αποτελεί κυρίαρχη εξίσωση του πεδίου μελέτης μας. Αναζητούμε λύσεις των εξισώσεων της μορφής

$$\begin{aligned}
\phi &= -\frac{2}{q}|u_0|^2 z + \varepsilon^{1/2}\Phi, \\
\rho &= 1 + \varepsilon\rho_1 + \varepsilon^2\rho_2 + \cdots, \\
\theta &= \frac{1}{q}|u_0|^2 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \cdots,
\end{aligned}$$

όπου ε είναι μια μικρή παράμετρος. Επίσης ισχύει ότι οι συναρτήσεις Φ, ρ_j, θ_j εξαρτώνται από τις μεταβλητές $\{X, Y, Z\}$ για τις οποίες ισχύει

$$Z = \varepsilon^{1/2} z, \quad X = \varepsilon^{1/2} x, \quad Y = \varepsilon^{1/2} y.$$

Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις μπορούμε να λάβουμε μια εξίσωση Boussinesq την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε την εξίσωση που ζητάμε. Η εξίσωση Boussinesq είναι της μορφής [7]

$$\Phi_{ZZ} - \mathcal{C}^2\bar{\nabla}^2\Phi + \varepsilon\left[\frac{1}{4\mathcal{C}^2}\frac{\partial^2}{\partial Z^2}(a\bar{\nabla}^2\Phi) + \frac{\partial}{\partial Z}((\bar{\nabla}\Phi)^2) + \Phi_{ZZ}(\bar{\nabla}^2\Phi)\right] = O(\varepsilon^2) \tag{4.6}$$

όπου $a = 1 - \dfrac{4\nu|u_0|^2}{q^2}$.

Συνεχίζουμε, εισάγοντας νέες κλίμακες στην εξίσωση Boussinesq

$$\chi = X - \mathcal{C}Z, \quad \bar{\chi} = X + \mathcal{C}Z, \quad \psi = \varepsilon^{1/2}Y, \quad \zeta = \varepsilon Z,$$

και αναζητούμε λύσεις της εξίσωσης (4.6) οι οποίες έχουν τη μορφή

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1 + \cdots \tag{4.7}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.7) στη (4.6) παίρνουμε από την πρώτη τάξη του ε

$$\mathcal{O}(1) : 4\mathcal{C}^2\Phi_{0\chi\bar{\chi}} = 0.$$

Η εξίσωση, αυτή, μας δείχνει ότι το Φ_0 μπορεί σε κάθε περίπτωση να γραφεί ως μια υπέρθεση ενός κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά $\Phi_0^{(R)}$, το οποίο εξαρτάται από το χ και το ρ, και ενός κύματος που διαδίδεται προς τα αριστερά $\Phi_0^{(L)}$, το οποίο εξαρτάται από το $\bar{\chi}$ και το $\bar{\rho}$, δηλαδή παίρνουμε

$$\Phi_0 = \Phi_0^{(R)} + \Phi_0^{(L)}$$

και άρα

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(\varepsilon) : \quad & 4\mathcal{C}^2\Phi_{1\chi\bar{\chi}} + \mathcal{C}\ \left(\Phi_{0\chi\chi}^{(R)}\Phi_{0\bar{\chi}}^{(L)} - \Phi_{0\bar{\chi}\bar{\chi}}^{(L)}\Phi_{0\chi}^{(R)}\right) \\
&= \left[\partial_\chi\left(-2\mathcal{C}\Phi_{0\zeta}^{(R)} + \frac{a}{4}\Phi_{0\chi\chi\chi}^{(R)} - \frac{3\mathcal{C}}{2}(\Phi_{0\chi}^{(R)})^2\right) - \mathcal{C}^2\Phi_{0\psi\psi}^{(R)}\right] \\
&+ \left[\partial_{\bar{\chi}}\left(2\mathcal{C}\Phi_{0\zeta}^{(L)} + \frac{a}{4}\Phi_{0\bar{\chi}\bar{\chi}\bar{\chi}}^{(L)} + \frac{3\mathcal{C}}{2}(\Phi_{0\bar{\chi}}^{(L)})^2\right) - \mathcal{C}^2\Phi_{0\psi\psi}^{(L)}\right]. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (4.8) είτε ως προς χ είτε ως προς $\bar{\chi}$ παρατηρούμε ότι οι όροι στα δεξιά απλοποιούνται διότι είναι συναρτήσεις μόνο του χ ή του $\bar{\chi}$ αντίστοιχα. Η απλοποίηση αυτών των όρων οδηγεί σε δύο ανεξάρτητες μη-γραμμικές εξισώσεις για τα $\Phi_0^{(R)}$ και $\Phi_0^{(L)}$. Το πλάτος ρ_1 μπορεί να αποσυντεθεί σε ένα κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά και ένα κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά, δηλαδή

$$\rho_1 = \rho_1^{(R)} + \rho_1^{(L)},$$

όπου,

$$\Phi_{0\chi}^{(R)} = \mathcal{C}\rho_1^{(R)}, \quad \Phi_{0\bar{\chi}}^{(L)} = -\mathcal{C}\rho_1^{(L)}.$$

Χρησιμοποιώντας όλα τα παραπάνω καταλήγουμε στις δύο παρακάτω εξισώσεις ανάλογα με την ολοκλήρωση που ακολουθήσαμε

$$\left(\rho_{1\zeta}^{(R)} - \frac{a}{8\mathcal{C}}\rho_{1\chi\chi\chi}^{(R)} + \frac{3\mathcal{C}}{2}\rho_1^{(R)}\rho_{1\chi}^{(R)}\right)_\chi + \frac{\mathcal{C}}{2}\rho_{1\psi\psi}^{(R)} = 0, \qquad (4.9)$$

$$\left(\rho_{1\zeta}^{(L)} + \frac{a}{8\mathcal{C}}\rho_{1\bar{\chi}\bar{\chi}\bar{\chi}}^{(L)} - \frac{3\mathcal{C}}{2}\rho_1^{(L)}\rho_{1\bar{\chi}}^{(L)}\right)_{\bar{\chi}} - \frac{\mathcal{C}}{2}\rho_{1\psi\psi}^{(L)} = 0. \qquad (4.10)$$

Οι παραπάνω δύο εξισώσεις αποτελούν ένα ζεύγος εξισώσεων KP τύπου και μπορούμε να πάρουμε εξίσου σημαντικά αποτελέσματα για διάφορες περιπτώσεις σολιτόνιων κυμάτων τις οποίες παρουσιάζουμε παρακάτω.

4.1 Κατασκευή των λύσεων

Σκοπός μας λοιπόν είναι να απλοποιήσουμε περαιτέρω το ζεύγος εξισώσεων KP που βρήκαμε παραπάνω με κατάλληλους μετασχηματισμούς για να καταλήξουμε στην τελική απλοποιημένη μορφή τους. Ξεκινάμε από τις εξισώσεις (4.9) και (4.10) και εισάγοντας τους μετασχηματισμούς

$$\psi = \sqrt{\frac{3|a|}{4\mathcal{C}^2}}\psi, \quad \zeta = -\frac{a}{8\mathcal{C}}\zeta, \quad \rho_1^{(R)} = -\frac{a}{2\mathcal{C}^2}U, \tag{4.11}$$

καταλήγουμε ότι η εξίσωση (4.9) παίρνει τη μορφή

$$\left(U_\zeta + 6UU_\chi + U_{\chi\chi\chi}\right)_\chi + 3\sigma^2 U_{\psi\psi} = 0, \tag{4.12}$$

όπου $\sigma^2 = -\operatorname{sign}\{a\}$.
Η εξίσωση (4.12) αποτελεί μια εξίσωση KP της οποίας είναι γνωστή η προσεγγιστική λύση και πιο συγκεκριμένα αυτή έχει την μορφή

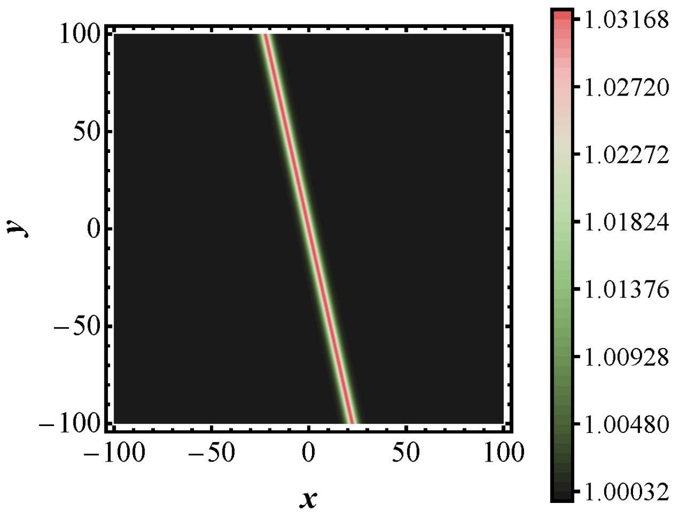
$$u \approx u_0\left(1 - \varepsilon\frac{a}{2|u_0|^2}U\right)^{1/2}\exp\left(-i|u_0|^2 z + \frac{i}{2}a\varepsilon^{1/2}\int_0^\zeta U\, d\zeta'\right), \tag{4.13}$$

$$\theta \approx |u_0|^2 - \frac{1}{2}\varepsilon a U. \tag{4.14}$$

όπου κ,λ και δ ελεύθεροι παράμετροι.
Ξεκινάμε με την λύση του σολιτονίου της εξίσωσης το οποίο ταξιδεύει υπό γωνία προς τον Y-άξονα που δίνεται από την εξίσωση

$$U(\chi,\psi,\zeta) = 2\kappa^2\operatorname{sech}^2(Z), \;\; Z = \kappa\left[\chi + \lambda\psi - (\kappa^2 + 3\lambda^2)\zeta + \delta\right],$$

Μια τέτοια λύση αναπαριστούμε στο σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Τυπικό αντί-σκοτεινό σολιτόνιο το οποίο παριστάνει τη λύση (4.13) της μη-τοπικής NLS με $\kappa = 1$, $\lambda = 1$, $\delta = 0$, $u_0 = 1$, $d = 1/\sqrt{3}$, $\varepsilon = 0.2$.

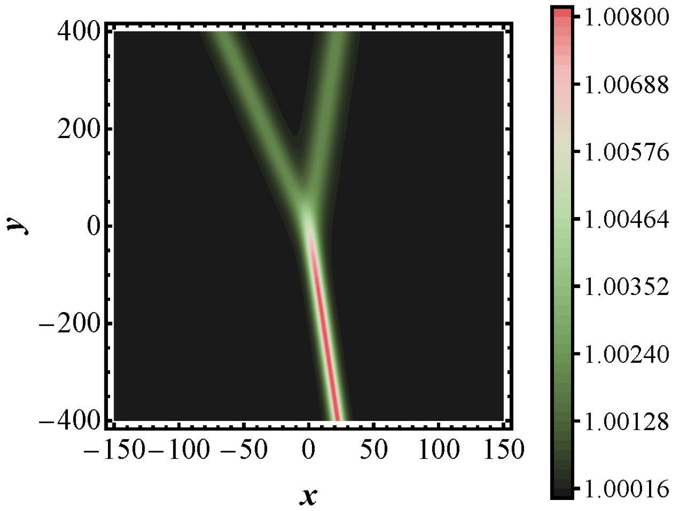
4.2 Αντί-σκοτεινά σολιτόνια και οι αλληλεπιδράσεις τους

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον, μιας και βρισκόμαστε στις δυο διαστάσεις, έχουν και οι αλληλεπιδράσεις αυτών των δομών. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω λύσεις θα δούμε τώρα κάποιες ενδιαφέρουσες αλληλεπιδράσεις τους, ξεκινώντας με την αλληλεπίδραση δύο σολιτονίων.
Εκφράζουμε τη λύση δύο σολιτονίων της εξίσωσης KP ως [9]

$$\begin{aligned} U(\chi,\psi,\zeta) &= 2\partial_\chi^2 \ln G(\chi,\psi,\zeta), \\ G &= 1+\exp(Z_1)+\exp(Z_2)+\exp(Z_1+Z_2+A_{12}), \\ A_{12} &= \ln\left[\frac{(\kappa_1-\kappa_2)^2-(\lambda_1-\lambda_2)^2}{(\kappa_1+\kappa_2)^2-(\lambda_1-\lambda_2)^2}\right], \\ Z_i &= \kappa_i\left[\chi+\lambda_i\psi-(\kappa_i^2+3\lambda_i^2)\zeta+\delta_i\right], \end{aligned}$$

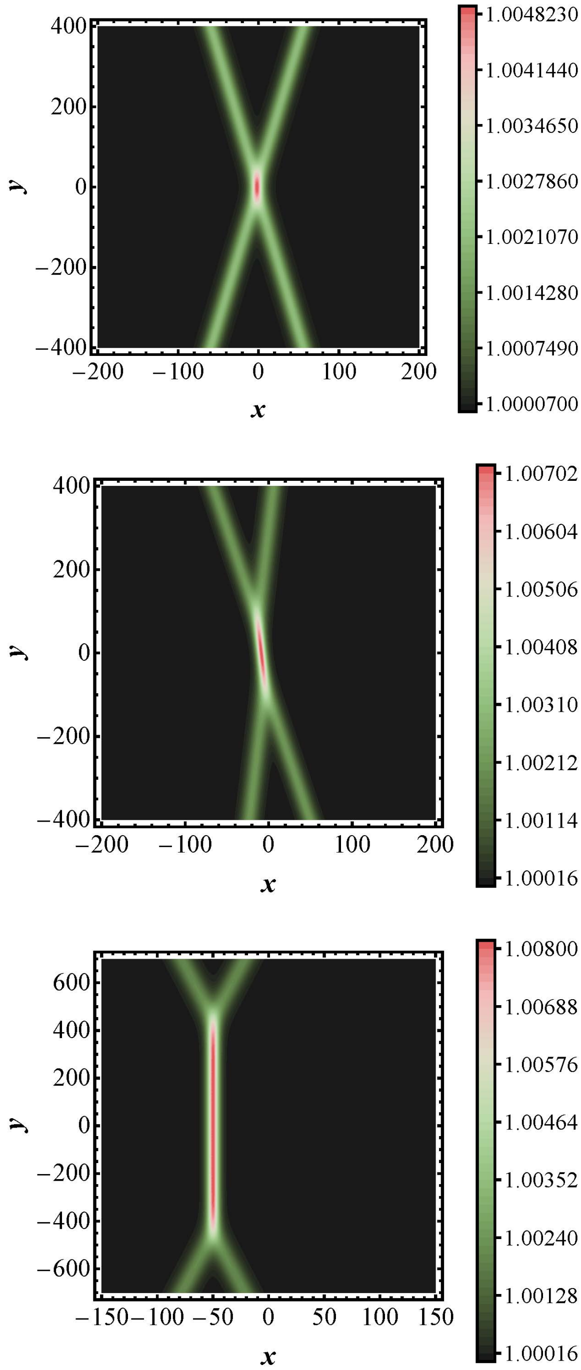
όπου κ_i, λ_i πραγματικές σταθερές. Για διαφορετικές τιμές των σταθερών αυτών μπορούμε να έχουμε διαφορετική αλληλεπίδραση.
Ξεκινάμε με την αλληλεπίδραση δύο σολιτονίων η οποία οδηγεί στην εμφάνιση ενός σολιτονίου του οποίου το μέγιστο ύψος είναι τέσσερις φορές μεγαλύτερο από

το ύψος των εισερχόμενων σολιτονίων. Σε αυτήν την περίπτωση, παρουσιάζεται η μορφή Y-σολιτονίου την οποία βλέπουμε στο σχήμα 4.2.



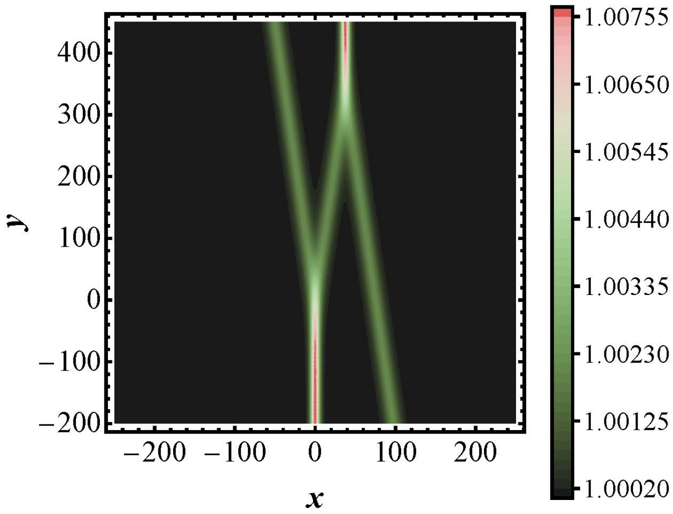
Σχήμα 4.2: Y-τύπου αλληλεπίδραση. Για τις τιμές των παραμέτρων ισχύει $\kappa_1 = 1/2,\ \kappa_2 = 1,\ \lambda_1 = 3/4,\ \lambda_2 = 1/4,\ \delta = 0,\ u_0 = 1,\ d = 1/\sqrt{3},\ \varepsilon = 0.2$.

Όμοια με την παραπάνω διαδικασία με διαφορετική επιλογή των σταθερών μπορούμε να κατασκευάσουμε σολιτόνια X-τύπου τα οποία παίρνουμε με μικρή αλληλεπίδραση, σχήμα 4.3 (πρώτη εικόνα όπου $\kappa_1 = 1/2,\ \kappa_2 = 1/2,\ \lambda_1 = -2/3,\ \lambda_2 = 2/3,\ \delta = 0,\ u_0 = 1,\ d = 1/\sqrt{3},\ \varepsilon = 0.2.$), μέση αλληλεπίδραση σχήμα 4.3 (δεύτερη εικόνα όπου $\kappa_1 = 1/2,\ \kappa_2 = 1/2,\ \lambda_1 = 1/4 - 0.01,\ \lambda_2 = 3/4,\ \delta = 0,\ u_0 = 1,\ d = 1/\sqrt{3},\ \varepsilon = 0.2.$), μεγάλη αλληλεπίδραση σχήμα 4.3 (τρίτη εικόνα όπου $\kappa_1 = 1/2,\ \kappa_2 = 1/2,\ \lambda_1 = 1/2,\ \lambda_2 = -1/2 - 10^{-10},\ \delta = 0,\ u_0 = 1,\ d = 1/\sqrt{3},\ \varepsilon = 0.2.$).



Σχήμα 4.3: Τυπική X-τύπου αλληλεπίδραση.

Ένας άλλος ενδιαφέρον τύπος κυμάτων αλληλεπίδρασης είναι τα σολιτόνια H-τύπου, όπως στο κάτωθι σχήμα 4.4.

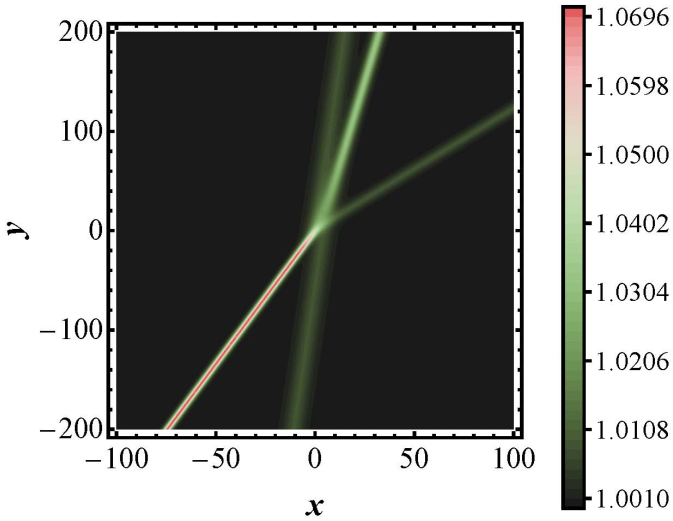


Σχήμα 4.4: Τυπική H-τύπου αλληλεπίδραση ,$u(x, y, 0)$, για τις τιμές των παραμέτρων ισχύει $\kappa_1 = 1/2,\ \kappa_2 = 1,\ \lambda_1 = 1/2 - 10^{-7},\ \lambda_2 = 0,\ \delta = 0,\ u_0 = 1,\ d = 1/\sqrt{3},\ \varepsilon = 0.2$.

Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί για όσα κύματα επιθυμούμε, ενδεικτικά αναφέρουμε τη λύση για τρία σολιτόνια

$$U(\chi, \psi, \zeta) = 2\partial_\chi^2 \ln G(\chi, \psi, \zeta),$$
$$G = 1 + \sum_{1\leq i\leq 3} e^{\eta_i} + \sum_{1\leq i<j\leq 3} e^{\eta_i+\eta_j+A_{ij}} + e^{\eta_1+\eta_2+\eta_3+A_{12}+A_{12}+A_{23}},$$
$$A_{ij} = \ln\left[\frac{(\kappa_i - \kappa_j)^2 - (\lambda_i - \lambda_j)^2}{(\kappa_i + \kappa_j)^2 - (\lambda_i - \lambda_j)^2}\right],$$

που η δομή τους αντιστοιχεί στο σχήμα 4.5.



Σχήμα 4.5: Τυπική αλληλεπίδραση τριών σολιτονίων ,$u(x, y, 0)$, για τις τιμές των παραμέτρων ισχύει $\kappa_1 = 1,\ \kappa_2 = 2,\ \kappa_3 = 3,\ \lambda_1 = -1/3,\ \lambda_2 = -2/3,\ \lambda_3 = -5/3,\ \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0,\ u_0 = 1,\ d = 1/\sqrt{3},\ \varepsilon = 0.2$.

4.3 Πιο περίπλοκες δομές

Σε αυτή την ενότητα γίνετε μια διαφοροποίηση των μετασχηματισμών των διαφόρων μεταβλητών με στόχο την προσέγγιση πιο περίπλοκων δομών. Θεωρούμε τους παρακάτω μετασχηματισμούς

$$\psi = \sqrt{\frac{3|a|}{4\mathcal{C}^2}}\psi, \quad \zeta = \frac{a}{2\mathcal{C}}\zeta, \quad \rho_1^{(R)} = -\frac{a}{2\mathcal{C}^2}U, \tag{4.15}$$

έτσι ώστε η εξίσωση (4.9) να παίρνει τη μορφή

$$(-4U_\zeta + 6UU_\chi + U_{\chi\chi\chi})_\chi + 3\sigma^2 U_{\psi\psi} = 0,$$

όπου $\sigma^2 = -\operatorname{sign}\{a\}$.

Ασχολούμαστε με νέες δομές σε μορφή ιστού για την εξίσωση KP που αντιστοιχούν σε N-out και M-out αντίστοιχα, σολιτόνια. Στη μελέτη αυτών χρησιμοποιείται η ορίζουσα Wronski και η λεγόμενη τ-συνάρτηση η οποία αντικαθιστά τη συνάρτηση G την οποία είχαμε στην παραπάνω ανάλυση. Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει [9]

$$U(\chi,\psi,\zeta) = 2\partial_\chi^2 \ln \tau(\chi,\psi,\zeta),$$

όπου η συνάρτηση τ αναπαριστά την ορίζουσα Wronski ως εξής

$$\tau(\chi,\psi,\zeta) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_N \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_N' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1^{(N-1)} & f_2^{(N-1)} & \cdots & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix}, \tag{4.16}$$

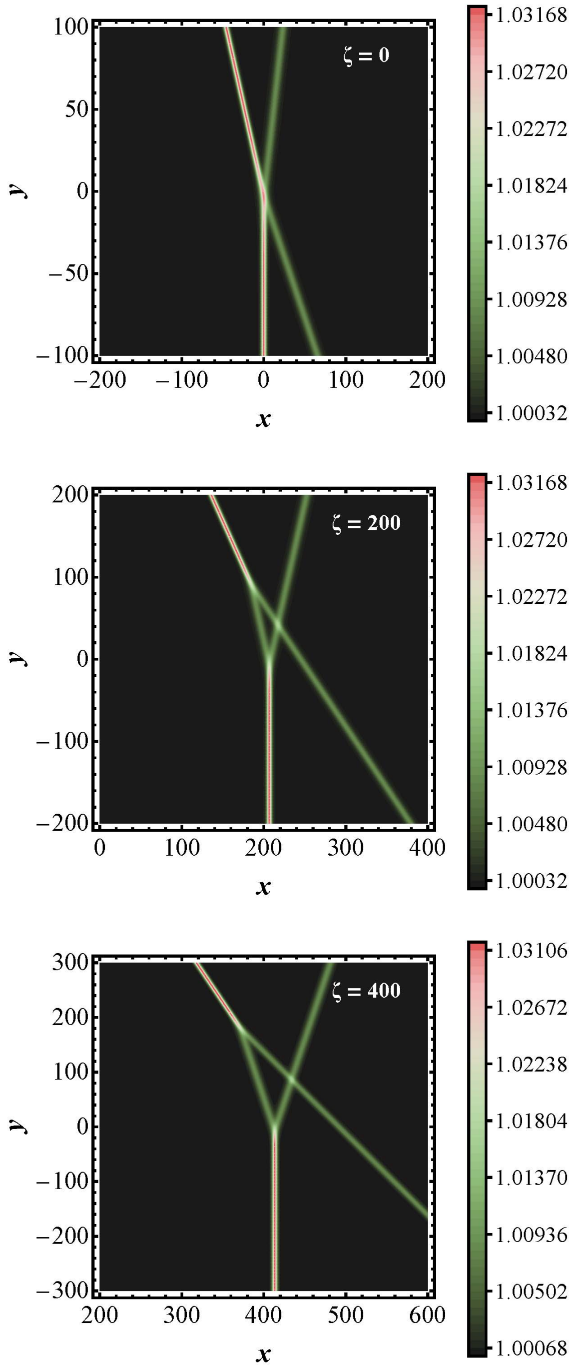
στον παραπάνω πίνακα η διαφόριση είναι ως προς τη μεταβλητή X.
Συγκεκριμένα, για κύματα γραμμή η συνάρτηση f παίρνει τη μορφή

$$f_n(\chi,\psi,\zeta) = \sum_{m=1}^{M} a_{nm} e^{\nu_m},\ n = 1, 2, \cdots, N,$$

όπου $\nu_m = k_m\chi + k_m^2\psi + k_m^3\zeta$ με k_m πραγματικές σταθερές με την προϋπόθεση ότι ισχύει $k_1 < k_2 < \cdots < k_M$. Επίσης για τους συντελεστές a_{nm} ισχύει ότι ορίζουν έναν $N \times M$ τέτοια ώστε $A = (a_{nm})$.
Ξεκινάμε με τη μελέτη μιας 2-2 αλληλεπίδρασης που χαρακτηρίζεται από τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Η εξέλιξη αυτής της αλληλεπίδρασης παρουσιάζεται παρακάτω, στο σχήμα 4.6

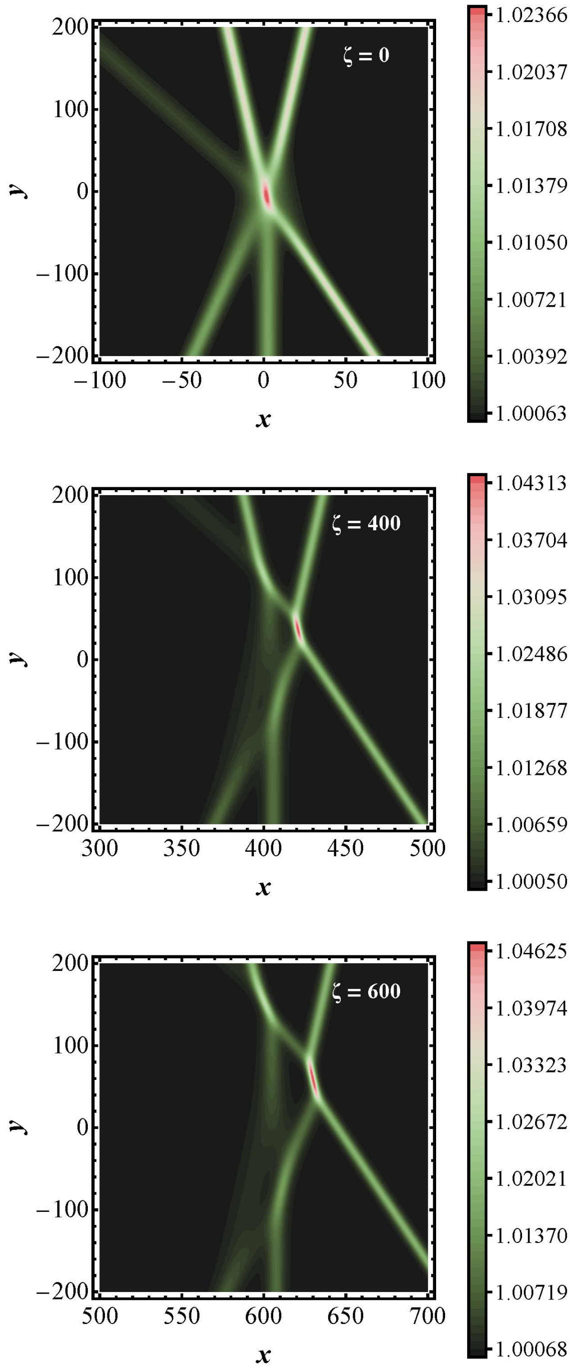


Σχήμα 4.6: Τυπική εξέλιξη μιας 2-2 αλληλεπίδρασης, με $k_1 = -1,\ k_2 = 0,\ k_3 = 1,\ k_4 = 2$..

Τελειώνουμε τη μελέτη μας με μια 3-3 αλληλεπίδραση που χαρακτηρίζεται από τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.18}$$

Η εξέλιξη αυτής της αλληλεπίδρασης παρουσιάζεται παρακάτω, στο σχήμα 4.7



Σχήμα 4.7: Τυπική εξέλιξη μιας 3-3 αλληλεπίδρασης, με $k_1 = -1,\ k_2 = -1/2,\ k_3 = 0,\ k_4 = 1/2,\ k_5 = 1,\ k_6 = 3/2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η μελέτη της διάδοσης σολιτονίων σε μη γραμμικά οπτικά μέσα, όπως οι υγροί κρύσταλλοι, βασίζεται στη μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS) και τις παραλλαγές της. Τα σολιτόνια, ως εντοπισμένα κύματα με ιδιαίτερες ιδιότητες όπως η διατήρηση του σχήματος και της ταχύτητάς τους μετά από συγκρούσεις, αποτελούν σημαντικό πεδίο έρευνας με πολλές εφαρμογές. Η εξίσωση NLS είναι μια εξίσωση με τέτοιες λύσεις, μια ιδιότητα όμως που δεν μεταφέρεται αναγκαστικά και στις παραλλαγές της.

Στην εργασία αυτή, εξετάσαμε τη μη τοπική μη γραμμικότητα, η οποία αποτελεί γενίκευση της κυβικής μη γραμμικότητας (Kerr), και μας επέτρεψε να κατασκευάσουμε λύσεις που η αρχική NLS εξίσωση δεν υποστηρίζει. Εστιάσαμε τόσο στην εστιάζουσα (focusing) όσο και στην αφεστιάζουσα (defocusing) μορφή της εξίσωσης, χρησιμοποιώντας ποιοτική ανάλυση για να κατανοήσουμε τις διαφορές τους και τις επιπτώσεις της μη τοπικότητας.

Ξεκινήσαμε την ανάλυσή μας με την ποιοτική μελέτη τόσο της κυβικής NLS ($\nu = 0$), όσο και της γενικευμένης μη τοπικής της μορφής ($\nu \neq 0$), και την κατασκευή των διαφόρων διαγραμμάτων φάσης. Στην περίπτωση όπου $\nu = 0$, μπορέσαμε να αναλύσουμε πλήρως όλες τις πιθανές περιπτώσεις του χώρου των φάσεων, ενώ στην περίπτωση όπου $\nu \neq 0$, διαπιστώσαμε ότι η ποιοτική ανάλυση ήταν αποτελεσματική μόνο στην εστιάζουσα περίπτωση. Στην περίπτωση $\nu = 0$ εμφανίστηκε ένα είδος λύσεων (σκοτεινά σολιτόνια) τα οποία δεν μπορέσαμε να προσεγγίσουμε μεσώ της ποιοτικής ανάλυσης στην περίπτωση $\nu \neq 0$. Για αυτόν τον λόγο στην αφεστιάζουσα περίπτωση, καταφύγαμε στη χρήση θεωρίας διαταραχών και της μεθόδου πολλαπλών κλιμάκων, επεκτείνοντας τη μελέτη μας από τις (1+1) στις (2+1) χωρικές και χρονικές διαστάσεις.

Η μέθοδος αυτή αποδείχθηκε εξαιρετικά χρήσιμη, αφού μπορέσαμε να κατασκευάσουμε λύσεις που η κυβική εξίσωση δεν υποστηρίζει. Επιπλέον, αυτό έγινε μέσω της γνωστής εξίσωσης Korteweg-de Vries (KdV) και της σολιτονικής της λύσης. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον είχαν οι περιπτώσεις όπου πέραν της μη τοπικότητας ακόμα ένα πεδίο προστέθηκε στη σύζευξη επιτρέποντας την κατασκευή μιας πληθώρας λύσεων, διαφόρων συνοριακών συνθηκών. Επίσης η προσθήκη ενός δεύτερου πεδίου μας απέδειξε ότι η σταθερά ν λειτουργεί ως παράγοντας περιορισμού της αστάθειας στο σύστημά μας μιας και η αύξηση αυτής της σταθεράς μειώνει σημαντικά την περιοχή στην οποία υποστηρίζονται μιγαδικές λύσεις οι οποίες προκαλούν και την αστάθεια στο σύστημα. Τέλος, στην περίπτωση των δύο χωρικών διαστάσεων, όπου έγινε χρήση των λύσεων της εξίσωσης Kadomtsev-Petviashvili (KP), πιο εντυπωσιακές λύσεις μπορούν να υποστηριχθούν που δίνουν νέα εναύσματα για τη βαθύτερη κατανόηση της συμπεριφοράς των σολιτονίων στα μη τοπικά μη γραμμικά συστήματα.

Βιβλιογραφια

[1] G. Assanto. *Nematicons: Spatial Optical Solitons in Nematic Liquid Crystals.* Wiley-Blackwell, 2012.

[2] J. Michael L. MacNeil, N. F. Smyth, and G. Assanto. Exact and approximate solutions for optical solitary waves in nematic liquid crystals. *Physica D*, 284:1–15, 2014.

[3] S. Baqer, D. J. Frantzeskakis, T. P. Horikis, C. Houdeville, T. R. Marchant, and N. F. Smyth. Nematic dispersive shock waves from nonlocal to local. *Appl. Sci.*, 11, 2021.

[4] Άννα Ριζάκη. *Ποιοτική Ανάλυση Διαφορικών Εξισώσεων Μελέτη Του Χώρου Των Φάσεων.* Msc thesis, University of Ioannina, 2019.

[5] T. P. Horikis. Exact solutions and self-similar symmetries of a nonlocal nonlinear Schrödinger equation. *Eur. Phys. J. Plus*, 135:562, 2020.

[6] T. P. Horikis. Modulation instability and solitons in two-color nematic crystals. *Phys. Lett. A*, 380:3473–3479, 2016.

[7] T. P. Horikis and D. J. Frantzeskakis. *On the Properties of a Nonlocal Nonlinear Schrödinger Model and Its Soliton Solutions*, pages 403–446. Springer International Publishing, 2018.

[8] G. N. Koutsokostas. *Nonlinear waves and solitons in media with nonlocal nonlinearity.* Phd thesis, University of Athens, 2023.

[9] G. N. Koutsokostas, T. P. Horikis, D. J. Frantzeskakis, N. Antar, and İ. Bakırtaş. Water waves and light: Two unlikely partners. In İlkay Bakırtaş and Nalan Antar, editors, *Nonlinear Optics*, chapter 1. IntechOpen, 2021.