ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΡΟΥΣΟΠΟΥΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Με τον Καντ ξεκινούν οι σύγχρονες προσπάθειες για να διατυπωθούν με ακρίβεια διακρίσεις όπως a priori - a posteriori, αναλυτικό-συνθετικό κλπ. Η διάκριση a priori - a posteriori είναι επιστημολογικού χαρακτήρα· αφορά την προέλευση και τη θεμελίωση μιας ομάδας προτάσεων (λ.χ. των προτάσεων της αριθμητικής). Για τον Καντ, αν και δεν είναι σαφές ότι η γνώση πρωταρχίζει με την εμπειρία, εν τούτοις το ερώτημα είναι αν η γνώση προέρχεται από την εμπειρία[1]. Ειδικά σχετικά με τις προτάσεις των μαθηματικών, θεμελιώδες αίτημα του Καντ είναι η άποψη ότι οι προτάσεις των μαθηματικών αποτελούν παραδειγματικό είδος προτάσεων που είναι ανεξάρτητες από την εμπειρία γενικά. Η γνώση που μας παρέχουν τα μαθηματικά, κατά τον Καντ, είναι a priori γνώση δεδομένου ότι οι μαθηματικές αλήθειες είναι αναγκαίες και καθολικές - και το πιο σημαντικό - προκύπτουν με τη διαμεσολάβηση των εποπτειών του χώρου και του χρόνου (είναι δηλαδή συνθετικές a priori προτάσεις)[2]. Έκτοτε, οι θέσεις του Καντ για την απριορικότητα των μαθηματικών αποτελούν χαρακτηριστικές απόψεις τόσο των μαθηματικών όσο και των φιλοσόφων γενικά - εκτός από μερικές αξιοσημείωτες περιπτώσεις που θα μας απασχολήσουν πιο κάτω. Οι θέσεις του Καντ για τα μαθηματικά αποτελούν γενικά αμφιλεγόμενα ζητήματα της φιλοσοφίας· όμως, ειδικά η άποψή του ότι τα μαθηματικά είναι a priori είναι βαθιά ριζωμένα στη φιλοσοφική και στην προφιλοσοφική παιδεία. Είναι αξιοσημείωτο ότι οι λεγόμενες ιστορικές σχολές των μαθηματικών (λογικισμός, φορμαλισμός κλπ.), η καθεμιά τους για δικούς της λόγους. Θεωρούν ότι τα μαθηματικά είναι a priori επιστήμη[3] - σε αντίθεση

1. Βλ. Ι. Καντ: Η Κριτική του καθαρού Λόγου, 1787, μετ. Α. Γιανναρά, Παπαζήσης, Αθήνα 1976. Στη δεύτερη έκδοση της Κριτικής διαβάζουμε:

«Αλλά ακόμα και αν κάθε γνώση μας πρωταρχίζει με την εμπειρία (mit der Erfahrung), αυτό δεν σημαίνει ότι καθεμιά πηγάζει από την εμπειρία (aus der Erfahrung))» (B1). Βλ. επιπλέον Ι. Καντ: Προλεγόμενα σε κάθε μελλοντική μεταφυσική, 1783, μετ. Γ. Τζαβάρα, Δωδώνη, Αθήνα 1982 (Κεφάλαιο: Η δυνατότητα των καθαρών μαθηματικών).

2. Όπ. π., Η Κριτική, B14-17.

3. Βλ. Δ. Αναπολιτάνος: Εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών, Νεφέλη, Αθήνα 1985, αντίστοιχα κεφάλαια της ιστορίας των φιλοσοφικών απόψεων των μαθηματικών.

με τις φυσικές επιστήμες οι οποίες αποτελούν πρότυπα εμπειρικών επιστημών. Είναι πραγματικά εύλογο να θεμελιώσουμε τις φυσικές επιστήμες στις αισθητηριακές μας εμπειρίες και στις αιτιακές σχέσεις που προκαλεί η ύπαρξη των υλικών αντικειμένων και των μεταξύ τους αλληλεπιδράσεων. Αλλά εξίσου εύλογο φαίνεται αρχικά να θεμελιώσουμε τις αριθμητικές προτάσεις ανεξάρτητα από τις εμπειρίες μας του υλικού κόσμου. Γιατί πραγματικά, πώς συνδέεται το γεγονός ότι το πλήθος των πρώτων αριθμών είναι άπειρο με την εμπειρία μας του υλικού κόσμου;

Από τους συγχρόνους φιλοσόφους σχεδόν ο μόνος που επεξεργάστηκε ως ένα βαθμό ένα πρόγραμμα για μια εμπειριστική επιστημολογία των μαθηματικών είναι ο J. S. Mill[1]. Η προσπάθειά του να στηρίξει τα μαθηματικά στην εμπειρία των υλικών αντικειμένων προσέκρουσε στην κριτική του Φρέγκε[2] και αυτό έκανε τις απόψεις του Mill πολύ λίγο συμπαθητικές ακόμα και σε χαρακτηριστικά εμπειρικούς κύκλους (όπως λ.χ. οι λογικοθετικιστές). Μια κριτική στήριξη ενός εμπειριστικού προγράμματος για τη μαθηματική γνώση θα μπορούσε να αρχίσει με την κριτική του απριοριστικού μοντέλου της μαθηματικής γνώσης και να συνεχίζει με μια

1. Βλ. J.S. Mill: A system of Logic, 1843, ειδικά book II, chapters 5,6. Στο σημείο αυτό μπορούν να σημιουργηθούν παρεξηγήσεις - σπεύδω να τις προλάβω. Στη νεότερη φιλοσοφική παράδοση (αγγλόφωνη κυρίως) η διατύπωση μιας εμπειριστικής επιστημολογίας των μαθηματικών αποτελεί πρόταση του Quine (στο «Two Dogmas of Empiricism-», στο From a Logical Point of View, 1953 και Κεφ. 10 του Philosophy of Logic, Prentice-Hall, 1970) και, στη συνέχεια, του Putnam («That is Mathematical Truth?», στο Philosophical Papers, vol. I, 1975). Με τον I. Lakatos (Proofs and Refutations, Cambridge UP, 1976) γίνεται επίσης μια τέτοια πρόταση· σε όλες αυτές τις περιπτώσεις δεν είναι ιδιαίτερα σαφής η κατεύθυνση που πρέπει να ακολουθηθεί για ένα εμπειριστικό πρόγραμμα στα μαθηματικά.

Μια κεντρική θέση του Quine (από τον οποίο ξεκίνησε η κίνηση αυτή) είναι η κατάργηση της διάκρισης αναλυτικό-συνθετικό (βλ. «Two Dogmas...», όπ.π.). Η θέση αυτή αποτελεί κριτική στο λογικοθετικιστικό πρόγραμμα και ειδικά στις απόψεις του R. Carnap για τη γλώσσα και τη (λογική) αλήθεια. Με την κατάργηση της βασικής αυτής διάκρισης η θέση των μαθηματικών και της λογικής πρέπει να επαναπροσδιοριστεί. Για τον Carnap οι μαθηματικές αλήθειες είναι αναλυτικές προτάσεις. Για τον Quine, η μαθηματική γνώση πρέπει να θεωρηθεί κατ' αυστηρή αναλογία προς τη γνώση που αποκομίζουμε στη θεωρητική φυσική:

«Τα μαθηματικά και η λογική υποστηρίζονται από την παρατήρηση μόνο με τον έμμεσο τρόπο με τον οποίο υποστηρίζονται από την παρατήρηση οι πιο γενικές πλευρές της φυσικής επιστήμης. Δηλαδή ως συμμετέχοντα σε ένα οργανωμένο όλον, το οποίο στις εμπειρικές του παρυφές συμφωνεί με την παρατήρηση». (σ. 100, Philosophy of Logic)

2. Βλ. G. Frege: Τα Θεμέλια της Αριθμητικής, 1884, μετάφραση-εισαγωγή Γ. Ρουσόπουλου, Νεφέλη, Αθήνα 1987. Ειδικά §§ 6,7,8,9,10,16,23 και 25. Συναφείς συγκρίσεις στο βιβλίο του M. Resnik: Frege and the Philosophy of Mathematics, Cornell UP, 1980, σσ. 135-57 και στο D. Gillies: Frege, Dedekind and Peano on the Foundations of Arithmetic, Van Gorgum, 1983.

θετική πρόταση για το συγκεκριμένο τρόπο θεμελίωσης της μαθηματικής γνώσης στα πλαίσια του εμπειρισμού. Δεν θα αρκούσε, συνεπώς, να περιοριστούμε στη διατύπωση μερικών παρατηρήσεων σχετικά με την ανεπάρκεια του μαθηματικού απριορισμού. Πρέπει να διατυπώσουμε ταυτόχρονα μια θετική πρόταση για το μαθηματικό εμπειρισμό. Η πρόταση αυτή μπορεί να λάβει μια ασθενή μορφή: αρκεί να κατασκευάσουμε ένα επιχείρημα σύμφωνα με το οποίο τα μαθηματικά θεμελιώνονται στην υλική πραγματικότητα ή προέρχονται από αυτήν. Το εγχείρημα αυτό διευκολύνεται κάπως από το γεγονός ότι δεν ενδιαφέρει να θεμελιώσουμε το επιχείρημα για όλες τις μαθηματικές θεωρίες που γνωρίζουμε· αρκεί να γίνει για μια περιοχή των μαθηματικών απο την οποία μπορούν να προκύψουν τα υπόλοιπα μαθηματικά. Τέτοια μορφή έχουν τα επιχειρήματα που θα εξετάσουμε πιο κάτω.

Ο τρόπος με τον οποίο προχωρώ είναι ο εξής: πρώτα, αναφέρομαι στην άποψη του Mill για τη θεμελίωση της μαθηματικής γνώσης και στην κριτική που άσκησε σ' αυτόν ο Φρέγκε, ώστε να λάβουμε μια σαφέστερη ιδέα των απόψεων και των προβλημάτων του Mill. Κατόπιν, αναφέρομαι στο θετικό πρόγραμμα που διατύπωσε ο Kitcher. Η κριτική στάση που τηρώ απέναντι στον Kitcher δεν ισοδυναμεί με απόρριψη των απόψεών του - πράγμα που ελπίζω θα φανεί άλλωστε και στις προγραμματικές απόψεις που διατυπώνω προς το τέλος του άρθρου.

1. Ο MILL ΚΑΙ ΟΙ ΑΠΟΨΕΙΣ ΤΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Η φιλοσοφία της αριθμητικής που ανέπτυξε ο Mill είναι αρκετά δύσκολο να περιγραφεί. Ο Mill διατυπώνει την εύλογη διαίσθηση ότι η εμπειρία του υλικού κόσμου είναι αρκετά πλούσια ώστε, όπως ακριβώς μπορεί να στηρίξει τις θετικές επιστήμες κατ' ανάλογο τρόπο μπορεί να στηρίξει την αριθμητική. Με την έννοια αυτή, η κυρίαρχη ιδέα που αμπνέει το πρόγραμμα του Mill δεν είναι γνήσια επινόηση του ίδιου του Dill· τη συναντάμε με τη μια ή την άλλη μορφή στις προσπάθειες αναγωγής του κόσμου της νόησης στον υλικό κόσμο. Για τον Mill, δεν υπάρχει άλλη πραγματικότητα πέρα από αυτήν των υλικών αντικειμένων. Οι μαθηματικές αλήθειες της στοιχειώδους αριθμητικής λ.χ. είναι επαγωγικές γενικεύσεις πραγματικών γεγονότων του υλικού κόσμου. Τα αξιώματα προκύπτουν επίσης επαγωγικά από την υλική υποδομή του κόσμου. Έτσι, οι υπαρκτικές προτάσεις βεβαιώνουν κάποια υλικά γεγονότα. Τα μαθηματικά έτσι δεν είναι παρά μια γενική θεωρία των υλικών αντικειμένων και του κόσμου: «τρία βότσαλα σε δύο χωριστά κουτιά και τρία βότσαλα στο ίδιο κουτί δεν προκαλούν την ίδια εντύπωση στις αισθήσεις μας: και ο ισχυρισμός ότι αυτά τα ίδια βότσαλα μπορούν να προκαλέσουν ένα ορισμένο είδος εντύπωσης ή κάποιο άλλο με κατάλληλες αλλαγές στις θέσεις τους μας είναι γνωστός, όμως δεν ταυτίζεται με αυτόν παραπάνω. Πρόκειται για μια αλήθεια που τη μαθαίνουμε νωρίς-νωρίς και με τη συνεχή εμπειρία - είναι μια επαγωγική αλήθεια. Τέτοιες αλήθειες αποτελούν το θεμέλιο της επιστήμης των αριθμών. Οι θεμελιώδεις αρχές αυτής της επιστήμης στηρίζονται στη μαρτυρία των αισθήσεων»[1].

Και συνεχίζει:

«Σε κάθε βήμα αριθμητικού ή αλγεβρικού υπολογισμού υπάρχει μια πραγματική επαγωγή, ένα λογικό συμπέρασμα γεγονότων από γεγονότα. Αυτό που αποκρύπτει τον επαγωγικό χαρακτήρα είναι η καθολικότητα και η γενικότητα της γλώσσας που χρησιμοποιούμε. Όλοι οι αριθμοί είναι αριθμοί κάποιων πραγμάτων· δεν υπάρχουν αφηρημένοι αριθμοί. Το «δέκα» πρέπει να σημαίνει δέκα σώματα, δέκα ήχους, δέκα χτύπους, κοκ. Όμως οι αριθμοί αν και πρέπει να είναι αριθμοί κάποιων πραγμάτων μπορεί να είναι αριθμοί οποιωνδήποτε πραγμάτων. Οι προτάσεις λοιπόν που αφορούν τους αριθμούς έχουν την ιδιομορφία ότι είναι προτάσεις που αφορούν οποιαδήποτε πράγματα - κάθε αντικείμενο, κάθε ύπαρξη, οποιονδήποτε είδους γνωρίζουμε στην εμπειρία μας»[1].

Τα προβλήματα που αντιμετωπίζει μια τέτοια άποψη για τα μαθηματικά δεν είναι κυρίως ο περιορισμένος χαρακτήρας των μαθηματικών θεωριών που μπορεί να καλύψει. Δεν πρόκειται δηλαδή για το ότι οι απόψεις του Mill περιορίζονται να καλύψουν φιλοσοφικά τη στοιχειώδη αριθμητική και την άλγεβρα αφήνοντας ανοιχτό το ζήτημα σχετικά με την θεωρία των συνόλων, τη σύγχρονη ανάλυση κλπ. Τα αποτελέσματα φαίνονται πενιχρά γιατί από ένα σημείο και μετά - στην περιοχή της αριθμητικής λ.χ. - δεν βρίσκουμε πειστική την αντιστοιχία μεταξύ υλικού, εμπειρικού κόσμου και των μαθηματικών. Τα μαθηματικά δεν είναι σε θέση να «σώσουν» τα φαινόμενα· δεν υπάρχουν παρατηρησιακά δεδομένα τα οποία αν γνωρίζαμε θα μας επέτρεπαν να απαντήσουμε ανοιχτά ερωτήματα της στοιχειώδους αριθμητικής (λ.χ. την εικασία του Goldbach)[2]. Από την άλλη πλευρά, δεν υπάρχουν φυσικά φαινόμενα που παραμένουν ανεξήγητα εξαιτίας ανοιχτών προβλημάτων στα μαθηματικά. Έτσι, αν λ.χ. απορρίψουμε την υπόθεση του συνεχούς[3] μας φαίνεται δύσκολο να πιστέψουμε

---

1. Mill, όπ. π., σσ. 168-9.

2. Σύμφωνα με την εικασία του Goldach κάθε άρτιος αριθμός εκτός του δύο γράφεται ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών. Η τιμή αλήθειας αυτής της πρότασης δεν μας είναι γνωστή.

3. Υπόθεση που διατύπωσε ο G. Cantor. Έχοντας αποδείξει προηγουμένως ότι η δύναμη του συνόλου των φυσικών αριθμών (λ) είναι μικρότερη από τη δύναμη του συνό-

ότι αυτό θα επηρεάσει τα φυσικά φαινόμενα και τις θεωρίες μας για αυτά. Ακόμα, αν το σύμπαν αποδειχτεί ότι αποτελείται από πεπερασμένο αλλά πολύ μεγάλο αριθμό αντικειμένων, θα νόμιζε κανείς ότι μπορούμε να μιλάμε παρόλα αυτά στην αριθμητική για το λ', λ' κ.ο.κ.

2. Η ΚΡΙΤΙΚΗ ΤΟΥ ΦΡΕΓΚΕ

Μπορούμε να λάβουμε μια σαφέστερη ιδέα των δυνατοτήτων, των αδυναμιών και του εύρους των θέσεων του Mill αναφερόμενοι στην κριτική που άσκησε στις θέσεις του ο Φρέγκε[1]. Χωρίς να αναφερθούμε με τρόπο ουσιαστικό στο θεμελιωτικό πρόγραμμα του Φρέγκε[2] μπορούμε να πούμε ότι οι απόψεις του Mill επικρίνονται σε τρία επίπεδα. Η κριτική του Φρέγκε συνοψίζεται στον ισχυρισμό ότι ο εμπειρισμός δεν μπορεί να αποτελέσει ικανοποιητικό θεμέλιο των αριθμητικών προτάσεων γιατί δεν μπορεί να ερμηνεύσει τον αντικειμενικό χαρακτήρα τους. Ο Φρέγκε ξεκινάει με την προυπόθεση ότι οι αριθμητικές προτάσεις αποτελούν αντικειμενική γνώση οπότε η θεμελίωση της μαθηματικής γνώσης συμβαδίζει με τη διασφάλιση της αντικειμενικότητας των αριθμητικών προτάσεων. Πρώτα-πρώτα, λοιπόν, ο Φρέγκε επικρίνει το νατουραλισμό του Mill· τα μαθηματικά αντικείμενα, οι φυσικοί αριθμοί λ.χ., δεν είναι πραγματικά αντικείμενα αλλά εξισώνονται από τον Mill με τις φυσικές ιδιότητες των συλλογών υλικών αντικειμένων[3]. Η κριτική του Φρέγκε στο σημείο αυτό επισημαίνει τη φαινομενική απλοϊκότητα του γεγονότος ότι μια ορισμένη υλική πραγματικότητα επάγει μια αντίστοιχη αριθμητική κατηγόρηση. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε κατά τον Φρέγκε είναι ότι μια ορισμένη υλική πραγματικότητα δεν οδηγεί αφεαυτής και με μοναδικό τρόπο στη διατύπωση της αριθμητικής πρότασης. Αναφορικά με την ίδια υλική πραγματικότητα, ένα ζευγάρι μπότες λ.χ., μπορούμε εξίσου ορθά να πούμε «ένα ζευγάρι μπότες» ή «δύο μπότες»[3]. Για τις προτάσεις που εγκλείουν αριθμητικές λέξεις δεν μπορούμε να ρωτήσουμε απλώς «πόσα;» αλλά μάλλον «πόσα F;». Έτσι, μπορούμε να αριθμήσουμε χρησιμοποιώντας ως F το κατηγόρημα «ζευγάρι μπότες» ή το κατηγόρημα «μπότα», όπότε μια ορισμένη υλική πραγματικότητα χαρακτηρίζεται με διαφορετικές αριθμητικές προτάσεις. Η άποψη αυτή που Φρέγκε αποτελεί πρόβλημα για την

λου των πραγματικών αριθμών (λ_1), υπέθεσε ότι το λ ακολουθεί αμέσως μετά από το λο. Ο Goedel έδειξε ότι η υπόθεση του συνεχούς είναι συνεπής με τα αξιώματα της συνολοθεωρίας zfc, ενώ ο Cohen έδειξε ότι είναι ανεξάρτητη από τα αξιώματα της συνοθεωρίας.

1. Βλ. Frege: Τα θεμέλια..., όπ. π., σημ. 5.
2. Όπ.π., Εισαγωγή.
3. Όπ.π., § 9,10.
4. Όπ.π., § 22.

αριθμητική του Mill: πώς γίνεται μια ορισμένη υλική πραγματικότητα να έχει ταυτόχρονα διαφορετικές ιδιότητες; Το επιχείρημα αυτό επισημαίνει ότι η χοντρική άποψη σύμφωνα με την οποία σε μια υλική πραγματικότητα αντιστοιχίζουμε μια αριθμητική πραγματικότητα αντιμετωπίζει προβλήματα.

Συναφές με αυτό είναι το δεύτερο πρόβλημα που αντιμετωπίζει ο αριθμητικός εμπειρισμός του Mill. Είναι το πρόβλημα των «μεγάλων αριθμών», το οποίο ο Φρέγκε χρησιμοποιεί και εναντίον της καντιανής φιλοσοφίας των μαθηματικών[1]. Αν βασιστούμε στην έννοια της αντιστοιχίας μεταξύ υλικής και αριθμητικής πραγματικότητας είναι δύσκολο - αν όχι αδύνατο - να συνεχίσουμε να μιλάμε για τους μεγάλους φυσικούς αριθμούς (και το μηδέν) στα πλαίσια των απόψεων του Mill. Διότι, για να μιλήσουμε για τον αριθμό 10000 λ.χ. πρέπει προηγουμένως να έχουμε εμπειρία μιας συλλογής υλικών αντικειμένων (που είναι μάλιστα διευθετημένη έτσι: $9999+1$!). Το γενικότερο ζήτημα που αφορά συνεπώς η διαμαρτυρία του Φρέγκε είναι ότι αν απαιτήσουμε μια τέτοια αντιστοιχία τότε δεν πρόκειται να φτάσουμε ποτέ στο αφηρημένο επίπεδο των συγχρόνων μαθηματικών.

Τα προβλήματα της αριθμητικής του Mill φτάνουν στο αποκορύφωμά τους όταν αναφερθούμε στον επαγωγικό χαρακτήρα των αριθμητικών νόμων. Ποιός είναι ο χαρακτήρας, το status, μιας στοιχειώδους σχέσης, όπως λ.χ. «$3+2=5$»; Κατά τον Φρέγκε, ο Mill συγχέει τις εφαρμογές των αριθμητικών νόμων με το status και το χαρακτήρα τους[2]: με την πρώτη ευκαιρία που αντιμετωπίζουμε το γεγονός ότι τρεις σταγόνες υδραργύρου όταν ενωθούν με δύο σταγόνες υδραργύρου δεν δίνουν πέντε σταγόνες, θα σπεύσουμε να αμφισβητήσουμε την αλήθεια της πρότασης «$3+2=5$»; Για τον Φρέγκε, οι αριθμητικές προτάσεις δεν αποτελούν επαγωγικές γενικεύσεις υλικών καταστάσεων, όπως ισχυρίζεται ο Mill. Αλλά, από ένα σημείο και μετά, τα γενικότερα φιλοσοφικά συστήματα των Φρέγκε και Mill έρχονται σε ουσιαστική αντίθεση μεταξύ τους ώστε δεν είναι δυνατή πια καμιά επικοινωνία.

Μια φιλοσοφική θεμελίωση των μαθηματικών πρέπει να σεβαστεί και τελικά να ερμηνεύσει με ικανοποιητικό τρόπο δύο τουλάχιστο χαρακτηριστικά σημεία των μαθηματικών και της μαθηματικής δραστηριότητας. Το πρώτο αφορά τον αντικειμενικό χαρακτήρα των μαθηματικών προτάσεων, ενώ το δεύτερο αφορά τη χρησιμότητα και αποτελεσματικότητα των μαθηματικών στις φυσικές επιστήμες και στην καθημερινή μας ζωή. Το πρώτο σημείο δεν είναι αναγκαίο να ερμηνευτεί στα περιοριστι-

1. Όπ. π., § 7,8.
2. Όπ. π., § 14.

κά πλαίσια της πλατωνικής φιλοσοφίας των μαθηματικών. Δεν ισοδυναμεί με την προϋπόθεση μιας αντικειμενικής πραγματικότητας αφηρημένων μαθηματικών οντοτήτων, όπως λ.χ. οι αριθμοί, τα σύνολα κλπ[1]. Η ερμηνεία του μπορεί να συμβαδίζει με την αναγνώριση της μαθηματικής δραστηριότητας ως ανθρώπινης δραστηριότητας που έχει σημασία και αποτελεσματικότητα. Τα χαρακτηριστικά αυτά αντανακλώνται στο δεύτερο σημείο που ανάφερα πιο πάνω. Πώς εξηγείται ότι οι προτάσεις των μαθηματικών είναι χρήσιμες και αποτελεσματικές; κανείς δεν μπορεί να μην εκπλαγεί από την «απροσδόκητη αποτελεσματικότητα των μαθηματικών στις φυσικές επιστήμες»[2].

Η αρχική ευλογοφάνεια του πλατωνισμού ως φιλοσοφίας των μαθηματικών προκύπτει από το γεγονός ότι αναγνωρίζει πως οι μαθηματικές προτάσεις είναι προτάσεις με τιμές αλήθειας: οι μαθηματικές προτάσεις που μας ενδιαφέρουν είναι αληθείς προτάσεις. Αλλά αυτή η διαίσθηση, αν και πολύ σημαντική, δεν είναι ωστόσο αρκετά ισχυρή για να μας κάνει να προσδεθούμε στο άρμα του πλατωνισμού και να δεχτούμε ότι οι αληθείς προτάσεις των μαθηματικών περιγράφουν μια αντικειμενική πραγματικότητα αφηρημένων οντοτήτων.

Ο εμπειρισμός τύπου Mill - αλλά και γενικότερα, ο εμπειρισμός - αναφορικά με τις μαθηματικές προτάσεις, στηρίζεται στη βασική διαίσθηση ότι η θεμελίωση των μαθηματικών πρέπει να γίνει σε συνδυασμό με τη θεμελίωση των φυσικών επιστημών· και η κοινή αυτή θεμελίωση συνδέεται με την αναγνώριση της αισθητηριακής και εμπειρικής προέλευσης της γνώσης. Η αποκατάσταση μιας μορφής αντιστοιχίας μεταξύ υλικής και αριθμητικής πραγματικότητας, είναι αλήθεια, έχει το πλεονέκτημα ότι θα μπορούσε να καλύψει τα δύο σημεία που ανάφερα προηγουμένως. Μολονότι θεωρούμε ότι ο συγκεκριμένος τρόπος του Mill δεν καταφέρνει τελικά το αποτέλεσμα που ζητάμε, εντούτοις πρόκειται για ένα γόνιμο προσανατολισμό και μια κατεύθυνση που οπόσχεται πολλά στα χέρια του Kitcher. Το πρόσθετο στοιχείο που εισάγει ο Kitcher είναι η σαφής αναγνώριση ότι τα μαθηματικά περιγράφουν τα δομικά χαρακτηριστικά του κόσμου μας, χαρακτηριστικά τα οποία εκδηλώνονται στη συμπεριφορά και στους χειρισμούς των κατοίκων του κόσμου. Δεν πρόκειται συνεπώς για μια απευθείας «ανάγνωση» των δομικών χαρακτηριστικών του υλικού κόσμου αλλά για μια διαμεσολαβημένη σχέση του κόσμου μέσω των κατοίκων του.

1. Βλ. Γ. Ρουσόπουλου: Η κριτική των κλασικών μαθηματικών από τον Brouwer και τη σχολή του ιντουισιονισμού, Διδακτορική διατριβή, Γιάννινα 1986, κεφ. 1, 2.

2. Βλ. E.Wigner, «The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences», στο Symmetries and Reflections, 1959, MIT Press, Cambridge.

3. Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΕΜΠΕΙΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ KITCHER

Η προσπάθεια του Kitcher να θεμελιώσει τη μαθηματική γνώση στο πλαίσιο του εμπειρισμού, χαρακτηρίζεται από δύο συνιστώσες[1]. Η πρώτη αφορά την κριτική των επιστημολογικών προσπαθειών που διατυπώθηκαν ως τώρα για τη μαθηματική γνώση[2]. Η δεύτερη συνιστώσα αφορά το καθαρά θετικό επιχείρημα κατασκευής μιας ορθολογικής αναδόμησης της μαθηματικής γνώσης που στηρίζεται όμως στην αισθητηριακή εμπειρία[3]. Ουσιαστική σημασία για το πρόγραμμα του Kitcher έχει η αναγνώριση της μαθηματικής πραγματικότητας - η οποία δεν είναι άλλη από την υλική πραγματικότητα εννοούμενη ως σύνολο υλικών αντικειμένων και πρακτικών των υποκειμένων καθώς και των μεταξύ τους αλληλεπιδράσεων. Οι σχέσεις μεταξύ υποκειμένων και αντικειμένων του κόσμου εγγράφονται, κατά τον Kitcher, ως μαθηματική ιστορικότητα. Η αναγνώριση της ιστορικής διάστασης της μαθηματικής γνώσης και της μαθηματικής πρακτικής αποτελεί ουσιαστική συνεισφορά του Lakatos στη φιλοσοφική θεμελίωση των μαθηματικών[4]. Η θέση του Kitcher είναι ακόμα ισχυρότερη: διατύπωση μιας εμπειριστικής επιστημολογίας των μαθηματικών προυποθέτει την αναγνώριση της ιστορικότητας των μαθηματικών. Δεν ενδιαφερόμαστε απλώς να συσχετίσουμε στο μαθηματικό πεδίο τα ιστορικά προβλήματα και τις λύσεις τους, να δείξουμε την ιστορική εξέλιξη γένεσης και ανάπτυξης των μαθηματικών ιδεών. Επιπλέον, ισχυρίζεται ο Kitcher, η ιστορική συνιστώσα των μαθηματικών συνεισφέρει στη διαμόρφωση της μαθηματικής επιστημολογίας που ενδιαφερόμαστε να διατυπώσουμε[5].

Η ιστορικότητα των μαθηματικών εκδηλώνεται κατά τον Kitcher ως αλληλουχία μαθηματικών πρακτικών. Η μαθηματική γνώση που μια ορισμένη στιγμή χαρακτηρίζει τη μαθηματική πρακτική, προέρχεται από τη γνώση που παρέχουν οι εγγυήτριες πηγές και οι μαθηματικές αυθεντίες (υπό τη μορφή των δασκάλων, βιβλίων και περιοδικών, βιβλιοθηκών και γενικότερης οργάνωσης της κοινωνίας). Μέσω των πηγών και των αυθεντιών μεταφερόμαστε στη γνώση των προηγουμένων πηγών και

1. P. Kitcher: The Nature of Mathematical Knowledge, Oxford UP, Oxford 1983 (Η Φύση, παρακάτω).

2. 'Οπ. π., Κεφ. 2, 3, 4, σσ. 36-87.

3. 'Οπ. π., Κεφ. 4, 6, σσ. 88-148 και Εισαγωγή.

4. Βλ. I. Lakatos: Proofs and Refutations, Cambridge UP 1976.

5. Kitcher: Η φύση, σ. 5.

«Για να κατανοήσουμε την επιστημολογική τάξη των μαθηματικών πρέπει να κατανοήσουμε την ιστορική τάξη (καθώς θα γίνει σαφές παρακάτω, αυτό δεν σημαίνει ακριβώς ότι η επιστημολογική τάξη είναι η ιστορική τάξη).»

αυθεντιών. Η ορθολογική συνεπώς ανασυγκρότηση της μαθηματικής γνώσης αντιμετωπίζει ένα διπλό πρόβλημα: ένα πρόβλημα αρχών / προέλευσης και ένα πρόβλημα εξέλιξης / ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης[1]. Αναφορικά με το πρώτο πρόβλημα, οι αρχές της μαθηματικής γνώσης τοποθετούνται σε κάποιο πρωτο-πολιτισμό και έχουν άμεση αισθητηριακή προέλευση. Οι πρωτο-άνθρωποι γνωρίζουν το περιβάλλον τους, τους χειρισμούς και τα αντικείμενα του κόσμου τους μέσω αισθητηριακών δεδομένων. Η μαθηματική γνώση, υποτυπώδης στην αρχή, εξελίσσεται και αναπτύσσεται από τις ταπεινές αυτές αρχές φτάνοντας στο τρομερό οικοδόμημα των συγχρόνων μαθηματικών[2]. Η μετάβαση από το στάδιο ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης S στο στάδιο S′ αποτελεί το δεύτερο πρόβλημα, το πρόβλημα της ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης. Η λεπτομερειακή συζήτηση αυτού του προβλήματος, που είναι άλλωστε κατ' εξοχήν ιστορικό πρόβλημα, θα απαιτούσε την εξέταση μεγάλης ομάδας ιστορικών περιπτώσεων. Ο Kitcher περιορίζεται ενδεικτικά στη μελέτη της ανάπτυξης μιας ορισμένης περιοχής των μαθηματικών: της ανάπτυξης της ανάλυσης από το λογισμό των απειροστών του 17ου αιώνα[3].

Η εξέλιξη των μαθηματικών πρακτικών συνδέεται άμεσα με τη φύση της μαθηματικής πραγματικότητας[4]. Για τον Kitcher, όπως ήδη αναφέρθηκε, τα μαθηματικά περιγράφουν το σύνολο του υλικού κόσμου - τα υλικά αντικείμενα και τις δυνατότητες χειρισμού τους από μας. Δεν περιοριζόμαστε ωστόσο από τις πραγματικές δυνατότητες που έχουμε αλλά προχωράμε σε εξιδανικεύσεις των δυνατοτήτων μας. Ο χαρακτήρας των εξιδανικεύσεων είναι υπεύθυνος για το δημιουργικό στοιχείο που διέπει τα μαθηματικά και τη μαθηματική δραστηριότητα γενικά. Με βάση τις γενικές αυτές παρατηρήσεις μπορούμε να πούμε ότι το πρόγραμμα του Kitcher προσφέρει μια εμπειριστική επιστημολογία της μαθηματικής γνώσης αποφεύγοντας το χοντροκομμένο ανιστορικό εμπειρισμό του Mill.

1. 'Οπ.π., σσ. 5-6 και σσ. 225-6.

2. 'Οπ.π., σ. 148:

«Ο κεντρικός ισχυρισμός που διατυπώνω είναι ότι η πρωτο-γνώση των μαθηματικών αποκτάται από το χειρισμό (manipulation) του κόσμου και την παρατήρηση των χειρισμών. Από τις ταπεινές αυτές αρχές, τα μαθηματικά αναπτύχθηκαν στο εντυπωσιακό σώμα της σύγχρονης θεωρίας».

3. 'Οπ.π., Κεφ. 10, σσ. 229-72.

4. 'Οπ.π., σ. 96:

«Μια πλήρης ερμηνεία των αρχών της μαθηματικής γνώσης θα εξηγούσε το περιεχόμενο των προτάσεων δείχνοντας ότι οι προτάσεις με περιεχόμενο ό,τι θεωρούμε ότι έχουν ως περιεχόμενο οι μαθηματικές προτάσεις, μπορούμε να τις γνωρίσουμε βάσει των αισθήσεων. Το κύριο εγχείρημα να εξηγήσουμε τις αρχές της μαθηματικής γνώσης είναι να δώσουμε μια εικόνα της μαθηματικής πραγματικότητας που θα συμφωνεί με τη θέση ότι η μαθηματική γνώση μπορεί να προέρχεται από τις αισθήσεις».

Πρόκειται για εμπειριστική θεμελίωση, στο βαθμό που η μαθηματική γνώση έχει τις αρχές της στην αισθητηριακή εμπειρία των χειρισμών και των δραστηριοτήτων των ανθρωπίνων υποκειμένων[1]. Επιπλέον, το επιχείρημα του Kitcher διατηρεί τον αντικειμενικό χαρακτήρα των μαθηματικών προτάσεων και ερμηνεύει την αποτελεσματικότητά τους στις φυσικές επιστήμες, στο βαθμό που ισχυρίζεται ότι τα μαθηματικά περιγράφουν /αντανακλούν την υλική πραγματικότητα.

Μπορούμε να το δηλώσουμε προκαταβολικά: η ερμηνεία του Kitcher αποτελεί τεράστιο βήμα σε σχέση με την επιστημολογία της αριθμητικής του Mill. Παρόλα αυτά, στο τελευταίο μέρος, θα ήθελα να δείξω ότι

α) το εμπειριστικό πρόγραμμα του Kitcher δεν είναι θεμελιωμένο επαρκώς· ιδιαίτερα, η ιστορική συνιστώσα που επικαλείται δεν πρόκειται ναλύ σει το πρόβλημά του. Επιπλέον, θα ήθελα να ισχυριστώ ότι

β) μια ικανοποιητική σύλληψη των μαθηματικών και της μαθηματικής πρακτικής δεν καλύπτεται πλήρως από τον ιστορικό χαρακτήρα των εξιδανικεύσεων που προτείνει ο Kitcher. Έτσι, για την αντιμετώπιση των ζητημάτων που προκύπτουν προτείνω

γ) να συλλάβουμε τόσο τις μαθηματικές θεωρίες όσο και τους νόμους των φυσικών επιστημών σε μια κοινή βάση. Σ' αυτήν οι μαθηματικές θεωρίες και οι φυσικοί νόμοι διαμεσολαβούνται από τα μοντέλα, στα πλαίσια των οποίων οι μαθηματικές θεωρίες και οι φυσικοί νόμοι αληθεύουν.

---

1. Όπ. π., σ. 117:
«Παρατηρούμε τους εαυτούς μας και τους άλλους να εκτελούν ορισμένες πρακτικές όπου συλλέγουν, συσχετίζουν κλπ· με αυτόν τον τρόπο αναγνωρίζουν ότι τέτοιες πρακτικές υπάρχουν. Αυτό μας παρέχει υποτυπώδη γνώση, πρωτογνώση, αν θέλετε. Νομίζω ότι το γεγονός ότι έχουμε γνώση αυτών των πρακτικών δεν εμφανίζει επιστημολογικά προβλήματα».

2. Εδώ ταιριάζει να αναφερθεί μια ομάδα εργασιών οι οποίες ακολουθούν τη γενική κατεύθυνση που χάραξε ο Quine (βλ. σημ. 4 πιο πάνω). Η φιλοσοφική άποψη που υποστηρίζουν είναι ένας μαθηματικός ρεαλισμός (πλατωνισμός), δεδομένου ότι η άποψή τους χαρακτηρίζεται από την πεποίθηση ότι υπάρχουν αφηρημένες μαθηματικές οντότητες. Στην περίπτωση του M. Steiner (Mathematical Knowledge, Cornell UP, 1975) και της P. Maddy («Perception and Mathematical Tntuition», The Phil. Review, 89 (1980), σσ. 163-96) οι οντότητες αυτές είναι σύνολα, και γι' αυτό ο ρεαλισμός τους ονομάζεται «συνολοθεωρητικός ρεαλισμός». Ο M. Resnik («Mathematical Knowledge and Pattern Recognition», Canadian Journal of Phil., 5(1975), σσ. 25-39) δέχεται ότι οι αφηρημένες οντότητες είναι δομές (patterns). Οι απόψεις του παρουσιάζουν ενδιαφέρουσα ομοιότητα με τις απόψεις του Kitcher που εξετάζουμε εδώ. Σχετικά πρβλ. G. Roussopoulos, «Does Mathematics describe the World?» (αδημοσίευτο).

4. ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ KITCHER

Το εμπειριστικό πρόγραμμα της μαθηματικής γνώσης στηρίζεται, όπως ήδη αναφέρθηκε[1], σε δύο βασικές θέσεις. Η πρώτη αφορά την αναγνώριση του ιστορικού χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης και πρακτικής. Η δεύτερη αφορά το χαρακτήρα της μαθηματικήςπ ραγματικότητας και της σχέσης με τον υλικό κόσμο και τα ανθρώπινα υποκείμενα. Η πρώτη θέση χωρίζεται σε δύο επιμέρους θέσεις: το πρόβλημα του ιστορικού χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα αρχών/προέλευσης και ένα πρόβλημα ανάπτυξης/εξέλιξης. Αμέσως παρακάτω θα αναφερθούμε στο διπλό αυτό πρόβλημα της ιστορικότητας της μαθηματικής γνώσης. Χωρίς να αμφισβητούμε καθόλου τη σημασία της ιστορικότητας των μαθηματικών, νομίζουμε ότι η σημασία της συνδέεται με το πρόβλημα της εξέλιξης/ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης. Αλλά είναι το πρόβλημα των αρχών της μαθηματικής γνώσης που είναι κεντρικό για το επιχείρημα του Kitcher - δεδομένου ότι σ' αυτό στηρίζεται η αισθητηριακή προέλευση της μαθηματικής γνώσης. Ας δούμε αναλυτικά τον ισχυρισμό του Kitcher σχετικά με την πρώτη θέση.

Για τον Kitcher μια ικανοποιητική εξήγηση των ζητημάτων της θεωρίας της γνώσης πρέπει να λάβει υπόψη της δύο παράγοντες: σύμφωνα με τον πρώτο, μιλώντας για τη γνώση μιας ομάδας προτάσεων πρέπει να μιλάμε αναφορικά με κάποιο υποκείμενο Χ. Σύμφωνα με το δεύτερο παράγοντα, όταν αποδίδουμε στο υποκείμενο Χ γνώση μιας πρότασης Ρ, τότε πρέπει να αποδώσουμε στο Χ την πεποίθηση Ρ και βέβαια πρέπει να δεχτούμε ότι η πρόταση Ρ είναι αληθής[2]. Πρόκειται δηλαδή για μια ψυχολογιστική θεωρία στο βαθμό που λαμβάνει υπόψη τη διαδικασία σχηματισμού καταλλήλων πεποιθήσεων και πίστεων του υποκειμένου. Από τα προηγούμενα γίνεται σαφές ότι αποδίδοντας στο υποκείμενο Χ γνώση της πρότασης Ρ, πέρα από τις διαδικασίες που είναι υπεύθυνές για το σχηματισμό των πεποιθήσεων σχετικά με την πρόταση Ρ, οι διαδικασίες αυτές πρέπει να εξασφαλίζουν την ορθή γνώση. Συνεπώς, μιλάμε για εγγυήσεις που εξασφαλίζουν στο υποκείμενο Χ την ορθή πεποίθηση σχετικά με μια πρόταση. Το σχήμα που προσπαθούμε να διατυπώσουμε μπορεί να αποδοθεί με τον τύπο:

το υποκείμενο Χ γνωρίζει την πρόταση Ρ όταν και μόνο η Ρ είναι αληθής

το υποκείμενο Χ έχει την πεποίθηση /πίστη Ρ και σχηματίζει την πεποίθηση αυτή μέσω διαδικασιών που αποτελούν εγγύηση της ορθότητάς της.

---

1. Βλ. 3, σ. 7, πιο πάνω.
2. Kitcher, Η φύση. σ. 17 και Κεφ. 1, σσ. 13-35.

Στην εκδοχή αυτή, λοιπόν, η γνώση είναι μια διαδικασία που συνδέεται με τις πεποιθήσεις των υποκειμένων και τις σχετικές εγγυήσεις. Πρόκειται τις πεποιθήσεις των υποκειμένων και τις σχετικές εγγυήσεις. Πρόκειται για ένα πολύπλοκο δίκτυο διασυνδέσεων προς όλες τις κατευθύνσεις. Σε ένα τέτοιο πλαίσιο είναι εύλογο να αναρωτηθούμε για τις συνθήκες υπό τις οποίες θα αποδώσουμε στο υποκείμενο X γνώση του πυθαγορείου θεωρήματος λ.χ. Μια δεδομένη χρονική στιγμή T, το υποκείμενο X δεν γνωρίζει την πρόταση αυτή, ενώ μια άλλη στιγμή T′ γνωρίζει την πρόταση αυτή. Οι μηχανισμοί που εμπλέκονται στη διαδικασία αυτή είναι πολύπλοκοι και συνδέονται τόσο με προσωπικούς παράγοντες (λ.χ. το μαθηματικό υπόβαθρο του X τη στιγμή T), όσο και με γενικότερα κοινωνικούς οι οποίοι αποτελούν περισσότερο ή λιγότερο αυθεντικούς παράγοντες εγγύησης της ορθότητας της γνώσης. Ασφαλώς, σ' όλα αυτά δεν υπάρχει τίποτα το χαρακτηριστικά ή αποκλειστικά μαθηματικό· αντίθετα, πρόκειται για μια γενικότερη διαδικασία που χαρακτηρίζει το δίκτυο της γνώσης. Με το δίκτυο αυτό όμως μεταφερόμαστε από μια πηγή/αυθεντία σε άλλη πηγή/αυθεντία μετακινούμενοι προς τα πίσω: οι τωρινές πηγές δικτυώνονται προς προηγούμενες και ο Kitcher υποθέτει ότι το τελικό σημείο αυτής της αναγωγής είναι η αισθητηρική γνώση μιας πρωτο-κοινωνίας. Η άμεση αισθητηριακότητα των δεδομένων της πρωτο-κοινωνίας αποτελεί ένα είδος εγγύησης της ορθότητας των πεποιθήσεων που σχηματίζουν τα μέλη της πρωτο-κοινωνίας.

α) Αν τώρα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι πρωτο-άνθρωποι μαθαίνουν υποτυπώδη μαθηματικά στηριζόμενοι στην εμπειρία τους τότε η άποψη ότι η μαθηματική γνώση είναι μη απριοριστική, δηλ. εμπειρική, μπορεί να στηριχτεί. Ταυτόχρονα, σύμφωνα με την άποψη αυτή, οι πρωτο-άνθρωποι δεν γενικεύουν κατά τον τρόπο που υπέδειξε ο Mill - δηλαδή, δεν σχηματίζουν τις έννοιες των αριθμών λ.χ. από τις συγκεκριμένες συλλογές υλικών αντικειμένων - αλλά έχουν άμεση αισθητηριακή γνώση των δραστηριοτήτων και των χειρισμών τους πάνω στα υλικά αντικείμενα και αυτές τις λειτουργίες εξιδανικεύουν. Μεταξύ αυτών πρέπει αναμφισβήτητα να περιλάβουμε την αρίθμηση σάκων, ζώων, τη μέτρηση χωραφιών, τη συλλογή αντικειμένων σε ένα όλον, την αντιστοίχηση κλπ. Οι πρακτικές αυτές, όταν τις φανταστούμε μακριά από τις συγκεκριμένες συνθήκες όπου εμφανίζονται, δίνουν λαβή σε παραδειγματικές μαθηματικές πρακτικές, όπως η αρίθμηση, η αντιστοιχία, το ζεύγος, το σύνολο κλπ.[1].

1. Όπ.π., σσ. 107-12 και συγκεκριμένα σ. 110:
«Μια κεντρική ιδέα μου είναι να αντικαταστήσω τις έννοιες των αφηρημένων μαθηματικών οντοτήτων, έννοιες όπως «συλλογή» με την έννοια ενός είδους μαθηματικής δραστηριότητας, όπως λ.χ. το «συλλέγειν».)

Αρχικά φαίνεται εύλογο να θεωρήσουμε - στα πλαίσια του επιχειρήματος του Kitcher - μια πρωτο-κοινωνία όπου τα στοιχειώδη μαθηματικά που αναπτύσσει προέρχονται από την άμεση αισθητηριακή εμπειρία. Αλλά η ευλογοφάνεια αυτή δεν είναι επιχείρημα υπέρ της αισθητηριακής προέλευσης των μαθηματικών. Η δυσκολία δεν είναι ότι είναι αδύνατο ή πολύ λίγο είλογο να δεχτούμε ότι οι άνθρωποι κατέφυγαν σε αισθητηριακά δεδομένα για να στηρίξουν τις μαθηματικές τους πεποιθήσεις. Οι μαθηματικές ιδέες πολύ πιθανόν εξελίχθηκαν, όπως και οι ιδέες μας στην ιατρική λ.χ., μέσω της παρατήρησης. Το πρόβλημα είναι ότι θεωρούμε δυνατό να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο που θα μπορούσε να χαρακτηρίσει την πρωτο-κοινωνία και τα πρωτο-μαθηματικά της. Δεν μπορούμε να το κάνουμε χωρίς να προδώσουμε τις επιστημολογικές προτιμήσεις μας (τον εμπειρισμό, εν προκειμένω), γιατί δεν έχουμε στη διάθεσή μας κανένα αρχιμήδειο τόπο αρχών της μαθηματικής γνώσης όπως απαιτεί ο Kitcher. Αν παρόλα αυτά επιμείνουμε, αυτό που κάνουμε είναι να μεταφέρουμε κατά την κατασκευή του μοντέλου ως δεδομένα αυτά που θα έπρεπε να προκύψουν από αυτό[1].

Ανεξάρτητα από το γεγονός ότι δεν έχουμε καταφέρει να πραγματευτούμε ικανοποιητικά το πρόβλημα των αρχών - οπότε, το επιχείρημα του Kitcher για μια εμπειριστική θεμελίωση της μαθηματικής γνώσης καταρρέει - το πρόβλημα σχετικά με την ανάπτυξη /εξέλιξη των μαθηματικών διατηρεί τη σημασία του. Μπορούμε να εξετάσουμε τη μετάβαση της γνώσης από το στάδιο S στο στάδιο S′ και να αναρωτηθούμε γία τη λογική της εξέλιξης των μαθηματικών ιδεών. Ειναι αναγκαίο να καταφύγουμε στην εμπειρία και τις εμπειρικές πρακτικές για να εξηγήσουμε την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης; Τέτοια ερωτήματα εμφανίζονται συχνά όταν εξετάζουμε τη σχέση ανάμεσα σε ένα ορισμένο φυσικό φαινόμενο και τη μαθηματική θεωρία που προκύπτει μέσω αφαιρέσεων από αυτό[2]. Θα συμπεράνουμε τότε όπως ο Poincaré ότι

> «η έννοια αυτή [το συνεχές] δημιουργήθηκε ολοκληρωτικά από τη νόησή μας αλλά είναι το πείραμα που έδωσε την αφορμή γι' αυτό»[3].

ή έχουμε κάποια εναλλακτική λύση να προτείνουμε; Ανεξάρτητα από το

1. Η δυσκολία να μιλήσουμε και να χαρακτηρίσουμε με κάποιο τρόπο την πρωτογνώση των μαθηματικών εκδηλώσεων και στον Kitcher· ο ίδιος δεν λέει τίποτα σχετικά με αυτήν. Πώς θα φανταστούμε την πρωτο-κοινωνία στην κατάσταση που μας ενδιαφέρει; πώς θα ξεκινήσουμε για να κατασκευάσουμε το μοντέλο της πρωτογνώσης; Αν κανείς παρατηρήσει ότι εδώ γίνεται λόγος μόνο για μια μεταφορική εικόνα τότε το επιχείρημα του Kitcher για την αισθητηριακή προέλευση της μαθηματικής γνώσης καταρρέει.

2. Αυτά τα ζητήματα ο Kitcher τα πραγματεύεται στο Κεφ. 10. Βλ. επίσης και Lakatos, όπ.π.

3. Βλ. H. Poincaré, Science and Hypothesis, Dover 1956, σ. 22.

πόσο τυπική περίπτωση είναι αυτή που συζητά ο Poincaré, το ζήτημα που αντιμετωπίζει ο Kitcher είναι διαφορετικό. Ο Kitcher δεν θέτει το φρεγκεανό ερώτημα «Πώς, πού θεμελιώνεται η μαθηματική γνώση;» αλλά το ερώτημα «Πώς αναπτύσσεται ιστορικά η μαθηματική γνώση;» Μια ικανοποιητική απάντηση στο δεύτερο ερώτημα, αν και συνδέεται με το επιστημολογικό ερώτημα των αρχών και της προέλευσης της γνώσης από την εμπειρία, εντούτοις έχει αυτόνομη σημασία και μπορεί να προχωρήσει χωρίς να έχουμε απαντήσει προηγουμένως το πρώτο ερώτημα. Όμως και ο Kitcher στρέφεται τελικά προς τη φύση της μαθηματικής πραγματικότητας για να δώσει μια ικανοποιητική απάντηση στο ερώτημα τωναρχών[1].

β) Ο Kitcher ενδιαφέρεται να αποφύγει τον σκόπελο του πλατωνισμού και του εμπειρισμού του Mill. Ο ρεαλιστικός χαρακτήρας του εμπειρισμού του Kitcher δεν είναι οντολογικού τύπου: δεν ισχυρίζεται την αντικειμενικότητα κάποιων αφηρημένων μαθηματικών οντοτήτων. Η αντικειμενικότητα στο φιλοσοφικό πρόγραμμα του Kichrer εκφράζεται με την πρόταση:

1) τα μαθηματικά περιγράφουν τη δομή της πραγματικότητας[2].

Δεν είναι όμως σαφές αν ο Kichter εννοεί την πρόταση (1) κυριολεκτικά ή μεταφορικά. Για να δούμε τη σημασία της πρότασης (1) μπορούμε να αναφερθούμε στο παράδειγμα που συζητάει ο Eddingion για τις δυνατές καταστάσεις του ατόμου και τη δομή της ομάδας στην άλγεβρα[3]. Τώρα η υπόδειξη του Kitcher είναι ότι με βάση την πρόταση (1), μια δομή ομάδας βρίσκεται εγκαθιδρυμένη στη ατομική φυσική πραγματικότητα; Ή μήπως πρέπει να μιλήσουμε για μια ινστρουμενταλιστική άποψη, σύμφωνα με την οποία χρησιμοποιώντας τη θεωρία των ομάδων ως εργαλείο, πετυχαίνουμε μια ικανοποιητική περιγραφή της πραγματικότητας; Και στις δύο περιπτώσεις, για να χρησιμοποιηθεί η θεωρία των ομάδων στην παραπάνω περίπτωση χρειάζεται να εισαχθούν προηγουμένως στο επίπεδο της περιγραφής της φυσικής πραγματικότητας ορισμένες εξιδανικεύσεις και απλοποιήσεις και μόνο τότε μπορούμε να μιλήσουμε για περιγραφή της πραγματικότητας από τη δομή της ομάδας[4]. Μπορούμε όμως

1. Βλ. σ. 177, σημ. 4.

2. Kitcher, Η φύση σ. 107:

«Τα μαθηματικά μελετούν δομές που αντανακλώνται στις ιδιότητες των φυσικών πραγμάτων.»

3. Πρβλ. A. Eddington «The Theory of Groups» στο The World of Mathematics, vol. III, ed. J. Newman, London 1956, σσ. 1558-76. Επιπλέον, βλ. N. Cartwright: How the Laws of Physics lie, Clarendon, Oxford 1983, essays 2,3 (Οι νόμοι, πιο κάτω).

4. Το μημείο αυτό είναι κεντρικό για το όλο επιχείρημα που αναπτύσσεται παρακάτω (γ). Βλ. ακόμά, Cartwright, όπ.π., essay 7 και το άρθρο του G, Joseph, «The Many Sciences and the one World», Journal of Philosophy, 77 (1980), σσ. 773-91.

να πούμε, αυστηρά μιλώντας, ότι μια πρόταση που προκύπτει στη θεωρία των ομάδων - έστω Α - είναι αληθής στην περίπτωση της ατομικής πραγματικότητας; Αυστηρά μιλώντας, η πρόταση Α είναι ψευδής· είναι όμως αληθής αναφορικά με την εξιδανικευμένη κατάσταση στο επίπεδο στο «μοντέλο» - αν έτσι ονομάσουμε την εξιδανικευμένη κατάσταση που προκύπτει από την ατομική φυσική πραγματικότητα —και είναι ψευδής μιλώντας αυστηρά — και πρέπει να μιλήσουμε αυστηρά:

Ο Kitcher δεν θεωρεί την πραγματικότητα με μια στενή έννοια: η πραγματικότητα είναι ασφαλώς τα υλικά αντικείμενα, αλλά επιπλέον οι ανθρώπινες δραστηριότητες μεταξύ ανθρώπων και οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ ανθρώπων και αντικειμένων. Ο φυσικός κόσμος επιτρέπει κάποιες αλληλεπιδράσεις μεταξύ των στοιχείων που τον συγκροτούν καθώς και κάποιους χειρισμούς στα όντα που τον κατοικούν. Οι αμοιβαίες δραστηριότητες μας οδηγούν να ανακαλύψουμε τις μαθηματικές δομές που βρίσκονται εγκαθιδρυμένες στο φυσικό κόσμο. Έτσι ο Kitcher συνδέει τη δομή της φυσικής πραγματικότητας με τη δομή των ανθρωπίνων δραστηριοτήτων: ό,τι η πραγματικότητα μας επιτρέπει να κάνουμε αντανακλάται στους χειρισμούς και τις δραστηριότητές μας. Έτσι, η αριθμητική

> «οφείλει την αλήθειά της στη δομή του κόσμου και ταυτόχρονα η αριθμητική είναι αληθής εξαιτίας των κατασκευαστικών μας δραστηριοτήτων»[1].

Κατόπιν, ο Kitcher επεκτείνει την έννοια των κατασκευαστικών δραστηριοτήτων προς την κατεύθυνση των εξιδανικευμένων/ιδεατών δραστηριοτήτων. Έτσι τα μαθηματικά γίνονται η επιστήμη των εξιδανικευμένων πρακτικών. Αφού όμως πρόκειται για εξιδανικεύσεις, προς ποια κατεύθυνση εξιδανικεύουμε[2]; Η κατεύθυνση που παίρνουν οι εξιδανικεύσεις είναι αποτέλεσμα συμβάσεων (stipulations) που κάνουμε για το σκοπό αυτό. Η θέση του Kitcher τώρα γίνεται:

> «Οι αληθείς μαθηματικές προτάσεις είναι αληθείς εξαιτίας των συμβάσεων που εμείς οι ίδιοι διατυπώνουμε· αυτές καθορίζουν τις συνθήκες αλήθειας των κατηγορημάτων. Αλλά τα κατηγορήματα στην πραγματικότητα δεν ικανοποιούνται από τίποτα απολύτως· ικανοποιούνται όμως προσεγγιστικά από τις πράξεις που εκτελούμε (και από τις φυσικές πράξεις)»[3].

---

1. Kitcher: Η φύση, σσ. 108-9.

2. Το πρόβλημα είναι τεράστιο. Ο Kitcher αναφέρεται εν συντομία στις δυνατότητες που έχουμε να μιλήσουμε για τη θεωρία των ιδανικών αερίων και τη θεωρία των αερίων κατά van der Waals. Το πρόβλημα όμως εμφανίζεται πιο απειλητικό όταν εξετάζουμε τις εξιδανιμεύσεις των κλασικών και των ιντουισιονιστικών μαθηματικών. (Για το ζήτημα των διαφορετικών εξιδανικεύσεων και τις συνέπειες βλ. Ρουσόπουλος: Η κριτική... όπ. π., κεφ. 3 και 10).

3. Kitcher: Η φύση, σ. 110.

Ένα εύλογο ερώτημα που προκύπτει από τη διατύπωση αυτή είναι αν διαγράφεται ιστορικά ένα συνεπές σύνολο συμβάσεων το οποίο τηρούμε. Ακόμα πιο εύλογο είναι το ερώτημα που αφορά τον υποτιθέμενο εμπειρισμό της θεωρίας του Kitcher: δεν θα έπρεπε να μιλάμε υπό τις προυποθέσεις αυτές για συμβατισμό αφού εμείς οι ίδιοι θέτουμε τις συμβάσεις με βάση τις οποίες εξιδανικεύουμε και κάνουμε μαθηματικά; Η κατάσταση θυμίζει ως ένα βαθμό τις αντίστοιχες απόψεις του Poincaré για τη φύση της γεωμετρίας[1]. Για τον Poincaré, η ευκλείδεια και οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες είναι ασφαλώς άψογες μαθηματικές κατασκευές. Το ερώτημα για την ορθή γεωμετρία από μαθηματική άποψη δεν έχει καμιά θέση στα πλαίσια του συμβατισμού του Poincaré. Η ευκλείδεια γεωμετρία καθώς και οι άλλες γεωμετρίες είναι αληθείς ως θεωρίες, όμως η ευκλείδεια είναι η πιο βολική (most convenient). Το κριτήριο με βάση το οποίο επιλέγουμε την ευκλείδεια γεωματρία ως την πιο βολική δικαιολογείται γιατί αυτή

> «συμφωνεί σε μεγάλο βαθμό με τις ιδιότητες των φυσικών στερεών, δηλαδή τα σώματα που μπορούμε να μετρήσουμε και να συγκρίνουμε μεταξύ τους με τη βοήθεια των αισθήσεών μας»[2].

Ο Kitcher προσφέρει επίσης ένα κριτήριο που παρουσιάζει κάποια ομοιότητα με την άποψη του Poincaré. Οι συμβάσεις που εισάγουμε δεν είναι αυθαίρετες αλλά

(2) «πρέπει να είναι κατάλληλα συνδεδεμένες με τα φαινόμενα που προσπαθούμε να εξιδανικεύσουμε»[3].

Η πρόταση (2) μας οδηγεί στις κατάλληλες επιλογές μας για τις συμβάσεις που εισάγουμε. Κάποιο ποσοστό ανησυχίας όμως παραμένει: τι γίνεται λ.χ. με τις αντιρρήσεις όλων εκείνων που ισχυρίζονται ότι οι δικές τους συμβάσεις — ίσα-ίσα αυτές μάλιστα— συνδέονται με τα φαινόμενα που προσπαθούμε να εξιδανικεύσουμε; Το παράδειγμα που προσφέρεται στην περίπτωση αυτή είναι τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά σε αντίθεση με τα κλασικά μαθηματικά. Η αντίθεση μεταξύ τους δεν είναι της τάξεως της αντίθεσης μεταξύ ευκλείδειας και μη ευκλείδειας γεωμετρίας. Στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά δεχόμαστε μια μη κλασική σημασιολογία, διαφορετική από αυτή που δεχόμαστε στα κλασικά μαθηματικά. Οι εξιδανικεύσεις που εισάγνται στις δύο περιπτώσεις είναι διαφορετικές και δεν υπάρχει τρόπος να συμβιβαστούν μεταξύ τους[4]. Για τον Kitcher, το κριτήριο που διατυπώνει η πρόταση (2) είναι τελικά ιστορικά καθορισμένο· προκύπτει από την ιστορική και συγκεκριμένη ανάπτυξη /

1. Poincaré, όπ.π., κεφ. 3.
2. Όπ.π., σ. 50.
3. Kitcher: Η φύση, σ. 161.
4. Πρβλ. Ρουσόπουλος: Η κριτική, όπ.π., κεφ. 3.

εξέλιξη των μαθηματικών μέχρι σήμερα. Αυτό σημαίνει ότι αν αναλάβουμε μια ιστορική μελέτη της εξέλιξης των μαθηματικών από το στάδιο S στο στάδιο S′, τότε οι εξιδανικεύσεις που ανακαλύπτουμε διαπιστώνουμε ότι ικανοποιούν το κριτήριο (2). Οι μαθηματικές πεποιθήσεις της κοινότητας στο στάδιο S′ μπορούν να θεωρηθούν συνδεδεμένες με τα φαινόμενα που εξιδανικεύουμε όταν προκύπτουν μέσα σε εύλογα πλαίσια πρακτικής της μαθηματικής δραστηριότητας τα οποία αντλούνται από τις πεποιθήσεις της κοινωνίας στο προηγούμενο στάδιο S. Ακόμα και η πρωτο-κοινωνία έχει μαθηματικές πεποιθήσεις που, σύμφωνα με τον Kitcher είναι θεμελιωμένες στην άμεση αισθητηριακή εμπειρία[1]. Υπ' αυτούς τους όρους, ο Kitcher ισχυρίζεται ότι

> «οι εξιδανικεύσεις που προσφέρθηκαν στην ιστορία των μαθηματικών ικανοποιούν τη συνθήκη (2)»[2].

Στο τελευταίο κεφάλαιο του βιβλίου του ο Kitcher δείχνει ότι η εξέλιξη των μαθηματικών, από το λογισμό του Leibniz και του Νεύτωνα ως την αριθμητικοποίηση της ανάλυσης από τον Weierstrass, ακολούθησε το πρότυπο μιας ρεαλιστικής, ορθολογικής ανάπτυξης στα πλαίσια της μαθηματικής δραστηριότητας. Οι μαθηματικοί δεν κινήθηκαν από κάποιο επιστημολογικό ενδιαφέρον να αποκαταστήσουν τη μαθηματική γνώση ως a priori γνώση — όπως εσφαλμένα θεωρούσε ο Φρέγκε — αλλά ενδιαφέρθηκαν να λύσουν τεχνικά κυρίως προβλήματα της επιστήμης τους χρησιμοποιώντας μεθόδους και τεχνικές που τους φάνηκαν χρήσιμα και αναγκαία εργαλεία για τον σκοπό αυτό[3].

Συμπερασματικά, η θεωρία του Kitcher διαπερνάται από το ιστορικό στοιχείο και προς τις δύο κατευθύνσεις: πρόκειται για μια επιστημολογική θεωρία που προκύπτει από τη μελέτη της ιστορικής τάξης των μαθηματικών και της μαθηματικής πρακτικής, και για την επιβεβαίωσή της χρειάζεται να αναφερθεί ξανά στην ιστορική εμπειρία των μαθηματικών. Ο συμβατισμός που διέπει το πρόγραμμα Kitcher είναι τελικά ιστορικής φύσεως: οι άνθρωποι κάνουν μαθηματικά εξιδανικεύοντας σε ένα κλασικό και ρεαλιστικό πλαίσιο και αυτό έκαναν πάντοτε, γιατί σε τελευταία ανάλυση τα μαθηματικά αντανακλούν τη δομή του πραγματικού κόσμου.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε με ακρίβεια το δεύτερο πρόβλημα που αντιμετωπίζει το πρόγραμμα του Kitcher σχετικά με τη μαθηματι-

---

1. Kitcher: Η φύση, σσ. 225-6:
«Ένα σύνολο μαθηματικών πεποιθήσεων είναι άμεσα εγγυημένοό, ταν τα μέλη του είναι εγγυημένα μέσω των αισθητηριακών δεδομένων».
2. Όπ. π., σ. 161.
3. Πρβλ. P. Kitcher, «Frege, Dedekind and the Philodophy of Mathematics» στο: Frege Synthesized, eds, l. Haaparenta and J. Hintikka, Reidel 1986, σσ.299-343.

κή πραγματικότητα και τις εξιδανικεύσεις. Ενδιαφερόμαστε στα πλαίσια του προγράμματος αυτού να διατυπώσουμε μια εμπειριστική επιστημολογία της μαθηματικής γνώσης και να ισχυριστούμε ότι οι αληθείς μαθηματικές προτάσεις είναι a posteriori αλήθειες, αλήθειες που έχουν υπόβαθρο τον υλικό κόσμο των αντικειμένων και των πρακτικών μας.

Το ότι οι μαθηματικές προτάσεις είναι αληθείς προτάσεις μπορούμε να το διατυπώσουμε και με τον ισχυρισμό ότι οι μαθηματικές προτάσεις περιγράφουν τη δομή του υλικού κόσμου. Ο χαρακτηρισμός αυτός προσδίδει στα μαθηματικά το χαρακτήρα ρεαλιστικής, αντικειμενικής και τελικά αποτελεσματικής επιστήμης. Όμως τα μαθηματικά, καθώς αναγνωρίζουμε αμέσως, δεν περιορίζονται στη μελέτη των φυσικών πρακτικών· ειδάγουν ένα τεράστιο απόθεμα εξιδανικεύσεων, μελετώντας έτσι εξιδανικευμένες, όχι φυσικές πρακτικές. Ο εξιδανικευτικός χαρακτήρας των συγχρόνων, ειδικά, μαθηματικών συνδέεται ουσιαστικά με το δημιουργικό χαρακτήρα των μαθηματικών: τα μαθηματικά δεν θα μπορούσαν να προχωρήσουν και να αναπτυχθούν χωρίς τα μεγάλα όρια εξιδανίκευσης που υπεισέρχονται σε όλες τις βαθμίδες ανάπτυξης και δημιουργίας. το πρόβλημα που δημιουργείται από την αναγνώριση των παραπάνω απόψεων είναι διπλό.

(i) Οι εξιδανικεύσεις που εισάγουν αποτελούν συμβάσεις προς μια ορισμένη κατεύθυνση. Το εύλογο ερώτημα που δημιουργείται είναι: πώς δικαιολογείται η αντικειμενικότητα των μαθηματικών, δεδομένου ότι οι εξιδανικεύσεις που εισάγουμε είναι ζήτημα συμβάσεων; Η απάντηση του Kitcher καλύπτει μόνο μερικά το ερώτημα: οι συμβάσεις που εισάγονται δεν είναι ούτε αυθαίρετες, ούτε a priori· είναι ιστορικά θεμελιωμένες, καθώς το μαρτυρά η συγκεκριμένη ανάπτυξη των μαθηματικών ιδεών[1]. Μένει όμως ουσιαστικά χωρίς απάντηση το ερώτημα που αφορά τις αμφιλεγόμενες και τις μελλοντικές συμβάσεις: πώς θα αποφασίσουμε για τις εξιδανικεύσεις και τις συμβάσεις που προτείνει ο ιντουισιονισμός για τα μαθηματικά, τη στιγμή που αυτές βρίσκονται σε καταφανή αντίθεση με τις συμβάσεις και τις εξιδανικεύσεις των κλασικών μαθηματικών; δικαιολογούνται, τελικά, οι συμβάσεις των ιντουισιονιστικών μαθηματικών;

(ii) Η αδυναμία να απαντήσουμε στην ιντουισιονιστική πρόκληση συνδέεται ήδη με το δεύτερο μέρος του προβλήματος. Είναι φανερό ότι στο πρόγραμμά του ο Kitcher δεν μπορεί να επιτρέψει ταυτόχρονα τις εξιδανικεύσεις των κλασικών και των ιντουισιονιστικών μαθηματικών, ενώ συγχρόνως δέχεται ότι τα μαθηματικά περιγράφουν την υλική πραγματικότητα. Πραγματικά, ανεξάρτητα από την ιντουισιονιστική πρόκληση,

1. Kitcher: Η Φύση, σ. 161 και σσ. 225-6.

πώς είναι δυνατόν τα μαθηματικά, από τη μια μεριά, να περιγράφουν την υλική πραγματικότητα ενώ από την άλλη να μελετούν εξιδανικευμένες πρακτικές; Αν νοήσουμε τα μαθηματικά σύμφωνα με την πρώτη απαίτηση, τότε περιορίζονται αισθητά ως δραστηριότητα και επιπλέον, η απαίτηση αυτή έρχεται σε αντίθεση με την ιστορική ανάπτυξη των μαθηματικών. Αν όμως νοήσουμε τα μαθηματικά σύμφωνα με τη δεύτερη απαίτηση, τότε δεν μπορούμε να πούμε ότι τα μαθηματικά περιγράφουν την υλική πραγματικότητα. Αν συνεπώς οι μαθηματικές προτάσεις έχουν αντικειμενικό χαρακτήρα, όπως άλλωστε δεχόμαστε, αυτός πρέπει να αναζητηθεί αλλού, όχι στο γεγονός ότι περιγράφουν την υλική πραγματικότητα.

γ) Αξίζει τον κόπο να εξετάσουμε ακόμα μια φορά τις σχέσεις του τριγώνου <φυσική επιστήμη, μαθηματικά, υλική πραγματικότηταῦ, ενόψει των δυσκολιών που αντιμετωπίσαμε προηγουμένως όταν απαιτούμε αντικειμενικότητα από τις μαθηματικές προτάσεις. Συνήθως προσπαθούμε να λύσουμε προβλήματα της φιλοσοφικής θεμελίωσης της μαθηματικής γνώσης και της γνώσης των φυσικών επιστημών στα πλαίσια ενός επιστημονικού ρεαλισμού, προσεγγίζοντας τα δύο ζεύγη <μαθηματικά, υλική πραγματικότητας και <φυσικές επιστήμες, υλική πραγματικότητας στη βάση ενός κοινού προγράμματος[1]. Αναγνωρίζουμε ως κοινό στοιχείο το υλικό υπόβαθρο—αντικείμενα της καθημερινής εμπειρίας μας, αντικείμενα μεγάλου μεγέθους, θεωρητικές οντότητες κλπ. Το πρόβλημα εμφανίζεται όταν προσπαθούμε να επεκτείνουμε το ρεαλιστικό χαρακτήρα αναφορικά με τις προτάσεις και τις θεωρίες. Το πρόβλημα αφορά το status των θεωριών που διατυπώνουμε σχετικά με την πραγματικότητα και συνδέεται τόσο με την περίπτωση των φυσικών επιστημών όσο και των μαθηματικών.

Αν ξεκινήσουμε από τη συνήθη διάκριση στη φυσική μεταξύ φαινομενολογικών και θεμελιωδών νόμων και αδιαφορήσουμε γιά το γεγονός ότι συχνά η διάκριση αυτή θεωρείται ισοδύναμη με τη διάκριση παρατήρηση-θεωρία[2], τότε μπορούμε να πούμε ότι οι φαινομενολογικοί νόμοι πε-

1. Πρβλ. P. Benaceraff, «Mathematical Truth», Journal of Philosophy, 70 (1973), σσ. 661-79 για το αίτημα να συμβιβάσουμε το ρεαλισμό στα μαθηματικά και στη φυσική.

2. Η διάκριση φαινομενολογικοί-θεμελιώδεις νόμοι στο Encyclopedic Dictionary of Physics, Pergamon Press, Oxford 1964, σ. 108:

«Μια φαινομενολογική θεωρία αναφέρεται σε παρατηρούμενα φαινόμενα μέσω εξισώσεων, αλλά δεν εξετάζει βαθιά τη θεμελίωδη σημασία τους».

Πρβλ. Cartwright: Οι νόμοι, σ. 2.

«Για το φυσικό-αλλά όχι για το φιλόσοφο -η διάκριση φαινομενολογικό- θεμελιώδες (θεωρητικό) δεν συνδέεται με τη διάκριση παρατηρήσιμο-μη παρατηρήσιμο. Οι όροι μάλλον διαχωρίζουν τους νόμους που απλώς περιγράφουν».

ριγράφουν γενικά με ακρίβεια τις υλικές καταστάσεις που αποσκοπούν να περιγράψουν. Σε αντίθεση με αυτούς, οι θεμελιώδεις νόμοι—που υποτίθεται ότι εξηγούν τις υλικές καταστάσεις και τα φαινόμενα, σκοπεύοντας στην αλήθεια—δεν περιγράφουν την πραγματικότητα[1]. Αυστηρά μιλώντας, οι θεμελιώδεις νόμοι της φυσικής επιστήμης είναι ψευδείς προτάσεις αναφορικά με την πραγματικότητα[2]. Οι θεμελιώδεις νόμοι της φυσικής, μολονότι ψευδείς, είναι χρήσιμες κατασκευές μέσα σε κατάλληλα πλαίσια. Αυτό γίνεται σαφέστερο όταν αναλογιστούμε ότι η σημασία των θεμελιωδών νόμων συναρτάται με την ύπαρξη των μοντέλων που χρησιμοποιούμε ως βοηθητική γέφυρα με την πραγματικότητα. Η περιγραφή ενός φαινομένου, στην περίπτωση αυτή, απαιτεί την κατασκευή ενός μοντέλου (ή περισσότερων) με βάση το οποίο το φαινόμενο υπάγεται σε μια θεωρία. Με αυτή την έννοια, οι θεμελιώδεις νόμοι της φυσικής είναι αληθείς αναφορικά με τις οντότητες του μοντέλου και περιγράφουν τη συμπεριφορά των οντοτήτων του μοντέλου. Τα μοντέλα δεν είναι ισοδύναμα προς τη θεωρία, στα πλαίσια της ίδιας θεωρίας μπορούν να χρησιμοποιηθούν αντιφατικά μεταξύ τους μοντέλα για την προσέγγιση της ίδιας πραγματικότητας[3].

Τα μαθηματικά, με τη γενικότερη έννοια των κλασικών και μη κλασικών θεωριών, συμπεριφέρονται ανάλογα προς τους θεμελιώδεις νόμους στη φυσική επιστήμη. Τα μαθηματικά και οι εξιδανικεύσεις που εισάγουμε έχουν κοινό υπόβαθρο με τους θεμελιώδεις νόμους: τον υλικό κόσμο των αντικειμένων και των χειρισμών τους από τους ανθρώπους. Αλλά το αντικείμενο μελέτης των μαθηματικών, όπως σωστά διατυπώνει η άποψη

1. Θα ήταν αδύνατο να περιγράψει κανείς το επιχείρημα αυτό με δύο λόγια χωρίς να το διαστρεβλώσει. Η παρακάτω παραπομπή ωστόσο εκθέτει, όσο σύντομα γίνεται, μέρος του προβλήματος:

«Το παράδειγμα του νόμου του Coulomb επεξηγεί το γενικό επιχείρημα. Μερικές σημαντικές ιδιότητες των φυσικών αντικειμένων-όπως οι τροχιές και οι δυναμικές και κινητικές τους ενέργειες-δεν περιγράφονται ορθά από τις εξισώσεις που χαρακτηρίζουν οποιαδήποτε από τα τέσσερα γνωστά δυναμικά πεδία. Καμιά από αυτές δεν περιγράφεται ορθά επειδή κάθε φορά που οι αρχικές συνθήκες του νόμου ικανοποιούνται η τελική συμπεριφορά του σωματιδίου μπορεί να στρεβλωθεί από την εφαρμογή των άλλων πεδίων. Αν οι νόμοι του πεδίου αναγνωστούν ως εξής: υπό ορισμένες συνθήκες κάποιες άλλες συνθήκες προκύπτουν, τότε οι νόμοι δεν είναι γενικά αληθείς». (G. Joseph, «The many sciences...», όπ. π., σ. 774).

2. Cartwright: Οι νόμοι, σσ. 138-51 και I. Hacking: Representing and Intervening, Cambridge UP 1983, σσ. 215-9.

3. Cartwricht: Οι νόμοι, σ. 158:

«Διαφορετικά και μεταξύ τους ασυμβίβαστα μοντέλα χρησιμοποιούνται για διαφορετικούς σκοπούς· αυτό όμως προσθέτει παρά αφαιρεί από τη δομή της θεωρίας». Αν και η έννοια των μοντέλων παρουσιάζεται εδώ κάπως δογματικά, και όχι με ιδιαίτερη σαφήνεια, θα πρέπει να πούμε ότι δεν πρέπει να συγχέεται με τη μαθηματική θεωρία των μοντέλων (Model Theory).

του Kitcher, δεν είναι ακριβώς οι φυσικοί χειρισμοί που οι άνθρωποι επιτελούν στο πλαίσιο των δραστηριοτήτων τους αλλά μάλλον οι εξιδανικευμένοι χειρισμοί. Η δομή του κλασικού συνεχούς λ.χ. και η δομή του συνεχούς των ιντουισιονιστικών μαθηματικών του Brouwer έχουν κοινό τελικό αναφερόμενο τους φυσικούς χειρισμούς που οι άνθρωποι επιτελούν όταν μετρούν διάφορα φυσικά μεγέθη. Δεν αποσκοπούν όμως να περιγράψουν ακριβώς την πραγματικότητα αυτών των χειρισμών. Εξιδανικεύουν με διαφορετικούς τρόπους την κατάσταση των χειρισμών εισάγοντας διαφορετικά μοντέλα μαθηματικής πρακτικής[1]. Ασφαλώς, μπορούμε να κινητοποιήσουμε ποικίλα μοντέλα —τρόπους εξιδανίκευσης— όπως ακριβώς μπορούσε να μιλήσουμε για τη θεωρία των ιδανικών αερίων και για τη θεωρία των αερίων κατά van der waals. Μπορούμε ακόμα να εισαγάγουμε διαφορετικά σημασιολογικά μοντέλα, αν θεωρούμε ότι με τον τρόπο αυτό κάποιο πρόβλημα φωτίζεται καλύτερα. Ο Bernays ήδη από το 1935[2] προτείνει ότι το ιντουισιονιστικό μοντέλο της αριθμητικής είναι καταλληλότερο από το κλασικό· αντίθετα, η αριθμητικοποίηση της ανάλυσης κατά τα κλασικά πρότυπα είναι προτιμότερη από αυτή που γίνεται στα πλαίσια του ιντουισιονισμού. Η άποψη του Bernays μπορεί να αποτελεί προσωπική και μόνο άποψη· το ουσιώδες είναι ότι έχουμε στη διάθεσή μας δυνατότητες επιλογής και αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε μοντέλα που κρίνουμε ότι θα μπορούσαν να μας βοηθήσουν στην αντιμετώπιση προβλημάτων.

Τα σύγχρονα μαθηματικά δεν χαρακτηρίζονται βέβαια από μια μοριακή και βαθμιαία αντιμετώπιση των προβλημάτων τους αλλά μάλλον από μια συνολική, ολιστική (holistic) αντιμετώπιση διαμόρφωσης συνεκτικής και ενοποιημένης θεωρίας. Πραγματικά, στη σύγχρονη ιστορία των μαθηματικών έχουμε λίγα και διακριτικά μοντέλα άρθρωσης της μαθηματικής πρακτικής[3]. Καθένα από αυτά προσπαθεί να διαμορφώσει ένα συνολικό πρόγραμμα μαθηματικών και μαθηματικής πρακτικής. Θεωρεί ασφαλώς ότι το δικό του πρόγραμμα είναι ορθό ενώ τα αντίπαλα εσφαλμένα. Αυτή η εξουσιαστική/αποκλειστική λογική που εμφανίζεται στη διαμόρφωση των προγραμμάτων δεν συμφωνεί με το γενικότερο πρόγραμμα

1. Πρβλ. Ρουσόπουλος: Η κριτική, κεφ. 3.

2. Βλ. P. Bernays, «On Platonlsm», στο Benaceraff-Putnam (eds), Philosophy of Mathematics, Cambridge up 1983, σ. 275.

3. Μπορεί κανείς να αναφέρει ορισμένα τέτοια προγράμματα, όπως: λογικισμός (Frege-Russell), νεο-λογικισμός (Qnine), φορμαλισμός (Curry), περατοκρατισμός (Hilbert), αυστηρός περατοκρατισμός (Wrignt), ιντουισιονισμός (Brouwer, Bishop) υπεριντουισιονισμός (Yesenin-Volpin). Όμως η κύρια αντίθεση αφορά τελικά τον ιντουισιονισμό από τη μια μεριά και την κλασική σύλληψη των μαθηματικών από την άλλη.

που προτείνω εδώ. Η κύρια έμφαση τώρα είναι η δημιουργία πληθώρας μοντέλων που μπορούμε να διατυπώσουμε με σκοπό την πλατύτερη μελέτη ενός προβλήματος[1]. Κάθε φορά που διατυπώνουμε ένα μοντέλο για τη μελέτη κάποιου προβλήματος δεν είναι αναγκαίο να θεωρούμε ως αναγκαίο να το επεκτείνουμε σε συνολικό, περιεκτικό πρόγραμμα που καλύπτει (όλη;) τη μαθηματική πρακτική. Η τάση προς μια ενοποίηση των μαθηματικών θεωριών και των διαφορετικών μαθηματικών πρακτικών δημιουργεί μια ψευδή εντύπωση ειρηνικής συνύπαρξης και απάλειψης των μεταξύ τους διαφορών, ενώ ταυτόχρονα διεκδικεί για τον εαυτό της την απόλυτη ορθότητα[2].

Οι απόψεις μερικών φιλοσόφων που αναφέραμε σχετικά με τους θεμελιώδεις νόμους της φυσικής επιστήμης δείχνουν ότι χρειαζόμαστε μια πιο λεπτή και επεξεργασμένη άποψη για τον επιστημονικό ρεαλισμό. Σύμφωνα με τα παραπάνω, απαιτείται διαμεσολάβηση του ζεύγους «θεμελιώδεις νόμοι, υλική πραγματικότητα» μέσω καταλλήλων μαθηματικών κατασκευών, τα μοντέλα. Ασφαλώς, η άποψη αυτή δεν είναι ίσως τόσο σαφής όσο θα απαιτούνταν για τους σκοπούς μας. Σε γενικές γραμμές όμως βρίσκεται σε συμφωνία με βασικές σκέψεις που ήδη διατυπώθηκαν κατά την εξέταση του εμπειριστικού προγράμματος-Kitcher. Ο Kitcher όπως είδαμε, απαιτώντας ένα ρεαλισμό από τις μαθηματικές θεωρίες δέχεται έμμεσα το ρεαλισμό των θεωριών στη φυσική (που εμείς όμως επικρίναμε). Έτσι, στα πλαίσια μιας κατά βάση συμφωνίας μεταξύ μαθηματικού ρεαλισμού και ρεαλισμού των φυσικών θεωριών, θεωρεί ότι τα μαθηματικά περιγράφουν την υλική πραγματικότητα—όπως άλλωστε και οι θεωρίες της φυσικής. Πέρα από αυτή την άποψη, το επιχείρημαπου διατύπωσε σχετικά με τις εξιδανικεύσεις και τη μαθηματική πρακτική αποτελεί γνήσια πρόοδο. Μετά απο αυτά, το εύλογο βήμα που πρότεινα ήταν να συνδέσουμε την ορθή αυτή διαίσθηση του Kitcher με την άποψη της Cartwright αναφορικά με το status των θεμελιωδών νόμων της φυσικής. Ένα πλεονέκτημα αυτής της απόψεως είναι ότι αναγνωρίζει και στηρίζει τη στενή σχέση μεταξύ μαθηματικών και φυσικών θεωριών μέσω των θεωρητικών μοντέλων. Το μειονέκτημά της είναι ότι έρχεται σε αντίθεση με όλους όσους πρεσβεύουν ένα ρεαλισμό σύμφωνα με τον οποίο

---

1. Πρβλ. I. Hacking, όπ. π., σ. 218:
«το ιδεώδες της επιστήμης δεν είναι η ενότητα αλλά η απόλυτη πληθώρα».
2. Πρβλ. Bernays, όπ. π., σ. 263 και A. Heyting: Intuitionism, an Introduction, North Holland, Amsterdam 1956 σεχτικά με την αντίθεση ιντουισιονισμού και κλασικών μαθηματικών. Επίσης, βλ. Ρουσόπουλος: Η κριτική, κεφ. 7.

σε τελευταία ανάλυση τόσο οι νόμοι της φυσικής όσο και των μαθηματικών περιγράφουν αληθώς την υλική πραγματικότητα[1].

---

1. Τελικά δεν επρότεινα καμιά λύση στο επιστημολογικό πρόβλημα που άλλωστε αποτελεί μέρος το προβλήματος που συζητά το παρόν άρθρο. Πώς γνωρίζουμε τις μαθηματικές προτάσεις; Αρκεί να αναφερθούμε στην αισθητηριακή εμπειρία για τη θεμελίωσή τους ή θα χρειαζόταν να ζητήσουμε την συνεισφορά του νοητικού στοιχείου (όπως λ.χ. στον Chomsky υπό τη μορφή των έμφυτων ιδεών); Ο Kitcher καθώς και άλλοι, τείνουν προς μια αριστοτελική λύση σύμφωνα με την οποία έχουμε αισθητηριακή εμπειρία των μαθηματικών δομών μέσω συγκεκριμένων αντικειμένων στα οποία «εγγράφονται». Αλλά, όπως ισχυρίστηκα, μια τέτοια άποψη, εύλογη καθώς είναι κατ' αρχήν, δεν μπορεί να θεωρηθεί περισσότερη εύλογη με το να αναχθούμε σε ένα προϊστορικό κοινωνικό περιβάλλον. Το πρόβλημα παραμένει ακέραιο. Από την άλλη, αν κανείς προχωρούσε προς την κατεύθυνση του Chomsky, το ερώτημα που προβάλλει είναι τώρα: πού θα σταματήσουμε: πού θα σύρουμε τα όρια μεταξύ έμφυτων και μη ιδεών; Γιατί για τον Chomsky, αυτό που είναι ουσιαστικό στο αριθμητικό σύστημα είναι ότι από το κάθε βήμα περνάμε στο αμέσως επόμενο (αυτή είναι η βασική διαίσθηση που χαρακτηρίζει το σύστημα των φυσικών αριθμών). Το αριθμητικό σύστημα τότε θεωρείται κατ' αναλογία προς το γλωσσικό, το οπτικό, το νευρικό κλπ., ως αυτόνομη και παράλληλη με αυτά λειτουργία. Βλ. N. Chomsky: Rules and Representations, Blackwell, Oxford 1980, σσ. 38-9.

Παραμερίζω λοιπόν το όλο ζήτημα (λόγω της δυσκολίας του) προτιμώντας, όπως ο Lakatos, να υποκρίνομαι ότι δεν υφίσταται πιεστικά. Ταυτόχρονα, προτείνω να συγκεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στην ιστορική μελέτη ανάπτυξης/εξέλιξης των μαθηματικών ιδεών-κάτι που θα μας βοηθούσε πολύ στην κατανόηση των μαθηματικών πρακτικών. Προς αυτή την κατεύθυνση κινείται και το πρόσφατο βιβλίο του M. Hallett: Cantorian set Theory and Limitation of Size, Clarendon Press, Oxford 1984, καθώς και τα άρθρα του «Towards a Theory of Mathematical Repearch Programmes» (I,II), British Journal for the Philosophy of Science 30 (1979), σσ. 1-25 και 135-59.

Στους καθηγητές κ.κ. M.A.E. Dummet του New College, Oxford και E.I. Μπιτσάκη του Παν/μίου Ιωαννίνων, που είχαν την καλοσύνη να σχολιάσουν προηγούμενες μορφές αυτού του άρθρου, τους ευχαριστώ και από αυτήν εδώ τη θέση.

ABSTRACT

MATHEMATICAL KNOWLEDGE AND EMPIRICIST EPISTEMOLOGY

par

George Roussopoulos

This paper sets to examine a recent effort toward an empiricist epistemology of mathematics. Mill has tried in the past to work out such a detailed program and to justify mathematical knowledge on the basis of inductive generalization of experiential data, but his efforts met with a lot of resistance from Frege, among others.

Kitcher's efforts—to be considered here—mark a significant move toward the same target, that of justifying mathematical knowledge along with other forms of scientific knowledge. Following the general direction of Quine's philosophy, Kitcher deems the historical order very important toward the explanation he seeks. Mathematical knowledge, as much as any other kind of knowledge, is historically situated within society: in this sense, Kitcher's effort is a genuine advance over Mill's ahistorical empiricism. The other factor that characterizes Kitcher's attempt is the realist stance with respect to the constitution of mathematical reality. His viewpoint is not that of a platonistic ontology but rather that of a realism (or scientific realism). Taking into account both the constitution of the world and the physical activities that people perform under various circumstances, Kither attains a view of mathematics as an idealizing practice par excellence. The problem then that this paper examines is whether Kitcher is able to hold both on to his empiticist philosophy of mathematics and to his view of mathematics as an idealizing practice. I argue that the realist attitude involved in the first position is at tension with the idealizing attitude expressed in the second position. This does not show yet that an empiricist philosophy of mathematics is not possible; it simply disposes of some difficulties accompanying one such specific effort.

University of Ioannina