



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Δήμητρα-Ασπασία Μαύρου

---

ΑΜΕΣΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ  
ΜΕΛΕΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΟΥ  
ΤΥΠΟΥ: Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΗΙΡΟΤΑ

---

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2024







UNIVERSITY OF IOANNINA  
Department of Mathematics



Dimitra-Aspasia Mavrou

---

DIRECT METHODS AND BILINEARIZATION IN  
THE STUDY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF  
EVOLUTIONARY TYPE: THE HIROTA METHOD

---

Master's Thesis

Ioannina, May 2024



*Αφιερώνεται στον πατέρα μου, Παρασκευά Μαύρο, στη μητέρα μου, Ουρανία  
Σταματιάδου, στον αδερφό μου, Σωτήρη Μαύρο και σε όλα τα φιλικά μου  
πρόσωπα.*



Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και Πληροφορική που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 02/07/2024 από την εξεταστική επιτροπή:

<b>Όνοματεπώνυμο</b>	<b>Βαθμίδα</b>
Θεόδωρος Χωρίκης	Καθηγητής
Μιχαήλ Ξένος	Καθηγητής
Ιωάννης Πουρναράς	Καθηγητής

#### ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

“Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.”

Δήμητρα-Ασπασία Μαύρου



---

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

---

Η ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής σηματοδοτεί το τέλος του μεταπτυχιακού μου κύκλου σπουδών, το οποίο ξεκίνησε πριν από δύο χρόνια περίπου. Σε αυτή την ακαδημαϊκή πορεία, αντιμετώπισα προκλήσεις και απαιτήσεις που με διαμόρφωσαν ως επαγγελματία, αλλά πάνω απ'όλα ως άνθρωπο. Τίποτα απ'όλα αυτά, ωστόσο, δεν θα ήταν εφικτό χωρίς τη συνεχή υποστήριξη, βοήθεια και έμπνευση του κ. Χωρίκη Θεόδωρου, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Η αφοσίωση του στη διδασκαλία και η άπειρη αγάπη του για το αντικείμενο του με έκαναν να εξελιχθώ όχι μόνο επαγγελματικά, αλλά και προσωπικά. Θα ήθελα να ευχαριστήσω και τους καθηγητές της Τριμελούς Επιτροπής μου, τον κ. Μιχαήλ Ξένο, και τον κ. Ιωάννη Πουρναρά, για τις χρήσιμες συμβουλές και διορθώσεις. Να ευχαριστήσω επίσης και όλους τους υπόλοιπους διδάσκοντες του μεταπτυχιακού προγράμματος, οι οποίοι προσέφεραν τις γνώσεις τους με συνέπεια και δέσμευση. Τέλος, να ευχαριστήσω την αγαπημένη μου οικογένεια και όλα τα φιλικά μου πρόσωπα, οι οποίοι είναι δίπλα μου σε κάθε βήμα κι έχω την στήριξη τους και τους οφείλω μεγάλη ευγνωμοσύνη.





---

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

---

Η διγραμμικοποίηση, ή διγραμμική μέθοδος του Hirota, είναι μια ισχυρή μαθηματική τεχνική που χρησιμοποιείται στη μελέτη ολοκληρώσιμων συστημάτων, και ιδιαίτερα στις μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ) εξελικτικού τύπου. Αναπτύχθηκε από τον Ryogo Hirota τη δεκαετία του 1970 και έκτοτε έχει γίνει ένα σημαντικό εργαλείο για την ανάλυση αυτών των συστημάτων.

Η μέθοδος βασίζεται στην αναπαράσταση λύσεων μη γραμμικών ΜΔΕ εξελικτικού τύπου ως αθροίσματα απλούστερων συναρτήσεων που ονομάζονται σολιτόνια. Το σολιτόνιο είναι ένας ειδικός τύπος κύματος που διατηρεί το σχήμα και την ταχύτητά του ενώ διαδίδεται σε ένα μέσο, ακόμη και μετά από αλληλεπίδραση με άλλα σολιτόνια. Σε αντίθεση με τα περισσότερα κύματα, τα οποία διασκορπίζονται και χάνουν ενέργεια με την πάροδο του χρόνου, τα σολιτόνια μπορούν να διατηρήσουν την ακεραιότητά τους και να παραμείνουν εντοπισμένα στον χώρο.

Η βασική ιδέα πίσω από τη διγραμμική μέθοδο Hirota είναι να ξαναγράψουμε τη δεδομένη μη γραμμική ΜΔΕ σε διγραμμική μορφή, όπου η εξαρτημένη μεταβλητή εκφράζεται ως γινόμενο απλούστερων συναρτήσεων. Αυτή η διγραμμική μορφή διευκολύνει τη μελέτη των ιδιοτήτων της εξίσωσης και την εξαγωγή διαφόρων αναλυτικών αποτελεσμάτων. Ιδιαίτερος σημαντικό είναι ότι επιτρέπει την κατασκευή λύσεων σε κλειστή, αναλυτική μορφή με αλγοριθμικό τρόπο. Στην παρούσα διατριβή, θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τη μέθοδο μέσω της εφαρμογής της στις εξισώσεις Korteweg–de Vries, Sawada-Kotera, μη γραμμική εξίσωση Schrödinger και Kadomtsev-Petviashvili. Με αυτόν τον τρόπο, όλες οι πιθανές περιπτώσεις που εφαρμόζεται η μέθοδος θα καλυφθούν λεπτομερώς. Αυτές περιλαμβάνουν χωρικές παραγώγους υψηλότερης τάξης, μιγαδικές λύσεις, μη μηδενικές συνοριακές συνθήκες και υψηλότερες χωρικές διαστάσεις.



---

# ABSTRACT

---

The Hirota bilinear method, or bilinearization, is a powerful mathematical technique used in the study of integrable systems, particularly in the theory of nonlinear partial differential equations (PDEs) of evolutionary type. It was developed by Ryogo Hirota in the 1970s and has since become an essential tool in the analysis of integrable systems.

The method is based on representing solutions of nonlinear evolution PDEs as sums of simpler functions called solitons. A soliton is a special type of wave that maintains its shape and velocity while propagating through a medium, even after interacting with other solitons. Unlike most waves, which disperse and lose energy over time, solitons can retain their integrity and remain localized.

The key idea behind the Hirota bilinear method is to rewrite the given nonlinear PDE in a bilinear form, where the dependent variable is expressed as a product of simpler functions. This bilinear form makes it easier to study the properties of the equation and derive various analytical results. Importantly, it allows for the construction of exact analytical solutions, in closed form, in an algorithmic manner. In the present thesis, we will present the method extensively applying it to the Korteweg–de Vries, Sawada-Kotera, nonlinear Schrödinger and Kadomtsev-Petviashvili equations. In this manner, all possible intricacies of the method will be covered in detail. These include higher order spatial derivatives, complex solutions, non-vanishing solutions and higher spatial dimensions.



---

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

---

Περίληψη	i
Abstract	ii
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>3</b>
1.1 Γραμμικοποίηση της εξίσωσης Riccati . . . . .	3
1.2 Το αντίστροφο πρόβλημα . . . . .	4
1.3 Η εξίσωση Riccati ως σύστημα γραμμικών εξισώσεων . . . . .	5
1.4 Η εξίσωση Burgers . . . . .	6
<b>2 Η μέθοδος Hirota</b>	<b>7</b>
2.1 Ο διγραμμικός τελεστής Hirota . . . . .	10
2.2 Κατασκευή των λύσεων . . . . .	12
2.3 Λύσεις ανώτερης τάξης . . . . .	13
<b>3 Η εξίσωση των Sawada-Kotera</b>	<b>23</b>
3.1 Κατασκευή των λύσεων . . . . .	24
3.2 Λύσεις ανώτερης τάξης . . . . .	24
3.3 Σύνδεση με την εξίσωση Korteweg-de Vries . . . . .	26
<b>4 Η μη-γραμμική εξίσωση Schrödinger</b>	<b>31</b>
4.1 Κατασκευή των λύσεων . . . . .	32
4.1.1 Φωτεινά Σολιτόνια . . . . .	32

4.1.2 Σχοτεινά Σολιτόνια . . . . .	38
5 Η εξίσωση Kadomtsev-Petviashvili	45
6 Συμπεράσματα	51
Βιβλιογραφία	53

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το βασικό αντικείμενο της μελέτης των διαφορικών εξισώσεων (με ολικές ή μερικές παραγώγους) είναι ο προσδιορισμός των λύσεων τους σε κλειστή, αναλυτική μορφή. Αυτό όμως, είναι σχεδόν αδύνατο στις περισσότερες περιπτώσεις. Άλλωστε η αδυναμία αυτή οδήγησε στη δημιουργία άλλων εργαλείων, θεωρητικών ή και πιο εφαρμοσμένων, που δίνουν πληροφορίες για την ύπαρξη, μοναδικότητα ή άλλες ιδιότητες των λύσεων μιας εξίσωσης. Επιπλέον, ένα από τα χαρακτηριστικά που διαχωρίζει τις διαφορικές εξισώσεις πέραν της τάξης τους, είναι αν είναι γραμμικές ή όχι. Οι μη-γραμμικές εξισώσεις είναι πιο περίπλοκες ως προς τη μελέτη τους από τις γραμμικές.

Στο παρόν κεφάλαιο θα συζητήσουμε τη γραμμικοποίηση, δηλαδή την εύρεση ενός μετασχηματισμού που ανάγει μια μη-γραμμική εξίσωση σε γραμμική, την εξίσωση Riccati (ως παράδειγμα εξίσωσης με ολικές παραγώγους) και την εξίσωση Burgers (ως παράδειγμα εξίσωσης με μερικές παραγώγους). Ο τρόπος με τον οποίο γραμμικοποιούνται οι εξισώσεις αυτές θα αποτελέσει και το εφαλτήριο για την εισαγωγή της διγραμμικοποίησης (μια γενικευμένη έννοια γραμμικοποίησης) και της μεθόδου Hirota που θα μελετήσουμε στα επόμενα κεφάλαια.

### 1.1 Γραμμικοποίηση της εξίσωσης Riccati

Η εξίσωση Riccati έχει τη γενική μορφή:

$$y' = p(x) + q(x)y + s(x)y^2, \quad (1.1)$$

όπου  $y = y(x)$ ,  $y' = dy/dx$ , η οποία κατά τα γνωστά είναι πρώτης τάξης συνήθους διαφορική εξίσωση, μη γραμμική, μη ομογενής και χρειαζόμαστε μόνο μία μερική λύση για να βρούμε τη γενική λύση της. Σκοπός μας είναι να βρούμε έναν μη τετριμμένο μετασχηματισμό που να ανάγει την εξίσωση σε μια γραμμική. Για αυτό

θέτουμε

$$t(x) = s(x) \cdot y(x) \Rightarrow y(x) = \frac{t(x)}{s(x)}.$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση, ως προς  $x$ , και αντικαθιστώντας στην (1.1) βρίσκουμε:

$$t' = t^2 + P(x)t + Q(x),$$

όπου  $P(x) = \frac{s'}{s} + q$  και  $Q(x) = sp$ . Θέτοντας τελικά,

$$t = -\frac{\phi'}{\phi},$$

όπου  $\phi = \phi(x)$  και αντικαθιστώντας στην εξίσωση Riccati, έχουμε την γραμμικοποιημένη εξίσωση:

$$\phi'' - P\phi' + Q\phi = 0.$$

Επιστρέφοντας στον αρχικό μετασχηματισμό και συνδυάζοντας τις επιμέρους αντικαταστάσεις, συμπεραίνουμε πως η εξίσωση Riccati ανάγεται σε δεύτερης τάξης, γραμμική εξίσωση μέσω του μετασχηματισμού:

$$y = -\frac{\phi'}{s\phi}.$$

## 1.2 Το αντίστροφο πρόβλημα

Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε πως μπορούμε να ανάγουμε την δεύτερου βαθμού, γραμμική εξίσωση σε πρώτου. Και αυτή η διαδικασία είναι εξαιρετικά σημαντική, καθώς όσο μεγαλύτερη η τάξη μιας εξίσωσης τόσο πιο απαιτητική είναι και η μελέτη της. Ξεκινάμε από την εξίσωση:

$$f''(x) + P(x)f'(x) + Q(x)f(x) = 0 \quad \text{όπου} \quad f = f(x). \quad (1.2)$$

Προφανώς αν οι συναρτήσεις  $P, Q$  είναι σταθερές, ως προς  $x$ , θα αναζητούσαμε λύσεις σε μορφή εκθετικής συνάρτησης. Γενικεύοντας αυτή την ιδέα, θέτουμε:

$$f = e^w \quad \text{όπου} \quad w = w(x),$$

και αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1.2) ώστε:

$$w'' + w'^2 + P(x)w'(x) + Q(x) = 0. \quad (1.3)$$



Τέλος θέτουμε στην (1.3):

$$y = w',$$

και έτσι η  $y(x)$  ικανοποιεί την εξίσωση Riccati.

Συνοπτικά θα μπορούσαμε, λοιπόν, να πούμε ότι θέτοντας:

$$f = e^{\int y dx} \iff f' = yf \iff y = \frac{f'}{f},$$

μπορούμε να μεταβούμε από την δευτέρου βαθμού, γραμμική διαφορική εξίσωση στην εξίσωση Riccati. Δηλαδή, τα δύο αυτά προβλήματα είναι ισοδύναμα.

### 1.3 Η εξίσωση Riccati ως σύστημα γραμμικών εξισώσεων

Γενικότερα μπορούμε να εξετάσουμε την εξίσωση:

$$u' = a(x) + 2b(x)u + u^2 \quad (1.4)$$

(ο συντελεστής 2 βρίσκεται εκεί για λόγους παρουσίας) μέσω της αντικατάστασης:

$$u = \frac{g}{f}, \quad (1.5)$$

όπου  $g = g(x)$ ,  $f = f(x)$  δύο τυχαίες συναρτήσεις. Αντικαθιστώντας στην (1.4) την (1.5) έχουμε:

$$[g' - a(x)f - b(x)g]f - [f' + b(x)f + g]g = 0.$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με την εισαγωγή μιας συνάρτησης  $\lambda = \lambda(x)$  ώστε:

$$\begin{aligned} f' + b(x)f + g &= \lambda(x)f \\ g' - a(x)f - b(x)g &= \lambda(x)g, \end{aligned}$$

δηλαδή και πάλι γραμμικοποιούμε την εξίσωση Riccati.

Τελειώνουμε με ένα σχόλιο. Αν και τα παραπάνω πρέπει να θεωρούνται τετριμμένα, τα επαναλαμβάνουμε δίνοντας έμφαση στη διαδικασία γραμμικοποίησης της εξίσωσης Riccati. Αν και φαινομενικά υπάρχουν δύο τρόποι να γραμμικοποιήσουμε την εξίσωση επισημαίνουμε ότι οι δύο διαδικασίες είναι ισοδύναμες. Άλλωστε,

ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων πρώτου βαθμού ανάγεται σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού για τις δύο εξαρτημένες μεταβλητές. Θέλουμε ο αναγνώστης να δώσει ιδιαίτερη σημασία στην αντικατάσταση (1.5), δηλαδή στην αντικατάσταση της λύσης ως ρητής συνάρτησης, για λόγους που θα είναι προφανείς παρακάτω στο κείμενο.

## 1.4 Η εξίσωση Burgers

Τις βασικές ιδέες της παραπάνω διαδικασίας θα χρησιμοποιήσουμε και για την γραμμικοποίηση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Έχουμε, για παράδειγμα, την εξίσωση Burgers:

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x, \quad (1.6)$$

όπου  $u = u(x, t)$ ,  $u_t = \partial u / \partial t$  και  $u_x = \partial u / \partial x$ . Εισάγουμε τη συνάρτηση:

$$u = w_x, \quad (1.7)$$

αντικαθιστούμε στην (1.6) την (1.7), και ολοκληρώνουμε ως προς  $x$  ώστε τελικά:

$$w_t = w_{xx} + w_x^2 + c, \quad (1.8)$$

όπου  $c$  μια σταθερά ολοκλήρωσης που θα καθοριστεί από τις συνοριακές συνθήκες. Στη συνέχεια θέτουμε:

$$w = \ln f, \quad (1.9)$$

στην (1.8) και παίρνουμε μια γραμμική εξίσωση:

$$f_t = f_{xx} + cf.$$

Όπως και προηγούμενα, μπορούμε να θέσουμε εξ αρχής:

$$u = (\ln f)_x = \frac{f_x}{f},$$

ώστε να γραμμικοποιήσουμε την εξίσωση ή και πάλι σε γενική μορφή να θέσουμε ως αντικατάσταση μια ρητή συνάρτηση. Η διαδικασία που περιγράψαμε για την γραμμικοποίηση της εξίσωσης Burgers καλείται μετασχηματισμός Cole Hopf.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## Η ΜΕΘΟΔΟΣ HIROTA

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο που, με αλγοριθμικό τρόπο, κατασκευάζει λύσεις μερικών διαφορικών εξισώσεων εξελικτικού τύπου. Η παρουσίαση της μεθόδου Hirota θα γίνει μέσω ενός παραδείγματος, της εξίσωσης Korteweg-de Vries (KdV). Η εξίσωση KdV είναι μια μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη δυναμική μη γραμμικών κυμάτων σε ένα συμπιεστό μέσο, όπως ένα ρευστό ή ένα αέριο. Χρησιμοποιείται κυρίως στη μελέτη φαινομένων διάδοσης κυμάτων σε διάφορους τομείς, όπως η δυναμική των ρευστών, η μη γραμμική οπτική, η πυρηνική φυσική και η ατμοσφαιρική δυναμική. Πιο συγκεκριμένα, η εξίσωση KdV μπορεί να εφαρμοστεί για τη μελέτη των κυμάτων στα ποτάμια, τη δυναμική των ρευστών στα ακουστικά κύματα και την κατανόηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ κυμάτων και σωματιδίων σε διάφορες φυσικές συνθήκες. Την εξήγαγαν πρώτοι οι Ολλανδοί φυσικοί D.J. Korteweg και G. de Vries το 1895 ως πρότυπο για τη διάδοση κυμάτων σε ρηγά νερά.

Η εξίσωση KdV είναι σημαντική και από μαθηματικής άποψης για πολλούς λόγους:

- **Μη γραμμική δυναμική:** Είναι ένα θεμελιώδες παράδειγμα μιας μη γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης εξελικτικού τύπου, καθώς διασπορά και μη γραμμικότητα συνδυάζονται με μοναδικό τρόπο ώστε να παρέχει πληροφορίες για τη συμπεριφορά και διάδοση μη γραμμικών κυμάτων (κυρίως σολιτονίων –βλ. ορισμό παρακάτω) σε διάφορα μέσα.
- **Ολοκληρώσιμα συστήματα:** Είναι ολοκληρώσιμη, που σημαίνει ότι διαθέτει έναν άπειρο αριθμό διατηρήσιμων ποσοτήτων, καθιστώντας την ένα πλήρως ολοκληρώσιμο σύστημα. Αυτή η ιδιότητα της ολοκληρωσιμότητας υπήρξε η απαρχή για τη δημιουργία μιας νέας μαθηματικής τεχνικής, του μετασχηματισμού αντίστροφης σκέδασης (inverse scattering transform), που αποτελεί τη γενίκευση του μετασχηματισμού Fourier σε μη γραμμικές εξισώσεις.

## Κεφάλαιο 2

- **Καθολική (universal) συμπεριφορά:** Οι λύσεις της συχνά παρουσιάζουν καθολική συμπεριφορά, που σημαίνει ότι ορισμένα χαρακτηριστικά των λύσεων είναι ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες.
- **Συνδέσεις με άλλα πεδία:** Έχει συνδέσεις με ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών πεδίων, συμπεριλαμβανομένης της διαφορικής γεωμετρίας, της αλγεβρικής γεωμετρίας και της θεωρίας αναπαραστάσεων.
- **Ανάπτυξη μαθηματικών μεθόδων:** Η έρευνα πάνω στην εξίσωση έχει ωθήσει την ανάπτυξη μαθηματικών μεθόδων, όπως ο μετασχηματισμός αντίστροφης σκέδασης και το πρόβλημα Riemann-Hilbert, και τεχνικών για την επίλυση μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

Συνολικά, λοιπόν, η εξίσωση KdV διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά παρέχοντας μια πλούσια πηγή μαθηματικών εργαλείων και χρησιμεύοντας ως πεδίο για την ανάπτυξη μαθηματικών μεθόδων που εφαρμόζονται σε ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων.

Η εξίσωση KdV έχει τη μορφή:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (2.1)$$

και, για τις ανάγκες της παρούσας διατριβής, τη συνοδεύουμε με μηδενικές συνοριακές συνθήκες στα άπειρα, τόσο για τη συνάρτηση όσο και για τις παραγώγους της.

Η πιο ευρέως γνωστή λύση της εξίσωσης είναι το λεγόμενο σολιτόνιο. Μαθηματικά, το σολιτόνιο είναι μία εξαιρετικά ευσταθής και μη αλληλεπιδραστική κυματική λύση ενός μη γραμμικού συστήματος. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό του σολιτονίου είναι ότι διατηρεί το σχήμα και την ταχύτητά του καθώς κινείται μέσα σε ένα μέσο, αντιθέτως με τα περισσότερα κύματα που αλλάζουν σχήμα και ταχύτητα καθώς διαδίδονται. Οι ιδιότητές του αυτές διατηρούνται ακόμα και μετά από την αλληλεπίδραση με άλλα σολιτόνια. Το σολιτόνιο είναι πολύ σημαντικό στη θεωρία των μη γραμμικών εξισώσεων και έχει εφαρμογές σε πολλούς τομείς της φυσικής και της μηχανικής.

Για να βρούμε αυτή τη λύση, στην παραπάνω εξίσωση, αναζητούμε οδεύοντα κύματα (travelling waves), δηλαδή λύσεις της μορφής:

$$u(x, t) = v(\xi) = v(x - ct).$$

Αντικαθιστούμε στην (2.1) και έχουμε:

$$-cv' + 6vv' + v''' = 0,$$

## Κεφάλαιο 2

όπου  $v' = dv/d\xi$  και ολοκληρώνουμε ως προς  $\xi$ :

$$-cv(\xi) + 3(v(\xi))^2 + v''(\xi) = 0. \quad (2.2)$$

Αγνοούμε ολοκληρωτικές σταθερές, καθώς θεωρούμε τόσο τη συνάρτηση  $v(\xi)$  όσο και τις παραγώγους της να μηδενίζονται στα άπειρα, ικανοποιώντας τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες.

Πολλαπλασιάζουμε και τα 2 μέλη της (2.2) με  $v'(\xi)$  και ολοκληρώνουμε εκ νέου:

$$(v')^2 = 2[v^2(c - 2v)],$$

όπου  $c \in \mathbb{R}$  μια πραγματική σταθερά. Η εξίσωση αυτή είναι πρώτου βαθμού και μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών. Πράγματι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, κρατώντας μόνο το θετικό πρόσημο έχουμε:

$$\frac{dv}{d\xi} = \sqrt{2v\sqrt{c-2v}} \Rightarrow \xi = \int \frac{dv}{\sqrt{2v\sqrt{c-2v}}} + c_1,$$

όπου  $c_1 \in \mathbb{R}$  σταθερά. Αν θέσουμε:

$$v = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \theta \Rightarrow dv = c \operatorname{sech}^2 \theta \tanh \theta d\theta.$$

Παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \xi &= 2 \int \frac{c \operatorname{sech}^2 \theta \tanh \theta}{c \operatorname{sech}^2 \theta \sqrt{c - c \operatorname{sech}^2 \theta}} d\theta + c_1 \\ &= \int \frac{2 \tanh \theta}{\sqrt{c} \tanh \theta} d\theta + c_1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{c}} \int d\theta + c_1 \Rightarrow \\ &= \frac{2}{\sqrt{c}} \theta + \xi_0 \Rightarrow \theta = \frac{\sqrt{c}(\xi - \xi_0)}{2}, \end{aligned}$$

οπότε, τελικά, βρίσκουμε:

$$u(x, t) = v(\xi) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct - x_0) \right].$$

Αν και μπορούμε να ολοκληρώσουμε την εξίσωση, δεν έχουμε τρόπο να μελετήσουμε αλληλεπιδράσεις τέτοιων λύσεων, και βέβαια, η παραπάνω ανάλυση δεν

εφαρμόζεται γενικότερα σε όλες τις εξισώσεις (για παράδειγμα, δείτε το επόμενο κεφάλαιο). Αναζητώντας μια γενικότερη μεθοδολογία, επανερχόμαστε στην εξίσωση KdV:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (2.3)$$

και εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό τύπου Cole-Hopf στην (2.3):

$$u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f, \quad (2.4)$$

έχουμε:

$$\frac{f_{xt}}{f} - \frac{f_x f_t}{f^2} + 3 \frac{f_{xx}^2}{f^2} - 4 \frac{f_{xxx} f_x}{f^2} + \frac{f_{xxxx}}{f} = 0.$$

Πολλαπλασιάζουμε με  $f^2$  κι αποκτούμε την εξίσωση:

$$f f_{xt} - f_x f_t + 3f_{xx}^2 - 4f_{xxx} f_x + f f_{xxxx} = 0. \quad (2.5)$$

Φαίνεται, στο σημείο αυτό, ότι οι μετασχηματισμοί που κάναμε δημιουργούν προβλήματα καθώς η εξίσωση (2.5) είναι ανώτερης τάξης από την αρχική KdV και έχει περισσότερους μη γραμμικούς όρους. Τη λύση έδωσε ο Hirota εισάγοντας το λεγόμενο διγραμμικό τελεστή.

## 2.1 Ο διγραμμικός τελεστής Hirota

Πρόκειται για έναν τελεστή που δρα στο γινόμενο 2 τυχαίων συναρτήσεων  $f, g$  και καλείται διγραμμικός. Ορίζεται ως εξής:

$$D_t^m D_x^n (f, g)(x, t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^m \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^n f(x, t) g(x', t') \Big|_{\substack{x'=x \\ t'=t}},$$

όπου  $m, n$  θετικοί ακέραιοι. Ουσιαστικά είναι η συνήθης παράγωγος γινομένου δύο τυχαίων (παραγωγίσιμων) συναρτήσεων όπου αντί για το πρόσημο (+) έχουμε το πρόσημο (-).

Παρακάτω, παραθέτουμε, με τη σχετική απόδειξη, τις ιδιότητες του τελεστή. Σημειώνουμε ότι παντού χρησιμοποιούμε την ιδιότητα:  $f_{xt} = f_{tx}$ .

$$\begin{aligned}
1. [D_t(f, g)](x, t) &= \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right) f(x, t) g(x', t') \Big|_{\substack{x'=x \\ t'=t}} \\
&= f_t(x, t) g(x', t') - f(x, t) g_t(x', t') \Big|_{\substack{x'=x \\ t'=t}} \\
&= f_t(x, t) g(x, t) - f(x, t) g_t(x, t) \Rightarrow \\
D_t(f, g) &= f_t g - f g_t.
\end{aligned}$$

Συνεπώς:  $D_t(f, f) = 0$ .

$$\begin{aligned}
2. D_t D_x(f, g) &= \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right) f(x, t) g(x', t') \Big|_{\substack{x'=x \\ t'=t}} \\
&= \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right) [f_x(x, t) g(x', t') - f(x, t) g_{x'}(x', t')] \\
&= f_{xt} g - f_t g_x - f_x g_t - f g_{xt}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς:  $D_t D_x(f, f) = 2(f f_{xt} - f_t f_x)$ .

$$3. D_x^2(f, g) = f_{xx} g - 2f_x g_x + f g_{xx}$$

Συνεπώς:  $D_x^2(f, f) = 2(f f_{xx} - f_x^2)$ .

$$4. D_x^4(f, g) = f_{xxxx} g - 4f_{xxx} g_x + 6f_{xx} g_{xx} - 4f_x g_{xxx} + f g_{xxxx}$$

Συνεπώς:  $D_x^4(f, f) = 2(f f_{xxxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f_x^2)$ . Παρατηρούμε εδώ την ομοιότητα των όρων με την εξίσωση (2.5).

5. Αν  $\theta_i = a_i x + b_i t + c_i$  όπου  $i = 1, 2, \dots$  τότε,

$$D_t^m D_x^n (e^{\theta_1}, e^{\theta_2}) = (b_1 - b_2)^m (a_1 - a_2)^n e^{\theta_1 + \theta_2}.$$

Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι έχουμε παράγωγο γινομένου δύο εκθετικών και λόγω της διαφοράς  $(-)$  κάθε φορά θα εμφανίζονται οι αντίστοιχοι παράμετροι.

6.  $D_t^m D_x^n (e^\theta, e^\theta) = 0$ , εκτός αν  $m = n = 0$ . Πράγματι, από την παραπάνω ιδιότητα, προκύπτει

$$D_t^m D_x^n (e^\theta, e^\theta) = (b - b) \cdot (\alpha - \alpha) e^{2\theta} = 0.$$

$$7. D_t^m D_x^n (e^\theta, 1) = (-1)^{m+n} D_t^m D_x^n (1, e^\theta) = b^m \alpha^n e^\theta.$$

$$8. D_t^m D_x^n (f \cdot 1) = (-1)^{m+n} D_t^m D_x^n (1 \cdot f) = \frac{\partial^m}{\partial t^m} \frac{\partial^n}{\partial x^n} f.$$

Αυτό ισχύει διότι ο  $D$  δρα στο γινόμενο μιας οποιασδήποτε συνάρτησης με τη μονάδα οπότε το αποτέλεσμα είναι η συνήθης παράγωγος.

$$9. D_x^2 (f \cdot f) \neq 0 \Rightarrow D_x^2 (f \cdot f) \neq D_x (D_x (f \cdot f)) \text{ ακόμα και αν } D_x (f \cdot f) = 0. \text{ Πράγματι:}$$

$$D_x^2 (f \cdot f) \neq 0 \Rightarrow D_x^2 (f \cdot f) = 2(ff_{xx} - f_x^2),$$

ενώ:

$$D_x (f \cdot f) = 0.$$

Πλέον, με τη χρήση των παραπάνω ιδιοτήτων η εξίσωση KdV μπορεί να γραφεί σε απλούστερη, διγραμμική μορφή ως:

$$(D_t D_x + D_x^4)(f \cdot f) = 0. \quad (2.6)$$

## 2.2 Κατασκευή των λύσεων

Βάσει των παραπάνω ιδιοτήτων κατασκευάζουμε και τη λύση, ορίζοντας απλώς τη συναρτησιακή μορφή της συνάρτησης  $f$ . Θεωρούμε, λοιπόν:

$$f = 1 + e^\theta,$$

όπου  $\theta = ax + bt + c$  και το μόνο που μένει είναι ο προσδιορισμός των σταθερών  $a, b, c$ . Αποδεικνύουμε στην επόμενη ενότητα γιατί η συνάρτηση πρέπει να έχει αυτή τη μορφή. Εδώ παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε  $f = 1$ , ή οποιαδήποτε σταθερά, αναχτάμε τη τετριμμένη λύση της KdV  $u \equiv 0$ .

Αντικαθιστούμε στη διγραμμική μορφή και έχουμε:

$$\begin{aligned} (D_t D_x + D_x^4)(1 + e^\theta, 1 + e^\theta) &= (D_t D_x + D_x^4)[(1, 1), (1, e^\theta), (e^\theta, 1), (e^\theta, e^\theta)] \\ &= 2(D_t D_x + D_x^4)(e^\theta, 1) \\ &= 2(ba + a^4)e^\theta = 2a(b + a^3)e^\theta = 0. \end{aligned}$$

Η περίπτωση  $a = 0$  δεν είναι αποδεκτή διότι θα αντιστοιχούσε σε συναρτήσεις  $f$  ανεξάρτητες της χωρικής μεταβλητής  $x$ . Συνεπώς απαιτούμε  $b = -a^3$  και  $f = 1 + e^{ax - a^3 t + c}$ . Άρα τελικά η σολιτονική λύση δίνεται από τον τύπο:

$$u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(1 + e^{ax - a^3 t + c}).$$



Κλείνουμε με μια σημαντική παρατήρηση. Τα ευρήματά μας εδώ βρίσκονται σε απόλυτη συμφωνία με τη λύση που ανακτήσαμε ως οδεύον κύμα. Είναι απολύτως τετριμμένο να εκφράσουμε την τελευταία έκφραση με τη μορφή  $\text{sech}^2(ax - a^3t + c)$ .

## 2.3 Λύσεις ανώτερης τάξης

Στη γενική περίπτωση η μέθοδος απαιτεί να γράψουμε την  $f$  ως ένα άθροισμα:

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n f_n(x, t), \quad (2.7)$$

με  $f_0 = 1$  και  $N$  η τάξη της λύσης που αναζητούμε. Για παράδειγμα, στα παραπάνω η  $N = 1$  είναι το 1-σολιτόνιο, ενώ η αλληλεπίδραση δύο σολιτονίων θα αντιστοιχεί σε  $N = 2$ . Εν γένει, και αυτό θα χρησιμοποιούμε εδώ,  $N \rightarrow \infty$ , δηλαδή μπορεί να έχουμε μια πλήρη σειρά.

Επανερχόμαστε στη διγραμμική εξίσωση της KdV:

$$(D_t D_x + D_x^4)(f, f) = 0 \quad (2.8)$$

και ορίζουμε τον τελεστή:

$$B = (D_t D_x + D_x^4),$$

με προφανή δράση  $B(f, f) = 0$ . Αντικαθιστούμε την (2.7) στην διγραμμική μορφή, δηλαδή στην (2.8):

$$B \left( \sum_{n_1=0}^{\infty} \varepsilon^{n_1} f_{n_1}(x, t), \sum_{n_2=0}^{\infty} \varepsilon^{n_2} f_{n_2}(x, t) \right) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \varepsilon^{n_1+n_2} B(f_{n_1}, f_{n_2}) = 0.$$

Θεωρούμε  $n = n_1 + n_2$ , οπότε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{m=0}^n B(f_{n-m}, f_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{m=0}^n B(f_{n-m}, f_m).$$

Χρειάζεται, άρα να λύσουμε την εξίσωση:

$$\sum_{m=0}^{\infty} B(f_{n-m}, f_m) = 0$$

και τη γράφουμε ως εξής:

$$B(f_n, 1) + B(1, f_n) = - \sum_{m=1}^{n-1} B(f_{n-m}, f_m). \quad (2.9)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα του  $D$ :

$$D_t^m D_x^n(f, 1) = (-1)^{m+n} D_t^m D_x^n(1, f) = \frac{\partial^m}{\partial t^m} \frac{\partial^n}{\partial x^n} f$$

η εξίσωση (2.9) μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) f_n = - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} B(f_{n-m}, f_m),$$

και έτσι καθορίζονται οι συναρτήσεις  $f_N$ . Για παράδειγμα, θεωρούμε  $n = 1$ , ώστε:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) f_1 = 0, \quad (2.10)$$

κι αν ολοκληρώσουμε ως προς  $x$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) f_1 = 0,$$

η οποία είναι γραμμική και η λύση της είναι αυτή της προηγούμενης ενότητας. Με τον ίδιο τρόπο αναχτούμε, με αναδρομικό τρόπο, τις λύσεις για κάθε  $n \leq N$ , ως:

$$f = \sum_{i=1}^N e^{a_i x - a_i^3 t + c_i} = \sum_{i=1}^N e^{\theta_i}.$$

Προφανώς αν  $n > N$ , θεωρούμε  $f_n = 0$ . Στην τελική μορφή αντικαθιστούμε  $\varepsilon = 1$ .

Επανερχόμενοι στην εξίσωση KdV, θεωρούμε  $f = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots + \varepsilon^N f_N$  και κατασκευάζουμε τις διάφορες λύσεις.

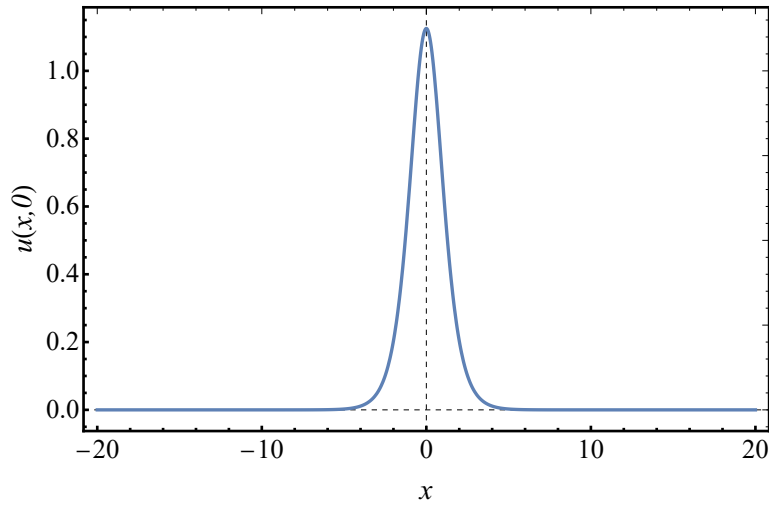
- $N = 1$ : Έχουμε ήδη βρει ότι  $f_1 = e^\theta = e^{ax - a^3 t + c}$  και  $f_2 = f_3 = \dots = 0$ , άρα:

$$f = 1 + e^{\theta_1}.$$

Τελικά:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(1 + e^{a_1 x - a_1^3 t + c_1}) \\ &= 2 \left( -\frac{e^{2a_1 x - 2a_1^3 t + 2c_1}}{(1 + e^{a_1 x - a_1^3 t + c_1})^2} a_1^2 + \frac{e^{a_1 x - a_1^3 t + c_1}}{a + e^{a_1 x - a_1^3 t + c_1}} a_1^2 \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Στο σχήμα (2.1) απεικονίζουμε το προφίλ αυτής της λύσης για  $t = 0$ .

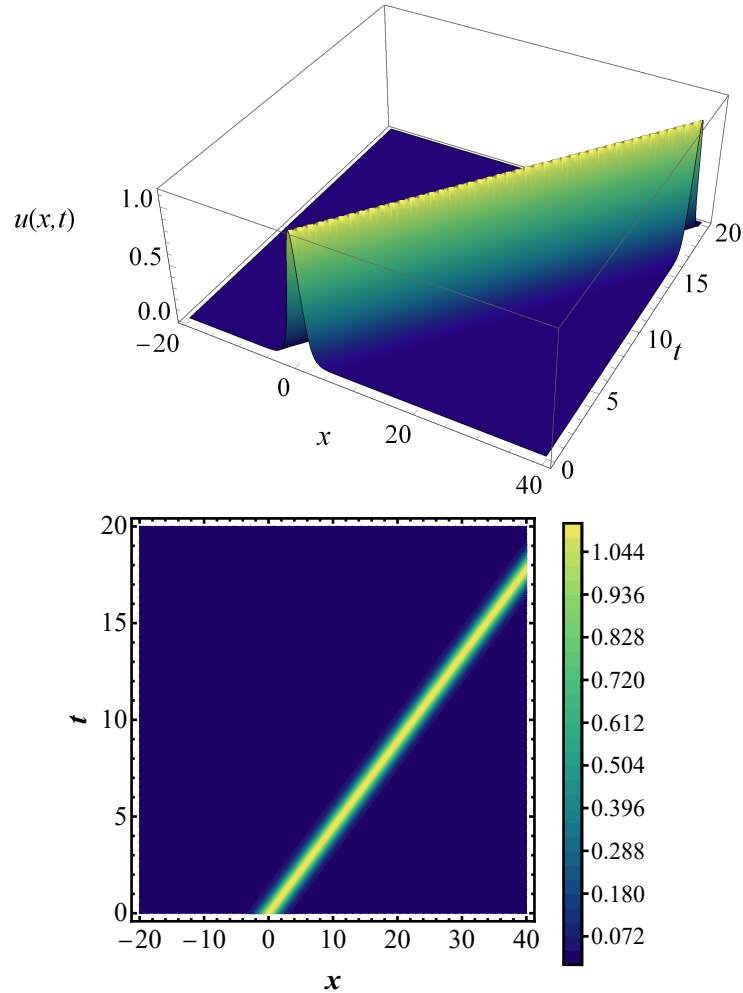


Σχήμα 2.1: Το προφίλ της σολιτονικής λύσης της εξίσωσης KdV, όπως περιγράφεται από την εξίσωση (2.11) για  $a = 1.5$  και  $c_1 = 0$ .

Ενώ στο σχήμα (2.2) φαίνεται η διάδοση αυτής της λύσης, δηλαδή η εξέλιξή της με τον χρόνο.

- $N = 2$ : Εδώ  $f = 1 + f_1 + f_2$ , όπου έχουμε ήδη βρει ότι  $f_1 = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}$  και χρειαζόμαστε να βρούμε την λύση  $f_2$  όπως και παραπάνω. Έχουμε,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) f_2 &= -\frac{1}{2} B(e^{\theta_1} + e^{\theta_2}, e^{\theta_1} + e^{\theta_2}) \\ &= -\frac{1}{2} [B(e^{\theta_1}, e^{\theta_1}) + B(e^{\theta_1}, e^{\theta_2}) \\ &\quad + B(e^{\theta_2}, e^{\theta_1}) + B(e^{\theta_2}, e^{\theta_2})] - \frac{1}{2} 2B(e^{\theta_1}, e^{\theta_2}) \\ &= -B(e^{\theta_1}, e^{\theta_2}) - (a_1 + a_2)[-a_1^3 + a_2^3 + (a_1 - a_2)^3]e^{\theta_1 + \theta_2} \\ &= 3a_1 a_2 (a_1 - a_2)^2 e^{\theta_1 + \theta_2}. \end{aligned}$$



Σχήμα 2.2: Η διάδοση ενός σολιτονίου της εξίσωσης KdV, όπως περιγράφεται από την εξίσωση (2.11) για  $a = 1.5$  και  $c_1 = 0$ .

Άρα καταλήξαμε στην

$$f_2 = Ae^{\theta_1 + \theta_2}, \quad A = 3a_1a_2(a_1 - a_2)^2.$$

Αντικαθιστούμε:

$$(a_1 + a_2)[-a_1^3 - a_2^3 + (a_1 + a_2)^3]Ae^{\theta_1 + \theta_2} = 3a_1a_2(a_1 - a_2)^2e^{\theta_1 + \theta_2} \Rightarrow$$

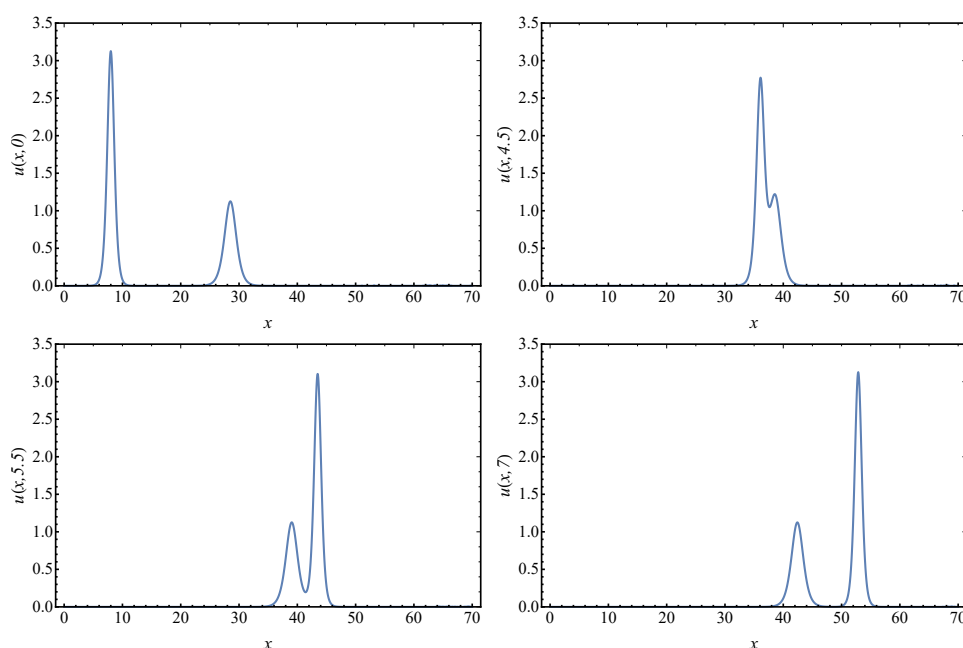
$$A = \left( \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2.$$

Οπότε

$$f = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + \left( \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2 e^{\theta_1 + \theta_2},$$

την οποία  $f$  αντικαθιστούμε στην  $u_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f$ , κι αποκτούμε τη  $u_2$ , που επαληθεύει την εξίσωση μας.

Στο σχήμα (2.3) απεικονίζουμε το προφίλ αυτής της λύσης για διάφορους χρόνους, ώστε να φανεί η αλληλεπίδραση των 2 σολιτονίων.

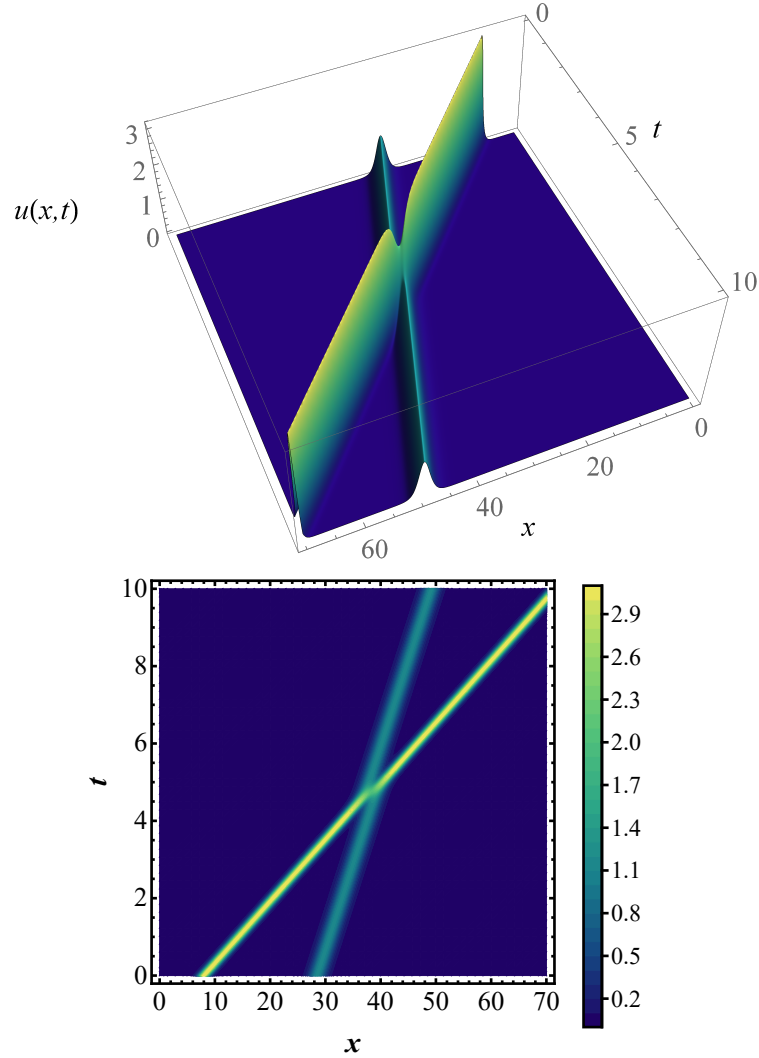


Σχήμα 2.3: Η αλληλεπίδραση δύο σολιτονίων της εξίσωσης KdV, για  $a_1 = 2.5$ ,  $a_2 = 1.5$ ,  $c_1 = -20$  και  $c_2 = -40$ .

Στο σχήμα (2.4) φαίνεται η συνολική εξέλιξή της με τον χρόνο.

- $N = 3$ : Εδώ  $f = 1 + f_1 + f_2 + f_3$ , όπου έχουμε ήδη βρει ότι  $f_1 = e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3}$ ,  $f_3 = A e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}$  και χρειαζόμαστε να βρούμε την λύση  $f_2$  όπως και παραπάνω. Έχουμε,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) f_3 &= -\frac{1}{2} B(f_3, f_3) \\ &= -B(e^{\theta_1}, e^{\theta_2}) - B(e^{\theta_2}, e^{\theta_3}) - B(e^{\theta_3}, e^{\theta_1}), \end{aligned}$$



Σχήμα 2.4: Η αλληλεπίδραση δύο σολιτονίων της εξίσωσης KdV, για  $a_1 = 2.5$ ,  $a_2 = 1.5$ ,  $c_1 = -20$  και  $c_2 = -40$ .

όπου οι ενδιάμεσες πράξεις έχουν ως εξής:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}B(f_3, f_3) &= -\frac{1}{2}[B(e^{\theta_1}, e^{\theta_1}) + B(e^{\theta_1}, e^{\theta_2}) + B(e^{\theta_1}, e^{\theta_3}) + B(e^{\theta_2}, e^{\theta_1}) \\
 &+ B(e^{\theta_2}, e^{\theta_2}) + B(e^{\theta_2}, e^{\theta_3}) + B(e^{\theta_3}, e^{\theta_1}) + B(e^{\theta_3}, e^{\theta_2}) + B(e^{\theta_3}, e^{\theta_3})] = \\
 &= -[B(e^{\theta_1}, e^{\theta_2}) + B(e^{\theta_2}, e^{\theta_3}) + B(e^{\theta_3}, e^{\theta_1})].
 \end{aligned}$$

Άρα καταλήξαμε στην μορφή της

$$f_2 = a_{12}e^{\theta_1+\theta_2} + a_{23}e^{\theta_2+\theta_3} + a_{31}e^{\theta_3+\theta_1}.$$

Αντικαθιστούμε:

$$\begin{aligned} -B(e^{\theta_2}, e^{\theta_3}) &= 3a_2a_3(a_2 - a_3)^2e^{\theta_2+\theta_3} \\ -B(e^{\theta_1}, e^{\theta_3}) &= 3a_1a_3(a_1 - a_3)^2e^{\theta_1+\theta_3} \\ -B(e^{\theta_1}, e^{\theta_2}) &= 3a_1a_2(a_1 - a_2)^2e^{\theta_1+\theta_2}, \end{aligned}$$

και τελικά:

$$a_{12} = \frac{(a_1 - a_2)^2}{(a_1 + a_2)^2} \quad a_{23} = \frac{(a_2 - a_3)^2}{(a_2 + a_3)^2} \quad a_{31} = \frac{(a_3 - a_1)^2}{(a_3 + a_1)^2},$$

και

$$A = a_{12}a_{23}a_{31}.$$

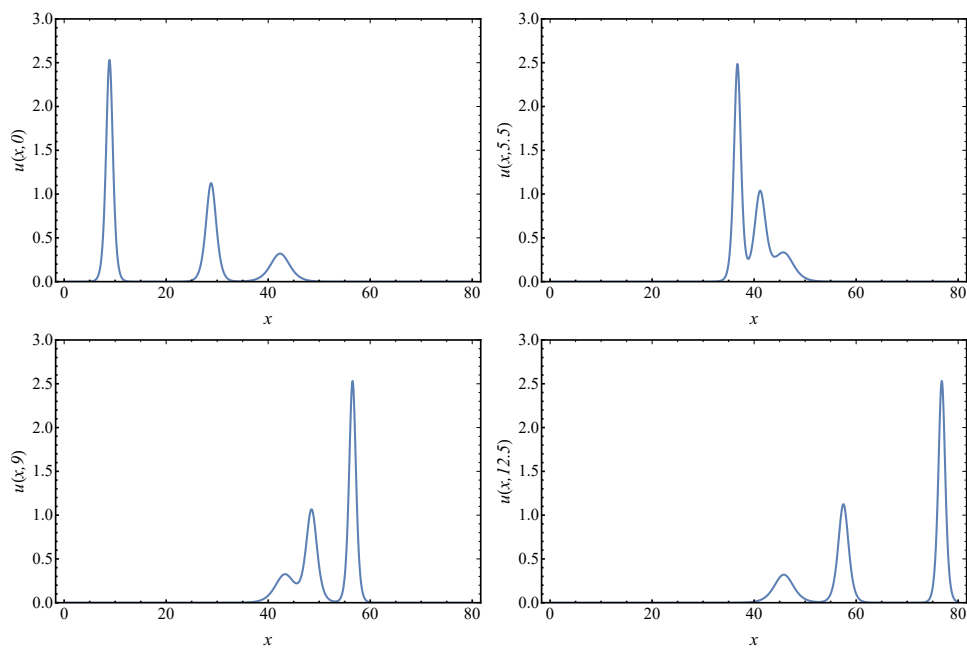
Οπότε:

$$f = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + a_{12}e^{\theta_1+\theta_2} + a_{23}e^{\theta_2+\theta_3} + a_{31}e^{\theta_3+\theta_1} + Ae^{\theta_1+\theta_2+\theta_3},$$

την οποία  $f$  αντικαθιστούμε στην  $u_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f$  και αποκτούμε τη  $u_3$ , που επαληθεύει την εξίσωση μας.

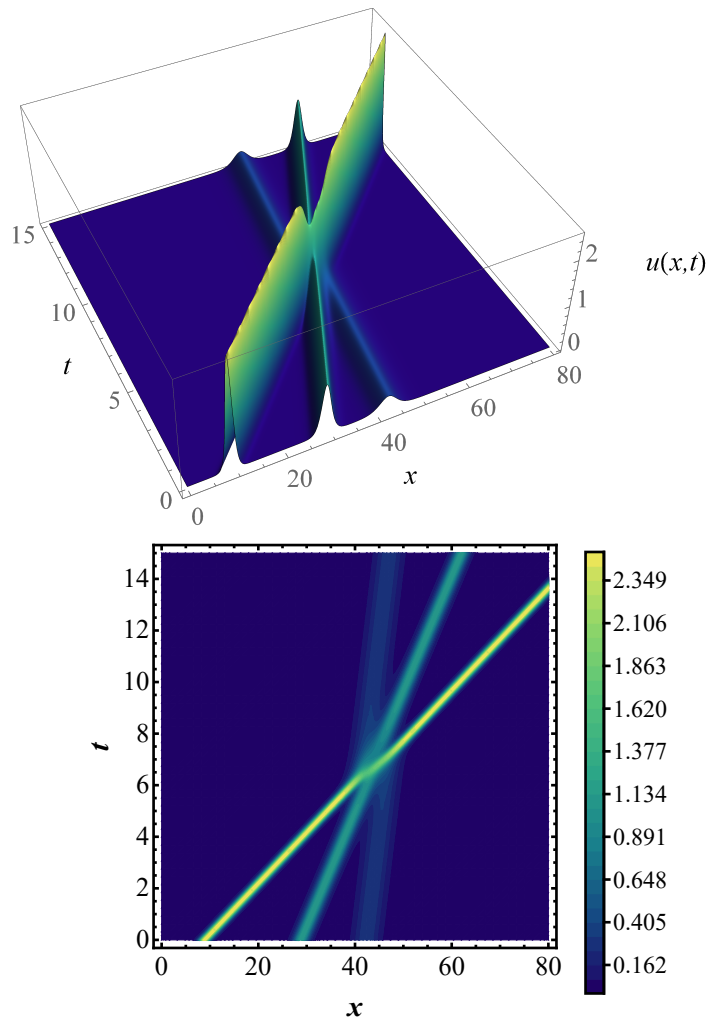
Στο σχήμα (2.5) απεικονίζουμε το προφίλ αυτής της λύσης για διάφορους χρόνους, ώστε να φανεί η αλληλεπίδραση 3 σολιτονίων.

Στο σχήμα (2.6) φαίνεται η συνολική εξέλιξή της με τον χρόνο.



Σχήμα 2.5: Η αλληλεπίδραση τριών σολιτονίων της εξίσωσης KdV, για  $a_1 = 2.25$ ,  $a_2 = 1.5$ ,  $a_3 = 0.8$ ,  $c_1 = -20$ ,  $c_2 = -40$  και  $c_3 = -30$ .





Σχήμα 2.6: Η αλληλεπίδραση τριών σολιτονίων της εξίσωσης KdV, για  $a_1 = 2.25$ ,  $a_2 = 1.5$ ,  $a_3 = 0.8$ ,  $c_1 = -20$ ,  $c_2 = -40$  και  $c_3 = -30$ .



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΩΝ SAWADA-KOTERA

Στο κεφάλαιο αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Hirota σε μια πιο περίπλοκη εξίσωση που ονομάζεται Sawada-Kotera, από τους Ιάπωνες μαθηματικούς T. Sawada και T. Kotera που την εισήγαγαν το 1974. Η εξίσωση είναι και αυτή απολύτως ολοκληρώσιμη και έχει μια σύνδεση με την KdV, που θα διερευνήσουμε παρακάτω.

Η εξίσωση Sawada-Kotera είναι μια πέμπτης τάξης Μ.Δ.Ε., η οποία έχει τη παρακάτω μορφή:

$$u_t + 45u^2u_x + 15u_xu_{xx} + 15uu_{xxx} + u_{xxxxx} = 0. \quad (3.1)$$

όπου, όπως και προηγουμένως:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dots, \quad u_{xxxxx} = u_{5x} = \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}.$$

Τη συνοδεύουμε με μηδενικές συνοριακές συνθήκες, για τη συνάρτηση και τις παραγώγους της.

Το πρώτο βήμα στον αλγόριθμο της μεθόδου μας είναι και πάλι η αντικατάσταση:

$$u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f,$$

ώστε η εξίσωση που προκύπτει,

$$\frac{-2f_x f_t - 12f_{5x} f_x + 30f_{3x} f_{2x} + f_{xt} f + 2f_{6x} f - 20f_{3x}^3}{f^2} = 0, \quad (3.2)$$

να μπορεί να γραφεί σε διγραμμική μορφή:

$$\frac{1}{f^2} (D_x D_t + D_x^6)(f \cdot f) = 0. \quad (3.3)$$

### 3.1 Κατασκευή των λύσεων

Κατά τα γνωστά θεωρούμε:

$$f = 1 + e^\theta, \quad \theta = ax + bt + c,$$

το μόνο που απομένει είναι ο προσδιορισμός των σταθερών  $a, b, c$ . Αντικαθιστούμε στην διγραμμική μορφή (3.3), και έχουμε:

$$(D_x D_t + D_x^6)(1 + e^\theta, 1 + e^\theta) = 0.$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του τελεστή  $D$  το παραπάνω πρόβλημα ανάγεται σε μία αλγεβρική εξίσωση για τις σταθερές αυτές:

$$-2a(b + a^5)e^\theta = 0.$$

Η περίπτωση  $a = 0$  απορρίπτεται, διότι αντιστοιχεί σε λύση που δεν περιέχει τη χωρική μεταβλητή. Συνεπώς, η μόνη αποδεκτή λύση είναι:

$$b = -a^5,$$

ώστε  $f = 1 + e^{ax - a^5 t + c}$ . Άρα, τελικά η λύση δίνεται από τον τύπο:

$$u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(1 + e^{ax - a^5 t + c}).$$

Στο σχήμα (3.1) απεικονίζουμε το προφίλ αυτής της λύσης για  $t = 0$ .

Στο σχήμα (3.2) φαίνεται η διάδοση αυτής της λύσης, δηλαδή η εξέλιξή της με τον χρόνο.

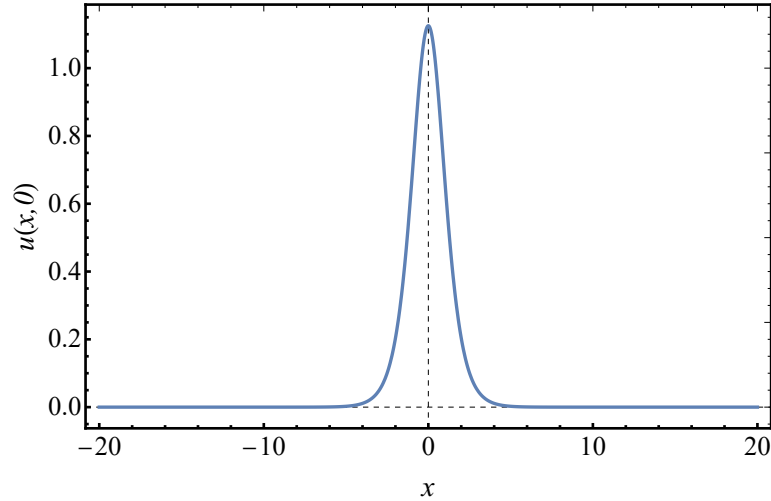
### 3.2 Λύσεις ανώτερης τάξης

Αν και θα εστιάσουμε μόνο στην επόμενης τάξης λύση, δηλαδή στην αλληλεπίδραση δύο σολιτονίων, γενικά η διαδικασία που ακολουθούμε είναι παρόμοια με παραπάνω. Ορίζουμε και πάλι τον τελεστή  $B$ :

$$B(f \cdot f) = (D_x D_t + D_x^6)(f \cdot f),$$

και δημιουργούμε τον αναδρομικό τύπο:

$$B(f_n, 1) + B(1, f_n) = - \sum_{m=1}^{n-1} B(f_{n-m}, f_m).$$



Σχήμα 3.1: Το προφίλ της σολιτονικής λύσης της εξίσωσης Sawada-Kotera, για  $a = 1.5$  και  $c = 0$ .

Η περίπτωση που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο αντιστοιχεί στις τιμές  $n = N = 1$ . Συνεπώς η αλληλεπίδραση δύο σολιτονίων, η επόμενη σε τάξη λύση, αντιστοιχεί στην περίπτωση  $n = 1, N = 2$ . Άρα γράφουμε:

$$f = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2,$$

με

$$\begin{aligned} f_1 &= e^{\theta_1} + e^{\theta_2}, & f_2 &= Ae^{\theta_1 + \theta_2}, \\ \theta_1 &= a_1 x + b_1 t + c_1, & \theta_2 &= a_2 x + b_2 t + c_2, \end{aligned}$$

αντίστοιχα. Τότε

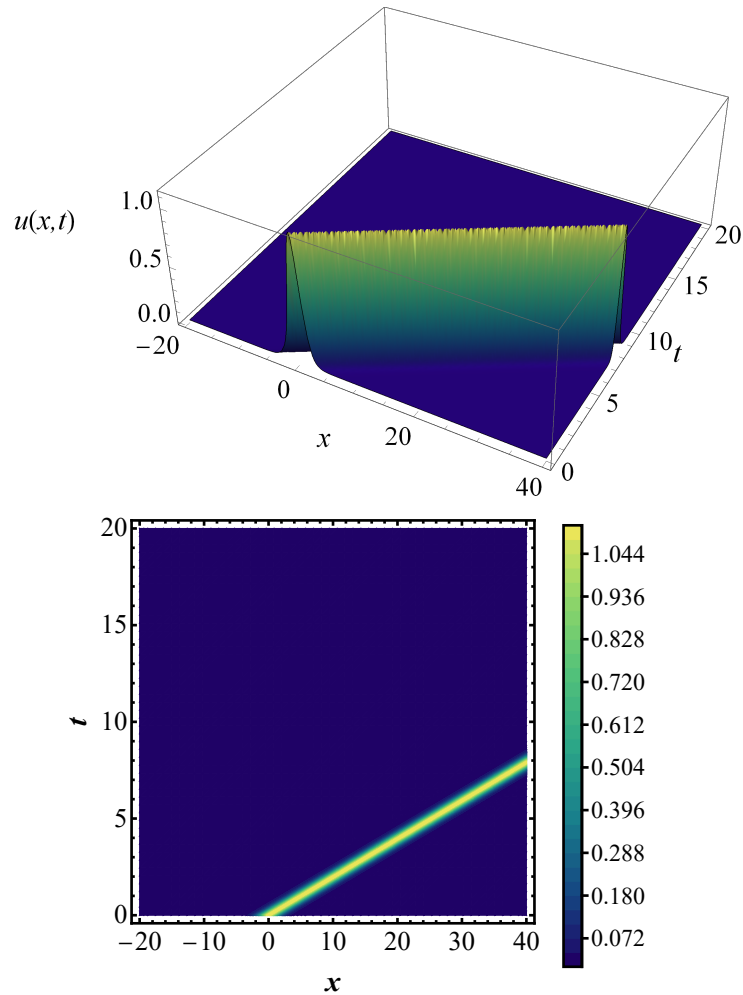
$$(D_x D_t + D_x^6) f_2 = -\frac{1}{2} (D_x D_t + D_x^6) f_1 \cdot f_1.$$

Αντικαθιστώντας για τις συναρτήσεις  $f_1$  και  $f_2$  καταλήγουμε μετά από σχετικές απλοποιήσεις:

$$A = \frac{(a_1 - a_2)^2 (a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2)}{(a_1 + a_2) (a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2)}.$$

Στο σχήμα (3.3) απεικονίζουμε το προφίλ αυτής της λύσης για διάφορους χρόνους, ώστε να φανεί η αλληλεπίδραση των σολιτονίων.

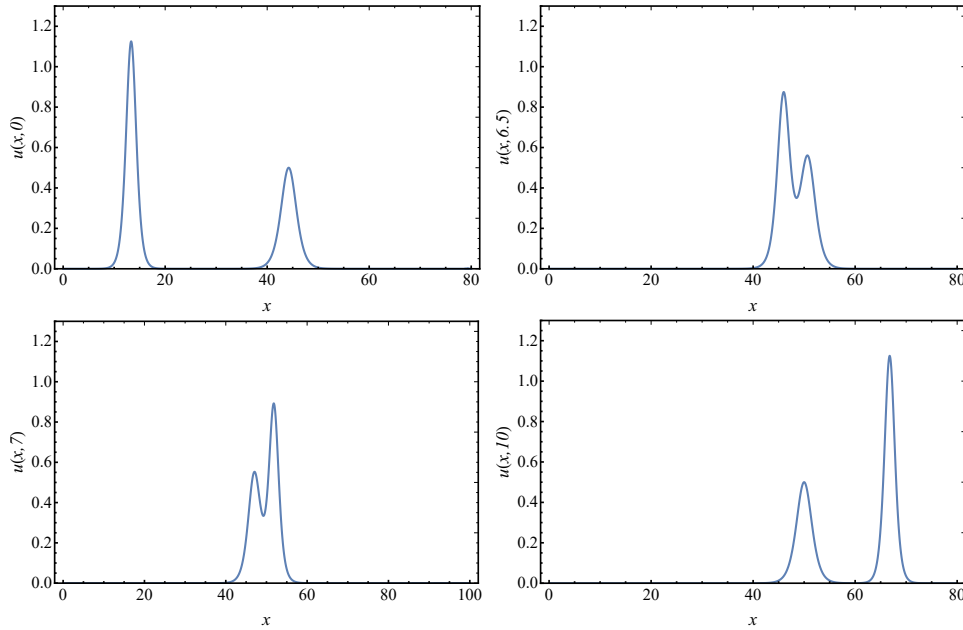
Στο σχήμα (3.4) φαίνεται η συνολική εξέλιξή της με τον χρόνο.



Σχήμα 3.2: Η διάδοση ενός σολιτονίου της εξίσωσης Sawada-Kotera, για  $a = 1.5$  και  $c = 0$ .

### 3.3 Σύνδεση με την εξίσωση Korteweg-de Vries

Ένα ενδιαφέρον, και ιδιαίτερα σημαντικό, μέρος της μεθόδου που αναπτύσσουμε είναι ότι μπορεί να παρέχει άμεση γενίκευση εξισώσεων οι οποίες να διατηρούν τις βασικές τους μαθηματικές ιδιότητες. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ένα πρωτοτυπικό μοντέλο την εξίσωση KdV θα θέλαμε να τη γενικεύσουμε χωρίς να χαθεί η έννοια της ολοκληρωσιμότητας. Για να γίνει αυτό συστηματικά χρησιμο-



Σχήμα 3.3: Η αλληλεπίδραση δύο σολιτονίων της εξίσωσης Sawada-Kotera, για  $a_1 = 1.5$ ,  $a_2 = 1$ ,  $c_1 = -20$  και  $c_2 = -40$ .

ποιούμε την μέθοδο Hirota και ιδιαίτερα τη διγραμμική μορφή.

Όπως είδαμε, η εξίσωση KdV

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

μπορεί να γραφεί με όρους του διγραμμικού τελεστή  $D$  ως:

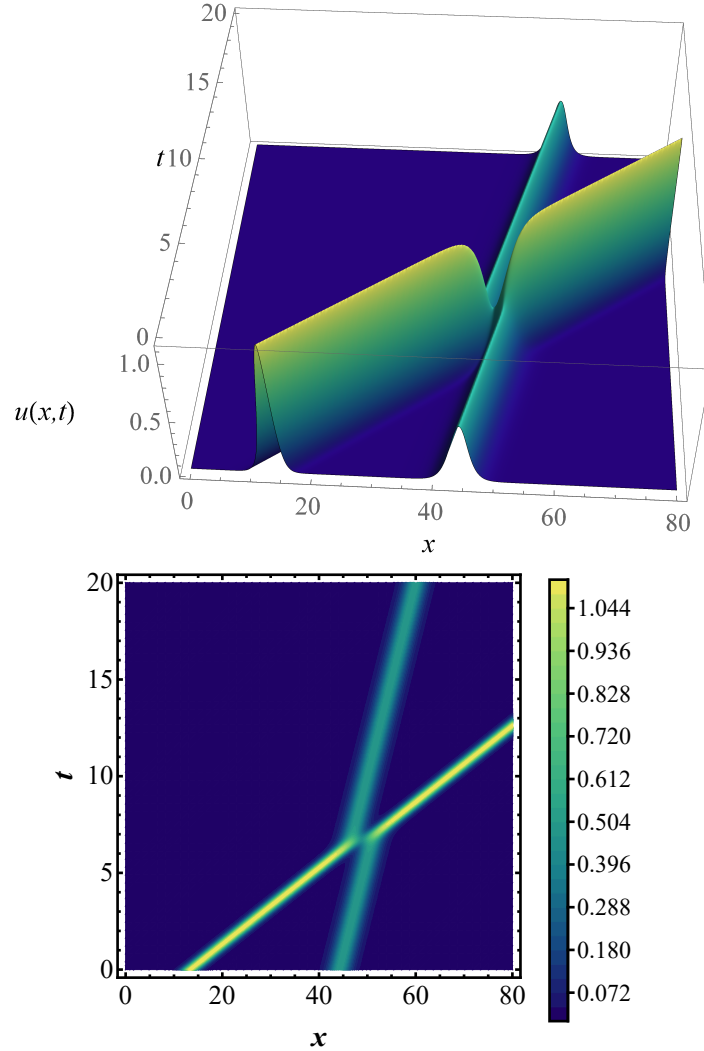
$$D_x (D_t + D_x^3) f \cdot f = 0, \quad u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f.$$

Συνεπώς, μια άμεση γενίκευση που θα διατηρεί τις συμμετρίες ως προς τις περιττές παραγώγους θα ήταν:

$$\frac{1}{f^2} D_x (D_t + D_x^5) f \cdot f = 0, \quad u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f.$$

Για πληρότητα της παραγράφου, υπενθυμίζουμε ότι:

$$D_x D_t (f \cdot f) = 2f_{xt}f - 2f_t f_x.$$



Σχήμα 3.4: Η αλληλεπίδραση δύο σολιτονίων της εξίσωσης Sawada-Kotera, για  $a_1 = 1.5$ ,  $a_2 = 1$ ,  $c_1 = -20$  και  $c_2 = -40$ .

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}
 f^2 (\ln f^2)_{xt} &= f^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x} \ln f^2 \right) = f^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{f^2} \frac{\partial}{\partial x} f^2 = f^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{f^2} 2f f_x \right) = \\
 &= f^2 \left[ -2 \frac{f f_t}{f^4} 2f f_x + \frac{1}{f^2} (2f_t f_x + 2f f_{xt}) \right] = f^2 \left[ -4 \frac{f_t f_x}{f^2} + 2 \frac{f_t f_x}{f^2} + 2 \frac{f_{xt}}{f} \right] = \\
 &= -2f_t f_x + 2f f_{xt}.
 \end{aligned}$$



Δηλαδή,  $D_x D_t (f \cdot f) = f^2 (\ln f^2)_{xt}$ .

Ας εξετάσουμε τον όρο  $(D_x^6) f \cdot f$ . Εφαρμόζοντας τον ορισμό του τελεστή  $D$  προκύπτει ότι:  $(D_x^6) f \cdot f = 2ff_{6x}$ , όπου  $f_{6x}$  η 6ης τάξης παράγωγος της  $f$  ως προς  $x$ . Τέλος,

$$u = 2(\ln f)_{xx} = 2 \frac{f_{xx}f - f_x^2}{f^2}.$$

Αντικαθιστούμε τους αντίστοιχους τελεστές στη διγραμμική μορφή της Sawada-Kotera

$$D_x (D_t + D_x^5) f \cdot f = 0$$

και έχουμε:

$$f^2 (\ln f^2)_{xt} + f^2 (u_{4x} + 15uu_{2x} + 15u^3) = 0.$$

Διαιρούμε με  $f^2$ ,

$$(\ln f^2)_{xt} + (u_{4x} + 15uu_{2x} + 15u^3) = 0,$$

και παραγωγίζουμε ως προς  $x$ ,

$$2(\ln f)_{xt} + u_{5x} + 15u_x u_{xx} + 15uu_{3x} + 45u^2 u_x = 0.$$

Όμως,  $u = 2(\ln f)_{xx}$ , οπότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως εξής:

$$u_t + 45u^2 u_x + 15u_x u_{xx} + 15uu_{xxx} + u_{xxxxx} = 0$$

η οποία είναι η εξίσωση Sawada-Kotera.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## Η ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ SCHRÖDINGER

Στις εξισώσεις που, μέχρι τώρα, μελετήσαμε σημαντικό μέρος της μεθόδου που χρησιμοποιήσαμε ήταν και ο μετασχηματισμός τύπου Cole Hopf. Δεν πρέπει, όμως, να δημιουργηθεί στον αναγνώστη η εντύπωση ότι αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της μεθόδου. Για τούτο, σε αυτό το κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Hirota σε μια διαφορετική τύπου διαφορική εξίσωση, σε σχέση με τις δύο προηγούμενες που μελετήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Επιπλέον θα δούμε πώς η μέθοδος εφαρμόζεται στην κατασκευή λύσεων σε εξισώσεις με μιγαδικούς συντελεστές, και άρα περιμένουμε μιγαδικές λύσεις. Τέλος, θα γενικεύσουμε σε προβλήματα που δεν απαιτούν μηδενικές συνοριακές συνθήκες.

Στρέφουμε, λοιπόν, το ενδιαφέρον μας στη μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (nonlinear Schrödinger equation (NLS)). Η εξίσωση NLS αποτελεί μια από τις πιο θεμελιώδεις εξισώσεις στη θεωρητική φυσική και στις εφαρμοσμένες μαθηματικές επιστήμες, με εκτεταμένες εφαρμογές στην κβαντική μηχανική, την οπτική και τη φυσική των πυκνών συμπυκνωμάτων Bose-Einstein. Πολλές εφαρμογές βρίσκει ακόμα στα υδάτινα κύματα, προσφέροντας ένα ισχυρό εργαλείο για την κατανόηση και την πρόβλεψη της συμπεριφοράς τους. Στα υδάτινα κύματα, η NLS χρησιμοποιείται για να περιγράψει τη διάδοση μη γραμμικών κυμάτων σε ρευστά μέσα, όπως οι ωκεανοί. Αυτά περιλαμβάνουν βαθιά ύδατα (deep water), εσωτερικά κύματα (internal waves), ατίθασα (rogue waves), διασπορικά ωστικά κύματα (dispersive shocks), κ.α..

Η μελέτη της NLS δεν είναι μόνο σημαντική για τη φυσική και την εφαρμοσμένη επιστήμη, αλλά αποτελεί επίσης έναν σημαντικό τομέα της καθαρής μαθηματικής έρευνας, προσφέροντας βαθιά και προκλητικά προβλήματα που εμπλουτίζουν τη μαθηματική θεωρία. Είναι πλήρως ολοκληρώσιμη, με τον μετασχηματισμό αντίστροφης σχέδασης, όπως και η KdV, έχει άπειρες διατηρήσιμες ποσότητες,

οδηγεί σε πολύπλοκα δυναμικά συστήματα, τα οποία μπορούν να εμφανίσουν χαοτική συμπεριφορά, έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη προηγμένων αριθμητικών μεθόδων και αλγορίθμων, κ.α. .

Η μη-γραμμική εξίσωση Schrödinger έχει τη παρακάτω μορφή:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2c|u|^2u = 0 \quad c = \pm 1, \quad (4.1)$$

όπου για την περίπτωση  $c = 1$ , ονομάζεται εστιάζουσα (focusing), ενώ για  $c = -1$ , καλείται αφεστιάζουσα (defocusing). Η διαφορά αυτή στα πρόσημα είναι πολύ σημαντική καθώς οδηγεί σε διαφορετικές λύσεις. Στη μεν εστιάζουσα μορφή, εφοδιάζουμε με μηδενικές συνοριακές συνθήκες, και οι σολιτονικές λύσεις που θα βρούμε καλούνται φωτεινά σολιτόνια (bright solitons), ενώ στη δεύτερη περίπτωση έχουμε μη-μηδενικές αλλά σταθερές, κατά μέτρο, συνθήκες. Στη δεύτερη περίπτωση οι λύσεις καλούνται σκοτεινά σολιτόνια (dark solitons). Συνοπτικά, τα σκοτεινά σολιτόνια χαρακτηρίζονται από μια τοπική μείωση της έντασης του κύματος, σε αντίθεση με τα φωτεινά σολιτόνια, τα οποία αντιστοιχούν σε τοπική/εντοπισμένη αύξηση της έντασης και σχηματίζουν μια κορυφή, τα σκοτεινά σολιτόνια σχηματίζουν μια ‘κοιλιάδα’ ή ένα ‘χάσμα’ πάνω σε ένα ομοιόμορφης έντασης κύμα.

## 4.1 Κατασκευή των λύσεων

### 4.1.1 Φωτεινά Σολιτόνια

Πρώτα θα δούμε την περίπτωση, η οποία μας δίνει τα φωτεινά σολιτόνια και άρα έχουμε μηδενικές συνοριακές συνθήκες. Στην περίπτωση της NLS ο μετασχηματισμός τύπου Cole Hopf, αποτυγχάνει. Έτσι θέτουμε άμεσα:

$$u = \frac{g}{f}, \quad (4.2)$$

όπου  $f$  είναι μια πραγματική συνάρτηση και  $g$  μια μιγαδική. Αυτό γίνεται χωρίς άρση της γενικότητας και ακολουθεί τον ‘κανόνα’ του πηλίκου που ακολουθήσαμε μέχρι τώρα. Αντικαθιστώντας την (4.2) στην εξίσωση (4.1), και ορίζοντας τον συζυγή της  $u$ , κατά τα γνωστά  $\bar{u} = \frac{\bar{g}}{f}$ , έχουμε:

$$\frac{i}{f^2}(g_t f - g f_t) + \frac{1}{f^2}(g f_{xx} + f g_{xx}) - \frac{2f_x}{f^3}(g_x f - g f_x) + 2\frac{g^2 \bar{g}}{f^3} = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας με  $f^2$ , έχουμε τελικά:

$$i(g_t f - g f_t) + g f_{xx} + f g_{xx} - 2f_x g_x + g f_{xx} - 2\frac{g}{f}(f_{xx} f - f_x^2 - g\bar{g}) = 0.$$

Θυμίζουμε στον αναγνώστη ότι:

$$iD_t(f, g) = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right) g(x, t) f(x', t') \Big|_{\substack{x' = x \\ t' = t}} = i(g_t f - g f_t),$$

και,

$$\begin{aligned} D_x^2(g, f) &= D_x(g_x f - g f_x) = g_{xx} f - g_x f_x - g_x f_x + g f_{xx} \\ &= g_{xx} f - 2g_x f_x + g f_{xx}. \end{aligned}$$

Τέλος, παρατηρούμε:

$$-2\frac{g}{f} f f_{xx} - 2\frac{g}{f} f_x^2 + 2\frac{g}{f} g\bar{g} = 0 \Rightarrow -2\frac{g}{f} (f f_{xx} + f_x^2) = -2\frac{g}{f} g\bar{g},$$

οπότε, τελικά, παίρνουμε το εξής σύστημα:

$$\begin{aligned} D_x^2(f \cdot f) &= g \cdot \bar{g} \\ (iD_t + D_x^2)g \cdot f &= 0 \\ (-iD_t + D_x^2)\bar{g} \cdot f &= 0. \end{aligned}$$

Εδώ πρέπει να κάνουμε μια παρατήρηση. Φαίνεται, σε πρώτη ματιά, ότι έχουμε τρεις εξισώσεις με μόνο δύο αγνώστους, τις συναρτήσεις  $f$  και  $g$ . Θυμίζουμε, όμως, ότι η συνάρτηση  $g$  είναι μιγαδική και συνεπώς πρέπει να βρούμε το πραγματικό και φανταστικό της μέρος. Θεωρούμε, λοιπόν, ως αγνώστους στο παραπάνω σύστημα τις συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  και  $\bar{g}$ . Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι το ζεύγος των τελευταίων δύο εξισώσεων του συστήματος είναι ουσιαστικά μία εξίσωση αφού πρόκειται για ζεύγος συζυγών εξισώσεων.

Το επόμενο βήμα της μεθόδου απαιτεί να αναπτύξουμε σε σειρά τις δύο συναρτήσεις ως:

$$\begin{aligned} f &= 1 + \varepsilon f_1 \\ g &= 1 + \varepsilon g_1. \end{aligned}$$

Απλή αντικατάσταση στην εξίσωση απορρίπτει αυτή την επιλογή, διότι δεν υπάρχει πραγματική συνάρτηση  $f$  ώστε να ικανοποιεί το σύστημα. Επιλέγουμε, συνεπώς, μια γενική μορφή:

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \varepsilon^n f_1 \\ g &= g_0 + \varepsilon^m g_1, \end{aligned}$$

όπου  $n, m \in \mathbb{N}$ . Η μόνη επιλογή που ικανοποιεί την εξίσωση είναι

$$\begin{aligned} f &= 1 + \varepsilon^2 f_1 + \varepsilon^4 f_2 + \varepsilon^6 f_3 + \dots \\ g &= \varepsilon g_1 + \varepsilon^3 g_2 + \varepsilon^5 g_3 + \dots \end{aligned}$$

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, ξεκινάμε με την επιλογή:

$$\begin{aligned} f &= 1 + \varepsilon^2 f_1, \\ g &= \varepsilon g_1 \end{aligned}$$

και κάνοντας την εξής θεώρηση:

$$g_1 = e^{\theta_1}, \quad \theta_1 = \alpha_1 x + \beta_1 t,$$

αντικαθιστούμε στην εξίσωση,

$$D_x^2(f \cdot f) = g \cdot \bar{g},$$

και βρίσκουμε

$$f_1 = \frac{1}{(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)^2} e^{\theta_1 + \bar{\theta}_1}.$$

Τέλος, αντικαθιστούμε τις  $f_1, g_1$  στις:

$$\begin{aligned} (iD_t + D_x^2)g \cdot f &= 0, \\ (-iD_t + D_x^2)\bar{g} \cdot f &= 0 \end{aligned}$$

και θα αποκτήσουμε τη σχέση μεταξύ των  $\alpha_1, \beta_1$ . Συλλέγοντας τους όρους του  $\varepsilon$  καταλήγουμε σε μια αλγεβρική εξίσωση, όπου ισχύει:

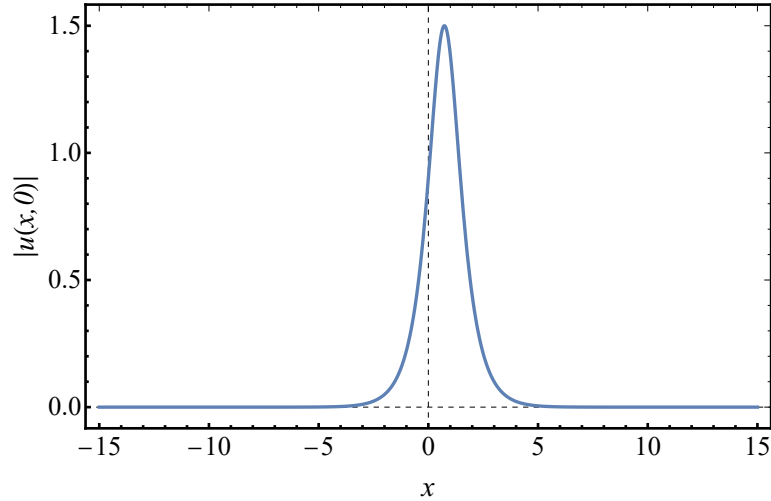
$$\beta_1 = i\alpha_1^2$$

και άρα:

$$g_1 = e^{\theta_1}, \quad \theta_1 = \alpha_1 x + i\alpha_1^2 t, \quad f = \frac{1}{(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)^2} e^{\theta_1 + \bar{\theta}_1}.$$

Στο σχήμα (4.1) απεικονίζουμε το προφίλ αυτής της λύσης για  $t = 0$ .

Στο σχήμα (4.2) φαίνεται η διάδοση αυτής της λύσης, δηλαδή η εξέλιξή της με τον χρόνο.



Σχήμα 4.1: Το προφίλ της σολιτονικής λύσης της εστιάζουσας εξίσωσης NLS, για  $\alpha_1 = 1.5 + i$ .

### Λύσεις ανώτερης τάξης

Συνεχίζουμε με την εύρεση της λύσης που αντιστοιχεί στην αλληλεπίδραση δύο σολιτονίων της εξίσωσης. Επιλέγουμε τώρα:

$$\begin{aligned} f &= 1 + \varepsilon^2 f_1 + \varepsilon^4 f_2, \\ g &= \varepsilon g_1 + \varepsilon^3 g_2 \end{aligned}$$

και

$$g_1 = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}, \quad \theta_1 = \alpha_1 x + i\alpha_1^2 t, \quad \theta_2 = \alpha_2 x + i\alpha_2^2 t,$$

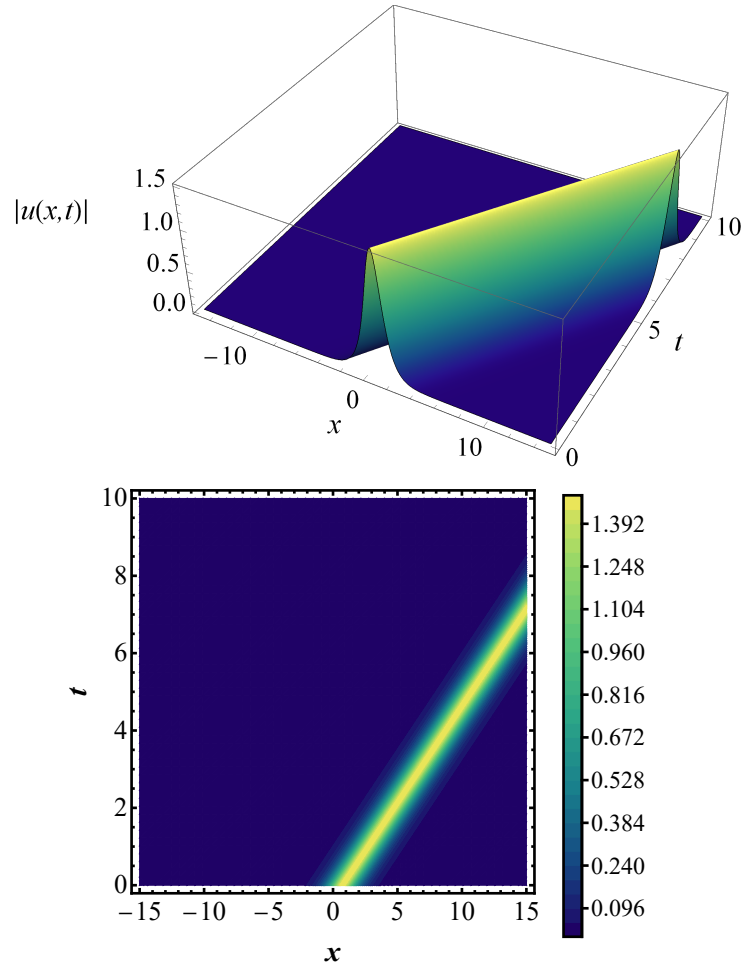
και αντικαθιστούμε στην:

$$D_x^2(f \cdot f) = g \cdot \bar{g}.$$

Συλλέγοντας τους όρους του  $\varepsilon$  προκύπτουν 4 νέες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} f_{1xx} &= g_1 \bar{g}_1, \\ f_{2xx} + f_{1xx} f_1 - f_{1x}^2 &= g_1 \bar{g}_2 + g_2 \bar{g}_1, \\ f_{1xx} f_2 - 2f_{1x} f_{2x} + f_{2xx} f_1 &= g_2 \bar{g}_2, \\ f_{2xx} f_2 - f_{2x}^2 &= 0, \end{aligned}$$

όπου η πρώτη εξίσωση είναι ο συντελεστής του  $\varepsilon^2$ , η δεύτερη εξίσωση είναι ο συντελεστής του  $\varepsilon^4$ , η τρίτη εξίσωση είναι ο συντελεστής του  $\varepsilon^6$  και η τέταρτη



Σχήμα 4.2: Η διάδοση ενός σολιτονίου της εξίσωσης της εστιάζουσας εξίσωσης NLS, για  $\alpha_1 = 1.5 + i$ .

εξίσωση είναι ο συντελεστής του  $\varepsilon^8$ , αντίστοιχα. Η  $f_1$  προκύπτει από την πρώτη εξίσωση και είναι η εξής:

$$f_1 = \frac{1}{(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)^2} e^{\theta_1 - \bar{\theta}_1} + \frac{1}{(\alpha_1 + \bar{\alpha}_2)^2} e^{\theta_1 + \bar{\theta}_2} \\ + \frac{1}{(\alpha_2 + \bar{\alpha}_1)^2} e^{\theta_2 + \bar{\theta}_1} + \frac{1}{(\alpha_2 + \bar{\alpha}_2)^2} e^{\theta_2 + \bar{\theta}_2}.$$



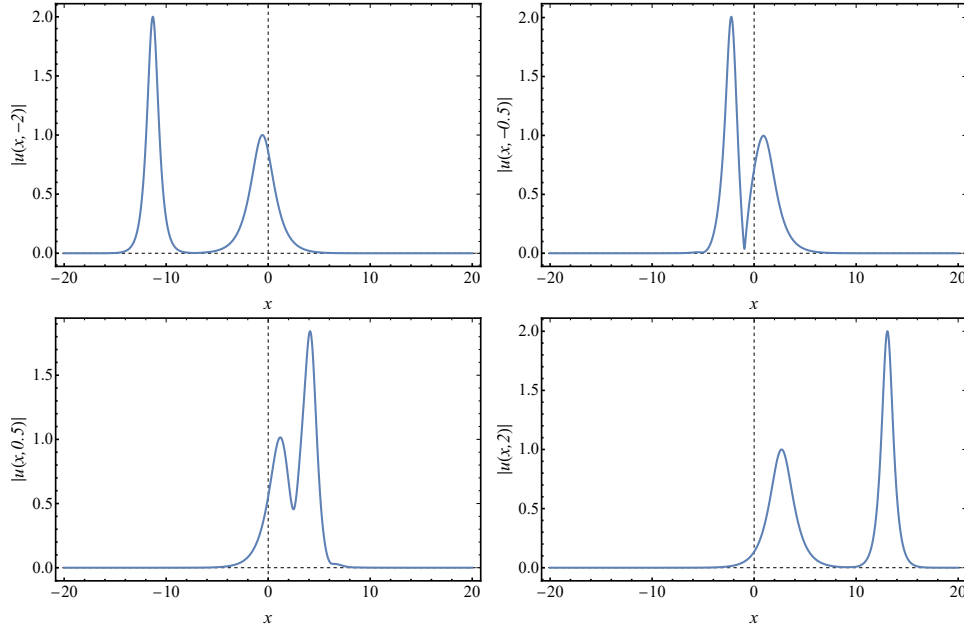
Οι επόμενες εξισώσεις θα μας δώσουν τις  $f_2$ ,  $g_2$ , και  $\bar{g}_2$ , οι οποίες είναι:

$$\begin{aligned} f_2 &= Ae^{\theta_1 + \bar{\theta}_1 + \theta_2 + \bar{\theta}_2}, \\ g_2 &= B_1 e^{\theta_1 + \bar{\theta}_1 + \theta_2} + B_2 e^{\theta_1 + \bar{\theta}_2 + \theta_2}, \\ \bar{g}_2 &= \bar{B}_1 e^{\theta_2 + \bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2} + \bar{B}_2 e^{\theta_2 + \bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_1}, \end{aligned}$$

όπου:

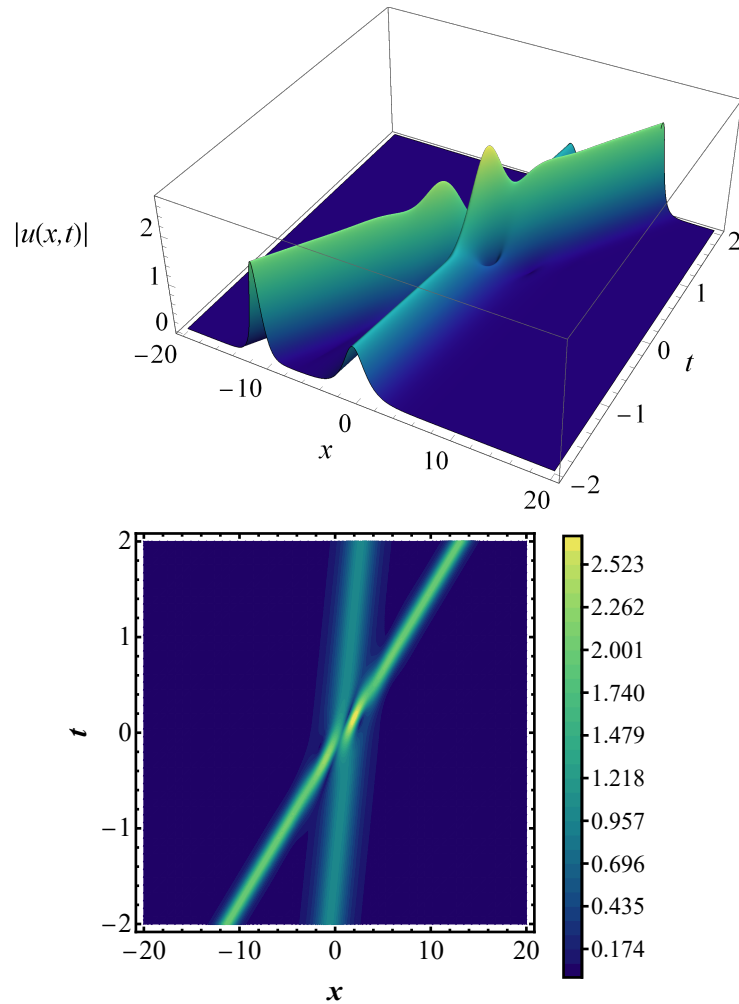
$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)^2 (\bar{\alpha}_1 + \alpha_2)^2}, & \bar{B}_1 &= \frac{(\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2)^2}{(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)^2 (\bar{\alpha}_2 + \alpha_1)^2}, \\ B_2 &= \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{(\alpha_1 + \bar{\alpha}_2)^2 (\bar{\alpha}_2 + \alpha_2)^2}, & \bar{B}_2 &= \frac{(\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2)^2}{(\bar{\alpha}_1 + \alpha_2)^2 (\bar{\alpha}_2 + \alpha_2)^2}, \\ A &= \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2)^2}{(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)^2 (\bar{\alpha}_1 + \alpha_2)^2 (\alpha_1 + \bar{\alpha}_2)^2 (\alpha_2 + \bar{\alpha}_2)^2}. \end{aligned}$$

Στο σχήμα (4.3) απεικονίζουμε το προφίλ αυτής της λύσης για διάφορους χρόνους, ώστε να φανεί η αλληλεπίδραση των σολιτονίων.



Σχήμα 4.3: Η αλληλεπίδραση δύο σολιτονίων της εστιάζουσας εξίσωσης NLS, για  $\alpha_1 = 1 + 0.5i$  και  $\alpha_2 = 2 + 3i$ .

Στο σχήμα (4.4) φαίνεται η συνολική εξέλιξη της με τον χρόνο.



Σχήμα 4.4: Η αλληλεπίδραση δύο σολιτονίων της εστιάζουσας εξίσωσης NLS, για  $\alpha_1 = 1 + 0.5i$  και  $\alpha_2 = 2 + 3i$ .

#### 4.1.2 Σκοτεινά Σολιτόνια

Επιλύουμε, στην ενότητα αυτή, την αφεστιάζουσα εξίσωση, με  $c = -1$ . Η εξίσωση πλέον δεν υποστηρίζει λύσεις με μηδενικές συνοριακές συνθήκες, αλλά τα λεγόμενα σκοτεινά σολιτόνια, με συνοριακές συνθήκες (για το πλάτος τους)

σταθερές. Η εξίσωση, έχει, λοιπόν, τη μορφή,

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2|u|^2 u = 0.$$

Ομοίως και εδώ θέτουμε:

$$u = \frac{g}{f},$$

όπου  $f$  πραγματική συνάρτηση και  $g$  μιγαδική.

Η διγραμμική μορφή μπορεί πλέον να γενικευτεί :

$$\begin{aligned} D_x^2(f \cdot f) - 2|g|^2 &= \lambda f^2, \\ (iD_t + D_x^2)g \cdot f &= \lambda g \cdot f, \\ (-iD_t + D_x^2)\bar{g} \cdot f &= \lambda g \cdot f. \end{aligned}$$

Πέρα από την προφανή αλλαγή στο πρόσημο, η σταθερά  $\lambda$  προκύπτει ως αποτέλεσμα των μη μηδενικών συνοριακών συνθηκών που έχουμε επιβάλει. Η τιμή της θα προκύψει από τη διαδικασία.

Ξεκινάμε και πάλι από την περίπτωση του ενός σολιτονίου, και γράφουμε

$$\begin{aligned} g_1 &= A_0 e^{\theta_0} (\varepsilon A_1 e^{\theta_1} + 1), \\ \bar{g}_1 &= A_0 e^{\bar{\theta}_0} (\varepsilon A_1 e^{\bar{\theta}_1} + 1), \end{aligned}$$

όπου:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= ik_0 x + ib_0 t + ic_0, & \bar{\theta}_0 &= -ik_0 x - ib_0 t - ic_0, \\ \theta_1 &= ik_1 x + ib_1 t + ic_1, & \bar{\theta}_1 &= -ik_1 x - ib_1 t - ic_1. \end{aligned}$$

Η επιλογή έγινε με τέτοιο τρόπο ώστε να διευκολύνουμε τις πράξεις. Επιπλέον για  $\varepsilon = 0$ , η λύση αντιστοιχεί στο επίπεδο κύμα που εδράζεται το σκοτεινό σολιτόνιο. Δεν μπαίνουμε σε περισσότερες, λεπτομέρειες για τη δομή της λύσης, καθώς αυτές είναι εκτός του περιεχομένου της διατριβής.

Η  $f$  θα έχει την εξής μορφή:

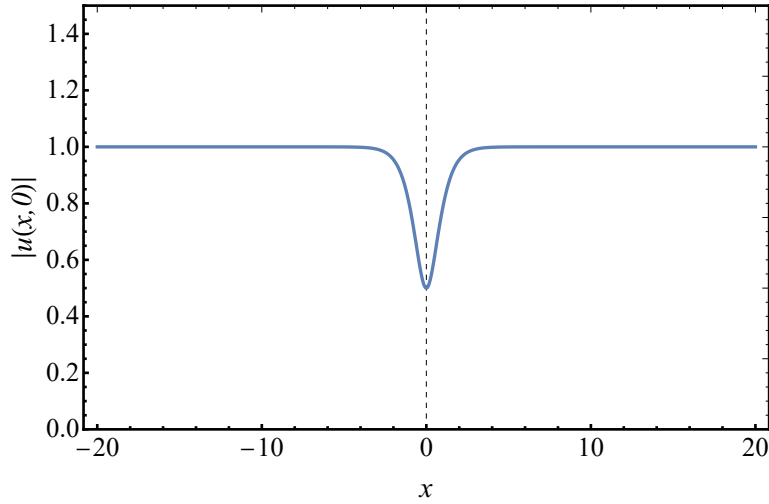
$$f_1 = A_1 e^{\theta_{11}}, \quad \theta_{11} = k_1 x + b_1 t.$$

Για να ικανοποιούνται οι εξισώσεις του συστήματος, οι σταθερές θα πρέπει να

ικανοποιούν τις εξής ισότητες:

$$\begin{aligned}\lambda &= 2A_0^2, \\ b_0 &= -(k_0^2 + \lambda), \\ B_1 &= A_1, \\ k_1 &= 2A_0 \sin \frac{c_1}{2}, \\ b_1 &= -2A_0 k_0 \sin \frac{c_1}{2} + 2A_0^2 \sin c_1.\end{aligned}$$

Στο σχήμα (4.5) απεικονίζουμε το προφίλ αυτής της λύσης για  $t = 0$ .



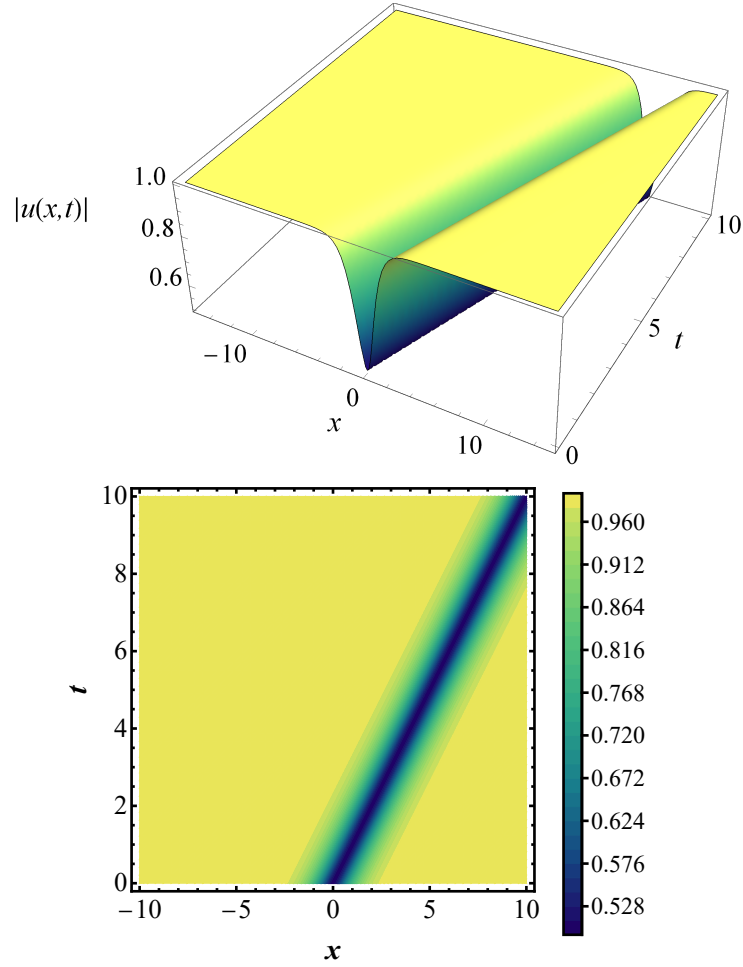
Σχήμα 4.5: Το προφίλ της σολιτονικής λύσης της αφεστιαζουσας εξίσωσης NLS, για  $A_0 = 1$ ,  $k_0 = 1$ ,  $A_1 = 1$ ,  $c_1 = 2\pi/3$  και  $c_0 = 2\pi/3$ .

Ενώ στο σχήμα (4.6) φαίνεται η διάδοση αυτής της λύσης, δηλαδή η εξέλιξή της με τον χρόνο.

### Λύσεις ανώτερης τάξης

Όπως και παραπάνω, προχωρούμε στην αλληλεπίδραση δύο τέτοιων σολιτονίων. Και πάλι γράφουμε

$$\begin{aligned}g_1 &= (1 + \varepsilon A_1 e^{\theta_1} + \varepsilon A_2 e^{\theta_2} + \varepsilon^2 A_1 A_2 A_3 e^{\theta_1 + \theta_2}) A_0 e^{\theta_0}, \\ \bar{g}_1 &= (1 + \varepsilon A_1 e^{\bar{\theta}_1} + \varepsilon A_2 e^{\bar{\theta}_2} + \varepsilon^2 A_1 A_2 A_3 e^{\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2}) A_0 e^{\bar{\theta}_0},\end{aligned}$$



Σχήμα 4.6: Η διάδοση ενός σολιτονίου της αφεστιάζουσας εξίσωσης NLS, για  $A_0 = 1$ ,  $k_0 = 1$ ,  $A_1 = 1$ ,  $c_1 = 2\pi/3$  και  $c_0 = 2\pi/3$ .

όπου:

$$\begin{aligned}\theta_0 &= ik_0x + ib_0t + ic_0, \bar{\theta}_0 = -ik_0x - ib_0t - ic_0 \\ \theta_1 &= ik_1x + ib_1t + ic_1, \bar{\theta}_1 = -ik_1x - ib_1t - ic_1 \\ \theta_2 &= ik_2x + ib_2t + ic_2, \bar{\theta}_2 = -ik_2x - ib_2t - ic_2,\end{aligned}$$

και η  $f$  γράφεται:

$$f_1 = B_1 \varepsilon e^{\theta_{11}} + B_2 \varepsilon e^{\theta_{22}} + \varepsilon^2 B_3 e^{\theta_{11} + \theta_{22}},$$

όπου

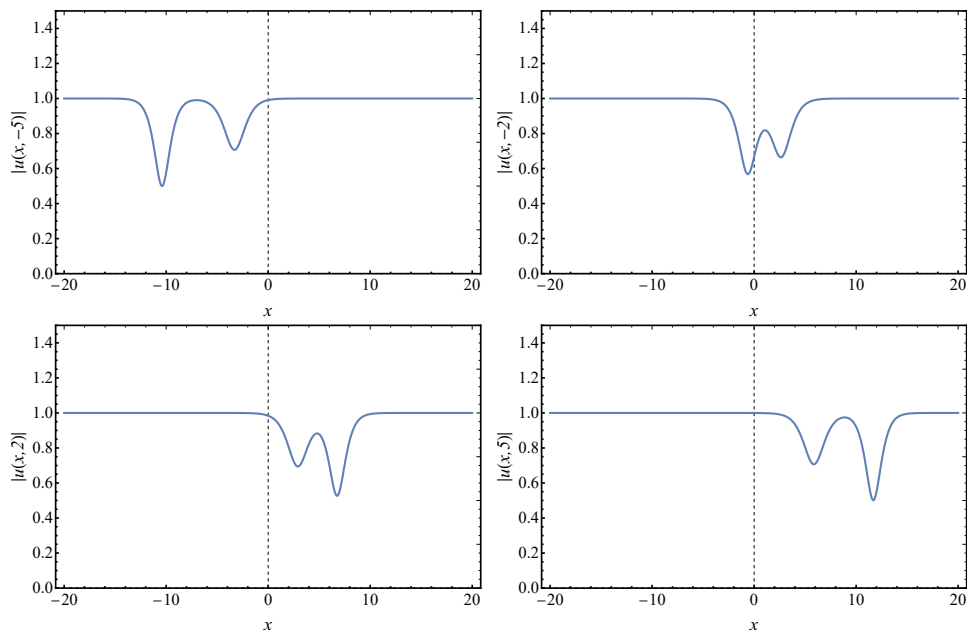
$$\theta_{11} = k_1x + b_1t, \quad \theta_{22} = k_2x + b_2t.$$

Για να ικανοποιούνται οι εξισώσεις του συστήματος οι σταθερές θα πρέπει να ικανοποιούν τις εξής ισότητες:

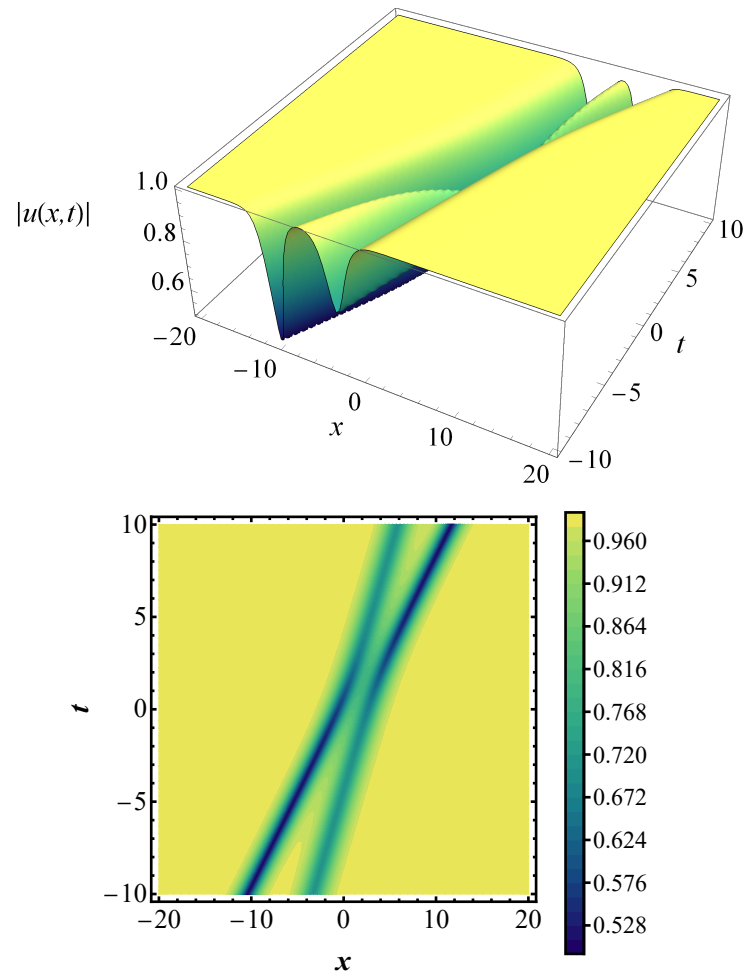
$$\begin{aligned} \lambda &= 2A_0^2, \\ B_3 &= A_1A_2A_3, \\ b_0 &= -2A_0^2 - k_0^2, \\ B_2 &= A_2, \\ B_1 &= A_1, \\ k_1 &= 2A_0 \sin \frac{c_1}{2}, \\ k_2 &= 2A_0 \sin \frac{c_2}{2}, \\ A_3 &= \frac{-1 + \cos \frac{c_1 - c_2}{2}}{-1 + \cos \frac{c_1 + c_2}{2}}, \\ b_1 &= k_1(-2k_0 + k_1 \cot \frac{c_1}{2}), \\ b_2 &= k_2(-2k_0 + k_2 \cot \frac{c_2}{2}). \end{aligned}$$

Στο σχήμα (4.7) απεικονίζουμε το προφίλ αυτής της λύσης για διάφορους χρόνους, ώστε να φανεί η αλληλεπίδραση 2 σολιτονίων.

Στο σχήμα (4.8) φαίνεται η συνολική εξέλιξη της με τον χρόνο.



Σχήμα 4.7: Η αλληλεπίδραση δύο σολιτονίων της αφεστιάζουσας εξίσωσης NLS, για  $\alpha_1 = 1 + 0.5i$  και  $\alpha_2 = 2 + 3i$ .



Σχήμα 4.8: Η αλληλεπίδραση δύο σολιτονίων της αφεστιάζουσας εξίσωσης NLS, για  $\alpha_1 = 1 + 0.5i$  και  $\alpha_2 = 2 + 3i$ .



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

## Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΑΔΟΜΤΣΕΒ-ΡΕΤΒΙΑΣΗΒΙΛΙ

Στο κεφάλαιο αυτό θα γενικεύσουμε τη μελέτη της μεθόδου Hirota σε δύο χωρικές διαστάσεις. Θα εστιάσουμε στην εξίσωση Kadomtsev-Petviashvili (KP) που αποτελεί μια άμεση γενίκευση της εξίσωσης KdV σε δύο διαστάσεις. Παίρνει το όνομά της από τους Ρώσους μαθηματικούς B.B. Kadomtsev και V.I. Petviashvili που την εξήγαγαν στην θεωρία των αβαθών υδάτινων κυμάτων. Διατηρεί πολλές ιδιότητες της ανάλογης, σε μία χωρική διάσταση, KdV εξίσωσης, δηλαδή είναι πλήρως ολοκληρώσιμη και μπορεί να επιλυθεί με τον μετασχηματισμό της αντίστροφης σκέδασης.

Η εξίσωση έχει τη μορφή:

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + u_{yy} = 0, \quad (5.1)$$

όπου και πάλι οι δείκτες δηλώνουν παραγωγήιση. Η εξίσωση συνοδεύεται και πάλι από μηδενικές συνοριακές συνθήκες τόσο για τη συνάρτηση όσο και για τις παραγώγους της. Πρέπει να τονιστεί ότι υπάρχει και μια ακόμη μορφή της εξίσωσης με αντίθετο πρόσημο για τον όρο  $u_{yy}$ . Η εξίσωση αυτή όμως δεν υποστηρίζει λύσεις με μηδενικές συνοριακές συνθήκες και δεν θα ασχοληθούμε περαιτέρω εδώ.

Παρατηρούμε, άμεσα, ότι το πρώτο κομμάτι της είναι η εξίσωση KdV που παραγωγίζεται. Για τούτο ολοκληρώνουμε ως προς  $x$  την εξίσωση και έχουμε:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + \left( \int u dx \right)_{yy} = 0,$$

όπου δεν χρειάζονται ολοκληρωτικές σταθερές εξαιτίας των συνοριακών συνθηκών. Θέτουμε στη συνέχεια,  $u = w_x$ , αντικαθιστούμε στην εξίσωση και παίρνουμε την εξίσωση:

$$w_{xt} + 3[(w_x)^2]_x + w_{xxxx} + w_{yy} = 0.$$

## Κεφάλαιο 5

Ολοκληρώνουμε ως προς  $x$  και πάλι:

$$w_t + 3(w_x)^2 + w_{xxx} + \left( \int w dx \right)_{yy} = 0.$$

Το επόμενο βήμα θα έπρεπε να είναι ο μετασχηματισμός τύπου Cole-Hopf, όμως υπάρχει ήδη μια παραγωγή (  $u = w_x$  ) και άρα αρκεί,

$$w = 2 \frac{f_x}{f} = 2(\ln f)_x,$$

ώστε

$$w_t + 3(w_x)^2 + w_{xxx} + 2(\ln f)_{yy} = 0.$$

Παρατηρούμε ότι οι τρεις πρώτοι όροι είναι οι όροι της εξίσωσης KdV, οπότε θα λάβουμε άμεσα τη διγραμμική μορφή τους με όρους του τελεστή  $D$ , καθώς και ο όρος  $2(\ln f)_{yy}$  μπορεί να εκφραστεί άμεσα με τη βοήθεια του  $D$ . Έτσι καταλήγουμε στη διγραμμική μορφή της εξίσωσης με όρους του  $D$ , η οποία είναι:

$$(D_x D_t + D_x^4 + D_y^2) f \cdot f = 0. \quad (5.2)$$

Προχωρούμε στην κατασκευή των λύσεων. Θα περιοριστούμε και πάλι στις δύο πρώτες, σε ιεραρχία, λύσεις του αλγορίθμου. Θεωρούμε, για την πρώτη λύση,

$$f = 1 + e^{\theta_1},$$

όπου γενικά,  $\theta_i = k_i x + w_i y + c_i t$ , κι αντικαθιστούμε στην εξίσωση (5.2) για να βρούμε τη σχέση μεταξύ των παραμέτρων  $k_i$ ,  $w_i$ ,  $c_i$ . Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} (D_x D_t + D_x^4 + D_y^2)(f, f) &= (D_x D_t + D_x^4 + D_y^2)(1 + e^{\theta_1}, 1 + e^{\theta_1}) \\ &= (D_x D_t + D_x^4 + D_y^2)[(1, 1), (1, e^{\theta}), (e^{\theta}, 1), (e^{\theta}, e^{\theta})] \\ &= 2((D_x D_t + D_x^4 + D_y^2)(e^{\theta}, 1)) \\ &= 2(kc + k^4 + w^2)e^{\theta} = 0. \end{aligned}$$

Τελικά:

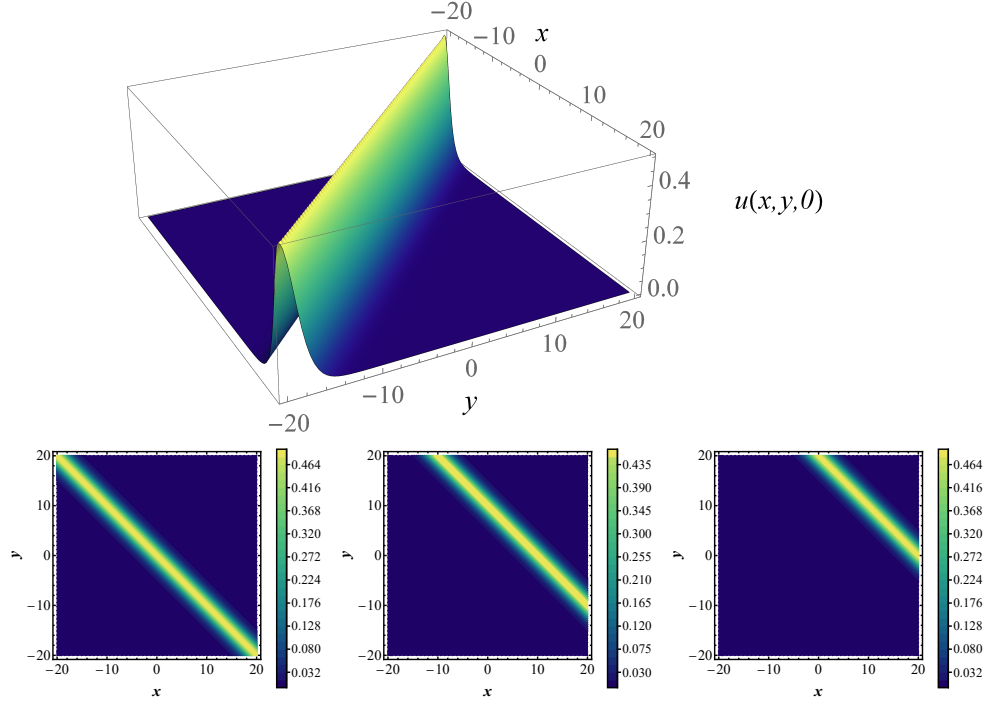
$$k_1 c_1 + k_1^4 + w_1^2 = 0 \Rightarrow k_1 c_1 = -k_1^4 - w_1^2 \Rightarrow c_1 = \frac{-k_1^4 - w_1^2}{k_1}.$$

Στο σχήμα (5.1) απεικονίζουμε το προφίλ αυτής της λύσης.

Αντίστοιχα, για την επόμενη τάξη που θα χαρακτηρίζει την αλληλεπίδραση δύο σολιτονίων, θεωρούμε:

$$f = 1 + f_1 + A f_2, \quad f_1 = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}, \quad f_2 = A e^{\theta_1 + \theta_2},$$

Κεφάλαιο 5



Σχήμα 5.1: Το προφίλ της σολιτονικής λύσης της εξίσωσης KP, για  $k_1 = w_1 = 1$  για  $t = 0$  (πάνω,κάτω-αριστερά),  $t = 5$  (κάτω-μέση),  $t = 10$  (κάτω-δεξιά).

ορίζουμε, και πάλι  $B = (D_x D_t + D_x^4 + D_y^2)$ , τον τελεστή που θα χρειαστούμε για τον αναδρομικό τύπο:

$$(\partial_x \partial_t + \partial_x^4 + \partial_y^2) f_2 = -\frac{1}{2} B(e^{\theta_1} + e^{\theta_2}, e^{\theta_1} + e^{\theta_2}) = -B(e^{\theta_1}, e^{\theta_2}).$$

Κάνοντας τις πράξεις καταλήγουμε ότι η σταθερά  $A$  ισούται με:

$$A = \frac{3k_1^2 k_2^2 (k_1 - k_2)^2 - (k_1 w_2 - k_2 w_1)^2}{3k_1^2 k_2^2 (k_1 + k_2)^2 - (k_1 w_2 - k_2 w_1)^2}.$$

Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων οι αλληλεπιδράσεις των δύο σολιτονίων ποικίλουν σημαντικά. Αν και δεν είναι το αντικείμενο της διατριβής η κατηγοριοποίηση των διαφόρων αλληλεπιδράσεων, τις αναφέρουμε για πληρότητα. Στα σχήματα που ακολουθούν απεικονίζουμε τις ανώτερες λύσεις της KP για  $t = 0$ .

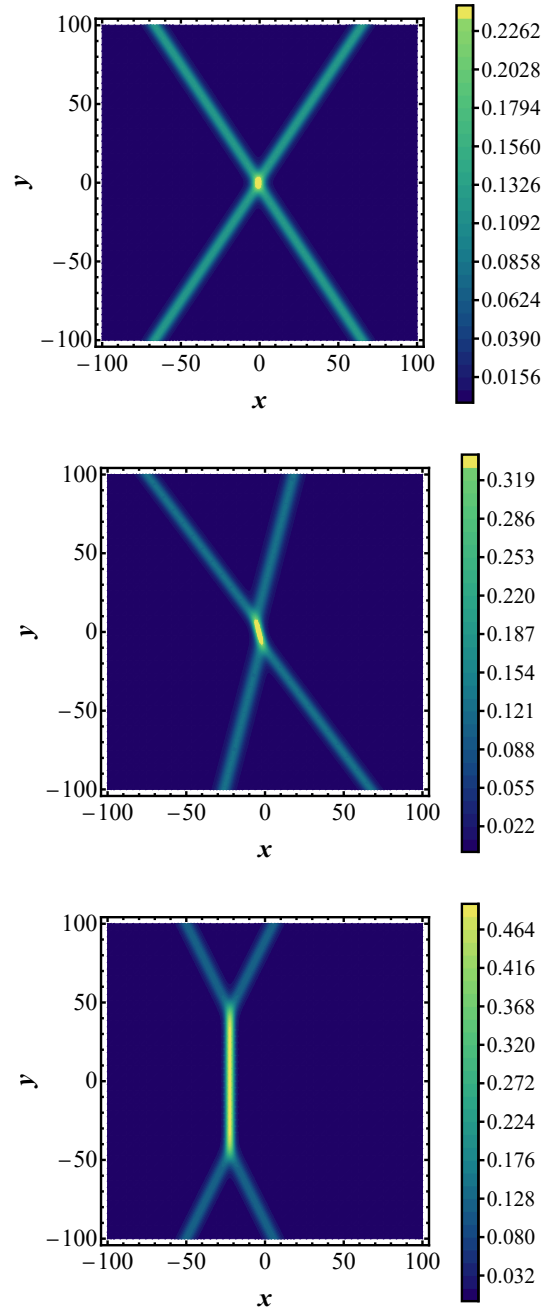
## Κεφάλαιο 5

Στο σχήμα (5.2) απεικονίζουμε την αλληλεπίδραση δύο σολιτονίων που αναλογεί στη λεγόμενη X-λύση.

Στο σχήμα (5.3) απεικονίζουμε την αλληλεπίδραση δύο σολιτονίων που αναλογεί στη λεγόμενη Y-λύση.

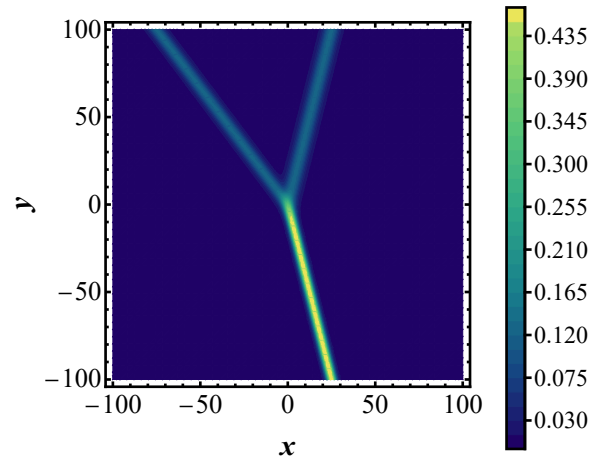
Τέλος, στο σχήμα (5.4) απεικονίζουμε την αλληλεπίδραση δύο σολιτονίων που αναλογεί στη λεγόμενη H-λύση.

Κεφάλαιο 5

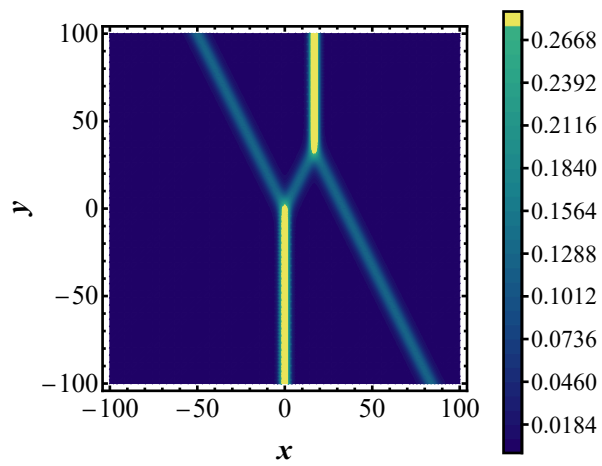


Σχήμα 5.2: Το προφίλ της αλληλεπίδρασης δύο σολιτονίων της εξίσωσης KP, για  $k_1 = 1/2$ ,  $k_2 = 1/2$ ,  $w_1 = 2/3$ ,  $w_2 = -2/3$  (επάνω),  $k_1 = 1/2$ ,  $k_2 = 1/2$ ,  $w_1 = -1/4 - .01$ ,  $w_2 = 3/4$  (μέση), και  $k_1 = 1/2$ ,  $k_2 = 1/2$ ,  $w_1 = 1/2$ ,  $w_2 = -1/2 - 10^{-9}$  (κάτω).

Κεφάλαιο 5



Σχήμα 5.3: Το προφίλ της αλληλεπίδρασης δύο σολιτονίων της εξίσωσης KP, για  $k_1 = 1/2$ ,  $k_2 = 1$ ,  $w_1 = 3/4$ ,  $w_2 = 1/4$ .



Σχήμα 5.4: Το προφίλ της αλληλεπίδρασης δύο σολιτονίων της εξίσωσης KP, για  $k_1 = 1/2$ ,  $k_2 = 1$ ,  $w_1 = 1/2 - 10^{-6}$ ,  $w_2 = 0$ .

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η μέθοδος Hirota αποτελεί μία από τις πιο ισχυρές και ευέλικτες τεχνικές για την ανάλυση και επίλυση μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Η σημασία της προκύπτει από την ικανότητά της να απλοποιεί σύνθετες εξισώσεις και να παρέχει ακριβείς λύσεις για ένα ευρύ φάσμα μη γραμμικών προβλημάτων.

Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα της μεθόδου Hirota είναι η ικανότητά της να μετασχηματίζει πολύπλοκες μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις σε απλούστερες διγραμμικές μορφές. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της χρήσης διγραμμικών διαφορικών τελεστών που επιτρέπουν την αποσύνθεση της αρχικής μη γραμμικής εξίσωσης σε γραμμικές μορφές ως προς κάθε παράγοντα. Η διαδικασία αυτή κάνει τις εξισώσεις πιο προσιτές για αναλυτική επίλυση, και μάλιστα με αλγοριθμικό τρόπο.

Η ευελιξία της μεθόδου Hirota την καθιστά κατάλληλη για την ανάλυση ενός ευρέος φάσματος εξισώσεων. Μπορεί να εφαρμοστεί σε κλασικές εξισώσεις όπως η εξίσωση Korteweg-de Vries (KdV), η μη γραμμική εξίσωση Schrödinger, και πολλές άλλες. Αυτές οι εξισώσεις εμφανίζονται σε πολλά επιστημονικά πεδία και μοντελοποιούν διάφορα φυσικά φαινόμενα. Αυτές οι εξισώσεις ήταν και το κύριο αντικείμενο της παρούσας διατριβής.

Πιο συγκεκριμένα, μέσω της εξίσωσης KdV, παρουσιάσαμε τα βασικά στάδια της μεθόδου και τελικά την κατασκευή των αναλυτικών λύσεων. Το πρώτο στάδιο αφορά την επιλογή και την παρουσίαση της αρχικής μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης που πρόκειται να επιλυθεί. Σε αυτό το στάδιο, εισάγονται οι κατάλληλοι μετασχηματισμοί (συνήθως γραμμικοί) που περιλαμβάνουν νέες εξαρτημένες μεταβλητές που αντικαθιστούν τις αρχικές. Τυπικό παράδειγμα είναι ο μετασχηματισμός τύπου Hopf. Το επόμενο βήμα είναι η μετατροπή της αρχικής μη γραμμικής εξίσωσης στη διγραμμική της μορφή. Η αρχική εξίσωση εκφράζεται με τη μορφή διγραμμικών τελεστών, όπου η εξίσωση παίρνει μια μορφή που είναι γραμμική ως προς τις νέες μεταβλητές και τις παραγώγους της. Σε αυτό το στάδιο, επιδιώκεται η εύρεση λύσεων για τη διγραμμική εξίσωση. Συνήθως, αυτή η διαδικασία

## Κεφάλαιο 6

περιλαμβάνει τη χρήση συγκεκριμένων συναρτησιακών μορφών για τις νέες μεταβλητές. Για παράδειγμα, μπορεί να χρησιμοποιηθούν δοκιμαστικές λύσεις με τη μορφή εκθετικών συναρτήσεων. Στη συνέχεια, οι συντελεστές των εκθετικών όρων καθορίζονται ώστε να ικανοποιούν τη διγραμμική εξίσωση. Εμείς εστιάσαμε στην κατασκευή πολυσολιτονικών λύσεων. Αυτές οι λύσεις κατασκευάζονται ως υπερθέσεις εκθετικών όρων, όπου ο αριθμός των σολιτονίων καθορίζεται από τον αριθμό των όρων στη διγραμμική λύση.

Μελετήσαμε τη μέθοδο σε διάφορες περιπτώσεις, εκτός από την εισαγωγή της μέσω της εξίσωσης KdV. Έτσι κατασκευάσαμε (πολυ)σολιτονικές λύσεις για την εξίσωση Sawada-Kotera που είναι μια πέμπτης τάξης διαφορική εξίσωση και μπορεί να συνδεθεί με την KdV. Στη συνέχεια, περιγράψαμε τη διαδικασία κατασκευής λύσεων για την μη γραμμική εξίσωση Schrödinger. Πλέον ο μετασχηματισμός τύπου Hopf δεν είχε εφαρμογή και αναζητήσαμε λύσεις σε μορφή ρητών, μιγαδικών συναρτήσεων. Επιπλέον, μελετήσαμε την περίπτωση των μη μηδενικών συνοριακών συνθηκών και τα λεγόμενα σκοτεινά σολιτόνια. Τέλος, εφαρμόσαμε τη μέθοδο στο διδιάστατο ανάλογο της KdV, την εξίσωση Kadomtsev-Petviashvili.

Εκτός από την κλασική διγραμμική μέθοδο, η μέθοδος Hirota έχει επεκταθεί και σε τριγραμμικές μορφές, επιτρέποντας την ανάλυση πιο σύνθετων συστημάτων που περιλαμβάνουν περισσότερα από δύο αλληλεπιδρούσες συνιστώσες. Αυτή η επέκταση επιτρέπει την αντιμετώπιση πιο περίπλοκων μη γραμμικών φαινομένων, προσφέροντας βαθύτερη κατανόηση των δυναμικών αλληλεπιδράσεων μεταξύ πολλών συνιστωσών. Η τριγραμμική μέθοδος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν οι διγραμμικές προσεγγίσεις δεν επαρκούν για να περιγράψουν πλήρως την πολυπλοκότητα των συστημάτων και αποτελούν αντικείμενο ξεχωριστής μελέτης.

Συνοπτικά, η μέθοδος Hirota αποτελεί ένα από τα πιο χρήσιμα εργαλεία για την επίλυση και την ανάλυση μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Η απλότητά της στη χρήση, η ικανότητα να παράγει ακριβείς λύσεις και η ευελιξία της σε διάφορα πεδία την καθιστούν αναπόσπαστο κομμάτι της σύγχρονης μαθηματικής έρευνας. Η μέθοδος αυτή συνεχίζει να εμπλουτίζει τη θεωρητική κατανόηση και να υποστηρίζει την ανάπτυξη νέων εφαρμογών σε πολλά επιστημονικά πεδία, καθιστώντας την έναν ουσιαστικό παράγοντα για την πρόοδο της επιστημονικής γνώσης και της τεχνολογικής καινοτομίας.



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. R. Hirota, *The Direct Method in Soliton Theory*, Cambridge University Press, 2004.
2. J. Hietarinta, *Introduction to the Hirota bilinear method*, In: Integrability of Nonlinear Systems, Lecture Notes in Physics **495**, Springer, 1997.
3. G. Griffiths, *Hirota Direct Method*, 2012.
4. P.P. Goldstein, *Hints on the Hirota Bilinear Method*, Acta Physica Polonica A **112**, 1171-1184, 2007.
5. Y. Matsuno, *Bilinear Transformation Method*, Vol. 174 of Mathematics in Science and Engineering, Academic, 1984.
6. J. Satsuma, *Hirota bilinear method for nonlinear evolution equations*, In: Direct and Inverse Methods in Nonlinear Evolution Equations, Lecture Notes in Physics **632**, Springer, 2003.
7. K. Sawada, T. Kotera, *A method for finding N-soliton solutions of the KdV equation and KdV-like equation*, Prog. Theor. Phys. **51**, 1355-1367, 1974.