



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ:

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ

Σχολή: Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΘΕΜΑ :

**Ελεγχόμενη Δυναμική Κβαντικών Τελειών για Εφαρμογές Κβαντικής
Πληροφορίας**

ΤΣΙΡΩΝΗ ΙΩΑΝΝΑ

Επιβλέπων Καθηγητής:

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΑΓΓΕΛΗΣ

Άρτα, Ιούνιος 2022

“ ”

Εγκρίθηκε από τριμελή εξεταστική επιτροπή

Άρτα, Μήνας 2022

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

1. Επιβλέπων καθηγητής

Αγγέλης Κωνσταντίνος

ΔΕΠ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

2. Μέλος επιτροπής

Βαρτζιώτης Φώτιος

ΔΕΠ ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

3. Μέλος επιτροπής

Τσορμπατζόγλου Ανδρέας

ΔΕΠ ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

Τσιρώνη Ιωάννα, 2022.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Δήλωση μη λογοκλοπής

Δηλώνω υπεύθυνα και γνωρίζοντας τις κυρώσεις του Ν. 2121/1993 περί Πνευματικής Ιδιοκτησίας, ότι η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία είναι εξ ολοκλήρου αποτέλεσμα δικής μου ερευνητικής εργασίας, δεν αποτελεί προϊόν αντιγραφής ούτε προέρχεται από ανάθεση σε τρίτους. Όλες οι πηγές που χρησιμοποιήθηκαν (κάθε είδους, μορφής και προέλευσης) για τη συγγραφή της περιλαμβάνονται στη βιβλιογραφία.

Τσιρώνη, Ιωάννα

Υπογραφή

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ολοκληρώνοντας τις μεταπτυχιακές μου σπουδές στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, θα ήθελα από καρδιάς να ευχαριστήσω όλους όσους με βοήθησαν στην ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας και ιδιαίτερα την καθηγήτριά μου, κα. Ευαγγέλου Σοφία δείγμα αναγνώρισης της προσφοράς της και της πολύτιμης βοήθειάς της για την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας. Η βοήθεια και καθοδήγηση που μου προσέφερε ήταν ιδιαίτερος σημαντική.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία μελετούμε τη δυναμική πληθυσμού μίας κβαντικής τελείας κατά την αλληλεπίδραση της με σύμφωνη ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με έμφαση στην προετοιμασία της διεξιτονικής κατάστασης. Συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε μια καινοτόμα μέθοδο αδιαβατικής απαλοιφής, με την οποία μπορεί να γίνει η προετοιμασία της κατάστασης διεξιτονίου κάνοντας χρήση της απλούστερης μορφής παλμών laser, των ορθογώνιων παλμών. Παρουσιάζουμε αναλυτικές λύσεις για την επίτευξη εξαιρετικά υψηλής απόδοσης διέγερση της κατάστασης διεξιτονίου σε τυπικές κβαντικές τελείες (>97%), λαμβάνοντας μάλιστα υπόψη φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας. Δείχνουμε επιπλέον τη δυνατότητα χρήσης των συγκεκριμένων πεδίων laser για την κατάλληλη δημιουργία κβαντικών πυλών μεταξύ της θεμελιώδους κατάστασης και της κατάστασης εξιτονίου, παρουσία της κατάστασης διεξιτονίου (η οποία συνήθως παραλείπεται στη βιβλιογραφία) δίνοντας αναλυτικά τις συγκεκριμένες συνθήκες. Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας βρίσκουν εφαρμογή σε διάφορες περιπτώσεις κβαντικών διεργασιών με ιδιαίτερη σημασία στο πεδίο της κβαντικής πληροφορίας.

Λέξεις κλειδιά:

Ημιαγώγιμες νανοδομές, κβαντικές τελείες, εξιτόνια, διεξιτόνια, κβαντικοί υπολογιστές, κβαντικό δυφίο, κβαντικές πύλες, κβαντική πληροφορία, συχνότητα Rabi, εξισώσεις πλατών πιθανότητας, εξισώσεις πίνακα πυκνότητας

ABSTRACT

In the present thesis, we study the population dynamics of a quantum dot that interacts with coherent electromagnetic radiation, emphasis given on the biexciton state preparation. Specifically, we present an innovative method of adiabatic elimination through which biexciton state preparation can be obtained using the simplest type of laser pulses, the orthogonal pulses. We demonstrate analytical solutions to achieve a considerably high-efficient excitation of the biexciton state for typical quantum dots (>97%), even considering dephasing and decoherence phenomena. We furthermore present the possibility of using the particular laser fields for the proper creation of quantum gates between the ground state and the exciton state in the presence of the biexciton state (which is often omitted in the bibliography), examining the conditions in detail. The results of the present master thesis can be applied in various cases of quantum processes with special emphasis on the field of quantum information.

Keywords:

Semiconductor nano-structures, quantum dots, excitons, biexcitons, quantum computers, qubits, quantum gates, quantum information, Rabi frequency, probability amplitude equations, density matrix equations

Περιεχόμενα

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	7
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	8
ABSTRACT	1
1 Ημιαγωγοί.....	5
1.1 Ημιαγώγιμες νανοδομές	7
1.1.1. Κβαντικά πηγάδια	7
1.1.2. κβαντικά νήματα	8
1.1.3. Κβαντικές Τελείες.....	9
1.2 Κατασκευή κβαντικών τελειών	14
1.2.1 Λιθογραφία	14
1.2.2 Διαμορφωμένο ηλεκτρικό πεδίο.....	15
1.2.3 Διάχυση αναμασά σε φράγματα και κβαντικό πηγάδι.....	16
1.2.4 Επιλεκτική ανάπτυξη	16
1.2.5 Τεχνολογία διαιρούμενης πύλης	16
1.2.6 Αυτό-οργάνωση κβαντικών τελειών	17
1.2.7 Εφαρμογές κβαντικών τελειών	17
1.3 Εξιτόνια- Διεξιτόνια	18
1.3.1 Εξιτόνια.....	18
1.3.2 Διεξιτόνια	20
2 Κβαντικοί υπολογιστές.....	23
2.1 Γενικά περί κβαντικών υπολογιστών	23
2.2 Κβαντικό δυφίο	24
2.3 Κβαντικές πύλες	27
2.4 Υλοποίηση κβαντικών υπολογιστών με κβαντικές τελείες.....	30
3 Ελεγχόμενη δημιουργία κβαντικών καταστάσεων σε κβαντικές τελείες.....	33
3.1 Εισαγωγικά στοιχεία	33
3.2 Εξισώσεις πίνακα πυκνότητας και εξισώσεις πλατών πιθανότητας.....	34
3.3 Εξαγωγή εξισώσεων πίνακα πυκνότητας και πλατών πιθανότητας.....	35
3.4 Βασικά αναλυτικά αποτελέσματα	37
3.5 Βασικά αριθμητικά αποτελέσματα	40
3.6 Συμπεράσματα	46
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	48

Κεφάλαιο 1^ο Βασικά στοιχεία θεωρίας

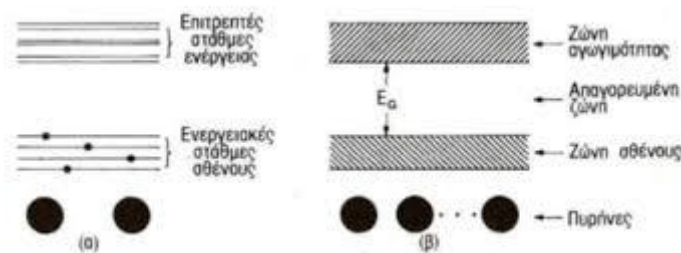
1 Ημιαγωγοί

Όπως είναι γνωστό από την ατομική φυσική, τα δέσμια ηλεκτρόνια έχουν διακριτά ενεργειακά επίπεδα (στάθμες) χωρισμένα από απαγορευμένες περιοχές, δηλαδή το ενεργειακό τους φάσμα είναι κβαντισμένο [1]. Κατά συνέπεια οι ενέργειες των ηλεκτρονίων είναι κβαντισμένες, δηλαδή επιτρέπεται να έχουν μόνο ορισμένες τιμές ενέργειας που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες τροχιές. Όταν όλα τα ηλεκτρόνια καταλαμβάνουν τις χαμηλότερες δυνατές ενέργειες, τότε λέμε ότι το άτομο βρίσκεται στην θεμελιώδη κατάσταση (ground state).

Στα στερεά οι διακριτές ενέργειες γίνονται ενεργειακές ζώνες [1-3]. Η ζώνη αγωγιμότητας (conduction band) είναι η τελευταία μη πλήρως κατειλημμένη ζώνη και τα ηλεκτρόνια της είναι ελεύθερα κινούμενα, και ως ηλεκτρόνια αγωγιμότητας συμβάλλουν στην ηλεκτρική αγωγιμότητα του υλικού. Η τελευταία, πλήρως κατειλημμένη από ηλεκτρόνια ζώνη σε θερμοκρασία $T=0$ ονομάζεται ζώνη σθένους (valence band). Η τελευταία κατειλημμένη ενεργειακή στάθμη μέσα στη ζώνη σθένους ονομάζεται στάθμη Fermi, ενώ τα ηλεκτρόνια που την καταλαμβάνουν έχουν ενέργεια E_F σε θερμοκρασία $T=0$ και μήκος κύματος λ_F , το μήκος κύματος de Broglie, με τιμή

$$\lambda_F = \frac{h}{\sqrt{2m_e^* E_F}}$$

όπου m_e^* η ενεργός μάζα. Η περιοχή που εμπεριέχει τις δύο παραπάνω ζώνες καθορίζει τις οπτικές και μαγνητικές ιδιότητες του υλικού και την ηλεκτρονική συνεισφορά στις αγωγιμότητες ηλεκτρισμού και θερμότητας. Για αυτό το λόγο προσελκύει και το ενδιαφέρον των ερευνητών.



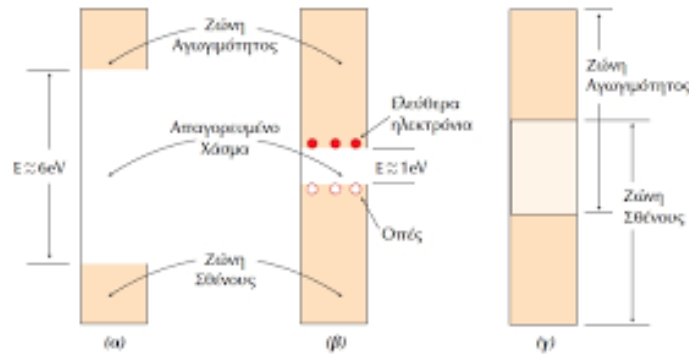
Σχήμα 1.1: Ενεργειακές καταστάσεις σε άτομα και ενεργειακές ζώνες σε στερεά
(<https://www.google.com/>)

Ανάλογα με το μέγεθος του ενεργειακού χάσματος τα υλικά χωρίζονται σε:

- Αγωγούς ($E_g \sim 0$ eV)
- Ημιαγωγούς ($E_g \sim 0 - 4,5$ eV περίπου (αν και υπάρχουν και υλικά που εμφανίζουν ημιαγωγικές ιδιότητες και σε μεγαλύτερα ενεργειακά χάσματα)
- Μονωτές $E_g \geq 5$ eV

Εάν το σύστημα παραλάβει κατάλληλη ποσότητα ενέργειας με κάποιο τρόπο (π.χ. πρόσπτωση ενός φωτονίου) τότε ένα ηλεκτρόνιο μπορεί να εγκαταλείψει τη ζώνη σθένους και να διεγερθεί στη ζώνη αγωγιμότητας αφήνοντας πίσω του μία οπή.

Οι ημιαγωγοί [2-4] χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες: άμεσου και έμμεσου ενεργειακού χάσματος. Στην πρώτη περίπτωση το χαμηλότερο σημείο της ζώνης αγωγιμότητας και το υψηλότερο σημείο της ζώνης σθένους βρίσκονται στο ίδιο σημείο, σε αντίθεση με τους ημιαγωγούς έμμεσου χάσματος, στους οποίους λόγω της μετατόπισης των δύο αυτών σημείων, το ηλεκτρόνιο και η οπή αδυνατούν να ενωθούν αμέσως και να εκπέμψουν ένα δευτερεύον φωτόνιο.



Σχήμα 1.2: Ενεργειακές ζώνες σε ένα α) μονωτή β) ημιαγωγό και γ) μέταλλο.

Η αλληλεπίδραση μετά τη διέγερση, λόγω των ελκτικών δυνάμεων Coulomb που αναπτύσσονται μεταξύ των ηλεκτρονίων και οπής, οδηγεί αυτούς τους δύο φορείς να σχηματίσουν ένα ζεύγος, το οποίο καλείται εξιτόνιο [2,3]. Για τα εξιτόνια θα αναφερθούμε αναλυτικά παρακάτω.

Σε ένα μακροσκοπικό στερεό (bulk), τα ηλεκτρόνια κινούνται προς οποιαδήποτε κατεύθυνση, δηλαδή και ως προς τις τρεις χωρικές διαστάσεις. Όμως το τρισδιάστατο σύστημα είναι πεπερασμένο με αποτέλεσμα οι ενεργειακές στάθμες να είναι θεωρητικά συνεχείς. Αν όμως περιορίσουμε το ηλεκτρόνιο σε έναν μικρό χώρο, δηλαδή ως προς μία ή περισσότερες διαστάσεις ή ακόμη αν ο χώρος αυτός γίνει συγκρίσιμος με το μήκος κύματος de Broglie του σωματιδίου, τότε οι φορείς είναι δέσμιοι σε αυτή τη διάσταση καθιστώντας το φάσμα των ενεργειών σε αμιγώς διακριτό, ενώ στις υπόλοιπες διαστάσεις κινούνται ελεύθερα [2-5].

Βρίσκουμε τις ενέργειες που είναι εφικτό να λάβουν τα σωματίδια λύνοντας την χρονοανεξάρτητη εξίσωση του Schrödinger

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}),$$

με κατάλληλο δυναμικό $V(\vec{r})$ κάθε φορά. Έτσι, βρίσκουμε την κυματοσυνάρτηση του, στην οποία περιέχεται όλη η πληροφορία για το σύστημα.

Τέλος, περιορίζοντας τις διαστάσεις της ελεύθερης κίνησης των σωματιδίων που περιέρχονται σε έναν ημιαγωγό μπορούμε να κατασκευάσουμε νέες δομές οι οποίες περιγράφονται κυρίως από την έννοια της πυκνότητας καταστάσεων (density of states). Περιγράφει δηλαδή τον αριθμό των ενεργειακών καταστάσεων που είναι διαθέσιμες σε ένα

σύστημα σε μια απειροστή περιοχή ενεργειών, εφόσον μπορούμε να καθορίσουμε τη συγκέντρωση και την κατανομή των ενεργειών των φορέων σε έναν ημιαγωγό.

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE}$$

Όπου dN ο αριθμός των ηλεκτρονικών ενεργειακών καταστάσεων σε ένα ενεργειακό σύστημα dE . Σε έναν τρισδιάστατο ημιαγωγό ισούται με

$$\rho(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2}$$

Οι ημιαγωγοί [4] είναι θεμελιώδης βάση των πιο εξελιγμένων διατάξεων της σύγχρονης ηλεκτρονικής. Ηλεκτρονικές διατάξεις όπως διόδοι και τρανζίστορ για την βιομηχανία ηλεκτρονικών, όπως επίσης και διόδοι λέιζερ, οπτικοί ανιχνευτές χρησιμοποιούνται στα οπτικά δίκτυα.

1.1 Ημιαγωγίμες νανοδομές

Ενδιαφέρον τομέας της σύγχρονης έρευνας είναι αυτός των νανοδομών [2-6]. Νανοδομές ορίζονται οι δομές εκείνες, όπου μία ή περισσότερες χωρικές διατάξεις τους βρίσκονται στην περιοχή νανομέτρων ($1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$), τυπικά διαστάσεων μέχρι 100nm . Μερικά παραδείγματα νανοδομών σε ημιαγωγίμα υλικά είναι τα κβαντικά πηγάδια (Quantum Wells), τα κβαντικά νήματα (Quantum Wires) και οι κβαντικές τελείες (Quantum Dots). Οι νανοδομές αυτές είναι βασισμένες στον χωρικό περιορισμό.

1.1.1. Κβαντικά πηγάδια

Στην αρχή της δεκαετίας του 1970, ξεκίνησε μία νέα εποχή στην έρευνα των ηλεκτρονικών κατασκευών χάρη στα κβαντικά πηγάδια. Λόγω των σύγχρονων τεχνικών κατασκευών, είναι εφικτό να κατασκευάσουμε διεπιφάνειες μεταξύ υλικών που δεν είναι συνεχείς σε ατομικό επίπεδο, παρεμβάλλοντας ένα στρώμα υλικού με μικρό ενεργειακό χάσμα, της τάξης λ_F μεταξύ των δύο στρωμάτων υλικού με μεγάλο ενεργειακό χάσμα. Η διάταξη αυτή καθορίζει τον βασικό τρόπο κατασκευής κβαντικών πηγαδιών. Στα κβαντικά πηγάδια, ουσιαστικά, η μία διάσταση είναι μειωμένη στην νανοκλίμακα ενώ οι άλλες δύο διαστάσεις παραμένουν στο μακροσκοπικό μέγεθος, δηλαδή $L_x \leq \lambda_F \leq L_y, L_z$. Το υλικό που χρησιμοποιείται κατά κύριο λόγο για την κατασκευή κβαντικών πηγαδιών είναι το GaAs.

Λύνοντας την εξίσωση του Schrödinger, για το μοντέλο του απειρόβαθου πηγαδιού με κβαντισμένη κίνηση για τον άξονα του x και ελεύθερη κίνηση στις άλλες δύο με

$\psi(x=0) = \psi(x=L) = 0$, οι λύσεις είναι της μορφής

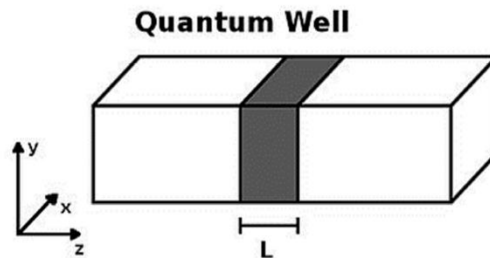
$$\psi(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2}{L_x L_y L_z}} \sin(k_n x) \exp(iK_{yz} \cdot \vec{r}),$$

Με κυματάριθμο $k_x = \frac{\pi}{L_x} n$ όπου $n = 1, 2, 3, \dots$ όπου παίρνει διακριτές τιμές, οι οποίες καθορίζονται από το πλάτος του πηγαδιού. Το k_{yz} παίρνει συνεχείς τιμές και στην ουσία αντιπροσωπεύει την ελεύθερη κίνηση του σωματιδίου στους άξονες y, z . Οι ενέργειες που μπορεί να πάρει το ηλεκτρόνιο είναι :

$$E = \frac{\hbar^2 k_{xy}^2}{2m^*} + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* L_z^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Όπου η παραπάνω σχέση δείχνει το άθροισμα της κινητικής ενέργειας της ελεύθερης κίνησης και του διακριτού σετ ενεργειών.

Η πυκνότητα καταστάσεων δίνεται από τον τύπο: $\rho^{2D}(E) = \frac{m^*}{\pi \hbar^2}$



Σχήμα 1.3 :Σχηματική αναπαράσταση του κβαντικού πηγαδιού (πηγή: Quantum well.jpg, Wikipedia The Free Encyclopedia)

1.1.2. Κβαντικά νήματα

Στις αρχές της δεκαετίας του 1980, ως λογικό επακόλουθο μετά τα κβαντικά πηγάδια, μελετήθηκε τι συμβαίνει εάν περιορίσουμε τα ηλεκτρόνια σε μία διάσταση. Στα κβαντικά νήματα οι δύο διαστάσεις είναι μειωμένες στην νανοκλίμακα, ενώ η τρίτη διάσταση είναι σε μακροσκοπικό μέγεθος, δηλαδή $L_x, L_y \leq \lambda_F \leq L_z$.

Οι κυματοσυναρτήσεις είναι της μορφής:

$$\psi(\vec{r}) = 2 \sqrt{\frac{1}{L_x L_y L_z}} \sin(k_n^{(x)} x) \sin(k_m^{(y)} y) \exp(iK_z z)$$

όπου K_z ο κυματάριθμος που παίρνει συνεχείς τιμές και $k_n^{(x)}, k_m^{(y)}$ διακριτές με

$$k_n^{(x)} = \frac{\pi}{L_x} n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad k_m^{(y)} = \frac{\pi}{L_y} m, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

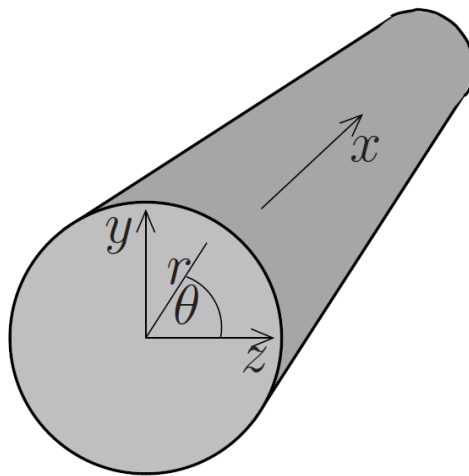
Οι ενέργειες που μπορεί να πάρει το ηλεκτρόνιο είναι:

$$E = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* L_x^2} n^2 + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* L_y^2} m^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Δηλαδή είναι το άθροισμα της κινητικής ενέργειας από τη συνεχή κίνηση κατά τον άξονα z και των δύο διακριτών σετ ενέργειας λόγω κβαντισμένης κίνησης στους άξονες x και y. Το κβαντικό νήμα αποτελείται από μία λουρίδα ενός ημιαγωγού στο εσωτερικό ενός δεύτερου μεγαλύτερου ημιαγωγίου φράγματος ζώνης αγωγιμότητας.

Η πυκνότητα καταστάσεων των κβαντικών νημάτων είναι:

$$\rho^{1D}(E) = \frac{1}{h\pi} \left[\frac{m^*}{2(E-E_c)} \right]^{1/2}$$



Σχήμα 1.4 : Σχηματική αναπαράσταση ενός κυλινδρικού κβαντικού νήματος
(πηγή: http://courseware.mech.ntua.gr/ml00001/mathimata/D1_Hmiagoqoi_1.pdf)

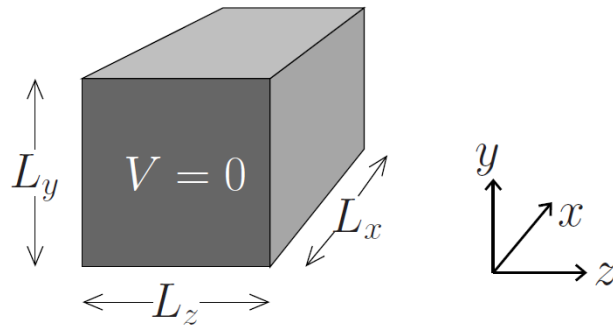
1.1.3. Κβαντικές Τελείες

Το επόμενο στάδιο είναι η μελέτη ενός υλικού αν το περιορίσουμε και ως προς τις τρεις διαστάσεις, με άλλα λόγια $L_x, L_y, L_z \leq \lambda_F$. Αυτός ο περιορισμός θα φέρει ως αποτέλεσμα τον απόλυτο περιορισμό της κίνησης, εφόσον θα ασκούνται περιοριστικά δυναμικά και ως προς τους τρεις άξονες της κίνησης. Λύνοντας την εξίσωση του Schrödinger,

$$\psi(\vec{r}) = 2 \sqrt{\frac{2}{L_x L_y L_z}} \sin(k_n^{(x)} x) \sin(k_m^{(y)} y) \sin(k_l^{(z)} z), \quad n, m, l = 1, 2, 3, \dots$$

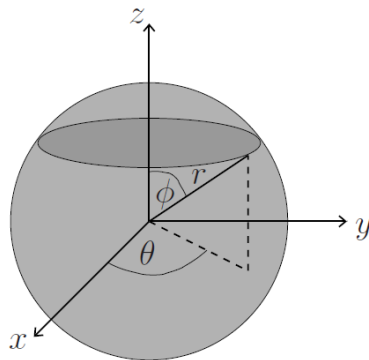
Το ενεργειακό φάσμα των ηλεκτρονίων με $L_x = L_y = L_z$ θα δίνεται από τον τύπο:

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* L} (n^2 + m^2 + l^2), \quad n, m, l = 1, 2, 3, \dots$$



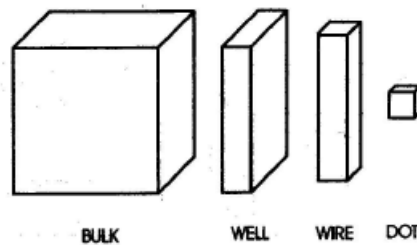
Σχήμα 1.5 : Σχηματική αναπαράσταση μιας κβαντικής τελείας ως ένα κβαντικό κουτί με πλευρές L_x, L_y, L_z
(πηγή: <https://el.wikipedia.org/wiki/>)

Αυτός ο τύπος δομής, που θεωρείται μηδενικών διαστάσεων, ονομάζεται κβαντική τελεία ή ημιαγωγικός νανοκρύσταλλος. Η πυκνότητα καταστάσεων της κβαντικής τελείας δίνεται από τον τύπο: $\rho^{0D}(E) = \delta(E - E_c)$, όπου δ η συνάρτηση δέλτα του Dirac.

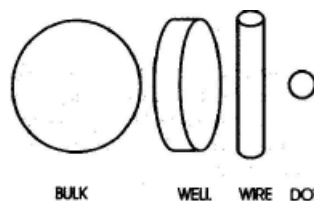


Σχήμα 1.6 : Σχηματική αναπαράσταση μιας σφαιρικής κβαντικής τελείας.

Στην παρακάτω εικόνα παρουσιάζονται οι παραπάνω νανοδομές σε νανοκλίμακα, σε ορθογώνιο και καμπυλόγραμμο σχήμα υλικού (κβαντικά πηγάδια, κβαντικά νήματα και κβαντικές τελείες).



Σχήμα 1.7 : Διαδοχική αναπαράσταση των ημιαγωγικών νανοδομών.



Σχήμα 1.8 : Διαδοχική αναπαράσταση των ημιαγωγικών νανοδομών.

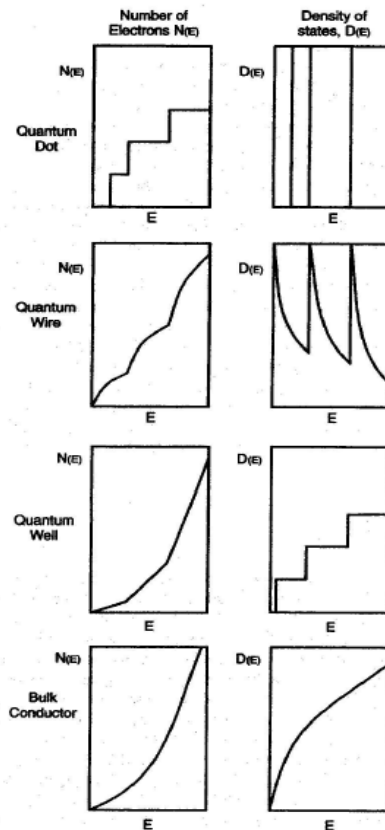
Πίνακας 1: Ημιαγωγικές κβαντικές νανοδομές

Quantum Structure	Delocalization Dimensions	Confinement Dimensions
Bulk conductor	3(x,y,z)	0
Quantum well	2(x,y)	1(z)
Quantum wire	1 (z)	2(x,y)
Quantum dot	0	3(x,y,z)

Πίνακας 2: Πυκνότητα καταστάσεων στις ημιαγωγικές κβαντικές νανοδομές

Dimensionality	$\rho(E)$
3D	$\frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}}$
2D	$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^1 E^0$
1D	$\frac{1}{\pi} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} E^{-\frac{1}{2}}$

Επιπροσθέτως, παρατηρούμε ότι ο αριθμός των ηλεκτρονίων $N(E)$ αυξάνει με την ενέργεια. Έτσι, οι τρεις νανοδομές διαφέρουν μόνο ως προς την πυκνότητα καταστάσεων, η οποία καθορίζει τις διάφορες ηλεκτρονικές και άλλες ιδιότητες οι οποίες διαφέρουν δραματικά για κάθε τύπο νανοδομών.

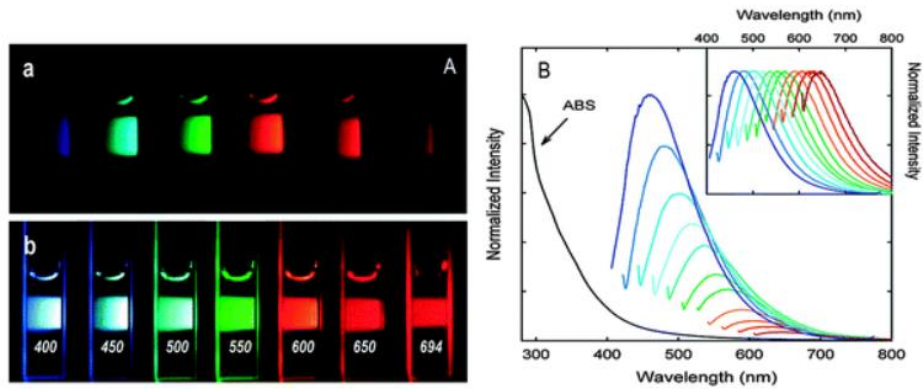


Σχήμα 1.9: Αριθμός ηλεκτρονίων και πυκνότητα καταστάσεων στις ημιαγωγικές νανοδομές.

Συμπερασματικά, οι κβαντικές τελείες είναι κρύσταλλοι νανοκλίμακας που δημιουργούνται με υλικά ημιαγωγία. Όμως στα ημιαγωγία υλικά, όπως είναι γνωστό τα ηλεκτρόνια έχουν μήκος κύματος de Broglie, της τάξης των μερικών νανομέτρων ή και δεκάδων νανομέτρων. Εφόσον το μέγεθος μία κβαντικής τελείας πρέπει να είναι περίπου ίδιο με αυτό το μέγεθος συμπεραίνουμε ότι οι διαστάσεις των κβαντικών υλικών είναι από μερικά νανόμετρα έως και εκατοντάδες αυτών. Εάν δεν υπάρχει κβαντικός περιορισμός, μία κβαντική τελεία μπορεί να προσδιοριστεί ως νανοσωματίδιο. Ακόμη, στις κβαντικές τελείες μπορούν να υπάρχουν χιλιάδες ή και εκατοντάδες χιλιάδες άτομα όπου αυτό φέρει ως αποτέλεσμα οι ιδιότητες των κβαντικών τελειών να εξαρτώνται από το πλήθος των ηλεκτρονίων που την απαρτίζουν.

Παρόλα αυτά, είναι πιο μεγάλες από τα άτομα, αλλά όχι τόσο για να συμπεριφέρονται σαν στερεό, εφόσον τα ηλεκτρόνια που περιέχονται σε αυτές συμπεριφέρονται σαν «ατομικά ηλεκτρόνια». Για αυτό τον λόγο οι δομές ονομάζονται και «τεχνητά άτομα».

Η οπτική εκπομπή επηρεάζεται από το μέγεθος των κβαντικών τελειών. Με βάση των κανόνα του Hund, καθώς προσθέτουμε ηλεκτρόνια στην νανοδομή οι ενέργειες αλλάζουν άρα και η οπτική εκπομπή των κβαντικών τελειών. Η οπτική εκπομπή επηρεάζεται και από το μέγεθος των κβαντικών τελειών. Όσο μικρότερες είναι τόσο προς το ιώδες φθορίζουν. Οι μικρότερες κβαντικές τελείες έχουν λιγότερα ενεργειακά επίπεδα, άρα χωρίζονται από μεγαλύτερα ενεργειακά χάσματα, άρα μικρότερα μήκη κύματος. Αντίθετα, όσο μεγαλύτερες είναι, έχουν περισσότερα ενεργειακά επίπεδα που διαχωρίζονται από μικρότερα ενεργειακά διαστήματα. Αυτό επιτρέπει στην κβαντική τελεία να απορροφήσει φωτόνια που περιέχουν μικρότερη ενέργεια δηλαδή εκείνα προς το ερυθρό άκρο του φάσματος.

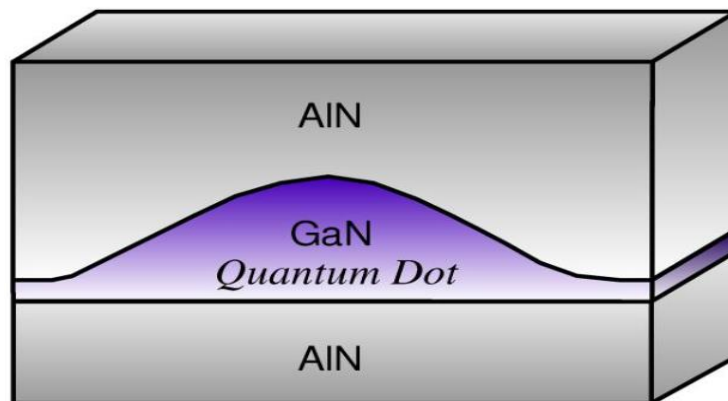


Σχήμα 1.10 : Οπτική εκπομπή σε κβαντικές τελείες

(πηγή: <https://pubs.rsc.org/en/content/articlehtml/2014/cs/c4cs00269e>)

Όσο μεγαλύτερες είναι οι κβαντικές τελείες, τόσο λιγότερες είναι οι κβαντικές τους ιδιότητες. Αυτό φέρει ως αποτέλεσμα, το μικρό μέγεθός της να μας επιτρέπει να εκμεταλλευτούμε τις κβαντικές της ιδιότητες για εφαρμογές όπως λέιζερ, έγχρωμες οθόνες, αλλά και για κβαντικούς υπολογιστές και γενικότερα θέματα κβαντικής τεχνολογίας [7-9].

Υπάρχουν δύο τύποι κβαντικών τελειών. Ο τύπος I, όπου το ηλεκτρόνιο και η οπή είναι αμφότερα περιορισμένα στην κβαντική τελεία. Ο τύπος II, όπου η οπή είναι περιορισμένη στην κβαντική τελεία, όμως το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην μήτρα που περιβάλλει την νανοδομή.



Σχήμα 1.11: Σχηματική αναπαράσταση κάτοψης κβαντικής τελείας GaN/AIN.

Οι κβαντικές τελείες συνήθως κατασκευάζονται σε σφαιρικό σχήμα για να εκμεταλλεύονται τη συμμετρία του συστήματος για την λύση της εξίσωσης του Schrodinger. Το πιο σύνηθες υλικό που χρησιμοποιείται για την κατασκευή τους είναι GaN/AIN.

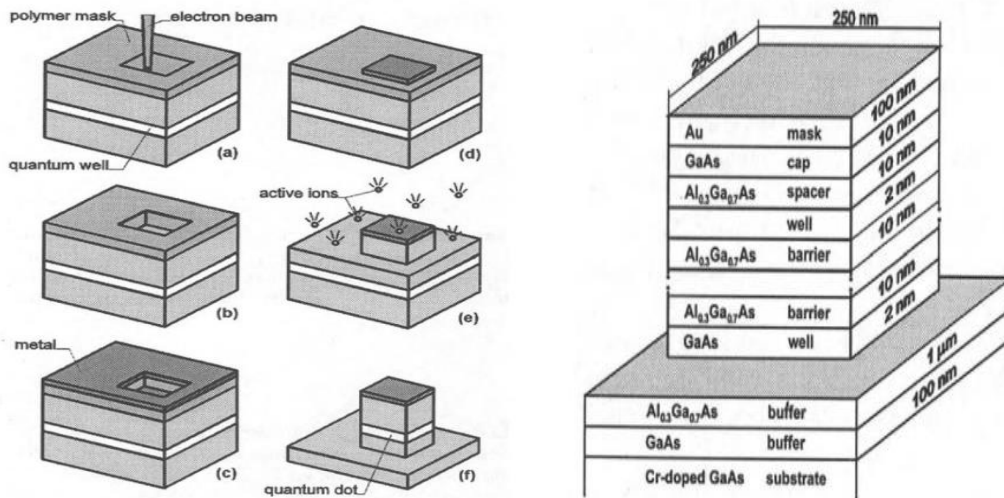
Οι κβαντικές τελείες έχουν ανοίξει ένα νέο ερευνητικό πεδίο, τόσο στη θεωρητική όσο και στην πειραματική φυσική. Ο αριθμός των ηλεκτρονίων που μπορούν να εντοπιστούν, μας επιτρέπουν τους αριθμητικούς υπολογισμούς και την κατανόηση πολλών φαινομένων φυσικής πολλών σωματιδίων.

1.2 Κατασκευή κβαντικών τελειών

1.2.1 Λιθογραφία

Η λιθογραφία είναι η πρώτη και η κυριότερη μέθοδος κατασκευής κβαντικών τελειών που υλοποιήθηκε από τον Reed [4]. Είναι μία τεχνική που κυρίως χρησιμοποιεί ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία για να μορφοποιήσει με ελεγχόμενο τρόπο ένα στρώμα υλικού το οποίο έχει τοποθετηθεί πάνω σε ένα λεπτό στρώμα ημιαγωγού. Με αυτή τη μέθοδο μπορούμε να περιορίσουμε τα ηλεκτρόνια σε χωρίο διαμέτρου 10 έως 100 nm. Για την παρασκευή κβαντικών τελειών με αυτή τη μέθοδο ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία.

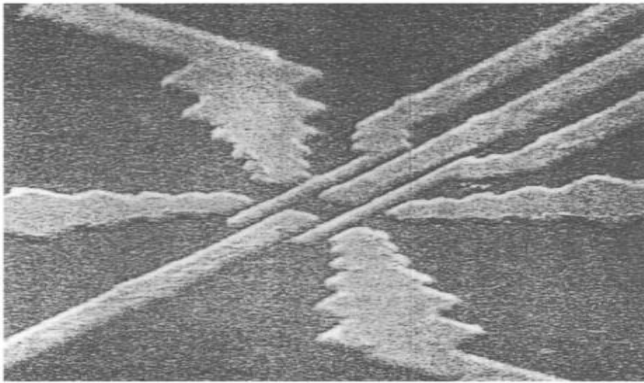
Αρχικά, η επιφάνεια του δείγματος που περιέχει ένα ή και περισσότερα κβαντικά πηγάδια καλύπτεται με πολυμερή μάσκα και ακτινοβολείται εν μέρη με δέσμη ηλεκτρονίων ή ιόντων. Αφού αφαιρεθεί η μάσκα από τα τμήματα που έχουν εκτεθεί στην ακτινοβολία, όλη η επιφάνεια του δείγματος καλύπτεται με ένα λεπτό μεταλλικό στρώμα. Με την χρήση καταλλήλου διαλύματος, η πολυμερική ταινία και το προστατευτικό μεταλλικό στρώμα αφαιρούνται, εξασφαλίζοντας έτσι καθαρή την επιφάνεια του δοκιμίου. Στις περιοχές που έχουν ακτινοβοληθεί, το μεταλλικό στρώμα παραμένει. Έπειτα πραγματοποιείται χημική χάραξη των τμημάτων που δεν καλύπτονται από την μεταλλική μάσκα. Τέλος, δημιουργούνται λεπτές στήλες που περιέχουν τα κομμένα κομμάτια των κβαντικών πηγαδιών.



Σχήμα 1.12 : Διαδικασία παρασκευής κβαντικής τελείας με τη τεχνική της χάραξης

Το υλικό που χρησιμοποιείται περισσότερο για την κατασκευή κβαντικών τελειών μέσω της χάραξης είναι το GaAs. Η ευρύτατη χρήση του οφείλεται στο γεγονός ότι παράγει λεπτά και ομογενή κβαντικά πηγάδια.

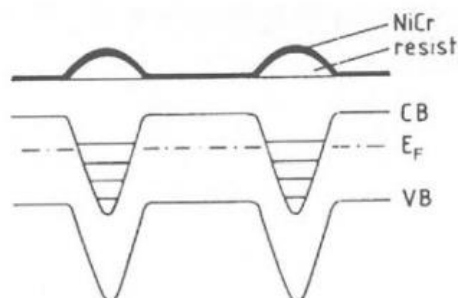
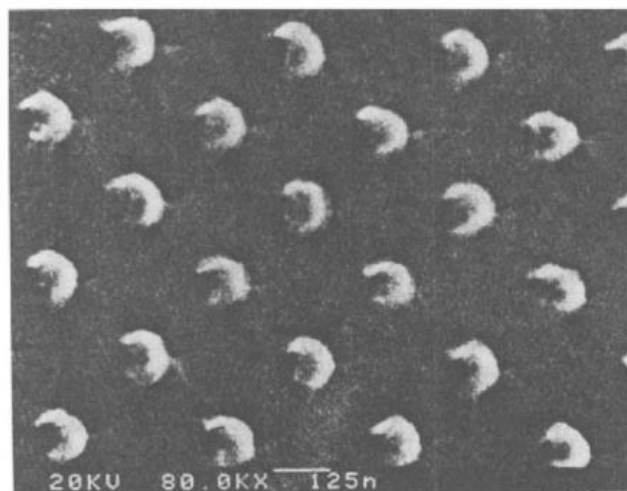
1.2.2 Διαμορφωμένο ηλεκτρικό πεδίο



Σχήμα 1.13: Κβαντική τελεία με εντοπισμό των ηλεκτροδίων. Τα 4 εσωτερικά ηλεκτρόδια περιορίζουν την κίνηση των ηλεκτρονίων που είναι εντοπισμένα στο κβαντικό πηγάδι κάτω από τη διάταξη, ενώ τα εξωτερικά ηλεκτρόδια λειτουργούν ως επαφές για τη μεταφορά των ηλεκτρονίων στην περιοχή που αναπτύσσεται η τελεία

Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην δημιουργία μικροσκοπικών ηλεκτροδίων στην επιφάνεια του κβαντικού πηγαδιού. Με την εφαρμογή κατάλληλης διαφοράς δυναμικού στα ηλεκτρόδια, παράγεται ένα χωρικά διαμορφωμένο ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο περιορίζει τα ηλεκτρόνια σε μία πολύ μικρή δίοδο γύρω από την μικρή περιοχή αυτή, απομακρύνοντας τις ατέλειες στα άκρα και συμπιέζοντας τα ηλεκτρόνια ακόμη περισσότερο [4].

Με τη μέθοδο αυτή, μπορούν να παραχθούν είτε μεμονωμένες κβαντικές τελείες, είτε δισδιάστατες παρατάξεις κβαντικών τελειών πάνω σε InSb, Si ή GaAs.



Σχήμα 1.14 : Διπλές κβαντικές τελείες

1.2.3 Διάχυση αναμασά σε φράγματα και κβαντικό πηγάδι

Αυτή η μέθοδος βασίζεται στην χρήση ακτινών λέιζερ όπου θερμαίνουμε τοπικά το δείγμα. Ως μητρικό υλικό χρησιμοποιείται κβαντικό πηγάδι από GaAs, μεγέθους 3nm περίπου, το οποίο τοποθετείται ανάμεσα σε ένα ζευγάρι φραγμάτων AlGaAs 30 nm, το οποίο έχει καλυφθεί με 100nm Si_3Na . Το επίστρωμα Si_3Na χρησιμεύει στην προστασία της επιφάνειας από την οξείδωση ή την τήξη εξαιτίας των ακτινών λέιζερ. Η διαμόρφωση του ενεργειακού χάσματος στο κβαντικό πηγάδι επιτυγχάνεται με τοπική θέρμανση του δείγματος χρησιμοποιώντας ακτίνες λέιζερ αργού ισχύος 5.5 mW.

Στους 1000 °C παρατηρείται γρήγορη διάχυση ατόμων Al και Ga ανάμεσα στο πηγάδι και στα φράγματα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την τοπική διαμόρφωση του δείγματος.

1.2.4 Επιλεκτική ανάπτυξη

Αυτή η μέθοδος συμβάλλει στην δημιουργία κβαντικών τελειών με επιλεκτική ανάπτυξη μίας ημιαγωγικής ένωσης η οποία έχει μικρό ενεργειακό χάσμα στην επιφάνεια μίας δεύτερης ένωσης με μεγαλύτερο ενεργειακό χάσμα. Ο περιορισμός της ανάπτυξης σε επιλεγμένες περιοχές επιτυγχάνεται καλύπτοντας αυτές τις περιοχές με μάσκα χαράσσοντας πάνω σε αυτές μικροσκοπικά τρίγωνα

Στην επιφάνεια που δεν είναι καλυμμένη με μάσκα η ανάπτυξη πραγματοποιείται με τη μέθοδο MOCVD (Metal-Organic Chemical Vapor Deposition Method) σε θερμοκρασία 700 °C-800 °C. Οι κρύσταλλοι που σχηματίζονται έχουν τη μορφή τετραεδρικών πυραμίδων. Επιπλέον, όταν τα επίπεδα που κρυσταλλώνονται πρώτα είναι τα επίπεδα της ένωσης του υποστρώματος και η κορυφή της πυραμίδας που αποτελείται από GaAs, τότε είναι πιθανό να δημιουργούνται τελείες έως και 100nm.

1.2.5 Τεχνολογία διαιρούμενης πύλης

Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιεί μία ηλεκτρικά ελεγχόμενη διάταξη, η οποία ρυθμίζεται εφαρμόζοντας προεπιλεγμένες τιμές τάσης. Με την χρήση μίας ημιαγωγικής ετεροδομής διαμορφώνουμε ένα δυσδιάστατο ηλεκτρονικό αέριο. Τοποθετούμε στο πάνω μέρος της ετεροδομής μία πύλη Schottky, όπου η αρχική τάση είναι μηδέν. Με αυτό τον τρόπο δεν επηρεάζεται το ηλεκτρονικό αέριο. Εφαρμόζοντας αρνητική τάση μειώνεται η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων κάτω από την πύλη. Έτσι τα ηλεκτρόδια σχηματίζουν ηλεκτρονικό αέριο κάτω από την πύλη, με άλλα λόγια ένα κβαντικό καλώδιο. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω μέθοδο κατασκευάζουμε κβαντικές τελείες σε σχήμα οπής λόγω της ετεροδομής.

1.2.6 Αυτό-οργάνωση κβαντικών τελειών

Υπάρχουν τρεις βασικοί τύποι αυτό-οργάνωσης: Fran-vande Merve, Stranski-Krastanov και Volmer-Weber. Με τη μέθοδο αυτή δεν απαιτείται χρήση μάσκας. Η ανάπτυξη των τελειών γίνεται λόγω της διαφοράς που εμφανίζεται στο υπόστρωμα και στο επίστρωμα σε σχέση με τις πλεγματικές σταθερές. Όταν η πλεγματική σταθερά του υποστρώματος και του υλικού που βρίσκεται υπό κρυστάλλωση διαφέρουν σημαντικά, το υλικό εναποθέτει παραμορφωμένες στοιβάδες που έχουν ίδια πλεγματική σταθερά με το υπόστρωμα. Όταν υπερβεί το κρίσιμο πάχος, η στοιβάδα υφίσταται παραμόρφωση. Έτσι η κατασκευή καταρρέει και δημιουργούνται νησίδες τυχαίας κατανομής αλλά συμμετρικής μορφής. Η μορφή και το μέγεθος των νησίδων εξαρτώνται από την ένταση της παραμόρφωσης της στοιβάδας, τον ρυθμό ανάπτυξης, όπως επίσης και την τυχαία διάταξη των νησίδων ονομάζεται Stranski-Krastanov. Με αυτή τη μέθοδο προκύπτουν κβαντικές τελείες τάξεως 30 nm ή και λιγότερο, ομοιογένεια στην μορφή και στο μέγεθος, η τελεία σε κρυσταλλική δομή και εύκολη διαδικασία ανάπτυξης (χωρίς την χρήση χάραξης, ηλεκτροδίων). Οι παραπάνω λόγοι είναι τα μεγαλύτερα πλεονεκτήματα της μεθόδου.

1.2.7 Εφαρμογές κβαντικών τελειών

Μερικές από τις αξιοσημείωτες εφαρμογές των κβαντικών τελειών είναι στην οπτοηλεκτρονική, στην βιολογία, στην ιατρική όπως επίσης και στην πληροφορική (κβαντικοί υπολογιστές).

Οι πιο σημαντικές εφαρμογές των κβαντικών τελειών στην οπτοηλεκτρονική είναι η χρήση τους σε τρανζίστορ, laser, σε LED, όπως ακόμη και σε έγχρωμες οθόνες. Οι κβαντικές τελείες είναι κατάλληλες για την κατασκευή πολύ μικρών laser και laser για χρήση σε δύσκολο ραδιενεργό περιβάλλον. Όταν οι φορείς παγιδεύονται σε μία κβαντική τελεία η κίνηση τους περιορίζεται, σε αντίθεση με τα laser των κβαντικών πηγαδιών όπου οι φορείς που αιχμαλωτίζονται μέσα στο πηγάδι κινούνται ελεύθερα σε αυτό. Το ρεύμα κατωφλίου I_{th} και η χαρακτηριστική θερμοκρασία T_0 καθορίζουν το διάστημα θερμοκρασιών μίας διάταξης laser. Λόγω της ύπαρξης διακριτών ενεργειών στις κβαντικές τελείες, τα laser αυτών προσφέρουν χαμηλής πυκνότητας ρεύματα και σταθερή θερμοκρασία.

Στις βιολογικές εφαρμογές οι κβαντικές τελείες έχουν αντικαταστήσει τις φθορίζουσες ουσίες (οργανικές χρωστικές) λόγω των ιδιοτήτων τους. Το κυριότερο πλεονέκτημα των κβαντικών τελειών είναι ότι έχουν στενό και συμμετρικό φάσμα εκπομπής, προσφέρουν ακριβή καθορισμό του εκπεμπόμενου μήκους κύματος μέσω του μεγέθους της τελείας και του φάσματος απορρόφησης που παρουσιάζουν. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την διέγερση πολλών κβαντικών τελειών διαφορετικού χρώματος από μία πηγή φωτός. Ακόμη είναι 200 φορές πιο ανθεκτικές στη φωτολεύκανση, την μείωση δηλαδή της φωτοανταύγειας του δείκτη με τον χρόνο. Το σχήμα τους είναι συνήθως σφαιρικό και αποτελούνται από έναν ημιαγωγό με πυρήνα από 1-10 nm. Άλλες χρήσεις των κβαντικών τελειών στην βιολογία είναι για την καλύτερη κατανόηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ των μορίων και της βιολογίας του κυττάρου όπως επίσης για την εξερεύνηση του μορίου DNA και RNA (γρήγορο τεστ DNA).

Στην ιατρική οι κβαντικές τελείες έχουν επίσης αξιοσημείωτο ρόλο. Βοηθούν στην έγκαιρη διάγνωση όπως ακόμη και στην θεραπεία του καρκίνου. Ενισχύουν την αντίθεση φωτεινού

και σκοτεινού πεδίου στην τομογραφία πυρηνικού μαγνητικού συντονισμού (NMR). Επιπροσθέτως ανιχνεύουν και καταστρέφουν όγκους.

Για την μνήμη κβαντικών υπολογιστών, μπορούμε να δημιουργήσουμε από κβαντικές τελείες οπτικές μνήμες που διαθέτουν μεγαλύτερη τάξης μεγέθους αποθήκευσης σε σχέση με τις συμβατικές μνήμες. Συζευγμένες κβαντικές τελείες χρησιμοποιούνται στην ανάπτυξη συστημάτων κβαντικών υπολογιστών. Τέλος, τα νέα κυτταρικά αυτόματα κβαντικών τελειών πιθανολογείται ότι μπορούν να προσφέρουν αυξημένη πυκνότητα στα ολοκληρωμένα κυκλώματα εξαιτίας του μικρού μεγέθους των τελειών.

1.3 Εξιτόνια- Διεξιτόνια

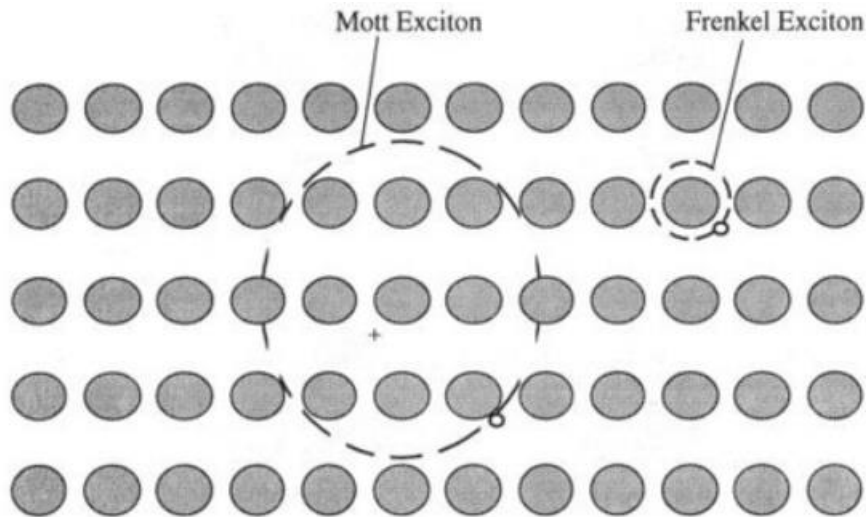
1.3.1 Εξιτόνια

Στα τέλη του 1920, παρατηρήθηκαν στενές γραμμές φωτοεκπομπής στο φάσμα οργανικών μοριακών κρυστάλλων από τους Kronnenberger και Pringheim και τους I. Obreimov και W. DeHass.

Τα δεδομένα αυτά αναλύθηκαν από τον Ρώσο φυσικό Frenkel (1931) ο οποίος στη συνέχεια, επινόησε τον όρο «εξιτόνιο» το 1936. Ένα ηλεκτρόνιο μπορεί να διεγερθεί από ένα φωτόνιο και αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα να εγκαταλείψει τη ζώνη σθένους αφήνοντας πίσω του μία οπή, μια κενή πλεγματική θέση δηλαδή, η οποία συμπεριφέρεται σαν θετικά φορτισμένο σωματίδιο. Αν αυτή η οπή παραμείνει στη ζώνη σθένους και το απομακρυσμένο ηλεκτρόνιο παραμείνει κοντά σε αυτή τη ζώνη, αναπτύσσονται ελκτικές δυνάμεις μεταξύ του ηλεκτρονίου και της οπής, λόγω της αλληλεπίδρασης Coulomb, εφόσον τα ηλεκτρόνια και οι οπές είναι αντίθετα φορτισμένα σωματίδια. Συνεπώς, σχηματίζουν μία δέσμια κατάσταση και ένα επιπλέον οιονεί- σωματίδιο που αναφέρεται με τον όρο εξιτόνιο. Σαν εξιτόνιο από εδώ και πέρα θα αναφέρεται ένα ζεύγος ηλεκτρονίου-οπής.

Γενικά, η μάζα της οπής είναι αρκετά μεγαλύτερη από τη μάζα των ηλεκτρονίων δεδομένου ότι το σύστημα εξιτονίου μοιάζει με άτομο του υδρογόνου, με το αρνητικά φορτισμένο ηλεκτρόνιο να περιστρέφεται γύρω από την θετικά φορτισμένη οπή.

Υπάρχουν, δύο κατηγορίες εξιτονίων όπου αυτές βρίσκονται ανάλογα με την έκταση συνάρτησης πλάτους η οποία περιγράφει την δέσμια κατάσταση του εξιτονίου. Όταν η έκταση συνάρτησης πλάτους περιορίζεται μόνο σε μερικές μοναδιαίες κυψελίδες έχουμε το εξιτόνιο Frenkel και εφόσον είναι περιορισμένα. Λόγω της αρχής της απροσδιοριστίας του Heisenberg συμπεραίνουμε ότι για να μπορέσουμε να τα χειριστούμε πρέπει να μελετήσουμε ένα μεγάλο τμήμα της δομής ή ακόμη και ολόκληρη. Τα εξιτόνια Frenkel εμφανίζονται σε μονωτές. Αν η έκταση της συνάρτησης πλάτους εκτείνεται σε αρκετές εκατοντάδες κυψελίδες, έχουμε τα ηλεκτρόνια Wannier-Mott, τα οποία κινούνται ελεύθερα μέσα στον κρύσταλλο και εμφανίζονται συνήθως σε ημιαγωγούς. Και στις δύο περιπτώσεις των εξιτονίων, θα πρέπει το ελκτικό δυναμικό μεταξύ των ηλεκτρονίων και των οπών να είναι ισχυρό, ώστε να αποφύγουν την διάσπαση του εξιτονίου όταν συγκρούονται με φωτόνια.



Σχήμα 1.15: Εξιτόνια

(πηγή: http://electrons.wikidot.com/solar-cells?fbclid=IwAR3IEgG7sM_DFrRQkPaqZIB0wUrXNTlumxiS2rq0aVh_8CXPHMhHldypH_g)

Από την χρονο-ανεξάρτητη εξίσωση του Schrödinger που πρέπει να λυθεί [2]:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e^*} \nabla_e^2 - \frac{\hbar^2}{2m_h^*} \nabla_h^2 - \frac{e^2}{\epsilon|r_e - r_h|} \right] \psi_{ex} = E\psi_{ex}$$

Όπου ϵ η διηλεκτρική σταθερά του υλικού, m^* οι ενεργές μάζες ηλεκτρονίου και οπής και $|r_e - r_h|$ η διαφορά στις συντεταγμένες ηλεκτρονίου και οπής. Άρα έχουμε ένα πρόβλημα δύο σωμάτων, όπου μπορεί να γραφεί σαν πρόβλημα ενός σώματος εάν χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω αντικαταστάσεις:

$$r = r_e - r_h$$

$$m_r^* = \frac{m_e^* m_h^*}{m_e^* + m_h^*}$$

$$R = \frac{m_e^* r_e + m_h^* r_h}{m_e^* + m_h^*}$$

Άρα η χαμιλτονιανή γίνεται:
$$H = -\frac{\hbar^2 \nabla_R^2}{2(m_e^* + m_h^*)} + \left[-\frac{\hbar^2 \nabla_r^2}{2m_r^*} - \frac{e^2}{\epsilon|r|} \right]$$

Όπου m_r^* η ανηγμένη μάζα ηλεκτρονίου οπής.

Η χαμιλτονιανή αποτελείται από δύο όρους. Ο πρώτος περιγράφει την κίνηση του κέντρου μάζας του εξιτονίου. Ο δεύτερος περιγράφει την κίνηση μεταξύ ηλεκτρονίου και οπής. Ο πρώτος όρος έχει λύση της μορφής

$$y_{em} = e^{ikR}$$

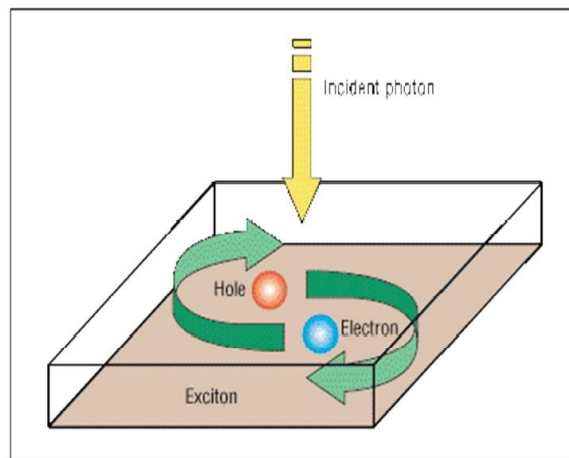
Ενώ η λύση του δεύτερου όρου ικανοποιεί την εξίσωση όπου αυτό αποτελεί το γνωστό πρόβλημα ατόμου του υδρογόνου:

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla_r^2}{2m_r^*} - \frac{e^2}{\epsilon|r|}\right) F(r) = EF(r)$$

Με λύση της θεμελιώδους κατάστασης

$$F_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha_{\beta x}^3}} e^{-r/\alpha_{\beta x}}$$

Έτσι η γενική λύση του εξιτονίου είναι: $\Psi_{nK\beta x} = e^{K\beta x \cdot R} F_n(r) \Phi_c(r_\beta) \Phi_U(r_h)$ όπου φ_c και φ_U αναπαριστούν τη κεντρική συμμετρική φύση των καταστάσεων των ηλεκτρονίων και οπών.



Σχήμα 1.16: Φωτόνιο που δημιουργεί εξιτόνιο

(Πηγή: northbeggar.wordpress.com, 4 October 2009)

1.3.2 Διεξιτόνια

Συνοψίζοντας λοιπόν είδαμε ότι τα εξιτόνια μπορούν να παρομοιαστούν με άτομα υδρογόνου. Όμως τα δύο άτομα μπορούν να «συζευχτούν» δίνοντας ένα μόριο. Το ίδιο συμβαίνει και για τα δύο εξιτόνια, δίνοντας με τη σειρά τους ένα οιονεί-σωματίδιο το λεγόμενο διεξιτόνιο ή εξιτονικό μόριο.

Το διεξιτόνιο σχηματίζει δέσμια κατάσταση για οποιονδήποτε λόγο ενεργών μαζών ηλεκτρονίων και οπών. Η δεσμική ενέργεια των διεξιτονίων για τρισδιάστατους ημιαγωγούς, που εκφράζεται σε μονάδες εξιτονικής ενέργειας Rydberg είναι από:

$$\frac{E_{bi\beta x}^b}{R_y^*} \approx 0,3 \text{ για } \sigma = m_\beta/m_h = 0$$

Στην πορεία πέφτει μονοτονικά μέχρι $\sigma = 1$, όταν $\sigma = \infty$ προσεγγίζει την ίδια τιμή με $\sigma = 0$. Η σχέση διασποράς δίνεται από την σχέση:

$$E_{bi\beta x}(k) = 2(E_g - E_{\beta x}^b) - E_{bi\beta x}^b + \frac{\hbar^2 k^2}{4M_{\beta x}}$$

Όπου θεωρούμε ότι η ενεργός μάζα του διεξιτονίου είναι 2 φορές μεγαλύτερη από τη μάζα του εξιτονίου. Επίσης έχει επιβεβαιωθεί ότι δύναται και ο σχηματισμός δέσμίων καταστάσεων τριονίων (trions). Τα τριόνια είναι φορτισμένα εξιτόνια ή διεξιτόνια, αποτελούμενα από δύο ηλεκτρόνια και μία οπή ή και το αντίθετο.

Quasiparticle/ state name	Charge config.	Quantum state	Spin state	Linear transitions	Circ. trans.	Spin flip	Non- rad.
Biexciton		$ XX\rangle$	$ \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle$				
Negative trion		$ X^- \rangle$	$ u_h\rangle \alpha_h\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\rangle)$				
Positive trion		$ X^+ \rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\uparrow\rangle - \downarrow\downarrow\rangle) \otimes u_c\rangle \alpha_c\rangle$	$H V$			
Exciton		$ Y_b\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\rangle + \downarrow\uparrow\rangle)$				
		$ X_b\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\rangle)$				
		$ Y_d\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\uparrow\rangle + \downarrow\downarrow\rangle)$			σ^+	
		$ X_d\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\uparrow\rangle - \downarrow\downarrow\rangle)$	$H V$			
Electron		$ g^- \rangle$	$ u_c\rangle \alpha_c\rangle$				
Hole		$ g^+ \rangle$	$ u_h\rangle \alpha_h\rangle$				
Ground state		$ g\rangle$					

Σχήμα 1.17: Κβαντικές καταστάσεις σε κβαντικές τελείες και σχετικές μεταβάσεις

(πηγή: http://gr.qs-project.ea.gr/sites/default/files/11_Quantum_SpinOff_LearningStation_XI_EL_v2.pdf)

Τα διεξιτόνια, σε κβαντικές τελείες είναι πολύ σημαντικά λόγω της δυνατότητας τους για την παραγωγή συμπλεκτών φωτονίων (entangled photons), το οποίο είναι απαραίτητο για την ανάπτυξη κβαντικών υπολογιστών και κβαντικής επικοινωνίας [9-11]. Αυτό γίνεται μέσω της διαδοχικής εκπομπής δύο φωτονίων από την επανασύνδεση ενός διεξιτονίου και του αντίστοιχου εξιτονίου. Αρχικά, η αποδοτικότητα τέτοιων πηγών ήταν περιορισμένη λόγω της λεπτής υφής που δημιουργούσε η χαμηλή συμμετρία των παραγόμενων κβαντικών τελειών, προκαλώντας την ανάδυση της πληροφορίας «whichpath» που εμπόδιζε την σύμπλεξη. Όμως, το 2013 ο Kuroda, χρησιμοποίησε την μέθοδο επιταξία σταγονιδίων σε κβαντικές τελείες GaAs. Αυτές οι κβαντικές τελείες ήταν πολύ συμμετρικές στο σχήμα τους, καθώς αποδείχθηκε ότι το 5% δεν εντόπισαν FSS (FineStructureSplitting), δηλαδή στην παραγωγή πολύ «καθαρών» φωτονίων [9,10].

Οι μεταβάσεις στο σύστημα εξιτονίου-διεξιτονίου μοντελοποιούνται κβαντομηχανικά με ένα σύστημα τεσσάρων επιπέδων. Τα σύμπλεκτα φωτόνια παράγονται με την εκπομπή πολωμένων φωτονίων. Το σύστημα μπορεί να αποδιεγερθεί ακολουθώντας έναν από τους δύο δρόμους είτε με αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένο φωτόνιο L ακολουθούμενο από ένα δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένο φωτόνιο R ή το αντίστροφο [9,10]. Τα δύο εξιτονικά επίπεδα

βρίσκονται στο ίδιο ύψος και δεν υπάρχει τρόπος να ξεχωρίσουμε ποιο δρόμο ακολούθησε το σύστημα, οπότε και τα φωτόνια εκπέμπονται στην μέγιστη σύμπλεκτη κατάσταση Bell

$$\frac{|RL\rangle + |LR\rangle}{\sqrt{2}}$$

Εναλλακτικά, η κατάσταση Bell μπορεί να γραφεί στη βάση γραμμικής πόλωσης ως $(|HH\rangle + |VV\rangle)/\sqrt{2}$ και της διαγώνιας πόλωσης ως $(|HV\rangle + |VH\rangle)/\sqrt{2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΚΒΑΝΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

2 Κβαντικοί υπολογιστές

2.1 Γενικά περί κβαντικών υπολογιστών

Μία από τις σημαντικότερες εφευρέσεις στην ιστορία της ανθρωπότητας είναι οι υπολογιστές. Η κλασική θεωρία των υπολογιστών βασίζεται στη μηχανή Turing, η οποία επινοήθηκε το 1936 από τον μαθηματικό Alan Turing, ως απάντηση στο ερώτημα του αν υπάρχει μέθοδος απόφασης στην περίπτωση που οι μαθηματικές (λογικές) απαντήσεις είναι αληθινές. Η μηχανή Turing είναι μια αφηρημένη αναπαράσταση μιας υπολογιστικής μηχανής, ένα ιδανικό μαθηματικό μοντέλο, το οποίο χρησιμοποιεί τον δυαδικό συμβολισμό 0 και 1 καθώς και μια σειρά από κατάλληλους βασικούς κανόνες, έτσι ώστε να αποθηκεύσει, να επεξεργαστεί και να “διαβάσει” οποιαδήποτε μονάδα πληροφορίας, οποιοδήποτε *bit* (ή ελληνικά δυφίο).

Παρά το γεγονός ότι η τεχνολογία και όλα τα πεδία επιστημών έχουν εξελιχθεί πάρα πολύ από την εποχή εκείνη, εντούτοις η βασική φιλοσοφία των υπολογιστών δεν έχει αλλάξει μέχρι σήμερα. Βασίζεται ακόμα στη μηχανή Turing και στο πρωτογενές εκείνο μαθηματικό μοντέλο αν και βεβαίως η μορφή αλλά και η υπολογιστική δυνατότητα των σύγχρονων σημερινών υπολογιστών ουδεμία σχέση έχει με εκείνη των αρχικών μοντέλων.

Με τη συνεχή ανάπτυξη όμως των υπολογιστών και της νανοτεχνολογίας, ένα πολύ σημαντικό θέμα έρχεται στο προσκήνιο. Αυτό της συνεχούς σμίκρυνσης της βασικής μονάδας μνήμης η οποία τείνει να προσεγγίσει νανοσκοπικά μεγέθη στα οποία βέβαια παύουν να ισχύουν οι νόμοι της κλασικής φυσικής αλλά κυριαρχούν αυτοί της κβαντικής φυσικής [1-6]. Κατ’ αυτό το τρόπο γεννήθηκε η έννοια των *κβαντικών υπολογιστών* [7,8], υπολογιστών δηλαδή των οποίων η βασική μονάδα δεν είναι ένα κλασικό, αλλά ένα κβαντικό σύστημα, ένα άτομο υδρογόνου στη θεμελιώδη του κατάσταση π.χ., όπου τα αντίστοιχα 0 και 1 αντιπροσωπεύονται από τον προσανατολισμό του σπίν του (κάτω και πάνω).

Ένας πιο θεμελιώδης λόγος που εκφράζει την αναγκαιότητα ανάπτυξης των κβαντικών υπολογιστών διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον νομπελίστα φυσικό Richard Feynman το 1982 ο οποίος τόνισε την ενδογενή αδυναμία των κλασικών υπολογιστών να

εξομοιώσουν πλήρως τις φυσικές διαδικασίες και τα κβαντικά φαινόμενα. Επισημάνει δηλαδή το γεγονός ότι η υπολογιστική πολυπλοκότητα που παρουσιάζουν τα κβαντικά συστήματα, αυξάνεται εκθετικά συναρτήσει του αριθμού των σωματιδίων τους (σε αντίθεση με τη γραμμική αύξηση που παρουσιάζουν τα κλασικά). Κατ' αυτό το τρόπο θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί μόνο με έναν υπολογιστή που θα υπάκουε στους ίδιους νόμους, έναν κβαντικό υπολογιστή δηλαδή.

Διάφορες θεωρητικές και πειραματικές προτάσεις έχουν παρουσιαστεί για την υλοποίηση τέτοιων συστημάτων. Σημαντική πρόοδος έχει συντελεστεί στο χώρο του NMR όπου έχει συντελεστεί επιτυχής υλοποίηση αλγορίθμου για την παραγοντοποίηση ενός πρώτου αριθμού (αλγόριθμος του Shor) σε κβαντικό υπολογιστή με 7 qubits (το κβαντικό bit). Άλλες προτάσεις αφορούν: χειρισμό πυρηνικών και ηλεκτρονικών σπιν, οπτικά συστήματα, παγίδες ιόντων, συμπυκνώματα Bose-Einstein, μοριακά και χημικά συστήματα κ.α. Καθώς επίσης και σε κβαντικές δομές στερεάς κατάστασης, όπως επαφές Josephson ή κβαντικές τελείες [11], περίπτωση την οποία εξετάζει και η παρούσα διπλωματική εργασία.

2.2 Κβαντικό δυφίο

Όπως είπαμε και πριν, στους κβαντικούς υπολογιστές, η βασική μονάδα μνήμης (από εδώ και πέρα θα το λέμε απλά bit) δεν είναι ένα κλασικό αλλά ένα κβαντικό σύστημα. Σε αναλογία με τους κλασικούς υπολογιστές ορίζουμε το κβαντικό bit ή απλά *qubit* [7,8]. Ένα qubit είναι οποιοδήποτε σύστημα δύο ορθοκανονικών καταστάσεων, τις οποίες συμβολίζουμε την πρώτη με $|0\rangle$ και την δεύτερη με $|1\rangle$. Οι καταστάσεις αυτές είναι γνωστές και ως *υπολογιστική βάση* (*computational basis states*). Όμως, επειδή μιλάμε για κβαντικά συστήματα, εκτός από τις παραπάνω δύο καταστάσεις θα θεωρείται και πραγματοποιήσιμη κατάσταση του συστήματος και κάθε γραμμικός τους συνδυασμός της μορφής:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (2.1)$$

όπου a και b μιγαδικοί εν γένει αριθμοί με $|a|^2$ τη πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση $|0\rangle$ και $|b|^2$ την πιθανότητα να βρίσκεται στην κατάσταση $|1\rangle$ όπου βεβαίως:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (2.2)$$

αφού θα πρέπει να βρίσκεται σίγουρα σε μία από τις δύο καταστάσεις. Είναι φανερό ότι το qubit μπορεί να ερμηνευτεί γεωμετρικά και σαν ένα μοναδιαίο διάνυσμα σε έναν μιγαδικό διανυσματικό χώρο δύο διαστάσεων. Σε περίπτωση που έχουμε να διαχειριστούμε ένα σύστημα με περισσότερα qubits (και θα πρέπει να έχουμε αν θέλουμε να μιλάμε για δυνατότητες ρεαλιστικών εφαρμογών), αν πούμε 2, η (2.1) θα παίρνει τη μορφή:

$$|\psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle \quad (2.3)$$

όπου:

$$\sum_{a,b} |c_{ab}|^2 = 1 \quad (2.4)$$

Γενικότερα, αν θεωρήσουμε ένα σύστημα αποτελούμενο από n qubits, η έκφραση των δυνατών καταστάσεων του, θα είναι της μορφής:

$$|\psi\rangle = |x_1 x_2 \dots x_n\rangle = |x_1\rangle |x_2\rangle \dots |x_n\rangle \quad (2.5)$$

με αριθμό δυνατών συνδυασμών της τάξης των 2^n , κάνοντας φανερή την εκθετική αύξηση της πολυπλοκότητας των κβαντικών συστημάτων για την οποία μιλήσαμε προηγουμένως. Για μια (αμελητέα στους κλασσικούς υπολογιστές) τιμή της τάξης των $n = 500$ qubits, ο αριθμός αυτών των δυνατών καταστάσεων είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των σωματιδίων ολόκληρου του γνωστού σύμπαντος! Και η αποθήκευση ενός τόσο μεγάλου όγκου πληροφορίας στους κλασσικούς υπολογιστές είναι βεβαίως αδιανόητη.

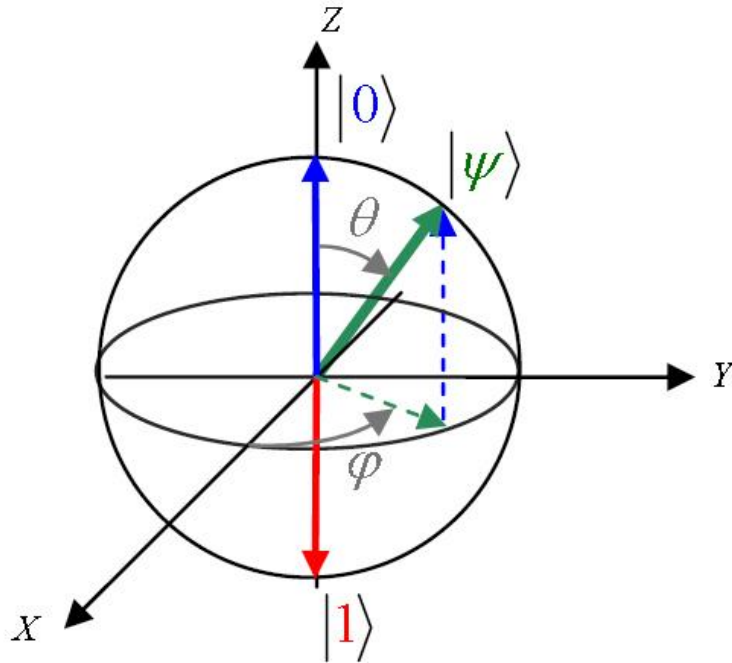
Αν προσπαθήσουμε να αναπαραστήσουμε τις ορθογώνιες καταστάσεις $|0\rangle$ και $|1\rangle$ σε μορφή πινάκων, παίρνουμε τα αντίστοιχα ορθογώνια διανύσματα:

$$|0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad |1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

και η γενική μορφή της κατάστασης $|\psi\rangle$ θα είναι η:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi} \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \quad (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi) \quad (2.7)$$

Οι παράμετροι θ και ϕ ορίζουν ένα σημείο πάνω σε μια μοναδιαία τρισδιάστατη σφαίρα – τη σφαίρα του Bloch (Blochsphere) (δείτε σχήμα 2.1) –, μια πολύ χρήσιμη αναπαράσταση του κβαντικού bit από την οποία μπορούν να κατανοηθούν πολλά από τα χαρακτηριστικά του.



Σχήμα 2.1 : Σχηματική αναπαράσταση της σφαίρας του Bloch για το διάνυσμα κατάστασης $|\psi\rangle$

Παρά το ότι το κβαντικό bit μπορεί να έχει ένα συνεχές φάσμα τιμών μέσω της υπέρθεσης διαφορετικών ιδιοκαταστάσεων (το οποίο φαίνεται και από τα άπειρα σημεία της σφαίρας του Bloch), συχνά δημιουργείται η εσφαλμένη εντύπωση ότι σε ένα qubit μπορούμε να αποθηκεύσουμε άπειρη πληροφορία. Στη πραγματικότητα, μία μέτρηση πάνω σε ένα qubit, έτσι ώστε να εξετάσουμε σε ποια κατάσταση βρίσκεται (να ανακτήσουμε δηλαδή δεδομένα από τη μνήμη του), θα δώσει σαν αποτέλεσμα είτε $|0\rangle$, είτε $|1\rangle$ και μόνο αυτά. Δηλαδή θα έχουμε *κατάρρευση* της κυματοσυνάρτησης από μια επαλληλία καταστάσεων στην ιδιοκατάσταση της μετρούμενης τιμής. Φτάνουμε στο συμπέρασμα λοιπόν, ότι αν εξαιρεθούν οι ακραίες περιπτώσεις ($a = 0, b = 1$ και $a = 1, b = 0$), η πραγματοποίηση της μέτρησης διαταράσσει μη αναστρέψιμα την κατάσταση του κβαντικού συστήματος, εγγενές χαρακτηριστικό άλλωστε της έννοιας της κβαντικής μέτρησης, σε αντίθεση με τα κλασσικά συστήματα των οποίων η κατάσταση μένει ανεπηρέαστη από μια τέτοια διαδικασία.

Όπως είναι φυσικό όμως, η μέτρηση αυτή δεν θα συμβεί παρά μόνο στο τέλος των υπολογισμών. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι μέχρι εκείνη τη στιγμή, το σύστημα θα διαχειρίζεται και θα εκτελεί παράλληλα τους υπολογισμούς και για τις δύο καταστάσεις του κάθε qubit. Είναι έτσι φανερό ότι αυτό που έχει σημασία, δεν είναι οι πιθανότητες των ενδεχομένων της μέτρησης αλλά ο *αριθμός* των ενδεχομένων αυτών καθ' αυτών. Το

φαινόμενο αυτό, δηλαδή η δυνατότητα του συστήματος να “κρατάει” και τα δύο ενδεχόμενα και να εκτελεί παράλληλα τον κάθε υπολογισμό για το καθένα, καλείται *μαζικός κβαντικός παραλληλισμός* (*quantum parallelism*) και αποτελεί τη θεμελιώδη βάση των τεράστιων υπολογιστικών δυνατοτήτων των κβαντικών υπολογιστών [7,8].

Ένα άλλο σημείο που θα πρέπει να προσέξουμε είναι αυτό της ανάγνωσης των αποτελεσμάτων των κβαντικών μετρήσεων. Δηλαδή την ...βάσιμη πιθανότητα το σύστημα να μην έδωσε το σωστό αποτέλεσμα στην πρώτη μέτρηση. Όταν το σύστημα θα πραγματοποιήσει τη μέτρηση και δώσει παραδείγματος χάριν απάντηση $|0\rangle$, αυτό δεν σημαίνει κατ’ ανάγκη ότι το σύστημά μας βρισκόταν πράγματι σε αυτή τη κατάσταση. Εφόσον το αποτέλεσμα βασίζεται στις πιθανότητες $|a|^2$ και $|b|^2$, μπορεί κάλλιστα το σύστημα να βρισκόταν στην άλλη κατάσταση, απλά η συγκεκριμένη μέτρηση “έτυχε” να δώσει αυτό το αποτέλεσμα. Οπότε, για να πάρουμε τη σωστή τιμή, δεν έχουμε παρά απλά να επαναλάβουμε τη μέτρηση και μάλιστα τόσες φορές όσες θα χρειαστεί για να είμαστε σίγουροι ότι το αποτέλεσμα είναι πράγματι σωστό.

Η αδυναμία αυτή του κβαντικού υπολογιστή, δηλαδή η μη ντετερμινιστική συμπεριφορά του, θα μπορούσε να θεωρηθεί σαν μειονέκτημα έναντι των κλασικών υπολογιστών, αφού προφανώς αυξάνει τον απαιτούμενο χρόνο για την εξαγωγή του αποτελέσματος. Όμως, το κέρδος της οικονομίας που απολαμβάνουν τα κβαντικά συστήματα λόγω του φαινομένου του κβαντικού παραλληλισμού είναι πολλές τάξεις μεγαλύτερο από το κόστος που αναμένεται να έχει η διαδικασία της ανάγνωσης, ακόμα και αν χρειαστεί να επαναλάβουμε τις μετρήσεις χιλιάδες φορές έτσι ώστε να είμαστε όσο θέλουμε βέβαιοι για το αποτέλεσμα [7].

2.3 Κβαντικές πύλες

Όπως είναι λογικό, στους υπολογιστές δεν αρκεί απλά να αποθηκεύουμε ή να ανακτούμε δεδομένα από τη μνήμη τους. Αυτό που μας ενδιαφέρει κυρίως είναι το υπολογιστικό κομμάτι, δηλαδή η επεξεργασία καθενός bit μέσω κατάλληλων διαδικασιών ανάλογα με τις επιθυμίες μας. Στους κλασικούς υπολογιστές, η δυνατότητα αυτή δίνεται μέσω της εφαρμογής των λεγόμενων *λογικών πυλών*. Ένα παράδειγμα είναι η λογική πύλη NOT που έχει τη δυνατότητα να εναλλάσσει τις τιμές των bits από 0 σε 1 και αντίστροφα.

Κατ' αναλογία με τις κλασσικές λογικές πύλες, ορίζουμε και τις κβαντικές λογικές πύλες [7,8] σαν "κυκλώματα" τα οποία έχουν τη δυνατότητα να εκτελούν καθορισμένες πράξεις πάνω σε συγκεκριμένα qubits και για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα έτσι ώστε να τα επεξεργαστούν. Οι κβαντικές πύλες αναπαρίστανται μέσω κατάλληλων τελεστών. Όμως, επειδή μιλάμε για κβαντικά συστήματα και μάλιστα αναπαριστούμενα από μοναδιαία διανύσματα όπως είδαμε πριν, οι τελεστές αυτοί θα πρέπει να μην αλλάζουν το μήκος του διανύσματος αλλά και να διατηρούν τη χρονική συμμετρία των συστημάτων στα οποία δρουν. Οι τελεστές που ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες θα είναι λοιπόν υποχρεωτικά μοναδιαίοι τελεστές και συνήθως περιγράφονται από κατάλληλους μοναδιαίους πίνακες. Δηλαδή θα ισχύει η σχέση:

$$U^*U = I \quad (2.8)$$

όπου U^* είναι ο συναφής του U (που προκύπτει με την εναλλαγή γραμμών και στηλών του U και την αντικατάσταση των στοιχείων από τον συζυγή τους) και I ο μοναδιαίος πίνακας.

Σε ένα πιο μαθηματικό επίπεδο, μπορούμε να πούμε ότι κάθε πύλη, κάθε μοναδιαίος μετασχηματισμός, ουσιαστικά αντιστοιχεί σε έναν τελεστή χρονικής εξέλιξης του συστήματος ο οποίος δρα για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Όπου η παρουσία κάθε τέτοιου τελεστή προϋποθέτει βέβαια και την ύπαρξη της κατάλληλης χαμιλτονιανής που περιγράφει το σύστημα και η οποία δημιουργεί τον τελεστή. Επίσης είναι φανερό ότι τα παραπάνω ισχύουν και αντίστροφα, δηλαδή κάθε μοναδιαίος πίνακας μπορεί να θεωρηθεί μία εν δυνάμει κβαντική πύλη. Ένα ακόμα χαρακτηριστικό που χαρακτηρίζει τις κβαντικές πύλες είναι η υποχρεωτική αντιστρεπτότητα που παρουσιάζουν σε αντίθεση με τις κλασσικές, ότι έχουν δηλαδή ίδιο αριθμό εισόδων και εξόδων.

Ας δούμε τώρα μερικές από τις πιο χρήσιμες πύλες για απλά συστήματα ενός qubit. Εφόσον οι πύλες αυτές δρουν πάνω στις καταστάσεις μόνο ενός qubit, δηλαδή στον δυοδιάστατο χώρο που ορίζεται από τα μοναδιαία διανύσματα $a|0\rangle + b|1\rangle$, θα αναπαρίστανται από πίνακες της ίδιας διάστασης, δηλαδή 2×2 .

Κβαντική πύλη Pauli X ή πύλη NOT: Είναι το κβαντικό ανάλογο της αντίστοιχης κλασσικής πύλης που όπως αναφέραμε εναλλάσσει την κατάσταση των bits. Η κβαντική της μορφή αναπαρίσταται από τον πίνακα:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Επειδή όμως στη περίπτωση μας έχουμε μια επαλληλία καταστάσεων, στη πραγματικότητα αυτό που κάνει αυτή η πύλη είναι να εναλλάσσει τις πιθανότητες εμφάνισης των καταστάσεων του qubit, δηλαδή δρώντας στην κατάσταση $a|0\rangle + b|1\rangle$ ή σε μορφή πίνακα:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

παίρνουμε σαν αποτέλεσμα:

$$X \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Πιο μαθηματικά η πύλη περιγράφει την περιστροφή του διανύσματος της κατάστασης $|\psi\rangle$ στη σφαίρα του Bloch κατά π γύρω από τον άξονα x .

Κβαντικές πύλες Pauli Y και Z: Οι πύλες αυτές αναπαρίστανται από τους μοναδιαίους πίνακες:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

ενώ η δράση τους συνίσταται στις παρακάτω αλλαγές:

$$Y \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}, \quad Z \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Αντιστοιχούν σε περιστροφή του διανύσματος της $|\psi\rangle$ στη σφαίρα του Bloch κατά π γύρω από τους άξονες y και z αντίστοιχα.

Κβαντική πύλη Hadamard: Αποτελεί ίσως τη σημαντικότερη πύλη στη θεωρία των κβαντικών υπολογιστών και αναπαρίστανται από τον πίνακα:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Η αλλαγή που λαμβάνει χώρα στο qubitόταν δρα αυτή η πύλη είναι:

$$H \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} a+b \\ a-b \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

δηλαδή η κατάσταση $|\psi\rangle$ μετασχηματίζεται στην:

$$\frac{a+b}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{a-b}{\sqrt{2}}|1\rangle = a\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} + b\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.16)$$

Η πύλη Hadamard αντιστοιχεί σε ταυτόχρονη περιστροφή του διανύσματος του qubit κατά π στους άξονες x και z , αλλά αυτό που έχει σημασία είναι η ποιοτική κυρίως δράση της που όπως είναι φανερό και από την (2.3.9), συνίσταται στη δημιουργία ισοβαρών επαλληλιών των βασικών καταστάσεων $|0\rangle$ και $|1\rangle$. Επίσης, πολύ χρήσιμη είναι και η αντίστροφη δράση της, δηλαδή αν έχουμε ήδη μία τέτοια υπέρθεση καταστάσεων, εφαρμόζοντας την πύλη Hadamard θα πάρουμε τις δύο βασικές καταστάσεις, αφού μιλάμε εξάλλου και για μοναδιαίο πίνακα.

Κβαντική πύλη μετατόπισης φάσης: Ο πίνακας που την αναπαριστά είναι:

$$R_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Όπως είναι φανερό από το όνομά της, η πύλη αυτή δεν κάνει τίποτα άλλο από το να αλλάζει τη φάση της κατάστασης. Δηλαδή αφήνει την κατάσταση $|0\rangle$ απaráλλαχτη ενώ μετατρέπει την $|1\rangle$ σε $e^{i\phi}|1\rangle$. Οι πιθανότητες εμφάνισης των δύο ενδεχομένων παραμένουν ανεπηρέαστες. Αυτό ισοδυναμεί στη σφαίρα του Bloch με το να μετακινήσουμε το διάνυσμα της $|\psi\rangle$ κατά ϕ πάνω σε έναν οριζόντιο κύκλο (μια γραμμή “γεωγραφικού πλάτους”).

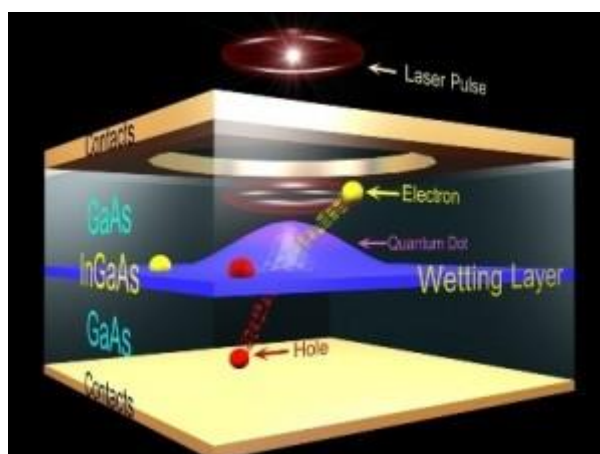
Φυσικά υπάρχουν και πύλες για περισσότερα από ένα κβαντοδηφία. Οι πύλες που δρουν σε αυτά τα συστήματα έχουν τη γενική ονομασία *Ελεγχόμενες Πύλες (Controlled Gates)* όπου ένα ή περισσότερα qubits λειτουργεί σαν qubit ελέγχου για κάποια λειτουργία. Ενδεικτικά αναφέρουμε την δύο κβαντοδηφίων πύλη *C-NOT* της οποίας όπως είναι λογικό ο πίνακας τώρα θα έχει διάσταση 4×4 . Η πύλη εκτελεί την εξής λειτουργία: όταν το πρώτο από τα qubits είναι στην κατάσταση $|0\rangle$, η πύλη δεν κάνει τίποτα στο δεύτερο, ενώ αν το πρώτο βρίσκεται στην κατάσταση $|1\rangle$, τότε αντιστρέφει το δεύτερο [7].

2.4 Υλοποίηση κβαντικών υπολογιστών με κβαντικές τελείες

Οι κβαντικοί υπολογιστές μπορούν να υλοποιηθούν και μέσω μιας κβαντικής τελείας, θέμα με αρκετά μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον τα τελευταία χρόνια, το οποίο εξετάζει και η παρούσα διπλωματική. Στη περίπτωση αυτή, μπορούμε να θεωρήσουμε μια κβαντική τελεία

με έναν ορισμένο αριθμό ηλεκτρονίων τα οποία θα παίζουν τον ρόλο των qubits. Τα ηλεκτρόνια μπορούν να βρίσκονται είτε στη θεμελιώδη είτε σε μια διεγερμένη στάθμη (εντός της ζώνης σθένους ή μιας κατάστασης εξιτονίου) δημιουργώντας έτσι τις καταστάσεις $|0\rangle$ και $|1\rangle$ αντίστοιχα. Ας θεωρήσουμε για απλοποίηση ότι έχουμε μόνο ένα qubit.

Βάλλοντας την τελεία με παλμούς λέιζερ και μεταβάλλοντας διάφορα χαρακτηριστικά της διαδικασίας, όπως π.χ. τη συχνότητα της ακτινοβολίας, την περιβάλλουσα συνάρτηση της ηλεκτρικής συνιστώσας του κύματος, τη διάρκεια ή την περίοδο των παλμών κ.α, έχουμε τη δυνατότητα να μετακινήσουμε το ηλεκτρόνιο από τη θεμελιώδη στάθμη στη διεγερμένη, αλλάζοντας έτσι την κατάσταση του qubit. Αλλά και αντίστροφα μπορούμε να έχουμε αποδιέγερση του ηλεκτρονίου υλοποιώντας έτσι πλήρως την κβαντική πύλη NOT, ή μπορούμε ακόμα να διεγείρουμε το ηλεκτρόνιο και σε μια υπέρθεση καταστάσεων. Φτάνουμε δηλαδή στο συμπέρασμα ότι με το μοντέλο της κβαντικής τελείας μπορούμε να υλοποιήσουμε αρκετές από τις γνωστές κβαντικές πύλες.



Σχήμα 2.2: Σχηματική αναπαράσταση της αλληλεπίδρασης κβαντικής τελείας με πεδίο laser.

Τα κριτήρια που θα πρέπει να πληροί ένα κβαντικό σύστημα για να μπορεί να λειτουργήσει ως υπολογιστής, είναι [7,11]:

- Να έχει τη δυνατότητα αναπαράστασης κβαντικής πληροφορίας, δηλαδή τη δυνατότητα δημιουργίας ενός qubit.
- Να έχει τη δυνατότητα δημιουργίας καταστάσεων πολλών διαφορετικών bits (τα οποία επειδή θα είναι σχετικά κοντά το ένα με το άλλο θα αλληλεπιδρούν μεταξύ τους).

- Να έχει τη δυνατότητα αντιστρέψιμου μετασχηματισμού μιας κατάστασης του qubit σε μια άλλη μέσω της δράσης κβαντικών πυλών.
- Να υπάρχει τρόπος μέτρησης των καταστάσεων στις οποίες βρίσκονται τα qubits.
- Να μην παρουσιάζει κβαντικό θόρυβο. Για να γίνει αυτό θα πρέπει ο χρόνος άρσης της συνεκτικότητας (δηλαδή απόσβεσης και αποσυμφωνίας) του συστήματος να είναι πολύ μεγαλύτερος από τον χρόνο λειτουργίας μιας κβαντικής πύλης.

Όλες οι παραπάνω προϋποθέσεις ικανοποιούνται στην περίπτωση των κβαντικών τελειών [11].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο ΕΛΕΓΧΟΜΕΝΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΚΒΑΝΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΚΒΑΝΤΙΚΕΣ ΤΕΛΕΙΕΣ ΓΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

3 Ελεγχόμενη δημιουργία κβαντικών καταστάσεων σε κβαντικές τελείες

3.1 Εισαγωγικά στοιχεία

Ο χειρισμός των μεταβάσεων εξιτονίων και διεξιτονίων σε ημιαγώγιμες κβαντικές τελείες μέσω πεδίων λέιζερ είναι ενεργό ερευνητικό πεδίο που ενσωματώνει διάφορες θεωρητικές και πειραματικές έρευνες [11]. Οι ημιαγώγιμες κβαντικές τελείες παρέχουν μια πλατφόρμα που μπορεί να είναι αρκετά χρήσιμη για επεξεργασία κβαντικής πληροφορίας, με μερικά σημαντικά πλεονεκτήματα σε σχέση με άλλα υποψηφία qubit, όπως για παράδειγμα τα προσαρμοσμένα επίπεδα ενέργειας, τους σχετικά μικρούς χρόνους απόσβεσης και αποσυμφωνίας σε σχέση με τους χρόνους οδήγησης, και την εύκολη ενσωμάτωση τους σε μεγαλύτερες διατάξεις.

Σε αυτό το πλαίσιο, ένα πρόβλημα που έχει προσελκύσει σημαντική προσοχή είναι η σύμφωνη προετοιμασία και γενικά η σύμφωνη δυναμική πληθυσμού μιας κατάστασης διεξιτονίου, όταν η κβαντική τελεία βρίσκεται αρχικά στη βασική της κατάσταση. Η σύμφωνη προετοιμασία μιας κατάστασης διεξιτονίου με εφαρμογή παλμών λέιζερ είναι πολύ σημαντική στον τομέα της κβαντικής επεξεργασίας πληροφορίας, ειδικά για την αποτελεσματική δημιουργία μεμονωμένων φωτονίων [12] και σύμπλεκτων φωτονίων πόλωσης [13-17] από την αποδιέγερση διεξιτονίων και εξιτονίων. Μια σειρά από πειράματα έχουν δείξει ότι η απόδοση της δημιουργίας μεμονωμένων φωτονίων και σύμπλεκτων φωτονίων πόλωσης αυξάνει σημαντικά όσο αυξάνει η απόδοση της προετοιμασίας της διεξιτονικής κατάστασης [12-17].

Αρκετές σύμφωνες μέθοδοι ελέγχου έχουν χρησιμοποιηθούν για την επίτευξη αυτού του στόχου, συμπεριλαμβανομένων των παλμών σε συντονισμό [18-23] καθώς και παλμούς με χρονικά εξαρτημένη συχνότητα [24-27]. Οι μέθοδοι με χρονικά εξαρτημένη συχνότητα,

χρησιμοποιούνται προκειμένου να αυξηθεί η ανθεκτικότητα της διαδικασίας έναντι του θορύβου και των πειραματικών ατελειών. Οι παραπάνω μέθοδοι έχουν επιτύχει υψηλά επίπεδα προετοιμασίας διεξιτονίου [27], ακόμη και παρουσία θορύβου (αποσυμφωνίας) λόγω της αλληλεπίδρασης με τα φωτόνια [28]. Μάλιστα, υπάρχουν και μέθοδοι, μέσω πεδίων με χρονικά εξαρτημένη συχνότητα, που εκμεταλλεύονται την αλληλεπίδραση με τα φωτόνια και μπορούν να επιτύχουν πιστότητα λίγο πάνω από 90% [29-31]. Τέλος, πιο πρόσφατα μέθοδοι με παλμούς τύπου on-off έχουν επίσης χρησιμοποιηθεί για εξαιρετικά υψηλής απόδοσης διέγερση στην κατάσταση διεξιτονίου [32-33].

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε μια νέα μέθοδο για την προετοιμασία της διεξιτονικής κατάστασης με χρήση των πιο απλών πεδίων laser που υπάρχουν. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας πεδία laser με ορθογώνια μορφή, δείχνουμε, ότι υπό κατάλληλες συνθήκες που εξάγουμε αναλυτικά, μπορούμε να έχουμε εξαιρετικά υψηλής απόδοσης διέγερση της κατάστασης διεξιτονίου σε τυπικές κβαντικές τελείες, άνω του 97% υπό την επίδραση φαινομένων θορύβου, δηλαδή φαινομένων απόσβεσης και αποσυμφωνίας. Επιπλέον, δείχνουμε ότι τα συγκεκριμένα πεδία laser μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατάλληλα και για τη δημιουργία κβαντικών πυλών μεταξύ θεμελιώδους κατάστασης και κατάστασης εξιτονίου της κβαντικής τελείας, υπό την παρουσία της κατάστασης διεξιτονίου, που είναι εξίσου ένα βασικό θέμα στην κβαντική πληροφορία [11,34,35]. Σημειώνουμε, ότι στη δημιουργία κβαντικών πυλών συνήθως η κατάσταση διεξιτονίου θεωρείται ότι δεν έχει κάποια επίδραση και απλώς παραλείπεται. Εδώ ελέγχουμε και αυτή την παραδοχή.

3.2 Εξισώσεις πίνακα πυκνότητας και εξισώσεις πλατών πιθανότητας

Στο παρόν κεφάλαιο ακολουθεί η εξαγωγή των εξισώσεων του πίνακα πυκνότητας για τη μελέτη των πληθυσμών των επιπέδων της κβαντικής τελείας. Για ακόμα μία φορά θεωρούμε ένα σύστημα τριών επιπέδων σε μορφή σκάλας, τα οποία επίπεδα αναπαριστούν τη θεμελιώδη κατάσταση, την πρώτη διεγερμένη κατάσταση, που είναι η κατάσταση εξιτονίου, και τη δεύτερη διεγερμένη κατάσταση, που είναι η κατάσταση διεξιτονίου [22,24-27,32,33]. Η κατάσταση εξιτονίου είναι διπλά εκφυλισμένη, αλλά επειδή εδώ θεωρούμε πεδίο γραμμικά πολωμένο δεν υπάρχει διέγερση στη μια από τις δύο καταστάσεις εξιτονίου. Στη συνέχεια θεωρούμε αλληλεπίδραση της κβαντικής τελείας με ένα πεδίο laser σε κοντινό διφωτονικό συντονισμό με την κατάσταση διεξιτονίου. Η Χαμιλτονιανή του συστήματος λαμβάνοντας υπόψη και την αλληλεπίδραση με το εφαρμοζόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δίνεται από τη σχέση:

$$H = E_0|0\rangle\langle 0| + E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2| - \mu E_t(t)(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) - \mu E_t(t)(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|) \quad (3.1)$$

όπου μ η κατάλληλη διπολική ροπή, που είναι ίδια για τις μεταβάσεις θεμελιώδους κατάστασης-εξιτονίου και εξιτονίου-διεξιτονίου.

Εδώ E_t είναι το εφαρμοζόμενο ηλεκτρικό πεδίο. Σαν εφαρμοζόμενο πεδίο παίρνουμε

$$E_t = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.2)$$

με ω τη βασική κυκλική συχνότητα, E_0 το πλάτος και φ τη φάση του πεδίου. Αυτή είναι η πιο απλή και συνηθισμένη μορφή ηλεκτρικού πεδίου ενός πεδίου laser που χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία.

Για να βρούμε τα στοιχεία του πίνακα πυκνότητας θα ακολουθήσουμε την εξίσωση Liouville:

$$i\hbar\dot{\rho} = [H, \rho] = H \cdot \rho - \rho \cdot H \quad (3.3)$$

με πίνακα πυκνότητας ρ

$$\rho = \rho_{00}|0\rangle\langle 0| + \rho_{11}|1\rangle\langle 1| + \rho_{22}|2\rangle\langle 2| + \rho_{01}|0\rangle\langle 1| + \rho_{10}|1\rangle\langle 0| + \rho_{02}|0\rangle\langle 2| + \rho_{20}|2\rangle\langle 0| + \rho_{12}|1\rangle\langle 2| + \rho_{21}|2\rangle\langle 1|. \quad (3.4)$$

Βεβαίως, αν στο σύστημα δεν λάβουμε υπόψη φαινόμενα απόσβεσης, τότε μπορούμε να το μελετήσουμε και με την χρονικά εξαρτημένη εξίσωση Schrödinger που οδηγεί στην παρακάτω εξίσωση για τα πλάτη πιθανότητας [22,24,32]

$$i\hbar\dot{c} = H \cdot c \quad (3.5)$$

όπου c είναι πίνακας στήλη με τρία στοιχεία.

3.3 Εξαγωγή εξισώσεων πίνακα πυκνότητας και πλατών πιθανότητας

Ξεκινάμε λοιπόν, γράφοντας σε μορφή πίνακα :

$$H = \begin{bmatrix} E_0 & -\mu E_t & 0 \\ -\mu E_t(t) & E_1 & -\mu E_t \\ 0 & -\mu E_t & E_2 \end{bmatrix}$$

$$\rho_{(t)} = \begin{bmatrix} \rho_{00}(t) & \rho_{01}(t) & \rho_{02}(t) \\ \rho_{10}(t) & \rho_{11}(t) & \rho_{12}(t) \\ \rho_{20}(t) & \rho_{21}(t) & \rho_{22}(t) \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση (3.3) και παίρνουμε:

$$i\hbar \frac{d\rho_{00}(t)}{dt} = \mu E_t(t) \cdot (\rho_{01}(t) - \rho_{10}(t)) \quad (3.6)$$

$$i\hbar \frac{d\rho_{01}(t)}{dt} = \mu E_t(t) \cdot (\rho_{02}(t) + \rho_{00}(t) - \rho_{11}(t)) + [E_0 - E_1] \cdot \rho_{01}(t) \quad (3.7)$$

$$i\hbar \frac{d\rho_{02}(t)}{dt} = \mu E_t(t) \cdot (\rho_{01}(t) - \rho_{12}(t)) + [E_0 - E_2] \cdot \rho_{02}(t) \quad (3.8)$$

$$i\hbar \frac{d\rho_{10}(t)}{dt} = \mu E_t(t) \cdot (\rho_{11}(t) - \rho_{20}(t) - \rho_{00}(t)) + [E_1 - E_0] \cdot \rho_{10}(t) \quad (3.9)$$

$$i\hbar \frac{d\rho_{11}(t)}{dt} = \mu E_t(t) \cdot (\rho_{12}(t) - \rho_{21}(t) + \rho_{10}(t)) - \rho_{01}(t) \quad (3.10)$$

$$i\hbar \frac{d\rho_{12}(t)}{dt} = \mu E_t(t) \cdot (\rho_{11}(t) - \rho_{22}(t) - \rho_{02}(t)) + [E_1 - E_2] \cdot \rho_{12}(t) \quad (3.11)$$

$$i\hbar \frac{d\rho_{20}(t)}{dt} = \mu E_t(t) \cdot (\rho_{21}(t) - \rho_{10}(t)) + [E_2 - E_0] \cdot \rho_{20}(t) \quad (3.12)$$

$$i\hbar \frac{d\rho_{21}(t)}{dt} = \mu E_t(t) \cdot [\rho_{22}(t) + \rho_{20}(t) - \rho_{11}(t)] + [E_2 - E_1] \cdot \rho_{21}(t) \quad (3.13)$$

$$i\hbar \frac{d\rho_{22}(t)}{dt} = \mu E_t(t) \cdot (\rho_{21}(t) - \rho_{12}(t)) \quad (3.14)$$

Στη συνέχεια λαμβάνουμε υπόψη φαινομενολογικά τους όρους απόσβεσης και αποσυμφωνίας Γ_{nn}, γ_{nm} λόγω π.χ. αυθόρμητης εκπομπής φωτονίων και αλληλεπίδρασης ηλεκτρονίων με τα φωνόνια. Οι παραπάνω εξισώσεις θα γίνουν:

$$i\hbar \frac{d\rho_{00}(t)}{dt} = \mu E_t(t) \cdot (\rho_{01}(t) - \rho_{10}(t)) + i\hbar \Gamma_{11} \rho_{11}(t) \quad (3.15)$$

$$i\hbar \frac{d\rho_{01}(t)}{dt} = \mu E_t(t) \cdot (\rho_{02}(t) + \rho_{00}(t) - \rho_{11}(t)) + [E_0 - E_1] \cdot \rho_{01}(t) - i\hbar \gamma_{01} \rho_{01}(t) \quad (3.16)$$

$$i\hbar \frac{d\rho_{02}(t)}{dt} = \mu E_t(t) \cdot (\rho_{01}(t) - \rho_{12}(t)) + [E_0 - E_2] \cdot \rho_{02}(t) - i\hbar \gamma_{02} \rho_{02}(t) \quad (3.17)$$

$$i\hbar \frac{d\rho_{10}(t)}{dt} = \mu E_t(t) \cdot (\rho_{11}(t) - \rho_{20}(t) - \rho_{00}(t)) + [E_1 - E_0] \cdot \rho_{10}(t) - i\hbar \gamma_{01} \rho_{10}(t) \quad (3.18)$$

$$i\hbar \frac{d\rho_{11}(t)}{dt} = \mu E_t(t) \cdot (\rho_{12}(t) - \rho_{21}(t) + \rho_{10}(t)) - \rho_{01}(t) - i\hbar \Gamma_{11} \rho_{11}(t) + i\hbar \Gamma_{22} \rho_{22}(t) \quad (3.19)$$

$$i\hbar \frac{d\rho_{12}(t)}{dt} = \mu E_t(t) \cdot (\rho_{11}(t) - \rho_{22}(t) - \rho_{02}(t)) + [E_1 - E_2] \cdot \rho_{12}(t) - i\hbar \gamma_{12} \rho_{12}(t) \quad (3.20)$$

$$i\hbar \frac{d\rho_{20}(t)}{dt} = \mu E_t(t) \cdot (\rho_{21}(t) - \rho_{10}(t)) + [E_2 - E_0] \cdot \rho_{20}(t) - i\hbar \gamma_{02} \rho_{20}(t) \quad (3.21)$$

$$i\hbar \frac{d\rho_{21}(t)}{dt} = \mu E_t(t) \cdot [\rho_{22}(t) + \rho_{20}(t) - \rho_{11}(t)] + [E_2 - E_1] \cdot \rho_{21}(t) - i\hbar \gamma_{12} \rho_{21}(t) \quad (3.22)$$

$$i\hbar \frac{d\rho_{22}(t)}{dt} = \mu E_t(t) \cdot (\rho_{21}(t) - \rho_{12}(t)) - i\hbar \Gamma_{22} \rho_{22}(t) \quad (3.23)$$

Οι παραπάνω είναι οι εξισώσεις που θα πρέπει να επιλυθούν για τη δυναμική μιας κβαντικής τελείας με διεγέρσεις εξιτονίου και διεξιτονίου.

Αν τώρα ξεχάσουμε τις διαδικασίες απόσβεσης, τότε [22,24] η παραπάνω δυναμική μπορεί να περιγραφεί και με απλούστερες εξισώσεις πλατών πιθανότητας, με

$$|\psi(t)\rangle = c_0(t)|0\rangle + c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle. \quad (3.24)$$

Αυτές έχουν τη μορφή, κάτω από την προσέγγιση περιστρεφόμενου κύματος [22,24,32]

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{c}_0(t) \\ \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \hbar \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Omega}{2} e^{-i\varphi} & 0 \\ \frac{\Omega}{2} e^{i\varphi} & \delta & \frac{\Omega}{2} e^{-i\varphi} \\ 0 & \frac{\Omega}{2} e^{i\varphi} & 2\delta + \frac{E_B}{\hbar} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_0(t) \\ c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

όπου $\Omega = -\mu E_0/\hbar$ είναι η συχνότητα Rabi, την οποία θεωρούμε πραγματική, $\delta = E_1 - \omega$, ο αποσυντονισμός του πεδίου από την διέγερση θεμελιώδους κατάστασης-εξιτονίου, όπου παίρνουμε ως συνήθως $E_0 = 0$, και τέλος E_B είναι η διεξιτονική μετατόπιση. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω Χαμιλτονιανή, μπορούμε να εξάγουμε αποτελέσματα για τον έλεγχο της δυναμικής στο παρόν σύστημα. Σε αυτή την εργασία θα δείξουμε ότι απλώς με κατάλληλη επιβολή απλών πεδίων, κατάλληλης έντασης και συχνότητας, μπορούμε να πετύχουμε σημαντικές μεταβάσεις για εφαρμογές κβαντικής πληροφορίας, όπως, π.χ. η διέγερση της κατάστασης διεξιτονίου, που όπως αναφέραμε παραπάνω είναι απαραίτητη για τη δημιουργία των σύμπλεκτων φωτονίων από το σύστημα αποδιέγερσης εξιτονίου- διεξιτονίου στην κβαντική τελεία και ο έλεγχος της κατάστασης εξιτονίου, που είναι η βάση για τις κβαντικές πύλες, όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Οι παραπάνω διαφορικές εξισώσεις γράφονται

$$i\dot{c}_0(t) = \frac{\Omega}{2} e^{-i\varphi} c_1(t) \quad (3.26)$$

$$i\dot{c}_1(t) = \frac{\Omega}{2} e^{i\varphi} c_0(t) + \delta c_1(t) + \frac{\Omega}{2} e^{-i\varphi} c_2(t) \quad (3.27)$$

$$i\dot{c}_2(t) = \frac{\Omega}{2} e^{i\varphi} c_1(t) + (2\delta + \frac{E_B}{\hbar}) c_2(t) \quad (3.28)$$

3.4 Βασικά αναλυτικά αποτελέσματα

Πρώτη περίπτωση: Διέγερση της κατάστασης διεξιτονίου

Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε $\frac{\Omega}{2} \ll |\delta|$. Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να κάνουμε αδιαβατική απαλοιφή της συνεισφοράς της κατάστασης $|1\rangle$, δηλαδή μπορούμε απλώς να θεωρήσουμε ότι στην εξίσωση (3.27) έχουμε $\dot{c}_1(t) \approx 0$ και τότε

$$c_1(t) \approx -\frac{\Omega}{2\delta} e^{i\varphi} c_0(t) - \frac{\Omega}{2\delta} e^{-i\varphi} c_2(t) \quad (3.29)$$

Με αντικατάσταση στις (3.26) και (3.28) έχουμε

$$i\dot{c}_0(t) = -\frac{\Omega^2}{4\delta} c_0(t) - \frac{\Omega^2}{4\delta} e^{-2i\varphi} c_2(t) \quad (3.30)$$

$$i\dot{c}_2(t) = -\frac{\Omega^2}{4\delta} e^{2i\varphi} c_0(t) + \left[2\delta + \frac{E_B}{\hbar} - \frac{\Omega^2}{4\delta}\right] c_2(t) \quad (3.31)$$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$c_0(t) = b_0(t)e^{i\frac{\Omega^2}{4\delta}t}, \quad c_2(t) = b_2(t)e^{i\frac{\Omega^2}{4\delta}t} \quad (3.32)$$

και παίρνουμε από τις (3.30) και (3.31)

$$i\dot{b}_0(t) = -\frac{\Omega^2}{4\delta} e^{-2i\varphi} b_2(t) \quad (3.33)$$

$$i\dot{b}_2(t) = -\frac{\Omega^2}{4\delta} e^{2i\varphi} b_0(t) + \left(2\delta + \frac{E_B}{\hbar}\right) b_2(t) \quad (3.34)$$

Το παραπάνω σύστημα είναι ένα απλό σύστημα δύο επιπέδων με ενεργό συχνότητα Rabi με μέτρο $\frac{\Omega^2}{2|\delta|}$ και αποσυντονισμό $2\delta + \frac{E_B}{\hbar}$. Για να επιτύχουμε την επιθυμητή πλήρη μεταφορά από την θεμελιώδη κατάσταση στην κατάσταση διεξιτονίου, θα πρέπει ο αποσυντονισμός στο σύστημα δύο επιπέδων να είναι μηδέν. Οπότε θα πρέπει

$$\delta = -\frac{E_B}{2\hbar}. \quad (3.35)$$

Η παραπάνω συνθήκη καθορίζει τη συχνότητα του πεδίου που επιβάλλουμε. Σημειώνουμε ότι η συνθήκη αυτή είναι απλώς η συνθήκη διφωτονικού συντονισμού μεταξύ της θεμελιώδους κατάστασης και της κατάστασης διεξιτονίου, αφού είναι ίδια με την $2\hbar\omega = E_2 = 2E_1 + E_B$.

Έτσι από τις (3.33) και (3.34) παίρνουμε

$$i\dot{b}_0(t) = -\frac{\Omega^2}{4\delta} e^{-2i\varphi} b_2(t) \quad (3.36)$$

$$i\dot{b}_2(t) = -\frac{\Omega^2}{4\delta} e^{2i\varphi} b_0(t) \quad (3.37)$$

που μας δίνουν λύσεις για τις συνθήκες αρχικές συνθήκες που το σύστημα βρίσκεται στη θεμελιώδη κατάσταση αρχικά $c_0(t=0) = b_0(t=0) = 1$, $c_2(t=0) = b_2(t=0) = 0$ ως

$$b_0(t) = \cos\left(\frac{\Omega^2}{4|\delta|}t\right) \quad (3.38)$$

$$b_2(t) = -ie^{2i\varphi} \sin\left(\frac{\Omega^2}{4|\delta|}t\right) \quad (3.39)$$

Για να έχουμε πλήρη μεταφορά από τη θεμελιώδη στην κατάσταση διεξιτονίου, θα πρέπει

$$\frac{\Omega^2}{4|\delta|}t_\nu = \frac{\pi}{2}(2\nu + 1), \quad \text{με } \nu = 0,1,2, \dots \quad (3.40)$$

που μας καθορίζει τους χρόνους που θα συμβεί η πλήρης μεταφορά. Ο μικρότερος χρόνος, που είναι συνήθως ο επιθυμητός σε προβλήματα κβαντικής πληροφορίας επιτυγχάνεται για $v=0$ και είναι

$$t_0 = \frac{2|\delta|\pi}{\Omega^2} . \quad (3.41)$$

Δεύτερη περίπτωση: Δημιουργία κβαντικών πυλών με καταστάσεις εξιτονίου

Στη δεύτερη περίπτωση παίρνουμε $\frac{\Omega}{2} \ll \left| 2\delta + \frac{E_B}{\hbar} \right|$, αλλά όχι $\frac{\Omega}{2} \ll |\delta|$. Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να κάνουμε αδιαβατική απαλοιφή της συνεισφοράς της κατάστασης $|2\rangle$, δηλαδή μπορούμε απλώς να θεωρήσουμε ότι στην εξίσωση (3.28) έχουμε $\dot{c}_2(t) \approx 0$ και τότε

$$c_2(t) \approx -\frac{\Omega}{2(2\delta + \frac{E_B}{\hbar})} e^{i\varphi} c_1(t) \quad (3.42)$$

Με αντικατάσταση στην και (3.27) έχουμε

$$i\dot{c}_0(t) = \frac{\Omega}{2} e^{-i\varphi} c_1(t) \quad (3.43)$$

$$i\dot{c}_1(t) = \frac{\Omega}{2} e^{i\varphi} c_0(t) + \left[\delta - \frac{\Omega^2}{4(2\delta + \frac{E_B}{\hbar})} \right] c_1(t) \quad (3.44)$$

Το παραπάνω σύστημα είναι ένα απλό σύστημα δύο επιπέδων με συχνότητα Rabi Ω και αποσυντονισμό $\delta - \frac{\Omega^2}{4(2\delta + \frac{E_B}{\hbar})}$. Για να επιτύχουμε τον βέλτιστο έλεγχο στο σύστημα και να έχουμε δημιουργία κβαντικών πυλών, μπορούμε να επιλέξουμε τον αποσυντονισμό να είναι μηδέν, δηλαδή

$$\delta = \frac{\Omega^2}{4(2\delta + \frac{E_B}{\hbar})} \quad (3.45)$$

που μας δίνει μια εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς δ με λύσεις

$$\delta = \frac{-\frac{E_B}{\hbar} \pm \sqrt{\left(\frac{E_B}{\hbar}\right)^2 + 2\Omega^2}}{4} \quad (3.46)$$

Τότε οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται

$$i\dot{c}_0(t) = \frac{\Omega}{2} e^{-i\varphi} c_1(t) \quad (3.47)$$

$$i\dot{c}_1(t) = \frac{\Omega}{2} e^{i\varphi} c_0(t) \quad (3.48)$$

που έχουν λύση για γενικές αρχικές συνθήκες που το σύστημα βρίσκεται στη θεμελιώδη κατάσταση αρχικά $c_0(t=0) = \alpha$, $c_2(t=0) = \beta$, με $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, ως

$$c_0(t) = \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right)\alpha - ie^{-i\varphi}\sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right)\beta \quad (3.49)$$

$$c_1(t) = -ie^{i\varphi}\sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right)\alpha + \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right)\beta \quad (3.50)$$

Επιλέγοντας τώρα κατάλληλα τη συχνότητα Rabi Ω και τη φάση φ μπορούμε να κάνουμε μια οποιαδήποτε κβαντική πύλη στο σύστημα της κβαντικής τελείας μεταξύ της θεμελιώδους κατάστασης και της κατάστασης εξιτονίου. Π.χ. για την πύλη NOT που είναι η συνήθης κβαντική πύλη που χρησιμοποιούμε για έλεγχο των διαδικασιών υλοποίησης κβαντικών πυλών, απλώς πρέπει να ξεκινήσουμε από την αρχική θεμελιώδη κατάσταση και να καταλήξουμε στην διεγερμένη κατάσταση, χωρίς να έχω κάποια επιπλέον φάση. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε με συνθήκες

$$\frac{\Omega}{2}t = \frac{\pi}{2} \text{ ή } \Omega t = \pi \quad (3.51)$$

που μας δίνει τον ελάχιστο χρόνο για να πετύχουμε την δεδομένη πύλη ως

$$t_{NOT} = \frac{\pi}{\Omega} \quad (3.52)$$

και επίσης για να μην εισαχθεί επιπλέον φάση $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

3.5 Βασικά αριθμητικά αποτελέσματα

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε βασικά αριθμητικά αποτελέσματα για να ελέγξουμε τα αναλυτικά αποτελέσματα που εξάγαμε στην προηγούμενη ενότητα. Θα παρουσιάσουμε δύο περιπτώσεις αποτελεσμάτων. Αρχικά εξάγουμε αποτελέσματα για μια περίπτωση ιδανικών κβαντικών τελειών χωρίς απόσβεση και αποσυμφωνία με αριθμητική επίλυση τόσο των εξισώσεων (3.6) έως (3.14) όσο και των εξισώσεων (3.26) έως (3.28). Οι εξισώσεις επιλύονται αριθμητικά και βρίσκουμε ότι και τα δύο σεντ εξισώσεων, όπως έπρεπε να περιμένουμε, δίνουν τα ίδια αποτελέσματα. Επίσης, θα δείξουμε αποτελέσματα και για ρεαλιστικές κβαντικές τελείες, όπου η απόσβεση και η αποσυμφωνία θα λαμβάνεται υπόψη με χρήση των εξισώσεων (3.15) έως (3.23). Τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι για τυπικές τιμές κβαντικών τελειών CdSe/ZnSe [24,32,33] για διαφορετικές τιμές της συχνότητας Rabi Ω και

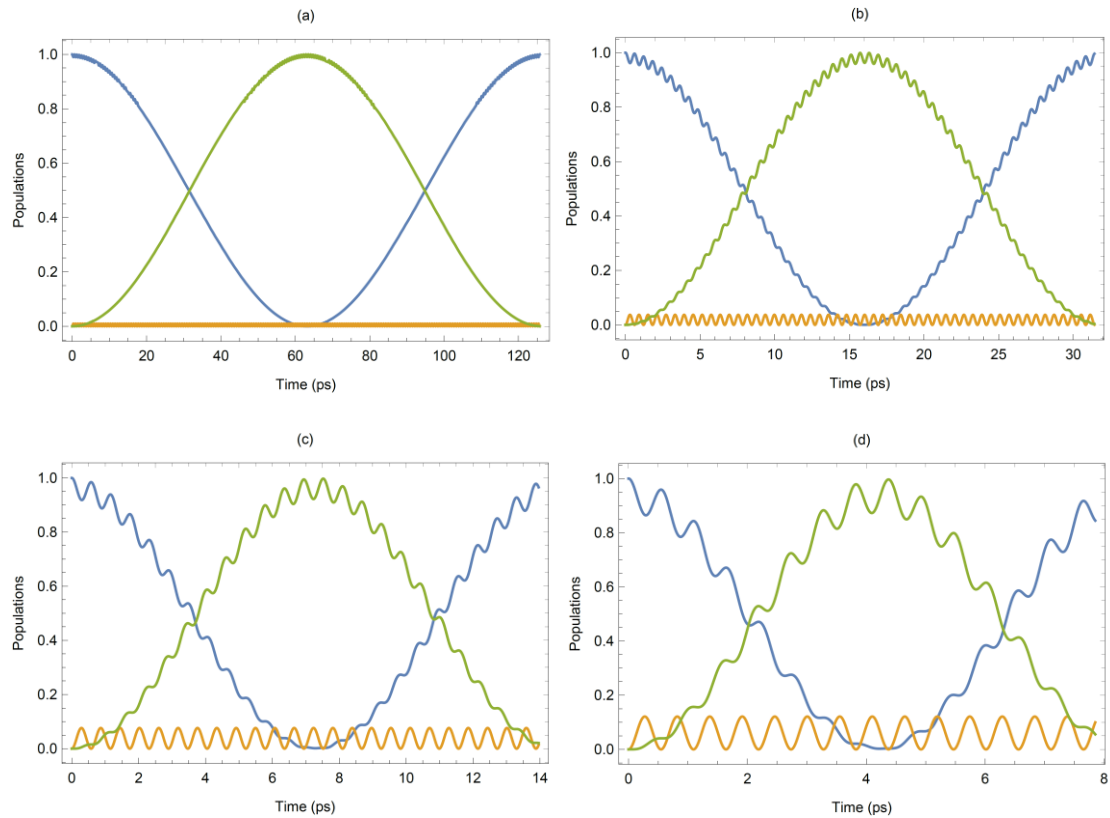
του αποσυντονισμού. Οι τιμές των ρυθμών απόσβεσης και αποσυμφωνίας που χρησιμοποιούμε είναι $\Gamma_{nn} = \frac{1}{800} ps^{-1}$, $\gamma_{nm} = \frac{1}{300} ps^{-1}$ [32,33].

Στο Σχήμα 3.1 βλέπουμε τα αποτελέσματα για τέσσερις τιμές της συχνότητας Rabi $\Omega = 1 ps^{-1}$ σχήμα (a), $\Omega = 2 ps^{-1}$ σχήμα (b), $\Omega = 3 ps^{-1}$ σχήμα (c) και $\Omega = 4 ps^{-1}$ σχήμα (d). Σε όλα τα αποτελέσματα της εργασίας έχουμε πάρει τιμή διεξιτονικής μετατόπισης $E_B/\hbar = -20 ps^{-1}$, που είναι τυπική για κβαντικές τελείες CdSe/ZnSe [22,24,32]. Επίσης, σε όλες τις περιπτώσεις για να επιτύχουμε τη μετάβαση στη διεξιτονική κατάσταση με μεγάλη απόδοση $\delta = 10 ps^{-1}$, έτσι ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση (3.35). Τα φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας δεν έχουν ληφθεί υπόψη. Στο σχήμα 3.1(a) όπου $\Omega = 1 ps^{-1}$ η συνθήκη $\frac{\Omega}{2} \ll |\delta|$ ισχύει εξαιρετικά και έτσι η συμβολή της κατάστασης εξιτονίου είναι ασήμαντη. Στην περίπτωση αυτή πετυχαίνουμε μεταφορά με πιθανότητα 99.99 % σε χρόνο t_0 . Όμως ο χρόνος $t_0 = 62.8 ps$ είναι σχετικά μεγάλος για κβαντικές διεργασίες σε αυτές τις κβαντικές τελείες, οπότε περιμένουμε τα φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας να παίξουν σημαντικό ρόλο σε αυτή την περίπτωση. Αυτό φαίνεται καθαρά στο σχήμα 3.2(a), όπου έχουμε λάβει υπόψη τα φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας και η πιθανότητα μεταφοράς πέφτει στο 90.37 %.

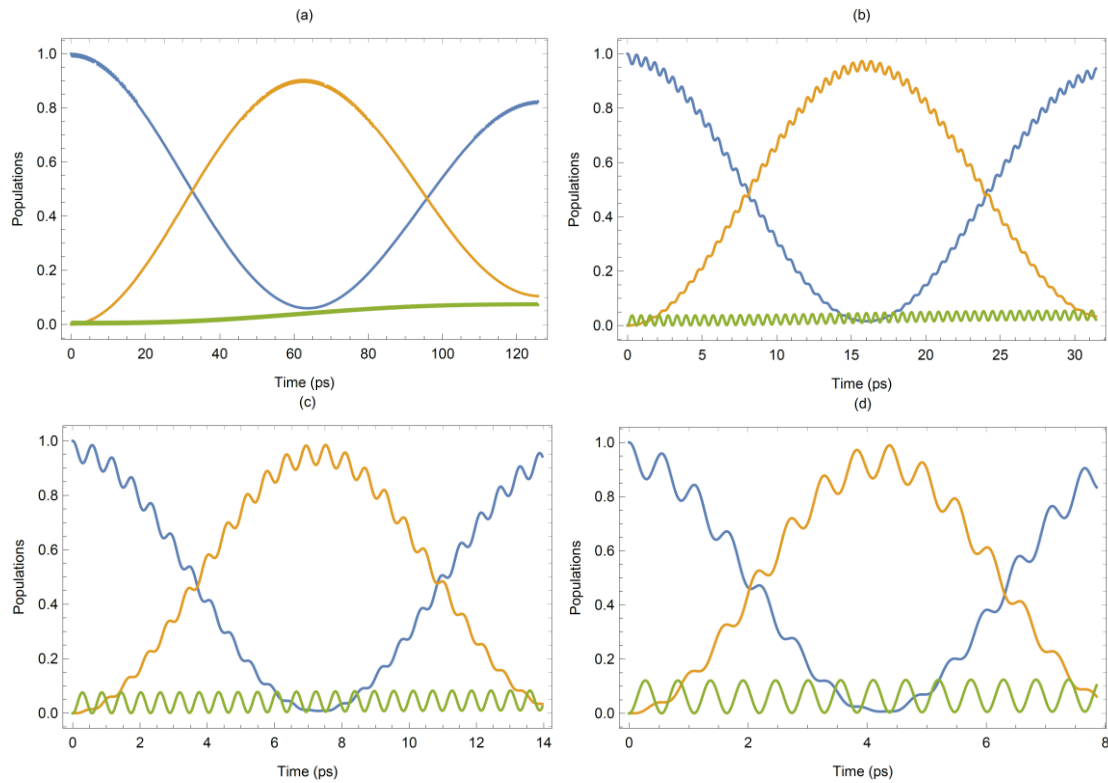
Στο σχήμα 3.1(b) όπου $\Omega = 2 ps^{-1}$ η συνθήκη $\frac{\Omega}{2} \ll |\delta|$ ισχύει ικανοποιητικά και όπως βλέπουμε η συμβολή της κατάστασης εξιτονίου είναι μικρή, αλλά όχι αμελητέα. Η συμβολή της κατάστασης εξιτονίου οδηγεί σε μικρές ταλαντώσεις στους πληθυσμούς των καταστάσεων και η μεταφορά πληθυσμού επηρεάζεται ασθενώς από αυτές τις ταλαντώσεις. Στην περίπτωση αυτή πετυχαίνουμε μεταφορά με πιθανότητα 99.90 % σε χρόνο t_0 . Όμως, επειδή ο χρόνος t_0 μικραίνει σε αυτή την περίπτωση και γίνεται $t_0 = 15.7 ps$ η επίδραση των φαινομένων απόσβεσης είναι λιγότερο σημαντική, όπως φαίνεται και από το σχήμα 3.2(b) και η πιθανότητα μεταφοράς στην κατάσταση διεξιτονίου είναι 97.31 %.

Παρόμοια συμπεριφορά παίρνουμε και στις δύο άλλες περιπτώσεις, όπου η αύξηση της τιμής της συχνότητας Rabi αυξάνει και το πλάτος των εσωτερικών ταλαντώσεων των πληθυσμών μια και η συνεισφορά της κατάστασης εξιτονίου γίνεται πιο έντονη. Ταυτόχρονα και ο χρόνος t_0 μειώνεται. Σε αυτές τις περιπτώσεις όταν $\Omega = 3 ps^{-1}$, όπως βλέπουμε από τα σχήματα 3.1(c) και 3.2(c), οι πιθανότητες μετάβασης στην κατάσταση διεξιτονίου είναι 99.10 % χωρίς φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας και 97.92 % με φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας, ενώ για $\Omega = 4 ps^{-1}$, όπως βλέπουμε από τα σχήματα 3.1(d) και 3.2(d), είναι

94.60 % χωρίς φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας και 93.97 % με φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας.



Σχήμα 3.1: Δυναμική του πληθυσμού των καταστάσεων της θεμελιώδους κατάστασης (μπλε καμπύλη), κατάστασης εξιτονίου (πορτοκαλί καμπύλη) και διεξιτονίου (πράσινη καμπύλη) για τέσσερις τιμές της συχνότητας Rabi $\Omega = 1 \text{ ps}^{-1}$ σχήμα (a), $\Omega = 2 \text{ ps}^{-1}$ σχήμα (b), $\Omega = 3 \text{ ps}^{-1}$ σχήμα (c) και $\Omega = 4 \text{ ps}^{-1}$ σχήμα (d). Τα φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας δεν έχουν ληφθεί υπόψη σε αυτό το σχήμα.

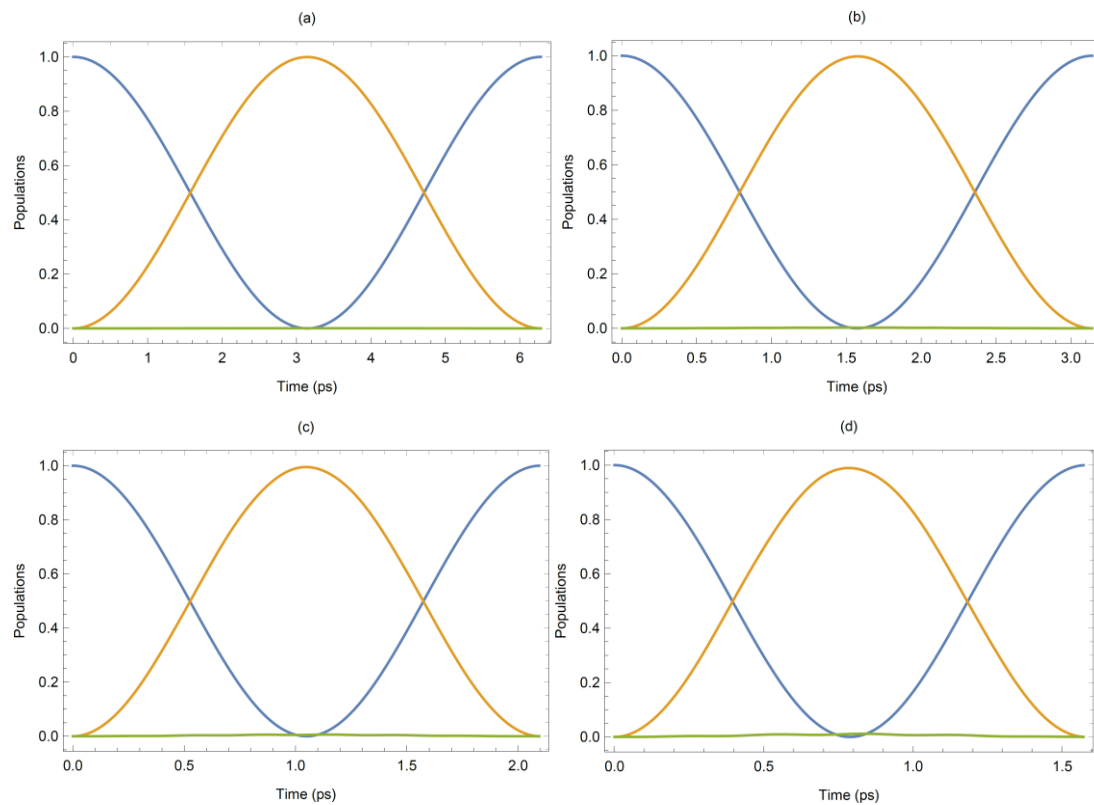


Σχήμα 3.2: Το ίδιο με το σχήμα 1, αλλά τα φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας έχουν ληφθεί υπόψη σε αυτό το σχήμα. Οι τιμές των ρυθμών απόσβεσης και αποσυμφωνίας που χρησιμοποιούμε είναι $\Gamma_{nn} = \frac{1}{800} ps^{-1}$, $\gamma_{nm} = \frac{1}{300} ps^{-1}$.

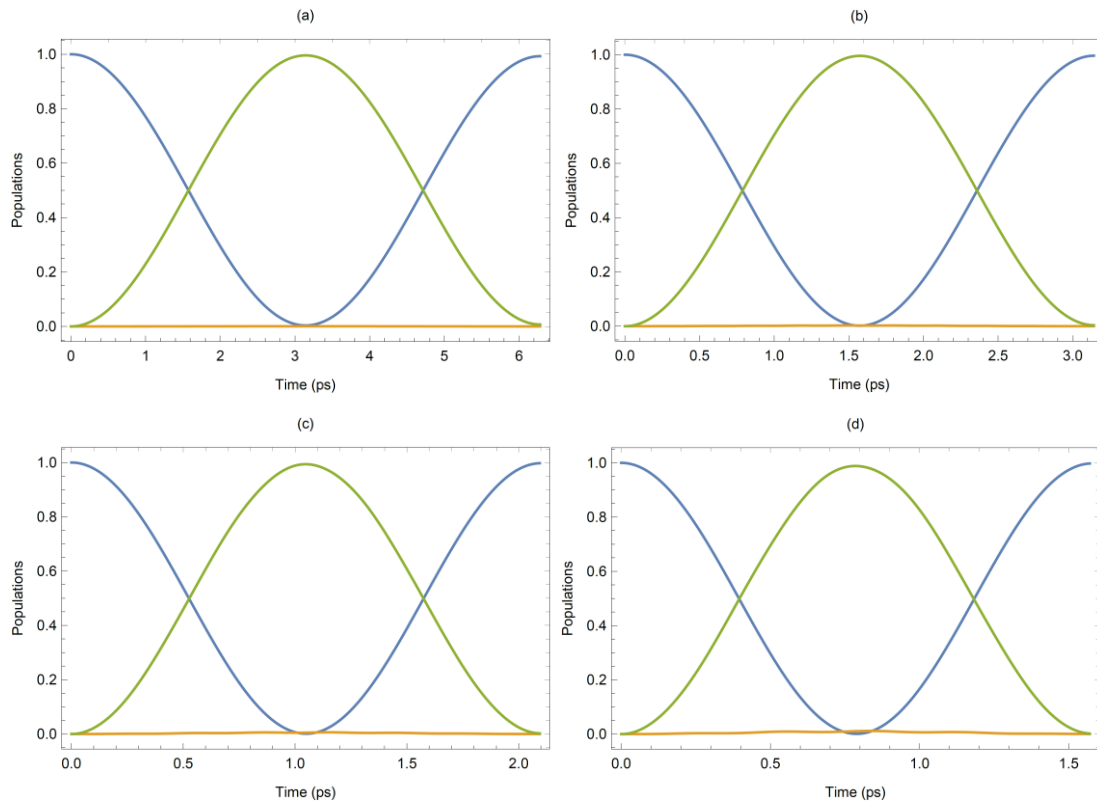
Επειδή βέβαια τα φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας είναι υπαρκτά και πρέπει να λαμβάνονται υπόψη για ρεαλιστικούς υπολογισμούς, εδώ βρήκαμε ότι την καλύτερη μεταφορά την παίρνουμε στην περίπτωση που $\Omega = 3 ps^{-1}$, δηλαδή για λόγο $\frac{\Omega}{\delta} = 0.3$ (θυμίζω ότι $\delta = 10 ps^{-1}$) ή $\frac{\Omega}{|E_B|} = 0.15$. Κάνοντας άλλους υπολογισμούς για διαφορετικές κβαντικές τελείες, π.χ. InGaAs/GaAs, που δεν δείχνουμε εδώ, βρήκαμε ότι αυτή η επιλογή δίνει σημαντικά καλή μεταφορά πληθυσμού, άνω του 97%, και σε άλλες περιπτώσεις με φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας. Έτσι, καταλήγουμε ότι με το πιο απλό πεδίο laser, αν κάποιος ακολουθήσει την παραπάνω μέθοδο μπορεί να πετύχει πολύ υψηλή μεταφορά πληθυσμού στην κατάσταση διεξιτονίου, άνω του 97%, που, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, είναι εξαιρετικά σημαντική για τη δημιουργία συμπλεκτών φωτονίων υψηλής απόδοσης από την κβαντική τελεία.

Στη συνέχεια ελέγχουμε τη δημιουργία της κβαντικής πύλης NOT. Έτσι, αν το σύστημα ξεκινήσει αρχικά από την θεμελιώδη κατάσταση μετά από κάποιο χρόνο θα πρέπει να μεταφερθεί στην κατάσταση εξιτονίου. Στο Σχήμα 3.3 βλέπουμε τα αποτελέσματα για τέσσερις τιμές της συχνότητας Rabi $\Omega = 1 ps^{-1}$ σχήμα (a), $\Omega = 2 ps^{-1}$ σχήμα (b), $\Omega =$

3 ps^{-1} σχήμα (c) και $\Omega = 4 \text{ ps}^{-1}$ σχήμα (d). Για να επιτύχουμε τον έλεγχο της εξιτονικής κατάστασης και τη δημιουργία κβαντικών πυλών επιλέγουμε τον αποσυντονισμό να ικανοποιεί την εξίσωση (3.46) με $\delta = \frac{-E_B - \sqrt{\left(\frac{E_B}{\hbar}\right)^2 + 2\Omega^2}}{4}$. Τα φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας δεν έχουν ληφθεί υπόψη. Στο σχήμα 3.3(a) όπου $\Omega = 1 \text{ ps}^{-1}$ η συνθήκη $\frac{\Omega}{2} \ll \left|2\delta + \frac{E_B}{\hbar}\right|$ ισχύει εξαιρετικά και έτσι η συμβολή της κατάστασης διεξιτονίου είναι ασήμαντη. Στην περίπτωση αυτή πετυχαίνουμε μεταφορά με πιθανότητα 99.94 % σε χρόνο t_{NOT} . Εδώ ο χρόνος $t_{NOT} = 3.14 \text{ ps}$ είναι αρκετά μικρός, αφού καθορίζεται από τη συχνότητα Rabi Ω , οπότε δεν περιμένουμε τα φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας να παίξουν ρόλο σε αυτή την περίπτωση. Αυτό φαίνεται καθαρά στο σχήμα 3.4(a), όπου έχουμε λάβει υπόψη τα φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας και η πιθανότητα μεταφοράς αλλάζει μόνο λίγο και γίνεται 99.58 %.



Σχήμα 3.3: Δυναμική του πληθυσμού των καταστάσεων της θεμελιώδους κατάστασης (μπλε καμπύλη), κατάστασης εξιτονίου (πορτοκαλί καμπύλη) και διεξιτονίου (πράσινη καμπύλη) για τέσσερις τιμές της συχνότητας Rabi $\Omega = 1 \text{ ps}^{-1}$ σχήμα (a), $\Omega = 2 \text{ ps}^{-1}$ σχήμα (b), $\Omega = 3 \text{ ps}^{-1}$ σχήμα (c) και $\Omega = 4 \text{ ps}^{-1}$ σχήμα (d). Τα φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας δεν έχουν ληφθεί υπόψη σε αυτό το σχήμα.



Σχήμα 3.4: Το ίδιο με το σχήμα 3.3, αλλά τα φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας έχουν ληφθεί υπόψη σε αυτό το σχήμα. Οι τιμές των ρυθμών απόσβεσης και αποσυμφωνίας που χρησιμοποιούμε είναι $\Gamma_{nn} = \frac{1}{800} ps^{-1}$, $\gamma_{nm} = \frac{1}{300} ps^{-1}$.

Παρόμοια συμπεριφορά παίρνουμε και στις περιπτώσεις $\Omega = 2 ps^{-1}$ και $\Omega = 3 ps^{-1}$ όπου η αύξηση της τιμής της συχνότητας Rabi μειώνει το χρόνο δημιουργίας της κατάστασης NOT. Και σε αυτές τις δύο περιπτώσεις η επίδραση της κατάστασης διεξιτονίου είναι εξαιρετικά ασθενής. Σε αυτές τις περιπτώσεις όταν $\Omega = 2 ps^{-1}$, όπως βλέπουμε από τα σχήματα 3.3(b) και 3.4(b), οι πιθανότητες δημιουργίας της κατάστασης εξιτονίου είναι 99.76 % χωρίς φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας και 99.58 % με φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας, ενώ για $\Omega = 3 ps^{-1}$, όπως βλέπουμε από τα σχήματα 3.3(c) και 3.4(c), είναι 99.49 % χωρίς φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας και 99.37 % με φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας.

Τέλος, στο σχήμα 3.3(d), όπου $\Omega = 4 ps^{-1}$ η συνθήκη $\frac{\Omega}{2} \ll \left| 2\delta + \frac{E_B}{\hbar} \right|$ ισχύει ικανοποιητικά και όπως βλέπουμε η συμβολή της κατάστασης διεξιτονίου είναι μικρή, αλλά όχι αμελητέα. Η συμβολή της κατάστασης διεξιτονίου οδηγεί σε μικρό πληθυσμό και στη διεξιτονική κατάσταση και η μεταφορά πληθυσμού στην κατάσταση εξιτονίου επηρεάζεται ασθενώς από την επίδραση της διεξιτονικής κατάστασης. Στην περίπτωση αυτή πετυχαίνουμε μεταφορά

με πιθανότητα 98.93 % σε χρόνο t_{NOT} . Η επίδραση των φαινομένων απόσβεσης και αποσυμφωνίας είναι λιγότερο σημαντική, λόγω του μικρού χρόνου της όλης διεργασίας, όπως φαίνεται και από το σχήμα 3.4(d), και η πιθανότητα μεταφοράς στην κατάσταση διεξιτονίου είναι 98.84 %. Για μεγαλύτερες τιμές της συχνότητας Rabi Ω , λόγω μεγαλύτερης συμβολής της διεξιτονικής κατάστασης, η πιθανότητα μεταφοράς στην εξιτονική κατάσταση μειώνεται περαιτέρω.

3.6 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία παρουσιάσαμε μια νέα μέθοδο για την προετοιμασία της διεξιτονικής κατάστασης με χρήση πεδίων laser με ορθογώνια μορφή, και συγκεκριμένα δείξαμε, ότι υπό κατάλληλες συνθήκες που εξάγουμε αναλυτικά, και βασίζονται στις συνθήκες: (α) η συχνότητα Rabi να είναι μικρότερη από τον αποσυντονισμό από την εξιτονική κατάσταση και (β) το πεδίο laser να βρίσκεται σε διφωτονικό συντονισμό με την μετάβαση θεμελιώδους κατάστασης – κατάστασης διεξιτονίου, μπορούμε να επιτύχουμε εξαιρετικά υψηλής απόδοσης διέγερση της κατάστασης διεξιτονίου σε τυπικές κβαντικές τελείες, άνω του 97 %, ακόμα και υπό την επίδραση φαινομένων απόσβεσης και αποσυμφωνίας. Επιπλέον, δείξαμε ότι τα συγκεκριμένα πεδία laser μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατάλληλα και για τη δημιουργία κβαντικών πυλών μεταξύ θεμελιώδους κατάστασης και κατάστασης εξιτονίου της κβαντικής τελείας, υπό την παρουσία της κατάστασης διεξιτονίου, και δώσαμε αναλυτικά τις συγκεκριμένες συνθήκες. Τα αποτελέσματά μας ελέγχθηκαν με αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων του πίνακα πυκνότητας με φαινόμενα απόσβεσης και αποσυμφωνίας για τυπικές κβαντικές τελείες. Σημειώνουμε, ότι οι μεθοδολογίες που αναπτύξαμε εδώ μπορεί να χρησιμοποιηθούν και σε άλλες κβαντικές διεργασίες που μπορεί να μοντελοποιηθούν με συστήματα τριών επιπέδων τύπου σκάλας που αλληλεπιδρούν με ένα πεδίο laser ή και με κατάλληλες επεκτάσεις και σε συστήματα που μοντελοποιούνται με τέσσερα επίπεδα και αλληλεπιδρούν με δύο πεδία laser, όπως, π.χ. για τη δημιουργία πλήρως οπτικών κβαντικών πυλών δύο qubits σε κβαντικές τελείες, στα συστήματα που μελετήθηκαν στις εργασίες [36,37].

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] R. A. Serway, C. J. Moses, and C. A. Moyer, Σύγχρονη Φυσική, (ΠΕΚ, 2013).
- [2] S. Gaponenko, Introduction to Nanophotonics, (Cambridge University Press, 2010).
- [3] G. W. Hanson, Αρχές Νανοηλεκτρονικής, (Εκδόσεις Τζιόλα, 2008).
- [4] Μ. Ιωάννου, Μελέτη μεταβατικής απορρόφησης σε συστήματα κβαντικών τελειών που εμφανίζουν φαινόμενα οπτικής διαφάνειας, Μεταπτυχιακή εργασία, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2008.
- [5] P. Harrison, Quantum Wells, Wires and Dots, (Wiley, 2010, 3rd edition).
- [6] Ι. Χατζόπουλος, Μη-γραμμική οπτική σε σύνθετες δομές κβαντικών τελειών ZnO, Μεταπτυχιακή εργασία, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2015.
- [7] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, (Cambridge University Press, 2000).
- [8] Ι. Καραφυλλίδης, Κβαντική Υπολογιστική, (Κάλλιπος, 2015).
- [9] D. Huber, M. Reindl, J. Aberl, A. Rastelli, and R. Trotta, *Semiconductor quantum dots as an ideal source of polarization-entangled photon pairs on-demand: a review*, J. Opt. 20, 073002 (2018).
- [10] Y. Li, F. Ding, and O. G. Schmidt. *Entangled-photons generation with quantum dots*. Chinese Phys. B. 27, 020307 (2018).
- [11] Quantum Dots for Quantum Information Technologies, edited by P. Michler (Springer, 2017).
- [12] H. Jayakumar, A. Predojevic, T. Huber, T. Kauten, G. S. Solomon, and G. Weihs, Deterministic Photon Pairs and Coherent Optical Control of a Single Quantum Dot, Phys. Rev. Lett. 110, 135505 (2013).
- [13] M. Müller, S. Bounouar, K. D. Jöns, M. Glässl, and P. Michler, On-demand generation of indistinguishable polarization-entangled photon pairs, Nat. Photon. 8, 224 (2014).
- [14] D. Heinze, D. Breddermann, A. Zrenner, and S. Schumacher, A quantum dot single-photon source with on-the-fly all-optical polarization control and timed emission, Nat. Commun. 6, 8473 (2015).
- [15] R. Winik, D. Cogan, Y. Don, I. Schwartz, L. Gantz, E. R. Schmidgall, N. Livneh, R. Rapaport, E. Buks, and D. Gershoni, On-demand source of maximally entangled photon pairs using the biexciton-exciton radiative cascade, Phys. Rev. B 95, 235435 (2017).
- [16] D. Huber, M. Reindl, Y.-H. Huo, H.-Y. Huang, J. S. Wildmann, O. G. Schmidt, A. Rastelli, and R. Trotta, Highly indistinguishable and strongly entangled photons from symmetric GaAs quantum dots, Nat. Commun. 8, 15506 (2017).
- [17] Y. Chen, M. Zopf, R. Keil, F. Ding, and O. G. Schmidt, Highly-efficient extraction of entangled photons from quantum dots using a broadband optical antenna, Nat. Commun. 9, 2994 (2018).

- [18] T. Flissikowski, A. Betke, I. A. Akimov, and F. Henneberger, Two-Photon Coherent Control of a Single Quantum Dot, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 227401 (2004).
- [19] I. A. Akimov, J. T. Andrews, and F. Henneberger, Stimulated Emission from the Biexciton in a Single Self-Assembled II-VI Quantum Dot, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 067401 (2006).
- [20] S. Stufler, P. Machnikowski, P. Ester, M. Bichler, V. M. Axt, T. Kuhn, and A. Zrenner, Two-photon Rabi oscillations in a single $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}$ quantum dot, *Phys. Rev. B* **73**, 125304 (2006).
- [21] P. Machnikowski, Theory of two-photon processes in quantum dots: Coherent evolution and phonon-induced dephasing, *Phys. Rev. B* **78**, 195320 (2008).
- [22] E. Paspalakis, Controlled preparation of a biexciton state in a quantum dot, *J. Comput. Theor. Nanosci.* **7**, 1717 (2010).
- [23] G. Bensky, S. V. Nair, H. E. Ruda, S. Dasgupta, G. Kurizki, and P. Brumer, Highly efficient biexciton preparation for quantum-dot entangled photon generation, *J. Phys. B* **46**, 055503 (2013).
- [24] H. Y. Hui and R. B. Liu, Proposal for geometric generation of a biexciton in a quantum dot using a chirped pulse, *Phys. Rev. B* **78**, 155315 (2008).
- [25] M. Glässl, A. M. Barth, K. Gawarecki, P. Machnikowski, M. D. Croitoru, S. Lüker, D. E. Reiter, T. Kuhn, and V. M. Axt, Biexciton state preparation in a quantum dot via adiabatic rapid passage: Comparison between two control protocols and impact of phonon-induced dephasing, *Phys. Rev. B* **87**, 085303 (2013).
- [26] A. Debnath, C. Meier, B. Chatel, and T. Amand, High-fidelity biexciton generation in quantum dots by chirped laser pulses, *Phys. Rev. B* **88**, 201305(R) (2013).
- [27] T. Kaldewey, S. Lüker, A. V. Kuhlmann, S. R. Valentin, A. Ludwig, A. D. Wieck, D. E. Reiter, T. Kuhn, and R. J. Warburton, Coherent and robust high-fidelity generation of a biexciton in a quantum dot by rapid adiabatic passage, *Phys. Rev. B* **95**, 161302(R) (2017).
- [28] D. E. Reiter, T. Kuhn, M. Glässl, and V. M. Axt, The role of phonons for exciton and biexciton generation in an optically driven quantum dot, *J. Phys.: Condens. Matter* **26**, 423203 (2014).
- [29] P.-L. Ardelt, L. Hanschke, K. A. Fischer, K. Müller, A. Kleinkauf, M. Koller, A. Bechtold, T. Simmet, J. Wierzbowski, H. Riedl, G. Abstreiter, and J. J. Finley, Dissipative preparation of the exciton and biexciton in self-assembled quantum dots on picosecond time scales, *Phys. Rev. B* **90**, 241404(R) (2014).
- [30] J. H. Quilter, A. J. Brash, F. Liu, M. Glässl, A. M. Barth, V. M. Axt, A. J. Ramsay, M. S. Skolnick, and A. M. Fox, Phonon-Assisted Population Inversion of a Single $\text{InGaAs}/\text{GaAs}$ Quantum Dot by Pulsed Laser Excitation, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 137401 (2015).
- [31] S. Bounouar, M. Müller, A. M. Barth, M. Glässl, V. M. Axt, and P. Michler, Phonon-assisted robust and deterministic two-photon biexciton preparation in a quantum dot, *Phys. Rev. B* **91**, 161302(R) (2015).

- [32] D. Stefanatos and E. Paspalakis, Rapid biexciton-state preparation in a quantum dot using on-off pulse-sequences, *Physical Review A* 102, 052618 (2020).
- [33] A. Smponias, D. Stefanatos, and E. Paspalakis, Efficient biexciton preparation in a quantum dot - metal nanoparticle system using on-off pulses, *Nanomaterials* 11, 1859 (2021).
- [34] A. Nazir, B.W. Lovett, S. D. Barrett, T. P. Spiller, and G. A. D. Briggs, Selective spin coupling through a single exciton, *Phys. Rev. Lett.* 93, 150502 (2004).
- [35] Ren-Bao Liu, Wang Yao, and L.J. Sham, Quantum computing by optical control of electron spins, *Advances in Physics* 59 703 (2010).
- [36] M. S. Qureshi, P. Sen, J. T. Andrews, and P. K. Sen, All Optical Quantum CNOT Gate in Semiconductor Quantum Dots, *IEEE J. Quant. Electron.* 45, 59 (2009).
- [37] M. K. Mehta, J. T. Andrews, and P. Sen, *Quant. Inform. Process.* 20, 194 (2021).