ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Κλεάνθης Κηπουρός

ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ GAUSS ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ ΜΟΡΦΗΣ ΜΕ ΧΑΜΗΛΗ ΣΥΝΔΙΑΣΤΑΣΗ

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Ιωάννινα, 2023

Περιεχομενα

Περιληψη

Μελετάμε μερικά κλασικά αποτελέσματα σε πλήρεις επιφάνειες με σταθερή καμπυλότητα Gauss σε τρισδιάστατους χώρους μορφής, χρησιμοποιώντας μια σύγχρονη προσέγγιση.

Abstract

We study some classical results on complete surfaces with constant Gauss curvature in 3-dimensional space forms, using a modern approach.

Εισαγωγη

Στόχος της διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη της καμπυλότητας Gauss επιφανειών σε χώρους μορφής με χαμηλή συνδιάσταση. Ειδικότερα μελετάμε πλήρεις επιφάνειες σε τρισδιάστατους χώρους μορφής, χρησιμοποιώντας σύγχρονη προσέγγιση. Εξετάζουμε την περίπτωση των επιφανειών με σταθερή καμπυλότητα Gauss στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$, στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ και στον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$. Αποδεικνύουμε την ύπαρξη μιας σύμμορφης αναπαράστασης για ισόπεδες επιφάνειες στον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$. Αποδεικνύουμε το Θεώρημα Hartman-Nirenberg για ισόπεδες επιφάνειες στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$. Επιπλέον, μελετάμε την αναπαράσταση των Bianchi-Spivak για ισόπεδες επιφάνειες στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$. Αποδεικνύουμε το Θεώρημα του Hilbert, δηλαδή ότι δεν υπάρχουν πλήρεις επιφάνειες με σταθερή αρνητική καμπυλότητα Gauss, στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ ή στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$. Το ίδιο αποδεικνύεται για πλήρεις επιφάνειες στον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$ με καμπυλότητα Gauss $K < -1$. Τέλος εξετάζονται οι γενικεύσεις των ανωτέρω υπό ασθενέστερες προϋποθέσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Προκαταρτικα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε την έννοια των διαφορίσιμων πολυπτυγμάτων και στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε στοιχεία από τη θεωρία των ισομετρικών εμβαπτίσεων και των επιφανειών Riemann, τα οποία είναι απαραίτητα για την απόδειξη των κύριων αποτελεσμάτων ([6],[7],[16]).

1.1 Διαφορίσιμα Πολυπτύγματα

Ορισμός 1.1.1. Ένα n-διάστατο *διαφορίσιμο πολύπτυγμα* M^n είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff με αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του, ο οποίος πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες,

(i) Υπάρχει οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ του M^n, τέτοια ώστε $\cup_{\alpha\in I} U_\alpha = M^n$ και αντίστοιχων ομοιομορφισμών $\phi_\alpha : U_\alpha \subset M^n \to \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, όπου $\phi_\alpha(U_\alpha)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Το ζεύγος (U_α, ϕ_α) ονομάζεται *χάρτης ή σύστημα συντεταγμένων* του M^n.

(ii) Για κάθε $\alpha, \beta \in I$, με $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, η απεικόνιση

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$$

είναι C^∞ - διαφορίσιμη. Η οικογένεια $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ καλείται *άτλαντας* του M^n.

(iii) Η οικογένεια χαρτών $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ είναι μεγιστοτική, δηλαδή αν (U, ϕ) είναι ένας χάρτης τέτοιος ώστε $\phi \circ \phi_\alpha^{-1}$, $\phi_\alpha \circ \phi^{-1}$ να είναι C^∞- διαφορίσιμες απεικονίσεις για κάθε $\alpha \in I$, τότε ο χάρτης (U, ϕ) ανήκει στην οικογένεια $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$.

Το σύνολο T_pM των εφαπτόμενων διανυσμάτων σε ένα σημείο $p \in M^n$, ονομάζεται εφαπτόμενος χώρος του M στο σημείο p. Είναι γνωστό ότι δέχεται δομή $\mathbb{R}$-γραμμικού χώρου διάστασης $\dim T_pM = \dim M^n = n$.

Ορισμός 1.1.2. Ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα M διάστασης n καλείται προσανατολίσιμο, αν υπάρχει άτλας $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ ώστε για κάθε $\alpha, \beta \in I$ με $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ να ισχύει $\det d(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}) > 0$ στο $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, όπου $d(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})$ είναι το διαφορικό της απεικόνισης $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$.

Ένας άτλαντας όπως παραπάνω καλείται προσανατολισμός. Ένας προσανατολισμός του M επάγει ένα προσανατολισμό σε κάθε εφαπτόμενο χώρο. Κάθε συνεκτικό, διαφορίσιμο και προσανατολίσιμο πολύπτυγμα, δέχεται ακριβώς δύο προσανατολισμούς. Επιπλέον ένα πολύπτυγμα καλείται προσανατολισμένο, αν είναι προσανατολίσιμο και έχουμε επιλέξει έναν προσανατολισμό.

Ορισμός 1.1.3. Έστω M ένα n-διάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα. Η εφαπτόμενη δέσμη TM του M, ορίζεται ως εξής:

$$TM = \cup_{p \in M} T_pM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_pM\}. \tag{1.1}$$

Είναι γνωστό ότι η εφαπτόμενη δέσμη TM είναι ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα διάστασης $2n$. Η φυσική προβολή $\pi : TM \to M$, με $\pi(p, v) = p$, είναι διαφορίσιμη απεικόνιση.

Ορισμός 1.1.4. Ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο X ενός διαφορίσιμου πολυπτύγματος M, είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση $X : M \to TM$ με την ιδιότητα $\pi \circ X = I$, όπου I είναι η ταυτοτική απεικόνιση του M.

Συμβολίζουμε με $\mathfrak{X}(M)$ το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων του M και με $C^\infty(M)$ το σύνολο των διαφορίσιμων συναρτήσεων $f : M \to \mathbb{R}$.

Ορισμός 1.1.5. Μια *γραμμική συνοχή* στο διαφορίσιμο πολύπτυγμα M είναι μια απεικόνιση $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $\nabla_{X_1 + X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$

(ii) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$

(iii) $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$

(iv) $\nabla_X (fX) = (Xf)Y + f \nabla_X Y$,

για κάθε $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ και $f \in C^\infty(M)$. Το διανυσματικό πεδίο $\nabla_X Y$ καλείται *συναλλοίωτη παράγωγος* του Y στη διεύθυνση X, ως προς τη συνοχή ∇.

Ορισμός 1.1.6. Έστω M ένα n-διάστατο διαφορίσιμο πολύπτυγμα. Ένα τανυστικό πεδίο τύπου $(r, 1)$ του M είναι μια απεικόνιση,

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{r} \to \mathfrak{X}(M)$$

η οποία είναι $C^\infty(M)$-γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της, ενώ ένα τανυστικό πεδίο τύπου $(r, 0)$ στο M είναι μια απεικόνιση

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{r} \to C^\infty(M)$$

η οποία είναι $C^\infty(M)$ γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της.

Ορισμός 1.1.7. Έστω $X \in \mathfrak{X}(M)$ και T ένα (r, s)-τανυστικό πεδίο του M, $s = 0, 1$. Η συναλλοίωτη παράγωγος του τανυστικού πεδίου T στη διεύθυνση του X είναι το (r, s)-τανυστικό πεδίο $\nabla_X T$ που ορίζεται ως εξής :

$$\begin{aligned}(\nabla_X T)(X_1, ..., Xr) = \nabla_X(T(X_1, ..., X_r))\\ - \sum_{i=1}^{r} T(X_1, ..., X_{i-1}, \nabla_X X_i, X_{i+1}, ..., X_r),\end{aligned}$$

όπου θέτουμε $\nabla_X(T(X_1, ..., X_r)) = X(T(X_1, ..., X_r)$, αν $s = 0$.

Πρόταση 1.1.1. *Έστω A, B τανυστικά πεδία τύπου (1,1) ενός πολυπτύγματος M. Τότε ισχύει*

$$\nabla_X(A \circ B) = (\nabla_X A) \circ B + A \circ (\nabla_X B),$$

για κάθε $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Απόδειξη. Έχουμε για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned}(\nabla_X(A \circ B))(Y) &= \nabla_X((A \circ B)(Y)) - (A \circ B)(\nabla_X Y)\\ &= (\nabla_X A(B(Y)) - A(B(\nabla_X Y))\\ &= (\nabla_X A)(B(Y)) + A(\nabla_X B(Y)) - A(B(\nabla_X Y))\\ &= (\nabla_X A) \circ B(Y) + A \circ (\nabla_X B)(Y).\end{aligned}$$

□

Ορισμός 1.1.8. Μια μετρική Riemann $\langle ., . \rangle$ ενός διαφορίσιμου πολυπτύγματος M είναι ένα τανυστικό πεδίο τύπου $(2, 0)$, το οποίο είναι συμμετρικό και θετικά οριστικό, δηλαδή για κάθε $X \in \mathfrak{X}(M)$ και $p \in M$ ισχύει ότι $\langle X, X \rangle(p) \geq 0$ και $\langle X, X \rangle(p) = 0$ αν και μόνο αν $X_p = 0$.

Ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα M το οποίο είναι εφοδιασμένο με μία μετρική Riemann καλείται πολύπτυγμα Riemann.

Πρόταση 1.1.2. *Για δοθείσα μετρική Riemann $\langle.,.\rangle$ ενός πολυπτύγματος M, υπάρχει μοναδική συνοχή ∇ η οποία πληροί τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$

(ii) $X\langle Y,Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$,

για κάθε $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Αυτή η μοναδική συνοχή ∇ ονομάζεται συνοχή Levi-Civitá του πολυπτύγματος $(M,\langle,\rangle)$.

Θεωρούμε ένα χάρτη (U,ϕ) του n-διάστατου πολυπτύγματος M με συντεταγμένες $(x^1,\ldots,x^n)$ και καμπύλη $c: I \to M$ με $c(I) \subset U$. Αφού τα τοπικά πεδία $\frac{\partial}{\partial x^i}$ αποτελούν βάση του εφαπτόμενου χώρου σε κάθε σημείο του U, υπάρχουν μοναδικές διαφορίσιμες συναρτήσεις $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$, $1 \leq i,j,k \leq n$, έτσι ώστε

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Οι συναρτήσεις Γ_{ij}^k ονομάζονται σύμβολα Christoffel της συνοχής ∇, ως προς τον χάρτη (U,ϕ). Επιπρόσθετα ορίζουμε τις συναρτήσεις $g_{ij} \in C^\infty(U)$ με

$$g_{ij} = \langle\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle,\ 1 \leq i,j \leq n.$$

Η μετρική Riemann επάγει μια τετραγωνική μορφή σε κάθε εφαπτόμενο χώρο T_pM, σε κάθε σημείο $p \in M$, η οποία καλείται πρώτη θεμελιώδη μορφή και δίνεται ως,

$$\langle v,v\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} v^i v^j,$$

όπου $v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \in T_pM$.

Ο πίνακας της πρώτης θεμελιώδους μορφής ως προς τη βάση $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ του εφαπτόμενου χώρου T_pM είναι ο συμμετρικός και θετικά οριστικός πίνακας (g_{ij}) στο p. Με (g^{ij}) συμβολίζουμε τον αντίστροφο πίνακα του (g_{ij}), δηλαδή $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

Αποδεικνύεται ότι ισχύει η παρακάτω ταυτότητα του Christoffel

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}g^{km}(-g_{ij,m}+g_{jm,i}+g_{mi,j}), \tag{1.2}$$

η οποία εκφράζει τα σύμβολα Christoffel της συνοχής Levi-Civitá ως προς ένα χάρτη σε σχέση με τις συνιστώσες της μετρικής και των παραγώγων των πρώτης τάξης. Στη σχέση (1.2) το σύμβολο $g_{ij,m}$ δηλώνει τη μερική παράγωγο $\partial g_{ij}/\partial x^m$.

Έστω V ένας n-διάστατος $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο $\langle .,. \rangle$.

Ορισμός 1.1.9. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός $A : V \to V$ που πληροί την ιδιότητα $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ για κάθε $x, y \in V$ καλείται ορθογώνιος μετασχηματισμός.

Ορισμός 1.1.10. Ονομάζουμε σχεδόν μιγαδική δομή J ενός διανυσματικού χώρου V έναν γραμμικό μετασχηματισμό $J : V \to V$, με την ιδιότητα $J \circ J = -Id_V$, όπου Id_V είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο διανυσματικό χώρο V.

Κάθε προσανατολίσιμο, διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann M δέχεται ένα τανυστικό πεδίο J τύπου $(1, 1)$, όπου σε κάθε σημείο $p \in M$ επάγει τον γραμμικό μετασχηματισμό $J_p : T_pM \to T_pM$, ο οποίος είναι σχεδόν μιγαδική δομή και ορθογώνιος μετασχηματισμός. Ο μετασχηματισμός J_p είναι η στροφή στον εφαπτόμενο χώρο T_pM κατά γωνία $\pm\pi/2$.

1.2 Ισομετρικές εμβαπτίσεις

Έστω M και N^3 δύο διαφορίσιμα πολυπτύγματα διάστασης 2 και 3 αντίστοιχα.

Ορισμός 1.2.1. Έστω $f : M \to N^3$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Ένα *διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος* της f είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση $V : M \to N^3$, η οποία σε κάθε $p \in M$, αντιστοιχεί ένα διάνυσμα $V_p \in T_{f(p)}N^3$.

Με $\mathfrak{X}(f)$ συμβολίζουμε το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων κατά μήκος της f. Αν $\overline{Y} \in \mathfrak{X}(N^3)$, τότε $\overline{Y} \circ f \in \mathfrak{X}(f)$. Επιπλέον, για κάθε $X \in \mathfrak{X}(M)$, ορίζεται ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της f, το οποίο συμβολίζεται με $df(X)$ και το οποίο στο τυχόν σημείο $p \in M$ αντιστοιχεί το διάνυσμα $df_p(X_p)$.

Πρόταση 1.2.1. *Έστω $f : M \to N^3$ είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση όπου M, N δύο διαφορίσιμα πολυπτύγματα διάστασης 2 και 3 αντίστοιχα. Υποθέτουμε* *ότι το πολύπτυγμα N^3 είναι πολύπτυγμα Riemann εφοδιασμένο με τη συνοχή Levi-Civitá $\overline{\nabla}$. Τότε υπάρχει μοναδική απεικόνιση*

$$\nabla^f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(f) \to \mathfrak{X}(f),\ (X, V) \mapsto \nabla^f_X V,$$

η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $\nabla^f_{X_1+X_2} V = \nabla^f_{X_1} V + \nabla^f_{X_2} V$

(ii) $\nabla^f_{uX} V = u\nabla^f_X V$

(iii) $\nabla^f_X (V_1 + V_2) = \nabla^f_X V_1 + \nabla^f_X V_2$

(iv) $\nabla^f_X (uV) = (Xu)V + u\nabla^f_X V$

(v) $\nabla^f_X (\overline{Y} \circ f) = \overline{\nabla}_{df(X)} \overline{Y}$

(vi) $df([X, Y]) = \nabla^f_X df(Y) - \nabla^f_Y df(X)$

(vii) $X(\langle V_1, V_2\rangle) = \langle \nabla^f_X V_1, V_2\rangle + \langle V_1, \nabla^f_X V_2\rangle$,

για $X, Y, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M), \overline{Y} \in \mathfrak{X}(N^3), V, V_1, V_2 \in \mathfrak{X}(f), u \in C^\infty(M)$.

Για λόγους απλούστευσης του συμβολισμού θα γράφουμε από εδώ και στο εξής $\nabla^f = \overline{\nabla}$.

Ορισμός 1.2.2. Έστω $(M, \langle ., .\rangle)$ και N^3 πολυπτύγματα Riemann διάστασης 2 και 3 αντίστοιχα. Μια διαφορίσιμη απεικόνιση $f : M \to N^3$ καλείται *ισομετρική εμβάπτιση* αν για κάθε $p \in M$ ισχύουν:

(i) Το διαφορικό $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N^3$ είναι 1-1 και

(ii) $\langle df_p(v), df_p(w)\rangle_{f(p)} = \langle v, w\rangle_p$, για κάθε $v, w \in T_pM$.

Ορισμός 1.2.3. Δύο ισομετρικές εμβαπτίσεις $f, g : M \to N^3$ καλούνται *γεωμετρικώς ισότιμες (congruent)*, αν υπάρχει ισομετρία τ του N^3, τέτοια ώστε $g = \tau \circ f$.

Έστω $f : (M, \langle ., .\rangle) \to N^3$ μια ισομετρική εμβάπτιση. Για κάθε $p \in M$, ο εφαπτόμενος χώρος $T_{f(p)}N^3$ αναλύεται σε ορθογώνιο ευθύ άθροισμα

$$T_{f(p)}N^3 = df_p(T_pM) \oplus (df_p(T_pM))^\perp,$$

όπου $(df_p(T_pM))^\perp$ είναι το ορθοσυμπλήρωμα του διδιάστατου υποχώρου $df_p(T_pM)$ στον τριδιάστατο χώρο $T_{f(p)}N^3$. Ο διανυσματικός χώρος $(df_p(T_pM))^\perp$ καλείται κάθετος χώρος της εμβάπτισης f στο σημείο p και συμβολίζεται με $T^\perp_p f$.

Ένα *κάθετο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο* της f, είναι ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $\xi : M \to N^3$ κατά μήκος της f, τέτοια ώστε για τυχαίο σημείο $p \in M$ να ισχύει $\xi_p \in T_p^\perp f$ για κάθε $p \in M$.

Συμβολίζουμε με $\mathfrak{X}^\perp(f)$ το σύνολο των κάθετων διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων της f. Γνωρίζουμε ότι αν το N^3 είναι προσανατολίσιμο πολύπτυγμα, τότε το διαφορίσιμο πολύπτυγμα M είναι προσανατολίσιμο μόνο αν υπάρχει μοναδιαίο κάθετο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο ξ της f.

Κάθε διάνυσμα $v \in T_{f(p)}N^3$ αναλύεται μονοσήμαντα ως εξής,

$$v = df_p(v^\perp) + df_p(v^\top),$$

όπου $v^\top \in T_pM$ και $v^\perp \in T_p^\perp f$. Ως συνέπεια έχουμε ότι για κάθε $X \in \mathfrak{X}(f)$, υπάρχουν μοναδικά διανυσματικά πεδία $X^\top \in \mathfrak{X}(M)$ και $X^\perp \in \mathfrak{X}(f)$, τέτοια ώστε

$$X = df(X^\top) + X^\perp.$$

Για τυχόντα $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ έχουμε,

$$\overline{\nabla}_X df(Y) = df((\overline{\nabla}_X df(Y))^\top) + (\overline{\nabla}_X df(Y))^\perp, \tag{1.3}$$

όπου $(\overline{\nabla}_X df(Y))^\top \in \mathfrak{X}(M)$ και $(\overline{\nabla}_X df(Y))^\perp \in \mathfrak{X}(f)$. Είναι γνωστό ότι

$$(\overline{\nabla}_X df(Y))^\top = \nabla_X Y,$$

όπου ∇ είναι η συνοχή Levi-Civitá του πολυπτύγματος Riemann M.

Ορίζουμε τώρα την παρακάτω C^∞-διγραμμική και συμμετρική απεικόνιση

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^\perp(f)$$

$$(X, Y) \mapsto \alpha(X, Y) := (\overline{\nabla}_X df(Y))^\perp.$$

Η απεικόνιση α ονομάζεται *δεύτερη θεμελιώδης μορφή* της εμβάπτισης f. Σύμφωνα με τα παραπάνω η σχέση (1.3) λαμβάνει την μορφή

$$\overline{\nabla}_X df(Y) = df(\nabla_X Y) + \alpha(X, Y),$$

η οποία καλείται τύπος του Gauss.

Για $X \in \mathfrak{X}(M)$ και $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(f)$ με $\|\xi\| = 1$, ισχύει

$$\overline{\nabla}_X \xi = df((\overline{\nabla}_X \xi)^\top), \tag{1.4}$$

όπου $(\overline{\nabla}_X\xi)^\top \in \mathfrak{X}(M)$.

Το τανυστικό πεδίο $A_\xi : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ τύπου (1,1) που ορίζεται ως εξής

$$X \mapsto A_\xi X := (\overline{\nabla}_X\xi)^\top,$$

καλείται *τελεστής Weingarten* ή *τελεστής σχήματος* της f ως προς τη διεύθυνση του ξ. Τότε ισχύει,

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle,$$

για κάθε $X, Y\mathfrak{X}(M)$. Γνωρίζουμε ότι ο A είναι ένα αυτοπροσαρτημένο τανυστικό πεδίο, δηλαδή, ισχύει $\langle AX, Y\rangle = \langle X, AY\rangle$, για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Το τανυστικό πεδίο II τύπου (2,0) με $II(X,Y) = \langle A_\xi X, Y\rangle$ καλείται *δεύτερη θεμελιώδη μορφή στη διεύθυνση* ξ. Χάριν συντομίας θα γράφουμε $A_\xi = A$.

Οι ιδιοτιμές $k_1 \geq k_2$ του τελεστή σχήματος A ονομάζονται *κύριες καμπυλότητες* της f, ενώ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα σε κάθε σημείο $p \in M$ ονομάζονται *κύριες διευθύνσεις* της f στο p. Είναι γνωστό ότι οι κύριες καμπυλότητες $k_1 \geq k_2$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Η *μέση καμπυλότητα* της εμβάπτισης f είναι η συνάρτηση

$$H = \frac{trA}{2} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Η *εξωτερική καμπυλότητα* της εμβάπτισης f είναι η συνάρτηση

$$K_{ext} = detA = k_1k_2.$$

Έστω χάρτης (U,ϕ) του διδιάστατου πολυπτύγματος M, με συντεταγμένες (x^1, x^2). Ορίζουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις,

$$E = \langle\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^1}\rangle = g_{11}$$

$$F = \langle\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\rangle = \langle\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^1}\rangle = g_{12}$$

$$G = \langle\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^2}\rangle = g_{22},$$

οι οποίες *ονομάζονται θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης* ως προς το χάρτη (U,ϕ).

Επίσης ορίζουμε τις συναρτήσεις,

$$e = II(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^1})$$

$$f = II(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}) = II(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^1})$$

$$g = II(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^2}),$$

οι οποίες ονομάζονται *θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης* ως προς το χάρτη (U, ϕ).

Είναι γνωστό ότι η μέση καμπυλότητα και η εξωτερική καμπυλότητα δίνονται αντίστοιχα ως,

$$H = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2(EG - F^2)},\ K_{ext} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \tag{1.5}$$

1.3 Επιφάνειες Riemann

Ορισμός 1.3.1. Μια *επιφάνεια Riemann* M, είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff με αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του ο οποίος πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες,

(i) Υπάρχει οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ του M, τέτοια ώστε $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$ και αντίστοιχων ομοιομορφισμών $\phi_\alpha : U_\alpha \subset M \to \phi_\alpha(U_\alpha)$, όπου $\phi_\alpha(U_a)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του σώματος $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. Το ζεύγος (U_a, ϕ_α) ονομάζεται *μιγαδικός χάρτης* ή *σύστημα συντεταγμένων* του M.

(ii) Για κάθε $\alpha, \beta \in I$, με $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, η μιγαδική απεικόνιση $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C} \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη.

(iii) Η οικογένεια μιγαδικών χαρτών $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ είναι μεγιστοτική, δηλαδή αν (U, ϕ) είναι ένας μιγαδικός χάρτης τέτοιος ώστε $\phi \circ \phi_\alpha^{-1}$, $\phi_\alpha \circ \phi^{-1}$ να είναι ολόμορφες για κάθε $\alpha \in I$, τότε ο (U, ϕ) ανήκει στην οικογένεια $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$.

Αν μια οικογένεια $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ πληροί τις ιδότητες (i) και (ii) καλείται *μιγαδικός άτλαντας του* M, αν επιπλέον ισχύει και η ιδιότητα (iii) τότε η οικογένεια αυτή *καλείται μιγαδική δομή του* M.

Ορισμός 1.3.2. Έστω M επιφάνεια Riemann και ανοικτό υποσύνολο $W \subset M$. Μια συνάρτηση $f : W \to \mathbb{C}$ λέγεται ολόμορφη αν για κάθε μιγαδικό χάρτη $\phi : U \to \mathbb{C}$ του M με $U \cap W \neq \emptyset$, η συνάρτηση $f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap W) \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη επί του ανοικτού συνόλου $\phi(U \cap W) \subset \mathbb{C}$.

Πρόταση 1.3.1. *Κάθε επιφάνεια Riemann M είναι ένα προσανατολίσιμο διδιάστατο πολύπτυγμα.*

Απόδειξη. Έστω M μια επιφάνεια Riemann και (U, ϕ), (V, ψ) δύο μιγαδικοί χάρτες του M με συντεταγμένες $(x, y), (u, v)$ αντίστοιχα και $U \cap V \neq \emptyset$. Από τον Ορισμό 1.3.1 έχουμε ότι η απεικόνιση $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$, με $\psi \circ \phi^{-1}(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = u(x, y) + iv(x, y)$, είναι ολόμορφη. Δηλαδή είναι διαφορίσιμη και ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$. Η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα της $\psi \circ \phi^{-1}$ είναι $\det d(\psi \circ \phi^{-1}) = u_x^2 + u_y^2 > 0$. Συνεπώς το M είναι προσανατολίσιμο. □

Πρόταση 1.3.2. *Κάθε προσανατολισμένο διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann γίνεται κατά φυσικό τρόπο επιφάνεια Riemann.*

Απόδειξη. Έστω $(M, \langle , \rangle)$ διδιάστατο προσανατολίσιμο διαφορίσιμο πολύπτυγμα Riemann. Γνωρίζουμε ότι [4] γύρω από κάθε σημείο του πολυπτύγματος υπάρχει ένα σύστημα ισόθερμων συντεταγμένων. Έστω $p \in M$. Θεωρούμε γύρω από το p χάρτες (U, ϕ) και (V, ψ) του προσανατολισμού με συντεταγμένες (x, y) και (u, v) αντίστοιχα, ώστε

$$\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle = 0, \ \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle = E \tag{1.6}$$

$$\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle = 0, \ \langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle = \tilde{E} \tag{1.7}$$

Στο ανοικτό και μη κενό σύνολο $U \cap V$ ισχύει,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}, \ \ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v}.$$

Επομένως από τις σχέσεις (1.6) και (1.7) έχουμε,

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \frac{E}{\tilde{E}}, \ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \frac{E}{\tilde{E}}.$$

Εφόσον οι χάρτες (U, ϕ) και (V, ψ) ανήκουν στον ίδιο προσανατολισμό, η απεικόνιση $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ έχει θετική Ιακωβιανή ορίζουσα, δηλαδή,

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} > 0.$$

Έτσι από τα παραπάνω έχουμε $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$. Άρα, η απεικόνιση $\psi \circ \phi^{-1}$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann. Επομένως η $\psi \circ \phi^{-1}$ είναι ολόμορφη και έτσι το M καθίσταται επιφάνεια Riemann. □

Από εδώ και στο εξής όταν αναφερόμαστε σε έναν μιγαδικό χάρτη (U, z) με μιγαδική συντεταγμένη $z = x + iy$ θα εννοούμε έναν χάρτη (U, ϕ) του ίδιου προσανατολισμού του M με συντεταγμένες (x, y) έτσι ώστε

$$\langle\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\rangle = 0,\ \langle\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\rangle = \langle\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\rangle = E,$$

ή ισοδύναμα η μετρική Riemann στο U γράφεται στη μορφή

$$\langle.,.\rangle = E(dx^2 + dy^2) = E|dz|^2.$$

Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε διδιάστατο προσανατολίσιμο πολύπτυγμα Riemann M, ορίζεται ένα τανυστικό πεδίο $J : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ τύπου (1,1), τέτοιο ώστε για κάθε $p \in M$, η απεικόνιση $J_p : T_pM \to T_pM$ είναι η στροφή κατά γωνία $\pi/2$. Το τανυστικό πεδίο J καλείται σχεδόν μιγαδική δομή του M. Από εδώ και στο εξής όταν αναφερόμαστε σε επιφάνεια Riemann, θα εννοούμε ζεύγος (M, J), αποτελούμενο από ένα συνεκτικό και προσανατολισμένο διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann, μαζί με την σχεδόν μιγαδική δομή J επ΄ αυτού.

Ο εφαπτόμενος χώρος του πολυπτύγματος M μπορεί να γίνει διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$, ορίζοντας το βαθμωτό πολλαπλασιασμό ως

$$(\lambda + i\mu)v = \lambda v + \mu Jv,$$

για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $v \in T_pM$. Έτσι ορίζεται ο μιγαδικοποιημένος εφαπτόμενος χώρος $T_pM^{\mathbb{C}}$ και αντίστοιχα η μιγαδοποιημένη εφαπτόμενη δέσμη $TM^{\mathbb{C}}$. Ακόμη επεκτείνουμε $\mathbb{C}$-γραμμικά τη σχεδόν μιγαδική δομή J στον $\mathbb{C}$-διανυσματικό χώρο $TpM^{\mathbb{C}}$. Δηλαδή για κάθε $p \in M$ έχουμε την απεικόνιση

$$J_p : T_pM^{\mathbb{C}} \to T_pM^{\mathbb{C}}$$

ώστε

$$J(v + iw) = Jv + iJw.$$

Οι ιδιοτιμές της σχεδόν μιγαδικής δομής J είναι οι μιγαδικόι αριθμοί $i, -i$. Ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή i είναι:

$$T_pM^{(1,0)} = \{v - iJv : v \in T_pM\},$$

ενώ ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $-i$ είναι:

$$T_pM^{(0,1)} = \{v + iJ_v : v \in T_pM\}.$$

Σε κάθε σημείο του M ισχύει ότι

$$T_pM^{\mathbb{C}} = T_pM^{(1,0)} \oplus T_pM^{(0,1)}.$$

Η μιγαδοποιημένη εφαπτόμενη δέσμη $TM^{\mathbb{C}}$ διασπάται ανάλογα ως

$$TM^{\mathbb{C}} = TM^{(1,0)} \oplus TM^{(0,1)}.$$

Το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων της δέσμης $TM^{\mathbb{C}}$ συμβολίζεται με $\Gamma(TM^{\mathbb{C}})$, ενώ το σύνολο των διαφορίσιμων συναρτήσεων $f : M \to \mathbb{C}$, συμβολίζεται με $\mathbb{C}^{\infty}(M, \mathbb{C})$.

Ορισμός 1.3.3. Ένα μιγαδικό τανυστικό πεδίο τύπου $(r,1)$ του M είναι μια απεικόνιση

$$T : \underbrace{\Gamma(TM^{\mathbb{C}}) \times \cdots \times \Gamma(TM^{\mathbb{C}})}_{r} \to \Gamma(TM^{\mathbb{C}}),$$

η οποία είναι $\mathbb{C}^{\infty}(M, \mathbb{C})$-γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της. Ένα μιγαδικό τανυστικό πεδίο τύπου $(r, 0)$ είναι μια απεικόνιση

$$T : \underbrace{\Gamma(TM^{\mathbb{C}}) \times \cdots \times \Gamma(TM^{\mathbb{C}})}_{r} \to \mathbb{C}^{\infty}(M, \mathbb{C}),$$

η οποία είναι $\mathbb{C}^{\infty}(M, \mathbb{C})$-γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της.

Ορίζουμε τώρα τις ακόλουθες προβολές

$$\pi' : TM^{\mathbb{C}} \to TM^{(1,0)}, \ \pi'(w) = \frac{1}{2}(w - iJw),$$

$$\pi'' : TM^{\mathbb{C}} \to TM^{(0,1)}, \ \pi''(w) = \frac{1}{2}(w + iJw).$$

Για κάθε $w \in T_pM^{\mathbb{C}}$ ισχύει $w = \pi'(w) + \pi''(w)$. Συνεπώς για κάθε τανυστικό πεδίο Φ τύπου (2,0) και τυχαία διανύσματα $v, w \in T_pM^{\mathbb{C}}$ θα έχουμε,

$$\begin{aligned}\Phi(v,w) &= \Phi(\pi'(v) + \pi''(v), \pi'(w) + \pi''(w)) \\ &= \Phi(\pi'(v), \pi'(w)) + \Phi(\pi'(v), \pi''(w)) \\ &\quad + \Phi(\pi''(v), \pi'(w)) + \Phi(\pi''(v), \pi''(w)).\end{aligned}$$

Συνεπώς ισχύει

$$\Phi = \Phi^{(2,0)} + \Phi^{(1,1)} + \Phi^{(0,2)},$$

όπου τα τανυστικά πεδία $\Phi^{(2,0)}, \Phi^{(1,1)}, \Phi^{(0,2)}$ ορίζονται ως εξής

$$\begin{aligned}\Phi^{(2,0)}(v,w) &= \Phi(\pi'(v), \pi'(w)) \\ \Phi^{(1,1)}(v,w) &= \Phi(\pi'(v), \pi''(w)) + \Phi(\pi''(v), \pi'(w)) \\ \Phi^{(0,2)}(v,w) &= \Phi(\pi''(v), \pi''(w)).\end{aligned}$$

Ορισμός 1.3.4. Έστω T, S δύο μιγαδικά τανυστικά πεδία του M τύπου $(r,0), (s,0)$ αντίστοιχα. Το τανυστικό γινόμενο $T \otimes S$ είναι το $(r+s, 0)$ τανυστικό πεδίο που ορίζεται ως

$$T \otimes S(X_1, \ldots, X_{r+s}) = T(X_1, \ldots, X_r)S(X_{r+1}, \ldots, X_{X_s}),$$

με $X_1, \ldots, X_{r+s} \in \Gamma(TM^{\mathbb{C}})$.

Έστω M ένα προσανατολίσιμο πολύπτυγμα και (U, z) ένας μιγαδικός χάρτης με μιγαδική συντεταγμένη $z = x + iy$. Στο U ορίζονται τα (1,0)-τανυστικά πεδία $dx, dy : \mathfrak{X}(U) \to C^\infty(U)$ τα οποία τα επεκτείνουμε σε μιγαδικά τανυστικά πεδία $\mathbb{C}$, ώστε $dx, dy : \Gamma(TU) \to \mathbb{C}^\infty(U, \mathbb{C})$.

Ορίζουμε τώρα το (1,0)-τανυστικό πεδίο $dz : \Gamma(TU^{\mathbb{C}}) \to \mathbb{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ με $dz = dx + idy$ και το συζυγές του $d\bar{z} : \Gamma(TU^{\mathbb{C}}) \to \mathbb{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ με $d\bar{z} = dx - idy$.

Οι τελεστές $Wirtinger$ ορίζονται ως

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}), \;\; \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}).$$

Παρατηρούμε ότι ισχύουν τα εξής:

$$dz(\frac{\partial}{\partial z}) = 1, dz(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) = 0, d\bar{z}(\frac{\partial}{\partial z}) = 0, d\bar{z}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) = 1.$$

Τα διανύσματα $\frac{\partial}{\partial z}|_p, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}|_p$ αποτελούν βάση του μιγαδικοποιημένου εφαπτόμενου χώρου $T_pM^{\mathbb{C}}$ για κάθε $p \in M$. Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial z}|_p \in T_p^{(1,0)}M, \;\; \frac{\partial}{\partial \bar{z}}|_p \in T_p^{(1,0)}M.$$

Κάθε (1,0) μιγαδικό τανυστικό πεδίο Φ γράφεται ως,

$$\Phi = \Phi^{(1,0)} + \Phi^{(0,1)},$$

με

$$\Phi^{(1,0)} = \Phi(\frac{\partial}{\partial z})dz, \Phi^{(0,1)} = \Phi(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})d\bar{z}.$$

Επιπλέον κάθε (2,0) μιγαδικό τανυστικό πεδίο Φ γράφεται ως

$$\Phi = \Phi^{(2,0)} + \Phi^{(1,1)} + \Phi^{(0,2)}$$

με

$$\Phi^{(2,0)} = \Phi(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})dz,$$
$$\Phi^{(1,1)} = \Phi(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}})dz \otimes d\bar{z} + \Phi(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial z})d\bar{z} \otimes dz,$$
$$\Phi^{(0,2)} = \Phi(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}})d\bar{z}.$$

Κάθε τανυστικό πεδίο Φ τύπου $(r, 0)$ καλείται r-*διαφορικό* αν τοπικά γράφεται ως

$$\Phi = f(z)\underbrace{dz \otimes \cdots \otimes dz}_{r} = f(z)dz^r,$$

όπου (U, z) είναι μιγαδικός χάρτης και $f \in C^\infty(U, \mathbb{C})$.

Το r-διαφορικό $\Phi = f(z)dz^r$ καλείται *ολόμορφο*, αν η συνάρτηση f είναι ολόμορφη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ζευγη Codazzi και διαφορικο του Hopf

Έστω $\mathbb{M}^3(c)$ ένα απλά συνεκτικό και πλήρες 3-άστατο πολύπτυγμα Riemann με σταθερή καμπυλότητα τομής $c = -1, 0, 1$. Ο χώρος μορφής $\mathbb{M}^3(c)$ είναι ο υπερβολικός χώρος $\mathbb{H}^3$ αν $c = -1$, ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^3$ αν $c = 0$, ή η μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^3$ αν $c = 1$.

Θεωρούμε μια ισομετρική εμβάπτιση $f : (\Sigma, \langle ., . \rangle) \to \mathbb{M}^3(c)$, όπου Σ είναι μια επιφάνεια Riemann εφοδιασμένη με την επαγώμενη μετρική $\langle ., . \rangle$ και πρώτη θεμελιώδη μορφή I.

Έστω N το μοναδιαίο κάθετο κατά μήκος της Σ που είναι συμβατό με τον προσανατολισμό.

Γνωρίζουμε ότι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή II δίνεται ως

$$II(X, Y) = -\langle \bar{\nabla}_X N, df(Y) \rangle, X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma),$$

όπου $\bar{\nabla}$ είναι η συνοχή της Πρότασης 1.2.1.

Συμβολίζουμε με K την καμπυλότητα Gauss του πολυπτύγματος $(\Sigma, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, είναι γνωστό ότι η εμβάπτιση $f : \Sigma \to \mathbb{M}^3(c)$ ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις:

Εξίσωση Gauss: $K = K_{ext} + c$.

Εξίσωση Mainardi - Codazzi: $(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X$, για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, όπου ∇ είναι η συνοχή Levi - Civita του πολυπτύγματος $(\Sigma, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Το Θεώρημα Bonnet υποστηρίζει ότι αν $(\Sigma, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένα απλά συνεκτικό πολύπτυγμα Riemann και A αυτοπροσαρτημένο (1,1) τανυστικό πεδίο του Σ, οι εξισώσεις Gauss και Mainardi-Codazzi επαρκούν για την ύπαρξη μιας εμβάπτισης $\psi : (\Sigma, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to \mathbb{M}^3(c)$, με τελεστή σχήματος το δοθέντα A. Επιπλέον αυτή η εμβάπτιση είναι μοναδική ως προς γεωμετρική ισοτιμία.

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση Mainardi-Codazzi δεν εξαρτάται από τον περιβάλλοντα χώρο.

2.1 Θεμελιώδη ζεύγη

Στην ενότητα αυτή ορίζουμε την εξωτερική και μέση καμπυλότητα σε ένα ευρύτερο πλαίσιο.

Ορισμός 2.1.1. Ένα *θεμελιώδες ζεύγος* σε μια προσανατολισμένη επιφάνεια Σ είναι ένα ζεύγος πραγματικών τετραγωνικών μορφών (I, II) στην επιφάνεια Σ, όπου I είναι μια μετρική Riemann.

Για κάθε θεμελιώδες ζεύγος (I, II) ορίζουμε τον τελεστή σχήματος A του ζεύγους ως το (1,1) τανυστικό πεδίο A για το οποίο ισχύει

$$II(X, Y) = I(AX, Y) \tag{2.1}$$

για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Από τη σχέση (2.1) γίνεται σαφές ότι η τετραγωνική μορφή II καθορίζεται πλήρως από την τετραγωνική μορφή I και το τανυστικό πεδίο A. Άρα ένα θεμελιώδες ζεύγος στο πολύπτυγμα Σ ορίζεται από μια μετρική Riemann στο πολύπτυγμα Σ και ένα αυτοπροσαρτημένο τανυστικό πεδίο τύπου (1,1).

Ορίζουμε τη μέση καμπυλότητα, την εξωτερική καμπυλότητα του ζεύγους (I, II) αντίστοιχα ως τις συναρτήσεις

$$H = \frac{1}{2} trA, \; K_{ext} = \det A.$$

Έστω (U, ϕ) χάρτης του πολυπτύγματος Σ με συντεταγμένες (x, y) ώστε

$$I = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2, \; II = edx^2 + 2fdxdy + gdy^2. \tag{2.2}$$

Τότε η μέση καμπυλότητα και η εξωτερική καμπυλότητα του ζεύγους δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$H = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2(EG - F^2)}, \; K = \frac{eg - f^2}{(EG - F^2)}. \tag{2.3}$$

Οι κύριες καμπυλότητες ενός ζεύγους είναι οι ιδιοτιμές $k_1 \geq k_2$ του τανυστικού πεδίου A. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \; k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}.$$

Ορισμός 2.1.2. Το ζεύγος (I, II) καλείται ομφαλικό στο σημείο $p \in \Sigma$ αν ισχύει $II_p = \lambda Id_p$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 2.1.1. *Έστω $p \in \Sigma$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το ζεύγος (I, II) είναι ομφαλικό στο p.

(ii) Οι κύριες καμπυλότητες είναι ίσες στο p.

(iii) $A_p = \lambda Id_p$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $Id : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$ είναι ταυτοτική απεικόνιση.

(iv) Αν $(H^2 - K)(p) = 0$.

Απόδειξη. Από τον Ορισμό 2.1.3 το σημείο p είναι ομφαλικό αν

$$II_p = \lambda Id_p,$$

ή ισοδύναμα $A_p = \lambda Id_p$. Με τη σειρά του αυτό είναι ισοδύναμο με την ισότητα $k_1(p) = k_2(p)$, ή $(H^2 - K)(p) = 0$. □

2.2 Διαφορικό του Hopf και ζεύγη Codazzi

Ορίζουμε το διαφορικό Hopf ενός θεμελιώδους ζεύγους (I, II) ως το (2,0) μέρος του τανυστικού πεδίου II ως προς τη μετρική Riemann I.

Θεωρούμε σύστημα ισόθερμων συντεταγμένων (U, ϕ) γύρω από το p, με μιγαδική συντεταγμένη $z = x + iy$. Τότε η μετρική γράφεται $\langle \cdot, \cdot \rangle = E(dx^2 + dy^2) = E|dz|^2$.

Επεκτείνουμε $\mathbb{C}$-γραμμικά την δεύτερη θεμελιώδη μορφή $II_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ ως μια $\mathbb{C}$-διγραμμική και συμμετρική απεικόνιση $II_p : T_pM^{\mathbb{C}} \times T_pM^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$.

Αυτή η επέκταση αναλύεται ως

$$II_p = II_p^{(2,0)} + II_p^{(1,1)} + II_p^{(0,2)},$$

για κάθε $p \in M$, όπου

$$II_p^{(2,0)}(v, w) = II_p(\pi'(v), \pi'(w)),$$

$$II_p^{(1,1)}(v, w) = II_p(\pi'(v), \pi''(w)) + II_p(\pi''(v), \pi'(w)),$$

$$II_p^{(0,2)}(v,w) = II_p(\pi''(v), \pi''(w)),$$

για τυχόντα διανύσματα $v, w \in T_pM^{\mathbb{C}}$. Χάριν απλότητας συμβολίζουμε τους τελεστές Wirtinger $\partial = \partial/\partial z$, $\bar{\partial} = \partial/\partial \bar{z}$. Έτσι εντός του U είναι:

$$II^{(2,0)} = II(\partial, \partial) dz \times dz = II(\partial, \partial) dz^2,$$

$$II^{(1,1)} = II(\partial, \bar{\partial}) dz \otimes d\bar{z} + II(\bar{\partial}, \partial,) d\bar{z} \otimes dz,$$

$$II^{(0,2)} = II(\bar{\partial}, \bar{\partial}) d\bar{z} \times d\bar{z} = II(\bar{\partial}, \bar{\partial}) d\bar{z}^2.$$

Ορισμός 2.2.1. Το τετραγωνικό διαφορικό $Q = II^{(2,0)}$ καλείται *διαφορικό του Hopf*.

Θα γράφουμε συνήθως $Q = qdz^2$, όπου $q = II(\partial, \partial)$.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίσαμε τους τελεστές Wirtinger $\{\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\}$, οι οποίοι αποτελούν βάση του εφαπτόμενου χώρου $(T_pM)^{\mathbb{C}}$ για κάθε $p \in U$.

Επίσης για το ίδιο σύστημα συντεταγμένων έχουμε ότι:

$$I = 2\lambda |dz|^2, \; II = qdz^2 + 2\lambda H |dz|^2 + \bar{q} d\bar{z}^2, \tag{2.4}$$

όπου $\lambda = E/2$. Πράγματι, αφού

$$H = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2(EG - F^2)}$$

και λόγω της σχέσης (2.4) έχουμε ότι $H = f/\lambda$, ή ισοδύναμα $f = \lambda H$. Συνεπώς έχουμε,

$$II = qdz^2 + 2\lambda H |dz|^2 + \bar{q} d\bar{z}^2.$$

Πρόταση 2.2.1. *Το διαφορικό του Hopf qdz^2 δεν εξαρτάται από την επιλεγμένη παράμετρο z.*

Απόδειξη. Έστω ότι $z = x + iy$. Τότε $dz = dx + idy$. Έστω μια άλλη παράμετρος $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$. Τότε έχουμε ότι

$$\partial_{\tilde{z}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial z}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial \tilde{z}} \partial_z.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} II^{(2,0)} &= II(\partial_{\tilde{z}}, \partial_{\tilde{z}})d\tilde{z}^2 \\ &= II(\frac{\partial z}{\partial \tilde{z}}\partial_z, \frac{\partial z}{\partial \tilde{z}}\partial_z)d\tilde{z}^2 \\ &= \frac{\partial z}{\partial \tilde{z}} II(\partial_z, \partial_z)d\tilde{z}^2 \\ &= II(\partial_z, \partial_z)dz^2. \end{aligned}$$

Άρα το διαφορικό του Hopf qdz^2 δεν εξαρτάται από την επιλεγμένη παράμετρο. □

Λήμμα 2.2.1. *Το θεμελιώδες ζεύγος (I, II) είναι ομφαλικό στο σημείο $p \in \Sigma$ αν και μόνο αν $Q(p) = 0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το θεμελιώδες ζεύγος (I, II) είναι ομφαλικό στο $p \in \Sigma$. Τότε από Πρόταση 2.1.1 έχουμε $(H^2 - K)(p) = 0$.

Όμως στο σημείο p ισχύει,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{|q|^2 - \lambda^2 H^2}{\lambda^2},$$

ή ισοδύναμα,

$$2H^2 + |q|^2 = 0,$$

στο p. Άρα, $H = 0$ και $|q| = 0$. Αφού $Q(p) = q(p)dz^2$ και $q(p) = 0$, έχουμε $Q(p) = 0$. □

Ορισμός 2.2.2. Ένα θεμελιώδες ζεύγος (I, II) με τελεστή σχήματος A, καλείται ζεύγος Codazzi αν ισχύει

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X,$$

για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, όπου ∇ είναι η συνοχή Levi - Civitá ως προς τη μετρική Riemann I.

Λήμμα 2.2.2. *Έστω (I, II) θεμελιώδες ζεύγος με τελεστή σχήματος A και (U, ϕ) ισόθερμο σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους (x, y), $z = x + iy$ και $I = 2\lambda|dz|^2$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $\langle \partial, \partial \rangle = \langle \bar{\partial}, \bar{\partial} \rangle = 0$, $\langle \partial, \bar{\partial} \rangle = \lambda$,

(ii) $A\partial = H\partial + \frac{q}{\lambda}\bar{\partial}$,

(iii) $\nabla_{\partial}\partial = \frac{\lambda_z}{\lambda}\partial$ *και* $\nabla_{\bar{\partial}}\bar{\partial} = \frac{\lambda_{\bar{z}}}{\lambda}\bar{\partial}$.

Απόδειξη. (i). Γνωρίζουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}), \ \ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}).$$

Επίσης, από τη σχέση (2.4) έχουμε,

$$\langle \partial_x, \partial_x \rangle = \langle \partial_y, \partial_y \rangle = 2\lambda, \ \langle \partial_x, \partial_y \rangle = 0.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\langle \partial, \partial \rangle &= \frac{1}{4}\langle \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} \rangle \\ &= \frac{1}{4}\{\langle \partial x, \partial x \rangle - 2i\langle \partial x, \partial y \rangle - \langle \partial y, \partial y \rangle\} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Προφανώς $\langle \bar{\partial}, \bar{\partial} \rangle = 0$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned}\langle \partial, \bar{\partial} \rangle &= \frac{1}{4}\langle \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} \rangle \\ &= \frac{1}{4}\{\langle \partial x, \partial x \rangle + \langle \partial y, \partial y \rangle\} \\ &= \lambda.\end{aligned}$$

(ii). Υπάρχουν μιγαδικές συναρτήσεις $a, b \in \mathbb{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ ώστε

$$A\partial = a\partial + b\bar{\partial}$$

και άρα

$$A\bar{\partial} = \bar{a}\bar{\partial} + \bar{b}\partial.$$

Επιπλέον η μιγαδική συνάρτηση q γράφεται ως

$$q = \langle A\partial, \partial \rangle = \langle a\partial + b\bar{\partial}, \partial \rangle = a\langle \partial, \partial \rangle + b\langle \bar{\partial}, \partial \rangle.$$

Άρα από το (i) έχουμε $\langle A\partial, \partial \rangle = b\lambda$. Συνεπώς, $q = b\lambda$.

Επιπλέον έχουμε

$$\langle A\partial, \bar{\partial} \rangle = a\langle \partial, \bar{\partial} \rangle + b\langle \bar{\partial}, \bar{\partial} \rangle,$$

ή ισοδύναμα $\langle A\partial, \bar{\partial}\rangle = a\lambda$. Επομένως

$$\begin{aligned}\langle A\partial, \bar{\partial}\rangle &= \frac{1}{4}\langle A\partial_x - iA\partial_y, \partial_x + i\partial_y\rangle \\ &= \frac{1}{4}\{\langle A\partial_x, \partial_y\rangle + i\langle A\partial_x, \partial_y\rangle - i\langle A\partial_y, \partial_x\rangle + \langle A\partial_y, \partial_y\rangle\} \\ &= \langle A\partial, \bar{\partial}\rangle = \frac{1}{4}\{\langle A\partial_x, \partial_x\rangle + \langle A\partial_y, \partial_y\rangle\} = \frac{1}{2}(e+g).\end{aligned}$$

Από σχέση (2.4) έχουμε,

$$H = \frac{\langle A\partial, \bar{\partial}\rangle}{\lambda},$$

ή ισοδύναμα,

$$\langle A\partial, \bar{\partial}\rangle = \lambda H.$$

Επειδή $\langle A\partial, \bar{\partial}\rangle = a\lambda$, βρίσκουμε $a = H$. Επομένως,

$$A\partial = H\partial + \frac{q}{\lambda}\bar{\partial}.$$

(iii). Θέτουμε

$$\nabla_{\partial}\partial = u\partial + \hat{u}\bar{\partial}$$

Επειδή $\langle \bar{\partial}, \bar{\partial}\rangle = 0$, έχουμε

$$0 = \langle \hat{u}\bar{\partial}, \bar{\partial}\rangle = \langle u\partial + \hat{u}\bar{\partial} - u\partial, \bar{\partial}\rangle = \langle \nabla_{\partial}\partial, \bar{\partial}\rangle - \langle u\partial, \bar{\partial}\rangle,$$

ή ισοδύναμα

$$\langle \nabla_{\partial}\partial, \bar{\partial}\rangle = u\langle \partial, \bar{\partial}\rangle,$$

ή

$$\partial\langle \partial, \bar{\partial}\rangle - \langle \partial, \nabla_{\partial}\bar{\partial}\rangle = u\lambda.$$

Επομένως,

$$u\lambda = \lambda_z - \langle \partial, \nabla_{\bar{\partial}}\partial\rangle = \lambda_z - \frac{1}{2}\bar{\partial}\langle \partial, \partial\rangle.$$

Άρα, $u = \lambda_z/\lambda$. Αφού $0 = \langle \partial, \partial\rangle$, τότε

$$0 = u\langle \partial, \partial\rangle = \langle u\partial, \partial\rangle = \langle u\partial + \hat{u}\bar{\partial} - \hat{u}\bar{\partial}, \partial\rangle = \langle \nabla_{\partial}\partial - \hat{u}\bar{\partial}, \partial\rangle,$$

ή ισοδύναμα

$$\langle \nabla_{\partial}\partial, \partial\rangle = \hat{u}\langle \bar{\partial}, \partial\rangle,$$

ή

$$\frac{1}{2}\partial\langle \partial, \partial\rangle = \hat{u}\lambda.$$

Άρα, $\hat{u} = 0$ και επομένως

$$\nabla_\partial \partial = \frac{\lambda_z}{\lambda}.$$

Προφανώς

$$\nabla_{\bar\partial} \bar\partial = \frac{\lambda_{\bar z}}{\lambda} \bar\partial.$$

□

Πρόταση 2.2.2. *Έστω (I, II) ένα θεμελιώδες ζεύγος και έστω (U, ϕ) ισόθερμο σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους (x, y), $z = x+iy$ και $I = 2\lambda|dz|^2$. Τότε το ζεύγος (I, II) είναι ζεύγος Codazzi αν και μόνο αν $q_{\bar z} = \lambda H_z$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το ζεύγος (I, II) είναι ζεύγος Codazzi. Τότε

$$(\nabla_{\bar\partial} A)\partial = (\nabla_\partial A)\bar\partial,$$

ή

$$\nabla_{\bar\partial} A\partial - A(\nabla_\partial \partial) = \nabla_\partial A\bar\partial - A(\nabla_{\bar\partial} \partial),$$

ή ισοδύναμα, $\nabla_{\bar\partial} A\partial = \nabla_\partial A\bar\partial + A([\bar\partial, \partial])$. Άρα, $\nabla_{\bar\partial} A\partial = \nabla_\partial A\bar\partial$. Λόγω του Λήμματος 2.2.2 (ii) αυτή γράφεται,

$$\nabla_\partial (H\bar\partial + \bar b\partial) = \nabla_{\bar\partial}(H\partial + b\bar\partial),$$

όπου $b = q/\lambda$, ή

$$H_z\bar\partial + H\nabla_\partial\bar\partial + \bar b_z\partial + \bar b\nabla_\partial\partial = H_{\bar z}\partial + H\nabla_\partial\bar\partial + b_{\bar z}\bar\partial + b\nabla_{\bar\partial}\bar\partial,$$

ή

$$H_z\bar\partial + \bar b_z\partial + \bar b\nabla_\partial\partial = H_{\bar z}\partial + b_{\bar z}\bar\partial + b\nabla_{\bar\partial}\bar\partial. \tag{2.5}$$

Έτσι από το Λήμμα 2.2.2 η σχέση (2.5) γίνεται:

$$H_z\bar\partial + (\frac{\bar q}{\lambda})_z + \frac{\bar q}{\lambda}\frac{\lambda_z}{\lambda}\partial = H_{\bar z}\partial + (\frac{q}{\lambda})_{\bar z}\bar\partial + \frac{q}{\lambda}\frac{\lambda_{\bar z}}{\lambda}\bar\partial,$$

ή ισοδύναμα

$$H_z\bar\partial + \frac{\bar q_z\lambda - \bar q\lambda_z}{\lambda^2}\partial + \frac{\bar q}{\lambda}\frac{\lambda_z}{\lambda}\partial = H_{\bar z}\partial + \frac{q_{\bar z}\lambda - q\lambda_{\bar z}}{\lambda^2}\bar\partial + \frac{q}{\lambda}\frac{\lambda_{\bar z}}{\lambda}\bar\partial.$$

Συνεπώς, το ζεύγος είναι ζεύγος Codazzi αν και μόνο αν

$$H_z = \frac{q_{\bar z}}{\lambda} - \frac{q\lambda_z}{\lambda^2} + \frac{q\lambda_{\bar z}}{\lambda^2},$$

ή ισοδύναμα $q_{\bar z} = \lambda H_z$. □

Από την Πρόταση 2.2.2 προκύπτει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.2.3. *Το διαφορικό του Hopf είναι ολόμορφο αν και μόνο αν η μέση καμπυλότητα του είναι σταθερή.*

Θεώρημα 2.2.1. *(Hopf) Έστω (I, II) ένα ζεύγος Codazzi σε μια τοπολογική σφαίρα. Αν η μέση καμπυλότητα είναι σταθερή τότε το ζεύγος (I, II) είναι ολικά ομφαλικό.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι (I, II) είναι ένα ζεύγος Codazzi σταθερής μέσης καμπυλότητας H τότε από την Πρόταση 2.2.3 έχουμε ότι $q_{\bar{z}} = 0$, δηλαδή το διαφορικό του Hopf $Q = qdz^2$ είναι ολόμορφο. Από το Θεώρημα Riemann-Roch προκύπτει ότι σε μια τοπολογική σφαίρα το μόνο ολόμορφο τετραγωνικό διαφορικό είναι το τετριμμένο. Συνεπώς $Q = 0$ και άρα από Λήμμα 2.2.1 έχουμε ότι (I, II) είναι ολικά ομφαλικό. $\square$

Όταν αυτό το αποτέλεσμα εφαρμοστεί για ισομετρικές εμβαπτίσεις επιφανειών σε χώρο μορφής $\mathbb{M}^3(c)$ μας λέει ουσιαστικά ότι μια τοπολογική σφαίρα σταθερής μέσης καμπυλότητας στον $\mathbb{M}^3(c)$ πρέπει να είναι ολικά ομφαλική.

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο αξίζει να σημειωθεί ότι οι U. Abresch, H. Rosenberg ([1],[2]) έχουν επεκτείνει το θεώρημα του Hopf για επιφάνειες εμβαπτισμένες σε 3-διάστατα ομογενή πολυπτύγματα με 4-διάστατη ομάδα ισομετρίας. Ορίζουν αντίστοιχα ένα τετραγωνικό ολόμορφο διαφορικό, το οποίο τους επιτρέπει να χαρακτηρίζουν τις σφαίρες σταθερής μέσης καμπυλότητας, ως επιφάνειες εκ περιστροφής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Επιφανειες με θετικη σταθερη καμπυλοτητα Gauss

Έστω διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann Σ εφοδιασμένο με μια πλήρη μετρική Riemann I σταθερής καμπυλότητας Gauss $K > 0$. Είναι γνωστό ότι αν το πολύπτυγμα Σ είναι απλά συνεκτικό τότε το Σ είναι ισομετρικό με την συνήθη σφαίρα $\mathbb{S}^2(r)$ ακτίνας $r = 1/\sqrt{K}$.

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να αποδείξουμε το Θεώρημα του Liebmann που λέει ότι αν Σ ένα προσανατολίσιμο διδιάστατο πολύπτυγμα Riemann με σταθερή θετική καμπυλότητα Gauss και $\psi : \Sigma \to \mathbb{M}^3(c)$ είναι μια ισομετρική εμβάπτιση, τότε η εικόνα $\psi(\Sigma)$ είναι ολικά ομφαλική.

Αξίζει να τονιστεί ότι από την εξίσωση Gauss, μια επιφάνεια με σταθερή καμπυλότητα Gauss πρέπει να έχει και σταθερή εξωτερική καμπυλότητα. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ οι δύο αυτές καμπυλότητες συμπίπτουν, ενώ στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$ και στον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$ διαφέρουν κατά μια σταθερά. Επιπρόσθετα, αν η καμπυλότητα Gauss είναι θετική τότε η εξωτερική καμπυλότητα της επιφάνειας είναι επίσης θετική στον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$ και τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$. Ωστόσο, αν η καμπυλότητα Gauss K είναι θετική στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$, τότε η εξωτερική καμπυλότητα της επιφάνειας είναι θετική μόνο αν $K > 1$.

3.1 Το Θεώρημα του Liebmann

Θεώρημα 3.1.1. *Έστω (I, II) ένα ζεύγος Codazzi σε ένα διδιάστατο προσανατολίσιμο πολύπτυγμα Riemann Σ με θετική σταθερή εξωτερική καμπυλότητα. Τότε το τανυστικό πεδίο II είναι μια μετρική Riemann και το (2,0)-μέρος του I σε σχέση με τη μετρική Riemann II είναι ολόμορφη τετραγωνική μορφή. Επιπλέον, αν Σ είναι μια τοπολογική σφαίρα τότε το ζεύγος (I, II) είναι ολικά* *ομφαλικό.*

Απόδειξη. Από υπόθεση έχουμε ότι $K_{ext} = k_1 k_2 > 0$, όπου k_1, k_2 είναι οι κύριες καμπυλότητες του Σ. Μπορούμε να προσανατολίσουμε την επιφάνεια Σ ώστε $k_1, k_2 > 0$.

Ισχυρισμός 1 : Το τανυστικό πεδίο II με αυτόν τον προσανατολισμό είναι μετρική Riemann.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1: Γνωρίζουμε ότι $II(X, Y) = \langle AX, Y \rangle$, για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, όπου A είναι ο τελεστής σχήματος του ζεύγους (I, II). Έστω

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2,\ Y = y_1 e_1 + y_2 e_2,$$

όπου $\{e_1, e_2\}$ είναι ορθομοναδιαίο πλαίσιο ως προς τη μετρική I και $Ae_i = k_i e_i$, για $i = 1, 2$. Τότε

$$AX = k_1 x_1 e_1 + k_2 x_2 e_2,\ AY = k_1 y_1 e_1 + k_2 y_2 e_2.$$

Άρα,

$$\langle AX, Y \rangle = k_1 x_1 y_1 + k_2 x_2 y_2.$$

Παρατηρούμε ότι $\langle AX, X \rangle = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 \geq 0$, αφού $k_1, k_2 > 0$. Επιπλέον ισχύει $\langle AX, X \rangle = 0$ μόνο αν $x_1 = x_2 = 0$ και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του ισχυρισμού 1.

Έστω z μια τοπική σύμμορφη παράμετρος για την II. Τότε έχουμε (όμοια με την Ενότητα 2.2 του Κεφαλαίου 2) ότι

$$I = Pdz^2 + 2\lambda|dz|^2 + \bar{P}d\bar{z}^2,\ II = 2\rho|dz|^2.$$

Τα σύμβολα Christoffel της συνοχής Levi - Civitá της μετρικής Riemann I ως προς την παράμετρο z δίνονται από τις σχέσεις

$$\nabla_\partial \partial = \Gamma_{11}^1 \partial + \Gamma_{11}^2 \bar{\partial},\ \nabla_\partial \bar{\partial} = \Gamma_{12}^1 \partial + \Gamma_{12}^2 \bar{\partial}.$$

Θέτουμε $D = \lambda^2 - |P|^2$.

Ισχυρισμός 2: $\frac{D_z}{2D} = \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 2: Έχουμε

$$D_z = \partial(\lambda^2 - |P|^2) = 2\lambda\lambda_z - \partial(P\bar{P}),$$

ή

$$D_z = 2\lambda\lambda_z - P_z\bar{P} - P\bar{P}_z.$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned}\lambda_z &= \partial I(\partial, \bar{\partial}) = \partial\langle \partial, \bar{\partial}\rangle = \langle \nabla_\partial \partial, \bar{\partial}\rangle + \langle \partial, \nabla_\partial \bar{\partial}\rangle \\ &= \langle \Gamma^1_{11}\partial + \Gamma^2_{11}\bar{\partial}, \bar{\partial} + \langle \partial, \Gamma^1_{12}\partial + \Gamma^2_{12}\bar{\partial}\rangle \\ &= \Gamma^1_{11}\langle \partial, \bar{\partial}\rangle + \Gamma^2_{11}\langle \bar{\partial}, \partial\rangle + \Gamma^1_{12}\langle \partial, \partial\rangle + \Gamma^2_{12}\langle \partial, \bar{\partial}\rangle \\ &= (\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}) I(\partial, \bar{\partial}) + \Gamma^2_{12} I(\bar{\partial}, \bar{\partial}) + \Gamma^1_{12} I(\partial, \partial) \\ &= (\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12})\lambda + \Gamma^2_{12}\bar{P} + \Gamma^1_{12}P.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\lambda_z = (\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12})\lambda + \Gamma^2_{12}\bar{P} + \Gamma^1_{12}P.$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned}P_z &= \partial I(\partial, \partial) = \partial\langle \partial, \partial\rangle = 2\langle \nabla_\partial \partial, \partial\rangle = 2\langle \Gamma^1_{11}\partial + \Gamma^2_{11}\bar{\partial}, \partial\rangle \\ &= 2(\Gamma^1_{11}\langle \partial, \partial\rangle + \Gamma^2_{11}\langle \bar{\partial}, \partial\rangle).\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$P_z = 2(\Gamma^1_{11}P + \Gamma^2_{11}\lambda).$$

Ομοίως

$$\begin{aligned}\bar{P}_z &= \partial I(\bar{\partial}, \bar{\partial}) = \partial\langle \bar{\partial}, \bar{\partial}\rangle = 2\langle \nabla_\partial \bar{\partial}, \bar{\partial}\rangle = 2\langle \Gamma^1_{12}\partial + \Gamma^2_{12}\bar{\partial}, \bar{\partial}\rangle \\ &= 2(\Gamma^1_{12}\langle \partial, \bar{\partial}\rangle + \Gamma^2_{12}\langle \bar{\partial}, \bar{\partial}\rangle).\end{aligned}$$

Άρα $\bar{P}_z = 2(\Gamma^1_{12}\lambda + \Gamma^2_{12}\bar{P})$. Έχοντας υπόψη τους παραπάνω υπολογισμούς προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}D_z &= 2\lambda\lambda_z - P_z\bar{P} - P\bar{P}_z \\ &= 2\lambda\left((\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12})\lambda + \Gamma^2_{11}\bar{P} + \Gamma^1_{12}P\right) - 2\bar{P}(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{11}) - 2P(\Gamma^1_{12}\lambda + \Gamma^2_{12}\bar{P}) \\ &= (\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12})2\lambda^2 + 2\Gamma^2_{11}\bar{P}\lambda + 2\Gamma^1_{12}P\lambda - 2\Gamma^1_{11}P\bar{P} - 2\Gamma^2_{11}\bar{P}\lambda - 2P\Gamma^1_{12}\lambda \\ &\quad - 2\Gamma^2_{12}P\bar{P}.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$D_z = (\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12})2\lambda^2 - 2(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12})|P|^2 = 2(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12})D,$$

και έτσι αποδείξαμε τον ισχυρισμό 2.

Ισχυρισμός 3: $\frac{\rho_z}{\rho} = \Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{12}$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 3: Γνωρίζουμε ότι οι εξισώσεις Mainardi - Codazzi είναι:

$$e_{\bar{z}} - f_z = e\Gamma^1_{12} + f(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) - g\Gamma^2_{11}),$$
$$f_{\bar{z}} - g_z = e\Gamma^1_{22} + f(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12} - g\Gamma^2_{12}).$$

Όμως στην περίπτωσή μας έχουμε ότι $e = g = 0$ και $f = \rho$. Η πρώτη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται ως $\rho_z = \rho(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})$, και έτσι αποδείξαμε τον Ισχυρισμό 3.

Από τη δεύτερη σχέση στην (2.3) προκύπτει ότι

$$K_{ext} = \frac{-\rho^2}{P\bar{P} - \lambda^2},$$

ή ισοδύναμα

$$K_{ext} = \frac{\rho^2}{D}.$$

Επειδή K_{ext} είναι σταθερή, αν παραγωγίσουμε ως προς την μεταβλητή z έχουμε ότι

$$2\rho_z \rho D - \rho^2 D_z = 0,$$

ή

$$2\rho_z \rho D = \rho^2 D_z.$$

Άρα,

$$\frac{2\rho_z}{\rho} = \frac{D_z}{D}. \tag{3.1}$$

Ισχυρισμός 4 : $\Gamma^1_{12} = 0$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 4: Έχουμε ότι $\langle A\bar{\partial}, \bar{\partial}\rangle = 0$. Παραγωγίζουμε ως προς την μεταβλητή z και έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla_\partial A\bar{\partial}, \bar{\partial}\rangle + \langle A\bar{\partial}, \nabla_\partial \bar{\partial}\rangle = \langle (\nabla_\partial A)\partial + A\nabla_\partial \bar{\partial}, \bar{\partial}\rangle + \langle A\bar{\partial}, \nabla_\partial \bar{\partial}\rangle \\ &= \Gamma^1_{12}\langle A\partial, \bar{\partial}\rangle + \Gamma^1_{12}\langle A\bar{\partial}, \partial\rangle. \end{aligned}$$

Έτσι $2\rho\Gamma^1_{12} = 0$ και επομένως αποδείξαμε τον Ισχυρισμό 4.

Ισχυρισμός 5: $P_{\bar{z}} = 0$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 5: Έχουμε

$$P_{\bar{z}} = \bar{\partial} I(\partial, \partial) = \bar{\partial}\langle \partial, \partial\rangle = 2\langle \nabla_{\bar{\partial}}\partial, \partial\rangle. \tag{3.2}$$

Παραγωγίζοντας την ισότητα $\langle A\partial, \partial\rangle = 0$ ως προς $\bar{z}$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla_{\bar{\partial}} A\partial, \partial\rangle + \langle A\partial, \nabla_{\bar{\partial}}\partial\rangle = \langle \nabla_{\bar{\partial}} A\partial, \partial\rangle + \langle A\partial, \Gamma^1_{21}\partial + \Gamma^1_{21}\bar{\partial}\rangle \\ &= \Gamma^1_{21}\langle A\partial, \partial\rangle + \Gamma^1_{21}\langle A\bar{\partial}, \partial\rangle + \Gamma^1_{21}\langle A\partial, \partial\rangle + \Gamma^1_{21}\langle A\partial, \bar{\partial}\rangle. \end{aligned}$$

Άρα, $\Gamma_{21}^2 = 0$. Από την σχέση (3.1) και από τους ισχυρισμούς 2 και 3 παίρνουμε ότι $\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2$. Άρα, $\Gamma_{12}^2 = 0$. Έτσι, σύμφωνα με όλα τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\nabla_{\bar{\partial}}\partial = \Gamma_{21}^1\partial + \Gamma_{21}^2\bar{\partial} = 0.$$

Τέλος από την σχέση (3.2) παίρνουμε ότι $P_{\bar{z}} = 0$ και άρα απεδείχθει ο Ισχυρισμός 5.

Σύμφωνα με τα παραπάνω το (2,0)-μέρος της I σε σχέση με τη μετρική Riemann II είναι ολόμορφη τετραγωνική μορφή.

Αν τώρα Σ είναι μια τοπολογική σφαίρα και επειδή το μόνο ολόμορφο τετραγωνικό διαφορικό σε μια τοπολογική σφαίρα είναι το τετριμμένο, έχουμε ότι $Pdz^2 = 0$. Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.1 έχουμε ότι το ζεύγος (I, II) είναι ολικά ομφαλικό. □

Τώρα θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε το Θεώρημα του Liebmann.

Θεώρημα 3.1.2 (Liebmann). *Έστω Σ ένα προσανατολίσιμο διδιάστατο πλήρες πολύπτυγμα Riemann με σταθερή θετική καμπυλότητα Gauss. Αν $\psi : \Sigma \to \mathbb{M}^3(c)$ είναι μια ισομετρική εμβάπτιση, τότε η εικόνα $\psi(\Sigma)$ είναι ολικά ομφαλική.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι από το Θεώρημα Gauss-Bonnet προκύπτει ότι Σ είναι τοπολογική σφαίρα, επειδή $K > 0$. Από την εξίσωση Gauss λαμβάνουμε ότι $K_{ext} > -c$. Αν $c \leq 0$, τότε από το Θεώρημα 3.1.1. προκύπτει το συμπέρασμα. Υποθέτουμε ότι $c = 1$.

Αρχικά μελετάμε την περίπτωση όπου η εμβάπτιση $\psi : \Sigma \to \mathbb{S}^3$ έχει σταθερή καμπυλότητα Gauss $K \in (0, 1]$.

Γνωρίζουμε ότι από την εξίσωση Gauss έχουμε ότι $K = K_{ext} + 1$, όπου $K_{ext} = k_1 k_2$ και k_1, k_2 είναι οι κύριες καμπυλότητες. Είναι προφανές ότι $K_{ext} > 0$ αν $K > 1$.

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου $K \in (0, 1)$ και άρα $k_1 k_2 < 0$. Προφανώς είναι $k_1 \neq k_2$ σε κάθε σημείο της επιφάνειας Σ, δηλαδή η επιφάνεια $\psi(\Sigma)$ δεν έχει ομφαλικά σημεία.

Το Θεώρημα Δείκτη του Poincare υποστηρίζει ότι η χαρακτηριστική Euler - Poincare είναι το άθροισμα των δεικτών των ιδιαζόντων σημείων διανυσματικών πεδίων της επιφάνειας Σ. Έτσι η χαρακτηριστική Euler - Poincare της επιφάνειας Σ είναι $X(\Sigma) = 0$, διότι η επιφάνεια Σ δεν έχει ομφαλικά σημεία.

Από την υπόθεση έχουμε ότι $K(I) > 0$.

Το Θεώρημα Gauss-Bonnet υποστηρίζει ότι κάθε συμπαγής προσανατολισμένη επιφάνεια Σ με θετική καμπυλότητα Gauss και χαρακτηριστική Euler-Poincare $X(\Sigma)$ ισχύει ότι

$$\iint_{\Sigma} K\, d\sigma = 2\pi X(\Sigma). \tag{3.3}$$

Έχουμε ότι η καμπυλότητα Gauss $K > 0$. Άρα

$$\iint_{\Sigma} K\, d\sigma > 0. \tag{3.4}$$

Από τις σχέσεις (3.3), (3.4) προκύπτει ότι $X(\Sigma) > 0$, ή

$$X(\Sigma) = 2 = X(\mathbb{S}^2). \tag{3.5}$$

Άρα η επιφάνεια Σ είναι ομοιομορφική με την $\mathbb{S}^2$.

Επομένως $X(\Sigma) = 0$. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με τη σχέση (3.5), δηλαδή με το γεγονός ότι η επιφάνεια Σ είναι ομοιομορφική με την $\mathbb{S}^2$.

Άρα δείξαμε ότι αν $0 < K \leq 1$ τότε $K = 1$ και επομένως από την εξίσωση Gauss λαμβάνουμε $k_1 k_2 = 0$. Έστω p ένα μη ομφαλικό σημείο. Τότε γύρω από αυτό το σημείο υπάρχουν τοπικές παράμετροι (u, v) που δίνονται από τις γραμμές καμπυλότητας. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$I = Edu^2 + Gdv^2,\ II = k_1 Edu^2 + k_2 Gdv^2.$$

Αφού p είναι μη ομφαλικό σημείο γύρω από το p έχουμε ότι $k_1 \neq k_2$. Συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι γύρω από το p ισχύει $k_1 = 0$ και $k_2 \neq 0$. Έτσι έχουμε

$$I = Edu^2 + Gdv^2,\ II = k_2 Gdv^2.$$

Γνωρίζουμε ότι οι εξισώσεις Mainardi-Codazzi είναι

$$e_{\bar{z}} - f_z = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \tag{3.6}$$

$$f_{\bar{z}} - g_z = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2. \tag{3.7}$$

Στην περίπτωσή μας $e = f = 0$, $g = k_2 G$ και

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}.$$

Έτσι

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix}.$$

Γνωρίζουμε ότι τα σύμβολα Christoffel δίνονται από την σχέση (1.2). Άρα,

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2} g^{2m}(-g_{11,m} + g_{1m,1} + g_{m1,1}).$$

Επομένως,

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{E_v}{2G}.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η (3.6) γίνεται:

$$0 = -k_2 G\frac{E_v}{2G},$$

ή ισοδύναμα $k_2 E_v = 0$. Όμως $k_2 \neq 0$, αρα $E_v = 0$. Συνεπώς η συνάρτηση E δεν εξαρτάται απο το v. Από τη σχέση (1.2) έχουμε ότι

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2} g^{2m}(-g_{12,m} + g_{2m,1} + g_{m1,2}).$$

Άρα, $\Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}$. Έτσι η (3.7) γίνεται:

$$-(k_2 G)_u = -k_2 G\frac{G_u}{2G},$$

ή ισοδύναμα

$$2(k_2)_u G + 2k_2 G_u - k_2 G_u = 0.$$

Δηλαδή,

$$2(k_2)_u G + k_2 G_u = 0.$$

Άρα, $(k_2^2 G)_u = 0$. Επομένως η συνάρτηση $k_2^2 G$ δεν εξαρτάται από το u. Συνεπώς έχουμε

$$I = (\sqrt{E(u)}du)^2 + (\sqrt{G}dv)^2.$$

Θεωρούμε νέες παραμέτρους $\hat{u}, \hat{v}$ που ορίζονται ως

$$\hat{u} = \int \sqrt{E(u)}du,\ \hat{v} = \int k_2\sqrt{G}dv.$$

Τότε, $d\hat{u} = \sqrt{E(u)}du$ και $d\hat{v} = k_2\sqrt{G}dv$. Έτσι βρίσκουμε ότι

$$I = d\hat{u}^2 + \frac{1}{k_2^2}d\hat{v}^2,\ II = \frac{1}{k_2}d\hat{v}^2.$$

Χάριν απλότητας γράφουμε $u = \hat{u}$, $v = \hat{v}$. Από το Έξοχο Θεώρημα γνωρίζουμε ότι

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2. \tag{3.8}$$

Όμως,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2^2} \end{pmatrix}.$$

Έτσι,

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2^2 \end{pmatrix}.$$

Όμως, από τη σχέση (1.2) έχουμε

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2} g^{2m}(-g_{12,m} + g_{2m,1} + g_{m1,2})$$

και επομένως $\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}k_2^2(\frac{1}{k_2}^2)_u$. Επίσης, από τη σχέση (1.2) έχουμε

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2} g^{2m}(-g_{11,m} + g_{1m,1} + g_{m1,1}).$$

Άρα, $\Gamma_{11}^2 = 0$. Επιπλέον,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2} g^{1m}(-g_{11,m} + g_{1m,1} + g_{m1,1}).$$

Άρα, $\Gamma_{11}^1 = 0$. Θέτουμε επίσης $w = k_2^2$. Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω, η (3.8) γίνεται

$$\begin{aligned}
-1 &= \frac{1}{2}(w(\frac{1}{w})_u)_u + (\frac{1}{2}w(\frac{1}{w})_u)^2 \\
&= \frac{1}{2}w_u(\frac{1}{w})_u + \frac{1}{2}w(\frac{1}{w})_{uu} + \frac{1}{4}w^2(-\frac{w_u}{w^2})^2 \\
&= \frac{1}{2}w_u(-\frac{w_u}{w^2}) + \frac{1}{2}w(-\frac{w_u}{w^2})_u + \frac{1}{4}w^2(\frac{w_u^2}{w^4}) \\
&= -\frac{w_u^2}{2w} - \frac{w}{2}(\frac{w_u}{w^2})_u + \frac{w_u^2}{4w^2} \\
&= -\frac{w_u^2}{4w} - \frac{w}{2}(\frac{w_{uu}w^2}{w^4} - \frac{2w_u w}{w^4}) \\
&= -\frac{w_u^2}{4w} - \frac{w_{uu}}{2w} + \frac{w_u^2}{w^2},
\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{2w_u^2}{4w^2} - \frac{w_{uu}}{2w} = -1. \tag{3.9}$$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$|k_2|(\frac{1}{|k_2|})_{uu} = -1. \tag{3.10}$$

Πράγματι παρατηρούμε ότι αν $w = k_2^2$, τότε $|k_2| = w^{\frac{1}{2}}$. Έτσι αρκεί να δείξουμε ότι:

$$-w^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{w^{\frac{1}{2}}})_{uu} = 1.$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
-w^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{w^{\frac{1}{2}}})_{uu} &= -\frac{1}{2}w^{\frac{1}{2}}(\frac{w_u}{w^{\frac{3}{2}}})_u \\
&= -\frac{1}{2}w^{\frac{1}{2}}(\frac{w_{uu}w^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}w_u w^{\frac{1}{2}}w_u}{w^3}) \\
&= -\frac{1}{2}(\frac{w_{uu}}{w^{\frac{3}{2}}} - \frac{3w_u^2}{4w^{\frac{5}{2}}})w^{\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{w_{uu}}{2w} + \frac{3w_u^2}{w^2} = 1,
\end{aligned}$$

λόγω της σχέσης (3.9). Συνεπώς αποδείξαμε τη σχέση (3.10). Από το Θεώρημα Bonnet-Myers γνωρίζουμε ότι η επιφάνεια Σ είναι συμπαγής. Τότε είτε η επιφάνεια Σ είναι ολικά ομφαλική είτε υπάρχει ένα μη ομφαλικό σημείο ώστε η k_2 να έχει μέγιστο ή ελάχιστο. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $1/|k_2|$ έχει ένα θετικό τοπικό ελάχιστο. Αφού κάθε λύση της πραγματικής εξίσωσης $h''(t) + h(t) = 0$ δεν έχει θετικό τοπικό ελάχιστο, τότε από τη σχέση (3.10) έχουμε αντίφαση. Άρα η επιφάνεια $\psi(\Sigma)$ είναι μια ολικά ομφαλική σφαίρα.

Αν $K > 1$, τότε γνωρίζουμε ότι η εξωτερική καμπυλότητα θα είναι θετική. Έτσι το αποτέλεσμα έπεται από το Θεώρημα 3.1.1. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ισοπεδες επιφανειες στον Ευκλειδειο χωρο

Έστω μια ισομετρική εμβάπτιση $\psi : \Sigma \to \mathbb{R}^3$, όπου Σ είναι ισόπεδη επιφάνεια. Από την εξίσωση Gauss έχουμε ότι οι κύριες καμπυλότητες πληρούν την ισότητα $k_1 k_2 = 0$. Για τη συνέχεια συμβολίζουμε με Σ_U το εσωτερικό του συνόλου των ομφαλικών σημείων και με Σ_N το σύνολο των μη ομφαλικών σημείων της εμβάπτισης ψ.

Παρατηρούμε ότι η κλειστή θήκη του συνόλου $\Sigma_U \cup \Sigma_N$ είναι ολόκληρη η επιφάνεια Σ. Έτσι μελετάμε τα δύο υποσύνολα ανεξάρτητα με στόχο την κατανόηση της γεωμετρίας της εικόνας $\psi(\Sigma)$.

Το σύνολο Σ_U αποτελείται από ομφαλικά σημεία όπου οι κύριες καμπυλότητες είναι μηδέν. Επομένως, κάθε συνεκτική συνιστώσα του συνόλου $\psi(\Sigma_U)$ περιέχεται σ' ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$. Για τη συνέχεια θα εστιάσουμε την προσοχή μας στη μελέτη του Σ_N.

4.1 Το Θεώρημα Hartman-Nirenberg

Λήμμα 4.1.1. *Έστω c μια γραμμή καμπυλότητας που περιέχεται στο σύνολο Σ_N και η οποία αντιστοιχεί στη μηδενική κύρια καμπυλότητα. Τότε η εικόνα $\psi(c)$ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα στον $\mathbb{R}^3$ που δεν περιέχει κανένα ομφαλικό σημείο. Επιπλέον, αν η επιφάνεια Σ είναι πλήρης και c είναι μια γραμμή καμπυλότητας που ενώνει σημείο με κύρια καμπυλότητα 0 με ένα μη-ομφαλικό σημείο $p_0 \in c$, τότε $\psi(c)$ είναι ευθεία γραμμή του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$ χωρίς ομφαλικό σημείο.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $K = 0 = k_1 k_2$. Όμως σε κάθε σημείο του Σ_N είναι $k_1 \neq k_2$. Χωρίς βλάβη γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $k_1 = 0$ και άρα

$k_2 \neq 0$ στο Σ_N. Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2, ομοίως συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν τοπικές συντεταγμένες (u, v) τέτοιες ώστε

$$I = Edu^2 + Gdv^2,\ II = k_2 G dv^2.$$

Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2, από τις εξισώσεις Mainardi-Codazzi έχουμε ότι $E_v = 0$ και $(k_2^2 G)_u = 0$. Κάνοντας τώρα την ίδια αλλαγή μεταβλητής με αυτή της απόδειξης του Θεωρήματος 3.1.2 παίρνουμε,

$$I = du^2 + \frac{1}{k_2^2 dv^2},\ II = \frac{1}{k_2} dv^2.$$

Επειδή $e = 0$, οι τύποι του Gauss είναι οι εξής:

$$\psi_{uu} = \Gamma_{11}^1 \psi_u + \Gamma_{11}^2 \psi_v, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} \psi_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \psi_u + \Gamma_{12}^2 \psi_v + fN, \\ \psi_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \psi_u + \Gamma_{21}^2 \psi_v + fN, \\ \psi_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \psi_u + \Gamma_{22}^2 \psi_v + gN. \end{aligned}$$

Αφού

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2^2} \end{pmatrix},$$

τότε

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2^2 \end{pmatrix}.$$

Γνωρίζουμε από την (1.2) ότι

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2} g^{1m}(-g_{11,m} + g_{1m,1} + g_{m1,1}).$$

Άρα $\Gamma_{11}^1 = 0$. Επίσης,

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2} g^{2m}(-g_{11,m} + g_{1m,1} + g_{m1,1}).$$

Άρα $\Gamma_{11}^2 = 0$. Από τη σχέση (4.1) έχουμε $\psi_{uu} = 0$. Άρα οι καμπύλες, $a(u) = \psi(u, v_0)$, οι οποίες είναι παραμετρικοποιημένες με το μήκος τόξου ικανοποιούν $a''(u) = 0$. Επομένως οι παραμετρικές καμπύλες $v = v_0$ είναι ευθύγραμμα τμήματα στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$. Δηλαδή η καμπύλη $a(u)$ είναι τμήμα ευθείας του $\mathbb{R}^3$.

Από το Έξοχο Θεώρημα έχουμε ότι

$$-EK = (\Gamma^2_{12})_u - (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}.$$

Όπως και στη απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2 βρίσκουμε ότι

$$EK = -|k_2| \left(\frac{1}{|k_2|} \right)_{uu}.$$

Επειδή η επιφάνεια Σ είναι ισόπεδη και $k_2 \neq 0$, η προηγούμενη σχέση ισοδυνάμως γράφεται

$$0 = \left(\frac{1}{|k_2|} \right)_{uu}. \tag{4.2}$$

Έστω ότι υπάρχει ένα πρώτο ομφαλικό σημείο u_0 καθώς $u \to u_0$. Τότε $k_2 \to 0$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με τη σχέση (4.2). Συνεπώς η καμπύλη $a(u)$ δεν έχει ομφαλικό σημείο.

Αν τώρα έχουμε ότι ψ είναι πλήρης εμβάπτιση, εφόσον οι γεωδαισιακές του $\mathbb{R}^3$ είναι ευθείες τότε $a(u)$ πρέπει να είναι ευθεία γραμμή, χωρίς ομφαλικά σημεία. □

Παρατήρηση 4.1.1. *Από το παραπάνω λήμμα παρατηρούμε ότι αν $\psi : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ είναι μια ισομετρική, όπου Σ είναι μια ισόπεδη πλήρης επιφάνεια και p_1, p_2 είναι δύο μη ομφαλικά σημεία με αντίστοιχες ευθείες γραμμές r_1, r_2 που σχετίζονται με την μηδενική καμπυλότητα, τότε $r_1 = r_2$ ή δεν τέμνονται. Αν δεν ίσχυε αυτό, θα υπήρχε ένα μοναδικό σημείο $p \in r_1 \cap r_2$ που να ικανοποιεί ότι δύο διαφορετικές διευθύνσεις (που σχετίζονται με r_1, r_2) είναι κύριες διευθύνσεις με μηδενικές κύριες καμπυλότητες. Δηλαδή τότε το σημείο p θα είναι ομφαλικό, που έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι r_1 δεν περιέχει ομφαλικό σημείο.*

Θεώρημα 4.1.1. *(Hartman-Nirenberg) Έστω Σ μια ισόπεδη, πλήρης επιφάνεια και $\psi : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ μια ισομετρική εμβάπτιση. Τότε η εικόνα $\psi(\Sigma)$ είναι ένας ορθός κύλινδρος υπεράνω μιας επίπεδης καμπύλης που ορίζεται για όλες τις τιμές της παραμέτρου μήκους τόξου της.*

Απόδειξη. Περνώντας στο καθολικό κάλυμμα της επιφάνειας Σ, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η επιφάνεια Σ είναι απλά συνεκτική. Άρα, η Σ είναι μια πλήρης απλά συνεκτική ισόπεδη επιφάνεια και έτσι είναι ισομετρική με τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^2$. Λόγω αυτού εργαζόμαστε στον $\mathbb{R}^2$ αντί για την επιφάνεια Σ. Αν ψ είναι ολικά ομφαλική τότε η εικόνα της είναι ένα επίπεδο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα μη ομφαλικό σημείο $p_0 \in \mathbb{R}^2$. Από το Λήμμα 4.1.1 έχουμε ότι υπάρχει μια γραμμή καμπυλότητας $c_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ που διέρχεται από το p_0 τέτοια ώστε $\psi(c_0)$ να είναι ευθεία.

Αφού $\psi(c_0)$ είναι γεωδαισιακή του $\mathbb{R}^3$, τότε c_0 είναι γεωδαισιακή της επιφάνειας Σ και άρα c_0 είναι ευθεία στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$.

Μετατοπίζοντας ενδεχομένως την c_0 μέσω ισομετρίας του $\mathbb{R}^2$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι c_0 είναι μια κατακόρυφη ευθεία γραμμή. Θα δείξουμε ότι η εικόνα μέσω της ψ κάθε κατακόρυφης γραμμής $r \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι ευθεία γραμμή στο $\mathbb{R}^3$. Έστω $r \subseteq \mathbb{R}^2$ μια κατακόρυφη γραμμή διαφορετική της c_0 που περιέχει ένα μη ομφαλικό σημείο p_1. Έστω $c_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ η αντίστοιχη γραμμή καμπυλότητας τέτοια ώστε $\psi(c_1)$ να είναι ευθεία γραμμή. Με όμοιο συλλογισμό όπως πριν για το c_1 προκύπτει ότι c_1 είναι ευθεία γραμμή στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$. Επιπλέον, c_1 πρέπει να είναι κατακόρυφη γιατί διαφορετικά θα τέμνει την c_0, που έρχεται σε αντίφαση με την Παρατήρηση 4.1.1. Έτσι $r = c_1$ και η εικόνα είναι μια ευθεία γραμμή.

Έστω τώρα $r \subseteq \mathbb{R}^3$ να είναι μια κατακόρυφη γραμμή που περιέχεται στο εσωτερικό του συνόλου των ομφαλικών σημείων $\Sigma_U \subseteq \mathbb{R}^2$. Αφού r είναι γεωδαισιακή του $\mathbb{R}^3$ τότε $\psi(r)$ είναι γεωδαισιακή στο $\psi(\Sigma_U)$. Αφού $\psi(\Sigma_U)$ είναι τμήμα επιπέδου, τότε $\psi(r)$ είναι ευθεία γραμμή. Αν $r \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι κατακόρυφη γραμμή που δεν είναι όπως στις προηγούμενες συνθήκες, τότε r είναι το όριο των κατακόρυφων γραμμών r_n στις παραπάνω συνθήκες. Αφού $\psi(r_n)$ είναι ευθεία γραμμή για κάθε n, τότε $\psi(r)$ είναι ευθεία γραμμή.

Συνέπεια όλων των ανωτέρω, ως προς τις συνήθεις συντεταγμένες (x, y) στο $\mathbb{R}^2$ η εμβάπτιση ψ παραμετρικοποιείται ως

$$\psi(x, y) = a(x) + yb(x).$$

Η καμπύλη $\psi(x_0, y)$ είναι μια ευθεία γραμμή με μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $b(x_0) = b_0$. Έτσι έχουμε

$$1 = \langle \psi_x, \psi_x \rangle = \langle a'(x), a'(x) \rangle + 2y\langle a'(x), b'(x) \rangle + y^2\langle b'(x), b'(x) \rangle, \tag{4.3}$$

$$0 = \langle \psi_x, \psi_y \rangle = \langle a'(x), b(x) \rangle + y\langle b'(x), b(x) \rangle, \tag{4.4}$$

$$1 = \langle \psi_y, \psi - y \rangle = \langle b(x), b(x) \rangle. \tag{4.5}$$

Από την (4.3) έχουμε ότι

$$1 = y^2\langle b'(x), b'(x) \rangle + \langle a'(x), a'(x) \rangle + 2y\langle a'(x), b'(x) \rangle + \langle a'(x), a'(x) \rangle.$$

Άρα,

$$\langle b'(x), b'(x) \rangle = 0, \ \langle a'(x), b'(x) \rangle = 0, \ \langle a'(x), a'(x) \rangle = 1.$$

Συνεπώς, $b'(x) = 0$. Επομένως $b(x)$ είναι σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα έστω b_0. Η εικόνα των κατακόρυφων γραμμών στο $\mathbb{R}^2$ είναι παράλληλες ευθείες στο $\mathbb{R}^3$.

Από τη σχέση (4.4) λαμβάνουμε,

$$0 = \langle a'(x), b_0 \rangle.$$

Ολοκληρώνοντας τώρα την τελευταία σχέση παίρνουμε,

$$\langle a(x) - a(x_0), b_0 \rangle = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη $a(x)$ περιέχεται σε επίπεδο κάθετο στο διάνυσμα b_0. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Το μοντελο των τετρανιων για τη σφαιρα $\mathbb{S}^3$

5.1 Τα Τετράνια

Ο προσφορότερος τρόπος για να περιγράψουμε ρητά τις ισόπεδες επιφάνειες στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$ είναι να θεωρήσουμε την 3-σφαίρα ως το σύνολο των μονάδων τετρανίων (quartenions) [14].

Τα τετράνια αποτελούν γενίκευση των μιγαδικών αριθμών, που προκύπτουν από την πρόσθεση των βασικών στοιχείων i, j, k σε πραγματικούς αριθμούς, όπου τα i, j, k ικανοποιούν τη σχέση

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \tag{5.1}$$

Ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός, αλλά όχι μεταθετικός. Κάθε τετράνιο αποτελεί γραμμικό συνδιασμό των βασικών τετρανίων $1, k, j, k$.

Πιο αναλυτικά, ξεκινάμε με την ταύτιση του $\mathbb{R}^4$ με τον χώρο $\mathbb{H}$ των τετρανίων με τον τυπικό τρόπο, δηλαδή, το $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ θεωρείται ως τετράνιο $x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$. Από τη σχέση (5.1) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
&ij = k, jk = i, ki = j \\
&ji = -k, kj = -i, ik = -j \\
&ii = -1, jj = -1, kk = -1.
\end{aligned}$$

Με αυτό τον τρόπο η μοναδιαία 3-σφαίρα $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ θεωρείται ως ο χώρος των μοναδιαίων τετρανίων, δηλαδή τετρανίων x με μοναδιαίο μήκος $\|x\| = 1$. Σημειώνουμε ότι η σφαίρα $\mathbb{S}^2$ δίνεται ως $\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}^3 \cap \{x_1 = 0\}$.

Έστω $x, y \in \mathbb{H}$ με

$$x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4,\ y = y_1 + iy_2 + jy_3 + ky_4.$$

Τότε

$$\begin{aligned} xy &= (x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4)(y_1 + iy_2 + jy_3 + ky_4) \\ &= x_1y_1 + ix_1y_2 + jx_1y_3 + kx_1y_4 + ix_2y_1 - x_2y_2 + kx_2y_3 - jx_2y_4 \\ &\quad + jx_3y_1 - kx_3y_2 - x_3y_3 + ix_3y_4 + kx_4y_1 + jx_4y_2 - ix_4y_3 - x_4y_4, \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} xy =&(x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4) + i(x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3) \\ &+ j(x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2) + k(x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Έστω $x, y, w \in \mathbb{H}$ με

$x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$, $y = y_1 + iy_2 + jy_3 + ky_4$, $w = w_1 + iw_2 + jw_3 + kw_4$.

Τότε από τη σχέση (5.2) έχουμε

$$\begin{aligned} (xy)w =&\{(x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4)w_1 - (x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)w_2 \\ &- (x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2)w_3 - (x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1)w_4\} \\ &+ i\{(x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4)w_2 + (x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)w_1 \\ &+ (x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2)w_4 + (x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1)w_3\} \\ &+ j\{(x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4)w_3 + (x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)w_4 \\ &+ (x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2)w_2 + (x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1)w_2\} \\ &+ k\{(x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4)w_4 + (x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)w_3 \\ &+ (x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2)w_2 + (x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1)w_1\}, \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} (xy)w =&\{(w_1y_1 - w_2y_2 - w_3y_3 - w_4y_4)x_1 - (w_1y_2 + w_2y_1 + w_3y_4 - w_4y_3)x_2 \\ &- (w_1y_3 - w_2y_4 + w_3y_1 + w_4y_2)x_3 - (w_1y_4 + w_2y_3 - w_3y_2 + w_4y_1)x_4\} \\ &+ i\{(w_1y_1 - w_2y_2 - w_3y_3 - w_4y_4)x_2 - (w_1y_2 + w_2y_1 + w_3y_4 - w_4y_3)x_1 \\ &- (w_1y_3 - w_2y_4 + w_3y_1 + w_4y_2)x_4 - (w_1y_4 + w_2y_3 - w_3y_2 + w_4y_1)x_3\} \\ &+ j\{(w_1y_1 - w_2y_2 - w_3y_3 - w_4y_4)x_3 - (w_1y_2 + w_2y_1 + w_3y_4 - w_4y_3)x_4 \\ &- (w_1y_3 - w_2y_4 + w_3y_1 + w_4y_2)x_1 - (w_1y_4 + w_2y_3 - w_3y_2 + w_4y_1)x_2\} \\ &+ k\{(w_1y_1 - w_2y_2 - w_3y_3 - w_4y_4)x_4 - (w_1y_2 + w_2y_1 + w_3y_4 - w_4y_3)x_3 \\ &- (w_1y_3 - w_2y_4 + w_3y_1 + w_4y_2)x_2 - (w_1y_4 + w_2y_3 - w_3y_2 + w_4y_1)x_1\}. \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$(xy)w = x(yw). \tag{5.3}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned}\|xy\|^2 &= (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)^2 \\ &\quad + (x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2)^2 + (x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1)^2,\end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}\|xy\|^2 =&(x_1y_1)^2 + (x_2y_2)^2 + (x_3y_3)^2 + (x_4y_4)^2 - 2x_1y_1x_2y_2x_3y_3x_4y_4 \\ &+ 2x_1y_2x_2y_1 - 2x_3y_4x_4y_3 + (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2 + (x_3y_4)^2 + (x_4y_3)^2 \\ &+ 2x_1y_2x_2y_1x_3y_4x_4y_3 + 2x_1y_2x_2y_1 - 2x_3y_4x_4y_3 + (x_1y_3)^2 + (x_2y_4)^2 \\ &+ (x_3y_1)^2 + (x_4y_2)^2 + 2x_1y_3x_2y_4x_3y_1x_4y_2 - 2x_1y_3x_2y_4 \\ &+ 2x_3y_1x_4y_2 + (x_1y_4)^2 + (x_2y_3)^2 + (x_3y_2)^2 + (x_4y_1)^2 \\ &- 2x_1y_4x_2y_3x_3y_2x_4y_1 + 2x_1y_4x_2y_3 - 2x_3y_2x_4y_1.\end{aligned}$$

Άρα

$$\|xy\|^2 = \sum_{i=1}^{4}(x_iy_i)^2 = \sum_{i=1}^{4}(x_i)^2\sum_{i=1}^{4}(y_i)^2 = \|x\|^2\|y\|^2,$$

ή

$$\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|. \tag{5.4}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$1x = (1 + i0 + j0 + k0)(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4) = x \tag{5.5}$$

και

$$x1 = (x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4)(1 + i0 + j0 + k0) = x. \tag{5.6}$$

Ορίζουμε το συζυγές του τετρανίου x ως το τετράνιο

$$\bar{x} = x_1 - ix_2 - jx_3 - kx_4.$$

Παρατηρούμε ότι αν $x \in \mathbb{S}^3$ τότε $\bar{x} \in \mathbb{S}^3$. Επιπρόσθετα έχουμε

$$\begin{aligned}x\bar{x} =&(x_1x_1 - x_2x_2 - x_3x_3 - x_4x_4) + i(-x_1x_2 + x_2x_1 - x_3x_4 + x_4x_3) \\ &+ j(-x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_1 - x_4x_2) + k(-x_1x_4 - x_2x_3 + x_3x_2 + x_4x_1).\end{aligned}$$

Άρα,

$$x\bar{x} = \bar{x}x = \|x\|^2. \tag{5.7}$$

Από την (5.7) προκύπτει ότι
$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{\|x\|^2},$$
για κάθε $x \neq 0$. Τότε από την ισότητα $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ προκύπτει $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$. Επειδή $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$ έχουμε
$$(x+y)(\bar{x}+\bar{y}) = \|x+y\|^2,$$
ή ισοδύναμα
$$\|x\|^2 + x\bar{y} + y\bar{x} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2,$$
όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$. Έτσι δείξαμε την εξής ιδιότητα των τετρανίων
$$x\bar{y} + y\bar{x} = 2\langle x, y\rangle.$$
Επιπλέον για κάθε $x, y, a \in \mathbb{H}$ ισχύει
$$\langle ax, ay\rangle = \|a\|^2\langle x, y\rangle,\ \langle xa, ya\rangle = \|a\|^2\langle x, y\rangle. \tag{5.8}$$
Πράγματι,
$$\begin{aligned} 2\langle ax, ay\rangle &= (ax)\overline{(ay)} + (ay)\overline{(ax)} = ax\bar{y}\bar{a} + ay\bar{x}\bar{a} = a(x\bar{y} + y\bar{x})\bar{a} = 2a\langle x, y\rangle\bar{a} \\ &= 2\|a\|^2\langle x, y\rangle. \end{aligned}$$

Πρόταση 5.1.1. *Η σφαίρα $\mathbb{S}^3$ με το συνηθισμένο γινόμενο των τετρανίων λαμβάνει με φυσικό τρόπο δομή ομάδας Lie.*

Απόδειξη. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι η σφαίρα $\mathbb{S}^3$ με το συνηθισμένο γινόμενο των τετρανίων είναι ομάδα. Έστω $x \in \mathbb{S}^3$, $y \in \mathbb{S}^3$. Τότε λόγω της σχέσης (5.4) έχουμε ότι $\|xy\| = 1$, δηλαδή $xy \in \mathbb{S}^3$.

Λόγω της σχέσης (5.3) έχουμε ότι ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα. Από τις σχέσεις (5.5) και (5.6) έχουμε ότι το $1 \in \mathbb{S}^3$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της σφαίρας $\mathbb{S}^3$. Επιπρόσθετα από τη σχέση (5.7) συμπεραίνουμε ότι το αντίστροφο στοιχείο του $x \in \mathbb{S}$ είναι το συζυγές $\bar{x} \in \mathbb{S}^3$. Επιπλέον από την (5.2) προκύπτει ότι η απεικόνιση $\cdot : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$, $(x, y) \mapsto xy$ είναι διαφορίσιμη. Επομένως ο χώρος $\mathbb{S}^3$ με το συνηθισμένο γινόμενο των τετρανίων είναι ομάδα Lie. $\square$

Κάθε τετράνιο $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \in \mathbb{S}^3$ μπορούμε να το ταυτίσουμε με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι οι απεικονίσεις $x \mapsto xa$ και $x \mapsto ax$ είναι ισομετρίες της σφαίρας $\mathbb{S}^3$ εφοδιασμένη με τη συνήθη μετρική.

Έχουμε ότι για κάθε $x, y, a \in \mathbb{S}^3$. Τότε από την (5.8)

$$\langle x, y \rangle = \|a\| \langle x, y \rangle = \langle ax, ay \rangle.$$

Έχουμε ότι $\langle x, y \rangle = \langle ax, ay \rangle = \langle xa, ya \rangle$.

5.2 Hopf fibration

Στόχος αυτής της ενότητας είναι να εισάγει την Hopf fibration. Πρόκειται για μια απεικόνιση ζωτικής σημασίας για την περιγραφή ισόπεδων επιφανειών στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$.

Ορίζουμε την απεικόνιση

$$Ad(x)y := xy\bar{x},$$

όπου $x, y \in \mathbb{S}^3$. Τότε η Hopf fibration είναι η απεικόνιση

$$h : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2,$$

με

$$h(x) = Ad(x)i = xi\bar{x}.$$

Έστω, $p = ip_2 + jp_3 + kp_4$ ένα σημείο της $\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}^3 \cap \{x_1 = 0\}$. Η ίνα του p είναι το σύνολο

$$h^{-1}(p) = \{x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 \in \mathbb{S}^3 : h(x) = p\}.$$

Παρατηρούμε ότι η ισότητα $h(x) = p$ ισοδύναμα γράφεται $xi\bar{x} = p$. Δηλαδή, $x = -pxi$. Όμως,

$$\begin{aligned} ipx &= ((-p_2x_2 - p_3x_3 - p_4x_4) + i(p_2x_1 + p_3x_4 - p_4x_3) \\ &\quad + j(-p_2x_4 + p_3x_1 + p_4x_2) + k(p_2x_3 - p_3x_2 + p_4x_1))i \\ &= -(p_2x_1 + p_3x_4 - p_4x_3) + i(-p_2x_2 - p_3x_3 - p_4x_4) \\ &\quad + j(p_2x_3 - p_3x_2 + p_4x_1) - k(-p_2x_4 + p_3x_1 + p_4x_2). \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 =&(p_2x_1 + p_3x_4 - p_4x_3) \\ &- i(-p_2x_2 - p_3x_3 - p_4x_4) \\ &- j(p_2x_3 - p_3x_2 + p_4x_1) \\ &+ k(-p_2x_4 + p_3x_1 + p_4x_2). \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} x_1 &= p_2x_1 + p_3x_4 - p_4x_3, \\ x_2 &= p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4, \\ x_3 &= -p_2x_3 + p_3x_2 - p_4x_1, \\ x_4 &= -p_2x_4 + p_3x_1 + p_4x_2. \end{aligned}$$

Έτσι σύμφωνα με τα παραπάνω παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} h^{-1}(p) = \{x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 \in \mathbb{S}^3 : -p_4x_1 + p_3x_2 - (1+p_2)x_3 = 0, \\ p_4x_2 + p_3x_1 - (1+p_2)x_4 = 0\}, \end{aligned}$$

αν $p_2 \neq -1$.

Δηλαδή, συμπεραίνουμε ότι η ίνα $h^{-1}(p)$ είναι μέγιστος κύκλος της $\mathbb{S}^3$.

Επιπλέον,

$$h^{-1}(-i) = \{jx_3 + kx_4 \in \mathbb{S}^3 : x_3, x_4 \in \mathbb{R},\ x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

Για κάθε $\xi \in \mathbb{S}^3$ ορίζεται η skew Hopf fibration ως η απεικόνιση

$$h_\xi(x) := Ad(x)\xi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2.$$

Τότε οι ίνες $h_\xi^{-1}(p)$, $p \in \mathbb{S}^2$, εξακολουθούν να είναι μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας $\mathbb{S}^3$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Ισοπεδες επιφανειες στη σφαιρα $\mathbb{S}^3$

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε βασικά στοιχεία της θεωρίας επιφανειών στη μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^3$. Θα ξεκινήσουμε περιγράφοντας τις θεμελιώδεις εξισώσεις επίπεδων επιφανειών ως προς ασυμπτωτικές παραμέτρους. Επιπλέον, θα παρουσιάσουμε την κατασκευή Bianchi-Spivak ισόπεδων επιφανειών στην $\mathbb{S}^3$ και θα περιγράψουμε μια τελειοποίηση αυτής της μεθόδου μέσω της αναπαράστασης Kitagawa ([10], [14]).

6.1 Ασυμπτωτικές παράμετροι

Γενικά οι θεμελιώδεις εξισώσεις μιας ισόπεδης επιφάνειας στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$ δύναται να μελετηθούν καλύτερα μέσω παραμέτρων των οποίων οι καμπύλες συντεταγμένων είναι ασυμπτωτικές καμπύλες της επιφάνειας.

Ορισμός 6.1.1. Μια κανονική επιφανειακή καμπύλη $c : I \to \Sigma$, όπου το I είναι διάστημα, καλείται ασυμπτωτική καμπύλη (ή ασυμπτωτική γραμμή) της επιφάνειας Σ αν για το διάνυσμα ταχύτητάς της $c'(t)$ ισχύει ότι $II(c'(t)) = 0$ για κάθε $t \in I$.

Επειδή η επιφάνεια είναι ισόπεδη, από την εξίσωση Gauss έχουμε ότι η εξωτερική καμπυλότητα είναι $k_1 k_2 = -1$. Στο παρακάτω θεώρημα αποδεικνύουμε ότι υπάρχουν συντεταγμένες Tchebyscheff γύρω από κάθε σημείο. Δηλαδή υπάρχουν τοπικές παράμετροι $(u.v)$ τέτοιες ώστε οι παραμετρικές καμπύλες να είναι ασυμπτωτικές καμπύλες αμφότερες με παράμετρο το μήκος τόξου.

Θεώρημα 6.1.1. *Έστω (I, II) ένα ζεύγος Codazzi σε επιφάνεια Σ με σταθερή και αρνητική εξωτερική καμπυλότητα. Τότε υπάρχουν τοπικές συντεταγμένες (u, v) και μια λεία συνάρτηση $w(u, v)$ με τιμές στο $(0, \pi)$ τέτοια ώστε*

$$I = du^2 + 2coswdudv + dv^2,\ II = 2\sqrt{-K_{ext}}sinwdudv. \tag{6.1}$$

Επιπλέον ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Αν η επιφάνεια Σ είναι απλά συνεκτική τότε υπάρχουν ολικές συναρτήσεις $u, v : \Sigma \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε (u, v) να είναι συντεταγμένες που πληρούν τα ανωτέρω σε μια περιοχή κάθε σημείου.

2. Αν η επιφάνεια Σ είναι απλά συνεκτική και η μετρική I είναι πλήρης, τότε η προηγούμενη απεικόνιση $(u, v) : \Sigma \to \mathbb{R}^2$ είναι ολικός διαφορομορφισμός.

Απόδειξη. Θεωρούμε τοπικές συντεταγμένες (ολικές αν η επιφάνεια Σ είναι απλά συνεκτική) τέτοιες ώστε,

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,\ II = 2fdudv,\ f > 0.$$

Τα σύμβολα Christoffel Γ_{ij}^k της συνοχής Levi-Civitá της επαγόμενης μετρικής σε σχέση με τις παραμέτρους (x, y) δίνονται ως εξής:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = \Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = \Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} = \Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Χάριν συντομίας γράφουμε $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$ και θέτουμε $D = EG - F^2$.

Ισχυρισμός 1: $\frac{D_u}{2D} = \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2$ και $\frac{D_v}{2D} = \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1: Έχουμε,

$$D_x = E_x G + E G_x - 2F F_x.$$

Οι παράγωγοι των θεμελιωδών ποσών πρώτης τάξης είναι

$$\begin{aligned} E_x &= \partial_x \langle \partial_x, \partial_x \rangle \\ &= 2\langle \nabla_{\partial_x} \partial_x, \partial_x \rangle \\ &= 2\langle \Gamma_{11}^1 \partial_x + \Gamma_{11}^2 \partial_y, \partial_x \rangle \\ &= 2\Gamma_{11}^1 \langle \partial_x, \partial_x \rangle + 2\Gamma_{11}^2 \langle \partial_y, \partial_x \rangle \\ &= 2\Gamma_{11}^1 E + 2\Gamma_{11}^2 F, \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned} G_x &= \partial_x\langle\partial_y,\partial_y\rangle \\ &= 2\langle\nabla_{\partial_x}\partial_y,\partial_y\rangle \\ &= 2\langle\Gamma_{12}^1\partial_x+\Gamma_{12}^2\partial_y,\partial_y\rangle \\ &= 2\Gamma_{12}^1\langle\partial_x,\partial_y\rangle+2\Gamma_{12}^2\langle\partial_y,\partial_y\rangle \\ &= 2\Gamma_{12}^1F+2\Gamma_{12}^2G, \end{aligned} \tag{6.3}$$

και

$$\begin{aligned} F_x &= \partial_x\langle\partial_x,\partial_y\rangle \\ &= \langle\nabla_{\partial_x}\partial_x,\partial_y\rangle+\langle\partial_x,\nabla_{\partial_x}\partial_y\rangle \\ &= \langle\Gamma_{11}^1\partial_x+\Gamma_{11}^2\partial_y,\partial_y\rangle+\langle\partial_x,\Gamma_{12}^1\partial_x+\Gamma_{12}^2\partial_y\rangle \\ &= \Gamma_{11}^1\langle\partial_x,\partial_y\rangle+\Gamma_{11}^2\langle\partial_y,\partial_y\rangle+\Gamma_{12}^1\langle\partial_x,\partial_x\rangle+\Gamma_{12}^2\langle\partial_x,\partial_y\rangle \\ &= \Gamma_{11}^1F+\Gamma_{11}^2G+\Gamma_{12}^1E+\Gamma_{12}^2F. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Έτσι με χρήση των σχέσεων (6.2), (6.3) και (6.4) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} D_x &= E_xG+EG_x-2FF_x \\ &= (\Gamma_{11}^1E+\Gamma_{11}^2F)2G+2E(\Gamma_{12}^1F+2\Gamma_{12}^2G) \\ &\quad -2F(\Gamma_{11}^1F+\Gamma_{11}^2G+\Gamma_{12}^1E+\Gamma_{11}^2F), \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} D_x &= 2\Gamma_{11}^1EG+2\Gamma_{12}^2EG-2\Gamma_{11}^1F^2-2\Gamma_{12}^2F^2 \\ &= 2EG(\Gamma_{11}^1+\Gamma_{12}^2)-2F^2(\Gamma_{11}^1+\Gamma_{12}^2) \\ &= 2(\Gamma_{11}^1+\Gamma_{12}^2)(EG-F^2) \\ &= 2(\Gamma_{11}^1+\Gamma_{12}^2)D. \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{D_x}{2D}=\Gamma_{11}^1+\Gamma_{12}^2.$$

Ομοίως έχουμε

$$\frac{D_y}{2D}=\Gamma_{22}^2+\Gamma_{12}^1.$$

Έτσι αποδείξαμε τον Ισχυρισμό 1.

Ισχυρισμός 2: $\frac{f_x}{f}=\Gamma_{11}^1-\Gamma_{12}^2$ και $\frac{f_y}{f}=\Gamma_{22}^2-\Gamma_{12}^1$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 2: Γνωρίζουμε ότι οι εξισώσεις Mainardi-Codazzi είναι:

$$e_y - f_x = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \tag{6.5}$$

$$f_y - g_x = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2. \tag{6.6}$$

Όμως $e = g = 0$. Άρα οι σχέσεις (6.5) και (6.6) ισοδυνάμως γράφονται,

$$-f_x = f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1),\ f_y = f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1),$$

ή

$$\frac{f_x}{f} = \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2,\ \frac{f_y}{f} = \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1.$$

Έτσι αποδείξαμε τον Ισχυρισμό 2.

Εφόσον

$$K_{ext} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

έχουμε ότι

$$k_1 k_2 = -\frac{f^2}{D}.$$

Λόγω της υπόθεσης $k_1 k_2$ είναι μια αρνητική σταθερά.

Ισχυρισμός 3: $0 = -\frac{f_x}{f} + \frac{D_x}{D} = 2\Gamma_{12}^2$, $0 = -\frac{f_y}{f} + \frac{D_y}{D} = 2\Gamma_{12}^1$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 3: Αρχικά από τους Ισχυρισμούς 1 και 2 έχουμε ότι

$$-\frac{f_u}{f} + \frac{D_u}{D} = -\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 = 2\Gamma_{12}^2,$$

$$-\frac{f_v}{f} + \frac{D_v}{D} = -\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1 = 2\Gamma_{12}^1.$$

Έτσι το μόνο που απομένει για να ολοκληρωθεί η απόδειξη είναι να δείξουμε ότι $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{12}^1 = 0$. Επειδή $\langle A\partial_x, \partial_x \rangle = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_y \langle A\partial_x, \partial_x \rangle \\
&= \langle \nabla_{\partial_y} A\partial_x, \partial_x \rangle + \langle A\partial u, \nabla_{\partial_y} \partial_x \rangle \\
&= \langle (\nabla_{\partial_y} A)\partial_x + A\nabla_{\partial_y}\partial_x, \partial_x \rangle + \langle A\partial_x, \nabla_{\partial_y}\partial_x \rangle \\
&= \langle A\nabla_{\partial_y}\partial_x, \partial_x \rangle + \langle A\partial_x, \nabla_{\partial_y}\partial_x \rangle \\
&= \langle A\nabla_{\partial_x}\partial_y, \partial_x \rangle + \langle A\partial_x, \nabla_{\partial_y}\partial_x \rangle \\
&= \langle \Gamma_{12}^1\partial_x + \Gamma_{12}^2\partial_y, \partial_x \rangle + \langle A\partial_x, \Gamma_{12}^1\partial_x + \Gamma_{12}^2\partial_y \rangle \\
&= \Gamma_{12}^1 \langle A\partial_x, \partial_x \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle A\partial_y, \partial_x \rangle + \Gamma_{12}^1 \langle A\partial_x, \partial_x \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle A\partial_x, \partial_y \rangle \\
&= 4\Gamma_{12}^2 f.
\end{aligned}$$

Αφού $f > 0$, λαμβάνουμε $\Gamma^2_{12} = 0$.

Ομοίως επειδή $\langle A\partial_y, \partial_y\rangle = 0$, έχουμε,

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_x\langle A\partial_y, \partial_y\rangle \\
&= \langle \nabla_{\partial_x} A\partial_y, \partial_y\rangle + \langle A\partial_y, \nabla_{\partial_x}\partial_y\rangle \\
&= \langle (\nabla_{\partial_x} A)\partial_y, \partial_y\rangle + \langle A\nabla_{\partial_x}\partial_y, \partial_y\rangle + \langle A\partial_y, \nabla_{\partial_x}\nabla_y\rangle \\
&= \langle \Gamma^1_{12}\partial_x + \Gamma^2_{12}\partial_y, \partial_y\rangle + \langle A\partial_y, \Gamma^1_{12}\partial_x + \Gamma^2_{12}\partial_y\rangle \\
&= \Gamma^1_{12}\langle A\partial_x, \partial_y\rangle + \Gamma^2_{12}\langle A\partial_y, \partial_y\rangle + \Gamma^1_{12}\langle A\partial_y, \partial_x\rangle + \Gamma^2_{12}\langle A\partial_y, \partial_y\rangle \\
&= 4\Gamma^1_{12} f.
\end{aligned}$$

Αφού $f > 0$, έχουμε ότι $\Gamma^1_{12} = 0$. Συνεπώς αποδείξαμε τον Ισχυρισμό 3.

Ισχυρισμός 4: $E_y = 0 = G_x$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 4: Από τον Ισχυρισμό 3 προκύπτει ότι $\nabla_{\partial_x}\partial_y = 0$. Επίσης, από τη σχέση (6.3) και τον Ισχυρισμό 3 έχουμε ότι $G_x = 0$. Επιπλέον

$$E_y = \partial_y\langle \partial_x, \partial_x\rangle = 2\langle \nabla_{\partial_y}\partial_x, \partial_x\rangle = 2\langle \nabla_{\partial_x}\partial_y, \partial_x\rangle = 0.$$

Άρα $E_y = 0$ και έτσι αποδείξαμε τον Ισχυρισμό 4.

Θεωρώντας νέες τοπικές συντεταγμένες

$$u = \int \sqrt{E(x)}dx,\ v = \int \sqrt{G(y)}dy,$$

έχουμε

$$I = du^2 + 2Fdudv + dv^2,\ II = 2fdudv.$$

Γνωρίζουμε ότι η εξωτερική καμπυλότητα είναι

$$K_{ext} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω γίνεται

$$k_1 k_2 = -\frac{f^2}{1 - F^2},$$

ή

$$1 = F^2 - \frac{f^2}{k_1 k_2}.$$

Όμως από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι K_{ext} είναι σταθερή και $K_{ext} = k_1k_2 < 0$. Άρα

$$1 = F^2 + (\frac{f}{\sqrt{-k_1k_2}})^2.$$

Τότε υπάρχει μια λεία συνάρτηση w τέτοια ώστε

$$F = \cos w \text{ και } \frac{f}{\sqrt{-k_1k_2}} = \sin w,$$

ή ισοδύναμα

$$f = \sqrt{-k_1k_2}\sin w.$$

Από την εξίσωση Gauss προκύπτει ότι $k_1k_2 = -1$ και επομένως $f = \sin w$. Έτσι έχουμε ότι

$$I = du^2 + 2\cos w du + dv^2,\ II = 2\sin w du dv,$$

με $0 < w < \pi$, αφού $1 - F^2 > 0$.

Όταν η επιφάνεια Σ είναι απλά συνεκτική τότε έχουμε ότι η απεικόνιση $(u, v) : \Sigma \to \mathbb{R}^2$ είναι τοπικός διαφορομορφισμός.

Ορίζουμε τη νέα μετρική Riemann

$$III = du^2 - 2\cos w du dv + dv^2.$$

Παρατηρούμε ότι

$$I + III = 2(du^2 + dv^2).$$

Επομένως $du^2 + dv^2$ είναι μια πλήρης ισόπεδη μετρική όταν η μετρική I είναι πλήρης. Έτσι η απεικόνιση $(u, v) : (\Sigma, du^2 + dv^2) \to \mathbb{R}^2$ είναι τοπική ισομετρία και επομένως ολικός διαφορομορφισμός. $\square$

Θεώρημα 6.1.2. *Έστω Σ μια επιφάνεια και $\psi : \Sigma \to \mathbb{M}^3(c)$ μια ισομετρική εμβάπτιση με σταθερή αρνητική εξωτερική καμπυλότητα. Τότε οι ασυμπτωτικές καμπύλες της εμβάπτισης ψ έχουν σταθερή στρέψη τ με $\tau^2 = -K_{ext}$ σε σημεία που η καμπυλότητα της ολοκληρωτικής καμπύλης δεν μηδενίζεται. Επιπλέον, δύο ασυμπτωτικές καμπύλες που διέρχονται από τυχόν σημείο έχουν στρέψεις $1, -1$ αν έχουν μη μηδενική καμπυλότητα σε αυτό το σημείο.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 6.1.1 γνωρίζουμε ότι υπάρχουν τοπικές συντεταγμένες (u, v), έτσι ώστε η επαγόμενη μετρική και η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της να γράφονται στη μορφή (6.1). Ως προς αυτές τις παραμέτρους, οι καμπύλες συντεταγμένων είναι οι ασυμπτωτικές καμπύλες της εμβάπτισης.

Έστω η παραμετρική καμπύλη $\alpha(u) = \psi(u, v_0)$. Η παράμετρος u είναι παράμετρος μήκος τόξου για την καμπύλη α και επίσης $II(a'(u)) = 0$. Άρα

$$\langle \overline{\nabla}_{\alpha'(u)} \alpha'(u), N(u, v_0) \rangle = 0,$$

όπου N είναι μοναδιαίο κάθετο της εμβάπτισης ψ και $\overline{\nabla}$ είναι η συνοχή Levi - Civitá της σφαίρας $\mathbb{S}^3$.

Επομένως, αν υποθέσουμε ότι η καμπυλότητα της καμπύλης $\alpha(u)$ δεν μηδενίζεται στο $u = u_0$, τότε το διάνυσμα $N(u_0, v_0)$ είναι το δεύτερο κάθετο διάνυσμα στο $u = u_0$ και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της καμπύλης $a(u)$ είναι το διάνυσμα $N(u, v_0) \times \alpha'(u)$. Το σύμβολο $\times$ συμβολίζει το εξωτερικό γινόμενο στον εφαπτόμενο χώρο της σφαίρας $\mathbb{S}^3$. Αν γράψουμε

$$N(u, v_0) \times \alpha'(u) = a(u) d\psi(\partial_u) + b(u) d\psi(\partial_v),$$

για κατάλληλες συναρτήσεις a, b, τότε η στρέψη $\tau(u)$ του $a(u)$ είναι

$$\begin{aligned}
\tau(u) &= -\langle \overline{\nabla}_{\alpha'(u)} N(u, v_0), N(u, v_0) \times \alpha'(u) \rangle \\
&= -\langle \overline{\nabla}_{\alpha'(u)} N(u, v_0), a(u) d\psi(\partial u) + b(u) d\psi(\partial v) \rangle \\
&= -a(u) \langle \overline{\nabla}_{\alpha'(u)} N(u, v_0), d\psi(\partial u) \rangle - b(u) \langle \overline{\nabla}_{\alpha'(u)} N(u, v_0), d\psi(\partial v) \rangle \\
&= a(u) \langle N(u, v_0), \overline{\nabla}_{\partial_u} d\psi(\partial_u) \rangle + b(u) \langle N(u, v_0), \overline{\nabla}_{\partial_u} d\psi(\partial_v) \rangle.
\end{aligned}$$

Έτσι από τον τύπο του Gauss έχουμε

$$\tau(u) = b(u) \langle N(u, v_0), \nabla_{\partial_u} d\psi(\partial_v) \rangle.$$

Συνεπώς από τη σχέση (6.1) έχουμε

$$\tau(u) = b(u) \sqrt{-k_1 k_2} \sin w. \tag{6.7}$$

Όμως,

$$0 = \langle N(u, v_0) \times \alpha'(u), \partial_u \rangle = \langle a(u) d\psi(\partial_u) + b(u) d\psi(\partial_v), d\psi(\partial_u) \rangle.$$

Έτσι από τη σχέση (6.1) παίρνουμε $a(u) + b(u) \cos w = 0$. Επίσης από τη σχέση (6.1) λαμβάνουμε

$$\sin w = \langle N(u, v_0) \times \alpha'(u), \partial v \rangle = a(u) \cos w + b(u).$$

Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι

$$\sin w = -b(u) \cos^2 w + b(u) = b(u)(1 - \cos^2 w) = b(u) \sin^2 w,$$

ή ισοδύναμα
$$b(u) = \frac{1}{\sin w}.$$
Έτσι η σχέση (6.7) γίνεται
$$\tau(u) = \sqrt{-k_1 k_2}.$$
Εργαζόμενοι ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι η στρέψη της παραμετρικής καμπύλης $\beta(v) = \psi(u_0, v)$ είναι $\tau(v) = -\sqrt{-k_1 k_2}$, με $N(u_0, v)$ να είναι το δεύτερο κάθετο διάνυσμα της καμπύλης $\beta(v)$. □

Λήμμα 6.1.1. *Υπό τις υποθέσεις του Θεωρήματος 6.1.1 και ως προς το σύστημα συντεταγμένων του Θεωρήματος 6.1.1 έχουμε ότι* $w_{uv} = 0$.

Απόδειξη. Από το Έξοχο Θεώρημα έχουμε ότι
$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 \tag{6.8}$$
Όμως,
$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos w \\ \cos w & 1 \end{pmatrix},$$
οπότε
$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{\sin^2 w}\begin{pmatrix} 1 & -\cos w \\ -\cos w & 1 \end{pmatrix}.$$
Λόγω της (1.2) έχουμε
$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2} g^{2m}(-g_{12,m} + g_{2m,1} + g_{m1,2}) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos w}{\sin^2 w}(-g_{12,1} + g_{21,1} + g_{11,2}) + \frac{1}{\sin^2 w}(-g_{12,2} + g_{22,1} + g_{21,2})\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Επίσης,
$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2} g^{2m}(-g_{11,m} + g_{1m,1} + g_{m1,1}) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos w}{\sin^2 w}(-g_{11,1} + g_{11,1} + g_{11,1}) + \frac{1}{\sin^2 w}(-g_{11,2} + g_{12,1} + g_{21,1})\right) \\ &= \frac{w_u}{\sin w}.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$(\Gamma^2_{11})_v = \frac{w_{uv}\sin w - w_u \cos w w_v}{\sin^2 w}.$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2} g^{1m}(-g_{12,m} + g_{2m,1} + g_{m1,2}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 w}(-g_{12,1} + g_{21,1} + g_{11,2}) - \frac{\cos w}{\sin^2 w}(-g_{12,2} + g_{22,1} + g_{21,2})\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Τέλος,

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2} g^{2m}(-g_{22,m} + g_{2m,2} + g_{m2,2}) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos w}{\sin^2 w}(-g_{22,1} + g_{21,2} + g_{12,2}) + \frac{1}{\sin^2 w}(-g_{22,2} + g_{22,2} + g_{22,2})\right) \\
&= -\frac{\cos w}{2\sin^2 w} 2\sin w w_v \\
&= -\frac{\cos w w_v}{\sin w}.
\end{aligned}$$

Έτσι σύμφωνα με τα παραπάνω, η σχέση (6.8) γράφεται ισοδύναμα

$$0 = \frac{w_u \cos w w_v}{\sin^2 w} - \frac{w_{uv}\sin w}{\sin^2 w} - \frac{w_u \cos w w_u}{\sin^2 w} = -\frac{w_{uv}}{\sin w}.$$

Και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση 6.1.1. *Το Λήμμα 6.1.1 μας λέει ουσιαστικά ότι η γωνιακή συνάρτηση w επαληθεύει την ομογενή κυματική εξίσωση και επομένως είναι της μορφής*

$$w(u, v) = w_1(u) + w_2(v),$$

όπου w_1, w_2 είναι λείες πραγματικές συναρτήσεις.

Στο σημείο αυτό ας επισημάνουμε ότι καθώς οι ισόπεδες επιφάνειες στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$ περιγράφονται από την κυματική εξίσωση (η οποία είναι υπερβολικού τύπου), αποδεικνύεται ότι οι ισόπεδες επιφάνειες στην $\mathbb{S}^3$ δεν είναι εν γένει αναλυτικές επιφάνειες.

Οι συντεταγμένες Tschebyscheff (T-συντεταγμένες από εδώ και στο εξής) είναι απαραίτητες για την τοπική μελέτη ισόπεδων επιφανειών. Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε πότε είναι ολικά διαθέσιμες σε μια επιφάνεια ώστε να αναπτυχθεί μια ολική θεωρία. Έχουμε ότι οποιαδήποτε απλά συνεκτική πλήρης ισόπεδη επιφάνεια στην $\mathbb{S}^3$ έχει T-συντεταγμένες που ορίζονται ολικά.

Αποδεικνύεται ότι οι απλά συνεκτικές ισόπεδες επιφάνειες στην $\mathbb{S}^3$ δεν διαθέτουν γενικά ολικές T-συντεταγμένες, αλλά αντ΄ αυτού, δέχονται μια ολικώς ορισμένη Tschebyscheff εμβάπτιση. Με άλλα λόγια, μπορούμε να θεωρήσουμε απεικόνιση (u, v) από την επιφάνεια στο $\mathbb{R}^2$ που να επαληθεύει όλες τις ιδιότητες των T-συντεταγμένων εκτός από το γεγονός ότι μπορεί να μην είναι 1-1. Η ύπαρξη αυτής της T-εμβάπτισης είναι αρκετή για να αντιμετωπίσει σε ολικό επίπεδο τις μη πλήρεις επίπεδες επιφάνειες στην $\mathbb{S}^3$. Τέλος, έχει αποδειχθεί ότι οι T-συντεταγμένες είναι ολικά ορισμένες σε οποιαδήποτε (όχι απαραίτητα πλήρη) απλά συνεκτική πραγματικά αναλυτική (real analytic) ισόπεδη επιφάνεια στην $\mathbb{S}^3$.

6.2 Πρώτα παραδείγματα ισόπεδων επιφανειών στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$

Ο πιο απλός τρόπος για να κατασκευάσουμε ισόπεδες επιφάνειες στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$ είναι μέσω της Hopf fibration.

Στην Ενότητα 5.2 του Κεφαλαίου 5 ορίσαμε την Hopf fibration ως $h : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ με $h(x) = xi\bar{x}$. Ένας ισοδύναμος τρόπος της Hopf fibration είναι ο εξής:

Θεωρώντας τη σφαίρα $\mathbb{S}^3$ ως

$$\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

Τότε η Hopf fibration δίνεται ως η απεικόνιση

$$h(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}.$$

Πρόταση 6.2.1. *Αν c είναι μια κανονική καμπύλη στη σφαίρα $\mathbb{S}^2$, τότε η αντίστροφη εικόνα $h^{-1}(c)$ είναι ισόπεδη επιφάνεια στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$.*

Απόδειξη. Έστω c ένας κύκλος. Θα δείξουμε ότι $h^{-1}(c)$ είναι γινόμενο δύο κύκλων. Πράγματι, εφόσον c είναι κύκλος τότε

$$h^{-1}(c) = h^{-1}(\{z : |z| = R\}) = \{(z_1, z_2) : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \text{ και } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = R\}.$$

Έτσι έχουμε το ακόλουθο σύστημα,

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1, \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = R,$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$|z_1| = \frac{R}{\sqrt{1+R^2}}, \ |z_2| = \frac{1}{\sqrt{1+R^2}}.$$

Έτσι έχουμε ότι $h^{-1}(c)$ είναι γινόμενο δύο κύκλων $\mathbb{S}^1(\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}) \times \mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{1+R^2}})$ αν c είναι κύκλος. Άρα σε αυτή την περίπτωση $h^{-1}(c)$ είναι μια ισόπεδη επιφάνεια.

Υποθέτουμε τώρα ότι η c είναι κανονική καμπύλη στη σφαίρα $\mathbb{S}^2$. Για κάθε σημείο $q \in h^{-1}(c)$, μπορούμε να θεωρήσουμε έναν κύκλο $\tilde{c}$ της σφαίρας $\mathbb{S}^2$ με επαφή δεύτερης τάξης στο σημείο $h(q)$ με την καμπύλη c (δηλαδή, οι παράγωγοι έως δεύτερης τάξης συμφωνούν). Τότε οι ίνες $h^{-1}(c)$ και $h^{-1}(\tilde{c})$ έχουν επαφή τάξης δύο στο σημείο q.

Αφού η ίνα $h^{-1}(\tilde{c})$ είναι ισόπεδη επιφάνεια και επειδή από το Έξοχο Θεώρημα έχουμε ότι η καμπυλότητα Gauss εξαρτάται μόνο από παραγώγους δεύτερης τάξης, θα έχουμε ότι το σημείο q θα είναι ένα ισόπεδο σημείο της ίνας $h^{-1}(c)$. Άρα η ίνα $h^{-1}(c)$ είναι ισόπεδη επιφάνεια στην $\mathbb{S}^3$. □

Στην απόδειξη της Πρότασης 6.2.1 είδαμε πως αν c είναι κύκλος τότε

$$h^{-1}(c) = \mathbb{S}^1(\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}) \times \mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{1+R^2}}).$$

Αυτοί οι τόροι ονομάζονται Clifford τόροι.

Αφού οι αντίστροφες εικόνες της Hopf fibration είναι γεωδαισιακές της $\mathbb{S}^3$, αποδεικνύεται ότι $h^{-1}(c)$ έχει γενικά την τοπολογία ενός κυλίνδρου. Αυτός είναι και ο λόγος που αυτές οι επιφάνειες ονομάζονται κύλινδροι Hopf. Επιπλέον, αν η επιλεγμένη κανονική καμπύλη c στην $\mathbb{S}^3$ είναι κλειστή, ο κύλινδρος Hopf που προκύπτει $h^{-1}(c)$ είναι συμπαγής και έχει την τοπολογία ενός τόρου. Έτσι καλείται τόρος Hopf. Επιπρόσθετα, αν c είναι εμφυτευμένη (embedded), ο κύλινδρος (ή τόρος) Hopf που προκύπτει είναι εμφυτευμένη. Αυτό περιέχει μια μεγάλη οικογένεια ισόπεδων τόρων και πλήρων ισόπεδων κυλίνδρων στην $\mathbb{S}^3$, μερικοί από τους οποίους είναι στη πραγματικότητα εμφυτευμένοι. Τέλος, οι ισόπεδες αυτές επιφάνειες μπορούν να υπολογιστούν ρητά όταν γνωρίζουμε την καμπύλη c της σφαίρας $\mathbb{S}^2$.

6.3 Η κατασκευή των Bianchi-Spivak ισόπεδων επιφανειών στη $\mathbb{S}^3$

Έστω $\psi : \Sigma \to \mathbb{S}^3$ μια εμβάπτιση και N να είναι το μοναδιαίο κάθετο της.

Από το Θεώρημα 6.1.1 έχουμε ότι υπάρχουν συντεταγμένες (u_1, u_2) τέτοιες ώστε,

$$I = du_1^2 + 2coswdu_1du_2 + du_2^2,\ II = 2\sqrt{-K}sinwdu_1du_2.$$

Από την Παρατήρηση 6.1.1 έχουμε ότι $w(u_1, u_1) = w(u_1) + w(u_2)$.

Θέτουμε, $e_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$ και $n_i = N \times d\psi(e_i)$. Τότε έχουμε,

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_i} d\psi(e_i) &= k_i n_i \\
\overline{\nabla}_{e_i} n_i &= -k_i d\psi(e_i) + \tau_i N \\
\overline{\nabla}_{e_i} N &= -\tau_i n_i.
\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 6.1.2 έχουμε ότι $\tau_1 = 1$ και $\tau_2 = -1$, όπου τ_i είναι η στρέψη της αντίστοιχης ασυμπτωματικής καμπύλης όταν η καμπυλότητα της καμπύλης δεν μηδενίζεται. Σε κάθε περίπτωση οι συναρτήσεις k_i και τ_i είναι καλά ορισμένες αν η καμπυλότητα της καμπύλης μηδενίζεται σε κάποια σημεία. Υπολογίζουμε τις καμπυλότητες $k_i(u_i)$.

Γράφουμε $\nabla_{e_1} e_1 = ae_1 + be_2$ για κατάλληλες συναρτήσεις a, b.

Αφού $k_1 n_1 = \nabla_{e_1} e_1$, τότε

$$\begin{aligned}
k_1 &= \langle \nabla_{e_1} e_1, n_1 \rangle \\
&= \langle ae_1 + be_2, n_1 \rangle \\
&= a\langle e_1, n_1 \rangle + b\langle e_2, n_1 \rangle \\
&= b\langle e_2, N \times e_1 \rangle \\
&= b \sin w.
\end{aligned}$$

Επειδή $n_1 = N \times e_1$, τότε $\langle e_1, n_1 \rangle = 0$. Έχουμε ότι

$$\langle \nabla_{e_1} e_1, e_1 \rangle = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
0 &= \langle ae_1 + be_2, e_1 \rangle \\
&= a\langle e_1, e_1 \rangle + b\langle e_2, e_1 \rangle \\
&= a + b \cos w. \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle = e_1 \langle e_1, e_2 \rangle = -w_1' \sin w.$$

Επιπλέον έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle &= \langle a e_1 + b e_2, e_2 \rangle \\ &= a \langle e_1, e_2 \rangle + b \langle e_2, e_2 \rangle \\ &= a \cos w + b. \end{aligned}$$

Άρα

$$a \cos w + b = w_1' \sin w. \tag{6.10}$$

Έτσι από τις σχέσεις (6.9) και (6.10) παίρνουμε

$$b = -\frac{w_1'}{\sin w},\ a = \frac{w_1' \cos w}{\sin w}.$$

Επομένως,

$$k_1(u_1) = b \sin w = -w_1'(u_1).$$

Εργαζόμενοι ομοίως βρίσκουμε ότι $k_2(u_2) = w_2'(u_2)$. Έτσι από τους υπολογισμούς των k_i, $i = 1, 2$ έχουμε ότι οι ασυμπτωτικές καμπύλες $\alpha(u_1) = \psi(u_1, u_2)$ έχουν καμπυλότητα και στρέψη που δεν εξαρτάται από το u_2. Το ίδιο ισχύει και για τις ασυμπτωτικές καμπύλες $\beta(u_2) = \psi(u_1, u_2)$.

Παίρνοντας τώρα μια άλλη ασυμπτωτική καμπύλη $\bar{\alpha}(u_1) = \psi(u_1, u_2)$, τότε για τις καμπύλες $\alpha(u_1)$, $\bar{\alpha}(u_1)$ ισχύει ότι η καμπυλότητα και η στρέψη τους δεν εξαρτάται από το u_2. Όμως πιο πάνω δείξαμε ότι έχουν την ίδια στρέψη και την ίδια καμπυλότητα. Συνεπώς αυτές οι δύο ασυμπτωτικές καμπύλες είναι γεωμετρικώς ισότιμες. Ομοίως για την ασυμπτωτική καμπύλη $\beta(u_2)$, αν υπόθέσουμε ότι $\bar{\beta}(u_2)$ είναι μια άλλη ασυμπτωτική καμπύλη, τότε έχουμε ότι οι καμπύλες $\beta(u_2)$, $\bar{\beta}(u_2)$ είναι γεωμετρικώς ισότιμες. Έτσι δείξαμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 6.3.1. *Όλες οι ασυμπτωτικές καμπύλες $u_1 \mapsto \psi(u_1, u_2)$ είναι γεωμετρικώς ισότιμες. Αντίστοιχα, όλες οι ασυμπτωτικές καμπύλες $u_2 \mapsto \psi(u_1, u_2)$ γεωμετρικώς ισότιμες.*

Ορισμός 6.3.1. Αν G είναι μια ομάδα Lie, τότε ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \mathfrak{X}(G)$ καλείται αριστερώς αναλλοίωτο αν για κάθε $g \in G$ $L_{g*}X = X \circ L_g$. Όπου με L_g συμβολίζουμε τις αριστερές μεταφορές, δηλαδή $L_g(h) = gh$.

Ομοίως ορίζεται και το δεξιώς αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο.

Λήμμα 6.3.1. *Έστω G είναι μια ομάδα Lie εφοδιασμένη με μετρική $\langle , \rangle$. Αν X, Y, είναι αριστερώς αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία της G, τότε ισχύει*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].$$

Απόδειξη. Οι ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου X είναι αριστερώς αναλλοίωτες 1-παραμετρική υποομάδα. Δηλαδή $\nabla_X X = 0$. Συνεπώς

$$0 = \nabla_{X+Y} X + Y = \nabla_X X + \nabla_X Y + \nabla_Y X + \nabla_Y Y = \nabla_X Y + \nabla_Y X.$$

Όμως,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Άρα,

$$0 = 2\nabla_X Y - [X, Y],$$

ή

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].$$

□

Έστω

$$X_1 = (0, 1, 0, 0),\ X_2 = (0, 0, 1, 0),\ X_3 = (0, 0, 0, 1).$$

Έχουμε ότι

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Τότε έχουμε

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2X_3.$$

Ομοίως δείχνουμε ότι $[X_2, X_3] = 2X_1,\ [X_3, X_1] = 2X_2$. Συνολικά έχουμε

$$[X_1, X_2] = 2X_3,\ [X_2, X_3] = 2X_1,\ [X_3, X_1] = 2X_2. \tag{6.11}$$

Επιπλέον έχουμε

$$X_1 \times X_2 = X_3,\ X_2 \times X_3 = X_1,\ X_3 \times X_1 = X_2.$$

Αν συμβολίσουμε με $\tilde{X}_i$ το αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$ που επεκτείνει τα X_i, τότε

$$\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 = \tilde{X}_3,\ \tilde{X}_2 \times \tilde{X}_3 = \tilde{X}_1,\ \tilde{X}_3 \times \tilde{X}_1 = \tilde{X}_2,$$

όπου το εξωτερικό γινόμενο $\times$ σε κάθε εφαπτόμενο χώρο ορίζεται ως προς τη συνήθη μετρική $\langle\, ,\rangle$ της $\mathbb{S}^3$ και με το συνήθη προσανατολισμό της $\mathbb{S}^3$.

Ας είναι c μια καμπύλη στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου. Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα t της c που δίνεται από

$$t(s) = \sum_{i=1}^{3} f_i(s) \cdot \tilde{X}_i(c(s)), \tag{6.12}$$

όπου

$$\sum_{i=1}^{3} f_i^2 = 1. \tag{6.13}$$

Προφανώς

$$\sum_{i=1}^{3} f_i f_i' = 0.$$

Με ∇ συμβολίζουμε τη συνοχή Levi Civitá της $\mathbb{S}^3$. Τότε για κάθε διανυσματικό πεδίο $\sum_j h_j(s) \cdot \tilde{X}_j(c(s))$ κατά μήκος της c έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{D}{ds}\left[\sum_{j=1}^{3} h_j(s) \cdot \tilde{X}_j(c(s))\right] &= \sum_{j=1}^{3} h_j'(s) \cdot \tilde{X}_j(c(s)) + \sum_{j=1}^{3} h_j(s) \frac{D}{ds}\tilde{X}_j(c(s)) \\ &= \sum_{j=1}^{3} h_j'(s) \cdot \tilde{X}_j(c(s)) + \sum_{j=1}^{3} h_j(s) \sum_{i=1}^{3} f_i(s) \nabla_{\tilde{X}_i} \tilde{X}_j(c(s)).\end{aligned}$$

Από Λήμμα 6.3.1 έχουμε ότι

$$\nabla_{\tilde{X}_i} \tilde{X}_j = \frac{1}{2}[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j].$$

Άρα από την παραπάνω σχέση και τη σχέση (6.11), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\frac{D}{ds}\left[\sum_{j=1}^{3} h_j(s)\cdot\tilde{X}_j(c(s))\right] =&\sum_{j=1}^{3} h_j'(s)\cdot\tilde{X}_j(c(s))\\ &+[(f_2(s)h_3(s)-f_3(s)h_2(s))\tilde{X}_1(c(s))\\ &+(f_3(s)h_1(s)-f_1(s)h_3(s))\tilde{X}_2(c(s)))\\ &+(f_1(s)h_2(s)-f_2(s)h_1(s))\tilde{X}_3(c(s))].\end{aligned} \tag{6.14}$$

Έτσι έχουμε

$$\frac{Dt(s)}{ds}=\sum_{i=1}^{3} f_i'\cdot\tilde{X}_i. \tag{6.15}$$

Η καμπυλότητα k $(=k_1)$ της καμπύλης c δίνεται ως

$$k=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(f_i')^2}. \tag{6.16}$$

Το κύριο κάθετο διάνυσμα n της καμπύλης c δίνεται ως

$$n=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{3} f_i'\cdot\tilde{X}_i. \tag{6.17}$$

Επιπλέον, το δεύτερο κάθετο διάνυσμα b της καμπύλης c δίνεται ως

$$\begin{aligned}b=t\times n&=\frac{1}{k}\cdot\left(\sum_{i=1}^{3} f_i\cdot\tilde{X}_i\right)\times\left(\sum_{j=1}^{3} f_j'\cdot\tilde{X}_j\right)\\ &=\frac{1}{k}\sum_{i,j=1}^{3} f_i fj'(X_i\,\tilde{\times}\,\tilde{X}_j)\\ &=\frac{1}{k}\Big(f_2f_3'-f_3f_2')\tilde{X}_1+(f_3f_1'-f!f_3')\tilde{X}_2+(f_1f_2'-f_2f_1')\tilde{X}_3\Big)\\ &=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{3} g_i\tilde{X}_i.\end{aligned} \tag{6.18}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}\frac{Db(s)}{ds} &= \frac{1}{k}\frac{D}{ds}\left(\sum_{i=1}^{3} g_i \cdot \tilde{X}_i\right) - \frac{k'}{k^2}\sum_{i=1}^{3} g_i \cdot \tilde{X}_i \\ &= \frac{1}{k}\left((f_2g_3 - g_2f_3)\tilde{X}_1 + (f_3g_1 - g_3f_1)\tilde{X}_2 + (f_1g_2 - g_1f_2)\tilde{X}_3 + \sum_{i=1}^{3} g_i'\tilde{X}_i\right) \\ &\quad - \frac{k'}{k}\sum_{i=1}^{3} g_i\tilde{X}_i,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}\frac{Db(s)}{ds} =& \frac{1}{k}\left((f_2g_3 - g_2f_3)\tilde{X}_1 + (f_3g_1 - g_3f_1)\tilde{X}_2 + (f_1g_2 - g_1f_2)\tilde{X}_3\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{g_i}{k}\right)'\tilde{X}_i.\end{aligned}$$

Αλλά

$$\begin{aligned}f_2g_3 - g_2f_3 &= f_2(f_1f_2' - f_2f_1') - f_3(f_3f_1' - f_1f_3') \\ &= f_1(f_2f_2' + f_3f_3') - f_1'(f_2^2 + f_3^2).\end{aligned}$$

Όμως από τη σχέση (6.13) έχουμε

$$f_2g_3 - g_2f_3 = f_1(-f_1f_1') - f_1'(1 - f_1^2) = -f_1.$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι

$$f_3g_1 - g_3f_1 = f_2',\ f_1g_2 - g_1f_2 = f_3'.$$

Συνεπώς έχουμε

$$\frac{Db(s)}{ds} = \frac{-\sum_{i=1}^{3} f_i' \cdot \tilde{X}_i}{k} + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{g_i}{k}\right)' \cdot \tilde{X}_i,$$

όπου με χρήση της σχέσης (6.17) έχουμε

$$\frac{Db(s)}{ds} = -n + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{g_i}{k}\right)' \cdot \tilde{X}_i. \tag{6.19}$$

Θεώρημα 6.3.1. *Αν c είναι μια καμπύλη της $\mathbb{S}^3$ η οποία έχει στρέψη $\tau = 1$, τότε το δεύτερο κάθετο b είναι αριστερώς αναλλοίωτο κατά μήκος της c, δηλαδή*

$$b(s) = L_{c(s)c(o)^{-1}*}b(0).$$

Αν η καμπύλη c έχει στρέψη $\tau = -1$, τότε το δεύτερο κάθετο b είναι δεξιώς αναλλοίωτο κατά μήκος της c.

Απόδειξη. Από τους τύπους Frenet γνωρίζουμε ότι

$$\frac{Db(s)}{ds} = -\tau n.$$

Αφού $\tau = 1$, τότε από τη σχέση (6.19) έχουμε

$$\left(\frac{g_i}{k}\right)' = 0,$$

συνεπώς g_i/k είναι σταθερό. Εφόσον $\tilde{X}_i$ είναι αριστερώς αναλλοίωτα και g_i/k είναι σταθερά, τότε από τη σχέση (6.18) έχουμε ότι και το δεύτερο κάθετο b είναι αριστερώς αναλλοίωτο.

Αν η στρέψη της καμπύλης c είναι $\tau = -1$, τότε θεωρούμε την απεικόνιση

$$f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3,\ f(x) = x^{-1}.$$

Έστω $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^3$ καμπύλη με $\gamma(0) = p \in \mathbb{S}^3$ και $\gamma'(0) = v \in T_p\mathbb{S}^3$. Το διαφορικό $df_p : T_p\mathbb{S}^3 \to T_p\mathbb{S}^3$, είναι

$$df_p v = (f \circ \gamma)'(0).$$

Όμως

$$(f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t)) = \gamma^{-1}(t) = \gamma(-t).$$

Έτσι

$$(f \circ \gamma)'(0) = -c'(0) = -v.$$

Δηλαδή

$$df_p v = -v.$$

Επομένως η απεικόνιση f αντιστρέφει τον προσανατολισμό. Έτσι έχουμε ότι το δεύτερο κάθετο διάνυσμα της καμπύλης $f \circ c$ είναι το διάνυσμα $-df_p b$. Συνεπώς, $f \circ c$ έχει στρέψη $\tau = 1$ αν και μόνο αν η καμπύλη c έχει στρέψη $\tau = -1$. Επομένως έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα 6.3.2. *Η ισόπεδη εμβάπτιση $\psi(u_1, u_2)$ μπορεί να ανακτηθεί ως προς τις ασυμπτωτικές καμπύλες $\psi(u_1, 0)$, $\psi(0, u_2)$ ως*

$$\psi(u_1, u_2) = \psi(u_1, 0) \cdot \psi(0, 0)^{-1} \cdot \psi(0, u_2).$$

Απόδειξη. Έστω A_{u_1} να είναι η μοναδική ισομετρία της σφαίρας $\mathbb{S}^3$ με

$$A_{u_1}(\psi(0, u_2)) = \psi(u_1, u_2),$$

για κάθε u_2.

Θεωρούμε την οικογένεια των αριστερών μεταφορών

$$\{B_{u_1}\} = \{L_{\psi(u_1,0)\psi(0,0)^{-1}}\},$$

η οποία απεικονίζει το σημείο $\psi(0, 0)$ στο σημείο $\psi(u_1, 0)$. Από το Θεώρημα 6.3.1, το διαφορικό B_{u_1*} απεικονίζει το δεύτερο κάθετο διάνυσμα $b(0)$ της $u_1 \mapsto \psi(u_1, 0)$ στο $u_1 = 0$ στο δεύτερο κάθετο διάνυσμα $b(u_1)$ στο u_1. Συνεπώς, το διαφορικό B_{u_1*} απεικονίζει το εφαπτόμενο επίπεδο αυτής της καμπύλης στο 0 στο εφαπτόμενο επίπεδο της u_1. Άρα μπορούμε να γράψουμε

$$t(u_1) = \cos\theta(u_1) \cdot B_{u_1*}t(0) - \sin\theta(u_1) \cdot B_{u_1*}n(0),$$

όπου $\theta(u_1)$ είναι η γωνία από το $t(u_1)$ στο $B_{u_1*}t(0)$. Χωρίς βλάβη γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\psi(0, 0) = 1 \in \mathbb{S}^3$. Τότε από τη σχέση (6.12) έχουμε ότι

$$f_1 = \cos\theta(u_1),\ f_2 = -\sin\theta(u_1),\ f_3 = 0.$$

Συνεπώς από τη σχέση (6.15) έχουμε

$$\frac{Dt}{du_1} = -\theta(u_1)'(\sin\theta(u_1) \cdot B_{u_1*}t(0) + \cos\theta(u_1) \cdot B_{u_1*}n(0)) = -\theta(u_1)' \cdot n(u_1).$$

Όμως

$$\frac{Dt}{du_1} = -\frac{\partial w}{\partial u_1} n(u_1).$$

Συγκρίνοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε ότι

$$w'(u_1) = \theta'(u_1).$$

Άρα

$$w(u_1) = \theta(u_1) + w(0).$$

Έτσι έχουμε ότι το B_{u_1*} απεικονίζει το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης $u_2 \mapsto \psi(0, u_2)$ για $u_2 = 0$ στο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης $u_2 \mapsto \psi(u_1, u, 2)$

για $u_2 = 0$. Επιπλέον οι καμπύλες $u_2 \mapsto \psi(u_1, u, 2)$ είναι ασυμπτωτικές. Τα εφαπτόμενα επίπεδα στο $u_2 = 0$ συμπίπτουν με τα εφαπτόμενα επίπεδα της ασυμπτωτικής καμπύλης $u_1 \mapsto \psi(u_1, 0)$ στο 0 και u_1 αντίστοιχα. Έτσι τα δεύτερα κανονικά διανύσματα στο $u_2 = 0$ είναι τα δεύτερα κανονικά διανύσματα $b(0)$ και $b(u_1)$ της καμπύλης $u_1 \mapsto \psi(u_1, u_2)$. Επομένως η $B_{u_1 *} t(0)$ παίρνει το δεύτερο κάθετο διάνυσμα της καμπύλης $u_2 \mapsto \psi(0, u_2)$ (στο $u_2 = 0$) στο δεύτερο κάθετο της καμπύλης $u_2 \mapsto \psi(u_1, u_2)$ (στο $u_2 = 0$). Άρα έχουμε ότι η απεικόνιση B_{u_1} πρέπει να είναι η ισομετρία A_{u_1}, δηλαδή A_{u_1} είναι πράγματι αριστερή μεταφορά.

Έτσι έχουμε ότι η ισομετρική εμβάπτιση ψ μπορεί να γραφεί ως

$$\psi(u_1, u_2) = \psi(u_1, 0) \cdot \psi(0, 0)^{-1} \cdot \psi(0, u_2).$$

□

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο του Θεωρήματος 6.3.2 πρέπει να προβούμε σε κάποιες παρατηρήσεις. Οι ασυμπτωτικές καμπύλες μιας ισόπεδης επιφάνειας έχουν στρέψη ± 1 στα σημεία όπου η καμπυλότητα των καμπυλών δεν είναι μηδέν. Έτσι κάποιος μπορεί να σκεφτεί ότι μια ισόπεδη επιφάνεια μπορεί να περιγραφεί ως γινόμενο δύο καμπυλών, η μια με στρέψη 1 και η άλλη με στρέψη -1, χρησιμοποιώντας την περιγραφή του Θεωρήματος 6.3.2. Αυτό ουσιαστικά είναι αληθές, αλλά οι ασυμπτωτικές καμπύλες θα μπορούσαν να έχουν σημεία όπου η καμπυλότητά τους να είναι μηδέν.

Για λόγους απλούστευσης υποθέτουμε ότι $\psi(0, 0) = 1$, $\alpha(u_1) = \psi(u_1, 0)$ και $\beta(u_2) = \psi(0, u_2)$. Τότε από το Θεώρημα 6.3.2 έχουμε ότι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της εμβάπτισης ψ δίνεται ως

$$N(u_1, u_2) = \alpha(u_1)\zeta_0\beta(u_2),$$

όπου $\zeta_0 = N(0, 0) \in \mathbb{S}^3$, αφού $0 = \langle \psi(0, 0), N(0, 0)\rangle = \langle 1, \zeta_0\rangle$.

Επιπλέον,

$$0 = \langle \psi_{u_1}, N\rangle = \langle \alpha'\beta, \alpha\zeta_0\beta\rangle = \langle \alpha', \alpha\zeta_0\rangle,$$

$$0 = \langle \psi_{u_2}, N\rangle = \langle \alpha\beta', \alpha\zeta_0\beta\rangle = \langle \beta', \zeta_0\beta\rangle.$$

Λήμμα 6.3.2. *Έστω $v \in \mathbb{S}^3$ και $\zeta_0 \in \mathbb{S}^2$. Τότε ισχύει $\langle v, v\zeta_0\rangle = 0$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\langle v, v\zeta_0\rangle = \langle v\zeta_0, v\zeta_0\zeta_0\rangle = \langle v\zeta_0, -v\zeta_0\bar{\zeta_0}\rangle = -\langle v\zeta_0, v\|\zeta_0\|^2\rangle = -\langle v\zeta_0, v\rangle,$$

ή ισοδύναμα

$$\langle v, v\zeta_0\rangle + \langle v\zeta_0, v\rangle = 0.$$

Άρα

$$\langle v, v\zeta_0\rangle = 0.$$

□

Πρόταση 6.3.2. *Έστω* $\zeta_0 \in \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{S}^3$ *και* $\gamma(s)$ *μια καμπύλη στην* $\mathbb{S}^3$ *με παράμετρο το μήκος τόξου.*

(i) Αν $\langle \gamma', \gamma\zeta_0\rangle = 0$*, τότε* $\gamma(s)$ *έχει στρέψη* $\tau = 1$ *στα σημεία όπου η καμπυλότητα της καμπύλης* $\gamma(s)$ *δεν μηδενίζεται.*

(ii) Αν $\langle \gamma', \zeta_0\gamma\rangle = 0$*, τότε* $\gamma(s)$ *έχει στρέψη* $\tau = -1$ *στα σημεία όπου η καμπυλότητα της καμπύλης* $\gamma(s)$ *δεν μηδενίζεται.*

Απόδειξη. (i). Υποθέτουμε ότι $\langle \gamma', \gamma\zeta_0\rangle = 0$. Παραγωγίζοντας αυτή τη σχέση έχουμε

$$0 = \langle \nabla_{\gamma'}\gamma', \gamma\zeta_0\rangle + \langle \gamma', \gamma'\zeta_0\rangle \tag{6.20}$$

Λόγω του Λήμματος 6.3.2 έχουμε

$$\langle \gamma', \gamma'\zeta_0\rangle = 0,\ \langle \gamma, \gamma\zeta_0\rangle = 0.$$

Συνεπώς $\gamma\zeta_0$ είναι ορθογώνιο προς τα γ, γ', $\nabla_{\gamma'}\gamma'$. Έτσι αν $\nabla_{\gamma'}\gamma' \neq 0$, τότε το δεύτερο κάθετο διάνυσμα της καμπύλης γ είναι το $\gamma\zeta_0$. Επιπλέον το κύριο κάθετο της καμπύλης γ είναι το $-\gamma'\zeta_0$. Άρα έχουμε ότι $b = \gamma\zeta_0$ και $n = -\gamma'\zeta_0$. Έτσι από τις εξισώσεις Frenet έχουμε

$$b' = -\tau n,$$

δηλαδή

$$\tau = -\langle b', n\rangle = -\langle \nabla_{\gamma'}\gamma\zeta_0, -\gamma'\zeta_0\rangle = \langle \gamma'\zeta_0, \gamma'\zeta_0\rangle = 1.$$

Άρα $\tau = 1$. Ομοίως εργαζόμαστε και στην περίπτωση (ii). □

Έστω γ να είναι καμπύλη που ικανοποιεί τη σχέση $\langle \gamma', \gamma\zeta_0\rangle = 0$. Τότε η καμπύλη $\bar{\gamma}$ ικανοποιεί την περίπτωση (ii) στην Πρόταση 6.3.2. Αυτό ισχύει διότι

$$0 = \langle \gamma', \gamma\zeta_0\rangle = \langle \bar{\gamma'}, \bar{\gamma\zeta_0}\rangle = \langle \bar{\gamma}', \bar{\zeta_0}\bar{\gamma}\rangle = -\langle \bar{\gamma}', \zeta_0\bar{\gamma}\rangle.$$

Παραπάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $\bar{\zeta_0} = -\zeta_0$, επειδή $\zeta_0 \in \mathbb{S}^2$.

Θεώρημα 6.3.3. *Έστω $\zeta_0 \in \mathbb{S}^2$. Θεωρούμε δύο κανονικές καμπύλες $\alpha(u_1), \beta(u_2)$ αμφότερες με παράμετρο το μήκος τόξου που ικανοποιούν*

$$\langle \alpha', \alpha\zeta_0 \rangle = 0, \; \langle \beta', \beta\zeta_0 \rangle = 0, \tag{6.21}$$

με $\alpha(0) = 1 = \beta(0)$ και

$$\overline{\alpha(u_1)}\alpha'(u_1) \neq \overline{\beta(u_2)}\beta'(u_2). \tag{6.22}$$

Τότε η απεικόνιση $\psi(u_1, u_2) = \alpha(u_1)\overline{\beta(u_2)}$ είναι ισόπεδη εμβάπτιση με μοναδιαίο κάθετο το διανυσματικό πεδίο $N(u_1, u_2) = \alpha(u_1)\zeta_0\overline{\beta(u_2)}$,

Απόδειξη. Έστω οι κανονικές καμπύλες $\alpha(u_1)$, $\beta(u_2)$ έχουν παράμετρο το μήκος τόξου. Τότε από τη σχέση (6.21) και λόγω της Πρότασης 6.3.2 έχουμε ότι οι καμπύλες α, β έχουν στρέψη 1 και -1 αντίστοιχα. Άρα $\bar{\beta}$ έχει στρέψη $\tau = 1$.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 6.3.1 για την καμπύλη α βρίσκουμε ότι το επίπεδο ταλάντωσης της α στο u_1 συμπίπτει με το επίπεδο ταλάντωσης της καμπύλης $u_2 \mapsto \alpha(u_1)\overline{\beta(u_2)}$ στο $u_2 = 0$. Έτσι αυτά τα επίπεδα ταλάντωσης συμπίπτουν με τον εφαπτομενικό χώρο της επιφάνειας $M = \{\alpha(u_1)\overline{\beta(u_2)}\}$.

Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα 6.3.1 για τις καμπύλες $u_2 \mapsto \alpha(u_1)\overline{\beta(u_2)}$ με στρέψη $\tau = 1$ βρίσκουμε ότι ο εφαπτομενικός χώρος της επιφάνειας M σε κάθε σημείο $\alpha(\tilde{u_1})\overline{\beta(\tilde{u_2})}$ συμπίπτει με τα επίπεδα ταλάντωσης των παραμετρικών καμπυλών $u_1 \mapsto \alpha(u_1)\overline{\beta(\tilde{u_2})}$ στο $u_1 = \tilde{u_1}$ και $u_2 \mapsto \alpha(\tilde{u_1})\overline{\beta(u_2)}$ στο $u_2 = \tilde{u_2}$. Άρα αυτές οι παραμετρικές καμπύλες είναι ασυμπτωτικές καμπύλες. Επομένως από το Θεώρημα 6.1.2 έχουμε ότι η επιφάνεια M έχει εξωτερική καμπυλότητα $K_{ext} = -1$. Τότε από την εξίσωση Gauss έχουμε $K = K_{ext} + c = 0$. Όμως η απεικόνιση ψ είναι εμβάπτιση αν και μόνο αν $\psi_{u_1} \neq \pm\psi_{u_2}$. Παρατηρούμε ότι

$$\psi_{u_1}(u_1, u_2) = \alpha'(u_1)\overline{\beta(u_2)}, \; \psi_{u_2}(u_1, u_2) = \alpha(u_1)\beta'(\bar{u}_2).$$

Αν $\psi_{u_1}(u_1, u_2) = \pm\psi_{u_2}(u_1, u_2)$. Τότε $\alpha'(u_1)\beta(\bar{u}_2) = \pm\alpha(u_1)\overline{\beta'(u_2)}$, δηλαδή ισοδύναμα έχουμε $\alpha(\bar{u}_1)\alpha'(u_1) = \pm\overline{\beta'(u_2)}\beta(u_2)$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με τη σχέση (6.22). Έτσι έχουμε ότι η απεικόνιση ψ είναι εμβάπτιση και εφόσον $K = 0$ είναι και ισόπεδη. □

6.4 Η αναπαράσταση Kitagawa

Ο Kitagawa έδωσε μια γεωμετρική κατασκευή που επιτρέπει την κατασκευή καμπύλης με στρέψη -1 ή 1 χωρίς να λύσει την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση.

Ορίζουμε, την μοναδιαία εφαπτόμενη δέσμη $U\mathbb{S}^2$ της σφαίρας $\mathbb{S}^2$ ως

$$U\mathbb{S}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 : \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Έστω τώρα $\xi_0 \in \mathbb{S}^2$ ορθογώνιο τόσο στο 1 όσο και στο i. Τότε μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση,

$$\pi : \mathbb{S}^3 \to U\mathbb{S}^2$$

με

$$\pi(x) = (Ad(x)i, Ad(x)\xi_0).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\langle Ad(x)i, Ad(x)\xi_0\rangle = \langle xi\bar{x}, x\xi_0\bar{x}\rangle = \langle i, \xi_0\rangle = 0,$$

λόγω της υπόθεσής μας. Έτσι δείξαμε ότι

$$\pi(\mathbb{S}^3) = U\mathbb{S}^2.$$

Στο σημείο αυτό υπενθυμίζουμε τον ορισμό της απεικόνισης κάλυψης [11].

Ορισμός 6.4.1. Έστω M, $\tilde{M}$ δύο συνεκτικά πολυπτύγματα. Μια απεικόνιση $\pi : \tilde{M} \to M$ καλείται απεικόνιση κάλυψης (και το ζεύγος $(\tilde{M}, \pi)$ χώρος κάλυψης του M) αν και μόνο αν,

(i) Η απεικόνιση π είναι διαφορίσιμη και επί.

(ii) Για κάθε σημείο $p \in M$ υπάρχει μια περιοχή U του σημείου p τέτοια ώστε,

$$\pi^{-1}(U) = \cup_i \tilde{U}_i,$$

όπου τα $\tilde{U}_i$ ειναι ανοικτά, συνεκτικά, $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j = \varnothing$ για $i \neq j$ και τέτοια ώστε $\pi|_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \to U$ να είναι διαφορομορφισμός.

Λόγω του Ορισμού 6.4.1 και της Ενότητας 5.2 του Κεφαλαίου 5 παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $\pi : \mathbb{S}^3 \to U\mathbb{S}^2$ είναι απεικόνιση κάλυψης. Μια άλλη παρατήρηση για την απεικόνιση π είναι ότι ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{S}^3$, $\pi(x) = \pi(-x)$.

Έστω τώρα c μια κανονική καμπύλη στην $\mathbb{S}^2$ με $c^* = \frac{c'}{||c'||}$. Ορίζουμε την καμπύλη

$$\hat{c} = (c, \frac{c'}{||c'||})$$

της $U\mathbb{S}^2$.

Εφόσον η απεικόνιση π είναι απεικόνιση κάλυψης ισχύει η ιδιότητα ανύψωσης των τόξων και άρα υπάρχει μια κανονική καμπύλη a στην $\mathbb{S}^3$ τέτοια ώστε $\pi \circ a = \hat{c}$. Έτσι έχουμε ότι $h(a) = c$. Γνωρίζουμε ότι $a\bar{a} = 1$, άρα $\bar{a}'a = -\bar{a}a'$. Επιπλέον, $ai\bar{a} = c$. Επομένως $c' = a'i\bar{a} + ai\bar{a}'$. Επίσης $\pi(a) = \hat{c}$. Άρα $ai\bar{a} = \frac{c'}{||c'||}$, δηλαδή

$$ai\bar{a} = \frac{1}{||c'||}(a'i\bar{a} + ai\bar{a}'),$$

ή ισοδύναμα

$$ai = \frac{1}{||c'||}(a'i - ai\bar{a}a').$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\langle a', a\xi_0\rangle &= \frac{1}{||c'||}\{\langle a', a'i\rangle - \langle a', ai\bar{a}a'\rangle\}\\ &= \frac{1}{||c'||}\{\langle 1, i\rangle - \langle 1, ai\bar{a}\rangle\}\\ &= \frac{1}{||c'||}\langle a, ai\rangle\\ &= \frac{1}{||c'||}\langle 1, i\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

Δηλαδή η καμπύλη a της σφαίρας $\mathbb{S}^3$ έχει στρέψη 1 σε σημεία που η καμπυλότητα δεν είναι μηδέν. Και αντίστροφα, όποια κανονική καμπύλη a της σφαίρας $\mathbb{S}^3$ ικανοποιεί τη συνθήκη $\langle a', a\xi_0\rangle = 0$ μπορεί να κατασκευαστεί με την παραπάνω διαδικασία. Αυτή η κατασκευή μας λέει επίσης ότι η καμπύλη $a(u)$ πρέπει απαραίτητα να είναι μια ασυμπτωτική καμπύλη του κυλίνδρου Hopf, που ανήκει στη μη τετριμμένη ασυμπτωτική οικογένεια, δηλαδή, σε αυτήν που δεν αποτελείται από της ίνες της Hopf fibration (μέγιστοι κύκλοι).

Έστω τώρα c μια καμπύλη της σφαίρας $\mathbb{S}^3$. Ο Kitagawa όρισε την ασυμπτωτική ανύψωση της c να είναι οποιαδήποτε από αυτές τις μη τετριμμένες ασυμπτωτικές καμπύλες της επιφάνειας $h^{-1}(c)$.

Αυτή η έννοια είναι καλά ορισμένη μόνο αν λάβουμε υπόψιν ότι δύο τέτοιες ασυμπτωτικές καμπύλες διαφέρουν μόνο ως προς μια αριστερή ή δεξιά μεταφορά της $\mathbb{S}^3$ λόγω των αποτελεσμάτων Bianchi-Spivak. Χρησιμοποιώντας αυτά τα αποτελέσματα, ο Kitagawa μπόρεσε να δώσει μια γενική μέθοδο για την κατασκευή ισόπεδων επιφανειών στην $\mathbb{S}^3$.

Θεώρημα 6.4.1. *(Αναπαράσταση Kitagawa) Έστω $c_1(u), c_2(u)$ δύο κανονικές καμπύλες στην $\mathbb{S}^2$, με $c_j(0) = i$, $c_j'(0) = \xi_0$ για κάποιο $\xi_0 \in \mathbb{S}^3$ ορθογώνιο τόσο με το 1 όσο και με το i (για κάθε $j = 1, 2$) και που επαληθεύουν την συνθήκη*

$$k_1(u) \neq k_2(u),$$

για κάθε u, v όπου εδώ τα k_1, k_2 είναι οι γεωδαισιακές καμπυλότητες των καμπυλών $c_1(u)$ και $c_2(u)$ αντίστοιχα. Έστω $\pi : \mathbb{S}^3 \to U\mathbb{S}^3$ να είναι η απεικόνιση κάλυψης

$$\pi(x) = (Ad(x)i, Ad(x)\xi_0).$$

Θεωρούμε τώρα καμπύλες $a_1(u), a_2(u)$ της σφαίρας $\mathbb{S}^3$ αμφότερες με παράμετρο το μήκος τόξου που ικανοποιούν

$$\pi(a_j) = (c_j, \frac{c_j'}{||c_j'||}).$$

Ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$\Phi(u, v) = a_1(u)\bar{a}_2(v),\ N(u, v) = a_1(u)\xi_0\bar{a}_2(v)$$

σε ένα ορθογώνιο R στο (u, v)-επίπεδο.

Αν Σ είναι απλά συνεκτική επιφάνεια και $\Psi : \Sigma \to \Psi(\Sigma) = R$ είναι μια εμβάπτιση, τότε $f = \Phi \circ \Psi$ είναι μια ισόπεδη επιφάνεια στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$ με μοναδιαίο κάθετο $N \circ \Psi$. Σε αυτή την περίπτωση η απεικόνιση Ψ είναι μια συντεταγμένη Tsebyscheff εμβάπτισης και η γωνιακή συνάρτηση αυτής της ισόπεδης επιφάνειας είναι

$$w(u, v) = \cot^{-1} k_1(u) - \cot^{-1} k_2(u).$$

Αντίστροφα, κάθε αναλυτική ισόπεδη επιφάνεια στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$ κατασκευάζεται με αυτό τον τρόπο για κάποιο ξ_0.

Το αντίστροφο ισχύει τοπικά, αλλά και για πλήρεις ισόπεδες επιφάνειες με φραγμένη μέση καμπυλότητα. Επιπλέον σε αυτές τις περιπτώσεις η απεικόνιση Ψ μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι 1-1 και έτσι (u, v) αποτελεί ολικά ορισμένες $T-$ παραμέτρους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Ισοπεδες επιφανειες στον υπερβολικο χωρο $\mathbb{H}^3$

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζουμε το μοντέλο Lorentz-Minkowski για τον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$ και στη συνέχεια παρουσιάζουμε αποτελέσματα για ισόπεδες επιφάνειες στον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$.

7.1 Το μοντέλο Lorentz-Minkowski για τον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε το Lorentz-Minkowski μοντέλο $\mathbb{L}^4$ όπου ο υπερβολικός 3-χώρος $\mathbb{H}^3$ περιγράφεται ως μια συνεκτική συνιστώσα ενός δίχωνου υπερβολικού παραβολοειδές.

Ο χώρος Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^4$ είναι ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^4$ εφοδιασμένος με το (μη θετικώς οριστικό) εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ με

$$\langle x, y\rangle = -x_0y_0 + x_1x_2 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

όπου $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ και $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$

Έτσι ο υπερβολικός 3-χώρος περιγράφεται ως το υποπολύπτυγμα του $\mathbb{R}^4$

$$\mathbb{H}^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : \langle x, x\rangle = -1, x_0 > 0\},$$

εφοδιασμένο με την επαγόμενη μετρική, η οποία είναι μετρική Riemann με καμπυλότητα τομής -1.

Το σύνολο

$$\mathbb{N}^3_+ = \{x \in \mathbb{R}^4 : \langle x, x\rangle = 0, x_0 > 0\},$$

καλείται ο θετικός μηδενικός κώνος (null cone) του χώρου Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^4$.

Ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{L}^4$ καλείται space like, time like ή null like αν $\langle x, x\rangle > 0$, $\langle x, x\rangle < 0$, $\langle x, x\rangle = 0$ αντίστοιχα.

Θεωρούμε τώρα την ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον κώνο $\mathbb{N}^3_+$. Τα $x, y \in \mathbb{N}^3_+$ καλούνται ισοδύναμα (δηλαδή $x \sim y$) αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $x = \lambda y$.

Πρόταση 7.1.1. *Ο χώρος πηλίκο $\mathbb{N}^3_+/_\sim$ είναι ομοιομορφικός με τη σφαίρα $\mathbb{S}^2$.*

Απόδειξη. Αν $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3_+$, τότε ισχύει

$$x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \tag{7.1}$$

Ορίζουμε την απεικόνιση $f : \mathbb{N}^3_+/_\sim \to \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ με

$$f([x]) = (\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}).$$

Εφόσον $[x] \in \mathbb{N}^3_+/_\sim$ τότε $x_0 > 0$.

Παρατηρούμε επιπλέον ότι αν $x, y \in \mathbb{N}^3_+/_\sim$ με $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ και $[x] = [y]$. Τότε υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $x = \lambda y$. Άρα

$$\begin{aligned} f([x]) &= (\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}) \\ &= (\frac{\lambda x_1}{\lambda x_0}, \frac{\lambda x_2}{\lambda x_0}, \frac{\lambda x_3}{\lambda x_0}) \\ &= (\frac{y_1}{y_0}, \frac{y_2}{y_0}, \frac{y_3}{y_0}) \\ &= f([y]). \end{aligned}$$

Συνεπώς η απεικόνιση f είναι καλά ορισμένη. Προφανώς η f είναι συνεχής.

Έστω τώρα $x, y \in \mathbb{N}^3_+/_\sim$ με $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ και $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ και $f([x]) = f([y])$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $x = \lambda y$.

Έστω

$$f([x]) = f([y]),$$

ή ισοδύναμα

$$\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}\right) = \left(\frac{y_1}{y_0}, \frac{y_2}{y_0}, \frac{y_3}{y_0}\right).$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{cases} \frac{x_1}{x_0} = \frac{y_1}{y_0} \\ \frac{x_2}{x_0} = \frac{y_2}{y_0} \\ \frac{x_3}{x_0} = \frac{y_3}{y_0} \end{cases}.$$

Έτσι παρατηρούμε ότι υπάρχει $\lambda = x_0/y_0 > 0$ τέτοιο ώστε $x = \lambda y$. Συνεπώς

$$[x] = [y].$$

Δηλαδή η απεικόνιση f είναι 1-1.

Έστω $w = f([x])$ με $w = (w_1, w_2, w_3)$. Τότε $(w_1, w_2, w_3) = (\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0})$. Συνεπώς, $f^{-1} = (w_1 x_0, w_2 x_0, w_3 x_0)$. Έτσι παρατηρούμε ότι

$$\sum_{i=1}^{3} w_i^3 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_0^2}.$$

Λόγω της σχέσης (7.1) προκύπτει ότι $\|w\| = 1$. Άρα $w \in \mathbb{S}^2$. Συνεπώς η συνάρτηση f είναι επί. Τέλος, βλέπουμε ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής. Έτσι έχουμε ότι ο χώρος $\mathbb{N}_+^3/_\sim$ είναι ομοιομομορφικός με την $\mathbb{S}^2$. □

Παρατήρηση 7.1.1. *Η παραπάνω πρόταση ουσιαστικά μας λέει ότι κάτω από αυτή την ταύτιση ο χώρος $\mathbb{N}_+^3/\mathbb{R}^+$ είναι τοπολογική σφαίρα. Επίσης κληρονομεί μια φυσική σύμμορφη δομή και μπορεί να θεωρηθεί ως το (ideal boundary) $\mathbb{S}_\infty^2$ του υπερβολικού χώρου $\mathbb{H}^3$.*

Θεωρούμε το χώρο Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^4$ ως το χώρο των 2×2 Ερμητιανών πινάκων $Herm(2)$, ταυτίζοντας το $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4$ με τον πίνακα,

$$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

Κάτω από αυτή την ταύτιση το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{L}^4$ μπορεί να δοθεί από την ισότητα, $\langle m, m \rangle = -\det(m)$ για όλα τα $m \in Herm(2)$. Τότε $\mathbb{H}^3$ είναι ένα υποσύνολο $\{m \in Herm(2) : \det(m) = 1\}$. Η δράση του $\mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$ σε αυτούς τους Ερμητιανούς πίνακες ορίζεται από τη σχέση $g \cdot m = gmg^*$, όπου $g \in \mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$, $g^* = \bar{g}^t$.

Παρατήρηση 7.1.2. *(1) Αυτή η δράση αφήνει το $\mathbb{H}^3$ αμετάβλητο. Πράγματι,* *είναι*

$$
\begin{aligned}
\langle g \cdot m, g \cdot m \rangle &= -\det(g \cdot m) \\
&= -\det(gmg^*) \\
&= -\det(g)\det(m)\det(\bar{g}^t) \\
&= -\det(m) \\
&= -1,
\end{aligned}
$$

για κάθε $m \in Herm(2)$.

(2) Η δράση αυτή διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο.

(3) Η δράση αυτή είναι μεταβατική.

Γνωρίζουμε ότι ο πυρήνας της δράσης $\rho : \mathbb{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3$ με $\rho(g,m) = g \cdot m = gmg^*$ είναι

$$Ker\rho = \{g \in \mathbb{SL}(2,\mathbb{C}) : \rho(g,m) = m, \text{ για κάθε } m \in \mathbb{H}^3\}.$$

Έτσι έχουμε ότι ο πυρήνας της παραπάνω δράσης είναι $\{\pm I_2\} \subseteq \mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$ και $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathbb{SL}(2,\mathbb{C})/\ \{\pm I_2\}$ μπορεί να θεωρηθεί ως στοιχείο ταυτότητας της ειδικής ομάδας Lorentzian $\mathbb{SO}(1,3)$. Όπου I_2 είναι ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας.

Ο χώρος $\mathbb{N}^3_+$ θεωρείται ως ο χώρος των θετικά ημιορισμένων 2×2 Ερμητιανών πινάκων ορίζουσας μηδέν και τα στοιχεία του μπορούν να γραφούν ως $w\bar{w}^t$, όπου $\bar{w}^t = (w_1, w_2)$ είναι ένα μη-μηδενικό διάνυσμα στο χώρο $\mathbb{C}^2$ που ορίζεται μοναδικά μέχρι και τον πολλαπλασιασμό με έναν μιγαδικό αριθμό z, όπου $\|z\| = 1$. Η απεικόνιση

$$w\bar{w}^t \mapsto [(w_1, w_2)] \in \mathbb{CP}^1$$

γίνεται απεικόνιση πηλίκο του $\mathbb{N}^3_+$ στην $\mathbb{S}^2_\infty$ και ταυτίζει το $\mathbb{S}^2_\infty$ στο $\mathbb{CP}^1$.

Έτσι, η φυσική δράση του $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$ στο $\mathbb{S}^2_\infty$ είναι η δράση του $\mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$ στο $\mathbb{CP}^1$ από τον μετασχηματισμό Mobius.

7.2 Αναπαράσταση ισόπεδων εμβαπτίσεων στον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$

Έστω Σ μια επιφάνεια και $\psi : \Sigma \to \mathbb{H}^3$ μια εμβάπτιση με μοναδιαίο κάθετο η. Τότε η εικόνα της απεικόνισης $\psi + \eta$ περιέχεται στον κώνο $\mathbb{N}^3_+$, αφού

$$\langle \psi, \psi \rangle = -1,\ \langle \eta, \eta \rangle = 1,\ \langle \psi, \eta \rangle = 0.$$

Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε την θετική υπερβολική απεικόνιση Gauss της εμβάπτισης ως εξής:

$$G^+ = [\phi + \eta] : \Sigma \to \mathbb{S}^2_\infty \equiv \mathbb{N}^3_+/\mathbb{R}^+.$$

Όμοια ορίζεται και η αρνητική υπερβολική απεικόνιση Gauss της εμβάπτισης ως εξής:

$$G^- = [\psi - \eta] : \Sigma \to \mathbb{S}^2_\infty \equiv \mathbb{N}^3_+/\mathbb{R}^+.$$

Παρατηρούμε ότι γενικά και οι δύο υπερβολικές απεικονίσεις Gauss δεν σχετίζονται μεταξύ τους.

Έστω $p \in \Sigma$ και $\gamma(t)$ μια προσανατολισμένη γεωδαισιακή στο $\mathbb{H}^3$ τέτοια ώστε $\gamma(0) = \psi(p)$ και $\gamma'(0) = \eta(0)$. Τότε $G^+(p)$ (ανάλογα $G^-(p)$) μπορεί να θεωρηθεί ως η τομή της γεωδαισιακής $\gamma(t)$ και του $\mathbb{S}^2_\infty$ όταν $t \to \infty$ ($t \to -\infty$).

Έστω Σ ισόπεδη επιφάνεια και $\psi : \Sigma \to \mathbb{H}^3$ ισομετρική εμβάπτιση. Συνεπώς από την εξίσωση Gauss, έχουμε ότι $k_1 k_2 = 1$. Έτσι, μπορούμε να επιλέξουμε ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην Σ τέτοιο ώστε, k_1 και k_2 να είναι θετικά, ή ισοδύναμα, η δεύτερη θεμελιώδης μορφή είναι μετρική Riemann.

Πρόταση 7.2.1. *Έστω Σ μια επιφάνεια και $\psi : \Sigma \to \mathbb{H}^3$ μια ισόπεδη εμβάπτιση με μοναδιαίο κάθετο η. Αν θεωρήσουμε την Σ ως επιφάνεια Riemann με σύμμορφη δομή που επάγεται από την II, τότε οι απεικονίσεις $\psi+\eta, \psi-\eta : \Sigma \to \mathbb{N}^3_+$ είναι σύμμορφες. Ειδικότερα, οι υπερβολικές απεικονίσεις Gauss $G^+, G^- : \Sigma \to \mathbb{S}^2_\infty$ είναι σύμμορφες για την II.*

Απόδειξη. Έστω $p \in \sigma$ και $\{e_1, e_2\}$ μια ορθοκανονική βάση στο p τέτοια ώστε

$$d\eta(e_1) = -k_1 e_1,\ d\eta(e_2) = -k_2 e_2.$$

Θα δείξουμε ότι οι $\psi + \eta,\ \psi - \eta : \Sigma \to \mathbb{N}^3_+$ είναι σύμμορφες απεικονίσεις. Θα το δείξουμε αρχικά για την απεικόνιση $\psi + \eta$.

Στο p έχουμε ότι

$$II(e_1, e_1) = k_1,\ II(e_1, e_2) = 0,\ II(e_2, e_2) = k_2.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}\langle d(\psi+\eta)(e_1), d(\psi+\eta)(e_1)\rangle &= \langle d(\psi(e_1), d(\psi(e_1)\rangle + 2\langle d(\psi(e_1), d(\eta(e_1)\rangle \\ &\quad + \langle \eta(e_1), \eta(e_1)\rangle \\ &= 1 - 2k_1 + k_1^2 \\ &= (1-k_1)^2.\end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned}\langle d(\psi+\eta)(e_2), d(\psi+\eta)(e_2)\rangle &= \langle d\psi(e_2), d\psi(e_2)\rangle + 2\langle d(\psi(e_2), d(\eta(e_2))\rangle \\ &\quad + \langle \eta(e_2), \eta(e_2)\rangle \\ &= 1 - 2k_2 + k_2^2 \\ &= (1-k_2)^2.\end{aligned}$$

Τέλος,

$$\begin{aligned}\langle d(\psi+\eta)(e_1), d(\psi+\eta)(e_2)\rangle =&\langle d(\psi(e_1), d(\psi(e_2)\rangle + \langle d(\psi(e_1), d(\eta(e_2))\rangle \\ &+ \langle \eta(e_1), \psi(e_2)\rangle + \langle \eta(e_1), \eta(e_2)\rangle.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\langle d(\psi+\eta)(e_1), d(\psi+\eta)(e_2)\rangle = 0.$$

Άρα η $\psi+\eta$ είναι σύμμορφη στο p αν και μόνο αν

$$\frac{(1-k_1)^2}{k_1} = \frac{(1-k_2)^2}{k_2}. \tag{7.3}$$

Η ισότητα αυτή ισχύει αφού $k_1k_2 = 1$. Συνεπώς η σχέση (7.3) ικανοποιείται στην επιφάνεια Σ. Έτσι η απεικόνιση $\psi+\eta$ είναι μια σύμμορφη απεικόνιση. Για την απεικόνιση $\psi-\eta$ θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\langle d(\psi-\eta)(e_1), d(\psi-\eta)(e_1)\rangle &= \langle d\psi(e_1), d\psi(e_1)\rangle - 2\langle d\psi(e_1), d\eta(e_1)\rangle \\ &\quad + \langle d\eta(e_1), d\eta(e_1)\rangle \\ &= 1 + 2k_1 + k_1^2 \\ &= (1+k_1)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle d(\psi-\eta)(e_2), d(\psi-\eta)(e_2)\rangle &= \langle d\psi(e_2), d\psi(e_2)\rangle - 2\langle d\psi(e_2), d\eta(e_2)\rangle \\ &\quad + \langle d\eta(e_2), d\eta(e_2)\rangle \\ &= 1 + 2k_2 + k_2^2 \\ &= (1+k_2)^2\end{aligned}$$

και τέλος

$$\begin{aligned}\langle d(\psi-\eta)(e_1), d(\psi-\eta)(e_2)\rangle &= \langle d\psi(e_1), d\psi(e_2)\rangle - \langle d\psi(e_1), d\eta(e_2)\rangle \\ &\quad - \langle d\eta(e_1), d\psi(e_2)\rangle + \langle d\eta(e_1), d\eta(e_2)\rangle.\end{aligned}$$

Δηλαδή
$$\langle d(\psi-\eta)(e_1), d(\psi-\eta)(e_2)\rangle = 0.$$
Άρα η $\psi-\eta$ είναι σύμμορφη στο p αν και μόνο αν
$$\frac{(1+k_1)^2}{k_1} = \frac{(1+k_2)^2}{k_2}.$$
Η ισότητα αυτή ισχύει αφού $k_1k_2 = 1$. Άρα η απεικόνιση $\psi-\eta$ είναι σύμμορφη στην Σ. □

Έστω Σ μια απλά συνεκτική ισόπεδη επιφάνεια και $\psi : \Sigma \to \mathbb{H}^3$ μια ισομετρική εμβάπτιση με μοναδιαίο κάθετο η. Από την Πρόταση 7.2.1 έχουμε ότι $G^+ : \Sigma \to \mathbb{S}^2_\infty \equiv \mathbb{CP}^1$ είναι σύμμορφη. Άρα υπάρχουν ολόμορφες συναρτήσεις A, B τέτοιες ώστε $G^+ = [\psi+\eta] = [(A,B)]$.

Τότε,
$$\psi+\eta = R_1\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}(\bar{A},\bar{B}) = R_1\begin{pmatrix}A\bar{A} & A\bar{B}\\ \bar{A}B & B\bar{B}\end{pmatrix},$$
για κάποια θετική λεία συνάρτηση R_1.

Ομοίως, αφού $G^- : \Sigma \to \mathbb{S}^2_\infty \equiv \mathbb{CP}^1$ είναι σύμμορφη, υπάρχουν ολόμορφες συναρτήσεις C, D τέτοιες ώστε $G^- = [\psi-\eta] = [(C,D)]$.

Τότε,
$$\psi-\eta = R_2\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}(\bar{C},\bar{D}) = R_1\begin{pmatrix}C\bar{C} & C\bar{D}\\ \bar{C}D & D\bar{D}\end{pmatrix},$$
για κάποια θετική λεία συνάρτηση R_2.

Θέτουμε
$$g = \begin{pmatrix}A & C\\ B & D\end{pmatrix}.$$
Τότε έχουμε
$$\begin{aligned}\psi+\eta &= g\begin{pmatrix}R_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}g^*\\ \psi-\eta &= g\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & R_2\end{pmatrix}g^*.\end{aligned} \tag{7.4}$$

Έτσι, $\psi = g\begin{pmatrix}R_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}g^* - \eta$. Άρα,
$$2\eta = g\begin{pmatrix}R_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}g^* - g\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & R_2\end{pmatrix}g^* = g\begin{pmatrix}R_1 & 0\\ 0 & -R_2\end{pmatrix}g^*.$$

Συνεπώς
$$\eta = \frac{1}{2} g \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & -R_2 \end{pmatrix} g^*.$$
Επιπλέον,
$$\psi = \frac{1}{2} g \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} g^*.$$
Επομένως,
$$\psi = \frac{1}{2} g \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} g^*,$$
$$\eta = \frac{1}{2} g \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & -R_2 \end{pmatrix} g^*. \tag{7.5}$$
Αφού, $\langle \psi, \psi \rangle = -1$ έχουμε
$$1 = \frac{1}{4} \det \left(g \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} g^* \right) = \frac{1}{4} R_1 R_2 |\det(g)|^2. \tag{7.6}$$
Καθώς $|\det(g)| \neq 0$ και $\det(g)$ είναι ολόμορφη (άρα είναι σύμμορφη), θα υπάρχει μια καλά ορισμένη ολόμορφη συνάρτηση h_1 στην επιφάνεια Σ τέτοια ώστε
$$h_1 = \sqrt{\det(g)}.$$
Έτσι, αντικαθιστώντας τα A, B, C, D με τα $A/h_1, B/h_1, C/h_1, D/h_1$ αντίστοιχα θα έχουμε ότι $\det(g) = 1$. Συνεπώς, από τη σχέση (7.6) παίρνουμε ότι
$$R_2 = \frac{4}{R_1}.$$
Με όλα αυτά έχουμε,
$$g^{-1} g_z = \begin{pmatrix} D & -C \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \tag{7.7}$$
και επομένως,
$$(\psi + \eta)_z = g \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (R_1)_Z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) g^*. \tag{7.8}$$

Παρατηρούμε ότι
$$\langle \psi + \eta, \psi + \eta \rangle = \langle \psi, \psi \rangle + \langle \psi, \eta \rangle + \langle \eta, \psi \rangle + \langle \eta, \eta \rangle = -1 + 1 = 0.$$

Άρα,

$$\langle \psi + \eta, \psi + \eta \rangle = 0.$$

Συνεπώς,

$$\langle (\psi + \eta)_z, \psi + \eta \rangle = 0.$$

Από τη σχέση (7.7) έχουμε ότι

$$(\psi + \eta)_z = g \left(\begin{pmatrix} a_{11}R_1 & 0 \\ a_{21}R_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (R_1)_Z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) g^*,$$

ή

$$(\psi + \eta)_z = \begin{pmatrix} a_{11}R_1 + R_1 & 0 \\ a_{21}R_1 & 0 \end{pmatrix} g^*.$$

Όμως,

$$\psi + \eta = g \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} g^*.$$

Άρα,

$$0 = \langle (\psi + \eta)_z, \psi + \eta \rangle = R_1(R_1)_z + R_1^2 a_{11},$$

ή

$$a_{11} + \frac{(R_1)_z}{R_1} = 0. \tag{7.9}$$

Έτσι, η συνάρτηση $h_2 = \log(R_1)$ είναι ολόμορφη. Δηλαδή, υπάρχει μια μη-μηδενική ολόμορφη συνάρτηση h_3 στην Σ τέτοια ώστε

$$R_1 = e^{h_2} = 2|h_3|^2.$$

Επομένως, αντικαθιστώντας ξανά τα A, B, C, D από τα $A/h_3, B/h_3, C/h_3, D/h_3$, αντίστοιχα, έχουμε από τη σχέση (7.5) ότι

$$\psi = gg^*, \ \eta = g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g^*. \tag{7.10}$$

Επιπλέον, από τη σχέση (7.9) η ολόμορφη συνάρτση a_{11} που δίνεται από τη σχέση (7.7) μηδενίζεται ταυτοτικά.

Με όλα αυτά μπορούμε να βρούμε μια ολόμορφη συνάρτηση $g : \Sigma \to \mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$ που δίνεται από τον τύπο

$$g = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}, \tag{7.11}$$

τέτοια ώστε η εμβάπτιση ψ και το μοναδιαίο κάθετο η να προκύψει από τη σχέση (7.10). Επιπλέον, οι υπερβολικές απεικονίσεις Gauss δίνονται από

$$G^+ = \frac{A}{B} \in \mathbb{S}^2_\infty,\ G^- = \frac{C}{D} \in \mathbb{S}^2_\infty. \tag{7.12}$$

Επίσης, η g ικανοποιεί

$$g^{-1}dg = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \theta & 0 \end{pmatrix},$$

όπου ω, θ είναι ολόμορφες 1-μορφές στην επιφάνεια Σ.

Έστω, ότι υπάρχει μια άλλη ολόμορφη απεικόνιση $g_0 : \Sigma \to \mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$ τέτοια ώστε

$$\psi = g_0 g_0^*,\ \eta = g_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g_0^*.$$

Τότε, από τη σχέση (7.10) έχουμε, $g_0 g_0^* = gg^*$. Άρα, $g^{-1}g_0(g^{-1}g_0)^* = I_2$, όπου I_2 δηλώνει τον ταυτικό 2×2 πίνακα. Επομένως,

$$g^{-1}g_0 = \begin{pmatrix} p & \bar{q} \\ -q & \bar{p} \end{pmatrix}, \tag{7.13}$$

για κάποιες μιγαδικές συναρτήσεις p, q τέτοιες ώστε $|p|^2 + |q|^2 = 1$. Αφού, g, g_0 είναι ολόμορφες συναρτήσεις τότε p, q πρέπει να είναι σταθερές. Επιπλέον, αφού $g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g^* = g_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g_0^*$, έχουμε ότι το q πρέπει να μηδενιστεί ταυτοτικά.

Έτσι, από τη σχέση (7.13) έχουμε

$$g_0 = g \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix},$$

με $\phi \in \mathbb{R}$.

Συγκεκριμένα, το g_0 ικανοποιεί επίσης τη σχέση (7.12) και

$$g_0^{-1}dg_0 = \begin{pmatrix} 0 & e^{-2i\phi} \\ e^{2i\phi} & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.14}$$

Έτσι, λαμβάνουμε την παρακάτω αναπαράσταση των ισόπεδων ισομετρικών εμβαπτίσεων στον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$ μέσω ολόμορφων δεδομένων.

Θεώρημα 7.2.1 (Σύμμορφη Αναπαράσταση)**.** *(i) Έστω Σ μια απλά συνεκτική επιφάνεια και $\psi : \Sigma \to \mathbb{H}^3$ μια ισόπεδη ισομετρική εμβάπτιση με μοναδιαίο κάθετο η. Θεωρούμε τη Σ ως επιφάνεια Riemann με τη σύμμορφη δομή που ορίζεται* *από τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή. Τότε, υπάρχει μια ολόμορφη απεικόνιση $g : \Sigma \to \mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$ και δύο ολόμορφες 1-μορφές ω, θ με $|\omega| > |\theta|$ τέτοιες ώστε,*

$$\psi = gg^*,\ \eta = g\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} g^* \tag{7.15}$$

και

$$g^{-1}dg = \begin{pmatrix}0 & \omega\\ \theta & 0\end{pmatrix}. \tag{7.16}$$

Επιπλέον, οι υπερβολικές απεικονίσεις Gauss δίνονται από τις σχέσεις (7.11) και (7.12). Αν $g_0 : \Sigma \to \mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$ είναι μια άλλη ολόμορφη απεικόνιση με τις παραπάνω συνθήκες τότε

$$g_0 = g\begin{pmatrix}e^{i\phi} & 0\\ 0 & e^{-i\phi}\end{pmatrix},$$

για μια πραγματική σταθερά ϕ.

Επίσης, η επαγόμενη μετρική και η δεύτερη θεμελιώδης μορφή δίνονται ως

$$I = \omega\theta + (|\omega|^2 + |\theta|^2) + \bar{\omega}\bar{\theta},\ II = |\omega|^2 - |\theta|^2. \tag{7.17}$$

(ii) Αντίστροφα, έστω Σ μια επιφάνεια Riemann και $g : \Sigma \to \mathbb{SL}(2,\mathbb{C})$ μια ολόμορφη απεικόνιση τέτοια ώστε

$$g^{-1}dg = \begin{pmatrix}0 & \omega\\ \theta & 0\end{pmatrix},$$

για κάποιες 1-μορφές ω, θ με $|\omega| > |\theta|$. Τότε, $\psi = gg^*$ είναι μια ισόπεδη εμβάπτιση στον $\mathbb{H}^3$ με το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο να δίνεται από τη σχέση (7.15). Επιπλέον, η επαγόμενη μετρική και η δεύτερη θεμελιώδη μορφή δίνονται από τη σχέση (7.17).

Απόδειξη. (i). Θα υπολογίσουμε την επαγόμενη μετρική και τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή της εμβάπτισης.

Έτσι, αν πάρουμε μια τοπική σύμμορφη παράμετρο z και γράψουμε

$$\omega = \omega_1 dz,\ \theta = \theta_1 dz,$$

τότε από τις σχέσεις (7.15) και (7.16) έχουμε

$$\psi_z = g\begin{pmatrix}0 & \omega_1\\ \theta_1 & 0\end{pmatrix} g^*,\ \ \eta_z = g\begin{pmatrix}0 & \omega_1\\ \theta_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} g^*.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_z, \psi_z \rangle &= \omega_1 \theta_1, \\
\langle \psi_z, \psi_{\bar{z}} \rangle &= \frac{1}{2}(|\omega_1|^2 + |\theta_1|^2), \\
\langle \psi_z, -\psi_z \rangle &= 0, \\
\langle \psi_z, -\psi_{\bar{z}} \rangle &= \frac{1}{2}(|\omega_1|^2 - |\theta_1|^2).
\end{aligned}$$

Άρα,

$$I = \omega\theta + (|\omega|^2 + |\theta|^2) + \bar{\omega}\bar{\theta},\ II = |\omega_1|^2 - |\theta_1|^2.$$

Παρατηρούμε ότι εφόσον $|\omega| > |\theta|$ τότε η II είναι θετικώς οριστική. □

Το ζεύγος (ω, θ) που δίνεται από το παραπάνω θεώρημα ονομάζεται στοιχείο Weierstrass που σχετίζεται με την ισόπεδη εμβάπτιση. Τα ω, θ είναι μοναδικά ως προς πολλαπλασιασμό με έναν μοναδιαίο μιγαδικό αριθμό p με τον εξής τρόπο, $(p\omega, \bar{p}\theta)$. Ειδικότερα, τα $\omega\theta, |\omega|, |\theta|$ είναι μοναδικά.

Παρατήρηση 7.2.1. *Αφού $|\omega| > 0$ προκύπτει ότι το G^- είναι τοπικός διαφορομορφισμός, επειδή $(G^-)'(z) \neq 0$ σε κάθε σημείο. Αυτό παρατηρήθηκε για πρώτη φορά από τον L. Bianchi[3]. Αυτό που απέδειξε στην πραγματικότητα είναι ότι η απεικόνιση $G^- \mapsto G^+$ είναι ολόμορφη και έδωσε μια αναπαράσταση ισόπεδων εμβαπτίσεων χρησιμοποιώντας την Ευκλείδεια ισοτιμία σφαιρών.*

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σύμμορφη αναπαράσταση, δίνουμε μια νέα απόδειξη της ταξινόμισης των πλήρων ισόπεδων επιφανειών στον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$, που δόθηκε από τους Volkov και Vladimitrova [15].

Θεώρημα 7.2.2. *Έστω Σ να είναι μια πλήρης ισόπεδη επιφάνεια και $\psi : \Sigma \to \mathbb{H}^3$ μια ισομετρική εμβάπτιση. Τότε $\psi(\Sigma)$ είναι είτε ωρόσφαιρα είτε το σύνολο των σημείων σε σταθερή απόσταση από μια γεωδαισιακή στον $\mathbb{H}^3$.*

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας την επιφάνεια με το καθολικό κάλλυμα της επιφάνειας Σ, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η επιφάνεια Σ είναι απλά συνεκτική. Επομένως, με τη σύμμορφη δομή που καθορίζεται από τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή, η επιφάνεια Σ πρέπει να είναι αμφιολομορφική είτε με το μοναδιαίο δίσκο $\mathbb{D}$ είτε στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$.

Αν (ω, θ) είναι στοιχεία Weierstrass που σχετίζονται με την εμβάπτιση, τότε από τη σχέση (7.17) και αφού $|\omega| > |\theta|$ έχουμε,

$$I \leq 4|\omega|^2.$$

Έτσι, $4|\omega|^2$ είναι μια σύμμορφη πλήρης ισόπεδη μετρική στην επιφάνεια Σ. Άρα, η επιφάνεια Σ με αυτή την μετρική πρέπει να είναι ισομμετρική με το Ευκλείδειο επίπεδο. Συγκεκριμένα, η επιφάνεια Σ είναι σύμμορφη με το $\mathbb{C}$.

Από την άλλη, το μέτρο της ολόμορφης συνάρτησης θ/ω είναι μικρότερο από ένα στην επιφάνεια $\Sigma \equiv \mathbb{C}$. Έτσι, η συνάρτηση θ/ω είναι μια μιγαδική σταθερά c_0 με $|c_0| < 1$.

Επειδή, $\omega \neq 0$ μπορούμε να θεωρήσουμε μια τοπική σύμμορφη παράμετρο z τέτοια ώστε $\omega = dz$. Από τη σχέση (7.16), πρέπει να βρούμε μια ολόμορφη εμβάπτιση

$$g = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in \mathbb{SL}(2, \mathbb{C}),$$

που ικανοποιεί

$$g^{-1} g_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_0 & 0 \end{pmatrix},$$

ή ισοδύναμα,

$$\begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 C & A \\ c_0 D & B \end{pmatrix}.$$

Έτσι, τα A, B, C, D είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $X'' = c_0 X$.

Αν $c_0 = 0$ οι λύσεις από την προηγούμενη Σ.Δ.Ε. είναι $X(z) = a + bz$ για κατάλληλες σταθερές $a, b \in \mathbb{C}$.

Σε μια τέτοια περίπτωση

$$g = m_0 \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

όπου m_0 είναι ένας σταθερός πίνακας στον $\mathbb{SL}(2, \mathbb{C}$.

Άρα, η ισόπεδη εμβάπτιση, μέχρι μια ισομετρία $m_0 \psi m_0^*$, δίνεται από

$$\psi(z) = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{z} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + |z|^2 & z \\ \bar{z} & 1 \end{pmatrix}.$$

Αφού, η τελευταία συντεταγμένη του πίνακα είναι σταθερή, έχουμε από τη σχέση (7.2) ότι $\psi_0 + \psi_3 = 1$. Δηλαδή, $\psi(\Sigma)$ βρίσκεται σε μια ωρόσφαιρα και $\psi(\Sigma)$ είναι ολόκληρη ωρόσφαιρα, λόγω της πληρότητας.

Αν $c_0 \neq 0$ οι λύσεις της Σ.Δ.Ε. πριν είναι

$$X(z) = a e^{\sqrt{c_0} z} + b e^{-\sqrt{c_0} z}$$

για κατάλληλες σταθερές $a, b \in \mathbb{C}$. Σε μια τέτοια περίπτωση

$$g = m_0 \begin{pmatrix} \sqrt[4]{\frac{c_0}{4}} e - \sqrt{c_0} z & \frac{-1}{\sqrt[4]{4c_0}} e - \sqrt{c_0} z \\ \sqrt[4]{\frac{c_0}{4}} e \sqrt{c_0} z & \frac{1}{\sqrt[4]{4c_0}} e \sqrt{c_0} z \end{pmatrix},$$

όπου m_0 είναι ένας σταθερός πίνακας στην $\mathbb{SL}(2, \mathbb{C})$. Τότε, μέχρι μια ισομετρία, η ισόπεδη εμβάπτιση δίνεται από

$$\psi(z) = \frac{1}{2|c_1|} \begin{pmatrix} (|c_1|^2 + 1) e^{-c_1 z - \bar{c_1} z} & (|c_1|^2 - 1) e^{-c_1 z + \bar{c_1} z} \\ (|c_1|^2 - 1) e^{c_1 z - \bar{c_1} z} & (|c_1|^2 + 1) e^{c_1 z + \bar{c_1} z} \end{pmatrix},$$

όπου $c_1 = \sqrt{c_0}$.

Η επιφάνεια, που δίνεται από τα σημεία των οποίων η απόσταση από τις γεωδαισιακές

$$\begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & s^{-s} \end{pmatrix},$$

είναι μια σταθερά $R > 0$, μπορεί να παραμετρικοποιηθεί από

$$F(s, t) = \begin{pmatrix} \cosh R e^s & \sinh R e^{it} \\ \sinh R e^{-it} & \cosh R e^{-s} \end{pmatrix}.$$

Έτσι, $\psi(z)$ βρίσκεται σε μια επιφάνεια $F(s, t)$ για $R = \operatorname{arcsinh}(\frac{1 - |c_1|^2}{2|c_1|})$, δηλαδή όπως θέλαμε να δείξουμε. $\square$

Η σύμμορφη αναπαράσταση είναι ένα χρήσιμο εργαλείο και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διερεύνηση της γεωμετρικής συμπεριφοράς ισόπεδων εμβαπτίσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Επιφανειες με σταθερη αρνητικη καμπυλοτητα Gauss

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να αποδείξουμε το Θεώρημα του Hilbert, το οποίο μας λέει ότι δεν υπάρχει πλήρης εμβάπτιση με αρνητική σταθερή καμπυλότητα Gauss και αρνητική εξωτερική καμπυλότητα στον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$, στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ ή στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$.

Έστω Σ μια επιφάνεια εφοδιασμένη με μια πλήρης μετρική Riemann I με αρνητική σταθερή καμπυλότητα Gauss $K < 0$. Αν Σ είναι απλά συνεκτική, τότε Σ είναι ισομετρική με τον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^2(K)$ με την ίδια σταθερή καμπυλότητα K, όπως προκύπτει από το Θεώρημα Cartan-Hadamard.

Από την εξίσωση Gauss, μια επιφάνεια με αρνητική σταθερή καμπυλότητα Gauss πρέπει επίσης να έχει αρνητική σταθερή εξωτερική καμπυλότητα στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ και στη σφαίρα $\mathbb{S}^3$ (όταν $c = 0$, $c = 1$ αντίστοιχα). Επιπλέον, αν η καμπυλότητα Gauss $K < -1$ στον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$ τότε, η εξωτερική καμπυλότητα είναι επίσης αρνητική.

8.1 Το Θεώρημα του Hilbert

Θεώρημα 8.1.1 (Hilbert). *Έστω Σ μια πλήρης επιφάνεια με αρνητική σταθερή Gauss K. Τότε, δεν υπάρχει ισομετρική εμβάπτιση $f : \Sigma \to \mathbb{M}^3(c)$ με $K < -1$ όταν $c = -1$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 6.1.1. γνωρίζουμε ότι, υπάρχουν ολικές παράμετροι (u, v) ορισμένες στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ τέτοιες ώστε,

$$I = du^2 + 2\cos w du dv + dv^2,\ II = 2\sqrt{-k_1 k_2}\sin w du dv$$

και $0 < w < \pi$.

Από το Έξοχο Θεώρημα έχουμε ότι

$$-EK = (\Gamma^2_{12})_u - (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}.$$

Όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 6.1.1. θα έχουμε ότι

$$EK = -\frac{w_{uv}}{\sin w},$$

ή

$$k_1k_2 + c = -\frac{w_{uv}}{\sin w},$$

ή

$$w_{uv} = -(k_1k_2 + c)\sin w, \tag{8.1}$$

με $c_0 = -(k_1k_2 + c) > 0$.

Επομένως, το θεώρημα θα αποδειχθεί αν δείξουμε ότι δεν υπάρχει λύση στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ της διαφορικής εξίσωσης $w_{uv} = c_0 \sin w$ με $0 < w(u, v) < \pi$.

Αφού, η συνάρτηση $(w_{uv})_v$ είναι θετική, έχουμε ότι η συνάρτηση $w_u(u, v)$ είναι αύξουσα ως προς v. Άρα,

$$w_u(u, v) > w_u(u, 0), \text{ για κάθε } v > 0.$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω ανίσωση έχουμε,

$$w(b, v) - w(a, v) = \int_a^b w_u(u, v)du > \int_a^b w_u(u, 0) = w(b, 0) - w(a, 0), \tag{8.2}$$

με $a < b$ και $v > 0$. Αφού η συνάρτηση w_u δεν μπορεί να μηδενιστεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $w_u(0, 0) \neq 0$. Επιπλέον, $w(-u, -v)$ επίσης ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση (8.1). Άρα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $w_u(0, 0) > 0$, αντικαθιστώντας τη συνάρτηση $w(u, v)$ από τη συνάρτηση $w(-u, -v)$, αν είναι απαραίτητο.

Έστω, αριθμοί $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $0 < u_1 < u_2 < u_3$ και $w_u(u, 0) > 0$, για κάθε $u \in [0, u_3]$. Ορίζουμε,

$$\epsilon := \min\{w(u_3, 0) - w(u_2, 0), w(u_1, 0) - w(0.0)\} > 0.$$

Με χρήση της σχέσης (8.2) έχουμε,

$$w(u_1, v) - w(0, v) > \epsilon, \; w(u_3, v) - w(u_2, v) > \epsilon,$$

για κάθε $v > 0$. Συνεπώς,

$$\epsilon < w(u,v) < \pi - \epsilon \quad \text{αν } u \in [u_1, u_2],\ v \geq 0,$$

επειδή $0 < w(u,v) < \pi$. Ολοκληρώνοντας στο ορθογώνιο $[u_1, u_2] \times [0, v]$ έχουμε,

$$w(u_2, v) - w(u_1, v) - w(u_2, 0) + w(u_1, 0) = \int_0^v \int_{u_1}^{u_2} w_{uv} du dv =$$

$$= c_0 \int_0^v \int_{u_1}^{u_2} \sin w du dv > c_0 \int_0^v \int_{u_1}^{u_2} \sin \epsilon du dv = c_0 (u_2 - u_1) v \sin \epsilon.$$

Άρα,

$$w(u_2, v) - w(u_1, v) > w(u_2, 0) - w(u_1, 0) + c_0 (u_2 - u_1) v \sin \epsilon.$$

Επομένως,

$$w(u_2, v) - w(u_1, v) \to \infty, \quad \text{όταν } v \to \infty.$$

Αυτό έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι $0 < w(u,v) < \pi$. □

Το Θεώρημα Hilbert υποστηρίζει ότι το υπερβολικό επίπεδο $\mathbb{H}^2$ δεν μπορεί να εμβαπτιστεί ισομετρικά στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$.

Είναι γνωστό ότι ο υπερβολικός χώρος $\mathbb{H}^k$ μπορεί να εμβαπτιστεί ισομετρικά στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{2k}$, αλλά δεν μπορεί να εμβαπτιστεί ισομετρικά στον $\mathbb{R}^{2k-2}$. Ένα σημαντικό πρόβλημα είναι αν ο $\mathbb{H}^k$ μπορεί να εμβαπτιστεί ισομετρικά στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{2k-1}$, δηλαδή αν το Θεώρημα Hilbert μπορεί να γενικευτεί για $n > 2$.

Για να ολοκληρώσουμε τη μελέτη πλήρων επιφανειών στο χώρο μορφής $\mathbb{M}^3(c)$ με σταθερή αρνητική καμπυλότητα Gauss K, πρέπει να εξετάσουμε την περίπτωση όπου $K \in [-1, 0]$ για επιφάνειες στον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$.

Ας εξετάσουμε το μοντέλο του $\mathbb{H}^3$ όπως στο Κεφάλαιο 7. Τότε η απεικόνιση Ψ που δίνεται από,

$$\Psi : \mathbb{H}^3 \to B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{1}{1 + x_0}(x_1, x_2, x_3)$$

είναι ολικά γεωδαισιακή, όπου $B(0,1)$ είναι η ανοικτή μοναδιαία μπάλα στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$. Δηλαδή, η εικόνα μιας γεωδαισιακής στον $\mathbb{H}^3$ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα στην μπάλα $B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^3$.

Έτσι, αν η Σ είναι μια επιφάνεια στον $\mathbb{H}^3$ με σταθερή καμπυλότητα Gauss $K = -1$ τότε $\Psi(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3$ είναι μια Ευκλείδεια ισόπεδη επιφάνεια.

Επομένως, η μελέτη του μπορεί να γίνει μέσω της τοπικής μελέτης ισόπεδων επιφανειών στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$.

Υπάρχει, μια μεγάλη οικογένεια πλήρων επιφανειών στον $\mathbb{H}^3$ με $K = -1$ με την τοπολογία μιας συμπαγούς επιφάνειας από τη οποία αφαιρείται ένας δίσκος.

Η περίπτωση πλήρων επιφανειών στον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$ με σταθερή καμπυλότητα Gauss $K \in (-1, 0)$ έχει μελετηθεί επαρκώς.

Βιβλιογραφια

[1] Abresch, U. and Rosenberg, H. A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Acta Math.* **193** (2004), 141–174.

[2] Abresch, U. and Rosenberg, H. Generalized Hopf differentials. *Mat. Contemp.* **28** (2005), 1–28.

[3] Bianchi, L. Lezioni di geometria differenziale: Vol. 1.2.

[4] Chern, S. S. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), 771–782.

[5] Corro, A. and Martinez, A. and Milan, F. Complete flat surfaces with two isolated singularities in hyperbolic 3-space. *J. Math. Anal. Appl.* **366** (2010), 582–592.

[6] Dajczer, M. and Tojeiro, R. Submanifold theory.

[7] do Carmo, P. Differential geometry of curves and surfaces. *Prentice Hall* (1976).

[8] Galvez, J. A. and Mira, P. Embedded isolated singularities of flat surfaces in hyperbolic 3-space. *Cal. Var. Partial Diff. Equations* **24** (2005), 239–260.

[9] Guan, B. and Spruck, J. The existence of hypersurfaces of constant Gauss curvature with prescribed boundary. *J. Differential Geom.* **62** (2002), 259–287.

[10] KITAGAWA, Y. Periodicity of the asympotic curves on flat tori in $\mathbb{S}^3$. *J. Math. Soc. Japan* **40** (1988), 457–476.

[11] MUNKRES, R. Topology: A first course. *Prentice-Hall, Inc* (1975).

[12] PINKALL, U. Hopf tori in $\mathbb{S}^3$. *Invent. Math.* **81** (1985), 379–386.

[13] ROITMAN, P. Flat surfaces in hyperbolic space as normal surfaces to a congruence of geodesics. *Tohoku Math. J.* **59** (2007), 21–37.

[14] SPIVAK, M. A comprehensive introduction to differential geometry, Vol. IV. *Publish or Perish, Inc., Boston, Mass.* (1975).

[15] VOLKOV, YU. A. AND VLADIMIROVA, S. M. Isometric immersions of a Euclidean plane in Lobachevskii space. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR* **10** (1971), 619–622.

[16] Δ. ΚΟΥΤΡΟΥΦΙΩΤΗΣ. Διαφορική Γεωμετρία. *Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων* (1994).