ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μαρία Σελιάμη

ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ ΜΕ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΛΗΞΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2023

UNIVERSITY OF IOANNINA

Department of Mathematics

Maria Seliami

INVENTORY CONTROL POLICIES FOR PERISHABLE PRODUCTS

Master's Thesis

Ioannina, 2023

Αφιερώνεται στην οικογένεια μου

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Στατιστική και Επιχειρισιακή Έρευνα που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 16/03/2023 από την εξεταστική επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
Κωνσταντίνα Σκούρη	Καθηγήτρια
Κωνσταντίνος Παρσόπουλος	Καθηγητής
Ιωάννης Κωνσταντάρας	Επίκουρος Καθηγητής

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

"Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή."

Μαρία Σελιάμη

Ευχαριστιες

Η παρούσα διατριβή πραγματοποιήθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Με την ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους, των οποίων η συμβολή ήταν καθοριστική σε αυτή τη μελέτη.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κυρία Σκούρη Κωνσταντίνα, Καθηγήτρια του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και επιβλέπουσα της Μεταπτυχιακής μου Διατριβής, για την βοήθεια, την καθοδήγηση και τις συμβουλές της κατά την διάρκεια της εκπόνησης της Μεταπτυχιακής μου Διατριβής.

Ιδιαίτερα θέλω να ευχαριστήσω τον κύριο Παρσόπουλο Κωνσταντίνο, Καθηγητή του Τμήματος Μηχανικών Η/Υ του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και τον κύριο Κωνσταντάτα Ιωάννη, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων του Πανεπιστημίου Μακεδονίας, μέλη της εξεταστικής μου επιτροπής, για το χρόνο που διέθεσαν για τις παρατηρήσεις που υπέδειξαν με σκόπο την βελτίωση της Μεταπτυχιακής μου Διατριβής.

Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους του διδάσκοντες του Τομέα Πιθανοτήτων, Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας του Τμήματος Μαθηματικών για τις γνώσεις που μου προσέφεραν σε προπτυχιακό και μεταπτυχιακό επίπεδο και τη συνεργασία που είχαμε όλα αυτά τα χρόνια.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την συναισθηματική και υλική της υποστήριξη, ώστε να ολοκληρώσω τις μεταπτυχιακές μου σπουδές.

Ιωάννινα 2023,
Σελιάμη Μαρία

Περιληψη

Πολλά προϊόντα χάνουν τη λειτουργικότητά τους ή την αξία τους με την πάροδο του χρόνου είτε λόγω του συγκεκριμένου χρόνου ζωής τους είτε λόγω απαξίωσής τους, όπως είδη διατροφής, προϊόντα αίματος, φαρμακευτικά προϊόντα, προϊόντα τεχνολογίας ή μόδας. Η διαχείριση αποθεμάτων προϊόντων με πεπερασμένο χρόνο ζωής (ημερομηνία λήξης) είναι περισσότερη πολύπλοκη καθώς προϊόντα διαφόρων «ηλικιών» - προϊόντα που βρίσκονται σε διαφορετικές φάσεις του κύκλου ζωής τους- συνυπάρχουν στην αγορά. Η ηλικία του προϊόντος συνεπάγεται διαφορές στην τιμή του, στη λειτουργικότητα του, στις προτιμήσεις των καταναλωτών. Η διαχείριση αποθεμάτων τέτοιου τύπου προϊόντων ανάγεται στη δεκαετία του 1970, ωστόσο η μελέτη πολιτικών αναπλήρωσης του αποθέματός τους παραμένει θέμα ενδιαφέροντος λόγω του υψηλού κόστους απαξίωσής τους, αλλά και των σύγχρονων απαιτήσεων του περιορισμού της σπατάλης φυσικών πόρων. Στόχος της παρούσας διατριβής είναι η ανασκόπηση περιοδικών πολιτικών διαχείρισης αποθεμάτων προϊόντων με ημερομηνία λήξης, λαμβάνοντας υπόψη εναλλακτικούς τρόπους αντιμετώπισης του πεπερασμένου χρόνου ζωής των προϊόντων όπως, (1) η υποκατάσταση μεταξύ προϊόντων που βρίσκονται σε διαφορετικές φάσεις του κύκλου ζωής τους, (2) η κατάλληλη τιμολόγηση (διαφορετικές τιμές πώλησης ανάλογα με την ηλικία τους) και (3) η επιλογή τρόπου διάθεσης των προϊόντων αυτών σε σχέση με τον εναπομείναντα χρόνο ζωής τους, (4) η απόσυρση αποθέματος συγκεκριμένης ηλικίας, για την αποτελεσματική (υπό την έννοια της ελαχιστοποίησης/μεγιστοποίησης του κόστους/κέρδους) διαχείριση των προϊόντων αυτών.

Abstract

Many goods, such as foods, blood products, pharmaceuticals, technological or fashion products, lose their functionality or value over time either due to their expiration date or obsolescence. Further complicating inventory management of these products is the fact that often products of different "ages"- at different phases in their life cycles- co-exist in the market at the same time. Products age implies differences in their price, functionality and consumer preferences. The inventory management of perishable products goes back to 1970s. However, the interest of managing perishable inventory still remains due to both high perishable cost and increased concerns of natural resources conservation. In this thesis, inventory systems under periodic review policies are presented, examining ways of dealing with products perishability, including, stock-age dependent (1) substitution, (2) pricing (3) issuing and (4) disposal policies, towards to effective management (in the mean of cost /profit minimization /maximization) of perishable products.

Περιεχομενα

Εισαγωγή **3**

1 Διαχείριση αποθεμάτων προϊόντων με χρόνο ζωής δύο περιόδων: πολιτικές αναπλήρωσης τύπου base stock και πολιτικές υποκατάστασης **9**

1.1 Υποθέσεις και συμβολισμός 10

1.2 Προσδιορισμός της συνάρτησης κόστους 11

1.3 Σύγκριση πολιτικών υποκατάστασης υπό την πολιτική αναπλήρωσης TIS 13

1.4 Σύγκριση πολιτικών υποκατάστασης υπό την πολιτική αναπλήρωσης NIS 27

1.5 Σύγκριση πολιτικών υποκατάστασης με την χρήση μεθόδων LIFO και FIFO 34

1.6 Διερεύνηση βέλτιστης πολιτικής αναπλήρωσης αποθέματος και προσδιορισμός base stock level 35

1.7 Παραδείγματα 38

1.8 Συμπεράσματα 41

2 Διαχείριση αποθεμάτων προϊόντων με χρόνο ζωής δύο περιόδων: πολιτικές αναπλήρωσης, υποκατάστασης και τιμολόγησης των προϊόντων **43**

2.1 Υποθέσεις και συμβολισμός 43

2.2 Προσδιορισμός της συνάρτησης κέρδους 44

2.3 Προσδιορισμός μοντέλου ζήτησης 45

2.3.1 Διαχείριση χωρίς την δυνατότητα υποκατάστασης 45

2.3.2 Διαχείριση με την δυνατότητα υποκατάστασης 52
2.4 Δυνατές πολιτικές διαχείρισης και τιμολόγησης αποθεμάτων . . . 54
2.5 Συμπεράσματα 58

3 Διαχείριση αποθεμάτων προϊόντων με χρόνο ζωής l περιόδων: πολιτικές αναπλήρωσης, επιλογής τρόπου διάθεσης και απόσυρσης αποθέματος 61
3.1 Υποθέσεις και συμβολισμός 61
3.2 Προσδιορισμός της συνάρτησης κόστους 62
3.2.1 Καταστάσεις 62
3.2.2 Αποφάσεις 63
3.2.3 Μεταβάσεις μεταξύ καταστάσεων και προσδιορισμός των αντίστοιχων πιθανοτήτων 63
3.2.4 Προσδιορισμός της συνάρτησης κόστους 65
3.3 Πολιτικές αναπλήρωσης, επιλογής τρόπου διάθεσης και απόσυρσης αποθέματος 66
3.4 Συμπεράσματα 69

4 Διαχείριση αποθεμάτων προϊόντων με χρόνο ζωής l περιόδων: πολιτική αναπλήρωσης και επιλογής τρόπου διάθεσης αποθέματος με διαφοροποίηση στην τιμή πώλησης του 71
4.1 Υποθέσεις και συμβολισμός 72
4.2 Προσδιορισμός της συνάρτησης κέρδους 72
4.3 Βέλτιστη ποσότητα αναπλήρωσης και αποθέματος προς διάθεση με τιμή εκκαθάρισης 74
4.4 Ευρετικές μέθοδοι 98
4.5 Συμπεράσματα 102

Επίλογος-Θέματα για περαιτέρω έρευνα 103

Βιβλιογραφία 104

Εισαγωγη

Η διαχείριση αποθεμάτων αποτελεί πρόκληση για οποιαδήποτε επιχείρηση που δραστηριοποιείται στην παραγωγή και διακίνηση προϊόντων και αυτή η πρόκληση γίνεται ακόμη μεγαλύτερη όταν πρόκειται για προϊόντα με ημερομηνία λήξης (τρόφιμα, φάρμακα, προϊόντα αίματος κλπ) ή προϊόντα με σύντομο χρόνο απώλειας της αρχικής τους αξίας (προϊόντα μόδας, τεχνολογίας κλπ).

Σύμφωνα με τον Οργανισμό Τροφίμων και Γεωργίας των Ηνωμένων Εθνών (FAO), περίπου το 1/3 του συνόλου των τροφίμων που παράγονται σε όλο τον κόσμο χάνεται ή σπαταλάται σε κάποιο σημείο της αλυσίδας εφοδιασμού τροφίμων (ή περίπου 1.4 δισεκατομμύρια τόνων τροφίμων κάθε χρόνο). Στην Ευρωπαϊκή Ένωση (ΕΕ), η ποσότητα αυτή ανέρχεται σε περίπου 87.6 εκατομμύρια τόνους κάθε χρόνο ενώ στις Ηνωμένες Πολιτείες η αντίστοιχη ποσότητα ανέρχεται σε 40 εκατομμύρια τόνους κάθε χρόνο, τη μεγαλύτερη από κάθε άλλη χώρα στον κόσμο. Σημειώνεται ότι περίπου το 30% των τροφίμων χάνεται σε σημεία πώλησης με 23 καταστήματα στις ΗΠΑ να συμμετέχουν σε αυτή την απώλεια με περίπου 7.3 εκατομμύρια τόνων τροφίμων κάθε χρόνο. Σημειώνεται ότι η αξία της απώλειας τροφίμων σε επίπεδο λιανικού εμπορίου αποτιμάται περίπου στο διπλάσιο του ποσού του κέρδους από τις πωλήσεις τροφίμων.

Ο ηλεκτρικός και ηλεκτρονικός εξοπλισμός αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της καθημερινής ζωής με την ευρεία χρήση του να έχει συντελέσει στην αύξηση του βιοτικού επίπεδου για μεγάλο μέρος του πληθυσμού. Ωστόσο, ο τρόπος με τον οποίο παράγεται και πωλείται αυτός ο εξοπλισμός καθώς και η διαχείριση των απόβλητων του ελέγχεται ως μη βιώσιμος. Σημειώνεται ότι η αύξηση του ρυθμού αντικατάστασης των προϊόντων τεχνολογίας οδηγεί σε ολοένα και μεγαλύτερη μείωση του κύκλου ζωής τους με συνέπειες τόσο οικονομικές όσο και περιβαλλοντικές. Για παράδειγμα τα smartphone της Apple έχουν μέσο χρόνο ζωής 2 ετών με τα νέα μοντέλα να κυκλοφορούν συνήθως μία φορά το χρόνο. Ακόμη και χώρες με επίσημο σύστημα διαχείρισης ηλεκτρονικών αποβλήτων παρουσιάζουν σχετικά χαμηλά ποσοστά συλλογής και ανακύκλωσης. Καθώς τα ηλεκτρονικά απόβλητα περιέχουν συστατικά όπως χαλκό, χρυσό, άργυρο, μόλυβδο, υδράργυρο και πλαστικό, αν δεν διαχειριστούν κατάλληλα, αποτελούν κίνδυνο για το περιβάλλον και την υγεία. Επισημαίνεται ότι το 2019 παρήχθησαν 53.6 εκατομμύρια τόνοι ηλεκτρονικών αποβλήτων παγκοσμίως, τα οποία αναμένεται να φτάσουν τα 74.7 εκατομμύρια τόνοι το 2030 και μόνο το 17.4% αυτού έχει επίσημα συλλεχθεί και ανακυκλωθεί (Association, 2020).

Σε αυτό το πλαίσιο, η αποδοτική διαχείριση των αποθεμάτων προϊόντων με πεπερασμένο χρόνο ζωής φαίνεται επιβεβλημένη. Με την επιλογή κατάλληλων πολιτικών, τεχνικών και μεθοδολογιών για την διαχείριση αποθεμάτων αυτών των προϊόντων προκύπτει μείωση ανεπιθύμητων απωλειών λόγω απόσυρσης προϊόντων συνέπεια της υπέρβασης της ημερομηνίας λήξης τους (κύκλου ζωής τους) οδηγώντας στην αύξηση του κέρδους και στην υιοθέτηση στάσης κοινωνικής υπευθυνότητας. Η διαχείριση αποθεμάτων προϊόντων με πεπερασμένο χρόνο ζωής αφορά (τουλάχιστον) τρία προβλήματα διαχείρισης: τον προσδιορισμό της πολιτικής παραγγελιών των προϊόντων, τον τρόπο διάθεσης αυτών στους πελάτες ανάλογα με τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής τους (τρόπο με τον οποίο τοποθετούνται τα προϊόντα στο ράφι για την ικανοποίηση της ζήτησης) και τον προσδιορισμό της χρονικής στιγμής απόσυρσης αποθέματος, της ποσότητας αυτού καθώς και συνθηκών για την υιοθέτηση αυτής της πολιτικής.

Ως προς τις υιοθετούμενες πολιτικές διαχείρισης αποθεμάτων προϊόντων με πεπερασμένο χρόνο ζωής συνήθως αντιστοιχούν στις κλασικές πολιτικές διαχείρισης αποθεμάτων. Τις τελευταίες δεκαετίες τα συστήματα Automated Store Ordering (ASO) και Computer Assisted Ordering (CAO) χρησιμοποιούνται όλο και περισσότερο για τη βελτίωση της αποδοτικότητας και της αποτελεσματικότητας της διαχείρισης αποθεμάτων κυρίως στα σημεία τελικής πώλησης (van der Vorst et al. 1998, van Donselaar et al. 2006). Χρησιμοποιώντας δεδομένα από τα σημεία πώλησης, τα επίπεδα των αποθεμάτων επιθεωρούνται αυτόματα, και είτε μέσω ενός συστήματος ASO μια παραγγελία υποβάλλεται είτε μέσω ενός συστήματος CAO προτείνεται μια ποσότητα παραγγελίας. Στην τελευταία περίπτωση η παραγγελία πρόκειται να υποβληθεί σε περαιτέρω επεξεργασία από τους υπεύθυνους λήψης αποφάσεων παραγγελιών. Τα συστήματα ASO βρίσκονται κυρίως σε σούπερ μάρκετ και καταστήματα που διακινούν μεγάλο αριθμό προϊόντων. Όταν η διαχείριση αφορά μικρότερο αριθμό προϊόντων, όπως τράπεζες αίματος και νοσοκομεία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα σύστημα CAO. Η διαδικασία για τον καθορισμό της ποσότητας παραγγελίας αφορά την επιθεώρηση του πραγματικού επιπέδου αποθεμάτων (που παρακολουθείται από το σύστημα) και την πρόβλεψη της μελλοντικής ζήτησης (λαμβάνοντας υπόψη ιστορικά στοιχεία ζήτησης και επικείμενες προωθητικές ενέργειες). Καθώς τα περισσότερα συστήματα ASO και CAO έχουν σχεδιαστεί για τη διαχείριση αποθεμάτων προϊόντων χωρίς ημερομηνία λήξη, αυτά τα συστήματα δεν αναγνωρίζουν την παλαίωση των προϊόντων που βρίσκονται σε απόθεμα και, επομένως, δεν προβλέπουν την απαξίωση των αποθεμάτων. Εξειδικευμένες πολιτικές διαχείρισης αποθεμάτων προϊόντων με ημερομηνία λήξης δεν έχουν εφαρμοστεί ευρέως στα υπάρχοντα συστήματα ASO και CAO, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε απαξίωση και απώλεια των προϊόντων με περιορισμένο χρόνο ζωής. Ωστόσο με τη σημερινή τεχνολογία, είναι δυνατό να καταγράφεται ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του αποθέματος. Αυτές οι πληροφορίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη λήψη καλύτερων αποφάσεων αναπλήρωσης μειώνοντας την ποσότητα προϊόντων που υπερβαίνουν την ημερομηνία λήξης τους, χωρίς να αντιμετωπίζεται το ενδεχόμενο απώλειας της ζήτησης. Τέτοιες πληροφορίες μπορεί να αξιοποιηθούν στην ανάπτυξη πολιτικών παραγγελιών εξαρτώμενων από την ηλικία των προϊόντων που βρίσκονται σε απόθεμα (Karaesmen et al. 2011, Bakker et al. 2012, Janssen et al. 2016) (Haijema and Minner 2019)

Ως προς τις πολιτικές προτεραιοποίησης της διάθεσης των προϊόντων στους πελάτες αυτές είναι: (α) διάθεση πρώτα των προϊόντων με το μικρότερο υπολειπόμενο χρόνο ζωής (FIFO), (β) η διάθεση πρώτα των προϊόντων με το μεγαλύτερο υπολειπόμενο χρόνο ζωής (LIFO), (γ) μείξεις FIFO και LIFO (Nahmias 1982, Karaesmen et al. 2011)

Προφανώς, όταν οι πελάτες έχουν οι ίδιοι τη δυνατότητα επιλογής προϊόντων, η πολιτική LIFO είναι ο υιοθετούμενος τρόπος μοντελοποίησης της συμπεριφοράς επιλογής τους. Σύμφωνα με τους Tsiros and Heilman (2005) οι πελάτες (σε ποσοστό άνω του 50%) ελέγχουν την ημερομηνία λήξης του προϊόντος πριν την αγορά του και η επιθυμία τους να αγοράσουν ένα ευπαθές προϊόν μειώνεται καθώς εκείνο πλησιάζει την ημερομηνία λήξης του. Προφανώς οι πωλητές προσπαθούν να επηρεάσουν την επιλογή προϊόντων από τους πελάτες διαθέτοντας πρώτα εκείνα με το μικρότερο υπολειπόμενο χρόνο ζωής και συνεπώς η υιοθετούμενη πολιτική από πλευράς τους είναι η πολιτική FIFO. Αν και η πολιτική FIFO φαίνεται διαισθητικά να είναι προτιμότερη για τον πωλητή, ωστόσο υπάρχουν περιπτώσεις που η LIFO μπορεί να οδηγήσει σε εξοικονόμηση κόστους σε περιπτώσεις που η ζήτηση χάνεται όταν δεν υπάρχει απόθεμα για την ικανοποίηση της (Pierskalla and Roach 1972, Haijema 2011) ή η ζήτηση του προϊόντος επηρεάζεται από την ηλικία και τη χρησιμότητά του (Derman and Klein 1958, Pierskalla and Roach 1972, Deniz et al. 2010).

Ως προς τις πολιτικές απόσυρσης αυτές αφορούν την επιλογή της στιγμής απόσυρσης των προϊόντων, που προφανώς είναι επιβεβλημένη όταν τα προϊόντα έχουν υπερβεί την ημερομηνία λήξης τους, ωστόσο μπορεί να αποφασισθεί η απόσυρση τους πριν παρέλθει η ημερομηνία λήξης (κύκλος ζωής τους). Λόγοι για την πρόωρη απόσυρση προϊόντων είναι: (1) στρατηγική επιλογή του πωλητή που απαιτεί την διακίνηση μόνο προϊόντων με μεγάλο χρόνο ζωής, (2) μειωμένη ζήτηση για προϊόντα με μικρό υπολειπόμενο χρόνο ζωής οδηγώντας στην υιοθέτηση πολιτικών εκπτώσεων στην τιμή πώλησης τους, (3) προϊόντα ειδικής φύσης όπως για παράδειγμα αυτά που διαχειρίζονται οι τράπεζες αίματος και τα νοσοκομεία όπου μπορεί να είναι επιθυμητή η απόσυρση παλαιότερων προϊόντων αίματος εάν τα διαθέσιμα αποθέματα είναι υψηλά, καθώς η μετάγγιση νεότερων προϊόντων αίματος θεωρείται πιο αποτελεσματική

Ο Veinott (1960) παρουσίασε ένα από τα πρώτα μοντέλα για το βέλτιστο προσδιορισμό της ποσότητας απόσυρσης όταν η ζήτηση είναι ντετερμινιστική και ο Martin (1986) όταν η ζήτηση είναι στοχαστική. Ωστόσο η βιβλιογραφία είναι σχετικά περιορισμένη ως προς την μελέτη μοντέλων διαχείρισης αποθεμάτων ευπαθών προϊόντων λαμβάνοντας υπόψη πολιτικές απόσυρσης (Karaesmen et al. 2011)

Η διαχείριση αποθεμάτων προϊόντων με πεπερασμένο χρόνο ζωής έχει μελετηθεί από τη δεκαετία του 1970. Ωστόσο η πρόσφατη έρευνα αναδεικνύει νέες παραμέτρους ως προς τη διαχείριση των προϊόντων αυτών, ενώ η μελέτη πολιτικών αναπλήρωσης του αποθέματός τους παραμένει θέμα ενδιαφέροντος λόγω του υψηλού κόστους απαξίωσής τους, αλλά και των σύγχρονων απαιτήσεων του περιορισμού της σπατάλης φυσικών πόρων. Στόχος της παρούσας διατριβής είναι η ανασκόπηση πολιτικών διαχείρισης αποθεμάτων προϊόντων, και η εξέταση επιλογών όπως η υποκατάσταση και η προσφορά εκπτώσεων στην τιμή πώλησης για την αποτελεσματική (υπό την έννοια της ελαχιστοποίησης του συνολικού κόστους) διαχείριση των προϊόντων αυτών. Η παρούσα διατριβή δομείται σε τέσσερα κεφάλαια:

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα μοντέλο διαχείρισης αποθεμάτων διακριτού χρόνου για ευπαθή αγαθά με χρόνο ζωής δύο περιόδων, που ουσιαστικά οδηγούν στην αντιμετώπιση τους ως δύο ειδών προϊόντα (1 και 2), με τη ζήτηση να εξαρτάται τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής του προϊόντος. Μελετώνται δύο πολιτικές αναπλήρωσης αποθέματος, τύπου base stock: (i) το συνολικό απόθεμα του συστήματος επαναφέρεται σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο, (ii) μόνο το επίπεδο αποθέματος προϊόντος με εναπομείναντα χρόνο ζωής 2 περιόδων επαναφέρεται σε συγκεκριμένο επίπεδο. Για αυτές τις πολιτικές αναπλήρωσης αποθέματος, θεωρούνται τέσσερις τρόποι ικανοποίησης της ζήτησης ανάλογα με τον αν επιτρέπεται η υποκατάσταση ή όχι της ζήτησης από προϊόν ίδιου/διαφορετικού υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Γίνεται σύγκριση μεταξύ των επιλογών υποκατάστασης ως προς το αναμενόμενο κόστος διαχείρισης των αποθεμάτων και δίνονται συνθήκες ως προς τις παραμέτρους κόστους που κατατάσσουν τις πολιτικές σε σχέση με το κόστος.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται μία τροποποίηση του μοντέλου του πρώτου κεφαλαίου. Στο μοντέλο αυτού του κεφαλαίου, λαμβάνονται υπόψη οι τιμές πώλησης των δύο ειδών προϊόντων. Η αναπλήρωση του αποθέματος διαφοροποιείται σε σχέση με το πρώτο κεφάλαιο, αφού γίνεται με την παραγγελία μια σταθερής ποσότητας από το προϊόν με την μεγαλύτερη διάρκεια ζωής. Σε αυτό το μοντέλο, λαμβάνονται αποφάσεις για τις τιμές πώλησης των προϊόντων και την ποσότητα παραγγελίας. Για τη ζήτηση των προϊόντων λαμβάνεται η χρησιμότητα των προϊόντων για τον πελάτη.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα μοντέλο διαχείρισης αποθεμάτων για ευπαθή αγαθά με χρόνο ζωής l περιόδων, που ουσιαστικά οδηγούν στην αντιμετώπιση τους ως l ειδών προϊόντα. Σε αυτό το μοντέλο, πέρα από την ποσότητα αναπλήρωσης του αποθέματος, προσδιορίζεται ο τρόπος διάθεσης των προϊόντων με πολιτική LIFO ή FIFO και η ποσότητα των προϊόντων που θα αποσυρθούν (πέρα από αυτή που έχει λήξει).

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα μοντέλο διαχείρισης αποθεμάτων για ευπαθή αγαθά με χρόνο ζωής l περιόδων, θεωρώντας τον ορίζοντα σχεδιασμού πεπερασμένο. Σε κάθε περίοδο η τιμή πώλησης των προϊόντων αλλάζει από κανονική τιμή σε τιμή εκκαθάρισης. Αυτό έχει ως συνέπεια η ζήτηση να εξαρτάται από την τιμή των προϊόντων. Η διάθεση των προϊόντων γίνεται με πολιτική LIFO. Στόχος είναι ο προσδιορισμός της ποσότητα αναπλήρωσης του αποθέματος και της ποσότητα αποθέματος που θα διατεθεί με τιμή εκκαθάρισης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Διαχειριση αποθεματων προϊοντων με χρονο ζωης δυο περιοδων: πολιτικες αναπληρωσης τυπου base stock και πολιτικες υποκαταστασης

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ένα σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων για προϊόντα με χρόνο ζωής (ημερομηνία λήξης) δύο περιόδων. Το προϊόν αποσύρεται στο τέλος της ημερομηνίας λήξης του. Η στοχαστική ζήτηση των προϊόντων διαφέρει ανάλογα με την ηλικία του προϊόντος (απόσταση από την ημερομηνία λήξης του). Σε περίπτωση μη διαθέσιμου αποθέματος τότε η ζήτηση χάνεται. Προτείνονται δύο πολιτικές αναπλήρωσης του αποθέματος (base stock):

- το συνολικό απόθεμα στο σύστημα επαναφέρεται σε συγκεκριμένο επίπεδο,
- το απόθεμα νέων προϊόντων (ηλικίας μίας περιόδου) επαναφέρεται σε συγκεκριμένο επίπεδο.

Μελετώνται τέσσερις τύποι (επιλογές) υποκατάστασης των προϊόντων για την ικανοποίηση της ζήτησης:

- η ζήτηση προϊόντος συγκεκριμένης ηλικίας μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο από προϊόντα της ίδιας ηλικίας (μη υποκατάσταση),
- η ζήτηση προϊόντων με εναπομείναντα χρόνο ζωής μιας περιόδου (στο εξής προϊόν 1) μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο από προϊόντα 1. Επίσης, προϊόντα 1

μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ικανοποίηση της ζήτησης προϊόντων με εναπομείναντα χρόνο ζωής δύο περιόδων (στο εξής προϊόν 2) σε περίπτωση έλλειψης αποθέματος των τελευταίων,

- η ζήτηση προϊόντος 2 μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο από προϊόντα 2. Επίσης, προϊόντα 2 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ικανοποίηση της ζήτησης για προϊόντα 1 σε περίπτωση έλλειψης αποθέματος των τελευταίων,

- σε περίπτωση έλλειψης αποθέματος του ενός προϊόντος μπορεί να χρησιμοποιηθεί το απόθεμα του άλλου προϊόντος για την ικανοποίηση της ζήτησης του.

Στόχος είναι η σύγκριση των τύπων υποκατάστασης ως προς το μακροπρόθεσμο αναμενόμενο κόστος λειτουργίας του συστήματος αποθεμάτων, λαμβάνοντας υπόψη την υιοθετούμενη πολιτική αναπλήρωσης τους, καθώς και η διερεύνηση συνθηκών για τις παραμέτρους κόστους του συστήματος που καθορίζουν πότε (αν) ένας τύπος υποκατάστασης οδηγεί σε μικρότερο κόστος σε σχέση με κάποιον άλλο. Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου παρουσιάστηκαν από τους Deniz et al. (2004, 2010, 2020).

1.1 Υποθέσεις και συμβολισμός

Στην ενότητα αυτή, δίνονται οι υποθέσεις και ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθούν στην ανάπτυξη του μοντέλου αυτού του κεφαλαίου.

Υποθέσεις

1. Ο ορίζοντας σχεδιασμού είναι άπειρος.

2. Ο ρυθμός αναπλήρωσης του αποθέματος είναι άπειρος.

3. Η επιθεώρηση του αποθέματος γίνεται περιοδικά.

4. Ο χρόνος ανοχής είναι μηδέν.

5. Στο τέλος της πρώτης περιόδου ζωής το προϊόν 2 χαρακτηρίζεται ως παλαιωμένο, ενώ στο τέλος της δεύτερης περιόδου ζωής το προϊόν 1 θεωρείται απαξιωμένο (ληγμένο) και αποσύρεται από το απόθεμα με ένα κόστος απόσυρσης ανά μονάδα προϊόντος.

6. Η ζήτηση είναι στοχαστική και διαφορετική για τα προϊόντα 1 και 2. Σε περίπτωση έλλειψης κάποιου προϊόντος θεωρούνται οι εξής δυνατότητες υποκατάστασης:

   i) Υποκατάσταση $\mathcal{F}$ (Full-Substitution): Το προϊόν 2 (1) χρησιμοποιείται για την ικανοποίηση της ζήτησης προϊόντος 2 (1). Αν δεν υπάρχει απόθεμα από το προϊόν 2 (1) τότε χρησιμοποιείται το προϊόν 1(2) (στο εξής υποκατάσταση $1\not{2}(2\not{1})$). Το ποσοστό των πελατών που δέχονται να γίνει η υποκατάσταση $1\not{2}$ και $2\not{1}$ ($0 \leq \pi_{1\not{2}(2\not{1})} \leq 1$) είναι $\pi_{1\not{2}} > 0$ και $\pi_{2\not{1}} > 0$, αντίστοιχα

   ii) Υποκατάσταση $\mathcal{N}$ (No-Substitution): Το προϊόν 2 (1) χρησιμοποιείται για την ικανοποίηση της ζήτησης προϊόντος 2 (1) και σε περίπτωση έλλειψης του αποθέματος δεν γίνεται καμία υποκατάσταση, που αντιστοιχεί σε $\pi_{1\not{2}} = \pi_{2\not{1}} = 0$

   iii) Υποκατάσταση $\mathcal{D}$: Γίνεται υποκατάσταση $2\not{1}$ που αντιστοιχεί σε $\pi_{2\not{1}} > 0, \pi_{1\not{2}} = 0$

   iv) Υποκατάσταση $\mathcal{U}$: Γίνεται υποκατάσταση $1\not{2}$ που αντιστοιχεί σε $\pi_{1\not{2}} > 0, \pi_{2\not{1}} = 0$

7. Αν δεν υπάρχει διαθέσιμο απόθεμα για την άμεση ικανοποίηση της ζήτησης τότε αυτή χάνεται.

Συμβολισμός

D_i^n	ζήτηση του προϊόντος i στην περίοδο n, $i = 1, 2$
c	κόστος παραγγελίας ανά παραγγελία
h	κόστος διατήρησης ανά μονάδα διαθέσιμου αποθέματος στο τέλος της περιόδου
p_i	κόστος έλλειψης ανά μονάδα προϊόντος i, $i = 1, 2$
m	κόστος απόσυρσης ανά μονάδα αποθέματος που αποσύρεται
$a_{2\not{1}(1\not{2})}$	κόστος υποκατάστασης $2\not{1}(1\not{2})$ ανά μονάδα προϊόντος
S	μέγιστο επίπεδο αποθέματος (μεταβλητή απόφασης)
x^+	$\max\{0, x\}$

1.2 Προσδιορισμός της συνάρτησης κόστους

Σε αυτή την ενότητα, θα μοντελοποιηθεί η συνάρτηση κόστους του συστήματος διαχείρισης αποθεμάτων σε μία ενοποιημένη μορφή για δύο πολιτικές αναπλήρωσης τύπου base stock: Total inventory to S (TIS) και New inventory to S (NIS).

Έστω X_i^n το διαθέσιμο απόθεμα του προϊόντος $i = 1, 2$ στην αρχή της περιόδου n.

Σύμφωνα με την TIS, στην αρχή κάθε περιόδου n, το απόθεμα αναπληρώνεται με την επαναφορά του συνολικού επιπέδου του αποθέματος στο S (λαμβάνεται υπόψη το υπάρχον απόθεμα), συνεπώς

$$X_1^n + X_2^n = S \tag{1.1}$$

Σύμφωνα με την NIS, στην αρχή κάθε περιόδου n, το απόθεμα αναπληρώνεται με την επαναφορά του επιπέδου του προϊόντος 2 στο S, συνεπώς

$$X_2^n = S \tag{1.2}$$

Το σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων λειτουργεί ως εξής: Αρχικά, γίνεται η αναπλήρωση του αποθέματος ανάλογα με την υιοθετούμενη πολιτική αναπλήρωσης. Στην συνέχεια παρουσιάζεται η ζήτηση, η οποία είτε ικανοποιείται ανάλογα με την υιοθετούμενη πολιτική υποκατάστασης είτε χάνεται. Η ποσότητα της ζήτησης που χάνεται από το προϊόν 1 είναι:

$$L_1^n = [(D_1^n - X_1^n) - s_{2\not1}^n]^+$$

όπου $s_{2\not1}^n = \min\{\pi_{2\not1}(D_1^n - X_1^n)^+, (X_2^n - D_2^n)^+\}$ είναι η ποσότητα της $2\not1$
και από το προϊόν 2 είναι:

$$L_2^n = [(D_2^n - X_2^n) - s_{1\not2}^n]^+$$

όπου $s_{1\not2}^n = \min\{\pi_{1\not2}(D_1^n - X_1^n)^+, (X_2^n - D_2^n)^+\}$ είναι η ποσότητα της $1\not2$ Στο τέλος της περιόδου n, τα προϊόντα παλαιώνουν ή αποσύρονται. Τα προϊόντα που παλαιώνουν μεταφέρονται στην επόμενη περίοδο και ορίζονται ως:

$$X_1^{n+1} = [(X_2^n - D_2^n) - s_{2\not1}^n]^+$$

ενώ τα προϊόντα που αποσύρονται ορίζονται ως:

$$O^n = [(X_1^n - D_1^n) - s_{1\not2}^n]^+$$

Το συνολικό κόστος αποτελείται από: το κόστος παραγγελίας ανά παραγγελία, διατήρησης ανά μονάδα αποθέματος, έλλειψης ανά μονάδα προϊόντος, απόσυρσης ανά μονάδα αποσυρόμενου αποθέματος και υποκατάστασης $2\not1$ και $1\not2$ ανά μονάδα προϊόντος.

Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του μακροπρόθεσμου αναμενόμενου κόστους:

$$C(S) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{T} [cX_2^n + hX_1^{n+1} + p_1L_1^n + p_2L_2^n + mO^n + a_{1\not{2}}s_{1\not{2}}^n + a_{2\not{1}}s_{2\not{1}}^n] \quad (1.3)$$

(Σημειώνεται ότι η σχέση (1.3) που εκφράζει το κόστος συγκλίνει. Deniz et al. (2020))
Με την παραπάνω μοντελοποίηση του κόστους η μόνη διαφορά τις πολιτικές αναπλήρωσης TIS και NIS είναι η αναδρομική σχέση που εκφράζει το επίπεδο αποθέματος του προϊόντος 2.

Στην συνέχεια, συγκρίνονται οι πολιτικές υποκατάστασης, υπό την έννοια της σύγκρισης του συνολικού κόστους, που προκύπτει από την εφαρμογή τους και ανάλογα με την πολιτική αναπλήρωσης αποθέματος, που υιοθετείται.

1.3 Σύγκριση πολιτικών υποκατάστασης υπό την πολιτική αναπλήρωσης TIS

Στην ενότητα αυτή, θα γίνει κατά ζεύγη σύγκριση των πολιτικών υποκατάστασης όταν το σύστημα λειτουργεί με την πολιτική αναπλήρωσης TIS. Βάση της πολιτικής TIS από την σχέση (1.1) προκύπτει $X_1^n = S - X_2^n$ σε κάθε περίοδο n. Έτσι αρκεί μόνο η μελέτη της συμπεριφοράς μόνο του X_2^n. Σε αυτό το πλαίσιο, αρχικά, θα δοθούν τα ακόλουθα ενδιάμεσα αποτελέσματα και μετά θα γίνει η κατά ζεύγη σύγκριση των πολιτικών υποκατάστασης. Ορίζεται X_I^n ως το επίπεδο αποθέματος για το προϊόν 2 στην αρχή της περιόδου n, κάτω από το κανόνα υποκατάστασης $I = \mathcal{F}, \mathcal{D}, \mathcal{U}, \mathcal{N}$.

Πρόταση 1.3.1. *Κατά μήκος οποιουδήποτε δειγματικού μονοπατιού ζήτησης και για το ίδιο S, αν $X_I^n < X_H^n$ (το επίπεδο αποθέματος του προϊόντος 2 υπό την I είναι μικρότερο από το επίπεδο αποθέματος του προϊόντος 2 υπό την H) τότε $X_I^{n-1} > X_H^{n-1}$ για $I = \mathcal{F}, \mathcal{D}$ και $H = \mathcal{U}, \mathcal{N}$.*

Απόδειξη. Έστω $I = \mathcal{F}$ και $H = \mathcal{N}$. Ισχύει ότι $X_{\mathcal{F}}^n, X_{\mathcal{N}}^n \geq 0$. Προκύπτει

$$X_{\mathcal{N}}^n = S - X_1^n = S - (X_{\mathcal{N}}^{n-1} - D_2^{n-1})^+$$

$$> X_{\mathcal{F}}^n = S - X_1^n = S - ((X_{\mathcal{F}}^{n-1} - D_2^{n-1})^+ - \pi_{2\not{1}}(D_1^{n-1} - S + X_{\mathcal{F}}^{n-1})^+)$$

ή

$$S - (X_{\mathcal{N}}^{n-1} - D_2^{n-1})^+ > S - ((X_{\mathcal{F}}^{n-1} - D_2^{n-1})^+ - \pi_{2\not{1}}(D_1^{n-1} - S + X_{\mathcal{F}}^{n-1})^+)$$

ή

$$(X_{\mathcal{N}}^{n-1} - D_2^{n-1})^+ < ((X_{\mathcal{F}}^{n-1} - D_2^{n-1})^+ - \pi_{2\not{1}}(D_1^{n-1} - S + X_{\mathcal{F}}^{n-1})^+)$$

$$< (X_{\mathcal{F}}^{n-1} - D_2^{n-1})^+$$

ή

$$X_{\mathcal{N}}^{n-1} < X_{\mathcal{F}}^{n-1}$$

□

Συνεπώς σύμφωνα με την Πρόταση 1.3.1 κατά μήκος οποιουδήποτε δειγματικού μονοπατιού, εάν το απόθεμα προϊόντων 2 με την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ (ή $\mathcal{D}$) είναι μικρότερο από το απόθεμα προϊόντων 2 με την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$ (ή $\mathcal{U}$), τότε στην προηγούμενη περίοδο το απόθεμα προϊόντων 2 με την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ (ή $\mathcal{D}$) θα πρέπει να ήταν περισσότερο από το απόθεμα προϊόντων 2 με την πολιτική $\mathcal{N}$ (ή $\mathcal{U}$). Έτσι, ο ορίζοντας σχεδιασμού χωρίζεται σε δύο κατηγορίες περιόδων: σε περιόδους $n-1$ και n που θα ισχύει $X_{\mathcal{F}}^n < X_{\mathcal{N}}^n$ και σε περιόδους που δεν ισχύει η σχέση. Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 1.3.1. *Αν ισχύει $X_{\mathcal{F}}^n < X_{\mathcal{N}}^n$ τότε οι περίοδοι $n-1$ και n ονομάζονται ζεύγος.*

Ορισμός 1.3.2. *Όταν ισχύει $X_{\mathcal{F}}^n < X_{\mathcal{N}}^n$ στην περίοδο n τότε αυτή θα συμβολίζεται ως N, όταν ισχύει $X_{\mathcal{F}}^n > X_{\mathcal{N}}^n$ ως F, αλλιώς θα συμβολίζεται ως E ($X_{\mathcal{F}}^n = X_{\mathcal{N}}^n$).*

Παρατήρηση 1.3.1. *Ένα ζεύγος είναι το FN.*
Μία ακολουθία περιόδων είναι : ...$FEFFNFNFFFNFFEEF$....

Παρατήρηση 1.3.2. *Λόγω της προηγούμενης Πρότασης 1.2.1 δεν μπορεί να προκύψει NN.*

Ορισμός 1.3.3. *Ως κύκλος ορίζεται το χρονικό διάστημα (περίοδοι) E. Αν σε αυτόν υπάρχει μια περίοδος E και ακολουθεί μια άλλη, τότε ονομάζεται τετριμμένος κύκλος. Ένας μη τετριμμένος κύκλος αρχίζει με μια περίοδο E, κατά την οποία έχουμε υποκατάσταση $2\not{1}$ (καθιστώντας την επόμενη περίοδο F) και τελειώνει με μια περίοδος E.*

Πρόταση 1.3.2. *Αν η περίοδος n είναι F και η περίοδος $n+1$ είναι επίσης F τότε στην πρώτη περίοδο πρέπει να υπάρχει υποκατάσταση $2\not{1}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η n περίοδος είναι F με $X^n_{\mathcal{F}} = X^n_{\mathcal{N}} + \Delta$ για $\Delta > 0$. Αν $D^n_2 \geq X^n_{\mathcal{N}}$ τότε την επόμενη περίοδο προκύπτει $(X^{n+1}_2, X^{n+1}_1) = (S, 0)$, άρα η περίοδος $n+1$ δεν θα είναι μία περίοδος F. Άρα πρέπει να ισχύει $D^n_2 < X^n_{\mathcal{N}}$. Η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ έχει επιπλέον διαθέσιμη ποσότητα μέγεθος Δ προϊόντος 2, η οποία χρησιμοποιείται για υποκατάσταση. Αν όμως δεν υπάρχει ανάγκη για νέα διαθέσιμη ποσότητα προϊόντος 2, $D^n_1 \leq X^n_1 = S - X^n_{\mathcal{N}} - \Delta$, τότε αυτή η ποσότητα θα μεταφερθεί στην επόμενη περίοδο, η οποία θα είναι N, διότι σύμφωνα με την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$ θα μεταφέρεται μικρότερη ποσότητα από το προϊόν 2. Συνεπώς, αν υπάρχουν δύο διαδοχικές περίοδοι F, τότε πρέπει να υπάρχει υποκατάσταση $2\not1$ στην πρώτη. □

Πρόταση 1.3.3. *Έστω ότι οι n και $n+1$ περίοδοι είναι F τότε ισχύει: $X^{n+1}_{\mathcal{F}} - X^{n+1}_{\mathcal{N}} = s^n_{2\not1} - (X^n_{\mathcal{F}} - X^n_{\mathcal{N}})$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $X^n_{\mathcal{F}} > X^n_{\mathcal{N}}$. Από την σχέση (1.1) ισχύει $X^{n+1}_{\mathcal{F}} = S - X^{n+1}_1 = S - ((X^n_{\mathcal{F}} - D^n_2)^+ - s^n_{2\not1})$ και $X^{n+1}_{\mathcal{N}} = S - X^{n+1}_1 = S - (X^n_{\mathcal{N}} - D^n_2)^+$. Αφού $n+1$ περίοδος είναι F τότε ισχύει

$$X^{n+1}_{\mathcal{F}} > X^{n+1}_{\mathcal{N}}$$

$$S - ((X^n_{\mathcal{F}} - D^n_2)^+ - s^n_{2\not1}) > S - (X^n_{\mathcal{N}} - D^n_2)^+$$

άρα ισχύει $X^n_{\mathcal{N}} > D^n_2$. Από Πρόταση 1.3.2 προκύπτει ότι $s^n_{2\not1} > 0$ άρα έχουμε $X^n_{\mathcal{F}} > D^n_2$ και $D^n_1 - S + X^n_{\mathcal{F}} > 0$. Το αποτέλεσμα προκύπτει από

$$X^{n+1}_{\mathcal{F}} - X^{n+1}_{\mathcal{N}} = (X^n_{\mathcal{N}} - D^n_2) - (X^n_{\mathcal{F}} - D^n_2 - s^n_{2\not1}) = X^n_{\mathcal{N}} - X^n_{\mathcal{F}} + s^n_{2\not1}$$

□

Παρατήρηση 1.3.3. *Τα παραπάνω ισχύουν αντίστοιχα για πολιτικές υποκατάστασης $\mathcal{D}$ και $\mathcal{U}$.*

Στη συνέχεια γίνεται η κατά ζεύγη σύγκριση ως προς το κόστος των πολιτικών υποκατάστασης. Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\succ$ για να δείξει την κατάταξη μεταξύ των πολιτικών υποκατάστασης, όπου καλύτερη πολιτική υποκατάστασης είναι αυτή που έχει το μικρότερο κόστος.

Λήμμα 1.3.1. *Σε κάθε δειγματικό μονοπάτι και για $0 \leq \pi_{1\not2} \leq 1$, $0 \leq \pi_{2\not1} \leq 1$ ισχύει $\mathcal{F} \succ \mathcal{D}$ και $\mathcal{U} \succ \mathcal{N}$ αν και μόνο αν ισχύει $a_{1\not2} \leq m + p_2$.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι $0 \leq \pi_{2\not1} \leq 1$. Κατά τις πολιτικές υποκατάστασης $\mathcal{D}$ και $\mathcal{F}$ οι παράμετροι κόστους που ταυτίζονται είναι h, p_1 και $a_{2\not1}$. Διαφοροποίηση υπάρχει εξαιτίας της υποκατάστασης $1\not{2}$. Η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ έχει μικρότερο κόστος από την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{D}$ αν και μόνο αν η υποκατάσταση $1\not{2}$ έχει λιγότερο κόστος $a_{1\not{2}} \leq m + p_2$ για όλα τα $0 \leq \pi_{1\not{2}} \leq 1$. Όμοια για $\mathcal{U}$ και $\mathcal{N}$. $\square$

Λήμμα 1.3.2. *Αν ισχύει* $a_{1\not{2}} \leq m + p_2$ *και* $p_1 - p_2 \leq a_{2\not{1}} \leq \min\{\frac{h+p_1}{2} - \frac{(m+p_1)(1-\pi_{2\not{1}})}{2\pi_{2\not{1}}}, p_1 - p_2 + \pi_{1\not{2}}(m + p_2 - a_{1\not{2}}), m + 2p_1 - p_2\}$ *τότε ισχύει* $\mathcal{F} \succ \mathcal{N}$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός C_I^n για να δηλώσει το κόστος στην περίοδο n υπό τη πολιτική υποκατάστασης I.
Η απόδειξη χωρίζεται σε τρία βήματα. Στο πρώτο βήμα θα αποδειχθεί ότι όταν η περίοδος n βρίσκεται σε έναν τετριμμένο κύκλο και αν ισχύει $a_{1\not{2}} \leq m + p_2$ και $\pi_{1\not{2}} > 0$ τότε $C_{\mathcal{F}}^n$ δεν είναι μεγαλύτερο από $C_{\mathcal{N}}^n$. Στο δεύτερο βήμα θα αποδειχθεί ότι αν ισχύουν $a_{1\not{2}} \leq m + p_2$, $a_{2\not{1}} \leq \frac{(h+p_1)}{2}$ και $a_{2\not{1}} \geq p_1 - p_2$ τότε $C_{\mathcal{F}}^n < C_{\mathcal{N}}^n$ εκτός των ζευγών σε έναν μη τετριμμένο κύκλο. Τέλος στο τρίτο βήμα θα αποδειχθεί ότι αν ισχύει $a_{2\not{1}} \leq \frac{h+p_1}{2} - \frac{(m+p_1)(1-\pi_{2\not{1}})}{2\pi_{2\not{1}}}$, $a_{2\not{1}} \leq m + 2p_1 - p_2$, $a_{2\not{1}} \geq p_1 - p_2$, $a_{1\not{2}} \leq m + p_2$ και $a_{2\not{1}} - p_1 + p_2 \leq \pi_{1\not{2}}(m + p_2 a_{1\not{2}})$ τότε $C_{\mathcal{F}}^n < C_{\mathcal{N}}^n$ εντός των ζευγών σε ένα μη τετριμμένο κύκλο.

Βήμα 1

Έστω $X_{\mathcal{F}}^n = X_{\mathcal{N}}^n$ και $X_{\mathcal{F}}^{n+1} = X_{\mathcal{N}}^{n+1}$ τότε

$$S - ((X_{\mathcal{F}}^n - D_2^n)^+ - (D_1^n - S + X_{\mathcal{F}}^n)^+)^+ = S - (X_{\mathcal{N}}^n - D_2^n)^+$$

Περίπτωση 1: Έστω $X_{\mathcal{F}}^n \leq D_2^n$ και $D_1^n \leq S - X_{\mathcal{F}}^n$, συνεπώς τόσο και η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ όσο και η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$ οδηγούν σε έλλειψη προϊόντος 2 και σε πλεόνασμα προϊόντος 1. Άρα οι δύο πολιτικές υποκατάστασης συμφωνούν. Άρα $C_{\mathcal{F}}^n \not> C_{\mathcal{N}}^n$ αν $a_{1\not{2}} \leq m + p_2$.

Περίπτωση 2: Έστω $X_{\mathcal{F}}^n \leq D_2^n$ και $D_1^n > S - X_{\mathcal{F}}^n$, όπου και οι δύο πολιτικές υποκατάστασης οδηγούν σε έλλειψη και στα δύο προϊόντα. Άρα $C_{\mathcal{F}}^n = C_{\mathcal{N}}^n$.

Περίπτωση 3: Έστω $X_{\mathcal{F}}^n > D_2^n$, συνεπάγεται ότι $D_1^n \leq S - X_{\mathcal{F}}^n$ επειδή η περίοδος $n+1$ είναι E, άρα και στις δύο πολιτικές υποκατάστασης οδηγούν σε πλεόνασμα προϊόντος 1 και 2. Άρα $C_{\mathcal{F}}^n = C_{\mathcal{N}}^n$.

Βήμα 2

Σε ένα μη τετριμμένο κύκλο, δίνεται έμφαση στις συνεχόμενες περιόδους F που αρχίζουν (τελειώνουν) με μια περίοδο E ή με ένα ζεύγος. Έστω η n περίοδος να είναι μία οποιαδήποτε F περίοδος, με $\Delta_n = X_{\mathcal{F}}^n - X_{\mathcal{N}}^n$. Έστω $D_2^n = X_{\mathcal{N}}^n - k_2 <$

$X^n_{\mathcal{N}}$ και $D^n_1 = S - X^n_{\mathcal{N}} - \Delta_n + k_1$ για $0 < \Delta_n \leq k_1$. Δεδομένου ότι τόσο η n όσο και η $n+1$ περίοδος να είναι F (λόγω Πρότασης 1.2.2), τότε

$$C^n_{\mathcal{N}} = hk_1 + p_1(k_1 - \Delta_n)$$

$$C^n_{\mathcal{F}} = a_{2\not{1}}s^n_{2\not{1}} + h(\Delta_n + k_2 - s^n_{2\not{1}}) + p_1(k_1 - s^n_{2\not{1}})$$

όπου $s^n_{2\not{1}} = min(\pi_{2\not{1}}k_1, \Delta_n + k_2)$. Ισχύει ότι $\Delta_{n+1} = s^n_{2\not{1}} - \Delta_n$. Άρα

$$C^n_{\mathcal{N}} - C^n_{\mathcal{F}} = (h + p_1)\Delta_{n+1} - a_{2\not{1}}(\Delta_n + \Delta_{n+1})$$

Έστω ότι οι συνεχόμενες περίοδοι αρχίζουν από την περίοδο 1 και τελειώνει στην περίοδο $M - 1$ ($\Delta_i > 0 \forall i = 1, ..., M - 1$). Στις περιόδους 0 και M υπάρχουν δύο δυνατότητες:

- Αν η περίοδος 0 είναι μία $E(\ \Delta_0 = 0)$ τότε

$$C^0_{\mathcal{N}} - C^0_{\mathcal{F}} = (h + p_1)\Delta_1 - a_{2\not{1}}\Delta_1$$

- Αν η περίοδος M είναι μία $E(\ \Delta_M = 0)$ τότε

$$C^{M-1}_{\mathcal{N}} - C^{M-1}_{\mathcal{F}} \geq -a_{2\not{1}}\Delta_{M-1} \tag{1.4}$$

  Η απόδειξη της (1.4) έχει ως εξής: αν η περίοδος είναι F, υπάρχουν έξι περιπτώσεις ζήτησης που οδηγεί σε περίοδο E αμέσως μετά.

  Περίπτωση 1: $D^{M-1}_2 = X^{M-1}_{\mathcal{N}} - k_2$ και $D^{M-1}_1 = S - X^{M-1}_{\mathcal{N}} + k_1$ με $k_1, k_2 \geq 0$, οπότε $X^M_{\mathcal{F}} = S - (k_2 - k_1)^+$ και $X^M_{\mathcal{N}} = S - k_2$. Η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ οδηγεί σε έλλειψη $\Delta_{M-1} + k_1$ προϊόντος 1 και σε πλεόνασμα $\Delta_{M-1} + k_2$ προϊόντος 2. Συνεπώς $s^{M-1}_{2\not{1}} = \min\{\pi_{2\not{1}}(\Delta_{M-1} + k_1), \Delta_{M-1} + k_2\}$, οπότε $C^{M-1}_{\mathcal{N}} = hk_2 + p_1k_1$ και $C^{M-1}_{\mathcal{F}} = h(\Delta_{M-1} + k_2 - s^{M-1}_{2\not{1}}) + p_1(\Delta_{M-1} + k_1 - s^{M-1}_{2\not{1}}) + a_{2\not{1}}s^{M-1}_{2\not{1}}$. Προκειμένου η περίοδος M να είναι E τότε πρέπει $s^{M-1}_{2\not{1}} = \Delta_{M-1}$. Επομένως $C^{M-1}_{\mathcal{N}} - C^{M-1}_{\mathcal{F}} = -a_{2\not{1}}\Delta_{M-1}$.

  Περίπτωση 2: $D^{M-1}_2 = X^{M-1}_{\mathcal{N}} + k_2$ και $D^{M-1}_1 = S - X^{M-1}_{\mathcal{N}} - \Delta_{M-1} + k_1$ με $0 \leq k_i < \Delta_{M-1}$ για $i \epsilon \{1, 2\}$, έτσι ώστε $X^M_{\mathcal{N}} = S$ και $X^M_{\mathcal{F}} = S - (\Delta_{M-1} - k_2 - s^{M-1}_{2\not{1}})$, όπου $s^{M-1}_{2\not{1}} = \min\{\pi_{2\not{1}}k_1, \Delta_{M-1} - k_2\}$. Πρέπει $s^{M-1}_{2\not{1}} = \Delta_{M-1} - k_2$ για να είναι η περίοδος M μία E, οπότε $C^{M-1}_{\mathcal{N}} = p_2k_2 + m(\Delta_{M-1} - k_1)$ και $C^{M-1}_{\mathcal{F}} = p_1(k_2 + k_1 - \Delta_{M-1}) + a_{2\not{1}}(\Delta_{M-1} - k_2)$. Επομένως $C^{M-1}_{\mathcal{N}} - C^{M-1}_{\mathcal{F}} = (p_2 - p_1)k_2 + p_1(\Delta_{M-1} - k_1) + m(\Delta_{M-1} - k_1) - a_{2\not{1}}(\Delta_{M-1} - k_2) \geq -a_{2\not{1}}\Delta_{M-1}$, αν ισχύει $a_{2\not{1}} \geq p_1 - p_2$.

Περίπτωση 3: $D_2^{M-1} = X_{\mathcal{N}}^{M-1} + k_2$ και $D_1^{M-1} = S - X_{\mathcal{N}}^{M-1} + k_1$ με $k_1, k_2 \geq 0, \Delta_{M-1} \geq k_2$, τότε $X_{\mathcal{N}}^M = S$. Η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ οδηγεί σε έλλειψη $\Delta_{M-1} + k_1$ προϊόντος 1 και σε πλεόνασμα $\Delta_{M-1} - k_2$ προϊόντος 2. Συνεπώς $s_{2\not1}^{M-1} = \min\{\pi_{2\not1}(\Delta_{M-1}+k_1), \Delta_{M-1}-k_2\}$. Πρέπει να ισχύει $s_{2\not1}^{M-1} = \Delta_{M-1} - k_2$ για να είναι η περίοδος M μία E, οπότε $C_{\mathcal{N}}^{M-1} = p_2k_2+p_1k_1$ και $C_{\mathcal{F}}^{M-1} = p_1(k_2+k_1)+a_{2\not1}(\Delta_{M-1}-k_2)$. Επομένως $C_{\mathcal{N}}^{M-1} - C_{\mathcal{F}}^{M-1} = (p_2 - p_1)k_2 - a_{2\not1}(\Delta_{M-1} - k_2) \geq -a_{2\not1}\Delta_{M-1}$, αν ισχύει $a_{2\not1} \geq p_1 - p_2$.

Περίπτωση 4: $D_2^{M-1} = X_{\mathcal{N}}^{M-1} + \Delta_{M-1} + k_2$ και $D_1^{M-1} = S - X_{\mathcal{N}}^{M-1} - \Delta_{M-1} - k_1$ με $k_1, k_2 \geq 0$. Η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ οδηγεί σε έλλειψη k_2 προϊόντος 2 και σε πλεόνασμα k_1 προϊόντος 1. Συνεπώς $s_{1\not2}^{M-1} = \min(\pi_{1\not2}k_2, k_1)$. Άρα προκύπτει $X_{\mathcal{N}}^M = X_{\mathcal{F}}^M = S$, οπότε
$C_{\mathcal{N}}^{M-1} = p_2(\Delta_{M-1} + k_2) + m(\Delta_{M-1} + k_1)$ και $C_{\mathcal{F}}^{M-1} = p_2(k_2 - s_{1\not2}^{M-1}) + a_{1\not2}s_{1\not2}^{M-1} + m(k_1 - s_{1\not2}^{M-1})$. Αν $k_1 < \pi_{1\not2}k_2$ τότε $C_{\mathcal{N}}^{M-1} - C_{\mathcal{F}}^{M-1} = (m + p_2)\Delta_{M-1} + (p_2 + m - a_{1\not2})k_1 \geq -a_{2\not1}\Delta_{M-1}$, αλλιώς $C_{\mathcal{N}}^{M-1} - C_{\mathcal{F}}^{M-1} = (m + p_2)\Delta_{M-1} + (p_2 + m - a_{1\not2})\pi_{1\not2}k_2 \geq -a_{2\not1}\Delta_{M-1}$, αν ισχύουν $a_{1\not2} \leq m + p_2$ και $a_{2\not1} \geq p_1 - p_2$.

Περίπτωση 5: $D_2^{M-1} = X_{\mathcal{N}}^{M-1} + \Delta_{M-1} + k_2$ και $D_1^{M-1} = S - X_{\mathcal{N}}^{M-1} - \Delta_{M-1} + k_1$ με $\Delta_{M-1} > k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$, οπότε $X_{\mathcal{N}}^M = X_{\mathcal{F}}^M = S$. Δεν υπάρχει υποκατάσταση. Άρα $C_{\mathcal{N}}^{M-1} = p_2(\Delta_{M-1} + k_2) + m(\Delta_{M-1} - k_1)$ και $C_{\mathcal{F}}^{M-1} = p_2k_2 + p_1k_1$. Επομένως $C_{\mathcal{N}}^{M-1} - C_{\mathcal{F}}^{M-1} = m(\Delta_{M-1} - k_1) + p_2\Delta_{M-1} - p_1k_1 \geq -a_{2\not1}\Delta_{M-1}$, αν ισχύει $a_{2\not1} \geq p_1 - p_2$.

Περίπτωση 6: $D_2^{M-1} = X_{\mathcal{N}}^{M-1} + \Delta_{M-1} + k_2$ και $D_1^{M-1} = S - X_{\mathcal{N}}^{M-1} + k_1$ με $k_1, k_2 \geq 0$, οπότε $X_{\mathcal{N}}^M = X_{\mathcal{F}}^M = S$. Δεν υπάρχει υποκατάσταση. Άρα $C_{\mathcal{N}}^{M-1} = p_2(\Delta_{M-1} + k_2) + p_1k_1$ και $C_{\mathcal{F}}^{M-1} = p_2k_2 + p_1(\Delta_{M-1} - k_1)$. Επομένως $C_{\mathcal{N}}^{M-1} - C_{\mathcal{F}}^{M-1} = (p_2 - p_1)\Delta_{M-1} \geq -a_{2\not1}\Delta_{M-1}$, αν ισχύει $a_{2\not1} \geq p_1 - p_2$.

Επομένως η (1.4) είναι σωστή.

- Αν στην περίοδο M ξεκινά ένα ζεύγος τότε: $C_{\mathcal{N}}^{M-1} - C_{\mathcal{F}}^{M-1} = (h+p_1)\Delta_M - a_{2\not1}(\Delta_{M-1}+\Delta_M) = (h+p_1-a_{2\not1})\Delta_M - a_{2\not1}\Delta_{M-1}$. Αποθηκεύεται το $(h + p_1 - a_{2\not1})\Delta_M$ και θα προστεθεί στο κόστος της πολιτικής υποκατάστασης $\mathcal{N}$ στο επόμενο βήμα. Επομένως

$$C_{\mathcal{N}}^{M-1} - C_{\mathcal{F}}^{M-1} = -a_{2\not1}\Delta_{M-1}$$

- Αν η περίοδος 0 είναι N, άρα το τέλος ενός ζεύγους, τότε:
$C_{\mathcal{N}}^0 - C_{\mathcal{F}}^0$ θα είναι μια ποσότητα που μεταφέρθηκε από προηγούμενο ζεύγος.

Άρα

$$C^0_{\mathcal{N}} - C^0_{\mathcal{F}} = (h + p_1)\Delta_1 - a_{2\not{1}}\Delta_1$$

Προκύπτει ότι:

$$C^0_{\mathcal{N}} - C^0_{\mathcal{F}} = (h + p_1)\Delta_1 - a_{2\not{1}}\Delta_1$$

$$C^1_{\mathcal{N}} - C^1_{\mathcal{F}} = (h + p_1)\Delta_2 - a_{2\not{1}}(\Delta_1 + \Delta_2)$$

$$\dots$$

$$C^{M-2}_{\mathcal{N}} - C^{M-2}_{\mathcal{F}} = (h + p_1)\Delta_{M-1} - a_{2\not{1}}(\Delta_{M-2} + \Delta_{M-1})$$

$$C^{M-1}_{\mathcal{N}} - C^{M-1}_{\mathcal{F}} \geq -a_{2\not{1}}\Delta_{M-1}$$

Άρα

$$\sum_{i=0}^{M-1}(C^i_{\mathcal{N}} - C^i_{\mathcal{F}}) \geq (h + p_1 - 2a_{2\not{1}})\sum_{i=0}^{M-1}\Delta_i \geq 0$$

αν ισχύει $a_{2\not{1}} \leq \dfrac{(h+p_1)}{2}$.

Βήμα 3

Ένας μη τετριμμένος κύκλος αρχίζει με μια περίοδο E, όπου γίνεται υποκατάσταση $2\not{1}$ και οδηγεί σε μια περίοδο F. Η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ επιβαρύνεται με κόστος υποκατάστασης $a_{2\not{1}}$ αλλά εξοικονομεί $h + p_1$. Επομένως, η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ επιβαρύνεται με $h + p_1 - a_{2\not{1}}$ λιγότερο κόστος από την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$ ανά προϊόν υποκατάστασης. Μπορεί να υπάρχει ένας αριθμός περιόδων F στον μη τετριμμένο κύκλο μέχρι να υπάρξει μία N περίοδο. Λόγω του βήματος 2, στην αρχή ενός ζεύγους, η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ έχει κόστος χαμηλότερο από το αρχικό κόστος ($h + p_1 - a_{2\not{1}}$ ανά υποκατάσταση). Έστω ότι το πρώτο ζεύγος στο μη τετριμμένο κύκλο ξεκινάει στην περίοδο M με $X^M_{\mathcal{F}} = X^M_{\mathcal{N}} + \Delta_M$ και $X^{M+1}_{\mathcal{N}} = X^{M+1}_{\mathcal{F}} + \Delta$. Αποδεικνύεται ότι το πρώτο μέρος του κόστους του ζεύγους μέχρι την περίοδο $M + 1$ είναι τουλάχιστον $(m + p_1 - a_{2\not{1}})\Delta$. Για να υπάρχει μία N περίοδο στην $M + 1$ υπάρχουν τέσσερις δυνατότητες για τη ζήτηση στην περίοδο M :

Περίπτωση 1: $D^M_2 = X^M_{\mathcal{N}} - k_2$ και $D^M_1 = S - X^M_{\mathcal{N}} - \Delta_M - k_1$ με $k_1, k_2 \geq 0$. Δεν υπάρχει υποκατάσταση, οπότε $X^{M+1}_{\mathcal{F}} = S - \Delta_M - k_2$ και $X^{M+1}_{\mathcal{N}} = S - k_2$ ($\Delta = \Delta_M$). Τότε $C^M_{\mathcal{N}} = hk_2 + m(\Delta_M + k_1)$ και $C^M_{\mathcal{F}} = h(\Delta_M + k_2) + mk_1$. Άρα $C^M_{\mathcal{N}} - C^M_{\mathcal{F}} = (m - h)\Delta_M$. Με την προσθήκη $(h + p_1 - a_{2\not{1}})\Delta_M$ προκύπτει $(m + p_1 - a_{2\not{1}})\Delta$.

Περίπτωση 2: $D^M_2 = X^M_{\mathcal{N}} - k_2$ και $D^M_1 = S - X^M_{\mathcal{N}} + k_1$ με $\Delta_M > k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$. Προκύπτει $2\not{1}$ με $s^M_{2\not{1}} = \pi_{2\not{1}}k_1$, έτσι ώστε $X^{M+1}_{\mathcal{F}} = S - (\Delta_M + k_2 - \pi_{2\not{1}}k_1)$

και $X_{\mathcal{N}}^{M+1} = S - k_2$ $(\Delta = \Delta_M - \pi_{2\not{1}} k_1)$, οπότε $C_{\mathcal{N}}^M = hk_2 + m(\Delta_M - k_1)$ και $C_{\mathcal{F}}^M = h(\Delta_M + k_2 - \pi_{2\not{1}} k_1) + a_{2\not{1}} \pi_{2\not{1}} k_1 + p_1(1 - \pi_{2\not{1}})k_1$. Με την προσθήκη $(h + p_1 - a_{2\not{1}})\Delta_M$ προκύπτει $(m + p_1 - a_{2\not{1}})\Delta + (h + p_1 - 2a_{2\not{1}})\pi_{2\not{1}} k_1 - k_1(1 - \pi_{2\not{1}})(m + p_1)$, το οποίο υπερβαίνει από το $(m + p_1 - a_{2\not{1}})\Delta$ από την σχέση $a_{2\not{1}} \leq \frac{h + p_1}{2} - \frac{(m + p_1)(1 - \pi_{2\not{1}})}{2\pi_{2\not{1}}}$.

Περίπτωση 3: $D_2^M = X_{\mathcal{N}}^M + k_2$ και $D_1^M = S - X_{\mathcal{N}}^M - \Delta_M - k_1$ με $\Delta_M > k_2 \geq 0, k_1 \geq 0$. Δεν υπάρχει υποκατάσταση, οπότε $X_{\mathcal{F}}^{M+1} = S - (\Delta_M - k_2)$ και $X_{\mathcal{N}}^{M+1} = S$ $(\Delta = \Delta_M - k_2)$. Επομένως $C_{\mathcal{N}}^M = p_2 k_2 + m(\Delta_M + k_1)$ και $C_{\mathcal{F}}^M = h(\Delta_M - k_2) + mk_1$. Άρα $C_{\mathcal{N}}^M - C_{\mathcal{F}}^M = (m - h)(\Delta_M - k_2) + (m + p_2)k_2$. Με την προσθήκη $(h + p_1 - a_{2\not{1}})\Delta_M$ προκύπτει $(m + p_1 - a_{2\not{1}})\Delta + (h + p_1 - a_{2\not{1}} + m + p_2)k_2$, το οποίο υπερβαίνει από το $(m + p_1 - a_{2\not{1}})\Delta$ από την σχέση $a_{2\not{1}} \leq \frac{h + p_1}{2} - \frac{(m + p_1)(1 - \pi_{2\not{1}})}{2\pi_{2\not{1}}}$.

Περίπτωση 4: $D_2^M = X_{\mathcal{N}}^M + k_2$ και $D_1^M = S - X_{\mathcal{N}}^M - \Delta_M + k_1$ με $0 \leq k_i < \Delta_M$ για $i \epsilon \{1, 2\}$. Στο πλαίσιο της πολιτικής υποκατάστασης $\mathcal{F}$ υπάρχει $\Delta_M - k_2$ διαθέσιμη ποσότητα προϊόντος 2 και k_1 περισσότερη ποσότητα προϊόντος 1 και για να υπάρχει ένα ζεύγος πρέπει να ισχύει $\pi_{2\not{1}} k_1 < \Delta_M - k_2$. Επομένως, $X_{\mathcal{F}}^{M+1} = S - (\Delta_M - k_2 - \pi_{2\not{1}} k_1)$ και $X_{\mathcal{N}}^{M+1} = S$,$(\Delta = \Delta_M - k_2 - \pi_{2\not{1}} k_1$), οπότε $C_{\mathcal{N}}^M = p_2 k_2 + m(\Delta_M - k_1)$ και $C_{\mathcal{F}}^M = h(\Delta_M - k_2 - \pi_{2\not{1}} k_1) + a_{2\not{1}} \pi_{2\not{1}} k_1 + p_1(1 - \pi_{2\not{1}})k_1$. Με την προσθήκη $(h + p_1 - a_{2\not{1}})\Delta_M$ έχουμε $(m + p_1 - a_{2\not{1}})\Delta + (h + p_1 - a_{2\not{1}} + m + p_2)k_2 + (h + p_1 - 2a_{2\not{1}})\pi_{2\not{1}} k_1 - (m + p_1)(1 - \pi_{2\not{1}})k_1$, το οποίο υπερβαίνει από το $(m + p_1 - a_{2\not{1}})\Delta$ από την σχέση $a_{2\not{1}} \leq \frac{h + p_1}{2} - \frac{(m + p_1)(1 - \pi_{2\not{1}})}{2\pi_{2\not{1}}}$.
Κατά την περίοδο $M + 1$, αν παρατηρηθεί υψηλή ζήτηση για προϊόν 2, αυτό θα οφείλεται στην πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$, δεδομένου ότι υπάρχει περισσότερη ποσότητα προϊόντος 2 σε αυτή την περίοδο. Μελετάται κατά περίπτωση για να δειχθεί ότι αυτό το όφελος δεν είναι μεγαλύτερο από το κόστος $(m + p_1 - a_{2\not{1}})\Delta$. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή, αρχικά δείχνετε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για $J = 1, 2$, όπου J είναι ο αριθμός των ζευγών στον κύκλο, στη συνέχεια υποτίθεται ότι είναι αληθής για $J = j$ και αποδεικνύεται ότι παραμένει σωστός για $J = j + 1$. Για $J = 1$ υπάρχουν τρεις δυνατότητες. Εξετάζοντας αυτές τις πιθανές περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $D_2^{M+1} = X_{\mathcal{F}}^{M+1} + \Delta + k_2$ και $D_1^{M+1} = S - X_{\mathcal{F}}^{M+1} + k_1$ με $k_1, k_2 \geq 0$:

$$C_{\mathcal{F}}^{M+1} = p_1 k_1 + p_2(\Delta + k_2)$$

$$C_{\mathcal{N}}^{M+1} = p_1(\Delta + k_1) + p_2 k_2$$

Άρα

$$C_{\mathcal{F}}^{M+1} - C_{\mathcal{N}}^{M+1} = (p_2 - p_1)\Delta \leq (m + p_1 - a_{2\not{1}})\Delta$$

αν ισχύει $a_{2\not{1}} \leq m + 2p_1 - p_2$.

Περίπτωση 2: $D_2^{M+1} = X_{\mathcal{F}}^{M+1} + \Delta + k_2$ και $D_1^{M+1} = S - X_{\mathcal{F}}^{M+1} - \Delta + k_1$ με $\Delta \geq k_1 \geq 0$ και $k_2 \geq 0$. Η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$ οδηγεί σε έλλειψη k_2 και k_1 προϊόντος 2 και 1, αντίστοιχα. Άρα

$$C_{\mathcal{N}}^{M+1} = p_2 k_2 + p_1 k_1$$

Η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ οδηγεί σε έλλειψη $\Delta + k_2$ προϊόντος 2 και σε πλεόνασμα $\Delta - k_1$ προϊόντος 1, γεγονός που δίνει την δυνατότητα για $1\not{2}$ με $s_{1\not{2}}^{M+1} = \min\{\Delta - k_1, \pi_{1\not{2}}(\Delta + k_2)\}$. Αν $\pi_{1\not{2}}(\Delta + k_2) \leq \Delta - k_1$, τότε

$$C_{\mathcal{N}}^{M+1} = p_2(1 - \pi_{1\not{2}})(\Delta + k_2) + a_{1\not{2}}\pi_{1\not{2}}(\Delta + k_2) + m(\Delta - k_1 - \pi_{1\not{2}}(\Delta + k_2))$$

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{F}}^{M+1} - C_{\mathcal{N}}^{M+1} &= \pi_{1\not{2}}(\Delta + k_2)(a_{1\not{2}} - m - p_2) - (m + p_1)k_1 + (m + p_2)\Delta \\ &\leq (m + p_1 - a_{2\not{1}})\Delta \end{aligned}$$

αν ισχύουν $a_{1\not{2}} \leq m + p_2$ και $a_{2\not{1}} \geq p_1 - p_2$. Αν $\pi_{1\not{2}}(\Delta + k_2) > \Delta - k_1$ τότε

$$C_{\mathcal{F}}^{M+1} = p_2(k_2 + k_1) + a_{1\not{2}}(\Delta - k_1)$$

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{F}}^{M+1} - C_{\mathcal{N}}^{M+1} &= (\Delta - k_1)(a_{1\not{2}} - m - p_2) + \Delta(p_2 + m) - k_1(m + p_1) \\ &\leq (m + p_1 - a_{2\not{1}})\Delta \end{aligned}$$

αν ισχύουν $a_{1\not{2}} \leq m + p_2$ και $a_{2\not{1}} \geq p_1 - p_2$.

Περίπτωση 3: $D_2^{M+1} = X_{\mathcal{F}}^{M+1} + \Delta + k_2$ και $D_1^{M+1} = S - X_{\mathcal{F}}^{M+1} - \Delta - k_1$ με $k_1, k_2 \geq 0$. Η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$ οδηγεί σε έλλειψη k_2 προϊόντος 2 και σε πλεόνασμα k_1 προϊόντος 1. Άρα

$$C_{\mathcal{N}}^{M+1} = p_2 k_2 + m k_1$$

Η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ οδηγεί σε έλλειψη $\Delta + k_2$ προϊόντος 2 και σε πλεόνασμα $\Delta + k_1$ προϊόντος 1, γεγονός που δίνει την δυνατότητα για υποκατάσταση $1\not{2}$ με $s_{1\not{2}}^{M+1} = \min\{\Delta + k_1, \pi_{1\not{2}}(\Delta + k_2)\}$. Αν $\pi_{1\not{2}}(\Delta + k_2) \leq \Delta + k_1$ τότε

$$C_{\mathcal{F}}^{M+1} = p_2(1 - \pi_{1\not{2}})(\Delta + k_2) + a_{1\not{2}}\pi_{1\not{2}}(\Delta + k_2) + m(\Delta + k_1 - \pi_{1\not{2}}(\Delta + k_2))$$

$$C_{\mathcal{F}}^{M+1} - C_{\mathcal{N}}^{M+1} = \pi_{1\not{2}}(\Delta + k_2)(a_{1\not{2}} - m - p_2) + (m + p_2)\Delta \leq (m + p_1 - a_{2\not{1}})\Delta$$

αν ισχύουν $a_{1\not{2}} \leq m + p_2$ και $a_{2\not{1}} \geq p_1 - p_2$. Διαφορετικά

$$C_{\mathcal{F}}^{M+1} = p_2(k_2 - k_1) + a_{1\not{2}}(\Delta + k_1)$$

$$C_{\mathcal{F}}^{M+1} - C_{\mathcal{N}}^{M+1} = k_1(a_{1\not{2}} - p_2 - m) + a_{1\not{2}}\Delta \leq (m + p_1 - a_{2\not{1}})\Delta$$

αν ισχύουν $a_{1\not{2}} \leq m + p_2$ και $a_{2\not{1}} - p_1 + p_2 \leq \pi_{1\not{2}}(m + p_2 a_{1\not{2}})$, συνεπάγεται ότι $a_{2\not{1}} + p_2 - p_1 \leq m + p_2 - a_{1\not{2}}$ επειδή $0 \leq \pi_{1\not{2}} \leq 1$ από ορισμό.
Και για τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις, στην επόμενη περίοδο E οι πολιτικές υποκατάστασης $\mathcal{F}$ και $\mathcal{N}$ φθάνουν στην ίδια κατάσταση, καθώς $D_2^{M+1} = X_{\mathcal{F}}^{M+1} + \Delta + k_2$. Για $J = 2$, υπάρχουν τρεις περιπτώσεις με $D_2^{M+1} = X_{\mathcal{F}}^{M+1} + k_2$ όπου $\Delta > k_2 \geq 0$, και η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ έχει $(S, 0)$, ενώ η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$ έχει $(S - (\Delta - k_2), \Delta - k_2)$. Αυτό σημαίνει ότι η περίοδος $M + 2$ είναι περίοδος F με $\Delta_{M+2} = \Delta - k_2$. Σημειώνεται ότι κατά την απόδειξη για $J = 2$, προκειμένου να γίνει σωστή ανάλυση κόστους, αφαιρείται $(h + p_1 - a_{2\not{1}})(\Delta_{M+2})$ από το $C_{\mathcal{N}}^{M+1}$ για το πρώτο ζεύγος. Αποθηκεύεται αυτό το ποσό για να χρησιμοποιηθεί στο δεύτερο ζεύγος σε αυτόν τον κύκλο (είτε μια σειρά από F και στη συνέχεια ένα ζεύγος είτε ένα άμεσο ζεύγος), όπως αναφέρεται στην απόδειξη της Πρότασης 1.2.5. Αυτό καθιστά την περίπτωση $J = 2$ πανομοιότυπη με την περίπτωση $J = 1$ από εκείνη την περίοδο και μετά:

Περίπτωση 4: $D_2^{M+1} = X_{\mathcal{F}}^{M+1} + k_2$ και $D_1^{M+1} = S - X_{\mathcal{F}}^{M+1} + k_1$ με $k_1 \geq 0$ και $\Delta > k_2 \geq 0$:

$$C_{\mathcal{F}}^{M+1} = p_2 k_2 + p_1 k_1$$

$$C_{\mathcal{N}}^{M+1} = h(\Delta - k_2) + p_1(\Delta + k_1) - (h + p_1 - a_{2\not{1}})(\Delta - k_2)$$

$$C_{\mathcal{F}}^{M+1} - C_{\mathcal{N}}^{M+1} = (p_2 - p_1)k_2 - a_{2\not{1}}(\Delta - k_2) \leq (m + p_1 - a_{2\not{1}})\Delta$$

αν ισχύουν $a_{2\not{1}} \geq p_1 - p_2$ και $a_{2\not{1}} \leq m + 2p_1 - p_2$.

Περίπτωση 5: $D_2^{M+1} = X_{\mathcal{F}}^{M+1} + k_2$ και $D_1^{M+1} = S - X_{\mathcal{F}}^{M+1} - \Delta + k_1$ με $\Delta \geq k_1 \geq 0, \Delta > k_2 \geq 0$. Η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$ οδηγεί σε μεταφορά $\Delta - k_2$ προϊόντος 2 και σε έλλειψη k_1 σε προϊόντος 1. Η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ οδηγεί σε έλλειψη k_2 προϊόντός 2 και σε πλεόνασμα $\Delta - k_1$ προϊόντος 1, με αποτέλεσμα να προκύπτει $s_{1\not{2}}^{M+1} = \min\{\pi_{1\not{2}} k_2, \Delta - k_1\}$. Άρα

$$C_{\mathcal{N}}^{M+1} = h(\Delta - k_2) + p_1 k_1 - (h + p_1 - a_{2\not{1}})(\Delta - k_2)$$

και αν $\pi_{1\not{2}} k_2 \leq \Delta - k_1$ τότε

$$C_{\mathcal{F}}^{M+1} = a_{1\not{2}}\pi_{1\not{2}} k_2 + p_2(1 - \pi_{1\not{2}})k_2 + m(\Delta - k_1 - \pi_{1\not{2}} k_2)$$

$$C_{\mathcal{F}}^{M+1} - C_{\mathcal{N}}^{M+1} = \pi_{1\not{2}} k_2(a_{1\not{2}} - m - p_2) + k_2(p_2 - p_1 + a_{2\not{1}}) + (m + p_1 - a_{2\not{1}})\Delta$$

$$-(m+p_1)k_1 \leq (m+p_1-a_{21})\Delta$$

αν ισχύει $a_{21}+p_2-p_1 \leq \pi_{12}(m+p_2-a_{12})$. Διαφορετικά,

$$C_{\mathcal{F}}^{M+1} = p_2(k_2-\Delta+k_1)+a_{12}(\Delta-k_1)$$

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{F}}^{M+1}-C_{\mathcal{N}}^{M+1} &= (a_{12}-p_2-a_{21}+p_1)\Delta+k_1(-a_{12}+p_2-p_1)+k_2(p_2-p_1+a_{21}) \\ &\leq (m+p_1-a_{21})\Delta \\ &= (a_{12}-p_2-m)(\Delta-k_1)+k_1(-m-p_1)+k_2(p_2-p_1+a_{21}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Στη σχέση (1.5) προτίθεται και αφαιρείται $(\Delta-k_1)(p_2-p_1+a_{21})$ και προκύπτει:

$$C_{\mathcal{F}}^{M+1}-C_{\mathcal{N}}^{M+1} = (a_{12}+a_{21}-p_1-m)(\Delta-k_1)+k_1(-m-2p_1+p_2+a_{21})$$
$$+(k_2-\Delta)(p_2-p_1+a_{21}) \leq 0$$

αν ισχύουν $a_{21} \geq p_1-p_2, a_{21} \leq m+2p_1-p_2$ και $a_{21}+p_2-p_1 \leq \pi_{12}(m+p_2-a_{12})$. Συνεπάγεται ότι $a_{12}+a_{21} \leq m+p_1$ επειδή $0 \leq \pi_{12} \leq 1$ από ορισμό.

Περίπτωση 6: $D_2^{M+1} = X_{\mathcal{F}}^{M+1}+k_2$ και $D_1^{M+1} = S-X_{\mathcal{F}}^{M+1}-\Delta-k_1$ με $k_1 \geq 0$ και $\Delta > k_2 \geq 0$, οπότε

$$C_{\mathcal{N}}^{M+1} = h(\Delta-k_2)+mk_1-(h+p_1-a_{21})(\Delta-k_2)$$

και επειδή $\Delta > k_2 \geq \pi_{12}k_2$ ισχύει

$$C_{\mathcal{F}}^{M+1} = a_{12}\pi_{12}k_2+p_2(k_2-\pi_{12}k_2)+m(\Delta+k_1-\pi_{12}k_2)$$

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{F}}^{M+1}-C_{\mathcal{N}}^{M+1} &= \pi_{12}k_2(a_{12}-p_2-m)+(p_2-p_1+a_{21})k_2+(m+p_1-a_{21})\Delta \\ &\leq (m+p_1-a_{21})\Delta \end{aligned}$$

αν ισχύει $a_{21}+p_2-p_1 \leq \pi_{12}(m+p_2-a_{12})$.
Υπάρχουν, επίσης, οι περιπτώσεις όπου $D_2^{M+1} = X_{\mathcal{F}}^{M+1}-k_2$ (επομένως το προϊόν 2 είναι σε αφθονία) και δεν δίνεται η δυνατότητα στην πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$ να χρησιμοποιήσει την επιπλέον ποσότητα σε προϊόν 2 που διαθέτει κατά την περίοδο $M+1$. Δείχνεται ότι ισχύει η $C_{\mathcal{F}}^{M+1}-C_{\mathcal{N}}^{M+1} < (m+p_1-a_{21})\Delta$ και στις επόμενες περιπτώσεις:

Περίπτωση 7: $D_2^{M+1} = X_{\mathcal{F}}^{M+1}-k_2$ και $D_1^{M+1} = S-X_{\mathcal{F}}^{M+1}+k_1$ με $k_1 \geq 0$ και $k_2 \geq 0$, άρα $X_{\mathcal{F}}^{M+2} = S-(k_2-\pi_{21}k_1)^+, X_{\mathcal{N}}^{M+2} = S-(\Delta+k_2)$ τότε $\Delta_{M+2} = \Delta+\min\{\pi_{21}k_1, k_2\}$, οπότε

$$C_{\mathcal{F}}^{M+1} = h(k_2-\pi_{21}k_1)^+ + p_1(k_1-min\{\pi_{21}k_1, k_2\})+a_{21}min\{\pi_{21}k_1, k_2\}$$

$$C_{\mathcal{N}}^{M+1} = h(\Delta + k_2) + p_1(\Delta + k_1) - (h + p_1 - a_{2\jmath})\Delta_{M+2}$$

Αν $\pi_{2\jmath} k_1 < k_2$ τότε

$$C_{\mathcal{F}}^{M+1} - C_{\mathcal{N}}^{M+1} = -a_{2\jmath}\Delta \leq (m + p_1 - a_{2\jmath})\Delta$$

Διαφορετικά

$$C_{\mathcal{F}}^{M+1} - C_{\mathcal{N}}^{M+1} = -a_{2\jmath}\Delta \leq (m + p_1 - a_{2\jmath})\Delta$$

επειδή $m, p_1 \geq 0$ από ορισμό.

Περίπτωση 8: $D_2^{M+1} = X_{\mathcal{F}}^{M+1} - k_2$ και $D_1^{M+1} = S - X_{\mathcal{F}}^{M+1} - \Delta + k_1$ με $\Delta \geq k_1 \geq 0$ και $k_2 \geq 0$, άρα $X_{\mathcal{F}}^{M+2} = S - k_2, X_{\mathcal{N}}^{M+2} = S - (\Delta + k_2)$ τότε $\Delta_{M+2} = \Delta$, οπότε

$$C_{\mathcal{F}}^{M+1} = hk_2 + m(\Delta - k_1)$$

$$C_{\mathcal{N}}^{M+1} = h(\Delta + k_2) + p_1 k_1 - (h + p_1 - a_{2\jmath})\Delta_{M+2}$$

$$C_{\mathcal{F}}^{M+1} - C_{\mathcal{N}}^{M+1} = (m + p_1)(\Delta - k_1) - a_{2\jmath}\Delta \leq (m + p_1 - a_{2\jmath})\Delta$$

Περίπτωση 9: $D_2^{M+1} = X_{\mathcal{F}}^{M+1} - k_2$ και $D_1^{M+1} = S - X_{\mathcal{F}}^{M+1} - \Delta - k_1$ με $k_1, k_2 \geq 0$, άρα $X_{\mathcal{F}}^{M+2} = S - k_2, X_{\mathcal{N}}^{M+2} = S - (\Delta + k_2)$ τότε $\Delta_{M+2} = \Delta$, οπότε

$$C_{\mathcal{F}}^{M+1} = hk_2 + m(\Delta + k_1)$$

$$C_{\mathcal{N}}^{M+1} = h(\Delta + k_2) + mk_1 - (h + p_1 - a_{2\jmath})\Delta_{M+2}$$

$$C_{\mathcal{F}}^{M+1} - C_{\mathcal{N}}^{M+1} = (m + p_1 - a_{2\jmath})\Delta$$

Επομένως, η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ έχει μικρότερο κόστος από την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$ και στα ζεύγη. Υποτίθεται ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $J = j$ και η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ έχει επιπλέον $(h + p_1 - a_{2\jmath})(\Delta - k_2)$ στο τέλος του τελευταίου ζεύγους, όπως στην περίπτωση $J = 2$. Αν το $(j + 1)$ ζεύγος είναι αμέσως μετά το j, τότε η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ με το επιπλέον όφελος $(h + p_1 - a_{2\jmath})(\Delta - k_2)$, θα είναι λιγότερη δαπανηρή αν οι συνθήκες που προσδιορίζονται στις περιπτώσεις 4-6 ισχύουν. Αν δεν υπάρχει ζεύγος ως άμεσος διάδοχος του j ζεύγους, τότε θα υπάρχει ένας αριθμός περιόδων F πριν από το ζεύγος $j+1$ και η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ θα έχει ένα $h+p_1-a_{2\jmath}$ όφελος πριν από το επόμενο ζεύγος, όπως αναφέρεται στην Πρόταση 1.3.5. Τότε η απόδειξη είναι πανομοιότυπη με την $J = 1$. Συνεπώς, ο ισχυρισμός είναι αληθής.
Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα των βημάτων και ενοποιώντας τις σχέσεις των παραμέτρων αποδεικνύεται το Λήμμα 1.3.2. □

Από το αποτέλεσμα του βήματος 1 στο Λήμμα 1.3.2 προκύπτει το ακόλουθο Πόρισμα.

Πόρισμα 1.3.1. *Έστω ένα ζεύγος πολιτικών υποκατάστασης I, J και ένα δειγματικό μονοπάτι έτσι ώστε η περίοδος n να είναι E, που ακολουθείται από μια άλλη περίοδο E. Αν $\pi_{1\not{2}} = 0$ τότε $C_I^n = C_J^n$ για $I, J = \{\mathcal{F}, \mathcal{U}, \mathcal{D}, \mathcal{N}\}$.*

Λήμμα 1.3.3. *Αν ισχύει $a_{2\not{1}} = p_1 - p_2$ και $a_{2\not{1}} \leq \dfrac{(h+p_1)}{2} - \dfrac{(m+p_1)(1-\pi_{2\not{1}})}{2\pi_{2\not{1}}}$ τότε ισχύει $\mathcal{D} \succ \mathcal{N}$.*

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα προκύπτει από το Λήμμα 1.3.2 αφού η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ είναι πανομοιότυπη με την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{D}$ όταν $\pi_{1\not{2}} = 0$. □

Λήμμα 1.3.4. *Αν ισχύει $m + p_1 > 0$ και αν δεν υπάρχει προϋπόθεση για τις παραμέτρους $\pi_{2\not{1}}$ ή $a_{2\not{1}}$ δεν μπορεί να προκύψει $\mathcal{N} \succ \mathcal{D}$ ή $\mathcal{N} \succ \mathcal{F}$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη του Λήμματος, χρησιμοποιείται το ακόλουθο παράδειγμα:

Έστω $\pi_{2\not{1}} = 1$ και η ζήτηση τόσο για 2 όσο και για 1 προϊόν να είναι θετική. Το απόθεμα για τις πολιτικές υποκατάστασης $\mathcal{D}$ και $\mathcal{N}$ είναι αρχικά $(X_2^n, X_1^n) = (S, 0)$. Η ακολουθία της ζήτησης για έξι περιόδους είναι

$$\{D_2^n, D_1^n, n = 1, 2, ..., 6\} = \{(S-\epsilon, S), (0,0), (0,S), (0,0), (0,S), (S,0)\}$$

για $0 \leq \epsilon \leq S$. Από τους τύπους μας έχουμε το απόθεμα στην αρχή της κάθε περιόδου να είναι

$$\{(S,0), (0,S), (S,0), (0,S), (S,0), (S,0)\}$$

για την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{D}$ και

$$\{(S-\epsilon, \epsilon), (\epsilon, S-\epsilon), (S-\epsilon, \epsilon), (\epsilon, S-\epsilon), (S-\epsilon, \epsilon), (S, 0)\}$$

για την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$. Άρα η ακολουθία περιόδων που σχηματίζεται είναι $EDNDND$, όπου η έβδομη περίοδος θα είναι E. Προκύπτει ότι

$$C_{\mathcal{D}}^6 - C_{\mathcal{N}}^6 = \epsilon(a_{2\not{1}} - (m+p_1)(J+1) - h - p_2)$$

όπου J είναι ο αριθμός των ζευγών που υπάρχουν στην ακολουθία. Άρα μπορεί αυτή η διαφορά να μην είναι θετική, ανεξάρτητα από το μέγεθος του $a_{2\not{1}}$, όταν $m + p_1 > 0$. □

Λήμμα 1.3.5. *Αν ισχύει* $a_{1\not{2}} = m + p_2$,$a_{2\not{1}} = p_1 - p_2$ *και* $a_{2\not{1}} \leq \dfrac{(h+p_1)}{2} - \dfrac{(m+p_1)(1-\pi_{2\not{1}})}{2\pi_{2\not{1}}}$ *τότε ισχύει* $\mathcal{F} \succ \mathcal{U}$.

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα προκύπτει από τα Λήμματα 1.3.1 και 1.3.2 . □

Λήμμα 1.3.6. *Αν ισχύει* $a_{1\not{2}} \geq m + p_2$,$a_{2\not{1}} = p_1 - p_2$ *και* $a_{2\not{1}} \leq \dfrac{(h+p_1)}{2} - \dfrac{(m+p_1)(1-\pi_{2\not{1}})}{2\pi_{2\not{1}}}$ *τότε* $\mathcal{D} \succ \mathcal{U}$.

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα προκύπτει από τα Λήμματα 1.3.1 και 1.3.3 . □

Λήμμα 1.3.7. *Αν ισχύει* $m + p_1 > 0$ *και αν δεν υπάρχει προϋπόθεση για τις παραμέτρους* $\pi_{2\not{1}}$,$\pi_{1\not{2}}$, $a_{2\not{1}}$ *ή* $a_{1\not{2}}$ *δεν μπορεί να προκύψει* $\mathcal{U} \succ \mathcal{D}$ *ή* $\mathcal{U} \succ \mathcal{F}$.

Στην επόμενη πρόταση συνοψίζονται τα αποτελέσματα των Λημμάτων 1.3.1-1.3.7.

Πρόταση 1.3.4. *Στον Πίνακα 1.1 συγκρίνονται οι πολιτικές υποκατάστασης υπό την πολιτική αναπλήρωσης TIS βάση των παραμέτρων του συστήματος.*

Σύγκριση πολιτικών υποκατάστασης	Συνθήκη
$\mathcal{F} \succ \mathcal{D}, \mathcal{U} \succ \mathcal{N}$	$a_{1\not{2}} \leq m + p_2$
$\mathcal{D} \succ \mathcal{F}, \mathcal{N} \succ \mathcal{U}$	$a_{1\not{2}} \geq m + p_2$
$\mathcal{F} \succ \mathcal{N}$	$a_{1\not{2}} \leq m + p_2,$ $a_{2\not{1}} \geq p_1 - p_2,$ $a_{2\not{1}} \leq \frac{(h+p_1)}{2} - \frac{(m+p_1)(1-\pi_{2\not{1}})}{2\pi_{2\not{1}}},$ $a_{2\not{1}} \leq m + 2p_1 - p_2,$ $a_{2\not{1}} \leq p_1 - p_2 + \pi_{1\not{2}}(m + p_2 - a_{1\not{2}})$
$\mathcal{D} \succ \mathcal{N}$	$a_{2\not{1}} = p_1 - p_2,$ $a_{2\not{1}} \leq \frac{(h+p_1)}{2} - \frac{(m+p_1)(1-\pi_{2\not{1}})}{2\pi_{2\not{1}}}$
$\mathcal{F} \succ \mathcal{U}$	$a_{2\not{1}} = p_1 - p_2,$ $a_{1\not{2}} = m + p_2,$ $a_{2\not{1}} \leq \frac{(h+p_1)}{2} - \frac{(m+p_1)(1-\pi_{2\not{1}})}{2\pi_{2\not{1}}}$
$\mathcal{D} \succ \mathcal{U}$	$a_{1\not{2}} \geq m + p_2,$ $a_{2\not{1}} = p_1 - p_2,$ $a_{2\not{1}} \leq \frac{(h+p_1)}{2} - \frac{(m+p_1)(1-\pi_{2\not{1}})}{2\pi_{2\not{1}}}$
$\mathcal{N} \succ \mathcal{D}, \mathcal{N} \succ \mathcal{F}, \mathcal{U} \succ \mathcal{F}, \mathcal{U} \succ \mathcal{D}$	Δεν ισχύει όταν $m + p_1 > 0$

Πίνακας 1.1: Σύγκριση πολιτικών υποκατάστασης υπό την πολιτική αναπλήρωσης TIS.

1.4 Σύγκριση πολιτικών υποκατάστασης υπό την πολιτική αναπλήρωσης NIS

Στην ενότητα αυτή, θα γίνει κατά ζεύγη σύγκριση των πολιτικών υποκατάστασης όταν το σύστημα λειτουργεί με την πολιτική αναπλήρωσης NIS. Βάση της πολιτικής NIS προκύπτει η σχέση (1.3). Έτσι αρκεί μόνο η μελέτη της συμπεριφοράς του X_1^n. Σε αυτό το πλαίσιο, αρχικά, θα δοθούν τα ακόλουθα ενδιάμεσα αποτελέσματα και μετά θα γίνει η κατά ζεύγη σύγκριση των πολιτικών υποκατάστασης. Ορίζεται Y_I^n ως το επίπεδο αποθέματος για το προϊόν 1 στην αρχή της περιόδου n, υπό την πολιτική υποκατάσταση $I = \mathcal{F}, \mathcal{D}, \mathcal{U}, \mathcal{N}$.

Πρόταση 1.4.1. *Για οποιαδήποτε δειγματικό μονοπάτι και για* $0 \leq \pi_{1\not{2}} \leq 1$, $0 \leq \pi_{2\not{1}} \leq 1$, *δεδομένο το* S, *ισχύει ότι* $Y_{\mathcal{F}}^n = Y_{\mathcal{D}}^n \leq Y_{\mathcal{U}}^n = Y_{\mathcal{N}}^n$.

Απόδειξη. Ισχύει ότι $Y^n_{\mathcal{F}} = Y^n_{\mathcal{D}}$ και $Y^n_{\mathcal{U}} = Y^n_{\mathcal{N}}$. Αν δεν υπάρχει υποκατάσταση $2\not{1}$ κατα την $n-1$ περίοδο τότε $Y^n_{\mathcal{F}} = Y^n_{\mathcal{N}}$. Σε περίπτωση που υπάρχει υποκατάσταση $2\not{1}$, θα υπάρχει λιγότερη ποσότητα προϊόντος 1, που θα μεταφερθεί στην επόμενη περίοδο στο πλαίσιο της πολιτικής υποκατάστασης $\mathcal{F}$ (ή $\mathcal{D}$), επομένως $Y^n_{\mathcal{F}} < Y^n_{\mathcal{N}}$. Επομένως $Y^n_{\mathcal{F}} = Y^n_{\mathcal{D}} \leq Y^n_{\mathcal{U}} = Y^n_{\mathcal{N}}$. □

Ορισμός 1.4.1. *Όταν ισχύει $Y^n_{\mathcal{F}} < Y^n_{\mathcal{N}}$ στην περίοδο n τότε αυτή θα συμβολίζεται ως N, όταν ισχύει $Y^n_{\mathcal{F}} > Y^n_{\mathcal{N}}$ ως F, αλλιώς θα συμβολίζεται ως E ($Y^n_{\mathcal{F}} = Y^n_{\mathcal{N}}$).*

Ορισμός 1.4.2. *Οι ορισμοί για τετριμμένο ή μη κύκλο είναι ίδιοι με την υποενότητα 1.2.1.*

Στη συνέχεια γίνεται η κατά ζεύγη σύγκριση ως προς το κόστος των πολιτικών υποκατάστασης, χρησιμοποιώντας τον ίδιο συμβολισμό για την κατάταξη τους.

Λήμμα 1.4.1. *Ισχύει ότι $\mathcal{F} \succ \mathcal{D}$ και $\mathcal{U} \succ \mathcal{N}$ αν και μόνο αν ισχύει $a_{1\not{2}} \leq m+p_2$.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι $Y^n_{\mathcal{F}} = Y^n_{\mathcal{D}}$ για όλα τα n. Οι πολιτικές υποκατάστασης $\mathcal{F}$ και $\mathcal{D}$ έχουμε ίδιες παραμέτρους κόστους για κάθε περίοδο εκτός αν στην πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ πραγματοποιείται υποκατάσταση $1\not{2}$. Σε κάθε περίοδο, αν $D^n_1 \leq Y^n_{\mathcal{F}}$ και $D^n_2 > S$ τότε υπάρχει υποκατάσταση $1\not{2}$ στη πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ με $s^n_{1\not{2}} = \min\{\pi_{1\not{2}}(D^n_2 - S), (Y^n_{\mathcal{F}} - D^n_1)\}$. Τότε $C^n_{\mathcal{D}} = m(Y^n_{\mathcal{F}} - D^n_1) + p_2(D^n_2 - S)$ και $C^n_{\mathcal{F}} = m(Y^n_{\mathcal{F}} - D^n_1 - s^n_{1\not{2}}) + p_2(D^n_2 - S - s^n_{1\not{2}}) + a_{1\not{2}} s^n_{1\not{2}}$. Άρα $C^n_{\mathcal{D}} - C^n_{\mathcal{F}} = (m + p_2 - a_{1\not{2}}) s^n_{1\not{2}}$. Επομένως το κόστος της πολιτικής υποκατάστασης $\mathcal{F}$ είναι μικρότερο από της πολιτικής υποκατάσταση $\mathcal{D}$ αν και μόνο αν $a_{1\not{2}} \leq m + p_2$. □

Λήμμα 1.4.2. *Αν ισχύει $a_{1\not{2}} \leq m + p_2$ και $a_{2\not{1}} \leq h$ τότε ισχύει $\mathcal{F} \succ \mathcal{N}$. Αν όμως ισχύει $a_{1\not{2}} \geq m + p_2$ και $a_{2\not{1}} \geq m + p_1 + h$ τότε ισχύει $\mathcal{N} \succ \mathcal{F}$.*

Απόδειξη. Τετριμμένοι κύκλοι: Μελετώνται πρώτα οι περίοδοι E σε έναν τετριμμένο κύκλο. Θεωρείται η περίοδος n να είναι περίοδος E με $(S, Y^n_{\mathcal{F}}) = (S, Y^n_{\mathcal{N}})$. Στην περίπτωση αυτή, προκύπτει

$$C^n_{\mathcal{N}} - C^n_{\mathcal{F}} = (p_2 + m - a_{1\not{2}}) \min\{\pi_{1\not{2}}(D^n_2 - S)^+, (Y^n_{\mathcal{F}} - D^n_1)^+\}$$

$$+(h + p_1 - a_{2\not{1}}) \min\{(S - D^n_2)^+, \pi_{2\not{1}}(D^n_1 - Y^n_{\mathcal{F}})^+\}$$

Επομένως, το κόστος της πολιτικής υποκατάστασης $\mathcal{F}$ δεν είναι υψηλότερο από αυτό της πολιτικής υποκατάστασης $\mathcal{N}$ σε κάθε περίοδο ενός τετριμμένου κύκλου αν και μόνο αν $a_{1\not{2}} \geq p_2 + m$ και $a_{2\not{1}} \geq h + p_1$. Σημειώνεται ότι σε κάθε περίοδο, μπορεί να συμβεί υποκατάσταση $2\not{1}$ είτε υποκατάσταση $1\not{2}$. Αν συμβαίνει υποκατάσταση $2\not{1}$ στην περίοδο n, τότε η περίοδος $n-1$ είναι μια περίοδος N. Σε αυτή την περίπτωση, συμπεριλαμβάνεται το κόστος ενός τετριμμένου κύκλου που τελειώνει με μια περίοδο E, στην ανάλυση του μη τετριμμένου κύκλου. Αυτό δεν είναι επιβλαβές, διότι οι συνθήκες, που προσδιορίζονται παρακάτω, είναι πιο περιοριστικές από ότι αυτές, που προσδιορίζονται στην ανάλυση της περιόδου E ενός τετριμμένου κύκλου.

Μη τετριμμένοι κύκλοι: Μελετώνται μη τετριμμένοι κύκλοι πρώτα για ένα μόνο ζεύγος περιόδων EN και στη συνέχεια για έναν κύκλο που αρχίζει με μία E και ακολουθείται από πολλαπλές περιόδους N.

Περίπτωση 1: Κόστος σε ένα ζεύγος EN που ακολουθείται αμέσως από ένα E. Έστω $n-1$ μια περίοδος E και n μία N. Για να είναι η $(n+1)$ περίοδος μια άλλη E, είτε δεν υπάρχει υποκατάσταση είτε υπάρχει υποκατάσταση $1\not{2}$ στην περίοδο n.

- Καμία υποκατάσταση δεν πραγματοποιείται κατά την περίοδο n ενός ζεύγους EN: Θεωρείται πρώτα ένα ζεύγος EN στις περιόδους $n-1$ και n. Έστω ότι η ζήτηση για το προϊόν 1 είναι $D_1^n = Y_{\mathcal{F}}^n + K$. Καθώς $Y_{\mathcal{N}}^n = Y_{\mathcal{F}}^n + \Delta$, όπου Δ είναι η ποσότητα της υποκατάστασης $2\not{1}$ κατά την περίοδο $n-1$. Άρα
$$\sum_{i=n-1}^{n} [C_{\mathcal{N}}^i - C_{\mathcal{F}}^i] = (h + p_1 - a_{2\not{1}})\Delta$$
$$+\begin{cases} -p_1\Delta, & \alpha\nu K \geq \Delta, D_2^n \geq S \\ m(\Delta - K) - p_1 K, & \alpha\nu \Delta > K \geq 0, D_2^n \geq S \\ m\Delta, & \alpha\nu 0 > K \geq -Y_{\mathcal{F}}^n, D_2^n \leq S \end{cases}$$
Η επόμενη περίοδος είναι μία E και ο κύκλος τελειώνει. Έτσι, για την περίπτωση αυτή, το κόστος της πολιτικής υποκατάστασης $\mathcal{F}$ δεν είναι υψηλότερο από εκείνο της πολιτικής υποκατάστασης $\mathcal{N}$ σε αυτόν τον κύκλο αν $a_{2\not{1}} \leq h$, και το κόστος της πολιτικής υποκατάστασης $\mathcal{N}$ δεν είναι υψηλότερο από εκείνο της πολιτικής υποκατάστασης $\mathcal{F}$ σε αυτόν τον κύκλο αν $a_{2\not{1}} \geq m + h + p_1$.

- Πραγματοποιείται υποκατάσταση $1\not{2}$ στην περίοδο n ενός ζεύγους EN: Για να υπάρχει υποκατάσταση $1\not{2}$ η D_2^n πρέπει να είναι μεγαλύτερη από S και η D_1^n πρέπει να είναι μικρότερη από $Y_{\mathcal{F}}^n$, άρα $D_2^n = S + L$ και $D_1^n = Y_{\mathcal{F}}^n - K$ όπου $L, K > 0$. Άρα
$$\sum_{i=n-1}^{n} [C_{\mathcal{N}}^i - C_{\mathcal{F}}^i] = (h + p_1 - a_{2\not{1}} + m)\Delta + (m + p_2 - a_{1\not{2}})s_{1\not{2}}^n$$

όπου $s^n_{1\not2} = \min\{K, L\}$. Καθώς η επόμενη περίοδος είναι E, ο κύκλος ολοκληρώνεται. Σημειώνεται ότι η διαφορά κόστους δεν είναι συνάρτηση του $L = (D^n_2 - S)^+$. Στην περίπτωση αυτή, το κόστος κύκλου της πολιτικής υποκατάστασης $\mathcal{F}$ δεν είναι υψηλότερο από εκείνο της πολιτικής υποκατάστασης $\mathcal{N}$ αν και μόνο αν $a_{2\not1} \leq h + p_1 + m$ και $a_{1\not2} \leq m + p_2$.

Περίπτωση 2: Κόστος σε μη τετριμμένο κύκλο περιόδων $ENN...N$. Ξεκινώντας με E στην περίοδο $n-1$, για να προκύψει μια ακολουθία N περιόδων, πρέπει να γίνει υποκατάσταση $2\not1$ σε κάθε μία από τις περιόδους, εκτός από εκείνη που κλείνει τον κύκλο. Έστω J ο αριθμός των N στον μη τετριμμένο κύκλο. Η διαφορά κόστους για $J = 1$ δίνεται παραπάνω στην περίπτωση 1. Για $J = 2$, υπάρχει μια περίοδο E στην περίοδο $n-1$ και N στις περιόδους n και $n+1$, ακολουθούμενη από μία E στην περίοδο $n+2$. Εξετάζονται οι διαφορές κόστους σε κάθε μία από τις περιόδους $n-1, n, n+1$ σε αυτή την περίπτωση. Έστω $s^j_{2\not1} = \min\{\pi_{2\not1}K^j, (S - D^j_2)^+\}$ είναι η ποσότητα της υποκατάστασης $2\not1$ στη περίοδο j και $K^j = (D^j_1 - Y^j_{\mathcal{F}})^+$ είναι η υπερβάλλουσα ζήτηση προϊόντος 1 κατά την περίοδο j για την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$. Έστω $s^j_{1\not2} = \min\{(Y^n_{\mathcal{F}} - D^n_1)^+, \pi_{1\not2}(D^n_2 - S)^+\}$ είναι η ποσότητα της υποκατάστασης $1\not2$ κατά την περίοδο j, όπου $s^j_{1\not2} > 0$ μόνο στην περίοδο $n+1$ σε αυτόν τον κύκλο, διότι αυτό οδηγεί σε περίοδο E στην επόμενη περίοδο. Άρα

$$C^{n-1}_{\mathcal{N}} - C^{n-1}_{\mathcal{F}} = (h + p_1 - a_{2\not1})s^{n-1}_{2\not1}$$

$$C^n_{\mathcal{N}} - C^n_{\mathcal{F}} = \begin{cases} (h + p_1 - a_{2\not1})s^n_{2\not1} - p_1 s^{n-1}_{2\not1} & \alpha\nu K^n \geq s^{n-1}_{2\not1} \\ (h + p_1 - a_{2\not1})s^n_{2\not1} - p_1 K^n + m(s^{n-1}_{2\not1} - K^n) & \alpha\nu K^n < s^{n-1}_{2\not1} \end{cases}$$

$$C^{n+1}_{\mathcal{N}} - C^{n+1}_{\mathcal{F}} = \begin{cases} m s^n_{2\not1} & \alpha\nu S \geq D^n_2, Y^{n+1}_{\mathcal{F}} \geq D^{n+1}_1 \\ -p_1 s^n_{2\not1} & \alpha\nu D^{n+1}_1 \geq Y^{n+1}_{\mathcal{F}} + s^n_{2\not1}, \\ & S \leq D^n_2 \\ m(s^n_{2\not1} - K^{n+1}) - p_1 K^{n+1} & \alpha\nu S \leq D^n_2, \\ & Y^{n+1}_{\mathcal{F}} + s^n_{2\not1} \geq D^{n+1}_1 \geq Y^{n+1}_{\mathcal{F}} \\ m s^n_{2\not1} + (p_2 + m - a_{1\not2})s^{n+1}_{1\not2} & \alpha\nu S < D^n_2, Y^{n+1}_{\mathcal{F}} > D^{n+1} \end{cases}$$

Συνδυάζοντας αυτά σε μία εξίσωση, προκύπτει

$$\sum_{j=n-1}^{n+1} [C^j_{\mathcal{N}} - C^j_{\mathcal{F}}] = \sum_{j=n-1}^{n} [(h + p_1 - a_{2\not1})s^j_{2\not1} - p_1 K^{j+1} + m(s^j_{2\not1} - K^{j+1})^+$$

$$+ p_1(K^{j+1} - s^j_{2\not1})^+] + (p_2 + m - a_{1\not2})s^{n+1}_{1\not2}$$

Η γενική περίπτωση $J = j$ δίνεται στο παρακάτω πίνακα :

Περίοδος	$n-1$	n	$n+1$	...	$n+j-2$	$n+j-1$	$n+j$
Τύπος περιόδου	E	N	N	...	N	N	E
$Y^i_{\mathcal{N}} - Y^i_{\mathcal{F}}$	0	$s^{n-1}_{2\not 1}$	$s^{n}_{2\not 1}$	...	$s^{n+j-3}_{2\not 1}$	$s^{n+j-2}_{2\not 1}$	$s^{n+j-1}_{2\not 1}$ $= 0$

Άρα

$$\sum_{i=n-1}^{n+j-1} [C^i_{\mathcal{N}} - C^i_{\mathcal{F}}] = \sum_{i=n-1}^{n+j-1} [(h + p_1 - a_{2\not 1}) s^i_{2\not 1} - p_1 K^{i+1} + m(s^i_{2\not 1} - K^{i+1})^+$$

$$+ p_1 (K^{i+1} - s^i_{2\not 1})^+ + (p_2 + m - a_{1\not 2}) s^{n+j-1}_{1\not 2}$$

Οι συνθήκες για τα $a_{2\not 1}$ και $a_{1\not 2}$, που προσδιορίστηκαν στην περίπτωση 1 παραπάνω, οδηγούν ώστε το κόστος της πολιτικής υποκατάστασης $\mathcal{F}$ ($\mathcal{N}$) να μην είναι υψηλότερο από εκείνο της $\mathcal{N}$ ($\mathcal{F}$) για $J > 1$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Λήμμα 1.4.3. *Αν ισχύει $a_{2\not 1} \leq h$ τότε ισχύει $\mathcal{D} \succ \mathcal{N}$. Αν όμως ισχύει $a_{2\not 1} \geq m + p_1 + h$ τότε ισχύει $\mathcal{N} \succ \mathcal{D}$.*

Απόδειξη. Αυτή είναι μια ειδική περίπτωση της σχέσης ανά ζεύγη μεταξύ των πολιτικών υποκαταστάσεων $\mathcal{F}$ και $\mathcal{N}$. Οι συνθήκες προκύπτουν από την απόδειξη του Λήμματος 1.4.2 έχοντας $\pi_{1\not 2} = 0$ □

Λήμμα 1.4.4. *Αν ισχύει $a_{1\not 2} \geq m + p_2$ και $a_{2\not 1} \leq h$ τότε ισχύει $\mathcal{F} \succ \mathcal{U}$. Αν όμως ισχύει $a_{1\not 2} \leq m + p_2$ και $a_{2\not 1} \geq m + p_1 + h$ τότε ισχύει $\mathcal{U} \succ \mathcal{F}$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παρόμοια με εκείνη του Λήμματος 1.4.2. Σημειώνεται ότι σε αυτή την περίπτωση κάθε δειγματικό μονοπάτι οδηγεί σε περιόδους E ή U. Για να ακολουθήσει μια περίοδος U μια περίοδο E, πρέπει να υπάρχει υποκατάσταση $2\not 1$ στην περίοδο E.
Τετριμμένοι κύκλοι: Έστω ότι οι περίοδοι n και $n+1$ που είναι και οι δύο περίοδοι E. Το κόστος των πολιτικών υποκατάστασης $\mathcal{U}$ και $\mathcal{F}$ στην περίοδο n είναι ίδιο, άρα $C^n_{\mathcal{U}} = C^n_{\mathcal{F}}$ επειδή οι πολιτικές υποκατάστασης $\mathcal{U}$ και $\mathcal{F}$ είναι ίδιες στην αρχή της περιόδου n και δεν υπάρχει υποκατάσταση ή υπάρχει μόνο υποκατάσταση $1\not 2$, σε ίσες ποσότητες, κατά την περίοδο n.
Μη τετριμμένοι κύκλοι: Αναλύονται μη τετριμμένοι κύκλοι σε δύο βήματα.

Περίπτωση 1: Κύκλος EUE. Θεωρήστε πρώτα ένα ζεύγος EU στις περιόδους $n-1$ και n, ακολουθούμενο από μία E στην περίοδο $n+1$. Έστω $s^{n-1}_{2\not 1} =$

$\min\{\pi_{2\not{1}}(D_1^{n-1}-Y_{\mathcal{F}}^{n-1}),(S-D_2^{n-1})\} > 0$ να είναι η ποσότητα της υποκατάστασης $2\not{1}$ για την πολιτική υποκατάσταση $\mathcal{F}$ κατά την περίοδο $n-1$ (σημειώστε ότι αυτό απαιτείται για να είναι το n μία U). Άρα $Y_{\mathcal{U}}^n = Y_{\mathcal{F}}^n + s_{2\not{1}}^{n-1}$. Κατά την περίοδο n δεν υπάρχει υποκατάσταση $2\not{1}$. Αυτό αφήνει τρεις επιλογές στην περίοδο n:

i) δεν υπάρχει υποκατάσταση στις πολιτικές υποκατάστασης $\mathcal{F}$ και $\mathcal{U}$,

ii) Συμβαίνει υποκατάσταση $2\not{1}$ και στις δύο πολιτικές υποκατάστασης $\mathcal{F}$ και $\mathcal{U}$,

iii) Συμβαίνει υποκατάσταση $1\not{2}$ στην πολιτική υποκατάσταση $\mathcal{U}$ και δεν συμβαίνει στην πολιτική υποκατάσταση $\mathcal{F}$.

Συνεπώς

$$C_{\mathcal{U}}^{n-1} - C_{\mathcal{F}}^{n-1} = (h + p_1 - a_{2\not{1}})s_{2\not{1}}^{n-1}$$

$$C_{\mathcal{U}}^{n} - C_{\mathcal{F}}^{n} = ms_{2\not{1}}^{n-1} + (a_{1\not{2}} - m - p_2)(s_{1\not{2}\mathcal{U}}^{n} - s_{1\not{2}\mathcal{F}}^{n})$$

$$\sum_{j=n-1}^{n}[C_{\mathcal{U}}^{j} - C_{\mathcal{F}}^{j}] = (h + p_1 + m - a_{2\not{1}})s_{2\not{1}}^{n-1} + (a_{1\not{2}} - m - p_2)(s_{1\not{2}\mathcal{U}}^{n} - s_{1\not{2}\mathcal{F}}^{n})$$

όπου $s_{1\not{2}\mathcal{U}}^{n} = \min(p_{1\not{2}}(D_2^n - S), Y_{\mathcal{F}}^n + s_{2\not{1}}^{n-1} - D_1^n)$ και $s_{1\not{2}\mathcal{F}}^{n} = \min(p_{1\not{2}}(D_2^n - S), Y_{\mathcal{F}}^n - D_1^n)$, οπότε $0 \leq s_{1\not{2}\mathcal{U}}^{n} - s_{1\not{2}\mathcal{F}}^{n} \leq s_{2\not{1}}^{n-1}$. Το κόστος της πολιτικής υποκατάστασης $\mathcal{U}$ δεν είναι μεγαλύτερο από το κόστος της πολιτικής υποκατάστασης $\mathcal{F}$ αν και μόνο αν $a_{2\not{1}} \geq h + p_1 + m$ και $a_{1\not{2}} \leq m + p_2$ λαμβάνοντας υπόψη μόνο το ζεύγος EU.

Περίπτωση 2: Κύκλος $EU...UE$. Στη συνέχεια, θεωρείται ένας κύκλος περιόδων $EU...U$, όπου μία E ακολουθείται από $J > 1$ περιόδους U, πριν επιτευχθεί άλλη μια περίοδος E. Έστω ότι ο κύκλος που ξεκινάει από την E είναι στην περίοδο $n-1$. Στην περίπτωση αυτή, η πολιτική υποκατάσταση $\mathcal{F}$ ασκεί υποκατάσταση $2\not{1}$ σε J διαδοχικές περιόδους, ξεκινώντας από την περίοδο $n-1$. Οι διαφορές στο κόστος των πολιτικών υποκατάστασης $\mathcal{U}$ και $\mathcal{F}$ στις πρώτες J περιόδους είναι ίδιες με τη διαφορά του κόστους των πολιτικών υποκατάστασης $\mathcal{N}$ και $\mathcal{F}$, επειδή δεν υπάρχει υποκατάσταση $1\not{2}$. Στην $(n+J-1)$ περίοδος του κύκλου δεν παρατηρείται υποκατάσταση $2\not{1}$ και το κόστος στην περίοδο αυτή είναι η ίδια με την περίοδο n της περίπτωσης 1. Αυτό δίνει

$$\sum_{j=n-1}^{n+J-1}[C_{\mathcal{U}}^{j} - C_{\mathcal{F}}^{j}] = \sum_{j=n-1}^{n+J-2}[(h + p_1 - a_{2\not{1}})s_{2\not{1}}^{j} - p_1 K^{j+1} + m(s_{2\not{1}}^{j} - K^{j+1})^+$$

$$+p_1(K^{j+1} - s_{2\not{1}}^{j})^+] + ms_{2\not{1}}^{n+J-2} + (a_{1\not{2}} - m - p_2)(s_{1\not{2}\mathcal{U}}^{n+J-1} - s_{1\not{2}\mathcal{F}}^{n+J-1})$$

όπου $K^j = (D_1^j - Y_{\mathcal{F}}^j)^+$.
Συνδυάζοντας τις συνθήκες της περίπτωσης 1 με τις συνθήκες της πολιτικής υποκατάστασης $\mathcal{N}$ έναντι της πολιτικής υποκατάστασης $\mathcal{F}$, προκύπτει το αποτέλεσμα: αν $a_{2\not1} \leq h$ και $a_{1\not2} \geq m+p_2$, τότε $\mathcal{F} \succ \mathcal{U}$. Αν $a_{2\not1} \geq m+p_1+h$ και $a_{1\not2} \leq m+p_2$, τότε $\mathcal{U} \succ \mathcal{F}$. □

Λήμμα 1.4.5. *Αν ισχύει $a_{1\not2} \geq m + p_2$ και $a_{2\not1} \leq h$ τότε ισχύει $\mathcal{D} \succ \mathcal{U}$. Αν όμως ισχύει $a_{1\not2} \leq m + p_2$ και $a_{2\not1} \geq m + p_1 + h$ τότε ισχύει $\mathcal{U} \succ \mathcal{D}$.*

Απόδειξη. Αυτό προκύπτει από τη σύγκριση της πολιτικής υποκατάστασης $\mathcal{F}$ με την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{U}$. Βλέπε τις συνθήκες στο Λήμμα 1.4.4. Περιορίζεται η ποσότητα της υποκατάστασης $1\not2$ στη πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ στο μηδέν για να εξαχθεί το κόστος της πολιτικής υποκατάστασης $\mathcal{D}$. □

Στην επόμενη πρόταση συνοψίζονται τα αποτελέσματα από τα Λήμματα 1.4.1-1.4.5.

Πρόταση 1.4.2. *Στον Πίνακα 1.2 συγκρίνονται οι πολιτικές υποκατάστασης υπό την πολιτική αναπλήρωσης NIS βάση των παραμέτρων του συστήματος.*

Σύγκριση πολιτικών υποκατάστασης	Συνθήκη
$\mathcal{F} \succ \mathcal{D}, \mathcal{U} \succ \mathcal{N}$	$a_{1\not2} \leq m + p_2$
$\mathcal{D} \succ \mathcal{F}, \mathcal{N} \succ \mathcal{U}$	$a_{1\not2} \geq m + p_2$
$\mathcal{F} \succ \mathcal{N}$	$a_{1\not2} \leq m + p_2$, $a_{2\not1} \leq h$
$\mathcal{D} \succ \mathcal{N}$	$a_{2\not1} \leq h$
$\mathcal{N} \succ \mathcal{D}$	$a_{2\not1} \geq m + h + p_1$
$\mathcal{N} \succ \mathcal{F}$	$a_{1\not2} \geq m + p_2$, $a_{2\not1} \geq m + h + p_1$
$\mathcal{F} \succ \mathcal{U}$	$a_{2\not1} \leq h$, $a_{1\not2} \geq m + p_2$
$\mathcal{D} \succ \mathcal{U}$	$a_{1\not2} \geq m + p_2$, $a_{2\not1} \leq h$
$\mathcal{U} \succ \mathcal{F}$	$a_{1\not2} \leq m + p_2$, $a_{2\not1} \geq m + h + p_1$
$\mathcal{U} \succ \mathcal{D}$	$a_{1\not2} \leq m + p_2$, $a_{2\not1} \geq m + h + p_1$

Πίνακας 1.2: Σύγκριση πολιτικών υποκατάστασης υπό την πολιτική αναπλήρωσης NIS.

1.5 Σύγκριση πολιτικών υποκατάστασης με την χρήση μεθόδων LIFO και FIFO

Στην ενότητα αυτή, γίνεται κατά ζεύγη σύγκριση των πολιτικών υποκατάστασης, υπό την έννοια της σύγκρισης του συνολικού κόστους, λαμβάνοντας υπόψη τον τρόπο διάθεσης των προϊόντων, που εξαρτάται από τον λήπτη αποφάσεων. Αν πωλητής μπορεί να διαθέσει το προϊόν, προφανώς θα επιδιώξει να διαθέσει πρώτα τα προϊόντα, που είναι κοντά στην ημερομηνία λήξης, πολιτική FIFO (first in first out). Αντίθετα, αν πωλητής επιλέξει να διαθέσει το προϊόν με βάση την προτίμηση του πελάτη, τότε ο τελευταίος θα προτιμήσει να επιλέξει τα προϊόντα που έχουν μεγαλύτερη διάρκεια ζωής, πολιτική LIFO (last in first out) (Nahmias 2011). Στην LIFO η ζήτηση για προϊόν 1 θα είναι μηδέν, $D_1^n = 0$, αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει υποκατάσταση $1\not{2}$, επομένως $\pi_{1\not{2}} = 1$. Όμοια στην FIFO ισχύει $D_2^n = 0$ και υπάρχει υποκατάσταση $2\not{1}$, άρα $\pi_{2\not{1}} = 1$.

Παρακάτω γίνεται σύγκριση των πολιτικών υποκατάστασης, που έχουν οι πολιτικές LIFO και FIFO με την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$. Χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 1.3.1, 1.3.3, 1.4.1 και 1.4.3 προκύπτουν τα εξής:

1. Εφαρμόζοντας την πολιτική αναπλήρωσης TIS και την πολιτική LIFO , στην οποία υπάρχει η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{U}$, τότε αυτή είναι καλύτερη από την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$ αν και μόνο αν $a_{1\not{2}} \leq m + p_2$.

2. Εφαρμόζοντας την πολιτική αναπλήρωσης TIS και πολιτική FIFO , στην οποία υπάρχει η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{D}$, τότε αυτή είναι καλύτερη από την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$ αν και μόνο αν $a_{2\not{1}} \leq \dfrac{h + p_1}{2}$.

3. Εφαρμόζοντας την πολιτική αναπλήρωσης NIS και πολιτική LIFO , τότε η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{U}$ είναι καλύτερη από την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$ αν και μόνο αν $a_{1\not{2}} \leq m + p_2$.

4. Εφαρμόζοντας την πολιτική αναπλήρωσης NIS και πολιτική FIFO , τότε η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{U}$ είναι καλύτερη από την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$ αν και μόνο αν $a_{2\not{1}} \leq h$ και αντίθετα αν $a_{2\not{1}} \geq m + p_1 + h$.

1.6 Διερεύνηση βέλτιστης πολιτικής αναπλήρωσης αποθέματος και προσδιορισμός base stock level

Στην ενότητα αυτή, θα αποδειχθεί ότι η πολιτική αναπλήρωσης NIS υπό την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$ είναι βέλτιστη και στην συνέχεια θα βρεθεί το βέλτιστο επίπεδο αποθέματος (Deniz et al. 2020).

Στο επόμενο λήμμα αποδεικνύεται ότι η πολιτική αναπλήρωσης NIS υπό την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$ είναι η βέλτιστη.

Λήμμα 1.6.1. *Η πολιτική NIS είναι βέλτιστη υπό την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι $\pi_{1\not{2}} = \pi_{2\not{1}} = 0$ ή $s^n_{1\not{2}} = s^n_{2\not{1}} = 0$. Από την σχέση (1.3) συνεπάγεται ότι το αναμενόμενο μέσο κόστος είναι

$$E(C(S)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E[\sum_{n=1}^{T} [cX^n_2 + hX^{n+1}_1 + p_1 L^n_1 + p_2 L^n_2 + mO^n + a_{1\not{2}} s^n_{1\not{2}} + a_{2\not{1}} s^n_{2\not{1}}]]$$

$$E(C(S)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E[\sum_{n=1}^{T} [cX^n_2 + h[X^n_2 - D^n_2] + p_1[D^n_1 - X^n_1] + p_2[D^n_2 - X^n_2]$$
$$+ m[X^n_1 - D^n_1]]]$$

Το αναμενόμενο μέσο κόστος μπορεί να γραφεί, ξεχωρίζοντας την πρώτη περίοδο, ως εξής

$$E(C(S)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E[p_1(D^1_1 - X^1_1)^+ + m(X^1_1 - D^1_1)^+ + \sum_{n=1}^{T} [h(X^n_2 - D^n_2)^+$$
$$+ cX^n_2 + p_2(D^n_2 - X^n_2)^+ + p_1(D^{n+1}_1 - X^{n+1}_1)^+ + m(X^{n+1}_1 - D^{n+1}_1)^+]]$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E[p_1(D^1_1 - X^1_1)^+ + m(X^1_1 - D^1_1)^+ + \sum_{n=1}^{T} [h(X^n_2 - D^n_2)^+ + cX^n_2$$
$$+ p_2(D^n_2 - X^n_2)^+ + p_1(D^{n+1}_1 - (X^n_2 - D^n_2)^+)^+ + m((X^n_2 - D^n_2)^+ - D^{n+1}_1)^+]]$$

Θέτοντας

$$G(X^n_2) = h(X^n_2 - D^n_2)^+ + cX^n_2 + p_2(D^n_2 - X^n_2)^+$$
$$+ p_1(D^{n+1}_1 - (X^n_2 - D^n_2)^+)^+ + m((X^n_2 - D^n_2)^+ - D^{n+1}_1)^+ \tag{1.6}$$

προκύπτει το αναμενόμενο μέσο κόστος ως συνάρτηση της ποσότητας παραγγελίας $X = \{X_2^n, n = 1, 2, ...\}$ κάτω υπό την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$ να είναι:

$$E(C(X)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E[p_1(D_1^1 - X_1^1)^+ + m(X_1^1 - D_1^1)^+ + \sum_{n=1}^{T}[G(X_2^n)]$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{T} E[G(X_2^n)]$$

Μία βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας X^*, που μπορεί να ελαχιστοποιεί το $E(C(X))$, μπορεί να προσδιοριστεί από την επίλυση ανεξάρτητου προβλήματος βελτιστοποίησης

$$\min_{X_2^n \geq 0} E(G(X_2^n))$$

για $n = 1, 2, ...$ Το $E(G(\cdot))$ δεν αλλάζει με την πάροδο του χρόνου, άρα το βέλτιστο σημείο είναι ίδιο για όλα τα n και η πολιτική αναπλήρωσης NIS είναι βέλτιστη. □

Χρησιμοποιώντας την απόδειξη του Λήμματος 1.6.1, θα βρεθεί το βέλτιστο επίπεδο αποθέματος S^*, που θα λύνει το

$$\min_{S \geq 0} E(G(S))$$

Λήμμα 1.6.2. *i) Αν* $p_1 - p_2 \leq h$ *τότε* $E(G(S))$ *είναι κυρτό στο* S.

ii) Αν $p_2 \leq c$ *και* $p_1 \leq h + c$ *τότε* $S^* = 0$.

iii) Υποθέτοντας ότι $E(G(S))$ *είναι συνεχώς διαφορίσιμη και ισχύει η σχέση* $\dfrac{\partial E(G(S))}{\partial S} = E(\dfrac{\partial G(S)}{\partial S})$. *Αν* $c < p_2$ *τότε* $E(G(S))$ *έχει ένα ελάχιστο* $S^* \epsilon (0, \infty)$. *Αν* $c < p_2$ *και*

$$\frac{P(D_2^n + D_1^{n+1} < S) - P(D_2^n + D_1^{n+1} < S^*)}{P(D_2^n < S) - P(D_2^n < S^*)} \geq \frac{-(h + p_2 + p_1)}{p_1 + m} \qquad (1.7)$$

$\forall S > S^*$ *τότε το* S^* *είναι μοναδικό και ικανοποιεί την σχέση:* $(h + p_2 + p_1)P(D_2^n < S^*) + (p_1 + m)P(D_2^n + D_1^{n+1} < S^*) = p_2 - c$

Απόδειξη. Από τον ορισμό,

$$E(G(X_2^n)) = hE((S - D_2^n)^+) + cS + p_2E((D_2^n - S)^+)$$

$$+p_1E(D_1^{n+1} - (S - D_2^n)^+)^+) + mE(((S - D_2^n)^+ - D_1^{n+1})^+)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση $(a-b)^+ = (a-b) + (b-a)^+$.
Άρα έχουμε

$$E(G(S)) = (h + p_2 - p_1)E((S - D_2^n)^+) + (c - p_2)S$$

$$+(p_1 + m)E(((S - D_2^n)^+ - D_1^{n+1})^+) + p_2E(D_2^n) + p_1E(D_1^{n+1})$$

(i)

$$\frac{\partial G(S)}{\partial S} = \begin{cases} c - p_2, & \alpha\nu S \leq D_2^n \\ h + c - p_1, & \alpha\nu D_2^n < S \leq D_2^n + D_1^{n+1} \\ h + c + m, & \alpha\nu S > D_2^n + D_1^{n+1} \end{cases} \tag{1.8}$$

Η σχέση (1.7) είναι αύξουσα αν ισχύει $c - p_2 \geq 0$, $h + c - p_1 \geq 0$ και $h + c + m \geq 0$ ή $c \geq p_2$ και $h \geq p_1 - c$, άρα

$$p_1 - p_2 \leq h \tag{1.9}$$

Άρα η $G(S)$ είναι κυρτή στο S κάτω από την υπόθεση (1.9).

(ii) $\dfrac{\partial G(S)}{\partial S} \geq 0$ για όλα τα $S \geq 0$ όταν ισχύει $p_2 \leq c$ και $p_1 \leq h + c$ από την σχέση (1.8). Άρα το $E(G(S))$ είναι αύξουσα για όλα τα $S \geq 0$ και έχει το ελάχιστο στο σημείο $S^* = 0$.

(iii) Με βάση τις σχέσεις της υπόθεσης, προκύπτει:

$$\frac{\partial E(G(S))}{\partial S}$$

$$= (h + p_2 - p_1)P(D_2^n < S) + (p_1 + m)P(D_2^n + D_1^{n+1} < S) + (c - p_2)$$

Ισχύουν ότι:

$$\left.\frac{\partial E(G(S))}{\partial S}\right|_{S=0} = c - p_2 < 0$$

και

$$\lim_{S\to\infty} \frac{\partial E(G(S))}{\partial S} = h + c + m > 0$$

που αυτό εγγυάται ότι θα υπάρχει ένα ελάχιστο S^* στο διάστημα $[0, \infty)$. Η $E(G(S))$ είναι μονότονη και απομένει να δειχθεί ότι το ελάχιστο της είναι μοναδικό. Έστω

$$\tilde{S} = arg \min\{S| \frac{\partial E(G(S))}{\partial S} = 0\}$$

$$(h + p_2 - p_1)P(D_2^n < \tilde{S}) + (p_1 + m)P(D_2^n + D_1^{n+1} < \tilde{S}) + (c - p_2) = 0$$
$$(h + p_2 - p_1)P(D_2^n < \tilde{S}) + (p_1 + m)P(D_2^n + D_1^{n+1} < \tilde{S}) = p_2 - c > 0$$

Από $\left.\dfrac{\partial E(G(S))}{\partial S}\right|_{S>\tilde{S}} \geq 0$ έχουμε

$$(h + p_2 - p_1)P(D_2^n < S) + (p_1 + m)P(D_2^n + D_1^{n+1} < S) \geq$$
$$(h + p_2 - p_1)P(D_2^n < \tilde{S}) + (p_1 + m)P(D_2^n + D_1^{n+1} < \tilde{S})$$

για όλα τα $S > \tilde{S}$. Μετά από πράξεις λαμβάνεται η σχέση (1.7) για $S^* = \tilde{S}$. Επομένως υπάρχει μοναδικό ελάχιστο.

$\square$

1.7 Παραδείγματα

Στην ενότητα αυτή , θα δοθούν δύο παραδείγματα, τα οποία βρίσκονται Deniz et al. (2020). Στο πρώτο παράδειγμα γίνεται σύγκριση των πολιτικών αναπλήρωσης λαμβάνοντας υπόψη τις επιλογές υποκατάστασης. Στο δεύτερο παράδειγμα απαντάται το ερώτημα γιατί μόνο η πολιτική αναπλήρωσης NIS υπό την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$ είναι βέλτιστη.

Παράδειγμα 1.7.1. *Έστω* $c = 0, h = 1, m\epsilon\{2, 5\}, p_1\epsilon\{1, 3\}, p_2\epsilon\{4, 9\}$, $a_{1\cancel{2}}\epsilon\{3, 7, 11, 15\}, a_{2\cancel{1}}\epsilon\{-1, 0, 2, 6\}$. *Η ζήτηση ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο* $(0, 25)$.

Στον Πίνακα 1.3 δίνεται το συνολικό κόστος λειτουργίας του συστήματος αποθεμάτων όταν χρησιμοποιούνται οι πολιτικές αναπλήρωσης TIS και NIS και οι πολιτικές υποκατάστασης $\mathcal{F}, \mathcal{D}, \mathcal{U}, \mathcal{N}$ για διάφορες σχέσεις των παραμέτρων του συστήματος. Με έντονο χρώμα σημειώνονται το ελάχιστο συνολικό κόστος. Παρατηρείται ότι η πολιτική αναπλήρωσης NIS έχει μικρότερο συνολικό κόστος από την πολιτική αναπλήρωσης TIS για όλες τις σχέσεις των παραμέτρων του συστήματος.

$a_{12} \leq m + p_2, a_{21} \geq m + h + p_1$	
$TIS - \mathcal{N}$	43.65
$TIS - \mathcal{U}$	39.12
$TIS - \mathcal{D}$	51.11
$TIS - \mathcal{F}$	49.98
$NIS - \mathcal{N}$	28.54
$NIS - \mathcal{U}$	28.25
$NIS - \mathcal{D}$	45.03
$NIS - \mathcal{F}$	44.74

$a_{12} \geq m + p_2, a_{21} \geq m + h + p_1$	
$TIS - \mathcal{N}$	39.87
$TIS - \mathcal{U}$	43.66
$TIS - \mathcal{D}$	48.86
$TIS - \mathcal{F}$	49.79
$NIS - \mathcal{N}$	28.16
$NIS - \mathcal{U}$	28.40
$NIS - \mathcal{D}$	44.06
$NIS - \mathcal{F}$	44.00

$a_{12} \leq m + p_2, h \leq a_{21} \leq m + h + p_1$	
$TIS - \mathcal{N}$	47.64
$TIS - \mathcal{U}$	42.31
$TIS - \mathcal{D}$	41.96
$TIS - \mathcal{F}$	40.37
$NIS - \mathcal{N}$	34.11
$NIS - \mathcal{U}$	33.42
$NIS - \mathcal{D}$	37.18
$NIS - \mathcal{F}$	37.01

$a_{12} \geq m + p_2, h \leq a_{21} \leq m + h + p_1$	
$TIS - \mathcal{N}$	43.56
$TIS - \mathcal{U}$	46.79
$TIS - \mathcal{D}$	39.54
$TIS - \mathcal{F}$	40.62
$NIS - \mathcal{N}$	32.45
$NIS - \mathcal{U}$	32.81
$NIS - \mathcal{D}$	35.58
$NIS - \mathcal{F}$	35.65

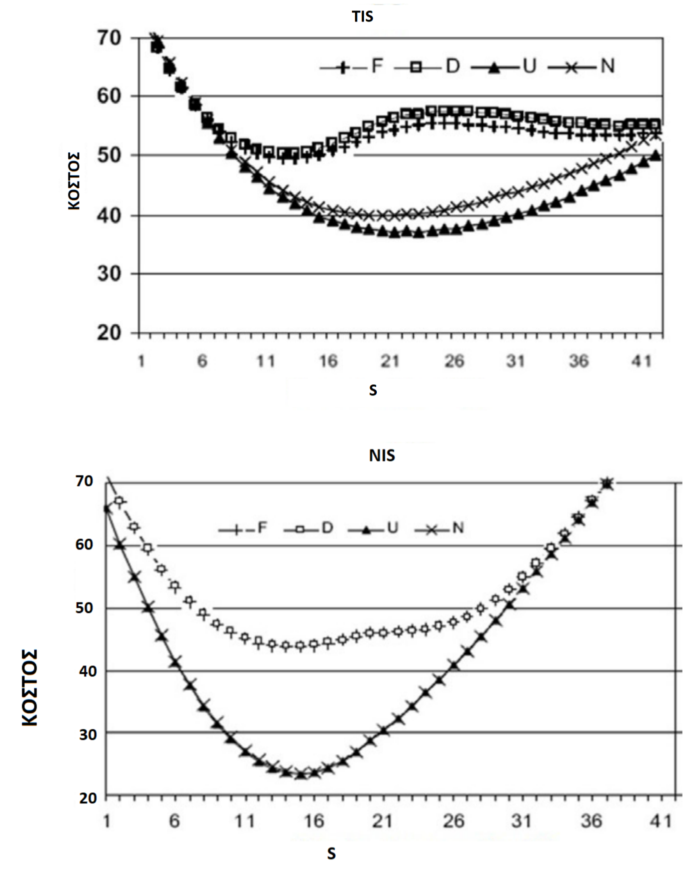
$a_{12} \leq m + p_2, h \geq a_{21}$	
$TIS - \mathcal{N}$	46.44
$TIS - \mathcal{U}$	41.32
$TIS - \mathcal{D}$	17.90
$TIS - \mathcal{F}$	15.85
$NIS - \mathcal{N}$	32.85
$NIS - \mathcal{U}$	32.25
$NIS - \mathcal{D}$	15.59
$NIS - \mathcal{F}$	15.44

$a_{12} \geq m + p_2, h \geq a_{21}$	
$TIS - \mathcal{N}$	41.93
$TIS - \mathcal{U}$	45.04
$TIS - \mathcal{D}$	15.83
$TIS - \mathcal{F}$	17.30
$NIS - \mathcal{N}$	30.85
$NIS - \mathcal{U}$	31.25
$NIS - \mathcal{D}$	14.56
$NIS - \mathcal{F}$	14.69

Πίνακας 1.3: Συνολικό κόστος λειτουργίας του συστήματος υπό πολιτικές αναπλήρωσης και διαφορετικές πολιτικές υποκατάστασης για διάφορες σχέσεις των παραμέτρων

Παράδειγμα 1.7.2. *Έστω* $c = 0, h = 1, p_1 = 3, p_2 = 9, a_{12} = 7, a_{21} = 6, m = 2$. *Η ζήτηση ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο* $(0, 25)$.

Στο Σχήμα 1.1 παρατηρείται ότι η συνάρτηση κόστους θεωρώντας τις πολιτικές αναπλήρωσης TIS και NIS με τις πολιτικές υποκατάστασης $\mathcal{F}$ και $\mathcal{D}$ είναι μη κυρτές ως προς το S. Αντίθετα, η συνάρτηση κόστους υπό την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{U}$ και στις δύο πολιτικές αναπλήρωσης είναι κυρτή και καλύτερη από τις άλλες πολιτικές υποκατάστασης, χωρίς να υπάρχουν αναλυτικά αποτελέσματα για να αποδειχθεί.



Σχήμα 1.1: Συνάρτηση κόστους για τις πολιτικές αναπλήρωσης αποθέματος TIS και NIS για τις πολιτικές υποκατάστασης $\mathcal{F}, \mathcal{D}, \mathcal{U}, \mathcal{N}$

1.8 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάστηκε ένα μοντέλο διαχείρισης αποθεμάτων για προϊόντα με χρόνο ζωής δύο περιόδων, όπου η ζήτηση του διαφοροποιείται ανάλογα με την ηλικία του προϊόντος. Από τη σύγκριση των πολιτικών υποκατάστασης προέκυψε ότι η επιλογή της κατάλληλης πολιτικής εξαρτάται από τις παραμέτρους κόστους. Σε αυτό το πλαίσιο, θα μπορούσαν να αναφερθούν συγκεκριμένα παραδείγματα αναφορικά με τις παραμέτρους κόστους και την επιλεγόμενη πολιτική υποκατάστασης. Έτσι ως προς τις τράπεζες προϊόντων αίματος, όπου η έλλειψη συνεπάγεται υψηλό κόστος, η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{F}$ είναι η προτεινόμενη. Μια επιχείρηση προϊόντων τεχνολογίας, όπου η επιθυμία του πελάτη για νέα προϊόντα συνεπάγεται υψηλό κόστος της υποκατάστασης $1\not{2}$, η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{U}$ είναι η προτεινόμενη, ενώ η μείωση των πωλήσεων των νέων προϊόντων συνεπάγεται χαμηλό κόστος της υποκατάστασης $2\not{1}$, η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{D}$ είναι η προτεινόμενη. Μια επιχείρηση προϊόντων μόδας, όπου ο έλεγχος των πωλήσεων των προϊόντων συνεπάγεται υψηλό κόστος της υποκατάστασης $2\not{1}$ και $1\not{2}$, η πολιτική υποκατάσταση $\mathcal{N}$ είναι προτεινόμενη. Μία επιχείρηση αρτοποιίας, όπου η πώληση των φρέσκων προϊόντων γίνεται πρώτα συνεπάγεται υψηλό κόστος έλλειψης του νέου προϊόντος και υψηλό κόστος της υποκατάστασης $1\not{2}$, η πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{U}$ είναι προτεινόμενη. Σε σχέση με τη σύγκριση των πολιτικών αναπλήρωσης μόνο κάτω από την πολιτική υποκατάστασης $\mathcal{N}$ μπορεί να αποδειχθεί θεωρητικά η υπεροχή της πολιτικής αναπλήρωσης NIS, ενώ με αριθμητικά παραδείγματα φαίνεται πάλι η υπεροχή της πολιτικής αναπλήρωσης NIS από την πολιτική αναπλήρωσης TIS.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαχειριση αποθεματων προϊοντων με χρονο ζωης δυο περιοδων: πολιτικες αναπληρωσης, υποκαταστασης και τιμολογησης των προϊοντων

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ένα σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων για προϊόντα με τον ίδιο χρόνο ζωής με το προηγούμενο κεφάλαιο. Το προϊόν αποσύρεται στο τέλος της ημερομηνίας λήξης του. Η ζήτηση των προϊόντων διαφέρει ανάλογα με την ηλικία του προϊόντος. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει απόθεμα τότε η ζήτηση χάνεται. Σε αυτό το σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων, λαμβάνεται υπόψη η τιμή πώλησης, η οποία εξαρτάται από την ηλικία του προϊόντος. Η πολιτική αναπλήρωσης του αποθέματος γίνεται με μία σταθερή παραγγελία προϊόντος 2. Η ζήτηση ικανοποιείται με ή χωρίς υποκατάσταση των προϊόντων. Στόχος είναι να προσδιοριστούν οι τιμές πώλησης των προϊόντων έτσι ώστε να υπάρχει μέγιστο κέρδος, παρουσιάζοντας πως επηρεάζει η αβέβαιη ζήτηση. Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου παρουσιάστηκαν από τον Sainathan (2013).

2.1 Υποθέσεις και συμβολισμός

Στην ενότητα αυτή, δίνονται οι υποθέσεις και ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθούν, επιπλέον στην ανάπτυξη του μοντέλου αυτού του κεφαλαίου.

Υποθέσεις

1. Η ζήτηση είναι διαφορετική για τα προϊόντα 1 και 2 και ικανοποιείται με ή χωρίς υποκατάσταση.

2. Η τιμή πώλησης των προϊόντων είναι διαφορετική ανάλογα με την ηλικία του προϊόντος.

Συμβολισμός

q_1^n	διαθέσιμη ποσότητα προϊόντος 1 την περίοδο n
x_i	πραγματοποιημένες πωλήσεις για το προϊόν i
c	κόστος αγοράς ανά μονάδα προϊόντος 2
b_i^n	τιμή πώλησης ανά μονάδα προϊόντος i την περίοδο n (μεταβλητή απόφασης)
q_2^n	ποσότητα παραγγελίας στην αρχή της περιόδου n (μεταβλητή απόφασης)

2.2 Προσδιορισμός της συνάρτησης κέρδους

Προκειμένου να μοντελοποιηθεί η συνάρτηση κέρδους του συστήματος διαχείρισης αποθεμάτων, αρχικά παρουσιάζεται ο τρόπος λειτουργίας του συστήματος. Στην αρχή της περιόδου n, γίνεται η αναπλήρωση του αποθέματος αγοράζοντας μία σταθερή ποσότητα, q_2^n, από το προϊόν 2. Στην συνέχεια, παρουσιάζεται η ζήτηση, η οποία είτε ικανοποιείται είτε χάνεται χωρίς να επιβαρύνει τον πωλητή με κάποιο κόστος. Οι ποσότητες προς πώληση από το προϊόν 1 και 2 είναι:

$$X_2^n = \min\{q_2^n, D_2^n\}$$

$$X_1^n = \min\{q_1^n, D_1^n\}$$

Στο τέλος της περιόδου n, το προϊόν 2 παλαιώνει, ενώ το προϊόν 1 αποσύρεται από το απόθεμα χωρίς να επιβαρύνουν τον πωλητή με κάποιο κόστος ή αποδίδοντας του κάποια έσοδα. Τα προϊόντα που παλαιώνουν μεταφέρονται στην επόμενη περίοδο και η ποσότητα προϊόντος που μεταφέρεται στην επόμενη περίοδο (τώρα προϊόν 1) είναι:

$$q_1^{n+1} = (q_2^n - D_2^n)^+ = q_2^n - X_2^n$$

Το συνολικό κέρδος της περιόδου n, λαμβάνοντας υπόψη έσοδα και κόστος, είναι:

$$\pi(q_2^n, q_1^n, b_2^n, b_1^n) = b_2^n X_2^n + b_1^n X_1^n - c q_2^n$$

Συνεπώς το αναμενόμενο κέρδος για την περίοδο n, ορίζοντας ότι s_2^n και s_1^n είναι οι πραγματικές ποσότητες προς πώληση από το προϊόν 2 και 1, αντίστοιχα, είναι:

$$E\pi(q_2^n, q_1^n, b_2^n, b_1^n) = \sum_{x_2=0}^{q_2^n} \sum_{x_1=0}^{q_1^n} P(X_2^n = x_2, X_1^n = x_1 | q_2^n, q_1^n) \pi(q_2^n, q_1^n, b_2^n, b_1^n)$$

Στόχος είναι η μεγιστοποίηση του μακροπρόθεσμου αναμενόμενου κέρδους:

$$\Pi(q_2^n, q_1^n, b_2^n, b_1^n) = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=1}^{T} \frac{E\pi(q_2^n, q_1^n, b_2^n, b_1^n)}{T} \tag{2.1}$$

Σημείωση 2.2.1. *Για ευκολία θα παραλείπεται ο δείκτης της περιόδου n.*

Στην συνέχεια, θα προσδιοριστούν οι τιμές των προϊόντων έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση κέρδους, ορίζοντας την ζήτηση ντετερμινιστική ή στοχαστική, λαμβάνοντας υπόψη τον τρόπο επιλογής ενός προϊόντος από τους πελάτες (βάση της αντίστοιχης χρησιμότητας του).

2.3 Προσδιορισμός μοντέλου ζήτησης

Για να προσδιοριστεί η ζήτηση, αρχικά, θα περιγραφεί η διαδικασία επιλογής ενός προϊόντος από τον πελάτη. Ο πελάτης έχει τρεις επιλογές: να αγοράσει μία μονάδα από το προϊόν 1 ή από το προϊόν 2 ή να μην αγοράσει κάποιο προϊόν. Τα προϊόντα 1 και 2 είναι ανταγωνιστικά ως προς τα χαρακτηριστικά και τις τιμές τους. Ένας πελάτης επιλέγει ένα προϊόν με βάση την χρησιμότητα, που ορίζεται από την σχέση $u_i = \theta a_i - b_i$, όπου θ είναι η ευαισθησία του πελάτη στην ποιότητα ($\theta \sim U[0,1]$) και a_i είναι ο παράγοντας ποιότητας του προϊόντος i ($a_1 < a_2$). Όποιο προϊόν έχει την μεγαλύτερη χρησιμότητα τότε αυτή είναι η επιλογή του πελάτη. Αν οι τιμές πώλησης είναι ίσες τότε ο πελάτης προτιμά το προϊόν 2.

Στην συνέχεια θα δειχθεί πως επηρεάζει η αβέβαιη ζήτηση την συνάρτηση του κέρδους.

2.3.1 Διαχείριση χωρίς την δυνατότητα υποκατάστασης

Αρχικά, θεωρείται ότι δεν υπάρχει υποκατάσταση των προϊόντων. Με βάση τα παραπάνω, ορίζεται η πιθανότητα να αγοράσει ο πελάτης το προϊόν $i = 1, 2$, r_i, ως συνάρτηση της τιμής και του παράγοντα ποιότητας των προϊόντων.

Λήμμα 2.3.1. *Η πιθανότητα ένας πελάτης να αγοράσει το προϊόν 2 ή 1 ορίζεται ως εξής:*

i) Έστω $\frac{b_1}{a_1} \leq \frac{b_2}{a_2}$ *τότε* $r_2 = \max\{1 - \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}, 0\}$ *και* $r_1 = \min\{\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}, 1\} - \frac{b_1}{a_1}$.

ii) Διαφορετικά αν $\frac{b_1}{a_1} > \frac{b_2}{a_2}$ *τότε* $r_2 = 1 - \frac{b_2}{a_2}$ *και* $r_1 = 0$

Απόδειξη. (i) Από την σχέση $\frac{b_1}{a_1} \leq \frac{b_2}{a_2}$ προκύπτει ότι $u_1 > 0$ και $u_2 < 0$ ή $u_1 > u_2 > 0$ ή $u_2 > u_1 > 0$. Άρα

$$\begin{aligned} r_1 &= P(u_1 > 0) + P(u_1 > u_2) \\ &= P(\theta a_1 - b_1 > 0) + P(\theta a_1 - b_1 > \theta a_2 - b_2) \\ &= P(\theta > \frac{b_1}{a_1}) + P(\theta < \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}) \\ &= P(\frac{b_1}{a_1} < \theta < \min\{1, \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}\}) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} r_2 &= P(u_2 > u_1) \\ &= P(\theta a_2 - b_2 > \theta a_1 - b_1) \\ &= P(1 > \theta > \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}) \\ &= 1 - \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} = \max\{1 - \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}, 0\} \end{aligned}$$

(ii) Από την σχέση $\frac{b_1}{a_1} > \frac{b_2}{a_2}$ προκύπτει ότι $u_2 > 0$ και $u_1 < 0$ ή $u_2 > u_1 > 0$. Άρα $r_1 = 0$ και

$$\begin{aligned} r_2 &= P(u_2 > 0) + P(u_2 > u_1) \\ &= P(\theta a_2 - b_2 > 0) + P(\theta a_2 - b_2 > \theta a_1 - b_1) \\ &= P(1 > \theta > \frac{b_2}{a_2}) \end{aligned}$$

□

Ντετερμινιστική ζήτηση

Σε αυτή την ενότητα, η συνολική ζήτηση θεωρείται σταθερή και ίση με τον αριθμό των πελατών, d, συνεπώς η ζήτηση για το προϊόν 1 και 2 ορίζεται $r_1 d$ και $r_2 d$, αντίστοιχα. Άρα το κέρδος είναι:

$$E\pi(q_2^n, q_1^n, b_2^n, b_1^n) = b_2 \min\{r_2 d, q_2\} + b_1 \min\{r_1 d, (q_2 - r_2 d)^+\} - cq_2$$

Πρόταση 2.3.1. *Αν η συνολική ζήτηση είναι σταθερή τότε βέλτιστη πολιτική είναι η πώληση μόνο του προϊόντος 2 με κέρδος* $\dfrac{(a_2 - c)^2}{4a_2}$

Απόδειξη. Έστω ότι $\dfrac{b_1}{a_1} > \dfrac{b_2}{a_2}$. Τότε $r_1 = 0$ και το κέρδος είναι

$$E\pi(q_2^n, q_1^n, b_2^n, b_1^n) = b_2 \min\{r_2 d, q_2\} - cq_2$$

Αν $q_2 = 0$ τότε

$$E\pi(q_2^n, q_1^n, b_2^n, b_1^n) = 0$$

Αν $q_2 = r_2 d$ τότε

$$E\pi(q_2^n, q_1^n, b_2^n, b_1^n) = (b_2 - c) r_2 d = (1 - \frac{b_2}{a_2}) d$$

Από τις συνθήκες πρώτης και δεύτερης τάξης προκύπτει η βέλτιστη λύση:

$$b_2 = \frac{a_2 + c}{2}$$

Έστω ότι $\dfrac{b_1}{a_1} \leq \dfrac{b_2}{a_2}$
Αν $q_2 = 0$ τότε

$$E\pi(q_2^n, q_1^n, b_2^n, b_1^n) = 0$$

Αν $q_2 = r_2 d$ τότε

$$E\pi(q_2^n, q_1^n, b_2^n, b_1^n) = (b_2 - c) r_2 d = (1 - \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}) d$$

το οποίο δεν είναι μεγαλύτερο από το κέρδος της προηγούμενης υπόθεσης, επειδή $\dfrac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} \geq \dfrac{b_2}{a_2}$.
Αν $q_2 = (r_2 + r_1) d$ τότε

$$E\pi(q_2^n, q_1^n, b_2^n, b_1^n) = b_2(1 - \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}) d + b_1(\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} - \frac{b_1}{a_1}) d - c(1 - \frac{b_1}{a_1}) d$$

Το πρόβλημα είναι

$$E\pi(q_2^n, q_1^n, b_2^n, b_1^n) = b_2(1 - \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1})d + b_1(\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} - \frac{b_1}{a_1})d - c(1 - \frac{b_1}{a_1})d$$

$$s.t \frac{b_1}{a_1} \leq \frac{b_2}{a_2}$$

Από τις συνθήκες πρώτης και δεύτερης τάξης προκύπτει:

$$b_1 = \frac{c + a_1}{2}, b_2 = \frac{c + a_2}{2}$$

Ο περιορισμός δεν ισχύει άρα η λύση δεν είναι βέλτιστη. Ο περιορισμός γίνεται δεσμευτικός και το πρόβλημα γίνεται

$$E\pi(q_2^n, q_1^n, b_2^n, b_1^n) = (b_2 - c)(1 - \frac{b_2}{a_2})d$$

με $r_1 = 0$. Το πρόβλημα μεγιστοποιείται στο $b_2 = \dfrac{c + a_2}{2}$. □

Ζήτηση $r_i d$ με $d = \{0, M\}$

Σε αυτή την ενότητα, η ζήτηση είναι μια δίτιμη μεταβλητή με τιμές 0 και M ($M > 0$), με την πιθανότητα να πάρει την τιμή M να είναι ρ ($0 < \rho < 1$).

Αρχικά, θα βρεθούν οι στάσιμες πιθανότητες στο μοντέλο και θα προσδιοριστεί η συνάρτηση κέρδους για αυτή την ζήτηση.

Λήμμα 2.3.2. *Η τιμή q_1 μπορεί να πάρει τις τιμές: q_2 και $(q_2 - r_2M)^+)$. Επιπλέον ισχύει $P(q_1 = q_2) = 1 - \rho$ και $P(q_1 = (q_2 - r_2M)^+)) = \rho$.*

Απόδειξη. Η ζήτηση του προϊόντος 2 παίρνει δύο τιμές $r_2 0$ με πιθανότητα $1 - \rho$ και $r_2 M$ με πιθανότητα ρ. Από ορισμό του q_1 προκύπτουν οι τιμές του. Για να υπάρχει ισότητα τις πιθανότητες πρέπει:

$$(1 - \rho)P(q_1 = q_2) = \rho P(q_1 = (q_2 - r_2M)^+))$$

$$P(q_1 = q_2) + P(q_1 = (q_2 - r_2M)^+)) = 1$$

Λύνοντας τις εξισώσεις προκύπτει το αποτέλεσμα. □

Λήμμα 2.3.3. *Το μακροπρόθεσμο αναμενόμενο κέρδος για την συγκεκριμένη ζήτηση γίνεται:*

$$\Pi(q_2, q_1, b_2, b_1) = b_2\rho \min\{q_2, r_2M\} + b_1\rho(1 - \rho) \min\{q_1, r_1M\}$$

$$+ b_1\rho^2 \min\{(q_2 - r_2M)^+, r_1M\} - cq_2$$

Απόδειξη. Από Λήμμα 2.3.2 προκύπτει

$$\Pi(q_2, q_1, b_2, b_1) = (1-\rho)E\pi(q_2, q_2, b_2, b_1)$$
$$+\rho E\pi(q_2, (q_2 - r_2M)^+, b_2, b_1)$$

όπου

$$E\pi(q_2, q_2, b_2, b_1) = b_2\rho \min\{q_2, r_2M\} + b_1\rho \min\{q_2, r_1M\} - cq_2$$

και

$$E\pi(q_2, (q_2 - r_2M)^+, b_2, b_1) = b_2\rho \min\{q_2, r_2M\} +$$
$$b_1(1-\rho)\min\{(q_2 - r_2M)^+, r_1M\} - cq_2$$

□

Έπειτα, θα δοθούν ορισμένες ιδιότητες της βέλτιστης λύσης για την συνάρτηση κέρδους.

Λήμμα 2.3.4. *Για οποιεσδήποτε τιμές των b_2 και b_1, υπάρχουν οι εξής δυνατότητες για το q_2: (1) $q_2 = 0$, (2) $q_2 = r_2M$, (3) $q_2 = r_1M$, (4) $q_2 = (r_2 + r_1)M$ με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση κέρδους να είναι βέλτιστη.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2.3.3 η συνάρτηση κέρδους είναι γραμμική κατά τμήματα στο q_2. Επομένως, ισχύει $q_2 \not> (r_2 + r_1)M$ επειδή αν ήταν μεγαλύτερο το κόστος θα αυξάνονταν χωρίς να αυξάνονται και τα έσοδα χωρίς να βελτιστοποιείται η συνάρτηση κέρδους. □

Στο επόμενο λήμμα, εφαρμόζεται η πολιτική της πώλησης μόνο του προϊόντος 2 και προσδιορίζεται η βέλτιστη τιμή πώλησης του και το q_2.

Λήμμα 2.3.5. *Εστω $\dfrac{b_1}{a_1} \geq \dfrac{b_2}{a_2}$. Αν $a_2\rho > c$ τότε η συνάρτηση κέρδους μεγιστοποιείται όταν $q_2 = \dfrac{a_2\rho - c}{2a_2\rho}$ και $b_2 = \dfrac{c + a_2\rho}{2\rho}$. Αν $a_2\rho \leq c$ τότε η συνάρτηση κέρδους μεγιστοποιείται όταν $q_2 = 0$.*

Απόδειξη. Από Λήμμα 2.3.1, αν $\dfrac{b_1}{a_1} > \dfrac{b_2}{a_2}$ τότε $r_2 = 1 - \dfrac{b_2}{a_2}$ και $r_1 = 0$. Επομένως, η συνάρτηση κέρδους είναι:

$$\Pi(q_2, q_1, b_2, b_1) = b_2\rho \min(q_2, (1 - \frac{b_2}{a_2})M) - cq_2$$

η οποία είναι γραμμική ως προς το q_2, το οποίο όταν είναι μεγαλύτερο από το $(1-\frac{b_2}{a_2})M$ τότε τα έσοδα δεν αυξάνονται, ενώ το κόστος αυξάνεται. Άρα η συνάρτηση κέρδους θα μεγιστοποιείται είτε στο $q_2 = 0$ είτε $q_2 = (1-\frac{b_2}{a_2})M$. Αν $a_2\rho \leq c$ και ισχύει ότι $b_2 \leq a_2$ τότε $b_2\rho - c < 0$ άρα δεν υπάρχει θετικό κέρδος άρα $q_2 = 0$. Αν $a_2\rho > c$ και $q_2 = (1-\frac{b_2}{a_2})M$ τότε $\Pi(q_2, q_1, b_2, b_1) = (b_2\rho - c)(1-\frac{b_2}{a_2})M$, η οποία είναι κοίλη συνάρτηση. Από τις συνθήκες πρώτης και δεύτερης τάξης προκύπτει $b_2 = \frac{c + a_2\rho}{2\rho}$. □

Στην συνέχεια, θα εξεταστεί η πώληση και των δύο προϊόντων και θα δειχθεί ότι όταν υπάρχει μεγάλη ποσότητα του q_2 τότε βέλτιστη λύση είναι η πώληση μόνο του προϊόντος 1.

Λήμμα 2.3.6. *Αν $q_2 = (r_2 + r_1)M$ τότε η συνάρτηση κέρδους μεγιστοποιείται όταν $r_1 = 0$.*

Απόδειξη. Όταν $\frac{b_1}{a_1} \geq \frac{b_2}{a_2}$ τότε $q_2 = (1-\frac{b_1}{a_1})M$. Η συνάρτηση κόστους είναι $\Pi(q_2, q_1, b_2, b_1) = b_2\rho(1-\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1})M + b_1\rho(\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1} - \frac{b_1}{a_1})M - c(1-\frac{b_1}{a_1})M$. Το πρόβλημα είναι

$$\max \Pi(q_2, q_1, b_2, b_1) = b_2\rho(1-\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1})M +$$

$$b_1\rho(\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1} - \frac{b_1}{a_1})M - c(1-\frac{b_1}{a_1})M$$

$$s.t \frac{b_1}{a_1} \leq \frac{b_2}{a_2}$$

Όμοια με την απόδειξη της Πρότασης 2.3.1 ο περιορισμός γίνεται δεσμευτικός: $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$ και συνεπάγεται ότι $r_1 = 0$. Άρα το πρόβλημα έχει βέλτιστη λύση. □

Στο επόμενο λήμμα, παρουσιάζονται οι ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιεί η βέλτιστη λύση, q_2, αν εφαρμοστεί η πολιτική πώλησης των προϊόντων 1 και 2.

Λήμμα 2.3.7. *Αν $r_1 > 0$ και $q_2 > 0$ τότε: είτε $q_2 = r_2M = r_1M$, με άλλα λόγια ο πωλητής ανταποκρίνεται στην θετική ζήτηση τόσο για τα προϊόντα 2 όσο και για* *τα προϊόντα 1 είτε $q_2 = r_2 M > r_1 M$, με άλλα λόγια ο πωλητής ανταποκρίνεται στην θετική ζήτηση μόνο για τα προϊόντα 2, με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση κέρδους είναι βέλτιστη.*

Απόδειξη. Από Λήμμα 2.3.6 συνεπάγεται ότι $q_2 \neq (r_2 + r_1)M$. Από Λήμμα 2.3.1 για να ισχύει $r_1 > 0$ πρέπει $\frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_2}$. Άρα $r_2 = 1 - \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$ και $r_1 = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} - \frac{b_1}{a_1}$. Το λήμμα αποδεικνύεται με αντίφαση. Από Λήμμα 2.3.4 διαπιστώνεται ότι στις παρακάτω περιπτώσεις η συνάρτηση κέρδους δεν είναι βέλτιστη:

1. $q_2 = r_2 M$ και $r_1 > r_2$. Η συνάρτηση κέρδους γίνεται:

$$\Pi(q_2, q_1, b_2, b_1) = b_2 \rho \min\{q_2, (1 - \frac{b_2 - b_1}{a_2})M)\}$$

$$+ b_1 \rho (1 - \rho) \min\{q_2, (\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} - \frac{b_1}{a_1})M\} - cq_0$$

   Αν αυξηθούν οι τιμές των b_2 και b_1 κατά ε, όπου ε αρκετά μικρό, διατηρώντας σταθερό το q_2 τότε το r_2 δεν αλλάζει, το r_1 μειώνεται και ακόμα ισχύει $r_1 > r_2$. Άρα η συνάρτηση κέρδους θα αυξηθεί

2. $q_2 = r_1 M$ και $r_2 > r_1$. Η συνάρτηση κέρδους είναι ίδια με πριν. Αν το b_2 αυξηθεί κατά ε και το b_1 κατά $(\frac{a_1}{a_2})\varepsilon$, διατηρώντας σταθερό το q_2 τότε το r_2 αυξάνεται, το r_1 δεν αλλάζει και πλέον ισχύει $r_1 > r_2$. Άρα η συνάρτηση κέρδους θα αυξηθεί

3. $q_2 = r_1 M$ και $r_1 > r_2$. Έστω $r_2 = 0$. Τότε η συνάρτηση κέρδους είναι

$$\Pi(q_2, q_1, b_2, b_1) = (b_1 \rho - c)(1 - \frac{b_1}{a_1})$$

   Το βέλτιστο κέρδος είναι $\frac{(a_1 \rho - c)^2}{4 a_1 \rho}$ αν ισχύει $a_1 \rho > c$. Το κέρδος αυτό μπορεί να αυξηθεί σε $\frac{(a_2 \rho - c)^2}{4 a_2 \rho}$ πουλώντας μόνο προϊόντα 2. Συνεπώς $r_2 > 0$.

□

Με βάση τα παραπάνω ορίζονται τέσσερις πολιτικές διάθεσης του προϊόντος:

1. Z (Zero): μηδενικές πωλήσεις και μηδενικό κέρδος

2. N (New): πώληση μόνο προϊόντος 1, ο πωλητής θέτει μία υψηλή τιμή για το προϊόν 2 έτσι ώστε κανένας πελάτης να μην το αγοράσει

3. MB (Match Both): πώληση και των δύο προϊόντων και ο πωλητής ανταποκρίνεται στην θετική ζήτηση και των δύο προϊόντων, θέτοντας $q_2 = r_2 M = r_1 M > 0$

4. MN (Match New): πώληση και των δύο προϊόντων και ο πωλητής ανταποκρίνεται στην θετική ζήτηση μόνο των προϊόντων 2, θέτοντας $q_2 = r_2 M > r_1 M > 0$

Συνεπώς, με βάση τα παραπάνω προκύπτει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.3.2. *Όταν η ζήτηση είναι στοχαστική με δύο δυνατές τιμές τότε μία από τις παραπάνω πολιτικές είναι βέλτιστη.*

2.3.2 Διαχείριση με την δυνατότητα υποκατάστασης

Στην συνέχεια, θα θεωρηθεί ότι υπάρχει υποκατάσταση των προϊόντων. Η ζήτηση ακολουθεί μία διακριτή κατανομή με πιθανότητα δ_j, η οποία θα είναι ίση με j, όπου j είναι ο συνολικός αριθμός των πελατών. Η επιλογή των προϊόντων από τους πελάτες γίνεται, όπως και παραπάνω, με βάση την χρησιμότητα. Ο πελάτης επιλέγει το προϊόν με την μεγαλύτερη χρησιμότητα, αν υπάρχει σε απόθεμα. Αν δεν είναι διαθέσιμο, τότε έχει την δυνατότητα να αγοράσει το άλλο προϊόν, με την προϋπόθεση ότι δεν έχει μη αρνητική χρησιμότητα. Έστω ότι I_2 και I_1 είναι τα επίπεδα αποθεμάτων του προϊόντος 2 και 1, αντίστοιχα και έστω ότι $r_i^{'}$ είναι η πιθανότητα ο πελάτης να αγοράσει το προϊόν i είτε ως πρώτη είτε ως δεύτερη επιλογή τότε προκύπτει ότι:

- r_i αν $I_i > 0, I_j > 0$ με $i \neq j$
- $r_i^{'}$ αν $I_i > 0, I_j = 0$ με $i \neq j$
- 0 αν $I_i = 0$

και ότι $r_i^{'} = 1 - \dfrac{b_i}{a_i}$ με $i = 1, 2$, αφού το προϊόν i δεν εξαρτάται από την τιμή και τον παράγοντα ποιότητας του άλλου τύπου προϊόντος, γιατί δεν υπάρχει απόθεμα από αυτό.

Στην συνέχεια, γίνεται ο προσδιορισμός της $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2|q_2, q_1)$, με τον υπολογισμό της $P(S_1 = s_1, S_2 = s_2|j, q_2, q_1)$ επαναληπτικά ως εξής:

1. Αν $x_2 + x_1 > j$ ή $x_2 > q_2$ ή $x_1 > q_1$ ή $x_2 < 0$ ή $x_1 < 0$ τότε $P(X_1 = 0, X_2 = 0|0, q_2, q_1) = 1$ και $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2|j, q_2, q_1) = 0$.

2. Αν $j > 0, x_2 + x_1 \leq j, x_2 \leq q_2$ και $x_1 \leq q_1$ τότε: $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2|j, q_2, q_1) =$

$$\begin{cases} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2|j-1, q_2, q_1), & \text{αν } q_2 = q_1 = 0 \\ r_2^{'}P(X_1 = x_1, X_2 = x_2 - 1|j-1, q_2 - 1, q_1) + & \\ (1 - r_2^{'})P(X_1 = x_1, X_2 = x_2|j-1, q_2, q_1), & \text{αν } q_2 > 0, q_1 = 0 \\ r_1^{'}P(X_1 = x_1 - 1, X_2 = x_2|j-1, q_2, q_1 - 1) + & \\ (1 - r_1^{'})P(X_1 = x_1, X_2 = x_2|j-1, q_2, q_1), & \text{αν } q_2 = 0, q_1 > 0 \\ r_2^{'}P(X_1 = x_1, X_2 = x_2 - 1|j-1, q_2 - 1, q_1) + & \\ r_1^{'}P(X_1 = x_1 - 1, X_2 = x_2|j-1, q_2, q_1 - 1) + & \\ (1 - r_2^{'} - r_1^{'})P(X_1 = x_1, X_2 = x_2|j-1, q_2, q_1), & \text{αν } q_2 = q_1 > 0 \end{cases}$$

Άρα $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2|q_2, q_1) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2|j, q_2, q_1)$

Στην συνέχεια θα λυθεί το πρόβλημα (2.1) θεωρώντας ως μεταβλητή κατάστασης το q_1. Οι μεταβλητές απόφασης είναι οι q_2, b_2, b_1. Η κατάσταση της επόμενης περιόδου είναι $q_2 - X_2$. Υποτίθεται ότι $q_2 \leq Q$, όπου Q είναι μια αρκετά μεγάλη ποσότητα παραγγελίας. Συνεπάγεται ότι $q_1 \leq Q$. Η πιθανότητα μετάβασης από μια κατάσταση στην κατάσταση 0 είναι μη μηδενική.

Επομένως, το πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής:

$$W(q_1) = \max_{q_2, b_2, b_1 \epsilon A(q_1)} \{E\pi(q_2, q_1, b_2, b_1) -$$

$$\Pi(q_2, b_2, b_1)^P + \sum_{x_2=0}^{q_2} \sum_{x_1=0}^{q_1} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2|q_2, q_1) W(q_2 - x_2)\}, 0 \leq q_1 \leq Q \tag{2.2}$$

$$W(0) = 0 \tag{2.3}$$

όπου P είναι μία πολιτική διαχείρισης και τιμολόγησης αποθεμάτων. Η διαδικασία ξεκινάει δίνοντας αυθαίρετες τιμές για τα $W(q_1), \Pi(q_2, b_2, b_1)^P$. Επαναλαμβάνεται η διαδικασία, ενημερώνοντας τις τιμές με αυτές που θα προκύψουν από τις εξισώσεις 2.2 και 2.3 μέχρι να συγκλίνουν όλες.

2.4 Δυνατές πολιτικές διαχείρισης και τιμολόγησης αποθεμάτων

Στην συνέχεια θα προταθούν οκτώ δυνατές πολιτικές διαχείρισης και τιμολόγησης αποθεμάτων. Η πολιτική θα συμβολίζεται ως (xyz) όπου $(x, y, z\epsilon\{C, D\})$, όπου x, y, z θα δηλώνονται οι q_2, b_2, b_1, αντίστοιχα. Με C δηλώνονται οι τιμές που είναι σταθερές και με D οι τιμές που είναι δυναμικές, με άλλα λόγια είναι συναρτήσεις του q_1. Στην συνέχεια θα ελεγχθούν πως οι τιμές πώλησης επηρεάζουν τις πιθανότητες $r_2^{'}, r_1^{'}$, αφού πρώτα αποδειχθεί ότι πάντα υπάρχει βέλτιστη πολιτική, που προκύπτει από τον περιορισμό των τιμών πώλησης από τους παράγοντες ποιότητας.

Λήμμα 2.4.1. *Υπάρχει πάντα μία βέλτιστη πολιτική (xyz): $(x, y, z\epsilon\{C, D\})$ s.t $b_2(q_1) \le a_2$ και $b_1(q_1) \le a_1$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $b_2(q_1) > a_2$ για κάποια q_1. Τότε η ζήτηση για προϊόν 2 ισούται με μηδέν. Επομένως η μείωση της τιμής πώλησης σε a_2 δεν μεταβάλλει την ζήτηση του προϊόν 2 αλλά και δεν επηρεάζει την ζήτηση για το προϊόν 1. Όμοια και για την υπόθεση $b_1(q_1) > a_1$. □

Συνέπεια του Λήμματος 2.4.1 είναι ότι οι βέλτιστες τιμές για προϊόντα 2 και 1 βρίσκονται στα διαστήματα $[0, a_2]$ και $[0, a_1]$, αντίστοιχα. Εστιάζονται οι ακόλουθες πολιτικές:

1. Πολιτική NP: Το προϊόν αποσύρεται στο τέλος κάθε περιόδου, ανεξάρτητα από την διάρκεια ζωής του και χωρίς να υπάρχει κόστος απόσυρσης του προϊόντος. Υπάρχουν δύο λόγοι για τους οποίους αυτή η πολιτική είναι σημαντική: είναι πολύ απλή στην εφαρμογή της και λόγω του δισταγμού κάποιων πωλητών να πουλήσουν το προϊόν 1.

2. Πολιτική CCC: Οι τιμές πώλησης και η ποσότητα παραγγελίας είναι σταθερές, δεν εξαρτώνται από το απόθεμα του προϊόντος 1 $(q_2(q_1) = q, b_2(q_1) = b_2, b_1(q_1) = b_1)$. Η πολιτική αυτή είναι η πιο απλή από τις πολιτικές που εξετάζουν την πώληση του προϊόντος 1.

3. Πολιτική DDD: Οι τιμές πώλησης και η ποσότητα παραγγελίας είναι συναρτήσεις του αποθέματος του προϊόντος 1.

Στην συνέχεια συγκρίνονται οι παραπάνω πολιτικές ως προς το συνολικό κέρδος.

Πρόταση 2.4.1. *Ισχύει ότι* $\Pi^{NP} \leq \Pi^{CCC} \leq \Pi^{xyz} \leq \Pi^{DDD} \forall x, y, z \epsilon \{C, D\}$

Απόδειξη. Προφανώς ισχύει $\Pi^{CCC} \leq \Pi^{xyz} \leq \Pi^{DDD}$ αφού κάθε μεταβλητή απόφασης που είναι σταθερή είναι ειδική περίπτωση όταν είναι συνάρτηση του q_1. Επίσης ισχύει $\Pi^{NP} \leq \Pi^{CCC}$ αφού οποιαδήποτε πολιτική NP είναι μια ειδική περίπτωση μιας πολιτικής CCC. □

Στην συνέχεια ορίζονται $\zeta = \frac{\Pi^{CCC} - \Pi^{NP}}{\Pi^{NP}} 100\%$ και $\eta = \frac{\Pi^{DDD} - \Pi^{CCC}}{\Pi^{CCC}} 100\%$ για την σύγκριση των πολιτικών CCC, NP και DDD, CCC, αντίστοιχα και μελετάται μέσω αριθμητικού παραδείγματος, το οποίο βρίσκεται στο Sainathan (2013), ποια πολιτική είναι καλύτερη έχοντας διαφορετικές τιμές τις παραμέτρους.

Παράδειγμα 2.4.1. *Έστω ότι η πιθανότητα* δ_j *ακολουθεί αρνητική διωνυμική κατανομή,* $\delta_j = \frac{(j+\xi-1)!}{j!(\xi-1)!}(1-p)^{\xi} p^j$ *με μέσο όρο* $\mu = \frac{\xi p}{(1-p)}$.
Έστω ότι $\mu = 5, \xi = \{1, 5, 10, 25\}, c = \{2, 3, 5\}, a_1 = \{3, 6, 9\}, a_2 = \{5, 10, 15\}$.

Στους Πίνακες 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 δίνονται το μέσο κέρδος υπό την πολιτική NP και οι τιμές των ζ, η για διαφορετικές τιμές στις παραμέτρους. Το σύμβολο * δείχνει ότι οι τιμές είναι θετικές και < 0.001. Παρατηρείται ότι η πώληση του παλιού προϊόντος είναι πάντα κερδοφόρα. Όταν το c αυξάνεται ή μειώνεται το a_2 τότε το ζ αυξάνεται και όταν αυξάνεται το ξ τότε το ζ μειώνεται. Το η δεν είναι μονότονη συνάρτηση ως προς το c και το a_2. Όταν το c είναι χαμηλό και ισχύει $a_2 > a_1$ τότε το η είναι πολύ χαμηλό. Τέλος, παρατηρείται ότι το ζ είναι συνήθως υψηλότερο από το η.

c	a_1	a_2	Π^{NP}	ζ	η
2	3	5	0.10	330.6	3.5
2	3	10	2.77	15.8	*
2	3	15	6.70	6.7	*
2	6	10	2.77	32.5	1.5
2	6	15	6.70	13.5	0.2
2	9	10	2.77	57.9	2.3
2	9	15	6.70	20.4	0.9
3	6	10	1.20	55.0	6.8
3	6	15	4.16	21.2	0.2
3	9	10	1.20	99.9	11.2
3	9	15	4.16	32.2	1.5
5	6	10	0	0	∞
5	6	15	1.30	49.5	0.1
5	9	10	0	∞	48.9
5	9	15	1.30	76.2	0.3

Πίνακας 2.1: Κέρδος του μοντέλου και τιμές των ζ, η για $\xi = 1$

c	a_1	a_2	Π^{NP}	ζ	η
2	3	5	0.56	49.3	0.7
2	3	10	4.23	8.3	0.9
2	3	15	9.15	3.5	*
2	6	10	4.23	17.1	2.7
2	6	15	9.15	7.0	0.1
2	9	10	4.23	33.0	2.9
2	9	15	9.15	10.6	0.7
3	6	10	2.23	32.5	5.7
3	6	15	6.34	11.2	1.5
3	9	10	2.23	62.9	6.4
3	9	15	6.34	17.1	2.7
5	6	10	0.11	481	18.5
5	6	15	2.67	19.8	6.5
5	9	10	0.11	945	*
5	9	15	2.67	31	11.6

Πίνακας 2.2: Κέρδος του μοντέλου και τιμές των ζ, η για $\xi = 5$

c	a_1	a_2	Π^{NP}	ζ	η
2	3	5	0.64	41.4	0.7
2	3	10	4.49	7.4	1.1
2	3	15	9.59	3.0	*
2	6	10	4.49	15.2	2.9
2	6	15	9.59	6.1	0.1
2	9	10	4.49	29.8	3.1
2	9	15	9.59	9.2	0.6
3	6	10	2.49	27.4	4.6
3	6	15	6.74	9.9	1.7
3	9	10	2.49	53.6	6.0
3	9	15	6.74	15.2	2.9
5	6	10	0.27	195	11.7
5	6	15	2.90	17.4	8.9
5	9	10	0.27	360	0.1
5	9	15	2.90	13.7	3.05

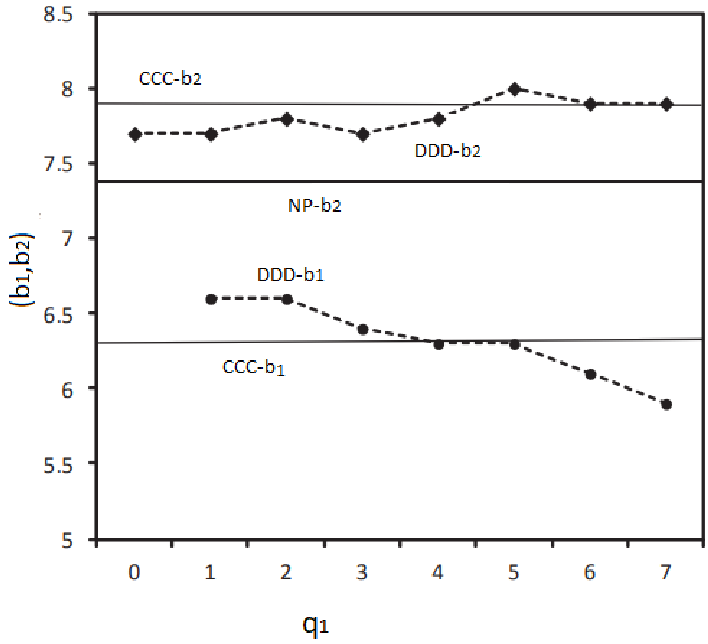
Πίνακας 2.3: Κέρδος του μοντέλου και τιμές των ζ, η για $\xi = 10$

c	a_1	a_2	Π^{NP}	ζ	η
2	3	5	0.69	34.1	0.9
2	3	10	4.66	6.8	1.2
2	3	15	9.88	2.7	*
2	6	10	4.66	14.0	3.0
2	6	15	9.88	5.5	*
2	9	10	4.66	27.8	3.3
2	9	15	9.88	8.3	0.7
3	6	10	2.66	24.6	4.1
3	6	15	7.00	9.2	1.8
3	9	10	2.66	48.6	5.7
3	9	15	7.00	14.1	3.0
5	6	10	0.37	138	8.6
5	6	15	3.05	19.1	7.5
5	9	10	0.37	279	0.1
5	9	15	3.05	30.4	10.3

Πίνακας 2.4: Κέρδος του μοντέλου και τιμές των ζ, η για $\xi = 15$

2.5 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζεται ένα μοντέλο διαχείρισης αποθεμάτων για προϊόντα με χρόνο ζωής δύο περιόδων, του οποίου η τιμή πώλησης εξαρτάται από την ηλικία και από την ποιότητα του. Λαμβάνεται υπόψη η δυνατότητα υποκατάστασης ή μη των προϊόντων. Σε κάθε περίοδο, προσδιορίζονται οι τιμές πώλησης των προϊόντων και η σταθερή ποσότητα παραγγελίας για την αναπλήρωση του αποθέματος. Αποδεικνύεται, στην διαχείριση αποθεμάτων χωρίς υποκατάσταση με την ζήτηση να είναι ντετερμινιστική, ότι είναι βέλτιστο να αποφεύγεται η πώληση του προϊόντος με διάρκεια ζωής μιας περιόδου, κάτι που δεν συμβαίνει όταν η ζήτηση είναι στοχαστική και μπορεί να πάρει δύο τιμές, αφού η πώληση αυτού του προϊόντος μπορεί να αυξήσει το κέρδος. Στην διαχείριση αποθεμάτων με δυνατότητα υποκατάστασης εξετάζονται και συγκρίνονται οι πολιτικές ανάλογα με τον καθορισμό των μεταβλητών απόφασης και αποδεικνύεται ότι οι πολιτικές, όπου οι μεταβλητές απόφασης είναι δυναμικές, είναι καλύτερες. Από πρακτικής άποψης, φαίνεται ότι, επιλέγοντας την πολιτική με τις μεταβλητές απόφασης να είναι δυναμικές, η τιμή πώλησης του προϊόντος με διάρκεια ζωής δύο περιόδων δεν είναι αύξουσα ή φθίνουσα ως προς το απόθεμα του προϊόντος με διάρκεια ζωής μιας περιόδου, με αποτέλεσμα την μείωση των τιμών και στα δύο προϊόντα έτσι ώστε το απόθεμα να εκκαθαριστεί ή την αύξηση της τιμής του προϊόντος με διάρκεια ζωής δύο περιόδων προκαλώντας την αύξηση της ζήτηση του προϊόντος με διάρκεια ζωής μιας περιόδου. (Σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1: Μεταβολές τιμών ως προς το απόθεμα του προϊόντος 1 με $m = 25$, $c = 5$, $a_1 = 9$, $a_2 = 10$ και $\xi = 10$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ ΜΕ ΧΡΟΝΟ ΖΩΗΣ l ΠΕΡΙΟΔΩΝ: ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΑΝΑΠΛΗΡΩΣΗΣ, ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΤΡΟΠΟΥ ΔΙΑΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΑΠΟΣΥΡΣΗΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΣ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ένα σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων για προϊόντα με χρόνο ζωής l περιόδων ($l = 1, 2, ...$). Η ζήτηση είναι στοχαστική. Σε περίπτωση που δεν υπάρχει απόθεμα για την ικανοποίηση της ζήτησης αυτή χάνεται. Προσδιορίζεται, πέρα από την ποσότητα αναπλήρωσης του αποθέματος, η πολιτική διάθεσης (LIFO, FIFO) καθώς και η ποσότητα που θα αποσυρθεί από το απόθεμα, πέρα από αυτό που έχει φτάσει στην ημερομηνία λήξης. Το μοντέλο αυτό μελετήθηκε από τον Haijema (2014).

3.1 Υποθέσεις και συμβολισμός

Στην ενότητα αυτή, δίνονται οι υποθέσεις και ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθούν, επιπλέον, στην ανάπτυξη του μοντέλου αυτού του κεφαλαίου.

Υποθέσεις

1. Ο χρόνος ανοχής είναι μη μηδενικός, $0 \leq L \leq 1$.

2. Κάθε περίοδος n αποτελείται από δύο εποχές. Η εποχή 1 αντιστοιχεί στο διάστημα $[n, n + L)$ και η εποχή 2 αντιστοιχεί στο διάστημα $[n + L, n + 1)$.
3. Η ζήτηση είναι στοχαστική, διακριτή και διαφέρει ανάλογα την εποχή
4. Αν δεν υπάρχει διαθέσιμο απόθεμα για την ικανοποίηση της ζήτησης τότε αυτή χάνεται.
5. Θεωρούνται δύο τρόποι διάθεσης του αποθέματος: διάθεση πρώτα των προϊόντων με τη μεγαλύτερη διάρκεια ζωής (πολιτική LIFO) και διάθεση πρώτα των προϊόντων με τη λιγότερη διάρκεια ζωής (πολιτική FIFO).
6. Κατά αντιστοιχία με τα προηγούμενα κεφάλαια, το προϊόν που βρίσκεται στην περίοδο ζωής i στο εξής θα ορίζεται ως προϊόν i. Στο τέλος της τελευταίας περιόδου ζωής το προϊόν 1 θεωρείται απαξιωμένο, ενώ στο τέλος των $2, ..., l$ περιόδων ζωής τα προϊόντα χάνουν μία περίοδο από την διάρκεια ζωής τους.

Συμβολισμός

D_e	ζήτηση για την εποχή e, $e = 1, 2$
p	κόστος έλλειψης ανά μονάδα προϊόντος
is_i	κόστος διάθεσης ανά μονάδα προϊόντος i, $i = 1, ..., l$
q	ποσότητα παραγγελίας (μεταβλητή απόφασης)

3.2 Προσδιορισμός της συνάρτησης κόστους

Σε αυτή την ενότητα, θα μοντελοποιηθεί η συνάρτηση κόστους του συστήματος διαχείρισης αποθεμάτων. Έτσι, αρχικά, θα οριστούν οι καταστάσεις, οι αποφάσεις και οι μεταβάσεις των καταστάσεων.

3.2.1 Καταστάσεις

Οι φάσεις του συστήματος αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές που πρέπει να ληφθεί μία απόφαση. Η πρώτη απόφαση, λαμβάνεται στην αρχή της εποχής 1 είναι η ποσότητα παραγγελίας, q, από το προϊόν l, για την αναπλήρωση του αποθέματος. Η δεύτερη απόφαση, λαμβάνεται στο τέλος της εποχής 2 είναι η ποσότητα που θα αποσυρθεί. Και οι δύο αποφάσεις εξαρτώνται από την κατάσταση του αποθέματος. Η κατάσταση του αποθέματος στην αρχή της εποχής 1 θα συμβολίζεται $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_l)$, όπου x_i ο αριθμός προϊόντων i στην αρχή της εποχής 1. Ισχύει ότι

$x_l = 0$. Η κατάσταση του αποθέματος στο τέλος εποχής 2 θα συμβολίζεται $\boldsymbol{x}'' = (x_1'', ..., x_l'')$, όπου x_i'' ο αριθμός προϊόντων i στο τέλος της εποχής 2. Σημειώνεται ότι το x_1'' πρέπει να αποσυρθεί όταν τελειώσει η εποχή 2.

Άρα οι καταστάσεις του συστήματος θα ορίζονται ως: $(n, 1, \boldsymbol{x})$ η κατάσταση στην αρχή της εποχής 1 την περίοδο n και $(n, 2, \boldsymbol{x}'')$ η κατάσταση στο τέλος της εποχής 2 την περίοδο n. Ο χώρος των καταστάσεων είναι πεπερασμένος, καθώς όταν δεν υπάρχει διαθέσιμο απόθεμα η ζήτηση χάνεται. Έτσι μπορεί να θεωρηθεί ότι η ποσότητα παραγγελίας είναι πεπερασμένη αν η ζήτηση είναι πεπερασμένη.

3.2.2 Αποφάσεις

Δοθείσης της κατάστασης $(n, 1, \boldsymbol{x})$ στην φάση 1, με άλλα λόγια στην αρχή της $e = 1$, πρέπει να οριστεί η ποσότητα παραγγελίας για την αναπλήρωση του αποθέματος μόνο από το προϊόν l. Αν $\overline{D_1}, \overline{D_2}$ είναι η μέγιστη ζήτηση για τις εποχές 1 και 2, αντίστοιχα τότε ισχύει $q \leq \overline{D_1} + \overline{D_2}$. Δεν λαμβάνεται υπόψη το σταθερό κόστος παραγγελίας (σε περίπτωση σταθερού κόστους το ανώτερο όριο στο χώρο απόφασης είναι η μέγιστη ζήτηση για l περιόδους)

Στην φάση 2, με άλλα λόγια στο τέλος της $e = 2$, η ποσότητα προϊόντων προς απόσυρσης, a, εξαρτάται από την κατάσταση $(n, 2, \boldsymbol{x}'')$. Η ποσότητα προϊόντος i προς απόσυρση συμβολίζεται με a_i και θεωρείται ότι πρώτα θα αποσυρθεί το προϊόν που έχει φτάσει στο τέλος της ζωής του. Άρα ισχύουν $a_1 = x_1''$ και $a \geq x_1''$. Η υπόλοιπη ποσότητα που θα αποσυρθεί για $i > 1$ είναι

$$a_i = \min\{x_i'', a - \sum_{j=1}^{i-1} a_j\}$$

3.2.3 Μεταβάσεις μεταξύ καταστάσεων και προσδιορισμός των αντίστοιχων πιθανοτήτων

Μετάβαση από την $(n, 1, \boldsymbol{x})$ *στην* $(n, 2, \boldsymbol{x}'')$

Η σειρά πραγματοποίησης των γεγονότων είναι: η ικανοποίηση της ζήτησης της εποχής 1, η παραλαβή της ποσότητας παραγγελίας και η ικανοποίηση της ζήτησης της εποχής 2.

Η ζήτηση της εποχής 1 είτε ικανοποιείται βάση της πολιτική FIFO ή LIFO, με ποσότητα διάθεσης των προϊόντων δ_i, είτε χάνεται. Ισχύει ότι $\delta_l = 0$, αφού ισχύει ότι $x_l = 0$.

Σε περίπτωση πολιτικής FIFO, προκύπτει

$$\delta_1 = \min\{x_1, D_1\}$$

και $2 \leq i \leq l-1$

$$\delta_i = \min\{x_i, D_1 - \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j\}$$

Σε περίπτωση πολιτικής LIFO, προκύπτει

$$\delta_i = \min\{x_i, D_1 - \sum_{j=i+1}^{l} \delta_j\}$$

για $1 \leq i \leq l-1$.
Η ζήτηση που χάνεται είναι

$$D_1 - \sum_i \delta_i$$

Η ζήτηση της εποχής 2 είτε ικανοποιείται βάση της πολιτική FIFO ή LIFO, με ποσότητα διάθεσης των προϊόντων $\delta_i^{'}$, είτε χάνεται. Σε περίπτωση πολιτικής LIFO, προκύπτει

$$\delta_l^{'} = \min\{q, D_2\}$$

και για $1 \leq i \leq l-1$

$$\delta_i^{'} = \min\{x_i - \delta_i, D_2 - \sum_{j=1}^{l} \delta_j^{'}\}$$

Σε περίπτωση πολιτικής FIFO, προκύπτει

$$\delta_1^{'} = \min\{x_1 - \delta_1, D_2\}$$

και για $2 \leq i \leq l$

$$\delta_i^{'} = \min\{x_i - \delta_i, D_2 - \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j^{'}\}$$

Η ζήτηση που χάνεται είναι

$$D_2 - \sum_i \delta_i^{'}$$

Η ποσότητα παραγγελίας προστίθεται στο απόθεμα. Άρα ισχύει ότι $q = x_l^{'}$ και για $1 \leq i \leq l-1$

$$x_i^{'} = x_i - \delta_i$$

Πριν την απόσυρση των προϊόντων ισχύει ότι

$$x_l^{''} = q - \delta_l^{'}$$

και για $1 \leq i \leq l-1$

$$x_i^{''} = x_i - \delta_i - \delta_i^{'}$$

Αντί να χρησιμοποιηθούν οι πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων, χρησιμοποιούνται οι πιθανότητες της ζήτησης για την εποχή $e = 1, 2$ για την περίοδο n, $P_{n,e}(D_e)$.

Μετάβαση από την $(n, 2, \boldsymbol{x}^{''})$ *στην* $(n+1, 1, \boldsymbol{y})$

Η κατάσταση του αποθέματος στην αρχή της επόμενης περιόδου θα συμβολίζεται ως $(n+1, 1, \boldsymbol{y})$, όπου $\boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_l)$ με y_i ο αριθμός των προϊόντων i στην αρχή της περιόδου $n+1$. Τα γεγονότα που συμβαίνουν είναι: η απόσυρση των προϊόντων και η μεταφορά των προϊόντων που δεν έχουν αποσυρθεί στην επόμενη περίοδο. Επομένως προκύπτει $y_l = 0$ και για $1 \leq i \leq l-1$

$$y_i = x_{i+1}^{''} - a_i$$

3.2.4 Προσδιορισμός της συνάρτησης κόστους

Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του μακροπρόθεσμου αναμενόμενου συνολικού κόστους. Το αναμενόμενο κόστος ανά περίοδο διαχωρίζεται σε αναμενόμενο κόστος ανά φάση. Το αναμενόμενο κόστος της φάσης 1 (αντιστοιχεί $e = 1$) αποτελείται από το κόστος διατήρησης, έλλειψης και διάθεσης και είναι:

$$EC(n, \boldsymbol{x}, q) = h \sum_i x_i + \sum_{D_1, D_2} P_{n,1}(D_1) P_{n,2}(D_2)(p(D_1 - \sum_i \delta_i + D_2 - \sum_i \delta_i^{'})$$

$$+ \sum_i (\delta_i + \delta_i^{'}) i s_i)$$

Το αναμενόμενο κόστος της φάσης 2 (αντιστοιχεί $e = 2$) αποτελείται από το κόστος απόσυρσης και είναι:

$$ma$$

(Το κόστος απόσυρσης είναι ανεξάρτητο από την ηλικία των προϊόντων)

Για την ελαχιστοποίηση του κόστους χρησιμοποιείται ένας επαναληπτικός αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού. Συμβολίζεται με d ο αριθμός των επαναλήψεων του αλγορίθμου. Ο αλγόριθμος ξεκινάει παίρνοντας την τιμή $d = 1$ και

έχοντας n περιόδους και συνεχίζει επαναληπτικά για $d+1$ έχοντας n_1 περιόδους, όπου $n_1 = n - (d-1) \mod n$.
Ο αλγόριθμος αποτελείται από τις εξισώσεις:

$$V_0(1,1,\boldsymbol{y}) = 0$$

$$V_d(n,2,\boldsymbol{x}^{''}) = \min_{x_1^{''} \leq a \leq \sum_i x_i^{''}} \{ma + V_{d-1}(n+1,1,\boldsymbol{y})\}$$

$$V_d(n,1,\boldsymbol{x}) = \min_{0 \leq q \leq \overline{D_1} + \overline{D_2}} \{EC(n,\boldsymbol{x},q) + \sum_{D_1} \sum_{D_2} P_{n,1}(D_1) P_{n,2}(D_2)(V_d(n,2,\boldsymbol{x}^{''}))\}$$

Καθώς το d τείνει στο άπειρο, το διάνυσμα $D_d = V_d - V_{d-n}$ συγκλίνει στο μέσο κόστος μιας βέλτιστης πολιτικής. Η διαφορά μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής του D_d ονομάζεται εύρος. Όταν το εύρος είναι μικρότερο από μια προκαθορισμένη ακρίβεια ε, τότε σταματά ο αλγόριθμος.

3.3 Πολιτικές αναπλήρωσης, επιλογής τρόπου διάθεσης και απόσυρσης αποθέματος

Στην ενότητα αυτή προτείνονται πέντε πολιτικές αναπλήρωσης, επιλογής τρόπου διάθεσης και απόσυρσης του αποθέματος:

i) OFN (OLN) (Optimal ordering policy with FIFO (or LIFO) issuance and No premature disposal of products): πολιτική σταθερή ποσότητα παραγγελίας, πολιτική FIFO (LIFO) και μη απόσυρση προϊόντων (αποσύρονται μόνο τα ληγμένα προϊόντα)

ii) BFN (BLN) (BSP (base stock policy) with FIFO (or LIFO) issuance and No premature disposal): πολιτική base stock, πολιτική FIFO (LIFO) και μη απόσυρση προϊόντων

iii) BFO (BLO) (BSP with FIFO (or LIFO) issuance and Optimal disposal of products): πολιτική base stock, πολιτική FIFO (LIFO) και απόσυρση προϊόντων

iv) BON (BSP with Optimal issuance and No premature disposal of products): πολιτική base stock, πολιτική σταθερή ποσότητα διάθεσης προϊόντων και μη απόσυρση προϊόντων

v) OFO (OLO) (Optimal ordering policy with FIFO (or LIFO) issuance and Optimal disposal of products): πολιτική σταθερή ποσότητα παραγγελίας, πολιτική FIFO (LIFO) και απόσυρση προϊόντων

Στο επόμενο παράδειγμα, το οποίο βρίσκεται στο Haijema (2014), αξιολογούνται οι παραπάνω πολιτικές για διάφορες τιμές στις παραμέτρους.

Παράδειγμα 3.3.1. *Έστω* $n = 5, l = \{4, 5\}, L = \{0.5, 1\}$, $is_1 = \{150, 0, 105\}, h = \{0.1, 0, 0.5\}, m = 150, p = \{750, 150, 300\}$ *και η ζήτηση και των δύο εποχών ακολουθεί Poisson κατανομή με μέσο όρο* $\mu = \{4, 2, 6\}$.

Στον Πίνακα 3.1 δίνονται τα μέγιστα επίπεδα αποθέματος ανά περίοδο, το κόστος της πολιτική BFN, την σύγκριση της με άλλες πολιτικές και το μέσο όρο των προϊόντων προς απόσυρση. Στον Πίνακα 3.2 δίνονται τα ίδια αποτελέσματα υπό την πολιτική LIFO . Οι πρώτες τρεις γραμμές από τους πίνακες δείχνουν την επίδραση του p στο κόστος. Όταν το p μειωθεί τότε μειώνεται και το κόστος. Στο Πίνακα 3.1, παρατηρείται ότι υπάρχει μεγαλύτερη μείωση του κόστους στην πολιτική OFO. Ωστόσο, μικρότερη ποσότητα προϊόντων προς απόσυρση έχει η πολιτική OFN. Επίσης, όταν αυξηθεί το is_1 τότε η πολιτική BFO είναι καλύτερη από την OFN. Όταν $is_1 = 0$ μεγαλύτερη μείωση κόστους γίνεται στην πολιτική BFO. Τέλος, οι αλλαγές στο h, δεν επηρεάζουν τα αποτελέσματα. Στον Πίνακα 3.2, αρχικά, παρατηρείται ότι η ποσότητα προϊόντων προς απόσυρση είναι μεγαλύτερη από το προηγούμενο πίνακα (περίπου διπλάσιες τιμές). Για αυτό το λόγο η πολιτική BON έχει την μεγαλύτερη μείωση του κόστους, όπως παρατηρείται και στο πίνακα.

							Πολιτική	BFN	BON	BFO	OFN	OFO
l	μ	L	is_1	h	m	p	$(S_1, ..., S_5)$					
								Κόστος	Μείωση Κόστους (%)			
4	4	0.5	105	0.1	150	750	(12,11,11,10,18)	209.87	10.5	11.3	9.7	15.0
						150	(8,9,9,9,13)	104.60	4.8	3.4	3.7	6.8
						300	(9,10,10,9,15)	147.72	6.0	6.6	6.8	10.9
				0			(12,11,11,10,18)	209.08	10.8	11.3	9.7	15.1
				0.5			(12,11,11,10,18)	213.04	10.3	11.1	9.5	14.9
			0				(13,12,12,13,18)	108.30	2.7	2.9	6.2	6.2
			60				(12,11,11,11,18)	170.61	8.7	8.8	9.0	10.6
			150				(11,10,10,10,17)	239.54	11.4	12.7	8.2	17.1
		1					(14,12,12,12,19)	319.38	9.3	11.7	12.0	18.2
	2						(7,6,6,6,10)	162.42	8.1	9.9	8.9	12.5
	6						(16,15,15,15,25)	236.84	9.2	9.2	7.1	11.8
5							(12,12,12,12,18)	99.34	7.3	7.0	2.7	9.0
								Μέσος όρος προϊόντων προς απόσυρση προϊόντων (%)				
								8.6	9.5	10.2	8.3	10.8

Πίνακας 3.1: Κόστος της πολιτικής BFN, σύγκριση και προϊόντων προς απόσυρση (%)

								BLN	BON	BLO	OLN	OLO
								Κόστος	Μείωση Κόστους (%)			
4	4	0.5	105	0.1	150	750	(12,10,10,10,19)	354.88	44.7	14.5	18.7	18.7
						150	(8,7,7,6,13)	159.18	25.3	1.1	6.1	6.1
						300	(9,9,8,8,16)	233.55	34.4	5.5	11.1	11.1
				0			(12,10,10,10,19)	354.15	44.9	14.5	18.7	18.8
				0.5			(12,10,10,10,19)	357.81	44.1	14.4	18.6	18.6
			0				(12,10,10,10,19)	317.79	60.8	15.9	21.2	21.2
			60				(12,10,10,10,19)	341.58	50.6	15.4	19.6	20.2
			150				(12,10,10,10,19)	371.64	40.7	14.3	18.3	18.4
		1					(14,13,12,13,22)	428.54	29.7	16.3	21.3	21.4
	2						(7,6,6,6,10)	238.65	37.5	11.8	16.2	16.3
	6						(16,14,14,14,27)	458.93	41.0	17.0	20.0	20.7
5							(11,14,10,9,20)	218.07	45.4	6.9	10.2	11.1
								Μέσος όρος αποσυρμένων προϊόντων (%)				
								20.5	11.6	22.0	20.0	20.1

Πίνακας 3.2: Κόστος της πολιτικής BLN, σύγκριση και μέσος όρος προϊόντων προς απόσυρση (%)

3.4 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό, μελετάται ένα μοντέλο διαχείρισης αποθεμάτων για προϊόντα με χρόνο ζωής l περιόδων, όπου σε κάθε περίοδο πρέπει να αποφασιστεί η σταθερή ποσότητα παραγγελίας για την αναπλήρωση του αποθέματος, ο τρόπος διάθεσης των προϊόντων (LIFO, FIFO) και η ποσότητα των προϊόντων που θα αποσυρθούν. Σε αυτό το πλαίσιο, θα μπορούσε να αναφερθεί η πρακτική σημασία της απόφασης για την ποσότητα των προϊόντων που θα αποσυρθούν. Στα νοσοκομεία, τα προϊόντα αίματος με την μικρότερη διάρκειας ζωής είναι λιγότερα αποτελεσματικά, με αποτέλεσμα να μην προτιμούνται και να πρέπει να αποσύρονται. Με αριθμητικό παράδειγμα συγκρίνονται διάφορες πολιτικές αναπλήρωσης, διάθεσης και απόσυρσης των προϊόντων, από το οποίο φαίνονται τα εξής: χρησιμοποιώντας πολιτική FIFO και αποσύροντας προϊόντα ή χρησιμοποιώντας πολιτική FIFO, πολιτική base stock και αποσύροντας προϊόντα επιτυγχάνεται η μείωση του μεγάλου αριθμού προϊόντων και χρησιμοποιώντας πολιτική FIFO, πολιτική σταθερής παραγγελίας και αποσύροντας προϊόντα επιτυγχάνεις μικρότερο κόστος, με κίνδυνο να δημιουργηθεί υψηλό ποσοστό αποβλήτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Διαχειριση αποθεματων προϊοντων με χρονο ζωης l περιοδων: πολιτικη αναπληρωσης και επιλογης τροπου διαθεσης αποθεματος με διαφοροποιηση στην τιμη πωλησης του

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ένα σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων για προϊόντα με χρόνο ζωής l περιόδων, θεωρώντας ότι ο ορίζοντας σχεδιασμού είναι πεπερασμένος. Το προϊόν αποσύρεται στο τέλος της ημερομηνίας λήξης του. Η τιμή πώλησης των προϊόντων, μέσα σε κάθε περίοδο αλλάζει, από κανονική τιμή πώλησης σε τιμή εκκαθάρισης. Αυτό έχει ως συνέπεια διαφοροποίησης της ζήτησης, η οποία θεωρείται στοχαστική. Σε περίπτωση που δεν υπάρχει απόθεμα τότε η ζήτηση χάνεται. Η διάθεση των προϊόντων γίνεται με πολιτική LIFO. Στόχος είναι να προσδιοριστούν η ποσότητα αναπλήρωσης του αποθέματος και η ποσότητα που θα διατεθεί με την τιμή εκκαθάρισης. Επιπλέον, προτείνονται δύο ευρετικές μέθοδοι: προσέγγιση προβλήματος με δύο και τριών περιόδων, αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται σε αυτό το κεφάλαιο μελετήθηκαν από τους Li et al. (2016).

4.1 Υποθέσεις και συμβολισμός

Στην ενότητα αυτή, δίνονται οι υποθέσεις και ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιηθούν, επιπλέον, στην ανάπτυξη του μοντέλου αυτού του κεφαλαίου.

Υποθέσεις

1. Ο ορίζοντας σχεδιασμού είναι πεπερασμένος.
2. Ο χρόνος ανοχής είναι μηδέν.
3. Η ζήτηση είναι στοχαστική, συνεχής και μεταβάλλεται ανάλογα με την τιμή πώλησης των προϊόντων. Στην αρχή κάθε περιόδου τα προϊόντα διατίθενται με κανονική τιμή, η οποία στη συνέχεια αλλάζει σε τιμή εκκαθάρισης.
4. Η ζήτηση των προϊόντων με τιμή εκκαθάρισης είναι τόσο μεγάλη έτσι ώστε το απόθεμα, που θα εκκαθαριστεί, να μην μείνει ποτέ αδιάθετο.
5. Σε περίπτωση που δεν υπάρχει απόθεμα για την ικανοποίηση της ζήτησης τότε αυτή χάνεται.
6. Διατίθενται πρώτα τα προϊόντα με τη μεγαλύτερη διάρκεια ζωής (πολιτική LIFO).

Συμβολισμός

T	ορίζοντας σχεδιασμού
D	ζήτηση με κανονική τιμή πώλησης
x_i	επίπεδο αποθέματος στην αρχή της περιόδου για το προϊόν i, $i = 1, .., l$
r	κανονική τιμή πώλησης ανά μονάδα προϊόντος
s	εκκαθαριστική τιμή πώλησης ανά μονάδα προϊόντος

4.2 Προσδιορισμός της συνάρτησης κέρδους

Προκειμένου να μοντελοποιηθεί η συνάρτηση κέρδους του συστήματος διαχείρισης αποθεμάτων, αρχικά παρουσιάζεται ο τρόπος λειτουργίας του συστήματος. Στην αρχή κάθε περιόδου n, γίνεται η αναπλήρωση του αποθέματος με την παραλαβή μιας σταθερής ποσότητας παραγγελίας, q, προϊόντος l. Στην συνέχεια, παρουσιάζεται η ζήτηση για προϊόντα με κανονική τιμή πώλησης, η οποία είτε ικανοποιείται είτε χάνεται. Έπειτα, προσδιορίζεται η ποσότητα προϊόντος i που θα μεταφερθεί στην επόμενη περίοδο, αν υπάρχει απόθεμα και δεν έχει λήξει και θα συμβολίζεται ως z_i. Αφού αποφασιστεί η μεταφερόμενη ποσότητα στην επόμενη περίοδο, προσδιορίζεται το απόθεμα που θα διατεθεί με τιμή εκκαθάρισης: $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}$, όπου $\boldsymbol{y}(q,\boldsymbol{x},D)=(y_1,...,y_{l-1})$ με y_i το απόθεμα, μετά από την κάλυψη της ζήτησης με κανονική τιμή, αλλά πριν την τιμή εκκαθάρισης

$$y_i(q,\boldsymbol{x},D)=(x_{i+1}-(D-q-\sum_{k=i+2}^{l-1}x_k)^+)^+$$

και $y_{l-1}(q,\boldsymbol{x},D)=(q-D)^+$ και $\boldsymbol{z}=(z_1,...,z_{l-1})$. Στο τέλος της περιόδου το προϊόν 1 αποσύρεται, ενώ τα άλλα χάνουν μία περίοδο ζωής. Η ποσότητα που αποσύρεται ορίζεται ως:

$$O(q,\boldsymbol{x},D)=(x_1-(D-q-\sum_{i=2}^{l-1}x_i)^+)^+$$

Για το προσδιορισμό του συνολικού κέρδους λαμβάνονται υπόψη τα έσοδα, το κόστος ανά μονάδα παραγγελίας, διατήρησης ανά μονάδα προϊόντος, απόσυρσης ανά μονάδα προϊόντος, δεδομένου ότι θα χρησιμοποιηθεί η προς τα πίσω μέθοδος δυναμικού προγραμματισμού, λαμβάνοντας υπόψη το συντελεστή προεξόφλησης a όπου ισχύει $r>c$ και $s<ac-h$, έτσι ώστε η ποσότητα παραγγελίας να μην είναι άπειρη και το διαθέσιμο απόθεμα να εκκαθαρίζεται όλο.

Στόχος είναι η μεγιστοποίηση του αναμενόμενου κέρδους του συστήματος:

$$V_n(\boldsymbol{x})=\max_{q\geq 0}\{rE\min(q+\sum_{i=1}^{l-1}x_i,D)-cq-mEO(q,\boldsymbol{x},D)+E\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q,\boldsymbol{x},D))\} \tag{4.1}$$

όπου

$$\pi_n(\boldsymbol{y})=\max_{\boldsymbol{0}\leq\boldsymbol{z}\leq\boldsymbol{y}}\{s\sum_{i=1}^{l-1}(y_i-z_i)-h\sum_{i=1}^{n-1}z_i+aV_n(\boldsymbol{z})\} \tag{4.2}$$

Στο τέλος του ορίζοντα σχεδιασμού το αδιάθετο απόθεμα χάνει την αξία του: $V_{T+1}(\boldsymbol{x})=0$ και $\pi_{T+1}(\boldsymbol{y})=s\sum_{i=1}^{l-1}y_i$. Από (4.1) και (4.2) προκύπτει:

$$\pi_n(\boldsymbol{y})=s\sum_{i=1}^{l-1}y_i+\max_{\boldsymbol{0}\leq\boldsymbol{z}\leq\boldsymbol{y},q\geq 0}u_n(\boldsymbol{z},q) \tag{4.3}$$

όπου

$$u_n(\boldsymbol{z},q)=-(s+h)\sum_{i=1}^{l-1}z_i-acq+$$

$$aE[r\min(q+\sum_{i=1}^{l-1} z_i, D) - mO(q,\boldsymbol{z},D) + \pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q,\boldsymbol{x},D))]$$

4.3 Βέλτιστη ποσότητα αναπλήρωσης και αποθέματος προς διάθεση με τιμή εκκαθάρισης

Σε αυτή την ενότητα, θα προσδιοριστούν η βέλτιστη ποσότητα αναπλήρωσης του αποθέματος, q, και η ποσότητα του αποθέματος που διατίθεται με τιμή εκκαθάρισης, $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}$. Οι μεταβλητές απόφασης $\boldsymbol{z}$ και q εξαρτώνται από το $\boldsymbol{y}$ και λαμβάνονται στην αρχή κάθε περιόδου. Ορίζεται

$$(\boldsymbol{z}_n^*, q_n^*) = \arg\max_{0\le \boldsymbol{z}\le \boldsymbol{y}, q\ge 0} u_n(\boldsymbol{z},q)$$

όπου $\boldsymbol{z}_n^* = (z_{n,1}^*, ..., z_{n,l-1}^*)$.

Το επόμενο λήμμα είναι σημαντικό για το προσδιορισμό της ποσότητας του αποθέματος που διατίθεται με τιμή εκκαθάρισης, αφού αποδεικνύει ότι το κέρδος του αποθέματος με μεγαλύτερη διάρκεια ζωής είναι μεγαλύτερο από το κέρδος του αποθέματος με λιγότερη διάρκεια ζωής.

Λήμμα 4.3.1. *Έχουμε:*

i) $s \le \dfrac{\partial \pi_n(\boldsymbol{y})}{\partial y_1} \le \dfrac{\partial \pi_n(\boldsymbol{y})}{\partial y_2} \le ... \le \dfrac{\partial \pi_n(\boldsymbol{y})}{\partial y_{l-1}} \le ac-h$

ii) $\dfrac{\partial u_n(\boldsymbol{z},q)}{\partial z_1} \le \dfrac{\partial u_n(\boldsymbol{z},q)}{\partial z_2} \le ... \le \dfrac{\partial u_n(\boldsymbol{z},q)}{\partial z_{l-1}}$

iii) $\dfrac{\partial u_n(\boldsymbol{z},q)}{\partial q} \le \dfrac{\partial u_n(\boldsymbol{z},q)}{\partial z_2} \le ... \le \dfrac{\partial u_n(\boldsymbol{z},q)}{\partial z_{l-1}}$

Απόδειξη. Η βέλτιστη πολιτική γράφεται ως $(\boldsymbol{z}_n^*, q_n^*) = (\boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y}), q_n^*(\boldsymbol{y}))$ για να τονιστεί η εξάρτηση του από την κατάσταση $\boldsymbol{y}$.

(i) Για την απόδειξη του αποτελέσματος πρέπει να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$\frac{\partial \pi_n(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} \le \frac{\partial \pi_n(\boldsymbol{y})}{\partial y_{i+1}}$$

και

$$s \leq \frac{\partial \pi_n(\boldsymbol{y})}{\partial y_1}$$

$$\frac{\partial \pi_n(\boldsymbol{y})}{\partial y_{l-1}} \leq ac - h$$

Για τη πρώτη σχέση είναι ισοδύναμο να αποδειχθεί ότι $\pi_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{i+1}) \geq \pi_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i)$ για κάθε μικρό θετικό δ, όπου $\boldsymbol{e}_i$ είναι ένα διάνυσμα διάστασης $l-1$ του οποίου το i στοιχείο είναι 1 και όλα τα άλλα μηδέν. Αν $z^*_{n,i}(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i) = 0$ τότε η πολιτική $(\boldsymbol{z}^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i), q^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i))$ είναι εφικτή όταν το επίπεδο αποθέματος είναι $\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{i+1}$. Συνεπώς,

$$\pi_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{i+1}) \geq s(\delta + \sum_{k=1}^{l-1} y_k) + u_n(\boldsymbol{z}^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i), q^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i)) = \pi_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i)$$

Αν $z^*_{n,i}(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i) \geq 0$ το αποτέλεσμα θα αποδειχθεί με επαγωγή. Για $i=1$,

$$\begin{aligned}
&\pi_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_2) - \pi_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_1) \\
&\geq u_n(\boldsymbol{z}^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_1) - \delta\boldsymbol{e}_1 - \delta\boldsymbol{e}_2, q^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_1)) \\
&\quad - u_n(\boldsymbol{z}^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_1), q^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_1)) \\
&= amE(\delta - (D - q^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_1) - \sum_{k=2}^{n-1} z^*_{n,k}(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_1))^+)^+ \\
&\quad + aE\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{z}^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_1) - \delta\boldsymbol{e}_1 - \delta\boldsymbol{e}_2, D)) \\
&\quad - aE\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{z}^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_1), D)) \geq 0
\end{aligned}$$

για όλα τα n. Η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή

$$\begin{aligned}
&y_1(q^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{z}^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_1) - \delta\boldsymbol{e}_1 - \delta\boldsymbol{e}_2, D) \\
&\quad - y_1(q^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{z}^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_1), D) \\
&= (\delta - (D - (q^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_1) - \sum_{k=2}^{n-1} z^*_{n,k}(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_1))^+)^+ \geq 0
\end{aligned}$$

και

$$y_j(q^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{z}^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_1) - \delta\boldsymbol{e}_1 - \delta\boldsymbol{e}_2, D) = y_j(q^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{z}^*_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_1), D)$$

για $j > 1$. Έστω ότι ισχύει $\pi_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i) \geq \pi_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{i-1})$. Τότε

$$\pi_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{i+1}) - \pi_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i)$$

$$\geq u_n(\boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i)-\delta\boldsymbol{e}_i-\delta\boldsymbol{e}_{i+1}, q_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i))$$
$$-u_n(\boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i), q_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i))$$
$$= aE\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i), \boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i)$$
$$-\delta\boldsymbol{e}_i-\delta\boldsymbol{e}_{i+1}, D))$$
$$-aE\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i), \boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i), D)) \geq 0$$

Η πρώτη ανισότητα ισχύει επειδή $\boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i)-\delta\boldsymbol{e}_i-\delta\boldsymbol{e}_{i+1}, q_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i)$ είναι εφικτή αλλά όχι απαραίτητα βέλτιστη υπό την κατάσταση $\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{i+1}$. Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από την υπόθεση της επαγωγής επειδή

$$y_{i-1}(q_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i), \boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i)-\delta\boldsymbol{e}_i-\delta\boldsymbol{e}_{i+1}, D)$$
$$= -\delta' + y_{i-1}(q_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i), \boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i), D)$$
$$y_i(q_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i), \boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i)-\delta\boldsymbol{e}_i-\delta\boldsymbol{e}_{i+1}, D)$$
$$= \delta' + y_i(q_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i), \boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i), D)$$

όπου $\delta' = (\delta - (D - q_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i) - \sum_{k=i+1}^{n-1} z_{n,k}^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i))^+)^+ \epsilon[0,\delta]$ και για $k = 1, ..., i-2, i+1, ..., n-1$

$$y_k(q_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i), \boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i)-\delta\boldsymbol{e}_i-\delta\boldsymbol{e}_{i+1}, D) = y_k(q_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i), \boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_i), D)$$

Έτσι ολοκληρώνεται η επαγωγή.
Για τις δεύτερες σχέσεις: Η πρώτη ανισότητα προκύπτει από τον ορισμό της $\pi_n(\boldsymbol{y})$. Η απόδειξη της δεύτερης ανισότητας είναι ισοδύναμη με $\pi_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{l-1}) - \pi_n(\boldsymbol{y}) \leq (ac-h)\delta$, για κάθε μικρό θετικό δ. Αν $z_{n,l-1}^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{l-1}) = 0$ τότε η πολιτική $(\boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{l-1}), q_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{l-1}))$ είναι εφικτή όταν το επίπεδο αποθέματος είναι $\boldsymbol{y}$. Τότε

$$\pi_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{l-1}) - \pi_n(\boldsymbol{y}) \leq s\delta + u_n(\boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{l-1}), q_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{l-1}))$$
$$-u_n(\boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{l-1}), q_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{l-1})) \leq ac-h$$

Αν $z_{n,l-1}^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{l-1}) > 0$

$$\pi_n(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{l-1}) - \pi_n(\boldsymbol{y}) \leq s\delta + u_n(\boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{l-1}), q_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{l-1}))$$
$$-u_n(\boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{l-1})-\delta\boldsymbol{e}_{l-1}, q_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{l-1})+\delta)$$
$$= s\delta + (ac-h-s)\delta + aE[\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{l-1}), \boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{l-1}), D))$$
$$-\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{l-1})+\delta, \boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{e}_{l-1})-\delta\boldsymbol{e}_{l-1}, D))] \leq$$

$$(ac - h)\delta$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή

$$y_{l-2}(q_n^*(\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{e}_{l-1}) + \delta, \boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{e}_{l-1}) - \delta\boldsymbol{e}_{l-1}, D)$$
$$= -\delta' + y_{l-2}(q_n^*(\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{e}_{l-1}), \boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{e}_{l-1}), D)$$
$$y_{l-1}(q_n^*(\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{e}_{l-1}) + \delta, \boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{e}_{l-1}) - \delta\boldsymbol{e}_{l-1}, D)$$
$$= \delta' + y_{l-1}(q_n^*(\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{e}_{l-1}), \boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{e}_{l-1}), D)$$

όπου $\delta' = (\delta - (D - q)^+)^+ \epsilon[0, \delta]$ και για $k = 1, 2, ..., , l - 3$

$$y_k(q_n^*(\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{e}_{l-1}) + \delta, \boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{e}_{l-1}) - \delta\boldsymbol{e}_{l-1}, D)$$
$$= y_k(q_n^*(\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{e}_{l-1}), \boldsymbol{z}_n^*(\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{e}_{l-1}), D)$$

(ii)-(iii) Για την απόδειξη και των δύο αποτελεσμάτων πρέπει να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$\frac{\partial u_n(\boldsymbol{z}, q)}{\partial z_i} \leq \frac{\partial u_n(\boldsymbol{z}, q)}{\partial z_{i+1}}$$

και

$$\frac{\partial u_n(\boldsymbol{z}, q)}{\partial q} \leq \frac{\partial u_n(\boldsymbol{z}, q)}{\partial z_2}$$

Όταν $2 \leq i \leq l - 2$

$$y_{i-1}(q, \boldsymbol{z} + \delta\boldsymbol{e}_{i+1}, D) = y_{i-1}(q, \boldsymbol{z} + \delta\boldsymbol{e}_i, D) - \delta'$$
$$y_i(q, \boldsymbol{z} + \delta\boldsymbol{e}_{i+1}, D) = y_i(q, \boldsymbol{z} + \delta\boldsymbol{e}_i, D) + \delta'$$

όπου

$$\delta' = (q + \sum_{n=i+1}^{l-1} z_n + \delta - D)^+ - (q + \sum_{n=i+1}^{l-1} z_n - D)^+ \epsilon[0, \delta]$$

και για $k = 1, ..., i - 2, i + 1, ...l - 1$

$$y_k(q, \boldsymbol{z} + \delta\boldsymbol{e}_i, D) = y_k(q, \boldsymbol{z} + \delta\boldsymbol{e}_{i+1}, D)$$

Τότε ισχύει:

$$\boldsymbol{y}(q, \boldsymbol{z} + \delta\boldsymbol{e}_{i+1}, D) = \boldsymbol{y}(q, \boldsymbol{z} + \delta\boldsymbol{e}_i, D) - \delta'\boldsymbol{e}_{i-1} + \delta'\boldsymbol{e}_i$$

Από (i), προκύπτει ότι

$$E\pi_n(\boldsymbol{y}(q, \boldsymbol{z} + \delta\boldsymbol{e}_{i+1}, D))$$

$$= E\pi_n(\boldsymbol{y}(q, \boldsymbol{z} + \delta \boldsymbol{e}_i, D) - \delta' \boldsymbol{e}_{i-1} + \delta' \boldsymbol{e}_i)$$
$$\geq E\pi_n(\boldsymbol{y}(q, \boldsymbol{z} + \delta \boldsymbol{e}_i, D))$$

Επομένως, για $2 \leq i \leq l-1$

$$u_n(\boldsymbol{z} + \delta \boldsymbol{e}_{i+1}, q) - u_n(\boldsymbol{z} + \delta \boldsymbol{e}_i, q)$$
$$= aE\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q, \boldsymbol{z} + \delta \boldsymbol{e}_{i+1}, D)$$
$$-aE\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q, \boldsymbol{z} + \delta \boldsymbol{e}_i, D) \geq 0$$

και

$$u_n(\boldsymbol{z} + \delta \boldsymbol{e}_2, q) - u_n(\boldsymbol{z} + \delta \boldsymbol{e}_1, q)$$
$$= amE(q + \delta + \sum_{i=2}^{l-1} z_i - D) - amE(q + \sum_{i=2}^{l-1} z_i - D)$$
$$+aE\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q, \boldsymbol{z} + \delta \boldsymbol{e}_2, D) - aE\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q, \boldsymbol{z}, D)$$
$$\geq 0$$

Από (i), προκύπτει

$$u_n(\boldsymbol{z} + \delta \boldsymbol{e}_2, q) - u_n(\boldsymbol{z}, q + \delta)$$
$$= (ac - h - s)\delta + aE\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q, \boldsymbol{z} + \delta \boldsymbol{e}_2, D)$$
$$-aE\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q + \delta, \boldsymbol{z}, D))$$
$$\geq (ac - h - s)\delta - a(ac - h - s)\delta \geq 0$$

□

Στην συνέχεια, παρουσιάζονται ιδιότητες που αφορούν την βέλτιστη πολιτική, λαμβάνοντας υπόψη την μέγιστη υπολειπόμενη διάρκεια ζωής του προϊόντος που θα διατεθεί με τιμή εκκαθάρισης, το ανώτερο και το κατώτερο όριο που ορίζονται για το y_i.

Ορίζεται $k_n = \max\{i : z^*_{n,i} < y_i\}$ η μέγιστη υπολειπόμενη διάρκεια ζωής του προϊόντος που θα διατεθεί με τιμή εκκαθάρισης. Αν το σύνολο είναι κενό τότε $k_n = 0$.

Το επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζει τις μεταβλητές απόφασης σε σχέση με το k_n.

Θεώρημα 4.3.1. *i)* $z^*_{n,j} = 0$ *για* $j \leq k_n - 1$ *και* $z^*_{n,j} = y_j$ *για* $j \geq k_n + 1$

ii) Αν $k_n \geq 2$ τότε $q_n^* = 0$

Απόδειξη. (i) Χρειάζεται να δειχθεί μόνο ότι $z_{n,j}^* = 0$ για $j \leq k_n - 1$. Έστω ότι υπάρχει ένα $j' \leq k_n - 1$ όπου $z_{n,j'}^* > 0$. Έστω

$$f(\delta) = u_n(\boldsymbol{z}_n^* - \delta \boldsymbol{e}_{j'} + \delta \boldsymbol{e}_{k_n}, q)$$

Η $f(\delta)$ είναι αύξουσα συνάρτηση από Λήμμα 4.4.1. Έτσι, για κάθε $0 < \delta < \min\{q_n^*, y_{k_n} - z_{n,k_n}^*\}$ αν $f(\delta) > f(0)$ τότε $\boldsymbol{z}_n^*$ δεν είναι μέγιστο και αν $f(\delta) = f(0)$ τότε $\boldsymbol{z}_n^*$ δεν είναι το μικρότερο μέγιστο. Άρα πρέπει να ισχύει ότι $z_{n,j}^* = 0$ για $j \leq k_n - 1$.([12])

(ii) Αν $k_n \geq 2$, τότε $z_{n,k_n}^* < y_{k_n}$. Η απόδειξη γίνεται με εις άτοπον απαγωγή, επομένως υποτίθεται ότι $q_n^* > 0$. Έστω

$$f(\delta) = u_n(\boldsymbol{z}_n^* + \delta \boldsymbol{e}_{k_n}, q_n^* - \delta)$$

Από Λήμμα 4.4.1 (iii) ισχύει ότι η $f(\delta)$ είναι αύξουσα συνάρτηση για κάθε $0 \leq \delta \leq \min\{q_n^*, y_{k_n} - z_{n,k_n}^*\}$. Επομένως, η $(\boldsymbol{z}_n^*, q_n^*)$ δεν μπορεί να είναι μέγιστο, άρα πρέπει $q_n^* = 0$.

□

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.1, τα προϊόντα με υπολειπόμενη διάρκεια ζωής μικρότερη από το k_n διατίθενται με τιμή εκκαθάρισης και δεν μεταφέρονται στην επόμενη περίοδο, ενώ αν είναι μεγαλύτερη από το k_n μεταφέρονται στην επόμενη περίοδο. Επίσης, στην περίοδο n, αν τα προϊόντα που διατίθενται με τιμή εκκαθάρισης είναι τα προϊόντα με υπολειπόμενη διάρκεια ζωής μεγαλύτερη ή ίση των δύο περιόδων τότε στην περίοδο αυτή δεν μπορεί να γίνει αναπλήρωση του αποθέματος.

Από Θεώρημα 4.3.1 ορίζεται το

$$\boldsymbol{z}^k = (0, 0, ..., 0, z_k, y_{k+1}, y_{k+2}, ..., y_{l-1})$$

Άρα το πρόβλημα (4.3) γίνεται:

$$\max_{\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{y}, q \geq 0} u_n(\boldsymbol{z}, q)$$
$$= \max\{\max_{0 \leq z_1 \leq y_1, q \geq 0} u_n(\boldsymbol{z}^1, q), \max_{2 \leq k \leq l-1} \{\max_{0 \leq z_k \leq y_k} u_n(\boldsymbol{z}^k, 0)\}\} \tag{4.4}$$

Στο ακόλουθο παράδειγμα, το οποίο βρίσκεται στο Li et al. (2016), θα παρουσιαστεί ο ρόλος του ανώτερου και κατώτερου ορίου του αποθέματος για κάθε ηλικία στην βέλτιστη πολιτική έτσι ώστε να αναπτυχθούν τα ακόλουθα θεωρήματα.

Παράδειγμα 4.3.1. *Έστω* $l = 3, T = 5, r = 0.3, s = 0.4, c = 1.0, h = 0.2, m = 0.4, a = 0.95$ *και η ζήτηση ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο* $(3, 5)$.

Στο Πίνακα 4.1 δίνονται οι τιμές του $z^*_{T-4,2}$, στο Πίνακα 4.2 οι τιμές του $z^*_{T-4,1}$ και στο Πίνακα 4.3 τις τιμές του q^*_{T-4}.
Στο Πίνακα 4.1 παρατηρείται ότι καθώς αυξάνεται το y_2 τότε αρχικά το απόθεμα δεν εκκαθαρίζεται, μετά εκκαθαρίζεται, μετέπειτα πάλι δεν εκκαθαρίζεται μέχρι να λάβει το y_2 την τιμή 8. Επίσης, παρατηρείται ότι υπάρχουν δύο όρια: το 4 και το 8. Αν το y_2 είναι μικρότερο από το κατώτερο όριο τότε είναι βέλτιστο να μην διατεθεί το απόθεμα του προϊόντος 2 με τιμή εκκαθάρισης, ενώ αν είναι μεγαλύτερο από το ανώτερο όριο είναι βέλτιστο η ποσότητα προϊόντος 2 που μεταφέρεται στην επόμενη περίοδο να είναι ίση με το ανώτερο όριο.
Από τον Πίνακα 4.2 προκύπτει ότι το $z^*_{T-4,1}$ πρώτα αυξάνεται και μετά μειώνεται ως προς το y_2 όταν το $y_1 = 1$, με ανώτερο και το κατώτερο όριο να είναι το 1 και το 4.4, αντίστοιχα. Αν $y_1 < 1$ τότε είναι βέλτιστο το απόθεμα του προϊόντος 1 διατίθεται με τιμή εκκαθάρισης, ενώ αν $1 \leq y_1 < 4.4$ τότε είναι βέλτιστο να μην διατεθεί το απόθεμα του προϊόντος 1 με τιμή εκκαθάρισης και τέλος αν $y_1 \geq 4.4$ τότε η ποσότητα του προϊόντος 1 που θα διατεθεί με τιμή εκκαθάρισης θα είναι μικρότερη από 4.4.
Στο Πίνακα 4.3 παρατηρείται ότι το q^*_{T-4} πρώτα μειώνεται, μετά αυξάνεται και τελικά μειώνεται ξανά.

$y_1 \setminus y_2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	4.9	4.9	7	8	8	8
1	0	1	2	3	4	4.9	4.9	7	8	8	8
...											
6	0	1	2	3	4	4.9	4.9	7	8	8	8

Πίνακας 4.1: Τιμές του $z^*_{T-4,2}$

$y_1 \setminus y_2$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0
2	2	2	2	1.4	0	0	0
3	3	3	2.4	1.4	0	0	0
4	4	3.4	2.4	1.4	0	0	0
5	4.4	3.4	2.4	1.4	0	0	0
6	4.4	3.4	2.4	1.4	0	0	0

Πίνακας 4.2: Τιμές του $z^*_{T-4,1}$

$y_1 \setminus y_2$	0	1	2	3	4	5	6
0	4.7	3.6	2.6	1.6	0.6	0	0
1	4.7	3.6	1.2	0.2	0.6	0	0
2	2.2	1.2	0.2	0	0.6	0	0
3	1.2	0.2	0	0	0.6	0	0
4	0.2	0	0	0	0.6	0	0
5	0	0	0	0	0.6	0	0
6	0	0	0	0	0.6	0	0

Πίνακας 4.3: Τιμές του q^*_{T-4}

Όλες οι παραπάνω παρατηρήσεις θα διατυπωθούν στα επόμενα θεωρήματα.

Θεώρημα 4.3.2. *Για $2 \leq i \leq l-1$ υπάρχουν $U_{n,i}$ και $L_{n,i}$, ανώτερο και κατώτερο όριο για το y_i, αντίστοιχα, όπου $U_{n,i} \geq L_{n,i}$, τα οποία είναι συναρτήσεων των $y_{i+1}, .., y_{n-1}$, αλλά είναι ανεξάρτητα από τα $y_1, ..., y_i$.*

i) Αν $y_i < L_{n,i}$ τότε $z^*_{n,i} = y_i$

ii) Αν $y_i \geq U_{n,i}$ τότε $z^*_{n,i} = U_{n,i}$

Απόδειξη. (i) Ορίζεται $\overline{L}_{n,i} = \inf\{z_i \geq 0 : \dfrac{\partial u_n(\boldsymbol{z}^i, 0)}{\partial z_i} < 0\}$. Τότε $u_n(\boldsymbol{z}^i, 0)$ είναι αύξουσα ως προς το z_i για $z_i < \overline{L}_{n,i}$. Ορίζεται $L_{n,i} = \overline{L}_{n,i}$ αν $y_k < \overline{L}_{n,k}$ για όλα $k > i$ και $L_{n,i} = 0$ αλλού. Είναι προφανές ότι το $L_{n,i}$ είναι συνάρτηση του $y_{i+1}, .., y_{n-1}$, αλλά είναι ανεξάρτητα από τα $y_1, ..., y_i$. Αν $y_i < L_{n,i}$ συνεπάγεται ότι $y_k < \overline{L}_{n,k}$.

Αν $y_i < L_{n,i}$ τότε

$$u_n((0, ...0, y_i, ..., y_{l-1}), 0) \geq u_n((0, ...0, 0, y_{i+1}, ..., y_{l-1}), 0)$$
$$\geq ...$$
$$\geq u_n((0, ..., 0, y_{l-1}), 0)$$

Επομένως,

$$\max_{k \geq i}\{\max_{0 \leq z_k \leq y_k} u_n(\boldsymbol{z}^k, 0)\} = \max_{k \geq i}\{u_n((0, ...0, y_k, ..., y_{l-1}), 0)\} =$$
$$u_n((0, ...0, y_i, ..., y_{l-1}), 0) \tag{4.5}$$

Από (4.4) προκύπτει:

$$\max_{\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{y}, q \geq 0} u_n(\boldsymbol{z}, q)$$
$$= \max\{\max_{0 \leq z_1 \leq y_1, q \geq 0} u_n(\boldsymbol{z}^1, q), \max_{2 \leq k}\{\max_{0 \leq z_k \leq y_k} u_n(\boldsymbol{z}^k, 0)\}\}$$
$$= \max\{\max_{0 \leq z_1 \leq y_1, q \geq 0} u_n(\boldsymbol{z}^1, q),$$
$$\max_{2 \leq k \leq i-1}\{\max_{0 \leq z_k \leq y_k} u_n(\boldsymbol{z}^k, 0)\}, \max_{k \geq i}\{\max_{0 \leq z_k \leq y_k} u_n(\boldsymbol{z}^k, 0)\}\}$$
$$= \max\{\max_{0 \leq z_1 \leq y_1, q \geq 0} u_n(\boldsymbol{z}^1, q),$$
$$\max_{2 \leq k \leq i-1}\{\max_{0 \leq z_k \leq y_k} u_n(\boldsymbol{z}^k, 0)\},$$
$$u_n((0, ...0, y_i, ..., y_{l-1}), 0)\}$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $z^*_{n,i} = y_i$.

(ii) Ορίζεται

$$\overline{U}_{n,i} = arg \max_{z_i \geq 0} u_n(\boldsymbol{z}^i, 0)$$

Αν $y_i \geq \overline{U}_{n,i}$ τότε

$$\max_{0 \leq z_i \leq y_i} u_n(\boldsymbol{z}^i, 0) = u_n((0, ...0, \overline{U}_{n,i}, y_{i+1}, ..., y_{n-1}), 0)$$

Από Λήμμα 4.4.1 (ii),(iii) η $u_n(\boldsymbol{z}, q)$ αυξάνεται αν μειωθεί το z_i για κάθε $j < i$ και η $u_n(\boldsymbol{z}, q)$ αυξάνεται αν μειωθεί το q και αυξηθεί το z_i. Επομένως, για $y_i \geq \overline{U}_{n,i}$

$$u_n((z_1, ..., z_{i-1}, y_i, y_{i+1}, ..., y_{l-1}), q)$$

$$\leq u_n((0, ..., 0, y_i + q + \sum_{k=1}^{i-1} z_k, y_{i+1}, ..., y_{l-1}), 0)$$

$$\leq u_n((0, ...0, \overline{U}_{n,i}, y_{i+1}, ..., y_{l-1}), 0)$$

$$= \max_{0 \leq z_i \leq y_i} u_n(\boldsymbol{z}^i, 0)$$

Συνεπάγεται ότι

$$\max_{0 \leq z_1 \leq y_1, \geq 0} u_n(\boldsymbol{z}^1, q) \leq \max_{0 \leq z_i \leq y_i} u_n(\boldsymbol{z}^i, 0)$$

και

$$\max_{0 \leq z_k \leq y_k} u_n(\boldsymbol{z}^k, 0) \leq \max_{0 \leq z_i \leq y_i} u_n(\boldsymbol{z}^i, 0)$$

για $2 \leq k \leq i - 1$. Επομένως, αν $y_i \geq \overline{U}_{n,i}$ τότε

$$\max_{\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{y}, q \geq 0} u_n(\boldsymbol{z}, q)$$

$$= \max\{\max_{0 \leq z_1 \leq y_1, q \geq 0} u_n(\boldsymbol{z}^1, q),$$

$$\max_{2 \leq k \leq i-1}\{\max_{0 \leq z_k \leq y_k} u_n(\boldsymbol{z}^k, 0)\}, \max_{0 \leq z_i \leq y_i} u_n(\boldsymbol{z}^i, 0),$$

$$\max_{k \geq i+1}\{\max_{0 \leq z_k \leq y_k} u_n(\boldsymbol{z}^k, 0)\}\}$$

$$= \max\{\max_{0 \leq z_i \leq y_i} u_n(\boldsymbol{z}^i, 0), \max_{k \geq i+1}\{\max_{0 \leq z_k \leq y_k} u_n(\boldsymbol{z}^k, 0)\}\}$$

$$= \max\{u_n((0, ...0, \overline{U}_{n,i}, y_{i+1}, ..., y_{l-1}), 0),$$

$$\max_{k \geq i+1}\{\max_{0 \leq z_k \leq y_k} u_n(\boldsymbol{z}^k, 0)\}\}$$

Ορίζεται $U_{n,i} = \overline{U}_{n,i}$ αν

$$u_n((0, ...0, \overline{U}_{n,i}, y_{i+1}, ..., y_{l-1}), 0) \geq \max_{k \geq i+1}\{\max_{0 \leq z_k \leq y_k} u_n(\boldsymbol{z}^k, 0)\}$$

και $U_{n,i} = 0$ αλλού. Επομένως $z^*_{n,i} = U_{n,i}$ όταν $y_i \geq U_{n,i}$.

□

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.2, για $i \geq 2$, αν το απόθεμα του προϊόντος i πέσει κάτω από το κατώτερο όριο τότε το απόθεμα του προϊόντος i δεν θα διατεθεί με τιμή εκκαθάρισης, ενώ αν είναι πάνω από το ανώτερο όριο τότε η ποσότητα που θα μεταφερθεί στην επόμενη περίοδο για το προϊόν i θα είναι με το ανώτερο όριο.

Από τις παρατηρήσεις του παραδείγματος, ισχύει ότι μπορεί να υπάρχει και να μην υπάρχει διάθεση αποθέματος του προϊόντος i με τιμή εκκαθάρισης αν το επίπεδο αποθέματος προϊόντος i είναι ανάμεσα στα δύο όρια. Στην δεύτερη περίπτωση, θα πρέπει να γίνει διάθεση όλου του αποθέματος του προϊόντος $j < i$ με τιμή εκκαθάρισης (Θεώρημα 4.3.1) και για τις δύο περιπτώσεις, θα πρέπει το απόθεμα του προϊόντος 1 να πωληθεί με τιμή εκκαθάρισης. Όλα αυτά αποδεικνύονται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.3.3. *Για κάθε δεδομένο* $i \epsilon [2, l-1]$ *ισχύουν:*

i) *Αν* $y_i \geq L_{n,i}$ *τότε* $z^*_{n,1} = 0$

ii) *Αν* $y_i \geq U_{n,i}$ *τότε* $z^*_{n,j} = 0$ *για όλα* $j \epsilon [1, i]$

iii) $z^*_{n,i}$ *είναι ανεξάρτητα από το* y_1

Απόδειξη. (i) Από την (4.4), αν

$$\max_{0 \leq z_1 \leq y_1, q \geq 0} u_n(\boldsymbol{z}^1, q) = \max_{q \geq 0} u_n((0, y_2, ..., y_{l-1}), q)$$

τότε $z^*_{n,1} = 0$. Η

$$\frac{\partial u_n(\boldsymbol{z}^1, q)}{\partial z_1} = (ar - s - h) - a(r+m)\Phi(q + z_1 + \sum_{i=2}^{l-1} y_i)$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς q, z_1 και y_i για $2 \leq i \leq l-1$. Επομένως, για $y_i > \overline{L}_{n,i}$ για κάποιο $i \geq 2$, προκύπτει

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_n(\boldsymbol{z}^1, q)}{\partial z_1} &= \frac{\partial u_n((z_1, y_2, ..., y_i, y_{i+1}, ..., y_{l-1}), q)}{\partial z_1} \\
&\leq \frac{\partial u_n((0, ..., 0, \overline{L}_{n,i}, y_{i+1}, ..., y_{l-1}), 0)}{\partial z_1} \\
&\leq \frac{\partial u_n((0, ..., 0, \overline{L}_{n,i}, y_{i+1}, ..., y_{l-1}), 0)}{\partial z_i} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από το Λήμμα 4.4.1(ii). Η τελευταία ανισότητα ισχύει από τον ορισμό του $\overline{L}_{n,i}$. Επομένως, $z^*_{n,1} = 0$ αν $y_i > \overline{L}_{n,i}$ για κάποιο $i \geq 2$. Αν υπάρχει κάποιο $i \geq 2$ όπου $y_i > L_{n,i}$, τότε είτε $\overline{L}_{n,i} = L_{n,i}$ είτε υπάρχει κάποιο $k > i$ όπου $y_k > \overline{L}_{n,k}$. Άρα συμπεραίνουμε ότι $z^*_{n,1} = 0$ αν $y_i > L_{n,i}$ για κάποιο $i \geq 2$.

(ii) Το αποτέλεσμα προκύπτει από το Θεώρημα 4.4.2(ii).

(iii) Αν για όλα $i \geq 2$ το επίπεδο αποθέματος $y_i \leq L_{n,i}$ τότε $z^*_{n,i}$ είναι ανεξάρτητα από το y_1 επειδή $z^*_{n,1} = 0$. Δεδομένου ότι τα κατώτερα όρια $L_{n,i}$ εξαρτώνται μόνο από το επίπεδο του αποθέματος με την μεγαλύτερη διάρκεια ζωής, προκύπτει ότι $z^*_{n,i}$ δεν εξαρτάται από το y_1 για οποιοδήποτε $i \geq 2$.

□

Πρέπει να σημειωθεί ότι στα δύο προηγούμενα θεωρήματα δεν περιλαμβάνεται η περίπτωση $i = 1$. Για να χαρακτηριστεί η επίδραση του επιπέδου του αποθέματος για το προϊόν 1, δίνεται ο παρακάτω ορισμός και η παρακάτω υπόθεση.

Ορισμός 4.3.1. *Έστω F μια κατανομή και f η συνάρτηση πυκνότητας της. Για να είναι η F μία Polya frequency of order 2 (PF2) κατανομή αν η συνάρτηση $\dfrac{f(x)}{F(x+y)-F(x)}$ είναι αύξουσα ως προς το x για κάθε σταθερό $y > 0$. Παραδείγματα PF2 κατανομών είναι: εκθετική, ομοιόμορφη, Erlang και κανονική κατανομή. (Li et al. 2009)*

Υπόθεση 4.3.1. *1. Η κατανομή της ζήτησης είναι μία PF2 κατανομή.*

2. $s - ac + as \geq -h - am$

Ο χαρακτηρισμός της βέλτιστης πολιτικής ως προς το y_1 δίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.3.4. *Έστω ότι ισχύει η Υπόθεση 4.3.1 και υπάρχουν $U_{n,1}$ και $L_{n,1}$, ανώτερο και κατώτερο όριο για το y_1, αντίστοιχα, όπου $U_{n,1} \geq L_{n,1}$, τα οποία είναι συναρτήσεων των $y_2, .., y_{n-1}$, αλλά είναι ανεξάρτητα από το y_1.*

i) Αν $y_1 < L_{n,1}$ τότε $z^*_{n,1} = 0$

ii) Αν $L_{n,1} \leq y_1 < U_{n,1}$ τότε $z^*_{n,1} = y_1$

iii) Αν $y_1 \geq U_{n,1}$ τότε $z^*_{n,1} = U_{n,1}$

Απόδειξη. Αρχικά θα πρέπει να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $u_n(\hat{\boldsymbol{z}}_n^1, q)$ είναι:

- quasi-concave ως προς q για $q\epsilon[0, a - \sum_{i=1}^{l-1} y_i)$
- quasi-convex ως προς q για $q\epsilon[a - \sum_{i=1}^{l-1} y_i, a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i)$
- quasi-concave ως προς q για $q\epsilon[a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i, \infty)$

όπου $\hat{\boldsymbol{z}}_n^1 = (\hat{z}_n^1, y_2, ..., y_{l-1})$ με

$$\hat{z}_n^1(\boldsymbol{y}, q) = \arg \max_{0 \le z_1 \le y_1} u_n(\boldsymbol{z}^1, q)$$

και $a = \Phi^{-1}(\frac{\frac{r-(s+h)}{a}}{r+\theta})$.
Ισχύει ότι

$$\frac{\partial u_n(\boldsymbol{z}^1, q)}{\partial z_1} = (ar - s - h) - a(r+m)\Phi(q + z_1 + \sum_{i=2}^{l-1} y_i)$$

τότε

$$\hat{z}_n^1(\boldsymbol{y}, q) = \begin{cases} y_1, & \alpha\nu q\epsilon[0, a - \sum_{i=1}^{l-1} y_i) \\ a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i - q & \alpha\nu q\epsilon[a - \sum_{i=1}^{l-1} y_i, a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i) \\ 0, & \alpha\nu q\epsilon[a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i, \infty) \end{cases} \tag{4.6}$$

Επειδή $\boldsymbol{y}(q, \boldsymbol{x}, D)$ είναι ανεξάρτητο από το x_1 τότε ισχύει

$$\boldsymbol{y}(q, \hat{\boldsymbol{z}}_n^1, D) = \boldsymbol{y}(q, \boldsymbol{y}, D)$$

Άρα, αν $q \le a - \sum_{i=1}^{l-1} y_i$ τότε

$$u_n(\hat{\boldsymbol{z}}_n^1, q) = -(s+h)\sum_{i=1}^{l-1} y_i - acq +$$

$$aE[r \min\{q + \sum_{i=1}^{l-1} y_i, D\} - m(q + \sum_{i=1}^{l-1} y_i - D)^+ + m(q + \sum_{i=2}^{l-1} y_i - D)^+ +$$

$$\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q, \boldsymbol{y}, D))]$$

αν $a - \sum_{i=1}^{l-1} y_i < q \le a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$ τότε

$$u_n(\hat{\boldsymbol{z}}_n^1, q) = -(s+h)(a-q) - acq +$$

$$aE[r\min\{a,D\}-m(a-D)^{+}+m(q+\sum_{i=2}^{l-1}y_i-D)^{+}+\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q,\boldsymbol{y},d))]$$

αν $q>a-\sum_{i=2}^{l-1}y_i$ τότε

$$u_n(\hat{\boldsymbol{z}}_n^1,q)=-(s+h)\sum_{i=2}^{l-1}y_i-acq+$$

$$aE[r\min\{q+\sum_{i=2}^{l-1}y_i,D\}+\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q,\boldsymbol{y},D))]$$

Η τελευταία περίπτωση προκύπτει όταν $y_1=0$ στην πρώτη περίπτωση. Άρα αρκεί να αποδειχθούν τα εξής:

1)

$$-(s+h)\sum_{i=1}^{l-1}y_i-acq+$$

$$aE[r\min\{q+\sum_{i=1}^{l-1}y_i,D\}-m(q+\sum_{i=1}^{l-1}y_i-D)^{+}+m(q+\sum_{i=2}^{l-1}y_i-D)^{+}+$$

$$\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q,\boldsymbol{y},D))]$$

είναι quasi-concave ως προς q

2)

$$u_n(\hat{\boldsymbol{z}}_n^1,q)=-(s+h)(a-q)-acq+$$

$$aE[r\min\{a,D\}-m(a-D)^{+}+m(q+\sum_{i=2}^{l-1}y_i-D)^{+}+\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q,\boldsymbol{y},D))]$$

είναι quasi-convex ως προς q

Αν η D είναι PF2 συνάρτηση και $f(x)$ μία quasi-concave συνάρτηση τότε και το $Ef(x-D)$ είναι quasi-concave. Άρα για το (1) αρκεί να δείξουμε ότι

$$f(q)=-cq+r\min\{q+\sum_{i=1}^{l-1}y_i,0\}-m(q+\sum_{i=1}^{l-1}y_i)^{+}+m(q+\sum_{i=2}^{l-1}y_i)^{+}+$$

$$+\pi_{n+1}(\tilde{\boldsymbol{q}})$$

είναι quasi-concave ως προς q όπου $\tilde{\boldsymbol{q}} = ((y_2 - (-q - \sum_{i=3}^{l-1} y_i)^+)^+, (y_3 - (-q - \sum_{i=4}^{l-1} y_i)^+)^+, ..., (y_{l-1} - (-q)^+)^+, q^+)$.
Αν $q \leq -\sum_{i=1}^{l-1} y_i$ τότε

$$f(q) = (r-c)q + r\sum_{i=1}^{l-1} y_i + \pi_{n+1}(0, 0, ..., 0)$$

Αν $-\sum_{i=1}^{l-1} y_i < q \leq -\sum_{i=2}^{l-1} y_i$ τότε

$$f(q) = -(c+m)q - m\sum_{i=1}^{l-1} y_i + \pi_{n+1}(0, 0, ..., 0)$$

Αν $-\sum_{i=2}^{l-1} y_i < q \leq -\sum_{i=3}^{l-1} y_i$ τότε

$$f(q) = -cq - my_1 + \pi_{n+1}(q + \sum_{i=2}^{l-1} y_i, 0, ..., 0)$$

Αν $-\sum_{i=3}^{l-1} y_i < q \leq -\sum_{i=4}^{l-1} y_i$ τότε

$$f(q) = -cq - my_1 + \pi_{n+1}(y_2, q + \sum_{i=3}^{l-1} y_i, 0, ..., 0)$$

...
Αν $-y_{l-1} < q \leq 0$ τότε

$$f(q) = -cq - my_1 + \pi_{n+1}(y_2, ..., y_{n-2}, q + y_{n-1}, 0)$$

Αν $q > 0$ τότε

$$f(q) = -cq - my_1 + \pi_{n+1}(y_2, ..., y_{n-2}, y_{n-1}, q)$$

Σημειώνεται ότι η $f(q)$ είναι αύξουσα για $q \leq -\sum_{i=1}^{l-1} y_i$ και φθίνουσα για $q > -\sum_{i=1}^{l-1} y_i$, αφού $\dfrac{\partial \pi_n(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} \leq ac - h$.
Για το (2) αρκεί να δειχθεί ότι η

$$g(q) = (\frac{s+h}{a-c})q + m(q + \sum_{i=2}^{l-1} y_i)^+ + \pi_{n+1}(\tilde{\boldsymbol{q}})$$

είναι quasi-convex ως προς q όπου $\tilde{\boldsymbol{q}} = ((y_2 - (-q - \sum_{i=3}^{l-1} y_i)^+)^+, (y_3 - (-q - \sum_{i=4}^{l-1} y_i)^+)^+, ..., (y_{l-1} - (-q)^+)^+, q^+)$. Η συνάρτηση $g(q)$ μπορεί να εκφραστεί

τμηματικά ως εξής:
αν $q \leq -\sum_{i=2}^{l-1} y_i$ τότε

$$s'q + \pi_{n+1}(0, 0, ..., 0)$$

αν $-\sum_{i=2}^{l-1} y_i \leq q \geq -\sum_{i=3}^{l-1} y_i$ τότε

$$m\sum_{i=2}^{l-1} y_i + (s'+m)q + \pi_{n+1}(q + \sum_{i=2}^{l-1} y_i, 0, ..., 0)$$

αν $-\sum_{i=3}^{l-1} y_i \leq q \geq -\sum_{i=4}^{l-1} y_i$ τότε

$$m\sum_{i=2}^{l-1} y_i + (s'+m)q + \pi_{n+1}(y_2, q + \sum_{i=3}^{l-1} y_i, 0, ..., 0)$$

...
αν $-y_{l-1} < q \leq 0$ τότε

$$m\sum_{i=2}^{l-1} y_i + (s'+m)q + \pi_{n+1}(y_2, .., y_{l-2}, q + y_{l-1}, 0)$$

αν $q > 0$ τότε

$$m\sum_{i=2}^{l-1} y_i + (s'+m)q + \pi_{n+1}(y_2, .., y_{l-2}, y_{l-1}, q)$$

όπου $s' = \dfrac{s+h}{a} - c < 0$. Η $g(q)$ είναι φθίνουσα για $q \leq -\sum_{i=2}^{l-1} y_i$ αύξουσα για $q > -\sum_{i=2}^{l-1} y_i$, αφού $\dfrac{\partial \pi_n(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} \geq s$.
Εξετάζονται δύο περιπτώσεις. Για την πρώτη περίπτωση, υποτίθεται ότι υπάρχει ένα $k\epsilon[2, l-1]$ έτσι ώστε $y_k > \overline{L}_{n,k}$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι $z^*_{n,1} = 0$. Άρα ορίζεται ότι $U_{n,1} = L_{n,1} = +\infty$. Για την δεύτερη περίπτωση, εξετάζεται το $y_k \leq \overline{L}_{n,k}$ για όλα τα $k\epsilon[2, l-1]$ τότε $z^*_{n,k} = y_k$.
Ορίζεται ότι

$$\overline{q}_n = (y_2, y_3, ..., y_{l-1})$$

$$= \arg\max_{q\geq 0}\{-(s+h)\sum_{i=2}^{l-1} y_i - acq + aE[r\min\{q + \sum_{i=2}^{l-1} y_i, D\} + \pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q, \boldsymbol{y}, D))]\}$$

Σημειώνεται ότι το $\overline{q}_n$ είναι ανεξάρτητο από το y_1. Θα αποδειχθούν τα εξής:

1) Αν $\sum_{i=2}^{l-1} y_i \geq a$ τότε $z^*_{n,1} = 0$ και $q^*_n = \overline{q}_n$.

2) Αν $\overline{q}_n \leq a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$ τότε για $y_1 \leq a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$ $z_{n,1}^* = y_1$ και $q_n^* \leq a - \sum_{i=1}^{l-1} y_i$. Για $y_1 \geq a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$ $z_{n,1}^* = a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$ και $q_n^* = 0$.

3) Αν $\overline{q}_n > a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i > 0$ και $u_n((a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i, y_2, ..., y_{l-1}), 0) >$ $u_n((0, y_2, ..., y_{l-1}), \overline{q}_n)$ τότε υπάρχει ένα $b_n \epsilon (0, a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i)$ έτσι ώστε όταν $y_1 \epsilon [0, b_n)$ τότε $z_{n,1}^* = 0$ και $q_n^* = \overline{q}_n$. Όταν $y_1 \epsilon [b_n, a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i)$ τότε $z_{n,1}^* = y_1$ και $q_n^* \leq a - \sum_{i=1}^{l-1} y_i$. Όταν $y_1 \epsilon [a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i, \infty)$ τότε $z_{n,1}^* = a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$ και $q_n^* = 0$.

4) Αν $\overline{q}_n > a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i > 0$ και $u_n((a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i, y_2, ..., y_{l-1}), 0) \leq$ $u_n((0, y_2, ..., y_{l-1}), \overline{q}_n)$ τότε $z_{n,1}^* = 0$ και $q_n^* = \overline{q}_n$.

Τα δύο όρια ορίζονται ως εξής: Αν ισχύουν οι συνθήκες του (2) τότε $L_{n,1} = 0$ και $U_{n,1} = a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$, αν ισχύουν οι συνθήκες του (3) τότε $L_{n,1} = b_n$ και $U_{n,1} = a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$ και αν ισχύουν οι συνθήκες του (1) και (4) τότε $U_{n,1} = L_{n,1} = +\infty$. Όλες οι συνθήκες που χρησιμοποιούνται για τον ορισμό των ορίων είναι ανεξάρτητες από το y_1, άρα και τα όρια είναι ανεξάρτητα από το y_1. Ορίζονται

$$f_1(y_1) = \max\{u_n(\hat{\boldsymbol{z}}_n^1, q) | q \leq a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i\}$$

$$f_2 = \max\{u_n(\hat{\boldsymbol{z}}_n^1, q) | q > a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i\}$$

Η f_2 είναι ανεξάρτητη από το y_1 και $f_1(y_1)$ είναι αύξουσα ως προς το y_1 επειδή

$$u_n(\hat{\boldsymbol{z}}_n^1, q) = \max_{z_1 \leq y_1} u_n(\boldsymbol{z}^1, q)$$

(1) Αν $\sum_{i=2}^{l-1} y_i \geq a$ τότε

$$u_n(\hat{\boldsymbol{z}}_n^1, q) = -(s+h) \sum_{i=2}^{l-1} y_i - acq + aE[r \min\{q + \sum_{i=2}^{l-1} y_i, D\}$$
$$+ \pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q, \boldsymbol{y}, D))]\}$$

για όλα τα q, άρα $q_n^* = \overline{q}_n$. Η βέλτιστη πολιτική προκύπτει από την (4.6).

(2) Αν $\overline{q}_n \leq a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$ και $y_1 \leq a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$, αφού $u_n(\hat{\boldsymbol{z}}_n^1, q)$ είναι quasi-concave ως προς $q \geq$
$a - \sum_{i=1}^{l-1} y_i$ και quasi-convex ως προς $q \epsilon [a - \sum_{i=1}^{l-1} y_i, a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i)$, τότε

$u_n(\hat{\boldsymbol{z}}_n^1, q)$ είναι αύξουσα για όλα $q \geq a - \sum_{i=1}^{l-1} y_i$. Άρα το βέλτιστο q πρέπει να ικανοποιεί την σχέση $q_n^* \leq a - \sum_{i=1}^{l-1} y_i$. Η βέλτιστη πολιτική προκύπτει από την (4.6).
Όμοια για $y_1 \geq a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$.

(3) Αν $\overline{q}_n > a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i > 0$ τότε όταν $y_1 = 0$ τότε $u_n(\hat{\boldsymbol{z}}_n^1, q)$ είναι αύξουσα ως προς $q \leq a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$, άρα $f_1(0) \leq f_2$. Όταν $y_1 = a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$ τότε $u_n(\hat{\boldsymbol{z}}_n^1, q)$ είναι quasi-concave ως προς $q \leq a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$ και quasi-convex ως προς $q \geq a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$. Αν ισχύει επιπλέον ότι $u_n((a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i, y_2, ..., y_{l-1}), 0) > u_n((0, y_2, ..., y_{l-1}), \overline{q}_n)$ τότε

$$f_1(a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i)$$

$$= u_n((a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i, y_2, ..., y_{l-1}), 0)$$

$$> u_n((0, y_2, ..., y_{l-1}), \overline{q}_n) = f_2$$

Επομένως υπάρχει $b_n \epsilon (0, a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i)$ έτσι ώστε $f_2 \geq f_1(y_1)$ για $y_1 \epsilon [0, b_n)$ και $f_2 \leq f_1(y_1)$ για $y_1 \epsilon [b_n, a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i)$. Η βέλτιστη πολιτική προκύπτει από την (4.6).
Όμοια για $y_1 > a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$.

(4) Αν $\overline{q}_n > a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i > 0$ και $u_n((a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i, y_2, ..., y_{l-1}), 0) \leq u_n((0, y_2, ..., y_{l-1}), \overline{q}_n)$ τότε $f_2 \leq f_1(a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i)$ και άρα $f_2 \leq f_1(y_1)$ για όλα τα y_1. Η βέλτιστη πολιτική είναι $z_{n,1}^* = 0$ και $q_n^* = \overline{q}_n$ για όλα τα y_1.

$\square$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.4, αν το y_1 πέσει κάτω από το κατώτερο όριο τότε το απόθεμα του προϊόντος 1 θα διατεθεί με τιμή εκκαθάρισης, ενώ αν βρίσκεται σε ανάμεσα στα δύο όρια δεν θα διατεθεί με τιμή εκκαθάρισης. Αν το y_1 είναι μεγαλύτερο από το ανώτερο όριο τότε η ποσότητα του προϊόντος 1 που θα διατεθεί με τιμή εκκαθάρισης είναι μικρότερη από το ανώτερο όριο (το $z_{n,1}^*$ θα αποσυρθεί).

Το επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζει την βέλτιστη ποσότητα αναπλήρωσης του αποθέματος σε σχέση με το επίπεδο αποθέματος για διάφορα προϊόντα i.

Θεώρημα 4.3.5. *i)*

$$-\max_{0\leq z_1\leq y_1} u_n(\boldsymbol{z}^1, q)$$

είναι single crossing, με άλλα λόγια η συνάρτηση ως προς το q διασταυρώνεται με την συνάρτηση ως προς το y_1 και κατά συνέπεια η $q_n^*(\boldsymbol{y})$ είναι φθίνουσα ως προς το y_1 .

ii) Αν $y_1 \geq U_{n,1}$ τότε $q_n^*(\boldsymbol{y}) = 0$.

iii) Αν $y_i \geq L_{n,i}$ για $i\epsilon[2, l-1]$ τότε $q_n^*(\boldsymbol{y}) = 0$.

Απόδειξη. (i) Σημειώνεται ότι το $\hat{\boldsymbol{z}}_n^1$ εξαρτάται από τα q, y_1. Άρα $\hat{\boldsymbol{z}}_n^1 = \hat{\boldsymbol{z}}_n^1(q, y_1)$. Δίνονται δύο τιμές για το y_1 έτσι ώστε να ισχύει $y_1^1 > y_1^2$ και δύο τιμές για το q έτσι ώστε να ισχύει $q_1 > q_2$. Ορίζεται

$$\delta(y_1) = u_n(\hat{\boldsymbol{z}}_n^1(q_1, y_1), q_1) - u_n(\hat{\boldsymbol{z}}_n^1(q_2, y_1), q_2)$$

Για να είναι η συνάρτηση $-u_n$ single crossing πρέπει να δειχθεί ότι αν $\delta(y_1^2) < 0$ τότε $\delta(y_1^1) < 0$ και αν $\delta(y_1^2) \leq 0$ τότε $\delta(y_1^1) \leq 0$.
Έστω ότι ισχύει $\delta(y_1^2) \leq 0$. Θα εξεταστούν οι εξής περιπτώσεις:

1) Αν ισχύει ότι $q_2 \geq a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$ ή αν ισχύει ότι $q_2 < a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i < q_1$ και $y_1^2 + q_2 \geq a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$ ταυτόχρονα τότε οι $u_n(\hat{\boldsymbol{z}}_n^1(q_1, y_1), q_1)$, $u_n(\hat{\boldsymbol{z}}_n^1(q_2, y_1), q_2)$ δεν εξαρτώνται με το y_1 και το αποτέλεσμα ισχύει.

2) Αν ισχύει ότι $q_2 < a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i < q_1$ και $y_1^1 + q_2 \leq a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$ τότε η $u_n(\hat{\boldsymbol{z}}_n^1(q_1, y_1), q_1)$ δεν εξαρτάται με το y_1 και το αποτέλεσμα ισχύει επειδή η $u_n(\hat{\boldsymbol{z}}_n^1(q_2, y_1), q_2)$ είναι αύξουσα ως προς το y_1 για $y_1^2 + q_2 < y_1^1 + q_2 \leq a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$.

3) Αν ισχύει ότι $q_2 < a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i < q_1$ και $y_1^1 + q_2 > a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i > y_1^2 + q_2$ τότε το αποτέλεσμα ισχύει επειδή $a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i - q_2$ είναι το μέγιστο σημείο της κοίλης συνάρτησης

$$-(s+h)y_1 + arE\min\{q_2 + \sum_{i=1}^{l-1} y_i, D\} - amE(q_2 + \sum_{i=1}^{l-1} y_i - D)^+$$

ως προς το y_1.

4) Αν ισχύει ότι $q_2 < q_1 \leq a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$:

Υπόθεση 1: Αν $y_1^2 + q_2 \geq a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$ τότε για y_1^1 και y_1^2, η $\delta(y_1)$ είναι ανεξάρτητη από το y_1. Άρα το αποτέλεσμα ισχύει.

Υπόθεση 2: Αν $y_1^2 + q_2 < a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i < y_1^1 + q_1$ τότε

$$\delta(y_1^2) = -ac(q_1 - q_2) + aE[m(y_1^2 - (D - q_2 - \sum_{i=2}^{l-1} y_i)^+)^+$$

$$-m(y_1^2 - (D - q_1 - \sum_{i=2}^{l-1} y_i)^+)^+$$

$$+r\min\{q_1 + y_1^2 + \sum_{i=2}^{l-1} y_i, D\}$$

$$-r\min\{q_2 + y_1^2 + \sum_{i=2}^{l-1} y_i, D\}$$

$$+\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q_1, \boldsymbol{y}, D)) - \pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q_2, \boldsymbol{y}, D))]$$

αν $y_1^2 + q_1 \leq a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$

$$= -ac(q_1 - q_2) - (s + h)(a - q_1 - y_1^2 - \sum_{i=2}^{l-1} y_i)$$

$$aE[r\min\{a, D\} - r\min\{q_2 + y_1^2 + \sum_{i=2}^{l-1} y_i, D\}$$

$$-m(a - D)^+ + m(q_2 + y_1^2 + \sum_{i=2}^{l-1} y_i - D)^+$$

$$+m(q_1 + \sum_{i=2}^{l-1} y_i - D)^+ - m(q_2 + \sum_{i=2}^{l-1} y_i - D)^+$$

$$+\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q_1, \boldsymbol{y}, D)) - \pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q_2, \boldsymbol{y}, D))]$$

αν $y_1^2 + q_1 > a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$ και

$$\delta(y_1^1) = -ac(q_1 - q_2) - (s + h)(a - q_1 - y_1^1 - \sum_{i=2}^{l-1} y_i)$$

$$aE[r\min\{a, D\} - r\min\{q_2 + y_1^1 + \sum_{i=2}^{l-1} y_i, D\}$$

$$-m(a-D)^{+}+m(q_2+y_1^1+\sum_{i=2}^{l-1}y_i-D)^{+}$$

$$+m(q_1+\sum_{i=2}^{l-1}y_i-D)^{+}-m(q_2+\sum_{i=2}^{l-1}y_i-D)^{+}$$

$$+\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q_1,\boldsymbol{y},D))-\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q_2,\boldsymbol{y},D))]$$

αν $y_1^2+q_1\leq a-\sum_{i=2}^{l-1}y_i$

$$=-ac(q_1-q_2)-(s+h)(q_2-q_1)$$

$$aE[m(q_1+\sum_{i=2}^{l-1}y_i-D)^{+}-m(q_2+\sum_{i=2}^{l-1}y_i-D)^{+}$$

$$+\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q_1,\boldsymbol{y},D))-\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q_2,\boldsymbol{y},D))]$$

αν $y_1^2+q_1>a-\sum_{i=2}^{l-1}y_i$
Εξετάζονται οι ακόλουθες περιπτώσεις:
Αν $y_1^2+q_1>a-\sum_{i=2}^{l-1}y_i$ τότε $\delta(y_1^2)\leq 0$ και εξετάζονται τα παρακάτω.
Όταν $y_1^1+q_2\leq a-\sum_{i=2}^{l-1}y_i$ ισχύει ότι

$$\delta(y_1^1)=\delta(y_1^2)+(s+h)(y_1^1-y_1^2)$$

$$+aE[r\min\{q_2+y_1^2+\sum_{i=2}^{l-1}y_i,D\}$$

$$-r\min\{q_2+y_1^1+\sum_{i=2}^{l-1}y_i,D\}$$

$$+m(y_1^1+q_2+\sum_{i=2}^{l-1}y_i-D)^{+}-m(y_1^2+q_2+\sum_{i=2}^{l-1}y_i-D)^{+}]\leq 0$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή η συνάρτηση

$$-(s+h)y_1+arE\min\{q_2+y_1+\sum_{i=2}^{l-1}y_i,D\}$$

$$-amE(y_1+q_2+\sum_{i=2}^{l-1}y_i-D)^{+}$$

είναι κοίλη ως προς το y_1, έχοντας το μέγιστο σημείο στο $y_1 = a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i - q_2$ και $y_1^2 < y_1^1 \leq a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i - q_2$.
Όταν $y_1^1 + q_2 > a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$ ισχύει ότι

$$\delta(y_1^1) = \delta(y_1^2) + (s+h)(a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i - q_2 - y_1^2)$$

$$+arE[\min\{q_2 + y_1^2 + \sum_{i=2}^{l-1} y_i, D\} - r\min\{a, D\}$$

$$+m(a-D)^+ - m(y_1^2 + q_2 + \sum_{i=2}^{l-1} y_i - D)^+] \leq 0$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή $a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i - q_2$ είναι το μέγιστο για την κοίλη συνάρτηση

$$-(s+h)y_1 + arE\min\{q_2 + y_1 + \sum_{i=2}^{l-1} y_i, D\}$$

$$-amE(y_1 + q_2 + \sum_{i=2}^{l-1} y_i - D)^+$$

ως προς το y_1 και $y_1^2 \leq a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i - q_2$.
Αν $y_1^2 + q_1 \leq a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$ τότε $\delta(y_1^2) \leq 0$ και εξετάζονται τα παρακάτω.
Όταν $y_1^1 + q_2 \leq a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i$ ισχύει ότι

$$\delta(y_1^1) = \delta(y_1^2) + f(q_2, y_1^2) - f(q_1, y_1^2) - f(q_2, y_1^1)$$

$$\leq f(q_2, y_1^2) - f(q_1, y_1^2) - f(q_2, y_1^1)$$

$$f(q_2, a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i - q_1) - f(q_1, a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i - q_1)$$

$$-f(q_2, a - \sum_{i=2}^{l-1} y_i - q_1) = 0$$

όπου

$$f(q, y_1) = (s+h)(a - q - \sum_{i=2}^{l-1} y_i - y_1)$$

$$aE[r\min\{q+y_1+\sum_{i=2}^{l-1}y_i,D\}-m(q+y_1+\sum_{i=2}^{l-1}y_i-D)^+]$$
$$-aE[r\min\{a,D\}-m(a-D)^+]$$

Η δεύτερη ανισότητα ισχύει επειδή

$$\frac{\partial[f(q_2,y_1^2)-f(q_1,y_1^2)]}{\partial y_1^2}$$

$$=a(r+m)[\Phi(y_1^2+q_1+\sum_{i=2}^{l-1}y_i)-\Phi(y_1^2+q_2+\sum_{i=2}^{l-1}y_i)]\geq 0$$

και

$$\frac{\partial f(q_2,y_1^1)}{\partial y_1^1}=a(r+m)[\Phi(a)-\Phi(y_1^1+q_2+\sum_{i=2}^{l-1}y_i)]\geq 0$$

Όταν $y_1^1+q_2>a-\sum_{i=2}^{l-1}y_i$ τότε

$$\delta(y_1^1)=\delta(y_1^2)-(s+h)(q_2-q_1)$$

$$-aE[m(y_1^2+q_2+\sum_{i=2}^{l-1}y_i-D)^+-m(y_1^2+q_1+\sum_{i=2}^{l-1}y_i-D)^+$$

$$+r\min\{y_1^2+q_1+\sum_{i=2}^{l-1}y_i,D\}-r\min\{y_1^2+q_2+\sum_{i=2}^{l-1}y_i,D\}]$$
$$\leq 0$$

επειδή η συνάρτηση

$$-(s+h)q+arE\min\{q+y_1^2+\sum_{i=2}^{l-1}y_i,D\}$$

$$-amE(q+y_1^2+\sum_{i=2}^{l-1}y_i-D)^+$$

είναι κοίλη ως προς το q.
Υπόθεση 3: Αν $y_1^1+q_1\leq a-\sum_{i=2}^{l-1}y_i$ τότε

$$\delta(y_1)=aE[r\min\{q_1+\sum_{i=1}^{l-1}y_i,D\}-r\min\{q_2+\sum_{i=1}^{l-1}y_i,D\}$$

$$-m(y_1 - (D - q_1 - \sum_{i=2}^{l-1} y_i)^+)^+$$

$$m(y_1 - (D - q_2 - \sum_{i=2}^{l-1} y_i)^+)^+$$

$$+\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q_1, \boldsymbol{y}, D)) - \pi_{n+1}(\boldsymbol{y}(q_2, \boldsymbol{y}, D))]$$

$$-ac(q_1 - q_2)$$

$$\delta'(y_1) = (ar + m)[\Phi(q_2 + \sum_{i=1}^{l-1} y_i) - \Phi(q_1 + \sum_{i=1}^{l-1} y_i) < 0$$

Άρα η $\delta(y)$ είναι φθίνουσα ως προς το y και το αποτέλεσμα ισχύει.

Όμοια αν $\delta(y_1^2) < 0$ τότε $\delta(y_1^1) < 0$.

Έστω

$$\hat{q}_n(y_1, ..., y_{l-1}) = \arg\max_{q \geq 0} u_n(\hat{\boldsymbol{z}}_n^1, q)$$

Τότε η $\hat{q}_n$ είναι φθίνουσα ως προς το y_1 (ισχύει από Milgrom and Shannon 1994). Η $q_n^*(\boldsymbol{y}) = \hat{q}_n(y_1, z_{n,2}^*, ..., z_{n,l-1}^*)$ είναι φθίνουσα ως προς το y_1 επειδή το $z_{n,i}^*$ είναι ανεξάρτητο από το y_1 για $i \geq 2$.

(ii) Απόδειξη Θεώρημα 4.3.4.

(iii) Ισχύει ότι αν $y_i \geq L_{n,i}$ για $i \geq 2$ τότε $z_{n,1}^* = 0$ (Θεώρημα 4.3.3). Άρα

$$\max_{0 \leq z_1 \leq y_1, q \geq 0} u_n(\boldsymbol{z}^1, q) = \max_{q \geq 0} u_n((0, y_2, ..., y_{l-1}, q)$$

Θα αποδειχθεί ότι $q = 0$ είναι βέλτιστο για το παραπάνω πρόβλημα. Ισχύει ότι $u_n((0, y_2, ..., y_{l-1}, q)$ είναι quasi-concave ως προς q (Θεώρημα 4.3.4). Ορίζεται το σύνολο

$$\Omega = \{y_i : \left.\frac{\partial u_n((0, y_2, ..., y_{l-1}, q)}{\partial q}\right|_{q=0} \leq 0\}$$

Έστω ότι $y_i \geq L_{n,i}$ τότε

$$\left.\frac{\partial u_n((0, y_2, ..., y_{l-1}, q)}{\partial q}\right|_{q=0}$$

$$\leq -ac + ar(1 - \Phi(y_2 + ... + y_{l-1})) + a(ac - h)\Phi(y_2 + ... + y_{l-1})$$

$$\leq -(s + h) + ar(1 - \Phi(y_i + ... + y_{l-1})) + as\Phi(y_i + ... + y_{l-1})$$

$$\leq -(s+h) + ar(1-\Phi(L_{n,i}+...+y_{l-1})) + as\Phi(L_{n,i}+...+y_{l-1})$$
$$\leq \left.\frac{\partial u_n((0,...,y_i,...,y_{l-1},q)}{\partial y_i}\right|_{y_i=L_{n,i}} \leq 0$$

Άρα $y_i \epsilon \Omega$.

□

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.5, η ποσότητα παραγγελίας είναι μονότονη ως προς το y_1 , κάτι που δεν ισχύει ως προς y_i όταν $i>1$ (Πίνακας 4.3). Αν y_1 είναι μεγαλύτερο από το ανώτερο όριο και αν y_i για $2 \leq i \leq l-1$ είναι μεγαλύτερο από το κατώτερο όριο τότε δεν γίνεται καμία παραγγελία.

4.4 Ευρετικές μέθοδοι

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστούν δύο ευρετικές μέθοδοι για την λύση του υπό μελέτη προβλήματος.

Με την βοήθεια του Λήμματος 4.3.1, προσεγγίζεται η συνάρτηση $\pi_{n+1}(\boldsymbol{y})$ με τη σχέση $\pi_{n+1}(\boldsymbol{y}) = \dfrac{s+ac-h}{2}\sum_{i=1}^{l-1} y_i$.

Στην πρώτη ευρετική (αναφέρεται ως ΜΗ2), κατά τον υπολογισμό της ποσότητας παραγγελίας και της ποσότητας που θα διατεθεί με τιμή εκκαθάρισης, όλα τα διαθέσιμα αποθέματα αντιμετωπίζονται σαν να λήγουν σε μία περίοδο. Έστω $y = \sum_{i=1}^{l-1} y_i$, τότε το μοντέλο γίνεται ένα πρόβλημα μιας περιόδου:

$$\max_{0\leq z\leq y, q\geq 0}[-(s+h)z - acq +$$

$$aE(r\min(q+z,D) - m(z-(D-q)^+)^+ + \frac{s+ac-h}{2}(q-D)^+)]$$

Ουσιαστικά, η ευρετική ΜΗ2 προσεγγίζει το αρχικό πρόβλημα αντιμετωπίζοντας το προϊόν σαν να είχε διάρκεια ζωής δύο περιόδων.
Στην δεύτερη ευρετική (αναφέρεται ως ΜΗ3), εκτός από το συνολικό επίπεδο αποθέματος y, πρέπει επίσης να διατηρηθεί το y_1. Τότε, το μοντέλο γίνεται:

$$\max_{z_1,z,q}[-(s+h)(z_1+z) - acq +$$

$$aE(r\min(q+z_1+z,D) - m(z_1-(D-q-z)^+)^+ + \frac{s+ac-h}{2}(q+z-D)^+)]$$

με περιορισμούς: $0 \leq z_1 \leq y, 0 \leq z \leq y - y_1, q \geq 0$
Η ευρετική ΜΗ3 βασίζεται σε μια προσέγγιση τριών περιόδων ζωής του αρχικού προβλήματος.

Η απόδοση, αυτών των ευρετικών μεθόδων μετριέται με την ακόλουθη έκφραση:

$$Error = \frac{\pi_1(\mathbf{0}) - \pi_1^i(\mathbf{0})}{\pi_1(\mathbf{0})} * 100\%, i\epsilon\{MH2, MH3\}$$

Στο επόμενο παράδειγμα, το οποίο βρίσκεται στο Li et al. (2016), θα αποδειχθεί αριθμητικά ποια ευρετική πολιτική είναι πιο κοντά στο πραγματικό αποτέλεσμα του μοντέλου.

Παράδειγμα 4.4.1. *Έστω* $T = 10, l\epsilon\{3, 4, 5, 6\}, r\epsilon\{5, 10\}, m\epsilon\{0.2, 0.5, 0.9\}$, $h = 0, 2, c = 1, s = 0.4, a = 0.95$. *Η ζήτηση ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με μέση τιμή* $\mu = 5$ *και συντελεστές διακύμανσης* $cv\epsilon\{0.2, 0.3, 0.4\}$.

Στους Πίνακες 4.4-4.5 παρουσιάζεται η απόδοση των δυο μεθόδων. Παρατηρείται, λοιπόν, ότι η ευρετική ΜΗ3 αποδίδει καλύτερα από την ευρετική ΜΗ2, αφού το κέρδος της έχει διαφορά 0.7% από το πραγματικό μέγιστο κέρδος. Όταν η διάρκεια ζωής γίνεται μεγαλύτερη, δεν υπάρχει καλή απόδοση και στις δύο ευρετικές μεθόδους. Αυτό είναι αναμενόμενο, διότι και στις δύο περιπτώσεις, όσο μεγαλύτερη είναι η διάρκεια ζωής, τόσο λιγότερο ακριβής είναι η προσέγγιση της εναπομένουσας διάρκειας ζωής. Και οι δύο ευρετικές μέθοδοι αποδίδουν καλύτερα όταν η μεταβλητότητα της ζήτησης είναι μικρή. Τέλος, η ευρετική ΜΗ2 αποδίδει καλύτερα όταν το r είναι υψηλό.

	$r=5$				$r=10$			
n	3	4	5	6	3	4	5	6
$cv=0.2$								
$m=0.2$	0.51	1.22	1.48	1.77	0.29	0.58	1.11	1.31
$m=0.5$	1.20	1.33	1.70	2.01	0.58	0.77	1.22	1.35
$m=0.9$	1.38	1.45	1.75	2.12	0.65	1.02	1.25	1.52
$cv=0.3$								
$m=0.2$	0.98	1.46	1.82	2.37	0.54	0.64	1.21	1.87
$m=0.5$	1.89	2.42	3.56	3.82	1.09	1.84	2.03	2.34
$m=0.9$	2.65	3.71	4.16	4.29	1.38	2.00	2.17	2.43
$cv=0.4$								
$m=0.2$	1.83	2.56	3.02	3.32	1.11	1.54	1.75	2.13
$m=0.5$	2.80	3.46	3.88	4.53	1.70	2.05	2.32	2.33
$m=0.9$	3.75	4.81	5.40	5.82	1.73	2.20	2.49	2.76
$cv=0.5$								
$m=0.2$	2.60	3.32	3.37	4.01	1.28	1.60	3.11	3.62
$m=0.5$	3.37	4.19	4.84	5.90	1.80	1.89	3.11	3.96
$m=0.9$	4.23	5.54	6.16	6.85	2.18	2.77	3.13	4.04

Πίνακας 4.4: Η απόδοση της ΜΗ2

	$r = 5$				$r = 10$			
n	3	4	5	6	3	4	5	6
$cv = 0.2$								
$m = 0.2$	0.08	0.11	0.12	0.21	0.01	0.01	0.05	0.15
$m = 0.5$	0.05	0.11	0.11	0.15	0.01	0.01	0.07	0.12
$m = 0.9$	0.06	0.15	0.16	0.14	0.01	0.01	0.07	0.11
$cv = 0.3$								
$m = 0.2$	0.04	0.05	0.15	0.13	0.03	0.11	0.14	0.19
$m = 0.5$	0.05	0.03	0.11	0.09	0.03	0.15	0.15	0.13
$m = 0.9$	0.05	0.05	0.15	0.09	0.07	0.11	0.13	0.12
$cv = 0.4$								
$m = 0.2$	0.08	0.13	0.14	0.17	0.10	0.17	0.20	0.23
$m = 0.5$	0.02	0.13	0.18	0.21	0.09	0.15	0.20	0.22
$m = 0.9$	0.04	0.15	0.18	0.26	0.06	0.13	0.22	0.22
$cv = 0.5$								
$m = 0.2$	0.18	0.20	0.55	0.05	0.14	017	0.45	0.52
$m = 0.5$	0.20	0.25	0.43	0.59	0.11	0.15	0.32	0.43
$m = 0.9$	0.23	0.38	0.48	0.58	0.12	0.21	0.41	0.52

Πίνακας 4.5: Η απόδοση της MH3

4.5 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάστηκε ένα μοντέλο διαχείρισης αποθεμάτων για προϊόντα με χρόνο ζωής l περιόδων, όπου σε κάθε περίοδο αποφασίζονται η ποσότητα παραγγελίας και η ποσότητα από το απόθεμα που θα διατεθεί με τιμή εκκαθάρισης. Από την ανάλυση, προκύπτει ότι το απόθεμα με εναπομένουσα διάρκεια ζωής μιας περιόδου χρήζει ιδιαίτερης προσοχής, αφού αυτό μπορεί να διατεθεί είτε με κανονική τιμή είτε με τιμή εκκαθάρισης. Αν δεν διατεθεί, αυτό θα αποσυρθεί. Έτσι, από πρακτικής άποψης, φαίνεται σημαντική η ακριβής καταγραφή του αποθέματος με εναπομένουσα διάρκειας ζωής μιας περιόδου και προτείνεται η αξιοποίηση των πληροφοριών αυτών στον προσδιορισμό της βέλτιστης πολιτικής διαχείρισης αποθεμάτων.

Επιλογος-Θεματα για περαιτερω ερευνα

Στη διατριβή αυτή παρουσιάστηκαν μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων, περιοδικής επιθεώρησης, για προϊόντα τα οποία έχουν συγκεκριμένο χρόνο ζωής. Η ημερομηνία λήξης του προϊόντος δημιουργεί επιπλέον δυσκολίες στη διαχείριση των αποθεμάτων καθώς απαιτείται η θεώρηση και άλλων τρόπων για την αποτελεσματική διαχείριση τους πέραν του προσδιορισμού του τρόπου αναπλήρωσης του. Στους τρόπους αυτούς περιλαμβάνονται (1) η υποκατάσταση μεταξύ προϊόντων που βρίσκονται σε διαφορετική φάση στον κύκλο ζωής τους, (2) η κατάλληλη τιμολόγηση, (3) ο τρόπος διάθεσης στους πελάτες και (4) ο καθορισμός του τρόπου απόσυρσης μέρους του αποθέματος (ποσότητας και με κατάλληλη τιμή). Οι τρόποι αυτοί παρουσιάζονται στα 1-4 κεφάλαια της διατριβής. Μολονότι η διαχείριση των αποθεμάτων προϊόντων με συγκεκριμένο χρόνο ζωής δεν είναι ένα καινούργιο ζήτημα, εντούτοις παραμένει επίκαιρο εξαιτίας της ανάγκης περιορισμού αφενός του κόστους των αποθεμάτων που βαίνει συνεχώς αυξανόμενο αφετέρου της ανάγκης περιορισμού σπατάλης των φυσικών πόρων. Σε αυτή την κατεύθυνση θέματα για περαιτέρω έρευνα θα ήταν:

- Η διερεύνηση τρόπων παράτασης του χρόνου ζωής των προϊόντων μέσω κατάλληλων παρεμβάσεων στον τρόπο διατήρησης τους.
- Η χρήση μεθόδων ιχνηλάτισης για τον προσδιορισμό της στιγμής απόσυρσης των προϊόντων και η διερεύνηση τρόπων αποδοτικής διάθεσης σε πελάτες ή οργανισμούς προς όφελος και των δύο μερών.
- Η διερεύνηση τρόπων συνεργασίας μεταξύ των μελών της αλυσίδας εφοδιασμού, όπως η διαχείριση αποθεμάτων από τον προμηθευτή.

Βιβλιογραφία

[1] M. Bakker, J. Riezebos, and R. H. Teunter. Review of inventory systems with deterioration since 2001. *European journal of operational research*, 221(2):275–284, 2012.

[2] B. Deniz, A. Scheller-Wolf, and I. Karaesmen. Managing inventories of perishable goods: The effect of substitution. Technical report, GSIA Working Paper# 2004-E55. Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA, 2004.

[3] B. Deniz, I. Karaesmen, and A. Scheller-Wolf. Managing perishables with substitution: Inventory issuance and replenishment heuristics. *Manufacturing & Service Operations Management*, 12(2):319–329, 2010.

[4] B. Deniz, I. Karaesmen, and A. Scheller-Wolf. Electronic companion to managing perishables with substitution: Inventory issuance and replenishment heuristics. `https://pubsonline.informs.org/doi/suppl/10.1287/msom.1090.0276/suppl_file/msom.1090.0276-sm-managing_perishables_with.pdf`, 2010.

[5] B. Deniz, I. Karaesmen, and A. Scheller-Wolf. A comparison of inventory policies for perishable goods. *Operations Research Letters*, 48(6):805–810, 2020.

[6] C. Derman and M. Klein. Inventory depletion management. *Management Science*, 4(4):450–456, 1958.

[7] R. Haijema. Optimal issuing of perishables with a short fixed shelf life. In *International Conference on Computational Logistics*, pages 160–169. Springer, 2011.

[8] R. Haijema. Optimal ordering, issuance and disposal policies for inventory management of perishable products. *International Journal of Production Economics*, 157:158–169, 2014.

[9] R. Haijema and S. Minner. Improved ordering of perishables: The value of stock-age information. *International Journal of Production Economics*, 209:316–324, 2019.

[10] L. Janssen, T. Claus, and J. Sauer. Literature review of deteriorating inventory models by key topics from 2012 to 2015. *International Journal of Production Economics*, 182:86–112, 2016.

[11] I. Z. Karaesmen, A. Scheller-Wolf, and B. Deniz. Managing perishable and aging inventories: review and future research directions. *Planning production and inventories in the extended enterprise*, pages 393–436, 2011.

[12] Q. Li and P. Yu. Online appendix. `https://pubsonline.informs.org/doi/suppl/10.1287/msom.2014.0488/suppl_file/msom.2014.0488-sm_mm_ec_feb_5_2014.pdf`.

[13] Q. Li, P. Yu, and X. Wu. Online appendix. `https://pubsonline.informs.org/doi/suppl/10.1287/opre.2016.1523/suppl_file/opre.2016.1523-sm.pdf`.

[14] Q. Li, P. Yu, and X. Wu. Managing perishable inventories in retailing: Replenishment, clearance sales, and segregation. *Operations Research*, 64 (6):1270–1284, 2016.

[15] Y. Li, A. Lim, and B. Rodrigues. Note—pricing and inventory control for a perishable product. *Manufacturing & Service Operations Management*, 11(3):538–542, 2009.

[16] G. Martin. An optimal decision model for disposal of perishable inventories. *International journal of production research*, 24(1):73–79, 1986.

[17] P. Milgrom and C. Shannon. Monotone comparative statics. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 157–180, 1994.

[18] S. Nahmias. Perishable inventory theory: A review. *Operations research*, 30(4):680–708, 1982.

[19] S. Nahmias. *Perishable inventory systems*, volume 160. Springer Science & Business Media, 2011.

[20] W. P. Pierskalla and C. D. Roach. Optimal issuing policies for perishable inventory. *Management Science*, 18(11):603–614, 1972.

[21] A. Sainathan. Pricing and replenishment of competing perishable product variants under dynamic demand substitution. *Production and Operations Management*, 22(5):1157–1181, 2013.

[22] M. Tsiros and C. M. Heilman. The effect of expiration dates and perceived risk on purchasing behavior in grocery store perishable categories. *Journal of marketing*, 69(2):114–129, 2005.

[23] J. G. van der Vorst, A. J. Beulens, W. De Wit, and P. van Beek. Supply chain management in food chains: Improving performance by reducing uncertainty. *International Transactions in Operational Research*, 5(6): 487–499, 1998.

[24] K. van Donselaar, T. Van Woensel, R. Broekmeulen, and J. Fransoo. Inventory control of perishables in supermarkets. *International journal of production economics*, 104(2):462–472, 2006.

[25] A. F. Veinott. *Optimal Ordering, Issuing, and Disposal of Inventory with Known Demand*. PhD thesis, Columbia University, 1960.