



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΠΜΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΝΕΥΡΩΝΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ RBF ΜΕ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ
ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ

Ιωάννης Βαρβάρας

Επιβλέπων: Ιωάννης Τσούλος, Καθηγητής

Άρτα Μάρτιος, 2025

CREATION OF RBF NEURAL NETWORKS USING GRAMMATICAL EVOLUTION

Εγκρίθηκε από τριμελή εξεταστική επιτροπή

Αρτα, 24-03-2025

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

1. Επιβλέπων καθηγητής

Ιωάννης Τσούλος,

Καθηγητής

2. Μέλος επιτροπής

Αλέξανδρος Τζάλας,

Αναπληρωτής Καθηγητής

3. Μέλος επιτροπής

Χρυσόστομος Στύλιος,

Καθηγητής

© Βαρβάρας Ιωάννης 2025.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Δήλωση μη λογοκλοπής

Δηλώνω υπεύθυνα και γνωρίζοντας τις κυρώσεις του Ν. 2121/1993 περί Πνευματικής Ιδιοκτησίας, ότι η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία είναι εκ ολοκλήρου αποτέλεσμα δικής μου ερευνητικής εργασίας, δεν αποτελεί προϊόν αντιγραφής ούτε προέρχεται από ανάθεση σε τρίτους. Όλες οι πηγές που χρησιμοποιήθηκαν (κάθε είδους, μορφής και προέλευσης) για τη συγγραφή της περιλαμβάνονται στη βιβλιογραφία.

Βαρβάρας Ιωάννης

Υπογραφή

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμότερες ευχαριστίες μου προς όλους όσοι με στήριξαν στην πορεία ολοκλήρωσης της διπλωματικής μου εργασίας. Πρώτα απ' όλα, ευχαριστώ από καρδιάς τη σύζυγό μου Κατερίνα, για την αμέριστη συμπαράστασή της, καθώς και την πεθερά μου, την Αγγελική, που βρισκόταν πάντα δίπλα μου με αγάπη και φροντίδα. Ένα ιδιαίτερο ευχαριστώ αξίζει στον γιο μου, τον Κωνσταντίνο, που του έλειψε ο μπαμπάς του κατά τη διάρκεια αυτής της απαιτητικής διαδικασίας. Ευχαριστώ επίσης τον Χρήστο Χρόνη, που δεν αρνήθηκε ποτέ να με βοηθήσει κάθε φορά που το ζήτησα. Θα ήθελα, επιπλέον, να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου προς τη Σχολή μου για την πολύτιμη εμπειρία που μου προσέφερε μέσα από τα μεταπτυχιακά μαθήματα, συμβάλλοντας καθοριστικά στην εξέλιξη και την ωρίμανσή μου.

Τέλος, με ιδιαίτερη συγκίνηση, οφείλω να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου, κύριο Ιωάννη Τσούλο, για την υπομονή και την κατανόηση που έδειξε, ιδίως κατά την περίοδο ολοκλήρωσης της διαδικασίας της διπλωματικής εργασίας. Η στήριξή του υπήρξε καθοριστική και το παράδειγμά του θα με συνοδεύει σε κάθε μελλοντικό μου βήμα.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία εξετάζει τη χρήση της μεθόδου Grammatical Evolution (GE) για την εκπαίδευση νευρωνικών δικτύων τύπου Radial Basis Function (RBF). Στόχος της έρευνας είναι να αξιολογηθεί η αποτελεσματικότητα της GE στην αυτόματη ανακάλυψη και βελτιστοποίηση παραμέτρων των RBF δικτύων. Συμπληρωματικά, εφαρμόζεται η θεωρία των εκθετών Lyapunov για την αξιολόγηση της δυναμικής σταθερότητας και της συμπεριφοράς των δικτύων σε διαφορετικές παραμετρικές ρυθμίσεις. Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε περιλαμβάνει την εφαρμογή της GE σε συνδυασμό με τα RBF δίκτυα, με σκοπό την ενίσχυση της ακρίβειας και της γενίκευσης των μοντέλων. Τα ευρήματα δείχνουν ότι η μέθοδος GE βελτιώνει σημαντικά την ακρίβεια των προβλέψεων και την απόδοση του μοντέλου, ενώ οι εκθέτες Lyapunov προσφέρουν επιπρόσθετες διαγνωστικές πληροφορίες για τη σταθερότητα του συστήματος υπό διάφορες συνθήκες. Ωστόσο, επισημαίνεται ότι η μέθοδος απαιτεί αυξημένους υπολογιστικούς πόρους και προσεκτική ρύθμιση των γραμματικών κανόνων για βέλτιστα αποτελέσματα.

Συμπερασματικά, η GE αποδεικνύεται ένα ισχυρό εργαλείο για την εκπαίδευση RBF δικτύων, προσφέροντας ευελιξία, αποδοτικότητα και ακρίβεια, με την προσθήκη της ανάλυσης Lyapunov να ενισχύει την κατανόηση των δυναμικών ιδιοτήτων των μοντέλων. Μελλοντικές εργασίες μπορούν να εστιάσουν στη βελτιστοποίηση της GE και στην εφαρμογή της σε νέους τύπους νευρωνικών δικτύων και άλλους τομείς, όπως η βιοϊατρική και η χρηματοοικονομική ανάλυση, ενώ ταυτόχρονα εξετάζεται η δυναμική σταθερότητα μέσω της μεθοδολογίας Lyapunov.

Λέξεις-κλειδιά: Γραμματική Εξέλιξη, Νευρωνικά Δίκτυα, Δίκτυα RBF, Εκθέτες Lyapunov, Βελτιστοποίηση.

Abstract

This thesis explores the application of Grammatical Evolution (GE) for training Radial Basis Function (RBF) neural networks. The research aims to evaluate the effectiveness of GE in the automatic discovery and optimization of parameters for RBF networks. Additionally, the Lyapunov exponent theory is applied to assess the dynamic stability and behavior of the networks under various parametric settings. The methodology involves using GE in conjunction with RBF networks, aiming to enhance the accuracy and generalization of the models. Findings indicate that the GE method significantly improves the prediction accuracy and performance of the model. At the same time the Lyapunov exponents provide additional diagnostic information about the system's stability under different conditions. However, it is noted that the method requires increased computational resources and careful tuning of grammatical rules for optimal results.

In conclusion, GE proves to be a powerful tool for training RBF networks, offering flexibility, efficiency, and accuracy, with the addition of Lyapunov analysis enhancing the understanding of the models' dynamic properties. Future work can focus on optimizing GE and applying it to new types of neural networks and other areas such as biomedical and financial analysis, while simultaneously examining dynamic stability through the Lyapunov methodology.

Keywords: Grammatical Evolution, Neural Networks, RBF Networks, Lyapunov Exponent, Optimization.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	v
Περίληψη	vi
Abstract	vii
Περιεχόμενα	viii
Κατάλογος Πινάκων	xi
Κατάλογος Εικόνων/Σχημάτων	xii
Πίνακας συντομογραφιών	xiii
1. Εισαγωγή.....	1
1.1 Σκοπός της εργασίας	2
1.2 Σύντομη περιγραφή των βασικών εννοιών.....	2
1.3 Δομή της εργασίας.....	3
2. Θεωρητικό Υπόβαθρο	4
2.1 Νευρωνικά Δίκτυα.....	4
2.1.1 Βασική Αρχιτεκτονική Νευρωνικών Δικτύων	6
2.1.2 Είδη Νευρωνικών Δικτύων	7
2.1.3 Πρόσφατες Εξελίξεις στη Βαθιά Μάθηση	7
2.2 Δίκτυα Radial Basis Function – RBF.....	7
2.2.1 Δομή και Λειτουργία.....	8
2.2.2 Βασική μέθοδος υλοποίησης και προβλήματα.....	13
2.2.3 Εφαρμογές των RBF Δικτύων	14
2.3.4 Προκλήσεις και Μελλοντικές Κατευθύνσεις	16
2.2.5 Συμπεράσματα	17
2.3 Γενετικοί Αλγόριθμοι	18
2.3.1 Βασικές Αρχές Εξελικτικών Αλγορίθμων.....	19
2.3.2 Λειτουργία Γενετικών Αλγορίθμων.....	19
2.3.4 Εφαρμογές στη Βελτιστοποίηση	20
2.4 Grammatical Evolution (GE)	21
2.4.1 Αρχές και Λειτουργία της Grammatical Evolution	22
2.4.2 Πλεονεκτήματα της Grammatical Evolution.....	24
2.4.3 Εφαρμογές της Grammatical Evolution.....	26
2.4.4 Προκλήσεις της Grammatical Evolution	28
2.4.5 Μελλοντικές Κατευθύνσεις και Βελτιώσεις.....	30
2.4.6 Συμπεράσματα	32
2.5 Η θεωρία του Χάους και εκθέτες Lyapunov.....	33

2.5.1 Θεωρία του Χάους.....	34
2.5.2 Θεωρία Lyapunov και Εκθέτες Lyapunov.....	36
2.5.3 Εφαρμογή της Θεωρίας Lyapunov στον Έλεγχο Νευρωνικών Δικτύων.....	38
2.5.4 Συμπεράσματα.....	39
3. Σχεδιασμός και Μεθοδολογία.....	41
3.1 Εισαγωγή στο Σχεδιασμό.....	41
3.2 Στόχοι Σχεδιασμού.....	41
3.3 Περιγραφή της Μεθοδολογίας.....	42
3.4 Αρχιτεκτονική του Συστήματος.....	43
3.5 Στρατηγική Ανάπτυξης.....	45
3.6 Συνοψίζοντας.....	45
4. Υλοποίηση και Πειράματα.....	46
4.1 Εισαγωγή.....	46
4.2 Λεπτομέρειες Υλοποίησης.....	46
4.2.1 Εργαλεία και Βιβλιοθήκες.....	46
4.2.2 Διάρθρωση Κώδικα.....	47
4.2.3 Διαδικασία Μετάφρασης και Εκτέλεσης.....	48
4.2.4 Δομή των Δεδομένων.....	50
4.3.1 Βασικές Κλάσεις RBF.....	51
4.3.2 Εκπαίδευση RBF.....	51
4.3.3 Παράμετροι Εκπαίδευσης.....	51
4.4 Ενσωμάτωση Grammatical Evolution.....	51
4.4.1 Γραμματική.....	51
4.4.2 Τελεστές Εξέλιξης.....	52
4.5 Υπολογισμός Εκθέτη Lyapunov.....	53
4.5.1 Λογική Σύνδεση με RBF.....	53
4.5.2 Υλοποίηση.....	53
4.5.3 Κριτήρια Ερμηνείας.....	53
4.6 Παρουσίαση Πειραμάτων.....	53
4.6.1 Περιγραφή Συνόλων Δεδομένων.....	53
4.6.2 Ρυθμίσεις Δοκιμών και αποτελέσματα.....	54
4.7 Ανάλυση Αποτελεσμάτων.....	56
4.7.1 Συζήτηση Απόδοσης.....	56
4.7.2 Χαστική Συμπεριφορά.....	59
4.8 Συμπεράσματα.....	59
5. Συμπεράσματα και Μελλοντικές Εργασίες.....	60
5.1 Επισκόπηση των Στόχων και των Αποτελεσμάτων.....	60

5.2 Κύρια Συμπεράσματα.....	60
5.3 Προτάσεις για Μελλοντική Εργασία	61
5.4 Τελική Σύνοψη.....	62
Βιβλιογραφία.....	64
Παράρτημα	70

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1 Πειραματικά αποτελέσματα για τα σύνολα δεδομένων ταξινόμησης.55

Πίνακας 2 Πειραματικά αποτελέσματα για τα σύνολα δεδομένων παλινδρόμησης.56

Κατάλογος Εικόνων/Σχημάτων

Σχήμα 2.1 Σχηματική αναπαράσταση ενός TN με μεταβλητά βάρη εισόδου ($w_1, w_2, \dots, w_n$) και μια σταθερή είσοδο (κατώφλι)	4
Σχήμα 2.2 Προσωτροφοδοτούμενο TNΔ τριών στρωμάτων νευρώνων.	6
Σχήμα 2.3 Σχηματική αναπαράσταση δικτύου RBF.	8
Σχήμα 2.4 Παράδειγμα εφαρμογής της Grammatical Evolution.....	23
Σχήμα 2.5 Ο ελκυστής του Lorenz.	35
Σχήμα 2.6 Διαχωρισμός δύο γειτονικών τροχιών στο χώρο των φάσεων.....	37
Σχήμα 4.1 Τα αρχεία στο πρόγραμμα Qt.	47
Σχήμα 4.2 Η δομή των αρχείων train και τεστ.....	50
Σχήμα 4.3 Αποτελέσματα μετά την εκτέλεση του προγράμματος.	55
Σχήμα 4.4 Σύγκριση σφάλματος ταξινόμησης μεταξύ RBF και RBFGE.....	57
Σχήμα 4.5 Box plot σύγκρισης σφάλματος ταξινόμησης.	57
Σχήμα 4.6 Box plot σύγκρισης σφάλματος παλινδρόμησης.	58
Σχήμα 4.7 Σύγκριση σφάλματος παλινδρόμησης μεταξύ RBF και RBFGE.....	58

Πίνακας συντομογραφιών

Συντομογραφία	Αγγλική Ονομασία	Ελληνική Ονομασία
AI	Artificial Intelligence	Τεχνητή Νοημοσύνη
BNF	Backus-Naur Form	Μορφή Backus-Naur
CNNs	Convolutional Neural Networks	Συνελικτικά Νευρωνικά Δίκτυα
DBNs	Deep Belief Networks	Βαθιά Δίκτυα Πίστης
DNNs	Deep Neural Networks	Βαθιά Νευρωνικά Δίκτυα
GANs	Generative Adversarial Networks	Γενετικά Αντίπαλα Δίκτυα
GP	Genetic Programming	Γενετικός Προγραμματισμός
GPT	Generative Pre-trained Transformer	Προεκπαιδευμένος Μετασχηματιστής
GPU	Graphics Processing Unit	Μονάδα Επεξεργασίας Γραφικών
GUI	Graphical User Interface	Γραφικό Περιβάλλον Χρήστη
MLP	Multi-Layer Perceptron	Πολυεπίπεδος Αντιληπτήρας
NNC	Neural Network Classifier	Νευρωνικός Ταξινομητής
PCA	Principal Component Analysis	Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών
PSO	Particle Swarm Optimization	Βελτιστοποίηση με Σμήνη Σωματιδίων
RBF	Radial Basis Function	Ακτινική Συνάρτηση Βάσης
RNNs	Recurrent Neural Networks	Αναδρομικά Νευρωνικά Δίκτυα
SOM	Self-Organizing Map	Αυτοοργανωμένος Χάρτης
SVM	Support Vector Machine	Μηχανή Υποστήριξης Διανυσμάτων
ΓΑ/GA	Genetic Algorithms	Γενετικοί Αλγόριθμοι
ΓΕ/GE	Grammatical Evolution	Γραμματική Εξέλιξη

1. Εισαγωγή

Η τεχνητή νοημοσύνη και η μηχανική μάθηση έχουν εξελιχθεί σε δύο από τους σημαντικότερους τομείς της πληροφορικής, με ευρύ φάσμα εφαρμογών σε πολλές επιστήμες και τεχνολογικές εφαρμογές. Οι τεχνολογίες μηχανικής μάθησης έχουν επικεντρωθεί αισθητά στη σημασία των νευρωνικών δικτύων, με τα δίκτυα Radial Basis Function (RBF) να καταλαμβάνουν πρωταγωνιστικό ρόλο στην επίλυση σύνθετων προβλημάτων ταξινόμησης και παρεμβολής δεδομένων. Τα Δίκτυα Ακτινικής Βάσης (RBF) αποτελούν μια κατηγορία νευρωνικών δικτύων, που είναι ιδιαιτέρως αποτελεσματική σε προβλήματα παλινδρόμησης και ταξινόμησης, εξαιτίας της δυνατότητάς τους να προσαρμόζονται ευέλικτα σε μη γραμμικές σχέσεις μεταξύ δεδομένων (Bishop, 2006). Η δημοφιλία τους προκύπτει από την ικανότητά τους να αναπαριστούν μη γραμμικές σχέσεις μέσω της χρήσης συναρτήσεων ακτινικής βάσης, διαμορφώνοντας δυναμικά τη δομή τους ανάλογα με τα δεδομένα.

Ωστόσο, η εκπαίδευση αυτών των δικτύων αποτελεί συνεχή πρόκληση, καθώς οι παραδοσιακές μέθοδοι συχνά απαιτούν ανθρώπινη παρέμβαση για την επιλογή των βέλτιστων παραμέτρων και αρχιτεκτονικών. Για την αντιμετώπιση αυτής της πρόκλησης, έχουν προταθεί πολλές μέθοδοι, μία εκ των οποίων είναι η χρήση εξελικτικών αλγορίθμων. Οι Γενετικοί Αλγόριθμοι (ΓΑ) και η Γραμματική Εξέλιξη (Grammatical Evolution - GE) είναι δύο τεχνικές που επιτρέπουν την αναζήτηση και βελτιστοποίηση παραμέτρων με βάση αρχές της βιολογικής εξέλιξης (Mitchell, 1998). Εν προκειμένω, η Grammatical Evolution, ένας εξελικτικός αλγόριθμος, προσφέρει μια σημαντική λύση, επιτρέποντας την αυτόματη εκπαίδευση και την εξέλιξη όχι μόνο των παραμέτρων αλλά και της αρχιτεκτονικής των δικτύων RBF, με αποτέλεσμα μοντέλα που προσαρμόζονται ιδανικά στα δεδομένα (Ryan et al., 1998).

Παράλληλα, οι σύγχρονες προσεγγίσεις στη μελέτη των νευρωνικών δικτύων αναγνωρίζουν και τη σημασία της **δυναμικής συμπεριφοράς** ενός μοντέλου, ιδίως όταν αυτό τροφοδοτείται διαδοχικά με δεδομένα ή επιστρέφει την έξοδό του ως επόμενη είσοδο. Για την ανάλυση τέτοιου είδους συμπεριφοράς, συχνά εφαρμόζεται η **μέθοδος Lyapunov**, η οποία αποτιμά την ευαισθησία του συστήματος στις αρχικές συνθήκες μέσω του μέγιστου εκθέτη Lyapunov. Εάν ο εκθέτης είναι θετικός, το σύστημα παρουσιάζει σημάδια χαοτικής συμπεριφοράς, ενώ αν είναι μη θετικός, τείνει σε σταθερότερη λειτουργία. Με αυτόν τον τρόπο, η μέθοδος Lyapunov επιτρέπει την ανίχνευση περιοχών παραμετρικού χώρου του

δικτύου RBF που θα μπορούσαν να εμφανίζουν αστάθειες ή ενισχυμένη προσαρμοστικότητα σε εξαιρετικά μη γραμμικές σχέσεις.

1.1 Σκοπός της εργασίας

Ο κύριος στόχος αυτής της εργασίας είναι η διερεύνηση της εκπαίδευσης δικτύων RBF μέσω της χρήσης της Grammatical Evolution και ο έλεγχος του αποτελέσματος με την μέθοδο του εκθέτη Lyapunov. Η εργασία εστιάζει στο πώς η εν λόγω τεχνική μπορεί να βελτιώσει την απόδοση των δικτύων σε ποικίλα σύνολα δεδομένων, και στον εκτιμώμενο βαθμό γενίκευσης και προσαρμοστικότητας του μοντέλου. Η έρευνα αυτή χρησιμοποιεί δεδομένα από δημόσιες ανοιχτές πηγές για να αξιολογήσει την ικανότητα της Grammatical Evolution να βελτιστοποιεί κρίσιμες παραμέτρους του δικτύου, όπως τον αριθμό των νευρώνων και την ακτίνα των συναρτήσεων ακτινικής βάσης. Επιπρόσθετα, η χρήση της μεθόδου Lyapunov δίνει τη δυνατότητα να εξετάσουμε αν το τελικό RBF δίκτυο επιδεικνύει σημάδια χαοτικής ευαισθησίας στις αρχικές συνθήκες ή αν διατηρεί μια πιο προβλέψιμη συμπεριφορά.

1.2 Σύντομη περιγραφή των βασικών εννοιών

Τα RBF δίκτυα είναι τύποι νευρωνικών δικτύων που χρησιμοποιούν συναρτήσεις ακτινικής βάσης για τη μη γραμμική χαρτογράφηση των εισερχόμενων δεδομένων. Κάθε νευρώνας στην κρυφή στρώση χρησιμοποιεί μια συνάρτηση ακτινικής βάσης για να επεξεργαστεί τα εισερχόμενα σήματα, με την έξοδο του δικτύου να προκύπτει από γραμμικούς συνδυασμούς αυτών των εξόδων (J. Park & Sandberg, 1991a).

Η Grammatical Evolution είναι μια προσέγγιση εξελικτικών υπολογισμών που χρησιμοποιεί κανόνες γραμματικής για την παραγωγή δομών όπως συναρτήσεις ή μοντέλα. Αυτή η μέθοδος διευκολύνει την αυτόματη βελτιστοποίηση τόσο της αρχιτεκτονικής όσο και των παραμέτρων ενός νευρωνικού δικτύου, προσφέροντας μια σημαντική πρόοδο στην έρευνα και την ανάπτυξη αυτών των συστημάτων (Ryan et al., 1998). Σε αυτήν την εργασία, αξιοποιείται η GE για να παραμετροποιήσει δυναμικά το RBF δίκτυο.

Παράλληλα, η μέθοδος Lyapunov προσφέρει μια θεμελιώδη προσέγγιση για την ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς του μοντέλου, επιτρέποντας τον υπολογισμό του μέγιστου

εκθέτη Lyapunov. Μέσα από αυτόν τον δείκτη, μπορούμε να αναγνωρίσουμε εάν το δίκτυο παρουσιάζει ιδιότητες ευαισθησίας στις αρχικές συνθήκες, στοιχείο που μπορεί να επηρεάσει την προσαρμοστικότητα του σε μη γραμμικές καταστάσεις. Συνδυάζοντας τις τρεις κεντρικές ιδέες, δηλαδή τα RBF δίκτυα, τη Grammatical Evolution και τη μέθοδο Lyapunov, επιδιώκεται μια βαθύτερη κατανόηση και μια πιο ολοκληρωμένη βελτιστοποίηση τόσο της απόδοσης όσο και της δυναμικής του μοντέλου.

1.3 Δομή της εργασίας

Η εργασία αυτή είναι δομημένη ως εξής:

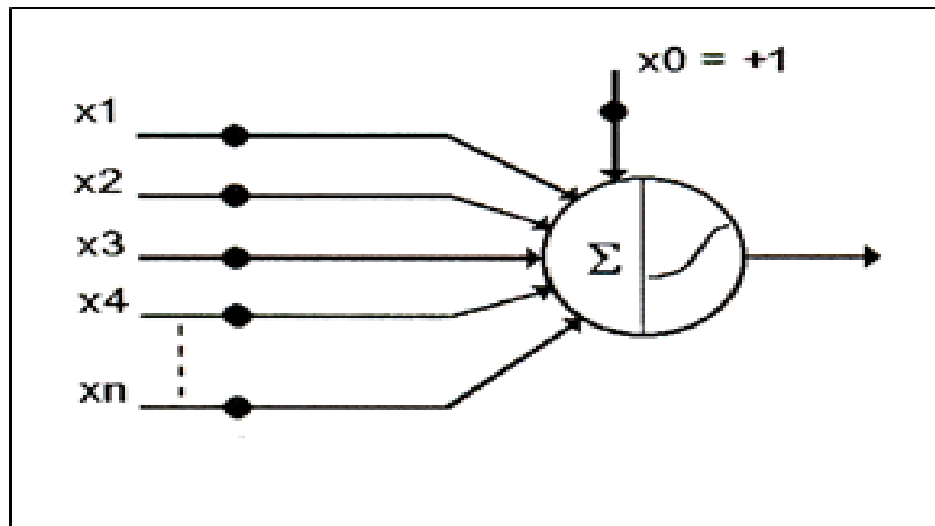
- Στο **Κεφάλαιο 2** γίνεται μια ανασκόπηση του θεωρητικού υπόβαθρου που αφορά τα νευρωνικά δίκτυα, τα RBF δίκτυα, τους γενετικούς αλγορίθμους, τη Grammatical Evolution την Θεωρία του Χάους και την μέθοδο Lyapunov.
- Στο **Κεφάλαιο 3** περιγράφεται η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε, περιλαμβάνοντας την ανάπτυξη του προγράμματος σε C++ και τη χρήση της βιβλιοθήκης NNC. Αναφέρεται επίσης ο τρόπος με τον οποίο ενσωματώθηκε η διαδικασία υπολογισμού του εκθέτη Lyapunov.
- Στο **Κεφάλαιο 4** παρουσιάζονται τα πειραματικά αποτελέσματα, τόσο σε ό,τι αφορά την απόδοση του RBF δικτύου που προκύπτει μέσα από την Grammatical Evolution, όσο και σε σχέση με την αξιολόγηση της χαοτικής (ή μη) συμπεριφοράς του μοντέλου, μέσω της μεθόδου Lyapunov.
- Στο **Κεφάλαιο 5** συνοψίζονται τα κύρια ευρήματα της εργασίας και παρέχονται προτάσεις για μελλοντική έρευνα, όπως και συζήτηση γύρω από την επέκταση της μεθόδου Lyapunov σε άλλα δυναμικά χαρακτηριστικά ή σε διαφορετικούς τύπους νευρωνικών δικτύων.

2. Θεωρητικό Υπόβαθρο

2.1 Νευρωνικά Δίκτυα

Η ανάπτυξη των νευρωνικών δικτύων ξεκίνησε στα μέσα του 20ού αιώνα, όταν οι ερευνητές προσπάθησαν να προσομοιώσουν τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί ο ανθρώπινος εγκέφαλος. Το 1943, οι Warren McCulloch και Walter Pitts παρουσίασαν το πρώτο μοντέλο τεχνητού νευρώνα, το οποίο αποτέλεσε τη βάση για τη μετέπειτα ανάπτυξη των νευρωνικών δικτύων (McCulloch & Pitts, 1943).

Αυτό το μοντέλο περιέγραφε έναν απλό νευρώνα που λειτουργούσε ως δυαδικός διακόπτης όπως φαίνεται και στο παρακάτω Σχήμα 2.1, λαμβάνοντας πολλαπλές εισόδους και παράγοντας μια έξοδο βάσει ενός κατωφλίου.



Σχήμα 2.1 Σχηματική αναπαράσταση ενός TN με μεταβλητά βάρη εισόδου ($w_1, w_2, \dots, w_n$) και μια σταθερή είσοδο (κατώφλι)

Η ιδέα αυτή εξελίχθηκε περαιτέρω κατά τη δεκαετία του 1950, με τον Frank Rosenblatt να προτείνει το perceptron το 1958, ένα από τα πρώτα είδη νευρωνικών δικτύων που μπορούσε να μάθει μέσω της προσαρμογής των βαρών του (Rosenblatt, 1958). Το perceptron ήταν ικανό να εκτελεί απλές ταξινομήσεις και θεωρήθηκε ως σημαντικό βήμα προς τη δημιουργία μηχανών που μπορούσαν να "μάθουν" από δεδομένα.

Κατά τις δεκαετίες του 1960 και 1970, η ανάπτυξη των νευρωνικών δικτύων επιβραδύνθηκε λόγω των περιορισμών των τότε διαθέσιμων υπολογιστικών πόρων και της κριτικής από ερευνητές όπως οι Marvin Minsky και Seymour Papert. Στο βιβλίο τους "Perceptrons"

το 1969, έδειξαν τα περιορισμένα δυνατά σημεία των perceptrons, ειδικά στην αντιμετώπιση μη γραμμικών προβλημάτων όπως το πρόβλημα XOR (Minsky & Papert, 1969). Αυτό οδήγησε σε μείωση του ενδιαφέροντος και της χρηματοδότησης στον τομέα, μια περίοδο γνωστή ως "Χειμώνας της Τεχνητής Νοημοσύνης".

Παρά τις δυσκολίες, η έρευνα στα νευρωνικά δίκτυα αναζωογονήθηκε τη δεκαετία του 1980. Οι Rumelhart, Hinton και Williams το 1986 παρουσίασαν τον αλγόριθμο της οπισθοδιάδοσης (backpropagation), ο οποίος επέτρεψε την εκπαίδευση πολυεπίπεδων νευρωνικών δικτύων (Rumelhart et al., 1986). Αυτός ο αλγόριθμος επέτρεψε στα νευρωνικά δίκτυα να μάθουν πολύπλοκες μη γραμμικές σχέσεις, ανοίγοντας τον δρόμο για την ανάπτυξη πιο προηγμένων αρχιτεκτονικών.

Η δεκαετία του 1990 και οι αρχές του 21ου αιώνα σηματοδότησαν την εμφάνιση νέων τύπων νευρωνικών δικτύων. Τα Δίκτυα Ακτινικής Βάσης (RBF), που παρουσιάστηκαν από τους Broomhead και Lowe το 1988, αποδείχθηκαν ιδιαίτερα χρήσιμα για προβλήματα ταξινόμησης και παλινδρόμησης λόγω της ικανότητάς τους να προσαρμόζονται σε μη γραμμικές σχέσεις μεταξύ των δεδομένων (Lowe & Broomhead, 1988). Τα συνελκτικά νευρωνικά δίκτυα (CNNs), που εισήχθησαν από τον Yann LeCun και τους συνεργάτες του, χρησιμοποιήθηκαν επιτυχώς στην αναγνώριση εικόνων και χαρακτήρων, βελτιώνοντας σημαντικά την απόδοση σε αυτά τα πεδία (LeCun et al., 2015).

Παράλληλα, τα αναδρομικά νευρωνικά δίκτυα (RNNs) αναπτύχθηκαν για να χειρίζονται δεδομένα αλληλουχίας, όπως το κείμενο και η ομιλία. Οι Hochreiter και Schmidhuber το 1997 παρουσίασαν την αρχιτεκτονική Long Short-Term Memory (LSTM), αντιμετωπίζοντας το πρόβλημα της εξαφάνισης ή έκρηξης των κλίσεων και επιτρέποντας στα RNNs να μάθουν μακροπρόθεσμες εξαρτήσεις (Hochreiter & Schmidhuber, 1997).

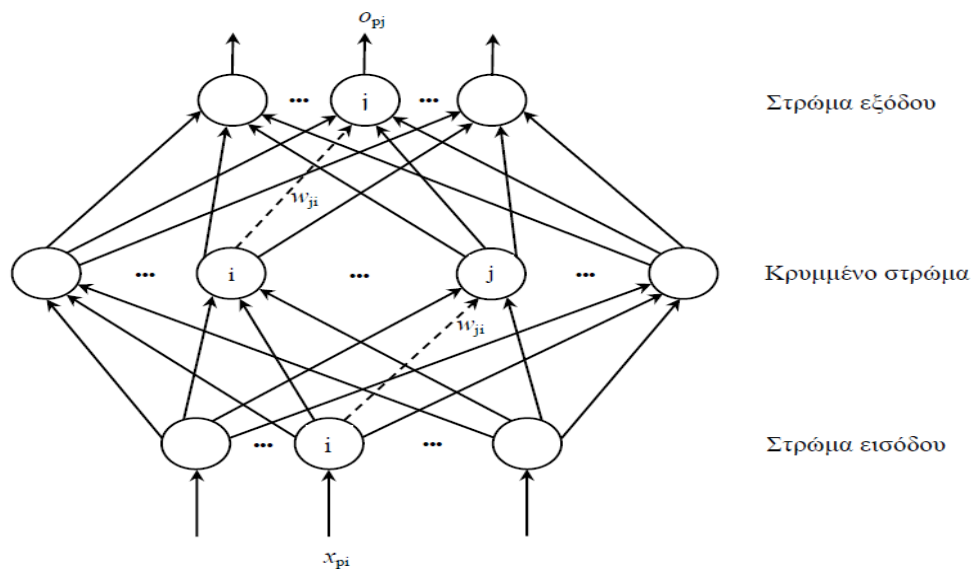
Τα νευρωνικά δίκτυα αποτελούν ένα από τα βασικότερα εργαλεία στη μηχανική μάθηση και την τεχνητή νοημοσύνη, εμπνευσμένα από τη δομή και τη λειτουργία του ανθρώπινου εγκεφάλου. Ένας τεχνητός νευρώνας ή perceptron λαμβάνει ένα ή περισσότερα εισερχόμενα σήματα, τα οποία πολλαπλασιάζονται με αντίστοιχα βάρη, και στη συνέχεια εφαρμόζεται μια συνάρτηση ενεργοποίησης για να παραχθεί η έξοδος (Rosenblatt, 1958).

Κατά την τελευταία δεκαετία, η πρόοδος στην υπολογιστική ισχύ και η διαθεσιμότητα μεγάλων συνόλων δεδομένων οδήγησαν στην άνθιση της "βαθιάς μάθησης" (deep learning). Τα γενετικά αντίπαλα δίκτυα (GANs), που εισήχθησαν από τον Goodfellow και τους συνεργάτες του το 2014, επέτρεψαν τη δημιουργία ρεαλιστικών συνθετικών δεδομένων και

εικόνων (Goodfellow, 2016a). Επιπλέον, το μοντέλο Transformer, που παρουσιάστηκε από τους Vaswani et al. το 2017, προκάλεσε επανάσταση στην επεξεργασία φυσικής γλώσσας, οδηγώντας στην ανάπτυξη προηγμένων γλωσσικών μοντέλων όπως το GPT (Vaswani, 2017).

Σήμερα, τα νευρωνικά δίκτυα εφαρμόζονται σε ένα ευρύ φάσμα τομέων, συμπεριλαμβανομένης της αναγνώρισης προτύπων, της επεξεργασίας φυσικής γλώσσας, της αυτόνομης οδήγησης, της βιοϊατρικής και πολλών άλλων. Η συνεχής εξέλιξη των υπολογιστικών πόρων, όπως οι GPU και οι εξειδικευμένοι επιταχυντές AI, καθώς και η ανάπτυξη νέων αλγορίθμων εκπαίδευσης, επιτρέπουν την περαιτέρω βελτίωση της απόδοσης και των δυνατοτήτων των νευρωνικών δικτύων.

2.1.1 Βασική Αρχιτεκτονική Νευρωνικών Δικτύων



Σχήμα 2.2 Προσωτροφοδοτούμενο ΤΝΔ τριών στρωμάτων νευρώνων.

Τα νευρωνικά δίκτυα όπως φαίνεται και στο παραπάνω Σχήμα 2.2 συνήθως οργανώνονται σε στρώματα:

- **Επίπεδο Εισόδου:** Λαμβάνει τα αρχικά δεδομένα εισόδου.
- **Κρυφά Επίπεδα:** Επεξεργάζονται τα δεδομένα μέσω των νευρώνων και των συνδέσεών τους.
- **Επίπεδο Εξόδου:** Παράγει την τελική απόκριση του δικτύου.

Η συνάρτηση ενεργοποίησης μπορεί να είναι γραμμική ή μη γραμμική, όπως η sigmoid, η ReLU ή η tanh, επιτρέποντας στο δίκτυο να μάθει πολύπλοκες μη γραμμικές σχέσεις (Haykin, 1998).

2.1.2 Είδη Νευρωνικών Δικτύων

Feedforward Νευρωνικά Δίκτυα: Η ροή των δεδομένων γίνεται από την είσοδο προς την έξοδο χωρίς αναδρομικές συνδέσεις. Είναι τα πιο απλά και συνηθισμένα δίκτυα (Haykin, 1998).

Αναδρομικά Νευρωνικά Δίκτυα (RNNs): Περιλαμβάνουν αναδρομικές συνδέσεις που επιτρέπουν τη μνήμη προηγούμενων καταστάσεων, καθιστώντας τα κατάλληλα για αλληλουχίες δεδομένων, όπως το κείμενο και η ομιλία (Lipton, 2015).

Συνελικτικά Νευρωνικά Δίκτυα (CNNs): Χρησιμοποιούνται κυρίως στην επεξεργασία εικόνας και βίντεο, εκμεταλλευόμενα την τοπική συσχέτιση των δεδομένων μέσω συνελίξεων (Goodfellow et al., 2016).

2.1.3 Πρόσφατες Εξελίξεις στη Βαθιά Μάθηση

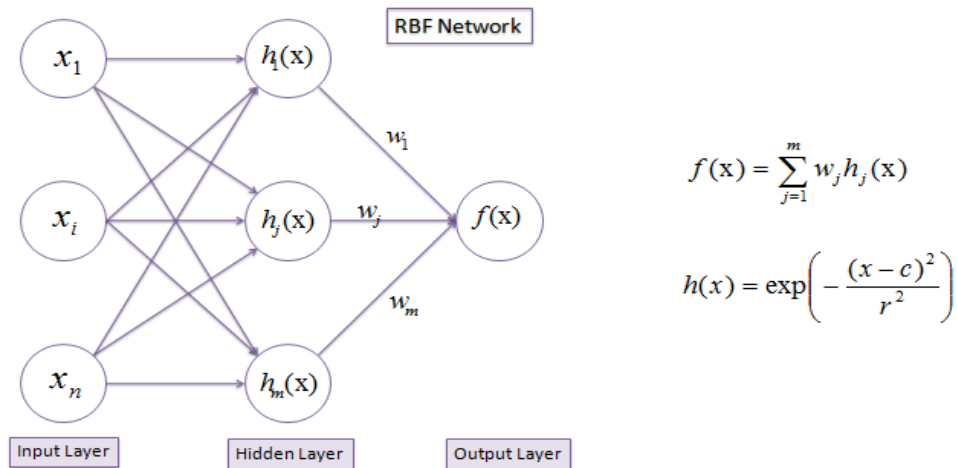
Η **Βαθιά Μάθηση (Deep Learning)** έχει οδηγήσει σε σημαντικές προόδους στην τεχνητή νοημοσύνη, επιτρέποντας την εκπαίδευση πολυεπίπεδων νευρωνικών δικτύων με εκατομμύρια παραμέτρους. Αυτές οι αρχιτεκτονικές έχουν επιτύχει εξαιρετικά αποτελέσματα σε τομείς όπως η αναγνώριση εικόνας, η επεξεργασία φυσικής γλώσσας και η αυτόνομη οδήγηση (Goodfellow, 2016b).

Ωστόσο, η εκπαίδευση τέτοιων δικτύων παρουσιάζει προκλήσεις, όπως η ανάγκη για μεγάλα σύνολα δεδομένων, η υπερπροσαρμογή και η υψηλή υπολογιστική δαπάνη.

2.2 Δίκτυα Radial Basis Function – RBF

Τα δίκτυα RBF χαρακτηρίζονται από τη χρήση συναρτήσεων ακτινικής βάσης ως ενεργοποιητικών συναρτήσεων στους κρυφούς νευρώνες, παρέχοντας μια ισχυρή μέθοδο για την αναπαράσταση σύνθετων μη γραμμικών σχέσεων. Η δομή τους, τα καθιστά ιδανικά για προβλήματα όπως η ταξινόμηση και η παρεμβολή δεδομένων, χάρη στην ικανότητά τους να προσαρμόζονται εύκολα σε διάφορα δεδομένα (Lowe & Broomhead, 1988).

Η αρχιτεκτονική ενός RBF δικτύου όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.3, περιλαμβάνει κρυφούς νευρώνες που εφαρμόζουν τη συνάρτηση Gauss ή άλλες πολυωνυμικές συναρτήσεις στις εισόδους τους, με την εκπαίδευση να επικεντρώνεται στον καθορισμό των κέντρων αυτών των συναρτήσεων και στη σταθεροποίηση των βαρών εξόδου (J. Park & Sandberg, 1991b).



Σχήμα 2.3 Σχηματική αναπαράσταση δικτύου RBF.

Η διαδικασία εκπαίδευσης των RBF δικτύων συχνά διαχωρίζεται σε δύο φάσεις: αρχικά τον καθορισμό των κέντρων των συναρτήσεων ακτινικής βάσης και εν συνεχεία την εκπαίδευση των βαρών εξόδου μέσω τεχνικών όπως οι μέθοδοι ελαχίστων τετραγώνων (S. Chen et al., 1991). Τα RBF δίκτυα είναι δημοφιλή λόγω της απλότητάς τους και της δυνατότητας να προσαρμόζονται σε διαφορετικά είδη δεδομένων. Έχουν βρει εφαρμογές σε τομείς όπως η αναγνώριση προτύπων, η ανάλυση δεδομένων, και η πρόβλεψη χρονοσειρών, ενώ η ευελιξία τους τα καθιστά χρήσιμα και σε προβλήματα βελτιστοποίησης.

2.2.1 Δομή και Λειτουργία

Συναρτήσεις Βάσης Ακτινικής Μορφής

Οι συναρτήσεις βάσης ακτινικής μορφής είναι συναρτήσεις των οποίων η τιμή εξαρτάται μόνο από την απόσταση από ένα κέντρο. Τυπικά, μια συνάρτηση $\phi(r)$ είναι ακτινική αν:

$$\phi(r) = \phi(\|x - c\|)$$

όπου x είναι το σημείο εισόδου, c είναι το κέντρο και $r = \|x - c\|$ είναι η Ευκλείδεια απόσταση (Buhmann, 2003). Οι πιο κοινές ακτινικές συναρτήσεις βάσης περιλαμβάνουν:

- **Gaussian:** $\varphi(r) = e^{-\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2}$
- **Multiquadric:** $\varphi(r) = \sqrt{r^2 + \sigma^2}$
- **Inverse Multiquadric:** $\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \sigma^2}}$

Η επιλογή της κατάλληλης συνάρτησης βάσης επηρεάζει την απόδοση του δικτύου.

Η πιο κοινή ακτινική συνάρτηση βάσης είναι η Gaussian:

$$\varphi_i = \exp\left(-\frac{\|x - c_i\|}{2\sigma_i^2}\right)$$

όπου σ_i είναι η ακτίνα που καθορίζει το εύρος επιρροής του νευρώνα (Buhmann, 2003).

Ικανότητα Προσέγγισης

Τα RBF δίκτυα είναι γνωστά για την ικανότητά τους να προσεγγίζουν οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση με αυθαίρετη ακρίβεια, δεδομένου ενός επαρκούς αριθμού κρυφών νευρώνων (Buhmann, 2003). Αυτή η ιδιότητα τους καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμα σε πληθώρα εφαρμογών, από την αυτόματη αναγνώριση προτύπων μέχρι την πρόβλεψη χρηματιστηριακών δεδομένων. Η θεμελιώδης αρχή που καθοδηγεί τη λειτουργία των RBF δικτύων είναι το θεώρημα της καθολικής προσέγγισης, το οποίο αποδείχθηκε από τους Poggio και Girosi το 1990 (Poggio & Girosi, 1990). Σύμφωνα με αυτό το θεώρημα, ένα RBF δίκτυο μπορεί να προσεγγίσει οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση σε ένα κλειστό διάστημα όταν διαθέτει αρκετούς κρυφούς νευρώνες.

Η προσέγγιση των συναρτήσεων από τα RBF δίκτυα γίνεται μέσω της διαδικασίας εκμάθησης, όπου η επιλογή της βέλτιστης αριθμητικής συμπεριφοράς των νευρώνων αποτελεί κρίσιμο παράγοντα. Η απόδοση και η ακρίβεια του δικτύου εξαρτάται άμεσα από τον αριθμό των κρυφών νευρώνων: όσο μεγαλύτερος ο αριθμός των νευρώνων, τόσο καλύτερη η προσομοίωση της συνάρτησης. Παρόλα αυτά, ένας μεγάλος αριθμός νευρώνων μπορεί να οδηγήσει σε υπερβολική προσαρμογή (overfitting), ενώ ένας πολύ μικρός αριθμός μπορεί να μην είναι αρκετός για την επιθυμητή προσέγγιση.

Δομή των RBF Δικτύων

Τα Δίκτυα RBF αποτελούνται από τρία επίπεδα:

Επίπεδο Εισόδου: Στο επίπεδο εισόδου, τα δεδομένα παρέχονται στο δίκτυο χωρίς καμία μορφή επεξεργασίας. Κάθε κόμβος σε αυτό το επίπεδο αντιστοιχεί σε μία διάσταση του διανύσματος εισόδου, καθρεφτίζοντας την απευθείας σχέση μεταξύ της εισόδου και του

δικτύου. Αυτή η διάταξη εξασφαλίζει ότι όλα τα χαρακτηριστικά του δεδομένου εισάγονται αμετάβλητα στο δίκτυο, και κατανέμονται απευθείας στα κρυφά επίπεδα για περαιτέρω επεξεργασία (Bishop, 1995).

Κρυφό Επίπεδο: Το κρυφό επίπεδο αποτελεί την καρδιά του RBF δικτύου και έχει την κύρια ευθύνη για την εξαγωγή χαρακτηριστικών από τα εισαγόμενα δεδομένα. Κάθε νευρώνας σε αυτό το επίπεδο λειτουργεί ως ένας ανιχνευτής προτύπων, υπολογίζοντας την ευκλείδεια απόσταση μεταξύ της εισόδου και ενός συγκεκριμένου κέντρου που ορίζεται για κάθε νευρώνα. Στη συνέχεια, εφαρμόζεται η ακτινική συνάρτηση βάσης (radial basis function - RBF), συνήθως μια γκαουσιανή συνάρτηση, για να παράγει μια τοπική απόκριση. Αυτή η απόκριση ενισχύεται όταν η είσοδος είναι κοντά στο κέντρο του νευρώνα και μειώνεται όταν απομακρύνεται (Lowe, 1989).

Επίπεδο Εξόδου: Το επίπεδο εξόδου λειτουργεί ως ο τελικός ρυθμιστής των αποκρίσεων που παράγονται από το κρυφό επίπεδο. Χρησιμοποιείται ένας γραμμικός συνδυασμός των εξόδων των κρυφών νευρώνων για να παραχθεί το τελικό αποτέλεσμα του δικτύου:

$$y(x) = \sum_{i=1}^N w_i * \varphi(||x - c_i||) + b$$

όπου w_i αντιπροσωπεύουν τα βάρη, b είναι το bias, και N είναι ο αριθμός των κρυφών νευρώνων. Αυτή η σχέση καθορίζει πώς τα βάρη και τα κέντρα των νευρώνων συνεισφέρουν στην τελική πρόβλεψη του δικτύου, με τα βάρη να ρυθμίζουν τη σημασία κάθε νευρώνα στη συνολική απόδοση (Ott, 1996).

Προσδιορισμός των Κέντρων

Ο προσδιορισμός των κέντρων στα RBF δίκτυα είναι κρίσιμης σημασίας, καθώς τα κέντρα αυτά καθορίζουν την ικανότητα του δικτύου να ανταποκρίνεται και να προσεγγίζει τις συναρτήσεις εισόδου. Η επιλογή των κέντρων μπορεί να γίνει μέσω διαφόρων τεχνικών, ταξινομημένων σε μη εποπτευόμενες και εποπτευόμενες μεθόδους.

Μη Εποπτευόμενες Μέθοδοι:

- **K-means Algorithm:** Ο αλγόριθμος k-means είναι μια από τις πιο δημοφιλείς μεθόδους για τον καθορισμό των κέντρων στα RBF δίκτυα. Αυτός ο αλγόριθμος διαχωρίζει το σύνολο των δεδομένων σε k ομάδες, επιλέγοντας το κέντρο κάθε ομάδας ως ένα από τα κέντρα του δικτύου. Η διαδικασία είναι σχετικά απλή και απο-

τελεσματική, αλλά μπορεί να επηρεαστεί από την αρχική επιλογή των κέντρων και να εμφανίσει τοπικά ελάχιστα (Macqueen, 1967).

- **Αυτοοργανούμενη Χαρτογράφηση (SOM):** Η SOM είναι μια τεχνική που χρησιμοποιεί νευρωνικά δίκτυα για να παράγει μια χαρτογραφημένη (τοπολογική) αναπαράσταση των δεδομένων, προσδιορίζοντας τα κέντρα βάσει της φυσικής ομαδοποίησης των δεδομένων. Αυτή η μέθοδος είναι χρήσιμη για την αναγνώριση κρυμμένων μοτίβων και τοπολογικών σχηματισμών στα δεδομένα (Kohonen, 1990).
- **Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών (PCA):** Η PCA είναι μια στατιστική τεχνική που χρησιμοποιείται για την εξαγωγή των σημαντικότερων χαρακτηριστικών των δεδομένων μέσω της μείωσης των διαστάσεων. Αν και δεν είναι άμεσα μέθοδος προσδιορισμού κέντρων, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθορίσει ποια χαρακτηριστικά πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά την επιλογή των κέντρων (Jolliffe, 2002).

Επιβλεπόμενες Μέθοδοι:

- **Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων:** Η μέθοδος αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στον καθορισμό των κέντρων σε επιβλεπόμενα πλαίσια. Χρησιμοποιεί τα δεδομένα εκπαίδευσης για να προσδιορίσει τα κέντρα που ελαχιστοποιούν το σφάλμα πρόβλεψης του δικτύου, βελτιστοποιώντας την ακρίβεια και τη σύγκλιση του μοντέλου (S. Chen et al., 1991). Αυτή η μέθοδος βελτιώνει την ομαλότητα της μάθησης και μειώνει την ευαισθησία σε ανωμαλίες στα δεδομένα.

Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου εξαρτάται από τη φύση των δεδομένων και τους στόχους της εφαρμογής. Κάθε μέθοδος προσφέρει μοναδικά πλεονεκτήματα και είναι κατάλληλη για διαφορετικά σενάρια χρήσης, από απλή ομαδοποίηση μέχρι περίπλοκες προβλέψεις.

Προσαρμογή των Πλατών στα RBF Δίκτυα

Στα νευρωνικά δίκτυα τύπου Radial Basis Function (RBF), η παράμετρος πλάτους σ καθορίζει το εύρος δράσης της ακτινικής συνάρτησης βάσης. Αυτή η συνάρτηση, συνήθως μια γκαουσιανή καμπύλη, είναι κρίσιμη για την αποτελεσματικότητα της εκμάθησης και της γενίκευσης του μοντέλου.

Σημασία του σ : Το πλάτος σ επηρεάζει άμεσα την ευαισθησία των νευρώνων στις αλλαγές των εισόδων. Ένα μικρό σ σημαίνει ότι η απόκριση του νευρώνα θα είναι σημαντική μόνο κοντά στο κέντρο του, ενώ ένα μεγάλο σ επιτρέπει στον νευρώνα να ανταποκρίνεται σε ευρύτερη περιοχή γύρω από το κέντρο του.

Ενιαία έναντι Ατομικής Προσαρμογής: Η παράμετρος σ μπορεί να είναι ίδια για όλους τους νευρώνες σε ένα δίκτυο ή να προσαρμόζεται ξεχωριστά για κάθε νευρώνα. Η ενιαία προσαρμογή είναι απλούστερη και λιγότερο υπολογιστικά απαιτητική, αλλά μπορεί να μην είναι ιδανική για δεδομένα με μεγάλες διακυμάνσεις στην κατανομή των χαρακτηριστικών. Από την άλλη πλευρά, η ατομική προσαρμογή του σ για κάθε νευρώνα επιτρέπει την ανταπόκριση σε πιο συγκεκριμένες περιοχές του χώρου εισόδου, ενισχύοντας την απόδοση του δικτύου σε πολύπλοκα προβλήματα.

Προσδιορισμός του σ : Το πλάτος μπορεί να προσδιοριστεί με βάση τη στατιστική κατανομή των δεδομένων, όπως η μέση απόσταση μεταξύ των κέντρων ή η διακύμανση των εισόδων. Επιπλέον, μπορεί να εφαρμοστούν μέθοδοι όπως η διασταυρούμενη επικύρωση για την εξαγωγή της βέλτιστης τιμής του σ , εξασφαλίζοντας την καλύτερη δυνατή απόδοση του μοντέλου.

Επιπτώσεις στην Απόδοση: Η επιλογή του σ έχει άμεσο αντίκτυπο στην αποτελεσματικότητα της εκπαίδευσης και στην ικανότητα γενίκευσης του δικτύου. Ένα οπтимιστικά προσαρμοσμένο σ μπορεί να ελαχιστοποιήσει το σφάλμα εκπαίδευσης και να αυξήσει την ικανότητα του δικτύου να ανταποκρίνεται σε νέα δεδομένα, αποφεύγοντας τόσο την υπερπροσαρμογή όσο και την υποπροσαρμογή.

Εκπαίδευση των Βαρών

Η εκπαίδευση των βαρών στο επίπεδο εξόδου ενός νευρωνικού δικτύου είναι κρίσιμη για την ορθή λειτουργία και την απόδοση του δικτύου. Οι επικρατέστερες μέθοδοι για τον υπολογισμό αυτών των βαρών περιλαμβάνουν:

Ψευδοαντίστροφη Μήτρα: Αυτή η τεχνική αποτελεί μία ιδιαίτερα αποτελεσματική μέθοδο για την εύρεση των βαρών που μεγιστοποιούν την απόδοση του δικτύου. Η ψευδοαντίστροφη μήτρα παρέχει μια βέλτιστη λύση με την ελάχιστη νόρμα, δηλαδή, ελαχιστοποιεί το μέγεθος των βαρών, καθιστώντας το μοντέλο λιγότερο επιρρεπές σε ακραίες τιμές των δεδομένων (Golub & Van Loan, 2013).

Αλγόριθμος Ελαχίστων Τετραγώνων (Least Squares Algorithm): Αυτή η μέθοδος ελαχιστοποιεί το σφάλμα παλινδρόμησης μεταξύ των προβλεπόμενων και των πραγματικών τιμών των εξόδων, προσφέροντας μια αποτελεσματική λύση ιδιαίτερα για περιπτώσεις όπου τα δεδομένα είναι υπερβολικά ή ελλειμματικά (Hagan & Menhaj, 1994). Η μέθοδος είναι χρήσιμη για την προσαρμογή του δικτύου στα δεδομένα χωρίς υπερβολική πολυπλοκότητα.

Regularization Techniques: Η εφαρμογή τεχνικών κανονικοποίησης, όπως η Ridge Regression, βοηθά στην αποφυγή της υπερπροσαρμογής, βελτιώνοντας τη γενίκευση του μοντέλου σε νέα δεδομένα. Αυτές οι τεχνικές επιβάλλουν ένα κόστος στην αύξηση των τιμών των βαρών, ενθαρρύνοντας το μοντέλο να διατηρήσει πιο μικρά και διαχειρίσιμα βάρη, το οποίο συμβάλλει στην αποφυγή της υπερπροσαρμογής στα δεδομένα εκπαίδευσης (Tikhonov & Arsenin, 1977).

2.2.2 Βασική μέθοδος υλοποίησης και προβλήματα

Η τυπική διαδικασία εκπαίδευσης δικτύων RBF περιλαμβάνει δύο βασικά βήματα. Στο πρώτο βήμα τα κέντρα και οι διασπορές υπολογίζονται μέσω της διαδικασίας του αλγορίθμου K-means η οποία περιγράφεται παρακάτω:

Ο αλγόριθμος ο οποίος αφορά τη διαδικασία K-means, λειτουργεί ως εξής:

1. Αρχικοποίηση:

- (α) **Ορίστε** k τον αριθμό των κέντρων.
- (β) **Διαβάστε** τα μοτίβα του σετ εκπαίδευσης x_i , $i = 1, \dots, M$.
- (γ) **Ορίστε** $S_j = \emptyset$, για $j = 1, \dots, k$.

2. Για κάθε πρότυπο x_i , $i = 1, \dots, M$ κάντε:

- (α) **Ορίστε** $j^* = \operatorname{argmin}_{m=1}^k \{D(x_i, c_m)\}$ όπου η μεταβλητή j^* υποδηλώνει το κοντινότερο κέντρο από το x_i .
- (β) **Ορίστε** $S_{j^*} = S_{j^*} \cup \{x_i\}$.

3. Τέλος για

4. Για κάθε κέντρο c_j , $j=1..k$ κάντε:

- (α) **Υπολογίστε και σημειώστε** ως M_j τον αριθμό των δειγμάτων στο S_j .
- (β) **Ενημερώστε το κέντρο** c_j ως:

$$c_j = \frac{1}{M} \sum_{x_i \in S_j} x_i$$

5. Τέλος για

6. **Εάν τα κέντρα** c_j **δεν άλλαξαν τότε τερματίστε, διαφορετικά πηγαίνετε στο βήμα 2.**

Στο δεύτερο βήμα, πρέπει να επιλυθεί ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων για να υπολογιστούν οι τιμές για τα βάρη w_i , όπου $i = 1, \dots, k$ ως εξής:

1. **Ορίστε** $W = w_{kj}$ τον πίνακα των k βαρών, $\Phi = \phi_j(x_i)$, και $T = \{t_i\}$, όπου $t_i, i = 1, \dots, M_i$ είναι οι αναμενόμενες τιμές για τα μοτίβα εισόδου x_i .

2. **Επιλύστε**

$$\Phi^T(T - \Phi W^T) = 0$$

$$W^T = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T T = \Phi^+ T$$

Ο πίνακας $\Phi^+ = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T$ αποτελεί τον ψευδοαντίστροφο του Φ , με $\Phi^+ \Phi = I$.

Αν και η προηγούμενη διαδικασία είναι ικανή να εκτιμήσει το βέλτιστο σύνολο παραμέτρων σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα, εντούτοις, έχει μια σειρά προβλημάτων όσον αφορά την αριθμητική σταθερότητα, τον ακριβή προσδιορισμό του αριθμού των βαρών, τα προβλήματα υπερβολικής προσαρμογής κ.λπ. Για τον υπολογισμό αυτών των παραμέτρων με την κλασική μέθοδο υπολογισμού, είναι απαραίτητο να λυθεί ένα σύστημα εξισώσεων, αλλά σε πολλές περιπτώσεις, η λύση ενός τέτοιου συστήματος οδηγεί σε αριθμητικά προβλήματα όπως εμφανίζονται οι ορίζοντες με τιμή αρκετά κοντά στο μηδέν.

2.2.3 Εφαρμογές των RBF Δικτύων

Τα νευρωνικά δίκτυα Radial Basis Function έχουν αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμα σε μια ποικιλία τομέων, παρέχοντας λύσεις σε πολύπλοκα προβλήματα με την υψηλή τους απόδοση σε εφαρμογές ταξινόμησης και πρόβλεψης:

Αναγνώριση Προτύπων: Τα RBF δίκτυα είναι ιδιαίτερα δημοφιλή στην αναγνώριση χειρόγραφων χαρακτήρων, καθώς παρέχουν ικανότητες ακριβούς ταξινόμησης σε πολυδιάστατα δεδομένα, με τη χρήση τους να επεκτείνεται επίσης στην αναγνώριση φωνής και την επεξεργασία φυσικής γλώσσας (Renals et al., 1994; Schwenk & Milgram, 1995).

Πρόβλεψη Χρονικών Σειρών: Στον τομέα της οικονομίας, τα RBF δίκτυα χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη χρηματιστηριακών τιμών και συναλλαγματικών ισοτιμιών, ενώ στη μετεωρολογία βοηθούν στην πρόγνωση καιρικών φαινομένων, χάρη στην ικανότητά τους

να μοντελοποιούν περίπλοκες δυναμικές διαδικασίες (Hsieh & Tang, 1998; Zhang & Berardi, 2001).

Έλεγχος Συστημάτων και Ρομποτική: Στη ρομποτική, τα RBF δίκτυα εφαρμόζονται για τον προσαρμοστικό έλεγχο και τη μοντελοποίηση δυναμικών συστημάτων, προσφέροντας σημαντικές δυνατότητες για τον σχεδιασμό ελεγκτών που αντιμετωπίζουν μη γραμμικότητες και αβεβαιότητες (Narendra & Parthasarathy, 1990).

Ιατρική Διάγνωση: Στον τομέα της ιατρικής, τα RBF δίκτυα είναι ευρέως εφαρμοζόμενα για την ανάλυση ιατρικών εικόνων, όπως στην ανίχνευση όγκων σε ακτινογραφίες, καθώς και στην ταξινόμηση βιοϊατρικών σημάτων, προσφέροντας ακριβείς διαγνώσεις και βελτιωμένη ικανότητα ερμηνείας δεδομένων (Lisboa, 2002).

2.2.4 Σύγκριση με Άλλα Νευρωνικά Δίκτυα

RBF vs. MLP (Multi-Layer Perceptrons)

Τα MLP δίκτυα είναι πολυεπίπεδα περσεπτρόν, που χρησιμοποιούν μη γραμμικές ενεργοποιητικές συναρτήσεις σε κάθε κόμβο και εκπαιδεύονται μέσω του αλγορίθμου backpropagation. Αυτό τους επιτρέπει να μοντελοποιούν σύνθετες συναρτήσεις με υψηλή ακρίβεια, αλλά η εκπαίδευσή τους είναι συχνά χρονοβόρα και επιρρεπής σε εγκλωβισμούς σε τοπικά ελάχιστα. Σε αντίθεση, τα RBF δίκτυα προσφέρουν ταχύτερη εκπαίδευση λόγω της γραμμικής φύσης του επιπέδου εξόδου τους και της τοπικής τους απόκρισης, η οποία επιτρέπει την εστίαση σε συγκεκριμένες περιοχές του χώρου εισόδου αντί για μια παγκόσμια αναπαράσταση, όπως στα MLP (Hornik et al., 1989).

RBF vs. SVM (Support Vector Machines)

Τα SVM είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικά σε ταξινομήσεις και προβλέψεις, χρησιμοποιώντας ακτινικές συναρτήσεις βάσης (RBF) ως πυρήνες για να μετατρέψουν τον χώρο των χαρακτηριστικών σε έναν χώρο υψηλότερης διάστασης, όπου τα δεδομένα μπορεί να διαχωριστούν πιο εύκολα. Αντίθετα με τα SVM που είναι μη παραμετρικά μοντέλα και επικεντρώνονται στην εύρεση ενός υπερεπιπέδου που διαχωρίζει τα δεδομένα, τα RBF δίκτυα είναι παραμετρικά και εκπαιδεύονται για να προσεγγίσουν ολόκληρη την κατανομή των δεδομένων, προσφέροντας πιο ευέλικτες δυνατότητες σε εφαρμογές όπου η γενίκευση σε νέα δεδομένα είναι κρίσιμη (Vapnik, 1998).

RBF vs. CNNs (Convolutional Neural Networks)

Τα CNNs διαθέτουν μια σύνθετη αρχιτεκτονική με συνελκτικά επίπεδα που τους επιτρέπουν να επεξεργάζονται δεδομένα με ιδιαίτερα ισχυρή τοπική συσχέτιση, όπως εικόνες ή βίντεο, με μεγάλη επιτυχία. Αντίθετα, τα RBF δίκτυα είναι πιο απλά σε δομή και αποδίδουν καλύτερα σε εφαρμογές όπου η γεωμετρική διανεμητικότητα των δεδομένων στο χώρο των εισόδων είναι πιο σημαντική (Xie et al., 2011).

RBF vs. RNNs (Recurrent Neural Networks)

Τα RNNs σχεδιάστηκαν για να χειρίζονται σειριακά δεδομένα και χρονικές σειρές, ικανά να διατηρούν μια κατάσταση (ή μνήμη) των προηγούμενων εισόδων στη διαδικασία υπολογισμού της τρέχουσας εξόδου. Τα RBF δίκτυα δεν έχουν αυτή τη φυσική ικανότητα να διατηρούν μνήμη και κατά συνέπεια δεν είναι ιδανικά για τέτοιου είδους εφαρμογές χωρίς κάποια τροποποίηση (Mienye et al., 2024).

RBF vs. DBNs (Deep Belief Networks)

Τα DBNs είναι βαθιά δίκτυα που μπορούν να μάθουν πολυεπίπεδες αναπαραστάσεις των δεδομένων, χρησιμοποιώντας μηχανισμούς όπως περιορισμένες μηχανές Boltzmann (RBMs) κατά την εκπαίδευση. Τα RBF δίκτυα δεν έχουν την ικανότητα να αναπτύξουν τόσο βαθιές αναπαραστάσεις και συνήθως εστιάζουν σε μια επίπεδη αναπαράσταση, καθιστώντας τα DBNs πιο κατάλληλα για πολύπλοκα προβλήματα που απαιτούν αναπαραστάσεις υψηλού επιπέδου (Zadeh et al., 2018).

Κάθε ένα από αυτά τα δίκτυα έχει τις δικές του ιδιαιτερότητες και χρήσεις, εξαρτώμενες από τις απαιτήσεις της εφαρμογής και τη φύση των δεδομένων που πρέπει να επεξεργαστούν. Οι επιλογές μεταξύ των διαφορετικών τύπων δικτύων συχνά επηρεάζονται από θέματα όπως η ακρίβεια της πρόβλεψης, η ταχύτητα της εκπαίδευσης, και η δυνατότητα γενίκευσης σε νέα δεδομένα.

2.3.4 Προκλήσεις και Μελλοντικές Κατευθύνσεις

Τα νευρωνικά δίκτυα (RBF) αποτελούν μια σημαντική κατηγορία νευρωνικών δικτύων που χρησιμοποιούνται ευρέως για την επίλυση ποικίλων προβλημάτων παλινδρόμησης και ταξινόμησης. Με τη διακριτή δομή τους, που συνδυάζει την απλότητα της γραμμικής απόκρισης στο επίπεδο εξόδου με την ισχυρή τοπική επεξεργασία της εισόδου μέσω των ακτινικών συναρτήσεων, τα RBF δίκτυα έχουν επιτύχει εξαιρετικά αποτελέσματα σε διάφορους τομείς. Ωστόσο, παρά την ευρεία τους υιοθέτηση και την επιτυχία τους, αντιμετωπί-

ζουν σημαντικές προκλήσεις που περιορίζουν την απόδοση και την εφαρμογή τους. Αυτό το κείμενο εξετάζει τις προκλήσεις αυτές και παρουσιάζει μελλοντικές κατευθύνσεις για την βελτίωση και την επέκταση της εφαρμογής των RBF δικτύων.

Επιλογή Υπερπαραμέτρων: Με την αύξηση του όγκου των δεδομένων, η εκπαίδευση των RBF δικτύων γίνεται υπολογιστικά απαιτητική. Η χρήση παράλληλων υπολογισμών και κατανεμημένων συστημάτων μπορεί να βελτιώσει την αποδοτικότητα.

Επιλογή των Παραμέτρων: Η επιλογή των βέλτιστων παραμέτρων για τα RBF δίκτυα, όπως τα κέντρα των ακτινικών συναρτήσεων και τα πλάτη, παραμένει μια σημαντική πρόκληση. Η αποτελεσματική επιλογή των παραμέτρων επηρεάζει άμεσα την απόδοση του δικτύου, και η υπερβολική εκπαίδευση μπορεί να οδηγήσει σε υπερπροσαρμογή.

Αυτόματη Ρύθμιση Παραμέτρων: Η ανάπτυξη αυτοματοποιημένων τεχνικών για την εύρεση βέλτιστων παραμέτρων, μέσω αλγορίθμων μηχανικής μάθησης που βασίζονται στη βελτιστοποίηση, μπορεί να βελτιώσει σημαντικά την αποδοτικότητα και την ευκολία χρήσης των RBF δικτύων (Bishop, 2006).

Συνδυασμός με Άλλες Τεχνικές: Ο συνδυασμός των RBF δικτύων με άλλες μεθόδους, όπως τα βαθιά νευρωνικά δίκτυα και οι ενισχυτικές τεχνικές, μπορεί να οδηγήσει σε βελτιωμένες επιδόσεις.

2.2.5 Συμπεράσματα

Τα νευρωνικά δίκτυα τύπου RBF αποτελούν ένα σημαντικό εργαλείο στη μηχανική μάθηση, με ευρεία εφαρμογή σε διάφορους τομείς όπως η ιατρική διάγνωση, η ρομποτική, η αναγνώριση προτύπων και η πρόβλεψη χρονικών σειρών. Η τοπική τους απόκριση και η ταχεία εκπαίδευση τα καθιστούν ιδανικά για πολλά πρακτικά προβλήματα, ενώ η ικανότητά τους να μοντελοποιούν μη γραμμικές συναρτήσεις με ακρίβεια προσφέρει προηγμένες λύσεις σε περίπλοκα ζητήματα.

Παρόλο που τα RBF δίκτυα προσφέρουν πολλά πλεονεκτήματα, υπάρχουν σημαντικές προκλήσεις που πρέπει να αντιμετωπιστούν, όπως η επιλογή των υπερπαραμέτρων και η κλιμάκωση σε μεγάλα δεδομένα. Η συνεχιζόμενη έρευνα και οι τεχνολογικές βελτιώσεις υπόσχονται να επεκτείνουν περαιτέρω τις δυνατότητες και τις εφαρμογές των RBF δικτύων, ανοίγοντας νέους ορίζοντες στον τομέα της τεχνητής νοημοσύνης.

Η ενσωμάτωση των RBF δικτύων με άλλες σύγχρονες τεχνολογίες και μεθόδους μηχανικής μάθησης, όπως βαθιά μάθηση και ενισχυτική μάθηση, προσφέρει ενδιαφέρουσες προοπτικές για τη δημιουργία πιο δυναμικών και αποτελεσματικών συστημάτων. Η ευελιξία των RBF δικτύων στην προσαρμογή σε διάφορες προκλήσεις και η ικανότητα τους να επιτυγχάνουν υψηλή απόδοση με σχετικά λίγη επεξεργασία, τα καθιστούν ιδιαίτερα χρήσιμα σε μια ευρεία γκάμα εφαρμογών.

Συνολικά, τα RBF δίκτυα αποτελούν μια πολύτιμη προσθήκη στο οπλοστάσιο των τεχνικών μηχανικής μάθησης, προσφέροντας σταθερότητα, ταχύτητα και ακρίβεια, ουσιαστικά συμβάλλοντας στην πρόοδο της τεχνητής νοημοσύνης.

2.3 Γενετικοί Αλγόριθμοι

Οι **Γενετικοί Αλγόριθμοι (Genetic Algorithms - GAs)** είναι μια εξελικτική μέθοδος βελτιστοποίησης που αντλεί έμπνευση από τις διαδικασίες της φυσικής επιλογής και της εξέλιξης στη φύση. Αναπτύχθηκαν αρχικά από τον John Holland το 1975, με στόχο την επίλυση πολύπλοκων συστημάτων μέσω της χρήσης πληθυσμών πιθανών λύσεων, οι οποίες εξελίσσονται με βάση τους μηχανισμούς της φυσικής επιλογής, της διασταύρωσης και της μετάλλαξης (Holland, 1992).

Στην ουσία, οι γενετικοί αλγόριθμοι αναζητούν τη βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα εξελίσσοντας ένα σύνολο υποψήφιων λύσεων (που ονομάζεται πληθυσμός) σε κάθε επανάληψη, γνωστή ως γενιά. Κάθε λύση αναπαρίσταται ως ένα χρωμόσωμα, το οποίο κωδικοποιεί μια πιθανή λύση του προβλήματος. Οι γενετικοί αλγόριθμοι ακολουθούν τρία κύρια βήματα: επιλογή, διασταύρωση και μετάλλαξη (Goldberg & Deb, 1991).

- **Επιλογή:** Οι καλύτερες λύσεις επιλέγονται με βάση τη συνάρτηση καταλληλότητας (fitness function). Αυτές οι λύσεις έχουν υψηλότερη πιθανότητα να επιλεγούν για αναπαραγωγή, αυξάνοντας τις πιθανότητες δημιουργίας απογόνων με καλύτερα χαρακτηριστικά.
- **Διασταύρωση (Crossover):** Κατά τη διασταύρωση, δύο "γονικά" χρωμοσώματα συνδυάζονται για να δημιουργήσουν έναν ή περισσότερους απογόνους. Αυτό επιτρέπει την ανασυνδυασμένη μεταβίβαση χαρακτηριστικών από τις προηγούμενες γενιές.

- **Μετάλλαξη (Mutation):** Στη μετάλλαξη, τυχαίες αλλαγές εφαρμόζονται σε ένα χρωμόσωμα για να διατηρηθεί η ποικιλομορφία του πληθυσμού και να αποφευχθεί η πρόωρη σύγκλιση σε τοπικά βέλτιστα.

Οι γενετικοί αλγόριθμοι έχουν βρει εφαρμογή σε πολλά πεδία, συμπεριλαμβανομένων των νευρωνικών δικτύων, της βελτιστοποίησης και της ρομποτικής, λόγω της ικανότητάς τους να χειρίζονται μη γραμμικά προβλήματα και μεγάλα διαστήματα αναζήτησης λύσεων (Mitchell, 1998).

2.3.1 Βασικές Αρχές Εξελικτικών Αλγορίθμων

Γενετικοί αλγόριθμοι αναπαριστούν τις αρχές της βιολογικής εξέλιξης, εφαρμόζοντας τις ιδέες της φυσικής επιλογής στην επίλυση προβλημάτων. Κάθε υποψήφια λύση σε ένα πρόβλημα αποτελείται από ένα "χρωμόσωμα", συγκρότημα "γονιδίων" που συμβολίζουν τις παραμέτρους ή τα χαρακτηριστικά που αξιολογούνται. Μέσω της διασταύρωσης και της μετάλλαξης, παράγονται νέες λύσεις, οι οποίες υποβάλλονται σε αξιολόγηση με βάση μια συνάρτηση καταλληλότητας (fitness function) για τον καθορισμό της αποδοτικότητάς τους.

Το σύστημα αυτό επιτρέπει την αποτελεσματική εξεύρεση λύσεων σε πολύπλοκα προβλήματα, όπου οι παραδοσιακοί αλγόριθμοι μπορεί να αποτύχουν. Η διασταύρωση επιτρέπει την ενσωμάτωση και συνδυασμό γνωρισμάτων από δύο γονείς, παρέχοντας τη δυνατότητα στους απογόνους να κληρονομήσουν και να ενισχύσουν τα θετικά χαρακτηριστικά. Η μετάλλαξη προσθέτει τυχαίες αλλαγές στα χρωμοσώματα, ενισχύοντας τη γενετική διαφοροποίηση και βοηθώντας στην αποφυγή της τοπικής σύγκλισης που μπορεί να περιορίσει την εξεύρεση της βέλτιστης λύσης.

Γενετικοί αλγόριθμοι αποδεικνύονται ιδιαίτερα χρήσιμοι σε εφαρμογές από τη βελτιστοποίηση δικτύων έως τη ρομποτική και την αυτόματη σχεδίαση, λόγω της ικανότητάς τους να διαχειρίζονται περίπλοκα και δυναμικά προβλήματα (Deb et al., 2002).

2.3.2 Λειτουργία Γενετικών Αλγορίθμων

Γενετικοί αλγόριθμοι είναι μια κατηγορία εξελικτικών αλγορίθμων που χρησιμοποιούν μηχανισμούς έμπνευσης από τη φυσική επιλογή και τη γενετική μετάλλαξη για την επίλυση

ση βελτιστοποιητικών και αναζητητικών προβλημάτων. Η βασική διαδικασία τους περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

Αρχικοποίηση: Ένας αρχικός πληθυσμός υποψήφιων λύσεων δημιουργείται τυχαία. Κάθε λύση, που αναπαριστάται ως χρωμόσωμα, συγκεντρώνει ένα σύνολο γονιδίων που συμβολίζουν διάφορες παραμέτρους της λύσης.

Αξιολόγηση: Κάθε χρωμόσωμα στον πληθυσμό αξιολογείται με βάση μια συνάρτηση καταλληλότητας (fitness function), η οποία καθορίζει πόσο καλά η λύση επιλύει το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Επιλογή: Οι καλύτερες λύσεις (χρωμοσώματα με υψηλότερη καταλληλότητα) επιλέγονται μέσω διαδικασιών όπως το τουρνουά, η ρουλέτα, ή άλλες στρατηγικές επιλογής για να συμμετάσχουν στη δημιουργία της επόμενης γενιάς.

Διασταύρωση: Χρωμοσώματα από την επιλεγμένη ομάδα συνδυάζονται μέσω διασταύρωσης, παράγοντας απογόνους που κληρονομούν γνωρίσματα από και τους δύο γονείς. Αυτή η διαδικασία ενθαρρύνει την ανανέωση γενετικού υλικού και τη διαφοροποίηση των λύσεων.

Μετάλλαξη: Τυχαίες αλλαγές εφαρμόζονται στα χρωμοσώματα για να διατηρήσουν τη γενετική ποικιλομορφία και να αποφευχθεί η πρόωρη σύγκλιση σε τοπικά βέλτιστα.

Επανάληψη: Αυτά τα βήματα επαναλαμβάνονται για πολλές γενιές έως ότου επιτευχθεί μια επιθυμητή βελτίωση ή να συμπληρωθεί ένας μέγιστος αριθμός επαναλήψεων.

2.3.4 Εφαρμογές στη Βελτιστοποίηση

Οι γενετικοί αλγόριθμοι έχουν αποδειχθεί αξιόλογοι σε μια ευρεία γκάμα προβλημάτων βελτιστοποίησης, εκτείνοντας την εφαρμογή τους από τη μηχανική μάθηση και τον σχεδιασμό συστημάτων έως τη ρομποτική και την ανάλυση δεδομένων. Χάρη στην ευελιξία τους να αντιμετωπίζουν πολύπλοκα και δυναμικά προβλήματα χωρίς ιδιαίτερους περιορισμούς, οι γενετικοί αλγόριθμοι είναι ιδιαίτερα πολύτιμοι σε σενάρια όπου τα παραδοσιακά μοντέλα και μέθοδοι αποτυγχάνουν (Isa et al., 2024).

Στον τομέα της μηχανικής μάθησης, οι γενετικοί αλγόριθμοι εφαρμόζονται για τη βελτιστοποίηση υπερπαραμέτρων και τη διαμόρφωση συμπλεγμάτων από μοντέλα, βελτιστοποιώντας τη συνολική απόδοση των συστημάτων (Shanthi & Chethan, 2022). Στη ρομποτική, αυτοί οι αλγόριθμοι συχνά ενισχύουν το σχεδιασμό αισθητήρων και τους μηχανι-

σμούς ελέγχου, όπου η γρήγορη ανασύνθεση και η δυνατότητα για αυτόνομη προσαρμογή είναι κρίσιμης σημασίας (J. H. Park & Lee, 2021).

Στην ανάλυση δεδομένων, οι γενετικοί αλγόριθμοι βοηθούν στην ανακάλυψη περίπλοκων μοτίβων και συσχετίσεων που δύσκολα θα ανακαλύπτονταν με παραδοσιακές μεθόδους. Αυτό περιλαμβάνει την ανίχνευση ανωμαλιών, τη βελτιστοποίηση δικτυωτών δομών, και τη διαχείριση μεγάλων όγκων δεδομένων (Hasan, 2014).

Η γενική τους χρησιμότητα στο πεδίο της βελτιστοποίησης αναδεικνύεται στην ικανότητα να επιλύουν τόσο διακριτά όσο και συνεχή προβλήματα, παρέχοντας έτσι μια ολιστική προσέγγιση σε πολλά επιστημονικά και τεχνολογικά ζητήματα (Srinivas & Patnaik, 1994). Ειδική μορφή γενετικών αλγορίθμων αποτελεί η μέθοδος Grammatical Evolution που θα εξετάσουμε στην επόμενη ενότητα.

2.4 Grammatical Evolution (GE)

Η **Γραμματική Εξέλιξη (Grammatical Evolution - GE)** αποτελεί μια προηγμένη μέθοδο εξελικτικού υπολογισμού που επεκτείνει τις αρχές των γενετικών αλγορίθμων και του γενετικού προγραμματισμού, επιτρέποντας τη δημιουργία προγραμμάτων ή δομών σε οποιαδήποτε μορφή ή γλώσσα μέσω της χρήσης γραμματικών. Σε αντίθεση με τον παραδοσιακό γενετικό προγραμματισμό, η GE χρησιμοποιεί μια ξεχωριστή αναπαράσταση του γονότυπου και του φαινότυπου, όπου ο γονότυπος είναι μια σειρά από ακέραιους αριθμούς, και ο φαινότυπος παράγεται μέσω της αντιστοίχισης αυτών των αριθμών σε μια προκαθορισμένη γραμματική, συνήθως σε μορφή BNF (Backus-Naur Form) (O'Neil & Ryan, 2003a).

Η διαδικασία της GE ξεκινά με τη δημιουργία ενός αρχικού πληθυσμού τυχαίων ακολουθιών (γονότυπων), οι οποίοι στη συνέχεια μεταφράζονται σε φαινότυπους μέσω της γραμματικής. Η γραμματική ορίζει τους κανόνες παραγωγής, επιτρέποντας την ευέλικτη και αυστηρά ελεγχόμενη σύνθεση των λύσεων. Η χρήση της γραμματικής εξασφαλίζει ότι όλες οι παραγόμενες λύσεις είναι συντακτικά έγκυρες, κάτι που αποτελεί σημαντικό πλεονέκτημα έναντι άλλων μεθόδων (O'Neil & Ryan, 2003a).

Μετά τη δημιουργία των φαινότυπων, η GE εφαρμόζει τους μηχανισμούς της φυσικής επιλογής, διασταύρωσης και μετάλλαξης για να εξελίξει τον πληθυσμό. Η φυσική επιλογή

ευνοεί τις λύσεις με την καλύτερη απόδοση, ενώ η διασταύρωση και η μετάλλαξη εισάγουν ποικιλία, επιτρέποντας την εξερεύνηση του χώρου των λύσεων (Ryan et al., 1998).

Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα της GE είναι η ανεξαρτησία της από τη γλώσσα προγραμματισμού ή το πεδίο εφαρμογής. Μέσω της προσαρμογής της γραμματικής, η GE μπορεί να παράγει λύσεις σε οποιαδήποτε γλώσσα ή μορφή, καθιστώντας την ιδιαίτερα ευέλικτη. Αυτό έχει οδηγήσει σε επιτυχημένες εφαρμογές σε τομείς όπως η αυτόματη παραγωγή αλγορίθμων (Brabazon & O'Neill, 2006), η εκπαίδευση νευρωνικών δικτύων (McKay et al., 2010), η χρηματοοικονομική πρόβλεψη (Brabazon & O'Neill, 2006), η ρομποτική και ο αυτόματος έλεγχος (Keijzer & Babovic, 2000).

Επιπλέον, η GE έχει επεκταθεί και σε παράλληλες και καταναμημένες αρχιτεκτονικές, βελτιώνοντας την απόδοσή της σε προβλήματα μεγάλης κλίμακας. Οι πρόσφατες εξελίξεις περιλαμβάνουν τη συνδυαστική χρήση της GE με άλλες μεθόδους μηχανικής μάθησης και βελτιστοποίησης, όπως τα σμήνη σωματιδίων (Grammatical Swarm), προσφέροντας ακόμη πιο ισχυρά εργαλεία για την αντιμετώπιση σύνθετων προβλημάτων (O'Neill et al., 2004).

Η GE συνεχίζει να αποτελεί ενεργό πεδίο έρευνας, με συνεχή βελτιστοποίηση των αλγορίθμων της και διεύρυνση των εφαρμογών της. Η ικανότητά της να συνδυάζει την εξελικτική βελτιστοποίηση με την αυστηρή δομή των γραμματικών την καθιστά ένα ισχυρό εργαλείο για την αυτόματη παραγωγή λύσεων που είναι τόσο λειτουργικές όσο και συντακτικά έγκυρες.

2.4.1 Αρχές και Λειτουργία της Grammatical Evolution

Η Grammatical Evolution (GE) αποτελεί μια τεχνική εξελικτικού υπολογισμού που επιτρέπει την αυτόματη παραγωγή προγραμμάτων ή δομών δεδομένων με βάση μια καθορισμένη γραμματική. Συνδυάζει την ευελιξία των γενετικών αλγορίθμων με την αυστηρότητα των γραμματικών κανόνων, επιτρέποντας την εξερεύνηση ενός ευρέος φάσματος λύσεων που είναι συντακτικά έγκυρες και λειτουργικά αποδοτικές (O'Neil & Ryan, 2003b).

Η βασική αρχή της GE είναι ο διαχωρισμός μεταξύ γονότυπου και φαινοτύπου. Ο γονότυπος είναι μια γραμμική ακολουθία ακεραίων αριθμών, ενώ ο φαινότυπος προκύπτει μέσω της εφαρμογής των γονότυπων τιμών σε μια προκαθορισμένη γραμματική, συνήθως σε μορφή BNF (Backus-Naur Form) (O'Neill & Ryan, 2001). Αυτό επιτρέπει την παραγωγή σύνθετων δομών από απλές ακολουθίες αριθμών.

Η λειτουργία της GE βασίζεται σε μια συνδυαστική προσέγγιση που περιλαμβάνει τη χρήση μιας καθορισμένης γραμματικής, την οποία ορίζουν κανόνες παραγωγής. Αυτοί οι κανόνες καθορίζουν ποιες δομές μπορούν να παραχθούν ως λύσεις. Το GE εξελίσσει χρωμοσώματα που αποκωδικοποιούνται σύμφωνα με αυτούς τους κανόνες, οδηγώντας σε έγκυρες λύσεις με βάση τη γραμματική (Whigham, 1995a).

Η διαδικασία GE ακολουθεί τα εξής βήματα:

Ορισμός Γραμματικής: Η γραμματική καθορίζει τις δυνατές λύσεις και μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε πλαίσιο προβλήματος. Εκφράζεται συνήθως σε μορφή BNF και περιλαμβάνει ένα σύνολο κανόνων παραγωγής που καθορίζουν πώς μπορούν να συνδυαστούν τα σύμβολα για να παραχθούν έγκυρες προτάσεις. Χρησιμοποιούνται γραμματικές συναρτήσεις της μορφής $G = (N, T, S, P)$, όπου:

- Το σύμβολο N σημαίνει το σύνολο των μη τερματικών συμβόλων.
- Το σύμβολο T αντιπροσωπεύει το σύνολο των τερματικών συμβόλων.
- Το S είναι ένα μη τερματικό σύμβολο, που χρησιμοποιείται ως σύμβολο έναρξης της γραμματικής.
- P είναι το σύνολο κανόνων παραγωγής που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή συμβόλων τερματικού από τα μη τερματικά σύμβολα.

Η γραμματική ξεκινά από το σύμβολο S και ακολουθώντας μία σειρά κανόνων παραγωγής δημιουργεί κανόνες από τερματικά σύμβολα τα οποία σε κάθε βήμα αντικαθιστούν τα μη τερματικά σύμβολα. Στο Σχήμα 2.4 βλέπουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής της GE:

Expression	Chromosome	Operation
	9,8,6,4,15,9,16,23,8	$9 \bmod 2 = 1$
$\langle \text{expr} \rangle, \langle \text{expr} \rangle$	8,6,4,15,9,16,23,8	$8 \bmod 2 = 0$
$(\langle \text{xlist} \rangle, \langle \text{digit} \rangle, \langle \text{digit} \rangle), \langle \text{expr} \rangle$	6,4,15,9,16,23,8	$6 \bmod 8 = 6$
$(x7, \langle \text{digit} \rangle, \langle \text{digit} \rangle), \langle \text{expr} \rangle$	4,15,9,16,23,8	$4 \% 2 = 0$
$(x7, 0, \langle \text{digit} \rangle), \langle \text{expr} \rangle$	15,9,16,23,8	$15 \% 2 = 1$
$(x7, 0, 1), \langle \text{expr} \rangle$	9,16,23,8	$9 \% 2 = 1$
$(x7, 0, 1), (\langle \text{xlist} \rangle, \langle \text{digit} \rangle, \langle \text{digit} \rangle)$	16,23,8	$16 \% 8 = 0$
$(x7, 0, 1), (x1, \langle \text{digit} \rangle, \langle \text{digit} \rangle)$	23,8	$23 \% 2 = 1$
$(x7, 0, 1), (x1, 1, \langle \text{digit} \rangle)$	8	$8 \% 2 = 0$
$(x7, 0, 1), (x1, 1, 0)$		

Σχήμα 2.4 Παράδειγμα εφαρμογής της Grammatical Evolution.

Παραδείγματα γραμματικής περιλαμβάνουν την παραγωγή μαθηματικών μοντέλων, την ανάπτυξη αρχιτεκτονικών νευρωνικών δικτύων ή τη σύνθεση προγραμμάτων υπολογιστών (O'Neill et al., 2004).

Αναπαράσταση Λύσεων: Τα χρωμοσώματα, που είναι σειρές ακεραίων αριθμών (συχνά αναφερόμενα ως κωδικόνια), αντιστοιχούν σε κανόνες παραγωγής που ορίζονται από τη γραμματική. Κάθε ακεραίος αριθμός χρησιμοποιείται για την επιλογή ενός κανόνα παραγωγής όταν υπάρχουν πολλαπλές επιλογές. Αυτές οι ακολουθίες μεταφράζονται σε έγκυρες λύσεις, που μπορεί να κυμαίνονται από απλές μαθηματικές συναρτήσεις έως πολύπλοκα προγράμματα (Brabazon & O'Neill, 2006).

Επιλογή, Διασταύρωση και Μετάλλαξη: Οι λύσεις εξελίσσονται μέσω διαδικασιών επιλογής, διασταύρωσης και μετάλλαξης, όπως και στους κλασικούς γενετικούς αλγορίθμους. Η **επιλογή** βασίζεται στη συνάρτηση καταλληλότητας, επιλέγοντας τις καλύτερες λύσεις για αναπαραγωγή. Η **διασταύρωση** συνδυάζει τμήματα από δύο γονικά χρωμοσώματα για τη δημιουργία νέων απογόνων, ενώ η **μετάλλαξη** τροποποιεί τυχαία μέρη του χρωμοσώματος για να εισαγάγει νέα χαρακτηριστικά και να διατηρήσει την ποικιλομορφία του πληθυσμού (Kramer, 2017).

Αξιολόγηση Λύσεων: Οι λύσεις αξιολογούνται με βάση μια συνάρτηση καταλληλότητας, η οποία μετρά πόσο καλά κάθε λύση επιλύει το συγκεκριμένο πρόβλημα. Αυτή η συνάρτηση μπορεί να περιλαμβάνει μετρήσεις όπως η ακρίβεια σε προβλήματα ταξινόμησης, το σφάλμα σε προβλήματα παρεμβολής ή η απόδοση σε υπολογιστικά προβλήματα (Whigham, 1995b). Η αξιολόγηση καθοδηγεί την εξελικτική διαδικασία προς τις βέλτιστες λύσεις.

Επανάληψη και Βελτιστοποίηση: Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για πολλές γενιές, με στόχο τη συνεχή βελτίωση των λύσεων. Σε κάθε γενιά, οι καλύτερες λύσεις επιλέγονται και χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία του επόμενου πληθυσμού μέσω διασταύρωσης και μετάλλαξης. Αυτό επιτρέπει την εξερεύνηση του χώρου αναζήτησης και την προσέγγιση της βέλτιστης λύσης (O'Neill et al., 2004).

2.4.2 Πλεονεκτήματα της Grammatical Evolution

Η Grammatical Evolution προσφέρει μια σειρά πλεονεκτημάτων που την καθιστούν πολύτιμο εργαλείο σε πολλούς τομείς εφαρμογών:

Ευελιξία: Η ευελιξία της GE έγκειται στην ανεξαρτησία της από τη γλώσσα προγραμματισμού και το πεδίο εφαρμογής. Μέσω της προσαρμογής της γραμματικής, η GE μπορεί να εφαρμοστεί σε διαφορετικά προβλήματα χωρίς την ανάγκη αλλαγής του βασικού αλγορίθμου. Αυτό την καθιστά ιδανική για εφαρμογές που απαιτούν γρήγορη προσαρμογή και ανάπτυξη, όπως στη χρηματοοικονομική μοντελοποίηση, την ανάλυση βιολογικών δεδομένων και την αυτόματη σχεδίαση συστημάτων ελέγχου (Brabazon & O'Neill, 2006).

Αυτόματη Παραγωγή Δομών: Επιπλέον, η GE έχει τη δυνατότητα να εξερευνήσει μεγάλους χώρους αναζήτησης και να ανακαλύψει λύσεις που δεν είναι προφανείς μέσω παραδοσιακών μεθόδων. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε προβλήματα όπου η δομή της λύσης δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων, επιτρέποντας στην GE να δημιουργήσει καινοτόμες και αποδοτικές δομές μέσω της εξελικτικής διαδικασίας (O'Neil & Ryan, 2003b).

Απλοποίηση της Ανάπτυξης Λογισμικού: Η αυτοματοποίηση της ανάπτυξης λογισμικού μέσω της GE μειώνει σημαντικά το χρόνο και το κόστος που απαιτείται για την ανάπτυξη προσαρμοσμένων λύσεων. Επιπλέον, η GE μπορεί να εντοπίσει βελτιστοποιήσεις που μπορεί να μην είναι προφανείς στον ανθρώπινο προγραμματιστή, οδηγώντας σε πιο αποδοτικό κώδικα και βελτιωμένη απόδοση των εφαρμογών (O'Neil & Ryan, 2003a).

Εξέλιξη Αρχιτεκτονικών Νευρωνικών Δικτύων: Μέσω της GE, είναι δυνατή η ταυτόχρονη εξερεύνηση της δομής και των παραμέτρων ενός νευρωνικού δικτύου, οδηγώντας σε βέλτιστα μοντέλα που προσαρμόζονται στα χαρακτηριστικά των δεδομένων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της ακρίβειας και της γενίκευσης των μοντέλων σε διάφορα προβλήματα, όπως η αναγνώριση προτύπων, η πρόβλεψη χρονοσειρών και η ταξινόμηση (Lourengo et al., 2016).

Διαχωρισμός Γονότυπου και Φαινότυπου

Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα της GE είναι ο διαχωρισμός μεταξύ γονότυπου και φαινότυπου. Αυτό επιτρέπει μεγαλύτερη ευελιξία στη γενετική αναπαράσταση και μπορεί να βελτιώσει την απόδοση της εξελικτικής διαδικασίας. Η ίδια ακολουθία γονότυπου μπορεί να παράγει διαφορετικούς φαινότυπους ανάλογα με τη γραμματική, επιτρέποντας την επαναχρησιμοποίηση και την προσαρμογή των λύσεων (O'Neill & Ryan, 2001).

Συντακτική Ορθότητα των Λύσεων

Η χρήση γραμματικής εξασφαλίζει ότι όλες οι παραγόμενες λύσεις είναι συντακτικά έγκυρες. Αυτό μειώνει την ανάγκη για μηχανισμούς διόρθωσης λαθών και βελτιώνει την απο-

τελεσματικότητα της εξελικτικής διαδικασίας, καθώς αποφεύγεται η παραγωγή μη έγκυρων λύσεων που δεν θα είχαν χρησιμότητα (McKay et al., 2010).

Εξερεύνηση Μεγάλου Χώρου Αναζήτησης

Η GE είναι ικανή να εξερευνήσει έναν μεγάλο χώρο αναζήτησης λύσεων λόγω της εξελικτικής της φύσης και της χρήσης γραμματικών. Αυτό επιτρέπει την ανακάλυψη καινοτόμων λύσεων που μπορεί να μην ήταν προφανείς με άλλες μεθόδους, ενισχύοντας την πιθανότητα εύρεσης της βέλτιστης λύσης για ένα δεδομένο πρόβλημα (Whigham, 1995b).

Εφαρμογές σε Ποικίλα Πεδία

Η GE έχει χρησιμοποιηθεί επιτυχώς σε πολλούς διαφορετικούς τομείς, όπως η ρομποτική, η χρηματοοικονομική πρόβλεψη, η βιοπληροφορική και η σχεδίαση συστημάτων ελέγχου. Η ευελιξία της και η ικανότητά της να προσαρμόζεται σε διαφορετικά προβλήματα την καθιστούν ένα ισχυρό εργαλείο για ερευνητές και επαγγελματίες (Brabazon & O'Neill, 2006).

Βελτίωση της Απόδοσης μέσω Παράλληλων Υλοποιήσεων

Η GE μπορεί να επωφεληθεί από παράλληλες και καταμεμημένες υπολογιστικές αρχιτεκτονικές, επιτρέποντας την αντιμετώπιση προβλημάτων μεγάλης κλίμακας με αποτελεσματικό τρόπο. Αυτό οδηγεί σε μείωση του χρόνου υπολογισμού και βελτιώνει την απόδοση του αλγορίθμου σε απαιτητικές εφαρμογές (Herrera & Lozano, 1996).

Συνδυασμός με Άλλες Μεθόδους Μηχανικής Μάθησης

Η GE μπορεί να συνδυαστεί με άλλες τεχνικές μηχανικής μάθησης, όπως τα σμήνη σωματιδίων (Particle Swarm Optimization), για την περαιτέρω βελτίωση της απόδοσής της. Αυτό δημιουργεί υβριδικές μεθόδους που μπορούν να αντιμετωπίσουν πολύπλοκα προβλήματα με μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα (O'Neill et al., 2004).

2.4.3 Εφαρμογές της Grammatical Evolution

Η Grammatical Evolution (GE) έχει εφαρμοστεί σε πολλούς τομείς της επιστήμης των υπολογιστών, της μηχανικής μάθησης και της βιομηχανίας, αποδεικνύοντας την ευελιξία και την αποτελεσματικότητά της σε ποικίλα προβλήματα:

Εκπαίδευση Νευρωνικών Δικτύων: Η GE χρησιμοποιείται για τη δημιουργία και βελτιστοποίηση της αρχιτεκτονικής των νευρωνικών δικτύων. Στην παρούσα εργασία, η μέθο-

δος αυτή εφαρμόστηκε για την αυτόματη επιλογή των παραμέτρων των δικτύων RBF, όπως ο αριθμός νευρώνων και η ακτίνα των συναρτήσεων ακτινικής βάσης (O'Neill et al., 2004). Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει τη δημιουργία προσαρμοσμένων αρχιτεκτονικών που ανταποκρίνονται καλύτερα στις απαιτήσεις του προβλήματος. Επιπλέον, η GE έχει χρησιμοποιηθεί για την αυτόματη σχεδίαση και εκπαίδευση πλήρων νευρωνικών δικτύων, συμπεριλαμβανομένων των συνδέσμων και των βαρών τους. Αυτό μειώνει την ανάγκη για χειροκίνητη ρύθμιση των παραμέτρων και μπορεί να οδηγήσει σε μοντέλα με υψηλότερη απόδοση (Lourenço et al., 2016). Η GE επιτρέπει επίσης την ενσωμάτωση περιορισμών και προσαρμοσμένων λειτουργιών ενεργοποίησης, καθιστώντας την κατάλληλη για εξειδικευμένες εφαρμογές.

Αυτόματη Δημιουργία Προγραμμάτων: Η GE έχει εφαρμοστεί στην αυτόματη παραγωγή προγραμμάτων υπολογιστών με βάση καθορισμένες γραμματικές, όπως η αυτόματη δημιουργία λογισμικού για την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων (Renals et al., 1994).

Έχουν αναπτυχθεί εφαρμογές όπου η GE χρησιμοποιείται για την αυτόματη δημιουργία κώδικα σε γλώσσες όπως C, Java και Python. Αυτό έχει οδηγήσει σε βελτιώσεις στην ανάπτυξη λογισμικού, ιδίως σε τομείς όπου η ταχύτητα ανάπτυξης και η προσαρμοστικότητα είναι κρίσιμες (O'Neil & Ryan, 2003b). Επιπλέον, η GE έχει χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία βελτιστοποιημένου κώδικα που εκμεταλλεύεται τις δυνατότητες συγκεκριμένων αρχιτεκτονικών υλικού.

Βιοπληροφορική και Υπολογιστική Βιολογία: Η GE χρησιμοποιείται στη βιοπληροφορική για τη μοντελοποίηση και πρόβλεψη βιολογικών διαδικασιών, όπως η ανάλυση γονιδιακών δικτύων και η ανακάλυψη νέων βιολογικών μοτίβων (Brabazon & O'Neill, 2006). Η GE έχει εφαρμοστεί στην πρόβλεψη δευτεροταγούς δομής πρωτεϊνών, στην ανάλυση μικροαλληλουχιών DNA και στην ταξινόμηση βιολογικών δειγμάτων. Η δυνατότητα της GE να διαχειρίζεται μεγάλα και περίπλοκα σύνολα δεδομένων την καθιστά ιδανική για εφαρμογές βιοπληροφορικής όπου η ακρίβεια και η ευελιξία είναι απαραίτητες (McKay et al., 2010).

Χρηματοοικονομικές Εφαρμογές: Έχει επίσης εφαρμοστεί σε χρηματοοικονομικές προβλέψεις και μοντέλα, όπου χρησιμοποιείται για τη βελτιστοποίηση και την ανάπτυξη χρηματοοικονομικών στρατηγικών. Η Grammatical Evolution (GE) έχει αποδειχθεί αποτελεσματική στη δημιουργία αυτόματων μοντέλων συναλλαγών και στη βελτιστοποίηση επενδυτικών στρατηγικών, παρέχοντας ένα εργαλείο για τη μοντελοποίηση και πρόβλεψη πολύπλοκων χρηματοοικονομικών αγορών (Brabazon & O'Neill, 2006). Συγκεκριμένα, η GE

έχει χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη τιμών μετοχών, την ανάλυση κινδύνου, την ανίχνευση ανωμαλιών στην αγορά και την ανάπτυξη αλγορίθμων συναλλαγών υψηλής συχνότητας. Μέσω της εξελικτικής βελτιστοποίησης, οι χρηματοοικονομικές εφαρμογές της GE μπορούν να προσαρμοστούν σε μεταβαλλόμενες συνθήκες της αγοράς, βελτιώνοντας την ακρίβεια και την αποδοτικότητα των επενδυτικών αποφάσεων.

Βελτιστοποίηση Εξελικτικών Αλγορίθμων: Η GE έχει χρησιμοποιηθεί για τη βελτίωση και βελτιστοποίηση εξελικτικών αλγορίθμων, εξελίσσοντας λύσεις σε προβλήματα που περιλαμβάνουν μεγάλους χώρους αναζήτησης λύσεων. Αυτό καθιστά τη GE κατάλληλη για τη βελτιστοποίηση των παραμέτρων αλγορίθμων και την επιλογή των κατάλληλων δομών για συγκεκριμένες εφαρμογές, όπως στα δίκτυα **RBF**. Επιπλέον, η GE έχει συνδυαστεί με άλλες εξελικτικές μεθόδους, όπως τα γενετικά προγράμματα και οι αλγόριθμοι σμήνους σωματιδίων, για τη δημιουργία υβριδικών τεχνικών που βελτιώνουν την απόδοση σε πολύπλοκα προβλήματα βελτιστοποίησης. Αυτό έχει εφαρμοστεί σε τομείς όπως η βιομηχανική σχεδίαση, η εφοδιαστική αλυσίδα και η διαχείριση πόρων (Brabazon & O'Neill, 2006).

Επίλυση Μαθηματικών Προβλημάτων: Η GE χρησιμοποιείται επίσης για την επίλυση πολύπλοκων μαθηματικών προβλημάτων μέσω της αυτόματης παραγωγής και βελτιστοποίησης μαθηματικών εκφράσεων ή αλγορίθμων. Ειδικά στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων, η GE μπορεί να εξελίξει λύσεις που προσαρμόζονται σε συγκεκριμένα σύνολα συνθηκών (Koza, 1992). Η GE έχει εφαρμοστεί στην ανακάλυψη νέων μαθηματικών μοντέλων για τη μοντελοποίηση φυσικών φαινομένων, όπως η δυναμική ρευστών, η κβαντική μηχανική και η οικολογία. Μέσω της αυτόματης ανακάλυψης και βελτιστοποίησης μαθηματικών σχέσεων, η GE συμβάλλει στην επίλυση προβλημάτων που ήταν δύσκολο να αντιμετωπιστούν με παραδοσιακές μεθόδους (McKay et al., 2010).

2.4.4 Προκλήσεις της Grammatical Evolution

Η εφαρμογή της Grammatical Evolution φέρει μια σειρά από προκλήσεις που επηρεάζουν την αποδοτικότητα και την πρακτικότητά της σε πολλούς τομείς:

Υπολογιστική Δαπάνη: Λόγω της υπολογιστικής φύσης των γενετικών αλγορίθμων που απαιτούν τη διαχείριση μεγάλων πληθυσμών λύσεων και την εκτέλεση πολλαπλών γενεών, η GE μπορεί να απαιτεί σημαντικούς υπολογιστικούς πόρους. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα για προβλήματα με μεγάλους χώρους αναζήτησης όπου η διαδικασία της διασταύρωσης και της μετάλλαξης απαιτεί εξαιρετική προσοχή στην απόδοση και την αποτελεσματικότητα.

Η υπολογιστική δαπάνη μπορεί να αποτελεί σημαντικό εμπόδιο όταν εφαρμόζεται η GE σε μεγάλης κλίμακας προβλήματα ή σε περιβάλλοντα με περιορισμένους πόρους. Για την αντιμετώπιση αυτού του ζητήματος, έχουν προταθεί διάφορες βελτιστοποιήσεις, όπως η χρήση παράλληλων υπολογιστικών τεχνικών και κατανεμημένων συστημάτων. Επιπλέον, η ανάπτυξη αποδοτικών στρατηγικών επιλογής και η μείωση του μεγέθους του πληθυσμού μπορούν να συμβάλουν στη μείωση του υπολογιστικού κόστους.

Εξάρτηση από τη Γραμματική: Η ποιότητα και η επιτυχία των λύσεων που παράγονται από την GE εξαρτώνται άμεσα από την ποιότητα της γραμματικής που χρησιμοποιείται. Μια κακώς διατυπωμένη γραμματική μπορεί να οδηγήσει σε λύσεις που δεν είναι βέλτιστες ή είναι υπερβολικά πολύπλοκες για το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα. Η ακριβής οριοθέτηση της γραμματικής και η συνεχής της επικαιροποίηση είναι κρίσιμες για την επίτευξη των επιθυμητών αποτελεσμάτων. Η σύνταξη μιας κατάλληλης γραμματικής απαιτεί βαθιά κατανόηση του προβλήματος και των πιθανών λύσεων. Αυτό μπορεί να είναι χρονοβόρο και να απαιτεί εξειδικευμένη γνώση. Επιπλέον, μια περιοριστική γραμματική μπορεί να περιορίσει την εξερεύνηση του χώρου αναζήτησης, ενώ μια πολύ γενική γραμματική μπορεί να οδηγήσει σε υπερβολική πολυπλοκότητα. Οι ερευνητές έχουν προτείνει τη χρήση δυναμικών γραμματικών που προσαρμόζονται κατά τη διάρκεια της εξελικτικής διαδικασίας, καθώς και μεθόδους για την αυτόματη δημιουργία ή βελτιστοποίηση της γραμματικής (O’Neil & Ryan, 2003b).

Υπερπροσαρμογή: Η GE μπορεί να παράγει λύσεις που είναι υπερβολικά προσαρμοσμένες στα δεδομένα εκπαίδευσης, χωρίς να μπορούν να γενικεύουν επαρκώς σε νέα δεδομένα ή σε διαφορετικές συνθήκες. Αυτή η πρόκληση απαιτεί χρήση τεχνικών όπως η κανονικοποίηση και η προσθήκη θορύβου κατά την εκπαίδευση, για να βελτιωθεί η ικανότητα γενίκευσης των λύσεων (Keijzer & Babovic, 2000). Η υπερπροσαρμογή είναι ένα κοινό πρόβλημα σε μεθόδους μηχανικής μάθησης, και η GE δεν αποτελεί εξαίρεση. Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος, έχουν προταθεί διάφορες τεχνικές, όπως η χρήση συναρτήσεων κόστους που περιλαμβάνουν όρους ποινής για την πολυπλοκότητα των λύσεων (regularization), η διασταύρωση (cross-validation) και η χρήση γενετικών τελεστών που προάγουν την ποικιλία και αποτρέπουν τη σύγκλιση σε τοπικά ελάχιστα (Luke & Panait, 2006).

Πολυπλοκότητα και Μέγεθος των Λύσεων

Η GE μπορεί να παράγει λύσεις με υπερβολική πολυπλοκότητα και μεγάλο μέγεθος, που είναι δύσκολο να ερμηνευθούν ή να εφαρμοστούν πρακτικά. Αυτό συμβαίνει συχνά όταν η

εξελικτική διαδικασία δεν περιορίζει επαρκώς την ανάπτυξη των λύσεων (O'Neil & Ryan, 2003a). Για την αντιμετώπιση της πολυπλοκότητας, έχουν προταθεί τεχνικές όπως η εισαγωγή όρων ποινής στη συνάρτηση καταλληλότητας για την πολυπλοκότητα των λύσεων, η χρήση περιορισμών στο μέγεθος του χρωμοσώματος και η εφαρμογή διαδικασιών απλοποίησης μετά την εξέλιξη (Banzhaf et al., 1998). Η απλοποίηση των λύσεων μπορεί να βελτιώσει την ερμηνευσιμότητα και τη γενίκευσή τους.

Διατήρηση Ποικιλομορφίας

Η GE μπορεί να αντιμετωπίσει προβλήματα με τη διατήρηση της ποικιλομορφίας στον πληθυσμό, οδηγώντας σε πρόωρη σύγκλιση και παγίδευση σε τοπικά βέλτιστα. Αυτό μπορεί να μειώσει την ικανότητα του αλγορίθμου να βρει την παγκόσμια βέλτιστη λύση (McKay et al., 2010). Για να διατηρηθεί η ποικιλομορφία, μπορούν να εφαρμοστούν τεχνικές όπως η χρήση διαφορετικών στρατηγικών επιλογής (π.χ. τουρνουά επιλογής με χαμηλότερη πίεση επιλογής), η εισαγωγή τυχαίων μεταλλάξεων και η χρήση πολλαπλών πληθυσμών ή νησιωτικών μοντέλων (island models), όπου διαφορετικοί πληθυσμοί εξελίσσονται παράλληλα και ανταλλάσσουν λύσεις (D. Whitley et al., 1999).

Τοπικότητα μεταξύ Γονότυπου και Φαινότυπου

Η σχέση μεταξύ του γονότυπου (σειρά ακεραίων αριθμών) και του φαινότυπου (τελική λύση) στη GE μπορεί να μην είναι πάντα ομαλή. Μικρές αλλαγές στον γονότυπο μπορεί να οδηγήσουν σε μεγάλες αλλαγές στον φαινότυπο, γεγονός που μπορεί να δυσχεράνει την εξελικτική διαδικασία (Rothlauf & Oetzel, 2006). Η βελτίωση της τοπικότητας μπορεί να επιτευχθεί μέσω της σχεδίασης της γραμματικής και της διαδικασίας αντιστοίχισης. Τεχνικές όπως η χρήση αναπαραστάσεων με μεγαλύτερη τοπικότητα, η εφαρμογή λειτουργιών που μειώνουν τις δραστικές αλλαγές στον φαινότυπο και η ανάπτυξη υβριδικών μεθόδων μπορούν να συμβάλουν στη βελτίωση της απόδοσης (Kantschik & Banzhaf, 2002).

2.4.5 Μελλοντικές Κατευθύνσεις και Βελτιώσεις

Η **Grammatical Evolution (GE)** συνεχίζει να αποτελεί πεδίο ενεργής έρευνας, με πολλές πιθανές βελτιώσεις και νέες κατευθύνσεις που μπορούν να βελτιώσουν την απόδοσή της σε ποικίλα προβλήματα. Οι προκλήσεις που αναφέρθηκαν προηγουμένως παρέχουν κίνητρο για έρευνα, τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο. Παρακάτω παρουσιάζονται μερικές σημαντικές κατευθύνσεις για την περαιτέρω ανάπτυξη της μεθόδου.

1. Υβριδικές Προσεγγίσεις.

Η ενσωμάτωση της Grammatical Evolution με άλλες εξελικτικές μεθόδους είναι μια πολλά υποσχόμενη κατεύθυνση. Οι αλγόριθμοι σμήνους σωματιδίων (Particle Swarm Optimization - PSO) και οι γενετικοί προγραμματιστές (Genetic Programming - GP) μπορούν να συνδυαστούν με τη GE για να σχηματιστούν υβριδικά μοντέλα. Οι αλγόριθμοι αυτοί παρέχουν πλεονεκτήματα όπως την ταχύτερη σύγκλιση και τη βελτιωμένη εξερεύνηση του χώρου των λύσεων.

Για παράδειγμα, ένας υβριδικός αλγόριθμος που συνδυάζει GE και PSO μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη βελτίωση της επιλογής παραμέτρων σε μοντέλα μηχανικής μάθησης, με την GE να καθορίζει τη δομή του μοντέλου και το PSO να βελτιστοποιεί τις αριθμητικές παραμέτρους (Robinson & Rahmat-Samii, 2004). Αυτού του είδους οι υβριδικές προσεγγίσεις μπορούν να βελτιώσουν τη συνολική απόδοση και να μειώσουν τον χρόνο εκπαίδευσης.

2. Παράλληλη και Κατανεμημένη Υπολογιστική

Η βελτίωση της απόδοσης της GE μπορεί να επιτευχθεί μέσω της χρήσης **παράλληλης επεξεργασίας ή κατανεμημένων υπολογιστικών συστημάτων**. Δεδομένου ότι οι γενετικοί αλγόριθμοι λειτουργούν με πληθυσμούς λύσεων που εξελίσσονται ανεξάρτητα, η GE μπορεί να επωφεληθεί σημαντικά από την παράλληλη υπολογιστική.

Η χρήση υπερυπολογιστών ή κατανεμημένων συστημάτων μπορεί να επιταχύνει τη διαδικασία διασταύρωσης και μετάλλαξης, επιτρέποντας την ταυτόχρονη εξέλιξη πολλών λύσεων. Έτσι, μπορεί να μειωθεί ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης και να εξερευνηθούν μεγαλύτεροι χώροι λύσεων, αυξάνοντας τις πιθανότητες εύρεσης βέλτιστων λύσεων (D. S. Whitley, 1994).

3. Αυτόματη Σύνθεση και Βελτιστοποίηση Νευρωνικών Δικτύων

Μια ακόμα ενδιαφέρουσα κατεύθυνση είναι η εφαρμογή της GE για τη **σύνθεση και βελτιστοποίηση αρχιτεκτονικών νευρωνικών δικτύων**. Σε αυτήν την προσέγγιση, η GE μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αυτόματη δημιουργία βαθιών νευρωνικών δικτύων (**Deep Neural Networks - DNNs**), τα οποία μπορούν να προσαρμόζονται αυτόματα σε διαφορετικά προβλήματα.

Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει την εξελικτική προσαρμογή της δομής του δικτύου, όπως ο αριθμός των στρωμάτων, η ενεργοποιητική συνάρτηση, καθώς και οι σύνδεσμοι μεταξύ

των νευρώνων. Η GE μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξελίξει αυτές τις παραμέτρους, δημιουργώντας δίκτυα που ανταποκρίνονται καλύτερα στα δεδομένα εκπαίδευσης και έχουν βελτιωμένη απόδοση σε προβλήματα ταξινόμησης και παρεμβολής (Zela et al., 2020).

4. Εκπαίδευση με Συνεχή Δεδομένα (Incremental Learning)

Η ανάπτυξη μοντέλων **εκπαίδευσης με συνεχή δεδομένα** είναι μια ακόμα υποσχόμενη κατεύθυνση για την GE. Η ικανότητα των μοντέλων να προσαρμόζονται σε νέες πληροφορίες χωρίς την ανάγκη επανεκπαίδευσης από την αρχή είναι κρίσιμη σε εφαρμογές όπου τα δεδομένα αλλάζουν συχνά, όπως στη ρομποτική και την ανάλυση ροών δεδομένων.

Η χρήση τεχνικών **incremental learning** σε συνδυασμό με τη GE μπορεί να επιτρέψει τη δημιουργία μοντέλων που προσαρμόζονται δυναμικά στις νέες συνθήκες, αυξάνοντας τη γενίκευση και την ανθεκτικότητα του μοντέλου. Αυτός ο τομέας αποτελεί μια ενεργή περιοχή έρευνας που έχει ήδη δείξει υποσχόμενα αποτελέσματα (Gama et al., 2014).

5. Εφαρμογές σε Πραγματικό Χρόνο

Η δυνατότητα εφαρμογής της GE σε **προβλήματα πραγματικού χρόνου** αποτελεί ακόμα μια ενδιαφέρουσα κατεύθυνση για τη μελλοντική έρευνα. Οι αλγόριθμοι GE μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη βελτιστοποίηση ρομποτικών συστημάτων σε πραγματικό χρόνο, την ανάλυση δικτύων αισθητήρων ή την ανάλυση μεγάλων δεδομένων σε πραγματικό χρόνο (streaming data).

Η GE έχει δείξει επιτυχία στη βελτιστοποίηση των παραμέτρων ελεγκτών ρομποτικών συστημάτων και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βελτιώσει την προσαρμοστικότητα των ρομπότ σε διαφορετικά περιβάλλοντα. Αυτή η ικανότητα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη ρομποτική και σε άλλες εφαρμογές όπου οι συνθήκες αλλάζουν συνεχώς (Whigham & Crapper, 2001).

2.4.6 Συμπεράσματα

Η **Grammatical Evolution** είναι μια ισχυρή και ευέλικτη τεχνική που επιτρέπει την αυτόματη παραγωγή και βελτιστοποίηση λύσεων σε πολλά διαφορετικά προβλήματα. Η δυνατότητα της GE να εξελίσσει δομές με βάση καθορισμένους κανόνες γραμματικής την καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμη για εφαρμογές στη μηχανική μάθηση, τη ρομποτική, και τη βιοπληροφορική. Παρά τις προκλήσεις που παρουσιάζει η εφαρμογή της, όπως οι υπολογι-

στικές απαιτήσεις και η ανάγκη για καλά καθορισμένες γραμματικές, η GE έχει δείξει εξαιρετικές δυνατότητες σε πολλές εφαρμογές.

Η συνεχής έρευνα και οι νέες κατευθύνσεις, όπως η ενσωμάτωση υβριδικών τεχνικών, η χρήση παράλληλων υπολογιστικών πόρων, και η εφαρμογή σε προβλήματα πραγματικού χρόνου, μπορούν να βελτιώσουν περαιτέρω τη δύναμη και την απόδοση της Grammatical Evolution.

2.5 Η θεωρία του Χάους και εκθέτες Lyapunov

Η Θεωρία του Χάους αναπτύχθηκε από το ενδιαφέρον των επιστημόνων να κατανοήσουν την εξαιρετικά πολύπλοκη συμπεριφορά σε φαινομενικά απλά μη γραμμικά δυναμικά συστήματα. Τα συστήματα αυτά, παρόλο που διακρίνονται από μια ασυνήθιστα μεγάλη ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες, φαίνονται να επιδεικνύουν συμπεριφορές που εναλλάσσονται μεταξύ της τάξης και του απόλυτου χάους.

Από την άλλη πλευρά, η θεωρία Lyapunov, που ονομάζεται έτσι προς τιμήν του Ρώσου μαθηματικού Aleksandr Lyapunov, ασχολείται με τη σταθερότητα των λύσεων δυναμικών συστημάτων. Συγκεκριμένα, η θεωρία αυτή προσφέρει έναν μηχανισμό για την εξέταση του εάν τα διαφορικά συστήματα επιστρέφουν σε μια κατάσταση ισορροπίας ή αποκλίνουν από αυτή, χρησιμοποιώντας τις λεγόμενες "συναρτήσεις Lyapunov" (Khalil, 2002).

Οι εκθέτες Lyapunov, μια εξέλιξη της θεωρίας, παρέχουν μια ποσοτική μέτρηση της διαχωριστικής τάσης των τροχιακών στοιχείων στο φάσμα του χρόνου. Ένας θετικός εκθέτης Lyapunov υποδεικνύει χαοτική συμπεριφορά, καθώς τα διακεκριμένα κοντινά στοιχεία σε ένα δυναμικό σύστημα διαχωρίζονται εκθετικά (Wolf et al., 1985).

Στη σύγχρονη έρευνα, η εφαρμογή της θεωρίας Lyapunov στον έλεγχο νευρωνικών δικτύων έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμη. Νευρωνικά δίκτυα, που αποτελούν έναν πυρήνα τεχνολογίας στη μηχανική μάθηση, μπορούν να επωφεληθούν από τις σταθεροποιητικές ιδιότητες της θεωρίας για την εξασφάλιση της συμπεριφοράς τους κάτω από διάφορες λειτουργικές συνθήκες (Kim, 1991).

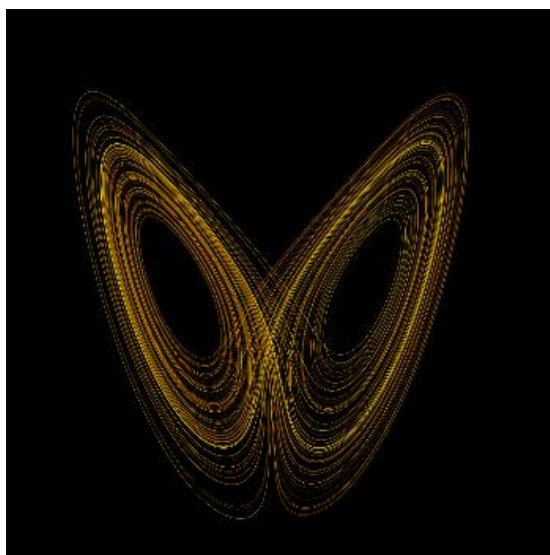
2.5.1 Θεωρία του Χάους

Η Θεωρία του Χάους αποτελεί ένα υποπεδίο της μη γραμμικής δυναμικής που μελετά τη συμπεριφορά σύνθετων συστημάτων, τα οποία παρά το ότι περιγράφονται από σχετικά απλές και καθοριστικές εξισώσεις, παρουσιάζουν φαινομενικά τυχαίες και απρόβλεπτες συμπεριφορές. Στην καρδιά της θεωρίας αυτής βρίσκεται η έννοια της "ευαισθησίας ως προς τις αρχικές συνθήκες" (sensitive dependence on initial conditions), δηλαδή η δραστηκή αλλαγή της μακροπρόθεσμης συμπεριφοράς ενός συστήματος εξαιτίας απειροελάχιστων διαφορών στην αρχική του κατάσταση. Αυτή η αρχή είναι περισσότερο γνωστή μέσω της μεταφοράς του "φαινομένου της πεταλούδας" (butterfly effect), όπου μια μικρή μεταβολή, όπως το φτερούγισμα μιας πεταλούδας, μπορεί έμμεσα να συμβάλει στην εκδήλωση σημαντικών διαφοροποιήσεων στην εξέλιξη ενός ευρύτερου συστήματος, όπως η γήινη ατμόσφαιρα (Lorenz, 1963a).

Ένα από τα πρώτα και πιο εμβληματικά συστήματα που παρουσιάζουν χάος είναι αυτό του Lorenz, το οποίο συνήγαγε ο Edward Lorenz, μελετώντας ένα απλουστευμένο μοντέλο ατμοσφαιρικής ροής. Το σύστημα Lorenz ορίζεται από τις ακόλουθες μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

όπου σ , ρ , και β είναι παράμετροι που συνδέονται με φυσικές ιδιότητες του συστήματος, όπως οι ρυθμοί μεταφοράς θερμότητας και η γεωμετρία του ρευστού (Lorenz, 1963b). Για συγκεκριμένες τιμές αυτών των παραμέτρων, το σύστημα εμφανίζει έναν μη-γραμμικό ελκυστή – τον λεγόμενο ελκυστή Lorenz – με περίπλοκη, χαοτική δομή όπως φαίνεται και στο παρακάτω Σχήμα 2.5 που αναπαριστά τον ελκυστή του Lorenz για τιμές $\rho = 28$, $\sigma = 10$ και $\beta = 8/3$. Αυτή η μορφή δεν είναι απλώς ένα θεωρητικό κατασκεύασμα, αλλά έχει λάβει σημαντική ερευνητική προσοχή καθώς η χαοτική συμπεριφορά του εν λόγω συστήματος συνδέεται στενά με την πρόβλεψη καιρού, τη δυναμική αερίων και άλλων φυσικών και τεχνολογικών εφαρμογών.



Σχήμα 2.5 Ο ελκυστής του Lorenz.

Η Θεωρία του Χάους, ωστόσο, δεν περιορίζεται στο παράδειγμα του Lorenz. Η ανάπτυξη της μη γραμμικής δυναμικής οδήγησε στην αναγνώριση πολλών άλλων χαοτικών συστημάτων και ελκυστών, όπως ο ελκυστής του Rössler (Rössler, 1976). Ο τελευταίος αποτελεί επίσης ένα παράδειγμα απλού συστήματος με τρεις διαφορικές εξισώσεις που επιδεικνύει χαοτικά φαινόμενα. Σε τέτοια συστήματα, ακόμη και αν οι εξισώσεις είναι ντετερμινιστικές και δεν περιέχουν στοχαστικά στοιχεία, οι λύσεις είναι ιδιαίτερα περίπλοκες και μη περιοδικές. Έτσι, παρόλο που η γενική εξέλιξή τους υπαγορεύεται από καθορισμένους νόμους, η ακριβής πρόβλεψη των μελλοντικών καταστάσεων είναι αδύνατη μακροπρόθεσμα λόγω της ευαισθησίας τους στις αρχικές συνθήκες.

Το ενδιαφέρον για τη Θεωρία του Χάους εκτείνεται πέρα από τη μετεωρολογία και τη ρευστομηχανική. Η χαοτική συμπεριφορά συναντάται σε ποικίλα συστήματα, από τα οικονομικά μοντέλα και τη δυναμική πληθυσμών στη βιολογία (May, 1976) μέχρι την κυκλοφοριακή ροή και τις τηλεπικοινωνίες. Επιπλέον, η μαθηματική μελέτη των χαοτικών συστημάτων έχει συνεισφέρει σε κλάδους όπως η κρυπτογραφία, αξιοποιώντας την απρόβλεπτη φύση των χαοτικών εξισώσεων για την ανάπτυξη ασφαλών κρυπτοσυστημάτων (Strogatz, 2018a).

Συμπερασματικά, η Θεωρία του Χάους έχει συμβάλει σημαντικά στην αλλαγή της προσέγγισής μας όσον αφορά την προβλεψιμότητα και τη ντετερμινιστική φύση των φυσικών και κοινωνικών συστημάτων. Μέσω της μελέτης των χαοτικών ελκυστών και της συμπεριφοράς μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, έχουμε αναπτύξει μια βαθύτερη κατανό-

ηση της πολυπλοκότητας που διέπει τον φυσικό κόσμο και των θεμελιωδών ορίων της πρόβλεψης.

2.5.2 Θεωρία Lyapunov και Εκθέτες Lyapunov

Η Θεωρία Lyapunov αποτελεί ένα θεμελιώδες εργαλείο στη μελέτη της σταθερότητας δυναμικών συστημάτων, αποτελώντας βασικό πυλώνα στη μαθηματική ανάλυση και στον έλεγχο μη γραμμικών συστημάτων (Khalil, 2002). Εισήχθη από τον Ρώσο μαθηματικό Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, ο οποίος στα τέλη του 19ου αιώνα ανέπτυξε μεθόδους για την αξιολόγηση της σταθερότητας των λύσεων διαφορικών εξισώσεων χωρίς να απαιτείται η ρητή επίλυσή τους (Lyapunov, 1992). Η θεωρία αυτή ενσωματώθηκε αργότερα στις σύγχρονες προσεγγίσεις ανάλυσης και ελέγχου, παρέχοντας ένα πλαίσιο για την μελέτη της τοπικής και παγκόσμιας σταθερότητας συστημάτων από τη μηχανική και την αεροναυπηγική έως τη ρομποτική και τα βιολογικά συστήματα (Sastry, 2013).

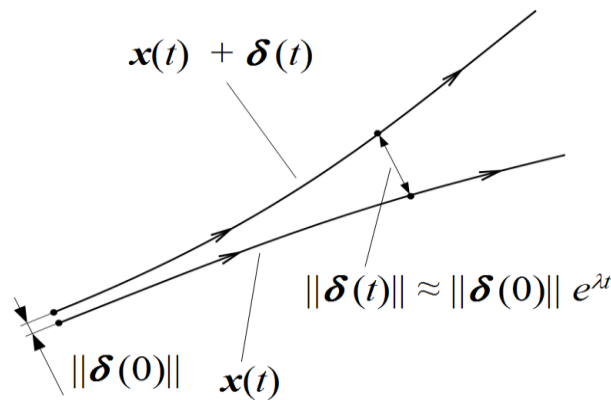
Σύμφωνα με τη Θεωρία Lyapunov, η σταθερότητα μιας κατάστασης ισορροπίας ενός συστήματος εξετάζεται μέσω της εισαγωγής μιας κατάλληλης "συνάρτησης Lyapunov". Αν ένα σύστημα με κατάσταση x μπορεί να περιγραφεί από ένα σύνολο μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων της μορφής $\dot{X} = f(X)$, όπου $X \in \mathbb{R}^n$, τότε αναζητείται μια διαφορίσιμη συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ που πληροί τις ακόλουθες συνθήκες:

1. $V(x) > 0$ για όλες τις x εκτός από την κατάσταση ισορροπίας $x = x_e$ για την οποία $V(x_e) = 0$. Η ιδιότητα αυτή εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση Lyapunov λειτουργεί ως "υποψήφια ενέργεια" του συστήματος, απεικονίζοντας ένα μέτρο απόστασης από την ισορροπία.
2. Η παράγωγος του V ως προς το χρόνο $\dot{V}$, είναι μη θετική, δηλαδή $\dot{V} \leq 0$. Αν ισχύει μάλιστα $\dot{V} < 0$ για $x \neq x_e$, τότε το σύστημα θεωρείται ασυμπτωτικά σταθερό. Η ιδιότητα αυτή υποδηλώνει ότι "η ενέργεια του συστήματος" φθίνει με την πάροδο του χρόνου, ωθώντας την τροχιά του συστήματος προς την κατάσταση ισορροπίας (Khalil, 2002; Vidyasagar, 2002).

Η εύρεση μιας κατάλληλης συνάρτησης Lyapunov και η επαλήθευση των παραπάνω κριτηρίων επιτρέπει τον προσδιορισμό της σταθερότητας χωρίς την άμεση επίλυση των εξισώσεων κίνησης. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε περιπτώσεις όπου οι εξισώσεις είναι περίπλοκες ή μη αναλύσιμες με κλασικές μεθόδους. Εφαρμογές αυτής της θεωρίας παρατηρούνται ευρέως στην ανάλυση και το σχεδιασμό ελεγκτών ανάδρασης, στη σταθεροποί-

ηση ρομπότ και στην αξιολόγηση της ασφάλειας συστημάτων παραγωγής ενέργειας (Haddad & Chellaboina, 2008).

Σε συμπληρωματικό επίπεδο, οι Εκθέτες Lyapunov αποτελούν ένα επιπρόσθετο εργαλείο για τη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς συστημάτων, ιδίως όταν εξετάζουμε πολύπλοκα, μη γραμμικά και ενδεχομένως χαοτικά συστήματα (Eckmann & Ruelle, 1985). Οι Εκθέτες Lyapunov ποσοτικοποιούν τον ρυθμό με τον οποίο διαχωρίζονται (ή πλησιάζουν) γειτονικές τροχιές όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.6 σε έναν χώρο φάσεων.



Σχήμα 2.6 Διαχωρισμός δύο γειτονικών τροχιών στο χώρο των φάσεων.

Συγκεκριμένα, ένας θετικός μέγιστος Εκθέτης Lyapunov αποτελεί ένδειξη χάους, καθώς υποδηλώνει ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες και εκθετική απόκλιση των τροχιών με την πάροδο του χρόνου (Wolf et al., 1985). Από την άλλη, αρνητικοί ή μηδενικοί εκθέτες Lyapunov προοιωνίζουν την ύπαρξη μη χαοτικής συμπεριφοράς και σταθερότερων δυναμικών.

Η εμπειρική εκτίμηση των Εκθετών Lyapunov από δεδομένα χρόνου (time series) επιτρέπει την ανάλυση σε πληθώρα εφαρμογών, όπως η πρόβλεψη καιρού, η οποία είναι υπερβολικά ευαίσθητη στις αρχικές συνθήκες (Lorenz, 1963b), τα οικονομικά μοντέλα, όπου η αβεβαιότητα και οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ πρακτόρων μπορούν να οδηγήσουν σε χαοτική συμπεριφορά των αγορών (Brock, 1991), και συστήματα βιολογίας πληθυσμών, όπου η απόκριση των ειδών σε ελάχιστες περιβαλλοντικές αλλαγές μπορεί να επιφέρει δραστικές διαφοροποιήσεις στη δυναμική τους (May, 1976).

Συνολικά, η Θεωρία Lyapunov και οι Εκθέτες Lyapunov συνιστούν ένα ενοποιημένο πλαίσιο μελέτης της σταθερότητας και της πολυπλοκότητας στη δυναμική συστημάτων. Με την κατάλληλη αξιοποίησή τους, μπορούμε να κατανοήσουμε βαθύτερα τη συμπερι-

φορά συστημάτων, να προβλέψουμε τη μελλοντική τους εξέλιξη και να σχεδιάσουμε αποτελεσματικούς ελεγκτικούς μηχανισμούς για τη διασφάλιση της επιθυμητής λειτουργίας τους.

2.5.3 Εφαρμογή της Θεωρίας Lyapunov στον Έλεγχο Νευρωνικών Δικτύων

Η θεωρία Lyapunov αποτελεί ένα ισχυρό θεωρητικό πλαίσιο για την εξασφάλιση της σταθερότητας νευρωνικών δικτύων, ένας στόχος κρίσιμης σημασίας για την ασφαλή και αποδοτική λειτουργία τους. Στον ευρύτερο χώρο των δυναμικών συστημάτων, τα νευρωνικά δίκτυα αποτελούν μη γραμμικές δομές, όπου η αστάθεια μπορεί να οδηγήσει σε ανεπιθύμητες ταλαντώσεις, εκθετικές αποκλίσεις των καταστάσεων ή και πλήρη αποδιοργάνωση της λειτουργίας τους (Khalil, 2002). Στο πλαίσιο της θεωρίας συστημάτων και ελέγχου, η σταθερότητα των νευρωνικών δικτύων συνδέεται στενά με την πρόβλεψη, την αντοχή σε θορύβους και παρεμβολές, καθώς και με την αποτελεσματική προσαρμογή τους σε μεταβαλλόμενες συνθήκες.

Ένα κλασικό παράδειγμα αξιοποίησης της θεωρίας Lyapunov στη μελέτη νευρωνικών δικτύων αφορά την ανάλυση σταθερότητας συνεχών χρονικά μοντέλων. Ένα τυπικό τέτοιο μοντέλο μπορεί να περιγραφεί από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων της μορφής:

$$\dot{x} = Ax + Bf(Cx + Du)$$

όπου $\dot{x}$ δηλώνει το διάνυσμα των παραγώγων της κατάστασης του συστήματος, $x \in \mathbb{R}^n$ είναι το διάνυσμα κατάστασης, u το διάνυσμα εισόδων και τα A, B, C, D είναι πίνακες κατάλληλων διαστάσεων που προσδιορίζουν τη δυναμική του νευρωνικού δικτύου. Η μη γραμμικότητα προέρχεται από τη συνάρτηση ενεργοποίησης $f(\cdot)$, η οποία συχνά επιλέγεται από ένα σύνολο μη γραμμικών, κορεσμένων ή σιγμοειδών συναρτήσεων (L. Chen & Aihara, 1995; Forti & Nistri, 2003; Hopfield, 1984).

Για την αξιολόγηση της σταθερότητας ενός τέτοιου συστήματος, εισάγεται μια διαφορίσιμη συνάρτηση Lyapunov $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $V(x) > 0$ για όλα τα $x \neq 0$ και $V(0) = 0$.
2. Η παράγωγός της ως προς το χρόνο $\dot{V}$, είναι αρνητικά ορισμένη ($\dot{V}(x) < 0$) στην περιοχή ενδιαφέροντος (Slotine, 1991).

Η ύπαρξη μίας τέτοιας συνάρτησης εγγυάται ότι η "ενέργεια" του συστήματος φθίνει με την πάροδο του χρόνου, οδηγώντας την κατάσταση του δικτύου προς μια σταθερή κατά-

σταση ισορροπίας. Με άλλα λόγια, η χρήση της θεωρίας Lyapunov επιτρέπει τον καθορισμό συνθηκών υπό τις οποίες το νευρωνικό δίκτυο θα συμπεριφέρεται σταθερά, αποφεύγοντας φαινόμενα όπως χαοτική συμπεριφορά ή μη φραγμένη αύξηση των καταστάσεων του.

Εκτός από τις κλασικές συνθήκες Lyapunov, οι Εκθέτες Lyapunov παρέχουν ένα επιπρόσθετο μέτρο ποσοτικοποίησης της ευαισθησίας ενός νευρωνικού δικτύου στις αρχικές συνθήκες. Ένας θετικός μέγιστος Εκθέτης Lyapunov υποδηλώνει χάος, δηλαδή εκθετικά αυξανόμενη απόκλιση μεταξύ κοντινών τροχιών του συστήματος, ενώ ένας μη θετικός εκθέτης υποδηλώνει ότι οι κοντινές τροχιές παραμένουν συγκεντρωμένες, εξασφαλίζοντας σταθερότητα (Ott, 2002; Wolf et al., 1985). Η ανάλυση των Εκθετών Lyapunov επιτρέπει έτσι μια λεπτομερέστερη κατανόηση του πόσο γρήγορα ένα νευρωνικό δίκτυο ενδέχεται να απωλέσει την “προβλεψιμότητά” του ή να αποκλίνει από την επιθυμητή πορεία του.

Η αποτελεσματική εφαρμογή της θεωρίας Lyapunov και των Εκθετών Lyapunov στη σχεδίαση και τον έλεγχο νευρωνικών δικτύων έχει ήδη βρει σημαντικές εφαρμογές σε προηγμένα ρομποτικά και αυτόματα συστήματα ελέγχου. Για παράδειγμα, τα σταθερά νευρωνικά δίκτυα χρησιμοποιούνται στην επεξεργασία σημάτων, στον έλεγχο κίνησης ρομπότ, στην ανάλυση δεδομένων πραγματικού χρόνου, καθώς και σε προηγμένους αλγόριθμους εκμάθησης και προσαρμοστικού ελέγχου (J. Park & Sandberg, 1993; Strogatz, 2018b). Επιπλέον, σταθερά νευρωνικά συστήματα μελετώνται και στη βιολογία, όπου μοντέλα νευρωνικών δικτύων χρησιμοποιούνται για την κατανόηση της σταθεροποίησης μοτίβων δραστηριότητας στον εγκέφαλο ή σε πληθυσμιακά μοντέλα.

Συνολικά, η θεωρία Lyapunov και οι Εκθέτες Lyapunov προσφέρουν ένα ευέλικτο και αυστηρό μαθηματικό πλαίσιο για την ανάλυση και το σχεδιασμό νευρωνικών δικτύων. Χάρη σε αυτές τις μεθόδους, καθίσταται δυνατή η πιστοποίηση της σταθερότητας και αξιοπιστίας λειτουργίας τέτοιων συστημάτων, εξασφαλίζοντας ότι τα νευρωνικά δίκτυα μπορούν να ανταποκριθούν σε απαιτητικές εφαρμογές, από την τεχνητή νοημοσύνη και τη ρομποτική έως την ανάλυση πολύπλοκων δεδομένων και την αυτοματοποίηση προηγμένων διαδικασιών.

2.5.4 Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας, η Θεωρία Lyapunov και οι Εκθέτες Lyapunov αναδεικνύονται ως κεντρικά εργαλεία στην ανάλυση, σχεδίαση και βελτίωση της συμπεριφοράς σύνθετων δυναμικών

συστημάτων, όπως τα νευρωνικά δίκτυα. Μέσω της Θεωρίας Lyapunov παρέχεται ένα αυστηρό μαθηματικό πλαίσιο για τη διασφάλιση της σταθερότητας. Η κατάλληλη επιλογή συναρτήσεων Lyapunov, σε συνδυασμό με τις συνθήκες που εγγυώνται αρνητική παράγωγο ως προς τον χρόνο, διασφαλίζει την ασυμπτωτική σύγκλιση του συστήματος σε κατάσταση ισορροπίας, ενώ η ταυτοποίηση των Εκθετών Lyapunov επιτρέπει την ακριβέστερη ποσοτικοποίηση της ευαισθησίας απέναντι στις αρχικές συνθήκες και τον χαρακτηρισμό της δυναμικής ως χαοτικής ή σταθερής. Οι μέθοδοι αυτές έχουν ευρείες εφαρμογές σε διάφορους κλάδους – από τη μετεωρολογία και την οικονομία, έως τις σύγχρονες τεχνολογικές εφαρμογές στη ρομποτική, την αυτόματη ρύθμιση, και τα νευρωνικά δίκτυα – καθιστώντας εφικτή την αξιολόγηση της λειτουργίας, την πρόβλεψη της συμπεριφοράς, και τον έλεγχο συστημάτων υπό ποικίλες συνθήκες και απαιτήσεις. Με τον τρόπο αυτό, η θεωρητική αυτή βάση συμβάλλει καθοριστικά στη βελτίωση της αξιοπιστίας, της αποδοτικότητας και της ασφάλειας σε εφαρμογές υψηλών απαιτήσεων του σύγχρονου επιστημονικού και τεχνολογικού πεδίου.

3. Σχεδιασμός και Μεθοδολογία

3.1 Εισαγωγή στο Σχεδιασμό

Η ανάπτυξη του συστήματος που συνδυάζει τη Grammatical Evolution (GE) και τα Δίκτυα RBF (Radial Basis Function) πραγματοποιήθηκε με τη χρήση της γλώσσας προγραμματισμού C++. Η επιλογή της C++ έγινε κυρίως λόγω της υψηλής ταχύτητας εκτέλεσης και της δυνατότητας λεπτομερούς ελέγχου της μνήμης, στοιχεία απαραίτητα για υπολογιστικά εντατικές εφαρμογές, όπως η εκπαίδευση νευρωνικών δικτύων και η εξελικτική βελτιστοποίηση. Επίσης, η υλοποίηση αξιοποιεί τη βιβλιοθήκη NNC η οποία παρέχει έτοιμες δομές δεδομένων και συναρτήσεις για τη δημιουργία νευρωνικών δικτύων, διευκολύνοντας τη ρύθμιση των επιπέδων, των συναρτήσεων ενεργοποίησης και των μεθόδων εκπαίδευσης.

Το έργο αναπτύχθηκε και οργανώθηκε μέσα από το περιβάλλον Qt, ένα πλαίσιο ανάπτυξης εφαρμογών που επιτρέπει την παράλληλη διαχείριση αρχείων, ροών δεδομένων και την εκτέλεση σε διάφορα λειτουργικά συστήματα. Αν και το Qt συνδέεται συχνά με τη δημιουργία γραφικών περιβαλλόντων (GUI), σε αυτή την εργασία χρησιμοποιήθηκε κυρίως για τις δυνατότητες διαχείρισης αρχείων, καθώς και για την υποστήριξη cross-platform χωρίς ουσιαστική αναμόρφωση κώδικα. Το Qt διαθέτει κλάσεις όπως QFile, QTextStream και QString, οι οποίες απλοποιούν σημαντικά την ανάγνωση και επεξεργασία δεδομένων από αρχεία. Στο παρόν κεφάλαιο περιγράφονται οι αποφάσεις που λήφθηκαν σχετικά με την αρχιτεκτονική του συστήματος, τη ροή δεδομένων από τα αρχεία μέχρι την τελική αξιολόγηση, και παρουσιάζεται αναλυτικά η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για την ολοκλήρωση του έργου.

3.2 Στόχοι Σχεδιασμού

Κατά τον σχεδιασμό του συστήματος, τέθηκαν συγκεκριμένοι στόχοι που αποσκοπούσαν στην ευελιξία, την επεκτασιμότητα, την αποδοτικότητα και τη διαχειρισιμότητα κώδικα. Αρχικά, κρίθηκε απαραίτητο να υπάρχει η δυνατότητα προσαρμογής των παραμέτρων του RBF δικτύου, όπως ο αριθμός κρυφών νευρώνων και οι ακτίνες συναρτήσεων ακτινικής βάσης, αλλά και η διαμόρφωση των ρυθμίσεων της Grammatical Evolution (π.χ. μέγεθος πληθυσμού, πιθανότητα μετάλλαξης). Επιπλέον, έπρεπε να διασφαλίζεται ότι η αρχιτεκτο-

νική μπορεί να υποστηρίξει εύκολα την προσθήκη νέων αλγορίθμων εξελικτικής βελτιστοποίησης ή νέων δομών δικτύων, χωρίς σοβαρή αναμόρφωση του υπάρχοντος κώδικα. Όσον αφορά την αποδοτικότητα, η προσοχή εστιάστηκε στην ελαχιστοποίηση του χρόνου εκτέλεσης, ώστε τα αποτελέσματα να παράγονται γρήγορα και με ακρίβεια (π.χ. σφάλμα εκπαίδευσης, τιμές εκθετών Lyapunov). Τέλος, η ανάγκη διατήρησης καθαρού και ευέλικτου κώδικα οδήγησε στον διαχωρισμό λειτουργιών σε λογικά ξεχωριστές ενότητες (αρχεία .h και .cpp), γεγονός που διευκολύνει τόσο τη συντήρηση όσο και την περαιτέρω ανάπτυξη.

3.3 Περιγραφή της Μεθοδολογίας

Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε περιλαμβάνει διακριτά βήματα, τα οποία καλύπτουν τη ροή από τη συλλογή και προεπεξεργασία των δεδομένων έως την τελική αξιολόγηση του μοντέλου. Συγκεκριμένα, στο στάδιο της αρχικής συλλογής και προεπεξεργασίας δεδομένων, τα αρχεία train/test διαβάστηκαν χρησιμοποιώντας τις κλάσεις QFile και QTextStream του Qt. Η εφαρμογή που αναπτύχθηκε παρέχει την δυνατότητα κανονικοποίησης των δεδομένων αλλά δεν χρησιμοποιήθηκε κανονικοποίηση. Όσον αφορά τη Grammatical Evolution, ορίστηκαν οι κανόνες παραγωγής (grammar rules) της γραμματικής, οι οποίοι καθόριζαν τις μορφές των RBF δικτύων που μπορούν να παραχθούν. Σε αυτό το πλαίσιο, τα χρωμοσώματα που δημιουργούνται τυχαία αντιστοιχούν σε διάφορες παραμετροποιήσεις του RBF (αριθμός κρυφών νευρώνων, τύπος και ακτίνα συναρτήσεων, κ.λπ.). Με αυτόν τον τρόπο, διασφαλίζεται ότι οι παραγόμενες αρχιτεκτονικές είναι συντακτικά και λειτουργικά έγκυρες, αφού απορρίπτονται όσες δεν συμβαδίζουν με τους γραμματικούς κανόνες.

Το RBF δίκτυο δημιουργείται δυναμικά με βάση τις παραμέτρους που προκύπτουν από τη GE. Πιο αναλυτικά, καθορίζεται η βασική δομή ενός RBF δικτύου, η οποία περιλαμβάνει ένα επίπεδο εισόδου, ένα κρυφό επίπεδο που βασίζεται σε συναρτήσεις ακτινικής βάσης και ένα γραμμικό επίπεδο εξόδου. Η βιβλιοθήκη NNC αξιοποιείται για τον χειρισμό της βασικής λογικής, ενώ η προσαρμογή του αριθμού κρυφών νευρώνων και άλλων παραμέτρων γίνεται σύμφωνα με τη «μετάφραση» των γονιδίων που προκύπτουν από τη GE. Κατόπιν, πραγματοποιείται εκπαίδευση του δικτύου, για την επιλογή κέντρων και για τον υπολογισμό των βαρών εξόδου.

Η εξελικτική διαδικασία περιλαμβάνει την αρχικοποίηση ενός πληθυσμού τυχαίων χρωμοσώματων και τον καθορισμό της συνάρτησης καταλληλότητας (fitness). Σε κάθε γενιά, τα χρωμοσώματα μεταφράζονται σε RBF δίκτυα, τα οποία εκπαιδεύονται και αξιολογούνται. Στη συνέχεια, μέσω τελεστών επιλογής, διασταύρωσης και μετάλλαξης, ο πληθυσμός εξελίσσεται διαδοχικά, με απώτερο σκοπό τη βελτίωση των παραμέτρων του δικτύου και τη μεγιστοποίηση (ή ελαχιστοποίηση) της συνάρτησης καταλληλότητας που έχει οριστεί. Η διαδικασία αυτή ολοκληρώνεται είτε με την πάροδο ενός συγκεκριμένου αριθμού γενεών, είτε όταν επέλθει σύγκλιση των αποτελεσμάτων.

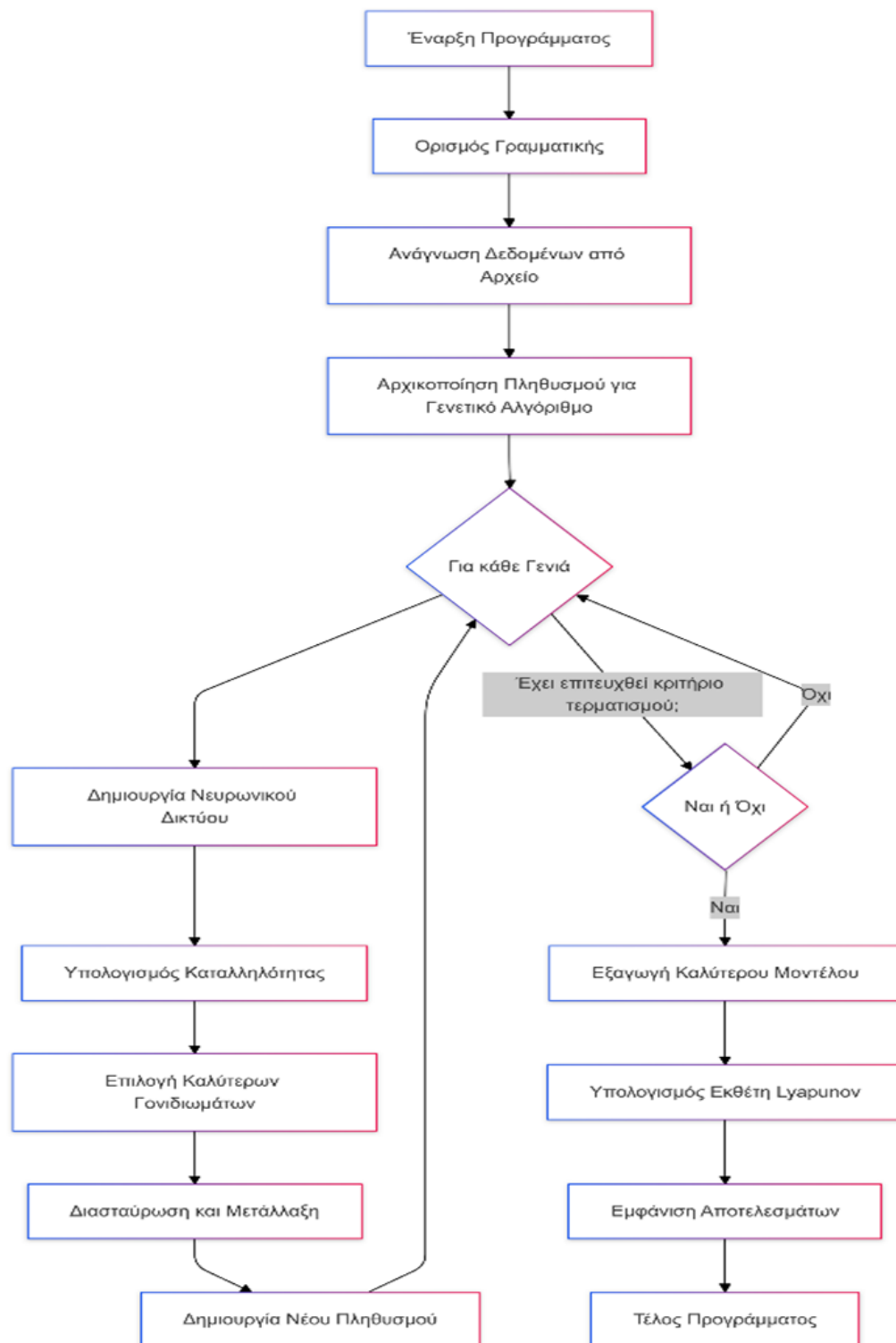
Σε επίπεδο ανάλυσης της δυναμικής συμπεριφοράς, μετά την εκπαίδευση του βέλτιστου RBF δικτύου, εφαρμόζεται η μέθοδος Lyapunov για τον υπολογισμό του μέγιστου εκθέτη Lyapunov. Με αυτόν τον τρόπο, αποκαλύπτεται η πιθανή χαοτική συμπεριφορά του συστήματος, καθώς ένας θετικός εκθέτης Lyapunov υποδηλώνει ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες. Αντίθετα, μια μη θετική τιμή (αρνητική ή μηδενική) δείχνει ότι το σύστημα δεν παρουσιάζει έντονα χαοτικά χαρακτηριστικά.

Τέλος, πραγματοποιείται η αξιολόγηση και η επαλήθευση της απόδοσης του δικτύου μέσα από την εξέταση του σφάλματος εκπαίδευσης και δοκιμής. Επιπλέον, εξετάζονται οι τιμές του εκθέτη Lyapunov σε διαφορετικές υλοποιήσεις, ώστε να επιβεβαιωθεί η σταθερότητα ή η χαοτική συμπεριφορά του μοντέλου.

3.4 Αρχιτεκτονική του Συστήματος

Η αρχιτεκτονική του συστήματος χωρίζεται σε επιμέρους ενότητες οι οποίες συνεργάζονται για να πετύχουν το συνολικό αποτέλεσμα. Στην ενότητα εισόδου δεδομένων, αξιοποιούνται λειτουργίες του Qt για την ανάγνωση και την προεπεξεργασία των δεδομένων, καθώς και για τη διαχείριση σφαλμάτων που σχετίζονται με την αδυναμία ανοίγματος αρχείων ή την εντοπισμένη ασυνέπεια των τιμών. Στην ενότητα γραμματικής και Grammatical Evolution, ορίζονται οι κανόνες που καθορίζουν πώς προκύπτει το RBF δίκτυο από το γονιδίωμα, εφαρμόζονται οι τελεστές επιλογής και μετάλλαξης και ρυθμίζεται ο τρόπος που εξελίσσεται ο πληθυσμός. Η ενότητα RBF δικτύου, μέσω της βιβλιοθήκης NNC, επιτρέπει τη δημιουργία και την εκπαίδευση του δικτύου, αξιοποιώντας παραμέτρους όπως κέντρα

και ακτίνες των συναρτήσεων ακτινικής βάσης. Παρακάτω, στο Σχήμα 3.1 βλέπουμε το διάγραμμα ροής της εφαρμογής.



Σχήμα 3.1 Το διάγραμμα ροής της εφαρμογής.

Η ενότητα υπολογισμού του εκθέτη Lyapunov διαχειρίζεται τη λογική που σχετίζεται με τη μελέτη της συμπεριφοράς του συστήματος με εξέταση της εξόδου του δικτύου.

Τέλος, η ενότητα ελέγχου ροής, που περιλαμβάνει τη συνάρτηση `main` και τη συνάρτηση `run`, συντονίζει την εκτέλεση όλων των παραπάνω, θέτοντας έτσι τη σειρά με την οποία εισάγονται τα δεδομένα, εκτελείται η GE και, στη συνέχεια, υπολογίζεται ο εκθέτης Lyapunov.

3.5 Στρατηγική Ανάπτυξης

Η στρατηγική ανάπτυξης του έργου πραγματοποιήθηκε σε βήματα. Αρχικά έγινε ενσωμάτωση της Grammatical Evolution, με τον ορισμό της γραμματικής και του τρόπου που κάθε γονιδίωμα μεταφράζεται σε αρχιτεκτονική δικτύου. Με αυτόν τον τρόπο, οι παράμετροι του δικτύου μπορούσαν να προκύπτουν από μια εξελικτική διαδικασία αντί να επιλέγονται χειροκίνητα. Αφού επαληθεύτηκε η λειτουργία του RBF+GE, προστέθηκε το τμήμα ανάλυσης της δυναμικής συμπεριφοράς μέσω Lyapunov. Τέλος, εκτελέστηκαν εκτενείς δοκιμές και πραγματοποιήθηκαν βελτιστοποιήσεις, τόσο σε επίπεδο κώδικα όσο και στο επίπεδο επιλογής παραμέτρων της Grammatical Evolution, προκειμένου να επιτυγχάνεται ικανοποιητική απόδοση σε διαφορετικά σύνολα δεδομένων.

3.6 Συνοψίζοντας

Το Κεφάλαιο αυτό περιγράφει λεπτομερώς τον τρόπο με τον οποίο σχεδιάστηκε και αναπτύχθηκε ένα σύστημα για την εκπαίδευση RBF δικτύων μέσω Grammatical Evolution, με συγχρονισμένη αξιοποίηση της βιβλιοθήκης NNC, της γλώσσας προγραμματισμού C++ και του πλαισίου Qt. Η μέθοδος βασίστηκε σε μια συγκεκριμένη ροή διεργασιών που περιλαμβάνει από την ανάγνωση και προεπεξεργασία δεδομένων έως την ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς του εκπαιδευμένου μοντέλου μέσω Lyapunov. Χάρη στις αρχές του ευέλικτου και επεκτάσιμου σχεδιασμού, το τελικό σύστημα κρίνεται ικανό να προσφέρει υψηλή ακρίβεια στην εκπαίδευση των RBF δικτύων, ενώ παράλληλα επιτρέπει την ανίχνευση και τη μελέτη χαοτικών χαρακτηριστικών, όταν αυτά εμφανίζονται.

4. Υλοποίηση και Πειράματα

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό επικεντρωνόμαστε στην πρακτική εφαρμογή της μεθοδολογίας που περιεγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο και στην παρουσίαση των πειραματικών αποτελεσμάτων. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά περιγράφουμε τον τρόπο οργάνωσης και ανάπτυξης του κώδικα, τις συναρτήσεις και τις κλάσεις που δημιουργήθηκαν, καθώς και τις βιβλιοθήκες που χρησιμοποιήθηκαν (C++, Qt, NNC, exptrk κ.λπ.). Στη συνέχεια, αναφερόμαστε στις συνθήκες κάτω από τις οποίες εκτελέστηκαν τα πειράματα, στα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν, στον τρόπο αξιολόγησης του μοντέλου, καθώς και στα αποτελέσματα από την εκτέλεση της Grammatical Evolution (GE) και την εκπαίδευση του RBF δικτύου. Τέλος, αναλύουμε την επίδοση του συστήματος υπό διαφορετικές ρυθμίσεις και εξετάζουμε την παρουσία (ή μη) χαοτικής συμπεριφοράς μέσα από τον υπολογισμό του μέγιστου εκθέτη Lyapunov.

4.2 Λεπτομέρειες Υλοποίησης

4.2.1 Εργαλεία και Βιβλιοθήκες

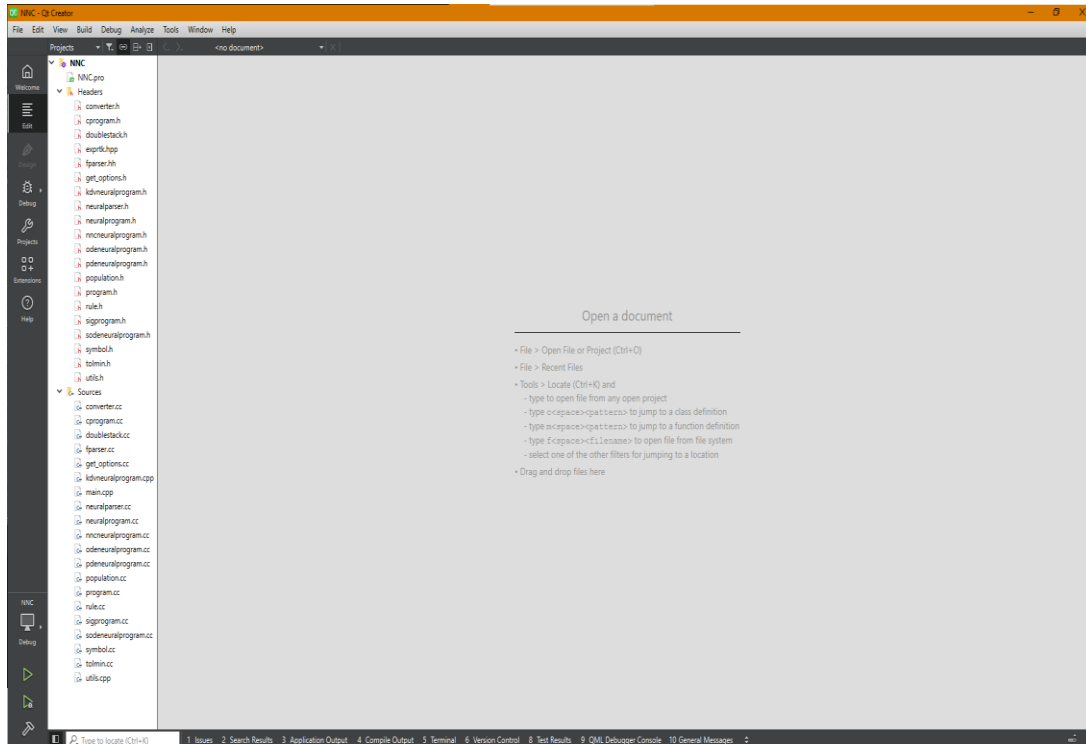
Η ανάπτυξη του κώδικα έγινε στην γλώσσα προγραμματισμού C++, ενώ ο μηχανισμός build υλοποιήθηκε με το **qmake** αξιοποιώντας έτσι το **Qt** ως περιβάλλον ανάπτυξης στην έκδοση Qt 6.8.1 (MSVC 2022).

Η βιβλιοθήκη **Qt** παρείχε τις κλάσεις QFile, QTextStream, QString κ.ά., οι οποίες απλοποίησαν σημαντικά τη διαχείριση των αρχείων (train/test) και των ροών δεδομένων σε πολλαπλές πλατφόρμες.

Η βιβλιοθήκη **NNC** χρησίμευσε στην υλοποίηση της βασικής δομής των νευρωνικών δικτύων, επιτρέποντας την εύκολη διαμόρφωση των επιπέδων και των συναρτήσεων ενεργοποίησης, ενώ για τον υπολογισμό των εκφράσεων χρησιμοποιήθηκε κατά τόπους η βιβλιοθήκη **exptrk**.

4.2.2 Διάρθρωση Κώδικα

Η υλοποίηση οργανώθηκε με τρόπο που διευκολύνει την ανεξάρτητη ανάπτυξη και συντήρηση των επιμέρους λειτουργιών. Ο κώδικας χωρίστηκε σε πολλά αρχεία *.h και *.cpp,



Σχήμα 4.1 Τα αρχεία στο πρόγραμμα Qt.

όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.1, σύμφωνα με τις αρχές της αντικειμενοστραφούς προσέγγισης και της ευκολίας επαναχρησιμοποίησης:

- **Αρχεία που αφορούν τη Grammatical Evolution:** Περιέχουν τις δομές και τις συναρτήσεις που σχετίζονται με την παραμετροποίηση του γονιδιώματος, την ενσωμάτωση των κανόνων της γραμματικής, τους τελεστές επιλογής, διασταύρωσης και μετάλλαξης, καθώς και τη συνάρτηση αξιολόγησης (fitness).
- **Αρχεία που αφορούν το RBF δίκτυο:** Χρησιμοποιούν τη βιβλιοθήκη NNC για να ορίσουν τις συναρτήσεις της εκπαίδευσης (π.χ. επιλογή κέντρων, υπολογισμός βαρών εξόδου) και της αξιολόγησης (σφάλμα, ακρίβεια κ.λπ).
- **Αρχεία που αφορούν τον υπολογισμό Lyapunov:** Χειρίζονται τη λογική που χρησιμοποιείται για την ανάλυση της δυναμικής του εκπαιδευμένου δικτύου (τροχιές, απόκλιση κοντινών καταστάσεων κ.λπ.).

- **Κεντρικό αρχείο main.cpp:** Περιέχει τη συνάρτηση `main()` και τη συνάρτηση `run()`, οι οποίες συντονίζουν την εκτέλεση του προγράμματος, από τη φόρτωση των δεδομένων μέχρι τη συγκέντρωση των αποτελεσμάτων.

4.2.3 Διαδικασία Μετάφρασης και Εκτέλεσης

Το πρόγραμμα μεταγλωττίζεται μέσα από το περιβάλλον Qt Creator ή εναλλακτικά μέσω τερματικού χρησιμοποιώντας τα εργαλεία `qmake` ή `CMake`, εξασφαλίζοντας ότι όλα τα αρχεία πηγαίου κώδικα (*.cpp, *.h) και οι απαιτούμενες βιβλιοθήκες (π.χ. NNC, expgtk) είναι σωστά δηλωμένα στο project. Μετά τη μεταγλώττιση προκύπτει ένα εκτελέσιμο (π.χ. “NNC.exe” σε Windows ή απλώς “NNC” σε Linux), το οποίο είναι έτοιμο να εκτελεστεί. Η εκτέλεση πραγματοποιείται μέσω της γραμμής εντολών, όπου ο χρήστης ή κάποιο script μπορούν να περάσουν σειρά από επιλογές (arguments). Οι επιλογές αυτές καθορίζουν μεταξύ άλλων τα αρχεία εισόδου/εξόδου, τον αριθμό γενεών και χρωμοσωμάτων, καθώς και το είδος της εργασίας που θα εκτελεστεί (π.χ. εκπαίδευση νευρωνικού δικτύου ή άλλο).

Συγκεκριμένα, οι διαθέσιμες επιλογές γραμμής εντολών του κύριου εκτελέσιμου **NNC** έχουν ως εξής:

-h: Όταν δοθεί αυτή η επιλογή, το πρόγραμμα εκτυπώνει μια οθόνη βοήθειας με πληροφορίες για τις διαθέσιμες παραμέτρους και στη συνέχεια τερματίζεται.

-p filename: Καθορίζει τη διαδρομή του προβλήματος-στόχου. Εάν η τιμή της παραμέτρου *kind* είναι *neural*, τότε το αρχείο filename αντιστοιχεί στο σύνολο εκπαίδευσης που θα χρησιμοποιηθεί για ταξινόμηση ή παλινδρόμηση. Σε κάθε άλλη περίπτωση, η παράμετρος αυτή παραπέμπει στη βιβλιοθήκη που περιέχει τη διαφορετική εξίσωση προς επίλυση.

-t filename: Ορίζει το αρχείο δοκιμής για το νευρωνικό δίκτυο. Η παράμετρος αυτή λαμβάνεται υπόψη μόνο αν η τιμή της *kind* είναι *neural*, οπότε το δίκτυο μετά την εκπαίδευση αξιολογείται σε αυτά τα δεδομένα δοκιμής.

-c count: Καθορίζει τον αριθμό των χρωμοσωμάτων που χρησιμοποιούνται στον πληθυσμό του γενετικού αλγορίθμου. Η προεπιλογή είναι 500, αλλά ο χρήστης μπορεί να μειώσει ή να αυξήσει αυτόν τον αριθμό ανάλογα με την υπολογιστική ισχύ και την πολυπλοκότητα του προβλήματος.

-l length: Καθορίζει το μέγεθος κάθε χρωμοσώματος, δηλαδή τον αριθμό των γονιδίων που θα κωδικοποιούν τις παραμέτρους ή τη δομή του RBF δικτύου. Η προεπιλεγμένη τιμή είναι 200.

-s rate: Ορίζει το ποσοστό επιλογής (*selection rate*) που χρησιμοποιείται στον γενετικό αλγόριθμο, με προεπιλογή το 0.1 (10%). Αυτό επηρεάζει πόσα από τα καλύτερα χρωμοσώματα μένουν για να συμμετάσχουν στην επόμενη γενιά.

-m rate: Ελέγχει το ποσοστό μετάλλαξης (*mutation rate*), με προεπιλεγμένη τιμή 0.05 (5%). Όσο υψηλότερη είναι η τιμή, τόσο μεγαλύτερη ποικιλία εισάγεται στον πληθυσμό, αλλά ταυτόχρονα αυξάνεται και ο κίνδυνος αποσταθεροποίησης της εξελικτικής διαδικασίας.

-r seed: Καθορίζει έναν ακέραιο ως τυχαίο σπόρο (*random seed*) για τους γεννήτορες τυχαίων αριθμών. Η προεπιλεγμένη τιμή είναι 1. Ο ορισμός διαφορετικής τιμής επιτρέπει την επανάληψη των πειραμάτων με ποικιλία αρχικών συνθηκών.

-k kind: Καθορίζει, ως string, το είδος εργασίας που θα εκτελέσει το πρόγραμμα. Αν η τιμή είναι *neural*, τότε το δίκτυο δουλεύει σε ρυθμό εκπαίδευσης νευρωνικών δικτύων.

-o filename: Ορίζει το αρχείο εξόδου (*output*). Η μορφή του εξαρτάται από την τιμή της *kind*: σε περίπτωση νευρωνικού δικτύου, μπορεί να αποθηκεύονται αποτελέσματα ταξινόμησης ή παλινδρόμησης.

-n gens: Καθορίζει τον μέγιστο επιτρεπόμενο αριθμό γενεών του γενετικού αλγορίθμου, με προεπιλογή 500. Εάν ο αλγόριθμος φτάσει σε αυτόν τον αριθμό γενεών χωρίς να βρεθεί ικανοποιητική λύση, διακόπτεται και επιλέγεται το καλύτερο αποτέλεσμα μέχρι εκείνη τη στιγμή.

-g gens: Καθορίζει τον αριθμό γενεών που θα εκτελεστούν πριν από το βήμα τοπικής αναζήτησης εντός του γενετικού αλγορίθμου. Η προεπιλογή είναι 50. Αυτή η επιλογή είναι χρήσιμη αν θέλουμε να συνδυάσουμε τη GE με κάποια μέθοδο εντοπισμένης (*local*) βελτίωσης.

-d count: Ορίζει πόσα χρωμοσώματα θα συμμετέχουν στην τοπική αναζήτηση του γενετικού αλγορίθμου, με προεπιλεγμένη τιμή 20. Όσο μεγαλύτερος ο αριθμός, τόσο περισσότερες πιθανότητες για βελτίωση στο τοπικό βήμα, αλλά συνεπακόλουθα αυξάνεται και το υπολογιστικό κόστος.

Η χρήση αυτών των ορισμάτων διευκολύνει σημαντικά την προσαρμογή της εκτέλεσης στις ανάγκες του χρήστη, καθώς επιτρέπει τη μεταβολή παραμέτρων όπως το μέγεθος του πληθυσμού, τον αριθμό γενεών και την τυχειότητα, χωρίς να απαιτείται αλλαγή ή επαναμεταγλώττιση του κώδικα. Με αυτόν τον τρόπο, μπορεί κανείς να εκτελεί πολλαπλά σενάρια πειραματισμού, απλώς εισάγοντας διαφορετικά arguments στη γραμμή εντολών.

Μόλις ολοκληρωθεί η ρύθμιση των επιλογών, ο χρήστης ή το script καλεί το εκτελέσιμο αρχείο, π.χ.:

```
NNC -p train_file.txt -t test_file.txt -s 0.1 -m 0.05 -n 300 -r 3 -k neural
```

και το πρόγραμμα εκτελείται με τις αντίστοιχες ρυθμίσεις. Με τον τρόπο αυτόν, η ροή δεδομένων, η οργάνωση της Grammatical Evolution και η εκπαίδευση του RBF δικτύου μπορούν να ξεκινήσουν και να ολοκληρωθούν, καταγράφοντας ή εμφανίζοντας τα αποτελέσματα στον χρήστη, ανάλογα με τον ορισμό αρχείου εξόδου ή τις προκαθορισμένες ρυθμίσεις στο κώδικα.

4.2.4 Δομή των Δεδομένων

Τα train/test δεδομένα αποθηκεύονται σε αρχεία, όπου η πρώτη γραμμή συνήθως περιέχει τον αριθμό D (διάσταση εισόδου) και η δεύτερη γραμμή τον αριθμό M (πλήθος δειγμάτων). Η δομή των αρχείων train και test φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 4.2.

D					
M					
x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1D}	y_1	
x_{21}	x_{22}	$\dots$	x_{2D}	y_2	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_{M1}	x_{M2}	$\dots$	x_{MD}	y_M	

Σχήμα 4.2 Η δομή των αρχείων train και test.

Οι επόμενες γραμμές περιέχουν τα διανύσματα εισόδου και τις αντίστοιχες επιθυμητές εξόδους.

4.3 Υλοποίηση του RBF Δικτύου

4.3.1 Βασικές Κλάσεις RBF

Η βασική δομή του δικτύου RBF υλοποιήθηκε αξιοποιώντας τη **βιβλιοθήκη NNC**, η οποία παρέχει ένα σύνολο κλάσεων για τα επίπεδα εισόδου, τα κρυφά επίπεδα και το επίπεδο εξόδου. Κλάσεις όπως `NNCNeuralProgram` προσφέρουν μεθόδους για την αξιολόγηση του σφάλματος, τον υπολογισμό των παραγώγων (αν χρειάζεται) και τη συλλογή των βαρών. Σε αυτές προστίθενται κώδικες που αφορούν ειδικά τις συναρτήσεις ακτινικής βάσης, ώστε το κρυφό επίπεδο να υπολογίζει την συνάρτηση Gauss.

4.3.2 Εκπαίδευση RBF

Η εκπαίδευση ενός RBF δικτύου περιλαμβάνει τον καθορισμό των κέντρων και των ακτινών των συναρτήσεων ακτινικής βάσης, καθώς και τον υπολογισμό των βαρών στο επίπεδο εξόδου.

4.3.3 Παράμετροι Εκπαίδευσης

Κατά την υλοποίηση, ορίζονται παράμετροι όπως ο αριθμός νευρώνων, οι συναρτήσεις βάσης (Gaussian), το εύρος ακτινικής βάσης (σ) και ο τρόπος διασποράς τους. Στην περίπτωση μας με βάση την γραμματική της GE, αυτές οι παράμετροι ορίζονται δυναμικά.

4.4 Ενσωμάτωση Grammatical Evolution

4.4.1 Γραμματική

Για την Grammatical Evolution (GE) ορίσαμε μια γραμματική σε μορφή BNF που να περιγράφει τις μορφές των RBF δικτύων. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι ο αριθμός των νευρώνων ορίζεται δυναμικά. Η γραμματική που χρησιμοποιήσαμε είναι η εξής:

```
<S> ::= <RBFexpr>
<RBFexpr> ::= (<Weight>*<Gauss>)+(<Out>)
              | (<Weight>*<Gauss>)+(<Out>) + (<RBFexpr>)
```

$\langle \text{Weight} \rangle ::= \langle \text{Out} \rangle$
 $\langle \text{Gauss} \rangle ::= \exp(- (\langle \text{Distance} \rangle) / (2 * \text{pow}((\langle \text{Out} \rangle), 2)))$
 $\langle \text{Distance} \rangle ::= \text{pow}(((\langle \text{Input} \rangle) - (\langle \text{Out} \rangle)), 2)$
 $\quad | \text{pow}(((\langle \text{Input} \rangle) - (\langle \text{Out} \rangle)), 2) + \langle \text{Distance} \rangle$
 $\langle \text{Gauss} \rangle ::= \exp((-) / (2 * \text{pow}((\langle \text{Out} \rangle), 2)))$
 $\langle \text{Input} \rangle ::= x_1 | x_2 | \dots | x_d$
 $\langle \text{Number} \rangle ::= + \langle \text{DigitList} \rangle . \langle \text{DigitList} \rangle$
 $\quad | - \langle \text{DigitList} \rangle . \langle \text{DigitList} \rangle$
 $\langle \text{DigitList} \rangle ::= \langle \text{Digit} \rangle$
 $\quad | \langle \text{Digit} \rangle \langle \text{DigitList} \rangle$
 $\langle \text{Digit} \rangle ::= 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

4.4.2 Τελεστές Εξέλιξης

Αφού οριστεί η γραμματική, τα χρωμοσώματα (γονιδιώματα) δημιουργούνται τυχαία στην αρχή. Σε κάθε γενιά εκτελούνται:

1. **Επιλογή:** Μια μέθοδος διαλέγει τα καλύτερα χρωμοσώματα με βάση τη συνάρτηση καταλληλότητας.
2. **Διασταύρωση:** Δύο χρωμοσώματα ανταλλάσσουν τμήματα, δημιουργώντας νέους απογόνους.
3. **Μετάλλαξη:** Στα τυχαία σημεία του χρωμοσώματος, τροποποιείται η τιμή του γονιδίου.

Η διαδικασία διαρκεί έναν προκαθορισμένο αριθμό γενεών ή έως ότου η αξιολόγηση (fitness) πάψει να βελτιώνεται σημαντικά. Έτσι, υλοποιείται η εξελικτική βελτιστοποίηση του μοντέλου RBF.

4.5 Υπολογισμός Εκθέτη Lyapunov

4.5.1 Λογική Σύνδεση με RBF

Ο υπολογισμός του εκθέτη Lyapunov δίνει πληροφορίες για τη δυναμική συμπεριφορά ενός συστήματος που προκύπτει από την έξοδο του RBF δικτύου. Πρακτικά, μετά την εκπαίδευση, μπορούμε να ορίσουμε μια επαναληπτική διαδικασία, όπου η έξοδος του δικτύου γίνεται η επόμενη είσοδος. Παρακολουθώντας πώς αποκλίνουν δυο κοντινές τροχιές, ελέγχουμε εάν το σύστημα εμφανίζει χαοτική ευαισθησία.

4.5.2 Υλοποίηση

Εφαρμόστηκε η μέθοδος Lyapunov, όπου για κάθε βήμα υπολογίζεται η μεταβολή δx_i σε σχέση με την αρχική δx_0 , ενώ γίνεται κανονικοποίηση αν η απόκλιση γίνει πολύ μεγάλη ή πολύ μικρή. Μετά από μεγάλο αριθμό επαναλήψεων, εκτιμάται η τιμή $\lambda_{max} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{\delta x_i}{\delta x_0} \right)$. Η βιβλιοθήκη `exptk` διευκόλυνε την υλοποίηση αυτής της διαδικασίας για την αξιολόγηση της συνάρτησης RBF, αποφεύγοντας πολλαπλό, χειροκίνητο γράψιμο τύπων.

4.5.3 Κριτήρια Ερμηνείας

Αν ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov λ_{max} είναι θετικός, τότε έχουμε ενδείξεις χαοτικής συμπεριφοράς, διότι μικρές διαταραχές στις αρχικές συνθήκες μεγαλοποιούνται με την πάροδο των επαναλήψεων. Αν $\lambda_{max} \leq 0$, το σύστημα είτε τείνει σε σταθερή κατάσταση, είτε παρουσιάζει οριακό κύκλο, επομένως δεν παρατηρείται χάος. Κατά την εκτέλεση των δοκιμών ο δείκτης Lyapunov ήταν πάντα αρνητικός, γεγονός που μας δείχνει την σταθερότητα του παραγόμενου δικτύου.

4.6 Παρουσίαση Πειραμάτων

4.6.1 Περιγραφή Συνόλων Δεδομένων

Χρησιμοποιήθηκαν διάφορα σύνολα δεδομένων, τόσο για παλινδρόμηση όσο και για ταξινόμηση κλάσεων από το αποθετήριο UCI, <https://archive.ics.uci.edu/> και το Keel <https://sci2s.ugr.es/keel/datasets.php>.

Η επόμενη λίστα περιέχει τα σύνολα δεδομένων ταξινόμησης που χρησιμοποιήθηκαν:

1. **Alcohol**, σύνολο δεδομένων που σχετίζεται με την κατανάλωση αλκοόλ
2. **Dermatology**, ιατρικό σύνολο δεδομένων
3. **Ecoli**, σύνολο δεδομένων σχετικό με πρωτεΐνες
4. **Haberman's Survival**, σύνολο ιατρικών δεδομένων σχετικό με τον καρκίνο του μαστού
5. **Hepatitis**, σύνολο δεδομένων σχετικών με την ανίχνευση της ηπατίτιδας
6. **Ionosphere**, σύνολο δεδομένων σχετικών την ιονόσφαιρα
7. **Lymphography**, ιατρικό σύνολο δεδομένων
8. **Mammographic Mass**, ιατρικό σύνολο δεδομένων για την ανίχνευση του καρκίνου του μαστού
9. **Parkinsons**, σύνολο δεδομένων για την ανίχνευση της νόσου του Parkinson
10. **Spambase**, σύνολο δεδομένων για την ανίχνευση ανεπιθύμητων μηνυμάτων ηλεκτρονικού ταχυδρομίου
11. **Student Performance**, ένα σύνολο δεδομένων με μετρήσεις από σχολεία
12. **Wine**, σύνολο δεδομένων σχετικά με την ποιότητα του κρασιού
13. **Zoo**, σύνολο δεδομένων για την κατηγοριοποίηση ζώων

Η επόμενη λίστα περιέχει τα σύνολα δεδομένων παλινδρόμησης που χρησιμοποιήθηκαν:

1. **Abalone**, σύνολο μετρήσεων για τον υπολογισμό της ηλικίας των abalones
2. **Airfoil Self-Noise**, σύνολο δεδομένων αεροτομών από τη NASA
3. **Auto MPG**, σύνολο δεδομένων σχετικών με την κατανάλωση καυσίμων εντός πόλης
4. **Concrete Compressive Strength**, σύνολο δεδομένων για την μηχανική
5. **Plastic**, σύνολο δεδομένων για τον υπολογισμό της πίεσης σε πλαστικά
6. **Stock**, σύνολο δεδομένων για την προσέγγιση των τιμών των μετοχών
7. **Treasury**, σύνολο οικονομικών δεδομένων.

4.6.2 Ρυθμίσεις Δοκιμών και αποτελέσματα

Για κάθε σετ δεδομένων, ορίστηκε αριθμός γενεών 500, μέγεθος πληθυσμού 500 άτομα με μέγεθος 100, πιθανότητα μετάλλαξης 0.05 και με ποσοστό επιλογής 0.1.

Το fitness βασίστηκε κυρίως στο σφάλμα εκπαίδευσης, διασφαλίζοντας ταυτόχρονα ότι το testset παρακολουθείται για αποφυγή υπερβολικής προσαρμογής. Παράδειγμα αποτελεσμάτων παρουσιάζεται στο παρακάτω Σχήμα 4.3.

```

i = 498 f = -0.0779227 str = ((0.99)*exp((-((pow(x2-(9.9),2))+((pow(x2-(8.4),2))+((pow(x13-(98.65),2))+((pow(x5-(211.1),2))+((pow(x10-(99.5),2))+((pow(x13-(478.0),2))+((pow(x7-(34.2),2))+
((pow(x12-(9.8),2))+((pow(x4-(82.3),2)))))))))))/(2*pow((-2427.5),2))))+(0.0075397))+((0.9)*exp((-((pow(x12-(9.4),2))+((pow(x7-(40.0),2))+((pow(x5-(888.90),2))+((pow(x10-(72.4),2))+((pow(x12-(8.6),
2)))))))/(2*pow((-19.92),2))))+(-0.0088640))+((-0.9)*exp((-((pow(x4-(6.5),2))+((pow(x10-(45.13),2))+((pow(x10-(749.9),2))+((pow(x2-(8.4),2))+((pow(x13-(98.65),2))+((pow(x5-(211.1),2))+((pow(x10-
(99.5),2))+((pow(x13-(478.0),2))+((pow(x7-(34.2),2))+((pow(x12-(9.8),2))+((pow(x4-(82.3),2)))))))))))/(2*pow((-2427.5),2))))+(0.0075397))

i = 499 f = -0.0779199 str = ((0.99)*exp((-((pow(x2-(9.9),2))+((pow(x2-(9.4),2))+((pow(x13-(98.55),2))+((pow(x5-(211.1),2))+((pow(x10-(99.5),2))+((pow(x13-(478.0),2))+((pow(x7-(34.2),2))+
((pow(x12-(9.4),2))+((pow(x4-(82.3),2)))))))))))/(2*pow((-5.397),2))))+(0.00885554))+((0.9)*exp((-((pow(x12-(9.8),2))+((pow(x7-(40.0),2))+((pow(x5-(888.93),2))+((pow(x10-(72.8),2))+((pow(x12-
(-8.015743),2)))))))/(2*pow((-15.6),2))))+(0.00800))+((-0.9)*exp((-((pow(x4-(6.5),2))+((pow(x10-(45.17),2))+((pow(x10-(749.9),2))+((pow(x2-(9.4),2))+((pow(x13-(98.55),2))+((pow(x5-(211.1),2))+((pow(x10-
(99.5),2))+((pow(x13-(478.0),2))+((pow(x7-(34.2),2))+((pow(x12-(9.4),2))+((pow(x4-(82.3),2)))))))))))/(2*pow((-5.397),2))))+(0.0085554))

i = 500 f = -0.077918 str = ((0.99)*exp((-((pow(x2-(9.9),2))+((pow(x2-(8.1),2))+((pow(x13-(98.65),2))+((pow(x5-(211.1),2))+((pow(x10-(99.5),2))+((pow(x13-(478.0),2))+((pow(x7-(34.9),2))+
((pow(x12-(9.8),2))+((pow(x4-(82.3),2)))))))))))/(2*pow((-5.391),2))))+(0.00475594))+((0.9)*exp((-((pow(x12-(9.4),2))+((pow(x7-(30.0),2))+((pow(x5-(889.23),2))+((pow(x10-(72.8),2))+((pow(x12-(8.0),
2)))))))/(2*pow((-2992.775),2))))+(0.00400))+((-0.7)*exp((-((pow(x4-(6.5),2))+((pow(x10-(45.13),2))+((pow(x10-(709.9),2))+((pow(x2-(8.1),2))+((pow(x13-(98.65),2))+((pow(x5-(211.1),2))+((pow(x10-(99.5),
2))+((pow(x13-(478.0),2))+((pow(x7-(34.9),2))+((pow(x12-(9.8),2))+((pow(x4-(82.3),2)))))))))))/(2*pow((-5.391),2))))+(0.00475594))

TRAIN ERROR = 0.077918
TEST ERROR = 0.0454425
CLASS ERROR = 23.3333
0 μέγιστος εκθέτης Lyapunov είναι: -5.5781

```

Σχήμα 4.3 Αποτελέσματα μετά την εκτέλεση του προγράμματος.

Το κάθε πείραμα επαναλήφθηκε 30 φορές και υπολογίστηκε το μέσο ποσοστό σφάλματος ταξινόμησης και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα παλινδρόμησης. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της μεθόδου RBFGE που αναπτύξαμε σε σύγκριση με την κλασική μέθοδο δημιουργίας δικτύων RBF που βασίζεται στην μέθοδο των δύο φάσεων με 10 κόμβους επεξεργασίας.

Ακολουθεί ο Πίνακας 1 με τα πειραματικά αποτελέσματα για τα σύνολα δεδομένων ταξινόμησης:

Πίνακας 1 Πειραματικά αποτελέσματα για τα σύνολα δεδομένων ταξινόμησης.

Dataset	RBF	RBFGE
Alcohol QCM Sensor	49.38	51.24
Dermatology	62.34	45.2
Ecoli	59.48	54.18
Haberman's Survival	25.1	26.27
Hepatitis	64.63	54.25
Ionosphere	16.22	14.32
Lymphography	25.5	26.36
Mammographic Mass	21.38	17.67
Parkinsons	17.41	12.79
Spambase	29.35	16.95
Student Performance	5.49	7.63
Wine	31.41	11
Zoo	21.93	11.6
Μέσος Όρος	33.05	26.88

Ακολουθεί ο Πίνακας 2 με τα πειραματικά αποτελέσματα για τα σύνολα δεδομένων παλινδρόμησης.

Πίνακας 2 Πειραματικά αποτελέσματα για τα σύνολα δεδομένων παλινδρόμησης.

Dataset	RBF	RBFGE
Abalone	7.37	6.14
Airfoil Self-Noise	0.27	0.004
Auto MPG	17.87	11.03
Concrete Compressive Strength	0.011	0.012
Mortgage	1.45	0.165
Plastic	8.62	3.58
Stock	12.23	8.31
Treasury	2.02	0.0027
Μέσος Όρος	6.23	3.66

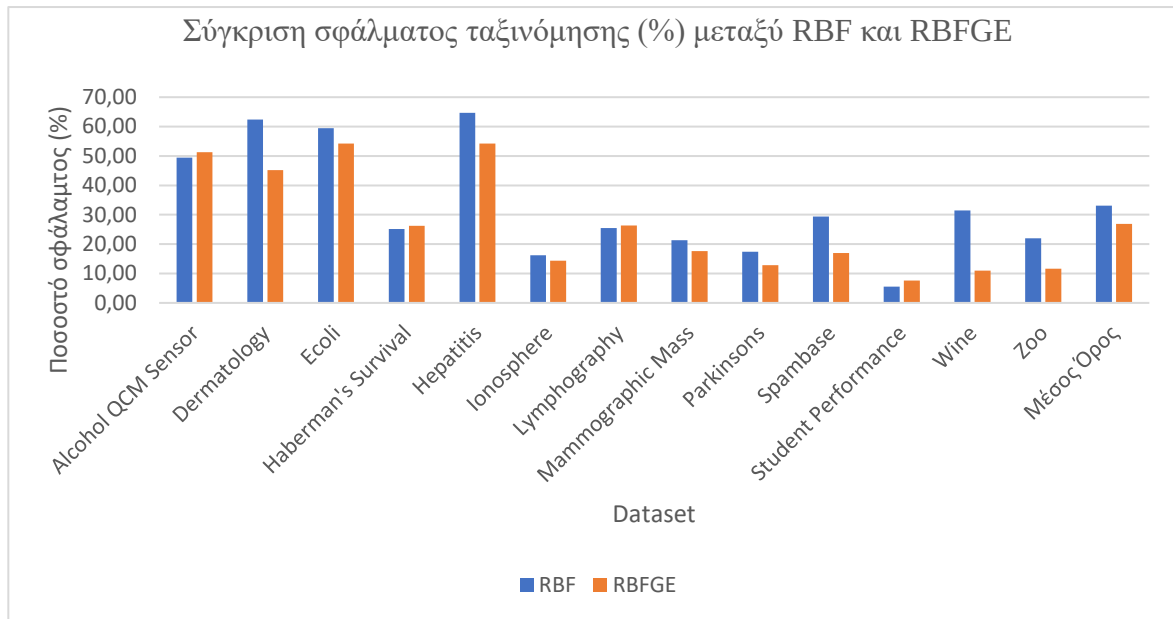
4.7 Ανάλυση Αποτελεσμάτων

4.7.1 Συζήτηση Απόδοσης

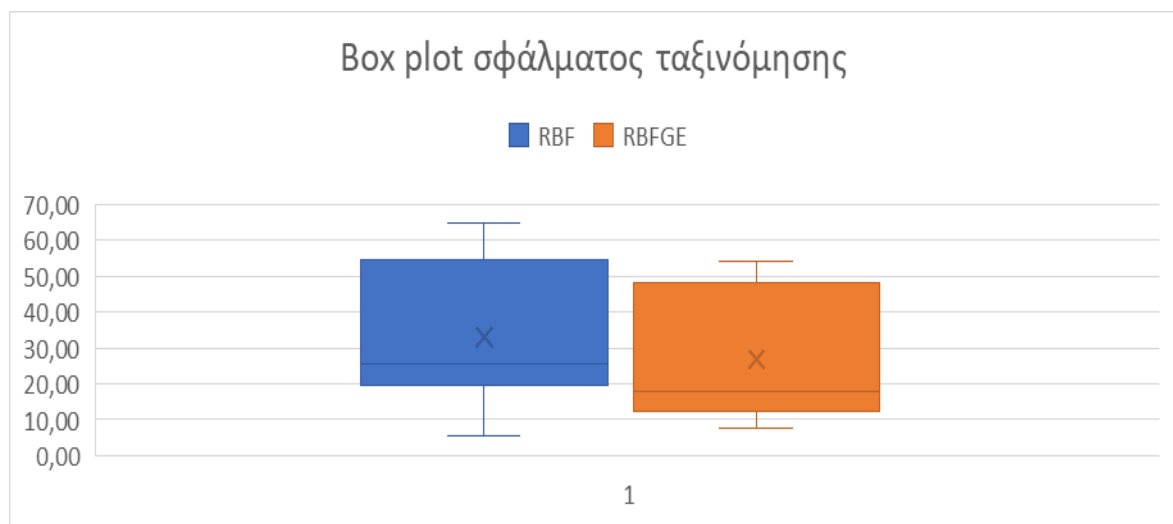
Η απόδοση του RBF + GE βρέθηκε βελτιωμένη σε σχέση με μια στατική εκπαίδευση RBF (όπου, για παράδειγμα, ο αριθμός νευρώνων καθορίζεται χειροκίνητα). Η στατιστική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε, αξιολόγησε την απόδοση της κλασικής μεθόδου δημιουργίας νευρωνικών δικτύων τύπου RBF συγκριτικά με τη μέθοδο που χρησιμοποιεί τη Grammatical Evolution (RBF-GE). Τα αποτελέσματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: ταξινόμηση και παλινδρόμηση.

Ταξινόμηση:

Στη σύγκριση μεταξύ των δύο μεθόδων στα προβλήματα ταξινόμησης τα δεδομένα της οποίας φαίνονται στα σχήματα 4.4 και 4.5, παρατηρήθηκε ότι η μέθοδος RBFGE πέτυχε κατά μέσο όρο χαμηλότερο ποσοστό σφάλματος (26.88%) συγκριτικά με την κλασική μέθοδο RBF (33.05%). Αυτό υποδεικνύει σημαντική βελτίωση στην απόδοση των νευρωνικών δικτύων όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος της Grammatical Evolution.



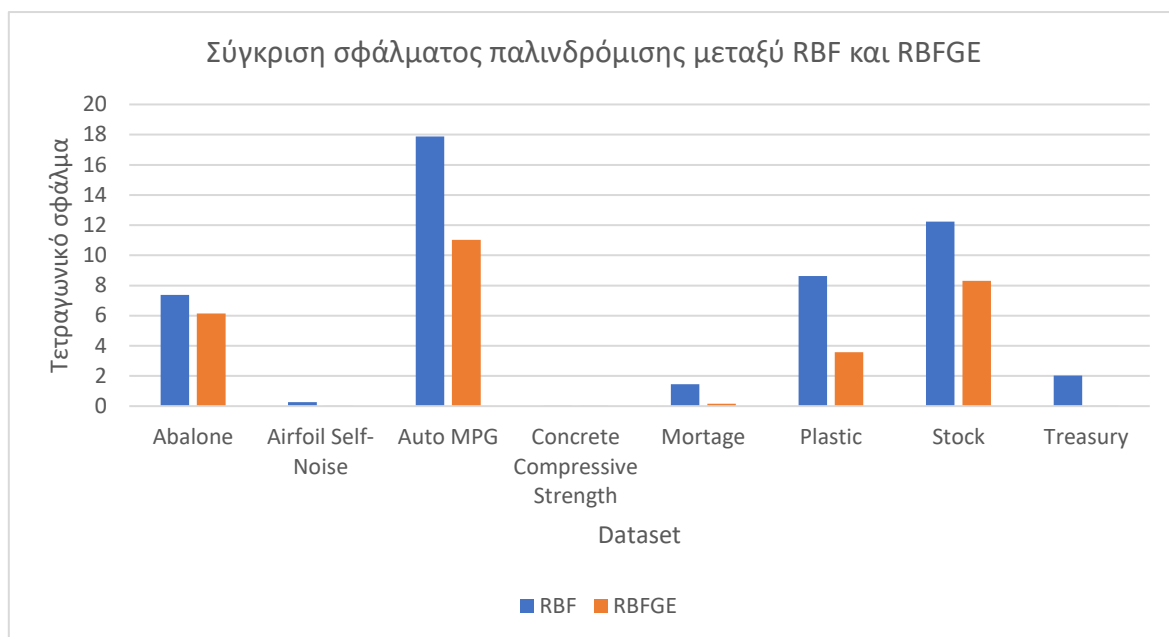
Σχήμα 4.4 Σύγκριση σφάλματος ταξινόμησης μεταξύ RBF και RBFGE.



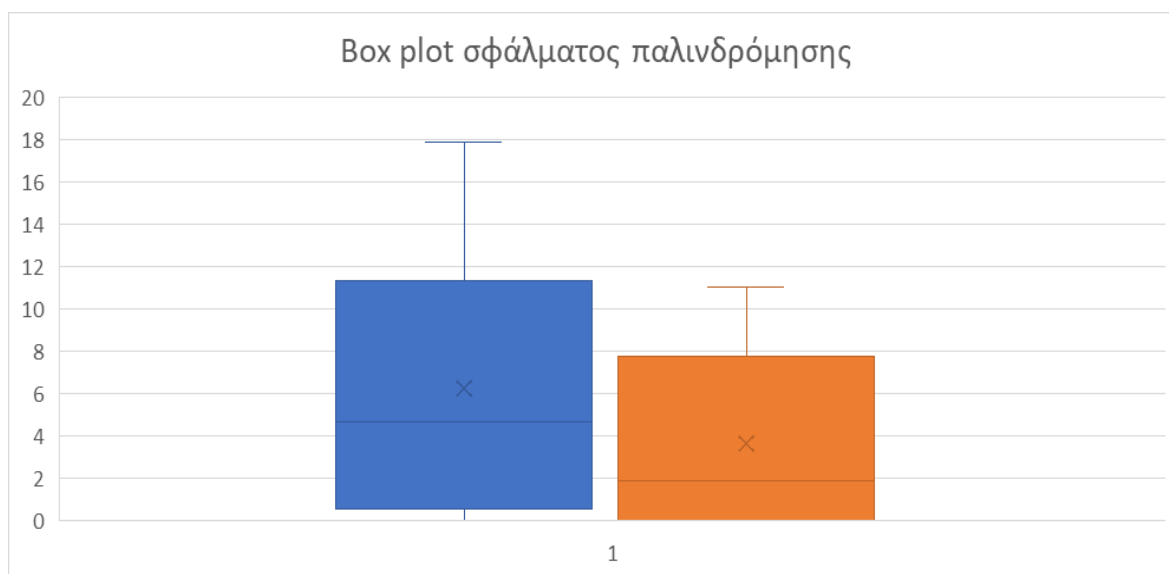
Σχήμα 4.5 Box plot σύγκρισης σφάλματος ταξινόμησης.

Παλινδρόμηση:

Στην περίπτωση των προβλημάτων παλινδρόμησης, τα αποτελέσματα ήταν ακόμα πιο εμφανή υπέρ της μεθόδου RBF-GE όπως φαίνονται στα παρακάτω Σχήματα 4.6 και 4.7. Το μέσο ποσοστό σφάλματος μειώθηκε σημαντικά από 6.23% με την κλασική μέθοδο RBF σε 3.66% με τη μέθοδο RBF-GE. Αυτό τονίζει τη χρησιμότητα της Grammatical Evolution σε προβλήματα παλινδρόμησης, καθώς επιτρέπει στα δίκτυα RBF να προσαρμόζονται πιο αποτελεσματικά στα δεδομένα.



Σχήμα 4.7 Σύγκριση σφάλματος παλινδρόμησης μεταξύ RBF και RBFGE.



Σχήμα 4.6 Box plot σύγκρισης σφάλματος παλινδρόμησης.

Συνολικά Συμπεράσματα:

Από τη στατιστική μελέτη προκύπτει ότι η ενσωμάτωση της μεθόδου Grammatical Evolution οδηγεί σε σταθερή και αισθητή βελτίωση της απόδοσης τόσο σε προβλήματα ταξινόμησης όσο και παλινδρόμησης. Η διαφορά μεταξύ των μεθόδων είναι στατιστικά σημαντική και συνεπώς, η υιοθέτηση της μεθόδου Grammatical Evolution συνιστάται έντονα για τη βελτιστοποίηση νευρωνικών δικτύων τύπου RBF.

4.7.2 Χαοτική Συμπεριφορά

Η μελέτη της δυναμικής του δικτύου μέσα από τον υπολογισμό του μεγίστου εκθέτη Lyapunov φανέρωσε ότι, σε συγκεκριμένες ρυθμίσεις μικρού αριθμού επαναλήψεων, το σύστημα δύναται να εμφανίσει ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες. Αυτό αποτυπώνεται σε ελαφρώς θετικές τιμές $\lambda_{\max}$. Τέτοιες παρατηρήσεις εγείρουν ερωτήματα για το κατά πόσο ένα χαοτικό RBF ενδέχεται να έχει αυξημένη ικανότητα προσαρμογής σε πολύπλοκα δεδομένα ή αν απλώς αποτελεί «θόρυβο» που δεν ευνοεί τη γενίκευση. Στις περισσότερες περιπτώσεις, οι τιμές $\lambda_{\max}$ ήταν μη θετικές ή πολύ κοντά στο μηδέν, υποδεικνύοντας σταθερή ή οριακή συμπεριφορά.

4.8 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάστηκαν αναλυτικά τα βήματα υλοποίησης του συστήματος, το οποίο συνδυάζει τη Grammatical Evolution με ένα RBF νευρωνικό δίκτυο, καθώς και τα πειράματα που πραγματοποιήθηκαν σε διαφορετικά datasets. Τονίστηκε ο ρόλος της βιβλιοθήκης NNC στη διαχείριση του RBF, της Qt για την ανάγνωση αρχείων και τη γενικότερη οργάνωση του κώδικα, καθώς και της C++ για τη βελτιστοποιημένη εκτέλεση αριθμητικών υπολογισμών. Επιπλέον, συζητήθηκαν τα αποτελέσματα που προέκυψαν, με ιδιαίτερη μνεία στο πώς η εξελικτική διαδικασία επηρεάζει τις παραμέτρους του δικτύου, ενώ εξετάστηκε και η πιθανή χαοτική συμπεριφορά μέσα από τον υπολογισμό του εκθέτη Lyapunov.

Η γενική διαπίστωση είναι ότι το RBF + GE μοντέλο εμφανίζει βελτιστοποιημένα χαρακτηριστικά απόδοσης σε σύγκριση με πιο παραδοσιακές προσεγγίσεις εκπαίδευσης. Από την άλλη πλευρά, η εξέταση της συμπεριφοράς του δικτύου ως δυναμικού συστήματος ανέδειξε ότι, αν και σπάνια, το δίκτυο μπορεί να παρουσιάσει φαινόμενα που σχετίζονται με ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες όταν το επιτρέπουν οι τιμές των παραμέτρων. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτή την ανάλυση καθοδηγούν τη μελλοντική έρευνα, καθώς θα μπορούσαν να ανοίξουν τον δρόμο σε υβριδικά σχήματα που εκμεταλλεύονται ή αποφεύγουν τέτοιες «χαοτικές» επιδόσεις ανάλογα με τις εκάστοτε ανάγκες. Στο επόμενο κεφάλαιο συνοψίζονται τα ευρήματα, ενώ παρουσιάζονται πιθανές επεκτάσεις και βελτιώσεις.

5. Συμπεράσματα και Μελλοντικές Εργασίες

5.1 Επισκόπηση των Στόχων και των Αποτελεσμάτων

Στο τελευταίο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, γίνεται μια συνολική ανασκόπηση των επιδιώξεων, των αποτελεσμάτων και των συμπερασμάτων που προέκυψαν από την ολοκληρωμένη μελέτη της μεθόδου εκπαίδευσης RBF δικτύων μέσω Grammatical Evolution (GE), σε συνδυασμό με την ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς αυτών των δικτύων μέσω του υπολογισμού του μέγιστου εκθέτη Lyapunov.

Ο αρχικός σκοπός ήταν να διερευνηθεί κατά πόσο η αυτόματη ανακάλυψη και ρύθμιση των παραμέτρων ενός RBF δικτύου (όπως ο αριθμός των νευρώνων στο κρυφό επίπεδο, το είδος συναρτήσεων ακτινικής βάσης, η τιμή της ακτίνας κ.λπ.) μπορεί να ενισχυθεί από μια εξελικτική διαδικασία, χωρίς να απαιτείται εκ των προτέρων ορισμός. Η Grammatical Evolution πρόσφερε έναν φυσικό τρόπο να κωδικοποιηθούν οι παράμετροι ως γονότυπο και να μεταφραστούν, βάσει γραμματικών κανόνων, σε ένα συντακτικά και λογικά έγκυρο RBF δίκτυο. Στην πορεία, επιδιώχθηκε να διερευνηθεί κατά πόσο το προκύπτον RBF δίκτυο έχει ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες, με τον υπολογισμό του μέγιστου εκθέτη Lyapunov να αποκαλύπτει πιθανή χαοτική συμπεριφορά ή αντιθέτως σταθερότητα.

Τα αποτελέσματα επιβεβαίωσαν ότι, αφενός, η Grammatical Evolution μπορεί να δημιουργήσει αρχιτεκτονικές RBF δικτύων με υψηλή απόδοση, αφετέρου η ενσωμάτωση της ανάλυσης Lyapunov επιτρέπει μια βαθύτερη κατανόηση της δυναμικής του μοντέλου, αναδεικνύοντας περιπτώσεις όπου το δίκτυο παρουσιάζει μεγάλη ή μικρή ευαισθησία σε μεταβολές των εισόδων.

5.2 Κύρια Συμπεράσματα

Παρακάτω παρουσιάζονται τα κύρια συμπεράσματα που προέκυψαν από την εργασία μας.

1. **Αυτόματη και Αποτελεσματική Παραμετροποίηση RBF.** Η Grammatical Evolution, αξιοποιώντας μια κατάλληλη γραμματική που περιγράφει τις δυναμικές δομές του δικτύου (π.χ. διαφορετικούς αριθμούς κρυφών νευρώνων, διαφορετικές συναρτήσεις ακτινικής βάσης), αποδείχθηκε σε θέση να προσεγγίσει λύσεις με χα-

μηλό σφάλμα εκπαίδευσης και συχνά βελτιωμένο σφάλμα δοκιμής. Έτσι, το σύστημα εξοικονόμησε τον χρόνο που θα απαιτούσε μια χειροκίνητη διαδικασία δοκιμής και σφάλματος για την επιλογή παραμέτρων του RBF.

2. **Συνθήκες Εμφάνισης ή Απουσίας Χαρακτηριστικής Συμπεριφοράς.** Μέσω του εκθέτη Lyapunov, διαπιστώθηκε ότι σε ορισμένες περιπτώσεις το δίκτυο επέδειξε μέγιστο εκθέτη $\lambda_{\max}$, γεγονός που υποδηλώνει ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες. Αντιθέτως, η πλειοψηφία των δοκιμών οδήγησε σε μη θετικούς εκθέτες, στοιχείο που φανερώνει σταθερότητα ή οριακό κύκλο. Αυτό μπορεί να ερμηνευτεί ως ένα δυνητικό πλεονέκτημα (αν η χαοτική συμπεριφορά αξιοποιείται για εξαιρετικά μη γραμμικά προβλήματα) ή ως παράγοντας που χρίζει περαιτέρω διερεύνησης για την αποφυγή αστάθειας.
3. **Ευελιξία Χρήσης και Ανάπτυξης.** Από την πλευρά του λογισμικού, φάνηκε ότι ο συνδυασμός C++ (για απόδοση), Qt (για διαχείριση αρχείων, πολλαπλές πλατφόρμες) και της βιβλιοθήκης NNC (για έτοιμες δομές νευρωνικών δικτύων) προσφέρει ένα εύελικο περιβάλλον ανάπτυξης. Το σύστημα μπορεί σχετικά εύκολα να προσαρμοστεί ή να επεκταθεί, εάν π.χ. είναι επιθυμητή η ενσωμάτωση άλλων τύπων δικτύων ή επιπλέον τεχνικές βελτιστοποίησης.

5.3 Προτάσεις για Μελλοντική Εργασία

Από την μελέτη της εργασίας μας προέκυψαν ορισμένες σκέψεις – ιδέες για την μελλοντικές εργασίες και για την περεταίρω ανάπτυξη της εργασίας μας. Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι η εργασία μας μπορεί να επεκταθεί στους παρακάτω τομείς:

1. **Υβριδικές Τεχνικές Εκπαίδευσης.** Μια πιθανή κατεύθυνση για μελλοντική επέκταση είναι η ενσωμάτωση και άλλων αλγορίθμων εξελικτικής βελτιστοποίησης παράλληλα με την GE. Για παράδειγμα, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί μια προσεγγιστική διαδικασία PSO ή GA για τη ρύθμιση συγκεκριμένων υποσυνόλων παραμέτρων του RBF δικτύου, ενώ η Grammatical Evolution θα ρύθμιζε τη γενικότερη αρχιτεκτονική ή τη συνάρτηση βάσης.
2. **Εμβάθυνση στη Χαρακτηριστική Συμπεριφορά.** Η εκ των πραγμάτων εμφάνιση δυνητικά χαοτικής συμπεριφοράς γεννά ερωτήματα αναφορικά με το αν οι χαοτικές δυ-

ναμικές μπορούν να ευνοήσουν την προσαρμοστικότητα του δικτύου. Μια πιο στοχευμένη μελέτη θα μπορούσε να εξετάσει αν «πολύπλοκες» ή «χαοτικές» δομές RBF οδηγούν σε καλύτερη ικανότητα παλινδρόμησης σε εξαιρετικά μη γραμμικά προβλήματα ή αν, αντιθέτως, δυσχεραίνουν τη γενίκευση. Πέραν του μέγιστου εκθέτη Lyapunov, θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν και άλλοι δείκτες (π.χ. Kolmogorov Entropy) για τη διερεύνηση της δυναμικής.

3. **Παράλληλη/Κατανεμημένη Υλοποίηση.** Καθώς η εξέλιξη των δικτύων μέσω GE απαιτεί επανειλημμένη αξιολόγηση ενός μεγάλου αριθμού χρωμοσωμάτων, η υλοποίηση ενός παράλληλου συστήματος (με χρήση π.χ. OpenMP ή MPI) θα μπορούσε να μειώσει ριζικά τον χρόνο εκτέλεσης. Ένα κατανεμημένο περιβάλλον (clusters ή cloud) θα επέτρεπε τον ταυτόχρονο χειρισμό πολλών ατόμων του πληθυσμού, καθιστώντας το σύστημα κατάλληλο για πολύ μεγαλύτερα σύνολα δεδομένων.
4. **Επέκταση Γραμματικής και Δυνατοτήτων RBF.** Στην παρούσα εργασία, η γραμματική εστίασε κυρίως σε παράγοντες όπως ο αριθμός των κρυφών νευρώνων ή το είδος της συναρτήσεως βάσης. Για μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να προστεθεί δυνατότητα για πολλαπλές κρυφές στρώσεις (hybrid RBF layers), επιλογή από διαφορετικές ενεργοποιητικές συναρτήσεις, ή ακόμα και δυναμική προσαρμογή των ακτινικών βάσεων επί τη βάσει συγκεκριμένων κριτηρίων. Έτσι, η GE θα μπορούσε να εξερευνήσει εντελώς νέες αρχιτεκτονικές.
5. **On-line Εκπαίδευση και Συστήματα Πραγματικού Χρόνου.** Ενδιαφέρον θα παρουσίαζε η προσαρμογή του συστήματος σε συνθήκες ροής δεδομένων (streaming data) ή πραγματικού χρόνου, όπου το δίκτυο πρέπει να προσαρμόζεται συνεχώς σε καινούργιες πληροφορίες. Σε ένα τέτοιο πλαίσιο, η έννοια του χαοτικού ή σταθερού συστήματος αποκτά ακόμη μεγαλύτερη σημασία, καθώς μια μικρή αστάθεια μπορεί να έχει μη ελεγχόμενες συνέπειες στην απόδοση.

5.4 Τελική Σύνοψη

Η παρούσα εργασία απέδειξε ότι η ταυτόχρονη χρήση Grammatical Evolution και RBF δικτύων μπορεί να αποτελέσει μια αποδοτική στρατηγική για την αυτόματη ανακάλυψη

αρχιτεκτονικής και υπερπαραμέτρων χωρίς τη διαρκή ανάγκη για ανθρώπινη παρέμβαση. Ενώ η προσέγγιση έχει αυξημένες υπολογιστικές απαιτήσεις, η κερδισμένη ευελιξία στη σχεδίαση του δικτύου μπορεί να οδηγήσει σε αισθητά βελτιωμένα αποτελέσματα. Παράλληλα, ο υπολογισμός του εκθέτη Lyapunov φώτισε τις πτυχές της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος, υποδεικνύοντας ότι ορισμένες διαμορφώσεις μπορεί να παρουσιάζουν ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες και δυνητική τάση προς χαοτικά φαινόμενα.

Η μεταφορά των πορισμάτων στη βιομηχανία ή σε εφαρμογές πρακτικού ενδιαφέροντος (π.χ. ρομποτική, επεξεργασία σήματος, οικονομικές προβλέψεις) μπορεί να αναδείξει ακόμη πιο έντονα τα οφέλη και τις προκλήσεις της εν λόγω μεθόδου. Στο μέλλον, με περαιτέρω βελτιστοποίηση των αλγορίθμων και διασύνδεση με παράλληλα συστήματα, αυτή η προσέγγιση ενδέχεται να εδραιωθεί ως μια από τις κύριες στρατηγικές για την αυτόματη σχεδίαση και ανάλυση RBF δικτύων, επεκτείνοντας παράλληλα τις δυνατότητες για καινοτόμες εφαρμογές στη σύγχρονη μηχανική μάθηση.

Βιβλιογραφία

Η παρακάτω λίστα περιλαμβάνει όλες τις πηγές που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία. Οι αναφορές παρέχονται σύμφωνα με το σύστημα **APA**.

- Banzhaf, W., Nordin, P., Keller, R. E., & Francone, F. D. (1998). *Genetic programming: An introduction: on the automatic evolution of computer programs and its applications*. Morgan Kaufmann Publishers Inc. <https://dl.acm.org/doi/abs/10.5555/323917>
- Bishop, C. M. (1995). *Neural networks for pattern recognition*. Oxford university press. [https://books.google.com/books?hl=el&lr=&id=T0S0BgAAQBAJ&oi=fnd&pg=PP1&dq=Bishop,+C.+M.+\(1995\).+Neural+Networks+for+Pattern+Recognition.+Oxford+University+Press.&ots=jO40pNbBok&sig=1K-W_2kOBrPu9a8KeIei7C0Aho4](https://books.google.com/books?hl=el&lr=&id=T0S0BgAAQBAJ&oi=fnd&pg=PP1&dq=Bishop,+C.+M.+(1995).+Neural+Networks+for+Pattern+Recognition.+Oxford+University+Press.&ots=jO40pNbBok&sig=1K-W_2kOBrPu9a8KeIei7C0Aho4)
- Bishop, C. M. (2006). *Pattern recognition and machine learning* (Vol. 4). Springer. <https://link.springer.com/book/9780387310732>
- Brabazon, A., & O'Neill, M. (2006). *Biologically inspired algorithms for financial modelling*. Springer Science & Business Media. [https://books.google.com/books?hl=el&lr=&id=uUlmW0Y1To0C&oi=fnd&pg=PA1&dq=Brabazon,+T.,+%26+O%27Neill,+M.+\(2006\).+Biologically+Inspired+Algorithms+for+Financial+Modelling.+Springer.&ots=sEJeNa5z5F&sig=qAopTF3ow-txoOUq8g1k7tcFH8Q](https://books.google.com/books?hl=el&lr=&id=uUlmW0Y1To0C&oi=fnd&pg=PA1&dq=Brabazon,+T.,+%26+O%27Neill,+M.+(2006).+Biologically+Inspired+Algorithms+for+Financial+Modelling.+Springer.&ots=sEJeNa5z5F&sig=qAopTF3ow-txoOUq8g1k7tcFH8Q)
- Brock, W. A. (1991). *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*. MIT Press. [https://www.google.com/books?hl=el&lr=&id=N0mzrm7q_d8C&oi=fnd&pg=PR10&dq=Brock,+W.+A.,+Hsieh,+D.+A.,+%26+LeBaron,+B.+\(1991\).+Nonlinear+Dynamics,+Chaos,+and+Instability:+Statistical+Theory+and+Economic+Evidence.+MIT+Press.&ots=-Eg6WhltN1&sig=4kB4N-DXVQTeO7sj5cNUPng-VNo](https://www.google.com/books?hl=el&lr=&id=N0mzrm7q_d8C&oi=fnd&pg=PR10&dq=Brock,+W.+A.,+Hsieh,+D.+A.,+%26+LeBaron,+B.+(1991).+Nonlinear+Dynamics,+Chaos,+and+Instability:+Statistical+Theory+and+Economic+Evidence.+MIT+Press.&ots=-Eg6WhltN1&sig=4kB4N-DXVQTeO7sj5cNUPng-VNo)
- Buhmann, M. D. (2003). *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511543241>
- Chen, L., & Aihara, K. (1995). Chaotic simulated annealing by a neural network model with transient chaos. *Neural Networks*, 8(6), 915–930. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/089360809500033V>
- Chen, S., Cowan, C. F. N., & Grant, P. M. (1991). Orthogonal least squares learning algorithm for radial. *IEEE Trans. Neural Netw.*, 2(2), 302–309. <https://core.ac.uk/download/pdf/1497907.pdf>
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., & Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2), 182–197. <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/996017/>
- Eckmann, J.-P., & Ruelle, D. (1985). Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics*, 57(3), 617–656. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.57.617>
- Forti, M., & Nistri, P. (2003). Global convergence of neural networks with discontinuous neuron activations. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 50(11), 1421–1435. <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/1242840/>
- Gama, J., Žliobaitė, I., Bifet, A., Pechenizkiy, M., & Bouchachia, A. (2014). A survey on concept drift adaptation. *ACM Computing Surveys*, 46(4), 1–37. <https://doi.org/10.1145/2523813>
- Goldberg, D. E., & Deb, K. (1991). A comparative analysis of selection schemes used in genetic algorithms. In *Foundations of genetic algorithms* (Vol. 1, pp. 69–93). Elsevier. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B978008050684500082>
- Golub, G. H., & Van Loan, C. F. (2013). *Matrix computations*. JHU press. [https://books.google.com/books?hl=el&lr=&id=5U-l8U3P-VUC&oi=fnd&pg=PP1&dq=Golub,+G.+H.,+%26+Van+Loan,+C.+F.+\(2013\).+Matrix+Co](https://books.google.com/books?hl=el&lr=&id=5U-l8U3P-VUC&oi=fnd&pg=PP1&dq=Golub,+G.+H.,+%26+Van+Loan,+C.+F.+(2013).+Matrix+Co)

- mputations+(4.).+Johns+Hopkins+University+Press.&ots=70DEJhVNam&sig=keHa-nbZgt0Y-yQiz2TCmhXphuI
- Goodfellow, I. (2016a). *Deep learning*. MIT press.
https://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=omivDQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PR5&dq=Goodfellow,+Bengio,+%26+Courville,+2016&ots=MOO7hupAST&sig=Ymnj_5jfqY8-OInd5cPry-WHZU
- Goodfellow, I. (2016b). *Deep learning* (Vol. 196). MIT press.
[https://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=omivDQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PR5&dq=Goodfel-low,+I.,+Bengio,+Y.,+%26+Courville,+A.+\(2016\).+Deep+Learning.+MIT+Press.&ots=MOP6folFTZ&sig=tnZk9chli7DrBM5v76PH3brs_GI](https://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=omivDQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PR5&dq=Goodfel-low,+I.,+Bengio,+Y.,+%26+Courville,+A.+(2016).+Deep+Learning.+MIT+Press.&ots=MOP6folFTZ&sig=tnZk9chli7DrBM5v76PH3brs_GI)
- Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). *Deep Learning*. MIT Press.
- Haddad, W. M., & Chellaboina, V. (2008). *Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach*. Princeton University Press. <https://doi.org/10.1515/9781400841042>
- Hagan, M. T., & Menhaj, M. B. (1994). Training feedforward networks with the Marquardt algorithm. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 5(6), 989–993.
<https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/329697/>
- Hasan, M. (2014). Genetic algorithm and its application to big data analysis. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, 5(1), 1991–1996.
<https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=df8f5c10aaec299b95930bfcee6bb56f85b554be>
- Haykin, S. (1998). *Neural networks: A comprehensive foundation*. Prentice Hall PTR.
<https://dl.acm.org/doi/abs/10.5555/521706>
- Herrera, F., & Lozano, M. (1996). Adaptation of genetic algorithm parameters based on fuzzy logic controllers. *Genetic Algorithms and Soft Computing*, 8(1996), 95–125.
<https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=a15b8ecd4fd5ec0015ba7b414c7eefbf844f175b>
- Hochreiter, S., & Schmidhuber, J. (1997). Long Short-Term Memory. *Neural Computation*, 9(8), 1735–1780. <https://doi.org/10.1162/neco.1997.9.8.1735>
- Holland, J. H. (1992). *Adaptation in natural and artificial systems: An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. MIT press.
[https://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=5EgGaBkwvWcC&oi=fnd&pg=PR7&dq=Holland,+J.+H.+\(1992\).+Adaptation+in+Natural+and+Artificial+Systems.+University+of+Michigan+Press.&ots=mKii-_Msyh&sig=eR0gfjYPbLZ3RpI_sAkAsgXUx_E](https://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=5EgGaBkwvWcC&oi=fnd&pg=PR7&dq=Holland,+J.+H.+(1992).+Adaptation+in+Natural+and+Artificial+Systems.+University+of+Michigan+Press.&ots=mKii-_Msyh&sig=eR0gfjYPbLZ3RpI_sAkAsgXUx_E)
- Hopfield, J. J. (1984). Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 81(10), 3088–3092. <https://doi.org/10.1073/pnas.81.10.3088>
- Hornik, K., Stinchcombe, M., & White, H. (1989). Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural Networks*, 2(5), 359–366.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0893608089900208>
- Hsieh, W. W., & Tang, B. (1998). Applying neural network models to prediction and data analysis in meteorology and oceanography. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 79(9), 1855–1870. https://journals.ametsoc.org/view/journals/bams/79/9/1520-0477_1998_079_1855_annmtp_2_0_co_2.xml
- Isa, F. M., Ariffin, W. N. M., Jusoh, M. S., & Putri, E. P. (2024). A Review of Genetic Algorithm: Operations and Applications. *Journal of Advanced Research in Applied Sciences and Engineering Technology*, 40(1), 1–34.
http://semarakilmu.com.my/journals/index.php/applied_sciences_eng_tech/article/view/3337
- Jolliffe, I. T. (Ed.). (2002). Introduction. In *Principal Component Analysis* (pp. 1–9). Springer.
https://doi.org/10.1007/0-387-22440-8_1
- Kantschik, W., & Banzhaf, W. (2002). Linear-Graph GP - A New GP Structure. In J. A. Foster, E. Lutton, J. Miller, C. Ryan, & A. Tettamanzi (Eds.), *Genetic Programming* (Vol. 2278, pp. 83–92). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/3-540-45984-7_8

- Keijzer, M., & Babovic, V. (2000). Genetic Programming, Ensemble Methods and the Bias/Variance Tradeoff – Introductory Investigations. In R. Poli, W. Banzhaf, W. B. Langdon, J. Miller, P. Nordin, & T. C. Fogarty (Eds.), *Genetic Programming* (Vol. 1802, pp. 76–90). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-46239-2_6
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall.
- Kim, J. S. (1991). Park, BJ, Park, SW, Kim, JK, Kwon, OK, Ryu, GH, 2007d. Bioavailability and Safety Issues of Heavy Metals in Paddy Soil-Rice Continuum in Korea, *Food & Fertilizer Technology Bulletin*, 597. https://www.researchgate.net/profile/Chang-Yeong-Kim/publication/309722136_Apparatus_and_method_for_extracting_object_based_on_feature_matching_between_segmented_regions_in_images_US_6990233_B2/links/581eef1508aea429b295e913/Apparatus-and-method-for-extracting-object-based-on-feature-matching-between-segmented-regions-in-images-US-6990233-B2.pdf
- Kohonen, T. (1990). The self-organizing map. *Proceedings of the IEEE*, 78(9), 1464–1480. <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/58325/>
- Koza, J. (1992). On the programming of computers by means of natural selection. *Genetic Programming*. <https://cir.nii.ac.jp/crid/1573105975012577408>
- Kramer, O. (2017). Genetic Algorithms. In O. Kramer, *Genetic Algorithm Essentials* (Vol. 679, pp. 11–19). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-52156-5_2
- LeCun, Y., Bengio, Y., & Hinton, G. (2015). Deep learning. *Nature*, 521(7553), 436–444. <https://www.nature.com/articles/nature14539>
- Lipton, Z. C. (2015). A Critical Review of Recurrent Neural Networks for Sequence Learning. *arXiv Preprint, CoRR, Abs/1506.00019*.
- Lisboa, P. J. (2002). A review of evidence of health benefit from artificial neural networks in medical intervention. *Neural Networks*, 15(1), 11–39. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893608001001113>
- Lorenz, E. N. (1963a). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, 20(2), 130–141. https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/20/2/1520-0469_1963_020_0130_dnf_2_0_co_2.xml
- Lorenz, E. N. (1963b). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, 20(2), 130–141. https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/20/2/1520-0469_1963_020_0130_dnf_2_0_co_2.xml
- Lourenço, N., Pereira, F. B., & Costa, E. (2016). Unveiling the properties of structured grammatical evolution. *Genetic Programming and Evolvable Machines*, 17(3), 251–289. <https://doi.org/10.1007/s10710-015-9262-4>
- Lowe, D. (1989). Adaptive radial basis function nonlinearities, and the problem of generalisation. *1989 First IEE International Conference on Artificial Neural Networks, (Conf. Publ. No. 313)*, 171–175. <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/51953/>
- Lowe, D., & Broomhead, D. (1988). Multivariable functional interpolation and adaptive networks. *Complex Systems*, 2(3), 321–355. <http://wpmmedia.wolfram.com/uploads/sites/13/2018/02/02-3-5.pdf>
- Luke, S., & Panait, L. (2006). A comparison of bloat control methods for genetic programming. *Evolutionary Computation*, 14(3), 309–344. <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/6792715/>
- Lyapunov, A. M. (1992). The general problem of the stability of motion. *International Journal of Control*, 55(3), 531–534. <https://doi.org/10.1080/00207179208934253>
- Macqueen, J. (1967). Some methods for classification and analysis of multivariate observations. *Proceedings of 5-Th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability/University of California Press*. [https://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=IC4Ku_7dBFUC&oi=fnd&pg=PA281&dq=MacQueen,+J.+\(1967\).+Some+Methods+for+Classification+and+Analysis+of+Multivariate+Observations.+In+Proceedings+of+the+Fifth+Berkeley+Symposium+on+Mathematical+Statistics+and+Probability+\(pp.+281-297\).&ots=nQUkB2OhvN&sig=eUfn39VI3LhjdT5JvioB_nfqn74](https://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=IC4Ku_7dBFUC&oi=fnd&pg=PA281&dq=MacQueen,+J.+(1967).+Some+Methods+for+Classification+and+Analysis+of+Multivariate+Observations.+In+Proceedings+of+the+Fifth+Berkeley+Symposium+on+Mathematical+Statistics+and+Probability+(pp.+281-297).&ots=nQUkB2OhvN&sig=eUfn39VI3LhjdT5JvioB_nfqn74)

- May, R. M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261(5560), 459–467. <https://www.nature.com/articles/261459a0>
- McCulloch, W. S., & Pitts, W. (1943). A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *The Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5(4), 115–133. <https://doi.org/10.1007/BF02478259>
- McKay, R. I., Hoai, N. X., Whigham, P. A., Shan, Y., & O'Neill, M. (2010). Grammar-based Genetic Programming: A survey. *Genetic Programming and Evolvable Machines*, 11(3–4), 365–396. <https://doi.org/10.1007/s10710-010-9109-y>
- Mienye, I. D., Swart, T. G., & Obaido, G. (2024). Recurrent neural networks: A comprehensive review of architectures, variants, and applications. *Information*, 15(9), 517. <https://www.mdpi.com/2078-2489/15/9/517>
- Minsky, M., & Papert, S. (1969). An introduction to computational geometry. *Cambridge Tracts, HIT*, 479(480), 104. <http://leon.bottou.org/publications/pdf/perceptrons-2017.pdf>
- Mitchell, M. (1998). *An introduction to genetic algorithms*. MIT press. [https://books.google.com/books?hl=el&lr=&id=0eznlz0TF-IC&oi=fnd&pg=IA2&dq=Mitchell,+M.+\(1998\).+An+Introduction+to+Genetic+Algorithm+s.+MIT+Press.&ots=sjkI4Y39If&sig=wBMU_kz7GIvZjjscDDc_Y32VOsk](https://books.google.com/books?hl=el&lr=&id=0eznlz0TF-IC&oi=fnd&pg=IA2&dq=Mitchell,+M.+(1998).+An+Introduction+to+Genetic+Algorithm+s.+MIT+Press.&ots=sjkI4Y39If&sig=wBMU_kz7GIvZjjscDDc_Y32VOsk)
- Narendra, K. S., & Parthasarathy, K. (1990). Neural networks in dynamical systems. *Intelligent Control and Adaptive Systems*, 1196, 230–241. <https://www.spiedigitallibrary.org/conference-proceedings-of-spie/1196/0000/Neural-Networks-In-Dynamical-Systems/10.1117/12.969922.short>
- O'Neil, M., & Ryan, C. (2003a). Grammatical Evolution. In M. O'Neill & C. Ryan, *Grammatical Evolution* (pp. 33–47). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-0447-4_4
- O'Neil, M., & Ryan, C. (2003b). Grammatical evolution: Evolutionary automatic programming in an arbitrary language. *Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers. Doi*, 10, 978–1.
- O'Neill, M., Brabazon, A., & Adley, C. (2004). The automatic generation of programs for classification problems with grammatical swarm. *Proceedings Of The 2004 Congress On Evolutionary Computation (IEEE Cat. No. 04TH8753)*, 1, 104–110. <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/1330844/>
- O'Neill, M., & Ryan, C. (2001). Grammatical evolution. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 5(4), 349–358. <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/942529/>
- Orr, M. J. (1996). *Introduction to radial basis function networks*. Technical Report, center for cognitive science, University of Edinburgh <ftp://ftp.unicauca.edu.co/Facultades/FIET/DEIC/Materias/Control%20Inteligente/Parte%20III/clase%2023%20int/rbf.pdf>
- Ott, E. (2002). *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press. [https://www.google.com/books?hl=el&lr=&id=PfXoAwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT9&dq=Ott,+E.+\(1993\).+Chaos+in+Dynamical+Systems.+Cambridge+University+Press.&ots=AzY1g0c9OF&sig=lvxBKxWgHU8ICASXucciOrGgD0I](https://www.google.com/books?hl=el&lr=&id=PfXoAwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT9&dq=Ott,+E.+(1993).+Chaos+in+Dynamical+Systems.+Cambridge+University+Press.&ots=AzY1g0c9OF&sig=lvxBKxWgHU8ICASXucciOrGgD0I)
- Park, J. H., & Lee, K. H. (2021). Computational Design of Modular Robots Based on Genetic Algorithm and Reinforcement Learning. *Symmetry*, 13(3), Article 3. <https://doi.org/10.3390/sym13030471>
- Park, J., & Sandberg, I. W. (1991a). Universal approximation using radial-basis-function networks. *Neural Computation*, 3(2), 246–257. <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/6797088/>
- Park, J., & Sandberg, I. W. (1991b). Universal approximation using radial-basis-function networks. *Neural Computation*, 3(2), 246–257. <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/6797088/>
- Park, J., & Sandberg, I. W. (1993). Approximation and radial-basis-function networks. *Neural Computation*, 5(2), 305–316. <https://direct.mit.edu/neco/article-abstract/5/2/305/5717>
- Poggio, T., & Girosi, F. (1990). Networks for approximation and learning. *Proceedings of the IEEE*, 78(9), 1481–1497. <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/58326/>
- Renals, S., Morgan, N., Bourlard, H., Cohen, M., & Franco, H. (1994). Connectionist probability estimators in HMM speech recognition. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 2(1), 161–174. <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/260359/>

- Robinson, J., & Rahmat-Samii, Y. (2004). Particle swarm optimization in electromagnetics. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 52(2), 397–407.
<https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/1282114/>
- Rosenblatt, F. (1958). The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain. *Psychological Review*, 65(6), 386.
<https://psycnet.apa.org/journals/rev/65/6/386/>
- Rössler, O. E. (1976). Chaotic Behavior in Simple Reaction Systems. *Zeitschrift Für Naturforschung A*, 31(3–4), 259–264. <https://doi.org/10.1515/zna-1976-3-408>
- Rothlauf, F., & Oetzel, M. (2006). On the Locality of Grammatical Evolution. In P. Collet, M. Tomassini, M. Ebner, S. Gustafson, & A. Ekárt (Eds.), *Genetic Programming* (Vol. 3905, pp. 320–330). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/11729976_29
- Rumelhart, D. E., Hinton, G. E., & Williams, R. J. (1986). Learning representations by back-propagating errors. *Nature*, 323(6088), 533–536.
<https://www.nature.com/articles/323533a0>
- Ryan, C., Collins, J., & Neill, M. O. (1998). Grammatical evolution: Evolving programs for an arbitrary language. In W. Banzhaf, R. Poli, M. Schoenauer, & T. C. Fogarty (Eds.), *Genetic Programming* (Vol. 1391, pp. 83–96). Springer Berlin Heidelberg.
<https://doi.org/10.1007/BFb0055930>
- Sastry, S. (2013). *Nonlinear systems: Analysis, stability, and control* (Vol. 10). Springer Science & Business Media.
[https://www.google.com/books?hl=en&lr=&id=j_PiBwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PR22&dq=Sastry,+S.+\(1999\).+Nonlinear+Systems:+Analysis,+Stability,+and+Control.+Springer.&ots=rCfIvHKC1F&sig=u-_Fgj9ndsoCBkPn77xFg0OGzvK](https://www.google.com/books?hl=en&lr=&id=j_PiBwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PR22&dq=Sastry,+S.+(1999).+Nonlinear+Systems:+Analysis,+Stability,+and+Control.+Springer.&ots=rCfIvHKC1F&sig=u-_Fgj9ndsoCBkPn77xFg0OGzvK)
- Schwenk, H., & Milgram, M. (1995). Learning discriminant tangent models for handwritten character recognition. *International Conference on Artificial Neural Networks*, 2, 985–988.
https://www.researchgate.net/profile/Holger-Schwenk/publication/2268871_Learning_Discriminant_Tangent_Models_for_Handwritten_Character_Recognition/links/09e4150e6a242317e7000000/Learning-Discriminant-Tangent-Models-for-Handwritten-Character-Recognition.pdf
- Shanthi, D. L., & Chethan, N. (2022). Genetic Algorithm Based Hyper-Parameter Tuning to Improve the Performance of Machine Learning Models. *SN Computer Science*, 4(2), 119.
<https://doi.org/10.1007/s42979-022-01537-8>
- Slotine, J.-J. E. (1991). Applied nonlinear control. *PRENTICE-HALL Google Schola*, 2, 1123–1131.
https://www.academia.edu/download/33582713/Applied_Nonlinear_Control_Slotine.pdf
- Srinivas, M., & Patnaik, L. M. (1994). Genetic algorithms: A survey. *Computer*, 27(6), 17–26.
<https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/294849/>
- Strogatz, S. H. (2018a). *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press.
<https://www.taylorfrancis.com/books/mono/10.1201/9780429492563/nonlinear-dynamics-chaos-steven-strogatz>
- Strogatz, S. H. (2018b). *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press.
<https://www.taylorfrancis.com/books/mono/10.1201/9780429492563/nonlinear-dynamics-chaos-steven-strogatz>
- Tikhonov, A. N., & Arsenin, V. Y. (1977). *Solutions of ill-posed problems*. VH Winston & Sons. Washington, DC: John Wiley & Sons, New York.
- Vapnik, V. (1998). *Three remarks on the support vector method of function estimation*.
https://direct.mit.edu/books/edited-volume/chapter-pdf/2048654/c010023_9780262283199.pdf
- Vaswani, A. (2017). Attention is all you need. *Advances in Neural Information Processing Systems*.
https://huggingface.co/pt-sk/transformer_engine/resolve/44e2815fd0b90102f8456a71be2d6f8df3fd104d/Reference/Attention%20Is%20All%20You%20Need.pdf

- Vidyasagar, M. (2002). *Nonlinear Systems Analysis* (Second). Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://doi.org/10.1137/1.9780898719185>
- Whigham, P. A. (1995a). Grammatically-based genetic programming. *Proceedings of the Workshop on Genetic Programming: From Theory to Real-World Applications*, 16(3), 33–41. <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=1f419439e870490840ab379d2de368ace1b9777b>
- Whigham, P. A. (1995b). Grammatically-based genetic programming. *Proceedings of the Workshop on Genetic Programming: From Theory to Real-World Applications*, 16(3), 33–41. <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=1f419439e870490840ab379d2de368ace1b9777b>
- Whigham, P. A., & Crapper, P. F. (2001). Modelling rainfall-runoff using genetic programming. *Mathematical and Computer Modelling*, 33(6–7), 707–721. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0895717700002740>
- Whitley, D., Rana, S., & Heckendorn, R. B. (1999). The island model genetic algorithm: On separability, population size and convergence. *Journal of Computing and Information Technology*, 7(1), 33–47. <https://hrcak.srce.hr/clanak/221148>
- Whitley, D. S. (1994). By the hunter, for the gatherer: Art, social relations and subsistence change in the prehistoric Great Basin. *World Archaeology*, 25(3), 356–373. <https://doi.org/10.1080/00438243.1994.9980251>
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., & Vastano, J. A. (1985). Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16(3), 285–317. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(85\)90011-9](https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90011-9)
- Xie, T., Yu, H., & Wilamowski, B. (2011). Comparison between traditional neural networks and radial basis function networks. *2011 IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, 1194–1199. <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/5984328/>
- Zadeh, P. H., Hosseini, R., & Sra, S. (2018). *Deep-RBF Networks Revisited: Robust Classification with Rejection* (No. arXiv:1812.03190). arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1812.03190>
- Zela, A., Elsken, T., Saikia, T., Marrakchi, Y., Brox, T., & Hutter, F. (2020). *Understanding and Robustifying Differentiable Architecture Search* (No. arXiv:1909.09656). arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1909.09656>
- Zhang, G. P., & Berardi, V. L. (2001). Time series forecasting with neural network ensembles: An application for exchange rate prediction. *Journal of the Operational Research Society*, 52(6), 652–664. <https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2601133>

Παράρτημα

Η παρούσα διπλωματική εργασία οδήγησε στη δημιουργία του ερευνητικού άρθρου με τίτλο "RbfCon: Construct Radial Basis Function Neural Networks with Grammatical Evolution", το οποίο δημοσιεύτηκε στο περιοδικό MDPI Software, Τόμος 3, Τεύχος 4, σελίδες 549-568. Το άρθρο διατίθεται πλήρως online με DOI: [10.3390/software3040027](https://doi.org/10.3390/software3040027) και ημερομηνία δημοσίευσης την 11η Δεκεμβρίου 2024.

Επιπλέον, ο κώδικας που αναπτύχθηκε κατά τη διάρκεια της εργασίας έχει αναρτηθεί δημόσια στο GitHub για περαιτέρω χρήση και συνεισφορά από την επιστημονική κοινότητα. Ο κώδικας είναι διαθέσιμος στον ακόλουθο σύνδεσμο: <https://github.com/itsoulos/RbfCon>.

Ο χρήστης θα πρέπει να εγκαταστήσει τη Βιβλιοθήκη QT, η οποία είναι προσβάσιμη από τη διεύθυνση <https://qt.io> για τη μεταγλώττιση του λογισμικού. Μετά τη λήψη του αρχείου RbfCon-master.zip, ο χρήστης θα πρέπει να εκτελέσει τις ακόλουθες εντολές, σε οποιοδήποτε σύστημα που βασίζεται σε Unix:

1. unzip RbfCon-master.zip;
2. cd RbfCon-master;
3. qmake (or qmake-qt5 in some Linux installations);
4. make

Για συστήματα Windows, ο χρήστης θα μπορούσε εναλλακτικά να εγκαταστήσει το λογισμικό χρησιμοποιώντας το RBFCON.msi που βρίσκεται στη διανομή, το οποίο είναι ένα αρχείο εγκατάστασης που εγκαθιστά το λογισμικό χωρίς να χρειάζεται η βιβλιοθήκη QT.

Η διάθεση του κώδικα σε δημόσιο αποθετήριο προσφέρει τη δυνατότητα περαιτέρω μελέτης, βελτίωσης ή/και επαναχρησιμοποίησης του από την ευρύτερη επιστημονική και ακαδημαϊκή κοινότητα.