ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ ΧΡ. ΤΣΑΜΑΤΟΥ
Μαθηματικού

ΣΥΜΒΟΛΗ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΥΣΤΕΡΗΜΕΝΑ ΟΡΙΣΜΑΤΑ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΣΤΑΘΕΡΑ ΣΗΜΕΙΑ

ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ἰωάννινα 1981

Στή μνήμη τῆς μητέρας μου

Στή γυναίκα μου

"Ἡ ἔγκρισις διδακτορικῆς διατριβῆς ὑπό τῆς Φυσικομαθηματικῆς Σχολῆς τοῦ Πανεπιστημίου Ἰωαννίνων δέν ὑποδηλοῖ ἀποδοχήν τῶν γνωμῶν τοῦ συγγραφέως".

(Ν. 5343/1932, ἄρθρ. 202)

'Επιθυμῶ νά ἐκφράσω τίς εἰλικρινεῖς μου εὐχαριστίες στόν Καθηγητή κ. Βασίλειο Στάϊκο γιά τήν ὑπόδειξη τοῦ θέματος τῆς διατριβῆς αὐτῆς καθώς καί γιά τή συνεχή καθοδήγηση κατά τήν ἐκπόνησή της καί ἰδιαίτερα γιά τίς πολύτιμες ὑποδείξεις του κατά τήν τελική της διαμόρφωση. 'Οφείλω ἀκόμη νά εὐχαριστήσω τόν Καθηγητή κ. 'Ιωάννη Σφήκα καί τούς 'Επιμελητές κ.κ. Γεώργιο Καρακώστα καί Χρῆστο Φίλο γιά τίς γόνιμες συζητήσεις πού εἶχα μαζί τους σέ θέματα τῆς διατριβῆς.

Τήν Παρασκευάστρια τοῦ Μαθηματικοῦ 'Εργαστηρίου δ. 'Αγνή Παπαβρανούση εὐχαριστῶ ἐπίσης γιά τήν προσεκτική δακτυλογράφηση τοῦ κειμένου.

Τέλος εὐχαριστῶ τό Πανεπιστήμιο 'Ιωαννίνων γιά τά τεχνικά μέσα πού μοῦ διέθεσε κατά τήν ἐκπόνηση τῆς διατριβῆς.

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἡ μελέτη καί ἀκόμη πιό πολύ ἡ μαθηματική ἐπεξεργασία ἑνός φυσικοῦ ἐν γένει προβλήματος ὁδηγεῖ σχεδόν πάντοτε στήν ἐπιλογή ἑνός κατάλληλου "μαθηματικοῦ μοντέλου". Πολύ συχνά αὐτό τό μαθηματικό μοντέλο στηρίζεται στή θεώρηση Διαφορικῶν Ἐξισώσεων σέ κάθε μιά ἀπό τίς ὁποῖες οἱ ἄγνωστες συναρτήσεις καί οἱ παράγωγοί τους ἐμφανίζονται μέ διαφορετικές τιμές τοῦ ὁρίσματος. Οἱ ἐξισώσεις αὐτές εἶναι γνωστές ὡς διαφορικές ἐξισώσεις μέ ἐκτρεπόμενα ὁρίσματα (differential equations with deviating arguments) καί συνιστοῦν μιά εὐρεία κλάση μέσα στό γενικώτερο σύνολο τῶν συναρτησιακῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων (functional differential equations). Εἰδικώτερα ἀπό τίς ἐξισώσεις τοῦ τύπου αὐτοῦ συχνότερα ἐμφανίζονται στίς ἐφαρμογές οἱ διαφορικές ἐξισώσεις μέ ὑστερημένα ὁρίσματα (differential equations with retarded arguments), πού ἀποτελοῦν καί τό ἀντικείμενο ἔρευνας τῆς διατριβῆς αὐτῆς.

Γιά διάφορα παραδείγματα προβλημάτων ἀπό τίς Ἐφαρμοσμένες Ἐπιστῆμες καί τήν Τεχνολογία πού ὁδηγοῦν σέ τέτοιου εἴδους διαφορικές ἐξισώσεις παραπέμπομε στό βιβλίο τοῦ Driver [7]. Ἀκόμη στίς ἐργασίες τῶν Kato and McLeod [19], Carr and Dyson [2], Lim [25], Pandolfi [31] καί Rao and Srinivasan [32] βρίσκεται ἡ μαθηματική ἐπεξεργασία καί διάφορες ἐπεκτάσεις ἑνός προβλήματος πού προέκυψε ἀπό τήν μελέτη τῆς κινήσεως τῶν ἠλεκτρικῶν σιδηροδρόμων καί τό ὁποῖο ὁδηγεῖ σέ ἕνα ὑστερημένο διαφορικό σύστημα.

Ἄν καί στόν κλάδο αὐτό ἐμφανίζονται ἐργασίες ἤδη ἀπό τόν 18$^{\underline{o}}$ αἰώνα (Βλ. El'sgol'ts and Norkin [10]), τήν τελευταία τριακονταετία ὑπῆρξε ἕνα αὐξημένο ἐνδιαφέρον στή μελέτη τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων μέ ἐκτρεπόμενα ὀρίσματα, πού ἀποδεικνύεται ἀπό τό μεγάλο ἀριθμό δημοσιεύσεων στή διεθνή Βιβλιογραφία. Δύο πολύ ἐνημερωτικά ἄρθρα ἀνασκοπήσεως πάνω στά ἐπιτεύγματα τοῦ κλάδου αὐτοῦ εἶναι, γιά παράδειγμα, οἱ ἐργασίες τῶν Myshkis [28] καί Corduneanu and Lakshmikantham [6].

Οἱ διαφορικές ἐξισώσεις μέ ὑστερημένα ὀρίσματα (καί, γενικώτερα, ἐκεῖνες μέ ἐκτρεπόμενα ὀρίσματα) ἀποτελοῦν γενικεύσεις τῶν συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων, ἀφοῦ καί οἱ συνήθεις διαφορικές ἐξισώσεις μποροῦν νά θεωρηθοῦν ὡς ἐξισώσεις μέ ἐκτρεπόμενα ὀρίσματα, πού ὅλα τά σημεῖα t τοῦ χρόνου εἶναι καί σταθερά σημεῖα τῶν ὀρισμάτων. Ἐπομένως, εἶναι ἐνδιαφέρον, ἀπό τή σκοπιά τῶν σταθερῶν σημείων τῶν ὀρισμάτων, νά δώσει κανείς συμπεράσματα γιά τίς ἐξισώσεις αὐτές, τά ὁποῖα νά εἶναι ἐπεκτάσεις ἀντιστοίχων συμπερασμάτων πού ἰσχύουν στίς συνήθεις διαφορικές ἐξισώσεις. Μιά τέτοια προσπάθεια καταβάλλεται ἐδῶ καί καλύπτει τό μεγαλύτερο μέρος τῆς διατριβῆς αὐτῆς.

Ἀκριβέστερα ἡ ἐργασία αὐτή χωρίζεται σέ τέσσερα Κεφάλαια.

Κεφάλαιο 0. Ἐκτός ἀπό τήν παράθεση τῶν προκαταρκτικῶν ἐννοιῶν, εἰσάγεται ἡ γενικῆς μορφῆς διαφορική ἐξίσωση μέ ἐκτρεπόμενα ὁρίσματα τοῦ τύπου τοῦ Καραθεοδωρῆ

$$(*)\quad x'(t) = f(t;x_1[\sigma_{11}(t)],\ldots,x_1[\sigma_{1m_1}(t)];\ldots;x_n[\sigma_{n1}(t)],\ldots,x_n[\sigma_{nm_n}(t)])$$

κάτω ἀπό μιά πλήρως ἐμπεριστατωμένη τοποθέτηση τῶν βασικῶν προβλημάτων πού μποροῦν νά συνδεθοῦν μέ αὐτή καί συγκεκριμένα τῶν προβλημάτων ἀ ρ χ ι κ ῶ ν, τ ε λ ι κ ῶ ν, σ υ ν ο ρ ι α κ ῶ ν, ὁ ρ ι κ ῶ ν καί ὁ ρ ι α κ ῶ ν τιμῶν. Ἡ πληρότητα μέ τήν ὁποία τοποθετοῦνται ἐδῶ τά παραπάνω προβλήματα ἐπιτρέπει νά ὑπαχθεῖ σ'αὐτά, τό σύνολο ὅλων τῶν ἀναλόγων προβλημάτων πού ἐμφανίζονται στή βιβλιογραφία σχετικά μέ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (*) (Βλ. π.χ. Norkin [29], El'sgol'ts [9], Zverkin, Kamenskii, Norkin and El'sgol'ts [41], Driver [7]).

Κεφάλαιο 1. Ἐδῶ ἀντιμετωπίζεται ἡ ὕπαρξη καί τό μονοσήμαντο προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν γιά τήν ἐξίσωση

$$(A)\qquad x'(t) = f(t;x[\sigma_1(t)],\ldots,x[\sigma_k(t)])$$

καί ἀκόμη δίνονται ἀπαντήσεις σέ ἐρωτήματα σχετικά μέ τήν ἔκταση τῶν λύσεων τέτοιων προβλημάτων. Κύριο ὅμως συμπέρασμα τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἐκεῖνο πού δίνεται στήν Παράγραφο 4 καί ἀναφέρεται στήν ἐξάρτηση τῶν λύσεων ἀπό "μικρές διαταραχές" πού ἐμφανίζονται στίς ἀρχικές τιμές ἤ στή συνάρτηση f ἤ, καί τό κυριώτερο, στά ὁρίσματα. Τό Θεώρημα 4.1 καθώς καί τό Πόρισμα 4.4 ἀποτελοῦν γενικεύσεις τῶν γνωστῶν συμπερασμάτων γιά τήν ἐξάρτηση τῶν λύσεων, πού ἀναφέρονται στίς συνήθεις κατά Καραθεοδωρῆ διαφορικές ἐξισώσεις (Βλ. π.χ. Παλαμίδης [31] καί Hartman [15]).

Κεφάλαιο 2. Τό Κεφάλαιο αὐτό πραγματεύεται ἕνα πρόβλημα ἀσυμπτωτικῆς συμπεριφορᾶς στό $-\infty$ γιά τό κατά Καραθεοδωρῆ ὑστερημένο διαφορικό σύστημα

$$\text{(B)} \qquad x'(t) = \sum_{i=1}^{\ell} A_i(t) f_i(x[\sigma_1(t)],\ldots,x[\sigma_k(t)]),$$

πού συγχρόνως εἶναι καί πρόβλημα ὁριακῶν τιμῶν (terminal value problem). Συγκεκριμένα μελετᾶται ἡ ὕπαρξη καί τό μονοσήμαντο γιά λύσεις x τοῦ συστήματος (B), πού ἱκανοποιοῦν τήν ὁριακή συνθήκη

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \xi.$$

Τά συμπεράσματα τοῦ Κεφαλαίου αὐτοῦ γενικεύουν γνωστά συμπεράσματα, ὅπως π.χ. ἐκεῖνα τοῦ Karakostas [17], ὅπου μελετᾶται ἡ ὕπαρξη καί τό μονοσήμαντο τέτοιων λύσεων γραμμικῶν συστημάτων. Ἀκόμη τό παραπάνω πρόβλημα σχετίζεται ἄμεσα καί μέ τό γνωστό πρόβλημα ἀσυμπτωτικῆς ἰσορροπίας (asymptotic equilibrium) (Βλ. Cesari [3]).

Κεφάλαιο 3. Ἐδῶ μελετῶνται οἱ λύσεις τοῦ κατά Καραθεοδωρῆ ὑστερημένου γραμμικοῦ διαφορικοῦ συστήματος

$$\text{(L)} \qquad x'(t) = \sum_{i=1}^{k} A_i(t) x[\sigma_i(t)].$$

Στίς Παραγράφους 2 καί 3 θεωροῦνται προβλήματα ἀρχικῶν ἤ ὁριακῶν τιμῶν σέ σταθερά σημεῖα τῶν ὁρισμάτων καί ἀποδεικνύεται ἡ ὕπαρξη καί τό μονοσήμαντο τοῦ τελεστοῦ ἐξελίξεως (evolution) τοῦ συστήματος (L),μέ τή βοήθεια τοῦ ὁποίου ἐπιτυγχάνεται παράσταση τῶν λύσεων τοῦ συστήματος αὐτοῦ. Τά συμπεράσματα τῶν παραγράφων αὐτῶν ἐπεκτείνουν ἀντίστοιχα συμπεράσματα τῆς ἐργασίας τοῦ Karakostas [17]. Ἀκόμη ἡ παράσταση τοῦ τελεστοῦ ἐξελίξεως, πού δίνεται σέ σχέση μέ τά σταθερά σημεῖα τῶν ὁρισμάτων,ἐπεκτείνει τήν ἔννοια τῆς ἐξελίξεως γιά τά συνήθη διαφορικά συστήματα (Βλ. Conti [4]).

Στήν Παράγραφο 4 ἀποδεικνύονται διάφορες ἰδιότητες τῆς ἐξελίξεως, πού ἄλλες μέν εἶναι φυσικές ἐπεκτάσεις ἰδιοτήτων πού ἰσχύουν στά συνήθη διαφορικά συστήματα καί ἄλλες ἑρμηνεύουν τίς διαφορές μεταξύ συνήθων καί ὑστερημένων συστημάτων,πού βέβαια ὀφείλονται στήν ἐπίδραση τῶν ὑστερήσεων. Κάτι τέτοιο π.χ. εἶναι τό γεγονός ὅτι γιά τήν ἐξέλιξη τοῦ ὑστερημένου διαφορικοῦ συστήματος (L) ὑπάρχουν ἐν γένει "ἰδιάζοντα" σημεῖα, πράγμα πού δέ συμβαίνει στά συνήθη διαφορικά συστήματα. Ἀκόμη στήν παράγραφο αὐτή γενικεύεται ὁ γνωστός τύπος τοῦ Jacobi καί ὡς ἐφαρμογή του δίνεται μιά συνθήκη γιά τή -σχεδόν παντοῦ-ἀντιστροφή τῆς ἐξελίξεως ἑνός συστήματος τῆς μορφῆς (L).

Στήν αράγραφο 5 μελετᾶται ἡ διάσταση τοῦ χώρου τῶν λύσεων προβλημάτων ἀρχικῶν ἤ ὁριακῶν τιμῶν σέ σταθερά σημεῖα τῶν ὁρισμάτων. Ὅπως ἀναφέρει καί ὁ Norkin [30], γιά τόν ἐντοπισμό ὑποχώρων τοῦ χώρου ὅλων τῶν λύσεων τοῦ συστήματος (L), οἱ ὁποῖοι ἔχουν πεπερασμένη διάσταση,ἀκολουθοῦνται στή διεθνῆ βιβλιογραφία δύο τάσεις. Ἡ πρώτη ἀναφέρεται σέ ὑποχώρους λύσεων πού ἱκανοποιοῦν μιά ἀσυμπτωτική ἰδιότητα καί τό πεπερασμένο τῆς διαστάσεως ἐπιτυγχάνεται κάτω ἀπό, γενικά, πολύ περιοριστικές συνθῆκες, Σ'αὐτή τήν κατεύθυνση ἀνήκουν π.χ. οἱ ἐργασίες τῶν Győri [11], Jarnic and Kurzweil [16] καί Kozakiewicz [20]. 'Η δεύτερη τάση ἀποσκοπεῖ στή διάσπαση τοῦ χώρου ὅλων τῶν λύσεων σέ ὑποχώρους πεπερασμένης διαστάσεως. Πρός τήν κατεύθυνση αὐτή ἐργάστηκαν οἱ Norkin [29], El'sgol'ts and Norkin [10] καί ἄλλοι. 'Η προσπάθεια πού γίνεται στήν παράγραφο αὐτή συνδέεται καί μέ τίς δύο κατευθύνσεις,ἀφοῦ ἀναφέρεται τόσο σέ χώρους λύσεων προβλημάτων ὁριακῶν τιμῶν, ὅσο καί σέ χώρους λύσεων προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν,πού ἔχουν πεπερασμένη διάσταση.

Στήν Παράγραφο 6 δίνεται παράσταση τῶν λύσεων τοῦ μή ὁμογενοῦς γραμμικοῦ συστήματος

$$(L') \qquad x'(t) = \sum_{i=1}^{k} A_i(t)x[\sigma_i(t)]+b(t),$$

ἀνάλογη μέ ἐκείνη τῶν συνήθων διαφορικῶν συστημάτων. Μέ τή βοήθεια τῆς παραστάσεως αὐτῆς, στήν τελευταία παράγραφο 7 μελετᾶται ἕνα εἶδος ε ὑ σ τ ά θ ε ι α ς ὑ π ό σ υ ν θ ή κ η (conditional stability) γιά τό σύστημα (L') καί δίνονται κριτήρια πού ἀναφέρονται στήν ἐξέλιξη τοῦ συστήματος (L). Συγκεκριμένα ἀποδεικνύονται κριτήρια γιά τήν ε ὐ σ τ ά θ ε ι α, τήν ἀ σ υ μ π τ ω τ ι κ ή ε ὐ σ τ ά θ ε ι α, τήν ὁ μ ο ι ό μ ο ρ φ η ε ὐ σ τ ά θ ε ι α καί τήν ὁ μ ο ι ό μ ο ρ φ α ἀ σ υ μ π τ ω τ ι κ ή ε ὐ σ τ ά θ ε ι α. Τά κριτήρια αὐτά εἶναι φυσικές ἐπεκτάσεις ἀντιστοίχων κριτηρίων, πού ἰσχύουν γιά τίς συνήθης διαφορικές ἐξισώσεις (Βλ. Coppel [5]). 'Ακόμη στήν παράγραφο αὐτή εἰσάγεται ἡ ἔννοια τῆς σ χ ε δ ό ν ὁ μ ο ι ό μ ο ρ φ α ἀ σ υ μ π τ ω τ ι κ ῆ ς ε ὐ σ τ ά θ ε ι α ς καί ἕνα ἀντίστοιχο κριτήριο γι'αὐτήν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0

Π Ρ Ο Κ Α Τ Α Ρ Κ Τ Ι Κ Α

1. Βασικές έννοιες καί ορισμοί

Σέ όλη τήν εργασία μέ $|\ |$ θά συμβολίζομε μιά από τίς ισοδύναμες στάθμες (norms) πού μπορούν νά ορισθούν στόν καρτεσιανό χώρο $\mathbb{K}^r$, όπου τό $\mathbb{K}$ παριστάνει τήν πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ ή τό επίπεδο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Ακόμη στό γραμμικό χώρο $B(A,\mathbb{K}^r)$ των συνεχών καί φραγμένων συναρτήσεων μέ κοινό πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου καί τιμές στό $\mathbb{K}^r$, ορίζομε τήν sup-στάθμη $\|\ \|_A$ μέ τόν τύπο

$$\|h\|_A = \sup\{|h(z)| : z \in A\}.$$

Ό χώρος $B(A,\mathbb{K}^r)$, ώς πρός τήν sup-στάθμη, είναι γνωστό ότι είναι χώρος τού Banach, δηλαδή είναι καί πλήρης μετρικός χώρος μέ τή μετρική πού εισάγει ή στάθμη αυτή. Ειδικά, άν τό σύνολο A είναι συμπαγές, τότε ό χώρος $B(A,\mathbb{K}^r)$ ταυτίζεται μέ τόν χώρο $C(A,\mathbb{K}^r)$ των συνεχών συναρτήσεων μέ κοινό πεδίο ορισμού τό A καί τιμές στό $\mathbb{K}^r$. Στάθμη θά χρησιμοποιήσομε ακόμη καί στόν χώρο $\mathcal{M}_{r\times r}(\mathbb{K})$ των $r\times r$ πινάκων μέ στοιχεία από τό $\mathbb{K}$. Συγκεκριμένα θά χρησιμοποιήσομε τήν στάθμη $\|\ \|$, πού ορίζεται συνήθως γιά τούς γραμμικούς τελεστές καί δίνεται άπό τόν τύπο

$$\|X\| = \sup\{|Xu| : u \in \mathbb{K}^r \text{ καί } |u| = 1\}.$$

Ἄν u,υ εἶναι συναρτήσεις μέ $\mathrm{Dom}\,u \subseteq \mathbb{R}$ καί $\mathrm{Dom}\,v \subseteq \mathbb{R}$ καί ἀκόμη ὁ πραγματικός ἀριθμός $T \in (\mathrm{Dom}\,u) \cap (\mathrm{Dom}\,v)$ εἶναι τέτοιος, ὥστε $u(T) = v(T)$, τότε χρησιμοποιοῦμε τό συμβολισμό uTv γιά τή συνάρτηση μέ τύπο

$$(uTv)(t) = \begin{cases} u(t), & \text{ἄν } t \in (-\infty, T] \cap \mathrm{Dom}\,u \\ v(t), & \text{ἄν } t \in [T, +\infty) \cap \mathrm{Dom}\,v\,. \end{cases}$$

Ὑποθέτομε γνωστές τίς κατά Lebesgue ἔννοιες τοῦ μέτρου, τῆς μετρήσιμης καί ὁλοκληρώσιμης συναρτήσεως καί θά ἐπεξηγήσομε μερικές σχετικές ἐκφράσεις καί συμβολισμούς πού θά χρησιμοποιηθοῦν παρακάτω.

Θά λέμε ὅτι ἕνας προτασιακός τύπος $P(x)$ μέ σύνολο ἀναφορᾶς ἕνα σύνολο A, ὑποσύνολο τῆς πραγματικῆς εὐθείας $\mathbb{R}$, *ἰσχύει σχεδόν γιά κάθε* $x \in A$ ἤ καί *σχεδόν παντοῦ στό* A τότε καί μόνον τότε, ἄν τό σύνολο $\{x \in A : \neg P(x)\}$ εἶναι μηδενικοῦ μέτρου.

Μέ τό σύμβολο $L(A, \mathbb{K}^r)$ παριστάνομε τό σύνολο ὅλων τῶν ὁλοκληρωσίμων συναρτήσεων φ μέ τιμές στό $\mathbb{K}^r$ τέτοιες, ὥστε τό σύνολο $A \dotplus \mathrm{Dom}\,\varphi = (A \cup \mathrm{Dom}\,\varphi) - (A \cap \mathrm{Dom}\,\varphi)$ νά ἔχει μέτρο μηδέν.

Ἄν I εἶναι ἕνα διάστημα τῆς πραγματικῆς εὐθείας, μιά συνάρτηση $\varphi : I \to \mathbb{K}^r$ θά λέγεται *ἀπολύτως συνεχής* πάνω στό I τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο, ὥστε γιά κάθε πεπερασμένη συλλογή ξένων ἀνοικτῶν ὑποδιαστημάτων (t_1, τ_1), (t_2, τ_2), ..., (t_ν, τ_ν) τοῦ I μέ $\sum_{i=1}^{\nu} (t_i - \tau_i) < \delta(\varepsilon)$ νά ἰσχύει $\sum_{i=1}^{\nu} |\varphi(t_i) - \varphi(\tau_i)| < \varepsilon$.

Τό σύνολο τῶν ἀπολύτως συνεχῶν συναρτήσεων $\varphi: I \to \mathbb{K}^r$ θά τό συμβολίζομε μέ $AC(I,\mathbb{K}^r)$. Εἶναι φανερό ὅτι τό σύνολο αὐτό περιέχεται στό σύνολο ὅλων τῶν ὁμοιομόρφως συνεχῶν συναρτήσεων πάνω στό I.

Μιά συνάρτηση $\varphi: I \to \mathbb{K}^r$ εἶναι ἀ π ο λ ύ τ ω ς σ υ ν ε χ ή ς τ ο π ι κ ά π ά ν ω σ τ ό I τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε κλειστό ὑποδιάστημα $[\alpha,\beta]$ τοῦ I ὁ περιορισμός τῆς φ πάνω στό $[\alpha,\beta]$ εἶναι ἀπολύτως συνεχής συνάρτηση.

Τό σύνολο τῶν ἀπολύτως συνεχῶν τοπικά συναρτήσεων θά τό συμβολίζομε μέ $AC_{loc}(I,\mathbb{K}^r)$.

Εἶναι φανερό τώρα ὅτι ἰσχύει

$$AC(I,\mathbb{K}^r) \subseteq AC_{loc}(I,\mathbb{K}^r) \subseteq C(I,\mathbb{K}^r).$$

Ἀναφορικά μέ τή σχέση τῶν χώρων $AC([\alpha,\beta],\mathbb{K}^r) = AC_{loc}([\alpha,\beta],\mathbb{K}^r)$ καί τοῦ χώρου $L([\alpha,\beta],\mathbb{K}^r)$ ἰσχύει τό ἑξῆς θεώρημα (Βλ. Warga [38]).

1.1. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἄν $\varphi \in AC([\alpha,\beta],\mathbb{K}^r)$, τότε ἡ φ εἶναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντοῦ στό $[\alpha,\beta]$, $\dot{\varphi} \in L([\alpha,\beta],\mathbb{K}^r)$ καί γιά τυχόν $t_0 \in [\alpha,\beta]$ ἰσχύει

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{\varphi}(s)ds \quad \text{γιά κάθε} \quad t \in [\alpha,\beta].$$

Ἀντίστροφα, ἄν $\psi \in L([\alpha,\beta],\mathbb{K}^r)$ καί $\Psi(t) = \int_{t_0}^{t} \psi(s)ds$, $t \in [\alpha,\beta]$ τότε $\Psi \in AC([\alpha,\beta],\mathbb{K}^r)$ καί

$$\dot{\Psi}(t) = \psi(t) \quad \text{σχεδόν γιά κάθε} \quad t \in [\alpha,\beta].$$

Θεωροῦμε τώρα ἕνα σύνολο Λ, ὑποσύνολο τοῦ καρτεσιανοῦ χώρου $\mathbb{R}\times\mathbb{K}^r$, καί θέτομε

$$\Lambda_t = (\{t\}\times\mathbb{K}^r)\cap\Lambda \quad \text{καί} \quad {}_x\Lambda = (\mathbb{R}\times\{x\})\cap\Lambda.$$

1.2. ΟΡΙΣΜΟΣ. Μιά συνάρτηση $h:\Lambda\to\mathbb{K}^r$ εἶναι συνάρτηση "Καραθεοδωρῆ" τότε καί μόνο τότε, ἄν

1) Ὁ περιορισμός $h(t,\cdot)|\Lambda_t$ εἶναι συνεχής συνάρτηση γιά κάθε $t\in pr_1\Lambda = \{t\in\mathbb{R} : (\exists x\in\mathbb{K}^r)(t,x)\in\Lambda\}$,

2) Ὁ περιορισμός $h(\cdot,x)|_x\Lambda$ εἶναι μετρήσιμη γιά κάθε $x\in pr_2\Lambda = \{x\in\mathbb{K}^r : (\exists t\in\mathbb{R})(t,x)\in\Lambda\}$,

3) Ὑπάρχει συνάρτηση $M\in L(pr_1\Lambda,\mathbb{R})$ τέτοια ὥστε

$$|h(t,x)|\leqq M(t) \text{ γιά κάθε } (t,x)\in\Lambda.$$

Τό σύνολο τῶν συναρτήσεων Καραθεοδωρῆ πάνω στό Λ θά τό συμβολίζομε μέ $Car(\Lambda)$. Ἀκόμη θά λέμε ὅτι μιά συνάρτηση M χαρακτηρίζει τήν $h\in Car(\Lambda)$ τότε καί μόνο τότε, ἄν ἡ M ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη (3) τοῦ παραπάνω ὁρισμοῦ.

1.3. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ συνάρτηση h ἱκανοποιεῖ τοπικά στό Λ τίς συνθῆκες Καραθεοδωρῆ τότε καί μόνον τότε, ἄν γιά κάθε $P\in\Lambda$ ὑπάρχει περιοχή U τοῦ P τέτοια, ὥστε ὁ περιορισμός $h|U\cap\Lambda$ νά εἶναι συνάρτηση Καραθεοδωρῆ, δηλαδή $(h|U\cap\Lambda)\in Car(U\cap\Lambda)$.

Τό σύνολο αὐτῶν τῶν συναρτήσεων θά τό συμβολίζομε μέ $Car_{loc}(\Lambda)$.

1.4. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. α) Ἐπειδή ὁ χῶρος $\mathbb{R}\times\mathbb{K}^r$ εἶναι τοπικά συμπαγής, ἡ ἔννοια τῆς "τοπικά κατά Καραθεοδωρῆ συναρτήσεως" μπορεῖ νά δοθεῖ καί μέ μιά ἀπό τίς ἰσοδύναμες καί πολύ εὔχρηστες προτάσεις:

(i) Γιά κάθε $P\in\Lambda$ ὑπάρχει συμπαγές σύνολο $W\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{K}^r$ μέ $P\in W^0$ καί $h\in Car(W\cap\Lambda)$.

(ii) Γιά κάθε $P\in\Lambda$ ὑπάρχει συμπαγές ὀρθογώνιο $I\subseteq K\times\mathbb{R}\times\mathbb{K}^r$ μέ $h\in Car((I\times K)\cap\Lambda)$.

β) Ἄν τό σύνολο Λ εἶναι ἀνοικτό, τότε ἰσχύει: Ἡ συνάρτηση $h\in Car_{loc}(\Lambda)$ τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε συμπαγές ὑποσύνολο W τοῦ Λ ἡ $h\in Car(W)$. (Βλ. Παλαμίδης [31]).

2. Διαφορική ἐξίσωση μέ ἐκτρεπόμενα ὀρίσματα

Στή συνέχεια, θά δώσομε τήν ἔννοια τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (συστήματος) μέ ἐκτρεπόμενα ὀρίσματα (differential equation with deviating arguments), ἀκολουθώντας τήν γενική θεώρηση πού ἀναπτύχθηκε στό Σεμινάριο Διαφορικῶν Ἐξισώσεων τοῦ Πανεπιστημίου Ἰωαννίνων (Βλ. Staikos [35]).

Ἄν τό Ω εἶναι ἕνα ὑποσύνολο τοῦ Καρτεσιανοῦ χώρου $\mathbb{R}\times\mathbb{K}^m$ καί ἡ συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{K}^n$ ἱκανοποιεῖ τίς συνθῆκες Καραθεοδωρῆ τοπικά στό Ω, τότε κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς

$$(*)\ x'(t)=f(t;x_1[\sigma_{11}(t)],\dots,x_1[\sigma_{1m_1}(t)];\dots;x_n[\sigma_{n1}(t)],\dots,x_n[\sigma_{nm_n}(t)]),$$

ὅπου $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $m_1+m_2+\dots+m_n=m$ καί οἱ σ_{ij} εἶναι συνεχεῖς πραγματικές συναρτήσεις, θά λέγεται δ ι α φ ο ρ ι κ ή ἐ ξ ί σ ω σ η π ρ ώ τ η ς τ ά ξ ε ω ς μ έ ἐ κ τ ρ ε π ό μ ε ν α ὁ ρ ί σ μ α τ α τ ο ῦ τ ύ π ο υ τ ο ῦ Κ α ρ α θ ε ο δ ω ρ ῆ..

Γιά λόγους συντομίας θέτομε

$$\sigma_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \dots, \sigma_{im_i}) \qquad i = 1,2,\dots,n$$

$$x_i < \sigma_i(t) > = (x_i[\sigma_{i1}(t)], x_i[\sigma_{i2}(t)], \dots, x_i[\sigma_{im_i}(t)])$$

καί ἀκόμη

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n),$$

$$x < \sigma(t) > = (x_1 < \sigma_1(t) >, x_2 < \sigma_2(t) >, \dots, x_n < \sigma_n(t) >),$$

ὁπότε ἡ ἐξίσωση (*) μπορεῖ νά γραφεῖ σύντομα στήν ἁπλή μορφή

$$(*) \qquad x'(t) = f(t, x<\sigma(t)>).$$

Στήν εἰδική περίπτωση ὅπου ὅλες οἱ συναρτήσεις σ_{ij}, ($j = 1,2,\dots,m_i$; $i = 1,2,\dots,n$) συμπίπτουν μέ τήν ταυτοτική συνάρτηση, ἡ ἐξίσωση (*) γίνεται μιά συνήθης κατά Καραθεοδωρῆ διαφορική ἐξίσωση.

Οἱ διαφορές $t-\sigma_{ij}(t)$ ἐκφράζουν τίς ἐκτροπές (deviations) τῶν ἀντιστοίχων ὁρισμάτων σέ κάθε σημεῖο t. Οἱ ἐκτροπές ἀνάλογα μέ τό πρόσημό τους διακρίνονται σέ δυό βασικούς τύπους. Συγκεκριμένα, ἄν

$$\sigma_{ij}(t) \leq t \quad \text{γιά κάθε } t,$$

ἡ ἐκτροπή $t-\sigma_{ij}(t)$ ὀνομάζεται ὑ σ τ ε ρ η μ έ ν η (retarded), ἐνῶ ἀντίθετα, ἄν

$$t \leq \sigma_{ij}(t) \quad \text{γιά κάθε } t,$$

ὀνομάζεται π ρ ο ω θ η μ έ ν η (advanced).

῞Οταν στήν ἐξίσωση (*) ἐμφανίζονται μόνο ὑστερημένες ἐκτροπές τῶν ὁρισμάτων, τότε αὐτή ὀνομάζεται διαφορική ἐξίσωση μέ ὑστερημένα ὁρίσματα (differential equation with retarded arguments) ἤ, ἁπλούστερα, ὑστερημένη διαφορική ἐξίσωση (retarded differential equation). ᾿Ανάλογα, ὅταν στήν ἐξίσωση (*) ἐμφανίζονται μόνο προωθημένες ἐκτροπές τῶν ὁρισμάτων, ἡ ἐξίσωση (*) ὀνομάζεται διαφορική ἐξίσωση μέ προωθημένα ὁρίσματα (differential equation with advanced arguments) ἤ προωθημένη διαφορική ἐξίσωση (advanced differential equation). Τέλος, ἡ διαφορική ἐξίσωση (*) θά λέμε ὅτι εἶναι μικτοῦ τύπου (mixed type), ὅταν κάθε ἐκτροπή πού ἐμφανίζεται στήν (*) εἶναι ὑστερημένη ἤ προωθημένη. Εἶναι φανερό ὅτι οἱ τρεῖς παραπάνω τύποι τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως μέ ἐκτρεπόμενα ὁρίσματα δέν καλύπτουν ὅλες τίς δυνατές περιπτώσεις γιά τήν μορφή (*).

Θεωροῦμε τώρα μιά συνάρτηση $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ μέ πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα διάστημα τῆς πραγματικῆς εὐθείας καί τιμές στόν καρτεσιανό χῶρο $\mathbb{R}^n$. ῾Η συνάρτηση x θά ὀνομάζεται λύση τῆς (*), ἄν εἶναι τοπικά ἀπολύτως συνεχής καί γιά κάθε $i=1,2,\ldots,n$ ὑπάρχει μιά συνεχής ἐπέκταση u_i τῆς x_i ἔτσι, ὥστε νά ἰσχύουν

$$\sigma_{ij}(t)\in \mathrm{Dom}\, u_i,\quad j=1,2,\ldots,m_i$$

$$(t,u\langle\sigma(t)\rangle)\in\Omega \quad \text{γιά κάθε} \quad t\in \mathrm{Dom}\, x$$

καί

$$x'(t) = f(t, u\langle\sigma(t)\rangle) \quad \text{σχεδόν γιά ὅλα τά} \quad t \in \mathrm{Dom}\, x .$$

Τήν λύση x θά τήν ὀνομάζομε γιά μεγαλύτερη σαφήνεια καί u - λ ύ σ η, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ τῆς (*) γιά νά δηλώσομε καί τίς ἐπεκτάσεις μέσω τῶν ὁποίων αὐτή χαρακτηρίζεται σάν λύση τῆς (*).

Μιά λύση x τῆς (*) θά λέγεται π λ ή ρ η ς, ἄν αὐτή εἶναι καί x-λύση της. Αὐτό π.χ. συμβαίνει πάντοτε ὅταν $\mathrm{Dom}\, x = pr_1 \Omega$, ὅπου $pr_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ εἶναι ἡ προβολή τοῦ πρώτου παράγοντα.

Παρατηροῦμε ὅτι στίς συνήθεις (χωρίς ἐκτρεπόμενα ὀρίσματα) διαφορικές ἐξισώσεις κάθε λύση x, μέ τή γνωστή ἔννοια, εἶναι καί x-λύση, σύμφωνα μέ τόν παραπάνω ὁρισμό. Ἑπομένως στίς συνήθεις διαφορικές ἐξισώσεις κάθε λύση x εἶναι καί πλήρης λύση.

Ἔστω τώρα ἕνα σύνολο S, ὑποσύνολο τοῦ χώρου $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ καί ἕνα $T \in pr_1 \Omega$.

Μιά συνάρτηση x μέ πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα διάστημα τῆς πραγματικῆς εὐθείας καί τιμές στό χῶρο $\mathbb{K}^n$ θά λέμε ὅτι εἶναι λ ύ σ η τ ο ῦ π ρ ο β λ ή μ α τ ο ς ἀ ρ χ ι κ ῶ ν τ ι μ ῶ ν (*) - (T, S) τότε καί μόνο τότε, ἄν $\max pr_1 S = T = \min \mathrm{Dom}\, x$ καί ἡ x εἶναι u-λύση τῆς (*) τέτοια, ὥστε οἱ συναρτήσεις $u_1, u_2, \ldots, u_n$ νά ἱκανοποιοῦν τίς συνθῆκες

$$(-\infty, T) \cap \mathrm{Dom}\, u_i \subseteq pr_1 S \quad \text{καί} \quad u_i((-\infty, T]) \subseteq pr_{i+1} S, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Τότε τό ζεῦγος (T,S) ἤ ἀκριβέστερα τά T,S ὀνομάζονται συνήθως ἀ ρ χ ι κ ά δ ε δ ο μ έ ν α (i n i t i a l d a t a) τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (*)-(T,S).

Ἀνάλογα, μιά συνάρτηση x ὅπως παραπάνω θά λέμε ὅτι εἶναι λ ύ -

σ η τ ο ῦ π ρ ο β λ ή μ α τ ο ς τ ε λ ι κ ῶ ν τ ι μ ῶ ν (*)-(T, S) τότε καί μόνον τότε, ἄν $\max \mathrm{Dom}\, x = T = \min pr_1 S$ καί ὑπάρχει συνάρτηση φ μέ $G(\varphi) \subseteq S$ τέτοια ὥστε ἡ x νά εἶναι μιά φTx-λύση τῆς (*). Ὅπως καί παραπάνω τό ζεῦγος (T,S) ἤ ἀκριβέστερα τά T,S ὀνομάζονται τ ε λ ι κ ά δ ε δ ο μ έ ν α (final data) τοῦ προβλήματος τελικῶν τιμῶν (*)-(T,S).

Θεωροῦμε τώρα τά σύνολα S_1, S_2 ὑποσύνολα τοῦ χώρου $\mathbb{R}\times\mathbb{K}^n$ μέ $\max pr_1 S_1 = T_1 < T_2 = \min pr_1 S_2$. Θά λέμε ὅτι μιά συνάρτηση x εἶναι λ ύ σ η τ ο ῦ π ρ ο β λ ή μ α τ ο ς σ υ ν ο ρ ι α κ ῶ ν τ ι μ ῶ ν (*)-$(T_1,S_1;T_2,S_2)$ τότε καί μόνο τότε, ἄν $\mathrm{Dom}\, x = [T_1,T_2]$ καί ἡ x εἶναι λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (*)-(T_1,S_1) καί τοῦ προβλήματος τελικῶν τιμῶν (*)-(T_2,S_2). Τά διατεταγμένα ζεύγη $(T_1,S_1),(T_2,S_2)$ ὀνομάζονται σ υ ν ο ρ ι α κ ά δ ε δ ο μ έ ν α (boundary data).

Ἄν φ εἶναι μιά συνάρτηση τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν (ἤ τελικῶν) τιμῶν (*)-(T,G(φ)) συμβολίζεται ἁπλούστερα (*)-(T,φ). Ἀνάλογα ἄν φ_1, φ_2 εἶναι συναρτήσεις τό πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν (*)-$(T_1,G(\varphi_1);T_2,G(\varphi_2))$ συμβολίζεται (*)-$(T_1,\varphi_1;T_2,\varphi_2)$.

Ἄν $T\in pr_1\Omega$, μιά συνάρτηση x θά λέμε ὅτι εἶναι δ ε ξ ι ά τ ο ῦ T λ ύ σ η τῆς (*) τότε καί μόνο τότε, ἄν $T\in \mathrm{Dom}\, x$ καί ὁ περιορισμός της $x|[T,+\infty)\cap \mathrm{Dom}\, x$ εἶναι λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (*)-$(T,(-\infty,T]\times\mathbb{K}^n)$.

Ἀνάλογα, ἄν πάλι $T\in pr_1\Omega$ μιά συνάρτηση x θά λέμε ὅτι εἶναι ἀ ρ ι σ τ ε ρ ά τ ο ῦ T λ ύ σ η τῆς (*) τότε καί μόνο τότε, ἄν

$T \in \mathrm{Dom}\,x$ καί ὁ περιορισμός της $x|(-\infty,T]\cap \mathrm{Dom}\,x$ εἶναι λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν $(*)$-$(T,[T,+\infty)\times\mathbb{K}^n)$.

Ἔστω τώρα μιά συνάρτηση x μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς μέ τιμές στόν καρτεσιανό χῶρο $\mathbb{K}^n$ καί J τυχόν διάστημα μέ $J\subseteq \mathrm{Dom}\,x$. Θά λέμε ὅτι ἡ x εἶναι λύση τῆς (*) πάνω στό διάστημα J, τότε καί μόνο τότε, ἄν ἡ συνάρτηση $x|J$ εἶναι λύση τῆς (*). Ἄν ἐπιπλέον τό διάστημα J εἶναι κλειστό ἀριστερά καί ἡ $x|J$ εἶναι καί δεξιά τοῦ $\min J$ λύση τῆς (*), θά λέμε ὅτι ἡ x εἶναι καί δεξιά λύση πάνω στό J τῆς (*). Ἀνάλογα, ἄν τό διάστημα J εἶναι κλειστό δεξιά καί ἡ $x|J$ εἶναι καί ἀριστερά τοῦ $\max J$ λύση τῆς (*), θά λέμε ὅτι ἡ x εἶναι καί ἀριστερά λύση πάνω στό J τῆς (*). Τέλος θά λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση x εἶναι πλήρης λύση τῆς (*) πάνω στό διάστημα J τότε καί μόνο τότε, ἄν ὁ περιορισμός της $x|J$ εἶναι πλήρης λύση τῆς (*).

Ἔστω τώρα $T\in \mathrm{pr}_1\Omega$ καί x μιά δεξιά τοῦ T λύση τῆς (*). Θεωροῦμε τότε τή συλλογή

$$\wp_x = \{S\subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{K}^n : x \text{ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν } (*)\text{-}(T,S)\}.$$

Εἶναι φανερό ὅτι $\wp_x \neq \emptyset$ ἀφοῦ $(-\infty,T]\times\mathbb{K}^n \in \wp_x$. Ἄν τώρα $\hat{S}$ εἶναι ἕνα ψευδοελάχιστο (minimal) στοιχεῖο τῆς συλλογῆς $\wp_x$ τότε ἡ x εἶναι λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν $(*)$-$(T,\hat{S})$. Ἕνα τέτοιο ζεῦγος ἀρχικῶν δεδομένων, δηλαδή τά $T,\hat{S}$, ὀνομάζονται ἀκριβέστερα ἀρχικές τιμές (initial values) τῆς λύσεως x.

Ἀνάλογα, στήν περίπτωση μιᾶς ἀριστερά τοῦ T λύσεως x τῆς (*), ορίζομε πάλι τήν συλλογή

$$\mathcal{S}_x = \{S \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{K}^n : x \text{ λύση τοῦ προβλήματος τελικῶν τιμῶν } (*)-(T,S)\}$$

καί ἄν $\hat{S}$ εἶναι ψευδοελάχιστο στοιχεῖο τῆς συλλογῆς $\mathcal{S}_x$, τά τελικά δεδομένα τοῦ προβλήματος τελικῶν τιμῶν $(*)-(T,\hat{S})$ ὀνομάζονται τ ε λ ι κ έ ς τ ι μ έ ς (f i n a l v a l u e s) τῆς λύσεως x.

Τέλος στήν περίπτωση πού ἡ x εἶναι μιά λύση τῆς (*) πάνω σ'ἕνα διάστημα $[T_1,T_2]$, ὀνομάζομε σ υ ν ο ρ ι α κ έ ς τ ι μ έ ς (boundary values) τῆς x τά ζεύγη $(T_1,\hat{S}_1),(T_2,\hat{S}_2)$ πού εἶναι ἀρχικές καί τελικές τιμές ἀντίστοιχα τῆς x.

Ἐκτός ἀπό τά παραπάνω γενικά προβλήματα πού εἶναι καί ἀπό τά πιό βασικά τῆς ποιοτικῆς θεωρίας τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων, μεγάλο ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν καί τά προβλήματα ἀσυμπτωτικῆς συμπεριφορᾶς καί εἰδικώτερα τό π ρ ό β λ η μ α ὁ ρ ι κ ῶ ν τ ι μ ῶ ν.

Ἔστω $S\subseteq\mathbb{K}^n$ καί $T\in pr_1\Omega$. Μιά λύση x τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (*) θά λέμε ὅτι εἶναι λ ύ σ η τ ο ῦ π ρ ο β λ ή μ α τ ο ς ὁ ρ ι κ ῶ ν τ ι μ ῶ ν $(*)-(T,S)$ τότε καί μόνο τότε, ἄν τό T εἶναι ἄκρο τοῦ διαστήματος $\mathrm{Dom}\,x$ μέ $T\notin \mathrm{Dom}\,x$ καί τέτοιο ὥστε ὅλα τά σημεῖα συσσωρεύσεως (ὁρικά σημεῖα) τῆς λύσεως x στό T ἀνήκουν στό S.

Εἰδικά ἄν $S=\{\xi\}$ τό πρόβλημα τῶν ὁρικῶν τιμῶν $(*)-(T,S)$ συμβολίζεται ἁπλούστερα μέ $(*)-(T,\xi)$ καί ὀνομάζεται π ρ ό β λ η μ α ὁ ρ ι α κ ῶ ν τ ι μ ῶ ν, ἀφοῦ τότε κάθε λύση τοῦ προβλήματος αὐτοῦ ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη

$$\lim_{t\to T} x(t) = \xi .$$

2.1. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. (i) Ἄν x εἶναι μιά λύση τῆς (*), τότε γιά κάθε $T \in (\mathrm{Dom}\, x) - \{\sup \mathrm{Dom}\, x\}$ ὁ περιορισμός της $x|[T,+\infty) \cap \mathrm{Dom}\, x$ εἶναι λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν $(*)-(T,(-\infty,T]\times\mathbb{K}^n)$, δηλαδή ἡ x εἶναι καί δεξιά τοῦ T λύση τῆς (*). Ἀνάλογα ὁ περιορισμός $x|(-\infty,T)] \cap \mathrm{Dom}\, x$ εἶναι λύση τοῦ προβλήματος τελικῶν τιμῶν $(*)-(T,[T,+\infty)\times\mathbb{K}^n)$, δηλαδή ἡ x εἶναι καί ἀριστερά τοῦ T λύση τῆς (*).

Εἰδικώτερα ἄν ἡ λύση x τῆς (*) εἶναι πλήρης τότε γιά κάθε $T \in (\mathrm{Dom}\, x) - \{\inf \mathrm{Dom}\, x\}$ ὁ περιορισμός της $x|[T,+\infty) \cap \mathrm{Dom}\, x$ εἶναι λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν $(*)-(T,x|\overline{\mathrm{Dom}}_T x)$, ὅπου $\overline{\mathrm{Dom}}_T x = (-\infty,T] \cap \mathrm{Dom}\, x$ καί ἀντίστοιχα ὁ περιορισμός της $x|[T,\infty) \cap \mathrm{Dom}\, x$ εἶναι λύση τοῦ προβλήματος τελικῶν τιμῶν $(*)-(T,x|\overset{+}{\mathrm{Dom}}_T x)$, ὅπου $\overset{+}{\mathrm{Dom}}_T x = (\mathrm{Dom}\, x) \cap [T,+\infty)$.

(ii) Πρέπει νά σημειωθεῖ ἐδῶ ὅτι ἄν x εἶναι μιά μή πλήρης λύση τῆς (*) τότε μπορεῖ ὁ περιορισμός της $x|J$ σέ κάποιο διάστημα $J \subseteq \mathrm{Dom}\, x$ νά εἶναι πλήρης λύση τῆς (*) πάνω στό J. Αὐτό φαίνεται καθαρά στό παρακάτω παράδειγμα.

Ἔστω τό ὑστερημένο διαφορικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -x_1(t) + (t^3-2t^2+13t-6)x_2[\sigma(t)] \end{aligned} \qquad (1)$$

ὅπου

$$\sigma(t) = \begin{cases} t-1 & \text{ἄν } 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{ἄν } 1 \leq t < 2, \\ t-2 & \text{ἄν } 2 \leq t < +\infty. \end{cases}$$

Ἄν y εἶναι ἡ μονοσήμαντα ὁρισμένη λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$x''+x'+(t^3-2t^2+13t-6)(t-2)(3-t)^3 = 0$$

$$x(2) = x'(2) = 0$$

τότε ἡ συνάρτηση $x = (x_1, x_2)$, ὅπου

$$x_1(t) = \begin{cases} t(1-t)^3, & \text{ἄν } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{ἄν } 1 \leq t < 2 \\ y(t), & \text{ἄν } 2 \leq t < +\infty \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} (t-1)^2(1-4t), & \text{ἄν } 0 \leq t < 1 \\ 1, & \text{ἄν } 1 \leq t < 2 \\ y'(t), & \text{ἄν } 2 \leq t < +\infty \end{cases}$$

εἶναι λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (1)-$(0,\varphi)$, ὅπου $\varphi(t) = (t,1)$, $-1 \leq t \leq 0$, καί μάλιστα μή πλήρης. 'Αντίθετα ὁ περιορισμός της στό διάστημα $[1,2]$ εἶναι πλήρης λύση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΥΣΤΕΡΗΜΕΝΑ ΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. Ὕπαρξη καί μονοσήμαντο

Στό κεφάλαιο αὐτό θά ἀσχοληθοῦμε μέ μιά εἰδική περίπτωση τῆς ἐξισώσεως (*) καί συγκεκριμένα μέ τήν κατά Καραθεοδωρῆ ὑστερημένη διαφορική ἐξίσωση

$$\text{(A)} \qquad x'(t) = f(t;x[\sigma_1(t)],x[\sigma_2(t)],\dots,x[\sigma_k(t)]),$$

ὅπου ἐδῶ τό πεδίο ὁρισμοῦ Ω τῆς f εἶναι ὑποσύνολο τοῦ χώρου $\mathbb{R}\times(\mathbb{K}^n)^k$.

Θεωροῦμε τώρα ἕνα σημεῖο $T\in pr_1\Omega$ καί συμβολίζομε μέ $E(T)$ τό μικρότερο διάστημα πού περιέχει τό T καί τά σύνολα (διαστήματα) $(-\infty,T]\cap \mathrm{Rang}(\sigma_i)$, $i=1,2,\dots,k$, καί τό ὁποῖο εἶναι βέβαια κλειστό διάστημα. Στήν περίπτωση πού οἱ συναρτήσεις σ_i, $i=1,2,\dots,k$ εἶναι αὔξουσες ἔχομε ὅτι

$$E(T) = [\min_i \sigma_i(T),T].$$

Ὑποθέτομε τώρα ὅτι γιά κάποιο $T\in pr_1\Omega$ ἰσχύει $E(T)\subseteq pr_1\Omega$ καί ἔστω ἀκόμη $\varphi\in C(E(T),\mathbb{K}^n)$ μέ

$$(t;\varphi(t),\ldots,\varphi(t)) \in \Omega \quad \text{γιά κάθε} \quad t \in E(T).$$

Ἔτσι τώρα ἔχει ἔννοια τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T,φ). Γι' αὐτό τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν οἱ Karakostas, Sficas and Staikos [18] διετύπωσαν θεωρήματα ὑπάρξεως καί μονοσημάντου, τά ὁποῖα εἶναι πορίσματα στήν ἐργασία αὐτή ἄλλων θεωρημάτων πού ἀναφέρονται σέ γενικοῦ τύπου Συναρτησιακές Διαφορικές Ἐξισώσεις μέ Ὑστέρηση (Functional Differential Equations with Delay). Ἀμέσως παρακάτω διατυπώνομε τά δύο αὐτά θεωρήματα σέ μιά ἐλαφρά παραλλαγμένη μορφή πού ἐξυπηρετεῖ καλύτερα τούς σκοπούς τῆς ἐργασίας αὐτῆς.

1.1. ΘΕΩΡΗΜΑ (Ὑπάρξεως). Ἄν ὑπάρχει $\beta > T$ καί μιά περιοχή V τοῦ σημείου $(\varphi(T),\ldots,\varphi(T))$ ἐν $(\mathbb{K}^n)^k$ μέ $[T,\beta]\times V \subseteq \Omega$, τότε γιά κάποιο $\gamma > T$ ὑπάρχει μιά λύση $x(\cdot;\varphi,[T,\gamma])$ ἐπί τοῦ διαστήματος $[T,\gamma]$ τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T,φ).

1.2. ΘΕΩΡΗΜΑ (Μονοσημάντου). Ἔστω ψ μιά μή ἀρνητική συνάρτηση, ὁρισμένη πάνω σ'ἕνα σύνολο $Q = (T,\eta)\times[0,+\infty)$, πού ἱκανοποιεῖ τίς συνθῆκες:

(C_1) $\psi(t,0) = 0 \quad \forall t \in (T,\eta)$.

(C_2) Ἡ συνάρτηση $\psi(t,r)$ εἶναι μετρήσιμη στό σύνολο ${}_rQ$ γιά κάθε $r \in [0,+\infty)$ καί ἀκόμη συνεχής καί αὔξουσα στό Q_t γιά κάθε $t \in (T,\eta)$.

(C_3) Γιά κάθε φραγμένο σύνολο B, ὑποσύνολο τοῦ Q, ὑπάρχει συνάρτηση M_B ὁρισμένη στό (T,η) τέτοια, ὥστε $\psi(t,r) \leq M_B(t)$ γιά κάθε $(t,r) \in B$, καί ἀκόμη γιά κάθε $a \in (T,\eta)$ ἡ M_B εἶναι ὁλοκληρώσιμη πάνω στό (a,η).

(C_4) Γιά κάθε $b \in (T,\eta)$ ἡ μόνη ἀπολύτως συνεχής συνάρτηση ρ, ὁρισμένη ἐπί τοῦ $[T,\eta)$, γιά τήν ὁποία ὑπάρχει ἡ δεξιά παράγωγός της $\rho'_+(T)$ καί ἱκανοποιεῖ τίς συνθῆκες

$$\rho'(t) = \psi(t,\rho(t)) \text{ σχεδόν παντοῦ πάνω στό } (T,b),$$
$$\rho'_+(T) = \rho(T) = 0$$

εἶναι ἡ μηδενική συνάρτηση.

Ἐάν τώρα τό σύνολο Ω εἶναι ἀνοικτό καί γιά κάθε $(t,x_1,\ldots,x_k)$, $(t,y_1,\ldots,y_k)$ στό Ω μέ $t \in (T,\eta)$ ἰσχύει

$$|f(t,x_1,\ldots,x_k)-f(t,y_1,\ldots,y_k)| \leq \psi(t,\max_i|x_i-y_i|),$$

τότε γιά κάποιο $\gamma \in (T,\eta)$ ὑπάρχει τό πολύ μιά λύση $x(\cdot;\varphi,[T,\gamma])$ τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T,φ).

2. Σταθερά σημεῖα τῶν ὁρισμάτων

2.1. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἄν g εἶναι μιά πραγματική συνάρτηση πραγματικῆς μεταβλητῆς καί ω ἕνα σημεῖο συσσωρεύσεως τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της, δηλαδή $\omega \in (\mathrm{Dom}\, g)^d$, θά λέμε ὅτι τό ω εἶναι (γ ε ν ι κ ε υ μ έ ν ο) σ τ α θ ε ρ ό σ η μ ε ῖ ο τῆς g τότε καί μόνο τότε, ἄν

$$\lim_{t\to\omega} g(t) = \omega.$$

Στά ἑπόμενα θά συμβολίζομε μέ $\mathcal{K}$ τό σύνολο τῶν κοινῶν σταθερῶν σημείων τῶν ὁρισμάτων $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k$ τῆς (A). Εἰδικά στήν περίπτωση πού τό σύνολο $\bigcap_{i=1}^{k}(\mathrm{Dom}\,\sigma_i)$ εἶναι ἕνα ἀπέραντο ἀριστερά διάστημα τότε πάντοτε $-\infty\in\mathcal{K}$, ἀφοῦ $\lim_{t\to-\infty}\sigma_i(t)\leq\lim_{t\to-\infty}t=-\infty$ γιά κάθε $i=1,2,\ldots,k$.

Ἔστω τώρα $\omega\in\mathcal{K}$ καί ἀκόμη ὅτι ἰσχύει $\sigma_i(t)\geq\omega$ γιά κάθε $t\geq\omega$ καί γιά κάθε $i=1,2,\ldots,k$. Αὐτό ἰσχύει π.χ. ἄν ὅλα τά ὁρίσματα $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k$ εἶναι αὔξουσες συναρτήσεις. Τότε εἶναι φανερό ὅτι $E(\omega)=\{\omega\}$. Ἔτσι στήν περίπτωση πού $\omega\in\bigcap_{i=1}^{k}(\mathrm{Dom}\,\sigma_i)$ καί γιά $T=\omega$ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν τῆς (A) εἶναι τῆς μορφῆς $(A)-(\omega,\xi)$, ὅπου $\xi\in\mathbb{K}^n$.

Στήν περίπτωση τώρα πού $\omega\in\bigcap_{i=1}^{k}(\mathrm{Dom}\,\sigma_i)^d-\bigcap_{i=1}^{k}\mathrm{Dom}\,\sigma_i$ καί ἀκόμη $\omega\in\mathbb{R}$, ἔχομε τό πρόβλημα τῆς εὑρέσεως μιᾶς λύσεως x τῆς (A) μέ

$$\lim_{t\to\omega+0}x(t)=\xi,\qquad \xi\in\mathbb{K}^n,$$

δηλαδή ἔχομε τό πρόβλημα ὁριακῶν τιμῶν $(A)-(\omega,\xi)$. Τότε, ἐπειδή ἔχομε $\lim_{t\to\omega}\sigma_i(t)=\omega$ γιά κάθε $i=1,2,\ldots,k$, μποροῦμε ἀντί τῶν σ_i, $i=1,2,\ldots,k$ νά θεωρήσομε τίς συναρτήσεις $\hat{\sigma}_i$, $i=1,2,\ldots,k$ πού ὁρίζονται μέ τόν τύπο

$$\hat{\sigma}_i(t)=\begin{cases}\sigma_i(t), & \text{ἄν } t\in\mathrm{Dom}\,\sigma_i\\ \omega, & \text{ἄν } t=\omega\end{cases}\qquad (i=1,2,\ldots,k)$$

καί πού εἶναι συνεχεῖς ἐπεκτάσεις τῶν σ_i. Ἔτσι τό παραπάνω πρόβλημα ὁριακῶν τιμῶν ἀνάγεται στό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν $(\hat{A})-(\omega,\xi)$, ὅπου $(\hat{A})$ συμβολίζει τήν ἐξίσωση

$$x'(t) = \hat{f}(t;x[\hat{\sigma}_1(t)],\dots,x[\hat{\sigma}_k(t)])$$

καί $\hat{f}$ εἶναι μιά ἐπέκταση τῆς f στό σύνολο $\Omega \cup (\{\omega\} \times \mathbb{K}^n)$ πού εἶναι καί συνάρτηση Καραθεοδωρῆ.

Ἀπό τά θεωρήματα 1.1 καί 1.2 μποροῦμε νά πάρομε τά παρακάτω πορίσματα, πού βέβαια ἀναφέρονται στήν περίπτωση πού τό κοινό σταθερό σημεῖο τῶν ορισμάτων ἀνήκει στό σύνολο $\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Dom} \sigma_i$. Τά πορίσματα αὐτά δείχνουν ὅτι, ἀπό πλευρᾶς ὑπάρξεως καί μονοσημάντου, οἱ διαφορικές ἐξισώσεις μέ ὑστέρηση συμπεριφέρονται ἀνάλογα μέ τίς συνήθεις στά κοινά σταθερά σημεῖα τῶν ορισμάτων.

2.2. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄν $\omega \in \mathcal{K} \cap (\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Dom} \sigma_i)$ καί $\xi \in \mathbb{K}^n$ τέτοια ὥστε, ὑπάρχει $\beta > \omega$ καί μιά περιοχή V τοῦ σημείου $(\xi,\dots,\xi) \in (\mathbb{K}^n)^k$ μέ $[\omega,\beta] \times V$ Ω, τότε γιά κάποιο $\gamma > \omega$ ὑπάρχει μιά λύση $x(\cdot;\xi,[\omega,\gamma])$ τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(ω,ξ).

2.3. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἔστω $\omega \in \mathcal{K} \cap (\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Dom} \sigma_i)$ καί ψ μιά συνάρτηση ὁρισμένη ὅπως στό θεώρημα 1.2. Ἄν τό σύνολο Ω εἶναι ἀνοικτό καί γιά κάθε $(t;x_1,x_2,\dots,x_k)$, $(t;y_1,y_2,\dots,y_k)$ στό Ω μέ $t \in (\omega,\eta)$ ἰσχύει

$$|f(t;x_1,x_2,\dots,x_k)-f(t;y_1,y_2,\dots,y_k)| \leqq \psi(t,\max_i |x_i-y_i|),$$

τότε γιά κάθε $\xi \in \mathbb{K}^n$ καί γιά κάποιο γ, $\omega < \gamma < \eta$ ὑπάρχει τό πολύ μιά λύση $x(\cdot;\xi,[\omega,\gamma])$ τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(ω,ξ).

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ περίπτωση ὅπου $\omega = -\infty$ δέν καλύπτεται ἀπό τά παραπάνω. Γι'αὐτό τό λόγο, ἡ περίπτωση αὐτή θ'ἀντιμετωπισθεῖ ἰδιαίτερα παρακάτω στό Κεφάλαιο 2.

3. <u>Ἔκταση τῶν λύσεων</u>

3.1. ΟΡΙΣΜΟΣ. Μιά λύση x τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T,φ) ὀνομάζεται μ ή ἐ π ε κ τ ά σ ι μ η (δ ε ξ ι ά) λ ύ σ η τότε καί μόνον τότε, ἄν δέν ὑπάρχει ἄλλη λύση y τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T,φ) τέτοια ὥστε $y|\mathrm{Dom}\, x = x$.

Μιά τέτοια λύση x (μή ἐπεκτάσιμη) τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T,φ) θά τή συμβολίζομε μέ $x(\cdot;T,\varphi)$.

Σχετικά μέ τίς μή ἐπεκτάσιμες λύσεις ἰσχύουν οἱ παρακάτω προτάσεις.

3.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ἄν z εἶναι μιά λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T,φ), τότε ὑπάρχει μή ἐπεκτάσιμη λύση $x(\cdot;T,\varphi)$ τέτοια ὥστε $x(\cdot;T,\varphi)|\mathrm{Dom}\, z = z$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας, ὑποθέτομε ὅτι ἡ z εἶναι ἐπεκτάσιμη λύση. Θεωροῦμε τότε τό σύνολο

$$\mathcal{X} = \{x:\ x \text{ λύση τοῦ } (A)\text{-}(T\text{-}\varphi) \text{ μέ } \mathrm{Dom}\, x \supseteq \mathrm{Dom}\, z \text{ καί } x|\mathrm{Dom}\, z = z\},$$

διατεταγμένο μέ τή σχέση $\preceq$ πού ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$(\forall\, x,y \text{ στό } \mathcal{X})\quad x \preceq y \iff G(x) \subseteq G(y).$$

Τότε, ἄν $\mathcal{A}$ εἶναι ἕνα γραμμικά διατεταγμένο ὑποσύνολο τοῦ $\mathcal{X}$, τό σύνολο $\bigcup_{x\in\mathcal{A}} G(x)$ ορίζει μιά συνάρτηση πού εὔκολα προκύπτει ὅτι εἶναι λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T,φ) καί μάλιστα στοιχεῖο τοῦ συνόλου $\mathcal{X}$ καί ἀκόμη εἰδικώτερα στοιχεῖο τῆς συλλογῆς $\mathcal{A}$. Ἑπομένως, ἀπό τό λῆμμα τοῦ Zorn ([36], σελ. 100) τό σύνολο $\mathcal{X}$ ἔχει maximal στοιχεῖα. Εἶναι φανερό τώρα ὅτι ἕνα τέτοιο maximal στοιχεῖο εἶναι καί λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T,φ) καί μάλιστα μή ἐπεκτάσιμη πού ὁ περιορισμός της πάνω στό Dom z ταυτίζεται μέ τή λύση z. ▲

3.3. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ἄν $x = x(\cdot;T,\varphi)$ εἶναι μιά μή ἐπεκτάσιμη λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T,φ) καί τό σύνολο $\{(t;x_1,x_2,\ldots,x_k)\in\Omega : t \geq \min E(T)\}$ εἶναι ἀνοικτό ὡς πρός τόν ὑποχῶρο $[\min E(T),+\infty)\times(\mathbb{K}^n)^k$ τότε τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς λύσεως x εἶναι ἕνα ἀνοικτό δεξιά διάστημα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ἄν ὑποθέσομε $\mathrm{Dom}\, x = [T,T_1]$, τότε ἀπό τό θεώρημα ὑπάρξεως καί ἀπό τό γεγονός ὅτι τό σύνολο $\{(t;x_1,\ldots,x_k)\in\Omega : t \geq \min E(T)\}$ εἶναι ἀνοικτό ὡς πρός τόν ὑποχῶρο $[\min E(T),+\infty)\times(\mathbb{K}^n)^k$, τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T_1,φTx) ἔχει λύση $\hat{x} = \hat{x}(\cdot;\varphi Tx,[T_1,\gamma])$, ὅπου $\gamma > T_1$. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο ἀφοῦ ἡ $xT_1\hat{x}$ εἶναι λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν A-(T,φ) καί μάλιστα ἐπέκταση τῆς x πού θεωρήθηκε ἀπ'ἀρχῆς μή ἐπεκτάσιμη. ▲

3.4. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἄν $x = x(\cdot;T,\varphi)$ εἶναι μιά μή ἐπεκτάσιμη λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T,φ) καί τό σύνολο

$\{(t;x_1,x_2,\ldots,x_k)\in\Omega : t\geq \min E(T)\}$ εἶναι ἀνοικτό ὡς πρός τόν ὑποχῶρο $[\min E(T),+\infty)\times(\mathbb{K}^n)^k$, τότε γιά κάθε συμπαγές ὑποσύνολο W τοῦ Ω ὑπάρχει $\hat{t}>T$ τέτοιο ὥστε

$$(\hat{t},x(\hat{t}),\ldots,x(\hat{t}))\notin W.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ἀπό τήν προηγούμενη πρόταση 3.3 ἔστω $[T,t_1)$ τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς μή ἐπεκτάσιμης λύσεως $x=x(\cdot;T,\varphi)$ καί ἔστω ἀκόμη ὅτι ἰσχύει $(t;x(t),\ldots,x(t))\in W$ γιά κάθε $t\in[T,t_1)$. Τότε ὑπάρχει συνάρτηση $M\in L(pr_1W,\mathbb{R})$, ἡ ὁποία χαρακτηρίζει τήν $f\in Car(W)$. Εἶναι ὅμως φανερό ὅτι ἡ συνάρτηση $\hat{M}(t)=\int_T^t M(s)ds$ εἶναι ὁμοιόμορφα συνεχής πάνω στό pr_1W. Ἄρα, γιά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει $\delta(\varepsilon)>0$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε t',t'' ἐν $[T,t_1)$ μέ $0<t''-t'<\delta(\varepsilon)$ νά ἰσχύει $\int_{t'}^{t''} M(s)ds<\varepsilon$.

Ἔτσι ὑποθέτοντας, χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας, ὅτι ἰσχύει καί $\{(t;\varphi(t),\ldots,\varphi(t)) : t\in E(T)\}\subseteq W$ καί ἀκόμη θέτοντας $u=\varphi Tx$ ἔχομε

$$\begin{aligned}|x(t'')-x(t')| &\leq \int_{t'}^{t''} |f(s;u[\sigma_1(s)],\ldots,u[\sigma_k(s)])ds \\ &\leq \int_{t'}^{t''} M(s)ds<\varepsilon\end{aligned}$$

καί ἑπομένως ἀπό τό κριτήριο τοῦ Cauchy ὑπάρχει τό $\lim_{t\to t_1} x(t)=\ell$.

Ἐπειδή ὅμως τό σύνολο W εἶναι συμπαγές ἰσχύει τότε

$$(t_1;\ell,\ldots,\ell)\in W.$$

Ἄρα ἡ συνάρτηση

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & \text{ἄν} \quad t \in [T,t_1) \\ \\ \ell\ , & \text{ἄν} \quad t = t_1 \end{cases}$$

εἶναι λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν A-(T,φ). Ἀλλά, ἀπό τό θεώρημα ὑπάρξεως ἡ λύση $y(t)$ μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ δεξιώτερα τοῦ t_1 πού εἶναι ἄτοπο.

Τό θεώρημα ὑπάρξεως γιά τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T,φ) ὅπως διατυπώθηκε προηγουμένως (Βλ. θεώρ. 1.1.) μᾶς ἐξασφαλίζει τήν ὕπαρξη λύσεως $x(\cdot;\varphi[T,\gamma])$, χωρίς νά δίνει καμμιά ἐκτίμηση γιά τόν ἀριθμό γ. Μέ τή βοήθεια ὅμως τοῦ προηγουμένου Θεωρήματος ἐκτάσεως 3.4., μποροῦμε νά ἔχομε μιά τέτοια ἐκτίμηση πού δίνει ἡ παρακάτω πρόταση.

3.5. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ἔστω $\beta > T$ καί V μιά συμπαγής περιοχή τοῦ σημείου $(\varphi(T),\ldots,\varphi(T)) \in (\mathbb{K}^n)^k$ μέ $[T,\beta]\times V \subseteq \Omega$. Ἄν $W = \{(t;\varphi(t),\ldots,\varphi(t) : t \in E(T)\} \cup ([T,\beta]\times V)$ καί $M \in L(E(T)\cup[T,\beta],\mathbb{R})$ εἶναι μιά συνάρτηση πού χαρακτηρίζει τήν $(f|W) \in Car(W)$, τότε ὑπάρχει λύση $x(\cdot;\varphi,[T,\hat{\gamma}])$ τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T,φ) μέ

$$\hat{\gamma} = \sup\left\{t \geq T : \int_T^t M(s)ds \leq b\right\} \quad \text{καί} \quad b = dist((\varphi(T),\ldots,\varphi(T)),\partial V) > 0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Δυνάμει τοῦ Θεωρήματος Ὑπάρξεως καί τῆς Προτάσεως 3.2 τοῦ παρόντος κεφαλαίου, θεωροῦμε μιά μή ἐπεκτάσιμη λύση $x = x(\cdot;T,\varphi)$ τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T,φ). Ἔστω τότε ὅτι ἰσχύει

$$\sup \mathrm{Dom}\, x \leq \hat{\gamma}.$$

Θέτοντας τότε $\varphi T x = u$, ἔχομε γιά κάθε $t \in \mathrm{Dom}\, x$

$$|x(t)-\varphi(T)| \leq \int_T^t |f(s;u[\sigma_1(s)],\dots,u[\sigma_k(s)])|ds \leq \int_T^t M(s)ds \leq b.$$

Ἔτσι ἀποδείχτηκε ὅτι

$$\{(t;u(t),\dots,u(t)) : t \in E(T) \cup \mathrm{Dom}\, x\} \subseteq W$$

τό ὁποῖο ἀντίκειται στό Θεώρημα (ἐκτάσεως) 3.4.

3.6. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Θεωροῦμε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T,φ) καί συμβολίζομε μέ (T,φ) τήν συλλογή ὅλων τῶν μή ἐπεκτασίμων λύσεών του. Ἄν τό σύνολο $\{(t;x_1,\dots,x_k) \in \Omega : t \geq \min E(T)\}$ εἶναι ἀνοικτό ὡς πρός τόν ὑποχῶρο $[\min E(T), +\infty) \times (\mathbb{K}^n)^k$, τότε λαμβάνοντας ὑπ'ὄψη τήν προηγούμενη Πρόταση 3.5, συμπεραίνομε ὅτι τό κοινό πεδίο ὁρισμοῦ τῶν λύσεων τῆς συλλογῆς $\mathcal{X}(T,\varphi)$, δηλαδή τό σύνολο

$$\mathrm{Dom}\, \mathcal{X}(T,\varphi) = \bigcap \{\mathrm{Dom}\, x : x \in \mathcal{X}(T,\varphi)\},$$

εἶναι ἕνα ἀνοικτό δεξιά διάστημα.

3.7. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ἄν W εἶναι ἕνα συμπαγές ὑποσύνολο τοῦ Ω καί τό σύνολο $\Omega_0 = \{(t;x_1,\dots,x_k) \in \Omega : t \geq \min E(\min pr_1 W)\}$ εἶναι ἀνοικτό ὡς πρός τόν ὑποχῶρο $[\min E(\min pr_1 W), +\infty) \times (\mathbb{K}^n)^k$, τότε ὑπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε $T \in pr_1 W$ καί γιά κάθε $\varphi \in C(E(T),\Omega)$ νά ἰσχύει

$$[T,T+\delta] \subseteq \mathrm{Dom}\, \mathcal{X}(T,\varphi).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ἐπειδή τό σύνολο W εἶναι συμπαγές ὑποσύνολο τοῦ ἀνοικτοῦ συνόλου Ω_0 ὡς πρός τόν ὑποχῶρο $[\min E(\min pr_1 W),+\infty)\times(\mathbb{K}^n)^k$, ὑπάρχει συμπαγές σύνολο $\hat{W}$, ὡς πρός τόν ἴδιο ὑποχῶρο, πού νά περιέχει τό W στό ἐσωτερικό του ὡς πρός τόν ὑποχῶρο αὐτό. Ἐπειδή ἡ ἀπόσταση τῶν δύο συμπαγῶν συνόλων W καί $\hat{W}$ εἶναι θετική, θεωροῦμε τούς ἀριθμούς $a>0$ καί $b>0$ τέτοιους ὥστε τό σύνολο

$$R(T,\varphi)=[T,T+\alpha]\times\{(x_1,\ldots,x_k)\in(\mathbb{K}^n)^k:(\forall\, i=1,2,\ldots,k)\ |x_i-\varphi(T)|\leqq b\}$$

νά περιέχεται στό ἐσωτερικό τοῦ $\hat{W}$ ὡς πρός τόν θεωρηθέντα παραπάνω ὑποχῶρο.

Ἔστω τώρα μιά θετική συνάρτηση $M\in L(pr_1W,\mathbb{R})$, πού χαρακτηρίζει τήν $f\in Car(\hat{W})$. Ἐπειδή ἡ συνάρτηση M,

$$\hat{M}(t)=\int_{\min pr_1\hat{W}}^{t} M(s)ds$$

εἶναι ὁμοιόμορφα συνεχής πάνω στό συμπαγές σύνολο pr_1W, θεωροῦμε ἕνα $\delta>0$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε $\tau\in pr_1W$ νά ἰσχύει

$$\int_{\tau}^{\tau+\delta} M(s)ds\leqq b.$$

Ἀλλά ἀπό τήν προηγούμενη Πρόταση 3.5 συμπεραίνομε ὅτι κάθε λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T,φ) ὁρίζεται τουλάχιστον πάνω στό διάστημα $[T,T_1]$, ὅπου

$$T_1=\sup\left\{t\in[T,T+\alpha]:\int_T^t M(s)ds\leqq b\right\}$$

καί ἐπομένως εἶναι φανερό ὅτι ἰσχύει

$$[T,T+\delta]\subseteq[T,T_1],$$

πού ἀποδεικνύει τό θεώρημα.

Ἀναφέρομε τώρα ἕνα θεώρημα (Βλ. Lakshmikantham and Leela [24],p. 43), τό ὁποῖο θά χρησιμοποιήσομε στήν ἀπόδειξη τοῦ ἑπομένου θεωρήματος, πού ἀναφέρεται ἐπίσης στήν ἔκταση τῶν λύσεων τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (A).

3.8. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἔστω $E\subseteq\mathbb{R}^2$ καί w μιά μή ἀρνητική συνάρτηση μέ $w\in Car(E)$. Ἄν $z\in C([t_0,t_0+\alpha],\mathbb{R})$ καί γιά κάθε $t\in[t_0,t_0+\alpha]$ ἰσχύει ἡ σχέση

$$|z(t+h)-z(t)|\leq\int_t^{t+h} w(s,z(s))ds$$

γιά κάθε ἀρκούντως μικρό $h>0$, μέ $t+h\in[t_0,t_0+\alpha]$, τότε γιά κάθε maximal λύση ζ τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως $\zeta'=w(t,\zeta)$ πού ὁρίζεται τουλάχιστο στό διάστημα $[t_0,t_0+\alpha]$ καί ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη $\zeta(t_0)\geq z(t_0)$ ἰσχύει

$$\zeta(t)\geq z(t) \text{ γιά κάθε } t\in[t_0,t_0+\alpha].$$

3.9. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἔστω $Q=[T,T+\alpha]\times[0,+\infty)$ καί w μιά μή ἀρνητική συνάρτηση, μέ $w\in Car(Q)$ καί τέτοια, ὥστε κάποια maximal λύση ζ τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως $\zeta'=w(t,\zeta)$ μέ $\zeta(T)\geq 0$, ὁρίζεται τουλάχιστο σ'ὁλόκληρο τό διάστημα $[T,T+\alpha]$.

Ἄν $A_t=E(T)\cup[T,t]$ γιά κάθε $t\geq T$, $A_{T+\alpha}\times(\mathbb{K}^n)^k\subseteq\Omega$ καί γιά κάθε συνάρτηση z, μέ $z \in C(A_{T+\alpha},\mathbb{K}^n)$ ἰσχύει

$$|f(t;z[\sigma_1(t)],\dots,z[\sigma_k(t)])| \leq w(t,\|z\|_{A_t}) \text{ γιά κάθε } t \in [T,T+\alpha],$$

τότε κάθε μή ἐπεκτάσιμη λύση $x = x(\cdot;T,\varphi)$, μέ $\|\varphi\|_{E(T)} \leq \zeta(T)$, ὁρίζεται τουλάχιστο στό διάστημα $[T,T+\alpha]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωροῦμε μιά μή ἐπεκτάσιμη λύση $x = x(\cdot;T,\varphi)$ ὅπου $\|\varphi\|_{E(T)} \leq \zeta(T)$ καί ὑποθέτομε ὅτι $\mathrm{Dom}\, x = [T,t_1)$, μέ $t_1 < T+\alpha$.
Θά ἀποδείξομε πρῶτα ὅτι

$$\|u\|_{A_t} \leq \zeta(t) \quad \text{γιά κάθε} \quad t \in [T,t_1),$$

ὅπου $u = \varphi T x$.
Πρός τοῦτο, γιά τυχόν $t \in [T,t_1)$ καί γιά κάθε $h > 0$ μέ $t+h \in [T,t_1)$, θεωροῦμε ἕνα σημεῖο $t^* \in A_{t+h}$ μέ $\|u\|_{A_{t+h}} = |u(t^*)|$. Ἔτσι παίρνομε

$$\|u\|_{A_{t+h}} = |u(t^*)| = \left|u(t) + \int_t^{t^*} f(s;u[\sigma_1(s)],\dots,u[\sigma_k(s)])ds\right| \leq$$

$$\leq |u(t)| + \int_t^{t+h} |f(s;u[\sigma_1(s)],\dots,u[\sigma_k(s)]|ds \leq$$

$$\leq \|u\|_{A_t} + \int_t^{t+h} w(s,\|u\|_{A_s})ds.$$

Ἑπομένως

$$\left|\|u\|_{A_{t+h}} - \|u\|_{A_t}\right| \leq \int_t^{t+h} w(s,\|u\|_{A_s})ds$$

καί ἀπό τό Θεώρημα 3.4. προκύπτει ὅτι

$$\|u\|_{A_t} \leq \zeta(t) \quad \text{γιά κάθε} \quad t \in [T,t_1).$$

Θεωρώντας τώρα μιά συνάρτηση $M \in L([T,T+\alpha],\mathbb{R})$ πού χαρακτηρίζει τήν $w \in Car(Q)$ καί άπό τό γεγονός ότι ή συνάρτηση $\hat{M}(t) = \int_T^t M(s)ds$ είναι όμοιόμορφα συνεχής πάνω στό $[T,T+\alpha]$, έχομε ότι γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ύπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο, ώστε γιά κάθε t', t'' μέ $0 < t''-t' < \delta(\varepsilon)$ νά ίσχύει

$$\int_{t'}^{t''} M(s)ds < \varepsilon.$$

Άρα, λαμβάνοντας ύπ'όψη ότι ή w είναι καί αύξουσα ώς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή της, παίρνομε

$$|u(t')-u(t'')| \leq \int_{t'}^{t''} |f(s;u[\sigma_1(s)],\ldots,u[\sigma_k(s)])|ds \leq \int_{t'}^{t''} w(s,\|u\|_{A_s})ds \leq$$

$$\leq \int_{t'}^{t''} w(s,\zeta(s))ds \leq \int_{t'}^{t''} M(s)ds < \varepsilon.$$

Έτσι, όπως καί στήν άπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 3.3, προκύπτει ότι ύπάρχει τό $\lim_{t\to t_1} x(t)$ καί κατά συνέπεια ή λύση x μπορεῖ νά έπεκταθεῖ δεξιώτερα τοῦ σημείου t_1 πού είναι άτοπο.

3.10. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Θεωροῦμε ότι ή κατά Καραθεοδωρῆ διαφορική έξίσωση (A) παίρνει τήν είδική μορφή ένός ύστερημένου γραμμικοῦ διαφορικοῦ συστήματος καί συγκεκριμμένα τοῦ συστήματος

$$x'(t) = \sum_{i=1}^{k} A_i(t)\, x[\sigma_i(t)]+b(t),$$

όπου βέβαια ή n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση b είναι συνεχής πάνω στό διάστημα $[T,+\infty)$ καί οί συναρτήσεις $n \times n$ πίνακος A_i, $i = 1,2,\ldots,k$ είναι μετρήσιμες πάνω στό ίδιο διάστημα.

Έτσι,ἄν ἐφαρμόσομε τό παραπάνω θεώρημα γιά τό γραμμικό αὐτό σύστημα παίρνοντας

$$w(t,\zeta) = \left(\sum_{i=1}^{k} \|A_i(t)\|\right)\zeta + |b(t)|,$$

τότε προκύπτει ὅτι κάθε μή ἐπεκτάσιμη λύση τοῦ συστήματος ὁρίζεται σέ ὁλόκληρο τό διάστημα $[T,+\infty)$.

3.11. ΣΗΜΕΙΩΣΗ. Τά συμπεράσματα τῆς παραγράφου αὐτῆς εἶναι φυσικές ἐπεκτάσεις συμπερασμάτων γνωστῶν στίς συνήθεις διαφορικές ἐξισώσεις (Βλ. Hartman [15], Coppel [5]).

4. Ἐξάρτηση τῶν λύσεων

Στήν παράγραφο αὐτή μελετᾶται ἡ ἐξάρτηση τῶν λύσεων ἀπό "μικρές διαταραχές" πού μποροῦν νά ἐμφανίζονται στίς ἀρχικές τιμές, εἴτε στή συνάρτηση πού ἀποτελεῖ τό δεύτερο μέλος τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (Α), εἴτε,καί τό κυριώτερο,στά ὀρίσματα. Στό θεώρημα πού ἀκολουθεῖ ἡ ἰδέα καί τά βήματα τῆς ἀποδείξεως εἶναι παράλληλα μέ ἐκεῖνα τοῦ θεωρήματος 1.10 τῆς [31].

Θεωροῦμε ἕνα σύνολο Ω, ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}\times(\mathbb{K}^n)^k$, ἕνα σημεῖο $T\in pr_1\Omega$ καί τίς ἀκολουθίες τῶν ὑστερημένων ὁρισμάτων σ_ν^1, $\sigma_\nu^2,\dots,\sigma_\nu^k$,μέ $\nu\in\mathbb{N}$,στό $C(pr_1\Omega,\mathbb{R})$ μέ

$$\lim \sigma_\nu^i = \sigma_i \quad \text{κατά σημεῖο στό } pr_1\Omega \ (i=1,2,\dots,k).$$

Έστω τώρα τό σύνολο $E(T)$ πού ὁρίζεται στήν παράγραφο 1 μέσω τῶν ορισμάτων $\sigma_1,\dots,\sigma_k$ καί ακόμη τά ανάλογα σύνολα $E_\nu(T)$, πού ορίζονται μέσω τῶν ορισμάτων $\sigma_\nu^1, \sigma_\nu^2,\dots,\sigma_\nu^k$ αντίστοιχα γιά κάθε $\nu\in\mathbb{N}$.

Θεωροῦμε ακόμη τό σύνολο

$$\hat{E}(T)=E(T)\cup\Big(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(T)\Big)$$

πού εἶναι ἕνα διάστημα καί μιά ακολουθία συναρτήσεων φ_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ στό $C(\hat{E}(T),\mathbb{K}^n)$ τέτοια ὥστε νά ἰσχύει

$$\lim \varphi_\nu=\varphi \quad \text{ομοιόμορφα πάνω στό } \hat{E}(T),$$

$$\{(t;\varphi_\nu(t),\dots,\varphi_\nu(t)) : t\in\hat{E}(T)\}\subseteq\Omega \quad \text{γιά κάθε } \nu\in\mathbb{N},$$

$$\{(t;\varphi(t),\dots,\varphi(t)) : t\in\hat{E}(T)\}\subseteq\Omega.$$

Ἔστω, τέλος, f_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ μιά ακολουθία συναρτήσεων στό $Car_{loc}(\Omega)$ καί οἱ αντίστοιχες διαφορικές ἐξισώσεις

$$(A_\nu) \qquad x'(t)=f_\nu(t;x[\sigma_\nu^1(t)],\dots,x[\sigma_\nu^k(t)]).$$

4.1. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἄν τό σύνολο $\Omega_0=\{(t;x_1,\dots,x_k)\in\Omega : t\in\hat{E}(T)\cup[T,+\infty)\}$ εἶναι ανοικτό ὡς πρός τόν ὑπόχωρο $(\hat{E}(T)\cup[T,+\infty))\times(\mathbb{K}^n)^k$ καί ἡ ακολουθία τῶν συναρτήσεων f_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ εἶναι τέτοια ὥστε νά ἰσχύει ἡ συνθήκη

$$(C)\quad \lim_\nu \int_{pr_1K} \sup_{(x_1,\dots,x_k)\in pr_2K} |f_\nu(t;x_1,\dots,x_k)-f(t;x_1,\dots,x_k)|\,dt=0$$

γιά κάθε συμπαγές σύνολο K, ὑποσύνολο τοῦ Ω_0, τότε γιά κάθε ακολουθία x_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ μέ $x_\nu=x_\nu(\cdot;T,\varphi_\nu)$ λύση τοῦ προβλήματος αρχικῶν τιμῶν $(A_\nu)-(T,\varphi_\nu)$ ὑπάρχει λύση $x=x(\cdot;T,\varphi)$ τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T,φ) καί μιά ὑπακολουθία x_{k_ν} τῆς x_ν τέτοια, ὥστε

$$\lim x_{k_\nu} = x \text{ σχεδόν τελικά ὁμοιόμορφα πάνω στό } \mathrm{Dom}\, x,$$

δηλαδή, γιά κάθε συμπαγές ὑποδιάστημα I τοῦ $\mathrm{Dom}\, x$ νά ἰσχύουν:

(i) $I \subseteq \mathrm{Dom}\, x_{k_\nu}$ τελικά γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$,

(ii) $\lim x_{k_\nu} = x$ ὁμοιόμορφα πάνω στό I.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προχωροῦμε σέ τρία βήματα

Βῆμα 1. Θά ἀποδείξουμε ὅτι γιά κάποιο $\delta_0 > 0$ ὑπάρχει μιά λύση y τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T,φ) ὁρισμένη στό διάστημα $[T,T+\delta_0]$ καί μιά ὑπακολουθία x_{k_ν} τῆς x_ν τέτοια ὥστε νά ἰσχύει

1) $[T,T+\delta_0] \subseteq \mathrm{Dom}\, x_{k_\nu}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$,

2) $\lim x_{k_\nu} = y$ ὁμοιόμορφα στό $[T,T+\delta_0]$.

Γιά τό σκοπό αὐτό θεωροῦμε ἕνα συμπαγές σύνολο W ὑποσύνολο τοῦ συνόλου Ω_0 τέτοιο, ὥστε τά σύνολα

$$\{(t;\varphi(t),\dots,\varphi(t)) : t \in \hat{E}(T)\} \quad \text{καί} \quad \{(t;\varphi_\nu(t),\dots,\varphi_\nu(t)) : t \in \hat{E}(T)\},\ \nu \in \mathbb{N}$$

νά ἀνήκουν στό ἐσωτερικό τοῦ W ὡς πρός τόν ὑποχῶρο $(\hat{E}(T) \cup [T,+\infty)) \times (\mathbb{K}^n)^k$.

Δυνάμει τῆς Προτάσεως 3.7 τῆς προηγούμενης παραγράφου, ὑπάρχει ἀριθμός $\delta > 0$ πού ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τό συμπαγές σύνολο W τέτοιος, ὥστε κάθε μή ἐπεκτάσιμη λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T,φ) νά ὁρίζεται τουλάχιστον στό διάστημα $[T,T+\delta]$.

Θεωροῦμε καί ἕνα ἄλλο συμπαγές ὑποσύνολο $\hat{W}$ τοῦ Ω_0 τέτοιο, ὥστε τό W νά περιέχεται στό ἐσωτερικό τοῦ $\hat{W}$ ὡς πρός τόν ὑποχῶρο

$(\hat{E}(T)\cup[T,+\infty))\times(\mathbb{K}^n)^k$ καί θέτομε $2\ell=\mathrm{dist}(W,\partial W)>0$. Ἄν $M\in L(pr_1\hat{W},\mathbb{R})$ εἶναι μιά θετική συνάρτηση τέτοια, ὥστε ἡ $M/2$ νά χαρακτηρίζει τήν $f\in Car(\hat{W})$, τότε ὑπάρχει $\nu_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε t_1, t_2 στό διάστημα $[T,T+\delta]$ νά ἰσχύει

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}\sup\{|f_\nu(t;x_1,\dots,x_k)| : (\forall i=1,2,\dots,k)|x_i-\varphi(T)|\leq\ell\}dt\right|\leq\int_{t_1}^{t_2}M(t)dt.$$

Πραγματικά· χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας, ὑποθέτομε ὅτι $t_1<t_2$ καί ἔτσι, ἐπειδή ἰσχύει

$$\lim_\nu\int_{t_1}^{t_2}\sup\{|f_\nu(t;x_1,\dots,x_k)-f(t;x_1,\dots,x_k)| : (\forall i=1,2,\dots,k)|x_i-\varphi(T)|\leq$$
$$\leq\ell\}dt=0$$

μποροῦμε νά ἐκλέξομε ἕνα δείκτη $\nu_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο, ὥστε γιά κάθε $\nu\geq\nu_0$ νά ἔχομε

$$\int_{t_1}^{t_2}\sup\{|f_\nu(t;x_1,\dots,x_k)-f(t;x_1,\dots,x_k)| : (\forall i=1,2,\dots,k)|x_i-\varphi(T)|\leq\ell\}dt\leq$$
$$\leq\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}M(t)dt.$$

Ἔτσι γιά κάθε $\nu\geq\nu_0$ παίρνομε

$$\int_{t_1}^{t_2}\sup\{|f_\nu(t;x_1,\dots,x_k)| : (\forall i=1,2,\dots,k)|x_i-\varphi(T)|\leq\ell\}dt\leq$$
$$\leq\int_{t_1}^{t_2}\sup\{|f_\nu(t;x_1,\dots,x_k)-f(t;x_1,\dots,x_k)| : (\forall i=1,2,\dots,k)|x_i-\varphi(T)|\leq\ell\}dt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\sup\{|f(t;x_1,\dots,x_k)| : (\forall i=1,2,\dots,k)|x_i-\varphi(T)|\leq\ell\}dt\leq\int_{t_1}^{t_2}M(t)dt.$$

Μποροῦμε τώρα νά ἐκλέξομε ἕνα δ_0 τέτοιο, ὥστε $0<\delta_0\leqq\delta$ καί

$$\int_T^{T+\delta_0} M(s)ds \leqq \ell/2.$$

Θέτομε τότε

$$\vartheta=\frac{1}{2}\int_T^{T+\delta_0} M(s)ds$$

καί παρατηροῦμε ὅτι, ἐπειδή $[T,T+\delta_0]\times\{(x_1,\ldots,x_k)\in(\mathbb{K}^n)^k:(\forall i=1,\ldots,k)$ $|x_i-\varphi(T)|\leqq\ell\}\subseteq\hat{W}\subsetneq\Omega_0$, ἰσχύει

$$R(T,\varphi)=[T,T+\delta_0]\times\{(x_1,\ldots,x_k)\in(\mathbb{K}^n)^k:(\forall i=1,2,\ldots,k)|x_i-\varphi(T)|\leqq 3\vartheta\}\subseteq\hat{W}.$$

Ἐξ᾿ἄλλου ἐπειδή $\lim\varphi_\nu=\varphi$ ὁμοιόμορφα πάνω στό $\hat{E}(T)$, ὑπάρχει $\nu_1\in\mathbb{N}$ μέ $\nu_1\geqq\nu_0$ τέτοιος, ὥστε γιά κάθε $\nu\geqq\nu_1$ νά ἰσχύει

$$\|\varphi_\nu-\varphi\|_{\hat{E}(T)}\leqq 3\vartheta$$

ὁπότε, σύμφωνα μέ τό Θεώρημα 3.4 τῆς προηγουμένης παραγράφου, γιά κάθε $\nu\geqq\nu_1$ οἱ λύσεις τῶν προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν $(A_\nu)-(T,\varphi_\nu)$ ὁρίζονται δεξιά τουλάχιστο μέχρι τό σύνορο τοῦ συμπαγοῦς συνόλου

$$\hat{R}(T,\varphi)=\{(t;x_1,\ldots,x_k)\in\hat{E}(T)\times(\mathbb{K}^n)^k:(\forall i=1,2,\ldots,k)|\varphi(t)-x_i|\leqq 3\vartheta\}\cup R(T,\varphi).$$

Ἀκόμη γιά κάθε $\nu\geqq\nu_1$ καί γιά κάθε $t\in[T,T+\delta_0]$ ἰσχύει

$$|x_\nu(t)-\varphi_\nu(T)|\leqq\int_T^t|f_\nu(s;u_\nu[\sigma_\nu^1(s)],\ldots,u_\nu[\sigma_\nu^k(s)])|ds\leqq\int_T^t M(s)ds\leqq 2\vartheta$$

ὅπου $u_\nu=\varphi_\nu T x_\nu$.

Ἄρα

$$|x_\nu(t)-\varphi(T)|\leqq|x_\nu(t)-\varphi_\nu(T)|+|\varphi_\nu(T)-\varphi(T)|\leqq 2\vartheta+\vartheta=3\vartheta.$$

'Αποδείχτηκε δηλαδή ὅτι γιά κάθε $\nu \geq \nu_1$ οἱ συναρτήσεις x_ν εἶναι ὁμοιόμορφα φραγμένες πάνω στό διάστημα $[T,T+\delta_0]$. 'Ισχύει ὅμως γιά κάθε t, t' στό $[T,T+\delta_0]$ ὅτι

$$|x_\nu(t)-x_\nu(t')| \leq \left|\int_t^{t'} M(s)ds\right|$$

καί, ἐπειδή ἡ συνάρτηση $\hat{M}$, $\hat{M}(t) = \int_T^t M(s)ds$, εἶναι ὁμοιόμορφα συνεχής, οἱ συναρτήσεις x_ν εἶναι ἰσοσυνεχεῖς πάνω στό διάστημα $[T,T+\delta_0]$.

'Από τό θεώρημα τοῦ Ascoli ([37], σελ.237) συμπεραίνομε ἐπομένως ὅτι ὑπάρχει μιά ὑπακολουθία x_{k_ν} τῆς x_ν καί μιά συνάρτηση $y \in C([T,T+\delta_0], \mathbb{K}^n)$ ἔτσι ὥστε

$$\lim x_{k_\nu} = y \quad \text{ὁμοιόμορφα στό διάστημα } [T,T+\delta_0].$$

Γιά νά ὁλοκληρώσομε τό "Βῆμα 1" ἀπομένει νά ἀποδείξομε ὅτι ἡ συνάρτηση y εἶναι λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T,φ). Θέτομε $\upsilon=\varphi Ty$ καί παρατηροῦμε ὅτι γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ἰσχύει

$$x_{k_\nu}(t) = \varphi_{k_\nu}(T) + \int_T^t f_{k_\nu}(s,u_{k_\nu}[\sigma^1_{k_\nu}(s)],\ldots,u_{k_\nu}[\sigma^k_{k_\nu}(s)])ds$$

ὁπότε, ἐπειδή ἡ σύγκλιση

$$\lim_\nu \int_T^t \sup_{(x_1,\ldots,x_k)\in\hat{R}_t} \{|f_\nu(t;x_1,\ldots,x_k)-f(t;x_1,\ldots,x_k)|\}dt = 0$$

συνεπάγεται τήν κατά σημεῖο σύγκλιση

$$\lim_\nu f_{k_\nu}(t;u_{k_\nu}[\sigma^1_{k_\nu}(t)],\ldots,u_{k_\nu}[\sigma^k_{k_\nu}(t)]) = f(t,\upsilon[\sigma_1(t)],\ldots,\upsilon[\sigma_k(t)]),$$

ἀπό τό θεώρημα συγκλίσεως τοῦ Lebesgue παίρνομε καί

$$y(t) = \varphi(T) + \int_T^t f(s;\upsilon[\sigma_1(s)],\ldots,\upsilon[\sigma_k(s)])ds,$$

δηλαδή ὅτι ἡ y εἶναι λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(T,φ).

Βῆμα 2. Ἄν W εἶναι τό συμπαγές σύνολο πού θεωρήθηκε στό Βῆμα 1., θά ἀποδείξομε ὅτι ὑπάρχει μιά λύση z ἐπί ἑνός διαστήματος [T,τ] τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν μέ

$$[T,\tau] \subseteq \mathrm{Dom}\, z\ ,\quad (\tau;z(\tau),\ldots,z(\tau)) \in \partial W$$

καί μιά ὑπακολουθία x_{λ_ν} τῆς x_ν τέτοια, ὥστε

1) $[T,\tau] \subseteq \mathrm{Dom}\, x_{\lambda_\nu}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$,

2) $\lim x_{\lambda_\nu} = z$ ὁμοιόμορφα πάνω στό $[T,\tau]$.

Γιά τό σκοπό αὐτό ὑποθέτομε ὅτι ἡ λύση y πού προκύπτει ἀπό τό "Βῆμα 1" εἶναι τέτοια ὥστε γιά κάθε $t \in [T,T+\delta_0]$ τό $(t;y(t),\ldots,y(t))$ εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ W ὡς πρός τόν ὑποχῶρο $(\hat{E}(T) \cup [T,+\infty)) \times (\mathbb{K}^n)^k$. Θέτομε τότε

$$T_1 = T+\delta_0,\ y_1 = y,\ Q_1 = (T_1;y_1(T_1),\ldots,y_1(T_1))$$

καί

$$x_{1\nu} = x_{k_\nu},\ P_{1\nu} = (T_1,x_{1\nu}(T_1),\ldots,x_{1\nu}(T_1)),\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Ἔτσι ἀπό τήν ὑπόθεση πού κάναμε ἔχομε

$$\lim P_{1\nu} = Q_1$$

καί τό Q_1 εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ συνόλου W ὡς πρός τόν ὑποχῶρο $(\hat{E}(T) \cup [T,+\infty)) \times (\mathbb{K}^n)^k$.

Ἔτσι συνεχίζοντας τήν διαδικασία τοῦ "Βήματος 1" καί λόγω τῆς συμπαγότητας τοῦ W, μετά πεπερασμένο ἀριθμό βημάτων, ἔστω r, ὁρίζονται τά σημεῖα $T_1, T_2, \ldots, T_r$ μέ $T_i = T_{i-1} + \delta_0$, $i = 1, 2, \ldots, r$ καί οἱ λύσεις $y_1, y_2, \ldots, y_r$ πού κάθε μιά εἶναι ἐπέκταση τῆς προηγούμενής της καί οἱ ἀκολουθίες $x_{1\nu}, x_{2\nu}, \ldots, x_{r\nu}$ κάθε μιά ὑπακολουθία τῆς προηγουμένης της ἔτσι, ὥστε νά ἰσχύει τό Q_{r-1} νά εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ W ὡς πρός τόν ὑποχῶρο $(\hat{E}(T) \cup [T, +\infty)) \times (\mathbb{K}^n)^k$ ἐνῶ τό σημεῖο $Q_r \in \hat{W}$ νά μήν εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο. Θέτοντας ἔτσι $y_\nu = z$, $x_{\lambda_\nu} = x_{r\nu}$ καί

$$\tau = \sup\{t > T : (t; z(t), \ldots, z(t)) \in W^0\}$$

ἔχομε τό συμπέρασμα τοῦ "Βήματος 2".

Βῆμα 3. Στό βῆμα αὐτό ὁλοκληρώνεται ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος, θεωρώντας μιά ἀκολουθία συμπαγῶν συνόλων W_ν ὑποσυνόλων τοῦ Ω_0 τέτοιων, ὥστε τά σύνολα

$$\{(t; \varphi(t), \ldots, \varphi(t)) : t \in \hat{E}(T)\} \quad \text{καί} \quad \{(t; \varphi_\nu(t), \ldots, \varphi_\nu(t)) : t \in \hat{E}(T)\}, \ \nu \in \mathbb{N}$$

νά ἀνήκουν στό ἐσωτερικό τοῦ W_1 ὡς πρός τόν ὑποχῶρο $(\hat{E}(T) \cup [T, +\infty)) \times (\mathbb{K}^n)^k$ καί ἀκόμη γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ τό σύνολο W_ν νά ἀνήκει στό ἐσωτερικό τοῦ συνόλου $W_{\nu+1}$ ὡς πρός τόν ἴδιο ὑποχῶρο. Στή συνέχεια χρησιμοποιώντας τό "Βῆμα 2" γιά τά παραπάνω σύνολα προχωροῦμε ὅπως ἀκριβῶς στήν [31]. ▲

4.2. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Ἡ συνθήκη συγκλίσεως (C) γιά τήν ἀκολουθία συναρτήσεων f_ν πού τίθεται στό παραπάνω θεώρημα μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ καί ἀπό τήν ἑξῆς ἰσοδύναμη συνθήκη

$$(C') \quad \lim \int_I \sup_{(x_1, \ldots, x_k) \in \Delta} |f_\nu(t; x_1, \ldots, x_k) - f(t; x_1, \ldots, x_k)| dt = 0$$

γιά κάθε συμπαγές ὀρθογώνιο $I\times\Delta$ ὑποσύνολο τοῦ Ω_0.

Πραγματικά· ἄν ληφθεῖ $K=I\times\Delta$ ἡ συνθήκη (C) προκύπτει ἀμέσως ἀπό τήν (C'). Γιά τό ἀντίστροφο παρατηροῦμε ὅτι λόγω τῆς συμπαγότητας τοῦ K μποροῦμε νά θεωρήσομε μιά πεπερασμένη κάλυψη τοῦ K ἀπό συμπαγῆ ὀρθογώνια $I_1\times\Delta_1,\dots,I_\mu\times\Delta_\mu$ πού περιέχονται στό Ω_0. Τότε ἐπειδή $pr_2K\subseteq\bigcup_{\nu=1}^{\mu}\Delta_\mu$ προφανῶς ἰσχύει

$$\sup_{(x_1,\dots,x_k)\in pr_2K}|f_\nu(t;x_1,\dots,x_k)-f(t;x_1,\dots,x_k)|\leqq$$
$$\leqq\sum_{i=1}^{\mu}\sup_{(x_1,\dots,x_k)\in\Delta_i}|f_\nu(t;x_1,\dots,x_k)-f(t;x_1,\dots,x_k)|$$

ὁπότε ἀπό τήν $pr_1K\subseteq\bigcup_{i=1}^{\mu}I_i$ προκύπτει

$$\int_{pr_1K}\sup_{(x_1,\dots,x_k)\in pr_2K}|f_\nu(t;x_1,\dots,x_k)-f(t;x_1,\dots,x_k)|dt\leqq$$
$$\leqq\sum_{i=1}^{\mu}\int_{I_i}\sup_{(x_1,\dots,x_k)\in\Delta_i}|f_\nu(t;x_1,\dots,x_k)-f(t;x_1,\dots,x_k)|dt.$$

Ἐπομένως καί ἡ συνθήκη (C) προκύπτει ἀμέσως ἀπό τήν (C').

Στήν εἰδική περίπτωση πού οἱ ἀκολουθίες τῶν ὁρισμάτων $\sigma_\nu^1,\dots,\sigma_\nu^k$ εἶναι ὅλες σταθερές τότε ἡ διαφορική ἐξίσωση (A_ν) γράφεται

$$(A_\nu')\qquad x'(t)=f_\nu(t;x[\sigma_1(t)],\dots,x[\sigma_k(t)]).$$

Ἐπίσης, ἄν τό σημεῖο $T\in pr_1\Omega$ εἶναι κοινό σταθερό σημεῖο τῶν ὑστερήσεων $\sigma_1,\dots,\sigma_k$, δηλαδή $T\in\mathcal{K}$, τότε μποροῦμε νά θεωροῦμε τά προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν

$$(A)-(T,\xi)\quad\text{καί}\quad(A_\nu')-(T,\xi_\nu),\ \nu\in\mathbb{N}$$

ὅπου $\xi \in \mathbb{K}^n$ καί ξ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι μιά ἀκολουθία στό $\mathbb{K}^n$.
Εἶναι προφανές ὅτι, ἄν ἰσχύει ἐπί πλέον $\lim \xi_\nu = \xi$, τότε ἐφαρμόζεται τό προηγούμενο θεώρημα γιά αὐτά τά προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν.

Στήν περίπτωση πού περιγράψαμε παραπάνω, δηλαδή πού τό T εἶναι κοινό σταθερό σημεῖο τῶν ὁρισμάτων, μπορεῖ κανείς νά δώσει καί ἕνα ἄλλο συμπέρασμα ἐξαρτήσεως τῶν λύσεων, στό ὁποῖο ἐμφανίζονται μεταβολές τοῦ κοινοῦ σταθεροῦ σημείου.

Ἔστω λοιπόν Ω ἕνα ὑποσύνολο τοῦ χώρου $\mathbb{R} \times (\mathbb{K}^n)^k$ καί ω_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μιά ἀκολουθία στό $\mathcal{K}$ μέ $\lim \omega_\nu = \omega$. Τό ω εἶναι φανερό ὅτι ἀνήκει καί αὐτό στό σύνολο $\mathcal{K}$. Θεωροῦμε ἀκόμη μιά ἀκολουθία ξ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ στό $\mathbb{K}^n$ μέ $\lim \xi_\nu = \xi \in \mathbb{K}^n$ καί ὑποθέτομε ὅτι

$$(\omega;\xi,\ldots,\xi) \in \Omega \quad \text{καί} \quad (\omega_\nu;\xi_\nu,\ldots,\xi_\nu) \in \Omega \quad \text{γιά κάθε } \nu \in \mathbb{N}.$$

Ἔστω ἀκόμη ὅτι τά ὁρίσματα σ_i, εἶναι τέτοια, ὥστε γιά κάθε $i=1,2,\ldots,k$ καί κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ νά ἰσχύει

$$\sigma_i(t) \geqq \omega_\nu \quad \text{γιά κάθε} \quad t \geqq \omega_\nu.$$

4.3. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἔστω τό σύνολο $\Omega_0 = \{(t,x_1,\ldots,x_k) \in \Omega : t \in [\alpha,+\infty)\}$ εἶναι ἀνοικτό ὡς πρός τόν ὑποχῶρο $[\alpha,+\infty) \times (\mathbb{K}^n)^k$, ὅπου ὁ ἀριθμός α εἶναι τέτοιος ὥστε τό σύνολο $\{\nu \in \mathbb{N} : a \leqq \omega_\nu\}$ νά εἶναι ἀπέραντο. Ἔστω ἀκόμη ὅτι ἡ ἀκολουθία συναρτήσεων f_ν στό $Car_{loc}(\Omega)$ ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη (C) τοῦ Θεωρήματος 3.1.

Ἄν x_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, $x_\nu = x_\nu(\cdot;\omega_\nu,\xi_\nu)$, εἶναι μιά ἀκολουθία μή ἐπεκτασίμων λύσεων τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A'_ν)-(ω_ν,ξ_ν), τότε ὑπάρχει μή ἐπεκτάσιμη λύση $x = x(\cdot;\omega,\xi)$ τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(ω,ξ) καί μιά ὑπακολουθία x_{k_ν} τῆς x_ν τέτοια ὥστε νά ἰσχύει $\lim x_{k_\nu} = x$ σχεδόν τελικά ὁμοιόμορφα πάνω στό $\mathrm{Dom}^+_{\omega_m} x = [\omega_m, +\infty) \cap \mathrm{Dom}\, x$ τελικά γιά ὅλους τούς δεῖκτες $m \in \mathbb{N}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Στήν περίπτωση πού τό σύνολο $\{\nu \in \mathbb{N} : \omega_\nu \leq \omega\}$ εἶναι ἀπέραντο μποροῦμε νά θεωρήσομε μιά ὑπακολουθία ω_{λ_ν} τῆς ω_ν τέτοια ὥστε νά ἰσχύει

$$\omega_{\lambda_\nu} \leq \omega \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Μάλιστα, ἐπειδή $\lim \omega_{\lambda_\nu} = \omega$, χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας, ὑποθέτομε ὅτι ἰσχύει

$$\omega \in \mathrm{Dom}\, x_{\lambda_\nu} \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Ἔτσι ἐφαρμόζοντας τό Θεώρημα 4.1 γιά τήν ἀκολουθία x_{λ_ν} μέ $T = \omega$ καί $\hat{E}(T) = \{\omega\}$ παίρνομε τό συμπέρασμα τοῦ πορίσματος.

Ἀπομένει λοιπόν ἡ περίπτωση πού τό σύνολο $\{\nu \in \mathbb{N} : \omega_\nu \leq \omega\}$ εἶναι πεπερασμένο, ὁπότε, χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας, ὑποθέτομε ὅτι

$$\omega_\nu > \omega \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N}$$

καί προχωροῦμε τήν ἀπόδειξη σέ δύο βήματα.

<u>Βῆμα 1</u>. Στό βῆμα αὐτό θά ἀποδείξομε ὅτι ὑπάρχει $\delta_0 > 0$ καί $n \in \mathbb{N}$ τέτοια, ὥστε γιά κάθε $m \geq n$ ὑπάρχει λύση y τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (A) πά-

νω στό διάστημα $[\omega_m,\omega+\delta_0]$ καί ὑπακολουθία x_{r_ν} τῆς x_ν τέτοιες, ὥστε νά ἰσχύει

$$\lim x_{r_\nu} = y \text{ ὁμοιόμορφα πάνω στό } [\omega_m,\omega+\delta_0].$$

Πράγματι· χωρίς, βλάβη τῆς γενικότητας, ὑποθέτομε ὅτι $\alpha \leqq \omega_\nu$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ καί θεωροῦμε ἕνα συμπαγές σύνολο W, ὑποσύνολο τοῦ Ω_0, τέτοιο, ὥστε τά σημεῖα $(\omega,\xi,\dots,\xi)$ καί $(\omega_\nu,\xi_\nu,\dots,\xi_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ νά εἶναι ἐσωτερικά του σημεῖα ὡς πρός τόν ὑποχῶρο $[\alpha,+\infty)\times(\mathbb{K}^n)^k$. Δυνάμει τῆς Προτάσεως 3.7, ὑπάρχει ἀριθμός $\delta>0$ (πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό W) τέτοιο, ὥστε

$$[\omega,\omega+\delta]\subseteq \mathrm{Dom}\,\mathcal{X}(\omega,\xi) \quad \text{καί} \quad [\omega_\nu,\omega_\nu+\delta]\subseteq \mathrm{Dom}\,\mathcal{X}(\omega_\nu,\xi_\nu),\ \nu\in\mathbb{N}.$$

Ἀκόμη τό W μπορεῖ νά θεωρηθεῖ τέτοιο ὥστε

$$\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} \{(t;x_\nu(t),\dots,x_\nu(t)) : t\in[\omega_\nu,\omega+\delta]\}\subseteq W.$$

Ἔστω τώρα μιά συνάρτηση $M\in L(pr_1 W,\mathbb{R})$ τέτοια ὥστε ἡ $M/2$ νά χαρακτηρίζει τήν $f\in Car_{loc}(W)$ καί ἀκόμη ἕνας θετικός ἀριθμός δ_0 μέ $\delta_0<\delta$. Θεωροῦμε λοιπόν ἕνα φυσικό ἀριθμό ν_0 τέτοιον, ὥστε γιά κάθε $\nu\geqq\nu_0$ νά ἰσχύει $\omega_\nu<\omega+\delta_0$ καί, ὅπως στήν ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 1.3, παίρνομε ὅτι ὅλες οἱ λύσεις x_ν μέ $\nu\geqq\nu_0$ ὁρίζονται μέχρι τό δεξιά σύνορο τοῦ ὀρθογωνίου

$$[\omega,\omega+\delta_0]\times\{(x_1,\dots,x_k)\in(\mathbb{K}^n)^k : (\forall i=1,2,\dots,k)\,|x_i-\xi|\leqq 3\vartheta\}\subseteq W$$

ὅπου

$$\vartheta=\frac{1}{2}\int_{\omega}^{\omega+\delta_0} M(s)ds.$$

'Ακόμη γιά κάθε $t \in [\omega_\nu, \omega+\delta_0]$ ἔχομε

$$|x_\nu(t)-\xi_\nu| \leqq \left|\int_{\omega_\nu}^{t} (s;x_\nu[\sigma_1(s)],\ldots,x_\nu[\sigma_k(s)])ds\right| \leqq \int_{\omega_\nu}^{t} M(s)ds \leqq 2\vartheta$$

καί ἐπομένως ὑπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ὥστε γιά κάθε $\nu \geqq n$ νά ἰσχύει

$$|x_\nu(t)-\xi_\nu| \leqq |x_\nu(t)-\xi_\nu| + |\xi_\nu-\xi| \leqq 2\vartheta+\vartheta = 3\vartheta.$$

Θεωροῦμε τώρα τυχόντα δείκτη $m \geqq n$, ὁπότε, ἐπειδή $\lim \omega_\nu = \omega$, τό σύνολο $\{\nu \in \mathbb{N} : [\omega_m, \omega+\delta_0] \subseteq \mathrm{Dom}\, x_\nu\}$ εἶναι ἀπέραντο καί ἐπομένως μποροῦμε νά θεωρήσομε μιά ὑπακολουθία x_{μ_ν} τῆς x_ν τέτοια, ὥστε νά ἰσχύει

$$\omega_{\mu_\nu} \leqq \omega_m \quad \text{γιά ὅλους τούς δεῖκτες } \nu \in \mathbb{N}.$$

Ἔτσι οἱ συναρτήσεις

$$y_\nu(t) = \begin{cases} x_{\mu_\nu}(\omega_m), & \text{ἄν } t \in [\omega, \omega_m] \\ \\ x_{\mu_\nu}(t), & \text{ἄν } t \in [\omega_m, \omega+\delta_0] \end{cases}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

εἶναι ὁμοιόμορφα φραγμένες καί ἀκόμη γιά κάθε t_1, t_2 στό $[\omega_m, \omega+\delta_0]$ ἰσχύει

$$|y_\nu(t_1)-y_\nu(t_2)| \leqq \left|\int_{t_1}^{t_2} M(s)ds\right|,$$

δηλαδή οἱ συναρτήσεις y_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι ἰσοσυνεχεῖς πάνω στό διάστημα $[\omega_m, \omega+\delta_0]$. Ἑπομένως ἀπό τό θεώρημα τοῦ Ascoli, συμπεραίνομε ὅτι ὑπάρχει ὑπακολουθία y_{r_ν} τῆς y_ν καί μιά συνάρτηση $y \in C([\omega_m, \omega+\delta_0], \mathbb{K}^n)$ μέ

$$(1) \qquad \lim y_{r_\nu} = y \quad \text{ὁμοιόμορφα πάνω στό } [\omega_m, \omega+\delta_0].$$

'Αλλά γιά κάθε $t \in [\omega_m, \omega+\delta_0]$ ἔχομε

$$y_{r_\nu}(t) = \xi_{r_\nu} + \int_{\omega}^{t} f_{r_\nu}(s; y_{r_\nu}[\sigma_1(s)], \ldots, y_{r_\nu}[\sigma_k(s)])ds + \int_{\omega_{r_\nu}}^{\omega} f_{r_\nu}(s; y_{r_\nu}[\sigma_1(s)], \ldots$$
$$\ldots, y_{r_\nu}[\sigma_k(s)])ds,$$

ὅπου

$$\left|\int_{\omega_\nu}^{\omega} f_{r_\nu}(s; y_{r_\nu}[\sigma_1(s)], \ldots, y_{r_\nu}[\sigma_k(s)])ds\right| \leq \left|\int_{\omega_\nu}^{\omega} M(s)ds\right| \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$$

καί ἑπομένως, λόγω τῆς (1), ἐφαρμόζοντας τό θεώρημα συγκλίσεως τοῦ Lebesgue, παίρνομε

$$y(t) = \zeta + \int_{\omega}^{t} f(s; y[\sigma_1(s)], \ldots, y[\sigma_k(s)])ds, \quad t \in [\omega_m, \delta_0].$$

Δηλαδή ἡ συνάρτηση y εἶναι λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (Α) πάνω στό διάστημα $[\omega_m, \omega+\delta_0]$.

Βῆμα 2. Ὑποθέτομε χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας ὅτι ἡ ἀκολουθία ω_ν εἶναι φθίνουσα. Ἔτσι ἐφαρμόζοντας τό "Βῆμα 1", παίρνομε ὅτι ὑπάρχει ὑπακολουθία $x_{1\nu}$ τῆς x_ν πού συγκλίνει ὁμοιόμορφα σέ μιά συνάρτηση-λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (Α) πάνω στό διάστημα $[\omega_1, \omega+\delta_0]$. Ἐπαναλαμβάνοντας τόν ἴδιο συλλογισμό ἀποδεικνύομε ὅτι ὑπάρχει μιά ὑπακολουθία $x_{2\nu}$ τῆς $x_{1\nu}$ πού συγκλίνει ὁμοιόμορφα σέ μιά συνάρτηση-λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (Α) πάνω στό διάστημα $[\omega_2, \omega+\delta_0]$ καί συνεχίζοντας μέ τόν ἴδιο τρόπο ὁρίζομε ἐπαγωγικά τίς ἀκολουθίες:

$$\begin{array}{l} x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ldots\ldots,x_{1\nu},\ldots;\ [\omega_1,\omega+\delta_0] \\ x_{21},\ x_{22},\ x_{23},\ldots\ldots,x_{2\nu},\ldots;\ [\omega_2,\omega+\delta_0] \\ x_{31},\ x_{32},\ x_{33},\ldots\ldots,x_{3\nu},\ldots;\ [\omega_3,\omega+\delta_0] \\ \cdot \\ x_{\nu 1},\ x_{\nu 2},\ x_{\nu 3},\ldots\ldots,x_{\nu\nu},\ldots;\ [\omega_\nu,\omega+\delta_0] \end{array}$$

ὅπου κάθε μιά ἀπό τίς παραπάνω ἀκολουθίες εἶναι ὑπακολουθία τῆς προηγούμενής της καί συγκλίνει ὁμοιόμορφα πάνω στό διάστημα πού εἶναι σημειωμένο δίπλα της.

Εἶναι τώρα προφανές ὅτι γιά κάθε $t\in[\omega,\omega+\delta_0]$ ἡ διαγώνιος ἀκολουθία x_{λ_ν}, $x_{\lambda_\nu}=x_{\nu\nu}$ ἔχει τελικά ἔννοια καί συγκλίνει σχεδόν ὁμοιόμορφα πρός μιά συνάρτηση y, πού εἶναι λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (A) πάνω στό διάστημα $[\omega,\omega+\delta_0]$, ἄρα καί τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(ω,ξ).

Πράγματι· ἀπό τή σχέση

$$y_{\lambda_\nu}(t)=\xi_{\lambda_\nu}+\int_{\omega_{\lambda_\nu}}^{t} f_{\lambda_\nu}(s;y_{\lambda_\nu}[\sigma_1(s)],\ldots,y_{\lambda_\nu}[\sigma_k(s)])dt,\ t\in[\omega_\nu,\omega+\delta_0]$$

μεταβαίνοντας στό ὅριο, ὅπως καί στό "Βῆμα 1" ἔχομε

$$y(t)=\xi+\int_{\omega}^{t} f(s;y[\sigma_1(s)],\ldots,y[\sigma_k(s)])ds,\quad t\in[\omega,\omega+\delta_0]$$

ἀφοῦ $\lim\omega_\nu=\omega$.

Ἔτσι ἐφαρμόζοντας τό Θεώρημα 4.1 γιά $T=\omega+\delta_0$ καί $\hat{E}(T)=[\omega_{\nu_1},\omega+\delta_0]$, ὅπου $\omega_{\nu_1}\leqq\omega+\delta_0$ παίρνομε ὅτι ὑπάρχει ὑπακολουθία x_{k_ν} τῆς x_{λ_ν} ἄρα καί τῆς x_ν καί μή ἐπεκτάσιμη λύση z τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-$(\omega_{\nu_1},y(\omega_{\nu_1}))$

τέτοια, ὥστε

$$\lim x_{k_\nu} = z \quad \text{τελικά σχεδόν ὁμοιόμορφα πάνω στό Dom}\, \mathbf{z}.$$

Τέλος, εἶναι προφανές ὅτι ἡ συνάρτηση $x = y\omega_{\nu_1} z$ εἶναι λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (A)-(ω,ξ) πού ἱκανοποιεῖ τό συμπέρασμα τοῦ πορίσματος. ▲

4.4. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Ἄν τό σύνολο $\{\nu \in \mathbb{N} : \omega_\nu \leqq \omega\}$ εἶναι ἀπέραντο, τότε, χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας, μποροῦμε νά ὑποθέσομε ὅτι ἰσχύει $\omega_\nu \leqq \omega$ γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ καί ἔτσι ἀπό τό παραπάνω πόρισμα μποροῦμε νά πάρομε ὅτι ἡ σύγκλιση $\lim \mathbf{x}_{k_\nu} = \mathbf{x}$ ἰσχύει σχεδόν τελικά ὁμοιόμορφα πάνω σέ ὁλόκληρο τό Dom $\mathbf{x}$.

4.5. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Ἄς ὑποθέσομε τώρα ὅτι ἡ ἀκολουθία ω_ν εἶναι τέτοια ὥστε $\omega_\nu \geqq \omega$ τελικά γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ καί ἀκόμη ὅτι ὑπάρχει ἀκολουθία λύσεων y_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, μέ $y_\nu = y_\nu(\cdot;\omega,\eta_\nu)$, τῶν προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν (A_ν')-(ω,η_ν) τέτοια, ὥστε νά ἰσχύει τελικά γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

$$y_\nu(\omega_\nu) = \xi_\nu.$$

Τότε ἔχομε

$$\xi_\nu - \xi = \eta_\nu - \xi + \int_\omega^{\omega_\nu} f_\nu(t; y_\nu[\sigma_1(t)], \ldots, y_\nu[\sigma_k(t)])dt.$$

Ἀπό τό γεγονός ὅμως ὅτι $\lim \omega_\nu = \omega$ μποροῦμε νά ἔχομε τελικά γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, ὅπως καί στήν ἀπόδειξη τοῦ "Βήματος 1" τοῦ Θεωρήματος 4.1, ὅτι ἰσχύει

$$\left|\int_{\omega}^{\omega_\nu} f_\nu(t;y_\nu[\sigma_1(t)],\ldots,y_\nu[\sigma_k(t)])dt\right| \leqq \int_{\omega}^{\omega_\nu} M(t)dt, \quad t\in[\omega,\omega_\nu],$$

ὅπου $M\in L(pr_1\Omega,\mathbb{R})$ καί $M/2$ χαρακτηρίζει τήν $f\in Car(W)$ μέ W κάποιο συμπαγές ὑποσύνολο W τοῦ συνόλου $\Omega_0=\{(t;x_1,\ldots,x_k)\in\Omega : t\geqq\omega\}$ πού περιέχει τελικά γιά κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ τά σύνολα

$$\{(t;y_\nu(t),\ldots,y_\nu(t)) : t\in[\omega,\omega_\nu]\}.$$

Ἔτσι ἔχομε

$$\lim_\nu \int_{\omega}^{\omega_\nu} f(t;y_\nu[\sigma_1(t)],\ldots,y_\nu[\sigma_k(t)])dt = 0$$

καί ἑπομένως

$$\lim_\nu \eta_\nu = \xi .$$

θεωρώντας τώρα τήν ἀκολουθία συναρτήσεων $\{\upsilon_\nu\}$, ὅπου

$$\upsilon_\nu = y_\nu \omega_\nu x_\nu ,$$

ἔχομε ὅτι τό συμπέρασμα τοῦ θεωρήματος 4.1 ἰσχύει γιά τήν ἀκολουθία υ_ν.

Εἰδικά στήν περίπτωση τῶν συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων, ὅπου τά ὁρίσματα εἶναι οἱ ταυτοτικές συναρτήσεις, κάθε πραγματικός ἀριθμός μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σταθερό τους σημεῖο. Ἀκόμη κάθε (δεξιά) λύση x_ν μέ ἀρχικές τιμές (ω_ν,ξ_ν) ἐπεκτείνεται καί ἀριστερά τοῦ σημείου ω_ν καί μάλιστα ἐπειδή $\lim\omega_\nu=\omega$, $\omega\in\mathrm{Dom}\,x_\nu$ τελικά γιά ὅλους τούς δεῖκτες $\nu\in\mathbb{N}$. Ἔτσι δυνάμει τῶν ὅσων παρατηρήσαμε παραπάνω στό Πόρισμα 4.3, ἡ σύγκλιση $\lim x_\nu = x$ ἐπιτυγχάνεται γιά ὁλόκληρο τό $\mathrm{Dom}\,x$ καί συνεπῶς τό Πόρισμα 4.3 μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς γενίκευση τοῦ γνωστοῦ θεωρήματος ἐξαρτήσεως τῶν λύσεων πού ἰσχύει γιά τίς συνήθεις διαφορικές ἐξισώσεις (Βλ. Hartman [15]).

0960000478

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΣΤΟ $-\infty$

1. Εἰσαγωγή.

Ἔστω τό κατά Καραθεοδωρῆ ὑστερημένο διαφορικό σύστημα

$$\text{(B)} \qquad x'(t) = \sum_{i=1}^{\ell} A_i(t) f_i(x[\sigma_1(t)],\dots,x[\sigma_k(t)]), \quad t \leq t_0,$$

ὅπου:

(i) σ_i, $i=1,2,\dots,k$ ὑστερημένα ὁρίσματα.

(ii) A_i, $i=1,2,\dots,\ell$ εἶναι $n\times n$ πίνακες μέ στοιχεῖα ἀπό τό σῶμα $\mathbb{K}$ καί μετρήσιμοι στό διάστημα $(-\infty,t_0]$.

(iii) f_i, $i=1,2,\dots,\ell$ εἶναι συνεχεῖς διανυσματικές συναρτήσεις ὁρισμένες στό χῶρο $(\mathbb{K}^n)^k$.

Στό κεφάλαιο αὐτό θά μελετηθεῖ ἡ ὕπαρξη καί τό μονοσήμαντο γιά τίς λύσεις τοῦ προβλήματος ὁριακῶν τιμῶν (B)-$(-\infty,\xi)$, ὅπου $\xi\in\mathbb{K}^n$, δηλαδή, κάτω ἀπό κατάλληλες ὑποθέσεις, θά ἀποδειχθεῖ ἀφ'ἑνός ὅτι ὑπάρχει λύση x τοῦ διαφορικοῦ συστήματος (B) πού ἱκανοποιεῖ τή συνθήκη

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \xi,$$

ἀφ'ἑτέρου ὅτι ἡ λύση αὐτή εἶναι καί μονοσήμαντα ὁρισμένη.

2. Ὕπαρξη λύσεως τοῦ προβλήματος ὁριακῶν τιμῶν (B)-(-∞,ξ)

Ἡ ἀποδεικτική μέθοδος γιά τήν ὕπαρξη λύσεως στηρίζεται στό γνωστό θεώρημα σταθεροῦ σημείου τοῦ Schauder [34].

2.1.ΘΕΩΡΗΜΑ (Schauder). Ἔστω E ἕνας χῶρος Banach καί X ἕνα μή κενό κυρτό καί κλειστό ὑποσύνολο τοῦ E. Ἐάν S εἶναι συνεχής συνάρτηση τοῦ X στόν ἑαυτό του καί τό σύνολο SX εἶναι σχετικά συμπαγές, τότε ἡ συνάρτηση S ἔχει τουλάχιστο ἕνα σταθερό σημεῖο, δηλαδή ὑπάρχει $x\in X$ τέτοιο ὥστε $x=Sx$.

Ὁ συγκεκριμένος χῶρος τοῦ Banach στόν ὁποῖο θά ἀναφερθοῦμε εἶναι ὁ χῶρος $B((-\infty,T],\mathbb{K}^n)$, ὅλων τῶν συνεχῶν καί φραγμένων διανυσματικῶν συναρτήσεων, ὁρισμένων στό διάστημα $(-\infty,T]$ καί μέ τιμές στό $\mathbb{K}^n$, ἐφοδιασμένος μέ τήν συνήθη sup-norm $\|\ \|$. Ἀκόμη θά χρειαστοῦμε ἕνα "κριτήριο συμπαγότητας" γιά ὑποσύνολα τοῦ χώρου $B((-\infty,T],\mathbb{K}^n)$, πού προκύπτει ἀπό τό γνωστό θεώρημα τῶν Arzelà - Ascoli καί δόθηκε ἀπό τόν Staikos [35]. Τό κριτήριο αὐτό στηρίζεται καί στήν ἔννοια τῆς ἰσοσυγκλίσεως στό $-\infty$ γιά ἕνα ὑποσύνολο $\mathcal{F}$ τοῦ χώρου $B((-\infty,T],\mathbb{K}^n)$.

Τό σύνολο $\mathcal{F}$ ὀνομάζεται *ἰσοσυγκλίνον στό* $-\infty$ τότε καί μόνο τότε, ἄν ὅλα τά στοιχεῖα του (συναρτήσεις) συγκλίνουν ἐν $\mathbb{K}^n$ στό σημεῖο $-\infty$ καί ἐπίπλέον γιά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει ἕνα $T'\leq T$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε $f\in\mathcal{F}$ νά ἰσχύει

$$\| f(t) - \lim_{s\to-\infty} f(s)\| \leq \varepsilon \quad \text{γιά κάθε} \quad t \leq T'.$$

2.2. ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΜΠΑΓΟΤΗΤΑΣ. Ἔστω $\mathcal{F}$ ἕνα ἰσοσυνεχές καί ὁμοιόμορφα φραγμένο ὑποσύνολο τοῦ χώρου $B((-\infty,T],\mathbb{K}^n)$. Ἄν τό $\mathcal{F}$ εἶναι ἰσοσυγκλίνον στό $-\infty$, τότε εἶναι καί σχετικά συμπαγές.

2.3. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἄν ἰσχύει ἡ συνθήκη

$$\text{(C)} \qquad \int_{-\infty} \sum_{i=1}^{\ell} \| A_i(t)\| \, dt < +\infty,$$

τότε, γιά κάθε $\xi \in \mathbb{K}^n$, ὑπάρχει λύση x τοῦ διαφορικοῦ συστήματος (B) τέτοια, ὥστε

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \xi .$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ἔστω $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{K}^n$. Θέτομε τότε

$$M = \max_{(z_1,\dots,z_k)\in K^n} \{|f_1(z_1,\dots,z_k)|,\dots,|f_\ell(z_1,\dots,z_k)|\},$$

ὅπου

$$K = \mathop{X}_{i=1}^{n} B(\xi_i,r) \quad \text{καί} \quad B(\xi_i,r) = \{w \in \mathbb{K} : |w-\xi_i| \leq r\}$$

γιά κάποιο $r > 0$.

Χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας, ὑποθέτομε ὅτι $M > 0$ καί ἐκλέγομε ἕνα $T \leq t_0$ τέτοιο, ὥστε

$$\text{(1)} \qquad \int_{-\infty}^{T} \sum_{i=1}^{\ell} \| A_i(t)\| \, dt \leq \frac{r}{2M} .$$

Στή συνέχεια θεωροῦμε τόν χῶρο Banach $E = B((-\infty,T],\mathbb{K}^n)$ καί ἀκόμη ἕνα ὑποσύνολο X τοῦ E,

$$X = \{x \in E : (\text{γιά κάθε } t \leq T)\ |x(t)-\xi| \leq \frac{r}{2}\}.$$

Τό σύνολο X εἶναι φανερό ὅτι εἶναι διάφορο τοῦ κενοῦ καί ἀκόμη κυρτό καί κλειστό.

Προκειμένου νά ὁρίσομε τώρα μιά ἀπεικόνιση S, πού νά ἱκανοποιεῖ τίς ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος τοῦ Schauder, παρατηροῦμε ὅτι γιά ὁποιαδήποτε συνάρτηση $x = (x_1,\ldots,x_n) \in X$ καί γιά κάθε $t \leq T$ ἰσχύει

$$|x_i(t)-\xi_i| \leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i(t)-\xi| = |x(t)-\xi| \leq \frac{r}{2} < r.$$

Δηλαδή γιά κάθε $t \leq T$ ἰσχύει $x(t) \in K$ καί ἐπομένως $x[\sigma_j(t)] \in K$, $i=1,2,\ldots,k$. Ἄρα

$$(2) \quad |f_i(x[\sigma_1(t)],\ldots,x[\sigma_k(t)])| \leq M \quad \text{γιά } t \leq T \text{ καί } i = 1,2,\ldots,k$$

καί ἐπομένως, λόγω καί τῆς συνθήκης (C), τό ὁλοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{t} A_i(s) f_i(x[\sigma_1(t)],\ldots,x[\sigma_k(t)])ds, \quad i = 1,2,\ldots,\ell$$

ὑπάρχει στό $\mathbb{K}^n$. Ἔτσι ὁ τύπος

$$y(t) = \xi + \sum_{i=1}^{\ell} \int_{-\infty}^{t} A_i(s) f_i(x[\sigma_1(s)],\ldots,x[\sigma_k(s)])ds$$

ὁρίζει μιά συνάρτηση $S : X \to E$, γιά τήν ὁποία ἰσχύουν τά παρακάτω:

α) $SX \subseteq X$.

Πράγματι παίρνοντας ὑπ'ὄψη τά (1) καί (2), γιά κάθε συνάρτηση $x \in X$ καί γιά κάθε $t \leq T$ ἔχομε

$$|(Sx)(t)-\xi| = \left|\sum_{i=1}^{\ell}\int_{-\infty}^{t} A_i(s)f_i(x[\sigma_1(s)],\ldots,x[\sigma_k(s)])ds\right|$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{\ell}\int_{-\infty}^{t} |A_i(s)f_i(x[\sigma_1(s)],\ldots,x[\sigma_k(s)])ds|$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{\ell}\int_{-\infty}^{t} \|A_i(s)\|\,|f_i(x[\sigma_1(s)],\ldots,x[\sigma_k(s)])ds$$

$$\leqq M\int_{-\infty}^{T} \|A_i(s)\|\,ds \leqq M\,\frac{r}{2M} = \frac{r}{2}\,.$$

β) <u>Τό σύνολο</u> SX <u>εἶναι σχετικά συμπαγές</u>.

Παρόμοια μέ τό α) προκύπτει ὅτι γιά κάθε συνάρτηση $x \in X$ καί γιά κάθε $t \leqq T$ ἰσχύει

$$|(Sx)(t)| \leqq |\xi| + \frac{r}{2}$$

ἄρα καί

$$\|Sx\| \leqq |\xi| + \frac{r}{2}\,.$$

Ἑπομένως τό σύνολο SX εἶναι ἕνα ὁμοιόμορφα φραγμένο ὑποσύνολο τοῦ χώρου E. Ἀκόμη ἔχομε

$$|(Sx)(t)-\xi| \leqq M\sum_{i=1}^{\ell}\int_{-\infty}^{t} \|A_i(s)\|ds, \quad t \leqq T$$

πού ἀποδεικνύει ὅτι τό σύνολο SX εἶναι ἰσοσυγκλίνον στό $-\infty$. Τέλος τό σύνολο SX εἶναι καί ἰσοσυνεχές, ἀφοῦ

$$|(Sx)(t_1)-(Sx)(t_2)| \leqq M\sum_{i=1}^{\ell}\int_{t_1}^{t_2} \|A_i(s)\|\,ds, \quad t_1 \leqq t_2 \leqq T.$$

"Αρα, μέ βάση τό "κριτήριο συμπαγότητας", πού ἀναφέραμε παραπάνω, συμπεραίνομε ὅτι τό σύνολο SX εἶναι σχετικά συμπαγές.

γ) Ἡ συνάρτηση S εἶναι συνεχής.

"Εστω $x \in X$ καί x_ν μιά τυχοῦσα ἀκολουθία στό X μέ $\| \ \|-\lim x_\nu = x$. Τότε ἔχομε

$$\lim x_\nu[\sigma_j(t)] = x[\sigma_j(t)], \quad t \leqq T \quad \text{καί} \quad j = 1,2,\ldots,k.$$

Ἀκόμη λόγω τῆς (2) γιά ὅλους τούς δεῖκτες ν καί γιά κάθε $t \leqq T$ ἔχομε

$$\sum_{i=1}^{\ell} |A_i(t)f_i(x_\nu[\sigma_1(t)],\ldots,x_\nu[\sigma_k(t)])| \leqq M \sum_{i=1}^{\ell} \| A_i(t) \| .$$

"Αρα, ἐφαρμόζοντας τό θεώρημα συγκλίσεως τοῦ Lebesgue, παίρνομε

$$\lim_\nu \sum_{i=1}^{\ell} \int_{-\infty}^{t} A_i(s)f_i(x_\nu[\sigma_1(s)],\ldots,x_\nu[\sigma_k(s)])ds =$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \int_{-\infty}^{t} A_i(s)f_i(x[\sigma_1(s)],\ldots,x[\sigma_k(s)])ds, \quad t \leqq T.$$

"Ετσι, γιά κάθε $t \leqq T$ ἔχομε τήν κατά σημεῖο σύγκλιση

$$\lim_\nu (Sx_\nu)(t) = (Sx)(t).$$

Ἀπομένει ν'ἀποδείξομε ὅτι

$$\| \ \|-\lim Sx_\nu = Sx .$$

Γιά τό σκοπό αὐτό θεωροῦμε τυχοῦσα ὑπακολουθία u_μ τῆς Sx_ν. Λόγω τῆς σχετικῆς συμπαγότητας τοῦ SX, ὑπάρχει ὑπακολουθία υ_λ τῆς u_μ καί $y \in E$ τέτοια ὥστε

$$\|\ \|-\lim \upsilon_\lambda = y.$$

'Αφοῦ ἡ ὁμοιόμορφη σύγκλιση συνεπάγεται τήν σύγκλιση κατά σημεῖο πρός τήν ἴδια ὁριακή συνάρτηση, ἔχομε

$$y = Sx.$$

'Αποδείξαμε λοιπόν ὅτι ἡ ἀπεικόνιση S ἱκανοποιεῖ τίς ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος τοῦ Schauder καί ἐπομένως ὑπάρχει συνάρτηση $x \in X$ μέ $x = Sx$, δηλαδή

$$x(t) = \xi + \sum_{i=1}^{\ell} \int_{-\infty}^{t} A_i(s) f_i(x[\sigma_1(s)],\ldots,x[\sigma_k(s)])ds, \quad t \leqq T.$$

"Αρα ἡ x εἶναι μιά λύση τοῦ προβλήματος ὁριακῶν τιμῶν (B)-$(-\infty,\xi)$ πάνω στό διάστημα $(-\infty,T]$.

2.4. ΣΗΜΕΙΩΣΗ. Ἡ ὕπαρξη λύσεως ἑνός προβλήματος ὁριακῶν τιμῶν εἶναι πρόβλημα στενά συνδεδεμένο μέ ἐκεῖνο τῆς ἀσυμπτωτικῆς ἰσορροπίας (asymptotic equilibrium). Μεταξύ πολλῶν ἐρευνητῶν πού ἀσχολήθηκαν μέ τό πρόβλημα αὐτό ἀναφέρομε τούς Hallam, Ladas and Lakshmikantham [14], Ladas and Lakshmikantham [23] καί A.R. Mitchell and R.W. Mitchell [26]. 'Εξ ἄλλου ὁ Hallam στήν [13] μελετᾶ ἕνα πρόβλημα ὁριακῶν τιμῶν γιά συνήθεις διαφορικές ἐξισώσεις χρησιμοποιώντας μιά ἀρχή συγκρίσεως.

3. <u>Μονοσήμαντο τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος ὁριακῶν τιμῶν</u> (B)-$(-\infty,\xi)$

Στό προηγούμενο ἐδάφιο εἴδαμε ὅτι κάτω ἀπό τήν συνθήκη (C) τό πρόβλημα όριακῶν τιμῶν (B)-(-∞,ξ), δηλαδή τό πρόβλημα

$$x'(t) = \sum_{i=1}^{\ell} A_i(t) f_i(x[\sigma_1(t)],\ldots,x[\sigma_k(t)], \quad t \leqq t_0$$

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \xi$$

ἔχει λύση. Τό μονοσήμαντο τῆς λύσεως ἐξασφαλίζεται ἀπό μιά συνθήκη τοῦ Lipschitz γιά τίς συναρτήσεις f_i, $i = 1,2,\ldots,\ell$. Συγκεκριμένα ἰσχύει τό θεώρημα:

3.1. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἄν ἰσχύει ἡ συνθήκη (C) καί γιά ὁποιοδήποτε φραγμένο ὑποσύνολο B τοῦ χώρου $(\mathbb{K}^n)^k$ ὑπάρχουν σταθερές $L_i(B)$, $i = 1,2,\ldots,\ell$ τέτοιες, ὥστε γιά κάθε $(x_1,\ldots,x_k)$, $(y_1,\ldots,y_k)$ στό B νά ἰσχύει

$$(C_1) \quad |f_i(x_1,\ldots,x_k)-f_i(y_1,\ldots,y_k)| \leqq L_i(B) \sum_{j=1}^{k} |x_j-y_j|, \quad i = 1,2,\ldots,\ell$$

τότε τό πρόβλημα ὁριακῶν τιμῶν (B)-(-∞,ξ) ἔχει ἀκριβῶς μιά λύση πάνω σ'ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς (-∞,T].

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ἔστω ὅτι τό πρόβλημα ἔχει τίς λύσεις x καί y πού ὁρίζονται τουλάχιστο στό διάστημα (-∞,τ), $t \leqq t_0$. Τότε λόγω τῆς σχέσεως

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} y(t) = \xi,$$

ἄν θεωρήσομε ἕνα $\varepsilon > 0$, ὑπάρχει $t_1 < \tau$ τέτοιο ὥστε

$$|x(t)| < |\xi|+\varepsilon \quad \text{καί} \quad |y(t)| < |\xi|+\varepsilon, \quad t < t_1.$$

Ὁρίζομε τότε τό σύνολο

$$B=\{(z_1,\dots,z_k)\in\mathbb{K}^n : |z_i|\leqq|\xi|+\varepsilon\},$$

οπότε έχομε

$x(t)\in B$, $y(t)\in B$, $x[\sigma_j(t)]\in B$ καί $y[\sigma_j(t)]\in B$ $(j=1,2,\dots,k)$ γιά κάθε $t\leqq t_1$.

Ἀκόμη θεωροῦμε τίς σταθερές $L_i(B)$, $i=1,2,\dots,\ell$ πού ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη (C_1'), ὁπότε λόγω τῆς συνθήκης (C) ὑπάρχει $t_2<t_1$ τέτοιο ὥστε

$$\int_{-\infty}^{t}\|A_i(s)\|\,ds<\frac{1}{Lk}\quad \text{γιά κάθε } t<t_1,\ i=1,2,\dots,\ell$$

ὅπου

$$L=\sum_{i=1}^{\ell}L_i(B).$$

Ἔτσι ἄν θεωρήσομε ἕνα $T<t_1$ καί ὁρίσομε τήν συνάρτηση

$$p(t)=\sup\{|x(s)-y(s)|:\ s\in(-\infty,t]\ ,\ t\in(-\infty,T],$$

τότε λόγω τῶν συνθηκῶν (C) καί (C_1) ἔχομε γιά κάθε $t\in(-\infty,T]$

$$|x(t)-y(t)|=\Big|\xi+\int_{-\infty}^{t}\sum_{i=1}^{\ell}A_i(s)f_i(x[\sigma_1(s)],\dots$$

$$\dots,x[\sigma_k(s)]ds-\xi-\int_{-\infty}^{t}A_i(s)f_i(y[\sigma_1(s)],\dots,y[\sigma_k(s)]ds\Big|$$

$$\leqq\sum_{i=1}^{\ell}\Big|\int_{-\infty}^{t}A_i(s)\big[f_i(x[\sigma_1(s)],\dots,x[\sigma_k(s)]-f_i(y[\sigma_1(s)],\dots$$

$$\dots,y[\sigma_k(s)])\big]ds\Big|$$

$$\leqq\sum_{i=1}^{\ell}\int_{-\infty}^{t}\|A_i(s)\|\,L_i(B)\sum_{j=1}^{k}|x[\sigma_j(s)]-y[\sigma_j(s)]|ds\leqq$$

$$\leqq kp(t)\sum_{i=1}^{\ell}L_i(B)\int_{-\infty}^{t}\|A_i(s)\|\,ds<kp(t)\,\frac{\vartheta}{Lk}\sum_{i=1}^{\ell}L_i(B)=\vartheta p(t).$$

ὅπου $\vartheta < 1$.

Ἔτσι ἀποδείχτηκε ὅτι

$$|x(t)-y(t)| < \vartheta p(t) \quad \text{γιά κάθε} \quad t \in (-\infty, T]$$

ὁπότε ἰσχύει καί $p(t) \leqq \vartheta p(T)$, δηλαδή $p(T) = 0$, πού ἀποδεικνύει ὅτι $x(t) = y(t)$ γιά κάθε $t \in (-\infty, T]$. ▲

3.2. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Ἐπειδή τό $-\infty$ εἶναι κοινό (γενικευμένο) σταθερό σημεῖο γιά τά ὁρίσματα, παρατηροῦμε ὅτι τά προηγούμενα θεωρήματα εἶναι ἀντίστοιχα μέ τά Πορίσματα 2.2, 2.3 τοῦ Κεφαλαίου 1, πού ἀναφέρονται σέ ὕπαρξη καί μονοσήμαντο λύσεων προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν σέ σταθερά σημεῖα τῶν ὁρισμάτων.

3.3. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Τά δύο θεωρήματα τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ μποροῦν νά ἀποδειχτοῦν μέ τελείως παράλληλη διαδικασία γιά ὁποιοδήποτε κοινό (γενικευμένο) σταθερό σημεῖο ω τῶν ὁρισμάτων σ_i, $i = 1,2,\ldots,k$, ἀρκεῖ ἡ συνθήκη (C) τοῦ Θεωρήματος 2.3 νά ἀντικατασταθεῖ μέ τήν συνθήκη

$$\text{(C')} \qquad \int_{\omega^+} \sum_{i=1}^{\ell} \| A_i(s) \| \, ds < \infty .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Εἰσαγωγή

Ἀντικείμενο τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ εἶναι ἡ μελέτη τῶν λύσεων τοῦ κατά Καραθεοδωρῆ ὑστερημένου διαφορικοῦ συστήματος

$$\text{(L)} \qquad x'(t) = \sum_{i=1}^{k} A_i(t)x[\sigma_i(t)]$$

καί τοῦ προσηρτημένου του συστήματος

$$\text{(L')} \qquad x'(t) = \sum_{i=1}^{k} A_i(t)x[\sigma_i(t)]+b(t),$$

ὅπου ἡ συνάρτηση b μέ τιμές στό $\mathbb{K}^n$ εἶναι τοπικά ὁλοκληρώσιμη πάνω σ' ἕνα διάστημα J καί οἱ συναρτήσεις $A_1,\ldots,A_k$ παίρνουν τιμές στό χῶρο $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ τῶν $n\times n$ πινάκων μέ στοιχεῖα ἀπό τό $\mathbb{K}$ καί εἶναι μετρήσιμες πάνω στό J. Ἐπίσης οἱ συναρτήσεις σ_i, $i=1,2,\ldots,k$ ἔχουν κοινό πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα J, παίρνουν τιμές σ'αὐτό καί ἱκανοποιοῦν μιά ἀσθενῆ συνθήκη μονοτονίας σέ σχέση μέ τό σύνολο $\mathcal{K}$ τῶν κοινῶν (γενικευμένων) σταθερῶν τους σημείων, δηλαδή ὅτι γιά κάθε $\omega\in\mathcal{K}$ ἰσχύει

$$\sigma_i(t)\geqq\omega \quad \text{γιά κάθε} \quad t\geqq\omega \qquad (i=1,2,\ldots,k).$$

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ τελευταία αὐτή συνθήκη συνεπάγεται ὅτι τό ἀριστερό ἄκρο τοῦ διαστήματος J εἶναι κοινό (γενικευμένο) σταθερό σημεῖο τῶν ορισμάτων σ_i, $i=1,2,\ldots,k$.

Ἡ ὕπαρξη λύσεων γιά τά προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν (L)-(ω,ξ) καί (L')-(ω,ξ), ὅπου $\omega\in\mathcal{K}\cap J$, προκύπτει σάν ἄμεσο συμπέρασμα τῶν Πορισμάτων 2.2 καί 2.3 τοῦ Κεφαλαίου 0. Ἀνάλογα, ἄν $\omega\in\mathcal{K}-J$ ἡ ὕπαρξη καί τό μονοσήμαντο τῶν προβλημάτων ὁριακῶν τιμῶν (L)-(ω,ξ) καί (L')-(ω,ξ) προκύπτουν ἀπό τά θεωρήματα 1.3 καί 2.1 τοῦ Κεφαλαίου 2 (Βλ. Παρατήρηση 3.3, Κεφάλαιο 2), κάτω βέβαια ἀπό κατάλληλη συνθήκη "μικρότητας" γιά τούς πίνακες A_i, $i=1,2,\ldots,k$.

Μεταξύ ἄλλων, στό κεφάλαιο αὐτό δίνεται ἐκπεφρασμένη παράσταση τῶν (δεξιά) λύσεων τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν ἤ ὁριακῶν τιμῶν (L)-(ω,ξ) ὅπου $\omega\in\mathcal{K}$ καί $\xi\in\mathbb{K}^n$, πού παρέχει τή δυνατότητα νά ληφθοῦν ἀρκετά συμπεράσματα γιά τίς λύσεις αὐτές. Τά συμπεράσματα αὐτά εἶναι κατά κανόνα ἀνάλογα μέ ἐκεῖνα πού ἰσχύουν στά κατά Καραθεοδωρῆ συνήθη συστήματα. Ἐξάλλου γιά $k=2$ καί $\sigma_1(t)=t$, $t\in J$, ἡ παράσταση τῶν λύσεων αὐτῶν ὁδηγεῖ στή μορφή πού δόθηκε ἀπό τόν Karakostas [17].

Χάρη συντομίας, εἶναι χρήσιμο νά εἰσάγομε γιά τά ἑπόμενα τούς παρακάτω συμβολισμούς γιά τό σύστημα (L) πού ταξινομοῦν τίς λύσεις σέ σχέση μέ τά σταθερά σημεῖα τῶν ὁρισμάτων. Οἱ συμβολισμοί αὐτοί μποροῦν νά ἀποδοθοῦν ἐξίσου καλά καί γιά τά γενικώτερα συστήματα (A) καί (B) πού θεωρήθηκαν στά Κεφάλαια 0 καί 2 ἀντίστοιχα. Συγκεκριμένα, θέτομε

$$\mathcal{X}_A=\bigcup\{x(\cdot;\omega,\xi):\omega\in A \text{ καί } \xi\in\mathbb{K}^n\},\quad A\subseteq\mathcal{K}$$

$$\mathcal{Y}_A=\bigcup\{x(\cdot;T,\varphi):T\in A \text{ καί } \varphi\in C(E(T),\mathbb{K}^n)\},\quad A\subseteq J-\mathcal{K}\,.$$

Εἰδικώτερα, ἄν $\omega \in \mathcal{K}$ καί $T \in J-\mathcal{K}$, ἀντί τῶν $\mathcal{X}_{\{\omega\}}$ καί $\mathcal{X}_{\{T\}}$, θέτομε πιό ἁπλά $\mathcal{X}_\omega$ καί $\mathcal{X}_T$.

2. Ἡ ἐξέλιξη (evolution) γραμμικοῦ συστήματος

Στά συνήθη γραμμικά διαφορικά συστήματα κάθε λύση ἐκφράζεται μέ τή βοήθεια μιᾶς συναρτήσεως - πίνακα (δύο πραγματικῶν μεταβλητῶν) πού ὀνομάζεται ἐξέλιξη (evolution) τοῦ συστήματος. Ἡ ἰδέα τῆς εὑρέσεως ἑνός τελεστή (ὄχι κατ'ἀνάγκη πίνακα) πού νά ἐκφράζει τίς λύσεις ἑνός ὑστερημένου διαφορικοῦ συστήματος ἀπασχόλησε ἀρκετούς ἐρευνητές (Βλ. π.χ. Hale [12], Bellman and Cooke [1]).Εἰδικά ὅμως γιά τίς $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap J}$-λύσεις (δηλαδή τίς λύσεις πού ἀνήκουν στό $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap J}$) τοῦ συστήματος (L) ὅπως θά ἀποδειχθεῖ στά ἑπόμενα ἰσχύει κάτι ἀνάλογο μέ τίς λύσεις ἑνός συνήθους διαφορικοῦ συστήματος. Δηλαδή οἱ $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap J}$-λύσεις μποροῦν νά παρασταθοῦν μέ τή βοήθεια ἑνός τελεστοῦ-πίνακα πού μάλιστα διατηρεῖ ἀρκετές ἀπό τίς ἰδιότητες τοῦ πίνακα-ἐξέλιξη ἑνός συνήθους διαφορικοῦ συστήματος.

2.1. ΟΡΙΣΜΟΣ. Μιά συνάρτηση-πίνακα E μέ τιμές στό χῶρο $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ὀνομάζεται $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap J}$ - ἐ ξ έ λ ι ξ η (evolution) τοῦ συστήματος (L) τότε καί μόνο τότε, ἄν

$$\operatorname{Dom} E = \{(t,\omega) : \omega \in \mathcal{K}\cap J \text{ καί } t \in J\cap[\omega,\infty)\}$$

καί γιά κάθε $\omega \in \mathcal{K}\cap J$ ἰσχύουν

(i) $E(\omega,\omega) = I_{n\times n}$,

(ii) $\frac{\partial}{\partial t} E(t,\omega) = \sum_{i=1}^{k} A_i(t)E(\sigma_i(t),\omega)$ σχεδόν γιά κάθε $t \in J \cap [\omega,\infty)$.

Ἀπό τίς (i) καί (ii) εἶναι φανερό ὅτι, γιά κάθε $\omega \in \mathcal{K} \cap J$ καί $\xi \in \mathbb{K}^n$, ἡ συνάρτηση $E(\cdot,\omega)\xi$ εἶναι λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (L)-(ω,ξ) καί μάλιστα πάνω σ'ὁλόκληρο τό διάστημα $J \cap [\omega,\infty)$.

Πρόθεσή μας στά ἀμέσως ἑπόμενα εἶναι νά ἀποδείξομε τήν ὕπαρξη ἐξελίξεως-πίνακα γιά τό σύστημα (L) καί νά δώσομε μιά ἀναλυτική ἔκφρασή του. Τά βήματα καί ἡ ἰδέα τῆς ἀποδείξεως γιά τήν ὕπαρξη εἶναι παράλληλα μέ ἐκεῖνα τῆς [17]. Πρίν διαπιστώσομε τήν ὕπαρξη μιᾶς $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap J}$-ἐξελίξεως τοῦ συστήματος (L) θά ἀποδείξομε πρῶτα τήν μ ο ν α δ ι κ ό τ η τ ά της.

Ἄς ὑποθέσομε λοιπόν ὅτι E_1, E_2 εἶναι $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap J}$-ἐξελίξεις τοῦ συστήματος (L), ὁπότε εἶναι φανερό ὅτι $\mathrm{Dom}\, E_1 = \mathrm{Dom}\, E_2$, καί ἄς θεωρήσομε τυχόν ζεῦγος $(\omega,t) \in \mathrm{Dom}\, E_1 = \mathrm{Dom}\, E_2$. Τότε ὅπως ἀναφέραμε καί παραπάνω οἱ συναρτήσεις $E_1(\cdot,\omega)\xi$ καί $E_2(\cdot,\omega)\xi$ εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (L)-(ω,ξ). Ἑπομένως, λόγω τοῦ μονοσημάντου τῶν λύσεων τοῦ προβλήματος αὐτοῦ, ἰσχύει

$$E_1(t,\omega)\xi = E_2(t,\omega)\xi$$

καί, ἐπειδή τό ξ εἶναι ὁποιοδήποτε στοιχεῖο στό $\mathbb{K}^n$, ἔχομε

$$E_1(t,\omega) = E_2(t,\omega).$$

Θεωροῦμε τώρα τήν ἀκολουθία συναρτήσεων-πίνακα

$$Z_\omega^\nu(\langle A_i\rangle, \langle\sigma_i\rangle), \quad \nu = 0,1,2,\ldots$$

μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $J\cap[\omega,\infty)$ καί πού οἱ ὅροι της ὁρίζονται ἐπαγωγικά μέ τούς τύπους

$$Z_\omega^0(\langle A_i\rangle,\ \langle\sigma_i\rangle)=I_{n\times n}$$

$$Z_\omega^\nu(\langle A_i\rangle,\langle\sigma_i\rangle)(t)=\sum_{j=1}^{k}\int_\omega^t A_j(s)\cdot Z_\omega^{\nu-1}(\langle A_i\rangle,\langle\sigma_i\rangle)[\sigma_j(s)]ds,\quad \nu=1,2,\ldots$$

ὅπου τό ἄθροισμα πού παρουσιάζεται στόν τελευταῖο τύπο ἔχει k^ν προσθετέους.

2.2. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὑπάρχει ἡ $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap J}$-ἐξέλιξη τοῦ συστήματος (L) καί δίνεται ἀπό τόν τύπο

$$E(t,\omega)=\sum_{\nu=0}^{\infty} Z_\omega^\nu(\langle A_i\rangle,\langle\sigma_i\rangle)(t). \tag{1}$$

Ἐπί πλέον γιά κάθε t, ω ἰσχύει

$$\|E(t,\omega)\|\leq\exp\sum_{i=1}^{k}\int_\omega^t\|A_i(s)\|\,ds. \tag{2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Στό σύνολο ὅλων τῶν συνεχῶν συναρτήσεων-πινάκων πάνω στό διάστημα $J\cap[\omega,\infty)$ καί μέ τιμές στό χῶρο $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, ὁρίζομε τόν τελεστή T μέ τύπο

$$(TF)(t)=I_{n\times n}+\sum_{i=1}^{k}\int_\omega^t A_i(s)F[\sigma_i(s)]ds.$$

Εὔκολα μποροῦμε νά διαπιστώσομε ὅτι

$$\|(T^\nu I_{n\times n})(t)\|\leq\exp\sum_{i=1}^{k}\int_\omega^t\|A_i(s)\|\,ds,\quad \nu=0,1,2,\ldots \tag{3}$$

καί

$$(4)\quad \| (T^{\nu}I_{n\times n})(t)-(T^{\nu-1}I_{n\times n})(t)\| \leq \frac{1}{\nu!}\left(\sum_{i=1}^{k}\int_{\omega}^{t}\| A_i(s)\|\, ds\right)^{\nu},\quad \nu = 1,2,\ldots$$

ὅπου $T^0 = O_{n\times n}$ καί $T^{\nu} = T(T^{\nu-1})$.

Ἔτσι, ἄν θεωρήσομε δύο τυχόντες φυσικούς ἀριθμούς λ καί μ, τότε λαμβάνοντας ὑπ'ὄψη τήν (4) καί τήν ἀνισότητα

$$\|(T^{\mu+\lambda}I_{n\times n})(t)-(T^{\mu}I_{n\times n})(t)\| \leq \| (T^{\mu+\lambda}I_{n\times n})(t)-(T^{\mu+\lambda-1}I_{n\times n})(t)\| + \ldots$$
$$\| (T^{\mu+1}I_{n\times n})(t)-(I^{\mu}I_{n\times n})(t)\|$$

μποροῦμε νά ἀποδείξομε ὅτι

$$\|(T^{\mu+\lambda}I_{n\times n})(t)-(T^{\mu}I_{n\times n})(t)\| \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\int_{\omega}^{t}\|A_i(s)\|ds\right)^{\mu+1}}{(\mu+1)!}\exp \sum_{i=1}^{k}\int_{\omega}^{t}\| A_i(s)\|\, ds.$$

Ἀπό τήν ἀνισότητα αὐτή προκύπτει ἀμέσως ὅτι γιά τυχόν $t \in J\cap[\omega,\infty)$ ἡ ἀκολουθία $(T^{\nu}I_{n\times n})(t)$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι βασική, ὁπότε λόγω τῆς πληρότητας τοῦ χώρου $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, εἶναι καί συγκλίνουσα. Ἄν $E(t,\omega)$ εἶναι τό ὅριο τῆς ἀκολουθίας αὐτῆς τότε λόγω καί τῆς (3) ἰσχύει

$$E(t,\omega) = \lim_{\nu\to\infty}(T^{\nu}I_{n\times n})(t) \quad \text{σχεδόν ὁμοιόμορφα γιά κάθε}\quad t \in J\cap[\omega,\infty).$$

Ἔτσι ἐφαρμόζοντας τό θεώρημα συγκλίσεως τοῦ Lebesgue παίρνομε

$$E(t,\omega) = I_{n\times n} + \sum_{i=1}^{k}\int_{\omega}^{t} A_i(s)E(\sigma_i(s),\omega)ds.$$

Ἄρα, σχεδόν γιά κάθε $t \in J\cap[\omega,\infty)$ ὑπάρχει ἡ ὡς πρός t παράγωγος τοῦ $E(t,\omega)$ καί ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη (ii) τοῦ ὁρισμοῦ τῆς $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap J}$-ἐξελίξεως. Ἀκόμη τό $E(t,\omega)$ ἔχει τήν μορφή (1), ἀφοῦ

(5) $$Z_{\omega}^{\nu}(<A_i>,<\sigma_i>)(t) = (T^{\nu}I_{n\times n})(t)-(T^{\nu-1}I_{n\times n})(t)$$

γιά κάθε $t \in J \cap [\omega,\infty)$ καί $\nu = 1,2,\ldots$.

Τέλος ἀπό τὄν τύπο (4) ἄν λάβομε ὑπ'ὄψη καί τόν τύπο (5) προκύπτει ἀμέσως ἡ σχέση (2). ▲

2.4. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. 1. Τό σύνηθες κατά Καραθεοδωρῆ διαφορικό σύστημα

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

μπορεῖ νά ληφθεῖ ἀπό τό σύστημα (L), σάν μερική περίπτωση, γιά $k = 1$, $A_1 = A$ καί σ_1 τήν ταυτοτική συνάρτηση. Εἶναι τότε εὔκολο νά διαπιστώσομε ὅτι ὁ τύπος (1) μᾶς δίνει

$$E(t,\omega) = I_{n\times n} + \int_{\omega}^{t} A(t_1)dt_1 + \int_{\omega}^{t}\int_{\omega}^{t_1} A(t_1)A(t_2)dt_2dt_1 + \ldots + \int_{\omega}^{t}\int_{\omega}^{t_1}\ldots$$
$$\ldots\int_{\omega}^{t_{m-1}} A(t_1)A(t_2)\ldots A(t_m)dt_m\ldots dt_1 + \ldots$$

δηλαδή ἔχομε τόν γνωστό τύπο γιά τήν ἐξέλιξη συνήθους διαφορικοῦ συστήματος (Βλ. Conti [4]). Εἰδικώτερα ἄν ἡ συνάρτηση-πίνακας A τοῦ παραπάνω συστήματος εἶναι σταθερή ὁ τύπος αὐτός γίνεται

$$E(t,\omega) = I_{n\times n} + A\int_{\omega}^{t} dt_1 + A^2\int_{\omega}^{t}\int_{\omega}^{t_1} dt_2dt_1 + \ldots + A^n\int_{\omega}^{t}\int_{\omega}^{t_1}\ldots\int_{\omega}^{t_{m-1}} dt_m\ldots dt_2dt_1 + \ldots$$

$$= I_{n\times n} + \sum_{m=1}^{\infty} A^m \frac{(t-\omega)^m}{m!} = e^{(t-\omega)A}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι λόγω τῆς (ii) τοῦ Ὁρισμοῦ 2.1, καί στίς δύο παραπάνω περιπτώσεις ὁ πίνακας ἐξέλιξη εἶναι ἕνας βασικός πίνακας τοῦ συνήθους γραμμικοῦ συστήματος.

2. Ἀνάλογη παράσταση μέ αὐτή πού δώσαμε παραπάνω γιά τήν ἐξέλιξη τοῦ συνήθους διαφορικοῦ συστήματος μποροῦμε νά πάρομε ἀπό τόν τύπο (1) καί γιά τήν $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap J}$-ἐξέλιξη τοῦ συστήματος (L). Ἐδῶ θά περιοριστοῦμε γιά περισσότερη ἁπλότητα στό σύστημα

$$(\hat{L}) \qquad x'(t) = A_1(t)x(t)+A_2(t)x[\sigma(t)]$$

πού μελετᾶ ὁ Karakostas [17]. Ἡ $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap J}$-ἐξέλιξη τοῦ συστήματος αὐτοῦ δίνεται ἀπό τόν τύπο

$$\begin{aligned}
E(t,\omega) = {} & I_{n\times n}+\int_\omega^t A_1(t_1)dt_1+\int_\omega^t A_2(t_1)dt_1+\int_\omega^t A_1(t_1)\int_\omega^{t_1} A_1(t_2)dt_2dt_1 + \\
& +\int_\omega^t A_1(t_1)\int_\omega^{t_1} A_2(t_2)dt_2dt_1+\int_\omega^t A_2(t_1)\int_\omega^{\sigma(t_1)} A_1(t_2)dt_2dt_1 + \\
& +\int_\omega^t A_2(t_1)\int_\omega^{\sigma(t_1)} A_2(t_2)dt_2dt_1+\dots+\int_\omega^t A_1(t_1)\int_\omega^{t_1}\dots\int_\omega^{t_{m-1}} A_1(t_m)dt_m\dots dt_1 \\
& +\int_\omega^t A_1(t_1)\int_\omega^{t_1}\dots\int_\omega^{t_{m-2}} A_1(t_{m-1})\int_\omega^{t_{m-1}} A_2(t_m)dt_m\dots dt_1+\int_\omega^t A_2(t_1)\int_\omega^{\sigma(t_1)}\dots \\
& \dots\int_\omega^{\sigma(t_{m-1})} A_2(t_m)dt_m\dots dt_1+\dots
\end{aligned}$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ τύπος αὐτός ὅπως ἀναμένεται, γιά $A_1 = A$ καί $A_2 = 0_{n\times n}$, δίνει τόν τύπο τῆς προηγούμενης Παρατηρήσεως 1.

3. Γενικευμένη ἐξέλιξη γραμμικοῦ συστήματος

Ὅπως ἀναφέραμε στήν εἰσαγωγή τοῦ κεφαλαίου, τό ἀριστερό ἄκρο τοῦ διαστήματος J εἶναι κοινό (γενικευμένο) σταθερό σημεῖο τῶν ὁρισμάτων, χωρίς νά ἀνήκει κατ'ἀνάγκη στό διάστημα J. Στήν παράγραφο αὐτή θά ἀσχοληθοῦμε μέ τήν ἐπέκταση τῆς ἐξελίξεως, ὥστε αὐτή νά ὁρίζεται καί σέ τέτοια σταθερά σημεῖα, δηλαδή σέ σημεῖα τοῦ συνόλου $\mathcal{K}-J$.

Ἄν $\omega\in\mathcal{K}-J$ τότε τό πρόβλημα ὁριακῶν τιμῶν (L)-(ω,ξ) ἔχει λύση μονοσήμαντα ὁρισμένη, κάτω ἀπό τίς γνωστές ἀπό τό Κεφάλαιο 2 συνθῆκες μικρότητας γιά τούς πίνακες A_i, $i=1,2,\dots,k$. Ἑπομένως εἶναι φυσικό, ὅπως ἔγινε καί στά προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν, νά ἀναζητήσομε τήν εὕρεση μιᾶς $_{\mathcal{K}\cap J}$-ἐξελίξεως πού νά ἐκφράζει καί τίς λύσεις τοῦ προβλήματος ὁριακῶν τιμῶν (L)-(ω,ξ) καί πού νά εἶναι ἐπέκταση τῆς γνωστῆς $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap J}$-ἐξελίξεως. Γιά τό σκοπό αὐτό δίνομε τόν παρακάτω ὁρισμό.

3.1. ΟΡΙΣΜΟΣ. Μιά συνάρτηση-πίνακα $\tilde{E}$ μέ τιμές στό χῶρο $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ὀνομάζεται $\mathcal{X}$ - ἐ ξ έ λ ι ξ η τοῦ συστήματος (L) τότε καί μόνο τότε, ἄν

$$\mathrm{Dom}\,\tilde{E}=\{(t,\omega):\omega\in\mathcal{K} \text{ καί } t\in(J\cup\{\omega\})\cap[\omega,\infty)\}$$

καί γιά κάθε $\omega\in\mathcal{K}$ ἰσχύουν

(i) $\tilde{E}(\omega,\omega)=I_{n\times n}$,

(ii) $\frac{\partial}{\partial t}\tilde{E}(t,\omega)=\sum_{i=1}^{k}A_i(t)\tilde{E}(\sigma_i(t),\omega)$ σχεδόν γιά κάθε $t\in J\cap(\omega,\infty)$.

Εἶναι φανερό ὅτι $\mathcal{X}_{\mathcal{K}}$-ἐξέλιξη $\tilde{E}$ εἶναι ἐπέκταση τῆς $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap J}$-ἐξελίξεως Ε τοῦ συστήματος (L).

Γιά τήν ἀπόδειξη ὑπάρξεως τῆς $\mathcal{X}_{\mathcal{K}}$-ἐξελίξεως γιά τό σύστημα (L) ὁρίζομε, ὅπως καί γιά τήν $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap J}$-ἐξέλιξη τήν ἀκολουθία συναρτήσεων--πίνακα

$$\tilde{Z}_{\omega}^{\nu}(<A_i>,<\sigma_i>), \qquad \nu=0,1,2,\ldots$$

μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $(J\cup\{\omega\})\cap[\omega,\infty)$ καί πού οἱ ὅροι της ὁρίζονται πάλι ἐπαγωγικά μέ τούς τύπους

$$\tilde{Z}_{\omega}^{0}(<A_i>,<\sigma_i>)=I_{n\times n}$$

$$\tilde{Z}_{\omega}^{\nu}(<A_i>,<\sigma_i>)(t)=\sum_{j=1}^{k}\int_{\omega}^{t}A_j(s)\cdot\tilde{Z}_{\omega}^{\nu-1}(<A_i>,<\sigma_i>)[\sigma_j(s)]ds, \quad \nu=1,2,\ldots$$

3.2. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν γιά κάθε $\omega\in\mathcal{K}-J$ ἰσχύει

$$\text{(C)} \qquad \sum_{i=1}^{k}\int_{\omega^{+}}\|A_i(t)\|\,dt<\infty,$$

τότε ὑπάρχει μιά μοναδική $\mathcal{X}_{\mathcal{K}}$-ἐξέλιξη $\tilde{E}$ τοῦ συστήματος (L) καί δίνεται ἀπό τόν τύπο

$$\tilde{E}(t,\omega)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\tilde{Z}_{\omega}^{\nu}(<A_i>,<\sigma_i>)(t).$$

Ἐπιπλέον γιά κάθε t,ω ἰσχύει

$$\|\tilde{E}(t,\omega)\|\leqq\exp\sum_{i=1}^{k}\int_{\omega}^{t}\|A_i(s)\|\,ds.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Λόγω τῆς συνθήκης (C) ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος γιά τήν ὕπαρξη $\mathcal{X}_{\mathcal{K}}$-ἐξελίξεως τοῦ συστήματος (L) προχωράει βῆμα πρός βῆμα μέ τόν ἴδιο τρόπο ὅπως καί ἐκείνη τοῦ Θεωρήματος 2.2. Παρόμοια μέ τήν περίπτωση τῆς $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap J}$-ἐξελίξεως προκύπτει καί τό μονοσήμαντο τῆς $\mathcal{X}_{\mathcal{K}}$--ἐξελίξεως τοῦ συστήματος (L), ἐπειδή ἀκριβῶς ἡ συνθήκη (C) ἐξασφαλίζει καί τό μονοσήμαντο τῶν λύσεων τοῦ προβλήματος ὁριακῶν τιμῶν (L)-(ω,ξ).

3.3. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Ἡ ὕπαρξη $\mathcal{X}_{\mathcal{K}}$-ἐξελίξεως ὅπως προαναφέραμε ἔχει ἄμεση σχέση μέ τό πρόβλημα ὁριακῶν τιμῶν. Ἰδιαίτερα, ἄν λάβει κανείς ὑπόψη ὅτι τό $\inf J$ εἶναι ἕνα κοινό (γενικευμένο) σταθερό σημεῖο ὁποιωνδήποτε ὑστερημένων ὁρισμάτων, ἡ συνάρτηση $E(\cdot,\inf J)$ ἀποκτᾶ ἰδιαίτερη σημασία ἀκόμη καί στήν περίπτωση τῶν συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων, ἀφοῦ μέ αὐτή ἐκφράζονται οἱ λύσεις τοῦ ὁριακοῦ (ἀριστερά) προβλήματος.

4. Ἰδιότητες τῆς ἐξελίξεως

Στήν παράγραφο αὐτή θά δοῦμε ὁρισμένες ἰδιότητες τῆς ἐξελίξεως, πού μᾶς δίνουν σημαντικές πληροφορίες γιά τίς λύσεις τοῦ χώρου $\mathcal{X}_{\mathcal{K}}$. Χάρη συντομίας καί προκειμένου νά μή διακρίνομε χωριστά τίς περιπτώσεις τῆς $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap J}$-ἐξελίξεως καί τῆς $\mathcal{X}_{\mathcal{K}}$-ἐξελίξεως, εἰσάγομε τήν ἔννοια τῆς γενικευμένης ἐξελίξεως $\mathcal{E}$ τοῦ συστήματος (L) πού ὁρίζεται νά εἶναι ἡ $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap J}$-ἐξέλιξη E, ὅταν δέν ἰσχύει ἡ συνθήκη (C), καί ἡ $\mathcal{X}_{\mathcal{K}}$--ἐξέλιξη $\tilde{E}$, ὅταν ἰσχύει ἡ συνθήκη (C). Στά ἑπόμενα τήν γενικευμένη ἐξέλιξη $\mathcal{E}$ θά τήν ἀναφέρομε ἁπλά ἐξέλιξη $\mathcal{E}$.

4.1. ΘΕΩΡΗΜΑ. Γιά κάθε ζεῦγος σταθερῶν σημείων ω_1, ω_2

στό $\mathcal{K}$, μέ $\omega_1 \leq \omega_2$ καί γιά κάθε $t \in J \cap [\omega_2, \infty)$ ἰσχύει

$$(6) \qquad \mathcal{E}(t,\omega_2)\mathcal{E}(\omega_2,\omega_1) = \mathcal{E}(t,\omega_1).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωροῦμε τυχόν $\xi \in \mathbb{K}^n$ καί τή λύση $x = x(\cdot;\omega_1,\xi)$ τοῦ προβλήματος (L)-(ω_1,ξ). Τότε ἔχομε

$$(7) \qquad x(t) = \mathcal{E}(t,\omega_1)\xi, \quad t \in J \cap [\omega_1\ \infty).$$

Ἄρα

$$x(\omega_2;\omega_1,\xi) = \mathcal{E}(\omega_2,\omega_1)\xi$$

καί ἐπομένως

$$\mathcal{E}(t,\omega_2)x(\omega_2;\omega_1,\xi) = \mathcal{E}(t,\omega_2)\mathcal{E}(\omega_2,\omega_1)\xi, \quad t \in J \cap [\omega_2,\infty)$$

δηλαδή

$$(8) \quad x(t;\omega_2,x(\omega_2;\omega_1,\xi)) = \mathcal{E}(t,\omega_2)\mathcal{E}(\omega_2,\omega_1)\xi, \quad t \in J \cap [\omega_2,\infty).$$

Ἡ σχέση (8) ὅμως δίνει, λόγω τοῦ μονοσημάντου, τόν περιορισμό τῆς λύσεως $x = x(\cdot;\omega_1,\xi)$ πάνω στό διάστημα $J \cap [\omega_2,\infty)$. Ἔτσι ἀπό τή σχέση (8), σέ συνδυασμό μέ τήν (7), παίρνομε

$$\mathcal{E}(t,\omega_1)\xi = \mathcal{E}(t,\omega_2)\mathcal{E}(\omega_2,\omega_1)\xi, \quad t \in J \cap [\omega_2,\infty).$$

Ἐπειδή ὅμως ἡ σχέση αὐτή ἰσχύει γιά κάθε $\xi \in \mathbb{K}^n$ προκύπτει ἀμέσως ἡ σχέση (6) πού ἀποδεικνύει τό θεώρημα. ▲

Τό θεώρημα αὐτό, στό ὁποῖο ἀναφερόμαστε ἀρκετά συχνά στά παρακάτω, γενικεύει γνωστή ἰδιότητα τῆς ἐξελίξεως γιά τά συνήθη γραμμικά συστήματα (Βλ. π.χ. Conti [4], Kuntzmann [21]).

4.2. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Ἐπαγωγικά προκύπτει ἀμέσως ὅτι ἄν $\omega_1,\omega_2,\ldots$ $\ldots,\omega_\nu$ εἶναι σημεῖα στό $\mathcal{K}$, μέ $\omega_1 \leqq \omega_2 \leqq \ldots \leqq \omega_\nu$, τότε γιά κάθε $t \in J \cap [\omega_\nu,\infty)$

$$\mathcal{E}(t,\omega_1) = \mathcal{E}(t,\omega_\nu)\mathcal{E}(\omega_\nu,\omega_{\nu-1})\ldots\mathcal{E}(\omega_2,\omega_1).$$

4.3. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄν ω_1, ω_2 ἀνήκουν στό $\mathcal{K}$, $\omega_1 < \omega_2$ καί ἀκόμη $\mathcal{E}(\omega_2,\omega_1) = 0_{n\times n}$, τότε γιά κάθε $\omega \in \mathcal{K}$ μέ $\omega \leqq \omega_1$ καί γιά κάθε $x \in \mathcal{X}_\omega$ ἰσχύει

$$x(t) = 0 \quad \text{γιά κάθε} \quad t \in J \cap [\omega_2,\infty).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ἐπειδή $\omega \leqq \omega_1$, ἀπό τό προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ὅτι

$$\mathcal{E}(\omega_2,\omega) = \mathcal{E}(\omega_2,\omega_1)\mathcal{E}(\omega_1,\omega).$$

Ἄρα

$$\mathcal{E}(\omega_2,\omega) = 0_{n\times n}.$$

Ἑπομένως, ἐπειδή γιά κάθε $x \in \mathcal{X}_\omega$ ἰσχύει

$$x(t) = \mathcal{E}(t,\omega_2)\mathcal{E}(\omega_2,\omega)x(\omega), \quad t \in J \cap [\omega_2,\infty),$$

προκύπτει ἀμέσως τό συμπέρασμα τοῦ πορίσματος. ▲

Γιά παράδειγμα ἀναφέρομε ἐδῶ τήν ἐξίσωση

$$x'(t) = 5t^3 x[\sigma(t)], \quad t \in [-1,\infty)$$

ὅπου

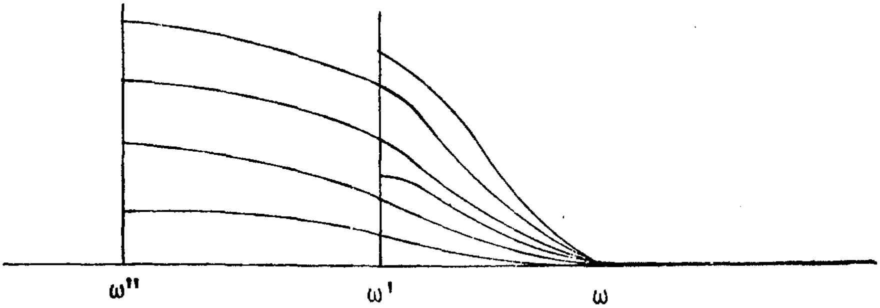
$$\sigma(t) = \begin{cases} \sqrt[5]{t}, & \text{ἄν} \quad t \in [-1,0) \\ t/3, & \text{ἄν} \quad t \in [0,\infty). \end{cases}$$

Τό παραπάνω πόρισμα ἐφαρμόζεται γιά $\omega_1=-1$, $\omega_2=0$ καί ἐπομένως κάθε λύση στό $\mathcal{X}_{-1}$ μηδενίζεται στό διάστημα $[0,\infty)$, ὅπως π.χ. ἡ λύση

$$x(t)=\begin{cases} t^5, & \text{ἄν } t\in[-1,0) \\ 0, & \text{ἄν } t\in[0,\infty). \end{cases}$$

Ἐξ ἄλλου τό παραπάνω πόρισμα εἶναι γενίκευση ἑνός συμπεράσματος τῶν Winston and Yorke [39], πού ἀναφέρεται σέ μιά πολύ εἰδική περίπτωση γραμμικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως πρώτης τάξεως.

4.4. ΣΗΜΕΙΩΣΗ. Μετά τό παραπάνω πόρισμα καί στήν περίπτωση πού $\sup J=\infty$, μποροῦμε, ὅταν μελετᾶμε προβλήματα ἀναφερόμενα στή συμπεριφορά τῶν $\mathcal{X}_{\mathcal{K}}$-λύσεων στό ∞, νά περιοριζόμαστε στίς $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap[\omega,\infty)}$-λύσεις, ὅταν τό $\omega\in\mathcal{K}$ εἶναι τέτοιο, ὥστε $\mathcal{E}(\omega,\omega')=0_{n\times n}$ γιά κάθε ω' στό $\mathcal{K}$, μέ $\omega'<\omega$ καί τοῦτο γιατί οἱ λύσεις τοῦ χώρου $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap(-\infty,\omega)}$ θά ταυτίζονται στό διάστημα $[\omega,\infty)$ μέ τή μηδενική λύση, δηλαδή οἱ λύσεις αὐτές θά παρουσιάζουν τήν εἰκόνα τοῦ παρακάτω σχήματος



Ἰδιάζοντα σημεῖα. Εἶναι φανερό ὅτι ἄν $\omega\in\mathcal{K}$, τότε $\det\mathcal{E}(\omega,\omega)=1$ καί ἐπομένως λόγω τῆς συνεχείας τῆς ἐξελίξεως ἰσχύει καί $\det\mathcal{E}(t,\omega)\neq 0$ γιά κάθε t σέ μιά δεξιά περιοχή τοῦ ω. Στά συνήθη διαφορικά συστήματα αὐτό εἶναι γνωστό ὅτι ἰσχύει γιά ὅλα τά t καί ω. Ἀντίθετα, δέν ἰσχύει κάτι τέτοιο γιά τήν περίπτωση τῶν ὑστερημένων διαφορικῶν συστημάτων, ὅπως προκύπτει ἀπό τό ἑπόμενο παράδειγμα.

4.5. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Θεωροῦμε τό ὑστερημένο διαφορικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -\frac{8\cos t}{2\cos t-1}\,x_1(t)+\frac{8\cos t}{2\cos t-1}\,x_1(t/2). \end{aligned} \qquad t\in[0,\pi/3).$$

Εἶναι φανερό ὅτι τό 0 εἶναι κοινό σταθερό σημεῖο τῶν ὁρισμάτων τοῦ συστήματος. Ἀκόμη γιά τήν ἐξέλιξη τοῦ συστήματος αὐτοῦ ἰσχύει

$$\mathcal{E}(t,0)=\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin 2t}{2} \\ 0 & \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Ἔτσι γιά $t=\frac{\pi}{4}$ ἔχομε $\det\mathcal{E}(\frac{\pi}{4},0)=0$. ▲

Ἀπό τά παραπάνω ὁδηγούμαστε στή διάκριση τῶν σημείων μηδενισμοῦ ἤ ὄχι τῆς ὁρίζουσας τῆς ἐξελίξεως σύμφωνα μέ τόν παρακάτω ὁρισμό.

4.6. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἕνα σημεῖο $\tau\in J$, θά εἶναι ἰδιάζον σημεῖο (singular point) ὡς πρός τό σταθερό σημεῖο $\omega\in\mathcal{K}$ τότε καί μόνο τότε ἄν ὁ πίνακας $\mathcal{E}(\tau,\omega)$ εἶναι ἰδιάζων.

Στήν ἀντίθετη περίπτωση τό σημεῖο τ θά λέγεται μή ἰδιάζον σημεῖο (nonsingular point) ὡς πρός τό ω.

4.7. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ἄν τ εἶναι ρίζα μιᾶς λύσεως x ἀπό τό χῶρο $\mathcal{X}_\omega$, μέ $x(\omega)\neq 0$, τότε τό σημεῖο τ εἶναι ἰδιάζον σημεῖο ὡς πρός τό $\omega\in\mathcal{K}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ὅπως εἶναι γνωστό ἡ λύση x γράφεται

$$x(t) = \mathcal{E}(t,\omega)x(\omega)$$

ὁπότε, ἐπειδή $x(\tau)=0$, ἔχομε

$$\mathcal{E}(\tau,\omega)x(\omega) = 0$$

καί, ἐπειδή $x(\omega)\neq 0$, ἰσχύει

$$\det \mathcal{E}(\tau,\omega) = 0. \blacktriangle$$

Μέ τό Παράδειγμα 4.5 ἀποδείχτηκε ὅτι γενικά ὑπάρχουν ἰδιάζοντα σημεῖα, ὡς πρός ἕνα σταθερό σημεῖο τῶν ὁρισμάτων ἑνός συστήματος τῆς μορφῆς (L). Στό παράδειγμα αὐτό τό ἰδιάζον σημεῖο δέν εἶναι σταθερό σημεῖο τῶν ὁρισμάτων του. Θά περίμενε κανείς ὅτι τά σταθερά σημεῖα θά ἦταν μή ἰδιάζοντα σημεῖα τῆς ἐξελίξεως, ὅπως συμβαίνει στά συνήθη διαφορικά συστήματα ὅπου κάθε σημεῖο εἶναι καί σταθερό σημεῖο τῶν ὁρισμάτων καί ἀκόμη δέν ὑπάρχουν ἰδιάζοντα σημεῖα. Αὐτό ὅμως δέν συμβαίνει ὅπως προκύπτει ἀπό τό παρακάτω παράδειγμα.

4.8. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω τό σύστημα

$$(\Sigma)\qquad \begin{aligned} x_1'(t) &= t x_1[\sigma(t)] + 2\sqrt[3]{t}\, x_2[\sigma(t)] \\ x_2'(t) &= 4t\, x_1(t) + \sqrt[3]{t^7}\, x_2[\sigma(t)] \end{aligned}$$

ὅπου $t \in [-1,\infty)$ καί

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t}, & \text{ἄν } -1 \leqq t < 0 \\ \\ \frac{t}{2}, & \text{ἄν } 0 \leqq t < \infty. \end{cases}$$

Εἶναι φανερό ὅτι ἔχομε $\mathcal{K} = \{-1,0\}$. Ἀκόμη παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση

$$x(t) = \begin{cases} (t^3,t^5), & \text{ἄν } -1 \leqq t < 0 \\ \\ (0,0), & \text{ἄν } 0 \leqq t < \infty \end{cases}$$

εἶναι λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (Σ)-$(-1,\xi)$, μέ $\xi = (-1,-1)$. Ἐπειδή ὅμως ἰσχύει $x(0) = 0$, λαμβάνοντας ὑπ' ὄψη τήν Πρόταση 4.7, συμπεραίνομε ὅτι

$$\det \mathcal{E}(0,-1) = 0$$

παρά τό γεγονός ὅτι $0 \in \mathcal{K}$.

Σχετικά μέ τά ἰδιάζοντα σημεῖα πού εἶναι συγχρόνως καί σταθερά σημεῖα τῶν ὁρισμάτων ἰσχύει τό παρακάτω πόρισμα.

4.9. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄν ω_1, ω_2 ἀνήκουν στό $\mathcal{K}$ καί τό ω_2 εἶναι ἰδιάζον ὡς πρός τό ω_1, τότε γιά κάθε $\omega \in \mathcal{K}$ μέ $\omega \leqq \omega_1$ ἰσχύει

$$\det \mathcal{E}(t,\omega) = 0 \text{ γιά κάθε } t \in J \cap [\omega_2,\infty).$$

Εἰδικά τό ω_2 εἶναι καί ἰδιάζον σημεῖο ὡς πρός κάθε σταθερό σημεῖο στό σύνολο $\mathcal{K} \cap (-\infty,\omega_1)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. 'Επειδή $\omega \leq \omega_1 < \omega_2$, γιά κάθε $t \in J \cap [\omega_2, \infty)$ ἔχομε

$$\mathcal{E}(t,\omega) = \mathcal{E}(t,\omega_2)\mathcal{E}(\omega_2,\omega_1)\mathcal{E}(\omega_1,\omega)$$

καί ἐπομένως

$$\det \mathcal{E}(t,\omega) = \det \mathcal{E}(t,\omega_2) \det \mathcal{E}(\omega_2,\omega_1) \det \mathcal{E}(\omega_1,\omega).$$

'Αλλά τό ω_2 εἶναι ἰδιάζον ὡς πρός τό ω_1, δηλαδή ἰσχύει $\det \mathcal{E}(\omega_2,\omega_1) = 0$, καί ἐπομένως τό πόρισμα εἶναι φανερό.

Τύπος τοῦ Jacobi. Ἕνα εὔλογο ἐρώτημα πού ἀναφύεται, ἀμέσως μετά τά παραπάνω, εἶναι ἄν ἰσχύει ὁ τύπος τοῦ Jacobi γιά τά ὑστερημένα γραμμικά διαφορικά συστήματα ἤ, ἄν ὄχι στήν ἴδια μορφή πού ἰσχύει στά συνήθη συστήματα, τότε πῶς μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ ἡ παράγωγος τῆς ὁρίζουσας τῆς ἐξελίξεως. Πρίν ἀποδείξομε τό ἑπόμενο θεώρημα πού δίνει τήν μορφή τοῦ τύπου τοῦ Jacobi γιά τό σύστημα (L) θά δώσομε μερικούς συμβολισμούς χάρη συντομίας καί ἁπλουστεύσεως τῶν τύπων πού ἀκολουθοῦν. Ἔτσι ἄν $\mathcal{E} = (e_{ij})$, ὅπου $i,j = 1,\ldots,n$, εἶναι ἡ ἐξέλιξη τοῦ (L), τότε γιά $i = 1,\ldots,k$ καί $\rho,\lambda = 1,2,\ldots,n$ θέτομε

$$N_{\rho\lambda}^{(i)}(t,s) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} e_{11}(t,s) & \ldots & e_{1n}(t,s) \\ \vdots & & \vdots \\ e_{\lambda-1,1}(t,s) & \ldots & e_{\lambda-1,n}(t,s) \\ e_{\rho 1}(\sigma_i(t),s) & \ldots & e_{\rho n}(\sigma_i(t),s) \\ e_{\lambda+1,1}(t,s) & \ldots & e_{\lambda+1,n}(t,s) \\ \vdots & & \vdots \\ e_{n1}(t,s) & \ldots & e_{nn}(t,s) \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \lambda\text{-γραμμή} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

'Ακόμη γιά κάθε $i = 1,2,\ldots,k$ θέτομε

$$\mathcal{N}_i(t,\omega) = (\det N_{\rho\lambda}^{(i)}(t,\omega))$$

καί

$$\mathcal{N}(t,<\sigma(t)>,\omega) = \mathrm{diag}(\mathcal{N}_1(t,\omega),\dots,\mathcal{N}_k(t,\omega))$$

$$\mathcal{A}(t) = \mathrm{diag}(A_1(t),\dots,A_k(t)).$$

4.10. ΘΕΩΡΗΜΑ. Γιά τήν ἐξέλιξη $\mathcal{E}$ τοῦ συστήματος (L) ἰσχύει ὁ τύπος

$$\text{(D)} \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\det \mathcal{E}(t,\omega)) = \mathrm{tr}(\mathcal{A}(t)\cdot\mathcal{N}(t,<\sigma(t)>,\omega))$$

σχεδόν γιά κάθε $t \in J \cap [\omega,\infty)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εἶναι φανερό ὅτι σχεδόν γιά κάθε $t \in J\cap[\omega,\infty)$ ἰσχύει

$$\text{(9)} \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\det\mathcal{E}(t,\omega)) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}e_{11}(t,\omega) & \cdot\ \cdot & \frac{\partial}{\partial t}e_{1n}(t,\omega) \\ e_{21}(t,\omega) & \cdot\ \cdot & e_{2n}(t,\omega) \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ e_{n1}(t,\omega) & \cdot\ \cdot & e_{nn}(t,\omega) \end{pmatrix} + \dots$$

$$\dots + \det\begin{pmatrix} e_{11}(t,\omega) & \cdot\ \cdot & e_{1n}(t,\omega) \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ e_{n-1,1}(t,\omega) & \cdot\ \cdot & e_{n-1,n}(t,\omega) \\ \frac{\partial}{\partial t}e_{n1}(t,\omega) & \cdot\ \cdot & \frac{\partial}{\partial t}e_{nn}(t,\omega) \end{pmatrix}.$$

'Από τήν γνωστή ὅμως ἰδιότητα τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐξελίξεως ἔχομε

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\mathcal{E}(t,\omega) = \sum_{i=1}^{k} A_i(t)\,\mathcal{E}(\sigma_i(t),\omega)$$

δηλαδή

$$\frac{\partial}{\partial t}\,e_{ij}(t,\omega) = \sum_{r=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{n} a_{i\mu}^{(r)}(t)e_{\mu j}(\sigma_r(t),\omega),$$

ὅπου $A_r(t) = (a_{ij}^{(r)}(t))$.

'Αντικαθιστοῦμε τώρα τήν τελευταία σχέση στή σχέση (9) καί παίρνομε

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(\det\mathcal{E}(t,\omega))=\det\begin{pmatrix} \sum\limits_{r=1}^{k}\sum\limits_{\mu=1}^{n} a_{1\mu}^{(r)}(t)e_{\mu 1}(\sigma_r(t),\omega) & \ldots & \sum\limits_{r=1}^{k}\sum\limits_{\mu=1}^{n} a_{1\mu}^{(r)}(t)e_{\mu n}(\sigma_r(t),\omega) \\ e_{21}(t,\omega) & & e_{2n}(t,\omega) \\ \cdot & & \cdots \\ \cdot & & \cdots \\ e_{n1}(t,\omega) & & \ldots e_{nn}(t,\omega) \end{pmatrix}$$

$$\ldots + \det\begin{pmatrix} e_{11}(t,\omega) & & \ldots e_{1n}(t,\omega) \\ \cdot & & \cdots \\ \cdot & & \cdots \\ e_{n-1,1}(t,\omega) & & e_{n-1,n}(t,\omega) \\ \sum\limits_{r=1}^{k}\sum\limits_{\mu=1}^{n} a_{n\mu}^{(r)}(t)e_{\mu 1}(\sigma_r(t),\omega) & \ldots & \sum\limits_{r=1}^{k}\sum\limits_{\mu=1}^{n} a_{n\mu}^{(r)}(t)e_{\mu n}(\sigma_r(t),\omega) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{r=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{n} a_{1\mu}^{(r)}(t)\det N_{\mu 1}^{(r)}(t,\omega) + \ldots +$$

$$+ \sum_{r=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{n} a_{n\mu}^{r}(t)\det N_{\mu n}^{(r)}(t,\omega) =$$

$$= \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1,j=1}^{n} a_{ij}^{(r)}(t)\det N_{ij}^{(r)}(t,\omega) =$$

$$= \sum_{r=1}^{k} tr(A_r(t)\mathcal{N}_r(t,\omega)) =$$

$$= tr(\mathcal{A}(t)\cdot\mathcal{N}(t,<\sigma(t)>,\omega)). \quad \blacktriangle$$

4.11. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. (Εἰδικές περιπτώσεις τοῦ τύπου τοῦ Jacobi).

1) Τό σύστημα (L) γιά $k=1$, $A_1 = A$ καί σ_1 τήν ταυτοτική συνάρτηση ἀνάγεται στό σύνηθες διαφορικό σύστημα:

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

γιά τό ὁποῖο ἔχομε $\mathcal{A} = A$ καί

$$\mathcal{N}(t,<\sigma(t)>,\omega) = \mathcal{N}_1(t,\omega) = \begin{pmatrix} \det\mathcal{E}(t,\omega) & 0 & \ldots 0 & 0 \\ 0 & \det\mathcal{E}(t,\omega) & \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots 0 & \det\mathcal{E}(t,\omega) \end{pmatrix}$$

γιατί εἶναι φανερό ὅτι, ἐπειδή ἡ σ_1 εἶναι ἡ ταυτοτική συνάρτηση, ἰσχύει

$$N^1_{\rho\lambda}(t,\omega) = \begin{cases} \mathcal{E}(t,\omega), & \text{ἄν } \rho = \lambda \\ 0_{n\times n}, & \text{ἄν } \rho \neq \lambda \end{cases}$$

καί ἐπομένως

$$\frac{\partial}{\partial t}(\det\mathcal{E}(t,\omega)) = tr(\mathcal{A}(t)\cdot\mathcal{N}(t,<\sigma(t)>,\omega)) = tr(A(t)\cdot\mathcal{N}_1(t,\omega)) =$$

$$= a_{11}(t)\det\mathcal{E}(t,\omega) + \ldots + a_{nn}(t)\det\mathcal{E}(t,\omega) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)\right)\det\mathcal{E}(t,\omega) = (tr\, A(t))\cdot\det\mathcal{E}(t,\omega).$$

Προκύπτει δηλαδή γιά $\mathcal{E} = E$ ὁ γνωστός τύπος τοῦ Jacobi γιά τά συνήθη διαφορικά συστήματα.

2) Γιά $k=2$, σ_1 τήν ταυτοτική συνάρτηση καί $\sigma_2 = \sigma$ τό σύστημα (L) παίρνει τήν μορφή

$$(\hat{L}) \qquad x'(t) = A_1(t)x(t)+A_2(t)x[\sigma(t)].$$

Τότε εἶναι φανερό ὅτι ὁ πίνακας $\mathcal{N}_1(t,\omega)$ εἶναι ὁ ἴδιος ὅπως ἀκριβῶς καί στήν περίπτωση (1). Ἔτσι ἔχομε

$$\mathcal{N}(t,<\sigma(t)>,\omega) = \operatorname{diag}(\mathcal{N}_1(t,\omega),\mathcal{N}_2(t,\omega))$$

$$\mathcal{A}(t) = \operatorname{diag}(A_1(t),A_2(t))$$

καί ἑπομένως

$$\frac{\partial}{\partial t}(\det \mathcal{E}(t,\omega)) = \operatorname{tr}(\mathcal{A}(t)\cdot\mathcal{N}(t,<\sigma(t)>,\omega)) =$$

$$= \operatorname{tr}(A_1(t)\mathcal{N}_1(t,\omega)) + \operatorname{tr}(A_2(t)\mathcal{N}_2(t,\omega)) =$$

$$= (\operatorname{tr} A_1(t))\det \mathcal{E}(t,\omega) + \sum_{\rho=1}^{n} a^{(2)}_{\rho\lambda}(t)\det N^{(2)}_{\lambda\rho}(t,\omega).$$

Θέτομε τώρα

$$R(t,\sigma(t),\omega) = \sum_{\rho=1}^{n} a^{(2)}_{\rho\lambda}(t)\det N^{(2)}_{\lambda\rho}(t,\omega)$$

καί συμβολίζομε μέ $\mathcal{D}_\omega$ τό σύνολο τῶν ἰδιαζόντων σημείων ὡς πρός τό $\omega \in \mathcal{K}$ γιά τό σύστημα $(\hat{L})$.

4.12. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἄν στό σύστημα $(\hat{L})$ οἱ συναρτήσεις-πίνακα A_1 καί A_2 εἶναι συνεχεῖς καί γιά κάθε $t \in \mathcal{D}_\omega$ ἰσχύει

$$R(t,\sigma(t),\omega)\neq 0$$

τότε, ἡ συνάρτηση-πίνακα $\mathcal{E}(\cdot,\omega)$ ἀντιστρέφεται σχεδόν γιά κάθε $t\in J\cap[\omega,\infty)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ἔστω s ἕνα σημεῖο συσσωρεύσεως τοῦ $\mathcal{D}_\omega$, τό ὁποῖο λόγω τῆς συνεχείας τῆς ἐξελίξεως εἶναι ἐπίσης ἰδιάζον σημεῖο ὡς πρός τό ω, δηλαδή $s\in\mathcal{D}_\omega$. Ἐπειδή οἱ συναρτήσεις πίνακα A_1, A_2 εἶναι συνεχεῖς, οἱ λύσεις τοῦ διαφορικοῦ συστήματος $(\hat{L})$ εἶναι παραγωγίσιμες στό $J\cap[\omega,\infty)$ καί τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τήν $\det\mathcal{E}(t,\omega)$ ὡς πρός τήν μεταβλητή t. Ἄρα μεταξύ δύο ριζῶν τῆς $\det\mathcal{E}(t,\omega)$ ὑπάρχει πάντα μία ρίζα τῆς $\frac{\partial}{\partial t}(\det\mathcal{E}(t,\omega))$. Ἔτσι τό σημεῖο s θά εἶναι ὅριο ριζῶν τῆς $\frac{\partial}{\partial t}(\det\mathcal{E}(t,\omega)$ καί ἑπομένως λόγω καί τῆς συνεχείας της πού προκύπτει ἀπό τόν ἀντίστοιχο τύπο τοῦ Jacobi

$$(10)\qquad \frac{\partial}{\partial t}(\det\mathcal{E}(t,\omega))=(\operatorname{tr}A_1(t))\det\mathcal{E}(t,\omega)+R(t,\sigma(t),\omega)$$

θά ἔχομε

$$\frac{\partial}{\partial t}(\det\mathcal{E}(s,\omega))=0.$$

Ἀλλά τότε ὁ τύπος (10) δίνει $R(s,\sigma(s),\omega)=0$ πού ἀντίκειται στήν ὑπόθεση τοῦ θεωρήματος, ἀφοῦ $s\in\mathcal{D}_\omega$. ▲

4.13. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Ἡ ὑπόθεση τοῦ προηγουμένου θεωρήματος

$$(\forall\, t\in\mathcal{D}_\omega)\qquad R(t,\sigma(t),\omega)\neq 0$$

δέν εἶναι κενή. Αὐτό φαίνεται ἀπό τό σύστημα τοῦ Παραδείγματος 4.5.

Στό παράδειγμα αὐτό ἔχομε, γιά κάθε $t \in [0,\pi/3)$

$$\operatorname{tr} A_1(t) = 0 \quad \text{καί} \quad \det \mathcal{E}(t,0) = \cos 2t$$

καί ἐπομένως ἀπό τόν τύπο (10) προκύπτει

$$R(t,\sigma(t),0) = -2\sin 2t.$$

Ἔτσι ἔχομε $\mathcal{D}_0 = \{\frac{\pi}{4}\}$ καί μάλιστα

$$R(\tfrac{\pi}{4}, \sigma(\tfrac{\pi}{4}), 0) = -2 \neq 0.$$

Ἐξ ἄλλου γιά τή διαφορική ἐξίσωση

$$x'(t) = 5t^3 x[\sigma(t)], \quad t \in [-1,\infty)$$

ὅπου

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sqrt[5]{t}, & \text{ἄν} \quad t \in [-1,0) \\ t/3, & \text{ἄν} \quad t \in [0,\infty) \end{cases}$$

ὑπάρχει ἕνα ὁλόκληρο διάστημα καί μάλιστα τό $[0,\infty)$, στό ὁποῖο ἡ ἀντίστοιχη ἐξέλιξη στό σταθερό σημεῖο -1, πού εἶναι ἡ συνάρτηση

$$\mathcal{E}(t,-1) = \begin{cases} t^5, & \text{ἄν} \quad t \in [-1,0) \\ 0, & \text{ἄν} \quad t \in [0,\infty) \end{cases},$$

δέν ἀντιστρέφεται. Αὐτό εἶναι φανερό ὅτι ὀφείλεται στό ὅτι $R(t,\sigma(t),-1) = 0$ γιά κάθε $t \in \mathcal{D}_{-1} = \{0\}$.

4.14. ΠΡΟΤΑΣΗ. Γιά κάθε ω_1, ω_2 στό $\mathcal{K}$ μέ $\omega_1 < \omega_2$ καί γιά κάθε $t \in J \cap [\omega_2,\infty)$ ἰσχύει

$$R(t,\sigma(t),\omega_2)\cdot\det \mathcal{E}\,(\omega_2,\omega_1) = R(t,\sigma(t),\omega_1).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ἀπό τόν τύπο τοῦ Jacobi γιά τό σύστημα $(\hat{L})$ παίρνομε

$$(11)\quad \frac{\partial}{\partial t}(\det \mathcal{E}\,(t,\omega)) = (\operatorname{tr} A_1(t))\det \mathcal{E}\,(t,\omega_1) + R(t,\sigma(t),\omega_1)$$

ὁπότε λόγω τοῦ τύπου (6) τῆς Προτάσεως 4.1 γιά κάθε $t \in J \cap [\omega_2,\infty)$ ἰσχύει

$$\frac{\partial}{\partial t}[\det(\mathcal{E}\,(t,\omega_2)\cdot\mathcal{E}\,(\omega_2,\omega_1)] = (\operatorname{tr} A_1(t))\det(\mathcal{E}\,(t,\omega_2)\mathcal{E}\,(\omega_2,\omega_1)) + R(t,\sigma(t),\omega_1)$$

καί ἄρα

$$\det\mathcal{E}\,(\omega_2,\omega_1)\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\det\mathcal{E}\,(t,\omega_2)) = (\operatorname{tr} A_1(t))\cdot\det\mathcal{E}\,(t,\omega_2)\cdot\det\mathcal{E}\,(\omega_2,\omega_1) + R(t,\sigma(t),\omega_1).$$

Ἀλλά ἀπό τόν τύπο πάλι τοῦ Jacobi ἔχομε

$$\frac{\partial}{\partial t}(\det \mathcal{E}\,(t,\omega_2)) = (\operatorname{tr} A_1(t))\det \mathcal{E}\,(t,\omega_2) + R(t,\sigma(t),\omega_2).$$

Ἀπό τούς δύο τελευταίους τύπους προκύπτει ἀμέσως ὁ τύπος (11). ▲

5. Διάσταση τοῦ χώρου $\mathcal{X}_\omega$

Ὁ διανυσματικός χῶρος ὅλων τῶν λύσεων τοῦ συστήματος (L) εἶναι ἐν γένει ἀπείρου διαστάσεως. Παρά τό γεγονός αὐτό, ἀρκετοί ἐρευνητές ἀσχολήθηκαν μέ τό πρόβλημα τῆς εὑρέσεως ὑποχώρων τοῦ χώρου ὅλων τῶν λύσεων μέ πεπερασμένη διάσταση. Πρός τήν κατεύθυνση αὐτή ἐργάστηκε ὁ Kurzweill [22] μελετῶντας καί τή διάσταση τοῦ ὑποχώρου τῶν λύσεων γραμμικοῦ συστήματος ἐκθετικά φραγμένων σέ ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $(-\infty,\alpha)$. Ἀκόμη γιά γραμμικές διαφορικές ἐξισώσεις $2^{\alpha\varsigma}$ τάξεως ὁ Norkin

[29] έδωσε τέτοια παραδείγματα υποχώρων διαστάσεως 2. Επίσης ό Zverkin [40] άσχολήθηκε μέ τή διάσταση τοῦ χώρου τῶν λύσεων γιά διαφορο-διαφορικά συστήματα. Τέλος στό ἴδιο πρόβλημα ἀναφέρονται καί οἱ ἐργασίες τῶν Kozakiewicz [20], Norkin [30], καί El'sgol'c and Norkin [10].

Συμπεράσματα σχετικά μέ τή διάσταση προκύπτουν εὔκολα μέ τή βοήθεια τῆς ἐξελίξεως. Ἔτσι π.χ. ἔχομε τήν πρόταση.

5.1. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ἄν $\omega \in \mathcal{K}$, τότε ὁ διανυσματικός χῶρος $\mathcal{X}_\omega$ ὑπεράνω τοῦ $\mathbb{K}$ τῶν λύσεων τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν ἤ ὁριακῶν τιμῶν (L)-(ω,ξ) ἔχει διάσταση n.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Γιά κάθε $x \in \mathcal{X}_\omega$ ἔχομε $x(t) = \mathcal{E}(t,\omega)x(\omega)$ καί ἐπομένως, ἄν $x_1,x_2,\ldots,x_\ell$ εἶναι λύσεις στό $\mathcal{X}_\omega$ καί $c_1,c_2,\ldots,c_\ell$ σταθερές στό $\mathbb{K}$, θά ἰσχύει

$$(c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_\ell x_\ell)(t) = \mathcal{E}(t,\omega)(c_1x_1(\omega)+c_2x_2(\omega)+,,,c_\ell c_\ell(\omega)).$$

Ἀπό τή σχέση αὐτή προκύπτει ὅτι οἱ λύσεις $x_1,\ldots,x_\ell$ εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητες, ἄν καί οἱ ἀρχικές τους τιμές $x_1(\omega),x_2(\omega)),\ldots,x_\ell(\omega)$ εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητες. Ἐπειδή λοιπόν ὁ χῶρος $\mathbb{K}^n$ ἔχει διάσταση n, θά ὑπάρχουν n γραμμικά ἀνεξάρτητες λύσεις $u_1,u_2,\ldots,u_n$ στόν $\mathcal{X}_\omega$ πού τά διανύσματα $u_1(\omega),u_2(\omega),\ldots,u_n(\omega)$ εἶναι ἐπίσης γραμμικά ἀνεξάρτητα. Θεωροῦμε τώρα καί μιά ὁποιαδήποτε λύση x τοῦ συστήματος (L). Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἀρχική της τιμή $x(\omega)$ γράφεται στή μορφή

$$x(\omega) = c_1u_1(\omega)+c_2u_2(\omega)+\ldots+c_nu_n(\omega)$$

καί ἀκόμη λόγω τῆς γραμμικότητας τοῦ (L) ὅτι ἡ συνάρτηση $c_1u_1+c_2u_2+\dots$ $\dots+c_nu_n$ εἶναι λύση τοῦ προβλήματος $(L)-(\omega,x(\omega))$. Ἄρα, λόγω τοῦ μονοσημάντου τῶν λύσεων τοῦ προβλήματος αὐτοῦ, θά ἔχομε

$$x=c_1u_1+c_2u_2+\dots+c_nu_n,$$

πού σημαίνει ὅτι τά $u_1,u_2,\dots,u_n$ ἀποτελοῦν μιά βάση τοῦ $\mathcal{X}_\omega$. ▲

5.2. ΠΡΟΤΑΣΗ. Γιά κάθε σταθερό σημεῖο $\omega\in\mathcal{K}$ καί κάθε $\tau\in J\cap(\omega,\infty)$ μέ $\mathcal{E}(\tau,\omega)\neq 0_{n\times n}$, ἡ κάθετη τομή (cross-section) τοῦ $\mathcal{X}_\omega$ στό σημεῖο τ, δηλαδή τό σύνολο

$$\mathcal{X}_\omega(\tau)=\{x(\tau):x\in\mathcal{X}_\omega\},$$

εἶναι διανυσματικός ὑποχῶρος τοῦ $\mathbb{K}^n$ μέ διάσταση ἴση μέ τό $\operatorname{rank}\mathcal{E}(\tau,\omega)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Τό ὅτι τό σύνολο $\mathcal{X}_\omega(\tau)$ εἶναι διανυσματικός ὑποχῶρος τοῦ $\mathbb{K}^n$ εἶναι προφανές. Ἄν τώρα θεωρήσομε τήν γραμμική ἀπεικόνιση $\varphi:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$ μέ τύπο

$$\varphi(\xi)=\mathcal{E}(\tau,\omega)\xi$$

εἶναι γνωστό ἀπό τήν Γραμμική Ἄλγεβρα [27], ὅτι ὁ διανυσματικός χῶρος $\varphi(\mathbb{K}^n)=\mathcal{X}_\omega(\tau)$ ἔχει διάσταση ἴση μέ τό $\operatorname{rank}\mathcal{E}(\tau,\omega)$. ▲

Ἄν τό τ εἶναι μή ἰδιάζον σημεῖο ὡς πρός τό ω, τότε $\operatorname{rank}\mathcal{E}(\tau,\omega)=n$ καί ἐπομένως $\mathcal{X}_\omega(\tau)=\mathbb{K}^n$. Αὐτό σημαίνει ὅτι γιά κάθε $\xi\in\mathbb{K}^n$ ὑπάρχει λύση $x\in\mathcal{X}_\omega$ τέτοια ὥστε $x(\tau)=\xi$. Ἀκριβέστερα ἰσχύει ἡ παρακάτω πρόταση.

5.3. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ἂν τ εἶναι ἕνα μή ἰδιάζον σημεῖο ὡς πρός τό $\omega \in \mathcal{K}$, τότε γιά κάθε $\xi \in \mathbb{K}^n$ ἡ συνάρτηση πού δίνεται ἀπό τόν τύπο

$$x(t) = \mathcal{E}(t,\omega)\mathcal{E}^{-1}(\tau,\omega)\xi,$$

εἶναι ἡ μοναδική λύση ἀπό τόν χῶρο $\mathcal{X}_\omega$, γιά τήν ὁποία ἰσχύει $x(\tau) = \xi$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εἶναι φανερό ὅτι ἡ συνάρτηση x εἶναι λύση τοῦ προβλήματος (L)-$(\omega, \mathcal{E}^{-1}(\tau,\omega)\xi)$ μέ $x(\tau) = \xi$. Ἂν ὑποθέσομε τώρα ὅτι $\hat{x} \in \mathcal{X}_\omega$ καί ἰσχύει $\hat{x}(\tau) = \xi$, τότε

$$\hat{x}(t) = \mathcal{E}(t,\omega)\hat{x}(\omega),$$

Ἄρα $\xi = \hat{x}(\tau) = \mathcal{E}(\tau,\omega)\hat{x}(\omega)$ καί ἐπομένως $\hat{x}(\omega) = \mathcal{E}^{-1}(\tau,\omega)\xi$. Ἔτσι, ἄν λάβομε ὑπ'ὄψη τό μονοσήμαντο τῶν λύσεων τοῦ προβλήματος (L)-$(\omega, \mathcal{E}^{-1}(\tau,\omega)\xi)$, συμπεραίνομε $x = \hat{x}$ καί ἡ πρόταση ἀποδείχτηκε. ▲

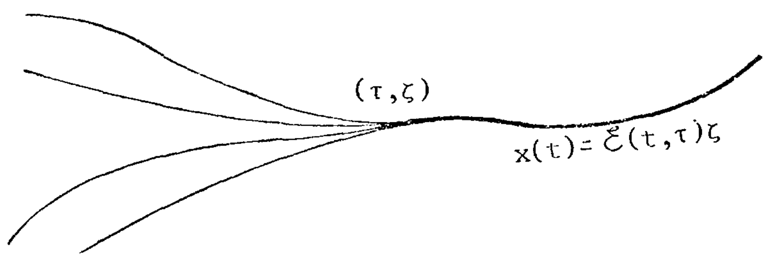
5.4. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ἂν τό τ εἶναι ἰδιάζον σημεῖο ὡς πρός τό $\omega \in \mathcal{K}$, τότε γιά κάθε $\zeta \in \mathcal{X}_\omega(\tau)$ ὑπάρχουν ἄπειρες λύσεις $x \in \mathcal{X}_\omega$ τέτοιες ὥστε $x(\tau) = \zeta$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ἔστω $\zeta \in \mathcal{X}_\omega(\tau)$. Τότε εἶναι φανερό ὅτι ὑπάρχει λύση $x \in \mathcal{X}_\omega$ μέ $x(\tau) = \zeta$. Δηλαδή τό ὡς πρός ξ ἀλγεβρικό σύστημα

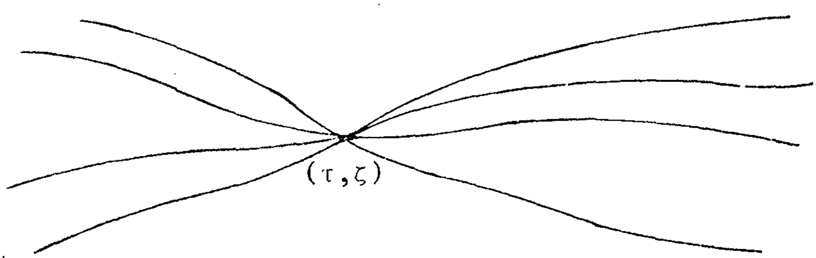
$$\mathcal{E}(\tau,\omega)\xi = \zeta$$

ἔχει λύση. Ἀλλά $\det \mathcal{E}(\tau,\omega) = 0$ καί ἐπομένως τό ἀλγεβρικό αὐτό σύστημα ἔχει ἄπειρες λύσεις τό ὁποῖο καί ἀποδεικνύει τήν πρόταση. ▲

Ἄν τό ἰδιάζον σημεῖο τ (ὡς πρός τό ω) εἶναι συγχρόνως καί σημεῖο τοῦ $\mathcal{K}$, τότε ὅλες οἱ λύσεις πού καταλήγουν ἀπό ἀριστερά στό σημεῖο (τ,ζ), μέ $\zeta \in \mathcal{X}_\omega(\tau)$, συνεχίζονται δεξιά τοῦ σημείου αὐτοῦ σέ μιά μόνο λύση, τήν μοναδική λύση τοῦ προβλήματος (L)-(τ,ζ). Ἔτσι οἱ λύσεις σέ ἕνα σταθερό σημεῖο τ τῶν ὁρισμάτων πού εἶναι καί ἰδιάζον σημεῖο ὡς πρός τό $\omega \in \mathcal{K}$ παρουσιάζουν τήν εἰκόνα τοῦ ἑπομένου σχήματος



Ἀντίθετα, στήν περίπτωση πού τό ἰδιάζον σημεῖο τ δέν ἀνήκει στό $\mathcal{K}$, τά γραφήματα τῶν λύσεων παρουσιάζουν στό σημεῖο (τ,ζ) τήν εἰκόνα τοῦ παρακάτω σχήματος



Στήν περίπτωση τοῦ πρώτου σχήματος τό διάστημα $J \cap [\tau,\omega)$ λέγεται δ ι ά σ τ η μ α ἐ π α φ ῆ ς (interval of adherence) τῶν λύσεων τοῦ συστήματος (L). Ὁ ὅρος "διάστημα ἐπαφῆς" ἐμφανίζεται στό βιβλίο τοῦ Norkin [29] πού μελετάει παρόμοια θέματα σέ γραμμικές ἐξισώσεις $2^{\underline{ας}}$ τάξεως. Ἀκόμη ὁ El'sgol'ts [8] δίνει λύσεις πού ταυτίζονται σέ κάποιο διάστημα.

'Ανάλογα, στήν περίπτωση τοῦ δευτέρου σχήματος τό ἰδιάζον (ὡς πρός τό ω) μή σταθερό σημεῖο τ τῶν ὁρισμάτων λέγεται τότε καί σ η μ ε ῖ ο ἐ π α φ ῆ ς (point of adherence) τῶν λύσεων.

'Ακόμη παρατηροῦμε ὅτι ἄν $\omega = \inf J$, $\omega' \in \mathcal{K} \cap J$ καί x εἶναι μιά λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν $(L)-(\omega',\xi)$, μέ $\xi \in \mathcal{X}_\omega(\omega')$, τότε ἰσχύουν:

α) Ἄ ν τ ό ω' ε ἶ ν α ι μ ή ἰ δ ι ά ζ ο ν ὡ ς π ρ ό ς τ ό ω, τ ό τ ε ὑ π ά ρ χ ε ι μ ι ά μ ο ν α δ ι κ ή λ ύ σ η σ τ ό $\mathcal{X}_\omega$, π ο ύ ε ἶ ν α ι ἐ π έ κ τ α σ η τ ῆ ς x π ρ ό ς τ ά ἀ ρ ι σ τ ε ρ ά.

β) Ἄ ν τ ό ω' ε ἶ ν α ι ἰ δ ι ά ζ ο ν ὡ ς π ρ ό ς τ ό ω, τ ό τ ε ὑ π ά ρ χ ο υ ν ἄ π ε ι ρ ε ς λ ύ σ ε ι ς σ τ ό $\mathcal{X}_\omega$ π ο ύ ε ἶ ν α ι ἐ π ε κ τ ά σ ε ι ς τ ῆ ς x π ρ ό ς τ ά ἀ ρ ι-σ τ ε ρ ά.

Πραγματικά ἄν ὑπάρχει λύση $y \in \mathcal{X}_\omega$ μέ $y(\omega') = x(\omega')$ αὐτή εἶναι καί ἐπέκταση τῆς x πρός τά ἀριστερά ἀφοῦ $\omega' \in \mathcal{K} \cap J$. Ἔτσι τά παραπάνω συμπεράσματα (α) καί (β) προκύπτουν ἀμέσως ἀπό τίς Προτάσεις 5.3 καί 5.4 ἀντίστοιχα. Τέλος, ἐπισημαίνομε ὅτι στίς συνήθεις διαφορικές ἐξισώσεις δέν παρουσιάζεται ἡ περίπτωση (β), γιατί τότε εἶναι γνωστό ἀπό τόν τύπο τοῦ Jacobi ὅτι $\det E(t,s) \neq 0$ γιά κάθε t, s καί ἐπομένως δέν ὑπάρχουν κἄν ἰδιάζοντα σημεῖα.

5.5. ΠΡΟΤΑΣΗ. Ἄν $\omega' \in \mathcal{K}$ εἶναι ἰδιάζον σημεῖο ὡς πρός τό $\omega \in \mathcal{K}$ καί ἰσχύει $\mathcal{E}(\omega',\omega) \neq 0_{n\times n}$, τότε ὁ διανυσματικός χῶρος

$$\mathcal{X}_\omega(J\cap[\omega',\infty)) = \{x|J\cap[\omega',\infty) : x\in\mathcal{X}_\omega\}$$

ἔχει διάσταση ἴση μέ τό rank $\mathcal{E}(\omega',\omega)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα μέ τήν Πρόταση 5.2 ἡ κάθετη τομή $\mathcal{X}_\omega(\omega')$ εἶναι διανυσματικός χῶρος μέ διάσταση ἴση μέ τό rank $\mathcal{E}(\omega',\omega)$. Ἐπειδή ὅμως, λόγω τοῦ μονοσημάντου, ὁ χῶρος $\mathcal{X}_\omega(J\cap[\omega',\infty))$ ταυτίζεται μέ τόν χῶρο τῶν λύσεων τοῦ προβλήματος $(L)-(\omega',x(\omega'))$ μέ $x\in\mathcal{X}_\omega$, ἔχομε τό συμπέρασμα μέ τόν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο ὅπως καί στήν Πρόταση 5.1. ▲

5.6. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄν $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{n+1}$ εἶναι σημεῖα τοῦ $\mathcal{K}$ μέ $\omega_1<\omega_2<\dots<\omega_{n+1}$ καί γιά κάθε $i=1,2,\dots,n$ ἰσχύει $\mathcal{E}(\omega_{i+1},\omega_i)\neq 0_{n\times n}$ καί ἀκόμη ὅτι τό ω_{i+1} εἶναι ἰδιάζον ὡς πρός τό ω_i, τότε ὁ διανυσματικός χῶρος $\mathcal{X}_{\omega_1}(J\cap[\omega_{n+1},\infty))$ εἶναι μηδενικός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ὑποθέτομε ὅτι ὁ χῶρος $\mathcal{X}_{\omega_1}(J\cap[\omega_{n+1},\infty))$ δέν εἶναι μηδενικός καί ἑπομένως ὅλοι οἱ χῶροι $\mathcal{X}_{\omega_1}(J\cap[\omega_i,\infty))$, $i=1,2,\dots,n$ εἶναι ἐπίσης μή μηδενικοί. Ἐπειδή τό ω_{i+1} εἶναι ἰδιάζον ὡς πρός τό ω_i ἰσχύει $\dim\mathcal{X}_{\omega_1}(J\cap[\omega_i,\infty)) > \dim\mathcal{X}_{\omega_1}(J\cap[\omega_{i+1},\infty))$ γιά κάθε $i=1,2,\dots,n$. Ἄρα

$$\dim\mathcal{X}_{\omega_1} \geq n+\dim\mathcal{X}_{\omega_1}(J\cap[\omega_{n+1},\infty)) > n,$$

πού εἶναι ἄτοπο λόγω τῆς Προτάσεως 5.1.

6. Μή ὁμογενῆ γραμμικά συστήματα

Στήν παράγραφο αὐτή θά ἀσχοληθοῦμε μέ τό μή ὁμογενές γραμμικό σύστημα (L'), ὅπως αὐτό ὁρίστηκε στήν εἰσαγωγή τοῦ κεφαλαίου. Εἰδικώτερα θά δοῦμε πώς μποροῦν νά προκύψουν οἱ λύσεις τοῦ συνόλου $\mathcal{X}_{\mathcal{K}}$ τοῦ συστήματος (L') ἀπό τίς ἀντίστοιχες λύσεις τοῦ συστήματος (L).

Εἶναι φανερό ὅτι ἄν $\omega\in\mathcal{K}$, $\xi\in\mathbb{K}^n$ καί y, z εἶναι λύσεις τῶν προβλημάτων (ἀρχικῶν ἤ ὁριακῶν τιμῶν) (L)-(ω,ξ) καί (L')-$(\omega,0)$ ἀντίστοιχα, τότε ἡ συνάρτηση $x=y+z$ εἶναι λύση τοῦ προβλήματος (L')-(ω,ξ). Ἑπομένως τό πρόβλημα πού τίθεται ἀμέσως εἶναι ἡ εὕρεση λύσεως z τοῦ προβλήματος (L')-$(\omega,0)$. Γιά τό σκοπό αὐτό διακρίνομε, ὅπως καί γιά τήν εὕρεση τῆς ἐξελίξεως τοῦ συστήματος (L), δύο περιπτώσεις.

Στήν περίπτωση πού $\omega\in\mathcal{K}\cap J$, σέ ἀναλογία μέ τήν Παράγραφο 2, θεωροῦμε τήν ἀκολουθία τῶν διανυσματικῶν συναρτήσεων

$$z_\omega^\nu(\langle A_i\rangle,\langle\sigma_i\rangle),\qquad \nu=0,1,2,\ldots$$

μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $J\cap[\omega,\infty)$ καί πού οἱ ὅροι της ὁρίζονται ἐπαγωγικά μέ τούς τύπους

$$z_\omega^0(\langle A_i\rangle,\langle\sigma_i\rangle)(t)=\int_\omega^t b(s)ds$$

$$z_\omega^\nu(\langle A_i\rangle,\langle\sigma_i\rangle)(t)=\sum_{j=1}^k\int_\omega^t A_j(s)z_\omega^{\nu-1}(\langle A_i\rangle,\langle\sigma_i\rangle)[\sigma_j(s)]ds,\quad \nu=1,2,\ldots$$

6.1. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἄν $\omega\in\mathcal{K}\cap J$, τότε ὑπάρχει λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (L')-$(\omega,0)$ καί δίνεται ἀπό τόν τύπο

$$z(t) = \sum_{m=0}^{\infty} z_{\omega}^{m}(<A_i>,<\sigma_i>)(t).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Στό σύνολο ὅλων τῶν συνεχῶν διανυσματικῶν συναρτήσεων πάνω στό διάστημα $J\cap[\omega,\infty)$ καί μέ τιμές στό $\mathbb{K}^n$ μέ $z(\omega)=0$ ὁρίζομε τόν τελεστή μέ τύπο

$$(T\varphi)(t) = \sum_{i=1}^{k} \int_{\omega}^{t} A_i(s)\varphi(s)ds + \int_{\omega}^{t} b(s)ds.$$

Ἔτσι θέτοντας $B(t) = \int_{\omega}^{t} b(s)ds$, ἀποδεικνύομε, ὅπως ἀκριβῶς καί στό Θεώρημα 2.2, ὅτι τό $\lim_{m\to\infty} (T^m B)$ ὑπάρχει κατά σημεῖο στό διάστημα $J\cap[\omega,\infty)$ καί ὁρίζει μιά συνάρτηση z λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν $(L')-(\omega,0)$ πού ἔχει τή μορφή τοῦ συμπεράσματος. ▲

Στήν περίπτωση πού $\omega\in\mathcal{R}-J$, ὁρίζομε ἀντίστοιχα τήν ἀκολουθία τῶν διανυσματικῶν συναρτήσεων

$$\tilde{z}_{\omega}^{\nu}(<A_i>,<\sigma_i>), \quad \nu = 0,1,2,\ldots$$

μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $(J\cup\{\omega\})\cap[\omega,\infty)$ καί πού οἱ ὅροι της ὁρίζονται ἐπαγωγικά μέ τούς τύπους

$$\tilde{z}_{\omega}^{0}(<A_i>,<\sigma_i>)(t) = \int_{\omega}^{t} b(s)ds$$

$$\tilde{z}_{\omega}^{\nu}(<A_i>,<\sigma_i>)(t) = \sum_{j=1}^{k} \int_{\omega}^{t} A_j(s)\tilde{z}_{\omega}^{\nu-1}(<A_i>,<\sigma_i>)[\sigma_j(s)]ds, \quad \nu = 1,2,\ldots$$

Ἐντελῶς ἀνάλογα, μέ τό προηγούμενο θεώρημα, ἀποδεικνύεται καί τό παρακάτω.

6.2. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἄν γιά τό $\omega \in \mathcal{K}$-J ἰσχύει ἡ συνθήκη (C) (τοῦ Θεωρήματος 3.2) καί ἐπί πλέον

$$(C') \qquad \int_{\omega^+} |b(s)|ds < \infty,$$

τότε ὑπάρχει λύση τοῦ προβλήματος ὁριακῶν τιμῶν (L')-(ω,0) καί δίνεται ἀπό τόν τύπο

$$z(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{z}_{\omega}^{m}(<A_i>,<\sigma_i>)(t).$$

Σημειώνομε τέλος ὅτι τό μονοσήμαντο τῶν λύσεων τοῦ προβλήματος (ἀρχικῶν ἤ ὁριακῶν τιμῶν) (L')-(ω,0) ἰσχύει ὅπως εἶναι ἤδη γνωστό ἀπό τό Πόρισμα 2.3 τοῦ Κεφαλαίου 0 καί ἀπό τό Θεώρημα 3.1 (Βλ. καί Παρατήρηση 3.3) τοῦ Κεφαλαίου 2.

7. Εὐστάθεια

Στήν παράγραφο αὐτή θά διαπραγματευτοῦμε τήν ε ὐ σ τ ά θ ε ι α ὑ π ό σ υ ν θ ή κ η (conditional stability) τῶν λύσεων τῶν συστημάτων (L) καί (L'). Ἡ μελέτη τῆς εὐστάθειας τῶν λύσεων αὐτῶν καί ἡ λήψη συμπερασμάτων ἀναλόγων μέ ἐκεῖνα πού ἰσχύουν στά συνήθη διαφορικά συστήματα ἐπιτυγχάνονται χάρη στήν εὕρεση τῆς ἐξελίξεως καί τίς ἰδιότητές της πού ἀναφέρθηκαν στήν Παράγραφο 4. Στά παρακάτω, σέ ὁρισμένες προτάσεις δέν θά δώσομε ἀποδείξεις καί συγκεκριμένα σέ αὐτές πού οἱ ἀποδείξεις τους εἶναι τελείως παράλληλες μέ ἐκεῖνες πού ἰσχύουν στά συνήθη γραμμικά διαφορικά συστήματα.

Ὑποθέτομε ἐδῶ ὅτι γιά κάθε $i=1,2,\dots,k$ οἱ συναρτήσεις-πίνακα A_i, τά ορίσματα σ_i καί ἡ συνάρτηση b ὁρίζονται σέ ἕνα ἀπέραντο δεξιά διάστημα J τῆς πραγματικῆς εὐθείας, ὁπότε, σύμφωνα μέ τήν Παρατήρηση 3.10 τοῦ Κεφαλαίου 0, κάθε μιά λύση τοῦ συστήματος (L) ἤ (L') ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα ἐπίσης ἀπέραντο δεξιά διάστημα.

Δίνομε τώρα τούς παρακάτω ὁρισμούς εὐστάθειας ὑπό συνθήκη ὅπου $\omega \in \mathcal{K} \cap J$ καί $A \subseteq \mathcal{K} \cap J$.

7.1. ΟΡΙΣΜΟΙ. (i) Μιά λύση x εἶναι $\mathcal{X}_\omega$ - ε ὐ σ τ α θ ή ς τότε καί μόνο τότε, ἄν $\omega \in \mathrm{Dom}\, x$ καί, γιά κάθε $\varepsilon > 0$, ὑπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ὥστε γιά κάθε λύση $y \in \mathcal{X}_\omega$ νά ἰσχύει

$$|x(\omega)-y(\omega)| \leq \delta \Rightarrow |x(t)-y(t)| \leq \varepsilon \quad \text{γιά κάθε } t \in [\omega,\infty).$$

(ii) Μιά λύση x εἶναι $\mathcal{X}_\omega$ - ἀ σ υ μ π τ ω τ ι κ ά ε ὐ σ τ α θ ή ς τότε καί μόνο τότε, ἄν αὐτή εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-εὐσταθής καί ἐπί πλέον ὑπάρχει $\delta_0 > 0$ τέτοιο ὥστε γιά κάθε λύση $y \in \mathcal{X}_\omega$ νά ἰσχύει

$$|x(\omega)-y(\omega)| \leq \delta_0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} |x(t)-y(t)| = 0.$$

(iii) Μιά λύση x εἶναι $\mathcal{X}_\omega$ - ὁ μ ο ι ό μ ο ρ φ α ε ὐ σ τ α θ ή ς ὡ ς π ρ ό ς $\mathcal{K}$ τότε καί μόνο τότε, ἄν $\omega \in \mathrm{Dom}\, x$ καί γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ὥστε γιά κάθε $y \in \mathcal{X}_\omega$ καί γιά κάθε $\omega' \in \mathcal{K} \cap J$ μέ $\omega' \geq \omega$ νά ἰσχύει

$$|x(\omega')-y(\omega')| \leq \delta \Rightarrow |x(t)-y(t)| \leq \varepsilon \quad \text{γιά κάθε } t \geq \omega'.$$

(iv) Μιά λύση x εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθής ὡς πρός $\mathcal{K}$ τότε καί μόνο τότε, ἄν αὐτή εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφα εὐσταθής (ὡς πρός $\mathcal{K}$) καί ἀκόμη ὑπάρχουν $\delta_0 > 0$ καί γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ἕνα $T = T(\varepsilon) > 0$ τέτοια, ὥστε γιά κάθε $y \in \mathcal{X}_\omega$ καί $\omega' \in \mathcal{K} \cap J$ μέ $\omega' \geqq \omega$ νά ἰσχύει

$$|x(\omega')-y(\omega')| \leqq \delta_0 \Rightarrow |x(t)-y(t)| \leqq \varepsilon \text{ γιά κάθε } t \geqq \omega'+T.$$

(v) Μιά λύση x εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-σχεδόν ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθής ὡς πρός $\mathcal{K}$ τότε καί μόνο τότε ἄν αὐτή εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφα εὐσταθής καί ἀκόμη ὑπάρχουν $\delta_0 > 0$ καί, γιά κάθε $\varepsilon > 0$ καί $\omega' \in \mathcal{K} \cap J$ μέ $\omega' \geqq \omega$, ἕνα $T = T(\varepsilon, \omega') > 0$ τέτοια ὥστε γιά κάθε λύση $y \in \mathcal{X}_\omega$ νά ἰσχύει

$$|x(\omega')-y(\omega')| \leqq \delta_0 \Rightarrow |x(t)-y(t)| \leqq \varepsilon \text{ γιά κάθε } t \geqq \omega'+T.$$

(vi) Τό σύστημα (L') θά λέγεται $\mathcal{X}_\omega$-εὐσταθές, $\mathcal{X}_\omega$-ἀσυμπτωτικά εὐσταθές, $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφα εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$, $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐστθές ὡς πρός $\mathcal{K}$ καί $\mathcal{X}_\omega$-σχεδόν ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$ τότε καί μόνο τότε, ἄν κάθε λύση του πού ὁρίζεται στό ω εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-εὐσταθής, $\mathcal{X}_\omega$-ἀσυμπτωτικά εὐσταθής, $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφα εὐσταθής ὡς πρός $\mathcal{K}$, $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθής ὡς πρός $\mathcal{K}$, $\mathcal{X}_\omega$-σχεδόν ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθής ὡς πρός $\mathcal{K}$, ἀντίστοιχα.

(vii) Τό σύστημα (L') θά λέγεται $\mathcal{X}_A$- ε ύ σ τ α θ έ ς, $\mathcal{X}_A$ - ά σ υ μ π τ ω τ ι κ ά ε ύ σ τ α θ έ ς, $\mathcal{X}_A$ - ὁ μ ο ι ό μ ο ρ φ α ε ύ σ τ α θ έ ς ὡ ς π ρ ό ς $\mathcal{K}$, $\mathcal{X}_A$ - ὁ μ ο ι ό μ ο ρ φ α ά σ υ μ π τ ω τ ι κ ά ε ύ σ τ α θ έ ς ὡ ς π ρ ό ς $\mathcal{K}$, $\mathcal{X}_A$-σ χ ε δ ό ν ὁ μ ο ι ό μ ο ρ φ α ά σ υ μ π τ ω τ ι κ ά ε ύ σ τ α θ έ ς ὡ ς π ρ ό ς $\mathcal{K}$, τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε $\omega \in A$ τό σύστημα αὐτό εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-εὐσταθές, $\mathcal{X}_\omega$-ἀσυμπτωτικά εὐσταθές, $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφα εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$, $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$, $\mathcal{X}_\omega$-σχεδόν ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$.

7.2. ΣΗΜΕΙΩΣΗ. Οἱ παραπάνω ὁρισμοί, (i) ἕως (iv), δόθηκαν μέ πρότυπο τούς κλασικούς ὁρισμούς εὐστάθειας κατά Lyapynov γιά τίς συνήθεις διαφορικές ἐξισώσεις (Βλ. Coppel [5]). Ἔτσι οἱ ὁρισμοί αὐτοί ὁδηγοῦν στούς ἀντίστοιχους ὁρισμούς πού ἀναφέρονται στίς συνήθεις διαφορικές ἐξισώσεις, ἀφοῦ ἐκεῖ ὅλα τά σημεῖα τοῦ J εἶναι καί σταθερά σημεῖα τῶν ὁρισμάτων. Εἶναι φανερό, ἀπό τούς ὁρισμούς πού δόθηκαν ἐδῶ, ὅτι ἡ $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφη εὐστάθεια ὡς πρός $\mathcal{K}$ συνεπάγεται τήν $\mathcal{X}_\omega$-εὐστάθεια καί ἡ $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτική εὐστάθεια ὡς πρός $\mathcal{K}$, τήν $\mathcal{X}_\omega$--ἀσυμπτωτική εὐστάθεια. Γενικά τό ἀντίστροφο δέν ἰσχύει, ἀλλά πρέπει νά σημειώσομε ὅτι αὐτό συμβαίνει ὅταν τό σύνολο $\{\omega' \in \mathcal{K} \cap J : \omega' \geqq \omega\}$ εἶναι (ἄνω) φραγμένο. Ἔτσι ἔχομε ἐδῶ μιά διαφοροποίηση ἀπό τήν περίπτωση τῶν συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων πού ὀφείλεται στό ὅτι ἐκεῖ τό σύνολο αὐτό εἶναι πάντοτε μή φραγμένο.

Ἡ $\mathcal{K}_\omega$-σχεδόν ὁμοιόμορφη εὐστάθεια ὡς πρός $\mathcal{K}$, πού εἰσάγεται μέ τόν ὁρισμό (v), εἶναι φανερό ὅτι συνεπάγεται τήν $\mathcal{K}_\omega$-ὁμοιόμορφη εὐστάθεια ὡς πρός $\mathcal{K}$ καί τήν $\mathcal{K}_\omega$-ἀσυμπτωτική εὐστάθεια, ἐνῶ ἀντίθετα προκύπτει ἀπό τήν $\mathcal{K}_\omega$-ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτική εὐστάθεια. Παρακάτω δίνομε ἕνα παράδειγμα πού δείχνει ὅτι ἡ $\mathcal{K}_\omega$-σχεδόν ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτική εὐστάθεια ὡς πρός $\mathcal{K}$ δέν συνεπάγεται τήν $\mathcal{K}_\omega$-ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτική εὐστάθεια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω ἡ διαφορική ἐξίσωση

(Δ) $$x' = -(\log t+1)x+f(t), \quad t \geq 1$$

ὅπου $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ἡ λύση τοῦ προβλήματος $(\Delta')-(s,\xi)$, ὅπου (Δ') ἡ ἀντίστοιχη ὁμογενής ἐξίσωση τῆς (Δ), $s \geq 1$ καί $\xi \in \mathbb{R}$, δίνεται ἀπό τόν τύπο

$$x(t) = \xi t^{-(t-s)}.$$

Παρατηροῦμε τότε ὅτι ὑπάρχει $\delta_0 = 1$ καί γιά κάθε $\varepsilon > 0$ μέ $\varepsilon < 1$ ἕνα $T(\varepsilon,s) = |\tau(\varepsilon,s)-s|$, τέτοια ὥστε

$$|x(s)| = |\xi| < 1 \Longrightarrow |x(t)| \leq \varepsilon \quad \text{γιά κάθε} \quad t \geq s+T(\varepsilon,s),$$

ὅπου $\tau(\varepsilon,s) = \tau$ εἶναι λύση τῆς ἐξισώσεως $\tau^{\tau-s} = \frac{1}{\varepsilon}$. Δηλαδή ἡ ἐξίσωση (Δ') εἶναι $\mathcal{K}_s$-σχεδόν ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθής. Ἀντίθετα ἡ διαφορική ἐξίσωση (Δ') δέν εἶναι $\mathcal{K}_s$-ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθής. Πραγματικά ἄν ἦταν, θά ὑπῆρχε ἕνα $\delta_0 > 0$ καί γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ἕνα $T = T(\varepsilon) > 0$ τέτοια ὥστε

$$|x(s)| \leq \delta_0 \Rightarrow |x(t)| \leq \varepsilon \quad \text{γιά κάθε } t \text{ καί } s \text{ μέ } t \geq s \geq 1.$$

Τότε όμως όπως καί παραπάνω θά καταλήγαμε ότι

$$|x(t)| \leq \varepsilon \quad \text{γιά κάθε} \quad t \geq s+T$$

όπου όμως $T = |\tau - s|$ καί τ λύση τῆς ἐξισώσεως $\tau^{(\tau-s)} = \frac{\delta_0}{\varepsilon}$. Δηλαδή τό T εἶναι συνάρτηση, όχι μόνο τοῦ ε, ἀλλά καί τοῦ s πού ἀποκλείει τήν $\mathcal{X}_s$-ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτική εὐστάθεια τῆς (Δ').

7.3. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Εἶναι γνωστό ἀπό τήν Παράγραφο 6 ὅτι ἄν x, y εἶναι τυχοῦσες λύσεις ἀπό τόν χῶρο $\mathcal{X}_\omega$ τοῦ συστήματος (L'), τότε ὑπάρχουν λύσεις z καί w τῶν προβλημάτων (L)-(ω,$x(\omega)$) καί (L)-(ω,$y(\omega)$) ἀντίστοιχα τέτοιες, ὥστε

$$x = z+\varphi \quad \text{καί} \quad y = w+\varphi,$$

ὅπου φ ἡ λύση τοῦ προβλήματος (L')-(ω,0). Ἔτσι ἔχομε γιά κάθε $t \in [\omega,\infty)$

$$|x(t)-y(t)| = |z(t)-w(t)|$$

ὅπου εἶναι γνωστό ὅτι ἡ συνάρτηση $z-w$ εἶναι λύση ἀπό τόν χῶρο $\mathcal{X}_\omega$ τοῦ συστήματος (L). Ἑπομένως εἶναι φανερό ὅτι ὁ χαρακτηρισμός τοῦ συστήματος (L') μέ ὁποιοδήποτε ἀπό τά παραπάνω εἴδη εὐστάθειας, συμπεραίνεται μόνο ἀπό τό ἀντίστοιχο εἶδος εὐστάθειας τῆς μηδενικῆς λύσεως τοῦ συστήματος (L).

Διατυπώνομε τώρα τό παρακάτω θεώρημα πού χαρακτηρίζει τήν $\mathcal{X}_\omega$-
-εὐστάθεια τοῦ συστήματος (L') μέσω τῆς ἀντίστοιχης ἐξελίξεως τοῦ συστήματος (L) κατ'ἀναλογία μέ ὅσα ἰσχύουν στά συνήθη γραμμικά διαφορι-

κά συστήματα.

7.4. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τό σύστημα (L') εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-εὐσταθές, τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει σταθερά $M>0$ τέτοια ὥστε νά ἰσχύει

$$\| E(t,\omega) \| \leq M \text{ γιά κάθε } t \in [\omega,\infty).$$

7.5. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄν τό σύστημα (L') εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-εὐσταθές τότε εἶναι καί $\mathcal{X}_A$-εὐσταθές, ὅπου $A=\{\omega' \in \mathcal{K} \cap J : \omega' \leq \omega\}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ἔστω $\omega' \in A$. Τότε εἶναι γνωστό ὅτι γιά κάθε $t \in [\omega,\infty)$ ἰσχύει

$$E(t,\omega') = E(t,\omega)E(\omega,\omega').$$

Ἄρα

$$\| E(t,\omega') \| \leq \| E(t,\omega) \| \, \| E(\omega,\omega') \|$$

καί ἑπομένως, ἄν λάβομε ὑπ'ὄψη καί τήν $\mathcal{X}_\omega$-εὐστάθεια τοῦ (L'), ἔχομε

$$\| E(t,\omega') \| \leq M \| E(\omega,\omega') \| \text{ γιά κάθε } t \in [\omega,\infty).$$

Ἔτσι, ἄν θέσομε

$$M' = \max\{\| E(\omega,\omega') \|, \sup_{t \in [\omega',\omega]} \| E(t,\omega') \| \},$$

ἰσχύει

$$\| E(t,\omega') \| \leq M' \text{ γιά κάθε } t \in [\omega',\infty),$$

πού σημαίνει ὅτι τό σύστημα (L') εἶναι καί $\mathcal{X}_{\omega'}$-εὐσταθές καί ἑπομένως καί $\mathcal{X}_A$-εὐσταθές, ἀφοῦ τό $\omega' \in A$ εἶναι τυχόν. ▲

7.6. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄν τό σύστημα (L') εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-εὐσταθές καί ἀκόμη κάθε $\omega' \in \mathcal{K}$ μέ $\omega' > \omega$ εἶναι μή ἰδιάζον ὡς πρός τό ω, τότε τό σύστημα (L') εἶναι καί $\mathcal{X}_{\mathcal{K} \cap J}$-εὐσταθές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Λόγω τοῦ προηγουμένου πορίσματος ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι τό (L') εἶναι $\mathcal{X}_{\mathcal{K} \cap (\omega,\infty)}$-εὐσταθές. Ἔστω λοιπόν $\omega' \in \mathcal{K}$ μέ $\omega' > \omega$. Τότε, ἐπειδή τό ω' εἶναι μή ἰδιάζον ὡς πρός τό ω, ἀπό τή σχέση

$$E(t,\omega) = E(t,\omega')E(\omega',\omega), \quad t \in [\omega',\infty)$$

προκύπτει

$$E(t,\omega)E^{-1}(\omega',\omega) = E(t,\omega).$$

Ὁπότε τό συμπέρασμα εἶναι φανερό, ἀφοῦ

$$\| E(t,\omega') \| \leq M', \quad t \in [\omega',\infty)$$

ὅπου $M' = M \| E^{-1}(\omega',\omega) \|$. ▲

7.7. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τό σύστημα (L') εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-ἀσυμπτωτικά εὐσταθές τότε καί μόνο τότε, ἄν

$$\lim_{t\to\infty} \| E(t,\omega) \| = 0 .$$

7.8. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄν τό σύστημα (L') εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-ἀσυμπτωτικά εὐσταθές καί ἀκόμη κάθε $\omega' \in \mathcal{K}$ μέ $\omega' > \omega$ εἶναι μή ἰδιάζον ὡς πρός τό ω, τότε τό σύστημα (L') εἶναι καί $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap J}$-ἀσυμπτωτικά εὐσταθές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι γιά κάθε $\tilde{\omega}\in\mathcal{K}\cap J$ ἰσχύει

$$\lim_{t\to\infty} E(t,\tilde{\omega}) = 0_{n\times n} \iff \lim_{t\to\infty} \| E(t,\tilde{\omega})\| = 0 .$$

Ἔτσι ἐπειδή γιά κάθε $\hat{\omega}\in\mathcal{K}\cap J$ μέ $\hat{\omega}\leqq\omega$ καί $t\geqq\omega$ ἔχομε

$$E(t,\hat{\omega}) = E(t\omega)E(\omega,\hat{\omega}),$$

ἄν λάβομε ὑπ'ὄψη τό παραπάνω θεώρημα 7.7, παίρνομε ὅτι

$$\lim_{t\to\infty} E(t,\omega) = 0_{n\times n} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} E(t,\hat{\omega}) = 0_{n\times n} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \| E(t,\hat{\omega})\| = 0 .$$

Ἄρα, ἄν τό σύστημα (L') εἶναι $\mathcal{X}_{\omega}$-ἀσυμπτωτικά εὐσταθές, τότε εἶναι καί $\mathcal{X}_A$-ἀσυμπτωτικά εὐσταθές, ὅπου $A=\{\hat{\omega}\in\mathcal{K}\cap J : \hat{\omega}\leqq\omega\}$, ἀφοῦ εἶναι γνωστό ἀπό τό Πόρισμα 7.5 ὅτι τό σύστημα (L') εἶναι καί $\mathcal{X}_A$-εὐσταθές.

Ἔστω τώρα τυχόν $\omega'\in\mathcal{K}\cap J$ μέ $\omega'\geqq\omega$. Τότε ἐπειδή τό ω' εἶναι μή ἰδιάζον ὡς πρός τό ω ἔχομε ἀπό τό Πόρισμα 7.6 ὅτι τό σύστημα (L') εἶναι καί $\mathcal{X}_{\omega'}$-εὐσταθές. Ἀκόμη ἐπειδή ἡ σχέση $\det E(\omega',\omega)\neq 0$ συνεπάγεται $E(\omega',\omega)\neq 0_{n\times n}$. Ἔτσι ἀπό τόν τύπο

$$E(t,\omega) = E(t,\omega')E(\omega',\omega), \quad t\geqq\omega'$$

παίρνομε

$$\lim_{t\to\infty} E(t,\omega) = 0_{n\times n} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} E(t,\omega') = 0_{n\times n} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \| E(t,\omega')\| = 0,$$

δηλαδή ὅτι τό σύστημα (L') εἶναι $\mathcal{X}_B$-ἀσυμπτωτικά εὐσταθές, ὅπου $B=\{\omega'\in\mathcal{K}\cap J : \omega'\geqq\omega\}$. Ἑπομένως ἔχομε τελικά ὅτι τό σύστημα (L') εἶναι $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap J}$-ἀσυμπτωτικά εὐσταθές.

7.9. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τό σύστημα (L') εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφα εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$ τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει σταθερά M τέτοια, ὥστε

$$\|E(t,\omega')\| \leq M \text{ γιά κάθε } \omega' \in \mathcal{K}\cap J \text{ καί } t \text{ μέ } t \geq \omega' \geq \omega.$$

7.10. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄν τό σύστημα (L') εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφα εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$, τότε εἶναι καί $\mathcal{X}_A$-ὁμοιόμορφα εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$, ὅπου $A=\{\omega' \in \mathcal{K}\cap J : \omega' \leq \omega\}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ἔστω $\omega' \in A$. Τότε γιά κάθε $t \geq \omega$ ἰσχύει

$$E(t,\omega') = E(t,\omega)E(\omega,\omega')$$

καί ἐπομένως

$$\|E(t,\omega')\| \leq \|E(t,\omega)\|\cdot\|E(\omega,\omega')\|.$$

Ἀλλά, ἀπό τό Θεώρημα 3.2 τοῦ Κεφαλαίου 3, ἔχομε

$$\|E(t,\omega')\| \leq \exp \sum_{i=1}^{k} \int_{\omega'}^{t} \|A_i(s)\|\,ds$$

ὁπότε

$$\|E(t,\omega')\| \leq \exp \sum_{i=1}^{k} \int_{\omega'}^{\omega} \|A_i(s)\|\,ds \quad \text{γιά κάθε} \quad t \in [\omega',\omega].$$

Ἔτσι, ἄν λάβομε ὑπ'ὄψη καί τήν $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφη εὐστάθεια ὡς πρός $\mathcal{K}$ τοῦ (L'), παίρνομε

$$\| E(t,\omega')\| \leq M \exp \sum_{i=1}^{k} \int_{\omega'}^{\omega} \| A_i(s)\| \, ds \quad \text{γιά κάθε} \quad t \in [\omega,\infty),$$

ὅπου M μιά σταθερά πού ἐξασφαλίζεται ἀπό τό θεώρημα 7.9.

Ἔτσι, γιά

$$M_{\omega'} = \max\left\{M \exp \sum_{i=1}^{k} \int_{\omega'}^{\omega} \|A_i(s)\| \, ds, \quad \exp \sum_{i=1}^{k} \int_{\omega'}^{\omega} \| A_i(s)\| \, ds\right\}$$

παίρνομε καί

$$\| E(t,\omega')\| \leq M_{\omega'} \quad \text{γιά κάθε} \quad t \in [\omega',\infty).$$

Εἶναι φανερό τώρα ὅτι

$$\| E(t,\tilde{\omega})\| \leq M_{\omega'} \quad \text{γιά κάθε} \quad \tilde{\omega} \in \mathcal{K} \cap J \text{ καί } t \text{ μέ } t \geq \tilde{\omega} \geq \omega',$$

δηλαδή τό σύστημα (L') εἶναι καί $\mathcal{X}_{\omega'}$-ὁμοιόμορφα εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$, ἀφοῦ ἀπό τό Πόρισμα 7.5 ἔχομε καί τήν $\mathcal{X}_{\omega'}$-εὐστάθεια τοῦ (L') γιά κάθε $\omega' \mathcal{K} \cap J$ μέ $\omega' \leq \omega$. Ἑπομένως, ἐπειδή τό $\omega' \in A$ εἶναι τυχόν, τό σύστημα (L') εἶναι $\mathcal{X}_A$-ὁμοιόμορφα εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$. ▲

7.11. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄν τό σύστημα (L') εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφα εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$ καί ἐπί πλέον κάθε $\omega' \in \mathcal{K} \cap J$ μέ $\omega' > \omega$ εἶναι μή ἰδιάζον ὡς πρός τὸ ω, τότε τό σύστημα (L') εἶναι καί $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap J}$-ὁμοιόμορφα εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ἔχοντας ὑπ'ὄψη τό προηγούμενο Πόρισμα 7.9, ἀρκεῖ νά ἀποδείξομε ὅτι τό σύστημα (L') εἶναι $\mathcal{X}_B$-ὁμοιόμορφα εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$, ὅπου $B = \{\omega' \in \mathcal{K} \cap J : \omega' \geq \omega\}$. Εἶναι φανερό ἀπό τό πόρισμα 7.6 ὅτι τό σύστημα (L') εἶναι καί $\mathcal{X}_B$-εὐσταθές. Ἔτσι πλέον τό πόρισμα γίνεται φανερό ἀπό τόν ὁρισμό τῆς $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφης εὐστάθειας ὡς πρός $\mathcal{K}$. ▲

Θά ἀποδείξομε τώρα ἕνα θεώρημα πού δίνει μιά ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ὥστε τό σύστημα (L') νά εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-σχεδόν ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθές. Στό θεώρημα αὐτό καθώς καί στά ἑπόμενα θά ὑποθέτομε τό σύνολο $\{\omega' \in \mathcal{K} \cap J : \omega' \geq \omega\}$ μή φραγμένο. Ἡ ὑπόθεση αὐτή εἶναι οὐσιώδης, ἀφοῦ, ὅπως τονίσαμε καί στή Σημείωση 7.2, ὅταν τό σύνολο αὐτό εἶναι φραγμένο τότε, ἡ $\mathcal{X}_\omega$-ἀσυμπτωτική εὐστάθεια συνεπάγεται τήν $\mathcal{X}_\omega$-σχεδον ὁμοιόμορφη ἀσυμπτωτική εὐστάθεια ὡς πρός $\mathcal{K}$ καί τήν $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφη ἀσυμπτωτική εὐστάθεια ὡς πρός $\mathcal{K}$.

7.12. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἔστω ὅτι τό ∞ εἶναι σημεῖο συσσωρεύσεως τοῦ συνόλου $\mathcal{K}$ τῶν σταθερῶν σημείων τῶν ὁρισμάτων καί ἀκόμη ὅτι ϑ εἶναι ἕνας ἀριθμός μέ $0 < \vartheta < 1$. Τό σύστημα (L') εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-σχεδόν ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$ τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχουν μιά σταθερά $M > 0$ καί μιά αὔξουσα συνάρτηση $m : J \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ μέ $\lim_{t\to\infty} m(t) = \infty$ τέτοιες, ὥστε γιά κάθε $\omega' \in \mathcal{K} \cap J$ καί t μέ $t \geq \omega' \geq \omega$ νά ἰσχύει

$$\| E(t,\omega') \| \leq M\, \vartheta^{m(t)} . \tag{12}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ἔστω, πρῶτα, ὅτι τό σύστημα (L') εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-σχεδόν ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$. Τότε εἶναι γνωστό ὅτι ἡ μηδενική λύση τοῦ συστήματος (L) εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-σχεδόν ὁμοιόμορφα εὐσταθής ὡς πρός $\mathcal{K}$. Ἔτσι, σύμφωνα μέ τόν Ὁρισμό 7.1 (v), ὑπάρχει $\delta_0 > 0$

καί, γιά κάθε $\varepsilon > 0$ καί $\omega' \in \mathcal{K} \cap J$ μέ $\omega' \geq \omega$, ἕνα $T = T(\varepsilon,\omega') > 0$ τέτοια, ὥστε γιά κάθε λύση $x \in \mathcal{X}_\omega$ τοῦ συστήματος (L) νά ἰσχύει

$$|x(\omega')| < \delta_0 \Rightarrow |x(t)| = |E(t,\omega')x(\omega')| < \varepsilon \quad \text{γιά κάθε} \quad t \geq \omega' + T(\varepsilon,\omega').$$

Ἔτσι, θέτοντας $\varepsilon = \vartheta\delta_0$ καί $T(\omega') = T(\vartheta\delta_0,\omega')$, ἔχομε

$$\| E(t,\omega')\| \leq \vartheta \quad \text{γιά κάθε} \quad t \geq \omega' + T(\omega').$$

Ἔστω τώρα τυχόν $\hat{\omega} \in \mathcal{K} \cap J$ μέ $\hat{\omega} \geq \omega$ καί μιά αὔξουσα ἀκολουθία σταθερῶν σημείων ω_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ μέ $\omega_1 = \hat{\omega}$ καί $\lim \omega_\nu = \infty$, γιά τήν ὁποία χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας ὑποθέτομε ὅτι

$$\omega_{\nu+1} - \omega_\nu > T(\omega_\nu) = T_\nu .$$

Ἔτσι γιά τυχόν $t \geq \hat{\omega}$ ὑπάρχει ἕνας μοναδικός μή ἀρνητικός ἀκέραιος $m = m(t)$ τέτοιος, ὥστε

$$\omega_{m+1} \leq t < \omega_{m+2} \tag{13}$$

ὁπότε ἔχομε

$$\| E(t,\hat{\omega})\| \leq \| E(t,\omega_{m+1})\| \, \| E(\omega_{m+1},\omega_m)\| \ldots \| E(\omega_2,\hat{\omega})\| .$$

Ἀλλά τότε ἀπό τήν (12) παίρνομε

$$\| E(\omega_{\nu+1},\omega_\nu)\| \leq \vartheta \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu \in \mathbb{N}$$

καί ἀκόμη ἀπό τήν $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφη εὐστάθεια ὡς πρός $\mathcal{K}$ τοῦ (L'),

$$\| E(t,\omega_{m+1})\| \leq M$$

ὅπου M μιά σταθερά πού ἐξασφαλίζεται ἀπό τό Θεώρημα 7.9.

Ἄρα

$$\| E(t,\hat{\omega})\| \leq M\,\vartheta^{m(t)}$$

ὅπου γιά τήν αὔξουσα συνάρτηση m προκύπτει εὔκολα ἀπό τήν (13) ὅτι

$\lim\limits_{t\to\infty} m(t) = \infty$

Ἀντίστροφα, τώρα, ὑποθέτομε ὅτι γιά κάθε $\omega' \in \mathcal{K}\cap J$ καί t μέ $t \geq \omega' \geq \omega$ ἰσχύει

$$\| E(t,\omega')\| \leq M\,\vartheta^{m(t)}$$

ὅπου M μιά θετική σταθερά καί ἡ αὔξουσα συνάρτηση $m : J \to \mathbb{N}$ εἶναι τέ-τοια, ὥστε $\lim\limits_{t\to\infty} m(t) = \infty$. Εἶναι τότε φανερό ὅτι ἰσχύει καί

$$\| E(t,\omega')\| \leq M \quad \text{γιά κάθε} \quad \omega' \in \mathcal{K}\cap J \quad \text{καί t μέ} \quad t \geq \omega' \geq \omega,$$

δηλαδή τό σύστημα (L') εἶναι καί $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφα εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$. Ἐπιπλέον, ἄν $x \in \mathcal{X}_\omega$ καί $\delta_0 = 1$, τότε γιά κάθε ε μέ $0 < \varepsilon < M$ καί $\omega' \in \mathcal{K}\cap J$, μέ $\omega' \geq \omega$ καί $|x(\omega')| \leq 1$, ἔχομε

$$|x(t)| = |E(t,\omega')x(\omega')| \leq \| E(t,\omega')\| \leq M\,\vartheta^{m(t)}.$$

Ἀλλά τότε γιά

$$T(\varepsilon,\omega') = 1 + \left| \sup\left\{ t : m(t) = \left| \frac{\log \frac{\varepsilon}{M}}{\log \vartheta} \right| + 1 \right\} - \omega' \right|$$

εὔκολα προκύπτει ὅτι

$$|x(t)| \leq \varepsilon \quad \text{γιά κάθε} \quad t \geq \omega' + T(\varepsilon,\omega')$$

πού σημαίνει ὅτι τό σύστημα (L') εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-σχεδόν ὁμοιόμορφα ἀσυμπτω-τικά εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$. ▲

7.13. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄν τό σύστημα (L') εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-σχεδόν ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$, τότε εἶναι καί $\mathcal{X}_A$-σχεδόν ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$, ὅπου $A=\{\omega' \in \mathcal{K}\cap J : \omega' \leqq \omega\}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ἔστω $\omega' \in A$. Τότε εἶναι γνωστό ὅτι ἰσχύει

$$\|E(t,\omega')\| \leqq \|E(t,\omega)\|\,\|E(\omega,\omega')\| \quad \text{γιά κάθε} \quad t\in[\omega,\infty)$$

ὁπότε λαμβάνοντας ὑπ' ὄψη τό προηγούμενο Θεώρημα 7.11 παίρνομε

$$\|E(t,\omega')\| \leqq \|E(\omega,\omega')\|\cdot M\,\vartheta^{m(t)} \quad \text{γιά κάθε} \quad t\in[\omega,\infty).$$

Ἀκολουθώντας τώρα τήν ἴδια διαδικασία ὅπως καί στό Πόρισμα 7.10 παίρνομε τελικά

$$\|E(t,\tilde{\omega})\| \leqq M_{\omega'}\,\vartheta^{\tilde{m}(t)} \quad \text{γιά κάθε} \quad \tilde{\omega}\in\mathcal{K}\cap J \;\text{ καί } t \text{ μέ } \; t\geqq\tilde{\omega}\geqq\omega'$$

ὅπου

$$M_{\omega'} = \max\left\{M\exp\sum_{i=1}^{k}\int_{\omega'}^{\omega}\|A_i(s)\|\,ds,\quad \exp\sum_{i=1}^{k}\int_{\omega'}^{\omega}\|A_i(s)\|\,ds\right\}$$

καί

$$\tilde{m}(t)=\begin{cases} m(t), & \text{ἄν} \quad t\geqq\omega \\ 0, & \text{ἄν} \quad t\in[\omega',\omega). \end{cases}$$

Ἑπομένως τό σύστημα (L') εἶναι καί $\mathcal{X}_{\omega'}$-σχεδόν ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$, δηλαδή καί $\mathcal{X}_A$-σχεδόν ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$, ἀφοῦ τό ω' εἶναι τυχόν σημεῖο τοῦ A. ▲

Ἀκριβῶς ἀνάλογα μέ τό Πόρισμα 7.11 προκύπτει τώρα καί τό παρακάτω

7.14. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἂν τό σύστημα (L') εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-σχεδόν ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$ καί ἐπί πλέον κάθε $\omega' \in \mathcal{K} \cap J$, μέ $\omega' > \omega$ εἶναι μή ἰδιάζον ὡς πρός τό ω, τότε τό σύστημα (L') εἶναι καί $\mathcal{X}_{\mathcal{K}\cap J}$-σχεδόν ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$.

7.15. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἔστω ὅτι τό σύνολο $\mathcal{K} \cap J$ εἶναι r-πυκνό ὑποσύνολο τοῦ J, ὅπου $r > 0$. Τό σύστημα (L') εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$ τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχουν σταθερές $M > 0$ καί $a > 0$ τέτοιες, ὥστε γιά κάθε $\omega' \in \mathcal{K} \cap J$ καί t μέ $t \geq \omega' \geq \omega$ νά ἰσχύει

$$\| E(t,\omega') \| \leq M e^{-a(t-\omega)}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ἂν ἰσχύει ἡ παραπάνω σχέση τότε μέ τήν ἴδια ἀκριβῶς διαδικασία, ὅπως καί στά συνήθη διαφορικά συστήματα, ἀποδεικνύεται ὅτι τό σύστημα (L') εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$.

Ἀντίστροφα, ἄν τό σύστημα (L') εἶναι $\mathcal{X}_\omega$-ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$ τότε αὐτό εἶναι καί $\mathcal{X}_\omega$-σχεδόν ὁμοιόμορφα ἀσυμπτωτικά εὐσταθές ὡς πρός $\mathcal{K}$. Ἔτσι γιά $\vartheta = 1/2$, ἀπό τό Θεώρημα 7.12, ὑπάρχουν σταθερά $M' > 0$ καί αὔξουσα συνάρτηση $m : J \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, μέ $\lim_{t\to\infty} m(t) = \infty$ τέτοια, ὥστε γιά κάθε $\omega' \in \mathcal{K} \cap J$ καί t μέ $t \geq \omega' \geq \omega$ νά ἰσχύει

$$\| E(t,\omega') \| \leq M' (\tfrac{1}{2})^{m(t)}.$$

'Αλλά ἐπειδή τό σύνολο $\mathcal{K}\cap J$ εἶναι r-πυκνό ὑποσύνολο τοῦ J, μποροῦμε νά ἐκλέξομε ἕνα ἀριθμό $\lambda=\lambda(T)$, μέ $\lambda\geq 3$, ὅπου $T=T(\delta_0)$ εἶναι ὁ ἀριθμός τοῦ Ὁρισμοῦ 7.1 (iv) γιά $\varepsilon=\delta_0/2$ καί χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας τήν ἀκολουθία ω_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ ἀπό τό σύνολο $\mathcal{K}\cap J$ ἔτσι, ὥστε $\omega_1=\omega'$ καί

$$T<\omega_{\nu+1}-\omega_\nu<\lambda r \quad \text{γιά κάθε} \quad \nu\in\mathbb{N}.$$

'Ακόμη, ὅπως προκύπτει καί ἀπό τήν ἀπόδειξη τοῦ προηγουμένου θεωρήματος (Βλ. σχέση (13)), ἡ συνάρτηση m μπορεῖ νά ληφθεῖ ἔτσι ὥστε γιά κάθε $t\geq\omega'$ νά ἰσχύει

$$t<\omega_{m(t)+2}$$

καί ἐπομένως

$$t-\omega'=t-\omega_1<\omega_{m(t)+2}-\omega_1\leq(m(t)+1)\lambda r.$$

Τότε ὅμως, γιά $a=\frac{-\log(1/2)}{\lambda r}$ καί $M=2M'$, παίρνομε

$$\|E(t,\omega')\|\leq 2M'e^{-\alpha(m(t)+1)}\leq Me^{-\alpha(t-\omega')} \quad \text{γιά κάθε } t\geq\omega'. \ \blacktriangle$$

7.16. ΣΗΜΕΙΩΣΗ. Στά προηγούμενα τά διάφορα κριτήρια εὐστάθειας γιά τό σύστημα (L') δόθηκαν μέσω τῆς ἐξελίξεως E τοῦ συστήματος (L), σέ σχέση μέ τό σύνολο $\mathcal{X}_\omega$, ὅπου $\omega\in\mathcal{K}\cap J$. Ἕνα σχετικό πρόβλημα εἶναι νά δοθοῦν ἀνάλογα κριτήρια καί γιά τό σύνολο $\mathcal{X}_{\inf J}$, ὅταν $\inf J\notin J$, ἀφοῦ οἱ ἰδιότητες τῆς ἐξελίξεως E πού χρησιμοποιήθηκαν ἰσχύουν καί γιά τήν γενικευμένη ἐξέλιξη $\mathcal{E}$. 'Ιδιαίτερη σημασία ἀποκτᾶ τό πρόβλημα αὐτό ὅταν $\inf J = -\infty$, γιατί τότε σχετίζεται μέ τό πρόβλημα τῆς ἀσυμπτωτικῆς ἰσορροπίας (asymptotic equilibrium), πού ἀποτελεῖ ἕνα ἀπό τούς ἄμεσα μελλοντικούς ἐρευνητικούς μας στόχους.

Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

[1] R. BELLMAN and K.L. COOKE. *Differential-Difference Equations.* Academic Press, New York, San Francisco, London, 1963.

[2] J. CARR and J. DYSON. The matrix functional differential equation $\underline{y}'(x) = A\underline{y}(\lambda x)+B\underline{y}(x)$. *Lecture Notes in Mathematics. Ordinary and Partial Differential Equations* (415), Springer-Verlag, 1974.

[3] L.CESARI. *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations.* Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1963.

[4] R. CONTI. *Linear Differential Equations and Control.* Academic Press, London and New York, 1976.

[5] W.A. COPPEL. *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations,* Heath Mathematical Monogaraphs, Boston, 1965.

[6] C. CORDUNEANU and V. LAKSHMIKANTHAM. Equations with unbounded delay: A survey. *J. Nonlinear Anal.,* 4(1980), 831-877.

[7] R.D. DRIVER. *Ordinary and Delay Differential Equations,* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1976.

[8] L.E. EL'SGOL'TS. Problem of adherence of solutions of differential equations with deviating argument (Russian), *Trudy Sem. Teor.*

Differential. Uravneniis Otklon. Argumentom, Univ. Druzby Narodov Patrica Lumumby, 3(1965), 249-251.

[9] L.E. EL'SGOL'TS. *Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Arguments.* Holden Day Inc., San Francisco, London, Amsterdam, 1966.

[10] L.E. EL'SGOL'TS and S.B. NORKIN. *Indroduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments,* Academic Press, New York, 1973.

[11] I.GYÖRI. On asymptotically ordinary functional differential equations. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai,* 15, North-Holland, 1977.

[12] J. HALE. *Theory of Functional Differential Equations.* Springer--Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1976.

[13] T.G. HALLAM. A comparison principle for terminal value problems in ordinary differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.,* 169 (1972), 49-57.

[14] T.G. HALLAM, G. LADAS and V. LAKSHMIKANTHAM. On the asymptotic behavior of functional differential equations. *SIAM J. Math. Anal.,* 3(1972), 58-64.

[15] P. HARTMAN. *Ordinary Differential Equations,* John Wiley & Sons, Inc., New York, London-Syndney, 1964.

[16] J. JARNIK and J. KURZWEIL. On Ryabov's special solutions of functional differential equations. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai,* 15, North-Holland, 1977.

[17] G. KARAKOSTAS. Expression of solutions of linear differential equations of retarded type. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 17 A (1980), 428-435.

[18] G. KARAKOSTAS, Y.G. SFICAS and V.A. STAIKOS. On the basic theory of initial value problems for delay differential equations. (Υπό δημοσίευση).

[19] T. KATO and J.B. McLEOD. The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x)+by(x)$. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77(1971), 891-937.

[20] E. KOZAKIEWICZ. On the asymptotic behavior of positive solutions of two differential inequalities with retarded argument. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 15, North-Holland, 1977.

[21] J. KUNTZMANN. *Systèmes Differentiels*. Hertmann Collection Méthodes, Paris, 1967.

[22] J. KURZWEIL. On solutions of nonautonomous linear delayed differential equations which are defined and exponentially bounded for $t \to -\infty$. *Časopis Pest. Math.*, 96(1971), 229-238.

[23] G. LADAS and V. LAKSHMIKANTHAM. Asymptotic equilibrium of ordinary differential systems. *Applicable Anal.*, 5(1975), 33-39.

[24] V. LAKSHMIKANTHAM and S. LEELA. *Differential and Integral Inequalities. Theory and Applications*. Vol. I, Academic Press, New York and London, 1969.

[25] E.-B. LIM. Asymptotic behavior of solutions of the functional differential equation $x'(t) = Ax(\lambda t)+Bx(t)$, $\lambda > 0$. *J. Math. Anal. Appl.*, 55(1978), 794-806.

[26] A.R. MITCHELL and R.W. MITCHELL. Asymptotic equilibrium of ordinary differential systems in a Banach space. *Math. Systems Theory*, 9(1976), 308-314.

[27] Σ. ΜΠΟΖΑΠΑΛΙΔΗ. Γραμμική Ἄλγεβρα, Μέρος Α, Ἰωάννινα, 1979.

[28] A.D. MYSHKIS. On certain problems in the theory of differential equations with deviating argument. *Russian Math. Surveys*, 32:2 (1977), 181-213.

[29] S.B. NORKIN. *Differential Equations of the Second Order with Retarded Argument*. Providence, Amer. Math. Soc., 1972.

[30] S.B. NORKIN. Decomposition of the space of solutions of retarded differential equations and the oscillation of solutions. *Colloquia Mathematica Societatis Jānos Bolyai*, 15, North Holland, 1977.

[31] Π. ΠΑΛΑΜΙΔΗ. Συμβολή στή μελέτη τῶν τοπολογικῶν ἰδιοτήτων καί τῆς ἀσυμπτωτικῆς συμπεριφορᾶς τῶν λύσεων διαφορικῶν συστημάτων κατά Καραθεοδωρῆ. Διδακτορική Διατριβή, Ἰωάννινα, 1979.

[32] L. PANDOLFI. Some observations on the asymptotic behavior of the solutions of the equation $\dot{x} = A(t)x(\lambda t)+B(t)x(t)$, $\lambda > 0$. *J. Math. Anal. Appl.*, 67(1979), 483-489.

[33] G.P. RAO and T. SRINIVASAN. An optimal method of solving differential equations characterizing the dynamics of a current collection system for an electric locomotive, *J. Inst. Maths Applics*, 25(1980), 329-342.

[34] J.SCHAUDER. Der fixpunktsatz in funktionalräumen. *Studia Math.*,

2(1930), 171-180.

[35] V.A. STAIKOS. *Differential Equations with Deviating Arguments--Oscillation Theory.* (unpublished manuscripts).

[36] Β.Α. ΣΤΑΪΚΟΥ. Μαθήματα Μαθηματικῆς 'Αναλύσεως, Μέρος Ι, Βασικαί Γνώσεις. 'Ιωάννινα 1971.

[37] Β.Α. ΣΤΑΪΚΟΥ. Μαθήματα Μαθηματικῆς 'Αναλύσεως, Μέρος ΙΙ, Σύγκλισις-Συνέχεια. 'Ιωάννινα 1974.

[38] J. WARGA. *Optimal Control of Differential and Functional Equations.* Academic Press, New York, 1972.

[39] E. WINSTON and J.A. YORKE. Linear delay differential equations whose solutions become identically zero. *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, 14(1969), 885-887.

[40] A.M. ZVERKIN. Pointwise completeness of systems with delay. *Differential Equations*, 9(1975), 329-333.

[41] A.M. ZVERKIN, G.A. KAMENSKII, S.B. NORKIN and L.E. EL'SGOL'TS. Differential equations with a perturbed argument. *Russian Math. Surveys*, 17(1962), 61-146.