Πανεπιστήμιο
Ιωαννίνων

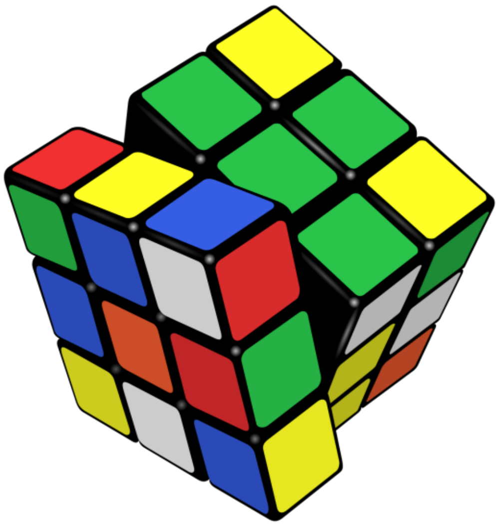
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"Διδακτική και τεχνολογίες μάθησης των Φυσικών Επιστημών"

Μεταπτυχιακή εργασία

"Μέτρηση της μαθηματικής δημιουργικότητας των υποψηφίων εκπαιδευτικών Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης"

Μαρία Λάζου

Επιβλέπων Καθηγητής: Δημήτριος Μαυρίδης



Εξεταστική επιτροπή: Δημήτριος Μαυρίδης, Αν.Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε.
Κωνσταντίνος Κώτσης, Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε.
Κωνσταντίνος Τάτσης, Αν.Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε.

Ιωάννινα 2023

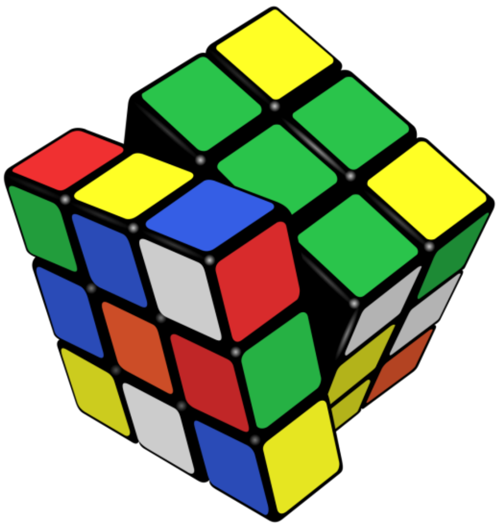
Πανεπιστήμιο
Ιωαννίνων

EDUCATIONAL DEPARTMENT OF PRIMARY EDUCATION
POSTGRADUATE PROGRAMME
"Didactics and Learning Techniques in Natural Sciences"

Postgraduate work
"Measuring the mathematical creativity of Primary Education teacher candidates"

Maria Lazou

Supervisor Dimitrios Mavridis



COMMITTEE OF EXAMINERS: Dimitrios Mavridis, Associate Professor
Konstantinos Kotsis, Professor
Konstantinos Tatsis, Associate Professor

Ioannina 2023

Περιεχόμενα

Περίληψη

Στην παρούσα έρευνα επιχειρείται να μετρηθεί η μαθηματική δημιουργικότητα στους υποψήφιους εκπαιδευτικούς Δημοτικών Σχολείων μέσω ενός εργαλείου που δημιουργήθηκε στα πλαίσια της εργασίας και το οποίο προέκυψε από την ανασκόπηση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας για τη μαθηματική δημιουργικότητα. Η μαθηματική δημιουργικότητα αποτελεί σημαντικό ζήτημα στη σύγχρονη κοινωνία και προκειμένου αυτή να αναπτυχθεί, χρειάζεται εκπαιδευτικούς, οι οποίοι να αντιλαμβάνονται την αξία της, να είναι οι ίδιοι μαθηματικά δημιουργικοί και κατάλληλα προετοιμασμένοι, ώστε να την καλλιεργήσουν και να ενθαρρύνουν την ανάπτυξή της στους μαθητές τους στα Δημοτικά Σχολεία.

Η παρούσα μελέτη προσφέρει ένα εκπαιδευτικό εργαλείο για την αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας. Το εργαλείο βασίζεται στον ορισμό της δημιουργικότητας του Torrance (1974), σύμφωνα με τον οποίο η δημιουργικότητα βασίζεται σε τέσσερα αμοιβαία σχετιζόμενα στοιχεία: την ευχέρεια, την ευελιξία, την πρωτοτυπία και την επεξεργασία. Η ευχέρεια σχετίζεται με την ροή των ιδεών, η ευελιξία με την ικανότητα εναλλαγής μεταξύ διαφορετικών ιδεών, η πρωτοτυπία συνδέεται με την καινοτομία των ιδεών του ατόμου και η επεξεργασία σχετίζεται με την ικανότητα του ατόμου να περιγράφει, να φωτίζει και να γενικεύει αυτές τις ιδέες (Torrance, 1974). Ωστόσο, η μαθηματική δημιουργικότητα αξιολογήθηκε με τις τρεις πρώτες συνιστώσες της.

Σκοπός της έρευνας είναι η μέτρηση της μαθηματικής δημιουργικότητας των υποψηφίων εκπαιδευτικών. Στην έρευνα συμμετείχαν εκατόν-πέντε (105) υποψήφιοι εκπαιδευτικοί δημοτικών σχολείων που φοιτούν ή φοίτησαν στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Ιωαννίνων και ειδικότερα ενενήντα-τρεις (93) του Γ΄ έτους, εννέα (9) του του Δ' έτους και τρεις (3) απόφοιτοι. Στους ανωτέρω δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο με τέσσερα (4) προβλήματα ανοικτού τύπου, το οποίο συμπληρώθηκε στα πλαίσια του μαθήματος της Διδακτικής των Μαθηματικών για τους 3ετείς φοιτητές και στα πλαίσια του μαθήματος της Στατιστικής για τους 4ετείς φοιτητές, μάθημα το οποίο είναι επιλογής.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι το επίπεδο δημιουργικότητας των υποψηφίων εκπαιδευτικών ήταν χαμηλό και ιδιαίτερα για τους 3ετείς φοιτητές, καθώς και ιδίως γι' αυτούς που προέρχονταν από τη θεωρητική κατεύθυνση, γεγονός που καταδεικνύει την άρρηκτη σχέση της μαθηματικής δημιουργικότητας με τη μαθηματική ικανότητα.

Η σημαντικότητα της παρούσας έρευνας έγκειται στο γεγονός, ότι προσφέρεται ένα εργαλείο μέτρησης της μαθηματικής δημιουργικότητας των υποψηφίων εκπαιδευτικών, ώστε αφενός μεν, να εκτιμηθεί εάν υπάρχουν γερά ερείσματα για την οικοδόμησή της, αφετέρου δε, να δοθούν έγκαιρα σε αυτούς τα απαραίτητα εφόδια για την ενίσχυση αυτής και συνεπώς, να καταστούν σε θέση να την προωθήσουν στο μέλλον στους μαθητές τους.

Abstract

This research is an attempt to measure the mathematical creativity of prospective Primary School teachers through a tool created in the context of the work and which resulted from the review of the existing literature on mathematical creativity. Mathematical creativity is an important issue in modern society and in order to be developed, it needs teachers, who understand its value, who are themselves mathematically creative and appropriately prepared to cultivate it and encourage its development in their students in primary Schools.

The present study offers an educational tool for the assessment of mathematical creativity. The tool is based on Torrance's (1974) definition of creativity, according to which creativity is based on four interrelated elements: fluency, flexibility, originality and elaboration. Fluency is related to the flow of ideas, flexibility is the ability to switch between different ideas, originality is related to the novelty of one's ideas and elaboration is related to one's ability to describe, illuminate, and generalize those ideas (Torrance, 1974). However, mathematical creativity was assessed with its first three components.

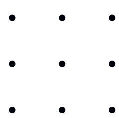
The purpose of the research is to measure the mathematical creativity of teacher candidates. One hundred and five (105) prospective primary school teachers who study or studied at the Pedagogical Department of Primary Education of Ioannina participated in the survey and in particular ninety-three (93) of the 3rd year, nine (9) of the 4th year and three (3) graduates. The above were given a questionnaire with four (4) open-ended problems, which was completed in the context of the Teaching of Mathematics course for the 3-year students and in the context of the Statistics course for the 4-year students, which is an elective course.

The results of the research showed that the level of creativity of the teacher candidates was low, especially for the 3-year students as well as especially for those who came from the theoretical direction, which demonstrates the inextricable relationship between mathematical creativity and mathematical ability.

The importance of the present research lies in the fact that a tool is offered to measure the mathematical creativity of prospective teachers, so that on the one hand, it can be assessed whether there are solid foundations for its construction, and on the other hand, to provide them with the necessary supplies in time to strengthen of this and therefore, to be able to promote it in the future to their students.

Εισαγωγή

Είναι σημαντικό οι άνθρωποι να σκέφτονται “έξω από το κουτί”; Αυτή η φράση αποτυπώνεται ακριβώς στον παρακάτω γρίφο. “Δοκιμάστε να ενώσετε και τις 9 κουκίδες, τραβώντας το πολύ 4 ευθείες γραμμές, χωρίς να σηκώσετε καθόλου τη μύτη του μολυβιού και χωρίς να περάσει από την ίδια κουκίδα περισσότερες από μία φορές”.



Αν και πολλοί ερευνητές έχουν προσπαθήσει να ορίσουν την έννοια της δημιουργικότητας, δεν υπάρχει καθολικά αποδεκτός ορισμός. Η δημιουργικότητα είναι ένα περίπλοκο φαινόμενο και για μερικούς ανθρώπους ασυμβίβαστο με τη διδασκαλία των μαθηματικών. Στην εργασία αυτή προσεγγίζεται το θέμα της μαθηματικής δημιουργικότητας και επιχειρείται να μετρηθεί.
Καταρχάς, γίνεται μια προσπάθεια να οριστεί η δημιουργικότητα μέσω μιας βιβλιογραφικής ανασκόπησης καθώς και να δοθούν οι βάσεις για να μετρηθεί αυτή. Επιπλέον, καθώς η μαθηματική δημιουργικότητα σχετίζεται με την επίλυση προβλημάτων, γίνεται μια κατηγοριοποίηση αυτών μαζί με παραδείγματα. Η εργασία αναφέρεται, επιπροσθέτως, στον ρόλο των εκπαιδευτικών ο οποίος είναι καθοριστικός για την ανάπτυξη της δημιουργικότητας αλλά και στη συμβολή των σχολικών εγχειριδίων στην ανάπτυξη αυτής. Σε αυτά τα πλαίσια γίνεται μια αξιολόγηση των σχολικών εγχειριδίων της Ε’ και Στ’ Δημοτικού υπό το πρίσμα των συνιστωσών της δημιουργικότητας για το κατά πόσον αυτά προάγουν τη μαθηματική δημιουργικότητα.
Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μέτρηση της μαθηματικής δημιουργικότητας των υποψηφίων εκπαιδευτικών με τη χρήση ενός εργαλείου που κατασκευάστηκε για τον λόγο αυτό. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να είναι κατάλληλα προετοιμασμένοι προκειμένου να ενθαρρύνουν τη μαθηματική δημιουργικότητα στους μαθητές τους ώστε να καταστούν αυτοί ενεργοί πολίτες στο μέλλον που θα μπορούν να ανταποκριθούν στις ολοένα αυξανόμενες απαιτήσεις της κοινωνίας και να επιλύουν προβλήματα της καθημερινής ζωής, που θα ανακύπτουν με τον καλύτερο τρόπο για τους ίδιους και για την κοινωνία της οποίας είναι μέλη. Όλοι οι άνθρωποι είναι εν δυνάμει δημιουργικοί και αρωγοί της ανάπτυξης της δημιουργικότητας αποτελούν αδήριτα η οικογένεια, το σχολείο, οι δάσκαλοι και κατ’ επέκταση η Πολιτεία που διαμορφώνει τα σχολικά εγχειρίδια και το Α.Π.Σ.
Τα **ερευνητικά ερωτήματα** που επιχειρήθηκαν να απαντηθούν είναι τα εξής:
1. Μπορεί να μετρηθεί το επίπεδο της μαθηματικής δημιουργικότητας των υποψηφίων εκπαιδευτικών με ένα κατάλληλο εργαλείο;
2. Διαφοροποιείται το επίπεδο της δημιουργικότητας των υποψηφίων εκπαιδευτικών ανάλογα με την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο;

Α. <u>ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ</u>

1. <u>Ιστορική αναδρομή</u>

Πολλοί φιλόσοφοι που χρονολογούνται από την εποχή του Πλάτωνα έχουν εξερευνήσει τη δημιουργικότητα και ειδικότερα ο **Πλάτων** αφιέρωσε σημαντικό χρόνο, συζητώντας για τη δημιουργικότητα, ως προς την ποίηση και τους ποιητές (Ambrose, Sriraman, Pierce, 2014). Η ποίηση προέρχεται από την λέξη “ποιήσεις”, η οποία περιγράφει ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά των πολύπλοκων συστημάτων: την αυτοποίηση που έχει επεκταθεί για να περιλαμβάνει τις έννοιες της αυτο-δημιουργίας και της υπέρβασης (Capra, 1996).

1.1 Η δημιουργικότητα από υποκειμενική και αντικειμενική σκοπιά

Από **υποκειμενική προοπτική** η δημιουργικότητα ορίζεται ως η ανάδυση ενός νέου προϊόντος, που αναπτύσσεται από τη μοναδικότητα του ατόμου (Rogers, 1954) και βοηθά να σπάσει τα εμπόδια της ρουτίνας (Dabrowski, 1973).

Από **διυποκειμενική ή πολιτισμική σκοπιά**, η δημιουργική έκφραση είναι σταθερή, βασίζεται στον πολιτισμό και έχει τη δική της βαθιά επίδραση στον ίδιο τον πολιτισμό (Dilthey, 1976, Rudowicz, 2003).

Ο Vygotsky (1978) εξέτασε τη δημιουργικότητα από **κοινωνική και πολιτιστική άποψη** και το πώς αυτή επηρεάζει την ατομική και πολιτιστική ανάπτυξη. Ο Vygotsky (1930/1984) θεωρεί πως η δημιουργικότητα είναι ένας σημαντικός μηχανισμός κατασκευής νέας γνώσης, με διάκριση ανάμεσα στη δημιουργικότητα που οδηγεί σε ιστορικές ανακαλύψεις και τη δημιουργικότητα που συμβάλλει στην προαγωγή της μάθησης του κάθε μαθητή. Ομοίως, ο Csikszentmihalyi (1999) εξέτασε τη δημιουργικότητα στις κοινωνικές και πολιτιστικές προοπτικές, περιγράφοντας ένα μοντέλο συστημάτων δημιουργικότητας, όπου τα πολιτισμικά και τα κοινωνικά συστήματα αλληλοεπιδρούν.

Από **αντικειμενική ή συμπεριφορική προοπτική** (νευροεπιστήμη), οι δημιουργικές διαδικασίες αν και εξακολουθούν να είναι αινιγματικές, αναφέρουν πως η δημιουργικότητα δε σχετίζεται με μεμονωμένη περιοχή του εγκεφάλου και είναι αποτέλεσμα συσχέτισης ανάμεσα σε ένα πλήθος διεργασιών και περιοχών του εγκεφάλου που εμπλέκονται σε αυτόν (Dietrich & Kanso, 2010). Εστιάζοντας στις συνδέσεις μεταξύ του μετωπιαίου λοβού (αξιολόγηση ιδέας), του κροταφικού λοβού (δημιουργία ιδεών) και του μεταιχμιακού συστήματος (συναισθήματα), ο Flaherty (2005) προτείνει ένα ανατομικό μοντέλο τριών παραγόντων δημιουργίας της ανθρώπινης ιδέας και της δημιουργικότητας.

1.2 Σύνδεση της δημιουργικότητας με τη νοημοσύνη

Η δημιουργικότητα βοηθά στην ανάπτυξη της **αίσθησης της αποτελεσματικότητας** και της ικανότητας συντονισμού ατομικών δεξιοτήτων για την επίτευξη επιθυμητών στόχων σε συγκεκριμένους τομείς και περιστάσεις (Bandura, 1997). Οι Sternberg και Lubart (2000) ορίζουν τη δημιουργικότητα ως την ικανότητα παραγωγής απροσδόκητου πρωτότυπου έργου, που είναι χρήσιμο και προσαρμοστικό (Sriraman, 2008).

Ψυχομετρικά μοντέλα δημιουργικότητας και χαρισματικότητας στοχεύουν στη μέτρηση αυτών των χαρακτηριστικών από μέσα τυποποιημένων δοκιμών (Singer, Sheffield, Leikin, 2017). Γνωστά παραδείγματα τέτοιων **τεστ για τη μέτρηση της νοημοσύνης** είναι τα Stanford–Binet (Thorndike et al. 1986) και Wechsler Intelligence Scales (Wechsler 1991). Η θεωρία της νοημοσύνης του Spearman (1923) πρότεινε έναν γενικό παράγοντα που αναφέρεται στην νοημοσύνη που είναι ανεξάρτητη από την εργασία και έναν συγκεκριμένο παράγοντα που είναι μοναδικός για κάθε διαφορετικό έργο. Επιπλέον, ο Thurstone (1941) επινόησε τη θεωρία των επτά πρωταρχικών νοητικών ικανοτήτων: λεκτική κατανόηση, λεκτική ευελιξία, αριθμητική ικανότητα, συνδετική μνήμη, αντιληπτική ταχύτητα, επαγωγική λογική και χωρική ικανότητα, (Singer, et al., 2017).

1.3 Στάδια μαθηματικής δημιουργικότητας

Η μαθηματική δημιουργικότητα έχει περιγραφεί ως διάκριση, επιλογή (Poincare, 1948). Ο ορισμός της δημιουργικότητας του **Poincare** (1948) περιελάμβανε το πρώτο στάδιο κατά το οποίο κάποιος εργάζεται σκληρά για να αποκτήσει μια εικόνα του προβλήματος, το δεύτερο στάδιο όταν το πρόβλημα παραμερίζεται για ένα χρονικό διάστημα και το μυαλό είναι απασχολημένο με άλλα προβλήματα, το τρίτο στάδιο όπου η λύση εμφανίζεται ξαφνικά και το τέταρτο που συνίσταται στην έκφραση των αποτελεσμάτων με γλώσσα ή γραφή (Sriraman, 2008).
Το 1945, ο Jacques **Hadamard** έγραψε ένα δοκίμιο για την ψυχολογία της εφεύρεσης στο Μαθηματικό Πεδίο, μια έρευνα της δημιουργικότητας μεγάλων εφευρετών. Ο Wallas (1926) στο θεμελιώδες έργο του η Τέχνη της Σκέψης, πρότεινε ένα μοντέλο επίλυσης τεσσάρων σταδίων που περιελάμβανε: την προετοιμασία, την επώαση, τον φωτισμό και την επαλήθευση, ενώ ο Hadamard αναγνώρισε αυτά τα τέσσερα στάδια της μαθηματικής δημιουργικότητας ως κρίσιμες πτυχές της μαθηματικής δημιουργικότητας, (Singer, et al., 2017). Αυτά τα έργα υποδηλώνουν ότι η δημιουργικότητα βασίζεται σε μια ασυνείδητη διαδικασία επώασης και αισθητικής επιλογής ιδεών που μεταμορφώνονται σε συνειδητή αντίληψη (Singer, et al., 2017). Ο Liljedahl (2009) παρουσιάζει μια μελέτη που αντικατοπτρίζει και επιβεβαιώνει το έργο του Hadamard.

1.4 Η δημιουργικότητα ως αποκλίνουσα σκέψη

Το σύγχρονο ενδιαφέρον για τη δημιουργικότητα ως αντικείμενο έρευνας ξεκίνησε στη μέση του 20ου αιώνα με τον **Guilford** να είναι ο πρώτος σύγχρονος ψυχολόγος που εξετάζει τη φύση της δημιουργικότητας μαζί με τον **Meeker** (1969), ο οποίος εφάρμοσε το έργο του στην εκπαίδευση και έκαναν τη διάκριση μεταξύ συγκλίνουσας και αποκλίνουσας σκέψης στη δημιουργικότητα (Spendlove, 2012). Ο Guilford αντιλαμβανόταν την αποκλίνουσα σκέψη ως την πνευματική λειτουργία για την οποία ευθύνεται η δημιουργική σκέψη, με χαρακτηριστικά: την ευχέρεια, κατανοητή ως την ικανότητα να καταλήγουμε σε πολλές ιδέες, την ευελιξία ή ικανότητα δημιουργίας λύσεων που είναι ποιοτικά διαφορετικές, την πρωτοτυπία που είναι υπεύθυνη για την παραγωγή ασυνήθιστων ιδεών και την επεξεργασία, ήτοι την ικανότητα ανάπτυξης ιδεών (Guilford 1967).
Από τη δεκαετία του 1950 η έρευνα για τη δημιουργικότητα επικεντρώθηκε (α) σε τρόπους μέτρησης της δημιουργικότητας, όπως το **Torrance** Test of Creativity (1974), (β) στην ανατομή και κατηγοριοποίηση της δημιουργικότητας, (γ) στη διάκριση μεταξύ της δημιουργικότητας ως επίκτητο γνώρισμα ή ως γενετικό χαρακτηριστικό και (δ) στην εξερεύνηση της δημιουργικότητας ως γνωστικό εργαλείο για συγκεκριμένα οφέλη, τα οποία έχουν αξιολογηθεί (Spendlove, 2012, Ambrose, et al, 2014).
Όπως προαναφέραμε, ο Guilford (1950) περιέγραψε τη δημιουργικότητα ως αποκλίνουσα σκέψη που αποτελείται από τα τέσσερα συστατικά της ευχέρειας (αριθμός ιδεών), της ευελιξίας (αριθμός κατηγοριών περιεχομένου), της πρωτοτυπίας (ιδέες που αναφέρθηκαν από ένα άτομο) και της επεξεργασίας. Με βάση αυτές τις ίδιες τέσσερις κατηγορίες, πρώτα ο Torrance πραγματοποίησε τα τεστ δημιουργικότητάς του στη Μινεσότα το 1958. Ακολούθησαν τα 13 τεστ δημιουργικότητας του

Guilford και αυτές οι ίδιες συνιστώσες συνεχίζουν να επηρεάζουν τη μέτρηση των μαθηματικής δημιουργικότητας μέχρι και σήμερα (Singer et al., 2017).

Αυτή η άποψη της δημιουργικότητας προσαρμόστηκε στην ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας στα σχολικά μαθηματικά μέσω της επίλυσης προβλημάτων και της τοποθέτησης προβλημάτων που ενθαρρύνουν τη μαθηματική ευχέρεια των μαθητών, την ευελιξία και την πρωτοτυπία (Silver 1997). Αργότερα, η Leikin (2009b) πρότεινε ένα μοντέλο για την αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας με τη χρήση πολλαπλών εργασιών λύσης (δηλαδή, εργασίες που ρητά απαιτούν από τους μαθητές να λύσουν ένα πρόβλημα με διάφορους τρόπους χρησιμοποιώντας διαφορετικές στρατηγικές λύσης) και το 2013 πρότεινε ένα μοντέλο που αναγνωρίζει την κεντρική θέση της μαθηματικής διορατικότητας στις δημιουργικές διαδικασίες (Leikin 2013).

2. Η έννοια της Δημιουργικότητας

Η δημιουργικότητα (Sheffield 2009, 2013, Silver 1997, Hershkovitz, Peled & Littler 2009) συμβάλλει στην προετοιμασία των μαθητών για την τρέχουσα και τη μελλοντική ζωή στις σύγχρονες κοινωνίες ώστε να ανταποκριθούν στις ανάγκες που αντιμετωπίζει η κοινωνία και σαφώς η αυξανόμενη ζήτηση στην οικονομία για δημιουργικότητα, είναι αναμφισβήτητη. Οι άνθρωποι χρειάζονται δεξιότητες για να λύνουν πολύπλοκα προβλήματα με δημιουργικό τρόπο, ενώ οι εξαιρετικές ιδέες δεν είναι σημαντικές μόνο για τους διευθυντές και εργαζόμενους, αλλά και για τους μαθητές και ειδικότερα η ανάπτυξη της επιστήμης και της τεχνολογίας απαιτεί όλο και περισσότερους ειδικούς που να είναι σε θέση να αντιμετωπίσουν αυτές τις προκλήσεις (Schindler, Joklitschke, Rott, 2018).

2.1 Ορισμός της δημιουργικής σκέψης

Πώς μπορούμε να ορίσουμε τι είναι "δημιουργικότητα ή δημιουργική σκέψη"; Αν και πολλοί ερευνητές έχουν επιχειρήσει να ορίσουν την έννοια της δημιουργικότητας, δεν υπάρχει καθολικά αποδεκτός ορισμός. Πολλοί ειδικοί δίνουν διάφορες περιγραφές γι 'αυτήν.
Η τρέχουσα παράδοση έρευνας για τη δημιουργικότητα ξεκίνησε στις δεκαετίες του 1940 και του 1950, όταν ο **Guildford** (1950) αντιλήφθηκε τη δημιουργικότητα ως ένα συστατικό της νοημοσύνης. Το ψυχολογικό μοντέλο νοημοσύνης του Guilford (1950) ήταν το πρώτο που περιλάμβανε διαφορετικές μορφές δημιουργικότητας και διέκρινε μεταξύ συγκλίνουσας και αποκλίνουσας παραγωγής και ειδικότερα "Η συγκλίνουσα παραγωγή είναι στην περιοχή των λογικών συναγωγών ή τουλάχιστον στην περιοχή των επιτακτικών συμπερασμάτων, η συγκλίνουσα παραγωγή και όχι η αποκλίνουσα παραγωγή είναι η κυρίαρχη λειτουργία όταν οι πληροφορίες εισόδου είναι επαρκείς για τον προσδιορισμό μιας μοναδικής απάντησης" (Guilford 1967, σελ. 138). Σε σύγκριση με τη συγκλίνουσα παραγωγή, περιγράφει την αποκλίνουσα παραγωγή ως "μια έννοια που ορίζεται σύμφωνα με ένα σύνολο παραγόντων πνευματικής ικανότητας που αφορούν κυρίως την ανάκτηση πληροφοριών και με τις δοκιμές τους, που απαιτούν έναν αριθμό διαφορετικών απαντήσεων σε κάθε αντικείμενο δοκιμής και αυτές οι δοκιμές απαιτούν από τους εξεταζόμενους να παράγουν τις δικές τους απαντήσεις, όχι να τις επιλέξουν από τις εναλλακτικές που τους δίνονται" (Guilford 1967, σελ. 138). Οι αποκλίνουσες ικανότητες σχετίζονται περισσότερο με τη δημιουργική απόδοση (Guilford, 1967).
Ο Guilford (1967) θεώρησε ότι η δημιουργική διαδικασία βασίζεται στον συνδυασμό της συγκλίνουσας σκέψης, η οποία περιλαμβάνει τη στόχευση για σωστή λύση σε ένα πρόβλημα και της αποκλίνουσας σκέψης, η οποία περιλαμβάνει τη δημιουργία πολλαπλών απαντήσεων σε ένα πρόβλημα. Αντιλαμβανόταν την αποκλίνουσα σκέψη ως την πνευματική λειτουργία για την οποία ευθύνεται η δημιουργική σκέψη, με χαρακτηριστικά: την ευχέρεια (η ικανότητα να καταλήγουμε σε πολλές ιδέες), την ευελιξία (ικανότητα δημιουργίας διαφορετικών λύσεων), την πρωτοτυπία (η παραγωγή σπανίων και ασυνήθιστων ιδεών) και την επεξεργασία (η ικανότητα ανάπτυξης ιδεών) (Guilford 1967).
Ο **Torrance** (1974) πρότεινε έναν λειτουργικό ορισμό της δημιουργικότητας που βασίζεται σε τέσσερα συναφή στοιχεία: την ευχέρεια, την ευελιξία, την πρωτοτυπία και την επεξεργασία και ειδικότερα η ευχέρεια αναφέρεται στη συνέχεια των ιδεών, στη ροή των συσχετισμών και στη χρήση της βασικής και καθολικής γνώσης, η ευελιξία συνδέεται με την αλλαγή ιδεών, την προσέγγιση ενός προβλήματος με διάφορους τρόπους και την παραγωγή ποικίλων λύσεων, η πρωτοτυπία χαρακτηρίζεται από μοναδικό τρόπο σκέψης και μοναδικά προϊόντα πνευματικής δραστηριότητας και η επεξεργασία αναφέρεται στην ικανότητα περιγραφής και γενίκευσης ιδεών. Η δημιουργικότητα είναι η παραγωγή μιας νέας ή αξιοσημείωτης απάντησης σε ένα δεδομένο πρόβλημα (Torrance, 1974).

2.2 Προσεγγίσεις της δημιουργικότητας

Το εγχειρίδιο της δημιουργικότητας (Sternberg, 2000), κατατάσσει τις περισσότερες προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται στη μελέτη της δημιουργικότητας σε έξι κατηγορίες:
(α) τη **μυστικιστική** που τη θεωρεί μια πνευματική διαδικασία,
(β) την **πραγματιστική** που αναφέρεται πρωτίστως στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας σε αντίθεση με την κατανόησή της,
(γ) τη **ψυχοδυναμική**, η οποία βασίζεται στην ιδέα ότι η δημιουργικότητα προκύπτει από την ένταση μεταξύ της συνειδητής πραγματικότητας και των ασυνείδητων ορμών,
(δ) τη **ψυχομετρική** που συνεπάγεται την ποσοτικοποίηση της έννοιας της δημιουργικότητας, παράδειγμα αυτού θα ήταν τα Torrance Tests of Creative Thinking που αναπτύχθηκαν από τον Torrance (1974), για τον εντοπισμό μαθητών που είναι δημιουργικοί και το οποίο αποτελείται από πολλές εργασίες που απαιτούν δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων και αποκλίνουσα σκέψη, που βαθμολογούνται για ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία και επεξεργασία (Sternberg, 2000),
(ε) τη **γνωστική** που εστιάζει στην κατανόηση των νοητικών αναπαραστάσεων και διεργασιών που διέπουν την ανθρώπινη σκέψη και
(στ) την **κοινωνική προσωπικότητα** που εστιάζει στην προσωπικότητα και στο κοινωνικο-πολιτιστικό περιβάλλον ως πηγές της δημιουργικότητας (Freiman & Sriraman 2007).
Μερικοί ερευνητές αναφέρονται στη δημιουργικότητα χρησιμοποιώντας εκφράσεις που σχετίζονται με γνωστικές ικανότητες όπως η ικανότητα, η προσέγγιση και η γνώση (Sternberg &Lubart, 1996), ή σε ικανότητες εννοιολογικής σκέψης που περιλαμβάνουν ευελιξία, ευχέρεια και πρωτοτυπία, καθώς και συμμετοχή σε μη αλγοριθμική λήψη αποφάσεων (Ervynck, 1991). Σύμφωνα με τον Sternberg και Lubart (1996, 1999), η δημιουργικότητα προκύπτει από την αλληλεπίδραση μεταξύ έξι διαφορετικών αλλά όχι ανεξάρτητων πόρων: διανοητικές ικανότητες, γνώσεις, στυλ της σκέψης, της προσωπικότητας, των κινήτρων και του περιβάλλοντος.

2.3 Δημιουργικότητα και καινοτομία

Οι Sternberg και Lubart (2000) χαρακτηρίζουν τη δημιουργικότητα ως την ικανότητα δημιουργίας απροσδόκητου και πρωτότυπου αποτελέσματος, που είναι επίσης προσαρμοσμένο στη δεδομένη πραγματική κατάσταση.
Ο Sarooghi (2015) δείχνει ότι η δημιουργικότητα μπορεί να αυξήσει την καινοτόμο δραστηριότητα, ενώ ο Mayesky (2009) προσθέτει ότι η δημιουργικότητα είναι ένας τρόπος σκέψης και δράσης για ένα πρωτότυπο προϊόν. Οι Plucker & Beghetto (2004) υποστήριξαν ότι υπάρχουν δύο βασικά στοιχεία της δημιουργικότητας και συγκεκριμένα η καινοτομία (δηλαδή πρωτότυπες, μοναδικές, διαφορετικές δημιουργίες) και χρησιμότητα (δηλαδή πολύτιμη, ουσιαστική, κατάλληλη, αξιόλογη δημιουργία). Οι Plucker και Beghetto (2004) επεσήμαναν, επίσης, ότι ο συνδυασμός αυτών των δύο στοιχείων χρησιμεύει ως θεμέλιος λίθος των επιστημονικών συζητήσεων και των ορισμών της δημιουργικότητας. Η παραγωγή κάτι νέου περιλαμβάνεται σχεδόν σε όλους τους ορισμούς (Torrance, 1988), είτε ρητά είτε σιωπηρά.
Η δημιουργικότητα μπορεί να υπερβαίνει τη φαντασία και να περιλαμβάνει κάποιο είδος εξωτερικής παραγωγής, ενώ η δημιουργική δραστηριότητα μπορεί να περιλαμβάνει φαντασία στην εξέταση των δυνατοτήτων (Robinson 2001). Κατά τον Silver (1997) και τους Lee και Kemple (2014) κάθε άνθρωπος γεννιέται εν δυνάμει δημιουργικός. Η δημιουργικότητα είναι η παραγωγή ενός αποτελέσματος που είναι ταυτόχρονα καινοτόμο και χρήσιμο, όπως ορίζεται σε ένα συγκεκριμένο κοινωνικό πλαίσιο (Plucker & Beghetto, 2004). Το «δημιουργικό» έχει τις ρίζες του στον ορισμό της δημιουργικότητας ως χρήσιμο, νέο ή μοναδικό προϊόν (Beghetto & Kaufman, 2009). Σύμφωνα με τον Pehkonen (1997) η δημιουργικότητα εμφανίζεται όταν το άτομο παράγει κάτι νέο και

απρόβλεπτο. Οι Kwon, Park και Park (2006) ορίζουν τη δημιουργικότητα ως υψηλής διάστασης ανθρώπινη ικανότητα του να σκεφτείς κάτι νέο.
Μια έννοια της μαθηματικής δημιουργικότητας είναι η «ιδιοφυΐα», όπου οι δημιουργικές πράξεις θεωρούνται ως κάτι σπάνιο, που παράγεται γρήγορα από εξαιρετικά άτομα (Weisberg, 1988). Ενώ υπάρχουν άνθρωποι που περιγράφονται ως μαθηματικά προικισμένοι, αυτό δεν σημαίνει ότι άλλοι δεν είναι επίσης μαθηματικά δημιουργικοί (Sriraman, 2005).
Άλλοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι δημιουργικές πράξεις συνδέονται με μεγάλες περιόδους μαθηματικής δραστηριότητας και προβληματισμού (Sternberg, 1988, Gruber & Wallace, 2000). Η έρευνα προτείνει ότι οι μαθηματικά δημιουργικοί δεν είναι απαραίτητα εκείνοι που παρουσιάζουν υψηλά επίπεδα επιτυχίας στα σχολικά μαθηματικά (Hong & Aqui, 2004). Πράγματι, η ίδια η μάθηση μπορεί να θεωρηθεί ως μια δημιουργική διαδικασία στην οποία κατασκευάζεται το νόημα από τον εκπαιδευόμενο (Von Glasersfeld, 1984, Lerman, 1990, Ernest, 1994).

Συνοψίζοντας, οι δημιουργικές ευκαιρίες στην τάξη των μαθηματικών βρίσκονται στην ανάγκη για μαθηματική έκφραση, στην κατασκευή νοήματος και στη δημιουργία τρόπων επίλυσης προβλημάτων (Bolden, Harries, Newton, 2009). Η δημιουργικότητα είναι ένας από τους κύριους παράγοντες για την επιτυχία κάποιου, ενώ τα δημιουργικά άτομα είναι πιο ανοιχτά στις σκέψεις τους και είναι σε θέση να κάνουν ανακαλύψεις (Supriatin, Boeriswati, Annisah, Latifahe, Zulkarnain, 2020).

3. Η έννοια της Μαθηματικής Δημιουργικότητας

Η δημιουργικότητα είναι ένα περίπλοκο φαινόμενο και για μερικούς ανθρώπους ασυμβίβαστο με τη διδασκαλία των μαθηματικών. Επιπροσθέτως, το παραδοσιακό στυλ διδασκαλίας στην τάξη των μαθηματικών φαίνεται να μην επιτρέπει πολλές δημιουργικές ιδέες (Meissner, 2003).
Η Leikin (2013) διακρίνει τη μαθηματική δημιουργικότητα σε απόλυτη και σχετική. Η απόλυτη δημιουργικότητα συνδέεται με ανακαλύψεις που προάγουν τα μαθηματικά ως επιστήμη, ενώ η σχετική δημιουργικότητα αναφέρεται σε ανακαλύψεις από ένα συγκεκριμένο άτομο μέσα σε μια συγκεκριμένη ομάδα αναφοράς (Leikin, 2013).
Η δημιουργικότητα εισάγει τα μαθηματικά με πολλούς διαφορετικούς τρόπους εκ των οποίων τρεις σημαντικοί είναι η αφαίρεση, η σύνδεση και η έρευνα και ειδικότερα η δημιουργικότητα της αφαίρεσης αφορά τη δημιουργία μοντέλων που αντικατοπτρίζουν το πραγματικό κόσμο και μπορούν να λυθούν με μαθηματικά εργαλεία γνωστά στο άτομο, η δημιουργικότητα της σύνδεσης είναι η συνειδητοποίηση ότι γνωστά μαθηματικά εργαλεία μπορούν να εφαρμοστούν σε νέα προβλήματα, επιτρέποντας να αντιμετωπιστούν με νέο τρόπο και τέλος, η δημιουργικότητα της έρευνας είναι η ανακάλυψη νέων μαθηματικών εργαλείων που ταιριάζουν σε άλυτα προβλήματα και προστίθενται στα διαθέσιμα εργαλεία για άλλους χρήστες μαθηματικών (Novita, Putra, 2016).
Ο Silver (1997) προτείνει την ανάπτυξη της δημιουργικότητας μέσω της επίλυσης προβλημάτων αναπτύσσοντας την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία. Η δημιουργία πολλαπλών ιδεών, πολλαπλών απαντήσεων σε ένα πρόβλημα αναπτύσσει την ευχέρεια, η δημιουργία νέων λύσεων όταν τουλάχιστον μία έχει ήδη παραχθεί, προάγει την ευελιξία και τέλος, η διερεύνηση πολλών λύσεων σε ένα πρόβλημα και η δημιουργία ενός νέου προάγει την πρωτοτυπία (Aizikovitsh 2014).
Ένα πρόβλημα ορίζεται ως μια σχετικά νέα και πολύπλοκη κατάσταση, στην οποία ο λύτης πρέπει να εφεύρει τον αλγόριθμο για τη λύση και ειδικότερα ένα πρόβλημα μη ρουτίνας παρουσιάζει στον εκπαιδευόμενο μια νέα, άγνωστη κατάσταση και διεγείρει τη φαντασία και τις αισθήσεις του παρακινώντας τον να πετύχει (Aizikovitsh 2014).

3.1 Μοντέλα δημιουργικής διαδικασίας

Α. Το μοντέλο του Wallas

Ο Graham Wallas (1926) ήταν ένας από τους πρώτους ερευνητές που προσπάθησε να μοντελοποιήσει τη δημιουργική διαδικασία, προσφέροντας ένα μοντέλο μέσα από τα επτά διακριτά στάδια, της συνάντησης, της προετοιμασίας, της συγκέντρωσης, της επώασης, του φωτισμού, της επαλήθευσης και της πειθούς. Στο πρώτο στάδιο της **συνάντησης**, προσδιορίζεται η ύπαρξη προβληματικής κατάστασης, ενώ στο δεύτερο στάδιο της **προετοιμασίας**, ο λύτης προσπαθεί να κατανοήσει και να εξερευνήσει την προβληματική κατάσταση (Johnson and Carruthers 2006). Κατά τη **συγκέντρωση**, ο λύτης λειτουργεί συνειδητά προκειμένου να βρεθεί λύση στο πρόβλημα, ενώ κατά την **επώαση** λαμβάνει χώρα υποσυνείδητα (Johnson et al 2006). Μια πολλά υποσχόμενη ιδέα έρχεται ξαφνικά σε συνειδητή επίγνωση στο στάδιο του **φωτισμού** (Davis και Rim 2004), ενώ στο στάδιο της **επαλήθευσης**, δοκιμές και ανάπτυξη ιδεών λαμβάνουν χώρα (Johnson et al 2006). Στο τελευταίο στάδιο, στην **πειθώ**, ο λύτης προσπαθεί να πείσει τους άλλους, ότι η ιδέα που προτείνει, είναι αποτελεσματική για τον σκοπό που δημιουργήθηκε.
Στα μετέπειτα χρόνια το μοντέλο του Wallas (1926) περιορίστηκε σε τέσσερις φάσεις: την προετοιμασία, την επώαση, τον φωτισμό και την επαλήθευση και χρησιμοποιήθηκε ως βάση για παρόμοιες προσπάθειες σύλληψης της δημιουργικής διαδικασίας.
Το σύντομο μοντέλο του Wallas (1926) υιοθετήθηκε στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης (Liljedhal 2004, Sriraman 2004). Στην ίδια γραμμή, ο Sriraman (2004) βρήκε ότι οι μαθηματικές δημιουργικές διαδικασίες ακολουθούν το μοντέλο των τεσσάρων σταδίων του Wallas (1926), **προετοιμασία-επώαση-φωτισμός-επαλήθευση.**

Β. Το μοντέλο του Osborn

Παρόμοιο μοντέλο ήταν αυτό που προτάθηκε από τον Osborn (1963), με τα στάδια να είναι **ο προσανατολισμός, η προετοιμασία, η ανάλυση, ο ιδεασμός (το 1953, «υπόθεση»), η επώαση, η σύνθεση και η αξιολόγηση (στο 1953, «επαλήθευση»).** Στο στάδιο του προσανατολισμού, το άτομο εντοπίζει το πρόβλημα και το αναλύει σε υποπροβλήματα, προκειμένου να συλλέξει σχετικά δεδομένα και πληροφορίες λύνοντάς το, ενώ στο στάδιο της ανάλυσης ο λύτης ανακτά σχετικές πληροφορίες και κατά τον ιδεασμό εντοπίζονται εναλλακτικές ιδέες, στο πέμπτο στάδιο, αυτό της επώασης, το άτομο σταματά να ασχολείται συνειδητά με το στόχο και κατά τη σύνθεση, ο λύτης συνδυάζει τα στοιχεία που συλλέγει, και στο τελευταίο στάδιο αξιολογεί και επαληθεύει τις ιδέες που έχουν προκύψει, σύμφωνα με τους αρχικούς στόχους (Osborn, 1963).

Γ. Το μοντέλο των Cropley και Urban

Οι Cropley και Urban (2000) ισχυρίστηκαν ότι η εφαρμογή της δημιουργικής ιδέας απουσίαζε από το μοντέλο του Wallas (1926). Για το λόγο αυτό πρότειναν ένα μοντέλο επτά σταδίων για την ενσωμάτωση της εφαρμογής στη δημιουργική διαδικασία: **προετοιμασία, πληροφορίες (εκμάθηση ή υπενθύμιση εμπειρογνωμοσύνης), επώαση, φωτισμός, επαλήθευση, επικοινωνία (παρουσίαση σε άλλα άτομα, λήψη σχολίων) και επικύρωση** (αξιολόγηση της συνάφειας και της αποτελεσματικότητας της λύσης), (Cropley και Urban, 2000).

Δ. Το μη γραμμικό μοντέλο της Sheffield

Αν και τα γραμμικά μοντέλα έχουν κερδίσει μεγάλη αποδοχή στον τομέα, ορισμένοι ερευνητές δεν είναι ακόμα ικανοποιημένοι με αυτά (Lubart 2001).
Ένα μη γραμμικό ευρετικό μοντέλο προτάθηκε από την Sheffield (2009), στο οποίο παρουσιάζονται πέντε στάδια: η διερεύνηση, η συσχέτιση, η δημιουργία, η αξιολόγηση και η επικοινωνία. Ειδικότερα, το στάδιο της **διερεύνησης** αναφέρεται σε μια εις βάθος μελέτη των διαθέσιμων πληροφοριών και σχετικών μαθηματικών εννοιών και ιδεών, η **συσχέτιση** ορίζεται ως η διαδικασία σύγκρισης ιδεών, εντοπισμού ομοιοτήτων-διαφορών και συνδυασμού πληροφοριών, ενώ στο στάδιο της **δημιουργίας** τα άτομα βρίσκουν λύσεις ή εντοπίζουν νέες ιδέες και κατά τη διάρκεια της **αξιολόγησης** οι μαθητές στοχάζονται και προτείνουν λύσεις, επιβεβαιώνοντας την επιτυχία των στόχων που είχαν τεθεί, ενώ το στάδιο **επικοινωνίας** αναφέρεται στην περιγραφή και επεξήγηση των ιδεών και στρατηγικών (Sheffield 2009). Σύμφωνα με την Sheffield (2009), ένα άτομο μπορεί να ξεκινήσει από διάφορα σημεία σε αυτό το μοντέλο και προχωρώντας με μη γραμμικό τρόπο να φτάσει σε μια δημιουργική λύση.

3.2 Η σύνδεση της μαθηματικής δημιουργικότητας με την επίλυση προβλημάτων

Σύμφωνα με τους **Silver (1997) και Ervynck (1991),** η επίλυση προβλημάτων με διάφορους τρόπους είναι ένα εργαλείο τόσο για την αξιολόγηση όσο και για την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας.
Σύμφωνα με τον Ervynck (1991) η μαθηματική δημιουργικότητα αρθρώνεται, όταν αναδύεται ένας μοναδικός και νέος τρόπος επίλυσης ενός προβλήματος και τόνισε ότι η μαθηματική δημιουργικότητα βασίζεται στις προηγούμενες εμπειρίες ενός ατόμου. Η δημιουργικότητα έχει θεωρηθεί ότι είναι ένα κρίσιμο συστατικό της προηγμένης μαθηματικής σκέψης και συνίσταται στην ικανότητα επίλυσης προβλημάτων ανάλογα με την καταλληλότητα της ενσωμάτωσης τόσο της φύσης της λογικής-αφαίρεσης στην εκπαίδευση των μαθηματικών όσο και των εξελισσόμενων εννοιών της στον πυρήνα αυτής (Ervynck, 1991).

Ο Ervynck (1991) θεωρεί ότι η μαθηματική δημιουργικότητα συνδέεται με την ικανότητα διατύπωσης μαθηματικών στόχων και την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων. Η πρωτότυπη ή δημιουργική σκέψη δίνει τη δυνατότητα για επίλυση προβλημάτων ή τοποθέτηση προβλημάτων σε διάφορους τομείς, δημιουργώντας καινοτόμες και πρωτότυπες λύσεις, που εκπλήσσουν, με αποτέλεσμα αυτή η σκέψη να χαρακτηρίζεται από διανοητική ευελιξία, περιέργεια, καλά ανεπτυγμένη φαντασία, υψηλό κίνητρο ενδιαφέροντος στην εξεύρεση λύσεων και σκέψη προσανατολισμένη στο στόχο (Aizikovitsh 2014).
Ο Hadamard (1945), όπως αναφέρθηκε από τον Silver (1994), προσδιόρισε την ικανότητα εύρεσης βασικών ερευνητικών ερωτημάτων ως ένα δείκτη εξαιρετικού μαθηματικού ταλέντου. Η επίλυση προβλημάτων παίζει ουσιαστικό ρόλο στην ανάπτυξη μαθηματικά ταλαντούχων μαθητών και ειδικότερα η ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας στο πλαίσιο της επίλυσης προβλημάτων θεωρείται ότι είναι ο κεντρικός στόχος στην εκπαίδευση για τους χαρισματικούς (Mann, 2006).
Η επίλυση προβλημάτων είναι ένας από τους ακρογωνιαίους λίθους της μαθηματικής δραστηριότητας (NCTM 2000). Γενικά, η δημιουργικότητα ορίζεται ως «η γνωστική ικανότητα να προτείνεις μια λύση σε ένα πρόβλημα ή να κάνεις κάτι χρήσιμο πέρα από τα συνηθισμένα» (Hwang, Chen, Dung, & Yang, 2007, σελ. 193).
Οι Sriraman και Liljedahl (2006) ορίζουν τη μαθηματική δημιουργικότητα στο πλαίσιο του σχολικού επιπέδου ως μια διαδικασία που οδηγεί σε πρωτότυπες και διορατικές λύσεις σε ένα δεδομένο πρόβλημα ή και σε προσεγγίσεις σε ένα παλιό πρόβλημα από μια νέα προοπτική. Ειδικότερα, η μαθηματική δημιουργικότητα αναφέρεται στη διαδικασία που καταλήγει σε ασυνήθιστες και διορατικές λύσεις σε ένα δεδομένο πρόβλημα και τη διατύπωση νέων ερωτήσεων, που επιτρέπουν την εξέταση ενός παλιού προβλήματος υπό νέα οπτική γωνία (Sriraman, 2011).
Σε σχέση με την επίλυση προβλημάτων, οι Kwon, Park & Park (2006) θεωρούν τη μαθηματική δημιουργικότητα ως δημιουργία νέας γνώσης και ως την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων, δημιουργώντας μια σχέση μεταξύ μαθηματικής δημιουργικότητας και επίλυσης προβλημάτων, (Aizikovitsh 2014). Ο Chiu (2009) συνέδεσε περαιτέρω τη μαθηματική δημιουργικότητα με την ικανότητα των μαθητών να λύνουν συνηθισμένα και μη, προβλήματα, ακόμη και να προσεγγίζουν κακώς δομημένα προβλήματα,(Aizikovitsh 2014).
Η επίλυση προβλημάτων είναι ένα σημαντικό μέσο για την ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης που περιλαμβάνει ενδιαφέρον και απόλαυση, είναι ένα μέσο έκφρασης μαθηματικής δημιουργικότητας (Aizikovitsh 2014). Η ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας απαιτεί στέρεες βάσεις της μαθηματικής γνώσης (Meissner, 2000) και τον μετασχηματισμό της σε νέα γνώση (Nakakoji, Yamamoto, & Ohira, 1999) επειδή η άριστη γνώση περιεχομένου ωθεί τα άτομα να κάνουν συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών εννοιών (Sheffield, 2009). Ως εκ τούτου, η δημιουργική σκέψη είναι πιο εγγενής μεταξύ των μαθητών που επιδεικνύουν μαθηματική ακρίβεια και ευφράδεια, ειδικά στο πλαίσιο εργασίας με μη συνηθισμένες και πρωτότυπες μαθηματικές εργασίες, που απαιτούν πρωτότυπες και ουσιαστικές λύσεις (Binder, 1996).
Ο Jensen (1973) θεωρεί ότι η ικανότητα του μαθητή να θέτει μαθηματικές ερωτήσεις με βάση ένα δεδομένο σενάριο, αποτελεί ένα μέτρο μαθηματικής δημιουργικότητας και συνεπώς για να είναι οι μαθητές δημιουργικοί στα μαθηματικά, θα πρέπει να μπορούν να θέτουν μαθηματικές ερωτήσεις που εμβαθύνουν στο αρχικό πρόβλημα καθώς και να προχωρούν στην επίλυση των προβλημάτων με διάφορους τρόπους.

Α. Διάκριση μαθηματικού συλλογισμού κατά τους Sternberg και Ben-Zeev

Οι Sternberg και Ben-Zeev (1996) προσδιόρισαν τρεις τύπους συλλογισμού στο μαθηματικό πεδίο: **αναλυτικό συλλογισμό** (αναφέρεται στην ικανότητα σκέψης για τύπους και εφαρμογές αυτών σε αφηρημένα μαθηματικά προβλήματα που συνήθως έχουν μεμονωμένες σωστές απαντήσεις), **πρακτικό συλλογισμό** (αναφέρεται στην ικανότητα επίλυσης καθημερινών προβλημάτων ή αιτιολόγησης εφαρμογών με πρακτικό τρόπο) και **δημιουργικό συλλογισμό** (αναφέρεται στην εφεύρεση μεθόδων σκέψης για επίλυση προβλημάτων (Aizikovitsh 2014).

Β. Διάκριση μαθηματικών δραστηριοτήτων κατά τον Klakla

Ο Klakla (2002) διακρίνει επτά είδη δημιουργικών μαθηματικών δραστηριοτήτων, οι οποίες υπάρχουν ουσιαστικά στις δραστηριότητες των μαθηματικών και είναι η διατύπωση και η επαλήθευση υποθέσεων, η μεταφορά μιας μεθόδου, η δημιουργική λήψη, η επεξεργασία και χρήση μαθηματικών πληροφοριών, η πειθαρχία και κριτική της σκέψης, η δημιουργία προβλημάτων στη διαδικασία μεταφοράς μεθόδου και η τοποθέτηση των προβλημάτων σε ανοιχτές καταστάσεις.

Γ. Επίπεδα μαθηματικής δημιουργικότητας κατά τον Ervynck

Ο Ervynck (1991) πρότεινε τρία απαραίτητα στάδια για την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας: ένα **προκαταρκτικό τεχνικό στάδιο** (αναφέρεται στην πρακτική εφαρμογή μαθηματικών κανόνων και διαδικασιών χωρίς γνώση της θεωρητικής πηγής), ένα στάδιο **αλγοριθμικής δραστηριότητας** (δίνει έμφαση στη χρήση διαδικασιών για την εκτέλεση μιας μαθηματικής λειτουργίας με τη γνώση της θεωρητικής πηγής) και ένα στάδιο **δημιουργικής** (εννοιολογικής, εποικοδομητικής) δραστηριότητας (περιλαμβάνει δραστηριότητα που δε σχετίζεται με έναν γνωστό αλγόριθμο, όπου συνεπάγεται μια νέα κατανόηση των ορισμών ή τη διατύπωση ενός νέου θεωρήματος και απόδειξης) (Aizikovitsh 2014).
Με βάση αυτά τα στάδια, ο Ervynck (1991) προσδιόρισε τρία επίπεδα μαθηματικής δημιουργικότητας, ήτοι το πρώτο επίπεδο που βασίζεται στη **λειτουργία ενός αλγορίθμου**, (για παράδειγμα, μια αλγοριθμική λύση χρησιμοποιείται κατά την επίλυση ενός προβλήματος με την κατασκευή μιας εξίσωσης ή την επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων με γραμμικό συνδυασμό ή με αντικατάσταση), το δεύτερο επίπεδο που περιλαμβάνει τη **μοντελοποίηση μιας κατάστασης**, ξεφεύγοντας από την άμεση λειτουργία του αλγορίθμου και το τρίτο επίπεδο που χρησιμοποιεί εξελιγμένες μεθόδους και καταλήγει σε συμπεράσματα **έξω από μια υπάρχουσα θεωρία** και κατασκευάζοντας μια λύση αναλύοντας όσα αναφέρονται στο πρόβλημα (Aizikovitsh 2014).

Δ. Κατηγορίες τοποθέτησης προβλημάτων κατά τον Silver

Η μαθηματική δημιουργικότητα στο σχολείο συνδέεται συνήθως με την επίλυση προβλημάτων ή την τοποθέτηση προβλημάτων (Silver, 1997). Ο Silver (1995) προσδιόρισε τρεις κατηγορίες εμπειριών των μαθητών στην τοποθέτηση προβλημάτων, ήτοι τις ελεύθερες, ημιδομημένες και δομημένες. Στις **ελεύθερες** καταστάσεις οι μαθητές δημιουργούν προβλήματα χωρίς κανέναν περιορισμό, ενώ η **ημιδομημένη** τοποθέτηση προβλημάτων εμφανίζεται σε καταστάσεις όπου ζητούνται από τους μαθητές προβλήματα, τα οποία είναι παρόμοια και σχετίζονται με συγκεκριμένες εικόνες και διαγράμματα και τέλος, η **δομημένη** τοποθέτηση προβλημάτων εμφανίζεται σε καταστάσεις όπου οι μαθητές θέτουν προβλήματα αναδιατυπώνοντας ήδη λυμένα προβλήματα ή μεταβάλλοντας τις συνθήκες ενός δεδομένου προβλήματος (Daher, Anabousy, 2018). Η τοποθέτηση προβλημάτων έχει τη δυνατότητα να επηρεάσει θετικά τους μαθητές ως προς την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων καθώς και ως προς την κριτική και δημιουργική τους σκέψη (Bonotto 2013, Stoyanova & Ellerton, 1996).

Ε. Κατηγορίες τοποθέτησης προβλημάτων κατά τους Stoyanova και Ellerton

Οι Stoyanova και Ellerton (1997) ταξινόμησαν την κατάσταση, όπου τίθεται ένα πρόβλημα, ως ελεύθερη, ημιδομημένη ή δομημένη. Σύμφωνα με αυτό το πλαίσιο, ένα πρόβλημα είναι **ελεύθερο** χωρίς περιορισμούς στο περιεχόμενο, όταν οι μαθητές καλούνται να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα από ένα δεδομένο, **ημιδομημένο** όταν δίνεται στους μαθητές μια ανοιχτή κατάσταση και καλούνται να διερευνήσουν τη δομή αυτής της κατάστασης και να την ολοκληρώσουν εφαρμόζοντας γνώσεις και δεξιότητες από τις προηγούμενες μαθηματικές εμπειρίες τους και **δομημένο** κατά την τοποθέτηση προβλημάτων όταν ο συμμετέχων θέτει ένα πρόβλημα ξεκινώντας από τη δική του λύση σε διαφορετικό πρόβλημα (Stoyanova et al. 1997).

Στ. Πλαίσιο τοποθέτησης προβλημάτων κατά τους Kontorovich και Koichu

Οι Kontorovich και Koichu (2009) πρότειναν ένα πλαίσιο βασισμένο σε τέσσερις «όψεις»: **τους πόρους, την ευρετική, την ευστοχία και το κοινωνικό πλαίσιο** στο οποίο εμφανίζεται η τοποθέτηση προβλημάτων. Το βελτιωμένο πλαίσιο ενσωματώνει την οργάνωση και τη βάση των γνώσεων, τις ευρετικές και τα σχήματα θέσεως προβλημάτων, τη δυναμική της ομάδας, τις αλληλεπιδράσεις και τις εκτιμήσεις της ευστοχίας ως παραμέτρους στην ανάλυση της δημιουργικότητας σε καταστάσεις θέσεως προβλημάτων (Kontorovich et al. 2012).

Ζ. Η τοποθέτηση προβλημάτων και η γνωστική ευελιξία

Ένα άλλο σύνολο μελετών διερεύνησε τη σχέση μεταξύ της γνωστικής ευελιξίας των μαθητών και της αφηρημένης σκέψης χρησιμοποιώντας ως εργαλείο την τοποθέτηση μαθηματικών προβλημάτων για τον εντοπισμό δημιουργικής συμπεριφοράς (Singer & Voica, 2015), όπου η δημιουργικότητα συζητείται με όρους γνωστικής ευελιξίας, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως συνισταμένη τριών βασικών δομών: της γνωστικής ποικιλίας, της γνωστικής καινοτομίας και της αλλαγής στο γνωστικό πλαίσιο (Voica & Singer, 2018). Σε αυτό το πλαίσιο, ένας δείκτης **γνωστικής ποικιλίας** μπορεί να είναι ο αριθμός διαφορετικών προβλημάτων που τίθενται, η **γνωστική καινοτομία** αξιολογήθηκε από την «απόσταση» από το αρχικό πρόβλημα ενώ το **γνωστικό πλαίσιο** αναφέρεται στην ικανότητα δημιουργίας ενός προτύπου σκέψης για μια τάξη προβλημάτων, συνοδευόμενα από την ικανότητα αλλαγών στο γνωστικό πλαίσιο (Singer, Ellerton & Cai, 2013a, Pelczer, Singer & Voica, 2011). Η μαθηματική δημιουργικότητα απαιτεί αφαίρεση και γενίκευση, που προκύπτουν από τις σταδιακές και ελεγχόμενες αλλαγές στο γνωστικό πλαίσιο (Singer 2012a, b).

3.3 Οι συνιστώσες της μαθηματικής δημιουργικότητας κατά τον Torrance

Ο Guilford (1967) ισχυρίστηκε ότι οι διανοητικοί παράγοντες χωρίζονται σε δύο μεγάλες ομάδες, τη σκέψη και τη μνήμη, που εμφανίζεται με μια τριπλή διαίρεση, ήτοι τους γνωστικούς παράγοντες, τους παραγωγικούς παράγοντες και τους παράγοντες αξιολόγησης. Η ομάδα παραγωγής μπορεί να υποδιαιρεθεί σε συγκλίνουσες ικανότητες σκέψης και αποκλίνουσες ικανότητες σκέψης. Ο Guilford (1967) όρισε την αποκλίνουσα παραγωγή ως τη δημιουργία πληροφοριών από δεδομένες πληροφορίες, όπου δίνεται έμφαση στην ποικιλία των αποτελεσμάτων από την ίδια πηγή. Στην αποκλίνουσα κατηγορία σκέψης περιλαμβάνονται οι παράγοντες της ευχέρειας, της ευελιξίας, της πρωτοτυπίας και της επεξεργασίας. Η ευχέρεια στη σκέψη αναφέρεται στην ποσότητα της παραγωγής, η ευελιξία στη σκέψη αναφέρεται σε μια αλλαγή κάποιου είδους (μια αλλαγή στο νόημα, στην ερμηνεία, στην κατανόηση της εργασίας, μια αλλαγή στην κατεύθυνση της σκέψης), η πρωτοτυπία στη σκέψη σημαίνει παραγωγή ασυνήθιστων και έξυπνων απαντήσεων, οι οποίες θα πρέπει να είναι κοινωνικά χρήσιμες, ενώ η επεξεργασία στη σκέψη σημαίνει την ικανότητα ενός ατόμου να παράγει λεπτομερή βήματα που πρέπει να κάνει στο σχέδιο εργασίας, (Guilford, 1967). Ο Guilford (1967) είδε ότι η δημιουργική σκέψη περιλάμβανε ξεκάθαρα αυτό που κατηγοριοποίησε ως αποκλίνουσα παραγωγή.
Τα **Torrance Tests of Creative Thinking** [TTCT] (Torrance, 1966), βασίζονται στους τέσσερις παράγοντες της ευχέρειας, της ευελιξίας, της πρωτοτυπίας και της επεξεργασίας για τη μέτρηση της

δημιουργικότητας, όπου η επεξεργασία βασίζεται σε λεπτομέρειες που έχουν προστεθεί σε μια λύση ή ιδέα και γενικά δεν εξετάζεται στις συζητήσεις για τη μαθηματική δημιουργικότητα παρά μόνο περιστασιακά. Επιπροσθέτως, η επεξεργασία δεν χρησιμοποιείται ιδιαίτερα επειδή στο εγχειρίδιο βαθμολόγησης που παρέχεται από τον σχεδιαστή, η διαδικασία βαθμολόγησης έχει εξορθολογιστεί σημαντικά (Torrance, 2008a) και καθώς η επεξεργασία είναι στην καλύτερη περίπτωση εκτίμηση, ως εκ τούτου, δεν παρέχει ακριβείς πληροφορίες. Συνεπώς, η ευχέρεια, η ευελιξία και η πρωτοτυπία αποτελούν τις τρεις σημαντικές πτυχές της δημιουργικότητας (Guilford, 1959).

Α. Τι είναι ευχέρεια

Η **ευχέρεια** ορίζεται ως η ικανότητα παραγωγής πολλών ιδεών και διαφόρων απαντήσεων ή ερωτήσεων, η διερεύνηση ενός προβλήματος από διαφορετικές οπτικές γωνίες, η εύρεση εναλλακτικών κατευθύνσεων και η επιτυχής χρήση διαφόρων προσεγγίσεων ή τρόπων σκέψης για τη διατύπωση και επικοινωνία ισχυρών μαθηματικών ιδεών (Tjoe, 2019). Η ευχέρεια μπορεί να μετρηθεί ως ο συνολικός αριθμός των μη επαναλαμβανόμενων ιδεών που δημιουργήθηκαν, ενώ η ευελιξία και η πρωτοτυπία εξαρτώνται περισσότερο από το πλαίσιο του προβλήματος (Jung, 2001). Η ευχέρεια είναι ένα σημάδι αποκλίνουσας σκέψης (Leikin, 2009). Η ευχέρεια καταγράφει την ταχύτητα και την ακρίβεια παραγωγής ενός μεγάλου αριθμού διαφορετικών απαντήσεων (Klavir & Gorodetsky, 2009). Σύμφωνα με τους Mann, Chamberlin & Graefe (2017) αυτοί που σκέφτονται με ευχέρεια είναι σε θέση να δημιουργήσουν πολλές ιδέες, δυνατότητες και πιθανές προσεγγίσεις για την εξεύρεση λύσεων σε ένα πρόβλημα. Ως εκ τούτου, αρκετοί ερευνητές πιστεύουν ότι η ευχέρεια είναι συχνά το εφαλτήριο για την παραγωγή μιας πρωτότυπης απόκρισης (Mumford 2003, Vidal 2005), δεδομένου ότι όσο περισσότερες ιδέες προτείνονται, τόσο περισσότερες πιθανότητες υπάρχουν να προκύψει μια πρωτότυπη. Η ευχέρεια γενικά μετριέται με την καταμέτρηση του αριθμού των απαντήσεων σε μια δεδομένη εργασία και διακρίνεται από την ευελιξία, η οποία ορίζεται ως ο αριθμός των διαφορετικών κατηγοριών απαντήσεων σε μια εργασία.

Β. Τι είναι ευελιξία

Η **ευελιξία** μπορεί να αναφέρεται στη διαδικασία με την οποία κάποιος δοκιμάζει ποικίλες στρατηγικές βασισμένες σε διαφορετικές μαθηματικές ιδιότητες. Η Leikin (2009) αξιολόγησε την ευελιξία, καθορίζοντας εάν οι διαφορετικές λύσεις χρησιμοποιούν στρατηγικές που βασίζονται σε διαφορετικές αναπαραστάσεις (αλγεβρικές, γραφικές παραστάσεις). Η ευελιξία στη σκέψη αντανακλάται στην ικανότητα να αλλάζεις γρήγορα μια προσέγγιση επίλυσης προβλημάτων (Arifin, Zulkardi, Putri, Hartono, 2021). Η ευελιξία είναι η ικανότητα παροχής διαφορετικών απαντήσεων σε μια ερώτηση (Vidal 2005), σπάζοντας ένα προκαθορισμένο μονοπάτι λύσης με την ελευθερία ανάπτυξης ιδεών και λύσεων (Mann et al. 2017). Για να επιτευχθεί αυτό, χρειάζεται ένα άτομο ικανό να βλέπει το ίδιο πράγμα από διαφορετική οπτική γωνία, να μεταμορφώνει αναπαραστάσεις, να επαναπροσδιορίζει τις διαδικασίες, προκειμένου να βρεθεί ένας νέος διαφορετικός τρόπος σκέψης (Klavir & Gorodetsky 2009, Mann et al. 2017, Sheffield 2009).

Γ. Τι είναι πρωτοτυπία

Η **πρωτοτυπία** μπορεί να θεωρηθεί ως ασυμβίβαστη στο πλαίσιο προβλημάτων ρουτίνας, αν και αυτά υποστηρίζουν τους μαθητές στην ανάπτυξη των απαραίτητων δεξιοτήτων και γνώσεων, εντούτοις όταν αυτά κυριαρχούν, τότε οι ευκαιρίες των μαθητών για πρωτότυπη και δημιουργική σκέψη πιθανότατα θα κατασταλεί (Beghetto, 2016). Η πρωτοτυπία σχετίζεται με τη δημιουργία νέων ιδεών και μπορεί να εκδηλωθεί, όταν ένας μαθητής εξετάζει πολλές λύσεις σε ένα πρόβλημα, μεθόδους ή απαντήσεις και στη συνέχεια δημιουργεί ένα άλλο που είναι διαφορετικό (Silver, 1997). Η πρωτοτυπία αντανακλάται συνήθως σε απαντήσεις ή ασυνήθιστες λύσεις που έχουν την τάση να διαφέρουν από τις απαντήσεις των άλλων μαθητών (Arifin, Zulkardi, Putri, Hartono, 2021). Η Leikin (2009) μέτρησε την πρωτοτυπία μιας λύσης με βάση το επίπεδο διορατικότητας και τη συμβατικότητά της σύμφωνα με το μαθησιακό ιστορικό των συμμετεχόντων, δηλαδή, μια λύση που βασίζεται σε μια έννοια που μαθαίνεται σε διαφορετικό πλαίσιο θα θεωρηθεί πρωτότυπη, αλλά όχι τόσο πρωτότυπη όσο μια λύση που είναι αντισυμβατική στη βάση της διορατικότητας. Η πρωτοτυπία των απαντήσεων είναι πιθανώς το κυρίαρχο χαρακτηριστικό που χρησιμοποιείται στους περισσότερους ορισμούς δημιουργικότητας (Mann., Chamberlin, & Graefe, 2017). Η Leikin (2008) υποστήριξε ότι οι μαθηματικές απαντήσεις πρέπει να είναι πρωτότυπες, σπάνιες και κατάλληλες στα μαθηματικά προβλήματα, ενώ ο Shriki (2010) υποστήριξε ότι η ικανότητα γενίκευσης ή εύρεσης μιας πρωτότυπης απόδειξης ή η ανακάλυψη νέων θεωρημάτων είναι επίσης δημιουργικά προϊόντα. Οι Mann et al. (2017) πρόσθεσαν ότι οι μαθηματικές διαδικασίες και οι αλγόριθμοι μπορούν να είναι πρωτότυποι. Η Leikin (2009b) πρότεινε επίσης πως η πρωτοτυπία είναι μάλλον ένα εσωτερικό, μοναδικό χαρακτηριστικό της δημιουργικότητας. Η πρωτοτυπία ορίζεται ως μια λύση ή ιδέα που είναι μοναδική ή διαφορετική έναντι άλλων που έχουν επιλεγεί ως πειραματική ομάδα. Οι Leikin και Kloss (2011) και Levav-Waynberg και Leikin (2012) υποστήριξαν ότι η πρωτοτυπία καθορίζει τη δημιουργικότητα με πιο δυνατό τρόπο από την ευχέρεια και την ευελιξία.

3.4 Η αξιολόγηση της δημιουργικότητας μέσω του προϊόντος

Σύμφωνα με τον Haylock (1997) υπάρχουν δύο κύριες προσεγγίσεις για την αναγνώριση της δημιουργικότητας, ήτοι, η γνωστική διαδικασία που είναι ενδεικτική της δημιουργικής σκέψης και της υπέρβασης της στερέωσης και η εξέταση του προϊόντος που υποδηλώνει ότι έχει λάβει χώρα δημιουργική σκέψη, μια πρωτότυπη και μαθηματικά κατάλληλη λύση θα ήταν ένα τέτοιο προϊόν. Τα συστατικά της δημιουργικότητας, όπως η ευχέρεια, η ευελιξία και η πρωτοτυπία, μερικές φορές σχετίζονται με τη διαδικασία (Shriki, 2010) και μερικές φορές με το προϊόν (Haylock, 1997). Ξεκινώντας από το γνωστό έργο του Torrance (1974), οι ερευνητές συνήθως εξερευνούν την μαθηματική δημιουργικότητα μέσω των παραμέτρων της πρωτοτυπίας, της ευχέρειας και της ευελιξίας.

Η αξιολόγηση της δημιουργικότητας έχει συχνά υποθέσει τη γενικότητα του τομέα και τα πιο κοινά τεστ δημιουργικότητας ήταν αυτά της αποκλίνουσας σκέψης και τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα είναι τα τεστ Torrance (TTCT), με τα δύο συστατικά του, ήτοι τα εικονικά και τα λεκτικά, αν και τα δύο χρησιμοποιούνται ως γενικά μέτρα δημιουργικότητας (Kaufman, Plucker & Russell, 2012).

Οι Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi, & Christou (2013) χρησιμοποιώντας ανάλυση μοντελοποίησης δομικών εξισώσεων, υποστήριξαν ότι η μαθηματική δημιουργικότητα είναι υποσυστατικό της μαθηματικής ικανότητας. Ο Mann (2009) διαπίστωσε ότι τα μαθηματικά επιτεύγματα ήταν ο ισχυρότερος προγνωστικός παράγοντας για τη μαθηματική δημιουργικότητα. Ομοίως, οι Sak&Maker (2006) κατέληξαν στο συμπέρασμα, ότι η γνώση των μαθητών συνέβαλε σημαντικά στην ερμηνεία της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας. Επιπλέον, η δημιουργικότητα έχει επισημανθεί ως σημαντικός παράγοντας της χαρισματικότητας (Leikin 2009a). Ο Haylock (1997) ισχυρίστηκε ότι η υπερβολική έμφαση και η έκθεση σε συγκεκριμένους αλγόριθμους μπορεί να περιορίσει τη μαθηματική δημιουργικότητα, καθώς μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές σε καλά εξασκημένες διαδικασίες. Βέβαια, τα άτομα που μπορούν να χειριστούν αποτελεσματικά τη γνώση σπάζοντας μια προκαθορισμένη διαδρομή λύσης και να αναπτύσσουν ιδέες, είναι εκείνα που αναμένεται να είναι και δημιουργικά (Mann et al. 2017).

Α. Απόλυτη και σχετική δημιουργικότητα

Αυτό που συνήθως θεωρείται το βασικό κριτήριο ενός δημιουργικού προϊόντος είναι η "καινοτομία". Αφού, όμως, η αντικειμενική καινοτομία ανεξάρτητη από τον χώρο και τον χρόνο είναι εξαιρετικά σπάνια, ορισμένοι συγγραφείς σχετικοποιούν αυτό το κριτήριο στο βαθμό που μια ιδέα θεωρείται ως νέα (ή μοναδική) εάν είναι σπάνια μεταξύ ενός συγκεκριμένου πληθυσμού (Guilford 1967, Jackson and Messick 1965). Σε αντίθεση με την απόλυτη δημιουργικότητα, αναφερόμαστε σε σχετική δημιουργικότητα από αυτή την άποψη. Ιδέες που είναι νέες για ένα άτομο, αλλά ευρέως διαδεδομένες μεταξύ του πληθυσμού που εξετάζεται (π.χ. μια σχολική τάξη) δεν κρίνονται δημιουργικές σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό. Σε παιδαγωγικές καταστάσεις όμως η ατομική αναφορά μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση για το κριτήριο της καινοτομίας (Kießwetter 1977), η οποία στη συνέχεια αναφέρεται ως ατομική δημιουργικότητα. Εκτός από την καινοτομία, προσδιορίζεται τουλάχιστον ένα ακόμη κριτήριο, το οποίο αφορά το σκοπό του προϊόντος και αναφέρεται σε όρους όπως «νοηματοδότηση», «προσανατολισμός στο στόχο», «συνάφεια με την πραγματική ζωή» και «χρησιμότητα» (Preiser 1976).

Β. Τα «4P της δημιουργικότητας»

Στον επιστημονικό λόγο, είναι κοινή η διάκριση μεταξύ της δημιουργικότητας ως ποιότητα του προϊόντος, του ατόμου, των περιβαλλοντικών παραγόντων που επηρεάζουν τη διαδικασία ή τη δημιουργικότητα, το οποίο αναφέρεται επίσης ως «4P της δημιουργικότητας» (**προϊόν, άτομο, διαδικασία, τύπος**) βασισμένο στο έργο του Rhodes (1961).

Ο Rhodes (1961) περιγράφει διαφορετικά σκέλη έρευνας για τη δημιουργικότητα ως τέσσερα P της δημιουργικότητας που είναι το προϊόν, η διαδικασία, το άτομο και ο τύπος.

Σχετικά με τα προϊόντα, ο Bailin (1988) δηλώνει ότι η δημιουργικότητα αντανακλάται σε ορισμένα επιτεύγματα και ο Liljedahl (2013, σελ. 255), εστιάζει σε διαδικασίες που υποστηρίζουν ότι «μια τέτοια χρήση δίνει πολύ λίγη προσοχή στην πραγματική διαδικασία που φέρνει αυτό το προϊόν». Η εστίαση στις διαδικασίες συνδυάζεται με τις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων, κυρίως σύμφωνα με τις γραμμές των διαδικασιών όπως περιγράφεται από τον Wallas που δημοσίευσε για πρώτη φορά το βιβλίο του το 1926 βασιζόμενος στις ιδέες του Γάλλου μαθηματικού Henry Poincaré, που περιγράφουν στάδια του συνειδητού αλλά και ασυνείδητες γνωστικές διεργασίες με μια στιγμή φωτισμού. Σύμφωνα με τον Rhodes (1961, σελ. 308) «ο όρος διεργασία ισχύει για τα κίνητρα, τη δημιουργικότητα στα πρόσωπα κυρίως σε άτομα που θεωρούνται ιδιοφυΐα».

Όσον αφορά τη δημιουργικότητα ως ποιότητα των ατόμων, τα χαρακτηριστικά που βασίζονται στην εργασία του Guilford (1950) και η λειτουργικοποίησή τους στο «Torrance Test of Creative Thinking» του Torrance (1966) αναφέρονται συνήθως, στην ευχέρεια, στην ευελιξία, στην πρωτοτυπία και στην επεξεργασία, όπου η ευχέρεια αναφέρεται στην ικανότητα δημιουργίας πολλών συσχετισμών για ένα πρόβλημα σε σύντομο χρονικό διάστημα, η ευελιξία μπορεί να περιγραφεί ως η ικανότητα εξέτασης ενός προβλήματος από διαφορετικά πρίσματα και η πρωτοτυπία είναι η ικανότητα δημιουργίας ασυνήθιστων ιδεών, ενώ η ικανότητα να προχωρήσουμε από μια ιδέα σε μια οριστική εμπλουτίζοντας την ιδέα, νοείται ως επεξεργασία.

Τα παραπάνω υποδεικνύουν ότι η δημιουργικότητα ως χαρακτηριστικό ενός ατόμου δεν μπορεί να διαχωρίζεται από το δημιουργικό προϊόν.

Επίσης, η περιγραφή των δημιουργικών διαδικασιών, για τις οποίες χρησιμοποιούνται γενικά μοντέλα, όπως αυτό του Wallas (1926) και αντίστοιχα του Hadamard (1945), που προτείνουν τις φάσεις της προετοιμασίας, της επώασης, του φωτισμού και της επαλήθευσης (Aldous 2007, Sriraman, Haavold, & Lee 2013), δεν μπορούν να κατασκευαστούν χωρίς να ληφθούν υπόψη τα δημιουργικά προϊόντα. Οι διαστάσεις της ευχέρειας, της ευελιξίας, της πρωτοτυπίας, και εν μέρει της επεξεργασίας χρησιμοποιούνται σε πολλά τεστ δημιουργικότητας. Σε αυτό το πλαίσιο, η ευχέρεια σημαίνει την ικανότητα να καταλήξουμε σε ένα πλήθος παραγόμενων απαντήσεων, η ευελιξία νοείται ως η ικανότητα δημιουργίας απαντήσεων με διάφορους τρόπους, η πρωτοτυπία σημαίνει τη μοναδικότητα των απαντήσεων και η επεξεργασία το επίπεδο λεπτομερειών των λύσεων (Schindler et al, 2018).

Οι Pitta-Pantazi et al. (2018) χρησιμοποιούν το 4Ps θεώρημα του Rhodes (1961) για να περιγράψουν τα συστατικά της δημιουργικότητας ως: Προϊόν (η επικοινωνία μιας μοναδικής, νέας και χρήσιμης ιδέας, Πρόσωπο (οι γνωστικές ικανότητες, γνωρίσματα και εμπειρίες του ατόμου), Διαδικασία (η μεθοδολογία που παράγει ένα δημιουργικό προϊόν) και Τύπο (η σχέση μεταξύ του ατόμου και του περιβάλλοντος).

Γ. Το TTCT του Torrance

Ο Guilford (1967) πρότεινε ιδέες για τη μέτρηση των συνιστωσών της δημιουργικότητας με γνώμονα και τις τέσσερις διαστάσεις της ευχέρειας, της ευελιξίας, της πρωτοτυπίας και της επεξεργασίας, όπου η βαθμολογία δημιουργικότητας γίνεται υψηλότερη, όσο υψηλότερα βαθμολογείται κάθε συστατικό. Η βαθμολογία ευχέρειας εξαρτάται από τον αριθμό των λύσεων, ενώ της ευελιξίας από τον αριθμό των διαφορετικών κατηγοριών, η πρωτοτυπία βαθμολογείται με βάση τη σχετική συχνότητα της απάντησης που δίνεται στην εστιασμένη ομάδα και η επεξεργασία αναφέρεται στο επίπεδο της λεπτομέρειας (Schindler et al, 2018).
Συνοψίζοντας, με βάση τη θεωρία του Guilford, ο Torrance (1974) ανέπτυξε το Torrance Τεστ Δημιουργικής Σκέψης (TTCT). Αυτή η δοκιμή περιέχει ελαφρώς τροποποιημένες εκδόσεις του τεστ του Guilford, που ονομάζεται «Δραστηριότητες ασυνήθιστων χρήσεων», καθώς και πρόσθετες υποδοκιμές. Παραδοσιακά, η μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών μελετήθηκε με βάση την ποσοτική αξιολόγηση των ακόλουθων παραμέτρων: πρωτοτυπία, ευχέρεια και ευελιξία (Torrance 1974, Leikin 2009). Ωστόσο, η ποσοτική προσέγγιση δε φαίνεται να είναι αρκετά ακριβής όταν περιγράφουν υποσυστατικά που σχετίζονται με δημιουργικές συμπεριφορές των μαθητών (Kontorovich et al. 2011) και όταν η «γνωστική ετερογένεια» (Abramovich 2003) είναι στην πραγματικότητα ο κανόνας. Η γνωστική ευελιξία περιγράφεται από: γνωστική ποικιλία, γνωστική καινοτομία, και αλλαγές στο γνωστικό πλαίσιο (Singer και Voica 2017).
Μια προσαρμογή της αντίληψης του Guilford για τη δημιουργικότητα σε συγκεκριμένο τομέα είναι κατάλληλη για μια πιο λεπτομερή εικόνα για τη μαθηματική δημιουργικότητα, ειδικά με έμφαση στην επίλυση προβλημάτων (Leikin και Lev 2013). Αναφερόμενοι σε μια αντίληψη της δημιουργικότητας που βασίζεται στο προϊόν και χρησιμοποιώντας μια επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση οι Kattou et al. (2015) έδειξαν ότι η δημιουργικότητα δεν είναι γενικός τομέας αλλά συγκεκριμένος τομέας.
Ένα άλλο κοινό θέμα που εμφανίζεται για τη δημιουργικότητα είναι το ζήτημα του τρόπου αξιολόγησής της. Τα περισσότερα από αυτά έχουν υιοθετήσει κάποια μορφή της περιγραφής της αποκλίνουσας σκέψης από τον Guilford (1967) και του τεστ δημιουργικής σκέψης του Torrance (1974) που καθορίζει τα τέσσερα συστατικά της δημιουργικότητας (ευχέρεια, πρωτοτυπία, ευελιξία και επεξεργασία) (Pitta-Pantazi et al. 2018, Joklitschke et al. 2018, Tabach και Friedlander 2018, Daher and Anabousy 2018, Assmus και Fritzlar 2018).
Οι Assmus et al. (2018) υποστηρίζουν ότι εάν η ευχέρεια μετριέται ως μια γρήγορη δημιουργία από πολλές απαντήσεις σε ένα μαθηματικό ερέθισμα, οι μαθητές μπορεί να καταλήξουν σε ένα υψηλό αριθμό πολύ παρόμοιων λύσεων που δεν είναι δημιουργικές και που τείνουν να χρησιμοποιούνται με συγκλίνουσα και όχι αποκλίνουσα συλλογιστική. Οι Voica και Singer (2018) χρησιμοποιούν ένα ελαφρώς διαφορετικό πλαίσιο που βασίζεται στη γνωστική ευελιξία.

Δ. Τα MST της Leikin

Επιπλέον, με βάση τις ιδέες του Guilford και του Torrance για τη μέτρηση της δημιουργικότητας οι Leikin και Lev (2013) καθώς και οι Kattou et al. (2013) ανέπτυξαν δοκιμές, που βασίζονται σε εργασίες πολλαπλών λύσεων (MST), όπου αξιολογείται η ευχέρεια, η ευελιξία και η πρωτοτυπία των προϊόντων των μαθητών και ειδικότερα η ευχέρεια βαθμολογείται με τον αριθμό των απαντήσεων που δίνονται, για την ευελιξία, οι λύσεις ταξινομούνται ανάλογα με την ποικιλομορφία τους και η πρωτοτυπία απευθύνεται στη συχνότητα μιας δεδομένης λύσης σε σύγκριση με την ομάδα αναφοράς των συμμετεχόντων. Η επεξεργασία του στοιχείου ως επί το πλείστον δεν αξιολογείται «λόγω δυσκολίας καθορισμού επιπέδων επεξεργασίας σε μαθηματικές εργασίες» (Kattou et al. 2013, σελ. 174).

Η έρευνα των Levav και Leikin (2010) που βασίζεται στον Polya (1981), στον Schoenfeld (1985) και οι ιδέες του Kruteskii (1976) είναι σχετικές με τον ρόλο των πολλαπλών λύσεων στα μαθηματικά προβλήματα ως κριτήριο για την ποιότητα και το επίπεδο της μαθηματικής σκέψης. Οι Levav et al. (2010) κατηγοριοποιούν τις πολλαπλές προσεγγίσεις του λύτη σε ένα πρόβλημα σε σχέση με τα ακόλουθα κριτήρια: (α) Διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας μαθηματικής έννοιας, (β) διαφορετικές ιδιότητες (ορισμοί ή θεωρήματα) μαθηματικών εννοιών και (γ) διαφορετικά μαθηματικά εργαλεία και θεωρήματα από διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών (Poulos, Mamona-Downs, 2018).

Στη μεταφορά της ανάλυσης της γενικής δημιουργικότητας στη μαθηματική δημιουργικότητα, αρκετοί από τους συγγραφείς είχαν υιοθετήσει μια εκτίμηση παρόμοια με αυτή που περιγράφουν οι Leikin et al. (2009), Leikin & Pitta-Pantazi (2013), όπου ποσοτικοποιούν τη μαθηματική δημιουργικότητα σε αυτό που ονομάζουν εργασίες πολλαπλών λύσεων (MST) με τις οποίες οι μαθητές καλούνται να λύσουν ένα πρόβλημα με όσο το δυνατόν περισσότερους τρόπους. Στη συνέχεια, οι πολλαπλές λύσεις αξιολογούνται ως προς την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία, ενώ η επεξεργασία δε βαθμολογείται όταν χρησιμοποιείται αυτή η προσαρμογή της αξιολόγησης της μαθηματικής δημιουργικότητας, όπως προαναφέρθηκε (Kattou et al. 2013).

Εκτός από τα MST, μια άλλη δημοφιλής μέθοδος αξιολόγησης της μαθηματικής δημιουργικότητας είναι η χρήση της τοποθέτησης προβλημάτων όπου οι μαθητές θέτουν ουσιαστικά μαθηματικά προβλήματα που σχετίζονται με μια δεδομένη κατάσταση (Voica and Singer 2018, Singer et al. 2016, Daher and Anabousy 2018, Sheffield, 2009, Pitta-Pantazi et al. 2018, Moraová et al. 2018).

3.5 Κατηγορίες προβλημάτων που αναπτύσσουν τη μαθηματική δημιουργικότητα

Σύμφωνα με τους Silver (1997) και Bruder (2001), η δημιουργικότητα δεν είναι μόνο αξιολογήσιμη μέσω της επίλυσης προβλημάτων αλλά και μέσω της τοποθέτησης προβλημάτων. Η ικανότητα δημιουργίας ερωτήσεων σε ένα μαθηματικό φαινόμενο δείχνει υψηλό επίπεδο δημιουργικότητας (Silver 1997). Εδώ, η έννοια της γνωστικής ευελιξίας είναι καθοριστική και περιλαμβάνει τις διαστάσεις της γνωστικής ποικιλίας, της γνωστικής καινοτομίας και των αλλαγών στο γνωστικό πλαίσιο (Schindler et al, 2018).

Παρόλα αυτά η πολυπλοκότητα μπορεί να λειτουργήσει ως ανασταλτικός παράγοντας στη δημιουργία προβλημάτων, μειώνοντας έτσι τον συνολικό αριθμό των προτάσεων, ενώ ο αριθμός των προτεινόμενων προβλημάτων φαίνεται να συσχετίζεται αντιστρόφως με τον βαθμό της πολυπλοκότητας (Voica et al, 2018). Γενικότερα, ένας μεγάλος αριθμός προβλημάτων που τίθενται, έχουν χαμηλό επίπεδο θεματικής ή μαθηματικής ποικιλίας, αν και όσο προχωρά το σχολικό επίπεδο, η θεματική ποικιλία φαίνεται να μειώνεται, αλλά η μαθηματική ποικιλία φαίνεται να διευρύνεται (Voica et al, 2018). Κατά τον προσδιορισμό της γνωστικής ποικιλίας, είναι απαραίτητο να ληφθούν υπόψη αρκετές παράμετροι, εκτός από τον αριθμό των προβλημάτων που τίθενται, πρέπει να δώσουμε προσοχή στην εγκυρότητα των προβλημάτων που τίθενται, στην πολυπλοκότητά τους και στο εύρος τους (Voica et al, 2018). Σύμφωνα με τους Singer and Voica (2015) σε μια ημιδομημένη τοποθέτηση προβλημάτων, η γνωστική καινοτομία είναι περιορισμένη.

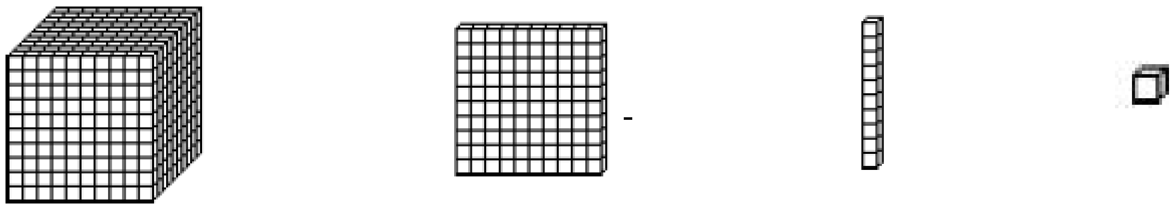
Συνεπώς, η δημιουργικότητα απαιτεί ευέλικτη σκέψη, ευχέρεια και πρωτοτυπία στις λύσεις και σχετίζεται με την επίλυση προβλημάτων. Το NCTM (2000) προτείνει οι μαθητές να έρχονται αντιμέτωποι με προβλήματα που μπορούν να τονώσουν την ανάπτυξη της δημιουργικής μαθηματικής τους σκέψης. Φρονώ πως η δημιουργικότητα συνδέεται ιδιαίτερα με την επίλυση ανοικτών προβλημάτων καθώς και με τη σύνθεση-κατασκευή προβλημάτων αλλά και με τη μοντελοποίηση.

Α. Ανοικτά προβλήματα

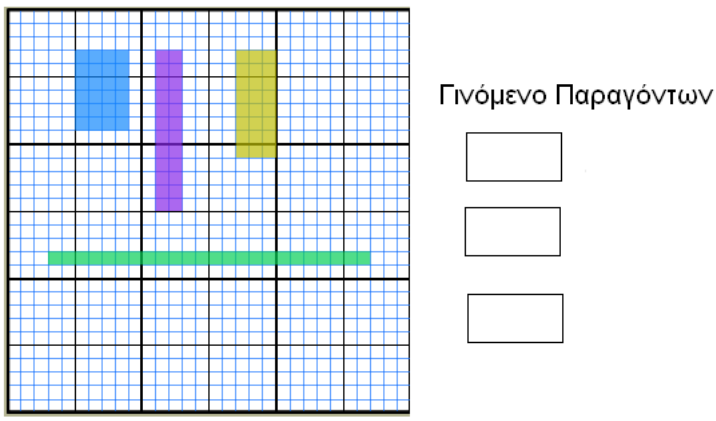
Κάποια από τα πλεονεκτήματα των ανοιχτών προβλημάτων, σύμφωνα με τον Sawada (1977) είναι ότι αφενός μεν οι μαθητές συμμετέχουν περισσότερο ενεργητικά στο μάθημα και εκφράζουν τις ιδέες τους πιο συχνά, ενώ η ύπαρξη πολλών σωστών λύσεων δίνει στον κάθε μαθητή την ευκαιρία να φτάσει στη δική του σωστή απάντηση, αφετέρου δε, οι μαθητές έχουν περισσότερες ευκαιρίες να κάνουν συνειδητή χρήση της μαθηματικής τους γνώσης και των δεξιοτήτων τους. Εφόσον υπάρχει πληθώρα λύσεων, οι μαθητές μπορούν να επιλέγουν το δικό τους δρόμο προς την απάντηση, δημιουργώντας έτσι ο καθένας τη δική του μοναδική λύση. Η διδασκαλία ανοιχτών προβλημάτων μπορεί να συνεισφέρει στην ανάπτυξη πολλών προσωπικών δεξιοτήτων, όπως μεταξύ άλλων της δημιουργικής σκέψης μέσα από την εύρεση μοναδικών λύσεων σε κριτικές ερωτήσεις (Κυριαζής, 2008).
Ο Silver (1997) ισχυρίστηκε ότι η χρήση των ανοιχτών προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να ενθαρρύνει τις πολλαπλές λύσεις, ενθαρρύνοντας με τη σειρά τους την ανάπτυξη της ευχέρειας. Οι εμπειρίες μάθησης ανοιχτού τύπου, στις οποίες ο στόχος δεν είναι μεμονωμένα η σωστή απάντηση, καλλιεργούν ένα περιβάλλον διερεύνησης, το οποίο με τη σειρά του προκαλεί περιέργεια (Church & Ravid, 2003).

Παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων είναι:

- Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορείτε να δείξετε τον αριθμό 5325, χρησιμοποιώντας τους κύβους Dienes **(ΠΗΓΗ: Α.Π.Σ. Μαθηματικών Κύπρου, σελ.40)**



- Να βρείτε τους παράγοντες του αριθμού 24, κατασκευάζοντας διαφορετικά ορθογώνια με εμβαδόν 24. **(ΠΗΓΗ: Α.Π.Σ. Μαθηματικών Κύπρου, σελ.52)**



Β. Σύνθεση προβλημάτων

Η σύνθεση προβλημάτων είναι η κατασκευή ενός προβλήματος είτε από το μηδέν είτε με βάση κάποια δεδομένα. Η κατασκευή ενός προβλήματος καλλιεργεί τη φαντασία και συνεπώς τη δημιουργικότητα. Όπως είπε ο Einstein "η φαντασία είναι πιο σημαντική από τη γνώση".

<u>Παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων είναι:</u>

- Να κατασκευάσετε στο τετραγωνισμένο φύλλο χαρτιού τετράγωνα και τρίγωνα των οποίων ο αριθμός που δείχνει το εμβαδόν τους είναι ίσος με τον αριθμό που δείχνει την περίμετρο τους. Κάθε τετραγωνάκι είναι ίσο με 1 cm2.

(ΠΗΓΗ: Α.Π.Σ. Μαθηματικών Κύπρου, σελ.156)

- Να κατασκευάσετε προβλήματα δύο πράξεων με βάση τον πιο κάτω πίνακα.

Μαθητής	Αποταμιεύσεις
Χρήστος	150
Μαρία	80
Ανδριάνα	60
Απόστολος	90

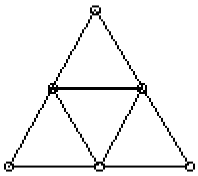
- Να κατασκευάσετε ένα πρόβλημα που να έχει αποτέλεσμα 81.

Γ. Μοντελοποίηση

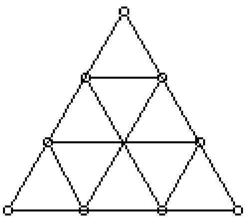
Όπως η μαθηματική επίλυση προβλημάτων και η τοποθέτηση προβλημάτων, έτσι και η μαθηματική μοντελοποίηση σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με τη δημιουργικότητα (Lu & Kaiser, 2021). Η μαθηματική μοντελοποίηση ενσωματώνει την ευχέρεια, την ευελιξία, την επεξεργασία και πρωτοτυπία, που είναι τα βασικά κατασκευάσματα της δημιουργικότητας. Τα μοντέλα είναι συστήματα στοιχείων, πράξεων, σχέσεων και κανόνων τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν, να εξηγήσουν ή να προβλέψουν τη συμπεριφορά κάποιου άλλου συστήματος (Doerr& English, 2003). Η δημιουργικότητα των μαθητών ορίζεται ως μια ασυνήθιστη ικανότητα δημιουργίας νέων και χρήσιμων λύσεων σε προσομοιωμένα ή πραγματικά εφαρμοσμένα προβλήματα χρησιμοποιώντας μαθηματική μοντελοποίηση» (Chamberlin & Moon, 2005, σελ. 38).
Σε κάθε βήμα της διαδικασίας μοντελοποίησης, εξαιτίας της έλλειψης τυπικών μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου, η δημιουργικότητα παίζει βασικό ρόλο σε όλες τις φάσεις της μοντελοποίησης (Wessels, 2014).

Παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων είναι:

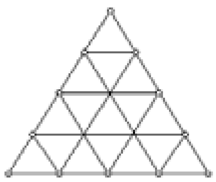
- Η πλευρά ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι μήκους ν εκατοστών, όπου ν φυσικός αριθμός με ν ≥2. Με ευθείες παράλληλες στις πλευρές του, το τρίγωνο χωρίζεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίζονται ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρά μήκους 1 εκατοστού. Για παράδειγμα:



Για ν = 2 σχηματίζονται 4 ισόπλευρα τρίγωνα



Για ν = 3 σχηματίζονται 9 ισόπλευρα τρίγωνα



Για ν = 4 σχηματίζονται 16 ισόπλευρα τρίγωνα

Να εκτιμήσετε και στη συνέχεια να αποδείξετε τον αριθμό των ισόπλευρων τριγώνων που σχηματίζονται, αν το αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά μήκους ν εκατοστών;

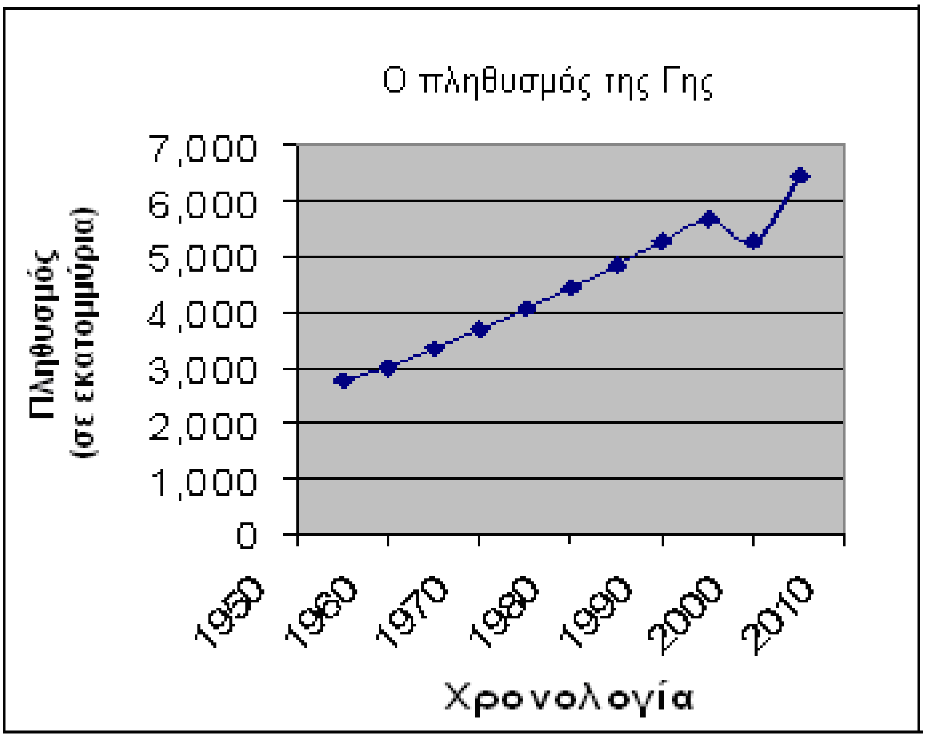
(ΠΗΓΗ: Α.Π.Σ. Μαθηματικών Κύπρου, σελ.255)

- Δοκιμάστε διάφορους αριθμούς στον παρακάτω πίνακα. Τι παρατηρείτε;

Σκέψου έναν αριθμό	
Πρόσθεσε 10	
Πολλαπλασίασε επί 3	
Αφαίρεσε 3	
Διαίρεσε δια 3	
Αφαίρεσε 5	
Αφαίρεσε τον αρχικό σου αριθμό	

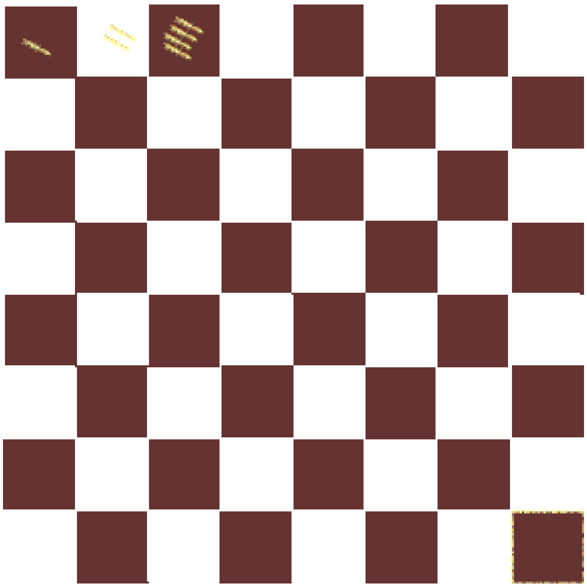
(ΠΗΓΗ: Α.Π.Σ. Μαθηματικών Κύπρου, σελ.315)

- Η πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζει τις αλλαγές στον παγκόσμιο πληθυσμό από το 1950 μέχρι το 2000. Πόσος πιστεύετε ότι θα είναι ο πληθυσμός της Γης το 2050;



(ΠΗΓΗ: Α.Π.Σ. Μαθηματικών Κύπρου, σελ.416)

- Μελετήστε τον θρύλο του Σίσσα:
«Ο Σίσσα δούλευε για ένα Ινδό βασιλιά, όπου του κατασκεύασε ένα σκάκι. Ο βασιλιάς ενθουσιάστηκε από το παιγνίδι αυτό και ρώτησε τον Σίσσα τι ήθελε ως αμοιβή. Ο Σίσσα ζήτησε να του δοθούν κόκκοι σιταριού τοποθετημένοι στην σκακιέρα ως εξής: στο πρώτο τετράγωνο ένας κόκκος ,στο δεύτερο δυο κόκκοι, στο τρίτο τέσσερις κόκκοι, στο τέταρτο οκτώ κόκκοι μέχρι το 64ο τετράγωνο. Ο βασιλιάς διέταξε να εκπληρωθεί η επιθυμία του. Να υπολογίσετε τον αριθμό των κόκκων του σιταριού που ζήτησε ο Σίσσα.»



(ΠΗΓΗ: Α.Π.Σ. Μαθηματικών Κύπρου, σελ.74)

4. <u>Μέτρηση της Μαθηματικής Δημιουργικότητας</u>

Είναι μετρήσιμη η δημιουργικότητα;
Ο Guilford (1959) θεώρησε τη δημιουργική σκέψη ως εμπεριέχουσα αποκλίνουσα σκέψη, με κεντρικά χαρακτηριστικά την ευχέρεια, την ευελιξία, την πρωτοτυπία και την επεξεργασία. Με βάση το έργο του Guilford, ο Torrance (1966) ανέπτυξε τα Torrance Tests of Creative Thinking, που με τη σειρά του έχει εμπνεύσει τη χρήση τους στη μαθηματική εκπαίδευση (Leikin & Lev, 2013, Pitta-Panatzi, Σοφοκλέους & Χρήστου, 2013). Στον κόσμο των μαθηματικών, η συγκλίνουσα σκέψη αποτελεί τη βάση του συλλογισμού που απαιτείται για να ανακαλυφθούν αμετάβλητες αρχές ή ιδιότητες (Sriraman, 2004a, b).
Για χρόνια, η δημιουργικότητα έχει μελετηθεί χρησιμοποιώντας τις τέσσερις σχετικές συνιστώσες που περιγράφονται από τον Torrance: ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία και επεξεργασία.

Α. Πραγματιστική-Ψυχομετρική προσέγγιση

Στην πραγματιστική άποψη, η μελέτη της δημιουργικότητας ασχολείται με την αναζήτηση τρόπων ανάπτυξης της δημιουργικότητας, ενώ η ψυχομετρική προσέγγιση ασχολείται με την αξιολόγησή της (Sriraman, 2009).
Η πραγματιστική άποψη θεωρεί τη δημιουργικότητα στα σχολικά μαθηματικά ως σχετική στο συγκεκριμένο επίπεδο γνώσης περιεχομένου που είναι διαθέσιμο στους μαθητές μιας συγκεκριμένης εκπαιδευτικής ομάδας (Leikin, 2009). Η δημιουργικότητα δεν είναι δεδομένο και στατικό χαρακτηριστικό των εξαιρετικά ταλαντούχων ατόμων, αλλά μάλλον είναι μια δυναμική ιδιότητα που μπορεί να αναπτυχθεί σε ένα ευρύ φάσμα μαθητών, χρησιμοποιώντας κατάλληλα εκπαιδευτικά εργαλεία (Leikin, 2009, Liljedahl & Sriraman, 2006, Silver, 1997). Αυτή η στάση απέναντι στη δημιουργικότητα προϋποθέτει διδασκαλία, που αναπτύσσει την αποκλίνουσα συλλογιστική του μαθητή ή παράλληλες ιδέες ευελιξίας και ευχέρειας (Elia et al., 2009, Kwon et al., 2006, Silver, 1997, Star & Newton, 2009, Torbeyns et al., 2009), αυξάνοντας έτσι τις πιθανότητες παραγωγής ενός πρωτότυπου μαθηματικού προϊόντος (Kwon et al., 2006, Lithner, 2008).

Β. Μέτρηση στο πλαίσιο επίλυσης προβλημάτων

Ήδη από το 1973, ο Jensen μελέτησε σχέσεις μεταξύ αριθμητικής ικανότητας, μαθηματικής δημιουργικότητας και μαθηματικού επιτεύγματος, χρησιμοποιώντας ένα όργανο που θέτει προβλήματα για να μετρήσει μια πτυχή της μαθηματικής δημιουργικότητας (Jensen 1973). Η τοποθέτηση προβλημάτων μπορεί να τονώσει τη δημιουργικότητα, ίσως ακόμη περισσότερο από την επίλυση προβλημάτων (Voica και Singer 2013).
Σε ένα πλαίσιο επίλυσης προβλημάτων η Leikin (2009, 2013) χρησιμοποιεί ένα μοντέλο εργασιών πολλαπλών λύσεων, όπως προαναφέρθηκε, για να παρατηρήσει τη δημιουργικότητα στις διαστάσεις της πρωτοτυπίας, της ευχέρειας και της ευελιξίας. Οι Leikin και Kloss (2011) εξέτασαν την απόδοση των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων σε εργασίες πολλαπλών λύσεων (MST) και απέδειξαν ότι η ορθότητα στην επίλυση προβλημάτων σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με την ευχέρεια και την ευελιξία, ενώ η πρωτοτυπία εμφανίζεται ως ειδική ψυχική ιδιότητα (Singer, Sheffield, Freiman, & Brandl, 2016).

Γ. Η έννοια της γνωστικής ευελιξίας

Μια διαφορετική προσέγγιση της δημιουργικότητας, που βασίζεται στην οργανωτική θεωρία, αποτελεί αυτή των Singer και Voica 2013, Pelczer et al. 2013, Voica και Singer 2013, το πλαίσιο της οποίας βασίζεται στην έννοια της γνωστική ευελιξίας που περιγράφεται από τη γνωστική ποικιλία, τη γνωστική καινοτομία, και τις αλλαγές στο γνωστικό πλαίσιο (Singer et al., 2016).

Δ. Γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα

Το μοντέλο τεσσάρων σταδίων του Wallas (1926) της δημιουργικής διαδικασίας που ενσωματώνει τα στάδια της προετοιμασίας, της επώασης, του φωτισμού και της επαλήθευσης, έχει εφαρμοστεί με επιτυχία στη μαθηματική εκπαίδευση (Sriraman, 2004) και γραμμικά μοντέλα παρόμοια με το μοντέλο του Wallas έχουν κερδίσει την αποδοχή στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης (Πίττα-Πανταζή, Κάττου & Χρήστου, 2018).
Οι Πίττα-Πανταζή, Κάττου και Χρήστου (2018) για τη μαθηματική δημιουργικότητα επισημαίνουν ότι είναι μια εσωτερικευμένη διαδικασία που είναι εμφανής μέσα από τις ενέργειες και τις περιγραφές που παρέχονται από τον λύτη. Η δημιουργική σκέψη δεν είναι αναγκαστικά γραμμική και μπορεί να μην είναι πάντα πλήρως συνειδητή (Sheffield, 2013).

4.1 Η δημιουργικότητα ως πρωτότυπο προϊόν

Α. Πρωτότυπο και χρήσιμο έργο

Η δημιουργικότητα περιλαμβάνει τη χρήση κοινών γνωστικών διαδικασιών που οδηγούν σε πρωτότυπα και ασυνήθιστα προϊόντα (Weisberg, 1993). Η δημιουργικότητα είναι η ικανότητα παραγωγής απροσδόκητης, πρωτότυπης και χρήσιμης εργασίας (Sternberg & Lubart, 2000). Είναι η παραγωγή μιας νέας ή αξιοσημείωτης απάντησης σε ένα δεδομένο πρόβλημα (Torrance, 1974). Είναι η παραγωγή ενός αποτελέσματος που είναι ταυτόχρονα καινοτόμο και χρήσιμο, όπως ορίζεται σε ένα συγκεκριμένο κοινωνικό πλαίσιο (Plucker & Beghetto, 2004). Η δημιουργικότητα των μαθητών ορίζεται ως «μία ασυνήθιστη ικανότητα δημιουργίας νέων και χρήσιμων λύσεων σε προσομοιωμένα ή πραγματικά εφαρμοσμένα προβλήματα, χρησιμοποιώντας μαθηματική μοντελοποίηση» (Chamberlin & Moon, 2005, σελ. 38). Ο Sriraman (2009), ωστόσο, υποστηρίζει ότι στο πλαίσιο της μαθηματικής δημιουργικότητας, τα αποτελέσματα της δημιουργικής εργασίας μπορεί να μην έχουν πάντα προεκτάσεις που είναι «χρήσιμες» όσον αφορά τη δυνατότητα εφαρμογής στον πραγματικό κόσμο, ορίζοντας έτσι τη δημιουργικότητα ως την ικανότητα παραγωγής πρωτότυπου έργου (Shriki, 2010).
Επιφανείς μαθηματικοί όπως ο Jacques Hadamard (1945) και ο George Polya (1954) υποστήριξαν ότι η μόνη διαφορά μεταξύ του έργου ενός μαθηματικού και ενός φοιτητή είναι το πτυχίο τους. Με άλλα λόγια, αφενός μεν ο καθένας λειτουργεί στο αντίστοιχο επίπεδο και αφετέρου δε οι μαθητές είναι επίσης ικανοί να δημιουργήσουν ένα δημιουργικό προϊόν (Shriki, 2010). Μερικοί ερευνητές αναφέρονται στη δημιουργικότητα, χρησιμοποιώντας εκφράσεις που σχετίζονται με γνωστικές ικανότητες όπως η ικανότητα, η προσέγγιση και η γνώση (Sternberg & Lubart, 1996), ή με ικανότητες εννοιολογικής σκέψης που περιλαμβάνουν ευελιξία, ευχέρεια και πρωτοτυπία, καθώς και με συμμετοχή σε μη αλγοριθμική λήψη αποφάσεων (Ervynck, 1991).

Β. Δημιουργικό προϊόν

Η δημιουργικότητα χαρακτηρίζεται από τρεις δείκτες: Σύμφωνα με προηγούμενα ευρήματα (Chamberlin & Moon, 2005, Plucker & Beghetto, 2004, Sternberg & Lubart, 2000, Torrance, 1974, Weisberg, 1993), η δημιουργικότητα αξιολογείται ως προς το τελικό προϊόν, ήτοι στα πλαίσια της παροχής πρωτότυπων λύσεων σε τυπικά προβλήματα και στην ανάπτυξη και εφαρμογή ευφάνταστων ιδεών καθώς και στην επινόηση νέων θεωρημάτων. Το δημιουργικό προϊόν είναι η αφετηρία κάθε ερευνητικής προσπάθειας για τη δημιουργικότητα (Πίττα-Πανταζή, Κάττου & Χρήστου, 2018).

Γ. Η δημιουργικότητα ως συγκεκριμένος ή γενικός τομέας

Επιπροσθέτως άλλοι ερευνητές (Csikszentmihalyi, 1999, Milgram & Livne, 2005) αναφέρονται στη δημιουργικότητα ως συγκεκριμένο τομέα παρά ως μία γενική ικανότητα. Η ειδικότητα του τομέα της μαθηματικής δημιουργικότητας εντοπίστηκε και σε άλλες μελέτες (Kattou et al. 2015), οι οποίες ερεύνησαν εάν η δημιουργικότητα είναι γενικός τομέας ή συγκεκριμένος τομέας και συνέκλιναν στο συμπέρασμα ότι η δημιουργικότητα αναφέρεται σε συγκεκριμένο τομέα (Singer et al., 2016). Τέλος, θεωρούν τη δημιουργικότητα ως αναπτυσσόμενη μέσω της κατάλληλης καθοδήγησης (Shriki, 2010).

4.2 Το μοντέλο της Leikin

Α. Μέτρηση μέσω της ευχέρειας, ευελιξίας, πρωτοτυπίας

Το μοντέλο που παρουσιάζεται από την Leikin (2009) περιέχει λειτουργικούς ορισμούς και ένα αντίστοιχο σχήμα βαθμολόγησης για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας βάσει των τριών διαστάσεων της πρωτοτυπίας, της ευχέρειας και της ευελιξίας, όπως προτείνεται από τον Torrance (1974). Για να αξιολογήσει την πρωτοτυπία χρησιμοποιεί τα επίπεδα δημιουργικότητας του Ervynck (1991) σε συνδυασμό με τη συμβατικότητα των λύσεων και οι συμβατικές λύσεις καθορίζονται από το πρόγραμμα σπουδών, εμφανίζονται σε εγχειρίδια και συνήθως διδάσκονται από τους εκπαιδευτικούς, ενώ οι μη συμβατικές λύσεις που βασίζονται σε στρατηγικές, συνήθως δεν προβλέπονται από το σχολικό πρόγραμμα σπουδών (Tabach, et al., 2017).
Η ευχέρεια (Fl) ανιχνεύεται από τον αριθμό των λύσεων στο μεμονωμένο χώρο λύσεων και η ευελιξία (Flx) αξιολογείται μέσω των στρατηγικών λύσεων με βάση διαφορετικές αναπαραστάσεις, ιδιότητες (θεωρήματα, ορισμοί) (Leikin, 2009).
Μετά το έργο του Torrance (1974) για τη γενική δημιουργικότητα, οι Leikin και Lev (2007) ανέφεραν ότι η δημιουργικότητα των μαθητών μπορεί να σχετίζεται με την απόδοση επίλυσης προβλημάτων και μπορεί να θεωρηθεί ως συνδυασμός της πρωτοτυπίας, ευχέρειας και ευελιξίας που εκφράζεται στην επίλυση ενός προβλήματος (Tabach, et al., 2017). Σύμφωνα με το μοντέλο της Leikin (2009) η πρωτοτυπία βασίζεται στο επίπεδο της συμβατικότητας και της διορατικότητας μιας λύσης, η ευελιξία συνδέεται με την ικανότητα αλλαγής ιδεών και δημιουργίας ποικιλίας λύσεων και η ευχέρεια αξιολογείται σύμφωνα με τον αριθμό των μη επαναλαμβανόμενων μεθόδων επίλυσης του προβλήματος. Η Leikin (2009) πρότεινε τη μέτρηση του επιπέδου της δημιουργικότητας μιας συγκεκριμένης μεθόδου λύσης με τον υπολογισμό του προϊόντος, του μέτρου της πρωτοτυπίας μιας μεθόδου και του μέτρου της ευελιξίας (Tabach, et al., 2017).
Σύμφωνα με το μοντέλο της Leikin (2009), η πρωτοτυπία (Or) βασίζεται στο επίπεδο της συμβατικότητας και της διορατικότητας μιας μεθόδου επίλυσης προβλήματος, η ευελιξία (Flx) συνδέεται με την ικανότητα αλλαγής ιδεών και παραγωγής μιας ποικιλίας από μεθόδους λύσεων και η ευχέρεια (Flu) αξιολογείται σύμφωνα με τον αριθμό των μη επαναλαμβανόμενων μεθόδων λύσης του προβλήματος. Η Leikin (2009) πρότεινε τη μέτρηση του επιπέδου δημιουργικότητας (Cr) μιας συγκεκριμένης μεθόδου λύσης με τον υπολογισμό του γινομένου του μέτρου πρωτοτυπίας μιας μεθόδου και του μέτρου ευελιξίας του, ήτοι **Cri = Flxi x Ori,** και το σύνολο του επιπέδου της δημιουργικότητας προκύπτει αθροίζοντας τα επίπεδα δημιουργικότητας κάθε μεθόδου.

Β. Εργασίες πολλαπλών λύσεων (MST)

Η Leikin (2013) αναφέρεται σε μια εργασία πολλαπλών λύσεων (MST), που είναι μια εργασία στην οποία ένας μαθητής καλείται ρητά να λύσει ένα μαθηματικό πρόβλημα με διαφορετικούς τρόπους, αξιολογώντας την ευελιξία από τον αριθμό των μη επαναλαμβανόμενων λύσεων στους διαθέσιμους

και πιθανούς μεμονωμένους χώρους λύσεων και την ευχέρεια με τον χρόνο που αφιέρωσαν οι μαθητές για την παραγωγή των λύσεων.
Η βιβλιογραφία για την εκπαίδευση στα μαθηματικά συχνά συνιστά την προσέγγιση του ίδιου μαθηματικού προβλήματος χρησιμοποιώντας διαφορετικά εργαλεία ή στρατηγικές από τον ίδιο τομέα ή από διαφορετικούς μαθηματικούς τομείς (Dhombres, 1993, House & Coxford, 1995, NCTM, 2000, Polya, 1963, 1973, 1981, Schoenfeld, 1983, 1988, Vinner, 1989). Αυτές οι συστάσεις βασίζονται στην υπόθεση ότι τέτοιες δραστηριότητες εμβαθύνουν τη γνώση και την κατανόηση των μαθηματικών και αναπτύσσουν τη μαθηματική δημιουργικότητα (Ervynck, 1991, Silver, 1997). Για να καταστεί δυνατή μια βαθύτερη διερεύνηση των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων που ενθαρρύνουν την επίλυση προβλημάτων με πολλαπλές λύσεις, οι Leikin, Levav-Waynberg, Gurevich και Mednikov (2006) και οι Leikin και Levav-Waynberg (2007) όρισαν πολλαπλές εργασίες επίλυσης (MST) ως εργασίες που ζητούν ρητά την εύρεση περισσότερων από μιας λύσης σε ένα δεδομένο μαθηματικό πρόβλημα (Levav-Waynberg & Leikin 2012).
Η επίγνωση της ευκαιρίας επίλυσης προβλημάτων με διαφορετικούς τρόπους οδηγεί τους μαθητές να ανακαλύψουν διαφορετικές διαδρομές στις μαθηματικές τους γνώσεις (Dhombres, 1993, Schoenfeld, 1983), αναπτύσσοντας παράλληλα τη νοητική ευελιξία και τη δημιουργικότητά τους (Elia, Van den Heuvel-Panhuizen & Kolovou, 2009, Ervynck, 1991, Krutetskii, 1976, Kwon, Park, & Park, 2006, Leikin, 2009, Silver, 1997, Star & Newton 2009, Torbeyns, De Smedt, Ghesquière και Verschaffel 2009).

4.3 Απόλυτη και σχετική δημιουργικότητα

Για την ταξινόμηση των υπαρχουσών απόψεων σχετικά με τη μαθηματική δημιουργικότητα, χρησιμοποιείται η διάκριση των "big-C" και "little-c" (Schindler, Joklitschke, & Rott, 2018, Sheffield, 2018, Sriraman, Haavold & Lee, 2014) και ειδικότερα η "big-C" αναφέρεται στην απόλυτη δημιουργικότητα ενώ η «little-c» στη σχετική δημιουργικότητα των μη ειδικών (Schindler et al., 2018, Sheffield, 2018).

Α. Η απόλυτη δημιουργικότητα (big-C)

Ένα πρωτότυπο παράδειγμα της big-C δημιουργικότητας στα μαθηματικά είναι η εργασία του Poincaré (1948), ο οποίος όρισε τη δημιουργική διαδικασία που οδηγεί σε επιφανείς συνεισφορές στον τομέα των μαθηματικών με βάση το μοντέλο Gestalt του Wallas (1926) (Sriraman, 2009). Η δημιουργική διαδικασία διαμορφώνεται ως μοντέλο τεσσάρων σταδίων, που αποτελείται από ένα προπαρασκευαστικό στάδιο, όπου οι ερευνητές αποκτούν μια εικόνα για το δεδομένο πρόβλημα, ένα στάδιο επώασης, όπου το πρόβλημα δεν εστιάζεται συνειδητά, το στάδιο του φωτισμού, όπου εμφανίζεται ξαφνικά διορατικότητα και το στάδιο της επαλήθευσης, όπου τα αποτελέσματα εκφράζονται και επαληθεύονται και σε αυτή την προοπτική, η δημιουργικότητα είναι μια μακροπρόθεσμη διαδικασία, που περιλαμβάνει ένα σημαντικό ποσό της συνειδητής και ασυνείδητης εργασίας (Hadamard, 1954, Mann, 2005).

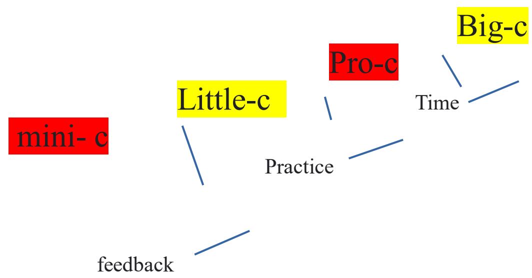
Β. Η σχετική δημιουργικότητα (little-c)

Η έρευνα που ασχολείται με τη δημιουργικότητα των μαθητών, αναφέρεται συνήθως στη little-c, τη σχετική δημιουργικότητα και οι λύσεις των μαθητών θεωρούνται δημιουργικές εάν είναι μοναδικές στο περιβάλλον τους (Sheffield, 2018). Η έρευνα που ασχολείται με τη little-c ακολουθεί σε μεγάλο βαθμό μια ψυχομετρική ή συμπεριφορική προσέγγιση (Prabhu & Czarnocha, 2014, Sriraman, 2009). Η δημιουργικότητα χαρακτηρίζεται ως βασικό συστατικό της ικανότητας εύρεσης μοναδικών και

πολλαπλών ιδεών (Guilford, 1967) και αυτή η ικανότητα περιλαμβάνει τις τέσσερις πτυχές της ευχέρειας (αριθμός λύσεων), της ευελιξίας (ποικιλομορφία των παραγόμενων λύσεων), της πρωτοτυπίας (μοναδικότητα) και της επεξεργασίας (επίπεδο λεπτομέρειας περιγραφών).
Τα Torrance Tests (Torrance, 1974) είναι κυρίαρχα για τη little-c. Αυτή η προσέγγιση έχει μεταφερθεί στην έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης από την Leikin (2009), η οποία εισήγαγε την έννοια των Πολλαπλών Εργασιών Λύσης (MSTs) στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Τα MST είναι μαθηματικές εργασίες που πρέπει να λυθούν με διαφορετικούς τρόπους (Leikin & Lev, 2013). Η δημιουργικότητα αξιολογείται με βάση τον αριθμό, την ποικιλία, και πρωτοτυπία των λύσεων των μαθητών (Leikin & Lev, 2013). Παρόλο που η άποψη του προϊόντος σχετικά με την εργασία των μαθητών στα MST ήταν γόνιμη, η διαδικασία που οδηγεί σε δημιουργικές ιδέες (Prabhu & Czarnocha, 2014) σπάνια διερευνάται.
Μετά τον Dewey (1910) η επίλυση προβλημάτων περιλαμβάνει την εμφάνιση μιας αντιληπτής δυσκολίας, τον εντοπισμό και ορισμό της δυσκολίας, την εμφάνιση μιας πρότασης και ιδέας, το συλλογισμό πίσω από την πρόταση/ιδέα, τα συμπεράσματα και την επαλήθευση της πρότασης/ιδέας. Στην περίπτωση των MSTs είναι νοητό ότι οι μαθητές μπορεί να έχουν τέτοιες προτάσεις ή ιδέες σχετικά με τον τρόπο επίλυσης του MST και μπορεί να περάσουν φάσεις παρόμοιες με αυτές που περιγράφονται από τον Dewey (Levav-Waynberg & Leikin, 2012). Με αυτόν τον τρόπο, ο Dewey (1910) τονίζει ότι «η καλλιέργεια μιας ποικιλίας εναλλακτικών προτάσεων είναι ένας σημαντικός παράγοντας στην καλή σκέψη» (σελ. 75). Είτε μοντέλα επίλυσης προβλημάτων όπως προσφέρονται από τον Dewey (1910) ή τον Pólya (1945), μπορεί σε κάποιο βαθμό να είναι κατάλληλα για την αποτύπωση των φάσεων των μαθητών στα MST (Levav-Waynberg et al., 2012).

Γ. Το μοντέλο των τεσσάρων C's των Beghetto και Kaufman

Αν και η μαθηματική δημιουργικότητα έχει περιγραφεί ως ο σημαντικότερος οικονομικός πόρος του 21ου αιώνα, υπάρχει έλλειψη συναίνεσης ως προς τον ορισμό του (Mann 2006) και οι περισσότερες έρευνες για τη δημιουργικότητα αναφέρονται στη δημιουργικότητα Big-C/little c.
Οι Beghetto και Kaufman (2007) υποστήριξαν το μοντέλο των τεσσάρων C's όπως εμφανίζεται στο παρακάτω σχήμα:



Οι Kaufman και Beghetto (2009) πρότειναν δύο επιπλέον κατηγορίες και ειδικότερα την «mini-c» για να συμπεριλάβουν τις αρχικές δημιουργικές ερμηνείες και την «Pro-c» ως κατάλληλη κατηγορία για άτομα που είναι επαγγελματίες δημιουργοί, που έχουν ξεπεράσει το little-c αλλά δεν έχουν φτάσει στην εξέχουσα θέση του Big-C. Η δημιουργικότητα του Big-C αντιπροσωπεύει εξέχουσα και επαναστατική δημιουργική έκφραση σε πολύ υψηλό επίπεδο επιτευγμάτων, που είναι εφικτό μόνο από πολύ μικρό αριθμό ατόμων (Beghetto et al., 2009). Οι Beghetto et al (2007) πρότειναν την έννοια του mini-c υποστηρίζοντας ότι όλοι είναι δημιουργικοί και ότι αυτή η δημιουργικότητα ξεκινά στο mini-c, το οποίο στις περισσότερες περιπτώσεις μπορεί να γίνει little-c. Σε εξαιρετικές περιπτώσεις το little-c μπορεί στη συνέχεια να μετατραπεί σε Pro-c ή Big-C, αλλά σε άλλες περιπτώσεις το mini-c μπορεί να μην εξελιχθεί ποτέ (Beghetto et al., 2009). Η πρόταση των Beghetto και Kaufman (2007) βασίστηκε σε εμπειρικά στοιχεία (Baer and Kaufman 2005, Cohen 1989, Sawyer et al. 2003).

Το μοντέλο του C μπορεί να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να κατανοήσουν τα επίπεδα δημιουργικότητας που ταιριάζουν περισσότερο στο περιβάλλον της τάξης τους (δηλαδή mini-c και little-c) και να προσδιορίσουν τους απαραίτητους βασικούς παράγοντες για την υποστήριξη της ανάπτυξης της δημιουργικότητας από το ένα επίπεδο στο επόμενο (Mhlolo, 2016). Σύμφωνα με αυτή την ιδέα, το δημιουργικό δυναμικό μπορεί να βρίσκεται σε κάθε παιδί (Runco, 2003), μπορεί να ενθαρρυνθεί ή να αναστέλλεται (Sharp, 2004) και η ανάπτυξή του εξαρτάται από το είδος της εκπαίδευσης που λαμβάνουν οι άνθρωποι (Esquivel 1995).

4.4 Τα 4Ps' της δημιουργικότητας

Α. Διδακτικές Προσεγγίσεις

Χρησιμοποιώντας το πλαίσιο των τεσσάρων στοιχείων της δημιουργικότητας (4Ps'), η μελέτη του Chiu (2009) προσδιόρισε τρεις τύπους διδακτικών προσεγγίσεων στη μαθηματική διδασκαλία: ελεύθερες, συλλογιστικές και προσεγγίσεις δεξιοτήτων. Δάσκαλοι με μια ελεύθερη προσέγγιση δίνουν έμφαση στην αυτορρύθμιση (Zimmerman, 1989, Puustinen & Pulkkinen, 2001, Fuchs et al., 2003, Stright, Neitzel, Sears & Hoke-Sinex, 2001), στη φαντασία και στη βασική κατανόηση στις τάξεις των μαθηματικών, χρησιμοποιώντας μη δομημένα προβλήματα (Jonassen, 1997, Nitko, 1996), τα οποία ενθαρρύνουν ποικίλες λύσεις. Δάσκαλοι με συλλογιστική προσέγγιση έτειναν να επικεντρώνονται σε μια σαφή κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, δηλαδή μια βαθιά προσέγγιση στη μάθηση (Biggs, 2001). Θέτουν προβλήματα και ερωτήσεις με σκαλωσιές για διευκρίνιση των βασικών μαθηματικών εννοιών (Chiu, 2009). Τείνουν επίσης να αλλάζουν τα διάφορα είδη μαθηματικών προβλημάτων σε πρόβλημα «συλλογισμού», προκειμένου να βεβαιωθούν ότι οι μαθητές γνωρίζουν το «γιατί» (Baroody, 1993). Δάσκαλοι με προσέγγιση δεξιοτήτων δίνουν έμφαση στη σωστή λήψη των απαντήσεων παρέχοντας συμβουλές για λύσεις (Chiu, 2009).
Οι Leikin και Pitta-Pantazi (2013) έγραψαν πως δημιουργικές ιδέες είναι αυτές που λαμβάνονται υπόψη από την κοινωνική ομάδα αναφοράς ως νέες και ουσιαστικές σε έναν συγκεκριμένο τομέα. Πώς μπορεί να μετρηθεί η δημιουργικότητα; Ο Torrance (1974) πρότεινε ότι σε καταστάσεις επίλυσης προβλημάτων ένας ερευνητής μπορεί να συσχετίσει τη δημιουργική σκέψη των μαθητών με μέτρα ευχέρειας, ευελιξίας, πρωτοτυπίας και επεξεργασίας (Hershkowitz, et al., 2017). Οι μαθηματικοί προσάρμοσαν αυτά τα μέτρα που περιγράφουν τη δημιουργικότητα σε καταστάσεις επίλυσης προβλημάτων μαθηματικών (Leikin 2009, Leikin και Lev 2007). Αρκετές ερευνητικές μελέτες αξιολόγησαν τη δημιουργικότητα μεμονωμένων μαθητών, μετρώντας την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία σε καταστάσεις επίλυσης προβλημάτων, ειδικότερα ζητώντας πολλαπλές λύσεις και πολλαπλές μεθόδους λύσεων (Hayne & Tabach 2014, Κάττου et al., 2013, Leikin και Lev 2013, Tabach και Friedlander 2013) ή σε καταστάσεις που δημιουργούν προβλήματα (Bonotto 2013, Van Harpen and Presmeg 2013, Voica and Singer 2013).

Β. Η συλλογική μαθηματική δημιουργικότητα

Η Levenson (2011) εφάρμοσε την έννοια της συλλογικής μαθηματικής δημιουργικότητας σε συζήτηση ολόκληρης της τάξης, προτείνοντας ένα συλλογικό αντίστοιχο της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας. Ο Lithner (2008) έκανε διάκριση μεταξύ μιμητικής συλλογιστικής και δημιουργικής μαθηματικής συλλογιστικής, όπου ο μιμητικός συλλογισμός μπορεί να εκδηλωθεί είτε ως απομνημονευμένος είτε ως αλγοριθμικός (Hershkowitz, et al., 2017). Ωστόσο, ο Lithner (2008) ισχυρίζεται ότι υπάρχει ένας διαφορετικός τύπος συλλογισμού, ο δημιουργικός μαθηματικός συλλογισμός, που πληροί τρία κριτήρια: την καινοτομία, την αληθοφάνεια που στηρίζεται σε επιχειρήματα για την επιλογή στρατηγικής και τη μαθηματική βάση όπου τα επιχειρήματα στηρίζονται σε εγγενείς μαθηματικές ιδιότητες (Hershkowitz, et al., 2017).

Στο πλαίσιο του Lithner, οι Granberg και Olsson (2015) θεωρούν το συλλογισμό των μαθητών δημιουργικό, εάν δημιουργήσουν μια στρατηγική επίλυσης και περαιτέρω παρουσιάσουν επιχειρήματα γιατί η στρατηγική θα λειτουργούσε, εδραιώνοντάς τα στα εγγενείς μαθηματικές ιδιότητες (Hershkowitz, et al., 2017).

Γ. Η κατασκευή παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων

Η κατασκευή παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων απαιτεί οι μαθητές να κατανοήσουν το νόημα μιας έννοιας ή μιας διαδικασίας, να εφαρμόζουν την αντίστροφη σκέψη και να σκέφτονται δημιουργικά (Tabach, et al., 2017). Οι Zazkis και Leikin (2007) εξετάζουν το ενδεχόμενο δημιουργίας παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων ως σημαντικό ερευνητικό εργαλείο, το οποίο παρέχει ένα «παράθυρο» στη σκέψη των μαθητών (Tabach, et al., 2017). Ο εντοπισμός σφαλμάτων και παρανοήσεων απαιτεί από τους μαθητές να αξιολογήσουν μια λύση (Tabach, et al., 2017). Αυτή η δραστηριότητα δίνει στους μαθητές «διδακτικό» ρόλο και ως εκ τούτου μπορεί να προκαλέσει προβληματισμό σχετικά με τις πιθανές πηγές δυσκολιών (Borasi 1994, 1996). Απαιτείται οι μαθητές να δουλέψουν με πολλαπλές αναπαραστάσεις και εργασίες που χαρακτηρίζονται από πολλαπλές μεθόδους που θεωρούνται κατάλληλες για την πρόκληση δημιουργικής μαθηματικής σκέψης (Leikin 2009) και συχνά απαιτούν αποκλίνουσα σκέψη σε εργασίες που εμπλέκουν και προωθούν πολλαπλές μεθόδους λύσης.
Ο Guilford (1967) συνέδεσε τη δημιουργική σκέψη με την αποκλίνουσα σκέψη που περιλαμβάνει τη δημιουργική γενιά πολλαπλών απαντήσεων σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, αντίθετα με τη συγκλίνουσα σκέψη, που στοχεύει σε μια ενιαία, σωστή λύση (Tabach, et al., 2017). Σύμφωνα με το μοντέλο της Leikin (2009) καθορίζεται το επίπεδο πρωτοτυπίας των μαθητών από το επίπεδο της συμβατικότητας και τη διορατικότητας μιας λύσης, σε σύγκριση με την απόδοση των συνομηλίκων τους. Οι Hershkowitz et al. (2017) θεωρούν τη δημιουργικότητα στο σχολείο ως ένα σχετικό φαινόμενο, καθώς οι ιδέες των μαθητών θα θεωρηθούν δημιουργικές με βάση τη συνεισφορά τους στις μαθηματικές γνώσεις της τάξης (Goldin, 2017).

Οι Tabach και Friedlander (2017) παρατηρούν ότι η μέτρηση της δημιουργικής μαθηματικής σκέψης δεν ορίζεται με έναν γενικά αποδεκτό τρόπο. Οικοδομούν πάνω σε μια πρόταση των Leikin και Lev (2007) που συσχετίζουν τη δημιουργικότητα των μαθητών με τις επιδόσεις τους στην επίλυση προβλημάτων μέσω της πρωτοτυπίας, ευχέρειας και ευελιξίας. Όπως στο άρθρο των Singer et al. (2017), η γνώση συνάγεται από την εργασία που παρήγαγαν οι μαθητές στη μελέτη, αλλά μεγαλύτερη έμφαση δίνουν οι Tabach et al. (2017) στο προϊόν. Μάλιστα σημειώνουν ότι οι Sternberg & Lubart (1996) ορίζουν τη δημιουργικότητα ως μια ικανότητα παραγωγής απροσδόκητων, πρωτότυπων και χρήσιμων έργων (Goldin, 2017).
Τέλος, δραστηριότητες για την προώθηση της δημιουργικότητας αποτελούν οι "Take-a-Quiz" και «Make-a-Quiz» που μελετήθηκαν από τους Tabach και Friedlander (2017), όπου βαθμολογείται η «πρωτοτυπία» και η «επίγνωση του λάθους» (Goldin, 2017).

5. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στη διδασκαλία

Η δημιουργικότητα είναι σημαντική για την καινοτομία και την εύρεση νέων μονοπατιών σκέψης. Η μαθηματική δημιουργικότητα (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013, Sheffield, 2013, Singer, 2018) έχει στόχο να προετοιμάσει τους μαθητές για τις μελλοντικές ζωές στην ολοένα και πιο αυτοματοποιημένη και διασυνδεδεμένη με την υψηλή τεχνολογία της κοινωνίας και οικονομίας (Οργανισμός Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης [ΟΟΣΑ], 2014). Δε φαίνεται πλέον αρκετό για τους μαθητές να λύνουν συνηθισμένα προβλήματα και γι' αυτό οι εκπαιδευτικοί στοχεύουν να διδάξουν για τη δημιουργικότητα, ώστε οι μαθητές να είναι σε θέση να σκέφτονται «εκτός του κουτιού» και να συνδέουν διαφορετικά θέματα ενώ λύνουν προβλήματα με τις εμπειρίες τους (Schindler & Lilienthal, 2019).
Είναι ευρέως αποδεκτό, ότι οι μαθητές των μαθηματικών όλων των επιπέδων πρέπει να εκτίθενται στη δημιουργική σκέψη σχετικά με τις μαθηματικές έννοιες και ιδέες (NCTM, 2000) και συνεπώς οι εκπαιδευτικοί πρέπει να είναι σε θέση να σχεδιάζουν και να εφαρμόζουν περιβάλλοντα μάθησης που να υποστηρίζουν την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας. Δυστυχώς, πολλοί δάσκαλοι δε διαθέτουν τις απαραίτητες ικανότητες για να ενσωματώσουν δραστηριότητες, που προωθούν τη δημιουργικότητα των μαθητών, κυρίως λόγω έλλειψης προηγούμενης εμπειρίας ή κατάλληλης προετοιμασίας (Shriki, 2005). Διάφορες μελέτες επισημαίνουν το γεγονός ότι οι δάσκαλοι τείνουν να διδάσκουν με τον τρόπο που διδάσκονταν στο σχολείο (Pehkonen, 1997). Κατά συνέπεια, υπάρχει ανάγκη για σκόπιμη προετοιμασία για την ανάπτυξη της ικανότητας των εκπαιδευτικών να εφαρμόζουν καινοτόμες διδακτικές προσεγγίσεις που ενθαρρύνουν τη δημιουργικότητα (Shriki, 2010).

5.1 Η ανάπτυξη της δημιουργικότητας στο σχολείο

Αν και οι περισσότεροι δάσκαλοι θα συμφωνούσαν ότι είναι σημαντικό να αναπτυχθεί η δημιουργικότητα των μαθητών, η βιβλιογραφία δείχνει ότι η δημιουργικότητα συνήθως δεν ενθαρρύνεται στα σχολεία (Sriraman, 2005). Σε αντίθεση με τους επαγγελματίες μαθηματικούς, που συχνά ασχολούνται με προβλήματα που είναι γεμάτα αβεβαιότητα, σε σχολικό επίπεδο οι περισσότερες διδακτικές και παιδαγωγικές προσεγγίσεις δεν προσφέρουν σχεδόν ποτέ αυτή την ανοιχτή άποψη των μαθηματικών, αποφεύγοντας τις ευκαιρίες να ασχοληθούν οι μαθητές με ανοιχτά προβλήματα (Shriki, 2010).

Α. Η δημιουργικότητα στην τάξη

Ο Beghetto (2007) δείχνει ότι υπάρχει μια τάση μεταξύ των εκπαιδευτικών (Mhlolo, 2016), να προτιμούν τις τυπικές απαντήσεις από τις μοναδικές. Οι δάσκαλοι ως εκ τούτου συνήθως βλέπουν τις απροσδόκητες ιδέες ως ενοχλητικές και κατά συνέπεια αποθαρρύνουν μια τέτοια συμπεριφορά προς ικανοποίηση των προσδοκιών του προγράμματος σπουδών (Mhlolo, 2016). Επιπλέον οι Dreyfus και Eisenberg (1986) αναφέρουν πως οι περισσότεροι μαθητές δεν αναμένεται να βρουν δημιουργικές λύσεις κατά την επίλυση προβλημάτων. Τείνουν να υιοθετούν μια πρακτική στάση για να φτάσουν στη λύση (Aizikovitsh 2014).
Ο Shepard (1991, 2002) υποστηρίζει ότι η αξιολόγηση στην τάξη, αντικατοπτρίζεται από τυποποιημένα τεστ, τα οποία είναι ουσιαστικά ασυμβίβαστα με τις κεντρικές ιδέες που στηρίζονται από τον κονστρουκτιβισμό (Bolden et al., 2009). Οι δάσκαλοι θα πρέπει να συζητήσουν με τους μαθητές τους θέματα που αφορούν την αξιολόγηση της δικής τους σκέψης, καθώς μια τέτοια αυτοαξιολόγηση απαιτεί από μόνη της δημιουργικότητα (Chamberlin & Moon, 2005). Εάν, ωστόσο, τα μαθηματικά γίνονται αντιληπτά ως ένας ανοιχτός και ευέλικτος τομέας, οι δάσκαλοι μπορούν να εμπνεύσουν τους μαθητές τους να συνεισφέρουν σε αυτόν τον τομέα (Shriki, 2010). Έτσι, οι νέοι

δάσκαλοι θα είναι σε θέση να ενθαρρύνουν τους μαθητές τους να αναπτύξουν τη δική τους δημιουργικότητα (Pehkonen, 1997).

Β. Η δημιουργική φαντασία του μαθητή

Ο Vygotsky (1984) αναλογιζόμενος την ανάπτυξη της δημιουργικής φαντασίας, αναγνώρισε ότι η φαντασία ενός παιδιού είναι σχεδόν τόσο απέραντη όσο συχνά πιστεύεται και αναφέρει για τη μαθηματική φαντασία, ότι εάν οι μαθηματικές παρατηρήσεις ενός μαθητή είναι περιορισμένες σε μερικές μόνο «σκηνές» σε όλα τα σχολικά του χρόνια, υπάρχει μικρή ελπίδα για την ανάπτυξη της δημιουργικότητας (Karp, 2017).
Η αποχή από την ανάπτυξη της δημιουργικότητας στην τάξη μεταφέρει την εντύπωση ότι τα μαθηματικά είναι απλώς ένα σύνολο δεξιοτήτων και κανόνων προς απομνημόνευση και με αυτόν τον τρόπο, η φυσική περιέργεια και ο ενθουσιασμός των μαθητών για τα μαθηματικά μπορεί να εξαφανιστούν, γι' αυτό και οι δάσκαλοι θα πρέπει να ενθαρρύνουν τους μαθητές να μοιραστούν τις ιδέες τους (Sriraman, 2005).
Οι Leikin et al. (2017) αναφέρουν ένα άρθρο του Tobin και Tippins (1993), που υποστηρίζουν ότι δεν είναι εύκολο να βρεθούν δάσκαλοι που να απαιτούν από τους μαθητές να δημιουργήσουν ερωτήσεις. Ξεκινώντας από τον Dewey (1944) και συνεχίζοντας με τους Watts and Alsop (1996), Leikin et al. (2017) γίνεται διάκριση μεταξύ «ερωτημάτων επεξεργασίας» και «διευκρινιστικών ερωτήσεων (Karp, 2017).

5.2 Η δημιουργικότητα από την πλευρά των μαθητών

Κατά την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας βρίσκουμε ένα μεγάλο σύνολο εργασιών, υποδηλώνοντας ότι οι μαθητές δεν βιώνουν συνήθως τα μαθηματικά ως δημιουργικό υποκείμενο (Burton, 2004), παρά το γεγονός ότι οι ερευνητές μαθηματικοί συχνά περιγράφουν το πεδίο τους ως μια εξαιρετικά δημιουργική προσπάθεια (Sriraman, 2009). Έτσι, οι εκπαιδευτικοί μπορεί να πιστεύουν ότι τα πρότυπα περιεχομένου καταπνίγουν τη δημιουργικότητα, αλλά οι ερευνητές έχουν υποστηρίξει ότι τέτοια πρότυπα μπορούν να χρησιμεύσουν ως πλαίσιο για δημιουργικότητα στην τάξη (Beghetto & Kaufman, 2010). Αυτές οι αντιφάσεις τοποθετούν τους εκπαιδευτικούς σε δύσκολη θέση.

Α. Η σημασία της δημιουργικότητας για τους μαθητές

Σύμφωνα με τον Allan (1991) η αξιοποίηση των δυνατοτήτων των μαθητών θα επιτρέψει την κατάρτιση μιας νέας γενιάς επιστημόνων και δημιουργικών ανθρώπων που θα συμβάλλουν στην ανάπτυξη της κοινωνίας, των επιστημών και της τεχνολογίας στο μέλλον και οι ίσες ευκαιρίες είναι βασική προϋπόθεση προκειμένου οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν τις προσωπικές τους δυνατότητες, να ανακαλύψουν ενδιαφέροντα και να βρουν προσωπικά κίνητρα (Aizikovitsh 2014).
Η τρέχουσα τάση στην εκπαίδευση είναι να λαμβάνονται υπόψη οι ανάγκες του αναπτυσσόμενου κόσμου στον οποίο ζούμε, καθώς οι ικανότητες που χρειάζονταν οι μαθητές στο παρελθόν - ανάγνωση, γραφή, υπολογισμός- δεν επαρκούν σήμερα, και απαιτείται πλέον ενεργητική μάθηση που επιτρέπει στον μαθητή την απόκτηση νέων μαθησιακών δεξιοτήτων που δεν τον περιορίζουν σε ένα συγκεκριμένο σύνολο γνώσεων ή μεθόδων (Aizikovitsh 2014), το οποίο και απαντάται στη διδασκαλία των προβλημάτων μη ρουτίνας.

Β. Η επίδραση των θετικών συναισθημάτων στη δημιουργικότητα

Σύμφωνα με τον Mann (2006) πολλοί δάσκαλοι δίνουν έμφαση στους αλγόριθμους, στην ταχύτητα και στην ακρίβεια, παρά στην εργασία για την ανάπτυξη των δημιουργικών δυνατοτήτων των

μαθητών τους. Ο Silver (1997) επισημαίνει την ανάγκη να ενθαρρύνονται οι μαθητές να αναλαμβάνουν κινδύνους ενώ συμμετέχουν στην επίλυση προβλημάτων. Αυτό σημαίνει, να μην τρομάζει ο μαθητής να κάνει λάθη, γεγονός που είναι απαραίτητο για την ανάπτυξη της δημιουργικότητας (Mann, 2006).
Η εμπλοκή των μαθητών στη δημιουργική διαδικασία δημιουργεί εσωτερικό κίνητρο, ενδιαφέρον και περιέργεια (Starko, 2001). Η απόλαυση είναι απαραίτητη για την προσέλκυση του ενδιαφέροντος των μαθητών (Csikszentmihalyi, Rathunde & Whalen, 1993) και συμβάλλει στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας (Starko, 2001).
Η επίδραση των θετικών συναισθημάτων στη βελτίωση της απόδοσης και της δημιουργικής επίλυσης προβλημάτων είναι θεμελιωμένη στη νευροψυχολογική λογοτεχνία (Ashby, Isen & Turken, 1999). Η έρευνα για τον ρόλο του συναισθήματος στο πλαίσιο της δημιουργικότητας (Fredrickson & Branigan, 2001) υποδηλώνει ότι τα θετικά συναισθήματα ενθαρρύνουν τα άτομα να ασχολούνται επίμονα με τις δραστηριότητές του. Τέτοια συναισθήματα υποστηρίζουν, επίσης, τη διεύρυνση της γνώσης, ενισχύοντας τη δημιουργικότητα (Shriki, 2010).
Δυστυχώς, δε συμβαίνει πάντα να επιτυγχάνεται απόλαυση για τους μαθητές κατά την εκμάθηση των μαθηματικών, όπως αναφέρθηκε από τον Mann (2006), ο οποίος διαπίστωσε ότι πολλοί υποψήφιοι δάσκαλοι περιγράφουν την παιδική τους εμπειρία στα σχολικά μαθηματικά ως δυσάρεστη (Shriki, 2010).

Γ. Δημιουργικότητα και περιέργεια

Η περιέργεια και η δημιουργικότητα χρησιμοποιούνται συχνά ως συνώνυμα από τους δασκάλους (Hensley, 2004). Η περιέργεια μπορεί να οριστεί ως εξερεύνηση (Perry, 2001), δεδομένου ότι οι εμπειρίες μάθησης ανοιχτού τύπου, στις οποίες ο στόχος δεν είναι η μεμονωμένη σωστή απάντηση, καλλιεργούν ένα περιβάλλον διερεύνησης, το οποίο με τη σειρά του προκαλεί περιέργεια (Church & Ravid, 2003). Η περιέργεια αναδύεται από την επιθυμία των μαθητών να μάθουν το «γιατί» (Hensley, 2004) και σε αντάλλαγμα τους δίνει τη δυνατότητα να δημιουργήσουν νέα γνώση (Shriki, 2010). Ο φόβος του κινδύνου μπορεί να καταστείλει την περιέργεια, τη δημιουργικότητα και την προθυμία εξερεύνησης (Perry, 2001).

Ο Aiken (1973) υποστηρίζει ότι ο δάσκαλος είναι το κλειδί για τη δημιουργική σκέψη στην τάξη. Αν λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί αποτελούν σημαντικούς παράγοντες στη μαθησιακή διαδικασία, φαίνεται ότι αυτοί μπορούν να δώσουν στους μαθητές τη δυνατότητα να προσεγγίσουν ένα πρόβλημα από διαφορετικές οπτικές γωνίες, ενθαρρύνοντάς τους στη διαδικασία εκμάθησης των μαθηματικών (Arikan, 2017).

5.3 Αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη δημιουργικότητα

Οι αντιλήψεις των δασκάλων για τη δημιουργικότητα είναι παρόμοιες σε διάφορα μέρη του κόσμου. Για παράδειγμα, οι Fryer και Collings (1991) διαπίστωσαν ότι οι δάσκαλοι στο Ηνωμένο Βασίλειο βλέπουν τη δημιουργικότητα ως πρωτότυπη παραγωγή. Οι Runco και Johnson (2002) που μελέτησαν τις πεποιθήσεις των γονέων και των δασκάλων για τα χαρακτηριστικά των δημιουργικών παιδιών στις ΗΠΑ και στην Ινδία, διαπίστωσαν ότι τα δημιουργικά παιδιά είναι καλλιτεχνικά, ευφάνταστα και εφευρετικά. Ωστόσο, ορισμένα θέματα θεωρείται ότι προσφέρουν λιγότερες ευκαιρίες για δημιουργικότητα από άλλα και τα μαθηματικά συχνά θεωρούνται ένα από αυτά (Pehkonen, 1997, Davies, Howe, Rogers & Fasciato, 2004).

Α. Η σύγχυση της δημιουργικότητας με την τέχνη

Οι δάσκαλοι μικρών παιδιών ισχυρίζονται ότι τα μαθηματικά είναι δημιουργικά, αλλά στην πραγματικότητα αναφέρονται περισσότερο σε δημιουργικές δραστηριότητες στις κατασκευές, στην τέχνη και στα τραγούδια παρά στα ίδια τα μαθηματικά (Worthington & Carruthers, 2003, Carruthers & Worthington, 2005). Πολλοί δάσκαλοι βλέπουν τη δημιουργικότητα να επικεντρώνεται περισσότερο στις τέχνες, η οποία είναι σύμφωνη με τα ευρήματα των Diakidoy και Kanari (1999) και Davies et al. (2004), τάση η οποία ορθώνει εμπόδια στη σκέψη. Γι' αυτό πρέπει να δοθεί περισσότερη προσοχή στη δημιουργικότητα στα μαθηματικά ώστε τέτοιες αδυναμίες να αντιμετωπίζονται (Strauss, 1993, Tillema, 1997). Οι δάσκαλοι μεγαλύτερων παιδιών μπορεί να απορρίπτουν συνήθως τη δημιουργική σκέψη (Kennedy, 2005), ιδιαίτερα σε θέματα όπως τα μαθηματικά, όπου θεωρούν τους αλγόριθμους ως πρωταρχικής σημασίας και τη δημιουργικότητα ως απόσπαση της προσοχής (Beghetto, 2007). Για να είναι τα παιδιά δημιουργικά στην τάξη, πρέπει πρώτα να τους παρουσιαστούν ευκαιρίες για να επιδείξουν τη δημιουργικότητά τους (Bolden et al., 2009).

Β. Το μοντέλο της αντίληψης του δασκάλου για το CIMT

Το μοντέλο της αντίληψης του δασκάλου για το CIMT (Δημιουργικότητα στη Διδασκαλία των Μαθηματικών) που αναπτύχθηκε από τον Lev Zamir και Leikin (2011, 2013), στηρίζεται στο μοντέλο του Torrance για τον ορισμό της δημιουργικότητας, η οποία αποτελείται από την ευχέρεια, την ευελιξία, την πρωτοτυπία και την επεξεργασία και δείχνει πώς η δημιουργικότητα εμφανίζεται στις περιγραφές των δασκάλων στην τάξη τους (Zazkis, 2016). Όσον αφορά τη δημιουργικότητα που κατευθύνεται από τον δάσκαλο, διακρίνεται στη μαθηματική ευελιξία (μετασχηματισμός μαθηματικών προβλημάτων με διαφορετικές προσεγγίσεις, στη μαθηματική πρωτοτυπία (δημιουργία εργασιών πέρα από το πρόγραμμα σπουδών), στην παιδαγωγική ευελιξία (προσαρμογή στις ανάγκες των μαθητών και απαντήσεις) και στην παιδαγωγική πρωτοτυπία (εμφανίζεται στη χρήση διαφόρων εκπαιδευτικών στρατηγικών) (Zazkis, 2016).

Η δημιουργικότητα στα μαθηματικά αναλύεται υπό το πρίσμα της κατασκευής γνώσης (Hershkowitz et al. 2017). Η Sheffield (2017) καταδεικνύει ότι υπάρχουν πολλές παρανοήσεις στο εκπαιδευτικό σύστημα σε σχέση με τη μαθηματική δημιουργικότητα που μπορεί να εμποδίσει την αναγνώριση και την ανάπτυξης της χαρισματικότητας των μαθητών (Singer, et al., 2017).

5.4 Η συμβολή των σημερινών σχολικών εγχειριδίων στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας

Η εκπαίδευση διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας των μαθητών και κατ΄ επέκταση στη διαμόρφωση δημιουργικών μυαλών, χρήσιμα για την κοινωνία μας. Κατά πόσον, όμως, το αναλυτικό πρόγραμμα, τα σχολικά εγχειρίδια αλλά και οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί συμβάλλουν στην καλλιέργεια της μαθηματικής δημιουργικότητας;

Α. Η χρήση των διδακτικών βιβλίων στα Μαθηματικά στην Ευρώπη

Σύμφωνα με την έρευνα της Pepin (2008) σχετικά με τα διδακτικά βιβλία και της χρήσης τους από τους δασκάλους στην Αγγλία, Γαλλία και Γερμανία σχεδόν όλος ο χρόνος της χρήσης των βιβλίων στη σχολική τάξη αφιερωνόταν στην εξάσκηση των μαθητών στην επίλυση ασκήσεων, τις οποίες επέλεγε ο δάσκαλος, ενώ πάντα ακολουθούσαν εξηγήσεις του δασκάλου για τη συγκεκριμένη δεξιότητα και την τεχνική επίλυσης μιας άσκησης. Όλοι οι δάσκαλοι βασίζονταν υπερβολικά στο βιβλίο και αιτιολογούσαν την επιλογή τους αυτή στην έλλειψη χρόνου για την προετοιμασία άλλου διδακτικού υλικού (Pepin, 2008). Σε ό,τι αφορά στη διαμεσολάβηση των ασκήσεων οι δάσκαλοι και στις τρεις χώρες κάνουν τις επιλογές τους κυρίως από το διδακτικό βιβλίο. Στη Γερμανία οι δάσκαλοι εισάγουν τις μαθηματικές έννοιες σε μια συζήτηση με όλη την τάξη και επιλέγουν συγκεκριμένες ασκήσεις για την εμπέδωσή τους, στην Αγγλία οι δάσκαλοι κάνουν μια σχετικά σύντομη εισαγωγή ή διδάσκουν κανόνες και απαιτούν την επίλυση ενός μεγάλου αριθμού απλών ασκήσεων για εξάσκηση και στη Γαλλία οι δάσκαλοι έχουν στη διάθεσή τους δραστηριότητες από το διδακτικό βιβλίο για να εισάγουν μια έννοια και αφού εξηγήσουν στους μαθητές τα «ουσιώδη» επιλέγουν διαφοροποιημένες ασκήσεις για να ανταποκριθούν στις ανάγκες μιας θεωρούμενης ως ετερογενούς σχολικής τάξης (Pepin, 2008). Αξίζει να σημειωθεί ότι και οι τρεις αυτές χώρες στο πρόγραμμα PISA στις επιδόσεις των Μαθηματικών κατατάσσονται πάνω από το μέσο όρο του ΟΟΣΑ (489).

Β. Η χρήση των διδακτικών βιβλίων στα Μαθηματικά στην Ελλάδα

Ερχόμενοι στην ελληνική πραγματικότητα σε έρευνα που έλαβε χώρα (Χασάπης, Βλάχου, 2008), η ανάλυση των παρατηρήσεων ανέδειξε τον πρωταρχικό ρόλο που αποδίδουν οι δάσκαλοι της έρευνας στο διδακτικό βιβλίο για την οργάνωση και τη διεξαγωγή της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Για τους περισσότερους δασκάλους του δείγματος το βιβλίο αποτελεί την κύρια πηγή που θα τους παράσχει το υλικό και τις δραστηριότητες που θα χρησιμοποιήσουν στην τάξη για την υλοποίηση των στόχων του αναλυτικού προγράμματος (Χασάπης, Βλάχου, 2008).
Το διδακτικό υλικό με ερωτήσεις επίλυσης προβλημάτων σχετικά με καταστάσεις ή φαινόμενα της καθημερινής ζωής μπορεί να αναπτύξει τη δημιουργικότητα των μαθητών, καθώς και τα μη συνηθισμένα προβλήματα που δεν είναι καλά δομημένα και αναφέρονται σε δραστηριότητες που δυνητικά αναπτύσσουν τη δημιουργικότητα του μαθητή (Novita & Putra, 2016).

Θα εξετάσουμε ενδεικτικά κατά πόσο τα σχολικά εγχειρίδια της Ε’ και Στ’ Δημοτικού προάγουν τη μαθηματική δημιουργικότητα. Ο λόγος που αναφερόμαστε σε αυτές τις τάξεις είναι γιατί παρόλο που τα παιδιά είναι εκ φύσεως δημιουργικά, η μαθηματική δημιουργικότητα προϋποθέτει μαθηματικές γνώσεις που είναι περισσότερες στις μεγαλύτερες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου. Άλλωστε σύμφωνα με τη γνωστική θεωρία του Piaget τα παιδιά στην ηλικία των 12 ετών αρχίζουν να έχουν αφηρημένη σκέψη. Για να αξιολογήσουμε τα δημιουργικά μαθηματικά προβλήματα, πρέπει να εξετάσουμε εάν αυτά δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να δώσουν πολλές λύσεις (ευχέρεια), εάν ευνοούν αφενός μεν τις διαφορετικές μαθηματικές ιδέες (ευελιξία) και αφετέρου δε την καινοτομία των λύσεων (πρωτοτυπία).

Γ. Σχολικό εγχειρίδιο Ε’ Δημοτικού (βιβλίο και τετράδιο εργασιών)

1. **(ΠΗΓΗ: Βιβλίο Μαθηματικών Α’ Τεύχος σελ.36)**

Ο Αντρέι, για να φτιάξει το γλυκό που του αρέσει, χρειάζεται ακριβώς ένα λίτρο νερό. Βρήκε στην κουζίνα ένα δοχείο των 5 λίτρων κι ένα δοχείο των 3 λίτρων. Πώς μπορεί να μετρήσει με αυτά τα δοχεία το νερό που χρειάζεται;

2. **(ΠΗΓΗ: Βιβλίο Μαθηματικών Β’ Τεύχος σελ.26)**

Η τιμή ενός προϊόντος αυξήθηκε κατά 5%. Μικρό χρονικό διάστημα μετά η τιμή του προϊόντος αυξήθηκε πάλι 5%. Τρεις μήνες μετά αυξήθηκε τρίτη φορά κατά 5%. Η συνολική αύξηση ήταν 15%; Δικαιολογούμε την απάντησή μας.

3. **(ΠΗΓΗ: Τετράδιο Εργασιών Μαθηματικών Α’ Τεύχος σελ.12)**

Ο Νίκος έχει στη συλλογή των παιχνιδιών του αυτοκίνητα και ποδήλατα, που είναι συνολικά 24 κι έχουν όλα μαζί 62 ρόδες. Να βρεις πόσα αυτοκίνητα και πόσα ποδήλατα έχει.

4. **(ΠΗΓΗ: Τετράδιο Εργασιών Μαθηματικών Β’ Τεύχος σελ.30)**

Να δημιουργήσεις με την ομάδα σου τα δικά σας αριθμητικά μοτίβα. Να τα παρουσιάσετε σε άλλες ομάδες, ώστε να ανακαλύψουν τον κανόνα τους.

....

5. **(ΠΗΓΗ: Τετράδιο Εργασιών Μαθηματικών Β’ Τεύχος σελ.32)**

Να συμπληρώσεις τα παρακάτω μαγικά τετράγωνα, έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών σε κάθε γραμμή, στήλη και διαγώνιο να είναι το ίδιο.

1		
	0,7	
0,8		0,4

400		
800	100	600

Δ. Σχολικό εγχειρίδιο Στ’ Δημοτικού (βιβλίο και τετράδιο εργασιών)

1. **(ΠΗΓΗ: Βιβλίο Μαθηματικών σελ.58)**

Πρόβλημα

Να γράψετε με την ομάδα σου ένα πρόβλημα χρησιμοποιώντας τα κλάσματα $\frac{3}{4}$ και $\frac{1}{5}$ και να το λύσετε.

....

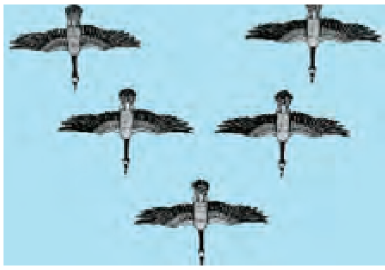
2. **(ΠΗΓΗ: Βιβλίο Μαθηματικών σελ.106)**

2ο Πρόβλημα “Οι εκπτώσεις”

Η Γεωργία έχει αναλάβει την έρευνα αγοράς για να αγοράσει 25 κρεμαστά με ασημένιες μικρές πλακέτες για αναμνηστικά για την Στ΄ τάξη.
Βρήκε την ίδια πλακέτα σε δύο καταστήματα. Η αρχική τιμή της ήταν και στα δύο 10 €. Το πρώτο κατάστημα είχε βάλει έκπτωση αρχικά 25% και τώρα 10% στην τιμή της έκπτωσης, ενώ το δεύτερο κατάστημα είχε αρχικά έκπτωση 10% και τώρα ακόμη 25%. Υπάρχει διαφορά στην τιμή;

3. **(ΠΗΓΗ: Βιβλίο Μαθηματικών σελ.131)**

Κάποια είδη πουλιών, όταν πετούν, σχηματίζουν σμήνη σε διάταξη V. Το πιο δυνατό πουλί πετά μπροστά μόνο του. Τα υπόλοιπα ακολουθούν σε ζευγάρια.
Στο παρακάτω σχήμα κάθε κύκλος αναπαριστά ένα πουλί του σμήνους. Παρατήρησε ένα μικρό σμήνος πουλιών και ένα μεγαλύτερο.



- Να περιγράψεις πώς αλλάζει το σμήνος των πουλιών, καθώς μεγαλώνει: ....
....
- Πόσα ζευγάρια πουλιών υπάρχουν στα σμήνη του σχήματος (εκτός από το πρώτο πουλί); 1ο: .... 2ο: ....
- Να σχεδιάσεις δίπλα τους το αμέσως μεγαλύτερο σμήνος.
- Αν ορίσουμε το μέγεθος του σμήνους, σύμφωνα με τον αριθμό των ζευγαριών, να συμπληρώσεις τον διπλανό πίνακα.
- Διακρίνεις κάποιο μοτίβο στον πίνακα; ....
- Πόσα πουλιά έχει το σμήνος 10 (με 10 ζευγάρια); ....
- Πώς το υπολόγισες; ....

Μέγεθος σμήνους	Αριθμός πουλιών
1	3
2	5
3	
4	
5	

4. **(ΠΗΓΗ: Βιβλίο Μαθηματικών σελ.134)**

3ο Πρόβλημα

Φτιάξε με την ομάδα σου ένα πρόβλημα σχετικό με την αγορά ενός αντικειμένου με δόσεις το οποίο θα αναφέρεται στο επιτόκιο, στον τόκο, στην αρχική και την τελική τιμή.

5. **(ΠΗΓΗ: Βιβλίο Μαθηματικών σελ.134)**

4ο Πρόβλημα

Δημιούργησε μια αριθμητική ακολουθία που να βασίζεται σε κάποιο μοτίβο. Γράψε όσους όρους της νομίζεις ότι χρειάζεται για να φαίνεται το μοτίβο, αλλά μην ανακοινώσεις το μοτίβο. Αντάλλαξε με τον διπλανό ή τη διπλανή σου και προσπαθήστε να αναγνωρίσετε ο ένας το μοτίβο του άλλου και να συνεχίσετε την ακολουθία του.

Λύση

Απάντηση: *Το μοτίβο είναι:* ....

6. **(ΠΗΓΗ: Τετράδιο Εργασιών Μαθηματικών Α’ Τεύχος σελ.33)**

Πρόβλημα 1ο

Ένας δάσκαλος, όταν ρωτήθηκε πόσων χρονών ήταν, απάντησε: «Η ηλικία μου σε χρόνια είναι πρώτος αριθμός αλλά, αν αντιστραφούν τα ψηφία, διαιρείται με το 5 και ελπίζω να ζήσω τόσα χρόνια!». Πόσων ετών είναι ο δάσκαλος;

Λύση

Απάντηση: ....

7. **(ΠΗΓΗ: Τετράδιο Εργασιών Μαθηματικών Α’ Τεύχος σελ.34)**

Πρόβλημα 3ο

Χρησιμοποιώντας τους αριθμούς 1 έως 9, μία φορά τον καθένα, τοποθετήστε αυτούς που λείπουν στα κελιά του τετραγώνου που ακολουθεί, έτσι ώστε οι αριθμοί, όταν προσθέτονται σε κάθε σειρά ή σε κάθε στήλη, να έχουν άθροισμα έναν πρώτο αριθμό. (π.χ. στην πρώτη σειρά το άθροισμα να είναι ίσο με 13). Πόσες διαφορετικές λύσεις μπορείτε να βρείτε;

2			13
	4	9	
5			

Από την εξέταση των παραπάνω σχολικών εγχειριδίων, μου δημιουργήθηκε η πεποίθηση ότι τα περισσότερα μαθηματικά προβλήματα είναι προβλήματα κατανόησης και εφαρμογής της νέας γνώσης και ελάχιστα είναι τα δημιουργικά. Αυτό προφανώς συμβαίνει επειδή οι μαθητές καλούνται να διαχειριστούν πολλές νέες μαθηματικές έννοιες, με συνέπεια αυτοί να εγκλωβίζονται σε συγκεκριμένα πλαίσια. Επιπροσθέτως, στο ΔΕΠΣΣ των Μαθηματικών υπάρχουν προτεινόμενα μαθηματικά προβλήματα στην ιστοσελίδα του φωτόδεντρου, τα οποία είναι κυρίως εφαρμογής αλλά δημιουργούν ενδιαφέρον στους μαθητές λόγω του ηλεκτρονικού περιβάλλοντος και της χρήσης Ηλεκτρονικού Υπολογιστή.

5.5 Ο πολυδιάστατος ρόλος του εκπαιδευτικού στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας

Η δημιουργικότητα και η καινοτομία γίνεται ολοένα και πιο σημαντική για την ανάπτυξη της κοινωνίας της γνώσης του 21ου αιώνα γιατί συμβάλλουν στην οικονομική ευημερία αλλά και στην κοινωνική και ατομική ευημερία (Mhlolo, 2016). Η δημιουργικότητα θεωρείται ως η πηγή της καινοτομίας και η καινοτομία με τη σειρά της ως εφαρμογή της δημιουργικότητας (Mhlolo, 2016).
Οι Martin και Schwartz (2014) πρόσφεραν μια γνωστική ανάλυση του πώς οι οπτικές αναπαραστάσεις μπορεί να δημιουργήσουν ευκαιρίες για δημιουργικότητα, λαμβάνοντας παράλληλα υπόψη τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να το εμποδίσουν. Ο Andrews (2009) έδωσε μια διεστιακή άποψη (δάσκαλος και μαθητής) όταν υποστήριξε ότι οι παραστάσεις των δασκάλων που συνοδεύονται από άρθρωση, αιτιολόγηση και επιχειρηματολογία από τους δασκάλους, θα μπορούσε να οδηγήσει τους μαθητές στην ανάπτυξη των δημιουργικών τους δυνατοτήτων (Mhlolo, 2016). Οι Tabach και Friedlander (2017) διερευνούν τρόπους διδασκαλίας και εκμάθησης της απλοποίησης συμβολικών εκφράσεων μέσω της χρήσης μη αλγοριθμικών μαθηματικών (Singer, et al., 2017).
Ένα υποστηρικτικό περιβάλλον (κοινωνικό, οικογενειακό, σχολικό) αποτελεί το κατάλληλο περιβάλλον για την ανάπτυξη της δημιουργικής σκέψης (Torrance, 1993). Στη συνέχεια αναφέρονται κάποιοι από τους ρόλους που καλείται να διαδραματίσει ένας δάσκαλος, αναδεικνύοντας την πολυπλοκότητα του έργου του.

Α. Ο δάσκαλος ως διευκολυντής

Ο ρόλος του δασκάλου ως διευκολυντή, κατά τον Sawyer (2004) απαιτεί υψηλό βαθμό γνώσης του παιδαγωγικού περιεχομένου που είναι απαραίτητη για την ανταπόκριση σε απροσδόκητα ερωτήματα των μαθητών καθώς και διοικητικές δεξιότητες που είναι απαραίτητες για τη διαχείριση της ομάδας.

Β. Ο δάσκαλος ως εκπρόσωπος της μαθηματικής κοινότητας

Ο δάσκαλος είναι ο εκπρόσωπος της μαθηματικής κοινότητας και ένας από τους ρόλους του είναι η καθιέρωση κοινωνικομαθηματικών κανόνων που θα διαφοροποιούν μεταξύ τους τις λύσεις που είναι ίδιες και αυτές που είναι διαφορετικές (Yackel & Cobb, 1996).
Ο δάσκαλος επιλέγει επίσης ποια προβλήματα θα θέσει στην τάξη. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να είναι σε θέση να σχεδιάζουν και να εφαρμόζουν περιβάλλοντα μάθησης που να υποστηρίζουν την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας (Srhiki, 2009).

Γ. Ο δάσκαλος ως αναστοχαστής

Ο δάσκαλος έχει επίσης το ρόλο να συνδέει τις νέες έννοιες με τις προηγούμενες γνώσεις. Αυτό είναι παρόμοιο με την αναστοχαστική αναπλαισίωση, μια από τις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις που αναφέρεται από τους Hargadon και Bechy (2006) όταν συζητούν τη συλλογική δημιουργικότητα μέσα σε ένα εργασιακό περιβάλλον. Η συλλογική μνήμη βοηθά τους συμμετέχοντες να αναπλαισιώνουν προηγούμενες εμπειρίες με τρόπους που μπορεί να οδηγήσουν σε νέες ιδέες (Hargadon et al.,2006).

Δ. Ο δάσκαλος ως ηγέτης

Ο δάσκαλος έχει επίσης το ρόλο του αρχηγού της ομάδας. Μελέτες έχουν δείξει ότι το στυλ ηγεσίας επηρεάζει τη δημιουργικότητα της ομάδας (Jung, 2001), που συνεπάγεται πως αυτή προάγεται σε ένα ασφαλές περιβάλλον, όπου οι μαθητές μπορούν να αμφισβητήσουν τις πεποιθήσεις του δασκάλου χωρίς φόβο για επιπτώσεις.

5.6 Μοντέλα δημιουργικότητας στο σχολείο

Οι Zazkis & Holton (2009) αναφέρουν την αναγκαιότητα δημιουργίας ευκαιριών για τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς ώστε να αναπτύξουν δημιουργικότητα στο σχεδιασμό εργασιών.
Οι υπάρχοντες ορισμοί της δημιουργικότητας είναι ασαφείς ή αόριστοι (Sriraman 2005) και υποδηλώνουν την πολυπλοκότητα της κατασκευής της δημιουργικότητας, ενώ θα μπορούσαν να κατηγοριοποιηθούν σε τέσσερις τύπους ανάλογα με το αντικείμενο της εστίασής τους (Leikin και Pitta-Pantazi 2013, Runco 2004), που αναφέρεται είτε στο δημιουργικό άτομο, στις δημιουργικές διαδικασίες, στο δημιουργικό προϊόν ή στο δημιουργικό περιβάλλον. Η διαδικασία περιλαμβάνει την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία (Guilford 1975, Leikin et al. 2009, Torrance 1974). Οι Κάττου et al. (2013) διαπίστωσαν ότι η μαθηματική δημιουργικότητα είναι ένα υποσυστατικό της μαθηματικής ικανότητας.

Α. Η επίδραση της κουλτούρας στη διαμόρφωση της δημιουργικότητας

Ο Sriraman (2004) τονίζει ότι τα είδη των ερωτήσεων που τίθενται, καθορίζονται σε μεγάλο βαθμό από την κουλτούρα στην οποία η ο μαθηματικός ζει και εργάζεται (Vygotsky, 2004). Οι Runco και Cayirdag (2012), ωστόσο, απορρίπτουν μια τέτοια επίδραση της κοινωνικής πραγματικότητας στη διαμόρφωση της δημιουργικότητας και θεωρούν ότι οι κοινωνικοί παράγοντες και η κουλτούρα είναι δευτερεύουσες και όχι αιτιώδεις παράγοντες (Krummheuer, Leuzinger-Bohleber, Müller-Kirchof, Münz, Vogel, 2013).

Β. Η αξιοποίηση του δημιουργικού δυναμικού των μαθητών

Προκειμένου να ενθαρρυνθεί η ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας, οι δάσκαλοι πρέπει να είναι προετοιμασμένοι να αναγνωρίσουν, να καλλιεργήσουν και να αξιοποιήσουν το δημιουργικό δυναμικό όλων των μαθητών (Beghetto et al., 2009). Για το σκοπό αυτό, οι δάσκαλοι θα πρέπει να εμπλέκουν τους μαθητές στη δημιουργική εξερεύνηση, χωρίς να τους περιορίζουν σε εφαρμογές βασισμένες σε κανόνες (Mann, 2006) και να ενθαρρύνουν τους μαθητές τους να αναλάβουν πνευματικούς κινδύνους για να μοιράζονται τις εξαιρετικές μαθηματικές τους γνώσεις (Sriraman, 2009).
Θα πρέπει να παρέχονται στους μαθητές προβλήματα των οποίων οι λύσεις δεν είναι άμεσα γνωστές, στα οποία πρέπει επομένως να χρησιμοποιηθούν κάτι περισσότερο από απλές αλγοριθμικές διαδικασίες (Haylock, 1987) και να τους παρέχονται ευκαιρίες να σχεδιάσουν και να απαντήσουν σε δικά τους προβλήματα (Mann, 2006). Υποστηρίζεται ότι μέσω της χρήσης τέτοιων εργασιών και δραστηριοτήτων, οι δάσκαλοι μπορούν να αυξήσουν την ικανότητα των μαθητών τους σε σχέση με τις διαστάσεις της δημιουργικότητας (Presmeg, 1981, Torrance, 1988).
Σύμφωνα με το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών [NCTM] (1989), θα πρέπει να δοθούν ευκαιρίες στους μαθητές να λύσουν μαθηματικά προβλήματα χρησιμοποιώντας πολλαπλές στρατηγικές επίλυσης, ώστε να διατυπώσουν και να δημιουργήσουν τα δικά τους προβλήματα από δεδομένες καταστάσεις.
Συνεπώς, μέσω της υποστήριξης και της καθοδήγησης των δασκάλων, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να ενσωματώσουν τα δικά τους θραύσματα γνώσης για να σχηματίσουν μια συνεκτική άποψη της κατάστασης (NCTM, 2000).
Συνοψίζοντας, δεδομένης της περίπλοκης φύσης της δημιουργικότητας και της σημασίας της, η ικανότητα των δασκάλων να ξεκινούν μαθησιακά περιβάλλοντα που καλλιεργούν τη μαθηματική δημιουργικότητα απαιτεί σκόπιμη υποστήριξη και καθοδήγηση (Wilson & Cooney, 2002).

Γ. Το Πρόγραμμα Σπουδών και η δημιουργία ασφαλούς περιβάλλοντος διδασκαλίας

Όπως είπε ο Gnedenko (1991) στους Freiman και Sriraman (2011), όλοι έχουν έμφυτη δημιουργικότητα, που φαίνεται να περιορίζεται από το εκπαιδευτικό σύστημα.
Οι Wheeler et al. (2002) πιστεύουν ότι οι δάσκαλοι είναι το κλειδί για την ενθάρρυνση και την ανάπτυξη της δημιουργικής σκέψης στο σχολείο. Ένας δάσκαλος μπορεί να είναι σε θέση να ενθαρρύνει την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας, εάν είναι σε θέση να αναγνωρίσει τη δημιουργική συμπεριφορά και γνωρίζει τον τρόπο να την καλλιεργήσει (Beghetto και Kaufman 2009). Ως εκ τούτου, οι δάσκαλοι πρέπει να γνωρίζουν με ποιους τρόπους η δημιουργικότητα σχετίζεται με το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών (Boden 2001) και να αισθάνονται ασφαλείς (μαθηματικά και παιδαγωγικά) να εφαρμόσουν αντίστοιχες δραστηριότητες στην τάξη (Leikin 2009a).
Επειδή η δημιουργικότητα στα μαθηματικά μπορεί να βελτιωθεί μέσω των κατάλληλων διδακτικών μεθόδων (Hershkovitz, Peled, & Littler, 2009), ο ρόλος του δασκάλου είναι σημαντικός κατά τη διάρκεια της επιλογής δραστηριοτήτων, στην υλοποίησή τους στην τάξη και στην οργάνωση της εργασίας των μαθητών (Freiman 2009). Ειδικότερα, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να εμπλέκουν τους μαθητές σε ενδιαφέρουσες, δημιουργικές έρευνες που κεντρίζουν το ενδιαφέρον τους και την περιέργεια χωρίς να τους περιορίζει σε τυπικές εργασίες με τυπικές λύσεις, όπου απλώς εφαρμόζουν κανόνες και αλγόριθμους (Mann 2006). Ταυτόχρονα οι δάσκαλοι θα πρέπει να δημιουργήσουν ένα συναισθηματικά ασφαλές κλίμα, όπου τα λάθη δεν επικρίνονται (Goldin 2009, Koichu και Orey 2010, Sheffield 2009).

Τα περιβάλλοντα διδασκαλίας θα πρέπει να επιτρέπουν στους μαθητές να έχουν την ελευθερία να εκφράσουν τις απόψεις τους και να ανταλλάξουν ιδέες με τους συνομηλίκους τους (Sriraman 2009). Επιπλέον, οι δάσκαλοι πρέπει να ενθαρρύνουν όλους τους μαθητές να σκεφτούν (Freiman 2009), να πάρουν ρίσκα για να βρουν λύσεις που δε γίνονται άμεσα αντιληπτές (Sriraman 2009) και να αναζητούν διαφορετικές λύσεις (Presmeg 2003).

Δ. Η σημασία της διερευνητικής διδασκαλίας

Στη μαθηματική εκπαίδευση φαίνεται να υπάρχει κάποια συναίνεση, που προσανατολίζεται στη διερευνητική διδασκαλία, στη διερευνητική μάθηση και γενικά στα περιβάλλοντα επίλυσης προβλημάτων και ανάπτυξης της δημιουργικότητας (Silver 1997). Οι ερευνητές διερεύνησαν τον αντίκτυπο μιας ποικιλίας δραστηριοτήτων και διαπίστωσαν ότι οι ακόλουθοι τύποι δραστηριότητας έχουν θετικό αντίκτυπο στην ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας: μαθηματικές έρευνες (Leikin 2014), προσεγγίσεις ανοιχτού τύπου (Kwon et al. 2006) και προβλήματα μοντελοποίησης (Chamberlin and Moon 2005, Coxbill, Chamberlin, & Weatherford 2013, Wessels 2014). Επιπλέον, σενάρια καθημερινής ζωής θεωρούνται μεγάλες ευκαιρίες για αποκαλυπτική δημιουργική ικανότητα (Palsdottir και Sriraman 2017).

Ε. Τα MST και η τοποθέτηση προβλημάτων

Οι Leikin και Lev (2007) υποστήριξαν σθεναρά και απέδειξαν με πειστικότητα ότι οι πολλαπλές εργασίες επίλυσης προσφέρουν άφθονες ευκαιρίες στα άτομα να προσεγγίσουν δημιουργικά προϊόντα.
Πολλοί ερευνητές θεωρούν ότι η τοποθέτηση προβλημάτων είναι ένα ισχυρό εργαλείο αναγνώρισης και αξιολόγησης της μαθηματικής δημιουργικότητας (Kontorovich, Koichu, Leikin, & Berman, 2011). Οι Voica και Singer (2013) βασίστηκαν σε αυτήν την ιδέα και πρότειναν έναν άλλο τύπο εργασίας, υποστηρίζοντας ότι η τροποποίηση του προβλήματος είναι μια πρόσθετη μορφή τοποθέτησης προβλήματος, που προσφέρει στα άτομα την ευκαιρία να δημιουργήσουν συνεκτικά, δημιουργικά προβλήματα.
Ο Haylock (1997) πρότεινε επίσης ότι ο επαναπροσδιορισμός μπορεί να είναι ένας άλλος τύπος εργασίας που προσφέρει τη δυνατότητα αναγνώρισης της μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών. Η τοποθέτηση προβλημάτων, όπως οι Cai et al. (2015) υποστηρίζουν, είναι μια κρίσιμη πτυχή στο έργο των εκπαιδευτικών, τόσο στο να θέσουν προβλήματα στους μαθητές τους, όσο και στο να τους βοηθήσουν να θέτουν οι ίδιοι ενδιαφέροντα προβλήματα στην τάξη των μαθηματικών.

Στ. Η στρατηγική what-if-not

Η στρατηγική what-if-not, ως εργαλείο που υποστηρίζει τους μαθητές στην τοποθέτηση προβλημάτων, προτάθηκε από τους Brown και Walter (1990) και βασίζεται στην υπόθεση ότι η τροποποίηση των συνιστωσών ενός δεδομένου προβλήματος μπορεί να αποφέρει νέα και ενδιαφέροντα προβλήματα. Για την εφαρμογή αυτής της στρατηγικής, οι μαθητές ενθαρρύνονται να διασχίσουν τρία επίπεδα, ξεκινώντας με την επανεξέταση του δεδομένου προβλήματος και ειδικότερα στο πρώτο επίπεδο, οι μαθητές καλούνται να παράγουν μια λίστα με τα χαρακτηριστικά του προβλήματος, στο δεύτερο επίπεδο, για κάθε χαρακτηριστικό, προτείνουν εναλλακτικές λύσεις στο δεδομένο πρόβλημα και στο τρίτο επίπεδο διατυπώνουν νέα προβλήματα και ερωτήσεις, εμπνευσμένες από τις εναλλακτικές (Daher et al., 2018).
Ο Shriki (2013) υποστηρίζει ότι η στρατηγική what-if-not, ως εργαλείο για την τοποθέτηση προβλημάτων, μπορεί να αποφέρει νέα και ενθαρρυντικά προβλήματα που τελικά μπορεί να καταλήξουν σε ενδιαφέροντες διερευνήσεις.

Ζ. Η σημασία της ψηφιακής τεχνολογίας

Εξετάζοντας τη χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας για την τοποθέτηση μαθηματικών προβλημάτων, οι Abramovich και Cho (2015) διαπίστωσαν ότι η χρήση του λογισμικού δημιουργίας γραφημάτων ως μέσο για την τοποθέτηση προβλημάτων, ευνοεί την ανάπτυξη περίπλοκων ερωτήσεων σχετικά με αλγεβρικές εξισώσεις με παραμέτρους.

Υπάρχουν διάφοροι λόγοι που εξηγούν τις χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά, όπως οι ανεπαρκείς μέθοδοι και το χαμηλό επίπεδο δυνατοτήτων, που μπορεί να αποτελέσουν τροχοπέδη στην ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας. Οι δάσκαλοι πρέπει να απευθύνονται σε όλους τους μαθητές παρατηρώντας τις διαφορετικές ανάγκες τους. Παρόλα αυτά, οι εξαιρετικοί μαθητές απαιτούν και ένα απαιτητικό περιβάλλον μάθησης και υποστήριξη για να ξεπεραστούν τα εμπόδια στις μαθησιακές διαδικασίες (Nolte, 2018).

5.7 Σύγχρονες προκλήσεις στο έργο του εκπαιδευτικού

Ο Krutetskii (1976) χαρακτήρισε τη μαθηματική δημιουργικότητα ως ανεξαρτησία και πρωτοτυπία. Ο Sriraman (2005) περιγράφει τη μαθηματική δημιουργικότητα «ως προσανατολισμό προς μια μαθηματική δραστηριότητα που μπορεί να καλλιεργείται ευρέως στο γενικό σχολικό πληθυσμό» (σελ. 75). Ο Ervynck (1991) ισχυρίζεται ότι η μαθηματική κατανόηση, η διαίσθηση και η ενόραση αποτελούν τη βάση της μαθηματικής δημιουργικότητας. Η Leikin (2009) αναφέρει πως τα δημιουργικά προϊόντα, βοηθούν στην κατανόηση των μαθηματικών σχέσεων επειδή αναφέρονται σε προηγούμενα αποτελέσματα και συχνά ανταποκρίνονται στις τρέχουσες ανάγκες και είναι πρωτότυπα γιατί μπορεί να οδηγήσουν σε απρόβλεπτα αποτελέσματα. Οι μαθητές αξιολογούνται με βάση τις προηγούμενες εμπειρίες τους και τις επιδόσεις τους σε σχέση με άλλους μαθητές που έχουν παρόμοια εκπαιδευτική ιστορία (Leikin, 2009, σελ. 130–131).

Α. Η πολυπολιτισμικότητα

Υπάρχουν πολλά προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι δάσκαλοι στις μέρες μας, καθώς δουλεύουν με μαθητές χωρίς κίνητρα και σε κοινωνικά ετερογενείς πολιτισμούς, καθιστώντας το κρίσιμο, ώστε ένας δάσκαλος να μπορεί να σχεδιάζει διδακτικές ενότητες, που επιτρέπουν στους μαθητές να δουν την πραγματικότητα από διαφορετικές οπτικές γωνίες και επίσης να αναπτύξουν μεγαλύτερη αυτογνωσία (Moraová et al., 2018). Αν δοθεί το πολιτιστικό υπόβαθρο και το περιβάλλον, οι δάσκαλοι έχουν φυσικό κίνητρο να χρησιμοποιήσουν τις δημιουργικές τους δυνατότητες για να αναζητήσουν τα μαθηματικά που μπορούν να ανακαλυφθούν και να διδαχθούν σε αυτό το συγκεκριμένο περιβάλλον (Moraová et al., 2018).

Β. Η συνεκπαίδευση

Η παγκοσμιοποίηση συνεπάγεται πως ένας δάσκαλος αναμένεται να διδάξει μια ανομοιογενή τάξη με μαθητές με διαφορετικά κοινωνικοπολιτισμικά και γλωσσικά υπόβαθρα (Moraová et al., 2018), που έχει ως αποτέλεσμα την ανάγκη εισαγωγής πρακτικών στις τάξεις των μαθηματικών, που θα επιτρέπουν σε μαθητές από διάφορα πολιτιστικά υπόβαθρα να είναι επιτυχημένοι, ακολουθώντας τις οδηγίες και το πρόγραμμα σπουδών. Αυτό ανταποκρίνεται στις αρχές της συνεκπαίδευσης, που σημαίνει ότι όλοι οι μαθητές είναι ευπρόσδεκτοι να παρακολουθήσουν τα σχολεία και υποστηρίζονται για να μάθουν, να συνεισφέρουν και να συμμετέχουν σε όλες τις πτυχές του σχολείου, σε μια εκπαίδευση χωρίς αποκλεισμούς που θα προάγει μια κοινωνία που σέβεται τη διαφορετικότητα (Moraová, Novotná, Favilli, 2018).

Η μαθηματική δημιουργικότητα θεωρείται σημαντικό συστατικό της εκπαίδευσης (Van Harpen και Sriraman 2013) και μια βασική δεξιότητα που οι δάσκαλοι πρέπει να ενισχύσουν σε όλους τους μαθητές (Kattou et al. 2013, Mann 2005).

Β. ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

6. Μεθοδολογία της έρευνας

Σκοπός της έρευνας είναι η μέτρηση της μαθηματικής δημιουργικότητας των υποψηφίων εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Στην έρευνα συμμετείχαν εκατόν-πέντε (105) υποψήφιοι εκπαιδευτικοί δημοτικών σχολείων που φοιτούν ή φοίτησαν στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Ιωαννίνων και ειδικότερα ενενήντα-τρεις (93) του Γ΄ έτους, εννέα (9) του Δ' έτους και τρεις (3) απόφοιτοι. Στους ανωτέρω δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο με τέσσερα (4) προβλήματα ανοικτού τύπου, το οποίο συμπληρώθηκε στα πλαίσια του μαθήματος της Διδακτικής των Μαθηματικών για τους 3ετείς φοιτητές και στα πλαίσια του μαθήματος της Στατιστικής για τους 4ετείς φοιτητές, μάθημα το οποίο είναι επιλογής. Στην αρχή αποτελούνταν από πέντε έργα, όπως εμφαίνεται και στο παράρτημα, αλλά για οικονομία χρόνου, το 5ο έργο αφαιρέθηκε.
Ένας αναγνωρισμένος τρόπος για την εκμαίευση της μαθηματικής δημιουργικότητας μεταξύ των μαθητών είναι η εμπλοκή τους σε εργασίες ανοιχτού τύπου (Haylock, 1997, Kwon, Park, & Park, 2006, Silver, 1997). Η διαφορά μεταξύ κλειστών και ανοιχτών προβλημάτων κατά τους Sullivan, Warren, και White (2000) έγκειται στο ότι το κλειστό αντιστοιχεί σε μία αποδεκτή απάντηση, προσέγγιση ή συλλογιστική, ενώ το ανοικτό αναφέρεται στην ύπαρξη περισσότερων του ενός πιθανών μονοπατιών, απαντήσεων, προσεγγίσεων. Με αυτόν τον τρόπο, η εμπλοκή των μαθητών με εργασίες ανοιχτού τύπου παρέχει μια διαδρομή για αυτοσχεδιασμό (Beghetto & Kaufman, 2011).

7. Εργαλείο μέτρησης

Η παρούσα μελέτη προσφέρει ένα εκπαιδευτικό εργαλείο για την αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας. Το εργαλείο βασίζεται στον ορισμό της δημιουργικότητας του Torrance (1974), σύμφωνα με τον οποίο η δημιουργικότητα βασίζεται σε τέσσερα αμοιβαία σχετιζόμενα στοιχεία: την ευχέρεια, την ευελιξία, την πρωτοτυπία και την επεξεργασία. Η ευχέρεια σχετίζεται με την ροή των ιδεών, η ευελιξία με την ικανότητα εναλλαγής μεταξύ διαφορετικών ιδεών, η πρωτοτυπία συνδέεται με την καινοτομία των ιδεών του ατόμου και η επεξεργασία σχετίζεται με την ικανότητα του ατόμου να περιγράφει, να φωτίζει και να γενικεύει αυτές τις ιδέες (Torrance, 1974). Μετά τον Torrance (1974), ο Silver (1997) ισχυρίστηκε ότι για να αναπτυχθεί η δημιουργικότητα μέσω της επίλυσης προβλημάτων, είναι απαραίτητη η προώθηση των τριών συνιστωσών της δημιουργικότητας. Η ευχέρεια προωθείται με την προβολή πολλαπλών ιδεών για τη λύση ενός προβλήματος, η ευελιξία αυξάνεται όταν πέραν της μίας λύσης, το άτομο αναζητά περισσότερες πιθανές λύσεις και η πρωτοτυπία αναπτύσσεται όταν ένα άτομο καταφέρνει να δημιουργήσει μια νέα λύση επιπλέον αυτών που του ήταν γνωστές εκείνη τη στιγμή (Silver, 1997).

Το ερωτηματολόγιο αποτελείται από τέσσερα (4) έργα και ειδικότερα:

Το **1ο έργο** βρίσκεται στη μελέτη της Leikin (2009):
Προτείνετε όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ώστε να λύσετε το σύστημα εξισώσεων:
{3x+2y=10
{2x+3y=10

Task 1: Solve the system in as many ways as possible: $\begin{cases} 3x+2y=10 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$

Solutions
1. Algebraic solutions:
    1.1. Linear combination
    1.2. Substitution for x (y)
    1.3. Equalizing algebraic expressions for x (y)
2. Graphing
3. Matrices
4. Symmetry considerations

Figure 1:
MST example.

Η μαθηματική δημιουργικότητα προωθείται με τη χρήση εργασιών πολλαπλών λύσεων (MST) (Levav-Waynberg & Leikin, 2012). Σύμφωνα με την Leikin (2009) ένα MST είναι μια εργασία στην οποία απαιτείται η επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος με διαφορετικούς τρόπους.
Τα MST, σε αντίθεση με τις εργασίες ανοιχτού τύπου, μπορεί να έχουν μόνο μία σωστή τελική απάντηση, παρόλο που και οι δύο τύποι εργασιών μπορούν να επιλυθούν χρησιμοποιώντας διαφορετικές προσεγγίσεις (Levenson, E., Swisa, R., & Tabach, M., 2018). Και οι δύο τύποι εργασιών αποτελούν αποκλίνουσες εργασίες παραγωγής και έχουν τη δυνατότητα να αποσπάσουν την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία, τα τρία χαρακτηριστικά της δημιουργικότητας (Leikin, 2009, Levenson, 2013).

Το **2ο και 3 έργο** βρίσκεται στη μελέτη των Akgul & Kahveci (2016):

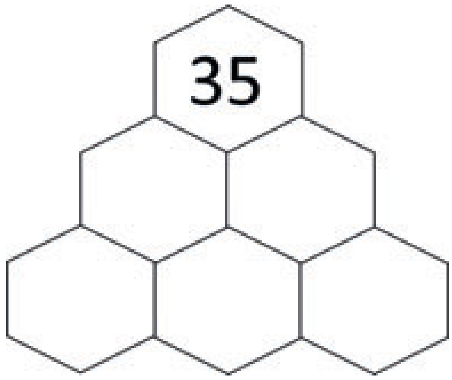
- Ο Χρήστος είναι 3 φορές μεγαλύτερος ηλικιακά από τον Δημήτρη, ενώ το άθροισμα της ηλικίας τους είναι 48. Ποιες είναι οι ηλικίες τους; Προτείνετε και άλλες τέτοιες ερωτήσεις όπως το παράδειγμα.

- Γράψτε όσα περισσότερα προβλήματα μπορείτε, η λύση των οποίων να είναι 10-5=5

Σύμφωνα με πολλούς ερευνητές, οι δημιουργικές μαθηματικές διαδικασίες εμφανίζονται ιδιαίτερα κατά την επίλυση προβλημάτων (Chamberlin and Moon 2005, Leikin and Lev 2013, Pehkonen 1997). Η δημιουργική σκέψη παράγει νέα αποτελέσματα και η επίλυση προβλημάτων περιλαμβάνει μια νέα απάντηση σε μια νέα κατάσταση, η οποία είναι ένα νέο αποτέλεσμα (Guilford, 1977). Ωστόσο, η διαδικασία επίλυσης προβλημάτων δε θεωρείται πάντα δημιουργική. Οι Kießwetter (1977) και Haylock (1984) κρίνουν μόνο ως δημιουργικές τις διαδικασίες που περιλαμβάνουν αποκλίνουσα σκέψη. Η "εύρεση προβλήματος" ή η "θέση προβλήματος" από μόνη της θεωρείται δημιουργική πράξη από ορισμένους συγγραφείς (Leung 1997, Silver 1994). Εν μέρει θεωρείται επίσης ως παρόρμηση για ιδιαίτερα δημιουργικές παραστάσεις (Sheffield, 2009).

Το **4ο έργο** βρίσκεται στη μελέτη των Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi, & Christou (2013):

Στην παρακάτω πυραμίδα αριθμού κάθε κελί περιέχει μόνο έναν αριθμό. Κάθε αριθμός μπορεί να υπολογιστεί εκτελώντας πάντα την ίδια λειτουργία με τους δύο αριθμούς που εμφανίζονται κάτω από αυτό. Συμπληρώστε τους αριθμούς που λείπουν στην πυραμίδα, διατηρώντας τον αριθμό 35 στο κορυφαίο κελί της πυραμίδας. Βρείτε όσο το δυνατόν περισσότερες λύσεις.



Η εργασία αυτή δύναται να δώσει ένα μεγάλο αριθμό λύσεων που μπορεί να δημιουργηθεί μέσω πρόσθετης κατάτμησης των αριθμών και απαιτούνται απλές ικανότητες αναγνώρισης και χρήσης μαθηματικών δομών (Kattou, et al., 2013). Η γρήγορη δημιουργία πολλών απαντήσεων σε ένα μαθηματικό ερέθισμα μπορεί να δώσει μια πρώτη ένδειξη μαθηματικής δημιουργικότητας, αλλά μπορεί επίσης να βασίζεται σε άλλες συγκλίνουσες ικανότητες (Kattou, et al., 2013). Ενώ στην ευχέρεια οι δημιουργούμενες λύσεις/προϊόντα εξετάζονται ως προς την ποσότητα, η ευελιξία αφορά κυρίως την ποικιλία των προϊόντων (Neuhaus 2001), καθώς αυτή μπορεί να εκφραστεί όταν οι προοπτικές αλλάζουν. Όπως και η «καινοτομία» ενός προϊόντος, η πρωτοτυπία μπορεί να αξιολογηθεί μόνο χρησιμοποιώντας μια ομάδα αναφοράς (Neuhaus 2001). Σχετικά με τη συνάφεια με την πραγματική ζωή ή τη χρησιμότητα, σύμφωνα με τον Sriraman (2009) τα αποτελέσματα των δημιουργικών μαθηματικών διαδικασιών δεν χρειάζεται να είναι πάντα εφαρμόσιμα και φαίνεται επαρκές για να ορίσουμε τη δημιουργικότητα ως την ικανότητα παραγωγής πρωτότυπου έργου.

Ενώ πολλές μελέτες περιέγραψαν τους τύπους εργασιών που χρησιμοποιούν κατά την αξιολόγηση της δημιουργικότητας, τους λόγους επιλογής αυτών των τύπων εργασιών και τους τρόπους με τους οποίους ορίζουν λειτουργικά την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία, λίγες μελέτες μέτρησαν πραγματικά την ενσωματωμένη εργασία για την προώθηση της δημιουργικότητας (Levenson et al., 2018). Μια αξιοσημείωτη εξαίρεση είναι η Leikin (2009), καθώς το σχήμα βαθμολόγησής για τη δημιουργικότητα που ενσωματώνεται στις εργασίες, βασίζεται σε αυτό που αποκαλεί «χώρο λύσεων εμπειρογνωμόνων», δηλαδή, το πιο πλήρες σύνολο λύσεων σε ένα γνωστό πρόβλημα σε μια συγκεκριμένη στιγμή. Έτσι, η ευελιξία που ενσωματώνεται σε μια εργασία βασίζεται στις διαφορετικές ομάδες λύσεων στον χώρο των ειδικών λύσεων και η πρωτοτυπία που ενσωματώνεται στην εργασία βασίζεται στο επίπεδο της διορατικότητας και της αντισυμβατικότητας των διαφόρων σχετικών λύσεων στην ομάδα που αναλαμβάνει το έργο (Levenson et al., 2018). Η Leikin (2009) ισχυρίστηκε ότι το πρόγραμμα βαθμολόγησής της, μπορεί να βοηθήσει στην επιλογή εργασιών με στόχο την αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας.

8. Ανάλυση δεδομένων

Από τα προρρηθέντα προκύπτει πως η μέτρηση της μαθηματικής δημιουργικότητας, συντελείται μέσω των τριών συνιστωσών της (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία).
Η ευχέρεια μπορεί να μετρηθεί ως ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών δημιουργικών ιδεών (Jung, 2001), ενώ η ευελιξία και η πρωτοτυπία μπορεί να εξαρτώνται περισσότερο από το πλαίσιο του προβλήματος. Κατά την αξιολόγηση της ευχέρειας ενός ατόμου, αρκετές έρευνες υιοθέτησαν την έννοια της ευχέρειας από το Torrance Test of Creative Thinking (Torrance, 1966). Ο Silver (1997) ισχυρίστηκε ότι η ευχέρεια μπορεί να μετρηθεί από τον αριθμό των ιδεών που δημιουργούνται ως απάντηση. Οι Leikin και Lev (2007) μέτρησαν την ευχέρεια λαμβάνοντας υπόψη τον χρόνο που δαπανάται για επιτυχείς λύσεις. Οι Κάττου et al. (2013) μέτρησαν την ευχέρεια των λύσεων ενός ατόμου σε σχέση με τις λύσεις του πιο άπταιστου μαθητή στην ομάδα, δηλαδή, η βαθμολογία ευχέρειας ενός ατόμου υπολογίζεται ως ο αριθμός των σωστών λύσεων διαιρεμένος με τον μέγιστο αριθμό σωστών λύσεων που παρέχεται από έναν μαθητή στην ομάδα (Levenson et al., 2018).
Αρκετοί ερευνητές αξιολόγησαν την ευελιξία ταξινομώντας τις λύσεις των μαθητών σε κατηγορίες και στη συνέχεια μετρώντας τον αριθμό κατηγοριών με σωστές απαντήσεις (Kim, Cho, & Ahn, 2004, Kwon et al., 2006). Ο Jung (2001) αξιολόγησε τρεις υποκατηγορίες ευελιξίας, [με βάση την εργασία του Torrance (1966)], ήτοι την προσαρμογή, την προσθήκη και την αντικατάσταση. Όταν υπάρχει μόνο μία σωστή τελική απάντηση, μπορεί να ληφθεί υπόψη η ευελιξία ως ο αριθμός των διαφορετικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται για την επίλυση ενός προβλήματος (Leikin, 2009). Η ευελιξία μπορεί επίσης να μετρηθεί ως σχετική βαθμολογία, δηλαδή είναι ο αριθμός των διαφορετικών τύπων λύσεων που παράγονται από ένα άτομο, σε σχέση με τον μέγιστο αριθμό διαφορετικών τύπων λύσεων, που παράγονται από ένα άτομο στην ομάδα (Kattou et al., 2013).
Ένας τρόπος μέτρησης της πρωτοτυπίας είναι η αξιολόγηση της μοναδικότητας ή της σπανιότητας των ιδεών που συγκρίνονται με άλλους (Kim et al., 2004). Η διευκρίνιση του τι σημαίνει να είσαι πρωτότυπος, εναπόκειται στον ερευνητή (Levenson et al., 2018). Η πρωτοτυπία μπορεί να εκδηλωθεί όταν ένας μαθητής εξετάζει πολλές λύσεις σε ένα πρόβλημα, μεθόδους ή απαντήσεις και στη συνέχεια, δημιουργεί ένα άλλο διαφορετικό (Silver, 1997). Σε αυτή την περίπτωση, η πρωτοτυπία αξιολογείται σε σχέση με τους άλλους συμμετέχοντες στην τάξη (Levenson et al., 2018). Η πρωτοτυπία μπορεί επίσης να μετρηθεί ως το επίπεδο διορατικότητας σε σχέση με τη μαθησιακή ιστορία των μαθητών (Leikin, 2009). Επιπλέον, η Leikin (2009) θεώρησε μια λύση πρωτότυπη εάν εμφανιζόταν σε λιγότερο από το 15% των λύσεων. Ορισμένοι ερευνητές βασίζουν τις λύσεις τους στην αξιολόγηση της συμβατικότητας και του επιπέδου διορατικότητας (Tabach & Friedlander, 2013). Με άλλα λόγια, αντί της σύγκρισης προϊόντων, η πρωτοτυπία βασίζεται στην απόκλιση κάθε μαθητή από αυτό που θα μπορούσε να θεωρηθεί ως η συμβατική διαδρομή (δηλαδή η δημιουργική τους διαδικασία) (Levenson et al., 2018). Οι Πίττα-Πανταζή, Σοφοκλέους και Χρήστου (2013) απέδωσαν βαθμολογία πρωτοτυπίας από 1 έως 4 με βάση τη σπανιότητα μιας απάντησης, χωρίς να προσδιορίζεται η διαφορά μεταξύ των επιπέδων.

8.1 Επίπεδα δημιουργικότητας

Βάσει των ανωτέρω, μετρήσαμε το επίπεδο δημιουργικότητας των συμμετεχόντων, αναλύοντας για κάθε έργο τις τρεις συνιστώσες της δημιουργικότητας, ως κάτωθι:

<u>Επίπεδο δημιουργικότητας στο ΕΡΓΟ 1:</u>

Α. ΕΥΧΕΡΕΙΑ

Η ευχέρεια μετρήθηκε με το πλήθος των σωστών απαντήσεων, οι οποίες ξεκινούσαν από το μηδέν (0) και ανέρχονταν σε πέντε (5). Στη συνέχεια κωδικοποιήθηκαν στο SPSS με μια κλίμακα Likert ως εξής:

Πλήθος σωστών απαντήσεων	Κλίμακα Likert- Βαθμός Ευχέρειας
0	0 Καθόλου
1	1 Πολύ λίγο
2	2 Λίγο
3	3. Πολύ
4-5	4. Πάρα πολύ

Με τη βοήθεια του SPSS, πραγματοποίησα ανάλυση δεδομένων και ειδικότερα με τις εντολές analyze-desreptive statistics-frecuencies, μου δόθηκε ο Μ.Ο. της ευχέρειας αλλά και τα ποσοστά των απαντήσεων, όπως φαίνεται παρακάτω:

Statistics

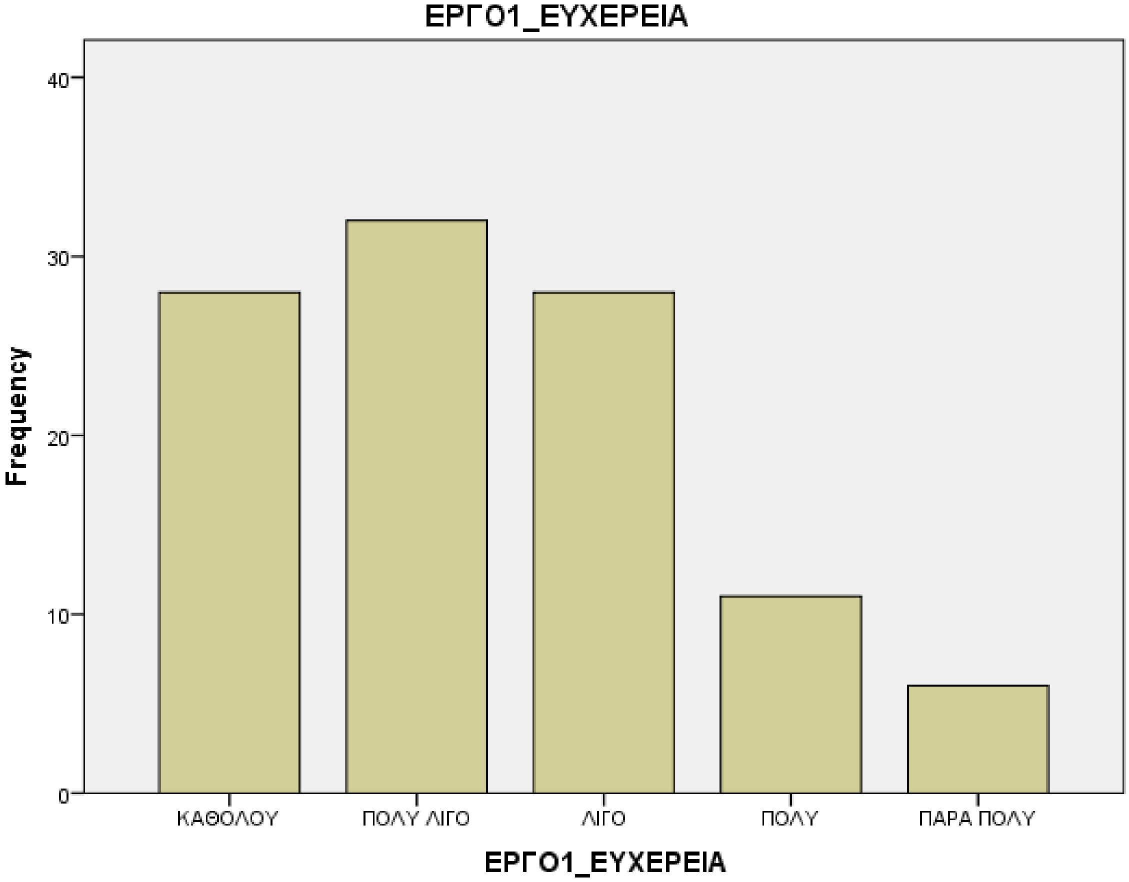
ΕΡΓΟ1_ΕΥΧΕΡΕΙΑ

N	Valid	105
	Missing	0
Mean		1,38
Minimum		0
Maximum		4

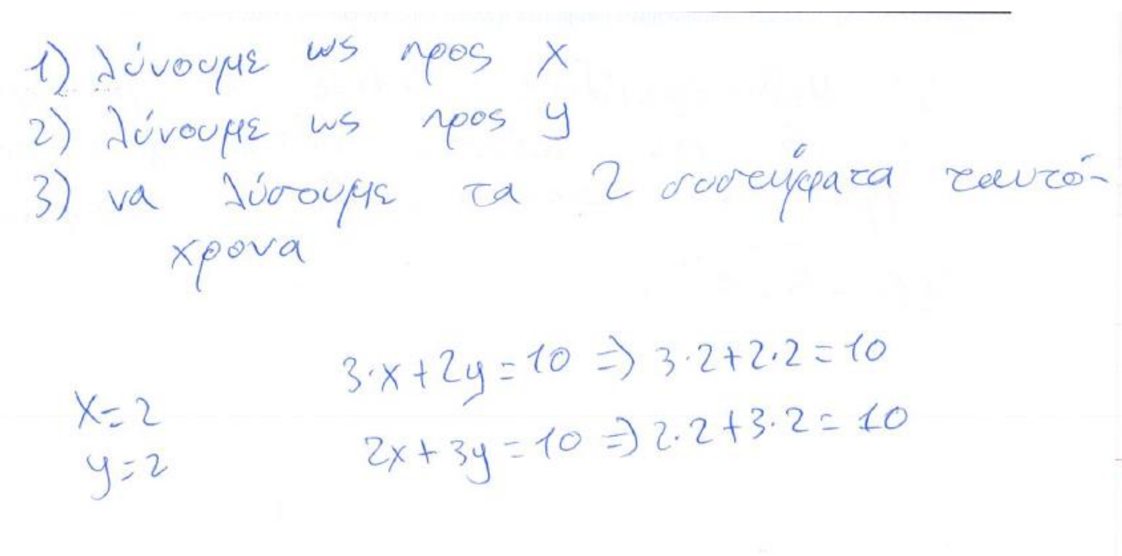
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΚΑΘΟΛΟΥ	28	26,7	26,7	26,7
	ΠΟΛΥ ΛΙΓΟ	32	30,5	30,5	57,1
	ΛΙΓΟ	28	26,7	26,7	83,8
	ΠΟΛΥ	11	10,5	10,5	94,3
	ΠΑΡΑ ΠΟΛΥ	6	5,7	5,7	100,0
	Total	105	100,0	100,0	

Παρατηρούμε πολύ χαμηλή ευχέρεια στο Έργο 1, καθώς ο μέσος όρος είναι μόνον 1,38, που συνεπάγεται πως πλησιάζει στο πολύ λίγο. Μόνον έξι (6) άτομα έδωσαν 4 έως 5 σωστές απαντήσεις

(τα οποία προέρχονταν 5 από θετική κατεύθυνση και 1 από τεχνολογική κατεύθυνση) ενώ είκοσι-οκτώ (28) άτομα δεν απάντησαν τίποτε.
Στη συνέχεια παρουσιάζεται και το ραβδόγραμμα για τα παραπάνω δεδομένα, που προέρχεται βάσει της ίδιας εντολής στο SPSS και επιλέγοντας charts.



Παρακάτω παραθέτουμε 2 απαντήσεις που χαρακτηρίζονται από ευχέρεια:
Στην 1η περίπτωση παρατηρούμε 3 απαντήσεις, οπότε η ευχέρεια που υπολογίζει το πλήθος των απαντήσεων, ανέρχεται στο 3.


1) λύνουμε ως προς x
2) λύνουμε ως προς y
3) να λύσουμε τα 2 συστήματα ταυτόχρονα

$3\cdot x+2y=10 \Rightarrow 3\cdot 2+2\cdot 2=10$

x=2
y=2

$2x+3y=10 \Rightarrow 2\cdot 2+3\cdot 2=10$

Στην 2η περίπτωση παρατηρούμε 5 σωστές απαντήσεις, οπότε η ευχέρεια, που υπολογίζει το πλήθος των απαντήσεων, ανέρχεται στην κατηγορία πάρα πολύ.

1. Προτείνετε όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ώστε να λύσετε το σύστημα εξισωσεων:
{3x+2y=10
{2x+3y=10

6) $3x+2y=10$, $y=\frac{10-3x}{2}$ $\rightarrow$ $2x+3y=10$, $2x+3\left(\frac{10-3x}{2}\right)=10$

1) $\begin{cases} 3x+2y=10 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$ $\begin{cases} \cancel{6x}+4y=20 \\ \cancel{-6x}-9y=-30 \end{cases}$ $\begin{cases} -9y+4y=-30+20 \Leftrightarrow \\ -5y=-10 \end{cases}$ $5y=10 \Leftrightarrow \boxed{y=2}$ ....

2) $\begin{cases} -9x-\cancel{6y}=-30 \\ 4x+\cancel{6y}=20 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x-9x=20-30 \\ -5x=-10 \end{cases}$ $\boxed{x=2}$ ....

3) $3x+2y=10 \Leftrightarrow$ $x=\frac{10-2y}{3}$ | $2x+3y=10$, $2\left(\frac{10-2y}{3}\right)+3y=10$ ....

4) $2x+3y=10 \Leftrightarrow$ $y=\frac{10-2x}{3}$ | $3x+2y=10$, $3x+2\left(\frac{10-2x}{3}\right)=10$ ...

5) $2x+3y=10$, $x=\frac{10-3y}{2}$ $\rightarrow$ $3x+2y=10$, $3\left(\frac{10-3y}{2}\right)+2y=10$ ...

Αξίζει να σημειωθεί στο σημείο αυτό, πως ενώ η παραπάνω απάντηση χαρακτηρίζεται από μεγάλη ευχέρεια, εν τούτοις η ευελιξία που μετρά το πλήθος των διαφορετικών κατηγοριών απαντήσεων, ανέρχεται στο δύο, ήτοι στο λίγο, καθώς οι δύο πρώτες απαντήσεις ανήκουν στην ίδια κατηγορία, όπως και οι 3 τελευταίες απαντήσεις ανήκουν στην ίδια κατηγορία.

Β. ΕΥΕΛΙΞΙΑ

Η ευελιξία αξιολογήθηκε με τις διαφορετικές κατηγορίες σωστών απαντήσεων και κωδικοποιήθηκαν στο SPSS με μια κλίμακα Likert ως εξής:

Πλήθος διαφορετικών κατηγοριών	Κλίμακα Likert- Βαθμός Ευελιξίας
0	0 Καθόλου
1	1 Πολύ λίγο
2	2 Λίγο
3	3. Πολύ
4-5	4. Πάρα πολύ

Με τη βοήθεια του SPSS, πραγματοποίησα ανάλυση δεδομένων και ειδικότερα με τις εντολές analyze-desreptive statistics-frecuencies, μου δόθηκε ο Μ.Ο. της ευελιξίας αλλά και τα ποσοστά των απαντήσεων, όπως φαίνεται παρακάτω:

Statistics

ΕΡΓΟ1_ΕΥΕΛΙΞΙΑ

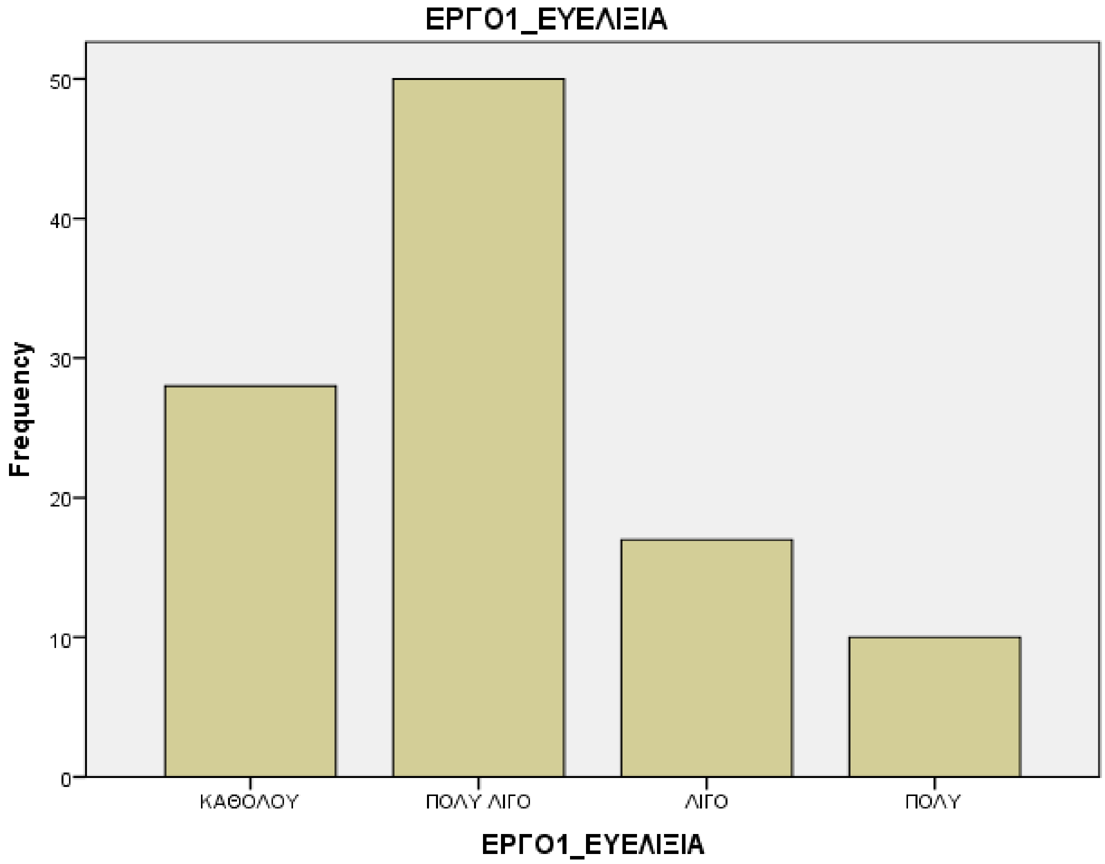
N	Valid	105
	Missing	0
Mean		1,09
Minimum		0
Maximum		3

ΕΡΓΟ1_ΕΥΕΛΙΞΙΑ

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΚΑΘΟΛΟΥ	28	26,7	26,7	26,7
	ΠΟΛΥ ΛΙΓΟ	50	47,6	47,6	74,3
	ΛΙΓΟ	17	16,2	16,2	90,5
	ΠΟΛΥ	10	9,5	9,5	100,0
	Total	105	100,0	100,0	

Παρατηρούμε πολύ χαμηλή ευελιξία στο Έργο 1, καθώς ο μέσος όρος είναι μόνον 1,09, που συνεπάγεται πως αγγίζει στο πολύ λίγο. Κανένα άτομο δεν έδωσε 4-5 διαφορετικές κατηγορίες απαντήσεων, 10 άτομα έδωσαν 3 διαφορετικές κατηγορίες απαντήσεων ενώ είκοσι-οκτώ (28) άτομα δεν απάντησαν τίποτε.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται και το ραβδόγραμμα για τα παραπάνω δεδομένα, που προέρχεται βάσει της ίδιας εντολής στο SPSS και επιλέγοντας charts.



Παρακάτω παραθέτουμε μία απαντηση που χαρακτηρίζονται από ευελιξία:

Παρατηρούμε 3 διαφορετικές απαντήσεις, οπότε η ευελιξία που μετρά τις διαφορετικές κατηγορίες ανέρχεται σε 3, δηλαδή στο πολύ.

Α΄ τρόπος

3χ+2ψ=2χ+3ψ (=10) 3χ+2χ=10
3χ-2χ=3ψ-2χ 5χ=10
Χ=ψ χ=10/5

Χ=2 και ψ=2

Β΄τρόπος

Αφαιρούμε το σύστημα

3χ+2ψ-2χ-3ψ=0

χ-ψ=0

Χ=ψ   κάνουμε αντικατάσταση και λύνουμε όπως παραπάνω.

Γ΄ τρόπος

3χ+2ψ=10

3χ=10-2ψ

Χ=(10-2ψ)/3

Αντικαθιστούμε στη β΄εξίσωση

2(10-2ψ)3+3ψ=10

(20-4ψ)/3+((9ψ)/3=10

(20-4ψ+9ψ)/3=10

20+5ψ=30

5ψ=30-20

Ψ=10/5

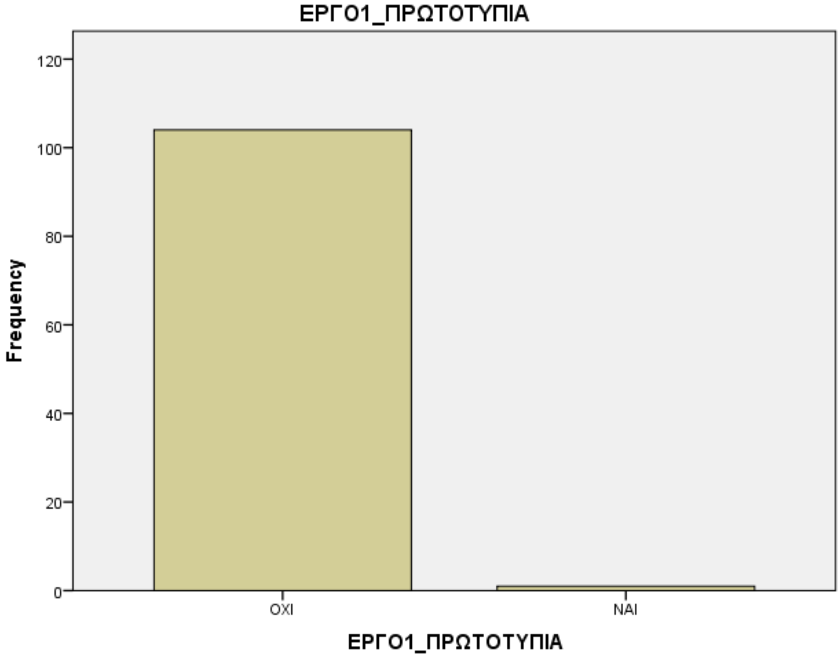
Ψ=2 **Αντικαθιστούμε το ψ=2 στην α΄εξίσωση και βρίσκουμε χ=2**

Γ. ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ

Όσον αφορά την πρωτοτυπία αυτή αξιολογήθηκε με τη σπανιότητα της απάντησης σε σχέση με την ομάδα αλλά και με τη διορατικότητά της. Οι συχνότητες του SPSS μας δίνουν το επόμενο πίνακα, καθώς και το διάγραμμα:

ΕΡΓΟ1_ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΟΧΙ	104	99,0	99,0	99,0
	ΝΑΙ	1	1,0	1,0	100,0
	Total	105	100,0	100,0	



Παρατηρούμε πως υπήρξε μόνον μία (1) πρωτότυπη απάντηση σε αυτό το έργο που προέρχεται από μία 4ετή φοιτήτρια θετικής κατεύθυνσης, την οποία και παραθέτουμε παρακάτω: Το παράδειγμα πέραν της πρωτοτυπίας διακρίνεται, επιπλέον, από ευχέρεια και ευελιξία, καθώς έχουν δοθεί τρεις (3) απαντήσεις και οι οποίες είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

1. Ορίζουσες
2. Αντίθετοι συντελεστές
3. Λύση μιας εξίσωσης ως προς έναν άγνωστο και αντικατάσταση στην άλλη

<u>Επίπεδο δημιουργικότητας στο έργο 2:</u>

Α. ΕΥΧΕΡΕΙΑ

Η ευχέρεια μετρήθηκε με το πλήθος των σωστών απαντήσεων, οι οποίες ξεκινούσαν από το μηδέν (0) και ανέρχονταν σε πέντε (5). Στη συνέχεια κωδικοποιήθηκαν στο SPSS με μια κλίμακα Likert ως εξής:

Πλήθος σωστών απαντήσεων	Κλίμακα Likert- Βαθμός Ευχέρειας
0	0 Καθόλου
1	1 Πολύ λίγο
2	2 Λίγο
3	3. Πολύ
4-5	4. Πάρα πολύ

Με τη βοήθεια του SPSS, πραγματοποίησα ανάλυση δεδομένων και ειδικότερα με τις εντολές analyze-desreptive statistics-frecuencies, μου δόθηκε ο Μ.Ο. της ευχέρειας αλλά και τα ποσοστά των απαντήσεων, όπως φαίνεται παρακάτω:

Statistics

ΕΡΓΟ2_ΕΥΧΕΡΕΙΑ

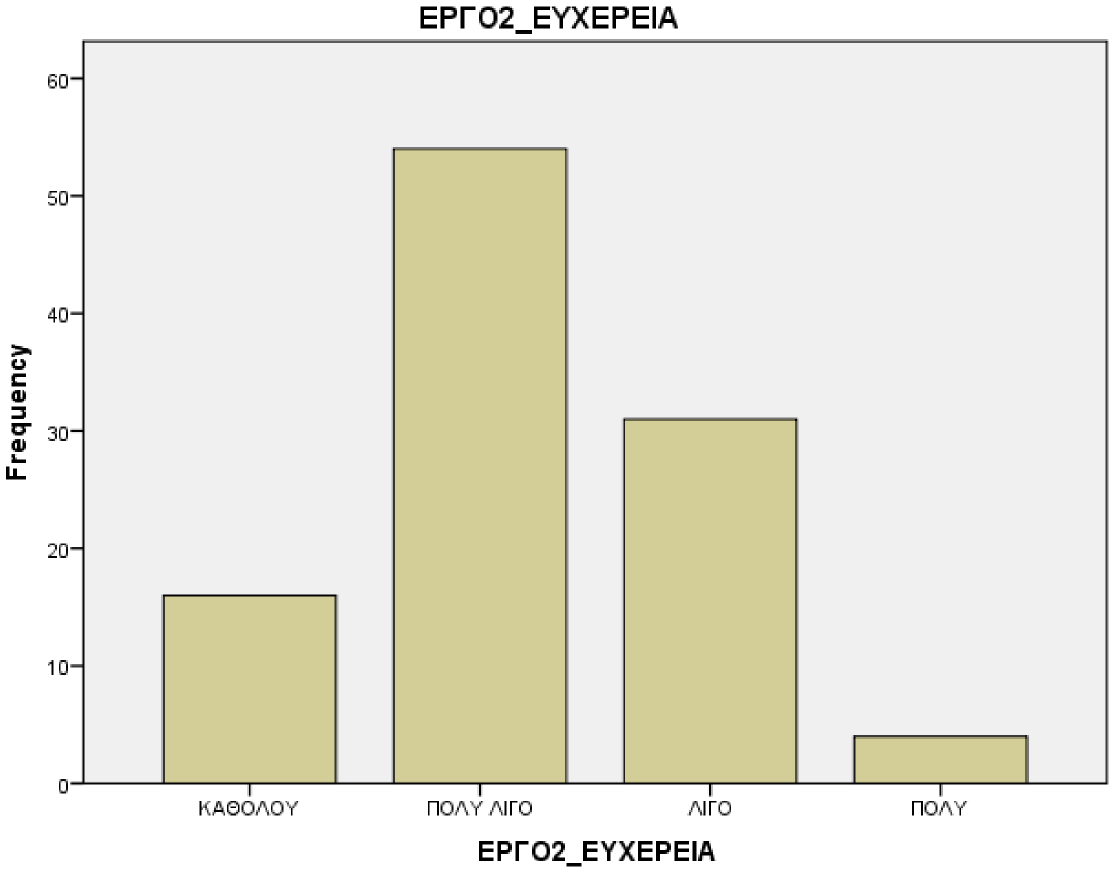
N	Valid	105
	Missing	0
Mean		1,22
Minimum		0
Maximum		3

ΕΡΓΟ2_ΕΥΧΕΡΕΙΑ

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΚΑΘΟΛΟΥ	16	15,2	15,2	15,2
	ΠΟΛΥ ΛΙΓΟ	54	51,4	51,4	66,7
	ΛΙΓΟ	31	29,5	29,5	96,2
	ΠΟΛΥ	4	3,8	3,8	100,0
	Total	105	100,0	100,0	

Παρατηρούμε πολύ χαμηλή ευχέρεια στο Έργο 2, καθώς ο μέσος όρος είναι μόνον 1,22, που συνεπάγεται πως πλησιάζει στο πολύ λίγο. Κανένας δεν έδωσε πάνω από τέσσερις (4) απαντήσεις

και μόνον τέσσερα (4) άτομα έδωσαν τρεις (3) απαντήσεις (τα δύο εκ των οποίων είναι απόφοιτοι), ενώ 16 άτομα δεν απάντησαν τίποτε.
Στη συνέχεια παρουσιάζεται και το ραβδόγραμμα για τα παραπάνω δεδομένα, το οποίο προκύπτει βάσει της ίδιας εντολής στο SPSS και επιλέγοντας charts.



Β. ΕΥΕΛΙΞΙΑ

Η ευελιξία αξιολογήθηκε με τις διαφορετικές κατηγορίες σωστών απαντήσεων και κωδικοποιήθηκαν στο SPSS με μια κλίμακα Likert ως εξής:

Πλήθος διαφορετικών κατηγοριών	Κλίμακα Likert- Βαθμός Ευελιξίας
0	0 Καθόλου
1	1 Πολύ λίγο
2	2 Λίγο
3	3. Πολύ
4	4. Πάρα πολύ

Με τη βοήθεια του SPSS, πραγματοποίησα ανάλυση δεδομένων και ειδικότερα με τις εντολές analyze-desreptive statistics-frecuencies, μου δόθηκε ο Μ.Ο. της ευελιξίας αλλά και τα ποσοστά των απαντήσεων, όπως φαίνεται παρακάτω:

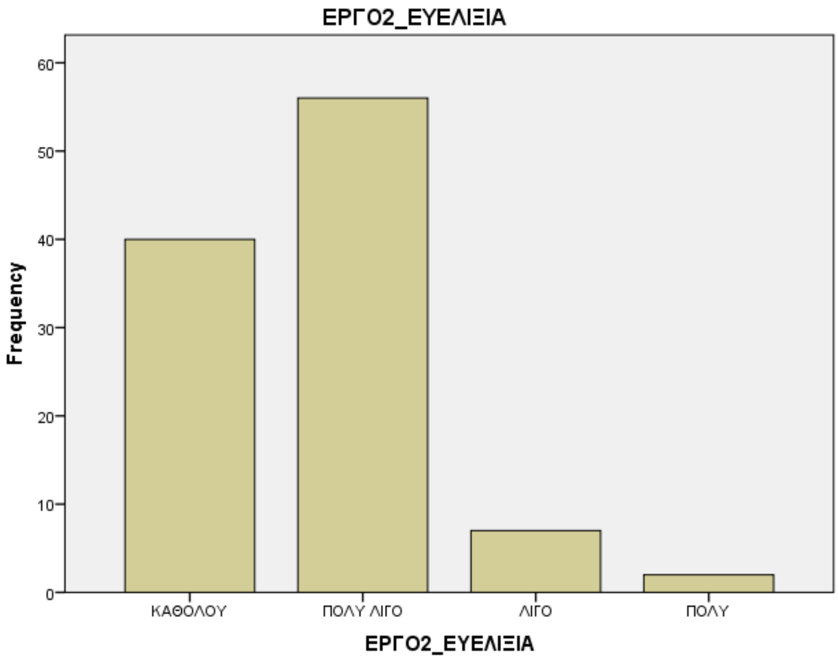
Statistics

ΕΡΓΟ2_ΕΥΕΛΙΞΙΑ

N	Valid	105
	Missing	0
Mean		,72
Minimum		0
Maximum		3

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΚΑΘΟΛΟΥ	40	38,1	38,1	38,1
	ΠΟΛΥ ΛΙΓΟ	56	53,3	53,3	91,4
	ΛΙΓΟ	7	6,7	6,7	98,1
	ΠΟΛΥ	2	1,9	1,9	100,0
	Total	105	100,0	100,0	

Παρατηρούμε πολύ χαμηλή ευελιξία στο Έργο 2, καθώς ο μέσος όρος είναι μόνον 0,72, που συνεπάγεται πως βρίσκεται κάτω από το πολύ λίγο. Κανένα άτομο δεν έδωσε 4 διαφορετικές κατηγορίες απαντήσεων, 2 άτομα έδωσαν 3 διαφορετικές κατηγορίες απαντήσεων, τα οποία είναι απόφοιτοι, ενώ σαράντα (40) άτομα είτε δεν έδωσαν καμία απάντηση είτε δεν κατάφεραν να διατυπώσουν άλλη κατηγορία προβλήματος.
Τα παραπάνω απεικονίζονται και στο κάτωθι διάγραμμα.

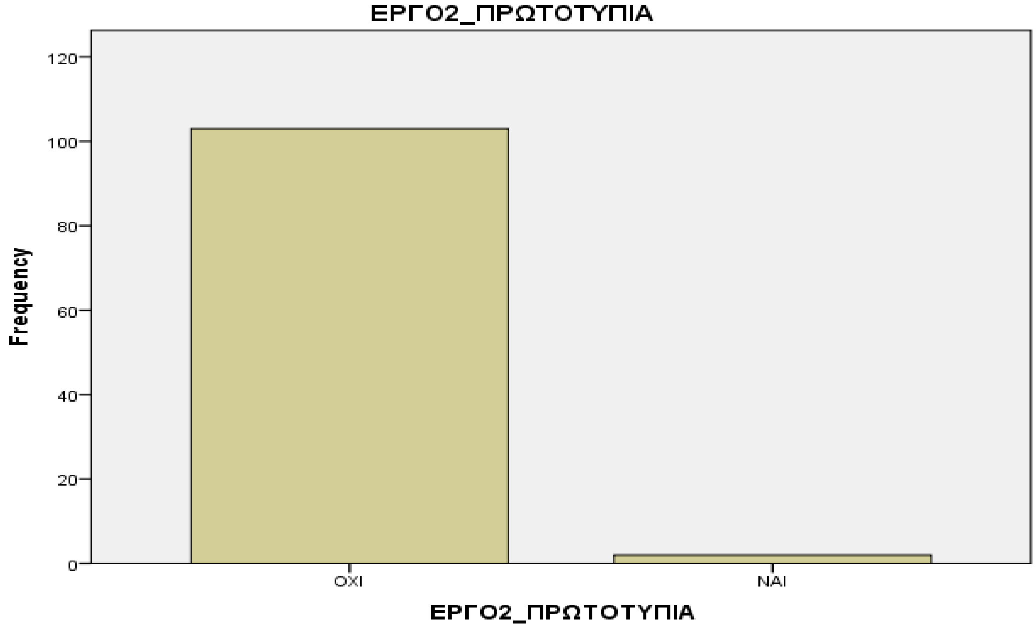


Γ. ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ

Όσον αφορά την πρωτοτυπία αυτή αξιολογήθηκε με τη σπανιότητα της απάντησης σε σχέση με την ομάδα αλλά και με τη διορατικότητά της. Οι συχνότητες του SPSS μας δίνουν το επόμενο πίνακα, καθώς και το διάγραμμα:

ΕΡΓΟ2_ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	OXI	103	98,1	98,1	98,1
	NAI	2	1,9	1,9	100,0
	Total	105	100,0	100,0	



Παρατηρούμε πως υπήρξαν μόνον 2 πρωτότυπες απαντήσεις σε αυτό το έργο που προέρχονται από έναν 4ετή φοιτητή και μία απόφοιτο, τις οποίες και παραθέτουμε παρακάτω:

είναι μεταξύ 80 και 100 ετών
Η γιαγιά του Χρήστου έχει ηλικία, ίση με το τετράγωνο της ηλικίας του Χρήστου, ενώ ο Χρήστος έχει ηλικία ίση με το τετράγωνο της ηλικίας του Κώστα, του αδελφού του. Βρείτε την ηλικία του Κώστα.

α) Ο Δημήτρης ζυγίζει 2 φορές το βάρος του Στέλιου. Αν το άθροισμα των κιλών τους είναι 30 κιλά, ποιο είναι το βάρος των δύο παιδιών;
β) Η Μαρία είναι 10 εκατοστά ψηλότερη από τη Δανάη. Το άθροισμα των υψών τους είναι 330 εκ. Τι ύψος έχουν τα δύο κορίτσια;
γ) Ο Πέτρος και ο αδερφός του ο Νίκος άνοιξαν τον κουμπαρά τους. Ο Πέτρος είχε 15 ευρώ περισσότερα από το Νίκο. Αν τα δύο αδέρφια είχαν μαζί 85 ευρώ, πόσα χρήματα είχε στον κουμπαρά του το κάθε παιδί;

Το τελευταίο παράδειγμα πέραν της πρωτοτυπίας διακρίνεται, επιπλέον, από ευχέρεια και ευελιξία, καθώς έχουν δοθεί τρεις (3) απαντήσεις και οι οποίες είναι διαφορετικές μεταξύ τους αλλά και από το παράδειγμα του ερωτηματολογίου.

<u>Επίπεδο δημιουργικότητας στο έργο 3:</u>

Α. ΕΥΧΕΡΕΙΑ

Η ευχέρεια μετρήθηκε με το πλήθος των σωστών απαντήσεων, οι οποίες ξεκινούσαν από το μηδέν (0) και ανέρχονταν σε πέντε (5). Στη συνέχεια κωδικοποιήθηκαν στο SPSS με μια κλίμακα Likert ως εξής:

Πλήθος σωστών απαντήσεων	Κλίμακα Likert- Βαθμός Ευχέρειας
0	0 Καθόλου
1	1 Πολύ λίγο
2	2 Λίγο
3	3. Πολύ
4-5	4. Πάρα πολύ

Με τη βοήθεια του SPSS, πραγματοποίησα ανάλυση δεδομένων και ειδικότερα με τις εντολές analyze-desreptive statistics-frecuencies, μου δόθηκε ο Μ.Ο. της ευχέρειας αλλά και τα ποσοστά των απαντήσεων, όπως εμφαίνεται στους κάτωθι πίνακες:

Statistics

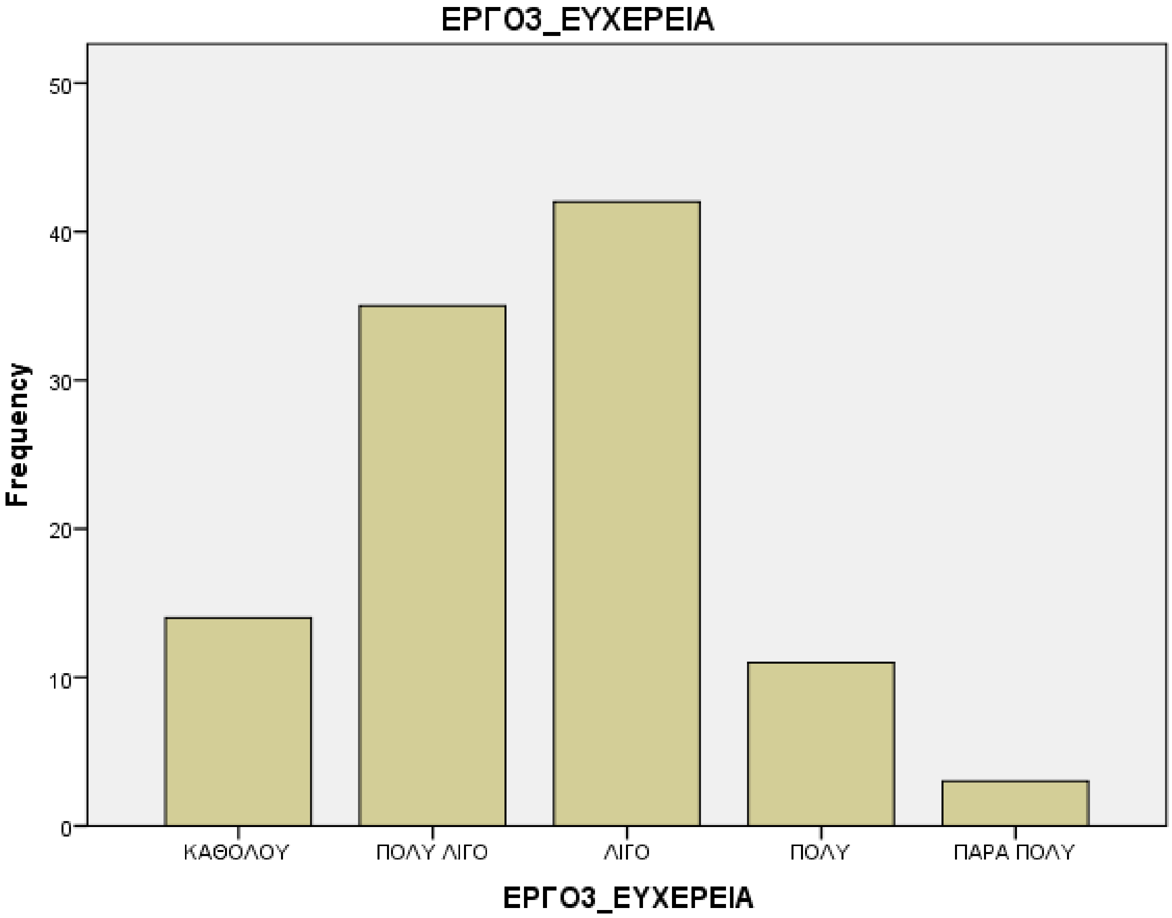
ΕΡΓΟ3_ΕΥΧΕΡΕΙΑ

N	Valid	105
	Missing	0
Mean		1,56
Minimum		0
Maximum		4

ΕΡΓΟ3_ΕΥΧΕΡΕΙΑ

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΚΑΘΟΛΟΥ	14	13,3	13,3	13,3
	ΠΟΛΥ ΛΙΓΟ	35	33,3	33,3	46,7
	ΛΙΓΟ	42	40,0	40,0	86,7
	ΠΟΛΥ	11	10,5	10,5	97,1
	ΠΑΡΑ ΠΟΛΥ	3	2,9	2,9	100,0
	Total	105	100,0	100,0	

Παρατηρούμε χαμηλή ευχέρεια στο Έργο 3, καθώς ο μέσος όρος είναι μόνον 1,56, που συνεπάγεται πως πλησιάζει στο λίγο. Τρία (3) άτομα έδωσαν πάνω από τέσσερα (4) προβλήματα ενώ 14 άτομα δεν απάντησαν καθόλου ή έδωσαν λανθασμένο πρόβλημα, όπως εμφαίνεται και στο κάτωθι διάγραμμα.



Β. ΕΥΕΛΙΞΙΑ

Η ευελιξία αξιολογήθηκε με τις διαφορετικές κατηγορίες σωστών απαντήσεων και κωδικοποιήθηκαν στο SPSS με μια κλίμακα Likert ως εξής:

Πλήθος διαφορετικών κατηγοριών	Κλίμακα Likert- Βαθμός Ευελιξίας
0	0 Καθόλου
1	1 Πολύ λίγο
2	2 Λίγο
3	3. Πολύ
4	4. Πάρα πολύ

Με τη βοήθεια του SPSS, πραγματοποίησα ανάλυση δεδομένων και ειδικότερα με τις εντολές analyze-desreptive statistics-frecuencies, μου δόθηκε ο Μ.Ο. της ευελιξίας αλλά και τα ποσοστά των απαντήσεων, όπως εμφαίνεται στους κάτωθι πίνακες:

Statistics

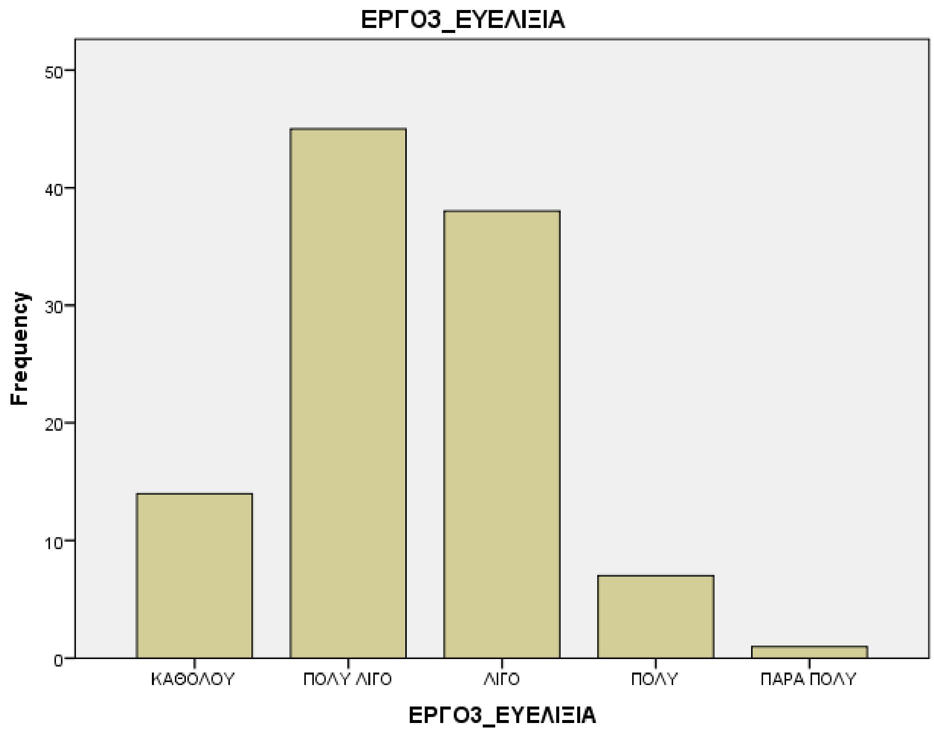
ΕΡΓΟ3_ΕΥΕΛΙΞΙΑ

N	Valid	105
	Missing	0
Mean		1,39
Minimum		0
Maximum		4

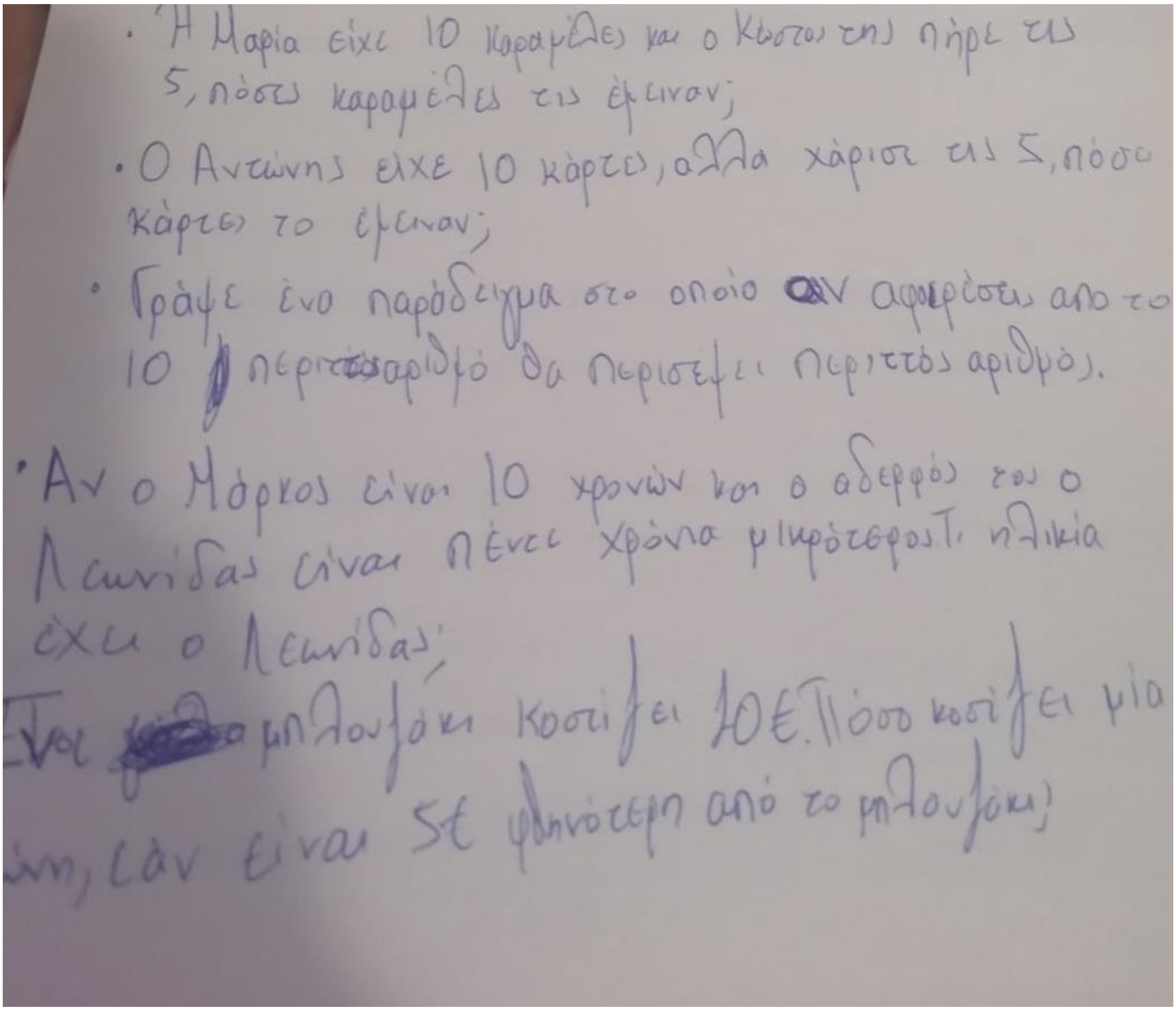
ΕΡΓΟ3_ΕΥΕΛΙΞΙΑ

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΚΑΘΟΛΟΥ	14	13,3	13,3	13,3
	ΠΟΛΥ ΛΙΓΟ	45	42,9	42,9	56,2
	ΛΙΓΟ	38	36,2	36,2	92,4
	ΠΟΛΥ	7	6,7	6,7	99,0
	ΠΑΡΑ ΠΟΛΥ	1	1,0	1,0	100,0
	Total	105	100,0	100,0	

Παρατηρούμε πολύ χαμηλή ευελιξία στο Έργο 3, καθώς ο μέσος όρος είναι μόνον 1,39, που συνεπάγεται πως βρίσκεται κάτω από το πολύ λίγο. Ένα (1) μόνο άτομο που είναι απόφοιτος έδωσε 4 διαφορετικές κατηγορίες προβλημάτων, ενώ δέκα-τέσσερα (14) άτομα δεν έδωσαν καμία σωστή απάντηση. Τα παραπάνω δεδομένα απεικονίζονται και στο γράφημα που ακολουθεί:



Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα παράδειγμα που διακρίνεται τόσο από ευχέρεια, καθώς δίνει τέσσερις (4) σωστές απαντήσεις, όσο και από ευελιξία, καθώς είναι διαφορετικές μεταξύ τους.
Στο παράδειγμα με τον περιττό αριθμό, υπάρχει μια διορατική ιδέα, πλην όμως δε δίνει τη μοναδική απάντηση του προβλήματος αλλά επιδέχεται και άλλες απαντήσεις.


- Η Μαρία είχε 10 καραμέλες και ο Κώστας της πήρε τις 5, πόσες καραμέλες της έμειναν;
- Ο Αντώνης είχε 10 κάρτες, αλλά χάρισε τις 5, πόσες κάρτες του έμειναν;
- Γράψε ένα παράδειγμα στο οποίο αν αφαιρέσεις από το 10 περιττό αριθμό θα περισσέψει περιττός αριθμός.
- Αν ο Μάρκος είναι 10 χρονών και ο αδερφός του ο Λεωνίδας είναι πέντε χρόνια μικρότερος τι ηλικία έχει ο Λεωνίδας;

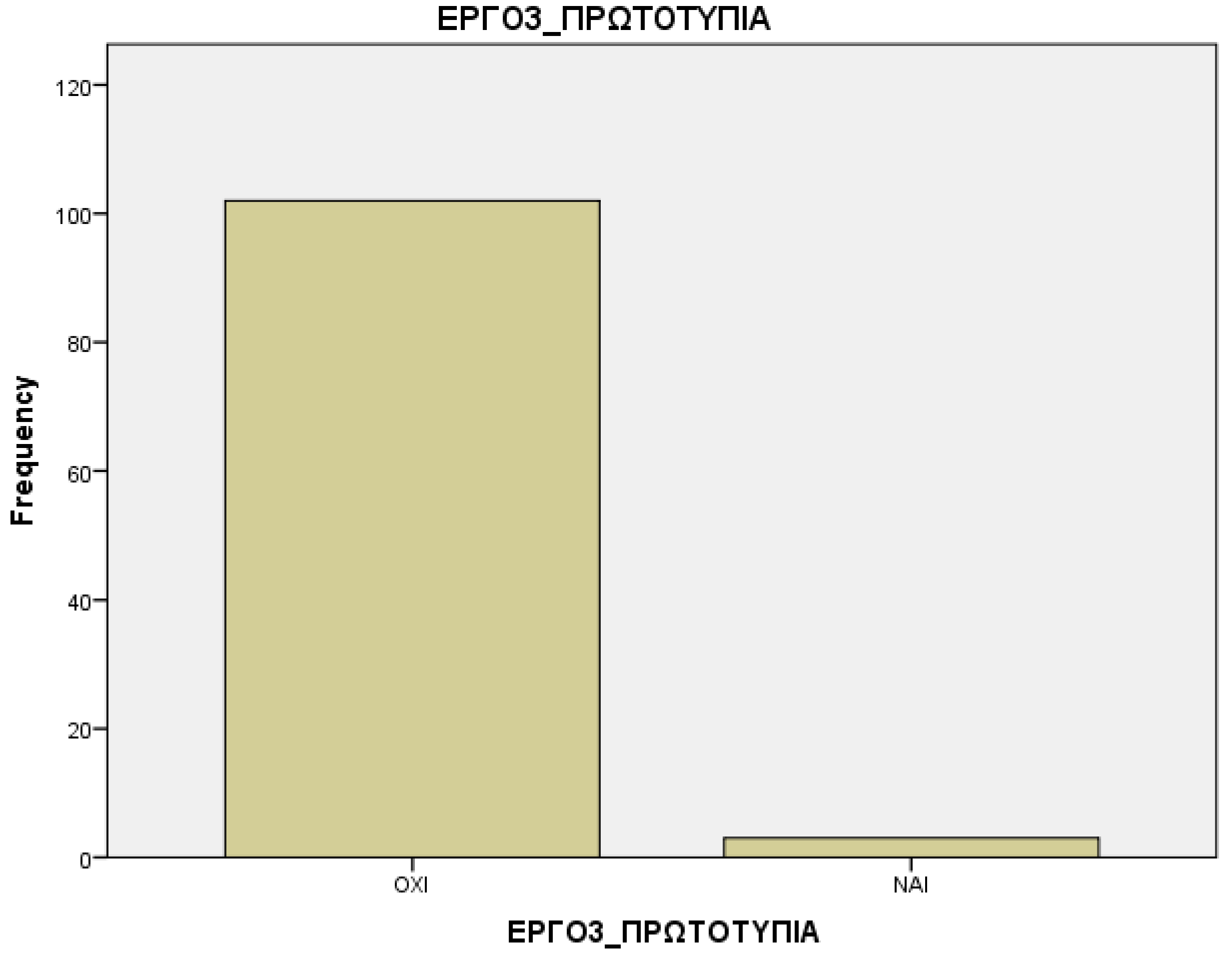
Ένα μπλουζάκι κοστίζει 10€. Πόσο κοστίζει μία ζώνη, εάν είναι 5€ φθηνότερη από το μπλουζάκι;

Γ. ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ

Όσον αφορά την πρωτοτυπία αυτή αξιολογήθηκε με τη σπανιότητα της απάντησης σε σχέση με την ομάδα αλλά και με τη διορατικότητά της. Οι συχνότητες του SPSS μας δίνουν το επόμενο πίνακα, καθώς και το διάγραμμα:

ΕΡΓΟ3_ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΟΧΙ	102	97,1	97,1	97,1
	ΝΑΙ	3	2,9	2,9	100,0
	Total	105	100,0	100,0	



Υπήρξαν τρεις (3) πρωτότυπες απαντήσεις σε αυτό το έργο, οι οποίες είναι διορατικές και μοναδικές σε σχέση με την υπόλοιπη ομάδα, που προέρχονται από 4ετείς φοιτητές θετικής κατεύθυνσης, τις οποίες και παραθέτουμε στη συνέχεια.

Βάλτε όπου $x = 5$ στην παρακάτω εξίσωση.

$$2x - y = 5$$

$$10 - y = 5$$

$$10 - 5 = y$$

$$y = 5$$

Αν αφαιρέσω από το 10 το μισό του τι θα πάρω;
Διπλασιάζω το 5 και αφαιρώ τον εαυτό του, τι θα πάρω;

1. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει εμβαδόν $10m^2$. Αν στο εσωτερικό του κόψουμε ένα κομμάτι εμβαδού $5m^2$, πόσο εμβαδόν θα έχει η νέα επιφάνεια

2. Ένας εργάτης δούλεψε σε ένα χωράφι για 10 ώρες από τις οποίες οι 5 ήταν νύχτα. Πόσες ώρες δούλεψε με το φως της μέρας

Επίπεδο δημιουργικότητας στο έργο 4:

Α. ΕΥΧΕΡΕΙΑ

Η ευχέρεια μετρήθηκε με το πλήθος των σωστών απαντήσεων, οι οποίες ξεκινούσαν από το μηδέν (0) και ανέρχονταν σε πέντε (5). Στη συνέχεια κωδικοποιήθηκαν στο SPSS με μια κλίμακα Likert ως εξής:

Πλήθος σωστών απαντήσεων	Κλίμακα Likert- Βαθμός Ευχέρειας
0	0 Καθόλου
1-2	1 Πολύ λίγο
3-4	2 Λίγο
5-6	3. Πολύ
7	4. Πάρα πολύ

Με τη βοήθεια του SPSS, πραγματοποίησα ανάλυση δεδομένων και ειδικότερα με τις εντολές analyze-desreptive statistics-frecuencies, μου δόθηκε ο Μ.Ο. της ευχέρειας αλλά και τα ποσοστά των απαντήσεων, όπως εμφαίνεται στους κάτωθι πίνακες:

Statistics

ΕΡΓΟ4_ΕΥΧΕΡΕΙΑ

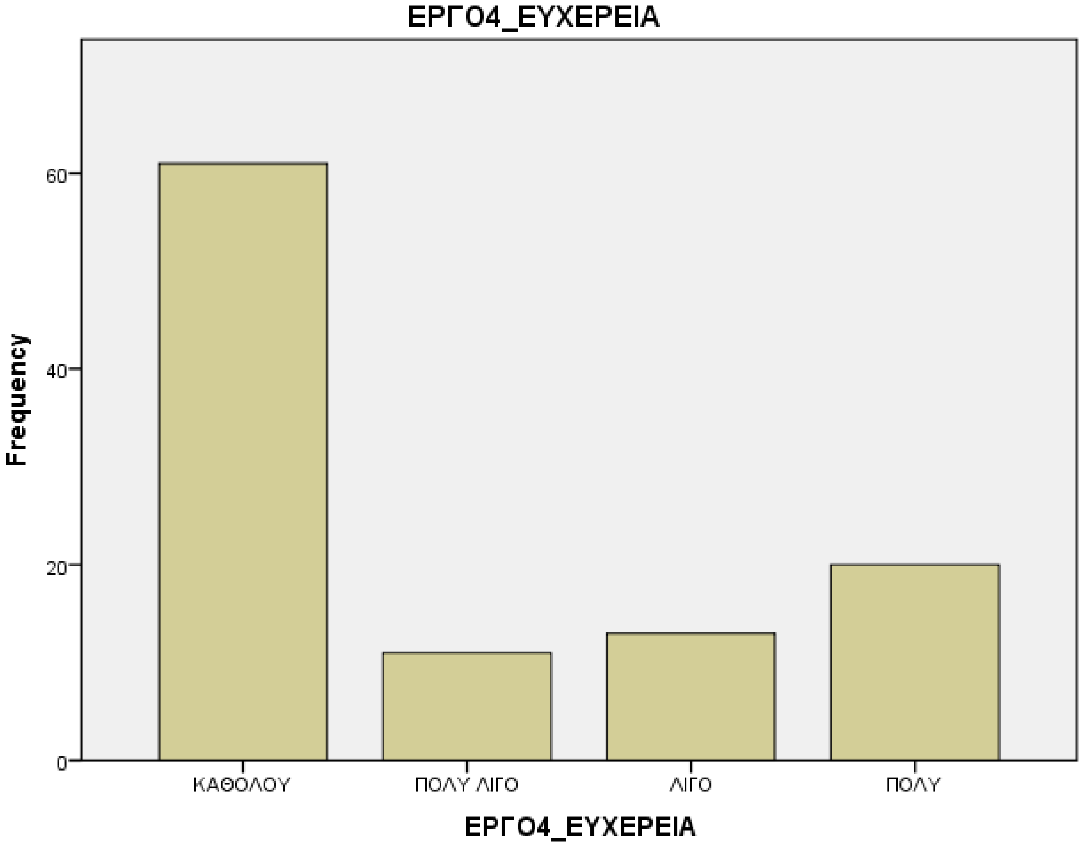
N	Valid	105
	Missing	0
Mean		,92
Minimum		0
Maximum		3

ΕΡΓΟ4_ΕΥΧΕΡΕΙΑ

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΚΑΘΟΛΟΥ	61	58,1	58,1	58,1
	ΠΟΛΥ ΛΙΓΟ	11	10,5	10,5	68,6
	ΛΙΓΟ	13	12,4	12,4	81,0
	ΠΟΛΥ	20	19,0	19,0	100,0
	Total	105	100,0	100,0	

Παρατηρούμε πολύ χαμηλή ευχέρεια στο Έργο 4, καθώς ο μέσος όρος είναι μόνον 0,92, που συνεπάγεται πως είναι κάτω από το πολύ λίγο. Κανένα άτομο δεν έδωσε πάνω από 7 απαντήσεις, πιθανότατα επειδή τα άδεια πολύγωνα ήταν έξι. Η συντριπτική πλειοψηφία, ήτοι εξήντα-ένα (61) άτομα δεν απάντησαν καθόλου ή έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις, σε ένα φαινομενικά απλό

πρόβλημα, το οποίο σύμφωνα με τη μελέτη της Kattou et al (2017) από όπου προέρχεται το πρόβλημα, δίνεται για συμπλήρωση σε μαθητές Δημοτικού.
Τα παραπάνω δεδομένα εμφαίνονται και στο κάτωθι γράφημα:



Β. ΕΥΕΛΙΞΙΑ

Η ευελιξία αξιολογήθηκε με τις διαφορετικές κατηγορίες σωστών απαντήσεων και κωδικοποιήθηκαν στο SPSS με μια κλίμακα Likert ως εξής:

Πλήθος διαφορετικών κατηγοριών	Κλίμακα Likert- Βαθμός Ευελιξίας
0	0 Καθόλου
1	1 Πολύ λίγο
2	2 Λίγο
3	3. Πολύ
4 και άνω	4. Πάρα πολύ

Με τη βοήθεια του SPSS, πραγματοποίησα ανάλυση δεδομένων και ειδικότερα με τις εντολές analyze-desreptive statistics-frecuencies, μου δόθηκε ο Μ.Ο. της ευελιξίας αλλά και τα ποσοστά των απαντήσεων, όπως εμφαίνεται στους κάτωθι πίνακες:

Statistics

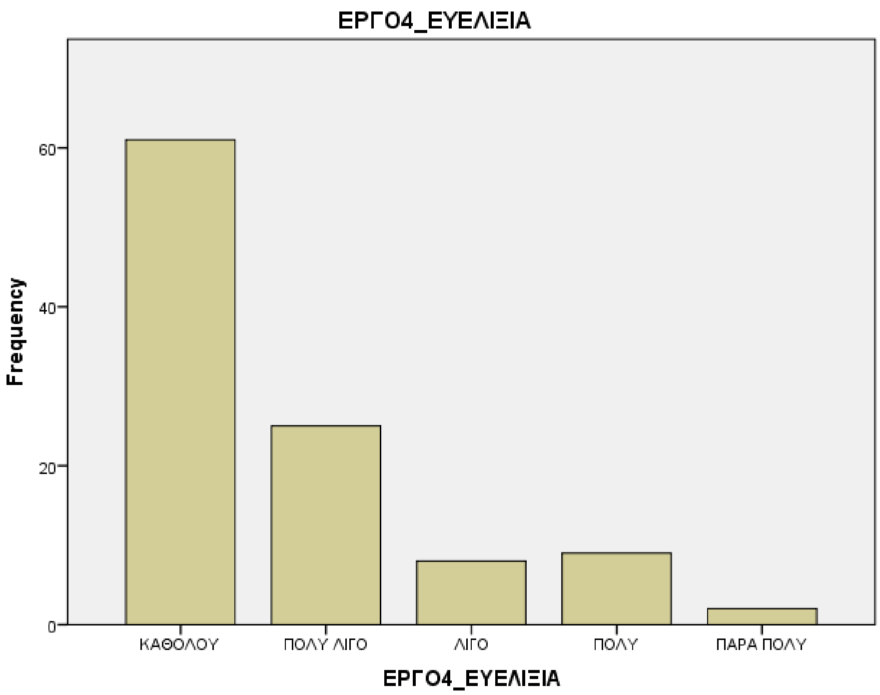
ΕΡΓΟ4_ΕΥΕΛΙΞΙΑ

N	Valid	105
	Missing	0
Mean		,72
Minimum		0
Maximum		4

ΕΡΓΟ4_ΕΥΕΛΙΞΙΑ

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ΚΑΘΟΛΟΥ	61	58,1	58,1	58,1
	ΠΟΛΥ ΛΙΓΟ	25	23,8	23,8	81,9
	ΛΙΓΟ	8	7,6	7,6	89,5
	ΠΟΛΥ	9	8,6	8,6	98,1
	ΠΑΡΑ ΠΟΛΥ	2	1,9	1,9	100,0
	Total	105	100,0	100,0	

Παρατηρούμε πολύ χαμηλή ευελιξία στο Έργο 4, καθώς ο μέσος όρος είναι μόνον 0,72, που συνεπάγεται πως βρίσκεται κάτω από το πολύ λίγο. Δύο (2) μόνο άτομα έδωσαν πάνω από 4 διαφορετικές κατηγορίες προβλημάτων, ενώ εξήντα-ένα (61) άτομα δεν απάντησαν καθόλου ή έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις, όπως απεικονίζεται και παρακάτω.

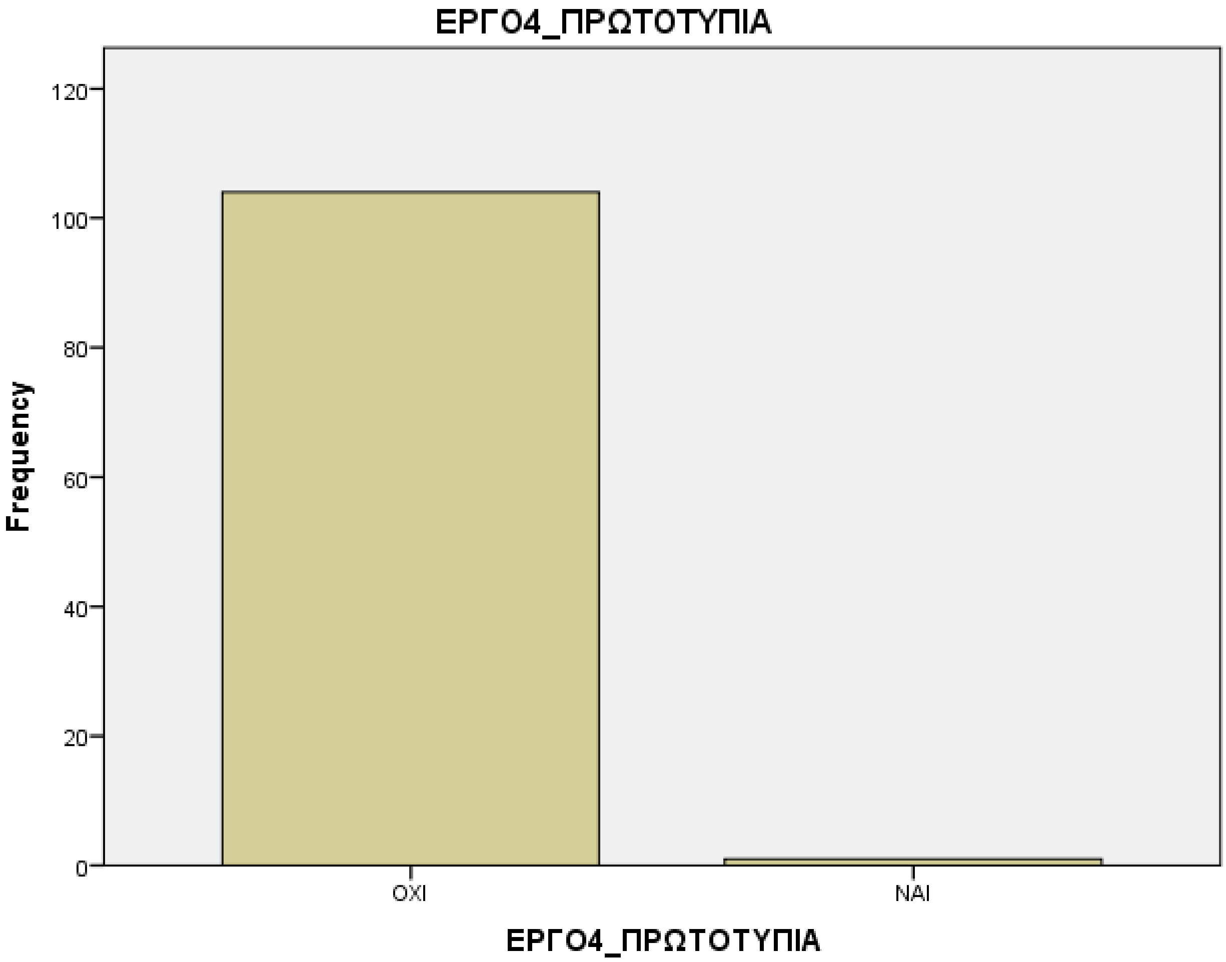


Γ. ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ

Όσον αφορά την πρωτοτυπία αυτή αξιολογήθηκε με τη σπανιότητα της απάντησης σε σχέση με την ομάδα αλλά και με τη διορατικότητά της. Οι συχνότητες του SPSS μας δίνουν το επόμενο πίνακα, καθώς και το διάγραμμα:

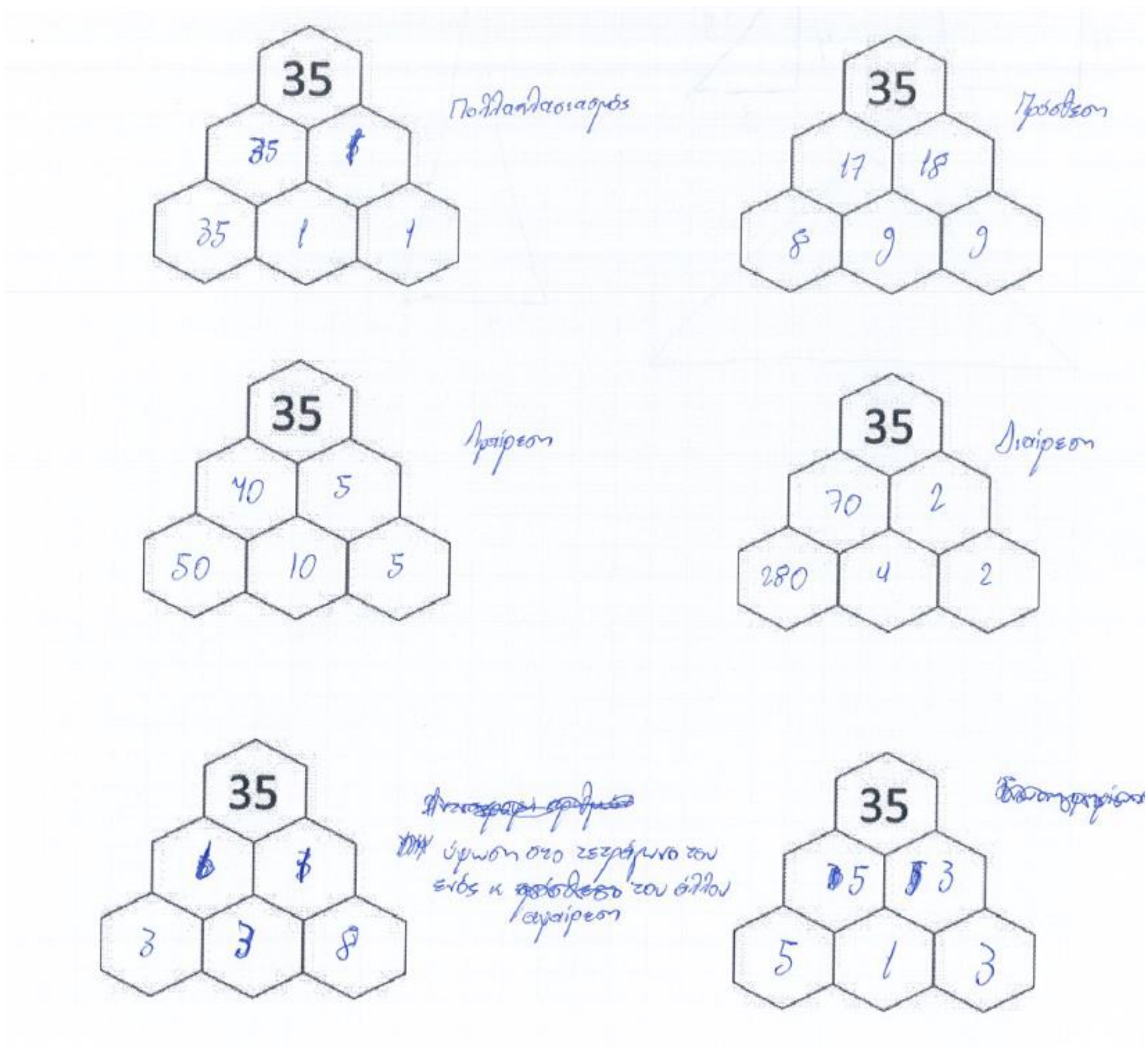
ΕΡΓΟ4_ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	OXI	104	99,0	99,0	99,0
	NAI	1	1,0	1,0	100,0
	Total	105	100,0	100,0	



Υπήρξε μόνον μία (1) πρωτότυπη απάντηση σε αυτό το έργο, που προέρχεται από 4ετή φοιτητή και παραθέτουμε στη συνέχεια. Η απάντησή του είναι πολύ διορατική καθώς αφενός μεν χρησιμοποιεί όλες τις πράξεις, πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση, αφετέρου δε, χρησιμοποιεί συνδυασμό της πράξης της αφαίρεσης με ύψωση στο τετράγωνο, ενώ η συντριπτική πλειοψηφία των απαντήσεων των φοιτητών αφορούν την πράξη της πρόσθεσης.

Το παράδειγμα αυτό διακρίνεται σαφέστατα και από ευχέρεια και από ευελιξία, καθώς ο συμμετέχων έδωσε πέντε (5) σωστές απαντήσεις, οι οποίες ανήκουν όλες σε διαφορετικές κατηγορίες.



Προς υποβοήθηση της ανάλυσης, συνοψίζουμε τα ανωτέρω δεδομένα, παραθέτοντας έναν συγκεντρωτικό πίνακα της μέτρησης των συνιστωσών της δημιουργικότητας για τα τέσσερα (4) έργα, καθώς και έναν πίνακα με περιγραφικές στατιστικές από το SPSS, όπου εμφαίνεται ο Μ.Ο., το ελάχιστο και το μέγιστο της ευχέρειας και της ευελιξίας των έργων.

	ΕΡΓΟ 1	ΕΡΓΟ 2	ΕΡΓΟ 3	ΕΡΓΟ 4
Μ.Ο. ΕΥΧΕΡΕΙΑΣ	1,38	1,22	1,56	0,92
Μ.Ο.ΕΥΕΛΙΞΙΑΣ	1,09	0,72	1,39	0,72
ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ	ΝΑΙ (1)	ΝΑΙ (2)	ΝΑΙ (3)	ΝΑΙ (1)

Descriptive Statistics

	N	Minimum	Maximum	Mean
ΕΡΓΟ1_ΕΥΧΕΡΕΙΑ	105	0	4	1,38
ΕΡΓΟ1_ΕΥΕΛΙΞΙΑ	105	0	3	1,09
ΕΡΓΟ2_ΕΥΧΕΡΕΙΑ	105	0	3	1,22
ΕΡΓΟ2_ΕΥΕΛΙΞΙΑ	105	0	3	,72
ΕΡΓΟ3_ΕΥΧΕΡΕΙΑ	105	0	4	1,56
ΕΡΓΟ3_ΕΥΕΛΙΞΙΑ	105	0	4	1,39
ΕΡΓΟ4_ΕΥΧΕΡΕΙΑ	105	0	3	,92
ΕΡΓΟ4_ΕΥΕΛΙΞΙΑ	105	0	4	,72
Valid N (listwise)	105			

Η κλίμακα Likert διαβαθμίζεται ως εξής:

0 = καθόλου, 1 = Πολύ λίγο, 2 = λίγο, 3 = πολύ και 4 = πάρα πολύ

Βάσει της κλίμακας Likert παρατηρούμε πολύ χαμηλό επίπεδο μαθηματικής δημιουργικότητας που τείνει στο πολύ λίγο.

Το **πρώτο** έργο ήταν ένα MST που είχε έναν ορισμένο αριθμό τρόπων λύσεων και συνεπώς η ευχέρεια επισημαίνει τον αριθμό των τρόπων που θα προταθούν. Το **δεύτερο** και το **τρίτο** έργο ήταν ανοιχτού τύπου και επομένως η ευχέρεια μετράει τον αριθμό των διαφορετικών προβλημάτων που δημιουργήθηκαν. Με άλλα λόγια, για το δεύτερο και τρίτο έργο, η ευχέρεια μετράει τα προϊόντα της δημιουργικότητας. Το **τέταρτο** έργο ήταν ανοικτού τύπου που είχε έναν αρκετά μεγάλο αριθμό απαντήσεων και συνεπώς η ευχέρεια επισημαίνει τον αριθμό των τρόπων που θα προταθούν. Αυτό υποδηλώνει τη δημιουργική διαδικασία. Το 2ο αλλά και το 4ο έργο δυσκόλεψε αρκετά του συμμετέχοντες, στη συνέχεια ακολουθεί το 1ο έργο, ενώ στο 3ο έργο που ήταν σύνθεση ενός προβλήματος με συγκεκριμένο αποτέλεσμα, σημείωσαν μεγαλύτερη ευχέρεια και ευελιξία και είχαν το μέγιστο των απαντήσεων τόσο σε αυτές τις δύο συνιστώσες, όσο και στην πρωτοτυπία.

Όπως παρατηρούμε, υπάρχει χαμηλό επίπεδο **ευχέρειας** και για τα τέσσερα (4) έργα. Δε σημειώθηκε μεγάλη διαφορά μεταξύ των έργων, γεγονός που δεν προκαλεί έκπληξη, καθώς και τα τέσσερα (4) έργα αφορούσαν ανοικτού τύπου θέματα και σύμφωνα με τη σύσταση του Haylock (1997) είχαν τη δυνατότητα για πολλές διαδρομές λύσης. Στο 3ο έργο σημειώθηκε μεγαλύτερη ευχέρεια, γεγονός που οφείλεται στο ότι αυτό αποτελεί μια σύνθεση προβλήματος με ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα, ενώ παρατηρούμε πως στο 2ο και στο 4ο έργο το μέγιστο του αριθμού απαντήσεων ήταν το 3 που αντιστοιχεί στο πολύ και μεταφράζεται σε 3 απαντήσεις για το έργο 2 και σε 6 απαντήσεις για το έργο 4.

Παρατηρούμε αρκετά χαμηλό επίπεδο **ευελιξίας** και για τα τέσσερα (4) έργα. Ως προς την ευελιξία, για το δεύτερο και τέταρτο έργο προέκυψε ίδιος βαθμός ευελιξίας και μάλιστα ήταν ο χαμηλότερος, γεγονός που καταδεικνύει πως οι συμμετέχοντες δυσκολεύτηκαν ιδιαίτερα σε αυτά τα έργα. Το 1^{ο} και 4^{ο} έργο έχουν τον ίδιο μέγιστο αριθμό μονοπατιών λύσης που ακολουθούνται από οποιονδήποτε μαθητή ενώ το δεύτερο και τρίτο έργο έχει πολλές πιθανές οδούς λύσης.

Κάθε απάντηση που δόθηκε κατηγοριοποιήθηκε σύμφωνα με το εάν υπάρχει ή όχι **πρωτοτυπία**: μια έκφραση που προκύπτει με την εφαρμογή μιας άμεσης αλγοριθμικής απλοποίησης της δεδομένης έκφρασης, θεωρήθηκε ότι δεν ενέχει πρωτοτυπία ενώ μια έκφραση που προέρχεται είτε από την αλλαγή της έκφρασης με έναν τρόπο που δεν είναι συμβατικός είτε προέρχεται από τη δημιουργία μιας μη συνηθισμένης (και συνήθως μη αλγοριθμικής) αλλαγής της δεδομένης έκφρασης θεωρήθηκε ότι ήταν σε υψηλό επίπεδο και συνεπώς πρωτότυπη (Tabach, et al., 2017). Οι Sternberg και Lubart (1996) ορίζουν τη δημιουργικότητα ως ικανότητα παραγωγής απροσδόκητου, πρωτότυπου, κατάλληλου και χρήσιμου έργου. Με βάση αυτόν τον ορισμό, διαπιστώσαμε ότι ελάχιστοι συμμετέχοντες ολοκλήρωσαν τα έργα με πρωτοτυπία. Στο πρώτο έργο, δόθηκε μόνον μία (1) πρωτότυπη απάντηση, η οποία ήταν μοναδική σε σχέση με την ομάδα. Άλλοι τύποι λύσεων όπως τα γραφήματα θα μπορούσαν να θεωρηθούν διορατικές αλλά δεν υπήρξαν τέτοιες λύσεις παρά μόνο αλγεβρικές. Το τρίτο έργο που ήταν σύνθεση προβλήματος με συγκεκριμένο αποτέλεσμα είχε τρεις (3) πρωτότυπες απαντήσεις, το δεύτερο έργο που ήταν τοποθέτηση προβλήματος όπως το δοθέν, απέφερε δύο (2) πρωτότυπες απαντήσεις, ενώ το τέταρτο έργο απέφερε μόνον μία (1) πρωτότυπη απάντηση.

8.2 Σύγκριση δημιουργικότητας μεταξύ των συμμετεχόντων ανάλογα με την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο.

Η σύγκριση αυτή θεωρώ πως έχει νόημα, καθώς η θετική και τεχνολογική κατεύθυνση έχουν επίκεντρο τα Μαθηματικά και οι φοιτητές που προέρχονται από αυτές τις κατευθύνσεις έχουν περισσότερες μαθηματικές γνώσεις από τους φοιτητές που προέρχονται από τη θεωρητική κατεύθυνση, όπου δεν υφίσταται ως μάθημα τα μαθηματικά. Επιπροσθέτως, οι φοιτητές που προέρχονται από θετική και τεχνολογική κατεύθυνση νιώθουν συνήθως μαθηματικά ικανοί ενώ φοιτητές που προέρχονται από τη θεωρητική κατεύθυνση, συνήθως δεν έχουν προτίμηση στα Μαθηματικά.

Συνεπώς, μπορούμε να δούμε αν σχετίζεται η μαθηματική ικανότητα με τη μαθηματική δημιουργικότητα;

Από τους 105 συμμετέχοντες στην έρευνα, οι 79 προέρχονται από τη θεωρητική κατεύθυνση ενώ οι υπόλοιποι 26 από τη θετική και τεχνολογική κατεύθυνση και συγκεκριμένα 19 από θετική και 7 από τεχνολογική κατεύθυνση.

Για να εξετάσουμε τη σχέση ανάμεσα στην "κατεύθυνση σπουδών" και στο "επίπεδο δημιουργικότητας" διενεργήθηκε έλεγχος χ2. Εφαρμόζοντας το κριτήριο χ2 για τις διακριτές αυτές μεταβλητές παρατηρούμε πως οι αναμενόμενες συχνότητες κάθε κελιού δεν είναι τουλάχιστον 5 κι επομένως χρησιμοποιήσαμε το fisher exact test.

Ο έλεγχος χ2 εξετάζει τις παρακάτω υποθέσεις:

Ho: Το επίπεδο δημιουργικότητας (πρωτοτυπία, ευχέρεια, ευελιξία) δεν εξαρτάται από την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο (θεωρητική, θετική, τεχνολογική).

H1: Το επίπεδο δημιουργικότητας (πρωτοτυπία, ευχέρεια, ευελιξία) εξαρτάται από την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο (θεωρητική, θετική, τεχνολογική).

Ειδικότερα, εξετάσαμε κάθε συνιστώσα της δημιουργικότητας και συνεπώς το επίπεδο δημιουργικότητας κάθε έργου σε σχέση με την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο.

ΕΡΓΟ 1

Α. ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ

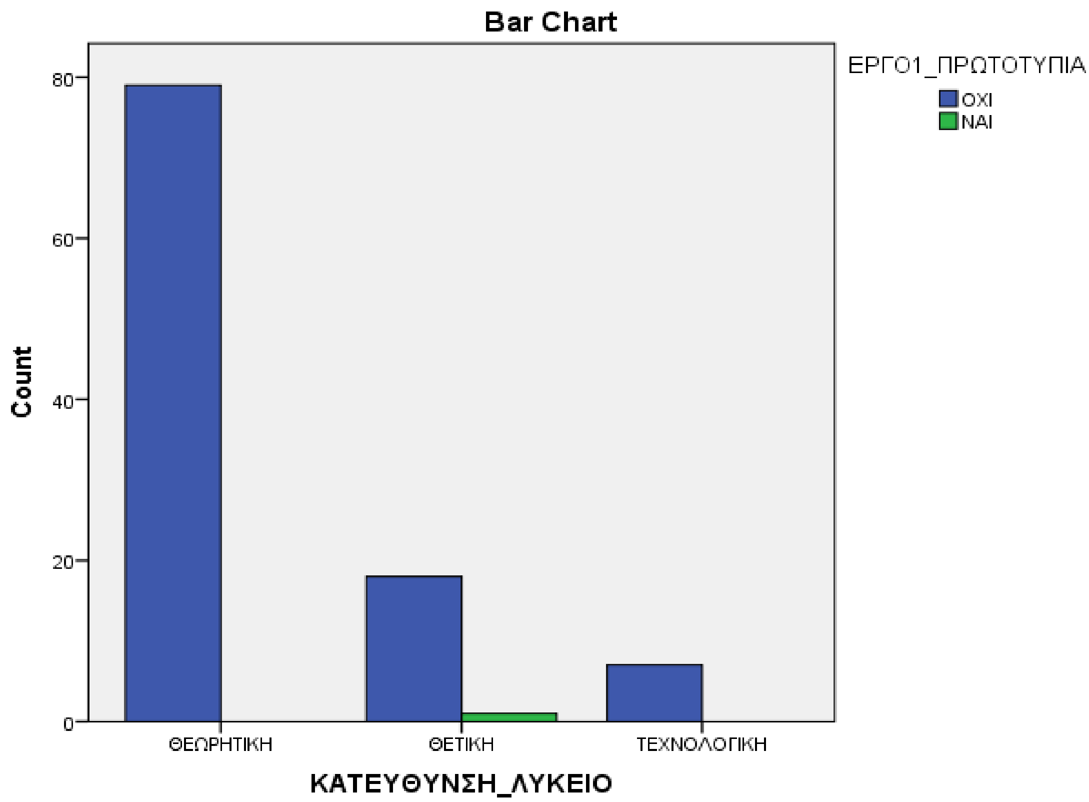
Εξετάζοντας την πρωτοτυπία στο έργο 1 παρατηρούμε ότι η τιμή p του fisher exact test είναι 0,248>0,05 (όπου 0,05 είναι το επίπεδο σημαντικότητας) και συνεπώς δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση, που συνεπάγεται πως η πρωτοτυπία στο έργο 4 δεν εξαρτάται από την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο.

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)	Point Probability
Pearson Chi-Square	4,570[a]	2	,102	,248		
Likelihood Ratio	3,463	2	,177	,248		
Fisher's Exact Test	4,465			,248		
Linear-by-Linear Association	1,348[b]	1	,246	,248	,248	,181
N of Valid Cases	105					

a. 3 cells (50,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is ,07.

b. The standardized statistic is 1,161.



Β. ΕΥΧΕΡΕΙΑ

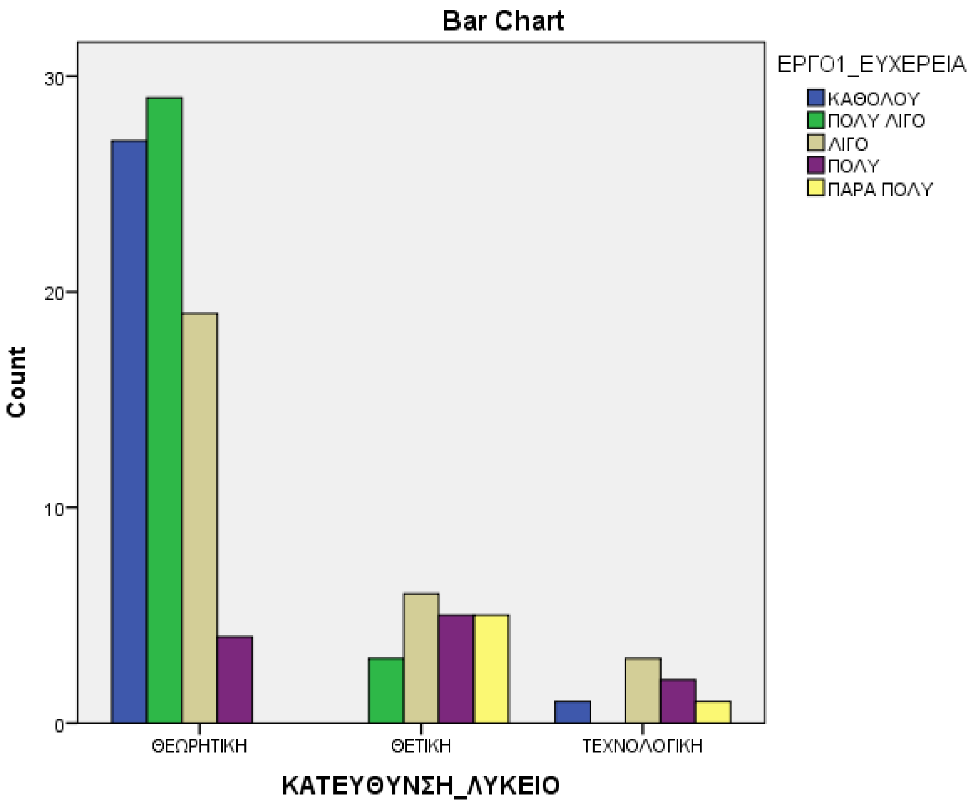
Προχωρήσαμε στη συνέχεια στην εξέταση της **ευχέρειας** και παρατηρήσαμε ότι η τιμή p του στατιστικού ελέγχου είναι 0,00<0,05 (όπου 0,05 είναι το επίπεδο σημαντικότητας) και έτσι απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση. Συνεπώς, ο έλεγχος είναι στατιστικά σημαντικός που συνεπάγεται ότι η ευχέρεια εξαρτάται από την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο.
Συγκρίνοντας στον επόμενο πίνακα τα ποσοστά ανά γραμμή και στήλη (καθώς το κριτήριο χ2 δε δείχνει την κατεύθυνση της σχέσης), προκύπτει ότι η ευχέρεια είναι σαφώς μεγαλύτερη στους συμμετέχοντες που προέρχονται από θετική και τεχνολογική κατεύθυνση, καθώς παρατηρούμε ότι πολύ μεγάλη ευχέρεια έχουν 6 συμμετέχοντες από θετική και τεχνολογική κατεύθυνση και κανένας από τη θεωρητική και μεγάλη ευχέρεια έχουν 7 συμμετέχοντες από θετική και τεχνολογική κατεύθυνση έναντι 4 από τη θεωρητική.

Το παραπάνω συμπέρασμα απεικονίζεται και στο παρακάτω διάγραμμα:

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ_ΛΥΚΕΙΟ * ΕΡΓΟ1_ΕΥΧΕΡΕΙΑ Crosstabulation

Count

		ΕΡΓΟ1_ΕΥΧΕΡΕΙΑ					Total
		ΚΑΘΟΛΟΥ	ΠΟΛΥ ΛΙΓΟ	ΛΙΓΟ	ΠΟΛΥ	ΠΑΡΑ ΠΟΛΥ	
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ_ ΛΥΚΕΙΟ	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ	27	29	19	4	0	79
	ΘΕΤΙΚΗ	0	3	6	5	5	19
	ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ	1	0	3	2	1	7
Total		28	32	28	11	6	105



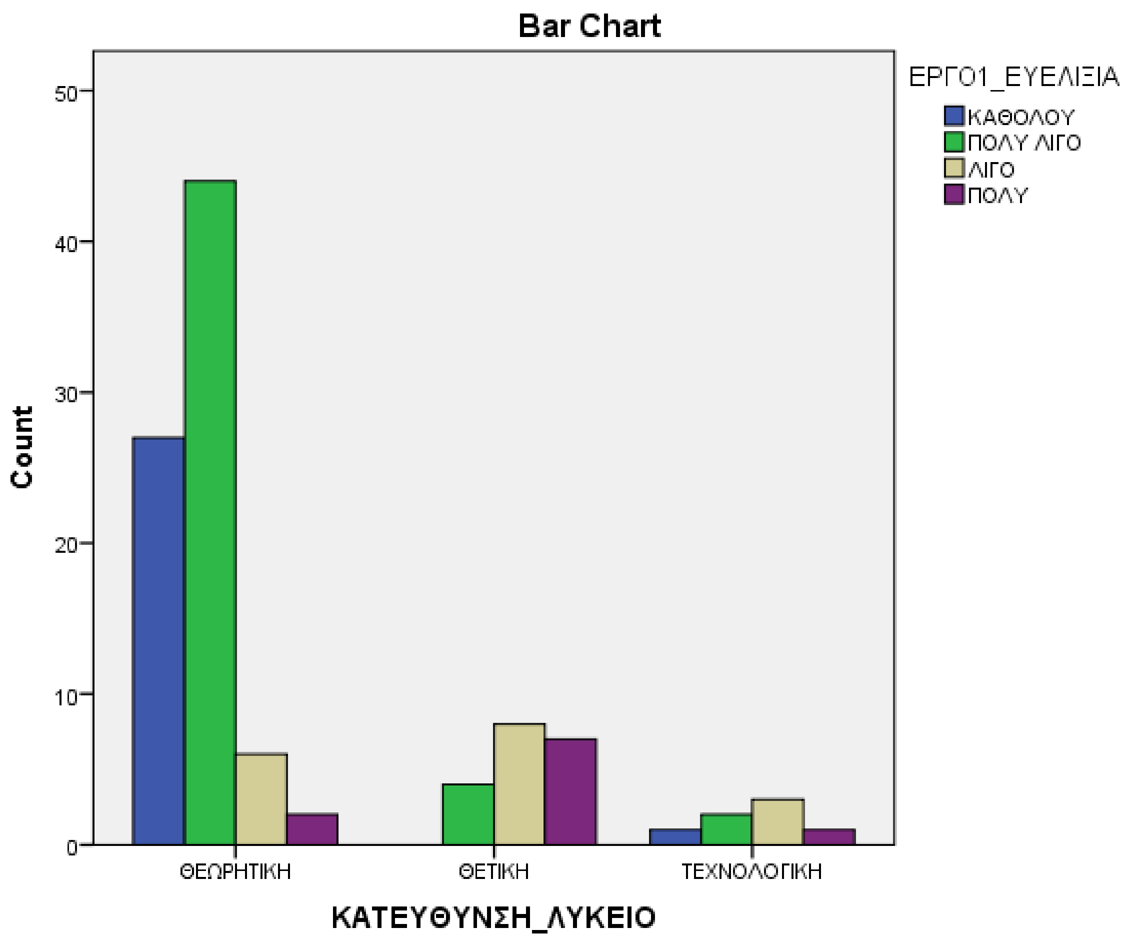
Γ. ΕΥΕΛΙΞΙΑ

Όσον αφορά την **ευελιξία** στο έργο 1 παρατηρούμε ότι η τιμή p του fisher exact test είναι 0,00<0,05 (όπου 0,05 είναι το επίπεδο σημαντικότητας) και απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση. Συνεπώς, ο έλεγχος είναι στατιστικά σημαντικός που συνεπάγεται ότι η ευελιξία στο έργο 1 εξαρτάται από την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο.
Συγκρίνοντας στο επόμενο πίνακα τα ποσοστά ανά γραμμή και στήλη (καθώς το κριτήριο χ2 δε δείχνει την κατεύθυνση της σχέσης), προκύπτει ότι η ευελιξία είναι σαφώς μεγαλύτερη στους συμμετέχοντες που προέρχονται από θετική και τεχνολογική κατεύθυνση, καθώς παρατηρούμε ότι μεγάλη ευχέρεια έχουν 8 συμμετέχοντες από θετική και τεχνολογική κατεύθυνση και 2 από τη θεωρητική, γεγονός που εμφαίνεται και στο ακόλουθο ραβδόγραμμα.

Crosstab

Count

		ΕΡΓΟ1_ΕΥΕΛΙΞΙΑ				Total
		ΚΑΘΟΛΟΥ	ΠΟΛΥ ΛΙΓΟ	ΛΙΓΟ	ΠΟΛΥ	
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ_ΛΥΚΕΙΟ	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ	27	44	6	2	79
	ΘΕΤΙΚΗ	0	4	8	7	19
	ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ	1	2	3	1	7
Total		28	50	17	10	105

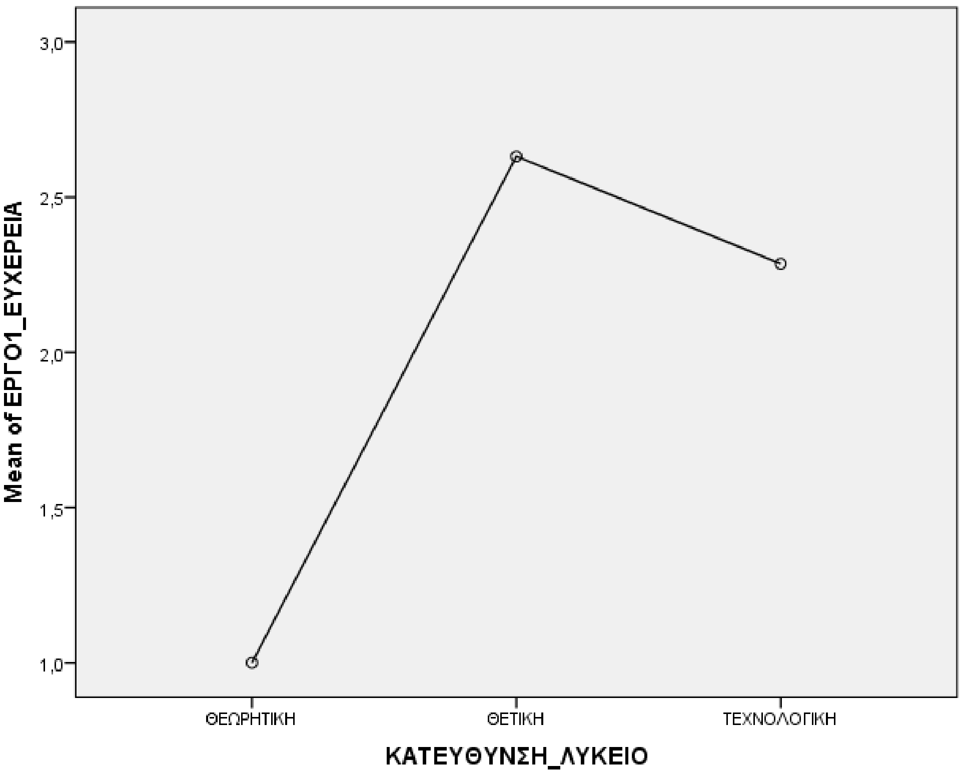


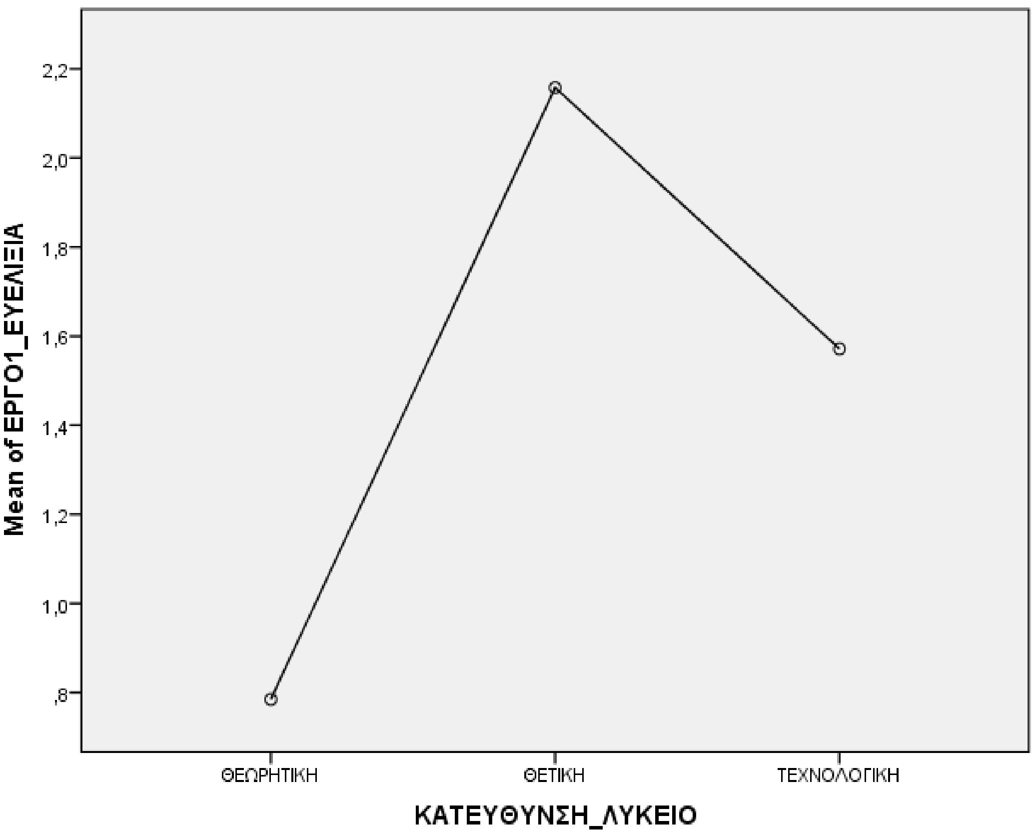
Άλλωστε εφαρμόζοντας το μοντέλο ANOVA για το έργο 1 έχουμε p = 0.000 για την ευχέρεια και την ευελιξία που συνεπάγεται στατιστικά σημαντική σχέση ανάμεσα σε αυτές τις δύο συνιστώσες της δημιουργικότητας με την κατεύθυνση Σπουδών στο Λύκειο.
Παρατηρούμε μεγάλο Μ.Ο. στη θετική κατεύθυνση (ευχέρεια=2,63/ευελιξία=2.16) και στην τεχνολογική κατεύθυνση (ευχέρεια=2,29/ευελιξία=1,57), ενώ στη θεωρητική κατεύθυνση πολύ μικρό Μ.Ο. (ευχέρεια=1/ευελιξία=0,78).

Descriptives

		N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean		Minimum	Maximum
						Lower Bound	Upper Bound		
ΕΡΓΟ1_ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ	79	,00	,000	,000	,00	,00	0	0
	ΘΕΤΙΚΗ	19	,05	,229	,053	-,06	,16	0	1
	ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ	7	,00	,000	,000	,00	,00	0	0
	Total	105	,01	,098	,010	-,01	,03	0	1
ΕΡΓΟ1_ΕΥΧΕΡΕΙΑ	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ	79	**1,00**	,892	,100	,80	1,20	0	3
	ΘΕΤΙΚΗ	19	**2,63**	1,065	,244	2,12	3,14	1	4
	ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ	7	**2,29**	1,254	,474	1,13	3,45	0	4
	Total	105	**1,38**	1,155	,113	1,16	1,60	0	4
ΕΡΓΟ1_ΕΥΕΛΙΞΙΑ	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ	79	**,78**	,692	,078	,63	,94	0	3
	ΘΕΤΙΚΗ	19	**2,16**	,765	,175	1,79	2,53	1	3
	ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ	7	**1,57**	,976	,369	,67	2,47	0	3
	Total	105	**1,09**	,900	,088	,91	1,26	0	3

Οι Μ.Ο. της ευχέρειας και της ευελιξίας αποτυπώνονται παραστατικά και στα παρακάτω γραφήματα:


3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
Mean of ΕΡΓΟ1_ΕΥΧΕΡΕΙΑ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ
ΘΕΤΙΚΗ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ_ΛΥΚΕΙΟ


2,2
2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
,8
Mean of ΕΡΓΟ1_ΕΥΕΛΙΞΙΑ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ
ΘΕΤΙΚΗ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ_ΛΥΚΕΙΟ

<u>**ΕΡΓΟ 2**</u>

Α. ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ

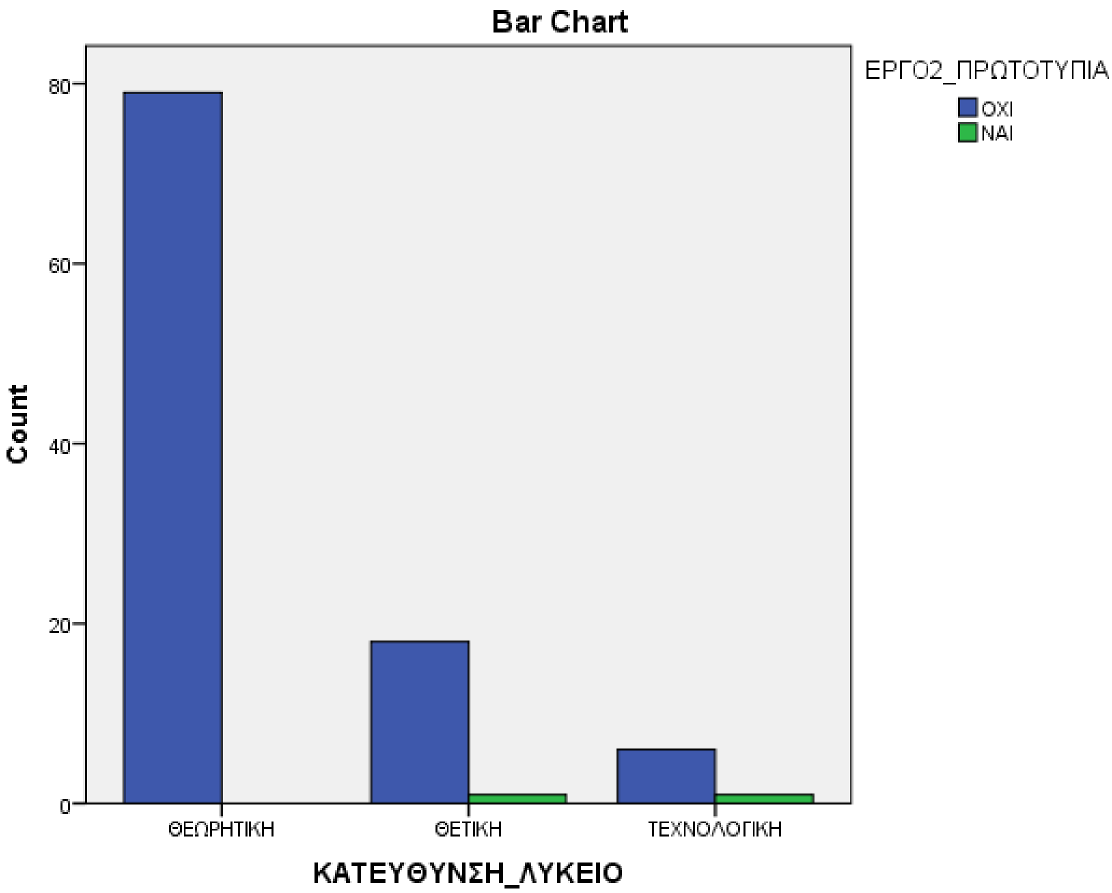
Εξετάζοντας την **πρωτοτυπία** στο έργο 2 παρατηρούμε ότι η τιμή p του στατιστικού ελέγχου είναι 0,028<0,05 (όπου 0,05 είναι το επίπεδο σημαντικότητας) και τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση. Συνεπώς, ο έλεγχος είναι στατιστικά σημαντικός που συνεπάγεται ότι η πρωτοτυπία εξαρτάται από την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο.

Συγκρίνοντας στον επόμενο πίνακα τα ποσοστά ανά γραμμή και στήλη (καθώς το κριτήριο χ2 δε δείχνει την κατεύθυνση της σχέσης), προκύπτει ότι υπάρχουν 2 μόνον πρωτότυπες απαντήσεις, οι οποίες προέρχονται από τη θετική και την τεχνολογική κατεύθυνση αποκλειστικά, όπως εμφαίνεται ευδιάκριτα και στο επόμενο ραβδόγραμμα.

Crosstab

Count

		ΕΡΓΟ2_ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ		Total
		ΟΧΙ	ΝΑΙ	
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ_ΛΥΚΕΙΟ	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ	79	0	79
	ΘΕΤΙΚΗ	18	1	19
	ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ	6	1	7
Total		103	2	105



Β. ΕΥΧΕΡΕΙΑ

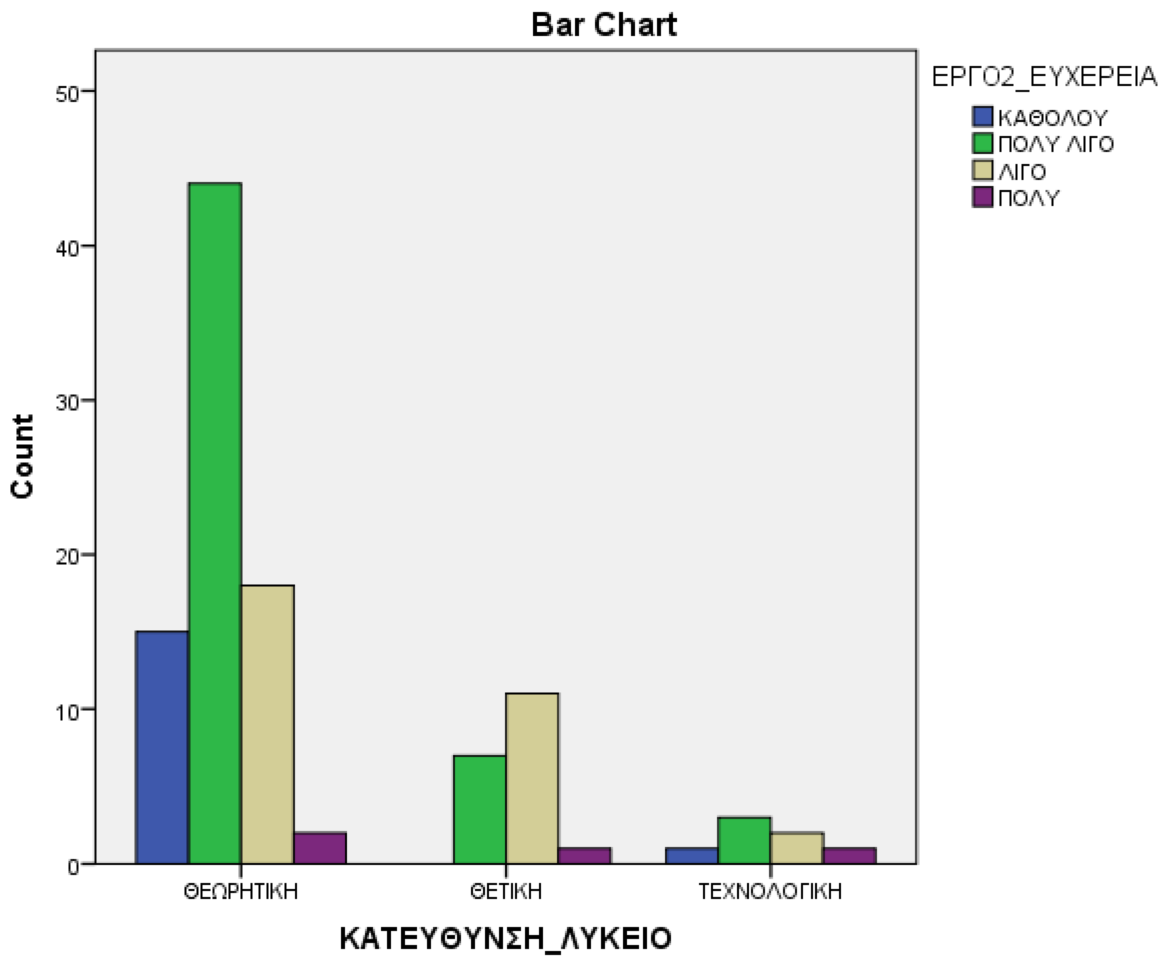
Προχωρήσαμε στη συνέχεια στην εξέταση της **ευχέρειας** και παρατηρήσαμε ότι η τιμή p του στατιστικού ελέγχου είναι 0,015<0,05 (όπου 0,05 είναι το επίπεδο σημαντικότητας) και έτσι απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση. Συνεπώς, ο έλεγχος είναι στατιστικά σημαντικός που συνεπάγεται ότι η ευχέρεια εξαρτάται από την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο.

Συγκρίνοντας στον επόμενο πίνακα τα ποσοστά ανά γραμμή και στήλη (καθώς το κριτήριο χ2 δε δείχνει την κατεύθυνση της σχέσης), προκύπτει πως, μόνον 2 συμμετέχοντες που προέρχονται από θετική και τεχνολογική κατεύθυνση, διαθέτουν μεγάλη ευχέρεια, όσοι δηλαδή και και αυτοί που προέρχονται από τη θεωρητική.

Crosstab

Count

		ΕΡΓΟ2_ΕΥΧΕΡΕΙΑ				Total
		ΚΑΘΟΛΟΥ	ΠΟΛΥ ΛΙΓΟ	ΛΙΓΟ	ΠΟΛΥ	
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ_ΛΥΚΕΙΟ	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ	15	44	18	2	79
	ΘΕΤΙΚΗ	0	7	11	1	19
	ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ	1	3	2	1	7
Total		16	54	31	4	105



Γ. ΕΥΕΛΙΞΙΑ

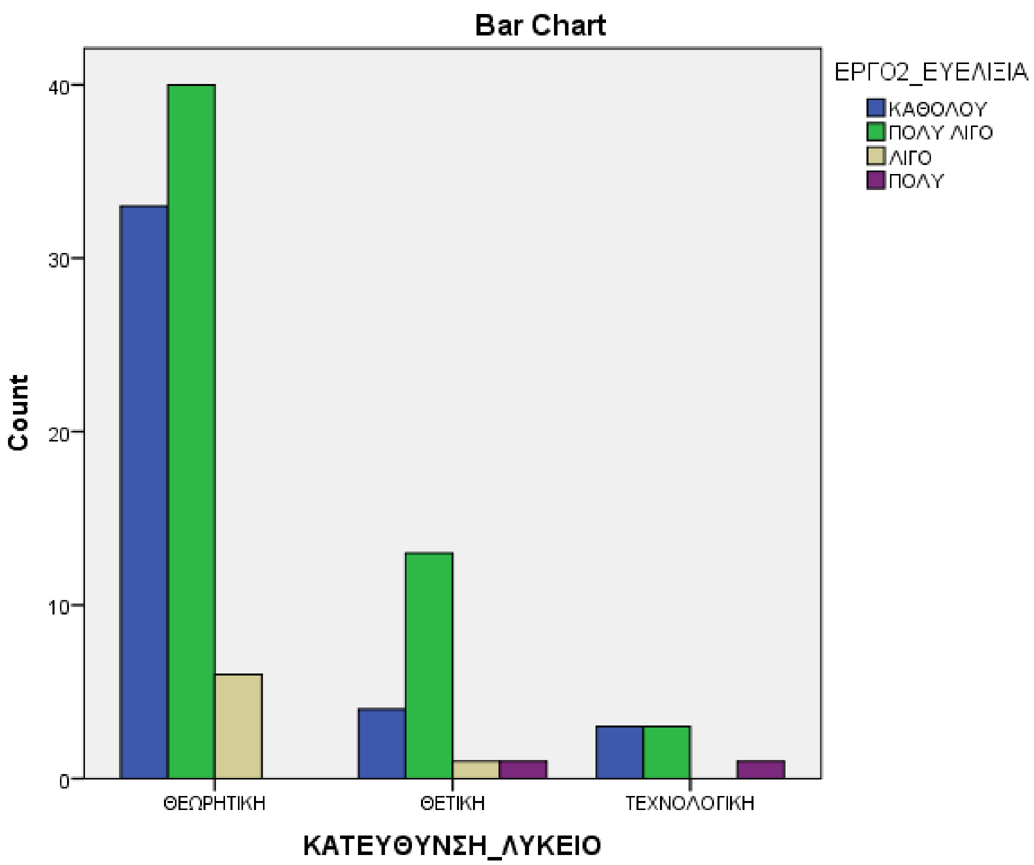
Όσον αφορά την **ευελιξία** στο έργο 2 παρατηρούμε ότι η τιμή p του fisher exact test είναι 0,09>0,05 (όπου 0,05 είναι το επίπεδο σημαντικότητας) και συνεπώς δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση, που συνεπάγεται πως η ευελιξία στο έργο 2 δεν εξαρτάται από την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο.

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)	Point Probability
Pearson Chi-Square	11,722[a]	6	,068	,079		
Likelihood Ratio	10,206	6	,116	,110		
Fisher's Exact Test	9,946			,090		
Linear-by-Linear Association	2,259[b]	1	,133	,141	,087	,031
N of Valid Cases	105					

a. 7 cells (58,3%) have expected count less than 5. The minimum expected count is ,13.

b. The standardized statistic is 1,503.

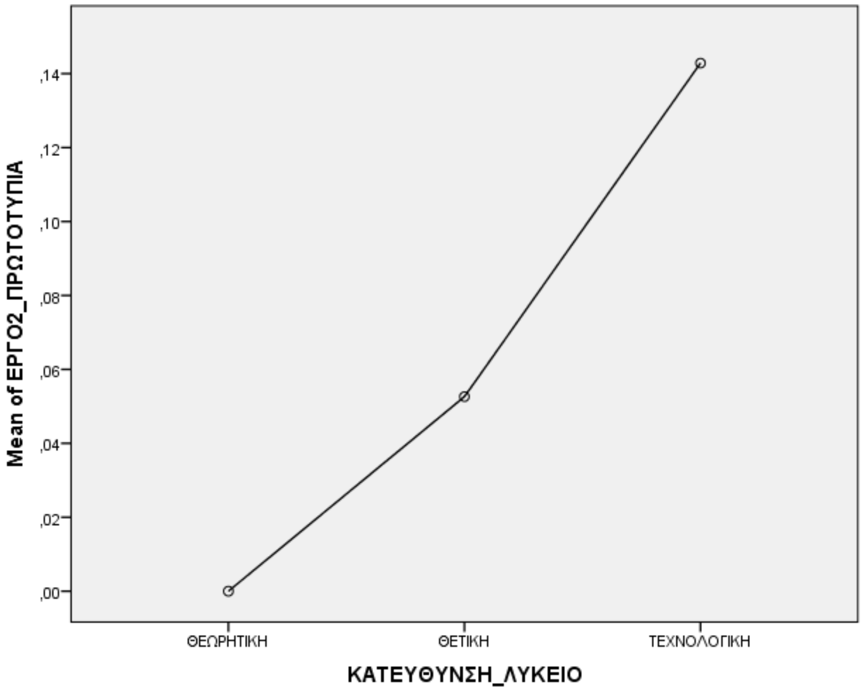


Άλλωστε εφαρμόζοντας το μοντέλο ANOVA για το έργο 2 έχουμε p = 0.014 και p = 0.005 για την πρωτοτυπία και την ευχέρεια αντίστοιχα που συνεπάγεται στατιστικά σημαντική σχέση ανάμεσα σε αυτές τις δύο συνιστώσες της δημιουργικότητας με την κατεύθυνση Σπουδών στο Λύκειο, ενώ δεν προκύπτει στατιστικά σημαντικά σχέση με την ευελιξία.
Παρατηρούμε Μ.Ο. ευχέρειας στη θετική κατεύθυνση 1,68 > Μ.Ο. τεχνολογικής κατεύθυνσης 1,43> Μ.Ο. θεωρητικής κατεύθυνσης 1,09.

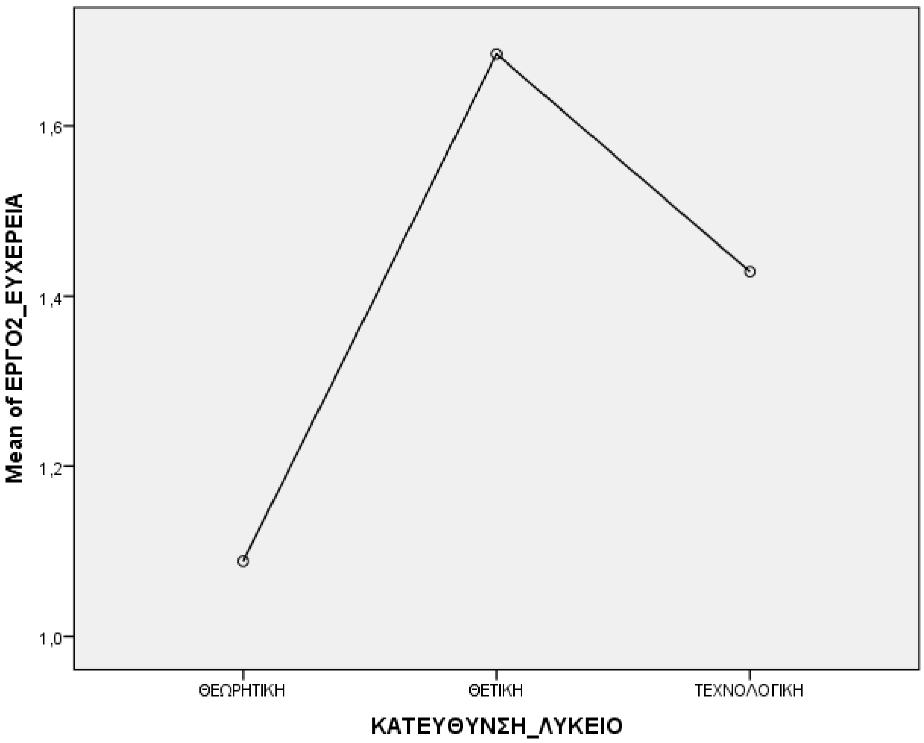
Descriptives

		N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean		Minimum	Maximum
						Lower Bound	Upper Bound		
ΕΡΓΟ2_ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ	79	,00	,000	,000	,00	,00	0	0
	ΘΕΤΙΚΗ	19	,05	,229	,053	-,06	,16	0	1
	ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ	7	,14	,378	,143	-,21	,49	0	1
	Total	105	,02	,137	,013	-,01	,05	0	1
ΕΡΓΟ2_ΕΥΧΕΡΕΙΑ	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ	79	**1,09**	,720	,081	,93	1,25	0	3
	ΘΕΤΙΚΗ	19	**1,68**	,582	,134	1,40	1,96	1	3
	ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ	7	**1,43**	,976	,369	,53	2,33	0	3
	Total	105	1,22	,747	,073	1,07	1,36	0	3
ΕΡΓΟ2_ΕΥΕΛΙΞΙΑ	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ	79	**,66**	,618	,070	,52	,80	0	2
	ΘΕΤΙΚΗ	19	**,95**	,705	,162	,61	1,29	0	3
	ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ	7	**,86**	1,069	,404	-,13	1,85	0	3
	Total	105	,72	,672	,066	,59	,85	0	3

Τα παραπάνω αποτυπώνονται παραστατικά και στα παρακάτω γραφήματα:



Mean of ΕΡΓΟ2_ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ
,14
,12
,10
,08
,06
,04
,02
,00
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ
ΘΕΤΙΚΗ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ_ΛΥΚΕΙΟ



Mean of ΕΡΓΟ2_ΕΥΧΕΡΕΙΑ
1,6
1,4
1,2
1,0
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ
ΘΕΤΙΚΗ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ_ΛΥΚΕΙΟ

ΕΡΓΟ 3

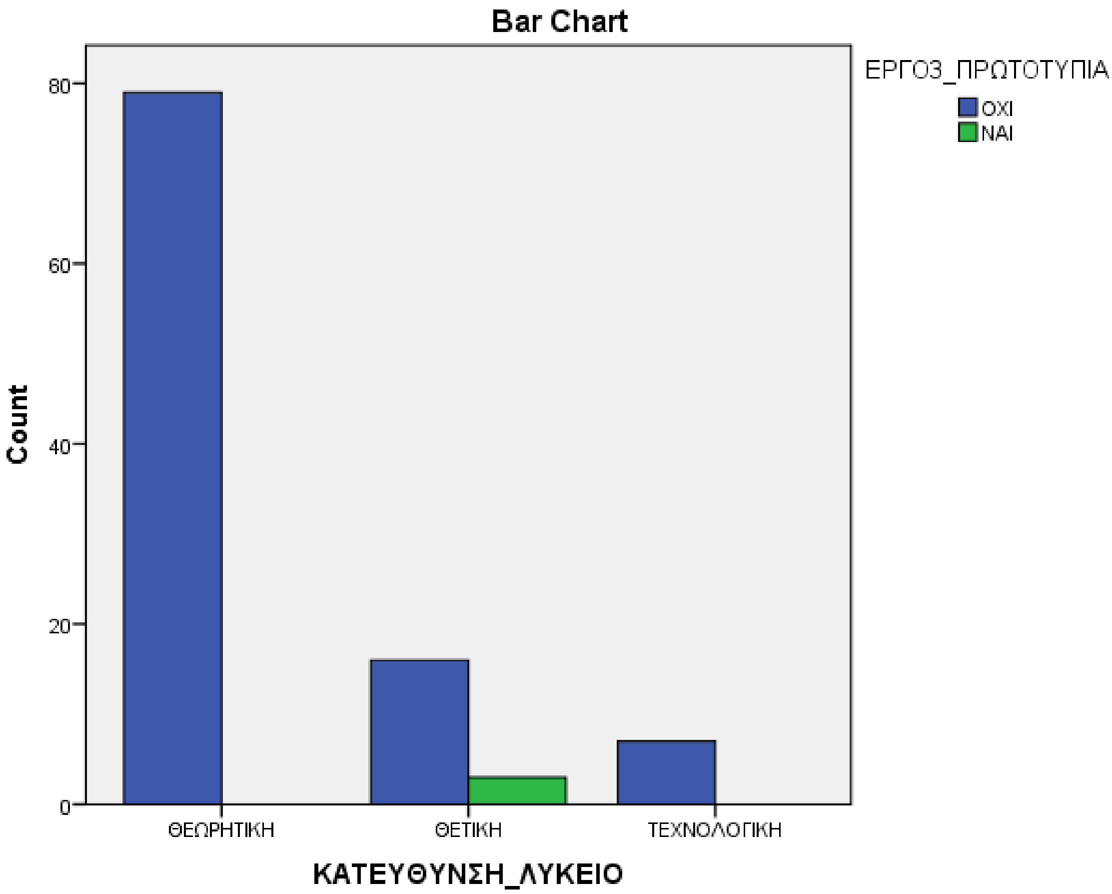
Α.ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ

Εξετάζοντας την **πρωτοτυπία** στο έργο 3 παρατηρούμε ότι η τιμή p του στατιστικού ελέγχου είναι 0,007<0,05 (όπου 0,05 είναι το επίπεδο σημαντικότητας) και τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση. Συνεπώς, ο έλεγχος είναι στατιστικά σημαντικός που συνεπάγεται ότι η πρωτοτυπία εξαρτάται από την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο.
Συγκρίνοντας στον επόμενο πίνακα τα ποσοστά ανά γραμμή και στήλη (καθώς το κριτήριο χ2 δε δείχνει την κατεύθυνση της σχέσης), προκύπτει ότι υπάρχουν τρεις (3) μόνον πρωτότυπες απαντήσεις, οι οποίες προέρχονται από τη θετική κατεύθυνση αποκλειστικά, όπως εμφαίνεται ευδιάκριτα και στο επόμενο ραβδόγραμμα.

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ_ΛΥΚΕΙΟ * ΕΡΓΟ3_ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ Crosstabulation

Count

		ΕΡΓΟ3_ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ		Total
		ΟΧΙ	ΝΑΙ	
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ_ΛΥΚΕΙΟ	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ	79	0	79
	ΘΕΤΙΚΗ	16	3	19
	ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ	7	0	7
Total		102	3	105



B. ΕΥΧΕΡΕΙΑ

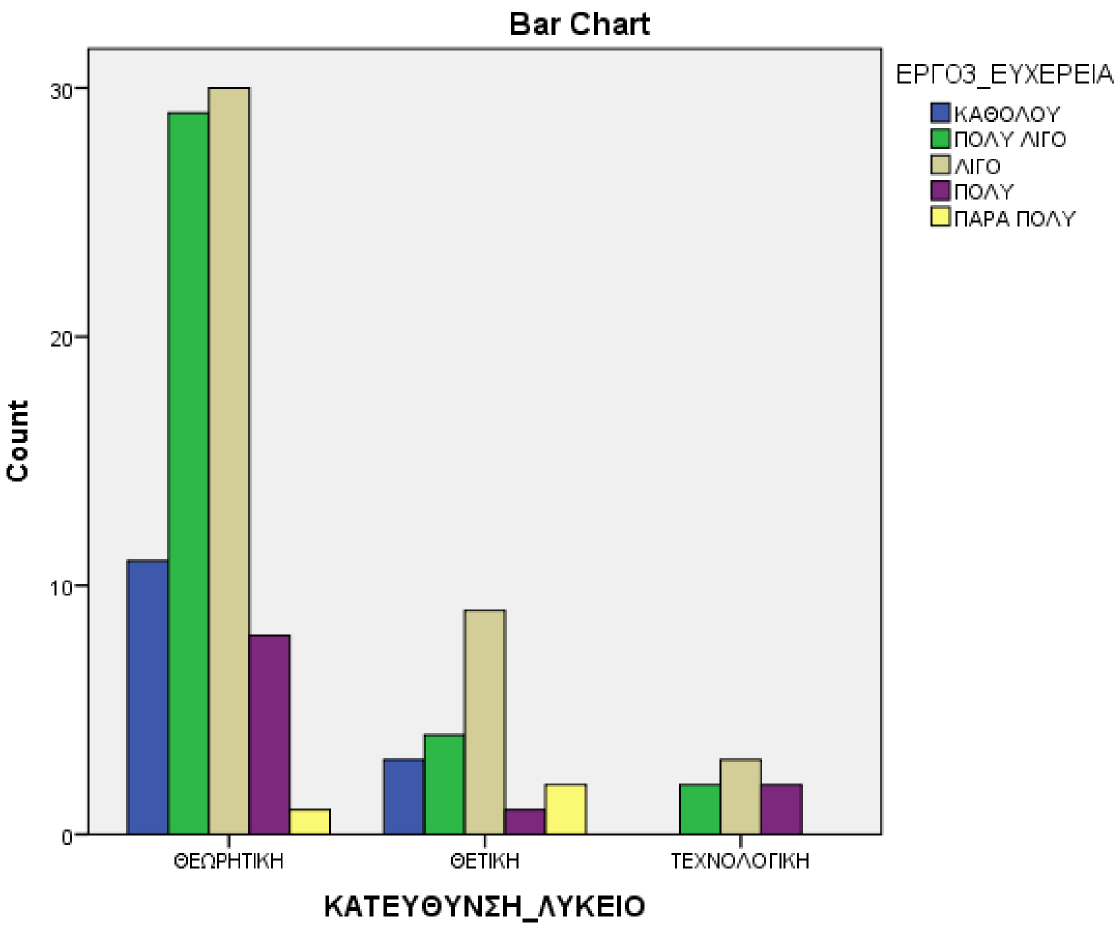
Όσον αφορά την **ευχέρεια** στο έργο 3 παρατηρούμε ότι η τιμή p του fisher exact test είναι 0,301>0,05 (όπου 0,05 είναι το επίπεδο σημαντικότητας) και συνεπώς δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση, που συνεπάγεται πως η ευχέρεια στο έργο 3 δεν εξαρτάται από την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο.

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)	Point Probability
Pearson Chi-Square	10,072[a]	8	,260	,248		
Likelihood Ratio	9,291	8	,318	,380		
Fisher's Exact Test	8,612			,301		
Linear-by-Linear Association	2,706[b]	1	,100	,117	,061	,018
N of Valid Cases	105					

a. 9 cells (60,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is ,20.

b. The standardized statistic is 1,645.



Γ. ΕΥΕΛΙΞΙΑ

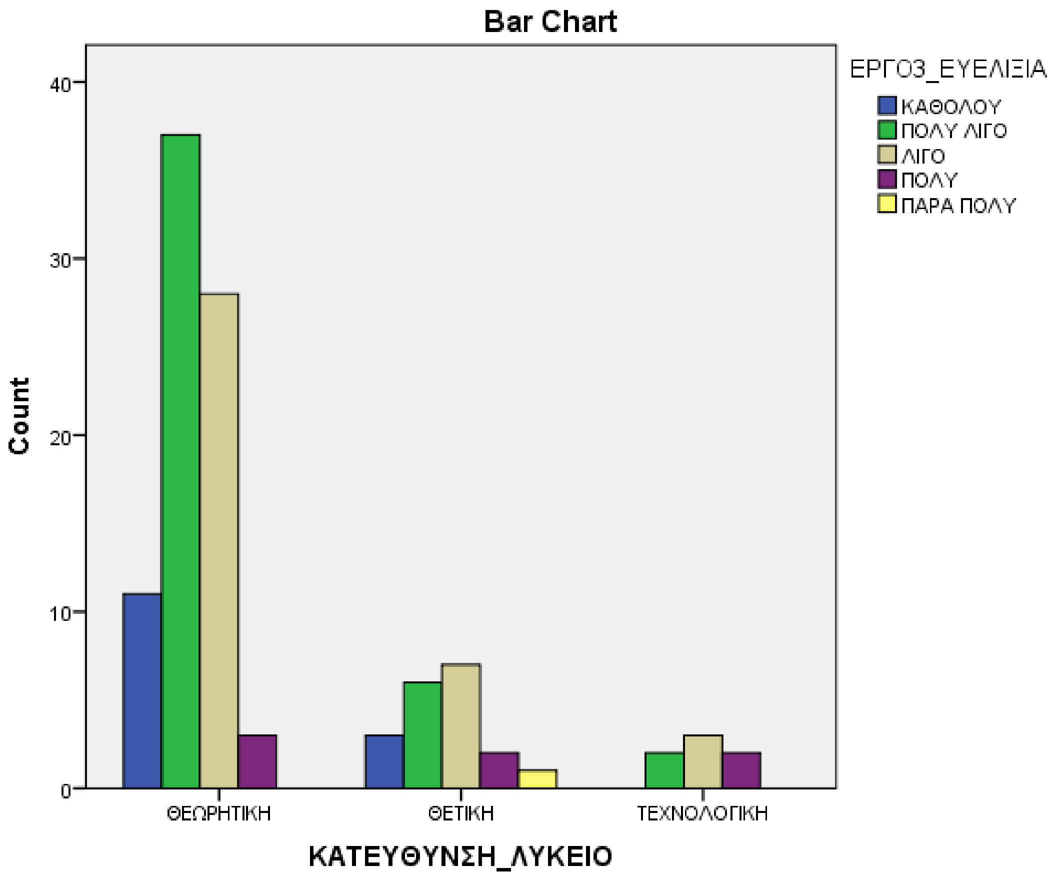
Όσον αφορά την **ευελιξία** στο έργο 3 παρατηρούμε ότι η τιμή p του fisher exact test είναι 0,124>0,05 (όπου 0,05 είναι το επίπεδο σημαντικότητας) και συνεπώς δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση, που συνεπάγεται πως η ευελιξία στο έργο 2 δεν εξαρτάται από την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο.

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)	Point Probability
Pearson Chi-Square	13,294[a]	8	,102	,132		
Likelihood Ratio	11,037	8	,200	,204		
Fisher's Exact Test	11,814			,124		
Linear-by-Linear Association	5,709[b]	1	,017	,018	,011	,005
N of Valid Cases	105					

a. 9 cells (60,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is ,07.

b. The standardized statistic is 2,389.



<u>**ΕΡΓΟ 4**</u>

Α. ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ

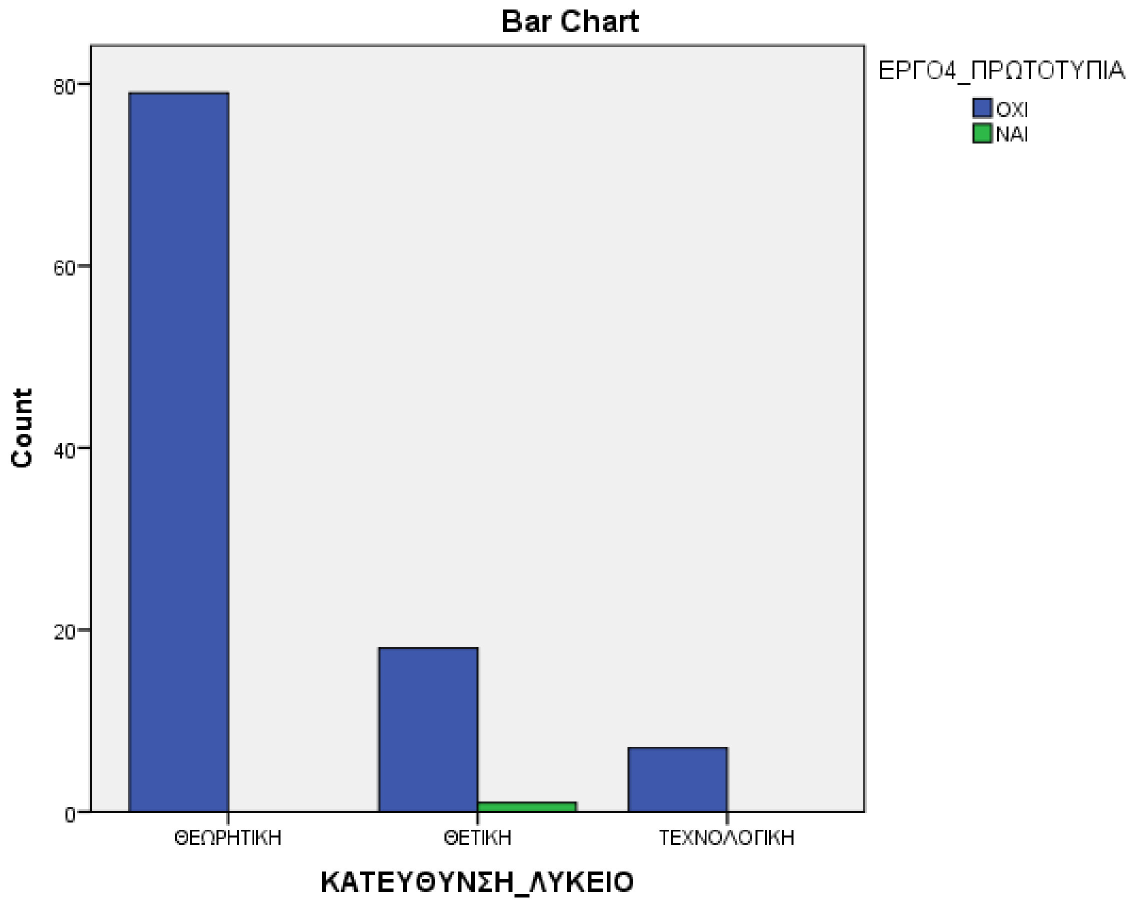
Εξετάζοντας την **πρωτοτυπία** στο έργο 4 παρατηρούμε ότι η τιμή p του fisher exact test είναι 0,248>0,05 (όπου 0,05 είναι το επίπεδο σημαντικότητας) και συνεπώς δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση, που συνεπάγεται πως η πρωτοτυπία στο έργο 4 δεν εξαρτάται από την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο.

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)	Point Probability
Pearson Chi-Square	4,570[a]	2	,102	,248		
Likelihood Ratio	3,463	2	,177	,248		
Fisher's Exact Test	4,465			,248		
Linear-by-Linear Association	1,348[b]	1	,246	,248	,248	,181
N of Valid Cases	105					

a. 3 cells (50,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is ,07.

b. The standardized statistic is 1,161.



Β. ΕΥΧΕΡΕΙΑ

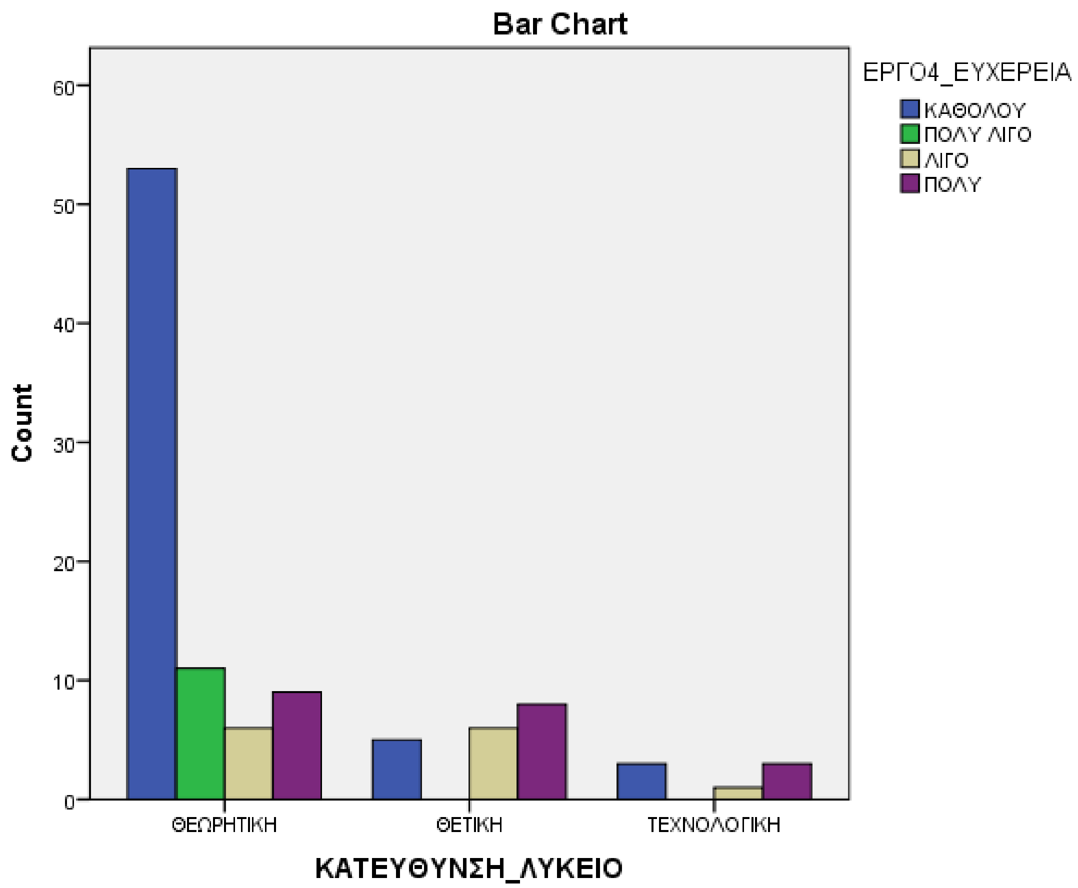
Προχωρήσαμε στη συνέχεια στην εξέταση της **ευχέρειας** και παρατηρήσαμε ότι η τιμή p του στατιστικού ελέγχου είναι 0,000<0,05 (όπου 0,05 είναι το επίπεδο σημαντικότητας) και έτσι απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση. Συνεπώς, ο έλεγχος είναι στατιστικά σημαντικός που συνεπάγεται ότι η ευχέρεια στο έργο 4 εξαρτάται από την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο.
Συγκρίνοντας στον επόμενο πίνακα τα ποσοστά ανά γραμμή και στήλη (καθώς το κριτήριο χ2 δε δείχνει την κατεύθυνση της σχέσης), προκύπτει πως 11 συμμετέχοντες που προέρχονται από θετική και τεχνολογική κατεύθυνση και 9 συμμετέχοντες που προέρχονται από θεωρητική κατεύθυνση διαθέτουν μεγάλη ευχέρεια.

Crosstab

Count

		ΕΡΓΟ4_ΕΥΧΕΡΕΙΑ				Total
		ΚΑΘΟΛΟΥ	ΠΟΛΥ ΛΙΓΟ	ΛΙΓΟ	ΠΟΛΥ	
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ_ΛΥΚΕΙΟ	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ	53	11	6	9	79
	ΘΕΤΙΚΗ	5	0	6	8	19
	ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ	3	0	1	3	7
Total		61	11	13	20	105

Παραθέτουμε στη συνέχεια και το αντίστοιχο ραβδόγραμμα, όπου εμφαίνεται μεγαλύτερη ευχέρεια στους συμμετέχοντες της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης.



Γ. ΕΥΕΛΙΞΙΑ

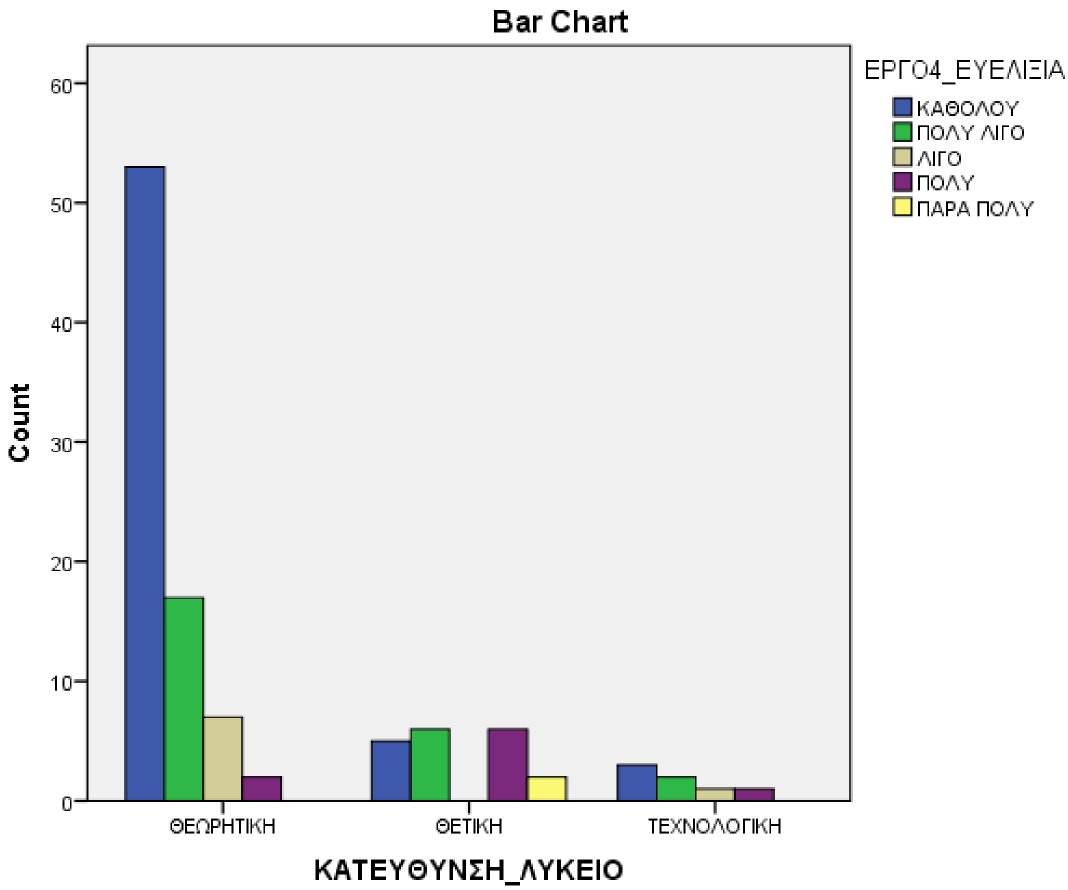
Όσον αφορά την **ευελιξία** στο έργο 4 παρατηρούμε ότι η τιμή p του fisher exact test είναι 0,00<0,05 (όπου 0,05 είναι το επίπεδο σημαντικότητας) και απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση. Συνεπώς, ο έλεγχος είναι στατιστικά σημαντικός που συνεπάγεται ότι η ευελιξία στο έργο 1 εξαρτάται από την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο.

Συγκρίνοντας στο επόμενο πίνακα τα ποσοστά ανά γραμμή και στήλη (καθώς το κριτήριο χ2 δε δείχνει την κατεύθυνση της σχέσης), προκύπτει ότι η ευελιξία είναι σαφώς μεγαλύτερη στους συμμετέχοντες που προέρχονται από θετική και τεχνολογική κατεύθυνση, καθώς παρατηρούμε ότι πολύ μεγάλη ευελιξία έχουν 2 συμμετέχοντες από θετική κατεύθυνση και κανένας από τη θεωρητική κατεύθυνση και 7 από θετική και τεχνολογική κατεύθυνση έχουν μεγάλη ευχέρεια έναντι 2 από τη θεωρητική, γεγονός που εμφαίνεται και στο ραβδόγραμμα που ακολουθεί.

Crosstab

Count

		ΕΡΓΟ4_ΕΥΕΛΙΞΙΑ					Total
		ΚΑΘΟΛΟΥ	ΠΟΛΥ ΛΙΓΟ	ΛΙΓΟ	ΠΟΛΥ	ΠΑΡΑ ΠΟΛΥ	
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ_ΛΥΚΕΙΟ	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ	53	17	7	2	0	79
	ΘΕΤΙΚΗ	5	6	0	6	2	19
	ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ	3	2	1	1	0	7
Total		61	25	8	9	2	105

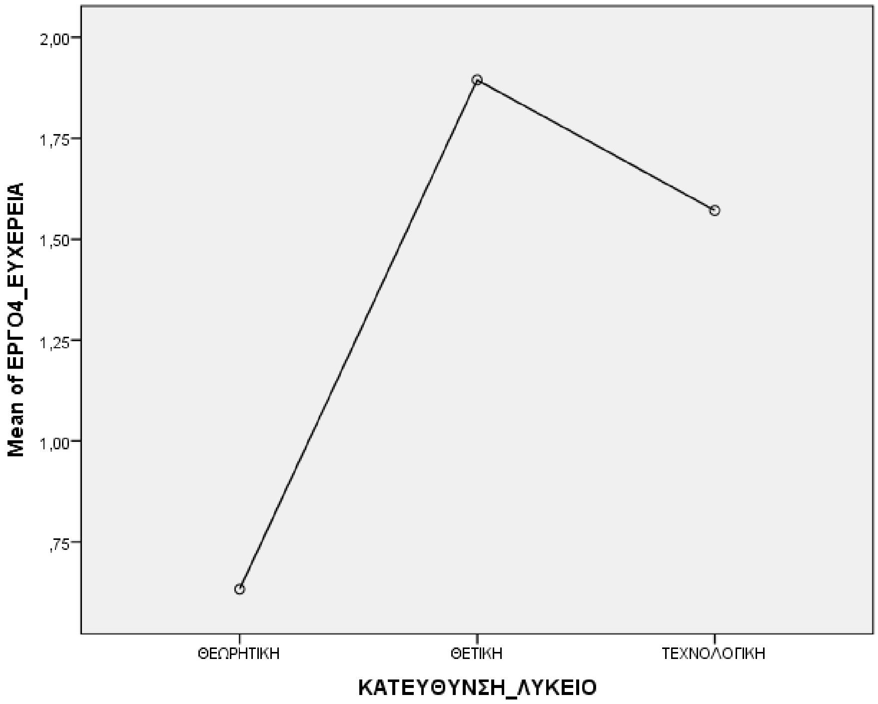


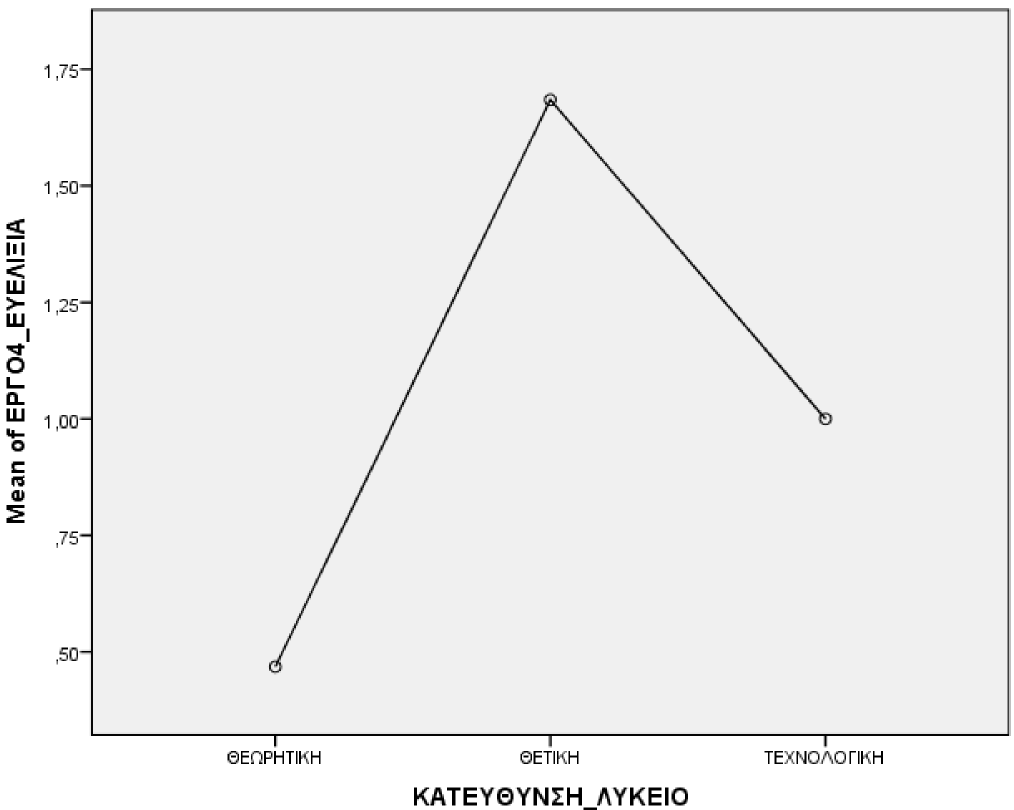
Άλλωστε εφαρμόζοντας το μοντέλο ANOVA για το έργο 4 έχουμε p = 0.000 για την ευχέρεια και την ευελιξία, που συνεπάγεται στατιστικά σημαντική σχέση ανάμεσα σε αυτές τις δύο συνιστώσες της δημιουργικότητας με την κατεύθυνση Σπουδών στο Λύκειο, ενώ δεν προκύπτει στατιστικά σημαντικά σχέση με την πρωτοτυπία.
Παρατηρούμε
Μ.Ο. ευχέρειας στη θετική κατεύθυνση 1,89 > Μ.Ο. τεχνολογικής κατεύθυνσης 1,57> Μ.Ο. θεωρητικής κατεύθυνσης 0,63 και
Μ.Ο. ευελιξίας στη θετική κατεύθυνση 1,68 > Μ.Ο. τεχνολογικής κατεύθυνσης 1> Μ.Ο. θεωρητικής κατεύθυνσης 0,47.

Descriptives

		N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean		Minimum	Maximum
						Lower Bound	Upper Bound		
ΕΡΓΟ4_ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ	79	,00	,000	,000	,00	,00	0	0
	ΘΕΤΙΚΗ	19	,05	,229	,053	-,06	,16	0	1
	ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ	7	,00	,000	,000	,00	,00	0	0
	Total	105	,01	,098	,010	-,01	,03	0	1
ΕΡΓΟ4_ΕΥΧΕΡΕΙΑ	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ	79	**,63**	1,040	,117	,40	,87	0	3
	ΘΕΤΙΚΗ	19	**1,89**	1,243	,285	1,30	2,49	0	3
	ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ	7	**1,57**	1,512	,571	,17	2,97	0	3
	Total	105	,92	1,214	,119	,69	1,16	0	3
ΕΡΓΟ4_ΕΥΕΛΙΞΙΑ	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ	79	**,47**	,765	,086	,30	,64	0	3
	ΘΕΤΙΚΗ	19	**1,68**	1,455	,334	,98	2,39	0	4
	ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ	7	**1,00**	1,155	,436	-,07	2,07	0	3
	Total	105	,72	1,052	,103	,52	,93	0	4

Οι Μ.Ο. της ευχέρειας και της ευελιξίας αποτυπώνονται παραστατικά και στα παρακάτω γραφήματα:


2,00
1,75
1,50
1,25
1,00
,75
Mean of ΕΡΓΟ4_ΕΥΧΕΡΕΙΑ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ
ΘΕΤΙΚΗ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ_ΛΥΚΕΙΟ


1,75
1,50
1,25
1,00
,75
,50
Mean of ΕΡΓΟ4_ΕΥΕΛΙΞΙΑ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ
ΘΕΤΙΚΗ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ_ΛΥΚΕΙΟ

Συνοψίζοντας τα ανωτέρω δεδομένα, παρατηρούμε ότι **το επίπεδο δημιουργικότητας (ευχέρεια, ευελιξία) στο έργο 1**, το οποίο αποτελεί ένα MST ως προς την επίλυση μιας εξίσωσης, εξαρτάται από την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο και ειδικότερα οι συμμετέχοντες που προέρχονται από θετική και τεχνολογική κατεύθυνση έχουν μεγαλύτερο επίπεδο δημιουργικότητας από τους συμμετέχοντες που προέρχονται από τη θεωρητική κατεύθυνση. Η **πρωτοτυπία** στο έργο 1 δεν είχε στατιστικά σημαντική σχέση με την κατεύθυνση σπουδών.

Το επίπεδο δημιουργικότητας (πρωτοτυπία, ευχέρεια) στο έργο 2, το οποίο αποτελεί μια σύνθεση προβλήματος όπως το παράδειγμα, εξαρτάται από την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο και ειδικότερα οι συμμετέχοντες που προέρχονται από θετική και τεχνολογική κατεύθυνση έχουν μεγαλύτερο επίπεδο δημιουργικότητας από τους συμμετέχοντες που προέρχονται από τη θεωρητική κατεύθυνση. **Η ευελιξία**, όμως του έργου δεν είχε στατιστικά σημαντική σχέση με την κατεύθυνση σπουδών.

Το επίπεδο δημιουργικότητας (μόνον ως προς την πρωτοτυπία) στο έργο 3, το οποίο αποτελεί μια σύνθεση προβλήματος, το οποίο έχει συγκεκριμένο αποτέλεσμα, εξαρτάται από την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο και ειδικότερα οι συμμετέχοντες που προέρχονται από θετική και τεχνολογική κατεύθυνση δίνουν πρωτότυπες σε αντίθεση με τους συμμετέχοντες που προέρχονται από τη θεωρητική κατεύθυνση. **Η ευχέρεια και η ευελιξία**, όμως, του έργου δεν είχε στατιστικά σημαντική σχέση με την κατεύθυνση σπουδών.

Τέλος, τ**ο επίπεδο δημιουργικότητας (ευχέρεια, ευελιξία) στο έργο 4**, το οποίο αποτελεί μία εργασία ανοικτού τύπου που επιδέχεται πολλές απαντήσεις εκτελώντας, όμως, συγκεκριμένες λειτουργίες, εξαρτάται από την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο και ειδικότερα οι συμμετέχοντες που προέρχονται από θετική και τεχνολογική κατεύθυνση έχουν μεγαλύτερο επίπεδο δημιουργικότητας από τους συμμετέχοντες που προέρχονται από τη θεωρητική κατεύθυνση. Η **πρωτοτυπία** στο έργο 4 δεν είχε στατιστικά σημαντική σχέση με την κατεύθυνση σπουδών.

Συζήτηση

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μέτρηση της μαθηματικής δημιουργικότητας των υποψηφίων εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με τη χρήση ενός εργαλείου που κατασκευάστηκε για τον λόγο αυτό. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να είναι κατάλληλα προετοιμασμένοι προκειμένου να προωθήσουν τη μαθηματική δημιουργικότητα στους μαθητές τους ώστε να καταστούν αυτοί ενεργοί πολίτες στο μέλλον, που θα μπορούν να ανταποκριθούν στις ολοένα αυξανόμενες απαιτήσεις της κοινωνίας και να επιλύουν προβλήματα της καθημερινής ζωής, που θα ανακύπτουν, με τον καλύτερο τρόπο για τους ίδιους και για την κοινωνία στην οποία ζουν. Όλοι οι άνθρωποι είναι εν δυνάμει δημιουργικοί και αρωγοί της ανάπτυξης της δημιουργικότητας αποτελούν αδήριτα η οικογένεια, το σχολείο, οι δάσκαλοι και κατ' επέκταση η Πολιτεία που διαμορφώνει τα σχολικά εγχειρίδια και το ΑΠΣ.

Τα **ερευνητικά ερωτήματα** που επιχειρήθηκαν να απαντηθούν είναι τα εξής:

α. Μπορεί να μετρηθεί το επίπεδο της δημιουργικότητας των υποψηφίων εκπαιδευτικών με ένα κατάλληλο εργαλείο και

β. διαφοροποιείται το επίπεδο της δημιουργικότητας των υποψηφίων εκπαιδευτικών ανάλογα με την κατεύθυνση σπουδών στο Λύκειο;

Η **ευχέρεια** μετρήθηκε ανά άτομο μετρώντας τον αριθμό των σωστών λύσεων για κάθε έργο. Όπως φαίνεται, υπάρχει χαμηλό επίπεδο ευχέρειας και για τα τέσσερα (4) έργα και ιδιαιτέρως για τους 3ετείς φοιτητές. Δε σημειώθηκε μεγάλη διαφορά μεταξύ των έργων, γεγονός που δεν προκαλεί έκπληξη, καθώς και τα τέσσερα (4) έργα αφορούσαν ανοικτού τύπου θέματα και σύμφωνα με τη σύσταση του Haylock (1997) είχαν τη δυνατότητα για πολλές διαδρομές λύσης. Επομένως, δεν υπήρχε αντικειμενικός λόγος για να διαφέρει η ευχέρεια. Σημειώνουμε, επίσης, ότι ο μέγιστος αριθμός λύσεων που υποβλήθηκαν για το έργο 1 είναι τέσσερις, για το έργο 2 τρεις, για το έργο 3 πέντε και για το έργο 4 έξι.
Ίσως το κύριο ερώτημα που προκύπτει όταν συζητάμε για την ευχέρεια στα τέσσερα έργα είναι το τι μετράμε.
Το πρώτο έργο ήταν ένα MST που είχε έναν ορισμένο αριθμό τρόπων λύσεων και συνεπώς η ευχέρεια επισημαίνει τον αριθμό των τρόπων που θα προταθούν. Το δεύτερο και το τρίτο έργο ήταν ανοιχτού τύπου και επομένως η ευχέρεια μετράει τον αριθμό των διαφορετικών προβλημάτων που δημιουργήθηκαν. Με άλλα λόγια, για το δεύτερο και τρίτο έργο, η ευχέρεια μετράει τα προϊόντα της δημιουργικότητας. Το τέταρτο έργο ήταν ανοικτού τύπου που είχε έναν αρκετά μεγάλο αριθμό απαντήσεων και συνεπώς η ευχέρεια επισημαίνει τον αριθμό των τρόπων που θα προταθούν. Αυτό υποδηλώνει τη δημιουργική διαδικασία.

Μπορούμε να συγκρίνουμε τη μαθηματική δημιουργικότητα που εμπλέκεται στην επίλυση ενός MST με αυτή μιας εργασίας ανοιχτού τύπου; Και ειδικότερα να συγκρίνουμε την ευελιξία που δημιουργείται από το πρώτο έργο, με τα υπόλοιπα έργα;
Για την ανάλυση των δεδομένων, εξετάσαμε δύο τύπους **ευελιξίας** για κάθε συμμετέχοντα: τον αριθμό των διαφορετικών τύπων προβλημάτων που τίθενται από έναν συμμετέχοντα και τον αριθμό των διαφορετικών στρατηγικών τοποθέτησης που χρησιμοποίησε. Αυτή η μέθοδος ανάλυσης ακολουθεί τους Kontorovich et al. (2011) που ανέλυσαν τη δημιουργικότητα των μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην τοποθέτηση προβλημάτων (Daher et al., 2018). Γενικά και για τα τέσσερα έργα, η ευελιξία μετρήθηκε κατηγοριοποιώντας τις σωστές λύσεις κάθε φοιτητή και στη συνέχεια μετρώντας τον αριθμό των διαφορετικών κατηγοριών που σημειώθηκαν ανά συμμετέχοντα. Οι λύσεις των φοιτητών εμπίπτουν σε 4-5 κατηγορίες για τα τέσσερα έργα. Αυτό συνεπάγεται πως

βρέθηκε μικρή διαφορά ευελιξίας μεταξύ των τεσσάρων έργων. Εάν, ωστόσο, θέλουμε να λάβουμε υπόψη τη δυνατότητα για κάθε εργασία να προκαλέσει ευελιξία, τότε το πρώτο και το τελευταίο έργο είχε τις μεγαλύτερες δυνατότητες για την προώθηση της ευελιξίας, με πέντε πιθανές οδούς λύσης. Οι διαφορετικές δυνατότητες μέτρησης δεν οδηγούν σε διαφορετική αξιολόγηση των μαθητών ως προς την ευελιξία τους, δηλαδή ο στόχος είναι να διερευνηθεί ποιοι μαθητές είναι περισσότερο ευέλικτοι, οδηγώντας στην ίδια συγκριτική αξιολόγηση (Levenson et al., 2018).
Ωστόσο, εάν ο στόχος είναι να αξιολογηθεί ποια εργασία έχει τις μεγαλύτερες δυνατότητες προώθησης της ευελιξίας, τότε οι διαφορετικές κλίμακες μέτρησης οδηγούν σε διαφορετικά συμπεράσματα. Για το δεύτερο και τέταρτο έργο προέκυψε ίδιος βαθμός ευελιξίας και μάλιστα ήταν ο χαμηλότερος, γεγονός που καταδεικνύει πως οι συμμετέχοντες δυσκολεύτηκαν ιδιαίτερα σε αυτά τα έργα. Το 1^o και 4^o έργο έχουν τον ίδιο μέγιστο αριθμό μονοπατιών λύσης που ακολουθούνται από οποιονδήποτε μαθητή ενώ το δεύτερο και τρίτο έργο έχει πολλές πιθανές οδούς λύσης.
Συνοψίζοντας, αν και η τρίτη εργασία απέφερε υψηλότερη βαθμολογία ευελιξίας σε σχέση με τις άλλες εργασίες, πρακτικά, αυτό το αποτέλεσμα δεν φαίνεται να έχει νόημα, καθώς ενώ η τρίτη εργασία προκάλεσε ευχέρεια, η δυνατότητά της να προκαλέσει ευελιξία είναι αμφισβητήσιμη.

Όσον αφορά την τρίτη συνιστώσα της δημιουργικότητας, κάθε απάντηση που δόθηκε κατηγοριοποιήθηκε σύμφωνα με το εάν υπάρχει ή όχι **πρωτοτυπία**: μια έκφραση που προκύπτει με την εφαρμογή μιας άμεσης αλγοριθμικής απλοποίησης της δεδομένης έκφρασης, θεωρήθηκε ότι δεν ενέχει πρωτοτυπία, ενώ μια έκφραση που προέρχεται είτε από την αλλαγή της έκφρασης με έναν τρόπο που δεν είναι συμβατικός είτε προέρχεται από τη δημιουργία μιας μη συνηθισμένης (και συνήθως μη αλγοριθμικής) αλλαγής της δεδομένης έκφρασης θεωρήθηκε ότι ήταν σε υψηλό επίπεδο και συνεπώς πρωτότυπη (Tabach, et al., 2017). Οι Sternberg και Lubart (1996) ορίζουν τη δημιουργικότητα ως ικανότητα παραγωγής απροσδόκητου, πρωτότυπου, κατάλληλου και χρήσιμου έργου. Με βάση αυτόν τον ορισμό, διαπιστώσαμε ότι ελάχιστοι συμμετέχοντες ολοκλήρωσαν τα έργα με πρωτοτυπία. Στο πρώτο έργο, υποθέσαμε ότι τύποι λύσεων όπως τα γραφήματα θα μπορούσαν να θεωρηθούν διορατικές αλλά δεν υπήρξαν τέτοιες λύσεις παρά μόνο αλγεβρικές. Παρόλα αυτά υπήρξε μία (1) πρωτότυπη αλγβερική απάντηση, η οποία ήταν μοναδική. Το τρίτο έργο που ήταν σύνθεση προβλήματος με συγκεκριμένο αποτέλεσμα είχε τρεις (3) πρωτότυπες απαντήσεις, το δεύτερο έργο που ήταν τοποθέτηση προβλήματος όπως το δοθέν, απέφερε δύο (2) πρωτότυπες απαντήσεις, ενώ το τέταρτο έργο απέφερε μόνον μία (1) πρωτότυπη απάντηση.

Οι Leikin και Lev (2013) χρησιμοποίησαν τον παρακάτω τύπο για να ποσοτικοποιήσουν τη μαθηματική δημιουργικότητα στα προϊόντα των μαθητών: $C_r = \Sigma^{n}_{i=1} Flx_i \,.\, Or_i$. Σύμφωνα με αυτόν τον τύπο, η βαθμολογία ευελιξίας και η βαθμολογία πρωτοτυπίας πολλαπλασιάζονται. Στη συνέχεια, όλες οι λύσεις (ν), που παρουσιάζονται από κάθε μαθητή σε μία εργασία συνοψίζονται σε μια συνολική βαθμολογία (Leikin et al., 2013). Μια ανασκόπηση της βιβλιογραφίας στον τομέα της δημιουργικότητας αποκαλύπτει ότι δεν υπάρχει συνεπής ορισμός του όρου «δημιουργικότητα», συμβαδίζοντας με ένα ευρύ πεδίο ιδεών για το πώς να εννοιολογηθεί και να λειτουργήσει (Haylock 1987, Sriraman 2005), πτυχή που συνδυάζεται με τη διάκριση μεταξύ σχετικής δημιουργικότητας («little c») και απόλυτης δημιουργικότητας («big C»).
Καθένας μπορεί να είναι δημιουργικός τουλάχιστον με σχετικό τρόπο. Στα μαθηματικά, η έρευνα επικεντρώνεται στην αξιολόγηση της δημιουργικότητας χρησιμοποιώντας την τοποθέτηση προβλημάτων και μέσων επίλυσης προβλημάτων (Silver 1997). Ως εκ τούτου, χρησιμοποιούνται διαφορετικές προσεγγίσεις για την αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας. Στη μελέτη μας, επικεντρωθήκαμε σε μια αξιολόγηση βάσει προϊόντος όπου αναλύθηκαν τα προϊόντα των μαθητών από εργασίες επίλυσης προβλημάτων και βαθμολογούνται ως προς τις διαστάσεις της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας, όπως προτείνουν οι Leikin et al. (2013) και Κάττου et al. (2013).

Συμπεράσματα

Α. Παρατηρούμε ότι το επίπεδο δημιουργικότητας στους μέλλοντες εκπαιδευτικούς είναι χαμηλό, γεγονός που θα δυσχεράνει την καλλιέργεια αυτής και στους μελλοντικούς μαθητές τους. Σύμφωνα με τον Shriki (2005) πολλοί δάσκαλοι δε διαθέτουν τις απαραίτητες ικανότητες για να ενσωματώσουν δραστηριότητες, που προωθούν τη δημιουργικότητα των μαθητών, κυρίως λόγω έλλειψης προηγούμενης εμπειρίας ή κατάλληλης προετοιμασίας. Διάφορες μελέτες επισημαίνουν το γεγονός ότι οι δάσκαλοι τείνουν να διδάσκουν με τον τρόπο που διδάσκονταν στο σχολείο (Pehkonen, 1997).

Κατά συνέπεια, υπάρχει ανάγκη για σκόπιμη προετοιμασία για την ανάπτυξη της ικανότητας των εκπαιδευτικών να εφαρμόζουν καινοτόμες διδακτικές προσεγγίσεις που ενθαρρύνουν τη δημιουργικότητα (Shriki, 2010). Ο Beghetto (2007) δείχνει ότι υπάρχει μια τάση μεταξύ των εκπαιδευτικών (Mhlolo, 2016) να προτιμούν τις τυπικές απαντήσεις από τις μοναδικές.

Βέβαια, οι 4ετείς φοιτητές και οι απόφοιτοι έχουν υψηλότερο επίπεδο δημιουργικότητας σε σχέση με τους 3ετείς, υποδηλώνοντας πως με το πέρασμα των ετών σπουδών, αυξάνεται η δημιουργικότητά τους. Όμως αυτή η σύγκριση επηρεάζεται και από το γεγονός ότι το δείγμα των 4ετών προέρχονταν ως επί το πλείστον από φοιτητές που επέλεξαν το μάθημα της στατιστικής, που καταδεικνύει πως αυτοί είναι μαθηματικά ικανότεροι.

Β. Άλλωστε, ο αντίστοιχος έλεγχος για το επίπεδο δημιουργικότητας ως προς την κατεύθυνση σπουδών, έδειξε πως υπάρχει στατιστικά σημαντική σχέση μεταξύ τους και μάλιστα οι περισσότερες δημιουργικές απαντήσεις προέρχονταν από φοιτητές από θετική ή τεχνολογική κατεύθυνση. Φρονώ πως αυτό συμβαίνει γιατί η μαθηματική ικανότητα συμβάλλει καταλυτικά στη δημιουργική ικανότητα. Η ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας απαιτεί στέρεες βάσεις της μαθηματικής γνώσης (Meissner, 2000) και τον μετασχηματισμό της σε νέα γνώση (Nakakoji, Yamamoto, & Ohira, 1999), επειδή η άριστη γνώση περιεχομένου ωθεί τα άτομα να κάνουν συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών εννοιών (Sheffield, 2009). Ως εκ τούτου, η δημιουργική σκέψη είναι πιο εγγενής μεταξύ των μαθητών που επιδεικνύουν μαθηματική ακρίβεια και ευφράδεια, ειδικά στο πλαίσιο εργασίας με μη συνηθισμένες και πρωτότυπες μαθηματικές εργασίες, που απαιτούν πρωτότυπες και ουσιαστικές λύσεις (Binder, 1996).

Οι Kattou et al. (2013), χρησιμοποιώντας ανάλυση μοντελοποίησης δομικών εξισώσεων, υποστήριξαν ότι η μαθηματική δημιουργικότητα είναι υποσυστατικό της μαθηματικής ικανότητας. Ο Mann (2009) διαπίστωσε ότι τα μαθηματικά επιτεύγματα ήταν ο ισχυρότερος προγνωστικός παράγοντας για τη μαθηματική δημιουργικότητα. Ομοίως, οι Sak&Maker (2006) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η γνώση των μαθητών συνέβαλε σημαντικά στην ερμηνεία της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας. Επιπλέον, η δημιουργικότητα έχει επισημανθεί ως σημαντικός παράγοντας της χαρισματικότητας (Leikin 2009a).

Ο Haylock (1997) ισχυρίστηκε ότι η υπερβολική έμφαση και η έκθεση σε συγκεκριμένους αλγόριθμους μπορεί να περιορίσει τη μαθηματική δημιουργικότητα, καθώς μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές σε καλά εξασκημένες διαδικασίες. Βέβαια, τα άτομα που μπορούν να χειριστούν αποτελεσματικά τη γνώση σπάζοντας μια προκαθορισμένη διαδρομή λύσης και να αναπτύσσουν ιδέες, είναι εκείνα που αναμένεται να είναι και δημιουργικά (Mann et al. 2017).

Άλλοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι δημιουργικές πράξεις συνδέονται με μεγάλες περιόδους μαθηματικής δραστηριότητας και προβληματισμού (Sternberg, 1988, Gruber & Wallace, 2000). Η έρευνα προτείνει ότι οι μαθηματικά δημιουργικοί δεν είναι απαραίτητα εκείνοι που παρουσιάζουν υψηλά επίπεδα επιτυχίας στα σχολικά μαθηματικά (Hong & Aqui, 2004). Όμως, σύμφωνα με τον Ervynck (1991) η μαθηματική δημιουργικότητα αρθρώνεται, όταν αναδύεται ένας μοναδικός και νέος τρόπος επίλυσης ενός προβλήματος και τόνισε ότι η μαθηματική δημιουργικότητα βασίζεται στις προηγούμενες εμπειρίες ενός ατόμου. Η δημιουργικότητα έχει θεωρηθεί ότι είναι ένα κρίσιμο συστατικό της προηγμένης μαθηματικής σκέψης και συνίσταται στην ικανότητα επίλυσης προβλημάτων ανάλογα με την καταλληλότητα της ενσωμάτωσης τόσο της φύσης της λογικής-αφαίρεσης στην εκπαίδευση των μαθηματικών όσο και των εξελισσόμενων εννοιών της στον πυρήνα αυτής (Ervynck, 1991).

Γ. Επιπροσθέτως, από την αξιολόγηση των εγχειριδίων των Μαθηματικών Δημοτικών Σχολείων, διαπιστώνω ότι τα περισσότερα μαθηματικά προβλήματα είναι προβλήματα κατανόησης και εφαρμογής της νέας γνώσης και ελάχιστα είναι δημιουργικά. Αυτό προφανώς συμβαίνει επειδή οι μαθητές καλούνται να διαχειριστούν πολλές νέες μαθηματικές έννοιες, με συνέπεια αυτοί να εγκλωβίζονται σε συγκεκριμένα πλαίσια. Υπό αυτό το πρίσμα, το Α.Π. αποτελεί τροχοπέδη στη μεγαλύτερη ενασχόληση με δημιουργικά προβλήματα.
Οι δάσκαλοι ως εκ τούτου συνήθως βλέπουν τις απροσδόκητες ιδέες ως ενοχλητικές και κατά συνέπεια αποθαρρύνουν μια τέτοια συμπεριφορά προς ικανοποίηση των προσδοκιών του προγράμματος σπουδών (Mhlolo, 2016). Ο Shepard (1991, 2002) υποστηρίζει ότι η αξιολόγηση στην τάξη αντικατοπτρίζεται από τυποποιημένα τεστ τα οποία είναι ουσιαστικά ασυμβίβαστα με τις κεντρικές ιδέες που στηρίζονται από τον κονστρουκτιβισμό (Bolden et al., 2009). Οι Dreyfus et al. (1986) αναφέρουν πως οι περισσότεροι μαθητές δεν αναμένεται να βρουν δημιουργικές λύσεις κατά την επίλυση προβλημάτων. Τείνουν να υιοθετούν μια πρακτική στάση για να φτάσουν στη λύση (Aizikovitsh 2014).

Δ. Τέλος, προκύπτει αδήριτα το συμπέρασμα ότι ο εκπαιδευτικός είναι αυτός που έχει τον πρωταρχικό ρόλο στην καλλιέργεια και στην ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών. Ένα παιδί είναι δημιουργικό ανεξαρτήτως ηλικίας και το σχολείο ή που θα του δώσει τα εφόδια να αναπτύξει περαιτέρω τη δημιουργικότητά του ή που θα τον βάλει σε καλούπια και πλαίσια περιορίζοντάς τον.
Ο μαθητής έχει περιέργεια που μπορεί να οριστεί ως εξερεύνηση (Perry, 2001), δεδομένου ότι οι εμπειρίες μάθησης ανοιχτού τύπου, στις οποίες ο στόχος δεν είναι η μεμονωμένη σωστή απάντηση, καλλιεργούν ένα περιβάλλον διερεύνησης, το οποίο με τη σειρά του προκαλεί περιέργεια (Church & Ravid, 2003). Η περιέργεια αναδύεται από την επιθυμία των μαθητών να μάθουν το «γιατί» (Hensley, 2004) και σε αντάλλαγμα τους δίνει τη δυνατότητα να δημιουργήσουν νέα γνώση (Shriki, 2010). Ο φόβος του κινδύνου μπορεί να καταστείλει την περιέργεια, τη δημιουργικότητα και την προθυμία εξερεύνησης (Perry, 2001).
Ο Aiken (1973) υποστηρίζει ότι ο δάσκαλος είναι το κλειδί για τη δημιουργική σκέψη στην τάξη. Αν λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί αποτελούν σημαντικούς παράγοντες στη μαθησιακή διαδικασία, φαίνεται ότι αυτοί μπορούν να δώσουν στους μαθητές τη δυνατότητα να προσεγγίσουν ένα πρόβλημα από διαφορετικές οπτικές γωνίες, ενθαρρύνοντας τους στη διαδικασία εκμάθησης των μαθηματικών (Arikan, 2017).

Συνεπώς, το χαμηλό επίπεδο δημιουργικότητας των μελλοντικών εκπαιδευτικών σε συνδυασμό με τη δημιουργική ένδεια των σχολικών εγχειριδίων οδηγεί με μαθηματική ακρίβεια στον περιορισμό της μαθηματικής δημιουργικότητας.
Εν κατακλείδι τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξα με την περαίωση της παρούσας έρευνας, είναι πως η μαθηματική δημιουργικότητα συνδέεται άρρηκτα με τη μαθηματική ικανότητα και οι εκπαιδευτικοί είναι τα κατεξοχήν πρόσωπα, τα οποία έχοντας στην φαρέτρα τους τα απαραίτητα μέσα και τις κατάλληλες μεθόδους, μπορούν να την προωθήσουν και να την αναπτύξουν στους μαθητές τους.

Η **χρησιμότητα** της παρούσας έρευνας έγκειται στο γεγονός ότι προσφέρει ένα εργαλείο μέτρησης αυτής, ώστε να αξιολογηθεί το επίπεδο δημιουργικότητας και αν απαιτηθεί, να ληφθούν τα προσήκοντα μέτρα για την ανάπτυξη αυτής.

Περιορισμοί της έρευνας αποτελούν ο πολύ μικρός αριθμός συμμετεχόντων αποφοίτων του Παιδαγωγικού Τμήματος ώστε να αξιολογηθεί η προετοιμασία τους σε σχέση με τους 3ετείς φοιτητές και να μπορεί να γίνει γενίκευση των συμπερασμάτων.
Επιπροσθέτως, ένα μεγαλύτερο δείγμα στην έρευνα θα ήταν σίγουρα περισσότερο αντιπροσωπευτικό.

Οι **προτάσεις μου για περαιτέρω έρευνα** είναι η μέτρηση της μαθηματικής δημιουργικότητας των εν ενεργεία εκπαιδευτικών, γεγονός που θα είχε μεγάλο ενδιαφέρον καθώς θα αποτυπωνόταν η πραγματικότητα στα σχολεία και θα μπορούσε να συγκριθεί το επίπεδο αυτών με το επίπεδο των υποψηφίων εκπαιδευτικών.
Επιπλέον, θα ήταν χρήσιμη και επίκαιρη η μέτρηση της μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών σε εκπαιδευτικά περιβάλλοντα με χρήση της τεχνολογίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abramovich, S., & Cho, E. (2015). Using digital technology for mathematical problem posing. In F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds*.), Mathematical problem posing: From research to effective practice (pp. 71–102). New York: Springer.*

Aiken, L. R. (1973). Ability and creativity in mathematics. *Review of Educational Research, 43(4), 405–432.*

Aizikovitsh, E. (2014) The Extent of Mathematical Creativity and Aesthetics in Solving Problems among Students Attending the Mathematically Talented Youth Program*, Creative education, 5, 228-241*

Akgul. S., & Kahveci, N. G. (2016). A study on the development of a mathematics creativity scale. *Eurasian Journal of Educational Research, 62, 57- 76*

Aldous, C. R. (2007). Creativity, problem solving and innovative science: *Insights from history, cognitive psychology and neuroscience. International Education Journal, 8(2), 176–186.*

Allan, S. D. (1991). Ability-Grouping Research Reviews: What Do You Say about Grouping and Gifted? *Educational Leadership,48,* 60-65.

Abramovich, S. (2003). Cognitive heterogeneity in computer-mediated mathematical action as a vehicle for concept development*. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 22(1), 19–41.*

Ambrose, D., Sriraman, B., Pierce, M.,K., (2014) *A critique of Creativity and Complexity,* Sense Publishers, Netherlands.

Andrews, P. (2009). Comparative studies of mathematics teachers' observable learning objectives: Validating low inference codes. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 97–122

Arifin, S., Zulkardi, Putri, I., Hartono, Y., 2021, On Creativity Through Mathematization in solving Non-Routine Problems, *Journal on Mathematics Education, Volume 12, (2), 313-330*

Arikan, E., (2017), Is There a Relationship between Creativity and Mathematical Creativi*ty? Journal of Education and Learning; Vol. 6, No. 4*

Ashby, F. G., Isen, A. M., & Turken, U. (1999). A neuropsychological theory of positive affect and its influence on cognition. *Psychological Review, 106(3), 529–550.*

Assmus, D., & Fritzlar, T. (2018). Mathematical giftedness and creativity in primary grades. *In F. M. Singer (Ed.), Mathematical creativity and mathematical giftedness (this volume). New York: Springer.*

Baer, J., & Kaufman, J. C. (2005). Bridging generality and specificity: The Amusement Park Theoretical (APT) model of creativity. *Roeper Review*, 27, 158–163

Bailin, S. (1988). *Achieving extraordinary ends: An essay on creativity*. Dordrecht: Springer Netherlands.

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control* . New York, NY: W. H. Freeman.

Baroody, A.J. (1993). *Problem solving, reasoning, and communication, K*-8: Helping children think mathematically. NY, NY: Macmillan.

Beghetto, R. A. (2007). Does creativity have a place in classroom discussions? Teachers' response preferences. *Thinking Skills and Creativity, 2(1), 1–9*

.Beghetto, R. A., & Kaufman, J. C. (2007). Toward a broader conception of creativity: A case for "mini-c" creativity. *Psychology of Aesthetics, Creativity, and the Arts*, 1, 73–79

Beghetto, R. A., & Kaufman, J. C. (2009). Do we all have multicreative potential? *ZDM Mathematics Education, 41, 39–44.*

Beghetto, R. A., & Kaufman, J. C. (2010). *Nurturing creativity in the classroom*. New York: Cambridge University Press.

Beghetto, R. A., & Kaufman, J. C. (2009). Intellectual estuaries: Connecting learning and creativity in programs of advanced academics. *Journal of Advanced Academics, 20(2), 296– 324. https://doi.org/10.1177/1932202X0902000205.*

Beghetto, R. A., & Kaufman, J. C. (2011). Teaching for creativity with disciplined improvisation. In R. K. Sawyer (Ed.*),* Structure and improvisation in creative teaching (pp. 94–109). *Cambridge: Cambridge University Press.*

Beghetto, R. A. (2013). *Killing ideas softly? The promise and perils of creativity in the classroom*. Charlotte, NC: Information Age.

Beghetto, R., (2017), Lesson unplanning: toward transforming routine tasks into non routine problems, *ZDM Mathematics Education, (49)*

Berk L., *Η Ανάπτυξη των Βρεφών, των Παιδιών και των Εφήβων*, ΙΩΝ, 2016.

Biggs, J. (2001*). Enhancing learning: A matter of style or approach? In R.J. Sternberg & L. Zhang (Eds.), Perspectives on thinking, learning, and cognitive styles* (pp. 73–102). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Binder, C. (1996). Behavioral Fluency*:* Evolution of a New Paradigm. *The Behavior Analyst, 19, 163-197. http://www.abainternational.org/TBA.asp*

Boden, M. (2001). Creativity and knowledge. *In A. Craft, B. Jeffrey, & M. Leibling (Eds.), Creativity in education (pp. 95–102). London: Continuum.*

Bolden, D., Harries, T., & Newton, D. (2009) Pre-service primary teachers' conceptions of creativity in mathematics, *Educ Stud Math*
DOI 10.1007/s10649-009-9207-z

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics, 83(1), 37–55.*

Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as “springboards for inquiry”: A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 166–208.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Greenwood Publishing Group.

Brown, S. I., & Walter, I. (1990). *The art of problem posing* (2nd ed.). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bruder, R. (2001). Kreativ sein wollen, dürfen und können. ml – *mathematik lehren, (106), 46–50.*

Βρυώνης Κ., Δουκάκης Σ., Καρακώστα Β., Μπαραλής Γ., Σταύρου Ι. (2016), Μαθηματικά Ε΄Δημοτικού, Ι.Τ.Υ.Ε.Διόφαντος.

Burton, L. (2004). *Mathematicians as enquirers: Learning about learning mathematics*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. *In F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), Mathematical problem posing: From research into effective practice (pp. 141–174). New York: Springer.*

Capra, F. (1996). *The web of life* . New York, NY: Anchor Books/Doubleday.

Carruthers, E., & Worthington, M. (2005). Making sense of mathematical graphics: The development of understanding abstract symbolism. *European Childhood Research Journal, 13(1), 57–79.*

Chamberlin, S. A., & Moon, S. M. (2005). Model-eliciting activities as tool to develop and identify creativity gifted mathematicians. *Journal of Secondary Gifted Education, 17(1), 37–47*.

Chiu, M.-S. (2009). Approaches to the Teaching of Creative and Non-Creative Mathematical Problems. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7,* 55-79. http://dx.doi.org/10.1007/s10763-007-9112-9

Church, E. B., & Ravid, F. (2003). Setting the state for learning. *Scholastic Parent & Child, 11, 38–42.*

Cohen, J. (1960). A coefficient of agreement for nominal scales. *Educational and Psychological Measurement, 20(1), 37–46.*

Cohen L. M. (1989). A continuum of adaptive creative behaviours. *Creativity Research Journal, 2, 169–83.*

Coxbill, E., Chamberlin, S. A., & Weatherford, J. (2013). Using Model-Eliciting Activities as a tool to identify creatively gifted elementary mathematics students. *Journal for the Education of the Gifted, 36(2), 176–197. https://doi.org/10.1177/0162353213480433.*

Cropley, A. J., & Urban, K. K. (2000). Programs and strategies for nurturing creativity. *In K. A. Heller, F. J. Monks, R. J. Sternberg, & R. F. Subotnik (Eds.), International handbook of research and development of giftedness and talent. Oxford, UK: Pergamon.*

Cropley, A. J. (2001). *Creativity in education and learning: A guide for teachers and educators*. London: Kogan Page

Csikszentmihalyi, M. (1988). Society, culture, and person: A systems view of creativity. In R. J. Sternberg (Ed.), The nature of creativity: *Contemporary psychological perspectives* (pp. 325–339). New York: Cambridge University Press.

Csikszentmihalyi, M., Rathunde, K., & Whalen, S. (1993). *Talented teenagers: The roots of success and failure*. Cambridge: Cambridge University Press.

Csikszentmihalyi, M. (1999). Implication of a systems perspective for the study of creativity. In R. J.Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity (pp. 313–335). Cambridge, England: Cambridge University Press.*

Czarnocha, B., & Baker, W. (2015). Creativity and bisociation. *Mathematics Teaching-Research Journal Online, 7(3), 1–7.*

Dabrowski, K. (1973). *The dynamics of concepts,* London, England: Gryf.

Daher, W., & Anabousy, A. (2018). Flexibility of preservice teachers in problem posing in different environments. In F. M. Singer (Ed.), Mathematical creativity and mathematical giftedness (this volume). New York: Springer. Davis, G. A., & Rimm, S. B. (2004). *Education of the gifted and talented (5th ed.)*. Boston: Pearson Education.

Davies, D., Howe, A., Rogers, M., & Fasciato, M. (2004). How do trainee primary teachers understand creativity? In E. Norman, D. Spendlove, P. Grover & A. Mitchell (Eds.), *Creativity and innovation — DATA international research conference 2004. Wellesbourne: The Design and Technology Association.*

Dewey, J. (1910). *How we think*. Boston, MA: Heath.

Dewey, J. (1944*). Democracy and education: An introduction to the philosophy of education*. New York: The Free Press.

Dhombres, J. (1993). Is one proof enough? *Travels with a mathematician of the baroque period. Educational Studies in Mathematics, 24, 401–419*.

Diakidoy, I.-A. N., & Kanari, E. (1999). Student teachers' beliefs about creativity. British Educational *Research Journal, 25(2), 225–243*.

Dietrich, A., & Kanso, R. (2010). A review of EEG, ERP, and neuroimaging studies of creativity and insight. *Psychological Bulletin , 136 (5), 822–848.*

Dilthey, W. (1976). D*ilthey selected writings* (H. P. Rickman, Trans.). Oxford, England: Cambridge University Press.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1986). On the Aesthetics of Mathematical Thought. *For the Learning of Mathematics, 6,* 2-10.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2015). The nested epistemic actions model for abstraction in context—theory as methodological tool and methodological tool as theory. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods. Advances Mathematics Education series* (pp.185–217). Dordrecht: Springer.

Eisenhardt, K. M., Furr, N. R., & Bingham, C. B. (2010). Microfoundations of performance: Balancing efficiency and flexibility in dynamic environments. *Organization Science, 21(6), 1263–1273.*

Elia, I., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in *mathematics. ZDM, 41, 605–618.*

Ericsson, K. A., & Simon, H. A. (1980). Verbal reports as data. *Psychological Review, 87(3), 215–251*

Ernest, P. (1994). Constructivism: Which form provides the most adequate theory of mathematics teaching*? Journal of Mathematics, 15(3*), 327–342

Ervynck, G. (1991). Mathematical Creativity. In: D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 42-53). Dordrecht: Netherlands: Kluwer Academic.

Esquivel, G. B. (1995). Teacher behaviours that foster creativity. *Educational Psychology Review*, 7(2), 185–202

Flaherty, A. W. (2005). *The midnight disease: The drive to write, writer's block, and the creative brain* .New York, NY: Mariner Books.

Fredrickson, B. L., & Branigan, C. (2001). Positive emotions. In T. J. Mayne & G. A. Bonanno (Eds.), *Emotions—Current issues and future directions (pp. 123–151).* New York: Guilford Press.

Freiman, V., Sriraman, B. (2007), Does mathematics gifted education need a working philosofy of creativity? *Mediterranean Journal for Research in mathematics Education, Vol. 6, 23-46*

Freiman, V. (2009). Mathematical enrichment*:* Problem-of-the-week model. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students (pp. 367–382). Rotterdam: Sense Publishing.*

Freiman, V., & Sriraman, B. (2011). Interdisciplinary networks for better education in mathematics, science and arts. *In B. Siraman & V. Freiman (Eds.), Interdisciplinarity for the Twenty-First Century: Proceedings of the Third International Symposium on Mathematics and Its Connections to Arts and Sciences (pp. xi–xvi). USA: Information Age Publishing Inc. & The Montana Council of Teachers of Mathematics.*

Fryer, M., & Collings, J. A. (1991). Teachers' views about creativity. *British Journal of Educational Psychology, 61, 207–219.*

Fuchs, L.S., Fuchs, D., Prentice, K., Burch, M., Hamlett, C.L., Owen, R., & Schroeter, K. (2003). Enhancing third-grade students' mathematical problem solving with selfregulated learning strategies. *Journal of Educational Psychology, 95(2), 306–315*

Furr, N. R. (2009). Cognitive flexibility: The adaptive reality of concrete organization change. *Ph. D. dissertation, Stanford University. http://gradworks.umi.com/33/82/3382938.html.*

Gnedenko, B. V. (1991). Introduction in specialization*: Mathematics (Введение в специальность: математика), Nauka, p. 235. (In Russian).*

Goldin, G. A. (2009). The affective domain and students' mathematical inventiveness. *In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), Creativity in mathematics and the education of gifted students (pp. 181–194). Rotterdam: Sense Publishers.*

Goldin, G. A. (2017). Mathematical creativity and giftedness: perspectives in response *ZDM Mathematics Education (2017) 49:147–157* DOI 10.1007/s11858-017-0837-9

Granberg, C., & Olsson, J. (2015). ICT-supported problem solving and collaborative creative reasoning: Exploring linear functions using dynamic mathematics software. *The Journal of Mathematical Behavior, 37, 48–62.*

Gruber, H. E., & Wallace, D. B. (2000). The case study method and evolving systems approach for understanding unique creative people at work. In R. J. Sternberg (Ed.*), Handbook of creativity (pp. 93– 115). Cambridge: Cambridge University Press.*

Guilford, J. P. (1950). *Creativity*. The American Psychologist, 5(9), 444–454.

Guilford, J. P. (1959). Traits of creativity. In H. H. Anderson (Ed.), *Creativity and its cultivation* (pp. 142–161). New York: Harper & Brothers Publishers..

Guilford, J. P. (1967). *The nature of human intelligence*. New York: McGraw-Hill.

Guilford, J. P. (1975). Creativity: A quarter century of progress. In I. A. Taylor & J. W. Getzels (Eds.), *Perspectives in creativity* (pp. 37–59). Chicago: Aldine.

Guilford, J. P. (1977). *Way beyond the IQ. Guide to improving intelligence and creativity*. New York: Creative Education Foundation.

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. New York: Dover.

Hadamard, J. (1954). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. New York: Dover

HARGADON, A. & BECHKY, B. (2006). When collections of creatives become creative collectives: A field study of problem solving at work. *Organization Science*, 17(4), 484-500.

Haylock, D. W. (1984). *Aspects of mathematical creativity in children aged 11–12*. London: British Thesis Service.

Haylock, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in schoolchildren. *Educational Studies in Mathematics, 18(1), 59–74.*

Haylock, D. (1997). Recognizing mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 27(2), 68–74.*

Hayne, N., & Tabach, M. (2014). When stories and multiple solution tasks meet in a technological environment: The case of equality. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 12, 23–37.

Hensley, R. B. (2004). Curiosity and creativity as attributes of information literacy. *Reference & User Services Quarterly, 44(1), 31–36.*

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32, 195–222.

Hershkovitz, S., Peled, I., & Littler, G. (2009). Mathematical creativity and giftedness in elementary school: Task and teacher promoting creativity for all. *In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), Creativity in mathematics and the education of gifted students (pp. 255–269). Rotterdam:Sense Publishers.*

Hershkowitz, R., Tabach, M., & Dreyfus, T. (2017). Creative reasoning and shifts of knowledge in the mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education*. doi:10.1007/s11858-016-0816-6.

Hoth, J., Kaiser, G., Busse, A., Döhrmann, M., König, J., & Blömeke, S. (2017). Professional competences of teachers for fostering creativity and supporting high-achieving students. *ZDM Mathematics Education. doi:10.1007/s11858-016-0817-5.*

Hong, E., & Aqui, Y. (2004). Cognitive and motivational characteristics of adolescents gifted in mathematics: Comparisons among students with different types of giftedness. *Gifted Child Quarterly, 48(3), 191–201*

House, P. A., & Coxford, A. F. (1995). *Connecting mathematics across the curriculum:* 1995 yearbook. Reston, VA: NCTM.

Hoyles, C. (2001). Steering between skills and creativity: A role for the computer? *For the Learning of Mathematics, 21, 33–39.*

Hwang, W. Y., Chen, N. S., Dung, J. J., & Yang, Y. L. (2007). Multiple Representation Skills and Creativity Effects on Mathematical Problem Solving Using a Multimedia Whiteboard System. *Educational Technology & Society, 10,* 191-212.

Jackson, P. W., & Messick, S. (1965). The person, the product and the response*:* Conceptual problems in the assessment of *creativity. Journal of Personality, 33(3), 309–329.*

Jensen, L. R. (1973). *The relationships among mathematical creativity, numerical aptitude, and mathematical achievement*. Unpublished Dissertation. The University of Texas at Austin, Austin, TX.

Johnson, H., & Carruthers, L. (2006). Supporting creative and reflective processes. *International Journal of Human-Computer Studies, 64(10), 998–1030. https://doi.org/10.1016/j.ijhcs.2006.06.001*.

Joklitschke, J., Rott, B., & Schindler, M. (2018). Can we really speak of “mathematical creativity”? Investigating students’ performances and their subdomain-specificity in multiple solution tasks. *In F. M. Singer (Ed.), Mathematical creativity and mathematical giftedness (this volume). New York: Springer.*

Jonassen, D.H. (1997). Instructional design models for well-structured and illstructured problem-solving learning outcomes. *Educational Technology Research and Development*, 45(1), 65–94.

Jung, D. (2001). Transformational and transactional leadership and their effects on creativity in groups. *Creativity Research Journal, 13(2), 185–195*.

Just, M. A., & Carpenter, P. A. (1976). Eye fixations and cognitive processes. *Cognitive Psychology, 8(4), 441–480*

Karp, A., (2017) Some thoughts on gifted education and creativity, *ZDM Mathematics Education (2017)* 49:159–168
DOI 10.1007/s11858-017-0838-8

Κασσώτη Ο., Δουκάκης Σ., Κλιάπης Π., Μπαραλής Γ., Οικονόμου Θ., Μαθηματικά Στ’ Δημοτικού, Ι.Τ.Υ.Ε.Διόφαντος.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 45(2), 167–181. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0467-1.*

Kattou, M., Christou, C., & Pitta-Pantazi, D. (2015). Mathematical creativity or general creativity? *In K. Kaiser & N. Vondrová (Eds.), Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Prague, Czech Republic (pp. 1016–1023).*

Kaufman, J. C., Plucker, J. A., & Russell, C. M. (2012*). Identifying and assessing creativity as a component of giftedness. Journal of Psychoeducational Assessment, 30(1), 60–73. https://doi.*org/10.1177/0734282911428196.

Kennedy, M. (2005). *Inside teaching: How classroom life undermines reform*. Cambridge: Harvard University Press

Kießwetter, K. (1977). Kreativität in der Mathematik und im Mathematikunterricht [Creativity in mathematics and mathematics teaching]. *In M. Glatfeld (Ed.), Mathematik lernen. Probleme und Möglichkeiten (pp. 1–39). Braunschweig: Vieweg.*

Kim, H., Cho, S., & Ahn, D. (2004). Development of mathematical creative problem solving ability test for identification of the gifted in math. *Gifted Education International, 18(2), 164–174.*

Klakla, M. (2002). Kształcenie aktywności matematycznej o charakterze twórczym na poziomie szkoły średniej. In J. Żabowski (Ed.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, Tom III. Prace dr Macieja Klakli* (pp. 263-273). Płock: Wydawnictwo Naukowe Novum.

Klavir, R., & Gorodetsky, M. (2009). On excellence and creativity: A study of gifted and expert students. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds*.), Creativity in mathematics and the education of gifted students (pp. 221–242). Rotterdam: Sense Publishers.*

Koichu, B., & Orey, D. (2010). Creativity or ignorance: Inquiry in calculation strategies ofmathematically disadvantaged (immigrant) high school students. *Mediterranean Journal forResearch in Mathematics Education, 9(2), 75–92.*

Kontorovich, I., & Koichu, B. (2009). Towards a comprehensive framework of mathematical problem posing. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 401–408), Thessaloniki, Greece: PME.*

Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2011). Indicators of creativity in mathematical problem posing: How indicative are they*? In M. Avotiņa, D. Bonka,H. Meissner, L. Ramāna, L. Sheffield, & E. Velikova (Eds.), Proceedings of the 6th International Conference Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students (pp. 120–125). Latvia: Latvia University.*

Krummheuer, G., Leuzinger-Bohleber, M., Müller-Kirchof, M., Münz, M., Vogel, R. (2013), *Explaining the mathematical creativity of a young boy: an interdisciplinary venture between mathematics education and psychoanalysis, Educ Stud Math (2013) 84:183–199 DOI 10.1007/s10649-013-9505-3*

Krutetskii, V. A. (1976). In J. Kilpatrick, & I. Wirszup (Eds.) *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren* (trans: Teller, J.). Chicago: The University of Chicago Press.

Kwon, O.-N., Park, J.-S., & Park, J.-H. (2006). Cultivating Divergent Thinking in Mathematics through an Open-Ended Approach. *Asia Pacific Education Review, 7,* 51-61. http://dx.doi.org/10.1007/BF03036784

Lee, I. R., & Kemple, K. (2014). Preservice teachers' personality traits and engagement in creative activities as predictors of their support for children's creativity. *Creativity Research Journal, 26(1), 82-94.*

Leikin, R., & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st international conference for the psychology of mathematics education (Vol. 3, pp. 161–168). Seoul: The Korea Society of Education Studies in Mathematics.*

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics, 66, 349–371.*

Leikin, R. (2008). Teaching mathematics with and for creativity*:* An intercultural perspective*. In P. Ernest, B. Greer, & B. Sriraman (Eds.), Critical issues in mathematics education (pp. 39–43). USA: Information Age Publishing Inc. & The Montana Council of Teachers of Mathematics.*

Leikin, R. (2009a). Bridging research and theory in mathematics education with research and theory in creativity and giftedness. *In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), Creativity in mathematics and the education of gifted students (pp. 383–409). Rotterdam: Sense Publishers.*

Leikin, R. (2009b). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. *In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), Creativity in mathematics and the education of gifted students (pp. 129–145). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.*

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129–145). Rotterdam The Netherlands: Sense Publishers.

Leikin, R., Koichu, B., & Berman, A. (2009). Mathematical giftedness as a quality of problem-solving acts. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.*), Creativity in mathematics and the education of gifted students (pp. 115–128). Rotterdam: Sense Publishers*.

Leikin, R., Levav-Waynberg, A., Gurevich, I., & Mednikov, L. (2006). Implementation of multiple solution connecting tasks: Do students' attitudes support teachers' reluctance? *Focus on Learning Problems in Mathematics, 28, 1–22.*

Leikin, R., Kloss., Y., (2009). *Mathematical creativity of 8th and 10th grade students, University of Haifa*, israel.

Leikin, R., & Kloss, Y. (2011). Mathematical creativity of 8th and 10th grade students. *In M. Pytlak, E. Swoboda, & T. Rowland (Eds.), Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 1084–1094). Rzeszów, Poland:University of Rzeszów.*

Leikin, R. (2013). Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight, *Psychological Test and Assessment Modeling, Volume 55, (4), 385-400*

Leikin, R., & Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: What makes the difference*? ZDM Mathematics Education, 45, 183–197.*

Leikin, R., & Pitta-Pantazi, (2013). Creativity and mathematics education: The state of the art. ZDM—*The International Journal on Mathematics Education, 45(2), 159–166.*

Leikin, R. (2014). Challenging mathematics with multiple solution tasks and mathematical investigations in geometry. In Y. Li, E. A. Silver, & S. Li (Eds.), *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices (pp. 59–80). Dordrecht, The Netherlands: Springer.*

Leikin, R., Koichu, B., Berman, A., & Dinur, S. (2017). How are questions that students ask in high level mathematics classes linked to general giftedness? *ZDM Mathematics Education*, 49(1). doi:10.1007/s11858-016-0815-7

Lerman, S. (1990). Alternative perspectives on the nature of mathematics and their influence on the teaching of mathematics. *British Educational Research Journal,* 16(1), 53–61.

Leung, S. S. (1993). Mathematical problem posing: The influence of task formats, mathematics knowledge, and creative thinking. In J. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, & F. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. III, pp. 33–40). Tsukuba, Japan.

Leung, S. S. (1997). On the role of creative thinking in problem solving. *ZDM Mathematics Education, 29(3), 81–85.*

Lev-Zamir H. & Leikin R. (2011). Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: Focusing on teachers' conceptions. *Research in Mathematics Education* 13, 17–32.

Lev-Zamir, H., & Leikin, R. (2013). Saying versus doing: teachers' conceptions of creativity in elementary mathematics teaching. ZDM—*The International Journal on Mathematics Education, 45(2), 295–308.*

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2010). Multiple solutions for a problem*: A tool for evaluation of mathematical thinking in Geometry. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), Proceedings of CERME-6, 2009 (pp. 776–785). Lyon, France.*

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior, 31(1), 73–90.*

Levenson, E., (2011), Exploring collective mathematical creativity in elementary school*, Journal of creative behavior, 45 (3)*

Levenson, E. (2013). Tasks that may occasion mathematical creativity: Teachers' choices*. Journal of Mathematics Teacher Education, 16(4), 269–291.*

Levenson, E., Swisa, R., & Tabach, M., (2018) Evaluating the potential of tasks to occasion mathematical creativity: definitions and measurements, *Research in Mathematics Education, 20:3, 273-294, DOI: 10.1080/14794802.2018.1450777*

Liljedhal, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 26(3), 24–42.*

Liljedahl, P., & Sriraman, B. (2006). Musings on Mathematical Creativity. *For The Learning of Mathematics, 26*

Liljedahl, P. (2009). In the words of the creators. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.) *Mathematical creativity and the education of gifted children. (pp. 51–70).* Rotterdam, NL: Sense Publishers.

Liljedahl, P. (2013). Illumination*: An affective experience? ZDM, 45, 253–265.*

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67, 255–276.*

Lu, X., Kaiser. G., (2021) Creativity in students' modelling competencies: conceptualisation and measurement, *Educational Studies in Mathematics (2022) 109:287–311*

Lubart, T. I. (2001). Models of the creative process: Past, present and future. *Creativity Research Journal, 13(3–4), 295–308. https://doi.org/10.1207/S15326934CRJ1334_07.*

Maj, B, Developing creative mathematical activities: method transfer and hypotheses formulation, University of Rzeszow

Mann, E. (2005). Mathematical creativity and school mathematics: Indicators of mathematical creativity in middle school students (Doctoral dissertation*). Retrieved from Doctoral Dissertations. http://digitalcommons.uconn.edu/dissertations/AAI3205573.*

Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted, 30(2), 236–260.*

Mann, E. L. (2009). The search for mathematical creativity: Identifying creative potential in middle school students. *Creativity Research Journal, 21(4), 338–348. https://doi.org/10.1080/10400410903297402*

Mann, E., Chamberlin, S. A., & Graefe, A. K. (2017). The prominence of affect in creativity: Expanding the conception of creativity in mathematical problem solving. *In R. Leikin & B. Sriraman (Eds.), Creativity and giftedness: Interdisciplinary perspectives from mathematics and beyond (pp. 57–76). Switzerland: Springer.*

Martin, L., & Schwartz, D. L. (2014). A pragmatic perspective on visual representation and creative thinking. *Visual Studies, 29(1), 80–93.*

Mayesky, M. (2009). *Creative Activities for Young Children*. USA: Delmar Cengage Learning.

Meissner, H. (2000). Creativity in Mathematics Education. *The Meeting of the International Congress on Mathematics Education*, Tokyo, Japan.

MEISSNER, H. (2003). *Constructing mathematical concepts with calculators or computers. In: Proceedings of CERME 3*: Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria Italy

Mhlolo, M., (2016), Regular classroom teachers' recognition and support of the creative potential of mildly gifted mathematics learners, *ZDM Mathematics Education* (2017) 49:81–94
DOI 10.1007/s11858-016-0824-6

Milgram, R. M., & Livne, N. L. (2005). Creativity as a general and a domain-specific ability: The domain of mathematics as an exemplar. In J. C. Kaufman & J. Baer (Eds.*), Creativity across domains: Faces of the muse (pp. 187–204).* Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Moraová, H., Novotná, J., & Favilli, F. (2018). Ornaments and tessellations: Encouraging creativity in mathematics classrooms. *In F. M. Singer (Ed.), Mathematical creativity and mathematical giftedness (this volume). New York: Springer.*

Movshovitz-Hadar, N. (2008). Intellectual courage and mathematical creativity. In R. Leikin (Ed.), *Proceedings of the 5th international conference on creativity in mathematics and the education of gifted students (pp. 173–185).*

Mumford, M. D. (2003). Where have we been, where are we going? Taking stock in creativity research. *Creativity Research Journal, 15(2&3), 107–120.*

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.

Nakakoji, K., Yamamoto, Y., & Ohira, M. (1999). A Framework That Supports Collective Creativity in Design Using Visual Images. In E. Edmonds, & L. Candy (Eds.), *Proceedings of the 3rd Conference on Creativity & Cognition* (pp. 166-173). New York: ACM Press. http://www.informatik.unitrier.de/~ley/db/conf/candc/candc1999.html

Neuhaus, K. (2001). *Die Rolle des Kreativitätsproblems in der Mathematikdidaktik* [The role of the creativity problem in mathematics didactics]. Berlin: Köster.

Nitko, A.J. (1996). *Educational assessment of students (2nd ed.).* Englewood Cliffs, NJ: Merrill.

Nolte M., Pamperien K. (2017). Challenging problems in a regular classroom setting and in a special foster programme. *ZDM Mathematics Education*. doi:10.1007/s11858-016-0825-5.

Nolte, M., (2018) Twice-Exceptional Students: Students with Special Needs and a High Mathematical Potential*, F. M. Singer (ed.), Mathematical Creativity and Mathematical Giftedness, ICME-13 Monographs, https://doi.org/10.1007/978-3-319-73156-8_8*

Novita, Putra (2016), USING TASK LIKE PISA'S PROBLEM TO SUPPORT STUDENT'S CREATIVITY IN MATHEMATICS,, *Journal on Mathematics Education Volume 7*pp. 33-44

Obersteiner, A., & Tumpek, C. (2016). Measuring fraction comparison strategies with eye-tracking. ZDM— *Mathematics Education*, 48(3), 255–266

Osborn, A. F. (1963). *Applied imagination (3rd ed.).* New York: Charles Scribner's Sons.

Palsdottir, G., & Sriraman, B. (2017). Teacher's views on modeling as a creative mathematical activity. In R. Leikin & B. Sriraman (Eds.), *Creativity and giftedness (pp. 47–55). Switzerland: Springer*.

Paz-Baruch, N., Leikin, M., Aharon-Peretz, J., & Leikin, R. (2014). Speed of information processing in generally gifted and excelling in mathematics adolescents. *High Abilities Studies, 25(2),* 143–167.

Pehkonen, E. (1997). The state-of-art in mathematics creativity. *International Review on Mathematical Education, 29, 63–66.*

Pelczer, I., Singer, F. M., & Voica, C. (2011). An analysis of relevant hints in problem solving. In B. buz (Ed.), Developing mathematical thinking. *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Ankara, Turkey: PME. ISBN: 978-975-429-262-6, 1, 370.*

Pelczer, I., Singer, F. M., & Voica, C. (2013). Cognitive framing: A case in problem posing. Procedia— *SBS, PSIWORLD 2012, 78, 195–199.*

Perry, B. D. (2001). Curiosity: The fuel of development. *Early Childhood Today, 15, 22–24.*

Pitta-Pantazi, D., Sophocleous, P., & Christou, C. (2013). Spatial visualizers, object visualizers and verbalizers: their mathematical creative abilities. ZDM – *The International Journal on Mathematics Education, 45(2), 199–213.*

Pitta-Pantazi, D., Kattou, M., & Christou, C. (2018). Mathematical creativity: Product, person, process and press. In F. M. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness (this volume). New York: Springer.*

Plucker, J., & Beghetto, R. A. (2004). Why creativity is domain general, why it looks domain specific, and why the distinction does not matter. In R. J. Sternberg, E. L. Grigorenko & J. L. Singer (Eds.), Creativity: From potential to realization (pp. 153–168). Washington, DC: American Psychological Association.

Poincare´, H. (1948). *Science and method*. New York: Dover.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving,* Vol.I. New York: Wiley.

Polya, G. (1963). On learning, teaching, and learning teaching. *American Mathematical Monthly, 70, 605–619.*

Polya, G. (1965). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving,* Vol.II. New York: Wiley.

Polya, G. (1973). *How to solve it; A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. New York: Wiley.

Poulos, A., Mamona-Downs, J. (2018) Gifted Students Approaches When Solving Challenging Mathematical Problems *F. M. Singer (ed.), Mathematical Creativity and Mathematical Giftedness, ICME-13 Monographs, https://doi.org/10.1007/978-3-319-73156-8_12*

Prabhu, V., & Czarnocha, B. (2014). Democratizing mathematical creativity through Koestler's bisociation theory. *Mathematics Teaching-Research Journal Online, 6(4), 33–46.*

Preiser, S. (1976). *Kreativitätsforschung* [Research on creativity]. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Presmeg, N. C. (1981). *Parallel threads in the development of Albert Einstein's thought and current ideas on creativity: What are the implications for the teaching of school mathematics*. Unpublished M.Ed. dissertation in Educational Psychology, University of Natal.

Presmeg, N. (2003). Creativity, mathematizing and didactizing: *Leen Streefland's work continues. Educational Studies in Mathematics, 54(1), 127–137. https://doi.org/10.1023/B:EDUC. 0000005255.04769.89.*

Πρόγραμμα Σπουδών μαθηματικών, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου, 2010

Puustinen, M. & Pulkkinen, L. (2001). Models of self-regulated learning: A review. *Scandinavian Journal of Educational Research, 45(3), 269–286.*

Rhodes, M. (1961). An analysis of creativity. *The Phi Delta Kappa, 42(7), 305–310.*

Robinson, K. (2001). *Out of our minds: Learning to be creative* . Chichester: Capstone.

Rogers, C. R. (1954). Toward a theory of creativity. *Etc. , 11 , 249–260.*

Rudowicz, E. (2003). Creativity and culture: A two way interaction. *Scandinavian Journal of Educational Research , 47, 273–290.* http://dx.doi.org/10.1080/00313830308602

RUNCO, M. (1996). Personal creativity: Definition and developmental issues. *New Directions for Child Development*, 72, 3-30.

Runco, M. A. (1999). Divergent thinking. In M. A. Runco & S. R. Pritzker (Eds.), *Encyclopedia of creativity* (pp. 577–582). San Diego, CA: Academic.

Runco, M. A., & Johnson, D. J. (2002). Parents' and teachers' implicit theories of children's creativity: A cross cultural perspective. *Creativity Research Journal, 14, 427–438.*

Runco, M. A. (2003). Education for creative potential. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 47, 317–324

Runco, M. (2004). Creativity. *Annual Review of Psychology, 55, 657–687.*
Runco, M. A. (2010). Divergent thinking, creativity, and ideation. *The Cambridge handbook of creativity (pp. 413–446).*

Runco, M. A., & Cayirdag, N. (2012). The theory of personal creativity and implications for the fulfillment of children's potentials. *In O. N. Saracho (Ed.), Contemporary perspectives on research in creativity in early childhood (pp. 31–43). Charlotte: Information Age Publishing*.

Sak, U., & Maker, C. (2006). Developmental variation in children's creative mathematical thinking as a function of schooling, age and knowledge. *Creativity Research Journal, 18(3), 279–291. https://doi.org/10.1207/s15326934crj1803_5.*

Sarooghi, H., Libaers, D., & Burkemper, A. (2015). Examining the Relationship Between Creativity and Innovation: A Meta-Analysis of Organisational, Cultural, and Environmental Factors. *Journal of Business Venturing, 30(5), 714-731.*

Sawyer, R. K., John-Steiner, V., Moran, S., Sternberg, R., Feldman, D. H., Csikszentmihalyi, M., (2003*). Creativity and development*. New York: Oxford University Press.

SAWYER, R. K. (2004). Creative teaching: Collaborative discussion as disciplined improvisation. *Educational Researcher*, 33(2), 12-20.

Schindler, M., Lilienthal, A.J., Chadalavada, R., & Ögren, M. (2016). Creativity in the eye of the student. Refining investigations of mathematical creativity using eye-tracking goggles. In C. Csíkos, A. Rausch, & J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), 4, 163–170. Szeged*, Hungary: PME.

Schindler, M., Joklitschke, J., Rott, B., (2018) Mathematical Creativity and Its Subdomain-Specificity. Investigating the Appropriateness of Solutions in Multiple Solution Tasks, *, F. M. Singer (ed.),* *Mathematical Creativity and Mathematical Giftedness, ICME-13 Monographs, https://doi.org/10.1007/978-3-319-73156-8_8*

Schindler, M., & Lilienthal, A.J. (2018). Eye-tracking for studying mathematical difficulties—also in inclusive settings. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME),* 4, 115–122. Umeå, Sweden: PME.

Schindler, M., & Lilienthal, A.J. (2019). Students_ Creative Process in Mathematics: Insights from Eye-Tracking-Stimulated Recall Interview on Students_ Work on Multiple Solution Task, *International Journal of Science and Mathematics Education* https://doi.org/10.1007/s10763-019-10033-0

Schoenfeld, A. H. (1983). *Problem solving in the mathematics curriculum: A report, recommendations, and an annotated bibliography.* The Mathematical Association of America.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of well-taught mathematics courses*. Educational Psychologist, 23, 145–166.*

S C H O E V E R S, E, KROESBERGEN, E, KATTOY, M, Mathematical Creativity: A Combination of Domaingeneral Creative and Domain-specific Mathematical Skills, Journal of creative behavior

Sharp, C. (2004). Developing Young Children's Creativity: what can we learn from research? *Topic, 32, 5–12*

Sheffield, L. (2009). Developing Mathematical Creativity-Questions May Be the Answer. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 87-100). Rotterdam The Netherlands: Sense Publishers.

Sheffield, L. J. (2013). Creativity and school mathematics: Some modest observations. *ZDM—Mathematics Education, 45, 325–332.*

Sheffield, L. J. (2017). Dangerous myths about "gifted" mathematics students. *ZDM Mathematics Education.* doi:10.1007/ s11858-016-0814-8

Sheffield, L. J. (2018). Commentary paper: A reflection on mathematical creativity and giftedness. In M. F. Singer (Ed*.), Mathematical creativity and mathematical giftedness. Enhancing creative capacities in mathematically promising students (pp. 405–423*). Nk: Springer.

Shepard, L. A. (1991). Psychometricians' beliefs about learning. *Educational Researcher, 20(6*), 2–16.

Shepard, L. A. (2002). *The role of assessment in a learning culture. In C. Desforges & R. Fox (Eds.), Teaching and learning: The essential readings* (pp. 229–253). London: Blackwell Publishers

Shriki, A. (2005). What do teachers know about creativity? *Unpublished paper, Kesher-Ham – Israel National Center of Mathematics, Technion (In Hebrew).*

Shriki, A. (2010). Working like real mathematicians: Developing prospective teachers' awareness of mathematical creativity through generating new concepts. *Educational Studies in Mathematics, 73(2), 159–179. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9212-2.*

Shriki, A. (2013). A model for assessing the development of students' creativity in the context of problem posing. *Creative Education, 4, 430–439.*

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14(1), 19–28.*

Silver, E. A. (1995). The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives. International Reviews on Mathematical Education, 27(2), 67–72.

*S*ilver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S., & Kenny, P. A. (1996). *Posing mathematical roblems: An exploratory study. Journal for Research in Mathematics Education, 27(3), 293–309.*

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. ZDM—*The International Journal on Mathematics Education, 29(3), 75–80. https://doi.org/10.1007/s11858-997-0003-x.*

Singer, F. M. (2012a). Boosting the young learners' creativity: Representational change as a tool to promote individual talents (Plenary lecture). *In The 7th International Group for Mathematical Creativity and Giftedness (MCG) International Conference Proceedings (pp. 3–26). Busan, South Korea: MCG. ISBN: 978-89-98016-10-4.*

Singer, F. M. (2012b). Exploring mathematical thinking and mathematical creativity through problem posing. *In R. Leikin, B. Koichu, & A. Berman (Eds.), Exploring and advancing mathematical abilities in high achievers (pp. 119–124). Haifa: University of Haifa.*

Singer, F. M., Ellerton, N. F., & Cai, J. (Eds.). (2013a). *Problem posing in mathematics teaching and learning: Establishing a framework for research. Educational Studies in Mathematics, 1 (83).*

Singer, F. M., Ellerton, N. F., & Cai, J. (2013b). *Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. Educational Studies in Mathematics, 83(1), 1–7.*

Singer, F. M., & Voica, C. (2015). Is problem posing a tool for identifying and developing mathematical creativity*? In F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.), Mathematical problem posing: From research to effective practice (pp. 141–174). New York: Springer.*

Singer, F. M., Sheffield, L. J., Freiman, V., & Brandl, M. (2016). *Research on and activities for mathematically gifted students*. New York: Springer Open.

Singer, F. M., Sheffield, L. J., Leikin R., (2017). Advancements in research on creativity and giftedness in mathematics education: introduction to the special issue *ZDM Mathematics Education (2017) 49:5–12 DOI 10.1007/s11858-017-0836-x*

Singer, F. M., & Voica, C. (2017). When mathematics meets real objects: How does creativity interact with expertise in problem solving and posing. *In Roza Leikin and Bharath Sriraman (Eds.), Creativity and giftedness. Interdisciplinary perspectives from mathematics and beyond (pp. 75–103). Springer International Publishing Switzerland.*

Singer, F. M., Voica, C., & Pelczer, I. (2017). Cognitive styles in posing geometry problems: Implications for assessment of mathematical creativity. *ZDM Mathematics Education*. doi:10.1007/s11858-016-0820-x.

Singer, M. F. (2018). Enhancing creative capacities in mathematically-promising students. Challenges and limits. In M. F. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness. Enhancing creative capacities in mathematically promising students (pp. 1–23). New York: Springer*

Spearman, C. (1923). Further note on the "theory of two factors". *British Journal of Psychology*, 13, 266–270

Spendlove, D. (2012). Creativity in education: A review. *Design and Technology Education: An International Journal, 10, 9–18.*

Sriraman, B. (2004). The characteristics of mathematical creativity. *The Mathematics Educator, 14(1), 19–34.*

Sriraman, B. (2004a). Discovering Steiner Triple Systems through problem solving. *The Mathematics Teacher, 97(5), 320–326.*

Sriraman, B. (2004b). Reflective abstraction, uniframes and the formulation of generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior, 23(2), 205–222.*

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *The Journal of Secondary Gifted Education, 17(1), 20–36.*

Sriraman, B., (2008), The characteristics of mathematical creativity, *ZDM Mathematics Education, (41)*

Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 41(13), 13–27. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0114-z.*

Sriraman, B. (2011). Mathematical creativity and mathematics education: A derivative of existing research. In B. Sriraman & H. L. Kyeong (Eds.), *The elements of creativity and giftedness in mathematics (pp. 119–130). Rotterdam: Sense Publishers.*

Sriraman, B., Haavold, P., & Lee, K. (2013). Mathematical creativity and giftedness: A commentary on and review of theory, new operational views, and ways forward. *ZDM Mathematics Education, 45, 215–225.*

Sriraman, B., Haavold, P., & Lee, K. (2014). Creativity in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education (pp. 109–115).* Dordrecht, NL: Springer

Sriraman, B., & Dickman, B. (2017). Mathematical pathologies as pathways into creativity. *ZDM Mathematics Educatio*n. doi:10.1007/s11858-016-0822-8.

Star, J. R., & Newton, J. K. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM, 41, 557–567.*

Starko, A. J. (2001). *Creativity in the classroom: Schools of curious delight*. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Sternberg, R. J., & Ben-Zeev, T. (1996). *The Nature of Mathematical Thinking* (335p). New York: Lawrence Erlbaum Assoc

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (1996). Investing in creativity. *American Psychologist, 51, 677–688.*

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (1999). The concept of creativity: Prospects and paradigms. *In R. J. Sternberg (Ed.), Handbook of creativity (pp. 93–115). Cambridge: Cambridge University Press.*

Sternberg, R. J. (Ed.). (1999). *Handbook of creativity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Stoyanova, E. (1997). *Extending and exploring students' problem solving via problem posing: A study of years 8 and 9 students involved in mathematics challenge and enrichment stages of Euler enrichment program for young Australians*. Unpublished doctoral dissertation submitted to Edith Cowan University, Perth, Australia.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing. *In P. Clarkson (Ed.), Technology in mathematics education (pp. 518–525). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.*

Strauss, S. (1993). Teachers' pedagogical content knowledge about children's minds and learning: Implications for teacher education. *Educational Psychologist, 28, 279*–290.

Stright, A.D., Neitzel, C., Sears, K.G. & Hoke-Sinex, L. (2001). Instruction begins in the home: Relations between parental instruction and children's self-regulation in the classroom. *Journal of Educational Psychology, 93(3), 456–466.*

Sullivan, P., Warren, E., & White, P. (2000). Students' responses to content specific open-ended mathematical tasks. *Mathematics Education Research Journal,* 12(1), 2–17.

Supriatin, A., MS Z., Boeriswati, E., Annisah, S., Latifahe, A., Zulkarnain, A. (2020). The Design of an Instrument for Identifying Students' Creativity in Solving Mathematical Problems*, International Journal of Innovation, Creativity and Change. Volume 12, (3).*

Tabach, M., & Friedlander, A. (2013). School mathematics and creativity at the elementary and middle grade level: How are they related? *ZDM Mathematics Education, 45(2), 227–238.* doi:10.1007/s11858-012-0471-5

Tabach, M., & Friedlander, A. (2017). Algebraic procedures and creative thinking. *ZDM Mathematics Education*. doi:10.1007/ s11858-016-0803-y.

Tabach, M., & Friedlander, A. (2018). Instances of promoting creativity with procedural tasks. *In F. M. Singer (Ed.), Mathematical creativity and mathematical giftedness (this volume). New York: Springer.*

Thorndike, R. L., Hagen, E. P., & Sattler, J. M. (1986). *Technical manual for the Stanford-Binet Intelligence Scale*. (4th edition). Chicago: Riverside

Thurstone, L. L., & Thurstone, T. C. (1941). *Factorial studies of intelligence*. Chicago: University of Chicago Press.

Tillema, H. H. (1997). Promoting conceptual change in learning to teach. Asia-*Pacific Journal of Teacher Education, 25(1), 7–16.*

Tjoe, H. (2019). “Looking Back” to Solve Differently: Familiarity, Fluency, and Flexibility. In P. Liljedahl, & M. Santos-Trigo (Eds). *Mathematical Problem Solving*. *ICME-13 Monographs* (pp. 3-20). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_1

Tobin, K., & Tippins, D. (1993). Constructivism as a referent for teaching and learning. In K. Tobin (Ed.), *The practice of constructivism in science education* (pp. 3–21). Washington, DC: AAAS Press

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquiθre, P., & Verschaffel, L. (2009). Jump or compensate? Strategy flexibility in the number domain up to 100. *ZDM, 41, 581–590.*

Torrance, E. P. (1966). *Torrance tests of creative thinking: Norms-technical manual*. Englewood Cliffs, NJ: Personell Press.

Torrance, E. P. (1974). *Torrance tests of creative thinking*. Bensenville, IL: Scholastic Testing Service.

Torrance, E. P. (1988). The nature of creativity as manifest in its testing. In R. J. Sternberg (Ed.), *The nature of creativity: Contemporary psychological perspectives* (pp. 43–75). New York: Cambridge University Press.
Torrance, E. P. (1993). *Understanding creativity*: Where to start?

Torrance. E. P. (2008a). *Torrance tests of creative thinking: Streamlined scoring guide for figural forms A and B*. Bensenville, IL: Scholastic Testing Service, Inc.

Van Harpen, X. Y., & Sriraman, B. (2013). Creativity and mathematical problem posing: An analysis of high school students’ mathematical problem posing in China and the USA. *Educational Studies in Mathematics, 82(2), 201–221.*

Van Harpen, X. Y., & Presmeg, N. (2013). An investigation of relationships between students’ mathematical problem-posing abilities and their mathematical content knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 83, 117–132.*

Vidal, R. V. V. (2005). Creativity for operational researchers. *Investigação Operacional (Portugal), 25, 1–24.*

Vinner, S. (1989). Avoidance of visual considerations in calculus students. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11, 149–156.*

Voica, C., & Singer, F. M. (2013). Problem modification as a tool for detecting cognitive flexibility in school children. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 45(2), 267–279.*

Voica, C., & Singer, F. M. (2014). Problem posing: A pathway to identifying gifted students. *In MCG8 Proceedings (pp. 119–124). Univ. of Denver, Colorado, USA.*

Voica, C., & Singer, F. M. (2018). Cognitive variety in rich-challenging tasks. *In F. M. Singer (Ed.), Mathematical creativity and mathematical giftedness (this volume). New York: Springer.*

Von Glasersfeld, E. (1984). A radical constructivist view of basic mathematical concepts. In P. Ernest (Ed.), Constructing mathematical knowledge: *Epistemology and mathematical education (pp. 5–8).* London: Falmer. Weisberg, R. W

Vygotsky, L. S. (1930/1984). Imagination and creativity in adolescent. In D. B. Elkonin (Ed.) Vol. 4: Child psychology. *The collected works of L. S. Vygotsky (pp. 199–219).* Moscow: Pedagogika. (In Russian).

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society* . Cambridge, MA: Harvard University Press.

Vygotsky, L. (1984). Pedologiya podrostka [Pedology of the adolescent*]. In L. Vygotsky, Sobranie sochinenii [Collected works] (vol. 4, pp.5–242)*. Moscow: Pedagogika.

Vygotsky, L. (2004). Imagination and creativity in childhood. *Journal of Russian and East European Psychology, 42(1), 7–97.*

Wallas, G. (1926). *The art of thought*. New York: Harcourt, Brace and Company.

Watts, D.M., & Alsop, S. (1996). *The QUESTCUP Project: A study of pupils' questions for conceptual understanding.* New York: Paper presented at the American Educational Research Association

Wechsler, D. (1991). *Manual for the Wechsler intelligence scales for children* (3rd ed.), (WISC III). San Antonio: Psychological Corporation.

Weisberg, R. W. (1988). *Problem solving and creativity. In R. J. Sternberg* (Ed.), The nature of creativity (pp. 148–176). Cambridge: Cambridge University Press.

Weisberg, R. W. (1993). *Creativity: Beyond the myth of genius*. New York: Freeman.

Wessels, H. (2014). Levels of mathematical creativity in model-eliciting activities, *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1(9), 22–40.*

Wheeler, S., Waite, S., & Bromfield, C. (2002). Promoting creativity through the use of ICT. *Journal of Computer Assisted learning, 18(3), 367–378. https://doi.org/10.1046/j.0266-4909. 2002.00247.x.*

Wilson, M., & Cooney, T. J. (2002). Mathematics teacher change and development. *In G. C. Leder, E. Pehkonene & G. Törner (Eds.), Beliefs: A hidden variable in mathematics education? (pp. 127–147). Dordrecht: Kluwer Academic.*

Worthington, M., & Carruthers, E. (2003). *Children's mathematics: Making marks, making meaning*. London: Paul Chapman.

Χασάπης, Δ., (2008) Το βιβλίο στη Διδασκαλία των Μαθηματικών, *7ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη, 2008.*

Yachel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 390-408.

Zazkis, R., & Holton, D. (2009). Snapshots of creativity in undergraduate mathematics education. In R. Leikin, B. Koichu, & A. Berman (Eds.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 345–366). Rotterdam, Netherlands: Sense publishers.

Zazkis, R. (2016). Lesson play tasks as a creative venture for teachers and teacher educators. *ZDM Mathematics Education. doi:10.1007/s11858-016-0808-6.*

Zazkis, R., & Leikin, R. (2007). Generating examples: From pedagogical tool to a research tool. *For the Learning of Mathematics, 27(2), 15–21.*

Zimmerman, B.J. (1989). A social cognitive view of self-regulated academic learning. *Journal of Educational Psychology, 81(3), 329–339.*

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Θέμα: «Μαθηματικά και Δημιουργικότητα»

Σκοπός της έρευνας είναι η μέτρηση της μαθηματικής δημιουργικότητας. Το συγκεκριμένο ερωτηματολόγιο είναι ανώνυμο, απευθύνεται σε μέλλοντες εκπαιδευτικούς της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και προορίζεται αποκλειστικά για ερευνητική χρήση. Η έρευνα διεξάγεται στα πλαίσια εκπόνησης διπλωματικής εργασίας για την απόκτηση μεταπτυχιακού τίτλου σπουδών στη «Διδακτική των Φυσικών Επιστημών με τεχνολογίες μάθησης» που πραγματοποιείται στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Η συμβολή σας στην επιτυχή διεξαγωγή της έρευνας είναι ιδιαίτερα σημαντική και οι απαντήσεις σας είναι καθοριστικής σημασίας για την ολοκλήρωση της έρευνας. Ο χρόνος που θα χρειαστείτε για την συμπλήρωση του ερωτηματολογίου είναι περίπου 30 λεπτά. Σας ευχαριστώ πολύ εκ των προτέρων για τη συμβολή και το χρόνο που θα αφιερώσετε.

ΠΡΟΣΩΠΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΦΥΛΟ: ΑΝΤΡΑΣ ΓΥΝΑΙΚΑ

ΕΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ:

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ:

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Προτείνετε όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ώστε να λύσετε το σύστημα εξισώσεων:

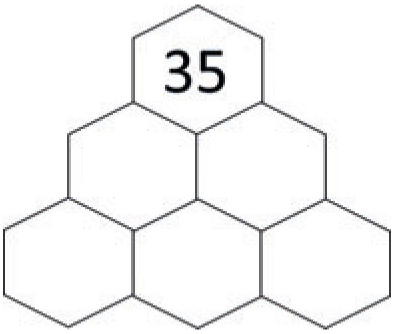
$\{3x+2y=10$

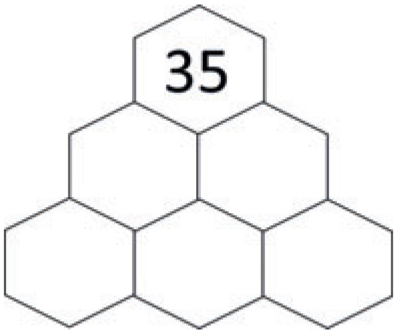
$\{2x+3y=10$

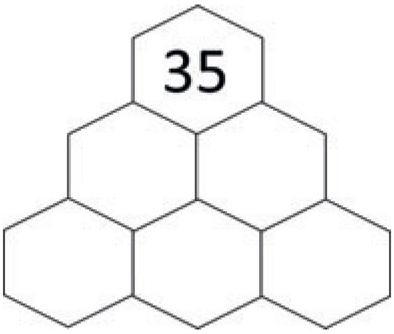
2 Ο Χρήστος είναι 3 φορές μεγαλύτερος ηλικιακά από τον Δημήτρη, ενώ το άθροισμα της ηλικίας τους είναι 48. Ποιες είναι οι ηλικίες τους;
Προτείνετε και άλλες τέτοιες ερωτήσεις όπως το παράδειγμα.

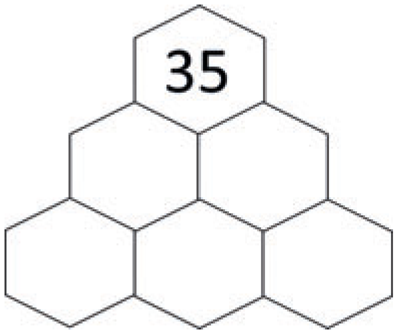
3. Γράψτε όσα περισσότερα προβλήματα μπορείτε, η λύση των οποίων να είναι 10-5=5

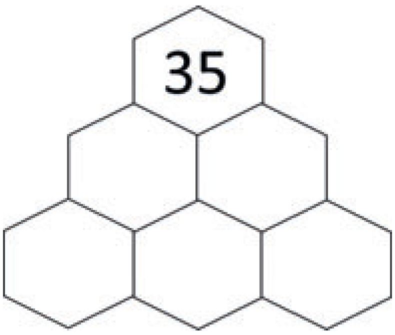
4. Στην παρακάτω πυραμίδα αριθμού κάθε κελί περιέχει μόνο έναν αριθμό. Κάθε αριθμός μπορεί να υπολογιστεί εκτελώντας πάντα την ίδια λειτουργία με τους δύο αριθμούς που εμφανίζονται κάτω από αυτό. Συμπληρώστε τους αριθμούς που λείπουν στην πυραμίδα, διατηρώντας τον αριθμό 35 στο κορυφαίο κελί της πυραμίδας. Βρείτε όσο το δυνατόν περισσότερες λύσεις.

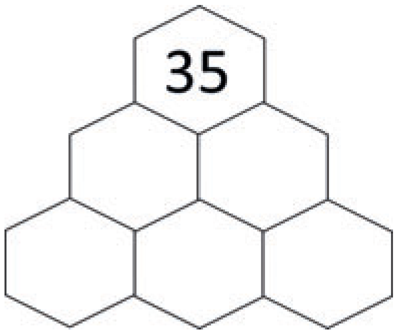












5. Να κατασκευάσετε στο τετραγωνισμένο φύλλο χαρτιού τετράγωνα και τρίγωνα των οποίων ο αριθμός που δείχνει το εμβαδόν τους είναι ίσος με τον αριθμό που δείχνει την περίμετρο τους. Κάθε τετραγωνάκι είναι ίσο με 1 cm^2.

Σας διαβεβαιώνουμε για την εμπιστευτικότητα της παρούσας έρευνας. Τα δεδομένα αυτής θα χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά για ερευνητική χρήση και δε θα χρησιμοποιηθούν για άλλο σκοπό. Σας ευχαριστούμε θερμά για τη σημαντική σας συνεισφορά στην έρευνα αυτή.