



**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΛΙΚΩΝ**

*Μελέτη της γραμμικής και μη-γραμμικής συμπεριφοράς  
σύνθετων ελαστικών πιεζοηλεκτρικών δομών  
με διατμητικές θεωρίες ανώτερης τάξης*

**ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Η. ΝΤΑΦΛΟΣ**  
ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΛΙΚΩΝ

**ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

Η υλοποίηση της διδακτορικής διατριβής συγχρηματοδοτήθηκε από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση», 2014-2020, στο πλαίσιο της Πράξης «Ενίσχυση του ανθρώπινου δυναμικού μέσω της υλοποίησης διδακτορικής έρευνας Υποδράση 2: Πρόγραμμα χορήγησης υποτροφιών ΙΚΥ σε υποψηφίους διδάκτορες των ΑΕΙ της Ελλάδας. (ΟΠΣ-5113934).



**Επιχειρησιακό Πρόγραμμα  
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού,  
Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση**  
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



**ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2023**





**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΛΙΚΩΝ**

*Μελέτη της γραμμικής και μη-γραμμικής συμπεριφοράς  
σύνθετων ελαστικών πιεζοηλεκτρικών δομών  
με διατμητικές θεωρίες ανώτερης τάξης*

**ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Η. ΝΤΑΦΛΟΣ**  
ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΛΙΚΩΝ

**ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

Η υλοποίηση της διδακτορικής διατριβής συγχρηματοδοτήθηκε από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση», 2014-2020, στο πλαίσιο της Πράξης «Ενίσχυση του ανθρώπινου δυναμικού μέσω της υλοποίησης διδακτορικής έρευνας Υποδράση 2: Πρόγραμμα χορήγησης υποτροφιών ΙΚΥ σε υποψηφίους διδάκτορες των ΑΕΙ της Ελλάδας. (ΟΠΣ-5113934).



**Επιχειρησιακό Πρόγραμμα  
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού,  
Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση**  
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



**ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2023**

*«Η έγκριση της διδακτορικής διατριβής από το Τμήμα Μηχανικών Επιστήμης Υλικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα (N. 5343/32, άρθρο 202, παράγραφος 2)».*

Ημερομηνία αίτησης του κ. Ντάφλου Κωνσταντίνου: 26/11/2018

Ημερομηνία ορισμού Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής: 17/12/2018

**Μέλη Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής:**

Επιβλέπων

**Ευάγγελος Χατζηγεωργίου**, Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Μέλη

**Βασίλειος Καλπακίδης**, Καθηγητής Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου

**Λεωνίδας Γεργίδης**, Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

**Ημερομηνία ορισμού θέματος:** 17/12/2018

*«Μελέτη της γραμμικής και μη-γραμμικής συμπεριφοράς σύνθετων ελαστικών πιεζοηλεκτρικών δομών με διατμητικές θεωρίες ανώτερης τάξης»*

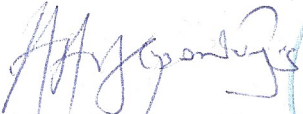
**ΛΙΟΡΙΣΜΟΣ ΕΠΤΑΜΕΛΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ:** 19/07/2023

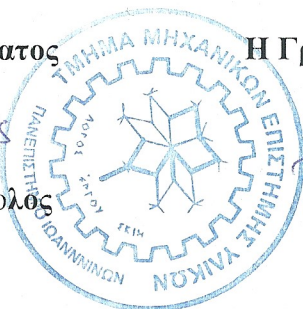
1. **Ευάγγελος Χατζηγεωργίου**, Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
2. **Βασίλειος Καλπακίδης**, Καθηγητής Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου
3. **Λεωνίδας Γεργίδης**, Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
4. **Κωνσταντίνος Μπέλτσιος**, Καθηγητής Τμήματος Χημικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου
5. **Γεωργία Φουτσιτζή**, Καθηγήτρια Τμήματος Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
6. **Θεόδωρος Ματίκας**, Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
7. **Ιωάννης Παναγιωτόπουλος**, Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων


Έγκριση Διδακτορικής Διατριβής με βαθμό «ΑΡΙΣΤΑ» στις 28/11/2023

**Ο Πρόεδρος του Τμήματος**

**Η Γραμματέας του Τμήματος**

  
**Απόστολος Αυγερόπουλος**  
Καθηγητής



  
**Μαρία Κόντου**



*Στους γονείς μου, Ηλία και Ανδριανή  
και στην Άννα που έφυγε νωρίς...*

**ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	iv
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	v
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	vii
ABSTRACT	ix
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΩΝ	xi
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΩΝ	xii
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ	xiv
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ	xviii
<b>A. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ</b>	
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: «Τεχνικές Θεωρίες Δοκών»</b>	<b>2</b>
1.1 Εισαγωγή στις τεχνικές θεωρίες δοκών	2
1.2 Ιστορική αναδρομή	4
1.3 Τεχνική θεωρία δοκών Euler – Bernoulli (EBT)	8
1.3.1 Θεωρία Euler – Bernoulli: Στατική περίπτωση	9
1.3.2 Θεωρία Euler – Bernoulli: Δυναμική περίπτωση	11
1.4 Τεχνική θεωρία δοκών Timoshenko (TBT)	13
1.4.1 Θεωρία Timoshenko: Στατική περίπτωση	14
1.4.2 Θεωρία Timoshenko: Δυναμική περίπτωση	17
1.5 Τύποι συνοριακών συνθηκών	19
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: «Η Έννοια της Μη Γραμμικότητας»</b>	<b>21</b>
2.1 Εισαγωγή στη μη γραμμικότητα	21
2.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση	22
2.3 Πηγές της μη γραμμικότητας	23
2.4 Ο Von Kármán και το έργο του	29
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 «Πιεζοηλεκτρικά Υλικά»</b>	<b>31</b>
3.1 Εισαγωγή στα «έξυπνα» υλικά	31
3.2 Ιστορική αναδρομή πιεζοηλεκτρικών υλικών	33
3.3 Πιεζοηλεκτρικά υλικά και εφαρμογές	35
3.4 Το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο	37
3.5 Κατηγορίες πιεζοηλεκτρικών υλικών	39
3.6 Βασικές εξισώσεις πιεζοηλεκτρισμού	46



<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: «Σύνθετα Πολυστρωματικά Υλικά»</b>	<b>50</b>
4.1 Σύνθετα υλικά	50
4.2 Κατηγορίες σύνθετων υλικών	52
4.3 Πολυστρωματικά σύνθετα υλικά	55
4.4 Σύνθετες πολυστρωματικές δομές τύπου σάντουιτς	56
4.5 Πιεζοηλεκτρικά πολυστρωματικά σύνθετα υλικά	58
<b>B. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ</b>	
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: «Γραμμικές Τεχνικές Θεωρίες σε Ελαστικές Δοκούς»</b>	<b>60</b>
5.1 Θεωρητική διατύπωση γραμμικά ελαστικών δοκών	60
5.2 Επίλυση στατικού προβλήματος ελαστικών δοκών	67
5.3 Επίλυση δυναμικού προβλήματος ελαστικών δοκών	69
5.4 Αποτελέσματα στατικού προβλήματος ελαστικών δοκών	71
5.5 Αποτελέσματα δυναμικού προβλήματος ελαστικών δοκών	79
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: «Τεχνικές Θεωρίες σε Ελαστικές Δοκούς με Γεωμετρική Μη Γραμμικότητα»</b>	<b>83</b>
6.1 Θεωρητική διατύπωση ελαστικών δοκών με γεωμετρική μη γραμμικότητα	83
6.1.1 Θεωρία EBT ελαστικών δοκών με γεωμετρική μη γραμμικότητα	88
6.1.2 Θεωρία TBT ελαστικών δοκών με γεωμετρική μη γραμμικότητα	89
6.2 Επίλυση στατικού προβλήματος με γεωμετρική μη γραμμικότητα	90
6.2.1 Επίλυση στατικού προβλήματος με θεωρία EBT	93
6.2.2 Επίλυση στατικού προβλήματος με θεωρία TBT	97
6.2.3 Επίλυση στατικού προβλήματος με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης	103
6.3 Αποτελέσματα στατικού προβλήματος ελαστικών δοκών με γεωμετρική μη γραμμικότητα	110
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: «Γραμμικές Τεχνικές Θεωρίες σε Πιεζοηλεκτρικές Δοκούς»</b>	<b>121</b>
7.1 Θεωρητική διατύπωση γραμμικά πιεζοηλεκτρικών δοκών	121
7.2 Επίλυση στατικού προβλήματος με θεωρία EBT	132
7.3 Επίλυση στατικού προβλήματος με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης	133
7.4 Επίλυση δυναμικού προβλήματος πιεζοηλεκτρικών δοκών	141
7.5 Αποτελέσματα στατικού προβλήματος πιεζοηλεκτρικών δοκών	147
7.6 Αποτελέσματα δυναμικού προβλήματος πιεζοηλεκτρικών δοκών	158

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: «Τεχνικές Θεωρίες σε Πιεζοηλεκτρικές Δοκούς με Γεωμετρική Μη Γραμμικότητα»</b>	<b>160</b>
8.1 Θεωρητική διατύπωση πιεζοηλεκτρικών δοκών με γεωμετρική μη γραμμικότητα	160
8.2 Επίλυση στατικού προβλήματος με θεωρία EBT	170
8.3 Επίλυση στατικού προβλήματος με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης	171
8.4 Αποτελέσματα στατικού προβλήματος ελαστικών δοκών	182
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9: «Τεχνικές Θεωρίες Σύνθετων Πολυστρωματικών Δοκών»</b>	<b>194</b>
9.1 Μοντελοποίηση σύνθετων γραμμικά ελαστικών πολυστρωματικών δοκών σε Προβλήματα κάμψης	195
9.1.1 Πεδίο μετατοπίσεων και πεδίο μηχανικών τροπών	195
9.1.2 Καταστατικές σχέσεις	195
9.1.3 Μεταβολική Αρχή Hamilton	197
9.1.4 Εξισώσεις κίνησης και συνοριακές συνθήκες	198
9.2 Μοντελοποίηση σύνθετων ελαστικών πολυστρωματικών δοκών με όρους γεωμετρικής μη γραμμικότητας	199
9.3 Μοντελοποίηση σύνθετων πιεζοηλεκτρικών πολυστρωματικών δοκών	201
9.3.1 Πεδίο μετατοπίσεων, πεδίο μηχανικών τροπών και ηλεκτρικό πεδίο	201
9.3.2 Καταστατικές σχέσεις	202
9.3.3 Μεταβολική Αρχή Hamilton	202
9.3.4 Εξισώσεις κίνησης και συνοριακές συνθήκες	203
9.4 Μοντελοποίηση σύνθετων πιεζοηλεκτρικών πολυστρωματικών δοκών με γεωμετρική μη γραμμικότητα	205
<b>Γ. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ</b>	
Συμπεράσματα	208
Προτάσεις για μελλοντική έρευνα	209
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	<b>210</b>
<b>ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ</b>	<b>217</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ</b>	<b>218</b>
Παράρτημα Α.1	218
Παράρτημα Α.2	221
Παράρτημα Β.1	225

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διδακτορική διατριβή για την απόκτηση Διδακτορικού Διπλώματος εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Μαθηματικής Μοντελοποίησης Υλικών και Επιστημονικών Υπολογισμών του τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων από το Δεκέμβριο του 2018 έως σήμερα, υπό την επίβλεψη και καθοδήγηση του Αναπληρωτή Καθηγητή, Ευάγγελου Π. Χατζηγεωργίου.

Η υλοποίηση της διδακτορικής διατριβής συγχρηματοδοτήθηκε από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση», 2014-2020, στο πλαίσιο της Πράξης «Ενίσχυση του ανθρώπινου δυναμικού μέσω της υλοποίησης διδακτορικής έρευνας Υποδράση 2: Πρόγραμμα χορήγησης υποτροφιών ΙΚΥ σε υποψηφίους διδάκτορες των ΑΕΙ της Ελλάδας. (ΟΠΣ-5113934).



This doctoral thesis for the degree of Doctor of Philosophy prepared in the Laboratory of Mathematical Modeling of Materials and Scientific Computing of the Department of Materials Science and Engineering of the School of Engineering of the University of Ioannina (Ioannina, Greece) from December 2018 until today, under the supervision and guidance of Associate Professor, Dr. Evangelos P. Hadjigeorgiou.

The implementation of the doctoral thesis was co-financed by Greece and the European Union (European Social Fund-ESF) through the Operational Programme «Human Resources Development, Education and Lifelong Learning» in the context of the Act “Enhancing Human Resources Research Potential by undertaking a Doctoral Research” Sub-action 2: IKY Scholarship Programme for PhD candidates in the Greek Universities». (MIS-5113934).



**ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Σε αυτό το τελικό στάδιο συγγραφής της διδακτορικής μου διατριβής, θα ήθελα να εκφράσω τη βαθύτατη ευγνωμοσύνη μου στους παρακάτω ανθρώπους:

Αρχικά, στον Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και επιβλέποντα της διδακτορικής μου εργασίας, κ. **Ευάγγελο Χατζηγεωργίου**, που όλα αυτά τα χρόνια ήταν πάντα δίπλα μου. Το πάθος και η μεταδοτικότητα του για τα Μαθηματικά και τη Μοντελοποίηση των υλικών όταν τον πρωτογνώρισα στο προπτυχιακό επίπεδο σπουδών με έπεισαν ότι αυτός ήταν ο δρόμος που ήθελα και εγώ να ακολουθήσω. Δεν ξεχνώ ποτέ τον τρόπο με τον οποίο καταφέρνει να μεταφέρει κάθε γνώση και την ικανότητα που διαθέτει να σε οδηγεί στην απάντηση οποιασδήποτε απλής ή δύσκολης ερώτησης χωρίς να το καταλάβεις. Θέλω να τον ευχαριστήσω που με στήριξε, πίστεψε σε μένα και με καθοδήγησε από την αρχή των προπτυχιακών μου χρόνων, έπειτα σε μεταπτυχιακό επίπεδο μέχρι και σήμερα, που μου έδωσε χώρο όταν τον χρειαζόμουν και που μου δίνει πάντα την ευκαιρία να εκφράζω τις σκέψεις και τις ιδέες μου. Ως μέλος της ομάδας του εργαστηρίου Μαθηματικής Μοντελοποίησης Υλικών και Επιστημονικών Υπολογισμών την οποία συντονίζει, κατόρθωσα να βελτιωθώ ως ερευνητής και ως άνθρωπος. Με την καθοδήγησή του, κατόρθωσα να ανακαλύψω προσωπικές δεξιότητες που δεν γνώριζα ότι είχα και ακόμη να βελτιώσω κάποιες άλλες που σίγουρα θα με συνοδεύσουν στα μελλοντικά μου βήματα. Αισθάνομαι τυχερός που γνώρισα ένα γενναϊόδωρο άνθρωπο που θα έχω πάντα στην καρδιά μου.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου και μέλος της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, κ. **Βασίλειο Καλπακίδη** για τη βοήθειά του και για τις γνώσεις που μου μετέδωσε τόσο σε προπτυχιακό όσο και σε μεταπτυχιακό επίπεδο. Εκτιμώ πραγματικά την προθυμία του να με βοηθήσει και να με καθοδηγήσει όποτε το χρειαζόμουν, αλλά κυρίως τον ευχαριστώ που μου έδειξε την εμπιστοσύνη και την εκτίμησή του όλα αυτά τα χρόνια.

Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου

Ιωαννίνων και μέλος της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής κ. **Λεωνίδα Γεργίδη** για την υποστήριξη και τη βοήθεια όλα αυτά τα χρόνια.

Επιπρόσθετα, θα ήθελα να εκφράσω ιδιαίτερες ευχαριστίες στον Καθηγητή του Τμήματος Χημικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου και μέλος της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής, κ. **Κωνσταντίνο Μπέλτσιο** για τις πολύτιμες επιστημονικές συμβουλές και παρατηρήσεις του καθώς και για τη θερμή του συμπαράσταση και την ηθική στήριξη που μου προσέφερε σε όλη τη διάρκεια αυτής της εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής, κα **Γεωργία Φουτσιτζή**, Καθηγήτρια του Τμήματος Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, τον κ. **Θεόδωρο Ματίκα**, Καθηγητή του Τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και τον κ. **Ιωάννη Παναγιωτόπουλο**, Καθηγητή του Τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, για την κριτική ανάγνωση του κειμένου, τον πολύτιμο χρόνο που διέθεσαν και την τιμή που μου έκαναν να συμμετάσχουν στην επταμελή εξεταστική επιτροπή της διδακτορικής μου διατριβής.

Ευχαριστώ, επίσης, τους προπτυχιακούς φοιτητές του εργαστηρίου που είχα την χαρά να συνεργαστώ μαζί τους καθώς και τους μεταπτυχιακούς και διδακτορικούς συναδέλφους μου στο Εργαστήριο Μαθηματικής Μοντελοποίησης Υλικών και Επιστημονικών Υπολογισμών του Τμήματος, για τη συνεργασία, τη συμπαράσταση και τη βοήθειά τους στην περίοδο εκπόνησης της παρούσας διατριβής.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την αγάπη μου και ένα μεγάλο ευχαριστώ στους δικούς μου ανθρώπους. Στους γονείς μου, **Ηλία** και **Ανδριανή**, και στους φίλους μου που είναι πάντα δίπλα μου, με ενθαρρύνουν και στηρίζουν πάντα τις επιλογές μου σε όλους τους τομείς της ζωής μου.

*Ιωάννινα, 20 Νοεμβρίου 2023*

*Ντάφλος Η. Κωνσταντίνος*

## Μελέτη της γραμμικής και μη-γραμμικής συμπεριφοράς σύνθετων ελαστικών πιεζοηλεκτρικών δομών με διατμητικές θεωρίες ανώτερης τάξης

Ντάφλος Η. Κωνσταντίνος\*

\*Τμήμα Μηχανικών Επιστήμης Υλικών, Πολυτεχνική Σχολή,  
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 45110, Ιωάννινα, Ελλάδα

**Λέξεις κλειδιά:** ελαστικές δοκοί, πιεζοηλεκτρικές δοκοί, σύνθετα πολυστρωματικά υλικά, γεωμετρική μη γραμμικότητα, μη γραμμικότητα τύπου von Karman, φαινόμενα διάτμησης, διατμητικές θεωρίες ανώτερης τάξης, γραμμική ανάλυση, μη γραμμική ανάλυση

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε προβλήματα μηχανικής ελαστικών και πιεζοηλεκτρικών δοκών με μεγάλες μετατοπίσεις, οι μετατοπίσεις είναι ίδιας τάξης μεγέθους με το πάχος της δοκού. Στις περιπτώσεις αυτές, οι γραμμικές θεωρίες δοκών δεν παράγουν ακριβή αποτελέσματα καθώς δεν μπορούν να προβλέψουν τις εντός επιπέδου μετακινήσεις της δοκού. Για το λόγο αυτό, είναι απαραίτητη η ανάπτυξη μη γραμμικών θεωριών (θεωρίες μεγάλων παραμορφώσεων) που λαμβάνουν υπόψη τη γεωμετρική μη γραμμικότητα για την άρση σχετικών ασυνεπειών και τη μελέτη τέτοιου είδους προβλημάτων.

Στην εργασία, αυτή, μελετώνται στατικά και δυναμικά προβλήματα δοκών με μεγάλες μετατοπίσεις τόσο σε ελαστικές όσο και σε πιεζοηλεκτρικές δοκούς. Αρχικά, παράγονται οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες με χρήση μεταβολικής αρχής, της «Αρχής Hamilton». Στη συνέχεια, μελετάται η επίδραση της γεωμετρικής μη γραμμικότητας και γίνεται προσπάθεια αναλυτικής επίλυσης των γραμμικών και μη γραμμικών εξισώσεων κίνησης σε στατικά προβλήματα, όπως προβλήματα κάμψης και σε δυναμικά προβλήματα όπως προβλήματα ελεύθερων ταλαντώσεων σε δοκούς.

Αρχικά, το πρώτο μέρος της διατριβής αποτελείται από το θεωρητικό υπόβαθρο της μελέτης. Πιο συγκεκριμένα, στο 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρουσιάζονται οι τεχνικές θεωρίες δοκών και αναλύονται οι θεωρίες δοκών Euler-Bernoulli και Timoshenko. Στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο αναλύεται η έννοια της μη γραμμικότητας, παρουσιάζονται οι κύριες πηγές μη γραμμικότητας σε προβλήματα μηχανικής και εστιάζεται κύρια στη γεωμετρική μη γραμμικότητα που είναι η βασική πηγή μη γραμμικότητας στην παρούσα μελέτη. Στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρατίθεται μια εισαγωγή στα πιεζοηλεκτρικά υλικά. Παρουσιάζονται τα έξυπνα υλικά και οι κατηγορίες τέτοιων υλικών. Αναφέρονται οι κύριες εφαρμογές τους, το ευθύ και αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο καθώς και οι βασικές εξισώσεις του πιεζοηλεκτρισμού. Στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρουσιάζονται τα σύνθετα υλικά, οι βασικές κατηγορίες τους και οι

κύριες εφαρμογές τους. Επίσης, δίνεται έμφαση στα σύνθετα πολυστρωματικά υλικά τύπου «σάντουιτς» με πιεζοηλεκτρικά και ελαστικά στρώματα σε προβλήματα με εφαρμογές όπως οι αισθητήρες και οι ενεργοποιητές.

Το δεύτερο μέρος της διατριβής αποτελείται από τη μαθηματική μοντελοποίηση στατικών και δυναμικών προβλημάτων ελαστικών και πιεζοηλεκτρικών δοκών. Πιο συγκεκριμένα, στο 5<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρουσιάζεται η θεωρητική διατύπωση προβλημάτων κάμψης ελαστικών δοκών με διάφορες τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης. Παράγονται οι εξισώσεις κίνησης και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες για στατικά και δυναμικά προβλήματα ελαστικών δοκών. Επιλύονται στατικά και δυναμικά προβλήματα για όλα τα γραμμικά μοντέλα και παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα. Στο 6<sup>ο</sup> κεφάλαιο αναλύονται οι μη γραμμικές τεχνικές θεωρίες διάτμησης σε ελαστικές δοκούς. Στη συνέχεια, μέσω της «Αρχής Hamilton», παράγονται οι εξισώσεις κίνησης και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες για μη γραμμικές τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης, ελαστικών δοκών με μεγάλες μετατοπίσεις. Επιλύονται σχετικά προβλήματα κάμψης ελαστικών δοκών λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρική μη γραμμικότητα και παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα. Στη συνέχεια, γίνεται επέκταση των μοντέλων που περιγράφονται στα κεφάλαια 5 και 6 για πιεζοηλεκτρικές δοκούς και περιγράφονται στα κεφάλαια 7 και 8. Πιο συγκεκριμένα, στο 7<sup>ο</sup> κεφάλαιο γίνεται η παραγωγή των γραμμικών εξισώσεων κίνησης και συνοριακών συνθηκών για πιεζοηλεκτρικές δοκούς. Στη συνέχεια, γίνεται αναλυτική επίλυση στατικών και δυναμικών προβλημάτων πιεζοηλεκτρικών δοκών με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης και παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα. Το 8<sup>ο</sup> κεφάλαιο αναφέρεται στη θεωρητική διατύπωση πιεζοηλεκτρικών δοκών με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης λαμβάνοντας υπόψη και γεωμετρικές μη γραμμικότητες. Γίνεται παραγωγή των μη γραμμικών εξισώσεων κίνησης και των αντίστοιχων συνοριακών συνθηκών. Στη συνέχεια, προτείνεται ένα αναλυτικός τρόπος επίλυσης των μη γραμμικών εξισώσεων και παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα. Το τελευταίο κεφάλαιο της διατριβής παρουσιάζει τη μοντελοποίηση σύνθετων πολυστρωματικών ελαστικών και πιεζοηλεκτρικών δοκών σε προβλήματα κάμψης με τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης. Πιο συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο 9 διατυπώνονται οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες γραμμικά ελαστικών και πιεζοηλεκτρικών σύνθετων πολυστρωματικών δοκών σε προβλήματα κάμψης. Στη συνέχεια, διατυπώνονται και οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης και συνοριακές συνθήκες για ελαστικές και πιεζοηλεκτρικές σύνθετες πολυστρωματικές δοκούς με γεωμετρικές μη γραμμικότητες τύπου von Karman.

Το τρίτο μέρος της διατριβής αποτελείται από τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την έρευνα καθώς και σχετικές προτάσεις για μελλοντική έρευνα. Επίσης, παρουσιάζεται η βιβλιογραφία, οι σχετικές δημοσιεύσεις που προκύψανε και τα σχετικά παραρτήματα.

**Study of linear and nonlinear behavior of composite elastic and piezoelectric structures using higher order shear deformation theories**

**Ntaflos I. Konstantinos\***

\* Department of Materials Science and Engineering, School of Engineering,  
University of Ioannina, 45110, Ioannina, Greece

**Keywords:** elastic beams, piezoelectric beams, composite laminated materials, geometric nonlinearity, von Karman nonlinearity, shear effects, higher order shear deformation theories, linear analysis, nonlinear analysis

## **ABSTRACT**

In engineering problems of elastic and piezoelectric beams with large displacements, the displacements are of the same order of magnitude as the thickness of the beam. In these cases, linear beam theories do not produce accurate results as they cannot predict the in-plane movements of the beam. For this reason, it is necessary to develop nonlinear theories (large deformation theories) that take into account the geometric nonlinearity to remove related inconsistencies and study such problems.

In this thesis, static and dynamic problems of beams with large displacements for both elastic and piezoelectric beams are studied. First, equations of motion and boundary conditions are derived by using a variational principle, the "Hamilton's Principle". Subsequently, the influence of geometric nonlinearities is studied and an attempt to solve analytically the linear and nonlinear equations of motion in static problems such as bending problems and in dynamic problems such as vibration problems in beams is made.

To begin with, the first part of this thesis consists of the theoretical background of the study. More specifically, in Chapter 1, the technical beam theories are presented and the Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories are analyzed. Chapter 2 discusses the concept of nonlinearity, the main sources of nonlinearity in engineering problems and focuses on geometric nonlinearity which is the main source of nonlinearity in this study. Chapter 3 provides an introduction to piezoelectric materials. Smart materials and the categories of such materials are introduced. Their main applications, the direct and inverse piezoelectric effect and the basic equations of piezoelectricity are mentioned. Chapter 4 presents composite materials, their main categories and their main applications. In addition, emphasis is given to composite multilayer materials of the sandwich type with piezoelectric and elastic layers in problems with applications in areas such as sensors and actuators.

The second part of this thesis consists of the mathematical modelling of static and dynamic problems of elastic and piezoelectric beams. More specifically, Chapter 5 presents the theoretical formulation of elastic beam bending problems using various technical higher order shear theories. The equations of motion and the corresponding boundary conditions for static and dynamic elastic beam problems are derived. Static



and dynamic problems for all linear models are solved and numerical results are presented. In Chapter 6, nonlinear technical shear theories in elastic beams are discussed. Then, by means of the "Hamilton's Principle", the equations of motion and the corresponding boundary conditions for higher order nonlinear technical shear theories of elastic beams with large displacements are derived. Relevant bending problems of elastic beams are solved taking into account the geometric nonlinearity and numerical results are presented. Subsequently, the models described in Chapters 5 and 6 are then extended for piezoelectric beams and described in Chapters 7 and 8. More specifically, in Chapter 7, the linear equations of motion and boundary conditions for piezoelectric beams are derived. Then, an analytical solution of static and dynamic problems of piezoelectric beams with higher order shear theories is carried out and numerical results are presented. Chapter 8 deals with the theoretical formulation of piezoelectric beams with higher-order shear theories considering geometric nonlinearity. The nonlinear equations of motion and the corresponding boundary conditions are derived. Then, an analytical method for solving the nonlinear equations is proposed and numerical results are presented. The last chapter of the thesis presents the modelling of composite multilayer elastic and piezoelectric beams in bending problems using higher order shear deformation theories. In particular, Chapter 9 formulates the equations of motion and boundary conditions of linear elastic and piezoelectric composite multilayer beams in bending problems. The corresponding equations of motion and boundary conditions are then formulated for elastic and piezoelectric composite multilayer beams with von Karman-type geometric nonlinearities.

The third part of this thesis consists of the conclusions derived from the research as well as relevant suggestions for future research. The bibliography, relevant publications and the relevant appendices are also presented.

**ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΩΝ**

<b>3D:</b>	Three - Dimensional
<b>BC:</b>	Boundary Condition
<b>CBT:</b>	Classical Beam Theory
<b>CC BC:</b>	Clamped - Clamped Boundary Condition
<b>CNT:</b>	Carbon Nanotube
<b>EBT:</b>	Euler - Bernoulli Theory
<b>ESDT:</b>	Exponential Shear Deformation Theory
<b>FDM:</b>	Finite Difference Method
<b>FEA:</b>	Finite Element Analysis
<b>FEM:</b>	Finite Element Method
<b>FGM:</b>	Functionally Graded Materials
<b>FSDT:</b>	First Order Shear Deformation Theory
<b>FiSDT:</b>	Fifth - Order Shear Deformation Theory
<b>HH BC:</b>	Hinged - Hinged Boundary Condition
<b>HSDT:</b>	Higher Order Shear Deformation Theory
<b>HPSDT:</b>	Hyperbolic Shear Deformation Theory
<b>ITSDT:</b>	Inverse Tangent Shear Deformation Theory
<b>LBT:</b>	Levinson Beam Theory
<b>LTR:</b>	Length-To-Thickness Ratio (Aspect Ratio)
<b>PP BC:</b>	Pinned - Pinned Boundary Condition
<b>PVDF:</b>	Polyvinylidene fluoride
<b>PZT:</b>	Lead zirconate titanate
<b>RBT:</b>	Reddy Beam Theory
<b>SMA:</b>	Shape Memory Alloys
<b>SS BC:</b>	Simply Supported Boundary Condition
<b>SSDT:</b>	Sinusoidal Shear Deformation Theory
<b>TBT:</b>	Timoshenko Beam Theory
<b>TSDT:</b>	Third Order Shear Deformation Theory
<b>UDL:</b>	Uniformly Distributed Load
<b>UTS:</b>	Ultimate Tensile Strength
<b>Π.Σ.:</b>	Πεπερασμένα Στοιχεία
<b>Σ.Σ.:</b>	Συνοριακές Συνθήκες

**ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΩΝ**

$A$	Διατομή της δοκού
$b$	Πλάτος της δοκού
$c_{ij}$	Ελαστικές σταθερές της δοκού
$d$	Διάμετρος
$D_x$	Ηλεκτρική Μετατόπιση κατά τον άξονα $x$
$D_z$	Ηλεκτρική Μετατόπιση κατά τον άξονα $z$
$e_{ij}$	Πιεζοηλεκτρικές σταθερές του υλικού
$\epsilon_{ij}$	Διηλεκτρικές σταθερές του υλικού
$e_x, e_y, e_z$	Μοναδιαία διανύσματα κατά τους άξονες $x, y$ και $z$
$E$	Μέτρο ελαστικότητας ( <i>Young's Modulus</i> )
$E_i$	Ηλεκτρικό Πεδίο
$f_c$	Κρίσιμη συχνότητα
$f(z)$	Συνάρτηση κατανομής διατμητικής τάσης
$g(z)$	Συνάρτηση κατανομής ηλεκτρικού δυναμικού
$G$	Μέτρο διάτμησης ( <i>Shear Modulus</i> )
$h$	Πάχος της δοκού
$H_e$	Ηλεκτρική Ενθαλπία
$I$	Ροπή αδράνειας της δοκού
$m, k, l$	Μετρητές αθροισμάτων
$L$	Μήκος της δοκού
$M(x, y, t)$	Συνισταμένη ροπή κάμψης
$N(x, y, t)$	Συνισταμένη αξονική δύναμη ( <i>Membrane force</i> )
$p$	Πόλωση
$p(x)$	Κατανομή οριζόντιας δύναμης ( <i>Αξονικό φορτίο</i> )
$q(x)$	Κατανομή εγκάρσιας δύναμης ( <i>Εγκάρσια φορτίο</i> )
$Q(x, y, t)$	Συνισταμένη διατμητική δύναμη
$S$	Αναλογία διαστάσεων ( <i>Length-To-Thickness Ratio</i> )
$t$	Χρόνος

$T$	Κινητική Ενέργεια
$T_c$	Θερμοκρασία Curie
$u_x, u_y, u_z$	Μετατοπίσεις κατά τους άξονες $x$ , $y$ και $z$
$u, v, w$	Μετατοπίσεις μέσης επιφάνειας
$U$	Εσωτερική ενέργεια
$w_m, \varphi_m, \tilde{\varphi}_m$	Συντελεστές σειρών Fourier
$W_e$	Έργο των εξωτερικών φορτίσεων
$A_0, B_0, C_0, D_0, H_0$	Συντελεστές κατανομής διατμητικής τάσης
$K_0, L_0, M_0, N_0, P_0$	Συντελεστές κατανομής ηλεκτρικού δυναμικού
$\gamma_{zx}$	Εγκάρσια διατμητική τροπή
$\delta(\bullet)$	Μεταβολικός τελεστής
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Τροπές κατά τους άξονες $x$ , $y$ και $z$
$\varepsilon_{ij}$	Τανυστής των τροπών
$\theta$	Κλίση της παραμορφωμένης δοκού
$\kappa$	Συντελεστής διάτμησης ( <i>Shear coefficient</i> )
$\mu$	Μάζα ανά μονάδα μήκους
$\nu$	Λόγος Poisson
$\rho$	Πυκνότητα μάζας της δοκού
$\sigma_{ij}$	Τανυστής της αξονικής τάσης
$\tau_{ij}$	Τανυστής της εγκάρσιας διατμητικής τάσης
$\varphi$	Περιστροφή – Στροφή ( <i>Rotation</i> )
$\tilde{\varphi}$	Ηλεκτρικό δυναμικό
$\omega$	Φυσική συχνότητα ( <i>Natural frequency</i> )
$\omega_w$	Καμπτική συχνότητα ( <i>Flexural frequency</i> )
$\omega_\varphi$	Συχνότητα περιστροφής λόγω διάτμησης
$\omega_c$	Κρίσιμη γωνιακή συχνότητα

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

<b>Σχήμα 1.1:</b> Ελαστικό σώμα υπό την επιβολή εξωτερικών φορτίσεων.	2
<b>Σχήμα 1.2:</b> Κάμψη πακτωμένης δοκού υπό την επιβολή ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου.	3
<b>Σχήμα 1.3:</b> Σχηματική αναπαράσταση κάμψης δοκού του Leonardo da Vinci.	4
<b>Σχήμα 1.4:</b> (a) Leonhard Euler (1707–1783) και (b) Daniel Bernoulli (1700–1782).	5
<b>Σχήμα 1.5:</b> (a) Stephen Timoshenko (1878–1972) και (b) Paul Ehrenfest (1880–1933).	6
<b>Σχήμα 1.6:</b> Δοκός Euler–Bernoulli.	8
<b>Σχήμα 1.7:</b> Οι τέσσερις πρώτοι τρόποι ταλάντωσης ενός προβόλου με θεωρία δοκών EBT.	12
<b>Σχήμα 1.8:</b> Οι τέσσερις πρώτοι τρόποι ταλάντωσης μιας δοκού απλής στήριξης με θεωρία δοκών EBT.	12
<b>Σχήμα 1.9:</b> Παραμόρφωση δοκού με θεωρία EBT και θεωρία TBT	13
<b>Σχήμα 1.10:</b> Δοκός απλής στήριξης ( <i>Simply Supported Beam</i> ).	19
<b>Σχήμα 1.11:</b> Δοκός με αρθρώσεις στα δύο άκρα ( <i>Hinged-Hinged Beam</i> ).	20
<b>Σχήμα 1.12:</b> Δοκός πακτωμένη στα δύο άκρα ( <i>Clamped-Clamped Beam</i> ).	20
<b>Σχήμα 1.13:</b> Πρόβολος ( <i>Cantilever Beam</i> ).	20
<b>Σχήμα 2.1:</b> Βασικές πηγές της μη γραμμικότητας.	23
<b>Σχήμα 2.2:</b> Μη γραμμική συμπεριφορά υλικού.	24
<b>Σχήμα 2.3:</b> Τυπική καμπύλη φορτίου-μετατόπισης στιβαρών κατασκευών.	26
<b>Σχήμα 2.4:</b> Theodore von Kármán (1881–1963).	30
<b>Σχήμα 3.1:</b> Πιεζοηλεκτρικοί κρύσταλλοι: (α) χαλαζίας, (β) τουρμαλίνης και (γ) τοπάζιο.	35
<b>Σχήμα 3.2:</b> Βιοϊατρικές εφαρμογές των πιεζοηλεκτρικών υλικών.	36
<b>Σχήμα 3.3:</b> Το (α) ευθύ και το (β) αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο.	37
<b>Σχήμα 3.4:</b> Πηγές προέλευσης της πόλωσης.	38
<b>Σχήμα 3.5:</b> Σχηματική απεικόνιση υποκατηγοριών διηλεκτρικών υλικών.	39
<b>Σχήμα 3.6:</b> Μοναδιαία κυψελίδα περοβσκιτικής δομής.	40
<b>Σχήμα 3.7:</b> Παραμόρφωση πλέγματος μοναδιαίας κυψελίδας του BaTiO <sub>3</sub> .	40
<b>Σχήμα 3.8:</b> Προσανατολισμός περιοχών φεροηλεκτρικού κρυστάλλου. Από αριστερά: μη πολωμένος, πολωμένος και αποπολωμένος κρύσταλλος.	41
<b>Σχήμα 3.9:</b> Μοναδιαία κυψελίδα του PVDF (-CH <sub>2</sub> -CF <sub>2</sub> ).	42
<b>Σχήμα 3.10:</b> Σχηματική απεικόνιση τύπων μετατροπής πιεζοηλεκτρικών υλικών. (α) τρόπος τύπου-33d και (β) τρόπος τύπου-31d.	42
<b>Σχήμα 3.11:</b> Η τυπική μονόμορφη δομή (monomorph).	43
<b>Σχήμα 3.12:</b> Συμπεριφορά μονόμορφης δομής που υπόκειται σε ηλεκτρικό πεδίο.	44
<b>Σχήμα 3.13:</b> Συμπεριφορά δίμορφης δομής, που υπόκειται σε ηλεκτρικό πεδίο. Επάνω: παράλληλη δίμορφη δομή, κάτω: δίμορφη δομή σε σειρά.	44
<b>Σχήμα 3.14:</b> Μονόμορφη δομή δοκού πολυστρωματικού τύπου.	45
<b>Σχήμα 4.1:</b> Τύποι σύνθετων υλικών: (a) κοκκώδη σύνθετα, (b), (c) ινοπλισμένα σύνθετα και (d) πολυστρωματικά σύνθετα.	50
<b>Σχήμα 4.2:</b> Χρήση σύνθετων υλικών σε κατασκευές αεροδιαστημικής: (α) Boeing 787 και (β) Airbus A380.	51
<b>Σχήμα 4.3:</b> Ταξινόμηση σύνθετων υλικών σύμφωνα με τη της ενίσχυσης.	52
<b>Σχήμα 4.4:</b> Σχηματική αναπαράσταση διασποράς και κατανομής σωματιδιακών ενισχύσεων σε σύνθετα υλικά: (A) ιδανική διασπορά και κατανομή σωματιδίων και (B) σωματίδια που υπάρχουν ως «συσσωματώματα» σε σύνθετα υλικά.	53

- Σχήμα 4.5:** Σχηματική αναπαράσταση ινώδη σύνθετων υλικών: (α) συνεχείς ίνες ενίσχυσης, (β) ασυνεχείς ευθυγραμμισμένες ίνες και (γ) ασυνεχείς ίνες ενίσχυσης με τυχαίο προσανατολισμό. 54
- Σχήμα 4.6:** Σχηματική αναπαράσταση σύνθετων πολυστρωματικών υλικών (α) σε μια διεύθυνση και (β) σε διαφορετικές διευθύνσεις. 55
- Σχήμα 4.7:** Σύνθετη δομή τύπου «σάντουιτς». 56
- Σχήμα 4.8:** Ανάπτυξη πιεζοηλεκτρικών σύνθετων δομών. 58
- Σχήμα 5.1:** (α) Κάμψη ελαστικής δοκού στο επίπεδο  $x-z$ , (β) διατομή της ελαστικής δοκού στο επίπεδο  $y-z$ . 61
- Σχήμα 5.2:** Ελαστική δοκός με συνοριακή συνθήκη άρθρωσης στα δύο άκρα και επιβολή ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου  $q(x)$ . 67
- Σχήμα 5.3:** Διάγραμμα  $w-L$  με γραμμικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης ελαστικών δοκών σε κάμψη για αναλογία διαστάσεων  $S=2$ . 75
- Σχήμα 5.4:** Διάγραμμα  $w-L$  με γραμμικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης ελαστικών δοκών σε κάμψη για αναλογία διαστάσεων  $S=4$ . 75
- Σχήμα 5.5:** Διάγραμμα  $w-L$  με γραμμικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης ελαστικών δοκών σε κάμψη για αναλογία διαστάσεων  $S=10, 20, 30$  και  $50$ . 76
- Σχήμα 5.6:** Σύγκριση της αξονικής καμπτικής τάσης  $\sigma_x$  κατά το πάχος της δοκού  $h$  (στο σημείο  $x=L/2, z$ ) με γραμμικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης ελαστικών δοκών σε κάμψη για αναλογία διαστάσεων  $S=4$ . 77
- Σχήμα 5.7:** Σύγκριση της αξονικής καμπτικής τάσης  $\sigma_x$  κατά το μήκος της δοκού  $L$  (στο σημείο  $x, z=h/2$ ) με γραμμικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης ελαστικών δοκών σε κάμψη για αναλογία διαστάσεων  $S=4$ . 77
- Σχήμα 5.8:** Σύγκριση της εγκάρσιας διατμητικής τάσης  $\tau_{xz}$  κατά το πάχος της δοκού  $h$  (στο σημείο  $x=0, z$ ) με γραμμικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης ελαστικών δοκών σε κάμψη για αναλογία διαστάσεων  $S=4$ . 78
- Σχήμα 5.9:** Σύγκριση της εγκάρσιας διατμητικής τάσης  $\tau_{xz}$  κατά το μήκος της δοκού  $L$  (στο σημείο  $x, z=h/4$ ) με γραμμικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης ελαστικών δοκών σε κάμψη για αναλογία διαστάσεων  $S=4$ . 78
- Σχήμα 5.10:** Μεταβολή της θεμελιώδους καμπτικής συχνότητας  $\bar{\omega}_w$  της ελαστικής δοκού συναρτήσει της αναλογίας διαστάσεων  $S$  ( $m=1$ ). 82
- Σχήμα 5.11:** Μεταβολή της θεμελιώδους καμπτικής συχνότητας  $\bar{\omega}_w$  της ελαστικής δοκού συναρτήσει των πέντε πρώτων τρόπων ταλάντωσης ( $S=4$ ). 82
- Σχήμα 6.1:** (α) Κάμψη ελαστικής δοκού στο επίπεδο  $x-z$ , (β) διατομή της ελαστικής δοκού στο επίπεδο  $y-z$ . 83
- Σχήμα 6.2:** Ελαστική δοκός με συνοριακή συνθήκη άρθρωσης στα δύο άκρα και επιβολή ομοιόμορφα κατανεμημένου εξωτερικού φορτίου  $q(x)$ . 110
- Σχήμα 6.3:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=2$ . 113
- Σχήμα 6.4:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=4$ . 113
- Σχήμα 6.5:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=10$ . 114

- Σχήμα 6.6:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=20$ . 114
- Σχήμα 6.7:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=30$ . 115
- Σχήμα 6.8:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=50$ . 115
- Σχήμα 6.9:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με το γραμμικό και μη γραμμικό Μοντέλο 5 για αναλογία διαστάσεων  $S=50$ . 116
- Σχήμα 6.10:** Σύγκριση της στροφής  $\varphi$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=2$ . 116
- Σχήμα 6.11:** Σύγκριση της στροφής  $\varphi$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=4$ . 117
- Σχήμα 6.12:** Σύγκριση της στροφής  $\varphi$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=10$ . 117
- Σχήμα 6.13:** Σύγκριση της στροφής  $\varphi$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=20$ . 118
- Σχήμα 6.14:** Σύγκριση της στροφής  $\varphi$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=30$ . 118
- Σχήμα 6.15:** Σύγκριση της στροφής  $\varphi$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=50$ . 119
- Σχήμα 7.1:** (α) Κάμψη πιεζοηλεκτρικής δοκού στο επίπεδο  $x-z$ , (β) διατομή της πιεζοηλεκτρικής δοκού στο επίπεδο  $y-z$ . 121
- Σχήμα 7.2:** Πιεζοηλεκτρική δοκός με συνοριακές συνθήκες άρθρωσης στα δύο άκρα (hinged-hinged) και επιβολή ομοιόμορφα κατανομημένου εξωτερικού φορτίου  $q(x)$ . 134
- Σχήμα 7.3:** Παραμόρφωση μιας εγκάρσιας κάθετης γραμμής με διάφορες τεχνικές θεωρίες δοκών. 149
- Σχήμα 7.4:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά μήκος της δοκού στο  $(x, z=0)$  με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S=2$ . 150
- Σχήμα 7.5:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά μήκος της δοκού στο  $(x, z=0)$  με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S=5$ . 150
- Σχήμα 7.6:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά μήκος της δοκού στο  $(x, z=0)$  με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S=10$ . 151
- Σχήμα 7.7:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά μήκος της δοκού στο  $(x, z=0)$  με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S=30$ . 151
- Σχήμα 7.8:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά μήκος της δοκού στο  $(x, z=0)$  με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S=50$ . 152
- Σχήμα 7.9:** Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  κατά μήκος της δοκού στο  $(x, z=0)$ , με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S=2$ . 152
- Σχήμα 7.10:** Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  κατά μήκος της δοκού στο  $(x, z=0)$ , με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S=5$ . 153
- Σχήμα 7.11:** Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  κατά μήκος της δοκού στο  $(x, z=0)$ , με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S=10$ . 153

- Σχήμα 7.12:** Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  κατά μήκος της δοκού στο  $(x, z = 0)$ , με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S = 30$ . 154
- Σχήμα 7.13:** Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  κατά μήκος της δοκού στο  $(x, z = 0)$ , με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S = 50$ . 154
- Σχήμα 7.14:** Σύγκριση της αξονικής τάσης  $\sigma_x$  κατά το μήκος της δοκού στο  $(x, z = h/2)$ , με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S = 30$ . 155
- Σχήμα 7.15:** Σύγκριση της αξονικής τάσης  $\sigma_x$  κατά το πάχος της δοκού στο  $(x = L/2, z)$ , με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S = 30$ . 156
- Σχήμα 7.16:** Σύγκριση της εγκάρσιας διατμητικής τάσης  $\tau_{xz}$  κατά το μήκος της δοκού στο  $(x, z = h/4)$ , με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S = 30$ . 156
- Σχήμα 7.17:** Σύγκριση της εγκάρσιας διατμητικής τάσης  $\tau_{xz}$  κατά το πάχος της δοκού στο  $(x = L/4, z)$ , με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S = 30$ . 157
- Σχήμα 8.1:** (α) Κάμψη πιεζοηλεκτρικής δοκού στο επίπεδο  $x$ - $z$ , (β) διατομή της πιεζοηλεκτρικής δοκού στο επίπεδο  $y$ - $z$ . 160
- Σχήμα 8.2:** Πιεζοηλεκτρική δοκός με συνοριακές συνθήκες άρθρωσης στα δύο άκρα (hinged-hinged) και επιβολή εξωτερικού ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου  $q(x)$ . 182
- Σχήμα 8.3:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=2$ . 186
- Σχήμα 8.4:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=5$ . 186
- Σχήμα 8.5:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=10$ . 187
- Σχήμα 8.6:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=20$ . 187
- Σχήμα 8.7:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=30$ . 188
- Σχήμα 8.8:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=50$ . 188
- Σχήμα 8.9:** Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=2$ . 189
- Σχήμα 8.10:** Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=5$ . 189
- Σχήμα 8.11:** Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=10$ . 190
- Σχήμα 8.12:** Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=20$ . 190
- Σχήμα 8.13:** Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=30$ . 191
- Σχήμα 8.14:** Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=50$ . 191
- Σχήμα 9.1:** Σύνθετη πολυστρωματική δοκός. 194



## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

<b>Πίνακας 3.1:</b> Βασικές ιδιότητες έξυπνων υλικών.	32
<b>Πίνακας 3.2:</b> Χρήση δεικτών σύμφωνα με τον Voigt.	48
<b>Πίνακας 3.3:</b> Η φυσική σημασία των ελαστικών, πιεζοηλεκτρικών και διηλεκτρικών σταθερών σε πιεζοηλεκτρικά υλικά.	49
<b>Πίνακας 5.1:</b> Συνάρτηση κατανομής διατμητικής τάσης για διάφορες τεχνικές θεωρίες.	60
<b>Πίνακας 5.2:</b> Τιμές των συντελεστών $A_0, B_0, C_0, D_0$ για διάφορα μοντέλα.	66
<b>Πίνακας 5.3:</b> Τιμές των σταθερών και της συνάρτησης $erf$ .	66
<b>Πίνακας 5.4:</b> Γεωμετρία και ιδιότητες ελαστικής δοκού.	71
<b>Πίνακας 5.5:</b> Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης $w$ (στο σημείο $x=L/2, z=0$ ), και της στροφής $\varphi$ (στο σημείο $x=0, z=0$ ) με γραμμικά μοντέλα ελαστικών δοκών για αναλογίες διαστάσεων $S = 2, 4, 10, 20, 30$ και $50$ .	72
<b>Πίνακας 5.6:</b> Σύγκριση της αξονικής τάσης $\sigma_x$ (στο σημείο $x=L/2, z=h/2$ ) και της εγκάρσιας διατμητικής τάσης $\tau_{xz}$ (στο σημείο $x=0, z=0$ ) για γραμμικές διατμητικές θεωρίες ανώτερης τάξης ελαστικών δοκών για αναλογίες διαστάσεων $S = 2, 4, 10, 20, 30$ και $50$ .	73
<b>Πίνακας 5.7:</b> Σύγκριση των αδιάστατων συχνοτήτων λόγω κάμψης $\bar{\omega}_w$ και των συχνοτήτων περιστροφής λόγω διάτμησης $\bar{\omega}_\varphi$ της ελαστικής δοκού για διάφορες αναλογίες διαστάσεων.	79
<b>Πίνακας 5.8:</b> Σύγκριση των αδιάστατων καμπτικών συχνοτήτων $\bar{\omega}_w$ της ελαστικής δοκού για διάφορους τρόπους ταλάντωσης.	79
<b>Πίνακας 5.9:</b> Σύγκριση των αδιάστατων συχνοτήτων περιστροφής λόγω διάτμησης $\bar{\omega}_\varphi$ της ελαστικής δοκού για διάφορους τρόπους ταλάντωσης.	80
<b>Πίνακας 6.1:</b> Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης (βύθισης) $w$ (στο σημείο $x=L/2, z=0$ ) σε ελαστικές δοκούς με γραμμικά και γεωμετρικά μη γραμμικά μοντέλα.	111
<b>Πίνακας 7.1:</b> Η συνάρτηση κατανομής του ηλεκτρικού δυναμικού κατά την κατεύθυνση του πάχους της πιεζοηλεκτρικής δοκού.	122
<b>Πίνακας 7.2:</b> Τιμές των συντελεστών $K_0, L_0, M_0, N_0, P_0, R_0$ για διάφορες τεχνικές θεωρίες με κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού $g(z) = 1 - (2z/h)^2$ .	133
<b>Πίνακας 7.3:</b> Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης $w$ στο $z, x=L/2$ , της στροφής $\varphi$ στο $x=0, z=0$ και του ηλεκτρικού δυναμικού $\tilde{\varphi}$ στο $x=L/2, z=0$ με γραμμικά μοντέλα πιεζοηλεκτρικών δοκών για $S = 2, 5, 10, 30, 50$ .	148
<b>Πίνακας 7.4:</b> Σύγκριση της μέγιστης αξονικής τάσης $\sigma_x$ στο $(x=L/2, z=-h/2)$ και της μέγιστης εγκάρσιας διατμητικής τάσης $\tau_{xz}$ στο $(x=L/4, z=0)$ με γραμμικά μοντέλα και αναλογία διαστάσεων $S = 30$ .	157
<b>Πίνακας 7.5:</b> Σύγκριση των αδιάστατων καμπτικών συχνοτήτων και των συχνοτήτων περιστροφής λόγω διάτμησης ( $m=1$ ) μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού.	158
<b>Πίνακας 7.6:</b> Σύγκριση των αδιάστατων καμπτικών συχνοτήτων $\bar{\omega}_w$ μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού για διαφορετικούς τρόπους ταλάντωσης.	158
<b>Πίνακας 7.7:</b> Σύγκριση των αδιάστατων συχνοτήτων περιστροφής λόγω διάτμησης $\bar{\omega}_\varphi$ μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού για διαφορετικούς τρόπους ταλάντωσης.	159
<b>Πίνακας 8.1:</b> Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης $w$ στο $x=L/2$ με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα πιεζοηλεκτρικών δοκών για $S = 2, 5, 10, 20, 30, 50$ .	183
<b>Πίνακας 8.2:</b> Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού $\tilde{\varphi}$ στο $x=L/2, z=0$ με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα πιεζοηλεκτρικών δοκών για $S = 2, 5, 10, 20, 30, 50$ .	184

# ***A. ΜΕΡΟΣ***

## ***ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ***

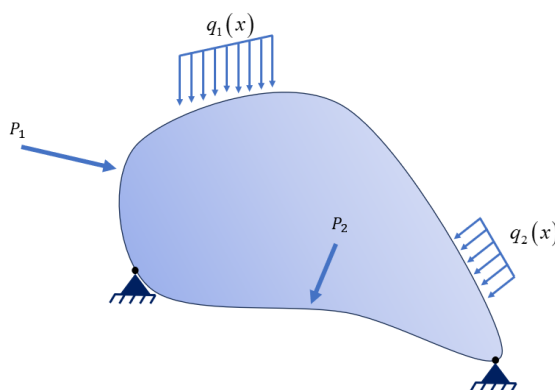
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## «Τεχνικές Θεωρίες Δοκών»

### 1.1 Εισαγωγή στις τεχνικές θεωρίες δοκών

Για τη μελέτη και ανάλυση διαφόρων δομών σε πολλά πεδία της Μηχανικής, η πιο κατάλληλη και ακριβής μέθοδος για την εύρεση των μηχανικών ιδιοτήτων και της απόκρισής τους σε διαφορετικά μηχανικά φορτία τόσο σε στατικά όσο και σε δυναμικά προβλήματα είναι η εφαρμογή της τρισδιάστατης μαθηματικής Θεωρίας Ελαστικότητας (three-dimensional (3D) elasticity theory).

Η Θεωρία της Ελαστικότητας, παρά τις υιοθετούμενες παραδοχές για τη φύση των σωμάτων, αποτελεί ένα αρκετά ακριβές μαθηματικό εργαλείο, με το οποίο έχοντας ως δεδομένα την γεωμετρία του σώματος, την εξωτερική φόρτιση (μαζικές και επιφανειακές δυνάμεις) που ασκείται σε αυτό (Σχήμα 1.1) καθώς και τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού, μπορεί να προσδιορίσει πλήρως την εσωτερική καταπόνηση ενός σώματος με τον υπολογισμό των τάσεων, των τροπών και των παραμορφώσεων σε κάθε σημείο του.



Σχήμα 1.1: Ελαστικό σώμα υπό την επιβολή εξωτερικών φορτίσεων.

Γενικά, κάθε πρόβλημα στην περιοχή της Μηχανικής αντιμετωπίζεται με χρήση της μαθηματικής θεωρίας της Ελαστικότητας στον τρισδιάστατο χώρο. Όπως προαναφέρθηκε, η εσωτερική απόκριση ενός σώματος σε εξωτερική καταπόνηση περιγράφεται από τις αναπτυσσόμενες τάσεις (stresses) και τις προκαλούμενες τροπές (strains) και παραμορφώσεις (deformations).

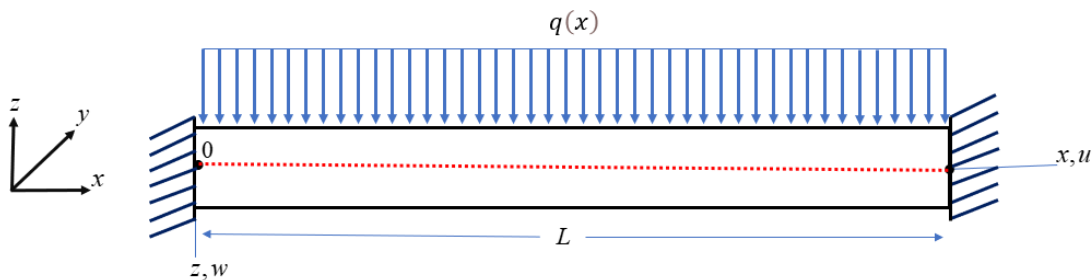
Αρχικά, ο Paganò [1] μελέτησε την τρισδιάστατη θεωρία ελαστικότητας για να προβλέψει μια ακριβή λύση στη στατική ανάλυση. Στη συνέχεια, ο Noor [2, 3] ανέπτυξε τύπους λύσεων της 3D ελαστικότητας στη δυναμική ανάλυση και στην ανάλυση πολυστρωματικών σύνθετων πλακών.

Διαπιστώθηκε σύντομα πως οι αναλυτικές λύσεις της τρισδιάστατης θεωρίας Ελαστικότητας σε πιο περίπλοκες γεωμετρίες είναι μαθηματικά πολύπλοκες, μπορούν να εφαρμοσθούν μόνο για απλές γεωμετρίες και συνοριακές συνθήκες και μερικές φορές είναι αδύνατες ή πολύ δύσκολες σε προβλήματα ταλαντώσεων [4].

Λόγω της πολυπλοκότητας της τρισδιάστατης θεωρίας της Ελαστικότητας, ο υπολογισμός και η αξιολόγηση στατικών και δυναμικών χαρακτηριστικών ενός σώματος, επιχειρείται συχνά μέσω απλουστευμένων μαθηματικών μοντέλων και θεωριών, κάνοντας κατάλληλες υποθέσεις που βασίζονται σε ισοδύναμες θεωρίες, όπως η δισδιάστατη θεωρία πλακών (two-dimensional (2-D) plate theories) που αναπτύχθηκε από τον *Kirchhoff* (1824–1887) [5].

Πολλές φορές, όμως, είναι πολύ δύσκολο να παραχθούν ακριβείς λύσεις ακόμη και σε διδιάστατα προβλήματα πλακών. Για το λόγο αυτό, με ορισμένες παραδοχές και απλοποιήσεις, αναπτύχθηκαν ισοδύναμες μονοδιάστατες θεωρίες δοκών (one-dimensional (1-D) beam theories) που αναφέρονται συνολικά στη βιβλιογραφία ως «Τεχνικές Θεωρίες» (*Technical Theories*) ή «Θεωρίες του Μηχανικού» (*Engineering Theories*). Στην παρούσα διατριβή γίνεται μελέτη σε προβλήματα κάμψης δοκών (Σχήμα 1.2) και προβλήματα ταλαντώσεων με τη χρήση τεχνικών θεωριών διάτμησης ανώτερης τάξης.

Για το λόγο αυτό, εισάγονται οι βασικοί ορισμοί των εννοιών «δοκός», «κάμψη» και «διάτμηση». Με τον όρο δοκός ορίζεται μια δομή στην οποία μία εκ των διαστάσεων της είναι πολύ μεγαλύτερη από τις άλλες δύο. Ο άξονας της δοκού ορίζεται κατά μήκος της μεγαλύτερης διάστασης και η διατομή της είναι κάθετη προς τον άξονα, αυτό, θεωρώντας πως μεταβάλλεται ομαλά κατά μήκος της δοκού.



**Σχήμα 1.2:** Κάμψη πακτωμένης δοκού υπό την επιβολή ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου.

Συχνά, οι κατασκευαστικές εφαρμογές αποτελούνται από μια ή περισσότερες δοκούς και βρίσκουν εφαρμογή σε μεγάλο αριθμό εξαρτημάτων όπως: βραχίονες, μοχλούς και άξονες. Επίσης, σε αεροναυτικές δομές, τα φτερά και οι άτρακτοι αντιμετωπίζονται ως δοκοί με λεπτά τοιχώματα.

Με τον όρο «κάμψη» ονομάζεται το αποτέλεσμα κάθετων δυνάμεων ή ροπών που ασκούνται σε ένα μακρόστενο σώμα. Όπως το σώμα τείνει να καμπυλωθεί, στη μία πλευρά του προκαλείται θλίψη και στην άλλη εφελκυσμός. Η κάμψη προκαλεί την παραμόρφωση ή ακόμα και την θραύση του σώματος.

Διάτμηση ορίζεται η καταπόνηση που εμφανίζεται σε ένα σώμα όταν δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις ενεργούν κάθετα στον άξονα του. Στη μηχανική, διατμητική τάση ονομάζεται το πηλίκο της παράλληλης ή εφαπτομενικής δύναμης που εφαρμόζεται σε μια διατομή του υλικού προς την επιφάνεια της διατομής. Δηλαδή η διατμητική τάση είναι η τάση που είναι παράλληλη στο επίπεδο της διατομής. Συμβολίζεται με το ελληνικό μικρό γράμμα «τ» και η μονάδα μέτρησής της στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI) είναι το Pa (Πασκάλ).

## 1.2 Ιστορική αναδρομή

Η αφύπνιση της επιστημονικής σκέψης πραγματοποιήθηκε κατά την περίοδο της Αναγέννησης (1400–1600), και συνέχισε μέχρι την περίοδο της επιστημονικής επανάστασης. Στο *Leonardo da Vinci* (1452–1519) αποδίδονται ορισμένες θεμελιώδεις συνεισφορές στη μηχανική των στερεών (*solid mechanics*), στη μηχανική των ρευστών (*fluid mechanics*) και στον μηχανικό σχεδιασμό, πολύ πριν την επιστημονική επανάσταση. Η συνεισφορά του εμφανίζεται στο «*Codex Madrid I*», ένα από τα δύο αξιοσημείωτα σημειωματάρια που ανακαλύφθηκαν στην Εθνική Βιβλιοθήκη της Ισπανίας, το 1967 [6]. Ο *Da Vinci* ορθώς κατέληξε στο συμπέρασμα ότι, κατά την κάμψη δοκών λόγω εγκάρσιων φορτίων, οι επίπεδες διατομές παραμένουν επίπεδες πριν και μετά την κάμψη (Σχήμα 1.3). Ο *Da Vinci* δεν διέθετε σαν εργαλείο στις έρευνές του τον νόμο του *Hooke* ώστε να ολοκληρώσει τη θεωρία του [7]. Έπρεπε να περάσουν πολλά χρόνια ώσπου ο *Galileo Galilei* (1564–1642) να βελτιώσει περαιτέρω τη θεωρία και στη συνέχεια ο *Euler* και ο *Bernoulli* να σχηματίσουν τελικά τις κατάλληλες εξισώσεις κίνησης σε δοκούς στην περίπτωση απλής κάμψης [8].



Σχήμα 1.3: Σχηματική αναπαράσταση κάμψης δοκού του Leonardo da Vinci [8].

Η επικρατούσα γνώμη της επιστημονικής κοινότητας ήταν ότι ο *Galileo Galilei* έκανε τις πρώτες προσπάθειες για την ανάπτυξη μιας θεωρίας δοκών [9]. Αναγνώρισε την Αρχή των Δυνατών Έργων (*Principle of Virtual Work*) ως γενικευμένο νόμο. Ωστόσο, ο *Galileo* έκανε μια λανθασμένη υπόθεση στην ανάπτυξη της θεωρίας του για τις δοκούς. Δεν αναγνώρισε ότι σε οποιοδήποτε τμήμα της δοκού υπάρχει ισορροπία των τάσεων εφελκυσμού και θλίψης. Η ισορροπία των εφελκυστικών και θλιπτικών τάσεων ανακαλύφθηκε χρόνια αργότερα, το 1686, από τον *Mariotte* στο Παρίσι [10]. Η επιστημονική επανάσταση έκανε ραγδαία βήματα ξεκινώντας με τον *Sir I. Newton* (1786) και στη συνέχεια με τον Γερμανό φιλόσοφο και επιστήμονα *Gottfried Leibniz* (1646–1716) [11], τον Γάλλο μαθηματικό *Pierre Varignon* (1654–1722) [12], τον μαθηματικό *Jacob Bernoulli* (1654–1705) [13], τον μαθηματικό *Johann Bernoulli* (1667–1748) [14] και τον φυσικό, μαθηματικό και οικονομολόγο *Daniel Bernoulli* (1700–1782) [15].

Ο μαθηματικός *Jacob Bernoulli* (1655–1705), ο οποίος έκανε τις πρώτες σημαντικές ανακαλύψεις, διαπίστωσε για πρώτη φορά ότι η καμπυλότητα μιας ελαστικής δοκού σε οποιοδήποτε σημείο είναι ανάλογη με τη ροπή κάμψης σε αυτό

το σημείο. Στη συνέχεια, ο *Daniel Bernoulli* (1700–1782), ανιψιός του *Jacob*, ήταν ο πρώτος που διατύπωσε τη διαφορική εξίσωση κίνησης για ταλαντώσεις δοκών. Αργότερα, η θεωρία του *Jacob Bernoulli* έγινε αποδεκτή από τον *Leonhard Euler* (1707–1783) στην έρευνά του για το σχήμα των ελαστικών δοκών υπό διάφορες συνθήκες φόρτισης.

Ο *Leonhard Euler* (1707–1783) και ο *Daniel Bernoulli* (1700–1782) ήταν οι πρώτοι που ανέπτυξαν μια τεχνική θεωρία δοκών, περίπου το 1750, γνωστή ως θεωρία δοκών Euler–Bernoulli (EBT) ή «Κλασική Θεωρία Δοκών» (CBT) [16]. Την εποχή εκείνη, η επιστήμη και η μηχανική θεωρούνταν πολύ διαφορετικά πεδία και υπήρχε μεγάλη αμφισβήτηση στο γεγονός ότι ένα μαθηματικό προϊόν του ακαδημαϊκού κόσμου θα μπορούσε να είναι χρήσιμο σε πρακτικές εφαρμογές. Οι γέφυρες και τα κτίρια συνέχισαν να σχεδιάζονται από μηχανικούς μέχρι τα τέλη του 19<sup>ου</sup> αιώνα, όταν ο Πύργος του Άιφελ και οι ρόδες των Λούνα Παρκ έδειξαν την εγκυρότητα της θεωρίας σε μεγάλες κλίμακες.



(a)



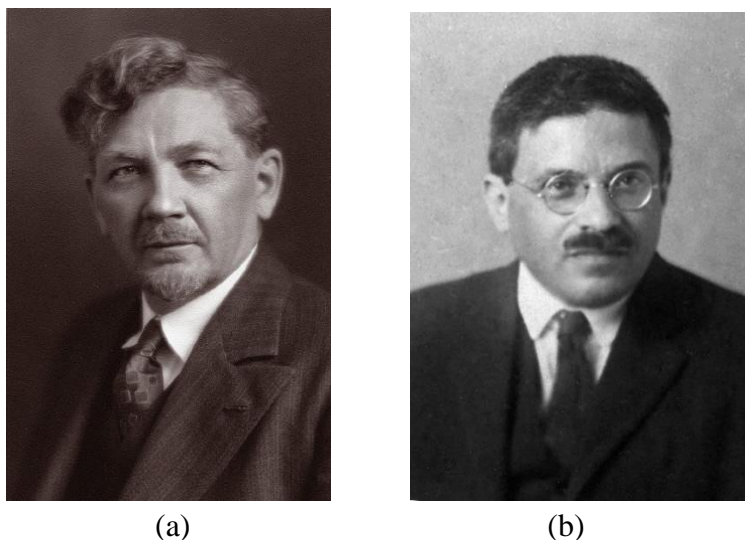
(b)

**Σχήμα 1.4:** (a) Leonhard Euler (1707–1783) και (b) Daniel Bernoulli (1700–1782).

Στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα αναπτύχθηκε μια βελτιωμένη τεχνική θεωρία δοκών από τους *Stephen Timoshenko* (1878–1972) και *Paul Ehrenfest* (1880–1933), γνωστή ως θεωρία δοκών Timoshenko (TBT) ή «θεωρία διάτμησης πρώτης τάξης» (FSDT). Η θεωρία, αυτή, αποτελεί μια τεχνική θεωρία δοκών ευρύτερης χρήσης από τη θεωρία Euler–Bernoulli. Η «κλασική θεωρία δοκών» “υποεκτιμά” τις τιμές των παραμορφώσεων και “υπερεκτιμά” τις τιμές των φυσικών συχνοτήτων, καθώς αγνοεί το φαινόμενο της εγκάρσιας παραμόρφωσης.

Ο *Timoshenko* [17] ήταν ο πρώτος που έλαβε αποτελέσματα όπως η αδράνεια λόγω περιστροφής και η παραμόρφωση λόγω διάτμησης στη θεωρία δοκών καθώς το μοντέλο του λαμβάνει υπόψη τη διατμητική παραμόρφωση και τα φαινόμενα περιστροφής λόγω κάμψης, καθιστώντας το πιο κατάλληλο για την περιγραφή της συμπεριφοράς δοκών με μεγάλο πάχος (thick beams), σύνθετων δοκών τύπου «σάντουιτς» ή δοκών που υπόκεινται σε διέγερση λόγω υψηλής συχνότητας όταν το μήκος κύματος πλησιάζει το πάχος της δοκού. Η ακρίβεια της θεωρίας Timoshenko

επαληθεύτηκε από τον Cowper [18, 19] με την ακριβή λύση της τρισδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας υπό την επίδραση επίπεδης τάσης.



**Σχήμα 1.5:** (a) Stephen Timoshenko (1878–1972) και (b) Paul Ehrenfest (1880–1933).

Οι περιορισμοί της θεωρίας Euler–Bernoulli (EBT) και της θεωρίας Timoshenko (TBT) οδήγησαν στην ανάπτυξη βελτιωμένων θεωριών διάτμησης υψηλότερης τάξης (HSDT). Στη βιβλιογραφία είναι διαθέσιμες πολλές τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης οι οποίες έχουν αναπτυχθεί με βάση διαφορετικές υποθέσεις και οδηγούν σε διαφορετικά επίπεδα ακρίβειας [20–24], για στατική και δυναμική ανάλυση δοκών και πλακών [25–30].

Ο Levinson [31] ανέπτυξε μια θεωρία διάτμησης ανώτερης τάξης για στατικά και δυναμικά προβλήματα κάμψης ορθογώνιων δοκών. Στη θεωρία αυτή, με βάση την παραμόρφωση του σώματος, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες στις οποίες δεν προβλέπεται διατμητική τάση στις πλευρικές επιφάνειες της δοκού. Ένα χρόνο αργότερα, ο Bickford [28] μελέτησε πιο αναλυτικά τη θεωρία του Levinson και συμπέρανε πως το μοντέλο λειτουργεί ορθά σε συνοριακές συνθήκες όπου δεν αναπτύσσεται διατμητική τάση στην άνω και κάτω επιφάνεια της δοκού.

Ο Reddy [32, 33] ανέπτυξε μια τεχνική θεωρία πλακών με πολυώνυμα τρίτου βαθμού, γνωστή ως «θεωρία διάτμησης τρίτης τάξης» (Third Order Shear Deformation Theory – TSDT) ή «Θεωρία Reddy» (RBT) για τη γραμμική ανάλυση σύνθετων πολυστρωματικών πλακών και για τη μη γραμμική ανάλυση πλακών με μέτριο πάχος. Μια, επίσης, τεχνική θεωρία διάτμησης ανώτερης τάξης με πολυώνυμα τρίτου βαθμού αναπτύχθηκε από τον Shimpi [34, 35], ο οποίος μελέτησε προβλήματα πλακών στη γραμμική περίπτωση.

Οι θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης θεωρώντας την κατανομή της διατμητικής τάσης ως τριγωνομετρική συνάρτηση, αναπτύχθηκαν από τους Touratier [36], Vlasov και Leontiev [37], Stein [38] και Arya [39]. Ο Touratier εισήγαγε μια βελτιωμένη θεωρία πλακών «Ημιτονοειδής Θεωρία Διάτμησης Ανώτερης Τάξης» (Sinusoidal Shear Deformation Theory – SSDT) θεωρώντας πως η κατανομή της διατμητικής τάσης έχει τη μορφή ημιτόνου (sinusoidal function). Με βάση τη θεωρία

αυτή, οι *Vlasov* και *Leontiev* μελέτησαν ελαστικές δοκούς, πλάκες και κελύφη, ο *Stein* μελέτησε προβλήματα ταλαντώσεων σε δοκούς και πλάκες και ο *Arya* μελέτησε σύνθετες πολυστρωματικές δοκούς. Ωστόσο, με τη χρήση αυτής της θεωρίας, οι συνοριακές συνθήκες δεν ικανοποιούνται καθώς προβλέπουν μηδενική διατμητική τάση στην άνω και κάτω επιφάνεια της δοκού.

Μια εκτενής ανασκόπηση της βιβλιογραφίας στις θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για ισότροπες και ανισότροπες πολυστρωματικές δοκούς παρουσιάστηκε από τους *Ghugal* και *Shipmi* [40]. Ο *Ghugal* στη μελέτη του [41] παρουσιάζει μια θεωρία ανώτερης τάξης για ελαστικές δοκούς με εγκάρσια διάτμηση στη γραμμική ελαστικότητα. Στη θεωρία αυτή, ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες για μη μηδενική διατμητική τάση στην άνω και κάτω επιφάνεια της δοκού.

Ο *Soldatos* [42] ανέπτυξε μια θεωρία εγκάρσιας διατμητικής παραμόρφωσης για ομοιογενείς μονοκλινικές πλάκες. Για την κατανομή της διατμητικής τάσης χρησιμοποίησε υπερβολικά ημίτονα και συνημίτονα και η θεωρία είναι γνωστή ως «Υπερβολική Θεωρία Διάτμησης Ανώτερης Τάξης» (Hyperbolic Shear Deformation Theory – HPSDT). Οι *Ghugal* και *Sharma* [43] χρησιμοποίησαν τη θεωρία HPSDT για τη μελέτη στατικών και δυναμικών προβλημάτων κάμψης ισότροπων ελαστικών δοκών με μεγάλο πάχος. Μια, επίσης, τεχνική θεωρία διάτμησης ανώτερης τάξης HPSDT με υπερβολική εφαπτομένη και υπερβολική τέμνουσα (hyperbolic secant) αναπτύχθηκε από τον *Akanvi* [44], ο οποίος μελέτησε προβλήματα λυγισμού και προβλήματα ταλαντώσεων ελαστικών σύνθετων πολυστρωματικών πλακών.

Ο *Karama* και οι συνεργάτες του [45] παρουσίασαν μια τεχνική θεωρία διάτμησης ανώτερης τάξης με την υπόθεση πως η κατανομή της διατμητικής τάσης έχει εκθετική μορφή (exponential function). Η θεωρία είναι γνωστή ως «Εκθετική Θεωρία Διάτμησης Ανώτερης Τάξης» (Exponential Shear Deformation Theory – ESDT). Με το μοντέλο τους μελετήθηκε η μηχανική συμπεριφορά σύνθετων πολυστρωματικών δοκών.

Οι *Nguyen-Xuan*, *Thai* και *Nguyen-Thoi* [46] χρησιμοποίησαν μια θεωρία διάτμησης ανώτερης τάξης με πολυώνυμο πέμπτου βαθμού «Fifth-Order Shear Deformation Theory – FiSDT» για την ανάλυση σύνθετων πλακών τύπου «sandwich» με τη χρήση FEM. Ο *Thai* και οι συνεργάτες του [47] χρησιμοποίησαν μια θεωρία διάτμησης ανώτερης τάξης με την υπόθεση πως η κατανομή της διατμητικής τάσης είναι συνάρτηση της αντίστροφης εφαπτομένης «Inverse Tangent Shear Deformation Theory – ITSDT» για την ανάλυση σύνθετων πολυστρωματικών πλακών.

Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας [21, 45, 48-50] υποδεικνύει πως η έρευνα και η μελέτη πάνω στις τεχνικές διατμητικές θεωρίες ανώτερης τάξης (HSDT) σε ισότροπες, ελαστικές δοκούς και πλάκες είναι ευρεία αλλά βρίσκεται ακόμη σε σχετικά πρώιμο στάδιο. Ήδη υπάρχουσες μελέτες συγκρίνουν διαφορετικές τεχνικές διατμητικές θεωρίες ανώτερης τάξης στη γραμμική ελαστικότητα σε προβλήματα κάμψης, λυγισμού ή προβλήματα ταλαντώσεων. Επίσης, για τέτοιου είδους προβλήματα υπάρχουν αρκετές διαθέσιμες αναλυτικές ή ημι-αναλυτικές λύσεις στη γραμμική ελαστικότητα καθώς και πολλές λύσεις με αριθμητικές μεθόδους όπως η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (FEM) και η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (FDM) για τη γραμμική και μη γραμμική ελαστικότητα.

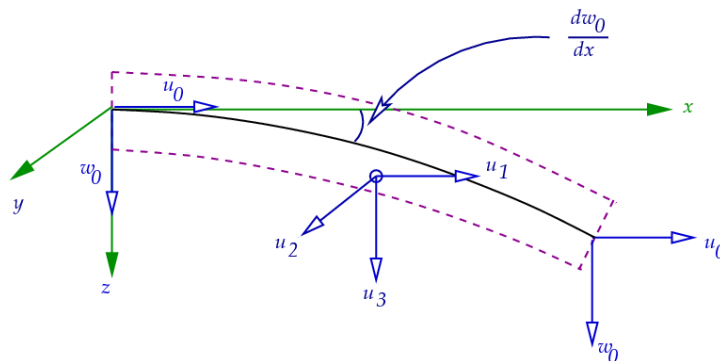


### 1.3 Τεχνική θεωρία δοκών Euler – Bernoulli (EBT)

Η θεωρία δοκών Euler–Bernoulli (EBT), γνωστή, επίσης, ως «κλασική θεωρία δοκών» (CBT), «θεωρία δοκών της Μηχανικής», «θεωρία δοκών Euler», «θεωρία δοκών Bernoulli» ή «θεωρία δοκών Bernoulli–Euler», χρονολογείται από τον 18<sup>ο</sup> αιώνα. Πρόκειται για τη θεωρία που χρησιμοποιείται πιο συχνά στη δομική ανάλυση επειδή είναι εύχρηστη και παρέχει αξιόπιστες προσεγγίσεις στον υπολογισμό πολυάρθρωτων δομών και προβλημάτων. Τα πρώτα χρόνια δεν εφαρμόστηκε σε μεγάλη κλίμακα, όμως από τα τέλη του 19<sup>ου</sup> αιώνα έγινε γρήγορα ένας ακρογωνιαίος λίθος της μηχανικής κυρίως στη δεύτερη βιομηχανική επανάσταση.

Η EBT είναι μια απλούστευση της γραμμικής θεωρίας της ελαστικότητας [9] που παρέχει ένα μέσο υπολογισμό των τάσεων και των τροπών σε μια δοκό. Καλύπτει την περίπτωση μικρών παραμορφώσεων μιας δοκού που υπόκειται μόνο σε πλευρικά φορτία. Είναι, επομένως, μια ειδική περίπτωση της TBT για δοκούς.

Παρόλο που για την ανάλυση σύνθετων δομών είναι πλέον ευρέως διαθέσιμα πιο εξελιγμένα εργαλεία, όπως η χρήση FEM, τα μοντέλα δοκών χρησιμοποιούνται συχνά σε στάδιο προσχεδιασμού, καθώς παρέχουν πολύτιμες πληροφορίες της συμπεριφοράς των δομών. Τέτοιοι υπολογισμοί είναι, επίσης, χρήσιμοι όταν επιχειρούμε να προσεγγίσουμε καθαρά υπολογιστικές λύσεις.



Σχήμα 1.6: Δοκός Euler–Bernoulli.

Το μοντέλο Euler–Bernoulli περιλαμβάνει την ενέργεια παραμόρφωσης λόγω κάμψης και την κινητική ενέργεια λόγω πλευρικής μετατόπισης. Ωστόσο, το μοντέλο Euler–Bernoulli τείνει να «υπερεκτιμά» ελαφρώς τις φυσικές συχνότητες. Επίσης, τα αποτελέσματα που παράγει είναι καλύτερά σε περιπτώσεις λεπτών δοκών (slender beams) και όχι σε δοκούς με μεγάλο πάχος (thick beams) [23].

Μια θεμελιώδης υπόθεση αυτής της θεωρίας [51] είναι ότι η διατομή της δοκού είναι εντελώς άκαμπτη στο δικό της επίπεδο, με άλλα λόγια δεν υπάρχουν παραμορφώσεις στο επίπεδο της διατομής. Δύο επιπλέον υποθέσεις αφορούν τις μετατοπίσεις τμημάτων εκτός του επιπέδου: η διατομή παραμένει επίπεδη και κάθετη στον άξονα παραμόρφωσης της δοκού.

Έχουν αναπτυχθεί πολλά εργαλεία ανάλυσης όπως η «Θεωρία Πλακών», που αναφέρεται σε τρισδιάστατες δομές και η μελέτη με χρήση FEM. Ωστόσο, η απλότητα της θεωρίας την καθιστά ένα σημαντικό εργαλείο στις επιστήμες, ακόμη και σήμερα, ειδικά σε τομείς της δομικής μηχανικής και της μηχανολογίας.

### 1.3.1 Θεωρία Euler - Bernoulli: Στατική περίπτωση

Για την επίλυση στατικών προβλημάτων δοκών με χρήση της κλασικής θεωρίας δοκών (θεωρία EBT), προβλημάτων δηλαδή όπου δεν λαμβάνεται υπόψη ο χρόνος, οι συνιστώσες του πεδίου μετατόπισης μπορούν να γραφούν ως:

$$u_x = u_1 = u = -z \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}, \quad (1.1)$$

$$u_y = u_2 = v = 0, \quad (1.2)$$

$$u_z = u_3 = w = w(x,t), \quad (1.3)$$

όπου:  $dw/dx$  είναι η κλίση (slope) της μετατόπισης της δοκού.

Η μοναδική μη μηδενική συνιστώσα του τανυστή των μηχανικών τροπών που προκύπτει από την ολοκλήρωση του πεδίου μετατοπίσεων, είναι:

$$\varepsilon_{11} = -z \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}. \quad (1.4)$$

Η σχέση τάσης-παραμόρφωσης για ένα ομοιογενές ισότροπο γραμμικό ελαστικό υλικό προκύπτει από το νόμο του Hooke  $\sigma = E\varepsilon$ . Η τάση για μια δοκό με θεωρία Euler–Bernoulli δίδεται από τη σχέση:

$$\sigma_{11} = -Ez \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}. \quad (1.5)$$

Η διαφορική εξίσωση κίνησης για μια δοκό Euler–Bernoulli είναι μια διαφορική εξίσωση τέταρτης τάξης και περιγράφει τη σχέση μεταξύ των φορτίων που επιβάλλονται σε μια δοκό και των παραμορφώσεων που δημιουργούνται [52]:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w(x,t)}{dx^2} \right) = q(x), \quad (1.6)$$

όπου η καμπύλη  $w(x,t)$  περιγράφει την παραμόρφωση της δοκού στην κατεύθυνση  $z$  σε οποιαδήποτε θέση  $x$ ,  $q(x)$  είναι το εξωτερικό ομοιόμορφα κατανεμημένο κατακόρυφο φορτίο, δηλαδή μια κατακόρυφη εξωτερική δύναμη ανά μονάδα μήκους,  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας (μέτρο Young) και  $I$  η ροπή αδράνειας της περιοχής στη διατομή της δοκού.

Η ροπή αδράνειας υπολογίζεται σε σχέση με τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της διατομής και είναι κάθετη στην εφαρμοζόμενη φόρτιση. Είναι σαφές ότι για μια δοκό της οποίας ο άξονας είναι προσανατολισμένος κατά μήκος του  $x$  με

φορτίο κατά μήκος του  $z$ , η διατομή της δοκού είναι στο επίπεδο  $y-z$  και η αντίστοιχη ροπή αδράνειας ισούται με:

$$I = \iint z^2 dydz. \quad (1.7)$$

Το γινόμενο  $EI$ , γνωστό ως ακαμψία της δοκού, είναι ανεξάρτητο του  $x$ , είναι δηλαδή μια σταθερή ποσότητα, χαρακτηριστική για κάθε υλικό. Συνεπώς, δεν εξαρτάται από την παράγωγο:

$$EI \frac{d^4 w(x,t)}{dx^4} = q(x). \quad (1.8)$$

Η εξίσωση κίνησης (σχέση 1.8) περιγράφει την παραμόρφωση μιας ισότροπης, ομογενούς, ελαστικής δοκού στη στατική περίπτωση η οποία χρησιμοποιείται ευρέως στις εφαρμογές. Οι εκφράσεις για την εύρεση της κατακόρυφης παραμόρφωσης  $w$  για συνήθη προβλήματα δοκών υπάρχουν σε εγχειρίδια μηχανικής.

Σε πιο περίπλοκες περιπτώσεις, η παραμόρφωση μπορεί να προσδιοριστεί με επίλυση της εξίσωσης Euler–Bernoulli χρησιμοποιώντας κυρίως τεχνικές επίλυσης όπως η «Αρχή Δυνατών Έργων», η «Αρχή Hamilton», η «Μέθοδος Άμεσης Ολοκλήρωσης», η «Μέθοδος Castigliano», η «Μέθοδος Macaulay» και η «Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων».

Η ροπή κάμψης  $M$  είναι θετική όταν το διάνυσμα της ροπής που σχετίζεται με τη ροπή κάμψης είναι στην θετική κατεύθυνση  $y$  (έτσι ώστε θετική τιμή του  $M$  να οδηγεί σε συμπιεστική τάση), προκειμένου να ισχύει:

$$dM = Qdx \quad (1.9)$$

Η ροπή κάμψης ισούται με:

$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (1.10)$$

Συνεπώς, είναι απαραίτητο η διατμητική δύναμη  $Q$  να είναι θετική στην κατεύθυνση  $z$  έτσι ώστε να υπάρχει ισορροπία των ροπών:

$$Q = -\frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right). \quad (1.11)$$

Για να έχουμε ισορροπία δυνάμεων με  $dQ = qdx$ , θα πρέπει το φορτίο  $q$  να είναι θετικό στην κατεύθυνση μείον  $z$ . Οι τάσεις και οι ροπές της δοκού μπορούν να υπολογιστούν από τις παραπάνω εκφράσεις.

### 1.3.2 Θεωρία Euler - Bernoulli: Δυναμική περίπτωση

Δυναμικά προβλήματα θεωρούμε τα προβλήματα στα οποία λαμβάνεται υπόψη ο χρόνος και συνήθως πρόκειται για προβλήματα ελεύθερων ταλαντώσεων. Το πεδίο μετατοπίσεων είναι ίδιο με τη στατική περίπτωση με τη διαφορά πως οι μετατοπίσεις εξαρτώνται και από το χρόνο. Η εξίσωση κίνησης της δοκού θα προκύψει από την εξίσωση Euler–Lagrange, η οποία εκφράζεται ως:

$$S = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + q(x) w(x, t) \right] dx, \quad (1.12)$$

όπου ο πρώτος όρος είναι η κινητική ενέργεια,  $\mu$  είναι η μάζα ανά μονάδα μήκους, ο δεύτερος όρος είναι η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στις εσωτερικές δυνάμεις και ο τρίτος όρος αναφέρεται στην πιθανή ενέργεια που οφείλεται στο εξωτερικό κατακόρυφο φορτίο  $q(x)$ . Η εξίσωση Euler–Lagrange χρησιμοποιείται για τον καθορισμό συνάρτησης που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό  $S$ . Η παραγωγή της εξίσωσης Euler–Lagrange για δοκούς γίνεται με την ακόλουθη διαδικασία. Η Lagrangian του συστήματος είναι:

$$L = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} EI \left( \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 + q(x) w(x, t), \quad (1.13)$$

$$L = \frac{\mu}{2} \dot{w}^2 - \frac{EI}{2} w_{,xx}^2 + qw \equiv L(x, t, w, \dot{w}, w_{,xx}). \quad (1.14)$$

Η αντίστοιχη εξίσωση Euler–Lagrange είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial L}{\partial w_{,xx}} \right) = 0, \quad (1.15)$$

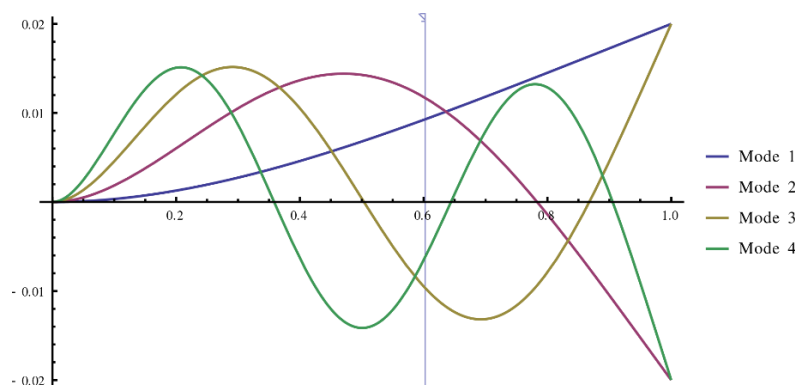
Από τις σχέσεις 1.12 και 1.15, προκύπτει η διαφορική εξίσωση κίνησης για τη δυναμική περίπτωση μιας δοκού Euler–Bernoulli:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(x). \quad (1.16)$$

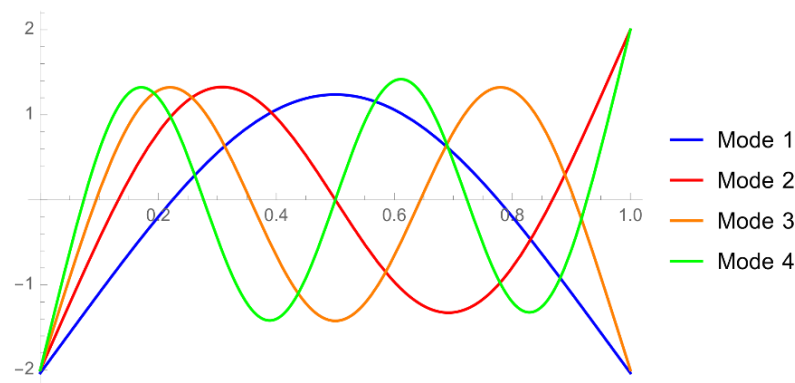
Στην περίπτωση όπου η δοκός είναι ομογενής, η ακαμψία της δοκού  $EI$  είναι ανεξάρτητη από το  $x$ , η δυναμική εξίσωση της δοκού είναι:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(x). \quad (1.17)$$

Η δυναμική εξίσωση της δοκού (εξίσωση 1.17) είναι μια διαφορική εξίσωση τέταρτης τάξης. Από την επίλυσή της προκύπτουν δυναμικά χαρακτηριστικά της δοκού όπως οι τρόποι ταλάντωσης (mode shapes). Οι τέσσερις πρώτοι τρόποι ταλάντωσης μιας δοκούς με διαφορετικές συνοριακές συνθήκες, φαίνονται στα σχήματα 1.7 και 1.8.



**Σχήμα 1.7:** Οι τέσσερις πρώτοι τρόποι ταλάντωσης ενός προβόλου με θεωρία δοκών EBT.



**Σχήμα 1.8:** Οι τέσσερις πρώτοι τρόποι ταλάντωσης μιας δοκού απλής στήριξης με θεωρία δοκών EBT.

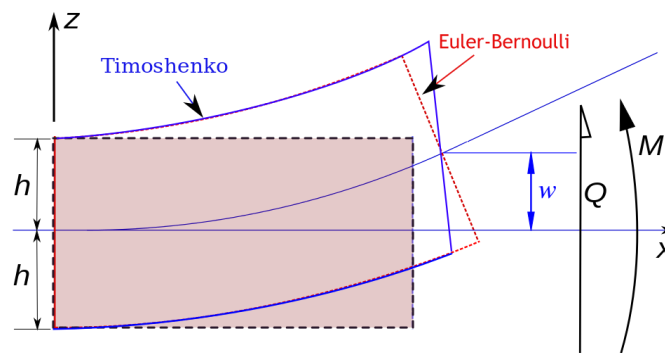
Η θεωρία δοκών Euler–Bernoulli μπορεί επίσης να επεκταθεί στην ανάλυση καμπύλων δοκών, σε προβλήματα λυγισμού, σε πολλά προβλήματα σύνθετων πολυστρωματικών δοκών και σε γεωμετρικά μη γραμμικά προβλήματα κάμψης δοκών. Η θεωρία δοκών Euler–Bernoulli δεν λαμβάνει υπόψη την επίδραση της εγκάρσιας διατμητικής τάσης. Ως αποτέλεσμα, υποεκτιμά την τιμή της λύσης για την εγκάρσια μετατόπιση και υπερεκτιμά την τιμή των λύσεων των φυσικών συχνοτήτων.

Σε περιπτώσεις λεπτών δοκών, όπου η αναλογία μήκους-πάχους της δοκού είναι της τάξης του 20 ή χαμηλότερη, τα αποτελέσματα δεν έχουν μεγάλη ακρίβεια και είναι ελάχιστης σημασίας, καθώς η θεωρία δεν μπορεί να εκτιμήσει προβλέψεις με μεγάλη ακρίβεια. Στην περίπτωση δοκών με μικρό πάχος, η θεωρία λειτουργεί με μεγαλύτερη ακρίβεια και τα αποτελέσματα που εξάγει είναι χρήσιμα και σημαντικά.

Πιο εξελιγμένες τεχνικές θεωρίες δοκών, όπως η θεωρία δοκών Timoshenko που παρουσιάζεται στη συνέχεια, έχουν αναπτυχθεί για να παράγουν ακριβέστερα αποτελέσματα σε περιπτώσεις προβλημάτων που δεν καλύπτει η κλασική θεωρία δοκών Euler–Bernoulli, όπως για παράδειγμα σε δοκούς με μεγάλο πάχος.

## 1.4 Τεχνική θεωρία δοκών Timoshenko (TBT)

Η θεωρία δοκών Timoshenko αναπτύχθηκε από τον *Stephen Timoshenko* στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα [17]. Το μοντέλο λαμβάνει υπόψη παραμορφώσεις λόγω διάτμησης και περιστροφικές επιδράσεις λόγω κάμψης, καθιστώντας τη θεωρία κατάλληλη για την περιγραφή της συμπεριφοράς δοκών με μεγάλο πάχος, σύνθετων δοκών με τη μορφή «σάντουιτς» ή δοκών που υπόκεινται σε διέγερση υψηλής συχνότητας όταν το μήκος κύματος πλησιάζει το πάχος της δοκού [53]. Η εξίσωση κίνησης που προκύπτει είναι 4<sup>ης</sup> τάξης αλλά, σε αντίθεση με τη κλασική θεωρία δοκών Euler–Bernoulli, υπάρχει και μια 2<sup>ης</sup> τάξης παράγωγο. Φυσικά, λαμβάνοντας υπόψη τους προστιθέμενους μηχανισμούς παραμόρφωσης, μειώνεται αποτελεσματικά η ακαμψία της δοκού, ενώ το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερη παραμόρφωση υπό την επίδραση ενός στατικού φορτίου και χαμηλότερες ιδιοσυχνότητες για δεδομένες συνοριακές συνθήκες. Η δεύτερη περίπτωση είναι περισσότερο αισθητή σε υψηλές συχνότητες καθώς το μήκος κύματος γίνεται συντομότερο και έτσι μειώνεται η απόσταση μεταξύ αντίθετων δυνάμεων διάτμησης.



**Σχήμα 1.9:** Παραμόρφωση δοκού με θεωρία EBT και θεωρία TBT.

Στη θεωρητική περίπτωση που το μέτρο διάτμησης  $G$  του υλικού της δοκού πλησιάζει το άπειρο (η δοκός γίνεται άκαμπτη στη διάτμηση) και παραλειφθεί η επίδραση της αδρανείας, η θεωρία Timoshenko «υποβιβάζεται» στη θεωρία EBT.

Στο σημείο αυτό, να σημειωθεί πως η βασική διαφορά των γραμμικών θεωριών είναι στις υποθέσεις τους. Στη θεωρία Euler–Bernoulli η διατομή είναι κάθετη στη γραμμή κάμψης. Αντίθετα, σε μια δοκό με θεωρία Timoshenko επιτρέπεται η στροφή (*rotation*) μεταξύ της διατομής και της γραμμής κάμψης. Αυτή η στροφή προέρχεται από την παραμόρφωση, και δεν λαμβάνεται υπόψιν στη θεωρία Euler–Bernoulli. Επίσης, το τμήμα του μέσου επιπέδου στη θεωρία EBT παραμένει επίπεδο και μετά την παραμόρφωση. Αυτό σημαίνει ότι οι παραμορφώσεις λόγω διάτμησης είναι μηδενικές. Επίσης, η τάση στο πάχος της δοκού (κατεύθυνση  $z$ ) είναι μηδενική στη θεωρία EBT, ενώ στη θεωρία δοκών Timoshenko λαμβάνεται υπόψιν. Επομένως, μια δοκός Euler–Bernoulli είναι πιο άκαμπτη. Ωστόσο, στην περίπτωση που η σχέση μεταξύ μήκους και πάχους είναι αρκετά μεγάλη, το σφάλμα μεταξύ των δύο μοντέλων είναι μικρό. Η χρήση της TBT είναι σημαντική σε περιπτώσεις προβλημάτων και εφαρμογών όπου γίνεται λόγος σε μικρότερες δομές.

### 1.4.1 Θεωρία Timoshenko: Στατική περίπτωση

Για τη στατική περίπτωση με χρήση της τεχνικής θεωρίας Timoshenko όπου δεν λαμβάνεται υπόψη ο χρόνος, για δοκούς χωρίς αξονικές επιδράσεις, από τις κινηματικές υποθέσεις για μια δοκό Timoshenko, το πεδίο μετατοπίσεων είναι:

$$u_x(x, y, z) = -z\varphi(x), \quad (1.18)$$

$$u_y(x, y, z) = 0, \quad (1.19)$$

$$u_z(x, y, z) = w(x), \quad (1.20)$$

όπου:  $x, y, z$  είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου της δοκού,  $u_x, u_y, u_z$  είναι τα διανύσματα μετατόπισης στις τρεις κατευθύνσεις των συντεταγμένων,  $\varphi$  είναι η γωνία περιστροφής που είναι κάθετη στη μέση επιφάνεια της δοκού, και  $w$  είναι η μετατόπιση της μέσης επιφάνειας στην κατεύθυνση  $z$ .

Στη συνέχεια, από τις σχέσεις μετατόπισης-τροπής, για μικρές μετατοπίσεις, οι μη μηδενικές τροπές με βάση τις υποθέσεις του Timoshenko είναι οι:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (1.21)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( -\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (1.22)$$

Δεδομένου ότι η πραγματική διατμητική τάση μιας δοκού δεν είναι σταθερή στη διατομή της, εισάγεται ένας συντελεστής διόρθωσης  $\kappa$ , τέτοιος ώστε:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \kappa \left( -\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (1.23)$$

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργεια  $\delta U$  είναι:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_L \int_A (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz}) dAdL, \\ \delta U &= \int_L \int_A \left[ -z\sigma_{xx} \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x} + \sigma_{xz} \kappa \left( -\delta\varphi + \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \right) \right] dAdL. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Στη συνέχεια ορίζεται η ροπή κάμψης  $M_{xx}$  και η εγκάρσια διατμητική δύναμη  $Q_x$  ως εξής:

$$M_{xx} = \int_A z\sigma_{xx} dA, \quad (1.25)$$

$$Q_x = \kappa \int_A \sigma_{xz} dA . \quad (1.26)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων 1.25 και 1.26 στη σχέση 1.24, και ολοκληρώνοντάς την, προκύπτει:

$$\delta U = \int_L \left[ \left( \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_x \right) (\delta \varphi) - \frac{\partial Q_x}{\partial x} (\delta w) \right] dL . \quad (1.27)$$

Η μεταβολή του εξωτερικού έργου σε δοκό με εγκάρσιο φορτίο  $q(x, t)$  είναι:

$$\delta W = \int_L q (\delta w) dL . \quad (1.28)$$

Από την ισότητα των σχέσεων 1.27 και 1.28 ( $\delta U = \delta W$ ), η αρχή των δυνατών έργων παίρνει τη μορφή:

$$\int_L \left[ \left( \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_x \right) (\delta \varphi) - \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + q \right) (\delta w) \right] dL = 0 . \quad (1.29)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν είναι:

$$(\delta w) : \frac{\partial Q_x}{\partial x} + q = 0 . \quad (1.30)$$

$$(\delta \varphi) : \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_x = 0 . \quad (1.31)$$

Για τη γραμμική περίπτωση μιας ελαστικής δοκού, η ροπή κάμψης  $M_{xx}$  και η εγκάρσια διατμητική δύναμη  $Q_x$  είναι:

$$M_{xx} = \int_A z \sigma_{xx} dA = \int_A z E \varepsilon_{xx} dA = - \int_A z^2 E \frac{\partial \varphi}{\partial x} dA = -EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} , \quad (1.32)$$

$$Q_x = \int_A \sigma_{xz} dA = \int_A 2G \varepsilon_{xz} dA = \int_A \kappa G \left( -\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dA = \kappa AG \left( -\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) . \quad (1.33)$$

Επομένως, οι εξισώσεις που διέπουν τη δοκό μπορούν να εκφραστούν ως:

$$\frac{d}{dx} \left( EI \frac{d\varphi}{dx} \right) + \kappa AG \left( \frac{dw}{dx} - \varphi \right) = 0 , \quad (1.34)$$



$$\frac{d}{dx} \left[ \kappa AG \left( \frac{dw}{dx} - \varphi \right) \right] + q = 0 . \quad (1.35)$$

Ύστερα από πράξεις, οι εξισώσεις 1.34 και 1.35 παίρνουν τη μορφή:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d\varphi}{dx} \right) = q , \quad (1.36)$$

$$\frac{dw}{dx} = \varphi - \frac{1}{\kappa AG} \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d\varphi}{dx} \right) . \quad (1.37)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις 1.36 και 1.37, η εξίσωση κίνησης που περιγράφει την εγκάρσια μετατόπιση μιας ελαστικής δοκού με σταθερή διατομή για την θεωρία Timoshenko είναι:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) - \frac{EI}{\kappa AG} \frac{d^2 q}{dx^2} . \quad (1.38)$$

όπου:  $L$  είναι το μήκος της δοκού,  $A$  η διατομή,  $EI$  η ακαμψία,  $G$  το μέτρο διάτμησης και  $\kappa$  ο συντελεστής διάτμησης Timoshenko ο οποίος εξαρτάται από τη γεωμετρία του υλικού.

Ο προσδιορισμός του συντελεστή διόρθωσης της διάτμησης  $\kappa$  δεν είναι εύκολη διαδικασία. Στη γενική περίπτωση, θα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση:

$$\int_A \tau dA = \kappa AG \varphi . \quad (1.39)$$

Ο συντελεστής διάτμησης εξαρτάται από το λόγο Poisson. Οι προσπάθειες για την ακριβή έκφραση του συντελεστή διάτμησης έγιναν από πολλούς επιστήμονες, όπως τον *Timoshenko* [54], τον *Mindlin* [55], τον *Cowper* [18], τον *Stephen* [56] και τον *Hutchinson* [57]. Η TBT ως πιο ανεπτυγμένη θεωρία δοκών με βάση τη μέθοδο του *Le* [58], οδηγεί σε διαφορετικές τιμές του συντελεστή διάτμησης για στατικές και δυναμικές περιπτώσεις.

Στην πράξη, οι εκφράσεις του *Timoshenko* για το συντελεστή διάτμησης είναι αρκετές στις περισσότερες περιπτώσεις [52]. Ο *Kaneko* [59] δημοσίευσε μια ανασκόπηση πάνω στις μελέτες του συντελεστή διάτμησης. Πειραματικά δεδομένα δείχνουν πως ο συντελεστής διάτμησης υποεκτιμάται [60, 61]. Γενικά, για μια ορθογώνια δοκό, ο συντελεστής διάτμησης είναι ίσος με  $\kappa = 5$ . Σύμφωνα με τον *Cowper* [18] για μια ορθογώνια διατομή, ισχύει:

$$\kappa = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} , \quad (1.40)$$

### 1.4.2 Θεωρία Timoshenko: Δυναμική περίπτωση

Η θεωρία Timoshenko σε δυναμικά προβλήματα, από τις κινηματικές υποθέσεις της, προβλέπει ίδιο πεδίο μετατοπίσεων με τη στατική περίπτωση με τη διαφορά πως οι μεταβλητές εξαρτώνται και από το χρόνο:

$$u_x(x, y, z, t) = -z\varphi(x, t), \quad (1.41)$$

$$u_y(x, y, z, t) = 0, \quad (1.42)$$

$$u_z(x, y, z, t) = w(x, t). \quad (1.43)$$

όπου:  $x, y, z$  είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου στη δοκό,  $u_x, u_y, u_z$  τα διανύσματα μετατόπισης στις τρεις κατευθύνσεις,  $\varphi$  η στροφή, κάθετη στη μέση επιφάνεια της δοκού, και  $w$  η εγκάρσια μετατόπιση της μέσης επιφάνειας κατά το πάχος.

Σε δυναμικά προβλήματα όπως είναι τα προβλήματα ταλαντώσεων, η θεωρία δοκών Timoshenko μπορεί να περιγραφεί με τις ακόλουθες συζευγμένες γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις [54]:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \kappa A G \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \right], \quad (1.44)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \kappa A G \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right), \quad (1.45)$$

όπου οι εξαρτημένες μεταβλητές είναι η βύθιση της δοκού  $w(x, t)$  και η στροφή (rotation) της δοκού  $\varphi(x, t)$ . Να σημειωθεί πως η στροφή  $\varphi(x, t)$  στη θεωρία TBT είναι διαφορετική από την κλίση της μετατόπισης  $dw/dx$  της θεωρίας EBT. Επίσης,  $\rho$  είναι η πυκνότητα και  $q(x, t)$  είναι το ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο.

Οι εξισώσεις κίνησης για την κάμψη μιας ομοιογενούς δοκού σταθερής διατομής ( $A = ct$ ) με χρήση της τεχνικής θεωρίας TBT, είναι:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \kappa A G \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + q(x, t), \quad (1.46)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \kappa A G \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right). \quad (1.47)$$

Με αναδιάταξη των όρων, η εξίσωση 1.46, γίνεται:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{I}{\kappa A G} q(x, t). \quad (1.48)$$

Διαφορίζοντας δύο φορές ως προς το χρόνο την εξίσωση 1.48, προκύπτει:

$$\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} = \rho A \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \kappa AG \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right). \quad (1.49)$$

Διαφορίζοντας δύο φορές ως προς  $x$  την εξίσωση 1.48, προκύπτει:

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{1}{\kappa AG} \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2}. \quad (1.50)$$

Διαφορίζοντας ως προς  $x$  την εξίσωση 1.47, έχουμε:

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \frac{\kappa AG}{\rho I} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right). \quad (1.51)$$

Με αντικατάσταση της εξίσωσης 1.50, η εξίσωση 1.48 γίνεται:

$$\frac{1}{\kappa AG} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \frac{\kappa AG}{\rho I} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right). \quad (1.52)$$

Με αντικατάσταση της εξίσωσης 1.48 στην εξίσωση 1.52, προκύπτει:

$$\frac{1}{\kappa AG} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \frac{A}{I} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{q}{\rho I}. \quad (1.53)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις κίνησης 1.50 και 1.53 και με αναδιάταξη των όρων [62, 63], προκύπτει μια εξίσωση κίνησης για ελαστική δοκό με θεωρία TBT:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left( \rho I + \frac{\rho EI}{\kappa G} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = q + \frac{\rho I}{\kappa AG} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{EI}{\kappa AG} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}. \quad (1.54)$$

Για τη θεωρία TBT, προβλέπεται μια κρίσιμη γωνιακή συχνότητα  $\omega_c$ :

$$\omega_c = 2\pi f_c = \sqrt{\frac{\kappa GA}{\rho I}}. \quad (1.55)$$

Η εξίσωση 1.54 είναι μια διαφορική εξίσωση 4<sup>ης</sup> τάξης, συνεπώς, από την επίλυσή της θα προκύψουν τέσσερις ανεξάρτητες λύσεις, δύο λύσεις ταλαντώσεων και δύο ισοδύναμες λύσεις συχνοτήτων κάτω από την  $f_c$  (κρίσιμη συχνότητα). Για συχνοότητες μεγαλύτερες της  $f_c$ , προκύπτουν τέσσερις λύσεις ταλαντώσεων [64].

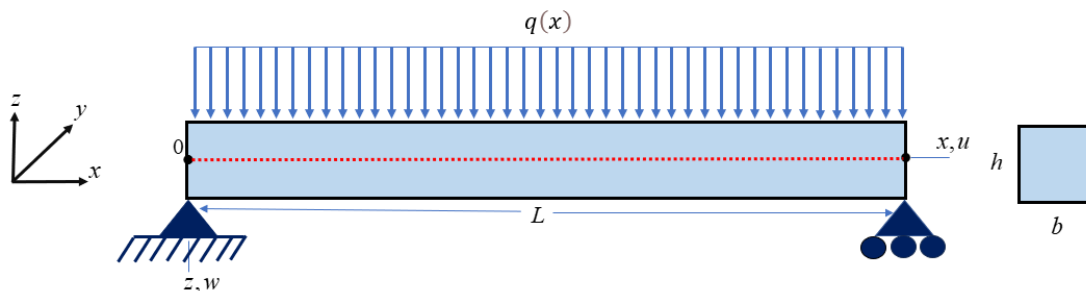
### 1.5 Τύποι συνοριακών συνθηκών

Για τη μαθηματική διατύπωση ενός στατικού προβλήματος, εκτός από τις εξισώσεις κίνησης που διέπουν ένα σώμα, είναι απαραίτητη και η επιβολή συνοριακών συνθηκών (Σ.Σ). Οι συνοριακές συνθήκες χαρακτηρίζονται από τον τρόπο με τον οποίο επιδρούν στην τελική μορφή του προβλήματος. Συνήθως αναφέρονται στη στήριξη του σώματος, σε σημειακά ή ομοιόμορφα καταναμημένα φορτία και σε ροπές [65]. Ο αριθμός των συνοριακών συνθηκών που απαιτούνται για τον προσδιορισμό μιας λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης πρέπει να είναι ίσος με την τάξη της διαφορικής εξίσωσης.

Οι συνοριακές συνθήκες χωρίζονται σε τρεις βασικές κατηγορίες: (α) τις φυσικές συνοριακές συνθήκες ή συνοριακές συνθήκες Dirichlet, (β) τις βασικές συνοριακές συνθήκες ή συνοριακές συνθήκες Neumann και (γ) τις συνοριακές συνθήκες μικτού τύπου (ή τρίτου είδους ή Robin ή Cauchy). Οι συνοριακές συνθήκες Dirichlet επιδρούν με άμεσο τρόπο στους βαθμούς ελευθερίας ενός προβλήματος και δίδουν πληροφορίες για τις κύριες άγνωστες μεταβλητές του προβλήματος όπως η τιμή της κατακόρυφης μετατόπισης  $w$  σε ένα σημείο ή η τιμή της στροφής  $\varphi$  σε κάποιο σημείο. Οι συνοριακές συνθήκες Neumann επιδρούν με έμμεσο τρόπο στους βαθμούς ελευθερίας του προβλήματος και δίδουν πληροφορίες για τις παραγώγους των άγνωστων μεταβλητών, όπως για παράδειγμα, η τιμή της κλίσης της μετατόπισης  $\partial w / \partial x$  σε ένα σημείο. Επίσης, οι συνοριακές συνθήκες φόρτισης και ροπής περιλαμβάνουν παραγώγους υψηλότερης τάξης και είναι τύπου Neumann. Οι μικτές συνοριακές συνθήκες είναι ένας συνδυασμός Σ.Σ τύπου Dirichlet και Neumann.

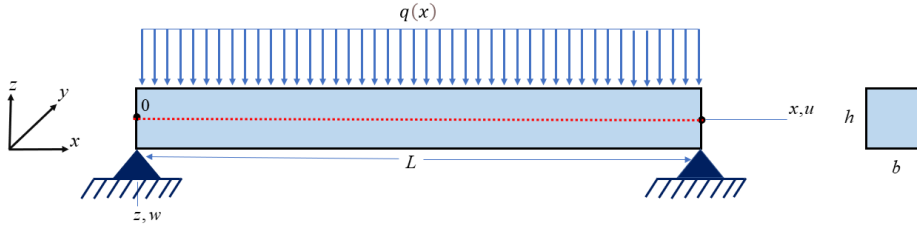
Σε προβλήματα μηχανικής όπως η κάμψη δοκών, συνήθεις τύποι συνοριακών συνθηκών είναι: (α) η δοκός απλής στήριξης (*simply supported beam*), (β) η δοκός με αρθρώσεις στα δύο άκρα (*hinged-hinged* ή *pinned-pinned beam*), (γ) η πακτωμένη δοκός στα δύο άκρα (*clamped-clamped* ή *fixed-fixed beam*) και (δ) ο πρόβολος (*cantilever beam*).

- Οι Σ.Σ για μια δοκό απλής στήριξης (Σχήμα 1.10) είναι:  
 η εγκάρσια μετατόπιση (transverse displacement):  $w(0) = 0$  και  $w(L) = 0$   
 ή η διατμητική δύναμη (shear force):  $w'''(0) \equiv Q_x(0) \neq 0$  και  $Q_x(L) \neq 0$ ,  
 και η στροφή (rotation):  $w'(0) \equiv \varphi(0) \neq 0$ ,  $\varphi(L/2) = 0$  και  $\varphi(L) \neq 0$   
 ή η ροπή κάμψης (bending moment):  $w''(0) \equiv M_x(0) = 0$  και  $M_x(L) = 0$ .



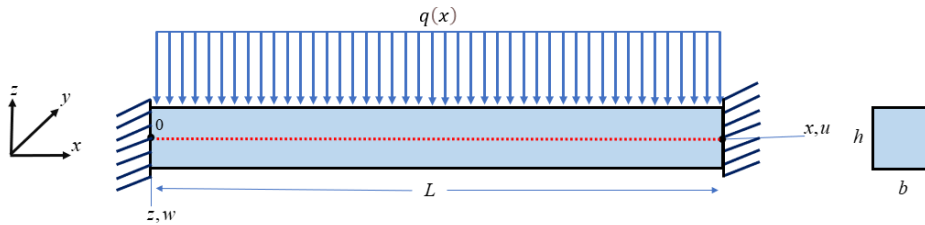
Σχήμα 1.10: Δοκός απλής στήριξης (*Simply Supported Beam*).

- Οι Σ.Σ. για μια δοκό με αρθρώσεις στα δύο άκρα (Σχήμα 1.11) είναι:  
 η αξονική μετατόπιση (axial displacement):  $u(0) = 0$  και  $u(L) = 0$  ,  
 η εγκάρσια μετατόπιση (transverse displacement):  $w(0) = 0$  και  $w(L) = 0$   
 ή η διατμητική δύναμη (shear force):  $Q_x(0) \neq 0$  και  $Q_x(L) \neq 0$  ,  
 και η στροφή (rotation):  $\varphi(0) \neq 0$  και  $\varphi(L) \neq 0$   
 ή η ροπή κάμψης (bending moment):  $M_x(0) = 0$  και  $M_x(L) = 0$  .



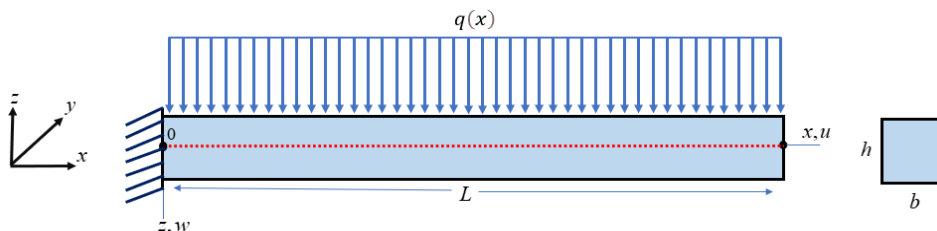
**Σχήμα 1.11:** Δοκός με αρθρώσεις στα δύο άκρα (*Hinged-Hinged Beam*).

- Οι Σ.Σ. για μια δοκό πακτωμένη στα δύο άκρα (Σχήμα 1.12) είναι:  
 η εγκάρσια μετατόπιση (transverse displacement):  $w(0) = 0$  και  $w(L) = 0$   
 ή η διατμητική δύναμη (shear force):  $Q_x(0) \neq 0$  και  $Q_x(L) \neq 0$  ,  
 και η στροφή (rotation):  $\varphi(0) = 0$  και  $\varphi(L) = 0$   
 ή η ροπή κάμψης (bending moment):  $M_x(0) \neq 0$  και  $M_x(L) \neq 0$  .



**Σχήμα 1.12:** Δοκός πακτωμένη στα δύο άκρα (*Clamped-Clamped Beam*).

- Οι Σ.Σ. για ένα πρόβολο (Σχήμα 1.13) είναι:  
 η εγκάρσια μετατόπιση (transverse displacement):  $w(0) = 0$  και  $w(L) \neq 0$   
 ή η διατμητική δύναμη (shear force):  $Q_x(0) \neq 0$  και  $Q_x(L) = 0$  ,  
 και η στροφή (rotation):  $\varphi(0) = 0$  και  $\varphi(L) \neq 0$   
 ή η ροπή κάμψης (bending moment):  $M_x(0) \neq 0$  και  $M_x(L) = 0$  .



**Σχήμα 1.13:** Πρόβολος (*Cantilever Beam*).

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### «Η Έννοια της Μη Γραμμικότητας»

#### 2.1 Εισαγωγή στη μη γραμμικότητα

Στο κεφάλαιο, αυτό, γίνεται προσπάθεια για βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της μη γραμμικότητας. Πολλά προβλήματα αντιμετωπίζονται από τη σκοπιά της γραμμικής ανάλυσης. Η επιλογή ανάλυσης εξαρτάται από τη φύση του προβλήματος και το βαθμό ακρίβειας των αποτελεσμάτων. Σε περιπτώσεις όπου η γραμμική ανάλυση παραλείπει κάποια φαινόμενα, απαιτείται μη γραμμική ανάλυση για ακριβή αποτελέσματα. Οι γραμμικές διατυπώσεις προβλημάτων δεν επαρκούν σε φαινόμενα όπως φαινόμενα άλματος και ασυνέχειας, υποαρμονικές ταλαντώσεις και τη συμπεριφορά μετα-λυγισμού (post-buckling) [66].

Μη γραμμικά συστήματα είναι τα συστήματα για τα οποία δεν ισχύει η αρχή της υπέρθεσης (*superposition principle*). Η φύση αφθονεί σε μη γραμμικά συστήματα και στην πραγματικότητα η πλειοψηφία των συστημάτων συμπεριφέρεται μη γραμμικά (σε ελάχιστες περιπτώσεις γραμμικά) γεγονός που οδηγεί σε πολύπλοκες και συχνά απρόβλεπτες συμπεριφορές. Μη γραμμικά συστήματα εμφανίζονται σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους και πεδία μελέτης. Χαρακτηριστικά παραδείγματα μη γραμμικών συστημάτων είναι: τα φυσικά συστήματα και φυσικά φαινόμενα, τα οικονομικά, κοινωνικά και βιολογικά συστήματα, συστήματα στην κβαντομηχανική, η θεωρία του χάους, τα νευρωνικά δίκτυα και η μηχανική μάθηση (*machine learning*), τα μη γραμμικά συστήματα οπτικής, τα μη γραμμικά συστήματα ακουστικής, τα μη γραμμικά συστήματα ελέγχου και οι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

Στη δομική μηχανική, η μη γραμμικότητα προκύπτει από διάφορους παράγοντες που μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά τη συμπεριφορά των κατασκευών. Για παράδειγμα, κριτήρια ελάχιστου βάρους στο σχεδιασμό σε συνδυασμό με τη διαρκώς αυξανόμενη χρήση ελαφρών πολυμερικών υλικών που μπορούν να υποστούν μεγάλες μετατοπίσεις χωρίς να υπερβαίνουν τα ελαστικά τους όρια, προκάλεσαν ένα καινούριο ενδιαφέρον για τη μη γραμμική ανάλυση δομών που υποβάλλονται σε διάφορες στατικές και δυναμικές συνθήκες φόρτισης. Λόγω της γεωμετρίας της παραμόρφωσης, η συμπεριφορά τέτοιων κατασκευών είναι εξαιρετικά μη γραμμική. Η μη γραμμική ανάλυση είναι πιο περίπλοκη και χρονοβόρα διαδικασία. Σημαντική πρόοδος έχει σημειωθεί τις τελευταίες δεκαετίες στην ανάπτυξη αναλυτικών και αριθμητικών τεχνικών για την επίλυση διαφορετικών τύπων μη γραμμικών προβλημάτων στη δομική μηχανική [66, 67].

Ορισμένες βασικές πηγές μη γραμμικότητας στη δομική μηχανική είναι: η μη γραμμικότητα υλικού (*material nonlinearity*), οι γεωμετρικές μη γραμμικότητες (*geometric nonlinearities*), οι μη γραμμικότητες επαφής (*contact nonlinearities*), οι μη γραμμικότητες λόγω αδράνειας (*inertia nonlinearities*) και οι μη γραμμικότητες που προκύπτουν από τις δυνάμεις σώματος (*body force nonlinearities*) [67].

## 2.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Μια σύντομη ιστορική ανασκόπηση για τη γραμμική και μη γραμμική θεωρία δοκών και πλακών περιλαμβάνεται στα βιβλία των *Sathyamoorthy* [66] και *Chia* [68]. Ο *Kirchhoff* [5], καθιέρωσε την γραμμική θεωρία (κλασική θεωρία) δοκών και πλακών και ο *von Kármán* [69] ανέπτυξε την αντίστοιχη μη-γραμμική θεωρία. Από τους πρώτους που μελέτησαν δυναμικά προβλήματα πλακών με μη γραμμική θεωρία ήταν οι *Chu* και *Herrmann* [70], οι οποίοι μελέτησαν το πρόβλημα των ταλαντώσεων σε ορθογώνιες πλάκες απλής στήριξης. Η θεωρία πλακών των *Reissner* και *Mindlin* [71] λαμβάνει υπόψη τη διατμητική τάση η οποία είναι χρήσιμη σε προβλήματα δοκών και πλακών μεγάλου πάχους. Η θεωρία πλακών των *Reissner - Mindlin* είναι μια «θεωρία διάτμησης πρώτης τάξης».

Οι *Leung* και *Mao* [72], σύγκριναν τη λύση μεταξύ κινούμενων και ακινήτων άκρων σε ορθογώνιες πλάκες απλής στήριξης, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο *Galerkin*. Οι *El Kadiri* και *Benamar* [73] χρησιμοποίησαν την υπόθεση των *Chu* και *Herrmann* [70] και δημιούργησαν ένα απλοποιημένο αναλυτικό μοντέλο.

Ο *Berger* [74] απλοποίησε τη μη γραμμική θεωρία πλακών αγνοώντας κάποιους όρους από την έκφραση της ενέργειας παραμόρφωσης. Οι *Prathap* και *Pandalai* [75] ενσωμάτωσαν τη ροπή αδράνειας και τη διόρθωση για τη διάτμηση στη μελέτη τους για μη γραμμική θεωρία πλακών. Οι *Yosibash* και *Kirby* [76] σύγκριναν τρεις διαφορετικές εκδοχές της γεωμετρίας στη μη γραμμική θεωρία πλακών. Η πρώτη εκδοχή αγνοεί τον όρο της ροπής αδράνειας. Η δεύτερη απλοποιεί το μοντέλο, αγνοώντας τη ροπή αδράνειας καθώς και τους χρόνο-εξαρτούμενους όρους της πλάκας στο μέσο επίπεδο. Οι όροι, αυτοί, αγνοούνται με το σκεπτικό πως πολλαπλασιάζοντας με το πάχος στο τετράγωνο, οι ποσότητες που προκύπτει είναι πάρα πολύ μικρές. Επίσης, αγνοούνται κάποιοι επιπλέον όροι, παρόλο που δεν πολλαπλασιάζονται με το πάχος. Η τρίτη εκδοχή περιλαμβάνει το σύνολο των όρων αυτών. Ο *Amabili* [77], θεώρησε πολλές διαφορετικές συνοριακές συνθήκες και σύγκρινε τα θεωρητικά αποτελέσματα με αντίστοιχα πειραματικά.

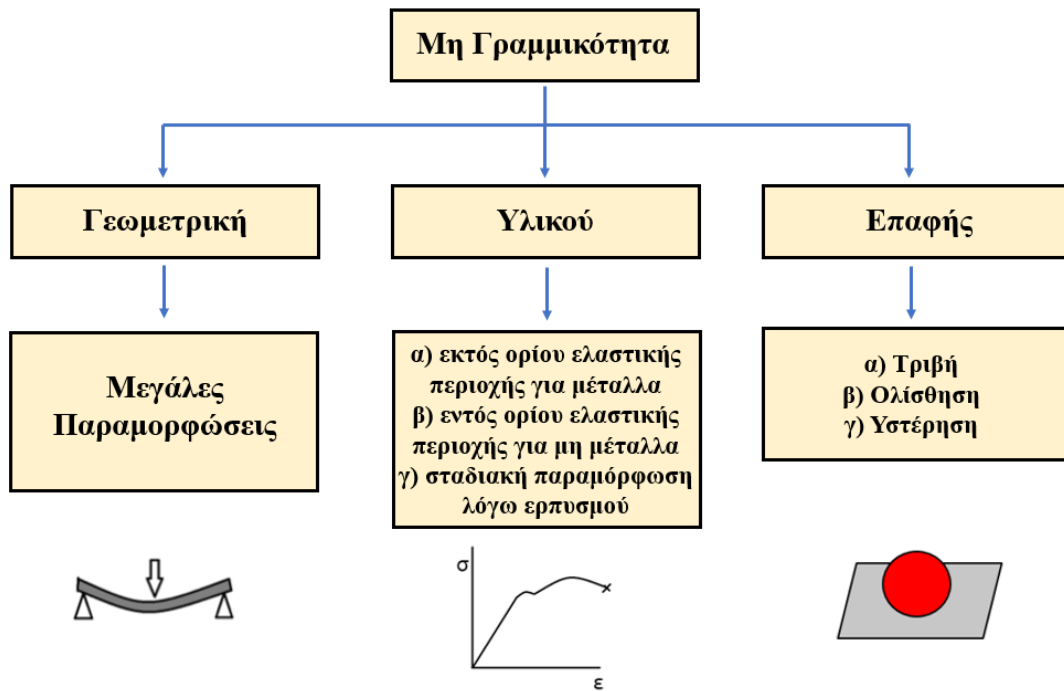
Ο *Way* [78] χρησιμοποίησε την ενεργειακή μέθοδο *Ritz*, ο *Ribeiro* [79] χρησιμοποίησε μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων και οι *Wei-Zang* και *Kai-Yuan* [80] χρησιμοποίησαν θεωρίες διαταραχών ως προσεγγιστική μέθοδο για την επίλυση του συστήματος εξισώσεων. Η διπλή σειρά *Fourier* χρησιμοποιήθηκε από τον *Levy* [81] για να μελετήσει προβλήματα απλής στήριξης πλακών κάτω από διάφορες συνθήκες. Οι *Iyengar* και *Naqvi* [82] χρησιμοποίησαν ένα συνδυασμό τριγωνομετρικών και υπερβολικών συναρτήσεων για να προσεγγίσουν τη μετατόπιση με πακτωμένα άκρα ή άκρα απλής στήριξης και αντίστοιχες συνθήκες άκρα «ελεύθερα τάσεων» και «ακλόνητα άκρα».

Ο *Leissa* [83] μελέτησε γραμμικά προβλήματα πλακών με διάφορες συνοριακές συνθήκες Το βιβλίο των *Timoshenko* και *Woinowsky-Krieger* «Θεωρία Πλακών και Κελυφών» [84] θεωρείται το σημαντικότερο για μελέτη προβλημάτων δοκών και πλακών. Σημαντική, τέλος, είναι η συμβολή των *Heylinger* και *Reddy* [50] και του *Reddy* [33] οι οποίοι ανέπτυξαν μια καινούρια θεωρία διάτμησης τρίτης τάξης για τη μη γραμμική ανάλυση πλακών με μέτριο (*moderate*) πάχος.

### 2.3 Πηγές της μη γραμμικότητας

Τα μη γραμμικά συστήματα, όπως προαναφέρθηκε, χαρακτηρίζονται από το γεγονός πως δεν ισχύει η αρχή της επαλληλίας ή αρχή της υπέρθεσης. Οι μη γραμμικότητες στη μαθηματική μοντελοποίηση για την επίλυση ενός προβλήματος, εμφανίζονται στις εξισώσεις κίνησης και στις συνοριακές συνθήκες, όταν σε αυτές εμπλέκονται γινόμενα των μεταβλητών ή των παραγώγων τους. Εμφανίζονται, επίσης, όταν υπάρχουν ασυνέχειες στο σύστημα. Γενικά, οι μη γραμμικότητες στη μηχανική προκύπτουν με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους. Υπάρχουν διάφορες πηγές μη γραμμικής συμπεριφοράς [66, 67] και οι βασικότερες, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1, περιλαμβάνουν:

- τις γεωμετρικές μη γραμμικότητες (*geometrical nonlinearities*),
- τις υλικές μη γραμμικότητες (*material nonlinearities*) και
- τις μη γραμμικότητες επαφής (*contact nonlinearities*)



Σχήμα 2.1: Βασικές πηγές της μη γραμμικότητας.

#### Γεωμετρική Μη Γραμμικότητα

Μεγάλες παραμορφώσεις σε κατασκευές όπως δοκοί, πλάκες, πλαίσια (frames) και κελύφη μπορεί να οδηγήσουν σε γεωμετρική μη γραμμικότητα. Καθώς η δομή παραμορφώνεται, η σχέση μεταξύ δυνάμεων και μετατοπίσεων γίνεται μη γραμμική λόγω αλλαγών της γεωμετρίας. Στη μηχανική, αυτό, μεταφράζεται σε μη γραμμικές σχέσεις παραμόρφωσης-μετατόπισης. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι η διάταση (*stretching*) στο μέσο επίπεδο, οι μεγάλες καμπυλότητες δομικών στοιχείων, οι μεγάλες παραμορφώσεις και οι μεγάλες στροφές. Η γεωμετρική μη γραμμικότητα είναι σημαντική σε συστήματα με μεγάλες παραμορφώσεις καθώς μπορεί να

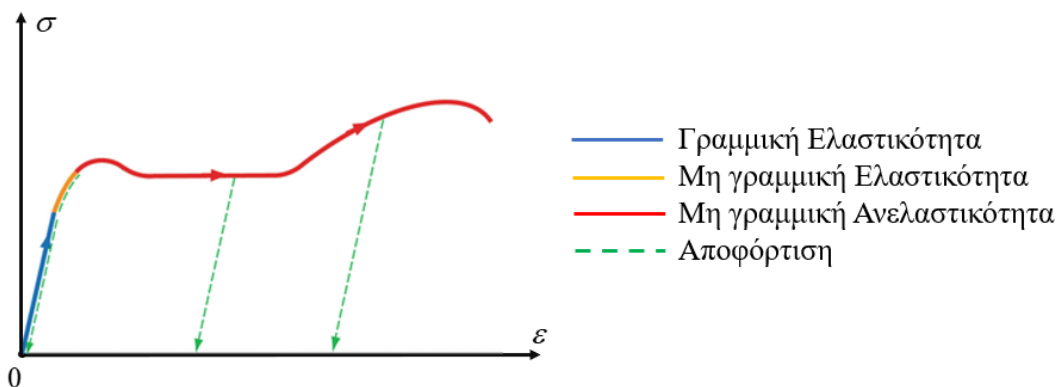


αστοχήσουν λόγω κάμψης ή λυγισμού. Σε δοκούς και πλάκες, η μη γραμμικότητα προέρχεται από μη γραμμικούς όρους του πεδίου των τροπών, στους οποίους υπάρχει σύζευξη της εγκάρσιας μετατόπισης και των αξονικών τροπών. Ως αποτέλεσμα, εμφανίζεται διάταση στο μέσο επίπεδο δοκών και πλακών [66].

Στη Μηχανική και γενικότερα στην επιστήμη, ορισμένες έννοιες ενώ εκ πρώτης όψεως φαίνονται εύκολες στην κατανόησή τους, όμως είναι κάπως αφηρημένες και πολλές φορές χρειάζονται βαθύτερη κατανόηση για την αντιμετώπιση προβλημάτων. Ο όρος «μεγάλες παραμορφώσεις» πολλές φορές μπορεί να μην είναι ξεκάθαρος. Συνήθως, με τον όρο «μεγάλες παραμορφώσεις» γίνεται αναφορά σε υλικά όπως τα ελαστομερή (rubber materials), ενώ άλλες φορές οι μεγάλες παραμορφώσεις αναφέρονται μόνο σε μεγάλες μετατοπίσεις και στροφές που προκαλούνται σε ένα σώμα (όπως σε λεπτά τοιχώματα ή λεπτά δομικά μέλη)

Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, για κάθε ελαστικό υλικό υπάρχει ακαμψία  $EI$ . Αυξάνοντας την ακαμψία  $EI$ , οι τροπές (strains) σε μια δοκό μπορούν να γίνουν αυθαίρετα μικρές. Όμως, ακόμη και για μεγάλες τιμές της ακαμψίας  $EI$ , και κατά συνέπεια για μικρές τροπές, η κατακόρυφη μετατόπιση και η περιστροφή της άκρης της δοκού μπορεί να γίνουν αυθαίρετα μεγάλες εάν το μήκος της δοκού γίνει αρκετά μεγάλο. Προφανώς, οι έννοιες «μεγάλες τροπές» και «μεγάλες μετατοπίσεις», ή ακριβέστερα, «μεγάλες κλίσεις μετατόπισης», δεν συμπίπτουν. Μεγάλες τροπές μπορούν να προκύψουν μόνο εάν οι κλίσεις μετατόπισης είναι επίσης μεγάλες, αλλά δεν ισχύει απαραίτητα το αντίστροφο. Μεγάλες κλίσεις μετατόπισης παρατηρούνται στη δομική συμπεριφορά ακόμη και όταν οι τροπές είναι σχετικά μικρές, τυπικά μικρότερες από 2%. Στην πράξη, για πολλά υλικά στη μηχανική, οι τροπές είναι συνήθως μικρές.

Ο μόνος περιορισμός έγκειται στις καταστατικές σχέσεις, δηλαδή στις σχέσεις μεταξύ τάσης και τροπής. Για μεγάλες κλίσεις μετατόπισης, αλλά μικρές τροπές, ισχύουν οι συνήθεις καταστατικές σχέσεις όπως ο νόμος του Hooke ( $\sigma = E\varepsilon$ ) για τη γραμμική ελαστικότητα. Ωστόσο, για μεγάλες τροπές, η εξαγωγή αντίστοιχων σχέσεων από πειραματικά δεδομένα, όπως μονοαξονικές δοκιμές εφελκυσμού, απαιτεί προσεκτική ερμηνεία των δεδομένων του πειράματος (π.χ. το δείγμα πράγματι παραμορφώνεται ομοιογενώς για τόσο μεγάλες τροπές) και κατάλληλη επιλογή μέτρων που σχετίζονται με την τάση και την τροπή [86].



Σχήμα 2.2: Μη γραμμική συμπεριφορά υλικού [87].

Όταν οι δοκοί και οι πλάκες παραμορφώνονται πάνω από ένα ανώτατο κατώφλι, συνήθως όταν ο λόγος του μήκους προς το πάχος της είναι μεγαλύτερος του δέκα ( $L/h > 10$ ) ή όταν η μέγιστη βύθιση της δοκού είναι μεγαλύτερη από το  $1/10$  του μήκους της ( $w_{max} > L/10$ ), οι γραμμικές θεωρίες της ελαστικότητας χάνουν την ισχύ τους, με αποτέλεσμα να παράγουν λανθασμένα αποτελέσματα. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι πως για μεγάλα εφαρμοζόμενα φορτία, η γραμμική θεωρία μπορεί να προβλέψει παραμόρφωση μεγαλύτερη του μήκους του σώματος, κάτι που είναι μη ρεαλιστικό. Σε μη γραμμικές θεωρίες πρέπει να ληφθεί υπόψη η σύζευξη μεταξύ αξονικής και εγκάρσιας κίνησης της δοκού, που είναι γεωμετρικά μη γραμμική.

Οι μη γραμμικών θεωρίες συσχετίζουν τα αξονικά φορτία με τις εγκάρσιες παραμορφώσεις. Χρησιμοποιούνται σε προβλήματα κάμψης, λυγισμού και προβλήματα αξονικά φορτισμένων σωμάτων. Ένα εφαρμοζόμενο αξονικό φορτίο ενεργεί ως αίτιο σκλήρυνσης ή αποσκλήρυνσης του σώματος. Αυτό είναι σημαντικό σε δομές που περιστρέφονται γύρω από έναν άξονα, όπως μια έλικα ελικοπτέρου ή ένας δίσκος εγγραφής, όπου το σώμα βρίσκεται σε εντατική κατάσταση.

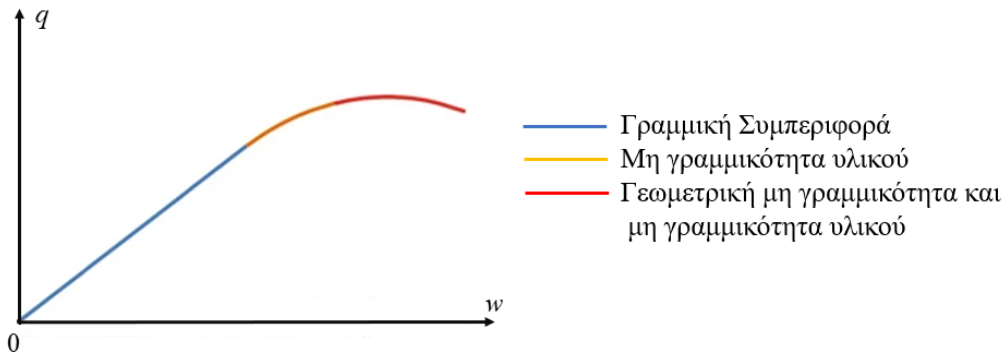
Σε περιπτώσεις όπου τα άκρα μπορούν να κινούνται ελεύθερα εντός του επιπέδου του μη παραμορφωμένου σώματος, η συνοριακή συνθήκη του προβλήματος ονομάζεται συνθήκη «ελεύθερων τάσεων». Σε περιπτώσεις όπου τα άκρα της δοκού θεωρούνται ακίνητα, απαιτείται η παρουσία ενός ισοδύναμου αξονικού φορτίου ώστε να εμποδίσει την κίνηση, και η αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη ονομάζεται συνθήκη «ακλόνητων άκρων».

### **Μη Γραμμικότητα Υλικού**

Η ανάπτυξη νέων υλικών και η εφαρμογή τους σε θερμικά και μηχανικά περιβάλλοντα σε εξαιρετικά παραμορφώσιμα δομικά στοιχεία έχουν δημιουργήσει ενδιαφέρον για τις τεχνικές της μη γραμμικής ανάλυσης. Οι τεχνικές, αυτές, μαζί με την ανάπτυξη των υπολογιστών καθιστούν εφικτές τις λύσεις σε μη γραμμικά προβλήματα λόγω της συμπεριφοράς του υλικού. Η επίδραση της μη γραμμικότητας του υλικού στη συμπεριφορά των δομικών στοιχείων αποτελεί σημαντικό παράγοντα στην ανάλυση των δομικών συστημάτων. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ελαστική ανάλυση είναι μάλλον συντηρητική καθώς δεν εκμεταλλεύεται την ικανότητα πολλών υλικών να μεταφέρουν φορτία πέρα από το όριο της τάσης διαρροής. Βασικά, η διατύπωση του προβλήματος για να συμπεριλάβει τη μη γραμμικότητα του υλικού δεν δημιουργεί μεγάλες δυσκολίες. Όταν οι παραμορφώσεις είναι μικρές, τα προβλήματα αφορούν μόνο μη γραμμικότητες λόγω της συμπεριφοράς του υλικού. Ωστόσο, εάν οι παραμορφώσεις είναι μεγάλες, τότε η αλλαγή στη διαμόρφωση και η εισαγωγή τάσεων εντός του επιπέδου είναι πρόσθετες παράμετροι που εισέρχονται στο πρόβλημα. Κατά την επίλυση αυτής της κατηγορίας προβλημάτων, το πραγματικό ερώτημα που απασχολεί είναι η κατάστρωση του προβλήματος και η μορφή των εξισώσεων κίνησης ώστε να επιτρέπουν βολικές διαδικασίες επίλυσης.

Ένα ευρύ φάσμα υλικών στη μηχανική παρουσιάζουν μη γραμμική συμπεριφορά τάσης-παραμόρφωσης κάτω από ποικίλες συνθήκες φόρτισης. Υλικά όπως το σκυρόδεμα και το έδαφος εμφανίζουν μη γραμμικές σχέσεις τάσης-παραμόρφωσης, οι οποίες, καθώς αυξάνεται η παραμόρφωση, οδηγούν σε αλλαγές στην ακαμψία και την αντοχή του υλικού.

Τα μέταλλα και τα πολυμερή, για παράδειγμα, παραμορφώνονται με αυτόν τον τρόπο όταν ρέουν πλαστικά και η μη γραμμική σχέση τάσης-παραμόρφωσης μπαίνει στις εξισώσεις που τα διέπουν. Η μη γραμμική συμπεριφορά λόγω υλικού καθιστά ακατάλληλο το νόμο του *Hooke*, καθώς η σχέση  $\sigma = E\varepsilon$  είναι μια γραμμική σχέση μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης. Ο νόμος του Hooke θα πρέπει να τροποποιηθεί προκειμένου να ληφθεί υπόψη η μη γραμμική συμπεριφορά. Στην ελαστική περιοχή του υλικού, μπορούμε να ορίσουμε την κλίση της γραμμικής περιοχής ως μέτρο ελαστικότητας του υλικού. Ωστόσο, ο ορισμός αυτός είναι μόνο μια προσέγγιση που χρησιμοποιείται για απλοποίηση του συστήματος. Άλλη μια προσέγγιση των ιδιοτήτων του υλικού είναι πως το υλικό θεωρείται ισότροπο με ίδιες ιδιότητες σε όλες τις κατευθύνσεις. Είναι σημαντικό να αναφερθεί πως δεν υπάρχει υλικό στην φύση με απόλυτα γραμμική ελαστική συμπεριφορά ή απόλυτα ισότροπο. Τα παραπάνω είναι προσεγγίσεις, αρκετά ικανοποιητικές, για τις περισσότερες περιπτώσεις. Μοντέλα υλικών με μη-γραμμικές ελαστικές ιδιότητες, όπως το καουτσούκ, ή ανισότροπα υλικά, όπως τα σύνθετα υλικά, περιλαμβάνουν μη γραμμικές εξισώσεις κίνησης.



**Σχήμα 2.3:** Τυπική καμπύλη φορτίου-μετατόπισης σιβαρών κατασκευών [87].

Μεταξύ των αριθμητικών μεθόδων, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (FEM) έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως για την επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων που σχετίζονται με τη μη γραμμικότητα του υλικού. Οι προσεγγίσεις που σχετίζονται με την επίλυση ελαστοπλαστικών προβλημάτων της δομικής μηχανικής με τη χρήση της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων είναι αρκετά γνωστές. Ωστόσο, η ελαστοπλαστική ανάλυση που περιλαμβάνει σύνθετα υλικά ενισχυμένα με ίνες απαιτεί τη γνώση της ανισότροπης πλαστικότητας, πεδία που βρίσκονται ακόμη σε στάδια ανάπτυξης [66].

### **Μη Γραμμικότητα Επαφής**

Η επαφή μεταξύ δομικών στοιχείων ή επιφανειών μπορεί να προκαλέσει μη γραμμικά φαινόμενα, ειδικά όταν υπάρχει τριβή ή διαχωρισμός μεταξύ των σημείων

επαφής. Η επαφή και η τριβή μπορεί να οδηγήσουν σε τοπικές συγκεντρώσεις τάσεων και αλλαγές στην κατανομή του φορτίου. Η δύναμη τριβής είναι μια μη γραμμική συνάρτηση της μετατόπισης και της ταχύτητας. Ο συγκεκριμένος τύπος μη γραμμικότητας είναι εξαιρετικά μη γραμμικός και συναντάται σε διαδικασίες όπως η ξηρή τριβή (dry friction), η ολίσθηση, η υστέρηση και το φαινόμενο backlash. Οι μη γραμμικότητες λόγω τριβής εμφανίζονται μέσα στις διαφορικές εξισώσεις κίνησης.

Εκτός από τις τρεις βασικές πηγές μη γραμμικότητας, υπάρχουν πολλοί ακόμη παράγοντες που μπορούν να την προκαλέσουν. Συνοπτικά παρουσιάζονται οι εξής:

#### ***Μη Γραμμικότητα Αδράνειας:***

Οι μη γραμμικότητες αδράνειας προκύπτουν ως αποτέλεσμα συγκεντρωμένων ή κατανεμημένων μαζών. Τέτοιου τύπου μη γραμμικότητες συναντάται στις αρχές που διέπουν το πρόβλημα και πιο συγκεκριμένα στις χρονικές παραγωγούς των μετατοπίσεων.

#### ***Μη Γραμμικές Συνοριακές Συνθήκες:***

Μη γραμμικά συστήματα εξισώσεων μπορούν να προκληθούν από μη γραμμικές συνοριακές συνθήκες. Αυτό έγκειται στο γεγονός ότι οι συνοριακές συνθήκες μπορεί να έχουν τη μορφή μη γραμμικών ισοδυναμιών ή ανισοτήτων. Ένα παράδειγμα της ανισότητας είναι η επαφή μεταξύ των ελαστικών σωμάτων, όπου η σχετική μετατόπιση των σημείων επαφής στην κατεύθυνση της επαφής πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση με το αρχικό κενό μεταξύ αυτών των σημείων.

#### ***Μη Γραμμικές Δυνάμεις Σώματος (Body Forces):***

Οι μη γραμμικές δυνάμεις σώματος είναι ουσιαστικά μαγνητικές και ηλεκτρικές δυνάμεις που υπάρχουν σε ένα σύστημα.

#### ***Μη Γραμμική Συμπεριφορά στο Λυγισμό και στο Μετα-Λυγισμό:***

Ο λυγισμός είναι ένα μη γραμμικό φαινόμενο όπου ένα λεπτό δομικό στοιχείο υφίσταται ξαφνικά μεγάλες παραμορφώσεις υπό συμπιεστικά φορτία. Η συμπεριφορά μετά τον λυγισμό μπορεί να περιλαμβάνει πολύπλοκες αλληλεπιδράσεις μεταξύ ακαμψίας, γεωμετρικών αλλαγών και κατανομής φορτίου.

#### ***Ερπυσμός και Ιξωδοελαστικότητα:***

Με την πάροδο του χρόνου, ορισμένα υλικά παρουσιάζουν παραμορφώσεις εξαρτώμενες από το χρόνο, γνωστές ως ερπυσμός. Τα ιξωδοελαστικά υλικά παρουσιάζουν επίσης συμπεριφορά εξαρτώμενη από το χρόνο, με ελαστικές και ιξώδεις αποκρίσεις. Αυτές οι συμπεριφορές εισάγουν μη γραμμικά φαινόμενα στο υπό μελέτη σύστημα.

***Δυναμική μη γραμμικότητα:***

Κατασκευές που υπόκεινται σε δυναμικά φορτία ή δονήσεις μπορεί να παρουσιάζουν μη γραμμική συμπεριφορά λόγω της μεταβαλλόμενης φύσης των δυνάμεων και των μετατοπίσεων με την πάροδο του χρόνου. Η δυναμική μη γραμμικότητα μπορεί να οδηγήσει σε επιδράσεις όπως ο συντονισμός, η απαγωγή ενέργειας και η συμπεριφορά που εξαρτάται από το πλάτος.

***Μη γραμμικότητα αρμών:***

Οι αρμοί και οι συνδέσεις μεταξύ δομικών στοιχείων μπορεί να παρουσιάσουν μη γραμμική συμπεριφορά υπό μεταβαλλόμενα φορτία. Παραδείγματα είναι τα κενά, η ολίσθηση και η πλαστική παραμόρφωση στις συνδέσεις.

***Επιδράσεις θερμοκρασίας:***

Η θερμική συστολή και διαστολή μπορούν να προκαλέσουν μη γραμμικές παραμορφώσεις στις κατασκευές, επηρεάζοντας τη συνολική τους απόκριση.

***Ρωγμές και ζημιές:***

Η παρουσία ρωγμών, εγκοπών ή άλλων μορφών βλάβης μπορεί να εισάγει μη γραμμική συμπεριφορά, επηρεάζοντας την κατανομή της τάσης και τη συνολική δομική ακεραιότητα.

***Αλληλεπίδραση με Ρευστά:***

Η αλληλεπίδραση ενός ρευστού με μια κατασκευή μπορεί να εισάγει μη γραμμικότητες σε δομές που υπόκεινται σε ροές ρευστών, ειδικά σε υψηλές ταχύτητες ή σε τυρβώδεις συνθήκες.

***Σύνθετα Υλικά:***

Τα σύνθετα υλικά μπορούν να παρουσιάσουν πολύπλοκη μη γραμμική συμπεριφορά λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ των διαφορετικών φάσεων του υλικού, που οδηγεί σε αλλαγές στην ακαμψία, την αντοχή και τους μηχανισμούς αστοχίας.

Οι προαναφερθείσες πηγές μη γραμμικότητας αποτελούν παραδείγματα που δεν καλύπτουν το σύνολο των περιπτώσεων. Σε ορισμένες περιπτώσεις, η διαδικασία της γραμμικοποίησης έχει αμελητέα αποτελέσματα. Είναι πολύ σημαντική η προσπάθεια κατανόησης του εκάστοτε συστήματος προς μελέτη με βάση το υλικό του, τις φορτίσεις που δέχεται και την αναμενόμενη απόκρισή του, ώστε να μπορεί να προσδιοριστεί με σαφήνεια εάν μια γραμμική προσέγγιση είναι επαρκής ή απαιτείται χρήση μη γραμμικής ανάλυσης.

## 2.4 Ο Von Kármán και το έργο του

Ο Theodore von Kármán (1881-1963) ήταν Ουγγαροαμερικανός μαθηματικός, μηχανικός στον τομέα της αεροδιαστημικής και φυσικός που δραστηριοποιήθηκε κυρίως στον τομέα της αεροναυτικής. Σημαντική είναι η συμβολή του στην αεροδυναμική, κυρίως με το έργο του για τον υπερηχητικό χαρακτηρισμό της ροής του αέρα. Θεωρείται ένας από τους σπουδαιότερους αεροδυναμικούς θεωρητικούς του 20<sup>ου</sup> αιώνα [88-91].

Ο Kármán γεννήθηκε στη Βουδαπέστη. Σπούδασε μηχανική στο Πανεπιστήμιο Royal Joseph, γνωστό σήμερα ως Πανεπιστήμιο Τεχνολογίας και Οικονομικών της Βουδαπέστης. Μετά την αποφοίτησή του, το 1902, μετακόμισε στη Γερμανική Αυτοκρατορία και μπήκε στο Πανεπιστήμιο του Göttingen, όπου έλαβε το διδακτορικό του το 1908. Στο Göttingen δίδαξε για τέσσερα χρόνια. Το 1912 έγινε δεκτός ως διευθυντής του Αεροναυτικού Ινστιτούτου στο RWTH του Aachen της Γερμανίας [92].

Η αδερφή του, Josephine de Kármán, τον ενθάρρυνε να επεκτείνει την επιστήμη του πέρα από τα εθνικά σύνορα. Διοργάνωσαν μαζί το πρώτο διεθνές συνέδριο στη μηχανική που πραγματοποιήθηκε το Σεπτέμβριο του 1922 στο Innsbruck. Ο Kármán εγκατέλειψε τη θέση του στο RWTH το 1930. Ανησυχώντας για τις εξελίξεις στην Ευρώπη, την ίδια χρονιά αποδέχτηκε τη διεύθυνση του αεροναυτικού εργαστηρίου Guggenheim στο Ινστιτούτο Τεχνολογίας της Καλιφόρνιας (GALCIT).

Η γερμανική δραστηριότητα, κατά τη διάρκεια του Β Παγκοσμίου Πολέμου, αύξησε το στρατιωτικό ενδιαφέρον των ΗΠΑ στην έρευνα πυραύλων. Στις αρχές του 1943, η Διεύθυνση Πειραματικής Τεχνικής της Υλικής Διοίκησης των Πολεμικών Αεροποριών των Ηνωμένων Πολιτειών διαβίβασε στον Kármán αναφορές από βρετανικές πηγές που περιέγραφαν γερμανικές ρουκέτες ικανές να ταξιδεύουν σε απόσταση 160 χιλιομέτρων. Σε επιστολή του, με ημερομηνία 2 Αυγούστου 1943, ο Kármán παρείχε στον στρατό την ανάλυση και τα σχόλια του σχετικά με το γερμανικό πρόγραμμα.

Το 1944, ο ίδιος και άλλοι συνεργάτες του στο GALCIT ίδρυσαν το JPL (Jet Propulsion Laboratory - Εργαστήριο εκτόξευσης αεριοθουμένων), το οποίο είναι μέχρι σήμερα ένα Κέντρο Έρευνας και Ανάπτυξης χρηματοδοτούμενο από την Ομοσπονδία, το οποίο διαχειρίζεται η Caltech βάσει σύμβασης με τη NASA. Το 1946, έγινε ο πρώτος πρόεδρος της επιστημονικής συμβουλευτικής ομάδας που μελέτησε αεροναυτικές τεχνολογίες για τις Πολεμικές Αεροπορίες των Ηνωμένων Πολιτειών. Επίσης, βοήθησε στην ίδρυση του AGARD, της ομάδας εποπτείας της αεροδυναμικής του NATO (1951), του Διεθνούς Συμβουλίου Αεροναυτικών Επιστημών (1956), της Διεθνούς Ακαδημίας Αστροναυτικής (1960) και του Ινστιτούτου «Fluid Dynamics Von Karman» στις Βρυξέλλες (1956).

Τον Ιούνιο του 1944, ο Kármán υποβλήθηκε σε χειρουργική επέμβαση για καρκίνο του εντέρου στη Νέα Υόρκη. Η χειρουργική επέμβαση προκάλεσε δύο κήλες, και η ανάκαμψη του Kármán ήταν αργή. Στις αρχές Σεπτεμβρίου, ενώ βρισκόταν στη Νέα Υόρκη, συναντήθηκε με τον Γενικό Αρχηγό της Πολεμικής

Αεροπορίας των ΗΠΑ, Henry Arnold, και αυτός του πρότεινε να μετακομίσει στην Ουάσιγκτον για να ηγηθεί της Επιστημονικής Συμβουλευτικής Ομάδας στο στρατό. Ο Κάρμάν επέστρεψε στην Pasadena, διορίστηκε στη θέση SAG τον Οκτώβριο του 1944 και εγκατέλειψε την Caltech τον Δεκέμβριο του 1944 [94].



*Theodore Kármán*

**Σχήμα 2.4:** Theodore von Kármán (1881–1963).

Σε ηλικία 81 ετών, ο Κάρμάν έλαβε το πρώτο Εθνικό Μετάλλιο Επιστημών, που δόθηκε από τον Πρόεδρο John F. Kennedy σε τελετή στο Λευκό Οίκο. Αποτελεί μια σημαντική μορφή στην επιστήμη, ειδικότερα στη μελέτη υπερηχητικής κίνησης, σημειώνοντας σε μια μελέτη του πως οι μηχανικοί στην αεροναυτική «χτυπούν δυνατά στην κλειστή πόρτα που οδηγεί στο πεδίο της υπερηχητικής κίνησης» [94].

Η φήμη του Κάρμάν έγκειται στη χρήση μαθηματικών εργαλείων για τη μελέτη ροής ρευστών [95] και η ερμηνεία αυτών των αποτελεσμάτων για την καθοδήγηση πρακτικών σχεδίων. Είχε καθοριστικό ρόλο στην αναγνώριση της σημασίας των φτερών που βρίσκονται σε όλα τα σύγχρονα αεριωθούμενα αεροπλάνα.

Τέλος, όσον αφορά την παρούσα διατριβή, η συνεισφορά του στον τομέα της μηχανικής είναι πολύ σημαντική. Εισάγοντας στις γραμμικές τεχνικές θεωρίες και πιο συγκεκριμένα στις σχέσεις τροπής-μετατόπισης τον μη γραμμικό όρο:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (2.1)$$

γνωστό ως γεωμετρικό μη γραμμικό όρο παραμορφώσεων Von Kármán (*Von Karman nonlinearity type*), είναι δυνατή η μετατροπή των γραμμικών τεχνικών θεωριών για δοκούς και πλάκες σε μη γραμμικές τεχνικές θεωρίες, γνωστές ως «θεωρίες των μεγάλων παραμορφώσεων». Σε επόμενα κεφάλαια αναλύονται οι μη γραμμικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης σε ελαστικές, πιεζοηλεκτρικές και σύνθετες πολυστρωματικές δομές λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρική μη γραμμικότητα με την προσθήκη του μη γραμμικού όρου Von Karman (Σχέση 2.1).

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### «Πιεζοηλεκτρικά Υλικά»

#### 3.1 Εισαγωγή στα «έξυπνα» υλικά

Στην επιστήμη των υλικών, μια από τις βασικές μελέτες του μηχανικού είναι ο χαρακτηρισμός των υλικών. Η επιστημονική και τεχνολογική πρόοδος στην κατανόηση της συμπεριφοράς και της σχέσης της δομής και των ιδιοτήτων των υλικών έχει οδηγήσει στην εμφάνιση νέων προηγμένων υλικών. Υλικά που αλλάζουν σε μεγάλο βαθμό τις ιδιότητες, τα χαρακτηριστικά και τη συμπεριφορά τους κάτω από την επιβολή εξωτερικών ερεθισμάτων, όπως η τάση, η θερμοκρασία, τα ηλεκτρικά και τα μαγνητικά πεδία, ονομάζονται «έξυπνα» ή «ευφυή» υλικά (*smart materials*) [96].

Με την ανάπτυξη προηγμένων υπολογιστών και νέων επιτευγμάτων στην επιστήμη των υλικών, οι ερευνητές μπορούν πια να χαρακτηρίσουν τις διαδικασίες, το σχέδιο και το μοντέλο ενός υλικού με αποτέλεσμα την κατασκευή κατάλληλων έξυπνων υλικών με κατάλληλη απόδοση και επιθυμητές ιδιότητες (πίνακας 3.1).

Πιο συγκεκριμένα, νέες εφαρμογές βρίσκουν πρόσφορο έδαφος σε κατηγορίες έξυπνων υλικών όπως: τα υλικά με μνήμη σχήματος (*shape memory materials*), τα ηλεκτρορεολογικά και τα μαγνητορεολογικά ρευστά (*electro-magnetorheological fluids*), τα πιεζοηλεκτρικά υλικά (*piezoelectric materials*), τα σίδηροηλεκτρικά υλικά (*ferroelectrics*), τα ηλεκτροσταλτικά και μαγνητοσταλτικά (*magnetostrictive and electrostrictive*) και τα ηλεκτροενεργά πολυμερή (*electroactive polymers*) [97].

Στη συνέχεια, αναλύονται συνοπτικά οι βασικές κατηγορίες έξυπνων υλικών:

**Κράματα με μνήμη σχήματος:** Μια κατηγορία έξυπνων υλικών είναι τα SMA. Το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο υλικό στην κατηγορία αυτή είναι το κράμα νικελίου και τιτανίου γνωστό ως «*Nitinol*». Επιτρέπει την ανάκτηση υψηλής πίεσης από την αλλαγή φάσης που προκαλείται από τη θερμοκρασία. Λόγω της δύσκολης ψύξης του, λειτουργεί σε χαμηλές συχνότητες και σε εφαρμογές χαμηλής ακρίβειας. Το κύριο πλεονέκτημα των SMA είναι η δυνατότητα επίτευξης πολύπλοκων κινήσεων με πολύ λίγα στοιχεία, κάτι το οποίο επιτυγχάνεται με μικρή αλλαγή θερμοκρασίας [104]. Στην ουσία, πρόκειται για κράματα που «θυμούνται» το αρχικό τους σχήμα μετά από εκτεταμένες παραμορφώσεις [98].

**Ηλεκτρορεολογικά και Μαγνητορεολογικά υλικά:** είναι έξυπνα υγρά, τα οποία μπορούν να βιώσουν μια δραματική αλλαγή του ιξώδους τους όταν εκτεθούν σε μαγνητικό ή ηλεκτρικό πεδίο. Το αποτέλεσμα μπορεί να αντιστραφεί πλήρως αμέσως μόλις αφαιρεθεί το πεδίο.

**Πιεζοηλεκτρικά υλικά:** υλικά που παράγουν ηλεκτρική φορτίο με την επιβολή μηχανικής τάση ή παραμορφώνονται μηχανικά με την επιβολή ηλεκτρικού πεδίου. Παραδείγματα τέτοιων υλικών είναι: ο χαλαζίας, το  $SiO_2$  και το αλάτι Rochelle.

**Μαγνητοσυστολικά υλικά:** υλικά όπως το *Terfenol-D*, παρουσιάζουν χαμηλή ανακτιμήσιμη παραμόρφωση υπό την επιβολή μαγνητικού πεδίου και ευρεία ζώνη



συχνοτήτων. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως στοιχεία μεταφοράς φορτίου για στατικές και δυναμικές εφαρμογές υψηλής ακρίβειας. Ωστόσο, η κατανάλωση ενέργειας στις στατικές εφαρμογές είναι υψηλότερη από την κατανάλωση των πιεζοκεραμικών, όπου απαιτείται εφαρμογή μόνο μιας στατικής τάσης.

**Ηλεκτροσυστολικά υλικά:** πρόκειται για όπως το Lead Magnesium Niobate (PMN), είναι παρόμοια με τα μαγνητοσυστολικά υλικά με τη διαφορά πως παρουσιάζουν αλλαγή στο σχήμα υπό την επίδραση ενός ηλεκτρικού πεδίου και λειτουργούν σε στενότερο εύρος θερμοκρασιών.

**Οπτικές ίνες:** μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως παντός είδους αισθητήρες κυρίως σε δίκτυα επικοινωνιών που επιτρέπουν τη μετάδοση σε μεγαλύτερες αποστάσεις και σε υψηλότερου εύρους ζώνες (ταχύτητα μετάδοσης δεδομένων) σε σχέση με άλλες μορφές επικοινωνίας, όπως ο χαλκός.

**Αλοχρωμικά υλικά (halochromic):** υλικά που αλλάζουν χρώμα ως αποτέλεσμα αλλαγής της οξύτητας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα η διάβρωση στα μέταλλα.

**Σιδηρορευστά (ferrofluid):** υγρό που γίνεται έντονα μαγνητισμένο με τη παρουσία μαγνητικού πεδίου.

**Φωτομηχανικά υλικά:** αλλάζουν το σχήμα τους με την έκθεση στο φως.

**Υλικά με ικανότητα «αυτό-ίασης» (self-healing materials):** υλικά που έχουν την εγγενή ικανότητα να επιδιορθώνουν βλάβες που προκαλούνται από μηχανική χρήση επεκτείνοντας έτσι το χρόνο ζωής του υλικού.

**Διηλεκτρικά ελαστομερή:** ανήκουν στην κατηγορία των έξυπνων υλικών καθώς μπορούν να παραμορφωθούν σε μεγάλο βαθμό, για παράδειγμα υφίστανται παραμορφώσεις έως  $\approx 300\%$  υπό την επίδραση ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου.

**Μαγνητοθερμικά υλικά:** υλικά που υφίστανται μια αναστρέψιμη αλλαγή με τη θερμοκρασία όταν εκτίθενται σε ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο.

**Θερμοηλεκτρικά υλικά:** χρησιμοποιούνται για τη κατασκευή συσκευών που μετατρέπουν διάφορες θερμοκρασίες σε ηλεκτρική ενέργεια και το αντίστροφο. [98]

**Πίνακας 3.1:** Βασικές ιδιότητες έξυπνων υλικών [114].

	Πιεζοκεραμικά (PZT)	Πιεζοπολυμερή (PVDF)	Ηλεκτροσυστολικά (PMN)	Μαγνητοσυστολικά (Terfenol-D)	SMA (Nitinol)
<b>Μέτρο</b>					
<b>Young</b> (GPA)	60.6	2	64.5	29.7	28 - 90
<b>Πυκνότητα</b> (kg/m <sup>3</sup> )	7500	1780	7800	9250	7100
<b>Πυκνότητα</b> <b>Ενέργειας</b> (J/kg)	6.8	0.28	4.1	6.4	250-4000
<b>Υστέρηση</b> <b>Εύρος</b>	10%	>10%	<1%	2%	Υψηλή
<b>θερμοκρασίας</b> (°C)	-20 έως 120	-40 έως 140	0 έως 40	-50 έως 380	-
<b>Εύρος Ζώνης</b> <b>Συχνοτήτων</b> (kHz)	100	100	100	< 10	< 5

### 3.2 Ιστορική αναδρομή πιεζοηλεκτρικών υλικών

Ήδη από την αρχαιότητα, οι ντόπιοι κάτοικοι της Ινδίας και της Κεϋλάνης είχαν παρατηρήσει μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα των κρυστάλλων του ορυκτού τουρμαλίνη (σχήμα 3.1). Όταν το συγκεκριμένο ορυκτό βρισκόταν μέσα σε ζεστή τέφρα, από τη μια πλευρά προσέλκυε τα σωματίδια τέφρας ενώ από την αντίθετη τα απέρριπτε.

Στις αρχές του 18<sup>ου</sup> αιώνα, μέσω του εμπορίου, οι κρύσταλλοι τουρμαλίνη εισήχθησαν στην Ευρώπη. Το 1747, ο *Linne* ονόμασε τους κρυστάλλους τουρμαλίνη «*lapis electricus*» (λατινική φράση που σημαίνει «ηλεκτρική πέτρα»). Η ηλεκτρική συμπεριφοράς του τουρμαλίνη αποδείχθηκε από τον φυσικό *Aepinus*, το 1754 [103].

Ο *Charles Augustin de Coulomb* ήταν ο πρώτος που μελέτησε την παραγωγή ηλεκτρικού φορτίου από μηχανικό χειρισμό της στερεάς ύλης στην πραγματεία του πάνω στον ηλεκτρισμό και το μαγνητισμό μεταξύ του 1781 και του 1806. Το 1817, το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο αναφέρθηκε από τον *Haiiy*, που παρατήρησε την παρουσία ηλεκτρικών φορτίων στην επιφάνεια ενός κρυστάλλου τουρμαλίνη υπό τάση [104].

Το 1824, ο Σκωτσέζος φυσικός *D. Brewster* παρατήρησε ένα φαινόμενο με διάφορους κρυστάλλους και του έδωσε την ονομασία «*πυροηλεκτρισμός*». Πυροηλεκτρισμός είναι η ικανότητα ορισμένων υλικών να παράγουν προσωρινό ηλεκτρικό δυναμικό όταν υπόκεινται σε αλλαγή θερμοκρασίας. Η αλλαγή θερμοκρασίας τροποποιεί ελαφρώς τις θέσεις των ατόμων μέσα στην κρυσταλλική δομή, έτσι ώστε να αλλάζει η πόλωση του υλικού. Η αλλαγή πόλωσης προκαλεί ένα προσωρινό ηλεκτρικό δυναμικό, που εξαφανίζεται ύστερα από ένα διηλεκτρικό χρόνο χαλάρωσης [105].

Ωστόσο, η ανακάλυψη του πιεζοηλεκτρικού φαινομένου αποδόθηκε στους *Pierre* και *Jacques Curie*, το 1880, κατά τη εξαγωγή των πειραματικών τους εργασιών [99, 100, 106] πάνω στην κρυσταλλογραφία. Στις μελέτες τους, βασικό υλικό ήταν το άλας Rochelle. Οι *Curie* προέβλεψαν τις κατηγορίες των κρυστάλλων καθώς και τις συνθήκες υπό τις οποίες παρατηρείται ο πιεζοηλεκτρισμός.

Ο όρος «*πιεζοηλεκτρισμός*» προτάθηκε από τον *Hankel* [107], το 1881. Την ίδια χρονιά, ο *Lippman* προέβλεψε μαθηματικά το αντίστροφο φαινόμενο βασιζόμενος στις θερμοδυναμικές αρχές [108]. Το 1883, οι αδελφοί *Curie* επιβεβαίωσαν το αντίστροφο φαινόμενο μέσα από πειραματικές μελέτες και συνέχισαν εξάγοντας ποσοτικά αποτελέσματα που αποδείκνυαν την πλήρη αναστρεψιμότητα των ηλεκτρο-ελαστο-μηχανικών παραμορφώσεων στους πιεζοηλεκτρικούς κρυστάλλους. Οι αδελφοί *Curie*, εφαρμόζοντας το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο, εφηύραν διάφορα όργανα, όπως τον ηλεκτρομετρητή από χαλαζία, που χρησιμοποιήθηκε ευρέως στη συνέχεια σε πειράματα ραδιενέργειας.

Ο *Kelvin*, το 1893, παρουσίασε διάφορα αναλογικά μοντέλα και έθεσε μερικά από τα πιο βασικά πλαίσια που οδήγησαν στη σύγχρονη θεωρία του πιεζοηλεκτρισμού. Το 1894, ο *Voigt* [109] παρουσίασε τις εξισώσεις τάσης που περιγράφουν τη γραμμική συμπεριφορά των πιεζοηλεκτρικών κρυστάλλων με βάση τη θεωρία του *Kelvin*. Ο *Voigt* χρησιμοποίησε για πρώτη φορά τη λέξη *τανυστής* (tensor) για να περιγράψει τη μηχανική παραμόρφωση.

Μέχρι τις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα, ο πιεζοηλεκτρισμός συνέχισε να αναπτύσσεται τόσο θεωρητικά όσο και πειραματικά σε εργαστήρια. Ωστόσο, οι πρώτες σημαντικές εφαρμογές εμφανίστηκαν λόγω των στρατιωτικών απαιτήσεων του 1<sup>ου</sup> Παγκοσμίου Πολέμου. Συγκεκριμένα, κατά τη διάρκεια του 1914-1918, ο *Paul Langevin* χρησιμοποίησε τον πιεζοηλεκτρικό μετατροπέα χαλαζία ως υποβρύχιο ραντάρ (sonar) για την ανίχνευση υποβρυχίων. Από το 1920 μέχρι τον Β Παγκόσμιο Πόλεμο, το Πολεμικό Ναυτικό των ΗΠΑ χρησιμοποίησε μονοκρυσταλλικό άλας Rochelle ως τον πρότυπο υποβρύχιο κρύσταλλο-μετατροπέα [110].

Το 1921, ο Αμερικανός καθηγητής *Walter G. Cady* εφεύρε τον ταλαντωτή από κρυστάλλους χαλαζία και το φίλτρο κρυστάλλων χαλαζία στενής ζώνης τα οποία χρησιμοποιούνται μέχρι σήμερα στα συστήματα επικοινωνίας. Κατά τη δεκαετία του 1920, ο *Max Born* παρήγαγε θεωρητικούς υπολογισμούς του πλέγματος ενός κρυστάλλου για τον πιεζοηλεκτρικό συντελεστή στο Göttingen. Μέχρι το 1936, συνέχισε τις έρευνές του σχετικά με τη δυναμική θεωρία των κρυσταλλικών πλεγμάτων. Το 1940, ο *Mason* παρήγαγε περισσότερες κοπές κρυστάλλων για πιο ακριβή πρότυπα συχνοτήτων και ανέπτυξε ισοδύναμα μοντέλα κυκλωμάτων για πιεζοηλεκτρικούς συντονιστές.

Ένα σημαντικό στάδιο στην έρευνα των πιεζοηλεκτρικών υλικών και στις εφαρμογές τους ήταν η ανακάλυψη του φαινομένου του σιδηροηλεκτρισμού από τον *Valasek* [111]. Τα σιδηροηλεκτρικά υλικά εμφανίζουν μία ή περισσότερες φάσεις και περιοχές πόλωσης όπου η ηλεκτρική πόλωση μπορεί να αλλάξει κατεύθυνση με ένα κατάλληλα εφαρμοζόμενο ηλεκτρικό πεδίο.

Στο 2<sup>ο</sup> Παγκόσμιο Πόλεμο, τα πιεζοηλεκτρικά υλικά χρησιμοποιήθηκαν ευρέως εξαιτίας της ανάπτυξης ηλεκτρονικών εφαρμογών και της ανακάλυψης των σιδηροηλεκτρικών κεραμικών.

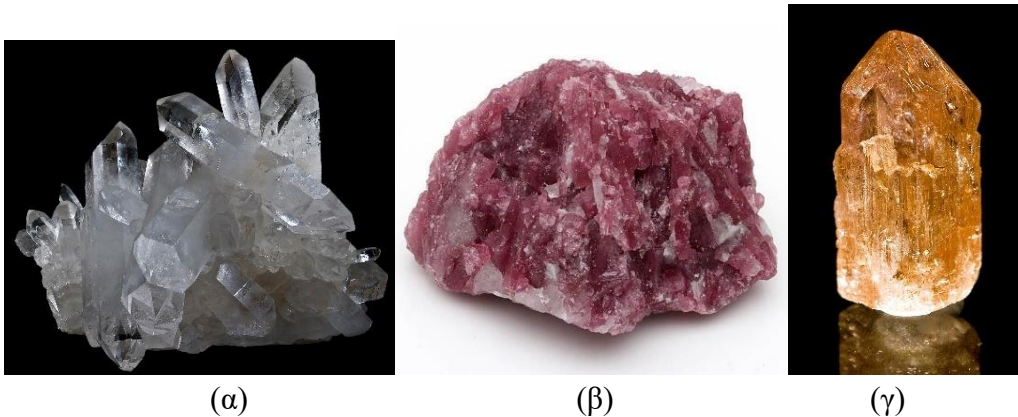
Μετά το τέλος του 2<sup>ου</sup> Παγκοσμίου Πολέμου παράχθηκε το πιεζοηλεκτρικό κεραμικό  $\text{BaTiO}_3$ , και αργότερα, δημιουργήθηκαν πιεζοηλεκτρικά κεραμικά από ζirkόνιο  $\text{PbZrO}_3$ , από τιτάνιο  $\text{PbTiO}_3$  ή κεραμικά πιεζοηλεκτρικά PZT όπου αντικατέστησαν το  $\text{BaTiO}_3$  σε όλους τους τομείς των πιεζοηλεκτρικών εφαρμογών εξαιτίας των εξαιρετικών τους ιδιοτήτων [112].

Σήμερα, τα πιεζοηλεκτρικά υλικά που χρησιμοποιούνται κατά κόρον είναι τα πολυκρυσταλλικά σιδηροηλεκτρικά κεραμικά, όπως το PZT, και τα πιεζοηλεκτρικά πολυμερή, όπως το PVDF λόγω του χαμηλού κόστους κατασκευής τους και των σχεδόν αυθαίρετων πιθανών μορφών που μπορούν να πάρουν. Επίσης, τα υλικά αυτά, λόγω των πολύ καλών πιεζοηλεκτρικών και διηλεκτρικών ιδιοτήτων τους, βρίσκουν πολλές εφαρμογές που τα κάνουν ιδιαίτερα χρήσιμα όπως στην κατασκευή διεγερτών και συστημάτων συγκομιδής ενέργειας [112, 113]. Επιπλέον, οι επιστήμονες και ερευνητές συνεχίζουν τη μελέτη και εξερεύνηση νέων υλικών πάνω στην πιεζοηλεκτρική τεχνολογία, επεκτείνοντας τις πιθανές χρήσεις της σε καινούριες τεχνολογικές εφαρμογές αιχμής.

### 3.3 Πιεζοηλεκτρικά υλικά και εφαρμογές

Ο Πιεζοηλεκτρισμός (*Piezoelectricity*) είναι το φαινόμενο κατά το οποίο ορισμένα υλικά δημιουργούν ηλεκτρικό φορτίο ως απόκριση στην εφαρμοσμένη μηχανική τάση ή πίεση. Τα υλικά, αυτά μπορούν να λειτουργήσουν αντίστροφα, δηλαδή να υποστούν μηχανική παραμόρφωση όταν υποβάλλονται σε ένα ηλεκτρικό πεδίο. Αυτή η μοναδική ιδιότητα είναι αποτέλεσμα της κρυσταλλικής δομής του υλικού και της ικανότητάς του να μετατρέπει τη μηχανική ενέργεια σε ηλεκτρική ενέργεια και αντίστροφα.

Ο όρος «πιεζοηλεκτρισμός» προέρχεται από τις ελληνικές λέξεις «πίεζω», που σημαίνει «πιέζω, συμπιέζω» και «ηλεκτρισμός» που υποδηλώνει τη δημιουργία ηλεκτρικού φορτίου. Ο πιεζοηλεκτρισμός ανακαλύφθηκε από τους φυσικούς *Pierre* και *Jacques Curie* το 1880 [99-100] όταν παρατήρησαν πως ορισμένοι κρύσταλλοι, όπως το τρυγικό καλιονάτριο, γνωστό ως «άλας Seignette» ή «άλας Rochelle» και ο χαλαζίας (σχήμα 3.1), παρουσίαζαν αυτή τη συμπεριφορά.



**Σχήμα 3.1:** Πιεζοηλεκτρικοί κρύσταλλοι: (α) χαλαζίας, (β) τουρμαλίνης και (γ) τοπάζιο [101].

Τα πιεζοηλεκτρικά υλικά βρίσκουν ευρύ φάσμα εφαρμογών: σε αισθητήρες και μετατροπείς (sensors and transducers), ενεργοποιητές (actuators), σε συστήματα συγκομιδής ενέργειας (energy harvesting systems), σε εφαρμογές υπερήχων (ultrasonic applications), σε σόναρ και ακουστικές συσκευές (sonar and acoustic devices), σε πιεζοηλεκτρικούς αναφλεκτήρες (piezoelectric igniters), ιατρικές συσκευές (σχήμα 3.2), μουσικά όργανα, μικρόφωνα, ακουστικά και στην παρακολούθηση της δομικής «υγείας» (structural health monitoring).

Ιστορικά, τα πιεζοηλεκτρικά υλικά που βρήκαν γόνιμο έδαφος στις εφαρμογές είναι το άλας Rochelle και ο χαλαζίας. Σήμερα, χαρακτηριστικά παραδείγματα πιεζοκεραμικών υλικών με ευρύ φάσμα σε εφαρμογές είναι τα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά όπως το PZT (*Lead Zirconate Titanate*) που χρησιμοποιείται ως διεγέρτης ή αισθητήρας για ευρύ φάσμα συχνοτήτων, συμπεριλαμβανομένων των εφαρμογών υπερήχων και τα πιεζοηλεκτρικά πολυμερή, όπως το φθοριούχο πολυβινυλιδένιο (PVDF) που χρησιμοποιούνται κυρίως ως αισθητήρες λόγω της χαμηλής ακαμψίας τους και λειτουργούν ως συστήματα ελέγχου σε δύσκαμπτες ελαφριές δομές.

**Αισθητήρες και μετατροπείς:** Οι πιεζοηλεκτρικοί αισθητήρες χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της πίεσης, της δύναμης, της επιτάχυνσης και των κραδασμών. Βρίσκονται συνήθως σε ιατρικές συσκευές υπερήχων, βιομηχανικό εξοπλισμό, ακόμη και ηλεκτρονικά είδη ευρείας κατανάλωσης, όπως οθόνες αφής και επιταχυνσιόμετρα.

**Ενεργοποιητές:** Τα πιεζοηλεκτρικά υλικά χρησιμοποιούνται σε ενεργοποιητές για τη δημιουργία ακριβών μηχανικών κινήσεων με την εφαρμογή ηλεκτρικού πεδίου. Χρησιμοποιείται σε εκτυπωτές inkjet για εκτόξευση σταγονιδίων, μηχανισμούς αυτόματης εστίασης σε κάμερες και συστήματα εντοπισμού θέσης ακριβείας.

**Συγκομιδή ενέργειας:** Τα πιεζοηλεκτρικά υλικά μετατρέπουν μηχανικούς κραδασμούς και κίνηση σε ηλεκτρική ενέργεια. Χρησιμοποιούνται για την τροφοδοσία μικρών ηλεκτρονικών συσκευών, αισθητήρων, ακόμη και φορητών τεχνολογίας, αξιοποιώντας τους κραδασμούς του περιβάλλοντος.

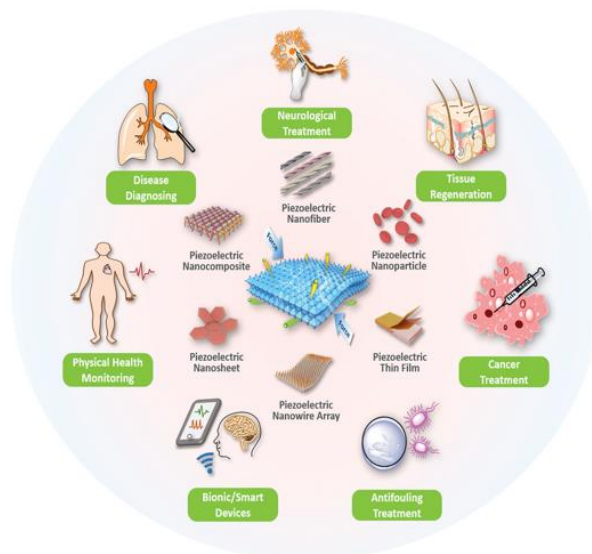
**Εφαρμογές με υπερήχους:** Οι πιεζοηλεκτρικοί κρύσταλλοι χρησιμοποιούνται σε μετατροπείς υπερήχων για ιατρική απεικόνιση (υπερήχων) και βιομηχανικές εφαρμογές όπως καθαρισμός, συγκόλληση και μέτρηση πάχους.

**Σόναρ και ακουστικές συσκευές:** Τα πιεζοηλεκτρικά υλικά χρησιμοποιούνται σε υποβρύχια συστήματα σόναρ για τη δημιουργία και λήψη ηχητικών κυμάτων. Χρησιμοποιούνται επίσης σε ακουστικές συσκευές όπως βομβητές και συναγερμοί.

**Πιεζοηλεκτρικοί αναφλεκτήρες:** Χρησιμοποιούνται σε ορισμένες συσκευές αερίου ως πηγές ανάφλεξης, αντικαθιστώντας τους παραδοσιακούς αναφλεκτήρες με σπινθήρα.

**Μουσικά όργανα:** Ορισμένα μουσικά όργανα, όπως οι ηλεκτρικές κιθάρες, χρησιμοποιούν πιεζοηλεκτρικά πικάπ για να μετατρέψουν τις μηχανικές δονήσεις των χορδών σε ηλεκτρικά σήματα για ενίσχυση.

**Παρακολούθηση δομικής υγείας:** Οι πιεζοηλεκτρικοί αισθητήρες μπορούν να ενσωματωθούν σε δομές για την παρακολούθηση της υγείας τους ανιχνεύοντας αλλαγές στους κραδασμούς, οι οποίες μπορούν να βοηθήσουν στον εντοπισμό ελαττωμάτων ή ζημιών.

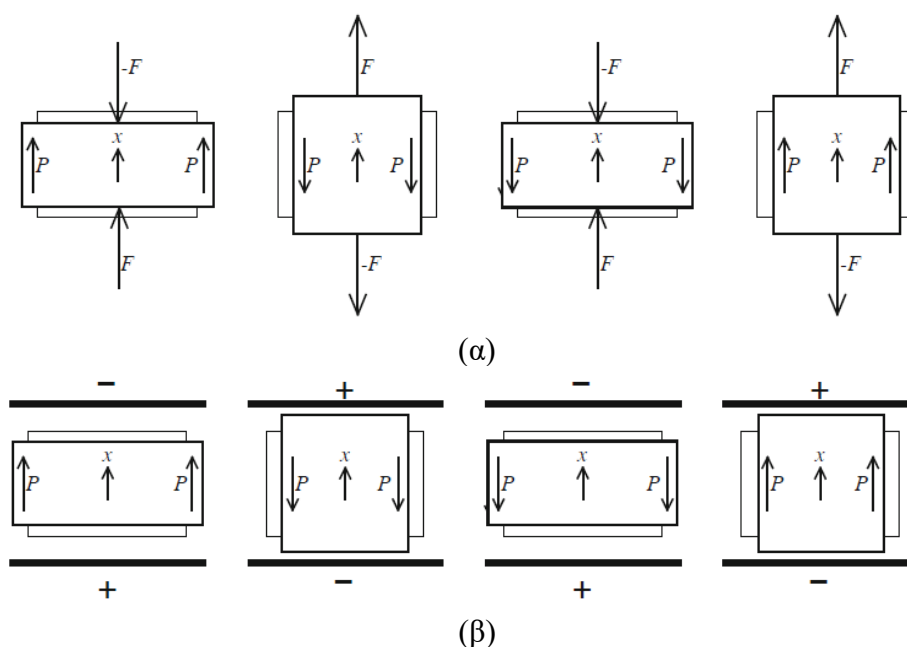


**Σχήμα 3.2:** Βιοϊατρικές εφαρμογές των πιεζοηλεκτρικών υλικών [102].

### 3.4 Το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο

Ο πιεζοηλεκτρισμός είναι η γραμμική αλληλεπίδραση μεταξύ μηχανικών και ηλεκτρικών ιδιοτήτων σε μη-κεντροσυμμετρικούς κρυστάλλους και σε παρόμοιες ανισότροπες δομές κρυστάλλων. Μπορεί να θεωρηθεί ως η «μεταφορά» μεταξύ ηλεκτρικής και μηχανικής ενέργειας. Τέτοιες μεταφορές συμβαίνουν μόνο αν το υλικό αποτελείται από φορτισμένα σωματίδια και μπορεί να είναι πολωμένο. Όταν το υλικό επιβάλλεται σε μηχανική παραμόρφωση, παράγεται ηλεκτρική πόλωση. Η διαδικασία αυτή αναφέρεται ως «ευθύ πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο» (σχήμα 3.3 (α)).

Με άλλα λόγια, ως ευθύ πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο μπορεί να οριστεί η αλλαγή της ηλεκτρικής πόλωσης σε τάση. Ένα υλικό λέγεται πιεζοηλεκτρικό εάν η εφαρμογή εξωτερικής μηχανικής τάσης προκαλεί διηλεκτρική μετατόπιση σε αυτό το υλικό. Η μετατόπιση, αυτή, εκδηλώνεται ως εσωτερική ηλεκτρική πόλωση. Το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο εξαρτάται από τη συμμετρία του κρυστάλλου.



**Σχήμα 3.3:** Το (α) ευθύ και το (β) αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο [105].

Ένας κρύσταλλος με μικρή συμμετρία παράγει ηλεκτρική πόλωση υπό την επίδραση εξωτερικής μηχανικής δύναμης. Οι κρύσταλλοι που ανήκουν στις 11 ομάδες σημείων (point groups) με κέντρο συμμετρίας, δεν εμφανίζουν πιεζοηλεκτρική συμπεριφορά. Οι κλάσεις χωρίς κέντρο συμμετρίας εμφανίζουν πιεζοηλεκτρικές ιδιότητες με μοναδική εξαίρεση την κλάση 29 (enantiomorphous hemihedral), η οποία, αν και δεν έχει κέντρο συμμετρίας, εμφανίζει άλλα στοιχεία συμμετρίας που την αποκλείουν από την πιεζοηλεκτρική ιδιότητα [105].

Στενά συνδεδεμένο με το ευθύ πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο είναι το «αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο» (σχήμα 3.3 (β)), όπου ένας πιεζοηλεκτρικός κρύσταλλος οδηγείται σε μηχανική παραμόρφωση εάν εφαρμοστεί ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο. Και τα δύο φαινόμενα είναι η εκδήλωση της ίδιας θεμελιώδους ιδιότητας του μη κεντρικού κρυστάλλου.

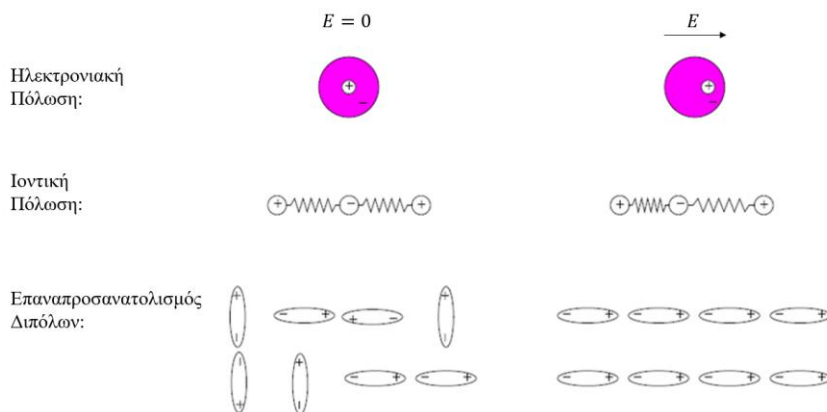
Για ένα υλικό που παρουσιάζει μια ανισοτροπική ιδιότητα όπως ο πιεζοηλεκτρισμός, η κρυσταλλική του δομή δεν πρέπει να έχει κέντρο συμμετρίας. Οι κρύσταλλοι αυτοί, ανάλογα με τους βαθμούς συμμετρίας τους, ταξινομούνται σε 7 συστήματα: τρικλινικά, μονοκλινικά, ορθορομβικά, τετραγωνικά, τριγωνικά, εξαγωνικά και κυβικά συστήματα. Διακρίνονται, επίσης, σε 32 κατηγορίες ανάλογα με τη συμμετρία τους. 21 κρυσταλλικές δομές από τις 32 είναι μη κεντροσυμμετρικές και από αυτές οι 20 μπορούν να εμφανίσουν το πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο κατά μήκος των κατευθυντήριων αξόνων. Εντούτοις, 10 από τις 20 πιεζοηλεκτρικές κατηγορίες έχουν μοναδικό άξονα κατεύθυνσης κατά μήκος του οποίου εμφανίζουν *αυθόρμητη πόλωση*  $P_s$ , ανάλογα με το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας. Τέτοιοι κρύσταλλοι ονομάζονται πολικοί κρύσταλλοι και το φαινόμενο «*πυροηλεκτρικό φαινόμενο*». Διακρίνεται μια ειδική υποομάδα της πυροηλεκτρικής ομάδας, με βάση τον αναπροσανατολισμό και το μεταβλητό μέγεθος της κατάστασης πόλωσης υπό την επίδραση εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου. Από την υποομάδα προέρχονται τα πιεζοηλεκτρικά υλικά που χαρακτηρίζονται «*σιδηροηλεκτρικοί κρύσταλλοι*».

Όπως ήδη αναφέρθηκε, στα πιεζοηλεκτρικά υλικά, η ηλεκτρική πόλωση είναι σημαντικός παράγοντας. Ένα υλικό που μπορεί να είναι πολωμένο με την εφαρμογή ενός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου καλείται *διηλεκτρικό*. Μπορούν να διακριθούν τρεις πηγές της μακροσκοπικής πόλωσης (σχήμα 3.4) ενός διηλεκτρικού υλικού:

*Ηλεκτρονιακή πόλωση*: με εφαρμογή ενός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου, δημιουργείται μακροσκοπικό δίπολο από την παραμόρφωση του ηλεκτρονιακού νέφους. Η ηλεκτρονιακή πόλωση αντιπροσωπεύει την παραμόρφωση της κατανομής ηλεκτρονίων ή της κίνησης γύρω από τους πυρήνες σε ένα ηλεκτρικό πεδίο.

*Ιονική πόλωση*: με εφαρμογή ενός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου, τα ανιόντα προσελκύνονται από την άνοδο και τα κατιόντα από την κάθοδο, δημιουργώντας ένα δίπολο από την παραμόρφωση των δεσμών μεταξύ ανιόντων και κατιόντων. Προκύπτει από τη μεταβολή της διπολικής ροπής που συνοδεύει την έκταση των χημικών δεσμών ανάμεσα σε ανόμοια άτομα στα μόρια.

*Επαναπροσανατολισμός διπόλων*: με εφαρμογή ενός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου, οι πολωμένες περιοχές επαναπροσανατολίζονται. Η πόλωση του προσανατολισμού προκαλείται από τη μερική ευθυγράμμιση των πολικών μορίων, δηλαδή των μορίων που έχουν μόνιμες διπολικές ροπές, σε ένα ηλεκτρικό πεδίο. Ο μηχανισμός, αυτός, οδηγεί σε πόλωση που εξαρτάται από τη θερμοκρασία.

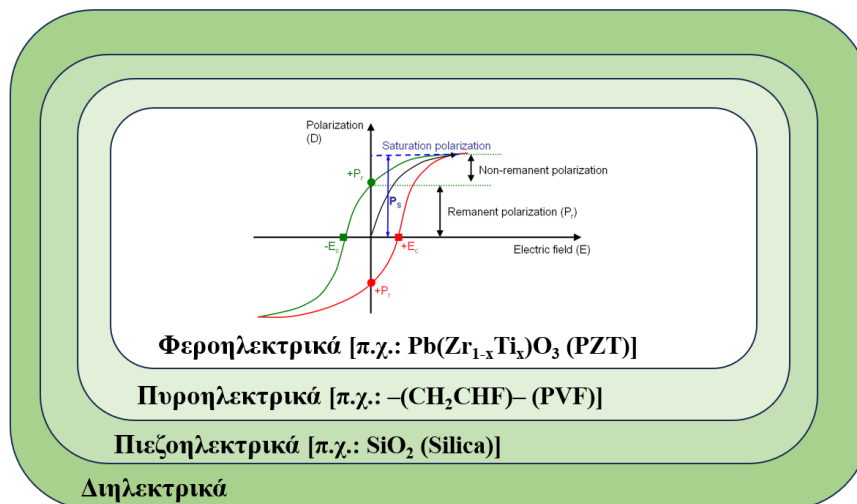


**Σχήμα 3.4:** Πηγές προέλευσης της πόλωσης [104].

### 3.5 Κατηγορίες πιεζοηλεκτρικών υλικών

Στον ηλεκτρομαγνητισμό, ένα διηλεκτρικό υλικό (ή διηλεκτρικό μέσο) είναι ένας ηλεκτρικός μονωτής που μπορεί να πολωθεί με την εφαρμογή ενός ηλεκτρικού πεδίου. Όταν ένα διηλεκτρικό υλικό τοποθετείται σε ένα ηλεκτρικό πεδίο, τα ηλεκτρικά φορτία δεν ρέουν μέσα από το υλικό όπως συμβαίνει σε έναν ηλεκτρικό αγωγό αλλά μετατοπίζονται ελάχιστα, από τις μέσες θέσεις ισορροπίας τους, προκαλώντας διηλεκτρική πόλωση. Λόγω της διηλεκτρικής πόλωσης, τα θετικά φορτία μετατοπίζονται προς την κατεύθυνση του πεδίου και τα αρνητικά φορτία μετατοπίζονται προς την αντίθετη κατεύθυνση. Έτσι δημιουργείται ένα εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο που μειώνει το συνολικό πεδίο μέσα στο ίδιο το διηλεκτρικό. Εάν ένα διηλεκτρικό αποτελείται από ασθενώς συνδεδεμένα μόρια, αυτά τα μόρια όχι μόνο πολώνονται, αλλά και επαναπροσανατολίζονται έτσι ώστε οι άξονες συμμετρίας τους να ευθυγραμμίζονται με το πεδίο.

Η μελέτη των διηλεκτρικών ιδιοτήτων αφορά την αποθήκευση και τη διασπορά ηλεκτρικής και μαγνητικής ενέργειας σε υλικά. Τα διηλεκτρικά είναι σημαντικά για την εξήγηση διαφόρων φαινομένων στην ηλεκτρονική, την οπτική, τη φυσική στερεάς κατάστασης και τη βιοφυσική κυττάρων. Υποομάδα των διηλεκτρικών υλικών είναι τα πιεζοηλεκτρικά υλικά που εντάσσονται σε επιμέρους υποκατηγορίες όπως τα φεροηλεκτρικά και τα πυροηλεκτρικά υλικά.



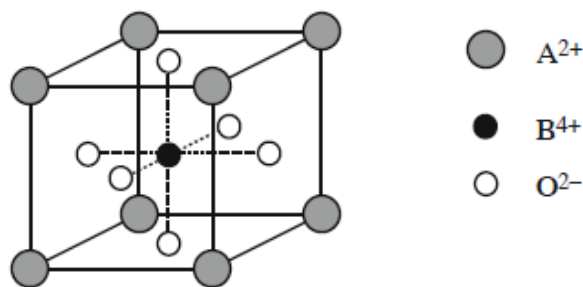
Σχήμα 3.5: Σχηματική απεικόνιση υποκατηγοριών διηλεκτρικών υλικών.

#### Φεροηλεκτρικά κεραμικά

Τα φεροηλεκτρικά ή σιδηροηλεκτρικά υλικά έχουν τη δομή *περοβσκίτη* (σχήμα 3.6) και πήραν το όνομά τους από τον ορυκτό περοβσκίτη ( $\text{CaTiO}_3$ ). Μεγάλος αριθμός ενώσεων ανήκει σε αυτή την ομάδα υλικών με κοινό χημικό τύπο  $\text{ABO}_3$ . Η ατομική θέση A στη δομή καταλαμβάνεται από ένα μονοσθενές, δισθενές ή τρισθενές μέταλλο και η θέση B από ένα πεντασθενές, τετρασθενές ή τρισθενές στοιχείο. Ο φεροηλεκτρισμός συναντάται κυρίως σε διπλά οξειδία (π.χ.  $\text{BaTiO}_3$ ,  $\text{KNbO}_3$ ,  $\text{PbTiO}_3$ ,  $\text{KTaO}_3$ ) και σε διπλές φθοριούχες δομές (π.χ.  $\text{KMgF}_3$ ,  $\text{KZnF}_3$ ). Τα φεροηλεκτρικά

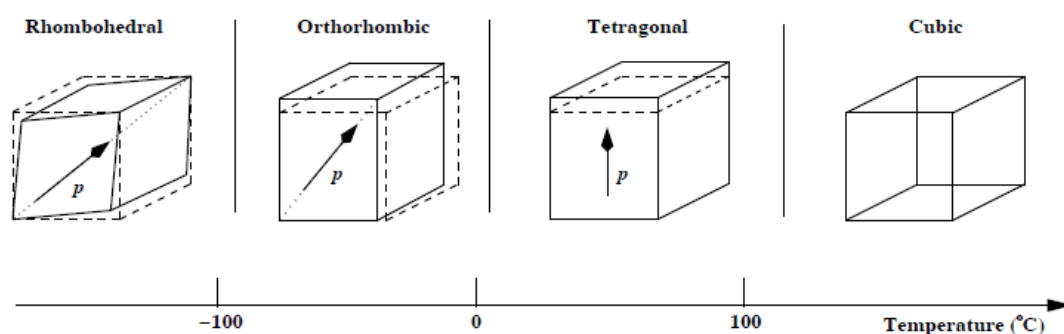


υλικά με δομή περοβσκίτη που χρησιμοποιούνται πιο συχνά είναι: καθαρές ενώσεις:  $\text{BaTiO}_3$ ,  $\text{KNbO}_3$ ,  $\text{PbTiO}_3$  και στερεά διαλύματα: PZN-PT, PMN-PT, PZT [105].



**Σχήμα 3.6:** Μοναδιαία κυψελίδα περοβσκιτικής δομής [105].

Σε φεροηλεκτρικά υλικά όπως το  $\text{BaTiO}_3$ , πάνω από τη θερμοκρασία Curie ( $T_c=130^\circ\text{C}$ ), η κρυσταλλική δομή του είναι κυβική με το ιόν του τιτανίου να βρίσκεται στο κέντρο της συμμετρίας. Με μείωση της θερμοκρασίας κάτω από το σημείο Curie, η κρυσταλλική δομή αλλάζει σε πιο σύνθετη δομή και παρουσιάζεται ένα φυσικό ηλεκτρικό δίπολο (*ferroelectricity*). Η μείωση της θερμοκρασίας προκαλεί μεταβολή της δομής του κρυστάλλου του τιτανικού βαρίου από κυβική, σε τετραγωνική, στη συνέχεια σε ορθορομβική και τέλος σε ρομβοεδρική. Ταυτόχρονα, εμφανίζεται αυθόρμητη πόλωση. Η κατεύθυνση της πόλωσης είναι κατά μήκος μιας εκ των τριών ακμών της τετραγωνικής φάσης, κατά μήκος μιας εκ των έξι επιφανειακών διαγωνίων στην ορθορομβική φάση και κατά μήκος μιας εκ των τεσσάρων επίπεδων διαγωνίων στην ρομβοεδρική φάση (σχήμα 3.7). Η κατεύθυνση της πόλωσης μπορεί να αλλάξει όταν εφαρμόζεται ένα ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των επιτρεπόμενων κατευθύνσεων κάθε φεροηλεκτρικής φάσης.

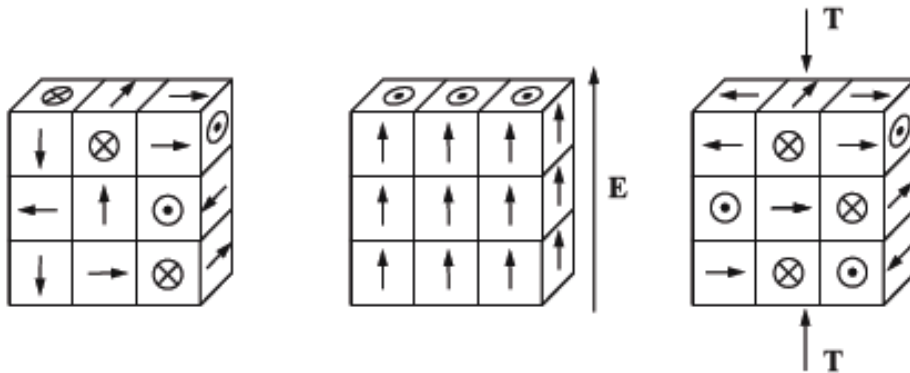


**Σχήμα 3.7:** Παραμόρφωση πλέγματος μοναδιαίας κυψελίδας του  $\text{BaTiO}_3$  [117].

Τα φεροηλεκτρικά κεραμικά διαθέτουν περιοχές με ομοιόμορφη πόλωση που ονομάζονται φεροηλεκτρικά πεδία ή περιοχές *Weiss* (*Weiss domains*). Τα σύνορα που διαχωρίζουν τις περιοχές σε ένα κρύσταλλο ονομάζονται τοιχώματα (*domain wall*). Σε μια περιοχή, όλα τα ηλεκτρικά δίπολα ευθυγραμμίζονται προς την ίδια κατεύθυνση. Συνήθως, ένας φεροηλεκτρικός μονοκρύσταλλος αποτελείται από πολλές περιοχές, σε κάθε μια από τις οποίες το ηλεκτρικό δίπολο είναι

ευθυγραμμισμένο σε μια συγκεκριμένη επιτρεπόμενη κατεύθυνση (σχήμα 3.8). Κάθε επιτρεπόμενη κατεύθυνση έχει την ίδια πιθανότητα εμφάνισης.

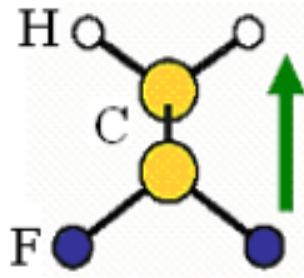
Το κύριο χαρακτηριστικό του φεροηλεκτρισμού είναι ο αναπροσανατολισμός των περιοχών στην κατάσταση πόλωσης. Τα φεροηλεκτρικά κεραμικά μπορούν να γίνουν πιεζοηλεκτρικά σε οποιαδήποτε επιλεγμένη πολική κατεύθυνση ανάλογα με την επεξεργασία της πολικότητας. Αυτή η επεξεργασία συνεπάγεται την έκθεση του υλικού σε υψηλό ηλεκτρικό πεδίο, σε θερμοκρασία όχι κατώτερη από το σημείο Curie, και έπειτα ψύξη στη θερμοκρασία δωματίου με το εφαρμοζόμενο πεδίο. Αυτό οδηγεί σε μια λογική ευθυγράμμιση του ηλεκτρικού διπόλου των επιμέρους περιοχών. Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί μια τέλεια ευθυγράμμιση επειδή ο προσανατολισμός των τομέων είναι τυχαίος και επιτρέπονται μόνο ορισμένες διπολικές κατευθύνσεις εντός του κρυστάλλου. Ωστόσο, υπάρχουν αρκετές επιτρεπόμενες κατευθύνσεις σε κάθε περιοχή και για το λόγο αυτό είναι εφικτός ένας λογικός βαθμός ευθυγράμμισης με το πεδίο. Μετά την ψύξη και την αφαίρεση του ηλεκτρικού πεδίου, τα δίπολα δεν μπορούν εύκολα να επιστρέψουν στις αρχικές τους κατευθύνσεις και επιτυγχάνεται μια παραμένουσα πόλωση του υλικού. Έτσι, το σιδηροηλεκτρικό υλικό έχει γίνει μόνιμα πιεζοηλεκτρικό και μπορεί να μετατρέπει τη μηχανική ενέργεια σε ηλεκτρική ενέργεια και αντίστροφα.



**Σχήμα 3.8:** Προσανατολισμός περιοχών φεροηλεκτρικού κρυστάλλου. Από αριστερά: μη πολωμένος, πολωμένος και αποπολωμένος κρύσταλλος [118].

### Πιεζοηλεκτρικά πολυμερή

Ο πιεζοηλεκτρισμός μπορεί επίσης να επιτευχθεί με προσανατολισμό των μοριακών διπόλων των πολικών πολυμερών στην ίδια κατεύθυνση. Στο πολυμερές PVDF, τα άτομα φθορίου είναι πολύ πιο ηλεκτροαρνητικά από τα άτομα άνθρακα και προσελκύουν ηλεκτρόνια από τα άτομα άνθρακα. Η έλξη ηλεκτρονίων έχει ως αποτέλεσμα την πόλωση των μοριακών τμημάτων. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την έκθεση του πολυμερούς σε επαρκώς υψηλό ηλεκτρικό πεδίο μετά από μηχανική διάταση (*stretching*). Το PVDF (σχήμα 3.9) είναι πολύ ελαφρύ, εύκαμπτο και μπορεί εύκολα να μορφοποιηθεί. Έχει καλή σταθερότητα με την πάροδο του χρόνου και δεν εμφανίζει σοβαρή αποπόλωση όταν εκτίθεται σε πολύ υψηλά εναλλασσόμενα ηλεκτρικά πεδία. Το PVDF είναι το πλέον κατάλληλο σε εφαρμογές ανίχνευσης, αλλά δεν είναι αρκετά αποτελεσματικό ως διεγέρτης σε δύσκαμπτες δομές.



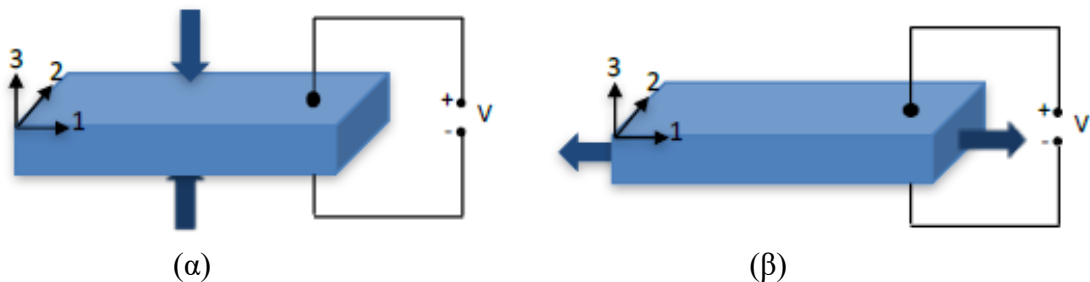
Σχήμα 3.9: Μοναδιαία κυψελίδα του PVDF ( $-\text{CH}_2\text{-CF}_2$ ) [114].

### Πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες και εφαρμογές

Οι πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες εφαρμόζονται σε πλήθος συσκευών μαζικής παραγωγής, όπως: συσκευές εκπομπής ήχου, μετατροπείς, αισθητήρες, διεγέρτες κάμψης σε μηχανές ύφανσης, κεφαλές εκτυπωτών, διεγέρτες για κάμψη δοκών σε βαλβίδες, οπτικά συστήματα και πρόσφατα, ως πολυστρωματικοί διεγέρτες στα συστήματα ψεκασμού στην αυτοκινητοβιομηχανία. Μερικά από τα πλεονεκτήματα που τους επιτρέπουν την χρήση σε τόσο ευρύ φάσμα εφαρμογών, είναι η δυνατότητα δημιουργίας συμπαγών κατασκευών που καταλαμβάνουν μικρό όγκο, η υψηλή ακρίβεια διέγερσης και οι πάρα πολύ μικροί χρόνοι απόκρισης που διαθέτουν [115].

Το μεγαλύτερο κομμάτι των πιεζοηλεκτρικών διεγερτών έχει κυρίως τη μορφή «πολυστρωματικών» δηλαδή πολλών λεπτών πιεζοηλεκτρικών στρωμάτων και τη μορφή δοκών υπό κάμψη. Οι διεγέρτες με τη μορφή πολυστρωματικών βασίζονται στο διαμήκες πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο (*longitudinal piezoelectric effect*) τύπου-33d (σχήμα 3.10(α)) και αποτελούνται συνήθως από αρκετά κεραμικά πιεζοηλεκτρικά στρώματα με μεταβαλλόμενη διεύθυνση ηλεκτρικής πόλωσης.

Οι επαφές των ηλεκτροδίων του κάθε στρώματος χρησιμοποιούνται για τη καθοδήγηση του διεγέρτη. Με αυτόν τον τύπο διεγέρτη μπορούν να επιτευχθούν πολύ ισχυρές δυνάμεις (μηχανικές τάσεις) με ταυτόχρονες μικρές επιμηκύνσεις (ελαστικές παραμορφώσεις), της τάξης μερικών μικρομέτρων, καθώς και πολύ υψηλά ηλεκτρικά δυναμικά λειτουργίας, της τάξης των kV. Οι πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες με τη μορφή δοκών κάμψης βασίζονται στο εγκάρσιο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο (*transverse piezoelectric effect*) τύπου-31d (σχήμα 3.10(β)) και εφαρμόζονται εκεί που απαιτούνται μεγάλες παραμορφώσεις. Τοποθετούνται συνήθως στην επιφάνεια εύκαμπτων ελαστικών δοκών.

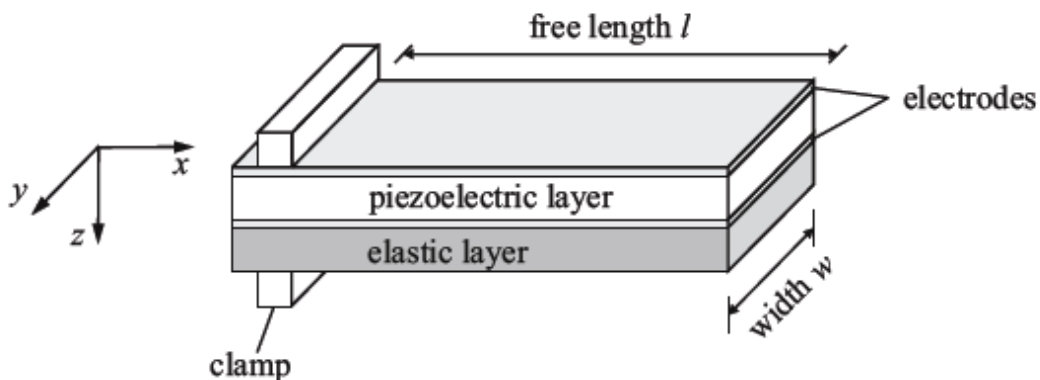


Σχήμα 3.10: Σχηματική απεικόνιση τύπων μετατροπής πιεζοηλεκτρικών υλικών. (α) τρόπος τύπου-33d και (β) τρόπος τύπου-31d [114].

Παραδείγματα πιεζοηλεκτρικών διεγερτών, με τη μορφή δοκών κάμψης, είναι: οι *μονόμορφες δομές* (monomorphs) που αποτελούνται από ένα ενεργό πιεζοηλεκτρικό στρώμα και ένα παθητικό ελαστικό στρώμα, οι *δίμορφες δομές* (bimorphs) που αποτελούνται από δυο ενεργά πιεζοηλεκτρικά στρώματα και οι *τρίμορφες δομές* (trimorphs) που αποτελούνται από ένα παθητικό ελαστικό στρώμα ανάμεσα σε δυο ενεργά πιεζοηλεκτρικά στρώματα.

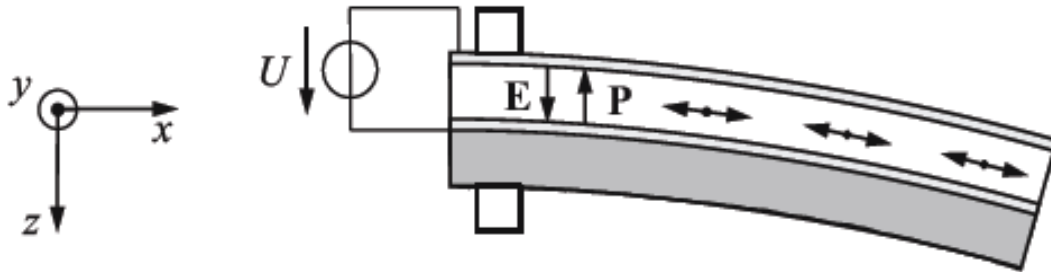
Πρόσφατες τεχνικές εξελίξεις οδήγησαν στη δημιουργία μονόμορφων πιεζοηλεκτρικών δοκών με *πολυστρωματική τεχνολογία*, όπου ο διεγέρτης αποτελείται από αρκετά παθητικά ελαστικά εύκαμπτα και ενεργά πιεζοηλεκτρικά στρώματα. Η πολυστρωματική τεχνολογία έχει ως αποτέλεσμα το πλεονέκτημα της χρήσης ακόμα χαμηλότερων ηλεκτρικών δυναμικών λειτουργίας, επεκτείνοντας έτσι σημαντικά το πεδίο των βιομηχανικών εφαρμογών των πιεζοηλεκτρικών δοκών κάμψης.

Όλα τα είδη των πιεζοηλεκτρικών διεγερτών, βασίζονται το αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο. Εφαρμόζοντας δηλαδή ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο στο πιεζοηλεκτρικό υλικό, εμφανίζονται εκτάσεις και συμπίεσεις του υλικού οι οποίες εξαρτώνται απ' τον προσανατολισμό του πεδίου σε σχέση με τη κρυσταλλική δομή στην περίπτωση των μονοκρυσταλλικών υλικών και από τον προσανατολισμό του πεδίου σε σχέση με τη παραμένουσα πόλωση στην περίπτωση των σιδηροηλεκτρικών κεραμικών. Η μεταβολή του μήκους του πιεζοηλεκτρικού υλικού, χρησιμοποιείται συνήθως για την δημιουργία γραμμικών διεγερτών (σωρευμένοι διεγέρτες), αξιοποιώντας το διάμηκες πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο. Αυτό το είδος ταλαντωτών, χαρακτηρίζονται από μικρές μετατοπίσεις και τη δημιουργία υψηλών δυνάμεων. Όπως ήδη αναφέρθηκε, εφαρμόζοντας ένα ηλεκτρικό πεδίο στη διεύθυνση της παραμένουσας πόλωσης  $P_r$  του σιδηροηλεκτρικού κεραμικού, εκτός από τη χωρική ευθυγράμμιση των περιοχών πόλωσης του υλικού, αυτό έχει ως αποτέλεσμα και την αύξηση ή μείωση της συνολικής παραμόρφωσης κατά μήκος της διεύθυνσης του ηλεκτρικού πεδίου. Αυτές οι διαμήκεις εκτάσεις ή συμπίεσεις του υλικού, συνδυάζονται με εγκάρσιες συμπίεσεις ή εκτάσεις κάθετες στη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου (εγκάρσιο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο). Αυτό το χαρακτηριστικό των σιδηροηλεκτρικών κεραμικών από PZT, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την δημιουργία των λεγόμενων *μονόμορφων δομών* (σχήμα 3.11).



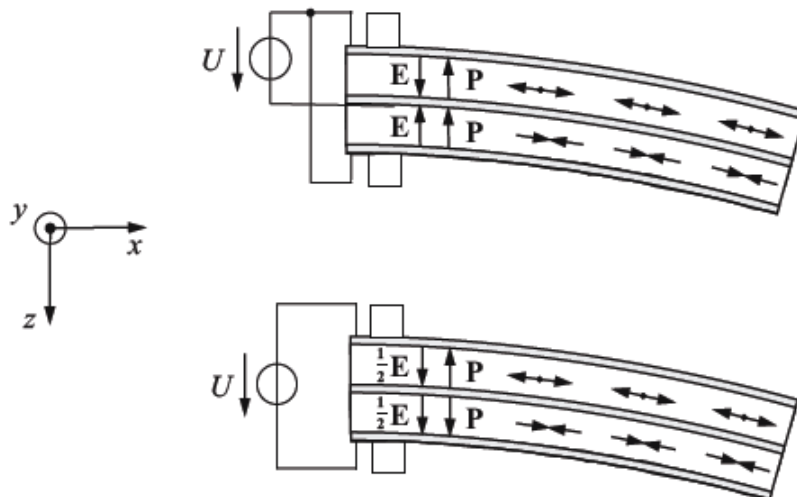
Σχήμα 3.11: Η τυπική μονόμορφη δομή (monomorph) [118].

Μια τέτοια δομή, αποτελείται από ένα ενεργό πιεζοκεραμικό και ένα παθητικό ελαστικό στρώμα. Αν το πιεζοκεραμικό στοιχείο αποτελείται από ένα μονό στρώμα, τότε ονομάζεται *μονοστρωματικού* τύπου. Αν το πιεζοκεραμικό στοιχείο αποτελείται από περισσότερα ενεργά πιεζοηλεκτρικά στρώματα, τότε αναφερόμαστε σε *πολυστρωματικό* τύπο.



**Σχήμα 3.12:** Συμπεριφορά μονόμορφης δομής που υπόκειται σε ηλεκτρικό πεδίο [118].

Η κίνηση του πιεζοκεραμικού στοιχείου, που οφείλεται στην έκταση ή την συμπίεση του, περιορίζεται από το παθητικό ελαστικό στοιχείο. Αυτό έχει σαν συνέπεια την εμφάνιση μηχανικής ροπής με αποτέλεσμα την παραμόρφωση της συνολικής δομής (σχήμα 3.12). Η παραμόρφωση της συνολικής δομής στη διεύθυνση z, είναι πολύ μεγαλύτερη από την παραμόρφωση του πιεζοηλεκτρικού στοιχείου στη διεύθυνση x. Έτσι, οι μικρές μεταβολές του μήκους του πιεζοκεραμικού στοιχείου μετατρέπονται σε παραμόρφωση κάμψης. Με τον τρόπο αυτό, είναι δυνατό να δημιουργηθούν μεγάλες παραμορφώσεις στη διεύθυνση z, ακόμα και όταν ο διεγέρτης ενεργοποιείται με χαμηλά ηλεκτρικά δυναμικά (24-200V).

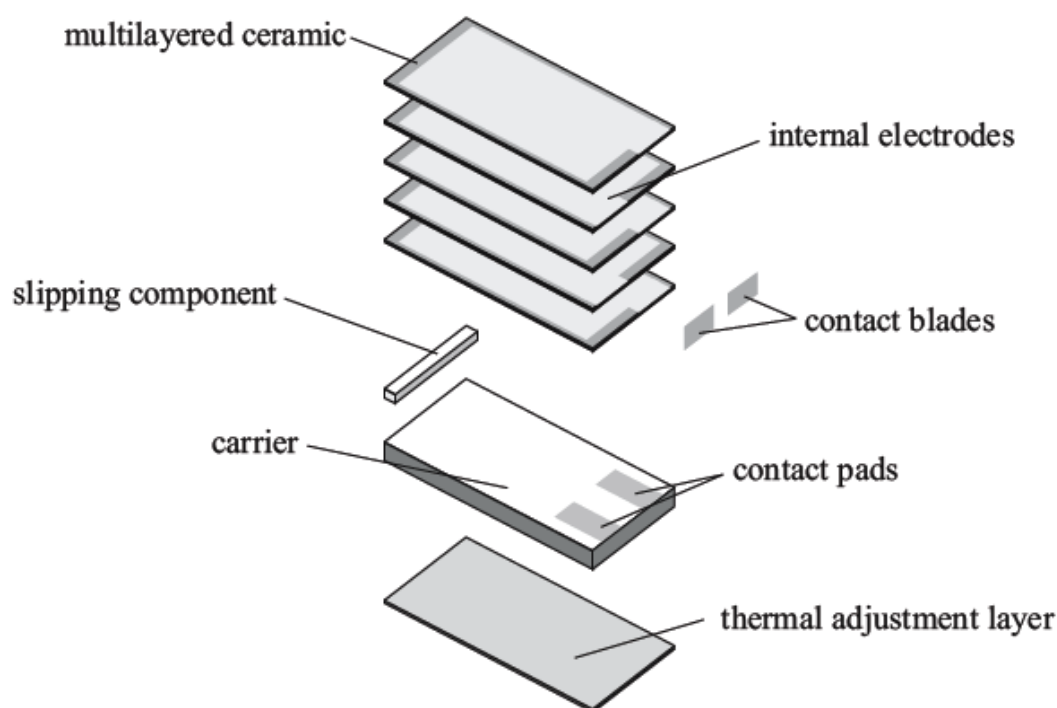


**Σχήμα 3.13:** Δίμορφη δομή μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο. Επάνω: παράλληλη δίμορφη Δομή και κάτω: δίμορφη δομή σε σειρά [118].

Για να αυξήσουμε τη παραμόρφωση κάμψης του συστήματος δοκού – διεγέρτη, το παθητικό ελαστικό στοιχείο μπορεί να αντικατασταθεί από ένα δεύτερο ενεργό πιεζοκεραμικό στοιχείο. Αυτή είναι η λεγόμενη *δίμορφη δομή*. Θεωρούμε εδώ μια δίμορφη δομή μονοστρωματικού τύπου. Αν οι διευθύνσεις ηλεκτρικής πόλωσης

και των δυο πιεζοηλεκτρικών στρωμάτων είναι οι ίδιες και τα στρώματα οδηγούνται με μια παράλληλη ηλεκτρική σύνδεση, τότε το σύστημα καλείται *παράλληλη δίμορφη δομή*. Αν οι κατευθύνσεις ηλεκτρικής πόλωσης των δυο στρωμάτων είναι αντίθετες και τα στρώματα οδηγούνται με μια σειριακή ηλεκτρική σύνδεση, τότε το σύστημα ονομάζεται *δίμορφη δομή σε σειρά* (σχήμα 3.13).

Το πλεονέκτημα στην ηλεκτρική σύνδεση σε σειρά αποτελεί το γεγονός ότι δεν απαιτείται η παρουσία εσωτερικής επαφής και επομένως εσωτερικού ηλεκτροδίου. Το μειονέκτημα όμως είναι ότι στο εσωτερικό του κάθε πιεζοηλεκτρικού στρώματος, η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου είναι σχεδόν η μισή σε σχέση με αυτή στην παράλληλη δίμορφη δομή.



**Σχήμα 3.14:** Μονόμορφη δομή δοκού πολυστρωματικού τύπου [118].

Στο παραπάνω σχήμα (σχήμα 3.14) περιγράφεται σχηματικά η δομή μιας μονόμορφης δοκού με πιεζοηλεκτρικό στρώμα πολυστρωματικού τύπου. Το πιεζοκεραμικό στοιχείο, αποτελείται από 5 ενεργά πιεζοηλεκτρικά στρώματα και το παθητικό στοιχείο αποτελείται από ένα στρώμα (φορέα) και ένα θερμικά προσαρμοσμένο στρώμα. Συνήθως, τα ηλεκτρόδια συνδέονται μεταξύ τους έτσι ώστε να διασφαλίζεται η εναλλασσόμενη πολικότητα μεταξύ των γειτονικών στρωμάτων (ηλεκτρική παράλληλη σύνδεση).

Στα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά μονοστρωματικού τύπου, το ηλεκτρικό δυναμικό είναι μικρό σε αντίθεση με τα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά πολυστρωματικού τύπου όπου είναι μεγαλύτερο, κάτι που αποτελεί πλεονέκτημα των δομών πολυστρωματικού τύπου. Οι πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες μονοστρωματικού τύπου, απαιτούν ηλεκτρικό δυναμικό λειτουργίας τουλάχιστον 200V ενώ στους αντίστοιχους διεγέρτες πολυστρωματικού τύπου, το δυναμικό λειτουργίας μειώνεται στα 24V [116].

### 3.6 Βασικές Εξισώσεις Πιεζοηλεκτρισμού

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται οι βασικές εξισώσεις του πιεζοηλεκτρισμού. Για την περιγραφή της στατικής και δυναμικής συμπεριφορά πιεζοηλεκτρικών δομών είναι απαραίτητη η περιγραφή της ελαστικής συμπεριφορά του πιεζοηλεκτρικού κρυστάλλου δηλαδή η εντατική και η παραμορφωτική του κατάσταση. Για το σκοπό αυτό, είναι απαραίτητη η κατασκευή κατάλληλων θερμοδυναμικών δυναμικών και καταστατικών εξισώσεων για πιεζοηλεκτρικά υλικά. Οι καταστατικές εξισώσεις για ένα πιεζοηλεκτρικό συνεχές μέσο μπορούν να εξαχθούν από τη χρήση θερμοδυναμικής προσέγγισης [104, 119-122]. Η πυκνότητα εσωτερικής ενέργειας γράφεται ως εξής:

$$dU = \Theta d\Sigma + \tau_{ij} d\varepsilon_{ij} + E_i dD_i . \quad (3.1)$$

Η σχέση 3.1 περιγράφει τη σχέση ενός θερμοδυναμικά ορισμένου δυναμικού, με τις εκτατικές ποσότητες που αποτελεί τη βάση για θερμοδυναμική ανάλυση σε ελαστικά διηλεκτρικά [123]. Εκτατικές ποσότητες είναι η εντροπία  $\Sigma$ , το διάνυσμα της ηλεκτρικής μετατόπισης  $D_i$  και ο τανυστής των μηχανικών τροπών  $\varepsilon_{ij}$ .  $E_i$  είναι το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου,  $\tau_{ij}$  ο τανυστής των μηχανικών τάσεων και  $\Theta$  η θερμοκρασία. Για αδιαβατικές μεταβολές ( $d\Sigma=0$ ), η εσωτερικής ενέργειας είναι:

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial D_i} \right)_\varepsilon dD_i + \left( \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_D d\varepsilon_{ij} , \quad (3.2)$$

όμοια, οι συζυγείς εξαρτημένες μεταβλητές  $E_i$  και  $\tau_{ij}$  του συστήματος είναι:

$$dE_i = \left( \frac{\partial E_i}{\partial D_k} \right)_\varepsilon dD_k + \left( \frac{\partial E_i}{\partial \varepsilon_{kl}} \right)_D d\varepsilon_{kl} , \quad (3.4)$$

$$d\tau_{ij} = \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial D_k} \right)_\varepsilon dD_k + \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right)_D d\varepsilon_{kl} . \quad (3.5)$$

Τα ζεύγη  $\tau, E$  και  $\varepsilon, E$  θεωρούνται ανεξάρτητες μεταβλητές. Για την παραγωγή των καταστατικών εξισώσεων με βάση τις ανεξάρτητες μεταβλητές  $\tau, E$ , αναπτύσσοντας τα ακόλουθα ολικά διαφορικά:

$$d(\tau_{ij}\varepsilon_{ij}) = \frac{\partial(\tau_{ij}\varepsilon_{ij})}{\partial \tau_{ij}} d\tau_{ij} + \frac{\partial(\tau_{ij}\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} d\tau_{ij} + \tau_{ij} d\varepsilon_{ij} , \quad (3.6)$$

$$d(E_i D_i) = \frac{\partial(E_i D_i)}{\partial E_i} dE_i + \frac{\partial(E_i D_i)}{\partial D_i} dD_i = D_i dE_i + E_i dD_i , \quad (3.7)$$

και αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις 3.6 και 3.7, από τη σχέση 3.1, προκύπτει:

$$d(U - \tau_{ij}\varepsilon_{ij} - E_i D_i) = -D_i dE_i - \varepsilon_{ij} d\tau_{ij} . \quad (3.8)$$

Η ενθαλπία  $H$  ορίζεται:

$$H = U - \tau_{ij}\varepsilon_{ij} - E_i D_i , \quad (3.9)$$

από τη σχέση 3.8 προκύπτει:

$$dH = -D_i dE_i - \varepsilon_{ij} d\tau_{ij} = \left( \frac{\partial H}{\partial E_i} \right)_\tau dE_i + \left( \frac{\partial H}{\partial \tau_{ij}} \right)_E d\tau_{ij} . \quad (3.10)$$

Οι συζυγείς εξαρτημένες μεταβλητές  $\varepsilon_{ij}$  και  $D_i$  είναι συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών  $\tau_{ij}$  και  $E_i$  και τα ολικά διαφορικά τους έχουν την μορφή:

$$dD_i = \left( \frac{\partial D_i}{\partial E_k} \right)_\tau dE_k + \left( \frac{\partial D_i}{\partial \tau_{kl}} \right)_E d\tau_{kl} , \quad (3.11)$$

$$d\varepsilon_{ij} = \left( \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial E_k} \right)_\tau dE_k + \left( \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \tau_{kl}} \right)_E d\tau_{kl} . \quad (3.12)$$

Οι 3.11 και 3.12, αποτελούν ένα σύστημα εξισώσεων [118] για το ζεύγος μεταβλητών  $\tau, E$ . Με χρήση των σταθερών του υλικού, οι καταστατικές εξισώσεις για το εκτατικό ζεύγος μεταβλητών  $\tau, E$  παίρνουν την μορφή:

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}^E \tau_{kl} + d_{ijk} E_k , \quad (3.14)$$

$$D_i = d_{ikl} \tau_{kl} + \epsilon_{ik}^E E_k . \quad (3.13)$$

Με ανάλογο τρόπο προκύπτουν οι καταστατικές εξισώσεις με βάση τις ανεξάρτητες μεταβλητές  $\varepsilon, E$  [118,123]:

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_k , \quad (3.15)$$

$$D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \epsilon_{ik}^E E_k , \quad (3.16)$$

και η ηλεκτρική ενθαλπία [118, 124]  $H_e$ :

$$H_e = \frac{1}{2} c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} - e_{kij} \varepsilon_{ij} E_k - \frac{1}{2} \epsilon_{ik}^E E_i E_k . \quad (3.17)$$



Οι σχέσεις 3.14-3.17 διατυπώθηκαν με βάση τον τανυστικό λογισμό. Αξιοποιώντας τις συμμετρίες των τανυστών των μηχανικών τάσεων και τροπών και των ιδιοτήτων των πιεζοηλεκτρικών υλικών, ο συμβολισμός των σχέσεων 3.14-3.17 μπορεί να απλοποιηθεί, εισάγοντας τη χρήση δεικτών του Voigt (πίνακας 3.2).

**Πίνακας 3.2:** Χρήση δεικτών σύμφωνα με τον Voigt [123].

$ij$ ή $kl$	11	22	33	23 ή 32	13 ή 31	12 ή 21
$p$ ή $q$	1	2	3	4	5	6

Με χρήση νέων δεικτών (πίνακας 3.3) και με μορφή πινάκων, οι σχέσεις 3.14-3.17 μπορούν να γραφούν σε πιο συμπυκνόμενη μορφή ως:

$$\varepsilon_p = s_{pq}^E \tau_q + d_{pk} E_k \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{s}^E \boldsymbol{\tau} + \mathbf{d}^T \mathbf{E} , \quad (3.18)$$

$$D_i = d_{iq} \tau_q + \epsilon_{ik}^T E_k \Leftrightarrow \mathbf{D} = \mathbf{d}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{E} , \quad (3.19)$$

$$\tau_p = c_{pq}^E \varepsilon_q - e_{pk} E_k \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau} = \mathbf{c}^E \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \mathbf{E} , \quad (3.20)$$

$$D_i = e_{iq} \varepsilon_q + \epsilon_{ik}^E E_k \Leftrightarrow \mathbf{D} = \mathbf{e}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^E \mathbf{E} , \quad (3.21)$$

$$H_e = \frac{1}{2} c_{pq}^E \varepsilon_q \varepsilon_p - e_{ip} \varepsilon_p E_i - \frac{1}{2} \epsilon_{ik}^E E_i E_k \Leftrightarrow H_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{c}^E \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{E}^T \mathbf{e}\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^E \mathbf{E}^T \mathbf{E} . \quad (3.22)$$

Οι σχέσεις 3.18–3.22 αποτελούν τη μαθηματική περιγραφή της γραμμικής συμπεριφοράς των πιεζοηλεκτρικών υλικών και αποτελούν τη βάση για τη μαθηματική μοντελοποίηση και την επίλυση σχετικών προβλημάτων. Από τις σχέσεις 3.18-3.22, τα διανύσματα τάσης και τροπής εισάγονται με τη μορφή πινάκων ως:

$$[\boldsymbol{\tau}] = [\tau_{ij}] = \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} , \quad [\boldsymbol{\varepsilon}] = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} , \quad (3.23)$$

ο πίνακας των ελαστικών σταθερών:

$$[\mathbf{c}] = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{24} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} , \quad (3.24)$$

οι πίνακες των πιεζοηλεκτρικών και διηλεκτρικών σταθερών:

$$[\mathbf{e}] = [e_{ij}] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \\ e_{14} & e_{24} & e_{34} \\ e_{15} & e_{25} & e_{35} \\ e_{16} & e_{26} & e_{36} \end{bmatrix}^T, \quad [\epsilon] = [\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

και τα διανύσματα της ηλεκτρικής μετατόπισης και του ηλεκτρικού πεδίου είναι:

$$[\mathbf{D}] = [D_i] = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{E}] = [E_i] = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

**Πίνακας 3.3:** Η φυσική σημασία των ελαστικών, πιεζοηλεκτρικών και διηλεκτρικών σταθερών σε πιεζοηλεκτρικά υλικά [118, 123].

Σύμβολο	Έκφραση	Φυσική Σημασία	Μονάδες
$c_{ijkl}^E$	$c_{ijkl}^E = \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} \right)_E$	Ελαστική σταθερά ακαμψίας υπό σταθερό ηλεκτρικό πεδίο	$\frac{N}{m^2}$
$c_{ijkl}^D$	$c_{ijkl}^D = \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} \right)_D$	Ελαστική σταθερά ακαμψίας υπό σταθερή ηλεκτρική μετατόπιση	$\frac{N}{m^2}$
$s_{ijkl}^E$	$s_{ijkl}^E = \left( \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \tau_{kl}} \right)_E$	Ελαστική σταθερά ευκαμψίας υπό σταθερό ηλεκτρικό πεδίο	$\frac{m^2}{N}$
$s_{ijkl}^D$	$s_{ijkl}^D = \left( \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \tau_{kl}} \right)_D$	Ελαστική σταθερά ευκαμψίας υπό σταθερή ηλεκτρική μετατόπιση	$\frac{m^2}{N}$
$\epsilon_{ik}^\epsilon$	$\epsilon_{ik}^\epsilon = \left( \frac{\partial D_i}{\partial E_k} \right)_\epsilon$	Διηλεκτρική σταθερά υπό σταθερή τροπή	$\frac{F}{m}, \frac{C}{Vm}$
$\epsilon_{ik}^\tau$	$\epsilon_{ik}^\tau = \left( \frac{\partial D_i}{\partial E_k} \right)_\tau$	Διηλεκτρική σταθερά υπό σταθερή τάση	$\frac{F}{m}, \frac{C}{Vm}$
$e_{ijk}$	$e_{ijk} = - \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial E_k} \right)_\epsilon = \left( \frac{\partial D_i}{\partial \epsilon_{kl}} \right)_E$	Πιεζοηλεκτρική σταθερά τάσης υπό σταθερή τροπή ή σταθερό ηλεκτρικό πεδίο	$\frac{C}{m^2}, \frac{N}{Vm}$
$d_{ikl}$	$d_{ikl} = \left( \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial E_k} \right)_\tau = \left( \frac{\partial D_i}{\partial \tau_{kl}} \right)_E$	Πιεζοηλεκτρική σταθερά τροπής υπό σταθερή τάση ή σταθερό ηλεκτρικό πεδίο	$\frac{m}{V}, \frac{C}{N}$

Στον πίνακα 3.3 παρουσιάζονται οι εκφράσεις των ελαστικών, διηλεκτρικών και πιεζοηλεκτρικών σταθερών καθώς και η φυσική σημασία και οι μονάδες τους για ένα πιεζοηλεκτρικό υλικό.

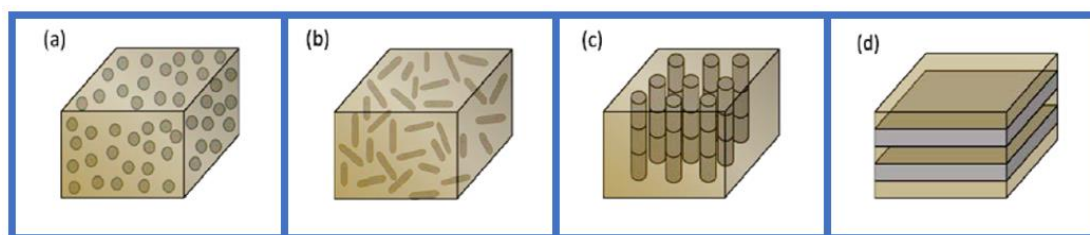
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### «Σύνθετα Πολυστρωματικά Υλικά»

#### 4.1 Σύνθετα υλικά

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες των σύνθετων υλικών και η ταξινόμησή τους σε κατηγορίες με βάση τη μορφή του συστατικού ενίσχυσης. Σύνθετα υλικά (composite materials) είναι ο συνδυασμός δύο ή περισσότερων υλικών ή φάσεων των οποίων οι μηχανικές και φυσικές ιδιότητες είναι σημαντικά διαφορετικές μεταξύ τους. Τα δύο υλικά “συνεργάζονται” και δημιουργούν ένα νέο σύνθετο υλικό με βελτιωμένες και μοναδικές ιδιότητες. Το πλεονέκτημα των σύνθετων υλικών είναι πως με σωστό σχεδιασμό εμφανίζουν καλύτερες μηχανικές και φυσικοχημικές ιδιότητες από αυτές των επιμέρους συστατικών τους και συχνά προκύπτουν νέες ιδιότητες που δεν είχαν τα συστατικά μόνα τους. Σημαντικό είναι το γεγονός ότι τα συστατικά στοιχεία παραμένουν ξεχωριστά και ευδιάκριτα στην τελική δομή του σύνθετου. Το πρώτο συστατικό μέρος του συνθέτου ονομάζεται «*συστατικό ενίσχυσης*» (οπλισμός) και προσδίδει κυρίως βελτιωμένες μηχανικές ιδιότητες. Το δεύτερο ονομάζεται «*μήτρα*» (πχ: κόλλα) και εξασφαλίζει τη μέγιστη δυνατή εκμετάλλευση των ιδιοτήτων της ενίσχυσης [125].

Ορισμένα σύνθετα υλικά υπάρχουν στη φύση, όπως το ξύλο που περιέχει ίνες κυτταρίνης (cellulose) σε συνδετικό υλικό από ξύλο (lignin). Από την αρχαιότητα υπάρχουν παραδείγματα ανθρώπινων κατασκευών που χρησιμοποιούν σύνθετα υλικά, όπως η χρήση της αργίλου ενισχυμένης με άχυρο για την παραγωγή πλίνθων και κεραμικών ειδών. Στη σύγχρονη εποχή, τα πιο συνηθισμένα σύνθετα υλικά χρησιμοποιούν μέταλλα, κεραμικά ή πολυμερή συνδετικά υλικά οπλισμένα με ίνες, σωματίδια ή φύλλα (σχήμα 4.1). Σε περιπτώσεις όπου υπάρχουν περισσότερα από δύο συστατικά στοιχεία, τα σύνθετα υλικά καλούνται υβριδικά (hybrids), όπως ένα θερμοσκληρυνόμενο πολυμερές (εποξειδική ρητίνη) ενισχυμένο από νανοσωματίδια (νανοσωλήνες άνθρακα, φύλλα γραφενίου) ως μήτρα και ίνες άνθρακα ή γυαλιού ως μακροενίσχυση. Τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί καινοτόμες ιδέες και νέες τεχνολογίες στον τομέα των σύνθετων υλικών, όπως για παράδειγμα η χρήση θερμοσκληρυνόμενης ρητίνης με ίνες υψηλής εφελκυστικής αντοχής για κατασκευές σύνθετων και η χρήση οπλισμένου σκυροδέματος που αποτελείται από σκύρα, τσιμέντο και οπλίζεται από χαλύβδινες ράβδους [125].

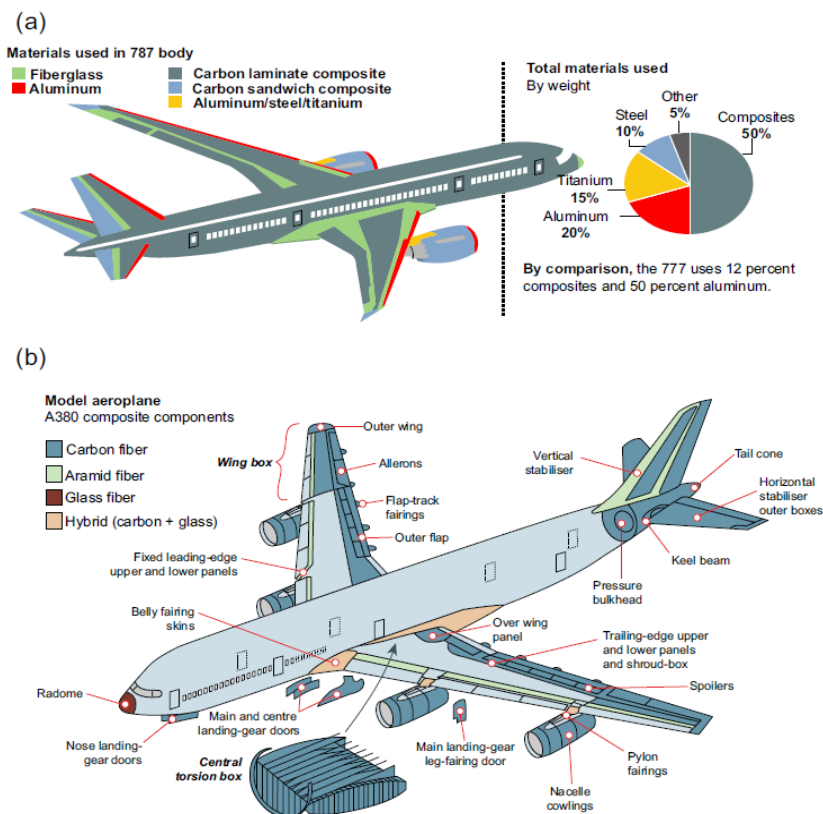


**Σχήμα 4.1:** Τύποι σύνθετων υλικών: (a) κοκκώδη σύνθετα, (b), (c) ινοπλισμένα σύνθετα και (d) πολυστρωματικά σύνθετα [126].

Τα κύρια πλεονεκτήματα των σύνθετων υλικών σε σχέση με ήδη υπάρχοντα υλικά, όπως τα μέταλλα και τα πλαστικά, είναι η υψηλή αντοχή και η ακαμψία στην κάμψη, σε συνδυασμό με τη χαμηλή πυκνότητα, επιτρέποντας τη μείωση του βάρους του σύνθετου. Οι βασικές κατηγορίες σύνθετων υλικών απεικονίζεται στο σχήμα 4.3.

Σήμερα, η χρήση των σύνθετων υλικών βρίσκει εφαρμογές κυρίως στον αεροδιαστημικό τομέα, με ένα μεγάλο ποσοστό των σύγχρονων κατασκευών αεροπλάνων, όπως το Boeing 787 και το Airbus A380 (σχήμα 4.2), να κατασκευάζονται από ίνες άνθρακα, γυαλιού και αραμιδίου. Το κύριο υλικό της μήτρας είναι ένα πολυμερές, το οποίο έχει χαμηλή αντοχή και ακαμψία στην κάμψη. Οι κύριες λειτουργίες της μήτρας είναι να διατηρεί τις ίνες σε σωστό προσανατολισμό και απόσταση και να προστατεύει την ίνα από την τριβή και το περιβάλλον. Στα σύνθετα υλικά πολυμερούς μήτρας, ο ισχυρός δεσμός μεταξύ της μήτρας και του οπλισμού επιτρέπει στη μήτρα να μεταδίδει τα εξωτερικά φορτία από τη μήτρα στις ίνες μέσω διαμητικής φόρτισης στη διεπιφάνεια [127].

Υπάρχουν δύο τύποι πολυμερικής μήτρας: οι θερμοσκληρυνόμενες και τα θερμοπλαστικά. Ένα θερμοσκληρυνόμενο ξεκινά ως ρητίνη χαμηλού ιξώδους που αντιδρά και σκληραίνει κατά την επεξεργασία, σχηματίζοντας ένα στερεό. Ένα θερμοπλαστικό είναι ρητίνη υψηλού ιξώδους που υποβάλλεται σε επεξεργασία με θέρμανση πάνω από τη θερμοκρασία τήξης του. Επειδή μια θερμοσκληρυνόμενη ρητίνη σκληραίνει κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας, δεν μπορεί να υποβληθεί σε επανεπεξεργασία με επαναθέρμανση. Ένα θερμοπλαστικό μπορεί να ξαναθερμανθεί πάνω από τη θερμοκρασία τήξης του για πρόσθετη επεξεργασία.



Σχήμα 4.2: Χρήση σύνθετων υλικών σε κατασκευές αεροδιαστημικής: (α) Boeing 787 και (β) Airbus A380 [127].

## 4.2 Κατηγορίες σύνθετων υλικών

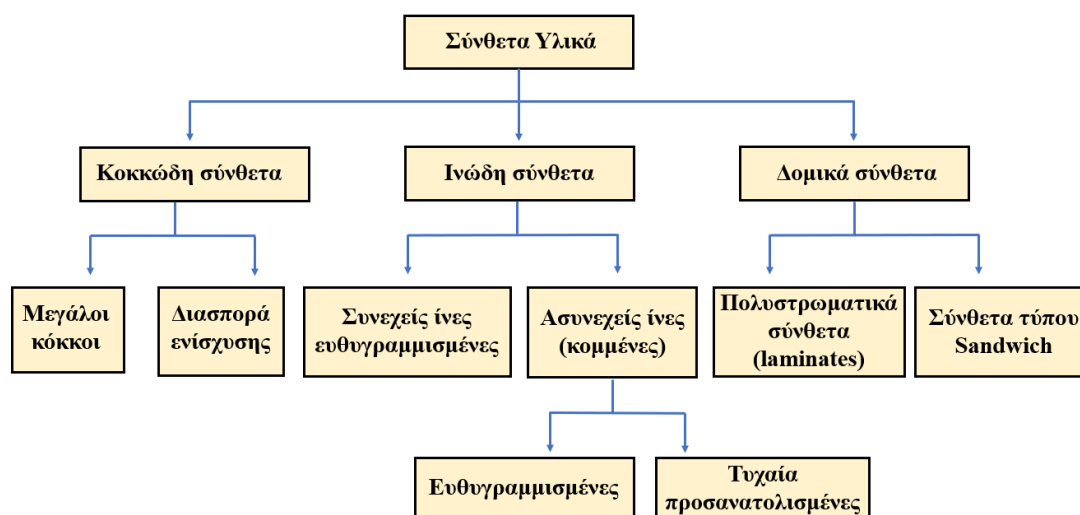
Γενικά, τα σύνθετα υλικά μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε αρκετές κατηγορίες με βάση διάφορες παραμέτρους όπως οι ίνες οπλισμού, το συνδετικό υλικό και ο τρόπος κατασκευής τους. Με βάση τη μορφή του συστατικού ενίσχυσης (σχήμα 4.3), προκύπτουν οι εξής μεγάλες κατηγορίες:

*Κοκκώδη σύνθετα υλικά* (Particle-reinforced composite materials): σύνθετα υλικά με ενίσχυση σωματιδίων διασκορπισμένων στο υλικό της μήτρας.

*Ινώδη σύνθετα υλικά* (Fiber-reinforced composite materials): σύνθετα όπου οι ίνες εμποτίζονται στο υλικό της μήτρας.

*Δομικά σύνθετα υλικά* (Structural composite materials): σε αυτή την κατηγορία ανήκουν τα πολυστρωματικά σύνθετα (laminated composites) και τα σύνθετα υλικά τύπου sandwich τα οποία αποτελούνται από επάλληλες στρώσεις υλικών.

*Υβριδικά σύνθετα υλικά* (hybrid composite materials): σύνθετα υλικά που αποτελούν συνδυασμό μερικών ή και όλων των προηγούμενων κατηγοριών.

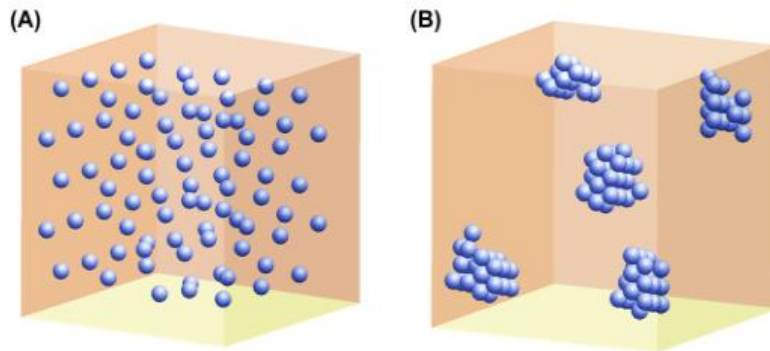


Σχήμα 4.3: Ταξινόμηση σύνθετων υλικών σύμφωνα με τη της ενίσχυσης.

### Κοκκώδη σύνθετα υλικά (Particle-reinforced composite materials)

Η ενίσχυση σύνθετων υλικών με σωματίδια αποτελεί την πιο οικονομική λύση όσον αφορά το συνολικό κατασκευαστικό κόστος και διακρίνεται ανάλογα με το μέγεθος των σωματιδίων (σχήμα 4.4). Ένας τέτοιος τρόπος ενίσχυσης καθιστά το υλικό ισότροπο και έχει ως στόχο την αύξηση του μέτρου ελαστικότητας του υλικού. Παρόλα αυτά, η αντοχή του τελικού σύνθετου εμφανίζεται ελαφρώς μειωμένη εξαιτίας της διεπιφάνειας ίνας-μήτρας όπου εντοπίζονται μικρορηγματώσεις και συγκέντρωση τάσεων. Εφαρμογή για την κατηγορία των σύνθετων υλικών με σφαιρίδια αποτελούν η άμμος και το χαλίκι στο τσιμέντο για την περίπτωση μεγάλου

μεγέθους σωματιδίων, τα σωματίδια αιθάλης (20-50nm), τα λάστιχα αυτοκινήτων για την περίπτωση μικρότερου μεγέθους σωματιδίων και σε άλλες εφαρμογές [125].



**Σχήμα 4.4:** Σχηματική αναπαράσταση διασποράς και κατανομής σωματιδιακών ενισχύσεων σε σύνθετα υλικά: (A) ιδανική διασπορά και κατανομή σωματιδίων και (B) σωματίδια που υπάρχουν ως «συσσωματώματα» (μεγάλοι κόκκοι) σε σύνθετα υλικά [128].

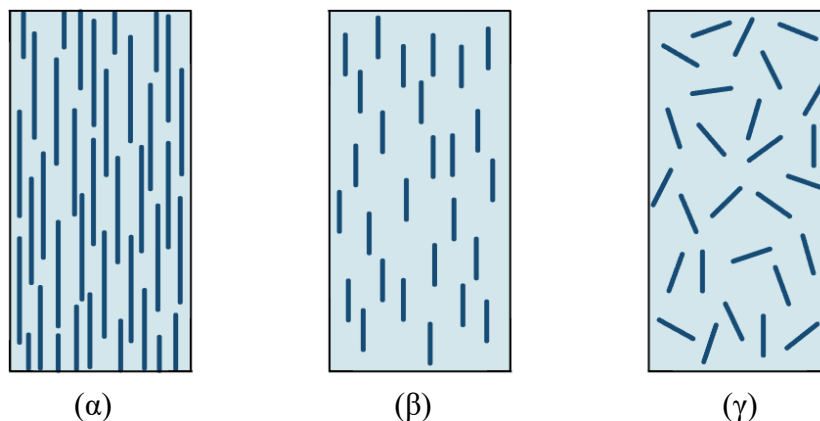
### Ινώδη σύνθετα (Fiber-reinforced composites)

Τα σύνθετα υλικά που αποτελούνται από ίνες είναι ο πιο ισχυρός τρόπος ενίσχυσης. Οι ίνες που περικλείουν έχουν μικρό βάρος, παρουσιάζουν μεγάλη αντοχή, μεγάλη ακαμψία (stiffness) και χαμηλή δυσθραυστότητα (toughness). Γενικά, οι ίνες έχουν μεγαλύτερη αντοχή από το υλικό της μήτρας για αυτό η διάμετρός τους είναι μικρή σε σχέση με το μήκος τους ώστε να επιτρέπεται η μεγαλύτερη ικανότητα μεταφοράς φορτίων από την μήτρα στις ενισχύσεις.

Τα σύνθετα υλικά που χρησιμοποιούνται σήμερα στις κατασκευές είναι γνωστά ως «ινοπλισμένα πολυμερή» (Fiber Reinforced Polymers). Αξίζει να σημειωθεί πως το ακατέργαστο υλικό των ινών είναι πιο ασθενές. Αυτό αποδίδεται στο μικρότερο αριθμό ατελειών και στην κατεύθυνση των μορίων κατά μήκος των ινών. Για παράδειγμα, ίνες από ακατέργαστο E-glass έχουν εφελκυστική αντοχή 72.3GPa ενώ το ακατέργαστο υλικό έχει μόνο 1.5-5.8GPa . Η εξήγηση, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, κρύβεται στη μείωση της επιφάνειας και του μεγέθους των ατελειών [125].

Τα ινώδη σύνθετα υλικά διαχωρίζονται επιπρόσθετα ανάλογα με τον προσανατολισμό και τη διάταξη των ινών σε: μονοδιευθυντικά σύνθετα (οι ίνες ακολουθούν την ίδια διεύθυνση), πολυδιευθυντικά σύνθετα (οι ίνες ακολουθούν πολλές και τυχαίες διευθύνσεις) και τρισσορθογώνια διάταξη ή διάταξη πλέξης. Οι ίνες ανάλογα με τον λόγο μήκους προς διάμετρο ( $L/d$ ) ταξινομούνται σε: μακριές (continuous fibers,  $L/d \geq 100$ ), κοντές (discontinuous fibers,  $L/d < 100$ ) και νημάτια (whiskers, με  $d > 100\mu m$  και  $L \approx 100\mu m$ ).

Η γεωμετρία των ινών, το ποσοστό των ινών και ο προσανατολισμός τους παίζουν καθοριστικό ρόλο στην κατασκευή των σύνθετων υλικών. Όσο αυξάνεται το ποσοστό ινών κατ' όγκο, αυξάνεται η αντοχή και η στιβαρότητα των σύνθετων υλικών. Το ποσοστό αυτό δεν θα πρέπει να ξεπερνάει το 80% καθώς ύστερα δημιουργούνται προβλήματα κάλυψης των ινών από το υλικό της μήτρας.



**Σχήμα 4.5:** Σχηματική αναπαράσταση ινώδη σύνθετων υλικών: (α) συνεχείς ίνες ενίσχυσης, (β) ασυνεχείς ευθυγραμμισμένες ίνες και (γ) ασυνεχείς ίνες ενίσχυσης με τυχαίο προσανατολισμό.

Τα σύνθετα υλικά συνεχών ινών κατασκευάζονται συχνά σε ελάσματα με στοίβαξη μεμονωμένων φύλλων συνεχών ινών σε διαφορετικούς προσανατολισμούς για να αποκτηθούν οι επιθυμητές ιδιότητες αντοχής και ακαμψίας με όγκους ινών έως και 60%-70%. Οι ίνες παράγουν σύνθετα υλικά υψηλής αντοχής λόγω της μικρής τους διαμέτρου. Οι συνεχείς μονοδιευθυντικές ίνες παρουσιάζουν μεγάλη ανισοτροπία. Η διεύθυνση επιβολής του φορτίου καθορίζει σημαντικά τη μηχανική συμπεριφορά του σύνθετου. Διαπιστώνεται πως η μεγαλύτερη στιβαρότητα, δηλαδή η μέγιστη αντοχή (UTS) επιτυγχάνεται όταν η εφαρμοζόμενη τάση είναι παράλληλη με τον προσανατολισμό των ινών. Τις περισσότερες φορές τα σύνθετα υλικά είναι πολυστρωματικά παρά μονοστρωματικά. Όταν οι ίνες κάθε στρώσης έχουν τον ίδιο προσανατολισμό, τότε υπάρχει ανισοτροπία, ενώ όταν οι διαδοχικές στρώσεις έχουν διαφορετικό προσανατολισμό, τότε το σύνθετο εμφανίζει ισοτροπία. Επιπλέον, λόγω της μικρής τους διαμέτρου, οι ίνες είναι εύκαμπτες και κατάλληλες σε περίπλοκες διαδικασίες παραγωγής, όπως μικρές ακτίνες ή ύφανση. Για την παραγωγή ινών χρησιμοποιούνται υλικά όπως το γυαλί, ο γραφίτης, ο άνθρακας και το αραμίδιο.

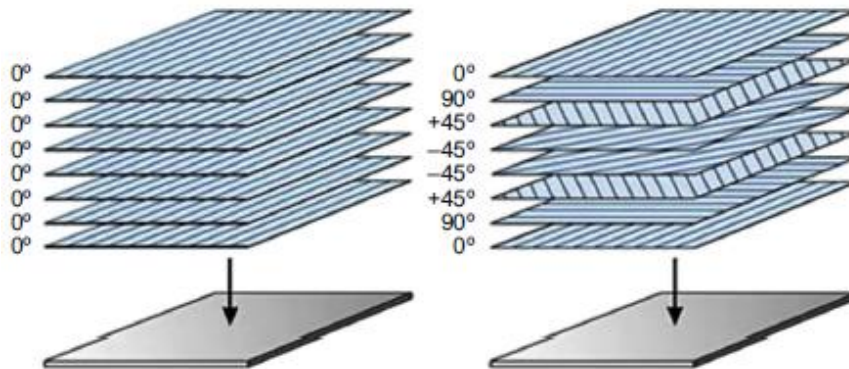
#### **Δομικά – στρωματικά σύνθετα (Structural composites)**

Μια άλλη μορφή διάταξης των σύνθετων υλικών είναι τα δομικά ή στρωματικά σύνθετα. Σε αυτή την κατηγορία, τα υλικά διατάσσονται σε στρώσεις και συνθέτουν ένα τελικό υλικό με βελτιωμένες ιδιότητες. Τα φύλλα στρώσης είναι δισδιάστατα, έχουν συγκεκριμένη διεύθυνση υψηλής αντοχής και είναι ενισχυμένα με συνεχείς και ευθυγραμμισμένες ίνες. Πολλές φορές αντί για ίνες στην ενίσχυση χρησιμοποιούνται βαμβάκι, χαρτί, ή πλεγμένες ίνες γυαλιού. Στη συνέχεια τα φύλλα στρώνονται και συγκολλούνται μεταξύ τους με εναλλασσόμενο προσανατολισμό έτσι ώστε το σύνθετο υλικό να ενισχύεται σε διάφορες διευθύνσεις. Αυτή η κατηγορία συνθέτων υλικών περιλαμβάνει: τις πολυστρωματικές σύνθετες δομές (*laminated composite structures*) και τις σύνθετες δομές τύπου «σάντουιτς» (*Sandwich-structured composite*). Σε τέτοιες δομές, ένα πιο ασθενές στρώμα εγκλωβίζεται ανάμεσα σε δυο πιο ισχυρές στρώσεις [125].

### 4.3 Πολυστρωματικές σύνθετες δομές

Στην επιστήμη των υλικών, ένα σύνθετο πολυστρωματικό υλικό (laminated composite material) είναι ένας συνδυασμός δύο ή περισσότερων στρωμάτων (σχήμα 4.6) συνήθως από ινώδη σύνθετα υλικά που μπορούν να συνδυαστούν και να παρέχουν καλύτερες μηχανικές ιδιότητες, όπως η ακαμψία εντός του επιπέδου, η ακαμψία στην κάμψη  $EI$  (bending stiffness), η αντοχή του υλικού και ο συντελεστής θερμικής διαστολής. Ωστόσο, το κύριο μειονέκτημα των πολυστρωματικών σύνθετων υλικών είναι η κακή απόδοσή τους στην κατεύθυνση του πάχους. Η αποκόλληση (delamination) διαφορετικών στρωμάτων υπό συνθήκες φόρτισης είναι μια από τις κύριες μορφές αστοχίας των υλικών αυτών [129].

Τα ινώδη στρώματα μπορούν να διαταχθούν σε διάφορους προσανατολισμούς (σχήμα 4.6). Συνεπώς, οι ιδιότητές τους μπορούν να προσαρμοστούν σε διαφορετικές κατευθύνσεις. Τα επιμέρους στρώματα αποτελούνται από ίνες υψηλού μέτρου ελαστικότητας και υψηλής αντοχής μέσα σε πολυμερικές, μεταλλικές ή κεραμικές μήτρες. Οι ίνες που χρησιμοποιούνται κυρίως είναι η κυτταρίνη, ο γραφίτης, το γυαλί, το βόριο και το καρβίδιο του πυριτίου. Η μήτρα αποτελείται συνήθως από υλικά όπως εποξικές ρυτίνες, πολυϊμίδια, αλουμίνιο και τιτάνιο.



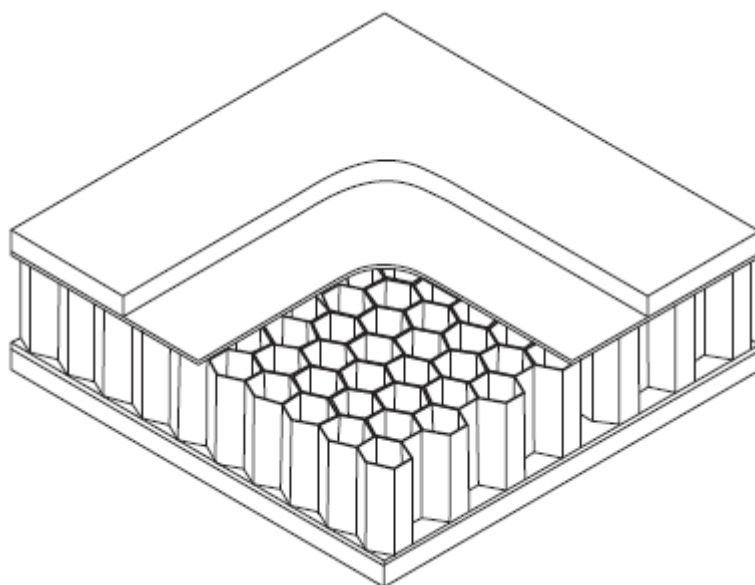
**Σχήμα 4.6:** Σχηματική αναπαράσταση σύνθετων πολυστρωματικών υλικών (α) σε μια διεύθυνση και (β) σε διαφορετικές διευθύνσεις [129].

Τα πολυστρωματικά είναι τα σύνθετα υλικά που χρησιμοποιούνται συχνά σε βιομηχανικές εφαρμογές. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν στρώσεις διαφορετικών υλικών, με αποτέλεσμα ένα υβριδικό πολυστρωματικό σύνθετο υλικό (hybrid laminated composite material). Το κάθε στρώμα ξεχωριστά είναι γενικά ορθότροπο ή εγκάρσιως ισότροπο ενώ το πολυστρωματικό υλικό εμφανίζει ανισότροπες, ορθότροπες ή σχεδόν ισότροπες ιδιότητες. Τα ισότροπα πολυστρωματικά εμφανίζουν ισότροπη (δηλαδή, ανεξάρτητα από την κατεύθυνση) συμπεριφορά στο επίπεδο, αλλά δεν περιορίζονται στην ισότροπη συμπεριφορά εκτός του επιπέδου. Ανάλογα με την αλληλουχία στοίβαξης των στρωμάτων, το πολυστρωματικό υλικό μπορεί να παρουσιάζει σύζευξη μεταξύ της συμπεριφοράς εντός και εκτός επιπέδου. Ένα παράδειγμα σύζευξης κάμψης-διάτασης είναι η παρουσία καμυλότητας που αναπτύσσεται ως αποτέλεσμα της φόρτισης στο επίπεδο.



#### 4.4 Σύνθετες πολυστρωματικές δομές τύπου σάντουιτς

Οι κατασκευές τύπου σάντουιτς (σχήμα 4.7) είναι πολυστρωματικά δομικά στοιχεία που αποτελούνται από δύο άκαμπτα εξωτερικά στρώματα «φύλλα όψης» (face sheets) συνδεδεμένα σε έναν κυψελοειδή πυρήνα (honeycomb) ή πυρήνα «αφρού» (foam). Χαρακτηρίζονται από υψηλή αναλογία ακαμψίας-βάρους, που τα καθιστά πολύ ευέλικτα και χρησιμοποιήσιμα σε πολλές μηχανολογικές εφαρμογές. Τα πάνελ τύπου σάντουιτς βρίσκουν εφαρμογές στη δομική μηχανική ως ελαφριά πάνελ οροφής και τοίχου που παρέχουν θερμομόνωση κτιρίων, στη ναυτική μηχανική σε κατασκευές καταστρωμάτων, στην αεροδιαστημική και αεροναυπηγική κυρίως ως κατασκευές αεροσκαφών και διαστημικών σκαφών καθώς και στη μηχανολογία και τη μηχανική αυτοκινήτων [127].



**Σχήμα 4.7:** Σύνθετη δομή τύπου «σάντουιτς» [127].

Οι προηγμένες κατασκευές τύπου σάντουιτς προϋποθέτουν την παρουσία ενός πυρήνα με μεγάλο πάχος με συγκολλημένες ανισότροπες εξωτερικές επιφάνειες που αντιμετωπίζονται ως σύνθετα πολυστρωματικά (composite laminates). Με αυτόν τον τρόπο, μπορούν να προσαρμοστούν τόσο οι φυσικές όσο και οι μηχανικές ιδιότητες των φύλλων με κατάλληλη επιλογή πολυστρωματικών υλικών, τη σειρά στοίβαξης και τον προσανατολισμό τους. Η κατάλληλη επιλογή του προσανατολισμού των ινών και της ακολουθίας της στοίβαξης μπορεί να οδηγήσει σε ουσιαστικές βελτιώσεις της αντοχής σε κάμψη και λυγισμό και της μη γραμμικής απόκρισης σε διάφορες συνθήκες φόρτισης. Οι ελαστικοί συντελεστές εγκάρσιας διάτμησης του στρώματος του πυρήνα μπορούν επίσης να βελτιστοποιηθούν έτσι ώστε να βελτιώνεται η συνολική συμπεριφορά απόκρισης των κατασκευών σάντουιτς. Η αναλυτική μοντελοποίηση των πάνελ τύπου σάντουιτς είναι πιο σύνθετη από αυτή των συνηθισμένων πολυστρωματικών σύνθετων κατασκευών. Σε αντίθεση με τα πολυστρωματικά όπου οι παραδοχές διατυπώνονται για το σύνολο της δομής, στις

κατασκευές τύπου σάντουιτς, οι υποθέσεις περιλαμβάνουν κινηματική περιγραφή κατά στρώματα. Επιπλέον, η ανάλυση των πάνελ τύπου σάντουιτς που περιέχουν ανισότροπες εξωτερικές επιφάνειες είναι πιο περίπλοκη σε σχέση με τις ισότροπες επιφάνειες μιας στρώσης. Η πολυπλοκότητα οφείλεται στην παρουσία τριών τύπων ασυμμετριών που προκύπτουν από τις αλληλουχίες στοίβαξης στα εξωτερικά στρώματα, και πιο συγκεκριμένα: (α) ασυμμετρία ως προς τη μέση επιφάνεια των εξωτερικών στρωμάτων (αναφέρεται ως ασυμμετρία όψης) που προκαλεί σύζευξη στην κάμψη και τη διάταση των εξωτερικών στρωμάτων, (β) ασυμμετρία σε σχέση με τη μέση επιφάνεια του πυρήνα (αναφέρεται ως ολική ασυμμετρία), η οποία προκαλεί ολική σύζευξη κάμψης-διάτασης και (γ) παρουσία γωνιών μεταξύ των κύριων αξόνων των εξωτερικών στρωμάτων και των γεωμετρικών αξόνων του πάνελ, προκαλώντας σύζευξη μεταξύ διάτασης και διάτμησης.

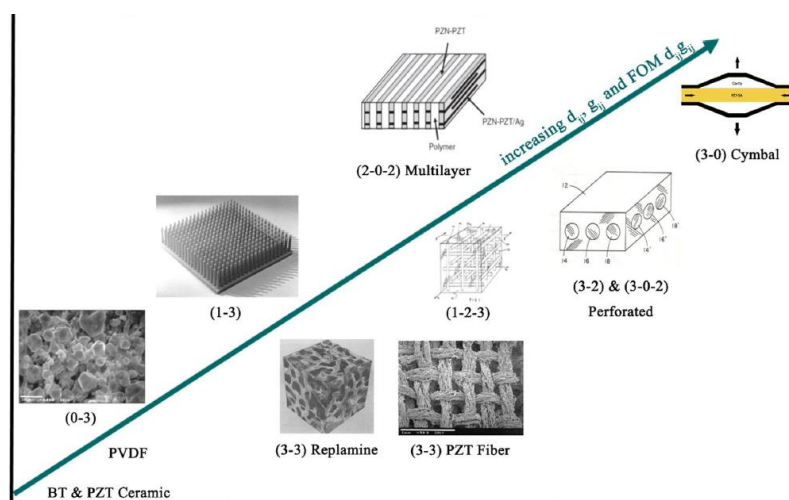
Ως προς τις αναλογίες του συνθέτου, ένα αποτελεσματικό σύνθετο τύπου σάντουιτς επιτυγχάνεται όταν το βάρος του πυρήνα είναι περίπου ίσο με το συνολικό βάρος των λεπτών εξωτερικών στρωμάτων. Προφανώς, η ακαμψία λόγω κάμψης (bending stiffness) αυτής της διάταξης είναι πολύ μεγαλύτερη σε σχέση με μια μονοστρωματική στερεή πλάκα του ίδιου συνολικού βάρους κατασκευασμένη από το ίδιο υλικό των εξωτερικών επιφανειών. Ο πυρήνας θα πρέπει να είναι αρκετά άκαμπτος στην ορθογώνια κατεύθυνση των εξωτερικών στρωμάτων ώστε να διασφαλιστεί η σωστή απόσταση μεταξύ τους. Πρέπει να είναι άκαμπτος σε διάτμηση ώστε να διασφαλίζεται ότι όταν το πάνελ κάμπτεται και τα εξωτερικά στρώματα δεν «γλιστρούν» (wrinkling) το ένα πάνω στο άλλο. Εάν δεν ισχύει αυτό, τα εξωτερικά στρώματα συμπεριφέρονται ως δύο ανεξάρτητες δοκοί και η δομή τύπου «σάντουιτς» χάνεται. Εάν ο πυρήνας είναι αρκετά άκαμπτος, συμβάλει στην συνολική ακαμψία κάμψης  $EI$  του πάνελ. Σε περίπτωση πυρήνων μικρής πυκνότητας που συνήθως χρησιμοποιούνται, η συνεισφορά είναι μικρή και δεν λαμβάνεται υπόψη. Αυτό οδηγεί σε σημαντική απλοποίηση της ανάλυσης των τάσεων και των παραμορφώσεων.

Μια διαφορετική τυπολογία δομών σάντουιτς μπορεί να προκύψει με χρήση των υλικών διαβαθμισμένων ιδιοτήτων (functionally graded materials – FGMs). Τα FGM είναι μια κατηγορία ετερογενών σύνθετων υλικών που αποτελούνται από ένα μείγμα κεραμικών και μετάλλων και χαρακτηρίζονται από ομαλή και συνεχή διακύμανση των ιδιοτήτων του υλικού από κάτω προς τα πάνω. Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν επίσης τα υλικά στα οποία η διαβάθμιση δημιουργείται μεταβάλλοντας το κλάσμα όγκου των ινών σε πολυστρωματικά σύνθετα υλικά. Στη γενική περίπτωση, οι ιδιότητες των FGM ελέγχονται από τη διακύμανση του κλάσματος όγκου των συστατικών υλικών. Όντας υλικά ανθεκτικά σε εξαιρετικά υψηλές θερμοκρασίες, είναι κατάλληλα για αεροδιαστημικές εφαρμογές, όπως αεροσκάφη και διαστημικά οχήματα. Επιπλέον, έχουν πολλά πλεονεκτήματα έναντι άλλων τύπων προηγμένων υλικών όπως σύνθετα υλικά ενισχυμένα με ίνες, όπου δημιουργούνται προβλήματα όπως αποκόλληση, αστοχία των ινών και επίδραση της υγρασίας. Τέτοια προβλήματα εξαλείφονται σε δομές τύπου σάντουιτς. Τα FGM σημειώνουν σταθερά πρόοδο με εφαρμογές τους στον αεροδιαστημικό σχεδιασμό. Η ερευνητική κοινότητα μελετά διάφορες δομές σάντουιτς FGM χρησιμοποιώντας μια πληθώρα νέων δομικών θεωριών [127].

#### 4.5 Πιεζοηλεκτρικά πολυστρωματικά σύνθετα υλικά

Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, εκτός από τα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά (bulk piezoceramics) και τα πιεζοηλεκτρικά πολυμερή (piezopolymers), μια κατηγορία των πιεζοηλεκτρικών υλικών είναι τα πιεζοηλεκτρικά σύνθετα ή πιεζοσύνθετα υλικά (piezocomposite materials).

Τα πιεζοσύνθετα υλικά αποτελούνται από πιεζοηλεκτρικά κεραμικά υλικά και πιεζοηλεκτρικά πολυμερικά υλικά. Πρόκειται για υλικά πολλά υποσχόμενα λόγω των εξαιρετικών ιδιοτήτων τους. Έχουν σημαντικά πλεονεκτήματα, όπως υψηλούς συντελεστές σύζευξης, χαμηλή ακουστική αντίσταση, μηχανική ευελιξία, μεγάλο εύρος ζώνης (broad bandwidth) σε συνδυασμό με το χαμηλό μηχανικό παράγοντα ποιότητας. Οι μηχανικές και ακουστικές ιδιότητες αυτών των υλικών μπορούν επίσης να προσαρμοστούν ανάλογα με τη φύση της εφαρμογής του σύνθετου υλικού [130].



Σχήμα 4.8: Ανάπτυξη πιεζοηλεκτρικών σύνθετων δομών. [131].

Μελέτες έχουν καταγράψει πως η αγωγιμότητα της πολυμερικής μήτρας ενισχύεται με την προσθήκη ηλεκτρικά αγώγιμων πληρωτικών υλικών. Οι Ma και Wang [132] συνέκριναν τη μικροδομή και τις διηλεκτρικές ιδιότητες των σύνθετων υλικών με βάση εποξειδικές ουσίες που περιείχαν νανοσωλήνες άνθρακα (CNTs) και πιεζοηλεκτρικά κεραμικά εγκλείσματα PMN και PZT. Παρατήρησαν ότι τα σύνθετα υλικά εμφάνισαν όριο διήθησης στην περιοχή από 1.0-1.5g CNTs ανά 100g εποξειδικού. Ανέφεραν επίσης ότι στην περιοχή του ορίου διήθησης, σχηματίστηκε ένα συνεχές ηλεκτρικά αγώγιμο δίκτυο και ότι πέρα από το όριο διήθησης, αυτά τα υλικά εμφάνισαν δυναμικούς παράγοντες απώλειας που ήταν ανώτεροι από αυτούς κάτω από το όριο διήθησης. Οι Tian και Wang [133] ερεύνησαν επίσης την απόδοση των πιεζοηλεκτρικών κεραμικών ως άκαμπτα υλικά απόσβεσης. Τα αποτελέσματά τους ήταν παρόμοια με τα αποτελέσματα των Ma και Wang [132], όπου το κατώφλι διήθησης βρέθηκε να είναι στην περιοχή 1.0-1.5g CNTs ανά 100g εποξειδικής ουσίας. Κατέληξαν επίσης στο συμπέρασμα ότι οι παράγοντες απώλειας ήταν σημαντικά υψηλότεροι με την εισαγωγή των CNT και (PZT), όπου το κλάσμα όγκου του CNT ήταν πάνω από το κρίσιμο φορτίο ηλεκτρικής διήθησης [130].

## ***B. ΜΕΡΟΣ***

# ***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ***

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### «Γραμμικές Τεχνικές Θεωρίες σε Ελαστικές Δοκούς»

#### 5.1 Θεωρητική διατύπωση γραμμικά ελαστικών δοκών

Σε αυτό το κεφάλαιο πραγματοποιείται η θεωρητική διατύπωση, η επίλυση προβλημάτων και η παρουσίαση αριθμητικών αποτελεσμάτων με τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης σε ελαστικές δοκούς. Για τη γενική διατύπωση των προβλημάτων, στο πεδίο των μετατοπίσεων εισέρχεται μια συνάρτηση  $f(z)$  που περιγράφει την κατανομή της διατμητικής τάσης μέσα στο σώμα. Κάθε τύπος της  $f(z)$  περιγράφει μια διαφορετική τεχνική θεωρία διάτμησης ανώτερης τάξης. Οι κατανομές της διατμητικής τάσης [21, 47] παρουσιάζονται στον πίνακα 5.1.

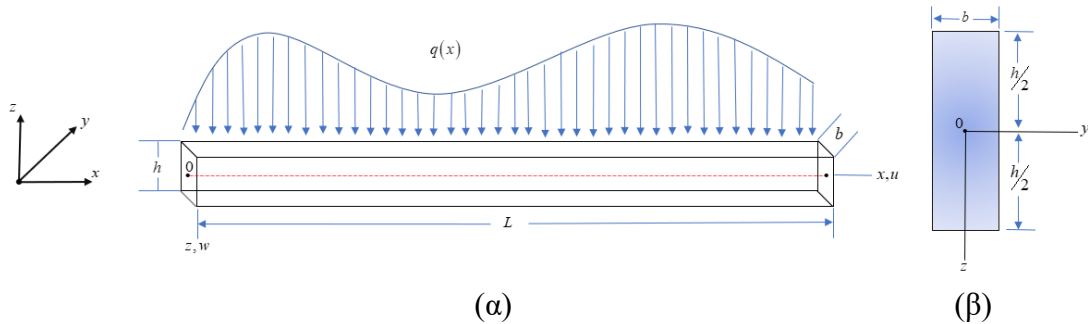
**Πίνακας 5.1:** Συνάρτηση κατανομής διατμητικής τάσης για διάφορες τεχνικές θεωρίες.

Μοντέλα	Συνάρτηση $f(z)$	Συνάρτηση $f'(z)$	Συγγραφέας
Model 1	$0$	$0$	Euler-Bernoulli (EBT)
Model 2	$z$	$1$	Timoshenko (TBT)
Model 3	$\frac{zh^2}{8} - \frac{z^3}{6}$	$-\frac{4z^2 - h^2}{8}$	Ambartsumian [25] (HPSDT)
Model 4	$\frac{5z}{4} - \frac{5z^3}{3h^2}$	$\frac{5}{4} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right)$	Kruszewski [30] (HPSDT)
Model 5	$z - \frac{4}{3} \left( \frac{z^3}{h^2} \right)$	$1 - \frac{4z^2}{h^2}$	Reddy [33] (TSDT)
Model 6	$\frac{h}{\pi} \sin \left( \frac{\pi}{h} z \right)$	$\cos \left( \frac{\pi}{h} z \right)$	Touratier [36] (SSDT)
Model 7	$z \cosh(1/2) - h \sinh(z/h)$	$\cosh(1/2) - \cosh(z/h)$	Soldatos [42] (HPSDT)
Model 8	$z e^{-2 \left( \frac{z}{h} \right)^2}$	$\left( 1 - \frac{4}{h^2} z^2 \right) z e^{-2 \left( \frac{z}{h} \right)^2}$	Karama [45] (ESDT)
Model 9	$\frac{3\pi}{2} \left[ h \tanh \left( \frac{z}{h} \right) - z \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2} \right) \right]$	$\frac{3\pi}{2} \left[ \operatorname{sech}^2 \left( \frac{z}{h} \right) - \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2} \right) \right]$	Akavci [44] (HPSDT)
Model 10	$\sin \left( \frac{\pi}{h} z \right)$	$\frac{\pi}{h} \cos \left( \frac{\pi}{h} z \right)$	Arya [39] (SSDT)
Model 11	$\frac{7}{8} z - \frac{2}{h^2} z^3 + \frac{2}{h^4} z^5$	$\frac{7}{8} - \frac{6}{h^2} z^2 + \frac{10}{h^4} z^4$	Nguyen [46] (FiSDT)
Model 12	$h \arctan(2z/h) - z$	$(1 - (2z/h)^2) / (1 + (2z/h)^2)$	Thai [47] (ITSdT)

Η θεωρητική διατύπωση αφορά τη γραμμική ανάλυση σε ελαστικές δοκούς. Ξεκινώντας από μια μεταβολική αρχή (Αρχή Hamilton), γίνεται η παραγωγή των εξισώσεων κίνησης και των αντίστοιχων συνοριακών συνθηκών που διέπουν μια ελαστική δοκό. Η ελαστική δοκός (σχήμα 5.1) καταλαμβάνει το χωρίο:

$$0 \leq x \leq L, \quad -b/2 \leq y \leq b/2, \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \quad (5.1)$$

όπου:  $x, y, z$  είναι οι συντεταγμένες στο καρτεσιανό επίπεδο,  $L$  το μήκος,  $b$  το πλάτος και  $h$  το πάχος της δοκού. Η δοκός υποβάλλεται σε εγκάρσιο ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο  $q(x)$ .



**Σχήμα 5.1:** (α) Κάμψη ελαστικής δοκού στο επίπεδο  $x-z$ , (β) διατομή της ελαστικής δοκού στο επίπεδο  $y-z$ .

Για τη θεωρητική διατύπωση του προβλήματος, γίνονται οι εξής υποθέσεις:

1. Η ελαστική δοκός θεωρείται ομογενής και ισότροπο υλικό
2. Οι μετατοπίσεις εντός του επιπέδου στην κατεύθυνση  $x$  αποτελούνται από δύο συνιστώσες: (α) τη συνιστώσα της μετατόπισης που είναι ανάλογη με τη μετατόπιση στην κλασική θεωρία δοκών σε κάμψη και (β) τη μετατόπιση λόγω διατμητικής παραμόρφωσης ως προς τη συντεταγμένη του πάχους.
3. Η εγκάρσια μετατόπιση  $w$  στην κατεύθυνση  $z$  θεωρείται συνάρτηση του  $x$ .
4. Η ανάλυση γίνεται με χρήση του καταστατικού νόμου (Νόμος του Hooke) σε μια διάσταση.

Με βάση τις υποθέσεις αυτές, το πεδίο μετατοπίσεων στην περίπτωση της γραμμικής ανάλυσης με διατμητικές θεωρίες ανώτερης τάξης είναι το εξής:

$$u_1 = u(x, z, t) = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f(z) \varphi(x, t), \quad (5.2)$$

$$u_2 = v(x, z, t) = 0, \quad (5.3)$$

$$u_3 = w(x, z, t) = w(x, t), \quad (5.4)$$

όπου:  $u$  και  $w$  είναι οι αξονικές και εγκάρσιες μετατοπίσεις του μέσου επιπέδου της δοκού στις κατευθύνσεις  $x$  και  $y$  αντίστοιχα,  $\varphi$  η στροφή (*rotation*) και  $t$  ο χρόνος.

Η επίδραση της διάτμησης στην παραμόρφωση μιας δοκού είναι πιο έντονη σε δοκούς με μεγάλο πάχος (thick beams) σε σχέση με λεπτές δοκούς (slender beams). Η επίδραση λόγω διάτμησης αγνοείται στη θεωρία ΕΤΒ. Για καλύτερη προσέγγιση της συμπεριφοράς δοκών με μεγάλο πάχος σε κάμψη, λαμβάνεται υπόψη η επίδραση της διάτμησης, χρησιμοποιώντας θεωρία διάτμησης ανώτερης τάξης. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την επιλογή κατάλληλων κινηματικών και καταστατικών μοντέλων.

Η συνάρτηση  $f(z)$  περιλαμβάνει την επίδραση της εγκάρσιας παραμόρφωσης λόγω διάτμησης με τη θεώρηση πως εφαρμόζονται συνοριακές συνθήκες μηδενικής διάτμησης στην άνω και κάτω επιφάνεια της δοκού. Από το πεδίο των μετατοπίσεων, με σχετικές παραγωγίσεις προκύπτει το πεδίο των τροπών. Πιο συγκεκριμένα, η ορθή τροπή  $\varepsilon_x$  είναι:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -z \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + f(z) \varphi(x,t) \right] = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f'(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} , \quad (5.5)$$

και η εγκάρσια διατμητική τροπή  $\gamma_{xz}$  είναι:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ -z \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + f(z) \varphi(x,t) \right] + \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = f'(z) \varphi . \quad (5.6)$$

Από την καταστατική σχέση (νόμο του Hooke) σε μια διάσταση, η αξονική τάση  $\sigma_x$  και η εγκάρσια διατμητική τάση  $\tau_{xz}$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \left[ -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f'(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] , \quad (5.7)$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} = G f'(z) \varphi . \quad (5.8)$$

Από τις σχέσεις 5.5-5.8 με χρήση της Αρχής Hamilton, γίνεται παραγωγή των εξισώσεων κίνησης και των συνοριακών συνθηκών για μια ελαστική δοκό σε κάμψη με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης. Η Αρχή Hamilton [22] διατυπώνεται ως:

$$\int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz dy dx + \rho \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dz dy dx - \int_{x=0}^{x=L} [q(\delta w)] dx = 0 , \quad (5.9)$$

όπου  $\delta$  είναι ο μεταβολικός τελεστής. Από τις ιδιότητες του λογισμού των μεταβολών, στις πράξεις με τον μεταβολικό τελεστή  $\delta$ , ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα. Με αντικατάσταση των σχέσεων 5.2-5.8, η σχέση 5.9 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ E \left( -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \left( -z \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right) \right. \\
 & + Gf'(z) \varphi [f'(z) \varphi] \Big\} dz dy dx + \rho \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( -z \frac{\partial w}{\partial x} + f(z) \varphi(x,t) \right) \right. \\
 & \left. \delta \left( -z \frac{\partial w}{\partial x} + f(z) \varphi(x,t) \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right\} dz dy dx - \int_{x=0}^{x=L} (q(\delta w)) dx = 0 . \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

Με ολοκλήρωση της σχέσης 5.10 προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες. Υπολογίζεται ξεχωριστά το κάθε ολοκλήρωμα. Από το πρώτο ολοκλήρωμα της Αρχής Hamilton, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} E \left[ z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} - zf(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} - zf(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} + [f(z)]^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right] dz dy dx \\
 & + \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [Gf'(z) \varphi f'(z) (\delta \varphi)] dz dy dx . \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

Με ολοκλήρωση ως προς το πλάτος της δοκού και πράξεις, η 5.11 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=0}^{x=L} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z^2] dz - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz dx - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f(z)]^2 dz \right\} dx \quad (5.12) \\
 & + Gb \varphi (\delta \varphi) \int_{x=0}^{x=L} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f'(z)]^2 dz dx .
 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, ορίζονται οι συντελεστές  $A_0, B_0, C_0, D_0$  ως:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z^2] dz , \\
 B_0 &= Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz , \\
 C_0 &= Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f^2(z)] dz , \\
 D_0 &= Gb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f'(z)]^2 dz . \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση των συντελεστών της σχέσης 5.13, η σχέση 5.12 παίρνει τη μορφή:



$$\int_{x=0}^{x=L} \left\{ A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} - B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} - B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} + C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} + D_0 \varphi (\delta \varphi) \right\} dx . \quad (5.14)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss (Παράρτημα Α.1), από το πρώτο ολοκλήρωμα της Αρχής Δυνατών Έργων προκύπτουν οι πρώτοι όροι των εξισώσεων κίνησης:

$$A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 0 , \quad (5.15)$$

$$B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_0 \varphi = 0 , \quad (5.16)$$

και οι πρώτοι όροι των συνοριακών συνθηκών:

$$-A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ή} \quad w : \text{καθορισμένο} , \quad (5.17)$$

$$A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial w}{\partial x} : \text{καθορισμένο} , \quad (5.18)$$

$$-B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{ή} \quad \varphi : \text{καθορισμένο} . \quad (5.19)$$

Στη συνέχεια, γίνεται υπολογισμός των επόμενων δύο ολοκληρωμάτων της Αρχής Hamilton. Το δεύτερο ολοκλήρωμα περιέχει τους αδρανειακούς όρους, τους όρους δηλαδή που εξαρτώνται από το χρόνο και το τρίτο το έργο των εξωτερικών δυνάμεων:

$$\rho \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ \left[ -z \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} + f(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] \left[ -z \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} + f(z) (\delta \varphi) \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) \right\} dz dy dx - \int_{x=0}^{x=L} [q(\delta w)] dx . \quad (5.20)$$

Ύστερα από πράξεις, η σχέση 5.20 γίνεται:

$$\rho b \int_{x=0}^{x=L} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ z^2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} - z f(z) \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} (\delta \varphi) - z f(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} + f^2(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta \varphi) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) \right\} dz dx - \int_{x=0}^{x=L} [q(\delta w)] dx . \quad (5.21)$$

Με πράξεις και αντικατάσταση των συντελεστών (σχέση 5.13), έχουμε:

$$\int_{x=0}^{x=L} \left\{ \frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} - \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} (\delta \varphi) - \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} + \frac{\rho C_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta \varphi) + \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) - q(\delta w) \right\} dx. \quad (5.22)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss (Παράρτημα Α.1) στη σχέση 5.22, συνολικά από την Αρχή Hamilton, προκύπτουν:

**Γραμμικές εξισώσεις κίνησης ελαστικής δοκού:**

$$A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - \frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} + \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad (5.23)$$

$$B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_0 \varphi - \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \frac{\rho C_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (5.24)$$

**Συνοριακές συνθήκες στο  $x=0$  και  $x=L$ :**

$$-A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ή} \quad w: \text{καθορισμένο}, \quad (5.25)$$

$$A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial w}{\partial x}: \text{καθορισμένο}, \quad (5.26)$$

$$-B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{ή} \quad \varphi: \text{καθορισμένο}. \quad (5.27)$$

Οι σχέσεις 5.23–5.27 αποτελούν τη μαθηματική περιγραφή μιας ελαστικής δοκού για τη γραμμική ανάλυση. Οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες έχουν διατυπωθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να εξαρτώνται από τους συντελεστές  $A_0, B_0, C_0, D_0$  και να μπορούν εύκολα να προσαρμοστούν σε οποιαδήποτε τεχνική θεωρία διάτμησης ανώτερης τάξης. Οι σχέσεις 5.23–5.27 βρίσκονται στη γενική μορφή τους και είναι κατάλληλες για επίλυση στατικών προβλήματα δοκών όπως η κάμψη δοκών και δυναμικών προβλήματα όπως προβλήματα ταλαντώσεων.

Η συνάρτηση  $f(z)$  που περιγράφει την κατανομή της διατμητικής τάσης μέσα στο σώμα βρίσκεται μέσα στους συντελεστές  $A_0, B_0, C_0, D_0$ . Παρατηρείται πως για  $f(z) = 0$  και  $\varphi(x, t) = 0$ , προκύπτει η θεωρία δοκών ΕΒΤ. Επίσης, για  $f(z) = z$  και  $\varphi(x, t) \neq 0$ , προκύπτει η θεωρία δοκών ΤΒΤ. Στη συνέχεια, οι τιμές των συντελεστών για διάφορες τεχνικές θεωρίες σε προβλήματα δοκών παρουσιάζονται στον πίνακα 5.2.

**Πίνακας 5.2:** Τιμές των συντελεστών  $A_0, B_0, C_0, D_0$  για διάφορα μοντέλα.

Μοντέλα	$A_0$	$B_0$	$C_0$	$D_0$
Model 1 (EBT)	$\frac{Ebh^3}{12}$	0	0	0
Model 2 (TBT)	$\frac{Ebh^3}{12}$	$\frac{Ebh^3}{12}$	$\frac{Ebh^3}{12}$	$Gbh$
Model 3 (HSDT)	$\frac{Ebh^3}{12}$	$\frac{Ebh^5}{120}$	$\frac{17Ebh^7}{20160}$	$\frac{Gbh^5}{120}$
Model 4 (HSDT)	$\frac{Ebh^3}{12}$	$\frac{Ebh^3}{12}$	$\frac{85Ebh^3}{1008}$	$\frac{5Gbh}{6}$
Model 5 (RBT)	$\frac{Ebh^3}{12}$	$\frac{Ebh^3}{15}$	$\frac{17Ebh^3}{315}$	$\frac{8Gbh}{15}$
Model 6 (SSDT)	$\frac{Ebh^3}{12}$	$\frac{2Ebh^3}{\pi^3}$	$\frac{Ebh^3}{2\pi^2}$	$\frac{Gbh}{2}$
Model 7 (HPSDT)	$\frac{Ebh^3}{12}$	$\frac{(13e-35)Ebh^3}{24\sqrt{e}}$	$\frac{(-83-70e+37e^2)Ebh^3}{48e}$	$\left(1+\frac{1}{e}-\frac{e}{2}\right)Gbh$
Model 8 (ESDT)	$\frac{Ebh^3}{12}$	$\frac{\left(\sqrt{2e\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-2\right)Ebh^3}{8\sqrt{e}}$	$\frac{(e\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(1)-2)Ebh^3}{16e}$	$\frac{(3e\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(1)-2)Gbh}{8e}$
Model 9 (HPSDT)	$\frac{Ebh^3}{12}$	$0.063Ebh^3$	$0.050Ebh^3$	$0.515628Gbh$

όπου:  $\operatorname{erf}$  είναι η συνάρτηση σφάλματος (error function ή Gauss error function) και ορίζεται ως:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t=0}^{t=x} e^{-t^2} dt \quad (5.28)$$

Οι τιμές των σταθερών και της συνάρτησης  $\operatorname{erf}$  δίδονται στον πίνακα 5.3:

**Πίνακας 5.3:** Τιμές των σταθερών και της συνάρτησης  $\operatorname{erf}$ .

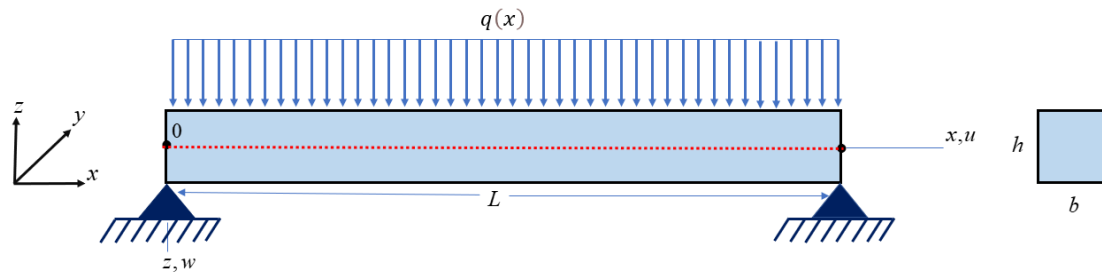
$\pi$	$e$	$e^2$	$\operatorname{erf}(1)$	$\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
3.141592653	2.718281828	7.38905609	0.84270079	0.6826894921

## 5.2 Επίλυση στατικού προβλήματος ελαστικών δοκών

Για την επίλυση στατικών προβλημάτων κάμψης ελαστικών δοκών στη γραμμική ανάλυση, η δοκός θεωρείται ομογενής, ισότροπη, με συνοριακές συνθήκες άρθρωσης στα δύο άκρα (hinged-hinged) και υποβάλλεται σε ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο  $q(x)$ , με μέτρο ελαστικότητας  $E = 210GPa$ , λόγο Poisson  $\nu = 0.3$  και πυκνότητα  $\rho = 7800 kg/m^3$ . Το μέτρο διάτμησης δίδεται από τη σχέση:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.29)$$

Η επίλυση θα προκύψει με αναλυτικό τρόπο ορίζοντας τις άγνωστες ποσότητες σε μορφές λύσεων άπειρων αθροισμάτων ημιτόνων και συνημιτόνων (σειρές Fourier).



**Σχήμα 5.2:** Ελαστική δοκός με συνοριακή συνθήκη άρθρωσης στα δύο άκρα και επιβολή ομοιόμορφα καταναμημένου φορτίου  $q(x)$ .

Για τη στατική ανάλυση, αγνοώντας τους αδρανειακούς όρους που σχετίζονται με το χρόνο, οι εξισώσεις κίνησης δοκού σε κάμψη με συνοριακές συνθήκες άρθρωσης στα δύο άκρα (hinged-hinged), είναι:

$$A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = q, \quad (5.30)$$

$$B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_0 \varphi = 0. \quad (5.31)$$

Οι μορφές των λύσεων της μετατόπισης  $w(x)$  και της στροφής  $\varphi(x)$  θα πρέπει να ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες άρθρωσης στα δύο άκρα [134]. Οι μορφές των λύσεων που ικανοποιούν ακριβώς τις συνοριακές συνθήκες, έχουν τη μορφή:

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad (5.32)$$

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L}, \quad (5.33)$$

Το ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο με μορφή αθροίσματος έχει τη μορφή:

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \frac{m\pi x}{L}, \text{ με } q_m = \frac{4q_0}{m\pi} \text{ για } m=1,3,5,\dots \quad (5.34)$$

και  $q_m = 0$  για  $m=2,4,6,\dots$

όπου:  $w_m$  και  $\varphi_m$  είναι οι άγνωστοι συντελεστές της σειράς Fourier και  $m$  ένας θετικός ακέραιος. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 5.32-5.34 στις 5.30-5.31 (Παράρτημα Α.1), προκύπτουν δύο εξισώσεις:

$$A_0 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 w_m - B_0 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \varphi_m = q_m, \quad (5.35)$$

$$-B_0 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 w_m + \left( C_0 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + D_0 \right) \varphi_m = 0. \quad (5.36)$$

Με επίλυση των 5.35, 5.36, οι λύσεις των άγνωστων ποσοτήτων  $w_m$ ,  $\varphi_m$  είναι:

$$w_m = \frac{q_m \left( C_0 \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + D_0 \right)}{\left( A_0 \frac{m^4 \pi^4}{L^4} \right) \left( C_0 \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + D_0 \right) - \left( B_0 \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right) \left( B_0 \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right)}, \quad (5.37)$$

$$\varphi_m = \frac{q_m \left( B_0 \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right)}{\left( A_0 \frac{m^4 \pi^4}{L^4} \right) \left( C_0 \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + D_0 \right) - \left( B_0 \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right) \left( B_0 \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right)}. \quad (5.38)$$

Με χρήση των σχέσεων 5.37 και 5.38, προκύπτουν εκφράσεις για χρήσιμα μεγέθη όπως η αξονική μετατόπιση  $u$ , η εγκάρσια μετατόπιση  $w$ , η αξονική τάση κάμψης  $\sigma_x$  και η εγκάρσια διατμητική τάση  $\tau_{xz}$  (Παράρτημα Α.1):

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ -z \frac{m\pi}{L} w_m + f(z) \varphi_m \right] \cos \frac{m\pi x}{L} \right\}, \quad (5.39)$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}, \quad (5.40)$$

$$\sigma_x = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ E \left[ z \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 w_m - f(z) \frac{m\pi}{L} \varphi_m \right] \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}, \quad (5.41)$$

$$\tau_{xz} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ G f'(z) \varphi_m \right] \cos \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (5.42)$$

### 5.3 Επίλυση δυναμικού προβλήματος ελαστικών δοκών

Οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα των ελεύθερων ταλαντώσεων μιας ελαστικής δοκού με συντοιακές συνθήκες απλής στήριξης, προκύπτουν ορίζοντας το εφαρμοζόμενο εγκάρσιο φορτίο ίσο με μηδέν στις εξισώσεις 5.23, 5.24. Οι λύσεις των εξισώσεων που προκύπτουν για να ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, θα πρέπει να είναι της μορφής:

$$w(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t), \quad (5.43)$$

$$\varphi(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t), \quad (5.44)$$

όπου  $\omega_m$  είναι η φυσική συχνότητα ταλάντωσης της m-φοράς,  $w_m, \varphi_m$  οι συντελεστές των άγνωστων ποσοτήτων και m ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Επίσης, ορίζεται η ποσότητα:

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{L}. \quad (5.45)$$

Η αντικατάσταση των μορφών λύσης (σχέσεις 5.43 και 5.44) στις εξισώσεις 5.23 και 5.24 για δυναμικά προβλήματα ελαστικών δοκών προκύπτει το ακόλουθο γραμμικό αλγεβρικό σύστημα:

$$\left[ (A_0 E b \alpha_m^4) w_m - (B_0 E b \alpha_m^3) \varphi_m \right] - \omega^2 \left[ (\rho b A_0 \alpha_m^2 + \rho b h) w_m - (\rho b B_0 \alpha_m) \varphi_m \right] = 0, \quad (5.46)$$

$$\left[ (-B_0 E b \alpha_m^3) w_m + (C_0 E b \alpha_m^2 + D_0 G b) \varphi_m \right] - \omega^2 \left[ -(\rho b B_0 \alpha_m) w_m + (\rho b C_0) \varphi_m \right] = 0. \quad (5.47)$$

Οι εξισώσεις 5.46 και 5.47 μπορούν να γραφούν με τη μορφή πινάκων ως εξής:

$$\left( \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} w_m \\ \varphi_m \end{Bmatrix} = 0, \quad (5.48)$$

και σε πιο συμπαγή μορφή, η εξίσωση 5.48 γράφεται:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\Delta\} = 0, \quad (5.49)$$

όπου  $\{\Delta\}^T = \{w_m, \varphi_m\}$ . Οι πίνακες  $[K]$ ,  $[M]$  είναι συμμετρικοί και ισχύει  $K_{12} = K_{21}$  και  $M_{12} = M_{21}$ .

Τα στοιχεία των συντελεστών του πίνακα  $[K]$  δίδονται ως:

$$\begin{aligned} K_{11} &= A_0 E b \alpha_m^4 , \\ K_{12} &= K_{21} = -B_0 E b \alpha_m^3 , \\ K_{22} &= C_0 E b \alpha_m^2 + D_0 G b . \end{aligned} \quad (5.50)$$

Τα στοιχεία των συντελεστών του πίνακα  $[M]$  δίδονται ως:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \rho b A_o \alpha_m^2 + \rho b h , \\ M_{12} &= M_{21} = -\rho b B_o \alpha_m , \\ M_{22} &= \rho b C_o . \end{aligned} \quad (5.51)$$

Η εξίσωση 5.49, για μη τετριμμένες λύσεις, θα πρέπει να ικανοποιεί την απαραίτητη συνθήκη:

$$\det([K] - \omega_m^2 [M]) = 0 . \quad (5.52)$$

Η επίλυση του συστήματος γίνεται τη μέθοδο των οριζουσών:

$$\det \begin{bmatrix} K_{11} - \omega_m^2 M_{11} & K_{12} - \omega_m^2 M_{12} \\ K_{12} - \omega_m^2 M_{12} & K_{22} - \omega_m^2 M_{22} \end{bmatrix} = 0 . \quad (5.53)$$

Υστερα από σχετικούς υπολογισμούς, προκύπτει μια αλγεβρική εξίσωση τέταρτης τάξης της μορφής:

$$\omega_m^4 (M_{11} M_{22} - M_{12}^2) + \omega_m^2 (-M_{11} K_{22} - M_{22} K_{11} + 2K_{12} M_{12}) + (K_{11} K_{22} - K_{12} K_{12}) = 0 \quad (5.54)$$

Από τη λύση της πολυωνυμικής εξίσωσης τετάρτου βαθμού (σχέση 5.54) προκύπτουν τέσσερις ρίζες από τις οποίες οι δύο είναι θετικές και οι άλλες δύο αρνητικές συζυγείς. Εφόσον πρόκειται για πρόβλημα ταλαντώσεων, οι συχνότητες της δοκού δεν μπορούν να είναι αρνητικές, συνεπώς οι αρνητικές συζυγείς λύσεις απορρίπτονται. Οι δυο θετικές λύσεις είναι αποδεκτές. Η πρώτη θετική λύση αναφέρεται στη συχνότητα λόγω κάμψης  $\omega_w$  (καμπτική συχνότητα) και η δεύτερη στη θεμελιώδη συχνότητα περιστροφής (στροφής) λόγω διάτμησης  $\omega_\phi$  της ελαστικής δοκού.

Τα αποτελέσματα του στατικού προβλήματος κάμψης μιας ελαστικής δοκού παρουσιάζονται στην ενότητα 5.4 και τα αποτελέσματα του δυναμικού προβλήματος ταλαντώσεων για μια ελαστική δοκού παρουσιάζονται στην ενότητα 5.5.

### 5.4 Αποτελέσματα στατικού προβλήματος ελαστικών δοκών

Για τα παραδείγματα και τους αριθμητικούς υπολογισμούς ενός στατικού προβλήματος κάμψης ελαστικής δοκού, η δοκός θεωρείται ομογενής, ισότροπη, με συνοριακές συνθήκες άρθρωσης στα δύο άκρα και υποβάλλεται σε ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο  $q(x)$ . Η γεωμετρία και οι ιδιότητες της ελαστικής δοκού δίδονται στον πίνακα 5.4.

**Πίνακας 5.4:** Γεωμετρία και ιδιότητες ελαστικής δοκού.

Μέτρο Ελαστικότητας $E(GPa)$	Λόγος Poisson $\nu$	Μέτρο διάτμησης $G(GPa)$	Μήκος δοκού $L(m)$	Πλάτος δοκού $b(m)$	Πάχος δοκού $h(m)$	Αναλογία διαστάσεων $S = L/h$	Φορτίο $q\left(\frac{KN}{m^2}\right)$	Πυκνότητα $\rho\left(\frac{kg}{m^3}\right)$
210	0.3	80.77	1	0.02	0.50	2	10	7800
					0.25	4		
					0.10	10		
					0.05	20		
					0.0333	30		
					0.02	50		

Για την κάμψη μιας ελαστικής δοκού, η εγκάρσια μετατόπιση  $w$ , η αξονική καμπτική τάση  $\sigma_x$ , η εγκάρσια διατμητική τάση  $\tau_{xz}$  και η συχνότητα  $\omega$  διατυπώνονται σε αδιάστατη μορφή σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\tilde{w} = \frac{10Ebh^3w}{q_0L^4}, \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{b\tau_{xz}}{q_0}, \quad \bar{\sigma}_x = \frac{b\sigma_x}{q_0}, \quad \bar{\omega} = \omega_m \left( \frac{L^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho}{E}}. \quad (5.55)$$

Το ποσοστό σφάλματος προκύπτει από τη σύγκριση των λύσεων με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη λύση της διδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας (2D elasticity solution) [144] και δίδεται από τον τύπο:

$$\%σφάλμα = \left( \frac{\text{τιμή θεωρίας} - \text{τιμή ακριβούς λύσης}}{\text{τιμή ακριβούς λύσης}} \right) \times 100\%. \quad (5.56)$$

Η εγκάρσια μετατόπιση  $w$  (στο σημείο  $x=L/2, z=0$ ), η στροφή  $\varphi$  (στο σημείο  $x=0, z=0$ ), η αξονική τάση κάμψης  $\sigma_x$  (axial bending stress) (στο σημείο  $x=L/2, z=h/2$ ) και η εγκάρσια διατμητική τάση  $\tau_{xz}$  (transverse shear stress) (στο σημείο  $x=0, z=0$ ) υπολογίστηκαν για το σύνολο των τεχνικών θεωριών διάτμησης ανώτερης τάξης στη γραμμική ανάλυση με αναλογίες διαστάσεων  $S = 2, 4, 10, 20, 30$  και  $50$  με αναλυτικές εκφράσεις καθώς και με αριθμητικά αποτελέσματα που προέκυψαν από τα λογισμικά πακέτα Ansys και Comsol. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στους πίνακες 5.5 και 5.6.



**Πίνακας 5.5:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  (στο σημείο  $x=L/2, z=0$ ), και της στροφής  $\varphi$  (στο σημείο  $x=0, z=0$ ) με γραμμικά μοντέλα ελαστικών δοκών για αναλογίες διαστάσεων  $S = 2, 4, 10, 20, 30$  και  $50$ .

$S$	Μοντέλα	$w$ (m)	$\tilde{w}$	% σφάλμα	$\varphi$ (°)
2	Model 1 (EBT)	$2.9753 \times 10^{-6}$	1.56207	-36.3200	–
	Model 2 (TBT)	$4.5237 \times 10^{-6}$	2.37498	-3.1805	$3.502 \times 10^{-4}$
	Model 3 (HSDT)	$4.8218 \times 10^{-6}$	2.53146	3.1985	$4.983 \times 10^{-4}$
	Model 4 (HSDT)	$4.8218 \times 10^{-6}$	2.53146	3.1985	$4.017 \times 10^{-4}$
	Model 5 (RBT)	$4.8218 \times 10^{-6}$	2.53146	3.1985	$5.021 \times 10^{-4}$
	Model 6 (SSDT)	$4.8165 \times 10^{-6}$	2.52866	3.0843	$5.149 \times 10^{-4}$
	Model 7 (HPSDT)	$4.8220 \times 10^{-6}$	2.53156	3.2026	$3.925 \times 10^{-4}$
	Model 8 (ESDT)	$4.7988 \times 10^{-6}$	2.51938	2.7060	$5.246 \times 10^{-4}$
	Model 9 (HPSDT)	$4.6611 \times 10^{-6}$	2.45101	-0.0811	$4.683 \times 10^{-4}$
	Ansys Solution	$4.8140 \times 10^{-6}$	2.52735	3.0309	–
	Comsol Solution	$4.8333 \times 10^{-6}$	2.53748	3.4439	–
Exact Solution [135]	–	2.453	0.0000	–	
4	Model 1 (EBT)	$2.3803 \times 10^{-5}$	1.56207	-12.4890	–
	Model 2 (TBT)	$2.6904 \times 10^{-5}$	1.76562	-1.0857	0.000700
	Model 3 (HSDT)	$2.7518 \times 10^{-5}$	1.80587	1.1691	0.001321
	Model 4 (HSDT)	$2.7518 \times 10^{-5}$	1.80587	1.1691	0.000826
	Model 5 (RBT)	$2.7518 \times 10^{-5}$	1.80587	1.1691	0.001032
	Model 6 (SSDT)	$2.7511 \times 10^{-5}$	1.80543	1.1445	0.001062
	Model 7 (HPSDT)	$2.7518 \times 10^{-5}$	1.80587	1.1691	0.000806
	Model 8 (ESDT)	$2.7483 \times 10^{-5}$	1.80360	1.0420	0.001089
	Model 9 (HPSDT)	$2.7232 \times 10^{-5}$	1.78875	0.2100	0.000994
	Ansys Solution	$2.7485 \times 10^{-5}$	1.80370	1.0476	–
	Comsol Solution	$2.7523 \times 10^{-5}$	1.80619	1.1871	–
Exact Solution [135]	–	1.785	0.0000	–	
10	Model 1 (EBT)	$3.7192 \times 10^{-4}$	1.56207	-2.2484	–
	Model 2 (TBT)	$3.7976 \times 10^{-4}$	1.59499	-0.1883	0.001751
	Model 3 (HSDT)	$3.8130 \times 10^{-4}$	1.60148	0.2177	0.002093
	Model 4 (HSDT)	$3.8130 \times 10^{-4}$	1.60148	0.2177	0.002093
	Model 5 (RBT)	$3.8130 \times 10^{-4}$	1.60148	0.2177	0.002616
	Model 6 (SSDT)	$3.8129 \times 10^{-4}$	1.60143	0.2146	0.002698
	Model 7 (HPSDT)	$3.8130 \times 10^{-4}$	1.60148	0.2177	0.002044
	Model 8 (ESDT)	$3.8122 \times 10^{-4}$	1.60116	0.1977	0.002775
	Model 9 (HPSDT)	$3.8068 \times 10^{-4}$	1.59888	0.0550	0.002566
	Ansys Solution	$3.8121 \times 10^{-4}$	1.60108	0.1927	–
	Comsol Solution	$3.8129 \times 10^{-4}$	1.60141	0.2133	–
Exact Solution [135]	–	1.598	0.0000	–	
20	Model 1 (EBT)	0.0029753	1.56207	–	–
	Model 2 (TBT)	0.0029916	1.57062	–	0.003502
	Model 3 (HSDT)	0.0029947	1.57224	–	0.005136
	Model 4 (HSDT)	0.0029947	1.57224	–	0.004198
	Model 5 (RBT)	0.0029947	1.57224	–	0.005247
	Model 6 (SSDT)	0.0029947	1.57223	–	0.005414
	Model 7 (HPSDT)	0.0029947	1.57224	–	0.004099
	Model 8 (ESDT)	0.0029946	1.57216	–	0.005574
	Model 9 (HPSDT)	0.0029935	1.57160	–	0.005174
	Ansys Solution	0.0029946	1.57216	–	–
	Comsol Solution	0.0029947	1.57221	–	–

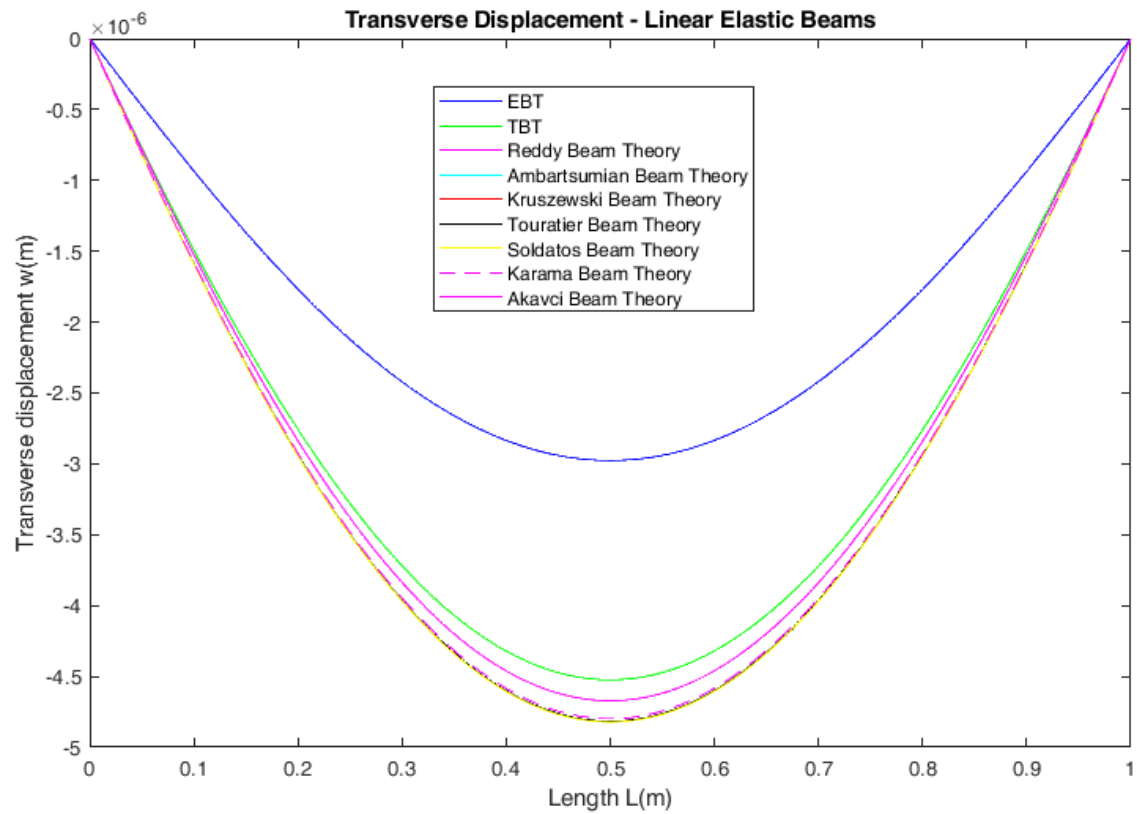
30	Model 1 (EBT)	0.0100418	1.56207	–	–
	Model 2 (TBT)	0.0100678	1.56611	–	0.005252
	Model 3 (HSDT)	0.0100724	1.56683	–	0.005670
	Model 4 (HSDT)	0.0100724	1.56683	–	0.006300
	Model 5 (RBT)	0.0100724	1.56683	–	0.007875
	Model 6 (SSDT)	0.0100724	1.56682	–	0.008127
	Model 7 (HPSDT)	0.0100724	1.56683	–	0.006152
	Model 8 (ESDT)	0.0100722	1.56679	–	0.008369
	Model 9 (HPSDT)	0.0100706	1.56654	–	0.007776
	Ansys Solution	0.0100722	1.56678	–	–
	Comsol Solution	0.0100725	1.56683	–	–
50	Model 1 (EBT)	0.0464902	1.56207	–	–
	Model 2 (TBT)	0.0465416	1.56379	–	0.008754
	Model 3 (HSDT)	0.0465494	1.56405	–	0.012626
	Model 4 (HSDT)	0.0465494	1.56405	–	0.010504
	Model 5 (RBT)	0.0465494	1.56405	–	0.013130
	Model 6 (SSDT)	0.0465493	1.56405	–	0.013550
	Model 7 (HPSDT)	0.0465494	1.56405	–	0.010257
	Model 8 (ESDT)	0.0465490	1.56404	–	0.013955
	Model 9 (HPSDT)	0.0465463	1.56395	–	0.012975
	Ansys Solution	0.0465489	1.56404	–	–
	Comsol Solution	0.0465494	1.56405	–	–

**Πίνακας 5.6:** Σύγκριση της αξονικής τάσης  $\sigma_x$  (στο σημείο  $x=L/2, z=h/2$ ) και της εγκάρσιας διατμητικής τάσης  $\tau_{xz}$  (στο σημείο  $x=0, z=0$ ) για γραμμικές διατμητικές θεωρίες ανώτερης τάξης ελαστικών δοκών για αναλογίες διαστάσεων  $S = 2, 4, 10, 20, 30$  και  $50$ .

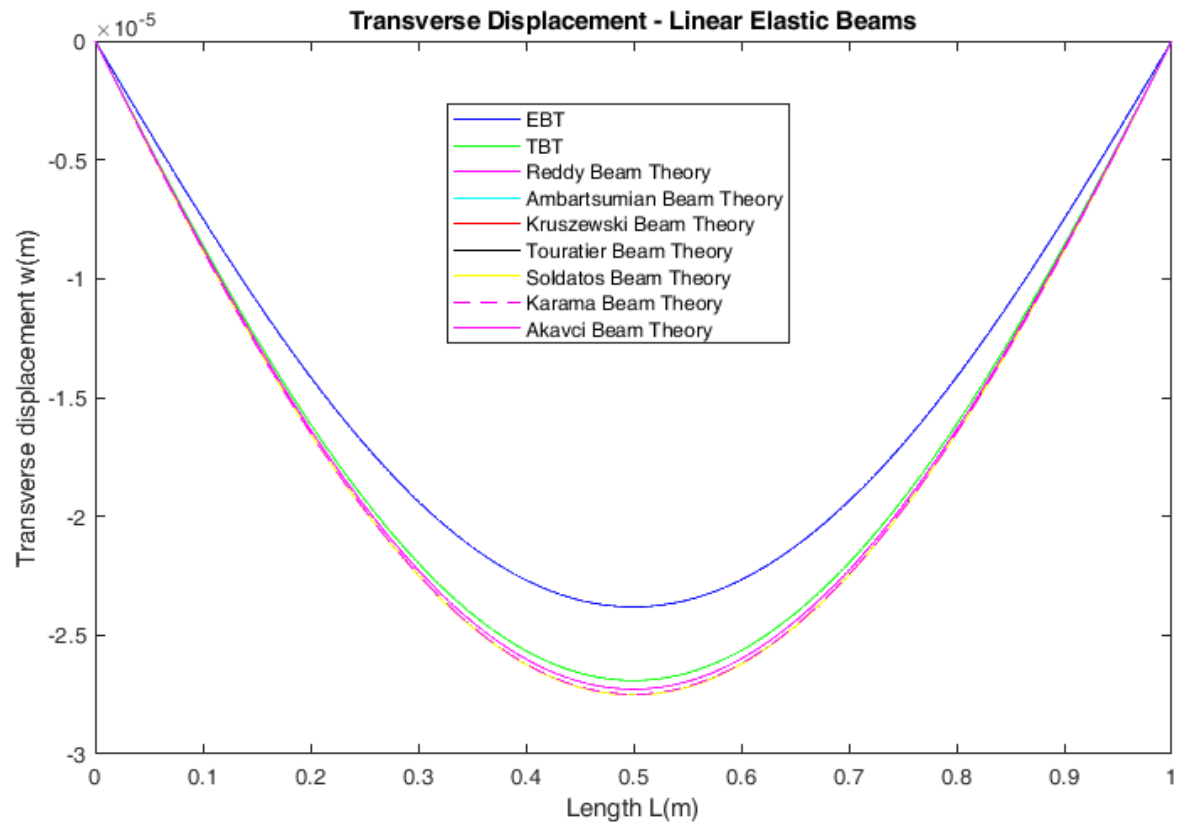
$S$	Μοντέλα	$\sigma_x$ (MPa)	$\bar{\sigma}_x$	% σφάλμα	$\tau_{xz}$ (MPa)	$\bar{\tau}_{xz}$	% σφάλμα
2	Model 1 (EBT)	1.49860	2.9972	-6.3375	–	–	–
	Model 2 (TBT)	1.49860	2.9972	-6.3375	0.47479	0.9496	-36.693
	Model 3 (HSDT)	1.62968	3.2593	1.8531	0.70789	1.4157	-5.6200
	Model 4 (HSDT)	1.62968	3.2593	1.8531	0.70789	1.4157	-5.6200
	Model 5 (RBT)	1.62968	3.2593	1.8531	0.70789	1.4157	-5.6200
	Model 6 (SSDT)	1.63799	3.2759	2.3718	0.72593	1.4519	-3.2066
	Model 7 (HPSDT)	1.62891	3.2578	2.3687	0.70621	1.4124	-5.8400
	Model 8 (ESDT)	1.64472	3.2894	2.7937	0.73953	1.4790	-1.4000
	Model 9 (HPSDT)	1.60362	3.2072	0.2250	0.66435	1.3286	-11.420
	Ansys Solution	1.50000	3.0000	-6.2500	0.74925	1.4985	-0.1000
	Comsol Solution	1.50000	3.0000	-6.2500	0.74925	1.4985	-0.1000
Exact Solution [135]	–	3.2000	0.0000	–	1.5000	0.0000	
4	Model 1 (EBT)	5.99443	11.9888	-1.7311	–	–	–
	Model 2 (TBT)	5.99443	11.9888	-1.7311	0.94959	1.8992	-36.693
	Model 3 (HSDT)	6.12903	12.2580	0.4754	1.45577	2.9115	-2.9500
	Model 4 (HSDT)	6.12903	12.2580	0.4754	1.45577	2.9115	-2.9500
	Model 5 (RBT)	6.12903	12.2580	0.4754	1.45577	2.9115	-2.9500
	Model 6 (SSDT)	6.13737	12.2747	0.6123	1.49810	2.9962	-0.1266
	Model 7 (HPSDT)	6.12825	12.2565	0.4631	1.45184	2.9037	-3.2100
	Model 8 (ESDT)	6.14419	12.2883	0.7237	1.53523	3.0704	2.3466
	Model 9 (HPSDT)	6.10520	12.2104	0.0852	1.40985	2.8197	-6.0100
	Ansys Solution	6.0000	12.0000	-1.6393	1.49850	2.9970	-0.1000
	Comsol Solution	6.0000	12.0000	-1.6393	1.49280	2.9856	-0.1000

	Exact Solution [135]	–	12.2000	0.0000	–	3.000	0.0000
10	Model 1 (EBT)	37.46522	74.9304	-0.3585	–	–	–
	Model 2 (TBT)	37.46522	74.9304	-0.3585	2.37399	4.7479	-36.694
	Model 3 (HSDT)	37.62744	75.2548	0.0728	3.68897	7.3779	-1.6280
	Model 4 (HSDT)	37.62744	75.2548	0.0728	3.68897	7.3779	-1.6280
	Model 5 (RBT)	37.62744	75.2548	0.0728	3.68897	7.3779	-1.6280
	Model 6 (SSDT)	37.63570	75.2714	0.0949	3.80428	7.6085	1.4466
	Model 7 (HPSDT)	37.62668	75.2533	0.0708	3.67833	7.3566	-1.9120
	Model 8 (ESDT)	37.64247	75.2849	0.1128	3.91261	7.8252	4.3360
	Model 9 (HPSDT)	37.61663	75.2332	0.0441	3.64027	7.2805	-2.9266
	Ansys Solution	37.50000	75.0000	-0.2659	3.74620	7.4924	-0.1013
	Comsol Solution	37.50000	75.0000	-0.2659	3.74620	7.4924	-0.1013
	Exact Solution [135]	–	75.2000	0.0000	–	7.5000	0.0000
20	Model 1 (EBT)	149.8608	299.721	–	–	–	–
	Model 2 (TBT)	149.8608	299.721	–	4.74798	9.4959	–
	Model 3 (HSDT)	150.1252	300.250	–	7.39779	14.795	–
	Model 4 (HSDT)	150.1252	300.250	–	7.39779	14.795	–
	Model 5 (RBT)	150.1252	300.250	–	7.39779	14.795	–
	Model 6 (SSDT)	150.1334	300.266	–	7.63321	15.266	–
	Model 7 (HPSDT)	150.1245	300.248	–	7.37611	14.752	–
	Model 8 (ESDT)	150.1400	300.280	–	7.85834	15.716	–
	Model 9 (HPSDT)	150.1592	300.318	–	7.34109	14.682	–
	Ansys Solution	150.0000	300.000	–	7.49250	14.985	–
	Comsol Solution	150.0000	300.000	–	7.49250	14.985	–
30	Model 1 (EBT)	337.1869	674.373	–	–	–	–
	Model 2 (TBT)	337.1869	674.373	–	7.121983	14.244	–
	Model 3 (HSDT)	337.6222	675.244	–	11.10266	22.205	–
	Model 4 (HSDT)	337.6222	675.244	–	11.10266	22.205	–
	Model 5 (RBT)	337.6222	675.244	–	11.10266	22.205	–
	Model 6 (SSDT)	337.6303	675.260	–	11.45734	22.914	–
	Model 7 (HPSDT)	337.6214	675.242	–	11.07000	22.140	–
	Model 8 (ESDT)	337.6369	675.273	–	11.79790	23.595	–
	Model 9 (HPSDT)	337.7311	675.462	–	11.03261	22.065	–
	Ansys Solution	337.5700	675.000	–	11.23875	22.477	–
	Comsol Solution	337.5700	675.000	–	11.23900	22.478	–
50	Model 1 (EBT)	936.6305	1873.26	–	–	–	–
	Model 2 (TBT)	936.6305	1873.26	–	11.86997	23.740	–
	Model 3 (HSDT)	937.6127	1875.22	–	18.50964	37.019	–
	Model 4 (HSDT)	937.6127	1875.22	–	18.50964	37.019	–
	Model 5 (RBT)	937.6127	1875.22	–	18.50964	37.019	–
	Model 6 (SSDT)	937.6208	1875.24	–	19.10216	38.204	–
	Model 7 (HPSDT)	937.6120	1875.22	–	18.45509	36.910	–
	Model 8 (ESDT)	937.6274	1875.25	–	19.67234	39.344	–
	Model 9 (HPSDT)	937.9616	1875.92	–	18.40691	36.813	–
	Ansys Solution	937.5000	1875.00	–	18.73100	37.462	–
	Comsol Solution	937.5000	1875.00	–	18.73100	37.462	–

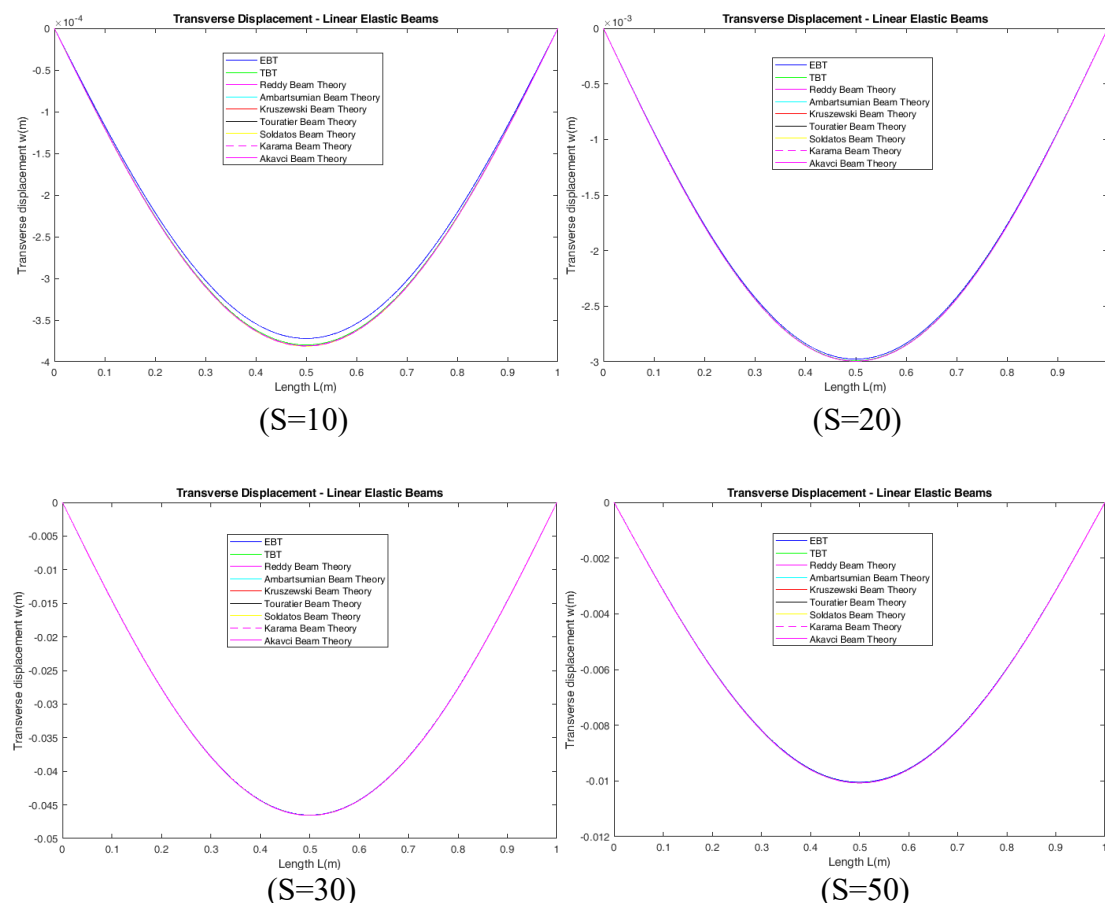
Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  συναρτήσει του μήκους  $L$  της δοκού με χρήση γραμμικών θεωριών διάτμησης ανώτερης τάξης για ελαστικές δοκούς σε κάμψη με αναλογίες διαστάσεων  $S = 2, 4, 10, 20, 30$  και  $50$ .



**Σχήμα 5.3:** Διάγραμμα  $w-L$  με γραμμικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης ελαστικών δοκών σε κάμψη για αναλογία διαστάσεων  $S=2$ .



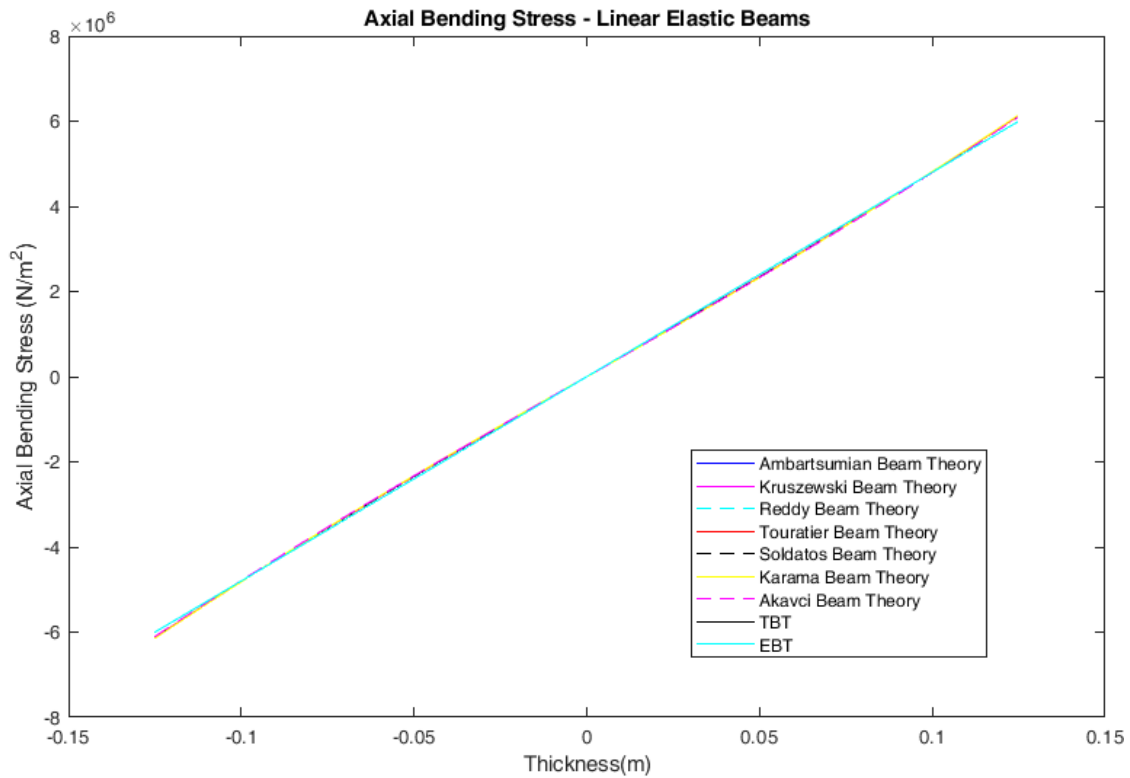
**Σχήμα 5.4:** Διάγραμμα  $w-L$  με γραμμικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης ελαστικών δοκών σε κάμψη για αναλογία διαστάσεων  $S=4$ .



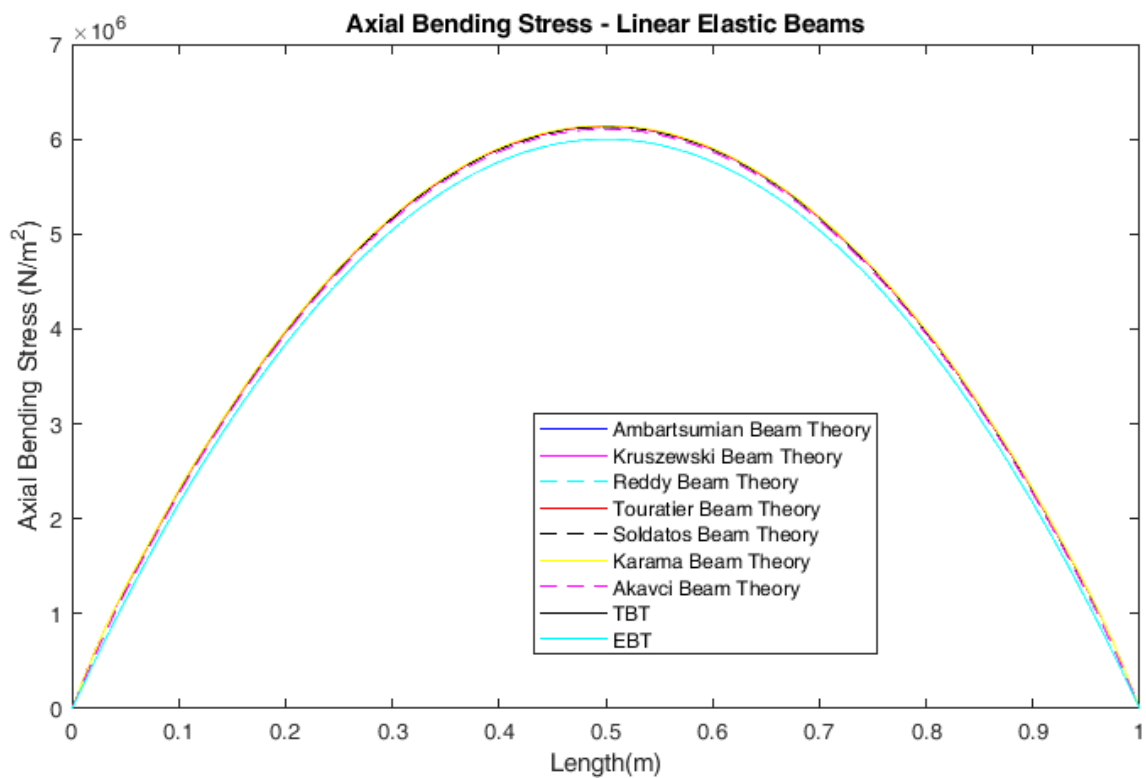
**Σχήμα 5.5:** Διάγραμμα  $w-L$  με γραμμικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης ελαστικών δοκών σε κάμψη για αναλογία διαστάσεων  $S=10, 20, 30$  και  $50$ .

Από τα αριθμητικά αποτελέσματα (πίνακας 5.5), συνεπάγεται το συμπέρασμα πως η θεωρία EBT υποεκτιμά τη μέγιστη εγκάρσια μετατόπιση  $w$  για δοκούς με μεγάλο πάχος ( $S=2, 4, 10$ ), ενώ όλες οι θεωρίες συγκλίνουν για λεπτές δοκούς ( $S=20, 30, 50$ ). Το συμπέρασμα, αυτό, επίσης προκύπτει από τα διαγράμματα της μετατόπισης συναρτήσεως του μήκους της δοκού (σχήματα 5.3-5.5). Η αναγκαιότητα χρήσης τεχνικών θεωριών διάτμησης ανώτερης τάξης φαίνεται σε δοκούς με μεγάλο πάχος όπου τα διατμητικά φαινόμενα είναι σημαντικά. Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει και για την εγκάρσια διατμητική τάση  $\tau_{xz}$  (όπως φαίνεται στον πίνακα 5.6). Επίσης, η ορθή τάση  $\sigma_x$  υπερεκτιμάται σε δοκούς με μεγάλο πάχος ( $S=2, 4, 10$ ) ενώ σε λεπτές δοκούς ( $S=20, 30, 50$ ) παρατηρείται η συμφωνία των αποτελεσμάτων μεταξύ των τεχνικών θεωριών.

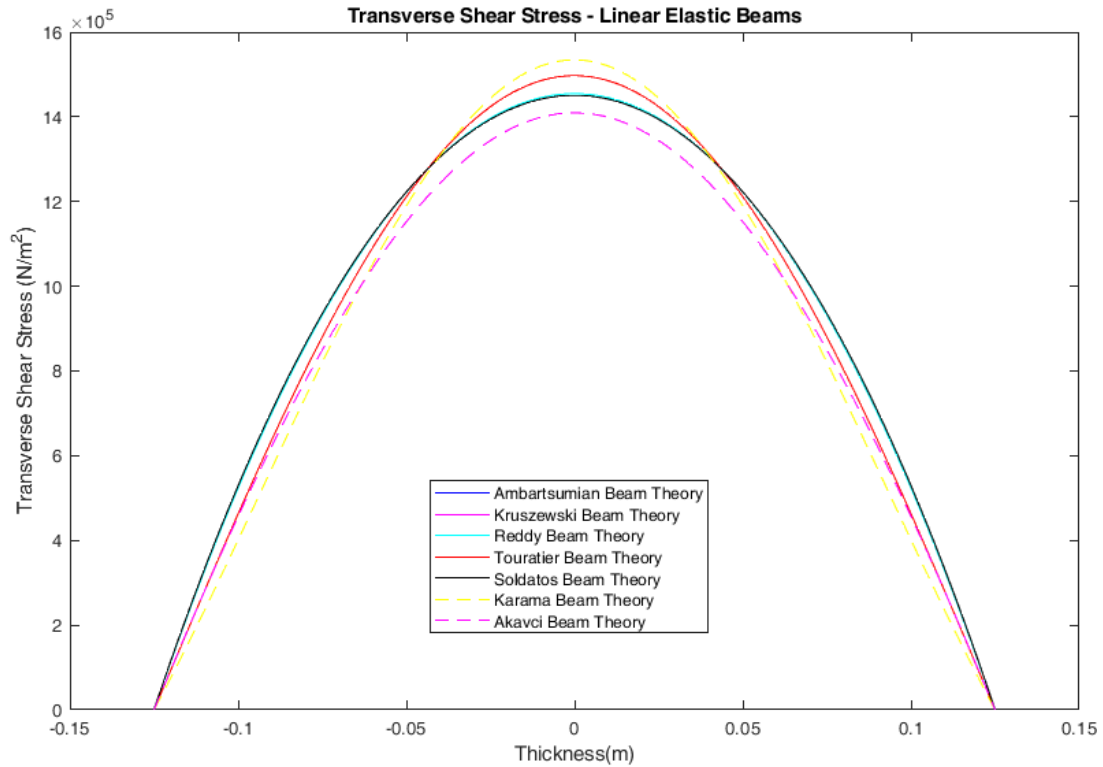
Στη συνέχεια, παρουσιάζεται μέσω γραφικών παραστάσεων, η σύγκριση της αξονικής τάσης  $\sigma_x$  συναρτήσεως του πάχους της δοκού ( $x=L/2, z$ ) (σχήμα 5.6) και του μήκους  $L$  της δοκού (στο  $x, z=h/2$ ) (σχήμα 5.7) και η σύγκριση της εγκάρσιας διατμητικής τάσης  $\tau_{xz}$  συναρτήσεως του πάχους  $h$  (στο  $x=L/4, z$ ) (σχήμα 5.8) και του μήκους  $L$  (στο  $x, z=h/4$ ) (σχήμα 5.9) της δοκού για όλα τα μοντέλα των γραμμικών θεωριών διάτμησης ανώτερης τάξης σε ελαστικές δοκούς με αναλογία διαστάσεων  $S=4$  (δοκοί με μεγάλο πάχος).



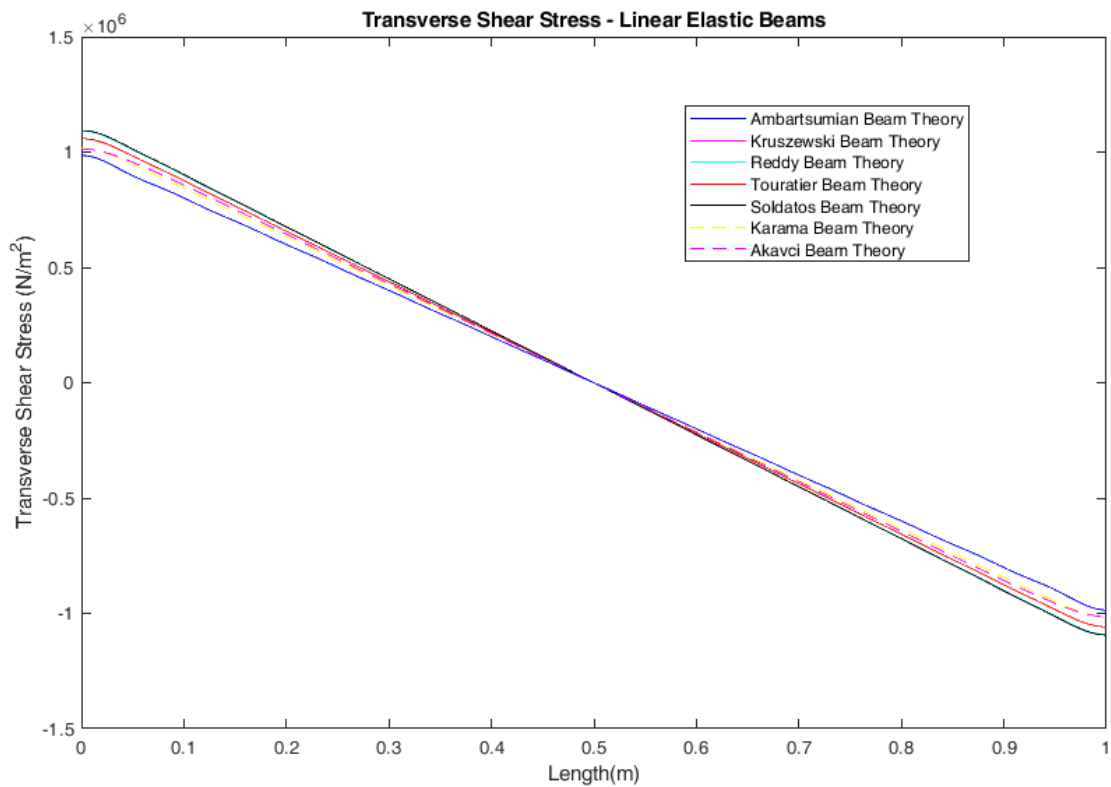
**Σχήμα 5.6:** Σύγκριση της αξονικής καμπτικής τάσης  $\sigma_x$  κατά το πάχος της δοκού  $h$  (στο σημείο  $x=L/2, z$ ) με γραμμικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης ελαστικών δοκών σε κάμψη για αναλογία διαστάσεων  $S=4$ .



**Σχήμα 5.7:** Σύγκριση της αξονικής καμπτικής τάσης  $\sigma_x$  κατά το μήκος της δοκού  $L$  (στο σημείο  $x, z=h/2$ ) με γραμμικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης ελαστικών δοκών σε κάμψη για αναλογία διαστάσεων  $S=4$ .



**Σχήμα 5.8:** Σύγκριση της εγκάρσιας διατμητικής τάσης  $\tau_{xz}$  κατά το πάχος της δοκού  $h$  (στο σημείο  $x=0, z$ ) με γραμμικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης ελαστικών δοκών σε κάμψη για αναλογία διαστάσεων  $S=4$ .



**Σχήμα 5.9:** Σύγκριση της εγκάρσιας διατμητικής τάσης  $\tau_{xz}$  κατά το μήκος της δοκού  $L$  (στο σημείο  $x, z=h/4$ ) με γραμμικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης ελαστικών δοκών σε κάμψη για αναλογία διαστάσεων  $S=4$ .

## 5.5 Αποτελέσματα δυναμικού προβλήματος ελαστικών δοκών

Για το δυναμικό πρόβλημα των ελεύθερων ταλαντώσεων μιας ελαστικής δοκού, γίνεται υπολογισμός της καμπτικής συχνότητας  $\bar{\omega}_w$  και της συχνότητας περιστροφής λόγω διάτμησης  $\bar{\omega}_\phi$  σε αδιάστατη μορφή για διάφορους τρόπους ταλάντωσης και για διάφορες αναλογίες διαστάσεων. Τα αριθμητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στους πίνακες 5.7, 5.8 και 5.9.

**Πίνακας 5.7:** Σύγκριση των αδιάστατων συχνοτήτων λόγω κάμψης  $\bar{\omega}_w$  και των συχνοτήτων περιστροφής λόγω διάτμησης  $\bar{\omega}_\phi$  της ελαστικής δοκού για διάφορες αναλογίες διαστάσεων.

Μοντέλα	$S = 2$		$S = 4$		$S = 10$	
	$\bar{\omega}_w$	$\bar{\omega}_\phi$	$\bar{\omega}_w$	$\bar{\omega}_\phi$	$\bar{\omega}_w$	$\bar{\omega}_\phi$
Model 3 (HSDT)	2.1422	10.3983	2.5958	34.2593	2.8023	198.2351
Model 4 (HSDT)	2.1422	10.3983	2.5958	34.2593	2.8023	198.2351
Model 5 (RBT)	2.1422	10.3983	2.5958	34.2593	2.8023	198.2351
Model 6 (SSDT)	2.1433	10.3927	2.5961	34.2383	2.8023	198.1083
Model 7 (HPSDT)	2.1422	10.3993	2.5958	34.2630	2.8023	198.2586
Model 8 (ESDT)	2.1468	10.3956	2.5974	34.2576	2.8026	198.2520
Model 9 (HPSDT)	2.1721	10.4921	2.6071	34.7111	2.8040	201.2895
Μοντέλα	$S = 20$		$S = 30$		$S = 50$	
	$\bar{\omega}_w$	$\bar{\omega}_\phi$	$\bar{\omega}_w$	$\bar{\omega}_\phi$	$\bar{\omega}_w$	$\bar{\omega}_\phi$
Model 3 (HSDT)	2.8371	783.1477	2.8437	1757.949	2.8471	4877.298
Model 4 (HSDT)	2.8371	783.1477	2.8437	1757.949	2.8471	4877.298
Model 5 (RBT)	2.8371	783.1477	2.8437	1757.949	2.8471	4877.298
Model 6 (SSDT)	2.8371	782.6435	2.8437	1756.816	2.8471	4874.153
Model 7 (HPSDT)	2.8371	783.2417	2.8437	1758.161	2.8471	4877.887
Model 8 (ESDT)	2.8372	783.2343	2.8437	1758.153	2.8471	4877.874
Model 9 (HPSDT)	2.8371	795.5261	2.8434	1785.870	2.8467	4954.955

**Πίνακας 5.8:** Σύγκριση των αδιάστατων καμπτικών συχνοτήτων  $\bar{\omega}_w$  της ελαστικής δοκού για διάφορους τρόπους ταλάντωσης.

$\delta$	Μοντέλα	Τρόποι ταλάντωσης (Modes of vibration)				
		$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
2	Model 3 (HSDT)	2.1422	5.8586	9.7854	13.8134	17.9764
	Model 4 (HSDT)	2.1422	5.8586	9.7854	13.8134	17.9763
	Model 5 (RBT)	2.1422	5.8586	9.7854	13.8134	17.9763
	Model 6 (SSDT)	2.1433	5.8707	9.8301	13.9203	18.1784
	Model 7 (HPSDT)	2.1422	5.8578	9.7821	13.8050	17.9599
	Model 8 (ESDT)	2.1468	5.9008	9.9286	14.1404	18.5756
	Model 9 (HPSDT)	2.1721	6.0863	10.4657	15.2275	20.3765
4	Model 3 (HSDT)	2.5958	8.5690	15.7931	23.4346	31.2390
	Model 4 (HSDT)	2.5958	8.5690	15.7931	23.4346	31.2390



	Model 5 (RBT)	2.5958	8.5690	15.7931	23.4346	31.2390
	Model 6 (SSDT)	2.5961	8.5733	15.8112	23.4828	31.3391
	Model 7 (HPSDT)	2.5958	8.5689	15.7921	23.4315	31.2319
	Model 8 (ESDT)	2.5974	8.5872	15.8615	23.6032	31.5719
	Model 9 (HPSDT)	2.6071	8.6883	16.1965	24.3454	32.9153
10	Model 3 (HSDT)	2.8023	10.7092	22.5662	37.1637	53.5567
	Model 4 (HSDT)	2.8023	10.7092	22.5662	37.1637	53.5567
	Model 5 (RBT)	2.8023	10.7092	22.5662	37.1637	53.5567
	Model 6 (SSDT)	2.8023	10.7101	22.5702	37.1753	53.5833
	Model 7 (HPSDT)	2.8023	10.7092	22.5662	37.1633	53.5556
	Model 8 (ESDT)	2.8026	10.7135	22.5855	37.2169	53.6705
	Model 9 (HPSDT)	2.8040	10.7398	22.7024	37.5273	54.3020
20	Model 3 (HSDT)	2.8371	11.2092	24.7289	42.8371	64.8958
	Model 4 (HSDT)	2.8371	11.2092	24.7289	42.8371	64.8958
	Model 5 (RBT)	2.8371	11.2092	24.7289	42.8371	64.8958
	Model 6 (SSDT)	2.8371	11.2094	24.7299	42.8404	64.9035
	Model 7 (HPSDT)	2.8371	11.2092	24.7289	42.8371	64.8957
	Model 8 (ESDT)	2.8372	11.2104	24.7346	42.8543	64.9353
	Model 9 (HPSDT)	2.8371	11.2162	24.7682	42.9594	65.1783
30	Model 3 (HSDT)	2.8437	11.3118	25.2208	44.2854	68.1432
	Model 4 (HSDT)	2.8437	11.3118	25.2208	44.2854	68.1432
	Model 5 (RBT)	2.8437	11.3118	25.2208	44.2854	68.1432
	Model 6 (SSDT)	2.8437	11.3119	25.2213	44.2868	68.1468
	Model 7 (HPSDT)	2.8437	11.3118	25.2208	44.2854	68.1432
	Model 8 (ESDT)	2.8437	11.3123	25.2234	44.2935	68.1625
	Model 9 (HPSDT)	2.8434	11.3137	25.2365	44.3399	68.2783
50	Model 3 (HSDT)	2.8471	11.3657	25.4873	45.1012	70.0579
	Model 4 (HSDT)	2.8471	11.3657	25.4873	45.1012	70.0579
	Model 5 (RBT)	2.8471	11.3657	25.4873	45.1012	70.0579
	Model 6 (SSDT)	2.8471	11.3657	25.4875	45.1018	70.0592
	Model 7 (HPSDT)	2.8471	11.3657	25.4873	45.1012	70.0579
	Model 8 (ESDT)	2.8471	11.3658	25.4883	45.1043	70.0652
	Model 9 (HPSDT)	2.8467	11.3649	25.4899	45.1162	70.1015

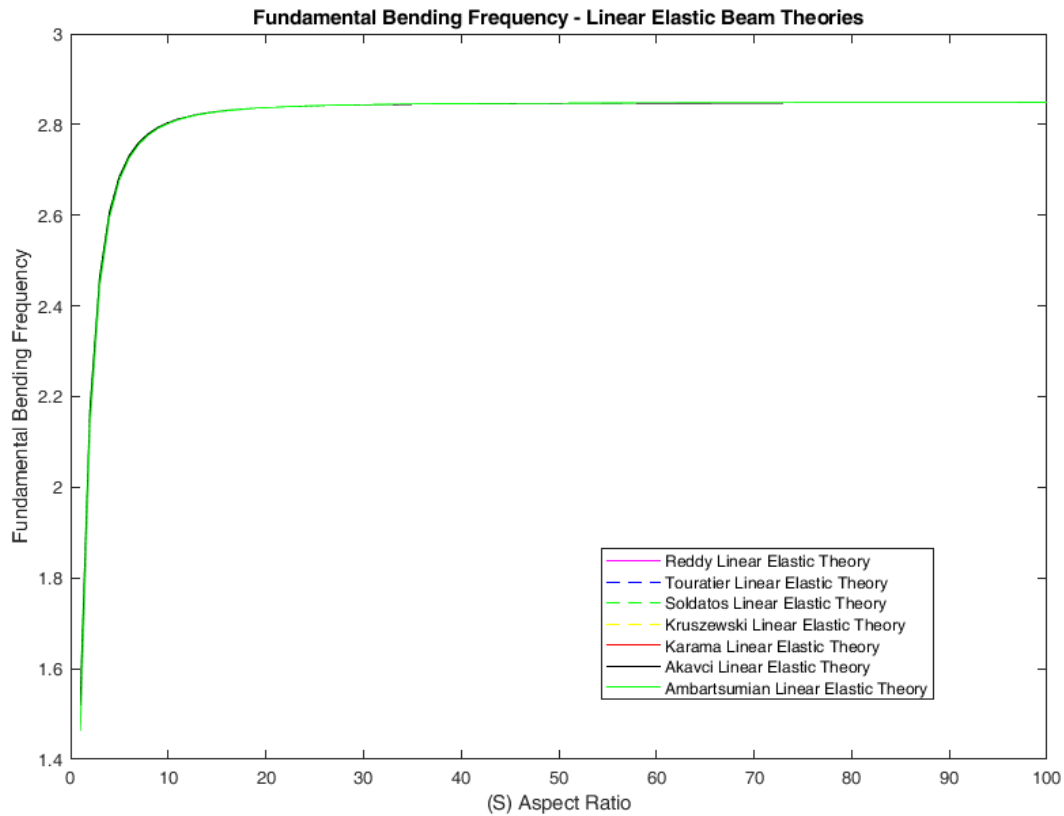
**Πίνακας 5.9:** Σύγκριση των αδιάστατων συχνοτήτων περιστροφής λόγω διάτμησης  $\bar{\omega}_\phi$  της ελαστικής δοκού για διάφορους τρόπους ταλάντωσης.

$\delta$	Μοντέλα	Τρόποι ταλάντωσης (Modes of vibration)				
		$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
2	Model 3 (HSDT)	10.3983	15.3255	20.8993	26.7496	32.7448
	Model 4 (HSDT)	10.3983	15.3255	20.8993	26.7496	32.7448
	Model 5 (RBT)	10.3983	15.3255	20.8993	26.7496	32.7448
	Model 6 (SSDT)	10.3927	15.3196	20.8939	26.7448	32.7406
	Model 7 (HPSDT)	10.3993	15.3264	20.9001	26.7503	32.7454
	Model 8 (ESDT)	10.3956	15.3200	20.8932	26.7438	32.7395
	Model 9 (HPSDT)	10.4921	15.3904	20.9471	26.7869	32.7752

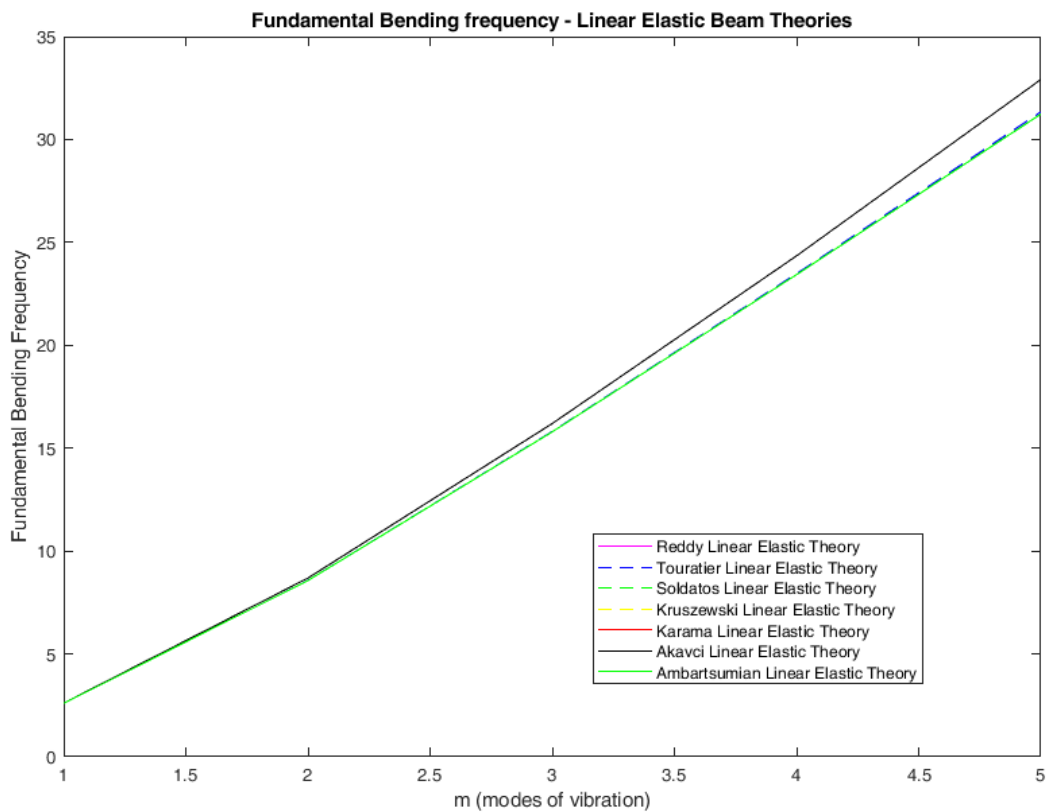
4	Model 3 (HSDT)	34.2593	41.5935	50.9409	61.3022	72.2573
	Model 4 (HSDT)	34.2593	41.5935	50.9409	61.3022	72.2573
	Model 5 (RBT)	34.2593	41.5935	50.9409	61.3022	72.2573
	Model 6 (SSDT)	34.2383	41.5709	50.9174	61.2787	72.2345
	Model 7 (HPSDT)	34.2630	41.5972	50.9446	61.3058	72.2607
	Model 8 (ESDT)	34.2576	41.5825	50.9229	61.2801	72.2334
	Model 9 (HPSDT)	34.7111	41.9684	51.2507	61.5617	72.4783
10	Model 3 (HSDT)	198.2351	207.5547	221.7389	239.5391	259.9595
	Model 4 (HSDT)	198.2351	207.5547	221.7389	239.5391	259.9595
	Model 5 (RBT)	198.2351	207.5547	221.7389	239.5391	259.9595
	Model 6 (SSDT)	198.1083	207.4252	221.6055	239.4015	259.8182
	Model 7 (HPSDT)	198.2586	207.5782	221.7623	239.5624	259.9829
	Model 8 (ESDT)	198.2520	207.5548	221.7166	239.4930	259.8909
	Model 9 (HPSDT)	201.2895	210.4682	224.4669	242.0710	262.3025
20	Model 3 (HSDT)	783.1477	792.9404	808.8206	830.2191	856.4833
	Model 4 (HSDT)	783.1477	792.9404	808.8206	830.2191	856.4833
	Model 5 (RBT)	783.1477	792.9404	808.8206	830.2191	856.4833
	Model 6 (SSDT)	782.6435	792.4331	808.3085	829.7008	855.9576
	Model 7 (HPSDT)	783.2417	793.0343	808.9145	830.3129	856.5770
	Model 8 (ESDT)	783.2343	793.0080	808.8587	830.2195	856.4405
	Model 9 (HPSDT)	795.5261	805.1582	820.7895	841.8729	867.7784
30	Model 3 (HSDT)	1757.949	1767.840	1784.115	1806.487	1834.586
	Model 4 (HSDT)	1757.949	1767.840	1784.115	1806.487	1834.586
	Model 5 (RBT)	1757.949	1767.840	1784.115	1806.487	1834.586
	Model 6 (SSDT)	1756.816	1766.703	1782.974	1805.339	1833.429
	Model 7 (HPSDT)	1758.161	1768.051	1784.327	1806.698	1834.797
	Model 8 (ESDT)	1758.153	1768.023	1784.268	1806.597	1834.645
	Model 9 (HPSDT)	1785.870	1795.595	1811.605	1833.623	1861.293
50	Model 3 (HSDT)	4877.298	4887.240	4903.732	4926.661	4955.877
	Model 4 (HSDT)	4877.298	4887.240	4903.732	4926.661	4955.877
	Model 5 (RBT)	4877.298	4887.240	4903.732	4926.661	4955.877
	Model 6 (SSDT)	4874.153	4884.091	4900.577	4923.500	4952.707
	Model 7 (HPSDT)	4877.887	4887.828	4904.319	4927.249	4956.465
	Model 8 (ESDT)	4877.874	4887.796	4904.255	4927.140	4956.300
	Model 9 (HPSDT)	4954.955	4964.729	4980.945	5003.497	5032.238

Από τους πίνακες των αποτελεσμάτων (πίνακες 5.7, 5.8 και 5.9) για τις ελεύθερες ταλαντώσεις ελαστικών δοκών διαπιστώνεται ότι οι τιμές των συχνοτήτων λόγω κάμψης  $\omega_w$  και οι τιμές των συχνοτήτων περιστροφής λόγω διάτμησης  $\omega_\varphi$  συμφωνούν μεταξύ τους για όλους τους τρόπους ταλάντωσης (modes of vibration) της ελαστικής δοκού για διάφορες αναλογίες διαστάσεων  $S$ .

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα διαγράμματα της καμπτικής συχνότητας  $\bar{\omega}_w$  συναρτήσει της αναλογίας διαστάσεων (αναλογία διαστάσεων  $S$  από 1 μέχρι 100) (σχήμα 5.10) και τον πέντε πρώτων τρόπων ταλάντωσης της ελαστικής δοκού για αναλογία διαστάσεων  $S=4$ . (σχήμα 5.11).



**Σχήμα 5.10:** Μεταβολή της θεμελιώδους καμπτικής συχνότητας  $\bar{\omega}_w$  της ελαστικής δοκού συναρτήσει της αναλογίας διαστάσεων S (m=1).



**Σχήμα 5.11:** Μεταβολή της θεμελιώδους καμπτικής συχνότητας  $\bar{\omega}_w$  της ελαστικής δοκού συναρτήσει των πέντε πρώτων τρόπων ταλάντωσης (S=4).

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

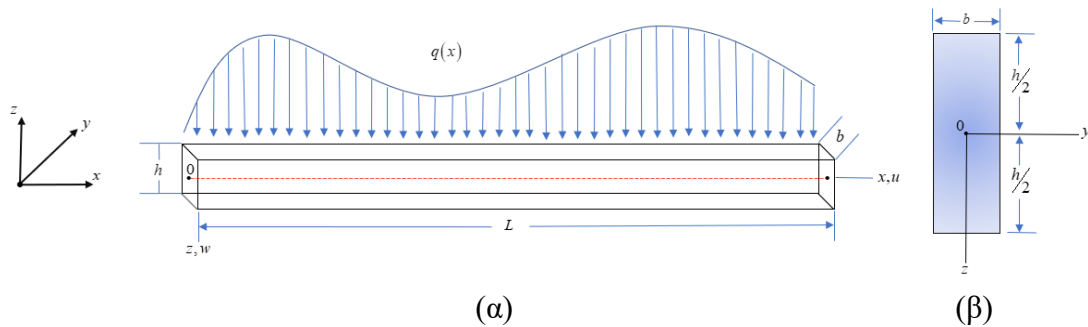
### «Τεχνικές Θεωρίες σε Ελαστικές Δοκούς με Γεωμετρική Μη Γραμμικότητα»

#### 6.1 Θεωρητική διατύπωση ελαστικών δοκών με γεωμετρική μη γραμμικότητα

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται η θεωρητική διατύπωση προβλημάτων ελαστικών δοκών με τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρική μη γραμμικότητα, η επίλυση τέτοιων στατικών προβλημάτων και τα αριθμητικά αποτελέσματα προβλημάτων κάμψης σε ελαστικές δοκούς. Για την παραγωγή των εξισώσεων κίνησης και των συνοριακών συνθηκών με όρους γεωμετρικής μη γραμμικότητας (θεωρία μεγάλων παραμορφώσεων ή μεγάλων μετατοπίσεων), προστίθεται στο πεδίο των τροπών ο μη γραμμικός όρος των μεγάλων μετατοπίσεων, όρος Von Κάρμάν (σχέση 2.1). Ακολουθώντας αντίστοιχη πορεία της παραγράφου 5.1, η ελαστική δοκός (σχήμα 6.1) καταλαμβάνει το χωρίο:

$$0 \leq x \leq L, \quad -b/2 \leq y \leq b/2, \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \quad (6.1)$$

όπου:  $x, y, z$  οι συντεταγμένες στο καρτεσιανό επίπεδο,  $L$  το μήκος,  $b$  το πλάτος και  $h$  το πάχος της δοκού. Η δοκός υποβάλλεται σε εγκάρσιο ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο  $q(x)$ .



**Σχήμα 6.1:** (α) Κάμψη ελαστικής δοκού στο επίπεδο  $x-z$ , (β) διατομή της ελαστικής δοκού στο επίπεδο  $y-z$ .

Το πεδίο των μετατοπίσεων για ελαστικές δοκούς με διατμητικές θεωρίες ανώτερης τάξης, λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρική μη γραμμικότητα, παραμένει ίδιο με τη γραμμική ανάλυση και είναι:

$$u_1 = u(x, z, t) = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f(z) \varphi(x, t), \quad (6.2)$$

$$u_2 = v(x, z, t) = 0, \quad (6.3)$$

$$u_3 = w(x, z, t) = w(x, t) , \quad (6.4)$$

όπου  $u$  και  $w$  είναι οι αξονικές και εγκάρσιες μετατοπίσεις του μέσου επιπέδου της δοκού στις κατευθύνσεις  $x$  και  $y$  αντίστοιχα,  $\varphi$  η στροφή (*rotation*) και  $t$  ο χρόνος.

Το πεδίο των μηχανικών τροπών με όρους μετατοπίσεων και στροφών, λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρική μη γραμμικότητα έχει τη μορφή:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{I}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{I}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 , \quad (6.5)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = f'(z) \varphi(x, t) . \quad (6.6)$$

και το πεδίο των τάσεων με όρους μετατοπίσεων και στροφών είναι:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \left[ -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{I}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] , \quad (6.7)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = Gf'(z) \varphi(x, t) . \quad (6.8)$$

Για την παραγωγή των εξισώσεων κίνησης και των συνοριακών συνθηκών στην περίπτωση μεγάλων μετατοπίσεων (γεωμετρική μη γραμμικότητα) χρησιμοποιείται μια μεταβολική αρχή, η Αρχή Hamilton, η οποία γράφεται ως:

$$\int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz dy dx + \quad (6.9)$$

$$+ \rho \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dz dy dx - \int_{x=0}^{x=L} [q(\delta w)] dx = 0 .$$

Για τον υπολογισμό του πρώτου ολοκληρώματος, με αντικατάσταση των σχέσεων 6.5-6.8 στη σχέση 6.9, προκύπτει:

$$\int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ E \left[ -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{I}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \delta \left[ -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{I}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dz dy dx + \quad (6.10)$$

$$+ \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ [Gf'(z) \varphi(x, t)] \delta [f'(z) \varphi(x, t)] \right\} dz dy dx .$$

Ύστερα από πράξεις, η σχέση 6.10 γίνεται:

$$\int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[ E \left[ z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} - z f'(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -zf(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} + [f(z)]^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \\
 & -z \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} + f(z) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right] \\
 & + G [f'(z)]^2 \varphi(\delta \varphi) \Big] dz dx .
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις, η σχέση 6.11 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=0}^{x=L} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z^2] dz - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz - \right. \\
 & - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z] dz - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz + \\
 & + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f(z)]^2 dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f(z)] dz - \\
 & - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z] dz + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f(z)] dz + \\
 & \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [1] dz + \varphi(\delta \varphi) Gb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f'(z)]^2 dz \right\} dx .
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Θέτοντας τους συντελεστές  $A_0, B_0, C_0, D_0, H_0$ :

$$A_0 = Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z^2] dz , \tag{6.13}$$

$$B_0 = Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz , \tag{6.14}$$

$$C_0 = Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f^2(z)] dz , \tag{6.15}$$

$$D_0 = Gb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f'(z)]^2 dz , \tag{6.16}$$

$$H_0 = Eb \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f(z)] dz , \tag{6.17}$$

η σχέση 6.12 παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=0}^{x=L} \left\{ A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} - B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} - B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} + C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} + H_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} H_0 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} + \frac{1}{2} Ebh \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} + D_0 \varphi(\delta \varphi) \right\} dx ,
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss (Παράρτημα Α.1) στη σχέση 6.18, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 & \left[ A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} - \left[ A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} (\delta w) dx - \left[ B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} + \\
 & + \int_{x=0}^{x=L} B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta \varphi) dx - \left[ B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} + \left[ B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} (\delta w) dx + \\
 & + \left[ C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta \varphi) dx + \left[ H_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \quad (6.19) \\
 & - \int_{x=0}^{x=L} \left( H_0 \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \right) (\delta w) dx + \left[ \frac{H_0}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} - \\
 & - \int_{x=0}^{x=L} \left[ H_0 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) (\delta \varphi) \right] dx + \left[ \frac{Ebh}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \\
 & - \frac{3Ebh}{2} \int_{x=0}^{x=L} \left( \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) (\delta w) \right) dx + \int_{x=0}^{x=L} [D_0 \varphi (\delta \varphi)] dx.
 \end{aligned}$$

Έπειτα, υπολογίζονται το δεύτερο και το τρίτο ολοκλήρωμα της Αρχής Hamilton:

$$\rho \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right] dz dy dx - \int_{x=0}^{x=L} [q(\delta w)] dx. \quad (6.20)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων 6.2, 6.4 και πράξεις, η σχέση 6.20 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \rho b \int_{x=0}^{x=L} \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z^2] dz - \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} (\delta \varphi) \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz - \right. \\
 & - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta \varphi) \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f^2(z)] dz + \quad (6.21) \\
 & \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [I] dz \right\} dx - \int_{x=0}^{x=L} [q(\delta w)] dx.
 \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση των συντελεστών  $A_o, B_o, C_o$ , η σχέση 6.21 γράφεται:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=0}^{x=L} \left\{ \frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} - \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} (\delta \varphi) - \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \right. \\
 & \left. + \frac{\rho C_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta \varphi) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) - q(\delta w) \right\} dx. \quad (6.22)
 \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss (Παράρτημα Α.1), η σχέση 6.22 γίνεται:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} (\delta w) dx - \int_{x=0}^{x=L} \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} (\delta \varphi) dx - \left[ \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} \\ & + \int_{x=0}^{x=L} \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial x} (\delta w) dx + \int_{x=0}^{x=L} \frac{\rho C_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta \varphi) dx + \int_{x=0}^{x=L} \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) dx - \int_{x=0}^{x=L} q (\delta w) dx. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Συνεπώς, συνολικά από την Αρχή Hamilton προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες που διέπουν μια ελαστική δοκό με γεωμετρική μη γραμμικότητα. Ορίζεται η διατομή της δοκού  $A = bh$ . Να σημειωθεί πως ο συντελεστής  $H_0 = 0$  για όλες τις διατμητικές θεωρίες ανώτερης τάξης. Συνεπώς, οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες από την Αρχή Hamilton, είναι:

**Μη γραμμικές εξισώσεις κίνησης ελαστικής δοκού:**

$$-A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \frac{3EA}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + q = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial x}, \quad (6.24)$$

$$C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - D_0 \varphi = -\frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} + \frac{\rho C_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (6.25)$$

**Συνοριακές συνθήκες στο  $x=0$  και  $x=L$ :**

$$EA \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 - A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} - \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (6.26)$$

ή  $w$ : καθορισμένο

$$A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \text{ή} \quad \frac{\partial w}{\partial x} : \text{καθορισμένο} \quad (6.27)$$

$$C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \text{ή} \quad \varphi : \text{καθορισμένο} \quad (6.28)$$

Οι σχέσεις 6.24–6.28 (εξισώσεις κίνησης και συνοριακές συνθήκες) αποτελούν την πλήρη μαθηματική περιγραφή για μια ελαστική δοκό χρησιμοποιώντας τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης και λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρική μη γραμμικότητα. Με αντικατάσταση των τιμών των συντελεστών  $A_0, B_0, C_0, D_0$  (πίνακας 5.2) προκύπτει η ανάλογη τεχνική θεωρία διάτμησης ανώτερης τάξης.



### 6.1.1 Θεωρία EBT ελαστικών δοκών με γεωμετρική μη γραμμικότητα

Η κλασική θεωρία δοκών (θεωρία EBT) με όρους γεωμετρικής μη γραμμικότητας [85], προκύπτει με αντικατάσταση της κατανομής της διατμητικής τάσης μέσα στο σώμα  $f(z)=0$  και με τη θεώρηση πως δεν υπάρχει περιστροφή (rotation) δηλαδή με μηδενική στροφή  $\varphi(x)=0$  στις εξισώσεις κίνησης και στις συνοριακές συνθήκες (σχέσεις 6.24-6.28) του προβλήματος. Εφόσον δεν υπάρχει στροφή, η περιγραφή της κίνησης μιας ελαστικής δοκού με τη θεωρία EBT γίνεται από μια εξίσωση κίνησης, που αφορά τη μετατόπιση  $w$ . Για τη θεωρία EBT, μοναδικός μη μηδενικός συντελεστής είναι ο:

$$A_0 = \frac{Ebh^3}{12} = E \frac{bh^3}{12} = EI, \quad (6.29)$$

όπου:  $I$  είναι η ροπή αδράνειας της δοκού και η ποσότητα  $EI$  ορίζεται ως η ακαμψία στην κάμψη (bending stiffness) της ελαστικής δοκού.

Να σημειωθεί πως για τη θεωρία EBT οι συντελεστές  $B_0, C_0, D_0$  είναι ίσοι με το μηδέν. Με αυτές τις παραδοχές, οι εξισώσεις κίνησης και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες (σχέσεις 6.24-6.28) για τη θεωρία EBT με μεγάλες παραμορφώσεις σε ελαστικές δοκούς έχουν την μορφή:

**Μη γραμμική εξίσωση κίνησης ελαστικής δοκού με θεωρία EBT:**

$$-EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{3EA}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + q = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2}. \quad (6.30)$$

**Συνοριακές συνθήκες στο  $x=0$  και  $x=L$ :**

$$EA \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 - EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \rho I \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} = 0 \quad \text{ή } w: \text{καθορισμένο}, \quad (6.31)$$

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \text{ή } \frac{\partial w}{\partial x}: \text{καθορισμένο}. \quad (6.32)$$

### 6.1.2 Θεωρία TBT ελαστικών δοκών με γεωμετρική μη γραμμικότητα

Η θεωρία TBT (θεωρία διάτμησης πρώτης τάξης), προκύπτει με αντικατάσταση της κατανομής της διατμητικής τάσης μέσα στο σώμα  $f(z) = z$  και με την υπόθεση πως επιτρέπεται η περιστροφή στη δοκό, δηλαδή  $\varphi(x) \neq 0$ . Με αντικατάσταση των συντελεστών  $A_0, B_0, C_0, D_0$  για τη θεωρία TBT, προκύπτουν δυο εξισώσεις κίνησης οι οποίες αναφέρονται στην κατακόρυφη μετατόπιση  $w$  και στη στροφή  $\varphi$ .

Με αυτές τις παραδοχές, οι εξισώσεις κίνησης και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες (σχέσεις 6.24-6.28) για τη θεωρία EBT με μεγάλες παραμορφώσεις (λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρική μη γραμμικότητα) σε ελαστικές δοκούς έχουν την μορφή:

**Μη γραμμικές εξισώσεις κίνησης ελαστικής δοκού με θεωρία TBT:**

$$\frac{3}{2}EA\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + EI\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + q = \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I\frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + \rho I\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial x} \quad (6.33)$$

$$EI\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - GA\varphi = -\rho I\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} + \rho I\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (6.34)$$

**Συνοριακές συνθήκες στο  $x=0$  και  $x=L$ :**

$$\frac{1}{2}EA\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3 - EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + EI\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \rho I\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} - \rho I\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (6.35)$$

ή  $w$  : καθορισμένο

$$EI\frac{\partial \varphi}{\partial x} - EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (6.36)$$

ή  $\varphi$  : καθορισμένο

$$EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - EI\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad (6.37)$$

ή  $\frac{\partial w}{\partial x}$  : καθορισμένο

## 6.2 Επίλυση στατικού προβλήματος με γεωμετρική μη γραμμικότητα

Στη συνέχεια, γίνεται επίλυση στατικών προβλημάτων δοκών κάμψης με χρήση των μη γραμμικών εξισώσεων κίνησης και των αντίστοιχων συνοριακών συνθηκών που προέκυψαν στην προηγούμενη ενότητα (σχέσεις 6.24-6.28). Η δοκός έχει συνοριακές συνθήκες άρθρωσης στα δύο άκρα (hinged-hinged) και υποβάλλεται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο εξωτερικό φορτίο. Η λύση θα προκύψει από άπειρα αθροίσματα (σειρές Fourier) που ικανοποιούν ακριβώς τις συνοριακές συνθήκες απλής στήριξης (σχέσεις 5.32-5.34). Αγνοώντας τους αδρανειακούς όρους, οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες για τη στατική επίλυση προβλημάτων ελαστικών δοκών είναι:

**Μη γραμμικές εξισώσεις κίνησης ελαστικής δοκού – Στατικό πρόβλημα:**

$$A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - \frac{3Ebh}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = q, \quad (6.38)$$

$$B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_0 \varphi = 0. \quad (6.39)$$

**Συνοριακές συνθήκες στο  $x=0$  και  $x=L$ :**

$$-A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{Eh}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 = 0, \quad \text{ή } w : \text{καθορισμένο} \quad (6.40)$$

$$A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \text{ή } \frac{\partial w}{\partial x} : \text{καθορισμένο} \quad (6.41)$$

$$-B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \text{ή } \varphi : \text{καθορισμένο} \quad (6.42)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων 5.32-5.34, οι σχέσεις 6.38 (Παράρτημα Α.1) και 6.39 παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} & A_0 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] - B_0 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] - \\ & - \frac{3Ebh}{2} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{k\pi}{L} w_k \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right] \left[ \frac{l\pi}{L} w_l \cos \left( \frac{l\pi x}{L} \right) \right] \right\} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right] = \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right). \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$B_0 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] - C_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] + D_0 \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] = 0. \quad (6.44)$$

Στη συνέχεια, με σχετικές πράξεις, οι σχέσεις 6.43 και 6.44, γίνονται:

$$\begin{aligned}
& A_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - B_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - \\
& - \frac{3Ebh}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left( -w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right) \left( \frac{k\pi}{L} w_k \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right) \left( \frac{l\pi}{L} w_l \cos \left( \frac{l\pi x}{L} \right) \right) \right\} = \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right), \tag{6.45}
\end{aligned}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left\{ -B_0 w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 + C_0 \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + D_0 \varphi_m \right\} \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] = 0. \tag{6.46}$$

Το άθροισμα της σχέσης 6.46 ισούται με μηδέν συνεπώς, η ποσότητα μέσα στο άθροισμα θα ισούται με μηδέν. Επίσης, ο όρος  $\cos(m\pi x/L)$  είναι πολλαπλασιασμένος με την αγκύλη που ισούται με μηδέν συνεπώς η έκφραση μπορεί να γραφεί χωρίς τον όρο  $\cos(m\pi x/L)$ . Έτσι, οι σχέσεις 6.45 και 6.46 μπορούν να γραφούν ως:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_0 w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) - B_0 \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{3Ebh}{2} \left[ -w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{k\pi}{L} w_k \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right] \left[ \frac{l\pi}{L} w_l \cos \left( \frac{l\pi x}{L} \right) \right] \right\} \right] \right\} = \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right). \tag{6.47}
\end{aligned}$$

$$-B_0 w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 + C_0 \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + D_0 \varphi_m = 0. \tag{6.48}$$

Από τις ιδιότητες των άπειρων αθροισμάτων, η σχέση 6.47 γίνεται:

$$\begin{aligned}
& A_0 w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) - B_0 \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) - \\
& - \frac{3Ebh}{2} \left( -w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{k\pi}{L} w_k \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right] \left[ \frac{l\pi}{L} w_l \cos \left( \frac{l\pi x}{L} \right) \right] \right\} \right) = \\
& = q_m \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right). \tag{6.49}
\end{aligned}$$

Με σχετικές απλοποιήσεις, η σχέση 6.49 παίρνει τη μορφή:

$$A_0 w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 - B_0 \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 + \frac{3Ebh}{2} w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{k\pi}{L} w_k \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right] \left[ \frac{l\pi}{L} w_l \cos \left( \frac{l\pi x}{L} \right) \right] \right\} = q_m. \quad (6.50)$$

Στη συνέχεια, από τις ιδιότητες των σειρών [85, 136] ισχύει:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{k\pi}{L} w_k \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right] \left[ \frac{l\pi}{L} w_l \cos \left( \frac{l\pi x}{L} \right) \right] \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k\pi}{L} w_k \right)^2. \quad (6.51)$$

Έτσι, η σχέση 6.50 μπορεί να γραφεί ως:

$$A_0 w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 - B_0 \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 + \frac{3Ebh}{4} w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k\pi}{L} w_k \right)^2 \right] = q_m. \quad (6.52)$$

Συνεπώς, για την επίλυση του στατικού προβλήματος, θέτοντας  $a_m = m\pi/L$  και  $a_k = k\pi/L$ , οι εξισώσεις στην πιο γενική τους μορφή είναι:

$$A_0 w_m a_m^4 - B_0 \varphi_m a_m^3 + \frac{3Ebh}{4} w_m a_m^2 \left[ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k w_k)^2 \right] = q_m, \quad (6.53)$$

$$-B_0 w_m a_m^3 + C_0 \varphi_m a_m^2 + D_0 \varphi_m = 0. \quad (6.54)$$

Επιλύοντας την εξίσωση 6.48 ως προς  $\varphi_m$ , προκύπτει:

$$\varphi_m = \frac{B_0 w_m a_m^3}{C_0 a_m^2 + D_0}. \quad (6.55)$$

Με αντικατάσταση της σχέσης 6.55 στη σχέση 6.53, τελικά προκύπτει:

$$A_0 w_m a_m^4 - B_0 \frac{B_0 w_m a_m^3}{C_0 a_m^2 + D_0} a_m^3 + \frac{3Ebh}{4} w_m a_m^2 \left[ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k w_k)^2 \right] = q_m. \quad (6.56)$$

Έτσι, τελικά, προκύπτουν δύο εκράσεις (σχέσεις 6.55 και 6.56) για τις άγνωστες ποσότητες  $w_m$  και  $\varphi_m$ . Ωστόσο, υπάρχει ένα άπειρο άθροισμα μέσα στην εξίσωση 6.56 οπότε χρειάζεται μια προσέγγιση του  $k$ . Οι τρεις πρώτοι όροι του αθροίσματος θεωρούνται μια ικανοποιητική αναλυτική προσέγγιση.

### 6.2.1 Επίλυση στατικού προβλήματος με θεωρία EBT

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, οι συντελεστές για τη θεωρία EBT είναι:  $A_0 = Ebh^3/12 = EI$  και  $B_0 = C_0 = D_0 = 0$ . Θέτοντας τη διατομή της ελαστικής δοκού  $A = bh$ , η εξίσωση 6.56 γίνεται:

$$EIa_m^4 w_m + \frac{3EA}{4} a_m^2 w_m \left[ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k w_k)^2 \right] = q_m. \quad (6.57)$$

#### Θεωρία EBT – Προσέγγιση με ένα όρο ( $k=1$ )

Για την προσέγγιση με ένα όρο ( $k=1$ ) και  $m=1, 2, 3$ , η εξίσωση 6.57 γίνεται:

$$m=1: EIa_1^4 w_1 + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 (a_1 w_1)^2 = q_1, \quad (6.58)$$

$$m=2: EIa_2^4 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 (a_1 w_1)^2 = q_2, \quad (6.59)$$

$$m=3: EIa_3^4 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 (a_1 w_1)^2 = q_3. \quad (6.60)$$

Με πράξεις και θέτοντας  $q_2 = 0$ , οι σχέσεις 6.58-6.60 γίνονται:

$$m=1: EIa_1^4 w_1 + \frac{3EA}{4} a_1^4 w_1^3 = q_1, \quad (6.61)$$

$$m=2: EIa_2^4 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 (a_1 w_1)^2 = 0, \quad (6.62)$$

$$m=3: EIa_3^4 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_1^2 w_3 w_1^2 = q_3. \quad (6.63)$$

Η εξίσωση 6.61 είναι μια τριτοβάθμια πολυωνυμική εξίσωση. Από την εξίσωση 6.62 προκύπτει πως  $w_2 = 0$ . Οι εξισώσεις 6.61-6.63 γράφονται:

$$m=1: w_1^3 \left( \frac{3EA}{4} a_1^4 \right) + w_1 (EIa_1^4) = q_1, \quad (6.64)$$

$$m=2: w_2 \left( EIa_2^4 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 \right) = 0 \Rightarrow w_2 = 0, \quad (6.65)$$

$$m=3: w_3 \left( EIa_3^4 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_1^2 w_1^2 \right) = q_3, \quad (6.66)$$

Με πράξεις, οι σχέσεις 6.64 και 6.66 γίνονται:

$$w_1^3 + w_1 \frac{4I}{3A} = \frac{4q_1}{3EAa_1^4}, \quad (6.67)$$

$$w_3 = \frac{4q_3}{4Ela_3^4 + 3EAa_3^2 a_1^2 w_1^2}. \quad (6.68)$$

Η επίλυση της τριτοβάθμιας εξίσωσης (σχέση 6.67) της μορφής  $x^3 + cx = d$  μπορεί να γίνει είτε με αριθμητικό τρόπο είτε με την αναλυτική λύση του Cardano, από την οποία προκύπτουν τρεις λύσεις, δυο συζυγής μιγαδικές και μια πραγματική λύση. Αποδεκτή θεωρείται μόνο η πραγματική λύση. Ο γενικός αναλυτικός τύπος για τη λύση μιας τριτοβάθμιας εξίσωσης, σύμφωνα με τον Cardano, είναι:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} + \frac{d}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} - \frac{d}{2}}, \quad (6.69)$$

όπου:  $c = 4I/A$  και  $d = 4q_1 / 3EAa_1^4$ . Συνεπώς, το  $w_1$  (σχέση 6.67) είναι ίσο με:

$$w_1 = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{2q_1}{3EAa_1^4}\right)^2 + \left(\frac{4I}{9A}\right)^3} + \frac{2q_1}{3EAa_1^4}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{2q_1}{3EAa_1^4}\right)^2 + \left(\frac{4I}{9A}\right)^3} - \frac{2q_1}{3EAa_1^4}} \quad (6.70)$$

Από τον υπολογισμό του  $w_1$  (σχέση 6.69), με αντικατάσταση στη σχέση 6.68 προκύπτει η λύση για το  $w_3$ .

### Θεωρία EBT – Προσέγγιση με δύο όρους ( $k=1,2$ )

Για  $k = 1, 2$  και  $m = 1, 2, 3$ , η εξίσωση 6.57 γίνεται:

$$m = 1 : ELa_1^4 w_1 + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 [a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2] = q_1, \quad (6.71)$$

$$m = 2 : ELa_2^4 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 [a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2] = q_2, \quad (6.72)$$

$$m = 3 : ELa_3^4 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 [a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2] = q_3. \quad (6.73)$$

Κάνοντας πράξεις, και θέτοντας  $q_2 = 0$ , οι σχέσεις 6.71-6.73 γίνονται:

$$m = 1 : w_1^3 \left( \frac{3EA}{4} a_1^4 \right) + w_1 \left( ELa_1^4 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_2^2 \right) = q_1, \quad (6.74)$$

$$m = 2 : w_2 \left( ELa_2^4 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_1^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^2 \right) = 0, \quad (6.75)$$

$$m = 3 : w_3 \left( EIa_3^4 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_1^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_2^2 w_2^2 \right) = q_3. \quad (6.76)$$

Από τη σχέση 6.76 προκύπτει πως είτε  $w_2 = 0$  είτε η παρένθεση είναι ίση με μηδέν. Αποδεικνύεται πως η παρένθεση είναι διαφορετική του μηδενός, συνεπώς  $w_2 = 0$ . Με πράξεις, οι σχέσεις 6.74-6.76 παίρνουν τη μορφή:

$$w_1^3 + w_1 \frac{4I}{3A} = \frac{4q_1}{3EAa_1^4}, \quad (6.77)$$

$$w_2 = 0, \quad (6.78)$$

$$w_3 = \frac{4q_3}{4EIa_3^4 + 3EAa_3^2 a_1^2 w_1^2}. \quad (6.79)$$

Η εξίσωση 6.77 είναι μια τριτοβάθμια πολυωνυμική εξίσωση. Η επίλυσή της μπορεί να επιτευχθεί είτε με αριθμητικό τρόπο είτε με αναλυτική λύση. Η αναλυτική λύση σύμφωνα με τον τύπο του Cardano είναι:

$$w_1 = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{2q_1}{3EAa_1^4}\right)^2 + \left(\frac{4I}{9A}\right)^3} + \frac{2q_1}{3EAa_1^4}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{2q_1}{3EAa_1^4}\right)^2 + \left(\frac{4I}{9A}\right)^3} - \frac{2q_1}{3EAa_1^4}} \quad (6.80)$$

Να σημειωθεί πως στην προσέγγιση με τους δύο πρώτους όρους του αθροίσματος ( $k=1,2$ ), λαμβάνονται οι ίδιες λύσεις για τη μετατόπιση  $w$  όπως στην προσέγγιση με ένα όρο. Ο δεύτερος όρος του αθροίσματος δεν συμβάλλει στη συνολική λύση της εγκάρσιας μετατόπισης. Για αποτελέσματα με μεγαλύτερη ακρίβεια, ακολουθείται μια αντίστοιχη διαδικασία για προσέγγιση με τους τρεις πρώτους όρους του άπειρου αθροίσματος.

### **Θεωρία EBT – Προσέγγιση με τρεις όρους ( $k=1,2,3$ )**

Για  $k=1,2,3$  και  $m=1,2,3$ , η σχέση 6.57 γίνεται:

$$m = 1 : EIa_1^4 w_1 + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 [a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2] = q_1, \quad (6.81)$$

$$m = 2 : EIa_2^4 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 [a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2] = q_2, \quad (6.82)$$

$$m = 3 : EIa_3^4 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 [a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2] = q_3. \quad (6.83)$$

Ύστερα από πράξεις, και θέτοντας  $q_2 = 0$ , οι σχέσεις 6.81-6.83 παίρνουν τη μορφή:



$$m = 1 : EIa_1^4 w_1 + \frac{3EA}{4} a_1^4 w_1^3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1 w_2^2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_3^2 w_1 = q_1, \quad (6.84)$$

$$m = 2 : EIa_2^4 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_1^2 w_1^2 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^3 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_3^2 w_2 = 0, \quad (6.85)$$

$$m = 3 : EIa_3^4 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_1^2 w_1^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_2^2 w_2^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^4 w_3^3 = q_3. \quad (6.86)$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις, οι εξισώσεις 6.84-6.86, γίνονται:

$$w_1^3 \left( \frac{3EA}{4} a_1^4 \right) + w_1 \left( EIa_1^4 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_2^2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_3^2 \right) = q_1, \quad (6.87\alpha)$$

$$w_2 \left( EIa_2^4 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_1^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_3^2 \right) = 0, \quad (6.87\beta)$$

$$w_3^3 \left( \frac{3EA}{4} a_3^4 \right) + w_3 \left( EIa_3^4 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_1^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_2^2 w_2^2 \right) = q_3. \quad (6.87\gamma)$$

Από την εξίσωση 6.87β προκύπτει πως  $w_2 = 0$ . Οι εξισώσεις 6.87α και 6.87γ αποτελούν ένα σύστημα πολυωνυμικών αλγεβρικών εξισώσεων με δύο αγνώστους, το  $w_1$  και το  $w_3$ . Ύστερα από πράξεις και θέτοντας  $A_1 = 3EAa_1^4/4$  και  $A_2 = EIa_1^4$ , οι δύο εξισώσεις παίρνουν τη μορφή:

$$A_1 w_1^3 + (A_2 + 9A_1 w_3^2) w_1 - q_1 = 0, \quad (6.88)$$

$$8IA_1 w_3^3 + (8IA_2 + 9A_1 w_1^2) w_3 - q_3 = 0. \quad (6.89)$$

Πρόκειται για ένα συζευγμένο σύστημα μη γραμμικών πολυωνυμικών αλγεβρικών εξισώσεων τρίτου βαθμού. Με τη μέθοδο της αντικατάστασης προκύπτουν οι εκφράσεις για τους όρους  $w_1$  και  $w_3$  ως:

$$w_1 = \sqrt{\frac{q_3 - w_3^3 8IA_1 - 8IA_2 w_3}{9A_1 w_3}} \quad (6.90)$$

$$q_3^3 + (-225A_2 q_3^2) w_3 + (16848A_2^2 q_3) w_3^2 + (-8IA_1 q_3^2 - 419904A_2^3 - 729A_1 q_1^2) w_3^3 + (11664A_1 A_2 q_3) w_3^4 + (-419904A_1 A_2^2) w_3^5 = 0 \quad (6.91)$$

Με αριθμητική επίλυση της αλγεβρικής πολυωνυμικής εξίσωσης πέμπτου βαθμού (σχέση 6.91), προκύπτει λύση για το  $w_3$  και με αντικατάσταση στη σχέση 6.90 προκύπτει ο όρος  $w_1$  και συνεπώς, η συνολική εγκάρσια μετατόπιση  $w$  με χρήση της κλασικής θεωρίας δοκών EBT με όρους γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Να σημειωθεί πως από την επίλυση της εξίσωσης 6.91 προκύπτουν πέντε ρίζες, οι τέσσερις είναι συζυγείς μιγαδικές και απορρίπτονται και μια πραγματική ρίζα όπου είναι αποδεκτή.

## 6.2.2 Επίλυση στατικού προβλήματος με θεωρία TBT

Όπως προαναφέρθηκε, θέτοντας τους συντελεστές  $A_0, B_0, C_0 = Ebh^3/12 = EI$  και  $D_0 = Gbh = GA$  όπου  $A$  η διατομή της δοκού, προκύπτει η θεωρία TBT. Με αυτές τις τιμές των συντελεστών, οι εξισώσεις κίνησης (σχέσεις 6.53, 6.54) γίνονται:

$$EIa_m^4 w_m - EIa_m^3 \varphi_m + \frac{3EA}{4} a_m^2 w_m \sum_{k=1}^{\infty} (a_k w_k)^2 = q_m, \quad (6.92)$$

$$-EIa_m^2 \varphi_m + EIa_m^3 w_m - GA\varphi_m = 0. \quad (6.93)$$

### Θεωρία TBT – Προσέγγιση με ένα όρο ( $k=1$ )

Για  $k=1$  και  $m=1,2,3$ , η εξίσωση 6.92 αναπτύσσεται ως:

$$m=1: EIa_1^4 w_1 - EIa_1^3 \varphi_1 + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 (a_1 w_1)^2 = q_1, \quad (6.94)$$

$$m=2: EIa_2^4 w_2 - EIa_2^3 \varphi_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 (a_1 w_1)^2 = q_2, \quad (6.95)$$

$$m=3: EIa_3^4 w_3 - EIa_3^3 \varphi_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 (a_1 w_1)^2 = q_3. \quad (6.96)$$

Με πράξεις και θέτοντας  $q_2 = 0$ , οι σχέσεις 6.94-6.96 γίνονται:

$$EIa_1^4 w_1 - EIa_1^3 \varphi_1 + \frac{3EA}{4} a_1^4 w_1^3 = q_1, \quad (6.97)$$

$$EIa_2^4 w_2 - EIa_2^3 \varphi_2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 w_2 = 0, \quad (6.98)$$

$$EIa_3^4 w_3 - EIa_3^3 \varphi_3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 w_3 = q_3. \quad (6.99)$$

Η εξίσωση 6.93 για  $m=1,2,3$ , γίνεται:

$$m=1: -EIa_1^2 \varphi_1 + EIa_1^3 w_1 - GA\varphi_1 = 0 \quad \Rightarrow \varphi_1 = \frac{EIa_1^3 w_1}{EIa_1^2 + GA}, \quad (6.100)$$

$$m=2: -EIa_2^2 \varphi_2 + EIa_2^3 w_2 - GA\varphi_2 = 0 \quad \Rightarrow \varphi_2 = \frac{EIa_2^3 w_2}{EIa_2^2 + GA}, \quad (6.101)$$

$$m=3: -EIa_3^2 \varphi_3 + EIa_3^3 w_3 - GA\varphi_3 = 0 \quad \Rightarrow \varphi_3 = \frac{EIa_3^3 w_3}{EIa_3^2 + GA}. \quad (6.102)$$

Με αντικατάσταση των  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  (σχέσεις 6.100-6.102) στις σχέσεις 6.97-6.99, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$m = 1 : \quad \left( \frac{3EA}{4} a_1^4 \right) w_1^3 + \left( E I a_1^4 - \frac{E^2 I^2 a_1^6}{E I a_1^2 + GA} \right) w_1 = q_1 , \quad (6.103)$$

$$m = 2 : \quad E I a_2^4 w_2 - \frac{E^2 I^2 a_2^6}{E I a_2^2 + GA} w_2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 w_2 = 0 , \quad (6.104)$$

$$m = 3 : \quad E I a_3^4 w_3 - \frac{E^2 I^2 a_3^6}{E I a_3^2 + GA} w_3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 w_3 = q_3 . \quad (6.105)$$

Με αναδιάταξη των όρων, η σχέση 6.104 γράφεται:

$$\left( E I a_2^4 - \frac{E^2 I^2 a_2^6}{E I a_2^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 \right) w_2 = 0 . \quad (6.106)$$

Η ποσότητα στην παρένθεση της σχέσης 6.106 είναι διάφορη του μηδενός, συνεπώς  $w_2 = 0$ . Ύστερα από πράξεις, οι σχέσεις 6.103-6.105 παίρνουν τη μορφή:

$$w_1^3 + \frac{E I a_1^4 - \frac{E^2 I^2 a_1^6}{E I a_1^2 + GA}}{\frac{3EA}{4} a_1^4} w_1 = \frac{4q_1}{3E A a_1^4} , \quad (6.107)$$

$$w_2 = 0 , \quad (6.108)$$

$$w_3 = \frac{q_3}{E I a_3^4 - \frac{E^2 I^2 a_3^6}{E I a_3^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2} . \quad (6.109)$$

Τελικά, με αντικατάσταση του συντελεστή  $A_0 = E b h^3 / 12$ , οι σχέσεις 6.107 και 6.109 έχουν τη μορφή:

$$w_1^3 + \frac{4GA_0}{3E(A_0 a_1^2 + GA)} w_1 - \frac{4q_1}{3E A a_1^4} = 0 , \quad (6.110)$$

$$w_3 = \frac{q_3}{A_0 a_3^4 - \frac{A_0^2 a_3^6}{A_0 a_3^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2} . \quad (6.111)$$

Η επίλυση της τριτοβάθμιας πολυωνυμικής εξίσωσης (σχέση 6.110) γίνεται είτε με αριθμητική επίλυση είτε με αναλυτικό τρόπο. Από την επίλυσή της προκύπτουν τρεις ρίζες, δύο μιγαδικές και μια πραγματική. Για τα προβλήματα της μηχανικής, αποδεκτή θεωρείται μόνο η πραγματική λύση. Με αντικατάσταση του  $w_1$  στη σχέση 6.111, προκύπτει ο όρος  $w_3$ .

**Θεωρία TBT – Προσέγγιση με δύο όρους ( $k=1,2$ )**

Η σχέση 6.92 για την προσέγγιση με δυο όρους δηλαδή για  $k=1,2$  και  $m=1,2,3$ , παίρνει τη μορφή:

$$m=1: E I a_1^4 w_1 - E I a_1^3 \varphi_1 + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 \left[ (a_1 w_1)^2 + (a_2 w_2)^2 \right] = q_1, \quad (6.112)$$

$$m=2: E I a_2^4 w_2 - E I a_2^3 \varphi_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 \left[ (a_1 w_1)^2 + (a_2 w_2)^2 \right] = q_2, \quad (6.113)$$

$$m=3: E I a_3^4 w_3 - E I a_3^3 \varphi_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 \left[ (a_1 w_1)^2 + (a_2 w_2)^2 \right] = q_3, \quad (6.114)$$

και η σχέση 6.93:

$$m=1: -E I a_1^2 \varphi_1 + E I a_1^3 w_1 - G A \varphi_1 = 0 \quad \Rightarrow \varphi_1 = \frac{E I a_1^3 w_1}{E I a_1^2 + G A}, \quad (6.115)$$

$$m=2: -E I a_2^2 \varphi_2 + E I a_2^3 w_2 - G A \varphi_2 = 0 \quad \Rightarrow \varphi_2 = \frac{E I a_2^3 w_2}{E I a_2^2 + G A}, \quad (6.116)$$

$$m=3: -E I a_3^2 \varphi_3 + E I a_3^3 w_3 - G A \varphi_3 = 0 \quad \Rightarrow \varphi_3 = \frac{E I a_3^3 w_3}{E I a_3^2 + G A}. \quad (6.117)$$

Ύστερα από πράξεις και θέτοντας  $q_2 = 0$ , οι σχέσεις 6.112-6.114 γίνονται:

$$m=1: E I a_1^4 w_1 - E I a_1^3 \varphi_1 + \frac{3EA}{4} a_1^4 w_1^3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1 w_2^2 = q_1, \quad (6.118)$$

$$m=2: E I a_2^4 w_2 - E I a_2^3 \varphi_2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 w_2 = 0, \quad (6.119)$$

$$m=3: E I a_3^4 w_3 - E I a_3^3 \varphi_3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_2^2 w_3 = q_3. \quad (6.120)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων 6.115-6.117 στις σχέσεις 6.118-6.120, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$m=1: E I a_1^4 w_1 - \frac{E^2 I^2 a_1^6 w_1}{E I a_1^2 + G A} + \frac{3EA}{4} a_1^4 w_1^3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1 w_2^2 = q_1, \quad (6.121)$$

$$m=2: E I a_2^4 w_2 - \frac{E^2 I^2 a_2^6 w_2}{E I a_2^2 + G A} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^3 = 0, \quad (6.122)$$

$$m=3: E I a_3^4 w_3 - \frac{E^2 I^2 a_3^6 w_3}{E I a_3^2 + G A} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_2^2 w_3 = q_3. \quad (6.123)$$

Στη συνέχεια, με πράξεις οι σχέσεις 6.121-6.123, γίνονται:

$$m = 1 : \left( \frac{3EA}{4} a_1^4 \right) w_1^3 + \left( E I a_1^4 - \frac{E^2 I^2 a_1^6}{E I a_1^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_2^2 \right) w_1 = q_1 , \quad (6.124)$$

$$m = 2 : \left( E I a_2^4 - \frac{E^2 I^2 a_2^6}{E I a_2^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^2 \right) w_2 = 0 , \quad (6.125)$$

$$m = 3 : \left( E I a_3^4 - \frac{E^2 I^2 a_3^6}{E I a_3^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_2^2 \right) w_3 = q_3 . \quad (6.126)$$

Η παρένθεση της σχέσης 6.125 είναι πάντα αριθμός διάφορος του μηδενός, συνεπώς  $w_2 = 0$ . Με αυτή την υπόθεση και ύστερα από σχετικές απλοποιήσεις και πράξεις, οι εξισώσεις 6.124 και 6.126, έχουν τη μορφή:

$$w_1^3 + \frac{E I a_1^4 - \frac{E^2 I^2 a_1^6}{E I a_1^2 + GA}}{\frac{3EA}{4} a_1^4} w_1 = \frac{4q_1}{3E A a_1^4} , \quad (6.127)$$

$$w_3 = \frac{q_3}{E I a_3^4 - \frac{E^2 I^2 a_3^6}{E I a_3^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2} . \quad (6.128)$$

Η εξίσωση 6.127 είναι μια τριτοβάθμια πολυωνυμική αλγεβρική εξίσωση και η επίλυσή της γίνεται είτε με αριθμητικό υπολογισμό είτε με αναλυτικό τρόπο σύμφωνα με την αναλυτική λύση του Cardano. Η επίλυση της τριτοβάθμιας πολυωνυμικής εξίσωσης δίδει τρεις ρίζες, δυο μιγαδικές ρίζες που απορρίπτονται και μια πραγματική θετική ρίζα που είναι η αποδεκτή λύση του προβλήματος. Από τον υπολογισμό του  $w_1$  της εξίσωσης 6.127, με αντικατάσταση στη σχέση 6.128, προκύπτει ο όρος  $w_3$  και συνεπώς η συνολική κατακόρυφη μετατόπιση.

Παρατηρείτε πως στην περίπτωση της προσέγγισης με δύο όρους ( $k = 1, 2$ ), προκύπτει ακριβώς η ίδια λύση για την εγκάρσια μετατόπιση όπως στην προσέγγιση με ένα όρο ( $k = 1$ ). Διαπιστώνεται, λοιπόν, πως ο δεύτερος όρος του αθροίσματος δεν συμβάλλει στην τελική λύση της εγκάρσιας μετατόπισης. Για αποτελέσματα με μεγαλύτερη ακρίβεια, προτείνεται μια προσέγγιση με περισσότερους όρους. Η προσέγγιση με τρεις όρους ( $k = 1, 2, 3$ ) θεωρείται μια ικανοποιητική προσέγγιση της λύση και παρέχει αποτελέσματα της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  με αρκετά μεγάλη ακρίβεια.

**Θεωρία TBT – Προσέγγιση με τρεις όρους ( $k=1,2,3$ )**

Οι σχέσεις 6.92 και 6.93 για την προσέγγιση με τρεις όρους δηλαδή για  $k = 1,2,3$  και  $m = 1,2,3$ , παίρνουν τη μορφή:

$$m = 1: EIa_1^4 w_1 - EIa_1^3 \varphi_1 + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 \left[ (a_1 w_1)^2 + (a_2 w_2)^2 + (a_3 w_3)^2 \right] = q_1, \quad (6.129)$$

$$m = 2: EIa_2^4 w_2 - EIa_2^3 \varphi_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 \left[ (a_1 w_1)^2 + (a_2 w_2)^2 + (a_3 w_3)^2 \right] = q_2, \quad (6.130)$$

$$m = 3: EIa_3^4 w_3 - EIa_3^3 \varphi_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 \left[ (a_1 w_1)^2 + (a_2 w_2)^2 + (a_3 w_3)^2 \right] = q_3. \quad (6.131)$$

Ύστερα από πράξεις και θέτοντας  $q_2 = 0$ , οι σχέσεις 6.129-6.131 γίνονται:

$$EIa_1^4 w_1 - EIa_1^3 \varphi_1 + \frac{3EA}{4} a_1^4 w_1^3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1 w_2^2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1 w_3^2 = q_1, \quad (6.132)$$

$$EIa_2^4 w_2 - EIa_2^3 \varphi_2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^3 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_3^2 w_2 = 0, \quad (6.133)$$

$$EIa_3^4 w_3 - EIa_3^3 \varphi_3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_2^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^4 w_3^3 = q_3. \quad (6.134)$$

Η σχέση 6.93 για  $m = 1,2,3$ , γίνεται:

$$m = 1: -EIa_1^2 \varphi_1 + EIa_1^3 w_1 - GA\varphi_1 = 0 \quad \Rightarrow \varphi_1 = \frac{EIa_1^3 w_1}{EIa_1^2 + GA}, \quad (6.135)$$

$$m = 2: -EIa_2^2 \varphi_2 + EIa_2^3 w_2 - GA\varphi_2 = 0 \quad \Rightarrow \varphi_2 = \frac{EIa_2^3 w_2}{EIa_2^2 + GA}, \quad (6.136)$$

$$m = 3: -EIa_3^2 \varphi_3 + EIa_3^3 w_3 - GA\varphi_3 = 0 \quad \Rightarrow \varphi_3 = \frac{EIa_3^3 w_3}{EIa_3^2 + GA}. \quad (6.137)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων 6.135-6.137 στις σχέσεις 6.132-6.134, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$EIa_1^4 w_1 - \frac{E^2 I^2 a_1^6 w_1}{EIa_1^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^4 w_1^3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1 w_2^2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1 w_3^2 = q_1, \quad (6.138)$$

$$EIa_2^4 w_2 - \frac{E^2 I^2 a_2^6 w_2}{EIa_2^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^3 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_3^2 w_2 = 0, \quad (6.139)$$

$$EIa_3^4 w_3 - \frac{E^2 I^2 a_3^6 w_3}{EIa_3^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_2^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^4 w_3^3 = q_3 \quad (6.140)$$

Υστερα από πράξεις, οι σχέσεις 6.138-6.140 παίρνουν τη μορφή:

$$\left( \frac{3EA}{4} a_1^4 \right) w_1^3 + \left( EIa_1^4 - \frac{E^2 I^2 a_1^6}{EIa_1^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_2^2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_3^2 \right) w_1 = q_1 \quad (6.141)$$

$$\left( EIa_2^4 - \frac{E^2 I^2 a_2^6}{EIa_2^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_3^2 \right) w_2 = 0 \quad (6.142)$$

$$\left( \frac{3EA}{4} a_3^4 \right) w_3^3 + \left( EIa_3^4 - \frac{E^2 I^2 a_3^6}{EIa_3^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_2^2 \right) w_3 = q_3 \quad (6.143)$$

Η παρένθεση της σχέσης 6.142 είναι πάντα αριθμός διάφορος του μηδενός, συνεπώς  $w_2 = 0$ . Τελικά, με πράξεις, οι σχέσεις 6.141 και 6.143 έχουν τη μορφή:

$$\left( \frac{3EA}{4} a_1^4 \right) w_1^3 + \left( EIa_1^4 - \frac{E^2 I^2 a_1^6}{EIa_1^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_3^2 \right) w_1 = q_1 \quad (6.144)$$

$$\left( \frac{3EA}{4} a_3^4 \right) w_3^3 + \left( EIa_3^4 - \frac{E^2 I^2 a_3^6}{EIa_3^2 + GA} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 \right) w_3 = q_3 \quad (6.145)$$

Οι εξισώσεις (σχέσεις 6.144 και 6.145) αποτελούν ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Πρόκειται για ένα σύστημα με δύο συζευγμένες τριτοβάθμιες πολυωνυμικές αλγεβρικές εξισώσεις. Σε αυτή την περίπτωση, το σύστημα δεν μπορεί να επιλυθεί με τον αναλυτικό τύπο του Cardano για τριτοβάθμιες πολυωνυμικές εξισώσεις. Το σύστημα εξισώσεων (σχέσεις 6.144, 6.145) επιλύεται με αριθμητική μέθοδο ώστε να προκύψουν οι λύσεις των  $w_1$ ,  $w_3$  και συνεπώς η συνολική εγκάρσια μετατόπιση  $w$  με χρήση της τεχνικής θεωρίας TBT με όρους γεωμετρικής μη γραμμικότητας σε ελαστικές δοκούς.

### 6.2.3 Επίλυση στατικού προβλήματος με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης (HSDT)

Για την επίλυση του στατικού προβλήματος μιας ελαστικής δοκού σε κάμψη με θεωρίες ανώτερης τάξης, επιλέγοντας τους κατάλληλους συντελεστές  $A_0, B_0, C_0, D_0$  που δίδονται στον πίνακα 5.2, προκύπτει η εκάστοτε θεωρία διάτμησης ανώτερης τάξης. Θέτοντας τη διατομή της δοκού  $A = bh$ , οι σχέσεις 6.53 και 6.54 γίνονται:

$$A_0 w_m a_m^4 - B_0 \varphi_m a_m^3 + \frac{3EA}{4} w_m a_m^2 \left[ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k w_k)^2 \right] = q_m, \quad (6.146)$$

$$-B_0 w_m a_m^3 + C_0 \varphi_m a_m^2 + D_0 \varphi_m = 0. \quad (6.147)$$

#### Θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης – Προσέγγιση με ένα όρο ( $k=1$ )

Αρχικά, για την προσέγγιση της λύσης της εγκάρσιας μετατόπισης με ένα όρο, δηλαδή για  $k = 1$  και  $m = 1, 2, 3$ , η σχέση 6.146 γράφεται:

$$m = 1: A_0 a_1^4 w_1 - B_0 a_1^3 \varphi_1 + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 (a_1 w_1)^2 = q_1, \quad (6.148)$$

$$m = 2: A_0 a_2^4 w_2 - B_0 a_2^3 \varphi_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 (a_1 w_1)^2 = q_2, \quad (6.149)$$

$$m = 3: A_0 a_3^4 w_3 - B_0 a_3^3 \varphi_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 (a_1 w_1)^2 = q_3, \quad (6.150)$$

και η σχέση 6.147 για  $m = 1, 2, 3$  παίρνει τη μορφή:

$$m = 1: -B_0 a_1^3 w_1 + C_0 a_1^2 \varphi_1 + D_0 \varphi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \frac{B_0 a_1^3 w_1}{C_0 a_1^2 + D_0}, \quad (6.151)$$

$$m = 2: -B_0 a_2^3 w_2 + C_0 a_2^2 \varphi_2 + D_0 \varphi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = \frac{B_0 a_2^3 w_2}{C_0 a_2^2 + D_0}, \quad (6.152)$$

$$m = 3: -B_0 a_3^3 w_3 + C_0 a_3^2 \varphi_3 + D_0 \varphi_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_3 = \frac{B_0 a_3^3 w_3}{C_0 a_3^2 + D_0}. \quad (6.153)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων 6.151-6.153 στις 6.148-6.150, προκύπτουν:

$$A_0 a_1^4 w_1 - B_0 a_1^3 \frac{B_0 a_1^3 w_1}{C_0 a_1^2 + D_0} + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 (a_1 w_1)^2 = q_1, \quad (6.154)$$

$$A_0 a_2^4 w_2 - B_0 a_2^3 \frac{B_0 a_2^3 w_2}{C_0 a_2^2 + D_0} + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 (a_1 w_1)^2 = q_2, \quad (6.155)$$



$$A_0 a_3^4 w_3 - B_0 a_3^3 \frac{B_0 a_3^3 w_3}{C_0 a_3^2 + D_0} + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 (a_1 w_1)^2 = q_3 \quad (6.156)$$

Υστερα από πράξεις και με την προϋπόθεση πως  $q_2 = 0$ , οι σχέσεις 6.154-6.156 γίνονται:

$$\left( \frac{3EA}{4} a_1^4 \right) w_1^3 + \left( A_0 a_1^4 - B_0 a_1^3 \frac{B_0 a_1^3}{C_0 a_1^2 + D_0} \right) w_1 - q_1 = 0 \quad (6.157)$$

$$w_2 \left( A_0 a_2^4 - \frac{B_0^2 a_2^6 w_2}{C_0 a_2^2 + D_0} + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_1^2 w_1^2 \right) = 0 \quad (6.158)$$

$$w_3 = \frac{4q_3 (C_0 a_3^2 + D_0)}{4A_0 a_3^4 (C_0 a_3^2 + D_0) - 4B_0^2 a_3^6 + 3EA a_3^2 a_1^2 w_1^2 (C_0 a_3^2 + D_0)} \quad (6.159)$$

Η παρένθεση στη σχέση 6.158, είναι πάντα αριθμός διάφορος του μηδενός, συνεπώς,  $w_2 = 0$ . Υστερα από πράξεις οι σχέσεις 6.157 και 6.159 παίρνουν τη μορφή:

$$\left( \frac{3EA}{4} a_1^4 \right) w_1^3 + \left( A_0 a_1^4 - \frac{B_0^2 a_3^6}{C_0 a_1^2 + D_0} \right) w_1 - q_1 = 0 \quad (6.160)$$

$$w_3 = \frac{4q_3 (C_0 a_3^2 + D_0)}{4A_0 a_3^4 (C_0 a_3^2 + D_0) - 4B_0^2 a_3^6 + 3EA a_3^2 a_1^2 w_1^2 (C_0 a_3^2 + D_0)} \quad (6.161)$$

Η επίλυση της τριτοβάθμιας πολυωνυμικής εξίσωσης (σχέση 6.160) γίνεται είτε με αριθμητική επίλυση είτε με αναλυτική επίλυση μέσω της λύσης του Cardano. Από την επίλυση της τριτοβάθμιας εξίσωσης προκύπτουν τρεις ρίζες, δύο μιγαδικές και μια πραγματική. Για τα προβλήματα της μηχανικής, αποδεκτή θεωρείται μόνο η πραγματική λύση. Με αντικατάσταση του  $w_1$  στη σχέση 6.161, προκύπτει ο όρος  $w_3$ .

### **Θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης – Προσέγγιση με δύο όρους ( $k=1,2$ )**

Η πρώτη εξίσωση κίνησης (σχέση 6.53) για την προσέγγιση της εγκάρσιας μετατόπισης με τους δύο πρώτους όρους του αθροίσματος, δηλαδή για  $k=1,2$ , γίνεται:

$$k = 1, 2 : A_0 a_m^4 w_m - B_0 a_m^3 \varphi_m + \frac{3EA}{4} a_m^2 w_m \left[ (a_1 w_1)^2 + (a_2 w_2)^2 \right] = q_m \quad (6.162)$$

και για  $m = 1, 2, 3$ , η σχέση 6.162 είναι:

$$m = 1: A_0 a_1^4 w_1 - B_0 a_1^3 \varphi_1 + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2) = q_1, \quad (6.163)$$

$$m = 2: A_0 a_2^4 w_2 - B_0 a_2^3 \varphi_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2) = q_2, \quad (6.164)$$

$$m = 3: A_0 a_3^4 w_3 - B_0 a_3^3 \varphi_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2) = q_3. \quad (6.165)$$

Η δεύτερη εξίσωση κίνησης (σχέση 6.54) για  $m = 1, 2, 3$  παίρνει τη μορφή:

$$m = 1: -B_0 a_1^3 w_1 + C_0 a_1^2 \varphi_1 + D_0 \varphi_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{B_0 a_1^3}{C_0 a_1^2 + D_0} w_1, \quad (6.166)$$

$$m = 2: -B_0 a_2^3 w_2 + C_0 a_2^2 \varphi_2 + D_0 \varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{B_0 a_2^3}{C_0 a_2^2 + D_0} w_2, \quad (6.167)$$

$$m = 3: -B_0 a_3^3 w_3 + C_0 a_3^2 \varphi_3 + D_0 \varphi_3 = 0 \Rightarrow \varphi_3 = \frac{B_0 a_3^3}{C_0 a_3^2 + D_0} w_3. \quad (6.168)$$

Με αντικατάσταση των  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  (σχέσεις 6.166-6.168), στις σχέσεις 6.163-6.165 και με την παραδοχή πως τα άρτια φορτία  $q_2, q_4, q_6, \dots = 0$  (σχέση 5.34), προκύπτουν:

$$A_0 a_1^4 w_1 - B_0 a_1^3 \frac{B_0 a_1^3}{C_0 a_1^2 + D_0} w_1 + \frac{3EA}{4} a_1^4 w_1^3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1 w_2^2 = q_1, \quad (6.169)$$

$$A_0 a_2^4 w_2 - B_0 a_2^3 \frac{B_0 a_2^3}{C_0 a_2^2 + D_0} w_2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^3 = 0, \quad (6.170)$$

$$A_0 a_3^4 w_3 - B_0 a_3^3 \frac{B_0 a_3^3}{C_0 a_3^2 + D_0} w_3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_2^2 w_3 = q_3. \quad (6.171)$$

Με πράξεις, η δεύτερη εξίσωση (σχέση 6.170) γίνεται:

$$w_2 \left( A_0 a_2^4 - B_0 a_2^3 \frac{B_0 a_2^3}{C_0 a_2^2 + D_0} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^2 \right) = 0 \Rightarrow w_2 = 0. \quad (6.172)$$

Η παρένθεση στη σχέση 6.172, είναι πάντα θετικός αριθμός διάφορος του μηδενός, συνεπώς,  $w_2 = 0$ . Από αυτό το συμπέρασμα, οι σχέσεις 6.169 και 6.171 παίρνουν τη μορφή:

$$\left( \frac{3EA}{4} a_1^4 \right) w_1^3 + \left( A_0 a_1^4 - \frac{B_0^2 a_1^6}{C_0 a_1^2 + D_0} \right) w_1 = q_1, \quad (6.173)$$

$$w_3 = \frac{4(C_0 a_3^2 + D_0) q_3}{(C_0 a_3^2 + D_0)(4A_0 a_3^4 + 3EA a_1^2 a_3^2 w_1^2 + 3EA a_2^2 a_3^2 w_2^2) - 4B_0^2 a_3^6} \cdot \quad (6.174)$$

Η εξίσωση 6.173 είναι μια τριτοβάθμια πολυωνυμική αλγεβρική εξίσωση και η επίλυσή της γίνεται είτε με αριθμητικό υπολογισμό είτε με αναλυτικό τρόπο σύμφωνα με την αναλυτική λύση που πρότεινε ο Cardano. Η τριτοβάθμια εξίσωση (σχέση 6.173) γράφεται στη μορφή  $x^3 + cx = d$  ως:

$$w_l^3 + \frac{4A_0(C_0 a_l^2 + D_0) - 4B_0^2 a_l^2}{3EA(C_0 a_l^2 + D_0)} w_l = \frac{4q_l}{3EA a_l^4} \cdot \quad (6.175)$$

Η αναλυτική λύση της εξίσωσης 6.175, δίδεται από τον αναλυτικό τύπο του Cardano (σχέση 6.69) όπου  $c = \left[ \frac{4A_0(C_0 a_l^2 + D_0) - 4B_0^2 a_l^2}{3EA(C_0 a_l^2 + D_0)} \right]$  και  $d = 4q_l / 3EA a_l^4$ . Έτσι, οι λύσεις των  $w_l$  και  $w_3$  είναι της μορφής:

$$w_l = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{2q_l}{3EA a_l^4}\right)^2 + \left(\frac{4A_0(C_0 a_l^2 + D_0) - 4B_0^2 a_l^2}{9EA(C_0 a_l^2 + D_0)}\right)^3} + \frac{2q_l}{3EA a_l^4}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{2q_l}{3EA a_l^4}\right)^2 + \left(\frac{4A_0(C_0 a_l^2 + D_0) - 4B_0^2 a_l^2}{9EA(C_0 a_l^2 + D_0)}\right)^3} - \frac{2q_l}{3EA a_l^4}}, \quad (6.176)$$

Η επίλυση της τριτοβάθμιας πολυωνυμικής εξίσωσης δίδει τρεις ρίζες, δυο μιγαδικές ρίζες που απορρίπτονται και μια πραγματική θετική ρίζα που είναι η αποδεκτή λύση του προβλήματος. Από τον υπολογισμό του  $w_l$  της εξίσωσης 6.176, με αντικατάσταση στη σχέση 6.174, προκύπτει ο όρος  $w_3$  και συνεπώς η συνολική εγκάρσια μετατόπιση  $w$  της δοκού.

### **Θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης – Προσέγγιση με τρεις όρους ( $k=1,2,3$ )**

Για την προσέγγιση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  με τους τρεις πρώτους όρους του άπειρου αθροίσματος, δηλαδή για  $k = 1, 2, 3$ , η πρώτη εξίσωση κίνησης (σχέση 6.53), γίνεται:

$$k = 1, 2, 3: A_0 a_m^4 w_m - B_0 a_m^3 \varphi_m + \frac{3EA}{4} a_m^2 w_m \left[ (a_1 w_1)^2 + (a_2 w_2)^2 + (a_3 w_3)^2 \right] = q_m, \quad (6.177)$$

και για  $m = 1, 2, 3$ , η σχέση 6.177 γίνεται:

$$m = 1: A_0 a_1^4 w_1 - B_0 a_1^3 \varphi_1 + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2) = q_1, \quad (6.178)$$

$$m = 2 : A_0 a_2^4 w_2 - B_0 a_2^3 \varphi_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2) = q_2 , \quad (6.179)$$

$$m = 3 : A_0 a_3^4 w_3 - B_0 a_3^3 \varphi_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2) = q_3 . \quad (6.180)$$

Η δεύτερη εξίσωση κίνησης (σχέση 6.54) για  $m = 1, 2, 3$  παίρνει τη μορφή:

$$m = 1 : -C_0 a_1^2 \varphi_1 + B_0 a_1^3 w_1 - D_0 \varphi_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{B_0 a_1^3}{C_0 a_1^2 + D_0} w_1 , \quad (6.181)$$

$$m = 2 : -C_0 a_2^2 \varphi_2 + B_0 a_2^3 w_2 - D_0 \varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{B_0 a_2^3}{C_0 a_2^2 + D_0} w_2 , \quad (6.182)$$

$$m = 3 : -C_0 a_3^2 \varphi_3 + B_0 a_3^3 w_3 - D_0 \varphi_3 = 0 \Rightarrow \varphi_3 = \frac{B_0 a_3^3}{C_0 a_3^2 + D_0} w_3 . \quad (6.183)$$

Με αντικατάσταση των  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  (σχέσεις 6.181-6.183) στις σχέσεις 6.178-6.180, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$A_0 a_1^4 w_1 - B_0 a_1^3 \frac{B_0 a_1^3}{C_0 a_1^2 + D_0} w_1 + \frac{3EA}{4} a_1^2 w_1 (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2) = q_1 , \quad (6.184)$$

$$A_0 a_2^4 w_2 - B_0 a_2^3 \frac{B_0 a_2^3}{C_0 a_2^2 + D_0} w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 w_2 (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2) = q_2 , \quad (6.185)$$

$$A_0 a_3^4 w_3 - B_0 a_3^3 \frac{B_0 a_3^3}{C_0 a_3^2 + D_0} w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 w_3 (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2) = q_3 . \quad (6.186)$$

Ύστερα από πράξεις και θέτοντας  $q_2 = 0$  (σχέση 5.34), οι σχέσεις 6.184-6.186 γίνονται:

$$A_0 a_1^4 w_1 - \frac{B_0^2 a_1^6}{C_0 a_1^2 + D_0} w_1 + \frac{3EA}{4} a_1^4 w_1^3 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_1 w_2^2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_1 w_3^2 = q_1 , \quad (6.187)$$

$$A_0 a_2^4 w_2 - \frac{B_0^2 a_2^6}{C_0 a_2^2 + D_0} w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_1^2 w_1^2 w_2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^3 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_3^2 w_2 = 0 , \quad (6.188)$$

$$A_0 a_3^4 w_3 - \frac{B_0^2 a_3^6}{C_0 a_3^2 + D_0} w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_1^2 w_1^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_2^2 w_2^2 w_3 + \frac{3EA}{4} a_3^4 w_3^3 = q_3 . \quad (6.189)$$

Ύστερα από πράξεις και αναδιάταξη των όρων, οι σχέσεις 6.187-6.189 γίνονται:

$$\left( \frac{3EA}{4} a_1^4 \right) w_1^3 + \left( A_0 a_1^4 - \frac{B_0^2 a_1^6}{C_0 a_1^2 + D_0} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_2^2 w_2^2 + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_3^2 \right) w_1 = q_1 , \quad (6.190)$$

$$w_2 \left( A_0 a_2^4 - \frac{B_0^2 a_2^6}{C_0 a_2^2 + D_0} + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_1^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_2^4 w_2^2 + \frac{3EA}{4} a_2^2 a_3^2 w_3^2 \right) = 0, \quad (6.191)$$

$$\left( \frac{3EA}{4} a_3^4 \right) w_3^3 + \left( A_0 a_3^4 - \frac{B_0^2 a_3^6}{C_0 a_3^2 + D_0} + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_1^2 w_1^2 + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_2^2 w_2^2 \right) w_3 = q_3. \quad (6.192)$$

Η παρένθεση στη σχέση 6.191, είναι πάντα αριθμός διάφορος του μηδενός, συνεπώς θα πρέπει  $w_2 = 0$ . Με αυτή τη θεώρηση, το σύστημα εξισώσεων απλοποιείται και οι σχέσεις 6.190 και 6.192 παίρνουν τη μορφή:

$$\left( \frac{3EA}{4} a_1^4 \right) w_1^3 + \left( A_0 a_1^4 - \frac{B_0^2 a_1^6}{C_0 a_1^2 + D_0} + \frac{3EA}{4} a_1^2 a_3^2 w_3^2 \right) w_1 = q_1, \quad (6.193)$$

$$\left( \frac{3EA}{4} a_3^4 \right) w_3^3 + \left( A_0 a_3^4 - \frac{B_0^2 a_3^6}{C_0 a_3^2 + D_0} + \frac{3EA}{4} a_3^2 a_1^2 w_1^2 \right) w_3 = q_3. \quad (6.194)$$

Οι εξισώσεις (σχέσεις 6.193 και 6.194) αποτελούν ένα συζευγμένο μη γραμμικό σύστημα πολυωνυμικών αλγεβρικών εξισώσεων τρίτου βαθμού. Γνωρίζοντας ότι  $a_3 = 3a_1$ , οι σχέσεις γίνονται:

$$\left( \frac{3EA}{4} a_1^4 \right) w_1^3 + \left( A_0 a_1^4 - \frac{B_0^2 a_1^6}{C_0 a_1^2 + D_0} \right) w_1 + \left( 9 \times \frac{3EA}{4} a_1^4 \right) w_1 w_3^2 = q_1, \quad (6.195)$$

$$\left( 81 \times \frac{3EA}{4} a_1^4 \right) w_3^3 + \left( 81 A_0 a_1^4 - \frac{729 B_0^2 a_1^6}{9 C_0 a_1^2 + D_0} \right) w_3 + \left( 9 \times \frac{3EA}{4} a_1^4 \right) w_3 w_1^2 = q_3. \quad (6.196)$$

Θέτοντας τις ποσότητες:

$$A_1 = \frac{3EA}{4} a_1^4, \quad (6.197)$$

$$A_2 = A_0 a_1^4 - \frac{B_0^2 a_1^6}{C_0 a_1^2 + D_0}, \quad (6.198)$$

$$A_3 = 81 A_0 a_1^4 - \frac{729 B_0^2 a_1^6}{9 C_0 a_1^2 + D_0}, \quad (6.199)$$

οι εξισώσεις 6.195 και 6.196 παίρνουν τη μορφή:

$$A_1 w_1^3 + (A_2 + 9A_1 w_3^2) w_1 - q_1 = 0, \quad (6.200)$$

$$81 A_1 w_3^3 + (A_3 + 9A_1 w_1^2) w_3 - q_3 = 0. \quad (6.201)$$

Επιλύοντας τη σχέση 6.201 ως προς  $w_1$ , προκύπτει μια έκφραση για τον όρο  $w_1$  που περιέχει την άγνωστη ποσότητα  $w_3$ :

$$w_1 = \pm \sqrt{\frac{q_3 - 8IA_1w_3^3 - A_3w_3}{9A_1w_3}}, \quad (6.202)$$

όπου αποδεκτή είναι μόνο η θετική τιμή της ρίζας. Η επίλυση του συστήματος γίνεται με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Με αντικατάσταση του όρου  $w_1$  (σχέση 6.202) στη σχέση 6.200, προκύπτει:

$$\begin{aligned} & q_3^3 + (18A_2q_3^2 - 3A_3q_3^2)w_3 + (-36A_2A_3q_3 + 3A_3^2q_3 + 8IA_2^2q_3)w_3^2 \\ & + (-8IA_1q_3^2 + 18A_2A_3^2 - A_3^3 - 8IA_2^2A_3 - 729A_1q_1^2)w_3^3 \\ & + (-1458A_1A_2q_3 + 162A_1A_3q_3)w_3^4 \\ & + (1458A_1A_2A_3 - 8IA_1A_3^2 - 6561A_1A_2^2)w_3^5 = 0. \end{aligned} \quad (6.203)$$

Η εξίσωση 6.203 είναι μια πολυωνυμική αλγεβρική εξίσωση πέμπτου βαθμού. Η επίλυσή της γίνεται με αριθμητικό υπολογισμό κάνοντας χρήση του λογισμικού πακέτου *Matlab*. Από την επίλυσή της προκύπτουν πέντε ρίζες για τον τρίτο όρο του αθροίσματος της βύθισης  $w_3$ . Οι τέσσερις ρίζες που προκύπτουν από τον αριθμητικό υπολογισμό είναι μιγαδικές συζυγείς ρίζες και απορρίπτονται. Η πέμπτη ρίζα είναι πραγματική και η μόνη αποδεκτή λύση του προβλήματος. Από την εύρεση του όρου  $w_3$ , με αντικατάσταση στην εξίσωση 6.202, προκύπτει η λύση του όρου  $w_1$  και τελικά η συνολική εγκάρσια μετατόπιση (βύθιση)  $w$  της δοκού για την προσέγγιση με τρεις όρους. Αντίστοιχα, για τον προσδιορισμό της στροφής (rotation), με αντικατάσταση των  $w_1, w_2, w_3$ , στις σχέσεις 6.181-6.183, προκύπτουν οι τρεις πρώτοι όροι του άπειρου αθροίσματος για τη στροφή (rotation) ως:

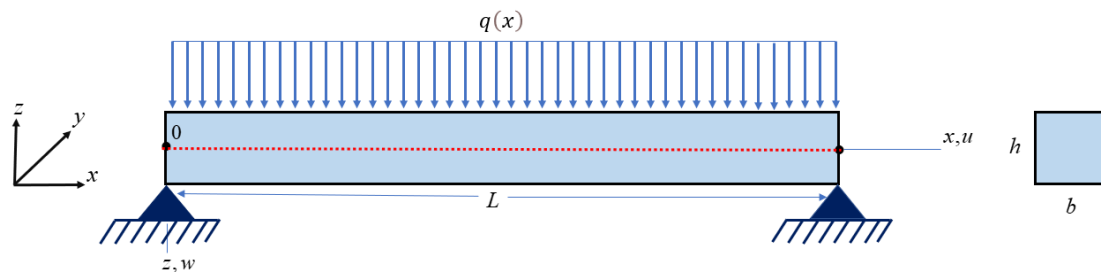
$$\varphi_1 = \frac{B_0a_1^3}{C_0a_1^2 + D_0} w_1, \quad (6.204)$$

$$\varphi_2 = \frac{B_0a_2^3}{C_0a_2^2 + D_0} w_2, \quad (6.205)$$

$$\varphi_3 = \frac{B_0a_3^3}{C_0a_3^2 + D_0} w_3. \quad (6.206)$$

### 6.3 Αποτελέσματα στατικού προβλήματος ελαστικών δοκών με γεωμετρική μη γραμμικότητα

Για τα παραδείγματα και τους αριθμητικούς υπολογισμούς ενός στατικού προβλήματος κάμψης ελαστικής δοκού (σχήμα 6.2) λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρική μη γραμμικότητα, οι υποθέσεις που γίνονται είναι πως η ελαστική δοκός είναι ομογενής και ισότροπη. Οι συνοριακές συνθήκες της δοκού είναι συνθήκες άρθρωσης στα δύο άκρα (hinged-hinged) και η δοκός υποβάλλεται σε ομοιόμορφα καταναμεμένο φορτίο  $q(x) = 10 \text{ KN/m}^2$ . Για τους αριθμητικούς υπολογισμούς, η ελαστική δοκός έχει μέτρο ελαστικότητας  $E = 210 \text{ GPa}$ , λόγο Poisson  $\nu = 0.3$ , μέτρο διάτμησης  $G = 80.77 \text{ GPa}$  (σχέση 5.29) και πυκνότητα  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ . Επίσης, όσον αφορά τη γεωμετρία της, η δοκός έχει μήκος  $L = 1 \text{ m}$ , πλάτος  $b = 0.02 \text{ m}$  και το πάχος της προσδιορίζεται σύμφωνα με την αναλογία διαστάσεων  $S = L/h$ .



**Σχήμα 6.2:** Ελαστική δοκός με συνοριακή συνθήκη άρθρωσης στα δύο άκρα και επιβολή ομοιόμορφα καταναμεμένου εξωτερικού φορτίου  $q(x)$ .

Τα μεγέθη που υπολογίζονται είναι η εγκάρσια μετατόπιση  $w$  στο (σημείο  $x=L/2, z=0$ ), η στροφή  $\varphi$  (στο σημείο  $x=0, z=0$ ), η αξονική τάση κάμψης  $\sigma_x$  (axial bending stress) (στο σημείο  $x=L/2, z=h/2$ ) και η εγκάρσια διατμητική τάση  $\tau_{zx}$  (transverse shear stress) (στο σημείο  $x=0, z=0$ ) με χρήση της θεωρίας EBT, της θεωρίας TBT και το σύνολο των τεχνικών θεωριών διάτμησης ανώτερης τάξης λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρική μη γραμμικότητα (μη γραμμική ανάλυση) για διάφορες αναλογίες διαστάσεων  $S = 2, 4, 10, 20, 30, 50$ . Τα μεγέθη υπολογίζονται με αναλυτικές εκφράσεις καθώς και με αριθμητικούς υπολογισμούς που προέκυψαν από προσομοιώσεις με χρήση των λογισμικών πακέτων Ansys και Comsol. Οι αναλυτικές εκφράσεις συμπεριλαμβάνοντας τον όρο της γεωμετρικής μη γραμμικότητας προέκυψαν από τις λύσεις των άπειρων αθροισμάτων (σειρές Fourier) για προσεγγίσεις με ένα όρο, με δύο όρους και με τους τρεις πρώτους όρους του αθροίσματος.

Τα αποτελέσματα για την εγκάρσια μετατόπιση (βύθιση)  $w$  στο σημείο  $x=L/2$  και  $z=0$  με όρους γεωμετρικής μη γραμμικότητας συγκρίνονται με τις γραμμικές τεχνικές θεωρίες για διάφορες αναλογίες διαστάσεων  $S = 2, 4, 10, 20, 30, 50$  και παρουσιάζονται στον πίνακα 6.1.

**Πίνακας 6.1:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης (βύθισης)  $w$  (στο σημείο  $x=L/2, z=0$ ) σε ελαστικές δοκούς με γραμμικά και γεωμετρικά μη γραμμικά μοντέλα.

S	Μοντέλα	Εγκάρσια μετατόπιση $w$ [meters]			
		Γραμμική ( $m=1,2,\dots,31$ )	Μη γραμμική ( $k=1, m=1,2,3$ )	Μη γραμμική ( $k=1,2, m=1,2,3$ )	Μη γραμμική ( $k=1,2,3, m=1,2,3$ )
2	Model 1 (EBT)	$2.97537 \times 10^{-6}$	$2.97537 \times 10^{-6}$	$2.97537 \times 10^{-6}$	$2.97536 \times 10^{-6}$
	Model 2 (TBT)	$4.52378 \times 10^{-6}$	$4.51343 \times 10^{-6}$	$4.51343 \times 10^{-6}$	$4.51809 \times 10^{-6}$
	Model 3 (HSDT)	$4.82183 \times 10^{-6}$	$4.81108 \times 10^{-6}$	$4.81108 \times 10^{-6}$	$4.81355 \times 10^{-6}$
	Model 4 (HSDT)	$4.82183 \times 10^{-6}$	$4.81108 \times 10^{-6}$	$4.81108 \times 10^{-6}$	$4.81355 \times 10^{-6}$
	Model 5 (RBT)	$4.82183 \times 10^{-6}$	$4.81108 \times 10^{-6}$	$4.81108 \times 10^{-6}$	$4.81355 \times 10^{-6}$
	Model 6 (SSDT)	$4.81651 \times 10^{-6}$	$4.80608 \times 10^{-6}$	$4.80608 \times 10^{-6}$	$4.81241 \times 10^{-6}$
	Model 7 (HPSDT)	$4.82203 \times 10^{-6}$	$4.81126 \times 10^{-6}$	$4.81126 \times 10^{-6}$	$4.80801 \times 10^{-6}$
	Model 8 (ESDT)	$4.79883 \times 10^{-6}$	$4.78900 \times 10^{-6}$	$4.78900 \times 10^{-6}$	$4.78005 \times 10^{-6}$
	Model 9 (HPSDT)	$4.66119 \times 10^{-6}$	$4.66119 \times 10^{-6}$	$4.66119 \times 10^{-6}$	$4.66162 \times 10^{-6}$
	Ansys Solution	$4.8140 \times 10^{-6}$	–	–	$4.8139 \times 10^{-6}$
	Cmsol Solution	$4.8333 \times 10^{-6}$	–	–	$4.8333 \times 10^{-6}$
4	Model 1 (EBT)	$2.38029 \times 10^{-5}$	$2.38029 \times 10^{-5}$	$2.38029 \times 10^{-5}$	$2.37999 \times 10^{-5}$
	Model 2 (TBT)	$2.69047 \times 10^{-5}$	$2.68791 \times 10^{-5}$	$2.68791 \times 10^{-5}$	$2.68792 \times 10^{-5}$
	Model 3 (HSDT)	$2.75180 \times 10^{-5}$	$2.74894 \times 10^{-5}$	$2.74894 \times 10^{-5}$	$2.74896 \times 10^{-5}$
	Model 4 (HSDT)	$2.75180 \times 10^{-5}$	$2.74894 \times 10^{-5}$	$2.74894 \times 10^{-5}$	$2.74896 \times 10^{-5}$
	Model 5 (RBT)	$2.75180 \times 10^{-5}$	$2.74894 \times 10^{-5}$	$2.74894 \times 10^{-5}$	$2.74896 \times 10^{-5}$
	Model 6 (SSDT)	$2.75113 \times 10^{-5}$	$2.74829 \times 10^{-5}$	$2.74829 \times 10^{-5}$	$2.74846 \times 10^{-5}$
	Model 7 (HPSDT)	$2.75181 \times 10^{-5}$	$2.74895 \times 10^{-5}$	$2.74895 \times 10^{-5}$	$2.74890 \times 10^{-5}$
	Model 8 (ESDT)	$2.74834 \times 10^{-5}$	$2.74555 \times 10^{-5}$	$2.74555 \times 10^{-5}$	$2.74550 \times 10^{-5}$
	Model 9 (HPSDT)	$2.72572 \times 10^{-5}$	$2.72321 \times 10^{-5}$	$2.72321 \times 10^{-5}$	$2.72327 \times 10^{-5}$
	Ansys Solution	$2.7485 \times 10^{-5}$	–	–	$2.7493 \times 10^{-5}$
	Cmsol Solution	$2.7523 \times 10^{-5}$	–	–	$2.7524 \times 10^{-5}$
10	Model 1 (EBT)	$3.71921 \times 10^{-4}$	$3.71874 \times 10^{-4}$	$3.71874 \times 10^{-4}$	$3.71875 \times 10^{-4}$
	Model 2 (TBT)	$3.79761 \times 10^{-4}$	$3.79561 \times 10^{-4}$	$3.79561 \times 10^{-4}$	$3.79561 \times 10^{-4}$
	Model 3 (HSDT)	$3.81307 \times 10^{-4}$	$3.81096 \times 10^{-4}$	$3.81096 \times 10^{-4}$	$3.81096 \times 10^{-4}$
	Model 4 (HSDT)	$3.81307 \times 10^{-4}$	$3.81096 \times 10^{-4}$	$3.81096 \times 10^{-4}$	$3.81096 \times 10^{-4}$
	Model 5 (RBT)	$3.81307 \times 10^{-4}$	$3.81096 \times 10^{-4}$	$3.81096 \times 10^{-4}$	$3.81096 \times 10^{-4}$
	Model 6 (SSDT)	$3.81293 \times 10^{-4}$	$3.81082 \times 10^{-4}$	$3.81082 \times 10^{-4}$	$3.81082 \times 10^{-4}$
	Model 7 (HPSDT)	$3.81307 \times 10^{-4}$	$3.81096 \times 10^{-4}$	$3.81096 \times 10^{-4}$	$3.81096 \times 10^{-4}$
	Model 8 (ESDT)	$3.81228 \times 10^{-4}$	$3.81018 \times 10^{-4}$	$3.81018 \times 10^{-4}$	$3.81018 \times 10^{-4}$
	Model 9 (HPSDT)	$3.80687 \times 10^{-4}$	$3.80481 \times 10^{-4}$	$3.80481 \times 10^{-4}$	$3.80481 \times 10^{-4}$
	Ansys Solution	$3.8121 \times 10^{-4}$	–	–	$3.8121 \times 10^{-4}$
	Cmsol Solution	$3.8129 \times 10^{-4}$	–	–	$3.8129 \times 10^{-4}$
20	Model 1 (EBT)	0.00297537	0.00288762	0.00288762	0.00288761
	Model 2 (TBT)	0.00299166	0.00290123	0.00290123	0.00290122
	Model 3 (HSDT)	0.00299476	0.00290391	0.00290391	0.00290394
	Model 4 (HSDT)	0.00299476	0.00290391	0.00290391	0.00290394
	Model 5 (RBT)	0.00299476	0.00290391	0.00290391	0.00290394
	Model 6 (SSDT)	0.00299473	0.00290388	0.00290388	0.00290392
	Model 7 (HPSDT)	0.00299476	0.00290391	0.00290391	0.00290394
	Model 8 (ESDT)	0.00299460	0.00290377	0.00290377	0.00290380
	Model 9 (HPSDT)	0.00299352	0.00290283	0.00290283	0.00290286
	Ansys Solution	0.0029946	–	–	0.0029631
	Cmsol Solution	0.0029947	–	–	0.0029632
30	Model 1 (EBT)	0.01004188	0.00709810	0.00709810	0.00713741
	Model 2 (TBT)	0.01006785	0.00710486	0.00710486	0.00710447
	Model 3 (HSDT)	0.01007249	0.00710432	0.00710432	0.00710582

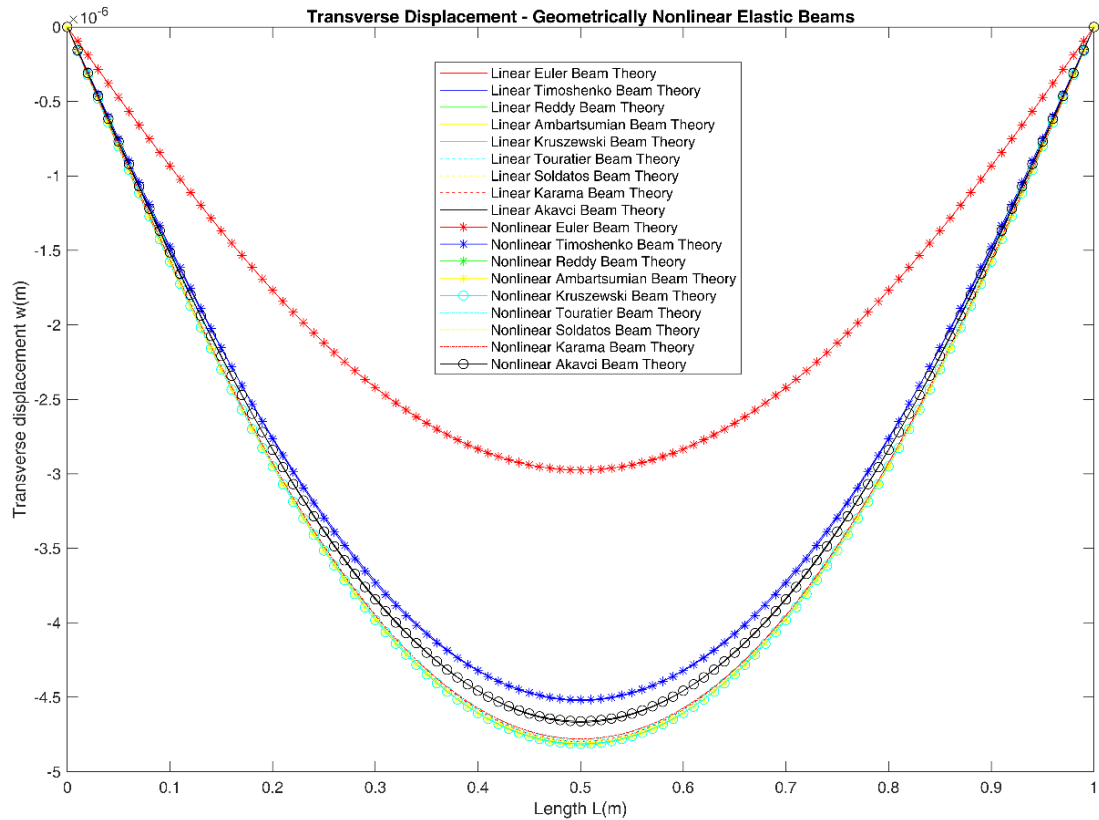


	Model 4 (HSDT)	0.01007249	0.00710432	0.00710432	0.00710582
	Model 5 (RBT)	0.01007249	0.00710432	0.00710432	0.00710582
	Model 6 (SSDT)	0.01007245	0.00710431	0.00710431	0.00710581
	Model 7 (HPSDT)	0.01007249	0.00710432	0.00710432	0.00710582
	Model 8 (ESDT)	0.01007226	0.00710426	0.00710426	0.00710575
	Model 9 (HPSDT)	0.01007065	0.00710379	0.00710379	0.00710529
	Ansys Solution	0.0100722	–	–	0.0084326
	Comsol Solution	0.0100725	–	–	0.0084335
50	Model 1 (EBT)	0.04649022	0.01145247	0.01145247	0.01144767
	Model 2 (TBT)	0.04654166	0.01145263	0.01145263	0.01144778
	Model 3 (HSDT)	0.04654940	0.01140469	0.01140469	0.01144780
	Model 4 (HSDT)	0.04654940	0.01140469	0.01140469	0.01144780
	Model 5 (RBT)	0.04654940	0.01140469	0.01140469	0.01144780
	Model 6 (SSDT)	0.04654933	0.01140469	0.01140469	0.01144780
	Model 7 (HPSDT)	0.04654940	0.01140469	0.01140469	0.01144780
	Model 8 (ESDT)	0.04654901	0.01140470	0.01140470	0.01144780
	Model 9 (HPSDT)	0.04654633	0.01140473	0.01140473	0.01144779
	Ansys Solution	0.0465489	–	–	0.016082
	Comsol Solution	0.0465494	–	–	0.015856

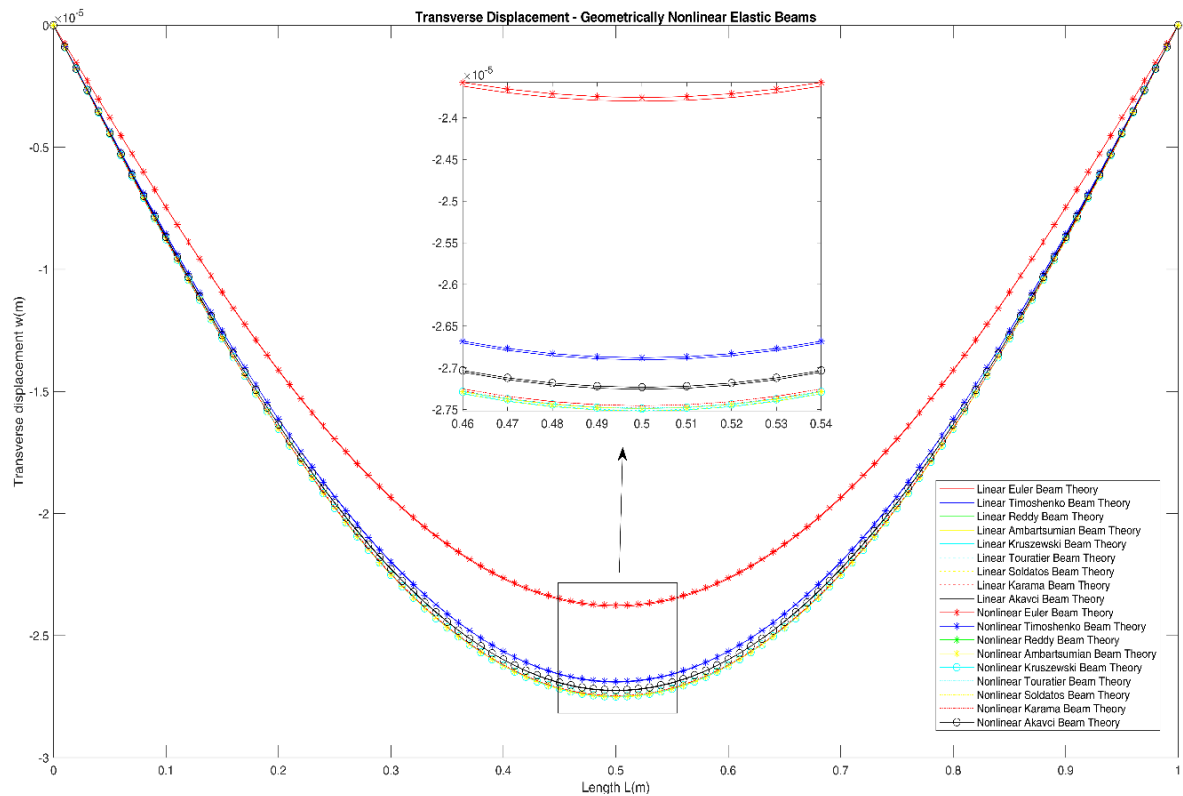
Από τα αποτελέσματα του πίνακα 6.1 για την εγκάρσια μετατόπιση  $w$  προκύπτει το συμπέρασμα πως όσο αυξάνεται η αναλογία διαστάσεων  $S$  της δοκού δηλαδή όσο η δοκός γίνεται λεπτότερη, οι γραμμικές θεωρίες χάνουν την ακρίβειά τους τους και παράγουν λανθασμένα αποτελέσματα. Για το λόγο αυτό, είναι αναγκαία η χρήση μη γραμμικών τεχνικών θεωριών που λαμβάνουν υπόψη τη γεωμετρική μη γραμμικότητα και προβλέπουν ακριβέστερα προσεγγιστικά αποτελεσμάτα σε στατικά προβλήματα κάμψης σε ελαστικές δοκούς. Παρατηρείται πως σε μεγάλες αναλογίες διαστάσεων μήκους προς πάχους της δοκού ( $S = 50$ ), τα διατμητικά φαινόμενα είναι αμελητέα και οι θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης τείνουν να προσεγγίσουν τα αποτελέσματα του Μοντέλου 1 (EBT).

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται γραφικές οι παραστάσεις της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  (σχήματα 6.3-6.9) κατά το μήκος  $L$  της δοκού με το σύνολο των τεχνικών θεωριών διάτμησης ανώτερης τάξης για τη γραμμική ανάλυση και για τη μη γραμμική ανάλυση με προσεγγίσεις ενός, δύο και τριών όρων του αθροίσματος για διάφορες αναλογίες διαστάσεων  $S = 2, 4, 10, 20, 30, 50$ . Για την τεχνική θεωρία ελαστικών δοκών του Reddy παρουσιάζεται το διάγραμμα (σχήμα 6.10) της εγκάρσιας μετατόπισης συναρτήση του μήκους της δοκού στη γραμμική ανάλυση, με γεωμετρική μη γραμμικότητα ενός όρους, γεωμετρική μη γραμμικότητα δύο όρων και γεωμετρική μη γραμμικότητα τριών όρων για αναλογία διαστάσεων  $S = 50$ .

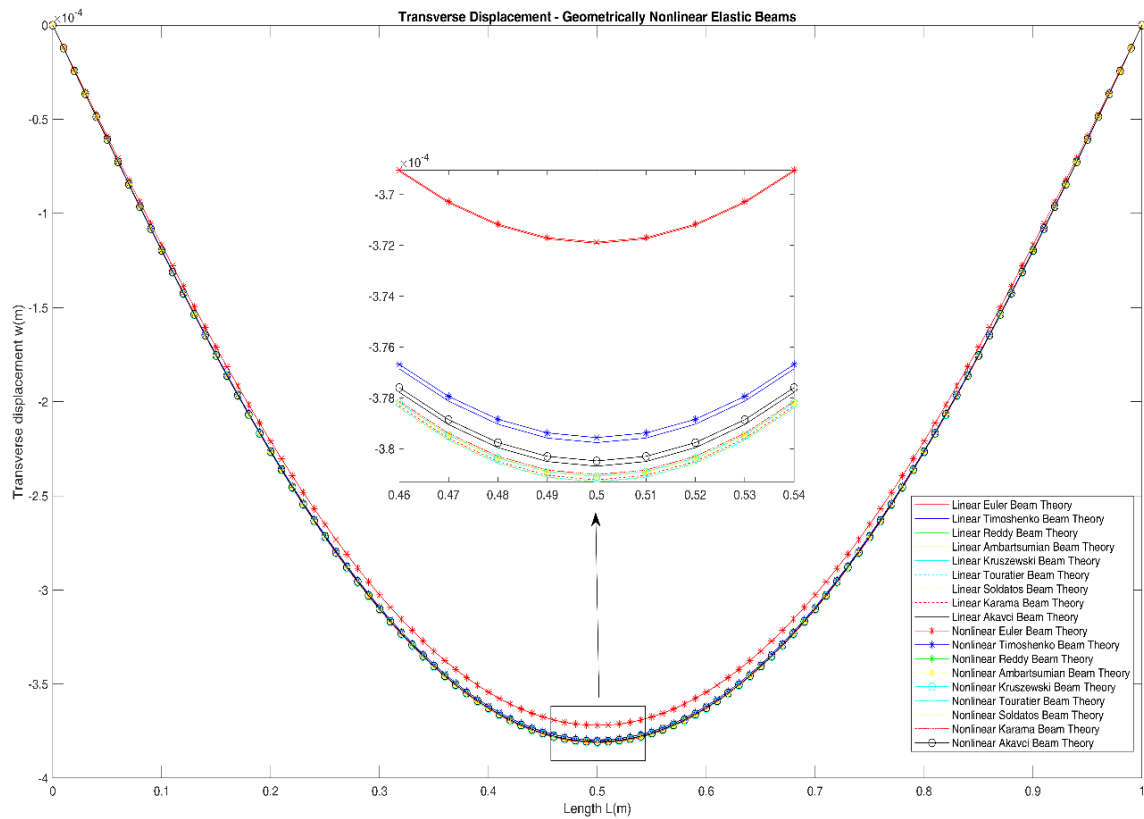
Επίσης, παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις της στροφής  $\varphi$  (σχήματα 6.11-6.15) για το σύνολο των γραμμικών τεχνικών θεωριών διάτμησης ανώτερης τάξης σε σύγκριση με τις τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης που λαμβάνουν υπόψη τον όρο της γεωμετρικής μη γραμμικότητας για αναλογίες διαστάσεων  $S = 2, 4, 10, 20, 30, 50$ .



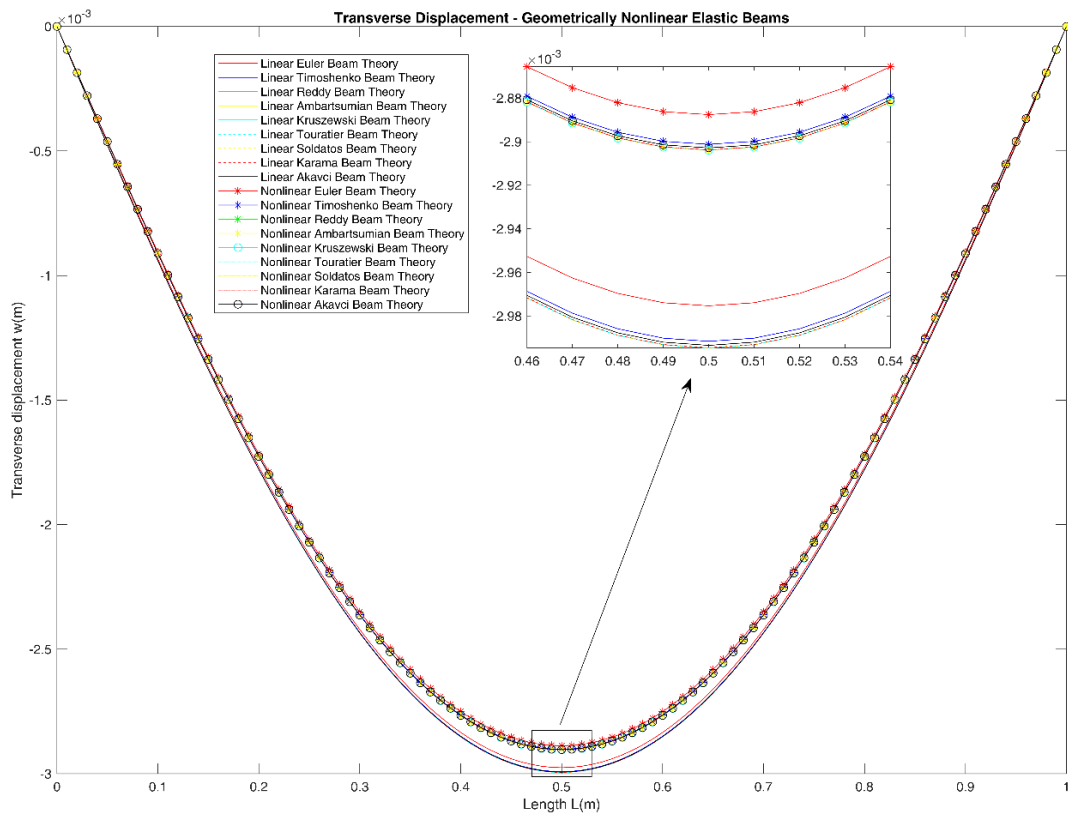
Σχήμα 6.3: Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=2$ .



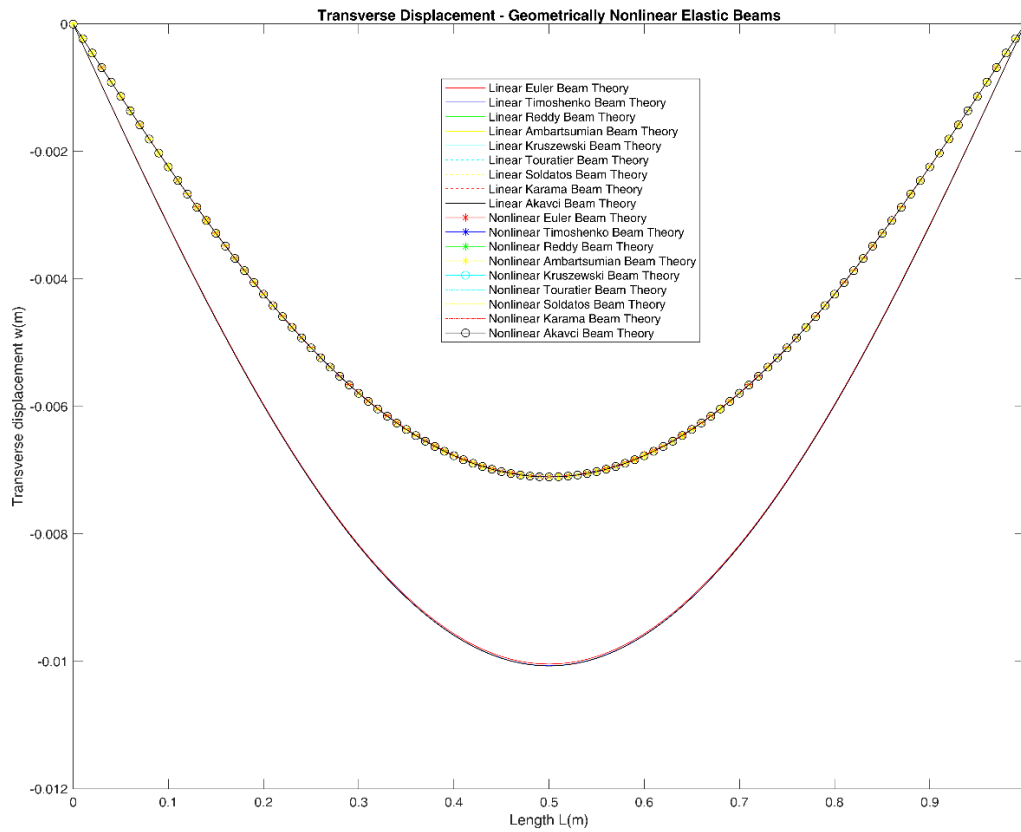
Σχήμα 6.4: Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=4$ .



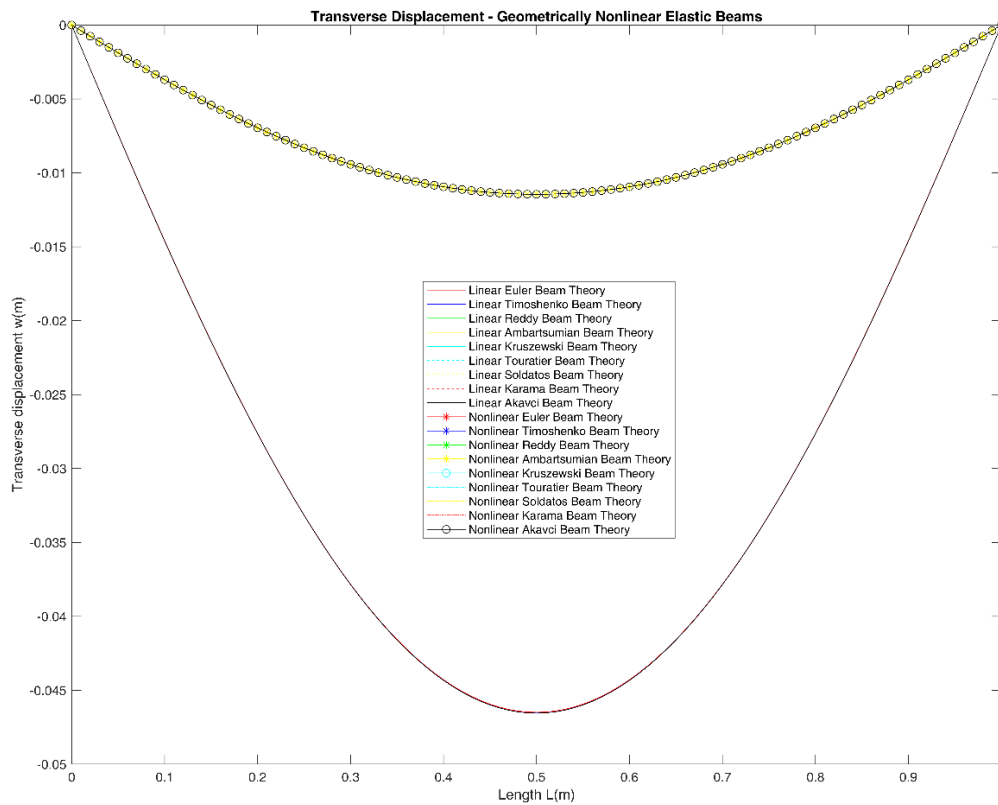
Σχήμα 6.5: Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=10$ .



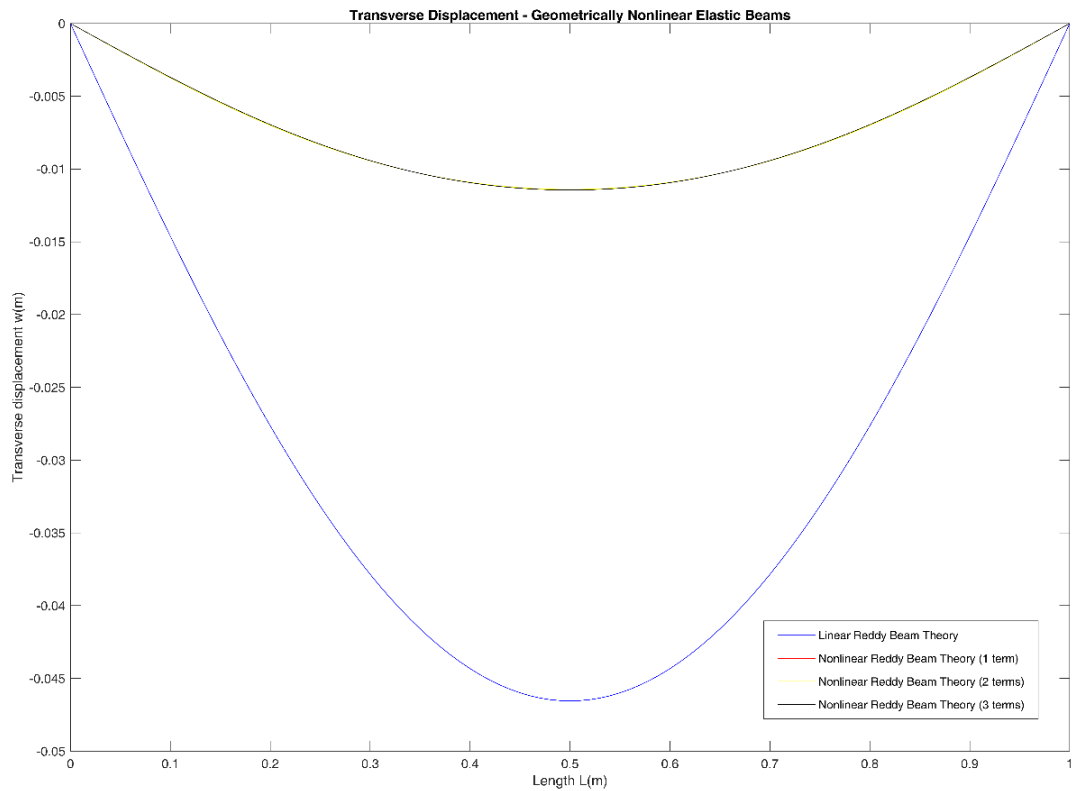
Σχήμα 6.6: Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=20$ .



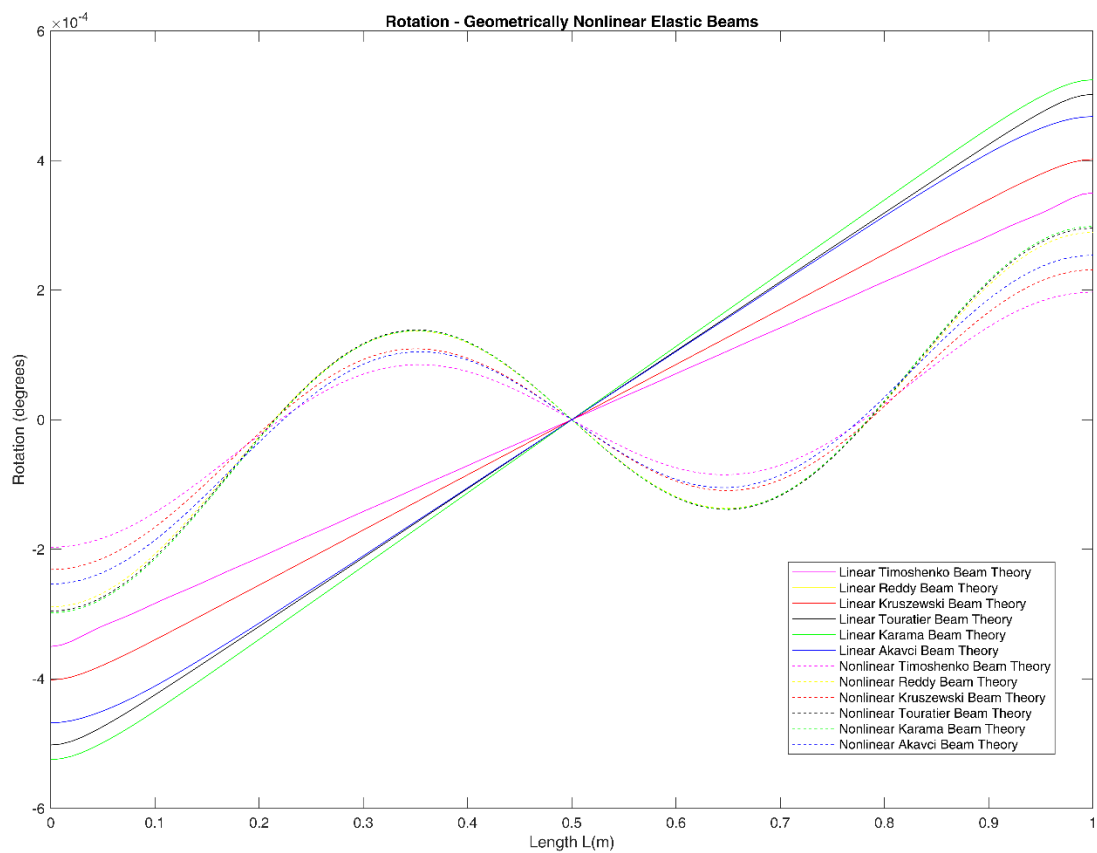
Σχήμα 6.7: Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=30$ .



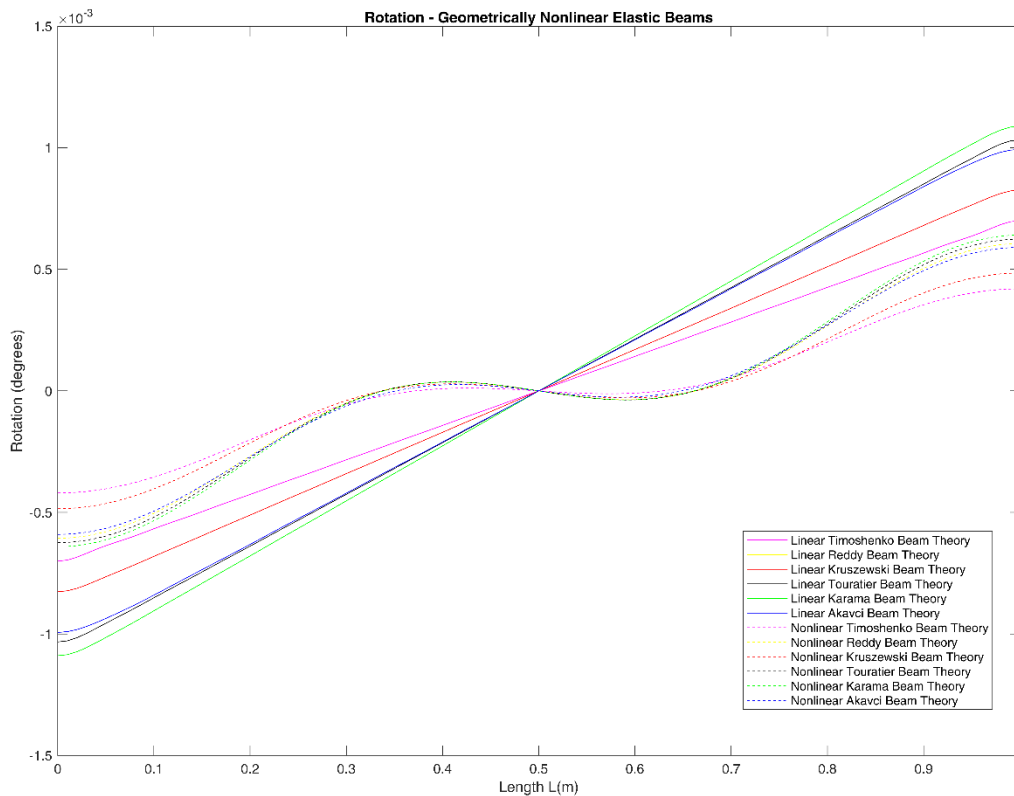
Σχήμα 6.8: Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=50$ .



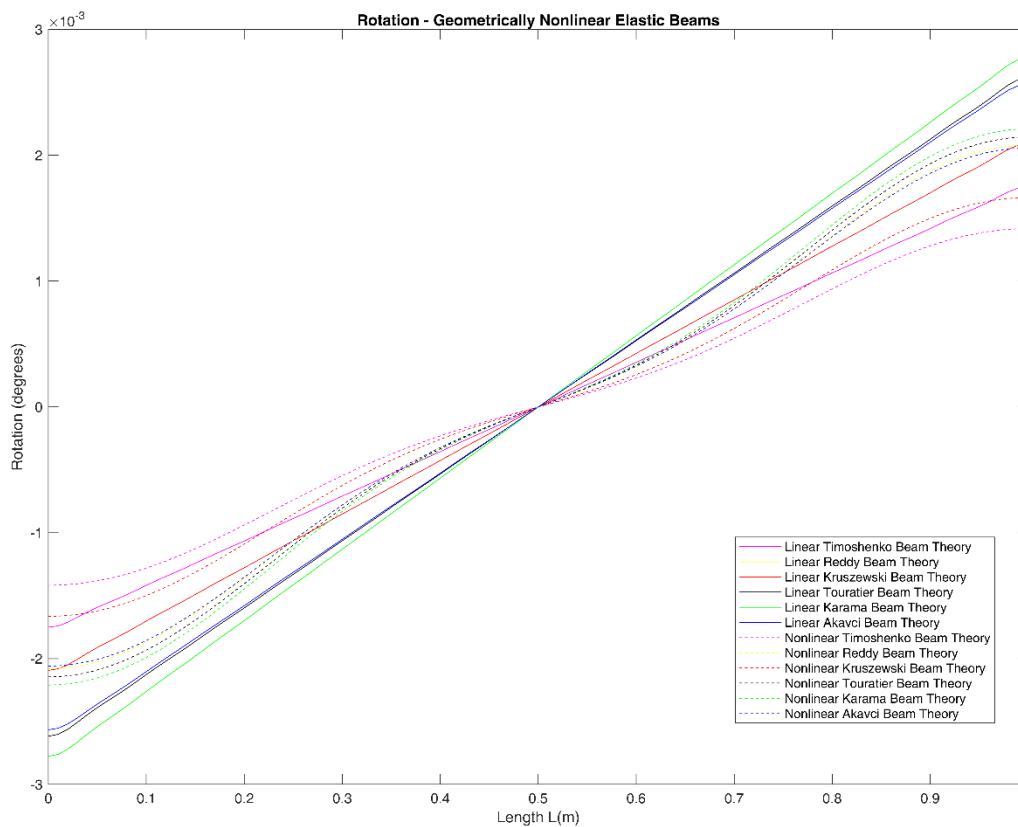
**Σχήμα 6.9:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με το γραμμικό και μη γραμμικό Μοντέλο 5 για αναλογία διαστάσεων  $S=50$ .



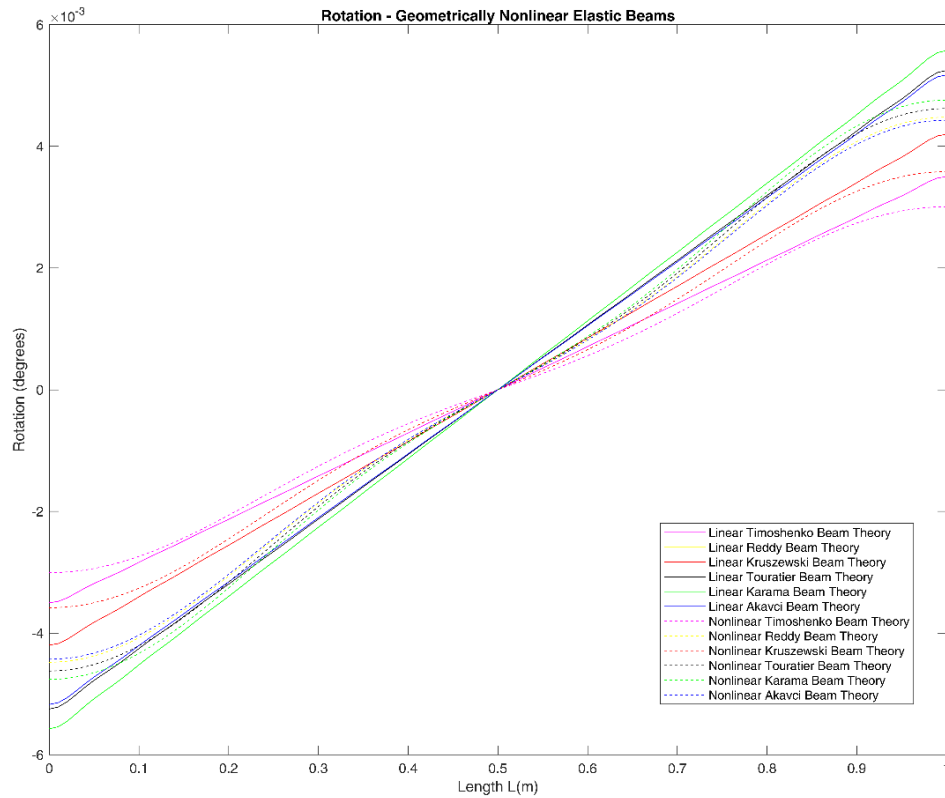
**Σχήμα 6.10:** Σύγκριση της στροφής  $\varphi$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=2$ .



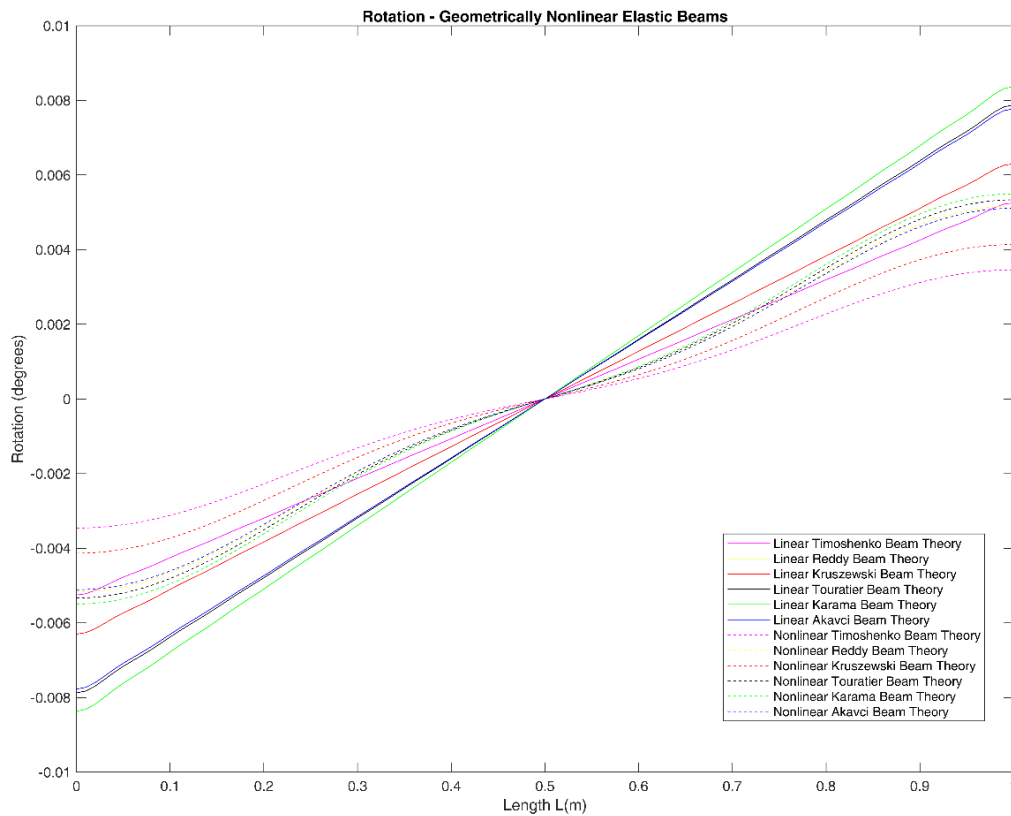
Σχήμα 6.11: Σύγκριση της στροφής  $\varphi$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=4$ .



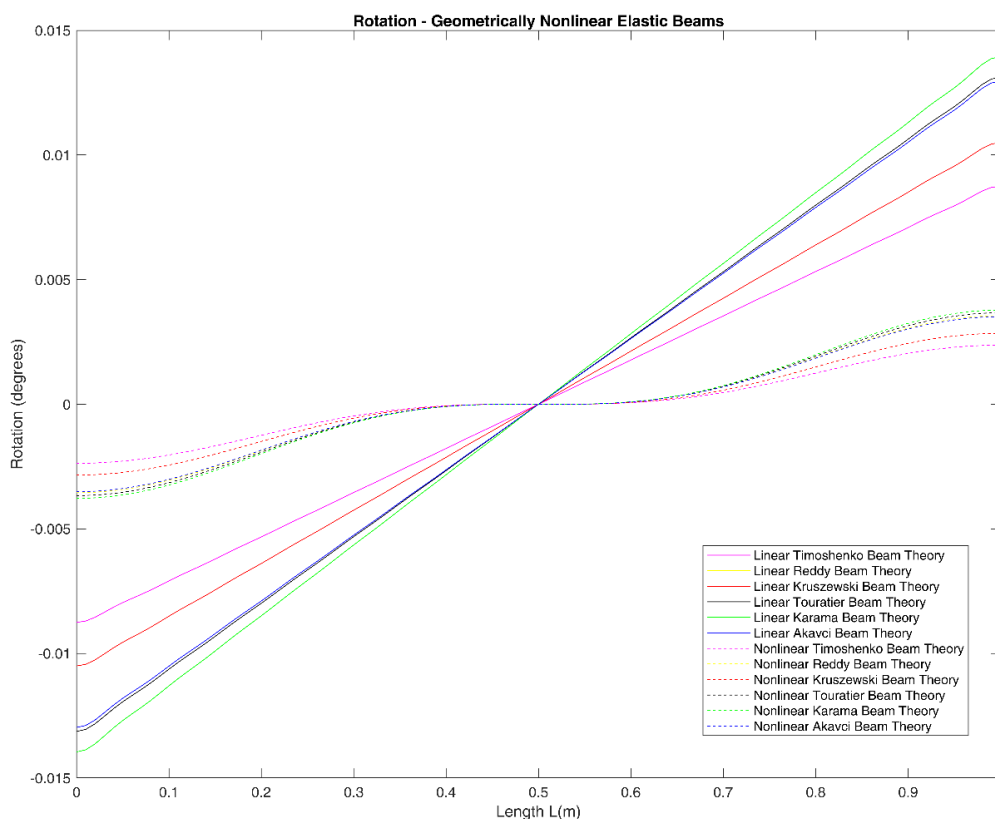
Σχήμα 6.12: Σύγκριση της στροφής  $\varphi$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=10$ .



Σχήμα 6.13: Σύγκριση της στροφής  $\varphi$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=20$ .



Σχήμα 6.14: Σύγκριση της στροφής  $\varphi$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=30$ .



**Σχήμα 6.15:** Σύγκριση της στροφής  $\varphi$  κατά το μήκος  $L$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=50$ .

Από τα διαγράμματα της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  συναρτήσει του μήκους της δοκού  $L$  (σχήματα 6.4-6.8) προκύπτει το συμπέρασμα πως όσο αυξάνεται η αναλογία διαστάσεων  $S$ , οι γραμμικές τεχνικές θεωρίες δεν προβλέπουν με ακρίβεια και παράγουν λανθασμένα αποτελέσματα. Ως αποτέλεσμα είναι απαραίτητη η χρήση μοντέλων (τεχνικών θεωριών) που να λαμβάνουν υπόψη τη γεωμετρική μη γραμμικότητα. Για μικρές αναλογίες διαστάσεων του μήκους και του πάχους της δοκού ( $S=2$  μέχρι  $S=10$ ) παρατηρείται πως τα αποτελέσματα με γραμμικές τεχνικές θεωρίες και μη γραμμικές τεχνικές θεωρίες είναι σχεδόν ίδια. Μια μικρή αλλαγή εντοπίζεται για  $S=20$  όπου οι γραμμικές θεωρίες υπερεκτιμούν την εγκάρσια μετατόπιση  $w$ . Για αναλογίες διαστάσεων μεγαλύτερες από  $S=30$  υπερεκτιμάτε σημαντικά η εγκάρσια μετατόπιση  $w$  με χρήση γραμμικών τεχνικών θεωριών ενώ οι μη γραμμικές τεχνικές θεωρίες παράγουν αποτελέσματα με μεγαλύτερη ακρίβεια.

Επίσης, ένα σημαντικό συμπέρασμα προκύπτει από τη σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με χρήση του γραμμικού και γεωμετρικά μη γραμμικού μοντέλου 5 (RBT) με προσεγγίσεις ενός, δυο και τριών όρων για αναλογία διαστάσεων  $S=50$  (σχήμα 6.9). Παρατηρείται πως για μεγάλες τιμές της αναλογίας διαστάσεων, οι προσεγγίσεις ενός, δυο και τριών όρων της μη γραμμικής περίπτωσης είναι περίπου ίσες, χωρίς σημαντικές αποκλίσεις. Πρόκειται για μια χρήσιμη παρατήρηση που οδηγεί στο συμπέρασμα πως η προτεινόμενη αναλυτική λύση προβλημάτων ελαστικών δοκών με άρθρωση στα δύο άκρα λαμβάνοντας υπόψη



τη γεωμετρική μη γραμμικότητα χρησιμοποιώντας μόνο τον πρώτο όρο του άπειρου αθροίσματος είναι μια καλή προσέγγιση της λύσης για την εγκάρσια μετατόπιση.

Στα διαγράμματα της στροφής  $\varphi$  συναρτήσει του μήκους της δοκού  $L$  (σχήματα 6.10-6.15) γίνεται η σύγκριση της στροφής  $\varphi$  ελαστικών δοκών σε κάμψη με γραμμικές τεχνικές θεωρίες και γεωμετρικά μη γραμμικές τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για διάφορες αναλογίες διαστάσεων  $S=2, 4, 10, 20, 30, 50$ . Για μικρές αναλογίες διαστάσεων του μήκους και του πάχους της δοκού ( $S=2,4,10$ ) παρατηρείται πως τα αποτελέσματα με γραμμικές τεχνικές θεωρίες και μη γραμμικές τεχνικές θεωρίες είναι σχεδόν ίδια. Για  $S=20$  οι γραμμικές θεωρίες υπερεκτιμούν την περιστροφή (rotation) και για αναλογίες διαστάσεων μεγαλύτερες από  $S=30$  υπερεκτιμάτε σημαντικά η περιστροφή με χρήση γραμμικών τεχνικών θεωριών ενώ οι μη γραμμικές τεχνικές θεωρίες παράγουν αποτελέσματα με μεγαλύτερη ακρίβεια.

Από την εύρεση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  και της στροφής  $\varphi$  μπορούν να υπολογισθούν εκφράσεις για χρήσιμα μεγέθη όπως η αξονική μετατόπιση  $u$ , η αξονική τάση κάμψης  $\sigma_x$  και η εγκάρσια διατμητική τάση  $\tau_{xz}$ .

Σε αυτό το σημείο χρειάζεται μια επισήμανση για την καλύτερη κατανόηση των όρων γεωμετρικής μη γραμμικότητας και των φαινομένων διάτμησης. Πρόκειται για δύο διαφορετικούς μηχανισμούς που η επίδρασή τους φαίνεται σε διαφορετικές αναλογίες διαστάσεων. Τα φαινόμενα διάτμησης παρατηρούνται σε δοκούς με μεγάλο πάχος ( $S=2,4$ ) ενώ η γεωμετρική μη γραμμικότητα παρατηρείται σε λεπτές δοκούς (αναλογία διαστάσεων μήκους πάχους  $S \geq 20$ ). Ένα εμπειρικό όριο πάνω από το οποίο είναι απαραίτητο να συμπεριληφθούν οι όροι της γεωμετρικής μη γραμμικότητας είναι για αναλογία διαστάσεων  $S > 15$ .

Η αναγκαιότητα χρήσης τεχνικών θεωριών διάτμησης ανώτερης τάξης παρατηρείται σε δοκούς με μεγάλο πάχος όπου κυριαρχούν τα φαινόμενα διάτμησης και τα αποτελέσματα που παράγουν οι θεωρίες, αυτές, έχουν σημαντική διαφορά σε σχέση με την κλασσική θεωρία δοκών EBT που δεν λαμβάνει υπόψη φαινόμενα διάτμησης. Αντίθετα, σε δοκούς με μικρό πάχος, τα διατμητικά φαινόμενα είναι αμελητέα και οι θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης έρχονται σε συμφωνία με την κλασσική θεωρία δοκών EBT.

Από την άλλη πλευρά, η γεωμετρική μη γραμμικότητα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη σε λεπτές δοκούς. Σε δοκούς με μεγάλο πάχος ( $S=2,4$ ) χρησιμοποιώντας μια γραμμική τεχνική θεωρία διάτμησης ανώτερης τάξης και μια τεχνική θεωρία διάτμησης ανώτερης τάξης με όρους γεωμετρικής μη γραμμικότητας, τα αποτελέσματα που εξάγουν οι δυο θεωρίες είναι σχεδόν ίδια, συνεπώς η γεωμετρική μη γραμμικότητα έχει αμελητέα συμβολή. Αντίθετα, σε λεπτές δοκούς ( $S > 10$ ) η συμβολή του γεωμετρικά μη γραμμικού όρου είναι καθοριστική καθώς η εγκάρσια μετατόπιση  $w$  της δοκού υπερεκτιμάτε από τα γραμμικά μοντέλα και οι προσεγγίσεις είναι μη ρεαλιστικές. Χαρακτηριστικό παραδείγμα είναι για την αναλογία διαστάσεων  $S = 50$  (σχήμα 6.8) όπου οι γραμμικές τεχνικές θεωρίες προβλέπουν την εγκάρσια μετατόπιση  $w \approx 0.04654m$  ενώ οι μη γραμμικές τεχνικές θεωρίες  $w \approx 0.01144m$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

### «Γραμμικές Τεχνικές Θεωρίες σε Πιεζοηλεκτρικές Δοκούς»

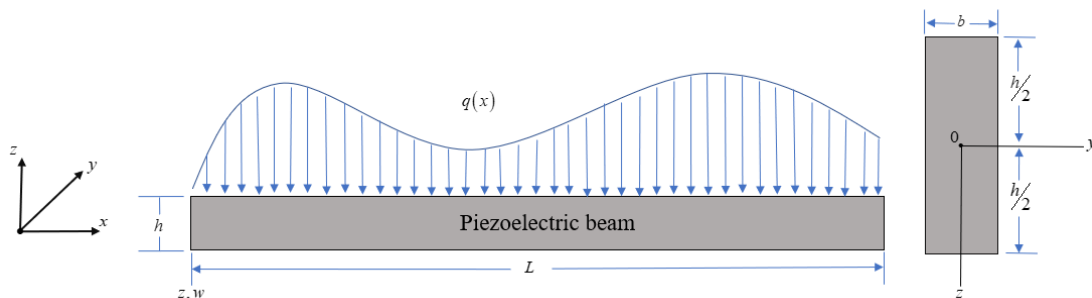
#### 7.1 Θεωρητική διατύπωση γραμμικά πιεζοηλεκτρικών δοκών

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η θεωρητική διατύπωση προβλημάτων πιεζοηλεκτρικών δοκών με τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης με γραμμική ανάλυση. Με αφετηρία το πεδίο μετατοπίσεων και το ηλεκτρικό δυναμικό μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού, με χρήση της μεταβολικής αρχής Hamilton, διατυπώνονται οι εξισώσεις κίνησης και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες για μια πιεζοηλεκτρική δοκό με γραμμική ανάλυση (απειροστές τροπές). Στη συνέχεια, γίνεται επίλυση με αναλυτικό τρόπο προβλημάτων κάμψης και προβλημάτων ελεύθερων ταλαντώσεων πιεζοηλεκτρικών δοκών.

Οι τροπές και οι τάσεις που αναπτύσσονται στο υλικό βρίσκονται σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, του οποίου ο τρίτος άξονας είναι το πάχος [117]. Το ηλεκτρικό πεδίο και το ηλεκτρικό δυναμικό θεωρούνται πολωμένα στην κατεύθυνση του πάχους. Για τη θεωρητική διατύπωση του προβλήματος, στην πιεζοηλεκτρική δοκό (σχήμα 7.1) μπορούν να επιβληθούν οποιεσδήποτε συνοριακές συνθήκες και οποιεσδήποτε συνθήκες φόρτισης. Η δοκός καταλαμβάνει το χωρίο:

$$0 \leq x \leq L, \quad -b/2 \leq y \leq b/2, \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \quad (7.1)$$

όπου  $x$ ,  $y$  και  $z$  είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες,  $L$  το μήκος,  $h$  το πάχος και  $b$  το πλάτος της πιεζοηλεκτρικής δοκού. Η πιεζοηλεκτρική δοκός υποβάλλεται σε εγκάρσιες συνθήκες φόρτισης και πιο συγκεκριμένα, σε εγκάρσιο ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο  $q(x)$  που ασκείται σε όλο το μήκος της.



**Σχήμα 7.1:** (α) Κάμψη πιεζοηλεκτρικής δοκού στο επίπεδο  $x$ - $z$ , (β) διατομή της πιεζοηλεκτρικής δοκού στο επίπεδο  $y$ - $z$ .

Με βάση τις ως άνω υποθέσεις, το πεδίο των μετατοπίσεων και το ηλεκτρικό δυναμικό για μια πιεζοηλεκτρική δοκό διατυπώνονται ως:

$$u_1 = u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f(z) \varphi(x, t), \quad (7.2)$$

$$u_2 = v(x, y, z, t) = 0, \quad (7.3)$$

$$u_3 = w(x, y, z, t) = w(x, t), \quad (7.4)$$

$$\tilde{\varphi}(x, y, z, t) = \tilde{\varphi}(x, z, t) = g(z) \bar{\varphi}(x, t). \quad (7.5)$$

όπου  $u$  και  $w$  είναι η αξονική και η εγκάρσια μετατόπιση της μέσης γραμμής της δοκού στη  $x$  και  $z$  κατεύθυνση αντίστοιχα,  $\tilde{\varphi}$  είναι το ηλεκτρικό δυναμικό και  $t$  είναι ο χρόνος. Το σύμβολο  $\varphi$  αντιπροσωπεύει την περιστροφή της διατομής της δοκού στον άξονα  $x$  (neutral axis), η οποία είναι μια άγνωστη συνάρτηση που πρέπει να προσδιοριστεί.

Οι συναρτήσεις  $g(z)$  περιγράφουν την κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού κατά την κατεύθυνση του πάχους μέσα στην πιεζοηλεκτρική δοκό. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία [137-142], διάφορες μορφές της συνάρτησης  $g(z)$  παρατίθενται στον πίνακα 7.1. Η μορφή της συνάρτησης  $g(z)$  εξαρτάται από τον τύπο των συνθηκών του κυκλώματος που επιλέγεται για την εκάστοτε εφαρμογή. Οι τύποι I και II αναφέρεται σε συνθήκες ανοιχτού κυκλώματος (open circuit) και οι τύποι III, IV και V σε συνθήκες κλειστού κυκλώματος ή βραχυκυκλώματος (short circuit). Στην παρούσα μελέτη, η μοντελοποίηση της πιεζοηλεκτρικής δοκού γίνεται με κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού της μορφής:  $g(z) = 1 - (2z/h)^2$ .

**Πίνακας 7.1:** Η συνάρτηση κατανομής του ηλεκτρικού δυναμικού κατά την κατεύθυνση του πάχους της πιεζοηλεκτρικής δοκού.

Τύπος	Συνάρτηση $g(z)$	Συνθήκη κυκλώματος	Συγγραφέας
Τύπος I	$-\frac{z}{h}$	Ανοιχτό κύκλωμα	Goldschmidtboeing and Woias [138] (2008)
Τύπος II	$\frac{2z}{h}$	Ανοιχτό κύκλωμα	Komeili et al. [139] (2011)
Τύπος III	$\frac{h}{\pi} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	Κλειστό κύκλωμα	Fernandes and Pouget [141] (2001)
Τύπος IV	$1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2$	Κλειστό κύκλωμα	Wang et al. [142] (2001)
Τύπος V	$\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	Κλειστό κύκλωμα	Baroudi et al. [137] (2018)

Τα φαινόμενα διατμητικής παραμόρφωσης είναι πιο σημαντικά σε δοκούς με μεγάλο πάχος παρά σε λεπτές δοκούς. Αυτά τα φαινόμενα δεν λαμβάνονται υπόψη στην κλασική θεωρία κάμψης δοκών (θεωρία EBT). Για μια πιο ακριβής περιγραφή της συμπεριφοράς δοκών με μεγάλο πάχος υπό κάμψη, συμπεριλαμβανομένων των φαινομένων διατμητικής παραμόρφωσης, είναι απαραίτητες θεωρίες διατμητικής παραμόρφωσης υψηλής τάξης. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την επιλογή κατάλληλων κινηματικών και καταστατικών σχέσεων.

Η συνάρτηση  $f(z)$  περιλαμβάνεται στο πεδίο μετατόπισης των θεωριών υψηλής τάξης για να ληφθεί υπόψη η επίδραση της εγκάρσιας διατμητικής παραμόρφωσης με στόχο την επίτευξη μηδενικής διατμητικής τάσης στην άνω και κάτω επιφάνεια της δοκού [77].

Η ορθή τροπή  $\varepsilon_x$  και η εγκάρσια διατμητική τροπή  $\gamma_{xz}$  για μια πιεζοηλεκτρική δοκό στη γραμμική ανάλυση είναι:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -z \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + f(z) \varphi(x,t) \right] = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (7.6)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( -z \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + f(z) \varphi(x,t) \right) + \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = f'(z) \varphi(x,t). \quad (7.7)$$

Η αξονική τάση (τάση κάμψης- normal bending stress)  $\sigma_x$ , η εγκάρσια διατμητική τάση  $\tau_{xz}$  και οι συνιστώσες της ηλεκτρικής μετατόπισης  $D_x$  και  $D_z$  για την πιεζοηλεκτρική δοκό [124, 143] δίνονται από:

$$\sigma_x = \tilde{c}_{11} \varepsilon_x - \tilde{e}_{31} E_z, \quad (7.8)$$

$$\tau_{xz} = c_{55} \gamma_{xz} - e_{15} E_x, \quad (7.9)$$

$$D_x = e_{15} \gamma_{xz} + \epsilon_{11} E_x, \quad (7.10)$$

$$D_z = \tilde{e}_{31} \varepsilon_x + \tilde{\epsilon}_{33} E_z, \quad (7.11)$$

όπου  $\tilde{c}_{11}$ ,  $\tilde{e}_{31}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{33}$  είναι οι μειωμένες (reduced) ελαστικές, πιεζοηλεκτρικές και διηλεκτρικές σταθερές υπό την υπόθεση επίπεδης τάσης από την 3-D καταστατική σχέση [142, 144] και δίδονται ως εξής:

$$\tilde{c}_{11} = \bar{c}_{11} - \frac{\bar{c}_{13}^2}{\bar{c}_{33}}, \quad \tilde{e}_{31} = \bar{e}_{31} - \frac{\bar{c}_{13} \bar{e}_{33}}{\bar{c}_{33}}, \quad \tilde{\epsilon}_{33} = \bar{\epsilon}_{33} + \frac{\bar{e}_{33}^2}{\bar{c}_{33}} \quad (7.12)$$

$$\bar{c}_{11} = c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{22}}, \quad \bar{c}_{13} = c_{13} - \frac{c_{12} c_{23}}{c_{22}}, \quad \bar{c}_{33} = c_{33} - \frac{c_{23}^2}{c_{22}} \quad (7.13)$$

$$\bar{e}_{31} = e_{31} - \frac{c_{12} e_{32}}{c_{22}}, \quad \bar{e}_{33} = e_{33} - \frac{c_{23} e_{32}}{c_{22}}, \quad \bar{\epsilon}_{33} = \epsilon_{33} + \frac{e_{32}^2}{c_{22}}. \quad (7.14)$$

Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου για μια πιεζοηλεκτρική δοκό ορίζεται ως:

$$E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad (7.15)$$

το ηλεκτρικό πεδίο κατά τους άξονες  $x$ ,  $y$ ,  $z$  δίδεται από τις σχέσεις:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -g(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}, \quad (7.16)$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad (7.17)$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial g(z)}{\partial z} \bar{\varphi}(x,t) = -g'(z) \bar{\varphi}(x,t). \quad (7.18)$$

Για την παραγωγή των εξισώσεων κίνησης και των αντίστοιχων συνοριακών συνθηκών, η αρχή Hamilton [124] διατυπώνεται ως:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (T - H_e + W_e) dt = 0. \quad (7.19)$$

όπου:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (T) dt = \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left[ \frac{1}{2} \int_V \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} dV \right] dt, \quad (7.20)$$

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (-H_e) dt = -\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left( \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [e]^T \{E\} - \frac{1}{2} \{E\}^T [\epsilon] \{E\} \right) dV dt, \quad (7.21)$$

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (W_e) dt = \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} q w(x,t) dx dt = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} q (\delta w) dx dt, \quad (7.22)$$

και  $\delta(\cdot)$  δηλώνεται ο πρώτος μεταβολικός τελεστής,  $T$  είναι η κινητική ενέργεια,  $H_e$  είναι η ηλεκτρική ενθαλπία και  $W_e$  είναι το έργο των εξωτερικών δυνάμεων.  $[C]$  είναι ο πίνακας των ελαστικών σταθερών,  $[e]$  είναι ο πίνακας των πιεζοηλεκτρικών συντελεστών και  $[\epsilon]$  είναι ο πίνακας των διηλεκτρικών σταθερών.  $\{u\}$  είναι το διάνυσμα του πεδίου μετατοπίσεων και  $\{\dot{u}\}$  είναι η πρώτη χρονική παράγωγος του διανύσματος του πεδίου μετατοπίσεων.  $\{\varepsilon\}$  είναι το διάνυσμα του πεδίου των τροπών,  $\{E\}$  είναι το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου και  $q$  είναι οι κατανεμημένες δυνάμεις σε όλο το μήκος της δοκού.

Από το πρώτο ολοκλήρωμα της αρχής Hamilton (σχέση 7.20) που αφορά στην κινητική ενέργεια του συστήματος  $T$ , με αντικατάσταση, προκύπτει:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \frac{1}{2} \rho \int_V \left[ \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( -z \frac{\partial w}{\partial x} + f(z) \varphi(x,t) \right) \right]^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial t} (w(x,t)) \right]^2 \right] dV dt = 0, \quad (7.23)$$

Με σχετικές πράξεις, η σχέση 7.23 γίνεται:

$$\begin{aligned} & \rho \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z^2] dz + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f^2(z)] dz \right. \\ & - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz \\ & \left. + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [I] dz \right\} dy dx dt = 0. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Ύστερα από πράξεις και θέτοντας τους συντελεστές  $A_0, B_0, C_0$  (σχέση 5.13), η σχέση 7.24 γίνεται:

$$\begin{aligned} & \rho \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left\{ A_0 b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} + C_0 b \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} - B_0 b \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} - B_0 b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} \right. \\ & \left. + bh \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \right\} dx dt = 0. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Με εφαρμογή του θεωρήματος Gauss (Παράρτημα Α.2) στη σχέση 7.25, για τις εξισώσεις κίνησης προκύπτουν οι όροι:

$$\begin{aligned} & \rho b \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left\{ A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} (\delta w) - C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta \varphi) - B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} (\delta w) + B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} (\delta \varphi) \right. \\ & \left. - bh \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) \right\} dx dt = 0, \end{aligned} \quad (7.26)$$

και οι όροι που προκύπτουν για τις συνοριακές συνθήκες είναι οι:

$$- \left[ A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \left[ B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} = 0. \quad (7.27)$$

Συνεπώς, από το ολοκλήρωμα της κινητικής ενέργειας  $T$  υπάρχουν όροι που αναφέρονται στις εξισώσεις κίνησης (σχέσεις 7.28, 7.29) και όροι που αναφέρονται στις συνοριακές συνθήκες (σχέση 7.30):

$$A_0 \rho b \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - B_0 \rho b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} - \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (7.28)$$

$$-C_0 \rho b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + B_0 \rho b \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} = 0, \quad (7.29)$$

$$-A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ή } w : \text{καθορισμένο}. \quad (7.30)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα της αρχής Hamilton (σχέση 7.21) που αναφέρεται στην ηλεκτρική ενθαλπία  $H_e$  του συστήματος [124], με αντικατάσταση, έχει τη μορφή:

$$-\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left[ \frac{I}{2} (\tilde{c}_{11} \varepsilon_x^2 + c_{55} \gamma_{xz}^2) - (E_z \tilde{e}_{31} \varepsilon_x + E_x e_{15} \gamma_{xz}) - \frac{I}{2} (E_x^2 \varepsilon_{11} + E_z^2 \tilde{\varepsilon}_{33}) \right] dV dt = 0. \quad (7.31)$$

Έπειτα, για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της ηλεκτρικής ενθαλπίας  $H_e$  (σχέση 7.31), γίνεται υπολογισμός κάθε όρου του ολοκληρώματος ξεχωριστά. Ο πρώτος όρος του ολοκληρώματος είναι:

$$-\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left( \frac{I}{2} \tilde{c}_{11} \varepsilon_x^2 + \frac{I}{2} c_{55} \gamma_{xz}^2 \right) dV dt. \quad (7.32)$$

Με αντικατάσταση του πεδίου των τροπών (σχέσεις 7.6 και 7.7), η σχέση 7.32 παίρνει τη μορφή:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left\{ \int_V \left[ -\frac{I}{2} \tilde{c}_{11} f^2(z) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \tilde{c}_{11} z f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{I}{2} \tilde{c}_{11} z^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{I}{2} c_{55} [f'(z)]^2 \varphi^2(x,t) \right] dV \right\} dt. \quad (7.33)$$

Υστερα από σχετικές πράξεις, η σχέση 7.33 γίνεται:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ -\tilde{c}_{11} f^2(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} + \tilde{c}_{11} z f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} + \tilde{c}_{11} z f(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} - \tilde{c}_{11} z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} - c_{55} [f'(z)]^2 \varphi (\delta \varphi) \right\} dz dy dx dt. \quad (7.34)$$

Με ολοκλήρωση κατά το πλάτος  $b$  της δοκού, η σχέση 7.34 γίνεται:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ -\tilde{c}_{11} b f^2(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} + \tilde{c}_{11} b z f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} + \tilde{c}_{11} b z f(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} - \tilde{c}_{11} b z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} - c_{55} b [f'(z)]^2 \varphi(\delta \varphi) \right\} dz dx dt . \quad (7.35)$$

Με σχετικές πράξεις, η σχέση 7.35 παίρνει τη μορφή:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left[ -\tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f^2(z)] dz + \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz + \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz - \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z^2] dz - c_{55} b \varphi(\delta \varphi) \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f'(z)]^2 dz \right] dx dt . \quad (7.36)$$

Υστερα από πράξεις και θέτοντας τους συντελεστές  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$ ,  $D_0$  (σχέση 5.13), η σχέση 7.36 γίνεται:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left\{ -C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} + B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} + B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial(\delta \varphi)}{\partial x} - A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} - D_0 c_{55} b \varphi(\delta \varphi) \right\} dx dt . \quad (7.37)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss (Παράρτημα Α.2) στο πρώτο ολοκλήρωμα της ηλεκτρικής ενθαλπίας  $H_e$  (σχέση 7.37), προκύπτουν ορισμένοι όροι που αναφέρονται στις εξισώσεις κίνησης 7.38-7.39 και ορισμένοι όροι που αναφέρονται στις συνοριακές συνθήκες (σχέσεις 7.40-7.42):

$$(\delta w) : -A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 0 , \quad (7.38)$$

$$(\delta \varphi) : -B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - D_0 c_{55} b \varphi = 0 , \quad (7.39)$$

$$A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ή} \quad w : \text{καθορισμένο} , \quad (7.40)$$

$$-A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial w}{\partial x} : \text{καθορισμένο} , \quad (7.41)$$



$$B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{ή } \varphi : \text{καθορισμένο} . \quad (7.42)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα της ηλεκτρικής ενθαλπίας  $H_e$  είναι:

$$-\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V [-(E_z \tilde{e}_{31} \varepsilon_x + E_x e_{15} \gamma_{xz})] dV dt = 0 , \quad (7.43)$$

Με αντικατάσταση του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου, προκύπτει:

$$\begin{aligned} -\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left\{ -zg'(z) \tilde{e}_{31} \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) g'(z) \tilde{e}_{31} \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right. \\ \left. + g(z) f'(z) e_{15} \varphi(x,t) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right\} dV dt = 0 . \end{aligned} \quad (7.44)$$

Με πράξεις, η σχέση 7.44 γίνεται:

$$\begin{aligned} -\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ -\tilde{e}_{31} zg'(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \bar{\varphi}) - \tilde{e}_{31} zg'(z) \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) \right. \\ \left. + \tilde{e}_{31} f(z) g'(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \bar{\varphi}) + \tilde{e}_{31} f(z) g'(z) \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial}{\partial x} (\delta \varphi) \right. \\ \left. + e_{15} g(z) f'(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta \varphi) + e_{15} g(z) f'(z) \varphi(x,t) \frac{\partial}{\partial x} (\delta \bar{\varphi}) \right\} dz dy dx dt = 0 . \end{aligned} \quad (7.45)$$

Στη συνέχεια, ορίζονται οι συντελεστές  $K_0$ ,  $L_0$  και  $N_0$  ως:

$$K_0 = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zg'(z)] dz , \quad (7.46)$$

$$L_0 = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f(z)g'(z)] dz , \quad (7.47)$$

$$N_0 = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [g(z)f'(z)] dz , \quad (7.48)$$

και η σχέση 7.45 παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left\{ K_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \bar{\varphi}) + K_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} - L_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \bar{\varphi}) - L_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right. \\ \left. - N_0 b e_{15} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta \varphi) - N_0 b e_{15} \varphi(x,t) \frac{\partial (\delta \bar{\varphi})}{\partial x} \right\} dz dy dx dt = 0 . \end{aligned} \quad (7.49)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss στη σχέση 7.49 (Παράρτημα Α.2), από το δεύτερο ολοκλήρωμα της ηλεκτρικής ενθαλπίας  $H$ , υπάρχουν όροι που αναφέρονται στις εξισώσεις κίνησης 7.50-7.52 και όροι που αναφέρονται στις συνοριακές συνθήκες (σχέσεις 7.53-7.56):

$$(\delta w) : K_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} = 0, \quad (7.50)$$

$$(\delta \varphi) : L_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - N_0 b e_{15} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0, \quad (7.51)$$

$$(\delta \bar{\varphi}) : K_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_0 b e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - L_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad (7.52)$$

$$-K_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0 \quad \text{ή } w : \text{καθορισμένο}, \quad (7.53)$$

$$K_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi} = 0 \quad \text{ή } \frac{\partial w}{\partial x} : \text{καθορισμένο}, \quad (7.54)$$

$$-L_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi} = 0 \quad \text{ή } \varphi : \text{καθορισμένο}, \quad (7.55)$$

$$-N_0 b e_{15} \varphi = 0 \quad \text{ή } \bar{\varphi} : \text{καθορισμένο}. \quad (7.56)$$

Το τρίτο ολοκλήρωμα της ηλεκτρικής ενθαλπίας  $H_e$  (σχέση 7.31) από την διατύπωση της αρχής Hamilton, έχει τη μορφή:

$$-\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left[ -\frac{1}{2} (E_x^2 \epsilon_{11} + E_z^2 \tilde{\epsilon}_{33}) \right] dV dt = 0. \quad (7.57)$$

Με αντικατάσταση του ηλεκτρικού πεδίου (σχέσεις 7.16 και 7.18), η σχέση 7.57 γίνεται:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \frac{1}{2} \left[ \left( -g(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right)^2 \epsilon_{11} + \left( -g'(z) \bar{\varphi}(x,t) \right)^2 \tilde{\epsilon}_{33} \right] dV dt = 0 \quad (7.58)$$

Ύστερα από πράξεις με το μεταβολικό τελεστή  $\delta$ , η σχέση 7.58 γίνεται:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left[ [g(z)]^2 \epsilon_{11} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial (\delta \bar{\varphi})}{\partial x} + [g'(z)]^2 \tilde{\epsilon}_{33} \bar{\varphi}(x,t) \delta \bar{\varphi}(x,t) \right] dV dt = 0 \quad (7.59)$$

Η σχέση 7.59 μπορεί να γραφεί ως:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left[ \epsilon_{11} [g(z)]^2 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial (\delta \bar{\varphi})}{\partial x} + \tilde{\epsilon}_{33} [g'(z)]^2 \bar{\varphi}(x,t) \delta \bar{\varphi}(x,t) \right] dz dy dx dt = 0 \quad (7.60)$$

Υστερα από σχετικές ολοκληρώσεις και πράξεις, η σχέση 7.60 γίνεται:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left( b \epsilon_{11} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial (\delta \bar{\varphi})}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [g(z)]^2 dz + b \tilde{\epsilon}_{33} \bar{\varphi}(\delta \bar{\varphi}) \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [g'(z)]^2 dz \right) dx dt = 0 . \quad (7.61)$$

Στη συνέχεια, ορίζονται οι συντελεστές  $M_0$  και  $P_0$  ως:

$$P_0 = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [g(z)]^2 dz , \quad (7.62)$$

$$M_0 = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [g'(z)]^2 dz , \quad (7.63)$$

και η σχέση 7.61 παίρνει τη μορφή:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left( P_0 b \epsilon_{11} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial (\delta \bar{\varphi})}{\partial x} + M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \bar{\varphi}(\delta \bar{\varphi}) \right) dx dt = 0 . \quad (7.64)$$

Οι τιμές των συντελεστών  $K_0, L_0, M_0, N_0$  και  $P_0$  (σχέσεις 7.46-7.48 και 7.62-7.63) με κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού της μορφής  $g(z) = 1 - (2z/h)^2$  δίδονται στον πίνακα 7.2 (σελ.133). Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss στη σχέση 7.64 (Παράρτημα Α.2), προκύπτουν όροι για τις εξισώσεις κίνησης (σχέση 7.65) και όροι για τις συνοριακές συνθήκες (σχέση 7.66):

$$(\delta \bar{\varphi}) : -P_0 b \epsilon_{11} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \bar{\varphi} = 0 , \quad (7.65)$$

$$P_0 b \epsilon_{11} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0 \quad \text{ή} \quad \bar{\varphi} : \text{καθορισμένο} . \quad (7.66)$$

Το τρίτο ολοκλήρωμα της αρχής Hamilton (σχέση 7.19) όπου αφορά το έργο των εξωτερικών φορτίσεων  $W_e$ , είναι:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (W_e) dt = \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} [qw(x,t)] dx dt = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} q(\delta w) dx dt = 0 . \quad (7.67)$$

Συνολικά, από τη μεταβολική αρχή, αρχή Hamilton, προκύπτει η πλήρης μαθηματική περιγραφή μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού δηλαδή οι γραμμικές εξισώσεις κίνησης και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες που διέπουν μια πιεζοηλεκτρική δοκό (σχέσεις 7.61–7.67). Οι τρεις εξισώσεις κίνησης περιγράφουν την εγκάρσια μετατόπιση  $w$ , τη στροφή  $\varphi$  και το ηλεκτρικό δυναμικό  $\bar{\varphi}$ . Στη συνέχεια, από τις εξισώσεις κίνησης και τις συνοριακές συνθήκες (σχέσεις 7.61-7.67) θα γίνει επίλυση στατικών και δυναμικών προβλήματα πιεζοηλεκτρικών δοκών στη γραμμική ανάλυση (απειροστές μετατοπίσεις - απειροστές τροπές).

**Γραμμικές εξισώσεις κίνησης πιεζοηλεκτρικής δοκού:**

$$-A_0\tilde{c}_{11}b\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + B_0\tilde{c}_{11}b\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + A_0\rho b\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - B_0\rho b\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} - \rho b h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + K_0\tilde{e}_{31}b\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} = -q, \quad (7.68)$$

$$-B_0\tilde{c}_{11}b\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + C_0\tilde{c}_{11}b\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - D_0c_{55}b\varphi - C_0\rho b\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + B_0\rho b\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + L_0b\tilde{e}_{31}\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - N_0be_{15}\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0, \quad (7.69)$$

$$K_0b\tilde{e}_{31}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - L_0b\tilde{e}_{31}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + N_0be_{15}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - P_0b\epsilon_{11}\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + M_0b\tilde{\epsilon}_{33}\bar{\varphi} = 0, \quad (7.70)$$

**Συνοριακές συνθήκες στο  $x=0$  και  $x=L$ :**

$$A_0\tilde{c}_{11}b\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - B_0\tilde{c}_{11}b\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - A_0\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + B_0\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - K_0b\tilde{e}_{31}\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0 \quad \text{ή } w : \text{καθορισμένο}, \quad (7.71)$$

$$-A_0\tilde{c}_{11}b\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_0\tilde{c}_{11}b\frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_0b\tilde{e}_{31}\bar{\varphi} = 0 \quad \text{ή } \frac{\partial w}{\partial x} : \text{καθορισμένο}, \quad (7.72)$$

$$B_0\tilde{c}_{11}b\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - C_0\tilde{c}_{11}b\frac{\partial \varphi}{\partial x} - L_0b\tilde{e}_{31}\bar{\varphi} = 0 \quad \text{ή } \varphi : \text{καθορισμένο}, \quad (7.73)$$

$$P_0b\epsilon_{11}\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - N_0be_{15}\varphi = 0 \quad \text{ή } \bar{\varphi} : \text{καθορισμένο}. \quad (7.74)$$

## 7.2 Επίλυση στατικού προβλήματος με θεωρία EBT

Για την επίλυση ενός στατικού προβλήματος μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού με χρήση της τεχνικής θεωρίας EBT, η κατανομής της διατμητικής τάσης μέσα στο σώμα είναι μηδενική  $f(z)=0$  και δεν προβλέπεται περιστροφή (rotation)  $\varphi(x)=0$ . Να σημειωθεί πως στην κλασική θεωρία δοκών (EBT) ως «στροφική» θεωρείται η κλίση (slope) της εγκάρσιας μετατόπισης, δηλαδή  $\theta = \partial w / \partial x$ . Με τις παραπάνω υποθέσεις, από τις σχέσεις 7.68-7.74, προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες για μια γραμμική πιεζοηλεκτρική δοκό με χρήση της τεχνική θεωρία EBT είναι:

$$(\delta w): A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} - A_0 \rho b \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad (7.75)$$

$$(\delta \bar{\varphi}): -K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_0 b \epsilon_{11} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \bar{\varphi} = 0, \quad (7.76)$$

$$A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - K_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} = 0 \quad \text{ή} \quad w: \text{καθορισμένο}, \quad (7.77)$$

$$-A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi}(x, t) = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial w}{\partial x}: \text{καθορισμένο}, \quad (7.78)$$

$$P_0 b \epsilon_{11} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0 \quad \text{ή} \quad \bar{\varphi}: \text{καθορισμένο}. \quad (7.79)$$

Εφόσον δεν προβλέπεται στροφή στη θεωρία EBT, η περιγραφή της κίνησης της πιεζοηλεκτρικής δοκού γίνεται με μια εξίσωση κίνησης, που αφορά την εγκάρσια μετατόπιση  $w$ . Για την τεχνική θεωρία EBT, οι μη μηδενικοί συντελεστές είναι οι  $A_0$ ,  $K_0$ ,  $P_0$  και  $M_0$ . Στην περίπτωση επίλυσης ενός στατικού προβλήματος κάμψης πιεζοηλεκτρικής δοκού, οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$(A_0 \tilde{c}_{11} b a_m^4) w_m + (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2) \bar{\varphi}_m = q_m, \quad (7.80)$$

$$(K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2) w_m + (-P_0 b \epsilon_{11} a_m^2 - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33}) \bar{\varphi}_m = 0, \quad (7.81)$$

όπου:  $a_m = m\pi/L$ . Οι αναλυτικές εκφράσεις της εγκάρσιας μετατόπισης  $w_m$  και του ηλεκτρικού δυναμικού  $\bar{\varphi}_m$  είναι:

$$w_m = \frac{q_m (-P_0 b \epsilon_{11} a_m^2 - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33})}{(A_0 \tilde{c}_{11} b a_m^4) (-P_0 b \epsilon_{11} a_m^2 - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33}) - (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2) (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2)}, \quad (7.82)$$

$$\bar{\varphi}_m = \frac{-q_m (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2)}{(A_0 \tilde{c}_{11} b a_m^4) (-P_0 b \epsilon_{11} a_m^2 - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33}) - (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2) (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2)}. \quad (7.83)$$

### 7.3 Επίλυση στατικού προβλήματος με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης (HSDT)

Για την επίλυση ενός στατικού προβλήματος κάμψης μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού (σχήμα 7.2) με χρήση γραμμικών τεχνικών θεωριών διάτμησης ανώτερης τάξης, παραλείποντας τους αδρανειακούς όρους, δηλαδή τους όρους που εξαρτώνται από το χρόνο, οι εξισώσεις κίνησης (σχέσεις 7.68-7.70) παίρνουν τη μορφή:

$$A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} = q, \quad (7.84)$$

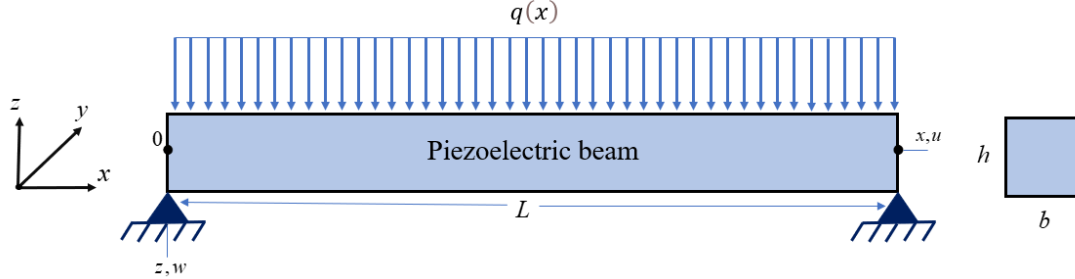
$$B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_0 c_{55} b \varphi - L_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + N_0 e_{15} b \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0, \quad (7.85)$$

$$-K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + L_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_0 b \epsilon_{11} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} - N_0 e_{15} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \bar{\varphi} = 0. \quad (7.86)$$

**Πίνακας 7.2:** Τιμές των συντελεστών  $K_0, L_0, M_0, N_0, P_0, R_0$  για διάφορες τεχνικές θεωρίες με κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού  $g(z) = 1 - (2z/h)^2$ .

Μοντέλα	$K_0$	$M_0$	$P_0$	$L_0$	$N_0$	$R_0$
Model 1 (EBT)	$-\frac{2h}{3}$	$\frac{16}{3h}$	$\frac{8h}{15}$	0	0	0
Model 2 (FSDT)	$-\frac{2h}{3}$	$\frac{16}{3h}$	$\frac{8h}{15}$	$-\frac{2h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	0
Model 3 (HSDT)	$-\frac{2h}{3}$	$\frac{16}{3h}$	$\frac{8h}{15}$	$-\frac{h^3}{15}$	$\frac{h^3}{15}$	0
Model 4 (HSDT)	$-\frac{2h}{3}$	$\frac{16}{3h}$	$\frac{8h}{15}$	$-\frac{2h}{3}$	$\frac{2h}{3}$	0
Model 5 (RBT)	$-\frac{2h}{3}$	$\frac{16}{3h}$	$\frac{8h}{15}$	$-\frac{8h}{15}$	$\frac{8h}{15}$	0
Model 6 (SSDT)	$-\frac{2h}{3}$	$\frac{16}{3h}$	$\frac{8h}{15}$	$-\frac{16h}{\pi^3}$	$\frac{16h}{\pi^3}$	0
Model 7 (HPSDT)	$-\frac{2h}{3}$	$\frac{16}{3h}$	$\frac{8h}{15}$	$\frac{(35-13e)h}{3\sqrt{e}}$	$\frac{(-35+13e)h}{3\sqrt{e}}$	0
Model 8 (ESDT)	$-\frac{2h}{3}$	$\frac{16}{3h}$	$\frac{8h}{15}$	$\frac{2h}{\sqrt{e}} - h\sqrt{2\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{2h}{\sqrt{e}} + h\sqrt{2\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	0

Η μέθοδος επίλυσης του στατικού προβλήματος μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού που προτείνεται είναι η εφαρμογή κατάλληλων μορφών λύσεων άπειρων αθροισμάτων ημιτόνων και συνημιτόνων (σειρές Fourier) τέτοιες ώστε να ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος κάμψης.



**Σχήμα 7.2:** Πιεζοηλεκτρική δοκός με συνοριακές συνθήκες άρθρωσης στα δύο άκρα (hinged-hinged) και επιβολή ομοιόμορφα κατανεμημένου εξωτερικού φορτίου  $q(x)$ .

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι συνοριακές συνθήκες άρθρωσης στα δύο άκρα (hinged-hinged) και οι άγνωστες ποσότητες  $w$ ,  $\varphi$  και  $\bar{\varphi}$  ως μορφές λύσεις άπειρων αθροισμάτων ημιτόνων και συνημιτόνων εισάγονται ως:

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} , \quad (7.87)$$

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} , \quad (7.88)$$

$$\bar{\varphi}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} , \quad (7.89)$$

Το ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο  $q$  με τη μορφή αθροίσματος είναι:

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \frac{m\pi x}{L} , \text{ με } q_m = \frac{4q_0}{m\pi} \text{ για } m = 1, 3, 5, \dots \quad (7.90)$$

και  $q_m = 0$  για  $m = 2, 4, 6, \dots$

Η πρώτη εξίσωση κίνησης (σχ. 7.84) με εισαγωγή των σχ. 7.87-7.90, είναι:

$$A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] - K_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] = \sum_{m=1}^{\infty} \left( q_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right) . \quad (7.91)$$

Με πράξεις, από τη σχέση 7.91, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
& A_0 \tilde{c}_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[ \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} - B_0 \tilde{c}_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[ \cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} \\
& - K_0 b \tilde{e}_{31} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \left( q_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right).
\end{aligned} \tag{7.92}$$

Υστερα από πράξεις, η σχέση 7.92 γίνεται:

$$\begin{aligned}
& A_0 \tilde{c}_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - B_0 \tilde{c}_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \\
& - K_0 b \tilde{e}_{31} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ q_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}.
\end{aligned} \tag{7.93}$$

Το πρώτο μέλος της σχέσης 7.93 μπορεί να γραφεί σαν ένα άθροισμα ως εξής:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_0 \tilde{c}_{11} b w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) - B_0 \tilde{c}_{11} b \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right. \\
& \left. + K_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ q_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}.
\end{aligned} \tag{7.94}$$

Με σχετικές απλοποιήσεις, η σχέση 7.94 γράφεται:

$$\begin{aligned}
& A_0 \tilde{c}_{11} b w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) - B_0 \tilde{c}_{11} b \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \\
& + K_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) = q_m \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right).
\end{aligned} \tag{7.95}$$

Με απλοποιήσεις, η πρώτη εξίσωση κίνησης (σχέση 7.95) έχει, τελικά, τη μορφή:

$$\left( A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{m^4 \pi^4}{L^4} \right) w_m - \left( B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right) \varphi_m + \left( K_0 b \tilde{e}_{31} \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) \bar{\varphi}_m = q_m. \tag{7.96}$$

Εισάγοντας τις σχέσεις 7.87-7.90 στη δεύτερη εξίσωση κίνησης (σχέση 7.85), προκύπτει:



$$\begin{aligned}
& B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] \\
& + D_0 c_{55} b \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] - L_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] + N_0 e_{15} b \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] = 0 .
\end{aligned} \tag{7.97}$$

Με πράξεις, η σχέση 7.97, γίνεται:

$$\begin{aligned}
& B_0 \tilde{c}_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[ \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} - C_0 \tilde{c}_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} + D_0 c_{55} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right\} \\
& - L_0 \tilde{e}_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} + N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} = 0
\end{aligned} \tag{7.98}$$

Ύστερα από σχετικές παραγωγίσεις στη σχέση 7.98, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
& B_0 \tilde{c}_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \left( -\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - C_0 \tilde{c}_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( -\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \\
& + D_0 c_{55} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - L_0 \tilde{e}_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \\
& + N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = 0 .
\end{aligned} \tag{7.99}$$

Το πρώτο μέλος της εξίσωσης 7.99 μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -B_0 \tilde{c}_{11} b w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) + C_0 \tilde{c}_{11} b \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) + D_0 c_{55} b \varphi_m \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right. \\
& \left. - L_0 \tilde{e}_{31} b \bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) + N_0 e_{15} b \bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = 0 .
\end{aligned} \tag{7.100}$$

Με σχετικές απλοποιήσεις, η σχέση 7.100 γράφεται:

$$\begin{aligned}
& -B_0 \tilde{c}_{11} b w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) + C_0 \tilde{c}_{11} b \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \\
& + D_0 c_{55} b \varphi_m \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) - L_0 \tilde{e}_{31} b \bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) + N_0 e_{15} b \bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) = 0 .
\end{aligned} \tag{7.101}$$

Με απλοποιήσεις και αναδιάταξη των όρων, η δεύτερη εξίσωση κίνησης (από τη σχέση 7.101), παίρνει, τελικά, τη μορφή:

$$-\left(B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3}\right) w_m + \left(C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + D_0 c_{55} b\right) \varphi_m + \left(-L_0 \tilde{e}_{31} b \frac{m\pi}{L} + N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L}\right) \bar{\varphi}_m = 0 . \quad (7.102)$$

Η τρίτη εξίσωση κίνησης (σχέση 7.86), με αντικατάσταση των σχέσεων 7.87-7.90, γίνεται:

$$\begin{aligned} & -K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] + L_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] + P_0 b \in_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \\ & - N_0 e_{15} b \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] = 0 . \end{aligned} \quad (7.103)$$

Η σχέση 7.103 γράφεται ως:

$$\begin{aligned} & -K_0 \tilde{e}_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} + L_0 \tilde{e}_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \frac{\partial}{\partial x} \left[ \cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} + P_0 b \in_{11} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} - \\ & - N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \frac{\partial}{\partial x} \left[ \cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \left[ \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (7.104)$$

Με παραγωγίσεις και πράξεις, η σχέση 7.104 γίνεται:

$$\begin{aligned} & -K_0 \tilde{e}_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} + L_0 \tilde{e}_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\varphi_m \frac{m\pi}{L} \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \\ & + P_0 b \in_{11} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\varphi_m \frac{m\pi}{L} \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \\ & - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = 0 . \end{aligned} \quad (7.105)$$

Το πρώτο μέλος της σχέσης 7.105 γράφεται ως:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ K_0 \tilde{e}_{31} b w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) - L_0 \tilde{e}_{31} b \varphi_m \frac{m\pi}{L} \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right. \\ & \left. - P_0 b \in_{11} \bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) + N_0 e_{15} b \varphi_m \frac{m\pi}{L} \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \bar{\varphi}_m \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = 0 . \end{aligned} \quad (7.106)$$

Η σχέση 7.106, ύστερα από σχετικές απλοποιήσεις, γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & K_0 \tilde{e}_{31} b w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) - L_0 \tilde{e}_{31} b \varphi_m \frac{m\pi}{L} \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \\
 & - P_0 b \in_{11} \bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) + N_0 e_{15} b \varphi_m \frac{m\pi}{L} \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \bar{\varphi}_m \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) = 0 .
 \end{aligned}
 \tag{7.107}$$

Με απλοποιήσεις, η εξίσωση 7.107 διατυπώνεται, τελικά, ως:

$$\left( K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) w_m + \left( -L_0 \tilde{e}_{31} b \frac{m\pi}{L} + N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} \right) \varphi_m - \left( P_0 b \in_{11} \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \right) \bar{\varphi}_m = 0 .
 \tag{7.108}$$

Συνεπώς, συνολικά, προκύπτουν τρεις αλγεβρικές εξισώσεις [145] (σχέσεις 7.96, 7.102 και 7.108) με τρεις αγνώστους, τις ποσότητες  $w_m$ ,  $\varphi_m$  και  $\bar{\varphi}_m$ :

$$\left( A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{m^4 \pi^4}{L^4} \right) w_m - \left( B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right) \varphi_m + \left( K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) \bar{\varphi}_m = q_m ,
 \tag{7.96}$$

$$- \left( B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} \right) w_m + \left( C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + D_0 c_{55} b \right) \varphi_m + \left( -L_0 \tilde{e}_{31} b \frac{m\pi}{L} + N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} \right) \bar{\varphi}_m = 0 ,
 \tag{7.102}$$

$$\left( K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) w_m + \left( -L_0 \tilde{e}_{31} b \frac{m\pi}{L} + N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} \right) \varphi_m - \left( P_0 b \in_{11} \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \right) \bar{\varphi}_m = 0 .
 \tag{7.108}$$

Το σύστημα εξισώσεων (σχέσεις 7.96, 7.102 και 7.108) είναι ένα γραμμικό  $3 \times 3$  σύστημα εξισώσεων. Η επίλυσή του γίνεται με τη μέθοδο των οριζουσών (μέθοδο Cramer). Σχηματίζοντας την ορίζουσα των συντελεστών  $D$ :

$$D = \det \begin{bmatrix} A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{m^4 \pi^4}{L^4} & -B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} & K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \\ -B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} & C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + D_0 c_{55} b & -L_0 \tilde{e}_{31} b \frac{m\pi}{L} + N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} \\ K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} & -L_0 \tilde{e}_{31} b \frac{m\pi}{L} + N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} & -P_0 b \in_{11} \frac{m^2 \pi^2}{L^2} - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \end{bmatrix} ,
 \tag{7.109}$$

και τις ορίζουσες των αγνωστων ποσοτήτων:

$$D_{w_m} = \det \begin{bmatrix} q_m & -B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} & K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \\ 0 & C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + D_0 c_{55} b & -L_0 \tilde{e}_{31} b \frac{m\pi}{L} + N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} \\ 0 & -L_0 \tilde{e}_{31} b \frac{m\pi}{L} + N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} & -P_0 b \in_{11} \frac{m^2 \pi^2}{L^2} - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \end{bmatrix}, \quad (7.110)$$

$$D_{\varphi_m} = \det \begin{bmatrix} A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{m^4 \pi^4}{L^4} & q_m & K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \\ -B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} & 0 & -L_0 \tilde{e}_{31} b \frac{m\pi}{L} + N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} \\ K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} & 0 & -P_0 b \in_{11} \frac{m^2 \pi^2}{L^2} - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \end{bmatrix}, \quad (7.111)$$

$$D_{\bar{\varphi}_m} = \det \begin{bmatrix} A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{m^4 \pi^4}{L^4} & -B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} & q_m \\ -B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{m^3 \pi^3}{L^3} & C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + D_0 c_{55} b & 0 \\ K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{m^2 \pi^2}{L^2} & -L_0 \tilde{e}_{31} b \frac{m\pi}{L} + N_0 e_{15} b \frac{m\pi}{L} & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.112)$$

οι λύσεις από τη μέθοδο Cramer είναι της μορφής:

$$w_m = \frac{D_{w_m}}{D}, \quad (7.113)$$

$$\varphi_m = \frac{D_{\varphi_m}}{D}, \quad (7.114)$$

$$\bar{\varphi}_m = \frac{D_{\bar{\varphi}_m}}{D}. \quad (7.115)$$

Θέτοντας  $a_m = m\pi/L$ , οι αναλυτικές λύσεις είναι:

$$w_m = \frac{q_m \left[ \left( C_0 \tilde{c}_{11} b a_m^2 + D_0 c_{55} b \right) \left( -P_0 b \in_{11} a_m^2 - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \right) - \left( -L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m \right)^2 \right]}{\left[ \left( A_0 \tilde{c}_{11} b a_m^4 \left( C_0 \tilde{c}_{11} b a_m^2 + D_0 c_{55} b \right) - \left( B_0 \tilde{c}_{11} b a_m^3 \right)^2 \right) \left( -P_0 b \in_{11} a_m^2 - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \right) \right.} \\ \left. + \left( -B_0 \tilde{c}_{11} b a_m^3 \left( -L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m \right) - \left( C_0 \tilde{c}_{11} b a_m^2 + D_0 c_{55} b \right) \left( K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2 \right) \right) \left( K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2 \right) \right. \\ \left. + \left( \left( -B_0 \tilde{c}_{11} b a_m^3 \right) \left( K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2 \right) - A_0 \tilde{c}_{11} b a_m^4 \left( -L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m \right) \right) \left( -L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m \right) \right]}. \quad (7.116)$$

$$\varphi_m = \frac{-q_m \left[ -B_0 \tilde{c}_{11} b a_m^3 (-P_0 b \epsilon_{11} a_m^2 - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33}) - (-L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m) (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2) \right]}{\left[ \left( A_0 \tilde{c}_{11} b a_m^4 (C_0 \tilde{c}_{11} b a_m^2 + D_0 c_{55} b) - (B_0 \tilde{c}_{11} b a_m^3)^2 \right) (-P_0 b \epsilon_{11} a_m^2 - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33}) \right.},$$

$$+ \left( -B_0 \tilde{c}_{11} b a_m^3 (-L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m) - (C_0 \tilde{c}_{11} b a_m^2 + D_0 c_{55} b) (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2) \right) (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2)$$

$$\left. + \left( (-B_0 \tilde{c}_{11} b a_m^3) (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2) - A_0 \tilde{c}_{11} b a_m^4 (-L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m) \right) (-L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m) \right]$$

(7.117)

$$\bar{\varphi}_m = \frac{q_m \left[ -B_0 \tilde{c}_{11} b a_m^3 (-L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m) - (C_0 \tilde{c}_{11} b a_m^2 + D_0 c_{55} b) (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2) \right]}{\left[ \left( A_0 \tilde{c}_{11} b a_m^4 (C_0 \tilde{c}_{11} b a_m^2 + D_0 c_{55} b) - (B_0 \tilde{c}_{11} b a_m^3)^2 \right) (-P_0 b \epsilon_{11} a_m^2 - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33}) \right.},$$

$$+ \left( -B_0 \tilde{c}_{11} b a_m^3 (-L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m) - (C_0 \tilde{c}_{11} b a_m^2 + D_0 c_{55} b) (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2) \right) (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2)$$

$$\left. + \left( (-B_0 \tilde{c}_{11} b a_m^3) (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2) - A_0 \tilde{c}_{11} b a_m^4 (-L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m) \right) (-L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m) \right]$$

(7.118)

Από την επίλυση του συστήματος προκύπτουν αναλυτικές εκφράσεις για τον υπολογισμό της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$ , της στροφής  $\varphi$  και του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  (σχέσεις 7.116-7.118). Από τις ποσότητες αυτές, υπολογίζονται χρήσιμες ποσότητες όπως η αξονική μετατόπιση  $u$ , η αξονική τάση κάμψης  $\sigma_x$ , η εγκάρσια διατμητική τάση  $\tau_{xz}$ , η αξονική ηλεκτρική μετατόπιση  $D_x$  και η εγκάρσια ηλεκτρική μετατόπιση  $D_z$ . Οι αναλυτικές εκφράσεις (Παράρτημα Α.2) των ποσοτήτων, αυτών, διατυπώνονται ως:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ -z \frac{m\pi}{L} w_m + f(z) \varphi_m \right] \cos \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (7.119)$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (7.120)$$

$$\tilde{\varphi} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ g(z) \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (7.121)$$

$$\sigma_x = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ \tilde{c}_{11} z \frac{m^2 \pi^2}{L^2} w_m - \tilde{c}_{11} f(z) \frac{m\pi}{L} \varphi_m + \tilde{e}_{31} g'(z) \bar{\varphi}_m \right] \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (7.122)$$

$$\tau_{xz} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ c_{55} f'(z) \varphi_m + e_{15} g(z) \frac{m\pi}{L} \bar{\varphi}_m \right] \cos \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (7.123)$$

$$D_x = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ e_{15} f'(z) \varphi_m - \epsilon_{11} g(z) \frac{m\pi}{L} \bar{\varphi}_m \right] \cos \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (7.124)$$

$$D_z = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ \tilde{e}_{31} z \frac{m^2 \pi^2}{L^2} w_m - \tilde{e}_{31} f(z) \varphi_m - \tilde{\epsilon}_{33} g'(z) \bar{\varphi}_m \right] \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (7.125)$$

## 7.4 Επίλυση δυναμικού προβλήματος πιεζοηλεκτρικών δοκών

Οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα των ελεύθερων ταλαντώσεων (δυναμικό πρόβλημα) μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού με συντοιακές συνθήκες άρθρωσης στα δύο άκρα, προκύπτουν από την υπόθεση πως μηδενίζεται το εφαρμοζόμενο εγκάρσιο φορτίο στις σχέσεις 7.68-7.70. Οι μορφές των λύσεων των άγνωστων ποσοτήτων  $w(x,t)$ ,  $\varphi(x,t)$  και  $\tilde{\varphi}(x,t)$  θα πρέπει να ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες:

$$w(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) , \quad (7.126)$$

$$\varphi(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) , \quad (7.127)$$

$$\tilde{\varphi}(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) , \quad (7.128)$$

όπου  $\omega_m$  είναι η φυσική συχνότητα και  $w_m$ ,  $\varphi_m$  και  $\tilde{\varphi}_m$  οι συντελεστές των άγνωστων ποσοτήτων. Με αντικατάσταση των σχέσεων 7.126-7.128 στην πρώτη εξίσωση κίνησης (σχέση 7.68), προκύπτει:

$$\begin{aligned} & A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] - B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] \\ & - A_0 \rho b \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] + B_0 \rho b \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] \\ & + \rho b h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] - K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] = 0 . \end{aligned} \quad (7.129)$$

Με πράξεις, η σχέση 7.129 γίνεται:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \left[ A_0 \tilde{c}_{11} b w_m \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] - \sum_{m=1}^{\infty} \left[ B_0 \tilde{c}_{11} b \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L}\right)^3 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \left[ A_0 \rho b \omega^2 w_m \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ B_0 \rho b \omega^2 \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \rho b h \omega^2 w_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ K_0 \tilde{e}_{31} b \tilde{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] = 0 . \end{aligned} \quad (7.130)$$

Η σχέση 7.130 μπορεί να γραφεί ως:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \begin{bmatrix} A_0 \tilde{c}_{11} b w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) - B_0 \tilde{c}_{11} b \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) \\ - A_0 \rho b \omega^2 w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) + B_0 \rho b \omega^2 \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) \\ - \rho b h \omega^2 w_m \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) + K_0 \tilde{e}_{31} b \tilde{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) \end{bmatrix} = 0. \quad (7.131)$$

Με πράξεις, η εξίσωση 7.131, γίνεται:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ A_0 \tilde{c}_{11} b w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 - B_0 \tilde{c}_{11} b \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 - A_0 \rho b \omega^2 w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + B_0 \rho b \omega^2 \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) - \rho b h \omega^2 w_m + K_0 \tilde{e}_{31} b \tilde{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) = \sum_{m=1}^{\infty} [0] \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t). \quad (7.132)$$

Με απλοποιήσεις και θέτοντας  $\alpha_m = (m\pi/L)$ , η εξίσωση 7.132 γράφεται:

$$\left[ (A_0 \tilde{c}_{11} b \alpha_m^4) w_m - (B_0 \tilde{c}_{11} b \alpha_m^3) \varphi_m + (K_0 \tilde{e}_{31} b \alpha_m^2) \tilde{\varphi}_m \right] - \omega^2 \left[ (A_0 \rho b \alpha_m^2 + \rho b h) w_m - (B_0 \rho b \alpha_m) \varphi_m \right] = 0. \quad (7.133)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων 7.126-7.128 στη δεύτερη εξίσωση κίνησης (σχέση 7.69), προκύπτει:

$$\begin{aligned} & B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) \right] - C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) \right] \\ & + D_0 c_{55} b \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) \right] - B_0 \rho b \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) \right] \\ & + C_0 \rho b \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) \right] - L_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_m \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) \right] \\ & + N_0 e_{15} b \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_m \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) \right] = 0. \end{aligned} \quad (7.134)$$

Υστερα από πράξεις, η σχέση 7.134, παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{\infty} \left[ -B_0 \tilde{c}_{11} b w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ C_0 \tilde{c}_{11} b \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) \right] \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ D_0 c_{55} b \varphi_m \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ B_o \rho b \omega^2 w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) \right] \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \left[ C_o \rho b \omega^2 \varphi_m \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) \right] - \sum_{m=1}^{\infty} \left[ L_0 \tilde{e}_{31} b \tilde{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) \right] \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ N_0 e_{15} b \tilde{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) \right] = 0 . \tag{7.135}
 \end{aligned}$$

Η σχέση 7.135 μπορεί να γραφεί σαν ένα άθροισμα, ως εξής:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{\infty} \left[ -B_0 \tilde{c}_{11} b w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) + C_0 \tilde{c}_{11} b \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) \right. \\
 & + D_0 c_{55} b \varphi_m \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) + B_o \rho b \omega^2 w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) \\
 & - C_o \rho b \omega^2 \varphi_m \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) - L_0 \tilde{e}_{31} b \tilde{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) \\
 & \left. + N_0 e_{15} b \tilde{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \sin(\omega_m t) \right] = 0 . \tag{7.136}
 \end{aligned}$$

Με απλοποιήσεις και αναδιάταξη των όρων, η σχέση 7.136, γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & -B_0 \tilde{c}_{11} b w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 + C_0 \tilde{c}_{11} b \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + D_0 c_{55} b \varphi_m + B_o \rho b \omega^2 w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) \\
 & - C_o \rho b \omega^2 \varphi_m - L_0 \tilde{e}_{31} b \tilde{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) + N_0 e_{15} b \tilde{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) = 0 . \tag{7.137}
 \end{aligned}$$

Τελικά, ύστερα από πράξεις και θέτοντας  $a_m = m\pi/L$ , η δεύτερη εξίσωση κίνησης έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 & \left[ (-B_0 \tilde{c}_{11} b \alpha_m^3) w_m + (C_0 \tilde{c}_{11} b \alpha_m^2 + D_0 c_{55} b) \varphi_m + (-L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m) \tilde{\varphi}_m \right] \\
 & - \omega^2 \left[ (-B_o \rho b a_m) w_m + (C_o \rho b) \varphi_m \right] = 0 . \tag{7.138}
 \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων 7.126-7.128, η τρίτη εξίσωση κίνησης (σχέση 7.70), γίνεται:



$$\begin{aligned}
 & -K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] + L_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] \\
 & + P_0 \in_{11} b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] - N_0 e_{15} b \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] \\
 & - M_0 \tilde{\epsilon}_{33} b \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] = 0 .
 \end{aligned} \tag{7.139}$$

Με πράξεις, η σχέση 7.139, γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{\infty} \left[ K_0 \tilde{e}_{31} b w_m \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] - \sum_{m=1}^{\infty} \left[ L_0 \tilde{e}_{31} b \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \left[ P_0 \in_{11} b \tilde{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ N_0 e_{15} b \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \left[ M_0 \tilde{\epsilon}_{33} b \tilde{\varphi}_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \right] = 0 .
 \end{aligned} \tag{7.140}$$

Γράφοντας τα αθροίσματα της σχέσης 7.140 ως ένα άθροισμα, προκύπτει:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ \begin{aligned}
 & K_0 \tilde{e}_{31} b w_m \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) - L_0 \tilde{e}_{31} b \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \\
 & - P_0 \in_{11} b \tilde{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) + N_0 e_{15} b \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t) \\
 & - M_0 \tilde{\epsilon}_{33} b \tilde{\varphi}_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(\omega_m t)
 \end{aligned} \right] = 0 . \tag{7.141}$$

Υστερα από πράξεις και απλοποιήσεις, η σχέση 7.141, γίνεται:

$$K_0 \tilde{e}_{31} b w_m \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 - L_0 \tilde{e}_{31} b \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) - P_0 \in_{11} b \tilde{\varphi}_m \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + N_0 e_{15} b \varphi_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) - M_0 \tilde{\epsilon}_{33} b \tilde{\varphi}_m = 0 \tag{7.142}$$

Κάνοντας πράξεις στη σχέση 7.142 και θέτοντας  $a_m = m\pi/L$ , η τρίτη εξίσωσης κίνησης έχει, τελικά, τη μορφή:

$$\left[ (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2) w_m + (-L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m) \varphi_m - (P_0 \in_{11} b a_m^2 + M_0 \tilde{\epsilon}_{33} b) \tilde{\varphi}_m \right] = 0 . \tag{7.143}$$

Οι σχέσεις 7.133, 7.138 και 7.143 αποτελούν ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους:

$$\begin{aligned} & \left[ (A_0 \tilde{c}_{11} b \alpha_m^4) w_m - (B_0 \tilde{c}_{11} b \alpha_m^3) \varphi_m + (K_0 \tilde{e}_{31} b \alpha_m^2) \tilde{\varphi}_m \right] \\ & - \omega^2 \left[ (A_0 \rho b \alpha_m^2 + \rho b h) w_m - (B_0 \rho b a_m) \varphi_m \right] = 0 , \end{aligned} \quad (7.133)$$

$$\begin{aligned} & \left[ (-B_0 \tilde{c}_{11} b \alpha_m^3) w_m + (C_0 \tilde{c}_{11} b \alpha_m^2 + D_0 c_{55} b) \varphi_m + (-L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m) \tilde{\varphi}_m \right] \\ & - \omega^2 \left[ (-B_0 \rho b a_m) w_m + (C_0 \rho b) \varphi_m \right] = 0 , \end{aligned} \quad (7.138)$$

$$\begin{aligned} & \left[ (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2) w_m + (-L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m) \varphi_m - (P_0 \in_{11} b a_m^2 + M_0 \tilde{\epsilon}_{33} b) \tilde{\varphi}_m \right] = 0. \end{aligned} \quad (7.143)$$

Το γραμμικό σύστημα εξισώσεων, με τη μορφή πινάκων, γράφεται:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} w_m \\ \varphi_m \\ \tilde{\varphi}_m \end{Bmatrix} = 0 , \quad (7.144)$$

και σε πιο συμπαγή μορφή, η σχέση 7.144 γράφεται:

$$([K] - \omega_m^2 [M]) \{\Delta\} = 0 , \quad (7.145)$$

όπου: το  $\{\Delta\}$  υποδηλώνει το διάνυσμα και  $\{\Delta\}^T = \{w_m \quad \varphi_m \quad \tilde{\varphi}_m\}$ . Οι πίνακες  $[K]$ ,  $[M]$  είναι συμμετρικοί και συνεπώς ισχύει:  $K_{12} = K_{21}$ ,  $K_{13} = K_{31}$ ,  $K_{23} = K_{32}$  και  $M_{12} = M_{21}$ .

Τα στοιχεία του πίνακα των συντελεστών  $[K]$  δίδονται ως:

$$\begin{aligned} K_{11} &= A_0 \tilde{c}_{11} b \alpha_m^4 , \\ K_{12} &= K_{21} = -B_0 \tilde{c}_{11} b \alpha_m^3 , \\ K_{13} &= K_{31} = K_0 \tilde{e}_{31} b \alpha_m^2 , \\ K_{22} &= C_0 \tilde{c}_{11} b \alpha_m^2 + D_0 c_{55} b , \\ K_{23} &= K_{32} = -L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m , \\ K_{33} &= -P_0 \in_{11} b a_m^2 - M_0 \tilde{\epsilon}_{33} b . \end{aligned} \quad (7.146)$$

Τα στοιχεία του πίνακα των συντελεστών  $[M]$  δίδονται ως:

$$\begin{aligned}
M_{11} &= A_o \rho b \alpha_m^2 + \rho b h , \\
M_{12} &= M_{21} = -B_o \rho b \alpha_m , \\
M_{22} &= C_o \rho b .
\end{aligned} \tag{7.147}$$

Η εξίσωση 7.145, για μη τετριμμένες λύσεις, ικανοποιεί την απαραίτητη συνθήκη:

$$\det([K] - \omega_m^2 [M]) = 0 . \tag{7.148}$$

Η επίλυση του συστήματος γίνεται τη μέθοδο των οριζουσών:

$$\det \begin{bmatrix} K_{11} - \omega^2 M_{11} & K_{12} - \omega^2 M_{12} & K_{13} \\ K_{21} - \omega^2 M_{21} & K_{22} - \omega^2 M_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} = 0 . \tag{7.149}$$

Ύστερα από τους υπολογισμούς, προκύπτει μια αλγεβρική πολυωνυμική εξίσωση τέταρτης τάξης της μορφής:

$$\begin{aligned}
&\omega^4 (K_{33} M_{11} M_{22} - K_{33} M_{12} M_{12}) \\
&+ \omega^2 \left( -K_{11} K_{33} M_{22} - K_{22} K_{33} M_{11} + K_{23} K_{23} M_{11} + K_{12} K_{33} M_{12} \right. \\
&\quad \left. + K_{12} K_{33} M_{12} - K_{13} K_{23} M_{12} - K_{13} K_{23} M_{12} + K_{13} K_{13} M_{22} \right) \\
&+ \left( K_{11} K_{22} K_{33} - K_{11} K_{23} K_{23} - K_{12} K_{12} K_{33} \right. \\
&\quad \left. + K_{12} K_{13} K_{23} + K_{12} K_{13} K_{23} - K_{13} K_{13} K_{22} \right) = 0 .
\end{aligned} \tag{7.150}$$

Από τη λύση της πολυωνυμικής εξίσωσης τετάρτου βαθμού (σχέση 7.150) προκύπτουν τέσσερις ρίζες από τις οποίες οι δύο είναι θετικές και οι άλλες δύο αρνητικές συζυγείς. Εφόσον πρόκειται για πρόβλημα ταλαντώσεων, οι συχνότητες της δοκού δεν μπορούν να είναι αρνητικές, συνεπώς οι αρνητικές συζυγείς λύσεις απορρίπτονται. Οι δυο θετικές λύσεις είναι αποδεκτές. Η πρώτη θετική λύση αφορά τη συχνότητα κάμψης  $\omega_w$  (καμπτική συχνότητα) και η δεύτερη αφορά τη θεμελιώδη συχνότητα περιστροφής (στροφής) λόγω διάτμησης  $\omega_\phi$  της πιεζοηλεκτρικής δοκού.

Τα αποτελέσματα του στατικού προβλήματος κάμψης για μια πιεζοηλεκτρική δοκό παρουσιάζονται στην ενότητα 7.6 και τα αποτελέσματα του δυναμικού προβλήματος των ελεύθερων ταλαντώσεων για μια πιεζοηλεκτρική δοκό παρουσιάζονται στην ενότητα 7.7.

### 7.5 Αποτελέσματα στατικού προβλήματος πιεζοηλεκτρικών δοκών

Για τα παραδείγματα και τους αριθμητικούς υπολογισμούς ενός στατικού προβλήματος κάμψης μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης στη γραμμική ανάλυση, θεωρείται μια πιεζοηλεκτρική δοκός με συνοριακές συνθήκες άρθρωσης στα δύο άκρα (hinged-hinged), όπως φαίνεται στο σχήμα 7.2. Το μήκος της είναι  $L=0.6\text{ m}$ , το πλάτος  $b=0.002\text{ m}$  και το πάχος της  $h$  εξαρτάται από τις τιμές της αναλογίας διαστάσεων  $S=L/h$ . Το ηλεκτρικό δυναμικό  $\tilde{\varphi}$  θεωρείται μηδενικό στην πάνω και στην κάτω ( $x, z=\pm h/2$ ) επιφάνεια της δοκού (ηλεκτρικές συνθήκες κλειστού κυκλώματος) και για το λόγο αυτό, χρησιμοποιείται μια έκφραση Τύπου-II της συνάρτησης  $g(z)=1-(2z/h)^2$ . Για την επίλυση του στατικού προβλήματος, η δοκός υποβάλλεται σε ομοιόμορφα κατανομημένο εξωτερικό φορτίο  $q_0=-10\text{ N/m}^2$  (όπου  $q^*=q_0/b$ ). Το υλικό της πιεζοηλεκτρικής δοκού είναι το PZT-4, με πυκνότητα  $\rho=7500\text{ kg/m}^3$ . Για την ανάλυση της κάμψης της πιεζοηλεκτρικής δοκού από PZT-4, υπολογίζονται η εγκάρσια μετατόπιση  $w$ , η στροφή  $\varphi$  και το ηλεκτρικό δυναμικό  $\tilde{\varphi}$  με την τεχνική θεωρία EBT και με τις τεχνικές θεωρίες διάτμησης σε δοκούς με διάφορες αναλογίες διαστάσεων  $S=2, 5, 10, 30, 50$  και τα αποτελέσματα που προκύπτουν παρουσιάζονται στον πίνακα 7.3. Ο πίνακας των ελαστικών σταθερών του PZT-4 [146] είναι:

$$[C]=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 139 & 77.8 & 74.3 & 0 & 0 & 0 \\ 77.8 & 139 & 74.3 & 0 & 0 & 0 \\ 74.3 & 74.3 & 113 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30.6 \end{bmatrix} \text{ GPa} , \quad (7.151)$$

ο πίνακας των πιεζοηλεκτρικών σταθερών του PZT-4 είναι:

$$[e]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 13.44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13.44 & 0 & 0 \\ -6.98 & -6.98 & 13.84 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} , \quad (7.152)$$

και ο πίνακας των διηλεκτρικών σταθερών για το PZT-4 είναι:

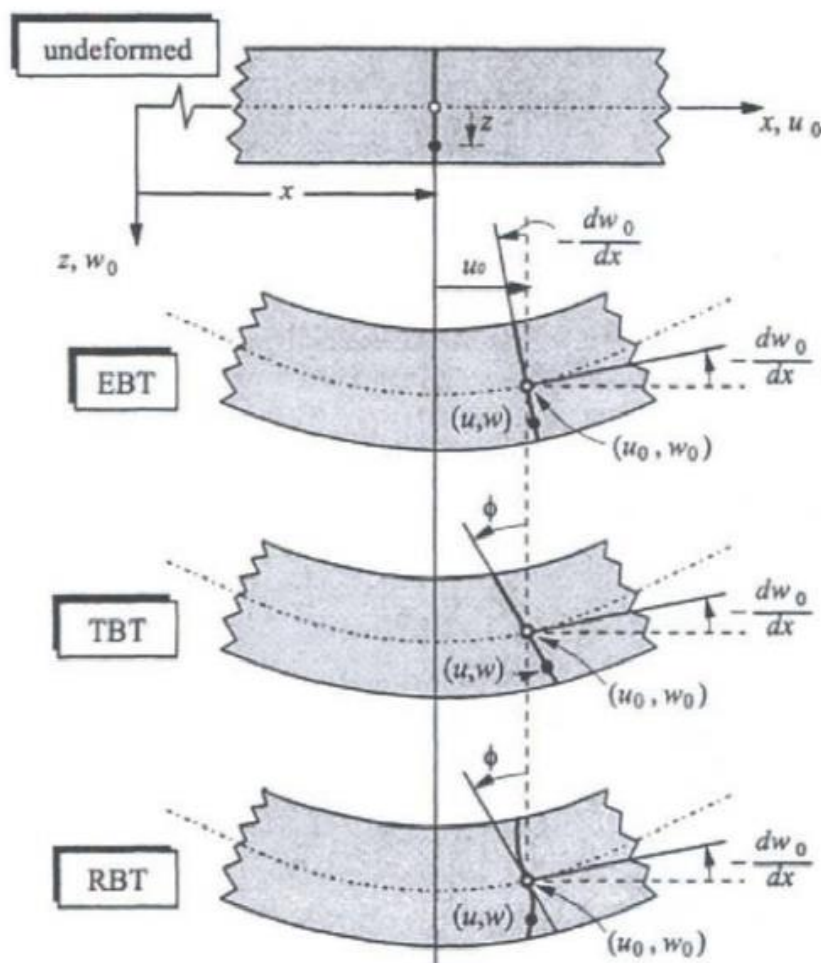
$$[\epsilon]=\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6.00 & 0 & 0 \\ 0 & 6.00 & 0 \\ 0 & 0 & 5.47 \end{bmatrix} \times 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{Vm}} . \quad (7.153)$$

**Πίνακας 7.3:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  στο  $z, x=L/2$ , της στροφής  $\varphi$  στο  $x=0, z=0$  και του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  στο  $x=L/2, z=0$  με γραμμικά μοντέλα πιεζοηλεκτρικών δοκών για  $S = 2, 5, 10, 30, 50$ .

$S$	Μοντέλα	Εγκάρσια μετατόπιση $w(m)$	Στροφή $\varphi(^{\circ})$	Ηλεκτρικό δυναμικό $\tilde{\varphi}(V)$
2	Model 1 (EBT)	$-0.8221632 \times 10^{-10}$	$0.0439002 \times 10^{-8}$	-0.023716309
	Model 2 (FSDT)	$-1.2140448 \times 10^{-10}$	$1.6292804 \times 10^{-8}$	-0.037021087
	Model 3 (HSDT)	$-1.2801112 \times 10^{-10}$	$2.0286439 \times 10^{-8}$	-0.039315504
	Model 4 (HSDT)	$-1.2803252 \times 10^{-10}$	$5.1231438 \times 10^{-8}$	-0.039319084
	Model 5 (RBT)	$-1.2803614 \times 10^{-10}$	$2.2822244 \times 10^{-8}$	-0.039315504
	Model 6 (SSDT)	$-1.2794482 \times 10^{-10}$	$2.3494154 \times 10^{-8}$	-0.039296693
	Model 7 (HPSDT)	$-1.2800025 \times 10^{-10}$	$2.1782638 \times 10^{-8}$	-0.040582753
	Model 8 (ESDT)	$-1.2752185 \times 10^{-10}$	$2.4067348 \times 10^{-8}$	-0.039176182
	Exact Solution [146]	$-1.2955144 \times 10^{-10}$	–	–
5	Model 1 (EBT)	$-1.2674147 \times 10^{-9}$	$0.6762411 \times 10^{-8}$	-0.064899931
	Model 2 (FSDT)	$-1.3702909 \times 10^{-9}$	$4.4344339 \times 10^{-8}$	-0.070656729
	Model 3 (HSDT)	$-1.3902144 \times 10^{-9}$	$3.5580401 \times 10^{-8}$	-0.071643269
	Model 4 (HSDT)	$-1.3906821 \times 10^{-9}$	$3.1694925 \times 10^{-8}$	-0.071660602
	Model 5 (RBT)	$-1.3903140 \times 10^{-9}$	$6.4044722 \times 10^{-8}$	-0.071643269
	Model 6 (SSDT)	$-1.3905663 \times 10^{-9}$	$6.6076112 \times 10^{-8}$	-0.071656142
	Model 7 (HPSDT)	$-1.3902219 \times 10^{-9}$	$5.0052762 \times 10^{-8}$	-0.072021637
	Model 8 (ESDT)	$-1.3896790 \times 10^{-9}$	$6.7971740 \times 10^{-8}$	-0.071614474
	Exact Solution [146]	$-1.3854365 \times 10^{-9}$	–	–
10	Model 1 (EBT)	$-1.0117479 \times 10^{-8}$	$0.5396647 \times 10^{-7}$	-0.131452829
	Model 2 (FSDT)	$-1.0324804 \times 10^{-8}$	$0.9110325 \times 10^{-7}$	-0.134327039
	Model 3 (HSDT)	$-1.0365670 \times 10^{-8}$	$1.2937340 \times 10^{-7}$	-0.134659590
	Model 4 (HSDT)	$-1.0369451 \times 10^{-8}$	$1.0574177 \times 10^{-7}$	-0.134695396
	Model 5 (RBT)	$-1.0366002 \times 10^{-8}$	$1.3218032 \times 10^{-7}$	-0.134659590
	Model 6 (SSDT)	$-1.0369253 \times 10^{-8}$	$1.3643415 \times 10^{-7}$	-0.134693113
	Model 7 (HPSDT)	$-1.0365697 \times 10^{-8}$	$1.0331467 \times 10^{-7}$	-0.134839081
	Model 8 (ESDT)	$-1.0367532 \times 10^{-8}$	$1.4046581 \times 10^{-7}$	-0.134672500
	Exact Solution [146]	$-1.0353429 \times 10^{-8}$	–	–
30	Model 1 (EBT)	$-2.7299435 \times 10^{-7}$	$14.559661 \times 10^{-7}$	-0.395836214
	Model 2 (FSDT)	$-2.7361770 \times 10^{-7}$	$2.7792550 \times 10^{-7}$	-0.396768762
	Model 3 (HSDT)	$-2.7373816 \times 10^{-7}$	$3.4080394 \times 10^{-7}$	-0.396536889
	Model 4 (HSDT)	$-2.7384038 \times 10^{-7}$	$3.2157700 \times 10^{-7}$	-0.396645338
	Model 5 (RBT)	$-2.7374235 \times 10^{-7}$	$4.0197111 \times 10^{-7}$	-0.396536889
	Model 6 (SSDT)	$-2.7383981 \times 10^{-7}$	$4.1498035 \times 10^{-7}$	-0.396644474
	Model 7 (HPSDT)	$-2.7373825 \times 10^{-7}$	$3.1420304 \times 10^{-7}$	-0.396597288
	Model 8 (ESDT)	$-2.7383470 \times 10^{-7}$	$4.2737985 \times 10^{-7}$	-0.396637526
	Exact Solution [146]	$-2.7370209 \times 10^{-7}$	–	-0.397
50	Model 1 (EBT)	$-1.2637967 \times 10^{-6}$	$67.401549 \times 10^{-7}$	-0.659926817
	Model 2 (FSDT)	$-1.2648357 \times 10^{-6}$	$4.6443980 \times 10^{-7}$	-0.660457662
	Model 3 (HSDT)	$-1.2650264 \times 10^{-6}$	$5.9264332 \times 10^{-7}$	-0.659933435
	Model 4 (HSDT)	$-1.2654997 \times 10^{-6}$	$5.7435713 \times 10^{-7}$	-0.660114338

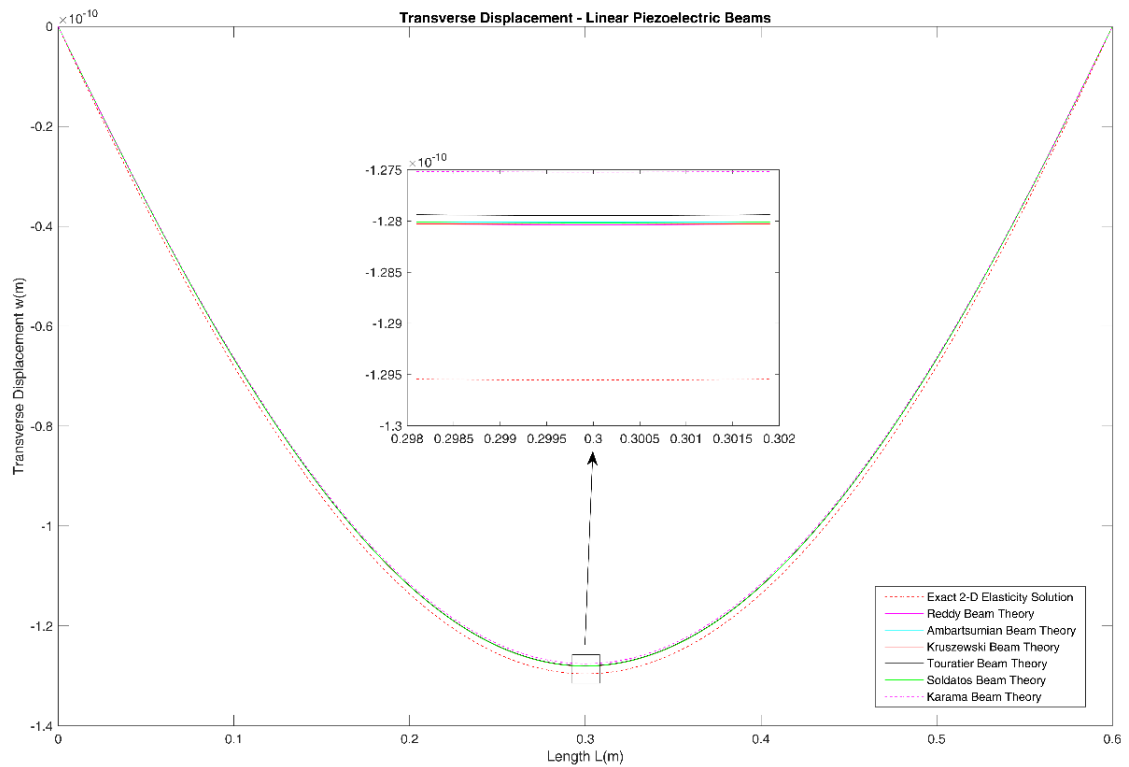
Model 5 (RBT)	$-1.2650437 \times 10^{-6}$	$6.7081154 \times 10^{-7}$	-0.659933435
Model 6 (SSDT)	$-1.2654987 \times 10^{-6}$	$7.4154102 \times 10^{-7}$	-0.660113809
Model 7 (HPSDT)	$-1.2650264 \times 10^{-6}$	$5.6114723 \times 10^{-7}$	-0.659933427
Model 8 (ESDT)	$-1.2654902 \times 10^{-6}$	$7.6378078 \times 10^{-7}$	-0.660109629
Exact Solution [146]	$-1.2649762 \times 10^{-6}$	-	-

Να σημειωθεί πως στα αποτελέσματα του πίνακα 7.3 για το Μοντέλο 1 (EBT) ως «στροφή» (rotation) θεωρείται η κλίση (slope) της εγκάρσιας μετατόπισης, δηλαδή  $\theta = -\partial w/\partial x$ . Επίσης,  $u_0$  είναι η οριζόντια μετατόπιση λόγω της εντός του επιπέδου διάτασης (stretching), η οποία δεν εξετάζεται στην παρούσα μελέτη.

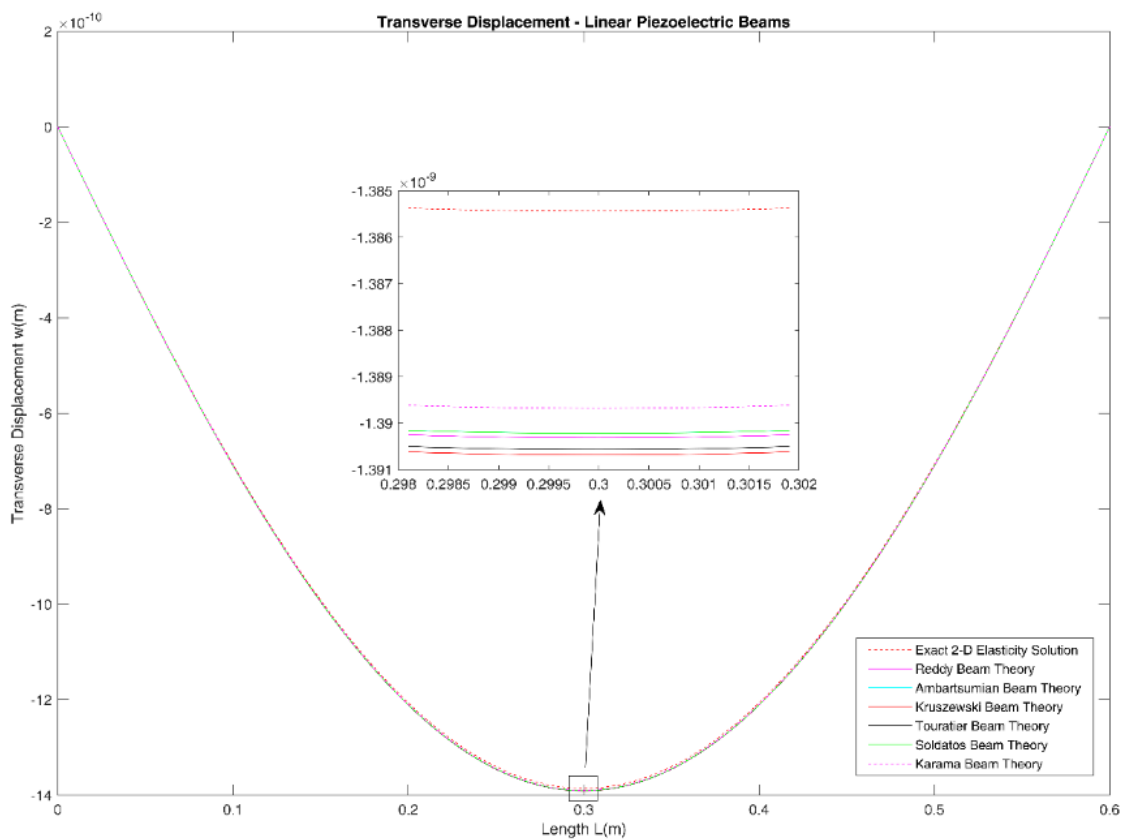


**Σχήμα 7.3:** Παραμόρφωση μιας εγκάρσιας κάθετης γραμμής με διάφορες τεχνικές θεωρίες δοκών [134].

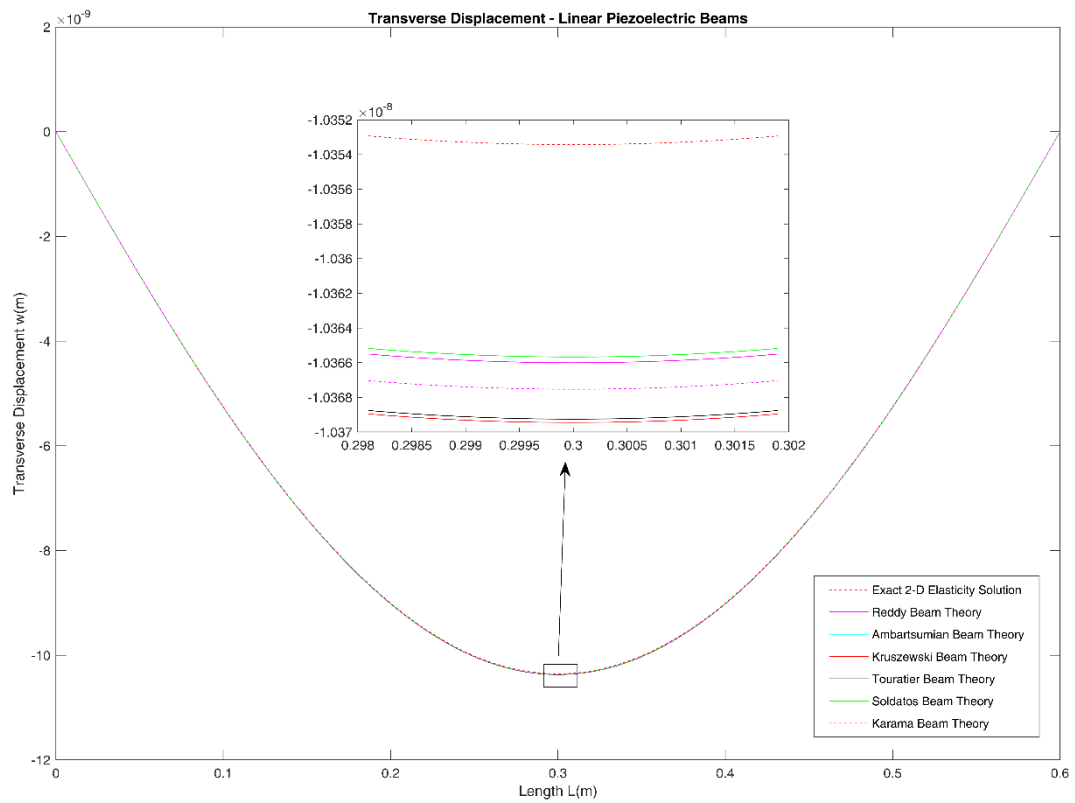
Στη συνέχεια, γίνεται σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  και του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  με τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης κατά το μήκος της δοκού για διάφορες αναλογίες διαστάσεων  $S = 2, 5, 10, 30, 50$ . Τα διαγράμματα της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  παρουσιάζονται στα σχήματα 7.4-7.8 και τα διαγράμματα του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  παρουσιάζονται στα σχήματα 7.9-7.13.



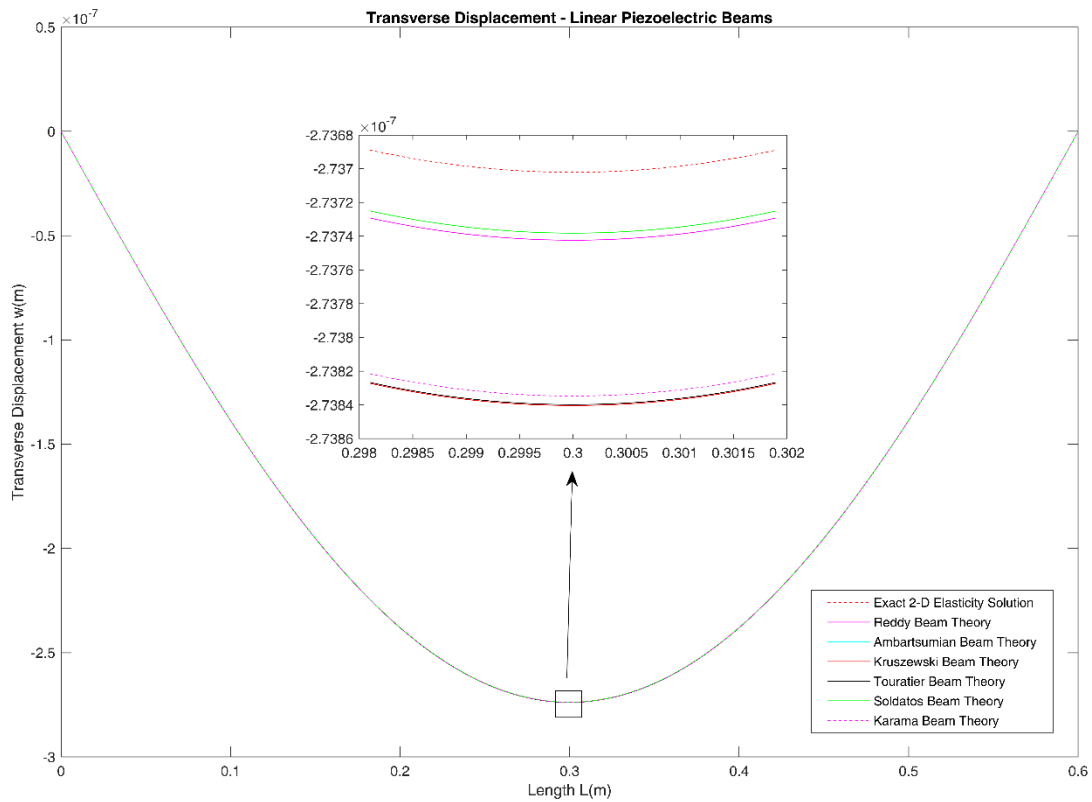
**Σχήμα 7.4:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά μήκος της δοκού στο  $(x, z = 0)$  με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S = 2$ .



**Σχήμα 7.5:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά μήκος της δοκού στο  $(x, z = 0)$  με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S = 5$ .

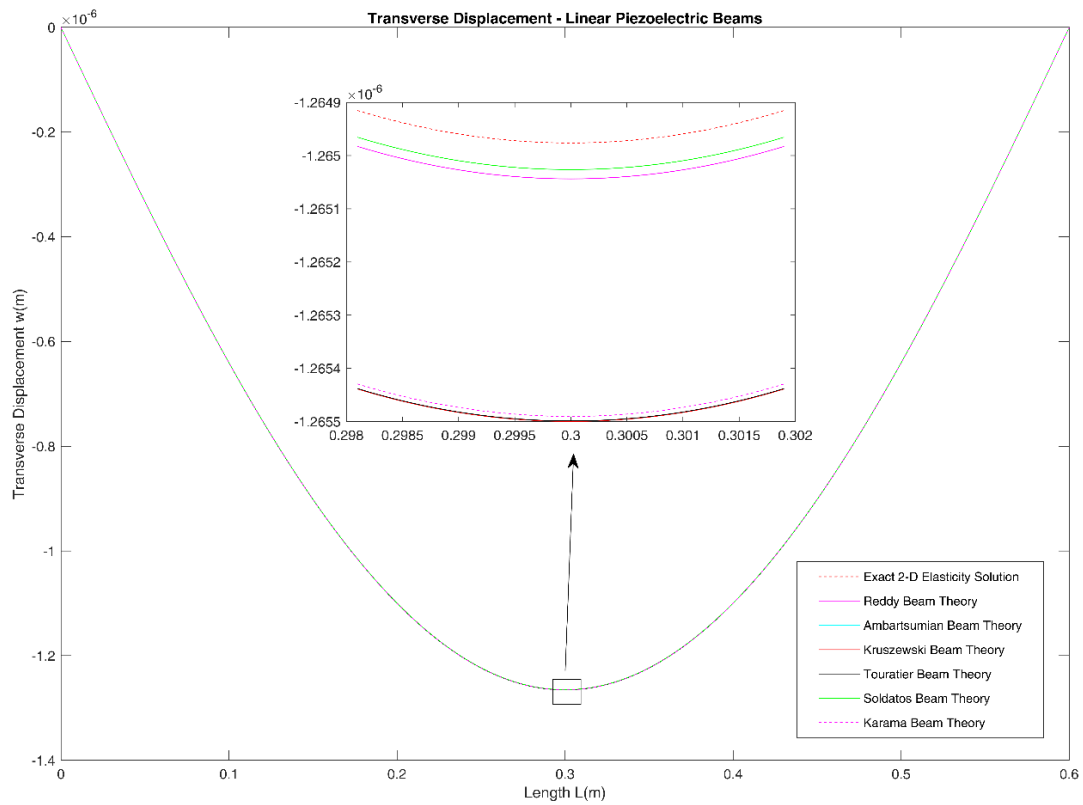


**Σχήμα 7.6:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά μήκος της δοκού στο  $(x, z = 0)$  με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S = 10$ .

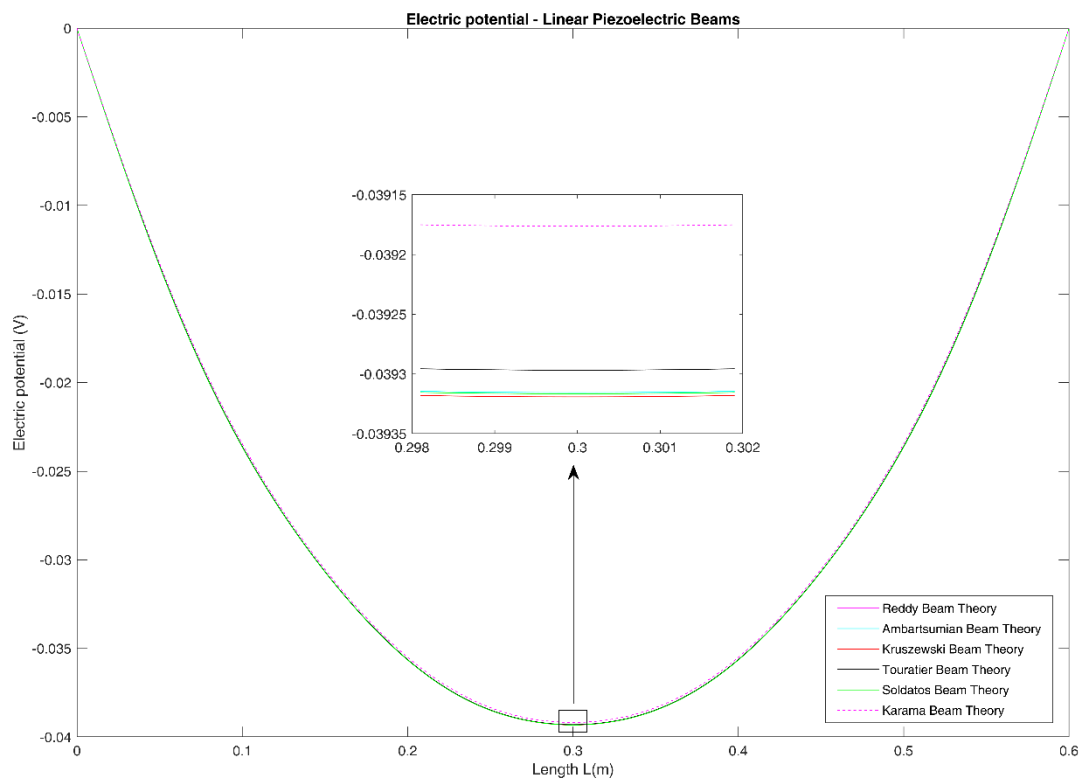


**Σχήμα 7.7:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά μήκος της δοκού στο  $(x, z = 0)$  με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S = 30$ .

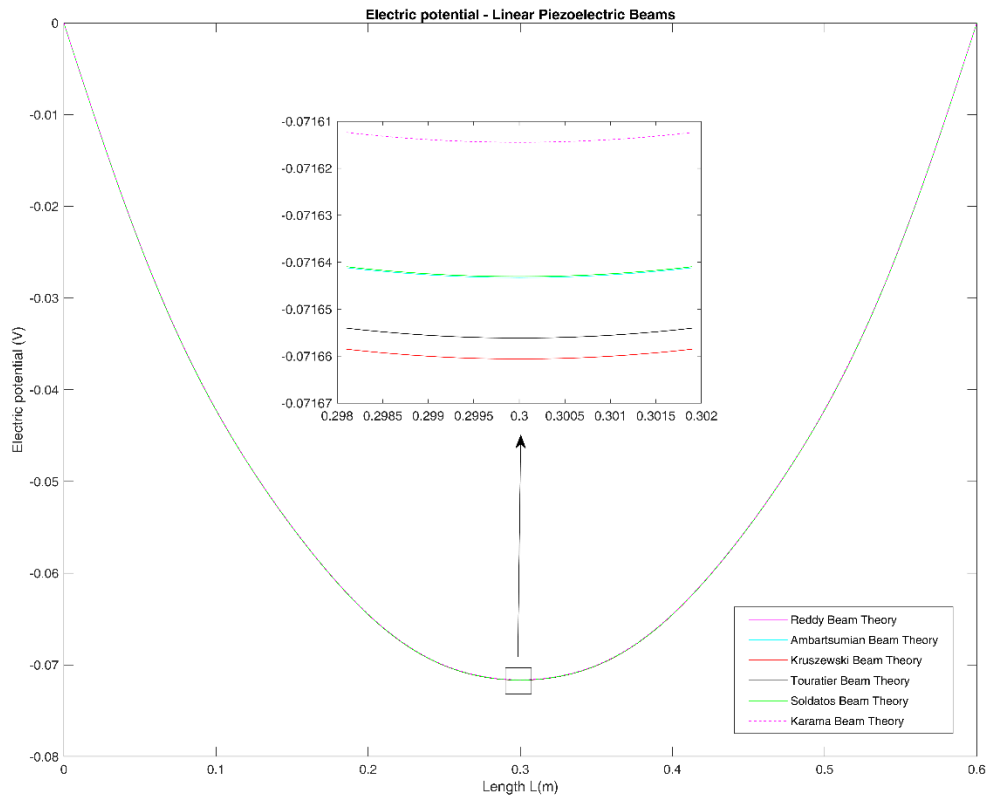




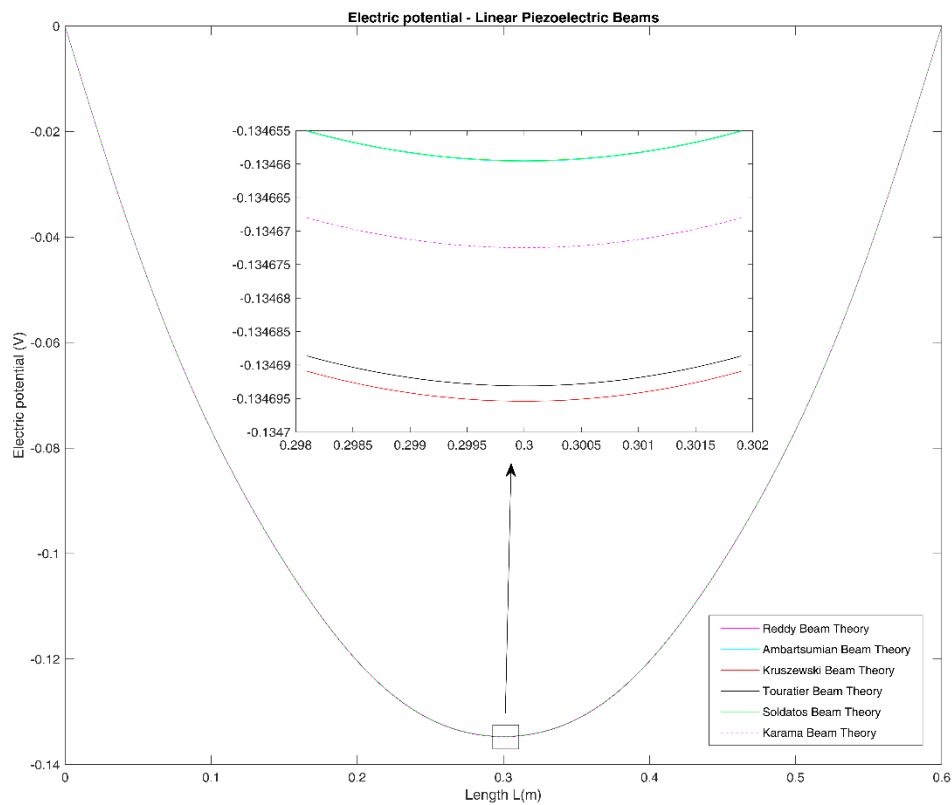
**Σχήμα 7.8:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά μήκος της δοκού στο  $(x, z = 0)$  με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S = 50$ .



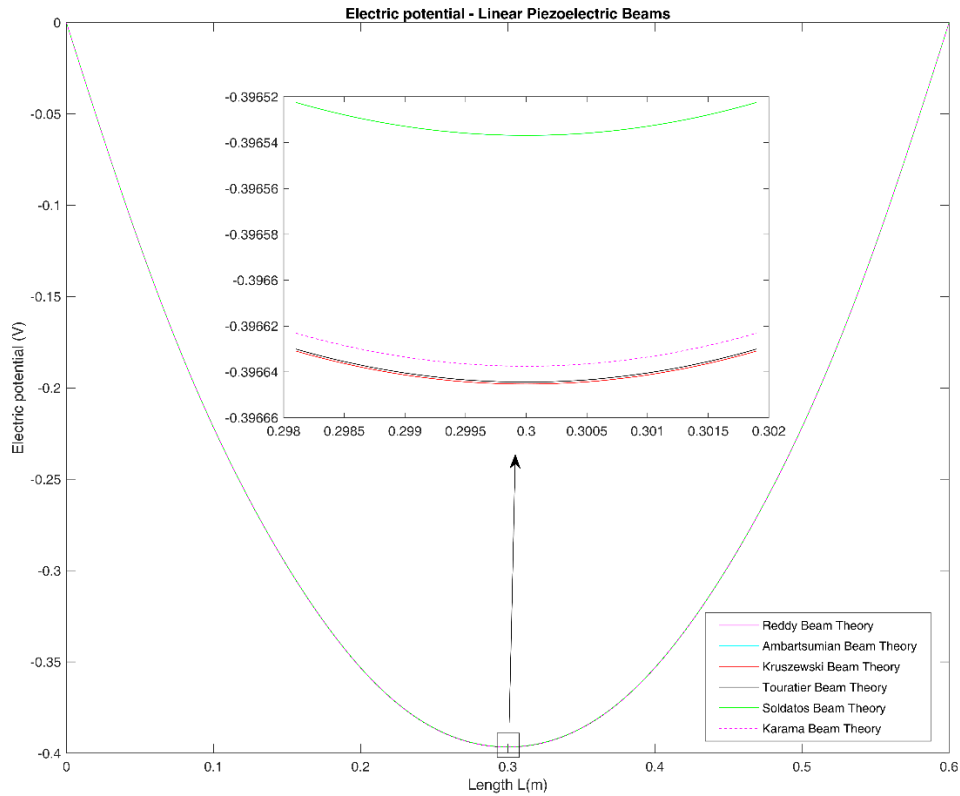
**Σχήμα 7.9:** Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  κατά μήκος της δοκού στο  $(x, z = 0)$ , με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S = 2$ .



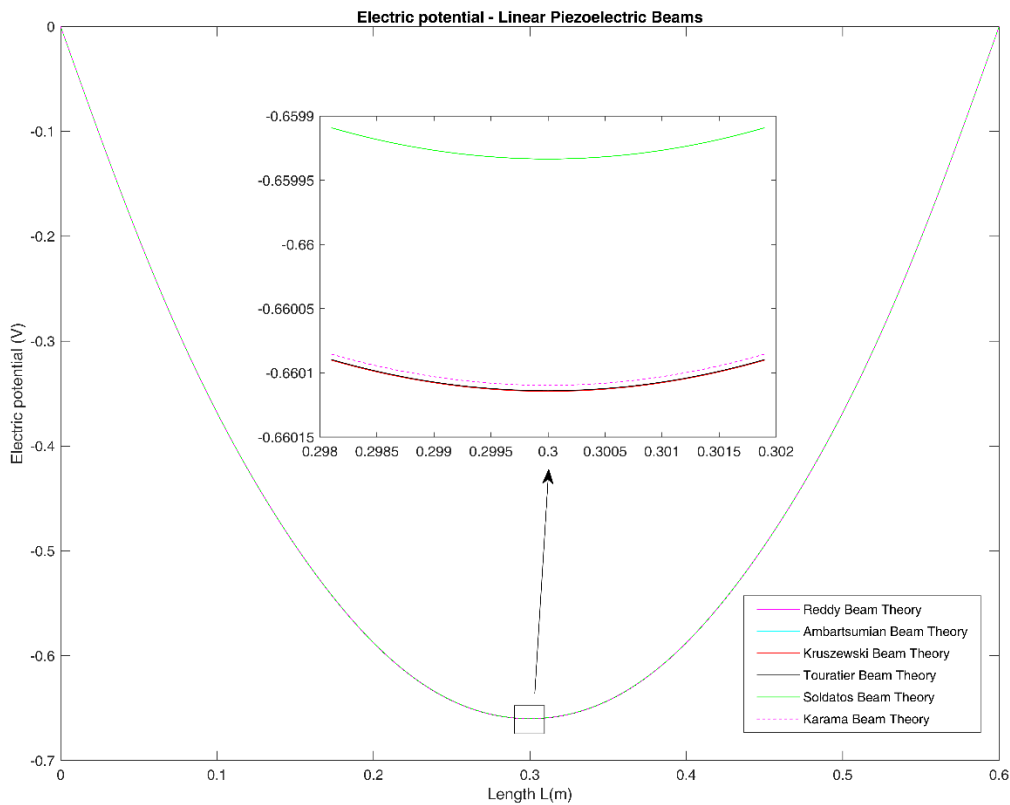
**Σχήμα 7.10:** Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  κατά μήκος της δοκού στο  $(x, z = 0)$ , με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S = 5$ .



**Σχήμα 7.11:** Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  κατά μήκος της δοκού στο  $(x, z = 0)$ , με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S = 10$ .



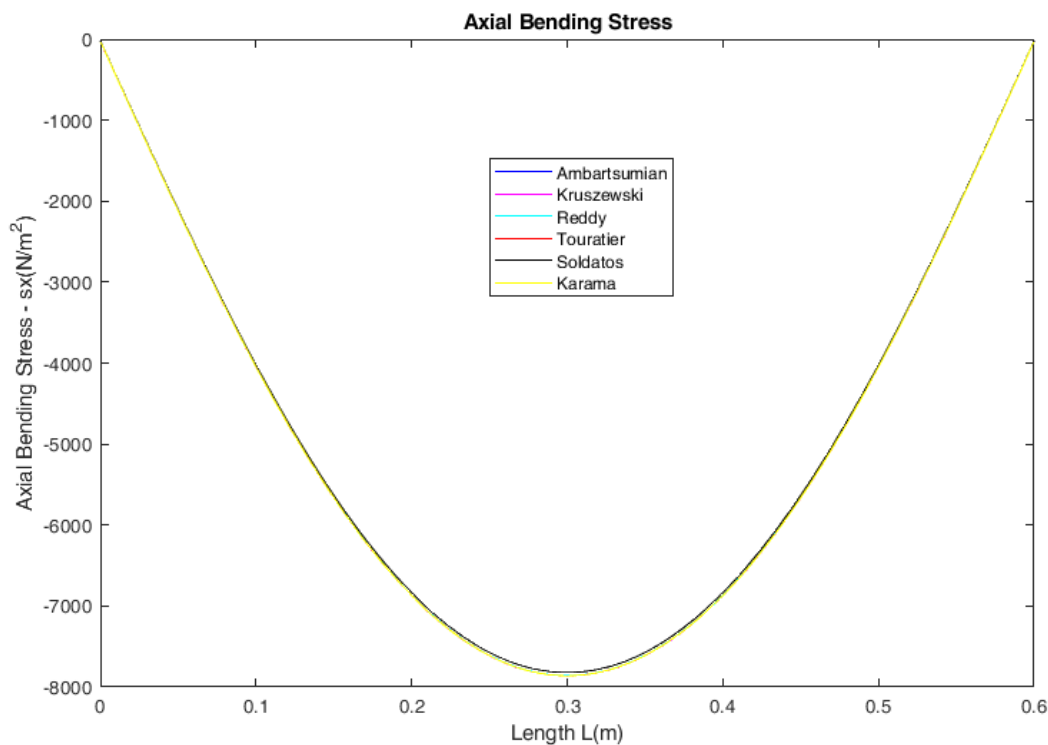
Σχήμα 7.12: Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  κατά μήκος της δοκού στο  $(x, z = 0)$ , με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S = 30$ .



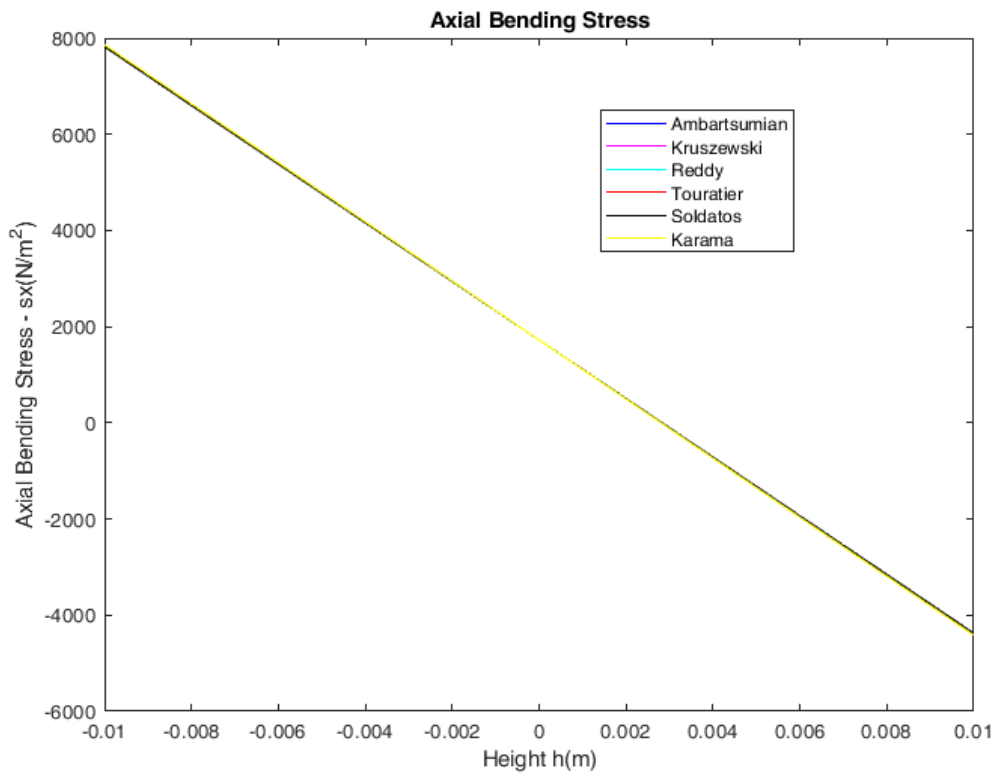
Σχήμα 7.13: Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  κατά μήκος της δοκού στο  $(x, z = 0)$ , με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S = 50$ .

Το συμπέρασμα που προκύπτει από τα παραπάνω αριθμητικά αποτελέσματα και τα διαγράμματα είναι οι τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης υποεκτιμούν την μέγιστη εγκάρσια μετατόπιση  $w$  για δοκούς με πολύ μεγάλο πάχος ( $S=2$ ) (σχήμα 7.4) σε σχέση με την 2-D ακριβή λύση της θεωρίας ελαστικότητας, ενώ υπερεκτιμούν τη μετατόπιση  $w$  για δοκούς με μέτριο πάχος ( $S=5, S=10$ ) (σχήματα 7.5, 7.6) και για πολύ λεπτές δοκούς ( $S=30, S=50$ ) (σχήματα 7.7, 7.8) όλες οι τεχνικές θεωρίες διάτμησης πλησιάζουν την 2-D λύση της θεωρίας ελαστικότητας. Το μέγιστο ηλεκτρικό δυναμικό  $\bar{\phi}$  που προβλέπεται από όλες τις τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης είναι σε πολύ καλή συμφωνία με την 2-D ακριβή λύση της θεωρίας ελαστικότητας τόσο για δοκούς με μεγάλο πάχος ( $S=2, S=5$ ) (σχήματα 7.9, 7.10), δοκούς με μέτριο πάχος ( $S=10$ ) (σχήμα 7.11) όσο και για λεπτές δοκούς ( $S = 30, S=50$ ) (σχήματα 7.12, 7.13).

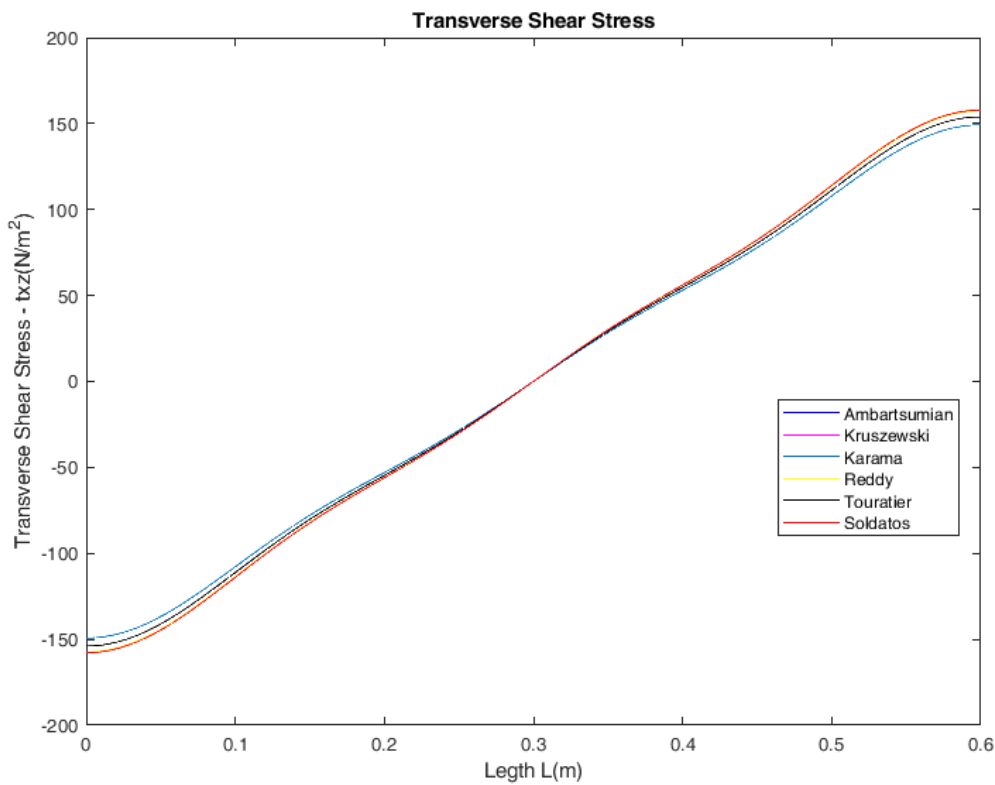
Η σύγκριση της αξονικής τάσης  $\sigma_x$  κατά το μήκος της δοκού στο σημείο  $(x, z = h/2)$  και κατά μήκος του πάχους της δοκού στο σημείο  $(x = L/2, z)$ , για πιεζοηλεκτρικές δοκούς με αναλογία διαστάσεων  $S=30$  και για όλες τις τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης παρουσιάζονται στα σχήματα 7.14 και 7.15, αντίστοιχα. Επίσης, η σύγκριση της εγκάρσιας διατμητικής τάσης  $\tau_{zx}$  κατά το μήκος της δοκού στο σημείο  $(x, z = h/4)$  και κατά μήκος του πάχους της δοκού στο σημείο  $(x = L/4, z)$ , για όλες τις τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης με αναλογία διαστάσεων  $S = 30$  παρουσιάζονται στα σχήματα 7.16 και 7.17, αντίστοιχα.



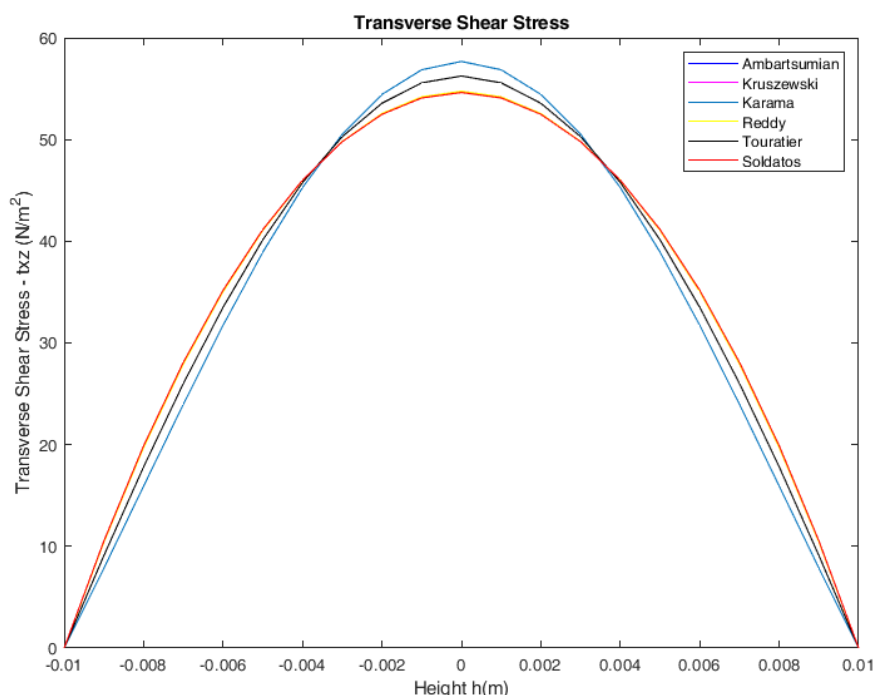
**Σχήμα 7.14:** Σύγκριση της αξονικής τάσης  $\sigma_x$  κατά το μήκος της δοκού στο  $(x, z = h/2)$ , με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S = 30$ .



**Σχήμα 7.15:** Σύγκριση της αξονικής τάσης  $\sigma_x$  κατά το πάχος της δοκού στο  $(x = L/2, z)$ , με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S = 30$ .



**Σχήμα 7.16:** Σύγκριση της εγκάρσιας διατμητικής τάσης  $\tau_{xz}$  κατά το μήκος της δοκού στο  $(x, z = h/4)$ , με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S = 30$ .



**Σχήμα 7.17:** Σύγκριση της εγκάρσιας διατμητικής τάσης  $\tau_{xz}$  κατά το πάχος της δοκού στο  $(x = L/4, z)$ , με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για αναλογία διαστάσεων  $S = 30$ .

**Πίνακας 7.4:** Σύγκριση της μέγιστης αξονικής τάσης  $\sigma_x$  στο  $(x = L/2, z = -h/2)$  και της μέγιστης εγκάρσιας διατμητικής τάσης  $\tau_{xz}$  στο  $(x = L/4, z = 0)$  με γραμμικά μοντέλα και αναλογία διαστάσεων  $S = 30$ .

Τεχνική Θεωρία	$\sigma_x \left( \frac{N}{m^2} \right)$	$\tau_{xz} \left( \frac{N}{m^2} \right)$
Model 3 (HSDT)	-7858.228	54.7450
Model 4 (HSDT)	-7860.983	54.7477
Model 5 (RBT)	-7858.228	54.7450
Model 6 (SSDT)	-7860.700	56.2460
Model 7 (HPSDT)	-7858.250	54.6084
Model 8 (ESDT)	-7860.203	57.6778
Exact Solution [146]	-7860	56

Από τα αριθμητικά αποτελέσματα του πίνακα 7.4, προκύπτει πως η αξονική καμπτική τάση  $\sigma_x$  που προβλέπεται από όλες τις τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης είναι σε πολύ καλή συμφωνία με την ακριβή λύση της 2-D θεωρίας ελαστικότητας για λεπτές δοκούς με αναλογία διαστάσεων  $S = 30$ . Η μέγιστη εγκάρσια διατμητική τάση  $\tau_{xz}$  που προβλέπεται από την τεχνική θεωρία διάτμησης ανώτερης τάξης που προτείνει το Μοντέλο 4 είναι σε πολύ καλή συμφωνία με την ακριβή λύση της θεωρίας ελαστικότητας σε δισδιάστατες δομές. Τα Μοντέλα 3, 5 και 7 υποεκτιμούν τη λύση σε σχέση με την ακριβή ενώ το Μοντέλο 8 υπερεκτιμά την τιμή της λύσης της εγκάρσιας διατμητικής τάσης για δοκούς με αναλογία διαστάσεων  $S=30$ .

## 7.6 Αποτελέσματα δυναμικού προβλήματος πιεζοηλεκτρικών δοκών

Για την ανάλυση προβλημάτων των ελεύθερων ταλαντώσεων μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού, υπολογίζονται οι αδιάστατες λύσεις της συχνότητας λόγω κάμψης  $\bar{\omega}_w$  (καμπτική συχνότητα) και της συχνότητας περιστροφής λόγω διάτμησης  $\bar{\omega}_\phi$  για διάφορους τρόπους ταλάντωσης και για διαφορετικές αναλογίες διαστάσεων. Τα αποτελέσματα του δυναμικού προβλήματος παρουσιάζονται στους πίνακες 7.5, 7.6 και 7.7.

**Πίνακας 7.5:** Σύγκριση των αδιάστατων καμπτικών συχνοτήτων και των συχνοτήτων περιστροφής λόγω διάτμησης ( $m=1$ ) μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού.

Τεχνική Θεωρία	$S=2$		$S=5$		$S=10$		$S=30$	
	$\bar{\omega}_w$	$\bar{\omega}_\phi$	$\bar{\omega}_w$	$\bar{\omega}_\phi$	$\bar{\omega}_w$	$\bar{\omega}_\phi$	$\bar{\omega}_w$	$\bar{\omega}_\phi$
Model 3 (HSDT)	2.3315	9.8072	2.8681	47.5546	3.0006	180.3669	3.0454	1595.544
Model 4 (HSDT)	2.3315	9.8072	2.8681	47.5546	3.0006	180.3669	3.0454	1595.544
Model 5 (RBT)	2.3315	9.8072	2.8681	47.5546	3.0006	180.3669	3.0454	1595.544
Model 6 (SSDT)	2.3325	9.8022	2.8683	47.5255	3.0007	180.2522	3.0454	1594.517
Model 7 (HPSDT)	2.3314	9.8080	2.8681	47.5599	3.0007	180.3882	3.0454	1595.736
Model 8 (ESDT)	2.3358	9.8048	2.8692	47.5546	3.0010	180.3821	3.0454	1595.728

**Πίνακας 7.6:** Σύγκριση των αδιάστατων καμπτικών συχνοτήτων  $\bar{\omega}_w$  μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού για διαφορετικούς τρόπους ταλάντωσης.

Aspect Ratio $S$	Τεχνική Θεωρία	Τρόποι ταλάντωσης				
		$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
2	Model 3 (HSDT)	2.3315	6.7289	11.7170	16.9055	22.1801
	Model 4 (HSDT)	2.3315	6.7289	11.7170	16.9055	22.1801
	Model 5 (RBT)	2.3315	6.7289	11.7170	16.9055	22.1801
	Model 6 (SSDT)	2.3325	6.7382	11.7464	16.9693	22.2945
	Model 7 (HPSDT)	2.3314	6.7280	11.7141	16.8994	22.1693
	Model 8 (ESDT)	2.3358	6.7614	11.8122	17.1035	22.5246
5	Model 3 (HSDT)	2.8681	10.0322	19.5357	30.3754	42.0556
	Model 4 (HSDT)	2.8681	10.0322	19.5357	30.3754	42.0556
	Model 5 (RBT)	2.8681	10.0322	19.5357	30.3754	42.0556
	Model 6 (SSDT)	2.8683	10.0350	19.5474	30.4050	42.1138
	Model 7 (HPSDT)	2.8681	10.0319	19.5346	30.3726	42.0500
	Model 8 (ESDT)	2.8692	10.0451	19.5826	30.4846	42.2589
10	Model 3 (HSDT)	3.0006	11.4726	24.2367	40.1288	58.2890
	Model 4 (HSDT)	3.0006	11.4726	24.2367	40.1288	58.2890
	Model 5 (RBT)	3.0006	11.4726	24.2367	40.1288	58.2890
	Model 6 (SSDT)	3.0007	11.4735	24.2407	40.1403	58.3144
	Model 7 (HPSDT)	3.0006	11.4726	24.2364	40.1279	58.2869
	Model 8 (ESDT)	3.0010	11.4771	24.2561	40.1806	58.3957
30	Model 3 (HSDT)	3.0454	12.1132	27.0062	47.4207	72.9772

Model 4 (HSDT)	3.0454	12.1132	27.0062	47.4207	72.9772
Model 5 (RBT)	3.0454	12.1132	27.0062	47.4207	72.9772
Model 6 (SSDT)	3.0454	12.1133	27.0067	47.4222	72.9810
Model 7 (HPSDT)	3.0454	12.1132	27.0062	47.4206	72.9771
Model 8 (ESDT)	3.0454	12.1138	27.0090	47.4293	72.9974

**Πίνακας 7.7:** Σύγκριση των αδιάστατων συχνοτήτων περιστροφής λόγω διάτμησης  $\bar{\omega}_\phi$  μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού για διαφορετικούς τρόπους ταλάντωσης.

s	Τεχνική Θεωρία	Τρόποι ταλάντωσης				
		m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
2	Model 3 (HSDT)	9.8072	14.9405	20.6814	26.6380	32.6955
	Model 4 (HSDT)	9.8072	14.9405	20.6814	26.6380	32.6955
	Model 5 (RBT)	9.8072	14.9405	20.6814	26.6380	32.6955
	Model 6 (SSDT)	9.8022	14.9352	20.6761	26.6328	32.6905
	Model 7 (HPSDT)	9.8080	14.9411	20.6819	26.6385	32.6959
	Model 8 (ESDT)	9.8048	14.9352	20.6746	26.6305	32.6877
5	Model 3 (HSDT)	47.5546	55.9525	67.1314	79.8167	93.3781
	Model 4 (HSDT)	47.5546	55.9525	67.1314	79.8167	93.3781
	Model 5 (RBT)	47.5546	55.9525	67.1314	79.8167	93.3781
	Model 6 (SSDT)	47.5255	55.9222	67.1000	79.7845	93.3454
	Model 7 (HPSDT)	47.5599	55.9575	67.1361	79.8210	93.3820
	Model 8 (ESDT)	47.5546	55.9423	67.1118	79.7896	93.3452
10	Model 3 (HSDT)	180.3669	190.2187	205.1441	223.8103	245.1810
	Model 4 (HSDT)	180.3669	190.2187	205.1441	223.8103	245.1810
	Model 5 (RBT)	180.3669	190.2187	205.1441	223.8103	245.1810
	Model 6 (SSDT)	180.2522	190.1022	205.0251	223.6889	245.0572
	Model 7 (HPSDT)	180.3882	190.2396	205.1645	223.8301	245.2002
	Model 8 (ESDT)	180.3821	190.2186	205.1239	223.7694	245.1204
30	Model 3 (HSDT)	1595.5449	1606.0432	1623.3029	1646.9948	1676.7049
	Model 4 (HSDT)	1595.5449	1606.0432	1623.3029	1646.9948	1676.7049
	Model 5 (RBT)	1595.5449	1606.0432	1623.3029	1646.9948	1676.7049
	Model 6 (SSDT)	1594.5170	1605.0133	1622.2698	1645.9573	1675.6621
	Model 7 (HPSDT)	1595.7368	1606.2347	1623.4939	1647.1849	1676.8941
	Model 8 (ESDT)	1595.7288	1606.2091	1623.4397	1647.0929	1676.7564

Από τα αποτελέσματα των πινάκων 7.5, 7.6 και 7.7 για το πρόβλημα των ελεύθερων ταλαντώσεων σε πιεζοηλεκτρικές δοκούς προκύπτει πως οι αδιάστατες τιμές των καμπτικών συχνοτήτων  $\bar{\omega}_w$  και οι αδιάστατες τιμές των συχνοτήτων περιστροφής λόγω διάτμησης  $\bar{\omega}_\phi$  είναι σε εξαιρετική συμφωνία μεταξύ τους για όλες τις τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης σε πιεζοηλεκτρικές δοκούς.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

### «Θεωρίες Πιεζοηλεκτρικών Δοκών με γεωμετρική μη γραμμικότητα»

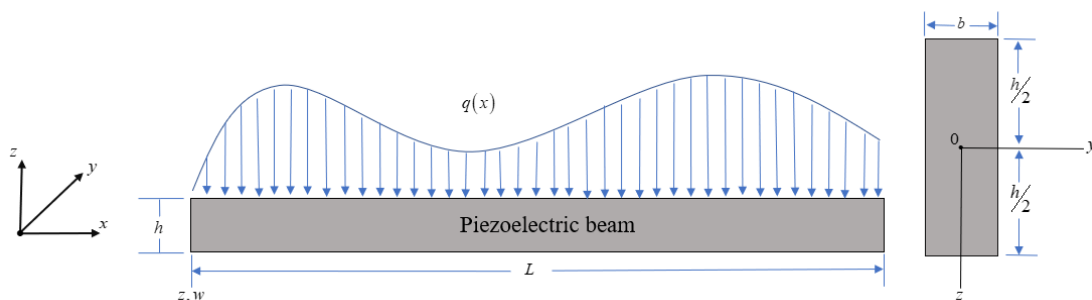
#### 8.1 Θεωρητική διατύπωση πιεζοηλεκτρικών δοκών με γεωμετρική μη γραμμικότητα

Το κεφάλαιο, αυτό, παρουσιάζει τη θεωρητική διατύπωση προβλημάτων πιεζοηλεκτρικών δοκών με τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρική μη γραμμικότητα (μεγάλες παραμορφώσεις). Με αφετηρία το πεδίο μετατοπίσεων και το ηλεκτρικό δυναμικό μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού, με χρήση της μεταβολικής αρχής Hamilton, διατυπώνονται οι εξισώσεις κίνησης και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες για μια πιεζοηλεκτρική δοκό με μη γραμμική ανάλυση, λαμβάνοντας υπόψη το όρο της γεωμετρικής μη γραμμικότητας (όρος Von Karman). Στη συνέχεια, γίνεται επίλυση με αναλυτικό τρόπο προβλημάτων κάμψης και προβλημάτων ταλαντώσεων πιεζοηλεκτρικών δοκών.

Το ηλεκτρικό πεδίο και το ηλεκτρικό δυναμικό θεωρούνται πολωμένα στην κατεύθυνση του πάχους. Από τη θεωρητική διατύπωση του προβλήματος, η πιεζοηλεκτρική δοκός (σχήμα 8.1) μπορεί να έχει οποιοσδήποτε συνοριακές συνθήκες, υποβάλλεται σε εγκάρσιες συνθήκες φόρτισης και καταλαμβάνει το χωρίο:

$$0 \leq x \leq L, \quad -b/2 \leq y \leq b/2, \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \quad (8.1)$$

όπου  $x$ ,  $y$  και  $z$  είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες,  $L$  το μήκος,  $h$  το πάχος και  $b$  το πλάτος της πιεζοηλεκτρικής δοκού. Η πιεζοηλεκτρική δοκός υποβάλλεται σε εγκάρσιο ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο  $q(x)$  που ασκείται σε όλο το μήκος της.



**Σχήμα 8.1:** (α) Κάμψη πιεζοηλεκτρικής δοκού στο επίπεδο  $x-z$ , (β) διατομή της πιεζοηλεκτρικής δοκού στο επίπεδο  $y-z$ .

Αρχικά, για την παραγωγή των εξισώσεων κίνησης και των συνοριακών συνθηκών, διατυπώνονται το πεδίο μετατοπίσεων και το ηλεκτρικό δυναμικό ως:

$$u_1 = u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f(z) \varphi(x, t), \quad (8.2)$$

$$u_2 = v(x, y, z, t) = 0, \quad (8.3)$$

$$u_3 = w(x, y, z, t) = w(x, t), \quad (8.4)$$

$$\tilde{\varphi}(x, y, z, t) = \tilde{\varphi}(x, z, t) = g(z) \bar{\varphi}(x, t). \quad (8.5)$$

όπου  $u$  και  $w$  είναι η αξονική και η εγκάρσια μετατόπιση της μέσης γραμμής της δοκού στις κατευθύνσεις  $x$  και  $z$  αντίστοιχα,  $\varphi$  είναι η στροφή της διατομής της δοκού στον άξονα  $x$ ,  $\tilde{\varphi}$  το ηλεκτρικό δυναμικό και  $t$  ο χρόνος.

Η συνάρτηση  $g(z)$  περιγράφει την κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού κατά την κατεύθυνση του πάχους μέσα στην πιεζοηλεκτρική δοκό. Η μορφή της συνάρτησης  $g(z)$  εξαρτάται από τον τύπο των συνθηκών του κυκλώματος. Οι μορφές της συνάρτησης  $g(z)$  παρατίθενται στον πίνακα 7.1. Στην παρούσα μελέτη, η κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού να είναι της μορφής:  $g(z) = 1 - (2z/h)^2$ .

Η ορθή τροπή  $\varepsilon_x$  και η εγκάρσια διατμητική τροπή  $\gamma_{xz}$  για μια πιεζοηλεκτρική δοκό με όρους γεωμετρικής μη γραμμικότητας είναι:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2. \quad (8.6)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = f'(z) \varphi(x, t). \quad (8.7)$$

Η αξονική τάση (normal bending stress)  $\sigma_x$ , η εγκάρσια διατμητική τάση  $\tau_{xz}$  και οι συνιστώσες της ηλεκτρικής μετατόπισης  $D_x$  και  $D_z$  για την πιεζοηλεκτρική δοκό [124, 142] είναι:

$$\sigma_x = \tilde{c}_{11} \varepsilon_x - \tilde{e}_{31} E_z, \quad (8.8)$$

$$\tau_{xz} = c_{55} \gamma_{xz} - e_{15} E_x, \quad (8.9)$$

$$D_x = e_{15} \gamma_{xz} + \epsilon_{11} E_x, \quad (8.10)$$

$$D_z = \tilde{e}_{31} \varepsilon_x + \tilde{\epsilon}_{33} E_z, \quad (8.11)$$

όπου:  $\tilde{c}_{11}$ ,  $\tilde{e}_{31}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{33}$  είναι οι μειωμένες (reduced) ελαστικές, πιεζοηλεκτρικές και διηλεκτρικές σταθερές και δίδονται από τις σχέσεις 7.12-7.14. Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου για μια πιεζοηλεκτρική δοκό ορίζεται ως:

$$E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad (8.12)$$

το ηλεκτρικό πεδίο κατά τους άξονες  $x$ ,  $y$ ,  $z$  δίδεται από τις σχέσεις:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -g(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}, \quad (8.13)$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad (8.14)$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial g(z)}{\partial z} \bar{\varphi}(x,t) = -g'(z) \bar{\varphi}(x,t). \quad (8.15)$$

Για την παραγωγή των εξισώσεων κίνησης και των αντίστοιχων συνοριακών συνθηκών, η αρχή Hamilton [124, 143] διατυπώνεται ως:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (T - H_e + W_e) dt = 0. \quad (8.16)$$

όπου:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (T) dt = \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left[ \frac{1}{2} \int_V \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} dV \right] dt, \quad (8.17)$$

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (-H_e) dt = -\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left( \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [e]^T \{E\} - \frac{1}{2} \{E\}^T [\epsilon] \{E\} \right) dV dt, \quad (8.18)$$

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (W_e) dt = \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} q w(x,t) dx dt, \quad (8.19)$$

και  $\delta(\cdot)$  δηλώνεται ο πρώτος μεταβολικός τελεστής,  $T$  η κινητική ενέργεια,  $H_e$  η ηλεκτρική ενθαλπία και  $W_e$  το έργο των εξωτερικών δυνάμεων.  $[C]$  είναι ο πίνακας των ελαστικών σταθερών,  $[e]$  ο πίνακας των πιεζοηλεκτρικών συντελεστών και  $[\epsilon]$  ο πίνακας των διηλεκτρικών σταθερών.  $\{u\}$  είναι το διάνυσμα του πεδίου μετατοπίσεων και  $\{\dot{u}\}$  η πρώτη χρονική παράγωγος του διανύσματος του πεδίου μετατοπίσεων.  $\{\varepsilon\}$  είναι το διάνυσμα του πεδίου των τροπών,  $\{E\}$  το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου και  $q$  οι καταναμημένες δυνάμεις σε όλο το μήκος της δοκού.

Από το πρώτο ολοκλήρωμα της αρχής Hamilton (σχέση 8.17) που αφορά στην κινητική ενέργεια του συστήματος  $T$ , με αντικατάσταση, προκύπτει:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \frac{1}{2} \rho \int_V \left[ \left( -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV dt = 0. \quad (8.20)$$

Με πράξεις, η σχέση 8.20 γίνεται:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \frac{1}{2} \rho \int_V \left[ z^2 \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + f^2(z) \delta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - 2zf(z) \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \delta \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dV dt = 0 . \quad (8.21)$$

Από τις ιδιότητες του μεταβολικού τελεστή και με απλοποιήσεις η σχέση 8.21 γίνεται:

$$\rho \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left[ z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} + f^2(z) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} - zf(z) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} - \right. \\ \left. - zf(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \right] dV dt = 0 . \quad (8.22)$$

Ύστερα από πράξεις, η σχέση 8.22 παίρνει τη μορφή:

$$\rho \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z^2] dz + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f^2(z)] dz - \right. \\ \left. - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz + \right. \\ \left. + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [1] dz \right\} dy dx dt = 0 . \quad (8.23)$$

Έπειτα, ορίζονται οι συντελεστές  $A_0, B_0, C_0, D_0$  ως:

$$A_0 = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z^2] dz , \quad (8.24)$$

$$B_0 = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz , \quad (8.25)$$

$$C_0 = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f^2(z)] dz , \quad (8.26)$$

$$D_0 = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f'(z)]^2 dz . \quad (8.27)$$

Με ολοκλήρωση ως προς το πλάτος  $b$  της δοκού, η σχέση 8.23 γίνεται:

$$\rho \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left\{ A_0 b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} + C_0 b \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} - B_0 b \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} - \right. \\ \left. - B_0 b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} + bh \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \right\} dx dt = 0 . \quad (8.28)$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss, (Παράρτημα Α.2), από το ολοκλήρωμα της κινητικής ενέργειας  $T$ , λαμβάνονται οι αδρανειακοί όροι των εξισώσεων κίνησης και των συνοριακών συνθηκών:

$$(\delta w): A_0 \rho b \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - B_0 \rho b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} - \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (8.29)$$

$$(\delta \varphi): -C_0 \rho b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + B_0 \rho b \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} = 0, \quad (8.30)$$

$$-A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ή } w: \text{καθορισμένο}. \quad (8.31)$$

Στη συνέχεια, γίνεται υπολογισμός του δεύτερου ολοκληρώματος της αρχής Hamilton που αναφέρεται στην ηλεκτρική ενθαλπία  $H_e$  του συστήματος (σχέση 8.18). Με αντικατάσταση των σχέσεων 8.8-8.11 στην εξίσωση 8.18, προκύπτει:

$$-\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left[ \frac{1}{2} (\tilde{c}_{11} \varepsilon_x^2 + c_{55} \gamma_{xz}^2) - (E_z \tilde{e}_{31} \varepsilon_x + E_x e_{15} \gamma_{xz}) - \frac{1}{2} (E_x^2 \varepsilon_{11} + E_z^2 \varepsilon_{33}) \right] dV dt = 0. \quad (8.32)$$

Στη συνέχεια, υπολογίζεται ο κάθε όρος του ολοκληρώματος της ηλεκτρικής ενθαλπίας  $H_e$  ξεχωριστά. Ξεκινώντας από τον πρώτο όρο, έχουμε:

$$-\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left( \frac{1}{2} \tilde{c}_{11} \varepsilon_x^2 + \frac{1}{2} c_{55} \gamma_{xz}^2 \right) dV dt. \quad (8.33)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων 8.6-8.7 στη σχέση 8.33, προκύπτει:

$$-\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left[ \frac{1}{2} \tilde{c}_{11} \left[ f^2(z) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + z^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^2 - 2zf(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} c_{55} [f'(z)]^2 \varphi^2 \right] dV dt, \quad (8.34)$$

Υστερα από πράξεις, η σχέση 8.34 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left[ -\tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f^2(z)] dz - \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z^2] dz - \right. \\
 & - \frac{1}{2} b \tilde{c}_{11} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [I] dz + \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz + \\
 & + \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zf(z)] dz - \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f(z)] dz - \\
 & - \frac{1}{2} b \tilde{c}_{11} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f(z)] dz + \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z] dz + \\
 & \left. + \frac{1}{2} \tilde{c}_{11} b \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [z] dz - c_{55} b \varphi (\delta \varphi) \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f'(z)]^2 dz \right] dx dt .
 \end{aligned} \tag{8.35}$$

Θέτοντας τους συντελεστές  $A_0, B_0, C_0, D_0, H_0$  (σχέσεις 8.24-8.27 και 6.10) και ολοκληρώνοντας ως προς το πάχος  $z$ , η σχέση 8.35 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left[ -C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} - A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} b h \tilde{c}_{11} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} + \right. \\
 & + B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} + B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} - H_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} - \\
 & \left. - \frac{1}{2} H_0 b \tilde{c}_{11} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} - D_0 c_{55} b \varphi (\delta \varphi) \right] dx dt .
 \end{aligned} \tag{8.36}$$

Να σημειωθεί ότι ο συντελεστής  $H_0 = 0$  για όλες τις τεχνικές θεωρίες. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss (Παράρτημα Α.2) στη σχέση 8.36, προκύπτουν ορισμένοι όροι των εξισώσεων κίνησης και ορισμένοι όροι των συνοριακών συνθηκών από το πρώτο ολοκλήρωμα της ηλεκτρικής ενθαλπίας  $H_e$ :

$$(\delta w) : -A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \frac{3}{2} \tilde{c}_{11} b h \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 , \tag{8.37}$$

$$(\delta \varphi) : C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - D_0 c_{55} b \varphi = 0 , \tag{8.38}$$

$$A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \tilde{c}_{11} b h \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 = 0 \quad \text{ή} \quad w : \text{καθορισμένο} , \tag{8.39}$$

$$-A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial w}{\partial x} : \text{καθορισμένο} , \tag{8.40}$$

$$B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{ή} \quad \varphi : \text{καθορισμένο} . \tag{8.41}$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα της ηλεκτρικής ενθαλπίας  $H_e$  (σχέση 8.32) είναι:

$$-\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V (E_z \tilde{e}_{31} \varepsilon_x + E_x e_{15} \gamma_{xz}) dV dt = 0 . \quad (8.42)$$

Με αντικατάσταση του πεδίου των τροπών (σχέσεις 8.6-8.7) και του ηλεκτρικού πεδίου (σχέσεις 8.13 και 8.15), η σχέση 8.42 γίνεται:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left[ -g'(z) \bar{\varphi} \tilde{e}_{31} \left( -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) - g(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} e_{15} f'(z) \varphi \right] dV dt = 0 , \quad (8.43)$$

Ύστερα από σχετικές πράξεις, από τη σχέση 8.43 προκύπτει:

$$\begin{aligned} & - \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left\{ \delta \left[ -zg'(z) \tilde{e}_{31} \bar{\varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \delta \left[ f(z) g'(z) \tilde{e}_{31} \bar{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \right. \\ & \left. + \delta \left[ \frac{1}{2} g'(z) \tilde{e}_{31} \bar{\varphi} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \delta \left[ g(z) f'(z) e_{15} \varphi \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right] \right\} dV dt = 0 . \end{aligned} \quad (8.44)$$

Στη συνέχεια, με χρήση των ιδιοτήτων του μεταβολικού τελεστή  $\delta$ , η σχέση 8.44 διατυπώνεται ως:

$$\begin{aligned} & - \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=b} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} \left\{ -\tilde{e}_{31} z g'(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \bar{\varphi}) - \tilde{e}_{31} z g'(z) \bar{\varphi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) + \right. \\ & + \tilde{e}_{31} f(z) g'(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \bar{\varphi}) + \tilde{e}_{31} f(z) g'(z) \bar{\varphi} (x, t) \frac{\partial}{\partial x} (\delta \varphi) + \\ & + \frac{1}{2} \tilde{e}_{31} g'(z) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (\delta \bar{\varphi}) + \tilde{e}_{31} g'(z) \bar{\varphi} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \\ & \left. + e_{15} g(z) f'(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta \varphi) + e_{15} g(z) f'(z) \varphi \frac{\partial}{\partial x} (\delta \bar{\varphi}) \right\} dz dy dx dt = 0 . \end{aligned} \quad (8.45)$$

Στη συνέχεια, ορίζονται οι συντελεστές  $K_0, L_0, R_0$  και  $N_0$  ως:

$$K_0 = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [zg'(z)] dz , \quad (8.46)$$

$$L_0 = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [f(z)g'(z)] dz , \quad (8.47)$$

$$R_0 = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [g'(z)] dz , \quad (8.48)$$

$$N_0 = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [g(z) f'(z)] dz , \quad (8.49)$$

Με πράξεις και θέτοντας τους συντελεστές  $K_0, L_0, R_0, N_0$  (σχέσεις 8.46-8.49), η σχέση 8.45 παίρνει τη μορφή:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left\{ K_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \bar{\varphi}) + K_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} - L_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \bar{\varphi}) + \right. \\ \left. - L_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} - \frac{1}{2} R_0 b \tilde{e}_{31} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (\delta \bar{\varphi}) - R_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} + \right. \\ \left. - N_0 b e_{15} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta \varphi) - N_0 b e_{15} \varphi \frac{\partial (\delta \bar{\varphi})}{\partial x} \right\} dz dy dx dt = 0 . \quad (8.50)$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss (Παράρτημα Α.2) στη σχέση 8.50, λαμβάνονται ορισμένοι όροι που αναφέρονται στις εξισώσεις κίνησης (σχέσεις 8.51-8.53) και ορισμένοι όροι που αναφέρονται στις συνοριακές συνθήκες (σχέσεις 8.54-8.57):

$$(\delta w) : K_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + R_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + R_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0 , \quad (8.51)$$

$$(\delta \varphi) : L_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - N_0 b e_{15} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0 , \quad (8.52)$$

$$(\delta \bar{\varphi}) : K_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - L_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + N_0 b e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2} R_0 b \tilde{e}_{31} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = 0 , \quad (8.53)$$

$$-K_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - R_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{ή} \quad w : \text{καθορισμένο} , \quad (8.54)$$

$$K_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial w}{\partial x} : \text{καθορισμένο} , \quad (8.55)$$

$$-L_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi} = 0 \quad \text{ή} \quad \varphi : \text{καθορισμένο} , \quad (8.56)$$

$$-N_0 b e_{15} \varphi = 0 \quad \text{ή} \quad \bar{\varphi} : \text{καθορισμένο} . \quad (8.57)$$

Το τρίτο ολοκλήρωμα της ηλεκτρικής ενθαλπίας  $H_e$  (σχέση 8.18) είναι:

$$-\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \left[ -\frac{1}{2} (E_x^2 \epsilon_{11} + E_z^2 \tilde{\epsilon}_{33}) \right] dV dt = 0 . \quad (8.58)$$

Με αντικατάσταση του ηλεκτρικού πεδίου (σχέσεις 8.13 και 8.15) στη σχέση 8.58, προκύπτει:



$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_V \frac{I}{2} \left[ \left( -g(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right)^2 \epsilon_{11} + \left( -g'(z) \bar{\varphi} \right)^2 \tilde{\epsilon}_{33} \right] dV dt = 0 . \quad (8.59)$$

Με πράξεις και εφαρμόζοντας τις ιδιότητες του μεταβολικού τελεστή  $\delta$ , η σχέση 8.59 γίνεται:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left[ b \epsilon_{11} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial (\delta \bar{\varphi})}{\partial x} \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [g(z)]^2 dz + b \tilde{\epsilon}_{33} \bar{\varphi} (\delta \bar{\varphi}) \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [g'(z)]^2 dz \right] dx dt = 0 . \quad (8.60)$$

Στη συνέχεια, ορίζονται οι συντελεστές  $P_0$  και  $M_0$  ως:

$$P_0 = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [g(z)]^2 dz , \quad (8.61)$$

$$M_0 = \int_{z=-h/2}^{z=h/2} [g'(z)]^2 dz .$$

Με αντικατάσταση των συντελεστών  $P_0$  και  $M_0$  (σχέσεις 8.61 και 8.48), η σχέση 8.60, γράφεται:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left[ P_0 b \epsilon_{11} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial (\delta \bar{\varphi})}{\partial x} + M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \bar{\varphi} (\delta \bar{\varphi}) \right] dx dt = 0 . \quad (8.62)$$

Οι τιμές των συντελεστών  $K_0, L_0, M_0, N_0, R_0$  και  $P_0$  (σχέσεις 8.46-8.49 και 8.61) με κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού της μορφής  $g(z) = 1 - (2z/h)^2$  δίδονται στον πίνακα 7.2 (σελ.133). Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss στη σχέση 8.62 (Παράρτημα Α.2), προκύπτουν όροι που αναφέρονται στις εξισώσεις κίνησης και όροι που αναφέρονται στις συνοριακές συνθήκες:

$$(\delta \bar{\varphi}) : -P_0 b \epsilon_{11} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \bar{\varphi} = 0 , \quad (8.63)$$

$$P_0 b \epsilon_{11} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0, \quad \text{ή } \bar{\varphi} : \text{καθορισμένο} . \quad (8.64)$$

Το τρίτο ολοκλήρωμα της αρχής Hamilton που αναφέρεται στο έργο των εξωτερικών δυνάμεων  $W_e$ , γίνεται:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (W_e) dt = \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} (qw(x,t)) dx dt = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} q(\delta w) dx dt = 0 . \quad (8.65)$$

Συνεπώς, συνολικά από την Αρχή Hamilton, προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες που διέπουν μια πιεζοηλεκτρική δοκό με όρους γεωμετρικής μη γραμμικότητας. Οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες (σχέσεις 8.66-8.72) αποτελούν την πλήρη μαθηματική περιγραφή μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρική μη γραμμικότητα.

**Μη Γραμμικές Εξισώσεις κίνησης πιεζοηλεκτρικής δοκού:**

$$\begin{aligned}
 (\delta w) : & -A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \frac{3}{2} \tilde{c}_{11} b h \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + A_0 \rho b \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \\
 & - B_0 \rho b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} - \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + K_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + R_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + R_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + q = 0 \quad ,
 \end{aligned} \tag{8.66}$$

$$\begin{aligned}
 (\delta \varphi) : & -B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - D_0 c_{55} b \varphi - C_0 \rho b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + B_0 \rho b \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \\
 & + L_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - N_0 b e_{15} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0 \quad ,
 \end{aligned} \tag{8.67}$$

$$\begin{aligned}
 (\delta \bar{\varphi}) : & K_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - L_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2} R_0 b \tilde{e}_{31} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - P_0 b \epsilon_{11} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + N_0 b e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
 & + M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \bar{\varphi} = 0
 \end{aligned} \tag{8.68}$$

**Συνοριακές συνθήκες στο  $x=0$  και  $x=L$ :**

$$\begin{aligned}
 A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \tilde{c}_{11} b h \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 - A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - K_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \\
 - R_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{ή } w : \text{ καθορισμένο } ,
 \end{aligned} \tag{8.69}$$

$$-A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi} = 0 \quad \text{ή } \frac{\partial w}{\partial x} : \text{ καθορισμένο } , \tag{8.70}$$

$$B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} - L_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi} = 0 \quad \text{ή } \varphi : \text{ καθορισμένο } , \tag{8.71}$$

$$P_0 b \epsilon_{11} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - N_0 b e_{15} \varphi = 0 \quad \text{ή } \bar{\varphi} : \text{ καθορισμένο } . \tag{8.72}$$

## 8.2 Επίλυση στατικού προβλήματος με θεωρία EBT

Για την επίλυση ενός στατικού προβλήματος κάμψης μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού με χρήση της τεχνικής θεωρίας EBT λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρική μη γραμμικότητα, γίνεται αντικατάσταση της κατανομής της διαμητικής τάσης  $f(z) = z$  και θεωρείται ότι η στροφή  $\varphi(x) = 0$ . Επίσης,  $R_0 = 0$ . Από τις σχέσεις 8.66-8.72 προκύπτουν οι εξισώσεις και οι συνοριακές συνθήκες της δοκού με τεχνική θεωρία EBT και με όρους γεωμετρικής μη γραμμικότητας:

$$(\delta w) : A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{3\tilde{c}_{11} b h}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} - A_0 \rho b \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (8.73)$$

$$(\delta \bar{\varphi}) : -K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_0 b \in_{11} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \bar{\varphi}(x, t) = 0 \quad (8.74)$$

$$A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\tilde{c}_{11} b h}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 - A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0 \quad \text{ή } w : \text{καθορισμένο} \quad (8.75)$$

$$-A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_0 \tilde{e}_{31} b \bar{\varphi}(x, t) = 0 \quad \text{ή } \frac{\partial w}{\partial x} : \text{καθορισμένο} \quad (8.76)$$

$$P_0 b \in_{11} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0 \quad \text{ή } \bar{\varphi} : \text{καθορισμένο} \quad (8.77)$$

Εφόσον  $\varphi(x) = 0$ , η περιγραφή της κίνησης της δοκού με τη θεωρία EBT γίνεται με μια Δ.Ε, που αφορά την εγκάρσια μετατόπιση  $w$ . Για τη θεωρία EBT, οι μη μηδενικοί συντελεστές είναι οι  $A_0$ ,  $K_0$ ,  $P_0$ ,  $M_0$  και οι εξισώσεις κίνησης γίνονται:

$$\left( A_0 \tilde{c}_{11} b a_m^4 + \frac{3}{4} \tilde{c}_{11} b h a_m^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k\pi}{L} w_k \right)^2 \right) w_m + (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2) \bar{\varphi}_m = q_m \quad (8.78)$$

$$(K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2) w_m + (-P_0 b \in_{11} a_m^2 - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33}) \bar{\varphi}_m = 0 \quad (8.79)$$

όπου:  $a_m = m\pi/L$ . Οι αναλυτικές εκφράσεις της εγκάρσιας μετατόπισης  $w_m$  και του ηλεκτρικού δυναμικού  $\bar{\varphi}_m$  είναι:

$$w_m = \frac{q_m (-P_0 b \in_{11} a_m^2 - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33})}{\left( A_0 \tilde{c}_{11} b a_m^4 + \frac{3\tilde{c}_{11} b h}{4} a_m^2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k w_k)^2 \right) (-P_0 b \in_{11} a_m^2 - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33}) - (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2) (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2)} \quad (8.80)$$

$$\bar{\varphi}_m = \frac{-q_m (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2)}{\left( A_0 \tilde{c}_{11} b a_m^4 + \frac{3\tilde{c}_{11} b h}{4} a_m^2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k w_k)^2 \right) (-P_0 b \in_{11} a_m^2 - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33}) - (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2) (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2)} \quad (8.81)$$

### 8.3 Επίλυση στατικού προβλήματος με θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης (HSDT)

Για την επίλυση ενός στατικού προβλήματος κάμψης σε μια πιεζοηλεκτρική δοκό με μεγάλες παραμορφώσεις λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρική μη γραμμικότητα και με χρήση θεωριών διάτμησης ανώτερης τάξης, αγνοώντας τους αδρανειακούς όρους, οι εξισώσεις κίνησης (σχέσεις 8.66-8.68), έχουν τη μορφή:

$$(\delta w): A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - \frac{3}{2} \tilde{c}_{11} b h \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} - R_0 \tilde{e}_{31} b \bar{\varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - R_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} = q, \quad (8.82)$$

$$(\delta \varphi): B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_0 c_{55} b \varphi - L_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + N_0 e_{15} b \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0, \quad (8.83)$$

$$(\delta \bar{\varphi}): -K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + L_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} R_0 \tilde{e}_{31} b \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + P_0 b \epsilon_{11} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} - N_0 e_{15} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \bar{\varphi} = 0. \quad (8.84)$$

Η μέθοδος επίλυσης του στατικού προβλήματος γίνεται με μορφές λύσεων άπειρων αθροισμάτων ημιτόνων και συνημιτόνων (σειρές Fourier). Οι άγνωστες ποσότητες γράφονται με τη μορφή άπειρων σειρών ημιτόνων και συνημιτόνων ώστε να ικανοποιούν ακριβώς τις συνοριακές συνθήκες. Οι άγνωστες ποσότητες με τη μορφή άπειρων αθροισμάτων που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες απλής στήριξης είναι:

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad (8.85)$$

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \quad (8.86)$$

$$\bar{\varphi}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad (8.87)$$

Το ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο με μορφή αθροίσματος έχει τη μορφή:

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad \text{με } q_m = \frac{4q_0}{m\pi} \text{ για } m = 1, 3, 5, \dots \quad (8.88)$$

και  $q_m = 0$  για  $m = 2, 4, 6, \dots$

Με αντικατάσταση των σχέσεων 8.85-8.88, η πρώτη εξίσωση κίνησης (σχέση 8.82), παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 & A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] \\
 & - \frac{3}{2} \tilde{c}_{11} b h \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} w_l \sin \frac{l\pi x}{L} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} w_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \\
 & - K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] - R_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} w_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right] \\
 & - R_0 \tilde{e}_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left( \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} w_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right] = \sum_{m=1}^{\infty} \left( q_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right). \quad (8.89)
 \end{aligned}$$

Υστερα από πράξεις και παραγωγίσεις, η σχέση 8.89, γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & A_0 \tilde{c}_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - B_0 \tilde{c}_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \\
 & - \frac{3}{2} \tilde{c}_{11} b h \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ w_l \frac{l\pi}{L} \left( \cos \frac{l\pi x}{L} \right) \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ w_k \frac{k\pi}{L} \left( \cos \frac{k\pi x}{L} \right) \right\} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \\
 & - K_0 \tilde{e}_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - R_0 \tilde{e}_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \frac{m\pi}{L} \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ w_k \frac{k\pi}{L} \left( \cos \frac{k\pi x}{L} \right) \right\} \\
 & - R_0 \tilde{e}_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left( \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -w_k \left( \frac{k\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{k\pi x}{L} \right) \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ q_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (8.90)
 \end{aligned}$$

Για τη συνάρτηση  $g(z) = 1 - (2z/h)^2$ , από τον υπολογισμό των συντελεστών προκύπτει πως ο συντελεστής  $R_0 = 0$ . Έτσι, η σχέση 8.90 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & A_0 \tilde{c}_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - B_0 \tilde{c}_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \\
 & - \frac{3}{2} \tilde{c}_{11} b h \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ w_l \frac{l\pi}{L} \left( \cos \frac{l\pi x}{L} \right) \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ w_k \frac{k\pi}{L} \left( \cos \frac{k\pi x}{L} \right) \right\} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \\
 & - K_0 \tilde{e}_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ q_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}. \quad (8.91)
 \end{aligned}$$

Το πρώτο μέλος της εξίσωσης 8.91 γράφεται ως ένα άθροισμα:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_0 \tilde{c}_{11} b w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) - B_0 \tilde{c}_{11} b \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{3}{2} \tilde{c}_{11} b h w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ w_l \frac{l\pi}{L} \left( \cos \frac{l\pi x}{L} \right) \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ w_k \frac{k\pi}{L} \left( \cos \frac{k\pi x}{L} \right) \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

$$+K_0\tilde{e}_{31}b\bar{\varphi}_m\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\left(\sin\frac{m\pi x}{L}\right)\left\}=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{q_m\sin\frac{m\pi x}{L}\right\}. \quad (8.92)$$

Ύστερα από πράξεις, η σχέση 8.92 γράφεται με τη μορφή:

$$\begin{aligned} &A_0\tilde{c}_{11}bw_m\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4\left(\sin\frac{m\pi x}{L}\right)-B_0\tilde{c}_{11}b\varphi_m\left(\frac{m\pi}{L}\right)^3\left(\sin\frac{m\pi x}{L}\right) \\ &+\frac{3}{2}\tilde{c}_{11}bh w_m\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\left(\sin\frac{m\pi x}{L}\right)\sum_{l=1}^{\infty}\left\{w_l\frac{l\pi}{L}\left(\cos\frac{l\pi x}{L}\right)\right\}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{w_k\frac{k\pi}{L}\left(\cos\frac{k\pi x}{L}\right)\right\} \\ &+K_0\tilde{e}_{31}b\bar{\varphi}_m\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\left(\sin\frac{m\pi x}{L}\right)\left\}=q_m\sin\frac{m\pi x}{L}. \end{aligned} \quad (8.93)$$

Από τις ιδιότητες των άπειρων αθροισμάτων [135] ισχύει:

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left\{w_l\frac{l\pi}{L}\left(\cos\frac{l\pi x}{L}\right)\right\}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{w_k\frac{k\pi}{L}\left(\cos\frac{k\pi x}{L}\right)\right\}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\pi}{L}w_k\right)^2 \quad (8.94)$$

Συνεπώς, η σχέση 8.93 με τη βοήθεια της σχέσης 8.94, μπορεί να γραφεί ως:

$$A_0\tilde{c}_{11}bw_m\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4-B_0\tilde{c}_{11}b\varphi_m\left(\frac{m\pi}{L}\right)^3+\frac{3}{4}\tilde{c}_{11}bh\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2w_m\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\pi}{L}w_k\right)^2+K_0\tilde{e}_{31}b\bar{\varphi}_m\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2=q_m. \quad (8.95)$$

Θέτοντας  $a_m = m\pi/L$  και  $a_k = k\pi/L$ , η πρώτη εξίσωση κίνησης έχει, τελικά, τη μορφή:

$$A_0\tilde{c}_{11}bw_m a_m^4-B_0\tilde{c}_{11}b\varphi_m a_m^3+\frac{3}{4}\tilde{c}_{11}bha_m^2w_m\sum_{k=1}^{\infty}(a_k w_k)^2+K_0\tilde{e}_{31}b\bar{\varphi}_m a_m^2=q_m. \quad (8.96)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων 8.85-8.87, η δεύτερη εξίσωση κίνησης (σχέση 8.83), παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} &B_0\tilde{c}_{11}b\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left[\sum_{m=1}^{\infty}w_m\sin\frac{m\pi x}{L}\right]-C_0\tilde{c}_{11}b\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m\cos\frac{m\pi x}{L}\right]+D_0c_{55}b\left[\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m\cos\frac{m\pi x}{L}\right] \\ &-L_0\tilde{e}_{31}b\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\bar{\varphi}_m\sin\frac{m\pi x}{L}\right]+N_0e_{15}b\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\bar{\varphi}_m\sin\frac{m\pi x}{L}\right]=0. \end{aligned} \quad (8.97)$$

Ύστερα από πράξεις, η σχέση 8.97 γράφεται ως:

$$\begin{aligned}
 & B_0 \tilde{c}_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[ \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} - C_0 \tilde{c}_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} + D_0 c_{55} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right\} \\
 & - L_0 \tilde{e}_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} + N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} = 0 . \quad (8.98)
 \end{aligned}$$

Ύστερα από τις σχετικές παραγωγίσεις, η σχέση 8.98 γράφεται:

$$\begin{aligned}
 & B_0 \tilde{c}_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \left( -\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - C_0 \tilde{c}_{11} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( -\cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \\
 & + D_0 c_{55} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - L_0 \tilde{e}_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \\
 & + N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = 0 . \quad (8.99)
 \end{aligned}$$

Το πρώτο μέλος της εξίσωσης 8.99 μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -B_0 \tilde{c}_{11} b w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) + C_0 \tilde{c}_{11} b \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right. \\
 & \left. + D_0 c_{55} b \varphi_m \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) - L_0 \tilde{e}_{31} b \bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) + N_0 e_{15} b \bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = 0 . \quad (8.100)
 \end{aligned}$$

Ύστερα από σχετικές απλοποιήσεις, η σχέση 8.100 παίρνει τη μορφή:

$$-B_0 \tilde{c}_{11} b w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 + C_0 \tilde{c}_{11} b \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + D_0 c_{55} b \varphi_m - L_0 \tilde{e}_{31} b \bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) + N_0 e_{15} b \bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right) = 0 . \quad (8.101)$$

Θέτοντας  $a_m = m\pi/L$ , η δεύτερη εξίσωση κίνησης, τελικά, έχει τη μορφή:

$$-\left( B_0 \tilde{c}_{11} b a_m^3 \right) w_m + \left( C_0 \tilde{c}_{11} b a_m^2 + D_0 c_{55} b \right) \varphi_m + \left( -L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m \right) \bar{\varphi}_m = 0 . \quad (8.102)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων 8.85-8.87, η τρίτη εξίσωση κίνησης (σχέση 8.84), παίρνει τη μορφή:

$$-K_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] + L_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &+P_0 b \in_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] + \frac{1}{2} R_0 \tilde{e}_{31} b \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} w_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right] \\
 &-N_0 e_{15} b \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] = 0. \quad (8.103)
 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, από τις ιδιότητες των σειρών, η παράγωγος μπορεί να μπει μέσα στα άπειρα αθροίσματα και η σχέση 8.103 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 &-K_0 \tilde{e}_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] + L_0 \tilde{e}_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] \\
 &+P_0 b \in_{11} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] + \frac{1}{2} R_0 \tilde{e}_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[ w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[ w_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right] \\
 &-N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] = 0. \quad (8.104)
 \end{aligned}$$

Ύστερα από τις σχετικές παραγωγίσεις, η σχέση 8.104 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 &-K_0 \tilde{e}_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} + L_0 \tilde{e}_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\varphi_m \frac{m\pi}{L} \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \\
 &+P_0 b \in_{11} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} + \frac{1}{2} R_0 \tilde{e}_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{m\pi}{L} \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ w_k \frac{k\pi}{L} \left( \cos \frac{k\pi x}{L} \right) \right\} \\
 &-N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\varphi_m \frac{m\pi}{L} \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = 0. \quad (8.105)
 \end{aligned}$$

Από τον υπολογισμό των συντελεστών προκύπτει πως ο συντελεστής  $R_0 = 0$  για όλες τις θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης. Συνεπώς, η σχέση 8.105 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 &-K_0 \tilde{e}_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} + L_0 \tilde{e}_{31} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\varphi_m \frac{m\pi}{L} \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \\
 &+P_0 b \in_{11} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - N_0 e_{15} b \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -\varphi_m \frac{m\pi}{L} \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \quad (8.106) \\
 &-M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \bar{\varphi}_m \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Το πρώτο μέλος της εξίσωσης 8.106 μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ K_0 \tilde{e}_{31} b w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) - L_0 \tilde{e}_{31} b \varphi_m \frac{m\pi}{L} \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) - P_0 b \in_{11} \bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\}$$



$$+N_0 e_{15} b \varphi_m \frac{m\pi}{L} \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \bar{\varphi}_m \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \Big\} = 0 . \quad (8.107)$$

Με απλοποίηση του αθροίσματος, η σχέση 8.107 μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$K_0 \tilde{e}_{31} b w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) - L_0 \tilde{e}_{31} b \varphi_m \frac{m\pi}{L} \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) - P_0 b \epsilon_{11} \bar{\varphi}_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) + N_0 e_{15} b \varphi_m \frac{m\pi}{L} \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \bar{\varphi}_m \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) = 0 , \quad (8.108)$$

Με σχετικές απλοποιήσεις και θέτοντας  $a_m = m\pi/L$ , η τρίτη εξίσωση κίνησης (σχέση 8.108) έχει, τελικά, τη μορφή:

$$K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2 w_m - L_0 \tilde{e}_{31} b a_m \varphi_m - P_0 b \epsilon_{11} a_m^2 \bar{\varphi}_m + N_0 e_{15} b a_m \varphi_m - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} \bar{\varphi}_m = 0 . \quad (8.109)$$

Οι σχέσεις 8.96, 8.102 και 8.109 αποτελούν ένα σύστημα τριών αλγεβρικών εξισώσεων με τρεις αγνώστους:

$$\left( A_0 \tilde{c}_{11} b a_m^4 + \frac{3\tilde{c}_{11} b h}{4} a_m^2 \sum_{k=1}^{\infty} [a_k w_k]^2 \right) w_m - (B_0 \tilde{c}_{11} b a_m^3) \varphi_m + (K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2) \bar{\varphi}_m = q_m , \quad (8.96)$$

$$(-B_0 \tilde{c}_{11} b a_m^3) w_m + (C_0 \tilde{c}_{11} b a_m^2 + D_0 c_{55} b) \varphi_m + (-L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m) \bar{\varphi}_m = 0 , \quad (8.102)$$

$$(K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2) w_m + (-L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m) \varphi_m + (-P_0 b \epsilon_{11} a_m^2 - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33}) \bar{\varphi}_m = 0 . \quad (8.109)$$

Στη συνέχεια, θέτονται οι ποσότητες:

$$K_{11}^{(m)} = A_0 \tilde{c}_{11} b a_m^4 , \quad K_{12}^{(m)} = -B_0 \tilde{c}_{11} b a_m^3 , \quad K_{13}^{(m)} = K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2 , \quad \Lambda_m = \frac{3\tilde{c}_{11} b h}{4} a_m^2 ,$$

$$K_{21}^{(m)} = -B_0 \tilde{c}_{11} b a_m^3 , \quad K_{22}^{(m)} = C_0 \tilde{c}_{11} b a_m^2 + D_0 c_{55} b , \quad K_{23}^{(m)} = -L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m , \quad (8.110)$$

$$K_{31}^{(m)} = K_0 \tilde{e}_{31} b a_m^2 , \quad K_{32}^{(m)} = -L_0 \tilde{e}_{31} b a_m + N_0 e_{15} b a_m , \quad K_{33}^{(m)} = -P_0 b \epsilon_{11} a_m^2 - M_0 b \tilde{\epsilon}_{33} ,$$

παρατηρείται ότι:

$$K_{12}^{(m)} = K_{21}^{(m)} , \quad K_{13}^{(m)} = K_{31}^{(m)} , \quad K_{23}^{(m)} = K_{32}^{(m)} , \quad (8.111)$$

και το σύστημα εξισώσεων (σχέσεις 8.96, 8.102 και 8.109) γίνεται:

$$K_{11}^{(m)} w_m + \Lambda_m w_m \sum_{k=1}^{\infty} [a_k w_k]^2 + K_{12}^{(m)} \varphi_m + K_{13}^{(m)} \bar{\varphi}_m = q_m , \quad (8.112)$$

$$K_{21}^{(m)} w_m + K_{22}^{(m)} \varphi_m + K_{32}^{(m)} \bar{\varphi}_m = 0, \quad (8.113)$$

$$K_{31}^{(m)} w_m + K_{32}^{(m)} \varphi_m + K_{33}^{(m)} \bar{\varphi}_m = 0. \quad (8.114)$$

Επισημαίνεται πως οι εξισώσεις 8.113 και 8.114 αποτελούνε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων. Για την επίλυση του συστήματος, κρατώντας σταθερό τον όρο  $w_m$ , χρησιμοποιείται η μέθοδος των οριζουσών (μέθοδος Cramer). Έτσι, η ορίζουσα  $D$  των συντελεστών του συστήματος είναι:

$$D = \begin{vmatrix} K_{22}^{(m)} & K_{23}^{(m)} \\ K_{32}^{(m)} & K_{33}^{(m)} \end{vmatrix} = K_{22}^{(m)} K_{33}^{(m)} - K_{23}^{(m)} K_{32}^{(m)}, \quad (8.115)$$

και οι ορίζουσες των άγνωστων ποσοτήτων του συστήματος είναι:

$$D_{\varphi_m} = \begin{vmatrix} -K_{21}^{(m)} w_m & K_{23}^{(m)} \\ -K_{31}^{(m)} w_m & K_{33}^{(m)} \end{vmatrix} = w_m \begin{vmatrix} -K_{21}^{(m)} & K_{23}^{(m)} \\ -K_{31}^{(m)} & K_{33}^{(m)} \end{vmatrix} = w_m \left( -K_{21}^{(m)} K_{33}^{(m)} + K_{31}^{(m)} K_{23}^{(m)} \right), \quad (8.116)$$

$$D_{\bar{\varphi}_m} = \begin{vmatrix} K_{22}^{(m)} & -K_{21}^{(m)} w_m \\ K_{32}^{(m)} & -K_{31}^{(m)} w_m \end{vmatrix} = w_m \begin{vmatrix} K_{22}^{(m)} & -K_{21}^{(m)} \\ -K_{32}^{(m)} & -K_{31}^{(m)} \end{vmatrix} = w_m \left( -K_{22}^{(m)} K_{31}^{(m)} + K_{21}^{(m)} K_{32}^{(m)} \right). \quad (8.117)$$

Οι λύσεις του συστήματος στη γενική τους μορφή είναι:

$$\varphi_m = \frac{D_{\varphi_m}}{D} = w_m \frac{K_{31}^{(m)} K_{23}^{(m)} - K_{21}^{(m)} K_{33}^{(m)}}{K_{22}^{(m)} K_{33}^{(m)} - K_{23}^{(m)} K_{32}^{(m)}}, \quad (8.118)$$

$$\bar{\varphi}_m = \frac{D_{\bar{\varphi}_m}}{D} = w_m \frac{K_{21}^{(m)} K_{32}^{(m)} - K_{22}^{(m)} K_{31}^{(m)}}{K_{22}^{(m)} K_{33}^{(m)} - K_{23}^{(m)} K_{32}^{(m)}}. \quad (8.119)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων 8.118-8.119 στην εξίσωση 8.112, προκύπτει:

$$\left( K_{11}^{(m)} + K_{12}^{(m)} \frac{K_{31}^{(m)} K_{23}^{(m)} - K_{21}^{(m)} K_{33}^{(m)}}{K_{22}^{(m)} K_{33}^{(m)} - K_{23}^{(m)} K_{32}^{(m)}} + K_{13}^{(m)} \frac{K_{21}^{(m)} K_{32}^{(m)} - K_{22}^{(m)} K_{31}^{(m)}}{K_{22}^{(m)} K_{33}^{(m)} - K_{23}^{(m)} K_{32}^{(m)}} \right) w_m + \Lambda_m w_m \sum_{k=1}^{\infty} [a_k w_k]^2 = q_m. \quad (8.120)$$

Έπειτα, ορίζοντας την ποσότητα  $R_m$  ως:

$$R_m = K_{11}^{(m)} + K_{12}^{(m)} \frac{K_{31}^{(m)} K_{23}^{(m)} - K_{21}^{(m)} K_{33}^{(m)}}{K_{22}^{(m)} K_{33}^{(m)} - K_{23}^{(m)} K_{32}^{(m)}} + K_{13}^{(m)} \frac{K_{21}^{(m)} K_{32}^{(m)} - K_{22}^{(m)} K_{31}^{(m)}}{K_{22}^{(m)} K_{33}^{(m)} - K_{23}^{(m)} K_{32}^{(m)}}, \quad (8.121)$$

με αντικατάσταση της εξίσωσης 8.121 στην εξίσωση 8.120, προκύπτει:

$$R_m w_m + A_m w_m \sum_{k=1}^{\infty} [a_k w_k]^2 = q_m . \quad (8.122)$$

**Θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης – Μη συζευγμένη προσέγγιση ενός όρου ( $k=1$ )**

Για την επίλυση της εξίσωσης 8.122, είναι απαραίτητη η εκχώρηση τιμών στις ποσότητες  $w_m$  και  $w_k$ . Για την προσέγγιση μη συζευγμένης λύσης με ένα όρο, δηλαδή για  $m=1$  και  $k=1$ , η εξίσωση 8.122 παίρνει τη μορφή:

$$A_1 a_1^2 w_1^3 + R_1 w_1 - q_1 = 0 . \quad (8.123)$$

Σαν αποτέλεσμα, προκύπτει μια πολυωνυμική αλγεβρική εξίσωση τρίτου βαθμού. Από την εύρεση του  $w_1$ , με τη βοήθεια των σχέσεων 8.118 και 8.119, υπολογίζονται οι λύσεις για τη στροφή  $\varphi_1$  και το ηλεκτρικό δυναμικό  $\bar{\varphi}_1$  ως εξής:

$$\varphi_1 = w_1 \frac{K_{31}^{(1)} K_{23}^{(1)} - K_{21}^{(1)} K_{33}^{(1)}}{K_{22}^{(1)} K_{33}^{(1)} - K_{23}^{(1)} K_{32}^{(1)}} , \quad (8.124)$$

$$\bar{\varphi}_1 = w_1 \frac{K_{21}^{(1)} K_{32}^{(1)} - K_{22}^{(1)} K_{31}^{(1)}}{K_{22}^{(1)} K_{33}^{(1)} - K_{23}^{(1)} K_{32}^{(1)}} . \quad (8.125)$$

**Θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης – Συζευγμένη προσέγγιση ενός όρου ( $k=1$ )**

Για την επίλυση της εξίσωσης 8.122 με μεγαλύτερη ακρίβεια, πραγματοποιείται μια συζευγμένη προσέγγιση της λύσης με ένα όρο, δηλαδή για  $m=1,2,3$  και  $k=1$ . Έτσι, η εξίσωση 8.122 για  $k=1$  παίρνει τη μορφή:

$$R_m w_m + A_m w_m a_1^2 w_1^2 = q_m , \quad (8.126)$$

και για  $m=1,2,3$ , η σχέση 8.126 γίνεται:

$$m=1: R_1 w_1 + A_1 w_1 a_1^2 w_1^2 = q_1 , \quad (8.127)$$

$$m=2: R_2 w_2 + A_2 w_2 a_2^2 w_1^2 = q_2 , \quad (8.128)$$

$$m=3: R_3 w_3 + A_3 w_3 a_3^2 w_1^2 = q_3 . \quad (8.129)$$

Από τα δεδομένα για τη μοντελοποίηση του προβλήματος, το ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο  $q_2 = 0$ . Έτσι, προκύπτει πως  $w_2 = 0$ . Ύστερα από σχετικές πράξεις, οι σχέσεις 8.127-8.129 παίρνουν τη μορφή:

$$A_1 a_1^2 w_1^3 + R_1 w_1 - q_1 = 0 , \quad (8.130)$$

$$w_2 = 0 , \quad (8.131)$$

$$w_3 = \frac{q_3}{R_3 + A_3 \alpha_3^2 w_1^2} . \quad (8.132)$$

Σαν αποτέλεσμα, προκύπτει μια πολυωνυμική αλγεβρική εξίσωση τρίτου βαθμού (σχέση 8.130). Η επίλυση της τριτοβάθμιας πολυωνυμικής γίνεται είτε με αριθμητική επίλυση είτε με αναλυτική επίλυση μέσω της λύσης του Cardano. Από την επίλυση της τριτοβάθμιας εξίσωσης προκύπτουν τρεις ρίζες, δύο μιγαδικές και μια πραγματική. Για τα προβλήματα της μηχανικής, αποδεκτή θεωρείται μόνο η πραγματική λύση. Με αντικατάσταση του  $w_l$  στη σχέση 8.132, προκύπτει λύση για τον όρο  $w_3$ . Αντίστοιχα, η σχέση 8.124 που αναφέρεται στη στροφή, για  $m = 1, 2, 3$  γίνεται:

$$\varphi_1 = w_1 \frac{K_{31}^{(1)} K_{23}^{(1)} - K_{21}^{(1)} K_{33}^{(1)}}{K_{22}^{(1)} K_{33}^{(1)} - K_{23}^{(1)} K_{32}^{(1)}} , \quad (8.133)$$

$$\varphi_2 = w_2 \frac{K_{31}^{(2)} K_{23}^{(2)} - K_{21}^{(2)} K_{33}^{(2)}}{K_{22}^{(2)} K_{33}^{(2)} - K_{23}^{(2)} K_{32}^{(2)}} , \quad (8.134)$$

$$\varphi_3 = w_3 \frac{K_{31}^{(3)} K_{23}^{(3)} - K_{21}^{(3)} K_{33}^{(3)}}{K_{22}^{(3)} K_{33}^{(3)} - K_{23}^{(3)} K_{32}^{(3)}} , \quad (8.135)$$

και η σχέση 8.125 που αναφέρεται στο ηλεκτρικό δυναμικό, για  $m = 1, 2, 3$  παίρνει τη μορφή:

$$\bar{\varphi}_1 = w_1 \frac{K_{21}^{(1)} K_{32}^{(1)} - K_{22}^{(1)} K_{31}^{(1)}}{K_{22}^{(1)} K_{33}^{(1)} - K_{23}^{(1)} K_{32}^{(1)}} , \quad (8.136)$$

$$\bar{\varphi}_2 = w_2 \frac{K_{21}^{(2)} K_{32}^{(2)} - K_{22}^{(2)} K_{31}^{(2)}}{K_{22}^{(2)} K_{33}^{(2)} - K_{23}^{(2)} K_{32}^{(2)}} , \quad (8.137)$$

$$\bar{\varphi}_3 = w_3 \frac{K_{21}^{(3)} K_{32}^{(3)} - K_{22}^{(3)} K_{31}^{(3)}}{K_{22}^{(3)} K_{33}^{(3)} - K_{23}^{(3)} K_{32}^{(3)}} . \quad (8.138)$$

Για την επίλυση προβλημάτων ελαστικών δοκών λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρική μη γραμμικότητα, όπως παρατηρήθηκε στο κεφάλαιο 6, στην προσέγγιση με δύο όρους του αθροίσματος, ο δεύτερος όρος του άπειρου αθροίσματος δεν συμβάλλει στη συνολική εγκάρσια μετατόπιση  $w$  της δοκού. Το ίδιο παρατηρείται και στην επίλυση προβλημάτων πιεζοηλεκτρικών δοκών λαμβάνοντας υπόψη τη γεωμετρική μη γραμμικότητα. Για αποτελέσματα με μεγαλύτερη ακρίβεια, στη συνέχεια, γίνεται επίλυση με προσέγγιση των τριών πρώτων όρων του άπειρου αθροίσματος.

**Θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης – Προσέγγιση με τρεις όρους ( $k=1,2,3$ )**

Η τριτοβάθμια εξίσωση (σχέση 8.122) για την προσέγγιση της εγκάρσιας μετατόπισης με τους τρεις πρώτους όρους του άπειρου αθροίσματος, δηλαδή για  $k = 1, 2, 3$ , γίνεται:

$$k = 1, 2, 3: R_m w_m + A_m w_m \left[ (a_1 w_1)^2 + (a_2 w_2)^2 + (a_3 w_3)^2 \right] = q_m, \quad (8.139)$$

και για  $m = 1, 2, 3$ , η σχέση 8.139 γίνεται:

$$m = 1: R_1 w_1 + A_1 w_1 (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2) = q_1, \quad (8.140)$$

$$m = 2: R_2 w_2 + A_2 w_2 (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2) = q_2, \quad (8.141)$$

$$m = 3: R_3 w_3 + A_3 w_3 (a_1^2 w_1^2 + a_2^2 w_2^2 + a_3^2 w_3^2) = q_3. \quad (8.142)$$

Ύστερα από πράξεις και θέτοντας  $q_2 = 0$  (σχέση 5.34), οι σχέσεις 8.140-8.142 γίνονται:

$$R_1 w_1 + A_1 w_1 (a_1^2 w_1^2) + A_1 w_1 (a_2^2 w_2^2) + A_1 w_1 (a_3^2 w_3^2) = q_1, \quad (8.143)$$

$$R_2 w_2 + A_2 w_2 (a_1^2 w_1^2) + A_2 w_2 (a_2^2 w_2^2) + A_2 w_2 (a_3^2 w_3^2) = 0, \quad (8.144)$$

$$R_3 w_3 + A_3 w_3 (a_1^2 w_1^2) + A_3 w_3 (a_2^2 w_2^2) + A_3 w_3 (a_3^2 w_3^2) = q_3. \quad (8.145)$$

Με αναδιάταξη των όρων και πράξεις, οι σχέσεις 8.143-8.145 γίνονται:

$$R_1 w_1 + A_1 a_1^2 w_1^3 + A_1 a_2^2 w_1 w_2^2 + A_1 a_3^2 w_1 w_3^2 = q_1, \quad (8.146)$$

$$w_2 (R_2 + A_2 a_1^2 w_2 w_1^2 + A_2 a_2^2 w_2^3 + A_2 a_3^2 w_2 w_3^2) = 0, \quad (8.147)$$

$$R_3 w_3 + A_3 a_1^2 w_1^2 w_3 + A_3 a_2^2 w_2^2 w_3 + A_3 a_3^2 w_3^3 = q_3. \quad (8.148)$$

Η ποσότητα  $R_2$  είναι πάντα μεγαλύτερη του μηδενός και η παρένθεση στη σχέση 8.147, είναι πάντα αριθμός διάφορος του μηδενός, συνεπώς,  $w_2 = 0$ . Επίσης, προκύπτει ότι  $a_3 = 3a_1$ . Με αυτές τις παραδοχές, οι σχέσεις 8.146 και 8.148 παίρνουν τη μορφή:

$$w_1^3 (A_1 a_1^2) + w_1 (R_1 + 9A_1 a_1^2 w_3^2) - q_1 = 0, \quad (8.149)$$

$$w_3^3 (9L_3 a_l^2) + w_3 (R_3 + L_3 a_l^2 w_l^2) - q_3 = 0 . \quad (8.150)$$

Από τη σχέση 8.110 προκύπτει ότι  $L_l = 3\tilde{c}_{ll} b h a_l^2 / 4$  και  $L_3 = 3\tilde{c}_{ll} b h a_3^2 / 4$ . Επίσης, εφόσον  $a_3 = 3a_l$ , προκύπτει ότι  $L_3 = 9L_l$ . Θέτοντας  $\kappa_l = L_l a_l^2$ , οι σχέσεις 8.149 και 8.150 παίρνουν τη μορφή:

$$\kappa_l w_l^3 + w_l (R_l + 9\kappa_l w_3^2) - q_l = 0 , \quad (8.151)$$

$$8L_l \kappa_l w_3^3 + (R_3 + 9\kappa_l w_l^2) w_3 - q_3 = 0 . \quad (8.152)$$

Το σύστημα εξισώσεων (σχέσεις 8.151, 8.152) αποτελεί ένα συζευγμένο μη γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων τρίτου βαθμού. Οι τιμές των όρων της εγκάρσιας μετατόπισης είναι διάφορες του μηδενός  $w_l \neq 0$  και  $w_3 \neq 0$  επειδή στο πρόβλημα κάμψης της πιεζοηλεκτρικής δοκού ασκείται κάποια εξωτερική φόρτιση, να μην προβλέπεται μηδενική μετατόπιση της δοκού. Επιλύοντας τη σχέση 8.152 ως προς  $w_l$ , προκύπτει μια έκφραση για τον όρο  $w_l$  συναρτήσει του  $w_3$  ως:

$$w_l = \pm \sqrt{\frac{q_3 - 8L_l \kappa_l w_3^3 - R_3 w_3}{9\kappa_l w_3}} , \quad (8.153)$$

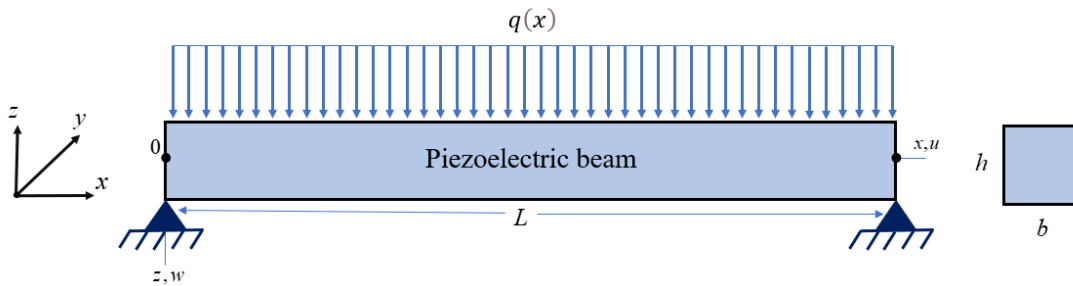
με αποδεκτή μόνο τη θετική τιμή της ρίζας. Η επίλυση του συστήματος προκύπτει με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Με αντικατάσταση του άγνωστου όρου  $w_l$  (σχέση 8.153) στη σχέση 8.151, προκύπτει:

$$\begin{aligned} & q_3^3 + (18R_l q_3^2 - 3R_3 q_3^2) w_3 + (-36R_l R_3 q_3 + 3R_3^2 q_3 + 81R_l^2 q_3) w_3^2 \\ & + (-81\kappa_l q_3^2 + 18R_l R_3^2 - R_3^3 - 81R_l^2 R_3 - 729\kappa_l q_l^2) w_3^3 \\ & + (-1458\kappa_l R_l q_3 + 162\kappa_l R_3 q_3) w_3^4 + (1458\kappa_l R_l R_3 - 81\kappa_l R_3^2 - 6561\kappa_l R_l^2) w_3^5 = 0 . \end{aligned} \quad (8.154)$$

Η εξίσωση 8.154 είναι μια πολυωνυμική αλγεβρική εξίσωση πέμπτου βαθμού. Η επίλυσή της γίνεται με αριθμητικό υπολογισμό κάνοντας χρήση του λογισμικού πακέτου *Matlab*. Από την επίλυσή της προκύπτουν πέντε ρίζες για τον τρίτο όρο του αθροίσματος της βύθισης  $w_3$ . Οι τέσσερις ρίζες είναι μιγαδικές συζυγείς ρίζες και απορρίπτονται. Η πέμπτη ρίζα είναι πραγματική και η μόνη αποδεκτή λύση του προβλήματος. Από την εύρεση του όρου  $w_3$ , με αντικατάσταση στην εξίσωση 8.153, προκύπτει η λύση του όρου  $w_l$  και τελικά η συνολική εγκάρσια μετατόπιση (βύθιση)  $w$  της δοκού για την προσέγγιση με τρεις όρους. Αντίστοιχα, για τον προσδιορισμό της στροφής (rotation), με αντικατάσταση των  $w_l$ ,  $w_3$ , στις σχέσεις 8.133-8.138, προκύπτουν οι τρεις πρώτοι όροι του άπειρου αθροίσματος για τη στροφή (rotation) και για το ηλεκτρικό δυναμικό.

### 8.4 Αποτελέσματα στατικού προβλήματος πιεζοηλεκτρικών δοκών με γεωμετρικές μη γραμμικότητες

Για τα παραδείγματα και τους αριθμητικούς υπολογισμούς ενός στατικού προβλήματος κάμψης μιας πιεζοηλεκτρικής δοκού με τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης λαμβάνοντας υπόψη τους όρους γεωμετρικής μη γραμμικότητας, η πιεζοηλεκτρική δοκός έχει συνοριακές συνθήκες άρθρωσης στα δύο άκρα και υποβάλλεται σε εξωτερικό ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο, όπως φαίνεται στο σχήμα 8.2.



**Σχήμα 8.2:** Πιεζοηλεκτρική δοκός με συνοριακές συνθήκες άρθρωσης στα δύο άκρα (hinged-hinged) και επιβολή εξωτερικού ομοιόμορφα καταναμημένου φορτίου  $q(x)$ .

Το μήκος της δοκού είναι  $L = 1\text{ m}$ , το πλάτος  $b = 0.002\text{ m}$  και το πάχος της  $h$  εξαρτάται από τις τιμές της αναλογίας διαστάσεων  $S = L/h$ . Το ηλεκτρικό δυναμικό  $\tilde{\varphi}$  θεωρείται μηδενικό στην πάνω και στην κάτω ( $x, z = \pm h/2$ ) επιφάνεια της δοκού (ηλεκτρικές συνθήκες κλειστού κυκλώματος) και για το λόγο αυτό, χρησιμοποιείται μια έκφραση Τύπου IV της συνάρτησης  $g(z) = 1 - (2z/h)^2$  που αντιστοιχεί σε συνθήκες κλειστού κυκλώματος. Για την επίλυση του στατικού προβλήματος, η δοκός υποβάλλεται σε ένα ομοιόμορφα καταναμημένο εξωτερικό φορτίο  $q_0 = -10\text{ KN/m}^2$  (όπου  $q^* = q_0/b$  για τα αριθμητικά αποτελέσματα). Το υλικό της πιεζοηλεκτρικής δοκού είναι το PZT-4, με πυκνότητα  $\rho = 7500\text{ kg/m}^3$ . Ο πίνακας των ελαστικών σταθερών του PZT-4 [146] είναι:

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 139 & 77.8 & 74.3 & 0 & 0 & 0 \\ 77.8 & 139 & 74.3 & 0 & 0 & 0 \\ 74.3 & 74.3 & 113 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30.6 \end{bmatrix} \text{ GPa} , \tag{8.146}$$

ο πίνακας των πιεζοηλεκτρικών σταθερών του PZT-4 είναι:

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 13.44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13.44 & 0 & 0 \\ -6.98 & -6.98 & 13.84 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{C}{m^2}, \quad (8.147)$$

και ο πίνακας των διηλεκτρικών σταθερών για το PZT-4 είναι:

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.00 & 0 & 0 \\ 0 & 6.00 & 0 \\ 0 & 0 & 5.47 \end{bmatrix} \times 10^{-9} \frac{C}{Vm}. \quad (8.148)$$

Για την ανάλυση ενός προβλήματος κάμψης πιεζοηλεκτρικής δοκού PZT-4, υπολογίζονται η εγκάρσια μετατόπιση  $w$  και το ηλεκτρικό δυναμικό  $\tilde{\phi}$  με τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης για πιεζοηλεκτρικές δοκούς με αναλογίες διαστάσεων  $S = 2, 5, 10, 20, 30$  και  $50$ . Τα αριθμητικά αποτελέσματα από τους υπολογισμούς της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  και του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\phi}$  παρουσιάζονται στους πίνακες 8.1 και 8.2.

**Πίνακας 8.1:** Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  στο  $x=L/2$  με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα πιεζοηλεκτρικών δοκών για  $S = 2, 5, 10, 20, 30, 50$ .

S	Μοντέλα	Εγκάρσια μετατόπιση $w$ [meters]		
		Γραμμική ( $m=1,2,\dots,31$ )	Μη γραμμική ( $k=1, m=1,2,3$ )	Μη γραμμική ( $k=1,2,3, m=1,2,3$ )
2	Model 1 (EBT)	$-1.3702721 \times 10^{-7}$	$-1.3698619 \times 10^{-7}$	$-1.3698619 \times 10^{-7}$
	Model 2 (TBT)	$-2.0234081 \times 10^{-7}$	$-2.0197886 \times 10^{-7}$	$-2.0197886 \times 10^{-7}$
	Model 3 (HSDT)	$-2.1339257 \times 10^{-7}$	$-2.1302836 \times 10^{-7}$	$-2.1302836 \times 10^{-7}$
	Model 4 (HSDT)	$-2.1339257 \times 10^{-7}$	$-2.1302836 \times 10^{-7}$	$-2.1302836 \times 10^{-7}$
	Model 5 (RBT)	$-2.1339257 \times 10^{-7}$	$-2.1302836 \times 10^{-7}$	$-2.1302836 \times 10^{-7}$
	Model 6 (SSDT)	$-2.1316625 \times 10^{-7}$	$-2.1280910 \times 10^{-7}$	$-2.1280910 \times 10^{-7}$
	Model 7 (HPSDT)	$-2.1340264 \times 10^{-7}$	$-2.1303785 \times 10^{-7}$	$-2.1303785 \times 10^{-7}$
	Model 8 (ESDT)	$-2.1244824 \times 10^{-7}$	$-2.1210477 \times 10^{-7}$	$-2.1210477 \times 10^{-7}$
	Exact Solution [146]	$-2.1595140 \times 10^{-7}$	–	–
5	Model 1 (EBT)	$-2.1123579 \times 10^{-6}$	$-2.1117535 \times 10^{-6}$	$-2.1117535 \times 10^{-6}$
	Model 2 (TBT)	$-2.2838183 \times 10^{-6}$	$-2.2822950 \times 10^{-6}$	$-2.2822950 \times 10^{-6}$
	Model 3 (HSDT)	$-2.3171837 \times 10^{-6}$	$-2.3155474 \times 10^{-6}$	$-2.3155474 \times 10^{-6}$
	Model 4 (HSDT)	$-2.3171837 \times 10^{-6}$	$-2.3155474 \times 10^{-6}$	$-2.3155474 \times 10^{-6}$
	Model 5 (RBT)	$-2.3171837 \times 10^{-6}$	$-2.3155474 \times 10^{-6}$	$-2.3155474 \times 10^{-6}$
	Model 6 (SSDT)	$-2.3168361 \times 10^{-6}$	$-2.3152061 \times 10^{-6}$	$-2.3152061 \times 10^{-6}$
	Model 7 (HPSDT)	$-2.3171863 \times 10^{-6}$	$-2.3155495 \times 10^{-6}$	$-2.3155495 \times 10^{-6}$
	Model 8 (ESDT)	$-2.3153342 \times 10^{-6}$	$-2.3137193 \times 10^{-6}$	$-2.3137193 \times 10^{-6}$
	Exact Solution [146]	$-2.3090882 \times 10^{-6}$	–	–
10	Model 1 (EBT)	$-1.6862466 \times 10^{-5}$	$-1.6857772 \times 10^{-5}$	$-1.6857772 \times 10^{-5}$
	Model 2 (TBT)	$-1.7208007 \times 10^{-5}$	$-1.7201292 \times 10^{-5}$	$-1.7201292 \times 10^{-5}$



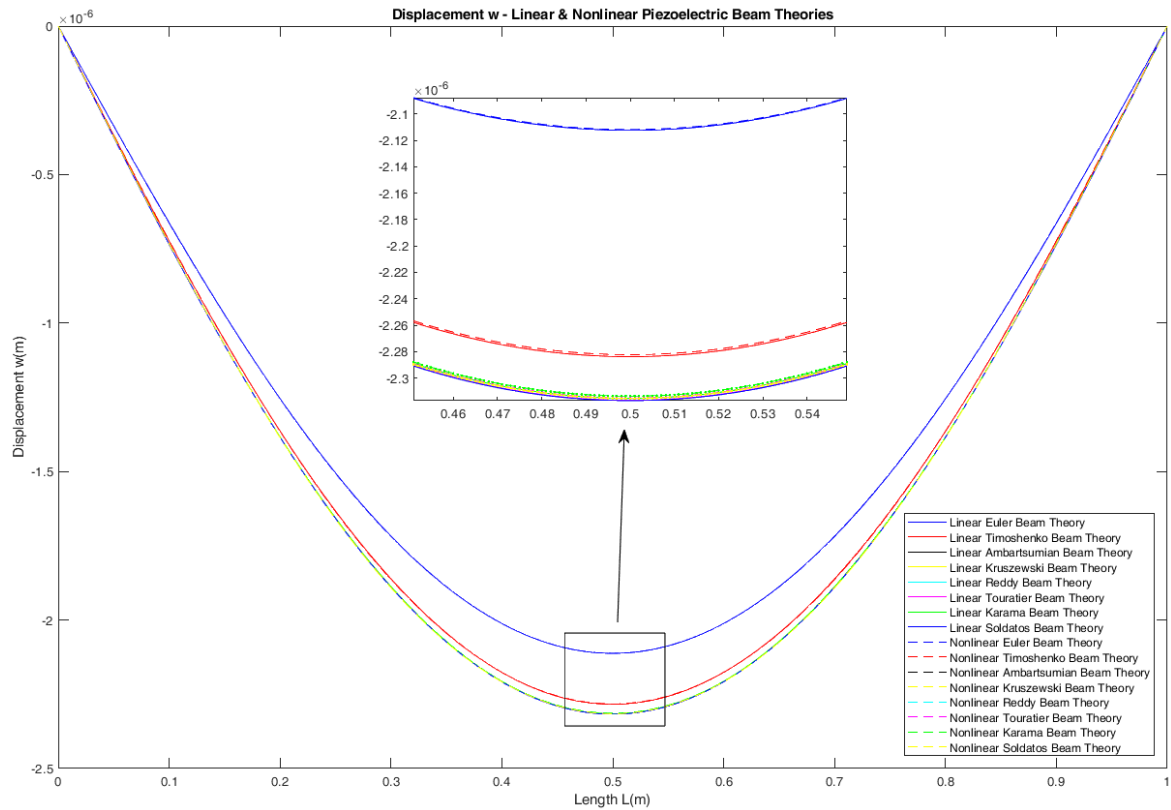
	Model 3 (HSDT)	$-1.7276652 \times 10^{-5}$	$-1.7269588 \times 10^{-5}$	$-1.7269588 \times 10^{-5}$
	Model 4 (HSDT)	$-1.7276652 \times 10^{-5}$	$-1.7269588 \times 10^{-5}$	$-1.7269588 \times 10^{-5}$
	Model 5 (RBT)	$-1.7276652 \times 10^{-5}$	$-1.7269588 \times 10^{-5}$	$-1.7269588 \times 10^{-5}$
	Model 6 (SSDT)	$-1.7276028 \times 10^{-5}$	$-1.7268970 \times 10^{-5}$	$-1.7268970 \times 10^{-5}$
	Model 7 (HPSDT)	$-1.7276650 \times 10^{-5}$	$-1.7269585 \times 10^{-5}$	$-1.7269585 \times 10^{-5}$
	Model 8 (ESDT)	$-1.7273118 \times 10^{-5}$	$-1.7266082 \times 10^{-5}$	$-1.7266082 \times 10^{-5}$
	Exact Solution [146]	$-1.7255694 \times 10^{-5}$	–	–
20	Model 1 (EBT)	$-1.3482577 \times 10^{-4}$	$-1.3478088 \times 10^{-4}$	$-1.3478088 \times 10^{-4}$
	Model 2 (TBT)	$-1.3551815 \times 10^{-4}$	$-1.3546894 \times 10^{-4}$	$-1.3546890 \times 10^{-4}$
	Model 3 (HSDT)	$-1.3565640 \times 10^{-4}$	$-1.3560634 \times 10^{-4}$	$-1.3560631 \times 10^{-4}$
	Model 4 (HSDT)	$-1.3565640 \times 10^{-4}$	$-1.3560634 \times 10^{-4}$	$-1.3560631 \times 10^{-4}$
	Model 5 (RBT)	$-1.3565640 \times 10^{-4}$	$-1.3560634 \times 10^{-4}$	$-1.3560631 \times 10^{-4}$
	Model 6 (SSDT)	$-1.3565519 \times 10^{-4}$	$-1.3560514 \times 10^{-4}$	$-1.3560510 \times 10^{-4}$
	Model 7 (HPSDT)	$-1.3565639 \times 10^{-4}$	$-1.3560633 \times 10^{-4}$	$-1.3560630 \times 10^{-4}$
	Model 8 (ESDT)	$-1.3564941 \times 10^{-4}$	$-1.3559940 \times 10^{-4}$	$-1.3559937 \times 10^{-4}$
	Exact Solution [146]	$-1.3561175 \times 10^{-4}$	–	–
30	Model 1 (EBT)	$-4.5499059 \times 10^{-4}$	$-4.5419587 \times 10^{-4}$	$-4.5419577 \times 10^{-4}$
	Model 2 (TBT)	$-4.5602950 \times 10^{-4}$	$-4.5522476 \times 10^{-4}$	$-4.5522208 \times 10^{-4}$
	Model 3 (HSDT)	$-4.5623713 \times 10^{-4}$	$-4.5542991 \times 10^{-4}$	$-4.5542721 \times 10^{-4}$
	Model 4 (HSDT)	$-4.5623713 \times 10^{-4}$	$-4.5542991 \times 10^{-4}$	$-4.5542721 \times 10^{-4}$
	Model 5 (RBT)	$-4.5623713 \times 10^{-4}$	$-4.5542991 \times 10^{-4}$	$-4.5542721 \times 10^{-4}$
	Model 6 (SSDT)	$-4.5623532 \times 10^{-4}$	$-4.5542813 \times 10^{-4}$	$-4.5542542 \times 10^{-4}$
	Model 7 (HPSDT)	$-4.5623712 \times 10^{-4}$	$-4.5542990 \times 10^{-4}$	$-4.5542720 \times 10^{-4}$
	Model 8 (ESDT)	$-4.5622668 \times 10^{-4}$	$-4.5541958 \times 10^{-4}$	$-4.5541688 \times 10^{-4}$
	Exact Solution [146]	$-4.5616859 \times 10^{-4}$	–	–
50	Model 1 (EBT)	-0.0021063278	-0.0019568593	-0.0019568382
	Model 2 (TBT)	-0.0021080595	-0.0019586969	-0.0019581263
	Model 3 (HSDT)	-0.0021084058	-0.0019589561	-0.0019583837
	Model 4 (HSDT)	-0.0021084058	-0.0019589561	-0.0019583837
	Model 5 (RBT)	-0.0021084058	-0.0019589561	-0.0019583837
	Model 6 (SSDT)	-0.0021084028	-0.0019589539	-0.0019583815
	Model 7 (HPSDT)	-0.0021084057	-0.0019589561	-0.0019583837
	Model 8 (ESDT)	-0.0021083884	-0.0019589431	-0.0019583708
	Exact Solution [146]	-0.0021082862	–	–

**Πίνακας 8.2:** Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  στο  $x = L/2$ ,  $z = 0$  με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα πιεζοηλεκτρικών δοκών για  $S = 2, 5, 10, 20, 30, 50$ .

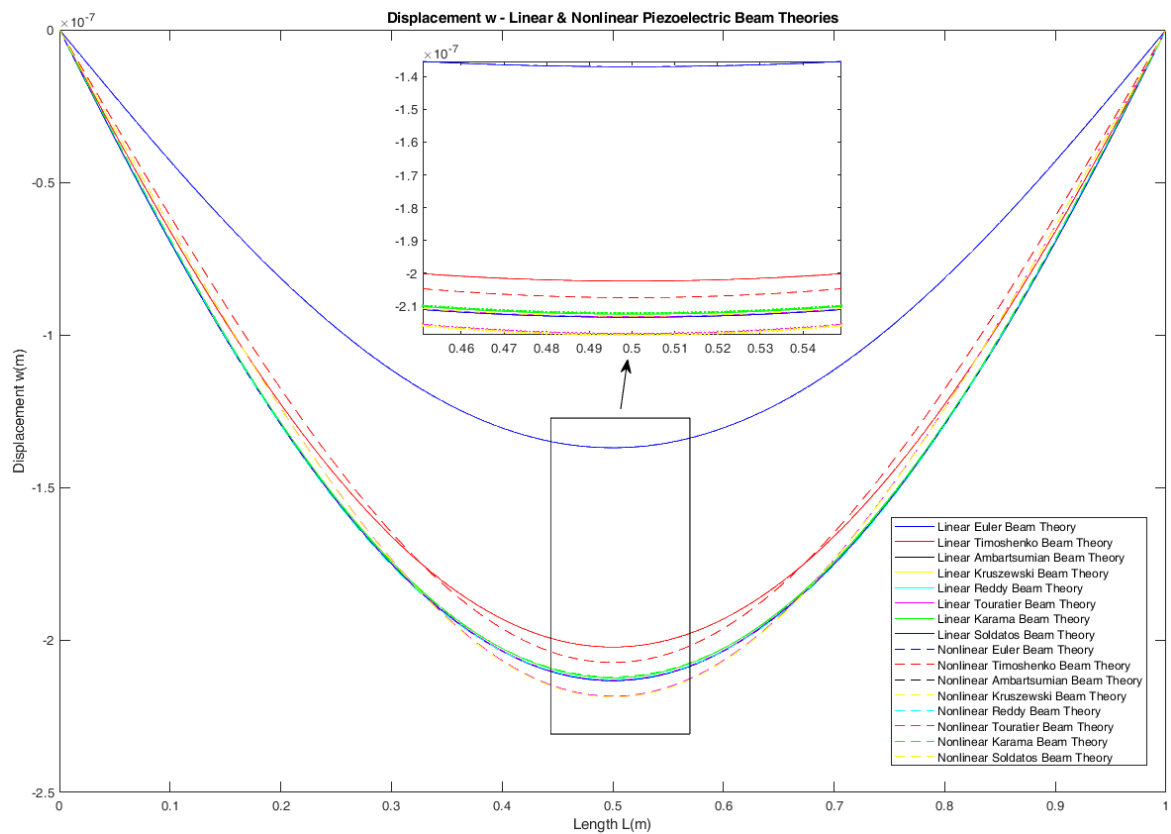
S	Μοντέλα	Ηλεκτρικό δυναμικό $\tilde{\varphi}$ [volts]		
		Γραμμική ( $m = 1, 2, \dots, 31$ )	Μη γραμμική ( $k = 1, m = 1, 2, 3$ )	Μη γραμμική ( $k = 1, 2, 3, m = 1, 2, 3$ )
2	Model 1 (EBT)	-39.52718290	-39.45510446	-39.45510446
	Model 2 (TBT)	-61.70181308	-60.94019766	-60.94019766
	Model 3 (HSDT)	-65.62936616	-64.86102707	-64.86102707
	Model 4 (HSDT)	-65.62936616	-64.86102707	-64.86102707
	Model 5 (RBT)	-65.62936616	-64.86102707	-64.86102707
	Model 6 (SSDT)	-65.56686962	-64.81346737	-64.81346737

	Model 7 (HPSDT)	-65.63146881	-64.86189708	-64.86189708
	Model 8 (ESDT)	-65.35405183	-64.62951338	-64.62951338
5	Model 1 (EBT)	-108.16655218	-107.68960153	-107.68960153
	Model 2 (TBT)	-117.76121657	-116.41659335	-116.41659334
	Model 3 (HSDT)	-119.67836886	-118.22230560	-118.22230559
	Model 4 (HSDT)	-119.67836886	-118.22230560	-118.22230559
	Model 5 (RBT)	-119.67836886	-118.22230560	-118.22230559
	Model 6 (SSDT)	-119.66180972	-118.21118708	-118.21118706
	Model 7 (HPSDT)	-119.67823009	-1.1822180588	-1.1822180586
	Model 8 (ESDT)	-119.58526026	-118.14798118	-118.14798117
10	Model 1 (EBT)	-219.08804887	-217.85398210	-217.85398209
	Model 2 (TBT)	-223.87839956	-222.03120947	-222.03120699
	Model 3 (HSDT)	-224.83983696	-222.88244608	-222.88244343
	Model 4 (HSDT)	-224.83983696	-222.88244608	-222.88244343
	Model 5 (RBT)	-224.83983696	-222.88244608	-222.88244343
	Model 6 (SSDT)	-224.83183424	-222.87609639	-222.87609373
	Model 7 (HPSDT)	-224.83974236	-222.88230143	-222.88229878
	Model 8 (ESDT)	-224.79403786	-222.84411053	-222.84410789
20	Model 1 (EBT)	-439.55956475	-436.87155585	-436.87155188
	Model 2 (TBT)	-441.93084072	-438.92427554	-438.92331642
	Model 3 (HSDT)	-442.41032677	-439.33702618	-439.33604577
	Model 4 (HSDT)	-442.41032677	-439.33702618	-439.33604577
	Model 5 (RBT)	-442.41032677	-439.33702618	-439.33604577
	Model 6 (SSDT)	-442.40636681	-439.33359865	-439.33261845
	Model 7 (HPSDT)	-442.41027723	-439.33698499	-439.33600458
	Model 8 (ESDT)	-442.38759322	-439.31740409	-439.31642481
30	Model 1 (EBT)	-659.72702432	-654.67803629	-654.67788477
	Model 2 (TBT)	-661.28127165	-656.06595541	-656.03130535
	Model 3 (HSDT)	-661.59982762	-656.33771641	-656.30271218
	Model 4 (HSDT)	-661.59982762	-656.33771641	-656.30271218
	Model 5 (RBT)	-661.59982762	-656.33771641	-656.30271218
	Model 6 (SSDT)	-661.59718357	-656.33540631	-656.30040532
	Model 7 (HPSDT)	-661.59979580	-656.33769374	-656.30268951
	Model 8 (ESDT)	-661.58468731	-656.32464069	-656.28965451
50	Model 1 (EBT)	-1099.8780293	-1013.4526730	-1013.4414196
	Model 2 (TBT)	-1100.7627713	-1016.6778352	-1014.0125435
	Model 3 (HSDT)	-1100.9528070	-1016.8016489	-1014.1268909
	Model 4 (HSDT)	-1100.9528070	-1016.8016489	-1014.1268909
	Model 5 (RBT)	-1100.9528070	-1016.8016489	-1014.1268909
	Model 6 (SSDT)	-1100.9512065	-1016.8005847	-1014.1259105
	Model 7 (HPSDT)	-1100.9527899	-1016.8016395	-1014.1268821
	Model 8 (ESDT)	-1100.9437063	-1016.7957010	-1014.1214157

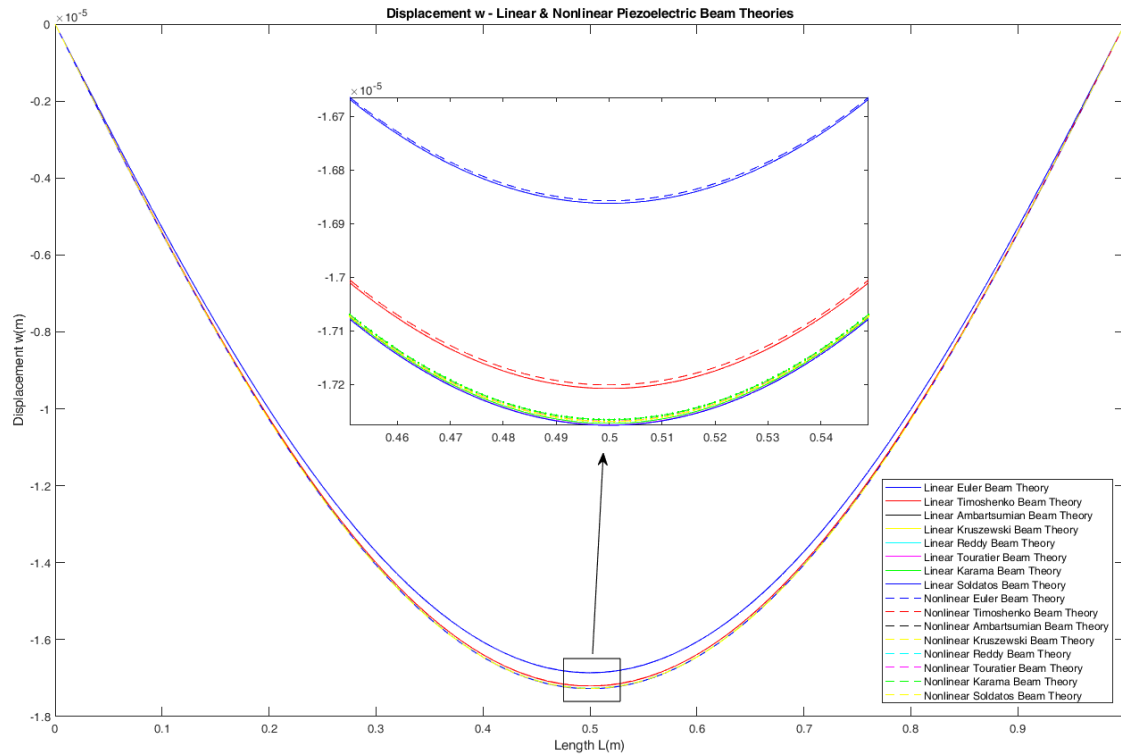
Η σύγκριση των αποτελεσμάτων της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  παρουσιάζεται στα σχήματα 8.3-8.8 και του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  στα σχήματα 8.9-8.14 για αναλογίες διαστάσεων  $S = 2, 5, 10, 20, 30$  και  $50$ .



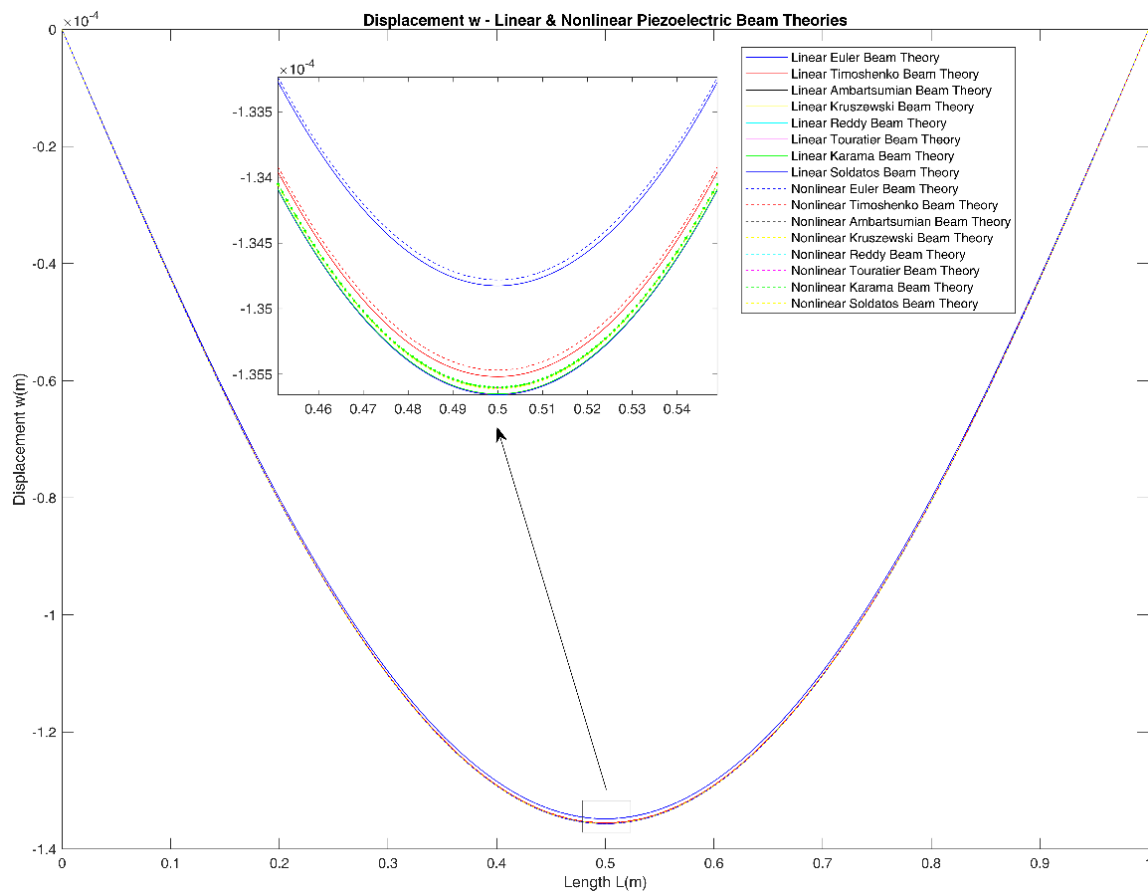
Σχήμα 8.3: Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=2$ .



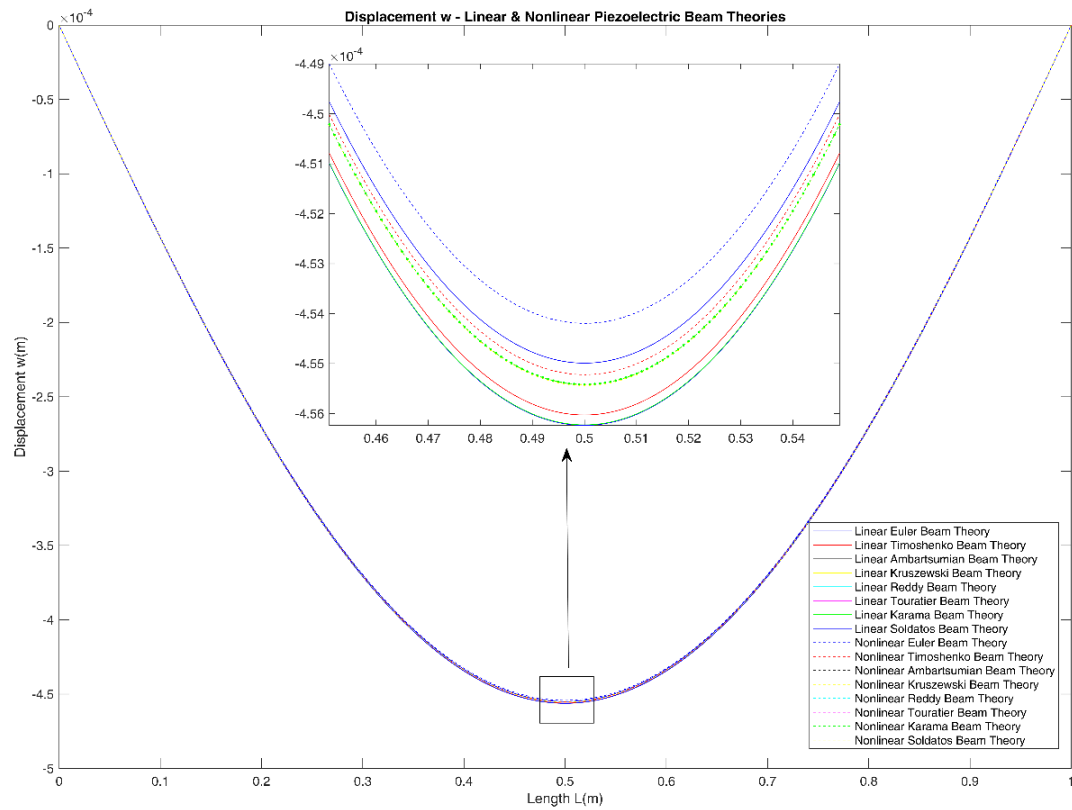
Σχήμα 8.4: Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=5$ .



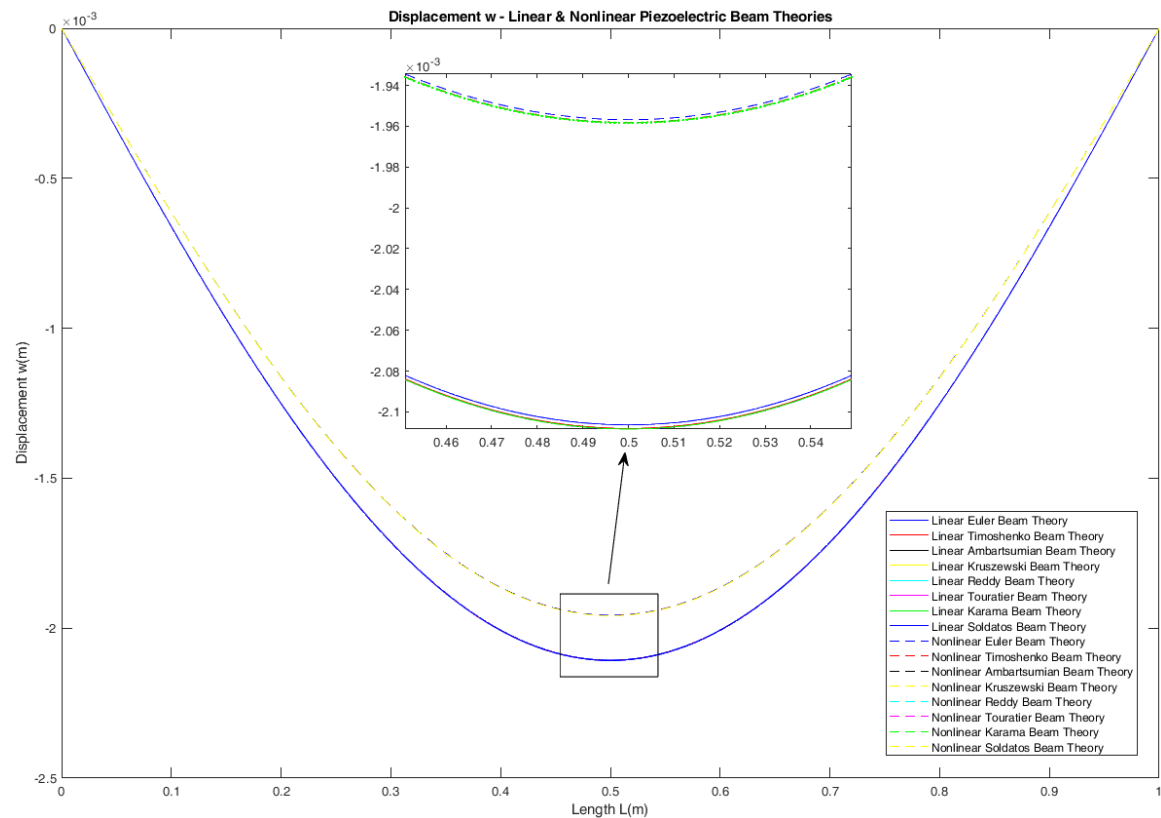
Σχήμα 8.5: Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=10$ .



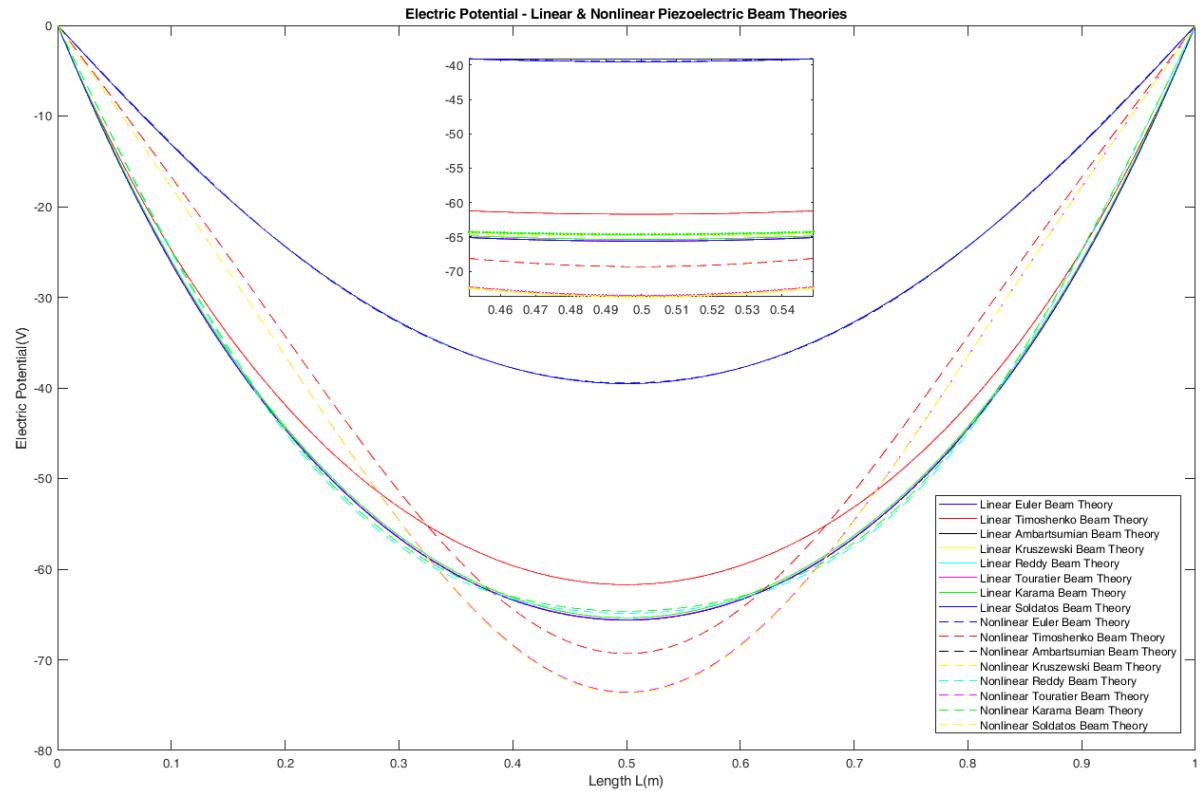
Σχήμα 8.6: Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=20$ .



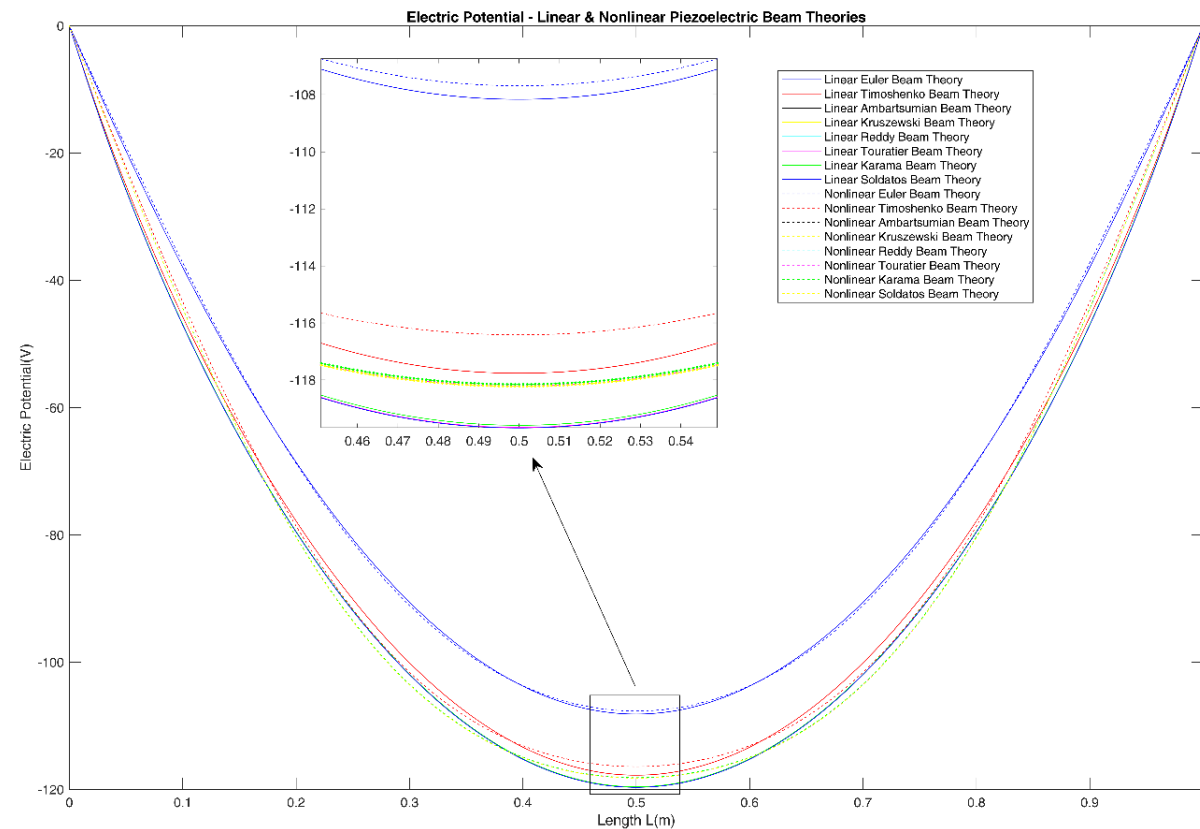
Σχήμα 8.7: Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=30$ .



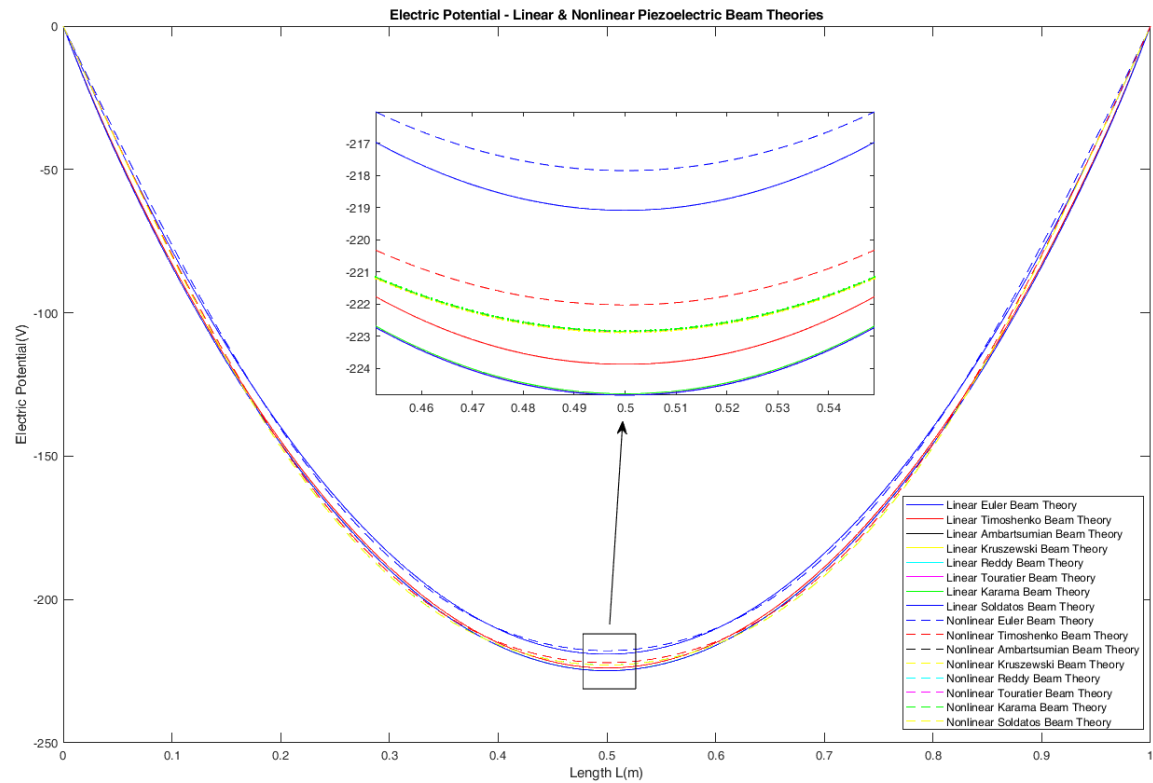
Σχήμα 8.8: Σύγκριση της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=50$ .



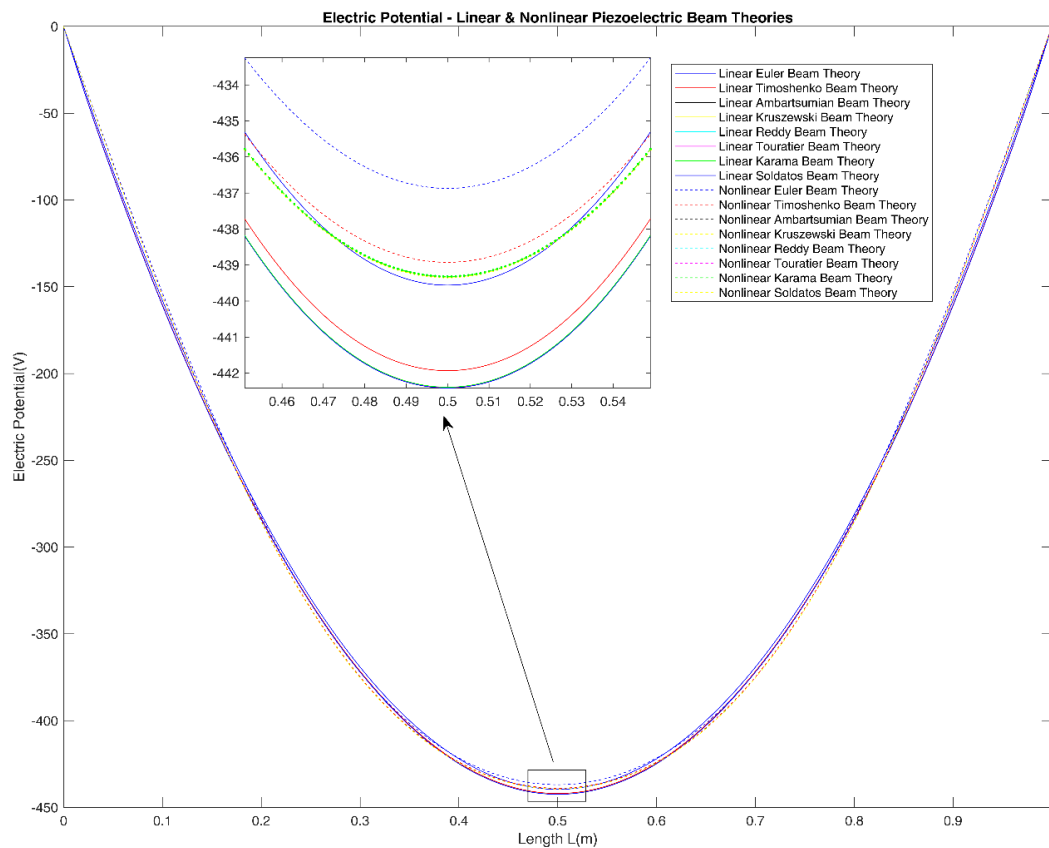
Σχήμα 8.9: Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\phi}$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=2$ .



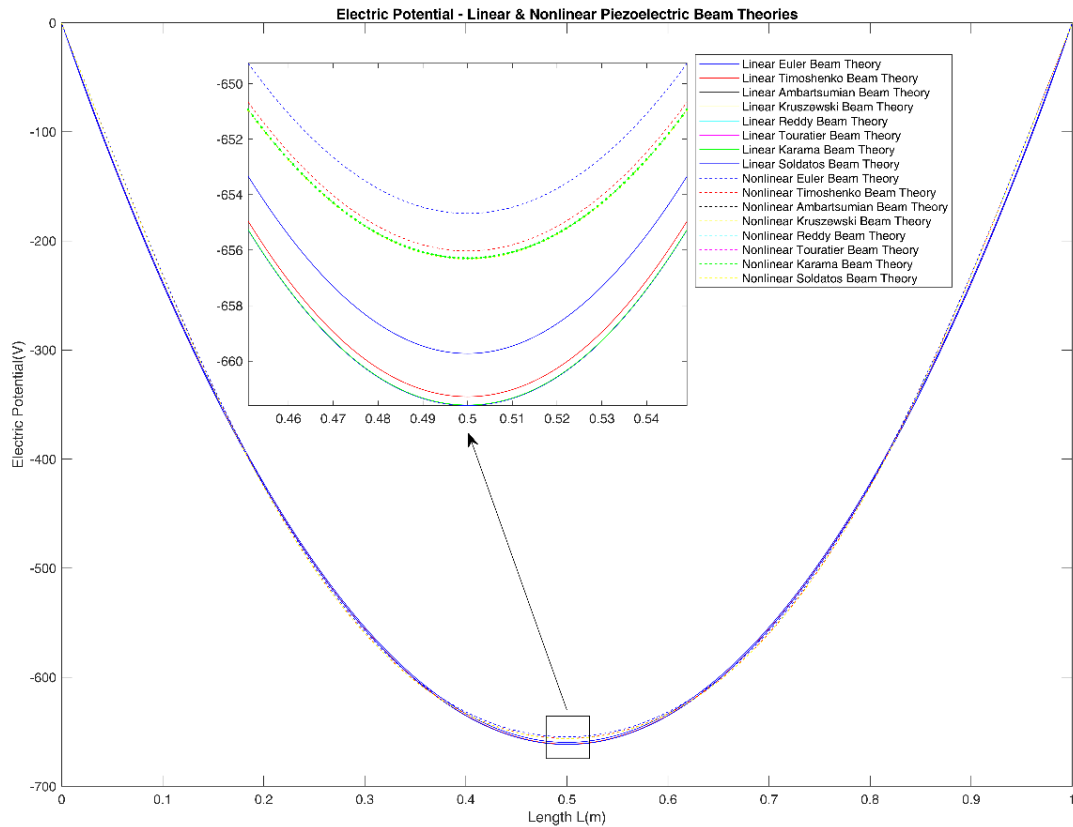
Σχήμα 8.10: Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\phi}$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=5$ .



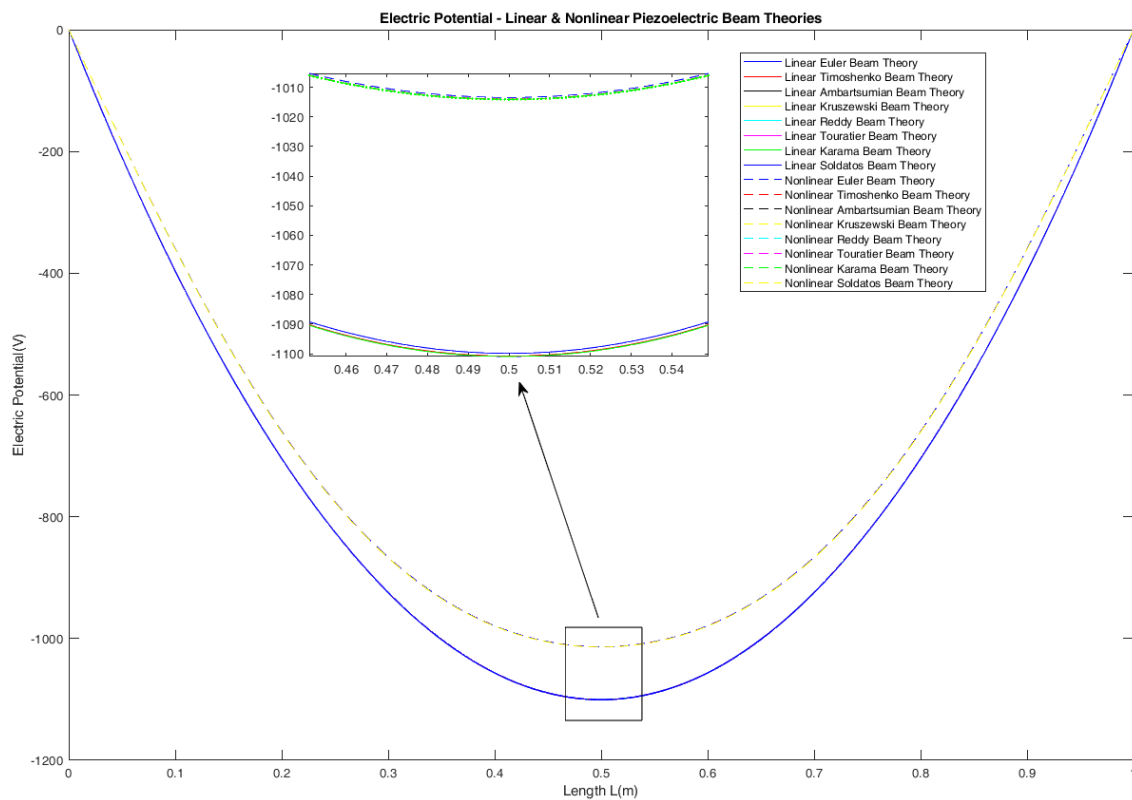
Σχήμα 8.11: Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\phi}$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=10$ .



Σχήμα 8.12: Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\phi}$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=20$ .



Σχήμα 8.13: Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=30$ .



Σχήμα 8.14: Σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  κατά το μήκος  $L$  πιεζοηλεκτρικών δοκών με γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα για αναλογία διαστάσεων  $S=50$ .



Τα αποτελέσματα που προέκυψαν για την εγκάρσια μετατόπιση  $w$  κατά το μήκος  $L$  της πιεζοηλεκτρικής δοκού παρουσιάζονται στον Πίνακα 8.1 και στα Σχήματα 8.3-8.8. Συμπεραίνεται ότι σε μικρές τιμές του λόγου μήκους προς πάχος της δοκού ( $S = 2, S = 5$ ) οι διατμητικές επιδράσεις είναι σημαντικές και προκύπτουν διαφορές μεταξύ των αποτελεσμάτων της κλασικής θεωρίας δοκών (EBT) και όλων των άλλων μοντέλων που περιλαμβάνουν διατμητικές επιδράσεις, είτε περιλαμβάνουν γεωμετρικούς μη γραμμικούς όρους είτε όχι. Παρατηρείται, επίσης, ότι σε μεγάλες τιμές της αναλογίας διαστάσεων της δοκού ( $S = 50$ ), οι διατμητικές επιδράσεις είναι αμελητέες και οι θεωρίες διάτμησης υψηλότερης τάξης τείνουν να προσεγγίζουν τα αποτελέσματα της κλασικής θεωρίας δοκών (EBT) είτε περιλαμβάνουν γεωμετρικούς μη γραμμικούς όρους είτε όχι. Ωστόσο, για μεγάλες τιμές του λόγου διαστάσεων της δοκού, όπου η επίδραση της γεωμετρικής μη γραμμικότητας είναι σημαντική, υπάρχουν διαφορές μεταξύ των αποτελεσμάτων των γραμμικών και μη γραμμικών μοντέλων. Για παράδειγμα, για αναλογία διαστάσεων  $S = 50$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.8, τα γραμμικά μοντέλα προβλέπουν την εγκάρσια μετατόπιση  $w \approx -0.002108m$  ενώ τα μη γραμμικά μοντέλα προβλέπουν  $w \approx -0.001958m$ .

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν για το ηλεκτρικό δυναμικό  $\tilde{\varphi}$  στο μήκος  $L$  της πιεζοηλεκτρικής δοκού παρουσιάζονται στον Πίνακα 8.2 και στα σχήματα 8.9-8.14. Συμπεραίνεται ότι σε μικρές τιμές του λόγου μήκους προς πάχος της δοκού ( $S = 2, S = 5$ ), όπου οι διατμητικές επιδράσεις είναι σημαντικές, η κλασική θεωρία δοκών (EBT) υποεκτιμά το ηλεκτρικό δυναμικό  $\tilde{\varphi}$  σε σύγκριση με τις τιμές που προκύπτουν από τα άλλα μοντέλα που περιλαμβάνουν τις διατμητικές επιδράσεις, είτε περιλαμβάνουν γεωμετρικούς μη γραμμικούς όρους είτε όχι. Παρατηρείται επίσης ότι σε μεγάλες τιμές της αναλογίας διαστάσεων της δοκού ( $S = 50$ ), όπου οι διατμητικές επιδράσεις είναι αμελητέες, όλα τα μοντέλα με διατμητικές θεωρίες υψηλότερης τάξης τείνουν να προσεγγίζουν τα αποτελέσματα της κλασικής θεωρίας δοκών (EBT) είτε περιλαμβάνουν γεωμετρικούς μη γραμμικούς όρους είτε όχι. Ωστόσο, για μεγάλες τιμές της αναλογίας διαστάσεων της δοκού, όπου η επίδραση της γεωμετρικής μη γραμμικότητας είναι σημαντική, όλα τα γραμμικά μοντέλα υπερεκτιμούν την τιμή του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$  σε σύγκριση με τις τιμές που προκύπτουν από όλα τα μη γραμμικά μοντέλα. Για παράδειγμα, για αναλογία διαστάσεων  $S = 50$ , τα γραμμικά μοντέλα προβλέπουν  $\tilde{\varphi} \approx -1100.95V$  ενώ τα μη γραμμικά μοντέλα προβλέπουν  $\tilde{\varphi} \approx -1014.12V$ .

Από τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 8.1 και στον Πίνακα 8.2 συμπεραίνεται ότι η αναλυτική επίλυση του μη γραμμικού προβλήματος με χρήση μόνο του πρώτου όρου ( $k=1$ ) του άπειρου αθροίσματος αποτελεί καλή προσέγγιση για τις τιμές της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  και του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$ .

Επίσης, από τα αριθμητικά αποτελέσματα πρέπει να παρατηρηθεί ότι τα διατμητικά φαινόμενα είναι πιο σημαντικά σε πιεζοηλεκτρικές δοκούς με μεγάλο πάχος ( $S \leq 10$ ), ενώ η γεωμετρική μη γραμμικότητα είναι σημαντική σε λεπτές πιεζοηλεκτρικές δοκούς ( $S \geq 20$ ). Για πιεζοηλεκτρικές δοκούς με λόγο διαστάσεων  $10 \leq S \leq 20$ , είναι απαραίτητη η χρήση μοντέλων που περιλαμβάνουν τόσο τα διατμητικά φαινόμενα όσο και τη γεωμετρική μη γραμμικότητα.

Από τους Πίνακες 8.1 και 8.2 και από τα διαγράμματα (Σχήματα 8.3-8.14), παρατηρείται ότι στο κέντρο της δοκού  $x = L/2$  και  $z = 0$  η εγκάρσια μετατόπιση  $w$  και το ηλεκτρικό δυναμικό  $\tilde{\varphi}$  είναι μέγιστα για όλα τα μη γραμμικά μοντέλα. Επίσης, καθώς αυξάνεται η αναλογία διαστάσεων  $S$ , αυξάνονται οι τιμές της εγκάρσιας μετατόπισης  $w$  και του ηλεκτρικού δυναμικού  $\tilde{\varphi}$ . Παρατηρείται, επίσης, πως τα γραμμικά μοντέλα χάνουν την ακρίβειά τους για αναλογίες διαστάσεων  $S > 10$  και παράγουν λανθασμένα αποτελέσματα. Συνεπώς, είναι απαραίτητη η χρήση μη γραμμικών μοντέλων.

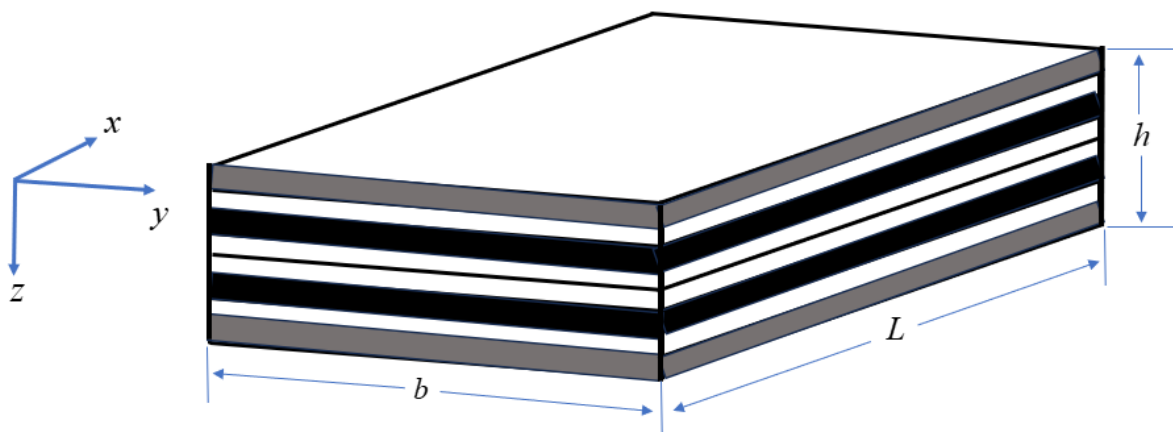
Σε αυτό το σημείο, για την καλύτερη κατανόηση των όρων γεωμετρικής μη γραμμικότητας και των φαινομένων διάτμησης επισημαίνονται τα εξής: τα φαινόμενα διάτμησης παρατηρούνται σε δοκούς με μεγάλο πάχος ( $S = 2, S = 5$ ) ενώ η γεωμετρική μη γραμμικότητα παρατηρείται σε λεπτές δοκούς ( $S \geq 20$ ). Ένα εμπειρικό όριο πάνω από το οποίο είναι απαραίτητο να συμπεριληφθούν οι όροι της γεωμετρικής μη γραμμικότητας είναι για αναλογίες διαστάσεων  $S > 15$ .

Η αναγκαιότητα χρήσης τεχνικών θεωριών διάτμησης ανώτερης τάξης παρατηρείται σε δοκούς με μεγάλο πάχος όπου κυριαρχούν τα φαινόμενα διάτμησης. Αντίθετα, σε δοκούς με μικρό πάχος, τα διατμητικά φαινόμενα είναι αμελητέα και οι HSDT έρχονται σε συμφωνία με τη θεωρία EBT. Από την άλλη πλευρά, η γεωμετρική μη γραμμικότητα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη όταν η εγκάρσια μετατόπιση  $w > 10\%$  του μήκους  $L$  της δοκού. Δηλαδή, σε δοκούς με μεγάλο πάχος ( $S = 2, S = 5$ ) με χρήση είτε γραμμικών είτε μη γραμμικών μοντέλων, τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι σχεδόν ίδια, συνεπώς η γεωμετρική μη γραμμικότητα έχει αμελητέα συμβολή. Αντίθετα, σε λεπτές δοκούς ( $S \leq 10$ ) η συμβολή του γεωμετρικά μη γραμμικού όρου είναι καθοριστική καθώς η εγκάρσια μετατόπιση  $w$  ξεπερνάει το 10% του μήκους  $L$  της δοκού και οι γραμμικές θεωρίες υπερεκτιμούν την εγκάρσια μετατόπιση και οι προσεγγίσεις είναι μη ρεαλιστικές.

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9****«Τεχνικές Θεωρίες Σύνθετων Πολυστρωματικών Δοκών»**

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης σε σύνθετες πολυστρωματικές δοκούς με γραμμικά ελαστικά και πιεζοηλεκτρικά στρώματα. Γενικά, οι πολυστρωματικές σύνθετες δομές χρησιμοποιούνται σε πολλές μηχανολογικές εφαρμογές, όπως η αεροδιαστημική, η αυτοκινητοβιομηχανία, η τεχνολογία οργάνων υγείας κλπ. Οι σύνθετες δομές είναι ένα από τα πιο σημαντικά δομικά στοιχεία που μελετώνται από πολλούς ερευνητές τις τελευταίες δεκαετίες.

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία [147, 148, 149, 150], χρησιμοποιούνται κυρίως δύο διαφορετικές προσεγγίσεις για τη μελέτη πολυστρωματικών σύνθετων δομών: οι θεωρίες ισοδύναμου μονού στρώματος και οι θεωρίες διακριτών στρωμάτων. Στις θεωρίες ισοδύναμου μονού στρώματος θεωρείται ότι οι πολυστρωματικές κατασκευές αποτελούνται από μία στρώση, ενώ στη δεύτερη περίπτωση κάθε στρώση λαμβάνεται υπόψη ξεχωριστά στην ανάλυση. Οι θεωρίες με βάση τη δεύτερη προσέγγιση απαιτούν πολυάριθμους αγνώστους για πολυστρωματικές δοκούς και είναι συχνά υπολογιστικά δαπανηρές ώστε να εξάγουν ακριβή αποτελέσματα. Ένα άλλο σημαντικό σημείο στη στατική και δυναμική ανάλυση των σύνθετων δοκών είναι οι παραδοχές παραμόρφωσης που χρησιμοποιούνται στη δυναμική και τη στατική ανάλυση. Οι θεωρίες παραμόρφωσης των δοκών μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες: θεωρίες που βασίζονται στην τάση και θεωρίες που βασίζονται στη μετατόπιση [148]. Στην παρούσα μελέτη αναπτύσσονται τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης βασισμένες στο πεδίο των μετατοπίσεων για σύνθετες πολυστρωματικές ελαστικές και πιεζοηλεκτρικές δοκούς.



**Σχήμα 9.1:** Σύνθετη πολυστρωματική δοκός.

## 9.1 Μοντελοποίηση σύνθετων γραμμικά ελαστικών πολυστρωματικών δοκών σε προβλήματα κάμψης

Σε αυτή την ενότητα παράγονται οι εξισώσεις κίνησης και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες που διέπουν σύνθετες πολυστρωματικές ελαστικές δοκούς σε κάμψη. Η πολυστρωματική δοκός έχει μήκος  $L$ , πλάτος  $b$  και πάχος  $h$  όπως φαίνεται στο σχήμα 9.1 και αποτελείται από  $k$  αριθμό γραμμικά ελαστικών ορθότροπων στρωμάτων.

### 9.1.1 Πεδίο μετατοπίσεων και πεδίο μηχανικών τροπών

Σε προβλήματα κάμψης σύνθετων πολυστρωματικών ελαστικών δοκών, το πεδίο μετατοπίσεων για διατμητικές θεωρίες ανώτερης τάξης έχει τη μορφή:

$$u_1 = u(x, z, t) = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f(z) \varphi(x, t), \quad (9.1)$$

$$u_2 = v(x, z, t) = 0, \quad (9.2)$$

$$u_3 = w(x, z, t) = w(x, t), \quad (9.3)$$

όπου  $u$  και  $w$  είναι οι μετατοπίσεις των υλικών σημείων στο  $xz$ - επίπεδο της δοκού, στην κατεύθυνση  $x$  και  $z$  αντίστοιχα και  $\varphi$  είναι η στροφή (rotation) μιας κάθετης στον άξονα  $y$  διατομής. Με χρήση των εξισώσεων 9.1 και 9.3, το πεδίο των μηχανικών τροπών μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (9.4)$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = f'(z) \varphi, \quad (9.5)$$

### 9.1.2 Καταστατικές σχέσεις

Η καταστατική σχέση που συνδέει το πεδίο των μηχανικών τάσεων με το πεδίο των μηχανικών τροπών σε μια σύνθετη πολυχρωματική δοκό με  $k$  στρώματα στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων  $(x', z')$  είναι:

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(k)} = \mathbf{C}^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}', \quad (9.6)$$

όπου:

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(k)} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(k)} & \tau_{13}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (9.7)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}'^{(k)} = [\varepsilon_{11} \quad \gamma_{13}] , \quad (9.8)$$

$$\mathbf{C}^{(k)} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & C_{55}^{(k)} \end{bmatrix} . \quad (9.9)$$

Οι ελαστικές σταθερές  $C_{11}^{(k)}$  και  $C_{55}^{(k)}$  [32] δίδονται από τις σχέσεις:

$$C_{11}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} , \quad (9.10)$$

$$C_{55}^{(k)} = G_{23}^{(k)} , \quad (9.11)$$

όπου  $E_1^{(k)}$  είναι η σταθερά ελαστικότητας,  $G_{23}^{(k)}$  είναι το μέτρο διάτμησης και  $\nu_{12}^{(k)}, \nu_{21}^{(k)}$  οι λόγοι Poisson. Επίσης, ισχύει η σχέση:  $\nu_{21}^{(k)} E_1^{(k)} = E_2^{(k)} \nu_{12}^{(k)}$ . Η καταστατική σχέση που συνδέει το πεδίο των μηχανικών τάσεων με το πεδίο των μηχανικών τροπών του  $k$  στρώματος στο ολικό σύστημα συντεταγμένων  $(x, z)$  είναι:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(k)} = \mathbf{Q}^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon} , \quad (9.12)$$

όπου  $\boldsymbol{\sigma}^{(k)}$  και  $\boldsymbol{\varepsilon}$  είναι τα πεδία των μηχανικών τάσεων και των μηχανικών τροπών, αντίστοιχα, και  $\mathbf{Q}^{(k)}$  ο μετασχηματισμένος πίνακας των ελαστικών σταθερών:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(k)} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(k)} & \tau_{xz}^{(k)} \end{bmatrix} , \quad (9.13)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xz} \end{bmatrix} , \quad (9.14)$$

$$\mathbf{Q}^{(k)} = \mathbf{T}^{(k)T} \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{T}^{(k)} , \quad (9.15)$$

όπου:

$$\mathbf{T}^{(k)} = \begin{bmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} , \quad (9.16)$$

με  $m = \cos \theta^{(k)}$  και  $\theta^{(k)}$  η γωνία που σχηματίζουν οι ίνες του  $k$  στρώματος με τον άξονα  $x$ . Με βάση τις σχέσεις (9.15) και (9.16), ο πίνακας  $\mathbf{Q}^{(k)}$  παίρνει τη μορφή :

$$\mathbf{Q}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & Q_{55}^{(k)} \end{bmatrix} . \quad (9.17)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (9.13), (9.14) και (9.17), η καταστατική σχέση (9.12) γράφεται:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(k)} \\ \tau_{xz}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & Q_{55}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \quad (9.18)$$

δηλαδή:

$$\sigma_{xx}^{(k)} = Q_{11}^{(k)} \varepsilon_{xx}, \quad (9.19)$$

$$\tau_{xz}^{(k)} = Q_{55}^{(k)} \gamma_{xz}, \quad (9.20)$$

όπου  $\sigma_{xx}^{(k)}$  είναι η διαμήκης ορθή τάση που είναι παράλληλη στον άξονα  $x$  και  $\tau_{xz}^{(k)}$  η εγκάρσια διατμητική τάση που είναι παράλληλη στον άξονα  $z$ .

### 9.1.3 Μεταβολική Αρχή Hamilton

Για την παραγωγή των εξισώσεων κίνησης και των αντίστοιχων συνοριακών συνθηκών που διέπουν μια σύνθετη ελαστική πολυστρωματική δοκό σε κάμψη, η αρχή Hamilton [124] διατυπώνεται ως:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (S + T - W_e) dt = 0, \quad (9.21)$$

όπου  $S$  είναι η ενέργεια παραμόρφωσης,  $T$  η κινητική ενέργεια και  $W_e$  το έργο των εξωτερικών δυνάμεων. Με χρήση του λογισμού των μεταβολών, οι εκφράσεις των δ-μεταβολών των ενεργειών και του έργου των εξωτερικών δυνάμεων εκφράζονται ως:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (S) dt = b \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left\{ \int_{x=0}^{x=L} \left[ \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} \left[ \sigma_{xx}^{(k)} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz}^{(k)} \delta \gamma_{xz} \right] dz \right] dx \right\} dt, \quad (9.22)$$

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (T) dt = b \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left\{ \int_{x=0}^{x=L} \left[ \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} \rho^{(k)} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right] dz \right] dx \right\} dt, \quad (9.23)$$

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (-W_e) dt = -\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left\{ \int_{x=0}^{x=L} q w(x, t) dx \right\} dt = -\int_{t=t_1}^{t=t_2} \left\{ \int_{x=0}^{x=L} [q \delta w] dx \right\} dt. \quad (9.24)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (9.22)-(9.24) στη σχέση (9.21), η μεταβολική αρχή Hamilton παίρνει τη μορφή:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \left\{ b \int_{x=0}^{x=L} \left( \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} \left[ \sigma_{xx}^{(k)} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz}^{(k)} \delta \gamma_{xz} \right] dz \right) dx \right. \\ \left. + b \int_{x=0}^{x=L} \left( \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} \rho^{(k)} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right] dz \right) dx - \int_{x=0}^{x=L} [q \delta w] dx \right\} dt = 0, \quad (9.25)$$

Μετά από σχετικές πράξεις, από τη σχέση (9.25), προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες που διέπουν μια σύνθετη πολυστρωματική γραμμικά ελαστική δοκό με  $k$  στρώματα.

#### 9.1.4 Εξισώσεις κίνησης και συνοριακές συνθήκες

*Γραμμικές εξισώσεις κίνησης σύνθετης πολυστρωματικής ελαστικής δοκού:*

$$A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - F_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + F_2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} + F_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad (9.26)$$

$$B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_0 \varphi - F_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + F_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (9.27)$$

*Συνοριακές συνθήκες στο  $x=0$  και  $x=L$ :*

$$-A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + F_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - F_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ή } w : \text{καθορισμένο}, \quad (9.28)$$

$$A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{ή } \frac{\partial w}{\partial x} : \text{καθορισμένο}, \quad (9.29)$$

$$-B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{ή } \varphi : \text{καθορισμένο}, \quad (9.30)$$

όπου οι συντελεστές  $A_0, B_0, C_0, D_0, F_0, F_1, F_2$  και  $F_3$  ορίζονται ως:

$$A_0 = \sum_{k=1}^n Q_{11}^{(k)} b \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} [z^2] dz = \sum_{k=1}^n Q_{11}^{(k)} b \left( \frac{z_{k+1}^3}{3} - \frac{z_k^3}{3} \right) \quad (9.31)$$

$$B_0 = \sum_{k=1}^n Q_{11}^{(k)} b \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} [zf(z)] dz, \quad (9.32)$$

$$C_0 = \sum_{k=1}^n Q_{11}^{(k)} b \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} [f^2(z)] dz, \quad (9.33)$$

$$D_0 = \sum_{k=1}^n Q_{55}^{(k)} b \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} [f'(z)]^2 dz, \quad (9.34)$$

$$F_0 = \rho b h = \sum_{k=1}^n b \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} [\rho^{(k)}] dz, \quad (9.35)$$

$$F_1 = \frac{\rho A_0}{Q_{11}} = \sum_{k=1}^n b \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} [\rho^{(k)} z^2] dz, \quad (9.36)$$

$$F_2 = \frac{\rho B_0}{Q_{11}} = \sum_{k=1}^n b \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} \left[ \rho^{(k)} z f'(z) \right] dz , \quad (9.37)$$

$$F_3 = \frac{\rho C_0}{Q_{11}} = \sum_{k=1}^n b \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} \left[ \rho^{(k)} f^2(z) \right] dz . \quad (9.38)$$

Οι εξισώσεις κίνησης (σχέσεις (9.26) και (9.27)) και οι συνοριακές συνθήκες (σχέσεις (9.28)-(9.30)) διέπουν συνολικά μια σύνθετη πολυστρωματική ελαστική δοκό με  $k$  στρώματα. Από τον υπολογισμό των συντελεστών (σχέσεις (9.31)-(9.38)) προκύπτουν οι σταθερές για όλα τα στρώματα μιας σύνθετης πολυστρωματικής ελαστικής δοκού για διάφορες τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης.

## 9.2 Μοντελοποίηση σύνθετων ελαστικών πολυστρωματικών δοκών με όρους γεωμετρικής μη γραμμικότητας

Για τη μοντελοποίηση προβλημάτων κάμψης σύνθετων πολυστρωματικών ελαστικών δοκών με  $k$  στρώματα, λαμβάνοντας υπόψη γεωμετρικές μη γραμμικότητες, το πεδίο των μετατοπίσεων δίδεται από τις σχέσεις (9.1)-(9.3). Το πεδίο των μηχανικών τροπών, με την προσθήκη όρων γεωμετρικής μη γραμμικότητας τύπου von Karman, έχει τη μορφή:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 , \quad (9.39)$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = f'(z) \varphi(x, t) . \quad (9.40)$$

Το πεδίο των μηχανικών τάσεων και ο μετασχηματισμένος πίνακας των ελαστικών σταθερών  $\mathbf{Q}^{(k)}$  δίδονται από τις σχέσεις (9.13) και (9.15). Οι καταστατικές σχέσεις που συνδέουν το πεδίο των μηχανικών τάσεων με το πεδίο των μηχανικών τροπών του  $k$ -στρώματος στο ολικό σύστημα συντεταγμένων  $(x, z)$  είναι:

$$\sigma_{xx}^{(k)} = Q_{11}^{(k)} \varepsilon_{xx} , \quad (9.41)$$

$$\tau_{xz}^{(k)} = Q_{55}^{(k)} \gamma_{xz} . \quad (9.42)$$

Εισάγοντας τις σχέσεις (9.39)-(9.42), στη μεταβολική αρχή Hamilton, όπως αυτή περιγράφεται από την σχέση (9.25), κατόπιν σχετικών πράξεων, προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες που διέπουν μια σύνθετη πολυστρωματική ελαστική δοκό με  $k$  στρώματα και όρους γεωμετρικής μη γραμμικότητας:



**Μη γραμμικές εξισώσεις κίνησης σύνθετης πολυστρωματικής ελαστικής δοκού:**

$$A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - \frac{3}{2} H_0 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - F_1 \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + F_2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial x} + F_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad (9.43)$$

$$B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_0 \varphi - F_2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} + F_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (9.44)$$

**Συνοριακές συνθήκες στο  $x=0$  και  $x=L$ :**

$$\frac{H_0}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 - A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + F_1 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} - F_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ή } w : \text{καθορισμένο}, \quad (9.45)$$

$$A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{ή } \frac{\partial w}{\partial x} : \text{καθορισμένο}, \quad (9.46)$$

$$C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ή } \varphi : \text{καθορισμένο}, \quad (9.47)$$

όπου οι συντελεστές  $A_0, B_0, C_0, D_0, F_0, F_1, F_2$  και  $F_3$  ορίζονται με τον ίδιο τρόπο, όπως στις σχέσεις (9.31)-(9.38), ενώ ο συντελεστής  $H_0$  ορίζεται ως:

$$H_0 = \sum_{k=1}^n b Q_{11}^{(k)} \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} [I] dz = \sum_{k=1}^n b Q_{11}^{(k)} (z_{k+1} - z_k). \quad (9.48)$$

Οι σχέσεις (9.43)-(9.47) (εξισώσεις κίνησης και συνοριακές συνθήκες) αποτελούν την πλήρη μαθηματική περιγραφή προβλημάτων κάμψης για μια σύνθετη πολυστρωματική ελαστική δοκό με  $k$  στρώματα χρησιμοποιώντας τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης και λαμβάνοντας υπόψη όρους γεωμετρικής μη γραμμικότητας τύπου von Karman.

### 9.3 Μοντελοποίηση σύνθετων πιεζοηλεκτρικών πολυστρωματικών δοκών

Σε αυτή την ενότητα παράγονται οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες που διέπουν σύνθετες πολυστρωματικές πιεζοηλεκτρικές δοκούς.

#### 9.3.1 Πεδίο μετατοπίσεων, πεδίο μηχανικών τροπών και ηλεκτρικό πεδίο

Η σύνθετη πολυστρωματική πιεζοηλεκτρική δοκός έχει μήκος  $L$ , πλάτος  $b$ , πάχος  $h$  και αποτελείται από  $k$  αριθμό πιεζοηλεκτρικών στρωμάτων (Σχήμα 9.1). Το πεδίο των μετατοπίσεων και το ηλεκτρικό δυναμικό για μια σύνθετη πολυστρωματική πιεζοηλεκτρική δοκό διατυπώνονται ως εξής:

$$u_1 = u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f(z) \varphi(x, t), \quad (9.49)$$

$$u_2 = v(x, y, z, t) = 0, \quad (9.50)$$

$$u_3 = w(x, y, z, t) = w(x, t), \quad (9.51)$$

$$\tilde{\varphi}(x, y, z, t) = \tilde{\varphi}(x, z, t) = g(z) \bar{\varphi}(x, t). \quad (9.52)$$

όπου  $u$  και  $w$  είναι η αξονική και η εγκάρσια μετατόπιση της μέσης γραμμής της δοκού στη  $x$  και  $z$  κατεύθυνση αντίστοιχα,  $\varphi$  είναι η στροφή μιας κάθετης διατομής της δοκού στον άξονα  $x$ ,  $\tilde{\varphi}$  είναι το ηλεκτρικό δυναμικό και  $t$  ο χρόνος. Η συνάρτηση  $g(z)$  περιγράφει την κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού κατά την κατεύθυνση του πάχους μέσα στην πιεζοηλεκτρική δοκό. Διάφορες μορφές της συνάρτησης  $g(z)$  παρατίθενται στον πίνακα 7.1.

Το πεδίο των μηχανικών τροπών έχει τη μορφή:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f(z) \varphi(x, t) \right] = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (9.53)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f(z) \varphi(x, t) \right) + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = f'(z) \varphi, \quad (9.54)$$

και το ηλεκτρικό πεδίο κατά τους άξονες  $x$ ,  $y$ ,  $z$  έχει τη μορφή:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -g(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}, \quad (9.55)$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad (9.56)$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial g(z)}{\partial z} \bar{\varphi}(x, t) = -g'(z) \bar{\varphi}(x, t). \quad (9.57)$$

### 9.3.2 Καταστατικές σχέσεις

Οι συνιστώσες του πεδίου των μηχανικών τάσεων  $\sigma_{xx}^{(k)}$ ,  $\tau_{xz}^{(k)}$  και οι συνιστώσες της ηλεκτρικής μετατόπισης  $D_x^{(k)}$  και  $D_z^{(k)}$  του  $k$  στρώματος για μια σύνθετη πολυστρωματική πιεζοηλεκτρική δοκό στο ολικό σύστημα συντεταγμένων  $(x, z)$  εκφράζονται ως:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(k)} \\ \tau_{xz}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & Q_{55}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \tilde{e}_{31}^{(k)} \\ e_{15}^{(k)} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_z \end{Bmatrix}, \quad (9.58)$$

$$\begin{Bmatrix} D_x^{(k)} \\ D_z^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e_{15}^{(k)} \\ \tilde{e}_{31}^{(k)} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & \tilde{\epsilon}_{33}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_z \end{Bmatrix}, \quad (9.59)$$

δηλαδή:

$$\sigma_{xx}^{(k)} = Q_{11}^{(k)} \varepsilon_{xx} - \tilde{e}_{31}^{(k)} E_z, \quad (9.60)$$

$$\tau_{xz}^{(k)} = Q_{55}^{(k)} \gamma_{xz} - e_{15}^{(k)} E_x, \quad (9.61)$$

$$D_x^{(k)} = e_{15}^{(k)} \gamma_{xz} + \epsilon_{11}^{(k)} E_x, \quad (9.62)$$

$$D_z^{(k)} = \tilde{e}_{31}^{(k)} \varepsilon_{xx} + \tilde{\epsilon}_{33}^{(k)} E_z. \quad (9.63)$$

### 9.3.3 Μεταβολική Αρχή Hamilton

Για την παραγωγή των εξισώσεων κίνησης και των αντίστοιχων συνοριακών συνθηκών που διέπουν μια σύνθετη γραμμικά πιεζοηλεκτρική πολυστρωματική δοκό με  $k$  στρώματα, η μεταβολική αρχή Hamilton [124] διατυπώνεται ως:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (T - H_e + W_e) dt = 0, \quad (9.64)$$

όπου  $T$  η κινητική ενέργεια,  $H_e$  είναι η ηλεκτρική ενθαλπία, και  $W_e$  το έργο των εξωτερικών δυνάμεων. Με χρήση του λογισμού των μεταβολών, οι εκφράσεις των δ-μεταβολών της κινητικής ενέργεια, της ηλεκτρικής ενθαλπείας και του έργου των εξωτερικών δυνάμεων εκφράζονται ως:

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (T) dt = b \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left\{ \int_{x=0}^{x=L} \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} \rho^{(k)} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right] dz \right\} dx \right\} dt, \quad (9.65)$$

$$\begin{aligned} \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (-H_e) dt = & - \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left\{ \int_{x=0}^{x=L} \left( \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} \left[ \sigma_{xx}^{(k)} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz}^{(k)} \delta \gamma_{xz} \right] dz \right) dx \right\} dt \\ & + \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left\{ \int_{x=0}^{x=L} \left( \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} \left[ \tilde{e}_{31}^{(k)} \delta (E_z \varepsilon_{xx}) + e_{15}^{(k)} \delta (E_x \gamma_{xz}) \right] dz \right) dx \right\} dt \\ & + \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left\{ \int_{x=0}^{x=L} \left( \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} \left[ \epsilon_{11}^{(k)} E_x \delta E_x + \tilde{\epsilon}_{33}^{(k)} E_z \delta E_z \right] dz \right) dx \right\} dt , \end{aligned} \quad (9.66)$$

$$\delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} (W_e) dt = \delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left\{ \int_{x=0}^{x=L} qw(x,t) dx \right\} dt = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left\{ \int_{x=0}^{x=L} [q \delta w] dx \right\} dt . \quad (9.67)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (9.65)-(9.67) στη σχέση (9.64), η μεταβολική αρχή Hamilton παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} & \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left\{ b \int_{x=0}^{x=L} \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} \rho^{(k)} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right] dz \right\} dx \right\} dt \\ & - \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left\{ \int_{x=0}^{x=L} \left( \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} \left[ \sigma_{xx}^{(k)} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz}^{(k)} \delta \gamma_{xz} \right] dz \right) dx \right\} dt \\ & + \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left\{ \int_{x=0}^{x=L} \left( \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} \left[ \tilde{e}_{31}^{(k)} \delta (E_z \varepsilon_{xx}) + e_{15}^{(k)} \delta (E_x \gamma_{xz}) \right] dz \right) dx \right\} dt \\ & + \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left\{ \int_{x=0}^{x=L} \left( \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} \left[ \epsilon_{11}^{(k)} E_x \delta E_x + \tilde{\epsilon}_{33}^{(k)} E_z \delta E_z \right] dz \right) dx \right\} dt \\ & + \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left\{ \int_{x=0}^{x=L} [q \delta w] dx \right\} dt = 0 , \end{aligned} \quad (9.68)$$

όπου  $\delta(\cdot)$  είναι ο πρώτος μεταβολικός τελεστής,  $[e]$  είναι ο πίνακας των πιεζοηλεκτρικών συντελεστών και  $[\epsilon]$  είναι ο πίνακας των διηλεκτρικών σταθερών.  $\{E\}$  είναι το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου και  $q$  είναι εξωτερικές φορτίσεις σε όλο το μήκος της σύνθετης πολυστρωματικής πιεζοηλεκτρικής δοκού με  $k$  στρώματα.

### 9.3.4 Εξισώσεις κίνησης και συνοριακές συνθήκες

Μετά από σχετικές πράξεις, από τη μεταβολική αρχή Hamilton (σχέση (9.68)), προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες που διέπουν μια σύνθετη πολυστρωματική πιεζοηλεκτρική δοκό με  $k$  στρώματα.

**Γραμμικές εξισώσεις κίνησης σύνθετης πολυστρωματικής πιεζοηλεκτρικής δοκού:**

$$A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - F_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + F_2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} + F_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - K_0 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} = q, \quad (9.69)$$

$$B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_0 \varphi - F_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + F_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - L_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + N_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0, \quad (9.70)$$

$$-K_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + L_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - N_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_0 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} - M_0 \bar{\varphi} = 0. \quad (9.71)$$

**Συνοριακές συνθήκες στο  $x=0$  και  $x=L$ :**

$$-A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + F_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - F_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + K_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0 \text{ ή } w : \text{καθορισμένο}, \quad (9.72)$$

$$A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - K_0 \bar{\varphi} = 0 \quad \text{ή } \frac{\partial w}{\partial x} : \text{καθορισμένο}, \quad (9.73)$$

$$-B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + L_0 \bar{\varphi} = 0 \quad \text{ή } \varphi : \text{καθορισμένο}, \quad (9.74)$$

$$-P_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + N_0 \varphi = 0 \quad \text{ή } \bar{\varphi} : \text{καθορισμένο}, \quad (9.75)$$

όπου οι συντελεστές  $A_0, B_0, C_0, D_0, F_0, F_1, F_2, F_3$  ορίζονται με τον ίδιο τρόπο, όπως στις σχέσεις (9.31)-(9.38), ενώ οι συντελεστές  $K_0, L_0, N_0, P_0$  και  $M_0$  ορίζονται ως:

$$K_0 = \sum_{k=1}^n b \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} \left[ e_{31}^{(k)} z g'(z) \right] dz, \quad (9.76)$$

$$L_0 = \sum_{k=1}^n b \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} \left[ e_{31}^{(k)} f(z) g'(z) \right] dz, \quad (9.77)$$

$$N_0 = \sum_{k=1}^n b \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} \left[ e_{15}^{(k)} g(z) f'(z) \right] dz, \quad (9.78)$$

$$P_0 = \sum_{k=1}^n b \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} \left[ \epsilon_{11}^{(k)} [g(z)]^2 \right] dz, \quad (9.79)$$

$$M_0 = \sum_{k=1}^n b \int_{z=z_k}^{z=z_{k+1}} \left[ \zeta_{33}^{(k)} [g'(z)]^2 \right] dz. \quad (9.80)$$

Οι σχέσεις (9.69)-(9.75) (εξισώσεις κίνησης και συνοριακές συνθήκες) αποτελούν την πλήρη μαθηματική περιγραφή προβλημάτων κάμψης για μια σύνθετη πολυστρωματική πιεζοηλεκτρική δοκό με  $k$  στρώματα, χρησιμοποιώντας τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης.

#### 9.4 Μοντελοποίηση σύνθετων πιεζοηλεκτρικών πολυστρωματικών δοκών με γεωμετρική μη γραμμικότητα

Για τη μοντελοποίηση προβλημάτων κάμψης σύνθετων πολυστρωματικών πιεζοηλεκτρικών δοκών με  $k$  στρώματα, λαμβάνοντας υπόψη γεωμετρικές μη γραμμικότητες, το πεδίο των μετατοπίσεων και το ηλεκτρικό δυναμικό δίδονται από τις σχέσεις (9.49)-(9.52). Η σύνθετη πολυστρωματική πιεζοηλεκτρική δοκός έχει μήκος  $L$ , πλάτος  $b$ , πάχος  $h$  και αποτελείται από  $k$  αριθμό πιεζοηλεκτρικών στρωμάτων όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.1. Το πεδίο των μηχανικών τροπών, με την προσθήκη όρων γεωμετρικής μη γραμμικότητας τύπου von Karman, έχει τη μορφή:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (9.81)$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = f'(z) \varphi(x, t). \quad (9.82)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο κατά τους άξονες  $x$ ,  $y$ ,  $z$  δίδεται από τις σχέσεις (9.55)-(9.57). Οι συνιστώσες του πεδίου των μηχανικών τάσεων  $\sigma_{xx}^{(k)}$ ,  $\tau_{xz}^{(k)}$  και οι συνιστώσες της ηλεκτρικής μετατόπισης  $D_x^{(k)}$  και  $D_z^{(k)}$  του  $k$ -στρώματος για μια σύνθετη πολυστρωματική πιεζοηλεκτρική δοκό στο ολικό σύστημα συντεταγμένων  $(x, z)$  δίδονται από τις σχέσεις (9.58) και (9.59) και οι καταστατικές σχέσεις που συνδέουν το πεδίο των μηχανικών τάσεων με το πεδίο των μηχανικών τροπών του  $k$ -στρώματος στο ολικό σύστημα συντεταγμένων  $(x, z)$  είναι:

$$\sigma_{xx}^{(k)} = Q_{11}^{(k)} \varepsilon_{xx} - \tilde{e}_{31}^{(k)} E_z, \quad (9.83)$$

$$\tau_{xz}^{(k)} = Q_{55}^{(k)} \gamma_{xz} - e_{15}^{(k)} E_x, \quad (9.84)$$

$$D_x^{(k)} = e_{15}^{(k)} \gamma_{xz} + \epsilon_{11}^{(k)} E_x, \quad (9.85)$$

$$D_z^{(k)} = \tilde{e}_{31}^{(k)} \varepsilon_{xx} + \tilde{\epsilon}_{33}^{(k)} E_z. \quad (9.86)$$

Εισάγοντας τις σχέσεις (9.81)-(9.86), στη μεταβολική αρχή Hamilton, όπως αυτή περιγράφεται από την σχέση (9.64), κατόπιν σχετικών πράξεων, προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες που διέπουν μια σύνθετη πολυστρωματική πιεζοηλεκτρική δοκό με  $k$  στρώματα και όρους γεωμετρικής μη γραμμικότητας:

**Μη Γραμμικές Εξισώσεις κίνησης σύνθετης πολυστρωματικής πιεζοηλεκτρικής δοκού:**

$$A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - \frac{3}{2} H_0 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - F_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + F_2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} + F_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - K_0 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} = q , \quad (9.87)$$

$$B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_0 \varphi - F_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + F_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - L_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + N_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0 , \quad (9.88)$$

$$-K_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + L_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - N_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_0 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} - M_0 \bar{\varphi} = 0 . \quad (9.89)$$

**Συνοριακές συνθήκες στο  $x=0$  και  $x=L$ :**

$$-A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} H_0 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 + F_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - F_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + K_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = 0 \quad (9.90)$$

ή  $w$ : καθορισμένο ,

$$A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - K_0 \bar{\varphi} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial w}{\partial x} : \text{καθορισμένο} , \quad (9.91)$$

$$-B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + L_0 \bar{\varphi} = 0 \quad \text{ή} \quad \varphi : \text{καθορισμένο} , \quad (9.92)$$

$$-P_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + N_0 \varphi = 0 \quad \text{ή} \quad \bar{\varphi} : \text{καθορισμένο} , \quad (9.93)$$

όπου οι συντελεστές  $A_0, B_0, C_0, D_0, F_0, F_1, F_2, F_3$  και  $H_0$  ορίζονται με τον ίδιο τρόπο, όπως στις σχέσεις (9.31)-(9.38) και (9.48) και οι συντελεστές  $K_0, L_0, N_0, P_0$  και  $M_0$  ορίζονται με τον ίδιο τρόπο, όπως στις σχέσεις (9.76)-(9.80).

Οι σχέσεις (9.87)-(9.93) (εξισώσεις κίνησης και συνοριακές συνθήκες) αποτελούν την πλήρη μαθηματική περιγραφή προβλημάτων κάμψης για μια σύνθετη πολυστρωματική πιεζοηλεκτρική δοκό με  $k$  στρώματα χρησιμοποιώντας τεχνικές θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης και λαμβάνοντας υπόψη όρους γεωμετρικής μη γραμμικότητας τύπου von Karman.

## ***Γ. ΜΕΡΟΣ***

### ***ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ***

### ***ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ***



## Συμπεράσματα

Στην παρούσα διατριβή έγινε μελέτη προβλημάτων κάμψης γραμμικά ελαστικών, πιεζοηλεκτρικών και σύνθετων πολυστρωματικών δοκών με χρήση θεωριών διάτμησης ανώτερης τάξης και όρων γεωμετρικής μη γραμμικότητας τύπου von Karman.

Έγινε ομαδοποίηση των θεωριών διάτμησης ανώτερης τάξης για ελαστικές και πιεζοηλεκτρικές δοκούς. Με βάση τα παραγόμενα μοντέλα, επιλύθηκαν προβλήματα κάμψης και ελεύθερων ταλαντώσεων για ελαστικές και πιεζοηλεκτρικές δοκούς και έγινε σύγκριση των παραγόμενων αποτελεσμάτων με αποτελέσματα από τη βιβλιογραφία. Τα παραγόμενα μοντέλα στη συνέχεια επεκτάθηκαν περιλαμβάνοντας όρους γεωμετρικής μη γραμμικότητας τύπου von Karman ώστε να είναι κατάλληλα για τη μελέτη προβλημάτων κάμψης ελαστικών και πιεζοηλεκτρικών δοκών με μεγάλες μετατοπίσεις. Με βάση τα παραγόμενα μοντέλα, επιλύθηκαν προβλήματα κάμψης ελαστικών και πιεζοηλεκτρικών δοκών και έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων. Τέλος, έγινε παραγωγή και ομαδοποίηση γραμμικών και μη γραμμικών μοντέλων σύνθετων ελαστικών και πιεζοηλεκτρικών πολυστρωματικών δοκών που λαμβάνουν υπόψη θεωρίες διάτμησης ανώτερης τάξης και όρους γεωμετρικής μη γραμμικότητας τύπου von Karman.

Από τη μελέτη και τη σύγκριση των σχετικών αριθμητικών αποτελεσμάτων προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

1. Η επίδραση της διάτμησης είναι μεγάλη στην περίπτωση ελαστικών και πιεζοηλεκτρικών δοκών με μεγάλο πάχος ( $S \leq 10$ ) όπου τα διατμητικά φαινόμενα είναι σημαντικά και σε τέτοια προβλήματα απαιτούνται μοντέλα που περιλαμβάνουν όρους διατμητικής παραμόρφωσης ανώτερης τάξης.
2. Σε ελαστικές και πιεζοηλεκτρικές δοκούς με μικρή αναλογία διαστάσεων μήκους-πάχους ( $S \leq 10$ ), οι τιμές της εγκάρσιας μετατόπισης και του ηλεκτρικού δυναμικού είναι σχεδόν ίδιες για γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα και η γεωμετρική μη γραμμικότητα δεν είναι σημαντική.
3. Η γεωμετρική μη γραμμικότητα είναι σημαντική στην περίπτωση λεπτών ελαστικών και πιεζοηλεκτρικών δοκών ( $S \geq 20$ ) και απαιτούνται μη-γραμμικά μοντέλα που περιλαμβάνουν όρους γεωμετρικής μη-γραμμικότητας τύπου-von Kármán. Η χρήση γραμμικών και μη γραμμικών μοντέλων σε αυτή την περιοχή, οδηγεί σε αποτελέσματα που παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές
4. Σε ελαστικές και πιεζοηλεκτρικές δοκούς με μεγάλες τιμές αναλογίας διαστάσεων ( $S \geq 20$ ), οι διατμητικές επιδράσεις είναι αμελητέες και τα διατμητικά μοντέλα υψηλότερης τάξης τείνουν να προσεγγίζουν τα αποτελέσματα της κλασικής θεωρίας δοκών (EBT).
5. Σε ελαστικές και πιεζοηλεκτρικές δοκούς με λόγο διαστάσεων  $10 \leq S \leq 20$ , θα πρέπει να χρησιμοποιούνται μοντέλα που περιλαμβάνουν τόσο τις διατμητικές επιδράσεις όσο και τη γεωμετρική μη γραμμικότητα τύπου von Kármán.

## ***Προτάσεις για μελλοντική έρευνα***

Η ενοποιημένη θεωρία διατμητικής παραμόρφωσης μπορεί να συμβάλει στον ακριβέστερο σχεδιασμό σύνθετων πιεζοηλεκτρικών αισθητήρων και ενεργοποιητών για διάφορες ηλεκτρομηχανικές εφαρμογές. Οι εξισώσεις και τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην παρούσα μελέτη μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μοντελοποίηση και τον ακριβή σχεδιασμό διατάξεων που βασίζονται σε πιεζοηλεκτρικές δομές. Για παράδειγμα, οι συσκευές συγκομιδής ενέργειας βασίζονται στην ταλάντωση σύνθετων πιεζοηλεκτρικών δοκών με μεγάλες μετατοπίσεις με σκοπό τη μέγιστη παραγωγή ενέργειας. Επίσης, πολλές συσκευές που βασίζονται σε πιεζοηλεκτρικές δομές χρησιμοποιούνται στην ιατρική τεχνολογία (όπως για παράδειγμα στεφανιαία stents, βηματοδότες κ.α.) όπου απαιτούνται ακριβείς μελέτες και σχεδιασμοί.

Από τη παρούσα μελέτη, κρίνεται απαραίτητη και αναγκαία η μελέτη προβλημάτων στις παρακάτω κατευθύνσεις:

α) επίλυση προβλημάτων κάμψης και ταλάντωσης πιεζοηλεκτρικών δοκών με γεωμετρική μη γραμμικότητα τύπου von Karman με συνοριακές συνθήκες όπως clamped-clamped και clamped-free,

β) επίλυση προβλημάτων κάμψης πιεζοηλεκτρικών δοκών με διατμητικές θεωρίες ανώτερης τάξης και όρους γεωμετρικής μη γραμμικότητας τύπου von Karman με χρήση της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων,

γ) μελέτη της επίδραση των φαινομένων διάτμησης και της γεωμετρικής μη γραμμικότητας στην ανάλυση ιδιοσυχνοτήτων διαφόρων πιεζοηλεκτρικών δομών,

δ) επέκταση των παραγόμενων μοντέλων και επίλυση προβλημάτων κάμψης πιεζοηλεκτρικών πλακών (2-D) και κελυφών (3-D),

ε) ανάπτυξη αντίστοιχων μοντέλων για τη μελέτη των θερμικών επιδράσεων σε προβλήματα κάμψης στη περιοχή της θερμο-ηλεκτροελαστικότητας,

στ) μελέτη προβλημάτων σε δομές μικρο- και νανοκλίμακας λαμβάνοντας υπόψη φαινόμενα κλίμακας (size effects) και

ζ) μελέτη προβλημάτων για υλικά με διαβαθμισμένες ιδιότητες (functionally graded materials).

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

- [1] Pagano, N. J., (1970) Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, *Journal of Composite Materials*, vol. 4, pp. 20-34.
- [2] Noor, A. K., (1973) Free vibrations of multilayered composite plates, *AIAA journal*, vol. 11 pp. 1038-1039.
- [3] Noor, A. K., (1975) Stability of multilayered composite plates, *Fibre Science and Technology*, vol. 8, pp. 81-89.
- [4] Swaminathan, K., Naveenkumar, D., Zenkour A. and Carrera, E., (2015) Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates—A state-of-the-art review, *Composite Structures*, vol. 120, pp. 10-31.
- [5] Kirchhoff, G. (1850). *Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe*, *J. Fuer die Reine und Angewandte Mathematik*, vol.49, pp. 51-88.
- [6] Ballarini, R. (2003). The Da Vinci - Euler-Bernoulli Beam Theory? *ME Magazine*.
- [7] Reti, L. (1974). *The Unknown Leonardo*.
- [8] Rao, J., S. (2011). *History of Rotating Machinery Dynamics*.
- [9] Truesdell, C. (1953). *Timoshenko's History of Strength of Materials*.
- [10] Mariotte, E. (1686). *Traits du mouvement des eaux*.
- [11] Leibniz, G. (1684) *Demonstrationes novae de Resistentia solidorum*, *Acta Eruditorum Lipsiae*, p. 319.
- [12] Varignon, P. (1702) *De la Resistance des Solides en general pour tout ce qu'on peut faire d'hypotheses touchant la force ou la tenacite des Fibres des Corps a rompre; Et en particulier pour les hypotheses de Galilee & de M. Mariotte*, *Memoires de l'Academie*, Paris, p. 66.
- [13] Bernoulli, Jacob (1694) *Curvatura Laminae Elasticae*, *Acta Eruditorum*, Lipsiae.
- [14] Bernoulli, Johann (1724) *Discours sur les loix de la communication du mouvement*, chapters 1–3, Prize Essay, Paris.
- [15] Bernoulli, Daniel (1751) *De vibrationibus et sono laminarum elasticarum commentationes physico-geometricae*, *Commentari Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. T.13 ad annum 1741 p. 43. p. 105.
- [16] Truesdell, C. (1960). *The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638–1788*.
- [17] Timoshenko, S. (1921). On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section, *Philosophical Magazine*, pp.744.
- [18] Cowper, G. (1966). The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 33, 335–340.
- [19] Cowper, G. (1968). On the accuracy of Timoshenko's beam theory, *Journal of Engineering Mechanics* Vol. 6, 1447–1453.
- [20] Han, S., Benaroya, H., and Wei, T. (1999). Dynamics of Transversely Vibrating Beams using four Engineering Theories, *Journal of Sound and Vibration*, vol.225, 935-988.
- [21] Tran, V. L., (2006) *Isogeometric Analysis for Functionally Graded Plates Using Higher Order Shear Deformation Theory*, PhD Thesis.
- [22] Sayyad, A. S., (2011) Comparison of various shear deformation theories for the free vibration of thick isotropic beams, *International Journal of Civil and Structural Engineering*, vol.2, No.1, 85–97.
- [23] Sayyad, A. S., (2011) Comparison of various refined beam theories for the bending and free vibration analysis of thick beams, *Applied and Computational Mechanics*, vol.5, 85–97.

- [24] Brischetto, S. and Carrera, E., (2008) A Survey with Numerical Assessment of classical and refined theories for the analysis of sandwich plates, *Applied Mechanics Reviews*, 62, 1-17.
- [25] Ambartsumyan, S. (1958). On the theory of bending of anisotropic plates, *Izv. AN SSSR. OTN*, vol.5, pp. 69–77.
- [26] Baluch, M., Azad, A., and Khidir, M. (1984). Technical theory of beams with normal strain, *Journal of Engineering Mechanics*, vol.110, pp. 1233–1237).
- [27] Bhimaraddi, A., and Chandrashekhara, K. (1993). Observations on higher-order beam theory, *Journal of Aerospace Engineering*, vol. 6, pp. 408–413.
- [28] Bickford, W. (1982). A consistent higher order beam theory, *Developments in Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 11, pp. 137-150.
- [29] Hildebrand, F., and Reissner, E. (1942). Distribution of stress in built-in beam of narrow rectangular cross section, *Journal of Applied Mechanics* vol.64, pp.109–116.
- [30] Kruszewski, E. (1949). Effect of transverse shear and rotatory inertia on the natural frequency of a uniform beam, *NACA, No.1909, Washington*.
- [31] Levinson, M. (1981). A new rectangular beam theory, *Journal of Sound and Vibration*, vol.74, pp. 81–87.
- [32] Reddy, J. N., (1984) A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates, *Journal of Applied Mechanics*, 51, pp.745-752.
- [33] Reddy, J. N., (1990) A general non-linear third order theory of plates with moderate thickness, *International Journal of Non-linear Mechanics*, vol.25, pp. 677–686.
- [34] Shimpi, R.P., (2002) Refined plate theory and its variants, *AIAA journal*, vol.40, 137-146.
- [35] Shimpi, R.P., and Patel, H. (2006) A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis, *International Journal of Solids and Structures*, vol.43, pp. 6783-6799.
- [36] Touratier, M. (1991). An efficient standard plate theory, *International Journal of Engineering Science*, vol.29, pp. 901–916.
- [37] Vlasov, V.Z., and Leontiev, U.N. (1996). Beams, Plates and Shells on Elastic foundation, *Israel Program for Scientific Translation Ltd*, Jerusalem, Israel.
- [38] Stein, M. (1989). Vibration of beams and plate strips with three-dimensional flexibility, *Journal of Applied Mechanics*, vol.56, pp. 228–231.
- [39] Arya, H., Shimpi, R.P. and Naik, N. (2002) A zigzag model for laminated composite beams, *Composite structures*, vol.56, pp. 21-24.
- [40] Ghugal, Y.M., & Shimpi, R.P. (2002). A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol.21, pp. 775–813.
- [41] Ghugal, Y.M. (2006), A simple higher order theory for beam with transverse shear and transverse normal effect, Department Report 4, Applied of Mechanics Department, Government College of Engineering, Aurangabad, India.
- [42] Soldatos, K. (1992). A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates, *Acta Mechanica*, vol.94, pp. 195–200.
- [43] Ghugal, Y.M., & Sharma, R. (2009). A hyperbolic shear deformation theory for flexure and vibration of thick isotropic beams, *International Journal of Computational Methods*, vol.6, pp. 585–604.
- [44] Akavci, S.S., (2007) Buckling and free vibration analysis of symmetric and anti-symmetric laminated composite plates on an elastic foundation, *Journal of Reinforced Plastics and Composites* vol.26, No.18, pp. 1907-1919

- [45] Karama, M., Afaq, K., and Mistou, S. (2003) Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, *International Journal of Solids and Structures*, vol.40, pp. 1525–1546.
- [46] H. Nguyen-Xuan, C.H. Thai, T. Nguyen-Thoi, (2013) Isogeometric finite element analysis of composite sandwich plates using a higher order shear deformation theory, *Composites Part B: Engineering*, vol.55, pp. 558–574.
- [47] C.H. Thai, A.J.M. Ferreira, S.P.A. Bordas, T. Rabczuk, H. Nguyen-Xuan, (2014) Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a new inverse trigonometric shear deformation theory, *European Journal of Mechanics*, vol.43, 89-108.
- [48] Rehfield, L., & Murthy, P. (1982). Toward a new engineering theory of bending: fundamentals, *AIAA Journal*, Vol.20. pp. 693–699.
- [49] Krishna M., A. (1984). Toward a consistent beam theory, *AIAA Journal*, vol.22, 811-816.
- [50] Heyliger, P., & Reddy, J. (1988). A higher order beam finite element for bending and vibration problems, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 126, pp.309–326.
- [51] Bauchau, O., & Craig, J. (2009). *Structural Analysis: With Applications to Aerospace Structures*.
- [52] Gere, J. M. (2000). *Mechanics of Materials*.
- [53] Timoshenko, S. (1922). On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section, *Philosophical Magazine*, pp.125.
- [54] Timoshenko, S. (1932). *Schwingungsprobleme der Technik*.
- [55] Mindlin, R., & Deresiewicz, H., (1953). Timoshenko's Shear Coefficient for Flexural Vibrations of Beams, Technical Report No. 10, ONR Project NR064-388, Department of Civil Engineering, Columbia University, New York, N.Y.
- [56] Stephen, N. (1980). Timoshenko's shear coefficient from a beam subjected to gravity loading, *Journal of Applied Mechanics*, (Vol. 47, pp. 121–127).
- [57] Hutchinson, J. (1981). Transverse vibration of beams, exact versus approximate solutions, *Journal of Applied Mechanics* (Vol. 48, pp. 923–928).
- [58] Le, K. (1999). *Vibrations of shells and rods*.
- [59] Kaneko, T. (1975). On Timoshenko's correction for shear in vibrating beams *J. Phys. D: Appl. Phys.* (Vol. 8, pp. 1927–1936).
- [60] Méndez-Sánchez, R., Morales, A., & Flores J. (2005). Experimental check on the accuracy of Timoshenko's beam theory, *Journal of Sound and Vibration* (Vol.279, pp. 508–512).
- [61] Franco-Villafañe, J., & Méndez-Sánchez, R. (2016). On the Accuracy of the Timoshenko Beam Theory Above the Critical Frequency: Best Shear Coefficient, *Journal of Mechanics*, (Vol.32, pp. 1–4).
- [62] Rosinger, H., & Ritchie, I. (1977). On Timoshenko's correction for shear in vibrating isotropic beams, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, (Vol. 10, pp. 1461-1466).
- [63] Thomson, W. T. (1981). *Theory of Vibration with Applications*.
- [64] Díaz de Anda A., Flores J., Gutiérrez L., Méndez - Sánchez R.A., Monsivais G., & Morales A. (2012). Experimental study of the Timoshenko beam theory predictions, *Journal of Sound and Vibration*, (Vol. 331, pp. 5732–5744).
- [65] Öchsner, A. *Classical Beam Theories of Structural Mechanics*, Springer Cham, 2021; pp. 7-66. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-76035-9>
- [66] Sathyamoorthy, M. (1982). Nonlinear Analysis of Beams Part I: A Survey of Recent Advances, *Shock and Vibration Digest*, (Vol. 14, pp. 19-35).
- [67] Emam, S. (2002). A Theoretical and Experimental Study of Nonlinear Dynamics of Buckled Beams, *PhD thesis*, Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia.

- [68] Chia, C.Y. (1980). *Nonlinear Analysis of Plates*.
- [69] Kármán, T. (1910). Fesigkeitsprobleme in Maschinenbau *Encycl de Math Wiss*, Vol. 4, 348-351.
- [70] Chu, H., & Herrmann, G. (1956). Influence of large amplitudes on free flexural vibrations of rectangular elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, (Vol.23, pp. 532-540).
- [71] Mindlin, R. (1951). Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates, *Journal of Applied Mechanics* (Vol.18, pp. 31-38).
- [72] Leung, A., & Mao, S. (1995). A symplectic Galerkin Method for Non-Linear Vibration of Beams and Plates, *Journal of Sound and Vibration* (Vol.183. pp. 475-491).
- [73] El Kadiri, M., & Benamar, R. (2003), Improvement of the semi-analytical method, based on Hamilton's principle and spectral analysis, for determination of the geometrically non-linear response of thin straight structures. Part III: steady state periodic forced response of rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration*, (Vol. 264, pp. 1-35).
- [74] Berger, H. (1955). A New Approach to the Analysis of Large Deflections of Plates, *Journal of Applied Mechanics* (Vol. 22, pp. 465-472).
- [75] Prathap, G., & Pandalai, K. (1977). Non-Linear Vibrations of Transversely Isotropic Rectangular Plates, *International Journal of Non-Linear Mechanics* (Vol.13, pp. 285-294).
- [76] Yosibash, Z., & Kirby, R. (2005). Dynamic response of various von Karman Non-Linear Plate Models and their 3-D Counterparts, *International Journal of Solid and Structures*, Vol. 42, pp. 2517-2531.
- [77] Amabili, M. (2004). Nonlinear Vibrations of Rectangular Plates with Different Boundary Conditions: Theory and Experiments, *Computers & Structures* Vol.82, pp. 2587-2605.
- [78] Way, S. (1938). Uniformly loaded clamped rectangular plates with large deflection, Proc. 5th Int. Congr. on Applied Mechanics (pp. 123-128).
- [79] Ribeiro, P. (2001). Periodic Vibration of Plates with Large Displacements, *AIAA Journal*, (Vol. 40, pp. 185-188).
- [80] Wei-Zhang, C., & Kai-Yuan, Y. (1956). On the Large Deflection of Rectangular Plate, Proceedings of IX International Congress of Applied Mechanics, (pp. 387-394).
- [81] Levy, S. (1942). Bending of Rectangular Plates with Large Deflections, *NACA, No.846, Washington*.
- [82] Iyengar, K.T.S.R., & Naqvi, M. (1966). Large Deflections of Rectangular Plates, *International Journal of Non-Linear Mechanics* (Vol. 1, pp. 109-122).
- [83] Leissa, A. (1969). *Vibration of Plates*.
- [84] Timoshenko, S., & Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*.
- [85] Nishawala, V. (2011). A Study of Large Deflection of Beams and Plates, *MSc Thesis*, New Brunswick, New Jersey.
- [86] de Borst, R., Crisfield, M., Remmers, J., and Verhoosel, V., (2012). Non-linear Finite Element Analysis of Solid and Structures, 2<sup>nd</sup> edn, Wiley Series in Computational Mechanics, Wiley, Chichester. (ISBN 978-0-470-66644-9). <https://doi.org/10.1002/9781118375938>
- [87] Gantes, C.J. (2014). Nonlinear Finite Element Analysis. In: Beer, M., Kougiumtzoglou, I., Patelli, E., Au, IK. (eds) Encyclopedia of Earthquake Engineering. Springer, Berlin, Heidelberg. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-36197-5\\_138-1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-36197-5_138-1)
- [88] Chang, I. (1996). *Thread of the silkworm*.
- [89] Greenberg, J., & Goodstein, J. (1983). Theodore von Karman and Applied Mathematics in America, *Science* (Vol.222, pp.1300-1304).
- [90] O'Connor, J., & Robertson, E. (2003). "Theodore von Kármán", MacTutor History of Mathematics archive, University of St Andrews.

- [91] Sears, W. (1965). Some Recollections of Theodore von Kármán, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*.
- [92] Goldstein, S. (1966). Theodore von Karman 1881–1963. *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*. (Vol.12, pp. 334–365).
- [93] Bluth, J. (1994). Von Karman, Malina laid the groundwork for the future JPL, *Jet Propulsion Laboratory UNIVERSE* (Vol. 24).
- [94] Hallion, R. (2011). *The NACA, NASA, and the Supersonic-Hypersonic Frontier*, NASA. NASA Technical Reports Server.
- [95] Sears, W. (1986). Von Kármán: Fluid Dynamics and Other Things, *Physics Today*.
- [96] Flatau, A.B. and Chong, K.P. (2002). Dynamic smart material and structural systems, *Engineering Structures*, 24, pp. 261–270. [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(01\)00093-1](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(01)00093-1).
- [97] Psarras, G.C., Parthenios, J. & Galiotis, C. (2001). Adaptive composites incorporating shape memory alloy wires Part I Probing the internal stress and temperature distributions with a laser Raman sensor. *Journal of Materials Science*, vol. 36, pp. 535–546. <https://doi.org/10.1023/A:1004869613018>
- [98] Σιάδου, Ν. (2014). Εναπόθεση και Χαρακτηρισμός μαγνητο-ηλεκτρικών υμενίων, *PhD thesis*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.
- [99] Curie, J., & Curie, P. (1880). Développement, par pression, de l'électricité polaire dans les cristaux hémiedres faces inclinées, *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, vol. 91, pp. 294-295.
- [100] Curie, P., & Curie J. (1881). Contractions et dilations produits par des tensions electriques dans les cristaux hemieedres a faces inclinées, *Comptes Rendus de l' Academie des Sciences*, vol. 93, pp. 1137-1140.
- [101] <https://www.wikipedia.org/>
- [102] Xu, Q., Gao, X., Zhao, S., Liu, Y.-N., Zhang, D., Zhou, K., Khanbareh, H., Chen, W., Zhang, Y., Bowen, C., (2021). Construction of Bio-Piezoelectric Platforms: From Structures and Synthesis to Applications. *Adv. Mater.* 33. <https://doi.org/10.1002/adma.202008452>
- [103] Jaffe, G., Cook, W., & Jaffe, H. (1971). *Piezoelectric ceramics*.
- [104] Piefort, V. (2001). Finite element modelling of piezoelectric active structures, *PhD thesis*, Universite Libre de Bruxelles.
- [105] Tichy, J., Erhart, J., Kittinger, E., Přivratska, J. (2010). *Fundamentals of Piezoelectric Sensorics: Mechanical, Dielectric, and Thermodynamical Properties of Piezoelectric Materials*.
- [106] Curie, J., & Curie, P. (1880). Sur l'électricité polaire dans les cristaux hémiedres 'faces inclinées, *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, vol. 91, pp. 383-386).
- [107] Hankel, W. (1881). Über die aktinound piezoelektrischen eigen schaften des bergkrystalles und ihre beziehung zi den thermoelektrischen, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse*, vol. 33, pp. 52-63.
- [108] Lippman, G. (1881). Principe de la conservation de l'électricité. *J. Phys. Theor. Appl.*, vol.10, pp.381-394.
- [109] Voigt, W. (1910). *Lehrbuch der Kristallphysik*.
- [110] Pötsch, W., Fischer, A., & Müller, W. (1989). *Lexikon bedeutender Chemiker*. Harri Deutsch, pp. 470.
- [111] Valasek, J. (1920). Piezoelectric and allied phenomena in Rochelle salt *Physical Review*, vol.15, pp.537-538.
- [112] Heartling, G. (1999). Ferroelectric Ceramics - History and Technology, *Journal of the American Ceramic Society*, vol. 82, pp.797-818.

- [113] Zhou, D. (2003). Experimental Investigation of Non-linear Constitutive Behavior of PZT Piezoceramics, Forschungszentrum Karlsruhe, Wissenschaftliche Berichte, FZKA 6869, Dissertation, pp.6-12.
- [114] Jahan, N. (2018). Development of the piezoelectric properties of poly(vinylidene fluoride) based ferroelectrics and ferroelectrets using fillers and mechanical stretching, *PhD thesis*, Universite de Montreal.
- [115] Uchino, K. (2004). Piezoelectric Actuator's 2004: Materials, Design, Drive/Control, Modeling and Applications, *9<sup>th</sup> International Conference on New Actuators*, Bremen, 38-47.
- [116] Schreiner, H., Binding, R., & Helke, G. (2000). Characterization of Piezoelectric Multilayer Actuators: Low and High Field Behavior, *7<sup>th</sup> International Conference on New Actuators*, Actuator 2000, Bremen.
- [117] Vu, D. (2011). Geometrically Nonlinear Higher-Order Shear Deformation FE Analysis of Thin-Walled Smart Structures, Master's Thesis, Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule, Aachen Universitat.
- [118] Ballas, R.G. (2007). Piezoelectric Multilayer Beam Bending Actuators. Heidelberg: Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-32642-7>.
- [119] Arfken, G. B., & Weber, H. J. (1995). *Mathematical method for physicists*.
- [120] Boas, M. (1983). *Mathematical Methods in the Physical Sciences*.
- [121] Solecki, R., & Conant, R. (2003). *Advanced Mechanics of Materials*.
- [122] Tiersten, H. (1969). *Linear Piezoelectric Plate Vibrations - Elements of the Linear Theory of Piezoelectricity and the Vibrations of Piezoelectric Plates*.
- [123] Fang, D., Liu, J. (2013). Fracture Mechanics of Piezoelectric and Ferroelectric Solids. Springer Tsinghua, Beijing. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-30087-5>
- [124] Hadjigeorgiou, E. et. al. (2006). Shape control and damage identification of beams using piezoelectric actuation and genetic optimization, *International Journal of Engineering Science*, vol.44, pp. 409-421.
- [125] Ανανάδου, Χ. (2018). Προσδιορισμός ενεργών μηχανικών ιδιοτήτων τρισδιάστατων μικροδομών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. *BEng Thesis*, Πολυτεχνική Σχολή, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη.
- [126] Waseem, O.A., and Ryu, H.J. (2016). Tungsten-Based Composites for Nuclear Fusion Applications. InTech. <https://doi.org/10.5772/62434>
- [127] Abramovich H., (2017). Stability and Vibrations of Thin-walled Composite Structures, Woodhead Publishing. ISBN: 9780081004104.
- [128] Wagner, W. R., Sakiyama-Elbert, S. E., Zhang, G., & Yaszemski, M. J. (2020). Biomaterials Science: An Introduction to Materials in Medicine. 4<sup>th</sup> Edition. Elsevier. <https://doi.org/10.1016/C2017-0-02323-6>
- [129] Rana, S. and Figueiro, R. (2016). Advanced Composite Materials for Aerospace Engineering, Woodhead. <https://doi.org/10.1016/C2014-0-00846-5>
- [130] Ponnamma, D., Sadasivuni, K.K., Cabibihan, J., and Al-Maadeed. M. (2017). Smart Polymer Nanocomposites, Energy Harvesting, Self-Healing and Shape Memory Applications, Springer Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-50424-7>.
- [131] Safari, A., Koray Akdoğan E., and Leber J.D. (2022). Ferroelectric ceramics and composites for piezoelectric transducer applications. *Japanese Journal of Applied Physics* 61. <https://doi.org/10.35848/1347-4065/ac8bdc>.
- [132] Ma M, Wang X (2009) Preparation, microstructure and properties of epoxy-based composites containing carbon nanotubes and PMN-PZT piezoceramics as rigid piezodamping materials. *Mater Chem Phys* 116(1):191-197  
<https://doi.org/10.1016/j.matchemphys.2009.03.009>



- [133] Tian S, Wang X (2008) Fabrication and performances of epoxy/multi-walled carbon nanotubes/piezoelectric ceramic composites as rigid piezo-damping materials. *J Mater Sci* 43 (14):4979–4987. <https://doi.org/10.1007/s10853-008-2734-7>
- [134] Wang, C.M., Reddy, J.N. and Lee, K.H., (2000). *Shear Deformable Beams and Plates*. Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-043784-2.X5000-X>
- [135] Timoshenko, S. P., Goodier, J. N., (1979). *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill 3<sup>rd</sup> Int. ed. Singapore.
- [136] Boyce, E.W. and DiPrima, C.R., (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 9<sup>th</sup> Edition. ISBN 978-0-470-38334-6
- [137] Baroudi, S. et. al., (2018). Static and dynamic analytical coupled field analysis of piezoelectric flexoelectric nanobeams: A strain gradient theory approach, *International Journal of Solid and Structures*, Vol. 153, pp.110-124. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.11.014>
- [138] Goldschmidtboeing, F. & Woias, P. (2008). Characterization of different beam shapes for piezoelectric energy harvesting, *Journal of micromechanics and microengineering*. <https://doi.org/10.1088/0960-1317/18/10/104013>
- [139] Komeili, A.; Akbarzadeh A.H.; Doroushi, A.; Eslami, M.R. (2011). Static Analysis of Functionally Graded Piezoelectric Beams under Thermo-Electro-Mechanical Loads. *Advances in Mechanical Engineering*, 3, 1–10. <https://doi.org/10.1155/2011/153731>
- [140] Elshafei, M. A., et. al. (2013). Modeling and analysis of smart piezoelectric beams using simple higher order shear deformation theory, *Smart materials and structures*, Vol.22. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0964-1726/22/3/035006/meta>
- [141] Fernandes, A. & Pouget, J. (2001). Accurate modeling of piezoelectric plates: single-layered plate, *Archive of Applied Mechanics*, Vol.71, 509-524. <https://doi.org/10.1007/s004190100168>
- [142] Wang, Q. et. al. (2001). Analysis of piezoelectric coupled circular plate, *Smart materials and structures*, Vol.10, pp.229-239. <http://scholarbank.nus.edu.sg/handle/10635/65140>
- [143] Hadjigeorgiou, E.P.; Kalpakides, V.K.; Massalas, C.V. (1999). A general theory for elastic dielectrics. II. The variational approach. *Int. J. Non-Linear Mech.* 34, 967–980. [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(98\)00069-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(98)00069-9)
- [144] Zhou, Y. et. al. (2005). Analytical solutions to piezoelectric bimorphs based on improved FSDT beam model, *Smart Structures and Systems*, Vol.1, 3. <https://doi.org/10.12989/sss.2005.1.3.309>
- [145] Ntaflos, K. I., Beltsios, K. G., Hadjigeorgiou, E. P. (2023). Static and Dynamic Analysis of Linear Piezoelectric Structures Using Higher Order Shear Deformation Theories. *Journal of Composites Science*, 7(2), 1–17. <https://doi.org/10.3390/jcs7020087>
- [146] Qirong, L.; Zhengxing, L.; Zhanli, J. (2000). A close-form solution to simply supported piezoelectric beams under uniform exterior pressure. *Applied Mathematics and Mechanics*, 21, pp.681–690. <https://doi.org/10.1007/BF02460187>
- [147] Murthy, M.V.V.S., Roy Mahapatra, D., Badarinarayana, K., Gopalakrishnan, S. (2005). A refined higher order finite element for asymmetric composite beams. *Composite Structures*, Vol. 67, 1, 27-35, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.01.005>.
- [148] Chen Wanji, Weiwei Chen, Sze, K.Y. (2012). A model of composite laminated Reddy beam based on a modified couple-stress theory, *Composite Structures*, Vol. 94, 8, 2599-2609, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.02.020>.
- [149] Aydogdu, M., (2009). A new shear deformation theory for laminated composite plates, *Composite Structures*, Vol. 89, 1, 94-101, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.07.008>.
- [150] Reddy, J.N., (2004). *Mechanics of laminated composite plates: theory and analysis*. 2<sup>nd</sup> Ed. Boca Raton (FL): CRC Press. <https://doi.org/10.1201/b12409>

**ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ****Δημοσιεύσεις σε διεθνή συνέδρια (Conference Publications):**

[1] Hadjigeorgiou, E.P.; Ntaflos K.I. (2019). Geometrically Nonlinear Higher-Order Shear Deformation Analysis of Piezoelectric Composite Structures, *Proceedings of the 12<sup>th</sup> HSTAM 2019 International Congress on Mechanics*, Thessaloniki, Greece.

[2] Ntaflos K.I.; Hadjigeorgiou, E.P. (2022). Higher Order Shear Deformation Analysis of Linear Piezoelectric Structures. *Proceedings of the 13<sup>th</sup> HSTAM 2022 International Congress on Mechanics*, Patras, Greece.

**Δημοσιεύσεις σε διεθνή περιοδικά με κριτές (Journal Publications):**

[3] Ntaflos, K. I., Beltsios, K. G., Hadjigeorgiou, E. P. (2023). Static and Dynamic Analysis of Linear Piezoelectric Structures Using Higher Order Shear Deformation Theories. *Journal of Composites Science*, 7(2), 1–17.  
<https://doi.org/10.3390/jcs7020087>

[4] Ntaflos, K.I.; Beltsios, K.G.; Hadjigeorgiou, E.P. (2023). Bending Analysis of Piezoelectric Structures with Geometric Nonlinearities and Higher Order Shear Deformation Theories. *J. Compos. Sci.* (submitted paper)

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.1

Εφαρμογή του θεωρήματος Gauss στη σχέση 5.14 (σελ.64):

$$\begin{aligned} & \cdot \int_{x=0}^{x=L} A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} dx = \left[ A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} - \left[ A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} (\delta w) dx \\ & \cdot \int_{x=0}^{x=L} -B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} dx = - \left[ B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta \varphi) dx \\ & \cdot \int_{x=0}^{x=L} -B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} dx = - \left[ B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} + \left[ B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} (\delta w) dx \\ & \cdot \int_{x=0}^{x=L} C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} dx = \left[ C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta \varphi) dx \end{aligned}$$

Εφαρμογή του θεωρήματος Gauss στη σχέση 5.22 (σελ.65):

$$\begin{aligned} & \cdot \int_{x=0}^{x=L} \frac{\rho A_0}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} dx = \left[ \frac{\rho A_0}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left[ \frac{\rho A_0}{E} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} (\delta w) \right] dx \\ & \cdot \int_{x=0}^{x=L} -\frac{\rho B_0}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} dx = - \left[ \frac{\rho B_0}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} \left[ \frac{\rho B_0}{E} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial x} (\delta w) \right] dx \end{aligned}$$

Πράξεις άπειρων αθροισμάτων στη σχέση 5.35 (σελ.68):

$$\begin{aligned} & A_0 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] - B_0 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \\ & A_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[ w_m \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} - B_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[ \varphi_m \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \\ & A_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[ \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} - B_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^3}{\partial x^3} \varphi_m \left[ \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_0 w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ B_0 \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ q_m \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_0 w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) - B_0 \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ q_m \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \\ & A_0 w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) - B_0 \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) = q_m \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \end{aligned}$$

Πράξεις άπειρων αθροισμάτων στη σχέση 5.36 (σελ.68):

$$\begin{aligned} & B_0 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] - C_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] + D_0 \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] = 0 \\ & B_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[ w_m \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} - C_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \varphi_m \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} + D_0 \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$B_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[ \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} - C_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} + D_0 \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] = 0$$

$$B_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \left[ -\cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} - C_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left[ -\cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} + D_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right\} = 0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -B_0 w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \left[ \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -C_0 \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left[ \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right\} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ D_0 \varphi_m \left[ \cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} = 0$$

$$-B_0 w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^3 \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) + C_0 \varphi_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) + D_0 \varphi_m \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) = 0$$

Πράξεις άπειρων αθροισμάτων για τη σχέση 5.39 (σελ.68):

$$u_1 = u(x, z, t) = -z \frac{\partial w}{\partial x} + f(z) \varphi(x, t)$$

$$u = -z \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] + f(z) \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \varphi_m \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right]$$

$$u = -z \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} + f(z) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right\}$$

$$u = -z \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{m\pi}{L} \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} + f(z) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\}$$

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ -z \frac{m\pi}{L} w_m + f(z) \varphi_m \right] \cos \frac{m\pi x}{L}$$

Πράξεις άπειρων αθροισμάτων για τη σχέση 5.40 (σελ.68):

$$u_3 = w(x, z, t) = w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ Gf'(z) \varphi_m \left[ \cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right\}$$

Πράξεις άπειρων αθροισμάτων για τη σχέση 5.41 (σελ.68):

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \left[ -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \left[ -z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] + f(z) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right]$$

$$\sigma_x = E \left[ -z \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} + f(z) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \frac{\partial}{\partial x} \left[ \cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} \right]$$

$$\sigma_x = E \left[ -z \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( -\sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} + f(z) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \frac{m\pi}{L} \left[ -\sin \frac{m\pi x}{L} \right] \right\} \right]$$

$$\sigma_x = E \left[ z \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ w_m \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} - f(z) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varphi_m \frac{m\pi}{L} \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\} \right]$$

Πράξεις άπειρων αθροισμάτων για τη σχέση 5.42 (σελ.68):

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = Gf'(z) \varphi = Gf'(z) \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ Gf'(z) \varphi_m \left[ \cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right\}$$

Εφαρμογή του θεωρήματος Gauss στη σχέση 6.18 (σελ.85):

$$\begin{aligned}
 \int_{x=0}^{x=L} \left( A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \right) dx &= \left[ A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} - \left[ A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} (\delta w) dx \\
 - \int_{x=0}^{x=L} \left( B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right) dx &= - \left[ B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta \varphi) dx \\
 - \int_{x=0}^{x=L} \left( B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \right) dx &= - \left[ B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} + \left[ B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} (\delta w) dx \\
 \int_{x=0}^{x=L} \left( C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right) dx &= \left[ C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta \varphi) dx \\
 \int_{x=0}^{x=L} \left[ H_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right] dx &= \left[ H_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left[ H_0 \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{,x} (\delta w) \right] dx \\
 &= \left[ H_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left( H_0 \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] (\delta w) \right) dx \\
 \int_{x=0}^{x=L} \left[ H_0 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right] dx &= \left[ H_0 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left[ \left[ H_0 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]_{,x} (\delta \varphi) \right] dx \\
 &= \left[ \frac{H_0}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left[ H_0 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) (\delta \varphi) \right] dx \\
 \int_{x=0}^{x=L} \left[ \frac{Ebh}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right] dx &= \left[ \frac{Ebh}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left[ \left[ \frac{Ebh}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \right]_{,x} (\delta w) \right] dx \\
 &= \left[ \frac{Ebh}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left( \frac{Ebh}{2} 3 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) (\delta w) \right) dx \\
 &= \left[ \frac{Ebh}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \frac{3Ebh}{2} \int_{x=0}^{x=L} \left( \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) (\delta w) \right) dx
 \end{aligned}$$

Εφαρμογή του θεωρήματος Gauss στη σχέση 6.22 (σελ.86):

$$\begin{aligned}
 \int_{x=0}^{x=L} \frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} dx &= \left[ \frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left[ \frac{\rho A_o}{E} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} (\delta w) \right] dx \\
 \int_{x=0}^{x=L} - \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} dx &= - \left[ \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} \left[ \frac{\rho B_o}{E} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial x} (\delta w) \right] dx
 \end{aligned}$$

Εφαρμογή άπειρων αθροισμάτων για τη σχέση 6.43 (σελ.90):

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} w_k \sin \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} w_l \sin \left( \frac{l\pi x}{L} \right) \right] \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{k\pi}{L} w_k \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right] \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \frac{l\pi}{L} w_l \cos \left( \frac{l\pi x}{L} \right) \right] \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{k\pi}{L} w_k \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \right] \left[ \frac{l\pi}{L} w_l \cos \left( \frac{l\pi x}{L} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.2**

Εφαρμογή του θεωρήματος Gauss στη σχέση 7.25 (σελ.125):

$$\begin{aligned} \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left( A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} \right) dx dt &= \left[ A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \right]_{t=t_1}^{t=t_2} - \left[ A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} (\delta w) dx \\ \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left( C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} \right) dx dt &= \left[ C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} (\delta \varphi) \right]_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{x=0}^{x=L} C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta \varphi) dx \\ - \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left( B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} \right) dx dt &= - \left[ B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \right]_{t=t_1}^{t=t_2} + \left[ B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} (\delta w) dx \\ - \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left( B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} \right) dx dt &= - \left[ B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} (\delta \varphi) \right]_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{x=0}^{x=L} B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} (\delta \varphi) dx \\ \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \right) dx dt &= \left[ \frac{\partial w}{\partial t} (\delta w) \right]_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{x=0}^{x=L} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) dx \end{aligned}$$

Εφαρμογή του θεωρήματος Gauss στη σχέση 7.37 (σελ.127):

$$\begin{aligned} - \int_{x=0}^{x=L} \left( C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right) dx &= - \left[ C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta \varphi) dx \\ \int_{x=0}^{x=L} \left( B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \right) dx &= \left[ B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} - \left[ B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} \\ &\quad + \int_{x=0}^{x=L} B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} (\delta w) dx \\ \int_{x=0}^{x=L} \left( B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right) dx &= \left[ B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta \varphi) dx \\ - \int_{x=0}^{x=L} \left( A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \right) dx &= - \left[ A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} + \left[ A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} \\ &\quad - \int_{x=0}^{x=L} A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} (\delta w) dx \end{aligned}$$

Εφαρμογή του θεωρήματος Gauss στη σχέση 7.49 (σελ.128):

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{x=L} \left( K_0 b e_{31} \bar{\varphi}(x, t) \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \right) dx &= \left[ K_0 b e_{31} \bar{\varphi}(x, t) \frac{\partial (\delta w)}{\partial x^2} \right]_{x=0}^{x=L} - \left[ K_0 b e_{31} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} \\ &\quad + \int_{x=0}^{x=L} \left( K_0 b e_{31} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} (\delta w) \right) dx \\ \int_{x=0}^{x=L} \left( L_0 b e_{31} \bar{\varphi}(x, t) \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right) dx &= - \left[ L_0 b e_{31} \bar{\varphi}(x, t) (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} \left( L_0 b e_{31} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta \varphi) \right) dx \end{aligned}$$

$$\int_{x=0}^{x=L} - \left( N_0 b e_{15} \varphi(x,t) \frac{\partial(\delta\bar{\varphi})}{\partial x} \right) dx = - \left[ N_0 b e_{15} \varphi(x,t) (\delta\bar{\varphi}) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} \left( N_0 b e_{15} \frac{\partial\varphi}{\partial x} (\delta\bar{\varphi}) \right) dx$$

Εφαρμογή του θεωρήματος Gauss στη σχέση 7.64 (σελ.130):

$$\int_{x=0}^{x=L} \left( P_0 b \in_{11} \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial(\delta\bar{\varphi})}{\partial x} \right) dx = \left[ P_0 b \in_{11} \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x} (\delta\bar{\varphi}) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left( P_0 b \in_{11} \frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial x^2} (\delta\bar{\varphi}) \right) dx$$

Πράξεις άπειρων αθροισμάτων για τη σχέση 7.122 (σελ.140):

$$\sigma_x = \tilde{c}_{11} \varepsilon_x - \tilde{e}_{31} E_z = \tilde{c}_{11} \left( -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) - \tilde{e}_{31} g'(z) \bar{\varphi}(x,t)$$

$$\sigma_x = \tilde{c}_{11} \left( -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) - \tilde{e}_{31} g'(z) \bar{\varphi}(x,t)$$

$$\sigma_x = \tilde{c}_{11} \left( -z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] + f(z) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] \right) - \tilde{e}_{31} g'(z) \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right]$$

$$\sigma_x = \tilde{c}_{11} \left( - \sum_{m=1}^{\infty} \left[ -z \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 w_m \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ -f(z) \frac{m\pi}{L} \varphi_m \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \tilde{e}_{31} g'(z) \bar{\varphi}_m \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right]$$

$$\sigma_x = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{c}_{11} z \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 w_m \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) - f(z) \frac{m\pi}{L} \varphi_m \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) - \tilde{e}_{31} g'(z) \bar{\varphi}_m \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\}$$

$$\sigma_x = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{c}_{11} \left[ z \frac{m^2 \pi^2}{L^2} w_m - f(z) \frac{m\pi}{L} \varphi_m \right] \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) - \tilde{e}_{31} g'(z) \bar{\varphi}_m \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right\}$$

$$\sigma_x = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ \tilde{c}_{11} z \frac{m^2 \pi^2}{L^2} w_m - \tilde{c}_{11} f(z) \frac{m\pi}{L} \varphi_m - \tilde{e}_{31} g'(z) \bar{\varphi}_m \right] \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}$$

Πράξεις άπειρων αθροισμάτων για τη σχέση 7.123 (σελ.140):

$$\tau_{zx} = c_{55} \gamma_{xz} - e_{15} E_x,$$

$$\tau_{zx} = c_{55} f'(z) \varphi(x,t) - e_{15} \left( -g(z) \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{zx} = c_{55} f'(z) \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] + e_{15} g(z) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right]$$

$$\tau_{zx} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ c_{55} f'(z) \varphi_m \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ e_{15} g(z) \frac{m\pi}{L} \bar{\varphi}_m \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right]$$

$$\tau_{zx} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ c_{55} f'(z) \varphi_m \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) + e_{15} g(z) \frac{m\pi}{L} \bar{\varphi}_m \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right\}$$

$$\tau_{zx} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ c_{55} f'(z) \varphi_m + e_{15} g(z) \frac{m\pi}{L} \bar{\varphi}_m \right] \cos \frac{m\pi x}{L} \right\}$$

Πράξεις άπειρων αθροισμάτων για τη σχέση 7.124 (σελ.140):

$$\begin{aligned}
 D_x &= e_{15} \gamma_{xz} + \epsilon_{11} E_x \\
 D_x &= e_{15} f'(z) \varphi(x, t) + \epsilon_{11} \left( -g(z) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right) \\
 D_x &= e_{15} f'(z) \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} - \epsilon_{11} g(z) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] \\
 D_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[ e_{15} f'(z) \varphi_m \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right] - \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \epsilon_{11} g(z) \frac{m\pi}{L} \bar{\varphi}_m \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \\
 D_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[ e_{15} f'(z) \varphi_m \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) - \epsilon_{11} g(z) \frac{m\pi}{L} \bar{\varphi}_m \left( \cos \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \\
 D_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ e_{15} f'(z) \varphi_m - \epsilon_{11} g(z) \frac{m\pi}{L} \bar{\varphi}_m \right] \cos \frac{m\pi x}{L} \right\}
 \end{aligned}$$

Πράξεις άπειρων αθροισμάτων για τη σχέση 7.125 (σελ.140):

$$\begin{aligned}
 D_z &= \tilde{e}_{31} \epsilon_x + \tilde{\epsilon}_{33} E_z \\
 D_z &= \tilde{e}_{31} \left( -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \tilde{\epsilon}_{33} (-g'(z) \bar{\varphi}(x, t)) \\
 D_z &= -\tilde{e}_{31} z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right] + \tilde{e}_{31} f(z) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos \frac{m\pi x}{L} \right] - \tilde{\epsilon}_{33} g'(z) \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \\
 D_z &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \tilde{e}_{31} z \frac{m^2 \pi^2}{L^2} w_m \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) - \tilde{e}_{31} f(z) \varphi_m \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) - \tilde{\epsilon}_{33} g'(z) \bar{\varphi}_m \left( \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \right] \\
 D_z &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ \tilde{e}_{31} z \frac{m^2 \pi^2}{L^2} w_m - \tilde{e}_{31} f(z) \varphi_m - \tilde{\epsilon}_{33} g'(z) \bar{\varphi}_m \right] \sin \frac{m\pi x}{L} \right\}
 \end{aligned}$$

Εφαρμογή του θεωρήματος Gauss στη σχέση 8.28 (σελ.163):

$$\begin{aligned}
 \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left( A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} \right) dx dt &= \left[ A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \right]_{t=t_1}^{t=t_2} - \left[ A_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} A_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} (\delta w) dx \\
 \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left( C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} \right) dx dt &= \left[ C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} (\delta \varphi) \right]_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{x=0}^{x=L} C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta \varphi) dx \\
 - \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left( B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x \partial t} \right) dx dt &= - \left[ B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \right]_{t=t_1}^{t=t_2} + \left[ B_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} B_0 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial t^2} (\delta w) dx \\
 - \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left( B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial t} \right) dx dt &= - \left[ B_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} (\delta \varphi) \right]_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{x=0}^{x=L} B_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} (\delta \varphi) dx \\
 \int_{t=t_1}^{t=t_2} \int_{x=0}^{x=L} \left( bh \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial (\delta w)}{\partial t} \right) dx dt &= \left[ bh \frac{\partial w}{\partial t} (\delta w) \right]_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{x=0}^{x=L} bh \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) dx
 \end{aligned}$$



Εφαρμογή του θεωρήματος Gauss στη σχέση 8.36 (σελ.165):

$$\begin{aligned}
 & -\int_{x=0}^{x=L} \left( C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right) dx = -\left[ C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} C_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta \varphi) dx \\
 & -\int_{x=0}^{x=L} \left( A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right) dx = -\left[ A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} + \left[ A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} - \\
 & \quad -\int_{x=0}^{x=L} A_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} (\delta w) dx \\
 & -\int_{x=0}^{x=L} \left( \frac{1}{2} \tilde{c}_{11} b h \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right) dx = -\left[ \frac{1}{2} \tilde{c}_{11} b h \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} \frac{3}{2} \tilde{c}_{11} b h \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) (\delta w) dx \\
 & \int_{x=0}^{x=L} \left( B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \right) dx = \left[ B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} - \left[ B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \\
 & \quad + \int_{x=0}^{x=L} B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} (\delta w) dx \\
 & \int_{x=0}^{x=L} \left( B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right) dx = \left[ B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} B_0 \tilde{c}_{11} b \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} (\delta \varphi) dx
 \end{aligned}$$

Εφαρμογή του θεωρήματος Gauss στη σχέση 8.50 (σελ.167):

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=0}^{x=L} \left( K_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial^2 (\delta w)}{\partial x^2} \right) dx = \left[ K_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} - \left[ K_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} \\
 & \quad + \int_{x=0}^{x=L} \left( K_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} (\delta w) \right) dx \\
 & \int_{x=0}^{x=L} -\left( L_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} \right) dx = -\left[ L_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi}(x,t) (\delta \varphi) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} \left( L_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta \varphi) \right) dx \\
 & \int_{x=0}^{x=L} -\left( R_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right) dx = -\left[ R_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial w}{\partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} \\
 & \quad + \int_{x=0}^{x=L} \left( R_0 b \tilde{e}_{31} \left( \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right) (\delta w) \right) dx \\
 & = -\left[ R_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial w}{\partial x} (\delta w) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} \left( R_0 b \tilde{e}_{31} \bar{\varphi}(x,t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (\delta w) + R_0 b \tilde{e}_{31} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta w) \right) dx \\
 & \int_{x=0}^{x=L} -\left( N_0 b e_{15} \varphi(x,t) \frac{\partial (\delta \bar{\varphi})}{\partial x} \right) dx = -\left[ N_0 b e_{15} \varphi(x,t) (\delta \bar{\varphi}) \right]_{x=0}^{x=L} + \int_{x=0}^{x=L} \left( N_0 b e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\delta \bar{\varphi}) \right) dx
 \end{aligned}$$

Εφαρμογή του θεωρήματος Gauss στη σχέση 8.62 (σελ.168):

$$\int_{x=0}^{x=L} \left( P_0 b \in_{11} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial (\delta \bar{\varphi})}{\partial x} \right) dx = \left[ P_0 b \in_{11} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} (\delta \bar{\varphi}) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^{x=L} \left( P_0 b \in_{11} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} (\delta \bar{\varphi}) \right) dx$$

**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β.1****Γραμμικά Ελαστικές Δοκοί – Reddy Beam Theory (Matlab Code)**

```

q0=1*(10.^4);
S=4; % Aspect Ratio
L=1;
h=L./S;
b=0.02;
% x=0:0.001:1;
x=L/2;
% Young's Modulus
E=210*(10.^9);
% Poisson's ration and Shear Modulus
n=0.3;
G=E/(2*(1+n));
a1=pi/L; a2=2*a1; a3=3*a1; a4=4*a1; a5=5*a1; a6=6*a1; a7=7*a1;
a8=8*a1; a9=9*a1; a10=10*a1; a11=11*a1; a12=12*a1; a13=13*a1;
a14=14*a1; a15=15*a1; a16=16*a1; a17=17*a1; a18=18*a1; a19=19*a1;
a20=20*a1; a21=21*a1; a22=22*a1; a23=23*a1; a24=24*a1; a25=25*a1;
a26=26*a1; a27=27*a1; a28=28*a1; a29=29*a1; a30=30*a1; a31=31*a1;
% Coefficients RBT
A0=(E*b*h^3)/12;
B0=(E*b*h^3)/15;
C0=(E*b*17*h^3)/315;
D0=(G*b*8*h)/15;
% Load
q1=(4*q0)/(pi); q2=0; q3=(4*q0)/(3*pi); q4=0; q5=(4*q0)/(5*pi); q6=0;
q7=(4*q0)/(7*pi); q8=0; q9=(4*q0)/(9*pi); q10=0; q11=(4*q0)/(11*pi);
q12=0; q13=(4*q0)/(13*pi); q14=0; q15=(4*q0)/(15*pi); q16=0;
q17=(4*q0)/(17*pi); q18=0; q19=(4*q0)/(19*pi); q20=0;
q21=(4*q0)/(21*pi); q22=0; q23=(4*q0)/(23*pi); q24=0;
q25=(4*q0)/(25*pi); q26=0; q27=(4*q0)/(27*pi); q28=0;
q29=(4*q0)/(29*pi); q30=0; q31=(4*q0)/(31*pi);
% Transverse displacement w
w1=q1*(C0*a1^2+D0)/((C0*a1^2+D0)*(A0*a1^4)-(B0*a1^3)*(B0*a1^3));
w2=q2*(C0*a2^2+D0)/((C0*a2^2+D0)*(A0*a2^4)-(B0*a2^3)*(B0*a2^3));
w3=q3*(C0*a3^2+D0)/((C0*a3^2+D0)*(A0*a3^4)-(B0*a3^3)*(B0*a3^3));
w4=q4*(C0*a4^2+D0)/((C0*a4^2+D0)*(A0*a4^4)-(B0*a4^3)*(B0*a4^3));
w5=q5*(C0*a5^2+D0)/((C0*a5^2+D0)*(A0*a5^4)-(B0*a5^3)*(B0*a5^3));
w6=q6*(C0*a6^2+D0)/((C0*a6^2+D0)*(A0*a6^4)-(B0*a6^3)*(B0*a6^3));
w7=q7*(C0*a7^2+D0)/((C0*a7^2+D0)*(A0*a7^4)-(B0*a7^3)*(B0*a7^3));
w8=q8*(C0*a8^2+D0)/((C0*a8^2+D0)*(A0*a8^4)-(B0*a8^3)*(B0*a8^3));
w9=q9*(C0*a9^2+D0)/((C0*a9^2+D0)*(A0*a9^4)-(B0*a9^3)*(B0*a9^3));
w10=q10*(C0*a10^2+D0)/((C0*a10^2+D0)*(A0*a10^4)-(B0*a10^3)*(B0*a10^3));
w11=q11*(C0*a11^2+D0)/((C0*a11^2+D0)*(A0*a11^4)-(B0*a11^3)*(B0*a11^3));
w12=q12*(C0*a12^2+D0)/((C0*a12^2+D0)*(A0*a12^4)-(B0*a12^3)*(B0*a12^3));
w13=q13*(C0*a13^2+D0)/((C0*a13^2+D0)*(A0*a13^4)-(B0*a13^3)*(B0*a13^3));
w14=q14*(C0*a14^2+D0)/((C0*a14^2+D0)*(A0*a14^4)-(B0*a14^3)*(B0*a14^3));
w15=q15*(C0*a15^2+D0)/((C0*a15^2+D0)*(A0*a15^4)-(B0*a15^3)*(B0*a15^3));
w16=q16*(C0*a16^2+D0)/((C0*a16^2+D0)*(A0*a16^4)-(B0*a16^3)*(B0*a16^3));
w17=q17*(C0*a17^2+D0)/((C0*a17^2+D0)*(A0*a17^4)-(B0*a17^3)*(B0*a17^3));

```

```

w18=q18*(C0*a18^2+D0)/((C0*a18^2+D0)*(A0*a18^4)-
(B0*a18^3)*(B0*a18^3));
w19=q19*(C0*a19^2+D0)/((C0*a19^2+D0)*(A0*a19^4)-
(B0*a19^3)*(B0*a19^3));
w20=q20*(C0*a20^2+D0)/((C0*a20^2+D0)*(A0*a20^4)-
(B0*a20^3)*(B0*a20^3));
w21=q21*(C0*a21^2+D0)/((C0*a21^2+D0)*(A0*a21^4)-
(B0*a21^3)*(B0*a21^3));
w22=q22*(C0*a22^2+D0)/((C0*a22^2+D0)*(A0*a22^4)-
(B0*a22^3)*(B0*a22^3));
w23=q23*(C0*a23^2+D0)/((C0*a23^2+D0)*(A0*a23^4)-
(B0*a23^3)*(B0*a23^3));
w24=q24*(C0*a24^2+D0)/((C0*a24^2+D0)*(A0*a24^4)-
(B0*a24^3)*(B0*a24^3));
w25=q25*(C0*a25^2+D0)/((C0*a25^2+D0)*(A0*a25^4)-
(B0*a25^3)*(B0*a25^3));
w26=q26*(C0*a26^2+D0)/((C0*a26^2+D0)*(A0*a26^4)-
(B0*a26^3)*(B0*a26^3));
w27=q27*(C0*a27^2+D0)/((C0*a27^2+D0)*(A0*a27^4)-
(B0*a27^3)*(B0*a27^3));
w28=q28*(C0*a28^2+D0)/((C0*a28^2+D0)*(A0*a28^4)-
(B0*a28^3)*(B0*a28^3));
w29=q29*(C0*a29^2+D0)/((C0*a29^2+D0)*(A0*a29^4)-
(B0*a29^3)*(B0*a29^3));
w30=q30*(C0*a30^2+D0)/((C0*a30^2+D0)*(A0*a30^4)-
(B0*a30^3)*(B0*a30^3));
w31=q31*(C0*a31^2+D0)/((C0*a31^2+D0)*(A0*a31^4)-
(B0*a31^3)*(B0*a31^3));
% Roattion φ
f1=q1*(B0*a1^3)/((C0*a1^2+D0)*(A0*a1^4)-(B0*a1^3)*(B0*a1^3));
f2=q2*(B0*a2^3)/((C0*a2^2+D0)*(A0*a2^4)-(B0*a2^3)*(B0*a2^3));
f3=q3*(B0*a3^3)/((C0*a3^2+D0)*(A0*a3^4)-(B0*a3^3)*(B0*a3^3));
f4=q4*(B0*a4^3)/((C0*a4^2+D0)*(A0*a4^4)-(B0*a4^3)*(B0*a4^3));
f5=q5*(B0*a5^3)/((C0*a5^2+D0)*(A0*a5^4)-(B0*a5^3)*(B0*a5^3));
f6=q6*(B0*a6^3)/((C0*a6^2+D0)*(A0*a6^4)-(B0*a6^3)*(B0*a6^3));
f7=q7*(B0*a7^3)/((C0*a7^2+D0)*(A0*a7^4)-(B0*a7^3)*(B0*a7^3));
f8=q8*(B0*a8^3)/((C0*a8^2+D0)*(A0*a8^4)-(B0*a8^3)*(B0*a8^3));
f9=q9*(B0*a9^3)/((C0*a9^2+D0)*(A0*a9^4)-(B0*a9^3)*(B0*a9^3));
f10=q10*(B0*a10^3)/((C0*a10^2+D0)*(A0*a10^4)-(B0*a10^3)*(B0*a10^3));
f11=q11*(B0*a11^3)/((C0*a11^2+D0)*(A0*a11^4)-(B0*a11^3)*(B0*a11^3));
f12=q12*(B0*a12^3)/((C0*a12^2+D0)*(A0*a12^4)-(B0*a12^3)*(B0*a12^3));
f13=q13*(B0*a13^3)/((C0*a13^2+D0)*(A0*a13^4)-(B0*a13^3)*(B0*a13^3));
f14=q14*(B0*a14^3)/((C0*a14^2+D0)*(A0*a14^4)-(B0*a14^3)*(B0*a14^3));
f15=q15*(B0*a15^3)/((C0*a15^2+D0)*(A0*a15^4)-(B0*a15^3)*(B0*a15^3));
f16=q16*(B0*a16^3)/((C0*a16^2+D0)*(A0*a16^4)-(B0*a16^3)*(B0*a16^3));
f17=q17*(B0*a17^3)/((C0*a17^2+D0)*(A0*a17^4)-(B0*a17^3)*(B0*a17^3));
f18=q18*(B0*a18^3)/((C0*a18^2+D0)*(A0*a18^4)-(B0*a18^3)*(B0*a18^3));
f19=q19*(B0*a19^3)/((C0*a19^2+D0)*(A0*a19^4)-(B0*a19^3)*(B0*a19^3));
f20=q20*(B0*a20^3)/((C0*a20^2+D0)*(A0*a20^4)-(B0*a20^3)*(B0*a20^3));
f21=q21*(B0*a21^3)/((C0*a21^2+D0)*(A0*a21^4)-(B0*a21^3)*(B0*a21^3));
f22=q22*(B0*a22^3)/((C0*a22^2+D0)*(A0*a22^4)-(B0*a22^3)*(B0*a22^3));
f23=q23*(B0*a23^3)/((C0*a23^2+D0)*(A0*a23^4)-(B0*a23^3)*(B0*a23^3));
f24=q24*(B0*a24^3)/((C0*a24^2+D0)*(A0*a24^4)-(B0*a24^3)*(B0*a24^3));
f25=q25*(B0*a25^3)/((C0*a25^2+D0)*(A0*a25^4)-(B0*a25^3)*(B0*a25^3));
f26=q26*(B0*a26^3)/((C0*a26^2+D0)*(A0*a26^4)-(B0*a26^3)*(B0*a26^3));
f27=q27*(B0*a27^3)/((C0*a27^2+D0)*(A0*a27^4)-(B0*a27^3)*(B0*a27^3));
f28=q28*(B0*a28^3)/((C0*a28^2+D0)*(A0*a28^4)-(B0*a28^3)*(B0*a28^3));
f29=q29*(B0*a29^3)/((C0*a29^2+D0)*(A0*a29^4)-(B0*a29^3)*(B0*a29^3));
f30=q30*(B0*a30^3)/((C0*a30^2+D0)*(A0*a30^4)-(B0*a30^3)*(B0*a30^3));
f31=q31*(B0*a31^3)/((C0*a31^2+D0)*(A0*a31^4)-(B0*a31^3)*(B0*a31^3));

```

```

% Total displacement and rotation
wtot=w1*sin((pi*x)/L)+w2*sin((2*pi*x)/L)+w3*sin((3*pi*x)/L)+w4*sin((4
*pi*x)/L)+w5*sin((5*pi*x)/L)+w6*sin((6*pi*x)/L)+w7*sin((7*pi*x)/L)+w8
*sin((8*pi*x)/L)+w9*sin((9*pi*x)/L)+w10*sin((10*pi*x)/L)+w11*sin((11*
pi*x)/L)+w12*sin((12*pi*x)/L)+w13*sin((13*pi*x)/L)+w14*sin((14*pi*x)/
L)+w15*sin((15*pi*x)/L)+w16*sin((16*pi*x)/L)+w17*sin((17*pi*x)/L)+w18
*sin((18*pi*x)/L)+w19*sin((19*pi*x)/L)+w20*sin((20*pi*x)/L)+w21*sin((
21*pi*x)/L)+w22*sin((22*pi*x)/L)+w23*sin((23*pi*x)/L)+w24*sin((24*pi*
x)/L)+w25*sin((25*pi*x)/L)+w26*sin((26*pi*x)/L)+w27*sin((27*pi*x)/L)+
w28*sin((28*pi*x)/L)+w29*sin((29*pi*x)/L)+w30*sin((30*pi*x)/L)+w31*si
n((31*pi*x)/L)
ftot=f1*cos((pi*x)/L)+f2*cos((2*pi*x)/L)+f3*cos((3*pi*x)/L)+f4*cos((4
*pi*x)/L)+f5*cos((5*pi*x)/L)+f6*cos((6*pi*x)/L)+f7*cos((7*pi*x)/L)+f8
*cos((8*pi*x)/L)+f9*cos((9*pi*x)/L)+f10*cos((10*pi*x)/L)+f11*cos((11*
pi*x)/L)+f12*cos((12*pi*x)/L)+f13*cos((13*pi*x)/L)+f14*cos((14*pi*x)/
L)+f15*cos((15*pi*x)/L)+f16*cos((16*pi*x)/L)+f17*cos((17*pi*x)/L)+f18
*cos((18*pi*x)/L)+f19*cos((19*pi*x)/L)+f20*cos((20*pi*x)/L)+f21*cos((
21*pi*x)/L)+f22*cos((22*pi*x)/L)+f23*cos((23*pi*x)/L)+f24*cos((24*pi*
x)/L)+f25*cos((25*pi*x)/L)+f26*cos((26*pi*x)/L)+f27*cos((27*pi*x)/L)+
f28*cos((28*pi*x)/L)+f29*cos((29*pi*x)/L)+f30*cos((30*pi*x)/L)+f31*co
s((31*pi*x)/L);
% f(z) - f'(z)
fz=z-((4*z.^3)/(3*h.^2))
fz1=(1-((4*z.^2)/(h.^2)))
% Axial Bending Stress
sx=((E*z*a1.^2*w1)-(E*fz*a1*f1))*sin(pi*x/L))+((E*z*a2.^2*w2)-
(E*fz*a2*f2))*sin((2*pi*x)/L))+((E*z*a3.^2*w3)-(E*fz*a3*f3))
*sin(3*pi*x/L))+((E*z*a4.^2*w4)-(E*fz*a4*f4))*sin(4*pi*x/L))+
((E*z*a5.^2*w5)-(E*fz*a5*f5))*sin(5*pi*x/L))+((E*z*a6.^2*w6)-(E*fz*a6*f6))
*sin(6*pi*x/L))+((E*z*a7.^2*w7)-(E*fz*a7*f7))*sin(7*pi*x/L))+
((E*z*a8.^2*w8)-(E*fz*a8*f8))*sin(8*pi*x/L))+((E*z*a9.^2*w9)-
(E*fz*a9*f9))*sin(9*pi*x/L))+((E*z*a10.^2*w10)-(E*fz*a10*f10))
*sin(10*pi*x/L))+((E*z*a11.^2*w11)-(E*fz*a11*f11))*sin(11*pi*x/L))+
((E*z*a12.^2*w12)-(E*fz*a12*f12))*sin(12*pi*x/L))+
((E*z*a13.^2*w13)-(E*fz*a13*f13))*sin(13*pi*x/L))+
((E*z*a14.^2*w14)-(E*fz*a14*f14))*sin(14*pi*x/L))+
((E*z*a15.^2*w15)-(E*fz*a15*f15))*sin(15*pi*x/L))+
((E*z*a16.^2*w16)-(E*fz*a16*f16))*sin(16*pi*x/L))+
((E*z*a17.^2*w17)-(E*fz*a17*f17))*sin(17*pi*x/L))+
((E*z*a18.^2*w18)-(E*fz*a18*f18))*sin(18*pi*x/L))+
((E*z*a19.^2*w19)-(E*fz*a19*f19))*sin(19*pi*x/L))+
((E*z*a20.^2*w20)-(E*fz*a20*f20))*sin(20*pi*x/L))+
((E*z*a21.^2*w21)-(E*fz*a21*f21))*sin(21*pi*x/L))+
((E*z*a22.^2*w22)-(E*fz*a22*f22))*sin(22*pi*x/L))+
((E*z*a23.^2*w23)-(E*fz*a23*f23))*sin(23*pi*x/L))+
((E*z*a24.^2*w24)-(E*fz*a24*f24))*sin(24*pi*x/L)
% Transverse Shear Stress
txz=(G*f1*fz1*cos(pi*x/L))+G*f2*fz1*cos(2*pi*x/L))+G*f3*fz1*cos(3*pi
*x/L))+G*f4*fz1*cos(4*pi*x/L))+G*f5*fz1*cos(5*pi*x/L))+G*f6*fz1*cos
(6*pi*x/L))+G*f7*fz1*cos(7*pi*x/L))+G*f8*fz1*cos(8*pi*x/L))+G*f9
*fz1*cos(9*pi*x/L))+G*f10*fz1*cos(10*pi*x/L))+G*f11*fz1*cos(11*pi*x
/L))+G*f12*fz1*cos(12*pi*x/L))+G*f13*fz1*cos(13*pi*x/L))+G*f14*fz1
*cos(14*pi*x/L))+G*f15*fz1*cos(15*pi*x/L))+G*f16*fz1*cos(16*pi*x/L)
))+G*f17*fz1*cos(17*pi*x/L))+G*f18*fz1*cos(18*pi*x/L))+G*f19*fz1*co
s(19*pi*x/L))+G*f20*fz1*cos(20*pi*x/L))+G*f21*fz1*cos(21*pi*x/L))+
G*f22*fz1*cos(22*pi*x/L))+G*f23*fz1*cos(23*pi*x/L))+G*f24*fz1*cos(24
*pi*x/L))+G*f25*fz1*cos(25*pi*x/L))+G*f26*fz1*cos(26*pi*x/L))+G*f
27*fz1*cos(27*pi*x/L))+G*f28*fz1*cos(28*pi*x/L))+G*f29*fz1*cos(29*pi
*x/L))+G*f30*fz1*cos(30*pi*x/L))+G*f31*fz1*cos(31*pi*x/L)

```