ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΕΩΡΟΛΟΓΙΑΣ

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Μελέτη της τρισδιάστατης αστάθειας Holmboe

Χρήστος Συμώνης

Επιβλέπων Καθηγητής: Νικόλαος Μπάκας

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2024

Περίληψη

Η δυναμική αστάθεια είναι μία από τις κύριες πηγές τύρβης και ανάδευσης στην ατμόσφαιρα. Στην εργασία μελετάται ένα από τα τρία είδη δυναμικής αστάθειας σε διαστρωματωμένα ρευστά, η αστάθεια Holmboe που είναι κυρίαρχη σε περιπτώσεις ισχυρής διαστρωμάτωσης της ατμόσφαιρας. Αξιοποιώντας την προσέγγιση Boussinesq, μελετήθηκε η εξέλιξη διαταραχών μικρού πλάτους γύρω από μια κατάσταση με διατμητικό άνεμο στην περιοχή ανάμεσα σε δύο ατμοσφαιρικά στρώματα διαφορετικής πυκνότητας. Κάνοντας χρήση της Γενικευμένης Θεωρίας Ευστάθειας βρέθηκαν οι βέλτιστες διαταραχές, αυτές δηλαδή που οδηγούν στη μεγαλύτερη αύξηση του πλάτους τους σε πεπερασμένο χρόνο μεταφοράς από τον άνεμο. Βρέθηκε ότι έχουμε αύξηση της ενέργειας των διαταραχών για όλους τους αριθμούς Richardson με το μεγαλύτερο ρυθμό ανάπτυξης να παρατηρείται για ισχνή διαστρωμάτωση. Για μικρούς χρόνους μεταφοράς οι βέλτιστες διαταραχές έχουν μικρή κλίμακα και είναι τρισδιάστατες για μικρούς αριθμούς Richardson και διδιάστατες (στο επίπεδο της ροής) για μεγαλύτερη διαστρωμάτωση. Για μεγαλύτερους χρόνους μεταφοράς, βρέθηκαν τρεις διαφορετικές περιοχές αριθμών Richardson (για μικρές τιμές της τάξης του 0.1 (H1), μεσαίες τιμές της τάξης της μονάδας (H2) και μεγάλες τιμές της τάξης του 10 (H3)) όπου οι διαταραχές έχουν υψηλό ρυθμό ανάπτυξης και είναι μεγάλης κλίμακας. Για την ισχνή διαστρωμάτωση οι βέλτιστες διαταραχές βρέθηκαν να είναι στο επίπεδο της ροής, ενώ για μεγάλους αριθμούς Richardson όπως επίσης και για αριθμούς Richardson ανάμεσα στις τρεις περιοχές H1, H2 και H3 οι βέλτιστες διαταραχές βρέθηκαν να είναι τρισδιάστατες. Τέλος διερευνήθηκαν οι μηχανισμοί Orr και lift-up που είναι υπεύθυνοι για τη μεταβατική αύξηση του πλάτους των διαταραχών. Βρέθηκε ότι οι μηχανισμοί Orr και lift-up δρουν συνεργατικά, με τον πρώτο να επιδρά ενισχυτικά στα πρώτα στάδια της εξέλιξης ενώ ο δεύτερος δρα σε μετέπειτα στάδιο αναπληρώνοντας τη μειωμένη ενέργεια λόγω εξασθένησης από το μηχανισμό του Orr.

Abstract

Dynamic instability is one of the main factors in generating turbulence and agitation in the atmosphere. In this work, we study one of the three types of dynamic instability in stratified fluids, Holmboe instability, which is dominant in cases of strong stratification in the atmosphere. We examined the evolution of small-amplitude perturbations in a shear flow between two atmospheric layers of different densities by utilizing Boussinesq approximation. By making use of the Generalized Stability Theory we identified the optimal perturbations—those that lead to the largest increase in amplitude within a finite transport time. Our findings indicate an increase in perturbation energy for all Richardson numbers, with the highest growth rate observed for weak stratification. For short transport times the optimal perturbations are small-scale and are three-dimensional for small Richardson numbers and two-dimensional (in the flow plane) for higher stratification. For longer transport times, three different regions of Richardson numbers were found (for small values of the order of 0.1 (H1), medium values of the order of unity (H2), and large values of the order of 10(H3)) where the perturbations have high growth rate and large scale. Under weaker stratification, optimal perturbations are parallel to the flow plane but for higher Richardson numbers and Richardson numbers between the H1, H2 and H3 bands, optimal perturbations become three-dimensional. Lastly, the transient growth of perturbation magnitude is driven by the Orr and lift-up mechanisms. These two mechanisms act cooperatively, with the former taking effect in the early stages of evolution and the latter at later stages, making up for the lost energy due to the weakening of the Orr mechanism.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή και επιβλέποντα της διπλωματικής μου κ. Νικόλαο Μπάκα, για το ενδιαφέρον και την πολύτιμη βοήθεια. Ο κ. Μπάκας μου προσέφερε τις πολύτιμες γνώσεις του με τον δικό του ιδιαίτερο τρόπο.

Επίσης, ένα μεγάλο ευχαριστώ χρωστάω και στα μέλη του Εργαστηρίου Μετεωρολογίας και Κλιματολογίας του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, τον Καθηγητή κ. Αριστείδη Μπαρτζώκα, τον Καθηγητή κ. Νικόλαο Χατζηαναστασίου και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Χρήστο Λώλη για τις αμέτρητες συζητήσεις σχετικά με τη φυσική, το κλίμα και τον καιρό.

Για τους γονείς μου που ήταν πάντα δίπλα μου και με στηρίζουν όλα τα χρόνια των σπουδών μου, ένα ευχαριστώ δεν είναι αρκετό.

Τέλος, ήθελα να ευχαριστήσω τα αδέρφια, τους συγγενείς, τους φίλους, τους συμφοιτητές και όλους όσους ήταν και είναι δίπλα μου όλα τα χρόνια που πέρασαν και ακολουθούν.

Χρήστος Συμώνης,
Ιωάννινα,
Δεκέμβριος, 2024

Στους γονείς μου.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Ανάγκη μελέτης της δυναμικής αστάθειας

Η τύρβη είναι κύριο χαρακτηριστικό της ατμόσφαιρας που επηρεάζει την ανθρώπινη δραστηριότητα και συμβάλει στη διαμόρφωση των διάφορων κλιματολογικών και μετεωρολογικών παραμέτρων. Για παράδειγμα, στην αεροπλοΐα το 71% όλων των ατυχημάτων που συσχετίζονται με καιρικά φαινόμενα οφείλονται στη τύρβη (Gultepe et al., 2019), ενώ είναι αρκετά τα περιστατικά στα οποία έχουν προκληθεί τραυματισμοί και θάνατοι (Ellrod et al., 2015). Για να αποφευχθεί ο κίνδυνος ατυχημάτων και ζημιών, τα αεροπλάνα αναγκάζονται να αλλάζουν πορεία με συνέπεια την κατανάλωση περισσότερων καυσίμων, απελευθερώνοντας μεγαλύτερη ποσότητα αερίων που συμβάλουν στο ανθρωπογενές φαινόμενο του θερμοκηπίου (Sharman and Pearson, 2017; Williams, 2016).

Οι κύριες πηγές παραγωγής τύρβης στην ατμοσφαίρα είναι η θερμική αστάθεια, ο άνεμος πάνω από την τοπογραφία και η δυναμική αστάθεια. Η τελευταία, είναι η κυρίαρχη πηγή τύρβης όταν απουσιάζουν θερμικές ανισορροπίες. Έχει ως απαραίτητη προϋπόθεση την ύπαρξη διάτμησης του ανέμου, ενώ παίζει σημαντικό ρόλο σε ατμοσφαιρικές διαδικασίες στην ανώτερη ατμόσφαιρα, κοντά σε μέτωπα αλλά και μέσα στο ατμοσφαιρικό οριακό στρώμα.

Στην ανώτερη ατμοσφαίρα και στην περιοχή του αεροχειμάρρου η δυναμική αστάθεια παράγει τύρβη καθαρού αέρα (Clear Air Turbulence, CAT) (Sharman and Pearson, 2017; Dutton and Panofsky, 1970; Ellrod and Knapp, 1992). Σε αντίθεση με την τύρβη λόγω ανωμεταφοράς, αυτή δεν εντοπίζεται από τα ραντάρ των αεροπλάνων και επομένως είναι απρόβλεπτη και επικίνδυνη (Sharman and Pearson, 2017). Η ισχύς και η συχνότητα εμφάνισης της CAT επηρεάζονται από την ανθρωπογενή κλιματική αλλαγή. Μελέτες προσομοιώσεων έδειξαν αύξηση της συχνότητας εμφάνισης και της μέσης ισχύος της CAT, με αύξηση του διοξειδίου του άνθρακα της ατμοσφαίρας. Συγκεκριμένα, στις περιοχές του Βορείου Ατλαντικού και σε υψόμετρο πτήσεως, προσομοιώσεις διάφορων σεναρίων αύξησης του διοξειδίου του άνθρακα είχαν ως αποτέλεσμα $10-40\%$ αύξηση της μέσης ισχύος και $40-170\%$ αύξηση της συχνότητας εμφάνισης μέτριας και ισχυρής σε ένταση τύρβης για τους χειμερινούς μήνες (Williams and Joshi, 2013). Οι Foudad et al. (2024) έδειξαν πως ήδη για την περίοδο 1980-2021, αυξήθηκε η συχνότητα της CAT για διάφορες περιοχές του Βορείου Ημισφαιρίου με την αύξηση στις περιοχές της Βόρειας Αφρικής, Ανατολικής και Κεντρικής Ασίας να οφείλεται σε ανθρωπογενείς παράγοντες.

Στην τροπόσφαιρα, η δυναμική αστάθεια παράγει σημαντική ανάμειξη, η οποία παρατηρείται σε μέτωπα χαμηλού ύψους λόγω κορεσμού των διατμητικών ροών. Η εξάρτηση της αστάθειας των διατμητικών ροών από τον κορεσμό του αέρα είναι ανάλογη με την υπό όρους αστάθεια (Conditional Instability, CI) ενός θύλακα αέρα. Αστάθεια υπό όρους σε ορισμένο ύψος επικρατεί αν η ατμόσφαιρα είναι στατικά ευσταθής όταν ένας θύλακας αέρα είναι ακόρεστος και στατικά ασταθής όταν ο θύλακας αέρα είναι κορεσμένος.

$$\Gamma_{\text{κορ.}} < \Gamma < \Gamma_{\text{ακορ.}},$$

όπου $\Gamma_{\text{κορ.}}$, Γ και $\Gamma_{\text{ακορ.}}$ είναι η κατακόρυφη θερμοβαθμίδα του κορεσμένου αέρα, του περιβάλλοντος και του ακόρεστου αέρα, με τη θερμοβαθμίδα να ορίζεται ως

$-\partial T/\partial z$. Αντίστοιχα για ένα προφίλ θερμοκρασίας και ταχύτητας, είναι εφικτό να οριστεί η υπό όρους διατμητική αστάθεια (Conditional SHearing Instability, CSHI), όπου για σταθερό ύψος μία διατμητική ροή είναι δυναμικά ευσταθής αν είναι ακόρεστη και δυναμικά ασταθής αν είναι κορεσμένη:

$$\mathrm{J}_{\text{κορ.}} < \mathrm{J}_{\text{κρίσιμο}} < \mathrm{J}_{\text{ακορ.}},$$

όπου $\mathrm{J}_{\text{κορ.}}$, $\mathrm{J}_{\text{ακορ.}}$ ο χοντρικός αριθμός Richardson [1] για κορεσμένη και ακόρεστη ροή αντίστοιχα, ενώ $\mathrm{J}_{\text{κρίσιμο}}$ είναι η κρίσιμη τιμή $1/4$ κάτω από την οποία μία διατμητική ροή είναι δυναμικά ασταθής.

Ομοίως με τη δυνητική αστάθεια (Potential Instability, PI) μπορεί να οριστεί και η δυνητικά διατμητική αστάθεια (Potential SHearing Instability, PSHI). Ένα στρώμα είναι δυνητικά ασταθές, όταν ένα αρχικά στατικά ευσταθές στρώμα ανυψωθεί και μετατραπεί σε στατικά ασταθές λόγω κορεσμού. Αυτό συνήθως συμβαίνει όταν η βάση του στρώματος είναι ήδη κορεσμένη σε σύγκριση με την κορυφή του που είναι ακόρεστη. Επομένως, με την ανύψωση του, η κορυφή θα ψυχθεί πιο γρήγορα από την βάση του και θα προκληθεί θερμική αναστροφή. Η δυνητικά διατμητική αστάθεια εκτυλίσσεται καθώς ένα διατμητικό στρώμα αέρα ανυψώνεται σε σημείο κορεσμού και καθίσταται δυναμικά ασταθές αλλά όχι στατικά ασταθές. Μία διατμητική ροή δεν χρειάζεται να είναι υπό όρους ασταθής (CSHI) στο αρχικό της ύψος, καθώς κατά την ανύψωση της ενδέχεται να κορεστεί μόνο η βάση της και όχι η κορυφή της (Chapman and Browning, 1999). Μόνο μέσω ανύψωσης μπορεί να εκδηλωθεί αυτού του είδους η δυνητική δυναμική αστάθεια, όπως για παράδειγμα ανύψωση πάνω από μέτωπα (Chapman and Browning, 1999).

Τέλος, στο ΑΟΣ και στα όριά του η ανάμειξη και η τύρβη που παράγεται λόγω δυναμικής αστάθειας είναι σημαντική. Για παράδειγμα, η τύρβη παίζει σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη και τον χρόνο ζωής των στρωματόμορφων νεφών.

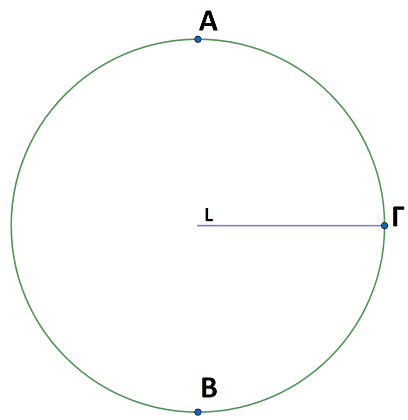
[1] bulk Richardson number, είναι ο λόγος των δυνάμεων άνωσης προς τις αδρανειακές δυνάμεις για διαστρωματωμένο ατμοσφαιρικό στρώμα

Τα στρωματόμορφα νέφη επιδρούν σημαντικά στο ενεργειακό ισοζύγιο της Γης, καθώς καλύπτουν μεγάλες εκτάσεις και συμβάλουν αρνητικά στο ισοζύγιο ακτινοβολίας, εφόσον ανακλούν μεγαλύτερο ποσό της εισερχόμενης ηλιακής ακτινοβολίας σε σχέση με το έδαφος, λόγω μεγαλύτερης λευκαύγειας, ενώ έχουν μικρότερη επίδραση στη μεγάλου μήκους ακτινοβολία, καθώς η θερμοκρασία στη κορυφή των νεφών είναι παρόμοια με τη θερμοκρασία εκπομπής του ανέφελου οριακού στρώματος (Mellado, 2017). Στη κορυφή των στρωματόμορφων νεφών επικρατούν φαινόμενα μικρής κλίμακας, όπως η ψύξη μέσω εξάτμισης και ακτινοβολίας, που είναι βασικές πηγές τύρβης. Η ψύξη της κορυφής των νεφών μπορεί να επηρεαστεί από τον υετό και άλλες μικροφυσικές διεργασίες (Wood, 2012; Lilly, 1968). Ο τρόπος αλληλεπίδρασης των παραπάνω φαινομένων καθιστούν την προσομοίωση και τη μελέτη της εξέλιξης των συνόρων των στρωματόμορφων νεφών δύσκολη (Randall et al., 1984). Αν και η βασικότερη πηγή παραγωγής τύρβης στο σύνορο των νεφών είναι η θερμική αστάθεια λόγω ψύξης σε ύψος 10 με 20 μέτρα πάνω από τα στρωματόμορφα νέφη, μια σημαντική πηγή αποδίδεται και στη διάτμηση του ανέμου (Wood, 2012; Bretherton and Wyant, 1997). Αυτή ενδέχεται να προκαλεί την αύξηση της περιοχής συνύπαρξης τυρβώδους και μη-τυρβώδους ροής (entrainment zone), εφόσον λειτουργεί ως καταλύτης στην ψύξη μέσω εξάτμισης, ή ακόμα και να μειώσει το ποσό της τύρβης στο εσωτερικό του νέφους, μειώνοντας το ρυθμό ψύξης λόγω της ακτινοβολίας (Wang et al., 2008; J. Kurowski et al., 2009; Mellado et al., 2014). Μία από τις αιτίες που προκαλείται η διατμητική ροή είναι οι κινήσεις μεγάλης κλίμακας του οριακού στρώματος, καθώς ανοδικές κινήσεις του αέρα ανακλώνται στην οριζόντια διεύθυνση λόγω της αναστροφής πάνω από τα στρωματόμορφα νέφη. Επιπλέον, ο μέσος άνεμος που επάγεται από βαθμίδες πίεσης συνοπτικής κλίμακας, είναι ικανός να προκαλέσει διατμητική ροή (Conzemius and Fedorovich, 2007; Fedorovich and Conzemius, 2008).

1.2 Η αστάθεια στη Μηχανική και στη Μετεωρολογία

Η έννοια της αστάθειας στη Μετεωρολογία είναι όμοια με αυτή που συναντάμε στη Μηχανική και η μελέτη της γίνεται με όμοιο τρόπο. Ένα απλό παράδειγμα αποτελεί το ραβδικό εκκρεμές που απεικονίζεται στο Σχήμα 1.1. Το εκκρεμές έχει δύο σημεία ισορροπίας, τα σημεία A και B. Αν η ράβδος βρίσκεται στο σημείο B και της ασκηθεί αμελητέα δύναμη ώστε να απομακρύνει την ράβδο ελάχιστα από το σημείο ισορροπίας, τότε η ράβδος θα επανέλθει ξανά στο ίδιο σημείο μετά από ορισμένο χρονικό διάστημα. Η θέση ισορροπίας B ονομάζεται σημείο ευσταθούς ισορροπίας. Αντίθετα, αν η ράβδος βρίσκεται στη θέση A και της ασκηθεί η ίδια δύναμη, τότε η θέση και η ταχύτητα της ράβδου θα μεταβληθούν εκθετικά γρήγορα μέχρι τη χρονική στιγμή που το σύστημα θα μεταβεί σε μία νέα θέση ευσταθούς ισορροπίας, τη B. Παρόμοια είναι και η μελέτη ευστάθειας ροής. Μία διαστρωματωμένη και διατμητική ροή, είναι δυνατόν να έχει πολλαπλές καταστάσεις ισορροπίας. Αν είναι σε κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας και διαταραχθεί, τότε τα μεγέθη που την περιγράφουν θα εκτελέσουν ταλάντωση γύρω από το σημείο ισορροπίας και παρουσία τριβής θα μεταβούν σε αυτό. Αν είναι σε κατάσταση ασταθούς ισορροπίας, τα μεγέθη που την περιγράφουν μεταβάλλονται με εκθετικό ρυθμό και η ατμόσφαιρα απομακρύνεται από αυτήν την κατάσταση με την ταυτόχρονη εμφάνιση δομών όπως είναι δίνες διαφόρων μεγεθών και μορφών. Οι δομές αυτές αποτελούν την εξέλιξη των μικρών διαταραχών όταν το πλάτος τους έχει μεγαλώσει αρκετά.

Η μελέτη ευστάθειας ροής που θεμελιώθηκε από τον Rayleigh (1879), βασίζεται στη γραμμικοποίηση των εξισώσεων Navier-Stokes και την πρόβλεψη του ρυθμού ανάπτυξης των διαταραχών που εισάγονται. Αν καμία διαταραχή δεν αναπτύσσεται, τότε το συμπέρασμα είναι πως η ροή είναι ευσταθής και



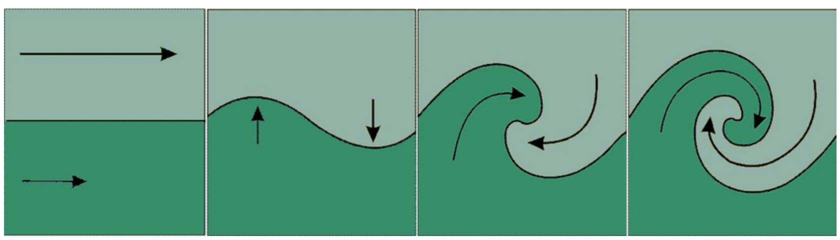
Σχήμα 1.1: *Ραβδικό εκκρεμές μήκους L. Το σημείο A είναι θέση ασταθούς ισορροπίας, ενώ το σημείο B θέση ευσταθούς ισορροπίας.*

διατηρείται. Στην περίπτωση που οι διαταραχές αυξάνουν εκθετικά το πλάτος τους (normal modes), για χρόνους που τείνουν στο άπειρο, η διαταραχή με τον μεγαλύτερο ρυθμό ανάπτυξης κυριαρχεί και εξελίσσεται στις παρατηρούμενες δομές (Farrell and Ioannou, 1996).

1.3 Η αστάθεια Holmboe

Στο ιστορικό του πείραμα, ο Reynolds μελέτησε πρώτη φορά τη μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή και βρήκε ότι έχουμε την εμφάνιση τύρβης όταν η διάτμηση της ροής ξεπεράσει ένα όριο που υπολόγισε πειραματικά (Reynolds, 1883). Μεταγενέστερες μελέτες έδειξαν ότι η δυναμική αστάθεια εμφανίζεται και σε περιπτώσεις ρευστών όπως η ατμόσφαιρα, που είναι ευσταθώς διαστρωματωμένη. Αποδείχθηκε, επιπλέον, ότι ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του προφίλ ταχύτητας και διαστρωμάτωσης της ροής, εμφανίζονται τρεις κατηγορίες αστάθειας: η Kelvin-Helmholtz (K-H), η Taylor-Caulfield και η Holmboe.

Η Κ-Η εμφανίζεται στην περίπτωση που το πάχος της περιοχής διάτμησης είναι μικρότερο σε σχέση με το πάχος μεταβολής της πυκνότητας (Mashayek and Peltier, 2012a,b). Οι Rosenhead and Jeffreys (1931) μελέτησαν την εξέλιξη της αστάθειας. Μικρές στάσιμες αρμονικές διαταραχές μεγαλώνουν σε πλάτος όπως εμφανίζεται στο Σχήμα 1.2 και εξελίσσονται στους χαρακτηριστικούς ελλειψοειδείς στρόβιλους, ενώ η βαρυτική κατάρρευσή τους προκαλεί τη δημιουργία τύρβης (Thorpe, 1968). Τα ευρήματα τους επιβεβαιώθηκαν μέσω αριθμητικών προσομοιώσεων (Moser and Rogers, 1991), πειραμάτων (Thorpe, 1968) και παρατηρήσεων (van Haren et al., 2014).



Σχήμα 1.2: *Αστάθεια Kelvin-Helmholtz σε διατμητική ροή. Μια μικρή διαταραχή της ταχύτητας, κάθετη στη διεύθυνση της διατμητικής ροής, προκαλεί αστάθεια Kelvin-Helmholtz και αναδίπλωση των διατμητικών στρωμάτων (Πηγή: Philippi et al. (2016)).*

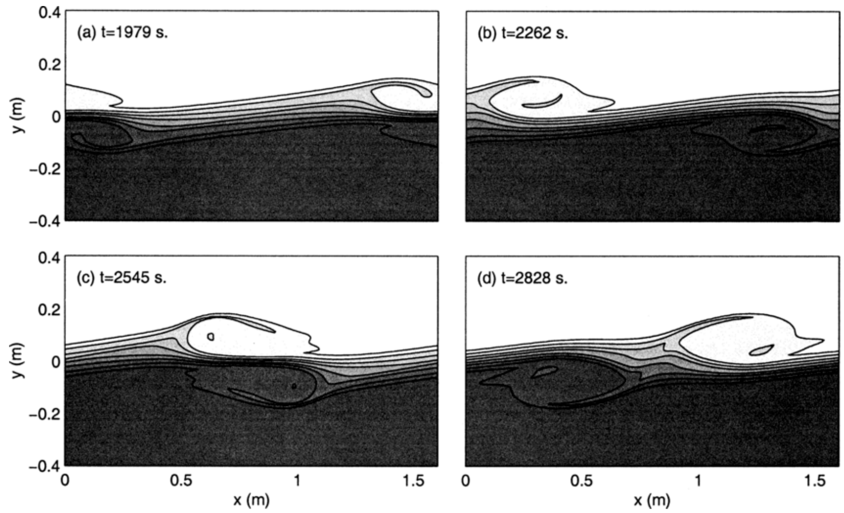
Η δεύτερη κατηγορία αφορά τη δυναμική αστάθεια σε περιπτώσεις πολλαπλών ομογενών στρωμάτων διαφορετικής πυκνότητας. Συγκεκριμένα, ο Taylor (1931) θεώρησε ροή σταθερής διάτμησης, προκειμένου η μη διαστρωματωμένη ροή να είναι ευσταθής, και ρευστό με τρία στρώματα διαφορετικής πυκνότητας και οδηγήθηκε στην πρόβλεψη νέας αστάθειας διαστρωματωμένης ροής, που ονομάζεται αστάθεια Taylor-Caulfield (Caulfield et al., 1995). Ο Taylor καθυστέρησε να δημοσιεύσει τα θεωρητικά του ευρήματα, καθώς δεν μπορούσε να επιβεβαιώσει πειραματικά την ύπαρξη της αστάθειας. Οι προβλέψεις επιβεβαιώθηκαν από προσομοιώσεις των Lee and Caulfield (2001), που βρήκαν ότι οι δομές αστάθειας Taylor-Caulfield θυμίζουν τις δομές αστάθειας Kelvin-

Helmholtz, δηλαδή ελλειπτικούς στροβίλους σε σειρά. Ταυτόχρονα εμφανίζονται δευτερεύοντες δομές αστάθειας, ενώ σε μεταγενέστερα πειράματα παρατηρούνται 'παρασιτικά' κύματα, που καταστρέφουν τους στρόβιλους Taylor-Caulfield (Balmforth et al., 2012).

Η τελευταία κατηγορία, που είναι το αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας, είναι η αστάθεια Holmboe. Ο Holmboe (1962) μελετώντας ροές με τμηματικά γραμμική διάτμηση και διαστρωμάτωση, πέρα από τις δομές Kelvin-Helmholtz, βρήκε μία δεύτερη κατηγορία διαταραχών, οι οποίες έχουν μη-μηδενική φασική ταχύτητα και εξελίσσονται πιο αργά από τις πρώτες, ενώ εμφανίζονται για εξαιρετικά ισχυρές διαστρωματώσεις. Οι δομές αυτές παρατηρούνται σε διατμητικές ροές στην ατμόσφαιρα, όπως τα παραδείγματα που αναφέρθηκαν στην Ενότητα 1.1, αλλά και στον ωκεανό όπου η αστάθεια Holmboe παίζει εξίσου σημαντικό ρόλο στη διαπυκνιακή κυκλοφορία με την αστάθεια Kelvin-Helmholtz, καθώς από αριθμητικές προσομοιώσεις εικάζεται πως η ανάδευση που προκαλείται από τη σχετικά αργή εξέλιξη της αστάθειας Holmboe είναι αποδοτική (Smyth and Winters, 2003b).

Οι μη-γραμμικές δομές Holmboe, εμφανίζονται στο τελευταίο στάδιο της εξέλιξής τους ως τριγωνικές κορυφές στο επίπεδο μεταβολής την πυκνότητας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3. Οι άνω κορυφές φαίνεται να κινούνται προς τα δεξιά, ενώ οι κάτω κορυφές προς την αντίθετη κατεύθυνση. Η διαφορά στο σχηματισμό των διαταραχών παίζει ρόλο και στην ανάδευση που ενδέχεται να προκαλούν. Οι δομές Kelvin-Helmholtz έχουν ως αποτέλεσμα την ανάμιξη στη διαχωριστική επιφάνεια της πυκνότητας (για ροές εξαιρετικά ασθενούς διαστρωμάτωσης), ενώ τα κύματα Holmboe προκαλούν ανάμιξη στις περιοχές άνω και κάτω της διαχωριστικής επιφάνειας (Caulfied and Peltier, 2000; Carpenter et al., 2007).

Ακολουθώντας τον Holmboe, αρκετοί συγγραφείς μελέτησαν τον συγκεκριμένο τύπο αστάθειας. Ο Hazel (1972) απέδειξε πως τα αποτελέσματα για ομαλό



Σχήμα 1.3: *Απεικόνιση της χρονικής εξέλιξης των ισόπυκνων καμπυλών, δισδιάστατων κυμάτων Holmboe. Διακρίνονται οι τριγωνικές κορυφές και η σχετική κίνηση των δύο κυμάτων προς την αντίθετη κατεύθυνση. Με σκούρο είναι η περιοχή υψηλότερης πυκνότητας (Πηγή: Smyth and Winters (2003a)).*

προφίλ ταχύτητας και πυκνότητας είναι ίδια με του Holmboe (1962), αρκεί το πάχος μεταβολής της πυκνότητας να είναι σημαντικά μικρότερο από το πάχος διάτμησης. Επιπλέον μελετήθηκαν φαινόμενα όπως το ιξώδες και η διάχυση (Smyth and Peltier, 1990), η μη-γραμμική εξέλιξη των διαταραχών (Smyth et al., 1988; Smyth and Peltier, 1991; Sutherland et al., 1994) και η ανάμειξη (Smyth and Winters, 2003a), ενώ μέσω εργαστηριακών πειραμάτων (Browand and Winant, 1973) εντοπίστηκαν και επιβεβαιώθηκαν οι δομές αστάθειας Holmboe. Μελετώντας τις τροχιές σωματιδίων που προέκυψαν από την γραμμική ανάλυση, τις αριθμητικές προσομοιώσεις, και τα εργαστηριακά πειράματα, οι Yang et al. (2022) βρήκαν πως σχηματίζουν ελλείψεις προσανατολισμένες προς το δεύτερο και τέταρτο τεταρτημόριο, που έχει ως αποτέλεσμα την αρνητική ροή ορμής. Επιπλέον, το κατακόρυφο προφίλ της ροής ορμής εμφανίζει μέγιστα πάνω και κάτω της διεπιφάνειας της πυκνότητας, που οφείλονται στα αντίστοιχα κύματα Holmboe. Οι Carpenter et al. (2010) ανέπτυξαν μία μέθοδο προκειμένου να μπορούν να χαρακτηρίσουν την ανάπτυξη διαταραχών σε διαστρωματωμένες διατμητικές ροές ως Kelvin-Helmholtz, Holmboe ή Taylor-Caulfield αστάθειες. Η μέθοδος εφαρμόστηκε σε κατά τμήματα γραμμικές, ευσταθώς διαστρωματωμένες συμμετρικές και ασύμμετρες ροές. Χαρακτηριστικά, στο ασύμμετρο προφίλ όπου οι διαταραχές που παρατηρούνται έχουν μη μηδενική φασική ταχύτητα, διαπίστωσαν πως είναι αποτέλεσμα ενός συνδυασμού ασταθειών Kelvin-Helmholtz και Holmboe. Επίσης, εφάρμοσαν τη μέθοδό τους σε ομαλά προφίλ ταχύτητας και πυκνότητας, με σκοπό τα αποτελέσματά τους να επεκταθούν σε πιο ρεαλιστικές ροές που εμφανίζονται στην ατμόσφαιρα.

Παρά το γεγονός ότι η θεωρία εκθετικής ανάπτυξης διαταραχών (modal theory) εξηγεί την παρατηρούμενη εξέλιξη της αστάθειας, υπήρξε ασυμφωνία σε διάφορες περιπτώσεις ραγδαίας εξέλιξης των φαινομένων. Πειράματα που εκτελούνται σε πεπερασμένο χρόνο αλλά και φυσικά φαινόμενα, όπως η κυκλογένεση που εξελίσσεται σε χρονικό διάστημα 12-24 ωρών (Roebber, 1984), έδειξαν πως είναι απαραίτητη μία θεωρία που θα λαμβάνει υπόψιν τη δυνατότητα ανάπτυξης των διαταραχών σε πεπερασμένο χρόνο που μπορεί να είναι είτε αλγεβρική είτε εκθετική. Όμοιο είναι και το πρόβλημα προγνωσιμότητας των ατμοσφαιρικών κινήσεων για πεπερασμένο χρονικό διάστημα, το οποίο ανάγεται σε πρόβλημα αρχικών τιμών, με την αβεβαιότητα των παρατηρήσεων να αποτελούν τις μικρές διαταραχές στο σύστημα (Palmer, 1988). Τα παραπάνω παραδείγματα οδήγησαν στην ανάπτυξη μίας θεωρίας από τους Farrell and Ioannou (1996), η οποία προβλέπει την εξέλιξη των μεταβατικών διαταραχών ή αλλιώς της αλγεβρικής αστάθειας (non-modal instability), προκειμένου να συνδυάσει την πρόβλεψη της εξέλιξης διαταραχών σε πεπερασμένο και άπειρο χρόνο. Η θεωρία ονομάστηκε Γενικευμένη Θεωρία Ευστάθειας (Generalized Stability Theory) ή ΓΘΕ.

1.4 Γενικευμένη Θεωρία Ευστάθειας

Ως παράδειγμα για τη μέθοδο της ΓΘΕ και την αντιπαραβολή της με τη μέθοδο της κλασικής θεωρίας ευστάθειας του Rayleigh, θεωρούμε την εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη των διαταραχών ενός γραμμικοποιημένου δυναμικού συστήματος:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{1.1}$$

όπου το $\boldsymbol{x}$ είναι το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος και $\boldsymbol{A}$ ο γραμμικοποιημένος δυναμικός τελεστής. Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι:

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0), \tag{1.2}$$

με $\boldsymbol{x}(t)$ το διάνυσμα κατάστασης για χρόνο t και $\boldsymbol{x}(0)$ η αρχική συνθήκη. Για τον υπολογισμό του $e^{\boldsymbol{A}t}$ υποθέτουμε ότι ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ έχει ιδιοτιμές λ_i και ιδιοσυναρτήσεις x_i. Οποιαδήποτε συνάρτηση $f(\boldsymbol{A})$ του τελεστή, έχει ιδιοτιμές $f(\boldsymbol{\lambda_i})$ και ιδιοσυναρτήσεις $\boldsymbol{x}_i$, όπου ο δείκτης i εξαρτάται από το μέγεθος του τελεστή. Έστω ότι μελετάται ένα σύστημα όπου ο τελεστής $\boldsymbol{A}$ είναι διαστάσεων 2×2 και τα ιδιοανύσματα του, $\boldsymbol{u_1}$ και $\boldsymbol{u_2}$, είναι διανύσματα διάστασης 2×1. Από την ιδιοανάλυση του τελεστή, ο $\boldsymbol{A}$ μπορεί να γραφεί ως $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{-1}$, όπου $\boldsymbol{U}$ είναι ο πίνακας με τα ιδιοανύσματα και $\boldsymbol{\Lambda}$ ο πίνακας με τις αντίστοιχες ιδιοτιμές. Επομένως, η εκθετική συνάρτηση του τελεστή θα γίνει $e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{U}e^{\boldsymbol{\Lambda}}\boldsymbol{U}^{-1}$. Αν η αρχική συνθήκη γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοανυσμάτων του τελεστή, $\boldsymbol{x}(0) = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2$, τότε η λύση θα γραφεί ως:

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{u}_2. \tag{1.3}$$

Εφόσον οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και αρνητικές, το σύστημα είναι ευσταθές, ενώ αν είναι πραγματικές και θετικές, παρατηρείται αστάθεια με τις ασταθείς διαταραχές να εξελίσσονται με εκθετικό ρυθμό. Το ιδιοάνυσμα που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη ιδιοτιμή (π.χ. $\boldsymbol{u}_1$), κυριαρχεί σε μεγάλους χρόνους καθώς για μεγάλο t, $e^{\lambda_1 t} \gg e^{\lambda_2 t}$ και $x(t) \simeq c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{u}_1$. Όμως αυτό δεν εξασφαλίζει ούτε την αύξηση των διαταραχών σε πεπερασμένο χρόνο ούτε και ότι η αρχική διαταραχή $\boldsymbol{x}(0)$ που θα κυριαρχήσει σε πεπερασμένο χρόνο είναι η $\boldsymbol{u}_1$.

Η Γενικευμένη Θεωρία Ευστάθειας (ΓΘΕ) μελετά τη μέγιστη αύξηση του πλάτους των διαταραχών σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα, που ονομάζεται χρόνος βελτιστοποίησης T_{opt} και ορίζεται από το φυσικό πρόβλημα. Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει για πολλούς χρόνους T_{opt} ώστε να μελετηθεί το συνολικό δυναμικό της ροής. Η δυναμική των διαταραχών σε πεπερασμένο χρόνο δεν είναι δυνατόν να υπολογιστεί από το διακριτό φάσμα του γραμμικοποιημένου δυναμικού τελεστή, επομένως είναι αναγκαίο να διερευνηθεί η ανάπτυξη μίας τυχαίας διαταραχής, μελετώντας την εξέλιξη ενός θετικά ορισμένου μέτρου για το πλάτος της διαταραχής. Αυτή η παράμετρος θεωρείται να είναι η ενέργεια των διαταραχών.

Η μέγιστη ενεργειακή αύξηση των διαταραχών για ορισμένο χρόνο T_{opt} και δεδομένης της αρχικής ενέργειας υπολογίζεται ως η μέγιστη τιμή του λόγου:

$$G(T_{opt}) = max\frac{E(T_{opt})}{E(0)}, \tag{1.4}$$

Ας υποθέσουμε ότι η ενέργεια των διαταραχών δίνεται με τη βοήθεια μιας μετρικής $\boldsymbol{M}$, ως $E = \boldsymbol{x}^\dagger \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}$. Τότε ο λόγος $E(T_{opt})/E(0)$ γίνεται:

$$\sigma = \frac{E(T_{opt})}{E(0)} = \frac{\boldsymbol{x}^\dagger(T_{opt})\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(T_{opt})}{\boldsymbol{x}^\dagger(0)\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(0)} = \frac{\boldsymbol{x}^\dagger(0)e^{\boldsymbol{A}^\dagger T_{opt}}\boldsymbol{M}e^{\boldsymbol{A}T_{opt}}\boldsymbol{x}(0)}{\boldsymbol{x}^\dagger(0)\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(0)}, \tag{1.5}$$

που μπορεί να γραφεί ως:

$$\boldsymbol{x}^\dagger(0)\left(e^{\boldsymbol{A}^\dagger T_{opt}}\boldsymbol{M}e^{\boldsymbol{A}T_{opt}} - \sigma\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{x}(0) = 0. \tag{1.6}$$

Για να ικανοποιείται η σχέση (1.6) πρέπει το σ να είναι λύση του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών:

$$e^{\boldsymbol{A}^\dagger T_{opt}}\boldsymbol{M}e^{\boldsymbol{A}T_{opt}}\boldsymbol{x}(0) = \sigma\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(0) \tag{1.7}$$

Η μέγιστη ενεργειακή αύξηση αντιστοιχεί στη μέγιστη ιδιοτιμή που υπολογίζεται από το γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών των πινάκων $\boldsymbol{B} = e^{\boldsymbol{A}^\dagger T_{opt}} \boldsymbol{M} e^{\boldsymbol{A} T_{opt}}$ και $\boldsymbol{M}$, με τη βέλτιστη διαταραχή (optimal perturbation) να είναι το αντίστοιχο ιδιοάνυσμα. Ο δεύτερος τρόπος της λύσης του γενικευμένου προβλήματος είναι να οριστεί ένα καινούργιο σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο η ενέργεια θα είναι το Ευκλείδειο μέτρο του διανύσματος. Αυτό ορίζεται από το καινούργιο διάνυσμα $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{M}^{1/2}\boldsymbol{x}$, καθώς σε αυτές τις συντεταγμένες η ενέργεια είναι το Ευκλείδειο μέτρο:

$$E = \boldsymbol{x}^\dagger \boldsymbol{M} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\dagger \left(\boldsymbol{M}^{1/2}\right)^\dagger \boldsymbol{M}^{1/2} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^\dagger \boldsymbol{y}. \tag{1.8}$$

Επειδή το αρχικό διάνυσμα είναι $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}^{-1/2}\boldsymbol{y}$, η εξέλιξη των διαταραχών δίνεται από την εξίσωση:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}x \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{M}^{-1/2}\boldsymbol{y}\right) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{M}^{-1/2}\boldsymbol{y} \rightarrow \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{M}^{1/2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}^{-1/2}\boldsymbol{y}. \tag{1.9}$$

Επομένως, αν οριστεί ο πίνακας $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{M}^{1/2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}^{-1/2}$, η μέγιστη ενεργειακή αύξηση δίνεται εφαρμόζοντας τη μέθοδο ιδιάζουσας ανάλυσης (singular value decomposition) με τον πίνακα να αναλύεται ως:

$$e^{\boldsymbol{D} T_{opt}} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^\dagger.$$

Οι στήλες του πίνακα $\boldsymbol{V}$ είναι οι βέλτιστες διαταραχές, ο πίνακας $\boldsymbol{\Sigma}$ στην διαγώνιό του περιέχει τις ιδιάζουσες τιμές που ισούνται με $\sqrt{\sigma}$ και οι στήλες του $\boldsymbol{U}$ είναι οι βέλτιστες διαταραχές όπως έχουν εξελιχθεί στο χρόνο T_{opt}. Συνεπώς, η μέγιστη ενεργειακή ανάπτυξη αντιστοιχεί στο τετράγωνο της μέγιστης ιδιάζουσας τιμής, ενώ η βέλτιστη διαταραχή είναι η αντίστοιχη στήλη του $\boldsymbol{V}$.

Ο ρυθμός ανάπτυξης των βέλτιστων διαταραχών θα υπολογιστεί με τον εκθέτη πεπερασμένου χρόνου Lyapunov, $\ln(\sqrt{\sigma})/T_{opt} = \ln(\sigma)/2T_{opt}$. Υπολογίζοντας το λογάριθμο της ενεργειακής αύξησης ως προς τον χρόνο βελτιστοποίησης, ο ρυθμός εξέλιξης των βέλτιστων διαταραχών μπορεί να συγκριθεί με τον ρυθμό εξέλιξης των εκθετικών ασταθών ιδιοανυσμάτων. Επίσης, μπορούν να συγκριθούν ευκολότερα διαταραχές που η ενεργειακή τους αύξηση διαφέρει κατά μερικές τάξεις μεγέθους.

Η μεταβατική αύξηση της ενέργειας οφείλεται στη μη κανονικότητα του δυναμικού τελεστή $\boldsymbol{D}$, δηλαδή στο αν ο τελεστής μετατίθεται ή όχι με τον Ερμιτιανό ανάστροφό του, $\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^\dagger = \boldsymbol{D}^\dagger\boldsymbol{D}$. Σε περίπτωση που μετατίθεται, ο $\boldsymbol{D}$ είναι κανονικός με τα ιδιοανύσματά του να είναι κάθετα μεταξύ τους. Αντίθετα, αν δεν μετατίθεται, τα ιδιοανύσματα δεν είναι κάθετα και είναι δυνατόν να παρατηρηθούν μεταβατικά φαινόμενα. Αυτό γίνεται φανερό από την μελέτη ενός απλού παραδείγματος ενός συστήματος με δυναμικό τελεστή:

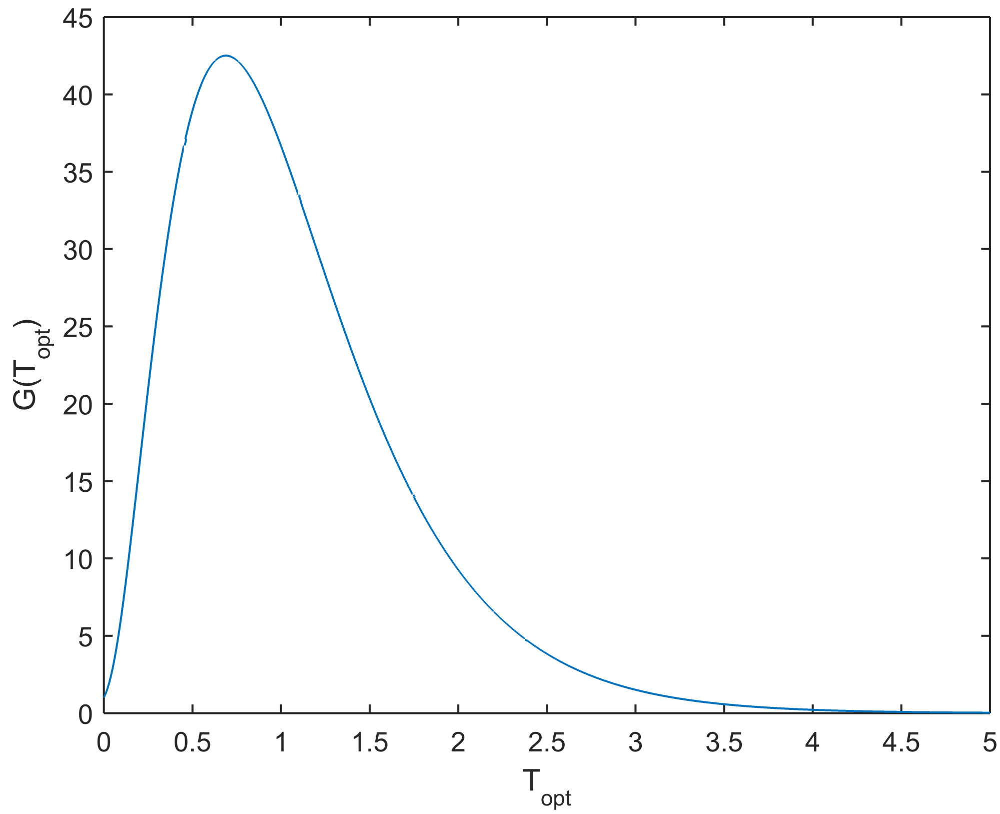
$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -1 & -\cot\theta \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = -2$, επομένως το σύστημα είναι εκθετικά ευσταθές. Ο μεταθέτης του τελεστή υπολογίζεται ως:

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^\dagger - \boldsymbol{D}^\dagger\boldsymbol{D} = \cot\theta \begin{pmatrix} \cot\theta & 1 \\ 1 & -\cot\theta \end{pmatrix}.$$

Ο τελεστής είναι κανονικός μόνο για γωνία $\theta = \pi/2$. Για γωνία $\theta = \pi/100$, στο Σχήμα 1.4 φαίνεται η μεταβατική αύξηση της ενέργειας συναρτήσει του χρόνου βελτιστοποίησης, που οφείλεται στη μη κανονικότητα του τελεστή, παρόλο που το σύστημα είναι εκθετικά ευσταθές.

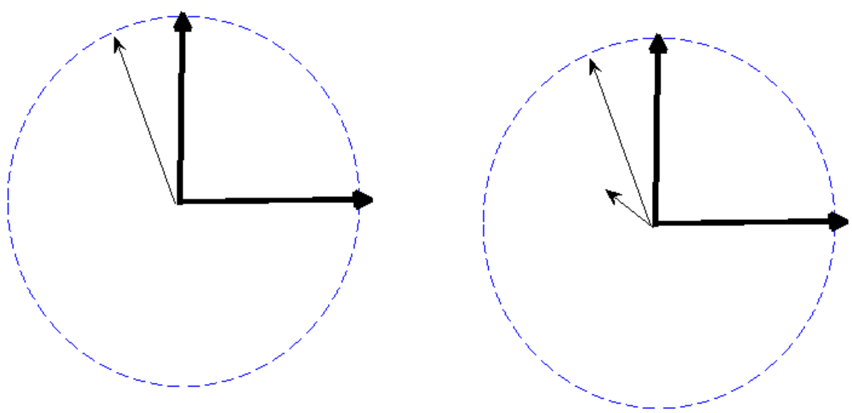
Για το απλό σύστημα 2×2 είναι εύκολη η αλγεβρική ερμηνεία της μεταβατικής αύξησης της ενέργειας. Έστω ότι ο πίνακας είναι κανονικός (στην περίπτωση $\theta = \pi/2$). Τότε τα ιδιοανύσματα του απεικονίζονται στο Σχήμα 1.5 είναι ορθογώνια (παχιά βέλη) και έχουν μοναδιαίο μέτρο. Η αρχική διαταραχή (λεπτό βέλος), που έχει και αυτή μοναδιαίο μέτρο, προβάλλεται πάνω στα ιδιοανύσματα, με τις προβολές να είναι οι συντελεστές c_1 και c_2 της εξίσωσης (1.3). Τα ιδιοανύσματα μειώνονται εκθετικά με τον χρόνο με διαφορετικούς ρυθμούς



Σχήμα 1.4: *Μέγιστη ενεργειακή αύξηση για χρόνο T_{opt} και γωνία $\theta = \pi/100$ συναρτήσει του T_{opt}.*

λ_1 και λ_2. Επομένως, οι προβολές του διανύσματος της διαταραχής θα μειώνονται με διαφορετικό ρυθμό, με αποτέλεσμα το διάνυσμα να στρίβει και να μειώνεται το μήκος του, όπως αναμένεται για εκθετικά μειούμενες διαταραχές. Εφόσον το μήκος του διανύσματος αντιστοιχεί στην ενέργεια της διαταραχής, τότε αντίστοιχα η ενέργεια μειώνεται εκθετικά.

Στη περίπτωση που ο πίνακας είναι μη κανονικός, τα ιδιοανύσματα δεν είναι ορθογώνια μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.6. Το διάνυσμα της διαταραχής προβάλλεται πάνω στα ιδιοανύσματα φέρνοντας παράλληλες σε αυτά. Όπως και πριν, οι προβολές μειώνονται εκθετικά, με την προβολή στο $\boldsymbol{u_2}$ να μειώνεται δύο φορές πιο γρήγορα. Για το λόγο αυτό, το διάνυσμα στρέφεται και σχεδόν ταυτίζεται με το οριζόντιο ιδιοάνυσμα $\boldsymbol{u}_1$, καθώς η προβολή στο



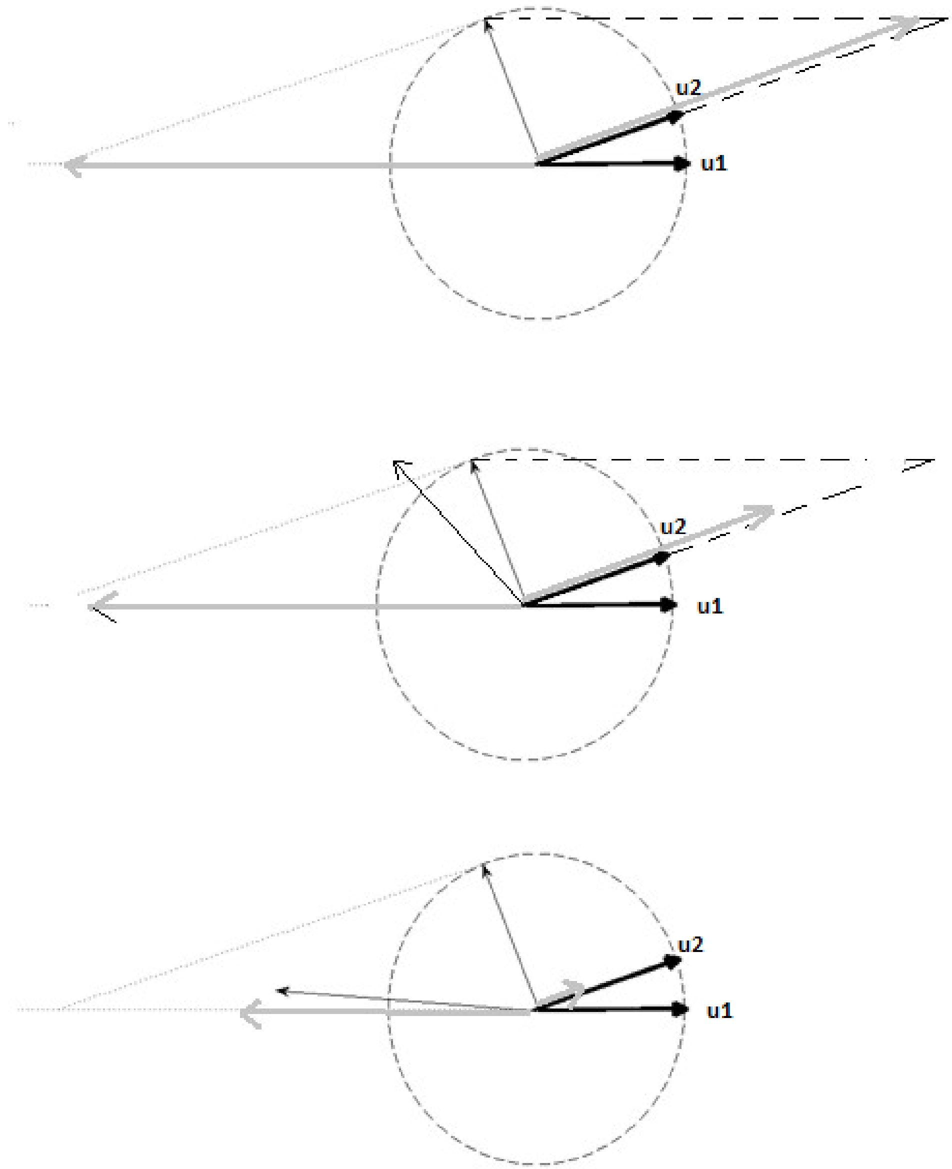
Σχήμα 1.5: *Προβολή της αρχικής διαταραχής (λεπτό βέλος) στα ορθογώνια ιδιοανύσματα (παχιά βέλη) και η εξέλιξη της διαταραχής καθώς οι προβολές μειώνονται εκθετικά.*

ιδιοάνυσμα $\boldsymbol{u}_2$ έχει σχεδόν εξουδετερωθεί. Η συνιστώσα στο $\boldsymbol{u}_1$ μειώνεται και αυτή εκθετικά, αλλά λόγω της μεγάλης αρχικής προβολής στο $\boldsymbol{u}_1$ θα υπάρξει ένα χρονικό διάστημα όπου το μέτρο της διαταραχής είναι μεγαλύτερο της μονάδας άρα παρατηρείται μεταβατική αύξηση. Με την πάροδο του χρόνου βέβαια, αυτή θα μειωθεί όπως προβλέπει η εκθετική ευστάθεια.

Με το παράδειγμα αυτό γίνεται αντιληπτό πως ο καλύτερος τρόπο διέγερσης ενός ιδιοανύσματος δεν είναι η ίδια ιδιοκατάσταση. Δηλαδή για να έχουμε μεγαλύτερη προβολή στο $\boldsymbol{u}_2$ δεν πρέπει να θεωρήσουμε ως αρχική διαταραχή το ίδιο το $\boldsymbol{u}_2$ αλλά το κάθετο στο έτερο διάνυσμα $\boldsymbol{u}_1$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.6. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί και αλγεβρικά ως εξής. Έστω ένα σύστημα εκθετικά ασταθές, με θετικές ιδιοτιμές λ_1 και λ_2. Για πολύ μεγάλους χρόνους θα κυριαρχήσει η κατάσταση με τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή, έστω η λ_1:

$$\lim_{t\to\infty} e^{\boldsymbol{D}t} = e^{\boldsymbol{\lambda}_1 t}\boldsymbol{U}_{\alpha 1}\boldsymbol{U}_{1b}^{-1}.$$

Ο βέλτιστος τρόπος να διεγερθεί η κυρίαρχη ιδιοκατάσταση δεν είναι η ίδια η ιδιοκατάσταση, αλλά το διορθογώνιο διάνυσμα σε αυτήν $(\boldsymbol{U}_{1b})^{-1\dagger}$:



Σχήμα 1.6: *Προβολή της αρχικής διαταραχής (λεπτό βέλος) στα μη ορθογώνια ιδιοανύσματα (παχιά βέλη) και η εξέλιξη της διαταραχής καθώς οι προβολές μειώνονται εκθετικά. Η προβολή στο οριζόντιο ιδιοάνυσμα* $\boldsymbol{u}_1$ *μειώνεται πιο αργά, με αποτέλεσμα η διαταραχή να στρίβει αριστερόστροφα και να ταυτίζεται χοντρικά με αυτό, ενώ ταυτόχρονα το μέτρο της διαταραχής αυξάνει.*

$$\lim_{t\to\infty} e^{\boldsymbol{D}t}\boldsymbol{U}_{1b}^{-1\dagger} = \left|\boldsymbol{U}_{1b}^{-1}\right|^2 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{U}_{\alpha 1}.$$

Στη περίπτωση του απλού συστήματος 2×2, με ιδιοανύσματα $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ και αντίστοιχες ιδιοτιμές λ_1, λ_2 (με $\lambda_1 > \lambda_2$) το διορθογώνιο του $\boldsymbol{u}_1$ είναι το κάθετο στο διάνυσμα $\boldsymbol{u}_2$. Η εκθετικά ασταθής ιδιοκατάσταση διαφέρει από το διορθογώνιο διάνυσμά της, ειδικά σε εξαιρετικά μη-κανονικά συστήματα όπως η ατμόσφαιρα (Farrell, 1988, 1989).

Οι φυσικοί μηχανισμοί που προκαλούν τη μεταβατική αύξηση της ενέργειας είναι ο μηχανισμός του Orr για τις δύο διαστάσεις και ο lift-up για τρεις διαστάσεις. Οι μηχανισμοί είναι γενικοί και δεν εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά της διατμητικής ροής (Farrell and Ioannou, 1993). Έτσι, στο Κεφάλαιο 3 θα μελετήσουμε μία ροή σταθερής διαστρωμάτωσης όπου οι μηχανισμοί μπορούν να αναδειχθούν με καθαρότητα μέσω αναλυτικών λύσεων.

1.5 Εφαρμογή της ΓΘΕ στην αστάθεια Holmboe και σκοπός της εργασίας

Οι Constantinou and Ioannou (2011) εφάρμοσαν τις μεθόδους της ΓΘΕ σε διαστρωματωμένες διατμητικές ροές. Διαπίστωσαν πως ροές ισχυρής διαστρωμάτωσης είναι επιρρεπείς σε αστάθεια Holmboe, η οποία μπορεί να οδηγήσει σε ανάμιξη. Επίσης, βρήκαν ότι σε περιπτώσεις ισχυρής διαστρωμάτωσης η κλασσική θεωρία ευστάθειας υποεκτιμά την ανάπτυξη των διαταραχών. Ο λόγος είναι ότι το διορθογώνιο άνυσμα του πιο ασταθούς κανονικού τρόπου ταλάντωσης είναι ικανό να διεγείρει τον ίδιο τον τρόπο ταλάντωσης σε μεγάλο πλάτος. Τέλος, βρήκαν ότι για κυματάριθμους όπου η ροή είναι εκθετικά ευσταθής, οι διαταραχές μπορούν να αναπτυχθούν αλγεβρικά.

Η μεταβατική αύξηση διαταραχών για κυματάριθμους που είναι ασυμπτωτικά ή ουδέτερα ασταθείς, μελετήθηκε και από τους Vitoshkin and Gelfgat (2021), οι οποίοι προσομοίωσαν ευσταθώς διαστρωματωμένες διατμητικές ροές. Η μελέτη δείχνει ότι η αυξανόμενη διαστρωμάτωση σταθεροποιεί δισδιάστατες διαταραχές που είναι ασταθείς στην περίπτωση μη διαστρωματωμένου ρευστού. Ωστόσο, καθώς αυξάνεται ο αριθμός Richardson, αυτές οι δισδιάστατες διαταραχές παρουσιάζουν αλγεβρική ανάπτυξη σε σχετικά μικρές χρονικές κλίμακες, η οποία καθοδηγείται κυρίως από τις δομές Holmboe. Η μεταβατική ανάπτυξη αρχικά ενισχύεται, αλλά εξασθενεί και τελικά μειώνεται με περαιτέρω αύξηση του αριθμού Richardson. Επιπλέον, διερευνήθηκε η επίδραση της διαστρωμάτωσης στις γραμμικά ευσταθείς τρισδιάστατες διαταραχές. Αυτές οι διαταραχές παρουσιάζουν σημαντική μεταβατική ανάπτυξη υπό ευσταθή διαστρωμάτωση. Η μέγιστη ενεργειακή ανάπτυξη εμφανίζεται σε τρισδιάστατες βέλτιστες διαταραχές, οι οποίες παρουσιάζουν πολύ μεγαλύτερη ανάπτυξη σε σύγκριση με τις δισδιάστατες. Αποδείχθηκε επίσης ότι σε σύντομους χρόνους, η μεταβατική ανάπτυξη της βέλτιστης διαταραχής ξεπερνά το πλάτος του πιο ασταθούς ιδιοανύσματος. Αυτό υποδεικνύει ότι η χρήση της βέλτιστης διαταραχής ως αρχικής συνθήκης σε πλήρως μη γραμμικές προσομοιώσεις μπορεί να αποδώσει πιο ακριβή αποτελέσματα. Η εργασία αυτή καθώς και προγενέστερες (Farrell and Ioannou, 1996) έδειξαν ότι η μεταβατική αύξηση του πλάτους τρισδιάστατων διαταραχών μπορεί να είναι μεγαλύτερη σε σχέση με την αντίστοιχη αύξηση των δισδιάστατων. Έτσι, η παρούσα διπλωματική θα επεκτείνει την μελέτη των Constantinou and Ioannou (2011) μελετώντας την ανάπτυξη τρισδιάστατων διαταραχών.

Συγκεκριμένα, σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη της αστάθειας μίας ευσταθώς διαστρωματωμένης συμμετρικής διατμητικής ροής στις τρεις διαστάσεις με ομαλό προφίλ ταχύτητας και πυκνότητας. Ως συμμετρική χαρακτηρίζεται η ροή, όπου το σημείο καμπής της συνάρτησης της ταχύτητας και της πυκνότητας είναι στο ίδιο ύφος. Αρχικά, για τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης (normal modes) μελετάται ο ρυθμός ανάπτυξης, η ταχύτητα, το μέγεθος και η γωνία που σχηματίζουν με το επίπεδο μέση ροή για ροές ασθενούς, μέτριας και ισχυρής διαστρωμάτωσης. Επίσης, διερευνώνται οι ροές ορμής και πυκνότητάς τους, προκειμένου να ελεγχθεί τι ποσοστό της κινητικής και δυναμικής ενέργειας συμβάλει στην αύξηση της συνολικής ενέργειας. Ακολούθως, εξετάζεται η μεταβατική εξέλιξη διαταραχών και τα χαρακτηριστικά τους για μικρούς και μεγάλους χρόνους βελτιστοποίησης και μελετώνται οι μηχανισμοί Orr και lift-up που συμβάλλουν στην εξέλιξή τους. Τέλος, διερευνάται ο βέλτιστος τρόπος διέγερσης των εκθετικών δομών.

Η εργασία διαρθρώνεται ως εξής. Στο Κεφάλαιο 2 υπολογίζεται ο γραμμικός τελεστής της δυναμικής των διαταραχών και ο τελεστής της ενέργειας, για διατμητική διαστρωματωμένη ομαλή ροή. Οι τελεστές προκύπτουν από τις γραμμικοποιημένες και αδιαστατοποιημένες εξισώσεις. Επιπλέον, εξάγονται οι εξισώσεις για την περιγραφή των ροών ορμής και πυκνότητας. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται οι μηχανισμοί Orr και lift-up που συμβάλλουν στη μεταβατική αύξηση της ενέργειας. Στο Κεφάλαιο 4 διερευνάται η ευστάθεια των διατμητικών ροών για διαφορετικές τιμές του αριθμού Richardson. Επιπλέον, εξετάζεται η μεταβατική αύξηση της ενέργειας τρισδιάστατων διαταραχών, η συνεισφορά των μηχανισμών Orr και lift-up και ο βέλτιστος τρόπος διέγερσης των εκθετικών διαταραχών. Τέλος, στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα.

Κεφάλαιο 2

Μέθοδος διαταραχών

2.1 Εξισώσεις κίνησης και θερμοδυναμικής

2.1.1 Εξισώσεις κίνησης

Στη περίπτωση μελέτης της δυναμικής της ατμόσφαιρας για κινήσεις μικρής κλίμακας που μας ενδιαφέρουν, μπορούμε να αγνοήσουμε τη δύναμη Coriolis. Στην περίπτωση αυτή ο νόμος κίνησης γράφεται:

$$\rho \frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \boldsymbol{g}, \tag{2.1}$$

όπου p η πίεση, ρ η πυκνότητα και $\boldsymbol{V} = (u, v, w)$ το διάνυσμα της ταχύτητας του ανέμου με u, v, w τη ζωνική, μεσημβρινή και κατακόρυφη συνιστώσα. Ο όρος στο αριστερό μέλος $D\boldsymbol{V}/Dt$ περιγράφει την επιτάχυνση μίας αέριας μάζας και γράφεται ως:

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{V},$$

όπου $\partial \boldsymbol{V}/\partial t$, είναι ο όρος της τοπικής μεταβολής και $(\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{V}$ ο όρος της μεταφοράς. Η ατμόσφαιρα μπορεί σε καλή προσέγγιση να θεωρηθεί ασυμπίεστη. Στην περίπτωση αυτή η διατήρηση της μάζας γράφεται ως:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0. \tag{2.2}$$

Επομένως, οι συνιστώσες της εξίσωσης κίνησης των αέριων μαζών γράφονται στο σύστημα τοπικών συντεταγμένων x, y, z ως:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{2.3}$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{2.4}$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g, \tag{2.5}$$

ενώ η εξίσωση συνέχειας είναι

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2.6}$$

2.1.2 Εξισώσεις θερμοδυναμικής

Εκτός των εξισώσεων κίνησης, είναι απαραίτητο να εισάγουμε τις εξισώσεις που διέπουν τις θερμοδυναμικές μεταβολές της ατμόσφαιρας. Επειδή η ατμόσφαιρα μπορεί να θεωρηθεί ως ιδανικό αέριο, ισχύει η καταστατική εξίσωση

$$pa = R_d T, \tag{2.7}$$

όπου a ο ειδικός όγκος (που συνδέεται με την πυκνότητα από τη σχέση $a = 1/\rho$), T η θερμοκρασία και R_d η σταθερά του ιδανικού αερίου ανά γραμμομοριακή μάζα, για ξηρό αέρα. Επιπλέον, ισχύει ο $1^{ος}$ θερμοδυναμικός νόμος

$$\delta Q = dU + \delta W, \tag{2.8}$$

όπου δQ είναι το στοιχειώδες ποσό θερμότητας που αποβάλλεται ή προσλαμβάνεται από το περιβάλλον, dU η στοιχειώδης μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου και δW το στοιχειώδες έργο που παράγεται ή καταναλώνεται. Η στοιχειώδης μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας μπορεί να εκφραστεί ως:

$$dU = c_v\, dT, \tag{2.9}$$

όπου c_v είναι η ειδική θερμότητα του αέρα ανά μονάδα μάζας για σταθερό όγκο και dT είναι μεταβολή της θερμοκρασίας. Η στοιχειώδης μεταβολή του έργου είναι:

$$dW = p\,da, \tag{2.10}$$

όπου με da συμβολίζουμε τη στοιχειώδη μεταβολή του ειδικού όγκου. Επειδή οι μεταβολές στην ατμόσφαιρα σε μικρό χρονικό διάστημα μπορούν να θεωρηθούν προσεγγιστικά αδιαβατικές, από τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο προκύπτει ο νόμος του Poisson

$$\frac{T}{\theta} = \left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{R_d}{c_p}}, \tag{2.11}$$

όπου c_p είναι η ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση, p_s η πίεση στην επιφάνεια και θ η δυνητική θερμοκρασία.

Η δυνητική θερμοκρασία είναι σημαντική φυσική μεταβλητή, καθώς συσχετίζεται με την εντροπία μέσω της σχέσης

$$dS = d\left(c_p \ln \theta\right). \tag{2.12}$$

Σύμφωνα με τον 2^o θερμοδυναμικό νόμο, η εντροπία διατηρείται σταθερή για αδιαβατικές μεταβολές, επομένως:

$$\frac{D \ln \theta}{Dt} = 0, \tag{2.13}$$

δηλαδή έχουμε διατήρηση της δυνητικής θερμοκρασίας. Καθώς στην εργασία θα μελετηθεί η πυκνότητα και όχι η δυνητική θερμοκρασία, είναι απαραίτητο να γραφεί ο φυσικός λογάριθμος της δυνητικής θερμοκρασίας συναρτήσει της πυκνότητας. Υπολογίζοντας το λογάριθμο του νόμου του Poisson (2.11) και συνδυάζοντας το αποτέλεσμα με την καταστατική εξίσωση εκπεφρασμένη ως $p = R_d T \rho$, προκύπτει έπειτα από λίγες αλγεβρικές πράξεις ότι:

$$\ln \theta = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \ln p - \ln \rho + \ln p_s^{R_d/c_p} - \ln R_d, \tag{2.14}$$

όπου $\gamma = c_p/c_v$, ο λόγος της θερμοχωρητικότητας υπό σταθερή πίεση προς τη θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο. Επομένως, οι εξισώσεις (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) και η (2.13) μαζί με την (2.14) περιγράφουν τις κινήσεις και τη θερμοδυναμική της ατμόσφαιρας για μικρές χρονικές και χωρικές κλίμακες.

2.2 Η κατάσταση της ατμόσφαιρας στην ισορροπία

Προκειμένου να μελετηθεί η ευστάθεια της ροής, είναι απαραίτητο η ατμόσφαιρα να βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Όπως και το παράδειγμα με το εκκρεμές, εάν ένα σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας και μικρές διαταραχές μεγαλώσουν εκθετικά γρήγορα, τότε το σύστημα είναι σε ασταθές σημείο ισορροπίας. Αντίθετα, εάν το σύστημα επανέλθει στη αρχική του κατάσταση, είναι σε ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Για τη μελέτη της αστάθειας Holmboe ακολουθήσαμε της εργασία του Hazel (1972) και θεωρήσαμε δύο ατμοσφαιρικά στρώματα με διαφορετικές πυκνότητες ρ_1 και ρ_2 και μία περιοχή διάτμησης ανάμεσά τους. Θεωρούμε δηλαδή ότι η ατμόσφαιρα έχει πυκνότητα

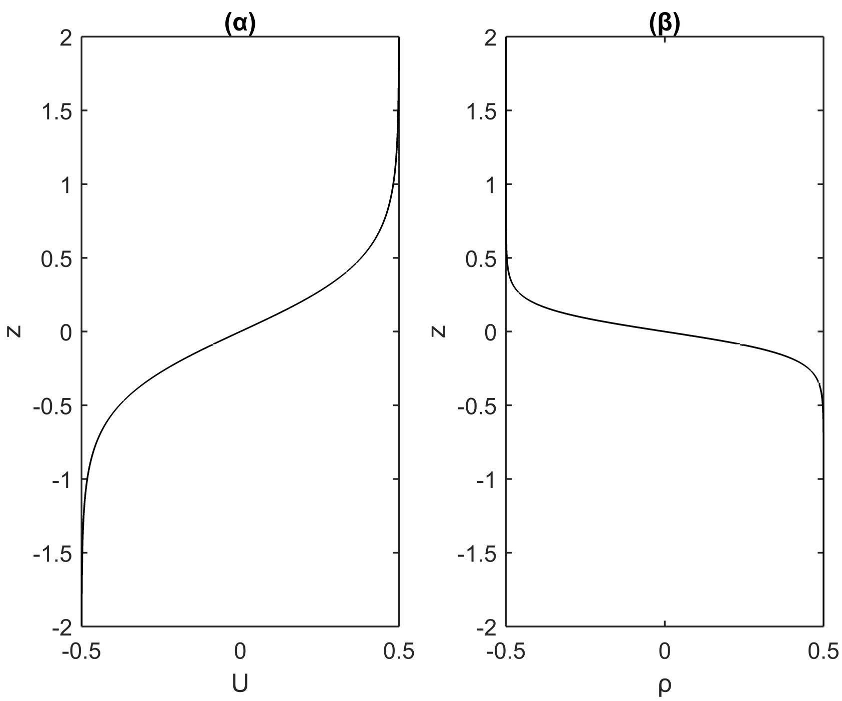
$$\rho(z) = \rho_m + \rho_0(z) = \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \tanh(2Rz), \tag{2.15}$$

με ρ_m τη μέση πυκνότητα και άνεμο με ζωνική συνιστώσα

$$U(z) = \frac{U_0}{2} \tanh(2z), \tag{2.16}$$

που φαίνονται στο Σχήμα 2.1. Η διαφορά των ταχυτήτων στην περιοχή διάτμησης είναι U_0, ενώ η παράμετρος R ορίζεται ως ο λόγος του πάχους της διάτμησης προς το πάχος της περιοχής που συμβαίνει η μεταβολή της πυκνότητας. Η τιμή της επιλέχθηκε ως $R = 3$ λόγω της εργασίας των Constantinou and Ioannou (2011), στην οποία πραγματοποίησαν μελέτη για διαταραχές δύο διαστάσεων, ενώ σε προγενέστερες παρατηρήσεις ο Hazel (1972) κατέγραφε αστάθεια για

$R > 2$ και υπέθεσε πως η κρίσιμη τιμή είναι $R = 2$. Αργότερα, οι Smyth and Peltier (1989) βρήκαν ασταθείς δομές Holmboe για $R > 2.4$, ενώ πιο πρόσφατα ο Alexakis (2005) ανακάλυψε πως είναι δυνατή η παρατήρηση αστάθειας για $R = 2.2$ και σε μεταγενέστερη εργασία του απέδειξε αναλυτικά για το μοντέλο του Hazel πως η τιμή $R = 2$ είναι η κρίσιμη τιμή που εμφανίζεται αστάθεια Holmboe (Alexakis, 2007). Για ροές όπου η παράμετρος R είναι ελάχιστα μεγαλύτερη της κρίσιμης τιμής, ο ρυθμός ανάπτυξης των δομών και το εύρος των ζωνών αστάθειας, έχουν ισχυρή εξάρτηση από την απόκλιση της παραμέτρου R από την κρίσιμη τιμή.



Σχήμα 2.1: *(α) Η ταχύτητα του ανέμου συναρτήσει του ύψους z για την κατάσταση ισορροπίας. (β) Η πυκνότητα $\rho(z)$ συναρτήσει του ύψους στην κατάσταση ισορροπίας. Οι παράμετροι είναι $U_0 = 1$, $\rho_1 - \rho_2 = 1$ και $R = 3$.*

Η κατάσταση αυτή με πεδίο πίεσης $p_0 = p_a - g \int \rho \, dz$ μπορεί να δειχθεί εύκολα ότι είναι κατάσταση ισορροπίας. Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις κίνησης (2.3), (2.4), (2.5) την ταχύτητα της μέσης ροής, εφόσον ισχύει η υδροστατική ισορροπία, προκύπτει ότι:

$$\rho(z)\frac{\partial u}{\partial t} = \rho(z)\frac{\partial v}{\partial t} = \rho(z)\frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Επομένως η συνισταμένη δύναμη είναι μηδενική.

2.3 Μέθοδος των διαταραχών και ενέργεια

Με τον ίδιο τρόπου που μελετήθηκε η ευστάθεια του συστήματος του ραβδικού εκκρεμούς, διαταράσσοντας το σύστημα ενώ βρίσκεται στο σημείο ισορροπίας, έτσι και η μελέτη ευστάθειας της ροής πραγματοποιείται θεωρώντας μικρές διαταραχές στη ταχύτητα, την πίεση και την πυκνότητα. Το πλάτος των διαταραχών είναι πολύ μικρό, της τάξης $\epsilon \ll 1$, επομένως ποσότητες δεύτερης ή μεγαλύτερης τάξης μπορούν να αγνοηθούν.

Οι διαταραγμένες ποσότητες της ταχύτητας, της πίεσης και της πυκνότητας είναι:

$$\begin{gathered} u = U(z) + \epsilon u'(x,y,z,t), \\ v = \epsilon v'(x,y,z,t), \\ w = \epsilon w'(x,y,z,t), \\ p = p_0(z) + \epsilon p'(x,y,z,t), \\ \rho = \rho_m + \rho_0(z) + \epsilon \rho'(x,y,z,t), \end{gathered} \tag{2.17}$$

Στις εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα, αντικαθίστανται οι διαταραγμένες συναρτήσεις των ταχυτήτων, της πίεσης και της πυκνότητας (2.17).΄Εστω η εξίσωση (2.3), για την κίνηση μιας αέριας μάζας στον x άξονα. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.17) προκύπτει:

$$\begin{gathered} [\rho_m + \rho_0(z) + \epsilon\rho'] \left[\frac{\partial\left(U(z)+\epsilon u'\right)}{\partial t}\right] + \left(U(z)+\epsilon u'\right)\frac{\partial\left(U(z)+\epsilon u'\right)}{\partial x} \\ +\epsilon w'\frac{\partial\left(U(z)+\epsilon u'\right)}{\partial z} + \epsilon v'\frac{\partial\left(U(z)+\epsilon u'\right)}{\partial y} = -\frac{\partial\left(p+\epsilon p'\right)}{\partial x}. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Σε αυτή μπορούν να αγνοηθούν οι όροι τάξης $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ και άνω καθώς είναι πολύ μικρότεροι από τους υπόλοιπους. Επίσης σύμφωνα με την προσέγγιση Boussinesq, γίνεται η υπόθεση πως η μέση πυκνότητα υποβάθρου είναι πολύ μεγαλύτερη της υδροστατικά εξισορροπημένης αποχής και των διαταραχών της πυκνότητας, $|\rho_0| \ll \rho_m$ και $|\rho| \ll \rho_m$. Έτσι, εξάγεται η γραμμικοποιημένη εξίσωση:

$$\rho_m \left[\frac{\partial u'}{\partial t} + U(z)\frac{\partial u'}{\partial x} + w'\frac{dU(z)}{dz} \right] = -\frac{\partial p'}{\partial x}. \tag{2.19}$$

Ομοίως, οι εξισώσεις κίνησης στους άξονες y και z γίνονται:

$$\begin{aligned} \rho_m \left[\frac{\partial v'}{\partial t} + U(z)\frac{\partial v'}{\partial x} \right] &= -\frac{\partial p'}{\partial y}, &(2.20)\\ \rho_m \left[\frac{\partial w'}{\partial t} + U(z)\frac{\partial w'}{\partial x} \right] &= -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g, &(2.21) \end{aligned}$$

ενώ εξίσωση η συνέχειας γίνεται:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0. \tag{2.22}$$

Η γραμμικοποιημένη εξίσωση για τη θερμοδυναμική προκύπτει αν συνδυαστούν οι εξισώσεις της θερμοδυναμικής (2.13) και (2.14), μαζί με τις διαταραχές της πυκνότητας και της πίεσης (2.17) και λαμβάνοντας τον λόγο $\rho'/\gamma p' = 1/u_s^2$, όπου u_s είναι η ταχύτητα του ήχου. Εφόσον $u_s \gg 1$ τότε $1/u_s \ll 1$ και το κλάσμα $\rho'/\gamma p'$ μπορεί να απαλειφθεί. Επομένως, η γραμμικοποιημένη εξίσωση της θερμοδυναμικής υπολογίζεται ως:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + U(z)\frac{\partial}{\partial x} \right] \rho' = -w'\frac{d\rho_0(z)}{dz}. \tag{2.23}$$

2.3.1 Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων

Η αδιαστατοποίηση των εξισώσεων είναι μία μέθοδος που χρησιμοποιείται εκτεταμένα στη Δυναμική Μετεωρολογία. Αδιαστατοποιώντας τις εξισώσεις, είναι δυνατόν να αξιοποιηθεί τυχόν δυναμική ομοιότητα των ροών. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε δύο διαστρωματωμένες διατμητικές ροές με διαφορετικές κλίμακες ταχύτητας και μήκους. Και για τις δύο ροές μπορεί να οριστεί ο αδιάστατος αριθμός Richardson, ως ο λόγος της δύναμης της άνωσης προς τις δυνάμεις αδράνειας. Αν για τις δύο ροές ορίζεται ο ίδιος αριθμός Richardson, υπόκεινται στην ίδια δυναμική και τα φαινόμενα που εμφανίζονται στην πρώτη ροή, εμφανίζονται και στη δεύτερη, με διαφορετική κλίμακα χώρου ή χρόνου και διαφορετικές τιμές ταχύτητας. Επομένως, λύνοντας ένα πρόβλημα για ορισμένο αριθμό Richardson, πρακτικά επιλύονται πολλαπλά προβλήματα ίδιας δυναμικής. Πέρα από τον αριθμό Richardson, ορίζονται αρκετές αδιάστατες ποσότητες, όπως ο αριθμός Reynolds ως ο λόγος των αδρανειακών δυνάμεων προς τις δυνάμεις ιξώδους, ο αριθμός Froude ως ο λόγος των αδρανειακών δυνάμεων προς τις εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σ' ένα ρευστό κ.ο.κ.

Στη διαδικασία της αδιαστατοποίησης, κάθε φυσική μεταβλητή γράφεται ως το γινόμενο δύο όρων

$$a = A\tilde{a}.$$

Το πρώτο μέρος (A) είναι οι μονάδες της μεταβλητής και η τάξη μεγέθους της και το δεύτερο μέρος ($\tilde{a}$) είναι η αδιάστατη μεταβλητή, που έχει μοναδιαία τάξη μεγέθους και συμβολίζεται με περισπωμένη. Οι τιμές που μπορούν να πάρουν οι ταχύτητες είναι σε εύρος $u = U_0\tilde{u}$, μεταξύ της μέγιστης και ελάχιστης ταχύτητας της διάτμησης. Το χαρακτηριστικό μήκος του προβλήματος καθορίζεται από το πάχος της περιοχής διάτμησης h. Εφόσον δεν υπάρχει συγκεκριμένη χρονική κλίμακα, η τάξη μεγέθους του χρόνου καθορίζεται ως ο χρόνος μεταφοράς h/U_0, που αφορά τον χρόνο που οι διαταραχές παρασύρουν αέριες μάζες με ταχύτητα U_0 σε απόσταση h. Ως τάξη μεγέθους της πυκνότητας καθορίζεται η μεταβολή της πυκνότητας μεταξύ των δύο στρωμάτων $\Delta\rho = |\rho_1 - \rho_2|$. Έτσι, οι μερικές παράγωγοι αδιαστατοποιούνται ως εξής. Έστω ότι η μεταβολή της ζωνικής συνιστώσας της ταχύτητας $\partial u/\partial x$ μπορεί να συμβεί σε διάστημα h, κατά ένα εύρος U_0. Επομένως, η μερική παράγωγος αδιαστατοποιείται ως:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_0}{h} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}.$$

Ομοίως αδιαστατοποιούνται και οι άλλοι όροι. Εφόσον δεν είναι δυνατόν να καθοριστεί η τάξη μεγέθους της πίεσης από το φυσικό πρόβλημα, μπορεί να εξαχθεί αδιαστατοποιώντας μία από τις εξισώσεις κίνησης. Αδιαστατοποιώντας την εξίσωση της x συνιστώσας την κίνησης (2.19) παίρνουμε:

$$\frac{\rho_m U_0^2}{h}\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U}(\tilde{z})\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{w}\frac{d\tilde{U}(\tilde{z})}{d\tilde{z}}\right] = \Pi\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}}. \tag{2.24}$$

Επειδή η βαροβαθμίδα προκαλεί την επιτάχυνση, έχει την ίδια τάξη μεγέθους με αποτέλεσμα η τάξη μεγέθους της πίεσης να είναι $\Pi = \rho_m U_0^2/h$.

Με όμοιο τρόπο αδιαστατοποιούνται όλες οι εξισώσεις κίνησης, θερμοδυναμικής και συνέχειας και γίνονται:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U}(\tilde{z})\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{w}\frac{d\tilde{U}(\tilde{z})}{d\tilde{z}}\right] &= \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}}, && (2.25)\\
\left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U}(\tilde{z})\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}}\right] &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}}, && (2.26)\\
\left[\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U}(\tilde{z})\frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}\right] &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} - J\tilde{\rho}, && (2.27)\\
\left[\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U}(\tilde{z})\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{x}}\right] &= -\tilde{w}\frac{d\tilde{\rho}_0(\tilde{z})}{d\tilde{z}}, && (2.28)\\
\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} &= 0. && (2.29)
\end{aligned}$$

Ο όρος $J = (gh\Delta\rho)\,/\,(\rho_m U_0^2)$ της εξίσωσης (2.27) ορίζεται ως ο αδιάστατος αριθμός Richardson (bulk Richardson number) και εκφράζει τον λόγο της δύναμης της άνωσης προς τις αδρανειακές δυνάμεις . Για μικρούς αριθμούς Richardson, οι αδρανειακές δυνάμεις κυριαρχούν, επομένως παρατηρείται ισχνή διαστρωμάτωση, ενώ για μεγαλύτερες τιμές τους αριθμού, οι δυνάμεις άνωσης είναι ισχυρότερες, άρα και η διαστρωμάτωση του ρευστού είναι ισχυρή. Τα αδιάστατα προφίλ ταχύτητας και πυκνότητας είναι

$$\tilde{U}(\tilde{z}) = \frac{1}{2}\tanh(2\tilde{z}), \tag{2.30}$$

και

$$\tilde{\rho}_0(\tilde{z}) = -\frac{1}{2}\tanh(2R\tilde{z}). \tag{2.31}$$

2.3.2 Απλοποίηση του συστήματος

Η μοντελοποίηση του προβλήματος έδωσε πέντε εξισώσεις (2.25)-(2.29) πέντε συναρτήσεων $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$, $\tilde{p}$ και $\tilde{\rho}$. Στόχος είναι να απλοποιηθεί το σύστημα σε τρεις εξισώσεις τριών συναρτήσεων. Για λόγους ευκολίας, ο συμβολισμός των αδιάστατων συναρτήσεων με περισπωμένες στο εξής θα παραλειφθεί.

Αρχικά, παραγωγίζοντας τη x συνιστώσα της εξίσωσης κίνησης (2.25) ως προς y και την y συνιστώσα της εξίσωσης κίνησης ως προς x, και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει η πρώτη από τις τρεις εξισώσεις:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + U(z)\frac{\partial}{\partial x}\right]\zeta - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dU(z)}{dz} = 0, \tag{2.32}$$

όπου $\zeta = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ είναι η κατακόρυφη συνιστώσα του στροβιλισμού. Έπειτα, οι εξισώσεις (2.25), (2.26), (2.27) παραγωγίζονται ως προς x, y, z αντίστοιχα και προσθέτοντας τα αποτελέσματα ανά μέλη, προκύπτει:

$$2\frac{dU(z)}{dz}\frac{\partial w}{\partial x} + J\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\nabla^2 p. \tag{2.33}$$

Η εξίσωση (2.33) είναι μία διαγνωστική εξίσωση για την πίεση. Στη συνέχεια, υπολογίζοντας τη Λαπλασιανή της (2.27) σε συνδυασμό με τη διαγνωστική εξίσωση (2.33), προκύπτει η δεύτερη εκ των τριών εξισώσεων:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \nabla^2 w}{\partial t} + U(z)\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + U(z)\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + U(z)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial z^2} = \\ \frac{d^2U(z)}{dz^2}\frac{\partial w}{\partial x} + J\left(-\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\rho.\end{gathered} \tag{2.34}$$

Τρίτη είναι η θερμοδυναμική εξίσωση (2.28).

2.3.3 Ανάπτυγμα στη βάση Fourier

Προκειμένου να λυθεί το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων, οι μεταβλητές της κατακόρυφης ταχύτητας w, του στροβιλισμού ζ και της πυκνότητας ρ αναπτύσσονται στη βάση Fourier, δηλαδή γράφονται ως επαλληλία μονόχρωμων αρμονικών κυμάτων, έτσι ώστε οι μερικές διαφορικές εξισώσεις να μετατραπούν σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Η συγκεκριμένη μέθοδος είναι δυνατόν να εφαρμοστεί καθώς το φυσικό πρόβλημα εμφανίζει ομογένεια κατά μήκος του x και y άξονα και οι συντελεστές των εξισώσεων δεν εξαρτώνται από τις μεταβλητές x και y. Τα αναπτύγματα Fourier των συναρτήσεων είναι:

$$\zeta(x,y,z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\zeta}(z,t)e^{ikx+ily}\,dx\,dy, \tag{2.35}$$

$$w(x,y,z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{w}(z,t)e^{ikx+ily}\,dx\,dy, \tag{2.36}$$

$$\rho(x,y,z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\rho}(z,t)e^{ikx+ily}\,dx\,dy, \tag{2.37}$$

όπου k είναι ο κυματάριθμος στη x διεύθυνση, l ο κυματάριθμος στην y διεύθυνση και τα πλάτη Fourier $\hat{\zeta}(z,t), \hat{w}(z,t)$ και $\hat{\rho}(z,t)$ είναι μιγαδικές συναρτήσεις. Επομένως, η εξίσωση της θερμοδυναμικής (2.28), γίνεται:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial t}+U(z)\cdot ik\frac{\partial}{\partial x}\right]\hat{\rho}e^{ikx+ily}\,dx\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}-\hat{w}\frac{d\rho_0(z)}{dz}e^{ikx+ily}\,dx\,dy.$$

Προκειμένου τα δύο ολοκληρώματα να εξισώνονται, οι ποσότητες που ολοκληρώνονται πρέπει να είναι ίσες,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+U(z)\cdot ik\frac{\partial}{\partial x}\right]\hat{\rho} = -\hat{w}\frac{d\rho_0(z)}{dz} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\hat{w} - ikU(z)\hat{\rho}. \tag{2.38}$$

Εφαρμόζοντας τον ίδιο κανόνα, οι εξισώσεις (2.32) και (2.34) γίνονται:

$$\frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial t} = i\left[-kU(z)\hat{\zeta} + l\frac{dU(z)}{dz}\hat{w}\right], \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{w}}{\partial t} = {} & \left(-k^2-l^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^{-1} ik\left[U(z)\left(k^2+l^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\frac{d^2U(z)}{dz^2}\right]\hat{w} \\ & + \left(-k^2-l^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^{-1}\cdot J\left(k^2+l^2\right)\hat{\rho}.\end{aligned} \tag{2.40}$$

Η χρονική εξέλιξη των αδιαστατοποιημένων πλατών Fourier $\hat{\zeta}(z,t)$, $\hat{w}(z,t)$ και $\hat{\rho}(z,t)$ περιγράφονται από τις εξισώσεις (2.38), (2.39), (2.40).

Το δυναμικό σύστημα μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}}{\partial t} = \mathcal{A}\hat{\boldsymbol{x}}, \tag{2.41}$$

όπου $\hat{\boldsymbol{x}} = \left[\hat{\zeta}(z,t), \hat{w}(z,t), \hat{\rho}(z,t)\right]^T$, είναι το διάνυσμα των πλατών Fourier και $\mathcal{A}$ είναι ο δυναμικός τελεστής:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -ikU(z) & il\frac{dU(z)}{dz} & 0 \\ 0 & ik\Delta^{-1}\left(-U(z)\Delta + \frac{d^2}{dz^2}U(z)\right) & JK^2 \\ 0 & -\frac{d\rho_0}{dz} & -ikU(z) \end{bmatrix}. \tag{2.42}$$

Με $\Delta = \partial^2_{zz} - k^2 - l^2$ συμβολίζεται η Λαπλασιανή, με Δ^{-1} συμβολίζεται η ανάστροφος Λαπλασιανή και K είναι το μέτρο των κυματάριθμων $K = \sqrt{k^2 + l^2}$.

Η εύρεση των ιδιοτιμών και των αντίστοιχων ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή $\mathcal{A}$ καθορίζει την επίλυση του δυναμικού συστήματος (2.41). Αν το πραγματικό μέρος της ιδιοτιμής είναι θετικό ($real(\sigma) > 0$) τότε εμφανίζεται εκθετική αστάθεια, καθώς έχουμε εκθετική αύξηση των διαταραχών. Το αντίστοιχο φανταστικό μέρος καθορίζει τη φασική ταχύτητα των δομών αστάθειας. Αν είναι ίσο με το μηδέν $imag(\sigma) = 0$ οι διαταραχές είναι στάσιμες, αλλιώς είναι οδεύοντα κύματα με φασική ταχύτητα $c_x = imag(\sigma)/k$ στον x άξονα και $c_y = imag(\sigma)/l$ στον y άξονα. Σύμφωνα με την κλασσική θεωρία ευστάθειας, οι διαταραχές που αναμένεται να κυριαρχήσουν είναι αυτές με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος της ιδιοτιμής $\sigma_{max} = \max_{k,l}\sigma$. Αυτές έχουν διαστάσεις $2\pi/k_{max}$, $2\pi/l_{max}$ στον x και y άξονα αντίστοιχα όπου k_{max}, l_{max} οι κυματάριθμοι που αντιστοιχούν στο μέγιστο ρυθμό σ_{max}.

2.3.4 Ενέργεια των διαταραχών

Για τη μελέτη της αλγεβρικής αστάθειας σε πεπερασμένο χρόνο, εξετάζεται η ενεργειακή εξέλιξη των διαταραχών, μέσω της Γενικευμένης Θεωρίας Ευστάθειας. Η ενέργεια των διαταραχών

$$E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + J\frac{\rho^2}{2} \right) dx\, dy\, dz,$$

είναι το άθροισμα της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας (Bakas et al., 2001). Οι συναρτήσεις των ταχυτήτων και της πυκνότητας αναπτύσσονται στη βάση Fourier. Έτσι, αντί να τις ολοκληρώσουμε σε όλο το χώρο, υπολογίζουμε την πυκνότητα ενέργειας ολοκληρώνοντας σε ένα μήκος κύματος:

$$E = \frac{1}{L_x}\frac{1}{L_y} \int\limits_{0}^{L_x} \int\limits_{0}^{L_y} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + J\frac{\rho^2}{2} \right) dx\, dy\, dz. \tag{2.43}$$

Η εξίσωση (2.43) περιγράφει τη μέση τιμή της δυναμικής και κινητικής ενέργειας στους άξονες x και y, καθώς και το άθροισμα της συνολικής ενέργειας στον άξονα z. Για τον υπολογισμό της πυκνότητας ενέργειας απαιτείται το πραγματικό μέρος των διαταραχών. Δεδομένου ότι τα πλάτη Fourier είναι μιγαδικές συναρτήσεις, το πραγματικό μέρος του τετραγώνου της ζωνικής ταχύτητας των διαταραχών μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\begin{gathered} u^2 = \left[\mathcal{R}(\hat{u}e^{ikx+ily})\right]^2 = \\ = \left[\frac{1}{2}(\hat{u}e^{ixk+ily} + \hat{u}^* e^{-ixk-ily})\right]^2 = \frac{1}{4}\left[\hat{u}^2 e^{2ikx+2ily} + \hat{u}^{*2} e^{-2ikx-2ily} + 2|\hat{u}|^2\right], \end{gathered} \tag{2.44}$$

όπου με $\mathcal{R}$ συμβολίζεται το πραγματικό μέρος της μιγαδικής συνάρτησης και με αστερίσκο η συζυγής μιγαδική συνάρτηση. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για τις υπόλοιπες συναρτήσεις και αντικαθιστώντας τα πραγματικά τους μέρη στην (2.43), εφόσον ληφθεί υπόψιν πως το ολοκλήρωμα επίπεδων κυμάτων για ένα μήκος κύματος είναι μηδέν, η πυκνότητα ενέργειας υπολογίζεται ως:

$$E = \frac{1}{4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(|\hat{u}|^2 + |\hat{v}|^2 + |\hat{w}|^2 + J|\hat{\rho}|^2 \right) dz. \tag{2.45}$$

Είναι θεμιτό η ενέργεια να εκφραστεί ως προς τις συναρτήσεις της κατακόρυφης συνιστώσας του στροβιλισμού ζ, της κατακόρυφης ταχύτητας w και της πυκνότητας ρ, καθώς η κατάσταση του συστήματος εκφράζεται από τις συγκεκριμένες συναρτήσεις. Αναπτύσσοντας τον στροβιλισμό και την εξίσωση συνέχειας (2.29) στη βάση Fourier παίρνουμε:

$$\hat{\zeta} = ik\hat{v} - il\hat{u}, \tag{2.46}$$

$$ik\hat{u} + ik\hat{v} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial z}. \tag{2.47}$$

Συνδυάζοντας τις (2.46) και (2.47) με σκοπό να εκφραστούν τα πλάτη $\hat{u}$, $\hat{v}$ συναρτήσει των πλατών $\hat{\zeta}$, $\hat{w}$ και αντικαθιστώντας στην (2.45), έπειτα από μερικές αλγεβρικές πράξεις η πυκνότητα ενέργειας υπολογίζεται ως:

$$E = \frac{1}{4(k^2+l^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left|\hat{\zeta}\right|^2 - \hat{w}^* \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(k^2+l^2\right) \right] \hat{w} + \left(k^2+l^2\right) J \left|\hat{\rho}\right|^2 \right\} dz. \tag{2.48}$$

Με βάση το δυναμικό τελεστή $\mathcal{A}$ και την ενέργεια μπορεί να υπολογιστεί η βέλτιστη ενεργειακή αύξηση σε πεπερασμένο χρόνο T_{opt} όπως αναλύθηκε στην Εισαγωγή καθώς και οι βέλτιστες αρχικές διαταραχές που την επιτυγχάνουν.

2.3.5 Τάσεις Reynolds και μεταβολή της ενέργειας

Οι μεσοποιημένες τιμές της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας είναι:

$$T = \overline{\frac{u^2+v^2+w^2}{2}}, \quad V = J\overline{\frac{\rho^2}{2}}.$$

Σύμφωνα με τους Mallios and Bakas (2017) και Bakas et al. (2001), η χρονική εξέλιξη της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας είναι:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dU_0}{dz}\overline{uw} - J\overline{\rho w}, \tag{2.49}$$

$$\frac{dV}{dt} = J\overline{\rho w}, \tag{2.50}$$

με την ολική μεταβολή της ενέργειας να προκύπτει ως

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dV}{dt} + \frac{dT}{dt} = -\frac{dU_0}{dz}\overline{uw}. \tag{2.51}$$

Οι όροι $\overline{uw}$ και $\overline{\rho w}$ είναι η μέση ροή ορμής και θερμότητας ή αλλιώς οι μεσοποιημένες τάσεις Reynolds (Reynolds averaged stress). Ο μέσος όρος $\overline{\rho w}$ εκφράζει τη συνδιακύμανση των διαταραχών της πυκνότητας και της κατακόρυφης ταχύτητας. Αν η συνδιακύμανση είναι θετική ($\overline{\rho w} > 0$), σημαίνει πως οι ποσότητες έχουν κατά μέσο όρο το ίδιο πρόσημο. Επομένως ή $\rho > 0$ και $w > 0$, με τις διαταραχές να μεταφέρουν πυκνές (ψυχρές) μάζες προς τα πάνω ή $\rho < 0$ και $w < 0$, με τις διαταραχές να μεταφέρουν αραιές (θερμές) μάζες προς τα κάτω. Από τις εξισώσεις (2.49), (2.50) και (2.51) φαίνεται πως ο μέσος όρος $\overline{\rho w}$ ρυθμίζει τη μετατροπή από κινητική ενέργεια σε δυναμική ενέργεια και το αντίστροφο, ενώ η μηχανική ενέργεια μεταβάλλεται αποκλειστικά από τη ροή ορμής $\overline{uw}$.

Για τον υπολογισμό των μεσοποιημένων τάσεων Reynolds απαιτείται μόνο το πραγματικό μέρος των διαταραχών. Δεδομένου ότι οι συναρτήσεις αναπτύσσονται σε επίπεδα κύματα Fourier, με τον ίδιο τρόπο που αναλύθηκε η x συνιστώσα της ταχύτητας στην εξίσωση (2.44), θα αναλυθούν οι διαταραχές των ταχυτήτων και της πυκνότητας. Η μέση ροή θερμότητας υπολογίζεται ως:

$$\overline{\rho w} = \frac{1}{L_x}\frac{1}{L_y}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\hat{\rho}e^{ikx+ily} + \hat{\rho}^* e^{-ikx-ily}\right)\frac{1}{2}\left(\hat{w}e^{ikx+ily} + \hat{w}^* e^{-ikx-ily}\right)\, dz\, dy\, dz.$$

Έπειτα από αλγεβρικές πράξεις και λαμβάνοντας υπόψιν πως η ολοκλήρωση των επίπεδων κυμάτων σε ένα μήκος κύματος είναι μηδέν, η μέση χρονοεξαρτώμενη ροή πυκνότητας είναι:

$$\overline{\rho w} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}\left(\hat{\rho}^*(t)\hat{w}(t)\right)\, dz, \tag{2.52}$$

Αντίστοιχα η μέση χρονοεξαρτώμενη ροή ορμής υπολογίζεται ως:

$$\overline{uw} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}\left(\hat{u}^*(t)\hat{w}(t)\right) dz. \tag{2.53}$$

Κεφάλαιο 3

Μηχανισμοί μεταβατικής αύξησης της ενέργειας

Παρά την ύπαρξη εκθετικής αστάθειας που καθορίζει την αύξηση του πλάτους των διαταραχών σε μεγάλα χρονικά διαστήματα, στις διατμητικές ροές παρατηρείται και μεταβατική αύξηση της ενέργειας των διαταραχών σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα, όπου η αύξηση του πλάτους τους μπορεί, αν είναι μεγάλη, να προκαλέσει τη δημιουργία τύρβης. Για τη μεταβατική αύξηση της ενέργειας οφείλονται δύο μηχανισμοί: ο μηχανισμός του Orr για διαταραχές δύο διαστάσεων, που εντοπίστηκε πρώτα από τον Orr (1907), και ο μηχανισμός lift-up στις τρεις διαστάσεις, ο οποίος μελετήθηκε από τον Landahl (1980). Κατά τη δράση του μηχανισμού του Orr παρατηρείται αύξηση της ταχύτητας των διαταραχών κάθετα στη ροή (vertical streak growth). Κατά τη δράση του μηχανισμού lift-up, η κατακόρυφη και μεσημβρινή συνιστώσα της ταχύτητας παραμένουν σταθερές, ενώ η ζωνική συνιστώσα αυξάνει γραμμικά (streamwise streak growth). Οι μηχανισμοί αυτοί είναι καθολικοί, επομένως η δράση τους δεν εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της ροής.

Η δράση τους μπορεί να φανεί σε μη διαστρωματωμένες ροές που εμφανίζουν σταθερή διάτμηση δίχως όρια, καθώς μπορούν να μελετηθούν αναλυτικά

(Farrell and Ioannou, 1996). Έτσι, στο παρόν κεφάλαιο, θα αναλυθεί η διατμητική ροή με σταθερή κλίση $\boldsymbol{U} = (z, 0, 0)$, προκείμενου να μελετηθεί η λειτουργία των μηχανισμών Orr και lift-up. Οι εξισώσεις που διέπουν την εξέλιξη των διαταραχών είναι οι (2.19)-(2.22) με $\rho' = 0$. Έπειτα αδιαστατοποιείται ο χρόνος ως $1/s$, το οριζόντιο και κατακόρυφο μήκος ως $L = U_0/s$, όπου U_0 είναι η μέση ταχύτητα και η πίεση $\Pi = \rho_m U_0^2$, όπου ρ_m η μέση πυκνότητα. Επομένως προκύπτουν οι αδιάστατες εξισώσεις των διαταραχών:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + z\frac{\partial}{\partial x}\right) u + w = -\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{3.1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + z\frac{\partial}{\partial x}\right) v = -\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{3.2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + z\frac{\partial}{\partial x}\right) w = -\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{3.4}$$

Το σύστημα εξισώσεων (3.1)-(3.4) απλοποιείται σε σύστημα τριών εξισώσεων και δύο συναρτήσεων, την κατακόρυφη συνιστώσα του στροβιλισμού ζ και την κατακόρυφη ταχύτητα w. Παραγωγίζοντας την (3.1) ως προς y, την (3.2) ως προς x και αφαιρώντας την πρώτη από τη δεύτερη, προκύπτει η εξίσωση εξέλιξης του στροβιλισμού, $\zeta = \partial_x v - \partial_y u$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + z\frac{\partial}{\partial x}\right) \zeta = \frac{\partial w}{\partial y}. \tag{3.5}$$

Παραγωγίζοντας τις εξισώσεις (3.1), (3.2) και (3.3) ως προς x, y και z αντίστοιχα, σε συνδυασμό με την εξίσωση συνέχειας (3.4), προκύπτει η διαγνωστική εξίσωση για την πίεση:

$$\nabla^2 p = -2\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{3.6}$$

Υπολογίζοντας την Λαπλασιανή της (3.3) σε συνδυασμό με την διαγνωστική εξίσωση (3.6), παίρνουμε:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + z\frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 w = 0. \tag{3.7}$$

Προκειμένου οι εξισώσεις να είναι ομογενείς ως προς την κατακόρυφη συνιστώσα, θα γίνει ο μετασχηματισμός σε νέο σύστημα συντεταγμένων (ξ, η, v):

$$\xi = x - zt, \quad \eta = y, \quad v = z, \quad \text{και} \quad \tau = t. \tag{3.8}$$

Στις νέες συντεταγμένες, οι παράγωγοι μετασχηματίζονται ως:

$$\partial_x = \partial_\xi, \quad \partial_y = \partial_\eta, \quad \partial_z = \partial_v - t\partial_\xi \quad \text{και} \quad \partial_t = \partial_\tau - z\partial\xi,$$

ενώ οι εξισώσεις (3.4), (3.5) και (3.7) μετασχηματίζονται ως:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} = \frac{\partial w}{\partial \eta}, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial \nabla^2 w}{\partial \tau} = 0, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial}{\partial v} - t\frac{\partial}{\partial \xi}\right) w = 0. \tag{3.11}$$

Ο στροβιλισμός γίνεται $\zeta = \partial_\xi v - \partial_\eta u$ και η Λαπλασιανή $\nabla^2 = \left[\partial^2_{\xi\xi} + \partial^2_{\eta\eta} + (\partial_v - \tau\partial_\xi)^2\right]$. Οι εξισώσεις (3.9), (3.10) και (3.11) αναπτύσσονται στη βάση Fourier $e^{i(k\xi + l\eta + mv)}$:

$$k\frac{d\hat{v}}{d\tau} - l\frac{d\hat{u}}{d\tau} = l\hat{w}, \tag{3.12}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\left[k^2 + l^2 + (m - k\tau)^2\right]\hat{w}\right\} = 0, \tag{3.13}$$

$$k\hat{u} + l\hat{v} + (m - k\tau)\hat{w} = 0. \tag{3.14}$$

Για να υπολογιστούν οι ταχύτητες των τρισδιάστατων διαταραχών, συνδυάζονται κατάλληλα οι εξισώσεις (3.12), (3.13) και (3.14). Από την εξίσωση (3.13), επιλύοντας ως προς $\hat{w}$, υπολογίζεται η κατακόρυφη ταχύτητα των διαταραχών

$$\hat{w} = \hat{w}_0 \frac{k^2 + l^2 + m^2}{k^2 + (m - kt)^2 + l^2}, \tag{3.15}$$

όπου $\hat{w}_0$ είναι το αρχικό πλάτος της κατακόρυφης ταχύτητας. Λύνοντας ως προς $\hat{v}$ την εξίσωση συνέχειας (3.14), προκύπτει η y συνιστώσα της ταχύτητας των διαταραχών

$$\hat{v} = \frac{-k\hat{u} - (m - kt)\hat{w}}{l}. \tag{3.16}$$

Συνδυάζονται την εξίσωση στροβιλισμού (3.12) και τη μεσημβρινή συνιστώσα της ταχύτητας (3.16), μετά από αρκετούς υπολογισμούς προκύπτει η ζωνική συνιστώσα της ταχύτητας

$$\hat{u} = \hat{w}_0 \frac{m^2(k^2+l^2+m^2)}{k(k^2+l^2)^{3/2}} \times \left[\arctan\left(\frac{m-kt}{\sqrt{k^2+l^2}}\right) - \arctan\left(\frac{m}{\sqrt{k^2+l^2}}\right)\right] - \frac{k(m-kt)}{k^2+l^2}\hat{w}. \tag{3.17}$$

Αρχικά εξετάζουμε την εξέλιξη των διαταραχών στο επίπεδο $x-z$ (επομένως $l=0$). Η ταχύτητα των διαταραχών εξελίσσεται σύμφωνα με τις εξισώσεις:

$$\hat{w} = \hat{w}_0 \frac{k^2+m^2}{k^2+(m-kt)^2}, \tag{3.18}$$

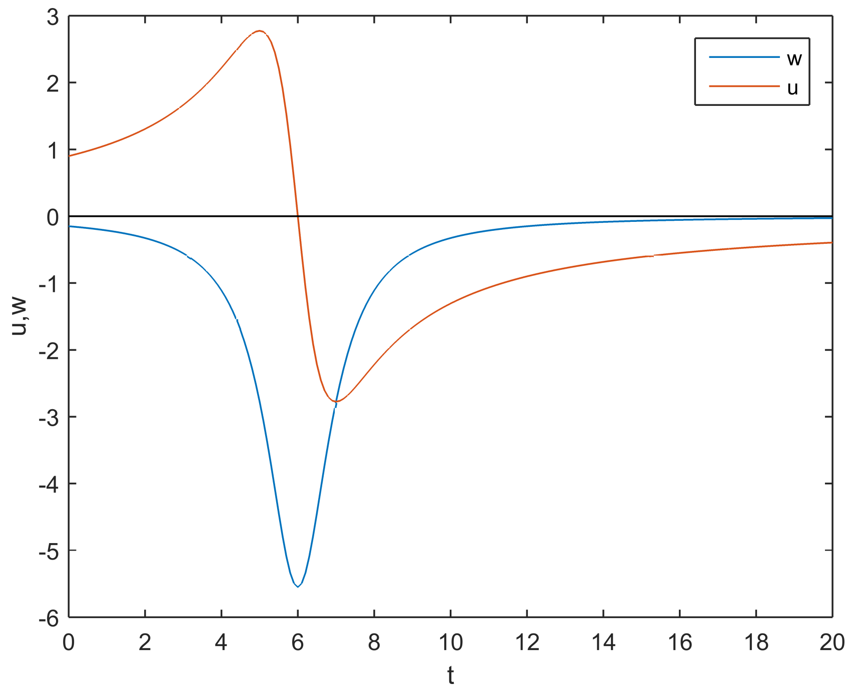
$$\hat{u} = -(m/k-t)\,\hat{w}. \tag{3.19}$$

Στο Σχήμα 3.1 παρουσιάζεται η κατακόρυφη και ζωνική ταχύτητα των διαταραχών, για κυματάριθμους $k=1$ και $m=6$. Αρχικά, η ζωνική ταχύτητα είναι θετική, ενώ η κατακόρυφη ταχύτητα αρνητική, επομένως η ροή ορμής $\overline{uw}$ είναι αρνητική οδηγώντας σε αύξηση της ενέργειας. Με την εξέλιξη του συστήματος, το μέτρο της κατακόρυφης ταχύτητας αυξάνεται έως την απόλυτη μέγιστη τιμή του, για χρόνο $t=6$, και την ίδια χρονική στιγμή η ζωνική ταχύτητα μηδενίζεται. Έως τότε, η τάση Reynolds παραμένει αρνητική, ενώ μετά την χρονική στιγμή $t=6$ γίνεται θετική, οδηγώντας σε μείωση της ενέργειας. Τέλος, οι συνιστώσες της ταχύτητας μηδενίζονται ασυμπτωτικά.

Η μεταβολή των ταχυτήτων μπορεί να κατανοηθεί καλύτερα μέσω της εξέλιξης της ρευματοσυνάρτησης ψ, η οποία μπορεί να οριστεί για τις δισδιάστατες διαταραχές μέσω των σχέσεων:

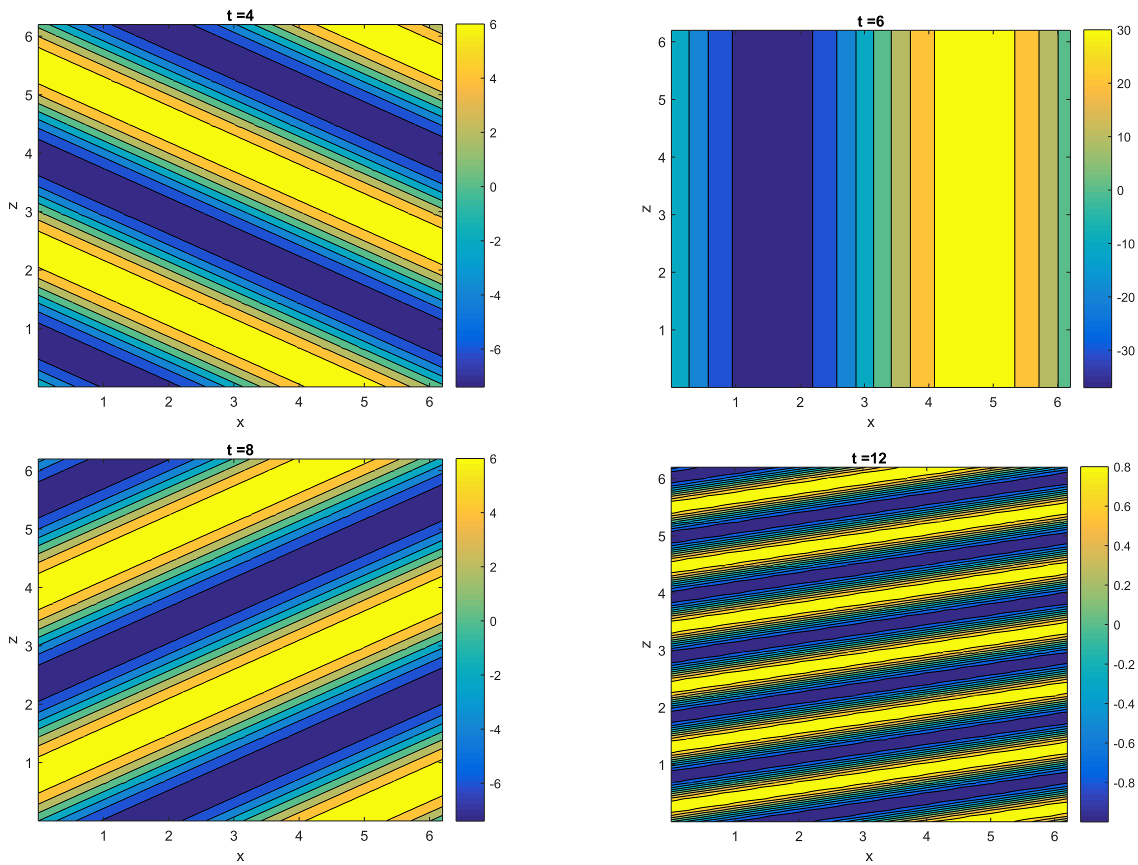
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Οι ισοϋψείς καμπύλες της ρευματοσυνάρτησης είναι και ρευματογραμμές. Δηλαδή η κίνηση των αερίων μαζών γίνεται παράλληλα στις ισοφασικές επιφάνειες της ρευματοσυνάρτησης για την κυματική λύση που έχουμε θεωρήσει. Στο



Σχήμα 3.1: *Χρονική εξέλιξη της κατακόρυφης (μπλε χρώμα) και της ζωνικής (κόκκινο χρώμα) συνιστώσας της ταχύτητας των διαταραχών με* $k = 1$, $m = 6$, $l = 0$ *και αρχική ταχύτητα* $\hat{w}_0 = -0.15$. *Έως τη χρονική στιγμή* $t = 6$ *η τάση Reynolds είναι αρνητική και οδηγεί σε αύξηση της ενέργειας, ενώ έπειτα η τάση Reynolds γίνεται θετική, οδηγώντας σε μείωση της ενέργειας.*

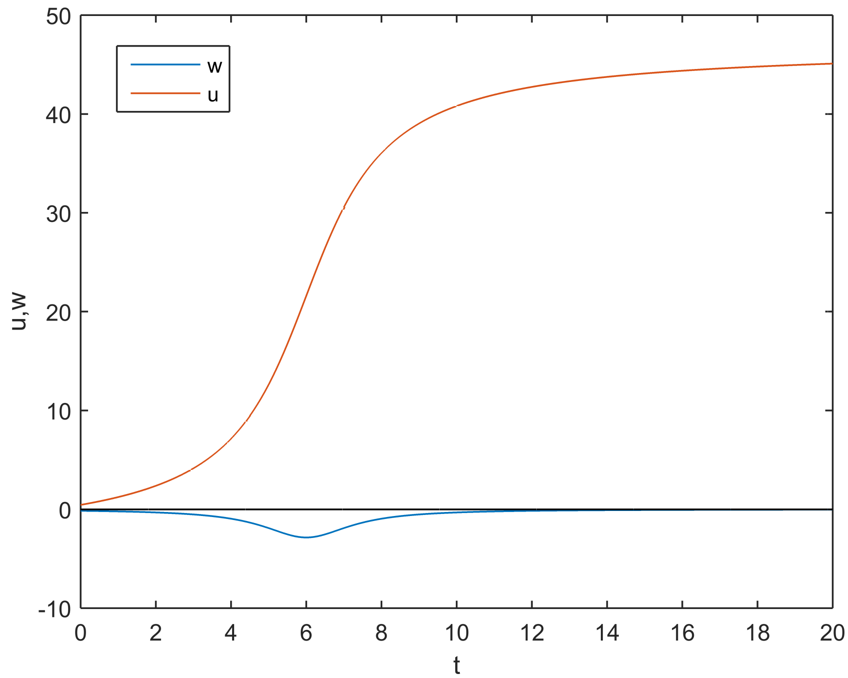
Σχήμα 3.2 σχεδιάζεται η χρονική εξέλιξη της ρευματοσυνάρτησης. Αρχικά, οι ισοφασικές επιφάνειες κείτονται αντίθετα από την διάτμηση. Έτσι μπορούμε να δούμε και εποπτικά ότι η ροή ορμής είναι αρνητική αφού έχουμε κινήσεις δυτικές και καθοδικές ή ανατολικές και ανοδικές. Με την πάροδο του χρόνου οι ισοφασικές επιφάνειες περιστρέφονται δεξιόστροφα, καθώς η διαταραχή παρασύρεται από τη διατμητική ροή που έχει μεγαλύτερη ένταση του ανέμου σε μεγαλύτερα ύψη. Η διάτμηση όμως τις παραμορφώνει κιόλας καθώς αυτές ανοίγουν ($t = 6$) οδηγώντας σε μείωση των παραγώγων της ρευματοσυνάρτησης. Επειδή ο στροβιλισμός που αφορά τις παραγώγους της ρευματοσυνάρτησης διατηρείται, αυτό οδηγεί αναγκαστικά σε αύξηση του πλάτους της ρευματοσυνάρτησης και κατ' επέκταση αύξηση της έντασης του ανέμου. Η αύξηση συνεχίζεται μέχρι και τη χρονική στιγμή $t = 6$ όπου οι ισοφασικές επιφάνειες γίνονται κατακόρυφες. Έπειτα, οι ισοφασικές επιφάνειες κείτονται προς τη διάτμηση και πλησιάζουν μεταξύ τους οδηγώντας σύμφωνα με τα παραπάνω σε μείωση της κατακόρυφης και ζωνικής συνιστώσας της ταχύτητας και κατ' επέκταση της ενέργειας. Ο μηχανισμός παροδικής αύξησης της ενέργειας ονομάζεται μηχανισμός του Orr (Orr, 1907).



Σχήμα 3.2: *Χρονική εξέλιξη της ρευματοσυνάρτησης για κυματικές διαταραχές με $k = 1$, $m = 6$, $l = 0$. Παρατηρείται η δράση του μηχανισμού του Orr, με τις ρευματογραμμές αρχικά να κείτονται αντίθετα της ροής και να περιστρέφονται δεξιόστροφα με την πάροδο του χρόνου.*

Στη περίπτωση διαταραχών στις τρεις διαστάσεις, διακρίνεται μία κατηγορία λύσεων που δεν εμφανίζουν ζωνική συνιστώσα, δηλαδή $k = 0$ (Ellingsen and Palm, 1975; Landahl, 1980). Στην περίπτωση αυτή, παρατηρούμε από τις (3.15) και (3.16) ότι τα επίπεδα κύματα έχουν σταθερή κατακόρυφη $\hat{w} = \hat{w}_0$ και μεσημβρινή $\hat{v} = -m\hat{w}/l$ ταχύτητα, ενώ από την (3.14) παίρνουμε ότι η ζωνική ταχύτητα αυξάνει γραμμικά $\hat{u} = \hat{u}_0 - \hat{w}_0\, t$. Αυτό οδηγεί στην εμφάνιση περιοχής με υψηλή ζωνική ταχύτητα (streaks) και ο μηχανισμός ονομάζεται lift-up. Η αύξηση του μέτρου της ζωνικής συνιστώσας οφείλεται στην κατακόρυφη στροφή του στροβιλισμού. Λόγω της διατμητικής ζωνικής ροής, το διάνυσμα του μέσου στροβιλισμού $\overrightarrow{\omega} = \nabla \times \overrightarrow{u} = -(dU/dz)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ είναι προσανατολισμένο στον άξονα y. Οι κατακόρυφες διαταραχές στρίβουν το διάνυσμα του στροβιλισμού που ήταν εξαρχής παράλληλο στον y άξονα (ο όρος στο δεξί μέλος της (3.5)) επάγοντας κατακόρυφη συνιστώσα στροβιλισμού ενώ παράλληλα αυξάνεται η ζωνική ταχύτητα (Holton and Hakim, 2012).

Για διαταραχές τριών διαστάσεων, που δε σχηματίζουν γωνία 90 μοιρών με τη μέση ροή, οι δύο μηχανισμοί λειτουργούν συνδυαστικά. Η ενέργεια των διαταραχών αυξάνει αρχικά λόγω ενίσχυσης της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας που προέρχεται από τη δράση του μηχανισμού του Orr, ο οποίος με τη σειρά του ενισχύει τη ζωνική συνιστώσα του lift-up. Είναι χαρακτηριστικό των διαταραχών στις τρεις διαστάσεις να παρατηρείται έντονη αύξηση της κατακόρυφης ταχύτητας που ακολουθείται από έντονα ρεύματα παράλληλα στη μέση ροή (Bakas et al., 2001). Η συνεργασία των δύο μηχανισμών διακρίνεται στο Σχήμα 3.3, όπου σχεδιάζεται η χρονική εξέλιξη της κατακόρυφης και της ζωνικής συνιστώσας της ταχύτητας για $k = 1$, $m = 6$ και $l = 1$. Η αύξηση του μέτρου της κατακόρυφης συνιστώσας w προκαλεί σταδιακή κλιμάκωση της ζωνικής συνιστώσας, όπου για μεγάλα χρονικά διαστήματα τείνει ασυμπτωτικά σε σταθερή τιμή.



Σχήμα 3.3: *Χρονική εξέλιξη της κατακόρυφης (μπλε χρώμα) και της ζωνικής (κόκκινο χρώμα) συνιστώσας της ταχύτητας των διαταραχών με* $k = 1$, $m = 6$, $l = 1$ *και αρχική ταχύτητα* $\hat{w}_0 = -0.15$. *Η αύξηση του μέτρου της κατακόρυφης ταχύτητας, που οφείλεται στον μηχανισμό του Orr, ενισχύει τη ζωνική ταχύτητα λόγω του μηχανισμού lift-up.*

Κεφάλαιο 4

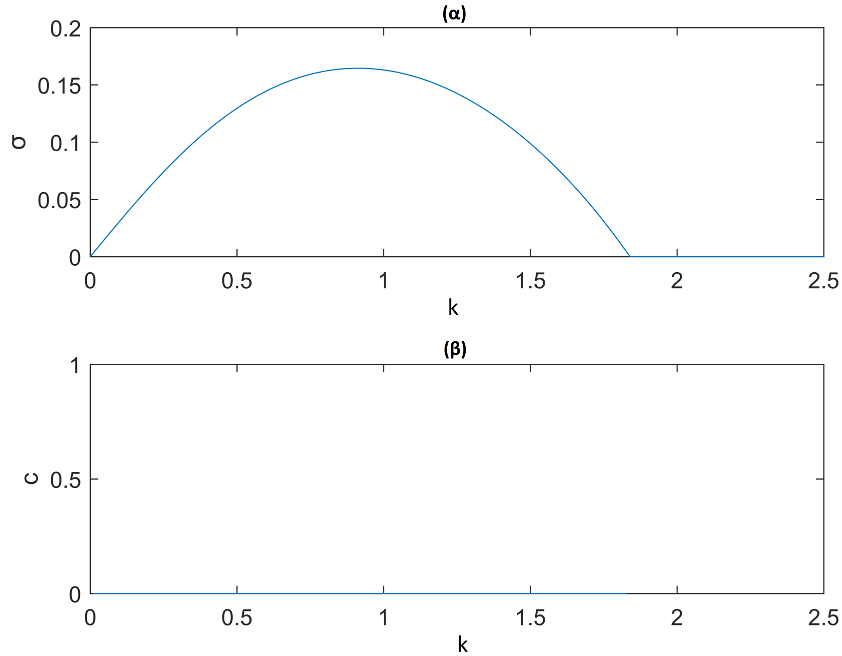
Μελέτη της αστάθειας Holmboe

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μελετηθεί για τη μέση κατάσταση της ατμόσφαιρας με ταχύτητα ανέμου (2.30) και πυκνότητα (2.31) που φαίνονται στο Σχήμα 2.1, τόσο η εκθετική αύξηση του πλάτους των διαταραχών μέσω των ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων του δυναμικού τελεστή $\mathcal{A}$ που δίνεται από τη σχέση (2.42) όσο και η αλγεβρική ανάπτυξη των διαταραχών σε πεπερασμένο χρόνο μέσω της επίλυσης του προβλήματος βελτιστοποίησης της ενεργειακής αύξησης που αναλύθηκε στην Εισαγωγή. Η μελέτη θα πραγματοποιηθεί για ένα εύρος του χοντρικού αριθμού Richardson J που εκφράζει τη σχετική ισχύ της διαστρωμάτωσης και της άνωσης. Η αριθμητική μέθοδος επίλυσης του δυναμικού συστήματος τόσο για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων όσο και για τον υπολογισμό της βέλτιστης ενεργειακής αύξησης περιγράφεται στο Παράρτημα Α'.

4.1 Μελέτη της εκθετικής αστάθειας στις δύο διαστάσεις

Αρχικά θα γίνει ανασκόπηση των αποτελεσμάτων των Constantinou and Ioannou (2011) που μελέτησαν την ευστάθεια της ροής σε διαταραχές δύο διαστάσεων. Η ανασκόπηση είναι σημαντική καθώς θα γίνει σύγκριση με τη μελέτη στις τρεις διαστάσεις. Στο Σχήμα 4.1 απεικονίζεται ο εκθετικός ρυθμός αύξησης και η φασική ταχύτητα των διαταραχών συναρτήσει του κυματάριθμου για αριθμό Richardson $J = 0.01$. Θυμίζουμε ότι ο κυματάριθμος k συνδέεται με το μέγεθος των διαταραχών από τη σχέση $k = 2\pi/\lambda$, όπου λ είναι το μήκος κύματος. Παρατηρούμε πως η ροή είναι ευσταθής για $k > 1.8$, επομένως δεν αναμένουμε την εμφάνιση διαταραχών με αδιάστατο μήκος κύματος μικρότερο από $2\pi/1.8$. Επίσης παρατηρούμε πως οι ασταθείς διαταραχές έχουν μηδενική φασική ταχύτητα. Συνεπώς έχουν τα χαρακτηριστικά της αστάθειας K-H καθώς όπως αναφέρθηκε και στην Εισαγωγή οι διαταραχές κατά την ανάπτυξη της αστάθειας Kelvin-Helmholtz είναι στάσιμες. Οι σχηματισμοί που αναμένουμε να παρατηρήσουμε είναι αυτοί με τον μεγαλύτερο εκθετικό ρυθμό αύξησης $\sigma_{max} = max_k \sigma$, καθώς σε μεγάλο χρόνο εξελίσσονται πιο γρήγορα από τους υπόλοιπους. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο μέγιστος εκθετικός ρυθμός ανάπτυξης είναι $\sigma_{max} = 0.16$ και αντιστοιχεί σε στάσιμες διαταραχές με $k = 0.9$.

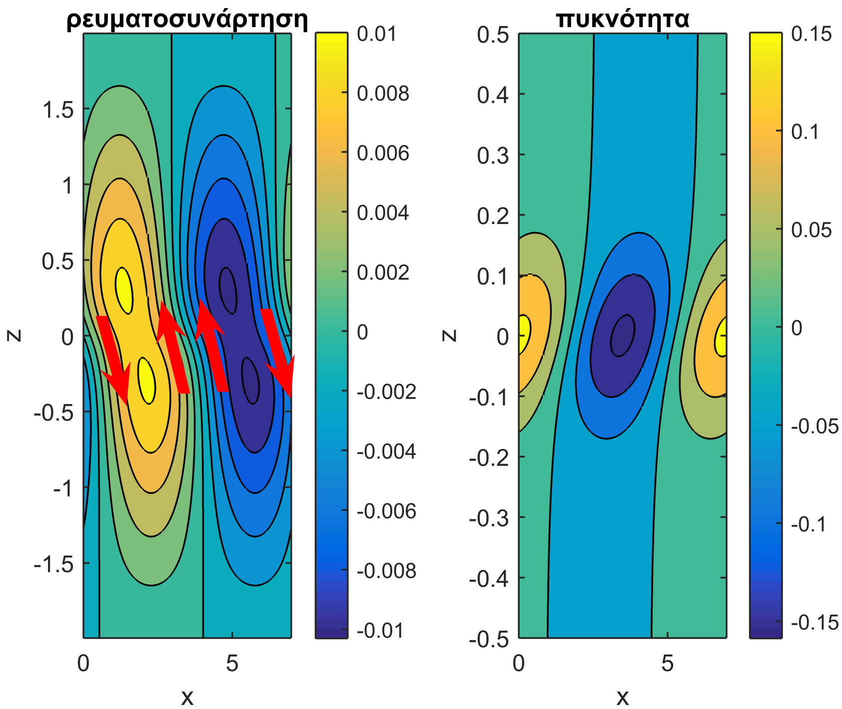
Οι ισοϋψείς της ρευματοσυνάρτησης και της πυκνότητας για την πιο ασταθή διαταραχή παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.2. Είναι συμμετρικές ως προς το ύψος $z = 0$, ενώ η ρευματοσυνάρτηση εκτείνεται πέρα από το εύρος της διάτμησης της ταχύτητας και κείτεται αντίθετα σε σχέση με την κατεύθυνση της μέσης ροής. Όπως αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 3, αυτό σημαίνει ότι η ροή ορμής είναι αρνητική με αποτέλεσμα την αύξηση της ενέργειας. Η μέση αδιάστατη ροή ορμής για ένα μήκος κύματος είναι $\overline{uw} = -3.3 \cdot 10^{-5}$ ενώ η μέση ροή πυκνότητας είναι $\overline{\rho w} = 1.7714 \cdot 10^{-6}$. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι $dT/dt =$



Σχήμα 4.1: *(α) Εκθετικός ρυθμός ανάπτυξης και (β) φασική ταχύτητα των διαταραχών συναρτήσει του κυματάριθμου k, για διαστρωμάτωση με αριθμό Richardson $J = 0.01$.* Οι διαταραχές με κυματάριθμο $k = 0.9$ και ταχύτητα $c = 0$ εξελίσσονται πιο γρήγορα από τις υπόλοιπες, με εκθετικό ρυθμό ανάπτυξης $\sigma_{max} = 0.16$.

$3.1 \cdot 10^{-5}$ ενώ η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι $dV/dt = 1.7 \cdot 10^{-6}$. Η αύξηση της συνολικής ενέργειας διαμοιράζεται σε ποσοστό 94.7% σε αύξηση της κινητικής ενέργειας και 5.3% σε αύξηση της δυναμικής ενέργειας, επομένως η ενεργειακή αύξηση προέρχεται κυρίως από την αύξηση της κινητικής ενέργειας. Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να εξαχθεί αν παρατηρηθούν οι θέσεις των μέγιστων των ισοϋψών της ρευματοσυνάρτησης και της πυκνότητας. Το μέγιστο της πυκνότητας ταυτίζεται με μηδενικές τιμές της ρευματοσυνάρτησης, οπότε αναμένεται η μέση ροή πυκνότητας να είναι μικρότερη από τη μέση ροή ορμής.

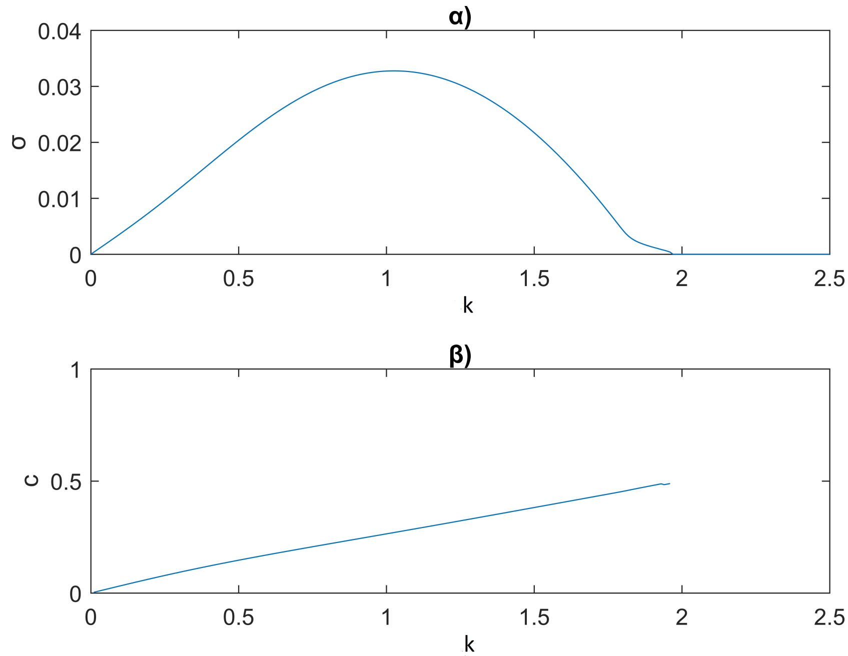
Για ροή ελάχιστα ισχυρότερης διαστρωμάτωσης με αριθμό Richardson $J = 0.25$, παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.3 οι γραφικές παραστάσεις του εκθετικού ρυθμού αύξησης και της φασικής ταχύτητας συναρτήσει του κυματάριθμου k.



Σχήμα 4.2: *Ισοϋψείς της ρευματοσυνάρτησης και της πυκνότητας, για την πιο ασταθή διαταραχή με κυματάριθμο $k = 0.9$ για $J = 0.01$. Με τα κόκκινα βέλη συμβολίζεται η κίνηση των αερίων μαζών.*

Η φασική ταχύτητα των διαταραχών είναι μη μηδενική, επομένως οι ασταθείς διαταραχές έχουν τα χαρακτηριστικά των ασταθών κυμάτων Holmboe που αναλύθηκαν στην Εισαγωγή ενώ η ροή είναι ευσταθής για $k > 2.02$. Οι διαταραχές που αναμένεται να επικρατήσουν είναι αυτές με το μέγιστο εκθετικό ρυθμό αύξησης, $\sigma_{max} = 0.037$ που αντιστοιχούν σε διαταραχές μεγέθους $k = 1.03$ με φασική ταχύτητα $c = 0.26$. Υπενθυμίζουμε πως η φασική ταχύτητα είναι $c = c_x = imag(\lambda)/k$, όπου λ η ιδιοτιμή με πραγματικό μέλος $real(\lambda) = \sigma_{max}$. Συγκρίνοντας τις δύο παραπάνω περιπτώσεις, παρόλο που η διαστρωμάτωση δεν αυξάνεται ιδιαίτερα, ο ρυθμός εξέλιξης των διαταραχών για $J = 0.01$ είναι περίπου πέντε φορές μεγαλύτερος, με το μέγεθος των αναμενόμενων διαταραχών να είναι παρόμοιο. Επιπλέον, για $J = 0.25$ η περιοχή αποκοπής της αστάθειας (cut-off region), εκτείνεται μέχρι το $k = 2.02$, ενώ για $J = 0.01$ φτάνει μέχρι το

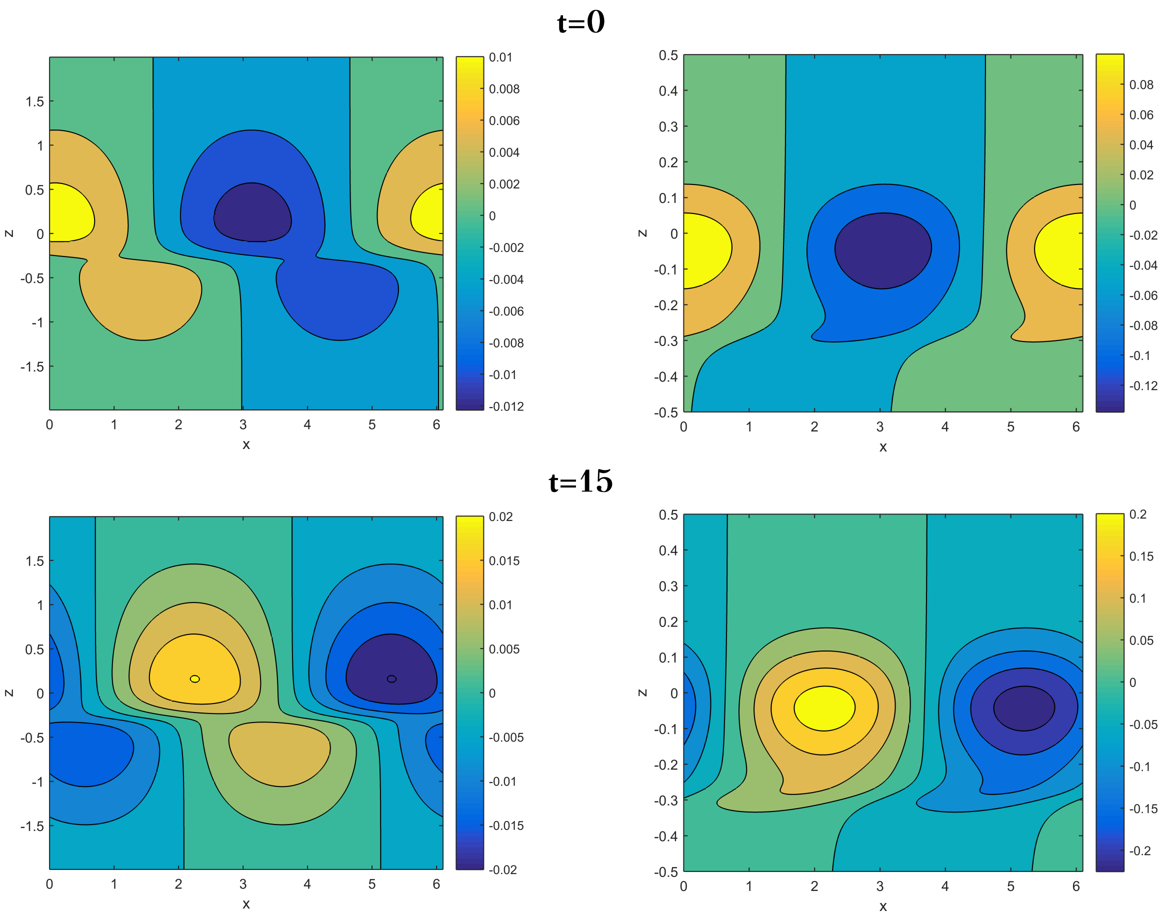
$k = 1.85$.



Σχήμα 4.3: *(α) Εκθετικός ρυθμός ανάπτυξης και (β) ταχύτητα των διαταραχών συναρτήσει του κυματάριθμου k, για ασθενή διαστρωμάτωση με αριθμό Richardson $J = 0.25$. Οι διαταραχές με κυματάριθμο $k = 1.03$ και ταχύτητα $c = 0.26$ εξελίσσονται πιο γρήγορα από τις υπόλοιπες, με ρυθμό $\sigma_{max} = 0.037$.*

Στο Σχήμα 4.4 σχεδιάζονται οι ισοϋψείς της ρευματοσυνάρτησης και της πυκνότητας για την πιο ασταθή διαταραχή και για τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 15$. Παρατηρούμε πως η πυκνότητα και η ρευματοσυνάρτηση είναι ασύμμετρες. Όπως αναφέρθηκε στη Εισαγωγή, η αστάθεια Holmboe αναδεικνύεται ως ζεύγος κυμάτων ίδιου μεγέθους, ρυθμού ανάπτυξης και μέτρου φασικής ταχύτητας, αλλά αντίθετης κατεύθυνσης. Στο Σχήμα παρουσιάζεται το κύμα με δυτική κατεύθυνση, ενώ το κύμα που κινείται προς την Ανατολή είναι συμμετρικό ως προς τον Ox άξονα (δεν παρουσιάζεται στην εργασία).

Οι αδιάστατες ροές ορμής και πυκνότητας υπολογίζονται ως $\overline{uw} = -2.7 \cdot 10^{-5}$, $\overline{\rho w} = 5.4 \cdot 10^{-5}$. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι $dT/dt = 1.3 \cdot 10^{-5}$ ενώ η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας υπολογίζεται $dV/dt = 1.3 \cdot 10^{-5}$. Η αύξηση της συνολικής ενέργειας διαμοιράζεται σε ίσο ποσοστό αύξησης της κινητικής και δυναμικής ενέργειας. Τα αποτελέσματα του υπολογισμού της μέσης ροής ορμής και πυκνότητας παραμένουν τα ίδια, ανεξάρτητα αν εξετάζονται τα κύματα που κινούνται Ανατολικά ή Δυτικά. Αυτό δεν ισχύει όταν μελετάται η μέση ροή για την υπέρθεση των δύο κυμάτων. Υπό αυτή τη συνθήκη, εκτός από το άθροισμα των ροών ορμής και πυκνότητας των δύο κυμάτων, υπεισέρχεται ένας επιπλέον όρος που εξαρτάται από την φάση τους (Yang et al., 2022).

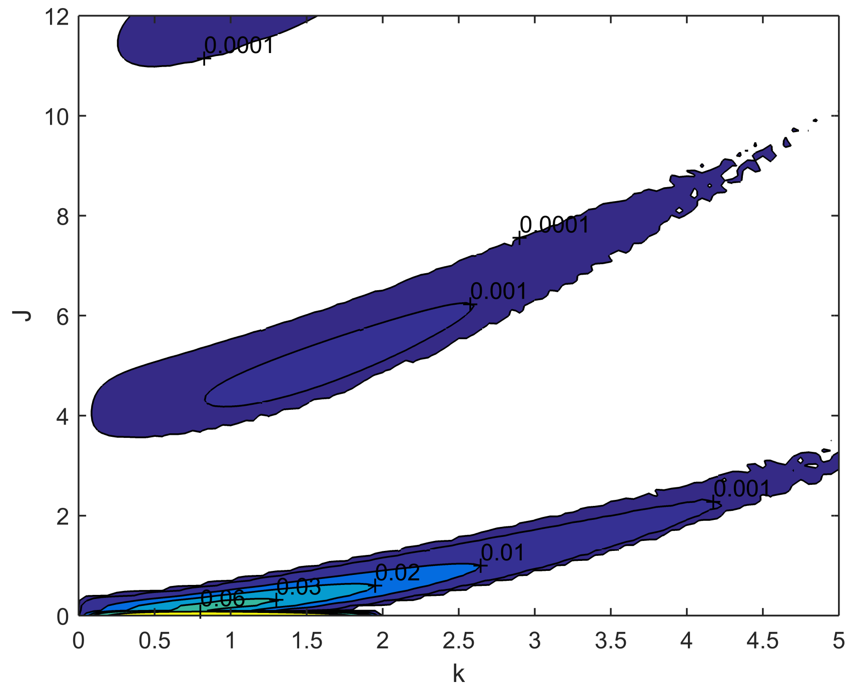


Σχήμα 4.4: *Χρονική εξέλιξη των ισοϋψών της ρευματοσυνάρτησης (αριστερά) και της πυκνότητας (δεξιά), για την πιο ασταθή διαταραχή, με κυματάριθμο* $k = 1.03$ *και χρόνους t=0 και t=15. Το κύμα κινείται προς τη Δύση.*

Η αστάθεια Holmboe εμφανίζεται και σε περιπτώσεις πιο ισχυρής διαστρωμάτωσης όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.5, όπου απεικονίζονται οι ισοϋψείς του εκθετικού ρυθμό ανάπτυξης, συναρτήσει του κυματάριθμου k και του αριθμού Richardson J. Διακρίνονται τρεις ζώνες αστάθειας. Για πολύ μικρούς αριθμούς Richardson υπάρχει μία μικρή περιοχή αστάθειας Kelvin-Helmholtz, που δεν απεικονίζεται εμφανώς στο Σχήμα. Οι υπόλοιπες ζώνες αστάθειας χαρακτηρίζονται ως αστάθειες Holmboe (δεν σχεδιάζεται η ταχύτητα των δομών στο Σχήμα). Η πρώτη ζώνη αστάθειας ονομάζεται H1 και εκτείνεται από $J \simeq 0$ έως $J \simeq 3$. Καθώς αυξάνεται η διαστρωμάτωση, ο εκθετικός ρυθμός αύξησης είναι έως και δύο τάξεις μεγέθους μικρότερος σε σύγκριση με τις αντίστοιχες δομές Kelvin-Helmholtz. Η δεύτερη ζώνη αστάθειας ονομάζεται H2 και εμφανίζεται σε συνθήκες ισχυρότερης διαστρωμάτωσης, από $J \simeq 3.6$ έως $J \simeq 4$. Το μέγεθος των κυμάτων είναι παρόμοιο με αυτό της ζώνης H1 ενώ ο μέγιστος ρυθμός ανάπτυξης είναι παρόμοιος με εκείνον των κυμάτων της ζώνης H1 που εξελίσσονται πιο αργά. Τέλος, για ροή εξαιρετικά ισχυρής διαστρωμάτωσης, διακρίνεται ελάχιστα και ο τρίτος κλάδος, που αναφέρεται ως H3 και εμφανίζεται για $J > 11$. Η δομή των ισοϋψών της ρευματοσυνάρτησης και της πυκνότητας των κλάδων H2 και H3 διαφέρουν σε σύγκριση με τα παραδείγματα του κλάδου H1, ωστόσο παραλείπονται από την εργασία.

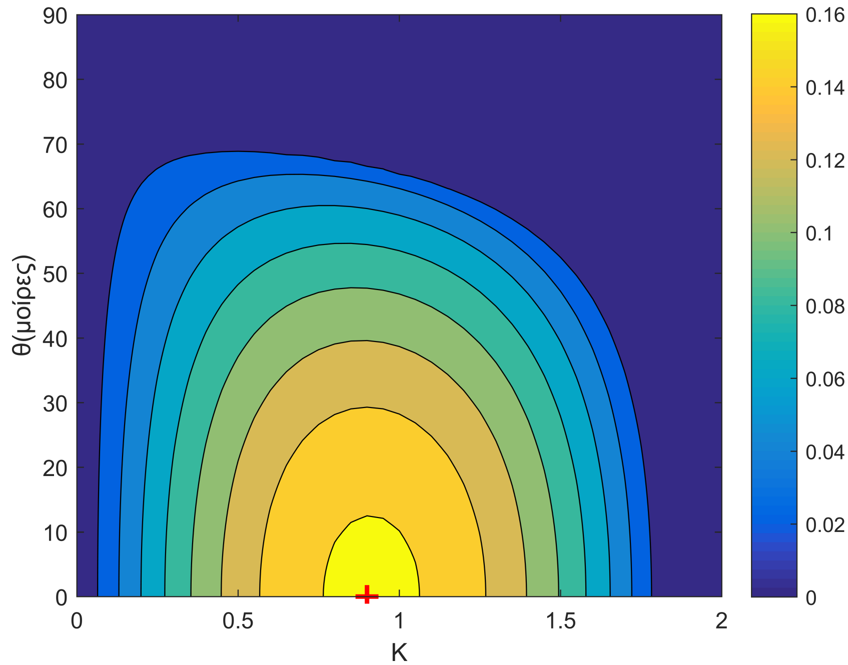
4.2 Μελέτη της εκθετικής αστάθειας στις τρεις διαστάσεις

Στην Ενότητα αυτή, θα μελετηθεί η εκθετική αστάθεια για τρισδιάστατες κυματικές διαταραχές. Αυτές είναι πρόσφορο να χαρακτηριστούν από το μέτρο του κυματάριθμου $K = \sqrt{k^2 + l^2}$ που συνδέεται με το μέγεθος των διαταραχών λ μέσω της σχέσης $\lambda = 2\pi/K$ και τη γωνία $\theta = \tan^{-1}(l/k)$ που σχηματίζουν οι ισοφασικές επιφάνειες με το επίπεδο ροής. Στο Σχήμα 4.6 σχεδιάζονται οι



Σχήμα 4.5: *Ισοϋψείς του εκθετικού ρυθμού ανάπτυξης σ των διαταραχών συναρτήσει του κυματάριθμου k και του χοντρικού αριθμού Richardson J. Για μικρούς αριθμούς J υπάρχουν ασταθείς δομές Kelvin-Helmholtz (δεν διακρίνεται καθαρά στην εικόνα) ενώ για ισχυρότερη διαστρωμάτωση διακρίνονται τρεις ζώνες αστάθειας Holmboe.*

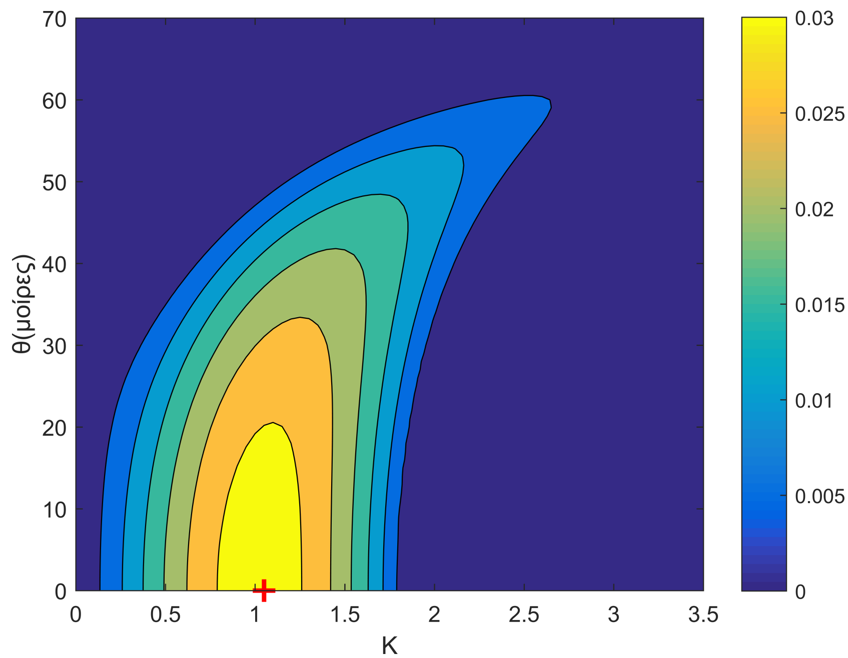
ισοϋψείς του εκθετικού ρυθμού ανάπτυξης συναρτήσει του μέτρου του κυματάριθμου K και της γωνίας θ για αριθμό Richardson $J = 0.01$. Παρατηρούμε ότι έχουμε αστάθεια για διαταραχές με $K < 1.8$ και γωνίες έως περίπου 69 μοίρες. Η φασική ταχύτητα η οποία δε παρουσιάζεται, είναι μηδενική με αποτέλεσμα η αστάθεια να χαρακτηρίζεται ως Kelvin-Helmholz. Η διαταραχή με τον μεγαλύτερο εκθετικό ρυθμό αύξησης εμφανίζεται να είναι στο επίπεδο της ροής ($\theta = 0$) με κυματάριθμο $K = 0.9$ και εκθετικό ρυθμό ανάπτυξης $\sigma_{max} = 0.16$ (συμβολίζεται με κόκκινο σταυρό στα Σχήμα). Η μελέτη στις τρεις διαστάσεις φανερώνει πως εμφανίζονται διαταραχές όχι μόνο στο επίπεδο της ροής, ωστόσο αυτές που εξελίσσονται πιο γρήγορα μπορούν να προβλεφθούν από την ανάλυση δύο διαστάσεων, όπως έγινε στο Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.6: *Ισοϋψείς του εκθετικού ρυθμού ανάπτυξης σ των διαταραχών συναρτήσει του κυματάριθμου K και της γωνίας θ που σχηματίζουν οι διαταραχές το επίπεδο της ροής, για αριθμό Richardson $J = 0.01$. Η διαταραχές με τον μέγιστο ρυθμό ανάπτυξης τονίζονται με τον κόκκινο σταυρό.*

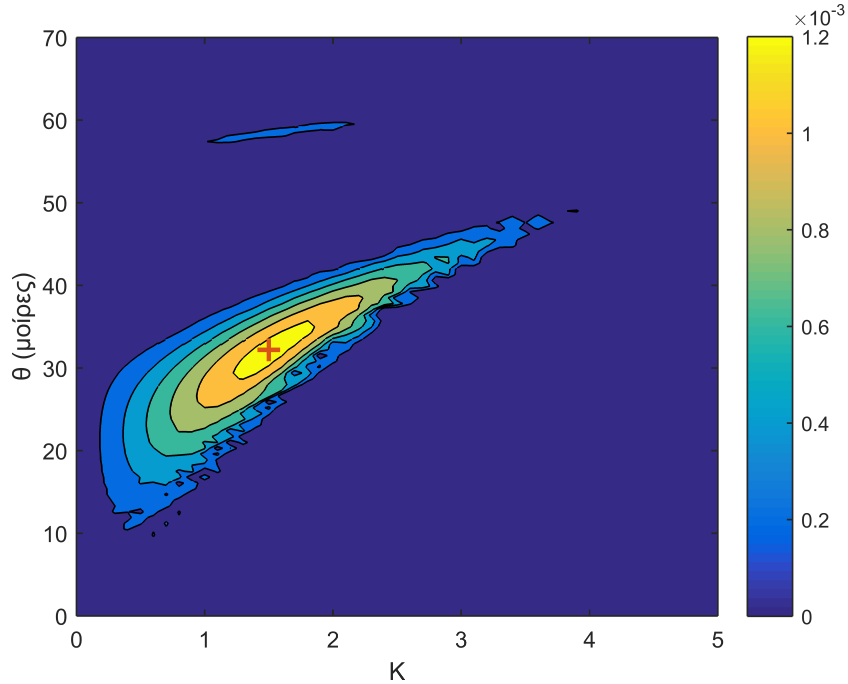
Για ροή με αριθμό Richardson $J = 0.25$, οι ισοϋψείς του εκθετικού αριθμού ανάπτυξης συναρτήσει του κυματάριθμου K και της γωνίας θ σχεδιάζονται στο Σχήμα 4.7. Η μελέτη στις δύο διαστάσεις υπερεκτιμά το μέγεθος των αναμενόμενων διαταραχών, καθώς το κατώφλι αποκοπής της εκθετικής αστάθειας είναι $K \simeq 1.7$ για τις δισδιάστατες διαταραχές, ενώ για αυτές που σχηματίζουν γωνία με το επίπεδο της μέσης ροής, το όριο αυτό φτάνει έως και $K \simeq 2.5$ λόγω του τόξου που σχηματίζουν οι ισοϋψείς. Ασταθείς διαταραχές εμφανίζονται με γωνίες θ έως και 60 μοίρες σε σχέση με το επίπεδο της μέσης ροής. Η διαταραχή με το μεγαλύτερο ρυθμό αύξησης που αναμένεται να κυριαρχήσει συμβολίζεται με κόκκινο σταυρό στο Σχήμα 4.7, έχει κυματάριθμο $K = 1.05$ και εκθετικό ρυθμό ανάπτυξης $\sigma_{max} = 0.03$, ενώ είναι στο επίπεδο της μέσης ροής.

Για μεγαλύτερους αριθμούς Richardson με τιμές που ανήκουν στον κλάδο H1, τα αποτελέσματα είναι παρόμοια με αυτά του Σχήματος 4.7. Δηλαδή οι ισοϋψείς του εκθετικού ρυθμού ανάπτυξης σχηματίζουν το χαρακτηριστικό τόξο, με τον μεγαλύτερο ρυθμό ανάπτυξης να παρατηρείται για διαταραχές μεγάλης κλίμακας που είναι στο επίπεδο της ροής.



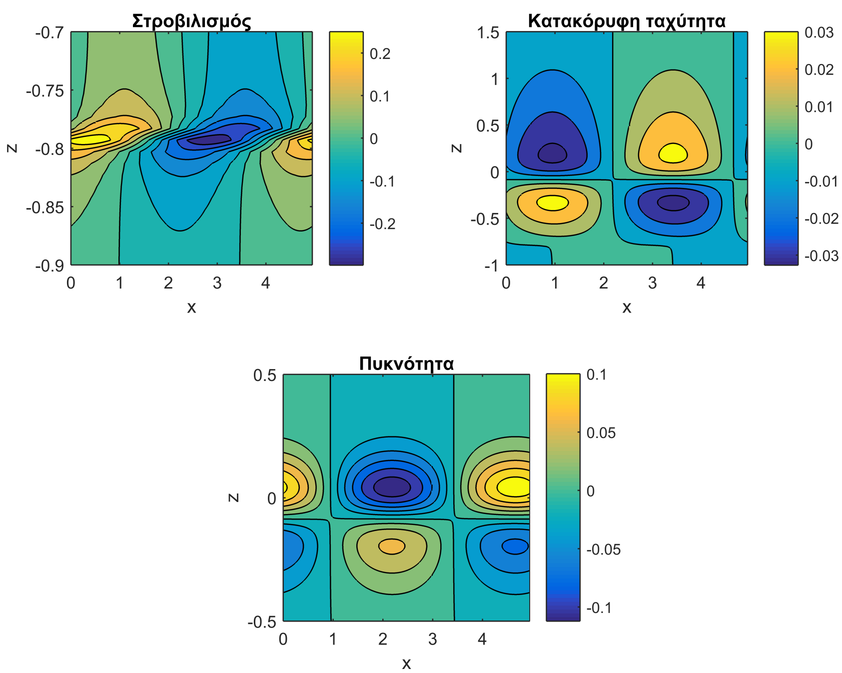
Σχήμα 4.7: *Ισοϋψείς του εκθετικού ρυθμού ανάπτυξης σ των διαταραχών συναρτήσει του κυματάριθμου και της γωνίας θ που σχηματίζουν οι διαταραχές με το επίπεδο της ροής, για αριθμό Richardson $J = 0.25$. Η διαταραχή με τον μέγιστο ρυθμό ανάπτυξης επισημαίνεται με τον κόκκινο σταυρό.*

Για ισχυρή διαστρωμάτωση με αριθμό Richardson $J = 3.5$ ο ρυθμός ανάπτυξης των δισδιάστατων διαταραχών είναι μηδενικός (βλέπε Σχήμα 4.5). Στις τρεις διαστάσεις δεν ισχύει το ίδιο, καθώς εμφανίζονται διαταραχές σε γωνίες 10 έως 50 μοίρες και έχουν μέγεθος από $K \simeq 0.2$ έως $K \simeq 3$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.8. Η διαταραχή με το μεγαλύτερο ρυθμό ανάπτυξης έχει κυματάριθμο $K = 1.5$, γωνία $\theta = 32.2$ μοίρες, ενώ αναπτύσσεται με ρυθμό $\sigma_{max} = 1.2 \cdot 10^{-3}$ και έχει φασική ταχύτητα $c = 0.67$.



Σχήμα 4.8: *Ισοϋψείς του εκθετικού ρυθμού ανάπτυξης σ των διαταραχών συναρτήσει του κυματάριθμου K και της γωνίας θ που σχηματίζουν οι διαταραχές με το επίπεδο ροής, για αριθμό Richardson $J = 3.5$. Η διαταραχή με τον μέγιστο ρυθμό ανάπτυξης επισημαίνεται με τον καφέ σταυρό.*

Η διαταραχή αυτή φαίνεται στο Σχήμα 4.9 όπου σχεδιάζονται οι ισοϋψείς της κατακόρυφης συνιστώσας του στροβιλισμού, της ταχύτητας και της πυκνότητας για το κύμα που κινείται προς την Δύση (δεν σχεδιάζεται η χρονική εξέλιξη του κύματος ώστε να φανεί η κίνηση). Οι αδιάστατες ροές ορμής και πυκνότητας υπολογίζονται ότι είναι $\overline{uw} = -3.5 \cdot 10^{-5}$ και $\overline{\rho w} = 1.7 \cdot 10^{-6}$ αντίστοιχα. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι $dT/dt = 6.7 \cdot 10^{-5}$ ενώ η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας υπολογίζεται $dV/dt = 6.0 \cdot 10^{-5}$. Η αύξηση της συνολικής ενέργειας διαμοιράζεται σε ποσοστό 52.7% σε αύξηση της κινητικής ενέργειας και 47.2% σε αύξηση της δυναμικής ενέργειας. Παρόλο που η διαταραχή της κατακόρυφης ταχύτητας ταυτίζεται με μηδενικές τιμές της διαταραχής της πυκνότητας, αφού ο αριθμός Richardson είναι μεγάλος και πολλαπλασιάζεται με την ροή πυκνότητας στο δεξί μέλος της εξίσωση (2.50), προκαλεί αύξηση στη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας. Επομένως, η ενίσχυση της διαστρωμάτωσης συμβάλει στη μεγαλύτερη συνεισφορά της δυναμικής ενέργειας. Η διαταραχή της πυκνότητας είναι συμμετρική σε ύψος ελάχιστα πιο κάτω από το μηδέν, ενώ η κατακόρυφη ταχύτητα είναι ελαφρά ασύμμετρη με κέντρο στο ίδιο ύψος. Η διαταραχή του στροβιλισμού εμφανίζεται σε ένα λεπτό στρώμα ύψους $z \simeq -0.8$. Οι ιδιοσυναρτήσεις του κύματος που κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση καθρεφτίζονται ως προς τον άξονα Ox, επομένως ο στροβιλισμός είναι συμμετρικός στο ύψος $z \simeq 0.8$ (δεν παρουσιάζεται στην εργασία).

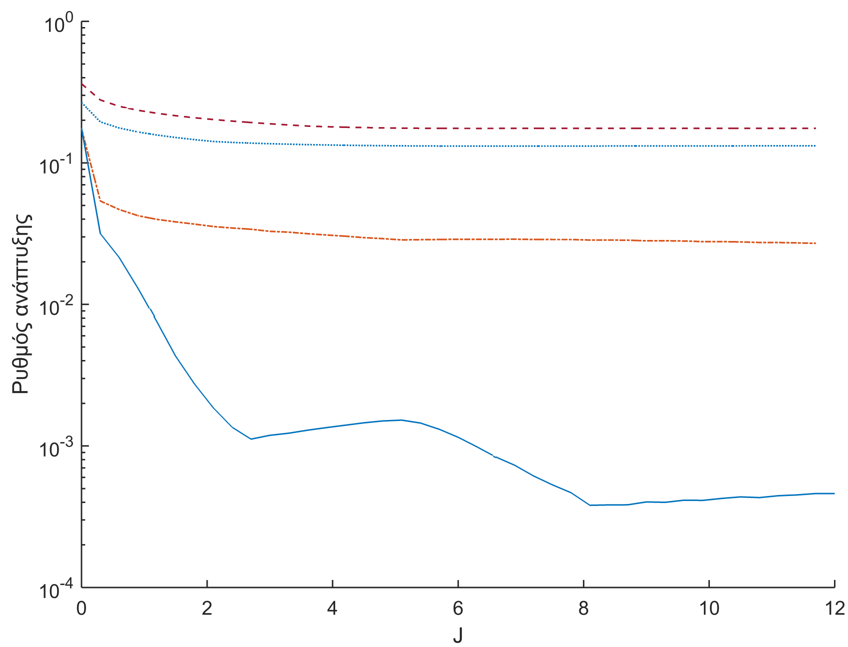


Σχήμα 4.9: *Ισοϋψείς στροβιλισμού, κατακόρυφης ταχύτητας και πυκνότητας, για την πιο ασταθή διαταραχή με κυματάριθμο $K = 1.5$ και γωνία $\theta = 32.2$ μοίρες. Ο αριθμός Richardson είναι $J = 3.5$.*

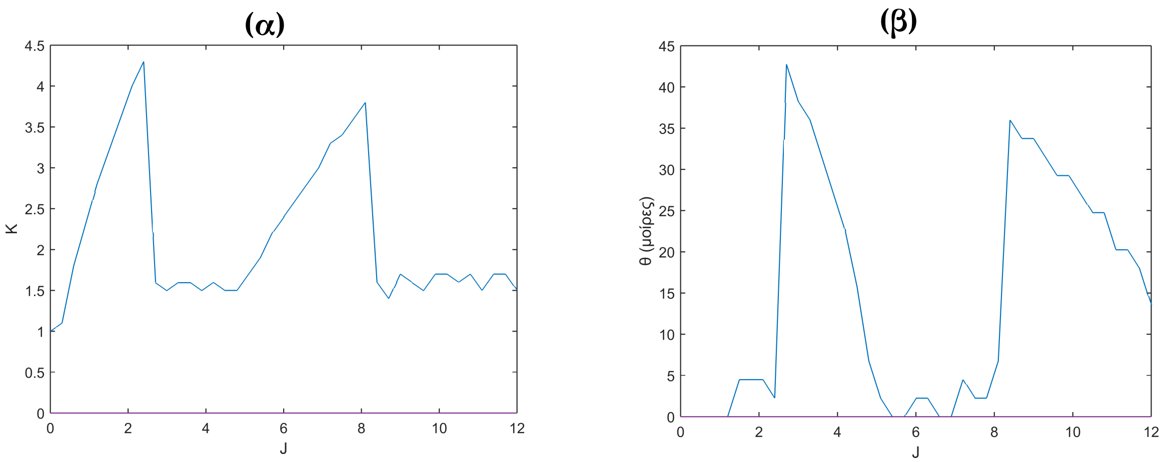
Στο Σχήμα 4.10 σχεδιάζεται σε λογαριθμική κλίμακα, ο μέγιστος εκθετικός ρυθμός ανάπτυξης $\sigma_{max} = \max_{K,\theta}(\sigma)$ (συνεχής μπλε γραμμή) των διαταραχών συναρτήσει του αριθμού Richardson για τη γενική μελέτη στις τρεις διαστάσεις. Ο ρυθμός ανάπτυξης μειώνεται απότομα με την αύξηση του αριθμού Richardson, έως και τρεις τάξεις μεγέθους. Επομένως, η ισχυροποίηση της διαστρωμάτωσης της ατμόσφαιρας έχει ως αποτέλεσμα οι διαταραχές να εξελίσσονται πιο αργά. Επιπλέον, παρατηρούμε μη μηδενικές τιμές για όλους τους αριθμούς Richardson ενώ για $J \simeq 5.5$ ο ρυθμός ανάπτυξης εμφανίζει τοπικό μέγιστο που αντιστοιχεί στον κλάδο H2 της αστάθειας Holmboe. Επομένως και για τις τρισδιάστατες διαταραχές, οι διαταραχές του κλάδου H2 αναπτύσσονται το ίδιο γρήγορα με τις διαταραχές του κλάδου H1.

Το μέτρο του κυματάριθμου που αντιστοιχεί στη διαταραχή με το μέγιστο εκθετικό ρυθμό ανάπτυξης συναρτήσει του αριθμού Richardson σ_{max} αποτυπώνεται στο Σχήμα 4.11(α). Διακρίνονται δύο τοπικά μέγιστα, το πρώτο με τιμή $K = 4.3$ και το δεύτερο με $K = 3.8$, για αριθμούς Richardson $J = 2.4$ και $J = 8$, με απότομη μείωση του κυματάριθμου για αύξηση της διαστρωμάτωσης και στις δύο περιπτώσεις. Η σταδιακή αύξηση του κυματάριθμου με την ισχυροποίηση της διαστρωμάτωσης μέχρι τη μέγιστη τιμή και η απότομη μείωση του, σκιαγραφεί τους δύο κλάδους αστάθειας H1 και H2, όπως παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.5. Η απότομη μείωση υποδηλώνει την απομάκρυνση από τον κλάδο και την κυριαρχία διαταραχών που δεν είναι παράλληλες στη μέση ροή, όπως επιβεβαιώνεται στο Σχήμα 4.11(β).

Σε αυτό σχεδιάζεται η γωνία ως προς τη μέση ροή των διαταραχών με τον μεγαλύτερο εκθετικό ρυθμό ανάπτυξης σ_{max}, συναρτήσει του αριθμού Richardson. Παρατηρούνται δύο τοπικά μέγιστα με τιμές $\theta = 43$ μοίρες και $\theta = 36$ μοίρες, για αριθμούς Richardson $J = 2.7$ και $J = 8.4$ αντίστοιχα. Λαμβάνοντας υπόψιν το εύρος των κυματάριθμων που εμφανίζονται οι κλάδοι H1 και H2 του Σχήματος 4.5(α), επιβεβαιώνεται πως οι δομές αστάθειας των κλάδων H1 και H2 είναι κατά κύριο λόγο δισδιάστατες, ενώ ο κλάδος H3 που περιγράφει ροές εξαιρετικά ισχυρής διαστρωμάτωσης, κυριαρχείται από τρισδιάστατες διαταραχές. Επιπλέον, ροές που παρουσιάζουν μηδενικό ρυθμό εκθετικής ανάπτυξης στις δύο διαστάσεις, μεταξύ των κλάδων H1, H2 και H3, το Σχήμα 4.11(β) δείχνει ότι οι διαταραχές σχηματίζουν γωνία σε σχέση με τη μέση ροή. Συγκρίνοντας τα Σχήματα 4.11(α) και 4.11(β), ο κυματάριθμος των τρισδιάστατων διαταραχών με τον μεγαλύτερο ρυθμό εκθετικής ανάπτυξης για τις συγκεκριμένες ροές κυμαίνεται κοντά στη τιμή $K = 1.5$. Επομένως τα δισδιάστατα ασταθή κύματα Holmboe των κλάδων H2 και H3 είναι μικρότερα από τα τρισδιάστατα, ενώ οι δομές αστάθειας Kelvin-Helmholtz, για ροές αρκετά ισχνής διαστρωμάτωσης, έχουν συνολικά το μεγαλύτερο μέγεθος, όπως διακρίνεται στο Σχήμα 4.11(α).



Σχήμα 4.10: *Σχεδιάζεται ο ρυθμός ανάπτυξης κανονικών τρόπων ταλάντωσης (normal modes) (συνεχής μπλε γραμμή) και των βέλτιστων διαταραχών (optimal perturbations) σε λογαριθμική κλίμακα, για χρόνο βελτιστοποίησης* $T_{opt} = 5$ *(διακεκομμένη μωβ γραμμή), για* $T_{opt} = 10$ *(διάστικτη μπλε γραμμή) και για* $T_{opt} = 100$ *(διακεκομμένη-διάστικτη πορτοκαλί γραμμή), συναρτήσει του αριθμού Richardson. Με την αύξηση του χρόνου βελτιστοποίησης, ο ρυθμός ανάπτυξης των βέλτιστων διαταραχών πλησιάζει το ρυθμό ανάπτυξης των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.*



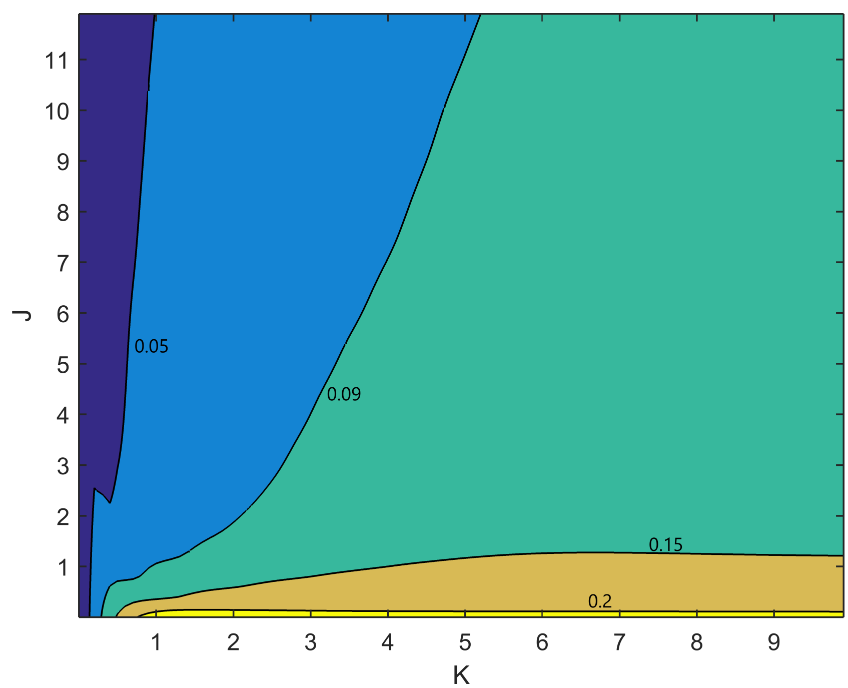
Σχήμα 4.11: *(α) Μέτρο του κυματάριθμου των διαταραχών με το μεγαλύτερο ρυθμό εκθετικής ανάπτυξης* σ_{max} *συναρτήσει του αριθμού Richardson. (β) Γωνία των διαταραχών με το μεγαλύτερο εκθετικό ρυθμό ανάπτυξης* σ_{max} *συναρτήσει του αριθμού Richardson.*

4.3 Μεταβατικά φαινόμενα

Όπως αναφέρθηκε στην Εισαγωγή, οι ασταθείς ροές μπορεί να παρουσιάσουν μεταβατικά φαινόμενα με τις διαταραχές να αυξάνουν την ενέργειά τους σε πεπερασμένο χρόνο περισσότερο σε σχέση με την αντίστοιχη αύξηση των εκθετικά αναπτυσσόμενων διαταραχών. Αυτό οδηγεί στην εμφάνιση τύρβης και ανάδευσης νωρίτερα από ό,τι προβλέπει η κλασσική θεωρία ευστάθειας. Για πεπερασμένο χρονικό διάστημα που ονομάζεται χρόνος βελτιστοποίησης και συμβολίζεται ως T_{opt}, είναι δυνατόν να βρεθεί η διαταραχή που οδηγεί στη μέγιστη αύξηση της ενέργειας με τη βοήθεια της μεθόδου της ΓΘΕ που αναλύθηκε στην Ενότητα 1.4. Στόχος αυτής της Ενότητας είναι η παραμετρική μελέτη της αστάθειας Holmboe για διαφορετικούς χρόνους βελτιστοποίησης, η ανάλυση του μεγέθους και του ρυθμού εξέλιξης των βέλτιστων διαταραχών και η σύγκριση με τις αντίστοιχες εκθετικά αναπτυσσόμενες διαταραχές.

Μελετάται η ανάπτυξη διαταραχών για χαρακτηριστικό χρόνο $T_{opt} = 10$ και στο Σχήμα 4.12 σχεδιάζεται ο εκθέτης πεπερασμένου χρόνου Lyapunov

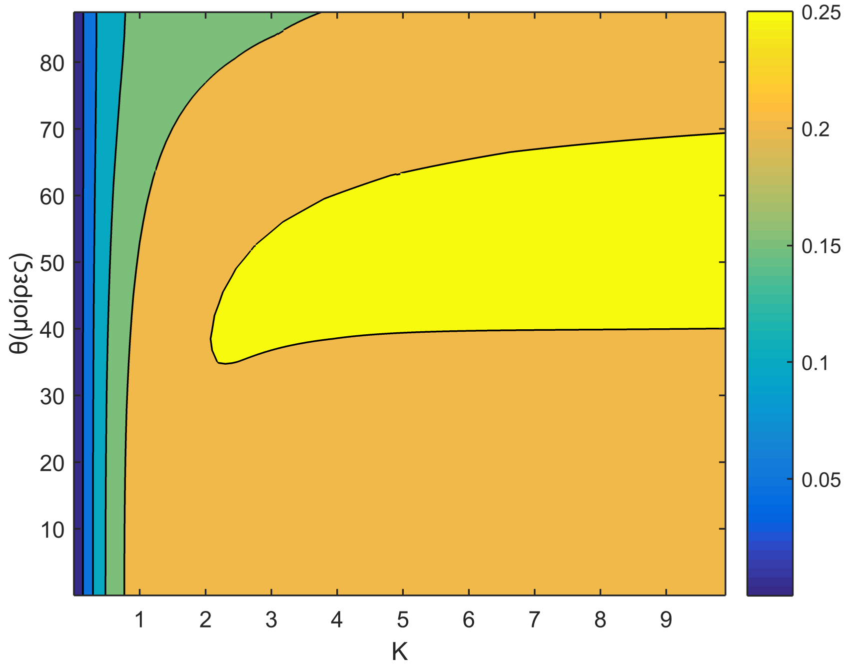
$ln(G)/2T_{opt}$ συναρτήσει του κυματάριθμου K και της διαστρωμάτωσης J, για διαταραχές στο επίπεδο της ροής. Σε όλο το εύρος των κυματάριθμων, ο ρυθμός ανάπτυξης των διαταραχών είναι μη μηδενικός, για ασθενώς και ισχυρά διαστρωματωμένες ροές. Συνεπώς, παρατηρούνται δομές όλων των μεγεθών, με τις διαταραχές στη ροή ασθενούς διαστρωμάτωσης να αναπτύσσονται ταχύτερα.



Σχήμα 4.12: *Ισοϋψείς του εκθέτη πεπερασμένου χρόνου Lyapunov $ln(G)/2T_{opt}$ συναρτήσει του αριθμού Richardson J και του κυματάριθμου K για χρόνο βελτιστοποίησης $T_{opt} = 10$ και διαταραχές παράλληλες στο επίπεδο της ροής. Για ισχνές διαστρωματώσεις παρατηρείται ο μεγαλύτερος ρυθμός ανάπτυξης.*

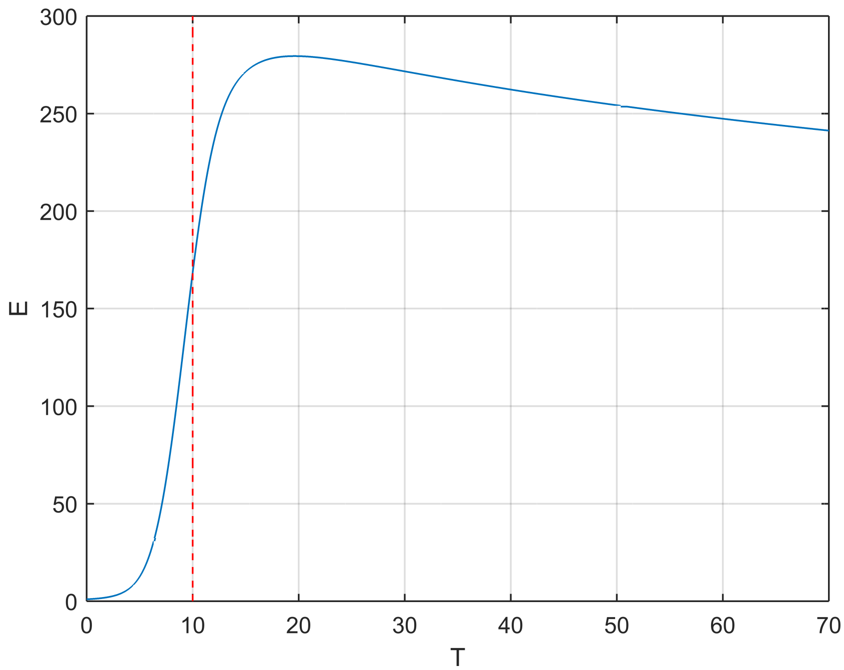
Για την ανάλυση της δυναμικής σε τρεις διαστάσεις, θα μελετηθούν ροές ασθενούς διαστρωμάτωσης για $J = 0.01$ και $J = 0.25$ και ισχυρής διαστρωμάτωσης, με $J = 3.5$. Στο Σχήμα 4.13 σχεδιάζονται οι ισοϋψείς του εκθέτη πεπερασμένου χρόνου Lyapunov συναρτήσει του μέτρου του κυματάριθμου K και της γωνίας θ, για αριθμό Richardson $J = 0.01$ και χρόνο βελτιστοποίησης $T_{opt} = 10$.

Ο ρυθμός ανάπτυξης παραμένει μη-μηδενικός σε όλο το φάσμα των κυματάριθμων. Επίσης, στο εύρος γωνιών από 40 έως 70 μοίρες και $K > 2$ ο ρυθμός ανάπτυξης σταθεροποιείται και είναι μέγιστος. Για μεγαλύτερους κυματάριθμους, που δεν σχεδιάζονται στο Σχήμα, το πλατό μεγίστων τιμών επεκτείνεται για τις ίδιες γωνίες. Επομένως, αρχικά αναμένονται διαταραχές με $K > 2$ και σε γωνίες $40^o - 70^o$ σε σύγκριση με τη μέση ροή. Αργότερα, αναπτύσσονται διαταραχές ποικίλων μεγεθών σε όλο το εύρος των γωνιών.



Σχήμα 4.13: *Ισοϋψείς του εκθέτη πεπερασμένου χρόνου Lyapunov $ln(G)/2T_{opt}$ συναρτήσει του κυματάριθμου K και της γωνίας θ, για $J = 0.01$ και χρόνο βελτιστοποίησης $T_{opt} = 10$.*

Για τη βέλτιστη διαταραχή με κυματάριθμο $K = 6.4$ και γωνία $\theta = 58$ μοίρες με το επίπεδο της ροής, σχεδιάζεται στο Σχήμα 4.14 η χρονική εξέλιξη της ενέργειας. Για αυτόν τον κυματάριθμο έχουμε εκθετική ευστάθεια. Ωστόσο, παρατηρούμε ότι η ενέργεια αυξάνει και φτάνει τη μέγιστη τιμή της, που είναι ίση με 274 φορές η αρχική τιμή της, για χρόνο λίγο μεγαλύτερο από τον χρόνο βελτιστοποίησης, ενώ για μεγαλύτερο χρόνο εξασθενεί γραμμικά. Επομένως, παρατηρείται μεγάλη μεταβατική αύξηση της ενέργειας για την εκθετικά ευσταθή διαταραχή.



Σχήμα 4.14: *Χρονική εξέλιξη της ενέργειας για τη βέλτιστη διαταραχή με κυματάριθμο $K = 6.4$ και γωνία $\theta = 58$ μοίρες, για χρόνο βελτιστοποίησης $T_{opt} = 10$ με $J = 0.01$. Η πορτοκαλί διακεκομμένη γραμμή δείχνει τον χρόνο βελτιστοποίησης.*

Οι δύο κύριοι μηχανισμοί που προκαλούν αυτή τη μεταβατική αύξηση της ενέργειας, συζητήθηκαν στο Κεφάλαιο 3. Ο πρώτος είναι ο μηχανισμός του Orr, που δρα με το μέγιστο τρόπο σε διαταραχές που προβάλλονται στο επίπεδο της ροής. Ο δεύτερος είναι ο lift-up ο οποίος δρα σε διαταραχές τριών διαστάσεων. Προκειμένου να ερευνηθεί η συνεργασία τους, η οριζόντια (u) και η κατακόρυφη (w) ταχύτητα αποδομούνται σε όρους απόκλισης και στροβιλισμού με τη βοήθεια της ρευματοσυνάρτησης ψ και του δυναμικού ϕ,

$$[u, w]^T = [u_q + u_d, w_q + w_d]^T = [-\partial_z \psi + \partial_x \phi, \partial_x \psi + \partial_z \phi]^T,$$

όπου T είναι ο ανάστροφος πίνακας, με δείκτη q συμβολίζεται ο όρος στροβιλισμούς και με δείκτη d ο όρος απόκλισης (Mallios and Bakas, 2017). Επομένως, η τάση Reynolds διασπάται στους όρους

$$\overline{uw} = \underbrace{\overline{u_q w_q}}_{\text{Orr}} + \underbrace{\overline{u_d w_d}}_{\text{div}} + \underbrace{\overline{u_q w_d}}_{\text{lift}} + \underbrace{\overline{u_d w_q}}_{\text{inter}},$$

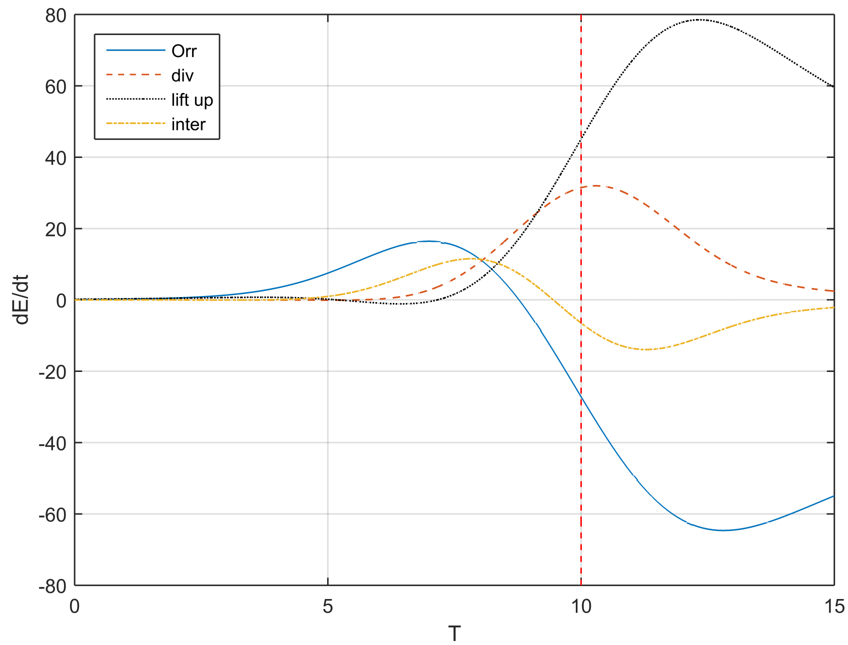
δηλαδή έναν περιστροφικό όρο, έναν όρο απόκλισης και δύο συνδυαστικούς όρους περιστροφής-απόκλισης. Ο περιστροφικός όρος αντιπροσωπεύει τον μηχανισμό του Orr και ένας από τους δύο συνδυαστικούς όρους αντιστοιχεί στο μηχανισμό lift-up. Οι άλλοι δύο όροι, είναι όρος της απόκλισης (divergence) και ο δεύτερος συνδυαστικός που ονομάζεται όρος παρεμβολής (interference) (Mallios and Bakas, 2017; Vitoshkin et al., 2012; Bakas, 2009).

Στο Σχήμα 4.15 σχεδιάζεται η χρονική εξέλιξη των τεσσάρων παραπάνω όρων. Για χρόνο μικρότερο του χρόνου βελτιστοποίησης (συμβολίζεται με την πορτοκαλί κάθετη διακεκομμένη γραμμή), ο μηχανισμός Orr είναι μεγαλύτερος των υπόλοιπων όρων, επομένως κυριαρχεί. Για μεγαλύτερο χρόνο, ο όρος Orr παίρνει αρνητικές τιμές, ενώ ο lift-up γίνεται θετικός και η μέγιστη απόλυτη τιμή του είναι μεγαλύτερη συγκριτικά με του Orr. Ως αποτέλεσμα, την ενεργειακή μείωση λόγω του μηχανισμού του Orr αναπληρώνει ο μηχανισμός lift-up, όπως φαίνεται από την αύξηση της αντίστοιχης τάσης. Ο όρος της απόκλισης έχει θετική τιμή και λίγο μετά τον χρόνο βελτιστοποίησης παίρνει τη μέγιστη τιμή, ενώ ο όρος της παρεμβολής είναι θετικός πριν τον χρόνο βελτιστοποίησης, γίνεται αρνητικός μετά από αυτόν και έχει την μικρότερη απόλυτη τιμή συγκριτικά με τους υπόλοιπους όρους. Στα αρχικά στάδια εξέλιξης, ο συνδυασμός αυτών των δύο όρων δίνει μεταβολές ενέργειας παραπλήσιες στις τιμές του μηχανισμού του Orr, όμως κατόπιν του χρόνου βελτιστοποίησης ο συνδυασμός τους δίνει μικρές τιμές μεταβολής της ενέργειας. Για χρόνο $t > 15$, όλες οι τάσεις φθίνουν στο μηδέν (δεν σχεδιάζεται στο Σχήμα). Τα αποτελέσματα αυτά συνάδουν με τη χρονική εξέλιξη των ισοϋψών της z συνιστώσας του στροβιλισμού και της απόκλισης που σχεδιάζεται στο Σχήμα 4.16. Για χρόνο $t = 4$ οι ισοϋψείς κείτονται αντίθετα από την διάτμηση, ενώ προϊόντος του χρόνου στρίβουν παράλληλα προς αυτή μέχρι που γίνονται κάθετες λίγο πριν τον χρόνο βελτιστοποίησης. Σε αυτό το χρονικό διάστημα, η αύξηση της ενέργειας οφείλεται στον μηχανισμό του Orr. Για χρόνο $t = 8$, οι ισοϋψείς του στροβιλισμού και της απόκλισης έχουν βγει εκτός φάσης, ενώ για χρόνο $t = 12$, είναι εκτός φάσης και έχουν στρίψει προς την κατεύθυνση της ροής. Ποιοτικά, η στροφή των ισοϋψών προς την κατεύθυνση της ροής υποδηλώνει μείωση της ενέργειας μέσω του μηχανισμού του Orr, ενώ η ασυμφωνία φάσης των ισοϋψών υποδηλώνει τη δράση του lift-up, ο οποίος αναπληρώνει τη απώλεια ενέργειας λόγω του μηχανισμού του Orr (Vitoshkin et al., 2012).

Παρόμοια συμπεριφορά διακρίνεται και για διαστρωμάτωση $J = 0.25$, με τη διαφορά πως η ισχυρότερη διαστρωμάτωση προκαλεί ασθενέστερη μεταβατική αύξηση της ενέργειας. Τα αντίστοιχα Σχήματα παραλείπονται.

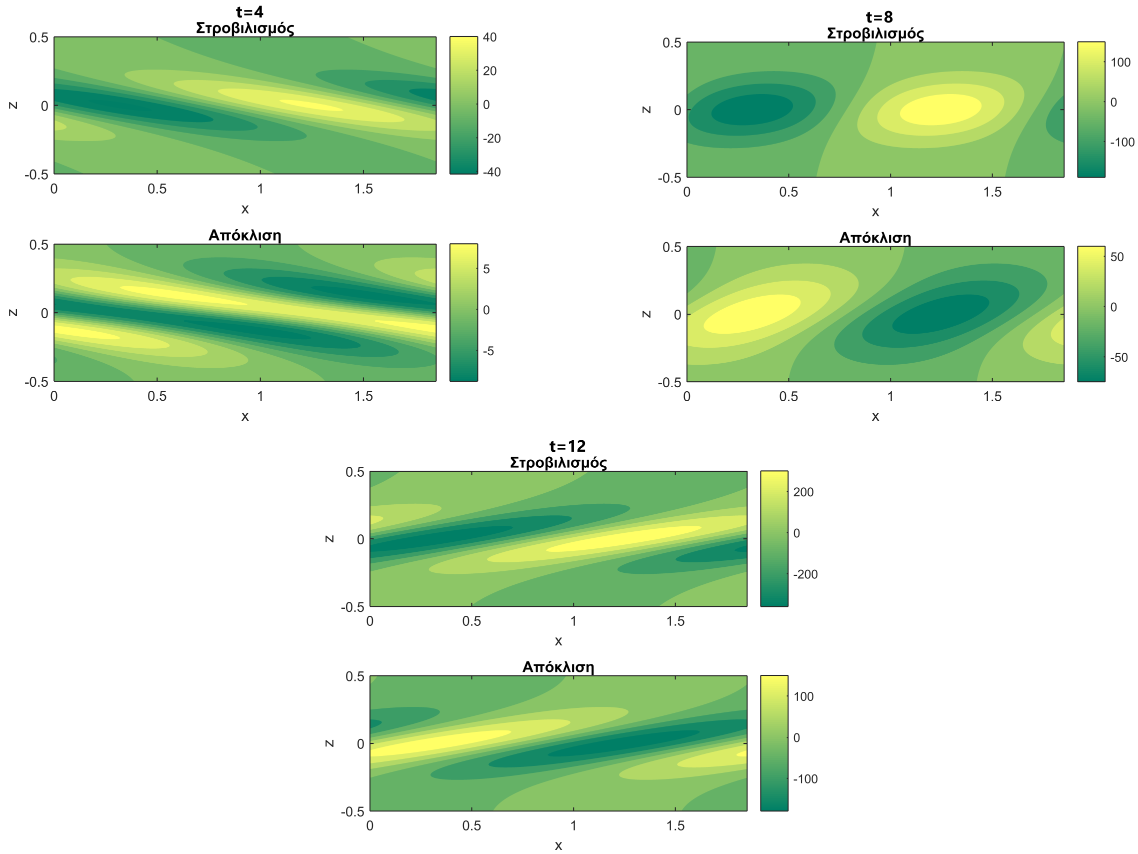
Για ισχυρή διαστρωμάτωση με $J = 3.5$ και χρόνο βελτιστοποίησης $T_{opt} = 10$ στο Σχήμα 4.17 σχεδιάζεται ο εκθέτης πεπερασμένου χρόνου Lyapunov, συναρτήσει του κυματάριθμου K και της γωνίας θ. Ο ρυθμός ανάπτυξης των βέλτιστων διαταραχών έχει μη-μηδενικές τιμές σε ολόκληρο τον παραμετρικό χώρο. Οι μέγιστες τιμές εμφανίζονται στο εύρος κυματάριθμων $K > 5$ και για γωνίες από $\theta = 0^o$ έως $\theta = 50^o$. Επομένως εμφανίζονται δομές μικρού μεγέθους σε γωνίες 0 έως 50 μοιρών.

Η βέλτιστη διαταραχή είναι παράλληλη στο επίπεδο της ροής και έχει κυματάριθμο $K = 8.6$ ενώ η χρονική εξέλιξη της ενέργειας της σχεδιάζεται στο Σχήμα 4.18. Η ενέργεια αυξάνει έως 15 φορές, με το μέγιστο να εντοπίζεται λίγο μετά τον χρόνο βελτιστοποίησης, ενώ για μεγαλύτερους χρόνους μειώνεται. Η διαφορά με την περίπτωση της ισχνής διαστρωμάτωσης έγκειται στη χαμηλότερη αύξηση της ενέργειας και στην αρμονική κύμανση της ενέργειας που παρατηρείται. Για την εξήγηση της κύμανσης σχεδιάζεται στο Σχήμα 4.19 η ρευματοσυνάρτηση για χρόνους $t = 10.5, 11, 11.5, 12$ αντίστοιχα. Η βέλτιστη διαταραχή



Σχήμα 4.15: *Χρονική εξέλιξη της τάσης Reynolds της βέλτιστης διαταραχής με κυματάριθμο $K = 6.4$ και γωνία $\theta = 58$ μοίρες, για χρόνο βελτιστοποίησης $T_{opt} = 10$ και $J = 0.01$. Η τάση Reynolds διασπάται στους όρους του μηχανισμού του Orr (μπλε γραμμή), του μηχανισμού lift-up (μαύρη διάστικτη γραμμή), της απόκλισης (κόκκινη διακεκομμένη) και του στροβιλισμού (κίτρινη διακεκομμένη-διάστικτη). Η κάθετη πορτοκαλί διακεκομμένη γραμμή δείχνει το χρόνο βελτιστοποίησης.*

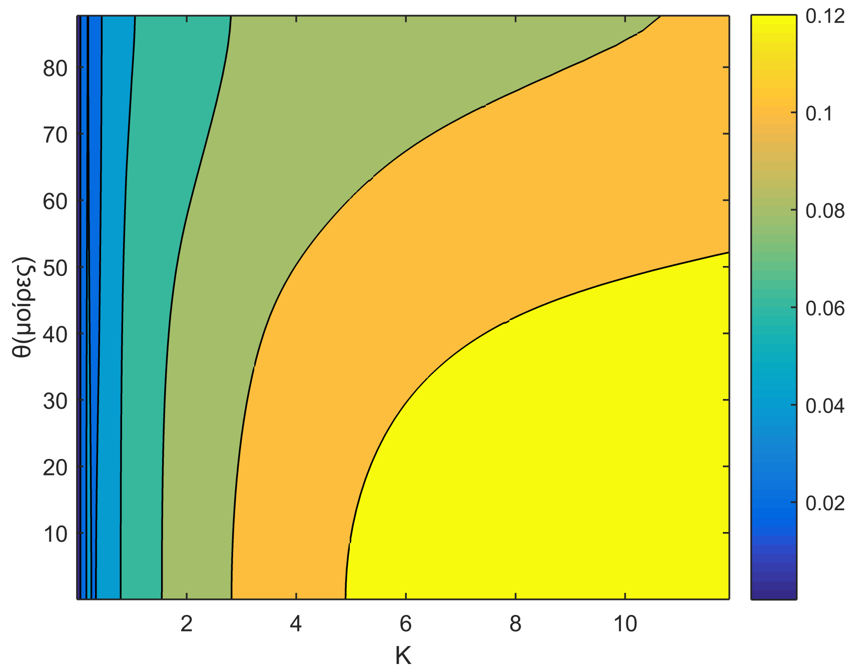
αποτελείται στην περίπτωση αυτή από δύο κύματα που έχουν ίσο μέτρο ταχύτητας, αλλά αντίθετη κατεύθυνση. Η συμβολή των δύο κυμάτων παρατηρούμε ότι προκαλεί μεταβολή της κλίσης της ρευματοσυνάρτησης. Για $t = 10.5$ η ρευματοσυνάρτηση κείτεται αντίθετα από τη διάτμηση, επομένως η τάση Reynolds έχει αρνητική τιμή και καταγράφεται αύξηση της ενέργειας. Για $t = 11$ και $t = 12$ είναι κάθετη στη μέση ροή με μηδενική τάση Reynolds και για $t = 11.5$ στρίβει προς τη μέση ροή, άρα σημειώνεται θετική τάση και μείωση της ενέργειας. Η κύμανση αυτή επαναλαμβάνεται καθώς τα δύο κύματα συνεχίζουν την κίνηση τους. Ροές ισχυρότερης διαστρωμάτωσης έχουν την ίδια συμπεριφορά,



Σχήμα 4.16: *Χρονική εξέλιξη των ισοϋψών της z συνιστώσας του στροβιλισμού και της απόκλισης στο επίπεδο της ροής, για βέλτιστη διαταραχή με κυματάριθμο $K = 6.4$, γωνία $\theta = 58$ μοίρες, χρόνο βελτιστοποίησης $T_{opt} = 10$ και αριθμό Richardson $J = 0.01$, για τις χρονικές στιγμές $t = 4, 8, 12$.*

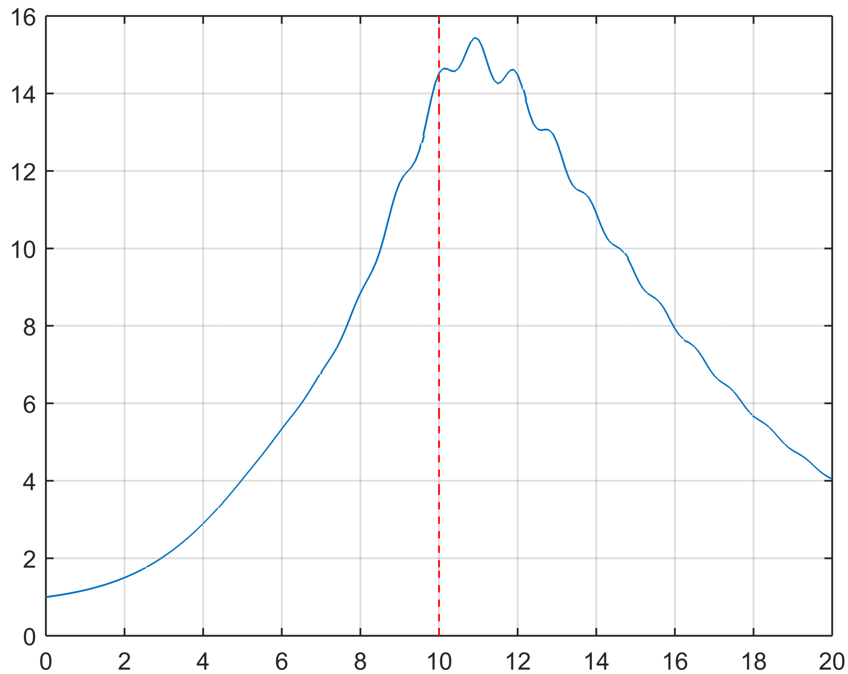
επομένως τα αντίστοιχα Σχήματα παραλείπονται.

Για μεγαλύτερους χρόνους βελτιστοποίησης, ο εκθέτης πεπερασμένου χρόνου Lyapunov τείνει στον εκθετικό ρυθμό αύξησης (Constantinou and Ioannou, 2011). Για ροή ασθενούς διαστρωμάτωσης με $J = 0.01$ και χρόνο βελτιστοποίησης $T_{opt} = 80$, στο Σχήμα 4.20 σχεδιάζονται οι ισοϋψείς του ρυθμού ανάπτυξης συναρτήσει του κυματάριθμου K και της γωνίας θ. Συγκρίνοντας με το Σχήμα 4.6 όπου απεικονίζονται οι ισοϋψείς του εκθετικού ρυθμού ανάπτυξης διαταραχών της ίδιας ροής, παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις η δομή με



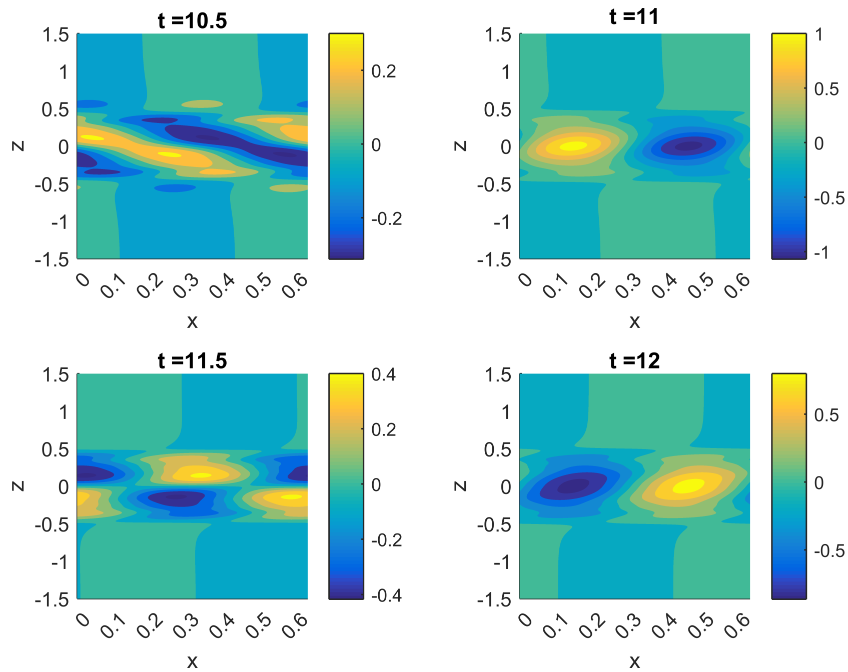
Σχήμα 4.17: *Ισοϋψείς του εκθέτη πεπερασμένου χρόνου Lyapunov $ln(G)/2T_{opt}$ συναρτήσει του κυματάριθμου K και της γωνίας θ, για $J = 3.5$ και χρόνο βελτιστοποίησης $T_{opt} = 10$.*

τον μεγαλύτερο ρυθμό ανάπτυξης έχει το ίδιο μέγεθος, σχηματίζει την ίδια γωνία με τη μέση ροή και εξελίσσεται με τον ίδιο ρυθμό. Επίσης το εύρος των κυματάριθμων που εμφανίζουν εκθετική αστάθεια είναι ίδιο για τις βέλτιστες διαταραχές. Στη δεύτερη περίπτωση βέβαια έχουμε ασταθείς διαταραχές σε ολόκληρη την έκταση του παραμετρικού χώρου, με ρυθμό ανάπτυξης μικρότερο κατά μία τάξη μεγέθους σε σχέση με τις πιο ασταθείς. Στις ροές ισχυρής διαστρωμάτωσης, η αλγεβρική αστάθεια τείνει στην εκθετική για μεγαλύτερο χρόνο βελτιστοποίησης. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 4.10 όπου σχεδιάζεται σε λογαριθμική κλίμακα ο ρυθμός ανάπτυξης των βέλτιστων διαταραχών για χρόνο βελτιστοποίησης $T_{opt} = 5$, $T_{opt} = 10$ και $T_{opt} = 100$ συναρτήσει του αριθμού Richardson. Για μικρούς χρόνους βελτιστοποίησης, ο ρυθμός εξέλιξης των βέλτιστων διαταραχών είναι μεγαλύτερος σε σχέση με τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης. Συγκεκριμένα, για $T_{opt} = 5$ και μικρούς αριθμούς Richardson, ο



Σχήμα 4.18: *Χρονική εξέλιξη της ενέργειας της βέλτιστης διαταραχής με κυματάριθμο $K = 8.6$, $\theta = 0$ και χρόνο βελτιστοποίησης $T_{opt} = 10$. Η κάθετη πορτοκαλί διακεκομμένη γραμμή δείχνει τον χρόνο βελτιστοποίησης.*

ρυθμός εξέλιξης των διαταραχών είναι περίπου δύο φορές μεγαλύτερος, ενώ για μεγάλους αριθμούς Richardson φτάνει έως τις τρεις τάξεις μεγέθους. Ανεξαρτήτως διαστρωμάτωσης, παρατηρείται μεταβατική αύξηση διαταραχών που μπορεί να οδηγήσει σε ανάμειξη. Με αύξηση του χρόνου βελτιστοποίησης από $T_{opt} = 5$, σε $T_{opt} = 10$ και $T_{opt} = 100$, ο ρυθμός εξέλιξης των διαταραχών μειώνεται. Για $T_{opt} = 100$ και ισχνή διαστρωμάτωση, ο ρυθμός εξέλιξης των βέλτιστων και των εκθετικών διαταραχών ταυτίζεται, ενώ για ισχυρότερες διαστρωματώσεις απαιτείται μεγαλύτερος χρόνος βελτιστοποίησης έτσι ώστε ο ρυθμός εξέλιξης βέλτιστων και εκθετικών διαταραχών να είναι ίδιος. Τέλος, και στις τρεις περιπτώσεις χρόνου βελτιστοποίησης ο ρυθμός εξέλιξης των βέλτιστων διαταραχών παραμένει σταθερός με την αύξηση του αριθμού Richardson. Επομένως παρατηρούνται διαταραχές που εξελίσσονται με τον ίδιο ρυθμό, ανεξαρτήτως διαστρωμάτωσης.

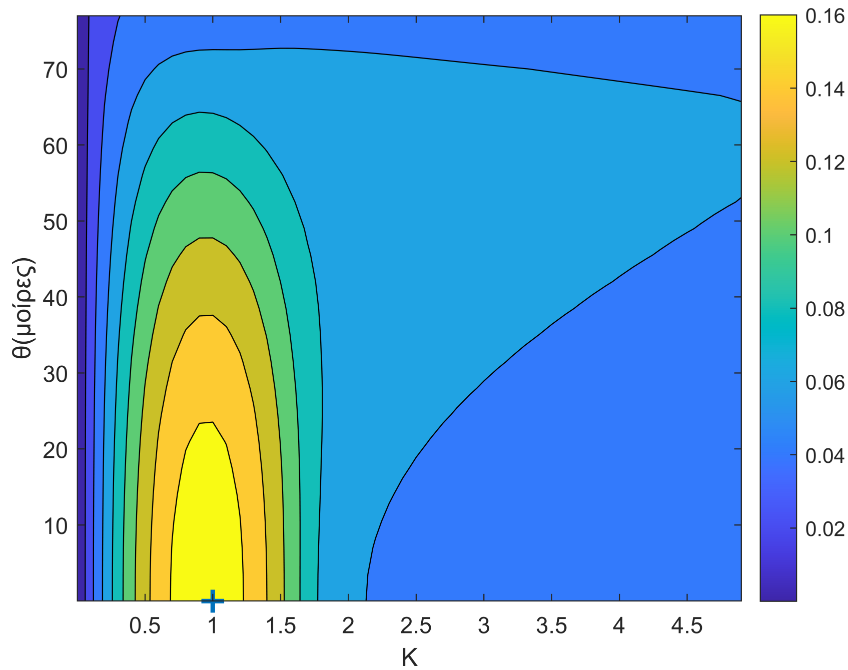


Σχήμα 4.19: *Χρονική εξέλιξη της ρευματοσυνάρτησης για τη βέλτιστη διαταραχή με κυματάριθμο $K = 8.6$, $\theta = 0$ και χρόνο βελτιστοποίησης $T_{opt} = 10$. Η ρευματοσυνάρτηση κείτεται αντίθετα από την διάτμηση για χρόνο $t = 10.5$, άρα παρατηρείται αρνητική τάση Reynolds και στην ίδια κατεύθυνση με τη μέση ροή για χρόνο $t = 11.5$, άρα η τάση Reynolds είναι θετική.*

4.4 Βέλτιστη διέγερση της εκθετικής αστάθειας

Σύμφωνα με τη γενικευμένη θεωρία ευστάθειας, όταν εισάγεται ως αρχική διαταραχή το διορθογώνιο ιδιοάνυσμα του πιο ασταθούς τρόπου ταλάντωσης, παρατηρείται ενίσχυση στον ρυθμό αύξησης ενέργειας των διαταραχών. Αυτό συμβαίνει καθώς η βάση των ιδιοανυσμάτων του τελεστή $\mathcal{A}$ δεν είναι ορθογώνια, επομένως οι προβολές του διορθογώνιου διανύσματος στα διανύσματα βάσης έχουν μεγαλύτερο μέτρο από το πιο ασταθές ιδιοάνυσμα όπως αναλύθηκε στην Εισαγωγή. Η ενίσχυση του ρυθμού αύξησης της ενέργειας οφείλεται στη συγκεκριμένη περίπτωση στους μηχανισμούς Orr και lift-up.

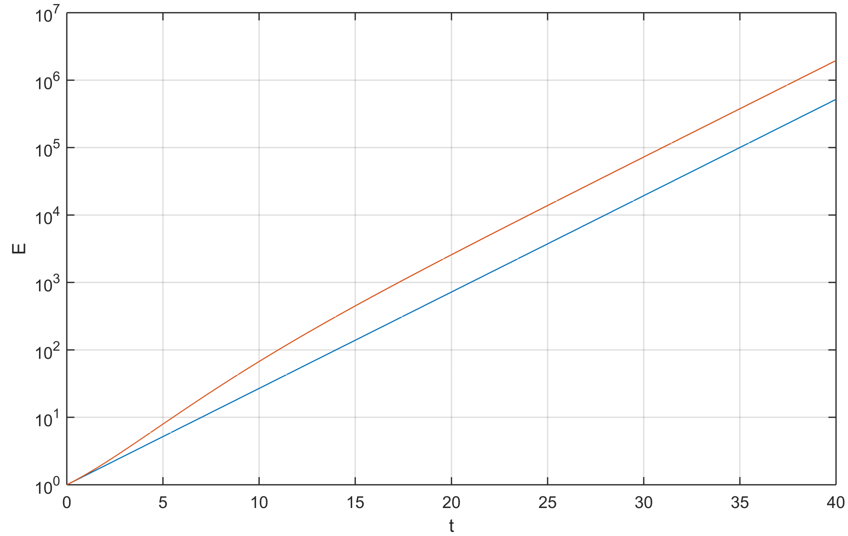
Για να το δείξουμε, σχεδιάζεται στο Σχήμα 4.21 η ενεργειακή αύξηση αρχικής



Σχήμα 4.20: *Ισοϋψείς του εκθέτη πεπερασμένου χρόνου Lyapunov $ln(G)/2T_{opt}$ συναρτήσει του κυματάριθμου K και της γωνίας θ, για $J = 0.01$ και χρόνο βελτιστοποίησης $T_{opt} = 80$. Με μπλε σταυρό συμβολίζεται η βέλτιστη διαταραχή με το μέγιστο ρυθμό ανάπτυξης.*

διαταραχής σε λογαριθμική κλίμακα, με κυματάριθμο $K = 0.9$, $\theta = 0$ και αριθμό Richardson $J = 0.01$. Συγκεκριμένα συγκρίνεται η ενεργειακή αύξηση για δύο διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Η πρώτη είναι το εκθετικά ασταθές ιδιοάνυσμα και η δεύτερη το διορθογώνιό του. Παρατηρούμε μια αρχική μεταβατική αύξηση, με την ενέργεια του διορθογώνιου να αυξάνει περίπου 3.7 φορές σε σύγκριση με το ασταθές ιδιοάνυσμα, ενώ για χρόνο $t = 16$ φτάνει στο 90% της μέγιστης αύξησης.

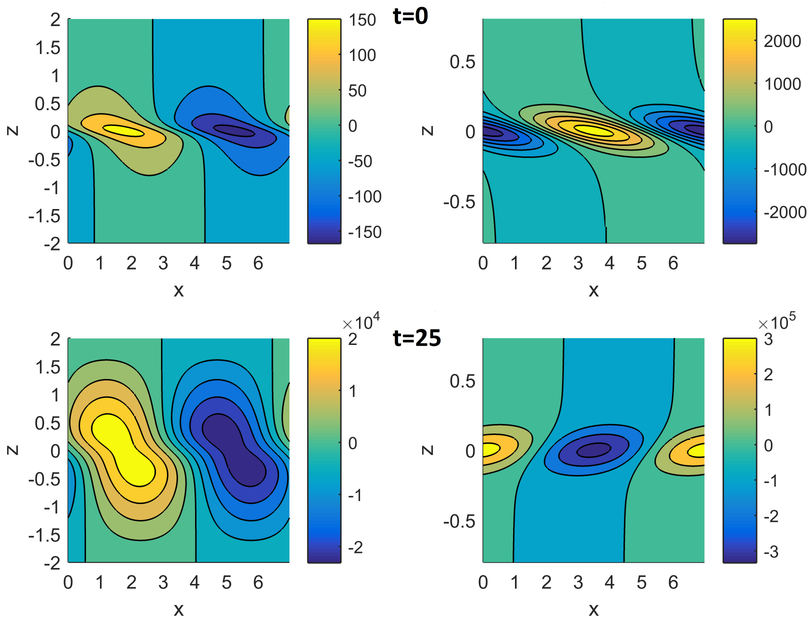
Η αύξηση αυτή οφείλεται στο μηχανισμό του Orr. Για να τα δείξουμε, σχεδιάζονται στο Σχήμα 4.22 οι ισοϋψείς της ρευματοσυνάρτησης και της πυκνότητας για χρόνους $t = 0$ και $t = 25$. Για χρόνο $t = 0$ η ρευματοσυνάρτηση κείτεται αντίθετα από τη κατεύθυνση της διάτμησης. Καθώς εξελίσσεται, στρίβει προς την κατεύθυνση της ροής με τις ρευματογραμμές να ανοίγουν σύμφωνα με το



Σχήμα 4.21: *Χρονική εξέλιξη της ενέργειας, σχεδιασμένη σε λογαριθμική κλίμακα, αρχικής διαταραχής με $K = 0.9$, γωνία $\theta = 0$ μοίρες. Απεικονίζεται η εξέλιξη της ενέργειας για αρχική διαταραχή τον κανονικό τρόπο ταλάντωσης με το μεγαλύτερο ρυθμό εκθετικής ανάπτυξης (μπλε καμπύλη) και η αντίστοιχη εξέλιξη για αρχική διαταραχή το διορθογώνιο διάνυσμα στον κανονικό τρόπο ταλάντωσης (κόκκινη καμπύλη). Ο αριθμός Richardson είναι $J = 0.01$.*

μηχανισμό του Orr. Παρόμοια αλλαγή συντελείται και στις ισοϋψείς της πυκνότητας, οι οποίες περιστρέφονται και κείτονται παράλληλα στη ροή. Όμως σε αντίθεση με την εξέλιξη που είδαμε στο Κεφάλαιο 3, η ρευματοσυνάρτηση σταματάει να στρίβει και ως αποτέλεσμα, η ροή ορμής είναι αρνητική και η ενέργεια συνεχώς αυξάνεται. Ο λόγος είναι ότι για χρόνο $t > 25$ έχει απομείνει από τη διαταραχή μόνο η προβολή στο εκθετικά ασταθές ιδιοάνυσμα, με αυτό να αυξάνει αυτούσιο την ενέργεια του εκθετικά.

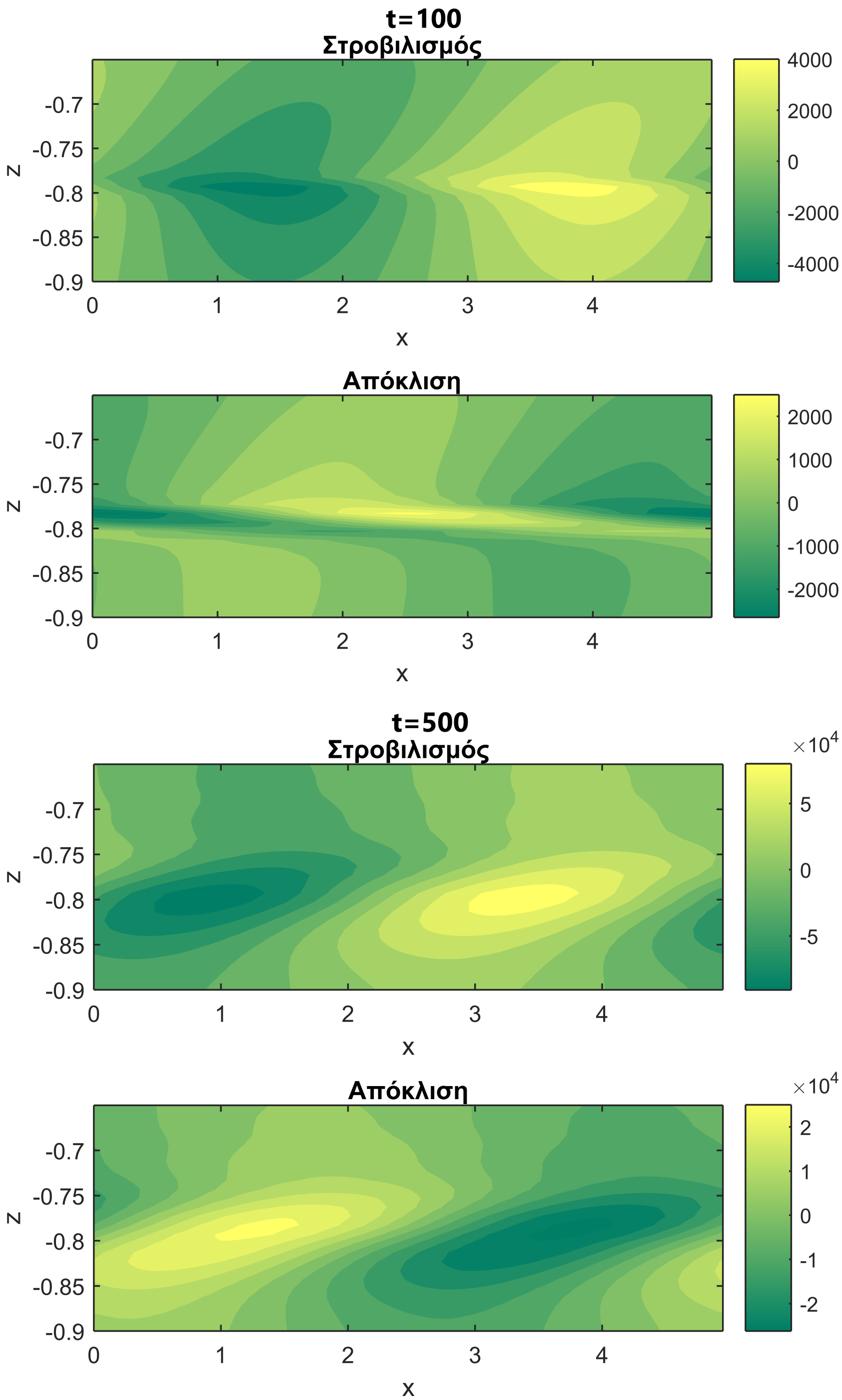
Η αποδοτικότητα της διέγερσης της ασταθούς ιδιοκατάστασης από τη διορθογώνια της εξαρτάται από τη διαστρωμάτωση. Για αριθμό Richardson $J = 0.25$, η ασταθής δομή με κυματάριθμο $K = 1$ και $\theta = 0$, διεγείρεται λόγω μεταβατικής αύξησης της ενέργειας, με ενέργεια αυξημένη κατά 55.8 φορές ενώ το 90% της μέγιστης αύξησης επιτυγχάνεται σε χρόνο $t = 55$ με τη χρονική εξέλιξη να είναι



Σχήμα 4.22: *Χρονική εξέλιξη των ισοϋψών της ρευματοσυνάρτησης (αριστερά) και της πυκνότητας (δεξιά) του διορθογώνιου στο πιο ασταθές ιδιοάνυσμα του Σχήματος 4.21 για χρόνο* $t = 0$ *και* $t = 25$.

όμοια με αυτή του Σχήματος 4.22 (το αντίστοιχο Σχήμα της χρονικής εξέλιξης των ενεργειών παραλείπεται).

Για εξαιρετικά ισχυρή διαστρωμάτωση με $J = 3.5$, η πιο ασταθής διαταραχή με κυματάριθμο $K = 1.5$ και γωνία $\theta = 32.2$ μοίρες, διεγείρεται με ενεργειακή αύξηση 528.9 φορές ενώ ο χρόνος που απαιτείται για να επιτευχθεί το 90% της αύξησης είναι της τάξης $\mathcal{O}(3)$. Επειδή η πιο ασταθής διαταραχή είναι τρισδιάστατη, προκειμένου να διαπιστωθεί ποιος από τους δύο μηχανισμούς Orr και lift-up συμβάλει στη μεταβατική αύξηση της ενέργειας, σχεδιάζεται η χρονική εξέλιξη των ισοϋψών της z συνιστώσας του στροβιλισμού και της απόκλισης στο Σχήμα 4.23. Οι γραμμές σταθερής φάσης του στροβιλισμού και της απόκλισης στρίβουν δεξιόστροφα, όπου ο μηχανισμός Orr προκαλεί αύξηση της κατακόρυφης ταχύτητας και της ενέργειας. Με την περιστροφή των ισοφασικών καμπυλών προς την κατεύθυνση της ροής, ο Orr εξασθενεί, όμως λόγω της αρνητικής συσχέτισης του στροβιλισμού και της απόκλισης, ο μηχανισμός lift-up αντισταθμίζει την απώλεια ενέργειας.



Σχήμα 4.23: *Χρονική εξέλιξη των ισοϋψών της z συνιστώσας του στροβιλισμού και της απόκλισης στο επίπεδο ροής, για το διορθογώνιο διάνυσμα με κυματάριθμο $K = 1.5$, γωνία $\theta = 32.2^o$ και αριθμό Richardson $J = 3.5$, για τις χρονικές στιγμές $t = 100$ και $t = 500$.*

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Στη εργασία μελετήθηκε η αστάθεια Holmboe για διαταραχές τριών διαστάσεων, αξιοποιώντας την προσέγγιση Boussinesq. Εξετάστηκαν τα χαρακτηριστικά εκθετικά ασταθών δομών που αναμένεται να κυριαρχήσουν για μεγάλους χρόνους, όπως το μήκος κύματος, ο ρυθμός ανάπτυξης, η γωνία που σχηματίζουν με το επίπεδο της μέσης ροής καθώς και ο βέλτιστος τρόπος διέγερσής τους. Εκτός από τη μελέτη για μεγάλους χρόνους, διερευνήθηκαν με τη χρήση της Γενικευμένης Θεωρίας Ευστάθειας τα χαρακτηριστικά και οι μηχανισμοί της αλγεβρικής αστάθειας που ενδέχεται να προκαλέσει ανάμειξη και τύρβη σε συντομότερο χρόνο σε σύγκριση με την εκθετική αστάθεια.

Αρχικά, μελετήθηκε η εξέλιξη των διαταραχών στις δύο διαστάσεις. Για ροές αρκετά ισχνής διαστρωμάτωσης, εντοπίστηκαν εκθετικά αυξανόμενες διαταραχές Kelvin-Helmholz με μηδενική φασική ταχύτητα. Για μεγαλύτερους αριθμούς Richardson εμφανίζονται τα χαρακτηριστικά κύματα Holmboe, που σε σύγκριση με τις δομές Kelvin-Helmholz, χαρακτηρίζονται από μη-μηδενική φασική ταχύτητα και έχουν μικρότερο μέγεθος. Ο κλάδος της αστάθειας Holmboe εκτείνεται ως $J \simeq 3$ και αναγράφεται στη βιβλιογραφία ως κλάδος H1. Καθ' όλη την έκταση του κλάδου, οι διαταραχές δεν εξελίσσονται με τον ίδιο ρυθμό. Αυτές που εμφανίζονται σε ροές ισχνής διαστρωμάτωσης, εξελίσσονται με ρυθμό κατά μία τάξη μεγέθους μικρότερο από τις δομές Kelvin-Helmholz, ενώ για σχετικά ισχυρότερη διαστρωμάτωση, οι δομές εξελίσσονται με ρυθμό κατά δύο τάξεις μεγέθους μικρότερο σε σύγκριση με τις Kelvin-Helmholz.

Επεκτείνοντας την ανάλυση για ένα εύρος ροών με αριθμό Richardson $J \in [0, 12]$ βρέθηκαν άλλες δύο ζώνες αστάθειας, η H2 στο διάστημα $J \in (3.6, 4)$ και η H3 για $J > 11$. Τα κύματα στον κλάδο H2 έχουν παρόμοιο μέγεθος με αυτά στον κλάδο H1 και παρόμοιο ρυθμό ανάπτυξης με διαταραχές ροών σχετικά ισχυρής διαστρωμάτωσης του κλάδου H2, ενώ τα κύματα του κλάδου H3 εξελίσσονται κατά μία τάξη μεγέθους πιο αργά από τον κλάδο H2.

Η μελέτη επεκτάθηκε σε διαταραχές τριών διαστάσεων. Στην περιοχή των κλάδων H1 και H2 παρατηρούνται διαταραχές στις τρεις διαστάσεις, αν και οι διαταραχές με τον μεγαλύτερο ρυθμό ανάπτυξης είναι στο επίπεδο της ροής. Ωστόσο, ροές που είναι ευσταθείς στις δύο διαστάσεις εκδηλώνουν αστάθεια σε διαταραχές τριών διαστάσεων. Συγκεκριμένα για αριθμούς Richardson $J \in (3, 3.5)$ και $J \in (9, 11)$ κυριαρχούν τρισδιάστατα κύματα, μεγαλύτερα από αυτά των κλάδων H1 και H2 αλλά μικρότερα από τις δομές Kelvin-Helmholz. Ο ρυθμός εξέλιξης τους είναι παρόμοιος με τις γειτονικές ζώνες αστάθειας H2 και H3 αντίστοιχα. Επιπλέον, ο κλάδος αστάθειας H3 κυριαρχείται από τρισδιάστατες δομές, παρόλο που εντοπίστηκαν διαταραχές και δύο διαστάσεων. Τέλος, διαπιστώθηκε ότι η χρήση του διορθογώνιου ανύσματος της ταχύτερα αναπτυσσόμενης εκθετικής δομής ως αρχική διαταραχή οδηγεί σε μεγαλύτερη αύξηση της ενέργειας, συγκριτικά με την απευθείας εφαρμογή της δομής.

Η μελέτη των μεταβατικών φαινομένων πραγματοποιήθηκε για το εύρος αριθμών Richardson $J \in [0, 12]$ και χρόνο βελτιστοποίησης $T_{opt} = 10$. Δηλαδή υπολογίστηκαν οι διαταραχές που οδηγούν σε μέγιστη αύξηση της ενέργειας σε αδιάστατο χρόνο $t = 10$. Για κάθε τιμή της διαστρωμάτωσης, οι βέλτιστες διαταραχές με τον μεγαλύτερο ρυθμό εξέλιξης αναπτύσσονται πιο γρήγορα από τις κυρίαρχες εκθετικές δομές, ενώ εμφανίζεται αστάθεια για κάθε τιμή του παραμετρικού χώρου των κυματάριθμων. Για ισχνή διαστρωμάτωση, οι βέλτιστες διαταραχές σχηματίζουν γωνία με το επίπεδο της μέσης ροής, ενώ καθώς αυξάνεται η διαστρωμάτωση οι βέλτιστες διαταραχές όλο και πλησιάζουν το επίπεδο της ροής. Επίσης, έχουν πολύ μικρότερο μέγεθος από αυτό των εκθετικών δομών, ενώ σε ροές μέτριας και έντονης διαστρωμάτωσης παρουσιάζουν σταθερό ρυθμό ανάπτυξης, ανεξαρτήτως του βαθμού της διαστρωμάτωσης. Με την αύξηση του χρόνου βελτιστοποίησης οι βέλτιστες διαταραχές τείνουν στις εκθετικές διαταραχές. Ως αποτέλεσμα, αναμένουμε διαταραχές με μεγαλύτερο μέγεθος και μικρότερο ρυθμό ανάπτυξης.

Υπεύθυνοι για τα μεταβατικά φαινόμενα είναι ο μηχανισμός του Orr και ο lift-up. Ο Orr επιδρά αποδοτικά σε διαταραχές παράλληλες στο επίπεδο της ροής προκαλώντας αύξηση της κατακόρυφης ταχύτητας, ενώ ο lift-up στις διαταραχές κάθετα στο επίπεδο της ροής, όπου προκαλεί αύξηση της ζωνικής συνιστώσας. Στις περιπτώσεις τρισδιάστατων διαταραχών, που δεν σχηματίζουν γωνία 90 μοιρών με τη μέση ροή, παρατηρήθηκε συνδυασμός των δύο μηχανισμών. Ο μηχανισμός του Orr προκαλεί αύξηση της ενέργειας για χρόνους μικρότερους από τον χρόνο βελτιστοποίησης, ενώ ο lift-up δρα αργότερα, αναπληρώνοντας την απώλεια ενέργειας λόγω του Orr.

Η εργασία είχε σαν στόχο τη μελέτη αστάθειας Holmboe για συμμετρικές ροές τόσο για μικρούς χρόνους ανάπτυξης όσο και για μεγαλύτερους. Μελλοντικές μελέτες δύναται να επεκτείνουν την παρούσα ανάλυση, εξετάζοντας τα μεταγενέστερα στάδια εξέλιξης της αστάθειας. Η ενίσχυση της ενέργειας μέσω της εισαγωγής του διορθογώνιου διανύσματος μπορεί να εφαρμοστεί και στη περίπτωση εκθετικά ευσταθών διαταραχών και να μελετηθεί αν τα μεταβατικά φαινόμενα είναι επαρκή ώστε να προκαλέσουν ανάδευση και τύρβη. Επιπλέον, είναι δυνατόν να ληφθούν υπόψιν η τριβή και η μοριακή διάχυση και να διερευνηθεί η επίδρασή τους στην αστάθεια. Τέλος, παρόμοια μελέτη μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ασύμμετρες ροές, εξετάζοντας πώς η παράμετρος ασυμμετρίας επηρεάζει την ευστάθεια της ροής.

Παράρτημα Α΄

Αριθμητικός αλγόριθμος για τη μελέτη της αστάθειας

Προκειμένου να μελετηθεί η αστάθεια Holmboe, απαιτείται η λύση των εξισώσεων (2.38), (2.39) και (2.40). Η μελέτη της εκθετικής αστάθειας γίνεται μέσω του αριθμητικού υπολογισμού των ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων του γραμμικοποιημένου δυναμικού τελεστή $\mathcal{A}$ (2.42). Αυτό επιτυγχάνεται διακριτοποιώντας τις συναρτήσεις στον κατακόρυφο άξονα z σε ένα πλεκτό πλέγμα σημείων (staggered grid). Οι συναρτήσεις της ταχύτητας $U(z)$ και των παραγώγων της, $dU(z)/dz$ και $d^2U(z)/dz^2$, καθώς και τα πλάτη Fourier του στροβιλισμού και της κατακόρυφης ταχύτητας ορίζονται σε ένα πλέγμα N σημείων $z_i = -L + i\delta z$, $i = 1, ..., N$ με $\delta z = 2 \cdot L/(N + 1)$ την πλεγματική απόσταση τους. Η συνάρτηση της παραγώγου της μέσης πυκνότητας και του πλάτους Fourier της διαταραχής της πυκνότητας ορίζεται σε ένα δεύτερο πλέγμα $N + 1$ σημείων $z_{di} = -L + \delta z/2 + i\delta z$, $i = 1, ..., N + 1$. Η απόσταση των ορίων του πλέγματος επιλέχθηκε ως $L = 2$. Για μικρότερες τιμές του L τα αποτελέσματα της μελέτης επηρεάζονται από τα όρια ενώ για μεγαλύτερες τιμές, τα όρια δεν επιδρούν στα αποτελέσματα ωστόσο απαιτείται μεγαλύτερος αριθμός σημείων του πλέγματος και περισσότερος υπολογιστικός χρόνος ώστε να επιτευχθεί αριθμητική σύγκλιση.

Για τον υπολογισμό της δεύτερης παραγώγου στον τελεστή της Λαπλασιανής (και της αντίστροφής της) είναι απαραίτητο να οριστεί αριθμητικά ο τελεστής της δεύτερης παραγώγου. Έστω ότι ορίζεται μία συνάρτηση f στο πλέγμα της ταχύτητας, που αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα στήλης $N \times 1$, και στα σύνορα του πλέγματος ικανοποιούνται μηδενικές συνοριακές συνθήκες $f(|x| = L) = 0$. Το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης f στο σημείο πλέγματος $(z_i + \delta z)$ είναι:

$$f(z_i + \delta z) = f(z_i) + f'(z_i)\delta z + f''(z_i)\frac{\delta z^2}{2} + \mathcal{O}(\delta z^3). \tag{Α΄.1}$$

Αντίστοιχα, το ανάπτυγμα Taylor της f στο σημείο $(z_i - \delta z)$ είναι:

$$f(z_i - \delta z) = f(z_i) - f'(z_i)\delta z + f''(z_i)\frac{\delta z^2}{2} + \mathcal{O}(\delta z^3). \tag{Α΄.2}$$

Προσθέτοντας τις (Α΄.1) και (Α΄.2) κατά μέλη και αγνοώντας τους όρους δεύτερης τάξης παίρνουμε:

$$f''(z_i) = \frac{f(z_{i+1}) - 2f(z_i) + f(z_{i-1})}{\delta z^2},\ i = 2, ..., N-1,$$

με τη δεύτερη παράγωγο στα σημεία των συνόρων να είναι:

$$f''(z_1) = \frac{f(z_2) - 2f(z_1)}{\delta z^2}, \quad f''(z_N) = \frac{-2f(z_N) + f(z_{N-1})}{\delta z^2}.$$

Επομένως, η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης f μπορεί να εκφραστεί ως ο πίνακας $\boldsymbol{D2}$, διαστάσεων $N \times N$:

$$\boldsymbol{D2} = \frac{1}{\delta z^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & . & & & & \\ & & & \cdots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ & & & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ & & & \cdots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

που δρα πάνω στο διάνυσμα $\boldsymbol{f}$.

Στην εξίσωση (2.40) όλες οι συναρτήσεις πρέπει να υπολογίζονται στο ίδιο πλέγμα, επομένως η πυκνότητα πρέπει να οριστεί στο πλέγμα που ορίζονται τα πλάτη του στροβιλισμού και της κατακόρυφης ταχύτητας. Είναι απαραίτητο να δημιουργηθεί ένας πίνακας μετασχηματισμού, που θα μεταφέρει μία συνάρτηση από τα σημεία z_{di} στα σημεία z_i. Εφόσον η πυκνότητα ορίζεται στα σημεία $z_{d(i+1)}$ και $z_{d(i-1)}$, για να μεταφερθεί στο σημείο z_i του πλέγματος της ταχύτητας, αρκεί να υπολογιστεί ο μέσος όρος:

$$\hat{\rho}(z_i, t) = \frac{\hat{\rho}(z_{d(z+i)}, t) + \hat{\rho}(z_{d(z-i)}, t)}{2},\ i = 1, ..., N.$$

Η πυκνότητα στο δεξί μέλος της (2.40) θα γραφεί ως $\boldsymbol{I1} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}$, όπου $\boldsymbol{I1}$ είναι ο πίνακας διαστάσεων $N \times (N+1)$:

$$\boldsymbol{I1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & . & & & & \\ & & & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{A′.3}$$

Με τον ίδιο τρόπο, στην εξίσωση (2.38) το πλάτος Fourier της κατακόρυφης ταχύτητας πρέπει να οριστεί στο πλέγμα της πυκνότητας υπολογίζοντας τον μέσο όρο:

$$\hat{w}(z_{di}, t) = \frac{\hat{w}(z_{i+1}, t) + \hat{w}(z_{i-1}, t)}{2},\ i = 2, ..., N,$$

ενώ για τα άκρα του πλέγματος θα χρησιμοποιήσουμε τις μηδενικές συνοριακές συνθήκες:

$$\hat{w}(z_{d1}, t) = \frac{\hat{w}(z_1, t)}{2},$$
$$\hat{w}(z_{d(N+1),t)}) = \frac{\hat{w}(z_N, t)}{2}.$$

Επομένως, η κατακόρυφη ταχύτητα στην εξίσωση (2.38) θα γραφεί ως $\boldsymbol{I2} \cdot \hat{\boldsymbol{w}}$, όπου $\boldsymbol{I2}$ είναι ο πίνακας διαστάσεων $(N+1) \times N$:

$$\boldsymbol{I2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & . & & & & \\ & & & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Έτσι ο δυναμικός τελεστής $\mathcal{A}$ γίνεται ένας πίνακας $(3N+1) \times (3N+1)$ διαστάσεων και η εξέλιξη του δυναμικού συστήματος περιγράφεται από την εξίσωση

$$\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{x}}(z,t) = \mathcal{A}\hat{\boldsymbol{x}}(z,t), \tag{Α΄.4}$$

με $\hat{\boldsymbol{x}}(z,t) = [\hat{\boldsymbol{\zeta}}(z,t), \hat{\boldsymbol{w}}(z,t), \hat{\boldsymbol{\rho}}(z,t)]^T$ το διάνυσμα των πλατών Fourier του στροβιλισμού, της κατακόρυφης ταχύτητας και της πυκνότητας, διαστάσεων $(3N+1) \times 1$. Αντίστοιχα, η ενέργεια εκφράζεται ως:

$$E = \hat{\boldsymbol{x}}^* \mathcal{M} \hat{\boldsymbol{x}}, \tag{Α΄.5}$$

όπου $\hat{\boldsymbol{x}}^*$ το μιγαδικό συζυγές του και $\mathcal{M}$ είναι ο πίνακας της μετρικής της ενέργειας

$$\mathcal{M} = \frac{dz}{4K^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta & 0 \\ 0 & 0 & JK^2 \end{bmatrix}, \tag{Α΄.6}$$

με διαστάσεις $(3N+1) \times (3N+1)$.

Για τον ορισμό του πλέγματος, τον υπολογισμό των τελεστών και της εκθετικής αστάθειας (modal instability) υπολογίζοντας αριθμητικά τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του πίνακα $\mathcal{A}$, αναπτύχθηκε ο ακόλουθος κώδικας στη Matlab:

```
clear all
```

```
N=800;  %number of grid points
L=2;    %vertical length of channel
dz = 2*L/(N+1); %length of grid point

%creating grid for streamfunction and density
z_velocity=linspace(-L+dz,L-dz,N);
z_density=linspace(-L+dz/2,L-dz/2,N+1);

%second order derivative
%matrix size N x N
D2 = zeros(N); %create an empty table
for in=2:N-1;
    D2(in,in)=-2;
    D2(in,in-1)=1;
    D2(in,in+1)=1;
end
%set boundary conditions
D2(1,1) = -2;
D2(1,2) = 1;
D2(N,N) = -2;
D2(N,N-1) = 1;
D2 = D2/(dz^2);

%transformation matrix, density function written to streamfunction grid
%matrix size N*(N+1)
I1 = zeros(N,N+1);
for in=1:N;
    I1(in,in)=1;
    I1(in,in+1)=1;
end
I1=I1*0.5;

%transformation matrix, vertical velocity
```

```
%or vorticity written to density grid
%matrix size (N+1)*N
I2 = zeros(N+1,N);
for in=2:N;
    I2(in,in)=1;
    I2(in,in-1)=1;
end
I2(1,1)=1;
I2(N+1,N)=1;
I2=0.5*I2;

%R=ratio of width of the shear leayer to the width of the region over
   which
%density jump occurs. Defines the sharpness of the density function
R=3;

%velocity function calculated to velocity grid
U_velocity=diag(0.5*tanh(2*z_velocity));
%first derivative of velocity calculated to velocity grid
dU_velocity=diag((sech(2*z_velocity)).^2);
%second derivative of velocity calculated to velocity grid
ddU_velocity=diag(-4*tanh(2*z_velocity).*(sech(2*z_velocity)).^2);
%velocity function calculated density grid
U_density=diag(0.5*tanh(2*z_density));
%first derivative of velocity function calculated density grid
dU_density=diag((sech(2*z_density)).^2);

%density function calculated to density grid
r_0=diag(-0.5*tanh(2*R*z_density));
%first derivative of density function calculated to density grid
dr_0=diag(-R*sech(2*R*z_density).^2);

%J Richardson number
```

```
%magnitude K wavenumber, K=sqrt(k^2+l^2)
%th angle of perturbations
J=0:.1:12;
K=0.8:.1:5;
th=0:7:70;

%size of A matrix (3N+1)*(3N+1)
%structure of A matrix
%   (Azz Azw Azr)
%A= (Awz Aww Awr)
%   (Arz Arw Arr)

Azr=0*I1;
Awz=zeros(N);
Arz=0*I2;
Arw=-dr_0*I2;

%empty matrix for optimazation
MaxRealSolutions = zeros(length(K),length(J),length(th));
MaxImagSolutions = zeros(length(K),length(J),length(th));

%calculates the eigenvector and eigenvalue of A for a range of
%Richardson number(J), wavenumber(K) and angle(theta)
for J_i=1:length(J);
for K_i=1:length(K);
for th_i=1:length(th);

    k=K(K_i)*cos(th(th_i)*(pi/180));%matlab handles radians.
    lambda=K(K_i)*sin(th(th_i)*(pi/180));
    Del=D2-(k^2)*eye(N)-(lambda^2)*eye(N);

    invdel=inv(Del);
```

```
    Azz=-1i*k*U_velocity;
    Azw=+1i*lambda*dU_velocity;

    Aww=1i*k*invdel*(-U_velocity*Del+ddU_velocity);
    Awr=J(J_i)*invdel*(k^2+lambda^2)*I1;

    Arr=-1i*k*U_density;

    %final matrix (3*N+1)*(3*N+1)
    A=[Azz Azw Azr; Awz Aww Awr; Arz Arw Arr];

    %find eigenvalues and eigenvectors
    [Ueig,Seig] = eig(A);

    %sort eigevalues from highest to lowest
    Sdeig=real(Seig);
    [~,im] = sort(-Sdeig);
    Seig = Seig(im);

    %save the maximum real part of eigenvalue. Corresponds to growth
   rate
    MaxRealSolutions(K_i,J_i,th_i)=real(Seig(1));
    %save the corresponding imaginary part of eigenvalue. Corresponds to
    %velocity
    MaxImagSolutions(K_i,J_i,th_i)=abs(imag(Seig(1)));

%     sort eigenvector according to eigenvalues' sorting
    Udeig = Ueig(:,im);
    Udeig_for_max_gr=Udeig(:,1);

end
end
end
```

Για τον υπολογισμό του ρυθμού ανάπτυξης των βέλτιστων διαταραχών (non-modal instability), αξιοποιήθηκε η δεύτερη μέθοδος υπολογισμού όπου ορίζεται ένα νέο σύστημα συντεταγμένων στο οποίο η ενέργεια είναι το Ευκλείδειο μέτρο του διανύσματος (βλέπε Κεφάλαιο 1.4). Ο παρακάτω κώδικας αναπτύχθηκε για την εφαρμογή της συγκεκριμένης μεθόδου:

```
clear all

N=800;  %number of grid points
L=2;    %vertical length of channel
dz = 2*L/(N+1); %length of grid point

%creating grid for streamfunction and density
z_velocity=linspace(-L+dz,L-dz,N);
z_density=linspace(-L+dz/2,L-dz/2,N+1);

%second order derivative
%matrix size N x N
D2 = zeros(N); %create an empty table
for in=2:N-1;
    D2(in,in)=-2;
    D2(in,in-1)=1;
    D2(in,in+1)=1;
end
%set boundary conditions
D2(1,1) = -2;
D2(1,2) = 1;
D2(N,N) = -2;
D2(N,N-1) = 1;
D2 = D2/(dz^2);

%transformation matrix, density function written to streamfunction grid
%matrix size N*(N+1)
```

```
I1 = zeros(N,N+1);
for in=1:N;
    I1(in,in)=1;
    I1(in,in+1)=1;
end
I1=I1*0.5;

%transformation matrix, vertical velocity
%or vorticity written to density grid
%matrix size (N+1)*N
I2 = zeros(N+1,N);
for in=2:N;
    I2(in,in)=1;
    I2(in,in-1)=1;
end
I2(1,1)=1;
I2(N+1,N)=1;
I2=0.5*I2;

%R=ratio of width of the shear leayer to the width of the region over
   which
%density jump occurs. Defines the sharpness of the density function
R=3;

%velocity function calculated to velocity grid
U_velocity=diag(0.5*tanh(2*z_velocity));
%first derivative of velocity calculated to velocity grid
dU_velocity=diag((sech(2*z_velocity)).^2);
%second derivative of velocity calculated to velocity grid
ddU_velocity=diag(-4*tanh(2*z_velocity).*(sech(2*z_velocity)).^2);
%velocity function calculated density grid
U_density=diag(0.5*tanh(2*z_density));
%first derivative of velocity function calculated density grid
```

```
dU_density=diag((sech(2*z_density)).^2);

%density function calculated to density grid
r_0=diag(-0.5*tanh(2*R*z_density));
%first derivative of density function calculated to density grid
dr_0=diag(-R*sech(2*R*z_density).^2);

%J Richardson number
%magnitude K wavenumber, K=sqrt(k^2+l^2)
%th angle of perturbations
J=0:.1:12;
K=0.8:.1:5;
th=0:7:70;

%optimazation time Topt
Topt=10;

%size of A matrix (3N+1)*(3N+1)
%structure of A matrix
%   (Azz Azw Azr)
%A= (Awz Aww Awr)
%   (Arz Arw Arr)

Azr=0*I1;
Awz=zeros(N);
Arz=0*I2;
Arw=-dr_0*I2;

%empty matrix for optimazation
LE=zeros(length(K),length(th));

%calculate the Lyapunov exponent ln(max_growth_rate)/Topt
for J_i=1:length(J);
```

```
for K_i=1:length(K);
for th_i=1:length(th);

    k=K(K_i)*cos(th(th_i)*(pi/180));%matlab handles radians.
    lambda=K(K_i)*sin(th(th_i)*(pi/180));
    Del=D2-(k^2)*eye(N)-(lambda^2)*eye(N);

    invdel=inv(Del);

    Azz=-1i*k*U_velocity;
    Azw=+1i*lambda*dU_velocity;

    Aww=1i*k*invdel*(-U_velocity*Del+ddU_velocity);
    Awr=J(J_i)*invdel*(k^2+lambda^2)*I1;

    Arr=-1i*k*U_density;

    %final matrix (3*N+1)*(3*N+1)
    A=[Azz Azw Azr; Awz Aww Awr; Arz Arw Arr];

    %metric matrix size N*N
    M=(dz/(4*(K(K_i))^2))*[eye(N,N) zeros(N,N) zeros(N,N+1); zeros(N,N)
   -Del zeros(N,N+1); zeros(N+1,N) zeros(N+1,N) -J(J_i)*((K(K_i))^2)*
   inv(dr_0)];

    %create the matrix D of the new reference system
    Msqrt=sqrtm(M);
    InvMsqrt=inv(Msqrt);
    D=Msqrt*A*InvMsqrt;

    B=expm(D*Topt);
    %singular value analysis, S are the eigenvalues. Eigenvalues are the
     sqrt of energy growth
```

```
    S=svd(B);
    S_max=max(S);
    %Lyapunov exponent for constant J
    LE(K_i,th_i)=log(S_max)/Topt;
    %%Lyapunov exponent for constant angle
    %LE(K_i,th_i)=log(S_max)/Topt;
end
end
end
```

Βιβλιογραφία

Alexakis, A. (2005). On holmboe's instability for smooth shear and density profiles. *Physics of Fluids*, 17(8):084103.

Alexakis, A. (2007). Marginally unstable holmboe modes. *Physics of Fluids*, 19(5).

Bakas, N. A. (2009). Mechanisms underlying transient growth of planar perturbations in unbounded compressible shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 639:479–507.

Bakas, N. A., Ioannou, P. J., and Kefaliakos, G. E. (2001). The emergence of coherent structures in stratified shear flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 58(18):2790 – 2806.

Balmforth, N. J., Roy, A., and Caulfield, C. P. (2012). Dynamics of vorticity defects in stratified shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 694:292–331.

Bretherton, C. S. and Wyant, M. C. (1997). Moisture transport, lower-tropospheric stability, and decoupling of cloud-topped boundary layers. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 54(1):148 – 167.

Browand, F. K. and Winant, C. D. (1973). Laboratory observations of shear layer instability in a stratified fluid. *Boundary-Layer Meteorology*, 5:67.

Carpenter, J. R., Balmforth, N. J., and Lawrence, G. A. (2010). Identifying unstable modes in stratified shear layers. *Physics of Fluids*, 22(5):054104.

Carpenter, J. R., Lawrence, G. A., and Smyth, W. D. (2007). Evolution and mixing of asymmetric holmboe instabilities. *Journal of Fluid Mechanics*, 582:103–132.

Caulfied, C. P. and Peltier, W. R. (2000). The anatomy of the mixing transition in homogeneous and stratified free shear layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 413:1–47.

Caulfield, C. P., Peltier, W. R., Yoshida, S., and Ohtani, M. (1995). An experimental investigation of the instability of a shear flow with multilayered density stratification. *Physics of Fluids*, 7(12):3028–3041.

Chapman, D. and Browning, K. A. (1999). Release of potential shearing instability in warm frontal zones. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 125(558):2265–2289.

Constantinou, N. C. and Ioannou, P. J. (2011). Optimal excitation of two dimensional Holmboe instabilities. *Physics of Fluids*, 23(7):074102.

Conzemius, R. and Fedorovich, E. (2007). Bulk models of the sheared convective boundary layer: Evaluation through large eddy simulations. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 64(3):786 – 807.

Dutton, J. A. and Panofsky, H. A. (1970). Clear air turbulence: A mystery may be unfolding. *Science*, 167(3920):937–944.

Ellingsen, T. and Palm, E. (1975). Stability of linear flow. *The Physics of Fluids*, 18(4):487–488.

Ellrod, G. P. and Knapp, D. I. (1992). An objective clear-air turbulence forecasting technique: Verification and operational use. *Weather and Forecasting*, 7(1):150 – 165.

Ellrod, G. P., Knox, J. A., Lester, P. F., and Ehernberger, L. J. (2015). Clear air turbulence. In North, G. R., Pyle, J., and Zhang, F., editors, *Encyclopedia of Atmospheric Sciences*, pages 177–186. Elsevier, 2nd edition.

Farrell, B. (1988). Optimal excitation of neutral rossby waves. *Journal of Atmospheric Sciences*, 45(2):163 – 172.

Farrell, B. F. (1989). Transient development in confluent and diffluent flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, 46(21):3279 – 3288.

Farrell, B. F. and Ioannou, P. J. (1993). Perturbation growth in shear flow exhibits universality. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 5(9):2298–2300.

Farrell, B. F. and Ioannou, P. J. (1996). Generalized stability theory. part i: Autonomous operators. *Journal of Atmospheric Sciences*, 53(14):2025 – 2040.

Fedorovich, E. and Conzemius, R. (2008). Effects of wind shear on the atmospheric convective boundary layer structure and evolution. *Acta Geophysica*, 56:114–141.

Foudad, M., Sanchez-Gomez, E., Jaravel, T., Rochoux, M. C., and Terray, L. (2024). Past and future trends in clear-air turbulence over the northern hemisphere. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 129(13):e2023JD040261.

Gultepe, I., Sharman, R., Williams, P. D., et al. (2019). A review of high impact weather for aviation meteorology. *Pure and Applied Geophysics*, 176:1869–1921.

Hazel, P. (1972). Numerical studies of the stability of inviscid stratified shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 51(1):39–61.

Holmboe, J. (1962). On the behavior of symmetric waves in stratified shear layers. *Geophysical Publications*, 24:67.

Holton, J. R. and Hakim, G. J. (2012). *An Introduction to Dynamic Meteorology*. Academic Press, Cambridge, MA, 5th edition.

J. Kurowski, M., P. Malinowski, S., and W. Grabowski, W. (2009). A numerical investigation of entrainment and transport within a stratocumulus-topped boundary layer. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 135(638):77–92.

Landahl, M. T. (1980). A note on an algebraic instability of inviscid parallel shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 98(2):243–251.

Lee, V. and Caulfield, C. (2001). Nonlinear evolution of a layered stratified shear flow. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 34(2):103–124.

Lilly, D. K. (1968). Models of cloud-topped mixed layers under a strong inversion. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 94(401):292–309.

Mallios, C. and Bakas, N. A. (2017). Generalized stability of a shear flow with a free surface with respect to three-dimensional perturbations. *Phys. Rev. Fluids*, 2:023901.

Mashayek, A. and Peltier, W. R. (2012a). The 'zoo' of secondary instabilities precursory to stratified shear flow transition. part 1 shear aligned convection, pairing, and braid instabilities. *Journal of Fluid Mechanics*, 708:5–44.

Mashayek, A. and Peltier, W. R. (2012b). The 'zoo' of secondary instabilities precursory to stratified shear flow transition. part 2 the influence of stratification. *Journal of Fluid Mechanics*, 708:45–70.

Mellado, J. P. (2017). Cloud-top entrainment in stratocumulus clouds. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 49(Volume 49, 2017):145–169.

Mellado, J. P., Stevens, B., and Schmidt, H. (2014). Wind shear and buoyancy reversal at the top of stratocumulus. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 71(3):1040 – 1057.

Moser, R. D. and Rogers, M. M. (1991). Mixing transition and the cascade to small scales in a plane mixing layer. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 3(5):1128–1134.

Orr, W. M. (1907). The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. part ii: A viscous liquid. *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*, 27:69–138.

Palmer, T. N. (1988). Medium and extended range predictability and stability of the pacific/north american mode. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 114(481):691–713.

Philippi, P., Siebert, D., Hegele Jr, L., et al. (2016). High-order lattice-boltzmann. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 38:1401–1419.

Randall, D. A., Coakley, J. A., Fairall, C. W., Kropfli, R. A., and Lenschow, D. H. (1984). Outlook for research on subtropical marine stratiform clouds. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 65(12):1290 – 1301.

Rayleigh, L. (1879). On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s1-11(1):57–72.

Reynolds, O. (1883). An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 174:935–982.

Roebber, P. J. (1984). Statistical analysis and updated climatology of explosive cyclones. *Monthly Weather Review*, 112(8):1577 – 1589.

Rosenhead, L. and Jeffreys, H. (1931). The formation of vortices from a surface of discontinuity. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 134(823):170–192.

Sharman, R. and Pearson, J. (2017). Prediction of energy dissipation rates for aviation turbulence. part i: Forecasting nonconvective turbulence. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, 56(2):317–337.

Smyth, W. and Winters, K. (2003a). Turbulence and mixing in holmboe waves. *Journal of Physical Oceanography*, 33:694–711.

Smyth, W. D., Klaasen, G. P., and Peltier, W. R. (1988). Finite amplitude holmboe waves. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 43:181.

Smyth, W. D. and Peltier, W. R. (1989). The transition between kelvin–helmholtz and holmboe instability: An investigation of the overreflection hypothesis. *Journal of Atmospheric Sciences*, 46(24):3698 – 3720.

Smyth, W. D. and Peltier, W. R. (1990). Three-dimensional primary instabilities of a stratified, dissipative, parallel flow. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 52(4):249–261.

Smyth, W. D. and Peltier, W. R. (1991). Instability and transition in infinite amplitude kelvin–helmholtz and holmboe waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 228:387.

Smyth, W. D. and Winters, K. B. (2003b). Turbulence and mixing in holmboe waves. *Journal of Physical Oceanography*, 33(4):694 – 711.

Sutherland, B. R., Caulfield, C. P., and Peltier, W. R. (1994). Internal gravity generation and hydrodynamic instability. *Journal of Atmospheric Sciences*, 51:3261.

Taylor, G. I. (1931). Effect of variation in density on the stability of superposed streams of fluid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 132(820):499–523.

Thorpe, S. A. (1968). A method of producing a shear flow in a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 32(4):693–704.

van Haren, H., Gostiaux, L., Morozov, E., and Tarakanov, R. (2014). Extremely long kelvin-helmholtz billow trains in the romanche fracture zone. *Geophysical Research Letters*, 41(23):8445–8451.

Vitoshkin, H. and Gelfgat, A. (2021). Non-modal three-dimensional optimal perturbation growth in thermally stratified mixing layers. *Fluids*, 6(1).

Vitoshkin, H., Heifetz, E., Gelfgat, A. Y., and Harnik, N. (2012). On the role of vortex stretching in energy optimal growth of three-dimensional perturbations on plane parallel shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 707:369–380.

Wang, S., Golaz, J.-C., and Wang, Q. (2008). Effect of intense wind shear across the inversion on stratocumulus clouds. *Geophysical Research Letters*, 35(15).

Williams, P. D. (2016). Transatlantic flight times and climate change. *Environmental Research Letters*, 11(2):024008.

Williams, P. D. and Joshi, M. M. (2013). Intensification of winter transatlantic aviation turbulence in response to climate change. *Nature Climate Change*, 3(7):644–648.

Wood, R. (2012). Stratocumulus clouds. *Monthly Weather Review*, 140:2373–2423.

Yang, A. J. K., Tedford, E. W., Olsthoorn, J., Lefauve, A., and Lawrence, G. A. (2022). Velocity perturbations and Reynolds stresses in Holmboe instabilities. *Physics of Fluids*, 34(7):074110.