



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΕΩΡΟΛΟΓΙΑΣ



Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Μελέτη της δυναμικής σχηματισμού
αεροχειμάρρων και κυμάτων Rossby από
υπόβαθρο ομογενούς τύρβης σε βαροκλινική
ατμόσφαιρα

Ευάγγελος Στασινός



Επιβλέπων Καθηγητής: Νικόλαος Μπάκας

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2023

Περίληψη

Η ατμοσφαιρική κυκλοφορία χαρακτηρίζεται από αεροχειμάρρους και μακρά κύματα Rossby που διατηρούνται για μεγάλα χρονικά διαστήματα καθώς και από παροδικές δίνες μικρότερης κλίμακας. Πρόσφατες μελέτες έχουν δείξει ότι οι δομές μεγάλης κλίμακας διατηρούνται μέσω της απευθείας αλληλεπίδρασής τους με τις μικρότερες παροδικές δίνες. Έχει γίνει προσπάθεια να μελετηθεί αυτή η οργάνωση καθώς και οι μηχανισμοί που τη διέπουν μέσω απλοποιημένων μοντέλων της δυναμικής της ατμόσφαιρας όπως το οιονεί-γεωστροφικό μοντέλο των δύο στρωμάτων με τις δίνες μικρής κλίμακας να διεγείρονται μέσω στοχαστικής μόχλευσης. Προηγούμενες μελέτες αυτού του μοντέλου έδειξαν ότι χείμαρροι και κύματα Rossby εμφανίζονται απότομα από ένα υπόβαθρο ομογενούς τύρβης όταν η ισχύς της διέγερσης ξεπεράσει ένα κρίσιμο κατώφλι. Δείχθηκε επίσης ότι η εμφάνιση των δομών αυτών είναι αποτέλεσμα της αστάθειας ενός σημείου ισορροπίας της δυναμικής που εξελίσσει τη στατιστική της ροής. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούμε το ίδιο στατιστικό πλαίσιο για να μελετήσουμε την ανάδραση που οδηγεί στην αστάθεια: οι δομές μεγάλης κλίμακας οργανώνουν τις τυρβώδεις δίνες με τέτοιο τρόπο, ώστε οι δίνες με τη σειρά τους να ενισχύουν τις δομές μέσω της ροής ορμής και θερμότητάς τους. Συγκεκριμένα υπολογίστηκαν οι αναδράσεις που προκύπτουν από την οργάνωση των βαροτροπικών και βαροκλινικών δινών και ενισχύουν χωριστά τις βαροτροπικές και βαροκλινικές δομές αντίστοιχα στο κρίσιμο όριο της εμφάνισης των δομών μεγάλης κλίμακας. Προκύπτει ότι ενισχύονται περισσότερο οι βαροτροπικές δομές μεγάλης κλίμακας με τους ζωνικούς χειμάρρους να ενισχύονται περισσότερο για μικρές τιμές του πλανητικού στροβιλισμού και τα κύματα Rossby για μεγάλες τιμές. Η επικράτηση των βαροτροπικών δομών οφείλεται στην αλληλοεξουδετέρωση των μηχανισμών οργάνωσης των βαροτροπικών και βαροκλινικών δινών από τη βαροκλινική μέση ροή, καθώς και στις μικρότερες εν γένει τιμές των αναδράσεων αυτών. Η μόνη εξαίρεση αφορά την περίπτωση ασθενούς διαστρωμάτωσης όπου οι βαροτροπικές και βαροκλινικές δομές ενισχύονται σχεδόν εξίσου.

Abstract

The atmospheric circulation is characterized by zonal jets and large-scale Rossby waves that are maintained for long periods of time and also by smaller-scale transient eddies. Previous studies have found that the large-scale structures are maintained through their direct interaction with the smaller-scale eddies. There has also been an effort to study this organization and the mechanisms that underlie it using simplified models of the atmospheric dynamics such as the quasi-geostrophic two-layer model with the eddies being stochastically excited. Previous studies of this model have shown that jets and Rossby waves emerge spontaneously from a background of homogeneous turbulence when the energy input rate of the excitation surpasses a critical threshold. It has also been shown that the emergence of these structures is due to the instability of a fixed point of the dynamics that govern the evolution of the flow statistics. In the present study the same statistical framework is utilized in order to study the feedback that leads to instability: large-scale structures organize the eddies in a way so that the eddies reinforce them through their momentum and thermal fluxes. Specifically we calculated the feedbacks resulting from the organization of the barotropic and baroclinic eddies that reinforce separately the barotropic and baroclinic structures in the critical threshold of the instability. We found that barotropic large-scale structures are reinforced more, with the most unstable structures being zonal jets for small values of the planetary vorticity gradient and Rossby waves for large values of the gradient. The dominance of the barotropic structures turns out to be due to the mechanisms of the organization of the barotropic and baroclinic eddies from the baroclinic mean flow canceling each other, as well as due to the smaller values of these feedbacks. The only exception is the case of weak stratification, in which the barotropic and baroclinic structures are reinforced almost equally.

Περιεχόμενα

Εξώφυλλο	i
Περίληψη	ii
Abstract	iii
Περιεχόμενα	iv
Ευχαριστίες	vi
Αφιέρωση	vii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Η γενική κυκλοφορία της ατμόσφαιρας	1
1.2 Επίδραση των δινών στη γενική κυκλοφορία	8
1.3 Στατιστική περιγραφή της δράσης των τυρβωδών δινών	10
1.4 Σκοπός της εργασίας	12
2 Βαροκλινική δυναμική	14
2.1 Οιονεί γεωστροφικό σύστημα σε συνεχή ατμόσφαιρα	15
2.2 Το μοντέλο των δύο στρωμάτων	20
3 Σχηματισμός συνεκτικών δομών σε υπόβαθρο ομογενούς τύρβης	26
3.1 Μοντέλα στοχαστικής τύρβης	26
3.2 Εμφάνιση δομών μεγάλης κλίμακας από ομογενές υπόβαθρο τύρβης	29
3.3 Δυναμική S3T	31
4 Χαρακτηριστικά της αστάθειας	38
4.1 Αναδράσεις στο όριο της S3T αστάθειας	38
4.2 Καθορισμός ορίων αστάθειας	40
4.3 Οι αναδράσεις απουσία της βαθμίδας του πλανητικού στροβιλισμού	43
4.4 Αστάθεια για μικρή βαθμίδα πλανητικού στροβιλισμού	47
4.5 Αστάθεια για μεγάλη βαθμίδα πλανητικού στροβιλισμού	54
4.6 Μέγιστες τιμές αναδράσεων	60
5 Συμπεράσματα	63

Α' Εξαγωγή εξισώσεων διασποράς	67
Β' Υπολογιστικός Κώδικας	72
Βιβλιογραφία	76

Ευχαριστίες

Η εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας έγινε στο πλαίσιο του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών (Π.Μ.Σ) “Ατμοσφαιρικές Επιστήμες και Περιβάλλον” του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων με επιβλέποντα τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Νικόλαο Μπάκα. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Μπάκα για την εποικοδομητική συνεργασία και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε κατά τη διάρκεια τόσο των προπτυχιακών όσο και των μεταπτυχιακών μου σπουδών, καθώς επίσης και για τη συνεχή βοήθεια και καθοδήγηση στην εκπόνηση της παρούσας εργασίας με τις πολύτιμες συμβουλές του.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής, τον Καθηγητή κ. Νικόλαο Χατζηαναστασίου και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Χρήστο Λώλη για τη συμβολή τους στη βελτίωση της παρούσας εργασίας και το εκπαιδευτικό τους έργο. Επίσης, ευχαριστώ τον Καθηγητή κ. Αριστείδη Μπαρτζώκα και τον Καθηγητή κ. Παύλο Κασσωμένο για το εκπαιδευτικό τους έργο και τη συνεργασία κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την αμέριστη στήριξή τους σε όλη τη διάρκεια των σπουδών αλλά και της ζωής μου.

Ευάγγελος Στασινός,

Ιωάννινα,

Σεπτέμβριος, 2023

Στην οικογένεια μου.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Η γενική κυκλοφορία της ατμόσφαιρας

Οι μετεωρολογικές συνθήκες έχουν επηρεάσει άμεσα τη ζωή στον πλανήτη μας. Η εξέλιξη του ανθρώπινου πολιτισμού από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα σε ό,τι αφορά στις συνθήκες διαβίωσης και τα ιδιαίτερα κοινωνικά χαρακτηριστικά, πέραν άλλων παραγόντων, είναι συνυφασμένη με τις καιρικές συνθήκες και το κλίμα στην εκάστοτε περιοχή. Η επίδραση του καιρού στον τρόπο ζωής και τις καθημερινές δραστηριότητες αποτέλεσε το έναυσμα για την προσπάθεια περιγραφής των ατμοσφαιρικών διεργασιών καθώς και την πρόβλεψη της εξέλιξής τους. Η ατμόσφαιρα στην οποία λαμβάνουν χώρα πλήθος διεργασιών, παρουσιάζει χαοτική ή τυρβώδη συμπεριφορά, ώστε η στιγμιαία περιγραφή και η πρόβλεψη της εξέλιξης της ατμοσφαιρικής κυκλοφορίας να γίνεται αρκετά περίπλοκη. Παρά την τυρβώδη φύση της ατμόσφαιρας, μεγάλης κλίμακας συνεκτικές δομές με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά διατηρούνται για μεγάλα χρονικά διαστήματα με τις κινήσεις να συνιστούν αυτό που ονομάζουμε γενική κυκλοφορία και να επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό το κλίμα στην επιφάνεια της Γης.

Μια από τις πρώτες προσπάθειες να εξηγηθεί η γενική κυκλοφορία της ατμόσφαιρας έγινε από τον Hadley το 1735, ο οποίος προσπάθησε να εξηγήσει τη μόνιμη ύπαρξη των αλληγών ανέμων με βορειοανατολική διεύθυνση στους τροπικούς και τη δυτική δι-

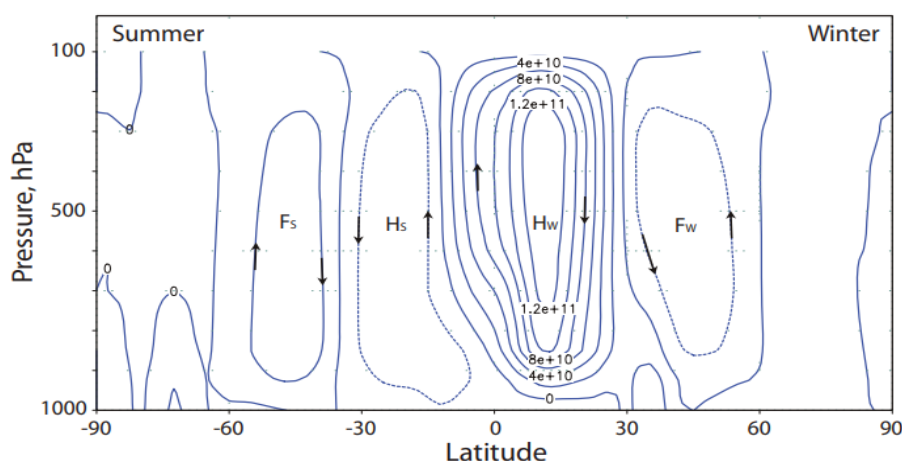
εύθυνση των ανέμων στα μέσα γεωγραφικά πλάτη στους ωκεανούς. Σύμφωνα με τον Lorenz (1967), ο Hadley θεώρησε ότι επειδή η θέρμανση στον Ισημερινό είναι πολύ μεγαλύτερη από τους πόλους δημιουργείται ένα κλειστό κελί μεσημβρινής κυκλοφορίας. Οι αέριες μάζες ανέρχονται στον Ισημερινό λόγω θερμικής αστάθειας και κινούνται προς τους πόλους. Εξαιτίας της μεγάλης ταχύτητας λόγω περιστροφής¹ της επιφάνειας και άρα των αέριων μαζών στον Ισημερινό σε σχέση με τους πόλους, οι αέριες μάζες καθώς κινούνται προς βορράν θα αποκτήσουν μια συνιστώσα προς ανατολές σε μεγαλύτερα γεωγραφικά πλάτη. Όταν κατέλθουν θα κινηθούν πάλι προς τον Ισημερινό ώστε στα μέσα γεωγραφικά πλάτη θα εμφανίζονται ως νοτιοδυτικοί άνεμοι εξασθενημένοι λόγω της τριβής, ενώ στα μικρότερα γεωγραφικά πλάτη γίνονται ανατολικοί εξαιτίας της μεγαλύτερης ταχύτητας περιστροφής της Γης εκεί.

Η θεωρία του Hadley για την ύπαρξη ενός μόνιμου κελιού κυκλοφορίας που μεταφέρει στροφορμή και θερμότητα προς μεγαλύτερα γεωγραφικά πλάτη ανατράπηκε αργότερα, αφού η εικόνα που προέκυψε από παρατηρήσεις είναι ότι οι δυτικοί άνεμοι στα μέσα γεωγραφικά πλάτη έχουν μεσημβρινή συνιστώσα προς βορράν και επομένως οι αέριες μάζες δεν επιστρέφουν στον Ισημερινό. Ο Ferrel (1859) θεώρησε την ύπαρξη δύο ρηχών ξεχωριστών κελιών που δημιουργούνται στην κατώτερη τροπόσφαιρα στα μέσα και μεγάλα γεωγραφικά πλάτη κάτω από το κελί του Hadley ώστε να εξηγήσει αυτές τις παρατηρήσεις. Στα τέλη του 19ου αιώνα νέες παρατηρήσεις σε μέσα γεωγραφικά πλάτη για την κίνηση νεφών σε μεγάλα ύψη, έδειξαν ότι δεν υφίσταται μόνιμη ισχυρή μεσημβρινή κυκλοφορία όπως περιγραφόταν από τις παραπάνω θεωρίες.

Η απόρριψη της ύπαρξης του μεσημβρινού κελιού μεταφοράς στροβιλισμού που εκτείνεται μέχρι την πολική περιοχή, είχε ως αποτέλεσμα το κυρίαρχο ερώτημα από την εποχή του Hadley να παραμένει. Δηλαδή εφόσον στα μικρά γεωγραφικά πλάτη λόγω τριβής μεταφέρεται στροφορμή από την επιφάνεια προς την ατμόσφαιρα, (η φορά των αληγών ανέμων έχει συνιστώσα αντίθετη της περιστροφής της γης) και στα μέσα γεωγραφικά πλάτη από την ατμόσφαιρα προς την επιφάνεια μέσω των δυτικών ανέμων είναι απαραί-

¹Λανθασμένα ο Hadley θεώρησε ότι διατηρείται η ταχύτητα των αέριων μαζών και όχι η στροφορμή.

τητος κάποιος άλλος μηχανισμός μεταφοράς στροφορμής από μικρότερα γεωγραφικά πλάτη ώστε να συντηρούνται οι δυτικοί άνεμοι και να μεταφέρουν τη στροφορμή πίσω στην επιφάνεια. Ο Jeffreys (1926) κατανόησε ότι για να διατηρηθεί η κυκλοφορία στα μέσα γεωγραφικά πλάτη δεν είναι επαρκής η θεώρηση της μεταφοράς στροφορμής από τη μέση μεσημβρινή κυκλοφορία. Πρότεινε ότι η κυκλοφορία διατηρείται από τη μεταφορά στροφορμής από τις παροδικές δίνες. Δηλαδή τα συστήματα συνοπτικής κλίμακας δεν αποτελούν απλώς διαταραχές της μέσης κυκλοφορίας όπως θεωρούνταν ως τότε, αλλά μέρος της δυναμικής που τη διατηρούν. Η ενίσχυση αυτής της θεώρησης επήλθε αργότερα αφού έγινε δυνατή η συστηματική καταγραφή της ατμόσφαιρας σε μεγάλα υψόμετρα με την ανάπτυξη των ραδιοβολίσεων για τη βελτίωση της ναυσιπλοΐας (Lynch, 2006).

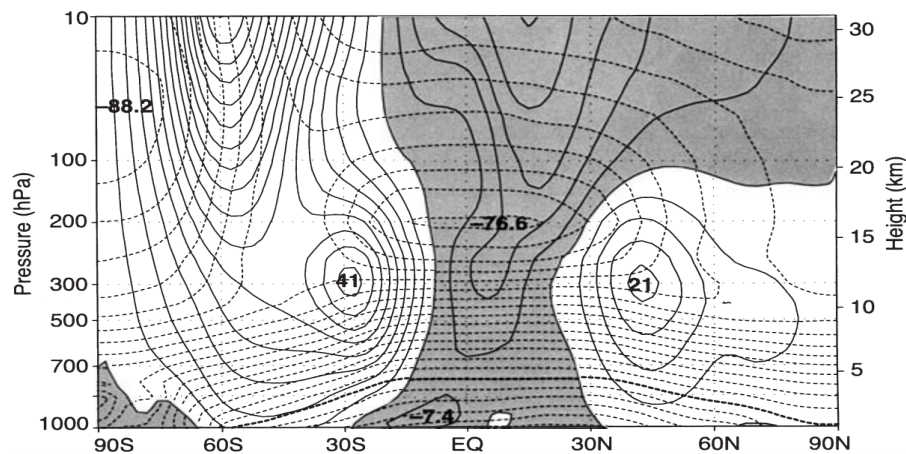


Σχήμα 1.1: Ρευματογραμμές της μεσημβρινής κυκλοφορίας σε kg/sec κατά το χειμώνα του βορείου ημισφαιρίου συναρτήσει του γεωγραφικού πλάτους και ύψους σε συντεταγμένες πίεσης. Σχήμα από τον Vallis (2017).

Οι παρατηρήσεις που προέκυψαν, έδωσαν τη δυνατότητα να δημιουργηθεί η ολοκληρωμένη εικόνα για την τρισδιάστατη δομή της ατμοσφαιρικής κυκλοφορίας στην τροπόσφαιρα. Η μεσημβρινή κυκλοφορία σε κάθε ημισφαίριο χωρίστηκε σε τρεις περιοχές που φαίνονται στο Σχήμα 1.1. Το κελί του Hadley εκτείνεται μέχρι τις υποτροπικές περιοχές και αποτελεί μέρος της απευθείας θερμικής κυκλοφορίας λόγω μεγαλύτερης θέρμανσης στην περιοχή του Ισημερινού. Στα μέσα γεωγραφικά πλάτη δημιουργείται το

θερμικά έμμεσο κελί του Ferrel με ασθενή μεσημβρινή κυκλοφορία αντίθετη από αυτή στο κελί του Hadley. Τέλος υπάρχει το πολικό κελί που περιέχει τις αέριες μάζες πολικής προέλευσης (Vallis, 2017).

Εκτός της θερμικής μεσημβρινής κυκλοφορίας, το ισοζύγιο της ακτινοβολίας στην ατμόσφαιρα που σε πρώτη τάξη ορίζει και τη θερμοκρασιακή δομή της, έχει και άλλες απόρροιες. Στο Σχήμα 1.2 φαίνεται η κλιματολογική κατανομή της ζωνικής συνιστώσας της ταχύτητας και των ισόθερμων συναρτήσεϊ του γεωγραφικού πλάτους και ύψους. Εμφανή είναι τα χαρακτηριστικά των ανέμων στην επιφάνεια που περιγράφονται παραπάνω με τους ανατολικούς αληγείς ανέμους στους τροπικούς και τους δυτικούς ανέμους στα μέσα γεωγραφικά πλάτη. Παρατηρούμε επίσης ότι οι αέριες μάζες σε μικρά γεωγραφικά πλάτη είναι θερμότερες από αυτές σε μεγαλύτερα γεωγραφικά πλάτη. Η μεσημβρινή αυτή θερμοβαθμίδα συνδέεται άμεσα με τη διάτμηση του ανέμου. Ο λόγος είναι ότι για τις κινήσεις μεγάλης κλίμακας ισχύει προσεγγιστικά η γεωστροφική ισορροπία, με την



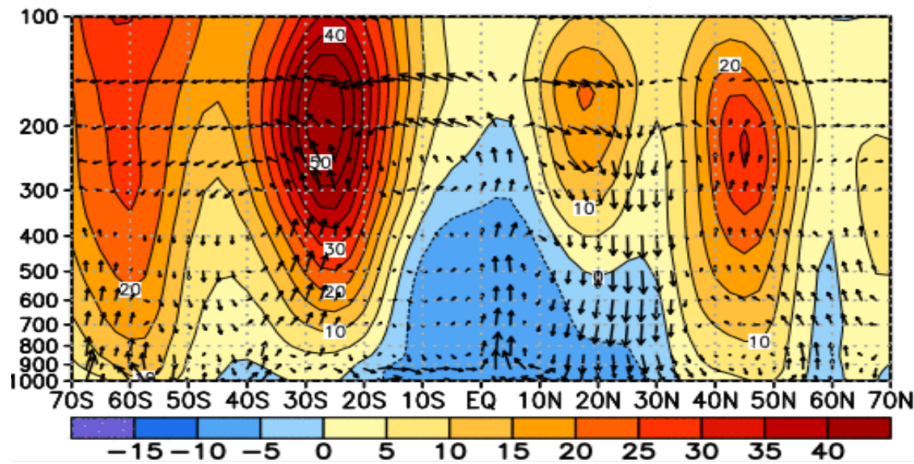
Σχήμα 1.2: Μέση ζωνική ταχύτητα καθ' ύψος (συνεχείς γραμμές) και θερμοκρασία (διακεκομμένες) για τη θερινή περίοδο Ιουνίου-Αυγούστου. Οι ισοταχείς γραμμές απέχουν κατά 5m/s και οι ισόθερμες κατά 5°C, η σκιασμένη περιοχή αντιστοιχεί σε ανατολικούς ανέμους. Σχήμα από τον Holton (2004).

οριζόντια βαροβαθμίδα να εξισορροπεί τη δύναμη Coriolis, και υδροστατική ισορροπία με την κατακόρυφη βαροβαθμίδα να εξισορροπεί τη δύναμη βαρύτητας. Απόρροια αυτών των ισορροπιών είναι ο θερμικός άνεμος με τη μεσημβρινή θερμοβαθμίδα να είναι ανάλο-

γη της διάτμησης του ανέμου και το μέτρο της ζωνικής συνιστώσας να αυξάνεται με το ύψος. Σε μεγαλύτερα ύψη οι ισόθερμες γίνονται οριζόντιες με αποτέλεσμα να μειώνεται το μέτρο του ζωνικού ανέμου. Η ισορροπία αυτή του θερμικού ανέμου είναι ασταθής με αποτέλεσμα στα μέσα γεωγραφικά πλάτη να δημιουργούνται δίνες συνοπτικής κλίμακας. Οι δίνες αυτές μεταφέρουν στροφορμή και θερμότητα σε μεγαλύτερα γεωγραφικά πλάτη μειώνοντας τη μεσημβρινή βαθμίδα της θερμοκρασίας από τον Ισημερινό μέχρι τους πόλους και ενισχύοντας τη ζωνική κυκλοφορία με αποτέλεσμα να συντηρούνται δύο ισχυρά ρεύματα που είναι γνωστά ως αεροχείμαρροι (Holton, 2004).

Οι αεροχείμαρροι βρίσκονται στα σύνορα των κελιών στο Σχήμα 1.1, ακριβώς κάτω από την τροπόπαυση. Έχουν οριζόντια και κατακόρυφη κατανομή λίγων εκατοντάδων χιλιομέτρων και λίγων χιλιομέτρων αντίστοιχα. Αποτελούν μόνιμο χαρακτηριστικό της γενικής κυκλοφορίας, έχουν κυρίως ζωνική συνιστώσα με φορά από δυσμάς προς ανατολές και τα κέντρα τους βρίσκονται ακριβώς κάτω από την τροπόπαυση. Παρουσιάζουν εποχική μεταβλητότητα αφού είναι ισχυρότεροι και μετατοπίζονται σε μικρότερα γεωγραφικά πλάτη το χειμώνα σε κάθε ημισφαίριο. Αντιθέτως το καλοκαίρι είναι ασθενέστεροι και μετατοπισμένοι προς τους πόλους. Οι τυπικές τιμές για την ταχύτητα του ανέμου είναι 145 kmh^{-1} με τις μέγιστες τιμές τον χειμώνα σε κάθε ημισφαίριο να μπορεί να φτάσουν τα 250 kmh^{-1} . Ο υποτροπικός αεροχειμάρρος εντοπίζεται στους ετήσιους χάρτες σε γεωγραφικό πλάτος περίπου 30° και σε ύψη $10 - 16 \text{ km}$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3. Ο πολικός αεροχειμάρρος βρίσκεται σε ύψη $9 - 12 \text{ km}$ και το γεωγραφικό πλάτος που βρίσκεται μεταβάλλεται ($40^\circ - 60^\circ$) ανάλογα με την εποχή. Επίσης παρουσιάζει μικρότερη ζωνική συμμετρία σε σχέση με τον υποτροπικό, αφού σε αρκετές περιπτώσεις όπως θα δούμε παρακάτω, περιέχει μια αργά μεταβαλλόμενη κυματική δομή με μεσημβρινή συνιστώσα. Εξαιτίας αυτών των χαρακτηριστικών ο πολικός αεροχειμάρρος δεν είναι εμφανής σε ετήσιους ή κλιματολογικούς χάρτες μέσης ζωνικής κυκλοφορίας.

Οι δύο αεροχειμαρροι έχουν διαφορετικούς μηχανισμούς συντήρησης. Επειδή στο κελί του Hadley η βαθμίδα του πλανητικού στροβιλισμού είναι ασθενής, ακόμη και μικρές οριζόντιες θερμοβαθμίδες μπορούν να δημιουργήσουν κλειστή μεσημβρινή κυκλοφορία. Η

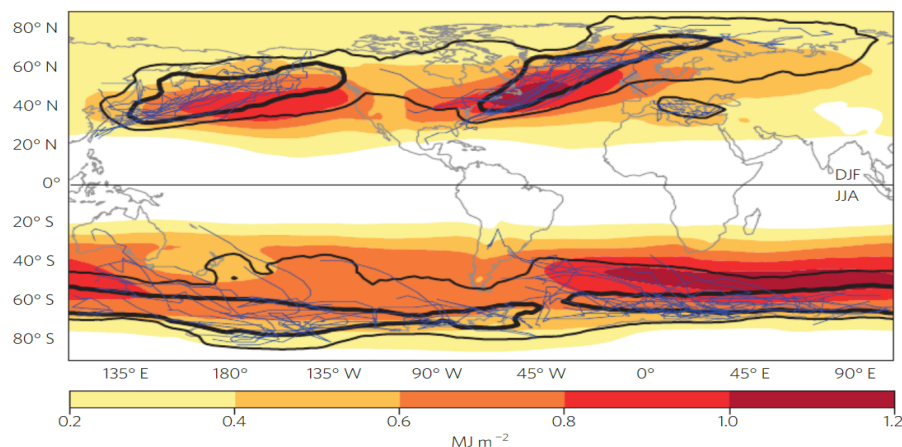


Σχήμα 1.3: Κατακόρυφη κατανομή της μέσης ζωνικής ταχύτητας (χρωματικές αποχρώσεις) συναρτήσει της πίεσης σε hPa και του γεωγραφικού πλάτους για τον Ιούνιο του 2023 ανάμεσα στους μεσημβρινούς $130^{\circ}W - 180^{\circ}W$ (Ανατολικός Ειρηνικός Ωκεανός). Τα βέλη αντιστοιχούν στη μεσημβρινή και κατακόρυφη (σε συν/νες πίεσης) απόκλιση της ταχύτητας. Εικόνα από το climate prediction center.

εξήγηση της ύπαρξης του υποτροπικού χειμάρρου στο βορειότερο άκρο του κελιού μπορεί να γίνει με βάση τη διατήρηση της στροφορμής μέσα στο κελί (Schneider and Lindzen, 1977; Held and Hou, 1980). Ο πολικός χείμαρρος ωστόσο δε διατηρείται από τη μέση μεσημβρινή κυκλοφορία όπως ο υποτροπικός, αλλά από τις παροδικές δίνες.

Η θέση και η ένταση των αεροχειμάρρων επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό το κλίμα και τις καιρικές συνθήκες στην επιφάνεια. Τα μέσα γεωγραφικά πλάτη επηρεάζονται από παροδικές δίνες με χρόνο ζωής μιας εβδομάδας περίπου που ονομάζουμε κινήσεις συνοπτικής κλίμακας. Οι αεροχείμαρροι επηρεάζουν την τροχιά κίνησης των συνοπτικών συστημάτων και συγκεκριμένα φαίνεται να τις καθοδηγούν. Στο Σχήμα 1.4 παρουσιάζεται η κλιματολογική εικόνα που προκύπτει για τις περιοχές που εμφανίζονται να εξελίσσονται τα συνοπτικά συστήματα που ονομάζονται λεωφόροι διέλευσης των συνοπτικών συστημάτων (Shaw et al., 2016).

Ο πολικός αεροχείμαρρος συνοδεύεται από μια ισχυρή μετωπική ζώνη σε μικρότερα ύψη με μεγάλη οριζόντια θερμοβαθμίδα που ονομάζουμε πολικό μέτωπο. Η περιοχή αυτή απομονώνει τις ψυχρές μάζες πολικής προέλευσης από τις θερμότερες μάζες των



Σχήμα 1.4: Τροχιές συνοπτικών συστημάτων για του χειμερινούς μήνες στο εκάστοτε ημισφαίριο (Δεκέμβριος-Φεβρουάριος για το Βόρειο και Ιούνιος-Αύγουστος για το Νότιο). Ο μέσος όρος ως προς το ύψος και ως προς το χρόνο (μέσω φίλτρου 10 ημερών) της κινητικής ενέργειας των δινών από τα δεδομένα ERA-Interim reanalysis. Οι μαύρες ισοϋψείς δείχνουν την πυκνότητα των τροχιών. Οι μπλε καμπύλες δείχνουν τις τροχιές των πιο έντονων συστημάτων. Εικόνα από τους (Shaw et al. 2016).

μέσων γεωγραφικών πλατών. Κατά τη διάρκεια του χειμώνα όταν ο αεροχειμάρρος βρίσκεται σε μεγαλύτερα γεωγραφικά πλάτη στη βόρεια Ευρώπη επικρατεί ήπιος και υγρός χειμώνας. Αντιθέτως όταν ο άξονας του μετατοπίζεται νοτιότερα, στη βόρεια Ευρώπη επικρατούν συνθήκες ψυχρές και ξηρές και στην περιοχή της Μεσογείου υγρές συνθήκες. Έτσι, μετατοπίσεις του χειμάρρου σε μικρότερα και μεγαλύτερα γεωγραφικά πλάτη έχουν συνδεθεί με παρατεταμένους ψυχρούς χειμώνες και θερμά καλοκαίρια στη βόρεια Ευρώπη αντίστοιχα (Cattiaux et al., 2010; Drouard et al., 2019).

Εκτός από τους αεροχειμάρρους, σημαντικό ρόλο στη γενική κυκλοφορία διαδραματίζουν κύματα μεγάλης κλίμακας. Τα κύματα αυτά που είναι γνωστά ως κύματα Rossby, είναι είτε παροδικά είτε στάσιμα. Τα παροδικά κύματα δημιουργούνται κυρίως λόγω της βαροκλινικής αστάθειας του αεροχειμάρρου, ενώ τα στάσιμα δημιουργούνται από την ανομοιογένεια του εδάφους εξαιτίας της διαφορετικής τοπογραφίας και τις αντιθέσεις ξηράς-θάλασσας (Holton, 2004). Η δυναμική των κυμάτων Rossby οφείλεται στη διατήρηση του δυνητικού στροβιλισμού των αερίων μαζών με τη φασική ταχύτητά τους να

εξαρτάται από το μήκος κύματός τους, καθώς και από την ταχύτητα του αεροχειμάρρου. Συγκεκριμένα, τα κύματα υπερτίθενται του πολικού χειμάρρου προσδίδοντας του κυματική δομή η οποία κινείται προς ανατολάς με μικρότερη φασική ταχύτητα από την ταχύτητα του αεροχειμάρρου. Η κυματική δομή, δημιουργεί σκάφες και αυλώνες κατά μήκος του άξονα του αεροχειμάρρου οι οποίες είναι απαραίτητες για την ενίσχυση των συνοπτικών διαταραχών στην επιφάνεια του πολικού μετώπου.

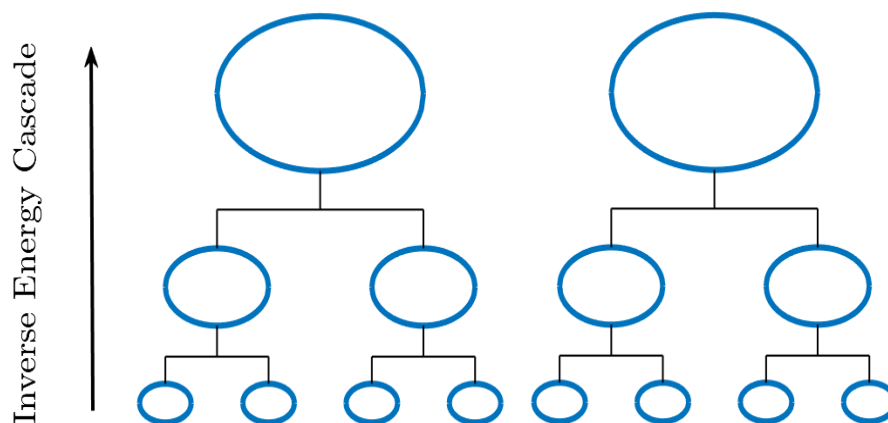
Όταν η μεσημβρινή συνιστώσα των κυμάτων εκτείνεται σε μεγάλο εύρος η εκτροπή του χειμάρρου είναι μεγάλη ώστε το χειμώνα να μεταφέρονται ψυχρές αέριες μάζες από μεγαλύτερα σε μικρότερα γεωγραφικά πλάτη δημιουργώντας ισχυρή ζωνική θερμοβαθμίδα που είναι παράγοντας δημιουργίας χιονοθύελλων. Αντίστοιχα τους θερινούς μήνες η κυματική δομή του αεροχειμάρρου επιτρέπει σε θερμές αέριες μάζες από μικρά γεωγραφικά πλάτη να εισέλθουν σε μεγαλύτερα γεωγραφικά πλάτη αυξάνοντας τη θερμοκρασία στις περιοχές αυτές.

Εάν τα στάσιμα κύματα φτάσουν σε μεγάλο πλάτος μέσω μηχανισμών που θα συζητηθούν στην επόμενη Ενότητα, τότε μπορούν να σχηματίσουν συστήματα εμποδισμού στην ατμοσφαιρική ροή. Τα συστήματα αυτά έχουν διάρκεια ζωής έως και μερικές εβδομάδες και συνδέονται με ακραία καιρικά φαινόμενα όπως η επικράτηση ασυνήθιστα υψηλών θερμοκρασιών ή η επικράτηση συνθηκών ψύχους (Stendel et al., 2021).

1.2 Επίδραση των δινών στη γενική κυκλοφορία

Οι δομές μεγάλης κλίμακας στην ατμόσφαιρα όπως ο πολικός αεροχειμάρρος και τα μακρά κύματα Rossby συντηρούνται από ακανόνιστες δίνες μικρής κλίμακας μέσω μεταφοράς ορμής και θερμότητας. Αυτό αποκαλείται στη βιβλιογραφία ως φαινόμενο αρνητικού ιξώδους (Starr, 1968). Για τη μελέτη της ενίσχυσης δομών μεγαλύτερης κλίμακας από δίνες μικρότερης κλίμακας έχουν χρησιμοποιηθεί απλοποιημένα μοντέλα της γενικής κυκλοφορίας όπως το βαροτροπικό μοντέλο, στο οποίο οι οριζόντιες κινήσεις θεωρούνται ίδιες καθ' ύψος, το μοντέλο αβαθών υδάτων ή απλοποιημένα μοντέλα της βα-

ροκλινικής δυναμικής όπως αυτό που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία. Ο Fjortoft (1953) χρησιμοποιώντας βαροτροπική δυναμική σε ένα αδρανειακό επίπεδο χωρίς περιστροφή, απέδειξε ότι σε ένα ομογενές τυρβώδες πεδίο γίνεται μεταφορά ενέργειας από δομές μικρής κλίμακας σε δομές μεγαλύτερης κλίμακας. Η αρχική ιδέα για τη μεταφορά ήταν πως δίνες όμοιας κλίμακας ενώνονται και σχηματίζουν δίνες μεγαλύτερης κλίμακας με την διαδικασία να συνεχίζεται και σε μεγαλύτερες κλίμακες, ώστε να δημιουργηθούν σταδιακά οι δομές μεγάλης κλίμακας όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.5. Η μετακύλιση της ενέργειας είναι ισοτροπική, δηλαδή ίδια σε όλες τις διευθύνσεις και τοπική στο χώρο των κυματάριων, δηλαδή μόνο δομές παρόμοιας κλίμακας αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Το φαινόμενο είναι ακριβώς αντίθετο από αυτό που περιέγραψε ο Richardson (1922) για τη μεταφορά της ενέργειας στις μικρές κλίμακες όπου οι μικρές δίνες δίνουν ενέργεια σε ακόμη μικρότερες με τη μετακύλιση της ενέργειας να συνεχίζεται ώστε σε πολύ μικρές κλίμακες η ενέργεια να διαχέεται με τη μορφή θερμότητας.



Σχήμα 1.5: Ποιοτική παρουσίαση της ισοτροπικής ανάδρομης κύλισης ενέργειας (Inverse Energy Cascade), όπου δίνες όμοιας κλίμακας ενώνονται σχηματίζοντας μεγαλύτερες δίνες.

Ο Rhines (1975) επέκτεινε την ανάλυση του Fjortoft συμπεριλαμβάνοντας την επίδραση της διαφορικής περιστροφής της Γης και έδειξε ότι η ισοτροπικότητα της ανάδρομης κύλισης σταματά σε μεγάλες κλίμακες όπου κυριαρχεί η δυναμική των κυμάτων

Rossby. Η μεταφορά γίνεται έπειτα ανισοτροπική έχοντας ως προτιμητέα τη ζωνική διεύθυνση με αποτέλεσμα την ενίσχυση των ζωνικών χειμάρρων (Vallis and Maltrud, 1993).

Ωστόσο, παρατηρήσεις του πολικού χειμάρρου (Shepherd 1987) καθώς και αριθμητικές προσομοιώσεις (Nozada and Yoden, 1997; Huang and Robinson, 1998; Galperin et al., 2001; Berloff et al., 2009 a, b), έδειξαν ότι οι μεγάλης κλίμακας χειμάρροι δε διατηρούνται από αλληλεπιδράσεις μεταξύ δινών όμοιας κλίμακας αλλά από την απευθείας αλληλεπίδραση των δινών με κλίμακα μικρότερη από την κλίμακα του Rhines με τις δομές μεγάλης κλίμακας. Επίσης, πρόσφατες μελέτες με βαροτροπική δυναμική (Srinivasan and Young, 2012; Bakas and Ioannou 2013) έδειξαν ότι συνεκτικές δομές μεγάλης κλίμακας δημιουργούνται απότομα μέσα από ένα ομογενές τυρβώδες πεδίο δινών μικρής κλίμακας όταν το πλάτος των δινών ξεπεράσει ένα κατώφλι. Αυτός ο αυθόρμητος σχηματισμός συνεκτικών δομών δε μπορεί να εξηγηθεί από την ανάδρομη μετακύλιση ενέργειας.

1.3 Στατιστική περιγραφή της δράσης των τυρβωδών δινών

Καθώς οι δίνες μικρής κλίμακας είναι τυρβώδεις, η αλληλεπίδρασή τους με τις δομές μεγάλης κλίμακας μπορεί να ειδωθεί μόνο στατιστικά. Η πρώτη προσπάθεια στατιστικής περιγραφής αυτού του είδους των αλληλεπιδράσεων έγινε στα τέλη του 19ου αιώνα από τον Reynolds, ο οποίος χώρισε τα μεγέθη της ροής σε μια μέση χρονικά κατάσταση και σε αποχές από αυτή:

$$M = \overline{M} + M',$$

όπου με \overline{M} συμβολίζεται η μέση τιμή και με M' η αποχή. Η μέση τιμή περιγράφει τα δυναμικά μεγέθη για τις συνεκτικές δομές της ροής όπως είναι οι αεροχείμαρροι και τα μακρά κύματα Rossby και αντίστοιχα οι αποχές περιγράφουν τις ακανόνιστες δίνες.

Αντικαθιστώντας το χωρισμό στις εξισώσεις εξέλιξης των μετεωρολογικών μεταβλητών και υπολογίζοντας το μέσο όρο τους παίρνουμε την εξίσωση για την εξέλιξη της μέσης κατάστασης (η πρώτη στατιστική ροπή) η οποία έχει ποιοτικά τη μορφή:

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial t} = f(\overline{M}, C_2), \quad (1.1)$$

όπου ο όρος στο δεξί μέλος εξαρτάται από τη μέση ροή και τη ροή ορμής και θερμότητας των δινών που είναι συνάρτηση της συνδιακύμανσης των αποχών C_2 (η δεύτερη στατιστική ροπή). Για την εύρεση αυτών των ροών υπολογίζουμε από την εξίσωση εξέλιξης των αποχών, την εξίσωση εξέλιξης της συνδιακύμανσης που σχηματικά είναι:

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} = g(\overline{M}, C_2, C_3). \quad (1.2)$$

Παρατηρούμε ότι η εξέλιξη των συνδιακυμάνσεων εξαρτάται από τη μέση ροή, δηλαδή υπάρχει ένας άμεσος μηχανισμός αλληλεπίδρασης των δινών με τη μέση ροή, εξαρτάται όμως και από τη συνάρτηση τριπλής κύμανσης C_3 που είναι η τρίτη στατιστική ροπή. Αυτή, αναπαριστά τις μη γραμμικές αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στις δίνες που δημιουργούν την ανάστροφη κύλιση ενέργειας που περιγράφηκε παραπάνω. Το σύστημα των εξισώσεων δεν κλείνει ούτε σε παραπάνω τάξη, καθώς υπάρχει πάντα η παρουσία στατιστικών ροπών ανώτερης τάξης στις εξισώσεις εξέλιξης των ροπών μικρότερης τάξης, δηλαδή προκύπτουν περισσότερες άγνωστες ποσότητες από τις διαθέσιμες εξισώσεις.

Γίνεται έτσι αναγκαία η χρήση προσέγγισης για τους όρους των στατιστικών ροπών μεγαλύτερης τάξης με στόχο το σύστημα να κλείσει και ταυτόχρονα να αναπαρίσταται η συνεισφορά των δινών στη μέση ροή με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Οι Farrell and Ioannou (2003), πρότειναν μια τέτοια προσέγγιση κατασκευάζοντας τη Στοχαστική Θεωρία Δομικής Ευστάθειας (Stochastic Structural Stability Theory) ή S3T για συντομία για τη μελέτη της δυναμικής της στατιστικής. Υπό το στατιστικό πλαίσιο S3T, οι μη γραμμικές αλληλεπιδράσεις των δινών που αναπαρίστανται από τη στατιστική ροπή τρίτης τάξης είτε αγνοούνται, είτε παραμετροποιούνται με έναν όρο στοχαστικής διέγερσης των δινών μικρής κλίμακας και έναν όρο απόσβεσης, με αποτέλεσμα το

σύστημα να κλείνει σε δεύτερη τάξη. Επομένως, υπό αυτή την προσέγγιση, αγνοείται ο μηχανισμός της ανάστροφης κύλισης της ενέργειας, που όπως είδαμε στην προηγούμενη Ενότητα δεν είναι ουσιώδης στη συντήρηση των δομών μεγάλης κλίμακας, ενώ διατηρούνται αναλυτικά οι όροι που περιγράφουν την απευθείας αλληλεπίδραση των δινών μικρής κλίμακας με τις δομές μεγάλης κλίμακας.

Τα σημεία ισορροπίας της δυναμικής S3T περιγράφουν την κλιματολογία των δομών μεγάλης κλίμακας (αεροχειμάρροι και μακρά κύματα Rossby) και την κλιματολογία για τη συνδιακύμανση των τυρβωδών δινών. Αν τα σημεία ισορροπίας είναι ευσταθή, τότε η κλιματική κατάσταση που αυτά περιγράφουν αναμένουμε να διατηρηθεί για μεγάλο χρονικό διάστημα. Αντίθετα, αν τα σημεία ισορροπίας είναι ασταθή, τότε αναμένουμε την απότομη μετάβαση σε μια καινούργια κλιματική κατάσταση. Μελέτες έδειξαν ότι η απότομη εμφάνιση των αεροχειμάρρων σε βαροτροπική δυναμική (Farrell and Ioannou, 2008; Srinivasan and Young, 2012) και των κυμάτων Rossby (Bakas and Ioannou, 2013) οφείλεται σε αστάθεια της δυναμικής του συστήματος S3T. Συγκεκριμένα, υπάρχει σημείο ισορροπίας χωρίς ροή και με ομογενή τύρβη. Πάνω από ένα κατώφλι για την ένταση της τύρβης, η ισορροπία γίνεται ασταθής με αποτέλεσμα την απότομη εμφάνιση των δομών μεγάλης κλίμακας που συντηρούνται σε μεγάλο πλάτος από τη συλλογική δράση των τυρβωδών δινών. Άλλες μελέτες έδειξαν ότι η αστάθεια στην περίπτωση εμφάνισης των αεροχειμάρρων (Bakas and Ioannou, 2013) και των κυμάτων Rossby (Bakas et al., 2015) οφείλεται σε θετική ανάδραση μεταξύ των δομών μεγάλης κλίμακας και των τυρβωδών δινών: οι δομές μεγάλης κλίμακας οργανώνουν τις δίνες με τέτοιο τρόπο, ώστε εκείνες να τις ενισχύουν μέσω της ροής ορμής τους.

1.4 Σκοπός της εργασίας

Η μελέτη της αυτο-οργάνωσης της τύρβης σε δομές μεγάλης κλίμακας επεκτάθηκε και στην περίπτωση της βαροκλινικής ατμόσφαιρας στο απλοποιημένο μοντέλο των δύο στρωμάτων (Bakas and Ioannou, 2019). Δείχθηκε ότι δομές μεγάλης κλίμακας εμφα-

νίζονται και σε αυτή την περίπτωση από ομογενές υπόβαθρο τύρβης ως αποτέλεσμα της αστάθειας του δυναμικού συστήματος της στατιστικής της ροής. Βρέθηκε, σε αντιστοιχία με το βαροτροπικό μοντέλο, ότι οι ζωνικοί χείμαρροι είναι οι πιο ασταθείς δομές σε μικρές τιμές της βαθμίδας πλανητικού στροβιλισμού, ενώ τα κύματα Rossby είναι οι πιο ασταθείς δομές σε μεγάλες τιμές της βαθμίδας. Επίσης, το βαροτροπικό μέρος των αναδυόμενων δομών ενισχύεται περισσότερο από το βαροκλινικό, με αποτέλεσμα οι δομές που αναμένεται να κυριαρχήσουν στα δύο στρώματα να είναι βαροτροπικές.

Στην παρούσα εργασία επεκτείνουμε την ανάλυση των Bakas and Ioannou, (2019) και μελετούμε αναλυτικά τη θετική ανάδραση που οδηγεί στην απότομη εμφάνιση των συνεκτικών δομών στο μοντέλο των δύο στρωμάτων. Συγκεκριμένα, μελετούμε στο όριο της εμφάνισης των δομών τις ροές στροβιλισμού και θερμότητας των βαροτροπικών και βαροκλινικών δινών που οδηγούν στην αστάθεια. Ο στόχος είναι η βαθύτερη κατανόηση των ροών αυτών για να γίνει εφικτή η κατανόηση των χαρακτηριστικών των εμφανιζόμενων δομών μεγάλης κλίμακας που αναφέρθηκαν παραπάνω. Έτσι, υπολογίζουμε τις ροές στροβιλισμού και θερμότητας για ένα μεγάλο εύρος των τιμών της διαστρωμάτωσης και της βαθμίδας του πλανητικού στροβιλισμού και ποσοτικοποιούμε τη συνεισφορά των βαροτροπικών και βαροκλινικών δινών αντίστοιχα στις ροές αυτές.

Η διάρθρωση της εργασίας είναι η εξής. Στο Κεφάλαιο 2 παραθέτουμε τις ανελαστικές εξισώσεις κίνησης, θερμοδυναμικής και διατήρησης της μάζας. Έπειτα προσαρμόζουμε τις εξισώσεις στις παραδοχές της οιονεί-γεωστροφίας και εξάγουμε τη δυναμική του μοντέλου δύο στρωμάτων για τη βαροκλινική ατμόσφαιρα. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε την απότομη εμφάνιση δομών μεγάλης κλίμακας μέσω της ομογενούς διέγερσης δινών στο μοντέλο δύο στρωμάτων. Έπειτα παραθέτουμε τη δυναμική της στατιστικής με κλείσιμο δεύτερης τάξης (S3T) καθώς και τις εξισώσεις που διέπουν την αστάθεια που οδηγεί στην εμφάνιση των δομών. Στο Κεφάλαιο 4 μελετούμε τους όρους της ανάδρασης και τα χωρικά χαρακτηριστικά των αναδυόμενων δομών που ενισχύονται από τις αναδράσεις και τέλος στο Κεφάλαιο 5 παραθέτουμε τα συμπεράσματα της εργασίας.

Κεφάλαιο 2

Βαροκλινική δυναμική

Η μεγάλης κλίμακας ατμοσφαιρική κυκλοφορία σε μέσα γεωγραφικά πλάτη έχει την τάση να είναι σχεδόν γεωστροφική με την ατμόσφαιρα να είναι σχεδόν σε υδροστατική ισορροπία. Ο Charney, (1948) εξήγαγε το οιονεί-γεωστροφικό σύστημα εξισώσεων για να περιγράψει αυτή την κατάσταση, αποκόπτοντας μηχανισμούς που δεν επηρεάζουν την κυκλοφορία σε συνοπτική κλίμακα με τη μέθοδο της διαστατικής ανάλυσης. Σε αυτή την περίπτωση ο σχετικός στροβιλισμός είναι πολύ μικρός σε σχέση με τον πλανητικό στροβιλισμό, ενώ η μεταβολή τους είναι ίδιας τάξης μεγέθους και εξαρτάται από τη απόκλιση της αγεωστροφικής συνιστώσας του ανέμου. Η προσέγγιση της οιονεί-γεωστροφίας απλοποιεί αρκετά την αρχική μορφή των εξισώσεων κίνησης ώστε η δυναμική που προκύπτει, περιγράφεται από μία εξίσωση που διέπει την εξέλιξη του δυνητικού στροβιλισμού των κινήσεων μεγάλης κλίμακας. Στην Ενότητα 2.1 θα παρουσιαστούν οι ανελαστικές εξισώσεις κίνησης και το οιονεί-γεωστροφικό σύστημα και στην Ενότητα 2.2 η απλοποίηση του συστήματος με το μοντέλο δύο στρωμάτων.

2.1 Οιονεί γεωστροφικό σύστημα σε συνεχή ατμόσφαιρα

Οι εξισώσεις που διέπουν την κυκλοφορία της ατμόσφαιρας στη γενικότητα τους περιέχουν διαφορετικά είδη κινήσεων σε μεγάλο εύρος διαφορετικών κλιμάκων. Ωστόσο, επειδή κάποιες κινήσεις που προκύπτουν ως λύσεις των εξισώσεων δεν επηρεάζουν τις μετεωρολογικές διεργασίες που συμβαίνουν σε συνοπτική κλίμακα, μπορούν να αποκοπούν. Η αποκοπή των κινήσεων αυτών έχει διπλή σημασία. Απλοποιεί την επίλυση των εξισώσεων και ταυτόχρονα φιλτράρει μη επιθυμητές κινήσεις από τις εξισώσεις όπως τα ακουστικά κύματα και τα βαρυτικά κύματα (Holton, 2004). Οι εξισώσεις που επηρεάζουν τις κινήσεις συνοπτικής κλίμακας, σύμφωνα με τον Vallis (2017) αποτελούνται από το σύστημα ανελαστικών εξισώσεων το οποίο περιγράφει τις κινήσεις και τις μικρές αδιαβατικές μεταβολές της πίεσης δP , της δυνητικής θερμοκρασίας $\delta\theta$ και τις πυκνότητας $\delta\rho$ σε σχέση με μια κλιματολογική κατάσταση που περιγράφεται από τις συναρτήσεις $\theta_0(z)$, $p_0(z)$ και $\rho_0(z)$ οι οποίες θεωρούνται γνωστές. Οι ανελαστικές εξισώσεις είναι κατά σειρά οι εξισώσεις κίνησης στο οριζόντιο επίπεδο, η εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας στο κατακόρυφο, η εξίσωση συνέχειας και ο δεύτερος θερμοδυναμικός νόμος για αδιαβατικές μεταβολές:

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad (2.1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = b, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{V}) = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{Db}{Dt} = -wN^2, \quad (2.5)$$

όπου $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla$ είναι η ολική παράγωγος, $\mathbf{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$ είναι το διάνυσμα της ταχύτητας του ανέμου, $\nabla = \hat{i}\partial_x + \hat{j}\partial_y + \hat{k}\partial_z$ είναι ο διανυσματικός διαφορικός τελεστής ανάδελα, $f = 2\Omega \sin \phi$ είναι η παράμετρος Coriolis, όπου Ω η γωνιακή

ταχύτητα περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της και ϕ το γεωγραφικό πλάτος. Η δύναμη της βαροβαθμίδας εκφράζεται μέσω του γεωδυναμικού $\Phi = \delta p / \rho_0$, ενώ η δύναμη της άνωσης από τη $b = g \delta \theta / \theta_0$. Η επίδραση της κλιματολογικής κατακόρυφης διαστρωμάτωσης στη δυναμική, λαμβάνεται υπόψιν μέσω της εξίσωσης συνέχειας (2.4) και της εξίσωσης θερμοδυναμικής (2.5) όπου εμφανίζονται οι κατακόρυφες μεταβολές της πυκνότητας ρ_0 και δυνητικής θερμοκρασίας θ_0 για τη μέση κλιματική κατάσταση της ατμόσφαιρας και εφράζονται από το τετράγωνο της συχνότητας Brunt-Vaissala N^2 .

Καθώς οι αέριες μάζες κινούνται στη μεσημβρινή διεύθυνση, αλλάζει ο πλανητικός στροβιλισμός f εξαιτίας της σφαιρικότητας της γης. Για να συμπεριλάβουμε αυτή την αλλαγή στη δυναμική, κάνουμε την προσέγγιση του β -επιπέδου. Δηλαδή θεωρούμε ότι οι αέριες μάζες κινούνται σε ένα οριζόντιο επίπεδο με την παράμετρο Coriolis στο κέντρο του επιπέδου να είναι $f_0 = 2\Omega \sin \phi_0$ και η αλλαγή του γεωγραφικού πλάτους στο επίπεδο είναι μικρή $\delta\phi \ll 1$. Αναπτύσσοντας κατά Taylor την παράμετρο Coriolis γύρω από το κέντρο του επιπέδου παίρνουμε:

$$f(\phi_0 + \delta\phi) = f_0 + 2\Omega \cos \phi_0 \delta\phi + \mathcal{O}((\delta\phi)^2) + \dots \quad (2.6)$$

Επειδή $\delta\phi \ll 1$, προσεγγιστικά ισχύει $\delta\phi \simeq y/\alpha$, όπου α η ακτίνα της γης και y η μετατόπιση από το κέντρο του επιπέδου. Ορίζουμε τη βαθμίδα του πλανητικού στροβιλισμού $\beta = 2\Omega \cos \phi_0 / \alpha$ και έτσι η παράμετρος Coriolis γράφεται ως το άθροισμα $f = f_0 + \beta y$.

Για την εξαγωγή της δυναμικής της οιονεί-γεωστροφίας, αδιαστατοποιούμε τα μεγέθη και τις συναρτήσεις. Κάθε συνάρτηση δηλαδή γράφεται ως ένα γινόμενο της τάξης μεγέθους της (μαζί με τις φυσικές μονάδες) και μιας αδιάστατης συνάρτησης που συμβολίζεται με την περισπωμένη:

$$[x, y] = L [\tilde{x}, \tilde{y}], \quad z = H \tilde{z}, \quad [u, v] = V [\tilde{u}, \tilde{v}], \quad w = W \tilde{w},$$

$$\Phi = \Phi \tilde{\Phi}, \quad t = T \tilde{t}, \quad b = B \tilde{b}, \quad f = F \tilde{f},$$

Η τάξη μεγέθους των ταχυτήτων και της οριζόντιας κλίμακας μεταβολής είναι η ταχύτητα και το μέγεθος των κινήσεων μεγάλης κλίμακας $V = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ και $L = 1000 \text{ km}$

αντίστοιχα, ενώ η χρονική κλίμακα T επιλέγεται να είναι η κλίμακα μεταφοράς λόγω του οριζόντιου άνεμου $T = L/V$ αφού τα συνοπτικά συστήματα κινούνται περίπου με ταχύτητα ίση με τον οριζόντιο άνεμο. Τέλος η κατακόρυφη κλίμακα H είναι η κλίμακα μέσα στην οποία η πυκνότητα μειώνεται κατά ένα παράγοντα $1/e$. Οι υπόλοιπες κλίμακες βρίσκονται από την εξέταση της δυναμικής. Αντικαθιστώντας το χωρισμό μέσα στις εξισώσεις παίρνουμε:

$$\frac{V^2}{L} [(\partial_t + \tilde{u}\partial_{\tilde{x}} + \tilde{v}\partial_{\tilde{y}}) \tilde{u}] - FV [\tilde{f}\tilde{v}] = -\frac{\Phi}{L} [\partial_{\tilde{x}}\tilde{\Phi}], \quad (2.7)$$

$$\frac{V^2}{L} [(\partial_t + \tilde{u}\partial_{\tilde{x}} + \tilde{v}\partial_{\tilde{y}}) \tilde{v}] + FV [\tilde{f}\tilde{u}] = -\frac{\Phi}{L} [\partial_{\tilde{y}}\tilde{\Phi}], \quad (2.8)$$

$$\frac{\Phi}{H} [\partial_{\tilde{z}}\tilde{\Phi}] = B [\tilde{b}], \quad (2.9)$$

$$\frac{V^2}{L} [\partial_{\tilde{x}}\tilde{u} + \partial_{\tilde{y}}\tilde{v}] + \frac{W}{H} \left[\frac{1}{\tilde{\rho}_0} \partial_{\tilde{z}} (\tilde{\rho}_0 \tilde{w}) \right] = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{BV}{L} [(\partial_t + \tilde{u}\partial_{\tilde{x}} + \tilde{v}\partial_{\tilde{y}}) \tilde{b}] + WN^2 [\tilde{w}] = 0, \quad (2.11)$$

όπου έχουμε διαχωρίσει τις διαστάσεις από τα αδιάστατα μεγέθη που βρίσκονται μέσα στις αγκύλες.

Οι κινήσεις συνοπτικής κλίμακας σε μέσα γεωγραφικά πλάτη, πέραν της υδροστατικής ισορροπίας βρίσκονται σε πρώτη προσέγγιση υπό καθεστώς σχεδόν γεωστροφικής ισορροπίας. Δηλαδή η δύναμη βαροβαθμίδας και η δύναμη Coriolis σχεδόν εξισορροπούνται, με αποτέλεσμα οι κλίμακες τους να είναι ίσες, δηλαδή $\Phi/L = FV$. Μέσω της εξίσωσης συνέχειας (2.10) προκύπτει ότι $W = VH/L$ και μέσω της εξίσωσης υδροστατικής ισορροπίας (2.11) προκύπτει ότι $B = \Phi/H$. Αντικαθιστώντας τις κλίμακες Φ , W και B τελικά προκύπτει το σύστημα των αδιάστατων ανελαστικών εξισώσεων:

$$Ro (\partial_t + \tilde{u}\partial_{\tilde{x}} + \tilde{v}\partial_{\tilde{y}}) \tilde{u} - \tilde{f}\tilde{v} = -\partial_{\tilde{x}}\tilde{\Phi}, \quad (2.12)$$

$$Ro (\partial_t + \tilde{u}\partial_{\tilde{x}} + \tilde{v}\partial_{\tilde{y}}) \tilde{v} + \tilde{f}\tilde{u} = -\partial_{\tilde{y}}\tilde{\Phi}, \quad (2.13)$$

$$\partial_{\tilde{z}}\tilde{\Phi} = \tilde{b}, \quad (2.14)$$

$$\partial_{\tilde{x}}\tilde{u} + \partial_{\tilde{y}}\tilde{v} + \frac{1}{\tilde{\rho}_0} \partial_{\tilde{z}} (\tilde{\rho}_0 \tilde{w}) = 0, \quad (2.15)$$

$$Ro (\partial_t + \tilde{u}\partial_{\tilde{x}} + \tilde{v}\partial_{\tilde{y}}) \tilde{b} + \tilde{w} \frac{L_d^2}{L^2} = 0. \quad (2.16)$$

Οι αδιάστατες παράμετροι είναι ο αριθμός Rossby, $Ro = V/Lf$ που εκφράζει το λόγο της οριζόντιας επιτάχυνσης προς τη δύναμη Coriolis και ο λόγος της βαροκλινικής ακτίνας παραμόρφωσης Rossby $L_d = HN/F$ προς την κλίμακα των οριζόντιων κινήσεων. Οι παραπάνω εξισώσεις μας δίνουν τη συμπεριφορά ενός συστήματος όπου η οριζόντια βαροβαθμίδα και άρα ο άνεμος οφείλονται στη διακύμανση της άνωσης από το μέσο προφίλ \tilde{b} της οποίας η μεταβολή εξαρτάται από το μέσο προφίλ N^2 .

Επειδή υποθέσαμε ότι το σύστημα βρίσκεται σχεδόν σε γεωστροφική ισορροπία, ο αριθμός Rossby είναι μικρός. Θα αναπτύξουμε τα αδιάστατα πεδία ασυμπτωτικά ως προς τον αριθμό Rossby:

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \tilde{u}_0 + Ro \tilde{u}_1 + Ro^2 \tilde{u}_2 + \dots, \\ \tilde{v} &= \tilde{v}_0 + Ro \tilde{v}_1 + Ro^2 \tilde{v}_2 + \dots, \\ \tilde{w} &= \tilde{w}_0 + Ro \tilde{w}_1 + Ro^2 \tilde{w}_2 + \dots, \\ \tilde{\Phi} &= \tilde{\Phi}_0 + Ro \tilde{\Phi}_1 + Ro^2 \tilde{\Phi}_2 + \dots, \\ \tilde{b} &= \tilde{b}_0 + Ro \tilde{b}_1 + Ro^2 \tilde{b}_2 + \dots.\end{aligned}$$

Επιπροσθέτως, υποθέτουμε ότι η αλλαγή του πλανητικού στροβιλισμού βy είναι τάξεως Rossby σε σχέση με την κλίμακα του f_0 . Έτσι θα αντικαταστήσουμε την παράμετρο Coriolis στις εξισώσεις (2.12)-(2.13) με

$$\tilde{f} = \tilde{f}_0 + Ro \tilde{\beta} \tilde{y}.$$

Έπειτα, αντικαθιστούμε τα ανεπτυγμένα κατά Rossby αδιάστατα μεγεθή στις εξισώσεις (2.12)-(2.16) και αντιστοιχούμε τους όρους κάθε τάξης Rossby σε ξεχωριστές εξισώσεις.

Οι εξισώσεις μηδενικής τάξης περιγράφουν μια κατάσταση ισορροπίας θερμικού α-

νέμου σε διαστρωματωμένη ατμόσφαιρα με μηδενικό πεδίο κατακόρυφης ταχύτητας:

$$\tilde{u}_0 + \frac{1}{\tilde{f}_0} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (2.17)$$

$$\tilde{v}_0 - \frac{1}{\tilde{f}_0} \frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \tilde{x}} = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_0}{\partial \tilde{z}} = \tilde{b}_0. \quad (2.20)$$

Επειδή η ροή μηδενικής τάξης έχει μηδενική οριζόντια απόκλιση (εξίσωση 2.19) μπορούμε να ορίσουμε το γεωστροφικό άνεμο ως $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) = (-\partial_{\tilde{y}} \tilde{\psi}_0, \partial_{\tilde{x}} \tilde{\psi}_0)$, όπου $\tilde{\psi}_0$ η ρευματοσυνάρτηση του γεωστροφικού ανέμου. Έτσι από τις εξισώσεις (2.17)-(2.18) προκύπτει ότι $\tilde{\psi}_0 = \tilde{\Phi}_0 / \tilde{f}_0$ και μέσω της (2.20) προκύπτει ότι $\tilde{b}_0 = \tilde{f}_0 \partial_{\tilde{z}} \tilde{\psi}_0$.

Οι εξισώσεις πρώτης τάξης Rossby που ονομάζονται και οιονεί-γεωστροφικές εξισώσεις είναι οι:

$$\frac{\tilde{D}_0 \tilde{u}_0}{D\tilde{t}} - \tilde{f}_0 \tilde{v}_1 - \tilde{\beta} \tilde{y} \tilde{v}_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial \tilde{x}}, \quad (2.21)$$

$$\frac{\tilde{D}_0 \tilde{v}_0}{D\tilde{t}} + \tilde{f}_0 \tilde{u}_1 + \tilde{\beta} \tilde{y} \tilde{u}_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial \tilde{y}}, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial \tilde{z}} = \tilde{b}_1, \quad (2.23)$$

$$\partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_1 + \partial_{\tilde{y}} \tilde{v}_1 + \frac{1}{\tilde{\rho}_0} \frac{\partial \tilde{\rho}_0 \tilde{w}_1}{\partial \tilde{z}} = 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{\tilde{D}_0 \tilde{b}_0}{D\tilde{t}} + \tilde{w}_1 \frac{N^2}{\tilde{f}_0} = 0, \quad (2.25)$$

όπου $\tilde{D}_0 / D\tilde{t} = \partial_{\tilde{t}} + \tilde{u}_0 \partial_{\tilde{x}} + \tilde{v}_0 \partial_{\tilde{y}}$. Διαφορίζουμε μερικώς την εξίσωση (2.21) ως προς \tilde{y} και την εξίσωση (2.22) ως προς \tilde{x} και έπειτα τις αφαιρούμε. Προκύπτει έτσι η εξίσωση για τη μεταβολή του γεωστροφικού στροβιλισμού $\Delta \tilde{\psi}_0$:

$$\frac{\tilde{D}_0}{D\tilde{t}} \left(\Delta \tilde{\psi}_0 + \tilde{f}_0 + \tilde{\beta} \tilde{y} \right) = -\tilde{f}_0 (\partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_1 + \partial_{\tilde{y}} \tilde{v}_1). \quad (2.26)$$

όπου $\Delta = \partial_{\tilde{x}}^2 + \partial_{\tilde{y}}^2$ η οριζόντια Λαπλασιανή. Η εξίσωση (2.26) περιγράφει τη διατήρηση του στροβιλισμού στην περίπτωση που η ατμόσφαιρα είναι βαροκλινική. Συγκεκριμένα

η χρονική μεταβολή του απόλυτου στροβιλισμού ($\Delta\psi_0 + f_0 + \beta y$) σε αντίθεση με τη βαροτροπική δυναμική, δεν είναι μηδενική αλλά εξαρτάται από τη σύγκλιση της οριζόντιας γεωστροφικής συνιστώσας του ανέμου μέσω του μηχανισμού διάτασης στροβίλων (vortex stretching) που είναι ο όρος στο δεξί μέλος της εξίσωσης.

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη σύγκλιση της οριζόντιας ταχύτητας στην εξίσωση (2.26) χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας πρώτης τάξης (2.24) και έπειτα μέσω της εξίσωσης θερμοδυναμικής (2.25) να αντικαταστήσουμε και την κατακόρυφη ταχύτητα. Τέλος επειδή $\partial_z D_0 \tilde{b}_0 / Dt = D_0 \partial_z \tilde{b}_0 / Dt$ και επαναφέροντας τις διαστάσεις παίρνουμε την εξίσωση διατήρησης του δυναμικού στροβιλισμού:

$$\frac{D_0}{Dt} \left(\Delta\psi_0 + f_0 + \beta y + \frac{f_0^2}{\rho_0} \partial_z \left(\frac{\rho_0}{N^2} \partial_z \psi_0 \right) \right) = 0, \quad (2.27)$$

η οποία περιγράφει την οιονεί-γεωστροφική δυναμική του γεωστροφικού ανέμου. Η δε εξίσωση της θερμοδυναμικής:

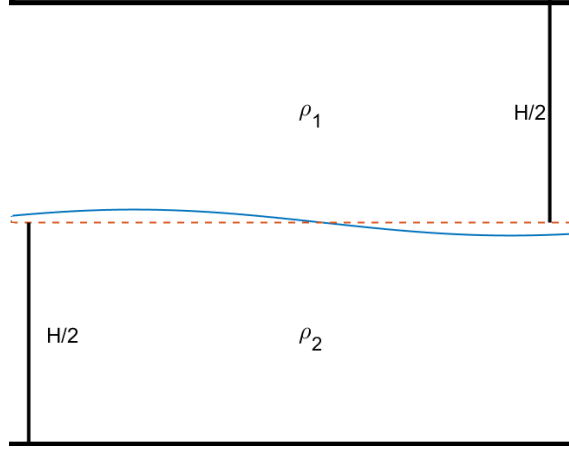
$$\frac{D_0}{Dt} \partial_z \psi_0 + w \frac{N^2}{f_0} = 0, \quad (2.28)$$

υποδηλώνει ότι η διακύμανση της άνωσης b_0 εξελίσσεται ώστε να αντισταθμίζει την κατακόρυφη μεταφορά του μέσου προφίλ άνωσης.

2.2 Το μοντέλο των δύο στρωμάτων

Για να απλοποιήσουμε το γενικό πρόβλημα της συνεχούς διαστρωματωμένης ατμόσφαιρας χρησιμοποιούμε την προσέγγιση του Phillips (1951) με το μοντέλο δύο στρωμάτων. Θεωρούμε ότι η ατμόσφαιρα αποτελείται από δύο διακριτά στρώματα με ασυμπίεστα ρευστά διαφορετικής πυκνότητας με το υπερκείμενο στρώμα να εκτείνεται ως την τροπόπαυση. Επίσης θεωρούμε ότι οι κινήσεις σταματούν στην τροπόπαυση, δηλαδή η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας είναι μηδενική εκεί, όπως και στο έδαφος που είναι το στερεό σύνορο της ατμόσφαιρας. Το τετράγωνο της συχνότητας Brunt-Vaissala θα πάρει τη μορφή $N^2 = 4g\delta\rho / (\rho_1 + \rho_2) H$, όπου $H/2$ το μέσο πάχος

του κάθε στρώματος που το θεωρούμε ίδιο και $\delta\rho > 0$ η διαφορά των πυκνοτήτων των δύο στρωμάτων.



Σχήμα 2.1: Κατακόρυφη διατομή ενός ρευστού δύο στρωμάτων με διαφορετικές πυκνότητες και ίδιο πάχος.

Εφαρμόζουμε την εξίσωση διατήρησης του δυναμικού στροβιλισμού (2.27) και την εξίσωση θερμοδυναμικής (2.28) σε κάθε στρώμα ξεχωριστά. Έτσι προκύπτει ότι:

$$\frac{D_1}{Dt} (\Delta\psi_1 + f_0 + \beta y) = -\frac{f_0^2}{N^2} \partial_z \frac{D_1}{Dt} \partial_z \psi_1, \quad (2.29)$$

$$\frac{D_1}{Dt} \partial_z \psi_1 = -w_1 \frac{N^2}{f_0}, \quad (2.30)$$

$$\frac{D_2}{Dt} (\Delta\psi_2 + f_0 + \beta y) = -\frac{f_0^2}{N^2} \partial_z \frac{D_2}{Dt} \partial_z \psi_2, \quad (2.31)$$

$$\frac{D_2}{Dt} \partial_z \psi_2 = -w_2 \frac{N^2}{f_0}, \quad (2.32)$$

όπου χρησιμοποιούμε τους δείκτες 1, 2 για να διαχωρίσουμε τα μεγέθη στα δύο στρώματα. Παραγωγίζουμε τις εξισώσεις θερμοδυναμικής (2.30)-(2.32) σε κάθε στρώμα ως προς z και έπειτα τις αντικαθιστούμε στα αριστερά μέλη των εξισώσεων στροβιλισμού (2.29)-(2.31) οι οποίες γίνονται:

$$\frac{D_1}{Dt} (\Delta\psi_1 + f_0 + \beta y) = f_0 \partial_z w_1, \quad (2.33)$$

$$\frac{D_2}{Dt} (\Delta\psi_2 + f_0 + \beta y) = f_0 \partial_z w_2. \quad (2.34)$$

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών ώστε να προσεγγίσουμε τη βαθμίδα της κατακόρυφης ταχύτητας, δηλαδή:

$$\partial_z w_1 = \frac{w_{top} - w_3}{H/2}, \quad \partial_z w_2 = \frac{w_3 - w_{bot}}{H/2}, \quad (2.35)$$

όπου w_{top} και w_{bot} η κατακόρυφη ταχύτητα στην κορυφή και την επιφάνεια αντίστοιχα και w_3 η κατακόρυφη ταχύτητα στη διεπιφάνεια των δύο ρευστών. Επειδή τα σύνορα του ρευστού στην κορυφή και την επιφάνεια είναι σταθερά, η κατακόρυφη ταχύτητα μηδενίζεται εκεί οπότε θα έχουμε ότι: $\partial_z w_1 = -w_3 / (H/2)$ και $\partial_z w_2 = w_3 / (H/2)$.

Αντικαθιστώντας τις κατακόρυφες βαθμίδες της κατακόρυφης ταχύτητας στις σχέσεις (2.33)-(2.34) παίρνουμε:

$$\frac{D_1}{Dt} (\Delta\psi_1 + f_0 + \beta y) = -\frac{2f_0 w_3}{H}, \quad (2.36)$$

$$\frac{D_2}{Dt} (\Delta\psi_2 + f_0 + \beta y) = \frac{2f_0 w_3}{H}. \quad (2.37)$$

Από τις εξισώσεις (2.36)-(2.37) φαίνεται ότι η μετατόπιση της διεπιφάνειας που εκφράζεται από την κατακόρυφη ταχύτητα w_3 έχει διαφορετική επίδραση στον απόλυτο στροβιλισμό των δύο στρωμάτων. Αν η διεπιφάνεια μετατοπίζεται προς τα πάνω ($w_3 > 0$) τότε στο πάνω στρώμα ο απόλυτος στροβιλισμός μειώνεται με το χρόνο. Αντίθετα στο κάτω στρώμα ο απόλυτος στροβιλισμός αυξάνεται με το χρόνο. Το αντίθετο συμβαίνει όταν η μετατόπιση είναι αρνητική ($w_3 < 0$). Για να λάβουμε υπόψη την αλληλεπίδραση των δύο στρωμάτων θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση θερμοδυναμικής στη διεπιφάνεια:

$$\frac{D_3}{Dt} \partial_z \psi_3 = -w_3 \frac{N^2}{f_0}, \quad (2.38)$$

όπου $D_3 = \partial_t + u_3 \partial_x + v_3 \partial_y$. Για να κλείσουμε το σύστημα προσεγγίζουμε τον άνεμο ως τη μέση τιμή των παρακείμενων στρωμάτων

$$u_3 = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad v_3 = \frac{v_1 + v_2}{2},$$

και την κατακόρυφη βαθμίδα της ρευματοσυνάρτησης ψ_3 στη διεπιφάνεια ως $\partial_z \psi_3 = (\psi_1 - \psi_2) / (H/2)$. Έτσι η εξίσωση θερμοδυναμικής παίρνει τη μορφή:

$$\frac{D_3}{Dt} \frac{\psi_1 - \psi_2}{H/2} = -w_3 \frac{N^2}{f_0}. \quad (2.39)$$

Οι εξισώσεις (2.36)-(2.37)-(2.39) αποτελούν το σύστημα εξισώσεων στο μοντέλο δύο στρωμάτων.

Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να γραφτούν σε διαφορετική μορφή ώστε να αναδειχθεί το βαροτροπικό και το βαροκλινικό μέρος της δυναμικής. Χωρίζουμε τη ρευματοσυνάρτηση σε βαροτροπικό $\psi = (\psi_1 + \psi_2)/2$ και βαροκλινικό μέρος $\theta = (\psi_1 - \psi_2)/2$. Προσθέτοντας τις εξισώσεις (2.36)-(2.37), παίρνουμε την εξίσωση εξέλιξης του βαροτροπικού μέρους της ρευματοσυνάρτησης:

$$\partial_t \zeta + \mathbb{J}(\psi, \zeta) + \mathbb{J}(\theta, \Delta \theta) + \beta \partial_x \psi = 0, \quad (2.40)$$

όπου $\zeta = \Delta \psi$ ο βαροτροπικός στροβιλισμός. Η ποσότητα $\mathbb{J}(A, B) = \partial_x A \partial_y B - \partial_y A \partial_x B$ είναι η Ιακωβιανή η οποία αναπαριστά την οριζόντια μεταφορά. Αν το πρώτο στοιχείο είναι η βαροτροπική ρευματοσυνάρτηση ψ η μεταφορά γίνεται από το βαροτροπικό άνεμο, ενώ αν το πρώτο στοιχείο είναι η βαροκλινική ρευματοσυνάρτηση θ η μεταφορά γίνεται από το βαροκλινικό άνεμο. Έπειτα αφαιρώντας τις εξισώσεις (2.36)-(2.37) και αντικαθιστώντας την κατακόρυφη ταχύτητα από την εξίσωση (2.39) προκύπτει η εξίσωση για το βαροκλινικό μέρος της ρευματοσυνάρτησης:

$$\partial_t \eta + \mathbb{J}(\psi, \eta) + \mathbb{J}(\theta, \zeta) + \beta \partial_x \theta = 0, \quad (2.41)$$

όπου $\eta = (\Delta - 2\lambda^2)\theta$, με $\lambda = f_0/\sqrt{g'H/2}$ μια παράμετρο που εξαρτάται από τη διαστρωμάτωση και $g' = 2g\delta\rho/(\rho_1 + \rho_2)$ τη βαρύτητα που απομειώνεται εξαιτίας των διαφορετικών πυκνοτήτων. Σε περίπτωση ισχυρής διαστρωμάτωσης έχουμε $\lambda \gg 1$, ενώ για $\lambda \rightarrow 0$ έχουμε βαροτροπική δυναμική.

Η παραπάνω δυναμική υποστηρίζει την ύπαρξη δύο διαφορετικών κυμάτων. Για να το δείξουμε, θεωρούμε την κατάσταση ηρεμίας $\psi = \theta = 0$ η οποία αποτελεί σημείο ισορροπίας των εξισώσεων (2.40)-(2.41). Εισάγουμε στις εξισώσεις γύρω από το σημείο ισορροπίας διαταραχές της μορφής:

$$\begin{aligned} \psi &= \epsilon \psi' + \mathcal{O}(\epsilon^2) + \dots, \\ \theta &= \epsilon \theta' + \mathcal{O}(\epsilon^2) + \dots, \end{aligned}$$

όπου $\epsilon \ll 1$ και γραμμικοποιούμε τις εξισώσεις κρατώντας μόνο τους όρους $\mathcal{O}(\epsilon)$ καθώς όροι ανώτερης τάξης είναι πολύ μικρότεροι. Το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει είναι:

$$\partial_t \Delta \psi' + \beta \partial_x \psi' = 0, \quad (2.42)$$

$$\partial_t (\Delta - 2\lambda^2) \theta' + \beta \partial_x \theta' = 0. \quad (2.43)$$

Παρατηρούμε ότι το βαροτροπικό και βαροκλινικό μέρος της δυναμικής αποσυνδέονται με αποτέλεσμα οι βαροτροπικές και οι βαροκλινικές κινήσεις να εξελίσσονται ανεξάρτητα μεταξύ τους. Για τη λύση των παραπάνω εξισώσεων, θεωρούμε κυματικές λύσεις της μορφής:

$$(\psi', \theta') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\psi}_0(k, l), \hat{\theta}_0(k, l)) e^{i(kx+ly-\omega t)} dk dl. \quad (2.44)$$

Αντικαθιστώντας τη διαταραχή του βαροτροπικού μέρους ψ' στην εξίσωση (2.42) προκύπτει ότι:

$$i\omega_t \left(-\frac{1}{k^2 + l^2} \right) + ik\beta = 0, \quad (2.45)$$

και λύνοντας ως προς τη συχνότητα παίρνουμε:

$$\omega_t = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2}. \quad (2.46)$$

Αυτή είναι η εξίσωση διασποράς των βαροτροπικών κυμάτων Rossby. Από την εξίσωση (2.46) φαίνεται ότι η συχνότητα του βαροτροπικού κύματος αυξάνεται με το μέτρο της βαθμίδας του πλανητικού στροβιλισμού και την κλίμακα της δομής. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση διασποράς μπορούμε να βρούμε τη φασική ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων κατά μήκος του ζωνικού και μεσημβρινού άξονα κίνησης:

$$c_x = \frac{\omega}{k} = -\frac{\beta}{k^2 + l^2}, \quad (2.47)$$

$$c_y = \frac{\omega}{l} = -\frac{\beta k}{l(k^2 + l^2)}. \quad (2.48)$$

Παρατηρούμε ότι η ζωνική συνιστώσα της φασικής ταχύτητας c_x είναι αρνητική και επομένως το κύμα κινείται πάντα προς δυσμάς με τη μεσημβρινή φασική ταχύτητα c_y να είναι είτε προς το βορρά είτε προς το νότο ανάλογα με το γινόμενο kl .

Με αντίστοιχο τρόπο προκύπτει και η εξίσωση διασποράς του βαροκλινικού μέρους της ροής:

$$\omega_c = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2 + 2\lambda^2}. \quad (2.49)$$

Η ω_c ονομάζεται συχνότητα των βαροκλινικών κυμάτων Rossby και η φασική ταχύτητα των βαροκλινικών κυμάτων είναι:

$$c_x = \frac{\omega}{k} = -\frac{\beta}{k^2 + l^2 + 2\lambda^2}, \quad (2.50)$$

$$c_y = \frac{\omega}{l} = -\frac{\beta k}{l(k^2 + l^2 + 2\lambda^2)}. \quad (2.51)$$

Αυτή διαφέρει από την αντίστοιχη ταχύτητα των βαροτροπικών κυμάτων εξαιτίας του όρου $2\lambda^2$ στον παρονομαστή. Η ύπαρξη αυτού του όρου έχει ως αποτέλεσμα βαροκλινικά κύματα με ίδιο κυματάρημο με τα βαροτροπικά, να έχουν μικρότερη ταχύτητα από τα βαροτροπικά. Μάλιστα στο όριο όπου τα κύματα είναι πολύ μεγάλα ($k \ll 1$, $l \ll 1$), η φασική ταχύτητα είναι πεπερασμένη.

Κεφάλαιο 3

Σχηματισμός συνεκτικών δομών σε υπόβαθρο ομογενούς τύρβης

3.1 Μοντέλα στοχαστικής τύρβης

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο εξήχθη το σύστημα δύο στρωμάτων το οποίο περιγράφει με απλότητα την εξέλιξη του βαροτροπικού και του βαροκλινικού μέρους της ρευματοσυνάρτησης σε ένα οιονεί-γεωστροφικό σύστημα. Το σύστημα αυτό μπορεί να περιγράψει την κυκλοφορία μεγάλης κλίμακας, ωστόσο οι δομές μεγάλης κλίμακας επηρεάζονται από δίνες μικρότερης κλίμακας οι οποίες είναι ακανόνιστες και ταυτόχρονα έχουν μεγάλη μεταβλητότητα αφού διεγείρονται και διαχέονται συνεχώς. Η αλληλεπίδραση των δινών με τη μέση ροή σε οιονεί-γεωστροφική τύρβη μπορεί να προσεγγιστεί από μοντέλα στοχαστικής τύρβης (DelSole and Farrell, 1996; Whitaker and Sardeshmukh, 1998; Zhang and Held, 1999; DelSole, 2004). Δηλαδή για να μελετήσουμε την επίδραση των ακανόνιστων δινών στη δυναμική εισάγεται μια συνάρτηση στοχαστικής διέγερσης που προσομοιώνει τη δημιουργία των δινών αυτών και ένας όρος απόσβεσης που αντιπροσωπεύει τη διάχυση στην ατμόσφαιρα. Η διέγερση εισάγεται στο σύστημα ώστε να προσομοιώσουμε διεργασίες στην ατμόσφαιρα που λείπουν από τη δυναμική που εξήχθη στο Κεφάλαιο 2 όπως για παράδειγμα η μικρής κλίμακας ανωμεταφορά.

Αφού η διέγερση είναι στοχαστική, τα χαρακτηριστικά της εκφράζονται με βάση τη στατιστική της συλλογής (ensemble) των διαφορετικών πραγματοποιήσεων. Θα συμβολίσουμε τη συνάρτηση της διέγερσης με $\xi_i(\mathbf{x}_\alpha, t_\alpha)$ όπου ο δείκτης $i = 1, 2$ αντιπροσωπεύει το στρώμα που πραγματοποιείται η διέγερση. Θεωρούμε ότι η συνάρτηση της διέγερσης έχει μηδενική μέση τιμή ως προς το σύνολο άπειρων πραγματοποιήσεων ώστε να μην εισάγεται κατά μέσο όρο δυνητικός στροβιλισμός στην ατμόσφαιρα. Οι συνδιακυμάνσεις της συνάρτησης διέγερσης σε δύο διαφορετικά σημεία που βρίσκονται στο ίδιο ή σε διαφορετικό επίπεδο έχουν τη μορφή:

$$\langle \xi_i(\mathbf{x}_\alpha, t_\alpha) \xi_j(\mathbf{x}_b, t_b) \rangle = \langle \xi_j(\mathbf{x}_\alpha, t_\alpha) \xi_i(\mathbf{x}_b, t_b) \rangle = \delta(t_\alpha - t_b) \alpha_{ij}(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_b), \quad (3.1)$$

όπου $i, j = 1, 2$. Το σύμβολο $\langle \cdot \rangle$ αναπαριστά το μέσο όρο ως προς τη συλλογή διαφορετικών πραγματοποιήσεων των διεγέρσεων και $\mathbf{x} = (x, y)$ είναι το διάνυσμα θέσης σε δύο τυχαία σημεία που συμβολίζονται με τους δείκτες α, b . Η συνάρτηση δέλτα υποδηλώνει ότι ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς χρόνους η διέγερση είναι ασυσχέτιστη, δηλαδή το σύστημα σε κάθε χρόνο υπόκειται σε διέγερση που δεν εξαρτάται από τις προγενέστερες διεγέρσεις ούτε από την κατάσταση της ατμόσφαιρας. Η ιδιότητα αυτή μας επιτρέπει να κάνουμε την εργοδική υπόθεση ότι ο μέσος όρος ως προς τη συλλογή ισούται με το χρονικό μέσο.

Η χωρική στατιστική ομοιογένεια επιβάλλει η συνδιακύμανση να είναι συμμετρική στην αλλαγή των σημείων και στην αλλαγή της διέγερσης στα δύο στρώματα. Επομένως οι συναρτήσεις α_{ij} που εκφράζουν τη χωρική στατιστική ομοιογένεια ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 2\Xi, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 2\Xi_{12}, \quad (3.2)$$

όπου με Ξ και Ξ_{12} συμβολίζουμε τη συνδιακύμανση της διέγερσης ανάμεσα σε δύο σημεία που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και σε διαφορετικό επίπεδο αντίστοιχα. Ως αποτέλεσμα η συνδιακύμανση του βαροτροπικού $\xi^\psi = (\xi_1 + \xi_2)/2$ και του βαροκλινικού $\xi^\theta = (\xi_1 - \xi_2)/2$ μέρους της διέγερσης είναι μηδενική $\langle \xi^\psi \xi^\theta \rangle = 0$. Θα υποθέσουμε ότι η συνδιακύμανση της διέγερσης ανάμεσα σε δύο σημεία που βρίσκονται σε διαφορετικό

στρώμα είναι της μορφής $\Xi_{12} = p\Xi$, όπου $|p| \leq 1$ ο συντελεστής συσχέτισης της διέγερσης ανάμεσα στα δύο στρώματα. Για την τιμή του p ενδεικτικά παρατίθενται οι παρακάτω περιπτώσεις οι οποίες θα εξεταστούν στην παρούσα εργασία:

1. Αν $p = 1$ τότε $\langle \xi_1 \xi_2 \rangle = \delta(t_\alpha - t_b) \Xi$. Η διέγερση είναι ίδια στα δύο στρώματα και διεγείρονται μόνο βαροτροπικές δίνες καθώς $\xi^\theta = 0$.
2. Αν $p = -1$ τότε $\langle \xi_1 \xi_2 \rangle = -\delta(t_\alpha - t_b) \Xi$. Η διέγερση είναι αντίθετη στα δύο στρώματα και διεγείρονται μόνο βαροκλινικές δίνες καθώς $\xi^\psi = 0$.
3. Αν $p = 0$ τότε $\langle \xi_1 \xi_2 \rangle = 0$. Η διέγερση στα δύο στρώματα είναι ασυσχέτιστη και επομένως έχουμε την ίδια πιθανότητα διέγερσης βαροκλινικών και βαροτροπικών δινών.

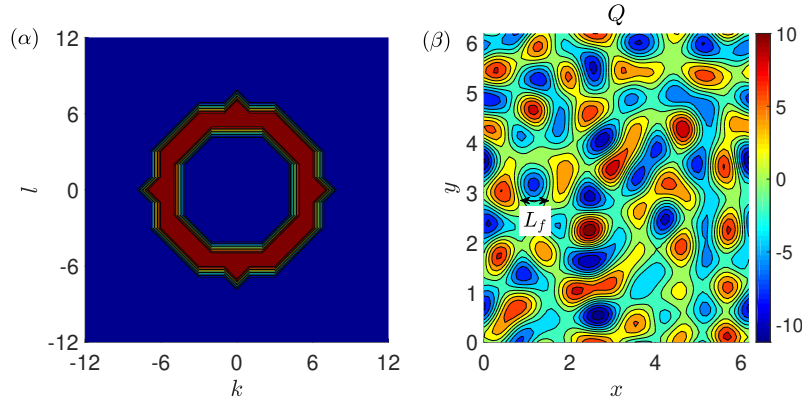
Η συνάρτηση της συνδιακύμανσης της διέγερσης ορίζεται ως:

$$\Xi(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Xi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_b)} dk dl, \quad (3.3)$$

όπου $\hat{\Xi}(\mathbf{k})$ το πλάτος Fourier σε κυματάρημο $\mathbf{k} = (k, l)$. Ακολουθώντας πολλές προηγούμενες εργασίες, θεωρούμε ότι η συνδιακύμανση είναι ισοτροπική στον κυματικό χώρο με το πλάτος να δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{\Xi}(\mathbf{k}) = \frac{\epsilon(1 + 2\lambda^2)}{2(1 + (2 + p)\lambda^4 + 3\lambda^2)} \delta(K - K_f), \quad (3.4)$$

με $K = |\mathbf{k}|$ το μέτρο του κυματάρημου. Επομένως η συνδιακύμανση αναπαρίσταται από ένα δακτύλιο ακτίνας K_f όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1α. Στο φυσικό χώρο αυτή η διέγερση επάγει διαφορετικές δίνες σε κάθε στρώμα και σε κάθε χρονική στιγμή, με το δυνητικό στροβιλισμό των δινών να φαίνεται στο Σχήμα 3.1β. Παρατηρούμε ότι οι δίνες είναι ισοτροπικές με κλίμακα $L_f = 1/K_f$. Το πλάτος της συνάρτησης συνδιακύμανσης είναι κανονικοποιημένο ώστε να έχει ισχύ ϵ .



Σχήμα 3.1: α) Το σύνολο των κυματάριων (k, l) που διεγείρονται ιστροπικά για δακτύλιο με ακτίνα $K_f = 6$. β) Ο δυναμικός στροβιλισμός της ιστροπικής διέγερσης στο φυσικό χώρο (x, y) .

3.2 Εμφάνιση δομών μεγάλης κλίμακας από ομογενές υπόβαθρο τύρβης

Εισάγουμε στις εξισώσεις (2.40) και (2.41) τη διέγερση καθώς και το γραμμικό όρο απόσβεσης που δρα ως μηχανισμός διάχυσης. Έτσι η εξέλιξη του βαροτροπικού και βαροκλινικού μέρους της ρευματοσυνάρτησης δίνεται από το σύστημα:

$$\frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial t} + \mathbb{J}(\tilde{\psi}, \tilde{\zeta}) + \mathbb{J}(\tilde{\theta}, \Delta \tilde{\theta}) + \tilde{\beta} \partial_x \tilde{\psi} = -\tilde{r} \tilde{\zeta} + \tilde{\xi}^\psi, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \mathbb{J}(\tilde{\psi}, \tilde{\eta}) + \mathbb{J}(\tilde{\theta}, \tilde{\zeta}) + \tilde{\beta} \partial_x \tilde{\theta} = -\tilde{r} \tilde{\eta} + \tilde{\xi}^\theta, \quad (3.6)$$

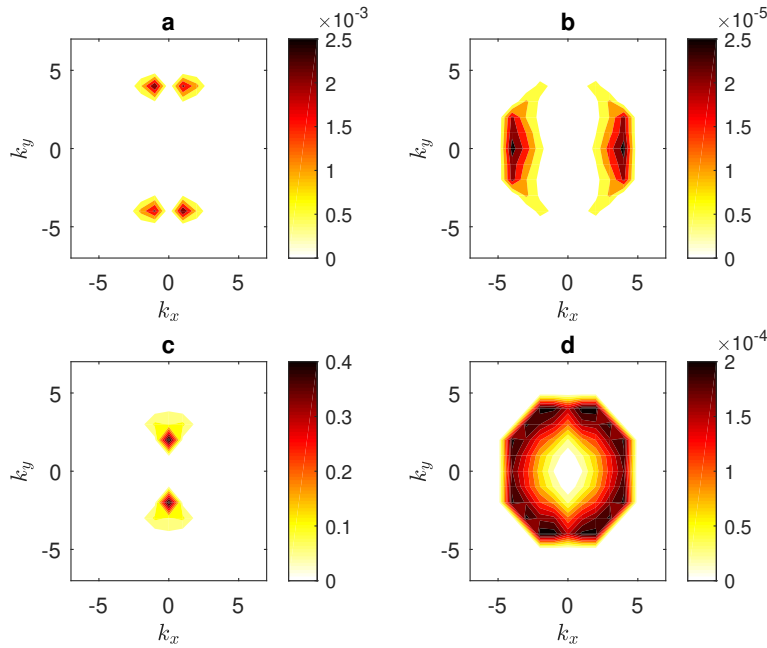
όπου \tilde{r} ο ρυθμός απόσβεσης και η περισπωμένη δηλώνει ότι οι συναρτήσεις είναι διαστατικές. Οι Bakas and Ioannou (2019) βρήκαν ότι η δυναμική του προβλήματος εξαρτάται από τρεις αδιάστατες παραμέτρους για τη βαθμίδα του πλανητικού στροβιλισμού, τη διαστρωμάτωση και την ισχύ της διέγερσης. Ακολουθώντας το συλλογισμό τους, αδιαστατοποιούμε τις εξισώσεις χρησιμοποιώντας ως χωρική κλίμακα την κλίμακα διέγερσης $L = 1/K_f$, ως χρονική κλίμακα το χρόνο απόσβεσης $T = 1/r$ και ως κλίμακα ταχύτητας

την L/T . Έτσι οι αδιάστατες εξισώσεις είναι οι:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbb{J}(\psi, \zeta) + \mathbb{J}(\theta, \Delta \theta) + \beta \partial_x \psi = -\zeta + \xi^\psi, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbb{J}(\psi, \eta) + \mathbb{J}(\theta, \zeta) + \beta \partial_x \theta = -\eta + \xi^\theta, \quad (3.8)$$

με τις αδιάστατες παραμέτρους $\lambda = \tilde{\lambda}/\tilde{K}_f$, $\beta = \tilde{\beta}/\tilde{K}_f \tilde{r}$ και $\epsilon = \tilde{\epsilon} \tilde{K}_f^2 / \tilde{r}^3$ και τη διέγερση να είναι επικεντρωμένη στο $K = 1$. Οι Bakas and Ioannou (2019) πραγματοποίησαν αριθμητικές προσομοιώσεις του παραπάνω συστήματος και βρήκαν ότι το πεδίο της ροής για μικρές τιμές του ρυθμού παροχής ενέργειας ϵ , παραμένει στατιστικά ομογενές με τη ροή να κυριαρχείται από την ομογενή θάλασσα από τις τυρβώδεις δίνες με κλίμακα L_f που φαίνονται στο Σχήμα 3.1β. Όταν η διέγερση ξεπεράσει ένα κρίσιμο κατώφλι, ϵ_c , δημιουργούνται ξαφνικά συνεκτικές δομές. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 3.2 που σχεδιάζεται το φάσμα της κινητικής ενέργειας για το βαροτροπικό κομμάτι και το βαροκλινικό κομμάτι της ροής στην περίπτωση ασυσχέτιστης διέγερσης και για δύο τιμές ισχύος της διέγερσης και για μεγάλη τιμή της διαστρωμάτωσης ($\lambda = 1$). Παρατηρούμε ότι για τιμές της ισχύος κοντά στην κρίσιμη τιμή το μέγιστο είναι σε κυματικές δομές με κλίμακα μεγαλύτερη από την κλίμακα της διέγερσης ($\tilde{K}_f = 6$). Οι δομές αυτές είναι βαροτροπικές, αφού το βαροκλινικό κομμάτι της ροής είναι πολύ μικρό, ενώ δείχθηκε ότι τα κύματα αυτά ακολουθούν τη διασπορά των βαροτροπικών κυμάτων Rossby. Επομένως έχουμε την εμφάνιση βαροτροπικών κυμάτων Rossby μεγάλης κλίμακας. Για μεγαλύτερες τιμές ισχύος παρατηρούμε ότι το μέγιστο είναι σε δομές με $k = 0$ και αμελητέο βαροκλινικό μέρος, δηλαδή σε βαροτροπικούς χειμάρρους. Για μικρότερες τιμές της διαστρωμάτωσης, δείχθηκε ότι έχουμε πάλι την εμφάνιση κυμάτων Rossby για τιμές της ισχύος κοντά στο κρίσιμο κατώφλι και αεροχειμάρρων για μεγαλύτερες τιμές ισχύος, με τις δομές όμως να έχουν παρόμοιο βαροτροπικό και βαροκλινικό μέρος.



Σχήμα 3.2: (a,b) Φάσμα κινητικής ενέργειας για το (a) βαροτροπικό και (b) βαροκλινικό μέρος της ροής και $\epsilon = 2\epsilon_c$ όταν η δυναμική έχει φτάσει σε στατιστική ισορροπία. (c,d) Φάσμα κινητικής ενέργειας για το (c) βαροτροπικό και (d) βαροκλινικό μέρος της ροής και $\epsilon = 60\epsilon_c$ όταν η δυναμική έχει φτάσει σε στατιστική ισορροπία. Σε όλες τις περιπτώσεις η αδιάστατη βαθμίδα του πλανητικού στροβιλισμού είναι $\beta = 60$ και η αδιάστατη διαστρωμάτωση είναι $\lambda = 1$. Οι κυματάρηθμοι είναι διαστατικοί.

3.3 Δυναμική S3T

Η αριθμητική προσομοίωση της εξέλιξης ενός συστήματος έχει το μειονέκτημα ότι δεν μπορούμε να έχουμε σαφή εικόνα για τους μηχανισμούς που καθορίζουν την εξέλιξη του τυρβώδους πεδίου, καθώς είναι η συλλογική δράση (στατιστική) των τυχαίων δινών που οδηγούν στον ανυπόρμητο σχηματισμό των συνεκτικών δομών. Για να μελετηθούν αναλυτικά οι μηχανισμοί που επιδρούν και ενισχύουν τις συνεκτικές δομές, έχει αναπτυχθεί η Στοχαστική Θεωρία Δομικής Ευστάθειας Stochastic Structural Stability Theory ή, για συντομία, S3T.

Σύμφωνα με αυτό το στατιστικό πλαίσιο, διαχωρίζουμε τις συναρτήσεις στις εξισώσεις (3.7)-(3.8) σε μέση τιμή που θα συμβολίσουμε με κεφαλαία και αποχή από τη

μέση τιμή που θα συμβολίσουμε με τις τονούμενες ποσότητες

$$\zeta = Z + \zeta', \eta = H + \eta', \psi = \Psi + \psi', \theta = \Theta + \theta'.$$

Η εξέλιξη της μέσης τιμής αντιπροσωπεύει την εξέλιξη των συνεκτικών δομών μεγάλης κλίμακας, ενώ η εξέλιξη των αποχών αντιπροσωπεύει την εξέλιξη των τυρβωδών δινών μικρής κλίμακας. Γίνεται επίσης η εργοδική υπόθεση ότι ο μέσος όρος ως προς τη συλλογή είναι ίδιος με το χρονικό μέσο όρο και ακολουθούμε τη μέθοδο μεσοποίησης του Reynolds. Δηλαδή αντικαθιστούμε το χωρισμό στις (3.7)-(3.8) και παίρνουμε το μέσο όρο των εξισώσεων. Έτσι εξάγουμε τις εξισώσεις που περιγράφουν την εξέλιξη της μέσης ροής:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \mathbb{J}(\Psi, Z) + \mathbb{J}(\Theta, \Delta\Theta) + \beta\partial_x\Psi = -\langle\mathbb{J}(\psi', \zeta')\rangle - \langle\mathbb{J}(\theta', \Delta\theta')\rangle - Z, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \mathbb{J}(\Psi, H) + \mathbb{J}(\Theta, Z) + \beta\partial_x\Theta = -\langle\mathbb{J}(\psi', \eta')\rangle - \langle\mathbb{J}(\theta', \zeta')\rangle - H. \quad (3.10)$$

Η βαροτροπική και η βαροκλινική μέση ροή αλληλεπιδρούν μεταξύ τους μέσω της μεταφοράς του στροβιλισμού από το μέσο θερμικό άνεμο, που αντιπροσωπεύεται από τις Ιακωβιανές $\mathbb{J}(\Theta, \Delta\Theta)$ και $\mathbb{J}(\Theta, Z)$. Η τάση της μέσης ροής εξαρτάται επίσης από τις δίνες μέσω των συναρτήσεων συνδιακυμάνσης των αποχών του βαροτροπικού και βαροκλινικού στροβιλισμού και εκφράζονται από τις Ιακωβιανές, στο δεξί μέλος των εξισώσεων (3.9)-(3.10). Οι όροι αυτοί μπορούν να εκφραστούν συνοπτικά ως συνάρτηση του πίνακα συνδιακυμάνσεων:

$$\mathbf{C}_{ab} = \begin{pmatrix} \langle\zeta'_a\zeta'_b\rangle & \langle\zeta'_a\eta'_b\rangle \\ \langle\eta'_a\zeta'_b\rangle & \langle\eta'_a\eta'_b\rangle \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

όπου οι δείκτες δηλώνουν τον υπολογισμό των αποχών σε δύο διαφορετικά σημεία \mathbf{x}_a και \mathbf{x}_b . Για να εκφράσουμε τις αποκλίσεις ροής στροβιλισμού και θερμότητας ορίζουμε τις συνδιακυμάνσεις των ρευματοσυναρτήσεων των αποχών μέσω του παρακάτω πίνακα:

$$\mathbf{S}_{ab} = \begin{pmatrix} S_{ab}^{\psi\psi} & S_{ab}^{\psi\theta} \\ S_{ab}^{\theta\psi} & S_{ab}^{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_a^{-1}\Delta_b^{-1}\langle\zeta'_a\zeta'_b\rangle & \Delta_a^{-1}\Delta_{\lambda,b}^{-1}\langle\zeta'_a\eta'_b\rangle \\ \Delta_{\lambda,a}^{-1}\Delta_b^{-1}\langle\eta'_a\zeta'_b\rangle & \Delta_{\lambda,a}^{-1}\Delta_{\lambda,b}^{-1}\langle\eta'_a\eta'_b\rangle \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

και παίρνουμε:

$$F^\psi = \langle \mathbb{J}(\psi', \zeta') \rangle + \langle \mathbb{J}(\theta', \Delta\theta') \rangle = \frac{1}{2} \partial_x \left((-\partial_{y_\alpha} \Delta_b - \partial_{y_b} \Delta_\alpha) (S_{\alpha b}^{\psi\psi} + S_{\alpha b}^{\theta\theta}) \right)_{x_\alpha=x_b} \\ + \frac{1}{2} \partial_y \left((\partial_{x_\alpha} \Delta_b + \partial_{x_b} \Delta_\alpha) (S_{\alpha b}^{\psi\psi} + S_{\alpha b}^{\theta\theta}) \right)_{x_\alpha=x_b}, \quad (3.13)$$

$$F^\theta = \langle \mathbb{J}(\psi', \eta') \rangle + \langle \mathbb{J}(\theta', \zeta') \rangle = \\ \frac{1}{2} \partial_x \left((-\partial_{y_\alpha} \Delta_{\lambda,b} - \partial_{y_b} \Delta_\alpha) S_{\alpha b}^{\psi\theta} + (-\partial_{y_\alpha} \Delta_b - \partial_{y_b} \Delta_{\lambda,\alpha}) S_{\alpha b}^{\theta\psi} \right)_{x_\alpha=x_b} \\ + \frac{1}{2} \partial_y \left((\partial_{x_\alpha} \Delta_{\lambda,b} + \partial_{x_b} \Delta_\alpha) S_{\alpha b}^{\psi\theta} + (\partial_{x_\alpha} \Delta_b + \partial_{x_b} \Delta_{\lambda,\alpha}) S_{\alpha b}^{\theta\psi} \right)_{x_\alpha=x_b}. \quad (3.14)$$

Παρατηρούμε ότι οι συνδιακυμάνσεις που επηρεάζουν τη βαροτροπική μέση ροή στην εξίσωση (3.9) είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα $\mathbf{C}_{\alpha b}$. Αντίστοιχα για τη βαροκλινική μέση ροή οι συνδιακυμάνσεις που εμφανίζονται στην εξίσωση (3.10) είναι τα μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα $\mathbf{C}_{\alpha b}$. Έτσι παίρνουμε:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}^\psi \cdot \nabla \right) Z + (\mathbf{V}^\theta \cdot \nabla) \Delta\Theta + \beta V^\psi = -F^\psi - Z, \quad (3.15)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}^\psi \cdot \nabla \right) H + (\mathbf{V}^\theta \cdot \nabla) Z + \beta V^\theta = -F^\theta - H, \quad (3.16)$$

όπου $\nabla = i\partial/\partial x + j\partial/\partial y$ το ανάδελτα στο οριζόντιο και

$$\mathbf{V}^\psi = \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right), \quad \mathbf{V}^\theta = \left(-\frac{\partial \Theta}{\partial y}, \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right),$$

ο βαροτροπικός και ο βαροκλινικός άνεμος αντίστοιχα.

Για την εύρεση της εξέλιξης των συνδιακυμάνσεων αφαιρούμε τις (3.9)-(3.10) από τις (3.7)-(3.8) και παίρνουμε τις εξισώσεις εξέλιξης των αποχών:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \mathbb{J}(\Psi, \zeta') + \mathbb{J}(\psi', Z) + \mathbb{J}(\Theta, \Delta\theta') + \mathbb{J}(\theta', \Delta\Theta) + \beta \partial_x \psi' = \\ \langle \mathbb{J}(\psi', \zeta') \rangle + \langle \mathbb{J}(\theta', \Delta\theta') \rangle - \mathbb{J}(\psi', \zeta') - \mathbb{J}(\theta', \Delta\theta') - \zeta' + \xi^\psi, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + \mathbb{J}(\Psi, \eta') + \mathbb{J}(\psi', H) + \mathbb{J}(\Theta, \zeta') + \mathbb{J}(\theta', Z) + \beta \partial_x \theta' = \\ \langle \mathbb{J}(\psi', \eta') \rangle + \langle \mathbb{J}(\theta', \zeta') \rangle - \mathbb{J}(\psi', \eta') - \mathbb{J}(\theta', \zeta') - \eta' + \xi^\theta. \quad (3.18)$$

Παρατηρούμε ότι η εξέλιξη των δινών εξαρτάται από την άμεση αλληλεπίδρασή τους με τη μέση ροή εξαιτίας των όρων στο αριστερό μέλος των εξισώσεων (3.17)-(3.18), αλλά

και από την αλληλεπίδραση των δινών μεταξύ τους μέσω των όρων στο δεξί μέλος των εξισώσεων. Όπως αναφέρθηκε και στην Ενότητα 1.3, η ακριβής επίλυση του συστήματος είναι αδύνατη επειδή η εύρεση της χρονικής εξέλιξης των συνδιακυμάνσεων των αποχών οδηγεί σε ένα σύστημα άπειρων εξισώσεων όπου η εξέλιξη κάθε στατιστικής ροπής εξαρτάται από ροπές ανώτερης τάξης. Σύμφωνα με τη θεωρία (S3T), κλείνουμε το σύστημα σε δεύτερη τάξη αγνοώντας τις Ιακωβιανές στο δεξί μέλος των εξισώσεων εξέλιξης των αποχών (3.17)-(3.18), που αντιστοιχούν στις μη γραμμικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δινών. Έτσι η χρονική εξέλιξη των αποχών περιγράφεται από το ημι-γραμμικό σύστημα:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \zeta' \\ \eta' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \zeta' \\ \eta' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi^\psi \\ \xi^\theta \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

όπου

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (\Delta \mathbf{V}^\psi \Delta^{-1} - \mathbf{V}^\psi) \cdot \nabla - \beta \partial_x \Delta^{-1} - 1 & -\mathbf{V}^\theta \cdot \nabla \Delta \Delta_\lambda^{-1} + \Delta \mathbf{V}^\theta \cdot \nabla \Delta_\lambda^{-1} \\ -\mathbf{V}^\theta \cdot \nabla + \Delta_\lambda \mathbf{V}^\theta \cdot \nabla \Delta^{-1} & (\Delta \mathbf{V}^\psi \Delta_\lambda^{-1} - \mathbf{V}^\psi) \cdot \nabla - \beta \partial_x \Delta_\lambda^{-1} - 1 \end{pmatrix},$$

με $\Delta_\lambda = \Delta - 2\lambda^2$.

Όπως παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α', γράφουμε τις εξισώσεις εξέλιξης των αποχών ως προς τα σημεία a, b , έπειτα τις πολλαπλασιάζουμε με την αποχή στο άλλο σημείο, τις προσθέτουμε και έπειτα μεσοποιούμε καταλήγοντας στην εξίσωση:

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{ab}}{\partial t} = \mathbf{A}_a \mathbf{C}_{ab} + (\mathbf{A}_b \mathbf{C}_{ab}^T)^T + \mathbf{Q}_{ab}, \quad (3.20)$$

όπου

$$\mathbf{Q}_{ab} = \begin{pmatrix} (1+p)\Xi & 0 \\ 0 & (1-p)\Xi \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

ο πίνακας που περιέχει τη συνδιακύμανση της ομογενούς διέγερσης.

Το σύστημα των εξισώσεων (3.15), (3.16), (3.20) είναι ένα κλειστό ντετερμινιστικό σύστημα που διέπει την εξέλιξη της στατιστικής της ροής, δηλαδή την εξέλιξη της μέσης ροής που αντιπροσωπεύει τις δομές μεγάλης κλίμακας και τις συνδιακυμάνσεις

των τυρβωδών δινών. Όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 1, σημεία ισορροπίας του συστήματος αυτού αντιπροσωπεύουν την κλιματολογία του μέσου ανέμου και των αποχών. Αν το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές τότε η κλιματική κατάσταση διατηρείται για μακρό χρονικό διάστημα. Αν είναι ασταθές τότε μεταβαίνουμε σε μια καινούργια κλιματική κατάσταση.

Η κατάσταση με μηδενική μέση ροή $Z_E = H_E = 0$ και ομογενές τυρβώδες πεδίο διέγερσης $\mathbf{C}_{ab}^E = \mathbf{Q}_{ab}/2$ είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος. Η ομοιογένεια του σημείου ισορροπίας μας επιτρέπει να μελετήσουμε την ευστάθεια του αναπτύσσοντας διαταραχές με ημιτονοειδή μορφή για τις ρευματοσυναρτήσεις του μέσου στροβιλισμού:

$$\begin{pmatrix} \delta\Psi \\ \delta\Theta \end{pmatrix} = e^{i\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}+\sigma t} \begin{pmatrix} \alpha_\psi \\ \alpha_\theta \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

όπου α_ψ και α_θ είναι το πλάτος τους και $\mathbf{N} = (N \cos \phi, N \sin \phi)$ είναι ο κυματάρηθος των αρμονικών συναρτήσεων με μέτρο N και γραμμές σταθερής φάσης να σχηματίζουν γωνία ϕ με το μεσημβρινό άξονα. Για παράδειγμα βαροτροπικοί ζωνικοί χείμαρροι μεγάλης κλίμακας έχουν $\phi = \pi/2$ και $N \ll K_f$ με $\alpha_\theta = 0$. Σε περίπτωση που η ιδιοτιμή των ιδιοσυναρτήσεων σ έχει θετικό πραγματικό μέρος, τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές και οι δομές που αναμένεται να εμφανιστούν στη ροή είναι αυτές με το μεγαλύτερο θετικό πραγματικό μέρος.

Για τις συνδυακυμάνσεις των ρευματοσυναρτήσεων οι διαταραχές έχουν τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} \delta S^{\psi\psi} \\ \delta S^{\psi\theta} \\ \delta S^{\theta\psi} \\ \delta S^{\theta\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} e^{i\mathbf{N}\cdot(\frac{\mathbf{x}_a+\mathbf{x}_b}{2})+\sigma t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \hat{S}^{\psi\psi} \\ \hat{S}^{\psi\theta} \\ \hat{S}^{\theta\psi} \\ \hat{S}^{\theta\theta} \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_a-\mathbf{x}_b)} dk dl. \quad (3.23)$$

Όπως δείχνεται στο Παράρτημα Α', γίνεται αποσύζευξη των εξισώσεων του βαροτροπικού και βαροκλινικού μέσου στροβιλισμού, ώστε η μέση ροή να είναι είτε βαροκλινική ($\alpha_\psi = 0$), είτε βαροτροπική ($\alpha_\theta = 0$) αντίστοιχα. Σύμφωνα με τους Bakas and Ioannou (2019) και τις πράξεις που αναπαράγονται στο Παράρτημα Α', οι ιδιοτιμές για το βαρο-

τροπικό και βαροκλινικό τρόπο ταλάντωσης ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\sigma_\psi + 1 - i\beta \frac{N \cos \phi}{N^2} = f_\psi, \quad (3.24)$$

$$\sigma_\theta + 1 - i\beta \frac{N \cos \phi}{N_\lambda^2} = f_\theta, \quad (3.25)$$

όπου $N_\lambda = \sqrt{N^2 + 2\lambda^2}$. Οι συναρτήσεις f_ψ , f_θ στο δεξί μέλος είναι οι αποκλίσεις των ροών στροβιλισμού και θερμότητας των δινών και αντιπροσωπεύουν την επίδραση των δινών στην αστάθεια της μέσης βαροτροπικής και βαροκλινικής ροής αντίστοιχα. Οι αναδράσεις αυτές χωρίζονται σε δύο μέρη:

$$f_\psi = f_\psi^\psi + f_\psi^\theta, \quad (3.26)$$

$$f_\theta = f_\theta^\psi + f_\theta^\theta, \quad (3.27)$$

με το πρώτο κομμάτι να αφορά την οργάνωση των βαροτροπικών δινών και το δεύτερο κομμάτι την οργάνωση των βαροκλινικών δινών από τη μέση ροή. Οι τέσσερις αυτές αναδράσεις δίνονται από τις σχέσεις (βλέπε Παράρτημα Α):

$$\begin{aligned} f_\psi^\psi &= \frac{(1+p)A_m}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \omega (I-1)(1-N^2)}{(\sigma_\psi+2)I + i\beta(\cos \theta(I-1) - N \cos \phi)} d\theta, \\ f_\psi^\theta &= \frac{(1-p)A_m}{4\pi(1+2\lambda^2)^2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \omega (I-1)(1+2\lambda^2-N^2)}{(\sigma_\psi+2)I_\lambda + i\beta(\cos \theta(\frac{I_\lambda}{1+2\lambda^2} - 1) - N \cos \phi)} d\theta, \\ f_\theta^\psi &= \frac{(1+p)A_m}{4\pi N_\lambda^2} \int_0^{2\pi} \frac{N^2 \sin^2 \omega (I_\lambda-1)(1-N_\lambda^2)}{(\sigma_\theta+2)I_\lambda + i\beta(\cos \theta(I_\lambda-1) - N \cos \phi)} d\theta, \\ f_\theta^\theta &= \frac{(1-p)A_m}{4\pi N_\lambda^2(1+2\lambda^2)^2} \int_0^{2\pi} \frac{N^2 \sin^2 \omega (I-1-2\lambda^2)(1-N^2)}{(\sigma_\theta+2)I + i\beta(\cos \theta \frac{I}{1+2\lambda^2} - (\cos \theta + N \cos \phi))} d\theta, \end{aligned}$$

με $\theta = \tan^{-1}(l/k)$, $\omega = \phi - \theta$, $I = 1 + 2N \cos \omega + N^2$ και $I_\lambda = I + 2\lambda^2$ και A_m το πλάτος της διέγερσης:

$$A_m = \frac{\epsilon(1+2\lambda^2)}{2(1+(2+p)\lambda^4+3\lambda^2)}. \quad (3.28)$$

Οι εξισώσεις διασποράς (3.24), (3.25) δείχνουν ότι οι ιδιοτιμές του βαροτροπικού και βαροκλινικού μέρους εξαρτώνται από την τριβή, το μηχανισμό Rossby που δρα στις δομές της μέσης ροής και τις αναδράσεις. Οι Bakas and Ioannou, (2019) μελέτησαν

τις εξισώσεις διασποράς (3.24)-(3.25) επιλύοντας τις αριθμητικά. Βρήκαν ότι το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές, όταν η ισχύς της διέγερσης ϵ είναι μικρότερη από ένα κρίσιμο κατώφλι ϵ_c . Για μεγαλύτερες τιμές από το κρίσιμο κατώφλι βρήκαν ότι η ισορροπία είναι ασταθής, δηλαδή βρήκαν δομές με $\text{real}(\sigma_\psi) > 0$, ή και $\text{real}(\sigma_\theta) > 0$. Βρέθηκε επίσης, ότι κοντά στο όριο αστάθειας ϵ_c οι συχνότητες των ασταθών δομών προσεγγίζουν τη βαροτροπική $\text{imag}(\sigma_\psi) = \beta \cos \phi / N$ και βαροκλινική $\text{imag}(\sigma_\theta) = \beta N \cos \phi / N_\lambda^2$ συχνότητα Rossby. Οι πιο ασταθείς δομές βρέθηκαν να είναι είτε κύματα Rossby σε μεγάλες τιμές της βαθμίδας πλανητικού στροβιλισμού είτε στάσιμοι χείμαρροι σε μικρές τιμές της βαθμίδας. Για μεγάλες τιμές διαστρωμάτωσης $\lambda \sim \mathcal{O}(1)$ και ασυσχέτιστη διέγερση στα δύο στρώματα οι βαροκλινικές δομές προέκυψε ότι είναι ευσταθείς και οι βαροτροπικές ασταθείς. Σε μικρότερες τιμές της παραμέτρου, βαροτροπικές και βαροκλινικές δομές είναι ασταθείς με τις βαροκλινικές ωστόσο να έχουν μικρότερο ρυθμό αύξησης.

Η τιμή ϵ_c που προκύπτει από τις εξισώσεις διασποράς βρέθηκε να είναι σε πολύ καλή συμφωνία με την τιμή της κρίσιμης ισχύος ενέργειας πάνω από την οποία οι συνεκτικές δομές αποκτούν σημαντικό πλάτος στις μη γραμμικές προσωμοιώσεις. Η κλίμακα και η φασική ταχύτητα των κυρίαρχων δομών που προκύπτουν από την S3T καθώς και η ευστάθεια των βαροκλινικών δομών για μεγάλες τιμές διαστρωμάτωσης, βρέθηκαν επίσης να αντιστοιχούν στα αποτελέσματα από τις μη γραμμικές προσωμοιώσεις. Στην παρούσα εργασία, ο σκοπός είναι να μελετήσουμε τις αναδράσεις f_ψ , f_θ κόντα στο κατώφλι της αστάθειας ϵ_c ώστε να αναδείξουμε τα χαρακτηριστικά τους και την επίδραση τους στην αστάθεια του ομογενούς σημείου ισορροπίας S3T.

Κεφάλαιο 4

Χαρακτηριστικά της αστάθειας

4.1 Αναδράσεις στο όριο της S3T αστάθειας

Όπως περιγράφηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο η αστάθεια του στατιστικά ομογενοῦς πεδίου τύρβης, εκφράζεται από τις εξισώσεις διασποράς (3.24), (3.25). Όταν οι ιδιοτιμές $\sigma_\psi, \sigma_\theta$ έχουν θετικό πραγματικό μέρος, το πλάτος των δομών αυξάνει εκθετικά και έχουμε αστάθεια. Επειδή ο όρος που εκφράζει το μηχανισμό Rossby είναι φανταστικός, το πραγματικό μέρος των αναδράσεων f_ψ, f_θ και η τριβή είναι οι παράγοντες που καθορίζουν την αστάθεια. Για να έχουμε αστάθεια θα πρέπει το πραγματικό μέρος των αναδράσεων να είναι θετικό και η ισχύς της διέγερσης να είναι αρκετή ώστε να υπερσχύσουν οι αναδράσεις σε σχέση με την τριβή. Με δεδομένο ότι αυτό το κατώφλι για την ισχύ υπάρχει και είναι το ϵ_c που βρήκαν οι Bakas and Ioannou (2019), η ύπαρξη αστάθειας εξαρτάται από το αν οι αναδράσεις έχουν θετικό πραγματικό μέρος. Έτσι, θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά του πραγματικού μέρους των αναδράσεων στο κρίσιμο κατώφλι που το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών είναι μηδέν (όριο αστάθειας) και το φανταστικό μέρος σύμφωνα με τους Bakas and Ioannou (2019) είναι πολύ κοντά στη βαροτροπική $\sigma_{R\psi} = -i\beta \cos \phi / N$ και τη βαροκλινική $\sigma_{R\theta} = -i\beta N \cos \phi / N_\chi^2$ συχνότητα Rossby.

Με βάση τις παραπάνω θεωρήσεις τα πραγματικά μέρη των αναδράσεων στο όριο

αστάθειας είναι:

$$\begin{aligned} f_t^t &= \text{real} \left[f_\psi^\psi (\sigma_\psi = \sigma_{R\psi}) \right] \\ &= \frac{(1+p) A_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \omega (I-1) (1-N^2) I}{\beta^2 \left[(I-N^2) \frac{\cos \phi}{N} + (I-1) \cos \theta \right]^2 + 4I^2} d\theta, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} f_t^c &= \text{real} \left[f_\psi^\theta (\sigma_\psi = \sigma_{R\psi}) \right] \\ &= \frac{(1-p) A_m}{2\pi (1+2\lambda^2)^2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \omega (I-1) (1-N^2+2\lambda^2) I_\lambda}{\beta^2 \left[(I_\lambda-N^2) \frac{\cos \phi}{N} + (I-1) \frac{\cos \theta}{1+2\lambda^2} \right]^2 + 4I_\lambda^2} d\theta, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} f_c^t &= \text{real} \left[f_\theta^\psi (\sigma_\theta = \sigma_{R\theta}) \right] \\ &= \frac{(1+p) A_m}{2\pi N_\lambda^2} \int_0^{2\pi} \frac{N^2 \sin^2 \omega (I_\lambda-1) (1-N_\lambda^2) I_\lambda}{\beta^2 \left[(1+2N \cos \omega) \frac{N \cos \phi}{N_\lambda^2} + (I_\lambda-1) \cos \theta \right]^2 + 4I_\lambda^2} d\theta, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} f_c^c &= \text{real} \left[f_\theta^\theta (\sigma_\theta = \sigma_{R\theta}) \right] \\ &= \frac{(1-p) A_m}{2\pi N_\lambda^2 (1+2\lambda^2)^2} \int_0^{2\pi} \frac{N^2 \sin^2 \omega (I_\lambda-1) (1-N^2) I}{\beta^2 \left[\frac{(I-N_\lambda^2) N \cos \phi}{N_\lambda^2} + (I_\lambda-1) \frac{\cos \theta}{1+2\lambda^2} \right]^2 + 4I^2} d\theta. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Η ανάδραση f_t^t αναπαριστά την οργάνωση των βαροτροπικών δινών από τη βαροτροπική μέση ροή και η ανάδραση f_t^c αναπαριστά την οργάνωση των βαροκλινικών δινών από τη βαροτροπική μέση ροή. Οι f_c^t και f_c^c αναπαριστούν την οργάνωση των βαροτροπικών και βαροκλινικών δινών αντίστοιχα από τη βαροκλινική μέση ροή. Αν συμβεί για κάποιον κυματάρημο της μέσης ροής N η ανάδραση f_t^t να είναι θετική, τότε η δομή που αντιστοιχεί στον κυματάρημο αυτό οργάνώνει τις βαροτροπικές δίνες ώστε οι δίνες με τη σειρά τους να την ενισχύσουν. Αντίθετα, αν η ανάδραση είναι αρνητική τότε η οργάνωση των βαροτροπικών δινών εξασθενεί τη δομή. Η βαροτροπική δομή οργάνώνει επίσης και τις βαροκλινικές δίνες μέσω της ανάδρασης f_t^c , με την οργάνωση των βαροκλινικών δινών από τη δομή να έχει ως αποτέλεσμα την ενίσχυση ή την εξασθένηση της δομής ανάλογα πάλι με το πρόσημο της ανάδρασης. Έτσι, μια βαροτροπική δομή μπορεί να ενισχύεται ή να εξασθενεί και από τις δύο αναδράσεις ή να ενισχύεται από τη μία και να εξασθενεί από την άλλη. Η ευστάθεια ή αστάθεια της συγκεκριμένης δομής εξαρτάται από τη συνολική

αλληλεπίδραση της με τις βαροτροπικές και βαροκλινικές δίνες και εκφράζεται από το πρόσημο του αθροίσματος των δύο αναδράσεων. Με τον ίδιο τρόπο αλληλεπιδρούν και οι βαροκλινικές δομές της μέσης ροής με τις δίνες μέσω των αναδράσεων f_c^t και f_c^e .

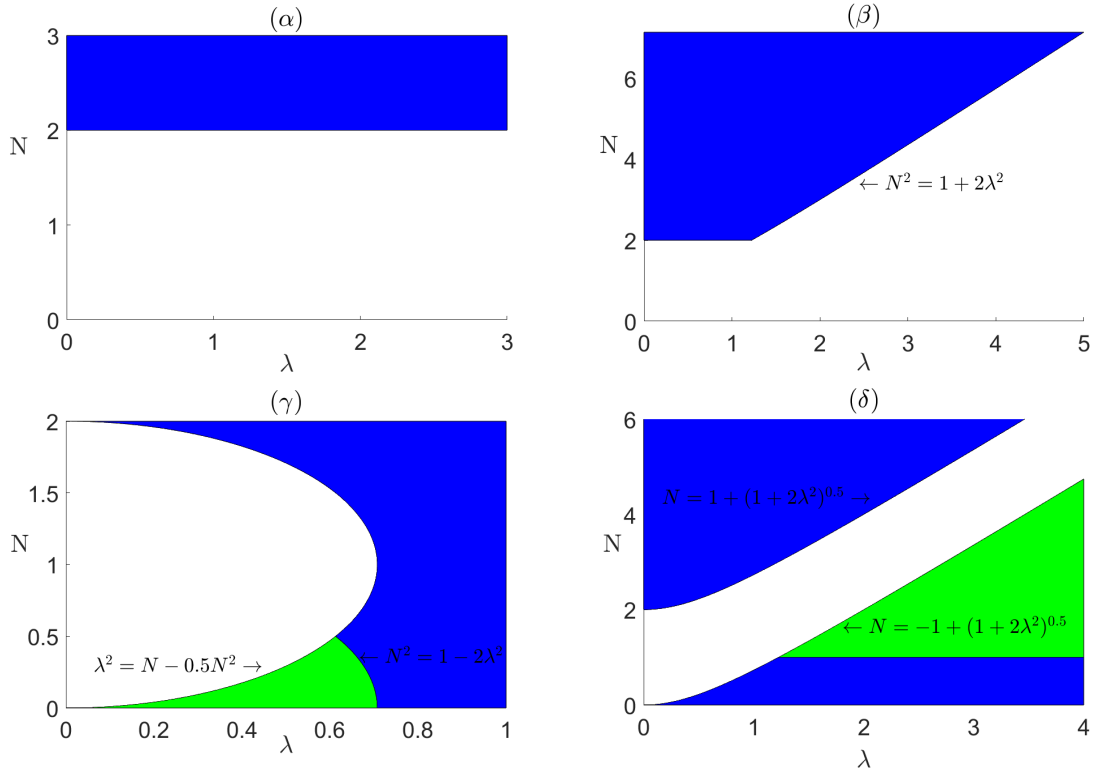
Το άθροισμα των αναδράσεων που καθορίζει την ευστάθεια ή την αστάθεια των βαροτροπικών και βαροκλινικών δομών εξαρτάται επίσης από τη συνδιακύμανση της διέγερσης στα δύο στρώματα που αντιπροσωπεύεται από το συντελεστή συσχέτισης της διέγερσης p . Αν για παράδειγμα ο συντελεστής είναι θετικός τότε ευνοείται η διέγερση των βαροτροπικών δινών σε σχέση με τις βαροκλινικές και επομένως ενισχύεται η συνεισφορά από τις αναδράσεις της οργάνωσης των βαροτροπικών δινών και εξασθενεί η συνεισφορά από τις αναδράσεις των βαροκλινικών δινών. Το αντίθετο συμβαίνει όταν ο συντελεστής είναι αρνητικός. Οι οριακές περιπτώσεις είναι α) να διεγείρονται μόνο οι βαροτροπικές δίνες ($p = 1$), οπότε έχουμε τη συνεισφορά μόνο των αναδράσεων f_t^t και f_c^t , και β) να διεγείρονται μόνο οι βαροκλινικές δίνες ($p = -1$), οπότε έχουμε τη συνεισφορά μόνο των αναδράσεων f_t^e και f_c^e . Στην περίπτωση της ασυσχέτιστης διέγερσης ($p = 0$) έχουμε ίση συνεισφορά και της οργάνωσης των βαροτροπικών και των βαροκλινικών δινών.

Στις παρακάτω Ενότητες υπολογίζονται χωριστά οι αναδράσεις για όλο το εύρος των τιμών του πλανητικού στροβιλισμού β και της διαστρωμάτωσης λ και για όλες τις κυματικές δομές με κλίμακα N και προσανατολισμό των ισοφασικών τους επιφανειών ϕ και συζητάμε το άθροισμά τους που δίνει τη συνολική ανάδραση ως συνάρτηση της συσχέτισης της διέγερσης στα δύο στρώματα.

4.2 Καθορισμός ορίων αστάθειας

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, το πρόσημο των αναδράσεων εξαρτάται από τις τιμές των κλιματικών παραμέτρων, δηλαδή την τιμή της βαθμίδας του πλανητικού στροβιλισμού που εκφράζεται μέσω της παραμέτρου β και τη διαστρωμάτωση που εκφράζεται από την παράμετρο λ . Εξαρτάται όμως και από το διάνυσμα του κυματάριθμου των

δομών μεγάλης κλίμακας δηλαδή από το μέτρο του N και τη γωνία του με το ζωνικό άξονα ϕ . Ωστόσο παρατηρώντας τα ολοκληρώματα στις σχέσεις (4.1)-(4.4), φαίνεται ότι οι περισσότεροι όροι στους παρανομαστές καθώς και κάποιοι όροι στους αριθμητές των ολοκληρωτέων συναρτήσεων είναι θετικοί για όλες τις τιμές των παραμέτρων. Οι μόνοι όροι που αλλάζουν πρόσημο βρίσκονται στους αριθμητές και είναι συναρτήσεις του μέτρου του κυματάριθμου N , της διαστρωμάτωσης λ καθώς και της γωνίας $\omega = \phi - \theta$ μέσω των ποσοτήτων $I = 1 + 2N \cos \omega + N^2$ και $I_\lambda = I + 2\lambda^2$. Επειδή η συνάρτηση του συνημιτόνου είναι φραγμένη $|\cos \omega| \leq 1$, μπορούμε να βρούμε όρια για το πρόσημο των αναδράσεων που είναι ανεξάρτητα του β και της γωνίας ϕ . Τα όρια αυτά σε σχέση με το μέτρο του κυματάριθμου N και τη διαστρωμάτωση λ εξάγονται αναλυτικά παρακάτω για τις τέσσερις αναδράσεις και σχεδιάζονται στο Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Πρόσημο των αναδράσεων (α) f_t^t , (β) f_t^c , (γ) f_c^t και (δ) f_c^c συναρτήσει του μέτρου του κυματάριθμου των διαταραχών N και της παραμέτρου λ . Στις μπλε περιοχές η τιμή των αναδράσεων είναι αρνητική, στις πράσινες θετική, ενώ στις περιοχές χωρίς χρώμα δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Για την ανάδραση που προκύπτει από την οργάνωση των βαροτροπικών δινών από τη βαροτροπική μέση ροή (f_t^t) οι μόνοι όροι που αλλάζουν πρόσημο είναι το γινόμενο:

$$(I - 1) (1 - N^2) .$$

Για δομές με $N > 2$ το παραπάνω γινόμενο είναι αρνητικό για κάθε λ και επομένως η οργάνωση των βαροτροπικών δινών από το βαροτροπικό κομμάτι της μέσης ροής f_t^t έχει την τάση να εξασθενεί τις δομές μικρής κλίμακας.

Αντίστοιχα για την ανάδραση των βαροκλινικών δινών στη βαροτροπική μέση ροή (f_t^c) οι όροι που αλλάζουν πρόσημο είναι το γινόμενο:

$$(I - 1) (1 - N^2 + 2\lambda^2) .$$

Προκύπτουν έτσι τα κάτω όρια για τους κυματάριθμους N όπου η f_t^c είναι αρνητική που συγκεκριμένα είναι το $N > 2$ αν $\lambda < \sqrt{3/2}$ και $N > \sqrt{1 + 2\lambda^2}$ για $\lambda > \sqrt{3/2}$. Επειδή το ένα όριο είναι κοινό με την ανάδραση f_t^t , το άθροισμά τους που είναι η ανάδραση για τις βαροτροπικές δομές, είναι αρνητικό για κυματάριθμους που βρίσκονται στη μπλέ περιοχή στο Σχήμα 4.1β και επομένως οι βαροτροπικές δομές μικρής κλίμακας είναι ευσταθείς.

Για την ανάδραση των βαροτροπικών δινών από τη βαροκλινική μέση ροή (f_t^c) οι όροι που αλλάζουν πρόσημο είναι οι:

$$(I_\lambda - 1) (1 - N^2 - 2\lambda^2) .$$

Προκύπτουν δύο καμπύλες που καθορίζουν τα όρια αστάθειας: η $\lambda^2 = N - N^2/2$ για κάθε λ και η $N^2 = 1 - 2\lambda^2$ στο διάστημα $\sqrt{3/8} \leq \lambda \leq \sqrt{1/2}$. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.1γ, για ζεύγη τιμών (N, λ) στο χωρίο που ορίζεται από τις δύο καμπύλες και τον άξονα του λ η ανάδραση είναι θετική. Για ζεύγη τιμών στο χωρίο που ορίζεται από την πρώτη καμπύλη και τον άξονα του N δεν μπορούμε να αποφανθούμε, ενώ για ζεύγη τιμών έξω από τα παραπάνω χωρία η ανάδραση είναι αρνητική.

Τέλος για την ανάδραση των βαροκλινικών δινών από τη βαροκλινική μέση ροή (f_c^c) οι όροι που αλλάζουν πρόσημο είναι οι:

$$(I - 1 - 2\lambda^2) (1 - N^2) .$$

Το γινόμενο είναι αρνητικό όταν $N > 1 + \sqrt{1 + 2\lambda^2}$. Αν $\lambda < \sqrt{3/2}$ τότε είναι αρνητικό και στην περιοχή $N < \sqrt{1 + 2\lambda^2} - 1$. Αν $\lambda > \sqrt{3/2}$ τότε είναι αρνητικό στην περιοχή $N < 1$ και θετικό στην περιοχή $1 < N < \sqrt{1 + 2\lambda^2} - 1$. Τα παραπάνω όρια φαίνονται στο Σχήμα 4.1δ. Παρατηρούμε ότι για $N > 1 + \sqrt{1 + 2\lambda^2}$ που αντιστοιχεί στο άνω όριο αστάθειας της f_c^e οι δύο αναδράσεις f_c^t, f_c^e είναι αρνητικές. Επομένως και το άθροισμά τους που είναι η συνολική βαροκλινική ανάδραση είναι αρνητικό με αποτέλεσμα και οι βαροκλινικές δομές μικρής κλίμακας να είναι ευσταθείς. Από τις απεικονίσεις των f_c^t και f_c^e μπορούμε επίσης να συμπεράνουμε ότι οι μεγάλης κλίμακας βαροκλινικές δομές ($N < 1$) είναι ευσταθείς για τιμές τις παραμέτρου $\lambda > \sqrt{3/2}$ αφού και οι δύο αναδράσεις f_c^t, f_c^e είναι αρνητικές. Έτσι, το εύρημα των Bakas and Ioannou (2019) για απουσία βαροκλινικών δομών μεγάλης κλίμακας στην περίπτωση ισχυρής διαστρωμάτωσης είναι γενικό (ανεξάρτητο του β και της συσχέτισης της διέγερσης) και οφείλεται στην αρνητική ανάδραση που έχει η οργάνωση και των βαροτροπικών και των βαροκλινικών δινών από τις βαροκλινικές δομές μεγάλης κλίμακας.

4.3 Οι αναδράσεις απουσία της βαθμίδας του πλανητικού στροβιλισμού

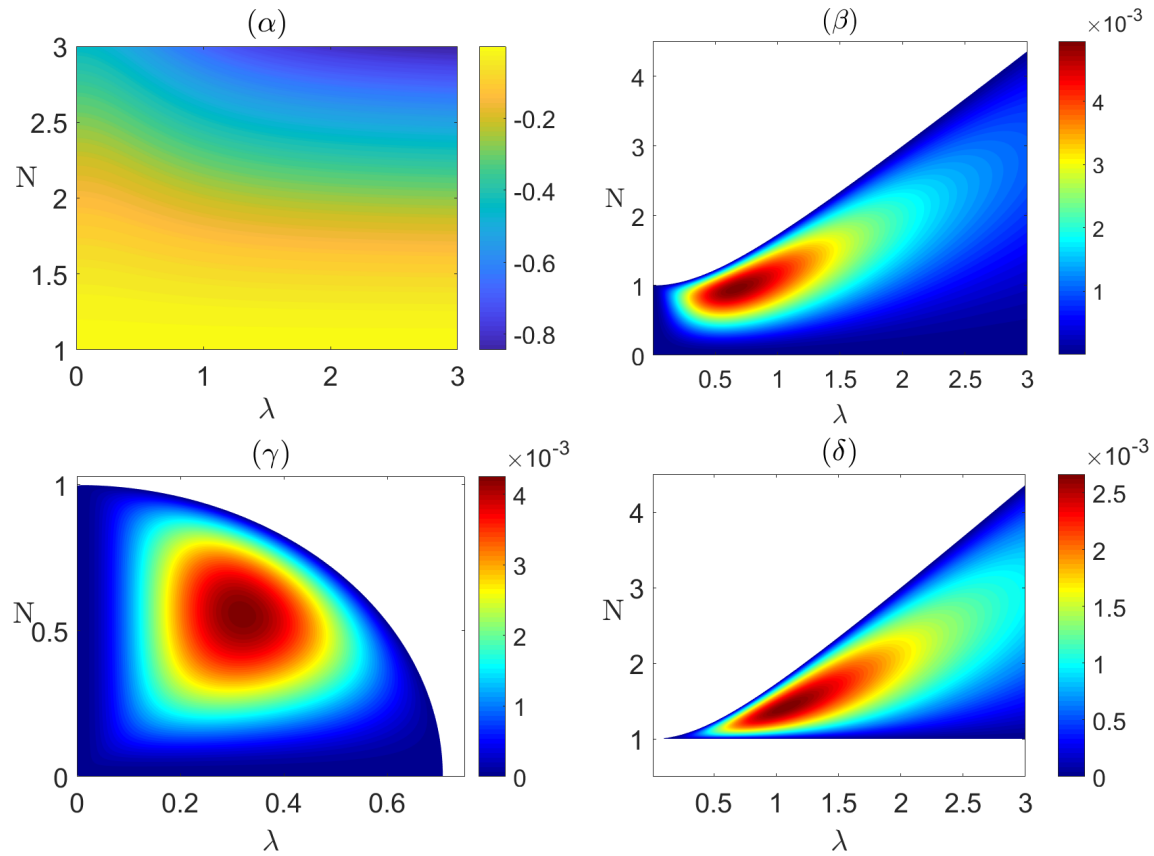
Ο υπολογισμός των αναδράσεων, αν θεωρήσουμε ότι η κλίμακα των κινήσεων είναι τέτοια ώστε η μεταβολή του πλανητικού στροβιλισμού να μην παίζει ρόλο στη δυναμική, παρατίθεται παρακάτω. Για $\beta = 0$ ο μηχανισμός Rossby αποκόπτεται με δύο συνέπειες. Η μία είναι ότι οι αναδράσεις είναι ισοτροπικές, δηλαδή ίδιες για όλες τις γωνίες ϕ καθώς οι όροι που περιέχουν τη γωνία ϕ στις σχέσεις (4.1)-(4.4) είναι ανάλογοι του β^2 . Η δεύτερη είναι ότι οι δομές που αναδύονται είναι στάσιμες στο χώρο αφού η συχνότητα Rossby για $\beta = 0$ είναι μηδενική.

Τα ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά στην περίπτωση αυτή πηγαίνοντας στο μιγαδικό επίπεδο και εφαρμόζοντας τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοί-

πων. Έτσι παίρνουμε:

$$f_t^t = \begin{cases} -(1+p)A_m(N^2-1)^2/8N^2 & \text{για } N > 1, \\ 0 & \text{για } N \leq 1, \end{cases} \quad (4.5)$$

που φαίνεται στο Σχήμα 4.2α ως συνάρτηση των N , λ . Η f_t^t είναι πάντα αρνητική για



Σχήμα 4.2: Τιμές των αναδράσεων (α) f_t^t , (β) f_t^c , (γ) f_c^t και (δ) f_c^c για μηδενική βαθμίδα πλανητικού στροβιλισμού ($\beta = 0$) και ασυσχέτιστη διέγερση ($p = 0$), συναρτήσει του μέτρου του κυματάριθμου των δομών N και της παραμέτρου λ . Η απεικόνιση της f_t^t αντιστοιχεί σε αρνητικές τιμές της για $N > 1$. Στις περιοχές χωρίς χρώμα οι αναδράσεις είναι αρνητικές και δε σχεδιάζονται.

$N > 1$ και μηδέν για $N \leq 1$. Επομένως η αστάθεια των βαροτροπικών δομών εξαρτάται από την ανάδραση που οφείλεται στην οργάνωση των βαροκλινικών δινών f_t^c από τη

βαροτροπική μέση ροή. Αυτή δίνεται από τη σχέση:

$$f_t^c = \frac{(1 + 2\lambda^2 - N^2)(1 - p)}{8(1 + 2\lambda^2)} \left[\frac{1}{1 + 2\lambda^2} + \frac{z_1}{N} \right] A_m, \quad (4.6)$$

όπου

$$z_1 = \frac{-(1 + N_\lambda^2) + \sqrt{(1 + N_\lambda^2)^2 - 4N^2}}{2N} \quad (4.7)$$

και σχεδιάζεται στο Σχήμα 4.2β. Παρατηρούμε ότι η ανάδραση είναι αρνητική για $N > \sqrt{1 + 2\lambda^2}$, ενώ οι μέγιστες θετικές τιμές παρατηρούνται για κυματάρια λίγο μικρότερους από το 1 και για $1/2 \leq \lambda \leq 3/2$. Για τις δομές πολύ μεγάλης κλίμακας ($N \ll 1$) προκύπτει η ασυμπτωτική μορφή:

$$f_t^c \simeq \frac{(1 - p) A_m \lambda^2}{4(1 + 2\lambda^2)^3} N^2, \quad (4.8)$$

δηλαδή η ανάδραση για πολύ μεγάλες κλίμακες δρα ως αντι-διάχυση σε συμφωνία με την παλιά ιδέα του Starr (1968).

Για τις αναδράσεις της βαροκλινικής μέσης ροής προκύπτει αντίστοιχα ότι:

$$f_c^t = \frac{N^2(1 - N_\lambda^2)(1 + p) A_m}{8N_\lambda^2} \left(1 + \frac{z_1}{N} \right), \quad (4.9)$$

η οποία φαίνεται στο Σχήμα 4.2γ. Η ανάδραση f_c^t είναι θετική μόνο για μεγάλης κλίμακας βαροκλινικές δομές και μικρές τιμές της παραμέτρου λ αφού είναι αρνητική για $N > \sqrt{1 - 2\lambda^2}$ και άρα για $\lambda > \sqrt{1/2}$, είναι αρνητική για όλες τις δομές. Οι μέγιστες τιμές παρατηρούνται για $N \simeq 1/2$, $\lambda \simeq 1/3$ ενώ για πολύ μεγάλες δομές ($N \ll 1$) η ανάδραση δρα πάλι ως αντιδιάχυση καθώς:

$$f_c^t \simeq \frac{(1 + p) A_m (1 - 2\lambda^2)}{8(1 + 2\lambda^2)} N^2. \quad (4.10)$$

Τέλος η ανάδραση f_c^c δίνεται από τη σχέση:

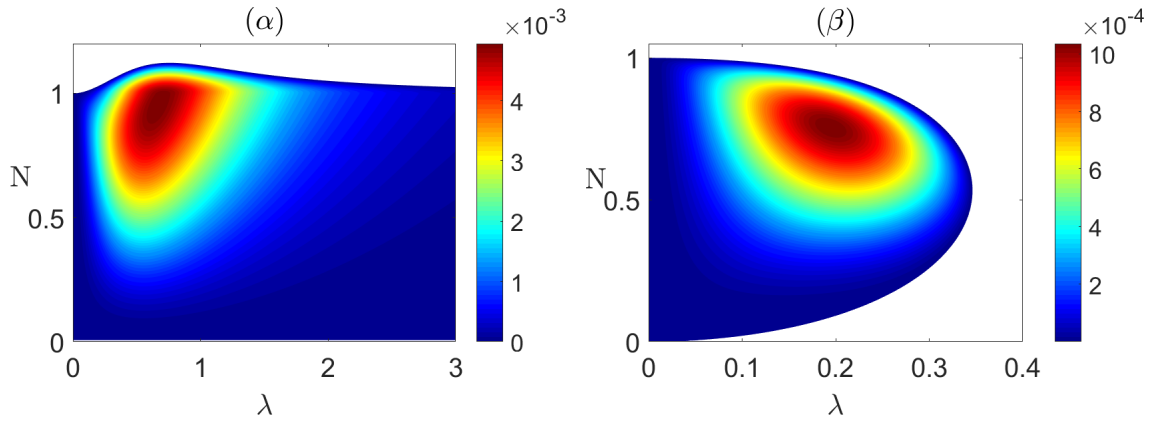
$$f_c^c = \begin{cases} -\frac{2\lambda^2 N^2 (1 - N^2)(1 - p)}{8(1 + 2\lambda^2)^2 (N^2 + 2\lambda^2)} A_m & \text{για } N \leq 1, \\ \frac{(1 - N^2)(1 - p)(N^2 - 1 - 2\lambda^2)}{8(1 + 2\lambda^2)^2 (N^2 + 2\lambda^2)} A_m & \text{για } N > 1, \end{cases} \quad (4.11)$$

και φαίνεται στο Σχήμα 4.2δ. Παρατηρούμε ότι έχουμε θετικές τιμές για κυματάριθμους $1 < N < \sqrt{1+2\lambda^2}$, με τις μέγιστες θετικές τιμές για $1 < N \leq 2$ και $1/2 \leq \lambda \leq 2$. Επομένως η οργάνωση των βαροκλινικών δινών f_c^e είναι θετική για βαροκλινικές δομές κλίμακας μικρότερης από την κλίμακα της διέγερσης και το άνω όριο του κυματάριθμου των ασταθών δομών συμπίπτει με αυτό της f_t^e .

Η αθροιστική συμπεριφορά των αναδράσεων καθορίζει την επιδρασή τους στη μέση ροή. Όταν η διέγερση είναι βαροτροπική ($p = 1$), έχουμε όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 4.1, $f_t^e = f_c^e = 0$. Έτσι οι βαροτροπικές δομές είναι ευσταθείς και οι βαροκλινικές δομές μεγάλης κλίμακας ($N < 1$) είναι ασταθείς για μικρές τιμές της παραμέτρου λ , ενώ για μεγάλες τιμές της παραμέτρου λ και οι βαροκλινικές είναι ευσταθείς. Αντίθετα αν η διέγερση είναι βαροκλινική ($p = -1$), έχουμε $f_t^t = f_c^t = 0$ με αποτέλεσμα να είναι ασταθείς βαροτροπικές δομές μεγάλης και μικρής κλίμακας και βαροκλινικές δομές μικρής κλίμακας ($N > 1$).

Στην περίπτωση ασυσχέτιστης διέγερσης ($p = 0$), έχουμε ισοδύναμη συνεισφορά από όλες τις αναδράσεις. Η συνολική ανάδραση f_t , η οποία σχεδιάζεται στο Σχήμα 4.3α συναρτήσει των N, λ , είναι θετική κυρίως για δομές με κλίμακες μεγαλύτερες από αυτή της διέγερσης με μέγιστες τιμές για N λίγο μικρότερο του 1 και για $\lambda < 1$. Η συνολική βαροκλινική ανάδραση f_c φαίνεται στο Σχήμα 4.3β. Παρατηρούμε ότι ενισχύονται μόνο δομές με μεγαλύτερη κλίμακα από των διεγερόμενων δινών σε μικρές τιμές της παραμέτρου λ . Ο λόγος είναι ότι η θετική ανάδραση f_c^e για $N > 1$ εξουδετερώνεται από τις αρνητικές τιμές της f_c^t για τις δομές μικρής κλίμακας. Επίσης, οι τιμές της βαροκλινικής ανάδρασης είναι κατά μία τάξη μικρότερες από τις αντίστοιχες βαροτροπικές λόγω της μερικής εξουδετέρωσης των θετικών τιμών της f_c^e από τις αρνητικές τιμές της f_c^t για $N < 1$. Με βάση τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι στην περίπτωση που η διέγερση είναι ασυσχέτιστη και δρουν αθροιστικά και τα δύο μέρη στις αναδράσεις οι βαροτροπικές δομές μεγάλης κλίμακας είναι ασταθείς ανεξάρτητα της διαστρωμάτωσης λόγω των ρών ορμής και θερμότητας από τις βαροκλινικές δίνες. Οι βαροκλινικές δομές είναι ασταθείς μόνο για μικρές τιμές του λ με μικρότερους ρυθμούς αύξησης από τις βαροτρο-

πικές εξαιτίας της τάσης των αναδράσεων f_c^t, f_c^e να αλληλοεξουδετερωνθούν. Οι θετικές ροές ορμής και θερμότητας προέρχονται στην περίπτωση αυτή από την οργάνωση των βαροτροπικών δινών.

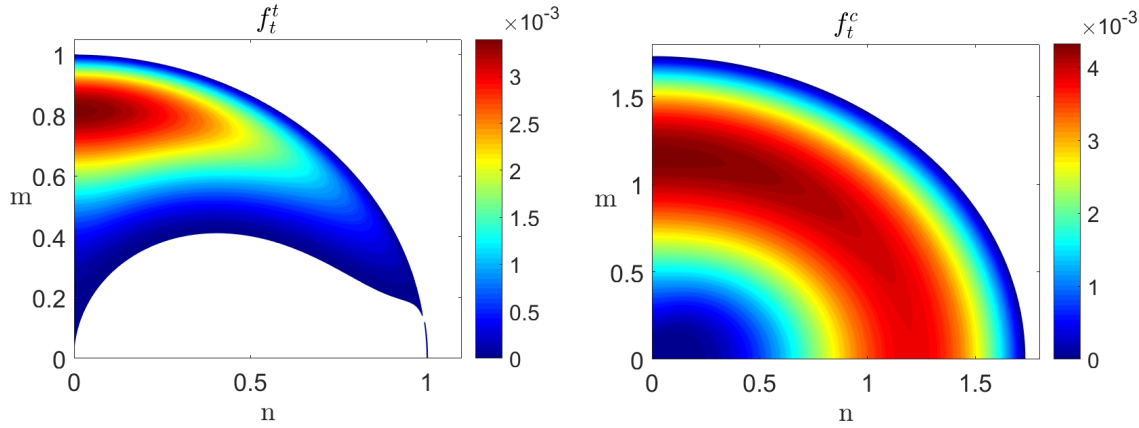


Σχήμα 4.3: Θετικές τιμές των συνολικών αναδράσεων της (α) βαροτροπικής και (β) βαροκλινικής μέσης ροής, για μηδενική βαθμίδα πλανητικού στροβιλισμού ($\beta = 0$) και ασυσχέτιστη διέγερση ($p = 0$), συναρτήσει του μέτρου του κυματάριθμου των δομών N και της παραμέτρου λ .

4.4 Αστάθεια για μικρή βαθμίδα πλανητικού στροβιλισμού

Παρακάτω παρουσιάζονται οι αναδράσεις, για μικρή βαθμίδα του πλανητικού στροβιλισμού ($\beta = 1$) και για τρεις τιμές του λ καλύπτοντας ένα μεγάλο εύρος για τη διαστρωμάτωση. Ο υπολογισμός τους γίνεται με αριθμητική ολοκλήρωση μέσω κώδικα που παρατίθεται στο Παράρτημα Β'.

Στο Σχήμα 4.4, σχεδιάζονται οι αναδράσεις συναρτήσει του ζωνικού n και του μεσημβρινού m κυματάριθμου των δομών για $\lambda = 1$. Οι αναδράσεις ικανοποιούν τις σχέσεις $f(n, m) = f(-n, m) = f(n, -m)$ ως προς τον κυματάριθμο των δομών $\mathbf{N} = (n, m)$. Επόμενως η αναπαράσταση τους στο πρώτο τεταρτημόριο του φασικού χώρου των κυματάριθμων είναι επαρκής. Παρατηρούμε ότι η f_t^e παρουσιάζει θετικές τιμές σε μεγάλο

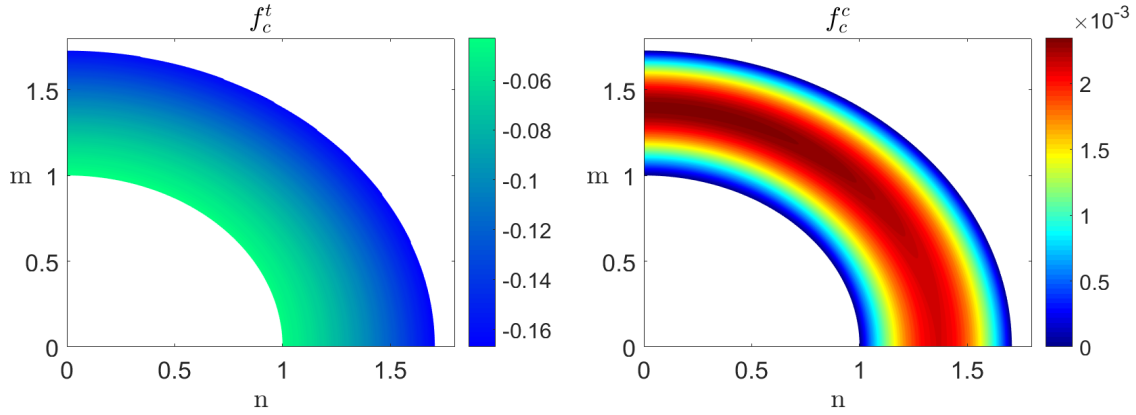


Σχήμα 4.4: Θετικές τιμές των αναδράσεων της βαροτροπικής μέσης ροής συναρτήσει των κυματάριθμων των δομών (n, m) για $\beta = 1$, $\lambda = 1$ και $p = 0$.

εύρος κυματάριθμων με σχεδόν ισοτροπική συμπεριφορά. Οι μέγιστες τιμές (αν και δεν είναι εμφανές στο σχήμα) είναι σε ζωνικούς χειμάρρους ($n = 0$) με κλίμακα μικρότερη της διέγερσης. Όμοιο και πιο ξεκάθαρο μέγιστο έχει και η f_t^t σε ζωνικούς χειμάρρους με κλίμακα μεγαλύτερη από αυτή της διέγερσης. Αυτό το εύρημα είναι σε συμφωνία με τους Bakas and Ioannou (2013) που έδειξαν ότι σε ένα βαροτροπικό σύστημα που η ανάδραση είναι ισοδύναμη με την f_t^t , η ισοτροπικότητα είναι μικρή και οι δίνες έχουν την τάση να ενισχύουν περισσότερο ζωνικούς χειμάρρους με μεγαλύτερη κλίμακα από αυτή της διέγερσης.

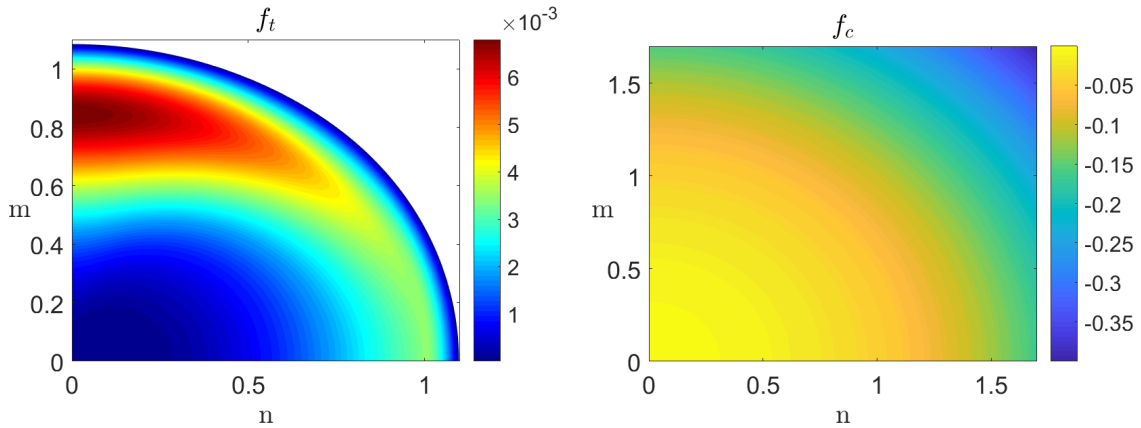
Στο Σχήμα 4.5 φαίνονται οι βαροκλινικές αναδράσεις για τις ίδιες παραμέτρους. Παρατηρούμε ότι η f_c^t είναι παντού αρνητική όπως αναμένουμε από την ανάλυση για το πρόσημο της ανάδρασης (βλέπε Σχήμα 4.1γ) και μάλιστα με αρκετά μεγάλες (κατά μέτρο) τιμές που ξεπερνούν έως και δύο τάξεις μεγέθους τις τιμές των άλλων αναδράσεων. Η f_c^c είναι θετική σε ένα σχεδόν ισοτροπικό δακτύλιο σε μικρότερες κλίμακες από της διέγερσης, με μέγιστες τιμές για ζωνικούς χειμάρρους.

Από τη μορφή των αναδράσεων φαίνεται ότι με εξαίρεση την f_t^t , οι αναδράσεις παρουσιάζουν σχεδόν ισοτροπική συμπεριφορά ενώ και οι τιμές τους είναι παρόμοιες με την περίπτωση $\beta = 0$. Επομένως η επίδραση του όρου του πλανητικού στροβιλισμού στις αναδράσεις φαίνεται ότι είναι ασθενής για μικρή τιμή της βαθμίδας. Έτσι, όταν η



Σχήμα 4.5: Τιμές των αναδράσεων της βαροκλινικής μέσης ροής συναρτήσει των κυματάριων των δομών (n, m) για $\beta = 1$, $\lambda = 1$ και $p = 0$. Η απεικόνιση είναι στην περιοχή των θετικών τιμών της f_c^c .

διέγερση είναι βαροτροπική μόνο οι βαροτροπικές δομές είναι ασταθείς. Όταν η διέγερση είναι βαροκλινική, είναι ασταθείς βαροτροπικές και βαροκλινικές δομές με το βαροτροπικό χείμαρρο να ενισχύεται περισσότερο το βαροκλινικό καθώς η f_t^c έχει διπλάσιες τιμές από την f_c^c .

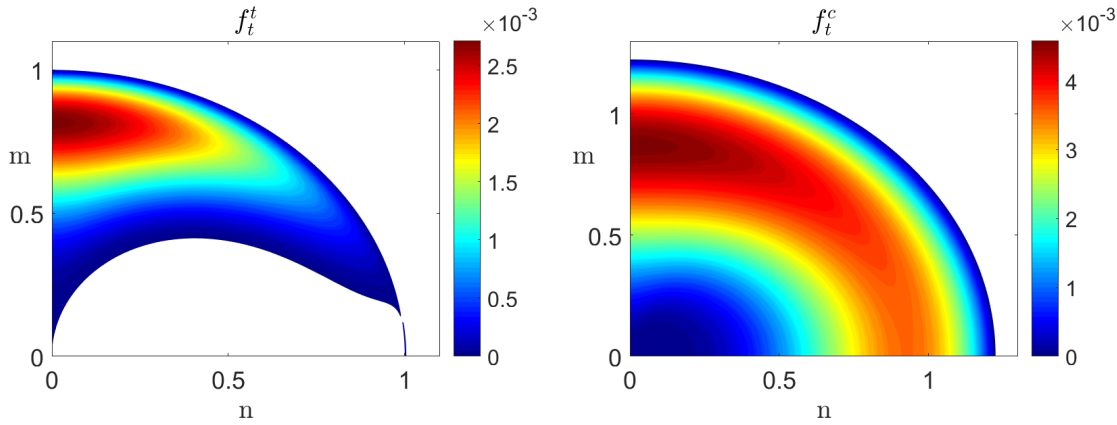


Σχήμα 4.6: Θετικές τιμές της συνολικής ανάδρασης της βαροτροπικής μέσης ροής f_t και αρνητικές τιμές της συνολικής ανάδρασης της βαροκλινικής μέσης ροής f_c συναρτήσει των κυματάριων των δομών (n, m) για $\beta = 1$, $\lambda = 1$ και $p = 0$.

Στην περίπτωση ασυσχέτιστης διέγερσης, οι συνολικές αναδράσεις φαίνονται στο Σχήμα 4.6. Η βαροτροπική ανάδραση f_t είναι μέγιστη στην περιοχή των θετικών τιμών

της f_t^t . Η μέγιστη ενίσχυση των αναδράσεων είναι σε ζωνικούς χειμάρρους που έχουν μεσημβρινή κλίμακα λίγο μεγαλύτερη από την κλίμακα της διέγερσης, ενώ η ενισχυτική συμπεριφορά της f_t^c στις μικρότερες κλίμακες αποκόπτεται από τις αρνητικές τιμές της f_t^t σε εκείνες τις δομές. Οι βαροκλινικές δομές είναι ευσταθείς αφού η ανάδραση των βαροτροπικών δινών f_c^t είναι ισχυρότερη από την ανάδραση των βαροκλινικών δινών f_c^c .

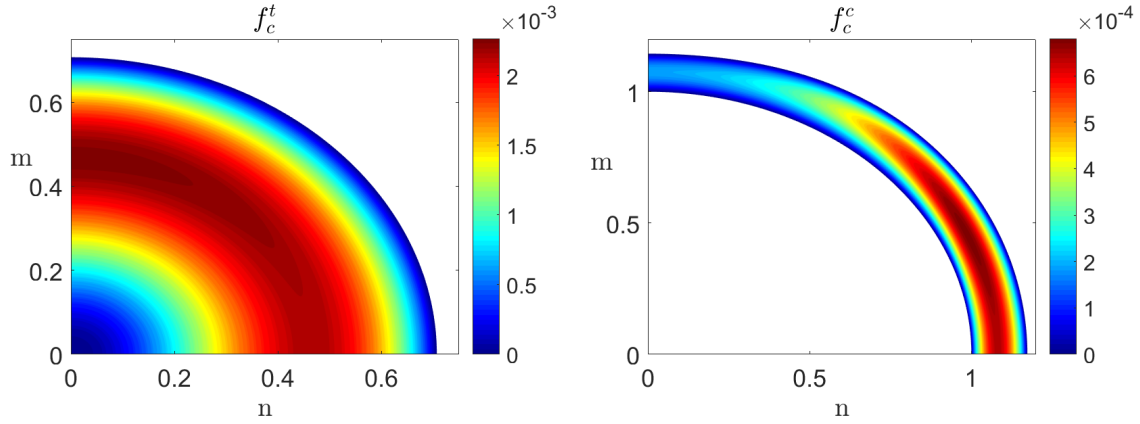
Στα Σχήματα 4.7 και 4.8 φαίνονται οι αναδράσεις για μικρότερη διαστρωμάτωση ($\lambda = 1/2$). Η f_t^t έχει μικρότερες τιμές σε σχέση με την περίπτωση της ισχυρής διαστρω-



Σχήμα 4.7: Θετικές τιμές των αναδράσεων της βαροτροπικής μέσης ροής συναρτήσει των κυματάριθμων των δομών $\mathbf{N} = (n, m)$ για $\beta = 1$, $\lambda = 1/2$ και $p = 0$.

μάτωσης ($\lambda = 1$) και την ίδια χωρική κατανομή αφού εξαρτάται μόνο πολλαπλασιαστικά από το λ μέσω της συνάρτησης A_m . Η f_t^c σε σχέση με την περίπτωση $\lambda = 1$ έχει μικρότερη ισοτροπικότητα, το άνω όριο των ασταθών κυματάριθμων έχει μειωθεί και η περιοχή με τις μέγιστες τιμές είναι σε μικρότερους κυματάριθμους.

Η f_c^t είναι σχεδόν ισοτροπική και σε αντίθεση με την περίπτωση $\lambda = 1$ παρουσιάζει θετικές τιμές ίδιας τάξης μεγέθους με τις αναδράσεις της βαροτροπικής μέσης ροής και μέγιστες τιμές σε ζωνικούς χειμάρρους με μεσημβρινή κλίμακα σχεδόν διπλάσια από την κλίμακα της διέγερσης. Η f_c^c είναι θετική σε ένα δακτύλιο με μικρότερη κλίμακα από αυτή της διέγερσης που μοιάζει με αυτόν της περίπτωσης $\lambda = 1$. Η διαφορά είναι ότι οι τιμές της ανάδρασης καθώς και το εύρος του δακτυλίου έχουν μειωθεί, ενώ ενισχύονται περισσότερο κυματικές δομές με μεσημβρινή κλίμακα περίπου ίση με την κλίμακα



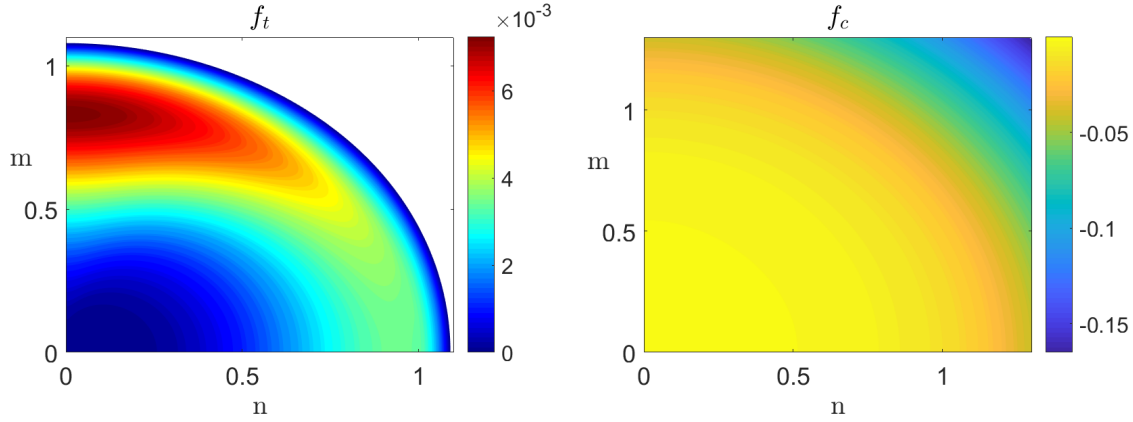
Σχήμα 4.8: Θετικές τιμές των αναδράσεων της βαροκλινικής μέσης ροής συναρτήσει των κυματάριων των δομών $\mathbf{N} = (n, m)$ για $\beta = 1$, $\lambda = 1/2$ και $p = 0$.

διέγερσης.

Σαν αποτέλεσμα των παραπάνω αναδράσεων, όταν η διέγερση είναι βαροτροπική, είναι ασταθείς μεγάλης κλίμακας βαροτροπικές δομές και ακόμη μεγαλύτερης κλίμακας βαροκλινικές δομές με την ενίσχυση του βαροτροπικού χειμάρρου να είναι μεγαλύτερη από την ενίσχυση του βαροκλινικού χειμάρρου. Όταν η διέγερση είναι βαροκλινική, οι βαροτροπικές δομές μεγάλης κλίμακας είναι ασταθείς. Οι ασταθείς βαροκλινικές δομές έχουν μικρότερη κλίμακα σε σχέση με τις βαροτροπικές και με τιμές ανάδρασης σχεδόν μια τάξη μεγέθους μικρότερη.

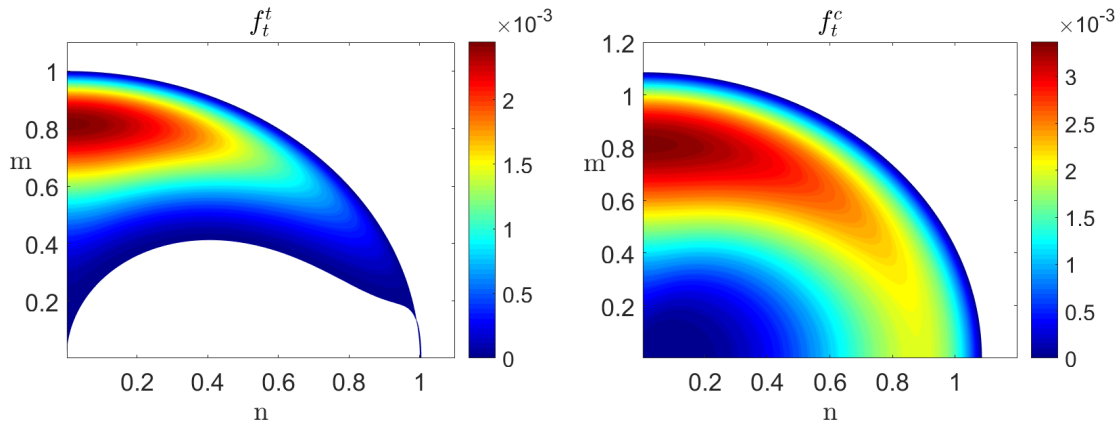
Για ασυσχέτιστη διέγερση, η συνολική βαροτροπική και βαροκλινική ανάδραση φαίνονται στο Σχήμα 4.9. Η αθροιστική συνεισφορά των δύο αναδράσεων f_t^t, f_t^c είναι ενισχυτική στην περιοχή των θετικών τιμών της f_t^t και συγκεκριμένα φαίνεται ότι υπάρχει σχεδόν τέλεια συμβολή των περιοχών με τις μέγιστες τιμές των δύο αναδράσεων. Οι κυρίαρχες δομές είναι ζωνικοί χειμάρροι με κλίμακα μεγαλύτερη από αυτή της διέγερσης. Η συμβολή των f_c^t και f_c^c είναι καταστρεπτική καθώς για τις δομές που η f_c^t είναι θετική η f_c^c είναι αρνητική και το αντίστροφο. Έτσι, έχουμε συνολικά αρνητικές τιμές με αποτέλεσμα οι βαροκλινικές δομές να είναι ευσταθείς.

Τέλος, εξετάζουμε την περίπτωση της σχετικά ασθενούς διαστρωμάτωσης $\lambda = 0.3$ με τις αναδράσεις να σχεδιάζονται στα Σχήματα 4.10 και 4.11. Για μικρές τιμές της



Σχήμα 4.9: Θετικές τιμές της συνολικής ανάδρασης της βαροτροπικής μέσης ροής f_t και αρνητικές τιμές της συνολικής ανάδρασης της βαροκλιτικής μέσης ροής f_c συναρτήσει των κυματάριθμων των δομών (n, m) για $\beta = 1$, $\lambda = 1/2$ και $p = 0$.

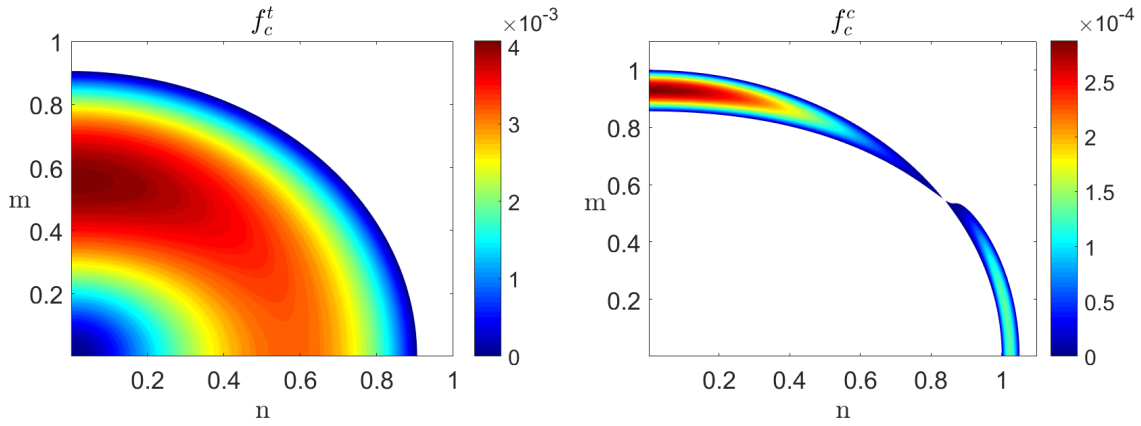
παραμέτρου λ οι αναδράσεις τείνουν να πάρουν τη μορφή της f_t^t , μια ιδιότητα που είναι γενική και δεν εξαρτάται από τη βαθμίδα του πλανητικού στροβιλισμού όπως θαδειχθεί και παρακάτω. Η f_c^c παρουσιάζει μικρότερη ισοτροπικότητα σε σχέση με τις περιπτώσεις ισχυρότερης διαστρωμάτωσης με μέγιστες τιμές σε ζωνικές δομές και η περιοχή των κυματάριθμων με τις μέγιστες τιμές είναι πολύ κοντά σε αυτή της f_t^t . Η f_c^c επίσης



Σχήμα 4.10: Θετικές τιμές των αναδράσεων της βαροτροπικής μέσης ροής συναρτήσει των κυματάριθμων των δομών $\mathbf{N} = (n, m)$ για $\beta = 1$, $\lambda = 0.3$ και $p = 0$.

παρουσιάζει μικρότερη ισοτροπικότητα, ενώ έχουμε θετικές τιμές σε μεγαλύτερους κυματάριθμους. Η f_c^c έχει θετικές τιμές μιας τάξης μεγέθους μικρότερες από τις υπόλοιπες

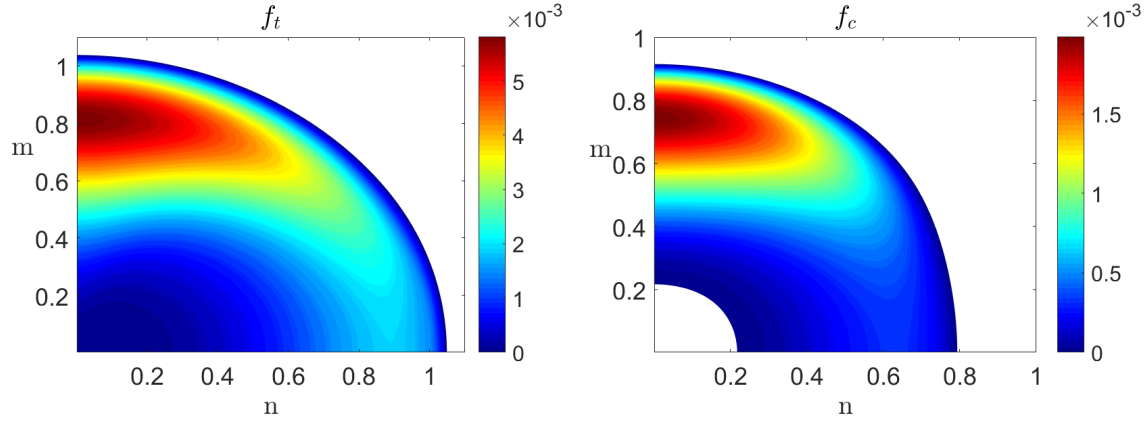
αναδράσεις. Σε αντίθεση με την περίπτωση $\lambda = 1/2$, παρουσιάζει μέγιστες τιμές σε ζωνικούς χειμάρρους με μεγαλύτερη κλίμακα από αυτή της διέγερσης.



Σχήμα 4.11: Θετικές τιμές των αναδράσεων της βαροκλινικής μέσης ροής συναρτήσει των κυματάρθμων των δομών $\mathbf{N} = (n, m)$ για $\beta = 1$, $\lambda = 0.3$ και $p = 0$.

Με βάση τα παραπάνω, για την περίπτωση βαροτροπικής διέγερσης αναμένουμε την εμφάνιση βαροκλινικών χειμάρρων καθώς ο βαροκλινικός χείμαρρος μεγάλης κλίμακας ενισχύεται με σχεδόν διπλάσιο ρυθμό από τον βαροτροπικό λόγω της διαφοράς στις μέγιστες τιμές των f_t^t και f_c^t . Αντιθέτως, για βαροκλινική διέγερση ο βαροτροπικός χείμαρρος ενισχύεται πολύ περισσότερο σε σχέση με το βαροκλινικό χείμαρρο λόγω των μικρών τιμών της f_c^c .

Για ασυσχέτιστη διέγερση, οι βαροτροπικές και βαροκλινικές αναδράσεις παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.12. Η οργάνωση των δινών από τη βαροτροπική μέση ροή παράγει μεγάλες τιμές αναδράσεων που οφείλονται όπως και στην περίπτωση $\lambda = 1/2$ στην ενισχυτική συμβολή των f_t^t, f_t^c . Σε αντίθεση με τις περιπτώσεις ισχυρότερης διαστρωμάτωσης, οι βαροκλινικές δομές για ασυσχέτιστη διέγερση είναι ασταθείς με τις μέγιστες τιμές της συνολικής ανάδρασης f_c να είναι μικρότερες της f_t , κάτι που οφείλεται στη μερική αλληλοεξουδετέρωση των f_c^t και f_c^c .

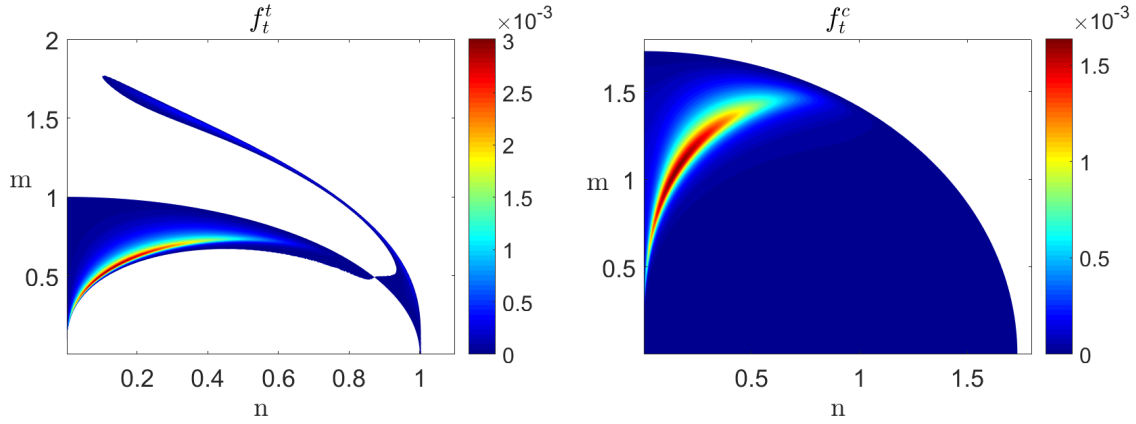


Σχήμα 4.12: Θετικές τιμές των συνολικών αναδράσεων της βαροτροπικής και βαροκλιτικής μέσης ροής συναρτήσει των κυματάριθμων των δομών $\mathbf{N} = (n, m)$ για $\beta = 1$, $\lambda = 0.3$ και $p = 0$.

4.5 Αστάθεια για μεγάλη βαθμίδα πλανητικού στροβιλισμού

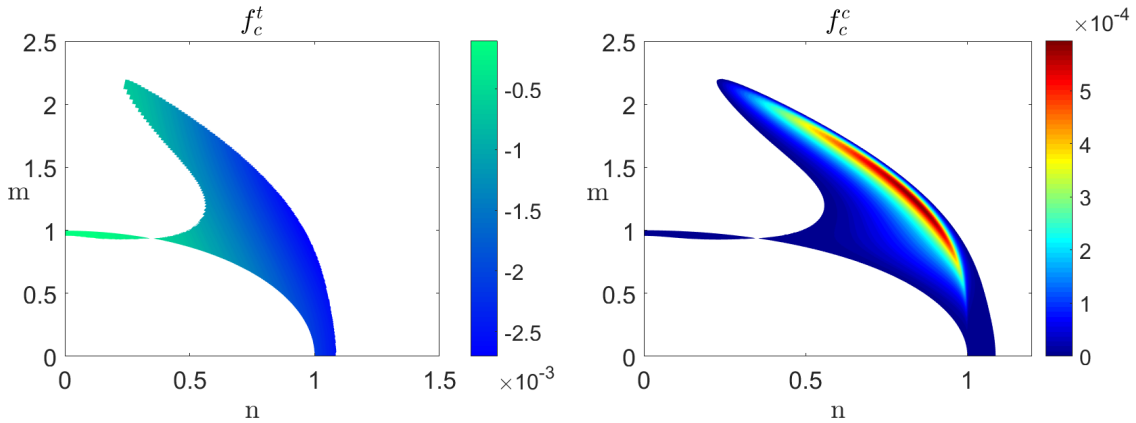
Παρακάτω απεικονίζονται οι αναδράσεις για μεγάλες τιμές της βαθμίδας του πλανητικού στροβιλισμού ($\beta = 100$) και τις τρεις περιπτώσεις διαστρωμάτωσης που εξετάστηκαν στην προηγούμενη Ενότητα. Η διαφορά με την περίπτωση $\beta = 1$ είναι το κοινό χαρακτηριστικό όλων των αναδράσεων να ενισχύουν περισσότερο κύματα Rossby ($n \neq 0$) και όχι χειμάρρους.

Στα Σχήματα 4.13 και 4.14 φαίνονται οι αναδράσεις στην περίπτωση της ισχυρής διαστρωμάτωσης $\lambda = 1$. Η f_t^t , έχει την τάση να διεγείρει κύματα Rossby ως τις πιο ασταθείς δομές. Συγκεκριμένα, παρουσιάζει μια περιοχή θετικών τιμών σε δομές με μεγαλύτερη χωρική κλίμακα από αυτή της διέγερσης και μια περιοχή με πολύ μικρές τιμές σε μικρές κλίμακες. Η f_t^c παρουσιάζει τις μεγαλύτερες τιμές σε μια περιοχή με μεγάλο εύρος κυματάριθμων και τις μέγιστες τιμές σε δομές με μεσημβρινή κλίμακα σχεδόν ίση με την κλίμακα της διέγερσης.



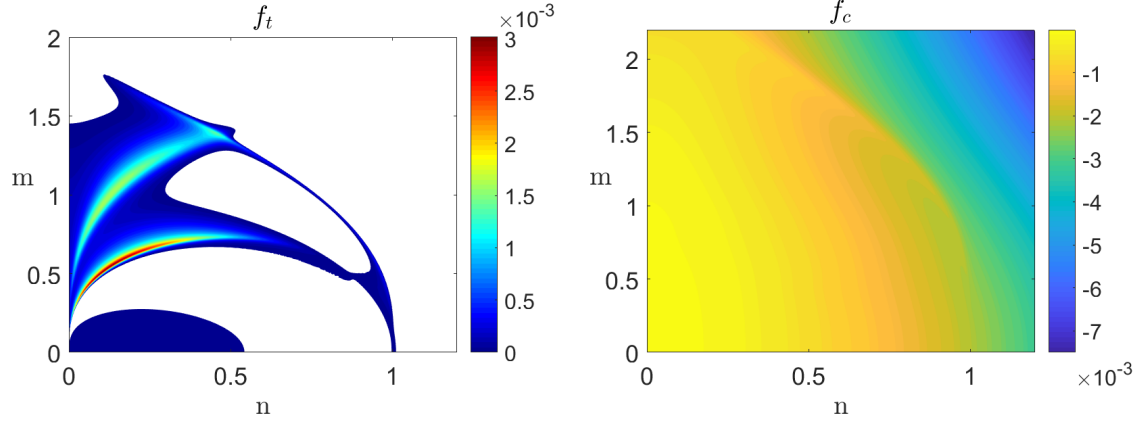
Σχήμα 4.13: Θετικές τιμές των αναδράσεων της βαροτροπικής μέσης ροής συναρτήσει των κυματάρθμων των δομών $\mathbf{N} = (n, m)$ για $\beta = 100$, $\lambda = 1$ και $p = 0$.

Η f_c^t είναι αρνητική όπως και για μικρές τιμές του β , ενώ η f_c^c είναι θετική για δομές με κλίμακα μικρότερη από την κλίμακα διέγερσης και έχει τιμές πολύ μικρότερες από τις αναδράσεις της βαροτροπικής ροής.



Σχήμα 4.14: Τιμές των αναδράσεων της βαροκλινικής μέσης ροής συναρτήσει των κυματάρθμων των δομών $\mathbf{N} = (n, m)$ για $\beta = 100$, $\lambda = 1$ και $p = 0$. Η απεικόνιση είναι στην περιοχή των θετικών τιμών της f_c^c .

Έτσι, για την περίπτωση βαροτροπικής διέγερσης οι βαροτροπικές δομές είναι ασταθείς ενώ οι βαροκλινικές ευσταθείς. Για βαροκλινική διέγερση, οι βαροτροπικές δομές είναι επίσης κυρίαρχες με τριπλάσιο ρυθμό αύξησης από τις βαροκλινικές. Για ασυσχέτιστη διέγερση, οι συνολικές βαροτροπικές και βαροκλινικές αναδράσεις φαίνονται στο

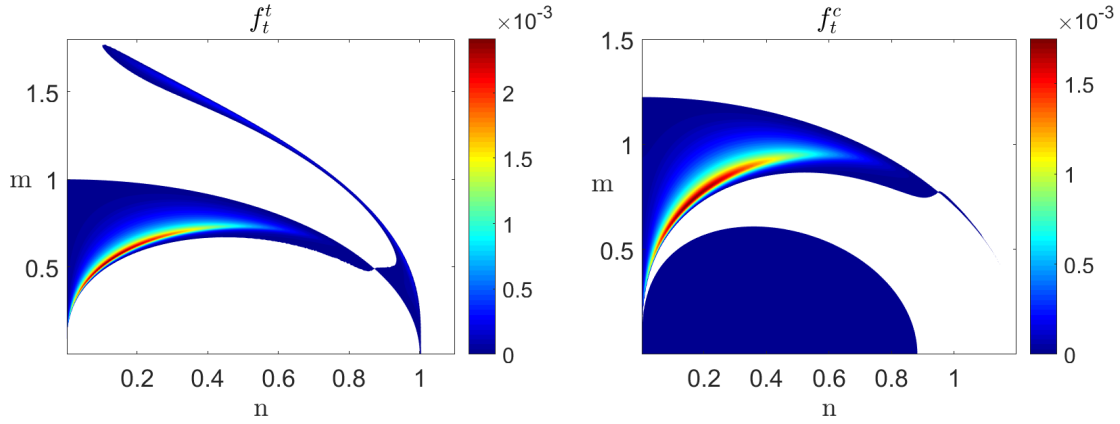


Σχήμα 4.15: Θετικές τιμές της συνολικής ανάδρασης της βαροτροπικής μέσης ροής και αρνητικές τιμές της συνολικής βαροκλινικής ανάδρασης συναρτήσει των κυματάριθμων των δομών $\mathbf{N} = (n, m)$ για $\beta = 100$, $\lambda = 1$ και $p = 0$.

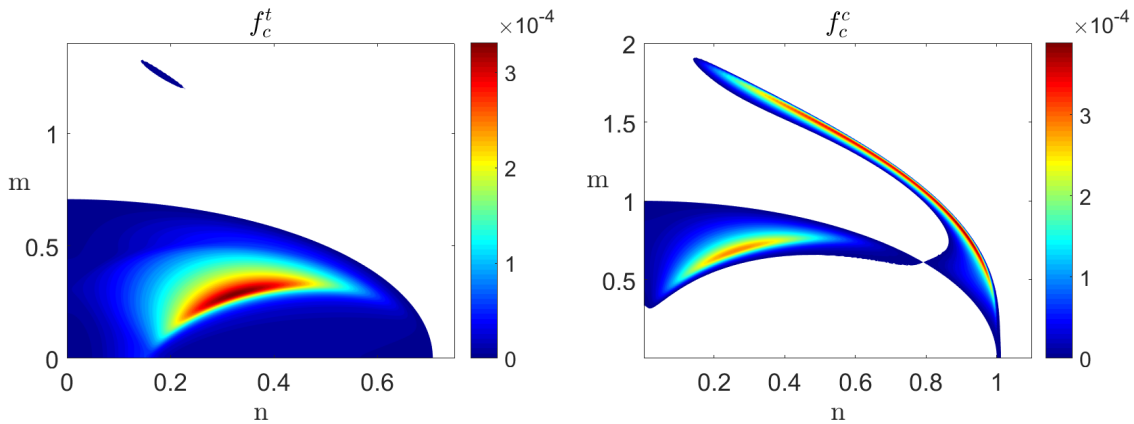
Σχήμα 4.15. Οι δύο αναδράσεις της βαροτροπικής μέσης ροής έχουν ουδέτερη συμβολή στις θετικές περιοχές με τις μέγιστες τιμές τους, με αποτέλεσμα η συνολική ανάδραση να έχει δύο θετικές περιοχές με κύματα Rossby μεγάλης και μικρής μεσημβρινής κλίμακας. Οι βαροκλινικές δομές είναι ευσταθείς εξαιτίας της υπερίσχυσης των αρνητικών τιμών της f_c^t .

Στα Σχήματα 4.16 και 4.17 φαίνονται οι τέσσερις αναδράσεις για μικρότερες τιμές διαστρωμάτωσης ($\lambda = 1/2$). Η f_t^t διατηρεί την ίδια μορφή λόγω της εξάρτησής της από το λ μόνο μέσω ενός πολλαπλασιαστικού παράγοντα. Η f_c^t παρουσιάζει ξανά μια περιοχή κυμάτων με τις μέγιστες θετικές τιμές. Η διαφορά με την περίπτωση $\lambda = 1$ είναι ότι στην παρούσα περίπτωση η περιοχή βρίσκεται σε μικρότερους μεσημβρινούς κυματάριθμους.

Σε ότι αφορά τις βαροκλινικές αναδράσεις, η f_c^t είναι θετική με μέγιστες τιμές σε κύματα Rossby με σχεδόν τριπλάσια κλίμακα από αυτή της διέγερσης. Η f_c^c παρουσιάζει μια περιοχή θετικών τιμών σε μεγάλους κυματάριθμους ανάλογη με αυτήν που εμφανίζεται και στην περίπτωση $\lambda = 1$ και περιέχει τις μέγιστες τιμές, αλλά το εύρος της είναι συρρικνωμένο και έχει μετατοπισθεί προς μικρότερους μεσημβρινούς κυματάριθμους. Ταυτόχρονα σε μικρότερους κυματάριθμους εμφανίζεται μια δεύτερη περιοχή με μικρότερες θετικές τιμές.



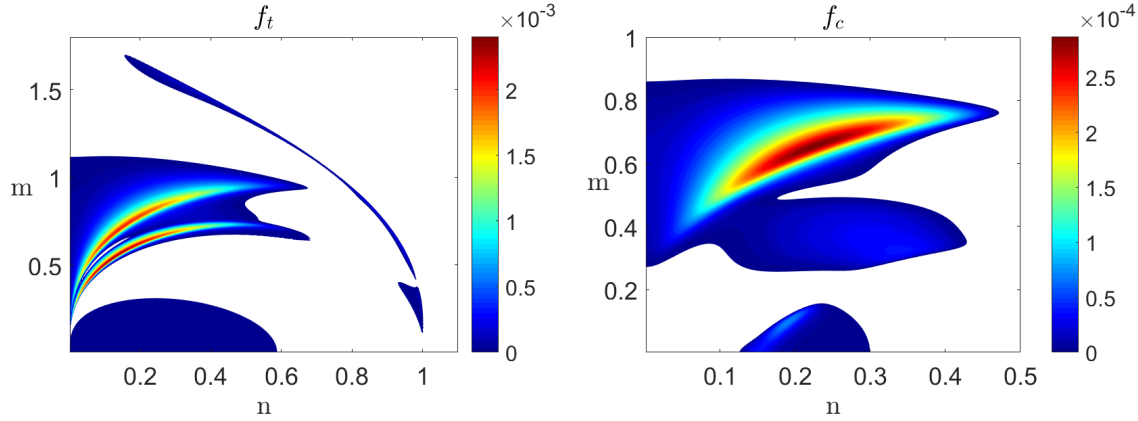
Σχήμα 4.16: Θετικές τιμές των αναδράσεων της βαροτροπικής μέσης ροής συναρτήσει των κυματάριων των δομών $\mathbf{N} = (n, m)$ για $\beta = 100$, $\lambda = 1/2$ και $p = 0$.



Σχήμα 4.17: Θετικές τιμές των αναδράσεων της βαροκλιτικής μέσης ροής συναρτήσει των κυματάριων των δομών $\mathbf{N} = (n, m)$ για $\beta = 100$, $\lambda = 1/2$ και $p = 0$.

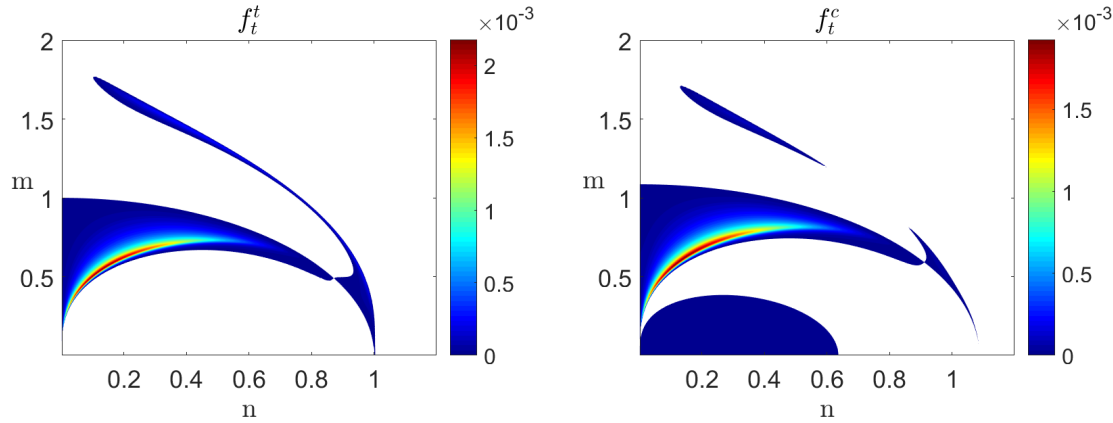
Επειδή οι τιμές των αναδράσεων f_c^t , f_c^c είναι κατά μια τάξη μεγέθους μικρότερες από τις f_t^t , f_t^c , οι βαροτροπικές δομές θα κυριαρχήσουν για βαροτροπική αλλά και για βαροκλιτική διέγερση. Σε ότι αφορά τις συνολικές αναδράσεις στην περίπτωση της ασυσχέτιστης διέγερσης οι οποίες φαίνονται στο Σχήμα 4.18, η συμβολή των f_t^t , f_t^c είναι ίδια με την περίπτωση $\lambda = 1$, με τις χωριστές περιοχές θετικών τιμών να διατηρούνται. Η συμβολή των f_c^t , f_c^c είναι θετική σε ένα μέρος της δεύτερης περιοχής της f_c^c , ώστε οι βαροκλιτικές δομές να είναι ασταθείς. Η συνολική ανάδραση f_c όμως είναι σχεδόν μια τάξη μεγέθους μικρότερη από την ανάδραση f_t , με αποτέλεσμα οι βαροτροπικές δομές

να κυριαρχούν.



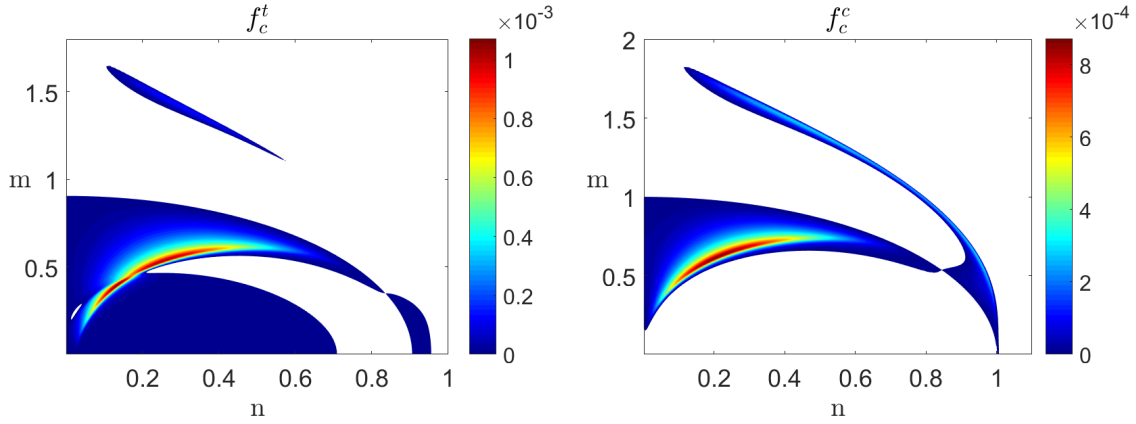
Σχήμα 4.18: Θετικές τιμές των συνολικών αναδράσεων της βαροτροπικής και βαροκλιτικής μέσης ροής συναρτήσει των κυματάριθμων των δομών $\mathbf{N} = (n, m)$ για $\beta = 100$, $\lambda = 1/2$ και $p = 0$.

Τέλος για ασθενή διαστρωμάτωση $\lambda = 0.3$, οι θετικές τιμές των αναδράσεων φαίνονται στα Σχήματα 4.19 και 4.20. Η f_c^c τείνει να προσεγγίσει την f_t^t με την περιοχή των



Σχήμα 4.19: Θετικές τιμές των αναδράσεων της βαροτροπικής μέσης ροής συναρτήσει των κυματάριθμων των δομών $\mathbf{N} = (n, m)$ για $\beta = 100$, $\lambda = 0.3$ και $p = 0$.

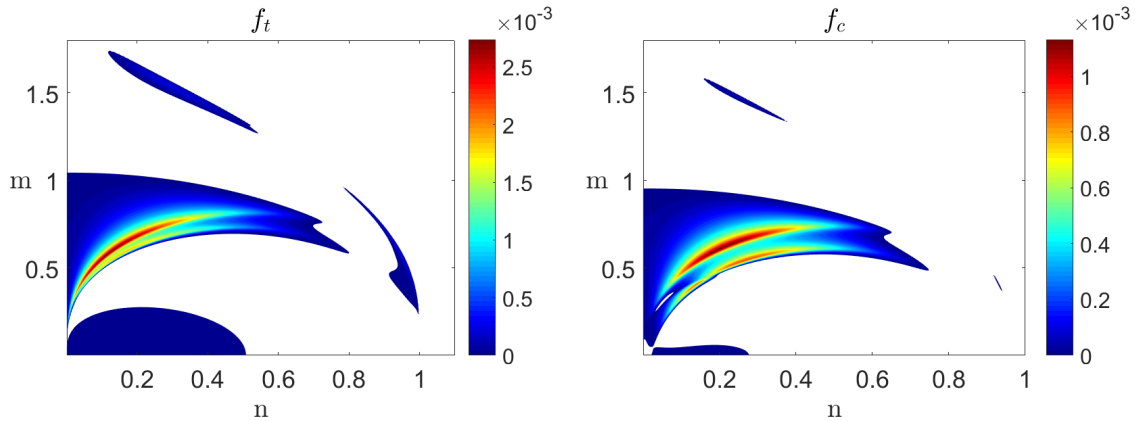
μέγιστων τιμών της να βρίσκεται σε λίγο μεγαλύτερους μεσημβρινούς κυματάριθμους σε σχέση με την αντίστοιχη περιοχή της f_t^t . Οι f_c^c και f_c^c πλησιάζουν και αυτές σε μορφή την f_t^t με τις τιμές τους να έχουν αυξηθεί σημαντικά σε σχέση τις προηγούμενες



Σχήμα 4.20: Θετικές τιμές των αναδράσεων της βαροκλινικής μέσης ροής συναρτήσει των κυματάριμων των δομών $\mathbf{N} = (n, m)$ για $\beta = 100$, $\lambda = 0.3$ και $p = 0$.

περιπτώσεις διαστρωμάτωσης αλλά να παραμένουν μικρότερες από τις αναδράσεις της βαροτροπικής μέσης ροής. Η μόνη ουσιαστική διαφορά είναι ότι ο κλάδος της f_c^t βρίσκεται σε μικρότερους κυματάριμους από τον κλάδο της f_c^c .

Έτσι, για βαροτροπική διέγερση η ροή είναι ασταθής σε βαροτροπικές και βαροκλινικές δομές, με τις βαροτροπικές να ενισχύονται ελαφρώς περισσότερο από τις βαροκλινικές. Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση βαροκλινικής διέγερσης. Οι συνολικές αναδράσεις



Σχήμα 4.21: Θετικές τιμές των συνολικών αναδράσεων της βαροτροπικής και βαροκλινικής μέσης ροής συναρτήσει των κυματάριμων των δομών $\mathbf{N} = (n, m)$ για $\beta = 100$, $\lambda = 0.3$ και $p = 0$.

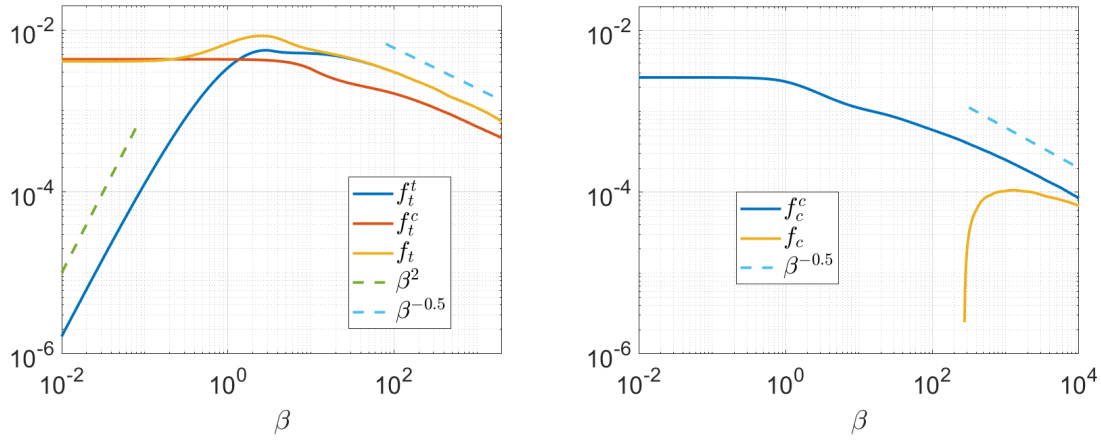
για ασυσχέτιστη διέγερση φαίνονται στο Σχήμα 4.21. Η συμβολή των f_t^t και f_c^c είναι

καταστρεπτική στην περιοχή με τις μέγιστες τιμές της f_t^t και ενισχυτική στην περιοχή με τις μέγιστες τιμές της f_t^c . Αντίστοιχα η συμβολή των f_c^t και f_c^c είναι αρνητική στην περιοχή με τις μέγιστες τιμές της f_c^t και θετική στην περιοχή με τις μέγιστες τιμές της f_c^c . Οι βαροτροπικές δομές ενισχύονται ελαφρώς περισσότερο και σε αυτή την περίπτωση, αφού η συνολική ανάδραση της βαροτροπικής ροής είναι λίγο μεγαλύτερη από την ανάδραση της βαροκλινικής ροής.

4.6 Μέγιστες τιμές αναδράσεων

Επειδή οι δομές που αναμένουμε να εμφανιστούν έχουν τη μέγιστη τιμή ανάδρασης, στην παρούσα Ενότητα παρουσιάζονται οι μέγιστες τιμές των αναδράσεων συναρτήσει της βαθμίδας του πλανητικού στροβιλισμού για ασυσχέτιστη διέγερση. Στην περίπτωση της βαροτροπικής δυναμικής η εξάρτηση της μέγιστης τιμής της ανάδρασης f_t^t από το β και οι δομές για τις οποίες αυτή επιτυγχάνεται μελετήθηκε αναλυτικά από τους Bakas and Ioannou (2013). Συγκεκριμένα βρήκαν ότι για $\beta < 3.5$ οι πιο ασταθείς δομές είναι χειμάρροι ενώ για β μεγαλύτερο από αυτή την τιμή είναι κύματα Rossby. Επίσης οι Bakas et al. (2015), απέδειξαν ότι οι μέγιστες τιμές της ανάδρασης αυξάνουν ως $f_t^t \sim \beta^2$ για μικρές τιμές του β και μειώνονται ως $f_t^t \sim \beta^{-1/2}$ για μεγάλες τιμές του β .

Τα ευρήματα αυτά επιβεβαιώνονται και στο Σχήμα 4.22 όπου σχεδιάζονται οι μέγιστες τιμές των αναδράσεων συναρτήσει του β για $\lambda = 1$. Η f_t^c σε μικρές τιμές του β παρουσιάζει σταθερές μέγιστες τιμές οι οποίες είναι ίσες με τη μέγιστη τιμή για $\beta = 0$. Για μεγάλες τιμές του β , προσεγγίζει την ασυμπτωτική συμπεριφορά της f_t^t . Για $\beta < 10.9$ ενισχύει περισσότερο ζωνικούς χειμάρρους και για μεγαλύτερες τιμές του β κύματα Rossby. Η συνολική ανάδραση της βαροτροπικής μέσης ροής σχεδόν συμπίπτει με τις μέγιστες τιμές της f_t^c για μικρές τιμές του β καθώς η f_t^t είναι πολύ μικρή. Για τιμές βαθμίδας πλανητικού στροβιλισμού τάξης $\mathcal{O}(1)$, οι αναδράσεις συμβάλλουν ενισχυτικά όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη Ενότητα με αποτέλεσμα, οι μέγιστες τιμές της



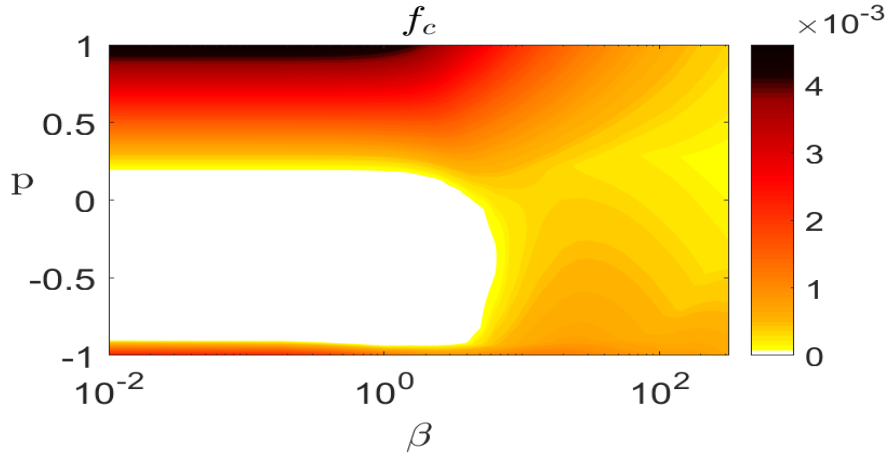
Σχήμα 4.22: Μέγιστες τιμές των αναδράσεων της βαροτροπικής και βαροκλινικής μέσης ροής αντίστοιχα συναρτήσει της βαθμίδας πλανητικού στροβιλισμού για $p = 0$ και $\lambda = 1$.

συνολικής βαροτροπικής ανάδρασης να είναι μεγαλύτερες από τις μέγιστες τιμές των f_t^t και f_t^c . Για μεγαλύτερες τιμές του β , η μέγιστη ενίσχυση συμπίπτει με τη μέγιστες τιμές της ανάδρασης f_t^t καθώς οι τιμές της f_t^c είναι μικρότερες όπως είδαμε στην περίπτωση $\beta = 100$.

Σε ότι αφορά τις βαροκλινικές αναδράσεις, η f_c^t είναι αρνητική και δεν σχεδιάζεται. Η f_c^c είναι σταθερή σε μικρές τιμές του β και σε μεγάλες τιμές φαίνεται να προσεγγίζει επίσης την ασυμπτωτική συμπεριφορά $\beta^{-1/2}$. Για $\beta < 1.05$ ενισχύονται περισσότερο ζωνικοί χείμαρροι ενώ για μεγαλύτερες τιμές του β κύματα Rossby. Η συνολική βαροκλινική ανάδραση f_c είναι θετική μόνο για $\beta_c > 272.4$, με τιμές μικρότερες της f_c^c λόγω της καταστρεπτικής συμβολής των f_c^t και f_c^c . Οι δομές που ενισχύονται είναι κυματικές, έχουν κλίμακα υποδιπλάσια της κλίμακας διέγερσης (δε δείχνεται) και οι τιμές της ανάδρασης είναι πολύ μικρότερες από τις τιμές της αντίστοιχης συνολικής βαροτροπικής ανάδρασης.

Για μικρότερες τιμές διαστρωμάτωσης έχουμε ποιοτικά παρόμοια συμπεριφορά των μέγιστων τιμών (δεν παρουσιάζεται). Οι μόνες διαφορές είναι ποσοτικές σε ότι αφορά τις τιμές των αναδράσεων και σε ότι αφορά το κατώφλι β_c πάνω από το οποίο έχουμε θετική συνολική βαροκλινική ανάδραση και το οποίο εμφανίζεται λόγω της καταστρεπτι-

κής συμβολής των αναδράσεων f_c^t και f_c^c . Για να μελετήσουμε την εξάρτηση αυτού του κατωφλίου, σχεδιάζουμε στο Σχήμα 4.23 τη μέγιστη βαροκλινική ανάδραση συναρτήσει του συντελεστή διέγερσης p και του β για $\lambda = 1/2$.



Σχήμα 4.23: Μέγιστες τιμές της βαροκλινικής μέσης ροής για $\lambda = 0.5$ συναρτήσει του συντελεστή συσχέτισης και της βαθμίδας πλανητικού στροβιλισμού. Στην περιοχή χωρίς χρώμα η ανάδραση είναι αρνητική.

Για βαροτροπική διέγερση η f_c^c είναι μηδενική. Επομένως οι μέγιστες θετικές τιμές της f_c για $p = 1$, οφείλονται στην ανάδραση f_c^t . Αντίθετα για $p = -1$ οι μέγιστες τιμές της f_c οφείλονται στην f_c^c . Σε μικρές τιμές του β υπάρχει καταστρεπτική συμβολή των f_c^t και f_c^c όπως φαίνεται από την περιοχή χωρίς χρώμα που αντιστοιχεί σε αρνητικές τιμές της f_c . Επίσης εμφανίζεται ένα κατώφλι $\beta = 3.9$ που η f_c γίνεται θετική για $p = 0$, που είναι πολύ μικρότερο σε σχέση με την περίπτωση $\lambda = 1$.

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία διερευνήθηκε ο αυθόρμητος σχηματισμός αεροχειμάρρων και κυμάτων Rossby μεγάλης κλίμακας από μια ομογενή θάλασσα από τυρβώδεις δίνες που διεγείρεται στοχαστικά σε ένα απλοποιημένο μοντέλο της βαροκλινικής οιονεί-γεωστροφικής δυναμικής (μοντέλο δύο στρωμάτων). Επειδή η εμφάνιση των δομών μεγάλης κλίμακας οφείλεται στη συλλογική δράση των τυρβωδών δινών, η εξέταση του φαινομένου γίνεται μέσω του συστήματος εξέλιξης της στατιστικής της ροής. Προηγούμενες μελέτες που βασίζονταν σε ένα κλείσιμο δεύτερης τάξης για αυτό το σύστημα, έδειξαν ότι η απότομη εμφάνιση των δομών μεγάλης κλίμακας είναι το αποτέλεσμα αστάθειας του σημείου ισορροπίας του συστήματος της στατιστικής που χαρακτηρίζεται από απουσία ροής και ομογενή τύρβη (Bakas and Ioannou, 2019). Η αστάθεια προκύπτει καθώς οι μικρού πλάτους διαταραχές της μέσης ροής οργανώνουν τις τυρβώδεις δίνες με τέτοιο τρόπο ώστε οι δίνες με τη σειρά τους να τις ενισχύουν ή να τις εξασθενούν.

Στην εργασία αυτή, επεκτείναμε την ανάλυση των Bakas and Ioannou (2019) με σκοπό να μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά αυτής της ανάδρασης. Συγκεκριμένα υπολογίσαμε κοντά στο όριο της αστάθειας τη ροή στροβιλισμού και θερμότητας των δινών που προκύπτει από την οργάνωσή τους από τη μέση ροή. Επειδή ανάλογα με τις τιμές του συντελεστή συσχέτισης της στοχαστικής διέγερσης στα δύο στρώματα μπορούμε να έχουμε τη διέγερση βαροτροπικών ή/και βαροκλινικών δινών, ενώ οι ασταθείς δομές

μπορεί να είναι είτε βαροτροπικές είτε βαροκλινικές, υπάρχουν τέσσερις διαφορετικές αναδράσεις για τις ροές των δινών. Αυτές που προκύπτουν από την οργάνωση των βαροτροπικών (f_t^t) και βαροκλινικών (f_t^c) δινών από τη μέση βαροτροπική ροή και την οργάνωση των βαροτροπικών (f_c^t) και βαροκλινικών (f_c^c) δινών από τη μέση βαροκλινική ροή. Έτσι υπολογίστηκαν οι αναδράσεις για διάφορες τιμές του συντελεστή συσχέτισης και των αδιάστατων παραμέτρων που εκφράζουν τη διαστρωμάτωση λ και τη βαθμίδα πλανητικού στροβιλισμού β και καλύπτουν όλο το εύρος των περιπτώσεων, καθώς και για όλες τις τιμές του κυματάριθμου $\mathbf{N} = (n, m)$, των ασταθών δομών που αποδεινύεται ότι είναι αρμονικές. Επειδή η τάση στροβιλισμού για δομές μεγάλης κλίμακας στο κατώφλι της αστάθειας προκύπτει από το άθροισμα των αναδράσεων f_t^t, f_t^c για τις βαροτροπικές δομές και f_c^t, f_c^c για τις βαροκλινικές, έχουμε αστάθεια αν το άθροισμα είναι θετικό.

Αρχικά παράχθηκαν γενικά όρια αστάθειας που είναι ανεξάρτητα από το β και τη γωνία ϕ που σχηματίζουν τα μέτωπα των ασταθών δομών με το μεσημβρινό άξονα και εξαρτώνται από την κλίμακα των δομών N και την παράμετρο λ . Προέκυψε έτσι ότι η ανάδραση f_c^t είναι αρνητική για τιμές της παραμέτρου $\lambda > \sqrt{1/2}$, ενώ για $\lambda < \sqrt{3/2}$ και η f_c^c είναι αρνητική για δομές μεγάλης κλίμακας ($N < 1$). Για τις αναδράσεις της βαροτροπικής ροής, προέκυψε ότι είναι αρνητικές για δομές με κλίμακα $N > 2$ για $\lambda < \sqrt{3/2}$. Επομένως, ανεξάρτητα από το β και τη συσχέτιση της διέγερσης, δεν αναμένουμε την εμφάνιση βαροτροπικών δομών μικρής κλίμακας για ασθενή διαστρωμάτωση, ενώ για ισχυρή διαστρωμάτωση δεν αναμένουμε την εμφάνιση βαροκλινικών δομών μεγάλης κλίμακας.

Έπειτα υπολογίστηκαν αναλυτικά οι αναδράσεις στην περίπτωση που η βαθμίδα πλανητικού στροβιλισμού είναι μηδενική. Οι αναδράσεις σε αυτή την περίπτωση είναι ισοτροπικές ενισχύοντας τις δομές ανάλογα με το μέτρο του κυματάριθμού τους. Βρέθηκε ότι ανεξάρτητα από τη διαστρωμάτωση, οι βαροτροπικές δομές εμφανίζονται εξαιτίας της οργάνωσης των βαροκλινικών δινών καθώς η f_t^c είναι η μόνη με θετικές τιμές. Οι ισοτροπικές δομές που ενισχύονται περισσότερο έχουν κλίμακα που εξαρτάται από τη

συσχέτιση της διέγερσης και η οποία συνεπάγεται διαφορετική ένταση διέγερσης βαροτροπικών και βαροκλινικών δινών. Για ίση περίπου διέγερση, η κλίμακα των δομών που ενισχύονται από τις τυρβώδεις δίνες είναι μεγαλύτερη από αυτή της διέγερσης ($N < 1$), καθώς για μικρότερες δομές η αρνητική ανάδραση f_t^t εξουδετερώνει τις θετικές τιμές της f_t^c . Σε ότι αφορά τις βαροκλινικές δομές, τα χαρακτηριστικά τους εξαρτώνται από τη συσχέτιση της διέγερσης. Για βαροκλινική διέγερση έχουμε την εμφάνιση δομών μικρής κλίμακας, ενώ για βαροτροπική έχουμε την εμφάνιση δομών μεγάλης κλίμακας μόνο στην περίπτωση ασθενούς διαστρωμάτωσης, με όμοια χαρακτηριστικά στην περίπτωση ασυσχέτιστης (μεικτής) διέγερσης. Ο λόγος είναι ότι στην τελευταία περίπτωση έχουμε καταστρεπτική συμβολή των f_c^t , f_c^c , με την πλήρη εξουδετέρωση της f_c^c που είναι θετική για μεγάλη διαστρωμάτωση και μερική εξουδετέρωση της f_t^c για μικρή διαστρωμάτωση από την f_c^c που είναι αρνητική.

Στη συνέχεια, υπολογίστηκαν αριθμητικά οι αναδράσεις για τις περιπτώσεις μικρής και μεγάλης βαθμίδας πλανητικού στροβιλισμού. Για μικρές τιμές της βαθμίδας του πλανητικού στροβιλισμού οι αναδράσεις ενισχύουν περισσότερο τους χειμάρρους, ενώ για μεγάλες τιμές του β , τα κύματα Rossby. Στην περίπτωση ασθενούς διαστρωμάτωσης, όλες οι αναδράσεις έχουν παρόμοια μορφή στο χώρο των κυματάρθμων με αποτέλεσμα να ενισχύονται σχεδόν εξίσου βαροτροπικές και βαροκλινικές δομές μεγάλης κλίμακας ανεξάρτητα από τη συσχέτιση της διέγερσης στα δύο στρώματα. Για ισχυρή διαστρωμάτωση, οι επιμέρους αναδράσεις διαφέρουν αρκετά με αποτέλεσμα τα χαρακτηριστικά των δομών να εξαρτώνται από τη σχετική ισχύ διέγερσης των βαροτροπικών και βαροκλινικών δινών και τις τυχόν θετικές και αρνητικές συμβολές των αναδράσεων. Έτσι, στην περίπτωση μικρών τιμών του β , οι βαροτροπικοί χείμαρροι ενισχύονται περισσότερο από τους βαροκλινικούς και έχουν κλίμακα μεγαλύτερη από αυτή της διέγερσης για βαροτροπική ή ασυσχέτιστη διέγερση, ενώ έχουν μικρότερη κλίμακα στην περίπτωση βαροκλινικής διέγερσης. Σε ότι αφορά τις βαροκλινικές δομές, έχουμε την εμφάνισή χείμαρρων μικρής κλίμακας μόνο στην περίπτωση της βαροκλινικής διέγερσης καθώς έχουμε πάλι καταστρεπτική συμβολή των f_c^t και f_c^c .

Το συμπέρασμα αυτό για την καταστρεπτική συμβολή σε ότι αφορά τις βαροκλινικές δομές ισχύει και στην περίπτωση μεγάλων τιμών για τη βαθμίδα του πλανητικού στροβιλισμού, καθώς οι τιμές της f_c^t είναι αρνητικές. Έτσι, μόνο στην περίπτωση βαροκλινικής διέγερσης αναμένουμε την εμφάνιση αυτών των δομών με μέγιστες τιμές της ανάδρασης f_c^e σε κύματα Rossby με κλίμακα μικρότερη από αυτή της διέγερσης. Αντίθετα, για τα βαροτροπικά κύματα Rossby έχουμε σχεδόν ουδέτερη συμβολή των f_t^t και f_t^e που έχουν μέγιστες τιμές σε κύματα μεγάλης και μικρής κλίμακας αντίστοιχα. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι έχουμε παρόμοιες συμβολές και στην περίπτωση ενδιάμεσης διαστρωμάτωσης. Για τις μεν βαροτροπικές αναδράσεις έχουμε είτε ουδέτερη είτε ενισχυτική συμβολή, ενώ για τις βαροκλινικές αναδράσεις έχουμε καταστρεπτική συμβολή με αποτέλεσμα η συνολική βαροτροπική ανάδραση να είναι μεγαλύτερη.

Τέλος, υπολογίστηκαν οι μέγιστες τιμές των αναδράσεων συναρτήσει της βαθμίδας του πλανητικού στροβιλισμού για την περίπτωση μεγάλης διαστρωμάτωσης. Για μικρές τιμές του β βρέθηκε ότι όλες οι αναδράσεις εκτός από την f_t^t έχουν σταθερές μέγιστες τιμές, με την f_t^t να πηγαίνει ασυμπτωτικά στο μηδέν ως β^2 . Για μεγαλύτερες τιμές του β μειώνονται όλες ως $\beta^{-1/2}$, εκτός της f_c^t που είναι αρνητική. Λόγω των αρνητικών τιμών της f_c^t και της αρνητικής συμβολής της με την f_c^e , το άθροισμά τους που δίνει τη συνολική βαροκλινική ανάδραση γίνεται θετικό μόνο για μια κρίσιμη τιμή του πλανητικού στροβιλισμού. Για ασυσχέτιστη διέγερση η κρίσιμη αυτή τιμή βρέθηκε να εξαρτάται από τη διαστρωμάτωση καθώς αυξάνει μονότονα με το λ .

Παράρτημα Α΄

Εξαγωγή εξισώσεων διασποράς

Στο παρόν Παράρτημα, εξάγονται οι εξισώσεις διασποράς που δίνουν την εξέλιξη μικρών διαταραχών γύρω από το ομογενές σημείο ισορροπίας της δυναμικής S3T. Αντικαθιστώντας στη βαροκλινική δυναμική (3.7)-(3.8) το χωρισμό των μεταβλητών σε μέση ροή μεγάλης κλίμακας και τυρβώδεις δίνες, παίρνουμε τις εξισώσεις (3.9)-(3.10) που δίνουν την εξέλιξη της μέσης ροής. Αυτή επηρεάζεται από τις δίνες μέσω των ροών ορμής και θερμότητας που εκφράζονται συναρτήσει του πίνακα συνδιακυμάνσεων \mathbf{C} που δίνεται από την (3.11). Για τον υπολογισμό της εξέλιξης του \mathbf{C} εκκινούμε από τις εξισώσεις (3.17)-(3.18) που δίνουν την εξέλιξη των αποχών στην προσέγγιση της S3T. Ενδεικτικά από τα τέσσερα στοιχεία του \mathbf{C} θα υπολογίσουμε την εξέλιξη της συνδιακύμανσης $C_{\alpha b}^{\zeta\eta} = \langle \zeta'_\alpha \eta'_b \rangle$, με τους δείκτες να υποδεικνύουν τον υπολογισμό των συναρτήσεων στα διαφορετικά σημεία \mathbf{x}_a και \mathbf{x}_b . Ξεκινώντας από τις εξισώσεις για την τάση των ζ'_α και η'_b έχουμε:

$$\partial_t \zeta'_\alpha = A_{11}^\alpha \zeta'_\alpha + A_{12}^\alpha \eta'_\alpha + \xi_\alpha \quad (\text{A'.1})$$

$$\partial_t \eta'_b = A_{22}^b \eta'_b + A_{21}^b \zeta'_b + \xi_b, \quad (\text{A'.2})$$

όπου οι πάνω δείκτες στους τελεστές υποδεικνύουν τον υπολογισμό τους στα διαφορετικά σημεία. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με η'_b και την δεύτερη με ζ'_α , τις

προσθέτουμε και έπειτα μεσοποιούμε παίρνοντας:

$$\partial_t C_{ab}^{\zeta\eta} = (A_{11}^\alpha + A_{22}^b) C_{ab}^{\zeta\eta} + A_{12}^\alpha C_{ab}^{\eta\eta} + A_{21}^b C_{ab}^{\zeta\zeta} + \langle \eta'_b \xi_\alpha^\psi + \zeta'_\alpha \xi_b^\theta \rangle. \quad (A'.3)$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου όρου της (A'.3), γράφουμε τη λύση των (3.17)-(3.18):

$$\begin{pmatrix} \zeta' \\ \eta' \end{pmatrix} = e^{\mathbf{A}t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}s} \begin{pmatrix} \xi^\psi \\ \xi^\theta \end{pmatrix} ds, \quad (A'.4)$$

όπου \mathbf{A} ο πίνακας που ορίζεται στο Κεφάλαιο 3. Με βάση τη σχέση (A'.4) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \langle \eta'_b \xi_\alpha^\psi + \zeta'_\alpha \xi_b^\theta \rangle &= e^{\mathbf{A}_b t_b} \int_0^{t_b} e^{-\mathbf{A}_b s} \langle \xi_b^\theta(s) \xi_\alpha^\psi(t_\alpha) \rangle ds \\ &+ e^{\mathbf{A}_\alpha t_\alpha} \int_0^{t_\alpha} e^{-\mathbf{A}_\alpha s} \langle \xi_\alpha^\psi(s) \xi_b^\theta(t_b) \rangle ds. \end{aligned} \quad (A'.5)$$

Αναπτύσσοντας την έκφραση του μέσου όρου στο πρώτο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της (A'.5) έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle \xi_b^\theta(s) \xi_\alpha^\psi(t_\alpha) \rangle &= \left\langle \frac{(\xi_1(s) - \xi_2(s))}{2} \frac{(\xi_1(t_\alpha) + \xi_2(t_\alpha))}{2} \right\rangle = \\ \frac{1}{4} (\langle \xi_1(s) \xi_1(t_\alpha) \rangle + \langle \xi_1(s) \xi_2(t_\alpha) \rangle - \langle \xi_2(s) \xi_1(t_\alpha) \rangle - \langle \xi_2(s) \xi_2(t_\alpha) \rangle) &= 0, \end{aligned} \quad (A'.6)$$

που προκύπτει με τη χρήση των σχέσεων (3.1)-(3.2). Αντίστοιχα και ο μέσος όρος στο δεύτερο ολοκλήρωμα μηδενίζεται. Επομένως προκύπτει ότι:

$$\langle \eta'_b \xi_\alpha^\psi + \zeta'_\alpha \xi_b^\theta \rangle = 0. \quad (A'.7)$$

Ομοίως, εργαζόμενοι για τις υπόλοιπες τρεις συνδιακυμάνσεις, παίρνουμε τη σχέση (3.20) και το σύστημα που διέπει την εξέλιξη της στατιστικής (3.15), (3.16), (3.20). Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η κατάσταση μηδενικής μέσης ροής με ομογενή συνδιακύμανση:

$$Z_E = H_E = 0, \quad \mathbf{C}_{ab}^E = \mathbf{Q}_{ab}/2r, \quad (A'.8)$$

είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος (3.15), (3.16), (3.20). Η ευστάθεια του μελετάται αν διαταράζουμε το σημείο ισορροπίας:

$$Z = \delta Z, H = \delta H, \mathbf{V}^\psi = \delta \mathbf{V}^\psi, \mathbf{V}^\theta = \delta \mathbf{V}^\theta, \mathbf{C}_{ab} = \mathbf{C}_{ab}^E + \delta \mathbf{C}_{ab}. \quad (\text{A'.9})$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (3.15)-(3.16)-(3.20) και αγνοώντας τους μη γραμμικούς όρους των διαταραχών ως μικρούς παίρνουμε τις γραμμικές εξισώσεις:

$$\partial_t \delta Z + \beta \delta V^\psi = -\delta F^\psi - \delta Z, \quad (\text{A'.10})$$

$$\partial_t \delta H + \beta \delta V^\theta = -\delta F^\theta - \delta H, \quad (\text{A'.11})$$

$$\partial_t \delta \mathbf{C}_{ab} = \mathbf{A}_\alpha^E \delta \mathbf{C}_{ab} + \delta \mathbf{A}_\alpha \mathbf{C}_{ab}^E + (\mathbf{A}_b^E \delta \mathbf{C}_{ab}^T)^T + \left(\delta \mathbf{A}_b (\mathbf{C}_{ab}^E)^T \right)^T, \quad (\text{A'.12})$$

όπου

$$\mathbf{A}^E = \begin{pmatrix} -\beta \partial_x \Delta^{-1} - 1 & 0 \\ 0 & -\beta \partial_x \Delta^{-1} - 1 \end{pmatrix},$$

και

$$\delta \mathbf{A} = \begin{pmatrix} (\Delta \delta \mathbf{V}^\psi \Delta^{-1} - \delta \mathbf{V}^\psi) \cdot \nabla & -\delta \mathbf{V}^\theta \cdot \nabla \Delta \Delta_\lambda^{-1} + \Delta \delta \mathbf{V}^\theta \cdot \nabla \Delta_\lambda^{-1} \\ -\delta \mathbf{V}^\theta \cdot \nabla + \Delta_\lambda \delta \mathbf{V}^\theta \cdot \nabla \Delta^{-1} & (\Delta \delta \mathbf{V}^\psi \Delta_\lambda^{-1} - \delta \mathbf{V}^\psi) \cdot \nabla \end{pmatrix}.$$

Για την επίλυση των (A'.10)-(A'.11)-(A'.12) ακολουθούμε τη μέθοδο των Srinivasan and Young, (2012) και ορίζουμε τις νέες μεταβλητές:

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_\alpha + \mathbf{x}_b), \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_b. \quad (\text{A'.13})$$

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 3 οι διαταραχές της μέσης ροής είναι αρμονικές (εξίσωση 3.22), ενώ οι διαταραχές των συνδιακυμάνσεων είναι αρμονικές ως προς $\bar{\mathbf{x}}$ και η εξάρτησή τους από το $\tilde{\mathbf{x}}$ μπορεί να υπολογιστεί μέσω των μετασχηματισμών Fourier (εξίσωση 3.23). Αντικαθιστώντας τις (3.22), (3.23) στην εξίσωση εξέλιξης των συνδιακυμάνσεων (A'.12) μπορούμε να βρούμε τα πλάτη Fourier για τις ρευματοσυναρτήσεις των συνδιακυμάνσεων, που δίνονται μετά από πράξεις από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \hat{S}^{\psi\psi} &= \frac{\alpha_\psi (mk_+ - nl_+) K_+^2 (K_+^2 - N^2) \hat{S}_E^{\psi\psi}(k_+, l_+)}{(\sigma_\psi + 2) K_+^2 K_-^2 + i\beta (k_- K_+^2 - k_+ K_-^2)} \\ &- \frac{\alpha_\psi (mk_- - nl_-) K_-^2 (K_-^2 - N^2) \hat{S}_E^{\psi\psi}(k_-, l_-)}{(\sigma_\psi + 2) K_+^2 K_-^2 + i\beta (k_- K_+^2 - k_+ K_-^2)}, \end{aligned} \quad (\text{A'.14})$$

$$\begin{aligned}\hat{S}^{\psi\theta} &= \frac{\alpha_\theta (mk_+ - nl_+) K_+^2 (K_+^2 - N_\lambda^2) \hat{S}_E^{\psi\psi}(k_+, l_+)}{(\sigma_\theta + 2) K_+^2 K_{\lambda-}^2 + i\beta (k_- K_+^2 - k_+ K_{\lambda-}^2)} \\ &- \frac{\alpha_\theta (mk_- - nl_-) K_{\lambda-}^2 (K_-^2 - N^2) \hat{S}_E^{\theta\theta}(k_-, l_-)}{(\sigma_\theta + 2) K^2 K_{\lambda-}^2 + i\beta (k_- K_+^2 - k_+ K_{\lambda-}^2)},\end{aligned}\quad (\text{A'.15})$$

$$\begin{aligned}\hat{S}^{\theta\psi} &= \frac{\alpha_\theta (mk_+ - nl_+) K_{\lambda+}^2 (K_+^2 - N^2) \hat{S}_E^{\theta\theta}(k_+, l_+)}{(\sigma_\theta + 2) K_-^2 K_{\lambda+}^2 + i\beta (k_- K_{\lambda+}^2 - k_+ K_-^2)} \\ &- \frac{\alpha_\theta (mk_- - nl_-) K_-^2 (K_-^2 - N_\lambda^2) \hat{S}_E^{\psi\psi}(k_-, l_-)}{(\sigma_\theta + 2) K^2 K_{\lambda+}^2 + i\beta (k_- K_{\lambda+}^2 - k_+ K_-^2)},\end{aligned}\quad (\text{A'.16})$$

$$\begin{aligned}\hat{S}^{\theta\theta} &= \frac{\alpha_\psi (mk_+ - nl_+) K_{\lambda+}^2 (K_{\lambda+}^2 - N^2) \hat{S}_E^{\theta\theta}(k_+, l_+)}{(\sigma_\psi + 2) K_{\lambda+}^2 K_{\lambda-}^2 + i\beta (k_- K_{\lambda+}^2 - k_+ K_{\lambda-}^2)} \\ &- \frac{\alpha_\psi (mk_- - nl_-) K_{\lambda-}^2 (K_{\lambda-}^2 - N^2) \hat{S}_E^{\theta\theta}(k_-, l_-)}{(\sigma_\psi + 2) K_{\lambda+}^2 K_{\lambda-}^2 + i\beta (k_- K_{\lambda+}^2 - k_+ K_{\lambda-}^2)},\end{aligned}\quad (\text{A'.17})$$

όπου

$$\begin{aligned}K^2 &= k^2 + l^2, \quad N^2 = n^2 + m^2, \quad k_\pm = k \pm n/2, \quad l_\pm = l \pm m/2, \\ K_\pm^2 &= k_\pm^2 + l_\pm^2, \quad K_{\lambda\pm}^2 = K_\pm^2 + 2\lambda^2, \quad N_\lambda^2 = N^2 + 2\lambda^2\end{aligned}$$

και

$$\hat{S}_{E\pm}^{\psi\psi} = \frac{1+p}{2K_\pm^4} \hat{\Xi}(\mathbf{k}_\pm), \quad \hat{S}_{E\pm}^{\theta\theta} = \frac{1-p}{2K_{\lambda\pm}^4} \hat{\Xi}(\mathbf{k}_\pm). \quad (\text{A'.18})$$

Αντίστοιχα αντικαθιστώντας τις (3.22), (3.23) στις (A'.10), (A'.11) παίρνουμε:

$$\alpha_\psi e^{i\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}+\sigma t} \left(\sigma_\psi + 1 - \frac{i\beta n}{N^2} \right) = \frac{1}{N^2} \delta F^\psi, \quad (\text{A'.19})$$

$$\alpha_\theta e^{i\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}+\sigma t} \left(\sigma_\theta + 1 - \frac{i\beta n}{N_\lambda^2} \right) = \frac{1}{N_\lambda^2} \delta F^\theta, \quad (\text{A'.20})$$

όπου

$$\delta F^\psi = \frac{e^{i\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}+\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} M^\psi \left(\hat{S}^{\psi\psi} + \hat{S}^{\theta\theta} \right) dk dl, \quad (\text{A'.21})$$

$$\delta F^\theta = \frac{e^{i\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}+\sigma t}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(M^{\psi\theta} \hat{S}^{\psi\theta} - M^{\theta\psi} \hat{S}^{\theta\psi} \right) dk dl, \quad (\text{A'.22})$$

με

$$M^{\psi} = (nk - ml) \left(\frac{K_+^2 - K_-^2}{2} \right), \quad (\text{A'.23})$$

$$M^{\psi\theta} = (mk - nl) (-2kn - 2ml + 2\lambda^2), \quad (\text{A'.24})$$

$$M^{\theta\psi} = (mk - nl) (2kn + 2ml + 2\lambda^2), \quad (\text{A'.25})$$

επειδή οι αναδράσεις υπολογίζονται για το ίδιο σημείο ($\tilde{x} = \tilde{y} = 0$). Αντικαθιστώντας τις (A'.14)-(A'.17) στις παραπάνω σχέσεις, προκύπτουν τελικά οι εξισώσεις διασποράς (3.24)-(3.25).

Παράρτημα Β΄

Υπολογιστικός Κώδικας

Στο Παράρτημα αυτό, παρατίθεται ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για τον αριθμητικό υπολογισμό των αναδράσεων και τη σχεδιάσή τους.

```
clear all;
epsilon=1;
vita=1;% orismos parametrou b
lamda=0.5;% orismos parametrou lamda
p=0;% parametros diegersis
Nq=linspace(0,1+sqrt(1+2*lamda^2),601);% plegma metrou kumatarithmou
fiq=linspace(0,pi/2,301);% plegma gwnias fi
theta=linspace(0,2*pi,10000);% plegma gwnias theta
dtheta=theta(2)-theta(1);% orismos bimatou theta
a1=(1+p)/(2*pi);
a2=(1-p)/(2*pi);
ksikapelo=epsilon*(1+2*lamda^2)^2/(2*(1+(2+p)*lamda^4+3*lamda^2));
% Υπολογισμος oloklhrwmatwn gia diafora bhta
for ij=1:length(vita)
for ifi=1:length(fiq)
```

```

fi=fiq(ifi);
fitheta=fi-theta;
for in=1:length(Nq)
N=Nq(in);
Kss=1+2*N*cos(fitheta)+N^2;
Klamdass=1+2*N*cos(fitheta)+N^2+2*lamda^2;
%Proto oloklhrwma
ar1=N*(sin(fitheta)).^2.*(2*cos(fitheta)+N)*(1-N^2).*Kss;
parreal1=2*Kss;
parim1=vita(ij)*((cos(fi)*(1+2*N*cos(fitheta))/N)+cos(theta).*(2*N*cos(fitheta)+N^2));
freal1=ar1./(parreal1.^2+parim1.^2);
int1(in,ifi)=a1*ksikapelo*(sum(freal1)-freal1(1)/2-freal1(length(theta))/2)*dtheta;
%Deytero oloklhrwma
ar2=(sin(fitheta)).^2.*(2*N*cos(fitheta)+N^2)*(1+2*lamda^2-N^2).*Klamdass;
parreal2=2*(1+2*lamda^2)*Klamdass;
parim2=vita(ij)*((cos(fi)/N)*(1+2*lamda^2).*(Klamdass-N^2)+cos(theta).*(2*N*cos(fitheta)+N^2));
freal2=ar2./(parreal2.^2+parim2.^2);
int2(in,ifi)=a2*ksikapelo*(sum(freal2)-freal2(1)/2-freal2(length(theta))/2)*dtheta;
%Trito oloklhrwma
ar3=N^2*(sin(fitheta)).^2.*(Klamdass-1)*(1-N^2-2*lamda^2).*Klamdass;
parreal3=2*Klamdass;
parim3=vita(ij)*((1+2*N*cos(fitheta))*N*(cos(fi)/(N^2+2*lamda^2))+
(2*N*cos(fitheta)+N^2+2*lamda^2).*cos(theta));
freal3=ar3./(parreal3.^2+parim3.^2);
int3(in,ifi)=((1+p)/(2*pi*(N^2+2*lamda^2)))*ksikapelo*
(sum(freal3)-freal3(1)/2-freal3(length(theta))/2)*dtheta;
% Tetarto oloklhrwma
ar4=N^2*(sin(fitheta)).^2.*(2*N*cos(fitheta)+N^2-2*lamda^2)*(1-N^2).*Kss;

```



```

parreal4=2*(1+2*lamda^2)*Kss;
parim4=vita(ij)*((1+2*lamda^2)*(Kss*(N*cos(fi)/(N^2+2*lamda^2))-N*cos(fi))+
(2*N*cos(fitheta)+N^2-2*lamda^2).*cos(theta));
freal4=ar4./(parreal4.^2+parim4.^2);
int4(in,ifi)=((1-p)/(2*pi*(N^2+2*lamda^2)))*ksikapelo*
(sum(freal4)-freal4(1)/2-freal4(length(theta))/2)*dtheta;
end
end
% Megistes times twn oloklhrwmatwn gia kathe bhta
int1max(ij)=max(max(int1));
int2max(ij)=max(max(int2));
int3max(ij)=max(max(int3));
int4max(ij)=max(max(int4));
int12max(ij)=max(max(int1+int2));
int34max(ij)=max(max(int3+int4));
% Ypologismos ths domhs me ton megisto rythmo auxhshs
[oo1 pp1]=max(int1);
[oo11 pp11]=max(oo1);
Nmax1(ij)=Nq(pp1(pp11));
fimax1(ij)=fiq(pp11);
[oo2 pp2]=max(int2);
[oo22 pp22]=max(oo2);
Nmax2(ij)=Nq(pp2(pp22));
fimax2(ij)=fiq(pp22);
[oo3 pp3]=max(int3);
[oo33 pp33]=max(oo3);
Nmax3(ij)=Nq(pp3(pp33));
fimax3(ij)=fiq(pp33);

```

```

[oo4 pp4]=max(int4);
[oo44 pp44]=max(oo4);
Nmax4(ij)=Nq(pp4(pp44));
fimax4(ij)=fiq(pp44);
[oo12 pp12]=max(int1+int2);
[oo1122 pp1122]=max(oo12);
Nmax12(ij)=Nq(pp12(pp1122));
fimax12(ij)=fiq(pp1122);
[oo34 pp34]=max(int3+int4);
[oo3344 pp3344]=max(oo34);
Nmax34(ij)=Nq(pp34(pp3344));
fimax34(ij)=fiq(pp3344);
end
%Sxediasmos grafikhs parastashs
[n,ffii]=meshgrid(Nq,fiq);
x=n.*cos(ffii);
y=n.*sin(ffii);
iso=linspace(0,max(max(int1+int2)),101);%apokoph tw n arnhtikwn timwn
contourf(x,y,int1'+int2',iso,'linestyle','none')
c1=sprintf("$f_t$");
title(c1,'interpreter','latex')
ylabel('m','rotation',0,'interpreter','latex');
xlabel('n','interpreter','latex');
set(gca,'FontSize',18)

```

Βιβλιογραφία

- Bakas, N. A. and P. J. Ioannou, 2013: On the mechanism underlying the spontaneous emergence of barotropic zonal jets., *J. Atmos. Sci.*, **70**, 2251-2271.
- Bakas, N.A. and P.J. Ioannou, 2019: Is spontaneous generation of coherent baroclinic flows possible?, *J.Fluid.Mech.*, **862**, 889-923.
- Bakas, N.A., N C. Constantinou and P. J. Ioannou, 2015: S3T Stability of the homogeneous state of barotropic beta-plane turbulence., *J. Atmos. Sci.* **72** 1689–1712.
- Berloff, P., I. Kamenkovich, and J. Pedlosky, 2009a: A mechanism of formation of multiple zonal jets in the oceans., *J. Fluid Mech.*, **628**, 395-425.
- Berloff, P., I. Kamenkovich, and J. Pedlosky, 2009b: A model of multiple zonal jets in the oceans: Dynamical and kinematical analysis., *J. Phys. Oceanogr.*, **39**, 2711-2734.
- Cattiaux, J., R. Vautard, C. Cassou, P. Yiou, V. Masson-Delmotte and F. Codron, 2010: Winter 2010 in Europe: A cold extreme in a warming climate., *Geophys. Res. Lett.* **37**.
- Charney, J. G., 1948: On the scale of atmospheric motions. *Geophys. Publ.* **17**, 371-385.
- DelSole, T., 2004: Stochastic models of quasigeostrophic turbulence., *Surv. Geophys.*, **25**, 107-194.
- DelSole, T., and B.F Farrell, 1996: The quasi-linear equilibration of a thermally maintained, stochastically excited jet in a quasi geostrophic model. *J. Atmos. Sci.*, **53**, 1781–97.

- Drouard, M., K. Kornhuber and T. Woollings, 2019: Disentangling dynamic contributions to summer 2018 anomalous weather over Europe, *Geophys. Res. Lett.* **46**.
- Farrell, B.F. and P.J. Ioannou, 2003: Structural stability of turbulent jets., *J. Atmos. Sci.* **60**, 2101-2118.
- Farrell, B. F. and P.J. Ioannou, 2008: Formation of jets by baroclinic turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **65**, 3353–3375.
- Ferrel, W., 1859: The motions of fluids and solids relative to the Earth's surface., *Math. Monthly.*, **1**, 140-147, 210-216, 300-307, 366-372, 397-406.
- Fjortoft, R., 1953: On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for two-dimensional, non-divergent flow, *Tellus*, **5**, 120-140.
- Galperin, B., Sukoriansky, S. and H.-P. Huang, 2001: Universal n^5 spectrum of zonal flows on giant planets., *Phys. Fluids.*, **13**, 1545–8.
- Held I.M and A.Y. Hou 1980: Nonlinear axially symmetric circulations in a nearly inviscid atmosphere., *J. Atmos. Sci.* **37**, 515-533.
- Holton, J.R., 2004: *An introduction to dynamic Meteorology 4th ed.*, University of Washington, 535 pp.
- Huang, H.P. and W. A. Robinson, 1998: Two-dimensional turbulence and persistent zonal jets in a global barotropic model. *J. Atmos.Sci.*, **55**, 611–32.
- Jeffreys, H., 1926: On the dynamics of geostrophic winds., *Q. J. Roy. Meteor. Soc.*, **52**, 85-104.
- Lorenz, E. N., 1967: The nature and theory of the general circulation of the atmosphere, *World Meteorological Organization Monograph No.218*, TP 115 [5,7].
- Lynch, P., 2006: *The Emergence of Numerical Weather Prediction: Richardson's Dream.*, Cambridge University Press, 279pp
- Nozada, T., and Y. Yoden, 1997: Formation of zonal band structure in forced two-dimensional turbulence on rotating sphere., *Phys. Fluids.*, **9**, 2081-2093.
- Phillips, N., 1951: A simple three-dimensional model for the study of large-scale extratropical flow patterns.*J. Meteor.*, **8**, 381–394.

- Rhines, P. B., 1975: Waves and turbulence on a beta-plane. *J.Fluid.Mech.*, **69**, 417-433.
- Richardson, L. F., 1922: *Weather prediction by numerical processes.*, Cambridge Mathematcal Library, 250 pp.
- Shaw, T.A, M. Baldwin, E. A. Barnes, R. Caballero, C. I. Garfinkel, Y.-T. Hwang, C. Li, P. A. O' Gorman, G. Rivi'ere, I. R. Simpson and A. Voigt, 2016: Storm track processes and the opposing influences of climate change, *Nature Geoscience*, **9**, 656–664.
- Shepherd, T.G, 1987: A spectral view of nonlinear fluxes and stationary- transient interaction in the atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **44**, 1166-1178.
- Schneider, E.K and R.S. Lindzen 1977: Axially symmetric steady state models of the basic state of instability and climate studies. Part I: Linearized calculations.,*J. Atmos. Sci.*, **34**, 263-279.
- Seager, R., D. S. Battisti, J. Yin, N. Gordon, N. Naik, A. C. Clement, and M. A. Cane, 2002: Is the Gulf stream responsible for Europe's mild winters? *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **128**, 2563-2586.
- Srinivasan, K., and W. R. Young, 2012: Zonostrophic instability., *J. Atmos. Sci.*, **69**, 1633-1656.
- Starr, V., 1968: Physics of negative viscosity phenomena., *McGraw-Hill*, 256 pp.
- Stendel, M., Francis, J., White, R., Williams, P. D., and T. Woollings, 2021: Chapter 15 - The jet stream and climate change, in: *Climate Change (Third Edition)*, edited by Letcher, T. M., pp. 327–357.
- Vallis, G.K. 2017: *Atmospheric and Ocean Fluid Dynamics. 2nd ed.*, Cambridge University Press.
- Vallis, G. K., and M. E. Maltrud, 1993: Generation of mean flows and jets on a beta plane and over topography, *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1346-1362.
- Whitaker, J.S, and S.D Sardeshmukh, 1998: A linear theory of extratropical synoptic eddy statistics., *J. Atmos. Sci.*, **55**, 237-258.
- Zhang, Y., and I.M. Held, 1999: A linear stochastic model of a GCM's midlatitude

storm tracks., *J. Atmos. Sci.*, **56**, 3416–3435.