ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
Τμημα Μαθηματικων

Αρτέμιος Τσιάμης

Χωροι Hardy

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2022

UNIVERSITY OF IOANNINA
Department of Mathematics

Artemios Tsiamis

Hardy Spaces

Master's Thesis

Ioannina, 2022

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα

Μαθηματικά (Ανάλυση-Άλγεβρα-Γεωμετρία)

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 13/10/2022 από την εξεταστική επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
Ελευθέριος Νικολιδάκης (Επιβλέπων)	Επίκουρος Καθηγητής
Χρήστος Σαρόγλου	Επίκουρος Καθηγητής
Ανδρέας Τόλιας	Επίκουρος Καθηγητής

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

"Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή."

Αρτέμιος Τσιάμης

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Ελευθέριο Νικολιδάκη για την καθοδήγηση και την υποστήριξη κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές Χρήστο Σαρόγλου και Ανδρέα Τόλια για τη συμμετοχή τους στην επιτροπή κρίσης της μεταπτυχιακής διατριβής.

Περιληψη

Το αντικείμενο αυτής της μεταπτυχιακής διατριβής είναι η μελέτη των χώρων Hardy στο μοναδιαίο δίσκο. Αρχικά παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της θεωρίας των αρμονικών συναρτήσεων και της Ανάλυσης Fourier στο μοναδιαίο δίσκο. Επίσης, εισάγεται η έννοια της υποαρμονικής συνάρτησης και αποδεικνύεται το Θεώρημα Κυρτότητας του Hardy. Στη συνέχεια εισάγεται η έννοια της προσεγγιστικής μονάδας και αποδεικνύονται κάποια γενικά αποτελέσματα σχετικά με αυτές. Έπειτα εισάγουμε τους χώρους Hardy στο μοναδιαίο δίσκο και μελετάμε κάποια βασικά αποτελέσματα σχετικά με αυτούς. Στο τέλος, παρουσιάζουμε την απόδειξη του Wolff για το διάσημο Θεώρημα Corona.

Abstract

The subject of this master thesis is the study of Hardy Spaces in the unit disc. At first the basic notions of the theory of harmonic functions and Fourier Analysis in the unit disc are presented. Also, the notion of subharmonic function is introduced and the Convexity Theorem of Hardy is proven. In continue the notion of approximate identity is introduced and some general results concernig them are proven. Afterwards we introduce the Hardy spaces in the unit disc and study some basic results about them. At the end, we give Wolff's proof of the famous Corona Theorem.

Περιεχόμενα

Εισαγωγη

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η παρουσίαση της βασικής θεωρίας των χώρων Hardy στον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο $\mathbb{D}$. Υπάρχουν δύο κλάσεις χώρων Hardy στο $\mathbb{D}$. Αυτή των αρμονικών συναρτήσεων την οποία συμβολίζουμε με $h^p(\mathbb{D})$ και η κλάση των ολόμορφων συναρτήσεων την οποία συμβολίζουμε με $H^p(\mathbb{D})$.

Στο πρώτο κεφάλαιο λοιπόν θα ξεκινήσουμε παρουσιάζοντας τη βασική θεωρία των αρμονικών συναρτήσεων σε ένα domain του $\mathbb{C}$, δηλαδή συναρτήσεων τάξης C^2 που ικανοποιούν την εξίσωση του Laplace, μιας και αυτές εμφανίζονται στον ορισμό της κλάσης $h^p(\mathbb{D})$. Επίσης, θα παρουσιάσουμε κάποια βασική θεωρία της Ανάλυσης Fourier. Κυρίως για τα επόμενα κεφάλαια θα χρειαστούμε τους ορισμούς των συνετελεστών Fourier για συναρτήσεις του $L^1(\mathbb{T})$ και για μιγαδικά Borel μέτρα στο μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{T}$ καθώς και κάποιες βασικές ιδιότητες αυτών. Θα κλείσουμε το πρώτο κεφάλαιο με την απόδειξη του Θεωρήματος Κυρτότητας του Hardy το οποίο θεωρείται ως η αφετηρία της θεωρίας των χώρων Hardy. Σύμφωνα με το Θεώρημα αυτό η συνάρτηση $\log(\|F_r\|_p)$, $0 < p < \infty$ είναι μία αύξουσα κυρτή συνάρτηση τύπου $\log r$, για F ολόμορφη συνάρτηση στο δίσκο $D_R = \{z : |z| < R\}$, όπου $R > 0$.

Στο δεύτερο κεφάλαιο ξεκινάμε εισάγοντας τα ολοκληρώματα Poisson για συναρτήσεις του $L^1(\mathbb{T})$ και στη συνέχεια και για μιγαδικά Borel μέτρα στο $\mathbb{T}$ και αποδεικνύουμε κάποιες βασικές σχέσεις από τις οποίες δίνονται αυτά και οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στη μετέπειτα θεωρία. Στη συνέχεια περνάμε στην έννοια της προσεγγιστικής μονάδας στο $\mathbb{T}$ η οποία αποτελεί την κεντρική έννοια του κεφαλαίου. Θα αποδείξουμε κάποια γενικά αποτελέσματα σχετικά με αυτές, αλλά κυρίως για τη θεωρία των χώρων Hardy παρακάτω μας ενδιαφέρουν τα πορίσματα τους. Για παράδειγμα, από το Πόρισμα 2.18 έχουμε ότι το ολοκλήρωμα Poisson ενός $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ ικανοποιεί την ισότητα

$$\|\mu\| = \sup_{0\le r<1} \|U_r\|_1 = \lim_{r\to 1} \|U_r\|_1.$$

Από αυτό, μόλις εισάγουμε τους χώρους Hardy, άμεσα θα συμπεράνουμε ότι το ολοκλήρωμα Poisson του μ είναι στοιχείο του $h^1(\mathbb{D})$. Αντίστοιχα ισχύει ότι το ολοκλήρωμα Poisson μιας συνάρτησης του $L^p(\mathbb{T}), 1 \le p \le \infty$ είναι στοιχείο του $h^p(\mathbb{D})$. (βλ. Θεώρημα 3.4)

Στο τρίτο κεφάλαιο αφού αποδείξουμε πρώτα ένα αποτέλεσμα για αναπαράσταση αρμονικών συναρτήσεων μέσω σειρών θα περάσουμε στη συνέχεια στον ορισμό των χώρων Hardy. Η κλάση $h^p(\mathbb{D})$ ορίζεται ως το σύνολο των αρμονικών συναρτήσεων U στο $\mathbb{D}$ ώστε $\|U\|_p < \infty$, $p \in (0, +\infty]$, όπου

$$\|U\|_p = \sup_{0\le r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |U(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p}, \text{ αν } p \in (0, +\infty)$$

και

$$\|U\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |U(z)|, \text{ αν } p = +\infty.$$

Στη συνέχεια θα περάσουμε στην απόδειξη κάποιων πολύ βασικών θεωρημάτων αναπαράστασης για τους χώρους $h^p(\mathbb{D})$ μέσω του ολοκληρώματος Poisson. Στα θεωρήματα αυτά θα μελετήσουμε το αντίστροφο του Θεωρήματος 3.4. Δηλαδή, ξεκινώντας με μία αρμονική συνάρτηση στην κλάση $h^p(\mathbb{D})$ θα δείξουμε ότι μπορεί να αναπαρασταθεί ως η συνέλιξη του πυρήνα Poisson με κατάλληλη συνάρτηση ή μιγαδικό Borel μέτρο στο $\mathbb{T}$. Για παράδειγμα, στο Θεώρημα 3.6 αποδεικνύουμε ότι για $U \in h^\infty(\mathbb{D})$ υπάρχει μοναδική $u \in L^\infty(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(e^{i(\theta-t)}) u(e^{it}) \, dt$$

και $\|U\|_\infty = \|u\|_\infty$. Αντίστοιχα αποτελέσματα αποδεικνύονται στα Θεωρήματα 3.7 και 3.9 για τις κλάσεις $h^p(\mathbb{D}), 1 < p < \infty$ και για την h^1 αντίστοιχα.

Επίσης, κάποια από τα βασικά θέματα του κεφαλαίου αποτελούν η μελέτη των ακτινικών ορίων για συναρτήσεις του $h^p(\mathbb{D}), 1 \le p \le \infty$, όπου θα αποδείξουμε τα ολοκληρώματα Poisson μιας συνάρτησης του $L^1(\mathbb{T})$ και ενός $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ έχουν ακτινικά όρια σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. Τότε, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα αυτά σε συνδυασμό με τα θεωρήματα αναπαράστασης, άμεσα θα συμπεράνουμε ότι οι συναρτήσεις στην κλάση $h^p(\mathbb{D}), 1 \le p \le \infty$, έχουν ακτινικά όρια σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

Το επόμενο θέμα στη συνέχεια θα είναι ο ορισμός των χώρων Hardy στο $\mathbb{T}$ και η παρουσίαση κάποιων θεωρημάτων αναπαράστασης για συναρτήσεις του $H^p(\mathbb{D}), 1 \leq p \leq \infty$. Σημειώνουμε ότι για τη περίπτωση $p = 1$ για τον χαρακτηρισμό των χώρων $H^1(\mathbb{D})$ που θα δοθεί (βλ. Θεώρημα 3.28) θα χρειαστούμε ένα αποτελέσμα της Θεωρίας Μέτρου το οποίο οφείλεται στους F. και M. Riesz και σύμφωνα με το οποίο κάθε αναλυτικό μέτρο (βλ. Ορισμό 3.26) είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue. (βλ. Θεώρημα 3.27) Για το Θεώρημα των F. και M. Riesz θα δοθεί μία απόδειξη με χρήση θεωρίας χώρων Hardy.

Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε διάφορα αποτελέσματα για τον χώρο Hardy $H^1(\mathbb{D})$, θα αποδείξουμε ένα Θεώρημα διάσπασης μέσω της προβολής Riesz, συγκεκριμένα ότι για $1 < p < \infty$ ισχύει

$$L^p(\mathbb{T}) = H^p(\mathbb{T}) \oplus \overline{H_0^p(\mathbb{T})},$$

και τέλος θα αποδείξουμε το Θεώρημα Κανονικής Παραγοντοποίσης. Σημειώνουμε ότι στο τελευταίο κεφάλαιο θα χρειαστούμε συγκεκριμένα ένα Λήμμα που προκύπτει από το Θεώρημα αυτό και σύμφωνα με το οποίο για $f \in H^1(\mathbb{D})$ υπάρχουν συναρτήσεις $g, h \in H^2(\mathbb{D})$ ώστε $f = gh$ και ισχύει ότι $\|f\|_1 = \|g\|_2^2 = \|h\|_2^2$.

Τέλος, στο 4ο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε έναν εναλλακτικό τρόπο απόδειξης του διάσημου Corona Theorem το οποίο μας πιστοποιεί ότι ο ανοιχτός μοναδιαίος δίσκος είναι πυκνός (στην ασθενή * τοπολογία) στο $\mathcal{M}$ (το σύνολο των πολλαπλασιαστικών συναρτησοειδών από τον $H^\infty(\mathbb{D})$ στο $\mathbb{C}$). Αναλυτικότερα, το πρόβλημα που θα μελετήσουμε είναι η περιγραφή της κλειστότητας του συνόλου $\{\delta_a : a \in \mathbb{D}\}$, όπου $\delta_a(f) = f(a)$, στην ασθενή * τοπολογία. Με άλλα λόγια, αν ταυτίσουμε το $\mathbb{D}$ με το σύνολο $\{\delta_a : a \in \mathbb{D}\}$, τι μπορούμε να πούμε για το $\mathcal{M} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, όπου $\overline{\mathbb{D}}$ είναι η κλειστότητα του $\mathbb{D}$ στην ασθενή * τοπολογία; Όπως ήδη αναφέραμε το Corona Theorem μας λέει ότι $\mathcal{M} \setminus \overline{\mathbb{D}} = \emptyset$. Το Θεώρημα αυτό αποδείχθηκε πρώτα από τον Carleson το 1962. Στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε μία εναλλακτική απόδειξη η οποία οφείλεται στον Tom Wolff. Πριν την παρουσίαση της απόδειξης όμως θα κάνουμε πρώτα μία εισαγωγή στο θέμα και θα αποδείξουμε πρώτα κάποια προκαταρκτικά αποτελέσματα τα οποία θα χρειαστούν για την απόδειξη. Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε ένα αποτέλεσμα δυϊκότητας (βλ. Θεώρημα 4.3), θα αποδείξουμε τον τύπο του Riesz (βλ. Θεώρημα 4.4) και θα κάνουμε μία σύντομη αναφορά στην εξίσωση d-bar. Επίσης, θα αποδειχθεί μία αναδιατύπωση του Θεωρήματος Corona πάνω στην οποία θα στηριχτεί η απόδειξη του Θεωρήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Προκαταρκτικα

1.1 Βασική Θεωρία Αρμονικών Συναρτήσεων

Ορισμός 1.1. *Καλούμε **domain** ένα ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.*

- Για παράδειγμα το $\mathbb{C}$ είναι ένα domain. Ένα άλλο παράδειγμα, το οποίο θα συναντήσουμε συχνά παρακάτω, αποτελεί ο ανοιχτός μοναδιαίος δίσκος $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ του οποίου το σύνορο είναι ο μοναδιαίος κύκλος $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Σημειώνουμε πως σε ό,τι ακολουθήσει θα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \text{ και } \overline{D(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

για ανοιχτούς και κλειστούς δίσκους αντίστοιχα.

Ορισμός 1.2. *Μία complex valued συνάρτηση f ορισμένη σε ένα domain D του $\mathbb{C}$ καλείται αρμονική αν είναι τάξης C^2 και ικανοποιεί την $\Delta f \equiv 0$ στο D, όπου Δ είναι η Λαπλασιανή,*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

- Σημειώνουμε ότι για τη Λαπλασιανή ισχύει η σχέση:

$$\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}},$$

όπου

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ και } \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Σημείωση 1.3. *Ισχύει ότι μία μιγαδική συνάρτηση είναι αρμονική* $\iff$ *το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος είναι πραγματικές αρμονικές συναρτήσεις.*

Πρόταση 1.4. *Αν* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *είναι μία ολόμορφη συνάρτηση σε ένα domain* D*, τότε οι συναρτήσεις* u *και* v *είναι αρμονικές στο* D.

Απόδειξη. Αφού η f είναι ολόμορφη ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y \text{ και } v_x = -u_y.$$

Τώρα, από τη Μιγαδική Ανάλυση, είναι γνωστό ότι τα πραγματικά και φανταστικά μέρη ολόμορφων συναρτήσεων έχουν μερικές παραγώγους οποιασδήποτε τάξης συνεχείς στο D.

Έτσι, παραγωγίζοντας ως προς x τις εξισώσεις $C-R$, θα έχουμε

$$u_{xx} = v_{yx} \text{ και } v_{xx} = -u_{yx}.$$

Ενω, αν τις παραγωγίσουμε ως προς y, τότε θα πάρουμε

$$u_{xy} = v_{yy} \text{ και } v_{xy} = -u_{yy}.$$

Τότε, από το Λήμμα του Schwarz, έχουμε

$$-u_{yy} = v_{xy} = v_{yx} = u_{xx} \implies u_{xx} + u_{yy} = 0$$

και

$$v_{yy} = u_{xy} = u_{yx} = -v_{xx} \implies v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Συνεπώς, οι συναρτήσεις $u(x,y)$ και $v(x,y)$ είναι αρμονικές στο domain D. □

Σημείωση 1.5. *Μία ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη σε ένα domain* D*, με βάση τη Πρόταση* 1.4 *και τη Σημείωση* 1.3*, είναι μία μιγαδική αρμονική συνάρτηση.*

Θεώρημα 1.6. *Αν* f *είναι ολόμορφη συνάρτηση σε ένα ανοιχτό σύνολο* $G \subset \mathbb{C}$*, και αν η* f *δεν έχει ρίζες στο* G*, τότε η* $\log|f|$ *είναι αρμονική συνάρτηση στο* G.

Απόδειξη. Για κάθε δίσκο $D \subset G$ υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση g στο D ώστε $f = e^g$. Αν $u = \Re g$, τότε από την Πρόταση 1.4 έχουμε ότι η u είναι αρμονική στο D. Είναι $|f| = e^u \implies \log|f| = u$. Άρα, η $\log|f|$ είναι αρμονική σε κάθε δίσκο στο G και άρα είναι αρμονική στο G. □

Ορισμός 1.7. *Έστω u μία πραγματική αρμονική συνάρτηση σε ένα domain D. Μία πραγματική συνάρτηση $v(x,y)$ θα λέγεται ότι είναι μία* ***αρμονική συζυγής*** *της u στο D αν η συνάρτηση $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ είναι ολόμορφη στο D.*

Σημείωση 1.8. *Από την ολομορφία της f, λόγω της Πρότασης 1.4, έχουμε ότι η αρμονική της συζυγής v είναι επίσης αρμονική συνάρτηση. Επίσης, αν q είναι μία άλλη αρμονική συζυγής της u στο D, τότε οι συναρτήσεις $u + iv$ και $u + iq$ είναι ολόμορφες στο D και έχουν τα ίδια πραγματικά μέρη. Άρα, διαφέρουν κατά μία σταθερά. Συνεπώς, αν η u έχει μία αρμονική συζυγή στο D, τότε αυτή είναι μοναδική εκτός μιας προσθετικής σταθεράς.*

Πρόταση 1.9. *Αν u είναι αρμονική συνάρτηση σε ένα απλά συνεκτικό domain D, τότε υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση στο D της οποίας το πραγματικό μέρος είναι η u.*

Απόδειξη. Θέτουμε

$$g(z) = u_x(z) - iu_y(z) := U(z) + iV(z), z \in D.$$

Τότε

$$U_x - V_y = u_{xx} - (-u_{yy}) = u_{xx} + u_{yy} = 0. \text{ (αφού η } u \text{ είναι αρμονική στο } D.)$$

Αφού οι μεικτές παράγωγοι της $u(z)$ είναι συνεχείς στο D, έχουμε ότι

$$U_y + V_x = (u_x)_y + (-u_y)_x = 0.$$

Επομένως, η g ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann και αφού οι U_x, U_y, V_x και V_y είναι συνεχείς έπεται ότι η g είναι ολόμορφη στο D. Έστω τώρα $z_0 \in D$ και θέτουμε

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} g(\zeta)\, d\zeta.$$

Η F είναι ολόμορφη στο D με $F'(z) = g(z) = u_x(z) - iu_y(z)$. Είναι

$$F'(z) = \frac{\partial}{\partial x}\Re F(z) - i\frac{\partial}{\partial y}\Re F(z)$$

$$\implies u_x = \frac{\partial}{\partial x}\Re F(z) \text{ και } -u_y = -\frac{\partial}{\partial y}\Re F(z).$$

Αφού λοιπόν οι $u(z)$ και $\Re F(z)$ έχουν τις ίδιες μερικές παραγώγους στο D έπεται ότι

$$\Re F(z) = u(z) + c, \text{ όπου } c \text{ είναι πραγματική σταθερά.}$$

Έτσι, η συνάρτηση $f(z) = F(z) - c$ είναι ολόμορφη στο D (αφού η F είναι) με

$$\Re f(z) = \Re F - c = u(z) - c + c = u(z).$$

□

Πρόταση 1.10. *Μία αρμονική συνάρτηση είναι άπειρες φορές διαφορίσιμη.*

Απόδειξη. Έστω u αρμονική συνάρτηση στο ανοιχτό σύνολο G και $z_0 \in G$. Έστω $r > 0$ ώστε $D(z_0, r) \subset G$. Τότε, από την Πρόταση 1.9, υπάρχει συνάρτηση f ολόμορφη στο $D(z_0, r)$ ώστε $u = \Re f$. (Ο $D(z_0, r)$ είναι απλά συνεκτικό σύνολο.) Τώρα, από τη Μιγαδική Ανάλυση, γνωρίζουμε ότι αν μία συνάρτηση είναι διαφορίσιμη σε ένα domain D, τότε είναι άπειρες φορές διαφορίσιμη σε αυτό. Έτσι, με βάση αυτό, η f είναι άπειρες φορές διαφορίσιμη στο $D(z_0, r)$. Άρα, και το πραγματικό μέρος της f, δηλαδή η u, είναι επίσης άπειρες φορές διαφορίσιμη συνάρτηση. □

Θεώρημα 1.11. *Έστω u αρμονική συνάρτηση ορισμένη στο απλά συνεκτικό domain D, $z_0 \in D$, και C ο κύκλος $|z - z_0| = r$ που βρίσκεται μέσα στο D. Τότε*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\, dt.$$

Απόδειξη. Έστω f ολόμορφη συνάρτηση στο D ώστε $u = \Re f$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Gauss έχουμε

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt.$$

Οπότε,

$$u(z_0) = \Re f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re f(z_0 + re^{it})\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\, dt.$$

□

Για την απόδειξη της επόμενης πρότασης θα χρειαστούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

► Έστω u συνεχής συνάρτηση σε ένα domain του $\mathbb{C}$. Τότε αν η u ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα:

$\forall z_0 \in D$ και $\forall r > 0$ ώστε $\overline{D(z_0, r)} \subset D$ ισχύει:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{it})\, dt,$$

τότε είναι αρμονική συνάρτηση στο D.

Πρόταση 1.12. *Έστω $\{u_n\}$ ακολουθία αρμονικών συναρτήσεων σε ένα domain D. Αν $u_n \to u$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του D, τότε η u είναι αρμονική συνάρτηση στο D.*

Απόδειξη. Έστω $z_0 \in D$ και έστω $\overline{D(z_0, r)} \subset D$. Τότε, αφού οι u_n είναι αρμονικές συναρτήσεις στο D, από το Θεώρημα 1.11 έχουμε ότι

$$u_n(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(z_0 + re^{it})\, dt. \tag{1.1}$$

Τότε, αφού $u_n \to u$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του D (και άρα και στο κύκλο κέντρου z_0 και ακτίνας $r > 0$), παίρνοντας όριο ως προς n στην (1.1) και κάνοντας αλλαγή σειράς μεταξύ ορίου και ολοκληρώματος (λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης), θα έχουμε

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{it})\, dt.$$

Επομένως, η συνάρτηση u είναι αρμονική στο D. □

Θεώρημα 1.13. *(Αρχή Μοναδικότητας) Έστω u και v αρμονικές συναρτήσεις σε ένα domain D του $\mathbb{C}$. Αν $u = v$ σε ένα μη κενό ανοιχτό υποσύνολο U του D, τότε $u = v$ στο D.*

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $v = 0$.

Θέτουμε

$$g = u_x - iu_y.$$

Η g είναι ολόμορφη στο D και $g = 0$ στο U αφού $u = 0$ στο U. Τότε, από την Αρχή Μοναδικότητας για ολόμορφες, έπεται ότι $g = 0$ στο D.

Επομένως,

$$u_x = 0 \text{ και } u_y = 0 \text{ στο } D.$$

Άρα, η u είναι σταθερή στο D και αφού $u = 0$ στο $U \subset D$ έπεται ότι η σταθερά είναι 0, δηλαδή $u = 0$ στο D. □

Συνεχίζουμε με την Αρχή Μεγίστου - Ελαχίστου Μέτρου για αρμονικές συναρτήσεις. Για την απόδειξη της θα χρειαστούμε την αντίστοιχη αρχή για ολόμορφες συναρτήσεις την οποία και υπενθυμίζουμε πρώτα:

► Έστω $f(z)$ ολόμορφη συνάρτηση στο domain D. Αν υπάρχει $z_0 \in D$ τέτοιο ώστε $|f(z)| \leq |f(z_0)|, \forall z \in D$, τότε η f είναι σταθερή στο D και επομένως ισχύει $f(z) = f(z_0), \forall z \in D$.

Θεώρημα 1.14. *(Αρχή Μεγίστου - Ελαχίστου Μέτρου) Έστω u αρμονική και μη σταθερή συνάρτηση σε ένα domain D. Τότε η u δεν έχει τοπικά μέγιστα (ή ελάχιστα) στο D.*

Απόδειξη. Έστω ότι η u έχει τοπικό μέγιστο σε κάποιο σημείο $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε

$$u(z) \leq u(z_0), \forall z \in D(z_0, r).$$

Επίσης, από την Πρόταση 1.9, υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση f στο $D(z_0, r)$ ώστε

$$u = \Re f \text{ στο } D(z_0, r).$$

Έστω $g = e^f$. Η g είναι ολόμορφη στο $D(z_0, r)$. Επίσης, για $z = x + iy$ στο $D(z_0, r)$, έχουμε

$$|g(z)| = e^u \leq e^{u(x_0, y_0)} = |g(z_0)|.$$

Επομένως, από την Αρχή Μεγίστου Μέτρου για ολόμορφες συναρτήσεις, έπεται ότι η g είναι σταθερή στο $D(z_0, r)$.

Ειδικότερα,

$$e^{f(z)} = g(z) = g(z_0) = e^{f(z_0)}.$$

Άρα,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}, \forall z \in D(z_0, r).$$

Αφού η f είναι συνεχής έπεται ότι η f είναι σταθερή στο δίσκο $D(z_0, r)$. Από το Θεώρημα Μοναδικότητας έχουμε τότε ότι η f είναι σταθερή στο D. Άρα, $u = \Re f$ σταθερή στο D, άτοπο. Συνεπώς, η u δεν έχει τοπικό μέγιστο στο D. □

Πρόταση 1.15. *Έστω u αρμονική και μη σταθερή συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$. Τότε η u δεν είναι ούτε άνω ή κατω φραγμένη.*

Απόδειξη. Υπάρχει συνάρτηση f ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$u(x, y) = \Re f(x + iy), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Έστω ότι υπάρχει σταθερά M τέτοια ώστε

$$u(x,y) \leq M, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Για $z = x + iy \in \mathbb{C}$, έστω $g(z) = e^{f(z)}$. Τότε $|g(x+iy)| = e^{u(x,y)} \leq e^M$. Άρα, η g είναι ακέραια και φραγμένη συνάρτηση. Επομένως, από το Θεώρημα του Liouville, έχουμε ότι η g είναι σταθερή. Άρα, η f είναι σταθερή και άρα και η u επίσης, άτοπο. Συνεπώς, η u δεν είναι άνω φραγμένη. □

1.2 Βασικά Στοιχεία Ανάλυσης Fourier

Θα ξεκινήσουμε αρχικά αναφέροντας εν συντομία κάποια εισαγωγικά στοιχεία για χώρους συναρτήσεων και χώρους ακολουθιών.

Με $m := \frac{d\theta}{2\pi}$ θα συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{T}$, κανονικοποιημένο ώστε $m(\mathbb{T}) = 1$.

Αν g είναι μία συνάρτηση στο $\mathbb{T}$ και αν η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ ως $f(t) = g(e^{it})$, τότε η f είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π. Και αντίστροφα, αν f είναι συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 2π, τότε υπάρχει συνάρτηση g στο $\mathbb{T}$ ώστε $f(t) = g(e^{it})$. Συνεπώς, μπορούμε να ταυτίζουμε συναρτήσεις στο $\mathbb{T}$ με 2π περιοδικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$. Έτσι, θα λέμε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{T}$ αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα μήκους 2π, θα λέμε ότι η g είναι συνεχής στο $\mathbb{T}$ αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ κλπ.

Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{T}$ και ας είναι

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^p dt \right)^{1/p}.$$

Έστω επίσης

$$\|f\|_\infty = \inf_{M>0} \{M : |\{e^{it} : |f(e^{it})| > M\}| = 0\}.$$

Οι χώροι Lebesgue $L^p(\mathbb{T})$, $0 < p \leq \infty$, ορίζονται ως εξής:

$$L^p(\mathbb{T}) = \{f : \|f\|_p < \infty\}.$$

Αν $1 \leq p \leq \infty$, τότε ο $L^p(\mathbb{T})$ είναι χώρος Banach. Ειδικότερα, ο $L^2(\mathbb{T})$, εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} \, dt$$

είναι χώρος Hilbert. Σημειώνουμε ότι το ολοκλήρωμα που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο υπάρχει καθότι από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f||\overline{g}| \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g|^2 \right)^{1/2} < \infty. \ \big(\text{αφού } f, g \in L^2(\mathbb{T}).\big)$$

Ισχύει ότι

$$L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T}), \forall p \in (1, \infty).$$

Τώρα, μία συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{T}$, που είναι συμπαγές σύνολο, είναι φραγμένη. Ο χώρος όλων των συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{T}$, $C(\mathbb{T})$, μπορεί να θεωρηθεί ως υπόχωρος του $L^\infty(\mathbb{T})$. Σε αυτή την περίπτωση το maximum λαμβάνεται και έχουμε

$$\|f\|_\infty = \max_{e^{it} \in \mathbb{T}} |f(e^{it})|.$$

Ο $C(\mathbb{T})$ είναι πλήρης ως προς τη sup-νόρμα και έτσι είναι χώρος Banach.

Δύο σημαντικές ιδιότητες του $L^1(\mathbb{T})$ είναι οι ακόλουθες:

1. Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\tau \in \mathbb{T}$, τότε $f_\tau(t) = f(t - \tau) \in L^1(\mathbb{T})$ και $\|f_\tau\|_1 = \|f\|_1$.
2. Η L^1-*valued* συνάρτηση $\tau \mapsto f_\tau$ είναι συνεχής στο $\mathbb{T}$, δηλαδή για $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\tau_0 \in \mathbb{T}$ ισχύει
$$\lim_{\tau \to \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_1 = 0.$$

Απόδειξη της 2. Φανερά ισχύει αν η f είναι συνεχής. Είναι γνωστό ότι ο χώρος $C(\mathbb{T})$ είναι πυκνός στον $L^1(\mathbb{T})$. Έστω λοιπόν αυθαίρετη συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $g \in C(\mathbb{T})$ ώστε $\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_1 &\leq \|f_\tau - g_\tau\|_1 + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_1 + \|g_{\tau_0} - f_{\tau_0}\|_1 \\ &= \|(f-g)_\tau\|_1 + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_1 + \|(g-f)_{\tau_0}\|_1 \\ &\leq \varepsilon + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_1 \end{aligned}$$

Συνεπώς, $\limsup_\tau \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_1 < \varepsilon$, όπου το $\varepsilon > 0$ ήταν αυθαίρετο, και άρα έχουμε το ζητούμενο.

Ορισμός 1.16. *Ένα* ***τριγωνομετρικό πολυώνυμο*** *είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα της μορφής*

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), t \in \mathbb{R},$$

όπου a_0, a_j και b_j, $1 \leq j \leq n$, είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Με χρήση της ταυτότητας του Euler τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα γράφονται και στην εξής μορφή:

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}.$$

Αν $f_n(t) = e^{int}, n \in \mathbb{Z}$, τότε

$$\langle f_n, f_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\, dt = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Έτσι, το $\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο στον $L^2(\mathbb{T})$, το οποίο είναι γνωστό ως το **τριγωνομετρικό σύστημα**.

Borel μέτρα στο $\mathbb{T}$

Ορισμός 1.17. 1. *Ένα υποσύνολο του $\mathbb{T}$ καλείται **Borel σύνολο** αν περιέχεται στη Borel σ-άλγεβρα, τη μικρότερη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{T}$ που περιέχει όλα τα ανοιχτά τόξα του $\mathbb{T}$.*

2. *Ένα μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}))$ (με $\mathcal{B}(\mathbb{T})$ συμβολίζουμε τη Borel σ-άλγεβρα στο $\mathbb{T}$) λέγεται **Borel μέτρο** στο $\mathbb{T}$.*

Περνάμε εν συνεχεία στο σύνολο των μιγαδικών Borel μέτρων του $\mathbb{T}$ το οποίο θα συμβολίζουμε με $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ και με $\mathcal{M}_+(\mathbb{T})$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των θετικών μέτρων στο $\mathcal{M}(\mathbb{T})$. Αποδεικνύεται ότι κάθε μέτρο στο $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ είναι πεπερασμένο. Ο χώρος $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{T})$, όπου $|\mu|(\mathbb{T})$ είναι η κύμανση του μ, είναι χώρος Banach.

Υπενθυμίζουμε ότι η κύμανση του μ ενός Borel $E \subset \mathbb{T}$ είναι

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{m} |\mu(E_n)| : \{E_1, \ldots, E_m\} \text{ μετρήσιμη διαμέριση του } E \right\},$$

όπου λέγοντας ότι το $\{E_1, \ldots, E_m\}$ είναι μετρήσιμη διαμέριση του E εννοούμε ότι τα E_n είναι ξένα Borel υποσύνολα του E με $\bigcup_{n=1}^{m} E_n = E$.

Επίσης, για τη κύμανση του μ ισχύει ότι είναι το μικρότερο θετικό Borel μέτρο ώστε:

$$|\mu(E)| \leq |\mu|(E), \text{ για κάθε Borel σύνολο } E \subset \mathbb{T}.$$

Ακόμη, θα μας χρεαστεί η κανονικότητα των Borel μέτρων μ στο $\mathbb{T}$: Αφού ο $\mathbb{T}$ είναι συμπαγής χώρος Hausdorff, κάθε Borel μέτρο μ στο $\mathbb{T}$ είναι κανονικό με την έννοια ότι κάθε θετικό μέτρο μ_j στη διάσπαση Hahn-Jordan του μ ικανοποιεί:

$$\inf\{\mu_j(G) : G \supset E, G \text{ ανοιχτό}\} = \sup\{\mu_j(F) : F \subset E, F \text{ κλειστό}\}.$$

Για κάθε $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, το γραμμικό συναρτησοειδές

$$\ell_\mu : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}, \ell_\mu(f) = \int_{\mathbb{T}} f d\mu$$

είναι φραγμένο. Η νόρμα του ℓ_μ ορίζεται ως

$$\|\ell_\mu\| := \sup\{|\ell_\mu(f)| : f \in C(\mathbb{T}), \|f\|_\infty \leq 1\}$$

και ισχύει $\|\ell_\mu\| = \|\mu\|$.

Θεώρημα 1.18. *(Θεώρημα Αναπαράστασης Riesz) Αν ℓ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στο $C(\mathbb{T})$, τότε $\ell = \ell_\mu$, για μοναδικό $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$.*

Σε κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ αντιστοιχεί ένα Borel μέτρο $d\mu(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} f(e^{it})\, dt$. Προφανώς έχουμε $\|\mu\| = \|f\|_1$ και έτσι η απεικόνιση

$$L^1(\mathbb{T}) \to \mathcal{M}(\mathbb{T}), f \mapsto \frac{1}{2\pi} f(e^{it})\, dt$$

είναι ισομετρική εμφύτευση του $L^1(\mathbb{T})$ με τιμές στο $\mathcal{M}(\mathbb{T})$.

Χώροι ακολουθιών

Για μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, έστω

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}, \text{ αν } p \in (0, \infty)$$

και

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|.$$

Τότε, για $0 < p \leq \infty$, ορίζουμε

$$\ell^p(\mathbb{Z}) = \{x : \|x\|_p < \infty\}$$

και

$$c_0(\mathbb{Z}) = \{x \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) : \lim_{|n|\to\infty} |x_n| = 0\}.$$

Αν $1 \leq p \leq \infty$, τότε ο $\ell^p(\mathbb{Z})$ είναι χώρος Banach και $c_0(\mathbb{Z})$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\ell^\infty(\mathbb{Z})$. Ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z})$, εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle z, w \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n \overline{w}_n,$$

είναι χώρος Hilbert.

1.2.1 Συντελεστές Fourier στο $\mathbb{T}$

Ορισμός 1.19. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε ο **n-οστός συντελεστής Fourier** της f ορίζεται ως*

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-int}\, dt, n \in \mathbb{Z}.$$

*Η διπλή ακολουθία $\widehat{f} = (\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ καλείται ο **μετασχηματισμός Fourier** της f.*

Έχοντας ορίσει τους συντελεστές Fourier της f ορίζουμε και τη **σειρά Fourier** της ως εξής:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{int}.$$

Στη σειρά αυτή το n απειρίζεται και προς τα δεξιά και προς τα αριστερά.

Ορισμός 1.20. *Έστω f ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{T}$ και έστω η σειρά Fourier της f:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{int}.$$

*Ορίζουμε το **N-οστό μερικό άθροισμα** της f να είναι η έκφραση*

$$S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

Λέμε ότι η σειρά Fourier συγκλίνει στην f στο σημείο x αν

$$S_N f(x) \to f(x), \text{ καθώς } N \to \infty.$$

Σημείωση. Μετά από πράξεις βλέπουμε ότι

$$s_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\, dt, n \in \mathbb{N}_0,$$

όπου $D_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$ είναι ο πυρήνας του Dirichlet.

Στο επόμενο θεώρημα αναφέρουμε, χωρίς απόδειξη, κάποιες βασικές ιδιότητες του συντελεστή Fourier.

Θεώρημα 1.21. *Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, τότε*

1. $\widehat{(f+g)}(n) = \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n)$.
2. *Για κάθε $a \in \mathbb{C}$ ισχύει $\widehat{(af)}(n) = a\widehat{f}(n)$.*
3. *Αν $\overline{f}$ είναι η μιγαδική συζυγής της f, τότε $\widehat{\overline{f}}(n) = \overline{\widehat{f}(-n)}$.*

Ισχύει

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|\, dt, n \in \mathbb{Z},$$

δηλαδή

$$\widehat{f} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \text{ με } \|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Άρα, ο μετασχηματισμός Fourier

$$L^1(\mathbb{T}) \to \ell^\infty(\mathbb{Z}), f \mapsto \widehat{f}$$

είναι μία γραμμική απεικόνιση με νόρμα το πολύ 1. (στην πραγματικότητα είναι ίση με 1 αν πάρουμε τη σταθερή συνάρτηση με τιμή 1.)

Θεώρημα 1.22. *(Λήμμα Riemann-Lebesgue) Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$,*

$$\lim_{|n| \to \infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

Απόδειξη. Εξ ορισμού είναι $\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) e^{-in\phi}\, d\phi, n \in \mathbb{Z}$.

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $\phi = \theta + \frac{\pi}{n}$ είναι

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta + \frac{\pi}{n}) e^{-in(\theta + \frac{\pi}{n})}\, d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta + \frac{\pi}{n}) e^{-in\theta}\, d\theta.$$

Έτσι,

$$4\pi\widehat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi}\Big(f(\theta) - f\big(\theta + \frac{\pi}{n}\big)\Big)e^{-in\theta}\,d\theta$$

$$\implies 4\pi|\widehat{f}(n)| \leq \int_{-\pi}^{\pi}\big|f(\theta) - f\big(\theta + \frac{\pi}{n}\big)\big|\,d\theta.$$

Αν η f είναι συνεχής, τότε $|f(\theta) - f(\theta + \frac{\pi}{n})| \to 0$, όταν $|n| \to \infty$.

Άρα,

$$\widehat{f}(n) \to 0, |n| \to \infty.$$

Για την περίπτωση μιας αυθαίρετης συνάρτησης $f \in L^1(\mathbb{T})$, αν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $g \in C(\mathbb{T})$ ώστε $\|f - g\|_1 < \varepsilon$.

Γράφουμε

$$\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n) + (\widehat{f - g})(n).$$

Αφού η g είναι συνεχής από την αρχική περίπτωση έχουμε $\widehat{g}(n) \to 0, |n| \to \infty$.

Επίσης,

$$|(\widehat{f - g})(n)| \leq \|f - g\|_1 < \varepsilon.$$

Επομένως,

$$\limsup_n |\widehat{f}(n)| \leq \varepsilon,$$

όπου το $\varepsilon > 0$ ήταν αυθαίρετο, και έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 1.23. *(Μοναδικότητα στον $L^1(\mathbb{T})$) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και υποθέτουμε ότι $\widehat{f}(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, τότε $f = 0$ σχεδόν παντού.*

Απόδειξη. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. Τότε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt = 0, \text{ για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο } g. \tag{1.2}$$

Θα δείξουμε ότι το παραπάνω ισχύει για τυχούσα συνεχή συνάρτηση στο $\mathbb{T}$. Έστω λοιπόν $g \in C(\mathbb{T})$. Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στο $C(\mathbb{T})$. Άρα, υπάρχει ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων $\{f_j\}$ ώστε $\|f_j - g\|_\infty \to 0$. Έτσι, με βάση αυτό (εδώ μας αρκεί μόνο η κατά σημείο σύγκλιση), το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης και την σχέση (1.2) έχουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt = \lim_j \int_{-\pi}^{\pi} f(t)f_j(t)\,dt = 0.$$

Έστω τώρα ότι $g = \mathcal{X}_A$, όπου $A \subset \mathbb{T}$ μετρήσιμο. Τότε, από Πόρισμα του Θεωρήματος Luzin, υπάρχει ακολουθία $g_j \in C(\mathbb{T})$ με $|g_j| \leq 1$ και $\lim_j g_j(t) = \mathcal{X}_A(t)$ σχεδόν παντού. Άρα, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, έχουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathcal{X}_A(t)\,dt = \lim_j \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g_j(t)\,dt = 0,$$

δηλαδή

$$\int_A f(t)\,dt = 0 \implies f = 0 \text{ σ.π.}$$

□

Σημείωση 1.24. *Η απεικόνιση* $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \to c_0$ *με* $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ *δεν είναι επί.*

Εξήγηση. Αν υποθέσουμε αντίθετα ότι είναι επί, τότε θα υπάρχει $c > 0$ ώστε

$$\|\widehat{f}\|_\infty \geq c\|f\|_1, \forall f \in L^1(\mathbb{T}).$$

Παίρνουμε ως f τον πυρήνα του Dirichlet

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

Όμως, για $n \in \mathbb{N}$, είναι $\|\widehat{D}_n\|_\infty = 1$, δηλαδή θα έχουμε ότι

$$1 \geq c\|D_n\|_1,$$

το οποίο είναι άτοπο αφού για τον D_n είναι γνωστό ότι $\|D_n\|_1 \to \infty$, καθώς το $n \to \infty$.

Θεώρημα 1.25. *(Θεώρημα του Parseval) Για κάθε συνάρτηση* $f \in L^2(\mathbb{T})$, *ισχύει*

$$\|f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2.$$

Επίσης,

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{int} \right\| = 0.$$

Από το Θεώρημα του Parseval έπεται ότι

1. Το σύνολο $\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2(\mathbb{T})$, και

2. Η σειρά Fourier $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{int}$ συγκλίνει στην f στην νόρμα του $L^2(\mathbb{T})$.

Θεώρημα 1.26. *(Riesz-Fischer) Υποθέτουμε ότι $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, είναι μία ακολουθία μιγαδικών αριθμών με*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty.$$

Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f \in L^2(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(n) = a_n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Έστω $g_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$. Η (g_n) είναι ακολουθία Cauchy στον $L^2(\mathbb{T})$. Αυτό διότι για $m < n$, είναι

$$\|g_n - g_m\|_2^2 = \sum_{m<|k|\leq n} |a_k|^2 \to 0, \text{ όταν } m, n \to \infty.$$

Όμως, ο $L^2(\mathbb{T})$ είναι πλήρης, άρα υπάρχει συνάρτηση $f \in L^2(\mathbb{T})$ ώστε

$$\|g_n - f\|_2 \to 0, \text{ όταν } n \to \infty.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned} 2\pi\widehat{f}(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - g_N(t))e^{-int}\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} g_N(t)e^{-int}\,dt. \end{aligned}$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα είναι:

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - g_N(t))e^{-int}\,dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g_N(t)|\,dt \leq 2\pi\|f - g_N\|_2.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_N(t)e^{-int}\,dt = 2\pi\widehat{g}_N(n).$$

Αν $|n| < N$, τότε $\widehat{g}_N(n) = a_n$. Επομένως, για $|n| < N$ έχουμε

$$|2\pi\widehat{f}(n) - 2\pi\widehat{g}_N(n)| \leq 2\pi\|f - g_N\|_2.$$

Συνεπώς, αφήνοντας το $N \to \infty$, παίρνουμε $\widehat{f}(n) = a_n, \forall n \in \mathbb{Z}$. Η μοναδικότητα έπεται άμεσα από το Θεώρημα 1.23. $\square$

Συνεχίζουμε με την επέκταση του ορισμού του μετασχηματιμού Fourier για Borel μέτρα στο κύκλο. Έχουμε συγκεκριμένα:

Ορισμός 1.27. *Έστω $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. Ο* ***n-οστός συντελεστής Fourier*** *του μ ορίζεται ως*

$$\widehat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{-int}\, d\mu(e^{it}), n \in \mathbb{Z},$$

και ο ***μετασχηματισμός Fourier*** *του μ είναι η διπλή ακολουθία $\widehat{\mu} = (\widehat{\mu}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$.*

Αν θεωρήσουμε τον $L^1(\mathbb{T})$ ως υπόχωρο του $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ εύκολα βλέπουμε ότι οι δύο ορισμοί ταυτίζονται.

Δηλαδή, αν

$$d\mu(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} f(e^{it})\, dt, \text{ όπου } f \in L^1(\mathbb{T}),$$

τότε

$$\widehat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{-int}\, d\mu(e^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(e^{it}) e^{-int}\, dt = \widehat{f}(n), n \in \mathbb{Z}.$$

Λήμμα 1.28. *Έστω $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. Τότε*

$$\widehat{\mu} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \text{ και } \|\widehat{\mu}\|_\infty \leq \|\mu\|.$$

Απόδειξη. $\forall n \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$|\widehat{\mu}(n)| = \left| \int_{\mathbb{T}} e^{-int}\, d\mu(e^{it}) \right| \leq \int_{\mathbb{T}} |e^{-int}|\, d|\mu|(e^{it}) = \int_{\mathbb{T}} d|\mu|(e^{it}) = |\mu|(\mathbb{T}) = \|\mu\|.$$

Επομένως, $\|\widehat{\mu}\|_\infty \leq \|\mu\|$. □

Με βάση το Λήμμα 1.28 ο μετασχηματισμός Fourier

$$\mathcal{M}(\mathbb{T}) \to \ell^\infty(\mathbb{Z}), \mu \mapsto \widehat{\mu}$$

είναι μία γραμμική απεικόνιση με νόρμα το πολύ 1. (στην πραγματικότητα είναι ίση με 1.) .

1.2.2 Τριγωνομετρικές Σειρές

Κάθε σειρά της μορφής

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

καλείται **τριγωνομετρική σειρά**. Άρα, οι σειρές Fourier ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι ειδική περίπτωση των τριγωνομετρικών σειρών, όπου οι συντελεστές της σειράς ταυτίζονται με τους συντελεστές Fourier κάποιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

Σημειώνουμε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή υπάρχει παράδειγμα τριγωνομετρικής σειράς η οποία δεν είναι σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης του $L^1(\mathbb{T})$. (βλ. [1], [20].) Επίσης, αναφέρουμε στο σημείο αυτό ότι με χρήση της ταυτότητας του Euler οι τριγωνομετρικές σειρές γράφονται ως:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\big).$$

Ένα σημαντικό παράδειγμα αποτελεί ο πυρήνας Poisson

$$P_r(e^{it}) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}, 0 \leq r < 1.$$

Για κάθε σταθεροποιημένο $0 \leq r < 1, P_r \in C^{\infty}(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ και κάνοντας χρήση του τύπου για την άθροιση άπειρης γεωμετρικής σειράς παίρνουμε

$$P_r(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}.$$

Πράγματι, για $z = re^{i\theta}$, έχουμε

$$\begin{aligned} P_r(e^{it}) &= \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \frac{1-\overline{z}+\overline{z}-z\overline{z}}{|1-z|^2} \\ &= \frac{(1-\overline{z})+\overline{z}(1-z)}{(1-z)(1-\overline{z})} = \frac{1}{1-z} + \frac{\overline{z}}{1-\overline{z}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{z}^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}. \end{aligned}$$

Μετά από πράξεις βλέπουμε ότι

$$P_r(e^{i(\theta-t)}) = \Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right).$$

Έτσι, για σταθεροποιημένο $e^{it} \in \mathbb{T}$ ο πυρήνας Poisson είναι το πραγματικό μέρος της ολόμορφης συνάρτησης

$$z \mapsto \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$$

και επομένως είναι αρμονική συνάρτηση στο $\mathbb{D}$.

Επίσης, μία άλλη ιδιότητα που έχει ο πυρήνας Poisson και την οποία θα χρειαστούμε παρακάτω είναι η ακόλουθη: Για κάθε σταθεροποιημένο $\delta > 0$, ισχύει

$$\lim_{j} \big(\sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} |P_r(e^{it})| \big) = 0.$$

Πράγματι, για $\delta \leq |t| \leq \pi$ είναι $P_r(e^{it}) \leq \dfrac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\delta}$. Άρα,

$$\sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} |P_r(e^{it})| \leq \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\delta} \implies 0 \leq \lim_{r\to 1^-} \big(\sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} |P_r(e^{it})| \big) \leq 0.$$

Επομένως, για σταθεροποιημένο $\delta > 0$ ισχύει

$$\lim_{r\to 1^-} \big(\sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} |P_r(e^{it})| \big) = 0.$$

Συνεχίζουμε με ένα αποτέλεσμα πάνω στην απόλυτη σύγκλιση τριγωνομετρικών σειρών.

Πρόταση 1.29. *Αν* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$, *τότε η τριγωνομετρική σειρά* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνεχή* 2π*-περιοδική συνάρτηση.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n e^{inx}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

δηλαδή η παραπάνω σειρά συγκλίνει απόλυτα και άρα θα συγκλίνει και απλά σε μία συνάρτηση f η οποία είναι 2π-περιοδική. Έστω

$$s_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$$

τα μερικά αθροίσματα. Τότε

$$|f(x) - s_N(x)| = \Big| \sum_{|n|>N} a_n e^{inx} \Big| \leq \sum_{|n|>N} |a_n|.$$

Δηλαδή,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - s_N(x)| \leq \sum_{|n|\geq N} |a_n|.$$

Έχουμε όμως ότι $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$, άρα αν αφήσουμε το $N \to \infty$ θα έχουμε $\sum_{|n|>N} |a_n| \to 0$. Επομένως, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - s_N(x)| \to 0$, για $N \to \infty$, και άρα η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής ως το ομοιόμορφο όριο των συνεχών συναρτήσεων $s_N(x)$. □

Επομένως, αφού

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} < \infty, 0 \leq r < 1,$$

από την Πρόταση 1.29 έχουμε ότι η τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στον P_r, δηλαδή για σταθεροποιημένο $r < 1$ τα μερικά της αθροίσματα συγκλίνουν ομοιόμορφα στον P_r.

Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, είναι

$$\widehat{P}_r(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(e^{it}) e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} r^{|m|} e^{imt} \right) e^{-int}\, dt.$$

Όμως, από την Πραγματική Ανάλυση, γνωρίζουμε ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση επιτρέπει την εναλλαγή σειράς μεταξύ άθροισης και ολοκλήρωσης, άρα

$$\widehat{P}_r(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r^{|m|} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t} dt \right) = r^{|n|}.$$

Συνεπώς, έχουμε

$$P_r(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{P}_r(n) e^{int},$$

δηλαδή ο πυρήνας Poisson είναι ίσος με τη σειρά Fourier του σε κάθε σημείο του μοναδιαίου κύκλου $\mathbb{T}$.

1.2.3 Συνέλιξη στο $\mathbb{T}$

Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε, από το Θεώρημα του Tonelli, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\tau})g(e^{i(t-\tau)})|\,d\tau\Big)\,dt &= \int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\tau})|\Big(\int_{-\pi}^{\pi}|g(e^{i(t-\tau)})|\,dt\Big)\,d\tau\\ &= \Big(\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\tau})|\,d\tau\Big)\Big(\int_{-\pi}^{\pi}|g(e^{is})|\,ds\Big).\end{aligned}$$

Άρα, αφού $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, έχουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\tau})g(e^{i(t-\tau)})|\,d\tau\Big)\,dt < \infty$$

$\Longrightarrow \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\tau})g(e^{i(t-\tau)})|\,d\tau < \infty$, για σ.χ. $e^{it} \in \mathbb{T}$. Έτσι, ορίζουμε τη **συνέλιξη** δύο συναρτήσεων $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ ως εξής:

$$(f * g)(e^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\tau})g(e^{i(t-\tau)})\,d\tau, \text{ σχεδόν για κάθε } e^{it} \in \mathbb{T}.$$

Ο παραπάνω υπολογισμός μας δείχνει ότι η $f * g \in L^1(\mathbb{T})$ με

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1.$$

Για παράδειγμα ισχύει ότι $s_n f(x) = f * D_n$. Επίσης, θέτοντας

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{s_0 f(x) + \cdots + s_{N-1}f(x)}{N}$$

έχουμε

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{f * D_0 + \cdots + f * D_{N-1}(x)}{N} = (f * F_N)(x),$$

όπου $F_N(x) = \frac{D_0(x)+\cdots+D_{N-1}(x)}{N}$ είναι ο πυρήνας του Fejer.

Θεώρημα 1.30. *Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$.*

Απόδειξη. Εξ ορισμού είναι

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f * g)(e^{it})e^{-int}\,dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\tau})g(e^{i(t-\tau)})\,d\tau\Big)e^{-int}\,dt.\end{aligned}$$

Τότε, από το Θεώρημα του Fubini, έχουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\tau})e^{-in\tau}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i(t-\tau)})e^{-in(t-\tau)}\,dt\right)d\tau \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\tau})e^{-in\tau}\,d\tau\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta\right) \\ &= \widehat{f}(n)\widehat{g}(n).\end{aligned}$$

□

Εν συνεχεία αναφέρουμε κάποιες βασικές ιδιότητες της συνέλιξης.

Για κάθε $f, g, h \in L^1(\mathbb{T})$ και $a \in \mathbb{C}$ ισχύουν τα ακόλουθα:

1. μεταθετικότητα: $f * g = g * f$
2. προσεταιριστικότητα: $f * (g * h) = (f * g) * h$
3. επιμεριστικότητα: $f * (g + h) = f * g + f * h$
4. ομογένεια: $f * (ag) = (af) * g = a(f * g)$.

Δηλαδή, ο $L^1(\mathbb{T})$ εφοδιασμένος με την πράξη της συνέλιξης είναι μία μεταθετική άλγεβρα Banach [1].

Για παράδειγμα ένας τρόπος απόδειξης για το 1. είναι ο εξής:

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.30 έχουμε

$$\widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n) = \widehat{g}(n)\widehat{f}(n) = \widehat{(g * f)}(n).$$

Τότε, από το Θεώρημα Μοναδικότητας στον $L^1(\mathbb{T})$, έπεται ότι

$$f * g = g * f.$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούν να αποδειχτούν και οι υπόλοιπες ιδιότητες.

Λήμμα 1.31. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\phi(t) = e^{int}$ για κάποιον ακέραιο n. Τότε*

$$(\phi * f)(t) = \widehat{f}(n)e^{int}.$$

[1] Μία μιγαδική άλγεβρα Banach είναι μία άλγεβρα A πάνω από το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών εφοδιασμένη με μία νόρμα $\|\cdot\|$ ώστε η $(A, \|\cdot\|)$ να είναι χώρος Banach και να ισχύει

$$\|xy\| \le \|x\|\|y\|, \forall x, y \in A.$$

Απόδειξη. Είναι

$$(\phi * f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{in(t-\tau)}\, d\tau = e^{int} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-in\tau}\, d\tau = \widehat{f}(n) e^{int}.$$

□

Πόρισμα 1.32. *Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $k(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$, τότε*

$$(k * f)(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_n \widehat{f}(n) e^{int}.$$

Η ανισότητα του Young.

Θεώρημα 1.33. *(Ανισότητα Young) Έστω $f \in L^r(\mathbb{T}), g \in L^s(\mathbb{T}), 1 \leq r, s \leq \infty$ και $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \geq 1$. Έστω $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} - 1$. Τότε*

$$f * g \in L^p(\mathbb{T}) \text{ και } \|f * g\|_p \leq \|f\|_r \|g\|_s.$$

Πόρισμα 1.34. *Έστω $f \in L^p(\mathbb{T}), 1 \leq p \leq \infty$, και έστω $g \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε*

$$f * g \in L^p(\mathbb{T}) \text{ και } \|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

Πόρισμα 1.35. *Έστω $f \in L^p(\mathbb{T})$ και $g \in L^q(\mathbb{T})$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p. Τότε η $(f * g)(e^{it})$ είναι καλά ορισμένη για κάθε $e^{it} \in \mathbb{T}$,*

$$f * g \in C(\mathbb{T}) \text{ και } \|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Συνέλιξη για Borel μέτρα στο $\mathbb{T}$.

Συνεχίζουμε με την επέκταση του ορισμού της συνέλιξης για Borel μέτρα στο $\mathbb{T}$.

Έστω $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ και ορίζουμε $\Lambda : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$\Lambda(\phi) = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \phi\big(e^{i(t+\tau)}\big)\, d\mu(e^{it})\, d\nu(e^{i\tau}), \phi \in C(\mathbb{T}).$$

Η απεικόνιση Λ είναι γραμμική και ικανοποεί

$$|\Lambda(\phi)| \leq \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |\phi(e^{i(t+\tau)})|\, d|\mu|(e^{it})\, d|\nu|(e^{i\tau}) \leq \|\phi\|_\infty \int_{\mathbb{T}} d|\mu|(e^{it}) \int_{\mathbb{T}} d|\nu|(e^{i\tau}),$$

δηλαδή

$$|\Lambda(\phi)| \leq \|\mu\| \|\nu\| \|\phi\|_\infty \implies \|\Lambda\| \leq \|\mu\| \|\nu\|.$$

Συνολικά, λοιπόν, έχουμε ότι το Λ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στο χώρο $C(\mathbb{T})$. Έτσι, από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει μοναδικό Borel μέτρο, το οποίο συμβολίζουμε με $\mu * \nu$, και καλούμε **συνέλιξη** των μ και ν, τέτοιο ώστε

$$\Lambda(\phi) = \int_{\mathbb{T}} \phi(e^{it})\, d(\mu * \nu)(e^{it}), \phi \in C(\mathbb{T}), \text{ και } \|\Lambda\| = \|\mu * \nu\|.$$

Επομένως, το $\mu * \nu$ ορίζεται έτσι ώστε

$$\int_{\mathbb{T}} \phi(e^{it})\, d(\mu * \nu)(e^{it}) = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \phi\big(e^{i(t+\tau)}\big)\, d\mu(e^{it})\, d\nu(e^{i\tau}), \forall \phi \in C(\mathbb{T})$$

και αφού $\|\Lambda\| \leq \|\mu\|\|\nu\|$ έχουμε την ανισοτική σχέση $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\|\|\nu\|$.

Θεώρημα 1.36. *Έστω $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. Τότε $\widehat{\mu * \nu}(n) = \widehat{\mu}(n)\widehat{\nu}(n), n \in \mathbb{Z}$.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{Z}$ και θέτουμε $\phi(e^{it}) = e^{-int}$ στην ισότητα

$$\int_{\mathbb{T}} \phi(e^{it})\, d(\mu * \nu)(e^{it}) = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \phi(e^{i(t+\tau)})\, d\mu(e^{it})\, d\nu(e^{i\tau}), \forall \phi \in C(\mathbb{T}).$$

Τότε, έχουμε

$$\widehat{\mu * \nu}(n) = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} e^{-in(t+\tau)}\, d\mu(e^{it})\, d\nu(e^{i\tau}) = \int_{\mathbb{T}} e^{-int}\, d\mu(e^{it}) \int_{\mathbb{T}} e^{-in\tau}\, d\nu(e^{i\tau}),$$

δηλαδή

$$\widehat{\mu * \nu}(n) = \widehat{\mu}(n)\widehat{\nu}(n), n \in \mathbb{Z}.$$

□

Θεώρημα 1.37. *Έστω $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ και $f \in L^1(\mathbb{T})$. Έστω επίσης*

$$d\nu(e^{it}) = f(e^{it})\, dt.$$

Τότε το $\mu * \nu$ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue και ισχύει

$$d(\mu * \nu)(e^{it}) = \left(\int_{\mathbb{T}} f(e^{i(t-\tau)})\, d\mu(e^{i\tau}) \right) dt.$$

Απόδειξη. $\forall \phi \in C(\mathbb{T})$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{T}} \phi(e^{it})\, d(\mu * \nu)(e^{it}) = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \phi(e^{i(t+\tau)})\, d\mu(e^{it})\, d\nu(e^{i\tau})$$

$$= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \phi(e^{i(t+\tau)})\, d\mu(e^{it}) f(e^{i\tau})\, d\tau = \int_{\mathbb{T}} \phi(e^{is}) \left(\int_{\mathbb{T}} f(e^{i(s-t)})\, d\mu(e^{it}) \right) ds.$$

Έτσι, από τη μοναδικότητα του Θεωρήματος Αναπαράστασης του Riesz, έχουμε

$$d(\mu * \nu)(e^{is}) = \left(\int_{\mathbb{T}} f(e^{i(s-t)})\, d\mu(e^{it}) \right) ds.$$

□

1.3 Το Θεώρημα Κυρτότητας του Hardy

Σκοπός μας για αυτή την ενότητα είναι η απόδειξη του Θεωρήματος Κυρτότητας του Hardy το οποίο θεωρείται ως η αφετηρία της θεωρίας των χώρων Hardy. Είναι απαραίτητο όμως πρώτα να παρουσιάσουμε (κυρίως χωρίς αποδείξεις) τη βασική θεωρία των υποαρμονικών συναρτήσεων.

1.3.1 Άνω Ημισυνεχείς Συναρτήσεις

Ορισμός 1.38. *Έστω X τοπολογικός χώρος.*

1. *Λέμε ότι μία συνάρτηση $u : X \to [-\infty, \infty)$ είναι* ***άνω ημισυνεχής*** *αν το σύνολο $\{x \in X : u(x) < c\}$ είναι ανοιχτό στο X, για κάθε $c \in \mathbb{R}$.*
2. *Μία συνάρτηση $v : X \to (-\infty, \infty]$ θα λέγεται* ***κάτω ημισυνεχής*** *αν η $-v$ είναι άνω ημισυνεχής.*

Σημειώνουμε ότι μία πραγματική συνάρτηση είναι συνεχής ανν είναι άνω και κάτω ημισυνεχής.

Πρόταση 1.39. *Έστω $u : X \to [-\infty, \infty)$ μία συνάρτηση σε έναν τοπολογικό χώρο X. Τότε η u είναι άνω ημισυνεχής αν και μόνον αν*

$$\forall x \in X \text{ και για κάθε δίκτυο } x_a \to x \implies \limsup_a u(x_a) \le u(x).$$

Απόδειξη. Για το ευθύ: Έστω $x \in X$ και δίκτυο $x_a \to x$. Σταθεροποιούμε c με $u(x) < c$. Το σύνολο

$$U = \{y : u(y) < c\}$$

είναι ανοιχτό. (λόγω της άνω ημισυνέχειας της u.) Συνεπώς, αφού $x \in U$ και λόγω της συγκλίσης του δικτύου x_a στο x, υπάρχει a_0 έτσι ώστε

$$x_\beta \in U, \forall \beta \ge a_0.$$

Τότε, αφού το $x_\beta \in U, \forall \beta \geq a_0$, ισχύει ότι $u(x_\beta) < c, \forall \beta \geq a_0$, και έχουμε

$$\limsup_a u(x_a) = \inf \sup_{\beta \geq a} u(x_\beta) \leq \sup_{\beta \geq a_0} u(x_\beta) \leq c, \forall c > u(x).$$

Επομένως, $\limsup_a u(x_a) \leq u(x)$.

Για το αντίστροφο: Έστω $c \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε το σύνολο

$$F = \{x \in X : u(x) \geq c\}$$

και έστω $\{y_a\}$ δίκτυο στο F με $y_a \to x$ στον X. Αφού το $\{y_a\}$ είναι δίκτυο στο F ισχύει ότι $u(y_a) \geq c, \forall a$.

Έτσι,

$$c \leq \limsup_a u(y_a) \leq u(x).$$

Δηλαδή, το $x \in F$ και άρα το F είναι κλειστό. Επομένως, το σύνολο

$$\{x \in X : u(x) < c\}$$

είναι ανοιχτό για κάθε $c \in \mathbb{R}$ και συνεπώς η u είναι άνω ημισυνεχής. □

Πρόταση 1.40. *Έστω u άνω ημισυνεχής συνάρτηση σε έναν τοπολογικό χώρο X, και έστω K συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε υπάρχει $x_0 \in K$ τέτοιο ώστε*

$$u(x) \leq u(x_0), \forall x \in K.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in K$. Τότε $x \in X$. Άρα, $u(x) < \infty$ και άρα θα υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 ώστε $u(x) < n_0$.

Επομένως,

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : u(x) < n\}.$$

Όμως, λόγω της άνω ημισυνέχειας της u, κάθε σύνολο $\{x \in X : u(x) < n\}$ είναι ανοιχτό, και άρα αυτά τα σύνολα αποτελούν ανοιχτό κάλυμμα του συμπαγούς συνόλου K. Έτσι, το K θα έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα:

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{N} \{x \in X : u(x) < n\}.$$

Άρα, για κάθε $x \in K$ ισχύει $u(x) \leq N \implies \sup_{x \in K} u(x) \leq N$.

Έστω $M = \sup_{x\in K} u(x)$. Αφού η u είναι άνω ημισυνεχής τα σύνολα

$$\left\{x \in K : u(x) < M - \frac{1}{n}\right\}$$

είναι ανοιχτά και άρα τα συμπληρώματα τους

$$F_n = \left\{x \in K : u(x) \geq M - \frac{1}{n}\right\}$$

είναι κλειστά σύνολα. Επομένως, κάθε F_n είναι συμπαγές σύνολο. (ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς K.) Επίσης, ισχύουν $F_n \neq \emptyset$ και $F_{n+1} \subset F_n$, για $n \geq 1$. Άρα,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x \in K : u(x) = M\} \neq \emptyset.$$

Συνεπώς, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in K$ ώστε $u(x_0) = M$, δηλαδή για κάθε $x \in K$ ισχύει $u(x) \leq M = u(x_0)$. □

Επίσης, σημειώνουμε ότι οι άνω ημισυνεχείς συναρτήσεις μπορούν να προσεγγιστούν κατά σημείο στα συμπαγή σύνολα από μία φθίνουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, ισχύει:

Θεώρημα 1.41. *Έστω G ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και έστω $u : G \to [-\infty, \infty)$ άνω ημισυνεχής στο G. Τότε, αν $K \subset G$ είναι συμπαγές, υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $u_n : K \to \mathbb{R}, n \geq 1$, τέτοια ώστε $u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq u$ στο K και*

$$\lim_n u_n(z) = u(z), \forall z \in K.$$

1.3.2 Υποαρμονικές Συναρτήσεις

Ορισμός 1.42. *Έστω $G \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό. Μία συνάρτηση $u : G \to [-\infty, \infty)$ λέγεται **υποαρμονική** αν είναι άνω ημισυνεχής και για κάθε $z \in G$ υπάρχει $r_z > 0$ με*

$$\overline{D(z, r_z)} \subset G,$$

έτσι ώστε

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})\, d\theta, \text{ όταν } r < r_z.$$

Συνεχίζουμε τώρα με την Αρχή Μεγίστου σύφμωνα με την οποία μία υποαρμονική συνάρτηση σε ένα domain δεν μπορεί να λαμβάνει μέγιστη τιμή εκτός και αν είναι σταθερή. Συγκεκριμένα:

Θεώρημα 1.43. *Έστω $D \subset \mathbb{C}$ domain και u υποαρμονική συνάρτηση στο D. Τότε, αν υπάρχει $z_0 \in D$, τέτοιο ώστε*

$$u(z) \leq u(z_0), \forall z \in D,$$

η συνάρτηση u είναι σταθερή.

Θεώρημα 1.44. *Έστω u άνω ημισυνεχής συνάρτηση σε ένα domain D με τιμές στο $[-\infty, \infty)$. Τότε η u είναι υποαρμονική αν και μόνο αν για κάθε δίσκο Δ με $\overline{\Delta} \subset D$, και κάθε συνεχή συνάρτηση v στο $\overline{\Delta}$ και αρμονική στο Δ, η συνθήκη*

$$u \leq v \text{ στο } \partial\Delta \implies u \leq v \text{ στο } \Delta.$$

Συνεχίζουμε παραθέτοντας χωρίς απόδειξη έναν χαρακτηρισμό για τις υποαρμονικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 1.45. *Έστω ανοιχτό $G \subset \mathbb{C}$ και έστω $u : G \to [-\infty, \infty)$ άνω ημισυνεχής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η u είναι υποαρμονική στο G.*
2. *Για κάθε φραγμένο υπο-domain D με $\overline{D} \subset G$ και κάθε αρμονική συνάρτηση v στο D, αν*
$$\limsup_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} (u(z) - v(z)) \leq 0, \forall \zeta \in \partial D,$$
τότε $u(z) \leq v(z)$.
3. *Αν $z \in G$ και $\overline{D(z,R)} \subset G$, τότε*
$$u(z + re^{i\theta}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - t)} u(z + Re^{it})\, dt,$$
για κάθε $0 \leq r < R$ και κάθε θ.

Παίρνοντας $r = 0$ στο 3. του Θεωρήματος 1.45 έχουμε το παρακάτω Πόρισμα.

Πόρισμα 1.46. *(Global Submean Inequality) Αν u είναι υποαρμονική συνάρτηση σε ένα ανοιχτό σύνολο G του $\mathbb{C}$, και αν*

$$\overline{D(z,r)} \subset G,$$

τότε

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Θεώρημα 1.47. *Έστω T συμπαγής τοπολογικός χώρος και έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό. Υποθέτουμε ότι $u : D \times T \to [-\infty, \infty)$ έχεις τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Η u είναι άνω ημισυνεχής στο $D \times T$.*
2. *Για κάθε σταθεροποιημένο $t \in T$, $u_t(z) = u(z,t), z \in D$, σαν συνάρτηση του z, είναι υποαρμονική στο D.*

Έστω $u(z) = \sup\limits_{t \in T} u_t(z)$. Τότε η u είναι υποαρμονική στο D.

Θεώρημα 1.48. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $\mu \geq 0$, $\mu(X) < \infty$ και έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό. Υποθέτουμε ότι $u : D \times X \to [-\infty, \infty)$ έχεις τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Η u είναι μετρήσιμη στο $D \times X$.*
2. *Για κάθε σταθεροποιημένο $t \in X$, $u(z,t)$, σαν συνάρτηση του z, είναι υποαρμονική στο D.*
3. *Για κάθε $z \in D$ υπάρχει $r_z > 0$ ώστε $\overline{D(z, r_z)} \subset D$ με*
$$\sup_{\overline{D(z,r_z)} \times X} u(w,t) < \infty.$$

Έστω $u(z) = \displaystyle\int_X u(z,t)\, d\mu(t), z \in D$. Τότε η u είναι υποαρμονική στο D.

Απόδειξη. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το μ είναι μέτρο πιθανότητας. Θα δείξουμε αρχικά ότι η u είναι άνω ημισυνεχής συνάρτηση στο D. Σταθεροποιούμε $z \in D$ και θέτουμε
$$M_z = \sup_{\overline{D(z,r_z)} \times X} u(w,t).$$

Από την υπόθεση 3. έχουμε $u(z) \leq M_z < \infty$. Αφού λοιπόν η u είναι άνω φραγμένη στο D μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $u \leq 0$ στο $D \times X$.

Τότε, κάνοντας χρήση του Λήμματος Fatou, έχουμε
$$\begin{aligned} M_z - u(z) &= \int_X (M_z - u(z,t))\, d\mu(t) \leq \int_X (M_z - \limsup_{w \to z} u(w,t))\, d\mu(t) \\ &= \int_X \liminf_{w \to z} (M_z - u(w,t))\, d\mu(t) \leq \liminf_{w \to z} \int_X (M_z - u(w,t))\, d\mu(t) \\ &= \liminf_{w \to z} (M_z - u(w)) = M_z - \limsup_{w \to z} u(w). \end{aligned}$$

Αφού το $M_z < \infty$ μπορεί να απλοποιηθεί και έτσι έχουμε

$$\limsup_{w \to z} u(w) \leq u(z), z \in D.$$

Άρα, η u είναι άνω ημισυνεχής στο D.

Συνεχίζουμε δείχνοντας ότι η u ικανοποιεί την submean inequality.

Έστω $r < r_z$. Τότε είναι

$$\begin{aligned}
M_z - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z+re^{i\theta})\,d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M_z\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z+re^{i\theta})\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (M_z - u(z+re^{i\theta}))\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \int_X (M_z - u(z+re^{i\theta},t))\,d\mu(t) \right\} d\theta \\
&= \int_X \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (M_z - u(z+re^{i\theta},t))\,d\theta \right\} d\mu(t) \\
&\leq \int_X (M_z - u(z,t))\,d\mu(t) = M_z - u(z).
\end{aligned}$$

Επομένως, για κάθε $r < r_z$ ισχύει

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z+re^{i\theta})\,d\theta$$

και άρα αφού η u είναι και άνω ημισυνεχής στο D με $u(z) < \infty$ εξ ορισμού έπεται ότι η u είναι υποαρμονική στο D. □

Από το ακόλουθο αποτέλεσμα έπεται ότι οι υποαρμονικές συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες πάνω στους κύκλους.

Πρόταση 1.49. *Έστω u υποαρμονική συνάρτηση σε ένα domain $D \subset \mathbb{C}$ και υποθέτουμε ότι η u δεν είναι ταυτοτικά ίση με $-\infty$. Τότε, για*

$$\overline{D(z,r)} \subset D,$$

έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} u(z+re^{i\theta})\,d\theta > -\infty.$$

Πρόταση 1.50. *Έστω v υποαρμονική συνάρτηση στο $D_R \subset \mathbb{C}$, και έστω επίσης*

$$u(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(re^{i\theta})\, d\theta, r \in [0, R).$$

Τότε η u είναι αύξουσα συνάρτηση του r.

Απόδειξη. Έστω $0 \le r_1 < r_2 < R$. Θα δείξουμε ότι $u(r_1) \le u(r_2)$.

Το D_R είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, η v είναι άνω ημισυνεχής στο D_R (ως υποαρμονική εκεί) και το $\partial D(0, r_2)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του D_R, άρα από το Θεώρημα 1.41 υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $\partial D(0, r_2)$ τέτοια ώστε:

$$u_1 \ge \cdots \ge u_n \ge \cdots \ge v \text{ και } \lim_n u_n(z) = v(z), \forall z \in \partial D(0, r_2).$$

Τώρα, για κάθε n, θα συμβολίζουμε επίσης με u_n τη συνεχή συνάρτηση στο $\overline{D(0, r_2)}$, που είναι αρμονική στο $D(0, r_2)$ και η οποία ταυτίζεται με την αρχική u_n στο $\partial D(0, r_2)$. Τότε, αφού η v είναι υποαρμονική στο D_R και για τον δίσκο $D(0, r_2)$ με $\overline{D(0, r_2)} \subset D_R$ και την συνεχή συνάρτηση u_n στο $\overline{D(0, r_2)}$ και αρμονική στο $D(0, r_2)$ έχουμε τη συνθήκη $v \le u_n$ στο $\partial D(0, r_2)$ από το Θεώρημα 1.44 έπεται ότι $v \le u_n$ στο $D(0, r_2)$. Άρα, θα είναι και $v \le u_n$ στο $\partial D(0, r_1) \subset D(0, r_2)$.

Έτσι, έχουμε ότι

$$u(r_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r_1 e^{i\theta})\, d\theta \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(r_1 e^{i\theta})\, d\theta.$$

Όμως, η u_n είναι αρμονική στο $D(0, r_2)$ και ο κύκλος $\partial D(0, r_1) \subset D(0, r_2)$, άρα από το Θεώρημα 1.11 έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(r_1 e^{i\theta})\, d\theta = u_n(0).$$

Έπειτα, κάνοντας ξανά εφαρμογή του Θεωρήματος 1.11, έχουμε

$$u_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(r_2 e^{i\theta})\, d\theta.$$

Δηλαδή,

$$u(r_1) \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(r_2 e^{i\theta})\, d\theta \implies u(r_1) \le \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(r_2 e^{i\theta})\, d\theta.$$

Συνεπώς, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης, έχουμε

$$u(r_1) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r_2 e^{i\theta})\, d\theta = u(r_2).$$

□

Θεώρημα 1.51. *Έστω $\{u_n\}_{n\geq 1}$ υποαρμονικές συναρτήσεις σε ένα ανοιχτό σύνολο G στο $\mathbb{C}$, και υποθέτουμε ότι $u_1 \geq u_2 \geq \cdots$ στο G. Τότε $u := \lim u_n$ είναι υποαρμονική συνάρτηση στο G.*

Απόδειξη. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\{z : u(z) < a\} = \bigcup_n \{z : u_n(z) < a\}.$$

Όμως, οι $(u_n)_{n\geq 1}$ ως υπαρμονικές είναι άνω ημισυνεχείς και άρα κάθε σύνολο

$$\{z : u_n(z) < a\}$$

είναι ανοιχτό. Συνεπώς, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{z : u(z) < a\}$ είναι ανοιχτό (ως ένωση ανοιχτών συνόλων) και άρα η u είναι άνω ημισυνεχής συνάρτηση.

Τώρα, αν $\overline{D(z,r)} \subset G$, τότε για κάθε $n \geq 1$ από την global submean inequality έχουμε

$$u_n(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(z + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Αφήνουμε το $n \to \infty$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης ώστε

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Επομένως, η u είναι υποαρμονική στο G.

□

1.3.3 Ακτινικές Υποαρμονικές Συναρτήσεις

Ορισμός 1.52. *Μία υποαρμονική συνάρτηση u στο δίσκο D_R καλείται* ***ακτινική*** *αν*

$$u(z) = u(|z|), \forall z \in D_R.$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.47 μπορούμε δοθέντος μιας υποαρμονικής συνάρτησης σε ένα δίσκο να δημιουργήσουμε μία ακτινική υποαρμονική συνάρτηση παίρνοντας το supremum της πάνω από κάθε κύκλο.

Πόρισμα 1.53. *Έστω u υποαρμονική συνάρτηση στο D_R και έστω επίσης*

$$u(z) = \sup_{\theta} u(|z|e^{i\theta}).$$

Τότε η u είναι ακτινική υποαρμονική συνάρτηση στο D_R.

Επίσης, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.48, μπορούμε δοθέντος μιας υποαρμονικής συνάρτησης σε ένα δίσκο να δημιουργήσουμε μία ακτινική υποαρμονική συνάρτηση παίρνοντας τον ολοκληρωτικό της μέσο πάνω από κάθε κύκλο.

Πόρισμα 1.54. *Έστω u υποαρμονική συνάρτηση στο δίσκο D_R και έστω επίσης*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(ze^{i\theta})\, d\theta, z \in D_R.$$

Τότε η u είναι ακτινική υποαρμονική συνάρτηση στο δίσκο D_R.

1.3.4 Λογαριθμική Κυρτότητα

Ορισμός 1.55. *Λέμε ότι μία συνάρτηση $u(r)$ είναι κυρτή συνάρτηση τύπου $\log(r)$ αν η u ικανοποιεί:*

$$u(r) \leq \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} u(r_1) + \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} u(r_2), \text{ όταν } r_1 < r < r_2,$$

όπου τα r, r_1 και r_2 ανήκουν στο πεδίο ορισμού της u.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα χαρακτηρίζει όλες τις ακτινικές υποαρμονικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 1.56. *Έστω $u : D_R \to [-\infty, \infty)$ ακτινική συνάρτηση, και υποθέτουμε ότι $u \not\equiv -\infty$. Τότε η u είναι υποαρμονική συνάρτηση στο D_R αν και μόνο αν η $u(r)$ είναι αύξουσα κυρτή συνάρτηση τύπου $\log(r), 0 < r < R$, με $\lim_{r\to 0} u(r) = u(0)$.*

Θεώρημα 1.57. *(Hardy) Έστω F ολόμορφη συνάρτηση στο δίσκο D_R και έστω $0 < p < \infty$. Τότε η $\log(\|F_r\|_p)$ είναι αύξουσα κυρτή συνάρτηση τύπου $\log r$.*

Απόδειξη. Είναι

$$\|F_r\|_p^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^p \, d\theta.$$

Από την υπόθεση του Θεωρήματος έχουμε ότι η F είναι ολόμορφη στο δίσκο D_R. Άρα, η $|F|^p$ είναι υποαρμονική στο D_R και από την Πρόταση 1.50 έπεται ότι η $\|F_r\|_p$ είναι αύξουσα συνάρτηση του r. Τώρα, αφού η $|F|^p$ είναι υποαρμονική στο D_R, από το Πόρισμα 1.54, η $\|F_r\|_p$ είναι ακτινική συνάρτηση. Άρα, από το Θεώρημα 1.56, η $\|F_r\|_p$ είναι κυρτή συνάρτηση τύπου $\log r$.

Σταθεροποιούμε $\lambda \in \mathbb{R}$. Αφού η F είναι ολόμορφη στο D_R, η $v(z) = |z|^\lambda |F(z)|^p$ είναι υποαρμονική συνάρτηση στο $D_R \setminus \{0\}$ και ισχύει

$$u(r) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(re^{i\theta})\, d\theta = \frac{r^\lambda}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^p \, d\theta = r^\lambda \|F_r\|_p^p.$$

Σταθεροποιούμε r, r_1 και r_2 με $0 < r_1 < r < r_2 < R$. Τότε, αφού η $v(z)$ είναι υποαρμονική συνάρτηση στο $D_R \setminus \{0\}$, από το Πόρισμα 1.54 και Θεώρημα 1.56, έπεται ότι η $u(r)$ είναι κυρτή συνάρτηση τύπου $\log r$.

Άρα,

$$u(r) \leq \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} u(r_1) + \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} u(r_2).$$

Θέτουμε

$$m_1 = \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} \text{ και } m_2 = \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1}.$$

Ισχύει

$$r = r_1^{m_1} r_2^{m_2}.$$

Τώρα, από την ανισότητα αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου, έχουμε

$$u(r_1)^{m_1} u(r_2)^{m_2} \leq m_1 u(r_1) + m_2 u(r_2)$$

με την ισότητα να ισχύει ανν $u(r_1) = u(r_2)$. Επιλέγουμε λ ώστε $u(r_1) = u(r_2)$ και έτσι έχουμε ισότητα στην ανισότητα AM-ΓM:

$$m_1 u(r_1) + m_2 u(r_2) = u(r_1)^{m_1} u(r_2)^{m_2} = r^\lambda (\|F_{r_1}\|_p^p)^{m_1} (\|F_{r_2}\|_p^p)^{m_2}.$$

Άρα, από την $u(r) \leq m_1 u(r_1) + m_2 u(r_2)$, έχουμε

$$r^\lambda \|F_r\|_p^p \leq r^\lambda (\|F_{r_1}\|_p^p)^{m_1} (\|F_{r_2}\|_p^p)^{m_2}$$

$$\implies p \log(\|F_r\|_p) \leq m_1 \log(\|F_{r_1}\|_p^p) + m_2 \log(\|F_{r_2}\|_p^p).$$

Επομένως,

$$\log(\|F_r\|_p) \leq \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1}\log(\|F_{r_1}\|_p) + \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1}\log(\|F_{r_2}\|_p).$$

$\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μεσοι Abel-Poisson

2.1 Μέσοι Abel-Poisson για σειρές Fourier

Ορισμός 2.1. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και ας είναι επίσης*

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(t)\,dt, \forall re^{\theta} \in \mathbb{D}.$$

Η συνάρτηση U που ορίζεται στο $\mathbb{D}$ καλείται το ***ολοκλήρωμα Poisson*** *της f.*

Μερικές φορές για το ολοκλήρωμα Poisson της f θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $U = P[f]$.

Θεώρημα 2.2. *Έστω συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε το ολοκλήρωμα Poisson της f είναι αρμονική συνάρτηση στο $\mathbb{D}$.*

Απόδειξη. Το ολοκλήρωμα Poisson της f είναι

$$P[f](re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in(\theta-t)}f(t)\,dt.$$

Από την Πρόταση 1.29 έχουμε ότι η τριγωνομετρική σειρά $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int}$ συγκλίνει ομοιόμορφα και επομένως μπορούμε να γράψουμε ότι

$$P[f](re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}e^{-int}f(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\widehat{f}(n)e^{in\theta}.$$

Κάθε $r^{|n|}e^{in\theta}$ είναι αρμονική συνάρτηση, άρα η $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} r^{|k|}\widehat{f}(k)e^{ik\theta}$ είναι μία ακολουθία αρμονικών συναρτήσεων η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\widehat{f}(n)e^{in\theta}.$$

Από την Πρόταση 1.12 έπεται ότι το ολοκλήρωμα Poisson της f είναι αρμονική συνάρτηση στο $\mathbb{D}$.

$\square$

Σημειώνουμε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει γενικότερα για μία συνάρτηση $f \in L^p(\mathbb{T})$, όπου το $1 \le p \le \infty$. Συγκεκριμένα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.3. *Έστω συνάρτηση $f \in L^p(\mathbb{T}), 1 \le p \le \infty$, και έστω*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(t)\,dt, 0 \le r < 1, \theta \in [-\pi, \pi].$$

Τότε η $u(z)$ είναι αρμονική συνάρτηση στο $\mathbb{D}$. Επίσης, αν $p < \infty$, έχουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^p dt \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\,dt, \forall r < 1$$

και αν $p = \infty$ ισχύει

$$|u(z)| \le \|f\|_\infty, \forall z \in \mathbb{D}.$$

Απόδειξη. Έστω συνάρτηση $f \in L^p(\mathbb{T}), 1 \le p \le \infty$. Γνωρίζουμε ότι

$$L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T}), \forall p \in (1, +\infty].$$

Επομένως, η $f \in L^1(\mathbb{T})$ και έτσι από το Θεώρημα 2.2 έχουμε άμεσα ότι το ολοκλήρωμα Poisson της f, δηλαδή η $u(z)$, είναι αρμονική συνάρτηση στο $\mathbb{D}$.

Έστω $p < \infty$. Τότε, κάνοντας χρήση της ανισότητας Minkowski, παίρνουμε

$$\|u(re^{i\theta})\|_p \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\|f\|_p\,dt = \|f\|_p\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\,dt = \|f\|_p$$

$$\implies \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^p dt \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\,dt, \forall r < 1.$$

Η ανισότητα $|u(z)| \le \|f\|_\infty$ όταν $p = \infty$ είναι φανερή. $\square$

Θεώρημα 2.4. *Έστω*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty$$

και έχουμε έτσι μία απόλυτα συγκλίνουσα σειρά Fourier

$$g(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\theta}.$$

Τότε για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ ισχύει

$$(f * g)(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \widehat{f}(n) e^{in\theta}.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$f(\theta-\phi)g(\phi) = f(\theta-\phi)\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\phi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\phi} f(\theta-\phi).$$

Άρα,

$$\int_{\mathbb{T}} f(\theta-\phi)g(\phi)\,d\phi = \int_{\mathbb{T}} \lim_N \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{in\phi} f(\theta-\phi)\,d\phi.$$

Η $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\phi} f(\theta-\phi)$ είναι μία σειρα συναρτήσεων του $L^1(\mathbb{T})$ η οποία είναι συγκλίνουσα και φραγμένη κατά σημείο από τη συνάρτηση $|f(\theta-\phi)|\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$ η οποία είναι ολοκληρώσιμη αφού η $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty$. Επομένως, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue, θα έχουμε

$$\int_{\mathbb{T}} f(\theta-\phi)g(\phi)\,d\phi = \lim_N \sum_{n=-N}^{N} \int_{\mathbb{T}} a_n e^{in\phi} f(\theta-\phi)\,d\phi = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \widehat{f}(n) e^{in\theta}.$$

Δηλαδή,

$$(f * g)(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \widehat{f}(n) e^{in\theta}, \forall f \in L^1(\mathbb{T}).$$

□

Παρατήρηση. Αν $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{in\theta}$ είναι η σειρά Fourier μιας συνάρτησης f του $L^1(\mathbb{T})$, τότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.4 με

$$g(\theta) = P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta}$$

θα έχουμε

$$(f * P_r)(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)r^{|n|}e^{in\theta}.$$

Δηλαδή, το ολοκλήρωμα Poisson της f δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{P[f](re^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)r^{|n|}e^{in\theta}, \forall re^{i\theta} \in \mathbb{D}.}$$

Έστω $\{F_r\}_{0\leq r<1}$ οικογένεια συναρτήσεων στο $\mathbb{T}$. Ορίζουμε $F(re^{it}) = F_r(e^{it})$. Έστω $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. Τότε είναι

$$(P_r * \mu)(e^{i\theta}) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}\, d\mu(e^{it}).$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα καλείται το **ολοκλήρωμα Poisson** του μ.

Τώρα, έχουμε ότι

$$\widehat{P_r * \mu}(n) = \widehat{P_r}(n)\widehat{\mu}(n) = r^{|n|}\widehat{\mu}(n), n \in \mathbb{Z}.$$

Άρα, η σειρά Fourier της συνέλιξης $P_r * \mu$ είναι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\mu}(n)r^{|n|}e^{in\theta}.$$

Αυτά τα αθροίσματα καλούνται **μέσοι Abel-Poisson** της σειράς Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\mu}(n)e^{in\theta}.$$

Περνάμε τώρα σε ένα θεώρημα το οποίο μας δείχνει τη σχέση μεταξύ των μέσων Abel-Poisson του μ και του ολοκληρώματος Poisson του.

Θεώρημα 2.5. *Έστω $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ και έστω*

$$U(re^{i\theta}) = (P_r * \mu)(e^{i\theta}) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}\, d\mu(e^{it}).$$

Τότε $U(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\mu}(n) r^{|n|} e^{in\theta}$. Η σειρά είναι απόλυτα και ομοιόμορφα συγκλίνουσα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{D}$ και η U είναι αρμονική στο $\mathbb{D}$.

Απόδειξη. Αφού $|\widehat{\mu}(n) r^{|n|} e^{in\theta}| = |\widehat{\mu}(n)| r^{|n|} \leq \|\mu\| r^{|n|}, 0 \leq r < 1$, έπεται ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{\mu}(n) r^{|n|} e^{in\theta}| < \infty,$$

δηλαδή η παραπάνω σειρά είναι απόλυτα συγκλίνουσα και από το Θεώρημα του Weierstrass προκύπτει ότι είναι και ομοιόμορφα συγκλίνουσα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{D}$. Σταθεροποιούμε $0 \leq r < 1$ και θ. Τότε

$$U(re^{i\theta}) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}\, d\mu(e^{it}) = \int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} \right) d\mu(e^{it}).$$

Αφού η σειρά είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα και αφού η $|\mu|$ είναι πεπερασμένο θετικό Borel μέτρο στο $\mathbb{T}$ μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά άθροισης και ολοκλήρωσης. Έτσι,

$$U(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{T}} e^{-int} d\mu(e^{it}) \right) r^{|n|} e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\mu}(n) r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Το ότι η U είναι αρμονική στο $\mathbb{D}$ αποδεικνύεται όπως στο Θεώρημα 2.2:
Κάθε $r^{|n|} e^{in\theta}$ είναι αρμονική συνάρτηση και έχουμε επίσης τη σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\mu}(n) r^{|n|} e^{in\theta}$$

η οποία, όπως είδαμε, είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{D}$. Άρα, από τη Πρόταση 1.12, αυτή είναι αρμονική και έτσι έχουμε ότι η U είναι αρμονική στο $\mathbb{D}$. $\square$

Στη περίπτωση που το μέτρο μ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, δηλαδή

$$d\mu(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} u(e^{it})\, dt \text{ με } u \in L^1(\mathbb{T}),$$

τότε

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} u(e^{it})\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{u}(n) r^{|n|} e^{in\theta},$$

όπου η σειρά είναι απόλυτα και ομοιόμορφα συγκλίνουσα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{D}$ και η U είναι αρμονική στο $\mathbb{D}$. (Ο παραπάνω τύπος αποδείχθηκε και με ευθύ τρόπο στο Θεώρημα 2.4.)

2.2 Προσεγγιστικές Μονάδες στο $\mathbb{T}$

Ορισμός 2.6. *Έστω $\{\Phi_j\} \subset L^1(\mathbb{T})$ με το j να ανήκει σε κάποιο συγκεκριμένο συνολο. Η οικογένεια συναρτήσεων $\{\Phi_j\}$ καλείται* ***προσεγγιστική μονάδα*** *στο $\mathbb{T}$ αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Για κάθε j, $\displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_j(e^{it})\, dt = 1$.*
2. $\displaystyle C_{\Phi_j} = \sup_j \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_j(e^{it})|\, dt \right) < \infty.$
3. *Για κάθε σταθεροποιημένο δ, $0 < \delta < \pi$, $\displaystyle\lim_j \int_{\delta \le |t| \le \pi} |\Phi_j(e^{it})|\, dt = 0$.*

Σε περίπτωση που είναι $\Phi_j(e^{it}) \ge 0, \forall j$ και $\forall e^{it} \in \mathbb{T}$, τότε η $\{\Phi_j\}$ καλείται θετική προσεγγιστική μονάδα.

Για την περίπτωση μίας θετικής προσεγγιστικής μονάδας παρατηρούμε ότι

$$C_{\Phi_j} = \sup_j \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_j(e^{it})|\, dt \right) = \sup_j \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_j(e^{it})\, dt \right) = 1 < \infty,$$

δηλαδή η ιδιότητα 2 του ορισμού 2.6 έπεται από την ιδιότητα 1.

Σημειώνουμε πως σε ό,τι ακολουθήσει το συγκεκριμένο σύνολο στο οποίο το j θα ανήκει θα είναι το $\mathbb{N}$ ή το $[0,1)$. Έτσι, το $\lim_j$ θα σημαίνει είτε $\lim_{n\to\infty}$ ή $\lim_{r\to 1^-}$.

Παράδειγμα 2.7. *Ο πυρήνας Poisson*

$$P_r(e^{it}) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int}, 0 \le r < 1$$

είναι μία θετική προσεγγιστική μονάδα.

Απόδειξη. 1) Για κάθε $0 \le r < 1$ είναι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int}\,dt.$$

Όμως, από την Πρόταση 1.29, έχουμε ότι η τριγωνομετρικη σειρά $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int}$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Έτσι, μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά άθροισης και ολοκλήρωσης, και έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\,dt = 1.$$

2) Ο $P_r, 0 \le r < 1$, είναι μη αρνητικός, άρα $|P_r| = P_r$. Επομένως, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P_r(t)|\,dt = 1, \forall 0 \le r < 1 \implies \sup_{0\le r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|P_r(t)|\,dt\right) = 1 < \infty.$$

3) Για κάθε $\delta > 0$:

$$\int_{\delta\le|t|\le\pi} P_r(t)\,dt = \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(t)\,dt + \int_{\delta}^{\pi} P_r(t)\,dt = 2\int_{\delta}^{\pi} P_r(t)\,dt.$$

Ισχύει $1-2r\cos t+r^2 = (1-r)^2+2r(1-\cos t) \ge (1-r)^2+2r(1-\cos\delta) = c_\delta$, για $\delta \le |t| \le \pi$. Επομένως, $P_r(t) \le \frac{1-r^2}{c_\delta}$, για $\delta \le |t| \le \pi$.

Άρα,

$$\int_{\delta}^{\pi} P_r(t)\,dt \le \frac{1-r^2}{c_\delta}(\pi-\delta) \to 0, \text{ καθώς } r \to 1.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{r\to1}\int_{\delta\le|t|\le\pi} P_r(t)\,dt = 0.$$

□

Σημείωση. Ένα άλλο παράδειγμα προσεγγιστικής μονάδας το οποίο απλώς σημειώνουμε και το οποίο συναντήσουμε παρακάτω αποτελεί η οικογένεια των συναρτήσεων

$$F_r(e^{it}) = \frac{(1+r)^2(1-r)t\sin t}{(1+r^2-2r\cos t)^2}, 0 \leq r < 1, t \in [-\pi, \pi].$$

Επίσης, για την F_r σημειώνουμε ότι για σταθεροποιημένο $\delta > 0$, $0 < \delta < \pi$, ισχύει

$$\lim_{r \to 1^-} \big(\sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} |F_r(e^{it})| \big) = 0.$$

Πρόταση 2.8. *Για μία προσεγγιστική μονάδα στο $\mathbb{T}$ ισχύει $\lim_j \widehat{\Phi}_j(n) = 1$.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{Z}$. Λόγω της συνέχειας της e^{-int} στο 0 έχουμε δοθέντος $\varepsilon > 0$ ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|e^{-int} - 1| < \varepsilon, \forall t \in [-\delta, \delta]$. Έτσι, κάνοντας χρήση της ιδιότητας 1. από τον ορισμό 2.6, έχουμε

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}_j(n) - 1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_j(e^{it})e^{-int}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_j(e^{it})\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_j(e^{it})(e^{-int} - 1)\,dt.\end{aligned}$$

Τότε, κάνοντας χρήση της ιδιότητας 2. από τον ορισμό 2.6, παίρνουμε

$$\begin{aligned}|\widehat{\Phi}_j(n) - 1| &\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta<|t|\leq\pi}\right)|\Phi_j(e^{it})||e^{-int} - 1|\,dt \\ &\leq \varepsilon C_{\Phi_j} + \frac{1}{\pi}\int_{\delta<|t|\leq\pi} |\Phi_j(e^{it})|\,dt.\end{aligned}$$

Από το 3. του ορισμού 2.6 καθώς το j μεγαλώνει το τελευταίο ολοκλήρωμα τείνει στο μηδέν. Επομένως, υπάρχει j_ε ώστε

$$|\widehat{\Phi}_j(n) - 1| \leq (C_{\Phi_j} + 1)\varepsilon, \forall j > j_\varepsilon.$$

Άρα, πράγματι $\lim_j \widehat{\Phi}_j(n) = 1$. □

Θεώρημα 2.9. *Έστω $\{\Phi_j\}$ προσεγγιστική μονάδα στο $\mathbb{T}$ και έστω $f \in C(\mathbb{T})$. Τότε, για κάθε j, η $\Phi_j * f \in C(\mathbb{T})$ με $\|\Phi_j * f\|_\infty \leq C_{\Phi_j}\|f\|_\infty$ και επιπλέον ισχύει $\lim_j \|\Phi_j * f - f\|_\infty = 0$, δηλαδή η $\Phi_j * f$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $\mathbb{T}$.*

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 1.35 για κάθε j η $\Phi_j * f \in C(\mathbb{T})$ και ισχύει

$$\|\Phi_j * f\|_\infty \leq \|\Phi_j\|_1 \|f\|_\infty \leq C_{\Phi_j} \|f\|_\infty.$$

Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{T}$ (ως συνεχής στο συμπαγές $\mathbb{T}$), δοθέντος $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε $|f(e^{it_1}) - f(e^{it_2})| < \varepsilon$, όταν $|t_1 - t_2| < \delta$. Έτσι, για κάθε t,

$$\begin{aligned}
|(\Phi_j * f)(e^{it}) - f(e^{it})| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_j(e^{i\tau}) f(e^{i(t-\tau)})\, d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_j(e^{i\tau}) f(e^{it})\, d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) |\Phi_j(e^{i\tau})| |f(e^{i(t-\tau)}) - f(e^{it})|\, d\tau \\
&\leq \varepsilon C_{\Phi_j} + \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi} \int_{\delta \leq |\tau| \leq \pi} |\Phi_j(e^{i\tau})|\, d\tau.
\end{aligned}$$

Τώρα, από το 3. του ορισμού 2.6, μπορούμε να επιλέξουμε $j(\varepsilon)$ αρκετά μεγάλο ώστε

$$\frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |\tau| \leq \pi} |\Phi_j(e^{i\tau})|\, d\tau < \varepsilon, \forall j > j(\varepsilon).$$

Έτσι, για κάθε $j > j(\varepsilon)$ και για κάθε t, έχουμε

$$|(\Phi_j * f)(e^{it}) - f(e^{it})| < \varepsilon C_{\Phi_j} + \varepsilon \|f\|_\infty = \varepsilon(\|f\|_\infty + C_{\Phi_j}).$$

Άρα, πράγματι $\lim\limits_{j} \|\Phi_j * f - f\|_\infty = 0$. □

Εφαρμογή. (Θεώρημα Fejer στον $L^p(\mathbb{T})$) Αν $1 \leq p < \infty$ και $f \in L^p(\mathbb{T})$, τότε $\|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0$, για $n \to \infty$.

Απόδειξη. Έστω $p < \infty$ και $\varepsilon > 0$. Λόγω της πυκνότητας του χώρου $C(\mathbb{T})$ στους χώρους $L^p(\mathbb{T}), 1 \leq p < \infty$, έχουμε ότι υπάρχει $g \in C(\mathbb{T})$ ώστε $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$.

Είναι τότε

$$\begin{aligned}
\|\sigma_n(f) - f\|_p &\leq \|\sigma_n(f - g)\|_p + \|\sigma_n(g) - g\|_p + \|g - f\|_p \\
&\leq \|f - g\|_p \|F_n\|_1 + \|\sigma_n(g) - g\|_\infty + \|g - f\|_p \\
&\leq 2\varepsilon + \|\sigma_n(g) - g\|_\infty
\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 2.9 έχουμε $\|\sigma_n(g) - g\|_\infty \to 0$. Επομένως, για n αρκετά μεγάλο, είναι $\|\sigma_n(f) - f\|_p \leq 3\varepsilon$. □

Πρόταση 2.10. *Έστω $u \in C(\mathbb{T})$ και έστω επίσης*

$$U(re^{i\theta}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} u(e^{it})\,dt, & 0 \le r < 1 \\ u(e^{i\theta}), & r = 1. \end{cases}$$

Τότε

1. *Η U είναι συνεχής στο $\overline{\mathbb{D}}$.*
2. *Η U είναι αρμονική στο $\mathbb{D}$.*
3. *Για κάθε $0 \le r < 1$, $\|U_r\|_\infty \le \|u\|_\infty$.*

Απόδειξη. Αφού $C(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ από το Θεώρημα 2.2 έχουμε ότι η U είναι αρμονική στο $\mathbb{D}$. Άρα, ως αρμονική έχουμε εξ ορισμού ότι η U είναι συνεχής στο $\mathbb{D}$. Επίσης, από το Θεώρημα 2.9 (παίρνοντας για προσεγγιστική μονάδα τον πυρήνα Poisson), έχουμε ότι, καθώς το $r \to 1$, η U_r συγκλίνει ομοιόμορφα στη u και ισχύει

$$\|U_r\|_\infty = \|P_r * u\|_\infty \le C_{P_r}\|u\|_\infty = \|u\|_\infty.$$

Έστω $f \in C(\mathbb{T})$. Τότε, για το ολοκλήρωμα Poisson της f, έχουμε

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)f(t)\,dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)|f(t)|\,dt \ \le \sup_{\mathbb{T}}|f|.$$

Άρα, αν

$$F(re^{i\theta}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)f(e^{it})\,dt, & 0 \le r < 1 \\ f(e^{i\theta}), & r = 1 \end{cases},$$

τότε

$$\sup_{\overline{\mathbb{D}}}|F| = \sup_{\mathbb{T}}|f|. \tag{2.1}$$

Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση που η f είναι τυχόν τριγωνομετρικό πολυώνυμο, δηλαδή

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{in\theta}.$$

Τότε, από το Πόρισμα 1.32, είναι

$$F(re^{i\theta}) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \widehat{P}_r(n) e^{in\theta} = \sum_{n=-N}^{N} a_n r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Άρα, η F είναι συνεχής στο $\overline{\mathbb{D}}$.

Τώρα, για τη περίπτωση μιας συνεχούς συνάρτησης u στο $\mathbb{T}$ θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στο $C(\mathbb{T})$. Έστω λοιπόν $u \in C(\mathbb{T})$. Τότε θα υπάρχει ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων f_k ώστε

$$\sup_{\mathbb{T}} |f_k - u| \to 0, \text{ καθώς } k \to \infty.$$

Και τότε, αν

$$(F_k)(re^{i\theta}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f_k(e^{it})\, dt, & 0 \leq r < 1 \\ f_k(e^{i\theta}), & r = 1 \end{cases},$$

κάνοντας χρήση της (2.1) θα έχουμε

$$\sup_{\overline{\mathbb{D}}} |U - F_k| = \sup_{\mathbb{T}} |f_k - u| \to 0, \text{ καθώς } k \to \infty.$$

Από την αρχική περίπτωση των τριγωνομετρικών πολυωνύμων έπεται ότι η (F_k) είναι συνεχής στο $\overline{\mathbb{D}}$ και επομένως η U είναι συνεχής στο $\overline{\mathbb{D}}$ ως ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων. □

Θεώρημα 2.11. *Έστω $\{\Phi_j\}$ προσεγγιστική μονάδα στο $\mathbb{T}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε j, $\{\Phi_j\} \subset L^\infty(\mathbb{T})$, και ότι η $\{\Phi_j\}$ ικανοποιεί την ιδιότητα:*

$$\lim_j \Big(\sup_{0<\delta\leq|t|\leq\pi} |\Phi_j(e^{it})| \Big) = 0.$$

Έστω επίσης $f \in L^1(\mathbb{T})$ και υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $e^{it_0} \in \mathbb{T}$. Τότε δοθέντος $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $j(\varepsilon, t_0)$ και $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ τέτοια ώστε:

$$\big|(\Phi_j * f)(e^{it}) - f(e^{it_0})\big| < \varepsilon, \text{ αν } j > j(\varepsilon, t_0) \text{ και } |t - t_0| < \delta.$$

Ειδικότερα, $\lim_j (\Phi_j * f)(e^{it_0}) = f(e^{it_0})$.

Απόδειξη. Αφού $\Phi_j \in L^\infty(\mathbb{T})$ και $f \in L^1(\mathbb{T})$, από το Πόρισμα 1.35, η συνέλιξη $(\Phi_j * f)(e^{it})$ είναι καλά ορισμένη για κάθε $e^{it} \in \mathbb{T}$. Η f είναι συνεχής στο $e^{it_0} \in \mathbb{T}$, άρα εξ ορισμού δοθέντος $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon, t_0)$ τέτοιο ώστε για $|\eta - t_0| < 2\delta$ να ισχύει

$$|f(e^{i\eta}) - f(e^{it_0})| < \varepsilon.$$

Τότε, για $|t-t_0|<\delta$, έχουμε

$$\begin{aligned}
|(\Phi_j * f)(e^{it}) - f(e^{it_0})| &= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_j(e^{i\tau}) f(e^{i(t-\tau)})\,d\tau - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_j(e^{i\tau}) f(e^{it_0})\,d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\bigg(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \bigg) |\Phi_j(e^{i\tau})||f(e^{i(t-\tau)}) - f(e^{it_0})|\,d\tau \\
&\leq \varepsilon C_{\Phi_j} + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|\tau|\leq\pi} |\Phi_j(e^{i\tau})| \big(|f(e^{i(t-\tau)})| + |f(e^{it_0})|\big)\,d\tau \\
&\leq \varepsilon C_{\Phi_j} + \big(\sup_{\delta\leq|t|\leq\pi} |\Phi_j(e^{it})|\big)\big(\|f\|_1 + |f(e^{it_0})|\big).
\end{aligned}$$

Τώρα, αφού

$$\lim_j \big(\sup_{0<\delta\leq|t|\leq\pi} |\Phi_j(e^{it})|\big) = 0,$$

μπορούμε να επιλέξουμε $j(\varepsilon, t_0)$ αρκετά μεγάλο ώστε

$$\sup_{\delta\leq|t|\leq\pi} |\Phi_j(e^{it})| < \varepsilon, \text{ για } j > j(\varepsilon, t_0).$$

Έτσι, για $j > j(\varepsilon, t_0)$ και για $|t-t_0|<\delta$, έχουμε

$$\big|(\Phi_j * f)(e^{it}) - f(e^{it_0})\big| \leq (\|f\|_1 + |f(e^{it_0})| + C_{\Phi_j})\varepsilon.$$

□

Παίρνοντας για προσεγγιστική μονάδα στο Θεώρημα 2.11 τον πυρήνα Poisson, για τον οποίο ισχύει η ιδιότητα: Για κάθε σταθεροποιημένο $\delta>0$,

$$\lim_j \big(\sup_{\delta\leq|t|\leq\pi} |\Phi_j(e^{it})|\big) = 0,$$

έχουμε το ακόλουθο Πόρισμα.

Πόρισμα 2.12. *Έστω συνάρτηση $u \in L^1(\mathbb{T})$ και έστω*

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} u(e^{it})\,dt.$$

Υποθέτουμε επίσης ότι η u είναι συνεχής στο $e^{it_0} \in \mathbb{T}$. Τότε η U είναι αρμονική στο $\mathbb{D}$ και ισχύει

$$\lim_{r\to 1} U(re^{it_0}) = u(e^{it_0}).$$

Θεώρημα 2.13. *Έστω $\{\Phi_j\}$ θετική προσεγγιστική μονάδα στο $\mathbb{T}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε j η $\Phi_j \in L^\infty(\mathbb{T})$ και ότι η $\{\Phi_j\}$ ικανοποιεί την ιδιότητα:*

$$\lim_j \big(\sup_{0<\delta\leq|t|\leq\pi} \Phi_j(e^{it})\big) = 0.$$

Έστω επίσης πραγματική συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\lim_{t\to t_0} f(e^{it}) = +\infty$. Τότε, δοθέντος $M > 0$, υπάρχει $j(M,t_0)$ και $\delta = \delta(M,t_0) > 0$, τέτοιο ώστε

$$(\Phi_j * f)(e^{it}) > M, \text{ για } j > j(M,t_0) \text{ και } |t-t_0| < \delta.$$

Ειδικότερα, $\lim_j (\Phi_j * f)(e^{it_0}) = +\infty$.

Απόδειξη. Αφού $\Phi_j \in L^\infty(\mathbb{T})$ και $f \in L^1(\mathbb{T})$, από το Πόρισμα 1.35 έχουμε ότι η συνέλιξη $(\Phi_j * f)(e^{it})$ είναι καλά ορισμένη για κάθε $e^{it} \in \mathbb{T}$. Για την f γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{t\to t_0} f(e^{it}) = +\infty.$$

Άρα, δοθέντος $M > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(M,t_0) > 0$ τέτοιο ώστε για $|\eta - t_0| < 2\delta$ να ισχύει $f(e^{i\eta}) > 2M$. Τότε, για $|t-t_0| < \delta$, έχουμε

$$\begin{aligned}
(\Phi_j * f)(e^{it}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_j(e^{i\tau}) f(e^{i(t-\tau)})\, d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\bigg(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\bigg)\Phi_j(e^{i\tau}) f(e^{i(t-\tau)})\, d\tau \\
&\geq \frac{2M}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \Phi_j(e^{i\tau})\, d\tau - \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|\tau|\leq\pi} \Phi_j(e^{i\tau})|f(e^{i(t-\tau)})|\, d\tau \\
&= \frac{2M}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_j(e^{it}) dt - \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|\tau|\leq\pi} \Phi_j(e^{i\tau})(2M + |f(e^{i(t-\tau)})|)\, d\tau \\
&\geq 2M - \sup_{\delta\leq|\tau|\leq\pi} \Phi_j(e^{i\tau})(2M + \|f\|_1).
\end{aligned}$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\lim_j \big(\sup_{0<\delta\leq|t|\leq\pi} \Phi_j(e^{it})\big) = 0.$$

Άρα, μπορούμε να επιλέξουμε $j(M,t_0)$ αρκετά μεγάλο ώστε

$$\sup_{\delta\leq|\tau|\leq\pi} \Phi_j(e^{i\tau})(2M + \|f\|_1) < M, \text{ για } j > j(M.t_0).$$

Έτσι, για $j > j(M, t_0)$ και για $|t - t_0| < \delta$, ισχύει πράγματι ότι
$$(\Phi_j * f)(e^{it}) > M.$$

□

Πόρισμα 2.14. *Έστω u πραγματική συνάρτηση στον $L^1(\mathbb{T})$ και έστω*
$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} u(e^{it})\,dt.$$
Υποθέτουμε επίσης ότι $\lim_{t\to t_0} u(e^{it}) = +\infty$. Τότε η U είναι αρμονική στο $\mathbb{D}$ και ισχύει
$$\lim_{r\to 1} U(re^{it_0}) = +\infty.$$

2.3 Ασθενής * σύγκλιση μέτρων

Ορισμός 2.15. *Μία μιγαδική συνάρτηση f σε έναν τοπικά συμπαγή χώρο Hausdorff X λέμε ότι* ***μηδενίζεται στο άπειρο*** *αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές σύνολο $K \subset X$ τέτοιο ώστε $|f(x)| < \varepsilon, \forall x \notin K$.*

Την κλάση των συνεχών συναρτήσεων στο X που μηδενίζονται στο άπειρο θα τη συμβολίζουμε με $C_0(X)$.

Ορισμός 2.16. *Έστω X τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff. Αν μ και $\mu_n, n \geq 1$, είναι μιγαδικά κανονικά Borel μέτρα στο X, τότε λέμε ότι το μ_n συγκλίνει στο μ στην ασθενή * τοπολογία αν*
$$\lim_{n\to\infty}\int_X \phi\,d\mu_n = \int_X \phi\,d\mu, \forall \phi \in C_0(X).$$

Θεώρημα 2.17. *Έστω $\{\Phi_j\}$ προσεγγιστική μονάδα στο $\mathbb{T}$ και έστω $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. Τότε, για κάθε j,*
$$\Phi_j * \mu \in L^1(\mathbb{T}) \text{ με } \|\Phi_j * \mu\|_1 \leq C_{\Phi_j}\|\mu\| \text{ και } \|\mu\| \leq \sup_j \|\Phi_j * \mu\|_1.$$
Επίσης, τα μέτρα
$$d\mu_j(e^{it}) = (\Phi_j * \mu)(e^{it})\,\frac{dt}{2\pi}$$
*συγκλίνουν στο $d\mu(e^{it})$ στην ασθενή * τοπολογία, δηλαδή*
$$\lim_j \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it})(\Phi_j * \mu)(e^{it})\,dt = \int_{\mathbb{T}} \phi(e^{it})\,d\mu(e^{it}), \forall \phi \in C(\mathbb{T}).$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.37 έχουμε ότι η συνέλιξη $\Phi_j * \mu \in L^1(\mathbb{T})$ με:

$$\|\Phi_j * \mu\|_1 \leq \|\Phi_j\|_1 \|\mu\| \leq C_{\Phi_j} \|\mu\|, \forall j.$$

Έστω $\phi \in C(\mathbb{T})$ και ορίζουμε $\psi(e^{it}) = \phi(e^{-it})$. Τότε $\psi \in C(\mathbb{T})$ και από το Θεώρημα Fubini έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it})(\Phi_j * \mu)(e^{it})\, dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it})\bigg(\int_{\mathbb{T}} \Phi_j(e^{i(t-\tau)})\, d\mu(e^{i\tau})\bigg)\, dt \\
&= \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_j(e^{i(t-\tau)})\phi(e^{it})\, dt\right) d\mu(e^{i\tau}) \\
&= \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_j(e^{i(-\tau-s)})\phi(e^{-is})\, ds\right) d\mu(e^{i\tau}) \\
&= \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_j(e^{i(-\tau-s)})\psi(e^{is})\, ds\right) d\mu(e^{i\tau}) \\
&= \int_{\mathbb{T}} (\Phi_j * \psi)(e^{-i\tau})\, d\mu(e^{i\tau}). \quad (\dagger)
\end{aligned}$$

Τώρα, αφού η $\{\Phi_j\}$ είναι προσεγγιστική μονάδα και η $\psi \in C(\mathbb{T})$, από το Θεώρημα 2.9 έχουμε ότι $(\Phi_j * \psi)(e^{-i\tau})$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\psi(e^{-i\tau})$ στο $\mathbb{T}$. Συνεπώς, λόγω της ομοιόμορφης σύγκλιση και αφού η $|\mu|$ είναι πεπερασμένο θετικό Borel μέτρο, παίρνοντας όριο ως προς j στην $(\dagger)$, έχουμε

$$\lim_j \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it})(\Phi_j * \mu)(e^{it})\, dt = \int_{\mathbb{T}} \psi(e^{-i\tau})\, d\mu(e^{i\tau}) = \int_{\mathbb{T}} \phi(e^{i\tau})\, d\mu(e^{i\tau}).$$

Τέλος, έχουμε

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it})(\Phi_j * \mu)(e^{it})\, dt\right| \leq \|\phi\|_\infty \sup_j \|\Phi_j * \mu\|_1.$$

Τότε, παίρνοντας όριο ως προς j, προκύπτει

$$\left|\int_{\mathbb{T}} \phi(e^{i\tau})\, d\mu(e^{i\tau})\right| \leq \|\phi\|_\infty \sup_j \|\Phi_j * \mu\|_1, \forall \phi \in C(\mathbb{T}).$$

Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz έπεται ότι

$$\|\mu\| \leq \sup_j \|\Phi_j * \mu\|_1.$$

$\square$

Παίρνοντας για προσεγγιστική μονάδα στο Θεώρημα 2.17 τον πυρήνα Poisson και κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 2.5 έχουμε το παρακάτω Πόρισμα.

Πόρισμα 2.18. *Έστω $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ και έστω*

$$U(re^{i\theta}) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}\, d\mu(e^{it}).$$

Τότε η συνάρτηση U είναι αρμονική στο $\mathbb{D}$ και $\|\mu\| = \sup\limits_{0\le r<1} \|U_r\|_1 = \lim\limits_{r\to 1} \|U_r\|_1$. Επίσης, τα μέτρα

$$d\mu_r(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} U(re^{it})\, dt$$

*συγκλίνουν στο $d\mu(e^{it})$, καθώς $r \to 1^-$, στην ασθενή * τοπολογία, δηλαδή*

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{T}} \phi(e^{it})\, d\mu_r(e^{it}) = \int_{\mathbb{T}} \phi(e^{it})\, d\mu(e^{it}), \forall \phi \in C(\mathbb{T}).$$

Πόρισμα 2.19. *(Θεώρημα Μοναδικότητας) Έστω $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι*

$$\int_{\mathbb{T}} P_r(\theta-t)\, d\mu(e^{it}) = 0, \forall re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Τότε $\mu = 0$.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$U(re^{i\theta}) = \int_{\mathbb{T}} P_r(\theta-t)\, d\mu(e^{it}).$$

Από το Πόρισμα 2.18 γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\|\mu\| = \sup_{0\le r<1} \|U_r\|_1.$$

Όμως, από την υπόθεση έπεται ότι $\|U_r\|_1 = 0$. Άρα, $\|\mu\| = 0$ και αφού η κύμανση του μ είναι νόρμα έχουμε τελικά ότι $\mu = 0$. □

Πόρισμα 2.20. *(Θεώρημα Μοναδικότητας) Έστω $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι $\widehat{\mu}(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. Τότε $\mu = 0$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$U(re^{i\theta}) = \int_{\mathbb{T}} P_r(\theta-t)\, d\mu(e^{it}).$$

Τότε, από το Θεώρημα 2.5, ισχύει ότι

$$U(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\mu}(n) r^{|n|} e^{in\theta}, \forall re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Όμως, για κάθε ακέραιο n, ισχύει $\widehat{\mu}(n) = 0$. Άρα, $U(re^{i\theta}) = 0$, για κάθε $re^{i\theta} \in \mathbb{D}$. Τότε, από το Πόρισμα 2.19, έχουμε ότι $\mu = 0$. □

Παρατήρηση. Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 2.20 μπορεί να δοθεί μία εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος Μοναδικότητας στον $L^1(\mathbb{T})$:

Ορίζουμε μέτρο μ στο $\mathbb{T}$ τέτοιο ώστε

$$\mu(E) = \int_E f(e^{it})\, dt,$$

δηλαδή $d\mu = f dt$. Εξ υποθέσεως του Θεωρήματος Μοναδικότητας στον $L^1(\mathbb{T})$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{T}} f(e^{it}) e^{-int}\, dt = 0,$$

δηλαδή

$$\widehat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{-int}\, d\mu(e^{it}) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Τότε, από το Πόρισμα 2.20, έπεται ότι $\mu = 0$ και άρα $f = 0$ σχεδόν παντού.

Σημείωση. Ένας εναλλακτικός τρόπος απόδειξης του Πορίσματος 2.20 είναι ο εξής:

Αν p είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, τότε λόγω της υπόθεσης έχουμε $\int_{\mathbb{T}} p\, d\mu = 0$. Αφού τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στο $C(\mathbb{T})$, έπεται ότι αν $f \in C(\mathbb{T})$, τότε $\int_{\mathbb{T}} f\, d\mu = 0$. Έστω τώρα ανοιχτό $U \subset \mathbb{T}$. Τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μη αρνητικών συναρτήσεων στο $C(\mathbb{T})$ με $f_n \to \mathcal{X}_U$. Τότε, από το Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης [1], έχουμε

$$\int_{\mathbb{T}} f_n\, d\mu \to \int_{\mathbb{T}} \mathcal{X}_U\, d\mu = \mu(U).$$

Όμως είναι $\int_{\mathbb{T}} f_n\, d\mu = 0$, άρα $\mu(U) = 0$. Αν $\mu = \mu^+ - \mu^-$ είναι η διάσπαση Jordan του μ, τότε $\mu^+(U) = \mu^-(U)$. Αφού τα Borel μέτρα στο $\mathbb{T}$ είναι κανονικά έπεται ότι $\mu^+ = \mu^-$. Επομένως, $\mu = 0$.

[1] Έστω $\{f_n\}$ μία ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων σε έναν χώρο πεπερασμένου μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ η οποία συγκλίνει κατά σημείο σχεδόν παντού σε μία συνάρτηση f. Τότε $\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu$ και $\int_X |f_n - f|\, d\mu \to 0$, καθώς $n \to \infty$.

2.4 Σύγκλιση στη νόρμα του $L^p(\mathbb{T}), 1 \leq p \leq \infty$

Θεώρημα 2.21. *Έστω $\{\Phi_j\}$ προσεγγιστική μονάδα στο $\mathbb{T}$ και έστω $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$. Τότε, για κάθε j, $\Phi_j * f \in L^p(\mathbb{T})$, με $\|\Phi_j * f\|_p \leq C_{\Phi_j}\|f\|_p$ και επιπλέον ισχύει $\lim_j \|\Phi_j * f - f\|_p = 0$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.34 έχουμε ότι η συνέλιξη $\Phi_j * f \in L^p(\mathbb{T})$ και

$$\|\Phi_j * f\|_p \leq \|\Phi_j\|_1 \|f\|_p \leq C_{\Phi_j}\|f\|_p, \forall j. \tag{2.2}$$

Σταθεροποιούμε $\varepsilon > 0$. Τότε, δοθέντος $f \in L^p(\mathbb{T})$, υπάρχει $\phi \in C(\mathbb{T})$, ώστε $\|f - \phi\|_p < \varepsilon$. (Ισχύει ότι ο χώρος $C(\mathbb{T})$ είναι πυκνός στον $L^p(\mathbb{T}), 1 \leq p < \infty$.)

Άρα,

$$\begin{aligned}\|\Phi_j * f - f\|_p &= \|\Phi_j * (f - \phi) - (f - \phi) + (\Phi_j * \phi - \phi)\|_p \\ &\leq \|\Phi_j * (f - \phi)\|_p + \|f - \phi\|_p + \|\Phi_j * \phi - \phi\|_p.\end{aligned}$$

Όμως, λόγω της (2.2), έχουμε ότι $\|\Phi_j * (f - \phi)\|_p \leq C_{\Phi_j}\|f - \phi\|_p$.

Έτσι,

$$\begin{aligned}\|\Phi_j * f - f\|_p &\leq C_{\Phi_j}\|f - \phi\|_p + \|f - \phi\|_p + \|\Phi_j * \phi - \phi\|_p \\ &= (1 + C_{\Phi_j})\|f - \phi\|_p + \|\Phi_j * \phi - \phi\|_p \\ &\leq (1 + C_{\Phi_j})\varepsilon + \|\Phi_j * \phi - \phi\|_\infty.\end{aligned}$$

Τώρα, αφού η $\{\Phi_j\}$ είναι προσεγγιστική μονάδα και η $\phi \in C(\mathbb{T})$, από το Θεώρημα 2.9, ισχύει ότι

$$\lim_j \|\Phi_j * \phi - \phi\|_\infty = 0.$$

Συνεπώς, υπάρχει $j(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε

$$\|\Phi_j * \phi - \phi\|_\infty < \varepsilon, \forall j > j(\varepsilon).$$

Έτσι,

$$\|\Phi_j * f - f\|_p \leq (2 + C_{\phi_j})\varepsilon, \text{ όταν } j > j(\varepsilon),$$

δηλαδή

$$\lim_j \|\Phi_j * f - f\|_p = 0.$$

□

Πόρισμα 2.22. *Έστω $u \in L^p(\mathbb{T}), 1 \leq p < \infty$, και έστω*

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)} u(e^{it})\, dt.$$

Τότε η U είναι αρμονική στο $\mathbb{D}$, $\sup\limits_{0 \leq r < 1} \|U_r\|_p = \lim\limits_{r \to 1} \|U_r\|_p = \|u\|_p$ και

$$\lim_{r \to 1} \|U_r - u\|_p = 0.$$

Θεώρημα 2.23. *Έστω $\{\Phi_j\}$ προσεγγιστική μονάδα στο $\mathbb{T}$ και έστω επίσης $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Τότε, για κάθε j, η συνέλιξη $\Phi_j * f \in C(\mathbb{T})$ με*

$$\|\Phi_j * f\|_\infty \leq C_{\Phi_j} \|f\|_\infty \text{ και } \|f\|_\infty \leq \sup_j \|\Phi_j * f\|_\infty.$$

*Επίσης, η $\Phi_j * f$ συγκλίνει στην f στην ασθενή * τοπολογία, δηλαδή*

$$\lim_j \int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it})(\Phi_j * f)(e^{it})\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it}) f(e^{it})\, dt, \forall \phi \in L^1(\mathbb{T}).$$

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 1.35 έχουμε ότι η συνέλιξη $\Phi_j * f \in C(\mathbb{T})$ και για κάθε j ισχύει

$$\|\Phi_j * f\|_\infty \leq \|\Phi_j\|_1 \|f\|_\infty \leq C_{\Phi_j} \|f\|_\infty.$$

Έστω $\phi \in L^1(\mathbb{T})$ και έστω $\psi(e^{it}) = \phi(e^{-it})$. Τότε, από το Θεώρημα Fubini, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it})(\Phi_j * f)(e^{it})\, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it}) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_j(e^{i(t-\tau)}) f(e^{i\tau})\, d\tau \right) dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_j(e^{i(t-\tau)}) \phi(e^{it})\, dt \right) f(e^{i\tau})\, d\tau \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_j(e^{i(-\tau-s)}) \psi(e^{is})\, ds \right) f(e^{i\tau})\, d\tau.
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it})(\Phi_j * f)(e^{it})\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} (\Phi_j * \psi)(e^{-\tau}) f(e^{i\tau})\, d\tau. \tag{2.3}$$

Από το Θεώρημα 2.21 έχουμε ότι η $(\Phi_j * \psi)(e^{-i\tau})$ συγκλίνει στο $\psi(e^{-i\tau})$ στον $L^1(\mathbb{T})$.

Παίρνοντας όριο ως προς j στην (2.3) και αφού η f είναι φραγμένη έχουμε

$$\lim_j \int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it})(\Phi_j * f)(e^{it})\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(e^{-i\tau}) f(e^{i\tau})\, d\tau.$$

Επομένως,

$$\lim_j \int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it})(\Phi_j * f)(e^{it})\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it}) f(e^{it})\, dt.$$

Τέλος, έχουμε

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it})(\Phi_j * f)(e^{it})\, dt \right| \leq \sup_j \|\Phi_j * f\|_\infty \|\phi\|_1, \forall \phi \in L^1(\mathbb{T}).$$

Τότε, παίρνοντας όριο ως προς j, προκύπτει

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it}) f(e^{it})\, dt \right| \leq \sup_j \|\Phi_j * f\|_\infty \|\phi\|_1, \forall \phi \in L^1(\mathbb{T}).$$

Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz έπεται ότι

$$\|f\|_\infty \leq \sup_j \|\Phi_j * f\|_\infty.$$

□

Πόρισμα 2.24. *Έστω $u \in L^\infty(\mathbb{T})$ και έστω επίσης*

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} u(e^{it})\, dt.$$

Τότε η συνάρτηση U είναι φραγμένη και αρμονική στο $\mathbb{D}$ και ισχύει

$$\sup_{0 \leq r < 1} \|U_r\|_\infty = \lim_{r \to 1} \|U_r\|_\infty = \|u\|_\infty.$$

*Επιπλέον, καθώς $r \to 1$, το U_r συγκλίνει στη u στην ασθενή * τοπολογία, δηλαδή*

$$\lim_{r \to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it}) U(re^{it})\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it}) u(e^{it})\, dt, \forall \phi \in L^1(\mathbb{T}).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αρμονικές συναρτήσεις στο μοναδιαίο δίσκο

3.1 Αναπαράσταση αρμονικών συναρτήσεων με σειρές

Θα συμβολίζουμε με D_R τον ανοιχτό δίσκο κέντρου 0 και ακτίνας $R > 0$, δηλαδή $D_R = \{z : |z| < R\}$.

Θεώρημα 3.1. *Έστω U αρμονική συνάρτηση στο D_R. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, η ποσότητα*

$$a_n = \frac{\rho^{-|n|}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(\rho e^{it}) e^{-int}\, dt, 0 < \rho < R,$$

είναι ανεξάρτηση του ρ και ισχύει $U(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$. Η συνάρτηση $V(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -i\,\mathrm{sign}(n) a_n r^{|n|} e^{in\theta}$ είναι η μοναδική αρμονική συζυγής της U ώστε $V(0) = 0$. Οι παραπάνω σειρές είναι απόλυτα και ομοιόμορφα συγκλίνουσες στα συμπαγή υποσύνολα του D_R.

Απόδειξη. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η U είναι πραγματική στο D_R. Έστω

$$G(z) = \frac{\partial U}{\partial x}(z) - i\frac{\partial U}{\partial y}(z).$$

Η U, ως αρμονική στο D_R, ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace, δηλαδή

$$U_{xx} + U_{yy} = 0.$$

Άρα,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$$

δηλαδή

$$(\Re G)_x = (\Im G)_y.$$

Επίσης, εύκολα βλέπουμε ότι

$$(\Im G)_x = -(\Re G)_y.$$

Επομένως, το πραγματικό και φανταστικό μέρος της G ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann και άρα η G είναι ολόμορφη στο D_R.

Έστω τώρα

$$F(z) = U(0) + \int_{[0,z]} G(w)\, dw.$$

Αφού το D_R είναι κυρτό η F είναι καλά ορισμένη. Έστω $H = \Re F$. Τότε $H(0) = U(0)$ και $\Im F(0) = 0$. Είναι

$$F'(z) = G(z) = \frac{\partial U}{\partial x}(z) - i\frac{\partial U}{\partial y}(z).$$

Από τις εξισώσεις $C - R$ έχουμε

$$F'(z) = \frac{\partial H}{\partial x}(z) - i\frac{\partial H}{\partial y}(z).$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}(z) - i\frac{\partial U}{\partial y}(z) &= \frac{\partial H}{\partial x}(z) - i\frac{\partial H}{\partial y}(z) \\ \implies \frac{\partial (U-H)}{\partial x}(z) &= 0 \text{ και } \frac{\partial (U-H)}{\partial y}(z) = 0, \end{aligned}$$

και αφού $H(0) = U(0)$ έπεται ότι $U = H \iff U = \Re F$. Γράφουμε $V = \Im F$ και έχουμε $F = U + iV$ με $V(0) = 0$. Αφού η F είναι αναλυτική στο D_R έχει μοναδική αναπαράσταση σε δυναμοσειρά

$$F(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta} \text{ με } \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n < \infty, \forall r < R. \tag{3.1}$$

Έτσι,

$$U(re^{i\theta}) = \Re F(re^{i\theta}) = \Re\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

όπου

$$a_n = \begin{cases} c_n/2, & n > 0 \\ c_0, & n = 0 \\ \bar{c}_{-n}/2, & n < 0. \end{cases}$$

Επιπλέον, $\forall m \in \mathbb{Z}$ και $0 < r < R$ ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{r^{-|m|}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(re^{it}) e^{-imt} dt &= \frac{r^{-|m|}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bigg(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{int} \bigg) e^{-imt} dt \\ &= r^{-|m|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} \bigg(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt \bigg) \\ &= a_m. \end{aligned}$$

Τέλος, έχουμε

$$V(re^{i\theta}) = \Im F(re^{i\theta}) = \Im \bigg\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta} \bigg\}$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta} - \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n r^n e^{-in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -i \operatorname{sign}(n) a_n r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Η συνθήκη (3.1) εξασφαλίζει την απόλυτη και ομοιόμορφη σύγκλιση της παραπάνω σειράς στα συμπαγή υποσύνολα του D_R. □

Για $m = 0$ έχουμε το παρακάτω Πόρισμα το οποίο αποτελεί ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 1.11. Το ξεχωρίζουμε διότι παρακάτω θα χρησιμοποιηθεί στη συγκεκριμένη μορφή.

Πόρισμα 3.2. *Έστω U αρμονική συνάρτηση στο D_R. Τότε*

$$U(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(re^{i\theta})\, d\theta, \forall r, 0 \leq r < R.$$

Το συζυγές ολοκλήρωμα Poisson

Έστω $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ και U το ολοκλήρωμα Poisson του μ, δηλαδή

$$U(re^{i\theta}) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)}\, d\mu(e^{it}).$$

Τότε από το Θεώρημα 2.5 γνωρίζουμε ότι

$$U(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\mu}(n) r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Συνεπώς, από το Θεώρημα 3.1, η αρμονική συζυγής της U δίνεται από

$$V(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -i\,\mathrm{sign}(n)\widehat{\mu}(n)r^{|n|}e^{in\theta}.$$

Επίσης, από το Θέωρημα 3.1, γνωρίζουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} -i\,\mathrm{sign}(n)\widehat{\mu}(n)r^{|n|}e^{in\theta}$$

είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα. Έτσι, θα έχουμε

$$V(re^{i\theta}) = \int_{\mathbb{T}} \bigg(\sum_{n=-\infty}^{\infty} -i\,\mathrm{sign}(n)r^{|n|}e^{in(\theta-t)} \bigg) d\mu(e^{it}).$$

Θέτουμε

$$Q_r(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -i\,\mathrm{sign}(n)r^{|n|}e^{int}.$$

Αυτή η συνάρτηση καλείται ο **συζυγής πυρήνας Poisson**. Μετά από πράξεις μπορούμε να δούμε ότι

$$Q_r(e^{it}) = \frac{2r\sin t}{1+r^2-2r\cos t}.$$

Επομένως, η αρμονική συζυγής της U δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$V(re^{i\theta}) = \int_{\mathbb{T}} \frac{2r\sin(\theta-t)}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}\, d\mu(e^{it})$$

το οποίο είναι γνωστό ως το **συζυγές ολοκλήρωμα Poisson**.

Αν $d\mu = f\,dm$, όπου $f \in L^1(\mathbb{T})$, θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό Qf για το συζυγές ολοκλήρωμα Poisson.

3.2 Χώροι Hardy στο $\mathbb{D}$

Θα συμβολίζουμε με $h(\mathbb{D})$ την οικογένεια όλων των μιγαδικών αρμονικών συναρτήσεων στο $\mathbb{D}$, δηλαδή

$$h(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f \text{ αρμονική}\}.$$

Για $U \in h(\mathbb{D})$, θέτουμε

$$\|U\|_p = \sup_{0\le r<1} \|U_r\|_p = \sup_{0\le r<1} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |U(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p}, \text{ αν } p \in (0,+\infty),$$

και

$$\|U\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |U(z)|, \text{ αν } p = +\infty.$$

Ορίζουμε την κλάση Hardy των αρμονικών συναρτήσεων στον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο:

$$h^p(\mathbb{D}) = \{U \in h(\mathbb{D}) : \|U\|_p < \infty\}, \text{ όπου } p \in (0,+\infty].$$

Αν η U είναι αρμονική συνάρτηση και $0 < p \le \infty$, τότε η συνάρτηση $|U|^p$ είναι υποαρμονική και άρα η συνάρτηση $r \mapsto \|U_r\|_p$ είναι αύξουσα για $0 \le r < 1$. Επίσης, από την Αρχή Μεγίστου, έχουμε ότι και η συνάρτηση $r \mapsto \|U_r\|_\infty$ είναι αύξουσα. Επομένως, για $p \in (0,+\infty]$, ισχύει ότι $\|U\|_p = \lim_{r\to 1} \|U_r\|_p$.

Πρόταση 3.3. *Ο $h^p(\mathbb{D})$, $1 \le p \le \infty$, είναι γραμμικός χώρος με νόρμα.*

Απόδειξη. Έστω συναρτήσεις $U_1, U_2 \in h(\mathbb{D})$. Από την ανισότητα Minkowski έχουμε

$$\|(U_1+U_2)_r\|_p \le \|(U_1)_r\|_p + \|(U_2)_r\|_p.$$

Τότε, παίρνοντας sup ως προς $0 \le r < 1$, θα έχουμε

$$\|U_1+U_2\|_p \le \|U_1\|_p + \|U_2\|_p.$$

Αφού, προφανώς, η $\|\cdot\|_{h^p}$ είναι ομογενής και $\|U\|_{h^p} = 0 \implies U \equiv 0$, έπεται ότι για $1 \le p \le \infty$, ο $h^p(\mathbb{D})$ είναι γραμμικός χώρος. □

Επίσης, με χρήση της ανισότητας Holder, βλέπουμε ότι

$$h^\infty(\mathbb{D}) \subset h^q(\mathbb{D}) \subset h^p(\mathbb{D}), \text{ αν } 0 < p < q < \infty.$$

Θα συμβολίζουμε με $H(\mathbb{D})$ την οικογένεια των ολόμορφων συναρτήσεων στο $\mathbb{D}$, δηλαδή

$$H(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f \text{ ολόμορφη}\}.$$

Από το εισαγωγικό κεφάλαιο γνωρίζουμε ότι κάθε ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη σε ένα domain είναι μία μιγαδική αρμονική συνάρτηση. Έχουμε έτσι τον εγκλεισμό

$$H(\mathbb{D}) \subset h(\mathbb{D}).$$

Θεωρούμε τώρα την κλάση Hardy των ολόμορφων συναρτήσεων στον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο:

$$H^p(\mathbb{D}) = \{F \in H(\mathbb{D}) : \|F\|_p < \infty\}, 0 < p \leq \infty.$$

Προφανώς, $H^p(\mathbb{D}) \subset h^p(\mathbb{D})$. Ο χώρος Hardy $H^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p \leq \infty$, είναι γραμμικός χώρος με νόρμα και ισχύει ότι

$$H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^q(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D}), \text{ αν } 0 < p < q < \infty.$$

Από τα Πορίσματα 2.18, 2.22 και 2.24 έχουμε άμεσα το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 3.4. *Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Αν $u \in L^p(\mathbb{T})$, τότε $U = P * u \in h^p(\mathbb{D})$ και $\|U\|_p = \|u\|_p$. Αν $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, τότε $U = P * \mu \in h^1(\mathbb{D})$ και $\|U\|_1 = \|\mu\|$.*

3.3 Αναπαράσταση Poisson συναρτήσεων του $h^\infty(\mathbb{D})$

Θεωρούμε το σύνολο $h(\overline{\mathbb{D}}) = \{U : \Delta U = 0, \text{ για } |z| < R, \text{ για κάποιο } R > 1\}$. Σημειώνουμε ότι η σταθερά R εξαρτάται από τη U.

Λήμμα 3.5. *Έστω $U \in h(\overline{\mathbb{D}})$. Τότε*

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)U(e^{it})\, dt.$$

Απόδειξη. Αφού $U \in h(\overline{\mathbb{D}})$, υπάρχει $R > 1$ ώστε η U να είναι αρμονική στο D_R. Έτσι, από το Θεώρημα 3.1 με $\rho = 1$, για κάθε $re^{i\theta} \in D_R$, έχουμε

$$U(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(e^{it})e^{-int}\, dt, n \in \mathbb{Z}.$$

Ειδικότερα, $\forall re^{i\theta} \in \mathbb{D} \subset D_R$, έχουμε

$$U(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(e^{it}) e^{-int}\, dt \right) r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Σταθεροποιούμε r και θ. Η U, ως συνεχής στο $\mathbb{T}$, είναι φραγμένη στο $\mathbb{T}$. Τότε, η απόλυτη και ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} U(e^{it}),$$

σαν συνάρτηση του t (από την Πρόταση 1.29), μας επιτρέπει να εναλλάξουμε τη σειρά άθροισης και ολοκλήρωσης. Έτσι,

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} \right) U(e^{it})\, dt.$$

Συνεπώς, έχουμε τελικά ότι,

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) U(e^{it})\, dt.$$

$\square$

Στο επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο οφείλεται στον Fatou, θα δούμε ότι η παραπάνω αναπαράσταση ισχύει για μία μεγαλύτερη υποκλάση της $h(\overline{\mathbb{D}})$, συγκεκριμένα για την $h^\infty(\mathbb{D}) \supset h(\overline{\mathbb{D}})$. (Μία συνάρτηση U του $h(\overline{\mathbb{D}})$ είναι αρμονική σε κάποιο δίσκο D_R όπου το $R > 1$ και άρα θα είναι συνεχής στο $\overline{\mathbb{D}}$ και συνεπώς φραγμένη.)

Πριν περάσουμε όμως στην διατύπωση και απόδειξη του Θεωρήματος Fatou αναφέρουμε πρώτα ένα αποτέλεσμα της Συναρτησιακής Ανάλυσης το οποίο θα χρησιμοποιηθεί:

– Αν X είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach, τότε ο χώρος $(B_{X^*}, w*)$ είναι συμπαγής μετρικοποιήσιμος, όπου $B_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$.

Θεώρημα 3.6. *(Fatou) Έστω $U \in h^\infty(\mathbb{D})$. Τότε υπάρχει μοναδική $u \in L^\infty(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $U(re^{i\theta}) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r\big(e^{i(\theta-t)}\big) u(e^{it})\, dt$ και $\|U\|_\infty = \|u\|_\infty$.*

Απόδειξη. Θέτουμε

$$U_n(z) = U\big((1 - \frac{1}{n})z\big), n \geq 2.$$

Η U_n ορίζεται στο δίσκο $\{z : |z| < \frac{n}{n-1}\}$. Έτσι, αφού $\frac{n}{n-1} > 1$, έχουμε ότι η U_n είναι αρμονική συνάρτηση σε ένα δίσκο κέντρου 0 και ακτίνας > 1, δηλαδή $U_n \in h(\overline{\mathbb{D}})$. Τότε, με εφαρμογή του Λήμματος 3.5, έχουμε την παρακάτω ολοκληρωτική αναπαράσταση για τη U_n:

$$U\big((1-\frac{1}{n})z\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} U_n(e^{it})\,dt, \forall z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Αφήνουμε το $n \to \infty$. Τότε $U\big((1-\frac{1}{n})z\big) \to U(re^{i\theta})$. Ορίζουμε

$$\Lambda_n : L^1(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}, \text{ με } \Lambda_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})U_n(e^{it})\,dt, n \geq 2.$$

Έχουμε

$$|\Lambda_n(f)| \leq \|U_n\|_\infty \|f\|_1 \leq \|U\|_\infty \|f\|_1.$$

Από την υπόθεση όμως η $U \in h^\infty(\mathbb{D})$, άρα $\|U\|_\infty < \infty$. Επίσης, αφού η $f \in L^1(\mathbb{T})$, ισχύει $\|f\|_1 < \infty$. Συνεπώς, $|\Lambda_n(f)| < \infty$. Έτσι, κάθε Λ_n είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $L^1(\mathbb{T})$ με $\|\Lambda_n\| \leq \|U\|_\infty$.

Τώρα, είναι γνωστό ότι ο $L^1(\mathbb{T})$ είναι διαχωρίσιμος χώρος και $L^1(\mathbb{T})^* = L^\infty(\mathbb{T})$. Άρα, η $B_{L^\infty(\mathbb{T})}$ με την ασθενή * τοπολογία είναι συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος. Επομένως, λόγω αυτού του γεγονότος, η Λ_n έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στην ασθενή * τοπολογία, δηλαδή υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές Λ στον $L^1(\mathbb{T})$ και υπακολουθία Λ_{n_k} τέτοια ώστε

$$\lim_{k\to\infty} \Lambda_{n_k}(f) = \Lambda(f), \forall f \in L^1(\mathbb{T}).$$

Για σταθεροποιημένο $z = re^{i\theta}$, θέτουμε

$$f_z(e^{it}) = P_r\big(e^{i(\theta-t)}\big) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)},$$

η οποία σαν συνάρτηση του t ανήκει στον $L^1(\mathbb{T})$. Έχουμε τότε

$$\Lambda(f_z) = \lim_{k\to\infty} \Lambda_{n_k}(f_z) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} U_{n_k}(e^{it})\,dt.$$

Και κάνοντας χρήση της ολοκληρωτικής αναπαράστασης που προέκυψε από το Λήμμα 3.5 θα έχουμε

$$\Lambda(f_z) = \lim_{k\to\infty} U\big((1-\frac{1}{n_k})re^{i\theta}\big) = U(re^{i\theta}).$$

Έπειτα, από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει $u \in L^\infty(\mathbb{T})$ ώστε

$$\Lambda(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})u(e^{it})\,dt, \forall f \in L^1(\mathbb{T}).$$

Επιλέγοντας για f την f_z θα έχουμε

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r\big(e^{i(\theta-t)}\big)u(e^{it})\,dt.$$

Τέλος, από το Πόρισμα 2.24, ισχύει $\|U\|_\infty = \sup\limits_{0\le r<1} \|U_r\|_\infty = \|u\|_\infty$.

□

3.4 Αναπαράσταση Poisson συναρτήσεων του $h^p(\mathbb{D})$, $1 < p < \infty$

Το ακόλουθο αποτέλεσμα, το οποίο προκύπτει με απόδειξη ανάλογη αυτής του Θεωρήματος 3.6, μας δίνει έναν τρόπο αναπαράστασης για συναρτήσεις του $h^p(\mathbb{D})$, $1 < p < \infty$, μέσω του ολοκληρώματος Poisson και αποτελεί ουσιαστικά μία γενίκευση του Λήμματος 3.5 και του θεωρήματος 3.6, διότι $h(\overline{\mathbb{D}}) \subset h^\infty(\mathbb{D}) \subset h^p(\mathbb{D})$.

Θεώρημα 3.7. *Έστω $U \in h^p(\mathbb{D}), 1 < p < \infty$. Τότε υπάρχει μοναδική $u \in L^p(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)u(e^{it})\,dt$ και $\|U\|_p = \|u\|_p$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια συναρτήσεων

$$U_n(t) = U\big((1 - \frac{1}{n})e^{it}\big), n \ge 2.$$

Αφού η $U \in h^p(\mathbb{D})$ έχουμε ότι η $\{U_n\}$ είναι φραγμένη ακολουθία στον $L^p(\mathbb{T})$. Όμως, ο $L^q(\mathbb{T})$ είναι διαχωρίσιμος και ισχύει ότι $L^q(\mathbb{T})^* = L^p(\mathbb{T})$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p. Άρα, η $B_{L^p(\mathbb{T})}$ με την ασθενή * τοπολογία είναι συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος και επομένως η $\{U_n\}$ θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $u \in L^p(\mathbb{T})$, δηλαδή

$$\lim_n \int_{-\pi}^{\pi} g(t)U_n(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)u(t)\,dt, \forall g \in L^q(\mathbb{T}).$$

(Για απλότητα στο συμβολισμό εξακολουθούμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο U_n και για την υπακολουθία.)

Παίρνοντας ως $g(t) = P_r(\theta - t)$ θα έχουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) U_n(t)\, dt \to \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u(t)\, dt.$$

Τώρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $U\big((1 - \frac{1}{n})z\big)$ είναι αρμονική συνάρτηση στο δίσκο $\{z : |z| < \frac{n}{n-1}\}$, δηλαδή είναι στοιχείο του χώρου $h(\overline{\mathbb{D}})$. Τότε, από το Λήμμα 3.5, έχουμε ότι

$$U\big((1 - \frac{1}{n}) re^{i\theta}\big) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) U\big((1 - \frac{1}{n}) e^{it}\big)\, dt.$$

Επομένως,

$$U\big((1 - \frac{1}{n}) re^{i\theta}\big) \to \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u(t)\, dt.$$

Όμως,

$$\lim_n U\big((1 - \frac{1}{n}) re^{i\theta}\big) = U(re^{i\theta}),$$

άρα από τη μοναδικότητα του ορίου έπεται ότι

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u(t)\, dt.$$

Τέλος, από το Πόρισμα 2.22, ισχύει $\|U\|_p = \sup_{0 \le r < 1} \|U_r\|_p = \|u\|_p$. $\square$

Σημείωση 3.8. *Από τα Θεωρήματα 3.6 και 3.7 έχουμε ότι για $1 < p \le \infty$ το ολοκλήρωμα Poisson της u, $P[u]$, από τον $L^p(\mathbb{T})$ στον $h^p(\mathbb{D})$ είναι ένας ισομορφισμός χώρων με νόρμα. Όμως, ο $L^p(\mathbb{T})$, για $1 < p \le \infty$, είναι χώρος Banach. Άρα, ο $h^p(\mathbb{D})$, $1 < p \le \infty$, είναι χώρος Banach.*

Παρατήρηση. Αν $U \in h^2(\mathbb{D})$, τότε από το Θεώρημα 3.7 σε συνδυασμό με το Θεώρημα 2.4, υπάρχει μοναδική συνάρτηση $u \in L^2(\mathbb{T})$ ώστε:

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u(e^{it})\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{u}(n) r^{|n|} e^{in\theta}, \forall re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Έπειτα, από τον τύπο του Parseval, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |U(re^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(n)|^2 r^{2|n|}$$

Τώρα, από την Πραγματική Ανάλυση, είναι γνωστό ότι:

– Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα σε κάποιο σύνολο E σε έναν μετρικό χώρο. Έστω y σ.σ. του E, και υποθέτουμε ότι $\lim_{t\to y} f_n(t) = A_n, n \in \mathbb{N}$. Τότε η $\{A_n\}$ συγκλίνει, και $\lim_{t\to y} f(t) = \lim_n A_n$. Δηλαδή,

$$\lim_{t\to y}\lim_n f_n(t) = \lim_n \lim_{t\to y} f_n(t).$$

Άρα, λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της σειράς

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(n)|^2 r^{2|n|},$$

από το παραπάνω αποτέλεσμα, θα έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 1}\lim_n \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{u}(k)|^2 r^{2|k|} &= \lim_n \lim_{r\to 1} \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{u}(k)|^2 r^{2|k|} \\ &= \lim_n \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{u}(k)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(n)|^2.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |U(e^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(n)|^2 \\ \implies &\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |U(e^{i\theta})|^2\, d\theta\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(n)|^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $\|U\|_2 = \|\widehat{u}\|_2 = \|u\|_2$. (την 2η ισότητα την έχουμε από την ταυτότητα του Parseval.)

3.5 Αναπαράσταση Poisson συναρτήσεων του $h^1(\mathbb{D})$

Θεώρημα 3.9. *Έστω $U \in h^1(\mathbb{D})$. Τότε υπάρχει μοναδικό $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ ώστε*

$$U(re^{i\theta}) = \int_{\mathbb{T}} P_r(\theta - t)\, d\mu(e^{it}) \text{ και } \|U\|_1 = \|\mu\|.$$

Απόδειξη. Έστω $U \in h^1(\mathbb{D})$. Τότε η οικογένεια των συναρτήσεων

$$U_n(t) = U\big((1 - \frac{1}{n})e^{it}\big), n \geq 2$$

είναι φραγμένη στον $L^1(\mathbb{T})$. Άρα, η οικογένεια των μέτρων

$$d\mu_n(e^{it}) = U\big((1 - \frac{1}{n})e^{it}\big)\, \frac{dt}{2\pi}$$

είναι φραγμένη στον $\mathcal{M}(\mathbb{T})$. Όμως, ο $C(\mathbb{T})$ είναι διαχωρίσιμος χώρος και ισχύει $C(\mathbb{T})^* = \mathcal{M}(\mathbb{T})$. Άρα, η $B_{M(\mathbb{T})}$ με την ασθενή * τοπολογία είναι συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος. Συνεπώς, υπάρχει υπακολουθία $r_k = (1 - \frac{1}{n_k})_k$ της $(1 - \frac{1}{n})_n$ ώστε το μ_{r_k} να συγκλίνει ασθενώς * σε ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$.

Δηλαδή,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it})U(r_k e^{it})\, dt \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it})\, d\mu(e^{it}), \forall g \in C(\mathbb{T}).$$

Παίρνοντας ως $g(e^{it}) = P_r(\theta - t) \in C(\mathbb{T})$ θα έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)U(r_k e^{it})\, dt \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, d\mu(e^{it}).$$

Τώρα, η $U\big((1 - \frac{1}{n})e^{it}\big) \in h(\overline{\mathbb{D}})$, και από το Λήμμα 3.5 έχουμε,

$$U(rr_k e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)U(r_k e^{it})\, dt.$$

Επομένως, έχουμε ότι $U(rr_k e^{i\theta}) \to P[\mu]$. Όμως, $U(rr_k e^{i\theta}) \to U(re^{i\theta})$.

Άρα,

$$U(re^{i\theta}) = P[\mu].$$

Για τη μοναδικότητα: Έστω ότι υπάρχουν $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ ώστε:

$$U(re^{i\theta}) = \int_{\mathbb{T}} P_r(\theta - t)\, d\mu_1(e^{it}) = \int_{\mathbb{T}} P_r(\theta - t)\, d\mu_2(e^{it}).$$

Άρα,

$$\int_{\mathbb{T}} P_r(\theta - t)\, d(\mu_1 - \mu_2)(e^{it}) = 0.$$

Θέτουμε $\nu = \mu_1 - \mu_2$ και έχουμε ότι το ν ικανοποιεί

$$\int_{\mathbb{T}} P_r(\theta - t)\, d\nu(e^{it}) = 0, \forall 0 < r < 1 \text{ και } e^{i\theta} \in \mathbb{T}.$$

Επομένως, από το Θεώρημα 2.5, έχουμε

$$0 = \widehat{\nu}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \big(e^{ikt}\widehat{\nu}(k) + e^{-ikt}\widehat{\nu}(-k)\big).$$

Τότε, λόγω της μοναδικότητας των συντελεστών στο ανάπτυγμα της δυναμοσειράς, παίρνουμε

$$\widehat{\nu}(0) = 0 \text{ και } \forall k \geq 1 \text{ ότι } e^{ikt}\widehat{\nu}(k) + e^{-ikt}\widehat{\nu}(-k) = 0.$$

Από τη μοναδικότητα των συντελεστών ενός τριγωνομετρικού πολυωνύμου έπεται ότι

$$\widehat{\nu}(k) = \widehat{\nu}(-k) = 0.$$

Έτσι, έχουμε $\widehat{\nu}(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς, από το Θεώρημα Μοναδικότητας (Πόρισμα 2.20), έχουμε ότι το ν είναι το μηδενικό μέτρο, δηλαδή $\mu_1 = \mu_2$.

Τέλος, από το Πόρισμα 2.18 ισχύει $\|U\|_1 = \sup_{0 \leq r < 1} \|U_r\|_1 = \|\mu\|$. □

Σημείωση 3.10. *Από το Θεώρημα 3.9 έχουμε ότι το ολοκλήρωμα Poisson του μ δρα ως ισομετρικός ισομορφισμός από το $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ στον $h^1(\mathbb{D})$. Γνωρίζουμε ότι ο $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ με τη νόρμα $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{T})$ ότι είναι χώρος Banach. Άρα, ο $h^1(\mathbb{D})$ είναι χώρος Banach.*

Έστω τώρα μη αρνητική αρμονική συνάρτηση U στο D_R. Τότε από το Πόρισμα 3.2 ισχύει

$$U(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(re^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |U(re^{\theta})|\, d\theta, \forall 0 \leq r < R.$$

Άρα, η $U \in h^1(\mathbb{D})$. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.9 το οποίο θα μας δώσει ένα μέτρο του οποίου το ολοκλήρωμα Poisson είναι η U. Στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι

$$d\mu_n(e^{it}) = U\big((1 - \frac{1}{n})e^{it}\big)\frac{dt}{2\pi}$$

τα οποία είναι θετικά και άρα το ασθενές όριο $d\mu$ είναι επίσης θετικό. Καταλήξαμε έτσι στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.11. *(Herglotz) Έστω U θετική αρμονική συνάρτηση στο $\mathbb{D}$. Τότε υπάρχει μοναδικό πεπερασμένο θετικό Borel μέτρο μ στο $\mathbb{T}$ ώστε*

$$U(re^{i\theta}) = \int_{\mathbb{T}} P_r(\theta - t)\, d\mu(e^{it}).$$

Σημείωση 3.12. *Γνωρίζουμε ότι το ολοκλήρωμα Poisson ενός $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{T})$ ότι είναι μία θετική αρμονική συνάρτηση στο $\mathbb{D}$. Το Θεώρημα του Herglotz που μόλις αποδείξαμε μας πιστοποιεί ότι ισχύει και το αντίστροφο.*

Θεώρημα 3.13. *(Kolmogorov-Smirnov) Αν $f \in H(\mathbb{D})$ και $\Re f \in h^1(\mathbb{D})$, τότε $f \in H^p(\mathbb{D}), \forall p \in (0,1)$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα του Herglotz έπεται ότι μία πραγματική αρμονική συνάρτηση ανήκει στον $h^1(\mathbb{D})$ ανν είναι ίση με τη διαφορά δύο θετικών αρμονικών συναρτήσεων. Έτσι, υποθέτουμε ότι $\Re f > 0$. Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική μορφή της f έχουμε ότι

$$\Re f^p \geq |f|^p \cos\big(\frac{p\pi}{2}\big).$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p\, d\theta &\leq \frac{1}{\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Re\big\{f(re^{i\theta})^p\big\}\, d\theta \\ &= \frac{1}{\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)}\Re\{f(0)^p\} < \infty\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \sup_{0\leq r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p\, d\theta\right)^{1/p} < \infty.$$

Συνεπώς, η $f \in H^p(\mathbb{D}), \forall p \in (0,1)$. □

Η ανισότητα του Harnack

Πόρισμα 3.14. *(Ανισότητα του Harnack) Έστω U θετική αρμονική συνάρτηση στο $\mathbb{D}$. Τότε, για κάθε $re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, ισχύει*

$$\frac{1-r}{1+r}U(0) \leq U(re^{i\theta}) \leq \frac{1+r}{1-r}U(0).$$

Απόδειξη. Αφού η U είναι θετική αρμονική συνάρτηση στο $\mathbb{D}$ από το Θεώρημα 3.11 η U είναι το ολοκλήρωμα Poisson ενός πεπερασμένου θετικού μέτρου μ. Παρατηρούμε ότι

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t} \leq \frac{1-r^2}{1+r^2-2r} = \frac{1+r}{1-r}$$

και

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t} \geq \frac{1-r^2}{1+r^2+2r} = \frac{1-r}{1+r}.$$

Άρα, αφού για κάθε θ και t ισχύει

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} \leq \frac{1+r}{1-r}$$

και αφού $d\mu \geq 0$ θα έχουμε

$$\frac{1-r}{1+r}\int_{\mathbb{T}} d\mu(e^{it}) \leq \int_{\mathbb{T}} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}\, d\mu(e^{it}) \leq \frac{1+r}{1-r}\int_{\mathbb{T}} d\mu(e^{it}).$$

Τώρα, από το γεγονός ότι η U είναι το ολοκλήρωμα Poisson του μ, έπεται ότι

$$U(0) = \int_{\mathbb{T}} d\mu(e^{it}).$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\frac{1-r}{1+r}U(0) \leq U(re^{i\theta}) \leq \frac{1+r}{1-r}U(0).$$

□

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η ίδια ανισότητα ισχύει για οποιοδήποτε δίσκο στη θέση του $\mathbb{D}$:

Πόρισμα 3.15. *Έστω u θετική αρμονική συνάρτηση στο $D(a,R)$. Τότε, για κάθε $a+re^{it} \in D(a,R)$, ισχύει:*

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \leq u(a+re^{it}) \leq \frac{R+r}{R-r}u(a).$$

Απόδειξη. Έστω $v(z) = u(a+Rz)$. Η v είναι αρμονική στο $\mathbb{D}$. Παρατητούμε ότι

$$v\left(\frac{r}{R}e^{it}\right) = u(a+re^{it}).$$

Τότε, από το Πόρισμα 3.14, έχουμε

$$\frac{1-r/R}{1+r/R}u(a) \leq v\left(\frac{r}{R}e^{it}\right) \leq \frac{1+r/R}{1-r/R}u(a).$$

Δηλαδή,

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \leq u(a+re^{it}) \leq \frac{R+r}{R-r}u(a).$$

$\square$

Εφαρμογή. Κάνοντας χρήση της ανισότητας του Harnack μπορεί να δοθεί μία εναλλακτική απόδειξη της Πρότασης 1.15 σύφμωνα με την οποία κάθε αρμονική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$ η οποία είναι άνω (ή κάτω) φραγμένη είναι σταθερή. Συγκεκριμένα η απόδειξη έχει ως εξής:

Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε θετική αρμονική συνάρτηση u είναι σταθερή. Έστω $z = re^{i\theta}, 0 \leq r < 1$, και $R > r$. Εφαρμόζουμε την ανισότητα του Harnack στη u στο $D(0, R)$ και έχουμε

$$u(z) \leq \frac{R+r}{R-r}u(0).$$

Αφήνουμε το $R \to \infty$. Τότε $u(z) \leq u(0)$. Άρα, η u λαμβάνει μέγιστη τιμή στο 0. Επομένως, από την Αρχή Μεγίστου, η u είναι σταθερή.

3.6 Ακτινικά όρια συναρτήσεων του $h^p(\mathbb{D}), 1 \leq p \leq \infty$

Ορισμός 3.16. *Λέμε ότι μία συνάρτηση f έχει **ακτινικό όριο** ℓ στο $e^{i\theta_0} \in \mathbb{T}$ αν*

$$\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta_0}) = \ell.$$

Πριν περάσουμε στα αποτελέσματα αυτής της ενότητας θα αναφερθούμε αρχικά σε κάποια αποτελέσματα της προχωρημένης Θεωρίας Μέτρου τα οποία θα μας χρειαστούν.

- Αν $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b])$, η συνάρτηση $F : [a.b] \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \displaystyle\int_a^x f\,d\lambda$ είναι απόλυτα συνεχής.

- Μία συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι απόλυτα συνεχής αν και μόνο αν είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού, $f' \in \mathcal{L}^1([a, b])$ και ισχύει:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'\, d\lambda, \text{ για κάθε } x \in [a, b].$$

Πρόταση 3.17. *Έστω $u \in L^1(\mathbb{T})$ και έστω*

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)} u(e^{it})\, dt.$$

Τότε

$$\lim_{r \to 1} U(re^{i\theta}) = u(e^{i\theta}), \text{ για σχεδόν κάθε } e^{i\theta} \in \mathbb{T}. \tag{3.2}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα του Lebesgue έχουμε

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{2t} \int_{\theta - t}^{\theta + t} u(e^{is})\, ds = u(e^{i\theta}), \text{ για σχεδόν κάθε } e^{i\theta} \in \mathbb{T}.$$

θα δείξουμε ότι η (3.2) ισχύει σε ένα τέτοιο σημείο. Υποθέτουμε ότι $\theta = 0$.

Θέτουμε

$$\mathcal{U}(x) = \int_{-\pi}^{x} u(e^{it})\, dt, x \in [-\pi, \pi].$$

Τότε αφού η $u \in L^1(\mathbb{T})$ έχουμε ότι η $\mathcal{U}$ είναι απόλυτα συνεχής. Τότε, κάνοντας παραγοντική ολοκλήρωση, έχουμε

$$\begin{aligned}
2\pi U_r &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos t} u(e^{it})\, dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos t} \mathcal{U}'(t)\, dt \\
&= \left[\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos t} \mathcal{U}(t) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos t} \right\} \mathcal{U}(t)\, dt \\
&= \frac{1 - r}{1 + r} \mathcal{U}(\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - r^2) 2r \sin t}{(1 + r^2 - 2r\cos t)^2} \mathcal{U}(t)\, dt \\
&= \frac{1 - r}{1 + r} \mathcal{U}(\pi) + \frac{2r}{1 + r} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + r)^2 (1 - r) t \sin t}{(1 + r^2 - 2r\cos t)^2} \cdot \frac{\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(-t)}{2t}\, dt.
\end{aligned}$$

Ισχύει

$$\frac{\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(-t)}{2t} = \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} u(e^{is})\, ds.$$

Τότε παίρνοντας όριο καθώς το $t \to 0$ και χρησιμοποιώντας την ισότητα που έχουμε από το Θεώρημα του Lebesgue για $\theta = 0$ έχουμε

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(-t)}{2t} = u(1).$$

Δηλαδή, η συνάρτηση

$$\Psi(e^{it}) = \begin{cases} \frac{\mathcal{U}(t)-\mathcal{U}(-t)}{2t}, & 0 < |t| \le \pi \\ u(1), & t = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $t = 0$ και ισχύει $\Psi(e^{-it}) = \Psi(e^{it})$. Η οικογένεια των συναρτήσεων

$$F_r(e^{it}) = \frac{(1+r)^2(1-r)t\sin t}{(1+r^2-2r\cos t)^2}$$

είναι θετική προσεγγιστική μονάδα στο $\mathbb{T}$. Τότε, από το Θεώρημα 2.11, έχουμε

$$\lim_{r\to 1}(F_r * \Psi)(e^{i0}) = \Psi(e^{i0}) = u(1).$$

Τότε

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 1} U_r &= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1-r}{1+r}\mathcal{U}(\pi) + \frac{2r}{1+r}\int_{-\pi}^{\pi} F_r(e^{it})\frac{\mathcal{U}(t)-\mathcal{U}(-t)}{2t}\,dt\right\} \\ &= \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_r(e^{it})\Psi(e^{-it})\,dt \\ &= \lim_{r\to 1}(F_r * \Psi)(1) = u(1). \end{aligned}$$

□

Επίσης, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.18. *(Fatou) Έστω $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ και έστω επίσης*

$$U(re^{i\theta}) = \int_{\mathbb{T}} P_r(\theta - t)\,d\mu(e^{it}).$$

Τότε $\lim_{r\to 1} U(re^{i\theta}) = 2\pi\mu'(e^{i\theta})$, για σχεδόν κάθε $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\theta = 0$. Θέτουμε

$$\mathcal{U}(x) = \mu(\{e^{is} : s \in [-\pi, x)\}), x \in [-\pi, \pi).$$

Κάνοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}
U(r) &= \int_{\mathbb{T}} P_r(-t)\, d\mu(e^{it}) \\
&= \frac{1-r}{1+r}\mathcal{U}(\pi) - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial t}(P_r(-t))\mathcal{U}(t)\, dt \\
&= \frac{1-r}{1+r}\mathcal{U}(\pi) + \frac{2r}{1+r}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+r)^2(1-r)t\sin t}{(1+r^2-2r\cos t)^2} \cdot \frac{\mathcal{U}(t)-\mathcal{U}(-t)}{2t}\, dt.
\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$f(t) = \frac{\mathcal{U}(t)-\mathcal{U}(-t)}{2t} - \mu'(1) = \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} d\mu(e^{is}) - \mu'(1).$$

Έστω

$$F_r(t) = \frac{(1+r)^2(1-r)t\sin t}{(1+r^2-2r\cos t)^2}, 0 \leq r < 1, t \in [-\pi, \pi].$$

Η οικογένεια των συναρτήσεων F_r είναι θετική προσεγγιστική μονάδα στο $\mathbb{T}$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 1} U(r) &= \lim_{r\to 1} \frac{2r}{1+r}\int_{-\pi}^{\pi} F_r(t)(f(t)+\mu'(1))\, dt \\
&= \lim_{r\to 1} \frac{2r}{1+r}\int_{-\pi}^{\pi} F_r(t)f(t)\, dt + 2\pi\mu'(1).
\end{aligned}$$

Ισχύει

$$\lim_{t\to 0} f(t) = 0.$$

Άρα, για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(t)| < \varepsilon$ όταν $|t| < \delta$. Υποθέτουμε ότι $\delta < \pi$. Τότε είναι

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\pi}^{\pi} F_r(t)f(t)\, dt\right| &\leq \int_{-\delta}^{\delta} F_r(t)|f(t)|\, dt + \int_{\delta<|t|\leq\pi} F_r(t)|f(t)|\, dt \\
&\leq \varepsilon\int_{-\delta}^{\delta} F_r(t)\, dt + \max_{t\in[-\pi,\pi]}|f(t)|\int_{\delta<|t|\leq\pi} F_r(t)\, dt \\
&\leq 2\pi\varepsilon + 2\pi\max_{t\in[-\pi,\pi]}|f(t)|\sup_{\delta<|t|\leq\pi} F_r(t).
\end{aligned}$$

Για την F_r είναι γνωστό ότι

$$\lim_{r\to 1}\big(\sup_{\delta<|t|\leq\pi} F_r(t)\big) = 0.$$

Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$, έχουμε ότι

$$0 \leq \liminf_{r\to 1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} F_r(t) f(t)\, dt \right| \leq \limsup_{r\to 1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} F_r(t) f(t)\, dt \right| \leq 2\pi\varepsilon.$$

Άρα, $\lim_{r\to 1} U(r) = 2\pi\mu'(1)$. □

Παρατήρηση. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Fatou μπορεί να δοθεί μία εναλλακτική απόδειξη του ότι ο πυρήνας Poisson μιας συνεχούς συνάρτησης στο $\mathbb{T}$ επεκτείνεται συνεχώς στο $\overline{\mathbb{D}}$. Στη Πρόταση 2.10 είναι $d\mu = u\, dm$. Έτσι, για $w \in \mathbb{T}$, έχουμε

$$\mu'(w) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{m(e^{-it}w, e^{it}w)} \int_{[e^{-it}w, e^{it}w]} u(\zeta)\, dm(\zeta) = u(w).$$

Άρα, από το Θεώρημα του Fatou, έχουμε

$$\lim_{r\to 1} U(re^{i\theta}) = 2\pi\mu'(w) = 2\pi u(w)$$

$$\iff \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u(e^{it})\, dt = u(e^{it}).$$

Πόρισμα 3.19. *Έστω U ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{D}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

1. *$0 < |U(z)| \leq 1$ στο $\mathbb{D}$, $U(0) > 0$ και $|U(\zeta)| = 1$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.*

2. *Υπάρχει μοναδικό $\mu \geq 0$ στο $\mathbb{T}$, $\mu \perp m$, τέτοιο ώστε:*

$$U(z) = \exp\left\{ -\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, d\mu(e^{it}) \right\}, z \in \mathbb{D}.$$

Απόδειξη. <u>(2) $\implies$ (1)</u> Έχουμε

$$U(z) = \exp\left\{ -\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, d\mu(e^{it}) \right\}, z \in \mathbb{D}.$$

Άρα,

$$|U(z)| = \exp\left\{ -\int_{\mathbb{T}} P_r(\theta - t)\, d\mu(e^{it}) \right\}, z \in \mathbb{D}.$$

Αφού το $\mu \geq 0$ έπεται ότι το ολοκλήρωμα Poisson $P[\mu](z)$ είναι μη αρνητικό για κάθε $z \in \mathbb{D}$. Άρα, $|U(z)| \leq 1$ στο $\mathbb{D}$. Επίσης, αφού $\mu \perp m \implies \frac{d\mu}{dm} = 0$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$ και από το Θεώρημα του Fatou ισχύει

$$\lim_{r\to 1} P * \mu(re^{it}) = 2\pi \frac{d\mu}{dm}(e^{it}) \ m \text{ σ.π. στο } \mathbb{T}.$$

Επομένως, $|U(\zeta)| = \exp 0 = 1$ σ.π. στο $\mathbb{T}$.

<u>(1) $\implies$ (2)</u> Η $u = -\log|U|$ είναι θετική αρμονική συνάρτηση στο $\mathbb{D}$. Άρα, από το Θεώρημα του Herglotz, υπάρχει μοναδικό $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{T})$ ώστε

$$\log|U| = -P[\mu].$$

Έτσι,

$$|U| = \exp\big\{ -P[\mu]\big\} = \left| \exp\left\{ -\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(e^{it})\right\}\right|.$$

Επομένως,

$$U = c\exp\left\{ -\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(e^{it})\right\}, |c| = 1.$$

Τώρα, από το Θεώρημα του Fatou, γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{r\to 1} P[\mu] = \lim_{r\to 1} -\log|U(re^{i\theta})| = 2\pi\frac{d\mu}{dm}(e^{it}) \text{ σ.π. στο } \mathbb{T}.$$

Όμως, σ.π. στο $\mathbb{T}$ είναι $U(e^{i\theta}) = 1$ (υπόθεση), άρα

$$\lim_{r\to 1} P[\mu] = 0 \implies \frac{d\mu}{dm}(e^{it}) = 0 \text{ σ.π. στο } \mathbb{T}$$

και έτσι το $\mu \perp m$. □

Σημείωση. Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν τις συνθήκες (1) ή (2) καλούνται **singular inner functions**.

Το επόμενο Θέωρημα αποτελεί μία επέκταση του Θεωρήματος 3.18:

Θεώρημα 3.20. *Έστω μ Borel μέτρο στο $\mathbb{T}$ και θέτουμε $F(\theta) = \int_0^\theta d\mu(t)$. Η συνάρτηση F είναι φραγμένης κύμανσης και έτσι έχει πεπερασμένη παράγωγο σε σχεδόν κάθε σημείο θ. Έστω θ_1 ένα τέτοιο σημείο, δηλαδή σημείο στο οποίο η $F'(\theta_1)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη. Θέτουμε u να είναι το ολοκλήρωμα Poisson του μ. Τότε $u(z) \to F'(\theta_1)$, καθώς $z \to e^{i\theta_1}$* ***μη εφαπτομενικά***.

- *Το παραπάνω σημαίνει ότι για κάθε $c > 0$ ισχύει $u(z) \to F'(\theta_1)$, καθώς $z = re^{i\theta} \to e^{i\theta_1}$ εντός του χωρίου $\{re^{i\theta} : |\theta - \theta_1| < c(1 - r)\}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\theta_1 = 0$ και επίσης ότι $F'(0) = 0$. [Διαφορετικά θεωρούμε το μέτρο $d\mu(t) - F'(0)\, dt$ και τη συνάρτηση

$$F_1(\theta) = \int_0^\theta d\mu(t) - \int_0^\theta F'(0)\, dt = \int_0^\theta d\mu(t) - F'(0)\theta.$$

Τότε $F_1'(\theta) = F'(\theta) - F'(0)$ και έτσι για $\theta = 0$ είναι $F_1'(0) = 0$. Άρα, αναγόμαστε στην αρχική περίπτωση που υποθέτουμε.]

Αφού η $F'(0) = 0$ δοθέντος $\varepsilon > 0$ έχουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|F(t)| < \varepsilon|t|$, για $|t| < \delta$. Τώρα, κοιτάμε τα r κοντά στο 1 τέτοια ώστε αν $re^{i\theta}$ είναι στο $\{re^{i\theta} : |\theta| < c(1 - r)\}$, τότε $|\theta| < \frac{\delta}{4}$, δηλαδή έστω $c(1 - r) < \frac{\delta}{4}$. Έχουμε

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} P_r(\theta - t)\, d\mu(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(\theta - t)\, d\mu(t).$$

<u>Για το πρώτο ολοκλήρωμα:</u> Έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} P_r(\theta - t)\, d\mu(t) \leq \sup_{|t| > \delta} P_r(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\mu(t).$$

Όμως, καθώς $r \to 1$, ισχύει $\sup\limits_{|t| > \delta} P_r(t) \to 0$. Έτσι, το πρώτο ολοκλήρωμα γίνεται μικρό για $|\theta| < \frac{\delta}{4}$.

<u>Για το δεύτερο ολοκλήρωμα:</u> Γράφουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(\theta - t)\, d\mu(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(\theta - t) F'(t)\, dt \\ &\leq C \sup_{|t| > \delta} P_r(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r'(t - \theta) F(t)\, dt. \end{aligned}$$

Οπότε, αρκεί να μελετήσουμε το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r'(t - \theta) F(t)\, dt$$

το οποίο για $\theta > 0$ γράφουμε ως:

$$I = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\delta}^{0} + \int_0^{2\theta} + \int_{2\theta}^{\delta} \right) \frac{(1 - r^2) r \sin(t - \theta)}{(1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t))^2} F(t)\, dt.$$

Θα μελετήσουμε τον κάθε όρο του παραπάνω αθροίσματος ξεχωριστά. Για τον 1ο όρο χρησιμοποιώντας ότι $|F(t)| \leq \varepsilon(\theta - t)$ και κάνοντας αλλαγή μεταβλητής (θέτοντας το $\theta - t$ ως t) έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}\frac{(1-r^2)r\sin(t-\theta)}{(1+r^2-2r\cos(\theta-t))^2}F(t)\,dt\right| &\leq \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\theta}^{\theta+\delta}\frac{(1-r^2)r\sin t}{(1+r^2-2r\cos t)^2}t\,dt\\ &\leq \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{(1-r^2)r\sin t}{(1+r^2-2r\cos t)^2}t\,dt\\ &= \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{\pi} P_r'(-t)t\,dt.\end{aligned}$$

Κάνοντας άλλη μία φορά ολοκλήρωση κατά παράγοντες βλέπουμε τελικά ότι ο 1ος όρος είναι $\leq \frac{\varepsilon}{2}\big(1 + P_r(\theta - \pi)\big)$.

Για τον 2ο όρο χρησιμοποιώντας ότι $1 + r^2 - 2r\cos t \geq (1-r)^2, |F(t)| < \varepsilon t$ και $|\theta - t| < \theta$ έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\theta}\frac{(1-r^2)r\sin(t-\theta)}{(1+r^2-2r\cos(\theta-t))^2}F(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\theta}\frac{(1-r)(1+r)r\theta}{(1-r)^4}\varepsilon t\,dt.$$

Τότε, κάνοντας χρήσης της $|\theta| \leq c(1-r)$, έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\theta}\frac{(1-r)(1+r)r\theta}{(1-r)^4}\varepsilon t\,dt \leq \frac{8\varepsilon\theta^3}{\pi(1-r)^3} \leq \frac{8\varepsilon c^3}{\pi}.$$

Για τον 3ο όρο χρησιμοποιώντας ότι $|F(t)| < \varepsilon t \leq 2\varepsilon(t - \theta)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{2\theta}^{\delta}P_r'(\theta-t)F(t)\,dt\right| &\leq \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{2\theta}^{\delta}P_r'(t-\theta)(t-\theta)\,dt\\ &= \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\theta}^{\delta-\theta}P_r'(t)t\,dt\\ &\leq \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{\pi}P_r'(t)t\,dt\\ &= \varepsilon P_r(\pi) + \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{\pi}P_r(t)\,dt\\ &= \varepsilon\frac{1-r^2}{(1+r)^2} + \varepsilon\\ &\leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

□

Μελέτη ακτινικών ορίων στον $\mathbf{h^p}(\mathbb{D}), \mathbf{1 \leq p \leq \infty}$.

Σχετικά με τη περίπτωση των ακτινικών ορίων συναρτήσεων του $h^p(\mathbb{D}), 1 \leq p \leq \infty$, έχουμε τα ακόλουθα:

- Αν $U \in h^p(\mathbb{D}), 1 < p < \infty$, τότε από το Θεώρημα 3.7 υπάρχει μοναδική συνάρτηση $u \in L^p(\mathbb{T})$ ώστε η U να είναι το ολοκλήρωμα Poisson της u. Για $p > 1$ ισχύει $L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$. Άρα, η $u \in L^1(\mathbb{T})$ και από την Πρόταση 3.17 γνωρίζουμε ότι το ολοκλήρωμα Poisson μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης στο $\mathbb{T}$ έχει ακτινικά όρια σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

- Αν η $U \in h^\infty(\mathbb{D})$, τότε από το Θεώρημα Fatou (Θεώρημα 3.6) υπάρχει μοναδική συνάρτηση $u \in L^\infty(\mathbb{T})$ ώστε η U να είναι το ολοκλήρωμα Poisson της u. Όμως, ισχύει ότι $L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, και άρα τα ακτινικά όρια της U υπάρχουν σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. (από την Πρόταση 3.17.)

- Αν η $U \in h^1(\mathbb{D})$, τότε από το Θεώρημα 3.9 υπάρχει μοναδικό $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ ώστε η U να είναι το ολοκλήρωμα Poisson του μ. Όμως, από το Θεώρημα του Fatou (Θεώρημα 3.18) γνωρίζουμε ότι το ολοκλήρωμα Poisson ενός $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ έχει ακτινικά όρια σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

3.7 Αναπαράσταση συναρτήσεων του $H^p(\mathbb{D}), 1 \leq p \leq \infty$.

Ορισμός 3.21. *Οι χώροι Hardy στο $\mathbb{T}$ ορίζονται ως:*

$$H^p(\mathbb{T}) = \{f \in L^p(\mathbb{T}) : \widehat{f}(-1) = \widehat{f}(-2) = \cdots = 0\}, 1 \leq p \leq \infty.$$

Έστω $F \in H^p(\mathbb{D})$. Τότε $F \in h^p(\mathbb{D}), 1 < p \leq \infty$. Επομένως, από το Θεώρημα 3.7 σε συνδυασμό με το Θεώρημα 2.4, υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f \in L^p(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) r^{|n|} e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \widehat{f}(n) \overline{z}^{-n}, z = re^{i\theta}.$$

Από το Θεώρημα 3.1 έχουμε ότι

$$\widehat{f}(n) = \frac{r^{-|n|}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(re^{it}) e^{-int}\, dt.$$

Έτσι, για $n \leq -1$, είναι

$$\widehat{f}(n) = \frac{r^{-|n|}}{2\pi i} \int_{|z|=r} F(z) z^{|n+1|}\, dz, 0 < r < 1.$$

Τότε, από το Θεώρημα του Cauchy, έχουμε $\widehat{f}(n) = 0$, για κάθε ακέραιο $n \leq -1$.

Αντίστροφα έστω συνάρτηση $f \in L^p(\mathbb{T}), 1 < p \leq \infty$, με $\widehat{f}(n) = 0$, για κάθε ακέραιο $n \leq -1$.

Θέτουμε

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it})\, dt.$$

Τότε, από το Θεώρημα 3.4, γνωρίζουμε ότι η $F \in h^p(\mathbb{D})$ και είναι

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \text{ αφού } \widehat{f}(n) = 0, \text{ για } n \leq -1, n \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως, η F είναι ολόμορφη συνάρτηση και άρα $F \in H^p(\mathbb{D})$.

Επομένως, έχουμε τα ακόλουθα δύο θεωρήματα.

Θεώρημα 3.22. *Έστω F ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{D}$. Τότε $F \in H^p(\mathbb{D})$, $1 < p < \infty$, ανν υπάρχει $f \in H^p(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε*

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it})\, dt.$$

Η συνάρτηση f είναι μοναδική και $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n$. Επίσης,

$$\lim_{r \to 1} \|F_r - f\|_p = 0 \text{ και επομένως } \|F\|_p = \|f\|_p.$$

Ακόμη, έχουμε $F \in H^2(\mathbb{D}) \iff f \in H^2(\mathbb{T})$ και σε αυτή την περίπτωση

$$\|F\|_2 = \|f\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \right)^{1/2}.$$

– Θα δούμε ότι το Θεώρημα 3.22 ισχύει και για $p = 1$.

Θεώρημα 3.23. *Έστω F ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{D}$. Τότε $F \in H^\infty(\mathbb{D})$ ανν υπάρχει $f \in H^\infty(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε*

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it})\, dt.$$

*Η συνάρτηση f είναι μοναδική και $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n$. Επίσης, η F_r συγκλίνει στην f στην ασθενή * τοπολογία, καθώς $r \to 1$, και έτσι $\|F\|_\infty = \|f\|_\infty$.*

Γινόμενα Blaschke

Θεώρημα 3.24. *Αν $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία των ριζών μιας συνάρτησης $f \in H^p(\mathbb{D})$, $p > 0$, τότε ικανοποιείται η συνθήκη Blaschke: $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |z_n|) < \infty$. Αντίστροφα, αν μία ακολουθία $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ ικανοποιεί τη συνθήκη Blaschke, τότε το γινόμενο*

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z}_n z} \frac{|z_n|}{z_n}$$

συγκλίνει στο $\mathbb{D}$, η συνάρτηση B είναι ολόμορφη στο $\mathbb{D}$, και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. *Η ακολουθία των ριζών της B, συμπεριλαμβανομένων των επαναλήψεων για τις πολλαπλότητες των ριζών, ταυτίζεται με την ακολουθία $\{z_n\}$.*
2. *$|B(z)| \leq 1$, για $z \in \mathbb{D}$.*
3. *$|B(e^{i\theta})| = 1$ σχεδόν παντού.*

Σημειώνουμε ότι αν $z_n = 0$, τότε κάνουμε τη σύμβαση $\frac{|z_n|}{z_n} = -1$. Η συνάρτηση B καλείται **γινόμενο Blaschke**.

Θεώρημα 3.25. *(Riesz) Έστω $f \in H^p(\mathbb{D}), f \not\equiv 0$, και έστω B το γινόμενο Blaschke που σχηματίζεται από τις ρίζες της f στο $\mathbb{D}$. Τότε υπάρχει συνάρτηση $g \in H^p(\mathbb{D})$ χωρίς ρίζες στο $\mathbb{D}$ τέτοια ώστε $f = Bg$ και $\|f\|_p = \|g\|_p$.*

Αναλυτικά Μέτρα στο $\mathbb{T}$.

Ορισμός 3.26. *Ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ καλείται* ***<u>αναλυτικό</u>*** *αν:*

$$\widehat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{-int}\, d\mu(e^{it}) = 0, \forall n \leq -1, n \in \mathbb{Z}.$$

Θεώρημα 3.27. *(F. και M. Riesz) Έστω $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ αναλυτικό μέτρο. Τότε το μ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue.*

Απόδειξη. Έστω $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ με $\widehat{\mu}(n) = 0$, για $n < 0$. Θέτουμε $F(re^{i\theta}) = P[\mu]$, για $0 \leq r < 1$. Από το Θεώρημα 2.5 γνωρίζουμε ότι

$$F(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\mu}(n) r^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\mu}(n) r^n e^{in\theta}$$

και άρα η F είναι ολόμορφη στο $\mathbb{D}$. Από το Θεώρημα 3.4 γνωρίζουμε ότι η $F \in h^1(\mathbb{D})$ και άρα αφού είναι και ολόμορφη έχουμε άμεσα ότι $F \in H^1(\mathbb{D})$. Από το Θεώρημα του Riesz γράφουμε τότε $F(z) = B(z)G(z)$, όπου $B(z)$ είναι ένα γινόμενο Blaschke και $G \in H^1(\mathbb{D})$ χωρίς ρίζες στο $\mathbb{D}$. Άρα, υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση f στο $\mathbb{D}$ ώστε $f = \sqrt{G}$. Φανερά, η $f \in H^2(\mathbb{D})$. (αφού $G \in H^1(\mathbb{D})$.) Θέτουμε

$$F(e^{i\theta}) = B(e^{i\theta}) f(e^{i\theta})^2.$$

Η $F(e^{it}) \in L^1(\mathbb{T})$. Τώρα,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta}) - F(e^{i\theta})| \, d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} |B(re^{i\theta}) - B(e^{i\theta})| |f(e^{i\theta})|^2 \, d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} |B(re^{i\theta})| f(re^{i\theta})^2 - f(e^{i\theta})^2| \, d\theta.$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης ισχύει ότι

$$\lim_{r \to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |B(re^{i\theta}) - B(e^{i\theta})| |f(e^{i\theta})|^2 \, d\theta = 0.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |B(re^{i\theta})| |f(re^{i\theta})^2 - f(e^{i\theta})^2| \, d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})^2 - f(e^{i\theta})^2| \, d\theta$$

$$\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^2 \, d\theta \right)^{1/2} \left(\int_{\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) + f(e^{i\theta})|^2 \, d\theta \right)^{1/2}$$

Αφού η $f \in H^2(\mathbb{D})$ έχουμε ότι

$$\left(\int_{\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) + f(e^{i\theta})|^2 \, d\theta \right)^{1/2} \leq c,$$

όπου c είναι μία σταθερά ανεξάρτητη του r. Επίσης, από το Θεώρημα 3.22, έχουμε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^2 \, d\theta \to 0, \text{ καθώς το } r \to 1.$$

Συνεπώς,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta}) - F(e^{i\theta})| \, d\theta \to 0, \text{ καθώς } r \to 1.$$

Από το Πόρισμα 2.18 έχουμε ότι το $F(re^{i\theta})\, d\theta$ συγκλίνει στο $d\mu(\theta)$ στην ασθενή * τοπολογία. Επίσης, $F(re^{i\theta})\, d\theta$ συγκλίνει ασθενώς * στο $F(e^{i\theta})\, d\theta$. Άρα, $d\mu(\theta) = F(e^{i\theta})\, d\theta$, όπου η $F(e^{i\theta}) \in L^1(\mathbb{T})$, και επομένως το μ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue. □

Χρησιμοποιώντας τώρα το Θεώρημα 3.27 θα δείξουμε ότι το Θεώρημα 3.22 ισχύει και για $p = 1$:

Έστω $F \in H^1(\mathbb{D})$. Τότε $F \in h^1(\mathbb{D})$ και επομένως από το Θεώρημα 3.9 σε συνδυασμό με το Θεώρημα 2.5 υπάρχει μοναδικό $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ έτσι ώστε:

$$F(re^{i\theta}) = \int_{\mathbb{T}} P_r(\theta - t)\, d\mu(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\mu}(n) r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Επίσης, από το Πόρισμα 2.18, γνωρίζουμε ότι τα μέτρα $\frac{1}{2\pi} F(re^{i\theta})\, d\theta$ συγκλίνουν στην ασθενή * τοπολογία στο μ καθώς το $r \to 1$. Έτσι, για κάθε $n \leq -1$, έχουμε

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta = \int_{\mathbb{T}} e^{-in\theta}\, d\mu(e^{i\theta}) = \widehat{\mu}(n).$$

Όμως, η συνάρτηση F είναι ολόμορφη. Επομένως, από το Θεώρημα του Cauchy, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta = \frac{r^n}{2\pi i} \int_{|z|=r} F(z) z^{-(n+1)}\, dz = 0.$$

Άρα, $\widehat{\mu}(n) = 0, \forall n \leq -1, n \in \mathbb{Z}$. Έτσι, αφού $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, το μ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue. (από το Θεώρημα 3.27.) Τότε, από το Θεώρημα Radon-Nikodym, υπάρχει συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε

$$d\mu(e^{it}) = f(e^{it})\, \frac{dt}{2\pi}.$$

Συνεπώς,

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it})\, dt \text{ με } \widehat{f}(n) = \widehat{\mu}(n) = 0, \forall n \leq -1,$$

δηλαδή με $f \in H^1(\mathbb{T})$.

Αντίστροφα, έστω $f \in H^1(\mathbb{T})$. Τότε, από το Θεώρημα 2.4 σε συνδυασμό με το Πόρισμα 2.22, η συνάρτηση

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it})\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n, z = re^{i\theta},$$

αναπαριστά ένα στοιχείο του $H^1(\mathbb{D})$ και η F_r συγκλίνει στην f στη νόρμα του $L^1(\mathbb{T})$, καθώς $r \to 1$.

Συνεπώς, έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 3.28. *Έστω F ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{D}$. Τότε $F \in H^1(\mathbb{D})$ ανν υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f \in H^1(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it})\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n, \forall z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Η σειρά είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{D}$. Επίσης,

$$\lim_{r \to 1} \|F_r - f\|_1 = 0 \text{ και } \|F\|_1 = \|f\|_1.$$

Πληρότητα των χώρων Hardy $\mathbf{H^p}(\mathbb{D}), \mathbf{1 \leq p \leq \infty}$.

Θα δείξουμε αρχικά ότι για $1 \leq p \leq \infty$ ο $H^p(\mathbb{T})$ είναι κλειστός υπόχωρος του $L^p(\mathbb{T})$. Πράγματι:

Έστω $\{f_n\} \subset H^p(\mathbb{T})$ με $f_n \to f$ στον $L^p(\mathbb{T})$. Έχουμε τότε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(t) - f(t)|\, dt \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(t) - f(t)|^p\, dt \right)^{1/p} \to 0.$$

Άρα,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(t) - f(t)|\, dt \to 0.$$

Τότε, $\widehat{f_n}(k) \to \widehat{f}(k)$ ομοιόμορφα για όλα τα $k \in \mathbb{Z}$. (στη συγκεκριμένη περίπτωση μας αρκεί η κατά σημείο σύγκλιση.) Όμως, $\{f_n\} \subset H^p(\mathbb{T})$, άρα

$$\widehat{f_n}(k) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}, k \leq -1.$$

Επομένως,

$$\widehat{f}(k) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}, k \leq -1.$$

Με άλλα λόγια $f \in H^p(\mathbb{T})$ γεγονός το οποίο μας δείχνει ότι ο $H^p(\mathbb{T}), 1 \leq p \leq \infty$, είναι κλειστός υπόχωρος του $L^p(\mathbb{T})$. Ο $L^p(\mathbb{T}), 1 \leq p \leq \infty$, είναι χώρος Banach, άρα ο $H^p(\mathbb{T})$ ως κλειστός υπόχωρος του είναι επίσης χώρος Banach. Από τα Θεωρήματα 3.22, 3.23 και 3.28 έχουμε ότι οι χώροι $H^p(\mathbb{D})$ και $H^p(\mathbb{T})$ $(1 \leq p \leq \infty)$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι και άρα αφού ο $H^p(\mathbb{T})$ είναι χώρος Banach θα είναι και ο $H^p(\mathbb{D})$ επίσης. (για $1 \leq p \leq \infty$.)

Μελέτη ακτινικών ορίων στον $\mathbf{H^p}(\mathbb{D}), \mathbf{0 < p \leq \infty}$.

Σχετικά με την περίπτωση των ακτινικών ορίων συναρτήσεων του $H^p(\mathbb{D})$, για $1 \leq p \leq \infty$, αφού $H^p(\mathbb{D}) \subset h^p(\mathbb{D})$, έχουμε άμεσα ότι τα ακτινικά τους όρια υπάρχουν σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$. Μάλιστα, μπορούμε να δείξουμε ότι το ακτινικό όριο είναι στοιχείο του $H^p(\mathbb{T}), 1 \leq p \leq \infty$, σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

Θεώρημα 3.29. *Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Τότε, για κάθε $f \in H^p(\mathbb{D})$ το ακτινικό όριο $\lim\limits_{r \to 1} f(re^{it}) := bf \in H^p(\mathbb{T})$ υπάρχει σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.*

Απόδειξη. Γράφουμε την f ως σειρά Taylor,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, z \in \mathbb{D}.$$

Για $f \in H^p(\mathbb{D}), 1 < p \leq \infty$, η οικογένεια $(f_r)_{0<r<1}$ είναι φραγμένη στον $L^p(\mathbb{T})$. Τότε, χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα ασθενούς συμπάγειας, θα έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία $r_k \to 1$ τέτοια ώστε η f_{r_k} να συγκλίνει ασθενώς σε ένα όριο $bf \in L^p(\mathbb{T})$.

Ειδικότερα,

$$\widehat{f}_{r_k}(n) \to \widehat{bf}(n), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Η σειρά

$$f(re^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int}$$

είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα. Άρα, $\widehat{f}_r(n) = a_n r^n, n \geq 0$ και $\widehat{f}_r(n) = 0$, για $n < 0$. Επομένως, $\widehat{(bf)}(n) = a_n, n \geq 0$ και $\widehat{(bf)}(n) = 0$, για $n < 0$. Το τελευταίο μας δείχνει ότι $bf \in H^p(\mathbb{T})$ και είναι $f_r(e^{it}) = bf * P_r, 0 < r < 1$. Έτσι,

$$\lim_{r \to 1} \|f_r - bf\|_p = 0.$$

Για $p = 1$ θεωρούμε τον $L^1(\mathbb{T})$ ως υπόχωρο του $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ και εργαζόμαστε όπως παραπάνω με τη μόνη διαφορά να είναι ότι υπάρχει ένα μέτρο $bf \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ με $\widehat{(bf)}(n) = a_n, n \geq 0$ και $\widehat{(bf)}(n) = 0$, για $n < 0$. $\square$

Θα δούμε τώρα ότι και για $p \in (0,1)$ ισχύει ότι τα ακτινικά όρια συναρτήσεων στον $H^p(\mathbb{D})$ υπάρχουν σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

Για την απόδειξη του παραπάνω θα χρειαστούμε το παρακάτω Λήμμα. Στην απόδειξη του λήμματος θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω αποτέλεσμα το οποίο θα αποδείξουμε παρακάτω. (βλ. Θεώρημα 3.34)

► Για $F \in H^p(\mathbb{D}), 0 < p \leq \infty$, και $z \in \mathbb{D}$, ισχύει

$$|F(z)| \leq (1-|z|)^{-1/p} \|F\|_{H^p}. \quad (*)$$

Λήμμα 3.30. *Αν $f \in H^p(\mathbb{D}), p > 0$, τότε υπάρχουν συναρτήσεις g και h χωρίς ρίζες στο $\mathbb{D}$ τέτοιες ώστε $f = g + h$, με $\|g\|_p \leq \|f\|_p$ και $\|h\|_p \leq \|f\|_p$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $f \not\equiv 0$ σε μία περιοχή G του $\overline{\mathbb{D}}$ και η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{D}$. Τότε ο αριθμός των ριζών της f είναι πεπερασμένος.

[Έστω αντίθετα ότι είναι άπειρος. Θέτουμε τότε A να είναι το σύνολο των άπειρων ριζών $\{z_n\}$ της f στο $\overline{\mathbb{D}}$. Τότε η $\{z_n\}$ θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο $\overline{\mathbb{D}}$, έστω $\{z_{k_n}\}$, η οποία συγκλίνει σε κάποιο $z_0 \in G$. Ισχύει ότι $f(z_{k_n}) \to f(z_0)$ και $f(z_{k_n}) = 0$. Άρα, $f(z_0) = 0$, δηλαδή το z_0 είναι ρίζα της f στο $\overline{\mathbb{D}}$. Έχουμε λοιπόν ότι το z_0 είναι σ.σ. του A στο G. Απο το Θεώρημα Μοναδικότητας έπεται ότι η f είναι ταυτοτικά μηδέν στο G, άτοπο.] Ας είναι $a_1, \ldots, a_m$ οι ρίζες της f. Έστω

$$A(z) = \prod_{k=0}^{m} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z}.$$

Θέτουμε

$$g = \frac{(A-1)f}{2A} \text{ και } h = \frac{(A+1)f}{2A}.$$

Τότε φανερά $f = g + h$. Οι g και h δεν έχουν ρίζες στο $\mathbb{D}$ αφού $|A| < 1$ στο $\mathbb{D}$ και η $\frac{f}{A}$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{D}$. Οι $A-1$, $A+1$ και f/A είναι ολόμορφες σε περιοχή του $\overline{\mathbb{D}}$ και αφού $|A| = 1$ στο $\mathbb{T}$, έχουμε $|g| \leq |f|$ και $|h| \leq |f|$ στο $\mathbb{T}$.

Για μία αυθαίρετη f, έστω $f_n(z) = f(r_n z)$, όπου r_n οποιαδήποτε ακολουθία που τείνει στο 1. Από την αρχική περίπτωση γράφουμε $f_n = g_n + h_n$, όπου οι g_n και h_n έχουν τις επιθυμητές ιδιότητες. Τώρα, αφού

$$\|g_n\|_p \leq \|f_n\|_p \leq \|f\|_p \text{ και } \|h_n\|_p \leq \|f_n\|_p \leq \|f\|_p,$$

από την $(*)$ έχουμε ότι οι $\{g_n\}$ και $\{h_n\}$ είναι φραγμένες στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{D}$. Άρα, οι $\{g_n\}$ και $\{h_n\}$ έχουν υπακολουθίες οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα σε ολόμορφες συναρτήσεις g και h αντίστοιχα.

Τότε από το Θεώρημα του Hurwitz [1] η g είτε δεν έχει ρίζες ή $g \equiv 0$ και το ίδιο ισχύει και για την h. Όμως, δεν μπορεί να είναι $g \equiv 0$ και $f = g + h$. Διότι τότε $f = h$, δηλαδή είτε η f δεν έχει ρίζες ή $f \equiv 0$, άτοπο. $\square$

Πρόταση 3.31. *Έστω $f \in H^p(\mathbb{D}), 0 < p \leq \infty$. Τότε τα ακτινικά όρια $f_*(e^{i\theta}) = \lim\limits_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ υπάρχουν σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.*

Απόδειξη. Για $1 \leq p \leq \infty$ η απόδειξη έχει ήδη γίνει. Έστω $f \in H^p(\mathbb{D})$ και $\frac{1}{2} < p \leq 1$. Από το Λήμμα 3.30 μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{D}$. Τότε η συνάρτηση $g = f^{1/2}$ είναι καλά ορισμένη και εύκολα μπορούμε να δούμε ότι $g \in H^{2p}(\mathbb{D})$. Τότε, αφού το $2p > 1$, έχουμε ότι η συνάρτηση g έχει ακτινικά όρια σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$ και άρα και η $f = g^2$ επίσης. Με παρόμοιο τρόπο γίνεται αναγωγή της περίπτωσης $p > 1/4$ στην $p > 1/2$ κλπ. $\square$

Σύγκλιση κατά μέσο στη συνοριακή συνάρτηση

Θεώρημα 3.32. *Έστω $f \in H^p(\mathbb{D}), 0 < p < \infty$. Τότε σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$ ισχύει*

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) - f_*(e^{i\theta})|^p \, d\theta = 0.$$

Απόδειξη. Από τα Θεωρήματα 3.22 και 3.28 γνωρίζουμε ήδη ότι για κάθε $p \geq 1$ ισχύει $\lim\limits_{r\to 1} \|f_r - f_*\|_p = 0$. Έστω τώρα $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$. Από το Λήμμα 3.30 μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{D}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(z) = \sqrt{f(z)}$. Σημειώνουμε ότι η g είναι καλά ορισμένη αφού η f δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{D}$. Τότε, κάνοντας χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|f_r - f_*\|_p^p &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) - f_*(e^{i\theta})|^p \, d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta}) - g_*(e^{i\theta})|^p \, |g(re^{i\theta}) + g_*(e^{i\theta})|^p \, d\theta \\
&\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta}) - g_*(e^{i\theta})|^{2p} \, d\theta \right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta}) + g_*(e^{i\theta})|^{2p} \, d\theta \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Αφού η $g \in H^{2p}(\mathbb{D})$ έχουμε ότι

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta}) + g_*(e^{i\theta})|^{2p} \, d\theta \right)^{1/2} \leq c,$$

[1] Αν $\{f_n\}$ είναι μία ακολουθία ολόμορφων συναρτήσεων χωρίς ρίζες στο $\mathbb{D}$ τέτοια ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{D}$, τότε η f δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{D}$ εκτός αν μηδενίζεται ταυτοτικά.

όπου c είναι μία σταθερά ανεξάρτητη του r.

Επίσης, αφού το $2p \geq 1$, ισχύει ότι

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta}) - g_*(e^{i\theta})|^{2p} \, d\theta \right)^{1/2} \to 0, \text{ καθώς το } r \to 1.$$

Άρα, $\lim\limits_{r\to 1} \|f_r - f_*\|_p^p = 0$, δηλαδή το αποτέλεσμα ισχύει για $p \geq 1/2$. Με παρόμοιο τρόπο θέτουμε $g = \sqrt{f}$ και κάνουμε αναγωγή της περίπτωσης $p \geq 1/4$ στην $p \geq 1/2$ κλπ. □

3.8 Ο χώρος Hardy $H^1(\mathbb{D})$

Θεώρημα 3.33. *Έστω $F \in H^1(\mathbb{D})$ και έστω επίσης $f \in H^1(\mathbb{T})$ οι συνοριακές τιμές της F. Τότε*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{it})}{1 - e^{-it}z} \, dt, \forall z \in \mathbb{D}.$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $z \in \mathbb{D}$. Επιλέγουμε r ώστε $\frac{1+|z|}{2} < r < 1$. Τότε το z είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου $\{|\zeta| = r\}$ (αφού $|z| < \frac{1+|z|}{2} < r$) και από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy έχουμε

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(re^{it})}{re^{it} - z} re^{it} \, dt. \tag{3.3}$$

Τότε, χρησιμοποιώντας την $\frac{1+|z|}{2} < r$, εύκολα βλέπουμε ότι

$$\left| \frac{re^{it}}{re^{it} - z} \right| \leq \frac{1}{r - |z|} \leq \frac{2}{1 - |z|}.$$

Επομένως, αφήνοντας το $r \to 1$ και χρησιμοποιώντας ότι η F_r συγκλίνει στην f στην $L^1(\mathbb{T})$ νόρμα, από το Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης, έχουμε

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(re^{it})}{re^{it} - z} re^{it} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{it} - z} e^{it} \, dt.$$

Επομένως, παίρνοντας όριο καθώς το $r \to 1$ στην (3.3), καταλήγουμε στην

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{it})}{1 - e^{-it}z} \, dt.$$

□

Θεώρημα 3.34. *Για $F \in H^p(\mathbb{D}), 0 < p \leq \infty$, και $z \in \mathbb{D}$, ισχύει*

$$|F(z)| \leq (1 - |z|)^{-1/p} \|F\|_{H^p}.$$

Απόδειξη. Για $F \in H^p(\mathbb{D})$ με $0 < p < \infty$ και F όχι ταυτοτικά μηδέν ισχύει $F(z) = B(z)H(z)$, όπου B είναι το γινόμενο Blaschke που σχηματίζεται από τις ρίζες της F στο $\mathbb{D}$ και H μη μηδενική συνάρτηση με $\|F\|_p = \|H\|_p$. Έστω $A(z)$ ολόμορφη συνάρτηση τέτοια ώστε $H(z) = \exp\{A(z)\}$. Θέτουμε $G(z) = \exp\{pA(z)\}$. Τότε είναι $|G(z)| = |H(z)|^p$ και άρα $\|G\|_1 = \|H\|_p^p = \|F\|_p^p$. Αφού $G \in H^1(\mathbb{D})$ από το Θεώρημα 3.33 έχουμε

$$G(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{G(e^{it})}{e^{it} - z} e^{it} \, dt.$$

Έτσι,

$$|F(z)|^p \leq |H(z)|^p = |G(z)| \leq \frac{1}{1 - |z|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G(e^{it})| \, dt,$$

δηλαδή

$$|F(z)|^p \leq (1 - |z|)^{-1} \|F\|_p^p \implies |F(z)| \leq (1 - |z|)^{-1/p} \|F\|_p.$$

$\square$

Πόρισμα 3.35. *Κάθε $F \in H^1(\mathbb{D})$ είναι το ολοκλήρωμα Poisson της συνοριακής της συνάρτησης $F(e^{it})$.*

Απόδειξη. Έστω συνάρτηση $F \in H^1(\mathbb{D})$ και $0 < s < 1$. Γνωρίζουμε ότι για $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ ισχύει

$$F(sre^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F(se^{it}) \, dt.$$

Αφήνουμε το $s \to 1$. Είναι γνωστό ότι $\lim_{s \to 1} \|F(se^{it}) - F(e^{it})\|_1 = 0$ και αφού ο πυρήνας Poisson είναι φραγμένη συνάρτηση στο $\mathbb{T}$ παίρνουμε τελικά ότι

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F(e^{it}) \, dt.$$

Δηλαδή, η F είναι το ολοκλήρωμα Poisson των συνοριακών της τιμών. $\square$

Ορισμός. Το ολοκλήρωμα Poisson-Stieltjes μιας συνάρτησης f η οποία είναι φραγμένης κύμανσης στο $[-\pi, \pi]$ ορίζεται ως

$$PS[f](re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \, df(t).$$

Θεώρημα 3.36. *Αν $f \in H^1(\mathbb{D})$ και αν η συνοριακή της συνάρτηση είναι σχεδόν παντού ίση με μία συνάρτηση φραγμένης κύμανσης, τότε η f έχει απόλυτα συνεχή επέκταση στο $\overline{\mathbb{D}}$. (δηλαδή συνεχή επέκταση η οποία είναι απόλυτα συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{T}$.)*

Απόδειξη. Έστω ότι $f_* = g$, όπου η g είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης στο $[-\pi, \pi]$ και f_* είναι η συνοριακή συνάρτηση της f. Αφού η $f \in H^1(\mathbb{D})$ γνωρίζουμε ότι η f είναι η ίση με το ολοκλήρωμα Poisson των συνοριακών της τιμών, δηλαδή $f = P[f_*] = P[g]$. Θέτουμε

$$h(re^{i\theta}) := \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} P[g].$$

Τότε είναι γνωστό ότι

$$h(re^{i\theta}) = PS[g](re^{i\theta}) - \frac{g(\pi) - g(-\pi)}{2\pi} P_r(\theta + \pi),$$

όπου $PS[g]$ είναι το ολοκλήρωμα Poisson-Stieltjes της g. Η $h \in H^1$ και τότε $h = P[h_*]$. Άρα, $h = PS[F]$, όπου

$$F(\theta) = \int_0^\theta h_*(e^{it})\, dt.$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = h = PS[F](re^{i\theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F(t)\, dt \right\}$$

$$\implies f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F(t)\, dt + c,$$

όπου c είναι μία σταθερά. □

Θεώρημα 3.37. *(Θεώρημα Μοναδικότητας) Έστω $F \in H^1(\mathbb{D})$ και υποθέτουμε ότι για κάποιο σύνολο E με $|E| > 0$ ισχύει $F(e^{i\theta}) = 0$, για $\theta \in E$. Τότε $F(z) \equiv 0$.*

Απόδειξη. Αν $|E| = 2\pi$, τότε $F = 0$ σ.π. στο $\mathbb{T}$. Επομένως, από το Θεώρημα 3.33 είναι $F(z) \equiv 0$ στο $\mathbb{D}$. Υποθέτουμε έτσι ότι $0 < |E| < 2\pi$. Υποθέτουμε επίσης ότι η F δεν είναι ταυτοτικά ίση με 0 και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε $F(0) \neq 0$. Για $0 \leq r < 1$ θέτουμε

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u(e^{it})\, dt,$$

όπου

$$u(e^{it}) = \begin{cases} \frac{1}{|E|}, \text{αν } e^{it} \in E \\ \frac{-1}{2\pi - |E|}, \text{αν } e^{it} \in \mathbb{T} \setminus E. \end{cases}$$

Τότε

$$\frac{-1}{2\pi - |E|} \leq U(re^{\theta}) \leq \frac{1}{|E|}, \forall re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Θεωρούμε επίσης την αρμονική συζυγή V της U, δηλαδή

$$V(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_r(\theta - t) u(e^{it})\, dt.$$

Έτσι, $\exp(U + iV) \in H^{\infty}(\mathbb{D})$. [Η $F = U + iV$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{D}$ και άρα η $\exp(U + iV)$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{D}$ (ως σύνθεση ολόμορφων). Επίσης, είδαμε ότι υπάρχουν σταθερές M_1 και M_2 τέτοιες ώστε $M_1 \leq U(re^{i\theta}) \leq M_2$. Άρα, $e^{M_1} \leq e^{U} \leq e^{M_2}$ και συνεπώς η $\exp{(U + iV)}$ είναι φραγμένη αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{D}$.] Τότε, η

$$G_N(z) = F(z) \exp\{N(U(z) + iV(z))\} \in H^1(\mathbb{D}), \forall N \in \mathbb{Z}, N \geq 1.$$

Αφού λοιπόν η $G_N \in H^1(\mathbb{D})$ από το Θεώρημα 3.33 έχουμε

$$F(0) = G_N(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_N(e^{it})\, dt.$$

Όμως, για $t \in E$ είναι $G_N(e^{it}) = 0$, αφού από υπόθεση έχουμε ότι $F(e^{it}) = 0$, για $t \in E$. Άρα, είναι

$$F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T} - \setminus E} G_N(e^{it})\, dt.$$

Έτσι, για κάθε ακέραιο $N \geq 1$, είναι

$$|F(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T} \setminus E} |G_N(e^{it})|\, dt = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{ -\frac{N}{2\pi - |E|} \right\} \int_{\mathbb{T} \setminus E} |F(e^{it})|\, dt.$$

Επομένως, αφήνοντας το $N \to \infty$, έχουμε $F(0) = 0$, άτοπο. □

Λήμμα 3.38. *Έστω F ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{D}$ και υποθέτουμε ότι*

$$\Re F(z) > 0, \forall z \in \mathbb{D}.$$

Τότε το $\lim_{r \to 1} F(re^{i\theta})$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο για σχεδόν κάθε $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$.

Απόδειξη. Έστω
$$G(z) = \frac{1 - F(z)}{1 + F(z)}, z \in \mathbb{D}.$$
Τότε, για κάθε $z \in \mathbb{D}$, είναι $|G(z)| < 1$. Επίσης, η G είναι ολόμορφη στο $\mathbb{D}$ (ως πηλίκο ολόμορφων). Άρα, η $G \in H^\infty(\mathbb{D})$ και επομένως το ακτινικό όριο $G(e^{i\theta}) = \lim\limits_{r\to 1} G(re^{i\theta})$ υπάρχει για σχεδόν κάθε $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$. Θέτουμε
$$F(e^{i\theta}) = G(e^{i\theta}) + 1, e^{i\theta} \in \mathbb{T}.$$
Αν το σύνολο $\{\theta : F(e^{i\theta}) = 0\}$ είχε θετικό μέτρο Lebesgue, τότε από το Θεώρημα Μοναδικότητας θα είχαμε $F \equiv 0$ στο $\mathbb{D}$, δηλαδή $G(e^{i\theta}) = -1$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι στο $\mathbb{D}$ είναι $|G(z)| < 1$. Επομένως, το $\lim\limits_{r\to 1} G(re^{i\theta}) = -1$ μπορεί να συμβαίνει το πολύ σε ένα σύνολο μέτρου Lebesgue 0. Έτσι, στο συμπλήρωμα αυτού του συνόλου το
$$\lim_{r\to 1} F(re^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} \frac{1 - G(re^{i\theta})}{1 + G(re^{i\theta})} = \frac{1 - G(e^{i\theta})}{1 + G(e^{i\theta})}$$
υπάρχει και είναι πεπερασμένο για σχεδόν κάθε $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$. □

Θεώρημα 3.39. *Έστω $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ και έστω*
$$V(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{2r\sin(\theta - t)}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)}\, d\mu(e^{it}).$$
Τότε το $\lim\limits_{r\to 1} V(re^{i\theta})$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο για σχεδόν κάθε $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το μ είναι θετικό Borel μέτρο στο $\mathbb{T}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση
$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, d\mu(e^{it}), z \in \mathbb{D}.$$
Τότε
$$\Re\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \Re\left\{\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right\} d\mu(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P_r(\theta - t)\, d\mu(e^{it})$$
και λόγω της υπόθεσης ότι το μ είναι θετικό μέτρο έχουμε ότι
$$\Re\{F(z)\} > 0, \forall z \in \mathbb{D}.$$
Άρα, αφού η F είναι και ολόμορφη στο $\mathbb{D}$, από το Λήμμα 3.38, το όριο $\lim\limits_{r\to 1} F(re^{i\theta})$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο για σχεδόν κάθε $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$. Ειδικότερα, το όριο $\lim\limits_{r\to 1} V(re^{i\theta})$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο για σχεδόν κάθε $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$. □

Ο μετασχηματισμός Hilbert στο $\mathbb{T}$.

Ορισμός 3.40. *Ο **μετασχηματισμός Hilbert** μιας συνάρτησης $f \in L^1(\mathbb{T})$ σε ένα σημείο $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ ορίζεται ως:*

$$\tilde{f}(e^{i\theta}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon \le |\theta - t| \le \pi} \frac{f(e^{it})}{2\tan(\frac{\theta - t}{2})}\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon < |t| < \pi} \frac{f(e^{i(\theta - t)})}{2\tan(\frac{t}{2})}\, dt,$$

όταν το όριο υπάρχει.

Αφού η $2\tan(\frac{t}{2})$ είναι περιττή συνάρτηση μπορούμε να γράψουμε τον $\tilde{f}$ και ως εξής:

$$\tilde{f}(e^{i\theta}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(e^{i(\theta - t)}) - f(e^{i(\theta + t)})}{2\tan(\frac{t}{2})}\, dt.$$

Πρόταση 3.41. *Αν μία συνάρτηση f φραγμένης κύμανσης στο $[-\pi, \pi]$ έχει πεπερασμένη παράγωγο στο σημείο $\theta \in (-\pi, \pi)$, τότε*

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f'(t)\, dt = f'(\theta).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\theta = 0$ και $f'(\theta) = 0$. Για $|t| > \delta$ είναι

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} P_r(e^{it}) \right| \le c(\delta)(1 - r).$$

Άρα,

$$\limsup_{r \to 1^-} \int_{|t| > \delta} \left| \frac{\partial}{\partial t} P_r(e^{it}) \right| |f(t)|\, dt = 0.$$

Τότε, από το παραπάνω και την σχέση

$$PS[f](re^{i\theta}) = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi} P_r(\theta + \pi) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P'(r, \theta - t) f(t)\, dt,$$

έπεται ότι

$$\limsup_{r \to 1^-} |PS[f](r)| \le \limsup_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{\partial}{\partial t} P_r(e^{it}) \right| |f(t)|\, dt, \forall \delta > 0.$$

Τότε από την $\left| t \frac{\partial}{\partial t} P_r(e^{it}) \right| \le 2P_r(e^{it}), |t| \le \pi$, έχουμε ότι

$$\limsup_{r \to 1^-} |PS[f](r)| \le \limsup_{r \to 1^-} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(e^{it}) \left| \frac{f(t)}{t} \right| dt$$

και αφού $\frac{f(t)}{t} \to 0$, καθώς $t \to 0$, έχουμε ότι

$$\lim_{r\to 1} PS[f](r) = 0.$$

□

Λήμμα 3.42. *Αν θ είναι σημείο Lebesgue μιας $f \in L^1(\mathbb{T})$, τότε*

$$\limsup_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(e^{it})|f(\theta+t) - f(\theta)|\, dt = 0.$$

Απόδειξη. Αφού το θ είναι σημείο Lebesgue της f έχουμε ότι

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t |f(\theta+x) - f(\theta)|\, dx = 0.$$

Θέτουμε

$$u(t) = \int_0^t |f(\theta+x) - f(\theta)|\, dx,$$

και άρα έχουμε

$$\lim_{t\to 0} \frac{u(t)}{t} = 0,$$

δηλαδή $u'(0) = 0$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.41 με την u στη θέση της f και $\theta = 0$ έχουμε

$$\limsup_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(e^{it}) u'(t)\, dt = u'(0) = 0,$$

δηλαδή

$$\limsup_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(e^{it})|f(\theta+t) - f(\theta)|\, dt = 0.$$

□

Από το ακόλουθο θεώρημα έπεται ότι το όριο του ορισμού 3.40 υπάρχει σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

Θεώρημα 3.43. *Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$, τότε τα ακόλουθα όρια υπάρχουν και είναι ίσα (σχεδόν παντού):*

$$\lim_{r\to 1} V(re^{i\theta}) \text{ και } \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(\theta-t) - f(\theta+t)}{2\tan(\frac{t}{2})}\, dt,$$

όπου $V(re^{i\theta})$ είναι η αρμονική συζυγής του $P[f]$.

Απόδειξη. Για θ σημείο Lebesgue της f θα δείξουμε ότι

$$\lim_{r\to 1^-}\left\{V(re^{i\theta})-\frac{1}{2\pi}\int_{1-r}^{\pi}\frac{f(\theta-t)-f(\theta+t)}{\tan(\frac{t}{2})}\,dt\right\}=0.$$

Γράφουμε

$$V(re^{i\theta})-\frac{1}{2\pi}\int_{1-r}^{\pi}\frac{f(\theta-t)-f(\theta+t)}{\tan(\frac{t}{2})}\,dt=I_1+I_2,$$

όπου

$$I_1(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{1-r}Q_r(e^{it})(f(\theta-t)-f(\theta+t))\,dt$$

και

$$I_2(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{1-r}^{\pi}\left(Q_r(e^{it})-\frac{1}{\tan(\frac{t}{2})}\right)(f(\theta-t)-f(\theta+t))\,dt.$$

Κάνοντας χρήση της $|t|\le 1-r$ έχουμε ότι

$$|Q_r(e^{it})|\le\frac{2(1-r)}{(1-r)^2}=\frac{2}{1-r}.$$

Τότε

$$\begin{aligned}|I_1(r)|&\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{1-r}|Q_r(e^{it})||f(\theta-t)-f(\theta+t)|\,dt\\&\le\frac{1}{\pi(1-r)}\int_0^{1-r}|f(\theta-t)-f(\theta+t)|\,dt\to 0,\end{aligned}$$

καθώς το $r\to 1$, αφού το θ είναι σημείο Lebesgue. Τώρα, είναι γνωστό ότι ο πυρήνας Poisson με τον συζυγή του πυρήνα συνδέονται μέσω της παρακάτω σχέσης

$$Q_r(e^{it})-\frac{1}{\tan(\frac{t}{2})}=-\frac{1-r}{\tan(\frac{t}{2})}\frac{P_r(e^{it})}{1+r},$$

απ΄ όπου έπεται ότι

$$\left|Q_r(e^{it})-\frac{1}{\tan(\frac{t}{2})}\right|\le cP_r(e^{it}),\ \text{όπου } c \text{ είναι μία σταθερά.}$$

Άρα,

$$|I_2(r)|\le\frac{c}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(e^{it})|f(\theta-t)-f(\theta+t)|\,dt.$$

Αφού το θ είναι σημείο Lebesgue, από το Λήμμα 3.42, έπεται ότι $I_2(r)\to 0$, καθώς $r\to 1$. □

Είναι γνωστό ότι ο μετασχηματισμός Hilbert απεικονίζει τον $L^1(\mathbb{T})$ στον $L^p(\mathbb{T})$, για κάθε $p < 1$, αλλά όχι στον $L^1(\mathbb{T})$. Άρα, γενικά το ολοκλήρωμα Poisson του $\tilde{f}$ δεν έχει νόημα. Όμως, αν υποθέσουμε ότι $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{T})$, τότε ισχύει ότι $P[\tilde{f}] = Q[f]$:

Θεώρημα 3.44. *Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{T})$, τότε $P[\tilde{f}] = Q[f]$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f παίρνει πραγματικές τιμές. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g = P[f] + iQ[f]$. Προφανώς, η $g \in H(\mathbb{D})$ και $\Re g = P[f] \in h^1(\mathbb{D})$. Έτσι, από το Θεώρημα των Kolmogorov-Smirnov έχουμε ότι $g \in H^p(\mathbb{D})$, για $p < 1$. Επίσης, από την υπόθεση, η συνοριακή συνάρτηση της g:

$$g_*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} g(re^{i\theta}) = \lim_{r\to 1}(P[f](re^{i\theta}) + iQ[f](re^{i\theta})) = f + i\tilde{f}$$

ανήκει στον $L^1(\mathbb{T})$. Άρα, από το Θεώρημα του Smirnov [2], έχουμε ότι η $g \in H^1(\mathbb{D})$. Τότε, από το Πόρισμα 3.35, η g είναι το ολοκλήρωμα Poisson της συνοριακής της συνάρτησης: $g = P[g_*]$. Δηλαδή,

$$P[f] + iQ[f] = P[g_*] = P[f + i\tilde{f}] = P[f] + iP[\tilde{f}],$$

και επομένως $P[\tilde{f}] = Q[f]$. □

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 3.45. *Έστω $f \in L^p(\mathbb{T}), 1 < p < \infty$. Τότε*

1. *$\tilde{f} \in L^p(\mathbb{T})$ και υπάρχει σταθερά c_p τέτοια ώστε:*

$$\|(Qf)_r\|_p \le \|\tilde{f}\|_p \le c_p\|f\|_p.$$

2. *$Qf = P\tilde{f}$ και $\lim_{r\to 1}\|(Qf)_r - \tilde{f}\|_p = 0$.*

Το ακόλουθο Λήμμα μας δείχνει τη σχέση μεταξύ των συντελεστών Fourier μιας συνάρτησης του $L^p(\mathbb{T}), 1 < p < \infty$, και των συντελεστών Fourier του μετασχηματισμού Hilbert αυτής.

Λήμμα 3.46. *Έστω $f \in L^p(\mathbb{T}), 1 < p < \infty$. Τότε*

$$\widehat{\tilde{f}}(n) = -i\,\mathrm{sign}(n)\widehat{f}(n), n \in \mathbb{Z}.$$

[2] Έστω $f \in H^p(\mathbb{D})$. Αν $p' > p$ και $f(e^{i\theta}) \in L^{p'}(\mathbb{T})$, τότε $f \in H^{p'}(\mathbb{D})$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.45 γνωρίζουμε ότι

$$Qf = P\tilde{f}. \tag{3.4}$$

Από το Θεώρημα 2.4 έχουμε ότι

$$(Pf)(z) = \widehat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(-n)\overline{z}^n + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n)z^n, z \in \mathbb{D} \tag{3.5}$$

και επίσης είναι γνωστό ότι

$$(Qf)(z) = i\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(-n)\overline{z}^n - i\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n)z^n, z \in \mathbb{D}. \tag{3.6}$$

Επομένως, από την (3.4), λόγω των (3.5) και (3.6), είναι

$$i\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(-n)\overline{z}^n - i\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n)z^n = \widehat{\tilde{f}}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\tilde{f}}(-n)\overline{z}^n + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\tilde{f}}(n)z^n.$$

Επομένως,

$$\widehat{\tilde{f}}(0) = 0, \widehat{\tilde{f}}(-n) = i\widehat{f}(-n), \text{ και } \widehat{\tilde{f}}(n) = -i\widehat{f}(n), n \geq 1,$$

δηλαδή

$$\widehat{\tilde{f}}(n) = -i\,\mathrm{sign}(n)\widehat{f}(n), n \in \mathbb{Z}.$$

□

3.9 Η προβολή Riesz P_+

Ορισμός 3.47. *Ο τελεστής*

$$P_+ : L^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T}), f \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{int}$$

καλείται ***προβολή Riesz****.*

Θεώρημα 3.48. *Έστω $1 < p < \infty$. Τότε η P_+ μπορεί να οριστεί με ανάλογο τύπο από τον $L^p(\mathbb{T})$ στον $H^p(\mathbb{T})$. Επίσης, για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ ισχύει*

$$\widehat{P_+ f}(n) = \widehat{f}(n), n \geq 0.$$

Απόδειξη. Έστω
$$f = \sum_{k=-M}^{N} \widehat{f}(k)e^{ikt}$$
ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

Τότε
$$P_+f = \sum_{k=0}^{N} \widehat{f}(k)e^{ikt}.$$

Θέτουμε τώρα
$$g = \widehat{f}(0) + f + i\tilde{f}.$$

Τότε, από το Θεώρημα 3.45, η $g \in L^p(\mathbb{T})$ και $\|g\|_p \leq c_p\|f\|_p$.

Είναι
$$\begin{aligned}\widehat{g}(n) &= \widehat{f}(0) + \widehat{f}(n) + i\widehat{\tilde{f}}(n) \\ &= \widehat{f}(0) + \widehat{f}(n) + \operatorname{sign}(n)\widehat{f}(n).\end{aligned}$$

Άρα,
$$\widehat{g}(n) = \begin{cases} 2\widehat{f}(n), & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Δηλαδή, $2P_+f = g$ και είναι
$$\|2P_+f\|_p \leq c_p\|f\|_p \implies \|P_+f\|_p \leq \frac{c_p}{2}\|f\|_p.$$

Η φραξιμότητα του P_+ στον $L^p(\mathbb{T})$ έπεται από την πυκνότητα του συνόλου των τριγωνομετρικών πολυωνύμων στον $L^p(\mathbb{T})$.

Επίσης, για $f \in L^p(\mathbb{T})$, υπάρχει ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων f_n ώστε
$$\|f_n - f\|_p \to 0, n \to \infty.$$

Έτσι,
$$\begin{aligned}&\|P_+f_n - P_+f\|_p \leq \frac{c_p}{2}\|f_n - f\|_p \to 0 \\ &\implies P_+f_n \to P_+f \text{ στον } L^p(\mathbb{T}).\end{aligned}$$

Σταθεροποιούμε $\ell \in \mathbb{Z}, \ell \geq 0$. Τότε
$$\widehat{P_+f}(\ell) = \lim_n \widehat{P_+f_n}(\ell) = \lim_n \widehat{f}_n(\ell) = \widehat{f}(\ell).$$

□

Πόρισμα 3.49. *Έστω* $1 < p < \infty$. *Τότε*

$$L^p(\mathbb{T}) = H^p(\mathbb{T}) \oplus \overline{H_0^p(\mathbb{T})}.$$

Απόδειξη. Έστω $f \in H^p(\mathbb{T}) \cap \overline{H_0^p(\mathbb{T})}$. Θα δείξουμε ότι $f \equiv 0$.

Αφού $f \in H^p(\mathbb{T})$ είναι $\widehat{f}(n) = 0$, για $n < 0$. Από την άλλη μεριά, γράφουμε

$$f = \overline{g}, \text{ όπου } g \in H_0^p(\mathbb{T}).$$

Τότε $\widehat{g}(n) = 0$, για $n \leq 0$.

Είναι

$$\widehat{f}(n) = \widehat{\overline{g}}(n) = \overline{\widehat{g}}(-n) = 0, \text{ για } n \geq 0.$$

Άρα, $\widehat{f}(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, και από το Θεώρημα Μοναδικότητας στον $L^1(\mathbb{T})$ έπεται ότι $f \equiv 0$.

Έτσι,

$$H^p(\mathbb{T}) \cap \overline{H_0^p(\mathbb{T})} = \{0\}.$$

Έστω συνάρτηση $f \in L^p(\mathbb{T})$. Θέτουμε $g = P_+ f$. Τότε, από το Θεώρημα 3.48, η $g \in H^p(\mathbb{T})$. Θέτουμε επίσης $h = f - g$. Τότε

$$\widehat{h}(n) = \widehat{f}(n) - \widehat{P_+ f}(n) = \widehat{f}(n) - \widehat{f}(n) = 0, n \geq 0.$$

Άρα,

$$\widehat{\overline{h}}(n) = \overline{\widehat{h}}(-n) = 0, n \leq 0 \implies \overline{h} \in H_0^p(\mathbb{T}) \implies h \in \overline{H_0^p(\mathbb{T})}.$$

Γράφουμε

$$f = P_+ f + (f - P_+ f).$$

Είδαμε ότι $P_+ f \in H^p(\mathbb{T})$ και $h = f - P_+ f \in \overline{H_0^p(\mathbb{T})}$ και σε συνδυασμό με το ότι

$$H^p(\mathbb{T}) \cap \overline{H_0^p(\mathbb{T})} = \{0\}$$

έχουμε

$$L^p(\mathbb{T}) = H^p(\mathbb{T}) \oplus \overline{H_0^p(\mathbb{T})}.$$

□

3.10 Το Θεώρημα Κανονικής Παραγοντοποίησης

Θεώρημα 3.50. *Έστω $F \in H^p(\mathbb{D}), 0 < p \leq \infty, F \not\equiv 0$, και έστω $f(e^{it}) = \lim_{r \to 1} F(re^{it})$, όταν το όριο υπάρχει. Τότε*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big| \log |f(e^{it})| \big| \, dt < \infty$$

δηλαδή η $\log |f(e^{it})| \in L^1(\mathbb{T})$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $p < \infty$ και $F(0) \neq 0$. Για κάθε $x > 0$ ισχύει $\log^+ x \leq x$, όπου $\log^+ x = \max(\log x, 0), x > 0$. Άρα,

$$\begin{aligned} p \log^+ |F(re^{i\theta})| &\leq |F(re^{i\theta})|^p \\ \implies p \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |F(re^{i\theta})| \, d\theta &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^p \, d\theta \leq 2\pi \|F\|_p^p \\ \implies \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |F(re^{i\theta})| \, d\theta &\leq \frac{\|F\|_p^p}{p} \leq C, \end{aligned}$$

όπου C είναι μία σταθερά. Τώρα, είναι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big| \log |F(re^{i\theta})| \big| \, d\theta = 2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |F(re^{i\theta})| \, d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |F(re^{i\theta})| \, d\theta.$$

Λόγω της υποαρμονικότητας της $\log |F|$ έχουμε ότι

$$\log |F(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |F(re^{i\theta})| \, d\theta.$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big| \log |F(re^{i\theta})| \big| \, d\theta \leq 2C - \log |F(0)|,$$

και τότε από το Λήμμα Fatou έπεται ότι $\log |f(e^{it})| \in L^1(\mathbb{T})$. □

Θεώρημα 3.51. *(Κανονικής Παραγοντοποίησης) Έστω $f \in H^p(\mathbb{D}), 0 < p \leq \infty$, με την f να μην είναι ταυτοτικά μηδέν. Τότε η f παραγοντοποιείται κατά μοναδικό τρόπο ως:*

$$f = BSh,$$

όπου B είναι το γινόμενο Blaschke που σχηματίζεται από τις ρίζες της f,

$$S(z) = \exp\left\{ - \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \, d\sigma(e^{it}) \right\}, z \in \mathbb{D},$$

είναι μία singular inner function με το σ να είναι πεπερασμένο, θετικό και κάθετο Borel μέτρο στο $\mathbb{T}$, και

$$h(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f(e^{it})|\,dt\right\}.$$

Επίσης, η $h \in H^p(\mathbb{D})$ και $\|f\|_p = \|h\|_p$.

Απόδειξη. Έστω

$$h(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f(e^{it})|\,dt\right\}, z \in \mathbb{D}.$$

Η h είναι ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{D}$ και είναι

$$|h(re^{i\theta})| = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\log|f(e^{it})|\,dt\right\}$$

$$\Longrightarrow \log|h(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\log|f(e^{it})|\,dt.$$

Επίσης, είναι γνωστό ότι

$$\log|f(re^{i\theta})| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\log|f(e^{it})|\,dt.$$

Άρα, $\log|f(re^{i\theta})| \leq \log|h(re^{i\theta})|$. Δηλαδή, $\log|f(z)| \leq \log|h(z)|, z \in \mathbb{D}$. Από την Πρόταση 3.17 είναι $\lim\limits_{r\to 1}\log|h(re^{i\theta})| = \log|f(e^{i\theta})|$, για σχεδόν κάθε $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$. Τώρα, από την

$$|h(re^{i\theta})|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)|f(e^{it})|^p\,dt$$

έπεται ότι $h \in H^p(\mathbb{D})$ με $\|h\|_p \leq \|f\|_p$ και από την $|f(z)| \leq |h(z)|, z \in \mathbb{D}$, έχουμε ότι $\|f\|_p \leq \|h\|_p$. Άρα, $\|f\|_p = \|h\|_p$. Θέτουμε $\phi = \frac{f}{h}$. Αφού η h δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{D}$, η ϕ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{D}$. Αφού $|f(z)| \leq |h(z)|$, για κάθε $z \in \mathbb{D}$, η $\phi \in H^\infty(\mathbb{D})$ με $\lim\limits_{r\to 1}|\phi(re^{i\theta})| = 1$. Λόγω του Θεωρήματος του Riesz γράφουμε $\phi = BS$, όπου B είναι το γινόμενο Blaschke που σχηματίζεται από τις ρίζες της ϕ στο $\mathbb{D}$ και η $S \in H^\infty(\mathbb{D})$ και δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{D}$. Τότε η $U = -\log|S(z)|$ είναι θετική αρμονική συνάρτηση στο $\mathbb{D}$ και από το Θεώρημα του Herglotz υπάρχει θετικό Borel μέτρο μ στο $\mathbb{T}$ τέτοιο ώστε

$$\log|S(re^{i\theta})| = -\int_{\mathbb{T}} P_r(\theta - t)\,d\sigma(t).$$

Είναι $\lim_{r\to 1}\log|S(re^{i\theta})| = 0$ και από το Θεώρημα του Fatou γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{r\to 1}\log|S(re^{i\theta})| = -2\pi\sigma'(e^{i\theta}), \text{ για σχεδόν όλα τα } e^{i\theta}\in\mathbb{T}.$$

Επομένως, $\sigma'(e^{i\theta}) = 0$, για σχεδόν όλα τα $e^{i\theta}\in\mathbb{T}$ και άρα το σ είναι κάθετο ως προς το μέτρο Lebesgue. Είναι

$$\Re\{\log S(z)\} = \Re\bigg\{-\int_{\mathbb{T}}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\sigma(t)\bigg\}$$

$$\implies \text{υπάρχει σταθερά } c:\ \log S(z) = -\int_{\mathbb{T}}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\sigma(t) + ic$$

$$\implies S(z) = e^{ic}\exp\bigg\{-\int_{\mathbb{T}}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\sigma(t)\bigg\}.$$

Άρα, τελικά η f γράφεται ως $f = \phi h = BSh$ με τα B, S και h όπως στη διατύπωση του θεωρήματος. (Το e^{ic} θα απορροφηθεί από το γινόμενο Blaschke.) □

Στο Θεώρημα Κανονικής Παραγοντοποίησης, η συνάρτηση BS καλείται το **εσωτερικό μέρος** της f και η h καλείται το **εξωτερικό μέρος** της f. Αυτός είναι και ο λόγος που το Θεώρημα Κανονικής Παραγοντοποίησης καλείται και εσωτερική-εξωτερική παραγοντοποίηση της f.

Ορισμός 3.52. *Μία συνάρτηση $u\in H^\infty(\mathbb{D})$ καλείται **εσωτερική** αν*

$$|u(\zeta)| = 1 \ \sigma.\pi. \ \text{στο } \mathbb{T}.$$

Ορισμός 3.53. *Μία ολόμορφη συνάρτηση $h:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ καλείται **εξωτερική** αν υπάρχει μία real-valued συνάρτηση f στο $\mathbb{D}$ που είναι ολοκληρώσιμη ως προς το μέτρο Lebesgue τέτοια ώστε*

$$h(z) = \exp\bigg\{\int_{\mathbb{T}}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}f(e^{it})\,dm(e^{it})\bigg\}, \forall z\in\mathbb{D}.$$

Λήμμα 3.54. *Έστω $f\in H^1(\mathbb{D})$. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $g, h\in H^2(\mathbb{D})$ τέτοιες ώστε $f = gh$ και ισχύει ότι*

$$\|f\|_1 = \|g\|_2^2 = \|h\|_2^2.$$

Απόδειξη. Έστω $f \in H^1(\mathbb{D})$. Από το Θεώρημα Κανονικής Παραγοντοποίησης η f γράφεται ως $f = f_1 f_2$, όπου f_1 είναι μία singular εσωτερική συνάρτηση και f_2 είναι εξωτερική συνάρτηση. Είναι γνωστό (από το ίδιο Θεώρημα) ότι $f_2 \in H^1(\mathbb{D})$ και $\|f\|_1 = \|f_2\|_1$. Θέτουμε

$$g = f_1 f_2^{1/2} \text{ και } h = f_2^{1/2}.$$

Τότε φανερά $f = gh$ και $g^2, h^2 \in H^1(\mathbb{D})$, δηλαδή $g, h \in H^2(\mathbb{D})$.

[Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \le r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 \, d\theta &= \sup_{0 \le r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_1(re^{i\theta})|^2 |f_2(re^{i\theta})| \, d\theta \\
&\le \sup_{0 \le r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_2(re^{i\theta})| \, d\theta = \|f_2\|_1 = \|f\|_1 < \infty,
\end{aligned}$$

δηλαδή $g^2 \in H^1(\mathbb{D})$ και παρόμοια δείχνουμε ότι $h^2 \in H^1(\mathbb{D})$.] $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Corona Theorem

4.1 Εισαγωγή

Ο χώρος $H^\infty(\mathbb{D})$ εκτός από χώρος Banach είναι επίσης μία μεταθετική άλγεβρα Banach με μοναδιαίο στοιχείο. Οι ιδιότητες $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ και $f \cdot 1 = f$ είναι φανερές.

Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{M}$ την οικογένεια των πολλαπλασιαστικών συναρτησοειδών $\phi : H^\infty(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$, δηλαδή για $f_1, f_2 \in H^\infty(\mathbb{D}), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, έχουμε

$$\phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \phi(f_1) + \lambda_2 \phi(f_2)$$

και

$$\phi(f_1 f_2) = \phi(f_1)\phi(f_2).$$

Ένα φανερό παράδειγμα στοιχείων του $\mathcal{M}$ αποτελούν τα συναρτησοειδή εκτίμησης

$$\phi_\zeta, \zeta \in \mathbb{D}, \text{ με } \phi_\zeta(f) = f(\zeta).$$

Πρόταση 4.1. *Το σύνολο $\mathcal{M}$ περιέχεται στην κλειστή μοναδιαία μπάλα του $H^\infty(\mathbb{D})^*$.*

Απόδειξη. Έστω $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, και $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| > \|f\|$. Τότε το στοιχείο $e - \lambda^{-1} f$ είναι αντιστρέψιμο, ώστε $\phi(e - \lambda^{-1} f) \neq 0$, δηλαδή $\phi(f) \neq \lambda$. Επομένως, $|\phi(f)| \leq \|f\|, \forall f \in H^\infty(\mathbb{D})$. Έτσι, το ϕ είναι συνεχές με $\|\phi\| \leq 1$. Καθώς $\|e\| = 1$ και $\phi(e) = 1$, έχουμε ότι $\|\phi\| = 1$. $\square$

Πρόταση 4.2. *Το $\mathcal{M}$ είναι ασθενώς * συμπαγές υποσύνολο της $B_{H^\infty(\mathbb{D})^*}$.*

Απόδειξη. Έστω $\{\phi_a\}_{a\in A}$ ένα δίκτυο πολλαπλασιαστικών συναρτησοειδών στο $\mathcal{M}$ το οποίο συγκλίνει στην ασθενή * τοπολογία της $B_{H^\infty(\mathbb{D})^*}$ σε ένα $\phi \in B_{H^\infty(\mathbb{D})^*}$. Θα δείξουμε ότι το ϕ είναι πολλαπλασιαστικό. Για $f_1, f_2 \in H^\infty(\mathbb{D})$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ είναι

$$\begin{aligned}\phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) &= \lim_a \phi_a(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lim_a(\lambda_1\phi_a(f_1) + \lambda_2\phi_a(f_2)) \\ &= \lambda_1\phi(f_1) + \lambda_2\phi(f_2)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\phi(f_1 f_2) &= \lim_a \phi_a(f_1 f_2) = \lim_a(\phi_a(f_1)\phi_a(f_2)) = \lim_a \phi_a(f_1)\lim_a \phi_a(f_2) \\ &= \phi(f_1)\phi(f_2).\end{aligned}$$

Άρα, $\phi \in \mathcal{M}$ και έτσι το $\mathcal{M}$ είναι ασθενώς * κλειστό υποσύνολο της $B_{H^\infty(\mathbb{D})^*}$. Όμως, η $B_{H^\infty(\mathbb{D})^*}$ είναι συμπαγές σύνολο. Συνεπώς, το $\mathcal{M}$ είναι ασθενώς * συμπαγές υποσύνολο της $B_{H^\infty(\mathbb{D})^*}$. □

Το πρόβλημα που θα μελετήσουμε είναι η περιγραφή της κλειστότητας του $\mathbb{D}$ στην ασθενή * τοπολογία. Το Corona Theorem που θα αποδείξουμε σε αυτό το κεφάλαιο μας πιστοποιεί ότι $\overline{\mathbb{D}} = \mathcal{M}$, όπου $\overline{\mathbb{D}}$ είναι η κλειστότητα του $\mathbb{D}$ στην ασθενή * τοπολογία.

4.2 Ένα αποτέλεσμα δυϊκότητας

Έστω X χώρος Banach με δυϊκό χώρο X^*, E κλειστός υπόχωρος του X με ορθογώνιο συμπλήρωμα $E^\perp = \{f \in X^* : f(e) = 0, \forall e \in E\}$ και $X^*/E^\perp$ ο χώρος πηλίκο του X^* με το $E^\perp$. Η νόρμα του $X^*/E^\perp$ ορίζεται από τον τύπο

$$\|\overline{\phi}\|_{X^*/E^\perp} = \inf_{f\in E^\perp} \|\phi + f\|.$$

Θεώρημα 4.3. *Αν $\phi \in X^*$, τότε $\|\overline{\phi}\|_{X^*/E^\perp} = \sup_{x\in E, \|x\|\le 1} |\phi(x)|$.*

Απόδειξη. Για $f \in E^\perp$ και $x \in E$ με $\|x\| \le 1$, έχουμε

$$|\phi(x)| = |\phi(x) + f(x)| \le \|\phi + f\|$$

$$\implies \sup_{x\in E,\|x\|\le 1} |\phi(x)| \le \|\phi + f\| \implies \sup_{x\in E,\|x\|\le 1} |\phi(x)| \le \|\overline{\phi}\|_{X^*/E^\perp}.$$

Από το Θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $\psi \in X^*$ με $\|\psi\| = \sup\limits_{x\in E,\|x\|\le 1} |\phi(x)|$ και $\psi = \phi$ στο E. Άρα, το στοιχείο $f = \psi - \phi \in E^\perp$ και είναι

$$\|\overline{\phi}\|_{X^*/E^\perp} \le \|\phi + f\| = \|\psi\| = \sup_{x\in E,\|x\|\le 1} |\phi(x)|.$$

□

4.3 Ο τύπος του Riesz και η εξίσωση d-bar

Θεώρημα 4.4. *(Riesz formula) Έστω u συνάρτηση τάξης C^2 σε μία περιοχή του $\overline{\mathbb{D}}$. Τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{D}} \Delta u(z) \log\frac{1}{|z|}\, dx\, dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\theta})\, d\theta - u(0).$$

Απόδειξη. Έστω $z = x + iy = re^{i\theta}, x, y \in \mathbb{R}, r \ge 0$, και $0 \le \theta < 2\pi$. Για $r > 0$ θέτουμε $v(r,\theta) = u(re^{i\theta})$. Είναι γνωστό ότι η Λαπλασιανή της u σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}.$$

Είναι

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{D}} \Delta u \log\frac{1}{|z|} dx\, dy &= \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\varepsilon<|z|<1} \Delta u \log\frac{1}{|z|}\, dx\, dy \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{\varepsilon}^{1} \Delta u \log\frac{1}{r}\, r\, dr\, d\theta.\end{aligned}$$

Αρχικά, παρατηρούμε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\, d\theta = \frac{\partial v}{\partial \theta}(r, 2\pi) - \frac{\partial v}{\partial r}(r, 0) = 0.$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)\log\frac{1}{r}\, r\,dr &= \left[-r\log r\frac{\partial v}{\partial r}\right]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 r\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial \log r}{\partial r}\,dr \\ &= \varepsilon\log\varepsilon\frac{\partial v}{\partial r}(\varepsilon,\theta) + \int_\varepsilon^1 \frac{\partial v}{\partial r}\,dr \\ &= \varepsilon\log\varepsilon\frac{\partial v}{\partial r}(\varepsilon,\theta) + v(1,\theta) - v(\varepsilon,\theta).\end{aligned}$$

Τώρα, αφού η $\frac{\partial v}{\partial r}(\varepsilon,\theta)$ είναι φραγμένη καθώς το $\varepsilon\to 0$ και $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log\varepsilon = 0$, έχουμε ότι

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{2\pi}\varepsilon\log\varepsilon\frac{\partial v}{\partial r}(\varepsilon,\theta)\,d\theta\right) = 0.$$

Άρα,

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{D}}\Delta u\log\frac{1}{|z|}\,dx\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(v(1,\theta)-v(0,\theta))\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\theta})\,d\theta - u(0).$$

$\square$

Θεώρημα 4.5. *Έστω u συνάρτηση με συμπαγή φορέα τάξης C^∞ στο $\mathbb{C}$. Τότε η εξίσωση $\dfrac{\partial w}{\partial \overline{z}} = u$ έχει C^∞ λύση στο $\mathbb{C}$.*

4.4 Μία ισοδύναμη μορφή του Corona Theorem

Το ακόλουθο θεώρημα αποτελεί μία αναδιατύπωση του Θεωρήματος Corona. Στην απόδειξη του θα χρησιμοποιηθούν τα παρακάτω αποτελέσματα:

- Αν A είναι μία μεταθετική μιγαδική άλγεβρα με μονάδα, τότε κάθε γνήσιο ιδεώδες της A περιέχεται σε κάποιο maximal ιδεώδες.
- Αν A είναι μία μεταθετική μιγαδική άλγεβρα Banach με μοναδιαίο στοιχείο, τότε κάθε maximal ιδεώδες M της A είναι ο πυρήνας κάποιου $\phi\in\mathcal{M}$.

Θεώρημα 4.6. *Το $\mathbb{D}$ είναι πυκνό στο $\mathcal{M}$ ανν $\forall f_1, \dots, f_n \in H^\infty(\mathbb{D})$ με*

$$|f_1(z)|^2 + \cdots + |f_n(z)|^2 \geq \delta > 0, z \in \mathbb{D}, \tag{4.1}$$

υπάρχουν συναρτήσεις $g_1, \dots, g_n \in H^\infty(\mathbb{D})$ με

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(z) g_j(z) = 1, z \in \mathbb{D}. \tag{4.2}$$

Απόδειξη. **Για το ευθύ:**

Αν $f_1, \dots, f_n \in H^\infty(\mathbb{D}), \delta > 0$, τέτοια ώστε $\sum_{j=1}^{n} |f_j|^2 \geq \delta$, τότε είναι και

$$\sum_{j=1}^{n} |\phi(f_j)|^2 \geq \delta, \forall \phi \in \mathcal{M},$$

και υποθέτουμε ότι το 1 δεν ανήκει στο ιδεώδες που παράγεται από τα $f_1, \dots, f_n$, δηλαδή στο

$$A = \{f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n : g_1, \dots, g_n \in H^\infty(\mathbb{D})\}.$$

Τότε το A είναι γνήσιο ιδεώδες. Άρα, υπάρχει maximal ιδεώδες M και $\phi_0 \in \mathcal{M}$ ώστε $A \subset M = \ker \phi_0$. Δηλαδή, υπάρχει $\phi_0 \in \mathcal{M}$ ώστε $\phi_0(f_j) = 0$, για $j = 1, \dots, n$. Τότε για την περιοχή

$$\left\{\phi \in \mathcal{M} : |\phi(f_j)| < \sqrt{\frac{\delta}{n}}, j = 1, \dots, n\right\}$$

του ϕ_0 ισχύει

$$\left\{\phi \in \mathcal{M} : |\phi(f_j)| < \sqrt{\frac{\delta}{n}}, j = 1, \dots, n\right\} \cap \mathbb{D} = \emptyset.$$

Διότι διαφορετικά θα υπήρχε $z \in \mathbb{D}$ ώστε $|\phi_z(f_j)| < \sqrt{\frac{\delta}{n}}, j = 1, \dots, n$.

Τότε

$$\sum_{j=1}^{n} |\phi_z(f_j)|^2 < \delta,$$

άτοπο. Όμως, αφού το $\mathbb{D}$ είναι πυκνό στο $\mathcal{M}$, η παραπάνω τομή θα έπρεπε να είναι μη κενή και άρα έχουμε καταλήξει σε άτοπο. Επομένως, το 1 ανήκει στο ιδεώδες που παράγεται από τα $f_1, \ldots, f_n$ και άρα υπάρχουν συναρτήσεις $g_1, \ldots, g_n \in H^\infty(\mathbb{D})$ ώστε

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(z) g_j(z) = 1, z \in \mathbb{D}.$$

Για το αντίστροφο:

Έστω ότι το $\mathbb{D}$ δεν είναι πυκνό στο $\mathcal{M}$. Τότε υπάρχει $\phi_0 \in \mathcal{M}$ και βασική περιοχή V του ϕ_0,

$$V = \{\phi \in \mathcal{M} : |\phi(f_k) - \phi_0(f_k)| < \sqrt{\varepsilon}, k = 1, \ldots, n\},$$

όπου $\varepsilon > 0$ και $f_k \in H^\infty(\mathbb{D}), k = 1, \ldots, n$, ώστε $\delta_a \notin V$, $\forall a \in \mathbb{D}$, όπου $\delta_a(f) = f(a)$. Δηλαδή, για κάθε $a \in \mathbb{D}$ υπάρχει $k \in \{1, \ldots, n\} : |f_k(a) - \phi_0(f_k)| \geq \sqrt{\varepsilon}$.

Τότε

$$\sum_{k=1}^{n} |f_k(a) - \phi_0(f_k)|^2 \geq \sqrt{\varepsilon}^2 = \varepsilon.$$

Επομένως, λόγω υπόθεσης, υπάρχουν συναρτήσεις $g_1, \ldots, g_n \in H^\infty(\mathbb{D})$ τέτοιες ώστε

$$\sum_{k=1}^{n} (f_k - \phi_0(f_k)) g_k \equiv 1.$$

Τότε

$$1 = \phi_0(1) = \sum_{k=1}^{n} (\phi_0(f_k) - \phi_0(f_k)) \phi_0(g_k) = 0,$$

το οποίο προφανώς είναι άτοπο.

□

4.5 Απόδειξη του Corona Theorem

Θεώρημα 4.7. *(Corona Theorem) Το $\mathbb{D}$ είναι πυκνό στο $\mathcal{M}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη (4.1). Θα δείξουμε ότι ισχύει η (4.2) και, υποθέτοντας ότι $0 < \delta < 1$, με

$$|g_j(z)| \leq \frac{129n^2}{\delta^4}, z \in \mathbb{D}. \tag{4.3}$$

Θα το δείξουμε με την επιπρόσθετη υπόθεση ότι οι $f_1, \dots, f_n$ είναι ολόμορφες και φραγμένες από το 1 στο $D(0, 1+\eta)$, για κάποιο $\eta > 0$.

Πράγματι: Δοθέντος των $f_1, \dots, f_n \in H^\infty(\mathbb{D})$ με

$$|f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2 \geq \delta > 0,$$

θεωρούμε τις $f_{r,k}(z) = f_k(rz), r < 1$. Οι $f_{r,k}$ είναι ολόμορφες στο $\{z : |z| < \frac{1}{r}\}$ και υποθέτουμε ότι μπορούν να βρεθούν συναρτήσεις $g_{r,k} \in H^\infty(\mathbb{D})$ με

$$\|g_{r,k}\|_\infty \leq \frac{129n^2}{\delta^4}$$

τέτοιες ώστε

$$f_{r,1}g_{r,1} + \cdots + f_{r,n}g_{r,n} = 1.$$

Από το Θεώρημα του Montel υπάρχει τότε ακολουθία (r_ℓ) με $r_\ell \to 1$ ώστε $g_{r_l,k} \to g_k$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{D}$. Είναι τότε

$$\|g_k\|_\infty = \|\lim_\ell g_{r_\ell,k}\|_\infty = \lim_\ell \|g_{r_\ell,k}\|_\infty \leq \frac{129n^2}{\delta^4}$$

και

$$f_1g_1 + \cdots + f_ng_n = 1.$$

Θέτουμε

$$h_j(z) = \frac{\overline{f}_j}{|f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2}, j = 1, \dots, n.$$

Τότε η $h_j, 1 \leq j \leq n$, είναι τάξης C^∞, και ισχύει

$$\sum_{j=1}^n f_jh_j = \sum_{j=1}^n \frac{|f_j|^2}{|f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2} = 1 \text{ στο } D(0, 1+\eta).$$

Έστω w_{jk} λείες συναρτήσεις στο $D(0, 1+\eta)$ ώστε

$$\frac{\partial w_{j,k}}{\partial \overline{z}} = h_j \frac{\partial h_k}{\partial \overline{z}}, j, k = 1, \dots, n.$$

Θέτουμε $g_j = h_j + \sum_{k=1}^n (w_{jk} - w_{kj}) f_k, 1 \leq j \leq n$. Τότε

$$\sum_{j=1}^n f_jg_j = \sum_{j=1}^n f_jh_j + \sum_{j,k=1}^n f_jf_k(w_{jk} - w_{kj}) = 1.$$

Επίσης, στο $D(0,1+\eta)$ είναι

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_j}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial h_j}{\partial \overline{z}} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial w_{jk}}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial w_{kj}}{\partial \overline{z}}\right) f_k + \sum_{k=1}^{n}(w_{jk}-w_{kj})\frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}} \\ &= \frac{\partial h_j}{\partial \overline{z}} + \sum_{k=1}^{n}\left(h_j\frac{\partial h_k}{\partial \overline{z}} - h_k\frac{\partial h_j}{\partial \overline{z}}\right) f_k \\ &= \frac{\partial h_j}{\partial \overline{z}} + h_j\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial h_k}{\partial \overline{z}} f_k - \frac{\partial h_j}{\partial \overline{z}}\sum_{k=1}^{n} h_k f_k \\ &= h_j\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\sum_{k=1}^{n} h_k f_k\right) = 0.\end{aligned}$$

Έστω u λεία συνάρτηση στο δίσκο $D(0,1+\eta)$ και έστω συνάρτηση w ώστε

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = u. \tag{4.4}$$

Τώρα, αν w_0 είναι λύση της (4.4) σε μία περιοχή $\mathcal{D}$ του $\overline{\mathbb{D}}$, τότε κάθε λύση της (4.4) στο $\mathcal{D}$ έχει τη μορφή $w = w_0 + P$, όπου $\frac{\partial P}{\partial \overline{z}} = 0$ στο $\mathcal{D}$, δηλαδή η P είναι ολόμορφη στο $\mathcal{D}$. Έτσι, με $\mathcal{D}$ οποιαδήποτε περιοχή του $\overline{\mathbb{D}}$, έχουμε

$$\inf\{\|w\|_\infty : \frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = u \text{ στο } \mathcal{D}\} = \inf\{\|w_0+P\|_\infty : P \text{ ολόμορφη στο } \mathcal{D}\}.$$

Έστω τώρα $X = L^1(\mathbb{T})$ και $F = H_0^1 = \{f \in H^1(\mathbb{T}) : \widehat{f}(0) = 0\}$. Είναι

$$\begin{aligned}F^\perp &= \{f \in X^* : \langle f, g\rangle = 0, \forall g \in F\} \\ &= \{f \in X^* : \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})g(e^{it})\,dt = 0, \forall g \in F\}.\end{aligned}$$

Τότε, χρησιμοποιώντας ότι

$$H_0^1(\mathbb{T}) = \overline{\operatorname{span}}_{L^1(\mathbb{T})}\{e^{int} : n \geq 1\},$$

[Αφού $f \in H_0^1(\mathbb{T})$ έχουμε ότι $f \in L^1(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(n) = 0$, για $n \leq 0, n \in \mathbb{Z}$. Από το Θεώρημα του Fejer για τους χώρους $L^p(\mathbb{T})$ έχουμε $\|\sigma_n(f) - f\|_1 \to 0$, καθώς το $n \to \infty$. Όμως,

$$\sigma_n(f) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\widehat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\widehat{f}(k)e^{ikx},$$

δηλαδή $\sigma_n(f) \in \text{span}\{e^{int} : n \geq 1\}$. Άρα, η $f \in \overline{\text{span}}_{L^1(\mathbb{T})}\{e^{int} : n \geq 1\}$. Το αντίστροφο είναι φανερό.]

έχουμε

$$\begin{aligned} F^{\perp} &= \{f \in L^{\infty}(\mathbb{T}) : \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-int}\,dt = 0, \forall n \leq -1\} \\ &= \{f \in L^{\infty}(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0, \forall n \leq -1\} \\ &= H^{\infty}(\mathbb{T}). \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\inf\{\|w\|_{\infty} : \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = u \text{ στο } \mathcal{D}\} = \|\overline{w_0}\|,$$

όπου $\overline{w_0}$ είναι η κλάση του w_0 στο $L^{\infty}(\mathbb{T})/H^{\infty}(\mathbb{T})$. Τότε, από το Θεώρημα 4.3, έχουμε

$$\|\overline{w_0}\|_{L^{\infty}(\mathbb{T})/H^{\infty}(\mathbb{T})} = \|\overline{w_0}\|_{X^*/F^{\perp}} = \sup_F \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w_0(e^{i\theta})F(e^{i\theta})\,d\theta\right|,$$

όπου $F \in H_0^1$ με $\|F\|_1 \leq 1$.

Υποθέτουμε ότι η F είναι ολόμορφη σε μία περιοχή του $\overline{\mathbb{D}}$. Τότε, από τον τύπο του Riesz, έχουμε

$$\int_0^{2\pi} w_0(e^{i\theta})F(e^{i\theta})\,d\theta = \iint_{\mathbb{D}} \Delta(w_0F)\log\frac{1}{|z|}\,dx\,dy + 2\pi(w_0F)(0).$$

Είναι $F(0) = 0$ και

$$\Delta(w_0F) = 4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}(w_0F) = 4\frac{\partial}{\partial z}\left(F\frac{\partial w_0}{\partial\bar{z}}\right) = 4\frac{\partial}{\partial z}(uF) = 4uF' + 4F\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Άρα, χρειάζεται να εκτιμήσουμε την ποσότητα:

$$\frac{2}{\pi}\left|\iint_{\mathbb{D}} uF'\log\frac{1}{|z|}\,dx\,dy + \iint_{\mathbb{D}} F\frac{\partial u}{\partial z}\log\frac{1}{|z|}\,dx\,dy\right|,$$

για κάθε $F \in H_0^1, \|F\|_1 \leq 1$, και $u = h_j\frac{\partial h_k}{\partial\bar{z}}$.

Θα συνεχίσουμε με κάποιες ανισότητες:

Για $h \in H^2(\mathbb{D})$ ισχύει

$$\iint_{\mathbb{D}} |h'(z)|^2\log\frac{1}{|z|}\,dx\,dy = \frac{\pi}{2}(\|h\|_2^2 - |h(0)|^2) \leq \frac{\pi}{2}\|h\|_2^2. \tag{4.5}$$

[Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 4.4 με $u = |h|^2$. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\Delta u = 4|h'|^2.$$

Πράγματι: Αρχικά είναι

$$\frac{\partial(h\overline{h})}{\partial z} = h\frac{\partial \overline{h}}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial z}\overline{h} = \frac{\partial h}{\partial z}\overline{h},$$

διότι

$$\frac{\partial \overline{h}}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\right)} = \overline{0} = 0.$$

Τότε

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial h}{\partial z}\overline{h}\right) = \frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial h}{\partial z}\overline{\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)} = |h'|^2,$$

και επομένως $\Delta u = 4|h'|^2$. Τότε, από το Θεώρημα 4.4, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{D}} 4|h'|^2 \log\frac{1}{|z|}\,dx\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |h(e^{i\theta})|^2\,d\theta - |h(0)|^2,$$

δηλαδή

$$\iint_{\mathbb{D}} |h'(z)|^2 \log\frac{1}{|z|}\,dx\,dy = \frac{\pi}{2}(\|h\|_2^2 - |h(0)|^2) \leq \frac{\pi}{2}\|h\|_2^2.$$

Για τη γενική περίπτωση, έστω $h_r(z) = h(rz), 0 < r < 1$. Τότε από την αρχική περίπτωση είναι

$$\|h_r\|_2^2 = |h(0)|^2 + \frac{2}{\pi}\iint_{\mathbb{D}} r^2|h'(rz)|^2 \log\frac{1}{|z|}\,dA(z),$$

όπου $dA(z) = dx\,dy$. Θέτουμε $u = rz$. Τότε είναι

$$\|h_r\|_2^2 = |h(0)|^2 + \frac{2}{\pi}\iint_{r\mathbb{D}} |h'(u)|^2 \log\frac{r}{|u|}\,dA(u).$$

Αφήνουμε το $r \to 1$. Τότε από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε

$$\|h\|_2^2 = |h(0)|^2 + \frac{2}{\pi}\iint_{\mathbb{D}} |h'(u)|^2 \log\frac{1}{|u|}\,dA(u)$$

$$\Longrightarrow \iint_{\mathbb{D}} |h'(z)|^2 \log\frac{1}{|z|}\,dx\,dy = \frac{\pi}{2}(\|h\|_2^2 - |h(0)|^2) \leq \frac{\pi}{2}\|h\|_2^2.]$$

Αν $f \in H^\infty(\mathbb{D}), g \in H^2(\mathbb{D})$, τότε

$$\iint_{\mathbb{D}} |gf'|^2 \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy \leq 2\pi \|g\|_2^2 \|f\|_\infty^2. \tag{4.6}$$

$\big[$Είναι $gf' = (gf)' - g'f$. Άρα,

$$\begin{aligned} |gf'|^2 = |(gf)' - g'f|^2 &\leq 2(|(gf)'|^2 + |g'f|^2) \\ &\leq 2\{|(gf)'|^2 + \|f\|_\infty^2 |g'|^2\}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.5) έχουμε τότε

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{D}} |gf'|^2 \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy &\leq 2 \iint_{\mathbb{D}} |(gf)'|^2 \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy + 2 \iint_{\mathbb{D}} \|f\|_\infty^2 |g'|^2 \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy \\ &\leq \pi \|gf\|_2^2 + \pi \|f\|_\infty^2 \|g\|_2^2 \leq 2\pi \|f\|_\infty^2 \|g\|_2^2.\big] \end{aligned}$$

Αν $F \in H^1(\mathbb{D}), f_1, f_2 \in H^\infty(\mathbb{D})$, τότε

$$\iint_{\mathbb{D}} |F f_1' f_2'| \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy \leq 2\pi \|F\|_1 \|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty. \tag{4.7}$$

$\big[$Γράφουμε $F = g_1 g_2$ με $g_1, g_2 \in H^2(\mathbb{D})$ και $\|g_1\|_2^2 = \|g_2\|_2^2 = \|F\|_1$. Τότε, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και χρησιμοποιώντας την σχέση (4.6), έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{D}} |g_1 g_2 f_1' f_2'| \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy &\leq \left(\iint_{\mathbb{D}} |g_1 f_1'|^2 \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy \right)^{1/2} \left(\iint_{\mathbb{D}} |g_2 f_2'|^2 \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy \right)^{1/2} \\ &\leq (2\pi \|g_1\|_2^2 \|f_1\|_\infty^2)^{1/2} (2\pi \|g_2\|_2^2 \|f_2\|_\infty^2)^{1/2} \\ &= 2\pi \|g_1\|_2 \|g_2\|_2 \|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty = 2\pi \|F\|_1 \|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty.\big] \end{aligned}$$

Για $F \in H^1(\mathbb{D})$ και $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ ισχύει

$$\iint_{\mathbb{D}} |F' f'| \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy \leq 2\pi \|F\|_1 \|f\|_\infty. \tag{4.8}$$

$\big[$Γράφουμε $F = g_1 g_2$ με $g_1, g_2 \in H^2(\mathbb{D})$ και $\|g_1\|_2^2 = \|g_2\|_2^2 = \|F\|_1$. Έτσι,

$$\iint_{\mathbb{D}} |F' f'| \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy \leq \iint_{\mathbb{D}} |g_1' g_2 f'| \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy + \iint_{\mathbb{D}} |g_1 g_2' f'| \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy.$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα, κάνοντας χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.5) και (4.6), θα έχουμε

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{D}} |g_1' g_2 f'| \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy &\leq \left(\iint_{\mathbb{D}} |g_1'|^2 \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy \right)^{1/2} \left(\iint_{\mathbb{D}} |g_2 f'|^2 \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{\pi}{2} \|g_1\|_2^2 \right)^{1/2} (2\pi \|g_2\|_2^2 \|f\|_\infty^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, παρόμοια ισχύει

$$\iint_{\mathbb{D}} |g_1 g_2' f'| \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy \le \left(\frac{\pi}{2}\|g_2\|_2^2\right)^{1/2} \left(2\pi \|g_1\|_2^2 \|f\|_\infty^2\right)^{1/2}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{D}} |F' f'| \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy &\le \pi \|g_1\|_2 \|g_2\|_2 \|f\|_\infty + \pi \|g_1\|_2 \|g_2\|_2 \|f\|_\infty \\ &= 2\pi \|g_1\|_2 \|g_2\|_2 \|f\|_\infty = 2\pi \|F\|_1 \|f\|_\infty .]\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\phi = \frac{1}{\sum_{j=1}^n |f_j|^2}$$

και έτσι είναι

$$h_k = \overline{f}_k \phi, \text{ για } k = 1, \ldots, n.$$

Έτσι,

$$\frac{\partial h_k}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial \overline{f}_k}{\partial \overline{z}} \phi + \overline{f}_k \frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}} = \overline{f}_k' \phi + \overline{f}_k \frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}}.$$

Όμως,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}} = -\phi^2 \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial \overline{f}_j}{\partial \overline{z}} = -\phi^2 \sum_{j=1}^n f_j \overline{f}_j',$$

και άρα

$$\frac{\partial h_k}{\partial \overline{z}} = \phi \overline{f}_k' - \phi^2 \overline{f}_k \sum_{j=1}^n f_j \overline{f}_j'.$$

Παίρνουμε ως u το $h_j \frac{\partial h_k}{\partial \overline{z}}$. Τότε είναι

$$\begin{aligned} u = h_j \frac{\partial h_k}{\partial \overline{z}} &= \overline{f}_j \phi \left(\phi \overline{f}_k' - \phi^2 \overline{f}_k \sum_{i=1}^n f_i \overline{f}_i' \right) \\ &= \phi^2 \overline{f}_j \overline{f}_k' - \phi^3 \overline{f}_j \overline{f}_k \sum_{i=1}^n f_i \overline{f}_i'. \end{aligned}$$

Μετά από πράξεις, προκύπτει ότι

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \overline{f}_j \overline{f}_k' (-2) \phi^3 \sum_{m=1}^n f_m' \overline{f}_m - \phi^3 \overline{f}_j \overline{f}_k \sum_{m=1}^n |f_m'|^2 + 3\phi^4 \overline{f}_j \overline{f}_k \left| \sum_{m=1}^n f_m f_m' \right|^2.$$

– Με χρήση της σχέσης (4.8) μπορούμε να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα

$$\iint_{\mathbb{D}} uF' \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy.$$

Θα προκύψει ότι

$$\left| \iint_{\mathbb{D}} uF' \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy \right| < \frac{c(n)}{\delta^3},$$

όπου η σταθερά c εξαρτάται μόνο από το n.

– Με χρήση της σχέσης (4.7) μπορούμε να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα

$$\iint_{\mathbb{D}} F \frac{\partial u}{\partial z} \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy.$$

Θα προκύψει ότι

$$\left| \iint_{\mathbb{D}} F \frac{\partial u}{\partial z} \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy \right| < \frac{c(n)}{\delta^4},$$

όπου η σταθερά c εξαρτάται και πάλι μόνο από το n.

Αναλυτικά:

Χρησιμοποιώντας ότι $|f_j| \leq 1, \forall j, |\phi| \leq \frac{1}{\delta}$, και την ανισοτική σχέση (4.8) έχουμε

$$\begin{aligned}
\left| \iint_{\mathbb{D}} uF' \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy \right| &\leq \frac{1}{\delta^2} \iint_{\mathbb{D}} |F' f_k'| \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy + \frac{1}{\delta^3} \sum_{k=1}^{n} \iint_{\mathbb{D}} |F' f_k'| \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy \\
&\leq \frac{1}{\delta^2} 2\pi \|F\|_1 \|f_k\|_\infty + \frac{1}{\delta^3} n 2\pi \|F\|_1 \|f_k\|_\infty \\
&\leq \frac{2\pi}{\delta^2} + \frac{2\pi n}{\delta^3} < \frac{2\pi(n+1)}{\delta^3}
\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας την ανισοτική σχέση (4.7) θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\left| \iint_{\mathbb{D}} F \frac{\partial u}{\partial z} \log \frac{1}{|z|}\, dx\, dy \right| &\leq \frac{2}{\delta^3} \iint_{\mathbb{D}} |F||f_k'| \sum_{m=1}^{n} |f_m'| \\
&\quad + \frac{1}{\delta^3} \iint_{\mathbb{D}} |F| \sum_{m=1}^{n} |f_m'|^2 + \frac{3}{\delta^4} \iint_{\mathbb{D}} |F| \sum_{m=1}^{n} |f_m'|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2}{\delta^3} n\big(2\pi \|F\|_1 \|f_k\|_\infty \|f_m\|_\infty\big) + \frac{1}{\delta^3} n\big(2\pi \|F\|_1 \|f_m\|_\infty^2\big) + \frac{3}{\delta^4} n(2\pi \|F\|_1 \|f_m\|_\infty^2) \\
&\leq \frac{4\pi n}{\delta^3} + \frac{2\pi n}{\delta^3} + \frac{6\pi n}{\delta^4} < \frac{4\pi n}{\delta^4} + \frac{2\pi n}{\delta^4} + \frac{6\pi n}{\delta^4} = \frac{12\pi n}{\delta^4}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\left|4\iint_{\mathbb{D}} uF' \log\frac{1}{|z|}\,dx\,dy + 4\iint_{\mathbb{D}} F\frac{\partial u}{\partial z}\log\frac{1}{|z|}\,dx\,dy\right| &< 4\left(\frac{2\pi(n+1)}{\delta^3} + \frac{12\pi n}{\delta^4}\right) \\
&< 4\left(\frac{2\pi(n+1)}{\delta^4} + \frac{12\pi n}{\delta^4}\right) \\
&\leq \frac{4\cdot 16\pi n}{\delta^4} = \frac{64\pi n}{\delta^4}.
\end{aligned}$$

Άρα, μπορούμε να βρούμε w_{jk} ώστε

$$\|w_{jk}\|_\infty < \frac{64n}{\delta^4}.$$

Αφού $g_j = h_j + \sum_{k=1}^{n}(w_{jk} - w_{kj})f_k$

$$\begin{aligned}
\implies \|g_j\|_\infty &\leq \|h_j\|_\infty + \sum_{k=1}^{n}(\|w_{jk}\|_\infty + \|w_{kj}\|_\infty) \\
&< \frac{1}{\delta} + n\cdot\frac{2\cdot 64n}{\delta^4} = \frac{1}{\delta} + \frac{128n^2}{\delta^4} < \frac{1}{\delta^4} + \frac{128n^2}{\delta^4} \leq \frac{129n^2}{\delta^4}.
\end{aligned}$$

□

Βιβλιογραφια

[1] Κολουντζάκης, Μ., Παπαχριστόδουλος, Χ., 2015. Ανάλυση Fourier. [ηλεκτρ. βιβλ.] Αθήνα:Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών. Διαθέσιμο στο: http://hdl.handle.net/11419/5199

[2] Γ.Κουμουλλής, Σ.Νεγρεπόντης, Θεωρία Μέτρου, Νέα Έκδοση Βελτιωμένη, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2005.

[3] ΔΗΜΗΤΡΗΣ Χ. ΚΡΑΒΒΑΡΙΤΗΣ, ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (2η ΕΚΔΟΣΗ), ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΣΙΟΤΡΑΣ, ΑΘΗΝΑ 2016.

[4] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη, Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ, ΑΘΗΝΑ 1997.

[5] Charalambos D. Aliprantis, Kim C. Border, Infinite Dimensional Analysis : A Hitchhiker's Guide, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Third Edition, 2006.

[6] Mats Andersson, TOPICS IN COMPLEX ANALYSIS, Springer Verlag New York, Inc, 1997.

[7] Matthias Beck, Gerald Marchesi, Dennis Pixton, Lucas Sabalka, A First Course in Complex Analysis (Version 1.54) (https://matthbeck.github.io/papers/complexorth.pdf)

[8] Carlos A. Berenstein, Roger Gay, Complex Analysis and Special Topics in Harmonic Analysis, Springer-Verlag New York, Inc, 1995.

[9] D. Choimet, H. Queffelec, TWELVE LANDMARKS OF Twentieth-Century Analysis, Cambridge University Press, 2015.

[10] John B. Conway, Functions of one complex variable II, Springer-Verlag New York, 1995.

[11] J. GARCIA-CUERVA, J. L. RUBIO DE FRANCIA, Weighted Norm Inequalities and Related Topics, NORTH-HOLLAND MATHEMATICS STUDIES 116, 1985

[12] Ronald G. Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Second Edition, Springer-Verlag, 1998.

[13] Peter L. Duren, THEORY OF H^p SPACES, Academic Press, New York and London, 1970.

[14] STEPHEN D. FISHER, FUNCTION THEORY ON PLANAR DOMAINS, A SECOND COURSE IN COMPLEX ANALYSIS, JOHN WILEY AND SONS, 1983.

[15] E. Fricain, J. Mashreghi, The Theory of $\mathcal{H}(b)$ Spaces, Volume 1, new mathematical monographs: 20, Cambridge University Press, 2016.

[16] D. J. H. Garling, COURSE IN Mathematical Analysis, VOLUME III, Complex Analysis, Measure and Integration, Cambridge University Press, 2014.

[17] T.W. GAMELIN, WOLFF'S PROOF OF THE CORONA THEOREM, ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 37, 1980, pp. 113-119.

[18] Stephan Ramon Garcia, Javad Mashreghi, William T. Ross, Introduction to Model Spaces and their Operators, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 148, Cambridge University Press, 2016.

[19] Kenneth Hoffman, Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962.

[20] Yitzhak Katznelson, AN INTRODUCTION TO HARMONIC ANALYSIS, Third Corrected Edition, 2002.

[21] Paul Koosis, Introduction to H_p Spaces, Second Edition, collected and augmented, With two appendices by V.P. Havin, vol. 115, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 1998.

[22] Steven G. Krantz, Geometric Function Theory, Explorations in Complex Analysis, Birkhauser Boston, 2006.

[23] J. Mashreghi, Representation Theorems in Hardy Spaces, London Mathematical Society Student Text Series 74, Cambridge University Series, 2009.

[24] J. Mashreghi, Derivatives of Inner Functions, Fields Institute Monographs 31, Springer, New York, 2013.

[25] Raghavan Narasimhan, Yves Nievergelt, Complex Analysis in One Variable, Second Edition, Springer Science+Business Media, LLC, 2001.

[26] NIKOLAI NIKOLSKI, HARDY SPACES, Cambridge studies in advanced mathematics 179, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2019.

[27] Miroslav Pavlovic, Introduction to Function Spaces on the Disc, Beograd, 2004.

[28] S. PONNUSAMY, H. SILVERMAN, COMPLEX VARIABLES WITH APPLICATIONS, Birkhauser, New York, Boston, 2006.

[29] Mark A. Pinsky, Introduction to Fourier Analysis and Wavelets, Graduate Studies in Mathematics Volume 102, American Mathematical Society, 2002.

[30] T. Ransford, Potential Theory in the Complex Plane, London Mathematical Society Student Texts 28, Cambridge University Press, 1995.

[31] Walter Rudin, PRINCIPLES OF MATHEMATICAL ANALYSIS, McGraw-Hill, Inc., Third Edition, 1976.

[32] Walter Rudin, REAL AND COMPLEX ANALYSIS, McGraw-Hill Book Company, Third Edition, 1987.

[33] Elias M. Stein, Rami Shakarchi, Fourier Analysis-An Introduction, Princeton University Press, 2003.

[34] David C. Ullrich, Complex Made Simple, Graduate Studies in Mathematics, Volume 97, American Mathematical Society, 2008.

[35] Ivan Francis Wilde, Lecture Notes on Complex Analysis, Imperial College Press, 2006.