



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ  
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΕΩΡΟΛΟΓΙΑΣ



Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

# Μελέτη της επιρροής της στρατοσφαιρικής ροής στη βαροκλιτική αστάθεια

Χρήστος Γκουλέκας



Επιβλέπων Καθηγητής: Νικόλαος Μπάκας

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2023

## Περίληψη

Η βαροκλιτική αστάθεια είναι από τους κύριους μηχανισμούς κυκλογένεσης και βάρυνσης των υφέσεων στην ατμόσφαιρα. Η μελέτη της γίνεται κατά κόρον με τη βοήθεια της οιονεί-γεωστροφικής δυναμικής καθώς οι υφέσεις μεγάλης και συνοπτικής κλίμακας έχουν μικρό αριθμό Rossby. Τα κύρια χαρακτηριστικά της αστάθειας αναδεικνύονται στο κλασικό μοντέλο του Eady το οποίο εκτείνεται ως την τροπόπαυση και εξετάζει την ευστάθεια μιας κατάστασης με άνεμο σταθερής διάτμησης στην προσέγγιση του  $f$ -επιπέδου. Στην παρούσα εργασία μελετάται η επίδραση της στρατοσφαιρικής ροής στη βαροκλιτική αστάθεια επεκτείνοντας το μοντέλο του Eady με την προσθήκη της στρατόσφαιρας ως ένα στρώμα με μεγαλύτερη διαστρωμάτωση σε σχέση με την τροπόσφαιρα. Σε ότι αφορά τη στρατοσφαιρική ροή, θεωρήθηκαν τρεις περιπτώσεις διάτμησης (θετική, μηδενική, αρνητική) οι οποίες μοντελοποιούν με απλό τρόπο παρατηρούμενες κλιματολογικές καταστάσεις. Για τη μελέτη της αστάθειας χρησιμοποιήθηκαν τα εργαλεία της Γενικευμένης Θεωρίας Ευστάθειας (ΓΘΕ). Δηλαδή υπολογίστηκαν οι διαταραχές που οδηγούν σε βέλτιστη αύξηση της ενέργειάς τους μέσα σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα και ποσοτικοποιήθηκε αυτή η ενεργειακή αύξηση. Οι υπολογισμοί έγιναν για τις τρεις περιπτώσεις στρατοσφαιρικής ροής και συγκρίθηκαν με τους αντίστοιχους υπολογισμούς στο μοντέλο του Eady, ποσοτικοποιώντας έτσι την επίδραση της στρατόσφαιρας στη χωρική κλίμακα των δομών που εμφανίζονται λόγω της βαροκλιτικής αστάθειας και στο χρόνο εξέλιξής τους. Βρέθηκε ότι αν συμπεριλάβουμε τη στρατοσφαιρική ροή, ελαττώνεται ο ρυθμός ανάπτυξης των διαταραχών όπως επίσης επηρεάζεται και η χωρική κλίμακα των δομών που αναμένουμε να εμφανιστούν και να κυριαρχήσουν στη ροή. Συγκεκριμένα, για χρόνους της τάξης της μίας ημέρας βρέθηκε για όλες τις περιπτώσεις στρατοσφαιρικής ροής συγκρίσιμη ενεργειακή αύξηση με αυτή που παρατηρείται στο μοντέλο του Eady, ενώ βρέθηκε ότι αναμένουμε να εμφανιστούν δομές με χωρική κλίμακα μικρότερη από  $1800 \text{ km}$ . Για χρόνους της τάξης των πέντε ημερών, βρέθηκε ενεργειακή υστέρηση των διαταραχών έως και 30% υπό την επίδραση της στρατόσφαιρας, ενώ αναμένουμε να εμφανιστούν δομές με χωρική κλίμακα της τάξης

των 3000 *km* που είναι μικρότερη σε σχέση με το μοντέλο του Eady όπου αναμένονται διαταραχές με κλίμακα της τάξης των 4000 *km*.

# Abstract

Baroclinic instability is one of the main mechanisms of cyclogenesis and deepening of atmospheric low pressure systems and is often studied in the quasi-geostrophic limit as the large and synoptic scale systems have a small Rossby number. The main features of instability are captured in Eady's classical model which examines the stability of a constant-shear flow that extends until the tropopause using the  $f$ -plane approximation. In this work, we study the influence of stratospheric flow on baroclinic instability by extending Eady's model with the addition of the stratosphere as a more stratified layer than the troposphere. Regarding the stratospheric flow, three cases with positive, zero and negative shear were considered as examples of climatologically observed flows. The stability of this flow was investigated using the tools of the Generalized Stability Theory (GST). That is, the initial perturbations that lead to the maximum energy growth within a specified time interval were calculated along with the obtained growth. The calculations were made for the three cases of stratospheric flow and were compared to the corresponding calculations in Eady's model, thus quantifying the effect of the stratospheric flow on the spatial scale of the structures that are expected to dominate the flow and on their time of evolution. It was found that in the presence of the stratosphere the growth rate of perturbations decreases and the spatial scale of the unstable structures is modified. Specifically, within the time interval of one day an energy growth comparable to the growth in Eady's model was found for all cases of stratospheric flow, and the optimal perturbations were found to have a spatial scale less than 1800 km. Within the interval of five days, the energy growth in the presence of the stratosphere was found to be 30% lower and the optimal perturbations were found to have a large scale of the order of 3000 km which is smaller than the corresponding scale in the case of the Eady's model (4000 km).

# Περιεχόμενα

Εξώφυλλο . . . . .	i
Περίληψη . . . . .	ii
Abstract . . . . .	iv
Περιεχόμενα . . . . .	v
Ευχαριστίες . . . . .	vii
Αφιέρωση . . . . .	viii
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Μικρή ιστορική αναδρομή . . . . .	1
1.2 Βαροκλιτική αστάθεια . . . . .	3
1.3 Γενικευμένη Θεωρία Ευστάθειας . . . . .	7
1.4 Σκοπός της εργασίας . . . . .	13
<b>2 Μέθοδος των διαταραχών στην οιονεί-γεωστροφική δυναμική</b>	<b>15</b>
2.1 Εξισώσεις κίνησης και θερμοδυναμικής . . . . .	15
2.1.1 Εξισώσεις κίνησης . . . . .	15
2.1.2 Εξισώσεις θερμοδυναμικής . . . . .	18
2.2 Ανελαστικές εξισώσεις . . . . .	20
2.3 Αδιαστατοποίηση και οιονεί-γεωστροφία . . . . .	23
2.3.1 Αδιαστατοποίηση . . . . .	23
2.3.2 Προσέγγιση οιονεί-γεωστροφίας . . . . .	25
2.4 Ευστάθεια στην οιονεί-γεωστροφία . . . . .	28
<b>3 Βαροκλιτική αστάθεια στο μοντέλο του Eady</b>	<b>32</b>
3.1 Το μοντέλο του Eady . . . . .	32
3.1.1 Διακριτό φάσμα και εκθετική αστάθεια . . . . .	34
3.2 Συνεχές φάσμα και αλγεβρική αστάθεια . . . . .	37
3.3 Γενικευμένη θεωρία ευστάθειας στο μοντέλο του Eady . . . . .	40
3.3.1 Ενεργειακή αύξηση εκθετικά ευσταθών διαταραχών . . . . .	44
3.3.2 Ενεργειακή αύξηση εκθετικά ασταθών διαταραχών . . . . .	48

---

<b>4</b>	<b>Επίδραση της στρατοσφαιρικής ροής στη βαροκλιτική αστάθεια</b>	<b>52</b>
4.1	Η επιρροή της στρατοσφαιρικής ροής στην εκθετική αστάθειας . . . . .	53
4.1.1	Εύρεση αναλυτικής λύσης . . . . .	53
4.2	Ανάλυση της επιρροής της διάτμησης . . . . .	56
4.3	Γενικευμένη θεωρία ευστάθειας για την περίπτωση στρατοσφαιρικής ροής	60
<b>5</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>69</b>
<b>A'</b>	<b>Αριθμητικός κώδικας για τη μελέτη της γενικευμένης ευστάθειας</b>	<b>73</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>87</b>

# Ευχαριστίες

Η εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας έγινε στο πλαίσιο του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών (Π.Μ.Σ) "Ατμοσφαιρικές Επιστήμες και Περιβάλλον" του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων με επιβλέποντα τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Νικόλαο Μπάκα. Στον κύριο Μπάκα χρωστάω ένα θερμό ευχαριστώ για την εποικοδομητική συνεργασία και την πολύτιμη επιστημονική καθοδήγηση και γνώσεις που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών και κατά τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας, καθώς και για την εμπιστοσύνη και το αμείωτο ενδιαφέρον που μου έδειξε από την αρχή μέχρι έως το τέλος.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη του του Εργαστηρίου Μετεωρολογίας και Κλιματολογίας του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, τον Καθηγητή κ. Αριστεΐδη Μπαρτζώκα, τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Χρήστο Λώλη, τον Καθηγητή κ. Νικόλαο Χατζηαναστασίου και τον Καθηγητή κ. Παύλο Κασσωμένο για το εκπαιδευτικό τους έργο καθώς και για τις χρήσιμες υποδείξεις τους κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, οι οποίοι είναι πάντα ένα ανεκτίμητο στήριγμα για εμένα, στηρίζοντας με σε όλες τις αποφάσεις μου και στους οποίους οφείλω τη διαδρομή των σπουδών μου μέχρι και σήμερα.

*Χρήστος Γκουλέκας,  
Ιωάννινα,  
Σεπτέμβριος, 2023*

*Στους γονείς μου.*



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Μικρή ιστορική αναδρομή

Από τα πρώτα χρόνια της ιστορίας του, ο άνθρωπος προσπαθεί να εντοπίσει μοτίβα στη φύση ώστε να κάνει πιο εύκολη την επιβίωση του. Ένα από τα προβλήματα που αντιμετώπιζε και θα ήθελε να γνωρίζει περισσότερα για αυτά είναι τα καιρικά φαινόμενα, καθώς από αυτά εξαρτώνται μείζονος σημασίας ως προς την επιβίωση δραστηριότητες, όπως είναι οι σοδειές που καλλιεργούν οι αγρότες, οι μετακινήσεις των ανθρώπινων πληθυσμών κ.α. Ακόμα και σήμερα όμως, που θεωρητικά το πρόβλημα της επιβίωσης έχει λυθεί, ο άνθρωπος εξαρτάται από τον καιρό στην καθημερινότητά του, είτε είναι αγρότης και ενδιαφέρεται για τις καλλιέργειές του, είτε θέλει να ταξιδέψει ή ακόμα και στην πρόληψη και αντιμετώπιση επικίνδυνων φαινομένων, όπως είναι ένας τυφώνας ή μια πυρκαγιά. Έτσι, από τα αρχαία κιόλας χρόνια, έχει δημιουργηθεί η ανάγκη κατανόησης και πρόβλεψης των φυσικών φαινομένων που σχετίζονται με την κατάσταση της ατμόσφαιρας πάνω από μια περιοχή, ξεφεύγοντας από τα όρια της θειικής εξήγησης, όπως για παράδειγμα ότι ο κεραυνός είναι η οργή του Δία.

Οι πρώτοι λαοί που προσπάθησαν να δώσουν μια επιστημονική εξήγηση για τα καιρικά φαινόμενα ήταν οι Βαβυλώνιοι, οι Κινέζοι και οι αρχαίοι Έλληνες. Οι Βαβυλώνιοι, περίπου το 650 π.Χ, παρατηρούσαν τη μορφή των νεφών και διάφορα οπτικά φαινόμενα

όπως η άλως και τα συνέδεαν με αλλαγές του καιρού που συνέβαιναν σε ένα σύντομο χρονικό διάστημα από την εμφάνισή τους. Από την πλευρά τους, οι αρχαίοι Έλληνες 300 χρόνια μετά, περίπου το 340 π.Χ και με πρωτοπόρο τον Αριστοτέλη και το σύγγραμμά του 'Μετεωρολογικά', ανέπτυξαν θεωρίες για τον τρόπο δημιουργίας πολλών καιρικών φαινομένων, κάποιες από τις οποίες ήταν εξαιρετικά ακριβείς και άλλες οι οποίες κατέρρευσαν με την πάροδο του χρόνου και με την εξέλιξη των επιστημών. Τέλος, οι Κινέζοι το 300 π.Χ προσπάθησαν να χωρίσουν το έτος σε 24 εποχές, όπου κάθε εποχή ήταν και ένας διαφορετικός τύπος καιρού.

Ωστόσο, για την πλήρη κατανόηση και επιστημονική εξήγηση των καιρικών φαινομένων χρειάζεται η κατάλληλη φυσική θεωρία, ο μαθηματικός φορμαλισμός της, καθώς και τα κατάλληλα όργανα για τη μέτρηση των μεταβλητών και των παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν. Έτσι τα πρώτα βήματα για την ποσοτικοποίηση και τη σωστή παρατήρηση του καιρού έγιναν από το Γερμανό αστρονόμο Nicolaus of Cusa στα τέλη του 15ου αιώνα με την ανακάλυψη του πρώτου υγρομέτρου, κάνοντάς δυνατή τη μέτρηση της υγρασίας στην ατμόσφαιρα. Έπειτα ο Γαλιλαίος και ο Torricelli έκαναν δυνατή τη μέτρηση της θερμοκρασίας και της ατμοσφαιρικής πίεσης με την εφεύρεση του θερμομέτρου το 1592 και του βαρομέτρου το 1643, αντίστοιχα. Στα τέλη του 19ου αιώνα, με τη διατύπωση της θεωρίας που διέπει την κίνηση των ρευστών, κατέστη δυνατή η περαιτέρω μελέτη και ανάλυση των μεταβλητών αυτών και η πρώτη προσπάθεια πρόβλεψης της εξέλιξής τους στο χρόνο.

Στον τομέα της δυναμικής μετεωρολογίας, οι πρωτεργάτες ήταν ο λόρδος Kelvin και ο Vilhelm Bjerknes. Ο λόρδος Kelvin απέδειξε το γνωστό θεώρημα της κυκλοφορίας για μια βαροτροπική ατμόσφαιρα το 1867 (Kelvin, 1867) και μελέτησε τη δυναμική αστάθεια (Kelvin, 1871). Έπειτα ο Bjerknes γενίκευσε το θεώρημα της κυκλοφορίας για μια βαροκλιτική ατμόσφαιρα (Bjerknes, 1898), όπως επίσης εισήγαγε τις πρωταρχικές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται μέχρι και σήμερα. Στη συνέχεια ο Carl Gustav Arvid Rossby εφάρμοσε τις πρωταρχικές εξισώσεις σε μεγάλης κλίμακας κινήσεις. Ωστόσο, η πρόγνωση του καιρού ήταν ακόμα πρόκληση για τους μετεωρολόγους της εποχής

λόγω της διαχείρισης μεγάλου όγκου δεδομένων καθώς και της επίλυσης πολλών και δύσκολων εξισώσεων.

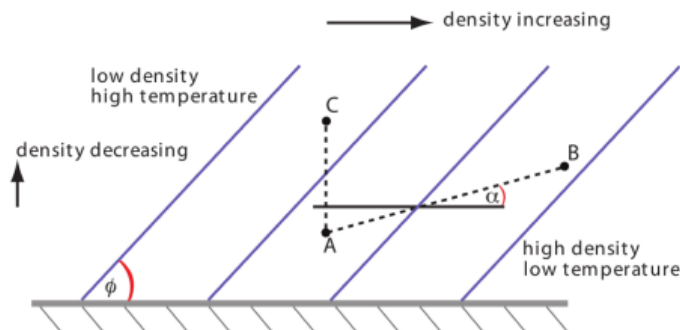
Η διαχείριση έγινε εφικτή μέσω της αριθμητικής επίλυσής τους και με την έλευση του πρώτου υπολογιστή Eniac. Όμως, επειδή στην ατμόσφαιρα υπάρχουν κινήσεις με μεγάλο εύρος χρονικής και χωρικής κλίμακας, η δυσκολία στην πρόγνωση παρέμενε. Ο λόγος είναι ότι η πολύ αδρή διακριτική ικανότητα της διακριτοποίησης που επέβαλε η περιορισμένη ικανότητα των πρώτων υπολογιστών δε μπορούσε να προσομοιώσει τις γρήγορες κινήσεις μικρής κλίμακας στην ατμόσφαιρα. Το αποτέλεσμα ήταν η εμφάνιση αριθμητικής αστάθειας που οδηγούσε σε απειρισμό των ταχυτήτων του ανέμου και των άλλων μεταβλητών σε πεπερασμένο χρόνο. Έτσι, ξεκίνησε η πρώτη ολοκληρωμένη προσπάθεια πρόγνωσης καιρού από τον Von Neumann, ο οποίος είχε χρησιμοποιήσει τον Eniac στο δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο, διοργανώνοντας ένα συνέδριο στο οποίο μεταξύ άλλων είχε καλεσμένο και τον Jule Charney, ο οποίος σκέφτηκε ένα τρόπο να φιλτράρονται οι κινήσεις μικρής κλίμακας, που είναι τα ηχητικά και τα βαρυτικά κύματα, από τις εξισώσεις. Ο τρόπος ήταν η βαροτροπική προσέγγιση, η θεώρηση δηλαδή της ατμόσφαιρας ως ένα ασυμπίεστο ρευστό με τις κινήσεις να είναι ίδιες σε όλο το ύψος της (Charney et al. 1950). Έτσι η πρώτη επιτυχημένη πρόγνωση καιρού ήταν γεγονός.

Όμως, η ατμόσφαιρα στην πραγματικότητα είναι βαροκλιτική και ο Charney για να μπορέσει να λάβει υπόψη στους υπολογισμούς του το χαρακτηριστικό αυτό, δημιούργησε ένα νέο σύνολο εξισώσεων που τις ονόμασε Οιονεί-Γεωστροφικές εξισώσεις (1948). Κατάφερε βάσει αυτών των εξισώσεων να κάνει πρόγνωση για μια βαροκλιτική ατμόσφαιρα καθώς και να θέσει τις βάσεις για την κατανόηση των μηχανισμών που διέπουν τη δυναμική της.

## 1.2 Βαροκλιτική αστάθεια

Η κυριότερη επιτυχία της οιονεί-γεωστροφικής δυναμικής είναι η θεωρητική εξήγηση της κυκλογένεσης και της βάθυνσης των υφέσεων, η οποία δείχθηκε ότι είναι προϊόν

της βαροκλιτικής αστάθειας (Eady, 1949). Ποιοτικά ο μηχανισμός της βαροκλιτικής αστάθειας είναι ο εξής. Στο Σχήμα 1.1 φαίνεται η κλιματολογική θερμοκρασιακή δομή στην ατμόσφαιρα στο Βόρειο Ημισφαίριο, φαίνονται δηλαδή ποιοτικά οι ισοϋψείς της δυνητικής θερμοκρασίας σε επίπεδο  $y - z$ . Η πλάγια κλίση των ισοϋψών προκύπτει καθώς στα αριστερά έχουμε το θερμό Ισημερινό και στα δεξιά τον ψυχρό Βόρειο Πόλο, ενώ σε κάθε γεωγραφικό πλάτος η δυνητική θερμοκρασία μειώνεται καθ' ύψος λόγω του ισοζυγίου της ακτινοβολίας, αφού στα μεγαλύτερα γεωγραφικά πλάτη η ένταση της προσπίπτουσας ηλιακής ακτινοβολίας είναι μικρότερη συγκριτικά με την έντασή της στα μικρότερα γεωγραφικά πλάτη. Παρατηρούμε ότι αν μια αέρια μάζα η οποία στο σημείο  $A$  έχει ίδια θερμοκρασία με το περιβάλλον  $\theta_{\alpha\mu} = \theta_{\alpha\tau\mu}^A$  την ανυψώσουμε κατακόρυφα και αδιαβατικά, αυτή διατηρεί τη δυνητική της θερμοκρασία λόγω της αδιαβατικής μεταβολής και στο σημείο  $C$  που ανυψώνεται έχει μικρότερη θερμοκρασία από το περιβάλλον καθώς  $\theta_{\alpha\tau\mu}^A < \theta_{\alpha\tau\mu}^C$ . Έτσι, αυτή θα επιστρέψει στο σημείο  $A$  και μπορούμε να πούμε ότι είναι θερμοκά ευσταθής. Όμως, αν την ίδια μάζα την ανυψώσουμε στο σημείο  $B$ , τότε παρατηρούμε ότι έχει μεγαλύτερη θερμοκρασία και θα συνεχίσει να ανέρχεται προς αυτή την κατεύθυνση. Επομένως έχουμε θερμοκή αστάθεια σε "λοξή" διεύθυνση (slantwise convection) με ταυτόχρονη μεταφορά θερμότητας προς βοράν και προς μεγαλύτερα ύψη.

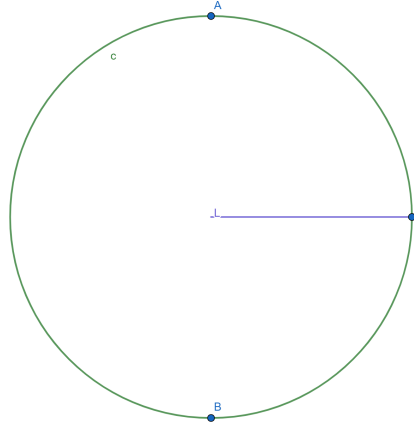


Σχήμα 1.1: Σχηματική αναπαράσταση της βαροκλιτικής αστάθειας ως πλάγιας ανωμεταφοράς.

Για την ποσοτική μελέτη της βαροκλιτικής αστάθειας χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των διαταραχών για τη δυναμική της ατμόσφαιρας. Δηλαδή, ως υποθέσουμε ότι έχουμε ένα δυναμικό σύστημα όπως το ραβδικό εκκρεμές μάζας  $m$  και μήκους  $L$  όπως στο Σχήμα 1.2. Παρατηρούμε ότι έχει δύο σημεία ισορροπίας στο A και στο B, ωστόσο η διαφορά τους είναι ότι το ένα είναι ευσταθές και το άλλο ασταθές σημείο ισορροπίας. Αυτό σημαίνει ότι αν το εκκρεμές το εκτρέψουμε λίγο από τη θέση A, τότε η διαταραχή θα αυξήσει το πλάτος της και το εκκρεμές δε θα ξαναγυρίσει στη θέση A. Αντίθετα, αν το εκτρέψουμε λίγο από τη θέση B, τότε θα εκτελέσει μια ταλάντωση γύρω από αυτό το σημείο και παρουσία τριβής το πλάτος της διαταραχής θα μειωθεί και το εκκρεμές θα επιστρέψει στη θέση B. Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και στην ατμόσφαιρα, όπου θεωρούμε ως κατάσταση ισορροπίας δεδομένες κατανομές της θερμοκρασίας, της πίεσης και της ταχύτητας του ανέμου, που μηδενίζουν τις τάσεις των μεταβολών τους. Αν μικρές διαταραχές των κατανομών αυτών μπορούν να αυξήσουν το πλάτος τους τότε η ισορροπία είναι ασταθής, ενώ αν ταλαντώνονται γύρω από αυτές τις κατανομές η ισορροπία είναι ευσταθής.

Ο Eady, το 1949, βασιζόμενος στις εξισώσεις του Charney θεώρησε την απλοποιημένη κατάσταση της ατμόσφαιρας με τις ευθείες πλάγιες ισόθερμες που φαίνονται στο Σχήμα 1.1. Η θερμοκρασιακή αυτή δομή λόγω της ισορροπίας του θερμικού ανέμου συντηρεί ένα μέσο άνεμο που έχει σταθερή διάτμηση καθ' ύψος και είναι ανεξάρτητος του γεωγραφικού πλάτους. Αγνοώντας την τριβή και την ύπαρξη της στρατόσφαιρας, θεωρώντας δηλαδή ότι οι ατμοσφαιρικές κινήσεις σταματούν στην τροπόπαυση, έδειξε ότι αυτή η ισορροπία είναι ασταθής με την ατμόσφαιρα να φεύγει από αυτή την κατάσταση μέσω της εμφάνισης ασταθών δομών, κινήσεων δηλαδή με ραγδαίως αυξανόμενη ένταση, που δεν είναι άλλες από τις υφέσεις που βαθαίνουν.

Η εργασία του Eady άνοιξε το δρόμο για περαιτέρω μελέτη της αστάθειας και κάποιες από τις εργασίες που ακολούθησαν μελέτησαν την επιρροή της τριβής στη βαροκλιτική αστάθεια (Lin and Pierrehumbert, 1988), την εξέλιξη των ασταθών δομών καθ' όλη τη διάρκεια της 'ζωής' τους (Simmons and Hoskins, 1978) και το πώς αυτές επηρεάζουν τη



Σχήμα 1.2: Εκκρεμές μάζας  $m$  και μήκους  $L$ , με σημεία ισορροπίας A (ασταθές) και B (ευσταθές).

γενική κυκλοφορία (McIntyre and Palmer, 1983) . Επίσης, μελετήθηκε και η βαροκλιτική αστάθεια για ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο αεροχειμάρρου (Simmons and Hoskins, 1976; Feldstein and Held, 1989).

Σε ό,τι αφορά στην επίδραση της στρατόσφαιρας στις τροποσφαιρικές κινήσεις, οι Plumb and Semeniuk (2003) έδειξαν ότι οι διαταραχές του εξωτροπικού ζωνικού ανέμου, οι οποίες παράγονται από τη διακύμανση των κυμάτων Rossby στην τροπόσφαιρα, εμφανίζονται πρώτα στη στρατόσφαιρα και έπειτα μετακινούνται προς την τροπόσφαιρα. Επιπλέον, η ευαισθησία των συνοπτικών συστημάτων στην τροπόσφαιρα στις αρχικές συνθήκες της στρατόσφαιρας έχει τεκμηριωθεί και από περαιτέρω εργασίες (Charlton et al., 2004). Για παράδειγμα, τα συνοπτικά συστήματα στην τροπόσφαιρα παρουσιάζουν ευαισθησία στις αιφνίδιες θερμάνσεις της στρατόσφαιρας, οι οποίες μπορούν να συμβούν όταν οι άνεμοι στην πολική στρατόσφαιρα αλλάξουν κατεύθυνση λόγω της αλληλεπίδρασης τους με πλανητικά κύματα τα οποία διαδίδονται από την τροπόσφαιρα προς τη στρατόσφαιρα και προσδίδουν μια επιτάχυνση στη ροή προς τη δυτική κατεύθυνση.

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη γρήγορη κάθοδο των ψυχρών αέριων μαζών στην τροπόσφαιρα και τη θέρμανση της πολικής στρατόσφαιρας, η οποία σε ακραίες περιπτώσεις μπορεί να θερμανθεί έως και περίπου  $50^{\circ}\text{C}$  (Limpasuvan et al., 2004). Έτσι, είναι σημαντικό να διερευνηθεί η επίπτωση των στρατοσφαιρικών κινήσεων στη βαροκλιτική αστάθεια.

Επεκτείνοντας το μοντέλο του Eady με διάφορες μοντελοποιήσεις της στρατόσφαιρας, οι Blumen (1979), Muller (1991), Polvani and Kushner (2002) και Wittman et al. (2007) μελέτησαν πώς η βαροκλιτική αστάθεια επηρεάζεται από τις κινήσεις στη στρατόσφαιρα. Ωστόσο, οι εργασίες αυτές χρησιμοποίησαν τα εργαλεία της κλασικής θεωρίας ευστάθειας, τα οποία ταυτοποιούν σωστά τα χαρακτηριστικά και τη χρονική εξέλιξη των υφέσεων μόνο σε μεγάλους χρόνους. Υποθέτουν δηλαδή ότι οι υφέσεις βαθαινουν μέσα σε ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, ενώ γνωρίζουμε ότι η εξέλιξη του φαινομένου στην ατμόσφαιρα συμβαίνει μέσα σε χρονικό ορίζοντα της τάξης των μερικών ημερών. Για το λόγο αυτό, η αστάθεια πρέπει να μελετηθεί με τις σύγχρονες μεθόδους της Γενικευμένης Θεωρίας Ευστάθειας, η οποία ταυτοποιεί τις ασταθείς δομές που βαθαινουν μέσα σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα και την οποία θα εξηγήσουμε στην επόμενη Ενότητα. Αυτή την ανάγκη καλύπτει η παρούσα εργασία.

### 1.3 Γενικευμένη Θεωρία Ευστάθειας

Για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω, θα εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο μελετούμε την ευστάθεια ενός δυναμικού συστήματος. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα απλό δυναμικό σύστημα που περιγράφεται από τις συναρτήσεις  $x_1, x_2$  οι οποίες εξελίσσονται σύμφωνα με τη σχέση

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1.1)$$

όπου το διάνυσμα  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ , με τον εκθέτη  $T$  να δηλώνει τον ανάστροφο του διανύσματος  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{f}$  μια συνάρτηση αυτού. Θεωρούμε ότι  $\mathbf{x}_0$  είναι ένα σημείο ισορροπίας του συστήματος στο οποίο επομένως ισχύει  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$ .

Για να εξετάσουμε την ευστάθεια του σημείου αυτού χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των διαταραχών, στην οποία θεωρούμε μικρές διαταραχές  $\mathbf{x}'$  γύρω από το σημείο ισορροπίας, τις εισάγουμε στη δυναμική και μελετούμε το πως εξελίσσονται στο χρόνο. Έχουμε δηλαδή  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \epsilon \mathbf{x}'$  όπου το  $\epsilon \ll 1$  να δηλώνει το μικρό πλάτος της διαταραχής, αντικαθιστούμε στη δυναμική και παίρνουμε:

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \epsilon \mathbf{x}'). \quad (1.2)$$

Εφόσον οι διαταραχές είναι μικρές μπορούμε να αναπτύξουμε την  $\mathbf{f}$  κατά Taylor και τότε έχουμε:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \epsilon \mathbf{x}') \simeq \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \epsilon \frac{\partial f_i}{\partial x_j} x'_j + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (1.3)$$

όπου επειδή το  $\mathbf{x}_0$  είναι σημείο ισορροπίας έχουμε  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$ , ενώ  $\partial f_i / \partial x_j = \mathbf{A}$  είναι ο πίνακας της Ιακωβιανής της  $\mathbf{f}$ . Αν αγνοήσουμε τους όρους δεύτερης τάξης εφόσον είναι πολύ μικροί καταλήγουμε σε μία γραμμική διαφορική εξίσωση για την εξέλιξη των διαταραχών:

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{x}'. \quad (1.4)$$

Αν υποθέσουμε ότι  $\lambda_1, \lambda_2$  είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα τότε η λύση μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{x}'(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) = c_1 \mathbf{u}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{u}_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (1.5)$$

όπου οι σταθερές  $c_1, c_2$  υπολογίζονται μέσω των αρχικών συνθηκών. Παρατηρούμε ότι αν το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών είναι θετικό τότε η διαταραχή θα αυξήσει το πλάτος της εκθετικά και άρα η ισορροπία θα είναι ασταθής, ενώ αν το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών είναι αρνητικό τότε το πλάτος της διαταραχής θα ταλαντώνεται άρα θα έχουμε ευσταθή ισορροπία. Στην περίπτωση που και οι δύο ιδιοτιμές έχουν θετικό πραγματικό μέρος, μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα, το ιδιοάνυσμα με την ιδιοτιμή με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος θα κυριαρχεί στη λύση (1.5) καθώς μεγαλώνει εκθετικά με μεγαλύτερο ρυθμό. Έτσι, για ένα πολυδιάστατο σύστημα όπως η ατμόσφαιρα με πολλά ιδιοανύσματα η πρόβλεψη είναι ότι για να έχουμε αστάθεια πρέπει τουλάχιστον



μία ιδιοτιμή να έχει θετικό πραγματικό μέρος, ενώ οι δομές που αναμένουμε να παρατηρήσουμε είναι το ιδιοάνυσμα με την ιδιοτιμή που έχει το μεγαλύτερο θετικό πραγματικό μέρος.

Ωστόσο, μπορεί οι διαταραχές να αυξάνουν το πλάτος τους αλγεβρικά και όχι εκθετικά και μάλιστα η μεταβατική αύξηση του πλάτους τους είναι πιθανό να είναι πιο γρήγορη από την εκθετική αύξηση στον πεπερασμένο χρόνο μέσα στον οποίο αναπτύσσονται τα καιρικά συστήματα. Αυτό ισχύει όχι μόνο για τις ασταθείς δομές αλλά και για τις εκθετικά ευσταθείς (Schmid and Henningson, 2001). Για το λόγο αυτό αναπτύχθηκε η Γενικευμένη Θεωρία Ευστάθειας (ΓΘΕ) η οποία μπορεί να μελετήσει την αύξηση του πλάτους των διαταραχών, είτε αυτή είναι εκθετική είτε όχι, και να ταυτοποιήσει τις διαταραχές που αυξάνουν το πλάτος τους πιο γρήγορα σε πεπερασμένο χρόνο (Farrell and Ioannou, 1996).

Σύμφωνα με τη ΓΘΕ, μελετούμε την αύξηση των διαταραχών σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα το οποίο υποβάλλεται από το φυσικό πρόβλημα και στην περίπτωση των συνοπτικών συστημάτων είναι ο χρόνος μέσα στον οποίο βαθαίνουν οι υφέσεις, δηλαδή ένα χρονικό διάστημα μερικών ημερών, το οποίο και θα ονομάσουμε ως  $T_{opt}$ . Για να ποσοτικοποιήσουμε την αύξηση αυτή, στη μετεωρολογία, χρησιμοποιούμε την ενέργεια  $E$  των διαταραχών ως ένα θετικά ορισμένο μέτρο και αναζητούμε το μέγιστο του λόγου της ενεργειακής αύξησης της

$$G(T_{opt}) = \max \frac{E(T_{opt})}{E(T_0)}, \quad (1.6)$$

καθώς και τις διαταραχές που επιτυγχάνουν την αύξηση αυτή. Για τον υπολογισμό της ως υποθέσουμε ότι για το δυναμικό σύστημα (1.1) η ενέργεια των διαταραχών εκφράζεται μέσω της μετρική  $\mathbf{M}$  από τη σχέση  $E = \mathbf{x}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{x}$  όπου  $\mathbf{x}^\dagger$  είναι ο Ερμητιανός ανάστροφος του διανύσματος  $\mathbf{x}$ . Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1.6) παίρνουμε

$$G = \frac{E(T_{opt})}{E(0)} = \frac{\mathbf{x}^\dagger(T_{opt}) \mathbf{M} \mathbf{x}(T_{opt})}{\mathbf{x}^\dagger(0) \mathbf{M} \mathbf{x}(0)} = \frac{\mathbf{x}^\dagger(0) e^{\mathbf{A}^\dagger T_{opt}} \mathbf{M} e^{\mathbf{A} T_{opt}} \mathbf{x}(0)}{\mathbf{x}^\dagger(0) \mathbf{M} \mathbf{x}(0)} = \lambda, \quad (1.7)$$

λόγω της λύσης (1.5). Ισοδύναμα η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$\mathbf{x}^\dagger(0) \left( e^{\mathbf{A}^\dagger T_{opt}} \mathbf{M} e^{\mathbf{A} T_{opt}} \mathbf{x}(0) - \lambda \mathbf{M} \mathbf{x}(0) \right) = 0, \quad (1.8)$$

όπου για να ικανοποιείται η παραπάνω σχέση θα πρέπει το  $\lambda$  να είναι η λύση του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών

$$e^{\mathbf{A}^\dagger T_{opt}} \mathbf{M} e^{\mathbf{A} T_{opt}} \mathbf{x}(0) = \lambda \mathbf{M} \mathbf{x}(0). \quad (1.9)$$

Άρα, η μέγιστη ενεργειακή αύξηση αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή  $\lambda$  και η διαταραχή η οποία την επιτυγχάνει είναι το αντίστοιχο ιδιοάνυσμα.

Για την καλύτερη κατανόηση των όσων ειπώθηκαν ως εξετάσουμε ένα απλό παράδειγμα στο οποίο ο πίνακας  $\mathbf{A}$  ορίζεται ως:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -\cot \theta \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

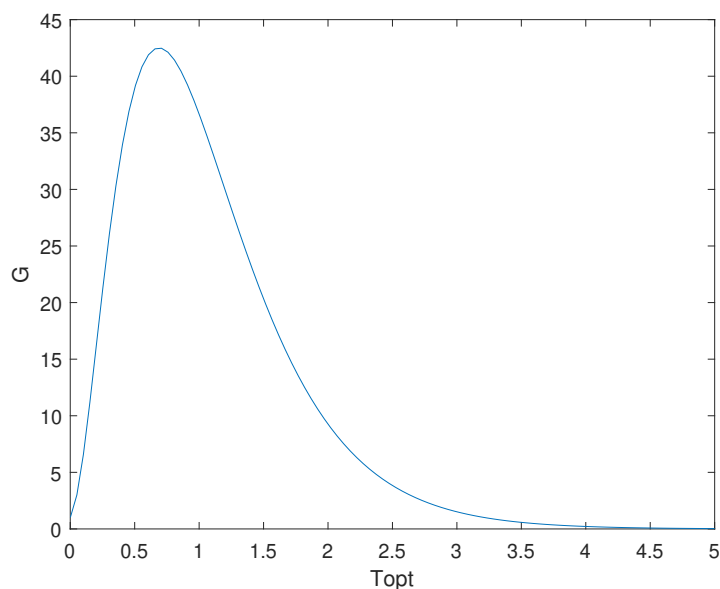
και η μετρική της ενέργειας δίνεται από τον παρακάτω πίνακα

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\mathbf{A}$  που είναι στη συγκεκριμένη περίπτωση  $\lambda_1 = -1$  και  $\lambda_2 = -2$ , είναι πραγματικές και αρνητικές, επομένως περιμένουμε να έχουμε εκθετική ευστάθεια σύμφωνα με τα παραπάνω. Στο Σχήμα 1.3 φαίνεται η μέγιστη ενεργειακή αύξηση των διαταραχών συναρτήσει του χρόνου βελτιστοποίησης  $T_{opt}$  για γωνία  $\theta = \pi/100$  όπως υπολογίζεται από το πρόβλημα ιδιοτιμών (1.9). Παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με αυτό που προβλέπει η εκθετική ευστάθεια, οι διαταραχές αυξάνουν το πλάτος του έως και περίπου 45 φορές σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

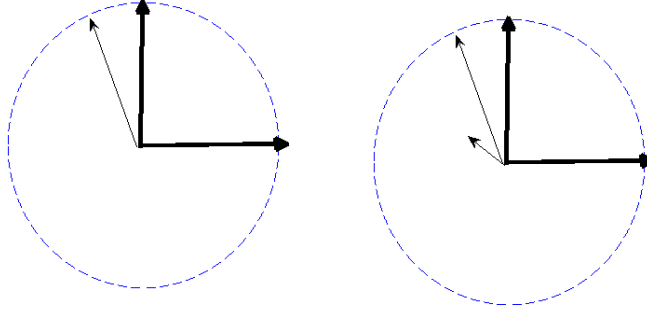
Ο λόγος που μπορεί να εμφανίζονται μεγάλες ενεργειακές αυξήσεις παρά την εκθετική ευστάθεια, είναι η μη-ερμητιανότητα του πίνακα  $\mathbf{A}$  που σημαίνει ότι δεν έχει ορθογώνια βάση. Πράγματι, αν υπολογίσουμε το μεταθέτη του πίνακα

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger - \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \cot \theta \begin{pmatrix} \cot \theta & 1 \\ 1 & -\cot \theta \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$



Σχήμα 1.3: Μέγιστη ενεργειακή αύξηση  $G$  συναρτήσει του χρόνου  $T_{opt}$  και για γωνία  $\theta = \pi/100$ .

βρίσκουμε ότι μηδενίζεται και επομένως ο πίνακας είναι κανονικός μόνο όταν  $\theta = \pi/2$ . Σε ένα κανονικό πίνακα, μια αρχική συνθήκη με μέτρο τη μονάδα προβάλλεται πάνω στα ιδιοανύσματα που είναι κάθετα μεταξύ τους όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.4 και οι προβολές αυτές είναι οι συντελεστές  $c_1, c_2$ . Όμως αυτοί μειώνονται με διαφορετικούς ρυθμούς  $\lambda_1, \lambda_2$  σύμφωνα με τη λύση (1.5) και άρα το διάνυσμα στρίβει και το μήκος, συνεπώς και η ενέργεια του, μειώνεται. Σε ένα μη-ερμητιανό πίνακα, τα ιδιοανύσματα δεν είναι ορθογώνια και σχηματίζουν γωνία μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει ότι οι προβολές της αρχικής διαταραχής υπολογίζονται φέρνοντας παράλληλες από το άκρο της αρχικής συνθήκης μέχρι να συναντήσουν το άλλο ιδιοάνυσμα όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.5. Όμως αυτές οι προβολές έχουν πολύ μεγαλύτερο μέτρο από αυτές της προηγούμενης περίπτωσης του κανονικού πίνακα, ενώ το μεγάλο τους μέτρο δεν είναι αρχικά εμφανές καθώς εξουδετερώνουν η μία την άλλη. Καθώς οι προβολές μειώνονται με το χρόνο σύμφωνα πάλι με τη λύση (1.5), η εξουδετέρωση δεν είναι αποτελεσματική και η σύνθεσή της δημιουργεί ένα διάνυσμα με μέτρο μεγαλύτερο της μονάδας όπως φαίνεται στο Σχήμα



Σχήμα 1.4: Αριστερά φαίνεται η προβολή αρχικής συνθήκης (λεπτό διάνυσμα) στα δύο κάθετα ιδιοανύσματα (παχιά διανύσματα) κανονικού πίνακα, ενώ δεξιά φαίνεται η χρονική της εξέλιξη σε μεταγενέστερο χρόνο.

1.5 και επομένως για ένα χρονικό διάστημα θα έχουμε μεταβατική αύξηση της ενέργειας της. Από φυσική έννοια, αυτό σημαίνει ότι μπορεί να έχουμε μεγάλη ενεργειακή αύξηση για πεπερασμένο χρόνο έως ότου αναλάβει η εκθετική μείωση στην περίπτωση που έχουμε εκθετική ευστάθεια και το μέτρο της διαταραχής να τείνει στο μηδέν.

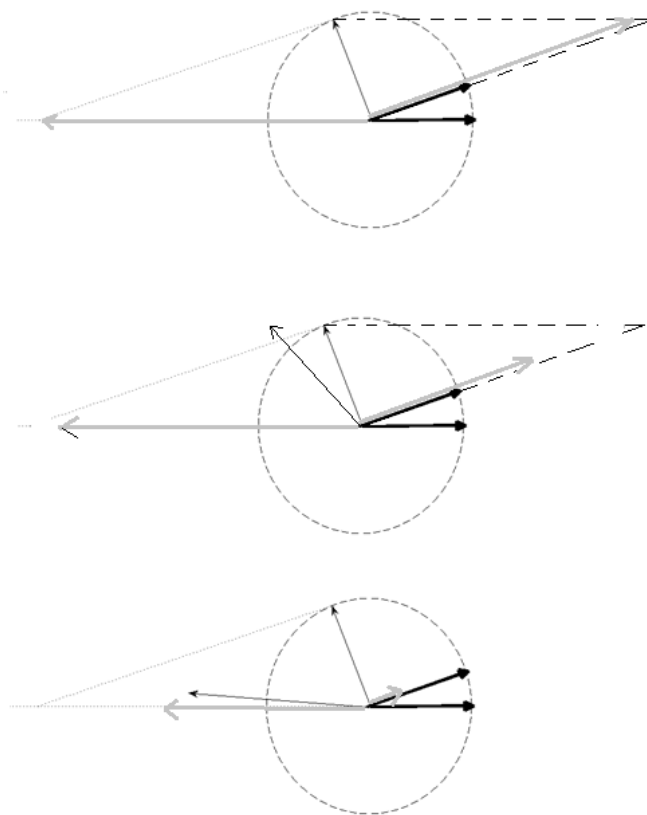
Επίσης, με βάση αυτή τη γεωμετρική εικόνα γίνεται κατανοητό ότι η μέγιστη προβολή σε μια ιδιοκατάσταση, δεν είναι η ίδια. Μάλιστα από το Σχήμα 1.5 βλέπουμε ότι η μέγιστη προβολή στο  $\mathbf{u}_1$  είναι το κάθετο διάνυσμα στο  $\mathbf{u}_2$ , με το διάνυσμα αυτό να ονομάζεται διορθογώνιο. Έτσι, αν έχουμε ένα τελεστή  $\mathbf{A}$  με ασταθή ιδιοανύσματα που δίνονται από τις στήλες του πίνακα  $\mathbf{U}$ , η βέλτιστη διέγερση της ασταθούς  $i$ -ιδιοκατάστασης  $\mathbf{U}_{ai}$  είναι το διορθογώνιο  $\mathbf{U}_{ib}^{-1*}$ . Πράγματι, για μεγάλους χρόνους θα κυριαρχήσει η ιδιοκατάσταση με την ιδιοτιμή με το μεγαλύτερο θετικό πραγματικό μέρος που ας υποθέσουμε ότι είναι η ιδιοτιμή  $\lambda_1$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda_1 t} \mathbf{U}_{a1} \mathbf{U}_{1b}^{-1}, \quad (1.13)$$

δηλαδή θα κυριαρχήσει η πιο ασταθής ιδιοκατάσταση. Όμως, η αρχική προβολή σε αυτή είναι η διορθογώνιά της ( $\mathbf{U}_{1b}^{-1*}$ ) καθώς με βάση τη σχέση (1.13) έχουμε:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{U}_{1b}^{-1\dagger} = |\mathbf{U}_{1b}^{-1}|^2 e^{\lambda_1 t} \mathbf{U}_{a1},$$

δηλαδή η ιδιοκατάσταση διεγείρεται με πλάτος ίσο με το μέτρο του διορθογώνιου δια-



Σχήμα 1.5: Επάνω φαίνεται η αρχική συνθήκη (λεπτό διάνυσμα) και οι προβολές της (γκρι διανύσματα) στα δύο ιδιοανύσματα (παχιά διανύσματα) μη-κανονικού πίνακα. Στο μεσαίο και το κάτω σχήμα φαίνεται η χρονική της εξέλιξη σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές.

νύσματος

$$p = |\mathbf{U}_{1b}^{-1}|^2. \quad (1.14)$$

## 1.4 Σκοπός της εργασίας

Σκοπός της εργασίας είναι να μελετηθεί η επίδραση που έχει η στρατοσφαιρική ροή στη βαροκλιτική αστάθεια χρησιμοποιώντας τα εργαλεία της ΓΘΕ. Για να το επιτύχουμε, θα χρησιμοποιήσουμε ως δυναμική αναφοράς το κλασικό μοντέλο του Eady, το οποίο εξετάζει τη βαροκλιτική αστάθεια της κατάστασης της ατμόσφαιρας που έχει άνεμο

σταθερής διάτμησης, μέχρι την τροπόπαυση, αγνοώντας έτσι τη στρατόσφαιρα.

Έπειτα, θα προσθέσουμε τη στρατόσφαιρα στο μοντέλο ως ένα στρώμα με πολύ πιο ευσταθή διαστρωμάτωση από την τροπόσφαιρα το οποίο εκτείνεται έως το ύψος των  $60 \text{ km}$ . Για να καλύψουμε διαφορετικές περιπτώσεις ατμοσφαιρικής ροής, θα εξετάσουμε τη βαροκλιτική αστάθεια για τρεις διαφορετικές περιπτώσεις διάτμησης του ανέμου στη στρατόσφαιρα (θετική, μηδενική, αρνητική). Για κάθε μια από αυτές τις τρεις καταστάσεις ισορροπίας για την ατμόσφαιρα, θα μελετήσουμε την ευστάθειά τους με τη μέθοδο των διαταραχών και στο ασυμπτωτικό όριο απείρου χρόνου με την κλασική θεωρία ευστάθειας, αλλά και σε πεπερασμένο χρόνο, χρησιμοποιώντας τη ΓΘΕ. Με αυτό τον τρόπο θα ταυτοποιήσουμε τις δομές που αυξάνουν πιο γρήγορα το πλάτος τους και θα συγκρίνουμε τα χαρακτηριστικά τους με αυτά των δομών που βρήκαμε στο απλό μοντέλο του Eady, ώστε να μπορέσουμε να ποσοτικοποιήσουμε την επιρροή που έχει η στρατοσφαιρική ροή στη βαροκλιτική αστάθεια.

Η εργασία έχει την παρακάτω διάρθρωση. Στο Κεφάλαιο 2 θα παρουσιαστεί η δυναμική της οιονεί-γεωστροφίας και πώς αυτή προκύπτει από τις εξισώσεις Navier-Stokes και τις εξισώσεις της θερμοδυναμικής. Θα παρουσιαστεί επίσης η εφαρμογή της μεθόδου των διαταραχών στην περίπτωση αυτή γύρω από το σημείο ισορροπίας. Στο Κεφάλαιο 3, θα μελετήσουμε την ευστάθεια στο κλασικό μοντέλο του Eady για να έχουμε ένα σύστημα αναφοράς για τη σύγκριση που θα κάνουμε, ώστε να ποσοτικοποιήσουμε την επίδραση της στρατόσφαιρας στη βαροκλιτική αστάθεια. Στο Κεφάλαιο 4, θα μελετήσουμε την ευστάθεια σε κάθε μια περίπτωση διάτμησης του ανέμου στη στρατόσφαιρα και θα αναλύσουμε τα αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν και θα γίνει η σύγκριση των αποτελεσμάτων με αυτά στο μοντέλο του Eady. Τέλος στο Κεφάλαιο 5 θα παρουσιαστούν τα συμπεράσματα της εργασίας.

## Κεφάλαιο 2

# Μέθοδος των διαταραχών στην οιονεί-γεωστροφική δυναμική

### 2.1 Εξισώσεις κίνησης και θερμοδυναμικής

#### 2.1.1 Εξισώσεις κίνησης

Για να μπορέσουμε να μελετήσουμε ποσοτικά την επίδραση που θα έχει η στρατοσφαιρική ροή στη βαροκλιτική αστάθεια πρέπει πρώτα να μοντελοποιήσουμε μαθηματικά την ατμόσφαιρα. Η ατμόσφαιρα, όντας το αεριώδες περίβλημα της Γης, που την ακολουθεί στο σύνολο των κινήσεων της, είναι ένα ρευστό και επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ανάλογες εξισώσεις για να περιγράψουμε τόσο την κατάσταση της όσο και τις κινήσεις που συμβαίνουν μέσα σε αυτή. Βασικό εργαλείο στη μελέτη των κινήσεων είναι ο νόμος της κίνησης, στον οποίο θα στηριχτούμε και εμείς ώστε να προσδιορίσουμε την επιτάχυνση μιας αέριας μάζας. Ο νόμος της κίνησης περιγράφεται από την εξίσωση Navier-Stokes:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \mathbf{g}^* + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\mathbf{V}, \quad (2.1)$$

όπου  $D\mathbf{V}/Dt$  είναι η επιτάχυνση μιας αέριας μάζας,  $P$  η πίεση,  $\rho$  η πυκνότητά της και  $\mu$  το ιξώδες. Αναλυτικά, στο αριστερό μέλος της εξίσωσης έχουμε την ολική παράγωγο

της ταχύτητας  $\mathbf{V}$ :

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\mathbf{V}.$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται πως η επιτάχυνση της αέριας μάζας είναι άθροισμα της τοπικής μεταβολής της, καθώς και της μεταβολής της λόγω της κίνησης του ίδιου του ρευστού. Στο δεξί μέλος της εξίσωσης (2.1) έχουμε το άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται στη μάζα ανά μονάδα μάζας. Οι δυνάμεις αυτές είναι η δύναμη της βαροβαθμίδας  $-\nabla P/\rho$ , η δύναμη της βαρύτητας  $\mathbf{g}^*$  και η δύναμη του ιξώδους  $(\mu/\rho)\nabla^2\mathbf{V}$ . Την τελευταία θα την αγνοήσουμε στην παρούσα μελέτη, αφού η μοριακή τριβή στην ατμόσφαιρα είναι αμελητέα. Επίσης, η ατμόσφαιρα μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστο ρευστό σε καλή προσέγγιση, επομένως από την αρχή διατήρησης της μάζας

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (2.2)$$

παίρνουμε

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.3)$$

Ως γνωστόν, η Γη κάνει περιστροφική κίνηση γύρω από τον άξονα της με γωνιακή ταχύτητα  $\Omega = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$ . Επομένως, για να εφαρμόσουμε την εξίσωση κίνησης πρέπει να λάβουμε υπόψιν μας ότι το σύστημα της Γης είναι μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Αν θεωρήσουμε ένα τυχαίο διάνυσμα  $\mathbf{A}$  που είναι ακίνητο ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων και σχηματίζει γωνία  $\phi$  με το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας και το παραγωγίσουμε ώστε να βρούμε τη μεταβολή του, παίρνουμε:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}. \quad (2.4)$$

Η σχέση αυτή δείχνει πώς μεταβάλλεται το  $\mathbf{A}$  για έναν εξωτερικό παρατηρητή του συστήματος. Αν τώρα θεωρήσουμε ένα διάνυσμα  $\mathbf{B}$  με μεταβαλλόμενο μέτρο τότε αυτό θα μεταβάλλεται στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς σύμφωνα με τη σχέση:

$$\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_\alpha = \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B}, \quad (2.5)$$



με το δείκτη  $\alpha$  να υποδεικνύει το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων. Αν στη θέση του  $\mathbf{B}$  θεωρήσουμε το διάνυσμα θέσης  $\mathbf{r}$  τότε παίρνουμε: την ταχύτητα στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς:

$$\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (2.6)$$

Αντικαθιστώντας την ταχύτητα αυτή  $\mathbf{V}_\alpha$  ως διάνυσμα  $\mathbf{B}$ , προκύπτει:

$$\left( \frac{d\mathbf{V}_\alpha}{dt} \right)_\alpha = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}), \quad (2.7)$$

ή απλούστερα:

$$\left( \frac{d\mathbf{V}_\alpha}{dt} \right)_\alpha = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} - \Omega^2 \mathbf{r}. \quad (2.8)$$

Ο όρος στο αριστερό μέλος της εξίσωσης αποτελεί την απόλυτη επιτάχυνση, την οποία και χρειαζόμαστε για να εκφράσουμε το νόμο της κίνησης. Δηλαδή είναι ίση με το άθροισμα των δυνάμεων ανά μονάδα μάζας που ασκούνται πάνω στην αέρια μάζα. Επομένως με απλή αντικατάσταση καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \mathbf{g}^* + \Omega^2 \mathbf{r}. \quad (2.9)$$

Στο δεξί μέλος της εξίσωσης αυτής εμφανίζονται δύο φαινόμενες δυνάμεις λόγω του ότι εφαρμόζουμε το νόμο της κίνησης σε περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων. Η πρώτη είναι η δύναμη Coriolis  $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}$  και η δεύτερη είναι η φυγόκεντρος δύναμη  $\Omega^2 \mathbf{r}$  όπου μαζί με την  $\mathbf{g}^*$  μας δίνει μια ισοδύναμη δύναμη βαρύτητας  $\mathbf{g} = \mathbf{g}^* + \Omega^2 \mathbf{r}$ , η οποία είναι πάντα κάθετη στο γεωειδές σχήμα της επιφάνειας της Γης.

Εφόσον θα μελετήσουμε τις κινήσεις του αέρα σε μια περιορισμένη έκταση της Γης και συγκεκριμένα σε χωρικές κλίμακες μικρότερες από τις συνοπτικές κινήσεις, μπορούμε αγνοήσουμε τη σφαιρικότητα της Γης και να θεωρήσουμε κινήσεις σε ένα οριζόντιο επίπεδο το οποίο θα εφάπτεται στη Γη. Έτσι, αντί για τις σφαιρικές συντεταγμένες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$  με  $x$  το γεωγραφικό μήκος,  $y$  το γεωγραφικό πλάτος και  $z$  το ύψος και  $(u, v, w)$  τις αντίστοιχες

συνιστώσες για την ταχύτητα. Σε ό,τι αφορά στη δύναμη Coriolis, θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση  $f$ -επιπέδου, δηλαδή θα θεωρήσουμε ότι το επίπεδο μας βρίσκεται σε γεωγραφικό πλάτος  $\phi_0$ , επομένως η παράμετρος της Coriolis  $f$  θα έχει σταθερή τιμή  $f = 2\Omega \sin \phi_0$ .

Με τις παραπάνω παραδοχές και με την εφαρμογή της (2.9) σε κάθε άξονα χωριστά παίρνουμε τις εξισώσεις κίνησης:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + 2\Omega(v \sin \phi_0 - w \cos \phi_0), \quad (2.10)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - 2\Omega u \sin \phi_0, \quad (2.11)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + 2\Omega u \cos \phi_0 - g. \quad (2.12)$$

### 2.1.2 Εξισώσεις θερμοδυναμικής

Εκτός από τις εξισώσεις κίνησης, έχουμε και τις εξισώσεις που διέπουν τη θερμοδυναμική κατάσταση της ατμόσφαιρας. Αυτή, μπορούμε να τη θεωρήσουμε σε πολύ καλή προσέγγιση ως ιδανικό αέριο και αγνοώντας την υγρασία έχουμε την καταστατική εξίσωση:

$$P = \rho R_d T, \quad (2.13)$$

όπου  $R_d$  η σταθερά των αερίων ανά μονάδα μοριακής μάζας για τον ξηρό αέρα και  $T$  η θερμοκρασία. Εκτός από την καταστατική εξίσωση ισχύει και ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος ο οποίος στην ουσία είναι η αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$\delta Q = dU + \delta W. \quad (2.14)$$

Δηλαδή, το στοιχειώδες ποσό θερμότητας  $\delta Q$  αλλάζει την εσωτερική ενέργεια του αερίου κατά  $dU$  και παράγει/καταναλώνει στοιχειώδες έργο  $\delta W$ . Το στοιχειώδες έργο που παράγει ή καταναλώνει μια μοναδιαία μάζα όταν εκτονώνεται ή συμπιέζεται, δίνεται από

τον τύπο:

$$\delta W = P d\alpha \quad (2.15)$$

όπου  $\alpha = 1/\rho$  ο ειδικός όγκος του αερίου, ενώ η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου εκφράζεται από τη σχέση:

$$dU = c_v dT, \quad (2.16)$$

όπου  $c_v$  η ειδική θερμότητα υπό σταθερό όγκο.

Για μεγάλα υψόμετρα στην ατμόσφαιρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι σε καλή προσέγγιση οι μεταβολές για τις αέριες μάζες είναι αδιαβατικές. Δηλαδή, στην περίπτωση που το αέριο δεν ανταλλάσσει θερμότητα με το περιβάλλον του ( $\delta Q = 0$ ), από τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο προκύπτει ο νόμος του Poisson

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{R_d/c_p}. \quad (2.17)$$

Ορίζοντας ως πίεση αναφοράς  $P_s$  την πίεση στην επιφάνεια και θερμοκρασία  $T$  μια θερμοκρασία σε ένα τυχαίο ύψος, τότε από την εξίσωση (2.17) παίρνουμε τη δυνητική θερμοκρασία  $\theta$  που είναι η θερμοκρασία που θα αποκτούσε μια αέρια μάζα αν μεταφερόταν αδιαβατικά από το ύψος που βρίσκεται στην επιφάνεια:

$$\theta = T \left( \frac{P_s}{P} \right)^{R_d/c_p}. \quad (2.18)$$

Μπορεί ναδειχθεί ότι η δυνητική θερμοκρασία είναι μέτρο της εντροπίας, καθώς η μεταβολή της εντροπίας δίνεται από τη σχέση :

$$ds = \frac{\delta Q}{T} \quad (2.19)$$

Λογαριθμίζοντας την (2.18), πολλαπλασιάζοντας με  $c_p$  και ολοκληρώνοντας παίρνουμε  $s = c_p \ln \theta$ . Παρατηρούμε ότι στις αδιαβατικές μεταβολές όπου  $\delta Q = 0$  συνεπάγεται η διατήρηση της εντροπίας  $ds = 0$  και η διατήρηση της δυνητικής θερμοκρασίας:

$$\frac{D \ln \theta}{Dt} = 0. \quad (2.20)$$

Οι εξισώσεις (2.3), (2.10) - (2.12) και (2.20) περιγράφουν τις κινήσεις και τη θερμοδυναμική κατάσταση της ατμόσφαιρας.

## 2.2 Ανελαστικές εξισώσεις

Η βαροκλιτική αστάθεια θα εξεταστεί για την κατάσταση ισορροπίας της ατμόσφαιρας που είναι κοντά στην κλιματολογική της κατάσταση. Η θερμοκρασία, η πίεση και η πυκνότητα για αυτή την κλιματολογική κατάσταση εξαρτώνται κυρίως από το ύψος, επομένως θεωρούμε ότι η κλιματολογική κατάσταση ορίζεται από τη δυνητική θερμοκρασία  $\theta_0(z)$  και την πυκνότητα  $\rho_0(z)$ , ενώ η πυκνότητα εξισορροπείται σε πολύ καλή προσέγγιση υδροστατικά από την πίεση  $P_0(z)$ , δηλαδή ισχύει

$$\frac{dP_0(z)}{dz} = -g\rho_0(z).$$

Θεωρούμε λοιπόν μικρές μεταβολές της πίεσης, της πυκνότητας και της δυνητικής θερμοκρασίας γύρω από την κλιματολογική μέση τιμή τους:

$$P = P_0(z) + \delta P(x, y, z, t), \quad \rho = \rho_0(z) + \delta\rho(x, y, z, t), \quad \theta = \theta_0(z) + \delta\theta(x, y, z, t).$$

Οι παρατηρήσεις στην ατμόσφαιρα δείχνουν ότι οι μεταβολές αυτές είναι αρκετά μικρές, δηλαδή

$$\left| \frac{\delta P}{P_0} \right| \simeq \left| \frac{\delta\rho}{\rho_0} \right| \simeq \left| \frac{\delta\theta}{\theta_0} \right| \simeq 10^{-2}.$$

Εξετάζοντας τη  $x$  συνιστώσα της βαροβαθμίδας για αυτές τις μικρές μεταβολές παίρνουμε:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0 + \delta\rho} \frac{\partial (P_0 + \delta P)}{\partial x} \simeq -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta P}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta P}{\rho_0} \right), \quad (2.21)$$

εφόσον αγνοήσουμε τους όρους  $\delta\rho/\rho_0$  ως πολύ μικρούς. Έτσι η εξίσωση για τη  $x$  συνιστώσα της επιτάχυνσης γίνεται

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta P}{\rho_0} \right) + 2\Omega(v \sin \phi_0 - w \cos \phi_0). \quad (2.22)$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται εύκολα ότι η  $y$  συνιστώσα της επιτάχυνσης γίνεται:

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\delta P}{\rho_0} \right) - 2\Omega u \sin \phi_0. \quad (2.23)$$

Όσον αναφορά στη  $z$  συνιστώσα της βαροβαθμίδας έχουμε:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0 + \delta\rho} \left( \frac{\partial(P_0 + \delta P)}{\partial z} \right) \simeq -\frac{1}{\rho_0} \left( 1 - \frac{\delta\rho}{\rho_0} \right) \left( \frac{\partial(P_0 + \delta P)}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{dP_0}{dz} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial\delta P}{\partial z} + \frac{\delta\rho}{\rho_0^2} \frac{dP_0}{dz} + \frac{\delta\rho}{\rho_0^2} \frac{\partial\delta P}{\partial z}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την υδροστατική εξίσωση για την κλιματολογική κατάσταση και παραλείποντας τον τέταρτο όρο γιατί είναι μικρός σε σχέση με τους υπόλοιπους παίρνουμε:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \simeq -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial\delta P}{\partial z} - g \frac{\delta\rho}{\rho_0} + g = \frac{1}{\rho_0^2} \frac{d\rho_0}{dz} \delta P - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\delta P}{\rho_0} - g \frac{\delta\rho}{\rho_0}. \quad (2.24)$$

Οι μεταβολές της πυκνότητας που βλέπουμε στην παραπάνω εξίσωση σχετίζονται με τις μεταβολές της θερμοκρασίας. Για να το δείξουμε ξεκινάμε από την εξίσωση Poisson (2.17), αντικαθιστούμε τη θερμοκρασία από την καταστατική εξίσωση (2.13) και τον εκθέτη  $R_d/c_p$  με  $1 - 1/\gamma$ , όπου το  $\gamma = c_p/c_v$ . Έπειτα, λογαριθμίζουμε και παίρνουμε την εξής σχέση:

$$\ln \theta = \frac{1}{\gamma} \ln P - \ln \rho + \ln \frac{P_a^{R_d/c_p}}{R},$$

η οποία ισχύει και για την κλιματολογική κατάσταση

$$\ln \theta_0 = \frac{1}{\gamma} \ln P_0 - \ln \rho_0 + \ln \frac{P_a^{R_d/c_p}}{R}, \quad (2.25)$$

και για την πλήρη κατάσταση

$$\ln(\theta_0 + \delta\theta) = \frac{1}{\gamma} (\ln P_0 + \delta P) - \ln(\rho_0 + \delta\rho) + \ln \frac{P_a^{R_d/c_p}}{R}. \quad (2.26)$$

Εκφράζοντας το λογάριθμο της δυναμικής θερμοκρασίας ως

$$\ln(\theta_0 + \delta\theta) = \ln \left[ \theta_0 \left( 1 + \frac{\delta\theta}{\theta_0} \right) \right] = \ln \theta_0 + \ln \left( 1 + \frac{\delta\theta}{\theta_0} \right),$$

και κάνοντας την προσέγγιση  $\ln(1+x) \simeq x$  για  $x \ll 1$ , παίρνουμε:

$$\ln(\theta_0 + \delta\theta) \simeq \ln \theta_0 + \frac{\delta\theta}{\theta_0}.$$

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο και για τους άλλους δύο λογαρίθμους και χρησιμοποιώντας και τη σχέση (2.25), η (2.26) γίνεται:

$$\frac{\delta\theta}{\theta_0} = \frac{1}{\gamma} \frac{\delta P}{P_0} - \frac{\delta\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{1}{\gamma RT_0} \delta P - \delta\rho \right) = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{1}{c_s^2} \delta P - \delta\rho \right),$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την κατασταστική εξίσωση για να εκφράσουμε την πίεση  $P_0$  συναρτήσει της θερμοκρασίας και  $c_s^2 = \gamma RT_0$  είναι η ταχύτητα του ήχου. Καθώς η ταχύτητα αυτή είναι πολύ μεγάλη ( $c_s = 350 \text{ m/s} \gg 1$ ) παίρνουμε σε καλή προσέγγιση ότι

$$\frac{\delta\theta}{\theta_0} = -\frac{\delta\rho}{\rho_0}.$$

Έτσι η εξίσωση για τη  $z$  συνιστώσα της επιτάχυνσης γίνεται:

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{1}{\rho_0^2} \frac{d\rho_0}{dz} \delta P + 2\Omega u \cos \phi_0 - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\delta P}{\rho_0} - g \frac{\delta\theta}{\theta_0}. \quad (2.27)$$

Έχοντας απλοποιήσει την εξίσωση κίνησης, εξετάζουμε τη θερμοδυναμική εξίσωση (2.20). Αντικαθιστώντας τις μεταβολές στο λογάριθμο της δυναμικής θερμοκρασίας παίρνουμε:

$$\frac{D \ln \theta}{Dt} = \frac{1}{\theta} \frac{D\theta}{Dt} = \frac{1}{\theta_0 + \delta\theta} \frac{D(\theta_0 + \delta\theta)}{Dt} = \frac{1}{\theta_0 + \delta\theta} \left[ \frac{D\delta\theta}{Dt} + w \frac{d\theta_0}{dz} \right] \simeq \frac{1}{\theta_0} \left[ \frac{D\delta\theta}{Dt} + w \frac{d\theta_0}{dz} \right].$$

Έτσι η θερμοδυναμική εξίσωση γίνεται:

$$\frac{1}{\theta_0} \frac{D\delta\theta}{Dt} + w \frac{1}{\theta_0} \frac{d\theta_0}{dz} = 0. \quad (2.28)$$

Για τα βαρομετρικά συστήματα μεγάλης χωρικής κλίμακας που μας ενδιαφέρουν, η προβολή της ταχύτητας στην κατακόρυφο  $w$  είναι τουλάχιστον δύο τάξεις μικρότερη από τις προβολές της ταχύτητας στο οριζόντιο. Επομένως μπορούμε να παραλείψουμε τον όρο  $2\Omega w \cos \phi_0$  από την (2.22) αφού είναι δύο τάξεις μεγέθους μικρότερος από τον  $2\Omega v \sin \phi_0$ . Ομοίως, στη εξίσωση για τη  $z$  συνιστώσα της επιτάχυνσης, ο όρος της επιτάχυνσης και οι δύο πρώτοι όροι στο δεξί μέλος της (2.27) είναι τάξεις μεγέθους μικρότεροι από τους υπόλοιπους. Κάνοντας αυτές τις απλοποιήσεις και ορίζοντας τις ποσότητες  $f = 2\Omega v \sin \phi_0$  ως την παράμετρο Coriolis,  $\phi = \delta P / \rho_0$  ως το γεωδυναμικό,

$b = g\delta\theta/\theta_0$  ως την άνωση και τη συχνότητα Brunt-Vaissala  $N^2 = (g/\theta_0)/(d\theta_0/dz)$  που είναι η συχνότητα με την οποία ταλαντώνεται μια αέρια μάζα μέσα σε μια ευσταθώς διαστρωματωμένη ατμόσφαιρα σε κατακόρυφη κίνηση, τότε καταλήγουμε στο σύνολο των εξισώσεων:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} + fv, \quad (2.29)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial\phi}{\partial y} - fu, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = b, \quad (2.31)$$

$$\frac{Db}{Dt} = -N^2w, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.33)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ονομάζονται ανελαστικές εξισώσεις κίνησης και είναι αυτές τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στην ανάλυσή μας.

## 2.3 Αδιαστατοποίηση και οιονεί-γεωστροφία

### 2.3.1 Αδιαστατοποίηση

Όπως έχει αναφερθεί και στις παραπάνω ενότητες, η ατμόσφαιρα της Γης είναι ένα ρευστό και επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μαθηματικές τεχνικές των ρευστών για να τη μελετήσουμε. Μία από αυτές τις τεχνικές είναι η μέθοδος της αδιαστατοποίησης των εξισώσεων. Με τη μέθοδο αυτή ορίζουμε έναν αδιάστατο αριθμό που περιγράφει τη δυναμική των εξισώσεών μας, δίνοντάς μας το πλεονέκτημα να μπορούμε να κατηγοριοποιούμε προβλήματα ανάλογα με την τιμή της αδιάστατης αυτής ποσότητας. Αυτό σημαίνει πως αν δύο προβλήματα υπόκεινται κάτω από την ίδια τιμή της ποσότητας αυτής τότε θα έχουν και ίδιες λύσεις αλλά με διαφορετικές χωρικές και χρονικές κλίμακες. Για να το επιτύχουμε αυτό, γράφουμε κάθε φυσική μεταβλητή που εμφανίζεται στη δυναμική των ανελαστικών εξισώσεων (2.29)-(2.33) ως γινόμενο δύο όρων,

παραδείγματος χάριν γράφουμε την ταχύτητα ως

$$u = U\tilde{u}$$

όπου  $U$  είναι η τάξη μεγέθους της ταχύτητας με τις φυσικές της μονάδες και  $\tilde{u}$  είναι η αδιάστατη ταχύτητα η οποία μια συνάρτηση τάξης ένα. Για τις ατμοσφαιρικές κινήσεις μεγάλης κλίμακας η τάξη μεγέθους των ταχυτήτων είναι  $U \sim 10 \text{ m/s}$ . Τις χωρικές κλίμακες στο οριζόντιο θα τις αδιαστατοποιήσουμε με το μέγεθος των συνοπτικών διαταραχών  $L \sim 1000 \text{ km}$ , ενώ την κατακόρυφη κλίμακα με το ύψος της τροπόπαυσης  $H = 10 \text{ km}$ . Ως κλίμακα χρόνου θα θεωρήσουμε το χρόνο μεταφοράς  $T = L/U$ . Όσον αναφορά το γεωδυναμικό  $\phi$ , επειδή βρισκόμαστε κοντά στη γεωστροφία πρέπει η βαροβαθμίδα να είναι της ίδιας τάξης με τη δύναμη Coriolis. Επομένως, το γεωδυναμικό πρέπει να έχει τάξη μεγέθους  $fLU$ . Ομοίως, επειδή είμαστε κοντά στην υδροστατική ισορροπία όπου η βαροβαθμίδα εξισορροπεί τη βαρύτητα, η άνωση  $b$  έχει τάξη μεγέθους  $fLU/H$ . Αντικαθιστώντας τις μεταβλητές ως γινόμενα της τάξης μεγέθους τους και των αδιάστατων συναρτήσεων καταλήγουμε στις αδιάστατες εξισώσεις:

$$Ro \frac{D\tilde{u}}{D\tilde{t}} - \tilde{v} = -\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{x}}, \quad (2.34)$$

$$Ro \frac{D\tilde{v}}{D\tilde{t}} + \tilde{u} = -\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{y}}, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{z}} = \tilde{b}, \quad (2.36)$$

$$Ro \frac{D\tilde{b}}{D\tilde{t}} + \left(\frac{L_d}{L}\right)^2 \tilde{w} = 0, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{y}} + \frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{z}} = 0. \quad (2.38)$$

όπου  $Ro = U/fL$  είναι ο αδιάστατος αριθμός Rossby και  $L_d = NH/f$  είναι η ακτίνα παραμόρφωσης του Rossby, η οποία είναι η χωρική κλίμακα στην οποία φαινόμενα που προκύπτουν από την περιστροφή της Γης είναι εξίσου σημαντικά με την δύναμη της άνωσης και τα βαρυτικά κύματα.



### 2.3.2 Προσέγγιση οιονεί-γεωστροφίας

Λόγω της μεγάλης χωρικής και χρονικής κλίμακας των κινήσεων που μας ενδιαφέρουν, ο αριθμός Rossby είναι πολύ μικρός ( $Ro \ll 1$ ). Δηλαδή, η δύναμη της βαροβαθμίδας και η δύναμη Coriolis είναι σχεδόν σε ισορροπία με την επιτάχυνση να είναι πολύ μικρή. Για να λάβουμε υπόψη όμως και τη μεταβολή του γεωστροφικού ανέμου, γράφουμε όλες τις φυσικές μεταβλητές ως ανάπτυγμα του αριθμού  $Ro$ :

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= u_0 + Ro u_1 + Ro^2 u_2 + \dots \\ \tilde{v} &= v_0 + Ro v_1 + Ro^2 v_2 + \dots \\ \tilde{w} &= w_0 + Ro w_1 + Ro^2 w_2 + \dots \\ \tilde{\phi} &= \phi_0 + Ro \phi_1 + Ro^2 \phi_2 + \dots \\ \tilde{b} &= b_0 + Ro b_1 + Ro^2 b_2 + \dots\end{aligned}\tag{2.39}$$

Αν τις παραπάνω εκφράσεις τις αντικαταστήσουμε στις εξισώσεις (2.34)-(2.38) και κοιτάξουμε ξεχωριστά τους όρους ίδιας τάξης τότε από τους όρους πρώτης τάξης  $\mathcal{O}(1)$  προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$u_0 = -\frac{\partial \phi_0}{\partial \tilde{y}},\tag{2.40}$$

$$v_0 = \frac{\partial \phi_0}{\partial \tilde{x}},\tag{2.41}$$

$$w_0 = 0,\tag{2.42}$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \tilde{z}} = b_0,\tag{2.43}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{y}} = 0,\tag{2.44}$$

οι οποίες δεν είναι τίποτα άλλο από τον γεωστροφικό άνεμο και την υδροστατική ισορροπία. Αν παραγωγίσουμε τις (2.40) και (2.41) ως προς ύψος και χρησιμοποιήσουμε την υδροστατική ισορροπία (2.43) τότε παίρνουμε την έκφραση του θερμικού ανέμου:

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{z}} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{z}} \right) = -\frac{\partial b_0}{\partial \tilde{y}},\tag{2.45}$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{z}} \right) = \frac{\partial b_0}{\partial \tilde{x}}.\tag{2.46}$$

Εστιάζοντας στους όρους τάξης  $\mathcal{O}(Ro)$  και κάνοντας την ίδια διαδικασία παίρνουμε το σύνολο των εξισώσεων:

$$\frac{D_0 u_0}{D\tilde{t}} - v_1 = -\frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{x}}, \quad (2.47)$$

$$\frac{D_0 v_0}{D\tilde{t}} + u_1 = -\frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{y}}, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{z}} = b_1, \quad (2.49)$$

$$\frac{D_0 b_0}{D\tilde{t}} + \left(\frac{L_d}{L}\right)^2 w_1 = 0, \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial w_1}{\partial \tilde{z}} = 0, \quad (2.51)$$

το οποίο περιγράφει την εξέλιξη του γεωστροφικού ανέμου στο όριο της οιονεί-γεωστροφίας. Επιπλέον ισχύει  $D_0/D\tilde{t} = \partial/\partial t + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)$ , δηλαδή η μεταφορά γίνεται από το γεωστροφικό άνεμο.

Για να μπορέσουμε να το λύσουμε, το απλοποιούμε με τη μέθοδο της απαλοιφής για να καταλήξουμε σε λιγότερες εξισώσεις για λιγότερες άγνωστες συναρτήσεις. Αυτό γίνεται με την ακόλουθη μέθοδο. Πρώτα παραγωγίζουμε την (2.47) και την (2.48) ως προς  $y$  και  $x$  αντίστοιχα και έχουμε:

$$\frac{D_0}{D\tilde{t}} \left( \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right) - \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}}, \quad (2.52)$$

$$\frac{D_0}{D\tilde{t}} \left( \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{y}} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{x}} = -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}}. \quad (2.53)$$

Αφαιρώντας τις δύο εξισώσεις και αντικαθιστώντας τις (2.51) και (2.50) παίρνουμε:

$$\frac{D_0}{D\tilde{t}} \left( \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[ \left( \frac{L_d}{L} \right)^2 \frac{D_0 b_0}{D\tilde{t}} \right] = 0. \quad (2.54)$$

Για να υπολογίσουμε τον δεύτερο όρο της εξίσωσης παραγωγίζουμε τη (2.50) χρησιμοποιώντας και τις σχέσεις του θερμικού ανέμου (2.45), (2.46):

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \frac{\partial b_0}{\partial \tilde{t}} + u_0 \frac{\partial b_0}{\partial \tilde{x}} + v_0 \frac{\partial b_0}{\partial \tilde{y}} \right) = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial b_0}{\partial \tilde{z}} + u_0 \frac{\partial^2 b_0}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{z}} + v_0 \frac{\partial^2 b_0}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{z}} + \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial b_0}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial b_0}{\partial \tilde{y}}. \quad (2.55)$$

Επομένως αν αντικαταστήσουμε τη σχέση αυτή στην (2.54) παίρνουμε:

$$\frac{D_0}{Dt} \tilde{q} = 0, \quad (2.56)$$

όπου

$$\tilde{q} = \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} + 1 + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} F^2 b_0, \quad (2.57)$$

είναι ο δυνητικός στροβιλισμός και  $F = L/L_d$ . Προσθέτοντας πίσω τις διαστάσεις έχουμε:

$$q = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} + f + f^2 \frac{\partial b_g}{\partial z N^2}. \quad (2.58)$$

Παρατηρώντας την έκφραση για το δυνητικό στροβιλισμό, βλέπουμε ότι αυτός εκφράζεται ως άθροισμα του σχετικού στροβιλισμού του γεωστροφικού ανέμου  $\zeta_g = \partial v_g / \partial x - \partial u_g / \partial y$ , του πλανητικού στροβιλισμού  $f$  και του όρου της διάτασης ενός στροβίλου  $f^2 \partial_z (b_g / N^2)$ , ο οποίος εκφράζει τη μεταβολή στο στροβιλισμό που μπορεί να έχει η αδιαβατική εκτόνωση ή συμπίεση του στροβίλου. Αυτό μπορούμε να το καταλάβουμε αν σκεφτούμε ότι έχουμε μια δίνη στη μορφή ενός περιστρεφόμενου ελαστικού κυλίνδρου που διατηρεί τη στροφορμή του. Αν τον πιέσουμε με τα χέρια μας τότε το μήκος του θα μεγαλώσει λόγω διατήρησης μάζας και η ροπή αδράνειας θα μειωθεί. Για να διατηρηθεί η στροφορμή θα πρέπει να αρχίσει να στρέφεται πιο γρήγορα.

Η εξίσωση της διατήρησης του δυνητικού στροβιλισμού μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω. Λόγω του γεγονότος ότι ο γεωστροφικός άνεμος έχει μηδενική απόκλιση ορίζουμε μία ρευματοσυνάρτηση  $\psi$  τέτοια ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση της συνέχειας:

$$u_g = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (2.59)$$

$$v_g = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.60)$$

Λόγω των σχέσεων του θερμικού ανέμου (2.45)-(2.46) αυτό συνεπάγεται ότι και η άνωση εκφράζεται μέσω της  $\psi$  ως:

$$b_g = f \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (2.61)$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε το δυνητικό στροβιλισμό (2.58) ως:

$$q = \nabla_h^2 \psi + f + \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{f^2}{N^4} \frac{\partial N^2}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.62)$$

με  $\nabla_h^2$  την οριζόντια Λαπλασιανή και η διατήρησή του δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{D_g}{Dt} \left[ \nabla^2 \psi + f + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] = 0, \quad (2.63)$$

όπου  $D_g/Dt = \partial/\partial t - (\partial\psi/\partial y)\partial/\partial x + (\partial\psi/\partial x)\partial/\partial y$ .

Επομένως η δυναμική στο όριο της οιονεί-γεωστροφίας εκφράζεται μέσα από μια εξίσωση (τη διατήρηση του δυνητικού στροβιλισμού) για μία συνάρτηση (τη ρευματοσυνάρτηση).

## 2.4 Ευστάθεια στην οιονεί-γεωστροφία

Η μέθοδος για τη μελέτη της ευστάθειας είναι αυτή της εξέλιξης των διαταραχών. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή εξετάζουμε την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας ενός συστήματος μελετώντας μικρές διαταραχές γύρω από αυτά, όπως αναφέραμε και στο πρώτο Κεφάλαιο. Αν οι διαταραχές αυξήσουν το πλάτος τους τότε έχουμε αστάθεια, ενώ αν το πλάτος τους μηδενιστεί τότε έχουμε ευστάθεια. Στην παρούσα εργασία, για να μελετήσουμε τη βαροκλιτική αστάθεια και να ποσοτικοποιήσουμε την επιρροή της στρατόσφαιρας σε αυτή, πρέπει πρώτα να βρούμε ποιες διαταραχές είναι εκθετικά ασταθείς και ευσταθείς σε κάθε περίπτωση που θα εξετάσουμε και να μελετήσουμε και την αλγεβρική ευστάθεια/αστάθεια εξετάζοντας την εξέλιξη της ενέργειας των διαταραχών αυτών με τις μεθόδους της Γενικευμένης Θεωρίας Ευστάθειας.

Πριν προχωρήσουμε, αδιαστατοποιούμε πάλι με ποιο εξειδικευμένες τάξεις μεγέθους για το πρόβλημα που εξετάζουμε. Επειδή οι διαταραχές εξελίσσονται σε χρονικές κλίμακες της τάξης των ημερών, αδιαστατοποιούμε το χρόνο με την παράμετρο Coriolis  $f$  ώστε μία αδιάστατη μονάδα χρόνου να αντιστοιχεί σε μία ημέρα. Για χωρική κλίμακα στο κατακόρυφο χρησιμοποιούμε το ύψος της τροπόπαυσης  $H$ , ενώ τις χωρικές κλίμακες στο οριζόντιο τις αδιαστατοποιούμε με  $L = N_0 H / f \sim 1000 \text{ km}$ , με  $N_0 = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

την τυπική τιμή της συχνότητας Brunt-Vaisala. Οι ταχύτητες αδιαστατοποιούνται με  $L/T = N_0 H$ , ενώ το γεωδυναμικό και η άνωση για τους ίδιους λόγους με πριν έχουν κλίμακες  $f N_0 H$  και  $N_0^2 H^2$ . Καταλήγουμε λοιπόν στην αδιάστατη εξίσωση:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[ \nabla^2 \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] = 0, \quad (2.64)$$

με τη σταθερή παράμετρο Coriolis να μην παίζει ρόλο και να αγνοείται, τον άνεμο  $(u, v)$  να είναι ο γεωστροφικός και όλες τις συναρτήσεις στην (2.64) να είναι αδιάστατες. Για παράδειγμα η συνάρτηση  $N(z)$  είναι διαιρεμένη με την τυπική συχνότητα  $N_0$  στην τροπόσφαιρα.

Για να μελετήσουμε τη βαροκλιτική αστάθεια, αλλά και να έχουμε μια αναλυτική κατά το δυνατό περιγραφή, κάνουμε μια απλοποιημένη μοντελοποίηση για την ατμοσφαιρική ροή και θεωρούμε την κατάσταση που περιγράφεται από ζωνικό άνεμο με ταχύτητα  $\mathbf{V} = (U(z), 0, 0)$ , γεωστροφικά ισορροπημένο άρα  $\Phi = -U(z)y$  και τη θερμοκρασία να ικανοποιεί το θερμικό άνεμο  $B = -(dU/dz)y$ . Έτσι η ρευματοσυνάρτηση στο σημείο ισορροπίας είναι  $\Psi = -U(z)y$ . Θεωρούμε μικρές διαταραχές με πλάτος  $\epsilon \ll 1$  γύρω από αυτό το σημείο ισορροπίας: Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.63):

$$\psi = \Psi + \epsilon \psi', \quad u = U(z) + \epsilon u', \quad v = \epsilon v'.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.64) παίρνουμε:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + (U + \epsilon u') \frac{\partial}{\partial x} + \epsilon v' \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[ \nabla^2 (\Psi + \epsilon \psi') + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{N^2} \frac{\partial (\Psi + \epsilon \psi')}{\partial z} \right) \right] = 0. \quad (2.65)$$

Παρατηρώντας ότι  $\nabla^2 (\Psi + \epsilon \psi') = \epsilon \nabla^2 \psi'$ , αγνοώντας τους όρους δεύτερης τάξης ως προς  $\epsilon$  γιατί  $\epsilon \ll 1$  και με αντικατάσταση του  $v' = \partial \psi' / \partial x$  η εξίσωση γίνεται:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[ \nabla^2 \psi' + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{N^2} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{N^2} \frac{dU}{dz} \right) = 0. \quad (2.66)$$

Για να μπορέσουμε να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση, αναπτύσσουμε την  $\psi'$  στη βάση Fourier εφόσον έχουμε ομογένεια στο οριζόντιο. Γράφουμε επομένως τη διαταραχή  $\psi'$  ως:

$$\psi' = \hat{\psi}(z, t) e^{ikx + ily}, \quad (2.67)$$

όπου  $\hat{\psi}$  το πλάτος των διαταραχών και  $k, l$  οι κυματάρθρωμοι στις διευθύνσεις  $x, y$  αντίστοιχα. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (2.66) ώστε να πάρουμε μία σχέση για την εξέλιξη του πλάτους των διαταραχών  $\hat{\psi}$  στο χρόνο και να μπορέσουμε να διακρίνουμε πότε έχουμε αστάθεια και πότε ευστάθεια. Έπειτα από στοιχειώδεις πράξεις καταλήγουμε στην εξής σχέση:

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} = \mathcal{A} \hat{\psi} \quad (2.68)$$

όπου

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}^{-1} \left( ik \frac{1}{N^2} \frac{d^2 U}{dz^2} - ik \frac{1}{N^4} \frac{dN^2}{dz} \frac{dU}{dz} - ikU\mathcal{B} \right), \quad (2.69)$$

είναι ο γραμμικός τελεστής της δυναμικής που δρα πάνω στο  $\hat{\psi}$  και  $\mathcal{B}^{-1}$  είναι ο αντίστροφος του τελεστή

$$\mathcal{B} = \frac{1}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{N^4} \frac{dN^2}{dz} \frac{\partial}{\partial z} - (k^2 + l^2). \quad (2.70)$$

Στα επόμενα κεφάλαια θα εξετάσουμε την εξέλιξη του  $\hat{\psi}$  βάση της εξίσωσης (2.68) και με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες για κάθε περίπτωση που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε.

Τέλος, όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή θέλουμε να μελετήσουμε και την αλγεβρική αστάθεια για πεπερασμένο χρόνο, εξετάζοντας την ενεργειακή εξέλιξη των διαταραχών, μέσω της Γενικευμένης Θεωρίας Ευστάθειας. Για να το επιτύχουμε πρέπει να υπολογίσουμε την ενέργειά τους. Η ενέργεια των διαταραχών

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \left( u'^2 + v'^2 + w'^2 + \frac{1}{N^2} b'^2 \right) dx dy dz,$$

δίνεται από το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής τους ενέργειας. Η συνεισφορά της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας είναι πολύ μικρή στο όριο της οιονεί-γεωστροφίας και μπορεί να αγνοηθεί. Επίσης, επειδή έχουμε θεωρήσει κυματικές λύσεις στο  $x$  και στο  $y$ , η ολοκλήρωση δεν έχει φυσικό νόημα να γίνει σε όλο το οριζόντιο, αλλά

πρέπει να γίνει μέσα σε ένα μήκος κύματος. Έτσι ορίζουμε την πυκνότητα ενέργειας σε ένα μήκος κύματος

$$E = \frac{1}{2} \frac{1}{L_x} \frac{1}{L_y} \int_0^\infty \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left( u'^2 + v'^2 + \frac{1}{N^2} b'^2 \right) dx dy dz. \quad (2.71)$$

Αν κοιτάξουμε τον κάθε όρο ξεχωριστά τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} u'^2 &= \Re(\hat{u}e^{ikx+ily})^2 = \left( \frac{\hat{u}e^{ikx+ily} + \hat{u}^*e^{-ikx-ily}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(\hat{u}^2e^{2ikx+2ily} + (\hat{u}^*)^2e^{-2ikx-2ily} + 2\hat{u}\hat{u}^*). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Εφόσον ολοκληρώνουμε σε ένα μήκος κύματος, οι δύο πρώτοι όροι είναι μηδενικοί. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και για τους υπόλοιπους όρους της ολοκληρωτέας ποσότητας άρα η (2.75) γίνεται:

$$E = \frac{1}{4} \int_0^\infty \left( \hat{u}\hat{u}^* + \hat{v}\hat{v}^* + \frac{1}{N^2} \hat{b}\hat{b}^* \right) dz. \quad (2.73)$$

Εκφράζοντας τις ταχύτητες και την άνωση συναρτήσει της ρευματοσυνάρτησης, τα πλάτη Fourier τους δίνονται από τις σχέσεις

$$\left[ \hat{u}, \hat{v}, \hat{b} \right] = \left[ -il\hat{\psi}, ik\hat{\psi}, \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z} \right].$$

Έτσι παίρνουμε:

$$E = -\frac{1}{4} \int_0^\infty \left( \frac{1}{N^2} \frac{\partial\hat{\psi}^*}{\partial z} \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z} - (k^2 + l^2) \hat{\psi}\hat{\psi}^* \right) dz. \quad (2.74)$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, ολοκληρώνουμε κατά μέρη τον τρίτο όρο και λαμβάνουμε υπόψιν ότι στα όρια του ολοκληρώματος η ρευματοσυνάρτηση  $\psi \rightarrow 0$  και καταλήγουμε στην εξής σχέση:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{4} \int_0^\infty \left( \frac{1}{N^2} \hat{\psi}^* \partial_z^2 \hat{\psi} - \frac{1}{N^4} \frac{dN^2}{dz} \hat{\psi}^* \partial_z \hat{\psi} - (k^2 + l^2) \hat{\psi}\hat{\psi}^* \right) dz \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^\infty \hat{\psi}^* \left( \frac{1}{N^2} \partial_z^2 - \frac{1}{N^4} \frac{dN^2}{dz} \partial_z - (k^2 + l^2) \right) \hat{\psi} dz. \end{aligned} \quad (2.75)$$

## Κεφάλαιο 3

# Βαροκλινική αστάθεια στο μοντέλο του Eady

### 3.1 Το μοντέλο του Eady

Σκοπός της εργασίας είναι να συγκρίνουμε τη βαροκλινική αστάθεια σε ένα μοντέλο που δεν λαμβάνει υπόψιν τη στρατοσφαιρική ροή με ένα που την περιλαμβάνει. Ως μοντέλο αναφοράς, θεωρούμε αυτό του Eady. Το μοντέλο προτάθηκε για πρώτη φορά το 1949 από τον Βρετανό μετεωρολόγο Eric Eady και είναι το πιο απλό μοντέλο που χρησιμοποιείται για την περιγραφή της βαροκλινικής αστάθειας στην ατμόσφαιρα. Ο Eady υπέθεσε ότι η διάτμηση του ανέμου είναι σταθερή, δηλαδή:

$$U(z) = z,$$

ενώ επίσης υπέθεσε ότι η συχνότητα Brunt-Vaisala παραμένει σταθερή και ίση με την τυπική τιμή της στην τροπόσφαιρα, δηλαδή λόγω της αδιαστατοποίησης  $N = 1$ . Τέλος, επειδή οι ατμοσφαιρικές κινήσεις έχουν μεγαλύτερη ένταση μέσα στην τροπόσφαιρα, αγνόησε τη στρατόσφαιρα και θεώρησε ότι στην κατακόρυφη κατεύθυνση έχουμε δύο φράγματα για τις κινήσεις. Ένα είναι η επιφάνεια του εδάφους με  $z = 0$  και το άλλο βρίσκεται στο αδιάστατο ύψος της τροπόπαυσης  $z = 1$ . Ανάμεσα σε αυτά τα δύο όρια ο



δυναμικός στροβιλισμός που δίνεται από τη σχέση (2.62) διατηρείται. Μπορεί το μοντέλο αυτό να είναι μια αδρή προσέγγιση της ατμόσφαιρας, ωστόσο περιέχει τους βασικούς μηχανισμούς που μπορεί να οδηγήσουν στη βαροκλιτική αστάθεια με σημαντικότερο από αυτούς να είναι η κατακόρυφη διάτμηση του ανέμου, η οποία σχετίζεται με την ύπαρξη μεσημβρινής θερμοβαθμίδας.

Εφόσον στο μοντέλο του Eady η συχνότητα Brunt-Vaisala είναι σταθερή, και ο άνεμος έχει σταθερή διάτμηση, η εξίσωση για τη διατήρηση του δυναμικού στροβιλισμού (2.66) γίνεται:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + z\frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\nabla^2\psi' + \frac{\partial^2\psi'}{\partial z^2}\right) = 0. \quad (3.1)$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι ότι η κατακόρυφη ταχύτητα στα ύψη  $z = 0$  και  $z = 1$  πρέπει να είναι μηδενική αφού το ρευστό δεν μπορεί να διαπεράσει τα τοιχώματα που έχουμε υποθέσει ότι υπάρχουν εκεί. Αυτό σημαίνει ότι  $w'(z = 0) = w'(z = 1) = 0$ . Θα πρέπει τις συνθήκες αυτές να τις γράψουμε συναρτήσει της ρευματοσυνάρτησης και το επιτυγχάνουμε αυτό μέσω της (2.32) την οποία και γραμμικοποιούμε. Εφαρμόζοντας τις διαταραχές στις ταχύτητες και στη θερμοκρασία  $b = -y + \epsilon b'$ , καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + z\frac{\partial}{\partial x}\right) b' - v' + w' = 0, \quad (3.2)$$

όπου  $b' = \partial\psi'/\partial z$  και  $v' = \partial\psi'/\partial x$ . Επομένως οι συνοριακές συνθήκες γίνονται:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right) - \frac{\partial\psi'}{\partial x} = 0, \quad (3.3)$$

για  $z = 0$  και

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial\psi'}{\partial z} - \frac{\partial\psi'}{\partial x} = 0, \quad (3.4)$$

για  $z = 1$ .

Για την επίλυση της (3.1) θα εκμεταλλευτούμε την ομοιογένεια της στο οριζόντιο και θα θεωρήσουμε κυματικές λύσεις των διαταραχών της μορφής:

$$\psi' = \hat{\psi}(z)e^{ikx+ily-ikt} \quad (3.5)$$

όπου  $\hat{\psi}$  είναι το πλάτος των διαταραχών,  $k, l$  οι κυματάρημοι στις διευθύνσεις  $x, y$  αντίστοιχα και  $c$  η φασική ταχύτητα του κύματος. Οπότε αντικαθιστώντας στην (3.1) καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$(z - c) \left[ \frac{d^2 \hat{\psi}}{dz^2} - (k^2 + l^2) \hat{\psi} \right] = 0, \quad (3.6)$$

της οποίας η λύση θα μας δώσει την κατακόρυφη δομή  $\hat{\psi}$  των διαταραχών. Η εξίσωση αυτή έχει δύο κλάσεις λύσεων. Η πρώτη είναι στο διακριτό φάσμα με:

$$\frac{d^2 \hat{\psi}}{dz^2} - (k^2 + l^2) \hat{\psi} = 0, \quad (3.7)$$

και η οποία θα μας δώσει διακριτές τιμές του  $c$ . Η δεύτερη είναι η

$$\frac{d^2 \hat{\psi}}{dz^2} - (k^2 + l^2) \hat{\psi} = \delta(z - c), \quad (3.8)$$

καθώς  $\delta(x)f(x) = 0$ . Παρατηρούμε ότι η σχέση αυτή ικανοποιείται για  $c = z$ , υπάρχει δηλαδή ένα συνεχές φάσμα. Οι δύο αυτές κλάσεις θα εξετασθούν χωριστά.

### 3.1.1 Διακριτό φάσμα και εκθετική αστάθεια

Εξετάζουμε πρώτα το διακριτό φάσμα ξεκινώντας από την (3.7). Η εξίσωση αυτή είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης και η λύση της είναι της μορφής:

$$\hat{\psi} = A \cosh Kz + B \sinh Kz, \quad (3.9)$$

όπου  $A$  και  $B$  είναι σταθερές που θα τις υπολογίσουμε μέσω των συνοριακών συνθηκών και  $K = \sqrt{k^2 + l^2}$  είναι το μέτρο του διανύσματος του κυματάρημου. Αντικαθιστώντας την (3.5) στις συνοριακές συνθήκες παίρνουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$c \left. \frac{d\hat{\psi}}{dz} \right|_{z=0} + \hat{\psi}(0) = 0, \quad (3.10)$$

για  $z = 0$  και

$$(1 - c) \left. \frac{d\hat{\psi}}{dz} \right|_{z=1} - \hat{\psi}(1) = 0, \quad (3.11)$$

για  $z = 1$ . Έπειτα, για να βρούμε τις σταθερές  $A$  και  $B$ , αντικαθιστούμε την (3.9) στην (3.10) και μετά από πράξεις καταλήγουμε ότι  $A = -KcB$ . Έχοντας υπολογίσει πλέον τη σχέση μεταξύ  $A$  και  $B$  μπορούμε μέσω της συνοριακής συνθήκης για  $z = 1$  να βρούμε μια σχέση για τη φασική ταχύτητα:

$$c^2 - c + \frac{\coth K}{K} - \frac{1}{K^2} = 0. \quad (3.12)$$

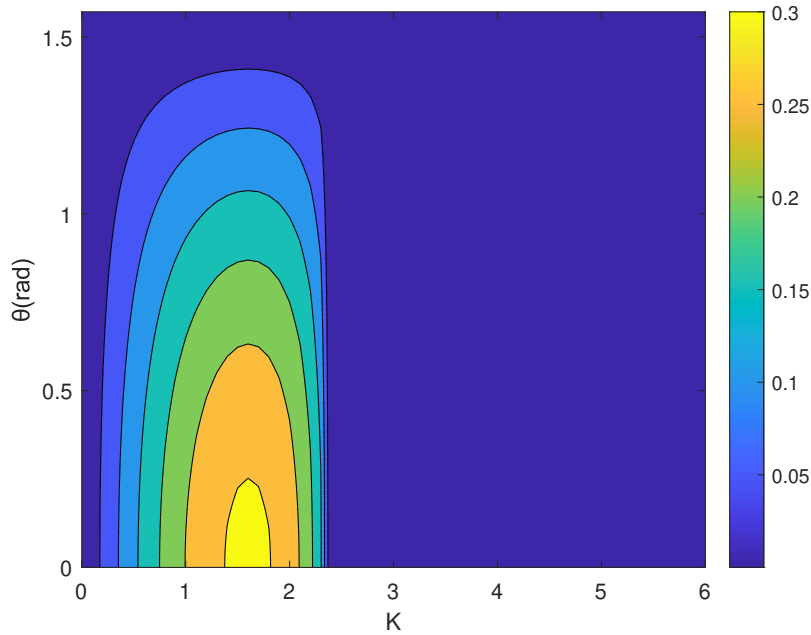
Οι λύσεις του τριωνύμου αυτού μας δίνουν τις ιδιοτιμές  $c$  του προβλήματος που είναι οι:

$$c = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4 \coth K}{K} + \frac{4}{K^2}}. \quad (3.13)$$

Για να έχουμε εκθετική αστάθεια θα πρέπει ο ρυθμός αύξησης  $\sigma = k\Im(c)$  των διαταραχών να είναι θετικός και πραγματικός αριθμός. Στο Σχήμα 3.1 σχεδιάζονται οι ισοϋψείς καμπύλες του ρυθμού εκθετικής αύξησης  $\sigma$  συναρτήσει του μέτρου του κυματάρημου  $K$  και τις γωνίας  $\theta = \tan^{-1}(l/k)$  που είναι η γωνία που σχηματίζουν οι γραμμές σταθερής φάσης των κυματικών λύσεων με τον άξονα Βορρά-Νότου. Παρατηρούμε πως υπάρχει ένα κατώφλι κυματάρημων  $K$  κάτω από το οποίο οι διαταραχές είναι εκθετικά ασταθείς, δηλαδή αναμένουμε να εμφανιστούν δομές μεγάλης χωρικής κλίμακας. Για την εύρεσή του κατωφλίου επιστρέφουμε στη σχέση (3.13) και παρατηρούμε ότι για να έχουμε αστάθεια, πρέπει η υπόριζη ποσότητα

$$K^2 - 4K \coth(K) + 4 < 0, \quad (3.14)$$

να είναι αρνητική. Αυτό αληθεύει όταν  $K \leq 2.4$ , δηλαδή για διαταραχές με κλίμακα  $\lambda > 2500 \text{ km}$ . Όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 1, από τις διαταραχές που εμφανίζουν θετικό ρυθμό αύξησης, αναμένουμε να εμφανιστούν αυτές με τη μέγιστη τιμή του  $\sigma$ , ενώ το αντίστροφο αυτής της τιμής  $\sigma_{max}$  μας δίνει το χρόνο ανάπτυξης των διαταραχών, καθώς το πλάτος τους διπλασιάζεται κάθε περίπου  $1/\sigma_{max}$ . Επειδή παρατηρούμε ότι ο εκθετικός ρυθμός αύξησης των διαταραχών είναι φθίνουσα συνάρτηση της γωνίας  $\theta$  οι διαταραχές που είναι προσανατολισμένες στη διεύθυνση Βορρά-Νότου έχουν γρηγορότερη ανάπτυξη από αυτές που έχουν προσανατολισμό πιο κοντά στον άξονα

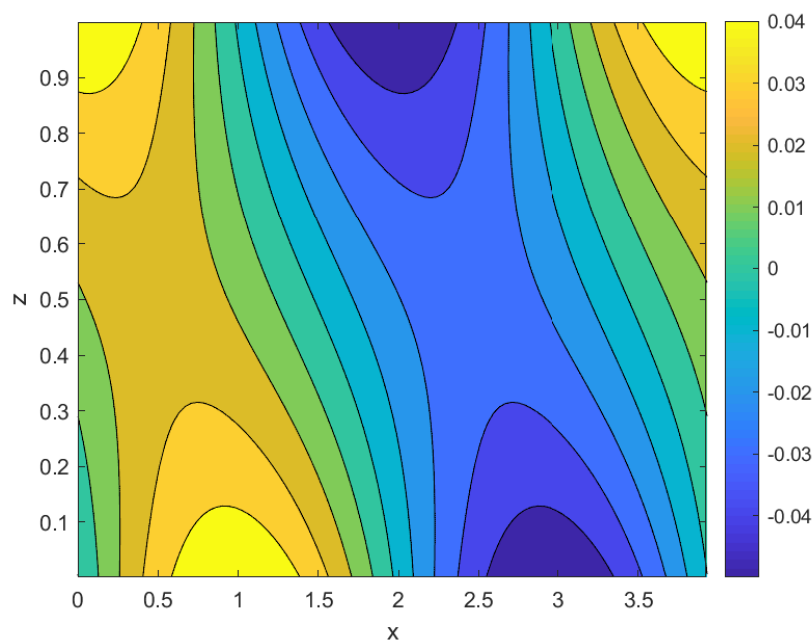


Σχήμα 3.1: Ισοϋψείς του εκθετικού ρυθμού αύξησης  $\sigma$  συναρτήσει του μέτρου του κυματάριθμου  $K$  και της γωνίας  $\theta$  του προσανατολισμού των διαταραχών.

Ανατολής-Δύσης, με το μέγιστο να εμφανίζεται για  $\theta = 0$ . Επίσης, το μέγιστο σε ό,τι αφορά στο μέτρο του κυματάριθμου παρατηρείται για  $K_{\sigma_{\max}} \simeq 1.6$  που αντιστοιχεί σε μήκος κύματος  $\lambda \simeq 4000 \text{ km}$ . Αυτό σημαίνει ότι δομές με χωρική κλίμακα της τάξης των  $4000 \text{ km}$  και προσανατολισμό Βορρά-Νότου είναι αυτές που αναμένεται να επικρατήσουν και να παρατηρηθούν. Τέλος, η μέγιστη τιμή είναι  $\sigma_{\max} = 0.3$ , η οποία σύμφωνα με την αδιαστατοποίηση που έχουμε κάνει σημαίνει ότι η πιο ασταθής δομή χρειάζεται χρονικό διάστημα τριών ημερών ώστε να αυξήσει το πλάτος της κατά μία τάξη μεγέθους, που θεωρούμε ότι είναι το χρονικό διάστημα έως ότου η διαταραχή γίνει παρατηρήσιμη.

Στο Σχήμα 3.2 φαίνονται οι ισοϋψείς καμπύλες της ρευματοσυνάρτησης  $\psi$  που ουσιαστικά είναι και ισοϋψείς γεωδυναμικού της πιο ασταθούς διαταραχής στο επίπεδο  $(x-z)$ . Παρατηρούμε ότι το χαμηλό στην επιφάνεια βρίσκεται ανατολικότερα από το χαμηλό στα  $500 \text{ hPa}$  και αυτό γίνεται γιατί μόνο τότε έχουμε ροή θερμότητας προς το Βορρά ικανή να δημιουργήσει αστάθεια και αύξηση του πλάτους των διαταραχών. Διαταραχές με

τέτοια κατακόρυφη δομή είναι πολύ συχνές στην βαροκλιτική αστάθεια και για αυτό το λόγο η πρόγνωση του καιρού ξεκινάει πάντα από τη μελέτη των ισοβαρικών καμπυλών στο επίπεδο των  $500 \text{ hPa}$ . Αυτό μπορεί να δειχθεί και αντιπαραβάλλοντας αυτή τη δομή

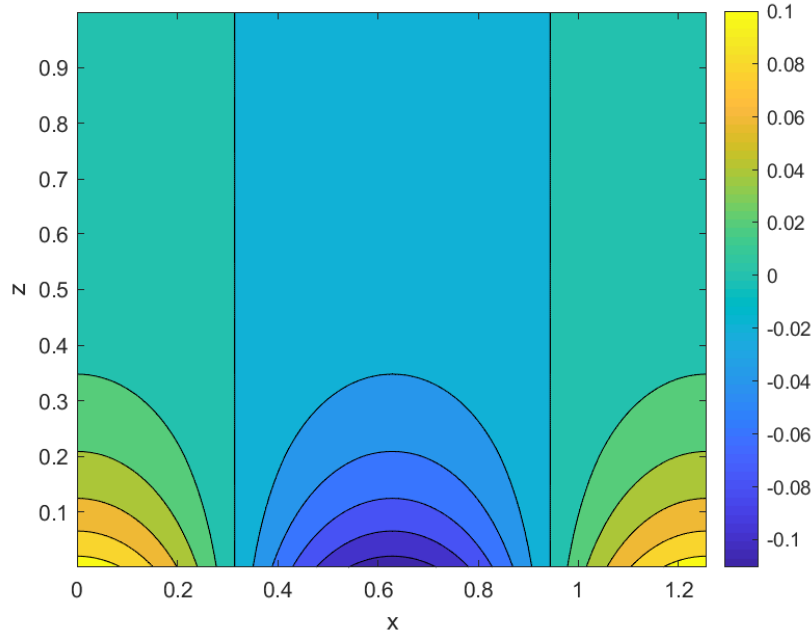


Σχήμα 3.2: Ισοϋψείς της ρευματοσυνάρτησης  $\psi$  στο επίπεδο  $x - z$  για την πιο ασταθή διαταραχή με  $K = 1.6$  και  $\theta = 0$ .

με την κατακόρυφη δομή μιας ευσταθούς διαταραχής που φαίνεται στο Σχήμα 3.3. Παρατηρούμε ότι τα χαμηλά και υψηλά είναι επικεντρωμένα κοντά στο έδαφος όπως επίσης δε φαίνεται διαφορά φάσης ανάμεσα στα χαμηλά στο έδαφος και σε αυτά στα  $500 \text{ hPa}$  όπως στην περίπτωση της ασταθούς διαταραχής. Δηλαδή το χαμηλό κοντά στο έδαφος και το ισχνό χαμηλό στα  $500 \text{ hPa}$  βρίσκονται στο ίδιο γεωγραφικό μήκος.

## 3.2 Συνεχές φάσμα και αλγεβρική αστάθεια

Είδαμε ότι για το διακριτό φάσμα οι συνοριακές συνθήκες έχουν μεγάλη σημασία. Στην περίπτωση του συνεχούς φάσματος δεν ισχύει το ίδιο. Έτσι, για λόγους απλότητας,



Σχήμα 3.3: Ισοϋψείς της ρευματοσυνάρτησης  $\psi$  στο επίπεδο  $x - z$  για μια ευσταθή διαταραχή με  $K = 3$  και  $\theta = 0$ .

θα το εξετάσουμε θεωρώντας ότι η ροή δε φράσσεται από κανένα όριο ούτε στο έδαφος ούτε στην τροπόπαυση. Για τη λύση της εξίσωσης (3.8) που δίνει το συνεχές φάσμα επιστρέφουμε στην αρχική εξίσωση (3.1) και θεωρούμε κυματικές λύσεις της μορφής:

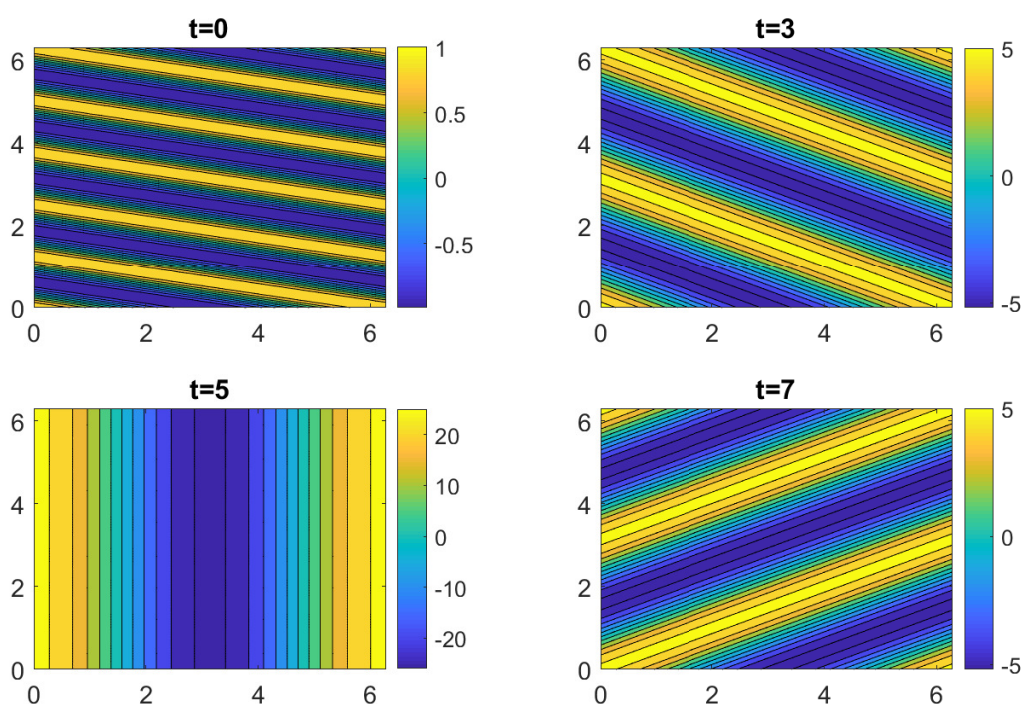
$$\psi = \hat{\psi}(t)e^{ikx+ily+i(m-kt)z}. \quad (3.15)$$

Έχουμε δηλαδή κυματικές λύσεις όχι μόνο στο  $x$  και στο  $y$  αλλά και στο κατακόρυφο με χρονικά μεταβαλλόμενο κυματάριθμο  $m - kt$ . Αντικαθιστώντας στην (3.1) και έπειτα από πράξεις παίρνουμε τη λύση:

$$\hat{\psi}(t) = \frac{k^2 + l^2 + m^2}{k^2 + l^2 + (m - kt)^2} \hat{\psi}(0), \quad (3.16)$$

η οποία μας δίνει την εξέλιξη του πλάτους με το χρόνο. Τα συμπεράσματα που παίρνουμε από τη λύση αυτή είναι πιο εύκολα κατανοητά αν παρατηρήσουμε το Σχήμα 3.4 που φαίνονται οι ισοφασικές καμπύλες του κύματος συναρτήσει του χρόνου στο επίπεδο  $x - z$ . Παρατηρούμε ότι όσο περνάει ο χρόνος ο κυματάριθμος στον άξονα των  $z$

μειώνεται επομένως θα μειώνεται και η κλίση των ισοφασικών καμπυλών. Η στροφή αυτή των ισοφασικών καμπυλών δημιουργείται από την ύπαρξη διάτμησης του ανέμου, αφού η διαταραχή παρασύρεται από μια ροή που η ταχύτητα στα μεγαλύτερα ύψη είναι μεγαλύτερη από αυτή στα μικρότερα. Επιπλέον, βλέπουμε ότι η απόσταση μεταξύ των καμπυλών με το πέρασμα του χρόνου αυξάνεται μέχρι να γίνουν κάθετες και έπειτα μειώνεται έως ότου για  $t \rightarrow \infty$  γίνει μηδενική. Καθώς η απόσταση των ισοφασικών καμπυλών μεγαλώνει, οι παράγωγοι της ρευματοσυνάρτησης ελαττώνονται με αποτέλεσμα την αύξηση του πλάτους της ρευματοσυνάρτησης που παρατηρούμε στο Σχήμα 3.4 για να διατηρηθεί ο δυνητικός στροβιλισμός. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση των ταχυτήτων, της



Σχήμα 3.4: Ισοφασικές καμπύλες του κύματος 3.16 στις χρονικές στιγμές  $t=0, 3, 5$  και  $7$  αντίστοιχα. Για το κύμα έχουμε επιλέξει  $k = 1, l = 0, m = 5$ , και  $\hat{\psi}(0) = 1$ .

θερμοκρασίας αλλά και της ενέργειας.

Πράγματι, υπολογίζοντας την πυκνότητα της ενέργειας σε ένα μήκος κύματος αλλά

αυτή τη φορά σε τρεις διαστάσεις:

$$E(t) = \frac{1}{2} \frac{1}{L_x} \frac{1}{L_y} \frac{1}{L_z} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} \left( u'^2 + v'^2 + \frac{1}{N^2} b'^2 \right) dz dy dx, \quad (3.17)$$

και ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με αυτή που έγινε στο Κεφάλαιο 2 για τον υπολογισμό της (2.75) καταλήγουμε στην σχέση:

$$E(t) = \frac{1}{4} |\hat{\psi}(t)|^2 [k^2 + l^2 - (m - kt)^2], \quad (3.18)$$

η οποία αντικαθιστώντας την (3.15) γίνεται:

$$E(t) = \frac{k^2 + l^2 + m^2}{k^2 + l^2 + (m - kt)^2} E(0). \quad (3.19)$$

Από την παραπάνω σχέση είναι φανερό ότι αν η κλίση των ισοϋψών είναι αντίθετη από αυτή της διάτμησης ( $m/k > 0$ ), τότε ο παρανομαστής του κλάσματος μειώνεται μέχρι τη χρονική στιγμή  $t_0 = m/k$  όπου γίνονται κάθετες. Ουσιαστικά, αυτό σημαίνει ότι αν το ανώτερο χαμηλό είναι δυτικότερα από το κατώτερο τότε η ενέργεια του θα αυξάνεται μέχρι να έρθουν στην ίδια ευθεία και έπειτα καθώς το ανώτερο χαμηλό περνάει ανατολικότερα του κατώτερου η ενέργεια ελαττώνεται έως ότου γίνει μηδενική και η διαταραχή φθίνει τελείως. Το μέγιστο της ενεργειακής αύξησης παρατηρείται στο χρόνο  $t_0$  και δίνεται από τη σχέση:

$$\max \frac{E(t)}{E(0)} = 1 + \frac{m^2}{k^2 + l^2}. \quad (3.20)$$

Από την παραπάνω σχέση βλέπουμε πως όσο πιο μεγάλο είναι το  $m$  σε σχέση με τα  $k$ ,  $l$  τόσο μεγαλύτερη μπορεί να είναι και η ενεργειακή αύξηση των διαταραχών. Ο μηχανισμός αυτός με τον οποίο έχουμε μια παροδική ενεργειακή αύξηση της διαταραχής (συνεπώς και της ταχύτητας) ονομάζεται μηχανισμός του Orr (Orr, 1907).

### 3.3 Γενικευμένη θεωρία ευστάθειας στο μοντέλο του Eady

Όπως είδαμε στις προηγούμενες Ενότητες, στο μοντέλο του Eady έχουμε εν γένει και αλγεβρική και εκθετική αύξηση των διαταραχών. Θέλουμε επομένως να εξετάσουμε

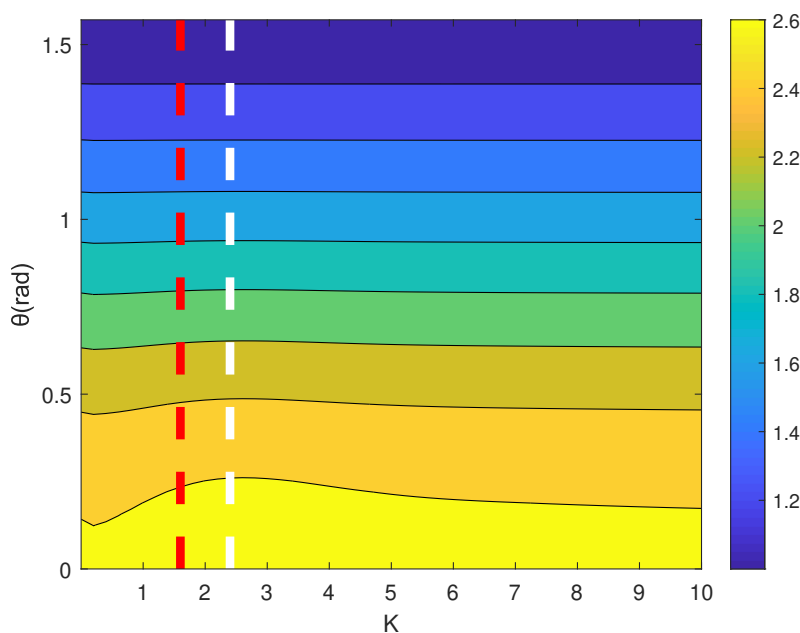


τη μεταβατική αύξηση των διαταραχών σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα καθώς, για μικρό χρονικό διάστημα η αλγεβρική αύξηση μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την εκθετική. Για να μπορέσουμε να το επιτύχουμε εφαρμόζουμε τις μεθόδους της Γενικευμένης Θεωρίας Ευστάθειας που αναπτύχθηκαν στην Ενότητα 1.3. Ο στόχος είναι να υπολογίσουμε τις διαταραχές που αυξάνουν το πλάτος τους πιο γρήγορα σε πεπερασμένο χρόνο και να εκτιμήσουμε την αύξηση του πλάτους. Ορίζουμε ένα θετικό μέτρο για το πλάτος των διαταραχών που είναι η ενέργειά τους και δίνεται από τη σχέση (2.75). Επομένως, στόχος είναι να υπολογίσουμε τη μέγιστη ενεργειακή αύξηση  $G$  σε πεπερασμένο χρόνο  $T_{opt}$ :

$$G(T_{opt}) = \max \frac{E(T_{opt})}{E(0)}, \quad (3.21)$$

όπου  $E(0)$  είναι η αρχική ενέργεια της διαταραχής. Αυτή υπολογίζεται από τη λύση του προβλήματος ιδιοτιμών (1.9). Για την αριθμητική επίλυσή του διακριτοποιούμε το πλάτος της ρευματοσυνάρτησης  $\hat{\psi}$  καθ' ύψος. Θεωρούμε δηλαδή ένα πλέγμα σημείων στο κατακόρυφο, από το έδαφος μέχρι το ύψος της τροπόπαυσης αποτελούμενο από  $n$  σημεία. Έτσι η ρευματοσυνάρτηση γίνεται ένα  $(n+1) \times 1$  διάνυσμα. Υπολογίζοντας τους τελεστές των παραγώγων και χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες στο έδαφος και στην τροπόπαυση όπως δείχνεται στο Παράρτημα A, ο τελεστής  $\mathcal{A}$  γίνεται ένας  $(n+1) \times (n+1)$  πίνακας που δρα στο διάνυσμα  $\psi$ . Ομοίως δείχνεται στο Παράρτημα A ότι η ενέργεια γράφεται ως  $E = \psi^\dagger \mathbf{M} \psi$  με τον πίνακα της μετρικής να δίνεται από τη σχέση (A.12).

Στο Σχήμα 3.5, σχεδιάζουμε τη μέγιστη ενεργειακή αύξηση των διαταραχών για χρονικό διάστημα μίας ημέρας συναρτήσει της γωνίας  $\theta$  και του μέτρου του κυματάριθμου  $K$ . Η διακεκομμένη λευκή γραμμή οριοθετεί την περιοχή των κυματάριθμων που έχουμε εκθετική αστάθεια, ενώ η κόκκινη δείχνει τον κυματάριθμο που έχουμε τη μέγιστη εκθετική αστάθεια. Αυτό που συμπεραίνουμε είναι ότι για χρονικό διάστημα μιας μέρας, η  $G$  είναι φθίνουσα συνάρτηση του  $\theta$  με το μέγιστο να παρουσιάζεται για  $\theta = 0$  και είναι σχεδόν ανεξάρτητη του  $K$ . Αυτό σημαίνει ότι εκθετικά ασταθείς και ευσταθείς

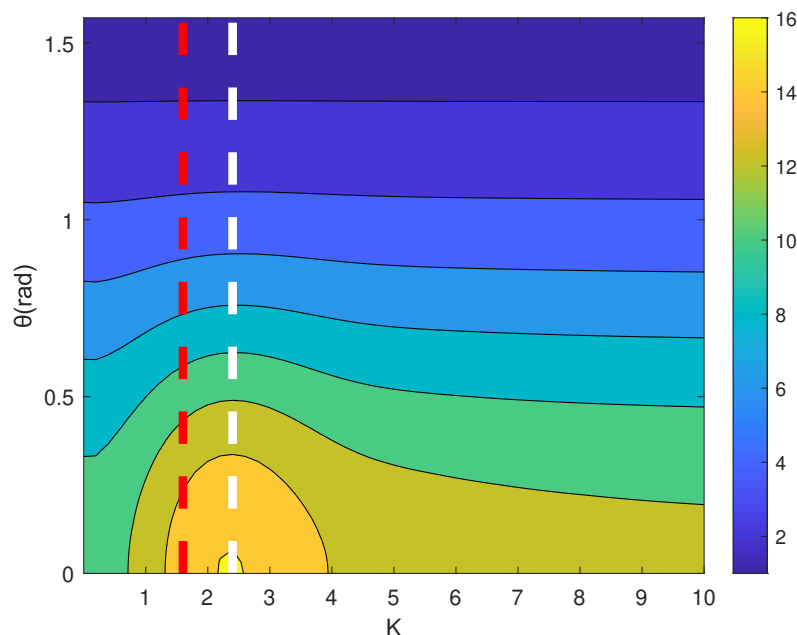


Σχήμα 3.5: Ισοϋψείς της βέλτιστης ενεργειακής αύξησης  $G$  συναρτήσει της γωνίας  $\theta$  και του μέτρου του κυματάρηθμου  $K$  για  $T_{opt} = 1$ .

διαταραχές έχουν την ίδια ενεργειακή αύξηση, δηλαδή δεν υπάρχει επιλεκτικότητα σε ό,τι αφορά στη χωρική κλίμακα των διαταραχών. Ωστόσο, υπάρχει επιλεκτικότητα στον προσανατολισμό καθώς, όπως φαίνεται, οι διαταραχές με προσανατολισμό στον άξονα Βορρά-Νότου παρουσιάζουν μεγαλύτερη ενεργειακή αύξηση από τις υπόλοιπες.

Στο Σχήμα 3.6 φαίνεται η μέγιστη ενεργειακή αύξηση των διαταραχών για χρονικό διάστημα τριών ημερών. Συμπεραίνουμε ότι, παρόμοια και με την περίπτωση  $T_{opt} = 1$ , η  $G$  παραμένει φθίνουσα συνάρτηση του  $\theta$ , με την  $G$  να είναι σχεδόν ανεξάρτητη του  $K$  για μεγαλύτερες γωνίες. Για μικρές γωνίες παρατηρούμε ότι οι διαταραχές με μικρότερα  $K$  που είναι εκθετικά ασταθείς αυξάνουν την ενέργεια τους περισσότερο σε σχέση με τις διαταραχές μικρότερης κλίμακας. Ωστόσο, οι τιμές της  $G$  δε διαφέρουν πάρα πολύ μεταξύ τους ( $\sim 10\%$ ) και δε μπορούμε να πούμε με σιγουριά ότι μόνο αυτές θα είναι κυρίαρχες μέσα σε αυτό το χρονικό διάστημα.

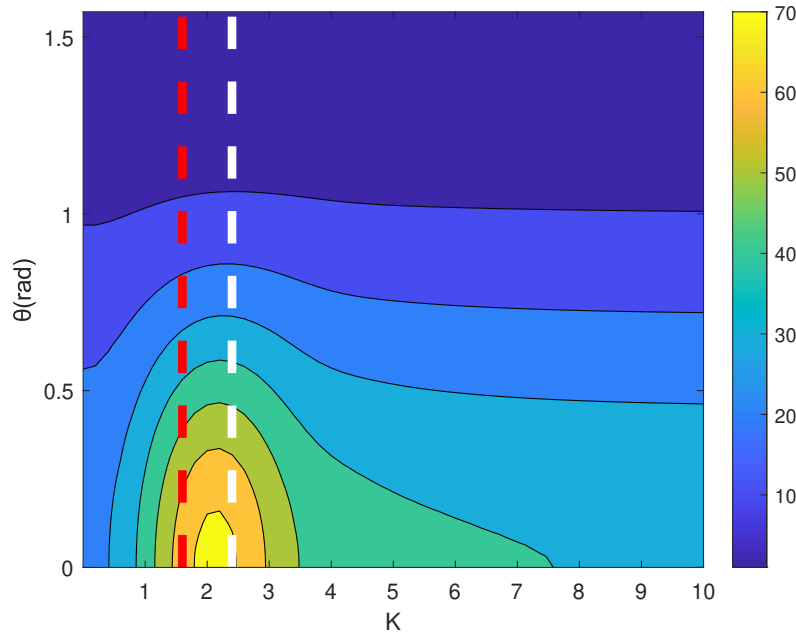
Εξετάζοντας ενδεικτικά ένα μεταγενέστερο χρόνο, όπως για παράδειγμα τον  $T_{opt} = 5$



Σχήμα 3.6: Ισοϋφείς της βέλτιστης ενεργειακής αύξησης  $G$  συναρτήσει της γωνίας  $\theta$  και του μέτρου του κυματάριθμου  $K$  για  $T_{opt} = 3$ .

τότε από το Σχήμα 3.7 γίνεται σαφές ότι όσο αυξάνεται ο βέλτιστος χρόνος τόσο η περιοχή των κυματάριθμων που εμφανίζεται η μέγιστη ενεργειακή αύξηση μετατοπίζεται προς την περιοχή της εκθετικής αστάθειας. Ουσιαστικά, αυτό σημαίνει πως με το πέρασμα του χρόνου οι διαταραχές που αναμένεται να υπερτερήσουν είναι οι εκθετικά ασταθείς αφού για μεγάλους χρόνους η εκθετική αύξηση είναι πολύ γρήγορη. Ωστόσο, ακόμα και για  $T_{opt} = 10$  (δε δείχνεται) ο κυματάριθμος όπου εμφανίζεται η μέγιστη ενεργειακή αύξηση τείνει προς τον κυματάριθμο με τη μέγιστη εκθετική αστάθεια αλλά δεν είναι ίσοι, αφού  $K_{G_{max}} = 1.8$ , ενώ  $K_{\sigma_{max}} = 1.6$ .

Συνοπτικά, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για μικρούς χρόνους μπορούν να εμφανιστούν δομές όλων των χωρικών κλιμάκων, καθώς εκθετικά ευσταθείς διαταραχές παρουσιάζουν παρόμοια ενεργειακή αύξηση με τις εκθετικά ασταθείς. Όμως, καθώς ο χρόνος αυξάνεται ευνοούνται οι δομές μεγαλύτερης χωρικής κλίμακας της τάξης των  $4000km$ .

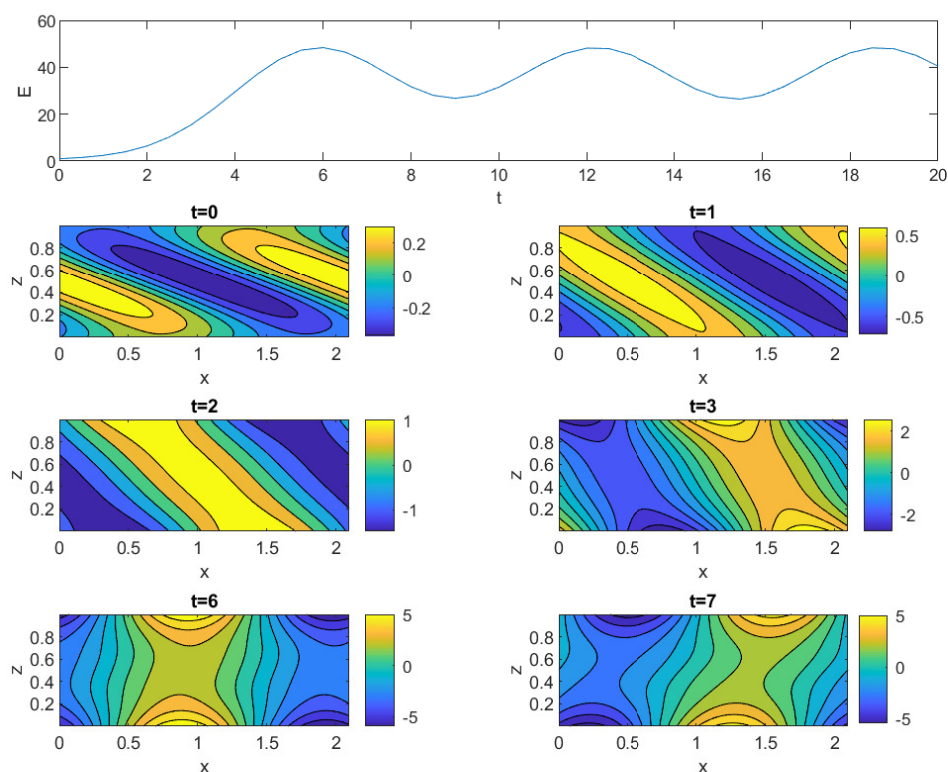


Σχήμα 3.7: Ισοϋψείς της βέλτιστης ενεργειακής αύξησης  $G$  συναρτήσει της γωνίας  $\theta$  και του μέτρου του κυματάριθμου  $K$  για  $T_{opt} = 5$ .

### 3.3.1 Ενεργειακή αύξηση εκθετικά ευσταθών διαταραχών

Επειδή είδαμε ότι διαταραχές που είναι εκθετικά ευσταθείς αυξάνουν την ενέργειά τους όσο και οι εκθετικά ασταθείς σε μικρούς χρόνους, εξετάζουμε αναλυτικά σε αυτή την Ενότητα την εξέλιξή τους. Στο Σχήμα 3.8 σχεδιάζεται η χρονική εξέλιξη της ενέργειας της διαταραχής που οδηγεί στη μέγιστη ενεργειακή αύξηση στο χρόνο  $T_{opt} = 3$  και είναι εκθετικά ευσταθής καθώς έχει  $K = 3$  και  $\theta = \pi/12$ . Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι η διαταραχή, παρότι είναι ευσταθής, αυξάνει την ενέργεια της έως και 50 φορές τις πρώτες 5 ημέρες και έπειτα βλέπουμε πως η ενέργεια κάνει μια ταλάντωση γύρω από τη μέση τιμή της. Η αρχική ενεργειακή αύξηση συμβαίνει λόγω του μηχανισμού του Orr.

Για να το δείξουμε, σχεδιάζουμε στιγμιότυπα της κατακόρυφης δομής της βέλτιστης

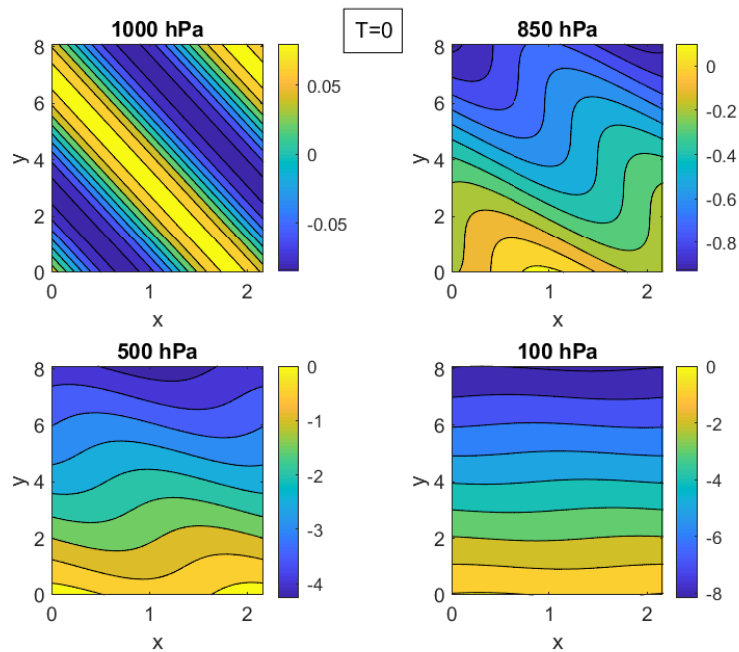


Σχήμα 3.8: Χρονική εξέλιξη ενέργειας (επάνω) και στιγμιότυπα της κατακόρυφης δομής της ρευματοσυνάρτησης  $\psi'$  (κάτω) για την εκθετικά ευσταθή αρχική διαταραχή με  $K = 3$  και  $\theta = \pi/12$  που επιτυγχάνει τη βέλτιστη ενεργειακή αύξηση σε  $T_{opt} = 3$  ημέρες.

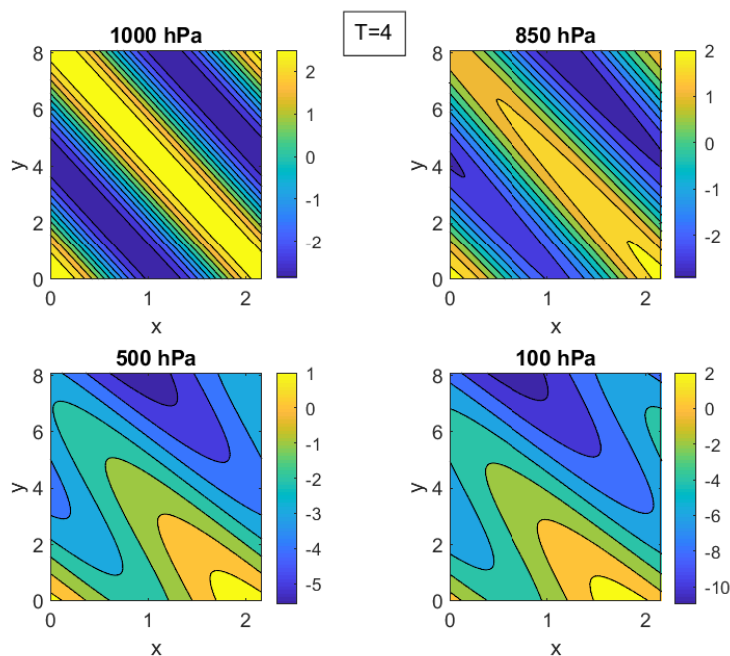
διαταραχής στο Σχήμα 3.8. Παρατηρούμε ότι η αρχική διαταραχή έχει αντίθετη κλίση από τη διάτμηση. Καθώς το ανώτερο μέρος της παρασύρεται με μεγαλύτερη ταχύτητα από το κατώτερο, αυτή στρίβει με τις ρευματογραμμές να αραιώνουν. Έτσι σύμφωνα με το μηχανισμό του OIG η ενέργεια αυξάνει. Στο χρόνο  $t = 3$  βλέπουμε να δημιουργείται μια κατακόρυφη δομή παρόμοια με αυτή του Σχήματος 3.2, που είναι η κατακόρυφη δομή της ασταθούς διαταραχής. Έπειτα, το ανώτερο χαμηλό περνάει ανατολικότερα του κατώτερου ( $t = 6$ ) με αποτέλεσμα η ενέργεια να μειώνεται. Επειδή η διαταραχή είναι περιοδική και η περιοχή των χαμηλών συνεχίζει να παρασύρεται με μεγαλύτερη ταχύτητα από αυτό στην επιφάνεια, σχηματίζεται στη συνέχεια η ίδια κατακόρυφη δομή με ανάποδη

κλίση σε σχέση με τη μέση ροή. Δηλαδή πάλι, το χαμηλό ψηλά είναι δυτικά από το επόμενο κατώτερο χαμηλό, με αποτέλεσμα η ενέργεια να αυξάνει πάλι και να έχουμε ταλάντωση της ενέργειας. Επειδή στην ατμόσφαιρα υπάρχει τριβή και οι διαταραχές δεν είναι περιοδικές, αυτό που θα παρατηρήσουμε είναι η βάρυνση του χαμηλού καθώς αλλάζει η κατακόρυφη κλίση των ρευματογραμμών και έπειτα αφού το ανώτερο χαμηλό περάσει στα ανατολικά του κατώτερου θα διαλυθεί και η ενέργεια του θα μηδενιστεί.

Η εικόνα της εξέλιξης της οριζόντιας δομής των διαταραχών φαίνεται στα Σχήματα 3.9 και 3.10. Στο Σχήμα 3.9 σχεδιάζονται οι ισοϋψείς του πλήρους πεδίου της ρευματοσυνάρτησης  $\psi = \Psi + \epsilon\psi'$ , που είναι και το γεωδυναμικό, την αρχική χρονική στιγμή στις στάθμες των 1000, 850, 500, και 100  $hPa$  αντίστοιχα, ενώ στο Σχήμα 3.10 έχουμε τις ισοϋψείς στο χρόνο  $t = 4$ . Ουσιαστικά δηλαδή τα σχήματα μας δείχνουν την εικόνα του γεωδυναμικού στους μετεωρολογικούς χάρτες των 100, 500, 850 και 1000  $hPa$ .



Σχήμα 3.9: Η αρχική ρευματοσυνάρτηση  $\psi$  σε επίπεδο  $x - y$  όταν η διαταραχή είναι αυτή που επιτυγχάνει τη βέλτιστη ενεργειακή αύξηση σε  $T_{opt} = 3$  ημέρες και έχει  $K = 3$  και  $\theta = \pi/12$ . Φαίνονται οι ισοϋψείς στις υψομετρικές στάθμες των 1000, 850, 500 και 100  $hPa$ .

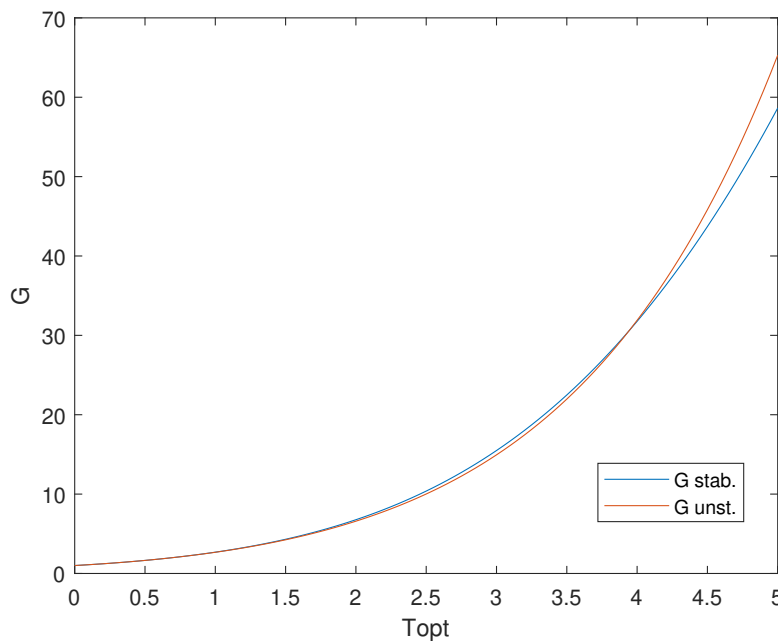


Σχήμα 3.10: Η ρευματοσυνάρτηση  $\psi$  της βέλτιστης διαταραχής που φαίνεται στο Σχήμα 3.9, καθώς έχει εξελιχθεί στο χρόνο  $t = 4$  ημέρες. Φαίνονται οι ισοϋψείς στις υψομετρικές στάθμες των 1000, 850, 500 και 100  $hPa$ .

Παρατηρούμε ότι οι καμπύλες του γεωδυναμικού στην επιφάνεια είναι ευθείες καθώς η μέση ρευματοσυνάρτηση  $\Psi$  είναι μηδενική στο έδαφος και έχουμε υποθέσει ότι η διαταραχή είναι αρμονικό κύμα. Στα επίπεδα των 500, 850, 100  $hPa$  οι ρευματογραμμές είναι καμπύλες, δηλαδή έχουμε την εμφάνιση trough και ridge, τα οποία αποτελούν ένα ενιαίο σύστημα σε συνδυασμό με τα χαμηλά και ψηλά στην επιφάνεια. Καθώς η σκάφη είναι δυτικά του επιφανειακού χαμηλού (βλέπε Σχήμα 3.8), η διαταραχή αυξάνει το πλάτος τους με αποτέλεσμα μετά από  $t = 4$  ημέρες (Σχήμα 3.10) η διαταραχή να έχει φτάσει το μέγιστο πλάτος όπως αναμέναμε από το Σχήμα 3.8 και το χαμηλό στην επιφάνεια μαζί με τη σκάφη και τη σφήνα ψηλότερα να έχουν βαθύνει. Άρα, αυτό που συμπεραίνουμε είναι ότι ακόμα και ευσταθείς διαταραχές είναι σε θέση να δημιουργήσουν και να βαθύνουν troughs και ridges, που διακρίνονται καλύτερα στη στάθμη των 500  $hPa$ .

Τέλος, εξετάζουμε τη μέγιστη ενεργειακή αύξηση  $G$  συναρτήσει του χρόνου βελτιστοποίησης  $T_{opt}$ , η οποία φαίνεται στο Σχήμα 3.11. Παρατηρούμε ότι μια εκθετικά

ευσταθής διαταραχή σε χρονικά διαστήματα έως μια εβδομάδα μπορεί να αυξήσει έως και 60 φορές την ενέργεια της, γεγονός που την καθιστά ικανή να επιφέρει μεταβολές στην κατάσταση ισορροπίας όπως ακριβώς γίνεται και με την εκθετικά ασταθή διαταραχή την οποία θα αναλύσουμε στην παρακάτω Ενότητα. Η μέγιστη ενεργειακή αύξηση συνεχίζει να αυξάνει μονότονα και για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα (π.χ 50 ημέρες), όμως τόσο μεγάλα χρονικά διαστήματα δεν έχουν φυσικό νόημα, καθώς η ροή θα έχει αλλάξει δραματικά.



Σχήμα 3.11: Μέγιστη ενεργειακή αύξηση  $G$  ευσταθών και ασταθών διαταραχών με  $K = 2.5$  και  $K = 1.6$  αντίστοιχα και  $\theta = 0$  συναρτήσει του  $T_{opt}$  ο οποίος μετριέται σε ημέρες.

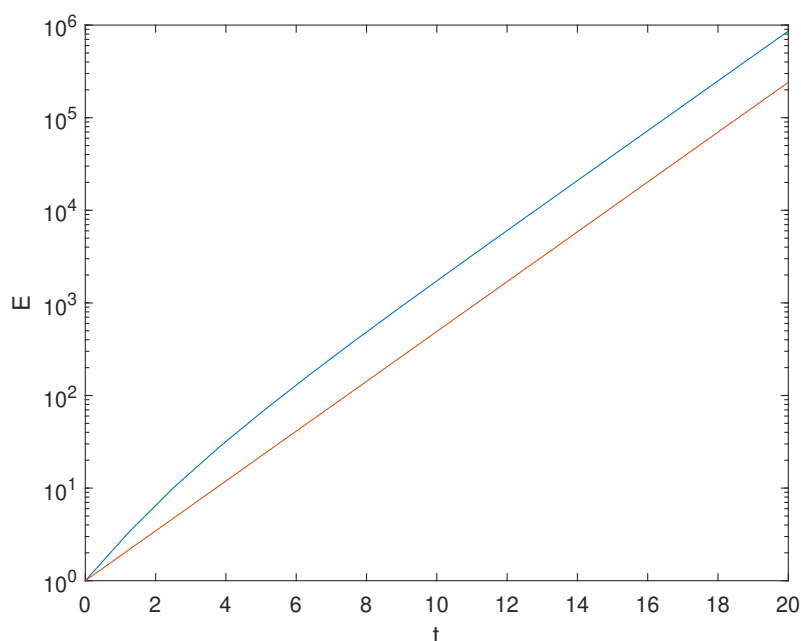
### 3.3.2 Ενεργειακή αύξηση εκθετικά ασταθών διαταραχών

Την ίδια ανάλυση που κάναμε στην προηγούμενη Ενότητα για έναν τυχαίο κυματάρημο στην ευσταθή περιοχή, μπορούμε να την κάνουμε και για τον κυματάρημο που έχουμε τη μεγαλύτερη εκθετική αστάθεια που είναι  $K \simeq 1.6$  και για γωνία προσανατο-



λισμού της διαταραχής  $\theta = 0$ . Η μέγιστη ενεργειακή αύξηση  $G$  για τις διαταραχές με αυτή την κλίμακα και τον προσανατολισμό φαίνεται στο Σχήμα 3.11. Βλέπουμε πως τα αποτελέσματα είναι παρόμοια με αυτά των ευσταθών διαταραχών μικρότερης κλίμακας με μικρές διαφορές στις τιμές της  $G$  πράγμα που σημαίνει πως και οι ευσταθείς και οι ασταθείς δομές μπορούν σε μικρό χρονικό διάστημα να παρουσιάσουν παρόμοια ενεργειακή αύξηση.

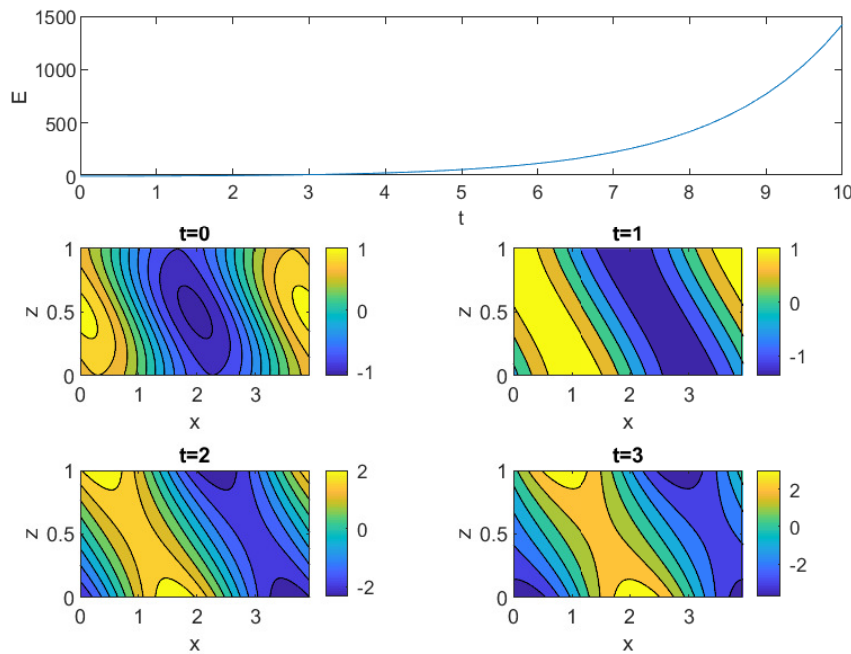
Επιπλέον, ο μηχανισμός του OIG εμφανίζεται και στην εκθετική αστάθεια δίνοντας στην αρχική διαταραχή μια αύξηση στην ενέργεια της λόγω της στροφής των ρευματογραμμών όπως αυτό εξηγήθηκε και παραπάνω και αυτό μπορούμε να το καταλάβουμε καλύτερα από το Σχήμα 3.12, στο οποίο βλέπουμε τη χρονική εξέλιξη της ενέργειας μιας ασταθούς διαταραχής σε λογαριθμική κλίμακα, υπό την επίδραση του μηχανισμού του OIG με την μπλε καμπύλη και χωρίς αυτή, δηλαδή την εξέλιξη της ενέργειας που



Σχήμα 3.12: Χρονική εξέλιξη ενέργειας ασταθούς διαταραχής, σε λογαριθμική κλίμακα, υπό την επίδραση του μηχανισμού OIG (μπλε καμπύλη) και χωρίς αυτή (κόκκινη καμπύλη).

προβλέπει η εκθετική αστάθεια χωρίς το στρίψιμο των ρευματογραμμών, με την κόκκινη

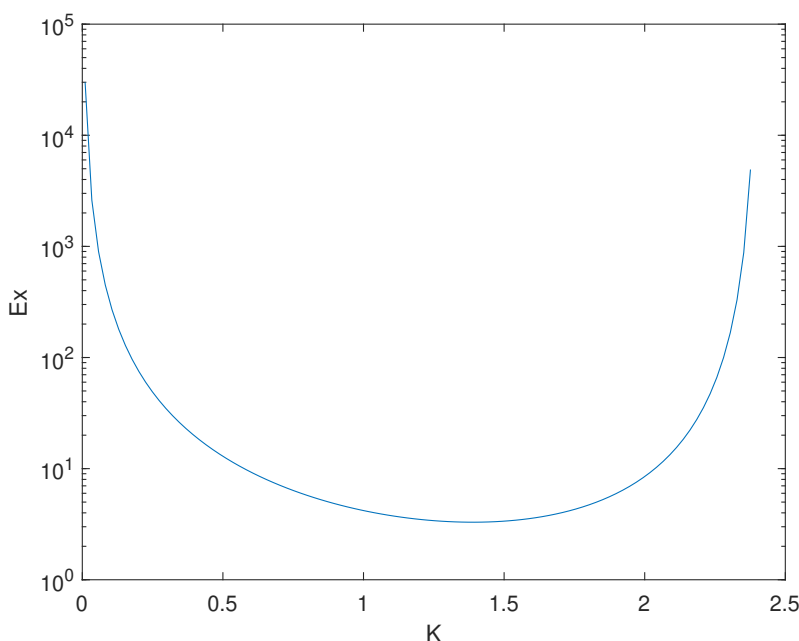
καμπύλη. Η ενεργειακή αύξηση που αποκτά η διαταραχή είναι έως και 3.5 φορές μεγαλύτερη από αυτή που θα αποκτούσε δίχως την επίδραση του μηχανισμού του Orr. Για να δούμε καλύτερα τι σημαίνει αυτό ας κοιτάξουμε το Σχήμα 3.13 στο οποίο βλέπουμε την εξέλιξη της κατακόρυφης δομής της βέλτιστης διαταραχής και της ενέργειας αυτής. Παρατηρούμε πως οι ισοϋψείς καμπύλες της ρευματοσυνάρτησης στρίβουν έως περίπου το χρόνο  $t = 2$  με την ενέργεια να αυξάνει μεταβατικά. Έπειτα η δομή παραμένει κλειδωμένη στη μορφή του ασταθούς ιδιοανύσματος και το μόνο που αλλάζει είναι η τιμή της ενέργειας η οποία αυξάνει εκθετικά που είναι αναμενόμενο λόγω του ότι η διαταραχή μας είναι εκθετικά ασταθής. Η εξέλιξη της διαταραχής στο οριζόντιο είναι όμοια με αυτή των Σχημάτων 3.9 και 3.10.



Σχήμα 3.13: Χρονική εξέλιξη ενέργειας (επάνω) και στιγμιότυπα της κατακόρυφης δομής της ρευματοσυνάρτησης  $\psi'$  στο επίπεδο  $x - z$  (κάτω) για την εκθετικά ασταθή αρχική διαταραχή με  $K = 1.6$  και  $\theta = 0$  που επιτυγχάνει τη βέλτιστη ενεργειακή αύξηση σε  $T_{opt} = 3$  ημέρες.

Όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 1.3, η αρχική διαταραχή που οδηγεί στη βέλτιστη

διέγερση μιας ασταθούς ιδιοκατάστασης είναι η διορθογώνιά της με τη μέγιστη προβολή να δίνεται από το μέτρο του διορθογώνιου (1.14). Υπολογίζοντας το διορθογώνιο για την πιο ασταθή ιδιοκατάσταση ( $\theta = 0$ ) για κάθε κυματάριθμο στην ασταθή περιοχή, παίρνουμε το μέτρο της μέγιστης προβολής συναρτήσει του μέτρου του κυματάριθμου που φαίνεται στο Σχήμα 3.14, που μας δείχνει το πόσο μπορεί να διεγερθούν οι ασταθείς διαταραχές ανάλογα με τον κυματάριθμο που έχουν. Παρατηρούμε ότι η διέγερση είναι κατά μέσο όρο της τάξης του 1 και συγκεκριμένα κοντά στο 3.5 όπως αναφέρθηκε και παραπάνω με πολύ μεγαλύτερες τιμές όταν πηγαίνουμε σε κυματάριθμους κοντά στα όρια της ευστάθειας. Ο λόγος είναι ότι για τις ασταθείς δομές με μικρό εκθετικό ρυθμό αύξησης, ο μηχανισμός του OIG μπορεί να οδηγήσει σε πολύ μεγάλες ενεργειακές αυξήσεις σε πεπερασμένους χρόνους διεγείροντας αυτές τις δομές με μεγάλο πλάτος. Επομένως, όπως φαίνεται και από το Σχήμα, η τιμή της προβολής πηγαίνει ασυμπτωτικά στο άπειρο όταν ο ρυθμός εκθετικής αύξησης πηγαίνει στο μηδέν.

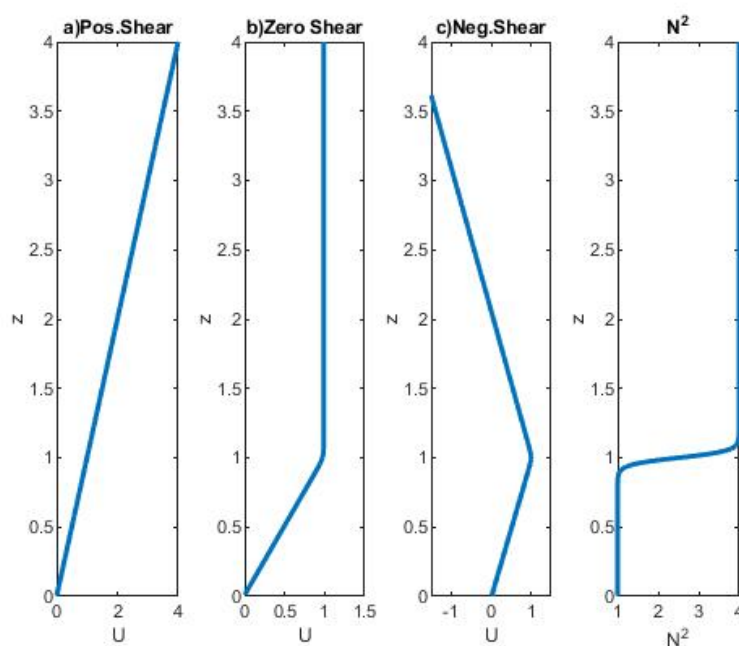


Σχήμα 3.14: Προβολή (1.14) στις ασταθείς ιδιοκαταστάσεις από τις διορθογώνιές τους συναρτήσει του μέτρου του κυματάριθμου  $K$  για  $\theta = 0$ .

## Κεφάλαιο 4

# Επίδραση της στρατοσφαιρικής ροής στη βαροκλινική αστάθεια

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την επίδραση που έχει η στρατοσφαιρική ροή στη βαροκλινική αστάθεια με γνώμονα το μοντέλο του Eady. Για να το επιτύχουμε, θα εξετάσουμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις διάτμησης του ανέμου στη στρατόσφαιρα οι οποίες παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.1 και είναι τυπικά παραδείγματα για τον αεροχειμαρρο στα μέσα γεωγραφικά πλάτη, αλλά με σχετικά απλοποιημένη δομή. Στην πρώτη περίπτωση, θεωρούμε την ίδια θετική διάτμηση του ανέμου στη στρατόσφαιρα όπως και στην τροπόσφαιρα (που εκτείνεται έως το  $z = 1$  με βάση την αδιαστατοποίηση), ενώ στη δεύτερη θεωρούμε ότι δεν υπάρχει διάτμηση του ανέμου στη στρατόσφαιρα και η ταχύτητα του ανέμου παραμένει σταθερή. Η πιο συχνή, αν παρατηρήσουμε την κατακόρυφη δομή του ανέμου στα μέσα γεωγραφικά πλάτη, είναι η τρίτη περίπτωση στην οποία έχουμε αρνητική διάτμηση στη στρατόσφαιρα. Όσον αναφορά τη θερμοκρασιακή δομή της στρατόσφαιρας, θεωρούμε το κατακόρυφο προφίλ της συχνότητας Brunt-Vaisala που επίσης φαίνεται στο Σχήμα 4.1 με τη συχνότητα να έχει τέσσερις φορές μεγαλύτερη τιμή στην τροπόσφαιρα από ότι στην τροπόσφαιρας και τη μετάβαση να γίνεται στο λεπτό στρώμα της τροπόπαυσης.



Σχήμα 4.1: Κατακόρυφο προφίλ ταχυτήτων για την περίπτωση της (α) θετικής, (β) μηδενικής και (γ) αρνητικής διάτμησης του ανέμου στη στρατόσφαιρα και κατακόρυφο προφίλ της συχνότητας Brunt-Vaisala  $N^2$ .

## 4.1 Η επιρροή της στρατοσφαιρικής ροής στην εκθετική αστάθεια

### 4.1.1 Εύρεση αναλυτικής λύσης

Μπορούμε να βρούμε αναλυτικές λύσεις στην περίπτωση της εκθετικής αστάθειας κάνοντας τις εξής παραδοχές. Χωρίζουμε την ατμόσφαιρα σε δύο στρώματα: την τροπόσφαιρα ( $0 \leq z \leq 1$ ) και τη στρατόσφαιρα ( $z > 1$ ). Υποθέτουμε ότι η ταχύτητα του ανέμου δίνεται από τη σχέση

$$U(z) = \frac{z}{2} + \frac{1}{2}(\Lambda_s - \Lambda_t) \log \left[ \frac{\cosh\left(\frac{z-1}{\delta_t}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{\delta_s}\right)} \right] - \frac{1}{2}\delta_s\Lambda_s \log \left[ \frac{\cosh\left(\frac{z-1}{\delta_s}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{\delta_s}\right)} \right], \quad (4.1)$$

όπου  $\Lambda_s = -1, 0, 1$  η διάτμηση του ανέμου στην στρατόσφαιρα που για τις τρεις περιπτώσεις στρατοσφαιρικής ροής που εξετάζουμε είναι αρνητική, μηδενική και θετική αντίστοιχα,  $\Lambda_t = 1$  η διάτμηση του ανέμου στην τροπόσφαιρα και  $\delta_s, \delta_t$  είναι παράμετροι που ελέγχουν την καμπυλότητα των γωνιών της συνάρτησης. Αυτή προσεγγίζει τις συναρτήσεις που φαίνονται στο Σχήμα 4.1 από μια τμηματικά γραμμική συνάρτηση που έχει διαφορετικούς κλάδους στην τροπόσφαιρα και στη στρατόσφαιρα. Επίσης θεωρούμε ότι η συχνότητα Brunt-Vaisala αλλάζει ασυνεχώς στην τροπόπαυση και πηγαίνει από την τιμή  $N_t = 1$  που έχει στην τροπόσφαιρα, στην τιμή  $N_s = 2$ . Έτσι η εξίσωση για τη διατήρηση του δυναμικού στροβιλισμού (2.56) θα επιλυθεί με την ίδια διαδικασία που χρησιμοποιήσαμε στο Κεφάλαιο 3, αλλά για τα δύο χωριστά στρώματα, αυτό της τροπόσφαιρας και αυτό της στρατόσφαιρας. Δηλαδή, θεωρούμε κυματικές λύσεις για τη διαταραχή της μορφής (3.5) και αντικαθιστούμε στην εξίσωση (2.56) για τα δύο χωριστά στρώματα, οπότε παίρνουμε για το διακριτό φάσμα την εξίσωση

$$F_{\pm}^2 \frac{d^2 \hat{\psi}}{dz^2} - (k^2 + l^2) \hat{\psi} = 0, \quad (4.2)$$

όπου  $F_+ = 1/4$ ,  $F_- = 1$  είναι διαφορετικές παράμετροι για την τροπόσφαιρα και τη στρατόσφαιρα λόγω της διαφορετικής διαστρωμάτωσης. Οι λύσεις που παίρνουμε είναι

$$\hat{\psi}_{>}(z) = Ae^{2Kz} + Be^{-2Kz}, \quad (4.3)$$

$$\hat{\psi}_{<}(z) = Ce^{Kz} + De^{-Kz}, \quad (4.4)$$

όπου τα σύμβολα  $>$ ,  $<$  δηλώνουν τις λύσεις για υψόμετρο μεγαλύτερο ή μικρότερο του  $z = 1$ , ενώ οι λύσεις έχουν διαφορετικούς εκθέτες λόγω της διαφορετικής διαστρωμάτωσης.

Για τον υπολογισμό των σταθερών και τη σύνδεση των δύο λύσεων στις δύο περιοχές, θεωρούμε συνθήκες τόσο στα σύνορα (το έδαφος και τα όρια της στρατόσφαιρας) όσο και στη συνοριακή επιφάνεια των δύο περιοχών που είναι η τροπόπαυση. Έτσι, απαιτούμε σε πολύ μεγάλο υψόμετρο να μην υπάρχουν διαταραχές της θερμοκρασίας και του ανέμου, δηλαδή

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \hat{\psi}_{>} = 0, \quad (4.5)$$

ενώ στο έδαφος απαιτούμε να ικανοποιείται η συνθήκη μηδενικής κατακόρυφης ταχύτητας (3.3). Στην επιφάνεια της τροπόπαυσης ( $z = 1$ ) απαιτούμε το πεδίο των κατακόρυφων ανέμων να είναι συνεχές. Έτσι προκύπτει ότι

$$\frac{N_s^2}{N_t^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial z} - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right) \Big|_{z=1^-} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial z} - \Lambda \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right) \Big|_{z=1^+}, \quad (4.6)$$

η οποία για την κυματική λύση γίνεται

$$4 \left( -ikc \frac{d\hat{\psi}_<}{dz} + ik \frac{d\hat{\psi}_<}{dz} - ik\hat{\psi}_< \right) \Big|_{z=1^-} = \left( -ikc \frac{d\hat{\psi}_>}{dz} + ik \frac{d\hat{\psi}_>}{dz} - ik\Lambda\hat{\psi}_> \right) \Big|_{z=1^+}. \quad (4.7)$$

Επιπλέον, συνεχές πρέπει να είναι και το πεδίο της πίεσης σε αυτό το υψόμετρο άρα παίρνουμε

$$\hat{\psi} \Big|_{z=1^-} = \hat{\psi} \Big|_{z=1^+}. \quad (4.8)$$

Αντικαθιστώντας την (4.3) στη συνοριακή συνθήκη (4.5) παίρνουμε ότι  $A = 0$  και άρα η (4.3) γίνεται

$$\hat{\psi}_>(z) = Be^{-2Kz}. \quad (4.9)$$

Έπειτα, από τη συνοριακή συνθήκη για τη συνέχεια του πεδίου της πίεσης (4.8) παίρνουμε μια σχέση για τις σταθερές των λύσεων  $B, C, D$ :

$$B = Ce^{3K} + De^K. \quad (4.10)$$

Έπειτα, αντικαθιστώντας τη λύση (4.4) στην επιφανειακή συνοριακή συνθήκη (3.3) παίρνουμε:

$$C = \frac{D(Kc - 1)}{Kc + 1}. \quad (4.11)$$

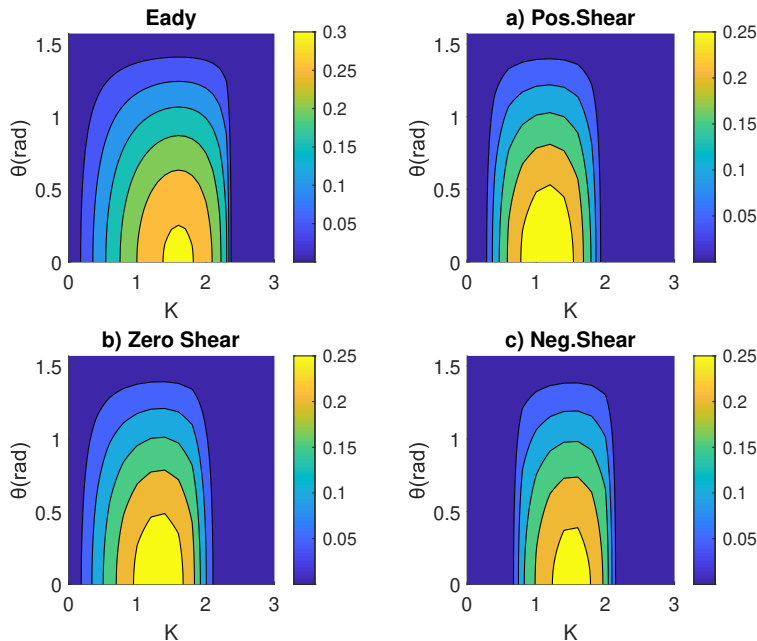
Τέλος, αν αντικαταστήσουμε τα πλάτη της ρευματοσυνάρτησης από τις σχέσεις (4.3), (4.4) και τις σταθερές  $B, C, D$  από τις σχέσεις που προέκυψαν μέσω των συνοριακών συνθηκών στην (4.7), καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς τη φασική ταχύτητα  $c$  συναρτήσει του  $K$ :

$$\begin{aligned} & 2K^2(e^{-2K} - 3)c^2 + [(2 + \Lambda)K - (2 - \Lambda)Ke^{-2K} - 2K^2(e^{-2K} - 3)]c \\ & - 2K(e^{-2K} + 3) + 4 + \Lambda - (4 - \Lambda)e^{-2K} = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Έτσι μπορούμε να βρούμε αναλυτικά τις λύσεις για τις ιδιοτιμές της φασικής ταχύτητας  $c$  για κάθε περίπτωση που εξετάζουμε.

## 4.2 Ανάλυση της επιρροής της διάτμησης

Ο εκθετικός ρυθμός αύξησης συναρτήσει του μέτρου του κυματάρηθμου  $K$  και της γωνίας προσανατολισμού  $\theta$  για τις τρεις περιπτώσεις διάτμησης και για το μοντέλο του Eady φαίνεται στο Σχήμα 4.2. Παρατηρούμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις ο μέγιστος ρυθμός εκθετικής αύξησης  $\sigma$  είναι φθίνουσα συνάρτηση της γωνίας προσανατολισμού των διαταραχών  $\theta$ , με τη μέγιστη τιμή να εμφανίζεται σε κάθε περίπτωση στις διαταραχές Βόρειου προσανατολισμού με  $\theta = 0$ . Σε ό,τι αφορά στο μέτρο του κυματάρηθμου, παρατηρούμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις υπάρχει ένα κατώφλι κυματάρηθμων (shortwave cutoff) πάνω από το οποίο έχουμε εκθετική ευστάθεια με το κατώφλι να μεταβάλλεται



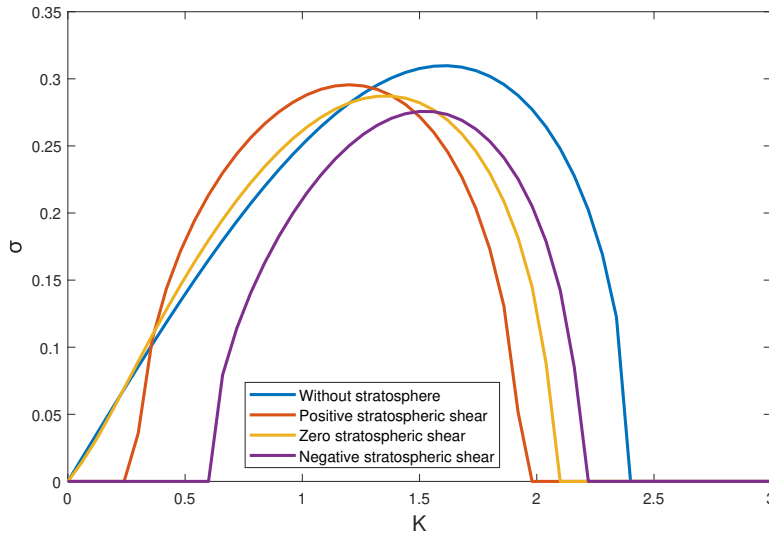
Σχήμα 4.2: Ισοϋψείς του εκθετικού ρυθμού αύξησης  $\sigma$  συναρτήσει του μέτρου του κυματάρηθμου  $K$  και της γωνίας  $\theta$  του προσανατολισμού των διαταραχών για το μοντέλο του Eady και για τις τρεις περιπτώσεις στρατοσφαιρικής ροής.



ανάλογα με την περίπτωση. Ωστόσο, στην περίπτωση θετικής και αρνητικής διάτμησης παρατηρούμε και ένα δεύτερο κατώφλι κυματάριμων (longwave cutoff) κάτω από το οποίο επίσης έχουμε ευστάθεια. Έτσι στην περίπτωση μηδενικής διάτμησης στη στρατόσφαιρα, η περιοχή εκθετικής αστάθειας είναι για μέτρο κυματάριμου  $0 < K < 2.1$  που αντιστοιχεί σε διαταραχές με κλίμακα  $\lambda > 3000 \text{ km}$ . Για την περίπτωση που έχουμε θετική διάτμηση του ανέμου στη στρατόσφαιρα η περιοχή εκθετικής αστάθειας εμφανίζεται για μέτρο κυματάριμου  $0.24 < K < 2$  που αντιστοιχεί σε κύματα με κλίμακα  $3000 \text{ km} < \lambda < 25000 \text{ km}$  και για την περίπτωση αρνητικής διάτμησης παρατηρούμε ότι εμφανίζεται η εκθετική αστάθεια για  $0.6 < K < 2.2$ , δηλαδή για κύματα με κλίμακα  $3000 \text{ km} < \lambda < 10000 \text{ km}$ .

Για να εξετάσουμε την επίδραση της στρατοσφαιρικής ροής στο μέγιστο εκθετικό ρυθμό αύξησης των διαταραχών συγκρίνουμε το ρυθμό εκθετικής αύξησης των διαταραχών με Βόρειο προσανατολισμό ( $\theta = 0$ ) καθώς σε αυτές εμφανίζεται η μέγιστη αστάθεια όπως αναφέρθηκε προηγουμένως. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 4.3 στο οποίο μπορούμε να δούμε πως όταν λαμβάνουμε υπόψιν τη στρατόσφαιρα, τότε ανεξαρτήτως από το πρόσημο της διάτμησης της στρατοσφαιρικής ροής, ο μέγιστος ρυθμός εκθετικής αύξησης είναι μικρότερος συγκριτικά με αυτόν απουσίας της στρατόσφαιρας. Σε σχέση με τις τρεις περιπτώσεις στρατοσφαιρικής ροής, παρατηρούμε ότι ο μέγιστος εκθετικός ρυθμός αύξησης είναι μεγαλύτερος στην περίπτωση της θετικής διάτμησης, με αμέσως μικρότερο αυτόν στην περίπτωση της μηδενικής διάτμησης και τέλος το μικρότερο από όλους στην περίπτωση της αρνητικής διάτμησης με το μέγιστο ρυθμό να είναι μικρότερος κατά 5% συγκριτικά με την περίπτωση της θετικής διάτμησης.

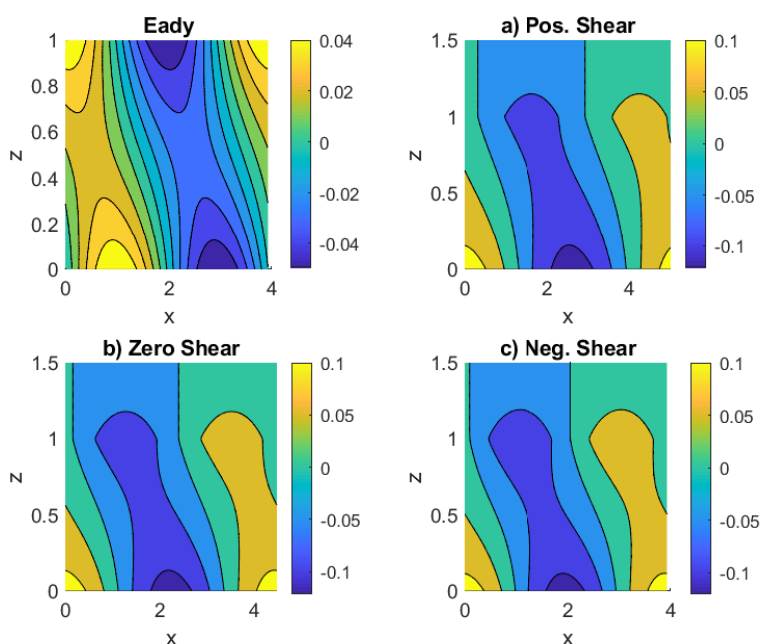
Επίσης, από το Σχήμα 4.3, φαίνεται ότι ο κυματάριμος  $K_{max}$  στον οποίο εμφανίζεται ο μεγαλύτερος ρυθμός αύξησης μικραίνει όταν λαμβάνουμε υπόψη τη στρατόσφαιρα, δηλαδή ευνοούνται δομές μεγαλύτερης χωρικής κλίμακας. Στην περίπτωση της θετικής διάτμησης έχουμε  $K_{max} = K_+ = 1.2$  και αναμένουμε τις μεγαλύτερες διαταραχές με χωρική κλίμακα της τάξης των  $\lambda \sim 5000 \text{ km}$ . Στην περίπτωση της αρνητικής διάτμησης έχουμε το μεγαλύτερο  $K_{max} = K_- = 1.5$  συνεπώς και τις μικρότερες χωρικές κλίμακας



Σχήμα 4.3: Μέγιστος ρυθμός εκθετικής αστάθειας  $\sigma$  συναρτήσει του  $K$  για διαταραχές με Βόρειο προσανατολισμό ( $\theta = 0$ ), για το μοντέλο του Eady και για τις τρεις περιπτώσεις στρατοσφαιρικής ροής.

( $\lambda \sim 4000 \text{ km}$ ) σε σχέση με τις άλλες δύο περιπτώσεις, ενώ για μηδενική διάτμηση έχουμε  $K_{max} = K_0 = 1.4$ .

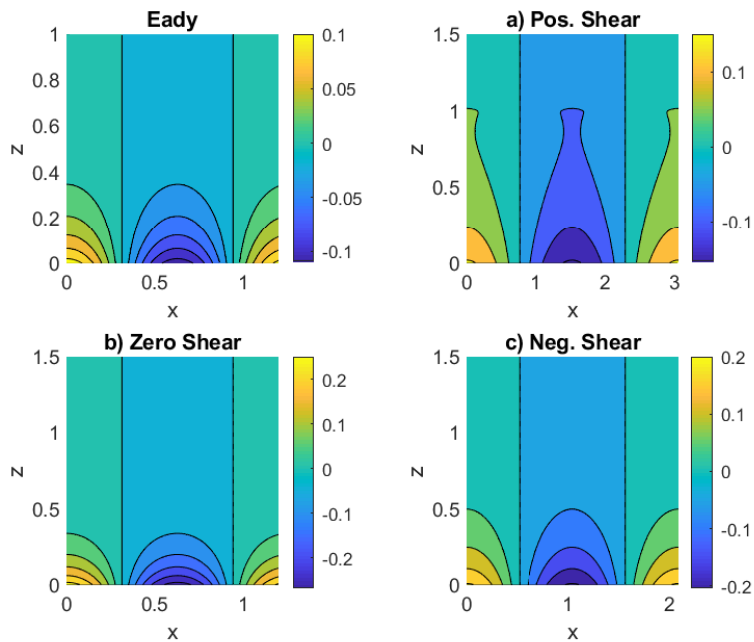
Γνωρίζοντας τον κυματάρημο των πιο ασταθών διαταραχών για κάθε περίπτωση στρατοσφαιρικής ροής, μπορούμε να σχεδιάσουμε την κατακόρυφη δομή τους σε επίπεδο  $x - z$  και να τις συγκρίνουμε με αυτή που εμφανίζεται στο μοντέλο του Eady. Στο Σχήμα 4.4, βλέπουμε τις ισοϋψείς της ρευματοσυνάρτησης  $\psi'$  για τις πιο ασταθές διαταραχές με  $\theta = 0$  και  $K_{Eady}$ ,  $K_+$ ,  $K_0$ ,  $K_-$  αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι το χαμηλό στην επιφάνεια βρίσκεται ανατολικότερα από αυτό στα  $500hPa$  ανεξαρτήτως περίπτωσης. Επιπλέον, αν συγκρίνουμε τις τιμές της ρευματοσυνάρτησης στην επιφάνεια με αυτές στο ύψος της τροπόπαυσης, παρατηρούμε ότι το χαμηλό στην επιφάνεια είναι εντονότερο στις περιπτώσεις που υπάρχει στρατοσφαιρική ροή, σε αντίθεση με το μοντέλο του Eady. Ο λόγος είναι ότι στο μοντέλο του Eady η συνοριακή συνθήκη για παύση των κινήσεων στην τροπόπαυση, που είναι όμοια με αυτή του εδάφους, οδηγεί σε μεγάλες τιμές στην περιοχή της τροπόπαυσης, ενώ στην περίπτωση της ύπαρξης της στρατόσφαιρας οι



Σχήμα 4.4: Ισοϋψείς στο επίπεδο  $x - z$  της ρευματοσυνάρτησης  $\psi'$  των πιο ασταθών διαταραχών με προσανατολισμό  $\theta = 0$  για τις περιπτώσεις του Eady, και της θετικής, μηδενικής και αρνητικής διάτμησης.

κινήσεις φθίνουν ομαλά στη στρατόσφαιρα. Επίσης, το εύρος των τιμών της ρευματοσυνάρτησης είναι μεγαλύτερο στις περιπτώσεις που έχουμε στρατοσφαιρική ροή σε σχέση με την περίπτωση που δεν έχουμε.

Αντίθετα με τις πιο ασταθές διαταραχές, οι οποίες εκτείνονται σε όλο το ύψος από την επιφάνεια έως και την τροπόπαυση, μπορούμε να δούμε ότι αυτό δε συμβαίνει και με τις κατακόρυφες δομές των εκθετικά ευσταθών διαταραχών, όπως αυτές που φαίνονται στο Σχήμα 4.5, όπου σχεδιάζονται οι ισοϋψείς της ρευματοσυνάρτησης  $\psi'$  για εκθετικά ευσταθείς διαταραχές με  $\theta = 0$ . Παρατηρούμε πως δεν υπάρχει η κλίση των ισοφασικών καμπυλών που υπάρχει στην κατακόρυφη δομή των ασταθών διαταραχών με αποτέλεσμα να μην υπάρχει περιθώριο ανάπτυξης. Επίσης, με εξαίρεση την περίπτωση της θετικής διάτμησης, οι διαταραχές είναι επικεντρωμένες κοντά στο έδαφος, ενώ όμοια με την περίπτωση των ασταθών δομών, το εύρος των τιμών της ρευματοσυνάρτησης είναι μεγαλύτερο στις περιπτώσεις που υπάρχει η στρατοσφαιρική ροή.

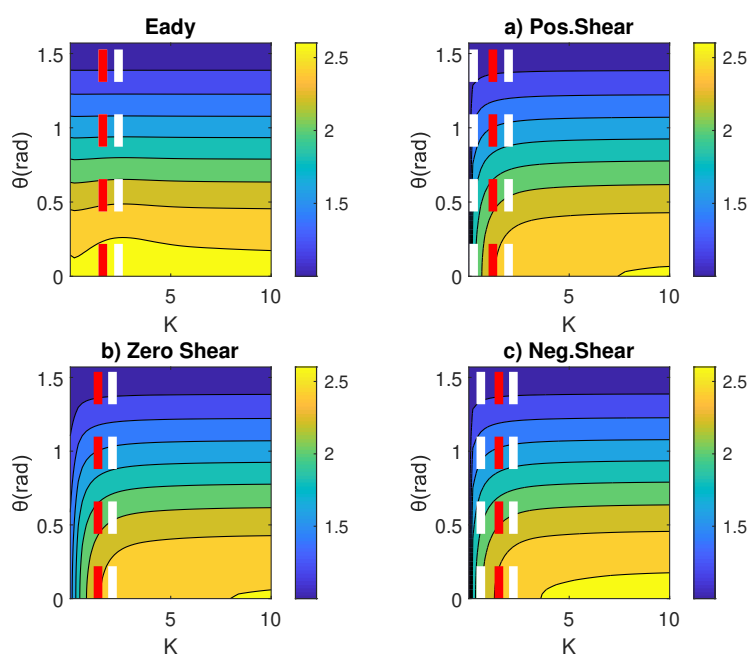


Σχήμα 4.5: Ισοϋψείς στο επίπεδο  $x-z$  της ρευματοσυνάρτησης  $\psi'$  ευσταθών διαταραχών με προσανατολισμό  $\theta = 0$  και  $K = 3$  για την περίπτωση του Eady και  $K = 2.5$  για τις περιπτώσεις θετικής, μηδενικής και αρνητικής διάτμησης.

### 4.3 Γενικευμένη θεωρία ευστάθειας για την περίπτωση στρατοσφαιρικής ροής

Χρησιμοποιώντας τα εργαλεία της Γενικευμένης Θεωρίας Ευστάθειας, υπολογίζουμε τη μέγιστη ενεργειακή αύξηση των διαταραχών για τα χρονικά διαστήματα μίας, τριών και πέντε ημερών, τα οποία παρουσιάζονται και περιγράφονται παρακάτω. Στο Σχήμα 4.6, βλέπουμε τις ισοϋψείς της μέγιστης ενεργειακής αύξησης των διαταραχών συναρτήσει της γωνίας προσανατολισμού  $\theta$  και του μέτρου του κυματάριθμου  $K$  για χρονικό διάστημα μίας ημέρας. Οι λευκές διακεκομμένες γραμμές οριοθετούν την περιοχή εκθετικής αστάθειας για κάθε περίπτωση και η κόκκινη βρίσκεται στον κυματάριθμο όπου εμφανίζεται ο μέγιστος ρυθμός εκθετικής αύξησης. Παρατηρούμε παρόμοιες τιμές ενεργειακής αύξησης σε όλες τις περιπτώσεις, με την  $G$  να είναι φθίνουσα συνάρτηση

του  $\theta$  και τις διαταραχές Βόρειου προσανατολισμού να εμφανίζουν τη μέγιστη τιμή ενεργειακής αύξησης. Χωρίς τη στρατόσφαιρα η  $G$  είναι ανεξάρτητη του  $K$  που σημαίνει ότι δεν υπάρχει συγκεκριμένη χωρική κλίμακα για τις διαταραχές που θα επικρατήσουν, καθώς όπως βλέπουμε κυματάρημοι και στην ευσταθή και στην ασταθή περιοχή παρουσιάζουν ίδια τιμή μέγιστης ενεργειακής αύξησης. Επομένως, αναμένουμε και μεγάλες και μικρές δομές να αναπτυχθούν εξίσου. Στις περιπτώσεις της θετικής και της μηδενι-

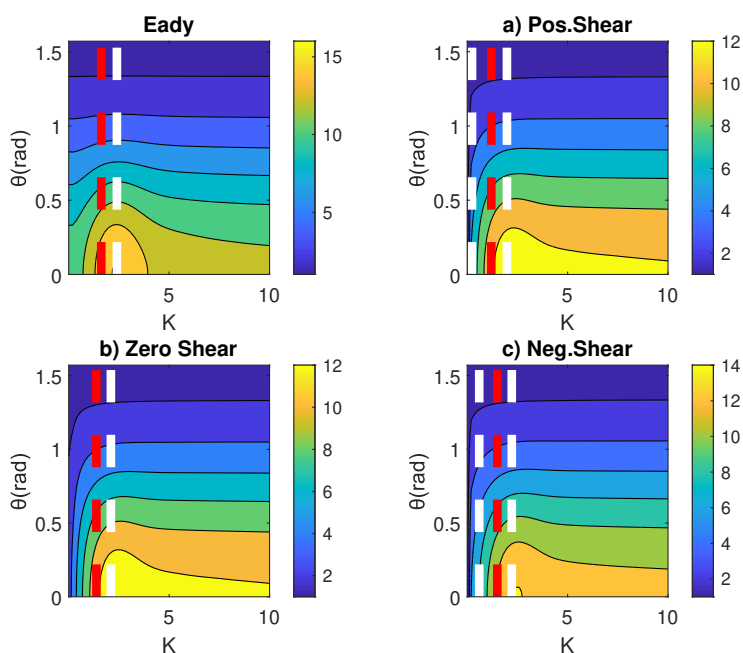


Σχήμα 4.6: Ισοϋψείς της βέλτιστης ενεργειακής αύξησης  $G$  συναρτήσει του μέτρου του κυματάρημου  $K$  και της γωνίας προσανατολισμού  $\theta$  των διαταραχών για  $T_{opt} = 1$  στην περίπτωση του μοντέλου του Eady και στις περιπτώσεις θετικής, μηδενικής και αρνητικής διάτμησης.

κής διάτμησης, οι οποίες είναι όμοιες μεταξύ τους, παρατηρούμε πως η  $G$  είναι σχεδόν ανεξάρτητη του  $K$  με τις μεγαλύτερες τιμές να εμφανίζονται για μικρές δομές μήκους κύματος  $\lambda < 800 \text{ km}$ , δηλαδή μεγάλους κυματάρημους ( $K > 7.5$ ) οι οποίοι είναι εκθετικά ευσταθείς. Ωστόσο, η διαφορά στην τιμή της ενεργειακής αύξησης σε σχέση με τις διαταραχές μεγαλύτερης κλίμακας είναι αρκετά μικρή ( $\sim 5\%$ ). Αντίστοιχα συμπεράσματα βλέπουμε και στην περίπτωση της αρνητικής διάτμησης, ωστόσο οι μεγαλύτερες τιμές

της  $G$  εμφανίζονται για κυματάριθμους  $K > 3.5$  άρα αναμένεται να εμφανιστούν δομές μήκους κύματος  $\lambda < 1500 \text{ km}$ . Επομένως, λαμβάνοντας υπόψιν τη στρατοσφαιρική ροή παρατηρούμε ότι υπάρχει μικρή ενεργειακή υστέρηση για τις δομές μεγάλης κλίμακας με την περίπτωση της αρνητικής διάτμησης να διαφέρει ελαφρά καθώς βλέπουμε ότι σε αυτή την περίπτωση ευνοούνται και δομές μεγαλύτερης χωρικής κλίμακας.

Στο Σχήμα 4.7 φαίνεται η μέγιστη ενεργειακή αύξηση  $G$  των διαταραχών για το χρόνο βελτιστοποίησης  $T_{opt} = 3$  ημέρες. Άμεσα παρατηρήσιμο είναι το γεγονός ότι για την περίπτωση που δεν έχουμε στρατοσφαιρική ροή και για την περίπτωση με αρνητική διάτμηση, έχουμε μέγιστη τιμή της  $G$  στα όρια της περιοχής της εκθιτικής αστάθειας ωστόσο με μια υστέρηση της ενέργειας στην περίπτωση αρνητικής διάτμησης, της τάξης

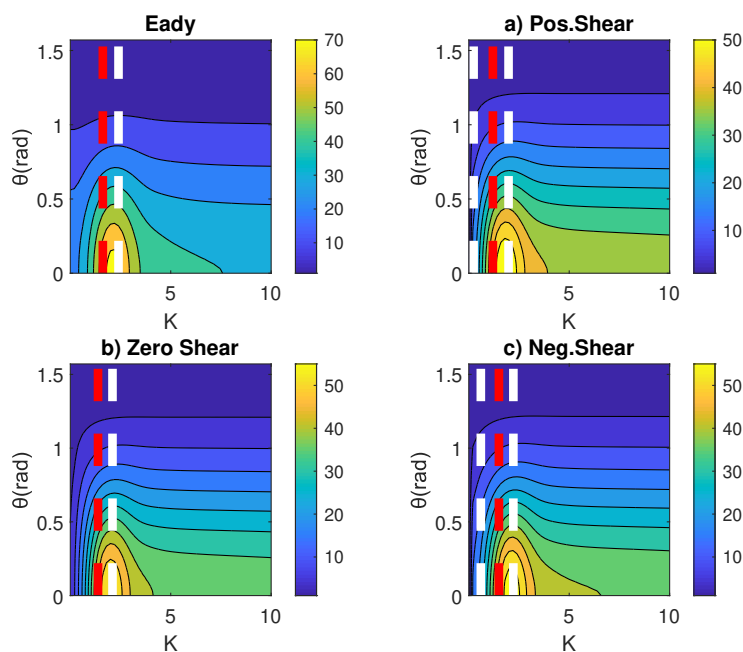


Σχήμα 4.7: Ισοϋψείς της βέλτιστης ενεργειακής αύξησης  $G$  συναρτήσει του μέτρου του κυματάριθμου  $K$  και της γωνίας προσανατολισμού  $\theta$  των διαταραχών για  $T_{opt} = 3$  στην περίπτωση του μοντέλου του Eady και στις περιπτώσεις θετικής, μηδενικής και αρνητικής διάτμησης.

του 5%. Στις περιπτώσεις με θετική και μηδενική διάτμηση του ανέμου στη στρατόσφαιρα, φαίνεται να συνεχίζεται η μη επιλεκτικότητα όσον αφορά στη χωρική κλίμακα

των διαταραχών, εκτός από πολύ μεγάλες δομές (μικρά  $K$ ). Η ενεργειακή υστέρηση συγκριτικά με την ενέργεια των διαταραχών απουσία στρατόσφαιρας είναι μεγαλύτερη από αυτή της περίπτωσης της αρνητικής διάτμησης καθώς είναι της τάξης του 20%. Επομένως, ακόμη και σε χρονικό διάστημα 2 – 3 ημερών μπορούμε να παρατηρήσουμε εξίσου διαταραχές μεγάλης και μικρής κλίμακας.

Για μεγαλύτερο χρόνο βελτιστοποίησης  $T_{opt} = 5$  ημέρες, η μέγιστη ενεργειακή αύξηση που φαίνεται στο Σχήμα 4.8 είναι και για τις τρεις περιπτώσεις στρατοσφαιρικής ροής παρόμοια αλλά σε σχέση με την περίπτωση απουσίας της στρατόσφαιρας υστερεί κατά 30%. Επίσης, σε όλες τις περιπτώσεις η μέγιστη τιμή της  $G$  παρατηρείται για κυματάρηθμους στην ασταθή περιοχή εφόσον η εκθετική αστάθεια κυριαρχεί καθώς ο χρόνος αυξάνεται. Επομένως, αναμένουμε να κυριαρχήσουν στη ροή δομές μεγάλης κλίμακας,

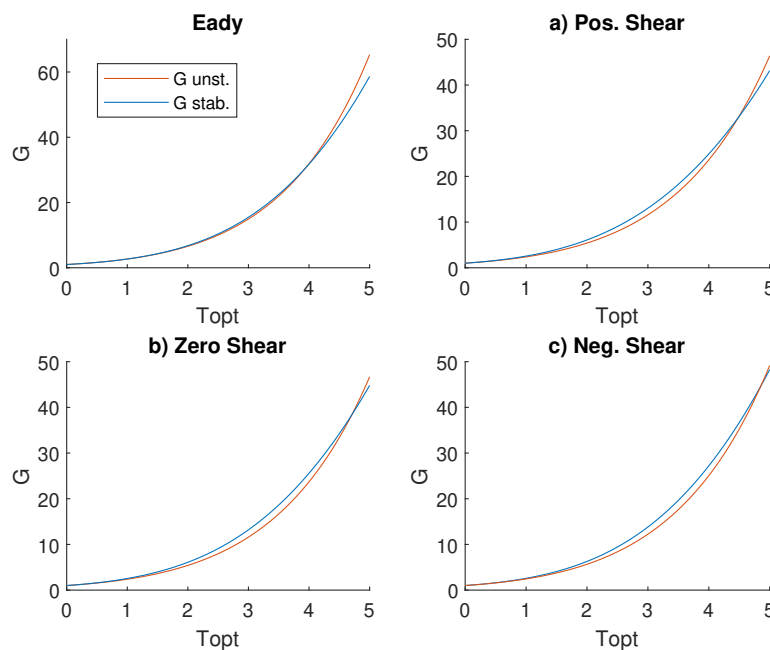


Σχήμα 4.8: Ισοϋψείς της βέλτιστης ενεργειακής αύξησης  $G$  συναρτήσεως του μέτρου του κυματάρηθμου  $K$  και της γωνίας προσανατολισμού  $\theta$  των διαταραχών για  $T_{opt} = 5$  στην περίπτωση του μοντέλου του Eady και στις περιπτώσεις θετικής, μηδενικής και αρνητικής διάτμησης.

ωστόσο όχι αυτές που προβλέπει η κλασική θεωρία αστάθειας καθώς σε κάθε περίπτω-

ση ο κυματάρημος με τη μέγιστη ενεργειακή αύξηση  $K_{G_{max}}$  είναι μεγαλύτερος από τον κυματάρημο με το μέγιστο ρυθμό εκθετικής ανάπτυξης  $K_{\sigma_{max}}$ . Η παρατήρηση αυτή ισχύει και για ακόμη μεγαλύτερους χρόνους της τάξης των 10 ημερών (δε δείχνεται).

Η σύγκριση της ενεργειακής αύξησης ανάμεσα σε εκθετικά ευσταθείς και ασταθείς διαταραχές φαίνεται στο Σχήμα 4.9 όπου σχεδιάζεται η μέγιστη ενεργειακή αύξησης  $G$  συναρτήσει του χρόνου βελτιστοποίησης  $T_{opt}$ . Οι πορτοκαλί καμπύλες δείχνουν τη μέγιστη ενεργειακή αύξηση των πιο ασταθών διαταραχών, ενώ οι μπλε καμπύλες δείχνουν τη μέγιστη ενεργειακή αύξηση για εκθετικά ευσταθείς διαταραχές. Άμεσα παρατηρήσιμο είναι το γεγονός ότι σε όλες τις περιπτώσεις για χρονικό διάστημα έως και περίπου 4



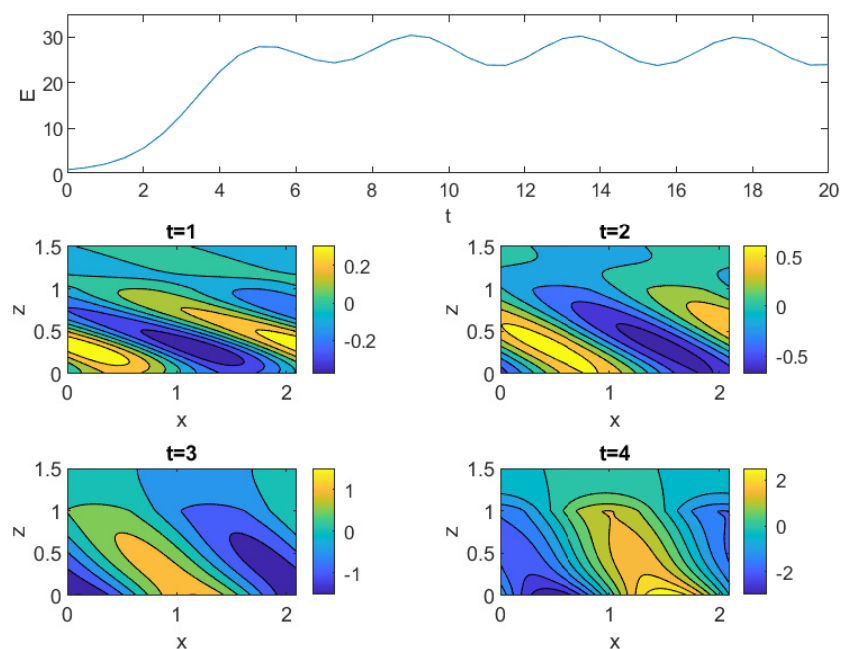
Σχήμα 4.9: Μέγιστη ενεργειακή αύξηση  $G$  ευσταθών (μπλε καμπύλες) και ασταθών διαταραχών (πορτοκαλί καμπύλες) διαταραχών συναρτήσει του χρόνου βελτιστοποίησης  $T_{opt}$  στις περιπτώσεις του Eady, θετικής, μηδενικής και αρνητικής διάτμησης. Οι ασταθείς διαταραχές έχουν κυματάρημο  $K_{\sigma_{max}}$  για κάθε περίπτωση και  $\theta = 0$ , ενώ οι ευσταθείς διαταραχές έχουν  $\theta = 0$  και  $K = 3$  για την περίπτωση του Eady και  $K = 2.5$  για τις περιπτώσεις θετικής, μηδενικής και αρνητικής διάτμησης.

ημέρες η ενεργειακή αύξηση των ευσταθών διαταραχών είναι ελαφρώς μεγαλύτερη από αυτή των ασταθών, ενώ για  $T_{opt} > 4$  οι εκθετικά ασταθείς διαταραχές παρουσιάζουν



μεγαλύτερη ενεργειακή αύξηση. Παρατηρούμε επίσης πως απουσία στρατοσφαιρικής ροής οι τιμές της  $G$  φτάνουν έως και  $\simeq 70$  για  $T_{opt} = 5$  σε αντίθεση με τις υπόλοιπες περιπτώσεις διάτμησης στρατοσφαιρικής ροής όπου οι τιμές της  $G$  φτάνουν έως και  $\simeq 50$  για  $T_{opt} = 5$ , γεγονός το οποίο ήταν αναμενόμενο βάσει των Σχημάτων 4.6-4.8.

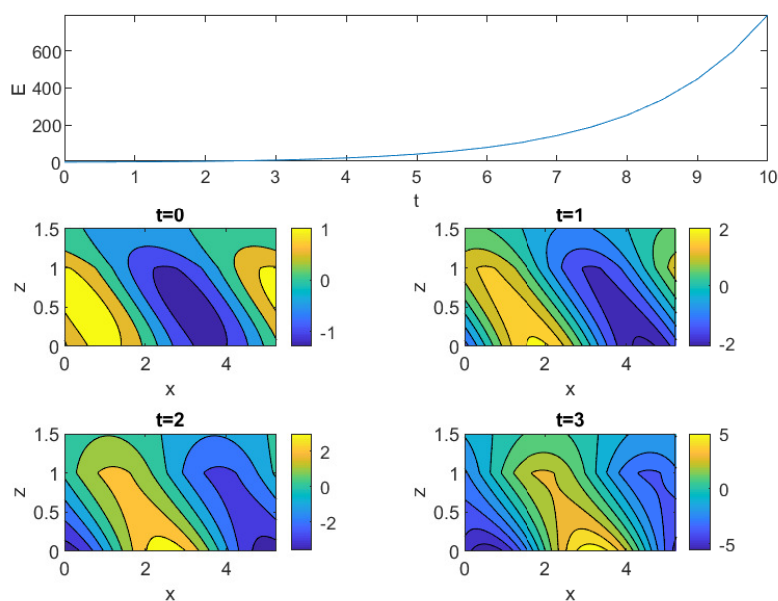
Η ενεργειακή αύξηση των ευσταθών διαταραχών και η χρονική τους εξέλιξη εξετάζεται αναλυτικά στο Σχήμα 4.10 που σχεδιάζεται για την περίπτωση της στρατοσφαιρικής ροής με θετική διάτμηση, η εξέλιξη της ενέργειας της διαταραχής με κυματάρημο  $K = 3$  και γωνία προσανατολισμού  $\theta = 0$  που οδηγεί στη μέγιστη ενεργειακή αύξηση στο χρόνο  $T_{opt} = 5$ , καθώς και στιγμιότυπα της δομής της στο κατακόρυφο. Βλέπουμε μια εικόνα παρόμοια με αυτή που είδαμε στην περίπτωση του Eady. Δηλαδή, αρχικά η διαταραχή



Σχήμα 4.10: Χρονική εξέλιξη ενέργειας (επάνω) και στιγμιότυπα της κατακόρυφης δομής της ρευματοσυνάρτησης  $\psi'$  (κάτω) για την εκθετικά ευσταθή αρχική διαταραχή με  $K = 3$  και  $\theta = 0$  που επιτυγχάνει τη βέλτιστη ενεργειακή αύξηση σε  $T_{opt} = 5$  ημέρες στην περίπτωση της στρατοσφαιρικής ροής με θετική διάτμηση.

έχει ρευματογραμμές με κλίση αντίθετη με τη διάτμηση του ανέμου και μέσω του μηχα-

νισμού του Orr που αναλύσαμε στο Κεφάλαιο 3 αυξάνει την ενέργεια της καθώς η κλίση της αλλάζει λόγω της διαφορετικής ταχύτητας στα μεγαλύτερα υψόμετρα. Λίγο μετά το χρόνο βελτιστοποίησης παρατηρούμε την ταλάντωση της ενέργειας γύρω από τη μέση τιμή της που είναι χοντρικά η βέλτιστη ενέργεια που έχει επιτευχθεί στο χρόνο  $T_{opt}$ . Οι διαφορές σε σχέση με την περίπτωση απουσίας της στρατοσφαιρικής ροής είναι οι

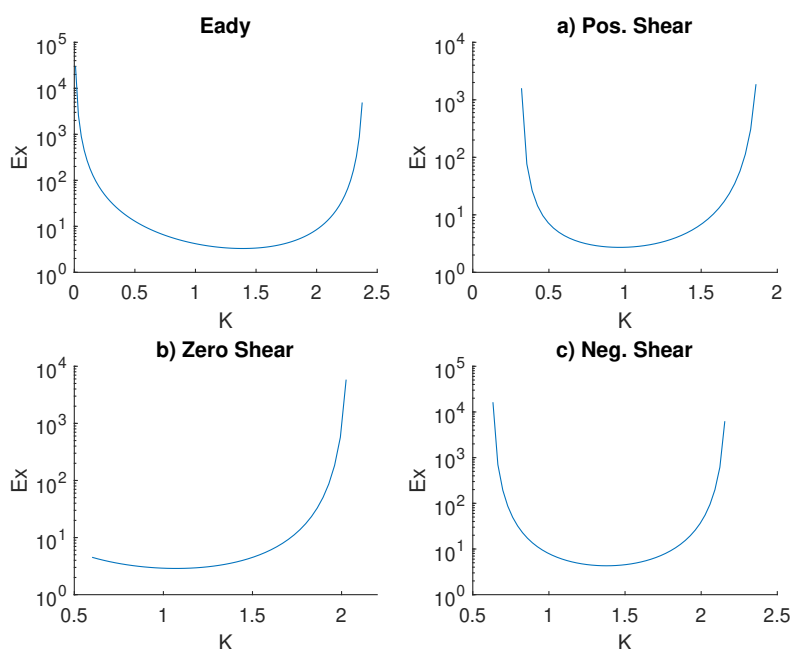


Σχήμα 4.11: Χρονική εξέλιξη ενέργειας (επάνω) και στιγμιότυπα της κατακόρυφης δομής της ρευματοσυνάρτησης  $\psi'$  (κάτω) για την εκθετικά ασταθή αρχική διαταραχή με  $K = 1.2$  και  $\theta = 0$  που επιτυγχάνει τη βέλτιστη ενεργειακή αύξηση σε  $T_{opt} = 3$  ημέρες στην περίπτωση της στρατοσφαιρικής ροής με θετική διάτμηση.

τιμές της ενέργειας, καθώς εμφανίζει μικρότερο μέγιστο και μικρότερη μέση τιμή, ενώ οι διαταραχές εκτείνονται τουλάχιστον  $10 \text{ km}$  μέσα στη στρατόσφαιρα. Η εξέλιξη των διαταραχών στο επίπεδο  $x - y$  δε διαφέρει από την αντίστοιχη εξέλιξη που έχουμε στο μοντέλο του Eady με το σχηματισμό και τη βάθυνση του συστήματος με τις σκάφες και τις σφήνες ψηλά στην τροπόσφαιρα και τα επιφανειακά ψηλά και χαμηλά στην επιφάνεια (δε δείχνεται). Όμοια συμπεράσματα προκύπτουν και για τις περιπτώσεις μηδενικής και αρνητικής διάτμησης της στρατοσφαιρικής ροής αφού η αιτία αυτής της ενεργειακής

αύξησης είναι ο μηχανισμός του Orr ο οποίος εμφανίζεται σε όλες τις περιπτώσεις.

Αντίστοιχη ανάλυση μπορεί να γίνει και για τις βέλτιστες διαταραχές με κυματάρημο που είναι ο πιο ασταθής για την κάθε περίπτωση στρατοσφαιρικής ροής, η εξέλιξη των οποίων φαίνεται στο Σχήμα 4.11. Βλέπουμε παρόμοια εξέλιξη με την περίπτωση του μοντέλου του Eady, με στροφή των ρευματογραμμών κατά το αρχικό χρονικό διάστημα έως το χρόνο περίπου  $t = 2$  και έπειτα παγίωση της κατακόρυφης δομής του ασταθούς ιδιοανύσματος και εκθετική αύξηση της ενέργειας. Η διαφορά σε σχέση με την απουσία στρατοσφαιρικής ροής είναι, όπως και στην περίπτωση της ευσταθούς διαταραχής, οι μικρότερες τιμές της ενέργειας στην περίπτωση που υπάρχει στρατοσφαιρική ροή και η επέκταση των διαταραχών αρκετά μέσα στη στρατόσφαιρα. Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις στρατοσφαιρικής ροής η εξέλιξη και τα συμπεράσματα είναι παρόμοια.



Σχήμα 4.12: Προβολή στις ασταθείς ιδιοκαταστάσεις από τις διορθωγώνιές τους συναρτήσει του μέτρου του κυματάρημου  $K$  για  $\theta = 0$  και για τις περιπτώσεις του μοντέλου του Eady, της θετικής, μηδενικής και αρνητικής διάτμησης στρατοσφαιρικής ροής.

Τέλος, στο Σχήμα 4.12 φαίνεται το μέγιστο πλάτος διέγερσης των ασταθών ιδιοκαταστάσεων για το μοντέλο του Eady και για κάθε περίπτωση στρατοσφαιρικής ροής.

Παρατηρούμε ότι η διέγερση για τους πιο ασταθείς κυματάρθρωτους είναι κατά μέσο όρο της τάξης του 1 για όλες τις περιπτώσεις. Συγκεκριμένα για την περίπτωση του Eady και της μηδενικής διάτμησης στρατοσφαιρικής ροής είναι περίπου 3.5, για την περίπτωση της θετικής διάτμησης είναι περίπου 3, ενώ τη μεγαλύτερη διέγερση έχουν οι ασταθείς ιδιοκαταστάσεις της περίπτωσης της αρνητικής διάτμησης στη στρατόσφαιρα, όπου είναι περίπου 4.5. Όπως και στην περίπτωση του μοντέλου του Eady, οι τιμές του πλάτους της διέγερσης αυξάνουν ραγδαία για κυματάρθρωτους κοντά στα όρια της εκθετικής ευστάθειας.

## Κεφάλαιο 5

### Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή έγινε μια προσπάθεια διερεύνησης της επίδρασης της στρατοσφαιρικής ροής στη βαροκλιτική αστάθεια στα όρια της Οιονεί Γεωστροφίας, έχοντας ως σύστημα αναφοράς το κλασσικό μοντέλο του Eady το οποίο αγνοεί τη στρατόσφαιρα. Η διερεύνηση επιτεύχθηκε με τη χρήση των εργαλείων της Γενικευμένης Θεωρίας Ευστάθειας.

Θεωρήσαμε ότι έχουμε ένα δυτικό, γεωστροφικά και υδροστατικά ισορροπημένο, βαροκλιτικό άνεμο με σταθερή διάτμηση ως την τροπόπαυση, όπως ακριβώς και στο μοντέλο του Eady. Αντί όμως μηδενικών κινήσεων πάνω από την τροπόπαυση, συμπεριλάβαμε την ύπαρξη της στρατόσφαιρας ως ένα ατμοσφαιρικό στρώμα πολύ πιο στατικά ευσταθές από την τροπόσφαιρα και εξετάσαμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις διάτμησης του ανέμου στη στρατόσφαιρα (θετική, μηδενική και αρνητική) που αντικατοπτρίζουν διαφορετικά παραδείγματα ροής που παρατηρούνται κλιματολογικά, με την περίπτωση της αρνητικής διάτμησης να είναι η πιο ρεαλιστική από τις τρεις. Κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις, μαζί με τη σταθερή διάτμηση ως την τροπόπαυση, είναι κατάσταση ισορροπίας για το δυναμικό σύστημα της ατμόσφαιρας. Έπειτα εξετάσαμε την ευστάθεια της ισορροπίας μελετώντας την εξέλιξη μικρών διαταραχών γύρω από αυτό και συγκεκριμένα συγκρίναμε τις τιμές του πλάτους και του ρυθμού ανάπτυξης των διαταραχών, είτε αυτός είναι εκθετικός, είτε αλγεβρικός, με τις αντίστοιχες τιμές που προβλέπει το κλασσικό

μοντέλο του Eady.

Όσον αναφορά στην εκθετική αστάθεια, βρήκαμε ότι υπό την επίδραση της στρατοσφαιρικής ροής αναπτύσσονται δομές μεγαλύτερης χωρικής κλίμακας από αυτές που εμφανίζονται αν δε λάβουμε υπόψιν τη στρατόσφαιρα, καθώς και ότι η ανάπτυξη αυτών συμβαίνει με μικρότερο ρυθμό και συνεπώς χρειάζονται μεγαλύτερο χρονικό διάστημα για να αυξήσουν το πλάτος τους. Συγκεκριμένα, το κλασικό μοντέλο του Eady προβλέπει ότι η διαταραχή που αναμένεται να παρατηρηθεί έχει κυματάρημο  $K_{\sigma_{max}} = 1.6$ , δηλαδή έχει μήκος κύματος της τάξης των  $\simeq 4000 \text{ km}$  και ρυθμό ανάπτυξης  $0.3 \text{ day}^{-1}$ . Υπό την επιρροή της στρατόσφαιρας, οι μεγαλύτερες διαταραχές εμφανίζονται στην περίπτωση με θετική διάτμηση του ανέμου ( $K_{\sigma_{max}} = 1.2$ ), ενώ οι μικρότερες στην περίπτωση με αρνητική διάτμηση ( $K_{\sigma_{max}} = 1.5$ ). Επιπλέον, ο μέγιστος ρυθμός ανάπτυξης τους  $\sigma_{max}$  βρέθηκε κατά σειρά  $\sigma_E > \sigma_+ > \sigma_0 > \sigma_-$ , με το δείκτη να υποδηλώνει το μοντέλο του Eady και το πρόσημο της διάτμησης του ανέμου στη στρατόσφαιρα.

Εκτός από τη μέθοδο της εκθετικής αστάθειας, η οποία αναφέρεται στην ανάπτυξη των διαταραχών στο ασυμπτωτικό όριο που οι διαταραχές έχουν πολύ μεγάλο χρόνο διαθέσιμο για να αναπτυχθούν, χρησιμοποιήσαμε και τη μέθοδο της Γενικευμένης Θεωρίας Ευστάθειας για να μελετήσουμε την ανάπτυξη των διαταραχών σε πεπερασμένο χρόνο. Βρήκαμε ότι για χρονικό διάστημα  $T_{opt} = 1$  ημέρα, η μέγιστη ενεργειακή αύξηση των διαταραχών, για την περίπτωση που αγνοούμε τη στρατόσφαιρα, είναι σχεδόν ανεξάρτητη της κλίμακας των διαταραχών. Αυτό σημαίνει ότι εκθετικά ευσταθείς διαταραχές μικρής χωρικής κλίμακας έχουν τον ίδιο ρυθμό ανάπτυξης με τις εκθετικά ασταθείς διαταραχές μεγαλύτερης χωρικής κλίμακας. Λαμβάνοντας υπόψη τη στρατοσφαιρική ροή, η μέγιστη ενεργειακή αύξηση των διαταραχών έχει ίδια τιμή με αυτή που είχε χωρίς την στρατόσφαιρα, αλλά πλέον η τιμή αυτή επιτυγχάνεται για διαταραχές με  $K > 3.5$ , οι οποίες είναι εκθετικά ευσταθείς. Αυτό σημαίνει ότι υπό την επίδραση της στρατοσφαιρικής ροής σε χρονικό διάστημα  $T_{opt} = 1$  ημέρα, αναμένουμε να εμφανιστούν διαταραχές μικρότερης χωρικής κλίμακας ( $< 1800 \text{ km}$ ) σε σχέση με αυτές που προβλέπονται αν δεν λάβουμε υπόψιν τη στρατόσφαιρα.

Για μεγαλύτερους χρόνους βελτιστοποίησης ( $T_{opt} = 5$  ημέρες), βρήκαμε ότι οι κυματάρια των διαταραχών που έχουν τη μέγιστη ενεργειακή αύξηση συγκλίνουν προς την περιοχή που ορίζει η εκθετική αστάθεια, ωστόσο οι διαταραχές που επιτυγχάνουν τη μέγιστη ενεργειακή αύξηση έχουν μεγαλύτερους κυματάρια από τις διαταραχές με το μέγιστο ρυθμό εκθετικής αύξησης. Αυτό σημαίνει ότι οι διαταραχές που αυξάνουν το πλάτος τους μέσα σε χρονικό διάστημα της τάξης της μίας εβδομάδας έχουν μικρότερη χωρική κλίμακα από αυτή που προβλέπει η κλασική θεωρία αστάθειας. Βρέθηκε επίσης ότι στις τρεις περιπτώσεις στρατοσφαιρικής ροής υπάρχει υστέρηση στη μέγιστη ενεργειακή αύξηση των διαταραχών της τάξης του 30%, συγκριτικά με το κλασικό μοντέλο του Eady.

Σε ό,τι αφορά στη δυναμική της ενεργειακής αύξησης, οι εκθετικά ευσταθείς διαταραχές βρέθηκε ότι αυξάνουν την ενέργειά τους μέσω του μηχανισμού του Orr, αντλώντας δυναμική ενέργεια από τη μέση ροή και μετατρέποντάς τη σε δική τους κινητική ενέργεια. Αυτό συμβαίνει λόγω της κατακόρυφης δομής τους, η οποία παρουσιάζει διαφορά φάσης ανάμεσα στο χαμηλό στην επιφάνεια και ψηλότερα, δηλαδή το χαμηλό στην επιφάνεια είναι ανατολικότερα του χαμηλού (της σκάφης) στα 500 hPa και ψηλότερα. Λόγω της διάτμησης του ανέμου, το χαμηλό ψηλότερα παρασύρεται με μεγαλύτερη ταχύτητα από αυτό χαμηλότερα με τις ισοϋψείς του γεωδυναμικού να απομακρύνονται μεταξύ τους, μειώνοντας τις παραγωγούς του που δίνουν το γεωστροφικό άνεμο. Για να διατηρηθεί ο δυναμικός στροβιλισμός πρέπει το πλάτος του γεωδυναμικού να αυξηθεί. Έτσι, αυξάνει η κινητική τους ενέργεια έως ότου η διαφορά φάσης μεταξύ των χαμηλών μηδενιστεί. Καθώς περνάει η σκάφη δυτικά του χαμηλού στην επιφάνεια, οι ισοϋψείς του γεωδυναμικού πλησιάζουν μειώνοντας την ενέργεια. Αυτό οδηγεί σε ταλάντωση της ενέργειας γύρω από τη μεγάλη τιμή που έχει φτάσει τη χρονική στιγμή της μηδενικής διαφοράς φάσης, καθώς για τις αρμονικές διαταραχές που έχουμε υποθέσει η επόμενη σκάφη ψηλά, που βρίσκεται ανατολικότερα από την πρώτη, σχηματίζει πλέον διαφορά φάσης με το χαμηλό στην επιφάνεια επαναλαμβάνοντας ένα μέρος του κύκλου. Σε ό,τι αφορά στο μηχανισμό του Orr, η στρατόσφαιρα βρέθηκε ότι επηρεάζει μόνο τη δομή

των διαταραχών καθ' ύψος. Ενώ στο μοντέλο του Eady έχουμε στην τροπόπαυση τιμές του γεωδυναμικού των διαταραχών συγκρίσιμες με αυτές στην επιφάνεια, σε όλες τις περιπτώσεις στρατοσφαιρικής ροής οι διαταραχές εκτείνονται ψηλότερα σε έως 10 km μέσα στη στρατόσφαιρα.

Αντίστοιχα, στο εύρος των κυματάρθμων στο οποίο έχουμε εκθετική αστάθεια, οι διαταραχές αυξάνουν την ενέργειά τους παροδικά εκμεταλλευόμενες το μηχανισμό του Orr κατά το αρχικό στάδιο εξέλιξής τους και διεγείρουν τις ασταθείς ιδιοκαταστάσεις με μεγάλο πλάτος. Το μέγιστο πλάτος διέγερσης, που είναι το ενεργειακό μέτρο των ιδιοκαταστάσεων που είναι διορθογώνια στις ασταθείς ιδιοκαταστάσεις, βρέθηκε ότι διαφέρει ελαφρά λαμβάνοντας υπόψη τη στρατοσφαιρική ροή. Συγκεκριμένα, για το μοντέλο του Eady βρέθηκε ότι η διαταραχή με το μέγιστο ρυθμό εκθετικής αύξησης μπορεί να διεγερθεί με πλάτος περίπου 3.5, ενώ για τη στρατοσφαιρική ροή με αρνητική διάτμηση το πλάτος φτάνει έως και 4.5. Ωστόσο, για τις περιπτώσεις της θετικής και της μηδενικής διάτμησης η διέγερση έχει μικρότερη τιμή συγκριτικά με το μοντέλο του Eady.

Η παρούσα εργασία είχε σαν σκοπό την κατανόηση της επίδρασης που έχει η στρατοσφαιρική ροή στη βαροκλιτική αστάθεια σε ένα μαθηματικό μοντέλο που διαφέρει από τη ρεαλιστική εικόνα της κατάστασης της ατμόσφαιρας. Για παράδειγμα, θεωρήθηκαν αδιαβατικές διαδικασίες σε ξηρή ατμόσφαιρα, ενώ έγινε η προσέγγιση του  $f$ -επιπέδου χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες αντί των σφαιρικών και αγνοώντας τη μεταβολή της παραμέτρου Coriolis με το γεωγραφικό πλάτος. Μελλοντικές εργασίες μπορούν να στοχεύσουν στον υπολογισμό της επίδρασης της στρατόσφαιρας χρησιμοποιώντας ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο το οποίο θα περιλαμβάνει, για παράδειγμα, υδρατμούς ή θα μπορούσε να λάβει υπόψη τη μεταβολή της παραμέτρου Coriolis με το γεωγραφικό πλάτος μέσω της προσέγγισης του  $\beta$ -επιπέδου ή και να λάβει υπόψη πλήρως τη σφαιρική γεωμετρία της ατμόσφαιρας.



# Παράρτημα Α΄

## Αριθμητικός κώδικας για τη μελέτη της γενικευμένης ευστάθειας

Για να καταφέρουμε να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του τελεστή  $\mathcal{A}$  που περιέχει τη δυναμική του προβλήματος καθώς και να λύσουμε το γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών (2.68), θεωρούμε ένα πλεκτό πλέγμα σημείων στο κατακόρυφο, από το έδαφος μέχρι το ύψος της τροπόπαυσης για το απλό μοντέλο του Eady και μέχρι το ύψος της στρατόσφαιρας για το μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε στην παρούσα εργασία, αποτελούμενο από  $n$  σημεία που απέχουν μεταξύ τους απόσταση  $\delta$ . Στα πλεγματικά σημεία υπολογίζουμε τις τιμές του πλάτους των διαταραχών της ρευματοσυνάρτησης  $\hat{\psi}(z, t)$  και της άνωσης  $\hat{b}(z, t)$  με  $\hat{b} = \partial\hat{\psi}/\partial z$ . Εφόσον το πλέγμα είναι πλεκτό, η ρευματοσυνάρτηση υπολογίζεται στα σημεία  $z_{j/2} = (j - 1/2)\delta$  όπως και η ταχύτητα  $U(z)$  και οι παράγωγοί της και η συχνότητα  $N(z)$  και οι παράγωγοί της. Η άνωση υπολογίζεται στα σημεία  $z_j = j\delta$ . Τη δεύτερη παράγωγο την υπολογίζουμε ως εξής:

$$\left(\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial z^2}\right)_{j/2} = \frac{\hat{\psi}_{(j+1)/2} - 2\hat{\psi}_{j/2} + \hat{\psi}_{(j-1)/2}}{\delta^2}. \quad (\text{A.1})$$

Έπειτα, κατά τον υπολογισμό της δεύτερης παραγώγου στο πρώτο σημείο, εμφανίζεται το φανταστικό σημείο  $z_{-1/2}$  όπου για την απαλοιφή του θα χρησιμοποιήσουμε τη συνοριακή συνθήκη στο έδαφος, βάσει της οποίας ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας είναι ανάλογος της ρευματοσυνάρτησης:

$$\frac{\partial \hat{b}_0}{\partial t} = ik\hat{\psi}_0. \quad (\text{A'.2})$$

Επειδή όμως εμείς γνωρίζουμε τη τιμή της ρευματοσυνάρτησης στα σημεία  $z_{j/2}$ , υπολογίζουμε την τιμή της στα σημεία  $z_j$  ως το μέσο όρο των γειτονικών τους σημείων:

$$\hat{\psi}_j = \frac{\hat{\psi}_{(j+1)/2} + \hat{\psi}_{(j-1)/2}}{2}, \quad (\text{A'.3})$$

άρα

$$\hat{\psi}_0 = \frac{\hat{\psi}_{1/2} + \hat{\psi}_{-1/2}}{2}. \quad (\text{A'.4})$$

Εφόσον η άνωση είναι η παράγωγος της ρευματοσυνάρτησης υπολογίζεται ως εξής:

$$\hat{b}_j = \frac{\hat{\psi}_{(j+1)/2} - \hat{\psi}_{(j-1)/2}}{\delta}, \quad (\text{A'.5})$$

επειδή τα γειτονικά σημεία  $z_{(j\pm 1)/2}$  απέχουν από τα σημεία  $z_j$  απόσταση ίση με  $\delta/2$ . Αντικαθιστώντας στη συνοριακή συνθήκη για το έδαφος και έπειτα από πράξεις καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το να προσθέσουμε χωριστά τις συνοριακές συνθήκες στο πρώτο σημείο και να υπολογίσουμε τη δεύτερη παράγωγο με συνοριακή συνθήκη  $\partial\psi/\partial z = 0$  που δίνει

$$\hat{\psi}_{1/2} = \hat{\psi}_{-1/2}. \quad (\text{A'.6})$$

Άρα ο τελεστής της δεύτερης παραγώγου γίνεται ο  $(n+1) \times (n+1)$  πίνακας:

$$\mathbf{D2} = \frac{1}{\delta^2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A'.7})$$

και ο τελεστής της πρώτης παραγώγου γίνεται ο  $(n + 1) \times (n + 1)$  πίνακας:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2\delta} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 \cdots -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \cdots 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A'.8})$$

ο οποίος δρα πάνω στο  $(n + 1) \times 1$  διάνυσμα  $\psi$  της ρευματοσυνάρτησης. Οι συνοριακές συνθήκες είναι η προσθήκη ενός μηδενικού  $(n + 1) \times (n + 1)$  πίνακα, ο οποίος έχει δύο μη μηδενικά στοιχεία (A'.9), το  $(1, 1)$  και το  $(n + 1, n + 1)$  με τιμές  $ik/\delta$  και  $-ik/\delta$  αντίστοιχα. Έτσι οι συνοριακές συνθήκες είναι ισοδύναμες με την εισαγωγή του πίνακα  $ik\mathbf{O}$ , με :

$$\mathbf{O} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A'.9})$$

Στην περίπτωση της στρατοσφαιρικής ροής, αγνοούμε τη συνοριακή συνθήκη στην τροπόπαυση και το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο του μηδενικού πίνακα είναι το  $(1, 1)$ .

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι συναρτήσεις που περιέχουν τη διαστρωμάτωση  $N(z)$  και την ταχύτητα της μέσης ροής  $U(z)$  γίνονται διαγώνιοι πίνακες με διαγώνιο τα στοιχεία των διανυσμάτων  $\mathbf{U}$  και  $\mathbf{N}$  και ο τελεστής  $\mathcal{A}$  γίνεται ένας  $(n + 1) \times (n + 1)$  πίνακας  $\mathbf{A}$  που δρα επάνω στο διάνυσμα της ρευματοσυνάρτησης  $\psi$ , με αποτέλεσμα η εξίσωση εξέλιξης της ρευματοσυνάρτησης (2.68) να γίνει:

$$\frac{d\psi}{dt} = \mathbf{A}\psi$$

όπου ο πίνακας  $\mathbf{A}$  δίνεται από:

$$\mathbf{A} = ik\mathbf{B}^{-1} \left[ \text{diag} \left( \frac{1}{N^2} \frac{d^2U}{dz^2} \right) - \text{diag} \left( \frac{1}{N^4} \frac{dN^2}{dz} \frac{dU}{dz} \right) - \text{diag}(\mathbf{U})\mathbf{B} + \mathbf{O} \right], \quad (\text{A'.10})$$

με τον πίνακα  $\mathbf{B}$  να είναι:

$$\mathbf{B} = \text{diag} \left( \frac{1}{N^2} \right) \mathbf{D2} - \text{diag} \left( \frac{1}{N^4} \frac{dN^2}{dz} \right) \mathbf{D} - (k^2 + l^2) \mathbf{I}. \quad (\text{A'.11})$$

Σε ότι αφορά την ενέργεια που δίνεται από τη σχέση (2.74), οι τελεστές των παραγώγων και οι όροι της διαστρωμάτωσης υπολογίζονται όπως παραπάνω με αποτέλεσμα η ενέργεια να γράφεται ως  $E = \boldsymbol{\psi}^\dagger \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}$  όπου:

$$\mathbf{M} = -\frac{\delta}{4} \left[ \text{diag} \left( \frac{1}{N^2} \right) \mathbf{D2} - \text{diag} \left( \frac{1}{N^4} \frac{dN^2}{dz} \right) \mathbf{D} - (k^2 + l^2) \mathbf{I} \right], \quad (\text{A'.12})$$

είναι η μετρική της ενέργειας και  $\mathbf{I}$  ο μοναδιαίος πίνακας.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τον κώδικα σε Matlab, τον οποίο γράψαμε για τους αριθμητικούς υπολογισμούς της εργασίας.

```
clear all;
Ss=0;% Ss=1 για 8etikh diatmhsh, Ss=-20 για arnhtikh, Ss=0 για mhdenikh
St=1;% diatmhsh sthn tropofaira
ds=0.02; % για 8etikh kai mhdenikh diatmhsh, ds=-0.02 για arnhtikh
dt=0.01;
L=6;
N=800;
dz=L/(N+1);
z=[dz/2:dz:L-dz/2];

D2=zeros(N+1);%orismos deyterhs paragwgu
for in=2:N
D2(in,in)=-2;
D2(in,in+1)=1;
D2(in,in-1)=1;
```

```
end
D2(1,1)=-1;
D2(1,2)=1;
D2(N+1,N+1)=-1;
D2(N+1,N)=1;
D2=D2/dz2;

dzn2 = 0.01;
N2 = 2.5 + 1.5 * tanh((z' - 1)/dzn2);
F = 1./sqrt(N2);
E = diag(F.2./N2);
O = zeros(N + 1);
I = eye(N + 1);
zt = 1;

%orismostaxythtwn
U = z'; %8etikhdiatmhsh
U = -0.761236 + 1 + z'/2 + 1/2 * (Ss - St) * dt * log(cosh((z' - 1)/dt)/cosh(1/ds)) -
1/2 * ds * Ss * log(cosh((z' - zt)/ds)/cosh(zt/ds)); %mhdenikhdiatmhsh
U = (5.1714 + z'/2 + 1/2 * (Ss - St) * dt * log(cosh((z' - 1)/dt)/cosh(1/ds)) - 1/2 *
ds * Ss * log(cosh((z' - zt)/ds)/cosh(zt/ds)))/20.71; %arnhtikhdiatmhsh

U2 = D2 * U;
U2(1) = U2(2); U2(N + 1) = U2(N);

%orismosprwthsparagwgou
D = zeros(N + 1);
for inn = 2 : N
D(inn, inn - 1) = -1;
```

```

D(inn, inn + 1) = 1;
end
D(1, 1) = -1; D(1, 2) = 1; D(N + 1, N) = -1; D(N + 1, N + 1) = 1;
D = D/(2 * dz);
UU = D * U;
UU(N + 1) = UU(N);
UU(1) = UU(2);

K = linspace(106 - 4, 10, 51);
theta = linspace(0, pi/2, 51);
n2 = diag((1.5/dzn2) * sech((z - 1)/dzn2).^2);

%giaupologismoeKsetikhSastaSeiasmeanalytikokaiupologistikotropo
for ik = 1 : length(K)
for ith = 1 : length(theta)
k = K(ik) * cos(theta(ith));
l = K(ik) * sin(theta(ith));
O(1, 1) = i * k * F(1)2/dz;
B = diag(F.2) * D2 - E * n2 * D - (k2 + l2) * I;
A = inv(B) * (i * k * diag(F.2) * diag(U2) - i * k * E * n2 * diag(UU) - i * k * diag(U) * B + O);
V, S
= eig(A);
Sd = diag(S);
id, im
= sort(-real(Sd));
Sd = Sd(im);
Vd = V(:, im);
y0 = Vd(:, 1);
C(ith, ik) = real(Sd(1));

```

```

end
end
%katakorfesdomes
x = linspace(0, 2 * pi/k, 101);
    X,Z
= meshgrid(x, z);
y1 = diag(y0) * exp(i * k * X);
contourf(X, Z, real(y1)); axis([0 2 * pi/k 0 1.2]);
%giaupologismoG(k,theta)
Topt=1;
for ik=1:length(K)
B=diag(F.^2) * D2 - E * n2 * D - K(ik)^2 * I;
M = -1/4 * B * dz;
M1 = sqrtm(M);
M2 = inv(M1);
invB = inv(B);
for ith = 1 : length(theta)
k = K(ik) * cos(theta(ith));
l = K(ik) * sin(theta(ith));
O(1, 1) = i * k * F(1)^2 / dz;
A = invB * (i * k * diag(F.^2) * diag(U2) - i * k * E * n2 * diag(UU) - i * k * diag(U) * B + O);
DD = M1 * A * M2;
Q = expm(DD * Topt);
S = svd(Q);
G(ith, ik) = S(1)^2;
end
end
%Gt

```

```

Topt = linspace(0, 5, 100);
th = 0;
k = 1.5 * cos(th);
l = 1.5 * sin(th);
O(1,1) = i * k * F(1)^2/dz;
B = diag(F.^2) * D2 - E * n2 * D - (k^2 + l^2) * I;
M = -1/4 * B * dz;
M1 = sqrtm(M);
M2 = inv(M1);
A = inv(B)*(i*k*diag(F.^2)*diag(U2)-i*k*E*n2*diag(UU)-i*k*diag(U)*B+O);
DD = M1 * A * M2;
smax = max(real(eig(A)));
forit = 1 : length(Topt)
Q = expm(DD * Topt(it));
S = svd(Q);
G(it) = S(1)^2;
En(it) = exp(2 * smax * Topt(it));
W(it) = G/En;
R(it) = log(G(it))/(2 * Topt(it));
end

```

```

%giaekselikshdiataraxwn

```

```

Topt = 3;
th = 0;
k = 1.4 * cos(th);
l = 1.4 * sin(th);
O(1,1) = i * k * F(1)^2/dz;
B = diag(F.^2) * D2 - E * n2 * D - (k^2 + l^2) * I;

```



```

M = -1/4 * B * dz;
M1 = sqrtm(M);
M2 = inv(M1);
A = inv(B)*(i*k*diag(F.^2)*diag(U2)-i*k*E*n2*diag(UU)-i*k*diag(U)*B+O);
DD = M1 * A * M2;
for it = 1 : length(Topt)
Q = expm(DD' * Topt(it)) * expm(DD * Topt(it));
    V,W
= eig(Q);
Wd = diag(W);
    n,im
= sort(-real(Wd));
Wd = Wd(im);
Vd = V(:, im);
end
y = M2 * Vd(:, 1);
E0 = real(y' * M * y);
y = y/sqrt(E0);
t = linspace(0, 20, 21);
X = linspace(0, 2 * pi/k, 101);
for it = 1 : length(t)
x5 = expm(A * t(it)) * y;
E(it) = real(x5' * M * x5);
end

```

```

    for itt=1:length(t)
x=expm(A*t(itt))*y;
x1=expm(A*t(itt+1))*y;
x2=expm(A*t(itt+2))*y;

```

```
x3=expm(A*t(itt+3))*y;
for ix=1:length(X)
Y(:,ix)=x*exp(i*k*X(ix));
Y1(:,ix)=x1*exp(i*k*X(ix));
Y2(:,ix)=x2*exp(i*k*X(ix));
Y3(:,ix)=x3*exp(i*k*X(ix));
end;
En(itt)=real(x'*M*x);
subplot(323);
contourf(X,z,real(Y)); axis([0 2*pi/k 0 1.5]);
subplot(324);
contourf(X,z,real(Y1)); axis([0 2*pi/k 0 1.5]);
subplot(325);
contourf(X,z,real(Y2)); axis ([0 2*pi/k 0 1.5]);
subplot(326);
contourf(X,z,real(Y3)); axis([0 2*pi/k 0 1.5]);
%subplot(311);
%plot(t(1:itt),En(1:itt));
drawnow;
pause;
end

% gia dior8ogwnia
Topt=50;
K=linspace(0.6,2.22,51);
theta=linspace(0,pi/2,51);
theta=0;
Y=zeros(length(theta),length(K))+NaN;
```

```

for ik=1:length(K)
for ith=1:length(theta)
k=K(ik)*cos(theta(ith));
l=K(ik)*sin(theta(ith));
B=diag(F.^2) * D2 - E * n2 * D - (k^2 + l^2) * I;
M = -1/4 * B * dz;
M1 = sqrtm(M);
M2 = inv(M1);
O(1,1) = i * k * F(1)^2 / dz;
A = inv(B) * (i * k * diag(F.^2) * diag(U2) - i * k * E * n2 * diag(UU) - i * k * diag(U) * B + O);
DD = M1 * A * M2;
    V,S
= eig(DD);
Sd = diag(S);
    n,im
= sort(-real(Sd));
Sd = Sd(im);
Vd = V(:,im);
P = inv(Vd);
x = P(1,:);
if Sd(1) > 10(-4)
Y(ith,ik) = x' * x;
end
end
end

%giacontours100,500,1000hPa
th = pi/12;
Topt = 3;

```

```

k = 2.5 * cos(th);
l = 2.5 * sin(th);
O(1,1) = i * k * F(1)^2/dz;
B = diag(F.^2) * D2 - E * n2 * D - (k^2 + l^2) * I;
M = -1/4 * B * dz;
M1 = sqrtm(M);
M2 = inv(M1);
A = inv(B)*(i*k*diag(F.^2)*diag(U2)-i*k*E*n2*diag(UU)-i*k*diag(U)*B+O);
DD = M1 * A * M2;
Q = expm(DD' * Topt) * expm(DD * Topt);
    V,W
= eig(DD);
Wd = diag(W);
    id,im
= sort(-real(Wd));
Wd = Wd(im);
Vd = V(:,im);
xx = linspace(0, 2 * pi/k, 101);
yy = linspace(0, 2 * pi/l, 801);
    X,Y
= meshgrid(xx, yy);
ex = exp(i * k * X + i * l * Y);
t = linspace(0, 50, 51);
y1 = M2 * Vd(:, 1);
E0 = y1' * M * y1;
y1 = y1/sqrt(E0);

```

```

[in,inn]=min(abs(z-1/2));
iq,iqq

```

```
=min(abs(z));  
    iw,iww  
=min(abs(z-1));  
    io,ioo  
=min(abs(zq-.1));  
YY2=Vd(iww,1);  
YY1=Vd(iqq,1);  
YY3=Vd(ioo,1);  
YY=Vd(inn,1);  
for it=1:length(t)  
yn=expm(A*t(it))*Vd(:,1);  
  
    y5=real(5*yn(ioo)*ex)-.1*Y;  
subplot(222);  
contourf(xx,yy,y5);  
drawnow;  
  
y2=real(5*yn(inn)*ex)-.5*Y;  
subplot(223);  
contourf(xx,yy,y2);  
drawnow;  
  
y3=real(5*yn(iqq)*ex);  
subplot(221);  
contourf(xx,yy,y3);  
drawnow;  
  
y4=real(5*yn(iww)*ex)-Y;  
subplot(224);
```

```
contourf(xx,yy,y4);
```

```
drawnow;
```

```
pause;
```

```
end
```

# Βιβλιογραφία

- Bjerknes, V., 1898: Über einen hydrodynamischen Fundamentalsatz und seine Anwendung besonders auf die Mechanik der Atmosphäre und des Weltmeeres. *Kongl. Sven. Vetensk. Akad. Handlingar*, **31**, 1-35
- Blumen, W., 1979: On short-wave baroclinic instability. *J. Atmos. Sci.*, **36**, 1925-1933
- Bretherton, F. P., 1966: Critical layer instability in baroclinic flows. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **92**, 325-334
- Charlton, A. J., A. O'Neill, W. Lahoz, and A. Massacand, 2004: Sensitivity of tropospheric forecasts to stratospheric initial conditions. *Quart. J. Meteor. Soc.*, **130**, 1771-1792
- Charney, J. G., 1947: The dynamics of long waves on a baroclinic westerly current. *J. Meteor.*, **4**, 135-163
- Charney, J.G., R. Fjörtoft, and J. Von Neumann, 1950: Numerical integration of the baroclinic vorticity equation. *Tellus*, **2**, 237-254
- Snyder C. and G. J. Hakim, 2004: Cyclogenetic perturbations and analysis errors decomposed into singular vectors. *J. Atmos. Sci.*, **62**, 2234-2247
- Eady, E. T., 1949: Long waves and cyclone waves. *Tellus*, **3**, 33-52
- Farrell, B. F. and P. J. Ioannou, 1996: Generalized stability theory. Part I: Autonomous operators, *J. Atmos. Sci.*, **53**, 2025-2040
- Feldstein, S. B. and I. M. Held, 1989: Barotropic decay of baroclinic waves in a two-layer beta-plane model. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 3416-3430

- Kelvin, Lord, 1867: On vortex atoms. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **6**, 94-105
- Kelvin, Lord, 1871: Hydrokinetic solutions and observations. *Philosophical Magazine*, **42**, 362-377
- Limpavusan, V., D. W. J. Thompson, and D. L. Hartmann, 2004: The life cycle of the Northern Hemisphere sudden stratospheric warmings. *J. Climate*, **17**, 2584-2596
- Lin S-J and R. T. Pierrehumbert, 1988: Does Ekman friction suppress baroclinic instability? *J. Atmos. Sci.*, **45**, 2920-33
- McIntyre, M. E. and T. N. Palmer, 1983: Breaking planetary waves in the stratosphere. *Nature*, **305**, 593-600
- Müller, J. C., 1991: Baroclinic instability in a two-layer, vertically semi-infinite domain. *Tellus*, **43A**, 275-284
- Plumb, R. A., and K. Semeniuk, 2003: Downward migration of extratropical zonal wind anomalies. *J. Geophys. Res.*, **108**, 4223, doi:10.1029/2002JD002773
- Polvani, L. M., and P. J. Kushner, 2002: Tropospheric response to stratospheric perturbations in a relatively simple general circulation model. *Geophys. Res. Lett.*, **29**, 1114, doi:10.1022/2001GL014284
- Schmid, P. J. and D. S. Henningson, 2001: Stability and transition in shear flows. *Appl. Mech. Rev.*, **55**, B75
- Simmons A. I. and B. L. Hoskins, 1976: Baroclinic instability on the sphere: normal modes of the primitive and quasi-geostrophic equations. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 1454-77
- Simmons, A. I. and B. L. Hoskins, 1978: The life cycles of some nonlinear baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 414-32
- Wittman, A. H. M., A. J. Charlton, and L. M. Polvani, 2005: The effect of lower stratospheric shear on baroclinic instability. *J. Atmos. Sci.*, **64**, 479-496