ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γκέρτα Κιαμίλι

Συστηματα αποθεματων διαχειριζομενων απο προμηθευτες (Vendor Managed Inventory-VMI) με εμφαση στα αποθεματα τελικων καταναλωτων μεσω της αξιοποιησης Τεχνολογιων Διαδικτυου Πραγματων (Internet of Things-IoT

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2023

UNIVERSITY OF IOANNINA

Department of Mathematics

Gerta Qamili

Vendor-Managed Inventory emphasizing to end consumers through Internet-of-Things technology

Master's Thesis

Ioannina, 2023

Στην αδερφή μου, για την συνεχή στήριξη της

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 30/10/2023 από την εξεταστική επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
Κωνσταντίνα Σκούρη	Καθηγήτρια
Κωνσταντίνος Παρσόπουλος	Καθηγητής
Ιωάννης Κωνσταντάρας	Αναπληρωτής Καθηγητής

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

"Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή."

Γκέρτα Κιαμίλι

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή πραγματοποιήθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και με την ολοκλήρωση της θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους, που συνέβαλαν στην περάτωση των μεταπτυχιακών σπουδών μου.

Αρχικά, ευχαριστώ θερμά την κυρία Σκούρη Κωνσταντίνα, Καθηγήτρια του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και επιβλέπουσα της Μεταπτυχιακής μου διατριβής, για την βοήθεια και την καθοδήγησή κατά την διάρκεια εκπόνησης της Μεταπτυχιακής μου Διατριβής. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Παρσόπουλο Κωνσταντίνο, Καθηγητή του Τμήματος Μηχανικών Η/Υ του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και τον κύριο Κωνσταντάρα Ιωάννη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων του Πανεπιστημίου Μακεδονίας, μέλη της εξεταστικής επιτροπής, για τον χρόνο που διέθεσαν και τις παρατηρήσεις που υπέδειξαν με σκοπό την βελτίωση της παρούσας διατριβής. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Τριανταλή Δήμητρα, Υποψήφια Διδάκτωρ του Τμήματος Μηχανικών Η/Υ του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων για την πολύτιμη βοήθεια της, στην υλοποίηση του αλγορίθμου που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τον Δήμογλου Κωνσταντίνο για την αμέριστη συμπαράσταση και υποστήριξη τους.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε ένα σύστημα αποθεμάτων διαχειριζόμενων από τον προμηθευτή (Vendor Managed Inventory- VMI), ο προμηθευτής λαμβάνει τις αποφάσεις αναπλήρωσης αποθέματος για τον πελάτη. Έτσι, ο προμηθευτής παρακολουθεί το επίπεδο αποθέματος του πελάτη και αποφασίζει για την ποσότητα παραγγελίας και το χρονοδιάγραμμα εφοδιασμού. Σε αυτό το πλαίσιο, ο πελάτης εκχωρεί τον έλεγχο βασικών αποφάσεων ανεφοδιασμού στον προμηθευτή με την υποχρέωση από πλευράς του τελευταίου επίτευξης συγκεκριμένου επιπέδου εξυπηρέτησης (ποσοτικοποιείται συνήθως μέσω του αποθέματος). Υπάρχουν διάφορα οφέλη από την υιοθέτηση της πολιτικής VMI, όπως η αγορά προϊόντων σε μειωμένες τιμές και η μείωση των επιστροφών κυρίως προϊόντων με ημερομηνία λήξης. Μετά την εισαγωγή της πολιτικής VMI από τη Walmart και την Procter & Gamble το 1985 η βιβλιογραφία έχει επικεντρωθεί κυρίως στην εφαρμογή της μεταξύ επιχειρήσεων (Business to Business - B2B) και όχι μεταξύ επιχείρησης και τελικού καταναλωτή (Business to Consumer - B2C). Σε αναλογία με το B2B πλαίσιο, η εφαρμογή της πολιτικής VMI στο B2C πλαίσιο βασίζεται επίσης στην κοινή χρήση πληροφοριών και τη μεταφορά δικαιωμάτων απόφασης από τον πελάτη στον προμηθευτή, αξιοποιώντας κυρίως Τεχνολογίες Διαδικτύου Πραγμάτων (Internet of Things-IoT). Ωστόσο, οι προμηθευτές λαμβάνουν ακόμη πιο ολιστικές αποφάσεις για παραδόσεις σε μεγάλο αριθμό καταναλωτών με διαφορετικές απαιτήσεις και τρόπους αναπλήρωσης. Σε αυτή την εργασία γίνεται μια συνοπτική ανασκόπηση βασικών εφαρμογών VMI πολιτικών στο B2B και δίνεται έμφαση στην εφαρμογή VMI πολιτικών στο B2C πλαίσιο. Πιο συγκεκριμένα στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται

αντιπροσωπευτικά μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων από τον προμηθευτή, με έναν προμηθευτή και έναν αγοραστή, στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφονται μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων από τον προμηθευτή, με έναν προμηθευτή και πολλούς αγοραστές. Στα δυο αυτά κεφάλαια παρουσιάζονται μοντέλα τόσο με ντετερμινιστική όσο και με στοχαστική ζήτηση. Στη συνέχεια στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα μοντέλο το οποίο επεκτείνει τη διαχείριση αποθεμάτων από τον προμηθευτή προς τους τελικούς καταναλωτές. Στη συνέχεια το μοντέλο τροποποιείται, προτείνεται η επίλυση του, παρουσιάζονται αριθμητικά παραδείγματα και γίνονται συγκρίσεις.

Abstract

In a Vendor Managed Inventory (VMI) system, the supplier makes the replenishment decisions for the customer. Thus, the supplier observes the customer's stock level and makes decisions regarding order quantity, shipment and supply schedule. In this context, the customer delegates control of key replenishment decisions to the supplier with an obligation on the part of the latter to achieve a certain level of service (usually quantified in terms of inventory). There are various benefits from the adoption of the VMI policy, such as the purchase of products at reduced prices and the reduction of returns, in particular of products with an expiry date. Since the introduction of the VMI policy by Walmart and Procter & Gamble in 1985, the literature has mainly focused on its application between business to business (B2B) rather than between business and end consumer (B2C). Similar to the B2B context, the implementation of VMI policy in the B2C context is also based on information sharing and decision rights transfer from the customer to the supplier, mainly using Internet of Things (IoT) technologies. However, suppliers make even more holistic decisions on deliveries to a large number of consumers with different requirements and replenishment modes. In this paper, after a summary review of main applications of VMI policies in the B2B,the focus is placed on the application of VMI policies in the B2C context. More specifically, the first chapter presents representative vendor managed inventory models, with one supplier and one buyer, the second chapter describes vendor managed inventory models, with one supplier and multiple buyers. In these two chapters,

models with both deterministic and stochastic demand are presented. Then, in chapter three a model is presented that extends vendor managed inventory policy to the final consumers, which is then updated and formulated. Finally, numerical examples are presented for both models and compared.

Περιεχομενα

Εισαγωγη

Είναι γεγονός, πως οι συνεχείς εξελίξεις στον τομέα της εφοδιαστικής αλυσίδας, οι ξαφνικές αλλαγές των τάσεων της αγοράς και η αυξανόμενη ανάγκη μείωσης του χρόνου παράδοσης μιας παραγγελίας έχουν οδηγήσει στην αναζήτηση εναλλακτικών τρόπων διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας, καθώς και στις σχέσεις μεταξύ των μελών της. Έτσι, η συνεργασία των μελών μίας εφοδιαστικής αλυσίδας φαίνεται απαραίτητη για την βιωσιμότητα των μελών της. Σημαντικό ρόλο για την επίτευξη αυτής της συνεργασίας κατέχει η ανταλλαγή των αναγκαίων πληροφοριών, η οποία μπορεί να επιτευχθεί με τεχνολογίες ανταλλαγής πληροφοριών όπως η ηλεκτρονική ανταλλαγή δεδομένων (Electronic Data Interchange - EDI) ή η τεχνολογία του διαδικτύου (Internet of Things - IoT).

Έναν τρόπο συνεργασίας μέσω ανταλλαγής πληροφοριών ανάμεσα στα μέλη της εφοδιαστικής αλυσίδας αποτελεί η πολιτική διαχείρισης αποθεμάτων από τον προμηθευτή (Vendor managed Inventry, VMI). Η διαχείριση αποθεμάτων από τον προμηθευτή αποτελεί μια πολιτική που έχει ως απώτερο σκοπό την αύξηση της αποτελεσματικότητας και της απόδοσης της εφοδιαστικής αλυσίδας, μέσω της άμεσης συνεργασίας των μελών της. Κατά τη χρήση της πολιτικής VMI ο προμηθευτής αναλαμβάνει την αναπλήρωση αποθέματος του αγοραστή παίρνοντας αποφάσεις για τις ποσότητες και τους χρόνους αναπλήρωσης έχοντας άμεση πρόσβαση στα επίπεδα αποθεμάτων του πελάτη του αλλά και σε πληροφορίες που αφορούν τη ζήτηση (Disney and Towill, 2003). Έτσι, υπό την πολιτική VMI, η διαχείριση των αποθεμάτων γίνεται με αποκλειστική ευθύνη του προμηθευτή σύμφωνα με κοινά αποδεκτούς κανόνες ελέγχου αποθέματος και στόχους (Smaros et al., 2003).

Ένα αρχικό πλαίσιο για την πολιτική VMI περιγράφηκε από τον Magree (1958) στο πλαίσιο διερεύνησης του ποιος πρέπει να έχει τον έλεγχο στην εφοδιαστική αλυσίδα. Ωστόσο, το ενδιαφέρον για την πολιτική αυτή αυξήθηκε κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1990. Πρωτοπόροι στην εφαρμογή της πολιτικής VMI είναι οι εταιρείες WalMart και Procter of Gample (Waller, Johnson and Davis, 1999). Έκτοτε, η πολιτική VMI εφαρμόζεται ως μια εναλλακτική στρατηγική για τη μείωση των αποθεμάτων και τη συνολική βελτίωση της απόδοσης της αλυσίδας εφοδιασμού. Εταιρείες όπως η Amazon και η Bosch χρησιμοποιούν επίσης την πολιτική VMI.

Κατά την περιγραφή της πολιτικής VMI, αρκετοί ήταν οι ερευνητές οι οποίοι ταύτισαν την πολιτική αυτή με άλλες πολιτικές. Συγκεκριμένα, οι Waller et al (1999) χαρακτήρισαν την πολιτική διαχείρισης αποθεμάτων από τον προμηθευτή, ως μια από τις πιο συζητημένες συνεργατικές πρωτοβουλίες, που στοχεύει στην βελτίωση της αποδοτικότητας της εφοδιαστικής αλυσίδας, η οποία είναι γνωστή και ως Συνεχής Αναπλήρωση (Continuous Replenishment, CR) ή Διαχείριση Αποθεμάτων από τον Προμηθευτή (Supplier-Managed Inventory, SMI). Ωστόσο, όπως αναφέρουν οι Pohlen & Goldsby (2003), η ταύτιση των δυο αυτών πολιτικών δεν είναι ακριβής, καθώς η πολιτική VMI ασχολείται με τη διαχείριση αποθεμάτων των τελικών αγαθών, ενώ η πολιτική SMI ασχολείται με τις ροές των πρώτων υλών για την παραγωγική διαδικασία.

Στην βιβλιογραφία, έχουν καταγραφεί διαφορετικές απόψεις για το πόσο ωφελεί τον προμηθευτή ή τον αγοραστή η χρήση της πολιτικής VMI (Mangiaracina & Lee, 2000). Αρκετοί είναι οι ερευνητές που υποστηρίζουν πως τα οφέλη για τον προμηθευτή είναι περισσότερα από τα οφέλη για τον αγοραστή (Centikaya & Lee, 2000).

Ως προς τα πλεονεκτήματα του προμηθευτή, αυτός επωφελείται από την ακριβή πληροφόρηση, η οποία παρέχεται από τον αγοραστή, σχετικά με τα επίπεδα αποθεμάτων και είναι σε θέση να πραγματοποιεί ακριβέστερες προβλέψεις καθώς και καλύτερη οργάνωση της παραγωγής του, ώστε η ζήτηση να ικανοποιείται με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Επιπρόσθετα, η χρήση της πολιτικής VMI παρέχει στον προμηθευτή ευελιξία, καθώς ο προμηθευτής προσαρμόζει κατάλληλα ανάλογα, με την κατάσταση των αποθεμάτων του, το χρονικό διάστημα και τις ποσότητες παραγγελιών και αποφασίζει πότε θα γίνει αναπλήρωση (Kaipia et al., 2002). Τέλος, με την χρήση της πολιτικής VMI ο προμηθευτής δύναται να παρέχει βελτιωμένες υπηρεσίες και σε άλλους πελάτες, οι οποίοι δεν χρησιμοποιούν την πολιτική VMI.

Από την άλλη, όσον αφορά τα πλεονεκτήματα του αγοραστή, η πολιτική VMI συμβάλλει στην διατήρηση χαμηλότερου επίπεδου αποθέματος καθώς και στη μείωση του απαιτούμενου αποθηκευτικού χώρου από τον αγοραστή, συμβάλλοντας στην μείωση του συνολικού κόστους διαχείρισης. Επιπλέον, η πολιτική VMI προσδίδει καλύτερη διαχείριση των ευκαιριών αλλά και των κινδύνων, γεγονός το οποίο επιφέρει αύξηση των πωλήσεων.

Με την κατάλληλη εφαρμογή της πολιτικής VMI, υπάρχει ένας σημαντικός αριθμός δυνητικών πλεονεκτημάτων, τόσο για τον προμηθευτή, όσο και για τον αγοραστή. Μερικά από τα βασικά πλεονεκτήματα της χρήσης της πολιτική VMI, τα οποία έχουν γίνει αποδεκτά από πληθώρα ερευνητών είναι: τα μειωμένα κόστη logistics, η αύξηση του επιπέδου εξυπηρέτησης, η καλύτερη διαχείριση και μείωση του φαινομένου Bullwhip, οι μειωμένοι χρόνοι παράδοσης καθώς και η μείωση της απώλειας πωλήσεων. Το φαινόμενο Bullwhipπεριγράφει τις επιπτώσεις στην διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας από την αύξηση της μεταβλητότητας της ζήτησης όπως εφαρμόζονται στα ανώτερα επίπεδα της.

Πρέπει να σημειωθεί ότι, για την επιτυχή εφαρμογή της πολιτικής VMI απαιτείται η αποτελεσματική διαχείρισης πληροφοριών, η οποία με την σειρά της απαιτεί σημαντική υποδομή σε ΤΠΕ (Waller et al., 1999, Benedict & Margeridis,1999), καθώς και τη συνεχή εκπαίδευση και αμοιβαία εμπιστοσύνη ανάμεσα στα συνεργαζόμενα μέλη ως προς την εξασφάλιση ότι το καθένα από αυτά θα ανταποκριθεί στις υποχρεώσεις του (Pohlen & Goldsby, 2003).

Στην παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή, δίνεται έμφαση σε συστήματα διαχείρισης αποθεμάτων από τον προμηθευτή, στα οποία διαφοροποιείται τόσο η ζήτηση όσο και ο αριθμός των μελών που συμμετέχουν στο σύστημα. Συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο περιγράφονται μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων από τον προμηθευτή, με έναν προμηθευτή και έναν αγοραστή έχοντας ντετερμινιστική και στοχαστική ζήτηση αντίστοιχα. Έπειτα, στο δεύτερο περιγράφονται μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων από τον προμηθευτή, με έναν προμηθευτή και πολλούς αγοραστές με ντετερμινιστική και στοχαστική ζήτηση. Στην συνέχεια, στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα μοντέλο το οποίο επεκτείνει τη διαχείριση αποθεμάτων από τον προμηθευτή προς τους τελικούς καταναλωτές, το οποίο στη συνέχεια τροποποιείται και μοντελοποιείται εκ νέου. Τέλος, στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάζονται αριθμητικά παραδείγματα για καθένα από τα δυο μοντέλα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ενας προμηθευτης - ενας αγοραστης

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται μοντέλα συστημάτων διαχείρησης αποθεμάτων από τον προμηθευτή (Vendor Managed Inventory) ενός προμηθευτή (vendor) και ενός αγοραστή (buyer). Παρουσιάζονται δυο μοντέλα: στο ένα η ζήτηση θεωρείται ντετερμινιστική και στο άλλο στοχαστική. Αναφορικά με την ντετερμινιστική ζήτηση παρουσιάζεται το μοντέλο των Yao et al. ((2007). Στην περίπτωση της στοχαστικής ζήτησης παρουσιάζεται το μοντέλο των Razmi et al. (2010).

1.1 Μοντέλο ενός προμηθευτή - ενός αγοραστή με ντετερμινιστική ζήτηση

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζεται το μοντέλο ενός συστήματος διαχείρισης αποθεμάτων από τον προμηθευτή με ντετερμινιστική ζήτηση, το οποίο προτάθηκε από τους Yao et al. (2007) και αφορά έναν προμηθευτή και έναν αγοραστή.

1.1.1 Συμβολισμός και Υποθέσεις

Στην ενότητα αυτή δίνονται οι υποθέσεις κάτω από τις οποίες μελετάται το μοντέλο καθώς και ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί.

Συμβολισμός:

D	Ρυθμός ζήτησης σε μονάδες
$C(c)$	Κόστος τοποθέτησης παραγγελίας του προμηθευτή (αγοραστή) ανά παραγγελία
$H(h)$	Κόστος διατήρησης αποθεμάτων του προμηθευτή (αγοραστή) ανά μονάδα προϊόντος ανά μονάδα χρόνου
Q	Ποσότητα παραγγελίας προμηθευτή
q	Ποσότητα αποθέματος που αποστέλλεται στον αγοραστή
T	Μήκος κύκλου προμηθευτή (χρόνος αναπαραγγελίας προμηθευτή)
k	Αριθμός αποστολών προς τον αγοραστή
TC_V	Συνολικό κόστος προμηθευτή
TC_B	Συνολικό κόστος αγοραστή
TC	Συνολικό κόστος συστήματος

Υποθέσεις:

1. Ο αγοραστής αντιμετωπίζει εξωτερική ζήτηση μόνο από τους πελάτες.
2. Υπο την πολιτική VMI, η ζήτηση του προϊόντος, D, θεωρείται γνωστή τόσο στον αγοραστή όσο και στον προμηθευτή.
3. Ο χρόνος παράδοσης και ο χρόνος μεταξύ της τοποθέτησης της παραγγελίας και της παραλαβής της, θεωρούνται αμελητέοι.
4. Δεν υπάρχουν περιορισμοί στην ποσότητα παραγγελίας του προμηθευτή, Q.

5. Το κόστος τοποθέτησης παραγγελίας για τον προμηθευτή, C, και για τον αγοραστή, c, είναι ανεξάρτητο από την αντίστοιχη ποσότητα παραγγελίας του καθενός.

6. Το κόστος τοποθέτησης μιας παραγγελίας για τον αγοραστή είναι μικρότερο από το αντίστοιχο κόστος παραγγελίας που θα είχε σε ένα σύστημα στο οποίο δεν χρησιμοποιείται πολιτική VMI και τα δυο μέλη ενεργούν ανεξάρτητα.

1.1.2 Μαθηματική Διατύπωση Μοντέλου

Στην ενότητα αυτή, αφού περιγραφεί ο τρόπος λειτουργίας του συστήματος, θα γίνει η μαθηματική μοντελοποίηση του.

Ο προμηθευτής τη χρονική στιγμή 0 τοποθετεί μια παραγγελία μεγέθους Q. Κάθε T χρονικές μονάδες στέλνει στον αγοραστή ποσότητες των q μονάδων.

Η ποσότητα παραγγελίας του προμηθευτή, Q, είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της ποσότητας αναπλήρωσης του αγοραστή, q. Άρα, $Q = k \cdot q$, όπου k ένας θετικός ακέραιος αριθμός, ο οποίος αντιμετωπίζεται ως συνεχής παράμετρος. Ο αριθμός k μπορεί να θεωρηθεί ως ο αριθμός παραγγελιών του αγοραστή κατά τη διάρκεια ενός κύκλου μήκους T. Ως κύκλος, μήκους T, ορίζεται το χρονικό διάστημα μεταξύ δυο διαδοχικών παραγγελιών του προμηθευτή.

Το συνολικό κόστος του συστήματος, ορίζεται ως το άθροισμα του συνολικού κόστους του προμηθευτή, TC_V, και του συνολικού κόστους του αγοραστή, TC_B. Το κόστος τόσο του προμηθευτή όσο και του αγοραστή αποτελείται από το κόστος παραγγελίας και το κόστος διατήρησης του αποθέματος. Δεδομένου ότι ο αγοραστής και ο προμηθευτής έχουν συμφωνήσει στην εφαρμογή της πολιτικής VMI, ο προμηθευτής έχει πλήρη γνώση για τη ζήτηση του προϊόντος και είναι υπεύθυνος για την διαχείριση των αποθεμάτων, τόσο του ιδίου, όσο και του αγοραστή.

Επομένως στο μοντέλο αυτό στόχος είναι να βρεθούν οι ποσότητες παραγγελίας (Q, q) και ο αριθμός παραγγελιών k που ελαχιστοποιούν το κόστος του συστήματος VMI. Το συνολικό κόστος για το συνολικό σύστημα VMI περιγράφεται ως εξής:

$$TC(Q, q) = TC_V(Q, q) + TC_B(Q, q)$$

όπου,

$TC_V(Q, q)$= Κόστος παραγγελίας + Κόστος διατήρησης αποθεμάτων προμηθευτή

$TC_B(Q, q)$ = Κόστος παραγγελίας + Κόστος διατήρησης αποθεμάτων αγοραστή

Προκειμένου να υπολογιστεί το κόστος διατήρησης του προμηθευτή και του αγοραστή, θα πρέπει να προσδιοριστεί το μέσο επίπεδο αποθέματος του καθενός. Η ποσότητα παραγγελίας του αγοραστή είναι q, συνεπώς το μέσο επίπεδο αποθέματος του αγοραστή είναι $q/2$. Ως προς το μέσο επίπεδο αποθέματος του προμηθευτή, αυτό καθορίζεται από το Q, το q και το k, καθώς κατά τη διάρκεια ενός κύκλου υπάρχουν k αναπληρώσεις ποσότητας q.

Επομένως, το μέσο επίπεδο αποθέματος του προμηθευτή, I_V, προκύπτει ως:

$$I_V = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}[Q - (i-1)q] = \frac{1}{k}[\sum_{i=1}^{k} Q - q\sum_{i=1}^{k} i + \sum_{i=1}^{k} q]$$

Από όπου προκύπτει

$$I_V = Q - q\frac{k-1}{2} \tag{1.1}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (1.1), το συνολικό κόστος για το σύστημα VMI είναι:

$$\begin{aligned} TC(Q, q) &= \frac{CD}{Q} + HI_V + \frac{cD}{q} + \frac{hq}{2} \\ &= \frac{CD}{Q} + H[Q - \frac{(k-1)q}{2}] + \frac{cD}{q} + \frac{hq}{2} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Αντικαθιστώντας στην (1.2), $q = \dfrac{Q}{k}$, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} TC(Q,k) &= \frac{CD}{Q} + H[Q - \frac{(k-1)Q}{2k}] + \frac{cDk}{Q} + \frac{hQ}{2k} \\ &= \frac{CD}{Q} + H\frac{(k+1)Q}{2k} + \frac{cDk}{Q} + \frac{hQ}{2k} \end{aligned} \tag{1.3}$$

1.1.3 Προσδιορισμός βέλτιστης λύσης

Στην ενότητα αυτή, θα προσδιοριστούν οι ποσότητες Q, k, οι οποίες ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος του συστήματος, το οποίο υπολογίστηκε στην προηγούμενη ενότητα.

Από την συνθήκη πρώτης τάξης της συνάρτησης TC ως προς Q έχουμε:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial TC(Q,k)}{\partial Q} = -\frac{CD}{Q^2} + \frac{H(k+1)}{2k} - \frac{ckD}{Q^2} + \frac{h}{2k} = 0 \Leftrightarrow \\ &Q^2[H(k+1) + h] = 2k(CD - ckD) \end{aligned}$$

προκύπτει ότι:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2k(CD - ckD)}{H(k+1) + h}} \tag{1.4}$$

Όμοια από την συνθήκη πρώτης τάξης της συνάρτησης TC ως προς k έχουμε:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial TC(Q,k)}{\partial k} = -\frac{HQ}{2k^2} + \frac{cD}{Q} - \frac{hQ}{2k^2} = 0 \Leftrightarrow \\ &2k^2 cD = Q^2(h + H) \end{aligned}$$

προκύπτει ότι:

$$k^* = \sqrt{\frac{Q^2(h + H)}{2cD}} \tag{1.5}$$

Παίρνοντας τις συνθήκες δευτέρας τάξης ως προς k και ως προς Q προκύπτει ότι το συνολικό κόστος ελαχιστοποιείται για Q^* και k^*, αφού ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 TC(Q,k)}{\partial Q^2} &= \frac{2D(C + ck))}{Q^3} > 0 \\ \frac{\partial^2 TC(Q,k)}{\partial k^2} &= \frac{hQ}{k^3} + \frac{HQ}{k^3} > 0 \end{aligned}$$

και αντίστοιχο Εσσιανό πίνακα

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2Dck}{Q^3}+\dfrac{2DC}{Q^3} & \dfrac{-Dc}{Q^2}-\dfrac{H(k+1)}{2k^2}+\dfrac{H}{2k}-\dfrac{h}{2k^2} \\ \dfrac{-Dc}{Q^2}-\dfrac{H(k+1)}{2k^2}+\dfrac{H}{2k}-\dfrac{h}{2k^2} & \dfrac{HQ}{k^3}+\dfrac{hQ}{k^3} \end{bmatrix}$$

Οι βέλτιστες ποσότητες Q^*, k^* μπορούν να γραφούν από τις (1.4) και (1.5) ως εξής:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2CD}{H}} \tag{1.6}$$

$$k^* = \sqrt{\frac{(H+h)C}{cH}} \tag{1.7}$$

Η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας του αγοραστή, q^*, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (1.6), (1.7) είναι:

$$q^* = \sqrt{\frac{2cD}{H+h}} \tag{1.8}$$

Επομένως το συνολικό βέλτιστο κόστος, δίνεται συναρτήσει των βέλτιστων ποσοτήτων, άρα:

$$TC^*(Q^*,k^*) = \frac{CD}{Q^*} + H\frac{(k^*+1)Q^*}{2k^*} + \frac{cDk^*}{Q^*} + \frac{hQ^*}{2k^*}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τις σχέσεις (1.6) και (1.7), προκύπτει ότι το βέλτιστο συνολικό κόστος είναι:

$$TC^*(Q^*,k^*) = \sqrt{2D}(\sqrt{CH} + \sqrt{c(H+h})) \tag{1.9}$$

Συνεπώς, προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος του συστήματος VMI, ο προμηθευτής θα λαμβάνει από εξωτερικό προμηθευτή παραγγελία μεγέθους $\sqrt{\frac{2CD}{H}}$, από την οποία θα πρέπει να αναπληρώσει τον αγοραστή με παραγγελίες ποσότητας $\sqrt{\frac{2cD}{H+h}}$, συνολικά $\sqrt{\frac{(H+h)C}{cH}}$ φορές.

Το μοντέλο των Yao et al. (2007), εάν μελετηθεί εκτός των πλαισίων της πολιτικής VMI, ταυτίζεται με το κλασικό μοντέλο οικονομικής ποσότητας παραγγελίας (EOQ). Υπενθυμίζεται ότι η ποσότητα παραγγελίας χρησιμοποιώντας το EOQ μοντέλο, η οποία ταυτίζεται με την αντίστοιχη ποσότητα παραγγελίας υπό την πολιτική VMI είναι:

$$Q^*_{EOQ} = \sqrt{\frac{2CD}{H}}$$

Όμοια, η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας του αγοραστή στο κλασικό EOQ μοντέλο είναι:

$$q^*_{EOQ} = \sqrt{\frac{2c'D}{h}},$$

όπου c' το κόστος τοποθέτησης παραγγελίας του αγοραστή σε non VMI πολιτική.

Καθώς έχει υιοθετηθεί η πολιτική VMI ο προμηθευτής εξουσιοδοτείται να διαχειρίζεται το απόθεμα του αγοραστή. Συνεπώς, το κόστος τοποθέτησης παραγγελίας του αγοραστή το επιβαρύνεται ο προμηθευτής. Έτσι, το πραγματικό κόστος τοποθέτησης παραγγελίας του αγοραστή, υπό την πολιτική VMI,c, είναι σημαντικά μικρότερο από το αντίστοιχο κόστος στο κλασικό μοντέλο EOQ, c' $(c < c')$.

Σχετικά με τις βέλτιστες ποσότητες παραγγελίας του αγοραστή υπό την VMI πολιτική και στο EOQ μοντέλο ισχύει:

$$\frac{q^*_{EOQ}}{q^*} = \frac{2c'D(H+h)}{2cDh} = \frac{Hc'}{ch} + \frac{c'}{c} > 1$$
$$q^*_{EOQ} > q^*$$

Για τον βέλτιστο αριθμό παραγγελιών του αγοραστή για τα δυο μοντέλα, οι Yao et al. (2007) απέδειξαν την παρακάτω πρόταση. Για την απόδειξη της θεώρησαν τις ποσότητες d, g και g', όπου:

$$d = \frac{H}{h}, g = \frac{C}{c'}, g' = \frac{C}{c}$$

Πρόταση 1.1.1. *Ο βέλτιστος αριθμός παραγγελιών του αγοραστή, υπό την πολιτική VMI, k^*, είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό παραγγελιών στο κλασσικό μοντέλο EOQ , k^*_{EOQ}.*

Απόδειξη. Ο βέλτιστος αριθμός παραγγελιών του αγοραστή, υπό την πολιτική VMI είναι:

$$k^* = \sqrt{\frac{(H+h)C}{cH}} = \sqrt{\frac{C}{c}(1+\frac{h}{H})} = \sqrt{g'(\frac{d+1}{d})}$$

Ο βέλτιστος αριθμός παραγγελιών του αγοραστή στο EOQ μοντέλο είναι:

$$k^*_{EOQ} = \frac{Q^*_{EOQ}}{q^*_{EOQ}} = \sqrt{\frac{C}{c'}\frac{h}{H}} = \sqrt{\frac{g}{d}}$$

Επειδή $c < c'$, είναι $g < g'$, συνεπώς και $\sqrt{\frac{g}{d}} < \sqrt{\frac{g'}{d}}$. Επομένως,

$$k^*_{EOQ} = \sqrt{\frac{g}{d}} < \sqrt{\frac{g'}{d}} < \sqrt{\frac{g'(1+d)}{d}} = k^*$$

□

Ο βέλτιστος αριθμός παραγγελιών, είναι μεγαλύτερος όταν η διαφορά ανάμεσα στο κόστος παραγγελίας του προμηθευτή και του αγοραστή είναι μεγάλη. Δεδομένου ότι με την εφαρμογή της πολιτικής VMI το κόστος παραγγελίας του προμηθευτή δεν μεταβάλλεται, όσο περισσότερο μειώνεται το κόστος παραγγελίας του αγοραστή, τόσο αυξάνεται ο βέλτιστος αριθμός παραγγελιών του αγοραστή. Επιπρόσθετα, ο βέλτιστος αριθμός παραγγελιών του αγοραστή, είναι μεγαλύτερος, όταν το κόστος διατήρησης του αγοραστή είναι υψηλό σε σχέση με το αντίστοιχο κόστος του προμηθευτή. Σε αυτή την περίπτωση ο προμηθευτής στέλνει στον αγοραστή με μικρότερες ποσότητες q^*_{VMI}, μειώνοντας έτσι το μέσο επίπεδο αποθέματος του αγοραστή.

Για τη μελέτη της διαφοράς κόστους των μοντέλων VMI και EOQ, υπολογίζεται η ποσοστιαία μεταβολή του συνολικού κόστους.

$$V = \frac{TC^*_{EOQ} - TC^*}{TC^*_{EOQ}} = 1 - \frac{\sqrt{CH} + \sqrt{c(H+h)}}{\sqrt{c'H} + \sqrt{CH}}$$
$$= 1 - \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{g'}\frac{(1+d)}{d}}}{1 + \sqrt{\frac{1}{dg}}}$$

Όσο μεγαλύτερο είναι το V, τόσο μεγαλύτερο είναι το όφελος από την εφαρμογή της πολιτικής VMI. Οι προτάσεις που ακολουθούν, δίνουν τις σχέσεις μεταξύ της συνολικής εξοικονόμησης κόστους και των παραμέτρων g και g'.

Πρόταση 1.1.2.

1. *Το ποσοστό της συνολικής εξοικονόμησης κόστους από την εφαρμογή της πολιτικής VMI (V), μειώνεται συναρτήσει της αναλογίας του κόστους παραγγελίας του προμηθευτή προς το αντίστοιχο κόστος του αγοραστή υπό την απουσία της πολιτικής VMI (g).*

2. *Το ποσοστό της συνολικής εξοικονόμησης κόστους από την εφαρμογή της πολιτικής VMI (V), αυξάνεται συναρτήσει της αναλογίας του κόστους παραγγελίας του προμηθευτή προς το αντίστοιχο κόστος του αγοραστή υπό την παρουσία της πολιτικής VMI (g').*

Απόδειξη. Αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{\partial V(g,g',d)}{\partial g} = -\frac{\left(1 + \sqrt{\frac{1}{g}\frac{(1+d)}{d}}\right)\sqrt{\frac{1}{d}}g^{-3/2}}{2\left(1+\sqrt{\frac{1}{gd}}\right)^2} < 0$$

επομένως η συνολική εξοικονόμηση κόστους είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς

g. Όμοια αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{\partial V(g, g', d)}{\partial g'} = \frac{\sqrt{\frac{1+d}{d}}g^{-3/2}}{1+\sqrt{\frac{1}{gd}}} > 0$$

επομένως η συνολική εξοικονόμηση κόστους είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς g'. □

Η Πρόταση 1.1.2 δείχνει ότι όσο μεγαλύτερο είναι το κόστος παραγγελίας του προμηθευτή σε σχέση με το αντίστοιχο κόστος του αγοραστή, πριν από την εφαρμογή της πολιτικής VMI, τόσο μικρότερη είναι η συνολική εξοικονόμηση κόστους από την εφαρμογή της VMI πολιτικής. Η εφαρμογή της VMI πολιτικής εξοικονομεί κόστος δεδομένου ότι με την εφαρμογή της, ο αγοραστής δεν πραγματοποιεί ο ίδιος παραγγελίες, επομένως το κόστος παραγγελίας του μειώνεται σημαντικά συγκριτικά με το κόστος παραγγελίας του προμηθευτή, το οποίο αυξάνεται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της παραμέτρου g' και κατά συνέπεια μεγαλύτερη εξοικονόμηση, σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.2.

1.2 Μοντέλο ενός προμηθευτή-ενός αγοραστή με στοχαστική ζήτηση

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ένα μοντέλο, ενός αγοραστή (buyer) και ενός προμηθευτή (vendor), με στοχαστική ζήτηση προϊόντος. Το μοντέλο που αναλύεται παρακάτω προτάθηκε από τους Razmi, Rad & Sangari (2009) και έχει ως στόχο την εύρεση των μεταβλητών απόφασης, οι οποίες ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος της εφοδιαστικής αλυσίδας.

1.2.1 Συμβολισμός και Υποθέσεις

Στην ενότητα αυτή δίνονται οι υποθέσεις κάτω από τις οποίες μελετάται το μοντέλο καθώς και ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί.

Συμβολισμός:

P	Ρυθμός παραγωγής του προμηθευτή ανά μονάδα χρόνου
F	Κόστος μεταφοράς κάθε παρτίδας μεγέθους Q
π	Κόστος εκκρεμών παραγγελιών του αγοραστή ανά μονάδα προϊόντος
S	Απόθεμα ασφαλείας του αγοραστή
r	Σημείο αναπαραγγελίας του αγοραστή
τ	Χρόνος παράδοσης παραγγελίας
b	Σταθερός χρόνος καθυστέρησης μεταφορών
$E(HC)$	Αναμενόμενο κόστος διατήρησης αποθεμάτων
$E(BC)$	Αναμενόμενο κόστος έλλειψης
$f(\cdot)$	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ζήτησης του προϊόντος

Υποθέσεις:

1. Ο ρυθμός παραγωγής του προμηθευτή είναι πεπερασμένος και μεγαλύτερος από τον ρυθμό ζήτησης του αγοραστή.

2. Ο χρόνος παράδοσης παραγγελίας μεταβάλλεται γραμμικά με το μέγεθος της παρτίδας και οι χρόνοι καθυστέρησης είναι σταθεροί.

3. Δεν επιτρέπονται ελλείψεις από τον προμηθευτή αλλά επιτρέπεται η ικανοποίηση της ζήτησης με καθυστέρηση από τον αγοραστή (backorders).

4. Η ζήτηση του προϊόντος κατά τον χρόνο παράδοσης ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $D(\frac{Q}{P}+b)$ και διακύμανση $\sigma^2(\frac{Q}{P}+b)$.

1.2.2 Μαθηματική Διατύπωση Μοντέλου

Στην ενότητα αυτή, αφού περιγραφεί ο τρόπος λειτουργίας του συστήματος, θα γίνει η μαθηματική μοντελοποίηση του.

Τη χρονική στιγμή 0, ο προμηθευτής ξεκινάει την διαδικασία παραγωγής προϊόντων. Αποστέλλει στον αγοραστή ποσότητες των q μονάδων μόλις το επίπεδο των αποθεμάτων του αγοραστή φτάσει στο r. Καθώς, $Q = q$, στην ενότητα αυτή χρησιμοποιείται ο συμβολισμός Q. Εάν η ζήτηση που αντιμετώπιζε ο αγοραστής κατά τον χρόνο παράδοσης της αποστολής ήταν μεγαλύτερη από r μονάδες, τότε προκύπτουν εκκρεμείς παραγγελίες για τις οποίες ο αγοραστής επιβαρύνεται με επιπλέον κόστος.

Καθώς, υπό την πολιτική VMI ο προμηθευτής έχει πλήρη γνώση της ζήτησης του προϊόντος και είναι υπεύθυνος για τη διαχείριση τη εφοδιαστικής αλυσίδας και για τα δυο μέλη, επιβαρύνεται επιπλέον το κόστος παραγγελίας και το κόστος διατήρησης των αποθεμάτων του αγοραστή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το συνολικό κόστος του αγοραστή να είναι μηδενικό. Για την εύρεση του συνολικού κόστους του προμηθευτή απαιτείται ο προσδιορισμός του μέσου αριθμού παραγγελιών κατά τη διάρκεια ενός κύκλου, του μέσου διαθέσιμου αποθέματος του προμηθευτή και του αγοραστή, καθώς και του μέσου μεγέθους εκκρεμών παραγγελιών.

Αν είναι D, ο μέσος ρυθμός ζήτησης του προϊόντος, τότε ο αναμενόμενος αριθμός παραγγελιών κατά την διάρκεια ενός κύκλου είναι $\dfrac{D}{Q}$. Το αναμενόμενο διαθέσιμο απόθεμα του αγοραστή ακριβώς πριν την άφιξη μιας παραγγελίας είναι ίσο με το απόθεμα ασφαλείας S. Αμέσως μετά την άφιξη μιας παραγγελίας το αναμενόμενο διαθέσιμο απόθεμα είναι $S + Q$. Επομένως, το αναμενόμενο μέσο διαθέσιμο απόθεμα του αγοραστή κατά την διάρκεια ενός κύκλου είναι:

$$\frac{1}{2}(Q + S) + \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}Q + S$$

Το απόθεμα ασφαλείας ορίζεται να είναι: $S = \int_0^\infty (r - x)f(x)\,dx$. Έτσι,

$$S = \int_0^\infty (r - x)f(x)\,dx = \int_0^\infty rf(x)\,dx + \int_0^\infty xf(x)\,dx = r - \mu$$

όπου μ η μέση τιμή της κατανομής της ζήτησης.
Άρα το αναμενόμενο διαθέσιμο απόθεμα του αγοραστή είναι:

$$\frac{1}{2}Q + r - \mu$$

Το αναμενόμενο διαθέσιμο απόθεμα του προμηθευτή είναι $\frac{1}{2}Q\left(1 - \frac{D}{P}\right)$. Επομένως το αναμενόμενο κόστος διατήρησης αποθεμάτων είναι:

$$E(HC) = H\frac{Q}{2}\left(1 - \frac{D}{P}\right) + h\left(\frac{1}{2}Q + r - \mu\right) \tag{1.10}$$

Οι εκκρεμείς παραγγελίες, αν υπάρχουν, προσδιορίζονται από την ζήτηση που προκύπτει κατά το χρονικό διάστημα που το απόθεμα φτάνει στο σημείο αναπαραγγελίας μέχρι να γίνει παραλαβή της παραγγελίας. Έστω x η ζήτηση κατά τη διάρκεια παράδοσης της παραγγελίας. Εκκρεμείς παραγγελίες υπάρχουν εάν και μόνο αν $x > r$. Τότε το $x - r$ προσδιορίζει το μέγεθος της ζήτησης που θα ικανοποιηθεί με καθυστέρηση. Εάν $b(r)$ ο αναμενόμενος αριθμός εκκρεμών παραγγελιών, τότε:

$$b(r) = \int_r^\infty (x - r) f(x)\, dx \tag{1.11}$$

Επομένως το αναμενόμενο κόστος των εκκρεμών παραγγελιών είναι:

$$E(BC) = \pi\frac{D}{Q}b(r) \tag{1.12}$$

Συνοψίζοντας, το συνολικό κόστος του συστήματος είναι:

$$TC(Q,r) = \frac{D}{Q}(F + C + c) + H\frac{Q}{2}\left(1 - \frac{D}{P}\right) + h\left(\frac{1}{2}Q + r - \mu\right) + \pi\frac{D}{Q}b(r) \tag{1.13}$$

Η ζήτηση του προϊόντος κατά τον χρόνο παράδοσης ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $D\left(\frac{Q}{P} + b\right)$ και διακύμανση $\sigma^2\left(\frac{Q}{P} + b\right)$. Άν η ζήτηση ακολουθεί $N(\mu, \sigma^2)$ τοτε οι αναμενόμενες ελλείψεις είναι:

$$b(r) = \sigma\left[\phi\left(\frac{r - \mu}{\sigma}\right) - \frac{r - \mu}{\sigma}\bar{\Phi}\left(\frac{r - \mu}{\sigma}\right)\right] \tag{1.14}$$

όπου $\phi(\cdot)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυπικής κανονικής κατανομής και $\bar{\Phi}(\cdot) = 1 - \Phi(\cdot)$ (Muckstadt and Sapra, 2010). Θέτοντας $\frac{r-\mu}{\sigma} = z$ (1) προκύπτει ότι $b(r) = \sigma\left[\phi(z) - z\bar{\Phi}(z)\right]$. Όμως $\phi(z) - z\bar{\Phi}(z)$ είναι η standard normal loss function, $G(z)$, επομένως η σχέση (1.14) γράφεται $b(r) = \sigma G(z)$. Αντικαθιστώντας την τυπική απόκλιση της ζήτησης κατά τον χρόνο παράδοσης προκύπτει ότι:

$$b(r) = \sigma\sqrt{\frac{Q}{P} + b}G(z) \tag{1.15}$$

Επιπλέον μέσω της σχέσης (1) το απόθεμα ασφαλείας γράφεται $S = z\sigma\sqrt{\frac{Q}{P} + b}$. Τελικά, το συνολικό κόστος του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned} TC(Q,r) = &\frac{D}{Q}(F + C + c) + H\frac{Q}{2}\left(1 - \frac{D}{P}\right) + h\frac{Q}{2} \\ &+ hz\sigma\sqrt{\frac{Q}{P} + b} + \pi\frac{D\sigma\sqrt{\frac{Q}{P} + b}}{Q}G(z) \end{aligned} \tag{1.16}$$

1.2.3 Προσδιορισμός βέλτιστης λύσης

Στην ενότητα αυτή, θα προσδιοριστούν οι ποσότητες Q, r, οι οποίες ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος του συστήματος, το οποίο προσδιορίστηκε στην προηγούμενη ενότητα. Οι ποσότητες Q και r είναι ανεξάρτητες ποσότητες, συνεπώς για την εύρεση των βέλτιστων μεταβλητών απόφασης Q^* και r^* που ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος, χρησιμοποιούνται οι συνθήκες πρώτης τάξης ως προς Q και r αντίστοιχα.

Από τις συνθήκες πρώτης τάξης για ελάχιστο $\frac{\partial TC(Q,r)}{\partial r} = 0$ και $\frac{\partial TC(Q,r)}{\partial Q} = 0$ προκύπτει

$$\bar{F}(r) = \frac{hQ}{\pi D} \tag{1.17}$$

Από την συνθήκη πρώτης τάξης ως προς Q της συνάρτησης TC,προκύπτει

$$\frac{\partial TC(Q,r)}{\partial Q} = -\frac{D}{Q^2}(F+C+c) + \frac{H}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right) + \frac{h}{2} + \frac{hz\sigma}{2P\sqrt{\frac{Q}{P}+b}}$$
$$+\frac{\pi D\sigma G(z)}{Q^2}\left[\frac{Q}{2P\sqrt{\frac{Q}{P}+b}} - \sqrt{\frac{Q}{P}+b}\right] = 0$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1.17) έχουμε:

$$\frac{D}{Q^2}\left(F+C+c+\pi\sigma G(z)\sqrt{\frac{Q}{P}+b}\right) = \frac{H}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right) + \frac{h}{2}$$
$$+\frac{h\sigma}{2P\sqrt{\frac{Q}{P}+b}}\left(z+\frac{G(z)}{\bar{F}(z)}\right)$$

Άρα,

$$Q = \left[\frac{2D\left(F+C+c+\pi\sigma G(z)\sqrt{\frac{Q}{P}+b}\right)}{H\left(1-\frac{D}{P}\right)+h+\frac{h\sigma}{P\sqrt{\frac{Q}{P}+b}}\left(z+\frac{G(z)}{\bar{F}(z)}\right)}\right]^{1/2} \tag{1.18}$$

Οι ποσότητες Q^* και r^* προσεγγίζονται μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας η οποία παρουσιάζεται στην συνέχεια, καθώς δεν υπάρχουν κλειστές εκφράσεις για αυτές τις βέλτιστες ποσότητες Q και r.

Επαναληπτική διαδικασία για τον προσδιορισμό των Q^* και r^*
Οι βέλτιστες ποσότητες Q^* και r^*, οι οποίες ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος TC προκύπτουν μέσω της παρακάτω επαναληπτικής διαδικασίας:

1. Υπολογίζουμε την $Q_1 = \sqrt{\dfrac{2D(F+C+c)}{h+H(1-\frac{D}{P})}}$

2. Βρίσκουμε το r_i μέσω της σχέσης $\bar{F}(r_i) = \dfrac{hQ_i}{\pi D}$

3. Υπολογίζουμε την $G(k), k = \dfrac{r_i - D(\frac{Q_i}{P}+b)}{\sigma(\frac{Q_i}{P}+b)}$

4. Υπολογίζουμε την $Q_{i+1} = \left[\dfrac{2D\left(F + C + c + \pi\sigma G(k)\sqrt{\dfrac{Q_i}{P} + b}\right)}{H\left(1 - \dfrac{D}{P}\right) + h + \dfrac{h\sigma}{P\sqrt{\frac{Q_i}{P} + b}}\left(k + \dfrac{G(k)}{\bar{F}(k)}\right)} \right]^{1/2}$

5. Εάν $|Q_{i+1} - Q_i| = 0$ τότε υπολογίζουμε το TC^* και πηγαίνουμε στο βήμα 6. Αλλιώς πηγαίνουμε στο βήμα 2

6. Σταματάμε. $Q^* = Q_{i+1}, r^* = r_{i+1}$

Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν δυο μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων υπό την πολιτική VMI, το μοντέλο των Yao et al. (2007) και το μοντέλο των Razmi et al. (2010). Τα δύο μοντέλα αφορούν έναν προμηθευτή και έναν αγοραστή, με το τελευταίο να επιτρέπει την ικανοποίηση της ζήτησης των τελικών καταναλωτών με καθυστέρηση.

Στο μοντέλο των Yao et al. (2007) η ζήτηση του προϊόντος είναι ντετερμινιστική και ο προμηθευτής προκειμένου να ελαχιστοποιήσει το κόστος λαμβάνει από εξωτερικό κατασκευαστή παραγγελίες μεγέθους $\sqrt{\dfrac{2CD}{H}}$ και αναπληρώνει τον αγοραστή με παραγγελία μεγέθους $\sqrt{\dfrac{2cD}{H+h}}$ μονάδες προϊόντος, $\sqrt{\dfrac{C(H+h)}{cH}}$ φορές κατά την διάρκεια ενός κύκλου.

Στο μοντέλο των Razmi et al. (2010), ο προμηθευτής κατασκευάζει τις μονάδες προϊόντος και προγραμματίζει αποστολή ποσότητας Q μονάδων προς τον αγοραστή, μόλις το απόθεμα του αγοραστή είναι r μονάδες. Η ζήτηση που αντιμετωπίζει ο αγοραστής κατά τον χρόνο παράδοσης της παραγγελίας ακολουθεί κανονική κατανομή. Αν η ποσότητα αποθέματος κατά τη διάρκεια του χρόνου παράδοσης δεν επαρκεί για την ικανοποίηση της ζήτησης, τότε αυτή ικανοποιείται με καθυστέρηση. Οι ποσότητες Q^*, r^* οι οποίες ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος του συστήματος προκύπτουν μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΝΑΣ ΠΡΟΜΗΘΕΥΤΗΣ-ΠΟΛΛΟΙ ΑΓΟΡΑΣΤΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό, κατά αντιστοιχία με το προηγούμενο κεφάλαιο αναλύονται μοντέλα συστημάτων διαχείρισης αποθεμάτων ενός προϊόντος από τον προμηθευτή με δύο επίπεδα στην εφοδιαστική αλυσίδα, τον προμηθευτή (vendor) και τους αγοραστές (buyers). Στην πρώτη ενότητα παρουσιάζονται μοντέλα με τα παραπάνω χαρακτηριστικά, όπου η ζήτηση του προϊόντος είναι ντετερμινιστική, ενώ στην δεύτερη ενότητα παρουσιάζονται μοντέλα στα οποια η ζήτηση του προϊόντος είναι στοχαστική. Συγκεκριμένα, στη πρώτη ενότητα παρουσιάζεται το μοντέλο που πρότειναν οι Darwish and Odah (2009), ενώ στην δεύτερη ενότητα παρουσιάζεται το μοντέλο των Cetinkaya and Lee (2000).

2.1 Μοντέλο ενός προμηθευτή-πολλών αγοραστών με ντετερμινιστική ζήτηση

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ένα μοντέλο μιας εφοδιαστικής αλυσίδας που αποτελείται από έναν προμηθευτή και πολλούς αγοραστές (1V-MB), η οποία λειτουργεί υπό την πολιτική VMI. Το μοντέλο προτάθηκε από τους Darwish and Odah (2009) και βρίσκει τις βέλτιστες μεταβλητές αναπλήρωσης αποθέματος για τον προμηθευτή και τους αγοραστές έχοντας ως στόχο την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους της εφοδιαστικής αλυσίδας.

2.1.1 Συμβολισμός και Υποθέσεις

Στην ενότητα αυτή δίνονται οι υποθέσεις κάτω από τις οποίες μελετάται το μοντέλο καθώς και ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί.

Συμβολισμός:

m	Αριθμός αγοραστών
D_j	Ρυθμός ζήτησης j-οστού αγοραστή
D	Ρυθμός ζήτησης προμηθευτή, $D = \sum_{j=1}^{m} D_j$
U_j	Ανώτατο όριο για το επίπεδο αποθεμάτων του j-οστού αγοραστή
c_j	Κόστος τοποθέτησης παραγγελίας j-οστού αγοραστή
h_j	Κόστος διατήρησης αποθεμάτων του j-οστού αγοραστή
π_j	Κόστος ποινής για over stock στον j-οστό αγοραστή, $(q_j > U_j)$
q_j	Ποσότητα αποθέματος που αποστέλλεται στον j-οστό αγοραστή
q	Ποσότητα που αποστέλλεται από τον προμηθευτή προς όλους τους αγοραστές, $q = \sum_{j=1}^{m} q_j$
T_j	Μήκος κύκλου j-οστού αγοραστή
T_b	Κοινό μήκος κύκλου για όλους τους αγοραστές
k	Αριθμός αποστολών που έλαβαν οι αγοραστές
Δ	Σύνολο όλων των αγοραστών, των οποίων το ανώτατο όριο έχει ξεπεραστεί
δ	Αριθμός στοιχείων στο σύνολο Δ, $\delta = 0, 1, ..., m$
Ω	Σύνολο όλων των αγοραστών $\delta = m$
TC_B	Συνολικό κόστος για όλους τους αγοραστές

Υποθέσεις:

1. Τίθεται ανώτατο όριο U_j στο διαθέσιμο απόθεμα του j-οστού αγοραστή, $j = 1, ..., m$.

2. Ο προμηθευτής αναπληρώνει τους αγοραστές την ίδια χρονική στιγμή, δηλαδή $T_i = T_j$.

3. Η συνολική ζήτηση του προϊόντος, D, θεωρείται ντετερμινιστική και είναι γνωστή στον προμηθευτή.

4. Ο χρόνος παράδοσης και ο χρόνος μεταξύ της τοποθέτησης της παραγγελίας και της παραλαβής της, θεωρούνται αμελητέοι.

5. Δεν υπάρχουν περιορισμοί στην ποσότητα παραγγελίας του προμηθευτή, Q.

6. Το κόστος τοποθέτησης παραγγελίας για τον προμηθευτή, και για τους αγοραστές, είναι ανεξάρτητο από την αντίστοιχη ποσότητα παραγγελίας του καθενός.

Η πρώτη υπόθεση κρίνεται αναγκαία προκειμένου να αποφευχθεί η τάση του προμηθευτή να προωθεί μεγάλη ποσότητα αποθεμάτων στους αγοραστές για να εξοικονομήσει το κόστος διατήρησης και αποστολής (Fry et. al (2001)). Στην περίπτωση που ο προμηθευτής υπερβεί αυτό το ανώτατο όριο καλείται να πληρώσει ποινή (π_j). Επιπλέον, η δεύτερη υπόθεση δηλώνει πως ο κύκλος αναπαραγγελίας είναι ίδιος για όλους τους αγοραστές.

2.1.2 Μαθηματική Διατύπωση Μοντέλου

Στην ενότητα αυτή, αφού περιγραφεί ο τρόπος λειτουργίας του συστήματος, θα γίνει η μαθηματική μοντελοποίηση του. Ένας προμηθευτής παραγγέλνει από έναν εξωτερικό προμηθευτή με απεριόριστο απόθεμα, Q μονάδες προϊόντος. Ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών παραγγελιών του προμηθευτή είναι T χρονικές μονάδες. Στο διάστημα αυτό, ο προμηθευτής στέλνει την ίδια χρονική στιγμή σε

m το πλήθος αγοραστές συνολικά q μονάδες προϊόντος. Ο κάθε αγοραστής έχει ορίσει ένα ανώτατο όριο $U_j,\ j = 1, ...m$, σχετικά με το επίπεδο του αποθέματος του. Εάν το επίπεδο του αποθέματος του j- οστού αγοραστή ξεπεράσει τις U_j μονάδες προϊόντος, τότε ο προμηθευτής επιβαρύνεται με κόστος ποινής π_j.

Η ποσότητα παραγγελίας του προμηθευτή, Q, είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της ποσότητας που αποστέλνεται από τον προμηθευτή προς όλους τους αγοραστές, q. Άρα, $Q = k \cdot q$, όπου k ο αριθμός των αποστολών που έλαβαν οι αγοραστές. Ως μήκος κύκλου, T, ορίζεται το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών παραγγελιών του προμηθευτή.

Το συνολικό κόστος του συστήματος ορίζεται ως το άθροισμα του συνολικού κόστους του προμηθευτή, TC_V, και του συνολικού κόστους όλων των αγοραστών, TC_B. Το συνολικό κόστος του προμηθευτή αποτελείται από το κόστος τοποθέτησης παραγγελίας, το κόστος διατήρησης αποθεμάτων και το κόστος ποινής. Το συνολικό κόστος των αγοραστών αποτελείται από το κόστος τοποθέτησης παραγγελίας και το κόστος διατήρησης αποθεμάτων.

$$TC(Q, q) = TC_V(Q, q) + TC_B(Q, q)$$

όπου,

$TC_V(Q, q)$= Κόστος παραγγελίας + Κόστος διατήρησης αποθεμάτων + Κόστος ποινής

$TC_B(Q, q)$ = Κόστος παραγγελίας + Κόστος διατήρησης αποθεμάτων

Έπειτα από κάθε αποστολή προϊόντων προς τους αγοραστές, κάθε T_b χρονικές μονάδες, το επίπεδο αποθέματος του προμηθευτή μειώνεται κατά q. Επομένως το κόστος διατήρησης των αποθεμάτων του προμηθευτή είναι:

$$H\left(\frac{(k-1)q^2}{D} + \frac{(k-2)q^2}{D} + ... + \frac{q^2}{D}\right) = \frac{Hk(k-1)q^2}{2D}$$

Ο προμηθευτής αναπληρώνει όλους τους αγοραστές την ίδια χρονική στιγμή, επομένως:

$$T_i = T_j = T_b \tag{2.1}$$

Από την σχέση (2.1) προκύπτει ότι

$$q_j = \frac{D_j}{D_i} q_i \tag{2.2}$$

Ο προμηθευτής, τη χρονική στιγμή T_b αποστέλλει σε όλους τους αγοραστές ποσότητα q, όπου:

$$q = \sum_{j=1}^{m} q_j = \sum_{j=1}^{m} \frac{D_j}{D_i} q_i = \frac{q_i}{D_i} D$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε $i = 1$, επομένως:

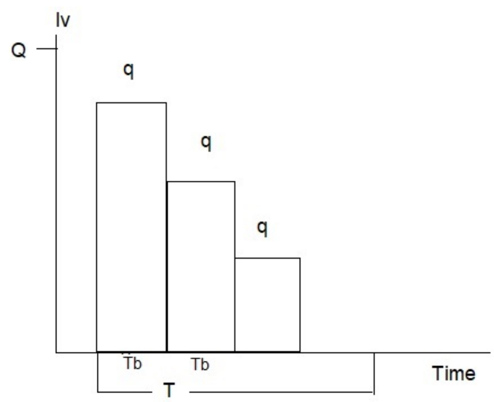
$$q = \frac{q_1}{D_1} D \tag{2.3}$$

Επιπλέον, ο προμηθευτής παραγγέλνει σε κάθε μήκος κύκλου T, ποσότητα $Q = k \times q$. Τότε από την σχέση (2.3) ισχύει ότι:

$$Q = k \frac{D}{D_1} q_1 \tag{2.4}$$

Μέσω της σχέσης (2.3) το κόστος διατήρησης αποθεμάτων του προμηθευτή γράφεται ως εξής:

$$H \frac{k(k-1)}{2D} \left(\frac{D}{D_1} q_1 \right)^2 = H \frac{k(k-1) D q_1^2}{2 D_1^2}$$



Σχήμα 2.1: Απόθεμα του προμηθευτή κατα την διάρκεια ενός κύκλου T

Ο προμηθευτής επιβαρύνεται επίσης με κόστος ποινής όταν υπερβαίνει το ανώτατο όριο αποθέματος που έχει συμφωνήσει με τον j-οστό αγοραστή. Το κόστος ποινής για τον j-οστό αγοραστή είναι:

$$\frac{\pi_j}{2D_j}k(q_j - U_j)^2, \text{ αν } q_j > U_j$$

Συνεπώς, το συνολικό κόστος ποινής που επιβαρύνεται ο προμηθευτής για την υπέρβαση των αποθεμάτων είναι:

$$\begin{aligned}\sum_{j\in S}\frac{\pi_j}{2D_j}k(q_j - U_j)^2 &= \sum_{j\in S}\frac{\pi_j}{2D_j}k\left(\frac{D_j}{Di}q_i - U_j\right)^2 \\ &= \frac{k}{2}\sum_{j\in S}\frac{\pi_j}{D_j}\left(\frac{D_j}{D_1}q_1 - U_j\right)^2\end{aligned}$$

Τελικά, το συνολικό κόστος του προμηθευτή είναι:

$$H\frac{k(k-1)Dq_1^2}{2D_1^2} + \frac{k}{2}\sum_{j\in\Delta}\frac{\pi_j}{D_j}\left(\frac{D_j}{D_1}q_1 - U_j\right)^2 + C \tag{2.5}$$

Το συνολικό κόστος του προμηθευτή ανα μονάδα χρόνου προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την (2.5) με $\frac{1}{T}$, ή ισοδύναμα με την ποσότητα $\frac{D}{Q}$, η οποία λόγω της σχέσης (2.3) γράφεται ως $\frac{D_1}{kq_1}$.

Συνεπώς,

$$TC_V = \frac{CD_1}{kq_1} + \frac{(k-1)DHq_1}{2D_1} + \frac{D_1}{2q_1}\sum_{i\in\Delta}\frac{\pi_j}{D_j}\left(\frac{D_j}{D_1}q_1 - U_j\right)^2 \tag{2.6}$$

Κάθε αγοραστής επιβαρύνεται με κόστος διατήρησης αποθεμάτων ανά μονάδα χρόνου, $\frac{h_j q_j}{2}$, επομένως το κόστος διατήρησης όλων των αγοραστών είναι:

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{h_j q_j}{2} = \sum_{j=1}^{m} h_j\frac{D_j}{D_i}\frac{q_i}{2} = \frac{q_1}{2D_1}\sum_{j=1}^{m} D_j h_j$$

Το συνολικό κόστος των αγοραστών ανά μονάδα χρόνου προκύπτει πως είναι:

$$TC_B = \frac{D_1}{q_1}\sum_{j=1}^{m} c_j + \frac{q_1}{2D_1}\sum_{j=1}^{m} D_j h_j \tag{2.7}$$

Από τις σχέσεις (2.6) και (2.7) προκύπτει ότι το συνολικό κόστος του συστήματος ανα μονάδα χρόνου είναι:

$$TC(k,q_1) = \frac{CD_1}{kq_1} + \frac{(k-1)DHq_1}{2D_1} + \frac{D_1}{2q_1}\sum_{j\in\Delta}\frac{\pi_j}{D_j}\left(\frac{D_j}{D_1}q_1 - U_j\right)^2 + \frac{D_1}{q_1}\sum_{j=1}^{m} c_j + \frac{q_1}{2D_1}\sum_{j=1}^{m} D_j h_j \tag{2.8}$$

2.1.3 Προσδιορισμός βέλτιστης λύσης

Στην ενότητα αυτή, θα προσδιοριστούν οι ποσότητες, οι οποίες ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος του συστήματος. Το συνολικό κόστος του συστήματος εξαρτάται από τα μέλη του Δ, όπου Δ το σύνολο όλων των αγοραστών των οποίων το ανώτατο όριο έχει ξεπεραστεί. Αυτό σημαίνει ότι μεταβλητές απόφασης δεν είναι μόνο τα q_1 και το k, αλλά και το σύνολο Δ. Συνεπώς ο στόχος ανάγεται στην επίλυση του προβλήματος ελαχιστοποίησης

$$\begin{aligned} & minTC \\ & s.t. \\ & q_j \geq U_j, j \in \Delta \\ & q_j \leq U_j, j \in \bar{\Delta} \end{aligned} \tag{2.9}$$

όπου $\bar{\Delta}$ είναι το συμπλήρωμα του συνόλου Δ. Το πρόβλημα περιλαμβάνει m περιορισμούς για κάποιο δεδομένο σύνολο Δ, ώστε να διασφαλιστεί ότι η ποινή επιβάλλεται μόνο για τους αγοραστές, των οποίων το όριο αποθέματος παραβιάζεται. Με τη βοήθεια του επόμενου θεωρήματος, ο αριθμός των περιορισμών που σχετίζονται με το σύνολο Δ, μειώνεται από m σε 2.

Θεώρημα 2.1.1.
Δοθέντος ενός συνόλου Δ, οι περιορισμοί σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης ίδιας μορφής με το πρόβλημα 2.9 μπορούν να περιοριστούν σε δύο ως εξής:

$$q_1 \geq D_1 max\left(\frac{U_j}{D_j}\right), \forall j \in \Delta$$

$$q_1 \leq D_1 min\left(\frac{U_j}{D_j}\right), \forall j \in \bar{\Delta}$$

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας την σχέση $q_j = \dfrac{D_j}{D_1} q_1$ στον περιορισμό $q_j \geq U_j, j \in \Delta$, αυτός γράφεται ως $q_1 \geq \dfrac{D_1}{D_j} U_j, j \in \Delta$. Ο περιορισμός αυτός δίνει συνολικά δ περιορισμούς εκ των οποίων οι $\delta - 1$ είναι περιττοί. Επομένως $q_1 \geq D_1 \max\limits_{i \in \Delta}\left(\dfrac{U_j}{D_j}\right)$. Όμοια ο δεύτερος περιορισμός μπορεί να περιοριστεί σε $q_1 \leq D_1 \min\limits_{i \in \bar{\Delta}}\left(\dfrac{U_j}{D_j}\right)$. □

Δεδομένου ότι τα μέλη του συνόλου Δ είναι άγνωστα στην αρχή, ένας τρόπος επίλυσης του προβλήματος ελαχιστοποίησης είναι η εύρεση των βέλτιστων ποσοτήτων q_1 και k για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των αγοραστών ξεκινώντας από το $\Delta = \emptyset$ έως το $\Delta = \Omega$ και επιλέγοντας εκείνο το Δ που αντιστοιχεί στο ελάχιστο συνολικό κόστος. Η διαδικασία αυτή ωστόσο απαιτεί την επίλυση 2^m προβλημάτων, το οποίο καθίσταται αδύνατον για μεγάλο m. Το επόμενο θεώρημα μέσω μιας υπόθεσης περιορίζει τον αριθμό των συνόλων Δ από 2^m σε $m + 1$.

Θεώρημα 2.1.2.
Εάν οι αγοραστές είναι διατεταγμένοι έτσι ώστε $\dfrac{U_1}{D_1} \leq \dfrac{U_2}{D_2} \leq ... \leq \dfrac{U_m}{D_m}$, *τα εφικτά σύνολα του συνόλου* Δ *είναι τα εξής:* $\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, ..., \Omega$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.1.1 ισχύει $D_1 \max\limits_{j \in \Delta}\left(\dfrac{U_j}{D_j}\right) \leq q_1 \leq D_1 \min\limits_{v \in \bar{\Delta}}\left(\dfrac{U_j}{D_j}\right)$. Εφόσον οι αγοραστές είναι διατεταγμένοι έτσι ώστε

$$\frac{U_1}{D_1} \leq \cdots \leq \frac{U_{j-1}}{D_{j-1}} \leq \frac{U_j}{D_j} \leq ... \leq \frac{U_\delta}{D_\delta} \leq \frac{U_{\delta+1}}{D_{\delta+1}} \leq ... \leq \frac{U_m}{D_m}$$

προκύπτει ότι $\max\limits_{j \in \Delta}\left(\dfrac{U_j}{D_j}\right) = \dfrac{U_\delta}{D_\delta}$ και $\min\limits_{v \in \bar{\Delta}}\left(\dfrac{U_v}{D_v}\right) = \dfrac{U_{\delta+1}}{D_{\delta+1}}$. Κατα συνέπεια ο περιορισμός τροποποιείται ως εξής: $D_1 \frac{U_\delta}{D_\delta} \leq q_1 \leq D_1 \frac{U_{\delta+1}}{D_{\delta+1}}$.

Έστω ότι ο j-οστός αγοραστής ανήκει στο Δ και ο (j-1)-οστός αγοραστής ανήκει στο $\bar{\Delta}$. Τότε, $\Delta = \{1, 2, ..., i-2, i, ..., \delta\}$ και $\bar{\Delta} = \{i-1, \delta+1, ..., m\}$.

Άρα $\max_{j\in\Delta}\left(\frac{U_j}{D_j}\right)=\frac{U_\delta}{D_\delta}$ και $\min_{v\in\bar{\Delta}}\left(\frac{U_v}{D_v}\right)=\frac{U_{i-1}}{D_{i-1}}$. Τότε από το Θεώρημα 2.1.1

$$D_1\frac{U_\delta}{D_\delta}\leq q_1\leq D_1\frac{U_{i-1}}{D_{i-1}} \qquad (1)$$

Όμως $\frac{U_{i-1}}{D_{i-1}}\leq\frac{U_\delta}{D_\delta}$, συνεπώς καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως, ο j-οστός αγοραστής δεν μπορεί να ανήκει στο Δ, αν δεν ανήκει στο Δ και ο (j-1)-οστός αγοραστής □

Χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα 2.1.1 και 2.1.2 το πρόβλημα 2.9 αναδιατυπώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}&minTC\\&D_1\frac{U_\delta}{D_\delta}\leq q_1\leq D_1\frac{U_{\delta+1}}{D_{\delta+1}}\end{aligned} \tag{2.10}$$

όπου δ ο αριθμός των αγοραστών που βρίσκονται στο σύνολο $\Delta, \delta=0,1,...,m$. Στο επόμενο θεώρημα δίνεται συνοπτικά η λύση του προβλήματος 2.10

Θεώρημα 2.1.3. *Η λύση του προβλήματος 2.10 είναι:*

A) $k=\sqrt{\dfrac{2C\left(\sum_{j=1}^{m}h_jD_j+\sum_{j\in\Delta}\pi_jD_j-DH\right)}{HD\left(2\sum_{j=1}^{m}c_j+\sum_{j\in\Delta}\frac{\pi_j}{D_j}U_j^2\right)}}$ *με* $h_j>H$ *και* $q_1(k)=D_1\alpha(k)$,

αν $\frac{U_\delta^2}{D_\delta^2}\leq\alpha(k)\leq\frac{U_{\delta+1}^2}{D_{\delta+1}^2}$, *όπου* $\alpha(k)=\dfrac{\frac{2}{k}\left(C+k\sum_{j=1}^{m}c_j\right)+\sum_{j\in\Delta}\frac{\pi_j}{D_j}U_j^2}{\sum_{j=1}^{m}h_jD_j+\sum_{j\in\Delta}\pi_jD_j+DH(k-1)}$

B) $k=\frac{D_\delta}{U_\delta}\sqrt{\frac{2C}{DH}}$ *και* $q_1=D_1\frac{U_\delta}{D_\delta}$, *αν* $\alpha(k)\leq\frac{U_\delta^2}{D_\delta^2}$

C) $k=\frac{D_{\delta+1}}{U_{\delta+1}}\sqrt{\frac{2C}{DH}}$ *και* $q_1=D_1\frac{U_{\delta+1}}{D_{\delta+1}}$, *αν* $\alpha(k)\geq\frac{U_{\delta+1}^2}{D_{\delta+1}^2}$

Η τιμή της παραμέτρου k δύναται να μην είναι ακέραιος αριθμός, έτσι υπολογίζονται δύο ακέραιες τιμές, $k_1 = \lfloor k \rfloor$ και $k_2 = \lceil k \rceil$, οι οποίες προσεγγίζουν το k. Η ολική βέλτιστη λύση του προβλήματος προκύπτει μέσω αλγορίθμου, ο οποίος στηρίζεται στο θεώρημα 2.1.3. Ξεκινώντας από $\Delta = \emptyset$, προσδιορίζονται οι τιμές των παραμέτρων $k, q_1, \alpha(\lfloor k \rfloor)$ και $\alpha(\lceil k \rceil)$ από τα A, B, C του θεωρήματος. Στην συνέχεια ελέγχονται οι περιορισμοί και αν η δεδομένη λύση είναι εφικτή, τότε το σημείο αυτό αποτελεί μια υποψήφια βέλτιστη λύση. Η διαδικασία σταματάει αφού ληφθούν υπόψη τα $\Delta = \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, ..., \Omega$. Τελικά, μεταξύ των υποψήφιων βέλτιστων λύσεων προτιμάται αυτή με το μικρότερο συνολικό κόστος.

2.2 Μοντέλο ενός προμηθευτή-πολλών αγοραστών με στοχαστική ζήτηση

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται το μοντέλο διαχείρισης αποθεμάτων από τον προμηθευτή που πρότειναν οι Cetinkaya and Lee (2000), του οποίου η εφοδιαστική αλυσίδα αποτελείται από έναν προμηθευτή, πολλούς αγοραστές και ένα προϊόν. Συγκεκριμένα, ο προμηθευτή ικανοποιεί μια σειρά ζητήσεων από μια ομάδα αγοραστών. Ο προμηθευτής έχει την αυτονομία να μην παραδίδει μικρές παραγγελίες μέχρι κάποιο αποδεκτό χρόνο αποστολής με την προσδοκία ότι θα προκύψει μια ενοποιημένη ποσότητα προς αποστολή. Οι αγοραστές από την πλευρά τους συμφωνούν να περιμένουν όταν η χωρητικότητα στις αποθήκες τους είναι πεπερασμένη.

2.2.1 Συμβολισμός και Υποθέσεις

Στην ενότητα αυτή δίνονται οι υποθέσεις κάτω από τις οποίες μελετάται το μοντέλο καθώς και ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί.

Συμβολισμός:

Q	Επίπεδο αποθέματος του προμηθευτή αμέσως μετά την παραλαβή μιας παραγγελίας
$Z(t)$	Ποσότητα παραγγελίας αναπλήρωσης του προμηθευτή
A_R	Σταθερό κόστος παραγγελίας ανά παραγγελία ανά αγοραστή
c_r	Μοναδιαίο κόστος αγοράς προϊόντος ανά μονάδα προϊόντος
H	Κόστος διατήρησης αποθεμάτων ανά μονάδα προϊόντος
A_D	Σταθερό κόστος μεταφοράς ανά μεταφορά ανά αγοραστή
c_t	Μοναδιαίο κόστος μεταφοράς ανά μονάδα προϊόντος
w	Κόστος αναμονής ανά μονάδα προϊόντος ανά μονάδα χρόνου
$L(T)$	Μέγεθος συσσωρευμένου φορτίου
$I(T)$	Επίπεδο αποθέματος την χρονική στιγμή T
TC	Συνολικό κόστος συστήματος

Υποθέσεις:

1. Ο προμηθευτής χρησιμοποιεί την πολιτική (s, S) για την αναπλήρωση του αποθέματος και πολιτική ενοποίησης των αποστολών των παραγγελιών προς τους αγοραστές με βάση τον χρόνο για την παράδοση.
2. Η ζήτηση του προϊόντος ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λt.
3. Ως μήκος κύκλου ορίζεται το χρονικό διάστημα μεταξύ δυο διαδοχικών αποστολών παραγγελιών προς τους αγοραστές.
4. Ο χρόνος αναπλήρωσης του αποθέματος του προμηθευτή θεωρείται αμελητέος.
5. Δεν υπάρχουν περιορισμοί στην ποσότητα παραγγελίας του προμηθευτή, Q.

6. Το σταθερό κόστος αναπλήρωσης και το σταθερό κόστος μεταφοράς χρεώνεται στους αγοραστές που αναπληρώνεται το απόθεμα τους σε έναν κύκλο και είναι ανεξάρτητο από την ποσότητα παραγγελίας.

2.2.2 Μαθηματική διατύπωση μοντέλου

Στην ενότητα αυτή, αφού περιγραφεί ο τρόπος λειτουργίας του συστήματος, θα γίνει η μαθηματική μοντελοποίηση του τρόπου λειτουργίας του.

Ένας προμηθευτής παραγγέλνει μονάδες προϊόντος από έναν εξωτερικό προμηθευτή, προκειμένου να ικανοποιήσει τη ζήτηση από μια ομάδα αγοραστών. Ο χρόνος αναπλήρωσης του αποθέματος του προμηθευτή θεωρείται αμελητέος. Για την αναπλήρωση του αποθέματος του, ο προμηθευτής χρησιμοποιεί την πολιτική (s, S), όπου λόγω του αμελητέου χρόνου αναπλήρωσης $s = 0$, και $S = Q$, το order-up-to level ύστερα από την ικανοποίηση όλων των ζητήσεων. Για την αποστολή προϊόντων προς τους αγοραστές, ο προμηθευτής χρησιμοποιεί μια πολιτική ενοποίησης αποστολών με βάση τον χρόνο. Έτσι, έχει την δυνατότητα να μην παραδίδει μικρές παραγγελίες έως κάποιο χρονικό διάστημα και να αποστείλει μια ενοποιημένη ποσότητα, με επιβάρυνση ένα κόστος αναμονής για όσους αγοραστές βρίσκονται σε αναμονή. Ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών αποστολών προς τους αγοραστές είναι T χρονικές μονάδες.

Το μοντέλο έχει ως στόχο τον υπολογισμό της ποσότητάς αναπλήρωσης του προμηθευτή , Q, και του χρόνου, T, που ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος του συστήματος ικανοποιώντας παράλληλα τις απαιτήσεις των αγοραστών σε έγκαιρο χρονικό διάστημα. Η ζήτηση του προϊόντος σε μια συγκεκριμένη γεωγραφική περιοχή περιγράφεται από μια στοχαστική διαδικασία με διαδοχικές στιγμές αφίξεων $X_n : \; n = 1, 2, \ldots$. Υπό την υπόθεση ότι $X_n \geq 0, \; n = 1, 2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με α.σ.κ $F(\cdot)$, με $F(0) < 1$.

Θεωρώντας $S_0 = 0$ και $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, ορίζεται η

$$N(t) = sup\{n : \; S_n \leq t\}$$

Η $N(t)$ αποτελεί μια διαδικασία ανανέωσης που μετρά τον αριθμό των παραγγελιών που λαμβάνει ο προμηθευτής στο χρόνο t. Υπό την πολιτική ενοποίησης αποστολών με βάση τον χρόνο, μια απόφαση αποστολής παραγγελιών λαμβάνεται κάθε T χρονικές μονάδες. Ο μέγιστος χρόνος αναμονής, T, αντιπροσωπεύει τη διάρκεια ενός κύκλου. Έστω $L(t)$ το μέγεθος των εκκρεμών παραγγελιών κατά την χρονική περίοδο t, $I(t)$ το επίπεδο του αποθέματος την χρονική στιγμή t και Q το επίπεδο αποθέματος του προμηθευτή αμέσως μετά την παραλαβή μιας παραγγελίας αναπλήρωσης.
Μια παραγγελία τοποθετείται από τον προμηθευτή μόνο εάν οι εκκρεμείς παραγγελίες δεν μπορούν να εκπληρωθούν με το διαθέσιμο απόθεμα. Επιπλέον, ο προμηθευτής δεν πραγματοποιεί παραγγελίες εάν $I(t) \geq 0$, αμέσως μετά την αποστολή προϊόντων στους αγοραστές. Εάν $I(t) < L(t)$ τότε ο προμηθευτή πραγματοποιεί μια παραγγελία αναπλήρωσης ποσότητας $Z(t)$, όπου

$$Z(t) = \begin{cases} Q + L(t) - I(t) & , \quad I(t) < L(t) \\ 0 & , \quad I(t) \geq L(t) \end{cases}$$

Αμέσως μετά την παραλαβή ποσότητας $Z(t)$, αποστέλλεται προς τους αγοραστές ποσότητα μεγέθους $L(t)$ και ένας νέος κύκλος ξεκινάει με $Y(t)$ μονάδες αποθέματος, όπου

$$Y(t) = \begin{cases} Q & , \quad I(t) < L(t) \\ I(t) - L(t) & , \quad I(t) \geq L(t) \end{cases}$$

Έστω $L(jT),\ j = 1, 2, \ldots$ είναι μια ακολουθία τ.μ. που περιγράφουν τις ποσότητες αποστολής. Θεωρούμε $N_j(T) \equiv L(jT),\ j = 1, 2, \ldots$, τη διαδικασία ζήτησης και $X_n,\ n = 1, 2, \ldots$, τη πραγματική διαδικασία ζήτησης. Αν η $N(t)$ είναι διαδικασία Poisson, τότε οι $N_j(T)$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή ίδια με της $N(T)$.

Για τον υπολογισμό του αναμενόμενου κόστους του συστήματος χρησιμοποιείται το Ανανεωτικό Θεώρημα με αμοιβές (Renewal Reward Theorem)(Wolff,1989). Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, το συνολικό κόστος του συστήματος ανά μονάδα χρόνου ισούται με τον λόγο του αναμενόμενου συνολικού κόστους του συστήματος σε έναν κύκλο προς το αναμενόμενο μήκος κύκλου.

$$TC(Q,T) = \frac{E(\text{Συνολικό κόστος σε έναν κύκλο})}{E(\text{Μήκος κύκλου})} \tag{2.11}$$

Οι βέλτιστες ποσότητες Q^*, T^* προκύπτουν επιλύοντας το πρόβλημα:

$$\begin{aligned} &minTC(Q,T) \\ &s.t.\ Q \geq 0 \\ &\quad\ \ T \geq 0 \end{aligned}$$

Το απόθεμα του προμηθευτή αναπληρώνεται όταν η συνολική ζήτηση των αγοραστών υπερβαίνει το Q. Ορίζουμε ως $K = inf\{k : \displaystyle\sum_{j=1}^{k} N_j(T) > Q\}$ την τ.μ. που αντιπροσωπεύει τον αριθμό των αποφάσεων αποστολής σε έναν συγκεκριμένο κύκλο. Το μήκος ενός κύκλου ορίζεται να είναι KT. Επομένως,

$$E(\text{Μήκος Κύκλου}) = E(K)T \tag{2.12}$$

Η K είναι μια θετική τυχαία μεταβλητή με $E(K) = \sum_{k=1}^{\infty} P(K \geq k)$. Έστω $G(\cdot)$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της $N(T)$ και $G^{(k)}(\cdot)$ η κ-οστή συνέλιξη της $G(\cdot)$, τότε $P(K \geq k) = G^{(k-1)}(Q)$.

Άρα

$$E(K) = \sum_{k=1}^{\infty} G^{(k-1)}(Q) \tag{2.13}$$

Το συνολικό κόστος του συστήματος σε έναν κύκλο αποτελείται από το κόστος αναπλήρωσης των αγοραστών, το κόστος μεταφοράς των προϊόντων, το κόστος διατήρησης των αποθεμάτων και το κόστος αναμονής. Το κόστος αναπλήρωσης ανά κύκλο αποτελείται από το σταθερό κόστος παραγγελίας και το κόστος αγοράς. Επομένως,

$$E(\text{Κόστος αναπλήρωσης ανά κύκλο}) = A_R + c_r E(\text{Ποσότητα παραγγελίας})$$

Η αναμενόμενη ποσότητα παραγγελίας είναι ίση με την αναμενόμενη συνολική ζήτηση κατά την διάρκεια ενός κύκλου, δηλαδή:

$$E(\text{Ποσότητα παραγγελίας}) = E\left[\sum_{j=1}^{k} N_j(T)\right]$$

Άρα,

$$E(\text{Κόστος αναπλήρωσης ανά κύκλο}) = A_R + c_r E(K)E(N(T)) \tag{2.14}$$

Το κόστος μεταφοράς ανά κύκλο αποτελείται από το σταθερό κόστος μεταφοράς και το κόστος μεταφοράς των προϊόντων, συνεπώς:

$$E(\text{Κόστος Μεταφοράς ανά κύκλο}) = A_D E(K) + c_t E(K)E(N(T)) \tag{2.15}$$

Το διαθέσιμο επίπεδο αποθέματος διαμορφώνεται ως εξής:

$$I(t) = \begin{cases} Q & , \quad 0 \le t \le T \\ Q - N_1(T) & , \quad T < t \le 2T \\ \vdots & , \\ Q - \displaystyle\sum_{j=1}^{K-1} N_j(T) & , \quad (K-1)T < t \le KT \end{cases}$$

Επομένως,

$$E(\text{Κόστος διατήρησης}) = HE\left[\int_0^{KT} I(t)\,dt\right]$$

Έστω $H(Q,T) = E\left[\int_0^{KT} I(t)\,dt\right]$, το μέσο διαθέσιμο απόθεμα προκύπτει από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.2.1. *Έστω $g(\cdot)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $N(T)$ και $g^{(k)}(\cdot)$ η k-fold convolution της $g(\cdot)$ τότε*

$$H(Q,T) = TQ + T\sum_{i=0}^{Q}(Q-i)m_g(i)$$

όπου $m_g(i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} g^{(k)}(i)$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $H(Q,T)$ είναι το αναμενόμενο συνολικό απόθεμα που διατηρείται μέχρι την επόμενη αναπλήρωση, δεδομένου ότι το αρχικό απόθεμα είναι Q και οι αποστολές πραγματοποιούνται κάθε Τ χρονικές μονάδες.

$$H[(Q,T)|N_1(T)=i] = \begin{cases} TQ & , \quad i > Q \\ TQ + H(Q-i,T) & , \quad i \leq Q \end{cases}$$

$$H(Q,T) = E_i[H(Q,T|N_1(T)=i] = TQ + \sum_{i=0}^{Q} H(Q-i,T)g(i)$$

Η $H(Q,T)$ αποτελεί μια συνάρτηση ανανέωσης σε διακριτό χρόνο (renewal equation in discrete time) και η λύση της είναι μοναδική και στηρίζεται στο παρακάτω θεώρημα. □

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω ότι η $F(x)$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ και $\alpha(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, φραγμένη σε πεπερασμένο διάστημα. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\Phi(t),\ t \geq 0$ ορίζεται από την εξίσωση:*

$$\Phi(t) = a(t) + \sum_{x=0}^{t} \Phi(t-x)f(x),\ t \geq 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση, η οποία είναι φραγμένη σε πεπερασμένο διάστημα. Η λύση δίνεται ως:

$$\Phi(t) = a(t) + \sum_{x=0}^{t} \alpha(t-x)m(x),\ t \geq 0$$

όπου $m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(x)$.

Απόδειξη (Tijms, 1994). Αντικαθιστώντας επανειλημμένα την (1) στον εαυτό της προκύπτει ότι

$$\Phi(t) = a(t) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{x=0}^{t} \alpha(t-x)f^{(k)}(x) + \sum_{x=0}^{t} \Phi(t-x)f^{(n+1)}(x)$$

Η $\Phi(x)$ είναι φραγμένη στο $[0, t]$ επομένως ο τρίτος όρος στο δεξί μέλος της εξίσωσης φράσσεται από το $cF^{(n+1)}$ για κάποιο $c > 0$. Ισχύει ότι η συνάρτηση ανανέωσης $M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)} < \infty$. Άρα για $n \to \infty$ έχουμε $F^{(n)} \to 0$. Επομένως για $n \to \infty$ έχουμε

$$\Phi(t) = a(t) + \sum_{x=0}^{t} \alpha(t-x) \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(x)$$

□

Αντικαθιστώντας όπου $\Phi(t) = H(Q, T)$, $a(t) = TQ$, $f^{(k)} = g^{(k)}$ και $t = Q$ προκύπτει το ζητούμενο της Πρότασης 2.2.1. Άρα, το αναμενόμενο κόστος διατήρησης είναι:

$$E(\text{Κόστος διατήρησης}) = HH(Q, T) = HTQ + HT \sum_{i=0}^{Q} (Q-i) m_g(i) \quad (2.16)$$

Το κόστος αναμονής προκύπτει πως είναι:

$$E(\text{Κόστος αναμονής}) = wE \left[\sum_{n=2}^{N(T)} (j-1) X_n + N(T) a(T) \right],$$

όπου $a(T) = T - S_{N(T)}$. Ισοδύναμα η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} E(\text{Κόστος αναμονής}) =& wE \left[(T - S_1) + (T - S_2) + \cdots + (T - S_{N(T)}) \right] \\ =& wE \left(N(T)T - \sum_{n=1}^{N(T)} S_n \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Έστω $W(T) = E \left(N(T)T - \sum_{n=1}^{N(T)} S_n \right)$ η αναμενόμενη αθροιστική αναμονή κατά την διάρκεια ενός κύκλου, η παρακάτω πρόταση μας δίνει ένα κλειστό τύπο για την $W(T)$.

Πρόταση 2.2.2. *Η αναμενόμενη αθροιστική αναμονή κατά την διάρκεια ενός κύκλου είναι:*

$$W(T) = V(T) + \int_0^T V(T-t) \, dM_F(t)$$

όπου $V(T) = \int_0^T (T-t)\, dF(t)$ *και* $M_F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t) = E[N(t)]$

Απόδειξη. Δεδομένου ότι κανένας πελάτης δεν περιμένει αρχικά, το $W(t)$ δηλώνει την αναμενόμενη αθροιστική αναμονή κατά την διάρκεια μιας περιόδου T. Υπό την προϋπόθεση της άφιξης της πρώτης ζήτησης ισχύει:

$$W(T) = E_t[E(T|S_1 = t)] = \int_0^T (T-t)dF(t) + \int_0^T W(T-t)dF(t)$$

Ο παραπάνω τύπος αποτελεί μια renewal type integral equation (ολοκληρωτική εξίσωση ανανεωτικού τύπου), επομένως η λύση της είναι μοναδική και προκύπτει από το Θεώρημα 2.2.1. □

Άρα,

$$\begin{aligned} E(\text{Κόστος αναμονής}) &= wE(K)W(T) \\ &= wE(K)V(T) + wE(K)\int_0^T V(T-t)\, dM_F(t) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Τελικά από τις σχέσεις (2.12), (2.14), (2.15), (2.16), (2.18) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} TC =& \frac{A_R}{E(K)T} + \frac{c_r E(N(T))}{T} + \frac{A_D}{T} \\ &+ \frac{c_t E(N(T))}{T} + \frac{HH(Q,T)}{E(K)T} + \frac{wW(T)}{T} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Υπό την υπόθεση ότι οι $N(t)$ ακολουθούν Poisson κατανομή με παράμετρο λt, ισχύει ότι $N(T) \sim Poisson(\lambda T)$. Η $G(\cdot)$ είναι η κατανομή Poisson με παράμετρο λT, επομένως $E(N(T) = \lambda T$. Η k-fold convolution της $G(\cdot)$ είναι η κατανομή Poisson με παράμετρο $k\lambda T$, άρα

$$g^{(k)}(i) = \frac{(k\lambda T)^i e^{-k\lambda T}}{i!} \quad \text{και} \quad G^{(k)}(Q) = \sum_{i=0}^{Q} \frac{(k\lambda T)^i e^{-k\lambda T}}{i!}$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω προκύπτουν τα εξής:

- $dF(t) = \lambda e^{-\lambda t} dt$

- $M_F(t) = \sum_{i=1}^{\infty} F^{(n)} = E(N(T)) = \lambda t$
- $dM_F(t) = \lambda dt$
- $m_g(i) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(k\lambda T)^i e^{-k\lambda T}}{i!}$

Τα παραπάνω είναι επαρκή για τον υπολογισμό των $E(K), H(Q,T)$ και $W(T)$. Ωστόσο, δεν είναι εφικτή η εύρεση κλειστών τύπων, έτσι οι προσεγγιστικοί τύποι δίνονται μέσω των παρακάτω προτάσεων.

Πρόταση 2.2.3. *Η συνεχής προσέγγιση για το K περιγράφεται από μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή Erlang και παράμετρο κλίμακας λT και σχήματος Q, $Er(\lambda T, Q)$. Έτσι $E(K) \approx \dfrac{Q+1}{\lambda T}$.*

Απόδειξη. Καθώς,

$$\{K \geq k\} \approx \{\sum_{i=1}^{k-1} N_i(T) \leq Q\}$$

$$P(K \geq k) = G^{(k-1)}(Q)$$

$$P(K \geq k+1) = G^{(k)}(Q) = P(K > k)$$

$$P(K \leq k) = 1 - G^{(k)}(Q) = 1 - \sum_{i=0}^{Q} \frac{(k\lambda T)^i e^{-k\lambda T}}{i!}$$

αντιμετωπίζοντας το k ως συνεχή τυχαία μεταβλητή, έχουμε ότι το δεξί μέλος της τελευταίας ισότητας είναι η αθροιστική συνάρτηση της Erlang κατανομής με παραμέτρους λT και Q. Επομένως, προσεγγιστικά $E(K) \approx \dfrac{Q+1}{\lambda T}$ □

Πρόταση 2.2.4. *Μία προσέγγιση για την ποσότητα $m_g(i)$ είναι η $m_g(i) \approx \dfrac{1}{\lambda T}$.*

Λαμβάνοντας υπόψη όλες τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν τα εξής:

- $HH(Q,T) = H\left[TQ + \dfrac{(Q+1)Q}{2\lambda}\right]$

- $\dfrac{\lambda T - 1 + e^{-\lambda T}}{\lambda}$
- $W(T) = \dfrac{\lambda T^2}{2}$

Επομένως το συνολικό κόστος του συστήματος ανά μονάδα χρόνου είναι

$$TC = \frac{A_R \lambda}{Q+1} + \frac{HT\lambda Q}{Q+1} + \frac{HQ}{2} + \frac{w\lambda T}{2} + \frac{A_D}{T} + c_r\lambda + c_t\lambda$$

Θεωρώντας $\bar{Q} = Q + 1$ προκύπτει

$$\begin{aligned} TC(\bar{Q}, T) = {} & \frac{A_R \lambda}{\bar{Q}} + \frac{HT\lambda(\bar{Q}-1)}{\bar{Q}} + \frac{H(\bar{Q}-1)}{2} \\ & + \frac{w\lambda T}{2} + \frac{A_D}{T} + c\lambda + c_t\lambda \end{aligned} \tag{2.20}$$

Τελικά, ο στόχος ανάγεται στην επίλυση του προβλήματος

$$\begin{aligned} & minTC(\bar{Q}, T) \\ & s.t.\ \bar{Q} \geq 1 \\ & \quad\quad T \geq 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

2.2.3 Προσδιορισμός βέλτιστης λύσης

Στην ενότητα αυτή, θα προσδιοριστούν οι ποσότητες Q, T, οι οποίες ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος του συστήματος, το οποίο προσδιορίστηκε στην προηγούμενη ενότητα.

Έστω (Q^*, T^*) η λύση του προβλήματος 2.21, τότε η λύση στο αρχικό πρόβλημα είναι $(Q^* - 1, T^*)$. Από τις συνθήκες πρώτης τάξης για ελάχιστο του προβλήματος 2.21 προκύπτει:

$$\frac{\partial TC(\bar{Q}, T)}{\partial \bar{Q}} = 0 \Leftrightarrow \bar{Q} = \sqrt{\frac{2\lambda A_R}{H} - 2\lambda T} \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial TC(\bar{Q}, T)}{\partial T} = 0 \Leftrightarrow T = \sqrt{\frac{2\bar{Q}A_D}{\lambda[2H(\bar{Q}-1) + \bar{Q}w]}} \tag{2.23}$$

με $T < \dfrac{A_R}{H}$. Αντικαθιστώντας την (2.23) στην (2.20) τότε η $TC(\bar{Q}, T)$ περιορίζεται σε $TC(\bar{Q})$. Έπειτα από πράξεις προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} TC(\bar{Q}) &= \frac{A_R\lambda}{\bar{Q}} + \frac{H\bar{Q}}{2} - \frac{H}{2} + c_r\lambda + c_t\lambda \\ &+ \sqrt{\frac{2A_D\lambda[2H(\bar{Q}-1) + w\bar{Q}]}{\bar{Q}}} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Έστω $TC_1(\bar{Q}) \equiv \dfrac{A_R\lambda}{\bar{Q}} + \dfrac{H\bar{Q}}{2}$ και $TC_2 \equiv \sqrt{\dfrac{2A_D\lambda[2H(\bar{Q}-1) + w\bar{Q}]}{\bar{Q}}}$. Επιπλέον, ορίζουμε ως $TC^{'}(\bar{Q})$, $TC_1^{'}(\bar{Q})$, $TC_2^{'}(\bar{Q})$ τις πρώτης τάξης παραγώγους των συναρτήσεων $TC(\bar{Q})$, $TC_1(\bar{Q})$, $TC_2(\bar{Q})$ αντίστοιχα.
Ισχύει ότι

$$TC^{'}(\bar{Q}) = TC_1^{'}(\bar{Q}) + TC_2^{'}(\bar{Q})$$

και Q^* είναι μια λύση της

$$TC_1^{'}(\bar{Q}) + TC_2^{'}(\bar{Q}) = 0 \tag{2.25}$$

Θεώρημα 2.2.2. *Αν η εξίσωση (2.25) έχει λύση στο διάστημα* $[1, +\infty)$*, τότε αυτή είναι μοναδική.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη του θεωρήματος, αρκεί να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις $-TC1^{'}(\bar{Q})$ και $TC2^{'}(\bar{Q})$ τέμνονται το πολύ μια φορά.

$$TC1^{'}(\bar{Q}) = -\frac{A_R\lambda}{\bar{Q}^2} + \frac{H}{2}$$

$$TC1^{''}(\bar{Q}) = \frac{2A_R\lambda}{\bar{Q}^3} > 0$$

Άρα η $-TC1^{'}(\bar{Q})$ είναι φθίνουσα συνάρτηση στο $[1, +\infty)$.

$$TC_2(\bar{Q}) = \sqrt{2A_D\lambda(2H + w) - \frac{4A_DH\lambda}{\bar{Q}}}$$

θεωρώντας $\psi \equiv 2A_D\lambda(2H + w)$ τότε

$$TC_2(\bar{Q}) = \sqrt{\psi - \frac{4A_DH\lambda}{\bar{Q}}}$$

$TC_2^{''} > 0$ επομένως $TC_2^{'}(\bar{Q})$ είναι αύξουσα συνάρτηση στο $[1, +\infty)$. Έπεται ότι η $TC^{'}(\bar{Q})$ είναι αύξουσα συνάρτηση στο $[1, +\infty)$, επομένως το σημείο τομής των $TC_1^{'}, TC_2^{'}$, αν υπάρχει είναι μοναδικό. □

Διαπιστώνεται ότι εαν $-TC_1^{'} < TC_2^{'}$, τότε οι δυο συναρτήσεις δεν τέμνονται στο $[1, +\infty)$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $TC_1^{'} = -A_R\lambda + \frac{H}{2}$ και $TC_2^{'} = -H\sqrt{\frac{2A_D\lambda}{w}}$. Επομένως $TC^{'} = -A_R\lambda + \frac{H}{2} - H\sqrt{\frac{2A_D\lambda}{w}}$. Εάν ισχύει

$$-\sqrt{\frac{2A_D\lambda}{w}} > \frac{A_R\lambda}{H} - \frac{1}{2} \quad (**)$$

τότε $-TC_1^{'} < TC_2^{'}$ και οι δυο συναρτήσεις δεν τέμνονται στο $[1, +\infty)$. Επιπλέον εαν ισχύει η $(**)$ τότε $TC^{'}(1) > 0$, άρα $TC^*(\bar{Q})$ αύξουσα στο 1. Από τον τύπο της $TC^*(\bar{Q})$ προκύπτει ότι η συνάρτηση αυξάνει όσο το $\bar{Q}$ τείνει στο άπειρο. Συνεπώς, η $TC(\bar{Q})$ είναι αύξουσα συνάρτηση στο $[1, +\infty)$.

Θεώρημα 2.2.3. *Υπό την προϋπόθεση ότι* $-\sqrt{\frac{2A_D\lambda}{w}} \leq \frac{A_R\lambda}{H} - \frac{1}{2}$, *η* (Q^*, T^*) *είναι η μοναδική λύση που ικανοποιεί τις (2.22), (2.23). Διαφορετικά :* $Q^* = 1$ *και* $T^* = \sqrt{\frac{2A_D\lambda}{w}}$

Απόδειξη. Εαν $-\sqrt{\frac{2A_D\lambda}{w}} > \frac{A_R\lambda}{H} - \frac{1}{2}$, η $TC(\bar{Q})$ είναι αύξουσα συνάρτηση στο $[1, +\infty)$. Επομένως $Q^* = 1$. Αντικαθιστώντας στην (2.23), $\bar{Q} = 1$ προκύπτει ότι $T^* = \sqrt{\frac{2A_D\lambda}{w}}$.

Εάν $-\sqrt{\frac{2A_D\lambda}{w}} \leq \frac{A_R\lambda}{H} - \frac{1}{2}$, τότε $-TC_1^{'} \geq TC_2^{'}$, άρα οι δυο συναρτήσεις τέμνονται. Από το Θεώρημα 1 εξασφαλίζεται η μοναδικότητα του σημείου τομής. Επιπλέον, $TC^{'}(1) \leq 0$, δηλαδή $TC^*(\bar{Q})$ φθίνουσα στο 1. Συνεπώς η μοναδική λύση της (2.25) είναι το ολικό ελάχιστο της $TC(\bar{Q})$ και προκύπτει από τις (2.22), (2.23). □

Το παρακάτω λήμμα απλοποιεί περαιτέρω το πρόβλημα καθώς προσδιορίζει το εύρος τιμών της Q^*.

Λήμμα 2.2.1. *Υπό την προϋπόθεση ότι* $-\sqrt{\dfrac{2A_D\lambda}{w}} \leq \dfrac{A_R\lambda}{H} - \dfrac{1}{2}$, *ισχύει*

$$\sqrt{\frac{2A_R\lambda}{H} - 2\lambda\sqrt{\frac{2A_D}{\lambda w}}} \leq Q^* \leq \sqrt{\frac{2A_R\lambda}{H}}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.2.2 έχουμε ότι η Q^* και T^* ικανοποιούν τις (2.22) και (2.23) αντίστοιχα, δηλαδή:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\lambda A_R}{H} - 2\lambda T} \text{ και } T^* = \sqrt{\frac{2\bar{Q}A_D}{\lambda[2H(\bar{Q}-1)+\bar{Q}w]}}$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2\bar{Q}A_D}{\lambda[2H(\bar{Q}-1)+\bar{Q}w]}} = \sqrt{\frac{2A_D}{\lambda[2H(1-\frac{1}{\bar{Q}})+w]}} \leq \sqrt{\frac{2A_D}{\lambda w}}$$

$$T^* \leq \sqrt{\frac{2A_D}{\lambda w}} \Leftrightarrow -2\lambda T \geq -2\lambda\sqrt{\frac{2A_D}{\lambda w}}$$

Επομένως,

$$Q^* \geq \sqrt{\frac{2A_R\lambda}{H} - 2\lambda\sqrt{\frac{2A_D}{\lambda w}}}$$

Επιπλέον $T \geq 0 \Leftrightarrow -2\lambda T \leq 0$, οπότε

$$Q^* \leq \sqrt{\frac{2A_R\lambda}{H}}$$

□

Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων με έναν προμηθευτή και πολλούς αγοραστές με ντετερμινιστική (Darwish and Odah (2009)) και στοχαστική (Cetinkaya and Lee (2000)) ζήτηση αντίστοιχα. Στο μοντέλο των Darwish and Odah (2009) ο προμηθευτής παραγγέλνει Q μονάδες προϊόντος από εξωτερικό προμηθευτή με απεριόριστο απόθεμα και αναπληρώνει τους αγοραστές την ίδια χρονική στιγμή με q_i μονάδες αποθέματος τον καθένα.

Οι αγοραστές έχουν ορίσει ένα ανώτατο όριο για το επίπεδο του αποθέματος τους, το οποίο εαν ξεπεραστεί ο προμηθευτής επιβαρυνεται με κόστος ποινής. Στόχος του μοντέλου είναι να προσδιοριστεί η βέλτιστη ποσότητα αναπαργγελίας του προμηθευτή και η συχνότητα αποστολής στους αγοραστές. Οι ποσότητες αυτές προσδιορίζονται μέσω των σημείων Karush Kuhn Tucker για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συνολικού κόστους συστήματος καθώς και μέσω επαναληπτικών διαδικασιών λαμβάνοντας υπόψη όλες τις δυνατές τιμές του συνόλου των αγοραστών που έχει υπερβεί το ανώτατο όριο αποθέματος.

Στο μοντέλο των Cetinkaya and Lee (2000) ο προμηθευτής για την αναπλήρωση του αποθέματος του χρησιμοποιεί την πολιτική (s, S), όπου $s = 0$ και $S = Q$. Για την αναπλήρωση του αποθέματος των αγοραστών χρησιμοποιεί πολιτική ενοποίησης παραγγελιών με βάση τον χρόνο παράδοσης. Για τον υπολογισμό του αναμενόμενου κόστους του συστήματος χρησιμοποιείται το Ανανεωτικό Θεώρημα με αμοιβές. Για τις ποσότητες Q^*, T^* που ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος ισχύει ότι εαν $-\sqrt{\frac{2A_D\lambda}{w}} \leq \frac{A_R\lambda}{H} - \frac{1}{2}$, τότε η λύση τους είναι μοναδική, διαφορετικά $Q^* = 1$ και $T = \sqrt{\frac{2A_D\lambda}{w}}$. Επιπλέον υπό την ίδια υπόθεση η λύση της Q^* βρίσκεται σε κλειστό διάστημα με γνωστά άκρα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Συστηματα Διαχειρισησ Αποθεματων απο τον Προμηθευτη στουσ Τελικουσ Καταναλωτεσ

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζεται ένα μοντέλο διαχείρισης αποθεμάτων ενός προϊόντος από τον προμηθευτή, το οποίο απευθύνεται στους τελικούς καταναλωτές και στη συνέχεια προτείνεται τροποποίηση του μοντέλου αυτού. Το μοντέλο μελετήθηκε από τους Weißhuhn and Hoberg (2021). Επιπλέον, σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζονται δυο αριθμητικά παραδείγματα εφαρμογής της πολιτική VMI στους τελικούς καταναλωτές. Το μοντέλο τωνWeißhuhn and Hoberg (2021) αποτελεί επέκταση του συστήματος διαχείρισης αποθεμάτων ενός προϊόντος με έναν προμηθευτή και πολλούς αγοραστές, το οποίο παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 3. Συγκεκριμένα το προϊόν μεταφέρεται τον προμηθευτή κατευθείαν στους τελικούς καταναλωτές, χωρίς ενδιάμεσους μεταπωλητές καθώς ο προμηθευτής (vendor) λαμβάνει πληροφορίες από το σημείο κατανάλωσης του προϊόντος (Point of Consumption (POC) Data) μέσω της τεχνολογίας διαδικτύου πραγμάτων (Internet Of Things (IoT)). Οι πληροφορίες που λαμβάνονται επιτρέπουν στον προμηθευτή να παρατηρεί τα επίπεδα αποθεμάτων των καταναλωτών. Το μοντέλο του συστήματος μπορεί αν εφαρμοστεί εάν:

- Η τεχνολογία για την υποστήριξη διαδικτυακών διαδικασιών παραγγελίας είναι διαθέσιμη.

- Ο προμηθευτής είναι σε θέση να εκμεταλλευτεί την εν λόγω τεχνολογία.
- Οι καταναλωτές είναι πρόθυμοι να χρησιμοποιήσουν τις υποστηριζόμενες διαδικτυακές διαδικασίες παραγγελίας.
- Όλοι οι καταναλωτές στο σύστημα έχουν έρθει σε συμφωνία με τον προμηθευτή.

3.1 Ένας προμηθευτής - πολλοί τελικοί καταναλωτές

Οι Weißhuhn and Hoberg (2021) αναλύουν ένα σύστημα έξυπνης αναπλήρωσης αποθεμάτων με στοχαστική ζήτηση προϊόντος, στο οποίο οι τελικοί καταναλωτές είναι τόσο VMI όσο και non VMI. Οι VMI καταναλωτές, συμφωνούν στην συλλογή και γνωστοποίηση πληροφοριών POC στον προμηθευτή με χρήση της έξυπνης οικιακής συσκευής τους. Ο προμηθευτής έχει την πλήρη ευθύνη για την λήψη αποφάσεων αναπλήρωσης αποθέματος για τους VMI καταναλωτές. Αντίθετα οι non VMI καταναλωτές πραγματοποιούν ανεξάρτητες παραγγελίες με δική τους ευθύνη.

3.1.1 Συμβολισμός και Υποθέσεις

Στην ενότητα αυτή δίνονται οι υποθέσεις κάτω από τις οποίες μελετάται το μοντέλο καθώς και ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθεί.

Συμβολισμός:

N	Αριθμός καταναλωτών
M	Αριθμός των VMI καταναλωτών $M = 0, 1, ..., N$
T	Χρονική περίοδος
λ	Ρυθμός ζήτησης Poisson, ίδια για κάθε καταναλωτή $n = 1, ..., N$
E	Ικανότητα αποστολής σε ποσότητες των q
τ	Χρόνος παράδοσης παραγγελίας
c	Κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος
p	Τιμή πώλησης ανά μονάδα προϊόντος
s	Κόστος έλλειψης ανά μονάδα προϊόντος
H	Κόστος διατήρησης ανα προϊόν ανά χρονική μονάδα
γ_p	Διαφορά τιμής πώλησης σε VMI και σε non VMI καταναλωτές
γ_s	Διαφορά κόστους έλλειψης σε VMI και σε non VMI καταναλωτές
r_{stat}	Στατικό σημείο αναπαραγγελίας, χρησιμοποιείται για όλα τα $n \in \{1, ..., M\}$
r	Αποτελεσματικό σημείο αναπαραγγελίας, διαφέρει ανά $n \in \{1, ..., M\}$ και $t \in \{1, ..., T\}$
ζ	Κάτω άκρο του διαστήματος αναπαραγγελίας
Z	Άνω άκρο του διαστήματος αναπαραγγελίας
W	Αριθμός χρονικών μονάδων αναμονής
$D_{n,t}$	Πραγματική ζήτηση του n-οστού καταναλωτή την t περίοδο
$L_{n,t}$	Απώλεια πωλήσεων του n-οστού καταναλωτή την t περίοδο
$B_{n,t}$	Ποσότητα ανεκτέλεστων παραγγελιών του n-οστού καταναλωτή την t περίοδο
$R_{n,t}$	Πραγματοποιηθήσες πωλήσεις στον n-οστό καταναλωτή την t περίοδο
$I_{n,t}$	Διαθέσιμο απόθεμα του n-οστού καταναλωτή την t περίοδο
$O_{n,t}$	Ποσότητα παραγγελίας του n-οστού καταναλωτή στο τέλος της t περιόδου
$I^0_{n,t}$	On order απόθεμα του n-οστού καταναλωτή την t περίοδο
$X_{n,t}$	Ποσότητα που αποστέλεται στον n-οστό καταναλωτή στο τέλος της περιόδου t

Υποθέσεις:

1. Ένας προμηθευτής εξυπηρετεί απευθείας N τελικούς καταναλωτές προμηθεύοντας τους αποκλειστικά ένα προϊόν. Από αυτούς, M συμφωνούν στη πολιτική VMI (στο εξής VMI καταναλωτές) και οι υπόλοιποι δεν συμφωνούν (στο εξής non VMI καταναλωτές).

2. Ο προμηθευτής έχει ενσωματώσει την τεχνολογία IoT στην οικιακή συ-

σκευή των καταναλωτών, που επιτρέπει τη γνώση του αποθέματος, σε πραγματικό χρόνο.

3. Η ζήτηση των καταναλωτών είναι τυχαία μεταβλητή με κατανομή Poisson ($P(\lambda)$).
4. Ο προμηθευτής διαθέτει περιορισμένη ικανότητα αποστολής και δυο τρόπους αναπλήρωσης (VMI, non VMI).
5. Ο προμηθευτής αντιμετωπίζει την ίδια μέση ημερήσια ζήτηση λ για κάθε πελάτη, ανεξάρτητα από τον τρόπο αναπλήρωσης που χρησιμοποιείται.
6. Όταν δεν υπάρχει διαθέσιμο απόθεμα, τότε η ζήτηση θεωρείται απολεσθείσα.
7. Ο προμηθευτής αναπληρώνει το απόθεμα των VMI καταναλωτών ανεξάρτητα από το εάν λαμβάνει παραγγελίες από τους non VMI εκείνη τη στιγμή.
8. Ο χρόνος παράδοσης της παραγγελίας στους τελικούς καταναλωτές είναι γνωστός εκ των προτέρων και σταθερός.
9. Το κόστος παραγγελίας για τις παραγγελίες των non VMI καταναλωτών θεωρείται αμελητέο.
10. Το κόστος μεταφοράς των προϊόντων περιλαμβάνεται στην τιμή πώλησης.

3.1.2 Μαθηματική Διατύπωση Μοντέλου

Στην ενότητα αυτή, αφού περιγραφεί ο τρόπος λειτουργίας του συστήματος, θα γίνει η μαθηματική μοντελοποίηση του τρόπου λειτουργίας του.

Για την μοντελοποίηση του συστήματος θεωρείται μια σειρά έξι διακριτών γεγονότων, τα οποία εκτελούνται αναδρομικά από το σύστημα:

1. Οι ποσότητες που αποστάλθηκαν πριν από τ ημέρες, $X_{n,t-1-\tau}$, φτάνουν στον καταναλωτή n, $n \in \{1, ..., N\}$.

2. Η ζήτηση του καταναλωτή n την ημέρα τ, $D_{n,t}$, ικανοποιείται από το διαθέσιμο απόθεμα, $I_{n,t-1} + X_{n,t-1-\tau}$.

3. Τα επίπεδα αποθέματος, $I_{n,t}$, στις τοποθεσίες των καταναλωτών ενημερώνονται και υπολογίζεται η απώλεια πωλήσεων $L_{n,t}$, με βάση τα $X_{n,t-1-\tau}$ και $D_{n,t}$.

4. Οι non VMI καταναλωτές, $n \in \{M+1, ..., N\}$ τοποθετούν τις παραγγελίες τους $O_{n,t} = q$. Ο χρόνος παραγγελίας των non VMI καταναλωτών μεταβάλλεται τυχαία από τον έναν κύκλο παραγγελιών στον επόμενο.

5. Ο προμηθευτής λαμβάνει γνώση των προηγούμενων ενημερωμένων επιπέδων αποθεμάτων $I_{n,t}$, από όλους τους VMI καταναλωτές, $n \in \{1, ..., M\}$.

6. Ο προμηθευτής επανεξετάζει τις εκκρεμείς παραγγελίες των non VMI καταναλωτών και τις τρέχουσες θέσεις των αποθεμάτων των VMI καταναλωτών (διαθέσιμο και προς διαμετακόμιση). Επιπλέον, λαμβάνει αποφάσεις για το ποιοι VMI καταναλωτές χρειάζονται αναπλήρωση, $O_{n,t} \in \{0, q\}, n = 1, ..., M$ και σε ποιους καταναλωτές θα σταλεί απόθεμα, $X_{n,t} \in \{0, q\}, n = 1, ..., N$.

Με βάση τα παραπάνω προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$I_{n,t} = (I_{n,t-1} + X_{n,t-1-\tau} - D_{n,t})^+$$

$$L_{n,t} = (D_{n,t} - X_{n,t-1-\tau} - I_{n,t-1})^+$$

όπου $(\cdot)^+ = max(\cdot, 0)$.

Επιπλέον τα γεγονότα 4 και 5 είναι εναλλασσόμενα στο μοντέλο.

Για την αναπλήρωση του αποθέματος χρησιμοποιούνται δυο τροποποιήσεις της (r, q) πολιτικής με q σταθερό και α) με σταθερό σημείο αναπαραγγελίας, r_{stat}, β) με δυναμικά προσδιοριζόμενο σημείο αναπαραγγελίας, $r \in [\zeta, Z]$.

Προκειμένου να μοντελοποιηθεί το μακροπρόθεσμο κέρδος του προμηθευτή, απαιτείται ο υπολογισμός της μέσης απώλειας πωλήσεων, του μέσου συνολικού αποθέματος και των μέσων πωλήσεων που πραγματοποιήθηκαν τόσο σε VMI όσο και σε non VMI καταναλωτές.

Οι ελλείψεις αφορούν τόσο καταναλωτές VMI, όσο και non VMI. Για τους VMI καταναλωτές, υπεύθυνος για την απώλεια είναι ο προμηθευτής, ενώ αντίθετα για τους non VMI καταναλωτές μπορεί να ελέγξει μερικώς τη συχνότητα και τη σοβαρότητα της απώλειας αποθεμάτων, εξαιτίας της αβεβαιότητας της συμπεριφοράς των εν λόγω καταναλωτών ως προς την τοποθέτηση των παραγγελιών. Επομένως, η απώλεια πωλήσεων των non VMI καταναλωτών διακρίνονται σε:

- Απώλεια πωλήσεων λόγω αργοπορημένης παραγγελίας, για την οποία υπεύθυνοι είναι οι καταναλωτές.
- Απώλεια πωλήσεων λόγω αργοπορημένης παράδοσης, για την οποία υπεύθυνος είναι ο προμηθευτής.

Έστω W οι ημέρες αναμονής πέραν του συμφωνημένου χρόνου παράδοσης. Κάθε φορά που μια παραγγελία non VMI καταναλωτή, $O_{n,t} = q$, δεν αποστέλλεται την ίδια μέρα t, $(X_{n,t} = 0)$, εξακολουθεί να εκκρεμεί για τις επόμενες $t + w$ μέρες. Επομένως, $I^0_{n,t+w} = q$, για όλα τα $w \in \{0, ..., W\}$. Αυτό ισχύει έως ότου η εκκρεμής παραγγελία αποσταλεί την ημέρα $t + w$, οπότε ισχύει $X_{n,t+w} = q$, $I^0_{n,t+w+1} = 0$. Η ποσότητα που στάλθηκε από τον προμηθευτή την ημέρα $t + w$, προστίθεται στο απόθεμα του καταναλωτή την ημέρα $t + w + 1 + \tau$. Στον χρόνο αυτό δεν πραγματοποιούνται online παραγγελίες από τον ίδιο καταναλωτή. Οι ίδιες σχέσεις ισχύουν για τις εισερχόμενες και τις εκκρεμείς παραγγελίες και των VMI καταναλωτών.

Επομένως, η απώλεια πωλήσεων που οφείλεται σε καθυστερημένη παράδοση, $LD_{n,t}$, προκύπτει από την σχέση:

$$LD_{n,t} = \begin{cases} L_{n,t} & , \quad \text{αν } O_{n,t-w} = 0 \wedge I^0_{n,t-w} = q \\ 0 & , \quad \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έχοντας γνώση για τις ποσότητες $L_{n,t}$ και $LD_{n,t}$ για κάποιο χρονικό ορίζοντα

T ημερών, υπολογίζεται η μέση απώλεια πωλήσεων ανά καταναλωτή ανά ημέρα. Έτσι, η ποσότητα αυτή ανάλογα με τους (VMI, non VMI) είναι:

$$L_{VMI} = \frac{\sum_{t=1}^{T}\sum_{n=1}^{M} L_{n,t}}{T \times M}$$

$$L_{nonVMI}^{LateDelivery} = \frac{\sum_{t=1}^{T}\sum_{n=M+1}^{N} LD_{n,t}}{T \times (N-M)}$$

$$L_{nonVMI}^{LateOrder} = \frac{\sum_{t=1}^{T}\sum_{n=M+1}^{N} L_{n,t} - LD_{n,t}}{T \times (N-M)}$$

Η συνολική απώλεια πωλήσεων για τους non VMI καταναλωτές προκύπτει ως το άθροισμα της απώλειας πωλήσεων λόγω αργοπορημένης παράδοσης και της απώλειας πωλήσεων λόγω αργοπορημένης παραγγελίας,

$$L_{nonVMI} = L_{nonVMI}^{LateDelivery} + L_{nonVMI}^{LateOrder}$$

Επιπλέον, η συνολική απώλεια πωλήσεων του συστήματος για όλους τους καταναλωτές είναι:

$$L_{Total} = L_{VMI}\frac{M}{N} + L_{nonVMI}\frac{(N-M)}{N}$$

Ο υπολογισμός του μέσου όρου των συνολικών πωλήσεων σε VMI και non VMI καταναλωτές και του μέσου συνολικού αποθέματος είναι ανάλογος με τον υπολογισμό της μέσης απώλειας πωλήσεων. Συνεπώς, προκύπτουν τα παρακάτω.

$$R_{VMI} = \frac{\sum_{t=1}^{T}\sum_{n=1}^{M} R_{n,t}}{T \times M}$$

$$R_{nonVMI} = \frac{\sum_{t=1}^{T}\sum_{n=M+1}^{N} R_{n,t}}{T \times (N-M)}$$

$$I_{VMI} = \frac{\sum_{t=1}^{T}\sum_{n=1}^{M} I_{n,t}}{T \times M}$$

$$I_{nonVMI} = \frac{\sum_{t=1}^{T}\sum_{n=M+1}^{N} I_{n,t}}{T \times (N-M)}$$

$$I_{Total} = I_{VMI}\frac{M}{N} + I_{nonVMI}\frac{(N-M)}{N}$$

Το κέρδος του προμηθευτή προκύπτει από τον υπολογισμό των εσόδων, του κόστους διατήρησης αποθεμάτων και του κόστους έλλειψης ανά μέθοδο αναπλήρωσης και ημέρα. Το κόστος παραγγελίας για τις online παραγγελίες θεωρείται αμελητέο. Προκειμένου να υπάρξει υψηλότερο επίπεδο εξυπηρέτησης καθώς και για να ληφθεί υπόψη μια δυνητική έκπτωση για τους VMI καταναλωτές θεωρούνται μια μη αρνητική διαφορά κόστους έλλειψης, γ_s, που προστίθεται στο κόστος έλλειψης, s, και μια μη αρνητική διαφορά, γ_p, αντίστοιχα, η οποία αφαιρείται από την τιμή πώλησης, p.

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω, προκύπτει το επόμενο πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς.

$$\begin{aligned}
&max\{R_{VMI}\ (p-c-\gamma_p) + R_{nonVMI}(p-c) - L_{VMI}(s+\gamma_s) \\
&\quad - sL_{nonVMI} - HI_{Total}\} \\
&s.t. \\
&\sum_{n=1}^{N} X_{n,t} \leq E \ \ \forall t \in \{1,...,T\} \\
&X_{n,t} \leq I_{n,t}^{0}\ \forall n \in \{1,...,N\},\ t \in \{1,...,T\} \\
&I_{n,t} \leq Z + q\ \forall n \in \{1,...,N\},\ t \in \{1,...,T\} \\
&I_{n,t}^{0} \in \{0,q\}\ \forall n \in \{1,...,N\},\ t \in \{1,...,T\} \\
&X_{n,t}^{0} \in \{0,q\}\ \forall n \in \{1,...,N\},\ t \in \{1,...,T\}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

όπου Z η μέγιστη θέση αποθέματος για την οποία ο προμηθευτής επιτρέπεται να αναπληρώσει τους VMI καταναλωτές.

Ο πρώτος περιορισμός αναφέρεται στην χωρητικότητα του προμηθευτή. Ο δεύτερος περιορισμός εξασφαλίζει ότι ο προμηθευτής στέλνει προϊόντα μόνο σε όσους έχουν παραγγείλει. Ο τρίτος περιορισμός εξασφαλίζει ότι τα αποθέματα στους VMI καταναλωτές δεν υπερβαίνουν τα μέγιστα αποδεκτά επίπεδα. Ο τέταρτος και ο πέμπτος περιορισμός δηλώνουν ότι οι παραγγελίες και οι αποστολές είναι είτε 0 είτε q.

3.1.3 Πολιτικές αναπλήρωσης αποθέματος

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζονται οι πολιτικές, οι οποίες χρησιμοποιούνται για τις αποφάσεις αναπλήρωσης αποθέματος. Οι πολιτικές αναπλήρωσης χρησιμοποιούνται λόγω δυσκολίας επίλυσης του προβλήματος, εξαιτίας του μεγάλου αριθμού αποφάσεων. Σε ένα σύστημα χωρίς περιορισμούς, ο προμηθευτής θα καλούνταν να διαχειριστεί $\frac{N!}{(N-C)!}$ διαφορετικές αποφάσεις κάθε μέρα για την κατανομή του διαθέσιμου αποθέματος του. Το πρόβλημα των αποφάσεων τείνει να γίνει μη αντιμετωπίσιμο όταν στο σύστημα υπάρχει μεγάλος αριθμός πελατών και ημερών. Προς αποφυγή της πλήρους απαρίθμησης όλων των πιθανών εναλλακτικών αποφάσεων, οι Weißhuhn and Hoberg (2021) χρησιμοποίησαν συγκεκριμένες πολιτικές ελέγχου αποθεμάτων και πολιτικές ιεράρχησης πελατών.

Για τη διαχείριση των αποθεμάτων, ο προμηθευτής ακολουθεί παραλλαγές μιας πολιτικής τύπου (r, q). Για μια δεδομένη ποσότητα αναπλήρωσης q, το σημείο αναπαραγγελίας r βελτιστοποιείται ως προς το επίπεδο εξυπηρέτησης, β, που στοχεύει ο προμηθευτής για τους VMI καταναλωτές. Αυτή η πολιτική ελέγχου αποθεμάτων προβλέπει τον εξής γενικό κανόνα αναπαραγγελίας για κάθε VMI καταναλωτή $n \in \{1, ..., M\}$ για κάθε ημέρα t,

$$O_{n,t} = \begin{cases} q \quad , & \text{αν } I_{n,t} \leq r \land I^0_{n,t-i} = 0 \ \forall i \in \{1, ..., l\} \\ 0 \quad , & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{3.2}$$

Ο χρόνος που μεσολαβεί μέχρι την πλήρη εξάντληση του τρέχοντος αποθέματος για τους non VMI καταναλωτές, προσεγγίζεται διαιρώντας το $I_{n,t}$ με τον σταθερό ρυθμό ζήτησης λ. Ο σχετικός χρόνος παραγγελίας του non VMI καταναλωτή προσεγγίζεται στο μ, ωστόσο δεδομένου ότι οι non VMI καταναλωτές λαμβάνονται υπόψη ως μη επαγγελματίες αγοραστές, υπάρχει αβεβαιότητα ότι η παραγγελία μπορεί να τοποθετηθεί νωρίτερα ή αργότερα από το μ, σε διαφορετικούς κύκλους παραγγελίας. Η αβεβαιότητα αυτή, προσδιορίζεται από μια τυχαία μεταβλητή ε. Επομένως ο γενικός κανόνας αναπαραγγελίας (3.2) τροποποιείται για τους non VMI καταναλωτές ως εξής:

$$O_{n,t} = \begin{cases} q \quad , \quad \text{αν } \dfrac{(I_{n,t} - cL_{n,t})}{\lambda} \leq \mu + \epsilon \wedge I^0_{n,t-i} = 0 \ \forall i \in \{1, ..., l\} \\ 0 \quad , \qquad\qquad\qquad \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{3.3}$$

Συνεπώς, μια νέα παραγγελία μεγέθους q, τοποθετείται όταν επιτευχθεί ο πραγματικός χρόνος μ+ε για τον τρέχοντα κύκλο παραγγελιών. Δεδομένου ότι το $I_{n,t} \geq 0$ στο πλαίσιο των απολεσθεισών πωλήσεων χρησιμοποιούμε την βοηθητική μεταβλητή $cL_{n,t} = cL_{n,t-1} + L_{n,t}$. Με την βοηθητική αυτή μεταβλητή αναπαριστάται η καθυστέρηση της παραγγελίας σε σχέση με την σωρευτική ζήτηση που δεν μπόρεσε να ικανοποιηθεί από το διαθέσιμο απόθεμα. Στην αρχή κάθε κύκλου η $cL_{n,t}$ μηδενίζεται και παράγεται μια νέα υλοποίηση της ε, διότι οι χρόνοι παραγγελίας σε κάθε κύκλο είναι ανεξάρτητοι και ασυσχέτιστοι.

Για την διαχείριση των αποθεμάτων των VMI καταναλωτών, ο προμηθευτής χρησιμοποιεί την (r, q) πολιτική με το r να είναι είτε σταθερό σημείο (VMI with reorder point policy) είτε να ανήκει σε ένα διάστημα αναπαραγγελίας (VMI with reorder corridor policy). Στην πρώτη περίπτωση, βελτιστοποιείται πρώτα το σημείο αναπαραγγελίας, r_{stat} υπό τις παραδοχές της $Poisson$ ζήτησης, των θέσεων των αποθεμάτων, της δεδομένης ποσότητας παραγγελίας και του ντετερμινιστικού χρόνου παράδοσης. Το r_{stat} προσδιορίζεται ώστε να επιτευχθεί ένα συγκεκριμένο επίπεδο εξυπηρέτησης β, εφόσον ο προμηθευτής πραγματοποιεί έγκαιρες παραδόσεις στους VMI καταναλωτές. Το σταθερό σημείο αναπαραγγελίας παραμένει αμετάβλητο με την πάροδο του χρόνου και αποφασίζεται εκ των προτέρων. Για την δεύτερη περίπτωση, οι συγγραφείς επηρεασμένοι από τους Fry et al.(2001) εισήγαγαν ένα διάστημα αναπαραγγελίας $[\zeta, Z]$ γύρω από το r_{stat}, ως μια πιο ευέλικτη πολιτική αναπλήρωσης.

Κάθε ημέρα ξεκινάει με το ζ, ως πραγματικό σημείο αναπαραγγελίας κάθε VMI καταναλωτή. Οι παραγγελίες δημιουργούνται σύμφωνα με τον γενικό κανόνα αναπαραγγελίας (3.2). Σε δεύτερη φάση εξετάζεται η δημιουργία πρόσθετων παραγγελιών $O_{n,t} = q$, για VMI καταναλωτές, των οποίων το επίπεδο αποθέματος φτάνει έως και Z. Με την πάροδο του χρόνου, δύναται να χρησιμοποιηθούν διαφορετικά σημεία αναπαραγγελίας. Ο προμηθευτής λαμβάνει αποφάσεις αναπλήρωσης, ανάλογα με την σχέση που έχει η συνολική ζήτηση με το διαθέσιμο απόθεμα. Συγκεκριμένα:

1. Όταν η συνολική ζήτηση είναι ίση με το διαθέσιμο απόθεμα ($\sum\limits_{n=1} NI^0_{n,t} = E$)
   (α΄) Υπολογίζονται οι εκκρεμείς παραγγελίες των non VMI και VMI καταναλωτών θεωρώντας $r = \zeta$.
   (β΄) Αποστέλλονται παραγγελίες στους καταναλωτές για τους οποίους αποφασίστηκε αποστολή.
2. Όταν η συνολική ζήτηση είναι λιγότερη από το διαθέσιμο απόθεμα ($\sum\limits_{n=1} NI^0_{n,t} < E$)
   (α΄) Υπολογίζονται οι εκκρεμείς παραγγελίες των non VMI και VMI καταναλωτών θεωρώντας $r = \zeta$.
   (β΄) Αποστέλλονται παραγγελίες στους καταναλωτές για τους οποίους αποφασίστηκε αποστολή.
   (γ΄) Χρησιμοποιείται το διαθέσιμο απόθεμα για την αποστολή αποθέματος σε επιπλέον VMI καταναλωτές, των οποίων το διαθέσιμο απόθεμα είναι έως και Z.
3. Όταν η συνολική ζήτηση είναι περισσότερη από το διαθέσιμο απόθεμα ($\sum\limits_{n=1} NI^0_{n,t} > E$)
   (α΄) Υπολογίζονται οι εκκρεμείς παραγγελίες των non VMI και VMI καταναλωτών θεωρώντας $r = \zeta$.

(β΄) Λαμβάνονται αποφάσεις για την προτεραιοποίηση στην εξυπηρέτηση των VMI και non VMI καταναλωτών και εκπληρώνονται όλες οι εκκρεμείς παραγγελίες.

(γ΄) Οι ανεκπλήρωτες παραγγελίες μεταφέρονται στον επόμενο κύκλο.

Δεδομένου ότι ο προμηθευτής λαμβάνει αποφάσεις αναπαραγγελίας για όλους τους VMI καταναλωτές την ίδια χρονική στιγμή κάθε ημέρα, ο προγραμματισμός των παραγγελιών δεν μπορεί να αποτελέσει κριτήριο επιλογής των καταναλωτών που περιλαμβάνονται ή όχι σε μια ημερήσια παράδοση. Για τον λόγο αυτό, προτείνονται τρεις εναλλακτικές πολιτικές επιλογής καταναλωτών προς εξυπηρέτηση: η τυχαίας ανάθεσης, η non VMI priority και η VMI priority.

Η πολιτική τυχαίας ανάθεσης αναθέτει τυχαία το διαθέσιμο απόθεμα σε καταναλωτές με εκκρεμείς παραγγελίες και ευνοεί την ομάδα πελατών που πλειοψηφεί στην πελατειακή βάση. Η πολιτική non-VMI priority δίνει προτεραιότητα στους non VMI καταναλωτές. Εάν υπάρχει διαθέσιμο απόθεμα μετά την εκπλήρωση όλων των εκκρεμών παραγγελιών από non VMI καταναλωτές, οι VMI καταναλωτές με εκκρεμείς παραγγελίες εξυπηρετούνται κατά σειρά ξεκινώντας από τον καταναλωτή με το μικρότερο επίπεδο διαθέσιμου αποθέματος. Εάν αρκετοί από αυτούς έχουν την ίδια επείγουσα ανάγκη αναπλήρωσης (δηλαδή το ίδιο τρέχον επίπεδο αποθέματος) και δεν υπάρχει αρκετό διαθέσιμο απόθεμα, τότε γίνεται τυχαία ανάθεση. Επιπλέον, η τυχαία ανάθεση εφαρμόζεται εάν το διαθέσιμο απόθεμα δεν επαρκεί καν για την κάλυψη όλων των παραγγελιών από την ομάδα πελατών με προτεραιότητα. Με παρόμοιο τρόπο λειτουργεί και η πολιτική VMI priority, με την μόνη διαφορά ότι δίνει προτεραιότητα στους VMI καταναλωτές.

3.1.4 Αριθμητικό παράδειγμα

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ένα παράδειγμα με τις εξής τιμές για τις παραμέτρους: $T = 7$ ημερές, $N = 12$, $M = 6$, $q = 12$ μονάδες προϊόντων, $C = 84$, $\tau = 2$, $p = 2$, $s = 3$, $\gamma_p = 0.1$ και $\gamma_s = 0.5$. Για λόγους απλοποίησης οι πρώτοι 6 καταναλωτές θεωρούνται VMI και οι υπόλοιποι non VMI. Στον Πίνακα 3.1, παρουσιάζεται η μέση ζήτηση του κάθε καταναλωτή, ο χρόνος ανοχής (κ) των non VMI καταναλωτών, το αρχικό απόθεμα των VMI καταναλωτών καθώς και η συνθήκη ανάγκης αναπλήρωσης των VMI καταναλωτών.

Τύπος καταναλωτή	Καταναλωτής	Μέση ζήτηση (λ)	Χρόνος ανοχής (κ)	I_0=q	Συνθήκη ανάγκης Αναπλήρωσης
VMI	1	6		12	I<=4
	2	7		12	
	3	3		12	
	4	4		12	
	5	6		12	
	6	3		12	
nonVMI	7	3	2		
	8	4	3		
	9	7	2		
	10	7	4		
	11	4	4		
	12	5	2		

Πίνακας 3.1: Αρχικά δεδομένα παραδείγματος

Το αριθμητικό παράδειγμα στηρίζεται σε μια τροποποίηση του μοντέλου των Weißhuhn and Hoberg (2021), κατά την οποία διαφοροποιείται η μέση ζήτηση των καταναλωτών, ο γενικός κανόνας αναπαραγγελίας καθώς και η προτεραιοποίηση πελατών προς εξυπηρέτηση. Συγκεκριμένα, η μέση ζήτηση του κάθε καταναλωτή είναι διαφορετική, με $\lambda_n \in (3, 8), n = 1, ..., N$, η πολιτική αναπαραγγελίας των VMI πελατών ($n = 1, ..., M$) τροποποιείται ως εξής:

$$O_{n,t} = \begin{cases} q & , \quad \text{αν } I_{n,t} \leq mean(\lambda) \wedge I^0_{n,t-i} = 0 \ \forall i \in \{1, ..., l\} \\ 0 & , \quad \text{αλλιώς} \end{cases}$$

ενώ των non VMI καταναλωτών ($n = M + 1, ..., N$) ως εξής:

$$O_{n,t} = \begin{cases} q & , \quad \text{αν } I^0_{n,t-i} = 0 \ \forall i \in \{1, ..., l\} \\ 0 & , \quad \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έτσι, ο προμηθευτής, θεωρεί ότι ο n-οστός VMI καταναλωτής, χρειάζεται αναπλήρωση, όταν το επίπεδο του διαθέσιμου αποθέματος του είναι μικρότερο ή ίσο με τη μέση τιμή των μέσων ζητήσεων όλων των καταναλωτών και δεν υπάρχει κάποια εκκρεμότητα αποστολής ή παραλαβής για αυτόν τον καταναλωτή. Όμοια, για την τοποθέτηση παραγγελίας των non VMI καταναλωτών, ο non VMI καταναλωτής μπορεί να τοποθετήσει παραγγελία την ημέρα t, μόνο εάν δεν υπάρχει κάποια εκκρεμότητα αποστολής ή παραλαβής για αυτόν. Για λόγους ευκολίας, στο παράδειγμα χρησιμοποιείται μια μεταβλητή που δηλώνει την κατάσταση στην οποία βρίσκεται ο κάθε καταναλωτής σε κάθε χρονική στιγμή.

Κατά την έναρξη του χρονικού ορίζοντα, οι VMI καταναλωτές λαμβάνουν ένα αρχικό απόθεμα, I_0, q μονάδων προϊόντος. Επιπρόσθετα, ο κάθε non VMI καταναλωτής δηλώνει έναν χρόνο ανοχής κ, που μπορεί να περιμένει επιπλέον από τον χρόνο παράδοσης. Εάν ο χρόνος που χρειάζεται από την τοποθέτηση έως την παραλαβή της παραγγελίας είναι λιγότερο από $\tau + \kappa$ ημέρες, δεν καταγράφεται απώλεια πωλήσεων για αυτόν.

Ο προμηθευτής αποφασίζει για την αναπλήρωση των καταναλωτών βάση των παρακάτω πολιτικών.

1. I based: VMI-non VMI (I based V-n): Δεδομένου ότι ο προμηθευτής γνωρίζει το απόθεμα των VMI καταναλωτών τους κατατάσσει σε αύξουσα σειρά βάση του διαθέσιμου αποθέματος τους, ενώ τους non VMI τυχαία. Για την αναπλήρωση αποθέματος προηγούνται οι VMI καταναλωτές με το μικρότερο διαθέσιμο απόθεμα.

2. I based: non VMI-VMI (I based n-V): Δεδομένου ότι ο προμηθευτής γνωρίζει το απόθεμα των VMI καταναλωτών τους κατατάσσει σε αύξουσα σειρά βάση του διαθέσιμου αποθέματος τους, ενώ τους non VMI τυχαία. Για την αναπλήρωση αποθέματος προηγούνται οι non VMI καταναλωτές και έπειτα οι VMI καταναλωτές με το μικρότερο διαθέσιμο απόθεμα.

3. L based: VMI-non VMI (L based V-n): Δεδομένου ότι ο προμηθευτής γνωρίζει την απώλεια πωλήσεων των καταναλωτών τους κατατάσσει σε φθίνουσα σειρά βάση της απώλειας πωλήσεων. Για την αναπλήρωση αποθέματος προηγούνται οι VMI καταναλωτές με με την μεγαλύτερη απώλεια

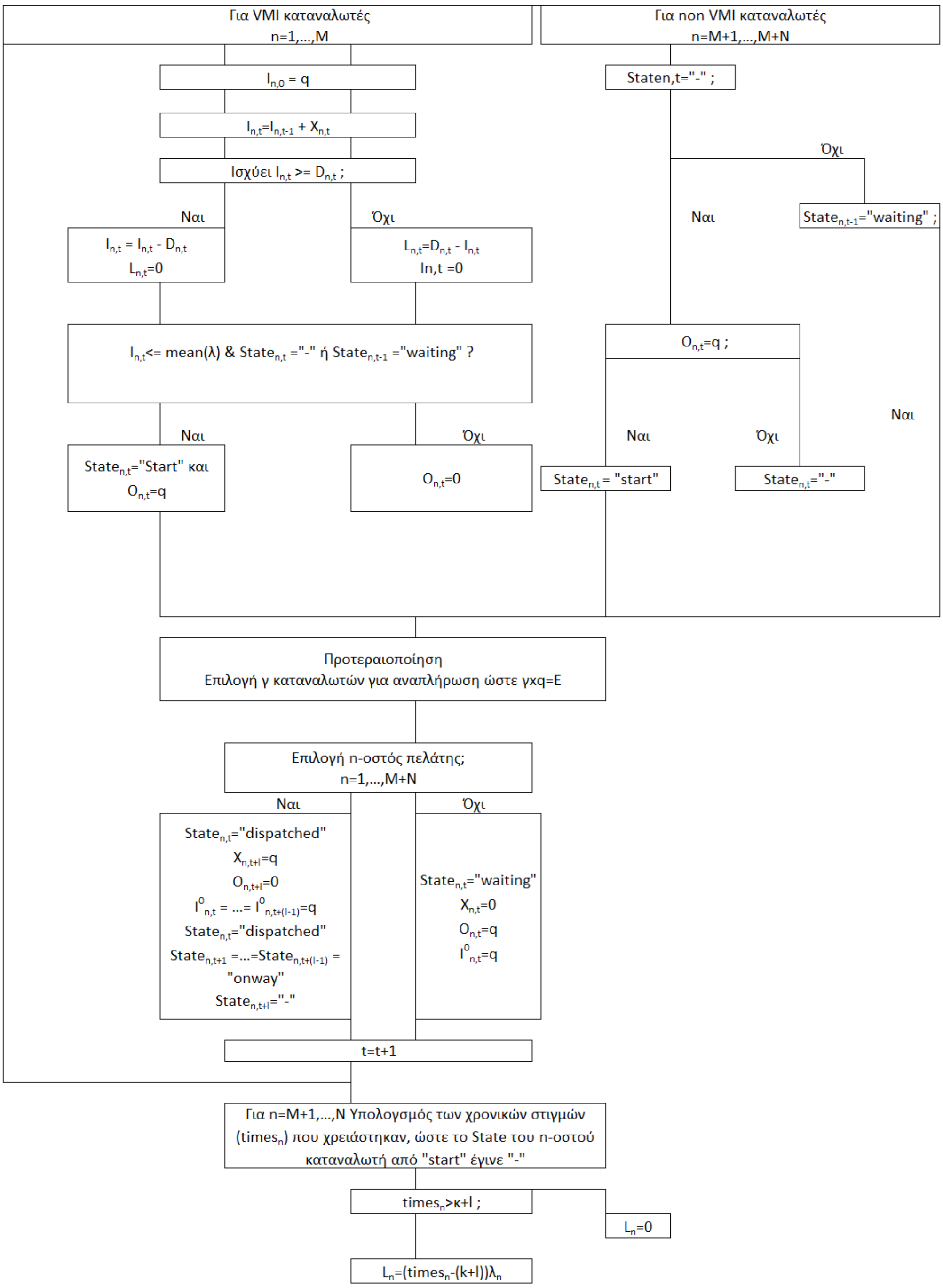
πωλήσεων.

4. L based: non VMI-VMI (L based n-V): Δεδομένου ότι ο προμηθευτής γνωρίζει την απώλεια πωλήσεων των καταναλωτών τους κατατάσσει σε φθίνουσα σειρά βάση της απώλειας πωλήσεων. Για την αναπλήρωση αποθέματος προηγούνται οι non VMI καταναλωτές με την μεγαλύτερη απώλεια πωλήσεων.

5. L based: all together (L based all): Δεδομένου ότι ο προμηθευτής γνωρίζει την απώλεια πωλήσεων των καταναλωτών τους κατατάσσει σε φθίνουσα σειρά βάση της απώλειας πωλήσεων. Για την αναπλήρωση αποθέματος η επιλογή των καταναλωτών γίνεται τυχαία.

6. No based: Random: Για την αναπλήρωση αποθέματος η επιλογή των καταναλωτών γίνεται τυχαία.

Με βάση τις παραπάνω πολιτικές αναπλήρωσης καταναλωτών, στόχος είναι ο υπολογισμός του μέσου κέρδους του προμηθευτή ανά καταναλωτή ανά ημέρα. Η ανάγκη αναπλήρωσης των VMI καταναλωτών προκύπτει όταν το επίπεδο του διαθέσιμου αποθέματος τους είναι μικρότερο από τη μέση τιμή της μέσης ζήτησης όλων των καταναλωτών, ενώ οι non VMI καταναλωτές τοποθετούν παραγγελίες. Στο τέλος της ημέρας t, προσδιορίζεται ποιοι VMI καταναλωτές χρειάζονται αναπληρώσεις και ποιοι non VMI καταναλωτές έχουν τοποθετήσει παραγγελία. Οι καταναλωτές στους οποίους θα αποσταλεί απόθεμα, προτεροποιούνται με βάση κάθε πολιτική αναπλήρωσης γ καταναλωτές, ώστε να ικανοποιείται ο περιορισμός της χωρητικότητας. Τα βήματα του αλγορίθμου που ακολουθήθηκε για την επίλυση του προβλήματος παρουσιάζεται αναλυτικότερα στη συνέχεια.



Για VMI καταναλωτές
n=1,…,M
Για non VMI καταναλωτές
n=M+1,…,M+N
$I_{n,0}$ = q
$I_{n,t}=I_{n,t-1} + X_{n,t}$
Ισχύει $I_{n,t} >= D_{n,t}$;
Ναι
Όχι
$I_{n,t} = I_{n,t} - D_{n,t}$
$L_{n,t}$=0
$L_{n,t}=D_{n,t} - I_{n,t}$
In,t =0
$I_{n,t}$<= mean(λ) & $State_{n,t}$ ="-" ή $State_{n,t-1}$ ="waiting" ?
Ναι
Όχι
$State_{n,t}$="Start" και
$O_{n,t}$=q
$O_{n,t}$=0
Staten,t="-" ;
Όχι
Ναι
$State_{n,t-1}$="waiting" ;
$O_{n,t}$=q ;
Ναι
Όχι
Ναι
$State_{n,t}$= "start"
$State_{n,t}$="-"
Προτεραιοποίηση
Επιλογή y καταναλωτών για αναπλήρωση ώστε yxq=E
Επιλογή n-οστός πελάτης;
n=1,…,M+N
Ναι
Όχι
$State_{n,t}$="dispatched"
$X_{n,t+l}$=q
$O_{n,t+l}$=0
$I^0_{n,t}$ = …= $I^0_{n,t+(l-1)}$=q
$State_{n,t}$="dispatched"
$State_{n,t+1}$ =…=$State_{n,t+(l-1)}$ =
"onway"
$State_{n,t+l}$="-"
$State_{n,t}$="waiting"
$X_{n,t}$=0
$O_{n,t}$=q
$I^0_{n,t}$=q
t=t+1
Για n=M+1,…,N Υπολογσμός των χρονικών στιγμών
($times_n$) που χρειάστηκαν, ώστε το State του n-οστού
καταναλωτή από "start" έγινε "-"
$times_n$>κ+l ;
L_n=0
$L_n=(times_n-(k+l))λ_n$

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του Πίνακα 3.1, υλοποιήθηκαν 1000 προσομοιώσεις. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται παρακάτω προκύπτουν ως μέσοι όροι των 1000 αυτών προσομοιώσεων ανά πολιτική αναπλήρωσης.

Στον Πίνακα 3.2 παρουσιάζεται το μέσο κέρδος ανά πολιτική αναπλήρωσης. Από τα αποτελέσματα προκύπτει ότι δεν υπάρχουν ουσιαστικές διαφορές στο μέσο κέρδος ανά πολιτική αναπλήρωσης. Ωστόσο το ελάχιστο κέρδος, εντοπίζεται στην πολιτική αναπλήρωσης I based VMI-non VMI, και το μέγιστο κέρδος στην L based non VMI- VMI.

Πολιτική Αναπλήρωσης	Μέσο κέρδος	Τ.Α	Μέγιστο κέρδος	Ελάχιστο κέρδος
I based V-n	5,20	1,51	8,83	-0,34
I based n-V	5,19	1,48	8,95	-0,16
L based V-n	5,18	1,47	8,71	0,56
L based n-V	5,18	1,55	9,70	0,45
L based all	5,20	1,46	8,92	0,43
No based random	5,23	1,47	9,24	0,44

Πίνακας 3.2: Περιγραφικά μέτρα κέρδους

Στους Πίνακες 3.3 και 3.4, παρουσιάζεται το μέσο διαθέσιμο απόθεμα και η μέση απώλεια πωλήσεων των VMI καταναλωτών ανά ημέρα και ανά πολιτική αναπλήρωσης. Φαίνεται ότι δεν υπάρχει διαφοροποίηση ούτε ως προς το μέσο διαθέσιμο απόθεμα, ούτε ως προς την απώλεια ζήτησης μεταξύ των πολιτικών αναπλήρωσης. Από τον Πίνακα 3.4 φαίνεται ότι ο πρώτος, ο δεύτερος και ο πέμπτος καταναλωτής έχουν απώλεια ζήτησης.

VMI 1							
Ημέρα	λmean	I based V-n	I based n-V	L based V-n	L based n-V	L based all	No based random
		I	I	I	I	I	I
Ημέρα 1	6	6,03	6,03	6,03	6,03	6,03	6,03
Ημέρα 2		1,37	1,37	1,37	1,37	1,37	1,37
Ημέρα 3		1,60	1,58	1,60	1,60	1,60	1,60
Ημέρα 4		4,46	4,46	4,46	4,46	4,46	4,44
Ημέρα 5		1,42	1,43	1,42	1,42	1,42	1,44
Ημέρα 6		1,45	1,42	1,45	1,44	1,45	1,45
Ημέρα 7		4,16	4,16	4,16	4,16	4,16	4,13
VMI 2							
Ημέρα	λmean	I based V-n	I based n-V	L based V-n	L based n-V	L based all	No based random
		I	I	I	I	I	I
Ημέρα 1	7	4,97	4,97	4,97	4,97	4,97	4,97
Ημέρα 2		0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66
Ημέρα 3		2,24	2,23	2,24	2,24	2,24	2,23
Ημέρα 4		3,03	3,04	3,03	3,03	3,03	3,04
Ημέρα 5		0,54	0,54	0,54	0,54	0,54	0,55
Ημέρα 6		2,10	2,09	2,10	2,09	2,10	2,09
Ημέρα 7		3,05	3,06	3,05	3,06	3,05	3,06
VMI 3							
Ημέρα	λmean	I based V-n	I based n-V	L based V-n	L based n-V	L based all	No based random
		I	I	I	I	I	I
Ημέρα 1	3	8,97	8,97	8,97	8,97	8,97	8,97
Ημέρα 2		5,98	5,98	5,98	5,98	5,98	5,98
Ημέρα 3		3,36	3,36	3,36	3,36	3,36	3,36
Ημέρα 4		3,76	3,74	3,76	3,76	3,76	3,74
Ημέρα 5		6,42	6,42	6,42	6,42	6,42	6,42
Ημέρα 6		5,98	5,98	5,98	5,98	5,98	5,98
Ημέρα 7		4,78	4,77	4,78	4,78	4,78	4,78
VMI 4							
Ημέρα	λmean	I based V-n	I based n-V	L based V-n	L based n-V	L based all	No based random
		I	I	I	I	I	I
Ημέρα 1	4	7,99	7,99	7,99	7,99	7,99	7,99
Ημέρα 2		4,09	4,09	4,09	4,09	4,09	4,09
Ημέρα 3		1,76	1,74	1,76	1,76	1,76	1,76
Ημέρα 4		4,66	4,64	4,66	4,62	4,66	4,66
Ημέρα 5		5,30	5,34	5,30	5,33	5,30	5,31
Ημέρα 6		3,13	3,13	3,13	3,15	3,13	3,13
Ημέρα 7		3,55	3,51	3,55	3,53	3,55	3,53
VMI 5							
Ημέρα	λmean	I based V-n	I based n-V	L based V-n	L based n-V	L based all	No based random
		I	I	I	I	I	I
Ημέρα 1	6	6,01	6,01	6,01	6,01	6,01	6,01
Ημέρα 2		1,39	1,39	1,39	1,39	1,39	1,39
Ημέρα 3		1,76	1,73	1,76	1,72	1,76	1,75
Ημέρα 4		4,34	4,35	4,34	4,29	4,34	4,33
Ημέρα 5		1,41	1,42	1,41	1,48	1,41	1,43
Ημέρα 6		1,60	1,59	1,60	1,58	1,60	1,61
Ημέρα 7		4,12	4,10	4,12	4,06	4,12	4,09
VMI 6							
Ημέρα	λmean	I based V-n	I based n-V	L based V-n	L based n-V	L based all	No based random
		I	I	I	I	I	I
Ημέρα 1	3	9,07	9,07	9,07	9,07	9,07	9,07
Ημέρα 2		6,06	6,06	6,06	6,06	6,06	6,06
Ημέρα 3		3,53	3,51	3,53	3,53	3,53	3,53
Ημέρα 4		3,76	3,71	3,76	3,67	3,76	3,75
Ημέρα 5		6,05	6,06	6,05	6,08	6,05	6,05
Ημέρα 6		6,11	6,12	6,11	6,11	6,11	6,12
Ημέρα 7		4,79	4,73	4,79	4,74	4,79	4,77

Πίνακας 3.3: Μέσο διαθέσιμο απόθεμα των VMI καταναλωτών ανά πολιτική αναπλήρωσης

	VMI 1						
Ημέρα	λmean	I based V-n	I based n-V	L based V-n	L based n-V	L based all	No based random
		L	L	L	L	L	L
Ημέρα 1	6	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
Ημέρα 2		1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27
Ημέρα 3		3,21	3,23	3,21	3,21	3,21	3,21
Ημέρα 4		0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,77
Ημέρα 5		2,01	2,00	2,01	2,01	2,01	2,01
Ημέρα 6		3,47	3,48	3,47	3,48	3,47	3,45
Ημέρα 7		0,96	0,97	0,96	0,98	0,96	1,00
	VMI 2						
Ημέρα	λmean	I based V-n	I based n-V	L based V-n	L based n-V	L based all	No based random
		L	L	L	L	L	L
Ημέρα 1	7	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07
Ημέρα 2		2,77	2,77	2,77	2,77	2,77	2,77
Ημέρα 3		3,44	3,45	3,44	3,44	3,44	3,46
Ημέρα 4		1,34	1,34	1,34	1,34	1,34	1,35
Ημέρα 5		4,08	4,07	4,08	4,08	4,08	4,06
Ημέρα 6		3,60	3,61	3,60	3,61	3,60	3,62
Ημέρα 7		1,40	1,40	1,40	1,40	1,40	1,40
	VMI 3						
Ημέρα	λmean	I based V-n	I based n-V	L based V-n	L based n-V	L based all	No based random
		L	L	L	L	L	L
Ημέρα 1	3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Ημέρα 2		0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
Ημέρα 3		0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22
Ημέρα 4		0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50
Ημέρα 5		0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28
Ημέρα 6		0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17
Ημέρα 7		0,24	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24
	VMI 4						
Ημέρα	λmean	I based V-n	I based n-V	L based V-n	L based n-V	L based all	No based random
		L	L	L	L	L	L
Ημέρα 1	4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Ημέρα 2		0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16
Ημέρα 3		1,06	1,09	1,06	1,07	1,06	1,06
Ημέρα 4		0,90	0,93	0,90	0,92	0,90	0,91
Ημέρα 5		0,32	0,31	0,32	0,32	0,32	0,32
Ημέρα 6		0,73	0,73	0,73	0,73	0,73	0,73
Ημέρα 7		0,97	0,99	0,97	0,97	0,97	0,97
	VMI 5						
Ημέρα	λmean	I based V-n	I based n-V	L based V-n	L based n-V	L based all	No based random
		L	L	L	L	L	L
Ημέρα 1	6	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
Ημέρα 2		1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30
Ημέρα 3		3,08	3,09	3,08	3,11	3,08	3,09
Ημέρα 4		0,82	0,83	0,82	0,87	0,82	0,83
Ημέρα 5		1,97	1,96	1,97	1,95	1,97	1,96
Ημέρα 6		3,28	3,29	3,28	3,26	3,28	3,29
Ημέρα 7		1,02	1,04	1,02	1,11	1,02	1,03
	VMI 6						
Ημέρα	λmean	I based V-n	I based n-V	L based V-n	L based n-V	L based all	No based random
		L	L	L	L	L	L
Ημέρα 1	3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Ημέρα 2		0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
Ημέρα 3		0,24	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24
Ημέρα 4		0,48	0,48	0,48	0,51	0,48	0,48
Ημέρα 5		0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33
Ημέρα 6		0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33
Ημέρα 7		0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16

Πίνακας 3.4: Μέση απώλεια πωλήσεων VMI καταναλωτών ανά πολιτική αναπλήρωσης

Η συνολική απώλεια πωλήσεων όλων των καταναλωτών, παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.5. Από τα στοιχεία του πίνακα προκύπτει απώλεια 14% της συνολικής ζήτησης, με το 26% της ημερήσιας ζήτησης την έκτη ημέρα να χάνεται, ενώ την τέταρτη ημέρα το αντίστοιχο ποσοστό είναι 8%.

Ημέρα	I based V-n	I based n-V	L based V-n	L based n-V	L based all	No based random	Συνολική Ζήτηση Ημέρας	% Απώλειας ημερήσιας Ζήτησης
Ημέρα 1	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	58,90	0%
Ημέρα 2	5,54	5,54	5,54	5,54	5,54	5,54	59,12	9%
Ημέρα 3	11,26	11,31	11,26	11,30	11,26	11,29	58,42	19%
Ημέρα 4	4,79	4,82	4,79	4,89	4,79	4,84	58,93	8%
Ημέρα 5	12,83	12,63	12,63	12,71	12,69	12,53	58,95	22%
Ημέρα 6	15,61	15,81	15,78	15,57	15,67	15,42	59,26	26%
Ημέρα 7	8,69	8,80	8,75	9,00	8,88	8,63	59,06	15%
Συνολικές Απωλεσθείς Πωλήσεις	58,82	59,02	58,84	59,11	58,92	58,35		
Συνολική Ζήτηση	412,64	412,64	412,64	412,64	412,64	412,64		
% Απώλειας συνολικής ζήτησης	14%	14%	14%	14%	14%	14%		

Πίνακας 3.5: Συνολική απώλεια πωλήσεων καταναλωτών ανά πολιτική αναπλήρωσης

Προκειμένου να διερευνηθεί η επίδραση της ζήτησης των VMI καταναλωτών γίνεται μεταβολή του διαστήματος των τιμών από όπου η μέση ζήτηση των VMI καταναλωτών παίρνει τιμές. Συγκεκριμένα η μέση ζήτηση παίρνει τιμές στα διαστήματα:

1. $\lambda_n \in (4,8),\ n = 1, ..., 6$, ήτοι αύξηση κατά 25% του κάτω άκρου.

2. $\lambda_n \in (5,8),\ n = 1, ..., 6$, ήτοι αύξηση κατά 50% του κάτω άκρου.

3. $\lambda_n \in (6,8),\ n = 1, ..., 6$, ήτοι αύξηση κατά 75% του κάτω άκρου.

Η μέση ζήτηση των non VMI καταναλωτών παίρνει τιμές στο διάστημα (4,6). Στον Πίνακα 3.6 παρουσιάζονται τα δεδομένα, που χρησιμοποιήθηκαν θεωρώντας ότι η μέση ζήτηση προέρχεται από τα παραπάνω διαστήματα

(4,8)					
Τύπος καταναλωτή	Καταναλωτής	Μέση ζήτηση (λ)	Χρόνο ανοχής (κ)	I_0=q	Συνθήκη ανάγκης Αναπλήρωσης
VMI	1	5		12	I<=5
	2	7		12	
	3	4		12	
	4	4		12	
	5	7		12	
	6	5		12	
nonVMI	7	5	2		
	8	5	2		
	9	5	2		
	10	4	2		
	11	4	2		
	12	5	2		
(5,8)					
Τύπος καταναλωτή	Καταναλωτής	Μέση ζήτηση (λ)	Χρόνο ανοχής (κ)	I_0=q	Συνθήκη ανάγκης Αναπλήρωσης
VMI	1	6		12	I<=6
	2	5		12	
	3	5		12	
	4	6		12	
	5	6		12	
	6	5		12	
nonVMI	7	4	2		
	8	5	2		
	9	4	2		
	10	5	2		
	11	5	2		
	12	4	2		
(6,8)					
Τύπος καταναλωτή	Καταναλωτής	Μέση ζήτηση (λ)	Χρόνο ανοχής (κ)	I_0=q	Συνθήκη ανάγκης Αναπλήρωσης
VMI	1	7		12	I<=7
	2	7		12	
	3	6		12	
	4	6		12	
	5	7		12	
	6	7		12	
nonVMI	7	5	2		
	8	5	2		
	9	5	2		
	10	4	2		
	11	4	2		
	12	5	2		

Πίνακας 3.6: Αρχικά δεδομένα για καθένα από τα τρία διαστήματα

Στον Πίνακα 3.7 παρουσιάζονται αναλυτικά τα περιγραφικά στοιχεία για το κέρδος ανά εύρος τιμών της μέσης ζήτησης και πολιτικών αναπλήρωσης. Φαίνεται πως το μέσο κέρδος σε όλες τις πολιτικές αναπλήρωσης μειώνεται αισθητά όταν η μέση ζήτηση των VMI λαμβάνει τιμές στο $(4, 8)$, ενώ παραμένει σε ίδια επίπεδα με το αρχικό παράδειγμα όταν η μέση ζήτηση των VMI λαμβάνει τιμές στο $(5, 8)$. Επιπλέον, το ελάχιστο κέρδος που σημειώνεται είναι -2.2 χ.μ. ανά καταναλωτή ανά ημέρα και εντοπίζεται στην πολιτική αναπλήρωσης L based VMI-non VMI όταν η μέση ζήτηση των VMI λαμβάνει τιμές στο $(4, 8)$. Σημειώνεται πως το αντίστοιχο ελάχιστο κέρδος στο αρχικό παράδειγμα ανέρχεται σε 0.56 χρηματικές μονάδες ανα καταναλωτή ανά ημέρα.

Εύρος Τιμών	Πολιτική Αναπλήρωσης	Μέσο κέρδος	Τ.Α	Μέγιστο κέρδος	Ελάχιστο κέρδος
(4,8)	I based V-n	3,66	1,65	6,82	-0,55
(5,8)		5,66	1,46	8,92	0,97
(6,8)		4,32	1,7	8,23	-0,48
(4,8)	I bassed n-V	3,4	1,53	8,11	-1,5
(5,8)		5,39	1,61	9,06	1,63
(6,8)		4,25	1,73	9,37	-0,63
(4,8)	L based V-n	3,6	1,8	7,75	-2,2
(5,8)		5,49	1,72	9,49	0,62
(6,8)		4,32	1,63	7,56	-0,56
(4,8)	L based n-V	3,48	1,61	6,74	-0,21
(5,8)		5,51	1,79	9,8	1,36
(6,8)		4,46	1,66	8,14	0,32
(4,8)	L based all	3,73	1,69	7,97	-0,76
(5,8)		5,54	1,58	9,35	1,47
(6,8)		4,55	1,4	7,89	0,05
(4,8)	No based random	3,56	1,56	8,68	0,44
(5,8)		5,43	1,64	9,44	1,43
(6,8)		4,35	1,5	7,5	0,89

Πίνακας 3.7: Περιγραφικά στοιχεία κέρδους ανά διάστημα και πολιτική αναπλήρωσης καταναλωτών

Από τον Πίνακα 3.8 παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη απώλεια ζήτησης καταγράφεται όταν η μέση ζήτηση των VMI λαμβάνει τιμές στο $(6, 8)$, ενώ η μικρότερη όταν η μέση ζήτηση των VMI λαμβάνει τιμές στο $(5, 8)$. Το ποσοστό της απώλειας της συνολικής ζήτησης όταν η μέση τιμή λαμβάνει τιμές στο διάστημα (4,8) είναι 18%, στο διάστημα (5,8) κυμαίνεται στο $16 - 17\%$, ενώ στο (6,8) κυμαίνεται στο $20 - 21\%$.

	I based V-n			I based n-V		
Ημέρα	(4,8)	(5,8)	(6,8)	(4,8)	(5,8)	(6,8)
Ημέρα 1	0,03	0,02	0,24	0,03	0,02	0,24
Ημέρα 2	6,17	4,89	12,51	6,17	4,89	12,51
Ημέρα 3	13,97	13,26	9,55	14,37	13,32	14,65
Ημέρα 4	5,03	3,41	8,11	5,28	3,77	6,34
Ημέρα 5	17,39	16,98	31,3	16,84	17,93	30,75
Ημέρα 6	20,56	20,68	19,1	20,34	20,41	22,79
Ημέρα 7	12,27	8,12	14,71	12,31	9,47	13,22
Συνολικές Απωλεσθείς Πωλήσεις	75,42	67,36	95,52	75,34	69,81	100,5
Συνολική Ζήτηση	414,87	416,03	471,06	414,87	416,03	471,06
% Απώλειας συνολικής ζήτησης	18%	16%	20%	18%	17%	21%
	L based V-n			L based n-V		
Ημέρα	(4,8)	(5,8)	(6,8)	(4,8)	(5,8)	(6,8)
Ημέρα 1	0,03	0,02	0,24	0,03	0,02	0,24
Ημέρα 2	6,17	4,89	12,51	6,17	4,89	12,51
Ημέρα 3	13,97	13,26	9,55	14,01	13,61	13,18
Ημέρα 4	5,03	3,41	8,11	5,62	3,67	6,71
Ημέρα 5	16,24	17,61	32,2	16,77	17,32	30,29
Ημέρα 6	20,29	20,64	18,27	19,43	20,81	22,11
Ημέρα 7	12,15	8,51	15,09	11,68	9,31	13,77
Συνολικές Απωλεσθείς Πωλήσεις	73,88	68,34	95,97	73,71	69,63	98,81
Συνολική Ζήτηση	414,87	416,03	471,06	414,87	416,03	471,06
% Απώλειας συνολικής ζήτησης	18%	16%	20%	18%	17%	21%
	L based all			No based random		
Ημέρα	(4,8)	(5,8)	(6,8)	(4,8)	(5,8)	(6,8)
Ημέρα 1	0,03	0,02	0,24	0,03	0,02	0,24
Ημέρα 2	6,17	4,89	12,51	6,17	4,89	12,51
Ημέρα 3	13,97	13,26	9,55	13,97	13,37	12,21
Ημέρα 4	5,03	3,41	8,11	5,39	3,85	7,26
Ημέρα 5	16,33	16,8	31,75	16,38	17,07	31,27
Ημέρα 6	19,74	21,11	18,57	20,16	21,07	21,07
Ημέρα 7	11,38	9,01	14,03	12,54	8,94	13,85
Συνολικές Απωλεσθείς Πωλήσεις	72,65	68,5	94,76	74,64	69,21	98,41
Συνολική Ζήτηση	414,87	416,03	471,06	414,87	416,03	471,06
% Απώλειας συνολικής ζήτησης	18%	16%	20%	18%	17%	21%

Πίνακας 3.8: Συνολική απώλεια πωλήσεων όλων καταναλωτών ανά πολιτική αναπλήρωσης και εύρος τιμών μέσης ζήτησης VMI καταναλωτών

3.2 Τροποποίηση προηγούμενου μοντέλου και μοντελοποίηση του

Στην ενότητα αυτή, τροποποιείται το μοντέλο της ενότητας 3.1 και μοντελοποιείται ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Ο επιπλέον συμβολισμός καθώς και οι υποθέσεις που θα χρησιμοποιηθούν δίνονται στη συνέχεια.

Συμβολισμός:

M	Αριθμός VMI καταναλωτών
N	Αριθμός non VMI καταναλωτών
E	Χωρητικότητα
τ	Χρόνος παράδοσης
D_i^j	Ζήτηση της ημέρας i του j καταναλωτή, $i = 1, ..., T,\ j = 1, ..., M + N$
S_i^j	Απώλεια πωλήσεων της ημέρα i του j καταναλωτή, $i = 1, ..., T,\ j = 1, ..., M + N$
I_0^j	Αρχικό απόθεμα του j καταναλωτή στην αρχή του χρονικού ορίζοντα $j = 1, ..., M + N$
$x_{k,i}^j$	Ποσότητα που αποστέλλεται τη χρονική στιγμή k στον j-οστό καταναλωτή, ώστε να ικανοποιηθεί η ζήτηση της i-οστής ημέρας. $k = 0, ..., T - \tau,\ i = 1, ..., T,$ $j = 1, ..., M + N$

Υποθέσεις:

1. Κατά την έναρξη, του χρονικού ορίζοντα, όλοι οι καταναλωτές διαθέτουν κάποιο απόθεμα, για την ικανοποίηση της ζήτησης των επόμενων ημερών. Η ποσότητά του αποθέματος αυτού δεν ξεπερνάει το διπλάσιο της μέσης ζήτησης του εκάστοτε καταναλωτή.

2. Ο χρόνος παράδοσης της αποστολής ισούται με τ ημέρες.

3. Η ζήτηση των καταναλωτών είναι μεταβλητή από ημέρα σε ημέρα.

Μοντελοποίηση

Με βάση τις παραπάνω υποθέσεις, η μεγιστοποίηση του μακροπρόθεσμου κέρδους του προμηθευτή ανάγεται στην επίλυση του παρακάτω γραμμικού προβλήματος.

$$
\begin{aligned}
max\Bigg\{ & \frac{(p-\gamma_p)}{T\times M}\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=0}^{T-\tau}\sum_{i=1}^{T}x_{k,i}^{j} + \frac{p}{T\times N}\sum_{j=M+1}^{M+N}\sum_{k=0}^{T-\tau}\sum_{i=1}^{T}x_{k,i}^{j} \\
& - \frac{(s+\gamma_s)}{T\times M}\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=0}^{T-\tau}\sum_{i=1}^{T}s_{i}^{j} - \frac{s}{T\times N}\sum_{j=M+1}^{M+N}\sum_{k=0}^{T-\tau}\sum_{i=1}^{T}s_{i}^{j}\Bigg\} \\
& s.t. \\
& \sum_{j=1}^{M+N}\sum_{i=1}^{T}x_{k,i+k}^{j} \leq E, \quad \forall k = 1,...,T-\tau \\
& \sum_{j=1}^{M+N}\sum_{i=1}^{T}x_{0,i}^{j} \leq E \\
& \sum_{i=1}^{T}x_{0,i}^{j} \leq I_0^j, \quad \forall j = 1,...,M+N \\
& X_{0,1}^{j} = D_1^j - S_1^j,\ \forall j = 1,...,M+N \\
& X_{0,2}^{j} = D_2^j - S_2^j,\ \forall j = 1,...,M+N \\
& \vdots \\
& X_{0,\tau}^{j} = D_\tau^j - S_\tau^j,\ \forall j = 1,...,M+N \\
& \sum_{k=0}^{i}x_{k,\tau+i}^{j} = D_{\tau+i}^j - S_{\tau+i}^j,\ \forall i = 1,...,T-\tau,\ \forall j = 1,...,M+N \\
& \\
& X_{k,i}^{j} \geq 0,\ \forall k = 0,...,T-\tau,\ \forall i = 1,...,T,\ \forall j = 1,...,M+N \\
& X_{k,(\tau+k)-1}^{j} = 0,\ \forall k = 1,...,T-\tau,\ \forall j = 1,...,M+N
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Για τον προσδιορισμό της αντικειμενικής συνάρτησης λαμβάνονται υπόψη οι μέσες πωλήσεις και η μέση απώλεια πωλήσεων ανά καταναλωτή και ανά ημέρα. Στην αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνεται υπόψη τόσο η έκπτωση, όσο και το υψηλότερο κόστος έλλειψης για τους VMI καταναλωτές. Ο πρώτος περιορισμός δηλώνει πως η συνολική ποσότητα αποστολής κατά την έναρξη του χρονικού ορίζοντα δεν μπορεί να υπερβαίνει τις E μονάδες προϊόντος. Ο δεύτερος περιορισμός δηλώνει πως η συνολική ποσότητα αποστολής για κάθε ημέρα t δεν μπορεί να υπερβαίνει τις E μονάδες προϊόντος. Ο τρίτος περιορισμός εξασφαλίζει ότι οι μονάδες προϊόντος που λαμβάνει ο j καταναλωτής κατά την έναρξη του χρονικού ορίζοντα, δεν ξεπερνάει τις I_0^j μονάδες προϊόντος. Ο τέταρτος περιορισμός, δηλώνει πως η ζήτηση των καταναλωτών την ημέρα 1 ικανοποιείται αποκλειστικά με τις μονάδες αποθέματος που λαμβάνουν οι καταναλωτές κατά την έναρξη του χρονικού ορίζοντα. Ο πέμπτος περιορισμός δηλώνει πως η ζήτηση των καταναλωτών έως και την ημέρα 2 ικανοποιείται αποκλειστικά με τις μονάδες αποθέματος που λαμβάνουν οι καταναλωτές κατά την έναρξη του χρονικού ορίζοντα. Ο έκτος περιορισμός δηλώνει πως η ζήτηση των καταναλωτών έως και την ημέρα τ ικανοποιείται αποκλειστικά με τις μονάδες αποθέματος που λαμβάνουν οι καταναλωτές κατά την έναρξη του χρονικού ορίζοντα. Ο έβδομος περιορισμός δηλώνει πως η ζήτηση των καταναλωτών από την l ημέρα και έπειτα ικανοποιείται από το σύνολο των μονάδων προϊόντων που λαμβάνουν οι καταναλωτές από την πρώτη ημέρα και έπειτα. Ο όγδοος περιορισμός δηλώνει πως οι μονάδες προϊόντος που στέλνονται στους καταναλωτές είναι μη μηδενικές. Ο ένατος περιορισμός δηλώνει πως τα προϊόντα που στέλνονται στον καταναλωτή την ημέρα k, είναι διαθέσιμα προς χρήση την $k + \tau$ ημέρα.

3.2.1 Εφαρμογή

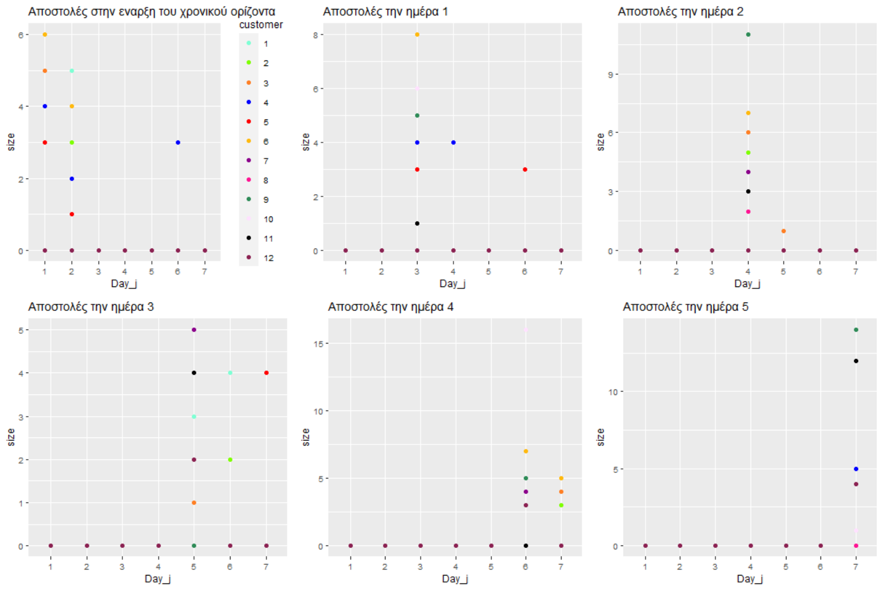
Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται μια εφαρμογή του προβλήματος της ενότητας 3.2 και θεωρούνται οι εξής τιμές για τις παραμέτρους: $T = 7$, $N = 12$, $M = 6$, $E = 50$, $\tau = 2$, $p = 2$, $s = 3$, $\gamma_p = 0.1$ και $\gamma_s = 2$ Στο παράδειγμα αυτό, ο προμηθευτής έχει στην διάθεση του τη ζήτηση όλων των καταναλωτών, για τις επόμενες 7 ημέρες και καλείται να λάβει αποφάσεις για την ποσότητα προϊόντων που πρέπει να στείλει στους καταναλωτές, προκειμένου να ικανοποιηθεί η ζήτηση τους έχοντας ως βασικό στόχο την μεγιστοποίηση του μέσου κέρδους του. Τα δεδομένα της ζήτηση των VMI καταναλωτών προέρχονται από Poisson κατανομή, ενώ των non VMI καταναλωτών προέρχονται από Αρνητική Διωνυμική κατανομή. Το σύστημα αποτελείται από έναν προμηθευτή και 12 τελικούς καταναλωτές, εκ των οποίων οι 6 είναι VMI. Οι αποστολές που γίνονται κατά την έναρξη του χρονικού ορίζοντα ($t = 0$), παραλαμβάνονται απευθείας και δεν ξεπερνούν τις I_0 μονάδες προϊόντος.

Για λόγους απλοποίησης οι πρώτοι 6 καταναλωτές θεωρούνται VMI και οι υπόλοιποι non VMI. Στον Πίνακα 3.9 παρουσιάζονται αναλυτικά τα αρχικά δεδομένα του παραδείγματος.

			Ζήτηση								
Τύπος καταναλωτή	Καταναλωτής	λ	Ημέρα 1	Ημέρα 2	Ημέρα 3	Ημέρα 4	Ημέρα 5	Ημέρα 6	Ημέρα 7	I_0	Χωρητικότητα Ημέρας
VMI	1	6	6	5	5	7	3	4	4	12	50
	2	4	4	3	3	5	1	2	3	8	
	3	5	5	4	4	6	2	3	4	10	
	4	6	4	2	4	4	5	3	5	12	
	5	5	3	1	3	3	5	3	4	10	
	6	6	6	4	8	7	5	7	5	12	
nonVMI	7	8	4	5	1	4	5	4	14	16	
	8	6	0	20	0	2	2	3	0	12	
	9	7	6	1	5	11	0	5	14	14	
	10	8	7	8	6	0	4	16	1	16	
	11	7	3	4	1	3	4	4	12	14	
	12	8	1	32	2	5	2	3	8	16	

Πίνακας 3.9: Αρχικά δεδομένα παραδείγματος

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω δεδομένα στο πρόβλημα (3.4) προκύπτουν πως τα προϊόντα αποστέλλονται στους καταναλωτές όπως εμφανίζονται στο παρακάτω διάγραμμα. Παρατηρείται ότι στην αρχή του χρονικού ορίζοντα, επιδιώκεται η ικανοποίηση την ζήτηση των καταναλωτών για τις πρώτες δύο ημέρες, δίνοντας ωστόσο προτεραιότητα στους VMI καταναλωτές λόγω του υψηλού κόστους απώλειας πωλήσεων.



Σχήμα 3.1: Αποστολές Προϊόντων

Η προτεραιότητα των VMI καταναλωτών επαληθεύεται και από τον Πίνακα 3.10, από τον οποίον προκύπτει πως δεν καταγράφεται απώλεια πωλήσεων για τους VMI καταναλωτές. Η συνολική ζήτηση των καταναλωτών κατά την διάρκεια των 7 ημερών ανέρχεται στις 406 μονάδες προϊόντος, ενώ η συνολική απώλεια πωλήσεων είναι 106 μονάδες προϊόντος (απώλεια 26% της συνολικής ζήτησης).

Τύπος Καταναλωτή	Απωλεσθείσες πωλήσεις								
	Καταναλωτής	Ημέρα 1	Ημέρα 2	Ημέρα 3	Ημέρα 4	Ημέρα 5	Ημέρα 6	Ημέρα 7	Σύνολο
VMI	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	0
	4	0	0	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	0	0	0
nonVMI	7	4	5	0	0	0	0	0	9
	8	0	20	0	0	0	0	0	20
	9	6	1	0	0	0	0	0	7
	10	7	8	0	0	0	0	0	15
	11	3	4	0	0	0	4	0	11
	12	1	32	2	5	0	0	4	44
	Σύνολο	21	70	2	5	0	4	4	106

Πίνακας 3.10: Απώλεια πωλήσεων καταναλωτών

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω αποστολές και την απώλεια πωλήσεων για VMI και non VMI καταναλωτές στην σχέση (3.4) προκύπτει πως το μέσο κέρδος ανά ημέρα και ανά καταναλωτή για τον προμηθευτή ανέρχεται στις 6.3 χρηματικές μονάδες.

Στην συνέχεια μελετάται η επίδραση της ζήτησης των non VMI καταναλωτών με την αλλαγή της κατανομής των δεδομένων της ζήτησης από Αρνητική Διωνυμική σε Poisson κατανομή και διατηρώντας τις υπόλοιπες παραμέτρους ίδιες. Στον Πίνακα 3.11 παρουσιάζεται η μέση και η καθημερινή ζήτηση των καταναλωτών κατά την διάρκεια του χρονικού ορίζοντα.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω αποστολές και την απώλεια πωλήσεων για VMI και non VMI καταναλωτές στην σχέση (3.4) προκύπτει πως το μέσο κέρδος ανά ημέρα και ανά καταναλωτή για τον προμηθευτή ανέρχεται στις 7.9 χρηματικές μονάδες. Παρατηρείται πως το μέσο κέρδος του προμηθευτή είναι μεγαλύτερο, όταν τα δεδομένα της ζήτησης των non VMI καταναλωτών προέρχονται Poisson κατανομή, καθώς όταν α δεδομένα της ζήτησης προέρχονται από Αρνητική Διωνυμική κατανομή, οι παραγγελίες των non VMI καταναλωτών έρχονται σποραδικά και σε μεγαλύτερες ποσότητες. (Η επιλογή της Αρνητικής Διωνυμικής κατανομής γίνεται, καθώς μια πιο σποραδική κατανομή ζήτησης αποτυπώνει πιο ρεαλιστικά τον τρόπο τοποθέτησης των παραγγελιών).

			Ζήτηση								
Τύπος καταναλωτή	Καταναλωτής	λ	Ημέρα 1	Ημέρα 2	Ημέρα 3	Ημέρα 4	Ημέρα 5	Ημέρα 6	Ημέρα 7	I_0	Χωρητικότητα Ημέρας
VMI	1	6	6	5	5	7	3	4	4	12	50
	2	4	4	3	3	5	1	2	3	8	
	3	5	5	4	4	6	2	3	4	10	
	4	6	4	2	4	4	5	3	5	12	
	5	5	3	1	3	3	5	3	4	10	
	6	6	6	4	8	7	5	7	5	12	
nonVMI	7	3	3	3	1	2	6	3	6	6	
	8	4	6	2	6	7	3	3	5	8	
	9	7	8	1	9	7	8	6	3	14	
	10	7	3	9	4	8	5	8	10	14	
	11	4	8	2	3	2	2	7	7	8	
	12	5	4	5	3	5	9	4	4	10	

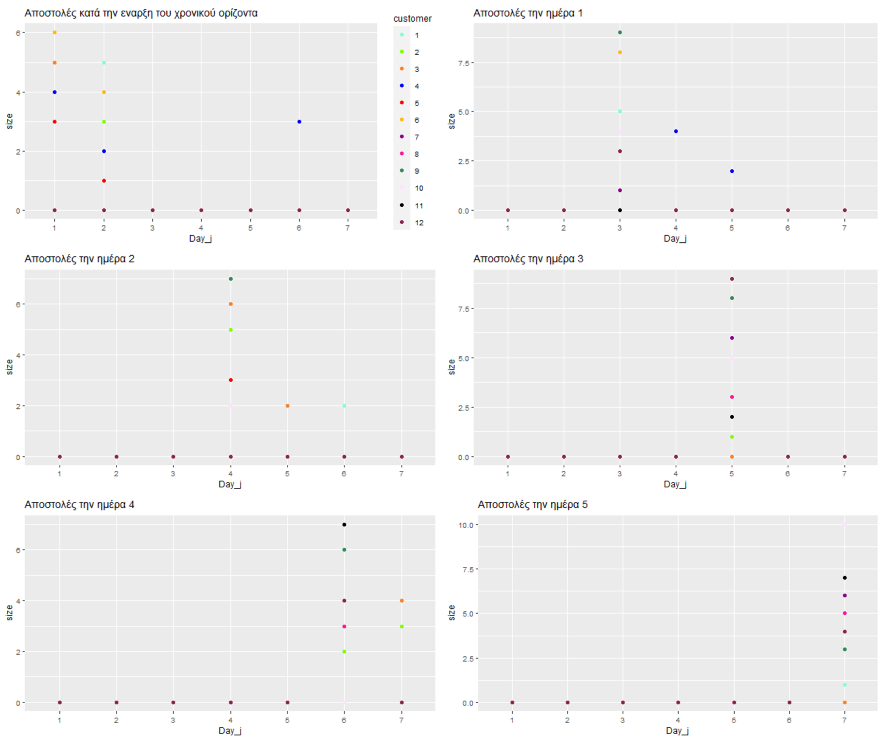
Πίνακας 3.11: Ζήτηση καταναλωτών

Στον Πίνακα 3.12 παρουσιάζεται η απώλεια πωλήσεων ανά καταναλωτή ανά ημέρα. Παρατηρείται πως η συνολική ζήτηση των καταναλωτών, ανέρχεται στις 384 μονάδες προϊόντων, ενώ η απώλεια πωλήσεων που καταγράφεται είναι 84 μονάδες προϊόντος. Φαίνεται ότι προκύπτει απώλεια 22% της συνολικής ζήτησης. Η απώλεια πωλήσεων παρατηρείται σε μεγαλύτερο βαθμό στους non VMI καταναλωτές.

Τύπος Καταναλωτή	Απωλεσθείσες πωλήσεις								
	Καταναλωτής	Ημέρα 1	Ημέρα 2	Ημέρα 3	Ημέρα 4	Ημέρα 5	Ημέρα 6	Ημέρα 7	Σύνολο
VMI	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	0	0
	4	0	0	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	0	0	0
nonVMI	7	3	3	0	0	0	0	0	6
	8	6	2	6	0	0	0	0	14
	9	8	1	0	0	0	0	0	9
	10	3	9	0	6	0	8	0	26
	11	8	2	3	2	0	0	0	15
	12	4	5	0	5	0	0	0	14
	Σύνολο	32	22	9	13	0	8	0	84

Πίνακας 3.12: Απώλεια ζήτησης ανά καταναλωτή

Στο Διάγραμμα 3.2, παρουσιάζεται το χρονοδιάγραμμα αναπλήρωσης καταναλωτών.



Σχήμα 3.2: Αποστολές Προϊόντων

3.3 Σύγκριση αριθμητικών παραδειγμάτων

Στην ενότητα αυτή θα γίνει σύγκριση των μέτρων απόδοσης της εφαρμογής της πολιτικής αναπλήρωσης I based: VMI - non VMI με τα αντίστοιχα μέτρα που προκύπτουν από την εφαρμογή της ακριβούς επίλυσης. Η επιλογή της πολιτικής αναπλήρωσης I based: VMI - non VMI έγινε τυχαία, καθώς όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.4 δεν υπάρχουν σημαντικές διαφορές στην απώλεια ζήτησης α-νάμεσα στις πολιτικές αναπλήρωσης. Για τον σκοπό αυτό, χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα από 20 προσομοιώσεις του πρώτου παραδείγματος και $E = 84$. Στους Πίνακες 3.13 και 3.14 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν σχετικά με την απώλεια πωλήσεων, καθώς και το μέσο κέρδος, ανάλογα με το μοντέλο στο οποίο εφαρμόστηκαν. Παρατηρούμε ότι η εφαρμογή συγκεκριμένης πολιτικής αναπλήρωσης, οδηγεί σε απώλεια πωλήσεων 52 μονάδων προϊόντος, ενώ ο αντίστοιχος αριθμός, από την εφαρμογή ακριβούς λύσης είναι 32 μονάδες προϊόντος. Η διαφορά αυτή ενδεχομένως οφείλεται στο γεγονός ότι στην εφαρμογή ακριβούς λύσης ο προμηθευτής έχει εκ των προτέρων γνώση για την ζήτηση των καταναλωτών καθ' όλη τη διάρκεια του χρονικού ορίζοντα καθώς και στο γεγονός ότι κατά την εφαρμογή συγκεκριμένης πολιτικής αναπλήρωσης η αποστολή σε κάθε καταναλωτή μπορεί να γίνει με 12 μονάδες προϊόντος, ενώ στην εφαρμογή ακριβούς λύσης δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για την ποσότητα αναπλήρωσης.

Καταναλωτής	Ημέρα 1	Ημέρα 2	Ημέρα 3	Ημέρα 4	Ημέρα 5	Ημέρα 6	Ημέρα 7	Σύνολο
1	0	0,7	3,65	0,45	1,9	4,05	0,45	11,2
2	0,05	2,25	3,55	0,95	3,7	4,45	1,25	16,2
3	0	0	0,05	0,3	0,5	0	0,15	1
4	0	0,05	0,75	0,85	0,25	0,95	0,8	3,65
5	0	0,95	3	1,35	1	2,15	1,7	10,15
6	0	0,1	0,05	0,5	0	0,25	0,05	0,95
7	0	0	0	0	0,75	0,45	0,3	1,5
8	0	0	0	0	0	0,6	0,4	1
9	0	0	0	0	1,75	1,4	1,4	4,55
10	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0,5	1	0,5	2
Σύνολο	0,05	4,05	11,05	4,4	10,35	15,3	7	52,2

Πίνακας 3.13: Απώλεια πωλήσεων κατά την εφαρμογή συγκεκριμένης πολιτικής αναπλήρωσης

Καταναλωτής	Ημέρα 1	Ημέρα 2	Ημέρα 3	Ημέρα 4	Ημέρα 5	Ημέρα 6	Ημέρα 7	Σύνολο
1	0,05	0,8	0	0	0	0	0	0,85
2	1,5	3,65	0	0	0	0	0	5,15
3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0,05	0	0	0	0	0	0,05
5	0,35	1,6	0	0	0	0	0	1,95
6	0	0,15	0	0	0	0	0	0,15
7	0,15	0,45	0	0	0	0	0	0,6
8	0,5	0,95	0	0	0	0	0	1,45
9	0,5	2,6	0	0	0	0	0	3,1
10	3,95	6,05	0	0	0	0	0	10
11	2,85	2,2	0	0	0	0	0	5,05
12	1,75	2,1	0	0	0	0	0	3,85
Σύνολο	11,6	20,6	0	0	0	0	0	32,2

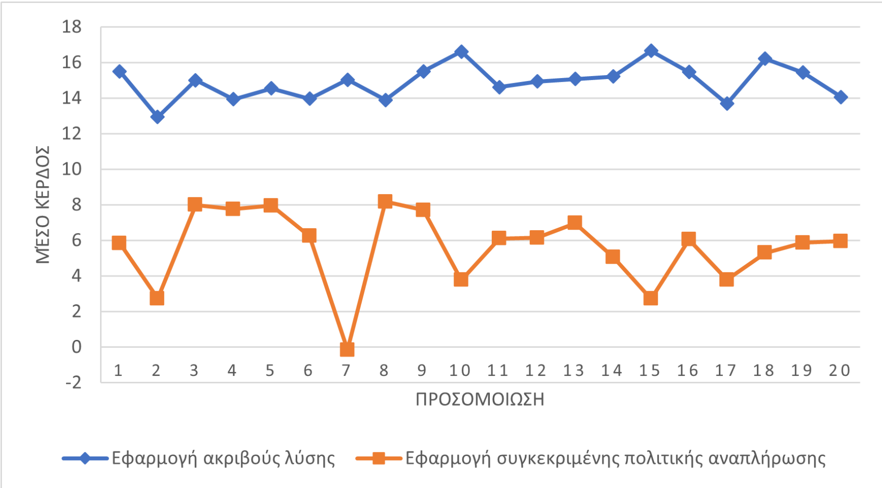
Πίνακας 3.14: Απώλεια πωλήσεων κατά την εφαρμογή ακριβούς λύσης

Στον Πίνακα 3.15 παρατηρούμε πως το μέσο κέρδος από την εφαρμογή ακριβούς λύσης είναι σχεδόν τριπλάσιο από από την εφαρμογή της πολιτικής I based: VMI - non VMI.

	Μέσο κέρδος	Πωλήσεις	Χαμένες Πωλήσεις	% Απώλειας Συνολικής Ζήτησης
Εφαρμογή συγκεκριμένης πολιτικής αναπλήρωσης	5,6	220,2	52,2	24%
Εφαρμογή Ακριβούς λύσης	14,9	373,05	32,2	9%

Πίνακας 3.15: Μέσο κέρδος και συνολικές πωλήσεις ανά εφαρμογή

Στο Σχήμα 3.3, παρουσιάζεται το μέσο κέρδος του προμηθευτή ανά ημέρα και ανά καταναλωτή ανάλογα με το αν εφαρμόστηκε η ακριβής λύση ή συγκεκριμένη πολιτική αναπλήρωσης. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η έβδομη προσομοίωση όπου, στην εφαρμογή της πολιτικής αναπλήρωσης I based: VMI - non VMI είχε μέσο κέρδος κοντά στο μηδέν, ενώ στην εφαρμογή της ακριβούς λύσης το αντίστοιχο κέρδος ήταν σχεδόν 15χ.μ..



Σχήμα 3.3: Μέσο κέρδος ανά προσομοίωση ανάλογα με την εφαρμογή

Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε το μοντέλο διαχείρισης αποθεμάτων από τον προμηθευτή των Weißhuhn and Hoberg (2021). Το μοντέλο αυτό επεκτείνει το σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων με έναν προμηθευτή και πολλούς αγοραστές, του οποίου η εφαρμογή γίνεται ανάμεσα σε επιχειρήσεις, σε ένα σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων με έναν προμηθευτή και πολλούς τελικούς καταναλωτές. Η εφαρμογή της πολιτικής VMI στους τελικούς καταναλωτές στηρίζεται στην κοινή χρήση των πληροφοριών αξιοποιώντας κυρίως Τεχνολογίες Διαδικτύου Πραγμάτων (Internet of Things). Οι Weißhuhn and Hoberg (2021) για την μοντελοποίηση του συστήματος, στηρίζονται σε μια σειρά έξι διακριτών γεγονότων που εκτελούνται αναδρομικά στο σύστημα. Για την αναπλήρωση του αποθέματος χρησιμοποιούνται δυο τροποποιήσεις, σε συγκεκριμένο εύρος τιμών, της (r, q) πολιτικής με σταθερό q και είτε σταθερό είτε δυναμικά προσδιοριζόμενο r. Επιπλέον, για τις αποφάσεις αναπλήρωσης αποθέματος χρησιμοποιούνται συγκεκριμένες πολιτικές ανάλογα με τη σχέση που έχει η συνολική ζήτηση με το διαθέσιμο απόθεμα. Στη συνέχεια, υλοποιείται ένα αριθμητικό παράδειγμα, το οποίο στηρίζεται σε μια αναπροσαρμογή του μοντέλου των Weißhuhn and Hoberg (2021), στην οποία διαφοροποιούνται η συνθήκη ανάγκης αναπλήρωσης των VMI καταναλωτών και οι πολιτικές αναπλήρωσης. Επιπλέον, στο κεφάλαιο αυτό, το μοντέλο των Weißhuhn and Hoberg (2021) τροποποιείται και γίνεται η μοντελοποίηση του προβλήματος βελτιστοποίησης που προκύπτει. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται ένα αριθμητικό παράδειγμα για την εφαρμογή ακριβούς λύσης, η οποία στηρίζεται στην νέα μοντελοποίηση. Τέλος, γίνεται σύγκριση ανάμεσα στην εφαρμογή της συγκεκριμένης πολιτικής αναπλήρωσης και στην εφαρμογή ακριβούς λύσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Επιλογος

Η παρούσα διατριβή εστιάζει σε συστήματα διαχείρισης αποθεμάτων από τον προμηθευτή. Αφού γίνει παρουσίαση αντιπροσωπευτικών μοντέλων που αφορούν έναν προμηθευτή και έναν αγοραστή και έναν προμηθευτή και πολλούς αγοραστές, παρουσιάζεται ένα μοντέλο διαχείρισης αποθεμάτων από τον προμηθευτή που αφορά τελικούς καταναλωτές. Για το τελευταίο μοντέλο παρουσιάζονται συγκεκριμένες πολιτικές αναπλήρωσης ενώ στη συνέχεια γίνεται τροποποίηση του, μοντελοποίηση και επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης που προκύπτει. Στην συνέχεια γίνονται συγκρίσεις ανάμεσα σε εφαρμογές συγκεκριμένων πολιτικών αναπλήρωσης και ακριβής λύσης.

Τα μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων από τον προμηθευτή προς τους τελικούς καταναλωτές μπορούν να επεκταθούν ώστε:

- Να θεωρηθεί ως συνθήκη ανάγκης αναπλήρωσης $I_{n,t} \leq \lambda_{min}$, ή $I_{n,t} \leq \dfrac{\lambda_{min} + \lambda_{max}}{2}$, όπου $\lambda_{min} = \min\{\lambda_n,\ n = 1, ..., N\}$, $\lambda_{max} = \max\{\lambda_n,\ n = 1, ..., N\}$
- Να θεωρηθούν διαφορετικοί χρόνοι παράδοσης για κάθε καταναλωτή
- Να θεωρηθεί ως πολιτική αναπλήρωσης, η κατάταξη των VMI καταναλωτών με φθίνουσα σειρά ως προς την απώλεια πωλήσεων που προκύπτει κατά τον χρόνο παράδοσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., and Shetty, C. M. *Nonlinear programming: theory and algorithms.* John Wiley & Sons, 2013.

[2] Benedict, C., and Margeridis, H. Chain reaction: Heard of vendor managed inventory yet? *CHARTER-SYDNEY- 70* (1999), 46–48.

[3] Cetinkaya, S., and Lee, C.-Y. Stock replenishment and shipment scheduling for vendor-managed inventory systems. *Management Science 46*, 2 (2000), 217–232.

[4] Darwish, M. A., and Odah, O. Vendor managed inventory model for single-vendor multi-retailer supply chains. *European Journal of Operational Research 204*, 3 (2010), 473–484.

[5] Disney, S. M., and Towill, D. R. The effect of vendor managed inventory (vmi) dynamics on the bullwhip effect in supply chains. *International journal of production economics 85*, 2 (2003), 199–215.

[6] Dong, Y., Xu, K., and Dresner, M. Environmental determinants of vmi adoption: an exploratory analysis. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review 43*, 4 (2007), 355–369.

[7] Fry, M. J., Kapuscinski, R., and Olsen, T. L. Coordinating production and delivery under a (z, z)-type vendor-managed inventory contract. *Manufacturing & Service Operations Management 3*, 2 (2001), 151–173.

[8] Kaipia, R., Holmström, J., and Tanskanen, K. Vmi: What are you losing if you let your customer place orders? *Production Planning & Control 13*, 1 (2002), 17–25.

[9] Mangiaracina, R., Melacini, M., and Perego, A. A critical analysis of vendor managed inventory in the grocery supply chain. *International Journal of Integrated Supply Management 7*, 1-3 (2012), 138–166.

[10] Pohlen, T. L., and Goldsby, T. J. Vmi and smi programs: How economic value added can help sell the change. *International Journal of Physical Distribution & Logistics Management 33*, 7 (2003), 565–581.

[11] Ravindran, A., Reklaitis, G. V., and Ragsdell, K. M. *Engineering optimization: methods and applications.* John Wiley & Sons, 2006.

[12] Razmi, J., Hosseini Rad, R., and Sangari, M. S. Developing a two-echelon mathematical model for a vendor-managed inventory (vmi) system. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology 48* (2010), 773–783.

[13] Silver, E. Establishing the order quantity when the amount received is uncertain. *INFOR: Information Systems and Operational Research 14*, 1 (1976), 32–39.

[14] Småros, J., Lehtonen, J.-M., Appelqvist, P., and Holmström, J. The impact of increasing demand visibility on production and inventory control efficiency. *International journal of physical distribution & logistics management 33*, 4 (2003), 336–354.

[15] Tijms, H. C. *Stochastic models: an algorithmic approach*, vol. 303. John Wiley & Sons Incorporated, 1994.

[16] Waller, M., Johnson, M. E., and Davis, T. Vendor-managed inventory in the retail supply chain. *Journal of business logistics 20*, 1 (1999), 183.

[17] Weisshuhn, S., and Hoberg, K. Designing smart replenishment systems: Internet-of-things technology for vendor-managed inventory at end consumers. *European Journal of Operational Research 295*, 3 (2021), 949–964.

[18] Wolff, R. W. *Stochastic modeling and the theory of queues*. Pearson College Division, 1989.

[19] Yao, Y., Evers, P. T., and Dresner, M. E. Supply chain integration in vendor-managed inventory. *Decision support systems 43*, 2 (2007), 663–674.