



Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Κυριάκος Λεωνιδάκης

---

Αυτο-διατηρητικά μονόνια της ροής μέσης καμπυλότητας

---

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2024



Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 21/11/2024 από την εξεταστική επιτροπή:

<b>Όνοματεπώνυμο</b>	<b>Βαθμίδα</b>
Ανδρέας Σάββας-Χαλιλάι	Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
Θεόδωρος Βλάχος	Καθηγητής
Χρήστος Σαρόγλου	Αναπληρωτής Καθηγητής

#### ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.



*Αφιερώνεται στην οικογένειά μου.*



---

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

---

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της μεταπτυχιακής μου διατριβής, κ. Ανδρέα Σάββα-Χαλιλάι, Αναπληρωτή Καθηγητή, Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, που με την πολύτιμη βοήθειά του και τις παραγωγικές υποδείξεις του συνέβαλε καθοριστικά στην επιτυχή περάτωση της παρούσας εργασίας. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον Καθηγητή κ. Θεόδωρο Βλάχο και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Χρήστο Σαρόγλου. Θα ήθελα επιπλέον να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τα φιλικά μου πρόσωπα για την πολύτιμη στήριξη που μου προσέφεραν καθ' όλη την διάρκεια του μεταπτυχιακού.





---

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

---

Σε αυτή τη διατριβή μελετάμε αυτο-διατηρητικά μονόνια της ροής μέσης καμπυλότητας. Κύριος στόχος της διατριβής είναι να αποδείξουμε το εξής αποτέλεσμα:

**Κύριο Θεώρημα** (Bao & Shi [4]) *Έστω  $f : M^n \rightarrow R^{n+1}$  ένα προσανατολισμένο και εμπρεπές μονόνιο μεταφοράς. Αν η εικόνα της απεικόνισης Gauss της υπερεπιφάνειας βρίσκεται σε μια γεωδαισιακή μπάλα  $B_\sigma(y_0) \subset S^n$ , όπου  $y_0$  σημείο της σφαίρας και  $\sigma < \pi/2$ , τότε η υπερεπιφάνεια είναι υπερεπίπεδο.*



---

## Abstract

---

In this thesis we study self-similar solutions of the mean-curvature flow. The main goal is to prove the following result:

**Main Theorem** (Bao & Shi [4]) *Let  $f : M^n \rightarrow R^{n+1}$  be an orientable and proper traslating soliton of the mean curvature flow. If the image of the Gauss map of the hypersurface lies in a geodesic ball  $B_\sigma(y_0) \subset S^n$ , where  $y_0$  is a point of the sphere and  $\sigma < \pi/2$ , then the hypersurface is a hyperplane.*



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Γεωμετρία υποπολυπυγμάτων</b>	<b>15</b>
1.1	Εισαγωγικές έννοιες . . . . .	15
1.2	Απεικονίσεις μεταξύ πολυπυγμάτων Riemann . . . . .	18
1.3	Ισομετρικές εμβapτίσεις . . . . .	20
1.4	Εξίσωσεις Gauss-Codazzi-Ricci . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Αυτο-διατηρητικά μονόνια</b>	<b>23</b>
2.1	Η ροή μέσης καμπυλότητας . . . . .	23
2.2	Ειδικές λύσεις της ροής . . . . .	24
2.3	Αυτο-διατηρητικά μονόνια . . . . .	26
2.3.1	Γενικές κατασκευές . . . . .	27
2.3.2	Είναι σημαντικά τα μονόνια; . . . . .	28
2.4	Μονόνια μεταφοράς . . . . .	28
2.5	Η μετρική του Ilmanen . . . . .	31
2.5.1	Η αρχή μεγίστου . . . . .	32

---

<b>3</b>	<b>Μονόνια εκ περιστροφής</b>	<b>33</b>
3.1	Η ΣΔΕ ενός συμμετρικού μονονίου . . . . .	33
3.2	Ολική συμπεριφορά των λύσεων της ΣΔΕ . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Ένα θεώρημα τύπου Bernstein</b>	<b>53</b>
4.1	Βασικές εξίσωσεις . . . . .	54
4.2	Η απεικόνιση Gauss . . . . .	56
4.3	Ένα θεώρημα ακαμψίας . . . . .	62
4.4	Το θεώρημα του Moser . . . . .	68

## Γεωμετρία υποπολυπτυγμάτων

Σε αυτή την ενότητα παραθέτουμε μερικές βασικές έννοιες από τη γεωμετρία Riemann. Η παρουσίαση μας βασίζεται στα βιβλία [3], [10], [22] και [38].

### 1.1 Εισαγωγικές έννοιες

Ας υποθέσουμε ότι  $M^n$  είναι ένα διαφορίσιμο συνεκτικό πολύπτυγμα. Συμβολίζουμε με  $C^\infty(M)$  το σύνολο των λείων συναρτήσεων επί του  $M^n$  και με  $\mathfrak{X}(M)$  το σύνολο όλων των λείων διανυσματικών πεδίων επί του πολύπτυγματος. Μια **μετρική Riemann** επί του  $M^n$  είναι μια αντιστοιχία  $p \mapsto g_p$ , όπου  $p \in M^n$  και  $g_p$  είναι το εσωτερικό γινόμενο στο  $T_p M$ , η οποία είναι διαφορίσιμη υπο την εξής έννοια: Για κάθε δυάδα  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , η συνάρτηση  $g(X, Y): M^n \rightarrow R$  με τύπο

$$g(X, Y)(p) = g_p(X_p, Y_p),$$

είναι διαφορίσιμη. Συχνά συμβολίζουμε τον συμμετρικό  $(2,0)$ -τανυστή  $g$  με  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Ένα πολύπτυγμα εφοδιασμένο με μετρική Riemann καλείται **πολύπτυγμα Riemann**. Είναι γνωστό ότι κάθε πολύπτυγμα δέχεται άπειρες μετρικές Riemann. Επιπλέον, η παρουσία της μετρικής Riemann εξασφαλίζει και την ύπαρξη τοπικών ορθομοναδιαίων πλαισίων. Επιπρόσθετα, σε κάθε πολύπτυγμα Riemann υπάρχει και ένας κανονικός τρόπος παραγωγίσης. Συγκεκριμένα, ισχύει το εξής θεώρημα.

**Θεώρημα 1.1.1** (Levi-Civita & Koszul). *Εστω  $(M^n, g)$  ένα πολύπτυγμα Riemann. Τότε, υπάρχει μια μοναδικά ορισμένη απεικόνιση*

$$\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

την οποία συμβολίζουμε ως

$$\nabla(X, Y) \doteq \nabla_X Y,$$

με τις εξής ιδιότητες:

(1) Για κάθε  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , η απεικόνιση  $X \mapsto \nabla_X Y$  είναι  $(1, 1)$ -τανυστής.

(2) Η απεικόνιση  $\nabla$  ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz. Δηλαδή:

$$\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y \quad \text{και} \quad \nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2,$$

για κάθε  $X, Y, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ .

(3) Για κάθε  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  ισχύει:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

όπου  $[\cdot, \cdot]$  το γινόμενο Lie.

(4) Για κάθε  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  ισχύει:

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

(5) Η μοναδικά ορισμένη συνοχή  $\nabla$  δίνεται από τον τύπο:

$$2g(\nabla_Y X, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]),$$

για κάθε  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

Από εδώ και στο εξής ας υποθέσουμε ότι  $M^n$  είναι ένα πολύπτυγμα εφοδιασμένο με μια μετρική Riemann  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  και  $\nabla$  η αντίστοιχη συνοχή Levi-Civita. Χρησιμοποιώντας αυτές τις έννοιες, μπορούμε να ορίσουμε όλες τις σημαντικές έννοιες του διαφορικού λογισμού και σε ένα πολύπτυγμα Riemann.

**Ορισμός 1.1.2.** Έστω  $f \in C^\infty(M)$ . Τότε

(1) Ορίζουμε **κλίση** της  $f$  το διανυσματικό πεδίο  $\nabla f$  που περιγράφεται από τον τύπο

$$df(X) = X(f) = \langle \nabla f, X \rangle.$$

(2) Ορίζουμε **Εσσιανό** της  $f$  τον τανυστή  $\nabla^2 f$  που δίνεται από τον τύπο

$$\nabla^2 f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle, \quad \text{για κάθε} \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

(3) Ορίζουμε **Λαπλασιανή** της  $f$  την συνάρτηση

$$\Delta f = \text{tr}_g \nabla^2 f.$$



Είναι εύκολο να αποδείξει κανείς ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

**Λήμμα 1.1.3.** Έστω  $f, g \in C^\infty(M)$ ,  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , και  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Τότε, ισχύουν οι ταυτότητες:

- (1)  $\nabla_{X,Y}^2 f = XY(f) - \nabla_X Y(f)$ ,
- (2)  $\nabla_{X,Y}^2 f = \nabla_{Y,X}^2 f$ ,
- (3)  $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$ ,
- (4)  $\Delta(h \circ f) = h'(f)\Delta f + h''(f)|\nabla f|^2$ .

Οι έννοιες αυτές μεταφέρονται επίσης και σε διανυσματικά πεδία. Συγκεκριμένα:

**Ορισμός 1.1.4.** Έστω  $M^n$  πολύπτυγμα Riemann και  $\nabla$  η συνοχή Levi-Civita.

- (1) Ορίζουμε ως **Εσσιανό** του  $Z \in \mathfrak{X}(M)$  ως προς τις κατευθύνσεις  $X, Y$  την

$$\nabla_{X,Y}^2 Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z.$$

- (2) Η τριγραμμική απεικόνιση  $R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  με τύπο

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

ονομάζεται **τελεστής καμπυλότητας Riemann**.

- (3) Πολλαπλασιάζοντας με την μετρική Riemann, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον **τανυστή Riemann** με τύπο

$$\text{Riem}(X, Y, Z, W) = -\langle R(X, Y, Z), W \rangle,$$

για κάθε  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ .

- (4) Η **καμπυλότητα τομής** που παράγεται από τα γραμμικά ανεξάρτητα  $X, Y$  είναι

$$\text{sec}(X \wedge Y) = \frac{\text{Riem}(X, Y, X, Y)}{|X \wedge Y|}.$$

- (5) Η **καμπυλότητα Ricci** στις διευθύνσεις  $X, Y$  ορίζεται να είναι η ποσότητα

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{tr}_g \text{Riem}(X, \cdot, Y \cdot).$$

- (6) Η **αριθμητική καμπυλότητα** ορίζεται να είναι η συνάρτηση  $\text{Scal} = \text{tr}_g \text{Ric}$ .

Στην περίπτωση κατά την οποία όλες οι καμπυλότητες τομής είναι σταθερές ίσες με  $c$ , λέμε ότι το πολυπύγμα Riemann είναι **χώρος μορφής**. Σε αυτή τη περίπτωση, για κάθε  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ , ισχύει

$$\text{Riem}(X, Y, Z, W) = c(g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z)).$$

Η έννοια της μετρικής Riemann και της συνοχής επεκτείνεται με φυσιολογικό τρόπο και σε διανυσματικές δέσμες επί πολυπτυγμάτων; για περισσότερες πληροφορίες αναφέρουμε τις σημειώσεις του Ballmann [3]. Αναφέρουμε σε αυτό το σημείο ότι αν  $T$  είναι ένας  $(2, 0)$ -τανυστής, τότε η συναλλοίωτη παράγωγος του  $T$  στη διεύθυνση  $Z$  ορίζεται να είναι ο τανυστής με τύπο

$$(\nabla_Z T)(X, Y) \doteq Z(T(X, Y)) - T(\nabla_Z X, Y) - T(X, \nabla_Z Y),$$

για κάθε  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

## 1.2 Απεικονίσεις μεταξύ πολυπτυγμάτων Riemann

Έστω  $f: M \rightarrow \bar{M}$  διαφορίσιμη απεικόνιση όπου  $M$  και  $\bar{M}$  είναι δυο διαφορίσιμα πολυπύγματα διαστάσεων  $n$  και  $m$ , αντίστοιχα, εφοδιασμένα με μετρικές Riemann  $g$  και  $\bar{g}$  και συνοχές  $\nabla$  και  $\bar{\nabla}$ , αντίστοιχα. Συμβολίζουμε με  $\pi: T\bar{M} \rightarrow \bar{M}$  την φυσική προβολή με τύπο

$$\pi(p, v) = p.$$

Μια διαφορίσιμη απεικόνιση  $Z: M \rightarrow T\bar{M}$  τέτοια ώστε

$$\pi \circ Z = f,$$

ονομάζεται **διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της  $f$** .

Υποθέτουμε τώρα ότι  $p_0 \in M$  και  $\{E_1, \dots, E_m\}$  είναι ένα ορθομοναδιαίο πλαίσιο ορισμένο σε μια περιοχή  $U$  του  $f(p_0) \in \bar{M}$ . Τότε, για κάθε  $p \in M$  που βρίσκεται σε κατάλληλη ανοικτή περιοχή  $V$  του  $p_0$  θα έχουμε την αναπαράσταση

$$Z(p) = \sum_{i=1}^m z^i(p) E_i(f(p)),$$

όπου  $z^1, \dots, z^m: V \rightarrow R$  είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις. Οι εν λόγω συναρτήσεις ονομάζονται **συνιστώσες** του  $Z$  ως προς το πλαίσιο  $\{E_1, \dots, E_m\}$ . Το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων κατά μήκος της  $f$  θα συμβολίζεται με  $f^*T\bar{M}$ .

**Θεώρημα 1.2.1.** Υπάρχει μοναδική απεικόνιση

$$\nabla^{f^*T\bar{M}}: \mathfrak{X}(M) \times f^*T\bar{M} \rightarrow f^*T\bar{M}$$

η δράση της οποίας συμβολίζεται με

$$(X, Z) \mapsto \nabla_X^{f^*T\bar{M}} Z,$$

που πληροί τις εξής ιδιότητες:

- (1)  $\nabla_{X_1+X_2}^{f^*T\bar{M}} Z = \nabla_{X_1}^{f^*T\bar{M}} Z + \nabla_{X_2}^{f^*T\bar{M}} Z,$
- (2)  $\nabla_X^{f^*T\bar{M}} (Z_1 + Z_2) = \nabla_X^{f^*T\bar{M}} Z_1 + \nabla_X^{f^*T\bar{M}} Z_2,$
- (3)  $\nabla_{\phi X}^{f^*T\bar{M}} Z = \phi \nabla_X^{f^*T\bar{M}} Z,$
- (4)  $\nabla_X^{f^*T\bar{M}} (\phi Z) = (X\phi)Z + \phi \nabla_X^{f^*T\bar{M}} Z,$
- (5)  $\nabla_X^{f^*T\bar{M}} (Y|_{f(M)}) = \bar{\nabla}_{df(X)} Y|_{f(M)},$
- (6)  $X(\bar{g}(Z_1, Z_2)) = \bar{g}(\nabla_X^{f^*T\bar{M}} Z_1, Z_2) + \bar{g}(Z_1, \nabla_X^{f^*T\bar{M}} Z_2),$
- (7)  $\nabla_{X_1}^{f^*T\bar{M}} df(X_2) - \nabla_{X_2}^{f^*T\bar{M}} df(X_1) = df([X_1, X_2]),$

για κάθε  $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M), Y \in \mathfrak{X}(\bar{M}), Z, Z_1, Z_2 \in f^*T\bar{M}$  και  $\phi \in C^\infty(M)$ .

**Ορισμός 1.2.2.** Ορίζουμε ως **Εσσιανό** της  $f$  στις κατευθύνσεις  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  τον συμμετρικό τανυστή

$$\mathbf{A}(X, Y) = \nabla_X^{f^*T\bar{M}} df(Y) - df(\nabla_X Y).$$

Το ίχνος του  $\mathbf{A}$  ονομάζεται **Λαπλασιανή** της  $f$  και συμβολίζεται με το σύμβολο  $\Delta$ , δηλαδή

$$\Delta f = tr_g \mathbf{A}.$$

Εάν

$$\Delta f = 0$$

τότε λέμε ότι η απεικόνιση  $f$  ονομάζεται **αρμονική**.

### 1.3 Ισομετρικές εμβάπτσεις

Υποθέτουμε ότι  $M$  και  $\bar{M}$  είναι δυο διαφορίσιμα πολυπύγματα, όπως στη προηγούμενη ενότητα, και  $f: M \rightarrow \bar{M}$  μια εμβάπτιση. Η  $f$  λέγεται **ισομετρική εμβάπτιση** αν και μόνο αν  $g = f^*\bar{g}$ . Σε κάθε  $x \in M$ , ο διανυσματικός χώρος  $T_{f(x)}\bar{M}$  αναλύεται ως

$$T_{f(x)}\bar{M} = df_x(T_xM) \oplus N_{f(x)}M,$$

όπου με  $N_{f(x)}M$  συμβολίζουμε το ορθογώνιο συμπλήρωμα του  $df_x(T_xM)$ . Ο χώρος  $N_{f(x)}M$  ονομάζεται **κάθετος χώρος** της  $f$  στο σημείο  $x$  και το σύνολο

$$N_fM = \cup_{x \in M} N_{f(x)}M,$$

**κάθετη δέσμη** της  $f$ . Κάθε  $V \in f^*T\bar{M}$  αναλύεται κατα μοναδικό τρόπο ως

$$V = V^\top + V^\perp,$$

όπου  $\{\cdot\}^\top$  είναι η ορθογώνια προβολή στην εφαπτόμενη δέσμη της  $f$  και  $\{\cdot\}^\perp$  η κάθετη προβολή στον κάθετο δέσμη της  $f$ . Επομένως,

$$\nabla_X^{f^*T\bar{M}} df(Y) = (\nabla_X^{f^*T\bar{M}} df(Y))^\top + (\nabla_X^{f^*T\bar{M}} df(Y))^\perp, \text{ για κάθε } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Αποδεικνύεται ότι για κάθε ζεύγος διανυσματικών πεδίων  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , ισχύει

$$df(\nabla_X Y) = (\nabla_X^{f^*T\bar{M}} df(Y))^\top.$$

Ο συμμετρικός (Εσσιανός) τανυστής  $\mathbf{A}: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow N_fM$  με τύπο

$$\mathbf{A}(X, Y) = (\nabla_X^{f^*T\bar{M}} df(Y))^\perp = \nabla_X^{f^*T\bar{M}} df(Y) - df(\nabla_X Y),$$

ονομάζεται **δεύτερη θεμελιώδης μορφή** της εμβάπτισης  $f$ . Το ίχνος του  $\mathbf{A}$  λέγεται **μέση καμπυλότητα** και συμβολίζεται με  $\mathbf{H}$ .

Θεωρούμε ένα κάθετο διάνυσμα  $\xi$  της  $f$  στο  $f(x)$ . Η  $R$ -διγραμμική συμμετρική μορφή

$$A^\xi(X, Y) = g(\mathbf{A}(X, Y), \xi),$$

με  $X, Y \in T_pM$ , ονομάζεται **δεύτερη θεμελιώδης μορφή της  $f$  στο σημείο  $x$  και στην διεύθυνση  $\xi$** . Επειδή η μορφή είναι συμμετρική, υπάρχει ένας μοναδικός αυτο-προσαρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός  $A_\xi: T_pM \rightarrow T_pM$  τέτοιος ώστε

$$A^\xi(X, Y) = g(A_\xi X, Y), \text{ για κάθε } X, Y \in T_pM.$$

Ο  $A_\xi$  λέγεται **τελεστής Weingarten της  $f$  στην διεύθυνση  $\xi$** . Οι ιδιοτιμές

$$\lambda_1(\xi) \geq \dots \geq \lambda_n(\xi),$$

του τελεστή  $A_\xi$  ονομάζονται **κύριες καμπυλότητες της εμβάπτσης ως προς το κάθετο  $\xi$**  και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα λέγονται **κύριες διευθύνσεις της  $f$  ως προς το  $\xi$** . Επίσης, εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\nabla_X^{f^*T\bar{M}}\xi = -df(A_\xi X) + (\nabla_X^{f^*T\bar{M}}\xi)^\perp,$$

για κάθε  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Η παραπάνω ισότητα ονομάζεται και **τύπος του Weingarten**. Στην περίπτωση των υπερεπιφανειών, για  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , έχουμε

$$\nabla_X^{f^*T\bar{M}}df(Y) = df(\nabla_X Y) + \langle A_\xi X, Y \rangle \xi,$$

και

$$\nabla_X^{f^*T\bar{M}}\xi = -df(A_\xi X).$$

Ας επανέλθουμε πάλι στην τυχαία συνδιάσταση. Συμβολίζουμε με

$$\nabla_X^\perp \xi \doteq (\nabla_X^{f^*T\bar{M}}\xi)^\perp.$$

**Λήμμα 1.3.1.** Η απεικόνιση  $\nabla^\perp: \mathfrak{X}(M) \times N_f M \rightarrow N_f M$  με τύπο

$$(X, \xi) \mapsto \nabla_X^\perp \xi,$$

πληροί τις ιδιότητες:

- (1)  $\nabla_{X_1+X_2}^\perp \xi = \nabla_{X_1}^\perp \xi + \nabla_{X_2}^\perp \xi,$
- (2)  $\nabla_X^\perp (\xi_1 + \xi_2) = \nabla_X^\perp \xi_1 + \nabla_X^\perp \xi_2,$
- (3)  $\nabla_{\phi X}^\perp \xi = \phi \nabla_X^\perp \xi,$
- (4)  $\nabla_X^\perp (\phi \xi) = (X\phi)\xi + \phi \nabla_X^\perp \xi,$
- (5)  $X(\bar{g}(\xi_1, \xi_2)) = \bar{g}(\nabla_X^\perp \xi_1, \xi_2) + \bar{g}(\xi_1, \nabla_X^\perp \xi_2),$

για κάθε  $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\xi, \xi_1, \xi_2 \in N_f M$  και  $\phi \in C^\infty(M)$ .

**Ορισμός 1.3.2.** Ο τανυστής  $R^\perp: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times N_f M \rightarrow N_f M$  με τύπο

$$R^\perp(X, Y, \xi) = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi$$

ονομάζεται **τανυστής κάθετης καμπυλότητας**.

## 1.4 Εξισώσεις Gauss-Codazzi-Ricci

Κλείνουμε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο με ένα πολύ σημαντικό θεώρημα της θεωρίας υποπολυπυγμάτων το οποίο θα κάνουμε χρήση στο τελευταίο κεφάλαιο.

**Θεώρημα 1.4.1.** Έστω  $f : M \rightarrow \bar{M}$  μια ισομετρική εμβάπτιση ενός  $n$ -διάστατου προσανατολισμένου πολυπύγματος Riemann  $M$ . Για κάθε  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$  και  $\xi, \eta \in N_f M$  ισχύουν οι ταυτότητες:

(1) *Εξίσωση Gauss:*

$$\begin{aligned} \text{Riem}(X, Y, Z, W) &= f^* \bar{\text{Riem}}(X, Y, Z, W) \\ &\quad + \bar{g}(\mathbf{A}(X, Z), \mathbf{A}(Y, W)) - \bar{g}(\mathbf{A}(Y, Z), \mathbf{A}(X, W)). \end{aligned}$$

Ειδικότερα, ισχύει ότι

$$\text{sec}(X \wedge Y) = \bar{\text{sec}}(X \wedge Y) + \bar{g}(\mathbf{A}(X, X), \mathbf{A}(Y, Y)) - \|\mathbf{A}(X, Y)\|_{\bar{g}}^2.$$

(2) *Εξίσωση Codazzi:*

$$(\nabla_X^\perp \mathbf{A})(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \mathbf{A})(X, Z) = (\bar{R}(df(X), df(Y), df(Z)))^\perp.$$

(3) *Εξίσωση Ricci:*

$$\bar{g}(R^\perp(X, Y)\xi, \eta) = \bar{g}(\bar{R}(df(X), df(Y), \xi), \eta) + \bar{g}([A_\xi, A_\eta]X, Y),$$

όπου

$$[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi.$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## Αυτο-διατηρητικά μονόνια

Σε αυτή την ενότητα θα εισάγουμε τα μονόνια μεταφοράς, τα οποία είναι και το κύριο αντικείμενο μέλετης αυτής της διατριβής.

### 2.1 Η ροή μέσης καμπυλότητας

**Ορισμός 2.1.1.** Έστω  $F_0: M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  μια εμβάπτιση. Θα λέμε ότι μια οικογένεια εμβάπτσεων

$$F(\cdot, \cdot): M^n \times [0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

είναι λύση της ροής μέσης καμπυλότητας, αν

$$\begin{cases} dF_{(x,t)}(\partial_t) = \mathbf{H}(x, t), & (x, t) \in M^n \times (0, T), \\ F(x, 0) = F_0, & x \in M^n, \end{cases} \quad (\text{MCF})$$

όπου με  $\mathbf{H}(x, t)$  συμβολίζουμε το διάνυσμα της μέσης καμπυλότητας της εμβάπτισης  $F_t: M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  με τύπο

$$F_t(\cdot) = F(\cdot, t), \quad t \geq 0,$$

στο  $x \in M^n$ . Ως  $T$  θεωρούμε τον μεγιστοτικό χρόνο υπάρξης της λύσης του (MCF).

Αποδεικνύεται ότι εάν  $M^n$  είναι ένα συμπαγές πολύπτυγμα, τότε το σύστημα αρχικών τιμών (MCF) έχει πάντα (μοναδική ως προς αναπαραμετρήσεις) λύση. Αποδεικνύεται ότι σε αυτή την περίπτωση λύση του (MCF) είναι ισοδύναμη με λύση του

$$\begin{cases} \{dF_{(x,t)}(\partial_t)\}^\perp = \mathbf{H}(x, t), & t > 0, \\ F(\cdot, 0) = F_0. \end{cases} \quad (\text{MCF1})$$

Επειδή δεν είναι σκοπός της διατριβής η ροή καθαυτή, αλλά ειδικές λύσεις αυτής, για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στο επισκοπικό άρθρο [41].

## 2.2 Ειδικές λύσεις της ροής

Έστω  $u: R^n \rightarrow R$  μια λεία συνάρτηση. Το **γράφημα** της συνάρτησης  $u$ , ορίζεται ως

$$\Gamma(u) = \{(x, u(x)) : x \in R^n\}$$

και είναι μια λεία υπερεπιφάνεια του  $R^{n+1}$ . Στόχος μας είναι να μελετήσουμε μια λύση της ροής μέσης καμπυλότητας όπου οι εξελισσόμενες υπερεπιφάνειες είναι γραφήματα. Δηλαδή, αναζητούμε μια λεία απεικόνιση  $F: R^n \times [0, T) \rightarrow R^{n+1}$  με τύπο

$$F(x, t) \doteq (x(t), u(x(t), t)),$$

που να ικανοποιεί το σύστημα (MCF1). Πρωτού γράψουμε την εξελικτική εξίσωση για την  $u$ , ας συγκεντρώσουμε στο παρακάτω λήμμα μερικές πολύ βασικές ιδιότητες των γραφημάτων.

**Λήμμα 2.2.1.** Έστω  $u: U \subset R^n \rightarrow R$  μια λεία απεικόνιση και  $\Gamma(u)$  το γράφημά της. Τότε:

(1) Οι συνιστώσες  $g_{ij}$  της επαγόμενης μετρικής και της αντίστροφής της,  $g^{ij}$ , είναι

$$g_{ij} = \delta_{ij} + u_i u_j \quad \text{και} \quad g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{1 + \sum_{l=1}^n u_l^2},$$

για κάθε  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , αντίστοιχα.

(2) Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα κατά μήκος του γραφήματος δίνεται από τον τύπο

$$\xi = \frac{(-Du, 1)}{\sqrt{1 + |Du|^2}}.$$

(3) Οι συνιστώσες της δευτερής θεμελιώδους μορφής  $A$  ως προς το κάθετο  $\xi$  δίνονται από τον τύπο

$$A_{ij} = \frac{u_{ij}}{\sqrt{1 + \sum_{l=1}^n u_l^2}}.$$

(4) Η αριθμητική μέση καμπυλότητα  $H = \langle \mathbf{H}, \xi \rangle$  του γραφήματος  $\Gamma(u)$  ως προς τη διεύθυνση  $\xi$  δίνεται από τον τύπο

$$H = \operatorname{div} \left( \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right).$$



**Απόδειξη:** Το γράφημα παραμετρώνεται από την παραμέτρηση  $F: R^n \rightarrow R^{n+1}$  με τύπο

$$F(x) = (x, u(x)), \quad \text{όπου } x \in R^n.$$

Η επαγόμενη μετρική στο γράφημα είναι

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = \langle dF(\partial_i), dF(\partial_j) \rangle = \langle F_i, F_j \rangle = \delta_{ij} + u_i u_j,$$

για κάθε  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Θεωρούμε τώρα τις ποσότητες

$$g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{1 + \sum_{l=1}^n u_l^2} = \delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{1 + |\nabla u|^2}.$$

Υπολογίζουμε,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n g_{ik} g^{kj} &= \sum_{k=1}^n \left( \delta_{ik} + u_i u_k \right) \left( \delta_{kj} - \frac{u_k u_j}{1 + |\nabla u|^2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \delta_{ik} \delta_{kj} - \delta_{ik} \frac{u_k u_j}{1 + |\nabla u|^2} + u_i u_k \delta_{kj} - u_i u_k \frac{u_k u_j}{1 + |\nabla u|^2} \right) \\ &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Άρα, για κάθε  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , ισχύει

$$g^{ij} = (g_{ij})^{-1}.$$

Το ότι το διανυσματικό πεδίο  $\xi$  είναι κάθετο κατά μήκος της υπερεπιφάνειας είναι άμεσο. Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή  $\mathbf{A}$  της υπερεπιφάνειας είναι

$$\mathbf{A}(\partial_i, \partial_j) = D_{dF(\partial_i)} dF(\partial_j) - dF(\nabla_{\partial_j} \partial_i).$$

Επομένως, η βαθμωτή δεύτερη θεμελιώδης μορφή στη διεύθυνση  $\xi$  είναι

$$A_{ij} = \langle \mathbf{A}(\partial_i, \partial_j), \xi \rangle = \langle D^F_{\partial_i} dF(\partial_j), \xi \rangle = \langle F_{ij}, \xi \rangle = (1 + |\nabla u|^2)^{-1/2} u_{ij}.$$

Τέλος, η αριθμητική μέση καμπυλότητα δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} A_{ij} = \sum_{i,j=1}^n \left( \delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{1 + |\nabla u|^2} \right) \frac{u_{ij}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left( \delta_{ij} \frac{u_{ij}}{(1 + |\nabla u|^2)^{1/2}} - \frac{u_i u_j u_{ij}}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} \right) \\ &= \operatorname{div} \left( \frac{Du}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right). \end{aligned}$$

Αυτό τελειώνει την απόδειξη. □

**Λήμμα 2.2.2.** Έστω

$$u : U \times (0, T) \subset \mathbb{R}^n \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$$

μια λεία χρονο-εξαρτώμενη συνάρτηση. Τότε, τα γραφήματα εξελίσσονται μέσω της ροής μέσης καμπυλότητας, αν

$$\frac{u_t}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = \operatorname{div} \left( \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right).$$

**Απόδειξη:** Θέλουμε να δούμε ποια μερική διαφορική εξίσωση πληρούται από την  $u$  ώστε η οικογένεια των υπερεπιφανειών

$$F : \mathbb{R}^n \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

με τύπο

$$F(x, t) = (x(t), u(x(t), t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t), u(x_1(t), \dots, x_n(t), t)),$$

όπου  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$  να ικανοποιεί το σύστημα (MCF1). Υπολογίζουμε,

$$F_t = (x', u_1 x'_1 + \dots + u_n x'_n + u_t) = (x', \langle Du, x' \rangle + u_t), \quad (2.1)$$

όπου

$$x' = (x'_1, \dots, x'_n).$$

Επομένως, από τα συμπεράσματα του Λήμματος (2.2.1) και την εξίσωση (2.1), η  $F$  πληροί το (MCF1) αν και μόνο αν

$$\operatorname{div} \left( \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = H = \langle F_t, \xi \rangle = \frac{u_t}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}.$$

Αυτό τελειώνει την απόδειξη. □

### 2.3 Αυτο-διατηρητικά μονόνια

Η ροή μέσης καμπυλότητας έχει συχνά ειδικές λύσεις, για παράδειγμα λύσεις οι οποίες εξελίσσονται στον χρόνο μέσω ενός σύμμορφου μετασχηματισμού του περιβάλλοντος χώρου. Κατά συνέπεια, αυτές οι λύσεις “διατηρούν το σχήμα τους” κατά τη διάρκεια της εξέλιξής τους. Για αυτό τον λόγο ονομάζονται και *αυτο-διατηρητικά μονόνια*.

### 2.3.1 Γενικές κατασκευές

Υποθέτουμε ότι  $\mathcal{Z}$  είναι ένα διανυσματικό πεδίο Killing στον Ευκλείδειο χώρο, δηλαδή ένα διανυσματικό πεδίο τέτοιο ώστε

$$\langle D_X \mathcal{Z}, Y \rangle = \langle D_Y \mathcal{Z}, X \rangle,$$

για κάθε  $X, Y \in \mathfrak{X}(R^{n+1})$ . Τότε, το πεδίο  $\mathcal{Z}$  δημιουργεί μια μονοπαραμετρική ομάδα ισομετριών  $\varphi : R^{n+1} \times R \rightarrow R^{n+1}$  που πληροί

$$\begin{cases} \varphi'(x, t) = \mathcal{Z}(\varphi(x, t)), & \text{στο } R^{n+1} \times R, \\ \varphi(x, 0) = x, & \text{στο } R^{n+1}. \end{cases}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι  $f : M^n \rightarrow R^{n+1}$  είναι μια λεία εμβάπτιση η οποία πληροί την ελλειπτική εξίσωση

$$\mathbf{H} = \mathcal{Z}^\perp. \quad (2.2)$$

Τότε, οι υπερεπιφάνειες  $F : M^n \times R \rightarrow R^{n+1}$ ,  $t \in R$  με τύπο

$$F(x, t) = \varphi(f(x), t),$$

κινούνται μέσω της ροής μέσης καμπυλότητας (MCF1).

Ας δούμε τώρα μια άλλη κατασκευή. Ας υποθέσουμε ότι  $f : M^n \rightarrow R^{n+1}$  είναι μια υπερεπιφάνεια. Θεωρούμε μια θετική συνάρτηση  $\lambda : I \subset R \rightarrow R$  και ας αναζητήσουμε υπό ποιες προϋποθέσεις η μονοπαραμετρική οικογένεια  $F : M^n \times I \rightarrow R^{n+1}$  με τύπο

$$F(x, t) = \lambda(t)f(x).$$

συνιστά λύση του συστήματος (MCF1). Παρατηρούμε ότι η εν λόγω οικογένεια λύνει το σύστημα (MCF1) αν και μόνο αν

$$\lambda'(t)f^\perp(x) = (\lambda(t))^{-1}\mathbf{H}(x),$$

όπου  $\mathbf{H}$  η μέση καμπυλότητα της  $f$ . Εάν  $\langle f, \xi \rangle \neq 0$ , όπου  $\xi$  το μοναδιαίο κάθετο της  $f$ , η τελευταία ισότητα γράφεται στη μορφή

$$\frac{\langle \mathbf{H}(x), f^\perp(x) \rangle}{|f^\perp(x)|^2} = \lambda(t)\lambda'(t) = \frac{(\lambda^2(t))'}{2}.$$

Συνεπώς, η  $\lambda$  πρέπει να έχει τη μορφή  $\lambda^2(t) = 2ct + c_0 > 0$ , όπου  $c, c_0 \in R$ , και η  $f$  να πληροί την

$$\mathbf{H} = c f^\perp.$$

**Ορισμός 2.3.1.** Εμβάπτισεις  $f : M^n \rightarrow R^{n+1}$  που πληρούν την εξίσωση

$$\mathbf{H} = c f^\perp, \quad (2.3)$$

ονομάζονται **αυτο-όμοιες λύσεις της ροής μέσης καμπυλότητας**.

### 2.3.2 Είναι σημαντικά τα μονόνια;

Τα μονόνια δεν είναι μόνο ειδικές λύσεις της ροής μέσης καμπυλότητας, άλλα παίζουν ένα πολύ σημαντικό ρόλο στην κατανόηση και ταξινόμηση των ανωμαλιών της ροής μέσης καμπυλότητας. Συγκεκριμένα, οι αυτο-όμοιες λύσεις και τα μονόνια μεταφοράς δύνανται να εμφανιστούν ως ανωμαλίες της ροής μέσης καμπυλότητας. Για παράδειγμα, αναφέρουμε τις εργασίες [1, 2, 7, 8, 11, 14, 32–35, 39].

## 2.4 Μονόνια μεταφοράς

Μια ειδική κατηγορία μονονίων είναι τα **μονόνια μεταφοράς**, δηλαδή λύσεις της ροής μέσης καμπυλότητας οι οποίες έχουν τη μορφή

$$F(x, t) = f(x) + tv, \quad \text{όπου } (x, t) \in M^n \times R$$

όπου  $f : M^n \rightarrow R^{n+1}$  είναι μια δεδομένη εμβάπτιση και  $v$  ένα μοναδιαίο διάνυσμα. Σε μια τέτοια περίπτωση, η μέση καμπυλότητα της  $f$  πρέπει να πληροί την εξίσωση

$$H = v^\perp. \quad (2.4)$$

Ισχύει όμως και το αντίστροφο, εάν  $f : M^n \rightarrow R^{n+1}$  είναι μια δεδομένη εμβάπτιση της οποίας η μέση καμπυλότητα πληροί την (2.4), τότε η  $F = f + tv$  πληροί την (MCF1). Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$v = (0, \dots, 0, 1).$$

Στην περίπτωση που το μονόνιο μεταφοράς είναι γράφημα, δηλαδή όταν

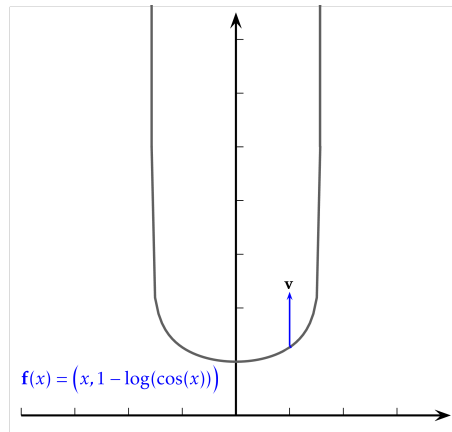
$$f(x) = (x, u(x)), \quad \text{όπου } x \in U \subset R^n,$$

η εξίσωση (2.4) λαμβάνει τη μορφή

$$\operatorname{div} \left( \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|^2}}. \quad (2.5)$$

Στη διάσταση  $n = 1$  η εξίσωση (2.5) έχει ως λύση την

$$u(x) = 1 - \log \cos x, \quad \text{όπου } x \in (-\pi/2, \pi/2).$$



Σχήμα 2.1: Καμπύλη grim reaper (σχήμα από το άρθρο [30])

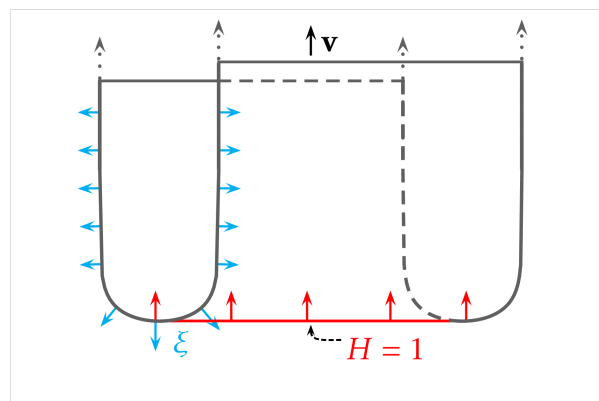
Η καμπύλη του σχήματος 2.1 ονομάζεται **grim reaper** (ζοφερός θεριστής), ονομασία που δόθηκε από τον Hamilton. Θεωρώντας κύλινδρο υπεράνω μιας τέτοιας καμπύλης, προκύπτει κυλινδρικό μονόνιο μεταφοράς. Συγκεκριμένα, η

$$f: (-\pi/2, \pi/2) \times R^{n-1} \subset R^n \rightarrow R^{n+1},$$

με τύπο

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 1 - \log \cos x_1),$$

είναι μονόνιο μεταφοράς.

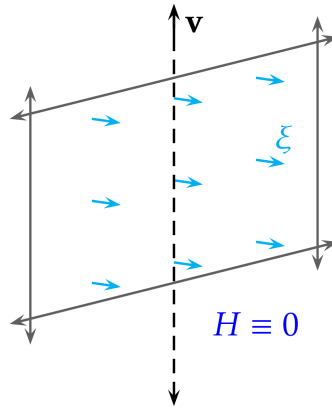


Σχήμα 2.2: Κύλινδρος grim reaper (σχήμα από το άρθρο [30])

Χρησιμοποιώντας τους τύπους του Λήμματος 2.2.1, βλέπουμε ότι ο κύλινδρος  $f$  έχει μέση καμπυλότητα

$$H(x_1, \dots, x_n) = \cos x_1 > 0,$$

για κάθε  $x_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Τέλος, ας σημειώσουμε ότι ένα μονόνιο μεταφοράς είναι ελαχιστικό αν και μόνο αν το πεδίο  $v$  είναι παράλληλο προς αυτό.



Σχήμα 2.3: Ισόπεδο μονόνιο μεταφοράς (σχήμα από το άρθρο [30])

**Παρατήρηση 2.4.1.** Ο Serrin μελέτησε στο άρθρο [40, Chapter IV, pages 477-478] τη δυνατότητα λύσης και μη λύσης του προβλήματος Dirichlet για εξισώσεις της μορφής:

$$\operatorname{div} \left( \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = \frac{c}{(1 + |Du|^2)^\theta}, \quad (2.6)$$

όπου οι  $c$  και  $\theta$  είναι σταθερές. Σημειώνεται ότι, για  $c = 1$  και  $\theta = 1/2$ , η εξίσωση (2.6) περιγράφει ένα μονόνιο μεταφοράς. Η (2.6) εμφανίζεται και σε ένα παλιό άρθρο του Bernstein [6]. Στην πραγματικότητα, ο Bernstein [6] μελέτησε μόνο την περίπτωση δύο διαστάσεων και έδειξε ότι το αντίστοιχο πρόβλημα Dirichlet είναι επιλύσιμο για αυθαίρετα αναλυτικές συνοριακές συνθήκες σε οποιοδήποτε αυστηρά κυρτό αναλυτικό χωρίο, μόνο για ειδικές τιμές του  $\theta$ .

## 2.5 Η μετρική του Ilmanen

Σύμφωνα με ένα αποτέλεσμα του Ilmanen [21], υπάρχει μια δυϊκότητα μεταξύ μονονίων μεταφοράς στον  $R^{n+1}$  και ελαχιστικών υπερεπιφανειών  $(R^{n+1}, G)$  όπου εδώ  $G$  είναι η σύμμορφα ισόπεδη μετρική Riemann:

$$G_p(\cdot, \cdot) = e^{\frac{2}{n}\langle p, v \rangle} \langle \cdot, \cdot \rangle, \quad p \in R^{n+1},$$

όπου  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  είναι το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο του  $R^{n+1}$ . Η μετρική  $G$  καλείται **μετρική του Ilmanen**.

**Πρόταση 2.5.1.** *Έστω  $f: M^n \rightarrow R^{n+1}$  μια εμβάπτιση. Τότε, η υπερεπιφάνεια  $M \doteq f(M^n)$  είναι μονόνιο μεταφοράς στον  $R^{n+1}$  ως προς τη διεύθυνση  $v$  αν και μόνο αν είναι  $G$ -ελαχιστική επιφάνεια στον  $(R^{n+1}, G)$ .*

**Απόδειξη:** Θα υπολογίσουμε την σχέση της μέσης καμπυλότητας της υπερεπιφάνειας με καθεμία από τις δυο μετρικές. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $\sigma: R^{n+1} \rightarrow R$  με τύπο

$$\sigma(p) \doteq \frac{\langle p, v \rangle}{n}.$$

Συμβολίζουμε με  $D$  τη συνοχή Levi-Civita της Ευκλείδειας μετρικής και με  $\bar{D}$  τη συνοχή Levi-Civita της μετρικής Ilmanen. Γενικά, συμβολίζουμε με άνω παύλα ποσότητες που εξαρτώνται από τη μετρική Ilmanen. Τότε,

$$\bar{D}_Y X = D_X Y + (X\sigma)Y + (Y\sigma)X - g(X, Y)D\sigma, \quad (2.7)$$

για κάθε  $X, Y \in \mathfrak{X}(R^{n+1})$ , βλέπε για παράδειγμα [38]. Επίσης, τα μοναδιαία κάθετα συνδέονται μέσω της ταυτότητας

$$\bar{\xi} = e^{-\sigma}\xi. \quad (2.8)$$

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει με τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή. Χρησιμοποιώντας τις (2.7) και (2.8), έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ij} &= \bar{g}(\bar{A}(F_i, F_j), \bar{\xi}) = \bar{g}(\bar{D}_{F_i} F_j, \bar{\xi}) = e^{2\sigma} \langle \bar{D}_{F_i} F_j, \bar{\xi} \rangle \\ &= e^\sigma \langle D_{F_i} F_j + (F_i)(\sigma)F_j + (F_j)(\sigma)F_i - \langle F_i, F_j \rangle D\sigma, \xi \rangle \\ &= e^\sigma \langle D_{F_i} F_j - g_{ij} D\sigma, \xi \rangle \\ &= e^\sigma (A_{ij} - g_{ij} \langle D\sigma, \xi \rangle). \end{aligned}$$

Από την άλλη  $D\sigma = v/n$ , και, έτσι,

$$\bar{A}_{ij} = e^\sigma (A_{ij} - g_{ij} \langle v, \xi \rangle / n).$$

Από την παραπάνω σχέση, έχουμε

$$\bar{H} = \sum_{i,j=1}^n \bar{g}^{ij} \bar{A}_{ij} = \sum_{i,j=1}^n e^{-2\sigma} g^{ij} e^{\sigma} (A_{ij} - g_{ij} \langle v, \xi \rangle / n),$$

από όπου βλέπουμε ότι

$$\bar{H} = e^{-\sigma} (H - \langle v, \xi \rangle).$$

Επομένως,

$$\bar{H} = 0 \iff H = \langle v, \xi \rangle.$$

Αυτό τελειώνει την απόδειξη.  $\square$

### 2.5.1 Η αρχή μεγίστου

Ένα βασικό εργαλείο που χρησιμοποιείται στην απόδειξη ενός από τα κύρια θεωρήματα αυτής της μεταπτυχιακής διατριβής είναι η αρχή μεγίστου. Σύμφωνα με την αρχή αυτή δύο διαφορετικά μονόνια δεν μπορούν να “αγγίζονται” το ένα το άλλο σε ένα εσωτερικό σημείο. Συγκεκριμένα, ισχύει το εξής αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 2.5.2.** *Υποθέτουμε ότι  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  είναι δύο  $n$ -διάστατα εμφυτευμένα μονόνια στον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα κοινό σημείο  $x_0$  των  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  όπου οι αντίστοιχοι εφαπτόμενοι χώροι συμπίπτουν και σε μια μικρή περιοχή του σημείου  $x_0$  η  $\Sigma_1$  βρίσκεται πάνω από την  $\Sigma_2$ . Τότε η επιφάνεια  $\Sigma_1$  συμπίπτει παντού με την  $\Sigma_2$ .*

**Απόδειξη:** Σύμφωνα με την Πρόταση 2.5.1, τα μονόνια μεταφοράς μπορούν να θεωρηθούν ως ελαχιστικές υπερεπιφάνειες στη μετρική

$$G_p(\cdot, \cdot) = e^{\frac{2}{n} \langle p, v \rangle} \langle \cdot, \cdot \rangle, \quad p \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Επομένως, τα μονόνια είναι πραγματικές αναλυτικές υπερεπιφάνειες. Κατά συνέπεια, αν δύο μονόνια συμπίπτουν σε μια ανοικτή γειτονιά θα πρέπει να συμπίπτουν παντού. Το θεώρημα προκύπτει από την αρχή μεγίστου για ελαχιστικές υπερεπιφάνειες σε ένα πολύπτυγμα Riemann. Για μια ωραία επισκόπηση αυτών των αρχών, παραπέμπουμε στην εργασία του Eschenburg [13, Theorem 1 & Theorem 1a].  $\square$



## Μονόνια εκ περιστροφής

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε μονόνια εκ περιστροφής. Όπως θα δούμε υπάρχουν μόνο δύο κατηγορίες τέτοιων υπερεπιφανειών. Τα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε βρίσκονται στο άρθρο [9].

### 3.1 Η ΣΔΕ ενός συμμετρικού μονονίου

Υποθέτουμε ότι το  $M$  είναι ένα μονόνιο μεταφοράς το οποίο προκύπτει από περιστροφή καμπύλης  $\gamma$  στο  $x_1x_{n+1}$ -επίπεδο, γύρω από τον  $x_{n+1}$ -άξονα. Υποθέτουμε σε πρώτη φάση ότι η καμπύλη  $\gamma$  παρίσταται ως γράφημα πάνω από τον  $x_1$ -άξονα ή, ισοδύναμα, ότι το περιστροφικό μονόνιο παρίσταται, τοπικά, ως το γράφημα μιας λείας συνάρτησης  $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Λόγω συμμετρίας, η συνάρτηση  $u$  πρέπει να έχει τη μορφή

$$u(x) = u(x_1, \dots, x_n) = V(r), \quad (3.1)$$

όπου  $r : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$  η συνάρτηση με τύπο

$$r^2 = |x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

**Λήμμα 3.1.1.** Η συνάρτηση  $V$  πληροί τη διαφορική εξίσωση

$$1 = \frac{V''}{1 + (V')^2} + (n-1) \frac{V'}{r}, \quad (3.2)$$

όπου με  $'$  συμβολίζουμε την παράγωγο της  $V$  ως προς  $r$ .

**Απόδειξη:** Από τον τύπο (2.5), έχουμε ότι το γράφημα ενός μονονίου μεταφοράς πληροί την εξίσωση

$$1 = \sum_{i,j=1}^n \left( \delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{1 + \sum_{l=1}^n u_l^2} \right) u_{ij}.$$

Από την (3.1), έχουμε

$$u_i = V_r r_i = \frac{x_i V_r}{r}, \quad \text{για } i \in \{1, \dots, n\},$$

και συνεπώς

$$|Du|^2 = V_r^2. \quad (3.3)$$

Επίσης, ξανά από τον κανόνα της αλυσίδας, λαμβάνουμε ότι

$$u_{ij} = \frac{1}{r^2} \left[ \left( \delta_{ij} r - \frac{x_i x_j}{r} \right) V_r + x_i x_j V_{rr} \right], \quad \text{για } i, j \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.4)$$

Με αντικατάσταση των (3.3) και (3.4), η (2.5) λαμβάνει τη μορφή

$$1 = (n-1) \frac{V_r}{r} + \frac{V_{rr}}{1 + V_r^2}.$$

Τούτο ολοκληρώνει και την απόδειξη.  $\square$

## 3.2 Ολική συμπεριφορά των λύσεων της ΣΔΕ

Στόχος μας είναι να μελετήσουμε τη συμπεριφορά ολικών λύσεων της εξίσωσης (3.2). Σημειώνουμε ότι αυτή είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. Θέτουμε  $\phi \doteq V'$  και λαμβάνουμε τη συνήθη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$1 = \frac{\phi'}{1 + \phi^2} + (n-1) \frac{\phi}{r},$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\phi' = (1 + \phi^2) \left( 1 - (n-1) \frac{\phi}{r} \right). \quad (3.5)$$

**Πρόταση 3.2.1.** Για κάθε  $a > 0$  και τυχαίο  $\phi_0 \in \mathbb{R}$ , το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} \phi'(r) = (1 + \phi^2(r)) \left( 1 - (n-1) \frac{\phi(r)}{r} \right), & r \geq a > 0, \\ \phi(a) = \phi_0, \end{cases}$$

έχει μοναδική  $C^\infty$ -λύση στο  $[a, \infty)$ . Επιπλέον, για μεγάλα  $r$ , έχουμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα

$$\phi(r) = \frac{r}{n-1} - \frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

**Απόδειξη:** Σύμφωνα με κλασικό θεώρημα διαφορικών εξισώσεων η λύση μας ορίζεται σε ένα διάστημα  $[a, a_{max})$ , όπου  $a_{max} \leq \infty$ .

**Ισχυρισμός 1.** *Ισχύει ότι  $a_{max} = \infty$ .*

**Απόδειξη του ισχυρισμού 1.** Ας υποθέσουμε σε αντίθεση ότι  $a_{max} < \infty$ . Επομένως,

$$\lim_{r \rightarrow a_{max}} \phi = \infty.$$

**Βήμα 1.** Υπάρχει  $\tilde{a} \geq a$  τέτοιο ώστε

$$1 - (n-1) \frac{\phi(\tilde{a})}{\tilde{a}} > 0.$$

**Απόδειξη του βήματος 1.** Έστω ότι δεν υπάρχει  $\tilde{a}$  με την παραπάνω ιδιότητα. Άρα,

$$1 - (n-1) \frac{\phi(r)}{r} \leq 0, \quad \text{για κάθε } r \geq 0.$$

Επομένως, στο διάστημα  $[a, a_{max})$  έχουμε  $\phi' \leq 0$ , δηλαδή η  $\phi$  είναι φθίνουσα στο διάστημα  $[a, a_{max})$ . Επομένως

$$\phi(r) \leq \phi(a), \quad \text{για κάθε } r \geq a. \quad (3.6)$$

Επίσης, επειδή

$$1 - (n-1) \frac{\phi(r)}{r} \leq 0,$$

έχουμε ότι

$$\phi(r) \geq \frac{r}{n-1} > 0, \quad \text{για κάθε } r \geq a. \quad (3.7)$$

Από τις εξισώσεις (3.6), (3.7) προκύπτει ότι η  $\phi(r)$  είναι φραγμένη, που αντιφάσκει το γεγονός ότι  $\phi(r) \rightarrow \infty$  καθώς  $r \rightarrow a_{max}$ .

**Βήμα 2.** Έστω  $\tilde{a}$  ο μικρότερος αριθμός με την ιδιότητα του βήματος 1. Τότε,

$$1 - (n-1) \frac{\phi(r)}{r} \geq 0, \quad \text{για κάθε } r \geq \tilde{a}.$$

**Απόδειξη του βήματος 2.** Έστω ότι υπάρχει  $r_0 \geq \tilde{a}$  τέτοιο ώστε

$$1 - (n-1) \frac{\phi(r_0)}{r_0} < 0, \quad (3.8)$$

ή, ισοδύναμα, ότι

$$\phi(r_0) > \frac{r_0}{n-1}.$$

Επιπλέον, από το Βήμα 1 έχουμε

$$\phi(\tilde{a}) \leq \frac{\tilde{a}}{n-1}.$$

Εφόσον  $r_0 \geq \tilde{a}$ , προκύπτει

$$\phi(r_0) > \frac{r_0}{n-1} \geq \frac{\tilde{a}}{n-1} \geq \phi(\tilde{a}).$$

Εφόσον η  $\phi$  είναι συνεχής, υπάρχει  $r_* < r_0$  τέτοιο ώστε

$$\phi(r_*) = \frac{r_0}{n-1} < \phi(r_0).$$

Οπότε,

$$\phi(r_*) < \phi(r_0).$$

Όμως, στο διάστημα  $[r_*, r_0]$ , λόγω της (3.8), προκύπτει  $\phi' < 0$ . Συνεπώς η  $\phi$  είναι γνησίως φθίνουσα, και επειδή,  $r_* < r_0$  θα έπρεπε να έχουμε  $\phi(r_*) > \phi(r_0)$ . Άτοπο! Δείξαμε λοιπόν πως για για κάθε  $r \geq \tilde{a}$  έχουμε ότι

$$1 - (n-1) \frac{\phi(r)}{r} \geq 0,$$

από όπου προκύπτει

$$\phi'(r) \geq 0, \quad \text{για κάθε } r \geq \tilde{a}.$$

Επίσης, από την ανισότητα

$$1 - (n-1) \frac{\phi(r)}{r} \geq 0, \quad \text{για κάθε } r \geq \tilde{a},$$

λαμβάνουμε

$$\phi(r) \leq \frac{r}{n-1} \leq \frac{a_{max}}{n-1}.$$

Δηλαδή η  $\phi$  είναι άνω φραγμένη, και από το Βήμα 1 και το Βήμα 2 έχουμε

$$\limsup_{r \rightarrow a_{max}} \phi < \infty.$$

Άτοπο, διότι έχουμε υποθέσει ότι  $a_{max} < \infty$ . Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού 1.  $\otimes$

Επομένως, στα ακόλουθα θα υποθέτουμε ότι  $a_{max} = \infty$ .

**Ισχυρισμός 2.** Υπάρχει  $\bar{a} \geq a$  τέτοιο ώστε

$$1 - (n-1) \frac{\phi(r)}{r} > 0, \quad \text{για κάθε } r \geq \bar{a}.$$

**Απόδειξη του ισχυρισμού 2.** Θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη σε δύο βήματα.

**Βήμα 1.** Η συνάρτηση

$$1 - (n-1)\frac{\phi(r)}{r},$$

δεν μπορεί να είναι μη θετική σε διάστημα της μορφής  $[\bar{a}, \infty)$ .

**Απόδειξη του βήματος 1.** Υποθέτουμε σε αντίθεση ότι

$$1 - \frac{n-1}{r}\phi(r) \leq 0, \quad \text{για κάθε } r \geq \bar{a}.$$

Τότε  $\phi' \leq 0$  και η  $\phi$  είναι φθίνουσα συνάρτηση του  $r$ . Άρα, για  $r \geq a$ , έχουμε

$$\phi(r) \leq \phi(a) = \phi_0. \quad (3.9)$$

Επίσης, εφόσον εξ υποθέσεως

$$1 - \frac{n-1}{r}\phi(r) \leq 0,$$

έχουμε

$$\phi(r) \geq \frac{r}{n-1} \geq 0. \quad (3.10)$$

Από τις εξισώσεις (3.9) και (3.10) προκύπτει  $0 \leq \phi(r) \leq \phi_0$  ή, ισοδύναμα,

$$0 \leq \frac{\phi(r)}{r} \leq \frac{\phi_0}{r} \quad \text{για } r \geq \bar{a}.$$

Επομένως, για  $r \rightarrow \infty$  έχουμε

$$\frac{\phi(r)}{r} \rightarrow 0,$$

και ως εκ τούτου

$$1 - (n-1)\frac{\phi(r)}{r} > 0,$$

για αρκετά μεγάλο  $r$ . Άτοπο!

**Βήμα 2.** Έστω  $\bar{a}$  ο μικρότερος θετικός αριθμός με την ιδιότητα

$$1 - (n-1)\frac{\phi(\bar{a})}{\bar{a}} > 0,$$

η ύπαρξη του οποίου εξασφαλίζεται από το βήμα 1. Τότε, ισχύει

$$1 - (n-1)\frac{\phi(r)}{r} > 0, \quad \text{για κάθε } r \geq \bar{a}.$$

**Απόδειξη του βήματος 2.** Ας υποθέσουμε σε αντίθεση ότι ο ισχυρισμός μας δεν ισχύει. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει  $r_1 > \bar{a}$  τέτοιο ώστε

$$1 - (n-1)\frac{\phi(r_1)}{r_1} = 0. \quad (3.11)$$

Έστω  $r_1$  να είναι το μικρότερο  $r$  για το οποίο συμβαίνει αυτό. Στο διάστημα  $[\bar{a}, r_1]$  η συνάρτηση  $\phi$  είναι αύξουσα και λόγω της (3.11) ισχύει

$$\phi'(r_1) = (1 + \phi^2(r_1))\left(1 - (n-1)\frac{\phi(r_1)}{r_1}\right) = 0.$$

Από την άλλη,

$$\phi''(r) = (1 + \phi^2(r))'\left(1 - (n-1)\frac{\phi(r)}{r}\right) - (n-1)(1 + \phi^2(r))\left(-\frac{\phi(r)}{r^2} + \frac{\phi'(r)}{r}\right).$$

Οπότε, λόγω της (3.11), στο σημείο  $r_1$  έχουμε

$$\phi''(r_1) = (n-1)(1 + \phi^2(r_1))\frac{1}{r_1^2}\frac{r_1}{n-1} = \frac{1 + \phi^2(r_1)}{r_1} > 0.$$

Άρα το  $r_1$  είναι σημείο ελαχίστου. Επομένως η  $\phi$  είναι φθίνουσα σε περιοχή  $(r_1 - \varepsilon, r_1)$ . Ατοπο, αφού  $\phi' \geq 0$  στο  $(r_1 - \varepsilon, r_1)$ .

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού 2. ⊗

Στη συνέχεια θα εξετάζουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης  $\phi$  για μεγάλες τιμές του  $r$ .

**Ισχυρισμός 3.** Για κάθε  $\varepsilon > 0$  και  $r_0 > a$ , υπάρχει  $r_1 > r_0$  τέτοιο ώστε

$$\phi(r_1) \geq \frac{r_1}{n-1}(1 - \varepsilon).$$

**Απόδειξη του ισχυρισμού 3.** Έστω ότι υπάρχει  $\varepsilon > 0$  και  $r_0 > a$  τέτοια ώστε για κάθε  $r_1 > r_0$  να ισχύει

$$\phi(r_1) < \frac{r_1}{n-1}(1 - \varepsilon),$$

ή, ισοδύναμα,

$$1 - (n-1)\frac{\phi(r_1)}{r_1} > \varepsilon. \quad (3.12)$$

Λόγω της (3.12), θα έχουμε

$$\phi'(r_1) > \varepsilon(1 + \phi^2(r_1)), \quad \text{για κάθε } r_1 > r_0 > a.$$

Δηλαδή

$$\phi'(r_1) > \varepsilon + \varepsilon\phi^2(r_1) > \varepsilon\phi^2(r_1) > 0, \quad \text{για κάθε } r_1 > r_0 > a.$$

Άρα,

$$\frac{\phi'(r_1)}{\phi^2(r_1)} > \varepsilon, \quad \text{για κάθε } r_1 > r_0 > a.$$

Ολοκληρώνοντας, έχουμε

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{\phi'(r_1)}{\phi^2(r_1)} dr_1 > \int_{r_0}^{r_1} \varepsilon dr_1,$$

από όπου προκύπτει

$$-\frac{1}{\phi(r_1)} > \varepsilon r_1 - \varepsilon r_0 - \frac{1}{\phi(r_0)}. \quad (3.13)$$

Επειδή από την υπόθεση έχουμε

$$\phi(r_1) < \frac{r_1}{n-1}(1-\varepsilon).$$

από την (3.13), καταλήγουμε στην ανισότητα

$$-\frac{n-1}{r_1(1-\varepsilon)} > \varepsilon r_1 - \varepsilon r_0 - \frac{1}{\phi(r_0)}.$$

Αφήνοντας το  $r_1$  να πάει στο άπειρο, καταλήγουμε σε αντίφαση. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού 3.  $\otimes$

Από τον Ισχυρισμό 2 και τον Ισχυρισμό 3 έχουμε ότι για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $r_1 > 0$  ώστε

$$\frac{r(1-\varepsilon)}{n-1} \leq \phi(r) < \frac{r}{n-1} \quad \text{για κάθε } r > r_1. \quad (3.14)$$

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε την  $\phi$  στη μορφή

$$\phi(r) = \frac{r}{n-1} + \psi(r), \quad (3.15)$$

όπου η συνάρτηση  $\psi$  είναι υπογραμμική, δηλαδή

$$|\psi(r)| < cr, \quad \text{για } c > 0 \text{ και } r \text{ αρκετά μεγάλο.}$$

Από τους τύπους (3.14) και (3.15), έχουμε ότι η  $\psi$  είναι αρνητική συνάρτηση, δηλαδή ισχύει  $\psi(r) < 0$ , για αρκούντως μεγάλες τιμές του  $r$ .

**Ισχυρισμός 4.** *Ισχύει ότι*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = 0.$$

**Απόδειξη του ισχυρισμού 4.** Θα δείξουμε ότι η  $\psi$  δεν ταλαντώνεται και ότι συγκλίνει στο μηδέν καθώς το  $r$  τείνει στο άπειρο. Πραγματικά, ας υποθέσουμε σε αντίθεση ότι κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει. Φιξάρουμε λοιπόν έναν αριθμό  $\varepsilon > 0$  και υποθέτουμε σε αντίθεση ότι υπάρχουν σημεία  $r_2$  και  $r_3$  αρκετά μεγάλα, ώστε

$$\psi(r) < -\varepsilon < 0, \quad \text{για κάθε } r \in [r_2, r_3]. \quad (3.16)$$

Λόγω της υπογραμμικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\psi(r) > -\frac{r}{2n-2} \quad \text{για κάθε } r \in [r_2, r_3]. \quad (3.17)$$

Στο διάστημα  $[r_2, r_3]$ , η παράγωγος της  $\psi$  πληροί τη διαφορική εξίσωση

$$\psi'(r) = -\frac{n-1}{r}\psi(r) \left( 1 + \left( \frac{r}{n-1} + \psi(r) \right)^2 \right) - \frac{1}{n-1}. \quad (3.18)$$

Λόγω των (3.16) και (3.17), στο διάστημα  $[r_2, r_3]$ , η (3.18) γίνεται

$$\begin{aligned} \psi'(r) &\geq \frac{n-1}{r}\varepsilon \left( 1 + \left( \frac{r}{n-1} - \frac{r}{2(n-1)} \right)^2 \right) - \frac{1}{n-1} \\ &= \frac{n-1}{r}\varepsilon + \frac{r\varepsilon}{4(n-1)} - \frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

Επειδή οι αριθμοί  $r_2$  και  $r_3$  είναι αρκούντως μεγάλοι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι στο διάστημα που εργαζόμαστε ισχύει

$$\frac{n-1}{r}\varepsilon + \frac{r\varepsilon}{4(n-1)} - \frac{1}{n-1} \geq c \doteq \frac{r_2}{(2n-2)(r_3-r_2)} > 0.$$

Ολοκληρώνοντας, έχουμε

$$\psi(r_3) \geq c(r_3 - r_2) + \psi(r_2) \geq c(r_3 - r_2) - \frac{r_2}{2n-2} = 0,$$

το οποίο είναι άτοπο! Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού 4. ⊗

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση  $\lambda$  με τύπο

$$\lambda(r) = r\psi(r).$$



**Ισχυρισμός 5.** Ισχύει ότι

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda(r) = -1.$$

**Απόδειξη του ισχυρισμού 5.** Ας φιξάρουμε στο εξής έναν θετικό αριθμό  $\varepsilon > 0$ . Εφόσον

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lambda(r)}{r} = 0,$$

έπεται ότι για κάθε  $\mu > 0$  υπάρχει ένας αριθμός  $r_\mu > 0$  ώστε να ισχύει

$$|\lambda(r)| \leq \mu r, \quad \text{για κάθε } r \geq r_\mu. \quad (3.19)$$

**Περίπτωση 1.** Υποθέτουμε ότι για αρκούντως μεγάλο  $r_4 > r_\mu$  ισχύει

$$\lambda(r) \geq -1 + \varepsilon, \quad \text{σε ένα διάστημα } [r_4, r_5]. \quad (3.20)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \lambda'(r) &= \psi(r) + r\psi'(r) \\ &= -\frac{r}{n-1} \left( 1 + \lambda(r) + 2(n-1) \frac{\lambda^2(r)}{r^2} \right) - (n-2) \frac{\lambda(r)}{r} - (n-1) \frac{\lambda^3(r)}{r^3} \\ &\leq -\frac{r}{n-1} \left( 1 + \lambda(r) + 2(n-1) \frac{\lambda^2(r)}{r^2} \right) + \mu(n-2) + \mu^3(n-1). \end{aligned}$$

Από την (3.19) και επειδή

$$1 + \lambda(r) \geq \varepsilon > 0,$$

παρατηρούμε ότι η τελευταία παράσταση τείνει στο  $-\infty$  καθώς το  $r$  τείνει στο άπειρο. Συνεπώς, για αρκούντως μεγάλη επιλογή του  $r_4$ , έπεται ότι υπάρχει θετικός αριθμός  $c > 0$  με

$$c > \frac{1 - \varepsilon + \lambda(r_4)}{r_5 - r_4}$$

τέτοιος ώστε

$$\lambda'(r) \leq -c < 0, \quad \text{στο διάστημα } [r_4, r_5].$$

Με ολοκλήρωση, βλέπουμε ότι

$$\lambda(r_5) \leq -c(r_5 - r_4) + \lambda(r_4) < -1 + \varepsilon.$$

Τούτο όμως, αντιφάσκει με την υπόθεση εργασίας (3.20).

**Περίπτωση 2.** Υποθέτουμε ότι για αρκούντως μεγάλο  $r_6 > r_\mu > 0$  έχουμε ότι

$$\lambda(r) \leq -1 - \varepsilon, \quad \text{σε ένα διάστημα } [r_6, r_7]. \quad (3.21)$$

Σε αυτή τη περίπτωση

$$\begin{aligned}\lambda'(r) &= \frac{r}{n-1} \left( -1 - \lambda(r) - 2(n-1) \frac{\lambda^2(r)}{r^2} \right) - (n-2) \frac{\lambda(r)}{r} - (n-1) \frac{\lambda^3(r)}{r^3} \\ &\geq \frac{r}{n-1} (\varepsilon - 2(n-1)\mu^2) - \mu(n-2) - \mu^3(n-1).\end{aligned}$$

Για επιλογή του  $\mu$  τέτοιο ώστε

$$\varepsilon - 2(n-1)\mu^2 > 0,$$

η παραπάνω παράσταση τείνει στο  $+\infty$  καθώς  $r$  τείνει στο άπειρο. Άρα για αρκούντως μεγάλη επιλογή του  $r_6$ , υπάρχει θετικός αριθμός  $c > 0$  με

$$c > \frac{-1 - \varepsilon - \lambda(r_6)}{r_7 - r_6},$$

έτσι ώστε

$$\lambda'(r) \geq c, \quad \text{στο διάστημα } [r_6, r_7].$$

Με ολοκλήρωση καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\lambda(r_7) \geq c(r_7 - r_6) + \lambda(r_6) > -1 - \varepsilon,$$

πράγμα το οποίο αντιφάσκει την υπόθεση (3.21).

Από τα συμπεράσματα των περιπτώσεων 1 και 2, προκύπτει άμεσα ο ισχυρισμός.  $\otimes$

Ας γράψουμε τώρα τη συνάρτηση  $\lambda$  στη μορφή

$$\lambda(r) = -1 + \frac{\eta(r)}{r^2}.$$

**Ισχυρισμός 6.** *Ισχύει ότι*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \eta(r) = (n-4)(n-1).$$

**Απόδειξη του ισχυρισμού 6.** Εφόσον

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\eta(r)}{r^2} \rightarrow 0,$$

έχουμε ότι για κάθε  $\mu > 0$  υπάρχει αρκετά μεγάλο  $r_\mu > 0$  τέτοιο ώστε

$$|\eta(r)| \leq \mu r^2, \quad \text{για κάθε } r > r_\mu. \quad (3.22)$$

Φιξάρουμε  $\varepsilon > 0$  και όπως στον τελευταίο ισχυρισμό, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

**Περίπτωση 1.** Υποθέτουμε ότι για αρκούντως μεγάλο  $r_8 > r_\mu > 0$  έχουμε ότι

$$\eta(r) > (n-4)(n-1) + \varepsilon, \quad \text{σε ένα διάστημα } [r_8, r_9]. \quad (3.23)$$

Η συνάρτηση,

$$\eta(r) = r^2\{\lambda(r) + 1\}.$$

πληροί τη διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} \eta'(r) &= \frac{r}{n-1}((n-4)(n-1) - \eta(r)) + \frac{1}{r}((8-n)\eta(r) + (n-1)) \\ &\quad - \frac{\eta(r)}{r^3}(2\eta(r) + 3(n-1)) + 3(n-1)\frac{\eta^2(r)}{r^5} - (n-1)\frac{\eta^3(r)}{r^7}. \end{aligned}$$

Λόγω των (3.22) και (3.23), έχουμε

$$\begin{aligned} \eta'(r) &\leq \frac{r}{n-1}((n-4)(n-1) - \eta(r)) + \frac{1}{r}(|8-n|\eta(r) + (n-1)) \\ &\quad - \frac{\eta(r)}{r^3}(2\eta(r) + 3(n-1)) + 3(n-1)\frac{\eta^2(r)}{r^5} - (n-1)\frac{\eta^3(r)}{r^7} \\ &\leq \frac{r}{n-1}((n-4)(n-1) - \eta(r)) + |8-n|\mu r + \frac{n-1}{r} - \frac{2\eta^2(r)}{r^3} \\ &\quad - 3(n-1)\frac{\eta(r)}{r^3} + 3(n-1)\frac{\eta^2(r)}{r^5} - (n-1)\frac{\eta^3(r)}{r^7} \\ &\leq \frac{r}{n-1}((n-4)(n-1) - \eta(r)) + |8-n|\mu r + \frac{n-1}{r} \\ &\quad - 3(n-1)\frac{\eta(r)}{r^3} + 3(n-1)\frac{\eta^2(r)}{r^5} - (n-1)\frac{\eta^3(r)}{r^7} \\ &\leq \frac{r}{n-1}(-\varepsilon + \mu|8-n|(n-1)) + \frac{n-1}{r} - 3(n-1)\frac{\eta(r)}{r^3} \\ &\quad + 3(n-1)\frac{\eta^2(r)}{r^5} - (n-1)\frac{\eta^3(r)}{r^7}. \end{aligned}$$

Επιλέγοντας  $\mu$  τέτοιο ώστε

$$-\varepsilon + \mu|8-n|(n-1) < 0,$$

βλέπουμε ότι η τελευταία παράσταση τείνει στο  $-\infty$  καθώς το  $r$  τείνει στο άπειρο. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε  $c > 0$  μπορούμε να βρούμε  $r$  αρκετά μεγάλο έτσι ώστε  $h'(r) \leq -c$ . Ακολουθώντας ακριβώς το ίδιο επιχείρημα όπως και στον προηγούμενο ισχυρισμό καταλήγουμε σε αντίφαση.

**Περίπτωση 2.** Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει αρκούντως μεγάλο  $r_{10} > r_\mu > 0$  ώστε

$$\eta(r) < (n-4)(n-1) - \varepsilon, \quad \text{σε ένα διάστημα } [r_{10}, r_{11}]. \quad (3.24)$$

Λόγω των (3.22) και (3.24), έχουμε

$$\begin{aligned} \eta'(r) &= \frac{r}{n-1} \left( (n-4)(n-1) - \eta(r) \right) + (8-n) \frac{\eta(r)}{r} + \frac{n-1}{r} \\ &\quad - \frac{2\eta^2(r)}{r^3} - 3(n-1) \frac{\eta(r)}{r^3} + 3(n-1) \frac{\eta^2(r)}{r^5} - (n-1) \frac{\eta^3(r)}{r^7} \\ &\geq \frac{r}{n-1} \left( (n-4)(n-1) - \eta(r) \right) - |8-n| \frac{\mu r^2}{r} + \frac{n-1}{r} - \frac{2\mu^2 r^4}{r^3} \\ &\quad - 3(n-1) \frac{\eta(r)}{r^3} + 3(n-1) \frac{\eta^2(r)}{r^5} - (n-1) \frac{\eta^3(r)}{r^7} \\ &\geq \frac{r}{n-1} \left( \varepsilon - \mu |8-n|(n-1) - 2\mu^2(n-1) \right) + \frac{n-1}{r} \\ &\quad - 3(n-1) \frac{\eta(r)}{r^3} + 3(n-1) \frac{\eta^2(r)}{r^5} - (n-1) \frac{\eta^3(r)}{r^7}. \end{aligned}$$

Επιλέγοντας κατάλληλο αρκούντως μικρό  $\mu > 0$  συνάγουμε ότι η τελευταία παράσταση τείνει στο  $\infty$  καθώς το  $r$  τείνει στο άπειρο. Επομένως, για κάθε  $c > 0$ , υπάρχει αρκετά μεγάλο  $r_{10}$  ώστε

$$\eta'(r) \geq c, \quad \text{στο διάστημα } [r_{10}, r_{11}].$$

Ακολουθώντας το ίδιο επιχείρημα όπως στον προηγούμενο ισχυρισμό καταλήγουμε σε αντίφαση.

Βάση των παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \eta(r) = (n-4)(n-1)$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού 6. ⊗

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των ισχυρισμών καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{r}{n-1} + \psi(r) \\ &= \frac{r}{n-1} + \frac{\lambda(r)}{r} = \frac{r}{n-1} - \frac{1}{r} + \frac{\eta(r)}{r^3}, \end{aligned}$$

από όπου βλέπουμε ότι

$$\phi(r) = \frac{r}{n-1} - \frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (3.25)$$

και

$$V(r) = \frac{r^2}{2(n-1)} - \ln r + O\left(\frac{1}{r}\right). \quad (3.26)$$

Ας δούμε τώρα ποια είναι η συνέχεια της λύσης για χρονικές τιμές μικρότερες του  $a$ . Οπότε, ας συμβολίσουμε με  $(a_*, \infty)$  το μέγιστο διάστημα στο οποίο ορίζεται η λεία συνάρτηση  $V$ . Προφανώς, είτε  $a_* = 0$  και η διαφορική εξίσωση γίνεται ιδιάζουσα στο σημείο αυτό ή  $a_* > 0$  και η  $V'$  αποκλίνει ή τείνει στο άπειρο καθώς πλησιάζουμε το  $a_*$ . Στο τελευταίο ενδεχόμενο, η γενέτειρα περιστροφική καμπύλη  $\gamma$  παύει να γράφεται ως γράφημα πάνω στο επίπεδο  $x_{n+1} = 0$ . Θα γράφεται όμως ως γράφημα μιας λείας συνάρτησης  $h$  πάνω στον  $x_{n+1}$ -άξονα. Ας δούμε τη διαφορική εξίσωση την οποία πληροί η συνάρτηση  $h$ .

**Λήμμα 3.2.2.** *Η συνάρτηση  $h$  ικανοποιεί τη συνήθη διαφορική εξίσωση*

$$h'' = \left( \frac{n-1}{h} - h' \right) (1 + (h')^2). \quad (3.27)$$

**Απόδειξη:** Οι συναρτήσεις  $h$  και  $V$  είναι αντίστροφες. Η συνάρτηση  $h$  αντιπροσωπεύει την ακτίνα του μονονίου μεταφοράς αν γνωρίζουμε το ύψος ενώ η  $V$  το ακριβώς το αντίστροφο. Άρα,

$$V \circ h = Id.$$

Σε σημεία όπου η  $V$  είναι μονότονη, από τον κανόνα αλυσίδας, έχουμε

$$V_h h' = 1,$$

ή ισοδύναμα

$$V'(h) = \frac{1}{h'}. \quad (3.28)$$

Επομένως,

$$V''(h)h' = (V'(h))' = \left( \frac{1}{h'} \right)' = -\frac{h''}{(h')^2}.$$

Συνεπώς,

$$V''(h) = -\frac{h''}{(h')^3}. \quad (3.29)$$

Από τις (3.28) και (3.29), η (3.2) μετατρέπεται στη

$$h'' = \left( \frac{n-1}{h} - h' \right) (1 + (h')^2),$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

Ας δούμε τώρα τη συμπεριφορά της λύσης  $V$  καθώς πλησιάζουμε το ακραίο σημείο  $a_*$ . Αρχίζουμε με την εξής απλή παρατήρηση.

**Λήμμα 3.2.3.** Υποθέτουμε ότι  $a_* \geq 0$ . Τότε, το όριο της συνάρτησης  $V$  στο σημείο  $a_*$  υπάρχει. Επιπλέον:

(1) Στην περίπτωση κατά την οποία  $a_* > 0$ , ισχύει ένα από τα παρακάτω:

(α) Η συνάρτηση  $V$  είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει ότι  $\lim_{r \rightarrow a_*} \varphi(r) = \infty$ .

(β) Η συνάρτηση  $V$  έχει μοναδικό σημείο ελαχίστου και  $\lim_{r \rightarrow a_*} \varphi(r) = -\infty$ .

(2) Στην περίπτωση κατά την οποία  $a_* = 0$ , ισχύει  $\varphi > 0$  και  $\lim_{r \rightarrow a_*} \varphi(r) = 0$ .

**Απόδειξη:** Αρχικά παρατήρουμε πως αν  $\varphi(r_0) = 0$ , για κάποιο σημείο  $r_0 \in (a_*, \infty)$ , τότε από την εξίσωση

$$\frac{\varphi'}{1 + \varphi^2} + (n - 1) \frac{\varphi}{r} = 1,$$

έπεται

$$\varphi'(r_0) = 1.$$

Οπότε το σημείο  $r_0$  είναι σημείο ελαχίστου για τη συνάρτηση  $V$ . Επίσης, αν υπάρχει ένα τέτοιο κρίσιμο σημείο για την  $V$ , προφανώς θα πρέπει να είναι και μοναδικό. Ακόμα, από τον ασυμπτωτικό τύπο (3.25), βλέπουμε ότι η συνάρτηση  $\varphi$  είναι θετική για μεγάλες τιμές του  $r$ .

**Περίπτωση Α:** Υποθέτουμε ότι  $\varphi > 0$  στο  $(a_*, \infty)$ . Από τον ορισμό του  $a_*$  έχουμε  $\lim_{r \rightarrow a_*} \varphi(r) = \infty$ . Υποθέτουμε σε αντίθεση ότι  $\lim_{r \rightarrow a_*} V(r) = -\infty$ . Τότε και η αντίστροφή της  $V$ , δηλαδή η  $h$ , είναι αύξουσα και ορισμένη σε ολόκληρη την πραγματική ευθεία. Από τις υποθέσεις μας, εύκολα συνάγουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = h_0 \geq 0$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h'(x) = 0$ . Από την (3.27), λαμβάνουμε

$$h'' = \left( \frac{n-1}{h} - h' \right) (1 + (h')^2) > -h'(1 + (h')^2).$$

Θέτοντας  $y = h' > 0$ , με ολοκλήρωση βλέπουμε ότι

$$\int_0^x \frac{y' dx}{y(1 + y^2)} \geq -x.$$

Επομένως,

$$\frac{1}{y^2(x)} + 1 \leq e^{2x} \left( \frac{1}{y^2(0)} + 1 \right).$$

Αφήνοντας το  $x$  να πάει στο  $-\infty$  καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα αναγκαστικά υπάρχει το όριο της  $V$  καθώς το  $r$  τείνει στο  $a_*$ .

**Περίπτωση Β:** Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $\varphi$  αλλάζει πρόσημο. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει  $r_{min}$  όπου η  $V$  λαμβάνει ολικό ελάχιστο. Άρα, στο διάστημα  $(a_*, r_{min})$  η  $V$  είναι φθίνουσα. Υποθέτουμε σε αντίθεση ότι  $\lim_{r \rightarrow a_*} V(r) = \infty$ . Από τις υποθέσεις μας, έπεται ότι η συνάρτηση  $h$  ορίζεται και είναι φθίνουσα σε ένα διάστημα της μορφής  $(x_*, \infty)$ , όπου  $x_* = V(r_{min})$ , και επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = h_0 \geq 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_*} h'(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h'(x) = 0. \quad (3.30)$$

Από τη διαφορική εξίσωση (3.27) και την τελευταία ισότητα της (3.30), συνάγουμε ότι υπάρχει  $x_0 \in (x_*, \infty)$  και  $c > 0$  έτσι ώστε  $h''(x) \geq 2c$  για κάθε  $x \in [x_0, \infty)$ . Ολοκληρώνοντας δύο φορές, παρατηρούμε ότι

$$h(x) \geq c(x - x_0)^2 + h'(x_0)(x - x_0) + h(x_0).$$

Συνεπώς  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$ , πράγμα που αντιφάσκει την πρώτη ισότητα της (3.30). Άρα αναγκαστικά υπάρχει το όριο της  $V$  καθώς το  $r$  τείνει στο  $a_*$ .

**Περίπτωση Γ:** Ας εξετάσουμε λεπτομερέστερα την περίπτωση  $a_* = 0$ . Πρώτα θα δείξουμε ότι δεν μπορεί η  $\varphi$  να αλλάζει πρόσημο σε σημείο  $r_{min} \in (0, \infty)$ . Πραγματικά! Ας υποθέσουμε σε αντίθεση ότι κάτι τέτοιο συμβαίνει. Τότε, έχουμε ότι  $\varphi < 0$  στο  $(0, r_{min})$ . Από την (3.5) προκύπτει ότι  $\varphi' > 0$  στο  $(0, r_{min})$ . Φιξάρουμε  $0 < \varepsilon < r_0 < r_{min}$ . Επειδή η  $\varphi$  είναι αρνητική και γνησίως αύξουσα στο  $(0, r_0)$ , υπάρχει  $c > 0$  ώστε

$$\frac{\varphi'}{1 + \varphi^2} \geq 1 + \frac{c}{r}, \quad \text{στο } r \in (\varepsilon, r_0).$$

Ολοκληρώνοντας, βλέπουμε ότι

$$\arctan \varphi(r_0) - \arctan \varphi(\varepsilon) \geq r_0 - \varepsilon + c \log r_0 - c \log \varepsilon.$$

Αφήνοντας το  $\varepsilon$  να τείνει στο 0, καταλήγουμε σε αντίφαση. Συνεπώς, η  $\varphi$  είναι θετική για κάθε  $r$ . Επίσης, από τις δύο παραπάνω περιπτώσεις γνωρίζουμε ότι το όριο της  $V$  υπάρχει καθώς το  $r$  τείνει στο μηδέν. Απομένει να δείξουμε ότι  $\lim_{r \rightarrow 0} \varphi(r) = 0$ . Ας υποθέσουμε σε αντίθεση ότι υπάρχει  $c > 0$ , ώστε  $\varphi > c$  για κάθε  $r > 0$ . Φιξάρουμε αριθμούς  $0 < \varepsilon < r_0$ . Τότε,

$$\frac{\varphi'}{1 + \varphi^2} \leq 1 - \frac{c}{r}, \quad \text{στο } r \in (\varepsilon, r_0).$$

Με ολοκλήρωση, συνάγουμε ότι

$$\arctan \varphi(r_0) - \arctan \varphi(\varepsilon) \leq r_0 - \varepsilon - c \log r_0 + c \log \varepsilon.$$

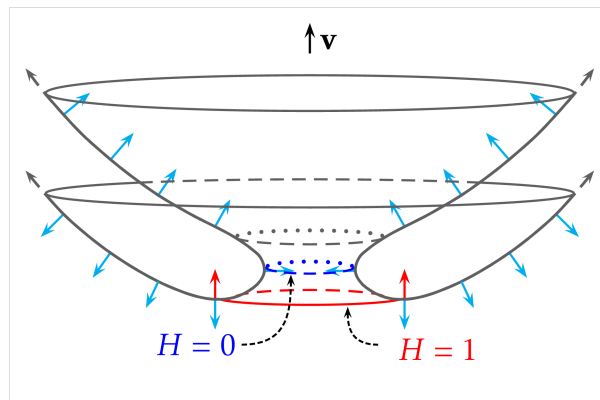
Αφήνοντας το  $\varepsilon$  να τείνει στο 0, καταλήγουμε σε αντίφαση.

Η απόδειξη του λήμματος προκύπτει συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των παραπάνω τριών περιπτώσεων.  $\square$

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε και αποδείξουμε το θεώρημα ταξινόμησης όλων των περιστροφικά συμμετρικών μονονίων μεταφοράς της ροής μέσης καμπυλότητας.

**Θεώρημα 3.2.4.** Έστω  $M^n \subset R^{n+1}$  μονόνιο το οποίο περιγράφεται από τη περιστροφή καμπύλης  $\gamma$  στο  $x_1 x_{n+1}$ -επίπεδο γύρω από τον  $x_{n+1}$ -άξονα. Υπάρχουν μόνο δύο τέτοια είδη μονονίων εκ περιστροφής:

- (1) **(Κυλινδρικό μονόνιο)** Η  $\gamma$  παρίσταται ως ένωση δύο γραφημάτων συναρτήσεων  $h_1, h_2 : [b_*, \infty) \rightarrow R$  πάνω από τον  $x_{n+1}$ -άξονα με τις εξής ιδιότητες:
- (α) Η συνάρτηση  $h_1$  είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη στο πεδίο ορισμού της.
  - (β) Η συνάρτηση  $h_2$  έχει μοναδικό σημείο ελαχίστου  $x_{min}$  στο διάστημα  $[b_*, \infty)$ .
  - (γ) Η συνάρτηση  $h_2$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[b_*, x_{min})$  και γνησίως αύξουσα στο  $(x_{min}, \infty)$ .
  - (δ) Η  $h_2$  είναι η ένωση ενός αυστηρά κυρτού κλάδου στο διάστημα  $[b_*, x_0)$  με έναν αυστηρά κοίλο κλάδο στο διάστημα  $[x_0, \infty)$  και  $h''(x_0) = 0$ .
  - (ε) Τα γραφήματα των λείων συναρτήσεων  $h_1$  και  $h_2$  δεν τέμνονται ούτε και είναι ασυμπτωτικά στο άπειρο μεταξύ τους.

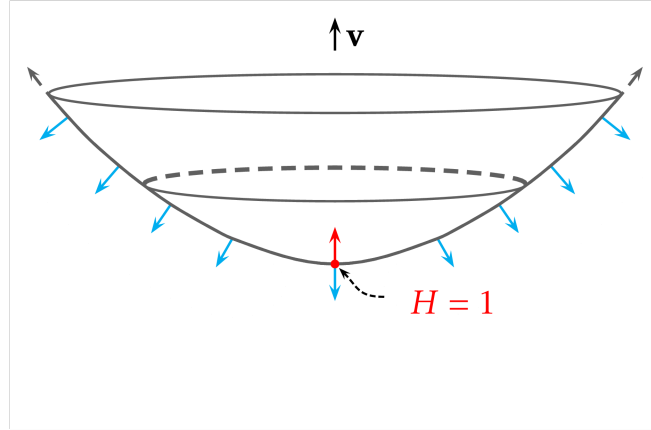


Σχήμα 3.1: Κυλινδρικό μονόνιο (σχήμα από το άρθρο [30])

- (2) **(Παραβολοειδές μονόνιο)** Η καμπύλη  $\gamma$  παρίσταται ως γράφημα πάνω από τον  $x_1$ -άξονα μιας λείας, αύξουσας, και αυστηρά κυρτής συνάρτησης  $V : [0, \infty) \rightarrow R$  τέτοιας ώστε

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} V'(r) = 0.$$





Σχήμα 3.2: Παραβολοειδές μονότιο (σχήμα από το άρθρο [30])

**Απόδειξη:** (1) Παρατηρούμε ότι αν  $V$  είναι λύση της (3.2) και  $c_0 \in \mathbb{R}$ , τότε η συνάρτηση  $V + c_0$  είναι επίσης λύση της (3.2). Ας θεωρήσουμε μια λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} \frac{V''(r)}{1 + (V'(r))^2} + (n-1)\frac{V'(r)}{r} = 1, & r > a, \\ V(a) = 0, \\ V'(a) = 0, \end{cases} \quad (3.31)$$

όπου  $a$  είναι θετικός αριθμός. Από τα συμπεράσματα του Λήμματος 3.2.3, η μεγιστοτική λύση  $V_1$  του (3.31) ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής  $(a_*, \infty)$ , όπου  $a_* > 0$ . Επίσης, από τα συμπεράσματα της Πρότασης 3.2.1 και του Λήμματος 3.2.3, η συνάρτηση  $V_1$  είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο  $(a, \infty)$  και γνησίως φθίνουσα στο  $(a_*, a)$ . Ακόμα, έχουμε

$$\lim_{r \rightarrow a_*} V_1(r) = x_{min} \neq 0 \quad \text{και} \quad \lim_{r \rightarrow a_*} V_1'(r) = -\infty.$$

Συνεχίζουμε την καμπύλη του γραφήματος της συνάρτησης  $V$  θεωρώντας το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} h''(x) = \left( \frac{n-1}{h(x)} - h'(x) \right) (1 + (h'(x))^2), & x > x_{min}, \\ h(x_{min}) = a_*, \\ h'(x_{min}) = 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Από την εξίσωση (3.32) φαίνεται ότι το  $x_{min}$  είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της  $h$ , όπου μάλιστα λαμβάνει και ολικό ελάχιστο. Μετά από το σημείο εκείνο η τροχιά της λύσης του (3.32) μπορεί να περιγραφεί ξανά ως γράφημα πάνω από τον  $x_1$ -άξονα μιας συνάρτησης  $V_2$ .

Σύμφωνα με τα όσα έχουμε δείξει μέχρι στιγμής, η γενέτειρα καμπύλη  $\gamma$  μπορεί να γραφεί ως ένωση των γραφημάτων πάνω από τον  $x_1$ -άξονα δύο λειών συναρτήσεων  $V_1, V_2 : [a_*, \infty) \rightarrow R$ . Απομένει να αποδείξουμε ότι

$$V_2(r) > V_1(r), \quad \text{για κάθε } r > a_*,$$

και ότι

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |V_2(r) - V_1(r)| \neq 0,$$

δηλαδή τα γραφήματα της γενέτειρας καμπύλης είναι ασυμπτωτικά μεταξύ τους.

**Περίπτωση 1.** Ας υποθέσουμε σε αντίθεση ότι υπάρχει  $r_0$  τέτοιο ώστε

$$V_2(r) > V_1(r),$$

για κάθε  $r \in (a_*, r_0)$  και  $V_1(r_0) = V_2(r_0)$ . Τότε η συνάρτηση

$$g = V_2 - V_1 : [a_*, r_0] \rightarrow R,$$

λαμβάνει ένα ολικό απόλυτο θετικό μέγιστο  $g_0$  σε εσωτερικό σημείο  $r_1$  του διαστήματος  $[a_*, r_0]$ . Παρατηρούμε τώρα ότι οι συναρτήσεις  $\zeta_1 = V_1 + g_0$  και  $\zeta_2 = V_2$ , λύνουν την ίδια διαφορική εξίσωση (3.2), είναι διαφορετικές μεταξύ τους συναρτήσεις με  $\zeta_1 \geq \zeta_2$  και  $\zeta_1(r_1) = \zeta_2(r_1)$ . Επιπλέον τα γραφήματα τους εφάπτονται στο σημείο επαφής αφού  $0 = g'(r_1) = \zeta_1'(r_1) = \zeta_2'(r_1)$ . Κάτι τέτοιο όμως αντιφάσκει τη μοναδικότητα των λύσεων.

**Περίπτωση 2.** Ας υποθέσουμε τώρα σε αντίθεση ότι  $V_2(r) > V_1(r)$ , για κάθε  $r > 0$  και ότι

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (V_1(r) - V_2(r)) = 0.$$

Θεωρούμε ξανά την συνάρτηση

$$g = V_2 - V_1 : [a_*, \infty) \rightarrow R.$$

Προφανώς η  $g$  λαμβάνει ένα ολικό απόλυτο θετικό μέγιστο  $g_0$  σε εσωτερικό σημείο  $r_1$  του διαστήματος  $[a_*, \infty)$ . Το ίδιο επιχείρημα όπως στην προηγούμενη περίπτωση οδηγεί σε αντίφαση.

Η συμπεριφορά των τροχιών των  $V_1$  και  $V_2$  περιγράφεται πλήρως στα συμπεράσματα της Πρότασης 3.2.1.

(2) Θεωρούμε γνησίως φθίνουσα ακολουθία  $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  έτσι ώστε  $\varepsilon_i \rightarrow 0$ . Στη συνέχεια, θεωρούμε την ακολουθία των λείων συναρτήσεων  $\{V_i : [\varepsilon_i, \infty) \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in \mathbb{N}}$  που λύνει το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} \frac{V_i''(r)}{1 + (V_i'(r))^2} + (n-1) \frac{V_i'(r)}{r} = 1, & r > \varepsilon_i, \\ V_i(\varepsilon_i) = 0, \\ V_i'(\varepsilon_i) = 0. \end{cases} \quad (3.33)$$

Τότε

$$\frac{V_i''(\varepsilon_i)}{1 + (V_i'(\varepsilon_i))^2} + (n-1) \frac{V_i'(\varepsilon_i)}{\varepsilon_i} = 1,$$

από όπου προκύπτει ότι

$$V_i''(\varepsilon_i) = 1.$$

Από την Πρόταση 3.2.1, Ισχυρισμός 2, Βήμα 2, έχουμε ότι  $V_i''(r) > 0$  για κάθε σημείο  $r \in [\varepsilon_i, \infty)$ . Άρα η  $V_i$  είναι κυρτή, αύξουσα και ορισμένη σε ολόκληρο το διάστημα  $[\varepsilon_i, \infty)$ . Ας φιξάρουμε τώρα έναν θετικό αριθμό  $a > 0$ . Θυμίζουμε ότι

$$\|V_i\|_{C^2} \doteq \max_{[\varepsilon_i, a]} \{|V_i| + |V'| + \|V_i''\|\} \leq |V_i(a)| + |V_i'(a)| + \max_{[\varepsilon_i, a]} |V_i''|.$$

Η ακολουθία  $\{V_i'(a)\}_{i \in \mathbb{N}}$  δεν μπορεί να τείνει στο άπειρο. Πράγματι, από την Πρόταση 3.2.1, Ισχυρισμός 2, Βήμα 2, έχουμε ότι

$$V_i'(r) \leq \frac{r}{n-1}, \quad \text{για κάθε } r > \varepsilon_i \text{ και } i \in \mathbb{N}.$$

από όπου προκύπτει ότι

$$V_i'(a) \leq \frac{a}{n-1}.$$

Με ολοκλήρωση, βλέπουμε ότι και η  $\{V_i(a)\}_{i \in \mathbb{N}}$  είναι φραγμένη από μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το  $a$ . Οπότε, υπάρχει σταθερά  $c_1(a) > 0$  έτσι ώστε

$$|V_i(a)| + |V_i'(a)| < c_1(a), \quad \text{για κάθε } i \in \mathbb{N}.$$

Από την εξίσωση, την κυρτότητα και το γεγονός ότι  $V' > 0$ , έχουμε ότι

$$0 \leq V_i''(r) \leq 1 + (V'(r))^2 \leq 1 + V_i'(a)^2 \leq 1 + c_1^2(a).$$

Από το Θεώρημα Arzela-Ascoli, μπορούμε να περάσουμε στο όριο και να πάρουμε μια συνάρτηση  $V_\infty : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}$  που επίσης πληροί την εξίσωση μας στο διάστημα  $(0, a)$ . Επιπρόσθετα η  $V_\infty$  είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο  $(0, a)$ . Από τη μοναδικότητα των λύσεων (βλέπε για παράδειγμα [17]), η συνάρτηση  $V_\infty$  είναι λεία και ορίζεται σε όλο το διάστημα  $(0, \infty)$ .  $\square$



## Ένα θεώρημα τύπου Bernstein

Σύμφωνα με ένα κλασικό θεώρημα της διαφορικής γεωμετρίας, μια προσανατολισμένη, πλήρης, ελαχιστική επιφάνεια στον  $\mathbb{R}^3$  της οποίας η απεικόνιση Gauss λαμβάνει τιμές σε ένα ημισφαίριο, πρέπει να είναι επίπεδη. Το θεώρημα αυτό οφείλεται στον Bernstein [5] και η απόδειξή του στηρίζεται στο γεγονός ότι η απεικόνιση Gauss είναι ολόμορφη. Υπάρχουν πολλές γενικεύσεις του θεωρήματος Bernstein για πλήρη ελαχιστικά υποπολυπύγματα σε τυχαίες διαστάσεις και συνδιαστάσεις, για παράδειγμα, αναφέρουμε τις εργασίες [12, 15, 16, 23–28]. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε ανώτερες διαστάσεις η απεικόνιση Gauss δεν είναι πλέον ολόμορφη αλλά μόνο αρμονική. Η ιδέα της απόδειξης ενός θεωρήματος Bernstein σε περισσότερες διαστάσεις και συνδιαστάσεις βασίζεται στην ιδιότητα ότι η σύνθεση μιας αρμονικής απεικόνισης με μια λεία και κυρτή συνάρτηση είναι υποαρμονική. Με την βοήθεια μιας εξειδικευμένης αρχής μεγίστου, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η απεικόνιση Gauss είναι σταθερή και το υποπολύπτυγμα ισόπεδο.

Εμείς έχουμε δει ότι ένα μονόνιο μπορεί να θεωρηθεί ως μια ελαχιστική υπερεπιφάνεια κάνοντας όμως μια κατάλληλη σύμμορφη αλλαγή της μετρικής του ευκλείδειου χώρου. Δυστυχώς όμως η απεικόνιση Gauss ενός μονονίου δεν είναι αρμονική, οπότε οι τεχνικές πρέπει να προσαρμοστούν κατάλληλα. Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε ένα θεώρημα τύπου Bernstein για πλήρη μονόνια στον  $R^{n+1}$ . Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε το εξής αποτέλεσμα:

**Κύριο Θεώρημα** (Bao & Shi [4]) *Έστω  $f : M^n \rightarrow R^{n+1}$  ένα προσανατολισμένο και εμπρεπές μονόνιο μεταφοράς. Αν η εικόνα της απεικόνισης Gauss της υπερεπιφάνειας βρίσκεται σε μια γεωδαισιακή μπάλα  $B_\sigma(y_0) \subset S^n$ , όπου  $y_0$  σημείο της σφαίρας και  $\sigma < \pi/2$ , τότε η υπερεπιφάνεια είναι υπερεπίπεδο.*

## 4.1 Βασικές εξίσωσεις

Έστω  $f : M^n \rightarrow R^{n+1}$  ένα προσανατολισμένο μονόνιο μεταφοράς, δηλαδή μια υπερεπιφάνεια η οποία πληροί την εξίσωση

$$H = v^\perp$$

όπου  $v = (0, \dots, 0, 1) \in R^{n+1}$  και  $v^\perp$  η ορθογώνια προβολή του  $v$  στην κάθετη δέσμη της  $f$ . Η ορθογώνια προβολή του  $v$  στην εφαπτόμενη δέσμη της υπερεπιφάνειας θα συμβολίζεται με  $v^\top$ . Συμβολίζουμε με  $\xi$  την απεικόνιση Gauss της  $f$ . Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση ύψους  $u : M^n \rightarrow R$  με τύπο

$$u \doteq \langle f, v \rangle. \quad (4.1)$$

Συμβολίζουμε με  $\xi$  το μοναδιαίο κάθετο της υπερεπιφάνειας  $f$ . Στο παρακάτω λήμμα δίνουμε μερικές ταυτότητες που συνδέουν την αριθμητική μέση καμπυλότητα  $H$  με τη συνάρτηση  $u$ .

**Λήμμα 4.1.1** ([30]). *Ισχύουν οι παρακάτω ταυτότητες:*

- (1)  $\nabla u = v^\top$ ,
- (2)  $|\nabla u|^2 = 1 - H^2$ ,
- (3)  $\nabla^2 u = H A^\xi$ ,
- (4)  $\Delta u + |\nabla u|^2 - 1 = 0$ ,
- (5)  $\nabla H = -A_\xi \nabla u$ ,
- (6)  $\Delta H + H |A^\xi|^2 + \langle \nabla H, \nabla u \rangle = 0$ ,
- (7)  $\text{Ric}(\nabla u, \nabla u) = -|\nabla H|^2 - H \langle \nabla H, \nabla u \rangle$ .

**Απόδειξη:** Έστω τοπικό ορθοκανονικό πλαίσιο  $\{e_1, \dots, e_n\}$  επί του πολυπύγματος  $M^n$  έτσι ώστε σε ένα σημείο  $x$  να ισχύει

$$\nabla_{e_j} e_i|_x = 0, \quad \text{για κάθε } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

(1) Διαφορίζοντας την συνάρτηση  $u$  ως προς την διεύθυνση  $e_i$ , έχουμε

$$e_i u = \langle df(e_i), v \rangle.$$

Συνεπώς,

$$\nabla u = v^\top.$$

(2) Επειδή το διάνυσμα  $v$  είναι μοναδιαίο, λαμβάνουμε την ισότητα

$$1 = |v|^2 = |v^\perp|^2 + |v^\top|^2 = H^2 + |\nabla u|^2.$$

Οπότε η μέση καμπυλότητα είναι πάντα φραγμένη αφού

$$-1 \leq H \leq 1.$$

(3) Διαφορίζοντας το διανυσματικό πεδίο  $\nabla u$  ακόμα μια φορά, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(e_i, e_j) &= e_i e_j u - \langle \nabla u, \nabla_{e_i} e_j \rangle \\ &= e_i \langle df(e_j), v \rangle - \langle df(\nabla_{e_i} e_j), v \rangle = \langle \mathbf{A}(e_i, e_j), v \rangle \\ &= H A^\xi(e_i, e_j). \end{aligned}$$

(4) Από την τελευταία ταυτότητα του εσσιανού της  $u$ , προκύπτει

$$\Delta u = H^2 = 1 - |\nabla u|^2.$$

(5) Διαφορίζοντας την  $H$  ως προς την διεύθυνση  $e_i$ , παίρνουμε

$$\langle \nabla H, e_i \rangle = e_i \langle v, \xi \rangle = \langle v, d\xi(e_i) \rangle = \langle v^\top, d\xi(e_i) \rangle = -A^\xi(\nabla u, e_i).$$

(6) Διαφορίζοντας την κλίση  $\nabla H$  της μέσης καμπυλότητας, και χρησιμοποιώντας την εξίσωση Codazzi, λαμβάνουμε ότι στο σημείο  $x$  ισχύει:

$$\begin{aligned} \nabla^2 H(e_i, e_j) &= \langle \nabla_{e_i} \nabla H, e_j \rangle \\ &= - \sum_{l=1}^n \langle \nabla_{e_i} (A^\xi(\nabla u, e_l) e_l), e_j \rangle \\ &= - \sum_{l=1}^n e_i (A^\xi(\nabla u, e_l)) \delta_{lj} = - \sum_{k=1}^n e_i ((e_k u) A^\xi(e_k, e_j)) \\ &= - \sum_{k=1}^n (\nabla_{e_k} A^\xi)(e_i, e_j) (e_k u) - \sum_{k=1}^n A^\xi(e_k, e_j) \nabla^2 u(e_i, e_k) \\ &= - \sum_{k=1}^n (\nabla_{e_k} A^\xi)(e_i, e_j) (e_k u) - H \sum_{k=1}^n A^\xi(e_k, e_j) A^\xi(e_i, e_k), \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει

$$\Delta H = - \sum_{k=1}^n (e_k H) (e_k u) - H |A^\xi|^2 = - \langle \nabla H, \nabla u \rangle - H |A^\xi|^2.$$

(7) Από την εξίσωση (5), έχουμε

$$|\nabla H|^2 = A^{[2]}(\nabla u, \nabla u)$$

όπου  $A^{[2]}$  είναι ο συμμετρικός 2-τανυστής που δίνεται από τον τύπο

$$A^{[2]}(X, Y) = \sum_{i=1}^n A^\xi(X, e_i) A^\xi(e_i, Y),$$

για κάθε  $X, Y \in TM$ . Ξανά από τη σχέση (5), λαμβάνουμε

$$H \langle \nabla H, \nabla u \rangle = -H A^\xi(\nabla u, \nabla u).$$

Συνεπώς,

$$(H A^\xi - A^{[2]})(\nabla u, \nabla u) = -|\nabla H|^2 - H \langle \nabla H, \nabla u \rangle.$$

Από την εξίσωση του Gauss, το αριστερό μέρος της παραπάνω ταυτότητας ισούται με την καμπυλότητα Ricci της επαγόμενης μετρικής στη διεύθυνση του  $\nabla u$ . Άρα,

$$\text{Ric}(\nabla u, \nabla u) = -|\nabla H|^2 - H \langle \nabla H, \nabla u \rangle.$$

Τούτο ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος.  $\square$

## 4.2 Η απεικόνιση Gauss

Ας υποθέσουμε ότι  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  είναι ένα προσανατολισμένο μονόμοιο μεταφοράς στον Ευκλείδειο χώρο. Τότε η απεικόνιση Gauss  $\xi : M^n \rightarrow S^n$  είναι μια καλά ορισμένη και λεία απεικόνιση με τιμές στην μοναδιαία σφαίρα  $S^n$ .

**Λήμμα 4.2.1.** Η απεικόνιση Gauss  $\xi$  πληροί την ακόλουθη ταυτότητα

$$\Delta \xi = -d\xi(v^\top),$$

όπου  $v^\top$  είναι η εφαπτομενική συνιστώσα του πεδίου  $v$  κατά μήκος της υπερεπιφάνειας.

**Απόδειξη:** Έστω σημείο  $x \in M$  και ένα, τοπικό, ορθομοναδιαίο πλαίσιο  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ορισμένο σε μια περιοχή γύρω από το  $x$ . Επειδή όλοι οι υπολογισμοί μας θα είναι τοπικού χαρακτήρα, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι στο σημείο  $x$  ισχύει

$$\nabla_{e_i} e_j|_x = 0, \quad \text{για κάθε } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$



Από τον τύπο του Weingarten έχουμε ότι

$$d\xi = -df \circ A_\xi,$$

όπου  $A$  είναι ο τελεστής σχήματος της  $f$  ως προς το  $\xi$ . Τότε,

$$|d\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \langle d\xi(e_i), d\xi(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^n \langle A_\xi e_i, A_\xi e_i \rangle = |A_\xi|^2.$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \Delta \xi &= \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i}^{\xi^* T S^n} d\xi(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i}^{\xi^* T R^{n+1}} d\xi(e_i) - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}^{\xi^* T R^{n+1}} d\xi(e_i), \xi \rangle \xi \\ &= - \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i}^{f^* T R^{n+1}} df(A_\xi e_i) + \sum_{i=1}^n \langle d\xi(e_i), d\xi(e_i) \rangle \xi \\ &= - \sum_{i=1}^n A(e_i, A_\xi e_i) - \sum_{i=1}^n df(\nabla_{e_i} A_\xi e_i) + \sum_{i=1}^n \langle d\xi(e_i), d\xi(e_i) \rangle \xi \\ &= - \sum_{i=1}^n \langle A_\xi e_i, A_\xi e_i \rangle \xi - \sum_{i=1}^n df(\nabla_{e_i} A_\xi e_i) + \sum_{i=1}^n \langle d\xi(e_i), d\xi(e_i) \rangle \xi \\ &= - \sum_{i=1}^n df(\nabla_{e_i} A_\xi e_i) = - \sum_{i=1}^n df((\nabla_{e_i} A_\xi) e_i). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Από την εξίσωση Codazzi, έχουμε

$$\sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} A_\xi) e_i = \sum_{i,j=1}^n \{(\nabla_{e_i} A^\xi)(e_i, e_j)\} e_j = \sum_{i,j=1}^n \{(\nabla_{e_j} A^\xi)(e_i, e_i)\} e_j = \nabla H.$$

Επομένως, από την (4.2), παίρνουμε

$$\Delta \xi = -df(\nabla H).$$

Από την υπόθεση ότι η υπερεπιφάνεια είναι μονόνιο μεταφοράς, από το Λήμμα (4.1.1)(5), λαμβάνουμε

$$df(\nabla H) = -df(A_\xi v^\top) = d\xi(v^\top). \quad (4.3)$$

Συνδυάζοντας τις ταυτότητες (4.2) και (4.3), λαμβάνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

Θα χρειαστούμε στη συνέχεια μια πολύ σημαντική (γενική) ταυτότητα την οποία παραθέτουμε στο παρακάτω λήμμα. Η ταυτότητα είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως **τύπος του Bochner**.

**Λήμμα 4.2.2.** Έστω  $\psi : M \rightarrow \bar{M}$  μια απεικόνιση μεταξύ πολυπύγματος Riemann. Τότε, ισχύει η ταυτότητα

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|d\psi|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \Delta|\psi_i|^2 = \sum_{i,j=1}^n |\psi_{ij}|^2 + \sum_{i=1}^n \langle \psi_i, \nabla_{e_i}^{\psi^*T\bar{M}}(\Delta\psi) \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^n R_{ij}\langle \psi_i, \psi_j \rangle - \sum_{i,j=1}^n \overline{\text{Riem}}(\psi_i, \psi_j, \psi_i, \psi_j), \end{aligned}$$

όπου οι δείκτες δηλώνουν συνιστώσες ως προς τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο.

**Απόδειξη:** Έστω  $x \in M$  και  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ένα τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο ορισμένο σε μια περιοχή του  $x$  τέτοιο ώστε να ισχύει  $\nabla_{e_i} e_j|_x = 0$ , για κάθε  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Στο  $x \in M$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|d\psi|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n e_i e_i \langle d\psi(e_j), d\psi(e_j) \rangle = \sum_{i,j=1}^n e_i \langle \nabla_{e_i}^{\psi^*T\bar{M}} d\psi(e_j), d\psi(e_j) \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n e_i \langle \nabla_{e_j}^{\psi^*T\bar{M}} d\psi(e_i), d\psi(e_j) \rangle + \sum_{i,j=1}^n e_i \langle d\psi([e_i, e_j]), d\psi(e_j) \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{e_i}^{\psi^*T\bar{M}} \nabla_{e_j}^{\psi^*T\bar{M}} d\psi(e_i), d\psi(e_j) \rangle + \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{e_j}^{\psi^*T\bar{M}} d\psi(e_i), \nabla_{e_i}^{\psi^*T\bar{M}} d\psi(e_j) \rangle \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{e_i}^{\psi^*T\bar{M}} d\psi([e_i, e_j]), d\psi(e_j) \rangle. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τον κάθε όρο της παραπάνω ταυτότητας ξεχωριστά. Χρησιμοποιώντας τον τανυστή καμπυλότητας Riemann και εκτιμώντας στο  $x$ , μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} I &\doteq \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{e_i}^{\psi^*T\bar{M}} \nabla_{e_j}^{\psi^*T\bar{M}} d\psi(e_i), d\psi(e_j) \rangle \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \overline{\text{Riem}}(d\psi(e_i), d\psi(e_j), d\psi(e_i), d\psi(e_j)) \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{e_j}^{\psi^*T\bar{M}} \nabla_{e_i}^{\psi^*T\bar{M}} d\psi(e_i), d\psi(e_j) \rangle. \end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{e_j}^{\psi^* T \bar{M}} \nabla_{e_i}^{\psi^* T \bar{M}} d\psi(e_i), d\psi(e_j) \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n e_j \langle (\nabla d\psi(e_i, e_i)), d\psi(e_j) \rangle - \sum_{i,j=1}^n \langle (\nabla d\psi(e_i, e_i)), (\nabla d\psi(e_j, e_j)) \rangle \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^n e_j \langle d\psi(\nabla_{e_i} e_i), d\psi(e_j) \rangle \\
&= \sum_{j=1}^n e_j \langle \Delta\psi, d\psi(e_j) \rangle - \langle \Delta\psi, \Delta\psi \rangle + \sum_{i,j=1}^n \langle d\psi(\nabla_{e_j} \nabla_{e_i} e_i), d\psi(e_j) \rangle \\
&= \sum_{j=1}^n \langle \nabla_{e_j}^{\psi^* T \bar{M}} \Delta\psi, d\psi(e_j) \rangle + \sum_{i,j=1}^n \langle d\psi(\nabla_{e_j} \nabla_{e_i} e_i), d\psi(e_j) \rangle.
\end{aligned}$$

Επιπλέον, στο σημείο  $x$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
II &\doteq \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{e_i}^{\psi^* T \bar{M}} d\psi([e_i, e_j]), d\psi(e_j) \rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle d\psi(\nabla_{e_i} [e_i, e_j]), d\psi(e_j) \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle d\psi(\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} e_j), d\psi(e_j) \rangle - \sum_{i,j=1}^n \langle d\psi(\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_i), d\psi(e_j) \rangle \\
&= \sum_{i,j,k=1}^n e_i (\omega_{jk}(e_i)) \langle d\psi(e_k), d\psi(e_j) \rangle - \sum_{i,j=1}^n \langle d\psi(\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_i), d\psi(e_j) \rangle,
\end{aligned}$$

όπου

$$\omega_{ij}(e_k) \doteq \langle \nabla_{e_j} e_i, e_k \rangle, \quad \text{για κάθε } i, j, k \in \{1, \dots, n\}.$$

Παρατηρούμε ότι,

$$\omega_{jk}(e_i) = -\omega_{kj}(e_i) \quad \text{και} \quad \langle d\psi(e_k), d\psi(e_j) \rangle = \langle d\psi(e_j), d\psi(e_k) \rangle.$$

Επίσης, στο σημείο  $x$ ,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_i - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} e_i) &= \sum_{i=1}^n R(e_i, e_j, e_i) = \sum_{i,k=1}^n \text{Riem}(e_i, e_j, e_i, e_k) e_k \\
&= \sum_{i=1}^n \text{Ric}(e_j, e_i) e_i.
\end{aligned}$$

Επομένως, συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, οδηγούμαστε στο ζητούμενο.  $\square$

**Λήμμα 4.2.3.** Η απεικόνιση Gauss  $\xi : M^n \rightarrow S^n$  πληροί την ακόλουθη ταυτότητα,

$$\Delta|d\xi|^2 + \langle v^\top, \nabla|d\xi|^2 \rangle = 2|\nabla d\xi|^2 - 2|d\xi|^4.$$

Η ταυτότητα αυτή αναφέρεται στη βιβλιογραφία και ως τύπος του Simons.

**Απόδειξη:** Ας θεωρήσουμε ένα τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο το οποίο διαγωνιοποιεί τον τελεστή σχήματος  $A_\xi$ . Τότε

$$d\xi(e_i) = -df(A_\xi e_i) = -\lambda_i df(e_i),$$

για κάθε  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Επίσης

$$|d\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

Ως προς αυτό το πλαίσιο, από τον τύπο του Gauss, για κάθε  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , έχουμε

$$\text{Ric}(e_i, e_j) = H\lambda_i\delta_{ij} - \lambda_i^2\delta_{ij},$$

από όπου βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \text{Ric}(e_i, e_j) \langle d\xi(e_i), d\xi(e_j) \rangle \\ = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \text{Ric}(e_i, e_i) = H \sum_{i=1}^n \lambda_i^3 - \sum_{i=1}^n \lambda_i^4. \end{aligned} \quad (4.4)$$

και

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \overline{\text{Riem}}(d\xi(e_i), d\xi(e_j), d\xi(e_i), d\xi(e_j)) \\ = \sum_{i,j=1}^n (1 - \delta_{ij}) |d\xi(e_i)|^2 |d\xi(e_j)|^2 = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i^2 \lambda_j^2 - \sum_{i=1}^n |d\xi(e_i)|^4 \\ = |d\xi|^4 - \sum_{i=1}^n \lambda_i^4. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Επιπρόσθετα κάνοντας χρήση τον τύπο του Λήμματος (4.2.1), έχουμε

$$\begin{aligned} 2\langle d\xi(e_i), \nabla_{e_i}^{\xi^*TS^n}(\Delta\xi) \rangle &= -2\langle d\xi(e_i), \nabla_{e_i}^{\xi^*TS^n} d\xi(v^\top) \rangle \\ &= -2\langle d\xi(e_i), \nabla_{v^\top}^{\xi^*TS^n} d\xi(e_i) \rangle - 2\langle d\xi(e_i), d\xi([e_i, v^\top]) \rangle \\ &= -v^\top(|d\xi(e_i)|^2) - 2\langle d\xi(e_i), d\xi(\nabla_{e_i} v^\top) \rangle. \end{aligned}$$

Θυμίζουμε ότι από το Λήμμα (4.1.1)(1) την ταυτότητα

$$v^\top = \nabla u,$$

όπου  $u$  είναι η συνάρτηση ύψους. Χρησιμοποιώντας και τις υπόλοιπες ταυτότητες που αποδείξαμε στο Λήμμα (4.1.1), έχουμε

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n \langle d\xi(e_i), \nabla_{e_i}^* TS^n(\Delta\xi) \rangle &= - \sum_{i=1}^n v^\top (|d\xi(e_i)|^2) - 2 \sum_{i=1}^n \langle d\xi(e_i), d\xi(\nabla_{e_i} \nabla u) \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^n v^\top (|d\xi(e_i)|^2) - 2 \sum_{i=1}^n \langle A_\xi e_i, A_\xi \nabla_{e_i} \nabla u \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^n v^\top (|d\xi(e_i)|^2) - 2 \sum_{i=1}^n \langle A_\xi^2 e_i, \nabla_{e_i} \nabla u \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^n v^\top (|d\xi(e_i)|^2) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \nabla^2 u(e_i, e_i) \\ &= - \sum_{i=1}^n v^\top (|d\xi(e_i)|^2) - 2H \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 A(e_i, e_i) \\ &= - \sum_{i=1}^n v^\top (|d\xi(e_i)|^2) - 2H \sum_{i=1}^n \lambda_i^3. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Συνδυάζοντας τις ταυτότητες (4.4), (4.5), (4.6) με τον τύπο Bochner του Λήμματος (4.2.2), παίρνουμε το ζητούμενο.  $\square$

**Λήμμα 4.2.4.** Έστω  $B_\sigma(y_0)$  γεωδαισιακή μπάλα της μοναδιαίας σφαίρας  $S^n$  με κέντρο το σημείο  $y_0 \in S^n$  και ακτίνα  $\sigma < \pi/2$ . Η συνάρτηση  $\varrho : B_\sigma(y_0) \subset S^n \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$\varrho(y) = 1 - \cos d(y),$$

όπου  $d$  η συνάρτηση απόστασης στην  $S^n$  από το  $y_0$ , ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(1) Υπάρχει σταθερά  $b$  τέτοια ώστε  $0 \leq \varrho < b < 1$ .

(2) Ισχύει ότι

$$\varrho_d = \sin d.$$

(3) Ισχύει η ταυτότητα

$$\nabla^2 \varrho = (\cos d)I,$$

όπου με  $I$  συμβολίζουμε τον μοναδιαίο ενδομορφισμό στην εφαπτόμενη δέσμη της σφαίρας. Με άλλα λόγια, η συνάρτηση  $\varrho$  είναι κυρτή στην μπάλα  $B_\sigma(y_0)$ .

**Απόδειξη:** Εάν  $y_0, y \in S^n \subset R^{n+1}$ , τότε η σφαιρική απόσταση του  $y$  από το  $y_0$  δίνεται από τον τύπο

$$d(y_0, y) = \arccos \langle y_0, y \rangle, \quad \text{για κάθε } y \in S^n$$

Επομένως,

$$\varrho(y) = 1 - \langle y_0, y \rangle, \quad \text{για κάθε } y \in S^n.$$

Οπότε, λόγω των υποθέσεων μας, είναι προφανές ότι υπάρχει σταθερά  $b > 0$  ούτως ώστε  $0 \leq \varrho < b < 1$ . Η δεύτερη ισότητα είναι τετριμμένη. Ας υπολογίσουμε τώρα τον εσσιανό της συνάρτησης  $\varrho$ . Για ευκολία στους υπολογισμούς, συμβολίζουμε με  $D$  τη συνοχή Levi-Civita του  $R^{n+1}$  και με  $\bar{\nabla}$  τη συνοχή Levi-Civita της σφαίρας. Θεωρούμε ένα τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο  $\{e_1, \dots, e_n\}$  επί της  $S^n$ . Παραγωγίζοντας την  $\varrho$ , βρίσκουμε

$$e_i(\varrho) = -e_i \langle y_0, y \rangle = -\langle y_0, e_i \rangle.$$

Ξαναπαραγωγίζοντας, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} e_j e_i(\varrho) &= -e_j \langle y_0, e_i \rangle = -\langle y_0, D_{e_j} e_i \rangle = \langle y_0, y \rangle \delta_{ij} - \langle y_0, \bar{\nabla}_{e_j} e_i \rangle \\ &= \langle y_0, y \rangle \delta_{ij} + \bar{\nabla}_{e_j} e_i(\varrho), \end{aligned}$$

για κάθε  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Επομένως,

$$\nabla^2 \varrho(e_j, e_i) = e_j e_i(\varrho) - \bar{\nabla}_{e_j} e_i(\varrho) = \langle y_0, y \rangle \delta_{ij} = (\cos d) \delta_{ij},$$

για κάθε  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

### 4.3 Ένα θεώρημα ακαμψίας

Είμαστε έτοιμοι τώρα να διατυπώσουμε και αποδείξουμε το κύριο θεώρημα αυτού του κεφαλαίου.

**Θεώρημα 4.3.1** (Bao & Shi [4]). *Έστω  $f : M^n \rightarrow R^{n+1}$  ένα προσανατολισμένο και εμπρεπές μονότιο μεταφοράς. Αν η εικόνα της απεικόνισης Gauss της υπερεπιφάνειας βρίσκεται σε μια γεωδαισιακή μπάλα  $B_\sigma(y_0) \subset S^n$ , όπου  $y_0$  σημείο της σφαίρας και  $\sigma < \pi/2$ , τότε η υπερεπιφάνεια είναι υπερεπίπεδο.*

**Απόδειξη:** Επιλεγούμε την κυρτή συνάρτηση  $\varrho$  του Λήμματος 4.2.4 και θεωρούμε τη νέα συνάρτηση  $g = \varrho \circ \xi$ . Επίσης, θεωρούμε ένα τοπικό ορθομοναδιαίο πλαίσιο  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Τότε, για κάθε  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , έχουμε

$$dg = d\varrho \circ d\xi \quad \text{και} \quad \nabla^2 g(e_i, e_j) = \nabla^2 \varrho(d\xi(e_i), d\xi(e_j)) + d\varrho(\nabla^2 \xi(e_i, e_j)).$$

Συνεπώς, από το Λήμμα 4.2.4, το Λήμμα 4.2.1 και τον τύπο του Weingarten, βρίσκουμε ότι

$$\Delta g = (\cos d)|d\xi|^2 - \langle \nabla g, v^\top \rangle. \quad (4.7)$$

Ορίζουμε τη βοηθητική συνάρτηση  $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$\phi = \frac{|d\xi|^2}{(b - \varrho \circ \xi)^2} = \frac{|d\xi|^2}{(b - g)^2}.$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$\nabla \phi = \frac{\nabla |d\xi|^2}{(b - g)^2} + 2 \frac{|d\xi|^2 \nabla g}{(b - g)^3}. \quad (4.8)$$

Επιπλέον, κάνοντας των ταυτοτήτων του Λήμματος (1.1.3), βρίσκουμε ότι

$$\Delta \phi = \frac{\Delta |d\xi|^2}{(b - g)^2} + 2 \frac{|d\xi|^2 \Delta g}{(b - g)^3} + 6 \frac{|d\xi|^2 |\nabla g|^2}{(b - g)^4} + 4 \frac{\langle \nabla |d\xi|^2, \nabla g \rangle}{(b - g)^3}. \quad (4.9)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.7), λαμβάνουμε

$$\frac{2|d\xi|^2 \Delta g}{(b - g)^3} = \frac{2(\cos d)|d\xi|^4 - 2\langle \nabla g, v^\top \rangle |d\xi|^2}{(b - g)^3},$$

και σε συνδυασμό με την (4.2.3), η (4.9) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \frac{2|\nabla^2 \xi|^2 - 2|d\xi|^4 - \langle v^\top, \nabla |d\xi|^2 \rangle}{(b - g)^2} + \frac{4\langle \nabla g, \nabla |d\xi|^2 \rangle}{(b - g)^3} \\ &+ \frac{2(\cos d)|d\xi|^4 - 2\langle |d\xi|^2 \nabla g, v^\top \rangle}{(b - g)^3} + \frac{6|\nabla g|^2 |d\xi|^2}{(b - g)^4}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Παρατηρούμε ότι, από τη σχέση (4.8), έχουμε

$$\begin{aligned} \langle v^\top, \nabla \phi \rangle &= \frac{\langle v^\top, \nabla |d\xi|^2 \rangle}{(b - g)^2} + \frac{2|d\xi|^2 \langle v^\top, \nabla g \rangle}{(b - g)^3}, \\ \frac{\langle \nabla g, \nabla \phi \rangle}{b - g} &= \frac{\langle \nabla g, \nabla |d\xi|^2 \rangle}{(b - g)^3} + \frac{2|d\xi|^2 |\nabla g|^2}{(b - g)^4}. \end{aligned}$$

Επιπρόσθετα, από την ανισότητα  $x^2 + y^2 \geq 2xy$ , από την ανισότητα του Kato,

$$2|d\xi| |\nabla^2 \xi| \geq |\nabla |d\xi|^2|,$$

και από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, έχουμε ότι

$$\frac{2|\nabla^2 \xi|^2}{(b - g)^2} + \frac{2|\nabla g|^2 |d\xi|^2}{(b - g)^4} \geq \frac{4|\nabla g| |d\xi| |\nabla^2 \xi|}{(b - g)^3} \geq \frac{2|\nabla g| |\nabla |d\xi|^2|}{(b - g)^3} \geq -2 \frac{\langle \nabla g, \nabla |d\xi|^2 \rangle}{(b - g)^3}.$$

Επομένως, η (4.10) γίνεται

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &\geq \frac{2(\cos d)|d\xi|^4}{(b-g)^3} - \frac{2|d\xi|^4}{(b-g)^2} + \frac{2\langle\nabla g, \nabla\phi\rangle}{b-g} - \langle v^\top, \nabla\phi\rangle \\
&= 2(\cos d)(b-g)\frac{|d\xi|^4}{(b-g)^4} - 2(b-g)^2\frac{|d\xi|^4}{(b-g)^4} + \frac{2\langle\nabla g, \nabla\phi\rangle}{b-g} - \langle v^\top, \nabla\phi\rangle \\
&= 2(\cos d)(b-g)\phi^2 - 2(b-g)^2\phi^2 + \frac{2\langle\nabla g, \nabla\phi\rangle}{b-g} - \langle v^\top, \nabla\phi\rangle. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση απόστασης  $r : M^n \rightarrow R$  του τυχαίου σημείου του  $f(M^n)$  από την αρχή των αξόνων, δηλαδή τη συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$r(x) \doteq |f(x)|.$$

Προφανώς η  $r^2$  είναι λεία και η  $r$  είναι λεία μακριά από την αρχή. Τότε,

$$2re_i r = e_i r^2 = 2\langle df(e_i), f \rangle \leq 2|df(e_i)||f| \leq 2r,$$

από όπου προκύπτει ότι

$$|\nabla r| \leq \sqrt{n}. \tag{4.12}$$

μακριά από την αρχή. Επιπλέον,

$$e_i e_i(r^2) = 2\langle D_{e_i} df(e_i), f \rangle + 2\langle df(e_i), df(e_i) \rangle.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\Delta r^2 &= 2 \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{A}(e_i, e_i), f \rangle + 2 \sum_{i=1}^n |df(e_i)|^2 = 2\langle \mathbf{H}, f \rangle + 2n \\
&\leq 2|f| + 2n \leq 2n(|f| + 1) \\
&= 2n(1 + r). \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η αρχή των αξόνων  $O$  του  $R^{n+1}$  ανήκει στην υπερεπιφάνεια. Συμβολίζουμε με  $D_a$  την μπάλα ακτίνας  $a$  του  $R^{n+1}$  με κέντρο το  $O$  και ορίζουμε τη συνάρτηση  $G_a : M_a = M^n \cap D_a \rightarrow R$  με τύπο

$$G_a = (a^2 - r^2)^2 \phi \geq 0.$$

Εάν η συνάρτηση  $G_a$  είναι ταυτοτικά μηδέν, τότε δεν έχουμε κάτι να αποδείξουμε. Οπότε, ας εστιάσουμε στην περίπτωση κατά την οποία κάτι τέτοιο δεν αληθεύει (με σκοπό να καταλήξουμε σε αντίφαση). Επειδή  $G_a|_{\partial M_a} \equiv 0$ , τότε υπάρχει σημείο  $x_0$  στο εσωτερικό του  $M_a$  όπου η  $G_a$  λαμβάνει απόλυτο θετικό μέγιστο. Άρα στο  $x_0$  ισχύει

$$\nabla G_a(x_0) = 0 \quad \text{και} \quad \Delta G_a(x_0) \leq 0.$$



Άμεσα προκύπτει, ότι στο  $x_0$ , ισχύουν τα εξής

$$\nabla G_a = (a^2 - r^2)^2 \nabla \phi - 4r(a^2 - r^2) \phi \nabla r = 0, \quad (4.14)$$

και

$$\begin{aligned} \Delta G_a &= (a^2 - r^2)^2 \Delta \phi - 8r(a^2 - r^2) \langle \nabla \phi, \nabla r \rangle \\ &\quad + 8r^2 \phi |\nabla r|^2 - 2(a^2 - r^2) \phi \Delta r^2 \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Από την (4.14) λαμβάνουμε ότι στο  $x_0$  έχουμε

$$\frac{\nabla \phi}{\phi} = \frac{4r \nabla r}{a^2 - r^2}, \quad (4.16)$$

ένω από την (4.15), διαιρώντας κατά μέλη με

$$\frac{1}{\phi(a^2 - r^2)^2} > 0,$$

έχουμε ότι στο  $x_0$ , ισχύει

$$\frac{\Delta \phi}{\phi} - \frac{8r \langle \nabla \phi, \nabla r \rangle}{\phi(a^2 - r^2)} + \frac{8r^2 |\nabla r|^2}{(a^2 - r^2)^2} - \frac{2\Delta r^2}{a^2 - r^2} \leq 0.$$

Κάνοντας χρήση της ανισότητας (4.13), καταλήγουμε στην

$$\frac{\Delta \phi}{\phi} - \frac{8r \langle \nabla \phi, \nabla r \rangle}{\phi(a^2 - r^2)} + \frac{8r^2 |\nabla r|^2}{(a^2 - r^2)^2} - \frac{4n(1+r)}{a^2 - r^2} \leq 0.$$

Χρησιμοποιώντας την (4.16) και εφόσον

$$\frac{8r^2 |\nabla r|^2}{(a^2 - r^2)^2} \geq 0,$$

προκύπτει

$$\frac{\Delta \phi}{\phi} - \frac{32r^2 |\nabla r|^2}{(a^2 - r^2)^2} - \frac{4n(1+r)}{a^2 - r^2} \leq 0.$$

Εφόσον από την (4.12) έχουμε  $-|\nabla r| \geq -\sqrt{n}$ , προκύπτει ότι στο  $x_0$  έχουμε

$$\frac{\Delta \phi}{\phi} - \frac{32r^2 n}{(a^2 - r^2)^2} - \frac{4n(1+r)}{a^2 - r^2} \leq 0.$$

Άρα, μπορούμε να γράψουμε ότι στο  $x_0$  ισχύει η ανισότητα

$$\frac{\Delta\phi}{\phi} - \frac{Cr^2}{(a^2 - r^2)^2} - \frac{C(1+r)}{a^2 - r^2} \leq 0. \quad (4.17)$$

όπου η σταθερά  $C$  εξαρτάται μόνο από το  $n$ .

Διαίροντας την (4.11) με  $\phi > 0$ , έχουμε

$$\frac{\Delta\phi}{\phi} \geq 2(\cos d)(b-g)\phi - 2(b-g)^2\phi + \frac{2\langle\nabla g, \nabla \log \phi\rangle}{b-g} - \langle v^\top, \nabla \log \phi\rangle.$$

Άρα, συνδυάζοντας με την (4.17), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} & 2(\cos d)(b-g)\phi - 2(b-g)^2\phi + \frac{2\langle\nabla g, \nabla \log \phi\rangle}{b-g} \\ & - \langle v^\top, \nabla \log \phi\rangle - \frac{Cr^2}{(a^2 - r^2)^2} - \frac{C(1+r)}{a^2 - r^2} \\ & \leq 0. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την (4.16), τελικά έχουμε

$$\begin{aligned} & \left(2(\cos d)(b-g) - 2(b-g)^2\right)\phi + \frac{8r\langle\nabla g, \nabla r\rangle}{(b-g)(a^2 - r^2)} \\ & - \frac{4r\langle\nabla r, v^\top\rangle}{a^2 - r^2} - \frac{Cr^2}{(a^2 - r^2)^2} - \frac{C(1+r)}{a^2 - r^2} \\ & \leq 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Επειδή

$$|v^\top| \leq 1 \quad \text{και} \quad |\nabla r| \leq \sqrt{n},$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, έχουμε

$$-\frac{4r\langle\nabla r, v^\top\rangle}{a^2 - r^2} \geq -\frac{4r|\langle\nabla r, v^\top\rangle|}{a^2 - r^2} \geq -\frac{4r\sqrt{n}}{a^2 - r^2}.$$

Επιπλέον, από την (4.12) και την ανισότητα Cauchy-Schwarz, προκύπτει ότι

$$\frac{8r\langle\nabla g, \nabla r\rangle}{(b-g)(a^2 - r^2)} \geq -\frac{8r\sqrt{n}|\nabla g|}{(b-\psi)(a^2 - r^2)}.$$

Επομένως, η (4.18), γίνεται

$$\begin{aligned} & \left(2(\cos d)(b-g) - 2(b-g)^2\right)\phi - \frac{8r\sqrt{n}|\nabla g|}{(b-g)(a^2 - r^2)} \\ & - \frac{4r\sqrt{n}}{a^2 - r^2} - \frac{Cr^2}{(a^2 - r^2)^2} - \frac{C(1+r)}{a^2 - r^2} \\ & \leq 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Εφόσον  $a > r$  και

$$|\nabla g| \leq |d\rho||d\xi| \leq |d\xi|,$$

καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\begin{aligned} & \left(2(\cos d)(b - \psi) - 2(b - g)^2\right)\phi - \frac{8r\sqrt{n}|d\xi|}{(b - g)(a^2 - r^2)} \\ & - \frac{Ca}{a^2 - r^2} - \frac{Cr^2}{(a^2 - r^2)^2} - \frac{C(1 + r)}{a^2 - r^2} \\ & \leq 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Από τον ορισμό των  $G_a$  και  $g$ , έχουμε

$$\begin{aligned} & \left(2(\cos d)(b - g) - 2(b - g)^2\right)\frac{G_a}{(a^2 - r^2)^2} - 8\frac{\sqrt{nr}|d\xi|}{(b - g)(a^2 - r^2)} \\ & - \frac{Ca}{a^2 - r^2} - \frac{Cr^2}{(a^2 - r^2)^2} - \frac{C(1 + r)}{a^2 - r^2} \\ & \leq 0, \end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} & \left(2(\cos d)(b - g) - 2(b - g)^2\right)\frac{G_a}{(a^2 - r^2)^2} \\ & - 8\frac{\sqrt{nr}\sqrt{\phi}}{(a^2 - r^2)} - \frac{Ca}{a^2 - r^2} - \frac{Cr^2}{(a^2 - r^2)^2} - \frac{C(1 + r)}{a^2 - r^2} \\ & \leq 0. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας με  $(a^2 - r^2)^2$ , έχουμε

$$\begin{aligned} & \left(2(\cos d)(b - g) - 2(b - g)^2\right)G_a \\ & - 8\sqrt{nr}(a^2 - r^2)\sqrt{\phi} - Ca(a^2 - r^2) - Cr^2 - C(1 + r)(a^2 - r^2) \\ & \leq 0, \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & \left(2(\cos d)(b - g) - 2(b - g)^2\right)G_a - 8\sqrt{nr}\sqrt{G_a} \\ & - Ca(a^2 - r^2) - Cr^2 - C(1 + r)(a^2 - r^2) \\ & \leq 0. \end{aligned}$$

Εφόσον  $-r^2 > -a^2$ ,  $-(1+r) > -(1+a)$  και  $-(a^2 - r^2) > -2a^2$ , έχουμε

$$\left(2(\cos d)(b-g) - 2(b-g)^2\right)G_a - 8\sqrt{na}\sqrt{G_a} - 4Ca^3 - 3Ca^2 \leq 0.$$

Άρα

$$2(b-g)\left(\cos d - (b-g)\right)G_a - 8\sqrt{na}\sqrt{G_a} - 4Ca^3 - 3Ca^2 \leq 0.$$

Τώρα, εφόσον

$$\cos d - (b-g) = 1 - b > 0 \quad \text{και} \quad b-g > b - \varrho(\sigma) > 0,$$

προκύπτει ότι τελικά στο σημείο  $x_0$  ισχύει

$$G_a - c_0a\sqrt{G_a} - c_0a^3 - c_0a^2 \leq 0,$$

όπου  $c_0$  είναι μια θετική σταθερά. Θεωρούμε την αντίστοιχη εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού

$$\left(\sqrt{G_a}\right)^2 - c_0a\sqrt{G_a} - (c_0a^3 + c_0a^2) = 0.$$

Οι ρίζες της είναι

$$\sqrt{G_1} = \frac{c_0a - \sqrt{c_0^2a^2 + 4(c_0a^3 + c_0a^2)}}{2}$$

και

$$\sqrt{G_2} = \frac{c_0a + \sqrt{c_0^2a^2 + 4(c_0a^3 + c_0a^2)}}{2}.$$

Από τα παραπάνω και από το γεγονός ότι το σημείο  $x_0$  είναι σημείο μεγίστου, προκύπτει

$$\sup_{M_a} \sqrt{G_a(x)} \leq \sqrt{G_a(x_0)} \leq \frac{c_0a + \sqrt{c_0^2a^2 + 4(c_0a^3 + c_0a^2)}}{2}.$$

Οπότε,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left( \sup_{M_a} \frac{|d\xi|(x_0)}{b-g} \right) \leq \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{c_0a + \sqrt{c_0^2a^2 + 4(c_0a^3 + c_0a^2)}}{2(a^2 - r^2(x_0))} = 0,$$

από όπου λαμβάνουμε το ζητούμενο.  $\square$

## 4.4 Το θεώρημα του Moser

Ακριβώς η ίδια μεθοδολογία του Θεωρήματος 4.3.1 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχθεί το εξής σημαντικό θεώρημα του Moser [31].

**Θεώρημα 4.4.1.** *Εστω  $f : M^n \rightarrow R^{n+1}$  μια προσανατολισίμη εμπρεπής ελαχιστική υπερεπιφάνεια. Αν η εικόνα της απεικόνισης Gauss της υπερεπιφάνειας βρίσκεται σε μια γεωδαισιακή μπάλα  $B_\sigma(y_0) \subset S^n$ , όπου  $y_0$  σημείο της σφαίρας και  $\sigma < \pi/2$ , τότε η υπερεπιφάνεια είναι υπερεπίπεδο.*

# Βιβλιογραφία

- [1] S. Altschuler and L.-F. Wu, *Translating surfaces of the non-parametric mean curvature flow with prescribed contact angle*, Calc. Var. Partial Differential Equations **2** (1994), 101-111.
- [2] S. Angenent, *On the formation of singularities in the curve shortening flow*, J. Differential Geom. **33** (1991), 601-633.
- [3] W. Ballmann, *Vector bundles and connections*, Lecture Notes - University of Bonn (Germany), 1999.
- [4] C. Bao and Y. Shi, *Gauss maps of translating solitons of mean curvature flow*, Proc. Amer. Math. Soc. **142** (2014), 4333-4339.
- [5] S. Bernstein, *Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus*, Math. Z. **26** (1927), 551-558.
- [6] S. Bernstein, *Conditions nécessaires et suffisantes pour la possibilité du problème de Dirichlet*, C. R. Acad. Sci., Paris **150** (1910), 514-515.
- [7] T. H. Colding and W. P. Minicozzi II, *Generic mean curvature flow I: generic singularities*, Ann. of Math. (2) **175** (2012), 755-833.
- [8] T.H. Colding and W.P. Minicozzi II, *Complexity of parabolic systems*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **132** (2020), 83-135.
- [9] J. Clutterbuck, O. Schnürer, and F. Schulze, *Stability of translating solutions to mean curvature flow*, Calc. Var. Partial Differential Equations **29** (2007), 281-293.
- [10] M. Dajczer and R. Tojeiro, *Submanifold theory beyond an introduction*, Universitext, Springer, New York, 2019.
- [11] K. Ecker and G. Huisken, *Mean curvature evolution of entire graphs*, Ann. of Math. (2) **130** (1989), 453-471.
- [12] K. Ecker and G. Huisken, *A Bernstein result for minimal graphs of controlled growth*, J. Differential Geom. **31** (1990), 397-400.
- [13] J.-H. Eschenburg, *Maximum principle for hypersurfaces*, Manuscripta Math. **64** (1989), 55-75.
- [14] R. Hamilton, *Harnack estimate for the mean curvature flow*, J. Differential Geom. **41** (1995), 215-226.
- [15] Th. Hasanis, A. Savas-Halilaj, and Th. Vlachos, *On the Jacobian of minimal graphs in  $\mathbb{R}^4$* , Bull. Lond. Math. Soc. **43** (2011), 321-327.

- [16] Th. Hasanis, A. Savas-Halilaj, and Th. Vlachos, *Minimal graphs in  $\mathbb{R}^4$  with bounded Jacobians*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 3463-3471.
- [17] W. Hurewicz, *Lectures on ordinary differential equations*, New York: John Wiley & Sons, Inc.; London: Chapman & Hall, Ltd. XVII, 1958.
- [18] D. Hoffman, F. Martín, and B. White, *Annuloids and  $\Delta$ -wings*, Adv. Nonlinear Stud. **24** (2024), 74-96.
- [19] D. Hoffman, F. Martín, and B. White, *Scherk-like translators for mean curvature flow*, J. Differential Geom. **122** (2022), 421-465.
- [20] D. Hoffman, F. Martín, and B. White, *Nguyen's tridents and the classification of semigraphical translators for mean curvature flow*, J. Reine Angew. Math. **786** (2022), 79-105.
- [21] T. Ilmanen, *Elliptic regularization and partial regularity for motion by mean curvature*, Mem. Amer. Math. Soc. **108** (1994), no. 520.
- [22] J. Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*, Universitext, Springer, Cham, 2017.
- [23] J. Jost, Y.-L. Xin, and L. Yang, *A spherical Bernstein theorem for minimal submanifolds of higher codimension*, Calc. Var. Partial Differential Equations **57** (2018), Paper No. 166, 21.
- [24] J. Jost, Y.-L. Xin, and L. Yang, *Submanifolds with constant Jordan angles and rigidity of the Lawson-Osserman cone*, Asian J. Math. **22** (2018), 75-109.
- [25] J. Jost, Y.-L. Xin, and L. Yang, *The geometry of Grassmannian manifolds and Bernstein-type theorems for higher codimension*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **16** (2016), 1-39.
- [26] J. Jost, Y.-L. Xin, and L. Yang, *The Gauss image of entire graphs of higher codimension and Bernstein type theorems*, Calc. Var. Partial Differential Equations **47** (2013), 711-737.
- [27] J. Jost, Y.-L. Xin, and L. Yang, *The regularity of harmonic maps into spheres and applications to Bernstein problems*, J. Differential Geom. **90** (2012), 131-176.
- [28] J. Jost and Y.-L. Xin, *Bernstein type theorems for higher codimension*, Calc. Var. Partial Differential Equations **9** (1999), 277-296.
- [29] F. Martín, J. Pérez García, A. Savas-Halilaj, and K. Smoczyk, *A characterization of the grim reaper cylinder*, J. Reine Angew. Math. **746** (2019), 1-28.
- [30] F. Martín, A. Savas-Halilaj, and K. Smoczyk, *On the topology of translating solitons of the mean curvature flow*, Calc. Var. Partial Differential Equations **54** (2015), 2853-2882.
- [31] J. Moser, *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 577-591.
- [32] A. Neves and G. Tian, *Translating solutions to Lagrangian mean curvature flow*, Trans. Amer. Math. Soc. **365** (2013), no. 11, 5655-5680.
- [33] A. Neves, *Finite time singularities for Lagrangian mean curvature flow*, Ann. of Math. (2) **177** (2013), 1029-1076.
- [34] A. Neves, *Recent progress on singularities of Lagrangian mean curvature flow*, Surveys in geometric analysis and relativity, Adv. Lect. Math. (ALM), vol. 20, Int. Press, Somerville, MA, 2011, pp. 413-438. MR2906935
- [35] A. Neves, *Singularities of Lagrangian mean curvature flow: monotone case*, Math. Res. Lett. **17** (2010), 109-126.
- [36] X.-H. Nguyen, *Complete embedded self-translating surfaces under mean curvature flow*, J. Geom. Anal. **23** (2013), 1379-1426.
- [37] X.-H. Nguyen, *Translating tridents*, Comm. Partial Differential Equations **34** (2009), 257-280.

- 
- [38] P. Petersen, *Riemannian geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 171, Springer, Cham, 2016.
- [39] A. Savas-Halilaj and K. Smoczyk, *Lagrangian mean curvature flow of Whitney spheres*, *Geom. Topol.* **23** (2019), 1057-1084.
- [40] J. Serrin, *The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables*, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **264** (1969), 413-496.
- [41] K. Smoczyk, *Mean curvature flow in higher codimension - Introduction and survey*, *Global Differential Geometry*, Springer Proceedings in Mathematics **12** (2012), 231-274.