



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Ευαγγελία Σολωμού

---

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΒΑΘΩΝ ΥΔΑΤΩΝ ΚΑΙ  
ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΤΗΤΑ

---

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2024





UNIVERSITY OF IOANNINA  
Department of Mathematics



Evangelia Solomou

---

EXTENDED SHALLOW WATER EQUATIONS AND  
ASYMPTOTIC INTEGRABILITY

---

Master's Thesis

Ioannina, 2024



*Αφιερώνεται στην οικογένειά μου.*



Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και Πληροφορική που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 02/07/2024 από την εξεταστική επιτροπή:

<b>Όνοματεπώνυμο</b>	<b>Βαθμίδα</b>
Θεόδωρος Χωρίκης	Καθηγητής (Επιβλέπων)
Μιχαήλ Ξένος	Καθηγητής
Φωτεινή Καρακατσάνη	Επίκουρη Καθηγήτρια

#### ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

“Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.”

Ευαγγελία Σολωμού





---

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

---

Με την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής διατριβής μου, θα ήθελα να απευθύνω ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όσους στάθηκαν δίπλα μου σ' αυτή την προσπάθεια.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επιβλέποντα Καθηγητή μου κύριο Θεόδωρο Χωρίκη, Καθηγητή του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, για την συνεχή έμπνευση, υποστήριξη αλλά και την πολύτιμη καθοδήγησή του σε όλη την διάρκεια εκπόνησης της Μεταπτυχιακής μου Διατριβής. Θα ήθελα επίσης να τον ευχαριστήσω για την επιλογή του θέματος, αφού, εφοδιάστηκα με νέες γνώσεις και πίστη πως θα τα καταφέρω. Η αφοσίωσή του, στη διδασκαλία και η αγάπη του για το αντικείμενο του με έκαναν να εξελιχθώ όχι μόνο επαγγελματικά, αλλά και προσωπικά. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς μου επιτροπής, την Επίκουρη Καθηγήτρια κυρία Φωτεινή Καρακατσάνη και τον Καθηγητή κύριο Μιχαήλ Ξένο, για τα βοηθητικά σχόλια πάνω στην διατριβή.

Τέλος, ένα πολύ μεγάλο, ευχαριστώ στους γονείς μου, Χρυσόστομο και Βασιλική, στον δίδυμο αδερφό μου Βασίλη και τους συγγενείς μου για την πίστη τους σε εμένα και την συμπαράστασή τους, διότι η εκπόνηση και η ολοκλήρωση της διατριβής μου δεν θα ήταν δυνατή καθώς και στους φίλους μου που με στήριξαν ψυχολογικά.



---

# ΠΕΡΙΛΗΨΗ

---

Η μελέτη των υδάτινων κυμάτων είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τις εξισώσεις Euler, ένα σύνολο οιονεί-γραμμικών, υπερβολικών εξισώσεων που διέπουν τη ροή ιδανικού ρευστού χωρίς ιξώδες. Αυτές οι εξισώσεις αντιπροσωπεύουν τη διατήρηση της μάζας, της ορμής και της ενέργειας. Μπορούν να θεωρηθούν ως ειδική μορφή των εξισώσεων Navier-Stokes με μηδενικό ιξώδες και θερμική αγωγιμότητα. Λύσεις αυτών των εξισώσεων είναι δύσκολο να βρεθούν αναλυτικά, καθώς είναι συζευγμένες και με ελεύθερο σύνορο, πράγμα που σημαίνει ότι η λύση αποτελεί επίσης μέρος των συνοριακών συνθηκών. Στην παρούσα διατριβή, θα μελετήσουμε την θεωρία κυμάτων αβαθών υδάτων χρησιμοποιώντας εργαλεία της θεωρίας διαταραχών. Η διάκριση καθορίζεται από την αναλογία του βάθους των υδάτων προς το μήκος κύματος. Δηλαδή με απλούς όρους, στα ρηχά ύδατα, τα κύματα αρχίζουν να επηρεάζονται από τον πυθμένα του ωκεανού, ενώ σε βαθιά νερά το βάθος του ωκεανού θεωρείται άπειρο.

Η μελέτη μας ξεκινά από πρώτες αρχές και αρχικά παρουσιάζουμε αναλυτικά πώς προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων Euler στα ρευστά. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας θεωρία διαταραχών, σε  $(1+1)$  χωρικές και χρονικές διαστάσεις, μετατρέπουμε το σύστημα στην εξίσωση Korteweg–de Vries (KdV) και παρέχουμε όρους ανώτερης τάξης, που αντιπροσωπεύουν με μεγαλύτερη ακρίβεια το αρχικό σύστημα. Με παρόμοιο τρόπο αλλά σε διαφορετικό σύστημα, που περιγράφει την αρτηριακή πίεση, θα καταλήξουμε στην ίδια KdV εξίσωση (με διαφορετικούς συντελεστές) αποδεικνύοντας έτσι την καθολικότητά (universality) της. Τέλος, σε  $(2+1)$  χωρικές και χρονικές διαστάσεις, εξάγουμε την ανώτερης τάξης Kadomtsev–Petviashvili (KP) εξίσωση.

Λύσεις των παραπάνω συστημάτων (σε μια χωρική διάσταση) δίνονται μέσω της μεθόδου της ασυμπτωτικής ολοκληρωσιμότητας. Χρησιμοποιώντας τις λύσεις της απλής εξίσωσης μπορούμε, με συστηματικό τρόπο, να κατασκευάσουμε και τις λύσεις της ανώτερης τάξης εξίσωσης. Θα εστιάσουμε στις λεγόμενες, σολιτονικές λύσεις των συστημάτων και στις αλληλεπιδράσεις τους. Τέλος γίνονται συγκρίσεις με πραγματικά φαινόμενα στον ωκεανό και τις λύσεις των εξισώσεων αυτών.



---

# ABSTRACT

---

The study of water waves is inextricably linked to Euler's equations, a set of quasi-linear, hyperbolic equations governing the flow of an ideal fluid without viscosity. These equations represent the conservation of mass, momentum, and energy. They can be considered as a special form of the Navier-Stokes equations with zero viscosity and thermal conductivity. Solutions of these equations are difficult to find analytically, as they are coupled and with a free boundary, which means that the solution is also part of the boundary conditions. In this thesis, we will study the theory of shallow water waves using tools of perturbation theory. The distinction, between deep and shallow water waves, is determined by the ratio of water depth to wavelength. That is, in simple terms, in shallow water, the waves begin to be affected by the ocean floor, while in deep water, the depth of the ocean is considered infinite.

Our study starts from first principles and initially we present, in detail how the system of Euler equations in fluids is derived. Then, using perturbation theory, in (1+1) spatial and temporal dimensions, we reduce the system into the Korteweg–de Vries (KdV) equation and provide higher-order terms that more accurately represent the original system. In a similar way, but in a different system, which describes blood pressure, we derive the same KdV equation (with different coefficients) thus proving its universality. Finally, in (2+1) spatial and temporal dimensions, we derive the extended Kadomtsev–Petviashvili (KP) equation.

Solutions of the above systems (in one spatial dimension) are given through the method of asymptotic integrability. Using the solutions of the simple equation we can, in a systematic way, construct the solutions of the higher order equation. We will focus on the so-called, solitonic solutions of the systems and their interactions. Finally, comparisons are made with real phenomena in the ocean and the solutions of these equations.



---

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

---

Περίληψη	i
Abstract	ii
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>3</b>
1.1 Οι εξισώσεις των υδάτινων κυμάτων . . . . .	3
1.1.1 Η εξίσωση διατήρησης της μάζας . . . . .	4
1.1.2 Η εξίσωση Euler . . . . .	6
1.1.3 Η εξίσωση του Laplace . . . . .	8
1.1.4 Η εξίσωση του Bernoulli για την ελεύθερη επιφάνεια . . . . .	9
1.1.5 Η κινηματική συνθήκη . . . . .	10
1.2 Αδιαστατοποίηση . . . . .	11
<b>2 Αβαθή ύδατα – Μία χωρική διάσταση</b>	<b>15</b>
2.1 Η εξίσωση Korteweg–de Vries . . . . .	15
2.2 Η εξίσωση Benjamin–Bona–Mahony . . . . .	18
2.3 Επιφανειακή τάση . . . . .	19
<b>3 Καθολικότητα της KdV</b>	<b>23</b>
3.1 Αρτηριακή πίεση . . . . .	23
3.2 Η μη γραμμική εξίσωση του Schrödinger (NLS) . . . . .	26
<b>4 Επιλυσιμότητα και Ασυμπτωτική Ολοκληρωσιμότητα</b>	<b>31</b>

4.1	Το γραμμικό πρόβλημα . . . . .	31
4.1.1	Υδάτινα κύματα . . . . .	31
4.1.2	Εξισώσεις αρτηριακής πίεσης . . . . .	33
4.2	Το μη γραμμικό πρόβλημα . . . . .	34
4.2.1	Ασυμπτωτική ολοκληρωσιμότητα . . . . .	34
4.2.2	Κατασκευή των λύσεων . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Γενίκευση σε δύο χωρικές διαστάσεις – Η εξίσωση Kadomtsev–Petviashvili</b>	<b>43</b>
5.1	Λύσεις της Kadomtsev–Petviashvili . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>53</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>55</b>



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

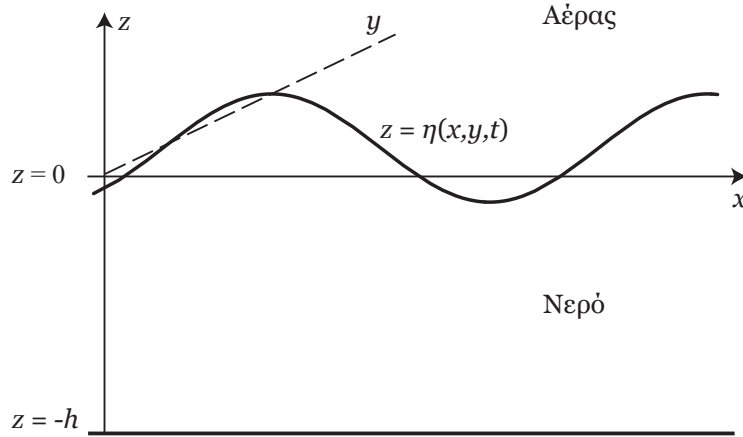
## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα διατριβή έχει σκοπό την εξαγωγή και ανάλυση των βασικών εξισώσεων που διέπουν τη δυναμική και διάδοση κυμάτων σε αβαθή ύδατα. Κύμα ονομάζεται μια διαταραχή που μεταδίδεται στο χώρο και το χρόνο. Ο όρος κύμα προέρχεται από το αρχαίο ελληνικό ρήμα ‘κύω’, δηλαδή φουσκώνομαι και χαρακτηρίζει τη μεταφορά ενέργειας διαμέσου ενός υλικού ή ακόμη και στο κενό. Η μετάδοση αυτή γίνεται, στα υλικά μέσα, ως παλμική κίνηση μεταξύ των σωματιδίων του μέσου, όμως ορισμένα είδη κυμάτων, όπως τα ηλεκτρομαγνητικά, μπορούν να διαδίδονται και στο κενό.

Υπάρχουν πολλά ακόμη είδη, όλα όμως έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό: μεταφέρουν ενέργεια. Για παράδειγμα ένα κύμα που κινείται στην επιφάνεια της θάλασσας αναγκάζει κάθε σώμα που επιπλέει να κάνει ταλαντώσεις, αυτό συμβαίνει λόγω της ενέργειας που μεταφέρει. Άλλο είδος κύματος είναι το ηχητικό κύμα που διαδίδεται στον αέρα. Κάθε κύμα μπορεί να περιγραφεί με μαθηματικό τρόπο από μία κυματική εξίσωση. Εμείς θα εστιάσουμε στην παρούσα διατριβή στα θαλάσσια κύματα και ιδιαίτερα σε αβαθή ύδατα. Το πρόβλημα που θα συζητήσουμε, είναι η αλληλεπίδραση αέρα και νερού που περιγράφεται, σχηματικά, από το σχήμα 1.1.

### 1.1 Οι εξισώσεις των υδάτινων κυμάτων

Για να εξάγουμε εξισώσεις που περιγράφουν τη δυναμική ενός ρευστού θα πρέπει να ανατρέξουμε σε πρώτες αρχές. Οι εξισώσεις αυτές ισχύουν, γενικά, σε υδάτινα κύματα, αλλά με τις συνθήκες που θα ορίσουμε, αργότερα θα εστιάσουμε σε αβαθή ύδατα. Θεωρούμε, λοιπόν, ένα ασυμπίεστο, χωρίς ιξώδες και δίνες ρευστό. Με τον όρο ασυμπίεστο εννοούμε ότι η πυκνότητα παραμένει σταθερή  $\rho = \rho_0$ , το ιξώδες δηλώνει το μέτρο της αντίστασης του εκάστοτε ρευστού και οι δίνες περιγράφουν τις τοπικές περιστροφές το υγρού.



Σχήμα 1.1: Γεωμετρία των υδάτινων κυμάτων. Ο πυθμένας είναι σε σταθερή στάθμη  $z = -h$ , ενώ η ελεύθερη επιφάνεια  $z = \eta(x, y, t)$ , είναι υπό προσδιορισμό. Το αδιατάρακτο ρευστό είναι στο επίπεδο  $z = 0$ .

### 1.1.1 Η εξίσωση διατήρησης της μάζας

Θεωρούμε μία τυχαία διαμέριση του όγκου  $V$  η οποία οριοθετείται από την επιφάνεια  $S$ , όπως στο σχήμα 1.2.

Στον στοιχειώδη όγκο  $dv$  αντιστοιχεί μάζα  $dm = \rho dv$  ενώ η συνολική μάζα του ρευστού είναι

$$m = \iiint_V \rho dv,$$

όπου  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , είναι η πυκνότητα του ρευστού. Συνεπώς ο ρυθμός μεταβολής της μάζας του ρευστού είναι

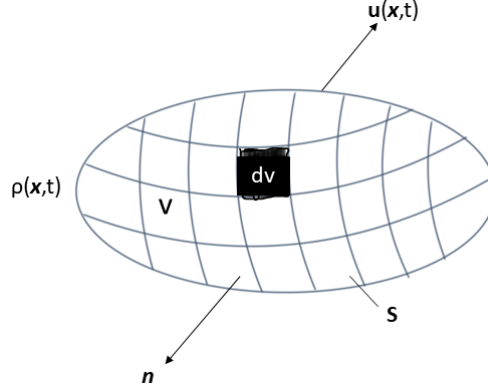
$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho dv.$$

Εναλλακτικά, ο ρυθμός με τον οποίο ρέει η μάζα από τον  $V$  είναι

$$\iint_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds,$$

όπου  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  η ταχύτητα του ρευστού και  $\mathbf{n}$  δηλώνει το μοναδιαίο, κάθετο στην  $S$  διάνυσμα. Πράγματι γνωρίζουμε ότι ως ροή ενός διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}$ , από μία επιφάνεια ορίζεται από το ολοκλήρωμα

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds,$$



Σχήμα 1.2: Μια τυχαία διαμέριση ενός τυχαίου όγκου ρευστού. Ο όγκος  $V$  οριοθετείται από την επιφάνεια  $S$ ,  $\rho(\mathbf{x}, t)$  είναι η πυκνότητα του υγρού,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  είναι η ταχύτητα σε ένα σημείο  $(\mathbf{x}, t)$  του ρευστού και  $\mathbf{n}$  είναι το κάθετο, μοναδιαίο διάνυσμα στην  $S$ .

όπου στη δική μας περίπτωση  $\mathbf{F} = \rho\mathbf{u}$ . Το  $\mathbf{F}$  παριστάνει το πεδίο των ταχυτήτων τρισδιάστατης ροής ενός ρευστού, η ροή του  $\mathbf{F}$  διαμέσου της επιφάνειας  $S$  ισούται με τον συνολικό ρυθμό με τον οποίο το ρευστό διέρχεται από την  $S$  στη κατεύθυνση που θεωρούμαι ως θετική. Στην περίπτωση αυτή, το ολοκλήρωμα του εσωτερικού γινομένου  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  κατά μήκος μίας καμπύλης στην περιοχή αυτή θα ισούται με τη ροή του ρευστού κατά μήκος της καμπύλης.

Δεδομένου ότι η μάζα ούτε δημιουργείται ούτε καταστρέφεται, ο ρυθμός μεταβολής της μάζας στο  $V$  προκαλείται μόνο από τον ρυθμό μάζας που ρέει στο  $V$  μέσα από την  $S$ , έτσι

$$\frac{d}{dt} \left( \iiint_V \rho \, dv \right) = - \iint_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (1.1)$$

Το μείον δηλώνει την αντίθετη φορά της δύναμης που ασκεί η ροή της μάζας από ότι ο ρυθμός μεταβολής της στο  $V$ , δηλαδή από μέσα προς τα έξω όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.2.

Με την εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss στη σχέση (1.1), το επιφανειακό ολοκλήρωμα αντιστοιχίζεται σε τριπλό πάνω από τον όγκο  $V$  και τελικά

$$\frac{d}{dt} \left( \iiint_V \rho \, dv \right) + \iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \, dv = 0, \quad (1.2)$$

όπου  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ , είναι ο γνωστός τελεστής ανάδελτα. Τελικά, από την

(1.2) και μιας  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  έχουμε

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) dv = 0$$

για κάθε όγκο  $V$ . Συνεπώς,

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

Η εξίσωση αντιπροσωπεύει τη διατήρησης της μάζας, και συχνά αποκαλείται και εξίσωση συνέχειας.

### 1.1.2 Η εξίσωση Euler

Θα μελετήσουμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σ' ένα ρευστό χωρίς ιξώδες, ο οποίος απαιτεί να εξισώσουμε τον ρυθμό μεταβολής της γραμμικής ορμής του ρευστού έναντι της προκύπτουσας δύναμης που ασκεί το ρευστό.

Υπάρχουν δύο ειδών δυνάμεων που σχετίζονται με τη μηχανική των ρευστών: η δύναμη της βαρύτητας και η δύναμη της πίεσης και του ιξώδους. Αν οι δυνάμεις  $\mathbf{F}$  οφείλονται αποκλειστικά στην επιτάχυνση της βαρύτητας  $g$  τότε θα γράφαμε  $\mathbf{F} = (0, 0, -g)$  (με το  $z$  να μετρείται θετικά προς τα πάνω). Εδώ διατηρούμε μόνο την πίεση, η οποία παράγει μία κάθετη (normal) δύναμη που επενεργεί σε οποιοδήποτε στοιχείο του ρευστού.

Για να προχωρήσουμε ορίζουμε, όπως και πριν, έναν όγκο  $V$  οριοθετημένο από μία επιφάνεια  $S$  που καταλαμβάνει ένα ρευστό. Η συνολική δύναμη που ασκεί το ρευστό στο  $V$  είναι

$$\iiint_V \rho \mathbf{F} dv - \iint_S P \mathbf{n} ds = \iiint_V (\rho \mathbf{F} - \nabla P) dv. \quad (1.3)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα αντιπροσωπεύει τη βαρύτητα  $g$  πάνω στον όγκο  $V$  και το δεύτερο την πίεση  $P$  πάνω στην επιφάνεια  $S$  και στο οποίο εφαρμόσαμε το θεώρημα του Gauss.

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του ρευστού στο  $V$  είναι

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \mathbf{u} dm = \frac{d}{dt} \left( \iiint_V \rho \mathbf{u} dv \right), \quad (1.4)$$

και ο ρυθμός ροής της ορμής κατά μήκος του  $S$  στο  $V$  είναι

$$- \iint_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) ds. \quad (1.5)$$

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για το ρευστό στο  $V$  μπορεί να εκφραστεί ως ρυθμός μεταβολής της ορμής του ρευστού στο  $V$  που ισούται με την προκύπτουσα δύναμη που ενεργεί στο ρευστό στο  $V$  συν τον ρυθμό ροής της ορμής κατά μήκος του  $S$  στο  $V$ . Έτσι από τις εξισώσεις (1.3)-(1.5) παίρνουμε

$$\frac{d}{dt} \left( \iiint_V \rho \mathbf{u} dv \right) = \iiint_V (\rho \mathbf{F} - \nabla P) dv - \iint_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) ds. \quad (1.6)$$

Δύο από αυτά τα ολοκληρώματα ισούνται με την παράγωγο της ορμής στη μεταβολή του χρόνου, πιο συγκεκριμένα αν παραγωγίσουμε την ορμή λαμβάνουμε

$$j = m\mathbf{u} \Rightarrow \frac{dj}{dt} = \frac{dm}{dt} \mathbf{u} + m \frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

Αναλυτικότερα, ο πρώτος όρος από τα δεξιά είναι στην ουσία ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του ρευστού, διότι έχουμε δείξει ότι

$$j = \int \rho \mathbf{u} dv = \mathbf{u} \int \rho dv = \int \mathbf{u} \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \iiint_V \rho \mathbf{u} dv \right)$$

και ο δεύτερος όρος δεξιά ισούται με τον ρυθμό ροής της ορμής επειδή

$$dj = \mathbf{u} dm \Rightarrow \int dj = \int \mathbf{u} dm \Rightarrow \int dj = \int \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) ds \Rightarrow j = \int \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) ds,$$

γιατί από προηγουμένως γνωρίζουμε ότι

$$\frac{d}{dt} \left( \iiint_V \rho dv \right) = - \iint_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds,$$

δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της μάζας ισούται με τον ρυθμό ροής.

Επανερχόμεστε στην (1.6) μεταφέρουμε την χρονική παράγωγο μέσα στο ολοκλήρωμα εφαρμόζουμε το θεώρημα του Gauss ώστε να έχουμε παντού τριπλά ολοκληρώματα πάνω από τον όγκο του ρευστού

$$\iiint_V \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho \mathbf{u} \right) dv = \iiint_V (\rho \mathbf{F} - \nabla P) dv. \quad (1.7)$$

Επεκτείνοντας το αριστερό μέλος προκύπτει

$$\begin{aligned} \iiint_V \left( \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) dv \\ = \iiint_V \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dv, \end{aligned} \quad (1.8)$$

όπου ορίσαμε τον τελεστή του Stokes ως

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla).$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των (1.7)-(1.8) λαμβάνουμε

$$\iiint_V \left( \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \rho \mathbf{F} + \nabla P \right) dv = 0,$$

και, όπως πριν, για να ισχύει για αυθαίρετο  $V$  (και συνεχή ολοκλήρωση) πρέπει να έχουμε

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{F}, \quad (1.9)$$

που είναι η εξίσωση Euler για ρευστό χωρίς ιξώδες.

### 1.1.3 Η εξίσωση του Laplace

Δίνη ονομάζεται το πεδίο ταχύτητας  $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{u}$  που μετράει τον τοπικό στροβιλισμό (spin), τις περιστροφές των ρευστών. Για  $\boldsymbol{\omega} = 0$  η ροή καλείται μη περιστροφική ή αστρόβιλη. Δυστυχώς, οι πραγματικές ροές είναι πολύ σπάνια μη περιστροφικές κάπου αλλά για πολλές η δίνη είναι πολύ μικρή και ως εκ τούτου μπορούν να μοντελοποιηθούν υποθέτοντας μηδενικό στροβιλισμό.

Πράγματι, για μη περιστροφική και ασυμπίεστη ροή έχουμε

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = -\nabla \phi$$

και

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

οπότε συνδυάζοντας αυτές τις δύο σχέσεις προκύπτει

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = 0$$

που είναι η εξίσωση Laplace, η οποία πρέπει να ικανοποιείται σε όλο το ρευστό,  $-h < z < \eta(x, y, t)$ . Το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού, σε σχέση με το επίπεδο  $z = 0$ , είναι  $\eta(x, y, t)$ , και ο σταθερός πυθμένας του ρευστού ορίζεται  $z = -h$ .

Τέλος, θεωρώντας έναν επίπεδο, αδιαπέραστο πυθμένα στο  $z = -h$ , έτσι ώστε να μην υπάρχει ροή ρευστού πέρα από αυτόν, βρίσκουμε τη λεγόμενη συνοριακή συνθήκη του πυθμένα

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h,$$

όπου το  $w$  αναπαριστά την κατακόρυφη ταχύτητα.

### 1.1.4 Η εξίσωση του Bernoulli για την ελεύθερη επιφάνεια

Περνάμε τώρα σε μια σύντομη εξέταση των αποτελεσμάτων που μπορούν να ληφθούν όταν η δίνη,  $\omega$ , εισάγεται στην εξίσωση του Euler

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \mathbf{F}. \quad (1.10)$$

Επαναλαμβάνουμε, ότι θεωρούμε ρευστό με  $\rho = \rho_0$ , και χωρίς ιξώδες. Έτσι το ιδανικό και ασυμπίεστο ρευστό θα περιγράφεται από τις εξισώσεις:

- Εξίσωση απόκλισης:  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ,
- Εξίσωση ορμής:  $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{\rho_0}(\mathbf{F} - \nabla P)$ .

Η εξωτερική δύναμη όντας συντηρητική γράφεται  $\mathbf{F} = -\nabla U$  επομένως η εξίσωση ορμής γράφεται

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{U + P}{\rho_0} \right)$$

και χρησιμοποιώντας το διάνυσμα της ταχύτητας

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla \left( \frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

προκύπτει

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = -\nabla \left( \frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \frac{U + P}{\rho_0} \right).$$

Στην ελεύθερη επιφάνεια υπάρχουν 2 συνοριακές συνθήκες, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό  $\mathbf{u} = -\nabla\phi$  και το  $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$  προκύπτει

$$\nabla \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2 + \frac{U + P}{\rho_0} \right) = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2 + \frac{U + P}{\rho_0} \right) = f(t)$$

όπου  $f(t)$  είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση ολοκλήρωσης. Είναι πιθανό ο επαναπροσδιορισμός του  $\phi$  ως

$$\phi = \phi + \int_0^t f(t') dt'$$

και έτσι προκύπτει η εξίσωση του Bernoulli ή συνθήκη πίεσης στη χρονοεξαρτώμενη περίπτωση

$$\left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2 + \frac{U + P}{\rho_0} \right) = 0.$$

Προς το παρόν, θα αγνοήσουμε την επιφανειακή τάση και θα υποθέσουμε ότι η κυρίαρχη δύναμη είναι η δύναμη της άνωσης,  $\mathbf{F} = -\nabla(\rho_0 g z)$  η οποία υποδηλώνει  $U = \rho_0 g z$ . Για ευκολία μηδενίζουμε την πίεση,  $P = 0$  της ελεύθερης επιφάνειας, ώστε

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|^2 + g z = 0, \quad z = \eta(x, y, t)$$

καλείται εξίσωση Bernoulli ή αλλιώς συνθήκη πίεσης για την ελεύθερη επιφάνεια.

### 1.1.5 Η κινηματική συνθήκη

Η δεύτερη εξίσωση, που κυριαρχεί στην ελεύθερη επιφάνεια, παράγεται από την υπόθεση ότι το ρευστό που βρίσκεται αρχικά στην ελεύθερη επιφάνεια, παραμένει εκεί σε όλους τους χρόνους. Από μαθηματική σκοπιά, υποδηλώνεται ότι αν  $F = F(x, y, z, t)$ , όπου το  $(x, y, z)$  είναι ένα σημείο της ελεύθερης επιφάνειας, τότε

$$\frac{DF}{Dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F = 0.$$

Στην επιφάνεια,  $F = z - \eta(x, y, z) = 0$  προκύπτει

$$\frac{D}{Dt} \{z - \eta(x, y, t)\} = 0 \Rightarrow \frac{Dz}{Dt} = \frac{D\eta}{Dt} \Rightarrow w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \eta, \quad z = \eta(x, y, t)$$

αφού,

$$\mathbf{u} = \left( \frac{Dx}{Dt}, \frac{Dy}{Dt}, \frac{Dz}{Dt} \right) = (u, v, w),$$

και χρησιμοποιώντας

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

καταλήγουμε σε

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \eta, \quad z = \eta(x, y, t)$$

στην ελεύθερη επιφάνεια. Η σχέση αναφέρεται ως η κινηματική συνθήκη.

Συνοψίζοντας οι 4 εξισώσεις κύματος για την ελεύθερη επιφάνεια είναι

- Εξίσωση Laplace:

$$\Delta \phi = \nabla^2 \phi = 0, \quad -h < z < \eta(x, y, t).$$



- Μηδενική ροή στον πυθμένα:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h.$$

- Εξίσωση Bernoulli ή συνθήκη πίεσης:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|^2 + g\eta = 0, \quad z = \eta(x, y, t).$$

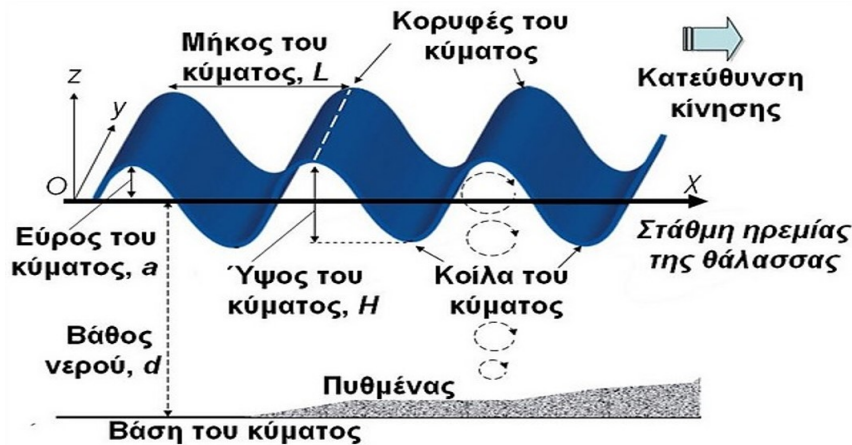
- Κινηματική συνθήκη:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \eta, \quad z = \eta(x, y, t).$$

Σχηματικά, το συνολικό πρόβλημα μπορεί να αναπαρασταθεί στο σχήμα 1.1.

## 1.2 Αδιαστατοποίηση

Για να μελετήσουμε καλύτερα το παραπάνω σύστημα εξισώσεων θα τις αδιαστατοποιήσουμε, δηλαδή θα αφαιρέσουμε τα μεγέθη με τις κατάλληλες αντικαταστάσεις. Για να είναι τα φυσικά μεγέθη πιο κατανοητά στον αναγνώστη παραθέτουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια τη σχηματική απεικόνιση ενός κύματος στο σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3: Φυσικές παράμετροι περιγραφής ενός κύματος.

Μελετώντας αδιάστατες εξισώσεις μπορούμε πιο εύκολα να αποφασίσουμε ποιό όροι είναι αμελητέοι. Αυτός θα είναι και ο θεμέλιος λίθος της θεωρίας διαταραχών που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω.

Θέτουμε

$$x \rightarrow \lambda_x x, \quad y \rightarrow \lambda_y y, \quad z \rightarrow hz, \quad t \rightarrow \frac{\lambda_x}{c_0} t, \quad \eta \rightarrow \alpha \eta, \quad \phi \rightarrow \frac{\lambda_x g a}{c_0} \phi$$

όπου  $c_0 = \sqrt{gh}$  είναι η ταχύτητα των αβανών υδάτων,  $\lambda_x, \lambda_y$  είναι τα μήκη κύματος στην  $x$  και  $y$  συνιστώσα, (μήκος κύματος χαρακτηρίζεται η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών ή κοιλάδων ενός κύματος), το  $a$  είναι το μέγιστο πλάτος των αρχικών δεδομένων (ως πλάτος κύματος χαρακτηρίζεται η κάθετη μέγιστη μετατόπιση ενός σημείου, από το σημείο ισορροπίας του κατά τη διέλευση ενός κύματος). Οι αρχικές μεταβλητές έχουν διαστάσεις ενώ οι καινούριες είναι αδιάστατες. Θα παραθέσουμε το νέο σύστημα:

- Εξίσωση Laplace

$$\phi_{zz} + \left(\frac{h}{\lambda_x}\right)^2 \phi_{xx} + \left(\frac{h}{\lambda_y}\right)^2 \phi_{yy} = 0, \quad -1 < z < \frac{\alpha \eta}{h}.$$

- Μηδενική ροή στον πυθμένα

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -1.$$

- Εξίσωση Bernoulli ή συνθήκη πίεσης

$$\phi_t + \frac{\alpha}{2h} \left[ \phi_x^2 + \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_y}\right)^2 \phi_y^2 + \left(\frac{\lambda_x}{h}\right)^2 \phi_z^2 \right] + \eta = 0, \quad z = \frac{\alpha \eta}{h}.$$

- Η κινηματική συνθήκη

$$\eta_t + \frac{\alpha}{h} \left[ \phi_x \eta_x + \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_y}\right)^2 \phi_y \eta_y \right] = \left(\frac{\lambda_x}{h}\right)^2 \phi_z \quad z = \frac{\alpha \eta}{h}.$$

Θεωρούμε τις αδιάστατες παραμέτρους

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{h}, \quad \delta = \frac{\lambda_x}{\lambda_y}, \quad \mu = \frac{h}{\lambda_x}$$

όπου  $\varepsilon$  είναι το μέτρο της μη γραμμικότητας ή του πλάτους του κύματος (το ύψος του κύματος σε σχέση με τον πυθμένα),  $\delta$  μετρά το μέγεθος της εγκάρσια μεταβλητής,  $\mu$  είναι το βάθος που σχετίζεται με το μήκος κύματος. Άρα οι αδιάστατες εξισώσεις είναι, τελικά

$$\phi_{zz} + \mu^2 \phi_{xx} + \mu^2 \delta^2 \phi_{yy} = 0, \quad -1 < z < \varepsilon\eta \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -1 \quad (1.12)$$

$$\phi_t + \frac{\varepsilon}{2} \left[ \phi_x^2 + \delta^2 \phi_y^2 + \frac{1}{\mu^2} \phi_z^2 \right] + \eta = 0, \quad z = \varepsilon\eta \quad (1.13)$$

$$\mu^2 [\eta_t + \varepsilon (\phi_x \eta_x + \delta^2 \phi_y \eta_y)] = \phi_z, \quad z = \varepsilon\eta. \quad (1.14)$$

Η αδιαστατοποίηση έγινε με γνώμονα τις ιδιαίτερες συνθήκες που συναντάμε σε αβαθή ύδατα. Δηλαδή, κάποιες από τις ποσότητες  $\varepsilon$ ,  $\delta$ ,  $\mu$ , θα θεωρούνται μικρές, ώστε να εφαρμόσουμε τη θεωρία διαταραχών για να απλοποιήσουμε, κατά το δυνατό, το παραπάνω σύστημα. Για τις διάφορες σχέσεις των παραμέτρων που προέκυψαν, δηλαδή ανάλογα με τη σχέση που έχουν μεταξύ τους η διασπορά, μετρούμενη με  $\mu$ , και η μη γραμμικότητα, μετρούμενη με  $\varepsilon$ , προκύπτουν και διαφορετικές εξισώσεις. Εμείς, θα εστιάσουμε στη συνθήκη  $\varepsilon = \mu^2$ .



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## ΑΒΑΘΗ ΥΔΑΤΑ – ΜΙΑ ΧΩΡΙΚΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

### 2.1 Η εξίσωση Korteweg–de Vries

Περιοριζόμαστε, στο κεφάλαιο αυτό, σε  $(1 + 1)$  χωρικές και χρονικές διαστάσεις και θεωρούμε ότι η σχέση μη γραμμικών όρων και διασποράς είναι  $\varepsilon = \mu^2$ . Ξεκινάμε, και πάλι, από το σύστημα Euler:

$$\phi_{zz} + \varepsilon\phi_{xx} = 0, \quad -1 < z < \varepsilon\eta \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0, \quad z = -1 \quad (2.2)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}\varepsilon\left(\phi_x^2 + \frac{1}{\varepsilon}\phi_z^2\right) + \eta = 0, \quad z = \varepsilon\eta \quad (2.3)$$

$$\varepsilon(\eta_t + \varepsilon\phi_x\eta_x) = \phi_z, \quad z = \varepsilon\eta. \quad (2.4)$$

Όπως τονίσαμε και παραπάνω, η παράμετρος  $\varepsilon$  είναι μια μικρή παράμετρος, η ύπαρξη της οποίας, μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε εργαλεία της θεωρίας διαταραχών για να μελετήσουμε το παραπάνω σύστημα. Ως εκ τούτου, αναλύουμε το δυναμικό ταχύτητας  $\phi$  σε σειρά ως

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2\phi_2 + \dots$$

και την αντικαθιστούμε στην εξίσωση (2.1), έτσι λαμβάνουμε

$$\phi_{0zz} + \varepsilon(\phi_{1zz} + \phi_{0xx}) + \varepsilon^2(\phi_{2zz} + \phi_{1xx}) + \varepsilon^3(\phi_{3zz} + \phi_{2xx}) + \dots = 0.$$

Εξισώνουμε όρους με ίδιες δυνάμεις του  $\varepsilon$ , βρίσκουμε ότι  $\phi_{0zz} = 0$ . Αυτό υποδηλώνει ότι  $\phi_0 = A + B(z + 1)$ , όπου τα  $A, B$  είναι συναρτήσεις των  $x, t$ . Αλλά η

συνοριακή συνθήκη (2.2) οδηγεί στο  $B = 0$ . Έτσι,

$$\phi_0(x, z, t) = A(x, t).$$

Ομοίως, βρίσκουμε και για τις υπόλοιπες τάξεις

$$\begin{aligned}\phi_1(x, z, t) &= -\frac{(z+1)^2}{2}A_{xx}, \\ \phi_2(x, z, t) &= \frac{(z+1)^4}{24}A_{xxxx}.\end{aligned}$$

Τελικά, το δυναμικό ταχύτητας  $\phi$  θα έχει τη μορφή

$$\phi = A(x, t) - \varepsilon \frac{(z+1)^2}{2}A_{xx} + \varepsilon^2 \frac{(z+1)^4}{24}A_{xxxx}. \quad (2.5)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.5) στη συνοριακή δυναμική συνθήκη (2.3), την κινηματική συνθήκη (2.4) και μετά θέτοντας  $z = \varepsilon\eta$  θα πάρουμε

$$\begin{aligned}\eta + A_t + \varepsilon \left[ \frac{1}{2}A_x^2 - \frac{1}{2}A_{xxt} \right] \\ + \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{2}A_{xx}^2 - \eta A_{xxt} - \frac{1}{2}A_x A_{xxx} + \frac{1}{24}A_{xxxxt} \right] = 0, \quad (2.6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_t + A_{xx} + \varepsilon \left[ (\eta A_x)_x - \frac{1}{6}A_{xxxx} \right] \\ + \varepsilon^2 \left[ -\frac{1}{2}(\eta A_{xx})_x + \frac{1}{120}A_{xxxxx} \right] = 0. \quad (2.7)\end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (2.6) ως προς  $x$  και θέτοντας  $\omega = A_x$  στο σύστημα (2.6)-(2.7) για να έχω εξισώσεις ίδιας τάξης τελικά λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\omega_t + \eta_x + \varepsilon \left[ \omega\omega_x - \frac{1}{2}\omega_{xxt} \right] \\ + \varepsilon^2 \left[ -(\eta\omega_{xt})_x + \frac{1}{2}\omega_x\omega_{xx} - \frac{1}{2}\omega\omega_{xxx} + \frac{1}{24}\omega_{xxxxt} \right] = 0, \quad (2.8)\end{aligned}$$

$$\eta_t + \omega_x + \varepsilon \left[ (\eta\omega)_x - \frac{1}{6}\omega_{xxx} \right] + \varepsilon^2 \left[ -\frac{1}{2}(\eta\omega_{xx})_x + \frac{1}{120}\omega_{xxxxx} \right] = 0. \quad (2.9)$$

Για να είναι συμβιβαστές οι δύο εξισώσεις, δηλαδή καλούμαστε να βρούμε μία σχέση μεταξύ  $\omega$  και  $\eta$  έτσι ώστε να καταλήξουμε σε μία εξίσωση στο τέλος, ορίζουμε

$$\omega = \eta + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + O(\varepsilon^3),$$

έτσι το σύστημα (2.8)-(2.9) γίνεται

$$\begin{aligned} \eta_t + \eta_x + \varepsilon \left[ \omega_{1t} + \eta\eta_x - \frac{1}{2}\eta_{xxt} \right] \\ + \varepsilon^2 \left[ \omega_{2t} + (\eta\omega_1)_x - \frac{1}{2}\omega_{1xxt} - (\eta\eta_{xt})_x + \frac{1}{2}\eta_x\eta_{xx} - \frac{1}{2}\eta\eta_{xxx} + \frac{1}{24}\eta_{xxxxt} \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \eta_t + \eta_x + \varepsilon \left[ \omega_{1x} + 2\eta\eta_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx} \right] \\ + \varepsilon^2 \left[ \omega_{2x} + (\eta\omega_1)_x - \frac{1}{6}\omega_{1xxx} - \frac{1}{2}(\eta\eta_{xx})_x + \frac{1}{120}\eta_{xxxxx} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Θα εξετάσουμε πρώτα από το σύστημα (2.10)-(2.11) τους όρους τάξης  $O(1)$  που είναι εμφανές ότι  $\eta_t = -\eta_x$ .

Στη συνέχεια, για τους όρους τάξης  $O(\varepsilon)$  χρησιμοποιώντας την διόρθωση  $\omega = \eta + \varepsilon\omega_1$  στο ίδιο σύστημα θα βρούμε τον τύπο του  $\omega_1$  ολοκληρώνοντας τη σχέση

$$\omega_{1x} + 2\eta\eta_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx} = 0$$

δηλαδή,

$$\omega_1 = c_1\eta^2 + c_2\eta_{xx}.$$

Ζητούμενο είναι να προσδιορίσουμε τα  $c_1, c_2$ . Αυτά θα προκύψουν εξισώνοντας τους όρους των παρενθέσεων της τάξης  $O(\varepsilon)$  από το σύστημα (2.10)-(2.11) καθώς και με την αντικατάσταση  $\eta_t = -\omega_x = -\eta_x$ . Επομένως, μετά από πράξεις θα βρούμε ότι

$$\omega_1 = -\frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{3}\eta_{xx}.$$

Αν η ανάλυση σταματήσει στο σημείο αυτό, δηλαδή αγνοήσουμε τη συνεισφορά των όρων  $\varepsilon^2$ , η αντικατάσταση στις εξισώσεις (2.10)-(2.11) οδηγεί στην KdV εξίσωση, που είναι

$$\eta_x + \eta_t + \varepsilon \left( \frac{3}{2}\eta\eta_x + \frac{1}{6}\eta_{xxx} \right) = 0.$$

Αναλόγως, θα εργαστούμε και για την τάξη  $O(\varepsilon^2)$ . Ο τύπος του  $\omega_2$  προκύπτει από τη σχέση

$$\omega_{2x} + (\eta\omega_1)_x - \frac{1}{6}\omega_{1xxx} - \frac{1}{2}(\eta\eta_{xx})_x + \frac{1}{120}\eta_{xxxxx} = 0,$$

που όταν ολοκληρωθεί θα προκύψει

$$\omega_2 = c_1\eta^3 + c_2\eta_x^2 + c_3\eta\eta_{xx} + c_4\eta_{xxx}.$$

Στη συνέχεια ακολουθώντας την ίδια διαδικασία θα εξισώσουμε τους όρους του συστήματος (2.10)-(2.11) και με την αντικατάσταση  $\eta_t = -\eta_x - \varepsilon \left( \frac{3}{2}\eta\eta_x + \frac{1}{6}\eta_{xxx} \right)$  θα βρούμε

$$\omega_2 = \frac{1}{8}\eta^3 + \frac{3}{16}\eta_x^2 + \frac{1}{2}\eta\eta_{xx} + \frac{1}{10}\eta_{xxx}.$$

Οπότε,

$$\omega = \eta + \varepsilon \left( -\frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{3}\eta_{xx} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{8}\eta^3 + \frac{3}{16}\eta_x^2 + \frac{1}{2}\eta\eta_{xx} + \frac{1}{10}\eta_{xxx} \right).$$

Αυτό τελικά οδηγεί στη γενικευμένη εξίσωση KdV, που ενσωματώνει όρους υψηλότερης τάξης διασποράς καθώς και μη γραμμικούς σε μία τάξη πέρα από την προσέγγιση KdV. Και για να καταλήξουμε στην τελική μορφή της KdV θα αντικαταστήσουμε τη σχέση αυτή σε μία από τις δύο διαφορικές εξισώσεις του συστήματος (2.10)-(2.11) και θα βρούμε

$$\begin{aligned} \eta_x + \eta_t + \varepsilon \left( \frac{3}{2}\eta\eta_x + \frac{1}{6}\eta_{xxx} \right) \\ + \varepsilon^2 \left( -\frac{3}{8}\eta^2\eta_x + \frac{23}{24}\eta_x\eta_{xx} + \frac{5}{12}\eta\eta_{xxx} + \frac{19}{360}\eta_{xxxx} \right) = 0. \end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή, αποτελεί διόρθωση στην εξίσωση KdV και την αποκαλούμε γενικευμένη KdV εξίσωση (extended KdV).

## 2.2 Η εξίσωση Benjamin–Bona–Mahony

Ένα άλλο βαθμωτό (1 + 1)-διάστατο μοντέλο που σχετίζεται με ασθενώς μη γραμμικές εξισώσεις υδάτινων κυμάτων (στην περιοχή προσεγγίσεων που εργαζόμαστε) είναι η εξίσωση Benjamin–Bona–Mahony (BBM). Αν και δεν είναι στο αντικείμενο της διατριβής η περαιτέρω ανάλυση της εξίσωσης, για πληρότητα, αναφέρουμε ότι εξίσωση BBM προσφέρει πλεονεκτήματα σε ό,τι αφορά τη σταθερότητα των λύσεων, την αναπαράσταση της διάδοσης κυμάτων και την αριθμητική επεξεργασία σε σύγκριση με την εξίσωση KdV. Η επιλογή μεταξύ των δύο εξαρτάται από τις συγκεκριμένες απαιτήσεις του προβλήματος που μελετάται και τις συνθήκες του φυσικού συστήματος που προσομοιώνεται. Παρόλα αυτά,



σε αντίθεση με τον άπειρο αριθμό των ολοκληρωμάτων κίνησης της εξίσωσης KdV, η εξίσωση BBM διαθέτει μόνο τρεις νόμους διατήρησης και δεν είναι ολοκληρώσιμη, έτσι έχει λάβει πολύ λιγότερη προσοχή από τη σχετική επιστημονική κοινότητα.

Ο τρόπος εξαγωγής της εξίσωσης είναι σχεδόν ταυτόσημος με παραπάνω. Η μόνη, αλλά ουσιαστική διαφορά, στο σύστημα (2.10)-(2.11) είναι η αντικατάσταση  $\eta_x = -\eta_t$ . Όπως και προηγούμενα, στη συνέχεια, ολοκληρώνουμε τους όρους τάξης  $O(\varepsilon)$  για να καταλήξουμε στον τύπο του  $\omega_1$  που είναι ο εξής

$$\omega_1 = c_1\eta^2 + c_2\eta_{xt}.$$

Εξισώνοντας τους όρους από το σύστημα αυτό λαμβάνουμε

$$\omega_1 = -\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{3}\eta_{xt}.$$

Ενώ ο τύπος του  $\omega_2$  ολοκληρώνοντας τους όρους τάξης  $O(\varepsilon^2)$  είναι

$$\omega_2 = c_1\eta^3 + c_2\eta_x^2 + c_3\eta\eta_{xx} + c_4\eta\eta_{xt} + c_5\eta\eta_{xxt},$$

ο οποίος προέκυψε από την αντικατάσταση

$$\eta_x = -\eta_t - \varepsilon \left( \frac{3}{2}\eta\eta_x - \frac{1}{6}\eta_{xxt} \right).$$

Επομένως θα οδηγηθούμε στη σχέση

$$\omega_2 = \frac{1}{8}\eta^3 - \frac{5}{16}\eta_x^2 - \frac{2}{45}\eta_{xxt}.$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω το τελικό αποτέλεσμα είναι η γενικευμένη BBM (extended BBM ή eBBM)

$$\begin{aligned} \eta_x + \eta_t + \varepsilon \left( \frac{3}{2}\eta\eta_x - \frac{1}{6}\eta_{xxt} \right) \\ + \varepsilon^2 \left( -\frac{3}{8}\eta^2\eta_x + \frac{5}{24}\eta_x\eta_{xx} - \frac{1}{6}\eta\eta_{xt} - \frac{1}{40}\eta_{xxxxt} \right) = 0. \end{aligned}$$

## 2.3 Επιφανειακή τάση

Η προσθήκη επιφανειακών φαινομένων στην εξίσωση KdV μπορεί να εισάγει θεμελιώδεις μαθηματικές και φυσικές αλλαγές καθώς η προκύπτουσα ενσωμάτωση

της διασποράς πέμπτης τάξης μπορεί να οδηγήσει σε συντονισμό μεταξύ μεμονωμένων κυμάτων και ακτινοβολίας διασποράς εάν η σχέση γραμμικής διασποράς είναι μη κυρτή. Για να συμπεριληφθούν τα φαινόμενα αυτά, μόνο η εξίσωση του Bernoulli πρέπει να τροποποιηθεί μέσω της προσθήκης ενός όρου επιφανειακής τάσης. Πιο συγκεκριμένα, η επιφανειακή τάση ορίζεται ως εξής

$$T \frac{\varepsilon^2 \eta_{xx}(1 + \varepsilon^4 \delta^2 \eta_y^2) + \varepsilon^2 \delta^2 \eta_{yy}(1 + \varepsilon^3 \eta_x^2) - 2\varepsilon^4 \delta^2 \eta_{xy} \eta_x \eta_y}{(1 + \varepsilon^2 \eta_x^2 + \varepsilon^4 \delta^2 \eta_y^2)^{3/2}},$$

η οποία προστίθεται στην εξίσωση του Bernoulli ως επιπρόσθετος όρος (δεν επαναλαμβάνουμε ολόκληρο το σύστημα Euler για λόγους συντομίας). Σκοπός εδώ είναι, να εξετάσουμε τη συνεισφορά αυτού του όρου, αν υπάρχει, στη γενικευμένη εξίσωση KdV.

Μένοντας, συνεπώς, σε μία χωρική διάσταση, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Taylor και βρίσκουμε

$$T \frac{\varepsilon^2 \eta_{xx}}{(1 + \varepsilon^2 \eta_x^2)^{3/2}} = T \varepsilon^2 \eta_{xx} \left(1 - \frac{3}{2} \varepsilon \eta_x^2\right).$$

Οπότε, αν προσθέσουμε τον όρο αυτό στην εξίσωση Bernoulli και  $\varepsilon = \mu^2$  θα πάρουμε πάλι τον ίδιο τύπο στο τέλος διότι

$$\phi_t + \frac{\varepsilon}{2} \left( \phi_x^2 - \frac{1}{\mu^2} \phi_z^2 \right) + \eta - \varepsilon^2 T \eta_{xx} = 0. \quad (2.12)$$

Όπως και προηγουμένως, εφαρμόζοντας τη μέθοδο διαταραχών θα βρούμε

$$\phi = A(x, t) - \varepsilon \frac{(z+1)^2}{2} A_{xx} + \varepsilon^2 \frac{(z+1)^4}{24} A_{xxxx}.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση της  $\phi$  στην (2.12) και στη συνέχεια  $z = \varepsilon \eta$  θα καταλήξουμε στο αντίστοιχο σύστημα (2.6)-(2.7) που είναι

$$\begin{aligned} \eta + A_t + \varepsilon \left[ \frac{1}{2} A_x^2 - \frac{1}{2} A_{xxt} \right] \\ + \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{2} A_{xx}^2 - \eta A_{xxt} - \frac{1}{2} A_x A_{xxx} + \frac{1}{24} A_{xxxxt} - T \eta_{xx} \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\eta_t + A_{xx} + \varepsilon \left[ (\eta A_x)_x - \frac{1}{6} A_{xxxx} \right] + \varepsilon^2 \left[ -\frac{1}{2} (\eta A_{xx})_x + \frac{1}{120} A_{xxxxx} \right] = 0. \quad (2.14)$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (2.13) ως προς  $x$  και θέτοντας  $\omega = A_x$  στο σύστημα (2.13)-(2.14) τελικά λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \omega_t + \eta_x + \varepsilon \left[ \omega\omega_x - \frac{1}{2}\omega_{xxt} \right] \\ + \varepsilon^2 \left[ -(\eta\omega_{xt})_x + \frac{1}{2}\omega_x\omega_{xx} - \frac{1}{2}\omega\omega_{xxx} + \frac{1}{24}\omega_{xxxxt} - T\eta_{xxx} \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\eta_t + \omega_x + \varepsilon \left[ (\eta\omega)_x - \frac{1}{6}\omega_{xxx} \right] + \varepsilon^2 \left[ -\frac{1}{2}(\eta\omega_{xx})_x + \frac{1}{120}\omega_{xxxxx} \right] = 0. \quad (2.16)$$

Στην πορεία, για να είναι συμβιβαστές οι εξισώσεις Bernoulli και η δυναμική συνθήκη ορίζουμε

$$\omega = \eta + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + O(\varepsilon^3).$$

Το νέο σύστημα είναι το εξής:

$$\begin{aligned} \eta_t + \eta_x + \varepsilon \left[ \omega_{1t} + \eta\eta_x - \frac{1}{2}\eta_{xxt} \right] \\ + \varepsilon^2 \left[ \omega_{2t} + (\eta\omega_1)_x - \frac{1}{2}\omega_{1xxt} - (\eta\eta_{xt})_x + \frac{1}{2}\eta_x\eta_{xx} - \frac{1}{2}\eta\eta_{xxx} \right. \\ \left. + \frac{1}{24}\eta_{xxxxt} - T\eta_{xxx} \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \eta_t + \eta_x + \varepsilon \left[ \omega_{1x} + 2\eta\eta_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx} \right] \\ + \varepsilon^2 \left[ \omega_{2x} + (\eta\omega_1)_x - \frac{1}{6}\omega_{1xxx} - \frac{1}{2}(\eta\eta_{xx})_x + \frac{1}{120}\eta_{xxxxx} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Θα πρέπει να βρούμε τα  $\omega_1, \omega_2$ . Το  $\omega_1$  εμφανώς θα παραμείνει το ίδιο καθώς η επιφανειακή τάση στην τάξη  $O(\varepsilon)$  δεν εμφανίζεται καθόλου σε αντίθεση με την τάξη  $O(\varepsilon^2)$ . Επομένως, θα ολοκληρώσουμε ως προς  $x$  τους όρους της παρένθεσης  $O(\varepsilon^2)$ . Άρα,

$$\omega_2 = c_1\eta^3 + c_2\eta_x^2 + c_3\eta\eta_{xx} + c_4\eta_{xxxx}.$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία, δηλαδή να εξισώσουμε το σύστημα (2.17)-(2.18) και με την αντικατάσταση  $\eta_t = -\eta_x - \varepsilon \left( \frac{3}{2}\eta\eta_x + \frac{1}{6}\eta_{xxx} \right)$ , θα καταλήξουμε στις σχέσεις,

$$\omega_1 = -\frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{3}\eta_{xx}, \quad \omega_2 = \frac{1}{8}\eta^3 + \frac{3}{16}\eta_x^2 + \frac{1}{2}\eta\eta_{xx} + \frac{1}{10}\eta_{xxxx}.$$

Αυτό τελικά οδηγεί στην ίδια γενικευμένη εξίσωση KdV, που ενσωματώνει υψηλότερης τάξης όρους διασποράς και μη γραμμικούς σε μία τάξη πέρα από την προσέγγιση KdV που είναι η

$$\eta_x + \eta_t + \varepsilon \left( \frac{3}{2} \eta \eta_x + \frac{1}{6} \eta_{xxx} \right) + \varepsilon^2 \left( -\frac{3}{8} \eta^2 \eta_x + \frac{23}{24} \eta_x \eta_{xx} + \frac{5}{12} \eta \eta_{xxx} + \frac{19}{360} \eta_{xxxx} \right) = 0.$$

Δηλαδή η προσθήκη επιφανειακής τάσης δεν είναι αισθητή ούτε και στη γενικευμένη, ανώτερης τάξης εξίσωση.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## ΚΑΘΟΛΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ KdV

Η εξίσωση Korteweg-de Vries (KdV) θεωρείται καθολική (universal) εξίσωση, καθώς μπορεί να εφαρμοστεί σε πολλά συστήματα εκτός από την περιγραφή των κυμάτων σε αβαθή ύδατα. Η καθολικότητα της KdV εξίσωσης έγκειται στην ικανότητά της να περιγράφει τη διάδοση μη γραμμικών κυμάτων με διασπορά σε διάφορα φυσικά και τεχνητά συστήματα. Ενδεικτικά αναφέρουμε, τη διάδοση παλμών σε οπτικές ίνες, την περιγραφή ακουστικών κυμάτων σε πλάσμα, τη διάδοση μη γραμμικών κυμάτων κατά μήκος μιας ελαστικής ράβδου ή σε συστήματα με γραμμικές αλυσίδες σωματιδίων, τη διάδοση θερμικών κυμάτων, τη διάδοση ατμοσφαιρικών κυμάτων, κ.ά.

Εδώ εστιάζουμε σε δύο πιο απροσδόκητες εφαρμογές, την περιγραφή της ροής του αίματος και τη διάδοση των κυμάτων πίεσης στο αρτηριακό σύστημα και τη σύνδεσή της με την επίσης καθολική μη γραμμική εξίσωση του Schrödinger.

### 3.1 Αρτηριακή πίεση

Η εξίσωση KdV έχει πολλές συνδέσεις με φυσικά προβλήματα. Ας εξετάσουμε τώρα μία μη τυπική περίπτωση στην οποία μπορούμε να εξαγάγουμε την εξίσωση KdV. Η εξίσωση αυτή μπορεί να απαντήσει στην ερώτηση γιατί είναι δυνατόν να αισθανόμαστε τον καρδιακό παλμό μας στον καρπό μας ή στον αστράγαλό μας; Η καρδιά στέλνει ένα κύμα πίεσης στις αρτηρίες και έτσι προκαλεί μία διαστολή των αγγείων, μία διαταραχή δηλαδή. Είναι αυτή η παραμόρφωση που αντιλαμβανόμαστε όταν αισθανόμαστε τον παλμό μας. Είναι αξιοσημείωτο ότι μπορεί να διαδοθεί μέχρι τα άκρα μας αλλά χωρίς να διασπείρεται αισθητά. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί από μία ισορροπία μεταξύ της μη γραμμικότητας που προέρχεται από την υδροδυναμική ροή αίματος και της διασποράς που σχετίζεται με την ελαστικότητα των αρτηριών.

Το σύστημα που περιγράφει την αρτηριακή πίεση είναι το παρακάτω

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial \tau^2} + \tilde{A} - 1 &= \tilde{p} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \tau} + \frac{\partial(\tilde{A}\tilde{u})}{\partial \xi} &= 0.\end{aligned}$$

Ορίζουμε νέες συντεταγμένες

$$\chi = \varepsilon^{1/2}(\xi - \tau), \quad \eta = \varepsilon^{3/2}\tau.$$

και αφού εφαρμόσουμε τα παραπάνω καταλήγουμε στο τελικό σύστημα

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial \chi^2} - 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial \chi \partial \eta} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial \eta^2} + \tilde{A} - 1 = \tilde{p} \quad (3.1)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + (\tilde{u} - 1) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \chi} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \chi} = 0 \quad (3.2)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \eta} + (\tilde{u} - 1) \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \chi} + \tilde{A} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \chi} = 0. \quad (3.3)$$

Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο διαταραχών, όπως και παραπάνω,

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 \\ \tilde{p} &= p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 \\ \tilde{u} &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2.\end{aligned}$$

Θα αντικαταστήσουμε αυτές τις τρεις σχέσεις στο σύστημα εξισώσεων (3.1)-(3.3). Μελετώντας την κάθε τάξη ξεχωριστά θα προκύψει για την τάξη  $O(1)$  ότι έχουμε

$$\begin{aligned}p_0 &= A_0 - 1, \\ \frac{\partial p_0}{\partial \chi} - \frac{\partial u_0}{\partial \chi} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \chi} &= 0, \\ u_0 \frac{\partial A_0}{\partial \chi} + A_0 \frac{\partial u_0}{\partial \chi} - \frac{\partial A_0}{\partial \chi} &= 0.\end{aligned}$$

άρα καταλήγουμε σε  $A_0 = 1$ ,  $u_0 = 0$ ,  $p_0 = 0$ .

Συνεχίζοντας για την τάξη  $O(\varepsilon)$  έχουμε

$$\begin{aligned} A_1 - p_1 &= 0 \\ \frac{\partial p_1}{\partial \chi} - \frac{\partial u_1}{\partial \chi} &= 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial \chi} - \frac{\partial A_1}{\partial \chi} &= 0. \end{aligned}$$

και προκύπτει ότι  $A_1 = u_1 = p_1$ .

Αναλόγως για την τάξη  $O(\varepsilon^2)$  έχουμε

$$\begin{aligned} A_2 - p_2 + \frac{\partial^2 A_1}{\partial \chi^2} &= 0 \\ \frac{\partial A_1}{\partial \eta} + \frac{\partial p_2}{\partial \chi} + A_1 \frac{\partial A_1}{\partial \chi} - \frac{\partial u_2}{\partial \chi} &= 0 \\ \frac{\partial A_1}{\partial \eta} - \frac{\partial A_2}{\partial \chi} + 2A_1 \frac{\partial A_1}{\partial \chi} + \frac{\partial u_2}{\partial \chi} &= 0. \end{aligned}$$

Από εδώ εξάγουμε την αντίστοιχη KdV τάξης  $O(1)$  η οποία είναι

$$\frac{\partial A_1}{\partial \eta} + \frac{3}{2} A_1 \frac{\partial A_1}{\partial \chi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 A_1}{\partial \chi^3} = 0.$$

Για να βρούμε τον τύπο της eKdV για το πρόβλημά μας θα προχωρήσουμε στην τάξη  $O(\varepsilon^3)$ , δηλαδή

$$\begin{aligned} A_3 - p_3 - 2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial \chi \partial \eta} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial \chi^2} &= 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial \eta} + \frac{\partial p_3}{\partial \chi} + u_2 \frac{\partial A_1}{\partial \chi} + A_1 \frac{\partial u_2}{\partial \chi} - \frac{\partial u_3}{\partial \chi} &= 0 \\ \frac{\partial A_2}{\partial \eta} + u_2 \frac{\partial A_1}{\partial \chi} + A_1 \frac{\partial A_2}{\partial \chi} - \frac{\partial A_3}{\partial \chi} + A_2 \frac{\partial A_1}{\partial \chi} + A_1 \frac{\partial u_2}{\partial \chi} + \frac{\partial u_3}{\partial \chi} &= 0. \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας την σχέση

$$u_2 = -\frac{1}{4} A_1^2 + A_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial \chi^2},$$

οδηγούμαστε στην εξίσωση

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial A_2}{\partial \eta} - \frac{1}{2} A_1 \frac{\partial A_1}{\partial \eta} - \frac{3}{2} A_1^2 \frac{\partial A_1}{\partial \chi} + 3A_2 \frac{\partial A_1}{\partial \chi} + 3A_1 \frac{\partial A_2}{\partial \chi} \\ + \frac{\partial A_1}{\partial \chi} \frac{\partial^2 A_1}{\partial \chi^2} - \frac{3}{2} \frac{\partial^3 A_1}{\partial \chi^2 \partial \eta} + A_1 \frac{\partial^3 A_1}{\partial \chi^3} + \frac{\partial^3 A_2}{\partial \chi^3} &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Θέτουμε  $A_h = A_1 + \varepsilon A_2$ , διότι

$$A = 1 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 = 1 + \varepsilon(A_1 + \varepsilon A_2) = 1 + \varepsilon A_h$$

και αναζητούμε την εξίσωση για τη μεταβλητή  $A_h$ . Αντικαθιστούμε στην (3.4),  $A_h = A_1 + \varepsilon A_2$  και για τις ανώτερες τάξεις παραγώγους του  $A_h$  αντίστοιχα και προκύπτει η γενικευμένη KdV

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A_h}{\partial \eta} + \frac{3}{2} A_h \frac{\partial A_h}{\partial \chi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 A_h}{\partial \chi^3} \\ & + \varepsilon \left( -\frac{3}{8} A_h^2 \frac{\partial A_h}{\partial \chi} + \frac{31}{8} \frac{\partial A_h}{\partial \chi} \frac{\partial^2 A_h}{\partial \chi^2} + \frac{7}{4} A_h \frac{\partial^3 A_h}{\partial \chi^3} + \frac{3}{8} \frac{\partial^5 A_h}{\partial \chi^5} \right) = 0. \end{aligned}$$

Καταλήξαμε δηλαδή στον ίδιο γενικευμένο τύπο για την αρτηριακή πίεση που αποδείξαμε προηγουμένως για την KdV αλλά με διαφορετικούς συντελεστές. Αποδεικνύουμε έτσι την καθολικότητα της KdV.

## 3.2 Η μη γραμμική εξίσωση του Schrödinger (NLS)

Μια επίσης καθολική εξίσωση είναι η μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS). Η καθολικότητά της προκύπτει από την ικανότητά της να περιγράφει τη διάδοση μη γραμμικών κυμάτων σε μέσα διασποράς. Εμφανίζεται σε διάφορα φυσικά συστήματα και χρησιμοποιείται ευρέως σε πολλούς τομείς. Ενδεικτικά αναφέρουμε την οπτική, τη φυσική πλάσματος, τη ρευστομηχανική, τη κβαντική μηχανική και τη μηχανική στερεών σωμάτων.

Είναι συνεπώς, πολύ σημαντικό, να διερευνηθεί μια σύνδεση μεταξύ των δύο μοντέλων, αν υπάρχει.

Ξεκινούμε από την εξίσωση NLS (στην αφεστιάζουσα μορφή),

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + |\psi|^2 \psi = 0. \quad (3.5)$$

Γράφουμε τη λύση της (3.5) ως σύνθεση μιας συνάρτησης  $u_b(t)$ , και μιας συνάρτησης  $u(t, x)$ , δηλαδή  $\psi(t, x) = u_b(t)u(t, x)$ . Η συνάρτηση  $u_b(t)$  ικανοποιεί την εξίσωση

$$i \frac{du_b}{dt} + |u_b|^2 u_b = 0, \quad (3.6)$$

ενώ η συνάρτηση  $u(t, x)$  ικανοποιεί την

$$i \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u_b|^2 (|u|^2 - 1) u = 0. \quad (3.7)$$



Η συνάρτηση  $u_b(t)$  λαμβάνει την μορφή

$$u_b(t) = u_0 \exp(i|u_0|^2 t),$$

η οποία είναι μία γενική λύση αυτής και το  $u_0$  να είναι μία αυθαίρετη σταθερά. Τώρα μπορούμε να ορίσουμε νέες ανεξάρτητες μεταβλητές  $\tau$  και  $\xi$ :

$$d\tau = |u_b|^2 dt, \quad d\xi = |u_b| dx.$$

Αντικαθιστώντας τις νέες μεταβλητές στην εξίσωση (3.5) λαμβάνουμε την ακόλουθη εξίσωση

$$i \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (|u|^2 - 1) u = 0, \quad (3.8)$$

η οποία είναι ίδια με την εξίσωση (3.7). Στην πορεία θα εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό

$$u(\tau, \xi) = \rho \exp(i\phi)$$

όπου  $\rho$  το εύρος και  $\phi$  η φάση του  $u$  αντίστοιχα, έτσι η σχέση (3.8) μειώνεται στο σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} \rho_\tau - \frac{1}{2} (\rho \phi_{\xi\xi} + 2\phi_\xi \rho_\xi) &= 0, \\ \rho \phi_\tau + \frac{1}{2} (\rho_{\xi\xi} - \rho \phi_\xi^2) - (\rho^2 - 1) \rho &= 0. \end{aligned}$$

Τώρα ορίζουμε νέες μεταβλητές,

$$T = \varepsilon^3 \tau, \quad X = \varepsilon(\xi - C\tau),$$

όπου  $C$  είναι μία αυθαίρετη σταθερά και, το τελικό μας σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\varepsilon^3 \rho_T - \varepsilon C \rho_X - \frac{1}{2} (\rho \varepsilon^2 \phi_{XX} + 2\varepsilon^2 \phi_X \rho_X) = 0, \quad (3.9)$$

$$\rho (\varepsilon^3 \phi_T - \varepsilon C \phi_X) + \frac{1}{2} (\varepsilon^2 \rho_{XX} - \rho \varepsilon^2 \phi_X^2) - (\rho^2 - 1) \rho = 0. \quad (3.10)$$

Κατά τα γνωστά, γράφουμε τις συναρτήσεις σε μορφή σειράς,

$$\begin{aligned} \rho(T, X) &= \rho_0 + \varepsilon^2 \rho_2 + \varepsilon^4 \rho_4 + \dots \\ \phi(T, X) &= \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^3 \phi_3 + \varepsilon^5 \phi_5 + \dots \end{aligned}$$

και αντικαθιστούμε στο σύστημα (3.9)-(3.10) οπότε λαμβάνουμε για τους κυρίαρχους όρους τάξης  $\varepsilon$  τα εξής:

$$\begin{aligned} O(1) : \rho_0 - \rho_0^3 &= 0 \Rightarrow \rho_0^2 = 1, \\ O(\varepsilon) : \frac{\partial \rho_0}{\partial X} &= 0, \\ O(\varepsilon^2) : 2\rho_2 + C \frac{\partial \phi_1}{\partial X} &= 0, \\ O(\varepsilon^3) : C \frac{\partial \rho_2}{\partial X} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial X^2} &= 0. \end{aligned}$$

Η συνθήκη συμβιβαστότητας δίνει  $C^2 = 1$ ,  $\rho_0^2 = 1$  (χωρίς βλάβη στη γενικότητα θα θεωρήσουμε εδώ  $C = \rho_0 = 1$ ) άρα

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial X} = -2\rho_2. \quad (3.11)$$

Στις επόμενες τάξεις του  $\varepsilon$  χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.11) έχουμε:

$$O(\varepsilon^4) : 2\rho_4 + 3\rho_2^2 + \frac{\partial \phi_3}{\partial X} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial X^2} - \frac{\partial \phi_1}{\partial T} = 0, \quad (3.12)$$

$$O(\varepsilon^5) : -\frac{\partial \rho_4}{\partial X} + 3\rho_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial X} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial X^2} + \frac{\partial \rho_2}{\partial T} = 0. \quad (3.13)$$

Θα παραγωγίσουμε ως προς  $X$  την εξίσωση (3.12) και χρησιμοποιώντας την (3.11) μαζί με την εξίσωση (3.13) αφού την έχουμε λύσει ως προς  $\frac{\partial \rho_4}{\partial X}$  θα οδηγηθούμε στην ακόλουθη KdV

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial T} + 3\rho_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial X} - \frac{1}{8} \frac{\partial^3 \rho_2}{\partial X^3} = 0.$$

Για να εξαγάγουμε και τη γενικευμένη KdV θα προχωρήσουμε στις επόμενες δύο τάξεις αφού χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (3.11) και την σχέση

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial X} = -2\rho_4 - 3\rho_2^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial X^2} + \frac{\partial \phi_1}{\partial T} \quad (3.14)$$

προκύπτει σε τάξη  $O(\varepsilon^6)$  :

$$6\rho_2^3 - 6\rho_2\rho_4 - 2\rho_6 - \frac{\partial \phi_5}{\partial X} + \frac{1}{2} \rho_2 \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial X^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho_4}{\partial X^2} + 2\rho_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial T} + \frac{\partial \phi_3}{\partial T} = 0, \quad (3.15)$$

και σε τάξη  $O(\varepsilon^7)$  :

$$\begin{aligned} 6\rho_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial X} + 3\rho_4 \frac{\partial \rho_2}{\partial X} + 3\rho_2 \frac{\partial \rho_4}{\partial X} - \frac{\partial \rho_6}{\partial X} - \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_2}{\partial X} \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial X^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial X^2} \\ - \frac{1}{4} \rho_2 \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial X^3} + \frac{\partial \rho_4}{\partial T} - \frac{\partial \rho_2}{\partial X} \frac{\partial \phi_1}{\partial T} - \frac{1}{2} \rho_2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial X \partial T} = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Θα παραγωγίσουμε ως προς  $X$  την εξίσωση (3.15) και χρησιμοποιώντας την σχέση (3.16) αφού την έχουμε λύσει ως προς  $\frac{\partial \rho_6}{\partial X}$  θα οδηγηθούμε στην ακόλουθη

$$\begin{aligned} -36\rho_2^2 \frac{\partial \rho_2}{\partial X} - 12\rho_4 \frac{\partial \rho_2}{\partial X} - 12\rho_2 \frac{\partial \rho_4}{\partial X} + 2 \frac{\partial \rho_2}{\partial X} \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial X^2} + \rho_2 \frac{\partial^3 \rho_2}{\partial X^3} \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \rho_4}{\partial X^3} - 15\rho_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial T} - 4 \frac{\partial \rho_4}{\partial T} + \frac{5}{8} \frac{\partial^3 \rho_2}{\partial X \partial T} = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Επόμενο βήμα είναι να θέσουμε  $\rho_2 = \rho - \varepsilon^2 \rho_4$ , επομένως η KdV γράφεται

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} + 3\rho \frac{\partial \rho}{\partial X} - \frac{1}{8} \frac{\partial^3 \rho}{\partial X^3} = 0.$$

Αντικαθιστώντας  $\rho_2 = \rho - \varepsilon^2 \rho_4$  στην εξίσωση (3.17) θα λάβουμε την eKdV που είναι

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} + 3\rho \frac{\partial \rho}{\partial X} - \frac{1}{8} \frac{\partial^3 \rho}{\partial X^3} + \varepsilon \left( 9\rho^2 \frac{\partial \rho}{\partial X} - \frac{29}{8} \frac{\partial \rho}{\partial X} \frac{\partial^2 \rho}{\partial X^2} - \frac{11}{4} \rho \frac{\partial^3 \rho}{\partial X^3} + \frac{5}{64} \frac{\partial^5 \rho}{\partial X^5} \right) = 0.$$

Είναι εμφανές ότι οι όροι της ταυτίζονται με αυτή της KdV στα αβαθή ύδατα αλλά με διαφορετικούς συντελεστές. Αποδείξαμε και με ένα άλλο παράδειγμα την καθολικότητα της εξίσωσης KdV.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## ΕΠΙΛΥΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΤΗΤΑ

### 4.1 Το γραμμικό πρόβλημα

#### 4.1.1 Υδάτινα κύματα

Θα ξεκινήσουμε από τη μελέτη του γραμμικού προβλήματος. Στη συνέχεια θα αναλύσουμε την πλήρη εξίσωση (με τη μη-γραμμικότητα) και τη σολιτονική λύση. Αρχικά, θα μελετήσουμε το σύστημα Euler με το απλοποιημένο γραμμικό πρόβλημα, θεωρώντας τις απλοποιήσεις  $|\eta| \ll 1$  και  $\|\nabla\phi\| \ll 1$ . Θα κοιτάξουμε το σύστημα των εξισώσεων πριν την αδιαστατοποίηση. Οι δύο πρώτες εξισώσεις παραμένουν αμετάβλητες, και επιπλέον ικανοποιούνται στην επιφάνεια  $z = 0$ . Οι δύο τελευταίες εξισώσεις, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor

$$\begin{aligned}\phi(x, \eta, t) &= \phi(x, 0, t) + \eta \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, 0, t) + \dots \\ &= \phi_0(x, t) + \eta \phi_{0z}(x, t) + \dots\end{aligned}$$

γίνονται

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_0}{\partial t} &= -g\eta, \quad z = 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \phi_{0z}(x, z, t), \quad z = 0.\end{aligned}$$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$\phi_s(x, z, t) = A(k, z, t) \exp(ikx),$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση Laplace λαμβάνουμε

$$\nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow A_{zz} - k^2 A = 0.$$

Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο λαμβάνουμε

$$\lambda^2 - k^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm k.$$

Άρα,  $A(z, t) = \tilde{A}(k, t) \cosh [k(z + h)] + B(\tilde{k}, t) \sinh [k(z + h)]$ .

Ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη του πυθμένα

$$\frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad z = -h,$$

όπου προκύπτει ότι  $\tilde{B} = 0$  επομένως

$$A(z, t) = \tilde{A}(k, t) \cosh [k(z + h)].$$

Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίσαμε κύματα στο χώρο, τώρα θέλουμε και στο χρόνο. Θεωρούμε

$$\eta(x, t) = \tilde{\eta}(k, t) \exp(ikx),$$

έπειτα αντικαθιστώντας στο σύστημα αποδίδει

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} \cosh(kh) + g\tilde{\eta} = 0,$$

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} - k \sinh(kh) \tilde{A} = 0.$$

Παίρνοντας την παράγωγο του χρόνου, της δεύτερης εξίσωσης και αντικαθιστώντας στην πρώτη προκύπτει

$$\frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial t^2} + gk \tanh(kh) \tilde{\eta} = 0.$$

Υποθέτοντας  $\tilde{\eta}(k, t) = \tilde{\eta}(k, 0) \exp(-i\omega t)$ , βρίσκουμε τη σχέση διασποράς:

$$\omega^2 = gk \tanh(kh).$$

Τελικά εφαρμόζοντας το θεώρημα Taylor γύρω από το  $k = 0$  θα έχουμε

$$k\omega = k\sqrt{gk \tanh(kh)} = k \left( k\sqrt{g} + k^3 \frac{1}{6} \sqrt{g} + k^5 \frac{19}{360} \sqrt{g} \right).$$

Η ανάλυσή μας πρέπει να είναι συγκρίσιμη με τα αποτελέσματα των γενικευμένων εξισώσεων των προηγούμενων κεφαλαίων (συγκεκριμένα για την KdV). Πράγματι, αν αγνοήσουμε τους μη γραμμικούς όρους θα πρέπει οι συντελεστές των γραμμικών λύσεων να είναι ταυτόσημοι. Θυμίζουμε ότι εδώ η μεταβλητή  $k$  έχει το ρόλο της μεταβλητής Fourier και αντιστοιχούμε χωρικές παραγώγους τάξης  $n$  σε δυνάμεις  $k^n$ . Η σύγκριση επιβεβαιώνει την ορθότητα των υπολογισμών μας.

### 4.1.2 Εξισώσεις αρτηριακής πίεσης

Από το σύστημα της αρτηριακής πίεσης θεωρώ  $\tilde{A} = \tilde{A} + 1$  για να απλοποιηθεί η εξίσωση Euler. Έτσι το νέο σύστημα είναι

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial \tau^2} + \tilde{A} &= \tilde{p} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \tau} + (\tilde{A} + 1) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \xi} &= 0.\end{aligned}$$

Κρατάμε τους γραμμικούς όρους μόνο από το σύστημα οπότε

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial \tau^2} + \tilde{A} &= \tilde{p} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} &= 0.\end{aligned}$$

Ψάχνουμε λύσεις της μορφής

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\xi, \tau) &= A_0(k, l) \exp(i(q\xi - \omega\tau)) \\ \tilde{u}(\xi, \tau) &= u_0(k, l) \exp(i(q\xi - \omega\tau)) \\ \tilde{p}(\xi, \tau) &= p_0(k, l) \exp(i(q\xi - \omega\tau)).\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τρεις αυτές σχέσεις στο σύστημά μας θα προκύψουν σχέσεις μεταξύ των τριών μεταβλητών και έτσι θα καταλήξουμε στη σχέση διασποράς

$$\omega^2 = \frac{q^2}{q^2 + 1}$$

και εφαρμόζοντας το θεώρημα Taylor γύρω από το  $q = 0$  θα έχουμε

$$\omega = \sqrt{\frac{q^2}{q^2 + 1}} \simeq q - \frac{1}{2}q^3 + \frac{3}{8}q^5.$$

Είναι προφανές ότι οι συντελεστές του  $q$  είναι ίδιοι με τους γραμμικούς όρους της εξίσωσης της αρτηριακής πίεσης που αποδείξαμε προηγουμένως. Είναι δηλαδή ένας τρόπος επαλήθευσης.

## 4.2 Το μη γραμμικό πρόβλημα

Σημαντικό κομμάτι των αποτελεσμάτων μας αποτελεί και η εύρεση λύσεων των γενικευμένων εξισώσεων. Γνωρίζουμε για την εξίσωση KdV ότι είναι πλήρως ολοκληρώσιμη, μέσω του μετασχηματισμού αντίστροφης σκέδασης, και μία πολλή γνωστή του λύση είναι το λεγόμενο σολιτόνιο. Τα σολιτόνια είναι εξαιρετικά ευσταθείς, εντοπισμένες λύσεις μη γραμμικών εξισώσεων που διατηρούν το σχήμα και την ταχύτητά τους κατά τη διάδοσή τους σε κάποιο μέσο, ακόμα και μετά από αλληλεπίδραση με άλλα σολιτόνια. Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μία μέθοδο, που καλείται ασυμπτωτική ολοκληρωσιμότητα, που επιτρέπει να κατασκευάσουμε λύσεις των γενικευμένων εξισώσεων, όπως η eKdV, γνωρίζοντας τη λύση της απλής εξίσωσης.

### 4.2.1 Ασυμπτωτική ολοκληρωσιμότητα

Ξεκινώντας, λοιπόν από τη γενικευμένη KdV

$$\eta_t + \left( \frac{3}{2}\eta\eta_x + \frac{1}{6}\eta_{xxx} \right) + \varepsilon \left( -\frac{3}{8}\eta^2\eta_x + \frac{23}{24}\eta_x\eta_{xx} + \frac{5}{12}\eta\eta_{xxx} + \frac{19}{360}\eta_{xxxx} \right) = 0,$$

αναζητούμε έναν μετασχηματισμό που θα αποδείξουμε στην πορεία πως προέκυψε

$$\eta = v + \varepsilon \left[ \lambda_1 v^2 + \lambda_2 v v_{xx} + \lambda_3 v_x \int v dx + \lambda_4 K(v) \right]$$

όπου

$$K(v) = \frac{3}{2}v v_x + \frac{1}{6}v_{xxx}.$$

Στόχος μας είναι να βρούμε τις τιμές των  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  ώστε να μηδενιστούν οι όροι που βρίσκονται μέσα στην παρένθεση του  $O(\varepsilon)$ . Έπειτα από μία σειρά πράξεων θα καταλήξουμε στο

$$\eta = v + \left[ \frac{59}{60}v^2 + \frac{11}{45}v_{xx} + \frac{13}{30}v_x \int v dx - \frac{19}{180}x v_{xxx} - \frac{57}{60}x v v_x \right].$$

Αυτή η αντικατάσταση μας επέτρεψε να βρούμε λύσεις της γενικευμένης εξίσωσης eKdV, γνωρίζοντας τη λύση της KdV. Έτσι λαμβάνουμε,

$$v_t + \frac{3}{2}v v_x + \frac{1}{6}v_{xxx} = 0,$$



που είναι η KdV.

Ας παραθέσουμε τώρα την απόδειξη του μετασχηματισμού

$$\eta = v + \varepsilon \left[ \lambda_1 v^2 + \lambda_2 v_{xx} + \lambda_3 v_x \int v \, dx + \lambda_4 x K(v) \right].$$

Έστω  $v$  να λύνει την εξίσωση,

$$v_t + M(v) + \varepsilon M_1(v) = 0.$$

Ας ορίσουμε το  $\eta$  από τον μετασχηματισμό

$$\eta = v + \varepsilon R(v).$$

Τότε από την απευθείας αντικατάσταση ακολουθεί ότι το  $\eta$  λύνει την εξίσωση

$$\eta_t + M(\eta) + \varepsilon M_1(\eta) + \varepsilon ([R(\eta), M(\eta)]_L) + O(\varepsilon^2) = 0. \quad (4.1)$$

Ο μεταθέτης  $[A, B]_L$  ορίζεται ως

$$[A(\eta), B(\eta)]_L = A' [B] (\eta) - B' [A] (\eta),$$

και η παράγωγος υποδηλώνει την παράγωγο κατά Frechet δηλαδή,

$$A' [B(\eta)] = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} A [\eta + \varepsilon B(\eta)]_{|\varepsilon=0}.$$

Ας ορίσουμε τη συνάρτηση  $\tau(x, t)$  που καθορίζεται ως η κύρια συμμετρία της συνάρτησης

$$v_t + M(v) = 0$$

και  $[\tau, M]_L = M_1$  είναι η επόμενη ροή. Έστω  $M = K$ ,  $M_1 = 0$  και  $R = \tau$  όπου

$$\tau = \frac{1}{3} a_1 \left[ c_1 v^2 + c_2 v_{xx} + c_3 v_x \int v \, dx + x K(v) \right].$$

Τότε η εξίσωση (4.1) γίνεται

$$\eta_t + K(\eta) + \varepsilon K_1(\eta) = 0,$$

με

$$K_1 = a_1 \eta^2 \eta_x + a_2 \eta_x \eta_{xx} + a_3 \eta \eta_{xxx} + a_4 \eta_{xxxx}.$$

### 4.2.2 Κατασκευή των λύσεων

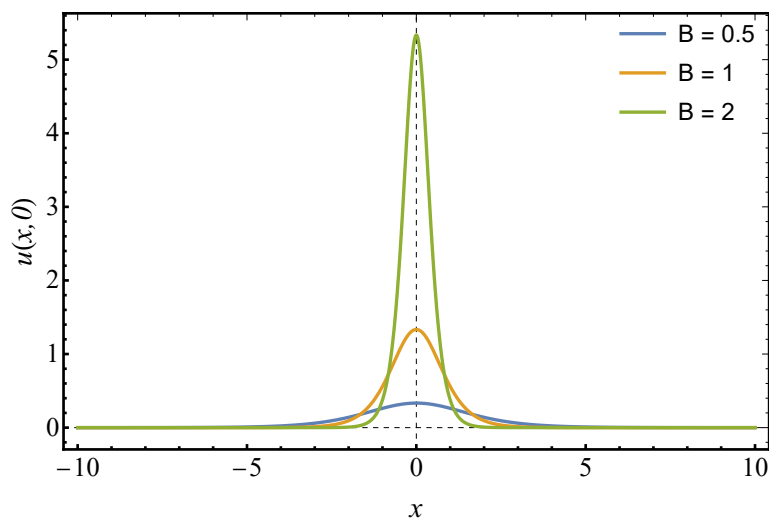
Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε και θα αναπαραστήσουμε διάφορες λύσεις για την εξίσωση KdV και θα τις συγκρίνουμε με την λύση της ασυμπτωτικής ολοκληρωσιμότητας. Έστω, η εξίσωση KdV

$$v_t + \frac{3}{2}vv_x + \frac{1}{6}v_{xxx} = 0,$$

της οποίας η σολιτονική λύση μπορεί εύκολα να βρεθεί ότι γράφεται ως

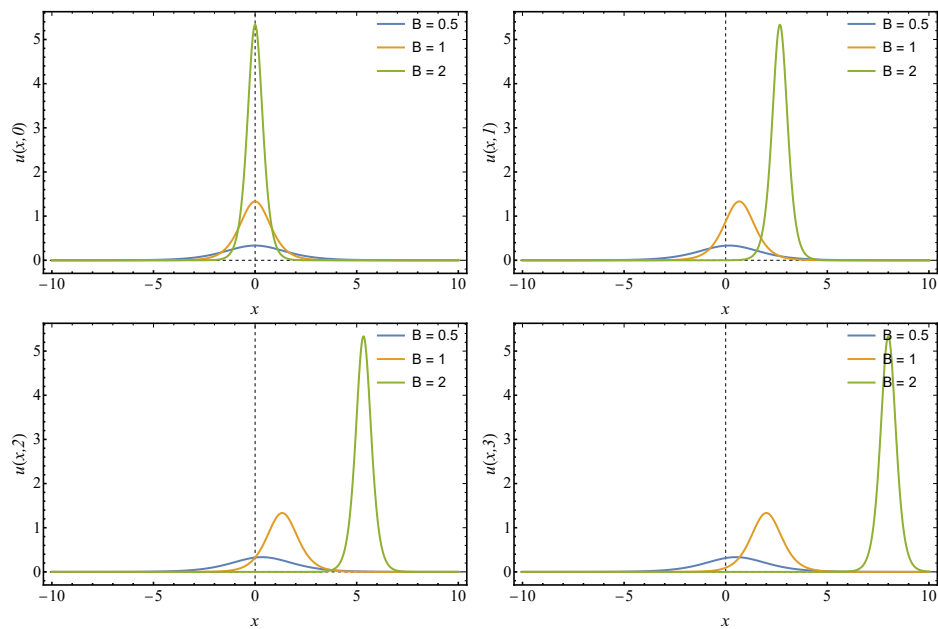
$$v(x, t) = \frac{4}{3}B^2 \operatorname{sech}^2 \left[ B \left( x - \frac{2}{3}B^2 t + x_0 \right) \right]. \quad (4.2)$$

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι η λύση εξαρτάται αποκλειστικά από μια σταθερά  $B$  η οποία επηρεάζει τόσο το ύψος όσο και την ταχύτητα των λύσεων. Δηλαδή, όσο πιο ‘ψηλά’ και ‘στενά’ είναι τα σολιτόνια τόσο πιο γρήγορα διαδίδονται. Στο παρακάτω σχήμα 4.1 δίνουμε αυτές τις λύσεις για  $t = 0$ , για διάφορες τιμές της σταθεράς αυτής.



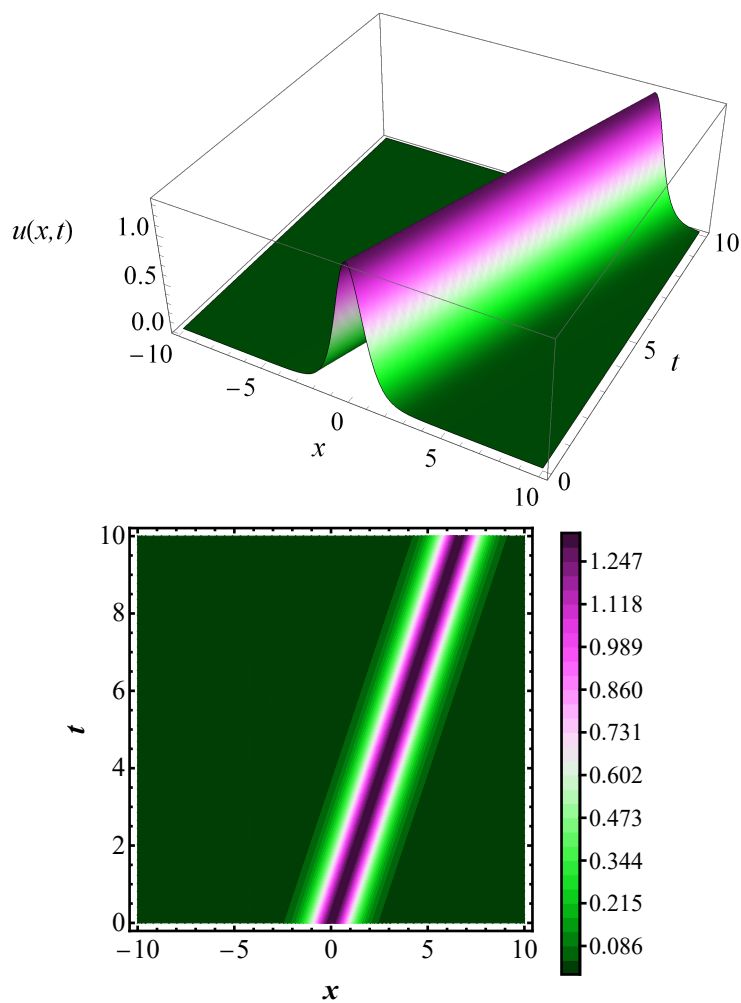
Σχήμα 4.1: Η σολιτονική λύση της KdV, εξίσωση (4.2), για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $B$ .

Για να γίνει πιο άμεσα κατανοητή η σχέση της παραμέτρου με την ταχύτητα διάδοσης αναπαριστούμε στο σχήμα 4.2 τις παραπάνω λύσεις για διάφορους χρόνους.



Σχήμα 4.2: Η σολιτονική λύση της KdV, εξίσωση (4.2), για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $B$ , σε χρόνους  $t = 0, 1, 2, 3$ .

Τέλος παρέχουμε μια συνολική απεικόνιση της διάδοσης, στο σχήμα 4.3, μια λύσης ώστε να γίνει κατανοητή και η έννοια της διατήρησης του σχήματος, τόσο σε ύψος όσο και πλάτος.



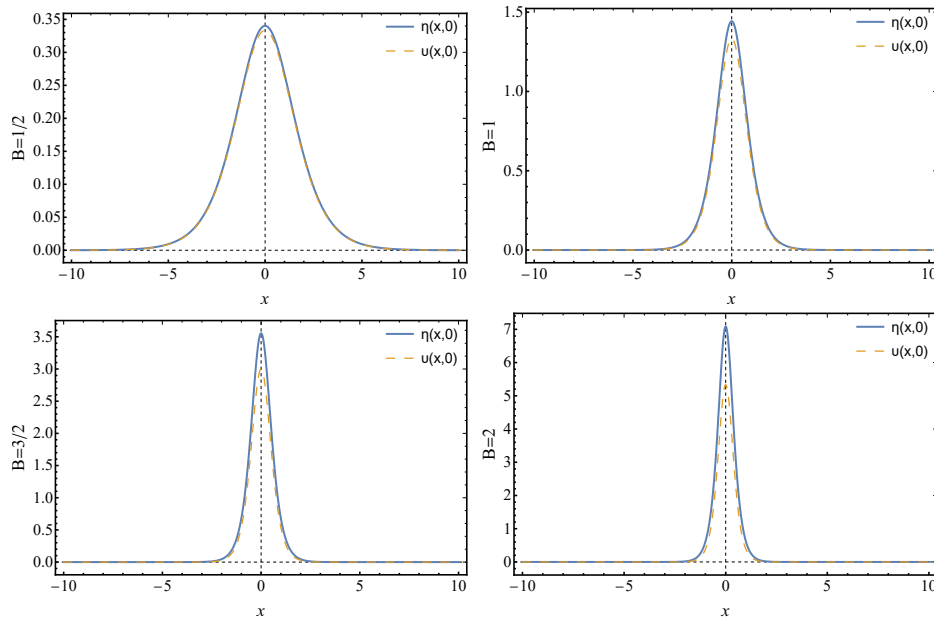
Σχήμα 4.3: Η σολιτονική λύση της KdV, εξίσωση (4.2), όπως περιγράφεται από την εξίσωση (4.2), για  $B = 1$  και  $x_0 = 0$ .

Το βασικό ερώτημα είναι πώς αυτά τα βασικά χαρακτηριστικά επηρεάζονται από την ύπαρξη ανώτερων όρων στην εξίσωση. Βρήκαμε ότι η λύση της eKdV

εξίσωσης μπορεί να γραφεί ως

$$\eta(x, t) = v + \varepsilon \left( \frac{59}{60}v^2 + \frac{11}{45}v_{xx} + \frac{13}{30}v_x \int v dx - \frac{19}{180}xv_{xxx} - \frac{57}{60}xv v_x \right), \quad (4.3)$$

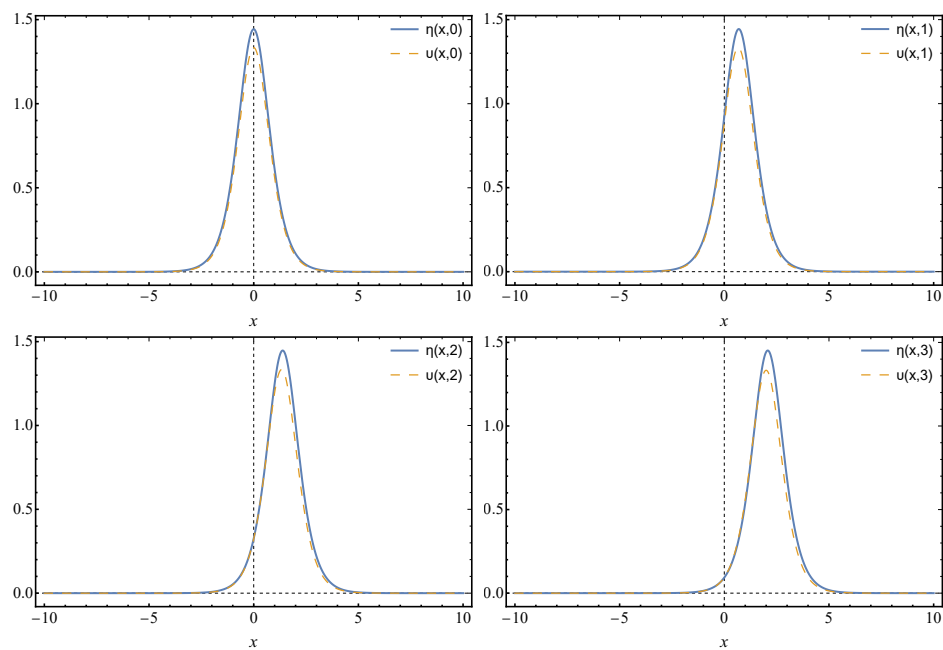
όπου  $v$  δίνεται από την εξίσωση (4.2). Δεν γράφουμε τη λύση μετά τις πράξεις, διότι δεν προσφέρει κάτι στην ανάλυση μιας και οι σχετικές πράξεις είναι στοιχειώδεις. Στο σχήμα 4.4 συγκρίνουμε τις λύσεις απλής και γενικευμένης εξίσωσης για διάφορες τιμές της σταθεράς  $B$ . Σημειώνουμε ότι για όλα τα γραφήματα  $\varepsilon = 0.1$ .



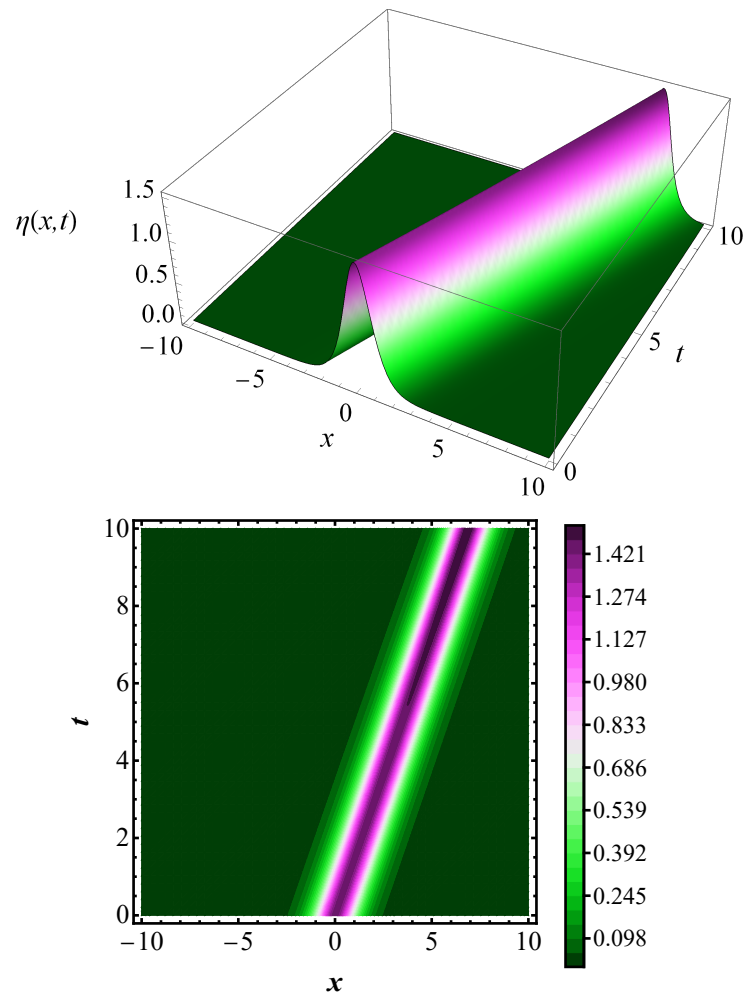
Σχήμα 4.4: Απεικόνιση των λύσεων (4.3) της γενικευμένης εξίσωσης και των λύσεων (4.2) της απλής για  $B = 0.5, 1, 1.5, 2$ . Εδώ  $\varepsilon = 0.1$  και  $x_0 = 0$ .

Στη συνέχεια, στο σχήμα 4.5 σταθεροποιούμε της σταθερά  $B = 1$  και παραθέτουμε τις δύο λύσεις για διαφορετικές χρονικές στιγμές όπως και παραπάνω.

Τέλος, απομονώνουμε τη λύση (4.3) της γενικευμένης εξίσωσης και παρέχουμε μια συνολική απεικόνιση της διάδοσης, στο σχήμα 4.6, ώστε να επαληθεύσουμε και πάλι τη διατήρηση των χαρακτηριστικών του σολιτονίου κατά τη διάδοση.



Σχήμα 4.5: Απεικόνιση των λύσεων (4.3) της γενικευμένης εξίσωσης και των λύσεων (4.2) της απλής για  $B = 1$  σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Και πάλι,  $\varepsilon = 0.1$  και  $x_0 = 0$ .



Σχήμα 4.6: Η σολιτονική λύση της eKdV όπως περιγράφεται από την εξίσωση (4.3), για  $B = 1$ ,  $\varepsilon = 0.1$  και  $x_0 = 0$ .





# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

## ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΣΕ ΔΥΟ ΧΩΡΙΚΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ – Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΑΔΟΜΤΣΕΒ–ΡΕΤΒΙΑΣΗΒΙΛΙ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξάγουμε την πλήρη γενικευμένη εξίσωση Kadomtsev–Petviashvili (KP) από τις εξισώσεις των υδάτινων κυμάτων, η οποία ενσωματώνει όλους τους όρους διόρθωσης υψηλότερης τάξης, πέρα από την τυπική εξίσωση KP, όπως έγινε για την εξίσωση KdV, στην δεύτερη ενότητα. Πλέον, στις εξισώσεις Euler, η παράμετρος  $\delta = \lambda_x/\lambda_y$ , ο λόγος των μηκών κύματος στις δύο οριζόντιες κατευθύνσεις, δεν αγνοείται, αλλά λαμβάνεται αντικαθιστώντας  $\delta^2 \rightarrow \varepsilon\delta^2$  στην εξίσωση του Laplace. Αναλυτικότερα το σύστημά μας είναι

$$\phi_{zz} + \varepsilon(\phi_{xx} + \varepsilon\delta^2\phi_{yy}) = 0, \quad -1 < z < \varepsilon\eta \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0, \quad z = -1 \quad (5.2)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}\varepsilon\left(\phi_x^2 + \varepsilon\delta^2\phi_y^2 + \frac{1}{\varepsilon}\phi_z^2\right) + \eta = 0, \quad z = \varepsilon\eta \quad (5.3)$$

$$\varepsilon(\eta_t + \varepsilon\phi_x\eta_x + \varepsilon\delta^2\phi_y\eta_y) = \phi_z, \quad z = \varepsilon\eta. \quad (5.4)$$

Όπως και προηγούμενα αναλύουμε το πεδίο ταχυτήτων σε μια σειρά

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2\phi_2 + \dots$$

και αντικαθιστώντας, όπως και πριν, στην εξίσωση Laplace (5.1) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \phi_{0zz} + \varepsilon(\phi_{1zz} + \phi_{0xx}) + \varepsilon^2(\phi_{2zz} + \phi_{1xx} + \delta^2\phi_{0yy}) \\ + \varepsilon^3(\phi_{3zz} + \phi_{2xx} + \delta^2\phi_{1yy}) + \dots = 0. \end{aligned}$$

Η επίλυση αυτών των διαφορικών εξισώσεων, σε κάθε τάξη του  $\varepsilon$ , γίνεται εξισώνοντας όρους με ίδιες δυνάμεις και με την εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης

Κεφάλαιο 5

(5.2) βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\phi_0(x, y, z, t) &= A(x, y, t), \\ \phi_1(x, y, z, t) &= -\frac{(z+1)^2}{2}A_{xx}, \\ \phi_2(x, y, z, t) &= -\frac{(z+1)^2}{2}\delta^2 A_{yy} + \frac{(z+1)^4}{24}A_{xxxx}, \\ \phi_3(x, y, z, t) &= \frac{(z+1)^4}{12}\delta^2 A_{xyy} - \frac{(z+1)^6}{720}A_{xxxxx}.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z, t) &= A(x, y, t) - \varepsilon \left[ \frac{(z+1)^2}{2}A_{xx} \right] \\ &+ \varepsilon^2 \left[ -\frac{(z+1)^2}{2}\delta^2 A_{yy} + \frac{(z+1)^4}{24}A_{xxxx} \right] \\ &+ \varepsilon^3 \left[ \delta^2 \frac{(z+1)^4}{12}A_{xyy} - \frac{(z+1)^6}{720}A_{xxxxx} \right].\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην εξίσωση Bernoulli (5.3) και την κινηματική (5.4) και μαζί με την ελεύθερη επιφάνεια  $z = \varepsilon\eta$  θα πάρουμε

$$\begin{aligned}\eta + A_t + \varepsilon \left[ \frac{1}{2}A_x^2 - \frac{1}{2}A_{xxt} \right] \\ + \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{2}\delta^2 A_y^2 - \frac{1}{2}\delta^2 A_{yyt} + \frac{1}{2}A_{xx}^2 - \eta A_{xxt} - \frac{1}{2}A_x A_{xxx} + \frac{1}{24}A_{xxxxt} \right] = 0,\end{aligned}\tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}\eta_t + A_{xx} + \varepsilon \left[ \delta^2 A_{yy} + (\eta A_x)_x - \frac{1}{6}A_{xxxx} \right] \\ + \varepsilon^2 \left[ \delta^2 (A_y \eta)_y + \frac{1}{3}\delta^2 A_{xyy} - \left( \frac{1}{2}\eta A_{xxx} \right)_x + \frac{1}{120}A_{xxxxx} \right] = 0.\end{aligned}\tag{5.6}$$

Αυτό είναι το νέο σύστημά μας. Στη συνέχεια, παραγωγίζοντας τη δυναμική συνοριακή συνθήκη (5.5) ως προς το  $x$ , και εισάγοντας τον μετασχηματισμό  $\omega = A_x$ ,  $A_y = \partial_x^{-1}(\omega_y) = \int \omega_y dx$ , και αντίστοιχα για τις υπόλοιπες παραγώγους

Κεφάλαιο 5

μετατρέπονται οι εξισώσεις της δυναμικής (5.5) και κινηματικής (5.6) ως εξής

$$\begin{aligned} \omega_t + \eta_x + \varepsilon \left[ \omega\omega_x - \frac{1}{2}\omega_{xxt} \right] \\ + \varepsilon^2 \left[ \delta^2\omega_y\partial_x^{-1}(\omega_y) - \frac{1}{2}\delta^2\omega_{yyt} - \eta_x\omega_{xt} \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\omega_x\omega_{xx} - \eta\omega_{xt} - \frac{1}{2}\omega\omega_{xxx} + \frac{1}{24}\omega_{xxxxt} \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \eta_t + \omega_x + \varepsilon \left[ \delta^2\partial_x^{-1}(\omega_{yy}) + (\eta\omega)_x - \frac{1}{6}\omega_{xxx} \right] \\ + \varepsilon^2 \left[ \delta^2\eta\partial_x^{-1}(\omega_{yy}) + \delta^2\eta_y\partial_x^{-1}(\omega_y) \right. \\ \left. - \frac{1}{3}\delta^2\omega_{xyy} - \frac{1}{2}(\eta\omega_{xx})_x + \frac{1}{120}\omega_{xxxxx} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Προκειμένου να είναι συμβιβαστές, θέτουμε

$$\omega = \eta + \varepsilon(\omega_1 + \delta^2\omega_{12}) + \varepsilon^2(\omega_2 + \delta^2\omega_{21}) + O(\varepsilon^3),$$

αντικαθιστούμε και η τελική μορφή του συστήματος είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \eta_x + \eta_t + \varepsilon \left[ \omega_{1t} + \delta^2\omega_{12t} + \eta\eta_x - \frac{1}{2}\eta_{xxt} \right] \\ + \varepsilon^2 \left[ \omega_{2t} + \delta^2\omega_{21t} + \delta^2\eta_y\partial_x^{-1}(\varepsilon\omega_{1y} + \delta^2\varepsilon\omega_{12y} + \varepsilon^2\omega_{2y} + \varepsilon^2\delta^2\omega_{21y} + \eta_y) \right. \\ - \frac{1}{2}\delta^2\eta_{yyt} + \eta\omega_{1x} + \delta^2\eta\omega_{12x} + \eta_x\omega_1 + \eta_x\delta^2\omega_{12} - \eta_x\eta_{xt} + \frac{1}{2}\eta_x\eta_{xx} \\ \left. - \frac{1}{2}\omega_{1xxt} - \frac{1}{2}\delta^2\omega_{12xxt} - \eta\eta_{xt} - \frac{1}{2}\eta\eta_{xxx} + \frac{1}{24}\eta_{xxxxt} \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_t + \eta_x + \varepsilon \left[ \delta^2\partial_x^{-1}(\varepsilon\omega_{1yy} + \varepsilon\delta^2\omega_{12yy} + \eta_{yy} + \varepsilon^2\omega_{2yy} + \varepsilon^2\delta^2\omega_{21yy}) \right. \\ \left. + \omega_{1x} + \delta^2\omega_{12x} + 2\eta\eta_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx} \right] \\ + \varepsilon^2 \left[ \delta^2\eta\partial_x^{-1}(\varepsilon\omega_{1yy} + \delta^2\varepsilon\omega_{12yy} + \varepsilon^2\omega_{2yy} + \varepsilon^2\delta^2\omega_{21yy} + \eta_{yy}) \right. \\ + \delta^2\eta_y\partial_x^{-1}(\varepsilon\omega_{1y} + \delta^2\varepsilon\omega_{12y} + \varepsilon^2\omega_{2y} + \varepsilon^2\delta^2\omega_{21y} + \eta_y) + \eta\omega_{1x} \\ + \eta\delta^2\omega_{12x} + \omega_{2x} + \delta^2\omega_{21x} + \omega_1\eta_x + \delta^2\omega_{12}\eta_x - \frac{1}{3}\delta^2\eta_{xyy} - \frac{1}{2}\eta_x\eta_{xx} \\ \left. - \frac{1}{6}\omega_{1xxx} - \frac{1}{6}\delta^2\omega_{12xxx} - \frac{1}{2}\eta\eta_{xxx} + \frac{1}{120}\eta_{xxxxx} \right] = 0. \end{aligned}$$

## Κεφάλαιο 5

Θέλουμε να βρούμε τα  $\omega_1, \omega_{12}, \omega_2, \omega_{21}$ . Η διαδικασία είναι όμοια με αυτή στη μία χωρική διάσταση. Έτσι για την τάξη  $O(1)$  προκύπτει ότι,  $\eta_t = -\eta_x$ .

Στη συνέχεια, για την τάξη  $O(\varepsilon)$  θα βρούμε

$$\begin{aligned}\omega_1 &= c_1\eta^2 + c_2\eta_{xx}, \\ \omega_{12} &= c_3\partial_x^{-2}(\eta_{yy}).\end{aligned}$$

Ζητούμενο είναι να προσδιορίσουμε τα  $c_1, c_2, c_3$ , χρησιμοποιώντας την προηγούμενη τάξη για τη χρονική παράγωγο,  $\eta_t = -\eta_x$ , θα καταλήξουμε στις

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{3}\eta_{xx}, \\ \omega_{12} &= -\frac{1}{2}\partial_x^{-2}(\eta_{yy}).\end{aligned}$$

Επομένως αντικαθιστώντας τις σχέσεις των  $\omega_1, \omega_{12}$  σε μία από τις εξισώσεις του συστήματος (5.7)-(5.8) μας οδηγεί στον τύπο της KP που είναι

$$\eta_t + \eta_x + \varepsilon \left[ \frac{3}{2}\eta\eta_x + \frac{1}{6}\eta_{xxx} \right] + \varepsilon\delta^2 \frac{1}{2}\partial_x^{-1}(\eta_{yy}) = 0.$$

Για την τάξη  $O(\varepsilon^2)$  ολοκληρώνοντας ως προς  $x$  τους όρους των  $\varepsilon^2$  και  $\varepsilon^2\delta^2$  θα προκύψει,

$$\begin{aligned}\omega_2 &= c_1\eta^3 + c_2\eta_x^2 + c_3\eta\eta_{xx} + c_4\eta_{xxxx}, \\ \omega_{21} &= c_5\eta_{yy} - c_6\partial_x^{-1}(\eta\partial_x^{-1}(\eta_{yy})) + c_7\partial_x^{-2}(\eta\eta_{yy}) \\ &\quad + c_8\partial_x^{-4}(\eta_{yyyy}) + c_9\partial_x^{-2}(\eta_y^2) \\ &\quad + c_{10}\partial_x^{-1}(\eta_y\partial_x^{-1}(\eta_y)) + c_{11}\partial_x^{-1}(\eta_x\partial_x^{-2}(\eta_{yy}))\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε τα  $\omega_1, \omega_{12}$  και εξισώνουμε το σύστημα (5.7)-(5.8) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \frac{1}{8}\eta^3 + \frac{3}{16}\eta_x^2 + \frac{1}{2}\eta\eta_{xx} + \frac{1}{10}\eta_{xxxx}, \\ \omega_{21} &= \frac{1}{6}\eta_{yy} - \frac{3}{8}\partial_x^{-1}(\eta\partial_x^{-1}(\eta_{yy})) + \frac{5}{8}\partial_x^{-2}(\eta\eta_{yy} + \eta_y^2) \\ &\quad + \frac{3\delta^2}{8}\partial_x^{-4}(\eta_{yyyy}).\end{aligned}$$

Τα  $\omega_1$  και  $\omega_2$  έχουν ήδη προκύψει από την εξαγωγή της γενικευμένης εξίσωσης KdV από το δεύτερο κεφάλαιο. Με αυτόν τον τρόπο, λαμβάνεται τώρα η

γενικευμένη εξίσωση KP (eKP)

$$\begin{aligned}
& (\eta_t + \eta_x)_x + \varepsilon \left[ \frac{3}{2} \eta \eta_x + \frac{1}{6} \eta_{xxx} \right]_x + \varepsilon \delta^2 \left[ \frac{1}{2} \eta_{yy} \right] \\
& + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{3}{8} \eta^2 \eta_x + \frac{23}{24} \eta_x \eta_{xx} + \frac{5}{12} \eta \eta_{xxx} + \frac{19}{360} \eta_{xxxx} \right] \\
& + \varepsilon^2 \delta^2 \left[ \frac{9}{8} \eta_y^2 + \frac{1}{4} \eta \eta_{yy} + \frac{1}{4} \eta_{xxyy} - \frac{1}{2} \eta_{xx} \partial_x^{-2} (\eta_{yy}) \right. \\
& \left. - \frac{3}{8} \eta_x \partial_x^{-1} (\eta_{yy}) + \eta_{xy} \partial_x^{-1} (\eta_y) - \frac{\delta^2}{8} \partial_x^{-2} (\eta_{yyyy}) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Σε αντίθεση με την περίπτωση των (1+1) διαστάσεων της εξίσωσης eKdV, η επίδραση της δεύτερης χωρικής διάστασης,  $y$ , είναι έντονη. Πράγματι, οι πρόσθετοι όροι που εμφανίζονται, πολλαπλασιασμένοι με την παράμετρο  $\delta$ , είναι μη τοπικοί μαζί με τον τελεστή  $\partial_x^{-1}$  να εμφανίζεται πολλές φορές. Η εξίσωση eKP έχει προκύψει στη συγκεκριμένη περίπτωση κυμάτων νερού μέχρι τους συντελεστές τάξης  $\varepsilon^2$ .

## 5.1 Λύσεις της Kadomtsev-Petviashvili

Συνοψίζοντας, η εξίσωση Kadomtsev-Petviashvili (KP) είναι μια μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση σε δύο χωρικές και μία χρονική διαστάσεις που περιγράφει την εξέλιξη μη γραμμικών κυμάτων μικρού πλάτους με αργή εξάρτηση από την εγκάρσια συντεταγμένη. Η γενικευμένη εξίσωση που δώσαμε παραπάνω, δεν μπορεί, με κανόνες ασυμπτωτικής ολοκληρωσιμότητας, να αναχθεί στην απλούστερη μορφή. Εδώ θα παρουσιάσουμε λύσεις της απλής εξίσωσης που παρατηρούνται σε φυσικές καταστάσεις, και συγκεκριμένα σε ωκεανούς, ώστε να δείξουμε την πραγματική φυσική σημασία της εξίσωσης.

Για να γίνει αυτό, κανονικοποιούμε την εξίσωση ως εξής:

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 0$$

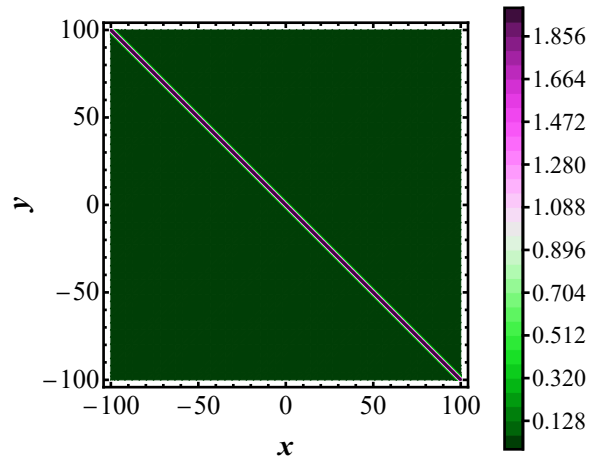
Εδώ το  $u = u(x, y, t)$  είναι μια βαθμωτή συνάρτηση, τα  $x$  και  $y$  είναι αντίστοιχα οι διαμήκεις και οι εγκάρσιες χωρικές συντεταγμένες, και οι δείκτες  $x, y, t$  δηλώνουν μερικές παραγώγους.

Σε αυτή την ενότητα, θα διερευνήσουμε σχετικά περίπλοκα μοτίβα που μπορούν να διαμορφωθούν κατά την διάδοση και αλληλεπίδραση σολιτονίων. Εξετάζουμε,

αρχικά, τις απλούστερες λύσεις της εξίσωσης, τα λεγόμενα γραμμικά σολιτόνια (line solitons) που γράφονται ως

$$u(x, y, t) = 2k^2 \operatorname{sech}^2 [k(x + \lambda y - (4k^2 - 3\lambda^2)t + \delta)], \quad (5.9)$$

όπου  $k, \lambda, t$  είναι ελεύθερες παράμετροι. Μία τυπική τέτοια λύση για  $k = \lambda = 1$  και  $\delta = 0$  για την χρονική στιγμή  $t = 0$  απεικονίζεται στο σχήμα 5.1



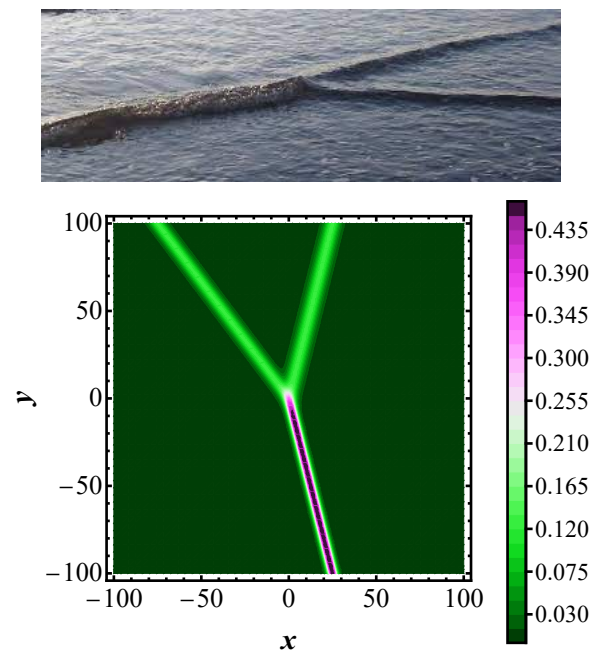
Σχήμα 5.1: Ένα τυπικό σολιτόνιο, όπως αντιστοιχεί στη λύση (5.9), για  $k = \lambda = 1$  και  $\delta = 0, t = 0$ .

Ιδιαίτερο, όμως ενδιαφέρον, προκαλούν οι αλληλεπιδράσεις τέτοιων λύσεων, καθώς τα περίπλοκα, και άκρως ενδιαφέροντα σχέδια που δημιουργούν μπορούν να παρατηρηθούν και στις ακτές των ωκεανών. Η αλληλεπίδραση δύο σολιτονίων εκφράζεται μέσω των σχέσεων:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= 2\partial_x^2 \ln f(x, y, t) \\ f(x, y, t) &= 1 + \exp(Z_1) + \exp(Z_2) + \exp(Z_1 + Z_2 + A_{12}) \\ \exp(A_{12}) &= \frac{2(k_1 - k_2)^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}{2(k_1 + k_2)^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2} \end{aligned}$$

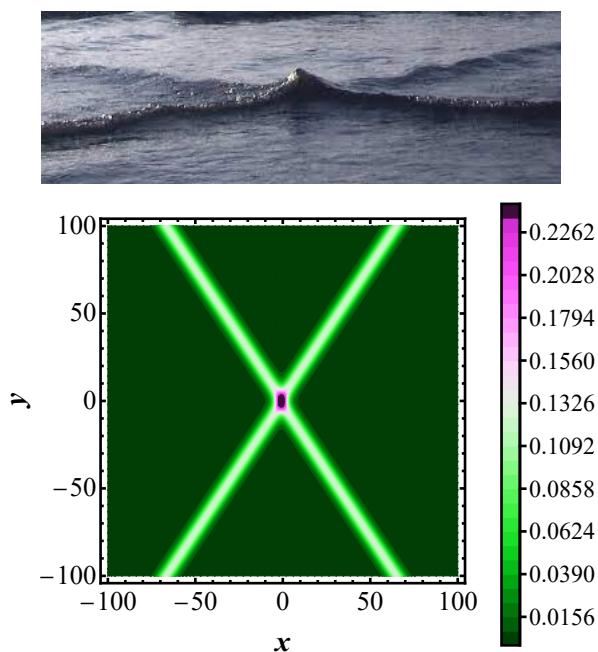
με  $Z_i = 2k_i [x + \lambda_i y - (4k_i^2 + 3\lambda_i^2)t + \delta_i]$ .

Στο σχήμα 5.2, δείχνουμε μια τυπική αλληλεπίδραση  $Y$ , όπως παρατηρείται στον ωκεανό (πάνω εικόνα) και όπως δημιουργείται για κάποιες παραμέτρους από την παραπάνω λύση (κάτω εικόνα).



Σχήμα 5.2: Μια τυπική αλληλεπίδραση τύπου  $Y$  για  $k_1 = 1/2, k_2 = 1, \lambda_1 = 3/4, \lambda_2 = 1/4, \delta_1 = \delta_2 = 0$ .

Στη συνέχεια, συνεχίζουμε με τις αλληλεπιδράσεις τύπου  $X$ , οι οποίες μπορούν να διακριθούν σύμφωνα με το μήκος της μεταξύ τους επικάλυψης. Έτσι έχουμε μια αλληλεπίδραση με σύντομη επικάλυψη στο σχήμα 5.3,

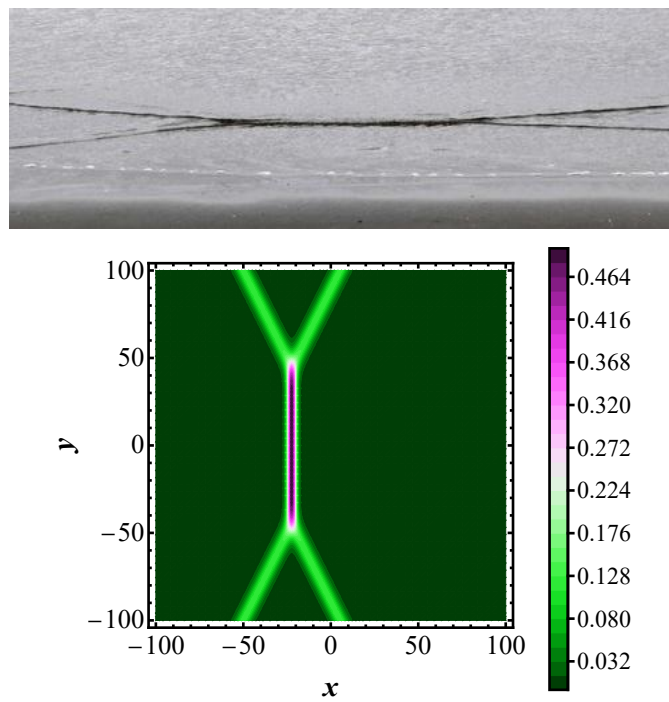


Σχήμα 5.3: Μια αλληλεπίδραση τύπου  $X$ , με σύντομη επικάλυψη, για  $k_1 = 1/2$ ,  $k_2 = 1/2$ ,  $\lambda_1 = -2/3$ ,  $\lambda_2 = 2/3$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ .

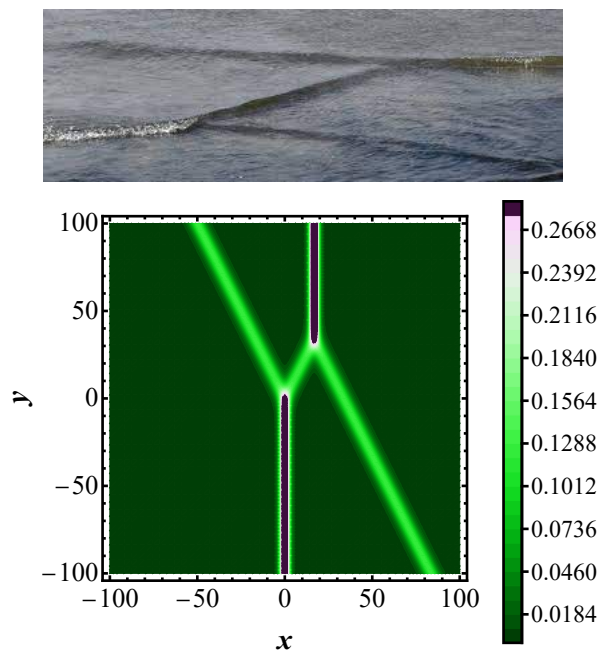
και μια αλληλεπίδραση με μεγαλύτερη επικάλυψη στο σχήμα 5.4.

Στην ίδια κατηγορία εμπίπτει μια αλληλεπίδραση τύπου  $X$  με μεγάλη αλληλεπίδραση, με το ύψος της επικάλυψης να είναι χαμηλότερο από το υψηλότερο σολιτόνιο γραμμής. Ονομάζουμε αυτή την αλληλεπίδραση  $H$ , και την δείχνουμε στο σχήμα 5.5.





Σχήμα 5.4: Μια τυπική αλληλεπίδραση τύπου  $X$ , με μεγαλύτερη επικάλυψη, για  $k_1 = 1/2$ ,  $k_2 = 1/2$ ,  $\lambda_1 = 1/2$ ,  $\lambda_2 = -1/2 - 10^{-10}$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ .



Σχήμα 5.5: Μια τυπική αλληλεπίδραση τύπου  $H$  για  $k_1 = 1/2$ ,  $k_2 = 1$ ,  $\lambda_1 = 1/2 - 10^{-7}$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ .

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η μελέτη των υδάτινων κυμάτων είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τις εξισώσεις Euler, ένα σύνολο οιονεί-γραμμικών (quasi-linear), υπερβολικών εξισώσεων που διέπουν τη ροή ιδανικού ρευστού χωρίς ιξώδες. Αυτές οι εξισώσεις αντιπροσωπεύουν τη διατήρηση της μάζας, της ορμής και της ενέργειας. Οι εξισώσεις Euler μπορούν να θεωρηθούν ως ειδική μορφή των εξισώσεων Navier-Stokes με μηδενικό ιξώδες και θερμική αγωγιμότητα. Η εύρεση αναλυτικών λύσεων για αυτές τις εξισώσεις είναι ιδιαίτερα δύσκολη, καθώς είναι συζευγμένες και περιλαμβάνουν ελεύθερο σύνορο, δηλαδή η λύση αποτελεί επίσης μέρος των συνοριακών συνθηκών.

Μια εναλλακτική μέθοδος μελέτης των εξισώσεων είναι μέσω αριθμητικής ανάλυσης. Όμως, κανείς μπορεί να εξάγει πολύ χρήσιμα συμπεράσματα χρησιμοποιώντας εργαλεία της θεωρίας διαταραχών. Στην παρούσα διατριβή, επιλέξαμε τη δεύτερη περίπτωση. Εστιάσαμε σε φυσικές συνθήκες που αντιπροσωπεύουν τη διάδοση κυμάτων σε αβαθή ύδατα. Η διάκριση μεταξύ αβαθών και βαθέων υδάτων καθορίζεται από την αναλογία του βάθους των υδάτων προς το μήκος κύματος. Με απλούς όρους, στα ρηχά ύδατα, τα κύματα αρχίζουν να επηρεάζονται από τον πυθμένα του ωκεανού, ενώ σε βαθιά νερά το βάθος του ωκεανού θεωρείται άπειρο.

Η μελέτη μας ξεκίνησε από πρώτες αρχές, και αρχικά παρουσιάσαμε αναλυτικά πώς προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων Euler στα ρευστά. Χρησιμοποιώντας κατάλληλες μεταβλητές, αδιαστατοποιήσαμε το σύστημα και εισάγαμε συνθήκες που μοντελοποιούν μαθηματικά την κατάσταση των αβαθών υδάτων. Έτσι, καθορίσαμε μια μικρή παράμετρο μέσω της οποίας μπορέσαμε, χρησιμοποιώντας θεωρία διαταραχών, σε μία χωρική και μία χρονική διάσταση ( $1 + 1$ ), αρχικά, να μετατρέψουμε το σύστημα στην εξίσωση Korteweg–de Vries (KdV). Η ανάλυσή μας προχώρησε πέρα από τα συνήθη όρια ακρίβειας και παρείχαμε όρους ανώτερης τάξης, που αντιπροσωπεύουν, το αρχικό σύστημα, με μεγαλύτερη ακρίβεια. Με παρόμοιο τρόπο, αλλά σε διαφορετικό σύστημα που περιγράφει την αρτηριακή

## Κεφάλαιο 6

πίεση, θα καταλήξουμε στην ίδια γενικευμένη εξίσωση KdV (με διαφορετικούς συντελεστές), αποδεικνύοντας έτσι την καθολικότητά της. Η καθολικότητα εξετάστηκε και μέσω της αφεστιασμένης εξίσωσης Schrödinger.

Στη συνέχεια μελετούμε κάποιες λύσεις αυτών των εξισώσεων. Ξεκινώντας από το γραμμικό όριο, δείξαμε ότι η σχέση διασποράς του αρχικού συστήματος ταυτίζεται (στο χώρο Fourier) με το γραμμικό μέρος των εξισώσεων, επιβεβαιώνοντας την ορθότητα των αποτελεσμάτων μας. Στο ίδιο κεφάλαιο, εισάγουμε την έννοια της ασυμπτωτική ολοκληρωσιμότητας, για να μελετήσουμε το πλήρως μη γραμμικό πρόβλημα. Οι λύσεις των γενικευμένων συστημάτων (σε μία χωρική διάσταση) αποδεικνύεται ότι δίνονται, μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών, από τις λύσεις των απλούστερων εξισώσεων, και μάλιστα, διατηρούν και όλα τα βασικά χαρακτηριστικά της διάδοσής τους.

Σε δύο χωρικές και μία χρονική διάσταση ( $2 + 1$ ), εξάγουμε την ανώτερης τάξης εξίσωση Kadomtsev–Petviashvili (KP) και εστιάζοντας στις λεγόμενες σολιτονικές λύσεις της, και τις αλληλεπιδράσεις τους, μπορέσαμε να κάνουμε άμεσες συγκρίσεις με πραγματικά φαινόμενα, όπως αυτά παρατηρούνται στους ωκεανούς.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. R.S. Johnson, *A modern introduction to the mathematical theory of water waves*, Cambridge University Press, 1997.
2. T. Dauxois, M. Peyrard, *Physics of Solitons*, Cambridge University Press, 2006.
3. M.J. Ablowitz, *Nonlinear Dispersive Waves: Asymptotic Analysis and Solitons*, Cambridge University Press, 2011.
4. T.P. Horikis, D.J. Frantzeskakis, *On the NLS to KdV connection*, Rom. J. Phys. **59**, 195-203, 2014.
5. T.P. Horikis, D.J. Frantzeskakis, N.F. Smyth, *Extended shallow water wave equations*, Wave Motion **112**, 102934, 2022.
6. M.J. Ablowitz, D.E. Baldwin, *Nonlinear shallow ocean-wave soliton interactions on flat beaches*, Phys. Rev. E **86**, 036305, 2012.
7. A.S. Fokas, Q.M. Liu, *Asymptotic integrability of water waves*, Phys. Rev Lett. **77** 2347-2351, 1996.
8. A.S. Fokas, R.H.J. Grimshaw, D.E. Pelinovsky, *On the asymptotic integrability of a higher-order evolution equation describing internal waves in a deep fluid*, J. Math. Phys. **37**, 3415-3421, 1996.