ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΝΗΠΙΑΓΩΓΩΝ

Εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τα κλάσματα: Δι-ατομικές διαφορές και η σχέση τους με την προσέγγιση των μαθητών στη μάθηση των μαθηματικών

Μαρία Μπεμπένη

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2021

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

1. **Ξανθή Βαμβακούση**, Επιβλέπουσα
   Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
2. **Μαρία Καλδρυμίδου**
   Καθηγήτρια, Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
3. **Κωνσταντίνος Π. Χρήστου**
   Αναπληρωτής Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

1. **Ξανθή Βαμβακούση**
   Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
2. **Μαρία Καλδρυμίδου**
   Καθηγήτρια, Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
3. **Κωνσταντίνος Π. Χρήστου**
   Αναπληρωτής Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
4. **Χαράλαμπος Λεμονίδης**
   Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
5. **Χαράλαμπος Σακονίδης**
   Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
6. **Χαρίκλεια Σταθοπούλου-Βασιλονικολού**
   Καθηγήτρια, Παιδαγωγικό Τμήμα Ειδικής Αγωγής, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
7. **Κωνσταντίνος Τάτσης**
   Αναπληρωτής Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

«Η συλλογή και η επεξεργασία των δεδομένων προσωπικού χαρακτήρα που υποβάλλονται πραγματοποιείται σύμφωνα με τα οριζόμενα στις διατάξεις του Ν.4624/19 και του Κανονισμού (ΕΕ)2016/2019. Το Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων συλλέγει και επεξεργάζεται τα δεδομένα προσωπικού χαρακτήρα αποκλειστικά στο πλαίσιο της υλοποίησης του σκοπού της παρούσας διαδικασίας. Για το χρονικό διάστημα που τα προσωπικά δεδομένα θα παραμείνουν στη διάθεση του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων το υποκείμενο έχει τη δυνατότητα να ασκήσει τα δικαιώματά του σύμφωνα με τους όρους του Γενικού Κανονισμού Προστασίας Δεδομένων Προσωπικού Χαρακτήρα 2016/679 (Ε.Ε.) και τα οριζόμενα στα άρθρα 34 και 35 Ν. 4624/2019. Υπεύθυνη Προσωπικών Δεδομένων του Ιδρύματος είναι η κα. Σταυρούλα Σταθαρά (email: dpo@uoi.gr)».

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ολοκληρώνοντας αυτή την προσπάθεια, θα ήθελα να εκφράσω τη βαθιά και ειλικρινή μου ευγνωμοσύνη στην επιβλέπουσά μου, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια κ. Ξένια Βαμβακούση, για την αδιάκοπη, αμέριστη και ανιδιοτελή επιστημονική της υποστήριξη σε κάθε στάδιο αυτού του εγχειρήματος. Την ευχαριστώ που μοιράστηκε την πολυεπίπεδη γνώση της, τους προβληματισμούς της και κυρίως τον ενθουσιασμό της για την επιστήμη. Η σεμνή της παρουσία αποτελεί για μένα πρότυπο επιστημονικού ήθους και αξιοπρέπειας και η εξαιρετική μας συνεργασία, καθώς και η εμπειρία που αποκόμισα κατά της διάρκεια αυτής, ένα σημαντικό κεφάλαιο της ζωής μου. Την ευχαριστώ επίσης για την πολύτιμη ευκαιρία που μου έδωσε να συμμετάσχω σε ερευνητικό πρόγραμμα μέσω του οποίου υποστήριξα οικονομικά τις σπουδές μου και τη συμμετοχή μου στα επιστημονικά συνέδρια του χώρου της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Παράλληλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα και τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής, την Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων κ. Μαρία Καλδρυμίδου και τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας κ. Κωνσταντίνο Π. Χρήστου για τις χρήσιμες συμβουλές και σχόλια στο κείμενο της διατριβής, την άμεση απόκριση κάθε φορά που χρειαζόμουν τη βοήθειά τους, καθώς επίσης και τις εποικοδομητικές μας συζητήσεις κατά τη διάρκεια των συνεδρίων.

Ευχαριστώ θερμά τον Καθηγητή του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας κ. Χαράλαμπο Λεμονίδη καθώς και τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων κ. Κωνσταντίνο Τάτση που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην επταμελή εξεταστική επιτροπή. Για τον ίδιο λόγο, ευχαριστώ και τα άλλα δύο μέλη της επταμελούς επιτροπής, τον Καθηγητή του Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης και καθηγητή μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα της Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών, κ. Χαράλαμπο Σακονίδη, καθώς και την Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας κ. Χαρούλα Σταθοπούλου. Ιδιαίτερα τους ευχαριστώ για το ενδιαφέρον που πάντα επιδεικνύουν για την ερευνητική μου πορεία.

Θερμές ευχαριστίες οφείλω στη μαθηματικό και διδάκτορα Στατιστικής κ. Σταυρούλα Πουλοπούλου για την πολύτιμη βοήθεια που μου παρείχε στις στατιστικές αναλύσεις.

Ελάχιστη υποχρέωσή μου είναι να ευχαριστήσω, για τη συλλογή των δεδομένων, τους αγαπημένους μου φίλους και συναδέλφους Χριστίνα Καλαθά, Παναγιώτη Δημητρέλια και Κατερίνα Κατράκη καθώς και τους καλούς μου συναδέλφους, Ειρήνη Κουλέτση, Χρυσόστομο Λάσκαρη, Ελίνα Κατσούλη και Κωνσταντίνο Κοντογιαννόπουλο. Ξεχωριστά ευχαριστώ στην αγαπητή Συντονίστρια Μαθηματικών της Β΄ Αθήνας, κ. Παναγιώτα Κοταρίνου, όχι μόνο για τη βοήθεια που μου προσέφερε στη συλλογή των δεδομένων, αλλά και για την ενθάρρυνσή της κατά το διάστημα εκπόνησης της παρούσας διατριβής.

Ο ακαδημαϊκός κύκλος των ευχαριστιών μου δεν μπορεί να κλείσει χωρίς τις ευχαριστίες στις φίλες και διδάκτορες Στέλλα Νίκα και Γαρυφαλλιά Χαριτάκη, καθώς και στον φίλο μου υπ. διδάκτορα Παναγιώτη Παπαδημητρίου για τις κοινές αγωνίες που μοιραστήκαμε κατά την παράλληλη ερευνητική μας πορεία.

Ευχαριστώ από καρδιάς την αγαπημένη μου φίλη και συνάδελφο μαθηματικό, Γιώτα για το ειλικρινές ενδιαφέρον και τη στήριξή της σε κάθε μου προσπάθεια.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στον σύντροφο μου Θοδωρή για την κατανόηση που επέδειξε στις προτεραιότητες που επέβαλε αυτό το εγχείρημα και μία ειλικρινή συγνώμη για τις πολύτιμες στιγμές που στέρησα από τη σχέση μας.

Τέλος, ένα πολύ μεγάλο και βαθύ ευχαριστώ οφείλω στους γονείς μου, Γιάννη και Ειρήνη, και τα αδέρφια μου, Μιχάλη και Μανώλη, για την αγάπη, την αδιάλειπτη υποστήριξη καθώς και για όλες εκείνες τις ώρες που «σίγησαν» για να μη με ενοχλήσουν.

Μέρος αυτής της επιστημονικής μελέτης χρηματοδοτήθηκε στο πλαίσιο του προγράμματος «Υποστήριξη ερευνητών με έμφαση στους νέους ερευνητές-Κύκλος Α΄» με κωδικό ΟΠΣ (MIS) 5005659 του Ε.Π. «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και δια Βίου Μάθηση» στους Άξονες Προτεραιότητας 6, 8, 9, οι οποίοι συγχρηματοδοτούνται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και από εθνικούς πόρους.

Learning is more than absorbing facts, it is acquiring understanding.

William Arthur Ward (1921-1994)

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι σύγχρονες απόψεις για τη μάθηση των μαθηματικών συγκλίνουν στη θέση ότι η εννοιολογική κατανόηση και οι διαδικαστικές δεξιότητες είναι εξίσου απαραίτητες συνιστώσες της μαθηματικής γνώσης. Παρά τη γενική αυτή συναίνεση, ο θεωρητικός και εργαλειακός προσδιορισμός των δύο αυτών συνιστωσών, καθώς και της μεταξύ τους σχέσης, παραμένουν αντικείμενο συζήτησης. Η διάκριση μεταξύ «εννοιολογικής γνώσης» και «διαδικαστικής γνώσης» έχει υπάρξει και συνεχίζει να είναι ένας τρόπος οριοθέτησης του προβλήματος με σημαντική επίδραση στον ερευνητικό αυτό χώρο. Ως «διαδικαστική γνώση» ορίζεται η ικανότητα του υποκειμένου να εκτελεί διαδικασίες αλγοριθμικού τύπου, ενώ ο όρος «εννοιολογική γνώση» αναφέρεται στη γνώση για τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες των οντοτήτων μιας γνωστικής περιοχής, τις σχέσεις και διαδικασίες στις οποίες εμπλέκονται, καθώς και τις αρχές που διέπουν την εμπλοκή τους. Η εννοιολογική και η διαδικαστική γνώση παρουσιάζονται συχνά ως αλληλένδετες. Ωστόσο, υπάρχουν ερευνητικά δεδομένα που δείχνουν ότι συχνά η ανάπτυξη των δύο τύπων γνώσης είναι ασύμμετρη, αναδεικνύοντας δι-ατομικές διαφορές στον τρόπο που οι μαθητές συνδυάζουν τα δύο είδη γνώσης σε διάφορες περιοχές των μαθηματικών. Η έρευνα για τους παράγοντες που συνδέονται με αυτό το φαινόμενο δεν έχει τελεσφορήσει. Στην παρούσα διατριβή επιχειρείται η διερεύνηση των δι-ατομικών διαφορών στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση για κλάσματα, καθώς και η σχέση τους με την προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών (επιφανειακή/βαθιά) σε μαθητές Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου. Με βάση τη βιβλιογραφία και προηγούμενες μελέτες μας, υποθέσαμε ότι υπάρχουν δι-ατομικές διαφορές στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση για τα κλάσματα, με την έννοια ότι η εννοιολογική γνώση υστερεί σε σχέση με τη διαδικαστική ή αντίστροφα. Επιπλέον, υποθέσαμε ότι οι διαφορές αυτές μπορεί να παραμένουν ακραίες ακόμη και για μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας. Πιο συγκεκριμένα, προβλέψαμε ότι θα βρεθούν μαθητές οι οποίοι επιτυγχάνουν σε έργα με διαδικαστική στόχευση, αλλά αποτυγχάνουν συστηματικά σε έργα με εννοιολογική στόχευση και αντίστροφα. Υποθέσαμε επίσης ότι αυτές οι δι-ατομικές διαφορές στα δύο είδη γνώσης των κλασμάτων θα συνοδεύονται από διαφορές στην προσέγγιση της μάθησης των μαθηματικών (επιφανειακή/βαθιά). Η επιφανειακή προσέγγιση σχετίζεται με την πρόθεση του υποκειμένου να αναπαραγάγει το περιεχόμενο όταν του ζητηθεί, ενώ η βαθιά προσέγγιση με την πρόθεση του υποκειμένου να κατανοήσει το αντικείμενο της μάθησης. Συγκεκριμένα, προβλέψαμε ότι οι μαθητές με περισσότερο ανεπτυγμένη τη διαδικαστική, σε σχέση με την εννοιολογική γνώση, θα ακολουθούν επιφανειακή προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών, ενώ οι μαθητές με προχωρημένη ή περισσότερο ανεπτυγμένη την εννοιολογική γνώση, θα ακολουθούν βαθιά προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών. Προκειμένου να εξετασθούν: α) η διαδικαστική και εννοιολογική γνώση των μαθητών για τα κλάσματα και β) η προσέγγιση των μαθητών στη μάθηση των μαθηματικών, κατασκευάστηκαν δύο νέα ερευνητικά εργαλεία τα οποία αξιολογήθηκαν ως προς την εγκυρότητα και την αξιοπιστία τους. Και τα δύο ερωτηματολόγια επιδόθηκαν στους ίδιους 463 μαθητές Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου, σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές. Ο έλεγχος της υπόθεσης της ύπαρξης δι-ατομικών διαφορών πραγματοποιήθηκε με τη στατιστική μέθοδο της «ανάλυσης συστάδων», από την οποία προέκυψαν τέσσερα διαφορετικά προφίλ μαθητών. Τα δύο από αυτά συμπεριλάμβαναν μαθητές για τους οποίους η εννοιολογική γνώση υπερτερούσε της διαδικαστικής και αντίστροφα, αποτέλεσμα που συνηγορεί υπέρ της υπόθεσής μας. Επιπλέον, ανιχνεύθηκαν μαθητές με ακραίες διαφορές μεταξύ των δύο ειδών γνώσης, με την έννοια που περιγράφηκε παραπάνω. Στη συνέχεια ελέγχθηκε με πολυμεταβλητή λογιστική παλινδρόμηση κατά πόσο η προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών και η τάξη (Α΄ και Γ΄) αποτελούν προγνωστικούς παράγοντες για την κατάταξη των μαθητών στις διαφορετικές ομάδες που προέκυψαν από την ανάλυση συστάδων. Το κεντρικό εύρημα είναι ότι η προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών προβλέπει την κατάταξη στην ομάδα των μαθητών που έχουν ισχυρότερη διαδικαστική, σε σχέση με την εννοιολογική γνώση, αλλά όχι και στην ομάδα αυτών που έχουν ισχυρότερη εννοιολογική γνώση. Το αποτέλεσμα αυτό υποστηρίζει μερικώς την υπόθεσή μας. Οι θεωρητικές παραδοχές, ο σχεδιασμός και τα ευρήματα της έρευνας συζητώνται ως προς τη θεωρητική και μεθοδολογική τους συμβολή στον σχετικό ερευνητικό χώρο και αναδεικνύονται ενδεχόμενες εκπαιδευτικές προεκτάσεις.

Λέξεις-Κλειδιά: *Κλάσματα, Διαδικαστική/Εννοιολογική γνώση, Επιφανειακή/Βαθιά προσέγγιση στη μάθηση των Μαθηματικών, Δι-ατομικές διαφορές*

ABSTRACT

Contemporary perspectives on mathematics learning converge on the view that conceptual understanding and procedural fluency are equally important components of mathematical knowledge. Despite this consesus, delineating these components and their relation remains an ongoing subject of discussion. The distinction between "conceptual knowledge" and "procedural knowledge" has been, and continues to be an influential distinction in the field of mathematics education. "Procedural knowledge" is defined as the ability of the individual to execute algorithmic procedures, whereas the term "conceptual knowledge" refers to the knowledge for the features and properties of the entities of a domain, the relations and procedures in which they are involved, as well as the principles that they obey. Conceptual and procedural knowledge are very often highly correlated. However, there are research findings indicating that the development of the two types of knowledge is assymetrical, highlighting inter-individual differences in the way students combine the two types of knowledge in various mathematical areas. Prior research has not provided yet satisfactory explanations for this phenomenon. In the present thesis, we investigate the inter-individual differences in conceptual and procedural knowledge of fractions and explore their relation to the individual's approach to mathematics learning, along the distinction "deep approach" (related to the individual's intention to understand) and "surface approach" (related to the individual's intention to reproduce). We hypothesized that there are inter-individual differences in the procedural and conceptual knowledge of fractions, in the sense that there are individuals whose conceptual knowledge is lagging behind procedural knowledge or vice versa. Further, we predicted that such differences may remain extreme, up to Grade 9. More specifically, we predicted that there are students who consistently succeed in procedural tasks, but consistently fail in conceptual tasks and vice versa. We also hypothesized that these inter-individual differences in the two types of knowledge are accompanied with differences in the individual's approach to mathematics learning (surface/deep). Specifically, we predicted that students with more developed procedural knowledge, will follow surface approach to mathematics learning, whereas students with advanced or more developed conceptual knowledge compared to their procedural knowledge will follow deep approach to mathematics learning. In order to investigate: a) the procedural and conceptual knowledge for fractions, and b) the approach to mathematics learning, two new instruments were constructed which were evaluated in terms of validity and reliability. The two questionnaires were administered to 463 students at Grade 7 and 9, at two different moments. We tested for inter-individual differences via the statistical method of “cluster analysis”, from which four different profiles emerged. Two of them included students with more developed conceptual, than procedural knowledge and vice versa, which was consistent with our hypothesis. Moreover, students who consistently failed in one type of task but succeded in the other were identified. We also found that the approach to mathematics learning predicts cluster membership for students with more developed procedural, than conceptual, knowledge, but not for those with more developed conceptual knowledge. This result partially supports our hypothesis. The theoretical assumptions, the design, and the research findings are discussed with respect to the theoretical and methodological contributions of this thesis, and possible educational implications are highlighted.

Keywords: *Fractions, Procedural/Conceptual knowledge, Surface/Deep approach to mathematics learning, Inter-individual differences*

Περιεχόμενα

0 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Δύο παιδιά Γυμνασίου καλούνται να συγκρίνουν τα κλάσματα 25/37 και 3/2, χωρίς να χρησιμοποιήσουν χαρτί και μολύβι. Το ένα παιδί λέει «είναι εύκολο, το πρώτο κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας, ενώ το δεύτερο είναι μεγαλύτερο της μονάδας – το δεύτερο είναι μεγαλύτερο». Στο παιδί αυτό ζητείται στη συνέχεια να εφαρμόσει την τυπική διαδικασία της σύγκρισης ετερώνυμων κλασμάτων. Το παιδί δυσφορεί και δηλώνει «ποτέ δεν μπορώ να θυμηθώ πώς γίνεται αυτό το πράγμα». Το δεύτερο παιδί λέει «το πρώτο είναι μεγαλύτερο, είναι μεγαλύτεροι οι αριθμοί». Στο παιδί αυτό δίνεται η δυνατότητα να χρησιμοποιήσει χαρτί και μολύβι. «Δηλαδή, να κάνω τα καπελάκια;» ρωτάει και συνεχίζει τοποθετώντας τους παρονομαστές χιαστί σε «καπελάκια» πάνω από τα κλάσματα και εκτελώντας σωστά την τυπική διαδικασία σύγκρισης κλασμάτων με τη μετατροπή τους σε ομώνυμα.

Το παράδειγμα αυτό είναι υποθετικό, αλλά βασίζεται σε ερευνητικά δεδομένα που δείχνουν διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους αποκρίνονται τα παιδιά σε μαθηματικά έργα που αφορούν τα κλάσματα. Και τα δύο παιδιά του παραδείγματος έχουν κάποια γνώση για τα κλάσματα, αλλά διαφέρουν πολύ ως προς το τι γνωρίζουν. Το πρώτο παιδί αναγνωρίζει μια ιδιότητα των μαθηματικών αντικειμένων που εμπλέκονται την κατάσταση και αξιοποιεί τη σχέση τους με ένα τρίτο μαθηματικό αντικείμενο για να απαντήσει στο ερώτημα. Το παιδί αυτό έχει «εννοιολογική» γνώση για τα κλάσματα. Το δεύτερο παιδί γνωρίζει μια γενική, τυποποιημένη διαδικασία και την εφαρμόζει σωστά, παρά το γεγονός ότι, στη συγκεκριμένη περίπτωση, είναι ιδιαίτερα κοπιώδης. Το παιδί αυτό έχει «διαδικαστική» γνώση για τα κλάσματα. Αυτή η διπλή διαφοροποίηση, μεταξύ των συνιστωσών της μαθηματικής γνώσης, αλλά και μεταξύ των δύο παιδιών, είναι τα κεντρικά ζητήματα στα οποία επικεντρώνει η εργασία αυτή. Η πρώτη αφορά τη διάκριση ανάμεσα στην «εννοιολογική» και τη «διαδικαστική» γνώση, ενώ η δεύτερη αφορά τις ενδεχόμενες δι-ατομικές διαφορές στον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά αναπτύσσουν τα δύο είδη γνώσης. Τέλος, ένα σημαντικό ζητούμενο είναι το πώς μπορούν να εξηγηθούν τέτοιες δι-ατομικές διαφορές.

Στην εργασία αυτή εξετάσαμε την υπόθεση ότι υπάρχουν δι-ατομικές διαφορές στον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά αναπτύσσουν την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση τους για τα κλάσματα. Συγκεκριμένα, προβλέψαμε ότι υπάρχουν παιδιά με πιο ανεπτυγμένη εννοιολογική γνώση για τα κλάσματα, σε σχέση με τη διαδικαστική γνώση και αντίστροφα. Επιπλέον, προβλέψαμε ότι υπάρχουν περιπτώσεις όπου αυτές οι διαφορές είναι «ακραίες», δηλαδή ότι υπάρχουν παιδιά με πολύ ανεπτυγμένη εννοιολογική, αλλά πολύ φτωχή διαδικαστική γνώση, και το αντίστροφο. Τα υποθετικά παιδιά του παραπάνω παραδείγματος θα μπορούσαν να είναι τέτοιες περιπτώσεις. Επιπλέον, διερευνήσαμε την υπόθεση ότι ο διαφορετικός τρόπος προσέγγισης της μάθησης των μαθηματικών είναι ένας λόγος στον οποίο μπορεί να οφείλονται τέτοιες διαφορές στα δύο είδη γνώσης. Κάποια παιδιά, υιοθετώντας μια «επιφανειακή» προσέγγιση, επιδιώκουν να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις του σχολείου ή να πάρουν καλούς βαθμούς, προσπαθούν να απομνημονεύσουν τις διαδικασίες που τους χρειάζεται για να λύνουν ασκήσεις, εξασκούνται διαβάζοντας και ξανα-λύνοντας τις ασκήσεις που έλυσαν στο σχολείο και δε θεωρούν τα μαθηματικά ιδιαίτερα ενδιαφέροντα. Θεωρήσαμε ότι αυτά τα παιδιά είναι πιο πιθανό να τα πηγαίνουν καλύτερα με τις διαδικασίες, παρά με τις έννοιες. Άλλα παιδιά, υιοθετώντας μια «βαθιά» προσέγγιση, επιδιώκουν να καταλάβουν σε βάθος αυτά που μαθαίνουν, δε βασίζονται στην απομνημόνευση, εξασκούνται λύνοντας ασκήσεις που δεν έχουν ξαναδεί και βρίσκουν ενδιαφέρον στη μαθηματική πρόκληση. Θεωρήσαμε ότι αυτά τα παιδιά είναι πιο πιθανό να έχουν βαθύτερη κατανόηση για τις έννοιες – ανάμεσα σε αυτά, κάποια δεν τα πηγαίνουν τόσο καλά με τις διαδικασίες: μπορεί να είναι τα παιδιά που δεν αφιερώνουν χρόνο σε κάτι που θεωρούν τετριμμένο, ή μπορεί να δυσκολεύονται στην απομνημόνευση. Ακολουθεί μία συνοπτική περιγραφή των κεφαλαίων της διατριβής.

Στο πρώτο κεφάλαιο, προσδιορίζουμε τους όρους «εννοιολογική» και «διαδικαστική γνώση» και τις θεωρητικές παραδοχές που υπόκεινται του τρόπου με τον οποίο τους χρησιμοποιούμε, μετά από εκτενή βιβλιογραφική ανασκόπηση. Συζητάμε τα θεωρητικά και εμπειρικά δεδομένα για τα δύο είδη γνώσης και τη μεταξύ τους σχέση και τα μεθοδολογικά ζητήματα που τίθενται όσον αφορά τη μέτρησή τους. Στη συνέχεια ανασκοπούμε τη βιβλιογραφία σχετικά με τους τύπους προσέγγισης στη μάθηση γενικά και, ειδικότερα, στη μάθηση των μαθηματικών και αναδεικνύουμε χαρακτηριστικά της «βαθιάς» και της «επιφανειακής» προσέγγισης στη μάθηση και δείκτες της κάθε μίας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφουμε την πιλοτική μας μελέτη που είχε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση, κατασκευάσαμε ένα καινούργιο εργαλείο που να μετρά τα δύο είδη γνώσης, διαδικαστική και εννοιολογική (για την ανάδειξη δι-ατομικών διαφορών στην κύρια έρευνα), το οποίο αξιολογήθηκε διεξοδικά ως προς την εγκυρότητα (περιεχομένου και εννοιολογικής κατασκευής) και την αξιοπιστία (εσωτερικής συνάφειας και ελέγχου-επανελέγχου). Επιπλέον, κατασκευάσαμε ένα δεύτερο εργαλείο για τη μέτρηση της προσέγγισης στη μάθηση το οποίο αξιολογήθηκε ως προς την εγκυρότητα (περιεχομένου) και την αξιοπιστία (εσωτερικής συνάφειας και ελέγχου-επανελέγχου). Το εργαλείο αυτό αποτελούνταν από δηλώσεις συμβατές με τυπικούς δείκτες της κάθε προσέγγισης, στις συνιστώσες που, όπως φάνηκε από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση, αλλά και πρότερες ποιοτικές μελέτες μας, είναι σημαντικές για τα μαθηματικά. Η προσέγγιση στη μάθηση αποτυπώθηκε ως συνολική επίδοση στα έργα του ερωτηματολογίου (όσο μεγαλύτερη, τόσο μεγαλύτερη η συμβατότητα με τη βαθιά προσέγγιση στη μάθηση).

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε την κύρια μελέτη μας. Στην πρώτη φάση, χρησιμοποιώντας το αξιολογημένο, από την πιλοτική μελέτη εργαλείο μας, μετρήσαμε τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση 510 μαθητών Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου. Από τη μοντελοποίηση της σχέσης των δύο ειδών γνώσης προέκυψε η επίδοση της σχετικής και όχι απόλυτης υπεροχής στα δύο είδη γνώσης και διενεργήθηκε ανάλυση συστάδων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπάρχουν δι-ατομικές διαφορές στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση για τα κλάσματα και ότι οι διαφορές αυτές μπορεί να είναι ακραίες. Συγκεκριμένα προέκυψαν τέσσερα προφίλ μαθητών: μαθητές με χαμηλή ή υψηλή διαδικαστική και εννοιολογική γνώση (*«Χαμηλά και στα δύο»* και *«Υψηλά και στα δύο»* αντίστοιχα), μαθητές με υψηλότερη διαδικαστική γνώση από την προβλεπόμενη με βάση την εννοιολογική τους γνώση (*«Ισχυρότερη διαδικαστική»*), μαθητές με υψηλότερη εννοιολογική από την προβλεπόμενη με βάση τη διαδικαστική τους γνώση (*«Ισχυρότερη εννοιολογική»)*. Τα αποτελέσματα υποστήριξαν την υπόθεσή μας ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές και ότι μπορεί να είναι ακραίες. Πράγματι, μεγάλο ποσοστό μαθητών, ακόμη και της Γ΄ Γυμνασίου, ανήκε στο ένα από τα δύο τελευταία ακραία προφίλ. Η υπόθεσή μας περί ακραίων διαφορών επιβεβαιώθηκε περαιτέρω με τον εντοπισμό μαθητών στις δύο αυτές συστάδες με εξαιρετικά ανεπτυγμένο το ένα είδος γνώσης σε σχέση με το άλλο. Επιπλέον, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η σχολική εμπειρία, από την Α΄ Γυμνασίου έως τη Γ΄ Γυμνασίου, ευνοεί κυρίως τη διαδικαστική γνώση με το έλλειμμα στην εννοιολογική να παραμένει. Τέλος, ο στατιστικός έλεγχος έδειξε ότι η κατανομή των μαθητών στις διάφορες συστάδες διαφοροποιείται ανά σχολείο φοίτησης με τους μαθητές του Πρότυπου Πειραματικού σχολείου να ανήκουν σχεδόν στο σύνολό τους στη συστάδα *«Υψηλά και στα δύο»*.

Στη δεύτερη φάση της κύριας μελέτης που αφορούσε τη διερεύνηση στην προσέγγιση στη μάθηση, οι συμμετέχοντες ήταν 463 μαθητές από τους 510 που συμμετείχαν στην πρώτη φάση της έρευνας. Ο έλεγχος προγνωστικών παραγόντων έδειξε ότι η προσέγγιση στη μάθηση μπορεί να προβλέψει την πιθανότητα να ανήκει κάποιος στις συστάδες *«Υψηλά και στα δύο»* και *«Ισχυρότερη διαδικαστική»*, όχι όμως στη συστάδα *«Ισχυρότερη εννοιολογική»*, αποτέλεσμα το οποίο επιβεβαιώνει εν μέρει την υπόθεσή μας περί ατομικών διαφορών. Επιπλέον, παρατηρήθηκαν διαφορές στην αυτοαξιολόγηση της κατανόησης στα κλάσματα στις συστάδες, αποτέλεσμα συμβατό με την υπόθεσή μας ότι οι μαθητές με περισσότερο ανεπτυγμένη τη διαδικαστική γνώση θα υπερεκτιμούν την επίδοσή τους, σε αντίθεση με τους μαθητές που έχουν περισσότερο ανεπτυγμένη την εννοιολογική τους γνώση.

Στο τέταρτο κεφάλαιο της διατριβής καταγράφονται τα συμπεράσματα, οι περιορισμοί και η συνεισφορά της παρούσας έρευνας στην εκπαίδευση.

1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1.1 Το ζήτημα της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνωσης στα κλάσματα

1.1.1 Ο ρόλος της γνώσης των κλασμάτων στη μαθηματική ανάπτυξη

Τα κλάσματα αποτελούν ένα σημαντικό κομμάτι των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών διεθνώς. Συνακόλουθα, πολύς διδακτικός χρόνος και προσπάθεια επενδύεται στη διδασκαλία τους, τόσο στην πρωτοβάθμια, όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Πλήθος ερευνών έχουν τεκμηριώσει ότι η καλή κατανόηση των κλασμάτων είναι πολύ σημαντική για τη γενική μαθηματική επίδοση των μαθητών (Stelzer et al., 2019), αλλά και για την επίδοσή τους σε ειδικότερους άξονες περιεχομένου, όπως η άλγεβρα (π.χ., Bailey, Hoard, Nugent, & Geary, 2012; Booth & Newton, 2012; Siegler et al., 2012). Υπάρχουν έρευνες που τεκμηριώνουν τη γνώση των κλασμάτων στο Δημοτικό ως προγνωστικό παράγοντα για την επίδοση στα μαθηματικά του Λυκείου (Siegler et al., 2012). Επιπλέον, ερευνητικά δεδομένα υποστηρίζουν ότι η επιτυχία στις αναπαραστάσεις των κλασμάτων (π.χ. αναπαράσταση στην αριθμογραμμή) αποτελεί προγνωστικό παράγοντα για τη μελλοντική επιτυχία στα μαθηματικά (Siegler & Pyke, 2013). Υπό αυτή την οπτική, η γνώση των κλασμάτων, είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη μαθηματική επιτυχία. Φαίνεται, λοιπόν, ότι η κατανόηση των κλασμάτων από τους μαθητές έχει σημαντικό αντίκτυπο στη μάθηση των μαθηματικών κατά τη σχολική τους ζωή και είναι καθοριστική για την επιτυχία τους ή την αποτυχία τους στο αντικείμενο αυτό. Επομένως, είναι σημαντική και όσον αφορά τις επιλογές τους για τη συνέχιση των σπουδών τους για ένα πολύ μεγάλο εύρος επαγγελμάτων, ενώ ταυτόχρονα αφορά και την καθημερινή τους ζωή.

Είναι, λοιπόν, λόγος ανησυχίας το γεγονός ότι τα κλάσματα δυσκολεύουν τους μαθητές από διάφορες βαθμίδες εκπαίδευσης, αλλά ακόμα και τους εγγράμματους ενήλικες (π.χ., Moss, 2005; Vamvakoussi, Van Dooren, & Verschaffel, 2012; NCTM, 2007). Υπάρχουν πολλοί λόγοι για τους οποίους τα κλάσματα είναι ένα απαιτητικό μαθησιακό αντικείμενο. Η Moss (2005) συνόψισε τους κυριότερους από αυτούς: πρόκειται για μια πολύπλοκη έννοια, με πολλαπλές συμβολικές, αλλά και άλλου τύπου αναπαραστάσεις (π.χ., τα κλάσματα ως σημεία στην αριθμογραμμή), διαφορετικά νοήματα ανάλογα με την κατάσταση στην οποία εμφανίζεται (π.χ., μέρος όλου, λόγος, τελεστής) και διασυνδέσεις με πολλές περιοχές των μαθηματικών (π.χ. αναλογίες, πιθανότητα, ομοιότητα γεωμετρικών σχημάτων). Ο ρόλος της μονάδας αναφοράς επίσης ενέχει σημαντικές εννοιολογικές δυσκολίες: Με το νόημά τους ως καθαροί αριθμοί, τα κλάσματα έχουν ως μονάδα αναφοράς τη μονάδα (1) και άρα μπορούν, για παράδειγμα, να συγκριθούν ή να προστεθούν, χωρίς να απαιτείται ιδιαίτερη μέριμνα για τη μονάδα αναφοράς. Όταν όμως τα κλάσματα αναφέρονται σε ποσότητες, ο ρόλος της μονάδας αναφοράς είναι κρίσιμος και η αγνόησή της μπορεί να προκαλέσει σημαντικά σφάλματα. Μια ακόμα σημαντική πηγή λαθών αποτελεί το γεγονός ότι οι μαθητές μεταφέρουν στα κλάσματα, τις σχέσεις τους και τις πράξεις τους, χαρακτηριστικά και ιδιότητες των φυσικών αριθμών, οι οποίες δεν ισχύουν στο πεδίο των κλασμάτων. Ταυτόχρονα, οι πράξεις στις οποίες εμπλέκονται τα κλάσματα έχουν πολλές και σύνθετες διαδικασίες – για παράδειγμα, ο αλγόριθμος της διαίρεσης κλασμάτων («αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω») θεωρείται ίσως η πιο απαιτητική διαδικασία που συναντούν οι μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Είναι ευρέως γνωστό και ερευνητικά τεκμηριωμένο ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν μεγάλη δυσκολία και κάνουν συστηματικά λάθη σε ένα μεγάλο εύρος μαθηματικών έργων που αφορούν τα κλάσματα. Τα λάθη των μαθητών αντανακλούν τις εννοιολογικές δυσκολίες των μαθητών με τα κλάσματα (Moss, 2005; Smith, 2002; Rittle-Johnson & Siegler, 1998; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Πράγματι, δυσχέρειες παρατηρούνται, ανάμεσα σε άλλα, στην αναπαράσταση των κλασμάτων, στην εκτίμηση του μεγέθους τους, στην εκτίμηση αποτελεσμάτων των πράξεων με κλάσματα, στην επίλυση προβλήματος με πολλαπλές ή μη άμεσα ορατές μονάδες αναφοράς. Δε λείπουν, ωστόσο, και λάθη που αφορούν την εφαρμογή αλγορίθμων (Siegler et al., 2011; Tirosh, 2000). Κάποιες φορές, τα λάθη αυτά οφείλονται στο γεγονός ότι οι μαθητές απομνημονεύουν και εκτελούν μηχανικά τον αλγόριθμο, χωρίς να τον κατανοούν, ενώ άλλες φορές αποκαλύπτουν ελλείμματα στην κατανόηση των κλασμάτων (Tirosh, 2000). Από την άλλη μεριά, ένα ζήτημα που είναι σχετικό με τα κλάσματα, αλλά διαπερνά όλες τις περιοχές ενδιαφέροντος της μαθηματικής εκπαίδευσης, είναι το φαινόμενο της διαδικαστικής ευχέρειας που δε συνοδεύεται από κατανόηση (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Moss, 2005), δηλαδή, περιπτώσεις παιδιών που γνωρίζουν και εκτελούν σωστά διαδικασίες, αλλά έχουν πολλή φτωχή κατανόηση για τις εμπλεκόμενες έννοιες.

Αναγνωρίζοντας: α) ότι η κατανόηση των ρητών είναι πολύ σημαντική για τη γενική μαθηματική επίδοση των μαθητών, αλλά και για την επίδοσή τους σε ειδικότερους άξονες περιεχομένου, όπως η άλγεβρα (π.χ., Bailey et al., 2012; Booth &

Newton, 2012; Siegler κ.ά., 2012), β) την ύπαρξη γνωστικού ελλείμματος που παρατηρείται στο συγκεκριμένο πεδίο των μαθηματικών και, ιδιαίτερα, όσον αφορά την κατανόηση χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων των κλασμάτων, των σχέσεων και των πράξεών τους, και γ) το γενικότερο φαινόμενο της διάστασης μεταξύ της διαδικαστικής ευχέρειας και της βαθύτερης κατανόησης στα μαθηματικά, καθίσταται σαφές ότι η διερεύνηση των διαφορετικών πτυχών της γνώσης για τα κλάσματα έχει εκπαιδευτική, αλλά και θεωρητική σημασία. Στη συνέχεια, εξετάζουμε με λεπτομέρεια τη διάκριση μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης, ένα θέμα το οποίο είναι κεντρικό για την παρούσα διατριβή.

1.1.2 Εννοιολογική και διαδικαστική γνώση: ζητήματα ορισμού

Οι ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών συμφωνούν ότι η μαθηματική ικανότητα εξαρτάται τόσο από την εννοιολογική κατανόηση όσο και από τη διαδικαστική δεξιότητα (De Corte, 2004; Kilpatrick et al., 2001). Κάποιες εννοιολογήσεις της μαθηματικής γνώσης περιλαμβάνουν επιπλέον τύπους γνώσης (Rittle-Johnson & Koedinger, 2005) ή τη διαιρούν σε διαφορετικές κατηγορίες (π.χ. Reason, 2003), ωστόσο η διάκριση εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης παραμένει η κυρίαρχη διάκριση στη βιβλιογραφία.

Το ζήτημα της εννοιολογικής κατανόησης (conceptual understanding) και των διαδικαστικών δεξιοτήτων (procedural skills), καθώς και των σχέσεών τους, είναι ένα ζήτημα που έχει απασχολήσει την κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης από τις αρχές του 20ου αιώνα. Διάφορα θεωρητικά πλαίσια προτάθηκαν για να περιγράψουν τη μαθηματική γνώση, μεταξύ αυτών η συσχετική/λειτουργική κατανόηση (relational/instrumental understanding) (Skemp, 1976) και η τετριμμένη/προσαρμοστική ικανότητα (routine/adaptive expertise). Από τα μέσα της δεκαετίας του 1980, το επικρατέστερο από τα θεωρητικά πλαίσια που προτάθηκαν ήταν αυτό που περιλαμβάνει δύο ευρεία είδη γνώσης, τη *διαδικαστική* και την *εννοιολογική* γνώση. Παρόλο που η προέλευση του θεωρητικού πλαισίου είναι δύσκολο να προσδιοριστεί με ακρίβεια, η ορολογία αυτή έγινε ευρέως γνωστή από μία δημοσίευση που περιλαμβανόταν σε ένα βιβλίο των Hiebert και Lefevre (1986).

Οι Hiebert και Lefevre (1986), στο εισαγωγικό κεφάλαιο του βιβλίου με τίτλο *Εννοιολογική και Διαδικαστική γνώση: Η περίπτωση των μαθηματικών* δηλώνουν ότι αυτή η διάκριση είναι υπαρκτή και προβαίνουν στην αλλαγή της ορολογίας από *διαδικαστική δεξιότητα* σε *διαδικαστική γνώση*.

Οι παλαιότεροι και, κατά πολλούς, επικρατούντες ορισμοί για τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση βρίσκονται στο εισαγωγικό κεφάλαιο του βιβλίου. Συγκεκριμένα, η εννοιολογική γνώση ορίζεται ως:

> … η γνώση που είναι πλούσια σε συσχετίσεις. Μπορεί να θεωρηθεί ως ένα δίκτυο γνώσης που οι σχέσεις είναι τόσο κυρίαρχες όσο και οι διακριτές μονάδες πληροφορίας. Οι σχέσεις διέπουν τις μεμονωμένες ιδέες και προτάσεις έτσι ώστε όλα οι μονάδες της πληροφορίας να συνδέονται σε κάποιο δίκτυο (Hiebert & Lefevre, 1986, σελ. 3-4).

Οι ίδιοι ερευνητές ορίζουν τη διαδικαστική γνώση ως ένα είδος γνώσης που περιλαμβάνει δύο συνιστώσες. Συγκεκριμένα:

> Το ένα είδος διαδικαστικής γνώσης είναι η εξοικείωση με τα σύμβολα του συστήματος και με τις συντακτικές συμβάσεις για αποδεκτές προσαρμογές των συμβόλων. Το δεύτερο είδος της διαδικαστικής γνώσης περιλαμβάνει κανόνες και διαδικασίες για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Πολλές από τις διαδικασίες που οι μαθητές κατέχουν είναι πιθανά αλληλουχίες για τον χειρισμό συμβόλων (Hiebert & Lefevre, 1986, σελ. 7-8).

Σύμφωνα με τους Byrnes και Wasik (1991):

> Η εννοιολογική γνώση, η οποία αποτελείται από βασικές έννοιες σε ένα πεδίο καθώς και τις συσχετίσεις τους (δηλ. «γνωρίζοντας το τι»), έχει χαρακτηριστεί ως τέτοια χρησιμοποιώντας διάφορα κατασκευάσματα όπως σημασιολογικά δίκτυα, ιεραρχίες και νοητικά μοντέλα. Η διαδικαστική γνώση, από την άλλη, αφορά το «γνωρίζοντας το πώς» ή τη γνώση για τα βήματα που απαιτούνται για την επίτευξη διάφορων στόχων. Οι διαδικασίες έχουν περιγραφεί με τη χρήση κατασκευασμάτων όπως δεξιότητες, στρατηγικές, παραγωγές και εσωτερικευμένες πράξεις (σελ. 777).

Ευρέως αναφερόμενοι ορισμοί για τα δύο είδη γνώσης και επικρατέστεροι στη βιβλιογραφία είναι αυτοί των Rittle-Johnson και Alibali (1999):

> Προσδιορίζουμε την εννοιολογική γνώση ως την άδηλη ή έκδηλη (ρητή) κατανόηση των αρχών που διέπουν ένα πεδίο και των συσχετίσεων ανάμεσα στις μονάδες γνώσης σε αυτό. Προσδιορίζουμε τη διαδικαστική γνώση ως αλληλουχίες πράξεων για την επίλυση προβλημάτων (σελ. 175).

Παραπάνω, παραθέσαμε με ακρίβεια τους σημαντικότερους ορισμούς που κατεγράφησαν στη βιβλιογραφία για τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση.

Συνοψίζοντας, η εννοιολογική γνώση, μεταξύ άλλων, έχει περιγραφεί με αναφορά στην ικανότητα δημιουργίας συνδέσεων ανάμεσα σε διαφορετικά «κομμάτια γνώσης» (π.χ. Byrnes, 1992; Hiebert & Lefevre, 1986), στην ικανότητα αποκωδικοποίησης πολλαπλών αναπαραστάσεων μιας έννοιας (Byrnes, 1992), στο ρόλο της, κατά την επιλογή της διαδικασίας, για τη λύση ενός προβλήματος (Rittle-Johnson et al., 2001), και ως συνυφασμένη με τη διαισθητική και την τυπική γλώσσα σε μία προσωπική βάση (Kieren, 1993). Οι Rittle-Johnson και Schneider (2015), ανασκοπώντας τη σχετική βιβλιογραφία, διατύπωσαν την άποψη ότι το πλήθος των συνδέσεων δεν μπορεί να θεωρηθεί καθοριστικό στοιχείο του ορισμού της εννοιολογικής γνώσης, λαμβάνοντας υπόψη την αναπτυξιακή πλευρά: ίχνη εννοιολογικής γνώσης σε ορισμένα γνωστικά πεδία εμφανίζονται και σε μικρές ηλικίες, ενώ η δημιουργία συνδέσεων απαιτεί μια διευρυμένη βάση γνώσης και είναι μια μακροχρόνια διαδικασία. Οι ίδιοι ερευνητές προτείνουν ένα στοιχειώδη (και σε πρώτη ανάγνωση, κυκλικό) ορισμό για την εννοιολογική γνώση ως «γνώση για τις *έννοιες»* σε ένα γνωστικό πεδίο. Λαμβάνοντας υπόψη ότι υπάρχει μία σύγκλιση απόψεων στο ότι η εννοιολογική γνώση αφορά τη *γνώση για τις αρχές* (general principle knowledge) που άπτονται κάποιου πεδίου και τη *γνώση για τις αρχές που αποτελούν τη βάση των διαδικασιών* (knowledge of principles underlying procedures) (Crooks & Alibali, 2014; Rittle-Johnson & Schneider, 2015), επεξεργαστήκαμε αυτό τον ορισμό ως εξής: Ερμηνεύουμε τον όρο «έννοια» ως «κατηγορία» (π.χ. (μαθηματικές) έννοιες, διαδικασίες και σχέσεις) (βλ. και Crooks & Alibali, 2014), προσέγγιση συμβατή με την οπτική της μαθηματικής εκπαίδευσης. Για παράδειγμα, οι Kilpatrick και συνεργάτες (2001) αναφέρονται στην εννοιολογική κατανόηση ως την «κατανόηση των εννοιών, των πράξεων και των σχέσεων» (σελ. 5). Παίρνοντας τα κλάσματα ως μία παραδειγματική περίπτωση, η εννοιολογική γνώση απαραιτήτως περιλαμβάνει γνώση για το πώς αυτές οι μαθηματικές οντότητες αναπαρίστανται (συμβολικά ή αλλιώς), για τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητές τους (π.χ. τα κλάσματα έχουν μέγεθος, είναι πυκνά διατεταγμένα), τις μαθηματικές σχέσεις στις οποίες εμπλέκονται (π.χ. ισοδυναμία, διάταξη), αλλά και τη σχέση με άλλες μαθηματικές οντότητες (π.χ. φυσικούς αριθμούς), καθώς και για τις πράξεις στις οποίες εμπλέκονται και τις αρχές στις οποίες αυτές υπακούουν (π.χ. οι νόμοι της αριθμητικής). Επιπλέον, περιλαμβάνει τη γνώση για το αναφορικό νόημα των κλασμάτων, δηλαδή, το ρόλο τους ως αναπαραστάσεις ποσοτήτων και σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων (Nunes & Bryant, 2015). Ακόμη κι αν δε θεωρείται εξαντλητική αυτή η καταγραφή των συνιστωσών της εννοιολογικής κατανόησης, δείχνει ξεκάθαρα ότι η εννοιολογική γνώση είναι ένα πολυδιάστατο κατασκεύασμα (Vamvakoussi, Bempeni, Poulopoulou, & Tsiplaki, 2019).

Από την άλλη πλευρά, ορίζουμε τη διαδικαστική γνώση ως τη γνώση για τις αλληλουχίες των πράξεων (διαδικασίες) για την επίτευξη ενός συγκεκριμένου σκοπού (Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Όλοι οι αλγόριθμοι που διδάσκονται στο σχολείο σχετικά με τη σύγκριση κλασμάτων και τις πράξεις χαρακτηρίζονται ως διαδικασίες. Η ικανότητα που σχετίζεται με την εκτέλεση των διαδικασιών, θα μπορούσε να συνεπάγεται τη διαδικαστική γνώση. Ωστόσο, ο ορισμός αυτός έχει δεχτεί μεγάλη κριτική στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών γιατί ενοχοποιείται ότι περιγράφει μία πολύ περιορισμένη εικόνα της διαδικαστικής γνώσης σαν κάτι που κάποιος κατέχει ή δεν κατέχει, αγνοώντας τις ποιότητες της γνώσης (Star, 2005; Star & Stylianides, 2013).

Οι σύγχρονες θεωρήσεις για τη μάθηση των μαθηματικών φαίνεται να συγκλίνουν στην άποψη ότι τόσο η εννοιολογική και η διαδικαστική γνώση είναι εξίσου απαραίτητες (Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Παρ’ όλα αυτά, η μαθηματική εκπαίδευση αμφιταλαντεύεται, δίνοντας προτεραιότητα πότε στον έναν και πότε στον άλλον τύπο γνώσης (Moss & Case, 1999; Star, 2005). Μέρος του προβλήματος αυτού οφείλεται στο γεγονός ότι η εννοιολόγηση της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης καθώς και η σχέση ανάμεσα στα δύο είδη έχουν αποτελέσει επί σειρά ετών ζητήματα θεωρητικής διαμάχης. Τα δύο αυτά σημαντικά θέματα αναλύονται στις επόμενες ενότητες.

1.1.3 Κριτική στο θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης

Η εννοιολογική οριοθέτηση της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης αποτελεί ένα ζήτημα προς συζήτηση στο χώρο της γνωστικής-αναπτυξιακής ψυχολογίας αλλά και της μαθηματικής εκπαίδευσης (Star, 2005; Star & Stylianides, 2013). Πολλοί ερευνητές αμφισβήτησαν ότι η διαδικαστική δεξιότητα αποτελεί μία στατική οντότητα, η οποία κατοικεί σε μία άκριτη και καλά εξασκούμενη δραστηριότητα και υποστήριξαν ότι η διάδραση ανάμεσα στα δύο είδη γνώσης είναι μία συνεχής επαναληπτική διαδικασία.

Το βασικό επιχείρημα ότι οι διαδικασίες είναι από τη φύση τους εννοιολογικές και ότι ακόμα και αν αυτές εκτελούνται αυτοματοποιημένα, επεκτείνονται, εμπλουτίζονται και αναπροσαρμόζονται συνεχώς με την προσθήκη εννοιολογικών στοιχείων (Donald, 2011; Kieran, 2013).

Οι παραπάνω ορισμοί για τα δύο είδη γνώσης (βλ. 1.1.2) θεωρήθηκαν ακατάλληλοι από κάποιους ερευνητές, οι οποίοι ισχυρίστηκαν ότι δεν έχει νόημα η διάκριση να γίνεται με βάση τον τύπο γνώσης αλλά με βάση την ποιότητα (quality) της γνώσης, ειδικά στην περίπτωση που μιλάμε για γνώση πλούσια σε συσχετίσεις (Hiebert & Lefevre, 1986). Ο Star (2005) όρισε τη διαδικαστική γνώση ως τη «γνώση για τις διαδικασίες» και την εννοιολογική γνώση ως τη «γνώση για τις έννοιες ή τις αρχές» (σελ. 407). Όμως, όπως η εννοιολογική γνώση μπορεί να χαρακτηριστεί ως επιφανειακή ή βαθιά, το ίδιο συμβαίνει με τη διαδικαστική γνώση. Συγκεκριμένα όρισε τη βαθιά διαδικαστική γνώση ως…

> … τη γνώση για τις διαδικασίες που σχετίζεται με την κατανόηση, την ευελιξία και την κριτική σκέψη και είναι διακριτή από (αλλά πιθανά σχετίζεται με) τη γνώση για τις έννοιες.

Ας πάρουμε το παράδειγμα δύο μαθητών που είναι σε θέση να εκτελέσουν την πρόσθεση κλασμάτων, αλλά μόνο ο ένας αντιλαμβάνεται πότε εφαρμόζεται κατάλληλα η πράξη. Η διαδικαστική γνώση του δεύτερου παιδιού είναι ποιοτικά διαφορετική (Vamvakoussi et al., 2019). Οι Kilpatrick και συνεργάτες (2001) χρησιμοποίησαν τον όρο *διαδικαστική δεξιότητα* για να σκιαγραφήσουν το στοιχείο εκείνο της μαθηματικής ικανότητας που είναι χρήσιμο από εκπαιδευτικής άποψης και εκτείνεται πέραν της διαδικαστικής γνώσης. Όρισαν τη *διαδικαστική ευχέρεια* ως «δεξιότητα στην εκτέλεση διαδικασιών με ευελιξία, ακρίβεια, αποτελεσματικότητα και καταλληλότητα» (σελ. 5). Η διαδικαστική ευχέρεια εμπεριέχει τη διαδικαστική γνώση. Ωστόσο, θα μπορούσε να ισχυριστεί κάποιος ότι η εννοιολογική γνώση αποτελεί προαπαιτούμενο της διαδικαστικής ευχέρειας.

Ο Star (2005, 2007) ασκώντας την πιο λεπτομερή κριτική στο θεωρητικό πλαίσιο της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης τόνισε ότι απαιτείται να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες προκειμένου αυτό να χαρακτηριστεί επαρκές:

α) πρέπει να μπορεί να περιγράψει ένα μεγάλο εύρος γνωστικών αποτελεσμάτων έτσι ώστε αυτά να μπορούν να αξιολογηθούν καθώς και να αξιοποιηθούν για τη προσαρμογή της διδασκαλίας με σκοπό τη βελτίωσή τους. Ένα θεωρητικό πλαίσιο το οποίο περιλαμβάνει μόνο υποσύνολα γνωστικών αποτελεσμάτων είναι αδύνατο να αποτυπώσει την πολυπλοκότητα της γνώσης. Για το λόγο αυτό ο Star προσδιόρισε δύο νέα είδη γνώσης, τη *βαθιά διαδικαστική γνώση* και την *επιφανειακή εννοιολογική γνώση*, τα οποία δεν ήταν δυνατόν να περιγραφούν με βάση το υπάρχον θεωρητικό πλαίσιο για την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση.

β) έχει σημασία να συμφωνήσουμε για τους όρους του συγκεκριμένου θεωρητικού πλαισίου. Για παράδειγμα, τι εννοούμε με τον όρο εννοιολογική γνώση; Στο χώρο της ψυχολογίας των μαθηματικών η διάκριση αφορά τους τύπους (types) των δύο ειδών γνώσης, ενώ στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης η διάκριση αφορά τις ποιότητες (qualities) των δύο ειδών γνώσης. Η ποιότητα της γνώσης σχετίζεται με το πόσο καλά έχει κατανοηθεί μία έννοια. Η γνώση μπορεί να επιτευχθεί σε ένα προχωρημένο επίπεδο, σε ένα επιφανειακό επίπεδο ή να έχει διαβαθμίσεις ανάμεσα στα δύο άκρα. Η βαθέος επιπέδου γνώση (deep level knowledge) σχετίζεται με την κατανόηση, ευελιξία, αξιολόγηση και κριτική σκέψη (De Jong & Ferguson-Hessler, 1996) σε αντίθεση με την επιφανειακού επιπέδου γνώση (surface-level knowledge) που σχετίζεται με την αναπαραγωγή, απομνημόνευση, και την ανελαστικότητα (Glaser, 1991). Αντίθετα, ο τύπος γνώσης αναφέρεται μόνο σε ό,τι είναι γνωστό. Ο απώτερος σκοπός της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι η ανάπτυξη της βαθιάς εννοιολογικής γνώσης η οποία περιλαμβάνει και τις έννοιες και τις διαδικασίες. Η εξίσωση της διαδικαστικής γνώσης με την επιφανειακή γνώση ή την αναπαραγωγή και της εννοιολογικής με τη βαθιά, πλούσια σε συσχετίσεις γνώση καθιστά δύσκολη την αναγνώριση της γνώσης που ανήκει στις κατηγορίες βαθιά διαδικαστική ή επιφανειακή εννοιολογική γνώση. Ως εκ τούτου, τίθεται υπό αμφισβήτηση το αν τα δύο είδη γνώσης είναι διακριτά. Για παράδειγμα οι Gray και Tall (1991) υποστήριξαν ότι οι μαθητές που επιτυγχάνουν είναι αυτοί που καταφέρνουν να ενσωματώσουν τις διαδικασίες και έννοιες σε ένα εννοιολογικό κατασκεύασμα το οποίο ονόμασαν procept (διεργασία-έννοια) από τον συνδυασμό των λέξεων pro-cess και con-cept. Σύμφωνα με τη θεωρία διεργασίας-έννοιας στα μαθηματικά διακρίνεται η διεργασία (process), που αναφέρεται στο σύνολο ενεργειών πάνω σε αντικείμενα, από την έννοια (concept) που αφορά στα μαθηματικά αντικείμενα και τις μεταξύ τους σχέσεις. Επιπλέον, διαχωρίζεται ο όρος διεργασία από τον όρο διαδικασία (procedure), που αναφέρεται στον συγκεκριμένο αλγόριθμο για την επίτευξη του στόχου μια διεργασίας. Για παράδειγμα, η διεργασία της πρόσθεσης μπορεί να πραγματοποιηθεί με πολλούς αλγοριθμικά τρόπους (διαδικασίες) ανάλογα με τις στρατηγικές που επιλέγει κάθε φορά το άτομο. Η σκέψη που στηρίζεται στην εννοιολογική γνώση είναι πιο ευέλικτη από αυτή που περιορίζεται στις διεργασίες και είναι πιο περιορισμένη. Η σκέψη με διεργασίες-έννοιες (proceptual thinking) ορίζεται ως η ικανότητα του ατόμου να χειρίζεται τον συμβολισμό ευέλικτα άλλοτε ως διεργασία κι άλλοτε ως έννοια, αλλάζοντας με άνεση διαφορετικούς συμβολισμούς για το ίδιο αντικείμενο και είναι αυτή που ξεχωρίζει τους περισσότερο επιτυχημένους στα μαθηματικά μαθητές.

Για την υπέρβαση του παραπάνω εμποδίου ο Star (2005, 2007) εισηγείται μία πιο λεπτομερή και ξεκάθαρη εννοιολόγηση των δύο ειδών γνώσης η οποία θα δίνει μία πιο ολοκληρωμένη εικόνα για την ερμηνεία των δύο αυτών όρων. Για παράδειγμα, η εμβάθυνση στους όρους της επιφανειακής εννοιολογικής γνώσης καθώς και της βαθιάς διαδικαστικής γνώσης θα μπορούσε να συνεισφέρει και στην έρευνα αλλά και στη διδασκαλία των μαθηματικών. Επιπλέον, η εννοιολόγηση αυτή θα πρέπει να είναι περισσότερο λειτουργική κατά πεδίο αλλά και να αφορά τα διαφορετικά επίπεδα εκπαίδευσης (συμπεριλαμβανομένων και των μαθηματικών του Παν/μίου).

Άλλοι ερευνητές (π.χ. Baroody, Feil, & Johnson, 2007; Kieran, 2013) άσκησαν κριτική στην προσέγγιση του Star, ισχυριζόμενοι ότι δεν είναι δυνατόν να μιλάμε για βαθιά διαδικαστική γνώση χωρίς την ύπαρξη εννοιολογικής, δηλ. την ύπαρξη προχωρημένης κατανόησης μιας διαδικασίας χωρίς να υπάρχει η κατανόηση του σκοπού, δηλ. η εννοιολογική βάση για κάθε ένα από τα βήματα της διαδικασίας. Ειδικότερα, η Kieran (2013) τάχθηκε κατά της διχοτόμησης των δύο ειδών γνώσης και θεώρησε ότι ο Star κατά κάποιο τρόπο, με την εννοιολόγηση που προτείνει, την αναπαράγει.

Παρά τη φαινομενικά ισχυρή σχέση εννοιών και διαδικασιών, υπάρχουν ενδείξεις υπέρ της αντίθετης άποψης. Οι Hiebert & Lefevre (1986) αναφέρουν ότι «οι διαδικασίες με νοηματοδότηση είναι διαδικασίες συνδεδεμένες με την εννοιολογική γνώση» και η θεωρία τους επιτρέπει την αλληλοϋποστήριξη των δύο ειδών γνώσης, ωστόσο δε διστάζουν να παραδεχτούν ότι κάτι τέτοιο δε συμβαίνει στην πράξη. Η φύση της διάδρασης των δύο ειδών γνώσης, στην καλύτερη περίπτωση, χαρακτηρίζεται μάλλον αποδυναμωμένη.

Τον τελευταίο αιώνα, οι προβληματισμοί για τα δύο είδη μαθηματικής γνώσης έχουν πάρει διαφορετικές μορφές μέσω διαφορετικών όρων. Πιθανόν, η πιο

> αναγνωρισμένη διάκριση είναι αυτή ανάμεσα στην εννοιολογική κατανόηση και τη διαδικαστική δεξιότητα… Αλλά ανεξάρτητα από τους τίτλους, η διάκριση ανάμεσα στα δύο είδη γνώσης τοποθετείται περίπου στο ίδιο σημείο όπως ήταν στο παρελθόν (σελ. 2).

Ακόμα και σήμερα, ο ορισμός της διαδικαστικής ως γνώσης για τις διαδικασίες υιοθετείται από πολλές μελέτες στην ερευνητική περιοχή των κλασμάτων (Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Ο ορισμός αυτός είναι πολύ χρήσιμος γιατί κάνει μία αιχμηρή διάκριση ανάμεσα στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση, η οποία αποτυπώνει το φαινόμενο της διαδικαστικής δεξιότητας αποσυνδεδεμένης από την κατανόηση που έχει χρόνια ταλανίσει τη μαθηματική εκπαίδευση (Vamvakoussi et al., 2019). Ειδικότερα, στο ελληνικό πλαίσιο, προηγούμενα ευρήματα επιβεβαιώνουν την πραγματικότητα της ασύμμετρης ανάπτυξης των δύο ειδών γνώσης προς όφελος της διαδικαστικής στο πεδίο των κλασμάτων. Για παράδειγμα, μαθητές, ακόμη και εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκτελούν τους αλγόριθμους στις πράξεις ή τη σύγκριση κλασμάτων, χωρίς να αντιλαμβάνονται γιατί δουλεύουν οι διαδικασίες, γεγονός που αναδεικνύει το σημαντικό έλλειμμα της εννοιολογικής τους γνώσης (Lemonidis & Pilianidis, 2020; Lemonidis, Tsakiridou, & Meliopoulou, 2018). Η διάκριση, λοιπόν, της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης στα κλάσματα, και γενικότερα στα μαθηματικά, είναι σημαντική για την κατανόηση και την αντιμετώπιση των προβλημάτων στη διδασκαλία και τη μάθησή τους (Hecht & Vagi, 2010; Siegler & Lortie-Forgues, 2015; Vamvakoussi et al., 2019).

1.1.4 Η σχέση της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης

Η ανάπτυξη και των δύο ειδών γνώσης είναι πολύ σημαντική σε ένα πεδίο, ωστόσο, ένα πρόβλημα στο χώρο έρευνας για τη διαδικαστική και την εννοιολογική γνώση γενικά, και στα μαθηματικά ειδικότερα, είναι η σειρά με την οποία αναπτύσσονται τα δύο είδη γνώσης. Βέβαια, κάποιοι ερευνητές (π.χ. Star & Stylianides, 2013) ισχυρίστηκαν ότι το δίλημμα για το ποιο είδος γνώσης -διαδικαστική/εννοιολογική- πρέπει να αναπτυχθεί πρώτο δεν έχει κανένα νόημα, σύμφωνα με τη διάκριση ανάμεσα στις ποιότητες και όχι στους τύπους γνώσης που υιοθετούν οι επιστήμονες της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Πράγματι, υπάρχουν εμπειρικά δεδομένα που υποστηρίζουν δύο εκ διαμέτρου αντίθετες θεωρητικές απόψεις, δηλαδή τόσο ότι η διαδικαστική γνώση προηγείται της εννοιολογικής, όσο και το αντίστροφο (Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, 2001).

Υποστηρίζεται ευρέως ότι η εννοιολογική γνώση συχνά προηγείται (concepts-first approach) και οδηγεί στην ανάπτυξη της διαδικαστικής γνώσης, αφού κινητοποιεί τους μαθητές να ανακαλύψουν ή να κατανοήσουν τις διαδικασίες (Hiebert & Lefevre, 1986). Η εκδοχή της «εννοιολογικής προς διαδικαστική γνώση» επικρατεί σε σημαντικό βαθμό με το δεδομένο ότι είναι πιθανή η ανάπτυξη της εννοιολογικής γνώσης πρωθύστερα της έκθεσης στη διδασκαλία και της εξάσκησης στις διαδικασίες (Baroody, 2003, Kilpatrick et al., 2001). Αυτή η θεωρία χρησιμοποιείται για να αιτιολογηθεί η διδασκαλία που εστιάζει στην εννοιολογική γνώση. Στην ίδια γραμμή, το NCTM (2001) αναφέρει ότι η διαδικαστική γνώση δε θα πρέπει σε καμία περίπτωση να αναπτυχθεί πριν κατακτηθεί σημαντικός βαθμός εννοιολογικής γνώσης.

Κατά άλλους ερευνητές η διαδικαστική γνώση είναι δυνατό να υποστηρίξει και να οδηγήσει στην εννοιολογική γνώση (procedures-first approach). Τα παιδιά μαθαίνουν διαδικασίες για να λύνουν προβλήματα σε κάποια ενότητα των μαθηματικών και στη συνέχεια εξάγουν τις έννοιες από την εμπειρία τους κατά την επίλυση προβλημάτων (π.χ. Karmiloff & Smith, 1992; Siegler & Stern, 1998).

Τέτοιου είδους απόψεις, παρότι διαφορετικές, έχουν δύο κοινές παραδοχές:

α) υπάρχει μία και μοναδική αναπτυξιακή οδός και ότι αυτή είναι ανεξάρτητη από το γνωστικό πεδίο (Gilmore & Bryant, 2008) και ότι

β) τα διαφορετικά μοτίβα ανάπτυξης των δύο ειδών γνώσης που συναντάμε αποτελούν διαφορετικό βαθμό προόδου στο μοναδικό αναπτυξιακό μονοπάτι (Rittle-Johnson et al., 2001; Vergnaud, 1997).

Ο πρώτος ισχυρισμός αμφισβητήθηκε από τους Rittle-Johnson και Siegler (1998) που, μελετώντας τη σχέση μεταξύ των δύο ειδών γνώσης σε πέντε διαφορετικά πεδία, διαπίστωσαν ότι η σειρά ανάπτυξής τους διαφέρει ανάλογα με το πεδίο. Ο δεύτερος ισχυρισμός αμφισβητήθηκε από ερευνητές (Canobi, 2004; Gilmore & Bryant, 2008), οι οποίοι εντόπισαν διαφορετικά προφίλ μαθητών ως προς το επίπεδο ανάπτυξης των δύο ειδών γνώσης στο πεδίο της πρόσθεσης/αφαίρεσης αριθμών και τα οποία απέδωσαν σε αναπτυξιακές διαφορές.

Το παρόν επικρατούν μοντέλο για τη σχέση της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης είναι το επαναληπτικό μοντέλο (iterative model) που προτάθηκε από τους Rittle-Johnson και συνεργάτες (2001) σύμφωνα με οποίο, τα δύο είδη γνώσης αναπτύσσονται παράλληλα και η βελτίωση του ενός είδους γνώσης μπορεί να οδηγήσει σε βελτίωση του άλλου είδους γνώσης, το οποίο με τη σειρά του βελτιώνει το πρώτο είδος γνώσης. Δεν έχει νόημα να ισχυριζόμαστε ότι κάποιος κατέχει ένα από τα δύο είδη γνώσης, αλλά πιθανώς ότι κάποιο από τα δύο είδη είναι μερικώς και πιθανά λιγότερο ανεπτυγμένο από το άλλο (Fuson, 1990; Sophian, 1997). Το επαναληπτικό μοντέλο γεφυρώνει το χάσμα των αντικρουόμενων ευρημάτων ότι προηγούνται οι έννοιες ή οι διαδικασίες και είναι συμβατό με το καλά τεκμηριωμένο εύρημα ότι τα δύο είδη γνώσης συσχετίζονται θετικά (Rittle-Johnson & Schneider, 2015; Hiebert & Wearne, 1996). Ωστόσο, δε δεσμεύεται να δώσει προβάδισμα στην εννοιολογική ή διαδικαστική γνώση και θεωρεί ότι κάθε τύπος γνώσης μπορεί να ενεργοποιήσει τη διαδικασία της μάθησης και εξαρτάται από την προϋπάρχουσα γνώση του κάθε παιδιού κατά πεδίο. Η έκθεση στις διαδικασίες ή τις έννοιες καθορίζει αν υπάρχει αρχικά εννοιολογική ή διαδικαστική γνώση. Το μοντέλο αυτό υποστηρίζεται από εμπειρικά δεδομένα και παρέχει μία επαρκή εξήγηση για τη σχέση των δύο ειδών γνώσης (Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Τα υποστηρικτικά δεδομένα προέρχονται από πειραματικές διδασκαλίες στο πεδίο των δεκαδικών αριθμών που η παρέμβαση στον ένα τύπο γνώσης οδηγούσε σε βελτιωμένα αποτελέσματα στον άλλο τύπο γνώσης (Rittle-Johnson et al., 2001). Όμως, το επαναληπτικό μοντέλο προβλέπει ότι η ανάπτυξη του ενός είδους γνώσης οδηγεί αναγκαστικά στην ανάπτυξη του άλλου και επομένως αδυνατεί να εξηγήσει αποτελέσματα ερευνών σύμφωνα με τα οποία είναι δυνατή η ύπαρξη του ενός είδους γνώσης με το άλλο είδος να απουσιάζει. Για παράδειγμα, έχει βρεθεί ότι κάποιοι μαθητές έχουν την ικανότητα να εκτελούν διαδικασίες στα κλάσματα χωρίς να τις κατανοούν ή να μπορούν να εξηγήσουν γιατί αυτές δουλεύουν (Kerslake, 1986; Peck & Jecks, 1981). Επιπλέον, η Resnick (1982) έδειξε ότι είναι δυνατή η ύπαρξη της εννοιολογικής γνώσης στην αφαίρεση αριθμών χωρίς αυτή να συνοδεύεται από την αντίστοιχη διαδικαστική ευχέρεια.

Σύμφωνα λοιπόν με το επαναληπτικό μοντέλο, τα δύο είδη γνώσης αναπτύσσονται παράλληλα, επηρεάζουν το ένα το άλλο αυξητικά χωρίς να προηγείται αυστηρά κάποιο είδος γνώσης. Ωστόσο, υπάρχουν ερευνητικά δεδομένα που υποστηρίζουν ότι αυτές οι συσχετίσεις συχνά δεν αντικατοπτρίζουν αυτό που συμβαίνει σε ατομικό επίπεδο.

1.1.5 Δι-ατομικές διαφορές στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση

Η σύγχρονη έρευνα στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τα κλάσματα δείχνει ότι υπάρχουν δι-ατομικές διαφορές στον τρόπο που οι μαθητές αναπτύσσουν τα δύο είδη γνώσης για τα κλάσματα βάζοντας μία πρόκληση στο επαναληπτικό μοντέλο (π.χ. Canobi, 2004; Hallett, Nunes, & Bryant, 2010; Hallett, Nunes, Bryant, & Thrope, 2012; Lenz & Wittman, 2021). Συγκεκριμένα, οι Hallett και συνεργάτες ήταν οι πρώτοι που μελέτησαν τέτοιου είδους ατομικές διαφορές στο πεδίο των κλασμάτων. Στην πρώτη τους μελέτη, εξέτασαν την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση 318 μαθητών Δ΄ και Ε΄ Δημοτικού (2010) και εντόπισαν ομάδες που υπερείχαν ή υστερούσαν και στους δύο τύπους γνώσης με τη μέθοδο της ανάλυσης συστάδων. Τα πέντε διαφορετικά προφίλ που προέκυψαν από την έρευνα επιβεβαίωσαν την υπόθεσή τους περί ύπαρξης ατομικών διαφορών. Πιο συγκεκριμένα, βρέθηκαν μαθητές που βασίζονται περισσότερο στη διαδικαστική γνώση, μαθητές που βασίζονται περισσότερο στην εννοιολογική και μαθητές που βασίζονται εξίσου στα δύο είδη γνώσης. Επιπλέον, εντόπισαν δύο ομάδες μαθητών που δυσκολεύονται στα κλάσματα: μαθητές χωρίς την προσδοκώμενη διαδικαστική ή εννοιολογική γνώση. Οι Hallett et al. (2012) επέκτειναν την έρευνά τους σε 235 παιδιά ΣΤ’ Δημοτικού και Β’ Γυμνασίου και τα ευρήματα της έρευνας επιβεβαίωσαν την ύπαρξη ατομικών διαφορών στη γνώση για τα κλάσματα. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι διαφορές αυτές ήταν λιγότερο ακραίες στα μεγαλύτερα παιδιά (Β’ Γυμνασίου), τα οποία κατατάχθηκαν σε δύο ομάδες: αυτά που στηρίζονται περισσότερο στη διαδικαστική ή την εννοιολογική τους γνώση. Συγκεκριμένα, οι διάμεσες επιδόσεις των μεγαλύτερων μαθητών που ανήκαν στις ομάδες με περισσότερο ανεπτυγμένη τη διαδικαστική ή εννοιολογική γνώση απείχαν λιγότερο από τη διάμεσο (0,5 ΤΑ) από ό,τι οι επιδόσεις των μεγαλύτερων παιδιών (1ΤΑ) (Hallett et al., 2012).

Οι Lenz & Wittmann (2021) σε μία ποσοτική μελέτη με συμμετέχοντες 377 μαθητές Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου και ακολουθώντας παρόμοια μεθοδολογία με αυτή των Hallett και συνεργατών (2010, 2012) επιβεβαίωσαν την ύπαρξη δι-ατομικών διαφορών στον τρόπο που οι μαθητές συνδυάζουν τα δύο είδη γνώσης για τα κλάσματα. Εντόπισαν πέντε διαφορετικές συστάδες μαθητών με: α) υψηλή εννοιολογική και εξίσου υψηλή διαδικαστική γνώση, β) μέση εννοιολογική γνώση και χαμηλότερη από την προσδοκώμενη διαδικαστική δεδομένης της εννοιολογικής τους γνώσης, γ) μέση εννοιολογική γνώση και υψηλότερη από την προσδοκώμενη διαδικαστική δεδομένης της εννοιολογικής τους γνώσης, δ) χαμηλή εννοιολογική γνώση και υψηλότερη διαδικαστική από την προσδοκώμενη με βάση την εννοιολογική, και ε) χαμηλή εννοιολογική γνώση και χαμηλότερη διαδικαστική από την προσδοκώμενη με βάση την εννοιολογική. Οι ερευνητές ισχυρίστηκαν ότι οι συστάδες που προέκυψαν ήταν διαφορετικές από αυτές άλλων ερευνών (π.χ. Hallett et al., 2010, 2012) ως αποτέλεσμα της ελαφρώς διαφορετικής μεθοδολογίας μιας και οι ομάδες που προκύπτουν από την ιεραρχική μέθοδο της ανάλυσης συστάδων εξαρτώνται σε σημαντικό βαθμό από το δείγμα.

Σε προηγούμενη ποιοτική μελέτη μας (Bempeni & Vamvakoussi, 2015), επτά μαθητές Γ΄ Γυμνασίου κλήθηκαν να απαντήσουν σε 30 έργα που εξέταζαν την εννοιολογική (εννοιολογικά έργα) και διαδικαστική γνώση (διαδικαστικά έργα) για τα κλάσματα και να εξηγήσουν αναλυτικά, στα πλαίσια εις βάθος ημιδομημένων συνεντεύξεων, τον τρόπο που εργάστηκαν. Ζητήθηκε από τους μαθητές στα έργα σύγκρισης να μην εφαρμόσουν *διαδικαστικές στρατηγικές* που διδάσκονται στο σχολείο (π.χ. μετατροπή σε ομώνυμα κλάσματα, μετατροπή σε δεκαδικούς), αλλά *εννοιολογικές στρατηγικές* (π.χ. σύγκριση με αριθμούς-σημεία αναφοράς ή απόσταση από μονάδα) (Rinne & Jordan, 2017; Yang, Reys, & Reys, 2007). Ο λόγος για τον οποίο απετράπησαν οι μαθητές να εφαρμόσουν διαδικαστικές στρατηγικές είναι ότι η κατασκευή έργων για την αξιολόγηση της εννοιολογικής γνώσης, αποσυνδεδεμένη από τη διαδικαστική, χωρίς δηλαδή να υπάρχει επικάλυψη, δεν είναι καθόλου εύκολη υπόθεση. Αναλύοντας τις απαντήσεις τους στα πλαίσια της ορθότητας/ακρίβειας και του είδους των στρατηγικών (εννοιολογικών/διαδικαστικών) αναδείχθηκαν τρία διαφορετικά προφίλ: α) Το *Εννοιολογικό-Διαδικαστικό* που περιλάμβανε τρεις μαθητές που επέδειξαν προχωρημένη εννοιολογική και διαδικαστική γνώση, β) Το *Διαδικαστικό προφίλ* που περιλάμβανε τρεις μαθητές που αντιμετώπισαν με επιτυχία όλα τα έργα που εξέταζαν διαδικαστική γνώση αλλά αποτύγχαναν συστηματικά σε αυτά που εξέταζαν εννοιολογική γνώση, και γ) Το *Εννοιολογικό προφίλ* που περιλάμβανε έναν μαθητή που απέτυχε σε όλα τα έργα που εξέταζαν διαδικαστική γνώση αλλά ολοκλήρωσε με επιτυχία τα περισσότερα από τα έργα που εξέταζαν εννοιολογική γνώση. Τα αποτελέσματα της ποιοτικής αυτής μελέτης ήταν συμβατά με τα ευρήματα των Hallett και συνεργατών (2010, 2012) σύμφωνα με τα οποία υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο που οι μαθητές συνδυάζουν τα δύο είδη γνώσης για τα κλάσματα. Επιπλέον, αποτύπωσαν την πιθανότητα, αυτές οι ατομικές διαφορές να παραμένουν ακραίες ακόμη και στη Γ΄ Γυμνασίου, δηλαδή για μεγαλύτερα παιδιά από αυτά που συμμετείχαν στις μελέτες των Hallett και συνεργατών (2010, 2012), παρά το γεγονός ότι οι διαφορές αυτές τείνουν να αμβλύνονται με την ηλικία.

Τα ευρήματα αυτά (Bempeni & Vamvakoussi, 2015) αντιτάσσονται στις θεωρίες που υποστηρίζουν ότι από όλα τα παιδιά ακολουθείται μία συγκεκριμένη σειρά για την απόκτηση των δύο ειδών γνώσης και θέτουν μία πρόκληση για το επαναληπτικό μοντέλο των Rittle-Johnson και συνεργατών (2001) που υποστηρίζει ότι η σχέση των δύο ειδών γνώσης είναι αμφίδρομη. Επιπλέον, τα ευρήματά μας αναδεικνύουν το γεγονός ότι ο ένας τύπος γνώσης δεν οδηγεί απαραίτητα στον άλλο τύπο γνώσης, όπως ορίζει το επαναληπτικό μοντέλο, και υπάρχουν δύο τουλάχιστον λόγοι για τους οποίους μπορεί να συμβαίνει αυτό. Πρώτον, ο προσανατολισμός της διδασκαλίας διαφέρει, συνήθως προς όφελος της διαδικαστική γνώσης. Οι Rittle-Johnson και συνεργάτες (2015) κάνοντας μία εκτενή ανασκόπηση της βιβλιογραφίας κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η βελτίωση της διαδικαστικής γνώσης οδηγεί σε βελτίωση της εννοιολογικής. Όμως αυτό που ορίζεται ως διαδικαστική γνώση στις μελέτες αυτές, είναι πέρα από τις απλές διαδικασίες με την έννοια ότι τα προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν στις παρεμβάσεις βασίζονταν και άγονταν από τις εννοιολογικές αρχές. Για παράδειγμα, όταν ελέχθηκε η ισχύς του επαναληπτικού μοντέλου από τους Rittle-Jonhson και συνεργάτες στο πεδίο των δεκαδικών αριθμών, προκειμένου να αξιολογηθεί η διαδικαστική γνώση χρησιμοποιήθηκαν τα εξής είδη έργων: αντιστοίχιση των δοσμένων δεκαδικών στην αριθμογραμμή και αναγνώριση του δεκαδικού αριθμού που αντιστοιχίζεται σε μία δοσμένη θέση στην αριθμογραμμή που εκτείνονται πέραν την απλής εφαρμογής διαδικασιών και τυπικά κατατάσσονται στην κατηγορία των εννοιολογικών έργων (π.χ. Bempeni & Vamvakoussi, 2015). Έτσι, δεν είναι δεδομένο ότι κάθε τύπος διδακτικής παρέμβασης εστιασμένος στη διαδικαστική γνώση διευκολύνει την ανάπτυξη της εννοιολογικής γνώσης (Vamvakoussi et al., 2019). Εδώ, ανακύπτει για μία ακόμη φορά το, νευραλγικής σημασίας, ζήτημα του ορισμού της διαδικαστικής γνώσης που αναλύθηκε εκτενώς στην ενότητα 1.1.3. Δεύτερον, πρέπει να ληφθεί υπόψη η πρόθεση του υποκειμένου. Πράγματι, απαιτείται ενεργός εμπλοκή, προσπάθεια και αναστοχασμός για να εξαγάγει το υποκείμενο τις αφηρημένες αρχές από την επαναλαμβανόμενη εξάσκηση. Κάτι παρόμοιο συμβαίνει και με την εννοιολογική γνώση. Αν, για παράδειγμα, ένας μαθητής μπορεί να εκτιμήσει το αποτέλεσμα μίας πράξης, δε σημαίνει απαραίτητα ότι θα αποκτήσει τη δεξιότητα να εκτελεί τον αλγόριθμο της πράξης αυτής με ακρίβεια. Άρα λοιπόν, η όποια προσπάθεια καταβάλλεται για να φτάσει το υποκείμενο από το ένα είδος γνώσης στο άλλο, εξαρτάται και από την πρόθεσή του.

Για να κατανοήσουμε περαιτέρω τη σχέση μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης θα πρέπει να δώσουμε ιδιαίτερη προσοχή στα μεθοδολογικά ζητήματα που αφορούν τον εμπειρικό έλεγχο των δύο ειδών γνώσης, δηλαδή το πώς μπορούν να αξιολογηθούν με αξιόπιστο και έγκυρο τρόπο (Rittle-Johnson & Schneider, 2015).

1.1.6 Η μέτρηση των δύο ειδών γνώσης

Η μέτρηση των δύο ειδών γνώσης είναι κρίσιμη για να μπορέσουμε να ερμηνεύσουμε τα υπάρχοντα ερευνητικά δεδομένα για τη σχέση των δύο ειδών γνώσης. Ωστόσο, η κατασκευή έργων που μετρούν αποκλειστικά το ένα ή το άλλο είδος γνώσης δεν είναι εύκολη υπόθεση (Hiebert & Wearne, 1996). Η διαδικαστική γνώση είναι εύκολο να ελεγχθεί με έργα που απαιτούν την επιτυχή εκτέλεση ενός αλγορίθμου που έχει διδαχθεί στο σχολείο. Αντίθετα, η αξιολόγηση της εννοιολογικής γνώσης είναι απαραίτητο να περιλαμβάνει μία μεγάλη ποικιλία έργων που θα καλύπτουν όσο το δυνατόν περισσότερες πτυχές της με πολλά διαφορετικά έργα να εξετάζουν την ίδια μαθηματική έννοια (Crooks & Alibali, 2014). Ο Faulkenberry (2013) λαμβάνοντας υπόψη τη δυσκολία στην κατασκευής ενός έργου που μετρά αποκλειστικά το ένα ή το άλλο είδος γνώσης υποστήριξε ότι δεν έχει νόημα να μιλάμε για αμιγώς διαδικαστικά ή εννοιολογικά έργα αλλά διαδικαστικές ή εννοιολογικές στρατηγικές που εφαρμόζει κάποιος κατά την αντιμετώπιση του έργου. Για παράδειγμα, η σχηματική αναπαράσταση του κλάσματος ¾ μπορεί εκ πρώτης όψεως να φαίνεται ότι εξετάζει εννοιολογική γνώση, όμως αν ληφθεί υπόψη ότι διδάσκεται ρητά στο σχολείο με το τυπικό μοντέλο του εμβαδού, πιθανόν το έργο να αντικατοπτρίζει διαδικαστική γνώση. Συγκεκριμένα η σχηματική αναπαράσταση ενός γνήσιου κλάσματος διδάσκεται με τη μορφή συγκεκριμένων βημάτων: α) Χώρισε την επιφάνεια σε όσα κομμάτια «λέει» ο παρονομαστής, β) σχεδίασε τα κομμάτια εκείνα που «λέει» ο αριθμητής. Χαρακτηριστική περίπτωση έργου που μπορεί να δείχνει διαδικαστική ή εννοιολογική γνώση είναι αυτό της σύγκρισης κλασμάτων (Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Έχει παρατηρηθεί ότι σε έργα σύγκρισης οι μαθητές τείνουν να χρησιμοποιούν διαδικαστικές στρατηγικές π.χ. σύγκριση των «χιαστί» γινομένων (Faulkenberry, 2013) ή τη μετατροπή σε δεκαδικούς αριθμούς (Bempeni & Vamvakoussi, 2015). Ως εκ τούτου, η ερμηνεία των απαντήσεων ενός ερωτηματολογίου καθίσταται περίπλοκη. Αν οι μαθητές δεν ερωτηθούν κατά τη μελέτη για το είδος της στρατηγικής που ακολούθησαν, δεν μπορεί να αποκλειστεί η πιθανότητα να έχουν χρησιμοποιήσει μία διαδικαστική στρατηγική σε ένα φαινομενικά εννοιολογικό έργο. Αναγνωρίζοντας αυτόν τον περιορισμό κατά την αξιολόγηση της εννοιολογικής γνώσης, οι Hallett και συνεργάτες (2010) όρισαν ως διαδικαστικά τα έργα εκείνα των οποίων ο αλγόριθμος ή κανόνας για την επίλυσή τους διδάσκεται στο σχολείο, όπως την αναγνώριση της αναπαράστασης. Οι ίδιοι ερευνητές κατηγοριοποίησαν τα έργα σύγκρισης ως εννοιολογικά δεδομένου ότι οι μαθητές του δείγματός τους δεν είχαν διδαχθεί τον σχετικό αλγόριθμο (μετατροπή σε ομώνυμα, «χιαστί» κ.λ.π.).

Οι Lentz και συνεργάτες (2019, 2021), για τη μέτρηση της εννοιολογικής γνώσης χρησιμοποίησαν τρεις κατηγορίες έργων: α) καταγραφή εξήγησης σε σχέση με τις έννοιες (πχ. *το 3/7 είναι μεγαλύτερο από το 3/5 γιατί το 7 είναι μεγαλύτερο από το 5. Σωστό ή Λάθος;*), β) αναπαράσταση κλάσματος στην αριθμογραμμή, γ) σχηματική αναπαράσταση. Παρατηρώντας με λίγη προσοχή τα έργα αυτά, θα μπορούσαμε να αναγνωρίσουμε κάποιους περιορισμούς. Αρχικά, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι το έργο της αναπαράστασης στην αριθμογραμμή δεν μπορεί να θεωρηθεί αμιγώς εννοιολογικό αν οι μαθητές μετατρέψουν τα κλάσματα σε ομώνυμα πριν τα τοποθετήσουν στην αριθμογραμμή. Αντίστοιχα, η σύγκριση δύο κλασμάτων με τον ίδιο αριθμητή, υπακούει στον κανόνα που διδάσκεται ρητά στο σχολείο ότι δηλαδή είναι μεγαλύτερο εκείνο με τον μικρότερο παρονομαστή, ο οποίος εύκολα αναπαράγεται από τους μαθητές. Επίσης, τα έργα σχηματικής αναπαράστασης δεν μπορούν να χαρακτηριστούν απαραίτητα εννοιολογικά, αν για παράδειγμα ζητείται η αναπαράσταση ενός γνήσιου κλάσματος σε ένα δοσμένο σχήμα χωρισμένο σε τόσα κομμάτια όσα και ο παρονομαστής του κλάσματος.

Λαμβάνοντας υπόψη τους παραπάνω περιορισμούς και μετά από μία σειρά μελετών (Bempeni & Vamvakoussi, 2015; Vamvakoussi et al., 2019) καταλήξαμε στα εξής συμπεράσματα:

α) Η αξιολόγηση της εννοιολογικής γνώσης είναι προτιμότερο να γίνεται με ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με σκοπό να αποφευχθεί το χαρτί και μολύβι και συνακόλουθα η χρήση διαδικαστικών στρατηγικών σε εννοιολογικά έργα.

β) Η αξιολόγηση της διαδικαστικής οδηγεί σε ασφαλέστερα συμπεράσματα όταν γίνεται με ερωτήσεις ανοιχτού τύπου για να διασφαλιστεί ότι οι μαθητές γνωρίζουν να διατυπώνουν τον υπό εξέταση κανόνα ή να εκτελούν τη διαδικασία.

γ) Οι κανόνες, οι διαδικασίες/αλγόριθμοι (σύγκριση κλασμάτων) που αναφέρονται σε φαινομενικά εννοιολογικά έργα καθώς και τα τετριμμένα εννοιολογικά έργα (π.χ. τυπικό μοντέλο εμβαδού-μέρος όλου) που διδάσκονται ρητά στο σχολείο εξετάζουν κατά βάση διαδικαστική γνώση.

δ) Για την κατασκευή των έργων της σύγκρισης, εκτίμησης αθροίσματος είναι καλό να αξιοποιούνται νούμερα στους συντελεστές των κλασμάτων τέτοια που αποτρέπουν τους μαθητές να τα κάνουν ομώνυμα και να ενθαρρύνονται στρατηγικές όπως οι αριθμοί αναφοράς μονάδα και μισό (reference number) καθώς και η αξιοποίηση του συμπληρώματος (residual thinking). Ακόμη κι αν αποτρέπεται το χαρτί και μολύβι βάσει οδηγιών, καθώς και με τις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, υπάρχει πάντα η περίπτωση κάποιοι μαθητές να μη συμμορφωθούν με τις οδηγίες.

Οι Schneider και Stern (2010) άσκησαν λεπτομερή κριτική σε μεθοδολογικά ζητήματα που αφορούν στον εμπειρικό έλεγχο των δύο ειδών γνώσης. Σύμφωνα με τους ερευνητές αυτούς, καμία από τις εμπειρικές μελέτες δε δείχνει ξεκάθαρα ότι έχουν μετρηθεί ξεχωριστά τα δύο είδη γνώσης με το σωστό τρόπο. Σε κάποιες έρευνες είναι πιθανό να έχει μετρηθεί μόνο το ένα είδος γνώσης με τα δύο μέτρα που υποτίθεται θα μετρούσαν τα δύο είδη γνώσης. Υποστήριξαν ότι είναι πολύ δύσκολο να ερμηνεύσουμε τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την υποτιθέμενη μέτρηση της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης διατυπώνοντας τα εξής επιχειρήματα:

- κάθε μέτρο μπορεί να προκαλεί αλλαγές στο ποσό του είδους της γνώσης που υποτίθεται ότι θέλουμε να μετρήσουμε
- κάθε μέτρο παρουσιάζει μη συστηματικό σφάλμα μέτρησης
- η διαφορά του κάθε μέτρου έχει να κάνει με τις διαφορετικές ικανότητες του ατόμου π.χ. αν η εννοιολογική γνώση μετράται με βάση την εξήγηση ενός αφηρημένου κανόνα, τότε η κατανόηση του κανόνα μετράται με βάση την ικανότητα της αιτιολόγησης, την ευφράδεια, το λεξιλόγιο. Αντίστοιχα, όταν η διαδικαστική γνώση εξετάζεται με διαδικαστικά προβλήματα που περιέχουν διαγράμματα, η γνώση για τα διαγράμματα και το αναπαριστώμενο περιεχόμενο επηρεάζει την αξιολόγησή της.
- οι έννοιες είναι στατικές δομές που μπορούν να ενεργοποιηθούν μέσω της διαδικαστικής γνώσης (Goldstone & Kersten, 2003; Medin, 1989) και νέες διαδικασίες μπορούν να προκύψουν από τις έννοιες (Geary, 1994). Έτσι, η επίδοση στις δραστηριότητες που εξετάζουν εννοιολογική γνώση μπορεί σε

κάποιο βαθμό να σημαίνει και διαδικαστική γνώση και αντίστροφα (Rittle Johnson et al., 2001).

Ποιες είναι όμως οι εμπειρικές ενδείξεις που δείχνουν ότι δύο μέτρα αξιολογούν με σωστό τρόπο τα δύο είδη γνώσης; Σύμφωνα με τους Schneider και Stern (2010), τα συνήθη μέτρα που χρησιμοποιούνται δεν είναι αξιόπιστα για να μετρηθεί το ένα είδος γνώσης ανεξάρτητα από το άλλο, γεγονός που είχε υποτιμηθεί από τις προηγούμενες έρευνες. Οποιοδήποτε αποτέλεσμα σχετικά με τη μέτρηση της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης δεν μπορεί να θεωρηθεί αξιόπιστο εκτός κι αν χρησιμοποιήσουμε διαφορετικά μέτρα για το ίδιο είδος γνώσης με μία πολυμεθοδική προσέγγιση π.χ. για τη μέτρηση των δύο ειδών γνώσης να ορίσουμε συγκεκριμένες συνιστώσες. Οι ερευνητές επιχείρησαν να μετρήσουν τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση στο πεδίο των δεκαδικών κλασμάτων σε 289 μαθητές Ε’ και ΣΤ’ Δημοτικού χρησιμοποιώντας από τέσσερα διαφορετικά μέτρα για το κάθε είδος γνώσης. Τα αποτελέσματα της έρευνας τους έδειξαν ότι τα διακριτά μέτρα που σχεδιάστηκαν αποδείχθηκαν ακατάλληλα να μετρήσουν αποκλειστικά το ένα ή το άλλο είδος γνώσης με τη χρήση του κάθε μέτρου να οδηγεί σε διαφορετικά, κάθε φορά, συμπεράσματα. Ως εκ τούτου, η χαμηλή συσχέτιση των δύο ειδών γνώσης κατά τη μέτρησή τους, δε σημαίνει απαραίτητα ότι αυτά δε συσχετίζονται αλλά μπορεί να είναι αποτέλεσμα του υψηλού σφάλματος μέτρησης (Schneider & Stern, 2010).

Οι συνεντεύξεις έχουν χρησιμοποιηθεί κατά καιρούς στην έρευνα για τη μαθηματική εκπαίδευση με σκοπό να διερευνήσουν την ποιότητα, κατά Star, της κατανόησης συγκεκριμένων εννοιών. Για παράδειγμα, ο Roh (2008) μελέτησε την κατανόηση των φοιτητών στην έννοια του ορίου διεξάγοντας συνεντεύξεις βασισμένες στα έργα. Οι Cramer και Wyberg (2009) πήραν συνεντεύξεις από μαθητές για να εξετάσουν την κατανόησή τους στα κλάσματα. Τέτοιου είδους έρευνες δείχνουν ότι η ποιοτική μεθοδολογία είναι αναγκαία για να αποτυπωθεί η πολυπλοκότητα της μαθηματικής κατανόησης. Για όλους αυτούς τους λόγους, σε προηγούμενη μελέτη μας (Bempeni & Vamvakoussi, 2015), χρησιμοποιήσαμε αντίστοιχη μεθοδολογία προκειμένου να παρατηρήσουμε το είδος των στρατηγικών (διαδικαστικές/εννοιολογικές) που εφαρμόστηκαν σε έργα για τους ρητούς αριθμούς.

Οι Rittle-Johnson και Schneider (2015) ανέπτυξαν δύο ευρείες κατηγορίες έργων για τη μέτρηση της εννοιολογικής γνώσης. Η πρώτη κατηγορία (ρητά μέτρα) περιλάμβανε έργα που ζητούσαν από τους μαθητές να εκφράσουν την κατανόηση των μαθητών σε κάποιο πεδίο, για παράδειγμα να εξηγήσουν τις απαντήσεις υποθετικών μαθητών σε εννοιολογικά έργα, να εξηγήσουν γιατί δουλεύουν οι διαδικασίες ή να επικαλεστούν τις υποκείμενες αρχές. Η δεύτερη κατηγορία (άδηλα μέτρα) περιλάμβανε έργα που έπρεπε να τα επεξεργαστούν οι μαθητές και που στόχευαν στην εννοιολογική γνώση, όπως η αναπαράσταση και η σύγκριση κλασμάτων. Οι Vamvakoussi και συνεργάτες (2019) τόνισαν, μεταξύ άλλων, τη δυσκολία μέτρησης της εννοιολογικής γνώσης με τους παραπάνω δύο τύπους έργων. Ειδικότερα, η αξιολόγηση της εννοιολογικής γνώσης, στην περίπτωση των άδηλων μέτρων, θα πρέπει να γίνει με έργα που δεν είναι οικεία στους μαθητές όπως για παράδειγμα τη σχηματική αναπαράσταση ενός γνήσιου κλάσματος. Οι μαθητές έχουν υπερεξασκηθεί σε τέτοιου είδους έργα που αντιμετωπίζονται με το τυπικό μοντέλο του εμβαδού και στην ουσία έχουν "διαδικαστικοποιηθεί" (βλ. Faulkenberry, 2013). Από την άλλη μεριά, τα ρητά μέτρα της εννοιολογικής γνώσης απαιτούν πολλά παραπάνω από απλή εννοιολογική γνώση, απαιτούν επιπλέον την ικανότητα να μπορεί κάποιος να εκφράσει αποτελεσματικά τις ιδέες του. Τέτοια έργα είναι δύσκολο να απαντηθούν από μαθητές σε έντυπα ερωτηματολόγια.

Από την παραπάνω συζήτηση, προκύπτει ότι η μέτρηση της εννοιολογικής γνώσης δεν είναι εύκολη υπόθεση. Αντίθετα, η μέτρηση της διαδικαστικής γνώσης δείχνει απλούστερη, κυρίως επειδή οριοθετείται από συγκεκριμένο ορισμό. Επιπλέον, είναι προφανές ότι ο τρόπος που θα οριστούν τα δύο είδη γνώσης, καθορίζει εν μέρει και τον τρόπο που θα μετρηθούν. Οι Star και Stylianides (2013) ισχυρίστηκαν ότι ενώ για τους ψυχολόγους που υιοθετούν τη διάκριση ανάμεσα στους τύπους γνώσης, ένα έργο χωρίς δεύτερη σκέψη αξιολογεί εννοιολογική γνώση, δε συμβαίνει όμως το ίδιο για τους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης που υιοθετούν τη διάκριση ανάμεσα στις ποιότητες γνώσης και θέλουν να είναι βέβαιοι ότι αυτό αποτυπώνει την κατανόηση του ορισμού και δεν προέρχεται από απομνημόνευση. Επίσης, μία ερώτηση μπορεί να αποτελεί ένδειξη για την παρουσία εννοιολογικής γνώσης για έναν μαθητή, αλλά όχι για όλους τους μαθητές που έχουν απαντήσει σωστά στην ίδια ερώτηση. Αυτή η άποψη αποτελεί μία πρόκληση για τους ψυχολόγους που επιχειρούν να αναπτύξουν εργαλεία που θα μετρούν διαδικαστική και εννοιολογική γνώση και μπορούν να εφαρμοστούν σε όλους τους μαθητές.

Το θεμελιώδους σημασίας ζήτημα της μέτρησης των δύο ειδών γνώσης ανέδειξαν και οι Rittle-Johnson και Schneider (2015, σελ. 1128) οι οποίοι ισχυρίζονται ότι έχει δοθεί μικρή προσοχή σε αυτό. Χαρακτηριστικά αναφέρουν:

> Όμως, πριν προχωρήσουμε στην περαιτέρω κατανόηση των σχέσεων μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης, θα πρέπει να δώσουμε περισσότερη προσοχή στην εγκυρότητα των μέτρων για την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση. Μέχρι τώρα, δεν έχουν αναπτυχθεί τυποποιημένες προσεγγίσεις για την αξιολόγηση-μέτρηση της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης με αποδεδειγμένη εγκυρότητα, αξιοπιστία και αντικειμενικότητα.

Η κατασκευή ενός εργαλείου που θα αξιολογεί τα δύο είδη γνώσης είναι ιδιαιτέρως σημαντική για τους διδάσκοντες: α) για να γνωρίζουν αν οι μαθητές κατέχουν την κατάλληλη εννοιολογική γνώση αλλά και β) για τις διάφορες καλές διδακτικές πρακτικές που θα μπορούσαν να εφαρμοστούν ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν την απαιτούμενη εννοιολογική γνώση (Crooks & Alibali, 2014). Στην παρούσα διατριβή, επιχειρήσαμε, μεταξύ άλλων, να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο ερευνητικό εργαλείο που θα μετρά τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση των κλασμάτων με τεκμηριωμένη εγκυρότητα και αξιοπιστία, που εξ όσων γνωρίζουμε απουσιάζει από τη βιβλιογραφία.

1.1.6.1 Παράγοντες που εξηγούν τις δι-ατομικές διαφορές

Δεδομένου ότι η πιο πρόσφατη έρευνα στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση εστιάζει στην ύπαρξη δι-ατομικών διαφορών στον τρόπο που τα παιδιά συνδυάζουν τα δύο είδη γνώσης, έχουν γίνει κάποιες προσπάθειες για να εξηγηθούν σε ποιους παράγοντες μπορούν να αποδοθούν αυτές οι διαφορές, όπως για παράδειγμα στις διαφορές στην προϋπάρχουσα γνώση σε ένα πεδίο (Schneider, Rittle-Johnson, & Star, 2011), στις διαφορές στα γνωστικά προφίλ των παιδιών (Gilmore & Bryant, 2008; Hallett et al., 2012), τη σχολική τους εμπειρία (Canobi, 2004; Gilmore & Bryant, 2006; Hallett et al. 2012), ή το φύλο (Lenz & Wittman, 2021). Ωστόσο, μέχρι στιγμής δεν υπάρχουν εμπειρικά δεδομένα που να τεκμηριώνουν το ρόλο των παραμέτρων αυτών. Πράγματι, οι Schneider και συνεργάτες (2011) δε βρήκαν την προσδοκώμενη διαφοροποίηση στη συσχέτιση των δύο ειδών γνώσης, ανάλογα με τα επίπεδα της προϋπάρχουσας γνώσης στο πεδίο της επίλυσης εξισώσεων. Σε εμπειρική μελέτη καταγράφηκε συσχέτιση ανάμεσα στην εννοιολογική γνώση, αλλά όχι τη διαδικαστική, και τις γενικές γνωστικές ικανότητες χωρίς όμως να υπάρχει ξεκάθαρη τεκμηρίωση

(Jordan et al., 2013). Πράγματι, οι Hallett et al. (2012) δεν εντόπισαν συσχέτιση της γενικής διαδικαστικής και εννοιολογικής ικανότητας με τις διαφορές στον τρόπο που τα παιδιά συνδυάζουν τα δύο είδη γνώσης για τα κλάσματα. Όμοια, οι Lentz & Wittman (2021) δεν τεκμηρίωσαν σχέση ανάμεσα στη γνωστική ικανότητα και τις δι-ατομικές διαφορές στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση. Όσον αφορά τη σχολική εμπειρία, διάφοροι ερευνητές κατά καιρούς έχουν επιχειρήσει να μετρήσουν διάφορα κατασκευάσματα ως σχολική εμπειρία. Για παράδειγμα, η Canobi (2004) ποσοτικοποίησε τη σχολική εμπειρία, ταυτίζοντάς την με τα χρόνια τυπικής εκπαίδευσης (στην ουσία, σε ποια σχολική τάξη βρίσκεται ο μαθητής). Τα αποτελέσματα της έρευνάς της έδειξαν ότι όσο μεγάλωνε η τάξη η διαδικαστική γνώση στην πρόσθεση και την αφαίρεση αριθμών βελτιωνόταν, ενώ δε συνέβαινε το ίδιο με την εννοιολογική γνώση. Οι Lentz και Wittman (2021) δε βρήκαν σημαντικές διαφορές στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση στις δύο ηλικιακές ομάδες (Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου). Οι Hallett και συνεργάτες (2012), από την άλλη μεριά, μέτρησαν τη σχολική εμπειρία μέσω του σχολείου φοίτησης των συμμετεχόντων. Πιο συγκεκριμένα, εξέτασαν αν η φοίτηση σε διαφορετικά σχολεία (δύο σχολεία του ίδιου τύπου στην ίδια χώρα) μπορούσε να εξηγήσει τις δι-ατομικές διαφορές στα δύο είδη γνώσης για τα κλάσματα, αλλά δε βρήκαν κάποια τέτοια σχέση. Αντίθετα, οι Lenz και Wittman (2021), επιβεβαίωσαν τη σχέση μεταξύ διαφορετικών σχολείων και δι-ατομικών διαφορών και ισχυρίστηκαν ότι πιθανότατα πρόκειται για το αποτέλεσμα του πιο ετερογενούς δείγματος (διαφορετικού τύπου σχολεία) σε σχέση με αυτό άλλων μελετών των Hallett και συνεργατών (2012). Επίσης, οι ίδιοι ερευνητές υποστήριξαν ότι το φύλο δεν μπορεί να εξηγήσει τις δι-ατομικές διαφορές στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση. Τέλος, επιβεβαίωσαν τη σχέση ανάμεσα στο είδος της διδασκαλίας (που μετρήθηκε ως φοίτηση σε διαφορετικό τμήμα) και τις δι-ατομικές διαφορές στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση (δεν υπήρχαν διαφορές στη γνωστική ικανότητα) αλλά μόνο για τα τυπικά και όχι για τα σχολεία που φοιτούν χαρισματικοί μαθητές.

Όπως έχουμε υποστηρίξει και αλλού (Bempeni & Vamvakoussi, 2015), η σχολική εμπειρία δεν καθορίζεται μόνο από το πλήθος των σχολικών ετών ή από το σχολείο που φοιτά ο μαθητής. Ως εύλογο παράδειγμα άλλης παραμέτρου θα μπορούσε να αναφερθεί ο ρόλος των συγκεκριμένων εκπαιδευτικών που συνάντησε το κάθε παιδί στη σχολική του ζωή. Επιπλέον, η προσωπική μαθησιακή ιστορία του ατόμου έχει και σημαντικές συνιστώσες, οι οποίες δε διαμορφώνονται απαραίτητα ή αποκλειστικά στο πλαίσιο της σχολικής ζωής - όπως, για παράδειγμα, τα ενδιαφέροντα, ή οι προσωπικές επαγγελματικές και ακαδημαϊκές επιδιώξεις του ατόμου.

Αναζητώντας πιθανές εξηγήσεις για τις δι-ατομικές διαφορές στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση στα μαθηματικά και, ειδικότερα, στα κλάσματα, στραφήκαμε στο χώρο έρευνας των προσεγγίσεων στη μάθηση (learning approaches). Το ζητήματα των προσεγγίσεων στη μάθηση, των συνιστωσών τους καθώς και του τρόπου μέτρησής τους αναλύονται διεξοδικά στην επόμενη ενότητα.

1.2 Επιφανειακή και Βαθιά προσεγγιση στη μάθηση των μαθηματικών

1.2.1 Δι-ατομικές διαφορές και προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών: Μία υπόθεση

Εδώ και αρκετά χρόνια είναι γνωστό ότι υπάρχουν δι-ατομικές διαφορές στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές προσεγγίζουν τη μάθηση ενός αντικειμένου. Μια κεντρική διάκριση είναι αυτή της επιφανειακής έναντι της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση (Entwistle & McCune, 2004). Η επιφανειακή προσέγγιση (surface approach) σχετίζεται με την πρόθεση του υποκειμένου να μπορεί να αναπαραγάγει το περιεχόμενο, όταν του ζητηθεί. Αντίθετα, η βαθιά προσέγγιση (deep approach) στη μάθηση συνδέεται με την πρόθεση του υποκειμένου να κατανοεί το αντικείμενο της μάθησης.

1.2.2 Επιφανειακή έναντι Βαθιάς προσέγγιση στη μάθηση: ζητήματα ορισμού

Η έρευνα για προσεγγίσεις στη μάθηση έχει μακρά ιστορία, τόσο στην ευρωπαϊκή, όσο και τη διεθνή έρευνα για τη μάθηση, κυρίως στο πλαίσιο της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης (Biggs, 1987; Entwistle & McCune, 2004; Entwistle & Ramsden, 1983). Οι αποκλίσεις στην προσέγγιση στη μάθηση αναγνωρίστηκαν περίπου το 1970. Οι Marton και Säljö (1976) χρησιμοποιώντας την καινοτόμο, για εκείνη την εποχή, μέθοδο της φαινομενογραφίας, ζήτησαν από πρωτοτετείς φοιτητές να διαβάσουν ένα επιστημονικό άρθρο και να περιγράψουν την κεντρική ιδέα του κειμένου και επιπλέον διερεύνησαν το πώς προσέγγιζαν το κείμενο. Με βάση τα αποτελέσματά τους, οι ερευνητές εισήγαγαν δύο ποιοτικά διαφορετικές διεργασίες μάθησης δηλαδή διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους το υποκείμενο μπορεί να επεξεργαστεί την πληροφορία: την *επιφανειακή,* όταν το υποκείμενο εστίαζε στο κείμενο αυτό καθαυτό, και τη *βαθιά*, όταν το υποκείμενο εστίαζε στην εξαγωγή νοήματος από το κείμενο. Η διάκριση αυτή υιοθετήθηκε και από πολλούς άλλους ερευνητές αλλά με διαφορετική ορολογία (Pask, 1976; Svensson, 1977). Ωστόσο, στη συνέχεια θεωρήθηκε (Säljö, 1979) ότι ο όρος διεργασία είναι πολύ περιορισμένος για να συμπεριλάβει την πρόθεση του υποκειμένου κατά τη μάθηση και έτσι οι όροι *βαθέος- και επιφανειακού επιπέδου- διεργασία* (surface- and deep level- level processing) αντικαταστάθηκαν από τον όρο *προσεγγίσεις στη μάθηση.* Συγκεκριμένα, οι προσεγγίσεις στη μάθηση αναφέρονται στους στόχους (intentions) του υποκειμένου σε ό,τι αφορά τη μελέτη και τη μάθηση, καθώς και τις μαθησιακές διεργασίες που εφαρμόζει το υποκείμενο για να επιτύχει τους στόχους του (π.χ. Entwistle, 1988; Entwistle, McCune, & Sheja, 2006; Entwistle & Ramsden, 1983).

Τρεις είναι οι προσεγγίσεις που εντοπίζονται στη βιβλιογραφία. Η *επιφανειακή προσέγγιση* χαρακτηρίζεται από την εφαρμογή μη αναστοχαστικών στρατηγικών όπως την απομνημόνευση και την αναπαραγωγή του υπό μάθηση υλικού και την τάση της απλής διεκπεραίωσης με σκοπό την επιτυχία στις εξετάσεις (Spada & Giovanni, 2012). Επιπλέον, σχετίζεται με την αδυναμία του υποκειμένου να εντοπίσει τις σχέσεις μεταξύ των εννοιών δηλ. την ασύνδετη γνώση (Meyer, 1991). Η *βαθιά προσέγγιση*, από την άλλη μεριά, αναφέρεται στην πρόθεση του υποκειμένου να κατανοήσει την πληροφορία μέσω της σύνδεσης ιδεών και τη χρήση τεκμηρίωσης. Γενικά, τα άτομα που υιοθετούν βαθιά προσέγγιση δίνουν έμφαση στην κριτική σκέψη και τη δημιουργία του προσωπικού νοήματος του υπό μελέτη ζητήματος. Η τρίτη προσέγγιση, *οργανωμένη μάθηση* (organized learning) και μέχρι πρότινος *στρατηγική προσέγγιση* (strategic approach), αναφέρεται στις καθημερινές πρακτικές για την οργάνωση της μελέτης και τη διαχείριση του χρόνου. Θεωρείται όμως περισσότερο ως προσέγγιση που αφορά τη μελέτη και όχι την προσέγγιση στη μάθηση (Entwistle & McCune, 2009).

Είναι ευρέως αποδεκτό ότι το είδος της προσέγγισης στη μάθηση του αντικειμένου οδηγεί σε ποιοτικά διαφορετικά μαθησιακά αποτελέσματα (π.χ. Chin & Brown, 2000; Entwistle & Ramsden, 1983). Ειδικότερα, η επιφανειακή προσέγγιση στη μάθηση συνδέεται με φτωχή εννοιολογική κατανόηση, ενώ η βαθιά προσέγγιση συνδέεται με βαθιά εννοιολογική κατανόηση του εκάστοτε αντικειμένου μάθησης (Entwistle, 2007; Smith & Wood, 2000; Stathopoulou & Vosniadou, 2007). Η εικόνα γίνεται πιο περίπλοκη, αν ληφθεί υπόψη και η ακαδημαϊκή επίδοση. Πιο συγκεκριμένα, η σύγχρονη έρευνα υποστηρίζει ότι η βαθιά προσέγγιση στη μάθηση σχετίζεται με την υψηλή ακαδημαϊκή επίδοση (Chin & Brown, 2000; Chiu, 2012; Entwistle, 2000; García et al., 2016; Smith & Wood, 2000; Stathopoulou & Vosniadou, 2007), μόνο όταν η αξιολόγηση επιβραβεύει τη μάθηση με κατανόηση (Baeten, Kyndt, Struyven, & Dochy, 2010). Αντίστοιχα, υπάρχουν περιπτώσεις μαθητών με επιφανειακή προσέγγιση στη μάθηση και πολύ φτωχή εννοιολογική γνώση που έχουν την ίδια ακαδημαϊκή επίδοση όπως αποτυπώνεται στην αξιολόγησή τους (βαθμολογία) με μαθητές που υιοθετούν βαθιά προσέγγιση και έχουν βαθιά κατανόηση του περιεχομένου (Bempeni & Vamvakoussi, 2015; Stathopoulou & Vosniadou, 2007).

Το γεγονός ότι η βαθιά προσέγγιση στη μάθηση συνοδεύεται από θετικά αποτελέσματα όσον αφορά την κατανόηση, αλλά όχι απαραίτητα ικανοποιητικά όσον αφορά την αξιολόγηση (Byrne, Flood, & Willis, 2002; Flegg, Mallet, & Lupton, 2012), οδηγεί ορισμένες φορές στην υιοθέτηση πραγματιστικών προσεγγίσεων στη μάθηση από μαθητές που, ενώ ενδιαφέρονται για την κατανόηση αυτών που μαθαίνουν, προσαρμόζονται και στις απαιτήσεις του εκπαιδευτικού πλαισίου στοχεύοντας και στην ακαδημαϊκή επιτυχία. Σχετικά ευρήματα οδήγησαν ορισμένους ερευνητές να εισηγηθούν την προσθήκη της στρατηγικής προσέγγισης (Cano & Berben, 2009; Entwistle & Cune, 2004) που αναφέρθηκε παραπάνω. Ωστόσο, στην παρούσα διατριβή υποστηρίζουμε ότι η στρατηγική προσέγγιση θα μπορούσε να υπαχθεί στην κατηγορία της βαθιάς προσέγγισης (Zeegers, 2004), εφόσον διατηρείται ο στόχος της κατανόησης του αντικειμένου μάθησης.

Η επικρατέστερη, μέχρι σήμερα, διάκριση που αποτυπώνει τις ποιοτικές διαφορές στη μάθηση είναι αυτή της επιφανειακής έναντι της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση (Entwistle & Ramsden, 1983; Entwistle & McCune, 2004).

1.2.3 Προσέγγιση στη μάθηση έναντι Αυτορρυθμιζόμενης μάθησης

Στην ψυχολογία της εκπαίδευσης υπάρχουν δύο κεντρικές προσεγγίσεις που περιγράφουν τις ποιοτικές διαφορές στη μάθηση. Από τη μία μεριά είναι η *προσέγγιση στη μάθηση* (Student Approach to Learning – SAL), η οποία αναλύθηκε διεξοδικά στην Ενότητα 1.2.2, και από την άλλη η *προσέγγιση της αυτορρυθμιζόμενης μάθησης* (Self-Regulated Learning approach – SRL). Η αυτόρρυθμιζόμενη μάθηση προσδιορίζεται ως μία ενεργή, κατασκευαστική διεργασία η οποία περιλαμβάνει τον καθορισμό μαθησιακών στόχων, έπειτα την παρακολούθηση, τη ρύθμιση και τον έλεγχο των κινήτρων και της συμπεριφοράς με σκοπό την επίτευξή τους (Boekarts, Pintrich, & Zeidner, 2000; Pintrich, 2000; Zimmerman, 2008). Με βάση αυτή την προσέγγιση τα κίνητρα περιέχονται στην αυτορρύθμιση. Τα πιο πρόσφατα SLR μοντέλα περιλαμβάνουν τις πεποιθήσεις των κινήτρων (motivational beliefs) μαζί με τις στρατηγικές αυτορρύθμισης (self-regulatory strategies), όπως την απόδοση αξίας σε ένα έργο (task value) ως μία συνιστώσα του SRL μοντέλου που διαμορφώθηκε από τον Pintrich (2000).

Το κεντρικό σημείο της διαμάχης των δύο προσεγγίσεων είναι το ζήτημα του κατάλληλου αριθμού των υπό μέτρηση εννοιολογικών κατασκευασμάτων (grain-size) ή η ιδιαιτερότητα του πλαισίου της μέτρησης (Pintrich, 2004). Η SAL προσέγγιση υποστηρίζει μία ολιστική περιγραφή των διάφορων εννοιολογήσεων της μάθησης, ενώ η SRL οπτική εστιάζει στην ειδική κατά αντικείμενο (course-specific) περιγραφή των εξαρτημένων από το πλαίσιο κατασκευασμάτων από μια πιο μικρο-σκοπική άποψη.

Και οι δύο προσεγγίσεις έχουν τα πλεονεκτήματά τους: η SAL προσέγγιση μπορεί να παράσχει χρήσιμη πληροφορία για τα κίνητρα του υποκειμένου καθώς και τη μάθηση σε επίπεδο αναλυτικών προγραμμάτων, ενώ η SRL προσέγγιση μπορεί να μετρήσει πλήθος γνωστικών μεταβλητών καθώς και μεταβλητών που σχετίζονται με τα κίνητρα, σε ένα πιο λεπτομερές και ειδικό κατά αντικείμενο, επίπεδο (Pintrich, Smith, Garcia, McKeachie, 1991; Rotgans & Schmidt, 2010). Η ανάπτυξη των SRL και SAL προσεγγίσεων στα κίνητρα και τη μάθηση ακολούθησε διαφορετικά μονοπάτια στα πρώτα στάδια. Τα SRL μοντέλα έχουν ρίζες στις εκπαιδευτική και γνωστική ψυχολογία και προέκυψαν από θεωρίες κινήτρων, γνωστικές και μεταγνωστικές θεωρίες. Έτσι, τα αυτοαναφορικά εργαλεία προκύπτουν από μία από πάνω προς τα κάτω προσέγγιση και βασίζονται σε προηγούμενες θεωρίες και εμπειρικά δεδομένα (Biggs, 1993; Dyne, Taylor, & Boulton-Lewis, 1994). Από την άλλη πλευρά οι SAL ερευνητές, εφάρμοσαν φαινομενολογικές μελέτες που βασίστηκαν σε εις βάθος συνεντεύξεις φοιτητών ως σημείο εκκίνησης για την ανάπτυξη αυτοαναφορικών εργαλείων. Καθώς τα διάφορα εργαλεία βελτιώνονταν παιραιτέρω, ο διχασμός ανάμεσα στις SRL και SAL εννοιολογήσεις περιορίστηκε με τα SAL εργαλεία να περιλαμβάνουν SRL υποκλίμακες, όπως τη μεταγνώση και την αυτόρρύθμιση (Biggs, 1993; Entwistle & McCune, 2004). Ωστόσο, είναι ακόμη υπό συζήτηση το ζήτημα του επαρκούς αριθμού εννοιολογικών κατασκευασμάτων που ένα εργαλείο μπορεί να μετρήσει.

1.2.4 SAL και SRL εργαλεία για την προσέγγιση στη μάθηση

Κατά καιρούς αναπτύχθηκαν μεθοδολογικές προσεγγίσεις για τη διερεύνηση της προσέγγισης στη μάθηση. Αρχικά, η ανάπτυξη των εργαλείων βασίστηκε σε «εκ των κάτω προς τα άνω» ποιοτικές μελέτες που εξέταζαν κυρίως την κατανόηση κειμένου (βλ. φαινομενογραφική προσέγγιση των Marton και Säljö, 1976; Entwistle, 2007). Οι ποιοτικές αυτές μελέτες αποτέλεσαν τη βάση για τη δημιουργία ποσοτικών εργαλείων, με την εφαρμογή των «εκ των κάτω προς τα άνω» ποσοτικών μεθοδολογιών. Τα εργαλεία αυτά εξέταζαν την προσέγγιση στη μάθηση κυρίως μέσω της προσέγγισης στην καθημερινή μελέτη με το δεδομένο ότι η προσέγγιση στη μάθηση γενικά είναι συμβατή με την προσέγγιση στη μελέτη (studying approach) (Entwistle & McCune, 2004).

Διάφορα SAL ερωτηματολόγια αναπτύχθηκαν για να μετρήσουν τις προσεγγίσεις στη μάθηση. Παραδείγματα τέτοιων ερωτηματολογίων είναι το “Approaches to Studying Inventory” (ASI; Entwistle & Ramsden, 1983), το “Study

Process Questionnaire” (SPQ; Biggs, 1987), το “Revised Approaches Studying Inventory” (RASI) και το “Approaches and Study Skills Inventory for Students” (ASSIST) από τους Tait, Entwistle και McCune (1998), με το τελευταίο να αποτελεί την εξέλιξη του ASI. Άλλα εργαλεία είναι το “Approaches to Learning and Studying Inventory” (ALSI) και το Learning and Studying Questionnaire (LSQ) από τους Entwistle, McCune και Hounssel (2003) και μία επαναληπτική έκδοση του SPQ ήταν το R-SPQ-2F (Biggs, Kember, & Leung, 2001). Πρόσφατα, ένα εργαλείο ονόματι HowULearn (Hailikari & Paspala, 2014; Herrmann, McCune, & Bager-Elsborg, 2017) αναπτύχθηκε στη βάση των ALSI και LSQ. Επιπλέον, χρησιμοποιεί κάποιες ερωτήσεις από το R-LPQ-2F, ένα εργαλείο όμοιο με το R-SPQ-2F αλλά σχεδιασμένο για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση για να μετρήσει τη βαθιά προσέγγιση στη μάθηση.

Οι τρεις βασικές κοινές κλίμακες που συναντάμε στα παραπάνω SAL εργαλεία είναι η βαθιά, η επιφανειακή και η στρατηγική προσέγγιση, ωστόσο υπάρχουν κάποιες μικρές διαφοροποιήσεις μεταξύ τους. Για παράδειγμα, στο εργαλείο ASI συναντάται μία επιπλέον κλίμακα, αυτή της μη ακαδημαϊκής προσέγγισης που περιλαμβάνει ως υποκλίμακα μη ευνοϊκούς παράγοντες για τη μάθηση (π.χ. αρνητικές στάσεις) (Entwistle & McCune, 2004; Kember & Leung, 1998). Αντίθετα, στο εργαλείο ASSIST οι μη ευνοϊκοί παράγοντες για τη μάθηση παρουσιάζονται ως υποκλίμακα της απαθούς-επιφανειακής προσέγγισης. Να σημειώσουμε ότι στα παραπάνω εργαλεία (ASI, SPQ) για καθεμία από τις συνιστώσες των κατηγοριών υπάρχουν τα αντίστοιχα κίνητρα και στρατηγικές. Επιπλέον, υπάρχουν ποιοτικές διαφορές ανάμεσα στις υποκλίμακες της στρατηγικής προσέγγισης (achieving approach) του Biggs (1987) και των Entwistle και Ramsden (1983) (strategic orientation). Ενώ στην κλίμακα της στρατηγικής προσέγγισης είναι κοινή η υποκλίμακα του κινήτρου για την επίτευξη του στόχου (achievement motivation) στα δύο εργαλεία, ωστόσο οι άλλες υποκλίμακες διαφέρουν, από την άποψη ότι το εργαλείο ASI των Entwistle και Ramsden (1983) περιλαμβάνει χαρακτηριστικά που σχετίζονται κυρίως με την επιφανειακή προσέγγιση του SPQ (βαθμολογία, προσπάθεια για εντυπωσιασμό του διδάσκοντα) (Kember, 1998). Από την άλλη μεριά, η στρατηγική προσέγγιση του Biggs (1987) αναφέρεται σε ένα μοντέλο για την προσέγγιση στη μελέτη. Το γεγονός ότι τα όρια δεν είναι καθόλου σαφή για τη βαθιά/επιφανειακή προσέγγιση και τη στρατηγική προσέγγιση οδήγησε στον διαχωρισμό της στρατηγικής προσέγγισης σε βαθιά-στρατηγική και επιφανειακή-στρατηγική προσέγγιση (βλ. Entwistle, McCune, & Tait, 2013 για μία λεπτομερή ανάλυση).

Τα SAL εργαλεία για τη μέτρηση των προσεγγίσεων στη μάθηση έχουν εξελιχθεί τις τελευταίες δεκαετίες στη βάση νέων εμπειρικών δεδομένων που σκιαγραφούν καλύτερα τις προσεγγίσεις. Ωστόσο, οι βασικές αρχές για τον προσδιορισμό των προσεγγίσεων στη μάθηση έχουν μείνει αμετάβλητες.

Το SRL εργαλείο που εστιάζει στα κίνητρα και τις στρατηγικές αυτορρύθμισης και εξετάζει πώς αυτά συνδέονται είναι το Motivated Strategy for Learning Questionnaire (MSLQ; Pintrich, 1989). Οι MSLQ αυτορρυθμιστικές στρατηγικές διακρίνονται σε γνωστικές (αναπαραγωγή, οργάνωση και διεργασία), μεταγνωστικές (σχεδιασμός, παρακολούθηση και αυτορρύθμιση) και στρατηγικές διαχείρισης (αναζήτηση βοήθειας, διαχείριση του χρόνου και του περιβάλλοντος μελέτης). Εξετάζοντας διάφορες πτυχές των κινήτρων (π.χ. προσδοκία, απόδοση αξίας, πεποιθήσεις ελέγχου), το MSLQ κάνει δυνατή τη διευρύνηση της σχέσης μεταξύ κινήτρων και αυτορρύθμισης με ακρίβεια (Pintrich, 1989).

Ένα εργαλείο μπορεί να είναι έγκυρο και αξιόπιστο για κάποιο συγκεκριμένο πλαίσιο (π.χ. πανεπιστημιακό μάθημα), αλλά υπάρχουν περιορισμοί για τη χρήση του σε ένα άλλο πλαίσιο (π.χ. σε επίπεδο γενικού προγράμματος σπουδών). Το ζήτημα της αξιοπιστίας είναι κεντρικό στη διάκριση των δύο προσεγγίσεων SAL και SRL (Rotgans & Schmidt, 2012). Η SRL προσέγγιση μετράει περισσότερα εννοιολογικά κατασκευάσματα σε όλη τους την πολυπλοκότητα, ενώ τα SAL μοντέλα μετρούν γενικά την προσέγγιση στη μάθηση και τη μελέτη. Το εργαλείο MSLQ, που είναι SRL, έχει συγκριθεί με SAL εργαλεία, για παράδειγμα με το SPQ (Study Process Questionnaire) (Biggs, 1987). Ειδικότερα, οι Entwistle & McCune (2004, σελ. 330) έκαναν μία εννοιολογική σύγκριση των δύο εργαλείων συγκρίνοντας τις υποκλίμακες που εμπλέκονται με συγκεκριμένες τάσεις. Για παράδειγμα, στο SPQ για την *προσέγγιση για κατανόηση* (indicating an orientation to understand for oneself) υπάρχουν δύο υποκλίμακες: η *προχωρημένη στρατηγική* (deep strategy) και το *προχωρημένο κίνητρο* (deep motive), ενώ στο MSLQ υπάρχουν πέντε υποκλίμακες *διεργασία, κριτική σκέψη, οργάνωση, εσωτερικό κίνητρο,* και ενδιαφέρον για τη δραστηριότητα (elaboration, critical thinking, intristic goal, orientation, and task-value).

Ωστόσο, υπάρχουν ερευνητικά δεδομένα που υποστηρίζουν ότι τα κατασκευάσματα που αφορούν τα κίνητρα και τη μάθηση μπορούν να επεκταθούν σε διάφορα αντικείμενα. Πράγματι, οι Wolters και Pintrich (1998) διερεύνησαν τις διαφορές κατά πεδίο σχετικά με τα κίνητρα και την αυτορρυθμιζόμενη μάθηση στα Μαθηματικά, την Αγγλική γλώσσα και τις Κοινωνικές επιστήμες. Χρησιμοποίησαν διάφορες υποκλίμακες του MSLQ, όπως αυτοαποτελεσματικότητα, μεταγνωστική αυτορρύθμιση, αναπαραγωγή, άγχος για την εξέταση. Τα αποτελέσματα της μελέτης του έδειξαν ότι δε διακρίνονται διαφορές ανά αντικείμενο στα εννοιολογικά κατασκευάσματα που σχετίζονται με τα κίνητρα και την αυτορρυθμιζόμενη μάθηση. Σε αντίστοιχα συμπεράσματα κατέληξαν και οι Vermetten, Vermunt, και Lodewijks (1999) που μελέτησαν τη συνέπεια του ILS (Inventory of the Learning Styles) σε διάφορα πανεπιστημιακά μαθήματα. Εντόπισαν μόνο μικρές διαφορές στο είδος των στρατηγικών μάθησης που ήταν ευαίσθητες στο πλαίσιο. Ωστόσο, ο Pintrich εξέφρασε την επιφύλαξή του για το αν τα SRL μοντέλα μπορούν να εφαρμοστούν γενικά σε προγράμματα σπουδών (2004).

Στην ίδια γραμμή, οι Rotgans & Schmidt (2010), επιχείρησαν να συμβιβάσουν τις δύο προσεγγίσεις, από τη μία το πλεονέκτημα της SAL να παράσχει μία γενική εικόνα των προσεγγίσεων των φοιτητών και από την άλλη το πλεονέκτημα της SRL προσέγγισης για λεπτομερή περιγραφή των κινήτρων και της χρήσης των στρατηγικών μάθησης μέσω της χρήσης του MSLQ, ενός SRL εργαλείου σχεδιασμένου να μετράει ένα μεγάλο αριθμό εννοιολογικών κατασκευασμάτων της αυτορρυθμιζόμενης μάθησης. Σκοπός της μελέτης ήταν να διερευνήσει αν το MSLQ μπορεί να μετρήσει τα κίνητρα και τις στρατηγικές της αυτορρυθμιζόμενης μάθησης που δεν άπτονται ενός συγκεκριμένου πεδίου. Το ερωτηματολόγιο δόθηκε σε 1166 Σιγκαπουριανούς φοιτητές του Πολυτεχνείου από διάφορα τμήματα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η ελαφρώς τροποποιημένη μορφή του MSLQ μπορεί να μετρήσει κίνητρα και στρατηγικές μάθησης σε διαφορετικά αντικείμενα, μιας και επέδειξε καλή εγκυρότητα εννοιολογικής κατασκευής και για τις 13 υποκλίμακες. Τα εργαλεία SRL δύνανται να θεωρηθούν ως μία εναλλακτική στα SAL εργαλεία όπως το ASI (Entwistle & Ramsden, 1983) και το SPQ (Biggs et al., 2001) για τη μέτρηση των κινήτρων και των στρατηγικών μάθησης σε μία πιο γενική βάση, δεδομένου ότι είναι εφικτό να προσφέρουν περισσότερη πληροφορία όσον αφορά τα κίνητρα, τη γνωστική διαχείριση καθώς και τη διαχείριση της μελέτης (Entwistle & McCune, 2004).

1.2.5 Χαρακτηριστικά της προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών: η έρευνα στην τριτοβάθμια εκπαίδευση

Διάφοροι ερευνητές έχουν επισημάνει (Biggs, 1994; Entwistle, & McCune, 2004) ότι οι παράγοντες που «ευθύνονται» για την ποιότητα των μαθησιακών αποτελεσμάτων ως αποτέλεσμα της προσέγγισης στη μάθηση μπορεί να σχετίζονται είτε με το άτομο (αυτορρύθμιση, κίνητρα, γνωστικό προφίλ, στάσεις) είτε με το πλαίσιο (είδος έργου, διδακτική μέθοδος, αξιολόγηση). Στην παρούσα έρευνα εστιάζουμε στους ατομικούς παράγοντες οι οποίοι πρέπει να μελετηθούν ώστε να αξιοποιηθούν για τη διαμόρφωση του πλαισίου που θα στοχεύει στην υιοθέτηση βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση.

Ένα βασικό ζητούμενο σε αυτό το χώρο έρευνας είναι ο προσδιορισμός των συνιστωσών της κάθε μιας προσέγγισης, ιδιαίτερα της βαθιάς, και των δεικτών τους (Cano & Berbén, 2009; Entwistle & McCune, 2004). Ο κύριος όγκος των ερευνητικών δεδομένων προέρχεται από το χώρο της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, στον οποίο έχουν αναπτυχθεί και εργαλεία για ποσοτικές μελέτες (π.χ. Entwistle et al., 2013). Η ανάπτυξη των εργαλείων βασίστηκε σε ποιοτικές μελέτες που εξέτασαν κυρίως την κατανόηση κειμένου. Όπως επισημαίνουν και οι Entwistle και McCune (2004), η χρήση των εργαλείων σε άλλες ηλικιακές ομάδες και για άλλα αντικείμενα δεν μπορεί να γίνει άμεσα. Στο πεδίο των μαθηματικών, έχουν γίνει ελάχιστες σχετικές έρευνες και αφορούν στην τριτοβάθμια εκπαίδευση (π.χ., Cano & Berbén, 2009).

Κατά καιρούς αναπτύχθηκαν εργαλεία που βασίζονταν σε προηγούμενα σταθμισμένα εργαλεία (π.χ. Biggs, 1987), μέσω των οποίων αναδείχθηκαν ατομικές διαφορές στην προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών.

Οι Flegg και συνεργάτες (2012) διερεύνησαν την προσέγγιση 40 τριτοετών Αυστραλών φοιτητών σε νέα μαθηματικά μοντέλα που δεν είχαν ξανασυναντήσει, δηλ. την μετατροπή ενός πραγματικού προβλήματος σε μαθηματικό πρόβλημα. Τα δεδομένα προήλθαν από τη συμπλήρωση ερωτηματολογίων που περιλάμβαναν δηλώσεις για τις οποίες οι φοιτητές καλούνταν να δηλώσουν τον βαθμό συμφωνίας/ασυμφωνίας και ερωτήσεις ανοιχτού τύπου για την προσέγγιση τους στη μάθηση των μαθηματικών μοντέλων, καθώς και από τρεις ημιδομημένες συνεντεύξεις. Η μελέτη πραγματοποιήθηκε στο τέλος του εξαμήνου κατά τη διάρκεια του οποίου είχαν διδαχθεί το σχετικό μάθημα. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν διαφορετικές προσεγγίσεις στη μάθηση του αντικειμένου ως προς συγκεκριμένες συνιστώσες. Για παράδειγμα, οι φοιτητές που υιοθετούσαν επιφανειακή προσέγγιση εστίαζαν αποσπασματικά την προσοχή τους σε στοιχεία του μοντέλου για να τα καταλάβουν και έκαναν απλή καταγραφή αυτών χωρίς να μπορούν να κατανοήσουν τη διασύνδεσή τους, καθώς και τον ευρύτερο στόχο του μοντέλου. Από την άλλη μεριά, οι φοιτητές που υιοθετούσαν βαθιά προσέγγιση ήταν σε θέση να κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ των επιμέρους στοιχείων του μοντέλου, αξιοποιούσαν την προηγούμενη σχετική γνώση τους για τα μοντέλα και τη συνέδεαν με τη νέα με σκοπό την προσωπική κατασκευή νοήματος.

Οι Matic, Matic, & Katalenic (2013) χρησιμοποίησαν το εργαλείο ASSIST, κάνοντας κατάλληλη προσαρμογή στα μαθηματικά για να διευρευνήσουν την προσέγγιση στη μάθηση πρωτοετών φοιτητών του Πολυτεχνείου στο πλαίσιο του υποχρεωτικού προπτυχιακού μαθήματος των μαθηματικών του πρώτου εξαμήνου. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η πλειοψηφία των φοιτητών χρησιμοποιούσε της στρατηγική προσέγγιση (58%) και ακολουθούσαν οι μαθητές με επιφανειακή (13%) και βαθιά προσέγγιση (29%). Επιπλέον, βρέθηκε αρνητική συσχέτιση ανάμεσα στην επιφανειακή προσέγγιση και την ακαδημαϊκή επίδοση (εν προκειμένω τους βαθμούς) και θετική μεν, όχι όμως, ισχυρή συσχέτιση ανάμεσα στη στρατηγική προσέγγιση και την ακαδημαϊκή επίδοση. Αντίθετα, δε βρέθηκε συσχέτιση ανάμεσα στη βαθιά προσέγγιση και την ακαδημαϊκή επιτυχία. Η απουσία αυτής της συσχέτισης έχει επισημανθεί και από άλλους ερευνητές (Biggs, 1993; Byrne et al., 2004). Μία πιθανή εξήγηση γι' αυτό το, φαινομενικά παράδοξο, αποτέλεσμα θα μπορούσε να αποτελεί ο τρόπος αξιολόγησης. Αυτή η ερμηνεία είναι συμβατή και με τον ισχυρισμό του Entwistle (2000) ότι τα περισσότερα προγράμματα σπουδών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση ενθαρρύνουν την υιοθέτηση της στρατηγικής προσέγγισης, δηλαδή τον συνδυασμό της επιφανειακής και βαθιάς προσέγγισης με σκοπό να πετύχουν οι φοιτητές τους καλύτερους δυνατούς βαθμούς.

Για τις ανάγκες μιας άλλης μελέτης (Crawford, Gordon, Nicholas, & Prosser, 1998), αναπτύχθηκε ένα ερωτηματολόγιο με το όνομα Conceptions of Mathematics Questionnaire (CMQ) που αφορούσε τις αντιλήψεις των φοιτητών για τη φύση του αντικειμένου των μαθηματικών. Οι συμμετέχοντες στην ποσοτική μελέτη ήταν 300 πρωτοετείς φοιτητές οι οποίοι κλήθηκαν να δηλώσουν τον βαθμό συμφωνίας τους με δηλώσεις σε μία κλίμακα από 1-5. Οι δύο κλίμακες του ερωτηματολογίου ήταν οι συνεκτικές (cohesive) και κατακερματισμένες (fragmented) αντιλήψεις που είχαν προκύψει από προηγούμενη φαινομενογραφική μελέτη (Crawford, Gordon, Nicholas,

& Prosser, 1994). Παράδειγμα συνεκτικής αντίληψης ήταν η δήλωση: «Τα μαθηματικά είναι ένα σύστημα λογικής που μας βοηθά να κατανοήσουμε τον κόσμο», ενώ παράδειγμα κατακερματισμένης αντίληψης ήταν η δήλωση: «Τα μαθηματικά είναι ένα σύνολο κανόνων και εξισώσεων». Οι ερευνητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι αντιλήψεις σχετίζονταν με την προσέγγιση στη μελέτη των μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα, οι κατακερματισμένες αντιλήψεις για τα μαθηματικά σχετίζονταν με την επιφανειακή προσέγγιση στη μελέτη, ενώ οι συνεκτικές αντιλήψεις σχετίζονταν με τη βαθιά προσέγγιση στη μελέτη των μαθηματικών. Οι Crawford και συνεργάτες (1998) επέκτειναν την προηγούμενη μελέτη τους χρησιμοποιώντας, εκτός από το CMQ και δύο επιπλέον ερωτηματολόγια σε τροποποιημένη μορφή: το SPQ (Biggs, 1987) και το Course Experience Questionnaire (Ramsden, 1990). Οι τροποποιημένες μορφές των δύο ερωτηματολογίων ήταν οι Learning Mathematics Questionnaire και Experience of Studying Mathematics Questionnaire. Σκοπός της έρευνας ήταν η διερεύνηση των αντιλήψεων για τα μαθηματικά, η διερεύνηση της προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών και η διερεύνηση των αντιλήψεων για τη διδασκαλία του προπτυχιακού μαθήματος των μαθηματικών. Τα αποτελέσματα της μελέτης έδειξαν ότι οι εννοιολογήσεις των φοιτητών για τα μαθηματικά σχετίζονται με τις προσεγγίσεις τους στη μάθηση των μαθηματικών, καθώς και με τις αντιλήψεις τους για τη διδασκαλία. Ειδικότερα, προέκυψαν δύο μοτίβα: οι κατακερματισμένες εννοιολογήσεις για τα μαθηματικά σχετίζονταν με επιφανειακές προσεγγίσεις και αντιλήψεις για την αξιολόγηση ως μέτρηση της αναπαραγωγής υλικού καθώς και αντιλήψεις για μεγάλο φόρτο εργασίας, ενώ οι συνεκτικές εννοιολογήσεις σχετίζονταν με βαθιά προσέγγιση στη μάθηση και αντιλήψεις για ποιοτική διδασκαλία, ξεκάθαρους στόχους και αυτόνομη μάθηση.

Οι Paspala και συνεργάτες (2013), σε μία ποσοτική μελέτη με μεγάλο δείγμα (2509 συμμετέχοντες) από 10 διαφορετικές σχολές από το Πανεπιστήμιο του Ελσίνκι, μεταξύ αυτών και σε σχολές θετικών επιστημών, χρησιμοποίησαν μια τροποποιημένη μορφή του ETLQ. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης συστάδων κατέταξαν τους φοιτητές στη βάση της προσέγγισης τους στη μάθηση του αντικειμένου σε τέσσερις ομάδες: φοιτητές που υιοθετούσαν βαθιά προσέγγιση, επιφανειακή προσέγγιση, οργανωτικοί φοιτητές και φοιτητές μη οργανωτικοί που ακολουθούσαν βαθιά προσέγγιση. Είναι ξεκάθαρη η διαφοροποίηση ως προς το είδος της προσέγγισης σε βαθιά και επιφανειακή και σε αυτή τη μελέτη η στρατηγική προσέγγιση συσχετιζόταν θετικά με τη βαθιά.

Όλες οι παραπάνω μελέτες συγκλίνουν στο συμπέρασμα ότι οι εκλεπτυσμένες αντιλήψεις του υποκειμένου για τα μαθηματικά ως αντικειμένου στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, συνοδεύονται από βαθιά προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών (Crawford et al., 1994; 1998).

1.2.6 Η έρευνα για προσέγγιση στη μάθηση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση

Οι Entwistle και McCune (2004) αναφέρουν, μεταξύ άλλων, ότι η χρήση των εργαλείων για άλλες ηλικιακές ομάδες και για άλλα αντικείμενα δεν μπορεί να γίνει άμεσα. Ωστόσο, έχουν γίνει κάποιες απόπειρες με μαθητές της δευτεροβάθμιας αφορούν κυρίως τις φυσικές επιστήμες.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την παρούσα διατριβή είναι ότι τα αποτελέσματά τους συγκλίνουν στο συμπέρασμα ότι η (βαθιά/επιφανειακή) προσέγγιση στη μάθηση σχετίζεται με το επίπεδο εννοιολογικής κατανόησης του αντικειμένου των μαθηματικών ή της φυσικής (υψηλό/ χαμηλό, αντίστοιχα) (Chin & Brown, 2000; Smith & Wood, 2000; Stathopoulou & Vosniadou, 2007).

Οι Chin & Brown (1999) μέτρησαν την προσέγγιση 102 αμερικανών μαθητών Β΄ Γυμνασίου στο μάθημα της Χημείας με τη χρήση του εργαλείου ASI, αφού πρώτα το προσέγγισαν κατάλληλα (Entwistle & Ramsden, 1983). Εν συνεχεία, επέλεξαν με συγκεκριμένα κριτήρια 6 μαθητές που συμμετείχαν σε εις βάθος συνεντεύξεις και διερεύνησαν την προσέγγισή τους στη μάθηση της Χημείας. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η προσέγγιση των μαθητών (επιφανειακή ή βαθιά) είχε ποιοτικές διαφορές ως προς: α) την παραγωγική σκέψη, β) τη φύση των εξηγήσεων, γ) το είδος των τιθέμενων ερωτήσεων, δ) τη μεταγνωστική δραστηριότητα και ε) την αντιμετώπιση των έργων.

Οι Berger & Karabenick (2011) διερεύνησαν τη σχέση ανάμεσα στα κίνητρα και τις στρατηγικές μάθησης (γνωστικές και μεταγνωστικές στρατηγικές, αυτορρύθμιση, στρατηγικές διαχείρισης) 306 μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου χρησιμοποιώντας μία τροποποιημένη μορφή του SRL εργαλείου MSLQ (Duncan, & McKeathie, 2005), το οποίο προσάρμοσαν στα μαθηματικά. Παραδείγματα διατυπώσεων ήταν τα εξής: *Αν δυσκολεύομαι να λύσω ένα πρόβλημα με κάποιον τρόπο, δοκιμάζω άλλους τρόπους, Αν δεν καταλαβαίνω κάτι στα μαθηματικά, ζητάω βοήθεια από τους συμμαθητές μου, Τα μαθηματικά μου φαίνονται συναρπαστικά.* Από τις 44 ερωτήσεις, οι 33 αφορούσαν τη χρήση στρατηγικών μάθησης, ενώ οι 11 τα κίνητρα για τα μαθηματικά. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπάρχει σχέση ανάμεσα στα κίνητρα και τις στρατηγικές μάθησης στο πεδίο των μαθηματικών χωρίς όμως να τεκμηριώνεται η κατεύθυνση της σχέσης αυτής. Πιο συγκεκριμένα, η μελέτη αυτή, πέρα από τα χρήσιμα αποτελέσματά της, είναι η μοναδική που παραθέτει ερωτηματολόγιο για τη μάθηση των μαθηματικών και απευθύνεται σε μαθητές δευτεροβάθμιας. Η μελέτη αυτή δεν αξιοποιεί τη διάκριση ανάμεσα στην επιφανειακή και τη βαθιά προσέγγιση

Πιο πρόσφατα, οι García, Rodríguez, Betts, & González-Castro (2016) μελέτησαν τη σχέση κάποιων μεταβλητών, μεταξύ αυτών, και της επιφανειακής/βαθιάς προσέγγισης με τη μαθηματική επιτυχία (mathematics achievement) σε 524 μαθητές Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού. Το ερωτηματολόγιο που χρησιμοποιήθηκε ήταν το *Processes Study Inventory* – PSI (Núñez et al., 2011), το οποίο περιλάμβανε από 6 διατυπώσεις για την κάθε προσέγγιση (*Προσπαθώ να καταλαβαίνω όταν διαβάζω*, *Μελετάω μόνο και μόνο για να περάσω τις εξετάσεις*). Παρόλο που οι συντελεστές εσωτερικής συνάφειας δεν ήταν υψηλοί (0,70 και 0,72 για την επιφανειακή και βαθιά κλίμακα αντίστοιχα), οι ερευνητές αναφέρουν ότι ήταν υψηλότεροι από άλλα εργαλεία όπως το LPQ (Biggs et al., 2001). Τα αποτελέσματα της μελέτης τους έδειξαν ότι η βαθιά προσέγγιση στη μάθηση συσχετίζεται θετικά με τη μαθηματική επιτυχία σε αντίθεση με την επιφανειακή προσέγγιση που συσχετίζεται αρνητικά με τη μαθηματική επιτυχία. Σε παρόμοια αποτελέσματα κατέληξαν και άλλοι ερευνητές για τη σύνδεση του είδους της προσέγγισης με τη μαθηματική επιτυχία (π.χ. Khezri azar, Lavasani, Malahmadi, & Amani, 2010).

Σε αντίστοιχα συμπεράσματα κατέληξαν και οι Stathopoulou & Vosniadou (2007) στο πεδίο της φυσικής συλλέγοντας όμως ποιοτικά δεδομένα. Δέκα Έλληνες μαθητές της Α΄ Λυκείου συμμετείχαν σε εις βάθος συνέντευξεις κατά τις οποίες διερευνήθηκε η προσέγγιση τους στη μάθηση και μελέτη σε σχέση με την εννοιολογική κατανόηση στο μάθημα της φυσικής. Τα κριτήρια για να χαρακτηριστεί η προσέγγιση των μαθητών ως επιφανειακή/βαθιά βασίζονταν στις σχετικές περιγραφές του Entwistle και συνεργατών (2000). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η προχωρημένη ή μη εννοιολογική κατανόηση του αντικειμένου συνοδεύεται από διαφορές στην προσέγγιση στη μάθηση της φυσικής. Σύμφωνα με το μοντέλο που προτάθηκε, η προσέγγιση στη μάθηση και μελέτη των συμμετεχόντων βρέθηκε ότι διαφέρει στο επίπεδο τριών συνιστωσών: α) στόχοι, β) χρήση στρατηγικών, και γ) μεταεννοιολογική επίγνωση. Πιο συγκεκριμένα, όταν το υποκείμενο ακολουθεί βαθιά προσέγγιση έχει ως στόχο την προσωπική κατασκευή νοήματος, υιοθετεί στρατηγικές μάθησης που υποστήριζαν τη σύνδεση ιδεών και είχε (μεταεννοιολογική) επίγνωση για την κατανόησή του. Αντίθετα, όταν το υποκείμενο υιοθετεί επιφανειανή προσέγγιση έχει ως στόχο την (υψηλή) σχολική επίδοση ή ακόμα και τη διεκπεραίωση των σχολικών καθηκόντων, υιοθετεί την απομνημόνευση ως στρατηγική μάθησης ενώ δεν έχει (μεταεννοιολογική) επίγνωση για την κατανόησή του.

Με βάση τα παραπάνω, σε προηγούμενη μελέτη μας (Bempeni & Vamvakoussi, 2015), υποθέσαμε ότι οι ατομικές διαφορές στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση των ρητών σχετίζονται με την προσέγγιση του ατόμου στη μάθηση των μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα, υποθέσαμε ότι τα παιδιά που έχουν ισχυρή εννοιολογική κατανόηση για τους ρητούς υιοθετούν βαθιά προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών. Αντίθετα, παιδιά που έχουν ισχυρή διαδικαστική, αλλά όχι εννοιολογική γνώση, υιοθετούν επιφανειακή προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών. Διερευνήσαμε την υπόθεση αυτή χρησιμοποιώντας ως αφετηρία το μοντέλο των Stathopoulou & Vosniadou (2007), στο οποίο προτάσσονται τρεις συνιστώσες της προσέγγισης στη μάθηση: στόχοι, στρατηγικές μάθησης και επίγνωση για την κατανόηση. Με εις βάθος συνεντεύξεις 3 μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου με διαφορετικά προφίλ ως προς την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση των ρητών (διαδικαστικό, εννοιολογικό, εννοιολογικο-διαδικαστικό) διαπιστώσαμε ότι: Το παιδί με το διαδικαστικό προφίλ υιοθετούσε επιφανειακή προσέγγιση στη μάθηση και ως προς τους τρεις άξονες. Συγκεκριμένα, είχε ως στόχο την επιτυχή ανταπόκριση στις σχολικές απαιτήσεις, υιοθετούσε την απομνημόνευση ως βασική στρατηγική μάθησης και είχε πολύ χαμηλή επίγνωση της κατανόησής του για τους ρητούς. Αντίθετα, τα παιδιά με το εννοιολογικό και το εννοιολογικο-διαδικαστικό προφίλ υιοθετούσαν βαθιά προσέγγιση στη μάθηση: Είχαν ως στόχο την προσωπική κατασκευή νοήματος, υιοθετούσαν στρατηγικές μάθησης που υποστηρίζουν τη σύνδεση ιδεών και είχαν υψηλή μεταγνωστική επίγνωση για την κατανόησή τους. Ωστόσο, η ανάλυση των συνεντεύξεων ανέδειξε την αναγκαιότητα καλύτερης περιγραφής της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών με προσθήκη νέων αξόνων (π.χ., άξονα που αφορά τα κίνητρα), αλλά και νέων δεικτών (π.χ., στον άξονα στρατηγικές μάθησης). Αναγνωρίζοντας την ανάγκη να προσδιοριστούν καλύτερα οι συνιστώσες της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθητών, πήραμε εις βάθος συνεντεύξεις από δύο μαθητές με εξαιρετική επίδοση στα μαθηματικά (Bempeni, Kaldrimidou, & Vamvakoussi, 2016), τους οποίους αρχικά εξετάσαμε ως προς την εννοιολογική και διαδικαστική κατανόηση των ρητών, πιστοποιώντας ότι ήταν σε πολύ υψηλό επίπεδο και ως προς τα δύο είδη γνώσης. Σε δεύτερη συνέντευξη, εξετάσαμε τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζουν τη μάθηση των μαθηματικών (με ποιους στόχους μάθησης, με ποιες στρατηγικές μελέτης, τι τους κινητοποιεί, πώς ρυθμίζουν το χρόνο και το πλαίσιο ενασχόλησης με τα μαθηματικά, καθώς και πώς ρυθμίζουν συμπεριφορά τους όταν αντιμετωπίζουν δυσκολίες). Η μελέτη αυτή μας έδωσε χρήσιμες πληροφορίες για τις πιθανές συνιστώσες της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση και τους δείκτες της (Πίνακας 1-1).

Πίνακας 1-1: Χαρακτηριστικά βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών

Χαρακτηριστικά βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών	
Άξονες	Δείκτες
Στόχοι	Κατανόηση – προσωπική κατασκευή νοήματος
	Ακαδημαϊκή επιτυχία
Στρατηγικές μάθησης/μελέτης	Ενεργός συμμετοχή στο σχολικό μάθημα
	Τεκμηρίωση
	Συνδυασμός κατανόησης θεωρίας και επίλυσης ασκήσεων
	Συστηματική επένδυση χρόνου – Επίλυση μη οικείων προβλημάτων
	Συνδέσεις
Στοιχεία Αυτορρύθμισης	Παρακολούθηση / έλεγχος της κατανόησης
	Επίγνωση της κατανόησης και της αποτελεσματικότητας των στρατηγικών
	Ρύθμιση της συμπεριφοράς και του πλαισίου στη μελέτη
	Ρύθμιση των συναισθημάτων στην εξέταση
	Ευελιξία στη χρήση στρατηγικών
Κίνητρα	Ενδιαφέρον για τη μαθηματική πρόκληση

Η ύπαρξη ατομικών διαφορών στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση για τα κλάσματα καθώς και η αναζήτηση παραγόντων που εξηγούν τις ατομικές αυτές διαφορές αποτελούν τη βάση του συλλογισμού για τη διατύπωση των ερευνητικών μας ερωτημάτων και υποθέσεων.

2 ΣΤΟΧΟΙ, ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

2.1 Στόχοι

Με βάση προηγούμενες (ποιοτικές κυρίως) έρευνές μας προκύπτει ότι:

- Υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο που τα παιδιά συνδυάζουν τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση για τα κλάσματα.
- Οι διαφορές αυτές φαίνεται να συνδέονται με διαφορές στην προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών.

Στόχος της παρούσας διατριβής είναι η μελέτη των δύο αυτών ζητημάτων με ποσοτική μεθοδολογία σε μεγαλύτερο δείγμα από αυτό των προηγούμενων ερευνών μας. Η κατασκευή και αξιολόγηση κατάλληλων εργαλείων για τη μέτρηση της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης για τα κλάσματα καθώς και της προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών έχει κεντρική θέση στην παρούσα διατριβή.

2.2 Ερευνητικά Ερωτήματα

Τα ερευνητικά μας ερωτήματα είναι τα ακόλουθα:

ΕΕ1: Υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο που οι μαθητές συνδυάζουν τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση για τα κλάσματα;

- Υπάρχουν ακραία προφίλ, δηλαδή, μαθητές με ισχυρή εννοιολογική και πολύ φτωχή διαδικαστική γνώση και το αντίθετο;

ΕΕ2: Διαφοροποιούνται οι ατομικές διαφορές με την ηλικία;

- Είναι δυνατό να υπάρχουν ακραίες διαφορές σε μεγαλύτερες ηλικίες;
- Ευνοεί η εκπαίδευση τη συμμετρική ανάπτυξη των δύο ειδών γνώσης;

ΕΕ3: Σχετίζονται οι ατομικές διαφορές στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση με το σχολείο φοίτησης;

ΕΕ4: Υπάρχει σχέση ανάμεσα στην προσέγγιση των μαθητών στη μάθηση των μαθηματικών (επιφανειακή/βαθιά), και τις ατομικές διαφορές στην εννοιολογική και διαδικαστική τους γνώση για τα κλάσματα;

- Υπάρχει σχέση ανάμεσα στη συνιστώσα της επίγνωσης της κατανόησης και τις ατομικές διαφορές στην εννοιολογική και διαδικαστική τους γνώση για τα κλάσματα;

2.3 Υποθέσεις

Υ1: Παρόμοια με τους Hallett et al. (2010, 2012) και τις Bempeni & Vamvakoussi (2012, 2015) υποθέτουμε ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση για τα κλάσματα, με την έννοια ότι η εννοιολογική γνώση υστερεί σε σχέση με τη διαδικαστική ή αντίστροφα. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι διαφορές αυτές μπορεί να είναι ακραίες: Προβλέπουμε ότι θα βρεθούν μαθητές οι οποίοι συστηματικά θα επιτυγχάνουν σε διαδικαστικά έργα αλλά θα αποτυγχάνουν σε έργα με εννοιολογική στόχευση, καθώς και μαθητές που επιτυγχάνουν σε έργα με εννοιολογική στόχευση, αλλά αποτυγχάνουν στα έργα που απαιτούν διαδικαστική ευχέρεια.

Υ2: Παρόμοια με τους Hallet et al. (2010, 2012), υποθέτουμε ότι οι ατομικές διαφορές θα αμβλύνονται στις μεγαλύτερες ηλικίες. Παρά τη γενική αυτή τάση, ωστόσο, με βάση προηγούμενα ευρήματά μας με παιδιά της Γ΄ Γυμνασίου, προβλέπουμε ότι για ορισμένα παιδιά οι διαφορές παραμένουν ακραίες και σε μεγαλύτερη ηλικία (Bempeni & Vamvakoussi, 2015). Επιπλέον, υποθέτουμε, ότι η ανάπτυξη των δύο ειδών γνώσης με την εκπαίδευση είναι ασύμμετρη και, πιο συγκεκριμένα, ότι ευνοείται η διαδικαστική γνώση. Η υπόθεση αυτή βασίζεται σε προηγούμενη έρευνά μας (Μπεμπένη και Βαμβακούση, 2014, Bempeni & Vamvakoussi, 2014). Στην έρευνα αυτή συγκρίναμε την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τους ρητούς παιδιών Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου (δύο και τρία τμήματα, αντίστοιχα) και διαπιστώσαμε την εξής τάση: Η διαδικαστική γνώση βελτιώνεται ελαφρά με την τάξη, αλλά η εννοιολογική γνώση παραμένει εξίσου ελλειμματική [για παρόμοια διαπίστωση, βλ. Canobi (2004); και βλ. Moss & Case (1999), για μια συζήτηση των χαρακτηριστικών της διδασκαλίας που επιφέρει τέτοια αποτελέσματα].

Σχετικά με το ΕΕ3, δε διατυπώνουμε κάποια υπόθεση, δεδομένου ότι διαφορετικές έρευνες έχουν δώσει διαφορετικά αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, η έρευνα των Hallet και συνεργατών (2012) δεν είχε ενδείξεις ότι το σχολείο φοίτησης είχε κάποια σχέση με τις ατομικές διαφορές στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση, αντίθετα από την έρευνα των Lentz & Wittman (2021).

Υ3: Με βάση τη μελέτη των Bempeni & Vamvakoussi (2015), υποθέτουμε ότι οι ατομικές διαφορές στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση των κλασμάτων συνοδεύονται από ατομικές διαφορές στις προσεγγίσεις στη μάθηση των μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα, προβλέπουμε ότι οι μαθητές με προχωρημένη ή περισσότερο ανεπτυγμένη την εννοιολογική τους γνώση θα ακολουθούν βαθιά προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών, ενώ οι μαθητές με περισσότερο ανεπτυγμένη τη διαδικαστική τους γνώση θα ακολουθούν επιφανειακή προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχει σχέση ανάμεσα στην επίγνωση κατανόησης και τις ατομικές διαφορές στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση για τα κλάσματα. Οι μαθητές με περισσότερο ανεπτυγμένη τη διαδικαστική γνώση θα υπερεκτιμούν την επίδοσή τους, σε αντίθεση με τους μαθητές με περισσότερο ανεπτυγμένη την εννοιολογική γνώση.

3 ΠΙΛΟΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Για την εκτίμηση της καταλληλότητας των εργαλείων μέτρησης, στον μεγαλύτερο δυνατό βαθμό, για τον σκοπό που αυτά κατασκευάστηκαν πραγματοποιήθηκε πιλοτική μελέτη (pilot study). Συγκεκριμένα, η πιλοτική μελέτη στόχευε στη βελτίωση των ερευνητικών εργαλείων, όπως τη διόρθωση πιθανών λαθών και παραλείψεων που θα προέκυπταν από την πρώτη εφαρμογή τους, καθώς την αξιολόγηση της επάρκειας του προϋπολογισμένου χρόνου για τη συμπλήρωσή τους από τους συμμετέχοντες. Απαραίτητη κρίθηκε η διενέργεια ελέγχου εγκυρότητας και αξιοπιστίας των ερωτηματολογίων, η οποία αποτελεί τη βάση ενός καλού ερευνητικού σχεδιασμού (Hazzi & Maldaon, 2015; Van Teijlingen & Hundley, 2002).

3.1 Πιλοτική έρευνα Ι

3.1.1 Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες της πιλοτικής μελέτης για τη διερεύνηση των ατομικών διαφορών στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση για τα κλάσματα ήταν 139 μαθητές από δύο ηλικιακές ομάδες: Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου προερχόμενοι από ένα μεγάλο δημόσιο σχολείο της Ελλάδας όπου φοιτούσαν πάνω από 300 μαθητές. Σε προηγούμενες αντίστοιχες έρευνες, οι συμμετέχοντες ήταν μαθητές Δημοτικού και Β’ Γυμνασίου (Hallett et al., 2010; 2012). Ωστόσο, το δείγμα της παρούσας μελέτης αποτελείται από μαθητές Α΄ Γυμνασίου επειδή κρίναμε ότι είναι απαραίτητο οι συμμετέχοντες να έχουν διδαχθεί όλη τη σχετική ύλη με τα κλάσματα. Να σημειώσουμε ότι στην Ελλάδα η διδασκαλία των κλασμάτων συνήθως ολοκληρώνεται έως τον Δεκέμβρη του σχολικού έτους της Α΄ Γυμνασίου και αποτελεί, στον μεγαλύτερο βαθμό, επανάληψη της ύλης που τα παιδιά έχουν ήδη διδαχθεί από το Δημοτικό. Στις επόμενες τάξεις οι μαθητές συναντούν τα κλάσματα, κυρίως με τη μορφή ρητών αλγεβρικών παραστάσεων.

3.1.2 Υλικά

Για την αξιολόγηση της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης για τα κλάσματα, κατασκευάσαμε ένα νέο ερωτηματολόγιο, δεδομένου ότι δεν εντοπίσαμε σε προγενέστερες μελέτες ένα ήδη υπάρχον με αποδεδειγμένη εγκυρότητα και αξιοπιστία.

Το ερευνητικό εργαλείο περιλάμβανε 40 έργα για τα κλάσματα τα οποία ήταν ομαδοποιημένα σε δύο μέρη: το πρώτο μέρος περιλάμβανε 12 διαδικαστικά έργα με τη μορφή ερωτήσεων ανοικτού τύπου και το δεύτερο 28 εννοιολογικά έργα με τη μορφή ερωτήσεων πολλαπλής επιλογής. Τα διαδικαστικά έργα τέθηκαν με τη μορφή ερωτήσεων ανοικτού τύπου προκειμένου να διασφαλιστεί ότι οι μαθητές είναι σε θέση να εκτελούν τους σχετικούς αλγορίθμους. Αντίθετα, η εννοιολογική γνώση εξετάστηκε με τη μορφή ερωτήσεων πολλαπλής επιλογής με σκοπό να αποφευχθεί η επίλυση των έργων με χαρτί και μολύβι, π.χ. ένα έργο σύγκρισης κλασμάτων δεν εξετάζει εννοιολογική γνώση αν τα κλάσματα μετατραπούν σε ομώνυμα προκειμένου να συγκριθούν (βλ. επίσης Rittle-Johnson & Schneider, 2015), εκτός από ένα έργο αναπαράστασης στην αριθμογραμμή (Q.1.18). Τα διαδικαστικά έργα απαιτούσαν τη γνώση αλγορίθμων που διδάσκονται στο σχολείο (πράξεις με κλάσματα, εφαρμογή του «χιαστί», μετατροπή σύνθετου κλάσματος σε απλό, κανόνες της σύγκρισης). Η κατασκευή των εννοιολογικών έργων βασίστηκε σε μία εκτεταμένη ανασκόπηση της βιβλιογραφίας (π.χ. Baroody & Hume, 1991; Clarke & Roche, 2009; McIntosh, Reys & Reys, 1992; Moss & Case, 1999; Smith, 1995; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; Van Hoof, Verschaffel, & Van Dooren, 2015) και ως βάση αξιοποιήθηκαν έργα τα οποία έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί σε προηγούμενες έρευνες (Bempeni & Vamvakoussi, 2015; Vamvakoussi et al., 2019).

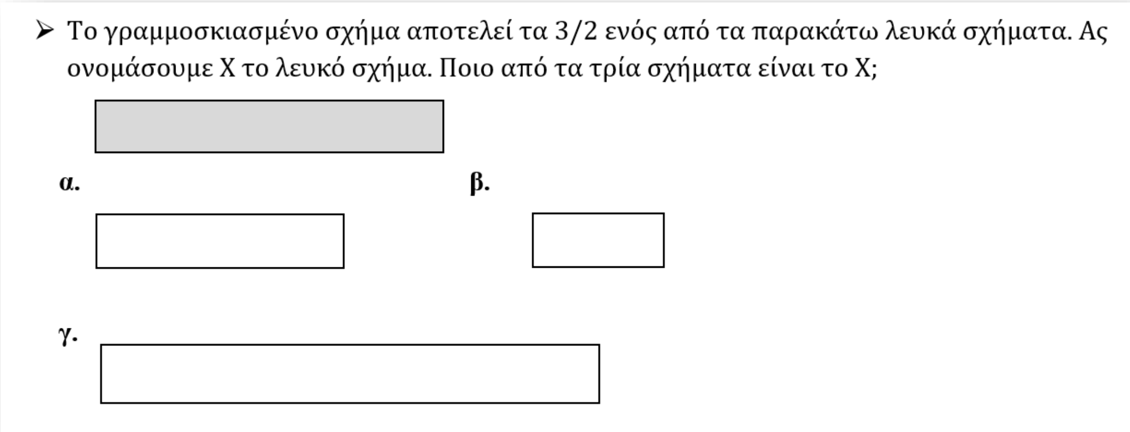
Εικόνα 3-1: Έργο για την αξιολόγηση της εννοιολογικής γνώσης των κλασμάτων: ο ρόλος της μονάδας σε πραγματικό πρόβλημα (Q.1.26)

➢ Η Μαρία αγόρασε μια πίτσα από το «Βεζούβιο» και έφαγε το 1/4. Ο Κώστας αγόρασε μια πίτσα από το «Λούκουλο» και έφαγε το 1/2. Ποιο από τα δύο παιδιά κατανάλωσε περισσότερη πίτσα;

α. Ο Κώστας **β.** η Μαρία **γ.** Δεν μπορώ να ξέρω

Πιο συγκεκριμένα, τα έργα αφορούσαν τη σχηματική αναπαράσταση γνήσιων και καταχρηστικών κλασμάτων σε επιφάνεια, την αναγνώριση του κλάσματος ως λόγου, το ρόλο του κλάσματος ως λόγο σε πραγματικό πρόβλημα, την κατανόηση της επίδρασης του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με κλάσματα ως όρους, την επιλογή της κατάλληλης πράξης σε πραγματικό πρόβλημα, τη σύγκριση και διάταξη κλασμάτων, την αναπαράσταση κλασμάτων στην αριθμογραμμή, την εκτίμηση αποτελέσματος αθροίσματος κλασμάτων και την πυκνή διάταξη των κλασμάτων (Εικόνα 3-1, Εικόνα 3-2). Να σημειωθεί ότι, ενώ τα περισσότερα από τα έργα εμπίπτουν στη διδακτέα ύλη, δεν εντοπίστηκαν όμοια ή κάποια παραλλαγή αυτών στο σχολικό εγχειρίδιο.

Εικόνα 3-2: Έργο για την αξιολόγηση της εννοιολογικής γνώσης: αναγνώριση σχηματικής αναπαράστασης (Q.1.17)



3.1.3 Ανάλυση δεδομένων

Οι απαντήσεις κωδικοποιηθήκαν ως σωστές ή λανθασμένες. Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα στατιστικής επεξεργασίας SPSS (IBM SPSS Statistics 23) και η γλώσσα προγραμματισμού R (3.5.2 Project for Statistical Computing).

3.1.4 Αποτελέσματα

3.1.4.1 Επίδοση μαθητών στην Πιλοτική έρευνα I

Οι συμμετέχοντες στην πιλοτική έρευνα τα πήγαν σαφώς καλύτερα στα διαδικαστικά έργα (ποσοστό επιτυχίας: 51.06%), από ό,τι στα εννοιολογικά (30.33%), όπως άλλωστε ήταν αναμενόμενο. Παρατηρούμε ότι το διαδικαστικό έργο του ερωτηματολογίου με τη μεγαλύτερη αποτυχία ήταν *το κλάσμα ενός αριθμού* (ποσοστό επιτυχίας 11,5%), ενώ το διαδικαστικό έργο με τη μεγαλύτερη επιτυχία ήταν η καταγραφή του κανόνα για τη *σύγκριση ομώνυμων κλασμάτων* και η *αφαίρεση κλασμάτων* (63.3%).

Πίνακας 3-1: Ποσοστό επιτυχίας στην Πιλοτική Μελέτη Ι ανά έργο

	Διαδικαστική γνώση (*Δ*[1]±*ΤΑ*) (51.06±32.85)	Επιτυχία %
Q.1.1	Πρόσθεση κλασμάτων	59.0
Q.1.2	Αφαίρεση κλασμάτων	63.3
Q.1.3	Πολλαπλασιασμός κλασμάτων	61.9
Q.1.4	Διαίρεση κλασμάτων	56.1
Q.1.5	Μετατροπή σύνθετου σε απλό	50.4
Q.1.6	Μετατροπή μικτού σε κλάσμα	38.1
Q.1.7	Εφαρμογή του «χιαστί»	50.4
Q.1.8	Ισοδύναμα κλάσματα	54.0
Q.1.9	*Κλάσμα ενός αριθμού*	*11.5*
Q.1.10.A	Σύγκριση ομώνυμων κλασμάτων	63.3
Q.1.10.B	Σύγκριση κλασμάτων με ίδιο αριθμητή	47.5
Q.1.11	Σύγκριση ετερώνυμων κλασμάτων	56.8
	Εννοιολογική γνώση (*Δ* ±*ΤΑ*) (30.33±14.41)	
Q.1.12	Αναγνώριση αναπαράστασης του 2/3	28.1
Q.1.13	Αναγνώριση αναπαράστασης του 1/4 με κατάλληλη μεταφορά	45.3
Q.1.14	Αναπαράσταση του 1/3	14.4
Q.1.15	Αναγνώριση αναπαράστασης καταχρηστικού κλάσματος	18.7
Q.1.16	Σχηματική αναπαράσταση του 5/3	34.5
Q.1.17	*Εύρεση σχήματος με δεδομένο τα 3/2 αυτού*[2]	*35.3*
Q.1.18	*Αναπαράσταση του 4/3 στην αριθμογραμμή*	*34.5*
Q.1.19	*Πρόσθεση κλασμάτων διαφορετικών ποσών*	*10.8*
Q.1.20	*Κατάλληλη πράξη για το μισό του 1/6*	*23.0*
Q.1.21	*Αναπαράσταση του 1/2 του 1/3*	*49.6*
Q.1.22	Κατάλληλη πράξη για το 1/5 του 15000	38.8
Q.1.23	*Εύρεση κατάλληλης πράξης (διαίρεση με κλάσμα)*	*44.6*
Q.1.24	*Κατάλληλη πράξη για τα 3/4 του 15*	*46.8*
Q.1.25	Το κλάσμα ως λόγος	4.3
Q.1.26	Σύγκριση κλασμάτων δύο ποσών όταν τα ποσά είναι άγνωστα	11.5
Q.1.27	Πρόβλημα με ποσοστά	23.0
Q.1.28	*Σύγκριση με αριθμό αναφοράς τη μονάδα*	*49.6*
Q.1.29	*Σύγκριση με αξιοποίηση του συμπληρώματος*	*28.8*

[1] *Δ*: Διάμεσος, *ΤΑ*: Τυπική Απόκλιση

[2] Τα πλάγια γράμματα στον πίνακα αποτελούν σήμανση για τις ερωτήσεις που εξαιρέθηκαν από την τελική μορφή του εργαλείου.

Q.1.30	Εκτίμηση αποτελέσματος 12/13+7/8	15.8
Q.1.31	*Εκτίμηση αποτελέσματος 4/9+6/13*	*23.0*
Q.1.32	*Αναπαράσταση του 3/4 στην αριθμογραμμή*	*38.1*
Q.1.33	Αναγνώριση κλάσματος στην αριθμογραμμή	10.1
Q.1.34	Σύγκριση κλασμάτων με αριθμό αναφοράς το 1/2	42.4
Q.1.35	Επιλογή κατάλληλης πράξης (πολ/μός ή διαίρεση)	23.0
Q.1.36	*Εκτίμηση του 50·3/2*	*75.5*
Q.1.37	Εκτίμηση του 0,25·2/3	32.4
Q.1.38	Πλήθος αριθμών ανάμεσα στο 2/5 και 3/5	28.1
Q.1.39	*Ποιος είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός;*	19.4

Επιπλέον, από τα εννοιολογικά έργα, το έργο με τη μεγαλύτερη αποτυχία ήταν το έργο για το κλάσμα ως λόγο (4,3%) και το έργο με τη μεγαλύτερη επιτυχία ήταν η εκτίμηση του αποτελέσματος της πράξης 50·3/2 (Πίνακας 3-1).

3.1.4.2 Αξιολόγηση εργαλείου

3.1.4.2.1 *Εγκυρότητα περιεχομένου*

Για τον έλεγχο της εγκυρότητας του ερωτηματολογίου, πραγματοποιήθηκε *έλεγχος εγκυρότητας περιεχομένου* (content validity). Για τον σκοπό αυτό το ερωτηματολόγιο κατατέθηκε προς αξιολόγηση σε 6 ειδικούς του χώρου της Διδακτικής των μαθηματικών, δύο μέλη ΔΕΠ, μία διδάκτορα και τρεις υποψήφιους διδάκτορες για το αν το ερωτηματολόγιο είναι ένα καλό εργαλείο μέτρησης της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης, δηλαδή εάν το περιεχόμενο των ερωτήσεων είναι εννοιολογικά σχετικό με ό,τι μετράει (Lynn, 1986).

Για την εγκυρότητα του περιεχομένου, οι ειδικοί αξιολόγησαν κατά πόσο καθεμία από τις 39 ερωτήσεις σχετίζεται με τον σκοπό του ερωτηματολογίου, σε μια κλίμακα από 1 έως 4, όπου 1=μη σχετική, 2=κάπως σχετική, 3=αρκετά ή και 4=πολύ σχετική. Για κάθε ερώτηση, υπολογίστηκε ο δείκτης εγκυρότητας περιεχομένου (Content Validity Index-CVI) που αντανακλά το ποσοστό συμφωνίας των ειδικών για τη σχετικότητα του περιεχομένου της ερώτησης με το θέμα της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης. Ουσιαστικά, ο δείκτης αυτός αναφέρεται στην επάρκεια και την αντιπροσωπευτικότητα των ερωτήσεων (items) του ερωτηματολογίου και τον βαθμό στον οποίο καλύπτουν το εύρος του περιεχομένου του εννοιολογικού δημιουργήματος που υποστηρίζουν ότι μετράει.

Οι ειδικοί θεώρησαν όλες τις ερωτήσεις πολύ σχετικές με το θέμα και ως εκ τούτου, ο δείκτης CVI βρέθηκε 1, δηλαδή έλαβε τιμή μεγαλύτερη από 0,83 που απαιτείται για να θεωρηθεί αποδεκτή η ερώτηση (Polit, Beck, & Owen, 2007).

3.1.4.2.2 *Έλεγχος αξιοπιστίας εξωτερικής συνάφειας*

Προκειμένου να διαπιστωθεί η σταθερότητα των αποτελεσμάτων σε εξωτερικούς παράγοντες, διενεργήθηκε έλεγχος αξιοπιστίας εξωτερικής συνάφειας με την

Πίνακας 3-2: Έλεγχος αξιοπιστίας εξωτερικής συνάφειας

Διαδικαστική γνώση	Ενδοταξικός συντελεστής	95% confidence interval	p-value
Q.1.1	0.971	(0.95 - 0.983)	0.000
Q.1.2	0.967	(0.945 - 0.981)	0.000
Q.1.3	0.925	(0.872 - 0.956)	0.000
Q.1.4	1.000	(1.000 - 1.000)	0.000
Q.1.5	0.880	(0.795 - 0.929)	0.000
Q.1.6	0.950	(0.915 - 0.971)	0.000
Q.1.7	0.889	(0.811 - 0.935)	0.000
Q.1.8	0.858	(0.758 - 0.917)	0.000
Q.1.9	0.887	(0.808 - 0.934)	0.000
Q.1.10.A	0.868	(0.775 - 0.923)	0.000
Q.1.10.B	0.916	(0.857 - 0.951)	0.000
Q.1.11	0.943	(0.903 - 0.967)	0.000
Εννοιολογική γνώση	**Ενδοταξικός συντελεστής**	**95% confidence interval**	**p-value**
Q.1.12	0.918	(0.861 - 0.952)	0.000
Q.1.13	0.530	(0.199 - 0.724)	0.010
Q.1.14	0.927	(0.875 - 0.957)	0.000
Q.1.15	0.837	(0.722 - 0.904)	0.000
Q.1.16	0.671	(0.439 - 0.807)	0.000
Q.1.17	0.469	(0.094 - 0.688)	0.026
Q.1.18	0.925	(0.871 - 0.956)	0.000
Q.1.19	**0.245**	(-0.287 - 0.557)	**0.192**
Q.1.20	**0.304**	(-0.187 - 0.591)	**0.132**
Q.1.21	0.542	(0.219 - 0.731)	0.008
Q.1.22	0.473	(0.102 - 0.691)	0.024
Q.1.23	**0.239**	(-0.297 - 0.553)	**0.199**
Q.1.24	**0.325**	(-0.151 - 0.604)	**0.112**
Q.1.25	1.000	(1 - 1)	0.000
Q.1.26	0.611	(0.337 - 0.772)	0.002
Q.1.27	0.689	(0.471 - 0.818)	0.000
Q.1.28	0.581	(0.285 - 0.754)	0.004
Q.1.29	0.631	(0.371 - 0.783)	0.001
Q.1.30	0.463	(0.085 - 0.685)	0.028
Q.1.31	0.541	(0.218 - 0.731)	0.009

Q.1.32	0.827	(0.706 - 0.899)	0.000
Q.1.33	0.817	(0.688 - 0.893)	0.000
Q.1.34	0.541	(0.218 - 0.731)	0.009
Q.1.35	0.463	(0.085 - 0.685)	0.028
Q.1.36	**0.207**	(-0.352 - 0.535)	**0.237**
Q.1.37	0.527	(0.193 - 0.722)	0.011
Q.1.38	0.868	(0.775 - 0.923)	0.000
Q.1.39	0.607	(0.33 - 0.77)	0.002

εκτίμηση της αξιοπιστίας ελέγχου-επανελέγχου (test-retest reliability) μέσω της διαδικασίας των επαναληπτικών μετρήσεων. Από το σύνολο των 139 ατόμων της πιλοτικής μελέτης, 40 άτομα κατέστη δυνατόν να απαντήσουν και πάλι στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου μετά την πάροδο 15 ημερών. Για κάθε ερώτηση υπολογίστηκε ο ενδοταξικός συντελεστής (intraclass correlation-ICC) με σκοπό να διερευνηθεί η συνέπεια μεταξύ των δυο μετρήσεων. Τιμές ίσες με 0.50 αποτελούν το σημείο διάκρισης μεταξύ επαρκούς και ανεπαρκούς αξιοπιστίας.

Υπολογίστηκε ο ενδοταξικός συντελεστής κάθε κλίμακας μεταξύ των 2 μετρήσεων από τους οποίους διαπιστώθηκε ότι οι ερωτήσεις της διαδικαστικής κλίμακας παρουσιάζουν εξαιρετικό συντελεστή αξιοπιστίας (ICC $\geq$0.858). Οι οκτώ από τις ερωτήσεις της εννοιολογικής κλίμακας εμφάνισαν πολύ καλό συντελεστή αξιοπιστίας (0.817$\leq$ ICC <1.0), οι έντεκα από τις ερωτήσεις μέτριο (0.527$\leq$ICC $\leq$0.7) και τέλος τέσσερις ερωτήσεις συντελεστή κάτω αλλά πολύ κοντά στο 0.5 (0.463$\leq$ ICC $\leq$0.473) με όλες αυτές τις ερωτήσεις να παρουσιάζουν στατιστικά σημαντική συσχέτιση των δύο μετρήσεων, της αρχικής και της επαναληπτικής.

Δεν ισχυριζόμαστε ότι οι τιμές αυτές είναι πλήρως ικανοποιητικές από στατιστική άποψη, ωστόσο συνεκτιμώντας τη δυσκολία κατασκευής εννοιολογικών έργων, όπως διάφοροι ερευνητές έχουν κατά καιρούς τονίσει (Rittle-Johnson & Schneider, 2015), μπορούμε να τις θεωρήσουμε αποδεκτές ώστε τα έργα αυτά να αποτελέσουν τη βάση για την κατασκευή νέων βελτιωμένων ερευνητικών εργαλείων.

Οι πέντε ερωτήσεις που παρουσίασαν χαμηλότερες τιμές ή/και μη στατιστικά σημαντικές ($p>0.05$), ήταν οι Q.1.19, Q.1.20, Q.1.23, Q.1.24, Q.1.36 εξαιρέθηκαν από την τελική μορφή του ερωτηματολογίου (Πίνακας 3-2).

3.1.4.2.3 *Εγκυρότητα εννοιολογικής κατασκευής (Construct Validity)*

Για να διερευνηθεί ο βαθμός στον οποίο κάθε υποκατηγορία ερωτημάτων (αθροιστική κλίμακα) όντως μετράει το θεωρητικό δημιούργημα το οποίο διατείνεται ότι μετράει, τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση των μαθητών εν προκειμένω, έγινε *έλεγχος εγκυρότητας εννοιολογικής κατασκευής* (construct validity) με τη *μέθοδο ανάλυσης πολλαπλών χαρακτηριστικών* (multi-trait analysis) και κατασκευάστηκε πίνακας συσχετίσεων πολλαπλών χαρακτηριστικών. Πιο συγκεκριμένα, υπολογίστηκαν οι συντελεστές που μετρούν τη συσχέτιση κάθε ερώτησης μιας κλίμακας, διαδικαστικής ή εννοιολογικής, με την κλίμακα στην οποία θεωρητικά ανήκει αυτή, για να διαπιστωθεί η *συγκλίνουσα εγκυρότητα* (convergent validity or item internal consistency). Κατόπιν, οι συντελεστές αυτοί συγκρίθηκαν με τις αντίστοιχες συσχετίσεις της ερώτησης με την άλλη κλίμακα, ώστε να εξεταστεί η διακρίνουσα εγκυρότητα (divergent validity) του ερωτηματολογίου (Ware & Gandek, 1998).

Οι έντεκα από τις δώδεκα ερωτήσεις για τη διερεύνηση της διαδικαστικής γνώσης παρουσίασαν ικανοποιητική συγκλίνουσα εγκυρότητα, δηλαδή μέση ή υψηλή συσχέτιση με την κλίμακα στην οποία ανήκουν εκτός από την Q.1.9 (το κλάσμα ενός αριθμού), η οποία επέδειξε συσχέτιση 0.403. Πιο συγκεκριμένα οι συσχετίσεις έλαβαν τιμές μεγαλύτερες του 0.591 και υπερέβησαν τις αντίστοιχες συσχετίσεις της κλίμακας στην οποία δεν ανήκουν, γεγονός αυτό αναδεικνύει την ύπαρξη εγκυρότητας διάκρισης του ερωτηματολογίου. Αποφασίσαμε να εξαιρέσουμε την ερώτηση Q.1.9 για δύο λόγους. Πρώτον, κατά της διεξαγωγή της έρευνας διαπιστώθηκε ότι πολλοί μαθητές δυσκολεύτηκαν να καταλάβουν το ζητούμενο της συγκεκριμένης ερώτησης και δεύτερον η ερώτηση αυτή επέδειξε χαμηλή συσχέτιση με τη διαδικαστική, αν και ελαφρώς μεγαλύτερη, από τη συσχέτιση με την εννοιολογική κλίμακα (0.389).

Πέντε ερωτήσεις για τη διερεύνηση της εννοιολογικής γνώσης, οι Q.1.17, Q.1.18, Q.1.21, Q.1.28 και Q.1.32 επέδειξαν χαμηλή συσχέτιση με την κλίμακα στην οποία υποτίθεται ότι ανήκαν και υψηλή συσχέτιση με την κλίμακα στην οποία δεν ανήκαν. Να σημειώσουμε ότι τα δύο από τα τρία αυτά έργα αφορούσαν την αναπαράσταση στην αριθμογραμμή. Επιπλέον, οι ερωτήσεις Q.1.29, Q.1.31, Q.1.39 δεν παρουσίασαν στατιστικά σημαντική συσχέτιση με την κλίμακα στην οποία υποτίθεται ότι ανήκαν (Πίνακας 3-3). Οι δύο πρώτες ερωτήσεις αναφέρονταν στη σύγκριση με αξιοποίηση του συμπληρώματος και την εκτίμηση αθροίσματος δύο κλασμάτων και η τρίτη την πυκνότητα των ρητών αριθμών. Μία πιθανή εξήγηση για τα παραπάνω αποτελέσματα, είναι η διαφορετική δυσκολία αυτών των έργων, τα οποία αποδείχτηκαν ιδιαίτερα απαιτητικά για τους μαθητές της πιλοτικής έρευνας.

Πίνακας 3-3: Αρχικός έλεγχος εγκυρότητας εννοιολογικής κατασκευής

	Διαδικαστική γνώση		Εννοιολογική γνώση	
	Συσχέτιση	p-value	Συσχέτιση	p-value
Q.1.1	0.748	0.000	0.381	0.000
Q.1.2	0.800	0.000	0.356	0.000
Q.1.3	0.648	0.000	0.320	0.000
Q.1.4	0.770	0.000	0.436	0.000
Q.1.5	0.644	0.000	0.281	0.001
Q.1.6	0.621	0.000	0.483	0.000
Q.1.7	0.625	0.000	0.277	0.001
Q.1.8	0.591	0.000	0.365	0.000
Q.1.9	0.403	0.000	0.389	0.000
Q.1.10.A	0.777	0.000	0.272	0.001
Q.1.10.B	0.771	0.000	0.533	0.000
Q.1.11	0.712	0.000	0.324	0.000
Q.1.12	0.377	0.000	0.538	0.000
Q.1.13	0.166	0.050	0.350	0.000
Q.1.14	0.285	0.001	0.550	0.000
Q.1.15	0.296	0.000	0.427	0.000
Q.1.16	0.270	0.001	0.444	0.000
Q.1.17	0.277	0.001	0.146	0.086
Q.1.18	0.633	0.000	0.588	0.000
Q.1.21	0.289	0.001	0.238	0.005
Q.1.22	0.227	0.007	0.345	0.000
Q.1.25	0.101	0.236	0.239	0.005
Q.1.26	-0.029	0.735	0.193	0.023
Q.1.27	0.113	0.184	0.272	0.001
Q.1.28	0.418	0.000	0.208	0.014
Q.1.29	-0.148	0.082	0.151	0.075
Q.1.30	0.283	0.001	0.410	0.000
Q.1.31	-0.083	0.331	0.164	0.053
Q.1.32	0.549	0.000	0.537	0.000
Q.1.33	0.343	0.000	0.462	0.000
Q.1.34	0.051	0.549	0.306	0.000
Q.1.35	-0.009	0.912	0.286	0.001
Q.1.37	0.107	0.209	0.378	0.000

Q.1.38	0.269	0.001	0.485	0.000
Q.1.39	0.082	0.338	0.131	0.125

Με βάση τα παραπάνω, αποφασίσαμε να εξαιρέσουμε τις ερωτήσεις Q.1.9, Q.1.17, Q.1.18, Q.1.21, Q.1.28, Q.1.29, Q.1.31, Q.1.32, Q.1.39 από την τελική μορφή του ερωτηματολογίου.

Τα αποτελέσματα του τελικού ελέγχου εγκυρότητας με τις ερωτήσεις που διατηρήθηκαν στην τελική μορφή του ερωτηματολογίου φαίνονται παρακάτω (Πίνακας 3-4).

Πίνακας 3-4: Τελικός έλεγχος εγκυρότητας εννοιολογικής κατασκευής

	Διαδικαστική γνώση		Εννοιολογική γνώση	
Ερώτηση	Συσχέτιση	p-value	Συσχέτιση	p-value
Q.1.1	0.756	0.000	0.291	0.001
Q.1.2	0.806	0.000	0.268	0.001
Q.1.3	0.652	0.000	0.227	0.007
Q.1.4	0.776	0.000	0.389	0.000
Q.1.5	0.641	0.000	0.260	0.002
Q.1.6	0.617	0.000	0.363	0.000
Q.1.7	0.624	0.000	0.281	0.001
Q.1.8	0.584	0.000	0.312	0.000
Q.1.10.A	0.787	0.000	0.218	0.010
Q.1.10.B	0.774	0.000	0.463	0.000
Q.1.11	0.715	0.000	0.293	0.000
Q.1.12	0.373	0.000	0.584	0.000
Q.1.13	0.157	0.065	0.461	0.000
Q.1.14	0.267	0.001	0.605	0.000
Q.1.15	0.300	0.000	0.447	0.000
Q.1.16	0.268	0.001	0.491	0.000
Q.1.22	0.216	0.011	0.378	0.000
Q.1.25	0.092	0.282	0.227	0.007
Q.1.26	-0.030	0.725	0.257	0.002
Q.1.27	0.102	0.234	0.271	0.001
Q.1.30	0.284	0.001	0.491	0.000
Q.1.33	0.338	0.000	0.463	0.000
Q.1.34	0.043	0.614	0.323	0.000
Q.1.35	-0.001	0.992	0.348	0.000
Q.1.37	0.100	0.243	0.412	0.000
Q.1.38	0.264	0.002	0.528	0.000

3.1.4.2.4 *Ελεγχος αξιοπιστίας εσωτερικής συνάφειας*

Στη συνέχεια έγινε έλεγχος αξιοπιστίας εσωτερικής συνοχής ή συνάφειας (internal consistency α (Cronbach, 1951) για να εκτιμηθεί κατά πόσο όλα τα στοιχεία μιας αθροιστικής κλίμακας μετρούν την ίδια εννοιολογική κατασκευή.

Πίνακας 3-5: Έλεγχος αξιοπιστίας εσωτερικής συνάφειας

Ερώτηση	Συντελεστής Cronbach's Alpha	Συντελεστής Cronbach's Alpha χωρίς την αναγραφόμενη ερώτηση
Q.1.1		0.885
Q.1.2		0.881
Q.1.3		0.892
Q.1.4		0.883
Q.1.5		0.893
Q.1.6	0.897	0.894
Q.1.7		0.894
Q.1.8		0.896
Q.1.10.A		0.882
Q.1.10.B		0.883
Q.1.11		0.887
Q.1.12		0.618
Q.1.13		0.644
Q.1.14		0.617
Q.1.15		0.640
Q.1.16		0.636
Q.1.22		0.657
Q.1.25		0.659
Q.1.26	0.661	0.661
Q.1.27		0.667
Q.1.30		0.634
Q.1.33		0.638
Q.1.34		0.668
Q.1.35		0.657
Q.1.37		0.650
Q.1.38		0.628

Υπολογίστηκαν οι τιμές του συντελεστή άλφα του Cronbach για κάθε κλίμακα (item-scale correlations), όπως επίσης και η τιμή του συντελεστή άλφα του Cronbach που θα είχε η κλίμακα στην οποία ανήκει αν αφαιρούσαμε τη συγκεκριμένη ερώτηση από αυτή την κλίμακα (Cronbach's Alpha if item deleted), για κάθε ερώτηση ξεχωριστά.

Πίνακας 3-6: Έργα για την αξιολόγηση της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης

Έργα για την αξιολόγηση της διαδικαστικής γνώσης		
	Πιλοτικό ερωτ/λόγιο	Τελικό ερωτ/λόγιο
Πράξεις κλασμάτων (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση)	Q.1.1, Q.1.2, Q.1.3, Q.1.4	Q.F1.1, Q.F1.2, Q.F1.3, Q.F1.4
Μετατροπή σύνθετου κλάσματος σε απλό	Q.1.5	Q.F1.5
Μετατροπή μικρού σε κλάσμα	Q.1.6	Q.F1.6
Εφαρμογή του «χιαστί»	Q.1.7	Q.F1.7
Εύρεση ισοδύναμου κλάσματος με όρους μεταβλητές	Q.1.8	Q.F1.8
Διατύπωση κανόνα για τη σύγκριση ομώνυμων κλασμάτων	Q.1.10.A	Q.F1.9.A
Διατύπωση κανόνα για τη σύγκριση κλασμάτων με ίδιο αριθμητή	Q.1.10.B	Q.F1.9.B
Διατύπωση κανόνα για τη σύγκριση ετερώνυμων κλασμάτων	Q.1.11	Q.F1.10
Έργα για την αξιολόγηση της εννοιολογικής γνώσης		
Αναγνώριση του κλάσματος ως λόγου	Q.1.25	Q.F1.11
Αναγνώριση αναπαράστασης κλάσματος μικρότερου της μονάδας	Q.1.12	Q.F1.12
Αναγνώριση αναπαράστασης γνήσιου κλάσματος με κατάλληλη μεταφορά	Q.1.13	Q.F1.13
Αναπαράσταση γνήσιου κλάσματος σε επιφάνεια	Q.1.14	Q.F1.14
Αναγνώριση αναπαράστασης καταχρηστικού κλάσματος	Q.1.15	Q.F1.15
Σχηματική αναπαράσταση καταχρηστικού κλάσματος	Q.1.16	Q.F1.16
Επιλογή κατάλληλης πράξης για το μέρος-όλου	Q.1.22	Q.F1.17
Σύγκριση κλασμάτων δύο ποσών όταν τα ποσά είναι άγνωστα	Q.1.26	Q.F1.18
Εκτίμηση μεταβολής αρχικού ποσού με ποσοστιαία αύξηση και εν συνεχεία ίση μείωση	Q.1.27	Q.F1.19
Εκτίμηση αθροίσματος κλασμάτων	Q.1.30	Q.F1.20
Αναγνώριση κλάσματος στην αριθμογραμμή	Q.1.33	Q.F1.21
Σύγκριση κλασμάτων με αριθμό αναφοράς το 1/2	Q.1.34	Q.F1.22
Επιλογή κατάλληλης πράξης (πολ/μός, διαίρεση) ώστε να αληθεύει μία ανισοτική σχέση	Q.1.35	Q.F1.23
Έργο για την επίδραση της πράξης του πολλαπλασιασμού δεκαδικού με κλάσμα	Q.1.37	Q.F1.24
Έργο για την πυκνή διάταξη των ρητών	Q.1.38	Q.F1.25

Βρέθηκε ότι οι κλίμακες παρουσιάζουν ικανοποιητικό επίπεδο εσωτερικής συνάφειας, με την κλίμακα για τη διερεύνηση του βαθμού διαδικαστικής γνώσης να παρουσιάζει τα υψηλότερα επίπεδα εσωτερικής συνάφειας 0.897, ενώ η κλίμακα σχετικά με τον βαθμό εννοιολογικής γνώσης να παρουσιάζει βαθμό εσωτερικής συνάφειας 0.661 (Πίνακας 3-5).

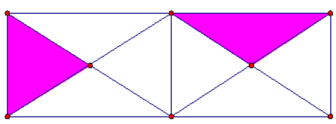
3.1.4.3 Τελική μορφή ερωτηματολογίου

Όπως προέκυψε από την αξιολόγηση ως προς τα κριτήρια εγκυρότητας και αξιοπιστίας, οι ερωτήσεις που συμπεριλήφθηκαν στην τελική μορφή του εργαλείου ήταν οι: Q.1.1, Q.1.2, Q.1.3, Q.1.4, Q.1.5, Q.1.6, Q.1.7, Q.1.8, Q.1.10.A, Q.1.10.B Q.1.11, Q.1.12, Q.1.13, Q.1.14, Q.1.15, Q.1.16, Q.1.22, Q.1.25, Q.1.26, Q.1.27, Q.1.30, Q.1.33, Q.1.34, Q.1.35, Q.1.37, Q.1.38. Στον παραπάνω πίνακα περιγράφονται συνοπτικά τα έργα (Πίνακας 3-6).

Επίσης, σημειώνουμε ότι βελτιώσαμε το σχήμα στην Q.13, με τη μετατροπή των ορθογωνίων παραλληλογράμμων σε τετράγωνα, έτσι ώστε να αποφευχθεί ο προβληματισμός των συμμετεχόντων σχετικά με το αν τα δύο διπλανά άνισα τρίγωνα στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι και ισεμβαδικά, που δεν αποτελούσε στόχο της ερώτησης (Εικόνα 3-3).

Εικόνα 3-3: Έργο για την αξιολόγηση της εννοιολογικής γνώσης στην αρχική μορφή του ερωτηματολογίου (Q.1.13)

➢ Ποιο μέρος του σχήματος είναι το γραμμοσκιασμένο;



α. Το γραμμοσκιασμένο μέρος αποτελεί το ¼ του σχήματος

β. Το γραμμοσκιασμένο μέρος αποτελείται από δύο τέταρτα, άρα αποτελεί το ½ του σχηματος.

γ. Δεν είναι δυνατόν να γνωρίζω ποιο μέρος του σχήματος είναι το γραμμοσκιασμένο

3.1.5 Συμπεράσματα

Ενώ υπάρχουν ερευνητικά εργαλεία που μετρούν τα δύο είδη γνώσης, εξ όσων γνωρίζουμε, δεν υπάρχουν εργαλεία που να έχουν αξιολογηθεί με τον τυπικό τρόπο που προτείνεται στην παρούσα μελέτη. Η κατασκευή ενός έγκυρου και αξιόπιστου εργαλείου για τη μέτρηση της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης στα κλάσματα δεν είναι μία εύκολη υπόθεση (Hallett et al. 2010; 2012). Ανέκυψαν μία σειρά από θεωρητικά και μεθοδολογικά ζητήματα που κληθήκαμε να αντιμετωπίσουμε και για τα οποία έπρεπε να πάρουμε κάποιες δύσκολες αποφάσεις. Η διαδικασία κατασκευής και αξιολόγησης των διαδικαστικών έργων αποδείχθηκε ότι ήταν μία σχετικα απλή διαδικασία. Αυτό είναι αποτέλεσμα της επιλογής μας να υιοθετήσουμε έναν απλό, πιθανόν υπερ-απλουστευμένο ορισμό της διαδικαστικής γνώσης (Star, 2005) που θεωρήσαμε ότι θα διευκόλυνε την «οριοθέτηση» της διαδικαστικής γνώσης. Αντίθετα, η κατασκευή έργων που θα αξιολογούν την εννοιολογική γνώση ήταν μία ιδιαίτερα απαιτητική διαδικασία. Από τη μία μεριά, είναι σημαντικό τα εννοιολογικά έργα να καλύπτουν όσο το δυνατόν περισσότερες πτυχές της εννοιολογικής γνώσης. Ωστόσο, η μεγάλη ποικιλία των εννοιολογικών έργων καθιστά δύσκολη την κατασκευή έργων με καλούς δείκτες εγκυρότητας και αξιοπιστίας κατά την αξιολόγηση της εννοιολογικής κλίμακας.

Ένας άλλος λόγος που καθίσταται περίπλοκη η κατασκευή εννοιολογικών έργων με αποδεδειγμένη εγκυρότητα και αξιοπιστία, είναι η πιθανότητα οι μαθητές να έχουν χρησιμοποιήσει διαδικαστικές στρατηγικές κατά την επίλυση εννοιολογικών έργων, παρόλο που η εννοιολογική γνώση αξιολογήθηκε με ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με σκοπό να αποφευχθεί αυτό το φαινόμενο. Η τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν διαδικαστικές στρατηγικές (π.χ. μετατροπή σε ομώνυμα) σε εννοιολογικά έργα (π.χ. σύγκριση κλασμάτων), ήταν παρούσα σε προηγούμενες έρευνες που η εννοιολογική γνώση εξεταζόταν με ερωτήσεις ανοιχτού τύπου (Bempeni & Vamvakoussi, 2015). Αυτή πιθανόν να είναι μία εξήγηση για την υψηλότερη από την αναμενόμενη συσχέτιση κάποιων εννοιολογικών έργων με τη διαδικαστική κλίμακα. Επιπλέον, σημειώνουμε ότι, τα εννοιολογικά έργα που απέμειναν στο τελικό ερωτηματολόγιο αφορούν περισσότερο σχηματικές από ό,τι άλλες αναπαραστάσεις όπως π.χ. αναπαράσταση στην αριθμογραμμή. Μία πιθανή ερμηνεία είναι ότι οι σχηματικές αναπαραστάσεις αποτελούν εκείνη την πτυχή της εννοιολογικής γνώσης που φαίνεται να είναι περισσότερο αποσυνδεδεμένη από τη διαδικαστική γνώση δεδομένου ότι το υποκείμενο δε βρίσκεται αντιμέτωπο με το δίλημμα της χρήσης διαδικαστικών στρατηγικών, σε σχέση με άλλα εννοιολογικά έργα όπως π.χ. η εκτίμηση αθροίσματος κλασμάτων.

Η παράσταση κλασμάτων στην αριθμογραμμή αποδείχθηκε μεταξύ των πιο προβληματικών εννοιολογικών έργων, πιθανόν γιατί οι μαθητές χρησιμοποίησαν διαδικαστικές στρατηγικές (π.χ. μετατροπή σε ομώνυμα, μετατροπή σε δεκαδικούς) για να αντιμετωπίσουν το έργο, με βάση ενδείξεις από προηγούμενη ποιοτική μας μελέτη (Bempeni & Vamvakoussi, 2015). Η εξαίρεση των προβληματικών έργων δημιουργεί ένα πιο ισχυρό εργαλείο, με το κόστος όμως ότι δεν αξιολογούνται σημαντικές πτυχές την εννοιολογικής γνώσης. Σαφώς, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα εννοιολογικά έργα του αξιολογημένου εργαλείου που παρουσιάζουμε καλύπτουν όλο το φάσμα της εννοιολογικής γνώσης, αλλά καλύπτουν σημαντικό μέρος της διδακτέας ύλης των μαθητών του Γυμνασίου.

3.2 Πιλοτική έρευνα ΙΙ

Στη δεύτερη φάση της πιλοτικής μας μελέτης επιχειρήσαμε να κατασκευάσουμε ένα καινούργιο εργαλείο που θα μετράει την προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών σε μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Όπως αναλύσαμε και στο θεωρητικό μέρος της διατριβής η προσέγγιση στη μάθηση είναι ένα περίπλοκο κατασκεύασμα το οποίο αλληλοκαλύπτεται με άλλα κατασκευάσματα. Το εργαλείο αυτό αξιοποιεί τους δείκτες τους οποίους έχουν προκύψει από προηγούμενες ποιοτικές μας μελέτες. Σκοπός μας, σε αυτή τη φάση, δεν ήταν ανάπτυξη ενός θεωρητικού μοντέλου για την προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση με συγκεκριμένους άξονες (π.χ. στρατηγικές μάθησης, αυτορρύθμιση) αλλά η κατασκευή ενός εργαλείου που θα ποσοτικοποιεί την προσέγγιση στη μάθηση με όρους επίδοσης. Πιο συγκεκριμένα, η υψηλότερη επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση θα αποτυπώνει τη συμβατότητα με τη βαθιά προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών.

3.2.1 Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες στην Πιλοτική έρευνα ΙΙ ήταν 120 μαθητές Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου από ένα σχολείο της Αττικής (74 μαθητές) και ένα σχολείο της Πελοποννήσου (46 μαθητές).

3.2.2 Υλικά

Για τη διερεύνηση της προσέγγισης στη μάθηση και μελέτη των μαθηματικών κατασκευάσαμε ένα νέο ερευνητικό εργαλείο που περιλάμβανε 28 δηλώσεις και 6 σενάρια στα οποία δύο υποθετικοί μαθητές εκφράζουν δύο διαφορετικές απόψεις, με τα οποία κλήθηκαν οι συμμετέχοντες να δηλώσουν τον βαθμό συμφωνίας ή διαφωνίας τους σε μία κλίμακα 1-4 (1=Διαφωνώ απόλυτα, 2=Διαφωνώ, 3=Συμφωνώ, 4=Συμφωνώ απόλυτα). Η ουδέτερη επιλογή "ούτε συμφωνώ-ούτε διαφωνώ" δεν ήταν διαθέσιμη, καθώς έχει αποδειχτεί προβληματική σε παρόμοιες έρευνες (π.χ. Entwistle et al., 2013). Για την κατασκευή του εργαλείου κατασκευάσαμε ή αξιοποιήσαμε ερωτήματα-δηλώσεις από τη σχετική βιβλιογραφία (π.χ. ASSIST; Entwistle et al., 2013; Biggs, 1987) και τις προηγούμενες μελέτες μας που αναφέρθηκαν παραπάνω (Bempeni et al., 2015, 2016) (Πίνακας 1-1). Παραδείγματα τέτοιων δηλώσεων ήταν τα εξής: «*Θεωρώ ότι δεν υπάρχει λόγος να ασχολούμαι με θέματα που ξέρω ότι δε θα πέσουν στις εξετάσεις.*», «*Αν δε θυμάμαι τον τρόπο με τον οποίο λύνεται μια συγκεκριμένη άσκηση, δεν έχει νόημα να προσπαθώ να τη λύσω.*», *«Μου αρέσει να ασχολούμαι σε ασκήσεις που παρόμοιες δεν έχω ξανασυναντήσει.»*, *«Συχνά αναρωτιέμαι σε τι θα μας φανούν χρήσιμα όλα αυτά τα μαθηματικά που διδασκόμαστε.»*. Επιπλέον, συμπεριλάβαμε μία ερώτηση αυτοαξιολόγησης της γνώσης των κλασμάτων: *«Νιώθω ότι την ύλη των κλασμάτων την έχω καταλάβει καλά»* (Q.2.3) η οποία αναλύθηκε ξεχωριστά στην Κύρια Έρευνα ΙΙ προκειμένου να διερευνηθεί η αυτεπίγνωση επίδοσης. Η αρχική μορφή του δεύτερου ερωτηματολογίου παρατίθεται στο Παράρτημα ΙΙ.

3.2.3 Διαδικασία

Οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους μισή ώρα για τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου. Το ερωτηματολόγιο συμπληρώθηκε κατά τη διάρκεια της ώρας των μαθηματικών του κανονικού προγράμματος με τον εκπαιδευτικό της τάξης να είναι παρών. Στη συνάντηση που είχε προηγηθεί, ζητήθηκε από τον εκπαιδευτικό της τάξης να καταγράψει τα τυχόν σχόλια των μαθητών για τις ερωτήσεις κατά τη διεξαγωγή της πιλοτικής μελέτης με σκοπό να διατεθούν στην ερευνήτρια προς αξιοποίηση για τη βελτίωση του ερωτηματολογίου.

Πίνακας 3-7: Κατηγοριοποίηση ερωτήσεων με βάση την προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών

Επιφανειακή προσέγγιση (Ε)	Βαθιά προσέγγιση (Β)
Q.2.1, Q.2.2, Q.2.4, Q.2.5, Q.2.8, Q.2.10, Q.2.11, Q.2.13 Q.2.14, Q.2.15, Q.2.16, Q.2.17, Q.2.20, Q.2.21, Q.2.22, Q.2.26, Q.2.27, Q.2.30, Q.2.32, Q.2.33	Q.2.6, Q.2.7, Q.2.9, Q.2.12, Q.2.18, Q.2.19, Q.2.23, Q.2.24, Q.2.25, Q.2.28, Q.2.29, Q.2.31, Q.2.34, Q.2.35

3.2.4 Ανάλυση δεδομένων

Τα δεδομένα αναλύθηκαν με τη γλώσσα προγραμματισμού R. Οι ερωτήσεις και τα υποθετικά σενάρια του ερωτηματολογίου κατηγοριοποιήθηκαν ως Β ή Ε με βάση την προσέγγιση στην οποία εμπίπτουν, βαθιά ή επιφανειακή αντίστοιχα. Η κλίμακα 1-4 των ερωτήσεων που εμπίπτουν στην επιφανειακή προσέγγιση αντεστράφη προκειμένου να προκύψουν ισοδύναμες ερωτήσεις με αυτές της βαθιάς προσέγγισης και να υπολογιστεί η συνολική επίδοση. Για παράδειγμα, η επίδοση 4 σε μία ερώτηση Ε ισοδυναμεί με επίδοση 1 σε μία ερώτηση Β. Ως προς τη συνολική επίδοση, αυτή προέκυψε ως μέση τιμή των επιδόσεων στις επιμέρους ερωτήσεις, με το 1 δηλώνει την επιφανειακή και το 4 τη βαθιά προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών. Η κατηγοριοποίηση αυτή φαίνεται στον παραπάνω πίνακα (Πίνακας 3-7).

3.2.5 Αποτελέσματα

3.2.5.1 Αξιολόγηση εργαλείου

3.2.5.1.1 *Έλεγχος εγκυρότητας περιεχομένου*

Για τον έλεγχο της εγκυρότητας του ερωτηματολογίου, πραγματοποιήθηκε έλεγχος εγκυρότητας περιεχομένου (content validity). Για τον σκοπό αυτό το ερωτηματολόγιο κατατέθηκε προς αξιολόγηση σε 4 ειδικούς του χώρου της Διδακτικής των Μαθηματικών για το αν το ερωτηματολόγιο είναι ένα καλό εργαλείο μέτρησης της προσέγγισης στη μάθηση και τη μελέτη των μαθηματικών.

Οι ειδικοί αξιολόγησαν κατά πόσο καθεμία από τις 34 ερωτήσεις σχετίζεται με τον σκοπό του ερωτηματολογίου. Για κάθε ερώτηση, υπολογίστηκε ο δείκτης εγκυρότητας περιεχομένου CVI. Οι ειδικοί θεώρησαν όλες τις ερωτήσεις πολύ σχετικές με το θέμα και ως εκ τούτου, ο δείκτης CVI βρέθηκε 1 (Polit, Beck, & Owen, 2007).

Πίνακας 3-8: Έλεγχος αξιοπιστίας εξωτερικής συνάφειας

Ερωτήσεις	Συντελεστής εξωτερικής συνάφειας	Διάστημα εμπιστοσύνης 95%	p-value
Q.2.1	0.499	(0.152 - 0.704)	0.016
Q.2.2	0.648	(0.403 -0.792)	0.001
Q.2.4	0.827	(0.707 - 0.898)	0.000
Q.2.5	0.781	(0.629 - 0.871)	0.000
Q.2.6	0.18	(-0.389 - 0.515)	**0.267**
Q.2.7	0.75	(0.578 -0.853)	0.000
Q.2.8	0.926	(0.875 - 0.956)	0.000
Q.2.9	0.122	(-0.486 - 0.481)	**0.341**
Q.2.10	0.624	(0.363 - 0.778)	0.0013
Q.2.11	0.444	(0.058 - 0.671)	0.034
Q.2.12	0.809	(0.677 - 0.887)	0.000
Q.2.13	0.674	(0.448 - 0.807)	0.000
Q.2.14	0.444	(0.058 - 0.671)	0.034
Q.2.15	0.633	(0.379 - 0.783)	0.001
Q.2.16	0.789	(0.644 - 0.876)	0.000
Q.2.17	0.57	(0.273 - 0.746)	0.004
Q.2.18	0.774	(0.617 - 0.866)	0.000
Q.2.19	0.586	(0.299 - 0.755)	0.003
Q.2.20	0.799	(0.659 - 0.881)	0.000
Q.2.21	0.81	(0.679 - 0.888)	0.000
Q.2.22	0.809	(0.676 - 0.887)	0.000
Q.2.23	0.646	(0.4 - 0.791)	0.001
Q.2.24	0.387	(-0.038 - 0.638)	**0.063**
Q.2.25	0.676	(0.452 - 0.809)	0.000
Q.2.26	0.747	(0.571 - 0.85)	0.000
Q.2.27	0.432	(0.039 - 0.665)	0.039
Q.2.28	0.718	(0.522 - 0.833)	0.000
Q.2.29	0.681	(0.46 - 0.812)	0.000
Q.2.30	0.314	(-0.162 - 0.595)	**0.119**
Q.2.31	0.451	(0.071 - 0.676)	0.031
Q.2.32	0.638	(0.387 - 0.786)	0.001
Q.2.33	0.094	(-0.534 - 0.465)	**0.379**
Q.2.34	0.672	(0.444 - 0.806)	0.000
Q.2.35	0.663	(0.429 - 0.801)	0.000

3.2.5.1.2 *Ελεγχος αξιοπιστίας εξωτερικής συνάφειας*

Προκειμένου να διαπιστωθεί η σταθερότητα των αποτελεσμάτων σε εξωτερικούς παράγοντες, διενεργήθηκε έλεγχος αξιοπιστίας εξωτερικής συνάφειας με την εκτίμηση της αξιοπιστίας ελέγχου-επανελέγχου (test-retest reliability) μέσω της διαδικασίας των επαναληπτικών μετρήσεων. Από το σύνολο των 120 ατόμων της πιλοτικής μελέτης, 40 άτομα κατέστη δυνατόν να απαντήσουν και πάλι στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου μετά την πάροδο 15 ημερών.

Για κάθε ερώτηση υπολογίστηκε ο ενδοταξικός συντελεστής (intraclass correlation-ICC) με σκοπό να διερευνηθεί η συνέπεια μεταξύ των δυο μετρήσεων. Τιμές ίσες με 0.50 αποτελούν το σημείο διάκρισης μεταξύ επαρκούς και ανεπαρκούς αξιοπιστίας.

Υπολογίστηκε ο ενδοταξικός κάθε ερώτησης. Οι δώδεκα από τις ερωτήσεις παρουσίασαν καλό συντελεστή αξιοπιστίας (ICC>0.718). Οι δέκα ερωτήσεις εμφάνισαν πολύ καλό συντελεστή αξιοπιστίας (0.6<ICC<0.7), οι επτά από τις ερωτήσεις μέτριο συντελεστή (0.444<ICC<0.6) με στατιστικά σημαντική συσχέτιση των δύο μετρήσεων, της αρχικής και της επαναληπτικής.

Οι πέντε ερωτήσεις που παρουσίασαν χαμηλότερες τιμές ή/και μη στατιστικά σημαντικές (p>0.05), ήταν οι Q.2,6, Q.2.9, Q.2.24, Q.2.30, Q.2.33 εξαιρέθηκαν από την τελική μορφή του ερωτηματολογίου (Πίνακας 3-8).

3.2.5.1.3 *Ελεγχος αξιοπιστίας εσωτερικής συνάφειας*

Για την εσωτερική συνάφεια (interval consistency) της κλίμακας υπολογίστηκε η τιμή του συντελεστή άλφα του Cronbach, η οποία προέκυψε ως μέση τιμή των επιμέρους τιμών του συντελεστή άλφα του Cronbach για κάθε ερώτηση (item-scale correlations) με σκοπό να δοθεί μία ένδειξη για τον βαθμό στον οποίο μπορεί η κλίμακα να σταθεί ως μέτρο μίας και μοναδικής διάστασης, εν προκειμένω της προσέγγισης στη μάθηση και μελέτη των μαθηματικών. Υπολογίστηκε επίσης και η τιμή του συντελεστή άλφα του Cronbach που θα είχε η κλίμακα στην οποία ανήκει αν αφαιρούσαμε τη συγκεκριμένη ερώτηση από αυτή την κλίμακα (Cronbach's Alpha if item deleted), για κάθε ερώτηση ξεχωριστά. Δύο από τις ερωτήσεις, οι Q.2.10 και Q.2.15, βρέθηκε ότι παρουσιάζουν αρνητική συσχέτιση με την κλίμακα και εξαιρέθηκαν. Στην τελική της μορφή η κλίμακα παρουσίασε ικανοποιητικό επίπεδο εσωτερικής συνάφειας (α=0.821) (Πίνακας 3-9).

Πίνακας 3-9: Έλεγχος αξιοπιστίας εσωτερικής συνάφειας

Ερωτήσεις	Cronbach's Alpha	Συντελεστής Cronbach's Alpha χωρίς την αναγραφόμενη ερώτηση
Q.2.1		0.824
Q.2.2		0.812
Q.2.4		0.809
Q.2.5		0.810
Q.2.7		0.822
Q.2.8		0.818
Q.2.11		0.811
Q.2.12		0.817
Q.2.13		0.810
Q.2.14		0.807
Q.2.16		0.808
Q.2.17		0.811
Q.2.18		0.818
Q.2.19	0.821	0.807
Q.2.20		0.811
Q.2.21		0.818
Q.2.22		0.808
Q.2.23		0.810
Q.2.25		0.818
Q.2.26		0.809
Q.2.27		0.813
Q.2.28		0.822
Q.2.29		0.812
Q.2.31		0.828
Q.2.32		0.811
Q.2.34		0.824
Q.2.35		0.829

3.2.5.1.4 *Τελική μορφή ερωτηματολογίου*

Όπως προέκυψε από την αξιολόγηση του εργαλείου, από τις 34 ερωτήσεις απέμειναν οι 27. Παρακάτω, φαίνεται η αντιστοιχία των ερωτήσεων του πιλοτικού και του τελικού ερωτηματολογίου (Πίνακας 3-10). Η τελική μορφή του αξιολογημένου εργαλείου βρίσκεται στο Παράρτημα ΙΙ.

Πίνακας 3-10: Ερωτήσεις για την προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών

Ερωτήσεις για την προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών	Πιλοτικό	Τελικό
Δεν έχει σημασία πώς έχουν προκύψει οι κανόνες και οι τύποι στα μαθηματικά, αρκεί να ξέρω να τους χρησιμοποιώ στις ασκήσεις.	Q.2.1	Q.F.2.1
Όλα αυτά που υπάρχουν στα βιβλία των μαθηματικών, εκτός από τους τύπους και τους κανόνες, δεν πιστεύω ότι μας χρειάζονται, αντίθετα μας μπερδεύουν.	Q.2.2	Q.F.2.2
Όταν μελετώ μαθηματικά, συνήθως δυσκολεύομαι να εντοπίσω τα σημεία που δεν καταλαβαίνω.	Q.2.4	Q.F.2.3
Δε μ’ αρέσει ιδιαίτερα η μελέτη των μαθηματικών αλλά διαβάζω γιατί θέλω να έχω καλούς βαθμούς.	Q.2.5	Q.F.2.4
Μου έχει συμβεί να «κολλήσω» με ένα μαθηματικό πρόβλημα γιατί με ενδιαφέρει να βρω πώς λύνεται.	Q.2.7	Q.F.2.5
Είναι λάθος των καθηγητών να μας «βάζουν» ασκήσεις που δεν έχουν λυθεί στην τάξη.	Q.2.8	Q.F.2.6
Όταν με δυσκολεύουν τα μαθηματικά, διαβάζω μόνο ό,τι μου φαίνεται εύκολο.	Q.2.11	Q.F.2.7
Μου αρέσει να μας αφήνει λίγο χρόνο η καθηγήτρια των μαθηματικών να σκεφτούμε μόνοι μας τις ασκήσεις, πριν τις λύσουμε στην τάξη.	Q.2.12	Q.F.2.8
Συχνά αναρωτιέμαι σε τι θα μας φανούν χρήσιμα όλα αυτά τα μαθηματικά που διδασκόμαστε.	Q.2.13	Q.F.2.9
Θεωρώ ότι δεν υπάρχει λόγος να ασχολούμαι με θέματα που ξέρω ότι δε θα πέσουν στις εξετάσεις.	Q.2.14	Q.F.10
Πιστεύω ότι στο σχολείο θα έπρεπε να μαθαίνουμε μόνο τα μαθηματικά που χρησιμεύουν για τις καθημερινές μας συναλλαγές.	Q.2.16	Q.F.11
Συνήθως «τρέχω και δε φτάνω» πριν από ένα διαγώνισμα μαθηματικών.	Q.2.17	Q.F.12
Όταν ολοκληρώνω μια άσκηση, συνήθως ξέρω αν την έχω λύσει σωστά.	Q.2.18	Q.F.13
Μου αρέσει να ασχολούμαι με ασκήσεις που παρόμοιες δεν έχω ξανασυναντήσει.	Q.2.19	Q.F.14
Όταν δεν καταλαβαίνω κάτι στα μαθηματικά από την αρχή, θεωρώ ότι δεν πρόκειται να το καταλάβω ποτέ.	Q.2.20	Q.F.15
Συχνά αγχώνομαι κατά τη διάρκεια της εξέτασης στα μαθηματικά και νιώθω ότι «κολλάει» το μυαλό μου.	Q.2.21	Q.F.16
Ο βασικός μου στόχος στα μαθηματικά είναι να πάρω τον βαθμό που θέλω.	Q.2.22	Q.F.17
Προτιμώ να ασχοληθώ με ένα δύσκολο πρόβλημα, από το να λύνω ασκήσεις που έχω ξανασυναντήσει.	Q.2.23	Q.F.18
Όταν διαβάζω μαθηματικά στο σπίτι, νιώθω ότι έχω καταλάβει το μάθημα από την τάξη.	Q.2.25	Q.F.19
Όταν διαβάζω μαθηματικά και δεν καταλαβαίνω, απογοητεύομαι και τα παρατάω.	Q.2.26	Q.F.20
Αν δε θυμάμαι τον τρόπο με τον οποίο λύνεται μια συγκεκριμένη άσκηση, δεν έχει νόημα να προσπαθώ να τη λύσω.	Q.2.27	Q.F.21
Μερικές φορές έχω διαφορετική άποψη από αυτή του καθηγητή για τον τρόπο που λύνεται μια άσκηση.	Q.2.28	Q.F.22
Συνηθίζω να λύνω παραπάνω ασκήσεις από αυτές που μας βάζει ο καθηγητής ως εργασία για το σπίτι.	Q.2.29	Q.F.23

Ο Γιώργος και ο Κώστας εκφράζουν διαφορετικές απόψεις: Γιώργος: Την ώρα των μαθηματικών αντιγράφω ό,τι βλέπω από τον πίνακα γιατί δεν μπορώ να ξεχωρίσω εκείνη την ώρα τι είναι σημαντικό. Το βασικό είναι να γνωρίζω τι ακριβώς έχουμε κάνει στην τάξη. Άλλωστε έχω όλο το χρόνο να τα διαβάσω πολλές φορές στο σπίτι με την ησυχία μου και να τα καταλάβω. Κώστας: Εγώ προσπαθώ να καταλάβω αυτά που εξηγεί η καθηγήτρια. Αν δεν προλάβω να τα καταγράψω όλα, δε με πειράζει ιδιαίτερα. Αν έχω καταλάβει πώς λύνεται άσκηση, μπορώ να τα συμπληρώσω μόνος μου στο σπίτι. Με ποιον από τους δύο μαθητές συμφωνείς; Διάβασε προσεκτικά τις παρακάτω επιλογές και βάλε σε κύκλο το αντίστοιχο γράμμα: Α. Συμφωνώ απολύτως με τον Γιώργο Β. Αν και συμφωνώ περισσότερο με τον Γιώργο, νομίζω ότι και ο Κώστας έχει κάποιο δίκιο Γ. Αν και συμφωνώ περισσότερο με τον Κώστα, νομίζω ότι και ο Γιώργος έχει κάποιο δίκιο Δ. Συμφωνώ απολύτως με τον Κώστα	Q.2.30	Q.F.24
Η Φωτεινή και η Αγγελική εκφράζουν διαφορετικές απόψεις: Φωτεινή: Όταν μελετώ μαθηματικά με βοηθάει να συνδέω αυτά που προσπαθώ να μάθω με πράγματα που γνωρίζω από άλλα κεφάλαια στα μαθηματικά, από άλλα μαθήματα, ή από την καθημερινή μου ζωή. Αγγελική: Δεν καταλαβαίνω γιατί είναι χρήσιμο αυτό. Εγώ πιστεύω ότι μπορείς να βρεις ό,τι χρειάζεσαι για το διάβασμά σου στην ίδια ενότητα, ή το πολύ-πολύ, στο ίδιο κεφάλαιο των μαθηματικών. Με ποια από τις δύο μαθήτριες συμφωνείς; Διάβασε προσεκτικά τις παρακάτω επιλογές και βάλε σε κύκλο το αντίστοιχο γράμμα: Α. Συμφωνώ απολύτως με τη Φωτεινή Β. Αν και συμφωνώ περισσότερο με τη Φωτεινή, νομίζω ότι και η Αγγελική έχει κάποιο δίκιο Γ. Αν και συμφωνώ περισσότερο με την Αγγελική, νομίζω ότι και η Φωτεινή έχει κάποιο δίκιο Δ. Συμφωνώ απολύτως με την Αγγελική	Q.2.32	Q.F.25
Ο Δημήτρης και ο Μιχάλης διαφωνούν όπως φαίνεται παρακάτω: Δημήτρης: Είμαι της τελευταίας στιγμής. Διαβάζω πάντα πολλές ώρες πριν το διαγώνισμα των μαθηματικών. Μια χαρά προλαβαίνω και τα θυμάμαι και καλύτερα. Μιχάλης: Συνήθως, δε χρειάζεται να διαβάσω πολύ πριν το διαγώνισμα των μαθηματικών - καμιά φορά μπορεί και καθόλου, γιατί δε σταματώ να μελετώ ανάμεσα στα διαγωνίσματα. Με ποιον από τους δύο μαθητές συμφωνείς; Διάβασε προσεκτικά τις παρακάτω επιλογές και βάλε σε κύκλο το αντίστοιχο γράμμα: Α. Συμφωνώ απολύτως με τον Δημήτρη Β. Αν και συμφωνώ περισσότερο με τον Δημήτρη νομίζω ότι και ο Μιχάλης έχει κάποιο δίκιο	Q.2.34	Q.F.26

Γ. Αν και συμφωνώ περισσότερο με τον Μιχάλη νομίζω ότι και ο Δημήτρης έχει κάποιο δίκιο Δ. Συμφωνώ απολύτως με τον Μιχάλη		
Η καθηγήτρια των μαθηματικών ζητάει από τους μαθητές να εξηγήσουν πώς βοηθούσαν έναν συμμαθητή τους με τη σύγκριση κλασμάτων. Δύο μαθητές διαφωνούν. Γιάννης: Το πρώτο που θα του έλεγα είναι να διαβάσει τους κανόνες της σύγκρισης για τα ομώνυμα και τα ετερώνυμα κλάσματα και να μάθει να τους εφαρμόζει. Αν θυμάται τους κανόνες, τότε μπορεί να συγκρίνει όποια κλάσματα του ζητήσουν. Χαράλαμπος: Εγώ, πάλι, το πρώτο που θα του έλεγα είναι να προσπαθήσει να καταλάβει τι είναι κλάσμα, τι νόημα έχει. Πιστεύω ότι αν το έχει καταλάβει καλά αυτό, στη συνέχεια θα βρει πολλούς τρόπους να συγκρίνει κλάσματα. Με ποιον από τους δύο μαθητές συμφωνείς; Διάβασε προσεκτικά τις παρακάτω επιλογές και βάλε σε κύκλο το αντίστοιχο γράμμα: Α. Συμφωνώ απολύτως με τον Γιάννη Β. Αν και συμφωνώ περισσότερο με τον Γιάννη νομίζω ότι και ο Χαράλαμπος έχει κάποιο δίκιο Γ. Αν και συμφωνώ περισσότερο με τον Χαράλαμπο νομίζω ότι και ο Γιάννης έχει κάποιο δίκιο Δ. Συμφωνώ απολύτως με τον Χαράλαμπο	Q.2.35	Q.F.27

4 ΚΥΡΙΑ ΕΡΕΥΝΑ

4.1 Κύρια έρευνα Ι

Στόχος της έρευνας αυτής είναι να ελεγχθεί η κεντρική υπόθεση αν υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο που μαθητές Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου συνδυάζουν τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση για τα κλάσματα.

Βάσει της υπόθεσης αυτής αναμένεται η ανάδειξη διαφορετικών προφίλ μαθητών, μεταξύ αυτών και μαθητών που βασίζονται περισσότερο στη διαδικαστική ή εννοιολογική τους γνώση.

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι:

- Παρόλο που η διαδικαστική γνώση βελτιώνεται με τη σχολική εμπειρία (με την τάξη) δε συμβαίνει το ίδιο με την εννοιολογική, η οποία παραμένει εξίσου ελλειμματική μέχρι τη Γ΄ Γυμνασίου.
- Οι διαφορές αυτές παραμένουν ακραίες μέχρι τις μεγαλύτερες τάξεις, δηλαδή ότι τα ακραία προφίλ είναι παρόντα μέχρι τη Γ΄ Γυμνασίου.
- Υπάρχει σχέση ανάμεσα στις ατομικές διαφορές και στα διαφορετικά σχολεία καθώς και τον τύπο του σχολείου (π.χ. Πειραματικό).

4.1.1 Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες στην πρώτη φάση της έρευνας ήταν 510 μαθητές Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου. Οι συμμετέχοντες στην έρευνα προέρχονταν από επτά δημόσια Γυμνάσια της Ελλάδας: ένα σχολείο της Κορινθίας, ένα σχολείο της Αργολίδας, ένα σχολείο των Νοτίων Προαστίων της Αττικής, ένα σχολείο των Βορείων Προαστίων της Αττικής, δύο σχολεία της Ανατολικής Αττικής και ενός Πρότυπου Πειραματικού σχολείου της Αττικής.

4.1.2 Υλικά

Για τη μέτρηση της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης χρησιμοποιήθηκε το ερευνητικό εργαλείο, στην τελική του μορφή, όπως αυτό προέκυψε κατόπιν αξιολόγησης και παρουσιάστηκε αναλυτικά στην ενότητα Πιλοτική Έρευνα Ι. Το εργαλείο αυτό περιλάμβανε 11 έργα που εξέταζαν διαδικαστική γνώση (π.χ. πράξεις με κλάσματα, μετατροπή σύνθετου κλάσματος σε απλό κ.α.) και 15 έργα που εξέταζαν εννοιολογική γνώση (π.χ. διάφορες αναπαραστάσεις κλασμάτων, σύγκριση και διάταξη κλασμάτων, εκτίμηση αποτελέσματος).

Το ερωτηματολόγιο δόθηκε στους μαθητές σε δύο εκδοχές (Α και Β), με τα έργα σε διαφορετική σειρά ή μορφή, προκειμένου να αποφευχθούν φαινόμενα αντιγραφής.

4.1.3 Διαδικασία

Οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους μία διδακτική ώρα (45 λεπτά) για τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου για τα κλάσματα. Με το δεδομένο ότι ο χρόνος αυτός ήταν οριακά επαρκής για τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου της πιλοτικής, το οποίο περιλάμβανε παραπάνω έργα, θεωρήσαμε ότι ο ίδιος χρόνος θα ήταν επαρκής για τη συμπλήρωση του τελικού ερωτηματολογίου.

Η έρευνα διενεργήθηκε στο πλαίσιο του μαθήματος των μαθηματικών του κανονικού προγράμματος. Το ερωτηματολόγιο ενσωματώθηκε στο μάθημα με τη μορφή φύλλου εργασίας, το οποίο κλήθηκαν οι μαθητές να συμπληρώσουν με σκοπό να εντοπιστούν τυχόν μαθησιακά κενά στην ενότητα των κλασμάτων. Κρίναμε ότι οι συμμετέχοντες έπρεπε να σημειώσουν το ονοματεπώνυμό τους στο φύλλο εργασίας προκειμένου να μην υποτιμήσουν τη σημαντικότητα της διαδικασίας, όπως έχει διαπιστωθεί κατά καιρούς σε προηγούμενες έρευνες. Κατέστη απόλυτα σαφές στους μαθητές ότι ο βαθμός στο ερωτηματολόγιο δεν επρόκειτο να προσμετρηθεί στη βαθμολογία του τετραμήνου, ωστόσο τα αποτελέσματα από τη συμπλήρωσή του θα διευκόλυναν τον εκπαιδευτικό της τάξης στο διδακτικό του έργο. Η/Ο καθηγητρια/ής μαθηματικών του κάθε τμήματος ήταν παρούσα/ών κατά τη διεξαγωγή της μελέτης.

Οι εμπλεκόμενοι εκπαιδευτικοί, δέχτηκαν με προθυμία να συνεισφέρουν στη συλλογή των δεδομένων. Είχε προηγηθεί συνάντηση της/του καθηγητριας/τή του κάθε τμήματος με την ερευνήτρια, κατά την οποία συνάντηση είχαν δοθεί αναλυτικές οδηγίες για την αυστηρή τήρηση της διαδικασίας. Όταν ολοκληρώθηκε η επεξεργασία των δεδομένων, τα αποτελέσματα για τα τμήματα ευθύνης τους ήταν στη διάθεσή τους προς αξιοποίηση με την παράκληση να μη γνωστοποιηθούν στους μαθητές.

4.1.4 Ανάλυση Δεδομένων

Όπως προέκυψε και από την αξιολόγηση του εργαλείου μέτρησης των δύο ειδών γνώσης για τα κλάσματα, φαίνεται ότι υπάρχει σημαντική συσχέτιση της διαδικαστικής και εννοιολογικής κλίμακας. Υιοθετώντας τη μεθοδολογική προσέγγιση των Hallett και συνεργατών (2010, 2012), εξετάσαμε τη σχετική διαφορά ανάμεσα στις δύο μεταβλητές με σκοπό να δημιουργήσουμε ένα μέτρο για το κάθε είδος γνώσης που θα είναι ανεξάρτητο από τις τιμές του άλλου. Για να εκτιμήσουμε αυτές τις σχετικές διαφορές για κάθε είδος γνώσης τρέχουμε ένα μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης (linear regression) χρησιμοποιώντας το ένα είδος γνώσης ως εξαρτημένη μεταβλητή και το άλλο ως επεξηγηματική μεταβλητή, ενώ εκτιμώνται τα κατάλοιπα (residuals) και τα υπολειπόμενα σκορ (residualized scores). Με τον όρο «κατάλοιπο» αναφερόμαστε στη διαφορά της προβλεπόμενης (predicted) από την παρατηρούμενη (observed) τιμή της διαδικαστικής ή εννοιολογικής γνώσης. Τα υπολειπόμενα σκορ (residualized scores) είναι σκορ, μέρος των οποίων δεν μπορεί να προβλεφθεί με βάση τη γραμμική παλινδρόμηση (linear regression), δηλαδή περιγράφουν το μέρος της διαδικαστικής (αντ. εννοιολογικής) κλίμακας που είναι ανεξάρτητο από αυτό της εννοιολογικής (αντ. διαδικαστικής) κλίμακας. Ένα θετικό (αντ. αρνητικό) κατάλοιπο π.χ. στο διαδικαστικό σκορ σημαίνει ότι η επίδοση του ατόμου στα αντίστοιχα έργα είναι υψηλότερη (αντ. χαμηλότερη) από την προβλεπόμενη επίδοση στα εννοιολογικά έργα. Τυποποιημένο κατάλοιπο (standardized residual) είναι το μέτρο της «έντασης» της διαφοράς της προβλεπόμενης από την παρατηρούμενη τιμή της διαδικαστικής ή εννοιολογικής γνώσης.

Τα τυποποιημένα σκορ κάθε τύπου γνώσης αποτυπώνουν μέρος της «ανεξήγητης», από τη γραμμική παλινδρόμηση, διασποράς (Cohen, Cohen, West, & Aiken, 2003). Ενδεικτική της ανεξήγητης διασποράς, είναι η περίπτωση να έχει κάποιος θετικό εννοιολογικό κατάλοιπο αλλά όχι απαραίτητα θετικό διαδικαστικό κατάλοιπο.

Στην παρούσα μελέτη, χρησιμοποιήσαμε ως μεταβλητές τα τυποποιημένα κατάλοιπα στους δύο τύπους έργων τα οποία προέκυψαν με γραμμική παλινδρόμηση του ενός σκορ με το άλλο (Bempeni, Poulopoulou, Tsiplaki, & Vamvakoussi, 2018). Επίσης, χρησιμοποιήσαμε και τα σκορ στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση που αποτελούν ποσοτικές μεταβλητές.

Από τον έλεγχο κανονικότητας, Shapiro-Wilk που διενεργήθηκε, διαπιστώθηκε ότι τα απόλυτα σκορ (Διαδικαστική: $W=0.830$, $p\text{-value}<0.0001$, Εννοιολογική: $W=0.935$, $p\text{-value}<0.0001$) καθώς και τα κατάλοιπα δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή (Καταλοιπα Διαδικαστικής: $W=0.915$, $p\text{-value}<0.0001$, Κατάλοιπα Εννοιολογικής: $W=0.981$, $p\text{-value} <0.0001$).

Τα δεδομένα της Κύριας Έρευνας Ι αναλύθηκαν με τη μέθοδο της ανάλυσης συστάδων (cluster analysis). Η ανάλυση συστάδων διευθέτησε το σύνολο των παρατηρήσεων σε συγκεκριμένες ομάδες οι οποίες διέθεταν κοινά χαρακτηριστικά, ευκρινώς διαφοροποιημένα από εκείνα των άλλων ομάδων (Aldenderfer & Blashfield, 1984). Ειδικότερα, χρησιμοποιήθηκε η ιεραρχική μέθοδος (hierarchical method) και η ευκλείδεια απόσταση (euclidean distance) για την κατάταξη των παρατηρήσεων σε ομοιογενείς ομάδες στις οποίες οι παρατηρήσεις: α) θα παρουσιάζουν ομοιότητα ως προς κάποιο χαρακτηριστικό και β) θα απέχουν μικρή απόσταση μεταξύ τους. Να σημειώσουμε ότι οι συστάδες στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκαν ως ποιοτική μεταβλητή σε επόμενες αναλύσεις.

4.1.4.1 Επιλογή βέλτιστου αριθμού συστάδων

Στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί διάφορα κριτήρια για την επιλογή του βέλτιστου αριθμού συστάδων στις οποίες θα κατανείμουμε τα δεδομένα μας κατά την ανάλυση συστάδων (π.χ. Calinski & Harabasz, 1974). Για να αποφανθούμε για τον βέλτιστο αριθμό των συστάδων στην παρούσα έρευνα, χρησιμοποιήσαμε τη γλώσσα προγραμματισμού R, η οποία παρέχει μία σειρά από 26 κριτήρια αξιολόγησης, κάθε ένα από τα οποία προτείνει μία λύση. Προέκυψαν λύσεις μεταξύ δύο και οκτώ συστάδων, με την πλειοψηφία των κριτηρίων να προτείνουν τη λύση των τεσσάρων συστάδων ως βέλτιστη (optimal solution) (Πίνακας 4-1).

Πίνακας 4-1: Αποτελέσματα για βέλτιστο αριθμό συστάδων ανάμεσα σε 26 κριτήρια

Cluster number	Krzanowski and Lai (1988)	CH (Calinski and Harabasz 1974)	Hartigan (1975)	Cubic Clustering Criterion (Sarle 1983)	Scott and Symons (1971)	Marriot (1971)	TrCovW (Milligan and Cooper 1985)	TraceW (Milligan and Cooper 1985)	Friedman (Friedman and Rubin 1967)	Rubin (Friedman and Rubin 1967)	Cindex (Hubert and Levin 1976)	DB (Davies and Bouldin 1979)	Silhouette (Rousseeuw 1987)
2	0.4748	440.3767	378.2411	-5.4023	522.5841	297365.8	71028.92	546.0637	1.7428	1.8669	0.2653	0.9451	0.4061
3	1.349	572.1259	261.9375	-1.3254	1400.691	119595.6	67340.07	313.0078	8.4679	3.2569	0.1815	0.9051	0.498
4	3.478	664.4728	152.5309	2.6062	1719.523	113786	24073.61	206.3821	12.1455	4.9396	0.2686	0.7175	0.5072
5	0.4294	685.3564	165.2368	3.4578	1915.684	121022.5	13259.2	158.5793	14.195	6.4286	0.2409	0.7555	0.4905
6	1.15	759.2258	34.3744	5.9383	2122.411	116195.2	5928.634	119.4839	16.692	8.532	0.1974	0.8113	0.4486
7	1.5058	680.2163	41.3471	3.3175	2175.419	142541.9	4896.69	111.855	17.4669	9.1139	0.192	0.9459	0.4045
8	1.1174	635.6099	90.9128	1.7223	2254.007	159589.5	3949.337	103.3588	19.036	9.8631	0.1815	1.0881	0.3791
Best number	4	6	6	6	3	3	4	3	3	6	3	4	4
Value	3.478	759.2258	130.8623	5.9383	878.1064	171960.6	43266.46	126.4302	6.725	-1.5215	0.1815	0.7175	0.5072

Cluster number	Duda (Duda and Hart 1973)	Pseudot2 (Duda and Hart 1973)	Beale (Beale 1969)	Ratkowsky (Ratkowsky and Lance 1978)	Ball (Ball and Hall 1965)	Ptbiserial (Milligan 1980, 1981)	Frey (Frey and Van Groenewoud 1972)	McClain (McClain and Rao 1975)	Dunn (Dunn 1974)	Hubert (Hubert and Arabie 1985)	Sdindex (Halkidi et al. 2000)	Dindex (Lebart et al. 2000)	SDbw (Halkidi and Vazirgiannis 2001)
2	0.5031	297.2768	0.9844	0.4817	273.0318	0.4627	0.0759	0.5494	0.0666	0.0011	3.1211	0.9147	1.1815
3	0.309	308.5401	2.2197	0.4801	104.3359	0.6213	0.179	0.7883	0.053	0.0014	2.4553	0.6721	0.6761
4	0.4146	227.3231	1.4032	0.4461	51.5955	0.6459	0.7188	0.8247	0.0899	0.0017	2.2916	0.5525	0.554
5	0.4925	211.2554	1.0255	0.4109	31.7159	0.6245	0.8983	0.9537	0.0831	0.0018	2.3662	0.4829	0.3096
6	0.6624	54.0132	0.5048	0.3836	19.914	0.5485	2.0469	1.3436	0.0831	0.002	2.997	0.4215	0.6577
7	0.6846	51.1301	0.4565	0.3566	15.9793	0.5159	1.1304	1.541	0.0831	0.002	4.6185	0.4026	0.5026
8	0.4788	79.4728	1.074	0.3351	12.9199	0.4797	0.0793	1.8042	0.0831	0.0021	4.7843	0.383	0.4134
Best number	6	6	2	2	3	4	1	2	4	0	4	0	5
Value	0.6624	54.0132	0.9844	0.4817	168.6959	0.6459	NA	0.5494	0.0899	0	2.2916	0	0.3096

4.1.5 Αποτελέσματα

4.1.5.1 Γενικά στατιστικά αποτελεσματα

Τα ποσοστά επιτυχίας σε κάθε ερώτηση δείχνουν ότι το έργο με τη μεγαλύτερη επιτυχία ήταν αυτό της διαίρεσης κλασμάτων (78%).

Πίνακας 4-2: Ποσοστό επιτυχίας για τις τελικές ερωτήσεις του 2^{ου} ερωτηματολογίου

Ερωτήσεις τελικές	Είδος έργου	Ποσοστό επιτυχίας %
Q.F.1.1	Πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων	72.5
Q.F.1.2	Αφαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων	76.7
Q.F.1.3	Πολλαπλασιασμός κλασμάτων	74.3
Q.F.1.4	Διαίρεση κλασμάτων	78
Q.F.1.5	Μετατροπή σύνθετου κλάσματος σε απλό	70.2
Q.F.1.6	Μετατροπή μικρού σε κλάσμα	56.5
Q.F.1.7	Εφαρμογή του «χιαστί»	61.2
Q.F.1.8	Εύρεση ισοδύναμου κλάσματος με όρους μεταβλητές	72.4
Q.F.1.9.A	Διατύπωση κανόνα για τη σύγκριση ομώνυμων κλασμάτων	69
Q.F.1.9.B	Διατύπωση κανόνα για τη σύγκριση κλασμάτων με ίδιο αριθμητή	64.9
Q.F.1.10	Διατύπωση κανόνα για τη σύγκριση ετερώνυμων κλασμάτων	53.1
Q.F.1.11	Αναγνώριση του κλάσματος ως λόγου	15.3
Q.F.1.12	Αναγνώριση αναπαράστασης κλάσματος μικρότερου της μονάδας	39.6
Q.F.1.13	Αναγνώριση αναπαράστασης γνήσιου κλάσματος με κατάλληλη μεταφορά	75.1
Q.F.1.14	Αναπαράσταση γνήσιου κλάσματος σε επιφάνεια	29.8
Q.F.1.15	Αναγνώριση αναπαράστασης καταχρηστικού κλάσματος	18.8
Q.F.1.16	Σχηματική αναπαράσταση καταχρηστικού κλάσματος	48
Q.F.1.17	Επιλογή κατάλληλης πράξης για το μέρος-όλου	50
Q.F.1.18	Σύγκριση κλασμάτων δύο ποσών όταν τα ποσά είναι άγνωστα	25.7
Q.F.1.19	Εκτίμηση μεταβολής αρχικού ποσού με ποσοστιαία αύξηση και εν συνεχεία ίση μείωση	23.9
Q.F.1.20	Εκτίμηση αθροίσματος κλασμάτων	44.9
Q.F.1.21	Αναγνώριση κλάσματος στην αριθμογραμμή	42.5
Q.F.1.22	Σύγκριση κλασμάτων με αριθμό αναφοράς το 1/2	42.9
Q.F.1.23	Επιλογή κατάλληλης πράξης (πολ/μός, διαίρεση) ώστε να αληθεύει μία ανισοτική σχέση	47.1
Q.F.1.24	Έργο για την επίδραση της πράξης του πολλαπλασιασμού δεκαδικού με κλάσμα	42.9
Q.F.1.25	Έργο για την πυκνή διάταξη των ρητών	58.2

Αντίθετα, το έργο με τη μεγαλύτερη αποτυχία ήταν αυτό του κλάσματος ως λόγου (15,3%) (όπως και στην πιλοτική μελέτη). Το εννοιολογικό έργο με τη μεγαλύτερη επιτυχία ήταν η αναγνώριση αναπαράστασης σε επιφάνεια. Παρακάτω, παρουσιάζονται τα μέτρα που μας δίνουν την θέση του «κέντρου» (μέτρα θέσης) των παρατηρήσεων, δηλαδή των τιμών της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης, και τη διασπορά των παρατηρήσεων γύρω από το «κέντρο» τους (μέτρα διασποράς) (Πίνακας 4-3). Παρατηρούμε ότι η επίδοση στην εννοιολογική γνώση σε όλο το δείγμα των 510 ατόμων ήταν σημαντικά χαμηλότερη από ό,τι στη διαδικαστική (Wilcoxon rank sum test: $W = 62987$, $p\text{-value}<0.0001$). Αυτό είναι ένα αναμενόμενο αποτέλεσμα δεδομένου του ελλείμματος της εννοιολογικής γνώσης, ζήτημα που έχουν αναδείξει κατά καιρούς πολλοί ερευνητές σε μελέτες τους (π.χ. Moss & Case, 1999).

Πίνακας 4-3: Μέτρα θέσης και διασποράς για την επίδοση στα δύο είδη γνώσης

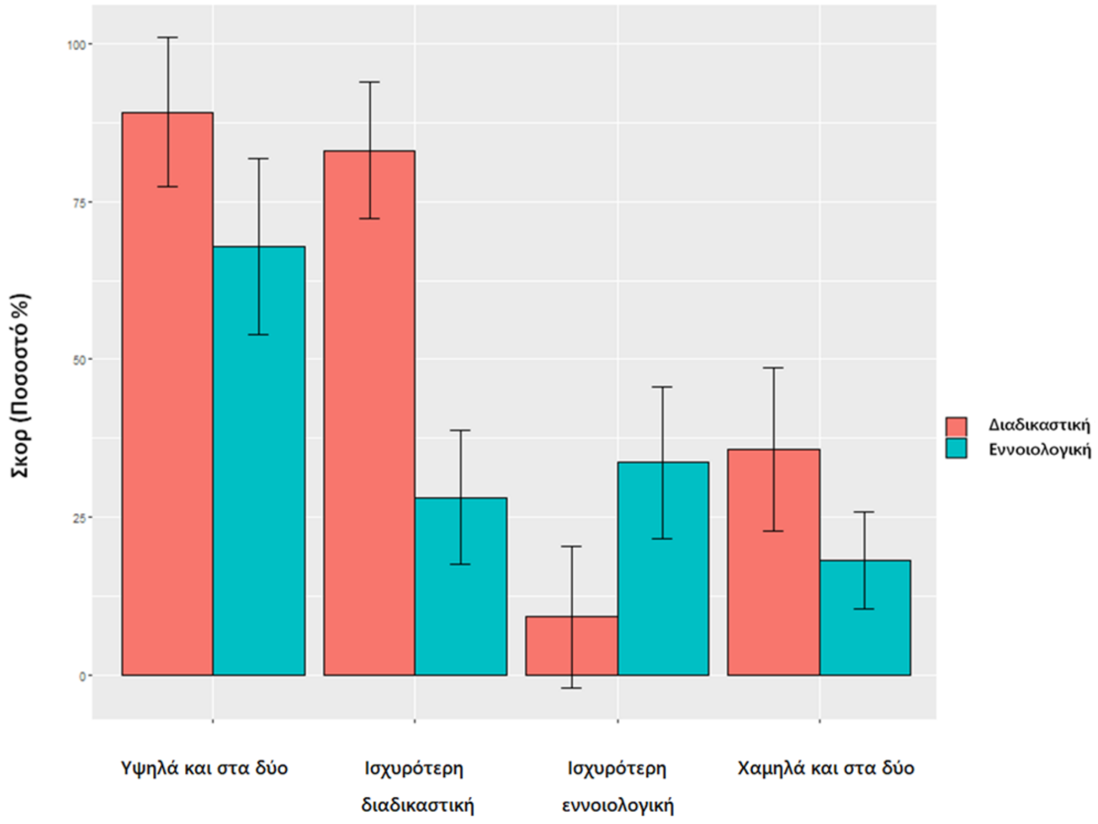
	Μέση τιμή (Mean)	Τυπική απόκλιση (Standard Deviation)	Διάμεσος (Median)	Μέγιστη τιμή (Xmin)	Ελάχιστη τιμή (Xmax)
Διαδικαστική γνώση	68.13	31.82	82	100	0
Εννοιολογική γνώση	40.34	22.58	33	100	0

4.1.5.2 Ατομικές διαφορές στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση – 1ο Ερευνητικό Ερώτημα

Η ανάλυση συστάδων ανέδειξε τέσσερα διαφορετικά συστάδες (προφίλ) για τις οποίες παρουσιάζονται η μέση επίδοση στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση ανά συστάδα (Πίνακας 4-4). Πιο αναλυτικά, η πρώτη συστάδα *«Υψηλά και στα δύο»* (N=163, 32%) χαρακτηρίζεται από θετικό διαδικαστικό και εννοιολογικό κατάλοιπο (Σχήμα 4-2) και δηλαδή εμφάνισε καλύτερη από την προβλεπόμενη επίδοση και στους δύο τύπους έργων. Η δεύτερη συστάδα *«Ισχυρότερη διαδικαστική»* (N=207, 40.6%) αποτελείται από μαθητές των οποίων η επίδοση στα διαδικαστικά έργα ήταν υψηλότερη, από ό,τι αναμενόταν με βάση την επίδοση στα εννοιολογικά.

Το αντίθετο συμβαίνει στην τρίτη συστάδα *(«Ισχυρότερη εννοιολογική»*, N=75, 14.7%) η οποία αποτελείται από μαθητές που εμφάνισαν υψηλότερη επίδοση στα εννοιολογικά έργα, από ό,τι αναμενόταν με βάση την επίδοση στα διαδικαστικά δηλαδή χαρακτηρίζεται από θετικό εννοιολογικό και αρνητικό διαδικαστικό κατάλοιπο. Τέλος, η τέταρτη *«Χαμηλά και στα δύο»* (N=65, 12.7%) που χαρακτηρίζεται από αρνητικό διαδικαστικό και εννοιολογικό κατάλοιπο, εμφάνισε χαμηλή επίδοση και στα δύο είδη γνώσης, με βάση την επίδοση στο άλλο είδος γνώσης.

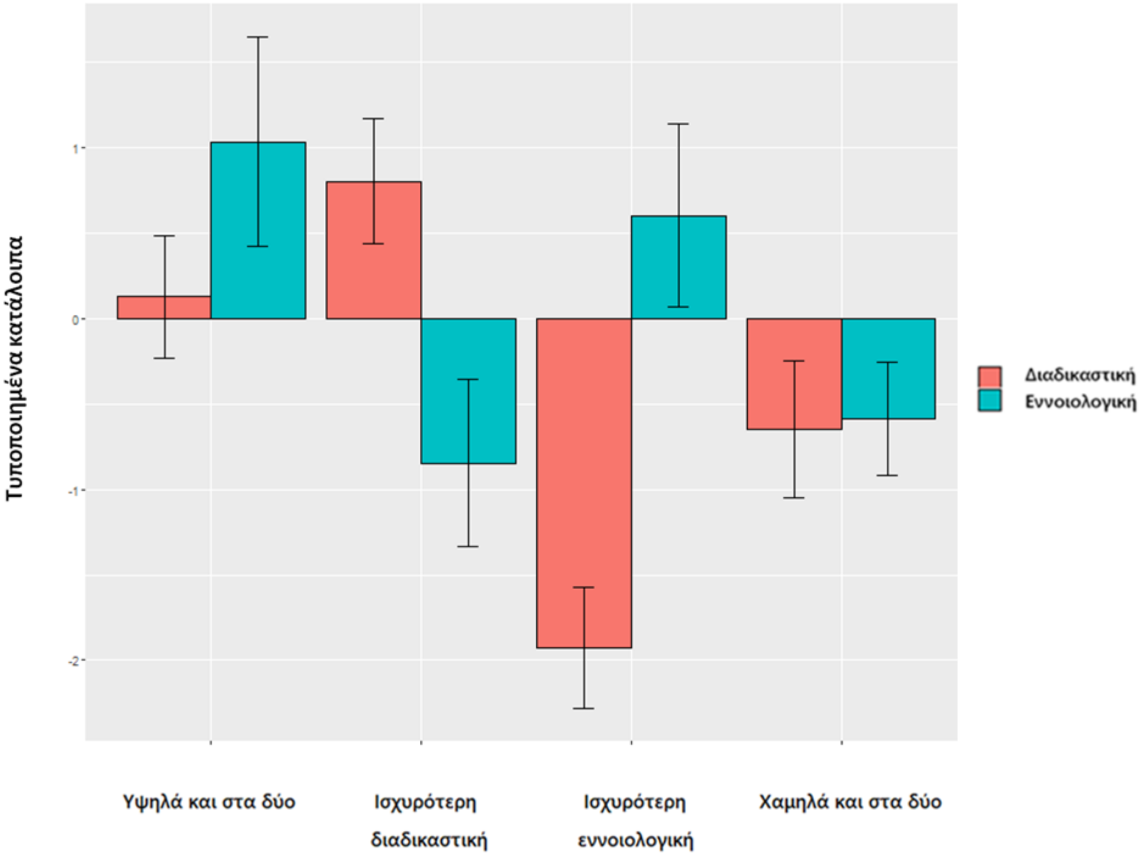
Σχήμα 4-1: Μέση επίδοση στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση ανά συστάδα



Αυτό που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι, η μέση επίδοση στα εννοιολογικά έργα της δεύτερης συστάδας *«Ισχυρότερη διαδικαστική»* (28,08%) είναι χαμηλότερη από αυτή της συστάδας *«Ισχυρότερη εννοιολογική»* (33,64%) παρόλο που: α) η συνολική επίδοση (και στα δύο είδη γνώσης) της συστάδας *«Ισχυρότερη διαδικαστική»* (51.27%) είναι πολύ υψηλότερη από αυτή της συστάδας *«Ισχυρότερη εννοιολογική»* (23.24%) και, β) η επίδοση της συστάδας *«Ισχυρότερη διαδικαστική»* στη διαδικαστική γνώση είναι συγκρίσιμη με αυτή της συστάδας *«Υψηλά και στα δύο»* (Πίνακας 4-2, Σχήμα 4-1, Σχήμα 4-2).

Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώνουν την πρώτη μας υπόθεση ότι υπάρχουν δι-ατομικές διαφορές στον τρόπο που οι μαθητές συνδυάζουν τη γνώση τους για τα κλάσματα.

Σχήμα 4-2: Τυποποιημένα κατάλοιπα ανά συστάδα



Πίνακας 4-4: Μέτρα θέσης και διασποράς[3] για τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση και τα αντίστοιχα τυποποιημένα κατάλοιπα, ανά συστάδα

	Συστάδα												p-value
	1			2			3			4			
	«Υψηλά και στα δύο»			*«Ισχυρότερη διαδικαστική»*			*«Ισχυρότερη εννοιολογική»*			*«Χαμηλά και στα δύο»*			
	ΜΤ	ΤΑ	Δ	ΜΤ	ΤΑ	Δ	ΜΤ	ΤΑ	Δ	ΜΤ	ΤΑ	Δ	
Διαδικαστικό κατάλοιπο	0.13	0.36	0.21	0.80	0.37	0.79	-1.93	0.35	-1.95	-0.65	0.40	-0.52	<.0001
Εννοιολογικό κατάλοιπο	1.03	0.61	0.96	-0.85	0.49	-0.87	0.60	0.54	0.42	-0.59	0.33	-0.56	<.0001
Διαδικαστική επίδοση	89.17	11.78	91	83.13	10.91	82	9.12	11.22	0	35.69	12.93	36	<.0001
Εννοιολογική επίδοση	67.85	13.98	67	28.08	10.67	27	33.64	12.06	33	18.14	7.63	20	<.0001

[3] *ΜΤ*: Μέση τιμή, *ΤΑ*: Τυπική Απόκλιση, *Δ*: Διάμεσος

4.1.5.3 Τάξη φοίτησης, (ακραίες) δι-ατομικές διαφορές και συμμετρική ανάπτυξη δύο ειδών γνώσης – 2ο Ερευνητικό Ερώτημα

Όσον αφορά τη συνολική επίδοση ανά τάξη, παρατηρούμε ότι η επίδοση της Γ΄ Γυμνασίου είναι καλύτερη από αυτή της Α΄ και για τα δύο είδη γνώσης, με την εννοιολογική γνώση να παρουσιάζει μεγαλύτερες τιμές (Πίνακας 4-5).

Πίνακας 4-5: Ποσοστό επιτυχίας στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση ανά τάξη

	Α΄ Γυμνασίου			Γ΄ Γυμνασίου		
	ΜΤ	ΤΑ	Δ	ΜΤ	ΤΑ	Δ
Διαδικαστική γνώση	66.94	30.53	73	69.52	33.28	82
Εννοιολογική γνώση	32.77	17.62	27	49.20	24.47	47
Συνολική Επίδοση	47.16	19.08	50	57.78	24.86	62

Πιο συγκεκριμένα, οι μέσες επιδόσεις στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση της Γ΄ είναι 69.52% και 49.20% αντίστοιχα, ενώ για την Α΄ Γυμνασίου είναι 66.9% και 32.8% αντίστοιχα. Ο στατιστικός έλεγχος έδειξε ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στις συνολικές επιδόσεις για τις δύο τάξεις (Wilcoxon rank sum test: W=23571, p-value < 0.0001) με τη Γ΄ Γυμνασίου να έχει καλύτερη επίδοση.

Πίνακας 4-6: Επίδοση στα δύο είδη γνώσης της κάθε ηλικιακής ομάδας ανά συστάδα

		Α΄ Γυμνασίου						Γ΄ Γυμνασίου					
		Διαδικαστική			*Εννοιολογική*			*Διαδικαστική*			*Εννοιολογική*		
Συστάδα		ΜΤ	ΤΑ	Δ	ΜΤ	ΤΑ	Δ	ΜΤ	ΤΑ	Δ	ΜΤ	ΤΑ	Δ
1	*«Υψηλά και στα δύο»*	86.94	12.12	91	62.27	10.47	60	90.19	11.53	91	70.38	14.66	73
2	*«Ισχυρότερη διαδικαστική»*	82.99	11.29	82	27.26	10.53	27	83.48	10.02	82	30.05	10.84	33
3	*«Ισχυρότερη εννοιολογική»*	8.49	11.74	0	30.34	9.69	27	9.68	10.86	9	36.53	13.26	33
4	*«Χαμηλά και στα δύο»*	36.33	12.82	36	18.44	7.71	20	34.45	13.36	36	17.55	7.61	20

Παρόλο που και τα δύο είδη γνώσης βελτιώνονται όσο μεγαλώνει η τάξη, με τη διαδικαστική γνώση να βελτιώνεται ελαφρά και την εννοιολογική σημαντικά, η εννοιολογική γνώση παραμένει σημαντικά ελλειμματική έως τη Γ΄ Γυμνασίου (Ποσοστό επιτυχίας: 49.20%). Οι μέσες και διάμεσες επιδόσεις των διαδικαστικών και εννοιολογικών επιδόσεων ανά συστάδα για την κάθε τάξη ξεχωριστά παρουσιάζονται παραπάνω (Πίνακας 4-6).

Επιπλέον, στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ότι η κατανομή των μαθητών των δύο τάξεων στις συστάδες της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης είναι διαφορετική (Πίνακας 4-7). Η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώθηκε από τον στατιστικό έλεγχο ανεξαρτησίας χ^2, ο οποίος έδειξε ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική σχέση ανάμεσα στην τάξη φοίτησης και τη συστάδα κατάταξης ως προς τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση στην οποία ανήκουν οι μαθητές (χ^2= 62.094, df=3, p<0.001).

Πίνακας 4-7: Κατανομή μαθητών ανά συστάδα

Τάξη	Συστάδα 1 *«Υψηλά και στα δύο»*	Συστάδα 2 *«Ισχυρότερη διαδικαστική»*	Συστάδα 3 *«Ισχυρότερη εννοιολογική»*	Συστάδα 4 *«Χαμηλά και στα δύο»*
Α΄ Γυμνασίου	51	146	35	43
Γ΄ Γυμνασίου	112	61	40	22
Σύνολο	163	207	75	65
	510			

Επειδή ο στατιστικός έλεγχος ανεξαρτησίας δεν αρκεί για να εξαχθούν συμπεράσματα υπολογίστηκαν οι τιμές των Pearson residuals. Παρατηρούμε ότι υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ της Γ΄ Γυμνασίου και της συστάδας *«Υψηλά και στα δύο»* καθώς και μεταξύ της Α΄ Γυμνασίου και της συστάδας *«Ισχυρότερη διαδικαστική»*. Αρνητική συσχέτιση παρατηρείται μεταξύ της Α΄ Γυμνασίου και της συστάδας *«Υψηλά και στα δύο»* και της Γ΄ Γυμνασίου με τη συστάδα *«Ισχυρότερη διαδικαστική»* (Πίνακας 4-8).

Πίνακας 4-8: Pearson residuals για τη συσχέτιση ανάμεσα στην τάξη φοίτησης και τις συστάδες

	Συστάδα 1 *«Υψηλά και στα δύο»*	Συστάδα 2 *«Ισχυρότερη διαδικαστική»*	Συστάδα 3 *«Ισχυρότερη εννοιολογική»*	Συστάδα 4 *«Χαμηλά και στα δύο»*
Α΄ Γυμνασίου	-3.935	3.254	-0.856	1.343
Γ΄ Γυμνασίου	4.257	-3.52	0.926	-1.453

Επιπλέον, παρατηρούμε τη συνεισφορά σε ποσοστό (%) κάθε κελιού στη συνολική τιμή του Chi-square score (Πίνακας 4-9). Από τον πίνακα αυτόν διαπιστώνουμε ότι τα κελιά που συνεισφέρουν περισσότερο στην τιμή του Chi-square score είναι η Γ΄ Γυμνασίου/*«Υψηλά και στα δύο»* (29.2%), Α΄ Γυμνασίου/*«Υψηλά και στα δύο»* (24.9%), Γ΄ Γυμνασίου/*«Ισχυρότερη διαδικαστική»* (20%) και Α΄ Γυμνασίου/*«Ισχυρότερη διαδικαστική»* (17.1%). Τα παραπάνω κελιά συνεισφέρουν σε ποσοστό 91% στη συνολική τιμή του Chi-square score συνεπώς αντιπροσωπεύουν το μεγαλύτερο μέρος της διαφοράς μεταξύ αναμενόμενων και παρατηρούμενων τιμών.

Πίνακας 4-9: Η συνεισφορά σε ποσοστό (%) κάθε κελιού στη συνολική τιμή του Chi-square score

	Συστάδα 1 *«Υψηλά και στα δύο»*	Συστάδα 2 *«Ισχυρότερη διαδικαστική»*	Συστάδα 3 *«Ισχυρότερη εννοιολογική»*	Συστάδα 4 *«Χαμηλά και στα δύο»*
Α΄ Γυμνασίου	24.9	17.1	1.2	2.9
Γ΄ Γυμνασίου	29.2	20	1.4	3.4

Παρατηρούμε ότι στη συστάδα *«Υψηλά και στα δύο»*, το ποσοστό των μαθητών της Γ΄ (Ν=112, 21.96%) είναι πολύ μεγαλύτερο από αυτό της Α΄ Γυμνασίου (Ν=51, 10%). Αντίθετα, το μεγαλύτερο ποσοστό της συστάδας *«Χαμηλά και στα δύο»* ανήκει στην Α΄ Γυμνασίου (Ν=43, 8.43%). Επιπλέον, στη συστάδα *«Ισχυρότερη διαδικαστική»*, είναι πολύ πιο έντονη η παρουσία της Α΄ Γυμνασίου (Ν=146, 28.63%). Τέλος, η συστάδα *«Ισχυρότερη εννοιολογική»*, παρουσιάζει παρόμοια κατανομή για τις δύο τάξεις, με το ποσοστό των μαθητών της Γ΄ να είναι ελαφρώς υψηλότερο (Ν=40, 7.84%) από αυτό της Α΄ (Ν=35, 6.86%).

Να σημειώσουμε ότι οι ατομικές διαφορές αμβλύνονται με την ηλικία, αφού παρατηρούμε το ποσοστό που ανήκει στα ακραία προφίλ (*«Ισχυρότερη διαδικαστική»* και *«Ισχυρότερη εννοιολογική»*) είναι μικρότερο για τη Γ΄ Γυμνασίου από ό,τι για την Α΄ Γυμνασίου.

Πίνακας 4-10: Έλεγχος προγνωστικών παραγόντων για την τάξη φοίτησης

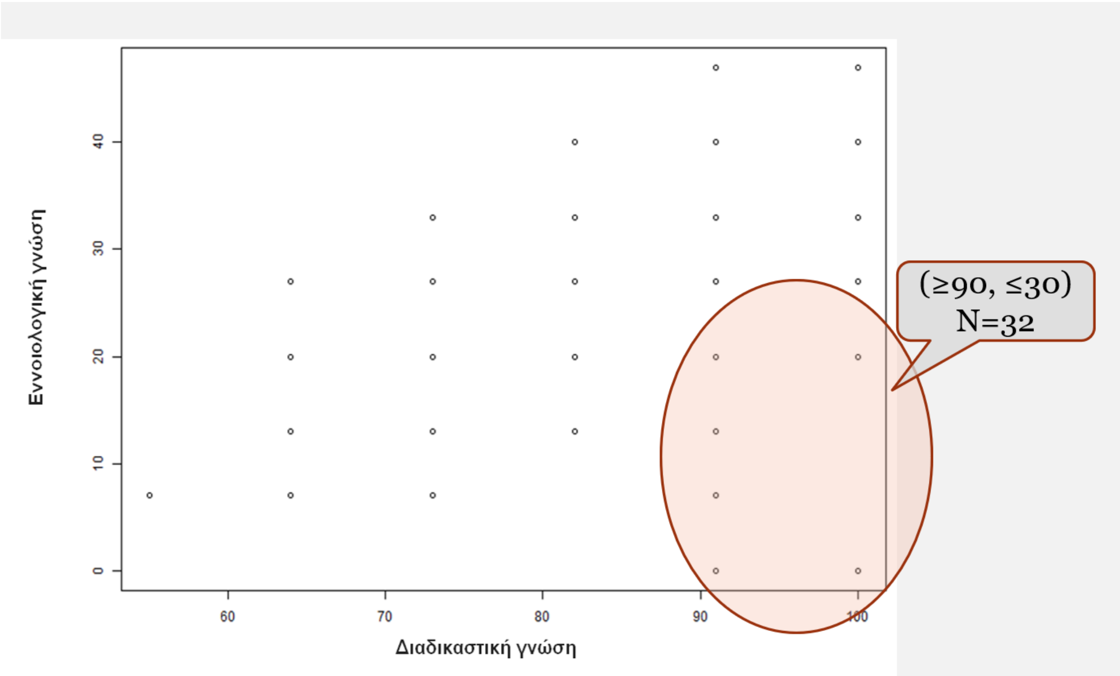
Προγνωστικός παράγοντας	*«Ισχυρότερη διαδικαστική»* vs	B	OR= exp(B)	p-value
Γ΄ Γυμνασίου	*«Υψηλά και στα δύο»*	1.95	7.00	0.000
	«Ισχυρότερη εννοιολογική»	0.35	1.42	0.304
	«Χαμηλά και στα δυο»	-0.18	0.84	0.607

Ο έλεγχος προγνωστικών παραγόντων έδειξε ότι η τάξη φοίτησης προβλέπει το προφίλ στον οποίο ανήκουν οι μαθητές και συγκεκριμένα επιβεβαίωσε περαιτέρω ότι οι δι-ατομικές διαφορές αμβλύνονται. Χρησιμοποιώντας την ομάδα *«Χαμηλά και στα δύο»* ως επίπεδο βάσης (base level) παρατηρούμε ότι όταν ένας μαθητής φοιτά στη Γ΄ Γυμνασίου αυξάνεται ο λογάριθμος της πιθανότητάς του κατά 1.95 δηλαδή έχει 7.00 φορές μεγαλύτερη πιθανότητα να ανήκει στην ομάδα *«Υψηλά και στα δύο»* σε σχέση με το να ανήκει στην ομάδα *«Ισχυρότερη διαδικαστική»* και 1.42 μεγαλύτερη πιθανότητα να ανήκει στην ομάδα *«Ισχυρότερη εννοιολογική»* σε σχέση με το να ανήκει στην ομάδα *«Ισχυρότερη διαδικαστική»* (Πίνακας 4-10).

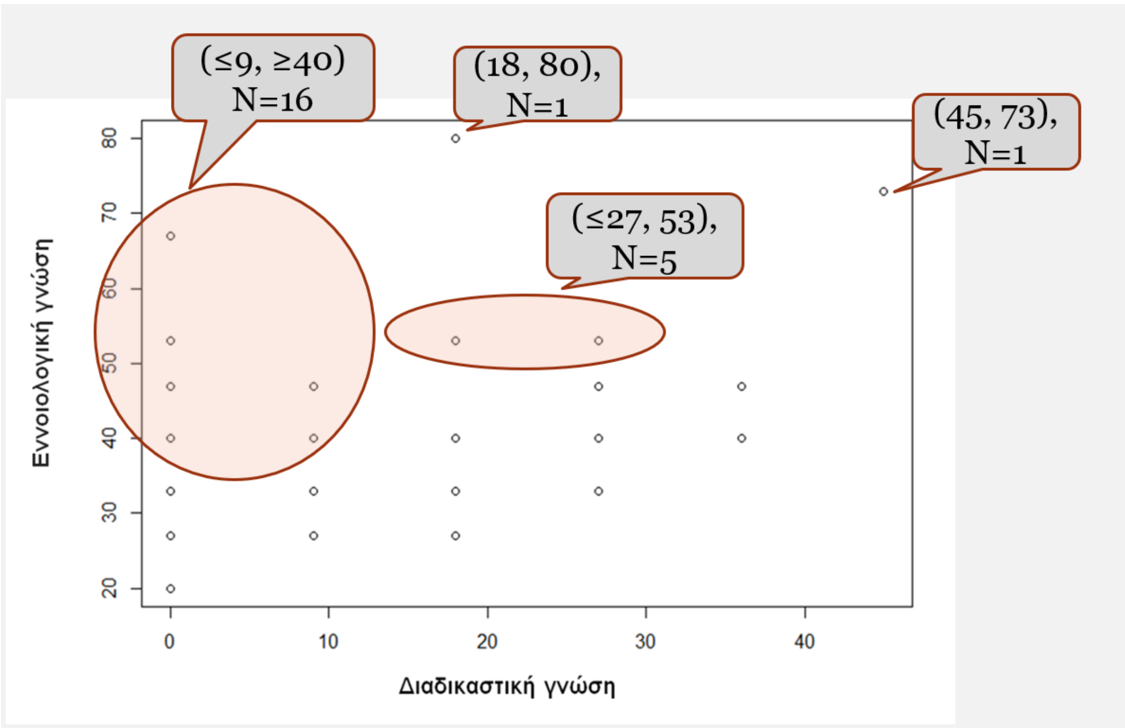
4.1.5.3.1 *Ακραίες διαφορές στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση*

Ρίχνοντας μία πιο προσεκτική ματιά στο προφίλ *«Ισχυρότερη διαδικαστική»* και *«Ισχυρότερη εννοιολογική»*, συναντάμε περιπτώσεις μαθητών με ακραίες διαφορές στα δύο είδη γνώσης. Σημειώνουμε ότι υπάρχει επικάλυψη των σημείων που αποτυπώνουν τις διαφορετικές επιδόσεις, δηλαδή κάθε σημείο αντιστοιχεί σε επιδόσεις διαφορετικών μαθητών που ανήκουν στο προφίλ αυτό. Από το παρακάτω σημειόγραμμα (Σχήμα 4-3), βλέπουμε περιπτώσεις μαθητών με άριστη επίδοση στη διαδικαστική γνώση και χαμηλή, έως πολύ χαμηλή, εννοιολογική γνώση. Συγκεκριμένα, εντοπίσαμε 32 μαθητές με επίδοση διαδικαστικής γνώσης μεγαλύτερο ή ίσο του 90% και επίδοση εννοιολογικής γνώσης μικρότερη ή ίση του 30%. Αντίστοιχες σημαντικές αποκλίσεις παρατηρούμε και στη συστάδα «*Ισχυρότερη εννοιολογική»*, με ακραίες περιπτώσεις μαθητών με υψηλή αλλά πολύ φτωχή διαδικαστική γνώση (Πίνακας 4-4). Συγκεκριμένα, εντοπίσαμε 16 μαθητές με επίδοση εννοιολογικής γνώσης μεγαλύτερη ή ίση του 40% και επίδοση διαδικαστικής γνώσης μικρότερη ή ίση του 9%. Αυτό το αποτέλεσμα είναι εντυπωσιακό αν λάβει κανείς υπόψη ότι η μέση επίδοση στην εννοιολογική γνώση είναι το 40,34%. Στα παρακάτω σημειογράμματα έχει γίνει μία προσπάθεια να ομαδοποιηθούν αδρά οι ακραίες διαδικαστικές και εννοιολογικές περιπτώσεις (Σχήμα 4-3 και Σχήμα 4-4). Στα ζεύγη των αριθμών που είναι σημειωμένα πάνω στα σχήματα, η τετμημένη του σημείου αποτυπώνει τη *διαδικαστική* γνώση ενώ η τεταγμένη του σημείου την *εννοιολογική*. Η μεταβλητή N παριστάνει τη συχνότητα. Το σύμβολο ≥α (≤α) σημαίνει ότι η τιμή της διαδικαστικής ή εννοιολογικής γνώσης είναι μεγαλύτερη (μικρότερη) ή ίση από την τιμή α. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 4-3 το N=32 (απόλυτη συχνότητα) για το ζεύγος (≥90, ≤32) δείχνει ότι 32 μαθητές είχαν επίδοση στη διαδικαστική γνώση μεγαλύτερη ίση του 90%, αλλά στην εννοιολογική μικρότερη ίση του 32%.

Σχήμα 4-3: Σημειόγραμμα της επίδοσης της ομάδας *«Ισχυρότερη διαδικαστική»*



Σχήμα 4-4: Σημειόγραμμα της επίδοσης της ομάδας *«Ισχυρότερη εννοιολογική»*

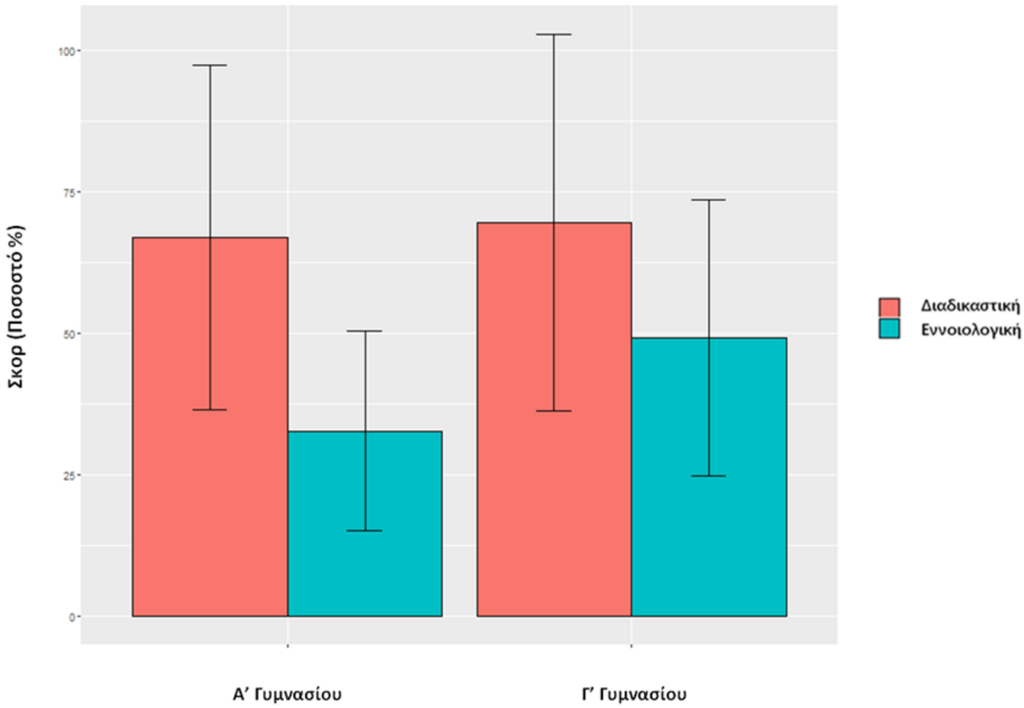


Τα παραπάνω αποτελέσματα υποστηρίζουν την υπόθεσή μας ότι υπάρχουν διαφορές στον τρόπο που οι μαθητές συνδυάζουν τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση για τα κλάσματα και ότι σε αντίθεση με του Hallett at al. (2010, 2012), αυτές δύνανται να είναι ακραίες για κάποια παιδιά ακόμη και στις τελευταίες τάξεις του Γυμνασίου.

4.1.5.3.2 *Συμμετρική ανάπτυξη δύο ειδών γνώσης*

Όπως προαναφέραμε (Ενότητα 4.1.5.3), ενώ η εννοιολογική γνώση βελτιώνεται σημαντικά από την Α΄ (32.77%) στη Γ΄ Γυμνασίου, ωστόσο εξακολουθεί να παραμένει ελλειμματική (49.2%) (Wilcoxon rank sum test: W = 19508, p-value < 0.0001) σε σχέση με τη διαδικαστική γνώση (69.52%) στην οποία δεν παρατηρούνται στατιστικά σημαντικές διαφορές από Α΄ σε Γ΄ Γυμνασίου (Wilcoxon rank sum test: W = 28742, p-value = 0.02939) (Σχήμα 4-5).

Σχήμα 4-5: Επίδοση στα δύο είδη γνώσης ανά τάξη



Η ασυμμετρία στην ανάπτυξη των δύο ειδών γνώσης προς όφελος της διαδικαστικής γνώσης είναι παρούσα μέχρι τη Γ΄ Γυμνασίου.

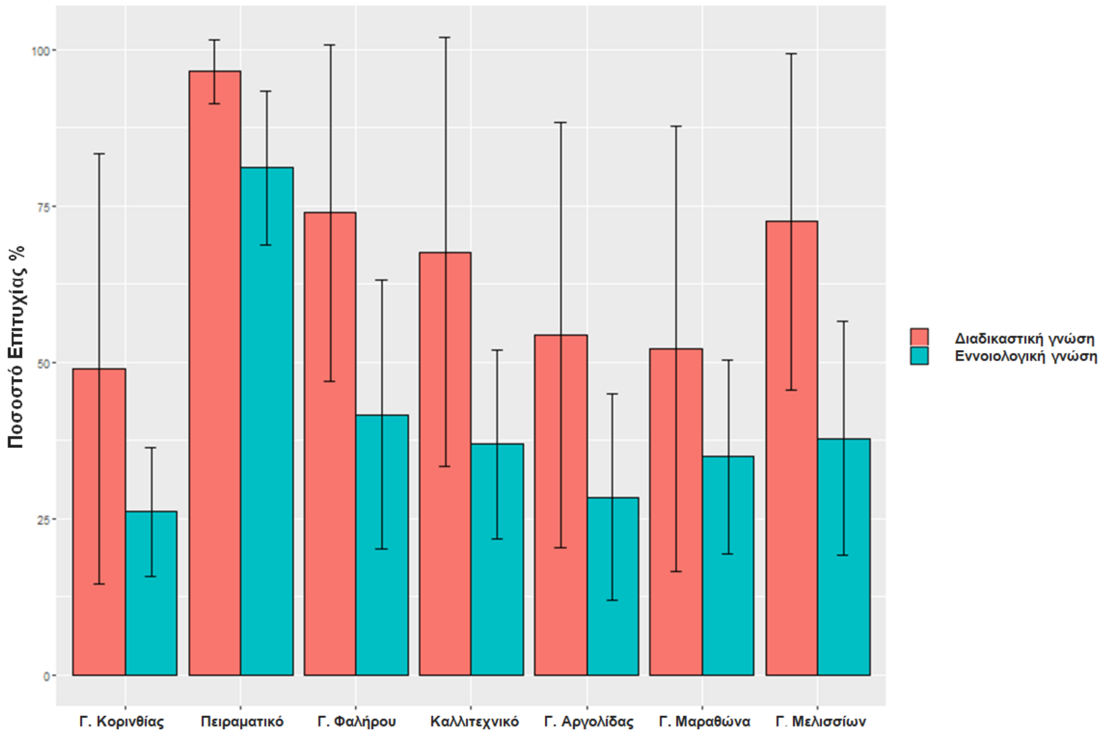
Το αποτέλεσμα που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι ότι το 40.66% του δείγματος βρέθηκε ότι ανήκει στο προφίλ *«Ισχυρότερη διαδικαστική»* με το 12.03% να είναι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου (Σχήμα 4-6). Τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώνουν την υπόθεσή μας ότι η εκπαίδευση δεν ενθαρρύνει τη συμμετρική ανάπτυξη των δύο ειδών γνώσης.

Σχήμα 4-6: Κατανομή μαθητών των δύο τάξεων ανά συστάδα

4.1.5.4 Διαφορές ανά σχολείο- 3ο Ερευνητικό Ερώτημα

Η επίδοση των μαθητών στη διαδικαστική γνώση είναι υψηλότερη από την επίδοση στην εννοιολογική και στα επτά σχολεία.

Σχήμα 4-7: Ποσοστό επιτυχίας % ανά σχολείο



Παρατηρούμε ότι τις καλύτερες επιδόσεις εμφάνισε το Πρότυπο Πειραματικό σχολείο Αθήνας, με επίδοση 96.51% και 81.12% και τις χαμηλότερες το Γυμνάσιο κωμόπολης της Κορινθίας με 49% και 26.09 %για τη διαδικαστική και την εννοιολογική γνώση αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι οι επιδόσεις στα σχολεία της Αττικής ήταν πολύ καλύτερες από αυτές των επαρχιακών σχολείων. Τα μέτρα θέσης και διασποράς για τις συνολικές αλλά και τις επιμέρους επιδόσεις στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση στα διαφορετικά σχολεία παρουσιάζονται αναλυτικά στο Σχήμα 4-7 και τον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 4-11).

Πίνακας 4-11: Διαδικαστική και Εννοιολογική επίδοση ανά σχολείο

Σχολείο	Διαδικαστική γνώση			Εννοιολογική γνώση			Συνολική Επίδοση		
	ΜΤ	ΤΑ	Δ	ΜΤ	ΤΑ	Δ	ΜΤ	ΤΑ	Δ
Γυμνάσιο Κορινθίας	49	34.46	45	26.09	10.23	27	35.72	15.21	35
Πειραματικό Γυμνάσιο Αθήνας	96.51	5.14	100	81.12	12.30	80	87.51	7.79	88
Γυμνάσιο Φαλήρου	73.93	26.86	82	41.60	21.51	40	55.29	20.20	58
Καλλιτεχνικό Γυμνάσιο Αθήνας	67.63	34.25	82	36.89	15.13	33	49.89	18.97	54
Γυμνάσιο Αργολίδας	54.38	34.00	64	28.47	16.57	27	39.26	19.20	38
Γυμνάσιο Μαραθώνα	52.10	35.62	64	34.92	15.51	33	42.13	18.16	42
Γυμνάσιο Μελισσίων	72.48	26.84	82	37.84	18.75	33	52.47	19.00	54

Η κατανομή των μαθητών στις διάφορες συστάδες σε απόλυτους αριθμούς παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 4-12). Η μικρότερη διαφορά στις επιδόσεις παρατηρείται στο Πειραματικό σχολείο με τους συμμετέχοντες να ανήκουν, σχεδόν στο σύνολό τους, στη συστάδα *«Υψηλά και στα δύο»*. Παρόλο που το Γυμνάσιο της Κορινθίας παρουσίασε τις χαμηλότερες επιδόσεις, αξίζει να αναφέρουμε ότι περιλάμβανε σημαντικό αριθμό μαθητών που ανήκαν στο προφίλ *«Ισχυρότερη εννοιολογική»*.

Πίνακας 4-12: Κατανομή μαθητών ανά συστάδα στα διαφορετικά σχολεία

Σχολείο	*«Υψηλά και στα δύο»*	*«Ισχυρότερη διαδικαστική»*	*«Ισχυρότερη εννοιολογική»*	*«Χαμηλά και στα δύο»*
Γυμνάσιο Κορινθίας	1	31	23	14
Πειραματικό Γυμνάσιο	48	1	0	0
Γυμνάσιο Φαλήρου	60	65	11	18
Καλλιτεχνικό Γυμνάσιο Αθήνας	8	19	6	2
Γυμνάσιο Αργολίδας	5	22	10	10
Γυμνάσιο Μαραθώνα	7	18	16	7
Γυμνάσιο Μελισσίων	34	51	9	14
Σύνολο	163	207	75	65

Ο στατιστικός έλεγχος ανεξαρτησίας επιβεβαίωσε ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική σχέση μεταξύ του σχολείου φοίτησης και της συστάδας κατάταξης ως προς τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση στην οποία ανήκουν οι μαθητές (χ^2 = 182.02, df = 18, p-value <0.001).

Πίνακας 4-13: Pearson residuals για τη συσχέτιση ανάμεσα στο σχολείο φοίτησης και τις συστάδες

Σχολείο	*«Υψηλά και στα δύο»*	*«Ισχυρότερη διαδικαστική»*	*«Ισχυρότερη εννοιολογική»*	*«Χαμηλά και στα δύο»*
Γυμνάσιο Κορινθίας	-4.483	0.566	4.035	1.755
Πειραματικό Γυμνάσιο	8.172	-4.235	-2.684	-2.499
Γυμνάσιο Φαλήρου	1.537	0.315	-2.447	-0.367
Καλλιτεχνικό Γυμνάσιο Αθήνας	-0.953	1.272	0.376	-1.165
Γυμνάσιο Αργολίδας	-2.586	0.669	1.175	1.638
Γυμνάσιο Μαραθώνα	-2.13	-0.336	3.365	0.357
Γυμνάσιο Μελισσίων	-0.088	1.082	-1.727	0.063

Επειδή, όπως αναφέραμε και παραπάνω, από το στατιστικό έλεγχο ανεξαρτησίας δεν μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για τα ζεύγη τα οποία συσχετίζονται καθώς και τον τρόπο συσχέτισής τους, υπολογίσαμε τις τιμές των Pearson residuals (Πίνακας 4-13). Η πιο ισχυρή θετική συσχέτιση παρατηρείται ανάμεσα στο Πειραματικό Γυμνάσιο και τη συστάδα *«Υψηλά και στα δύο»* και η πιο ισχυρή αρνητική συσχέτιση ανάμεσα στο Γυμνάσιο Κορινθίας με τη συστάδα *«Υψηλά και στα δύο»*, αποτελέσματα συμβατά με τις υψηλές και χαμηλές αντίστοιχα επιδόσεις των μαθητών στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση για τα κλάσματα.

Παρατηρούμε επίσης τη συνεισφορά σε ποσοστό (%) κάθε κελιού στην συνολική τιμή του Chi-square score (Πίνακας 4-14).

Πίνακας 4-14: Συνεισφορά σε ποσοστό (%) κάθε κελίου στη συνολική τιμή του Chi-square score

	«Υψηλά και στα δύο»	*«Ισχυρότερη διαδικαστική»*	*«Ισχυρότερη εννοιολογική»*	*«Χαμηλά και στα δύο»*
Γυμνάσιο Κορινθίας	11	0.2	8.9	1.7
Πειραματικό Γυμνάσιο	36.7	9.9	4	3.4
Γυμνάσιο Φαλήρου	1.3	0.1	3.3	0.1
Καλλιτεχνικό Γυμνάσιο Αθήνας	0.5	0.9	0.1	0.7
Γυμνάσιο Αργολίδας	3.7	0.2	0.8	1.5
Γυμνάσιο Μαραθώνα	2.5	0.1	6.2	0.1
Γυμνάσιο Μελισσίων	0	0.6	1.6	0

Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν ότι υπάρχουν διαφορές στον τρόπο που κατανέμονται οι μαθητές στα διαφορετικά προφίλ από σχολείο σε σχολείο.

4.1.6 Γενικότερα Συμπεράσματα

Στην πρώτη φάση της έρευνας, εξετάσαμε την υπόθεση αν υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο που οι μαθητές συνδυάζουν τη διαδικαστική και εννοιολογική τους γνώση για τα κλάσματα με την έννοια ότι το ένα είδος γνώσης υστερεί σε σχέση με το άλλο είδος γνώσης. Επιπλέον, υποθέσαμε ότι οι διαφορές αυτές παραμένουν ακραίες ακόμα και στο τέλος του Γυμνασίου. Τα αποτελέσματα υποστήριξαν τις υποθέσεις μας. Σημειώνουμε ότι το 55.29% του δείγματός μας βρέθηκε να ανήκει στις συστάδες «*Ισχυρότερη διαδικαστική*» και «*Ισχυρότερη εννοιολογική*». Η υπόθεσή μας επιβεβαιώνεται περαιτέρω από το γεγονός ότι τα προφίλ των μαθητών που εντοπίστηκαν στην παρούσα μελέτη είναι παρόμοια με αυτά που εντοπίστηκαν στην έρευνα των Hallett και συνεργατών (2010, 2012) παρόλο που ένα διαφορετικό εργαλείο χρησιμοποιήθηκε, σε έναν διαφορετικό πληθυσμό (Έλληνες μαθητές) και σε μεγαλύτερα παιδιά (μαθητές Γ΄ Γυμνασίου). Ωστόσο, σε αντίθεση με τους Hallett και συνεργάτες (2012) τα αποτελέσματά μας έδειξαν ότι οι διαφορές αυτές δεν αποδυναμώνονται απαραίτητα με το χρόνο και μπορεί να παραμένουν ακραίες ακόμη και στη Γ’ Γυμνασίου με σημαντικό ποσοστό των μαθητών (19.8%) να ανήκει στα προφίλ «*Ισχυρότερη διαδικαστική*» και «*Ισχυρότερη εννοιολογική*». Τα αποτελέσματα αυτά αποτελούν μία πρόκληση για το επαναληπτικό μοντέλο των Rittle-Johnson και συνεργατών (2001) σύμφωνα με το οποίο τα δύο είδη γνώσης αναπτύσσονται παράλληλα και συσχετίζονται θετικά, με τη βελτίωση του ενός είδους γνώσης να οδηγεί στη βελτίωση του άλλου, το οποίο με τη σειρά του, να ενισχύει το πρώτο είδος γνώσης. Τα ευρήματά μας υποστηρίζουν την υπόθεση ότι η σχέση των δύο ειδών γνώσης δεν είναι πάντα συμμετρική, δηλαδή ότι «τα δύο είδη γνώσης δεν είναι ισόποσα ανεπτυγμένα σε δεδομένο χρόνο» (Rittle Johnson & Schneider, 2015, σελ. 590). Δεδομένης της ηλικίας των συμμετεχόντων στη μελέτη και του γεγονότος ότι έχουν εκτεθεί στη διδασκαλία των κλασμάτων από τη Γ΄ Δημοτικού, θα ανέμενε κάποιος μία πιο ισορροπημένη σχέση των δύο ειδών γνώσης. Τίθεται λοιπόν υπό συζήτηση αν τέτοιου είδους ασυμμετρίες μπορούν να εξηγηθούν από το επανηληπτικό μοντέλο των Rittle-Johnson και συνεργατών (2001). Με βάση τα ευρήματά μας, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα δύο είδη γνώσης αναπτύσσονται παράλληλα, αλλά ότι η ανάπτυξη του ενός είδους γνώσης δεν οδηγεί απαραίτητα σε (σημαντική) βελτίωση του άλλου είδους γνώσης (βλ. επίσης και Hallett et al., 2012).

Τα αποτελέσματα επίσης έδειξαν ότι μεγάλο ποσοστό μαθητών δε συνδυάζει επαρκώς τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση, ειδικά στην Α΄ Γυμνασίου. Δεδομένου λοιπόν ότι η διαδικαστική και εννοιολογική γνώση είναι κρίσιμες για τη μαθηματική ανάπτυξη, είναι σημαντικό να αξιοποιούνται στη διδασκαλία οι διδακτικές στρατηγικές που υποστηρίζουν και τους δύο τύπους γνώσης (βλ. Rittle-Johnson & Schneider, 2015, για μία λεπτομερή ανάλυση). Αξίζει να σημειωθεί ότι η ομάδα *«Ισχυρότερη διαδικαστική»* είχε τη μεγαλύτερη συμμετοχή στο δείγμα μας, κάτι που ενδεχομένως αναδεικνύει την ανάγκη για μεγαλύτερη προσοχή στην εννοιολογική γνώση κατά τη διδασκαλία, τουλάχιστον στο ελληνικό πλαίσιο. Επιπλέον, η τεκμηρίωση τέτοιων ατομικών διαφορών αναδεικνύει τη σημασία της διαφοροποιημένης διδασκαλίας, με βάση τις ανάγκες των μαθητών. Πράγματι, οι μαθητές που ανήκουν σε διαφορετικά προφίλ θα μπορούσαν να επωφεληθούν από διαφορετικές διαδικακτικές προσεγγίσεις που αξιοποιούν την εννοιολογική η διαδικαστική γνώση των μαθητών (Gilmore & Bryant, 2006).

Το αποτέλεσμα για τη μη συμμετρική ανάπυξη των δύο ειδών γνώσης επιβεβαιώνει την υπόθεσή μας ότι η εκπαίδευση δεν ενθαρρύνει τη συμμετρική τους ανάπτυξη, αλλά ευνοεί κυρίως τη διαδικαστική γνώση (βλ. επίσης και Canobi, 2004 για παρόμοια αποτελέσματα στο πεδίο της πρόσθεσης αριθμών). Η υπόθεση αυτή επιβεβαιώνεται περαιτέρω από τον έλεγχο προγνωστικών παραγόντων ο οποίος έδειξε ότι οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου έχουν σημαντικά μεγαλύτερη πιθανότητα να ανήκουν στην ομάδα *«Υψηλά και στα δύο»* από ό,τι στην ομάδα *«Ισχυρότερη διαδικαστική»*. Επιπλέον, σε αντίθεση με τους Hallett και συνεργάτες (2010, 2012) βρήκαμε ότι η παρουσία των ακραίων προφίλ είναι δυνατή ακόμη και στη Γ΄ Γυμνασίου, γεγονός που αποτελεί πρόκληση για το επαναληπτικό μοντέλο που προβλέπει πιο ισορροπημένη ανάπτυξη των δύο ειδών γνώσης.

Επιπλέον, εντοπίσαμε διαφορές στα προφίλ μαθητών από σχολείο σε σχολείο. Αυτό το συμπέρασμα αποκλίνει από αυτό των Hallett και συνεργατων (2012), είναι όμως σε συμφωνία με αυτό των Lentz και Wittman (2021). Θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι η φοίτηση σε διαφορετικά σχολεία είναι ένας παράγοντας στον οποίο θα μπορούσαν να αποδοθούν οι ατομικές διαφορές στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση, όμως όπως έχει υποστηριχθεί και αλλού είναι πιθανό αυτή η συσχέτιση να οφείλεται στο είδος του δείγματος (Lentz & Wittman, 2021). Πράγματι, το δείγμα των φοιτούντων μαθητών δεν είναι τόσο τυχαίο για να θεωρήσουμε το σχολείο φοίτησης ως ενδεχόμενο παράγοντα που εξηγεί τις ατομικές διαφορές στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση για τα κλάσματα. Για παράδειγμα, αν πάρουμε την περίπτωση του Πρότυπου Πειραματικού σχολείου, εμπλέκονται άλλες παράμετροι όπως το γνωστικό επίπεδο των μαθητών δεδομένου ότι έχουν εισαχθεί με απαιτητικές εξετάσεις, η ποιότητα της παρεχόμενης διδασκαλίας από καθηγητές με αυξημένα τυπικά προσόντα, οι επιδιώξεις των οικογενειών που συνήθως προέρχονται από ανώτερα κοινωνικά στρώματα.

4.2 Κύρια έρευνα ΙΙ

Στόχος της έρευνας αυτής είναι να διερευνηθεί η προσέγγιση των μαθητών στη μάθηση των μαθηματικών και να ελεγχθεί η δεύτερη κεντρική μας υπόθεση αν οι ατομικές διαφορές στον τρόπο που μαθητές Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου συνδυάζουν τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση για τα κλάσματα, που εντοπίσαμε στην πρώτη φάση της έρευνας, συνοδεύονται από διαφορές στον τρόπο που προσεγγίζουν τη μάθηση των μαθηματικών.

Βάσει της υπόθεσης αυτής αναμένεται η ανάδειξη διαφορών στην προσέγγιση στη μάθηση των μαθητών σε σχέση με το επίπεδο ανάπτυξης της διαδικαστικής και εννοιολογικής τους γνώσης.

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι:

- Οι μαθητές με περισσότερο ανεπτυγμένη την εννοιολογική τους γνώση, θα έχουν καλύτερη επίγνωση της κατανόησής τους στα κλάσματα δηλαδή θα μπορούν να εκτιμήσουν καλύτερα την επίδοσή τους την επίδοσή τους στο πρώτο ερωτηματολόγιο.

4.2.1 Συμμετέχοντες

Από αυτούς τους 510 μαθητές που συμμετείχαν στην Κύρια έρευνα Ι, εκείνοι που κατέστη δυνατόν να συμμετάσχουν στην Κύρια Έρευνα ΙΙ και να συμπληρώσουν ολόκληρο το δεύτερο ερωτηματολόγιο ήταν 463, εκ των οποίων 262 μαθητές της Α΄ και 201 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου. Ως εκ τούτου, τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην Κύρια έρευνα ΙΙ αφορούν τους 463 που συμπλήρωσαν και τα δύο ερωτηματολόγια.

4.2.2 Υλικά

Χρησιμοποιήθηκε το ερωτηματολόγιο που προέκυψε κατόπιν αξιολόγησης ως προς την εγκυρότητα και την αξιοπιστία και η οποία παρουσιάστηκε στο τμήμα Πιλοτική έρευνα ΙΙ. Η τελική μορφή του ερωτηματολογίου βρίσκεται στο Παράρτημα ΙΙ.

4.2.3 Διαδικασία

Το ερωτηματολόγιο επιδόθηκε στους ίδιους μαθητές που συμμετείχαν και στην Κύρια Έρευνα Ι τρεις περίπου εβδομάδες μετά τη συμπλήρωση του πρώτου ερωτηματολογίου. Οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους μισή ώρα για τη συμπλήρωση του δεύτερου ερωτηματολογίου. Το ερωτηματολόγιο συμπληρώθηκε κατά τη διάρκεια της ώρας των μαθηματικών του κανονικού προγράμματος με τον εκπαιδευτικό της τάξης να είναι παρών.

4.2.3.1 Γενικά στατιστικά

Παρακάτω παρουσιάζονται τα μέτρα θέσης και διασποράς για τις ερωτήσεις του δεύτερου ερωτηματολογίου (Πίνακας 4-15).

Πίνακας 4-15: Μέτρα θέσης και διασποράς για τις ερωτήσεις του 2ου ερωτηματολογίου

Ερώτηση	Συχνότητα	Μέση Τιμή	Τυπική Απόκλιση	Διάμεσος	Εύρος
Q.2.1	458	2.26	0.88	2	(1 - 4)
Q.2.2	457	1.89	0.79	2	(1 - 4)
Q.2.4	459	2.33	0.89	2	(1 - 4)
Q.2.5	458	2.06	1.06	2	(1 - 4)
Q.2.8	457	2.63	1.04	3	(1 - 4)
Q.2.11	459	1.72	0.84	2	(1 - 4)
Q.2.13	461	2.34	1.06	2	(1 - 4)
Q.2.14	457	1.98	0.85	2	(1 - 4)
Q.2.16	452	2.12	0.99	2	(1 - 4)
Q.2.17	457	2.16	0.94	2	(1 - 4)
Q.2.20	456	1.83	0.93	2	(1 - 4)
Q.2.21	455	2.85	1.07	3	(1 - 4)
Q.2.22	443	2.27	0.92	2	(1 - 4)
Q.2.26	453	1.83	0.86	2	(1 - 4)
Q.2.27	457	1.76	0.87	2	(1 - 4)
Q.2.33	450	1.81	1.01	1	(1 - 4)
Q.2.7	458	2.95	0.89	3	(1 - 4)
Q.2.12	460	3.48	0.71	4	(1 - 4)
Q.2.18	452	2.83	0.81	3	(1 - 4)
Q.2.9	454	2.7	0.98	3	(1 - 4)
Q.2.23	452	2.65	0.94	3	(1 - 4)
Q.2.25	455	3.03	0.85	3	(1 - 4)
Q.2.28	451	2.55	0.84	3	(1 - 4)
Q.2.29	454	2.25	0.97	2	(1 - 4)
Q.2.32	454	2.84	1.06	3	(1 - 4)
Q.2.35	450	2.53	1.15	3	(1 - 4)
Q.2.36	446	2.48	1.09	2	(1 - 4)

Η μέση τιμή στην προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών ήταν 2.83, τιμή υψηλή, η οποία βέβαια υπόκειται σε περιορισμούς δεδομένου ότι βασίζεται στις δηλώσεις των μαθητών που σε κάποιες περιπτώσεις πιθανόν αναγνωρίζουν τις «καλές» απαντήσεις (Πίνακας 4-16).

Πίνακας 4-16: Μέτρα θέσης και διασποράς της προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών

	Συχνότητα (N)	Μέση τιμή (Mean)	Τυπική απόκλιση (Standard Deviation)	Διάμεσος (Median)	Μέγιστη τιμή (Xmax)	Ελάχιστη τιμή (Xmin)
Επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση	463	2.83	0.41	2.85	3.70	1.48

Όσον αφορά τις τάξεις, η Α΄ Γυμνασίου (Μέση τιμή: 2.86) παρουσίασε ελαφρώς καλύτερη επίδοση από τη Γ΄ Γυμνασίου (Μέση τιμή: 2.79) στην προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών (Πίνακας 4-17). Διενεργήθηκε μη παραμετρικός στατιστικός έλεγχος Wilcoxon rank sum, για να ελεγχθεί αν οι δύο ομάδες διαφέρουν στατιστικά σημαντικά ως προς την προσέγγιση στη μάθηση. Από τον έλεγχο προέκυψε ότι η τάξη δε σχετίζεται στατιστικά σημαντικά με την προσέγγιση στη μάθηση δηλαδή δε διαφέρουν στατιστικά σημαντικά οι διάμεσοι μεταξύ Α & Γ τάξης (W= 28571, df=3, p-value= 0.1166). Θα αναμέναμε ότι η επίδοση της στην προσέγγιση στη μάθηση θα ήταν υψηλότερη για τη Γ΄ Γυμνασίου αλλά κάτι τέτοιο δε συνέβη. Αυτό το εκ πρώτης όψεως παράδοξο αποτέλεσμα θα το αναλύσουμε στη συζήτηση.

Πίνακας 4-17: Μέτρα θέσης και διασποράς της προσέγγισης στη μάθηση ανά τάξη

Τάξη	N	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση	Διάμεσος	Εύρος
Α΄ Γυμνασίου	262	2.86	0.39	2.89	(1.7 - 3.7)
Γ΄ Γυμνασίου	201	2.79	0.44	2.81	(1.48 - 3.7)

4.2.3.2 Διαφορές στην επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών ανά σχολείο

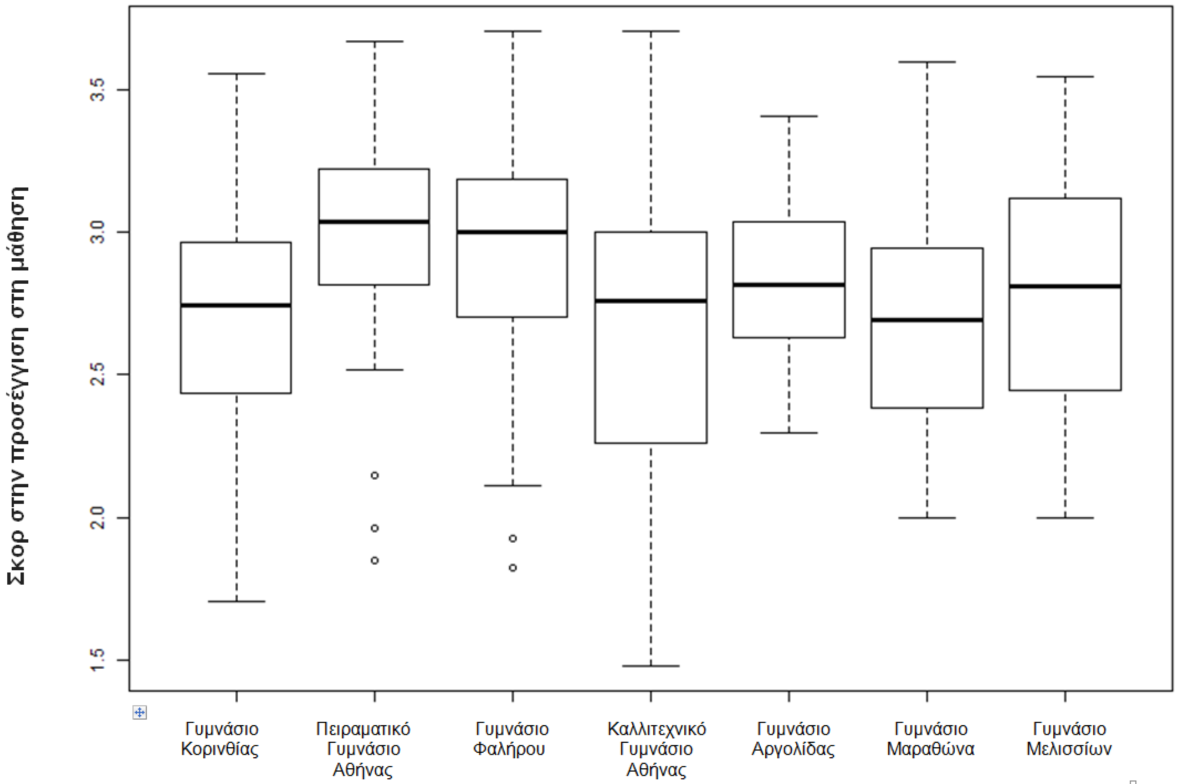
Στην ενότητα αυτή, γίνεται μια ανάλυση της επίδοσης στην προσέγγιση της μάθησης ανά σχολείο για να δούμε κατά πόσο αυτή συμφωνεί με τις επιδόσεις στο πρώτο ερωτηματολόγιο. Την υψηλότερη επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση παρουσίασε το Πειραματικό Γυμνάσιο Αθήνας (2.98), επίδοση η οποία ευθυγραμμίζεται με την επίδοση στο πρώτο ερωτηματολόγιο (87,51%). Τις δύο επόμενες καλύτερες επιδόσεις παρουσίασαν το Γυμνάσιο του Φαλήρου (2.93) και το Γυμνάσιο Μελισσίων (52,47%) συμβατές με τις επιδόσεις στο πρώτο ερωτηματολόγιο (55,29% και 52,47% αντίστοιχα). Αντίθετη εικόνα παρουσιάζουν το Γυμνάσιο Κορινθίας και Γυμνάσιο Αργολίδας που η επίδοσή τους στην προσέγγιση στη μάθηση (2,73 και 2,83) ήταν σε πλήρη ασυμφωνία με την επίδοσή τους στα κλάσματα (35,72% και 39,26%). Τέλος, το Καλλιτεχνικό Γυμνάσιο με την τέταρτη καλύτερη επίδοση στο πρώτο ερωτηματολόγιο (49,89%) παρουσίασε την πιο χαμηλή επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση.

Τα μέτρα θέσης και διασποράς για την επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση ανά σχολείο παρουσιάζονται αναλυτικά στον πίνακα και το σχήμα που ακολουθούν (Πίνακας 4-18, Σχήμα 4-8).

Πίνακας 4-18: Μέτρα θέσης και διασποράς της προσέγγισης στη μάθηση ανά σχολείο

Σχολείο	N	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση	Διάμεσος	Εύρος
Γυμνάσιο Κορινθίας	47	2.73	0.43	2.74	(1.7 - 3.56)
Πειραματικό Γυμνάσιο	49	2.98	0.38	3.04	(1.85 - 3.67)
Γυμνάσιο Φαλήρου	142	2.93	0.37	3	(1.83 - 3.7)
Καλλιτεχνικό Γυμνάσιο Αθήνας	32	2.64	0.53	2.76	(1.48 - 3.7)
Γυμνάσιο Αργολίδας	45	2.83	0.3	2.81	(2.3 - 3.41)
Γυμνάσιο Μαραθώνα	47	2.7	0.43	2.69	(2 - 3.59)
Γυμνάσιο Μελισσίων	101	2.79	0.41	2.81	(2 - 3.54)

Σχήμα 4-8: Μέση επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση ανά σχολείο



4.2.3.3 Σχέση διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης και προσέγγισης στη μάθηση – 4ο Ερευνητικό Ερώτημα

Ως πιθανός παράγοντας που καθορίζει την ένταξη του κάθε μαθητή σε μία από τις συστάδες *«Υψηλά και στα δύο», «Ισχυρότερη διαδικαστική», «Ισχυρότερη εννοιολογική» «Χαμηλά και στα δύο»*, με βάση το επίπεδο ανάπτυξης της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης, θα ελεγχθεί η μέση επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση.

Στην παρούσα μελέτη, χρησιμοποιήσαμε ως μεταβλητές την επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση (ποσοτική μεταβλητή) και τις συστάδες (ποιοτική μεταβλητή). Από τον έλεγχο κανονικότητας Shapiro-Wilk που διενεργήθηκε, διαπιστώθηκε ότι δεν ακολουθείται η κανονική κατανομή σε όλες τις συστάδες (*«Υψηλά και στα δύο»*: W = 0.971, p-value=0.0021, *«Ισχυρότερη εννοιολογική»*: W=0.955, p-value=0. 0453, *«Ισχυρότερη διαδικαστική»*: W= 0.967, p-value=0.0002) εκτός από τη συστάδα *«Χαμηλά και στα δύο»* (W=0.990, p-value=0.9153). Για τον λόγο αυτό, προκειμένου να ελεγχθεί αν οι τέσσερις ομάδες διαφέρουν στατιστικά σημαντικά ως προς την προσέγγιση στη μάθηση διενεργήθηκε μη παραμετρικός στατιστικός έλεγχος Kruskal-Wallis. Από τον έλεγχο προέκυψε ότι η συστάδα κατάταξης σχετίζεται στατιστικά σημαντικά με την προσέγγιση στη μάθηση (Kruskal-Wallis χ^2=60.396, df=3, p-value<0.0001). Ο έλεγχος Kruskal-Wallis ουσιαστικά εξετάζει αν οι διάμεσοι είναι ίσες και εφόσον το p-value<0.05, τότε η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται και οι διάμεσοι διαφέρουν. Εφόσον η μηδενική υπόθεση απορριφθεί, είναι δυνατό να διενεργηθεί έλεγχος για να αναδειχθούν αυτές οι διαφορές για κάθε πιθανό ζευγάρι (δi, δj) σε έναν πίνακα *ixj*.

Πίνακας 4-19: Σύγκριση ζευγών με τη χρήση του Wilcoxon rank sum test για τις διαφορές στην προσέγγιση στη μάθηση ανά συστάδα

	«Υψηλά και στα δύο»	*«Ισχυρότερη εννοιολογική»*	*«Ισχυρότερη διαδικαστική»*
«Ισχυρότερη εννοιολογική»	<0.0001		
«Ισχυρότερη διαδικαστική»	0.0005	0.0001	
«Χαμηλά και στα δύο»	<0.0001	**0.5744**	<0.0001

Τελικά, από τον πιο εξειδικευμένο έλεγχο σύγκρισης των ζευγών (Pairwise comparisons using Wilcoxon rank sum test), διαπιστώθηκε ότι όλα τα ζευγάρια εκτός από τα ζευγάρια

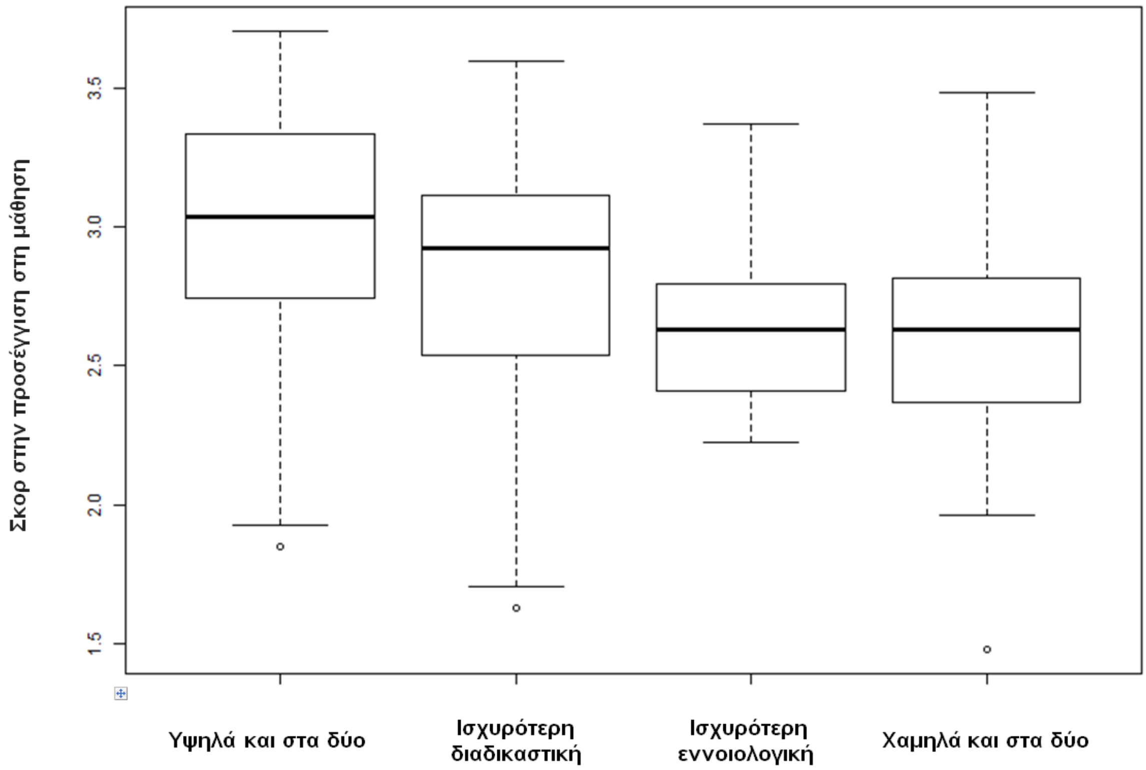
«Χαμηλά και στα δύο» και *«Ισχυρότερη εννοιολογική»* παρουσιάζουν στατιστικά σημαντικές διαφορές (p-value <0.05). Στον πίνακα αποτυπώνεται μόνο η τιμή του p-value για κάθε έλεγχο (δi=δj) (Πίνακας 4-19).

Πίνακας 4-20: Μέση επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση ανά συστάδα

Συστάδες	N	Μέση Τιμή	Τυπική Απόκλιση	Διάμεσος	Εύρος
«Υψηλά και στα δύο»	158	2.987	0.414	3.037	(1.852 - 3.704)
«Ισχυρότερη διαδικαστική»	194	2.830	0.397	2.923	(1.630 - 3.593)
«Ισχυρότερη εννοιολογική»	52	2.636	0.275	2.633	(2.222 - 3.370)
«Χαμηλά και στα δύο»	59	2.593	0.367	2.630	(1.481 - 3.481)

Πιο συγκεκριμένα, η ομάδα *«Υψηλά και στα δύο»* παρουσιάζει υψηλότερη επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση, όπως άλλωστε ήταν αναμενόμενο. Η ομάδα *«Ισχυρότερη διαδικαστική»* παρουσιάζει την αμέσως χαμηλότερη και ακολουθεί η ομάδα *«Ισχυρότερη εννοιολογική»* με τελευταία την ομάδα *«Χαμηλά και στα δύο»* (Πίνακας 4-20 και Σχήμα 4-9).

Σχήμα 4-9: Διάμεση επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση ανά συστάδα



Το αποτέλεσμα αυτό υποστηρίζει μερικώς την υπόθεσή μας. Μια πιθανή εξήγηση για το γεγονός ότι η συστάδα *«Ισχυρότερη εννοιολογική»* παρουσίασε χαμηλή επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση είναι ότι στη συστάδα αυτή ανήκαν μαθητές με χαμηλότερη επίδοση από ό,τι στη συστάδα *«Ισχυρότερη διαδικαστική»*. Η υπόθεσή μας θα ελεγχθεί περαιτέρω μέσω προγνωστικών παραγόντων.

4.2.3.3.1 *Έλεγχος προγνωστικών παραγόντων*

Για να ελέγξουμε την υπόθεση ότι η προσέγγιση στη μάθηση αποτελεί προγνωστικό παράγοντα του επιπέδου εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης εκτελέστηκε *πολυμεταβλητή λογιστική παλινδρόμηση* (multinomial logistic regression). Επιλέξαμε το συγκεκριμένο είδος ανάλυσης γιατί η εξαρτημένη μας μεταβλητή, που είναι η κατάταξη σε συστάδα σύμφωνα με το επίπεδο διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης αποτελεί ποιοτική μεταβλητή. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές μας είναι η μέση επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση στην κλίμακα από 1-4 (επιφανειακή προς βαθιά) (ποσοτική μεταβλητή) και η σχολική τάξη (ποιοτική μεταβλητή).

Πίνακας 4-21: Έλεγχος προγνωστικών παραγόντων για την προσέγγιση στη μάθηση

Προγνωστικός παράγοντας	*Χαμηλά και στα δυο* vs	B	OR= exp(B)	p-value
Επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση	*Υψηλά και στα δύο*	3.09	21.98	0.000
	Ισχυρότερη διαδικαστική	1.56	4.77	0.000
	Ισχυρότερη εννοιολογική	0.42	1.53	**0.390**

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η προσέγγιση στη μάθηση προβλέπει το προφίλ στον οποίο ανήκουν. Χρησιμοποιώντας την ομάδα «*Χαμηλά και στα δύο*» ως επίπεδο βάσης (base level) παρατηρούμε ότι όταν αυξάνεται η επίδοση ενός μαθητή στην προσέγγιση στη μάθηση κατά μια μονάδα, αυξάνεται ο λογάριθμος της πιθανότητάς του κατά 3.09, είναι δηλαδή 21.98 φορές πιο πιθανό να ανήκει στην ομάδα «*Υψηλά και στα δύο»* και 4.77 φορές πιο πιθανό να ανήκει στην ομάδα «*Ισχυρότερη διαδικαστική»* (Πίνακας 4-21). Το αποτέλεσμα αυτό στηρίζει μερικώς την υπόθεσή μας καθώς δεν προβλέπεται η πιθανότητα να ανήκει κάποιος στην ομάδα *«Ισχυρότερη εννοιολογική»,* ενώ οι μαθητές αυτοί, όπως αναφέραμε παραπάνω, έχουν τη δεύτερη χαμηλότερη επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών. Ωστόσο, δεν υπήρχαν αρκετά στοιχεία για να προβλεφθεί η πιθανότητα να ανήκει ένας μαθητής στην ομάδα «*Ισχυρότερη εννοιολογική*». Το αποτέλεσμα αυτό υποστηρίζει μερικώς την υπόθεσή μας καθώς δεν προβλέπεται η πιθανότητα να ανήκει κάποιος στην ομάδα *«Ισχυρότερη εννοιολογική»* και επιπλέον οι μαθητές της ομάδας αυτής, όπως αναφέραμε παραπάνω, έχουν την τρίτη χαμηλότερη επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών.

4.2.3.4 Σχέση αυτοαξιολόγησης επίδοσης στα κλάσματα και προσέγγισης στη μάθηση και τη μελέτη των μαθηματικών

Όπως αναφέρθηκε στο τμήμα Υλικά, μία από τις ερωτήσεις του δεύτερου ερωτηματολογίου αφορούσε την αυτοαξιολόγηση επίδοσης στα κλάσματα. Σημειώνουμε ότι η ερώτηση αυτή ήταν η Q.2.3: «*Πιστεύω πως την ύλη των κλασμάτων την έχω καταλάβει καλά*». Η κατανομή των απαντήσεων σε αυτή την ερώτηση φαίνεται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 4-22).

Πίνακας 4-22: Κατανομή μαθητών στην ερώτηση αυτοαξιολόγησης επίδοσης στα κλάσματα

Αυτοαξιολόγηση επίδοσης στα κλάσματα	N	Συχνότητα	Μέση τιμή	Τυπική Απόκλιση	Διάμεσος	Εύρος
Συμφωνώ απόλυτα	192	41.47%	2.34	0.22	2.33	(1.83 - 3)
Συμφωνώ	211	45.57%	2.4	0.23	2.37	(1.7 - 3.04)
Διαφωνώ	44	9.50%	2.51	0.21	2.48	(1.93 - 3.04)
Διαφωνώ απόλυτα	16	3.46%	2.43	0.29	2.37	(1.81 - 2.93)

Σε αυτό το σημείο, να τονίσουμε ότι η αυτοαξιολόγηση επίδοσης στα κλάσματα, σχετίζεται με την αυτεπίγνωση κατανόησης (awareness), όταν η θετική ή αρνητική αυτοαξιολόγηση επίδοσης συνάδει με την υψηλή ή χαμηλή, αντίστοιχα, επίδοση στα κλάσματα. Ωστόσο, η αυτοαξιολόγηση επίδοσης στα κλάσματα δεν είναι βέβαιο ότι θα σχετίζεται με την επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών κατά τον ίδιο τρόπο. Για παράδειγμα, οι μαθητές που έχουν υψηλή επίδοση στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση καθώς και στην προσέγγιση στη μάθηση, και πιθανά ακολουθούν εκλεπτυσμένες προσεγγίσεις στη μάθηση των μαθηματικών, μπορεί να μην αξιολογούν την κατανόησή τους στα κλάσματα ως προχωρημένη.

Οι μεταβλητές μας ήταν: η προσέγγιση στη μάθηση (συνεχής) και το επίπεδο αυτοαξιολόγησης στα κλάσματα (κατηγορική). Για να εξετάσουμε αν η επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση διαφέρει στατιστικά σημαντικά στα διαφορετικά επίπεδα της αυτοαξιολόγησης στα κλάσματα διενεργήσαμε έναν έλεγχο για να διαπιστώσουμε αν οι διάμεσοι σε κάθε επίπεδο της αυτοαξιολόγησης στα κλάσματα διαφέρουν στατιστικά σημαντικά. Από τον έλεγχο προέκυψε ότι η επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση σχετίζεται στατιστικά σημαντικά με το επίπεδο της αυτοαξιολόγησης επίδοσης στα κλάσματα (Kruskal-Wallis χ^2= 25.558, df = 3, p-value<0.0001).

Στη συνέχεια, για να δούμε σε ποια ζεύγη οφείλονται αυτές οι στατιστικά σημαντικές διαφορές Pairwise εκτελέσαμε τον κατάλληλο έλεγχο (Comparisons using Wilcoxon rank sum test) (Πίνακας 4-23) από τον οποίο προέκυψε ότι τα ζεύγη *Συμφωνώ* με *Διαφωνώ* και *Συμφωνώ απόλυτα* με *Συμφωνώ* παρουσιάζουν στατιστικά σημαντικές διαφορές (p-value <0.05).

Πίνακας 4-23: Σύγκριση ζευγών με τη χρήση του Wilcoxon rank sum test για τις διαφορές στην προσέγγιση στη μάθηση ανά συστάδα

	Διαφωνώ απόλυτα	*Διαφωνώ*	*Συμφωνώ*
Διαφωνώ απόλυτα	**0.1980**		
Συμφωνώ	**0.6782**	0.0037	
Συμφωνώ απόλυτα	**0.2457**	<0.0001	0.0127

Από την κατανομή των απαντήσεων των μαθητών στην ερώτηση αυτή, προκύπτει ότι οι μαθητές που επέλεξαν τις απαντήσεις *Συμφωνώ/Συμφωνώ απόλυτα* (87.04%) ήταν εκείνοι που παρουσίασαν τη χαμηλότερη επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση. Η ομάδα των μαθητών που επέλεξε την απάντηση *Συμφωνώ απόλυτα* είχε χειρότερη επίδοση (2.34) στην προσέγγιση στη μάθηση από τους μαθητές που επέλεξαν την απάντηση *Συμφωνώ* (2.4). Αντίθετα, οι μαθητές που επέλεξαν τις απαντήσεις *Διαφωνώ/Διαφωνώ απόλυτα* (12.96%) είχαν την καλύτερη μέση επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση (2.49). Τέλος, το ποσοστό τον μαθητών αυτής της ομάδας επέλεξε την απάντηση *Διαφωνώ απόλυτα* (3.46%) παρουσίασε χαμηλότερη επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση (2.43) από ό,τι η υποομάδα που δήλωσε *Διαφωνώ* (2.51) (Πίνακας 4-22).

Τα συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν είναι τα εξής:

α) Μεγάλο ποσοστό μαθητών (87,04%) δήλωσε ότι είχε κατανοήσει την ύλη των κλασμάτων. Μία πιθανή ερμηνεία για το ποσοστό που επέλεξε τη συγκεκριμένη απάντηση είναι ότι η ρητή παραδοχή της μη κατανόησης των κλασμάτων από τους μαθητές, δεν είναι εύκολη υπόθεση παρά το γεγονός ότι τους κατέστη σαφές ότι οι απαντήσεις τους δε θα ληφθούν υπόψη προς αξιολόγηση.

β) Όσο πιο χαμηλή επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση παρουσιάζουν οι ομάδες των μαθητών, τόσο υψηλότερη είναι η επίδοση στην ερώτηση της αυτοαξιολόγησης της κατανόησης κλασμάτων. Δηλαδή, διαφαίνεται η τάση οι μαθητές με χαμηλή επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση να δηλώνουν ότι έχουν κατανοήσει τα κλάσματα. Η τάση αυτή είναι παρούσα και στις υποομάδες της ομάδας *Συμφωνώ/Συμφωνώ απόλυτα*, με τους μαθητές με την υψηλότερη επίδοση της ομάδας στην προσέγγιση στη μάθηση (2.4) να επιλέγουν την απάντηση *Συμφωνώ* και όχι *Συμφωνώ απόλυτα* ως προς την αυτοαξιολόγηση της κατανόηση τους στα κλάσματα. Δηλαδή οι μαθητές με ευνοϊκές προσεγγίσεις στη μάθηση των μαθηματικών, βάσει την επίδοσής τους στο ερωτηματολόγιο, παρουσιάστηκαν πιο φειδωλοί κατά την αυτοαξιολόγηση της κατανόησής τους στα κλάσματα. Αντίθετα, στην ομάδα *Διαφωνώ/Διαφωνώ απόλυτα* οι μαθητές της υποομάδας με το χαμηλότερη επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση (2.43) δήλωσαν την απόλυτη διαφωνία τους *(Διαφωνώ απόλυτα)* ως προς την κατανόησή τους στα κλάσματα, δηλαδή παρουσιάστηκε συμβατότητα ανάμεσα στην επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση και την επίδοση στην ερώτηση της αυτοαξιολόγησης της κατανόησης κλασμάτων.

4.2.3.4.1 *Σχέση αυτοαξιολόγησης επίδοσης στα κλάσματα και μέσης επίδοσης συνολικά στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση*

Ο Πίνακας 4-24 και το Σχήμα 4-10 παρουσιάζουν τη μέση συνολική επίδοση της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης στα τέσσερα επίπεδα της αυτοαξιολόγησης επίδοσης στα κλάσματα.

Πίνακας 4-24: Μέση διαδικαστική και εννοιολογική γνώση στα τέσσερα επίπεδα της αυτοαξιολόγησης επίδοσης στα κλάσματα

Αυτοαξιολόγηση επίδοσης στα κλάσματα	N	Συχνότητα	Μέση τιμή στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση	Τυπική Απόκλιση	Διάμεσος	Εύρος
Συμφωνώ απόλυτα	192	41.47%	60.31	20.76	62	(12 - 100)
Συμφωνώ	211	45.57%	52.38	21.74	54	(12 - 100)
Διαφωνώ	44	9.50%	37.11	18.39	33	(12 - 77)
Διαφωνώ απόλυτα	16	3.46%	30.5	18.94	23	(12 - 85)

Η σχετική ανάλυση έδειξε ότι η συνολική επίδοση στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση σχετίζεται στατιστικά σημαντικά με το επίπεδο αυτοαξιολόγησης επίδοσης στα κλάσματα (Kruskal-Wallis χ^2= 56.96, df = 3, p-value<0.0001).

Για να δούμε σε ποια ζεύγη οφείλονται αυτές οι στατιστικά σημαντικές διαφορές Pairwise εκτελέσαμε τον κατάλληλο έλεγχο (Comparisons using Wilcoxon rank sum test)

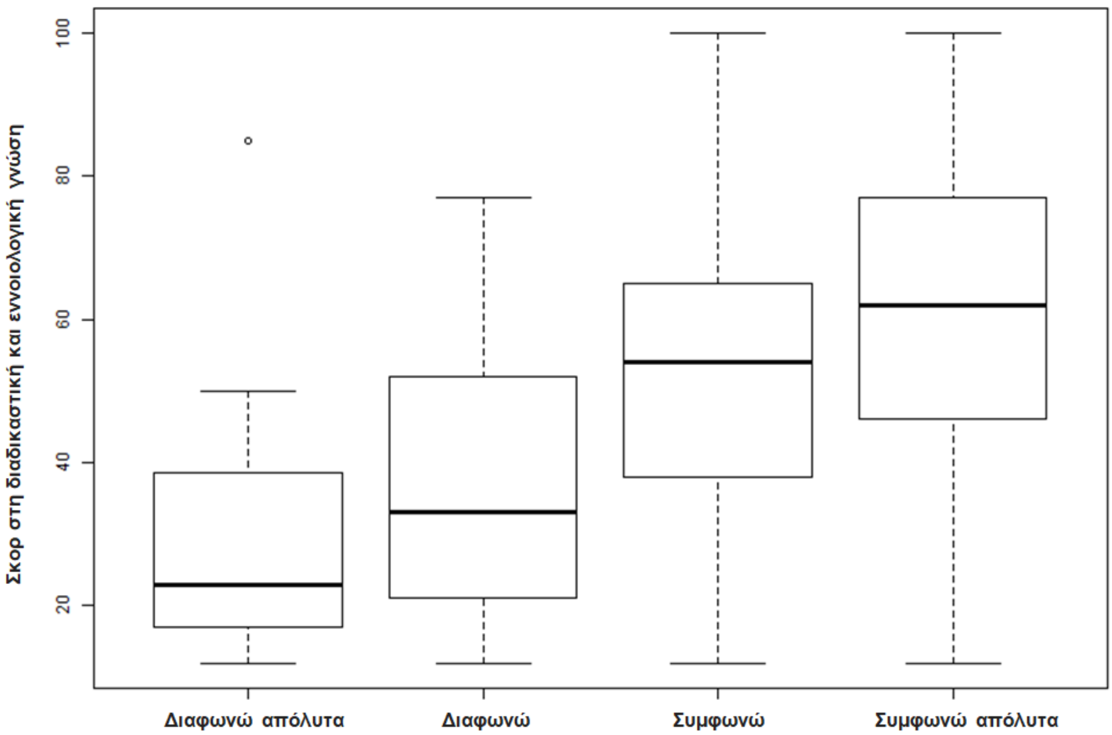
(Πίνακας 4-25) από τον οποίο προέκυψε ότι όλα τα ζεύγη εκτός από το *Συμφωνώ απόλυτα* με *Συμφωνώ* παρουσιάζουν στατιστικά σημαντικές διαφορές (p-value <0.05)

Πίνακας 4-25: Σύγκριση ζευγών με τη χρήση του Wilcoxon rank sum test για τις διαφορές στην αυτοαξιολόγηση επίδοσης στα κλάσματα

	Διαφωνώ απόλυτα	Διαφωνώ	Συμφωνώ
Διαφωνώ απόλυτα	**0.1610**		
Συμφωνώ	0.0001	<0.0001	
Συμφωνώ απόλυτα	<0.0001	<0.0001	0.0004

Παρατηρούμε, ότι όσο υψηλότερη επίδοση είχαν οι μαθητές στα δύο είδη γνώσης, τόσο μεγαλύτερο βαθμό, κατά δήλωσή τους, συγκέντρωσαν στην ερώτηση για την αυτοαξιολόγηση της κατανόησής τους στα κλάσματα. Δηλαδή, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι οι μαθητές με υψηλότερη επίδοση στα δύο είδη γνώσης διακρίνονται από καλύτερη αυτεπίγνωση της κατανόησης τους στα κλάσματα (awareness).

Σχήμα 4-10: Διάμεση διαδικαστική και εννοιολογική γνώση στα τέσσερα επίπεδα της αυτοαξιολόγησης επίδοσης στα κλάσματα



Πιο συγκεκριμένα, το 87,04% που δήλωσε ότι έχει κατανοήσει τα κλάσματα (*Συμφωνώ/Συμφωνώ απόλυτα*) παρουσίασε μέση επίδοση συνολικά στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση 56.16, ενώ το 12.96% που δήλωσε ότι δεν έχει κατανοήσει τα κλάσματα (*Διαφωνώ/Διαφωνώ απόλυτα*) παρουσίασε μέση επίδοση 35.35% (Σχήμα 4-10).

Επίσης, ο στατιστικός έλεγχος έδειξε ότι το επίπεδο ανάπτυξης της διαδικαστικής γνώσης σχετίζεται σημαντικά με επίπεδο αυτοαξιολόγησης επίδοσης στα κλάσματα (Kruskal-Wallis χ^2= 60.519, df = 3, p-value<0.0001). Δηλαδή όσο υψηλότερη είναι η διαδικαστική γνώση των μαθητών, τόσο καλύτερα φαίνεται να αξιολογούν οι μαθητές τη γνώση τους για τα κλάσματα. Ο αντίστοιχος στατιστικός έλεγχος για την ύπαρξη σχέσης ανάμεσα στη εννοιολογική γνώση και αυτοαξιολόγηση επίδοσης στα κλάσματα έδειξε ότι το επίπεδο ανάπτυξης της εννοιολογικής γνώσης σχετίζεται σημαντικά με το το επίπεδο ανάπτυξης της αυτεπίγνωσης επίδοσης (Kruskal-Wallis χ^2= 19.831, df = 3, p-value<0.0001).

Συμπεραίνουμε ότι το επίπεδο ανάπτυξης της διαδικαστικής/εννοιολογικής γνώσης σχετίζεται σημαντικά με επίπεδο αυτοαξιολόγησης επίδοσης στα κλάσματα. Όσο περισσότερο/λιγότερο ανεπτυγμένα έχουν τα δύο είδη γνώσης (διακριτά), τόσο πιο υψηλή/χαμηλή επίδοση έχουν στην ερώτηση.

4.2.3.4.2 *Έλεγχος αυτεπίγνωσης επίδοσης στα κλάσματα*

Ο Πίνακας 4-26 και το Σχήμα 4-11 παρουσιάζουν την απόλυτη και ποσοστιαία κατανομή αντίστοιχα στις τέσσερις συστάδες με βάση τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση. Η ομάδα κατάταξης με βάση τα επίπεδα διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης σχετίζεται στατιστικά σημαντικά με το επίπεδο της αυτοαξιολόγησης της κατανόησης στα κλάσματα (Pearson's Chi-squared test χ^2= 72.185, df = 9, p-value<0.0001).

Πίνακας 4-26: Αυτοαξιολόγηση κατανόησης στα κλάσματα ανά συστάδα

Αυτοαξιολόγηση κατανόησης στα κλάσματα	Διαφωνώ απόλυτα	Διαφωνώ	Συμφωνώ	Συμφωνώ απόλυτα	Σύνολο
«Υψηλά και στα δύο»	1	7	66	82	156
«Ισχυρότερη διαδικαστική»	3	12	91	86	192
«Ισχυρότερη εννοιολογική»	7	16	26	7	56
«Χαμηλά και στα δύο»	5	9	28	17	59
Σύνολο	16	44	211	192	463

Παρακάτω παρουσιάζονται οι τιμές των Pearson residuals. Η πιο ισχυρή θετική συσχέτιση παρατηρείται ανάμεσα στα ζεύγη: *«Ισχυρότερη εννοιολογική»*/*Διαφωνώ* και

«Ισχυρότερη εννοιολογική»/Διαφωνώ απόλυτα. Η πιο ισχυρή αρνητική συσχέτιση παρατηρείται ανάμεσα στα ζεύγη *«Ισχυρότερη εννοιολογική»/Συμφωνώ* και *«Υψηλά και στα δύο»/Διαφωνώ*.

Πίνακας 4-27: Pearson residuals για τη συσχέτιση επίδοσης στην προσέγγιση στη μάθηση και συστάδας

	Διαφωνώ απόλυτα	Διαφωνώ	Συμφωνώ	Συμφωνώ απόλυτα
«Υψηλά και στα δύο»	-1.891	-2.032	-0.604	2.152
«Ισχυρότερη διαδικαστική»	-1.411	-1.462	0.374	0.715
«Ισχυρότερη εννοιολογική»	3.641	4.629	0.095	-3.366
«Χαμηλά και στα δύο»	2.074	1.433	0.215	-1.509

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι παρόλο που οι συστάδες *«Ισχυρότερη εννοιολογική»* και *«Χαμηλά και στα δύο»* παρουσίασαν παρόμοια χαμηλή επίδοση στο πρώτο ερωτηματολόγιο, φαίνεται ότι η συστάδα *«Ισχυρότερη εννοιολογική»* έχει καλύτερη επίγνωση της κατανόησής της στα κλάσματα. Αυτή η παρατήρηση προκύπτει από τα ζεύγη *«Χαμηλά και στα δύο»/Συμφωνώ* και *«Χαμηλά και στα δύο»/Συμφωνώ απόλυτα* που παρουσίασαν υψηλότερες συσχετίσεις από τις αντίστοιχες της συστάδας *«Ισχυρότερη εννοιολογική»* (Πίνακας 4-27).

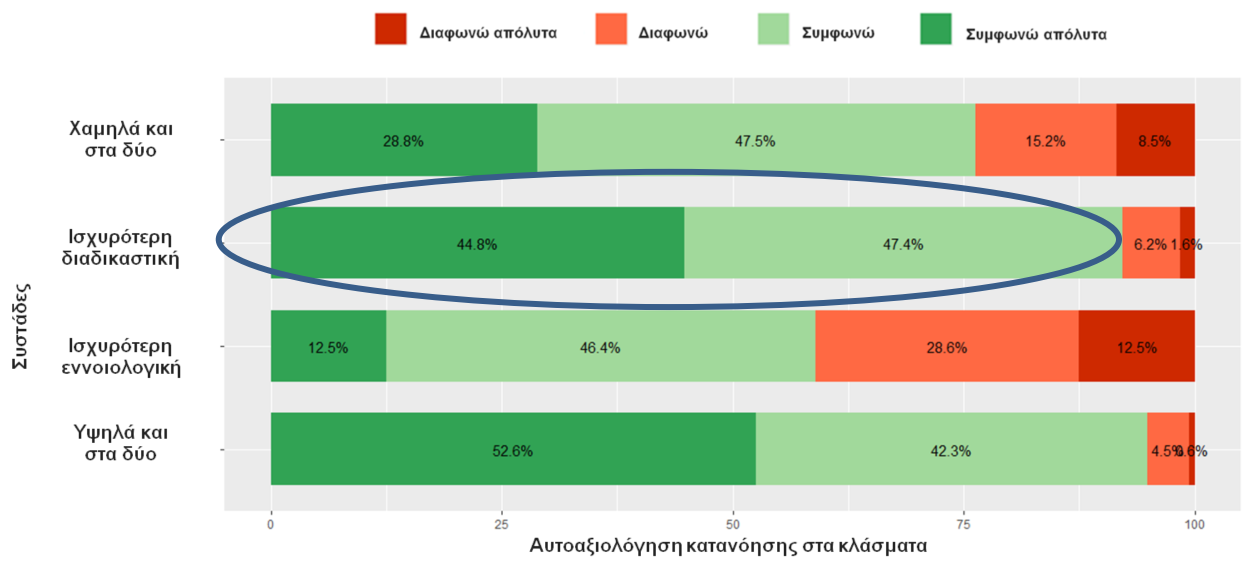
Πίνακας 4-28: Συνεισφορά σε ποσοστό (%) κάθε κελιού στην συνολική τιμή του Chi-square score

	Διαφωνώ απόλυτα	Διαφωνώ	Συμφωνώ	Συμφωνώ απόλυτα
«Υψηλά και στα δύο»	4.955	5.722	0.505	6.416
«Ισχυρότερη διαδικαστική»	2.759	2.962	0.194	0.708
«Ισχυρότερη εννοιολογική»	18.363	29.682	0.012	15.699
«Χαμηλά και στα δύο»	5.958	2.845	0.064	3.157

Παραπάνω φαίνεται και η συνεισφορά σε ποσοστό (%) κάθε κελιού στη συνολική τιμή του Chi-square score (Πίνακας 4-28).

Από τη συστάδα *«Ισχυρότερη διαδικαστική»*, μόνο το 7.7% δήλωσε ότι δεν έχει κατανοήσει τα κλάσματα, συγκρίσιμο αποτέλεσμα με το ποσοστό 5% της συστάδας *«Υψηλά και στα δύο»*, που δήλωσε ότι δεν έχει κατανοήσει τα κλάσματα (*Διαφωνώ απόλυτα/Διαφωνώ*). Μεγάλο ήταν το ποσοστό των μαθητών που ανήκουν στη συστάδα *«Ισχυρότερη εννοιολογική»* (41.1%) που κατά δήλωσή τους, δεν έχουν καταλάβει τα κλάσματα, δήλωση συμβατή με τη γενικά χαμηλή τους επίδοση στο πρώτο ερωτηματολόγιο. Αντίθετα, από τους μαθητές που ανήκουν στο προφίλ *«Χαμηλά και στα δύο»*, μόνο το 23.6% δήλωσε ότι δεν έχει καταλάβει την ύλη των κλασμάτων. Παρατηρούμε ότι οι ομάδες διαφοροποιούνται σε ένα σημαντικό σημείο: οι μαθητές των ομάδων *«Υψηλά και στα δύο»* και *«Ισχυρότερη εννοιολογική»*, έχουν καλύτερη αυτεπίγνωση της κατανόησής τους για τα κλάσματα σε σχέση με τους μαθητές των ομάδων *«Ισχυρότερη διαδικαστική»* και *«Χαμηλά και στα δύο»* με το δεδομένη ότι η εκτίμησή τους συμβαδίζει με την επίδοσή τους στο ερωτηματολόγιο για τα κλάσματα (Σχήμα 4-11).

Σχήμα 4-11: Ποσοστό μαθητών στα τέσσερα επίπεδα αυτοαξιολόγησης κατανόησης στα κλάσματα ανά συστάδα



4.2.4 Γενικότερα συμπεράσματα

Τα αποτελέσματά μας έδειξαν ότι η επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση είναι υψηλότερη για την Α΄ Γυμνασίου από ό,τι για τη Γ΄ Γυμνασίου. Μία πιθανή ερμηνεία είναι ότι οι μαθητές, κατά τη διάρκεια της σχολικής τους πορείας, τείνουν να ακολουθούν πιο επιφανειακή προσέγγιση στη μάθηση εστιάζοντας κυρίως στην αξιολόγηση. Επιπλέον, η επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση συσχετίζεται θετικά με τη συνολική επίδοση στα κλάσματα. Όσο καλύτερη η επίδοση στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση για τα κλάσματα, τόσο υψηλότερη η επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση, δηλαδή τόσο πιο βαθιά η προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών. Επιπλέον, αναδεικνύονται διαφορές στην προσέγγιση στη μάθηση από σχολείο σε σχολείο, με τους μαθητές του Πειραματικού σχολείου να σημειώνουν τις καλύτερες επιδόσεις. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σημαντικό γιατί αναδεικνύει την ισχύ του δεύτερου εργαλείου για τον σκοπό που κατασκευάστηκε, με την έννοια ότι η ομάδα μαθητών του Πρότυπου Πειραματικού σχολείου με την καλύτερη επίδοση στη διαδικαστική και εννοιολογική επίδοση στα κλάσματα παρουσίασε και την υψηλότερη επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών. Ο έλεγχος προγνωστικών παραγόντων έδειξε ότι η επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση μπορεί να προβλέψει την πιθανότητα του ανήκειν στις συστάδες *«Υψηλά και στα δύο»* και *«Ισχυρότερη διαδικαστική»* αλλά όχι στη συστάδα *«Ισχυρότερη εννοιολογική»* με την επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση για τη συστάδα αυτή να είναι η δεύτερη χαμηλότερη. Το παραπάνω αποτέλεσμα υποστηρίζει μερικώς την υπόθεσή μας ότι οι μαθητές με προχωρημένη εννοιολογική τους γνώση ακολουθούν βαθιά προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών. Τέλος, διαφαίνεται ότι οι μαθητές που ανήκουν στα προφίλ *«Υψηλά και στα δύο»* και *«Ισχυρότερη εννοιολογική»* έχουν καλύτερη επίγνωση της επίδοσής τους στα κλάσματα από τους μαθητές που ανήκουν στο προφίλ *«Ισχυρότερη διαδικαστική»*, αποτέλεσμα συμβατό με την υπόθεση μας.

5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα διατριβή εξετάσαμε τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση για τα κλάσματα σε μαθητές Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου και διερευνήσαμε την προσέγγισή τους στη μάθηση των μαθηματικών. Για την αξιολόγηση της γνώσης στα κλάσματα και την προσέγγιση στη μάθηση χρησιμοποιήσαμε δύο καινούργια εργαλεία που κατασκευάσαμε και αξιολογήσαμε για τον σκοπό αυτό. Οι δύο κεντρικές μας υποθέσεις ήταν ότι: α) υπάρχουν δι-ατομικές διαφορές στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση μαθητών Γ΄ Γυμνασίου για τα κλάσματα και ότι οι διαφορές αυτές παραμένουν ακόμα και στη Γ΄ Γυμνασίου και β) οι διαφορές αυτές εξηγούνται από διαφορές στη μάθηση των μαθηματικών (επιφανειακή/βαθιά προσέγγιση).

Πράγματι, τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στα δύο είδη γνώσης, αποτέλεσμα συμβατό με τα αυτά προηγούμενων μελετών (Hallett et al., 2010, 2012) που έγιναν σε μικρότερα παιδιά (Δ΄, Ε΄, ΣΤ΄ Δημοτικού και Β΄ Γυμνασίου). Η τεκμηρίωση δι-ατομικών διαφορών στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση για τα κλάσματα, ακόμη και ακραίων σε μεγαλύτερα παιδιά, αναδεικνύει τους περιορισμούς της επικρατούσας άποψης περί παράλληλης ανάπτυξης των δύο ειδών γνώσης (Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Οι Rittle-Johnson και Schneider (2015; βλ. επίσης Rittle-Johnson, Schneider & Star, 2011) αναγνωρίζουν, κατά κάποιο τρόπο, την ύπαρξη δι-ατομικών διαφορών στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση ισχυριζόμενοι ότι το γεγονός ότι τα δύο είδη γνώσης αναπτύσσονται παράλληλα δε σημαίνει ότι: «τα δύο είδη γνώσης είναι ισόποσα ανεπτυγμένα οποιαδήποτε χρονική στιγμή» (Rittle-Johnson & Schneider, 2015, σελ. 590). Ωστόσο, στην παρούσα μελέτη, δεδομένης της ηλικίας και του επιπέδου εκπαίδευσης των συμμετεχόντων μας καθώς και του γεγονότος ότι οι μαθητές στο ελληνικό πλαίσιο εκτίθενται στη διδασκαλία των κλασμάτων από τη Γ΄ Δημοτικού, θα αναμέναμε μία πιο συμμετρική σχέση των δύο ειδών γνώσης. Συγκεκριμένα, οι ασυμμετρίες που προέκυψαν από την Κύρια Έρευνα Ι, με πάνω από τους μισούς μαθητές να ανήκουν στα δύο προφίλ *«Ισχυρότερη διαδικαστική»* και *«Ισχυρότερη εννοιολογική»*, δεν μπορούν να εξηγηθούν ικανοποιητικά από το επαναληπτικό μοντέλο, ιδιαίτερα αν ληφθούν υπόψη και οι «ακραίες» περιπτώσεις μαθητών που εντοπίστηκαν μέσα στα δύο προφίλ. Μία ερμηνεία που θα μπορούσαμε να δώσουμε είναι ότι η βελτίωση του ενός είδους γνώσης δεν οδηγεί *απαραίτητα* στη βελτίωση του άλλου είδους γνώσης (Hallett et al., 2010, 2012) και ότι η ισορροπία στην ανάπτυξη των δύο ειδών γνώσης δεν είναι βέβαιο ότι θα επιτευχθεί στην πορεία του σχολικού χρόνου.

Σημαντικό ρόλο στην πρώτη φάση της μελέτης μας έχει η κατασκευή ερευνητικού εργαλείου για τη μέτρηση της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης αξιολογημένου ως προς την εγκυρότητα και την αξιοπιστία που, εξ όσων γνωρίζουμε, δεν υπάρχει αντίστοιχο στη βιβλιογραφία. Η δυσκολία κατασκευής τέτοιου είδους εργαλείων σχετίζεται με τους αναγνωρισμένους περιορισμούς να κατασκευαστούν έργα που θα μετρούν το ένα είδος γνώσης ανεξάρτητα από το άλλο.

Στην Κύρια Έρευνα ΙΙ, αναζητώντας πιθανούς παράγοντες στους οποίους θα μπορούσε να αποδοθεί η σημαντική ασυμμετρία στην ανάπτυξη των δύο ειδών γνώσεων, διερευνήσαμε την προσέγγιση στη μάθηση των μαθητών. Όπως έχει ήδη συζητηθεί, ενώ εξετάστηκαν διάφορες παραμέτροι στις οποίες πιθανόν οφείλονται τέτοιου είδους ατομικές διαφορές, η μέχρι τώρα έρευνα δεν έχει τελεσφορήσει (Canobi, 2004; Gilmore & Bryant, 2008; Hallett et al., 2012; Schneider et al., 2011). Η διάκριση μεταξύ βαθιάς και επιφανειακής προσέγγισης στη μάθηση υπόκειται όλων των σχετικών θεωρητικών μοντέλων, παρά τις όποιες διαφορές όσον αφορά τις συνιστώσες τους που προτείνονται από κάθε διαφορετική προσέγγισης (Entwistle et al., 2013; Pintrich et al., 1991). Η μέτρηση της προσέγγισης στη μάθηση έγινε μέσω ενός νέου εργαλείου που κατασκευάσαμε αξιοποιώντας αποτελέσματα προηγούμενων μελετών. Σκοπός μας, στη φάση αυτή, δεν ήταν η διαμόρφωση και αξιολόγηση ενός θεωρητικού μοντέλου για την προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών, αλλά η ποσοτικοποίηση της προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών με όρους επίδοσης σε συγκεκριμένες ερωτήσεις-σενάρια που διαχωρίζουν τις περισσότερο από τις λιγότερο ευνοϊκές προσεγγίσεις στη μάθηση, συμβατές με την επιφανειακή και βαθιά προσέγγιση αντίστοιχα, όπως έχουν αναδειχθεί από προηγούμενες μελέτες (π.χ., Stathopoulou & Vosniadou, 2007) και αναδυθεί σε προηγούμενες ποιοτικές μας έρευνες εστιασμένες στην προσέγγιση της μάθησης των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Bempeni & Vamvakoussi, 2015; Bempeni et al., 2016; Μπεμπένη, Καλδρυμίδου, & Βαμβακούση, 2018). Το εργαλείο αυτό είχε ικανοποιητικούς δείκτες εγκυρότητας και αξιοπιστίας. Επιπλέον, το αποτέλεσμα ότι όσο πιο υψηλή ήταν η επίδοση συνολικά στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση, τόσο υψηλότερη η επίδοση στην προσέγγιση στη μάθηση, μπορεί να θεωρηθεί μια έμμεση θετική αξιολόγηση του εργαλείου. Με τη χρήση του εργαλείου αυτού, ελέγξαμε τη δεύτερη κεντρική υπόθεση ότι η προσέγγιση στη μάθηση σχετίζεται με το προφίλ με βάση τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση στο οποίο ανήκουν οι μαθητές, συλλέγοντας ποσοτικά δεδομένα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η επίδοση στο ερωτηματολόγιο για την προσέγγιση στη μάθηση προβλέπει την πιθανότητα να ανήκουν οι μαθητές στις ομάδες *«Υψηλά και στα δύο»* και *«Ισχυρότερη διαδικαστική»* με τους μαθητές της πρώτης ομάδας να παρουσιάζουν υψηλότερη επίδοση από τους μαθητές της δεύτερης ομάδας. Δεδομένου ότι δεν προβλέπεται η πιθανότητα να ανήκει ένας μαθητής στην ομάδα *«Ισχυρότερη εννοιολογική»*, τα αποτελέσματα στηρίζουν μερικώς την υπόθεσή μας. Τέλος, τα αποτελέσματα της μελέτης μας έδειξαν ότι οι μαθητές που ανήκουν στα προφίλ «*«Υψηλά και στα δύο»* και *«Ισχυρότερη εννοιολογική»* έχουν καλύτερη αυτεπίγνωση της κατανόησής τους, επιβεβαιώνοντας την υπόθεσή μας.

Συμπερασματικά, η καινοτομία της έρευνας αυτής έγκειται στη διαμόρφωσης μιας νέας υπόθεσης για τους παράγοντες που σχετίζονται με τις ατομικές διαφορές στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση και στην κατασκευή και αξιολόγηση δύο ερευνητικών εργαλείων. Ενώ υπάρχουν εργαλεία που μετρούν τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση για τα κλάσματα, αυτά δεν έχουν αξιολογηθεί με τον τυπικό τρόπο που προτείνεται στην παρούσα διατριβή. Επιπλέον, η κατασκευή και η αξιολόγηση του εργαλείου για τη μέτρηση της προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αποτελεί μία σημαντική συνεισφορά στην έρευνα δεδομένου ότι, εξ όσων γνωρίζουμε, απουσιάζει από τη βιβλιογραφία.

5.1 Συνεισφορά στην Εκπαίδευση

Τα ερευνητικά εργαλεία που κατασκευάστηκαν για τις ανάγκες της παρούσας διατριβής, είτε μεμονωμένα, είτε συνδυαστικά, είναι χρήσιμα για την έρευνα στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ειδικότερα, το εργαλείο για τη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση των κλασμάτων μπορεί να αξιοποιηθεί στη διάγνωση των αναγκών του κάθε μαθητή (π.χ. έλλειμμα σε διαδικαστική και εννοιολογική γνώση), προκειμένου να διαφοροποιηθεί κατάλληλα η διδασκαλία που θα στοχεύει σε μία ισορροπημένη ανάπτυξη των δύο ειδών γνώσης. Ο εντοπισμός και η επίλυση προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε σχέση με τα κλάσματα είναι ιδιαίτερα σημαντικός, δεδομένης της διαπιστωμένης δυσκολίας στα κλάσματα και της σημασίας της κατανόησής τους για τη γενικότερη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών (π.χ. Vamvakoussi, Van Dooren, Verschaffel., 2012). Το εργαλείο για την προσέγγιση στη μάθηση δύναται να διακρίνει τους μαθητές, με τις περισσότερο ευνοϊκές, από αυτούς με τις λιγότερο ευνοϊκές προσεγγίσεις στη μάθηση των μαθηματικών και μπορεί να χρησιμοποιηθεί μεμονωμένα από τους εκπαιδευτικούς με σκοπό τη δημιουργία κατάλληλου περιβάλλοντος που θα στεχεύει στη βελτίωση της προσέγγισής τους στη μάθηση των μαθηματικών (στρατηγικές μάθησης, αυτορρύθμιση κ.λ.π.) (Postareff, Paspala, & Lindblom-Ylänne, 2015).

5.2 Περιορισμοί της έρευνας – Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Η κατασκευή ενός εργαλείου που μετρά την εννοιολογική γνώση, όπως περιγράψαμε αναλυτικά, δεν είναι μία εύκολη υπόθεση. Η αυστηρή αξιολόγηση του εργαλείου μας ως προς την εγκυρότητα και την αξιοπιστία μας ανάγκασε να εξαιρέσουμε ένα σημαντικό αριθμό εννοιολογικών έργων. Όπως προέκυψε από τη μελέτη μας, κάποια εννοιολογικά έργα είναι ακατάλληλα για να μετρήσουν τα δύο είδη γνώσης με διακριτό τρόπο με αποτέλεσμα το εργαλείο που κατασκευάσαμε να περιορίζεται σε κάποιες από τις πτυχές της εννοιολογικής γνώσης.

Η «αιτία» των δι-ατομικών διαφορών στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση αποτελεί ακόμα ένα ανοιχτό ζήτημα, παρά τις υποθέσεις που ελέγχθηκαν και επιβεβαιώθηκαν στο πλαίσιο της μελέτης μας. Ένα σημαντικό θέμα είναι αυτό της μεθόδου με τα κατάλοιπα που ακολουθήθηκε για τη δημιουργία προφίλ, η οποία μας δίνει μεν τη δυνατότητα να ομαδοποιήσουμε τους μαθητές με βάση την επίδοση στο ένα είδος γνώσης δεδομένης της επίδοσης στο άλλο είδος γνώσης, αλλά έχει κάποιους περιορισμούς. Συγκεκριμένα, προϊόν της μεθόδου αυτής ήταν η δημιουργία της ομάδας *«Ισχυρότερη εννοιολογική»* η οποία περιλάμβανε μαθητές με υψηλότερη εννοιολογική γνώση με βάση την επίδοσή τους στη διαδικαστική, αλλά με γενικά χαμηλή επίδοση σε απόλυτους όρους από ό,τι η ομάδα *«Ισχυρότερη διαδικαστική»*. Συνακόλουθα, αυτή είναι πιθανά μία εξήγηση που η επίδοση στο δεύτερο ερωτηματολόγιο για την ομάδα αυτή ήταν χαμηλότερο από αυτό των ομάδων *«Ισχυρότερη διαδικαστική»* και *«Υψηλά και στα δύο»* και επιπλέον που δεν μπορούσε να προβλεφθεί η πιθανότητα του ανήκειν στην ομάδα *«Ισχυρότερη εννοιολογική»*. Η χρήση διαφορετικών μεταβλητών στη μέθοδο της ανάλυσης συστάδων, ή ένας εναλλακτικός τρόπος ομαδοποίησής τους ίσως μπορούσε να άρει αυτόν τον περιορισμό (Lentz & Wittman, 2021).

Το εργαλείο για τη μέτρηση της προσέγγισης στη μάθηση αποτελεί μία επιπλέον συνεισφορά της παρούσας διδακτορικής διατριβής. Το εργαλείο αυτό μετράει με όρους επίδοσης τον βαθμό της συμφωνίας του μαθητή με δηλώσεις οι οποίες, με βάση την προϋπάρχουσα έρευνα, είναι συμβατές με την επιφανειακή ή τη βαθιά προσέγγιση στη μάθηση. Με αυτόν τον τρόπο, επιτρέπει μια πρώτη διερεύνηση της προσέγγισης στη μάθηση με σχετικά απλό τρόπο, που μπορεί να εφαρμοστεί σε μικρή ή και σε μεγαλύτερη κλίμακα. Το εργαλείο αυτό υπόκειται στους περιορισμούς της αυτο-αναφορικότητας, καθώς οι μαθητές δηλώνουν οι ίδιοι στοιχεία που τους αφορούν (για παράδειγμα, για τις στρατηγικές μελέτης τους). Θα πρέπει να επίσης σημειωθεί ότι το εργαλείο αυτό δε βασίζεται, και άρα δεν ελέγχει, ένα πλήρως αναπτυγμένο θεωρητικό μοντέλο για την προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, κάτι που ήταν πέρα από τους στόχους της παρούσας διατριβής. Όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία (π.χ. Cano & Berben, 2009) και έχει προκύψει και από προηγούμενες μελέτες μας (Bempeni et al., 2016) το κατασκεύασμα *προσέγγιση στη μάθηση* είναι πολυδιάστατο και αλληλοκαλύπτεται από άλλα κατασκευάσματα όπως την *αυτορρυθμιζόμενη μάθηση*. Το ζήτημα αυτό θα ήταν χρήσιμο να μελετηθεί σε μελλοντική έρευνα.

6 Βιβλιογραφία

Aldenderfer, M.S., & Blashfield R.K. (1984). Cluster Analysis. Sage Publications, Newbury Park.

Baeten, M., Kyndt E., Struyven K., & Dochy F. (2010). Using student-centred learning environments to stimulate deep approaches to learning: Factors encouraging or discouraging their effectiveness. *Educational Research Review, 5*, 243-260.

Bailey, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L., & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology, 113*, 447-455.

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 1–33). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Baroody, A. J., & Hume, J. (1991). Meaningful mathematics instruction: The case of fractions. *Remedial and Special Education,12*(3), 54–68.

Baroody, A. J., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. Journal for Research in Mathematics Education, 38, 115–131.

Bempeni M., Kaldrimidou M., & Vamvakoussi X. (2016). Features of the deep approach to mathematics learning: evidence from exceptional students. In Csíkos, C., Rausch, A., & Szitányi, J. (Eds.). *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 75–82. Szeged, Hungary: PME.

Bempeni, M., Poulopoulou S., Tsiplaki I., & Vamvakoussi X. (2018). Individual differences in fractions' conceptual and procedural knowledge: what about older students? In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 147-154. Umeå, Sweden: PME.

Bempeni, M., & Vamvakoussi X. (2014). Seventh and ninth graders' conceptual and procedural knowledge of fractions: what changes with school experience? Paper presented at the *9th International Conference on Conceptual Change*, Bologna, Italy.

Bempeni, M., & Vamvakoussi, X. (2015). Individual differences in students' knowing and learning about fractions: Evidence from an in-depth qualitative study. *Frontline Learning Research, 3,* 17-34.

Berger, J. L., & Karabenick, S. A. (2011). Motivation and students' use of learning strategies: Evidence of unidirectional effects in mathematics classrooms. *Learning and Instruction, 21,* 416 – 428. doi:10.1016/ j.learninstruc.2010.06.002

Biggs, J. B. (1987). *Study process questionnaire manual.* Melbourne: Australian Council for Educational Research.

Biggs, J. (1993). What do inventories of students' learning processes really measure? A theoretical review and clarification. *Br. J. Educ. Psychol.* 63: 3–19.

Biggs, J. (2001). Enhancing learning: A matter of style of approach? In Sternberg, R., and Zhang, L. (eds.), *Perspectives on Thinking, Learning, and Cognitive Styles,* Erlbaum, Mahwah, NJ, pp. 73–102.

Biggs, J., Kember, D., & Leung, D. (2001). The revised two factor study process questionnaire: R-SPQ-2F. *British Journal of Educational Psychology, 71,* 133–149

Byrne, M., Flood, B. & Willis, P. (2002). Approaches to learning of European business students. *Journal of Further and Higher Education, 26,* 19-28.

Byrnes, J. P., & Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental Psychology, 27* (5), 777-786.

Byrnes, J. P. (1992). The conceptual basis of procedural learning. *Cognitive Development, 7,* 235-257.

Boekaerts, M., Pintrich, P.R. & Zeidner, M. (Eds) (2005) Handbook of Self-Regulation. (First published 2000) Burlington, MA: Academic Press.

Booth, J. L., & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology, 37,* 247-253.

Calinski, R. B., & Harabasz, J. (1974). A dendrite method for cluster analysis. *Communications in Statistics, 3,* 1-27.

Cano, F., & Berbén, A. B. G. (2009). University students' achievement goals and approaches to learning in mathematics. *British Journal of Educational Psychology, 79*(1), 131–153.

Canobi, K. H. (2004). Individual differences in children's addition and subtraction knowledge. *Cognitive Development, 19,* 81-93.

Chin, C., & Brown, D. (2000). Learning in Science: A comparison of Deep and Surface Approaches. *Journal of Research in Science Teaching, 37,* 109-138.

Chiu, M. S. (2012). Identification and assessment of Taiwanese children’s conceptions of learning mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10,* 163-191.

Clarke, D. M., & Roche A. (2009). Students’ fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics, 72*(1) (June 12): 127-138.

Cohen, J., Cohen, P., West, S.G., & Aiken, L.S. (2003). *Applied multiple regression.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cramer, K., & Wyberg, T. (2009). Efficacy of different concrete models for teaching the part-whole construct for fractions. *Mathematical Thinking and Learning, 11*(4), 226–257.

Crooks N., & Alibali M. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics, *Developmental Review,* 34*(4),* 344-377, doi: 10.1016/j.dr.2014.10.001.

Cronbach L. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, *6*, 297–334.

Crawford K., Gordon S., Nicholas J., & Prosser M. (1994). Conceptions of mathematics and how it is learned: the perspectives of students entering university. *Learning and Instruction. 4,* 331-345.

Crawford K., Gordon S., Nicholas J., & Prosser M. (1998) Qualitatively different experiences of learning mathematics at university. *Learning and Instruction. 5,* 455–468.

De Corte, E. (2004). Mainstreams and perspectives in research on learning (mathematics) from instruction. Applied Psychology: An international review, 53(2), 279-310.

DeJong, T., & Ferguson - Hessler, BM.(1996). Types and qualities of knowledge. *Educational Psychologist, 31,* 105 –113.

Dyne, A., Taylor, P., and Boulton-Lewis, G. (1994). Information processing and the learning context: An analysis from recent perspectives in cognitive psychology. *Br. J. Educ. Psychol.* 64: 359–372.

Duncan, T. G., & McKeachie, W. J. (2005). The Making of the Motivated Strategies for Learning Questionnaire. *Educational Psychologist, 40,* 117-128.

Donald, M. (2001). *A mind so rare: The evolution of human consciousness*. London, England: W. W. Norton & Company.

Entwistle, N.J. (1988) 'Motivational factors in students' approaches to learning', in R.R.Schmeck (ed.) *Learning Strategies and Learning Styles,* New York: Plenum

Entwistle, N. (2007). Conceptions of learning and the experience of understanding: Thresholds, contextual influences, and knowledge objects. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), Reframing the conceptual change approach in learning and instruction (pp. 123-143). Oxford, UK: Elsevier.

Entwistle, N. (2000). Promoting deep learning through teaching and assessment: Conceptual frameworks and educational contexts. *Paper presented at the first annual conference of the Teaching and Learning Research Programme. Leicester*. Ανακτήθηκε από http://www.etl.tla.ed.ac.uk/publications.html

Entwistle, N., & McCune, V. (2004). The conceptual bases of study strategy inventories. *Educational Psychology Review, 16*(4), 315–345.

Entwistle, N., & McCune, V. (2009). The disposition to understand for oneself at university and beyond: learning processes, the will to learn and sensitivity to context. In L. Zang and R. Sternberg (Eds.) Perspectives on the nature of intellectual styles (pp. 29-62). New York: Springer.Entwistle, N. & McCune V. (2004). The conceptual bases of study strategy inventories. *Educational Psychology Review, 16,* 325-345.

Entwistle, N., McCune, V., & Hounsell, J. (2003). Investigating ways of enhancing university teaching-learning environments: Measuring students' approaches to studying and perceptions of teaching. In E. De Corte, L. Verschaffel, N. Entwistle, & J. van Merrienboer (Eds.), *Unravelling basic components and dimensions of powerful learning environments* (pp. 89-107). Oxford, UK: Elsevier.

Entwistle, N., McCune, V., & Tait, H. (2013). *Approaches and Study Skills Inventory for Students* (ASSIST) (3rd edition). Ανακτήθηκε από https://www.researchgate.net/publication/50390092

Entwistle, N.J. & Ramsden, P. (1983) *Understanding Student Learning,* London: Groom Helm.

Entwistle, N., McCune V., & Sheja M. (2006). “Student Learning in Context: Understanding the Phenomenon and the Person.” In Instructional Psychology. Past, Present, and Future Trends: Sixteen Essays in Honour of Eric De Corte, 131– 148. Amsterdam: Elsevier

Faulkenberry, T. J. (2013). The conceptual/procedural distinction belongs to strategies, not tasks: A comment on Gabriel et al.(2013). *Frontiers in Psychology, 4,* 1-2. doi: 10.3389/fpsyg.2013.00820

Flegg, J., Mallet, D., & Lupton, M. (2012). Students' perceptions of the relevance of mathematics in engineering. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43*(6), 717-732.

Fuson, K.C., & Briars, D.J. (1990). Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first- and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 21,* 180-206.

García, T., Rodríguez C., Betts L., Areces D., & González-Castro P. (2016). How affective-motivational variables and approaches to learning predict mathematics achievement in upper elementary levels. *Learning and Individual Differences, 49,* 25-31.

Geary, D. C. (1994). Children’s mathematical development: Research and practical implications. Washington, DC: American Psychological Association.

Gilmore, C. K., & Bryant, P. (2006). Individual differences in children’s understanding of inversion and arithmetical skill. *British, Journal of Educational Psychology, 76,* 309–331.

Gilmore, C. K., & Bryant, P. (2008). Can children construct inverse relations in arithmetic? Evidence for individual differences in the development of conceptual understanding and computational skill. *British Journal of Developmental Psychology, 26,* 301–316

Glaser, R. (1991). Expertise and assessment. In M. C. Wittrock & E. L. Baker (Eds.), Testing and cognition. Englewood Cliffs, NJ: PrenticeHall.

Goldstone, R., L., & Kersten, A. (2003). *Concepts and categorization.* In I. B. Weiner (Ed.), Handbook of psychology (Vol. 4, pp. 599–621). Hoboken, NJ: Wiley.

Gray, E. M., & Tall D. O. (1991). Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking, *Proceedings of PME XIII, Assisi* Vol. II 72-79.

Hailikari, T., & Parpala, A. (2014). What Impedes or Enhances My Studying? The Interrelation between Approaches to Learning, Factors Influencing Study Progress and Earned Credits.

Teaching in Higher Education, 19, 812-824. https://doi.org/10.1080/13562517.2014.934348

Hallett, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology,* 102, 395–406. doi: 10.1037/a0017486

Hallett, D., Nunes, T., Bryant, P., & Thorpe, C. M. (2012). Individual differences in conceptual and procedural fraction understanding: The role of abilities and school experience. *Journal of Experimental Child Psychology, 113*, 469-486. doi: 10.1016/j.jecp.2012.07.009

Hazzi, O.A., & Maaldaon, I.S. (2015), "A pilot study: vital methodological issues", *Business: Theory and Practice, 16* (1), 53-62, doi: 10.3846/btp.2015.437.

Hecht, S. A., & Vagi, K. J. (2010). Sources of group and individual differences in emerging fraction skills. *Journal of Educational Psychology,* 102(4), 843–858.

Herrmann, McCune, & Bager-Elsborg (2017) «Approaches to learning as predictors of academic achievement: Results from a large scale, multi-level analysis», *Högre utbildning 7,* 29–42. http://dx.doi.org/10.23865/hu.v7.905

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert and P. Lefevre (Eds.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1996). Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition & Instruction, 14* (3), 251-283.

Jordan, N. C., Hansen, N., Fuchs, L. S., Siegler, R. S., Gersten, R., & Micklos, D. (2013). Developmental predictors of fraction concepts and procedures. Journal of Experimental Child Psychology, 116, 45-58. doi: 10.1016/j.jecp.2013.02.001

Karmiloff-Smith, A. (1992). Beyond modularity: A developmental perspective on cognitive science (2nd Ed.). Cambridge, MA: MIT Press.

Kember, D., & Leung, D. Y. (1998). The dimensionality of approaches to learning: An investigation with confirmatory factor analysis on the structure of the SPQ and LPQ. *British Journal of Educational Psychology, 68*(3), 395-407.

Kerslake, D. (1986). Children's strategies and errors. London: NFER-Nelson

Khezri azar, H., Lavasani, M.G., Malahmadi, E., & Amani, J. (2010). The role of selfefficacy, task value, and achievement goals in predicting learning approaches and mathematics achievement. *Procedia Social and Behavioral Sciences 5,* 942−947.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 49 - 84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Kieran, C. (2013). The false dichotomy in mathematics education between conceptual understanding and procedural skills: An example from algebra. In K. R. Leatham (Ed.), Vital directions for mathematics education research (pp. 153–171). New York: Springer.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press.

Lemonidis, C. & Pilianidis, N. (2020). The 8th Grade Students' Competencies in Alternating Different Symbolic Representations of Rational Numbers. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 15*(3), em0587. https://doi.org/10.29333/iejme/7865

Lemonidis, C., Tsakiridou, H., & Meliopoulou, I. (2018). In-Service Teachers' Content and Pedagogical Content Knowledge in Mental Calculations with Rational Numbers. *International Journal of Science and Mathematics Education, 16*(6), 1127-1145. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9822-6

Lenz, K., Dreher, A., Holzäpfel, L., & Wittmann, G. (2019). Are conceptual and procedural knowledge empirically separable? - The case of fractions. *British Journal of Educational Psychology, 90*(3). https://doi:10.1111/bjep.12333

Lenz K., & Wittmann G. (2021). Individual Differences in Conceptual and Procedural Fraction Knowledge: What Makes the Difference and What Does it Look Like? *International Electronic Journal of Mathematics Education, 16*(1), em0615. https://doi.org/10.29333/iejme/9282

Lynn M.R. (1986). Determination and quantification of content validity. *Nurs Res., 35*(6), 382–385.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12,* 2-8.

Marton, F. and Säljö, R. (1976) ‘On qualitative differences in learning. II— Outcome as a function of the learner’s conception of the task’, *British Journal of Educational Psychology 46*, 115–27.

Matic, L.J., Matic, I., & Katalenic, A. (2013). Approaches to learning mathematics in engineering study program. In M. Pavlekovic, Z. Kolar-Begovic, & R. Kolar-Super (Eds.) Mathematics teaching for the future (pp. 186-195). Element.

Medin, D. L. (1989). Concepts and conceptual structure. *American Psychologist, 44,* 1469–1481.

Meyer, J. H. F. (1991). Study orchestration: The manifestation, interpretation and consequences of contextualised approaches to studying. *Higher Education, 22,* 297-316.

Moss, J. (2005). “Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system”. *In How students learn: Mathematics in the classroom,* Edited by: Donovan, M. S. and Bransford, J. D. 121–162. Washington, DC: National Academic Press.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children’s understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum, *Journal for Research in Mathematics Education, 30,* 122-147.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2007). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning.* Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

Nùnez, J. C., Cerezo, R., Bernardo, A., Rosàrio, P., Valle, A., Fernàndez, E., et al (2011). Implementation of training programs in self-regulated learning strategies in Moodle format: results of an experience in higher education. *Psicotherma, 23*(2), 274-281

Nunes, T., & Bryant, P. (2015). The development of mathematical reasoning. In L. S. Liben, U. Müller, & R. M. Lerner (Eds.), *Handbook of child psychology and developmental science* (7th ed., pp. 715–761). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Nunes T., Bryant P., Evans D., Barros R. Assessing quantitative reasoning in young children. *Mathematical Thinking and Learning.* 2015;17(2–3):178–196.

Pask, G. (1976). “Styles and strategies of learning,” *British Journal of Educational Psychology* 46: 128–148.

Parpala, A., Lindblom-Ylänne, S, Komulainen, E., & Entwistle N. (in press). Assessing students' experiences of teaching-learning environments and approaches to learning: validation of a questionnaire used in different countries and varying contexts. *Learning Environments Research, 16,* 201-215.

Peck, D. M., & Jencks, S. M. (1981). Conceptual issues in the teaching and learning of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*(5), 339-348.

Pintrich, P. R. (1989). "The dynamic interplay of student motivation and cognition in the college classroom," in *Advances in Motivation and Achievement*, Vol. 6, eds C. En Ames and M. L. Maher (Greenwich, CT: JAI Press), 117–160.

Pintrich, P. R. (2000). "The role of goal orientation in self-regulated learning," in *Handbook of Self-regulation,* eds M. Boekaerts, P. R. Pintrich, and M. Zeidner (San Diego, CA: Academic Press), 452–502.

Pintrich, P. R. (2004). A conceptual framework for assessing motivation and self-regulated learning in college students. *Educational Psychology Review, 16* (4), 385-407.

Pintrich, P. R., Smith, D., Garcia, T., and McKeachie, W. (1991). A Manual for the Use of the Motivated Strategies for Learning Questionnaire (MSLQ), The University of Michigan, Ann Arbor, MI.

Polit D.F, Beck C.T, & Owen S.V. (2007). Is the CVI an acceptable indicator of content validity? Appraisal and recommendations. *Res Nurs Health., 30*, 459-467.

Postareff L., Paspala, A., & Lindblom-Ylänne S. (2015). Factors contributing to changes in a deep approach to learning in different environments. *Learning Environ Res, 18,* 315-333.

Resnick, L. B. (1982). Syntax and semantics in learning to subtract. In T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romburg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 136–155). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Rittle-Johnson, B. & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, *91,* 175-189.

Rittle-Johnson B., & Koedinger. K. R. (2005). Designing knOWledge scaffolds to support mathematical problem solving. *Cognition and Instruction*, *23,* 313-349.

Rittle-Johnson B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. Kadosh & A. Dowker (Eds.), Oxford Handbook of Numerical Cognition (pp.1118-1134). Oxford: Oxford University Press.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*, 346-362.

Rittle-Johnson, B., & Siegler, R. S. (1998). The relations between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Ed.), The development of mathematical skill (pp. 75-110). Hove, England: Psychology Press.

Ramsden, P. (1990) Report to the Higher Education Performance Indicators Project on the Course Experience Questionnaire Trial, Wollongong, NSW: Centre for Technology and Social Change

Ramsden, P.(2003). Learning to Teach in Higher Education, 2nd ed., London: Taylor and Francis.

Reason, M. (2003). Relational, instrumental and creative understanding. *Mathematics teaching, 184,* 5-7.

Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 69*(3), 217-233.

Rinne, L., Ye, A. & Jordan, N. C. (2017) Development of fraction comparison strategies: A latent transition analysis. *Developmental Psychology 53*(4):713–30.

Rotgans, J. I., & Schmidt, H. G. (2012). The intricate relationship between motivation and achievement: Examining the mediating role of self-regulated learning and achievement-related classroom behaviours. International Journal of Teaching and Learning in Higher Education, 24(2), 197-208.

Säljö, R. (1979). *Learning in the learner's perspective. I. Some common-sense conceptions.* (Report 76). Gothenburg: University of Gothenburg, Department of Education.

Schneider. M., Rittle-Johnson B, & Star J. (2011). Relations among conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. *Journal of Developmental Psychology, 47*, 1525-1538.

Schneider, M., & Stern, E. (2010). The developmental relations between conceptual and procedural knowledge: A multimethod approach, *Developmental Psychology, 46,* 178-192.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M. I., & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science, 23,* 691-697. doi: 10.1177/0956797612440101

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2014). An integrative theory of numerical development. *Child Development Perspectives, 8*(3), 144-150.

Siegler, R. S., & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding fractions. *Developmental Psychology, 49,* 1994-2004. doi: 10.1037/a0031200

Siegler, R. S., & Stern, E. (1998). Conscious and unconscious strategy discoveries: A microgenetic analysis. *Journal of Experimental Psychology:* General, *127,* 377–397.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62,* 273-296. doi: 10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Skemp, R. R.: 1976, ‘Relational understanding and instrumental understanding’, *Mathematics Teacher, 77,* 20–26.

Smith, J. P., III. (2002). The development of students’ knowledge of fractions and ratios. In *Making sense of fractions, ratios, and proportions. 2002 yearbook* (pp. 3–17). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Smith, J. (1995). Competent reasoning with rational numbers. *Cognition and Instruction, 13* (1), 3-50.

Smith G., & Wood L. (2000). Assessment of learning in university mathematics, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 125-132.

Sophian, C. (1997). Beyond competence: The significance of performance for conceptual development. *Cognitive Development, 12,* 281–303.

Spada, M., & Giovanni B. M. (2012). “A Metacognitive-Motivational Model of Surface Approach to Studying.” *Educational Psychology 32* (1): 45–62.

Star, J.R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for research in mathematics education,* 404-411.

Star, J. R. (2007). Foregrounding procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 38,* 132–135.

Star, J. R., & Stylianides, G. J. S. (2013). Procedural and conceptual knowledge: Exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education, 13*(2), 169-181.

Stathopoulou, C., & Vosniadou, S. (2007). Conceptual change in physics and physics-related epistemological beliefs: A relationship under scrutiny. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), Reframing the conceptual change approach in learning and instruction (pp. 145-164). Oxford, UK: Elsevier.

Stelzer, F., Richard's, M.M., Andrés, M.L., Vernucci, S., & Introzzi, I. (2021). Cognitive and math-specific predictors of fraction conceptual knowledge. *Educational Psychology, 41*(2), 172–190. https://doi.org/10.1080/01443410.2019.1693508

Svensson, L. (1977). "On qualitative differences in learning: III - Study skill and learning," *British Journal of Educational Psychology* 47: 233–243.

Tait, H., Entwistle, N. J. & McCune, V. (1998). ASSIST: a reconceptualisation of the Approaches to Studying Inventory, *In Improving Student Learning*(Ed, Rust, C.) Oxford Centre for Staff and Learning Development, Oxford, 262-271.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: the case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(1), 5–25. https://doi.org/10.2307/7749817

Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: Characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education. *Educational Studies in Mathematics, 90,* 39 –56. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-015-9613-3

Vamvakoussi X., Bempeni M., Poulopoulou S., & Tsiplaki I. (2019). Theoretical and methodological issues in the study of conceptual and procedural knowledge: Reflections on a series of studies on Greek secondary students' knowledge of fractions. *Educational Journal of the University of Patras, 6*(2), p. 82-96. ISSN:2241-9152

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(3), 344-355.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14*(5), 453-467.

Van Teijlingen, E., & Hundley, V. (2002). The importance of pilot studies, 16(40), 33-36.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), Learning and teaching mathematics: An international perspective (pp. 5–28). Hove: The Psychology Press.

Vermetten, Y. J., Vermunt, J. D., & Lodewijks, H. G. (1999). A longitudinal perspective on learning strategies in higher education – Different view-points towards development. British *Journal of Educational Psychology, 69,* 221-242.

Ware J., & Gandek B. (1998). Methods for testing data quality, scaling assumptions and reliability: The IQOLA project approach., J Clin Epidemiol., 51, 945–952.

Wolters, C., & Pintrich, P. R. (1998). Contextual differences in student motivation and self-regulated learning in mathematics, English, and social studies classrooms. *Instr. Sci. 26*, 27–47.

Yang. D., C., Reys, R., & Reys, B. (2007). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7,* 383-403.

Zeegers, P. (2004). Student learning in higher education: A path analysis of academic achievement in science. *Higher Education Research and Development*, *23*(1), 35–56.

Zimmerman, B. J. (2008). Investigating self-regulation and motivation: Historical background, methodological developments, and future prospects. *American Educational Research Journal, 45,* 166 –183. doi: 10.3102/0002831207312909

Μπεμπένη Μ., & Βαμβακούση Ξ. (2014). Εννοιολογική και διαδικαστική γνωση για τα κλασματα στην Α΄ και Γ΄ γυμνασιου: Τι (δεν) αλλαζει; Στο Χ. Λεμονίδης, Κ. Νικολαντωνάκης (Επιμ.). *Πρακτικά 5ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών: Τα Μαθηματικά στο σχολείο και στην καθημερινή ζωή,* Πρακτικά Συνεδρίου (ISSN: 1792-8494).

Μπεμπένη, Μ., Καλδρυμίδου, Μ., & Βαμβακούση, Ξ. (2018). Χαρακτηριστικά βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών: τι κάνουν οι μαθητές που ξεχωρίζουν. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, *0*(11), 11 – 29.

7 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

7.1 Πιλοτική Έρευνα Ι: Ερωτηματολόγιο

Ερωτηματολόγιο στα κλάσματα
Τμήμα:……… Ονοματεπώνυμο:…………………………………………………………………………
Να συμπληρώσεις κατάλληλα τα παρακάτω κενά.
Q.1.1. Να κάνεις την πράξη: $\frac{10}{63}+\frac{8}{9}=$
Q.1.2. Να κάνεις την πράξη: $\frac{23}{21}-\frac{5}{7}=$
Q.1.3. Να κάνεις την πράξη: $\frac{21}{32}\cdot\frac{16}{7}=$
Q.1.4. Να κάνεις την πράξη: $\frac{2}{5}:\frac{3}{8}=$
Q.1.5. Να μετατρέψεις το σύνθετο κλάσμα σε απλό: $\frac{\frac{5}{17}}{\frac{2}{9}}=$
Q.1.6. Να μετατρέψεις το μικτό αριθμό $2\frac{5}{7}$ σε κλάσμα. Απάντηση:..
Q.1.7. Το «χιαστί» μας λέει ότι αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τότε ισχύει ότι:………………………………………………..
Q.1.8. Να συμπληρώσεις κατάλληλα το παρακάτω κενό: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\cdot\alpha}{......}$
Q.1.9. Το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ ενός αριθμού α ισούται με: ……………………………………………….........

Q.1.10. **A.** Όταν δύο κλάσματα είναι ομώνυμα μεγαλύτερο είναι εκείνο με:

……

B. Όταν δύο κλάσματα έχουν τον ίδιο (μη μηδενικό) αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με:

……

Q.1.11. Πώς συγκρίνουμε δύο ετερώνυμα κλάσματα;

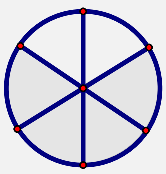
……

……

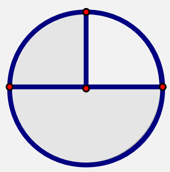
Να απαντήσεις στις παρακάτω ερωτήσεις κυκλώνοντας τη σωστή απάντηση.

Q.1.12. Ποιο από τα γραμμοσκιασμένα μέρη (με το γκρι χρώμα) εκφράζει τα $\frac{2}{3}$ ολόκληρου του σχήματος;

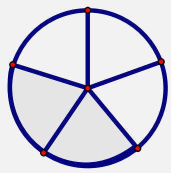
α.



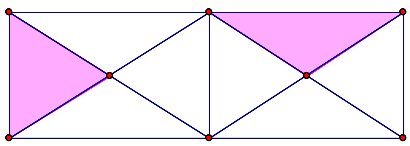
β.



γ.



Q.1.13. Ποιο μέρος του σχήματος είναι το γραμμοσκιασμένο;

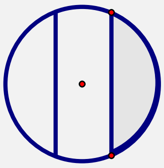


α. Το γραμμοσκιασμένο μέρος αποτελεί το ¼ του σχήματος

β. Το γραμμοσκιασμένο μέρος αποτελείται από δύο τέταρτα, άρα αποτελεί το ½ του σχηματος.

γ. Δεν είναι δυνατόν να γνωρίζω ποιο μέρος του σχήματος είναι το γραμμοσκιασμένο

Q.1.14. Ποιο μέρος του σχήματος παριστάνει το γραμμοσκιασμένο κομμάτι;

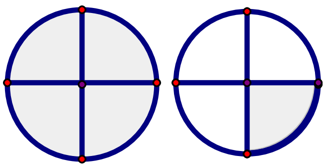


α. Το $\frac{1}{3}$

β. Τα $\frac{2}{3}$

γ. Κανένα από τα προηγούμενα

Q.1.15. Το γραμμοσκιασμένο μέρος παριστάνει την πίτσα που φαγώθηκε. Τι μέρος της πίτσας φαγώθηκε;



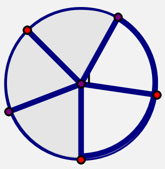
α. Τα $\frac{5}{8}$ της πίτσας.

β. Τα $\frac{5}{4}$ της πίτσας.

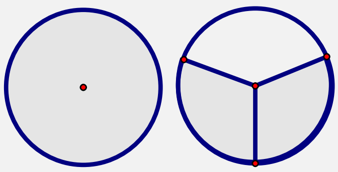
γ. Τα $\frac{3}{4}$ της πίτσας.

Q.1.16. Ποιο από τα παρακάτω σχήματα αναπαριστά το $\frac{5}{3}$;

α. Από τα 5 κομμάτια της πίτας επιλέγουμε τα 3



β. Επιλέγουμε μία ολόκληρη πίτα και τα 2/3 μίας δεύτερης



γ. Αυτό το κλάσμα δεν μπορεί να αναπαρασταθεί με σχήμα

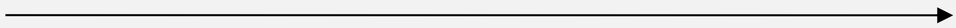
Q.1.17. Το γραμμοσκιασμένο σχήμα αποτελεί τα $\frac{3}{2}$ ενός από τα παρακάτω λευκά σχήματα. Ας ονομάσουμε Χ το λευκό σχήμα. Ποιο από τα τρία σχήματα είναι το Χ;

α.

β.

γ.

Q.1.18. Να αναπαραστήσεις το κλάσμα $\frac{4}{3}$ στον άξονα αφού πρώτα τον αριθμήσεις.



Q.1.19. Η Ελένη έχει δύο συρτάρια με κάλτσες. Το $\frac{1}{2}$ από τις κάλτσες του πάνω συρταριού είναι άσπρες. Το $\frac{1}{3}$ από τις κάλτσες του κάτω συρταριού είναι πάλι άσπρες. Πόσες άσπρες κάλτσες έχει η Ελένη; Με ποια από τις παρακάτω πράξεις θα μπορούσε να λυθεί αυτό το πρόβλημα;

α. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

β. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$

γ. Με καμία από τις προηγούμενες

Q.1.20. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα: «Ο Γιώργος έχει μία σοκολάτα που είναι κομμένη σε 6 κομμάτια. Παίρνει ένα από αυτά τα κομμάτια, το κόβει στη μέση και τρώει ένα από τα δύο κομμάτια. Τι μέρος της σοκολάτας έφαγε;». Με ποια από τις παρακάτω πράξεις μπορεί να λυθεί αυτό το πρόβλημα;

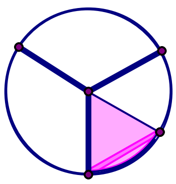
α. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$

β. $\frac{1}{6}:\frac{1}{2}$

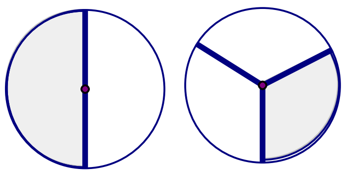
γ. Με καμία από τις προηγούμενες

Q.1.21. Ποιο από τα παρακάτω σχήματα αναπαριστά το $\frac{1}{2}$ του $\frac{1}{3}$;

α.



β.



γ.

Το ζητούμενο δεν είναι δυνατόν να αναπαρασταθεί με σχήμα

Q.1.22. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα: « Ένα κιλό χρυσού κοστίζει 15000 €. Πόσο κοστίζει το $\frac{1}{5}$ του κιλού;» Με ποια από τις παρακάτω πράξεις μπορεί να λυθεί αυτό το πρόβλημα;

α. $15000 : \frac{1}{5}$ **β.** $\frac{1}{5} : 15000$ **γ.** $15000 \cdot \frac{1}{5}$

Q.1.23. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα: «Η δασκάλα έχει 3 πίτσες. Τις κόβει στη μέση και δίνει από μισή στους μαθητές της. Πόσους μαθητές έχει η δασκάλα;» Με ποια από τις παρακάτω πράξεις μπορεί να λυθεί αυτό το πρόβλημα:

α. $3 \cdot \frac{1}{2}$ **β.** $3 : \frac{1}{2}$ **γ.** Με καμία από τις προηγούμενες

Q.1.24. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα: «Με 1 λίτρο σιρόπι λεμονιού μπορούμε να φτιάξουμε 15 λίτρα λεμονάδα. Πόσα λίτρα λεμονάδα θα φτιάξουμε με $\frac{3}{4}$ του λίτρου σιρόπι;» Με ποια από τις παρακάτω πράξεις μπορεί να λυθεί αυτό το πρόβλημα:

α. $15 : \frac{3}{4}$ **β.** $15 \cdot \frac{3}{4}$ **γ.** $\frac{3}{4} : 15$

Q.1.25. Αν κάποιος έφαγε τα $\frac{3}{5}$ μιας πίτσας, τότε:

α. Έφαγε τα τρία από τα πέντε κομμάτια της πίτσας **β.** Έφαγε 3:5 κομμάτια πίτσας **γ.** Δεν μπορώ να γνωρίζω πόσα κομμάτια έφαγε

Q.1.26. Η Μαρία αγόρασε μια πίτσα από το «Βεζούβιο» και έφαγε το 1/4. Ο Κώστας αγόρασε μια πίτσα από το «Λούκουλο» και έφαγε το 1/2. Ποιο από τα δύο παιδιά κατανάλωσε περισσότερη πίτσα;

α. Ο Κώστας **β.** Η Μαρία **γ.** Δεν μπορώ να ξέρω

Q.1.27. Ο φούρναρης της γειτονιάς πουλούσε την τυρόπιτα 1,5 €. Αύξησε την τιμή τηςκατά 10% αλλά παρατήρησε πτώση της πελατείας. Έτσι αποφάσισε να ρίξει την τιμή κατά 10%. Πόσο κοστίζει τώρα η τυρόπιτα;

α. 1,5 ευρώ

β. Λιγότερο από 1,5 €

γ. Περισσότερο από 1,5 €

Q.1.28. Ποιο από τα κλάσματα $\frac{211}{323}$ και $\frac{31}{29}$ είναι μεγαλύτερο;

α. Το $\frac{211}{323}$ είναι μεγαλύτερο γιατί έχει μεγαλύτερους όρους από τους αντίστοιχους όρους του $\frac{31}{29}$

β. Το $\frac{211}{323}$ είναι το μικρότερο κλάσμα γιατί είναι μικρότερο από τη μονάδα, ενώ το $\frac{31}{29}$ είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα.

γ. Αυτά τα κλάσματα είναι ετερώνυμα και δεν είναι δυνατόν να συγκριθούν αν δε γίνουν ομώνυμα

Q.1.29. Ποιο από τα κλάσματα $\frac{144}{145}$ και $\frac{145}{146}$ είναι μεγαλύτερο;

α. Είναι ίσα γιατί λείπει και από τα δύο κλάσματα μία κλασματική μονάδα

β. Αυτά τα κλάσματα είναι ετερώνυμα και δεν είναι δυνατόν να συγκριθούν αν δε γίνουν ομώνυμα

γ. Είναι μεγαλύτερο το $\frac{145}{146}$ γιατί του λείπει μικρότερο μέρος από το αντίστοιχο του $\frac{144}{145}$ για να συμπληρωθεί η μονάδα.

Q.1.30. Το αποτέλεσμα πράξης $\frac{12}{13}+\frac{7}{8}$ είναι πιο κοντά στον αριθμό:

α. 1

β. 2

γ. 19

δ. 21

Q.1.31. Το αποτέλεσμα της πράξης $\frac{4}{9}+\frac{6}{13}$ είναι:

α. μεγαλύτερο από 1

β. μικρότερο από 1

γ. Δεν μπορώ να γνωρίζω αν δεν κάνω πράξεις

Q.1.32. Πού περίπου βρίσκεται ο αριθμός $\frac{3}{4}$;

α. Στη θέση Α

β. Στη θέση Β

γ. Στη θέση Γ

Q.1.33. Να γράψεις ποιο κλάσμα αντιστοιχεί στο γράμμα Α που βρίσκεται πάνω στην αριθμογραμμή.

Είναι το κλάσμα: $A = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

Q.1.34. Ποιο από τα κλάσματα $\frac{3}{8}$, $\frac{9}{16}$ είναι πιο κοντά στο $\frac{1}{2}$ και γιατί;

α. Είναι και τα δύο κλάσματα το ίδιο κοντά γιατί απέχουν και τα δύο μία κλασματική μονάδα από το μισό.

β. Το $\frac{9}{16}$ είναι πιο κοντά γιατί «απέχει» $\frac{1}{16}$ από το μισό ενώ το $\frac{3}{8}$ απέχει $\frac{1}{8}$ από το μισό.

γ. Δεν μπορώ να γνωρίζω αν δε κάνω πράξεις

Q.1.35. <u>Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς</u> , να συμπληρώσεις την κατάλληλη πράξη $(\cdot)$ ή $(:)$ ώστε να ισχύει η ανισότητα:

$$121 \;❑\; \frac{3}{4} > 121$$

α. Η σωστή πράξη είναι ο πολλαπλασιασμός $(\cdot)$

β. Η σωστή πράξη είναι η διαίρεση $(:)$

γ. Δεν μπορώ να γνωρίζω αν δεν κάνω πράξεις

Q.1.36. <u>Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς</u>, πιστεύεις ότι το αποτέλεσμα της πράξης $50 \cdot \frac{3}{2}$ είναι:

α. μεγαλύτερο από το 50	**β.** μικρότερο από το 50	**γ.** Δεν μπορώ να γνωρίζω αν δεν κάνω πράξεις

Q.1.37. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς, πιστεύεις ότι το αποτέλεσμα πράξης $0,25\cdot\frac{2}{3}$ είναι:

α. μεγαλύτερο του 0,25	**β.** μικρότερο του 0,25	**γ.** Δεν μπορώ να γνωρίζω αν δεν κάνω πράξεις

Q.1.38. Υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στο $\frac{2}{5}$ και το $\frac{3}{5}$; Αν ναι, πόσοι;

α. Δεν υπάρχει κανένας αριθμός	**β.** Υπάρχει συγκεκριμένος αριθμός αριθμών που μπορούν να γραφτούν ένας-ένας.	**γ.** Υπάρχουν άπειροι αριθμοί

Q.1.39. Επίλεξε το σωστό: Ο μικρότερος θετικός αριθμός …:

α. Είναι το 0,1	**β.** Είναι πολύ μικρός και δεν μπορούμε να τον προσδιορίσουμε με ακρίβεια	**γ.** Δεν υπάρχει μικρότερος θετικός αριθμός.

7.2 Κύρια Έρευνα Ι: Ερωτηματολόγιο

Φύλλο εργασίας στα κλάσματα
Τμήμα:………   **Ονοματεπώνυμο**:………………………………………………………………………
Να συμπληρώσεις κατάλληλα τα παρακάτω κενά.
Q.F.1.1. Να κάνεις την πράξη: $\frac{8}{9}+\frac{10}{63}=$ ………………………………………………………………
Q.F.1.2. Να κάνεις την πράξη: $\frac{23}{21}-\frac{5}{7}=$ ……………………………………………………………………………
Q.F.1.3. Να κάνεις την πράξη: $\frac{21}{32}\cdot\frac{16}{7}=$ ……………………………………………………………………………
Q.F.1.4. Να κάνεις την πράξη: $\frac{2}{5}:\frac{3}{8}=$ …………………………………………………………………
Q.F.1.5. Να μετατρέψεις το σύνθετο κλάσμα σε απλό: $\dfrac{\frac{5}{17}}{\frac{2}{9}}=$ ……………………………………………
Q.F.1.6. Να μετατρέψεις τον μικτό αριθμό $2\frac{5}{7}$ σε κλάσμα………………………………………........
Q.F.1.7. Το «χιαστί» μας λέει ότι αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τότε ισχύει ότι:………………………………………………..
Q.F.1.8. Να συμπληρώσεις κατάλληλα το παρακάτω κενό: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\cdot\alpha}{......}$
Q.F.1.9. **Α.** Όταν δύο κλάσματα είναι ομώνυμα μεγαλύτερο είναι εκείνο με: ....   **Β.** Όταν δύο κλάσματα έχουν τον ίδιο (μη μηδενικό) αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με: ....

Q.F.1.10.Πώς συγκρίνουμε δύο ετερώνυμα κλάσματα;

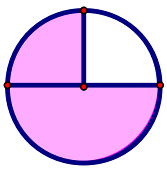
....

....

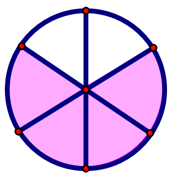
Να απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής κυκλώνοντας τη σωστή απάντηση <u>χωρίς να κάνεις πράξεις</u>.

Q.F.1.11.Ποιο από τα γραμμοσκιασμένα μέρη (με το γκρι χρώμα) εκφράζει τα $\frac{2}{3}$ ολόκληρου του σχήματος;

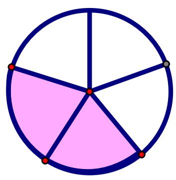
α.



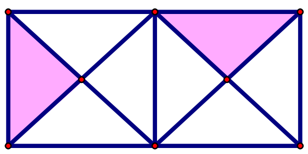
β.



γ.



Q.F.1.12. Ποιο μέρος του σχήματος είναι το γραμμοσκιασμένο;

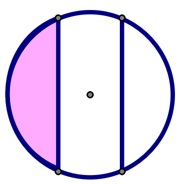


α. Το γραμμοσκιασμένο μέρος αποτελεί το ¼ του σχήματος

β. Το γραμμοσκιασμένο μέρος αποτελείται από δύο τέταρτα, άρα αποτελεί το ½ του σχηματος

γ. Δεν είναι δυνατόν να γνωρίζω ποιο μέρος του σχήματος είναι το γραμμοσκιασμένο

Q.F.1.13. Ποιο μέρος του σχήματος παριστάνει το γραμμοσκιασμένο κομμάτι;

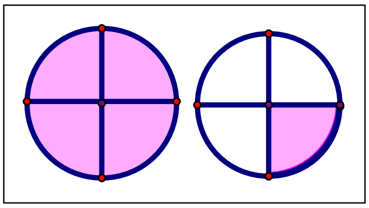


α. Το $\frac{1}{3}$

β. Τα $\frac{2}{3}$

γ. Κανένα από τα προηγούμενα

Q.F.1.14. Το γραμμοσκιασμένο μέρος του σχήματος παριστάνει την πίτσα που φαγώθηκε. Τι μέρος της πίτσας φαγώθηκε;



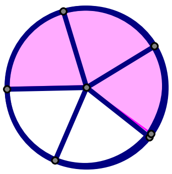
α. Τα $\frac{5}{8}$ της πίτσας. **β**. Τα $\frac{5}{4}$ της πίτσας. **γ.** Τα $\frac{3}{4}$ της πίτσας.

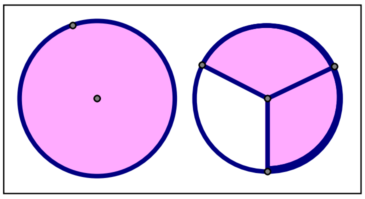
Q.F.1.15. Ποιο από τα παρακάτω σχήματα αναπαριστά το $\frac{5}{3}$;

α. Από τα 5 κομμάτια της πίτας επιλέγουμε τα 3

β. Επιλέγουμε μία ολόκληρη πίτα και τα 2/3 μίας δεύτερης

γ. Αυτό το κλάσμα δεν μπορεί να αναπαρασταθεί με σχήμα





Q.F.1.16. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα: «Ένα κιλό χρυσού κοστίζει 15000 €. Πόσο κοστίζει το $\frac{1}{5}$ του κιλού;» Με ποια από τις παρακάτω πράξεις μπορεί να λυθεί αυτό το πρόβλημα;

α. $15000 : \frac{1}{5}$ **β.** $\frac{1}{5} : 15000$ **γ.** $15000 \cdot \frac{1}{5}$

Q.F.1.17. Αν κάποιος έφαγε τα $\frac{3}{5}$ μιας πίτσας, τότε:

α. Έφαγε τα τρία από τα πέντε κομμάτια της πίτσας.

β. Έφαγε 3:5 κομμάτια πίτσας

γ. Δεν μπορώ να γνωρίζω πόσα κομμάτια έφαγε

Q.F.1.18. Η Μαρία αγόρασε μια πίτσα από το «Βεζούβιο» και έφαγε το 1/4. Ο Κώστας αγόρασε μια πίτσα από το «Λούκουλο» και έφαγε το 1/2. Ποιο από τα δύο παιδιά κατανάλωσε περισσότερη πίτσα;

α. Ο Κώστας **β.** Η Μαρία **γ.** Δεν μπορώ να ξέρω

Q.F.1.19. Ο φούρναρης της γειτονιάς πουλούσε την τυρόπιτα 1,5 €. Αύξησε την τιμή της κατά 10% αλλά παρατήρησε πτώση της πελατείας. Έτσι αποφάσισε να ρίξει την τιμή κατά 10%. Πόσο κοστίζει τώρα η τυρόπιτα;

α. 1,5 ευρώ **β.** Λιγότερο από 1,5 € **γ.** Περισσότερο από 1,5 €

Q.F.1.20. Το αποτέλεσμα πράξης $\frac{12}{13}+\frac{7}{8}$ είναι πιο κοντά στον αριθμό:

α. 1 **β.** 2 **γ.** 19

Q.F.1.21. Να γράψεις ποιο κλάσμα αντιστοιχεί στο γράμμα Α που βρίσκεται πάνω στην αριθμογραμμή.

Είναι το κλάσμα:

α. $\frac{3}{4}$ **β.** $\frac{11}{4}$ **γ.** $\frac{11}{12}$

Q.F.1.22. Ποιο από τα κλάσματα $\frac{3}{8}$, $\frac{9}{16}$ είναι πιο κοντά στο $\frac{1}{2}$ και γιατί;

α. Είναι και τα δύο κλάσματα το ίδιο κοντά γιατί απέχουν και τα δύο μία κλασματική μονάδα από το μισό.

β. Το $\frac{9}{16}$ είναι πιο κοντά γιατί «απέχει» $\frac{1}{16}$ από το

γ. Δεν μπορώ να γνωρίζω αν δεν κάνω πράξεις μισό ενώ το $\frac{3}{8}$ απέχει $\frac{1}{8}$ από το μισό.

Q.F.1.23. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς , να συμπληρώσεις την κατάλληλη πράξη $(\bullet)$ ή $(:)$ ώστε να ισχύει: $121 \ \square\ \frac{3}{4} > 121$

α. Η σωστή πράξη είναι ο πολλαπλασιασμός $(\bullet)$	**β.** Η σωστή πράξη είναι η διαίρεση $(:)$	**γ.** Δεν μπορώ να γνωρίζω αν δεν κάνω πράξεις

Q.F.1.24. Χωρίς να κάνεις υπολογισμούς, πιστεύεις ότι το αποτέλεσμα πράξης $0{,}25 \cdot \frac{2}{3}$ είναι:

α. μεγαλύτερο του 0,25	**β.** μικρότερο του 0,25	**γ.** Δεν μπορώ να γνωρίζω αν δεν κάνω πράξεις

Q.F.1.25. Υπάρχουν αριθμοί ανάμεσα στο $\frac{2}{5}$ και το $\frac{3}{5}$; Αν ναι, πόσοι;

α. Δεν υπάρχει κανένας αριθμός	**β.** Υπάρχει συγκεκριμένος αριθμός αριθμών που μπορούν να γραφτούν ένας-ένας.	**γ.** Υπάρχουν άπειροι αριθμοί

7.3 Πιλοτική Έρευνα ΙΙ: Ερωτηματολόγιο

Ερωτηματολόγιο για τη μάθηση και τη μελέτη των μαθηματικών

Το παρόν ερωτηματολόγιο επιχειρεί να διευρενήσει την προσέγγισή σας στη μάθηση και μελέτη των μαθηματικών. Λάβετε υπόψην ότι δεν υπάρχουν σωστές ή λανθασμένες απαντήσεις αφού ο κάθε άνθρωπος μαθαίνει με διαφορετικό τρόπο.

Οδηγίες συμπλήρωσης

Δίνονται κάποιες διατυπώσεις (προτάσεις) και σενάρια και εσείς καλείστε να απαντήσετε κατά πόσο διαφωνείτε ή συμφωνείτε με αυτά.

Προσπαθήστε με την απάντησή σας να αποτυπώσετε την αυθόρμητη και **ειλικρινή** σας αντίδραση. Κυκλώστε το αντίστοιχο νούμερο από την παρακάτω κλίμακα ανάλογα με το βαθμό που διαφωνείτε/συμφωνείτε.

Διαφωνώ απόλυτα	Διαφωνώ	Συμφωνώ	Συμφωνώ απόλυτα
1	2	3	4

Ημερομηνία	
Τάξη	
Ονοματεπώνυμο	

		Διαφωνώ απόλυτα	Διαφωνώ	Συμφωνώ	Συμφωνώ απόλυτα
Q.2.1	Δεν έχει σημασία πώς έχουν προκύψει οι κανόνες και οι τύποι στα μαθηματικά, αρκεί να ξέρω να τους χρησιμοποιώ στις ασκήσεις.	1	2	3	4
Q.2.2	Όλα αυτά που υπάρχουν στα βιβλία των μαθηματικών, εκτός από τους τύπους και τους κανόνες, δεν πιστεύω ότι μας χρειάζονται, αντίθετα μας μπερδεύουν.	1	2	3	4

Q.2.3	Νιώθω ότι την ύλη των κλασμάτων την έχω καταλάβει καλά.	1	2	3	4
Q.2.4	Όταν μελετώ μαθηματικά, συνήθως δυσκολεύομαι να εντοπίσω τα σημεία που δεν καταλαβαίνω.	1	2	3	4
Q.2.5	Δε μ' αρέσει ιδιαίτερα η μελέτη των μαθηματικών αλλά διαβάζω γιατί θέλω να έχω καλούς βαθμούς.	1	2	3	4
Q.2.6	Αν πάρω υψηλό βαθμό σε ένα διαγώνισμα, αλλά δεν έχω καταλάβει καλά, δεν είμαι ευχαριστημένος/η.	1	2	3	4
Q.2.7	Μου έχει συμβεί να «κολλήσω» με ένα μαθηματικό πρόβλημα γιατί με ενδιαφέρει να βρω πώς λύνεται.	1	2	3	4
Q.2.8	Είναι λάθος των καθηγητών να μας «βάζουν» ασκήσεις που δεν έχουν λυθεί στην τάξη.	1	2	3	4
Q.2.9	Συχνά ασχολούμαι με θέματα που δεν είναι πιθανό να πέσουν στις εξετάσεις, γιατί πιστεύω ότι με βοηθούν να καταλάβω καλύτερα την ύλη.	1	2	3	4
Q.2.10	Όταν μελετώ μαθηματικά, γράφω τους τύπους και τους κανόνες πολλές φορές για να τους θυμάμαι.	1	2	3	4
Q.2.11	Όταν με δυσκολεύουν τα μαθηματικά, διαβάζω μόνο ό,τι μου φαίνεται εύκολο.	1	2	3	4
Q.2.12	Μου αρέσει να μας αφήνει λίγο χρόνο η καθηγήτρια των μαθηματικών να σκεφτούμε μόνοι μας τις ασκήσεις, πριν τις λύσουμε στην τάξη.	1	2	3	4
Q.2.13	Συχνά αναρωτιέμαι σε τι θα μας φανούν χρήσιμα όλα αυτά τα μαθηματικά που διδασκόμαστε.	1	2	3	4
Q.2.14	Θεωρώ ότι δεν υπάρχει λόγος να ασχολούμαι με θέματα που ξέρω ότι δε θα πέσουν στις εξετάσεις.	1	2	3	4

Q.2.15	Συνηθίζω να διαβάζω λυμένες ασκήσεις και να λύνω πολλές παρόμοιες για να θυμάμαι τον τρόπο που λύνονται.	1	2	3	4
Q.2.16	Πιστεύω ότι στο σχολείο θα έπρεπε να μαθαίνουμε μόνο τα μαθηματικά που χρησιμεύουν για τις καθημερινές μας συναλλαγές.	1	2	3	4
Q.2.17	Συνήθως «τρέχω και δε φτάνω» πριν από ένα διαγώνισμα μαθηματικών.	1	2	3	4
Q.2.18	Όταν ολοκληρώνω μια άσκηση, συνήθως ξέρω αν την έχω λύσει σωστά.	1	2	3	4
Q.2.19	Μου αρέσει να ασχολούμαι με ασκήσεις που παρόμοιες δεν έχω ξανασυναντήσει.	1	2	3	4
Q.2.20	Όταν δεν καταλαβαίνω κάτι στα μαθηματικά από την αρχή, θεωρώ ότι δεν πρόκειται να το καταλάβω ποτέ.	1	2	3	4
Q.2.21	Συχνά αγχώνομαι κατά τη διάρκεια της εξέτασης στα μαθηματικά και νιώθω ότι «κολλάει» το μυαλό μου.	1	2	3	4
		Διαφωνώ απόλυτα	**Διαφωνώ**	**Συμφωνώ**	**Συμφωνώ απόλυτα**
Q.2.22	Ο βασικός μου στόχος στα μαθηματικά είναι να πάρω το βαθμό που θέλω.	1	2	3	4
Q.2.23	Προτιμώ να ασχοληθώ με ένα δύσκολο πρόβλημα, από το να λύνω ασκήσεις που έχω ξανασυναντήσει.	1	2	3	4
Q.2.24	Όταν προσπαθώ να μάθω κάτι καινούργιο στα μαθηματικά, συνήθως σκέφτομαι αν το έχω ξανασυναντήσει (π.χ. σε προηγούμενες τάξεις, σε άλλα μαθήματα, στην καθημερινή ζωή).	1	2	3	4

Q.2.25	Οταν διαβάζω μαθηματικά στο σπίτι, νιώθω ότι έχω καταλάβει το μάθημα από την τάξη.	1	2	3	4
Q.2.26	Όταν διαβάζω μαθηματικά και δεν καταλαβαίνω, απογοητεύομαι και τα παρατάω.	1	2	3	4
Q.2.27	Αν δε θυμάμαι τον τρόπο με τον οποίο λύνεται μια συγκεκριμένη άσκηση, δεν έχει νόημα να προσπαθώ να τη λύσω.	1	2	3	4
Q.2.28	Μερικές φορές έχω διαφορετική άποψη από αυτή του καθηγητή για τον τρόπο που λύνεται μια άσκηση.	1	2	3	4
Q.2.29	Συνηθίζω να λύνω παραπάνω ασκήσεις από αυτές που μας βάζει ο καθηγητής ως εργασία για το σπίτι.	1	2	3	4
Q.2.30	Η Μαρία και η Άννα εκφράζουν διαφορετικές απόψεις: **Μαρία:** Όταν ο καθηγητής μου λέει ότι έκανα λάθος, θέλω να έχω την ευκαιρία να προσπαθήσω να βρω μόνη μου τη σωστή απάντηση. **Άννα:** Όταν κάνω λάθος, δεν έχει νόημα να ταλαιπωρούμαι, αφού μπορεί ο καθηγητής να μου πει τη σωστή απάντηση. Άλλωστε, αυτός είναι ο ρόλος του. Με ποια από τις δύο μαθήτριες συμφωνείς; Διάβασε προσεκτικά τις παρακάτω επιλογές και βάλε σε κύκλο το αντίστοιχο γράμμα: **Α.** Συμφωνώ απολύτως με τη Μαρία **Β.** Αν και συμφωνώ περισσότερο με τη Μαρία, νομίζω ότι και η Άννα έχει κάποιο δίκιο **Γ.** Αν και συμφωνώ περισσότερο με την Άννα, νομίζω ότι και η Μαρία έχει κάποιο δίκιο **Δ.** Συμφωνώ απολύτως με την Άννα				
Q.2.31	Ο Γιώργος και ο Κώστας εκφράζουν διαφορετικές απόψεις: **Γιώργος:** Την ώρα των μαθηματικών αντιγράφω ό,τι βλέπω από τον πίνακα γιατί δεν μπορώ να ξεχωρίσω εκείνη την ώρα τι είναι σημαντικό. Το βασικό είναι να γνωρίζω τι ακριβώς έχουμε κάνει στην τάξη. Άλλωστε έχω όλο το χρόνο να τα διαβάσω πολλές φορές στο σπίτι με την ησυχία μου και να τα καταλάβω.				

	Κώστας: Εγώ προσπαθώ να καταλάβω αυτά που εξηγεί η καθηγήτρια. Αν δεν προλάβω να τα καταγράψω όλα, δε με πειράζει ιδιαίτερα. Αν έχω καταλάβει πώς λύνεται άσκηση, μπορώ να τα συμπληρώσω μόνος μου στο σπίτι. Με ποιον από τους δύο μαθητές συμφωνείς; Διάβασε προσεκτικά τις παρακάτω επιλογές και βάλε σε κύκλο το αντίστοιχο γράμμα: **Α.** Συμφωνώ απολύτως με τον Γιώργο **Β.** Αν και συμφωνώ περισσότερο με τον Γιώργο, νομίζω ότι και ο Κώστας έχει κάποιο δίκιο **Γ.** Αν και συμφωνώ περισσότερο με τον Κώστα, νομίζω ότι και ο Γιώργος έχει κάποιο δίκιο **Δ.** Συμφωνώ απολύτως με τον Κώστα
Q.2.32	Η Φωτεινή και η Αγγελική εκφράζουν διαφορετικές απόψεις**:** **Φωτεινή:** Όταν μελετώ μαθηματικά με βοηθάει να συνδέω αυτά που προσπαθώ να μάθω με πράγματα που γνωρίζω από άλλα κεφάλαια στα μαθηματικά, από άλλα μαθήματα, ή από την καθημερινή μου ζωή. **Αγγελική:** Δεν καταλαβαίνω γιατί είναι χρήσιμο αυτό. Εγώ πιστεύω ότι μπορείς να βρεις ό,τι χρειάζεσαι για το διάβασμά σου στην ίδια ενότητα, ή το πολύ-πολύ, στο ίδιο κεφάλαιο των μαθηματικών. Με ποια από τις δύο μαθήτριες συμφωνείς; Διάβασε προσεκτικά τις παρακάτω επιλογές και βάλε σε κύκλο το αντίστοιχο γράμμα: **Α.** Συμφωνώ απολύτως με τη Φωτεινή **Β.** Αν και συμφωνώ περισσότερο με τη Φωτεινή, νομίζω ότι και η Αγγελική έχει κάποιο δίκιο **Γ.** Αν και συμφωνώ περισσότερο με την Αγγελική, νομίζω ότι και η Φωτεινή έχει κάποιο δίκιο **Δ.** Συμφωνώ απολύτως με την Αγγελική
Q.2.33	Δύο μαθήτριες διαφωνούν: **Σοφία:** Μερικές φορές στα μαθηματικά, μου φαίνεται ότι μιλάμε για το ίδιο πράγμα με διαφορετικό τρόπο. Πάρε, για παράδειγμα, το κλάσμα και το ποσοστό. **Ιωάννα*:*** Γιατί να δώσουμε άλλο όνομα στο ίδιο πράγμα; Άλλο το κλάσμα, άλλο το ποσοστό – αλλιώς δε θα ήταν σε διαφορετικά κεφάλαια!

	Με ποια από τις δύο μαθήτριες συμφωνείς; Διάβασε προσεκτικά τις παρακάτω επιλογές και βάλε σε κύκλο το αντίστοιχο γράμμα: **Α.** Συμφωνώ απολύτως με τη Σοφία **Β.** Αν και συμφωνώ περισσότερο με τη Σοφία νομίζω ότι και η Ιωάννα έχει κάποιο δίκιο **Γ.** Αν και συμφωνώ περισσότερο με την Ιωάννα, νομίζω ότι και η Σοφία έχει κάποιο δίκιο **Δ.** Συμφωνώ απολύτως με την Ιωάννα
Q.2.34	Ο Δημήτρης και ο Μιχάλης διαφωνούν όπως φαίνεται παρακάτω: **Δημήτρης:** Είμαι της τελευταίας στιγμής. Διαβάζω πάντα πολλές ώρες πριν το διαγώνισμα των μαθηματικών. Μια χαρά προλαβαίνω και τα θυμάμαι και καλύτερα. **Μιχάλης:** Συνήθως, δε χρειάζεται να διαβάσω πολύ πριν το διαγώνισμα των μαθηματικών - καμιά φορά μπορεί και καθόλου, γιατί δε σταματώ να μελετώ ανάμεσα στα διαγωνίσματα. Με ποιον από τους δύο μαθητές συμφωνείς; Διάβασε προσεκτικά τις παρακάτω επιλογές και βάλε σε κύκλο το αντίστοιχο γράμμα: **Α.** Συμφωνώ απολύτως με τον Δημήτρη **Β.** Αν και συμφωνώ περισσότερο με τον Δημήτρη νομίζω ότι και ο Μιχάλης έχει κάποιο δίκιο **Γ.** Αν και συμφωνώ περισσότερο με τον Μιχάλη νομίζω ότι και ο Δημήτρης έχει κάποιο δίκιο **Δ.** Συμφωνώ απολύτως με τον Μιχάλη
Q.2.35	Η καθηγήτρια των μαθηματικών ζητάει από τους μαθητές να εξηγήσουν πώς βοηθούσαν έναν συμμαθητή τους με τη σύγκριση κλασμάτων. Δύο μαθητές διαφωνούν. **Γιάννης:** Το πρώτο που θα του έλεγα είναι να διαβάσει τους κανόνες της σύγκρισης για τα ομώνυμα και τα ετερώνυμα κλάσματα και να μάθει να τους εφαρμόζει. Αν θυμάται τους κανόνες, τότε μπορεί να συγκρίνει όποια κλάσματα του ζητήσουν. **Χαράλαμπος:** Εγώ, πάλι, το πρώτο που θα του έλεγα είναι να προσπαθήσει να καταλάβει τι είναι κλάσμα, τι νόημα έχει. Πιστεύω ότι αν το έχει καταλάβει καλά αυτό, στη συνέχεια θα βρει πολλούς τρόπους να συγκρίνει κλάσματα. Με ποιον από τους δύο μαθητές συμφωνείς; Διάβασε προσεκτικά τις παρακάτω επιλογές και βάλε σε κύκλο το αντίστοιχο γράμμα:

	Α. Συμφωνώ απολύτως με τον Γιάννη **Β.** Αν και συμφωνώ περισσότερο με τον Γιάννη νομίζω ότι και ο Χαράλαμπος έχει κάποιο δίκιο **Γ.** Αν και συμφωνώ περισσότερο με τον Χαράλαμπο νομίζω ότι και ο Γιάννης έχει κάποιο δίκιο **Δ.** Συμφωνώ απολύτως με τον Χαράλαμπο

7.4 Κύρια Έρευνα ΙΙ: Ερωτηματολόγιο

Ημερομηνία	
Τάξη	
Ονοματεπώνυμο	

		Διαφωνώ απόλυτα	**Διαφωνώ**	**Συμφωνώ**	**Συμφωνώ απόλυτα**
Q.F.2.1	Δεν έχει σημασία πώς έχουν προκύψει οι κανόνες και οι τύποι στα μαθηματικά, αρκεί να ξέρω να τους χρησιμοποιώ στις ασκήσεις.	1	2	3	4
Q.F.2.2	Όλα αυτά που υπάρχουν στα βιβλία των μαθηματικών, εκτός από τους τύπους και τους κανόνες, δεν πιστεύω ότι μας χρειάζονται, αντίθετα μας μπερδεύουν.	1	2	3	4
Q.F.2.3	Όταν μελετώ μαθηματικά, συνήθως δυσκολεύομαι να εντοπίσω τα σημεία που δεν καταλαβαίνω.	1	2	3	4
Q.F.2.4	Δε μ' αρέσει ιδιαίτερα η μελέτη των μαθηματικών αλλά διαβάζω γιατί θέλω να έχω καλούς βαθμούς.	1	2	3	4
Q.F.2.5	Μου έχει συμβεί να «κολλήσω» με ένα μαθηματικό πρόβλημα γιατί με ενδιαφέρει να βρω πώς λύνεται.	1	2	3	4
Q.F.2.6	Είναι λάθος των καθηγητών να μας «βάζουν» ασκήσεις που δεν έχουν λυθεί στην τάξη.	1	2	3	4
Q.F.2.7	Όταν με δυσκολεύουν τα μαθηματικά, διαβάζω μόνο ό,τι μου φαίνεται εύκολο.	1	2	3	4
Q.F.2.8	Μου αρέσει να μας αφήνει λίγο χρόνο η καθηγήτρια των μαθηματικών να σκεφτούμε μόνοι μας τις ασκήσεις, πριν τις λύσουμε στην τάξη.	1	2	3	4
Q.F.2.9	Συχνά αναρωτιέμαι σε τι θα μας φανούν χρήσιμα όλα αυτά τα μαθηματικά που διδασκόμαστε.	1	2	3	4

Q.F.2.10	Θεωρώ ότι δεν υπάρχει λόγος να ασχολούμαι με θέματα που ξέρω ότι δε θα πέσουν στις εξετάσεις.	1	2	3	4
Q.F.2.11	Πιστεύω ότι στο σχολείο θα έπρεπε να μαθαίνουμε μόνο τα μαθηματικά που χρησιμεύουν για τις καθημερινές μας συναλλαγές.	1	2	3	4
Q.F.2.12	Συνήθως «τρέχω και δε φτάνω» πριν από ένα διαγώνισμα μαθηματικών.	1	2	3	4
Q.F.2.13	Όταν ολοκληρώνω μια άσκηση, συνήθως ξέρω αν την έχω λύσει σωστά.	1	2	3	4
Q.F.2.14	Μου αρέσει να ασχολούμαι με ασκήσεις που παρόμοιες δεν έχω ξανασυναντήσει.	1	2	3	4
Q.F.2.15	Όταν δεν καταλαβαίνω κάτι στα μαθηματικά από την αρχή, θεωρώ ότι δεν πρόκειται να το καταλάβω ποτέ.	1	2	3	4
Q.F.2.16	Συχνά αγχώνομαι κατά τη διάρκεια της εξέτασης στα μαθηματικά και νιώθω ότι «κολλάει» το μυαλό μου.	1	2	3	4
Q.F.2.17	Ο βασικός μου στόχος στα μαθηματικά είναι να πάρω το βαθμό που θέλω.	1	2	3	4
Q.F.2.18	Προτιμώ να ασχοληθώ με ένα δύσκολο πρόβλημα, από το να λύνω ασκήσεις που έχω ξανασυναντήσει.	1	2	3	4
Q.F.2.19	Οταν διαβάζω μαθηματικά στο σπίτι, νιώθω ότι έχω καταλάβει το μάθημα από την τάξη.	1	2	3	4
Q.F.2.20	Όταν διαβάζω μαθηματικά και δεν καταλαβαίνω, απογοητεύομαι και τα παρατάω.	1	2	3	4
Q.F.2.21	Αν δε θυμάμαι τον τρόπο με τον οποίο λύνεται μια συγκεκριμένη άσκηση, δεν έχει νόημα να προσπαθώ να τη λύσω.	1	2	3	4
Q.F.2.22	Μερικές φορές έχω διαφορετική άποψη από αυτή του καθηγητή για τον τρόπο που λύνεται μια άσκηση.	1	2	3	4
Q.F.2.23	Συνηθίζω να λύνω παραπάνω ασκήσεις από αυτές που μας βάζει ο καθηγητής ως εργασία για το σπίτι.	1	2	3	4

Q.F.2.24	Ο Γιώργος και ο Κώστας εκφράζουν διαφορετικές απόψεις: **Γιώργος:** Την ώρα των μαθηματικών αντιγράφω ό,τι βλέπω από τον πίνακα γιατί δεν μπορώ να ξεχωρίσω εκείνη την ώρα τι είναι σημαντικό. Το βασικό είναι να γνωρίζω τι ακριβώς έχουμε κάνει στην τάξη. Άλλωστε έχω όλο το χρόνο να τα διαβάσω πολλές φορές στο σπίτι με την ησυχία μου και να τα καταλάβω. **Κώστας:** Εγώ προσπαθώ να καταλάβω αυτά που εξηγεί η καθηγήτρια. Αν δεν προλάβω να τα καταγράψω όλα, δε με πειράζει ιδιαίτερα. Αν έχω καταλάβει πώς λύνεται άσκηση, μπορώ να τα συμπληρώσω μόνος μου στο σπίτι. Με ποιον από τους δύο μαθητές συμφωνείς; Διάβασε προσεκτικά τις παρακάτω επιλογές και βάλε σε κύκλο το αντίστοιχο γράμμα: **Α.** Συμφωνώ απολύτως με τον Γιώργο **Β.** Αν και συμφωνώ περισσότερο με τον Γιώργο, νομίζω ότι και ο Κώστας έχει κάποιο δίκιο **Γ.** Αν και συμφωνώ περισσότερο με τον Κώστα, νομίζω ότι και ο Γιώργος έχει κάποιο δίκιο **Δ.** Συμφωνώ απολύτως με τον Κώστα
Q.F.2.25	Η Φωτεινή και η Αγγελική εκφράζουν διαφορετικές απόψεις: **Φωτεινή:** Όταν μελετώ μαθηματικά με βοηθάει να συνδέω αυτά που προσπαθώ να μάθω με πράγματα που γνωρίζω από άλλα κεφάλαια στα μαθηματικά, από άλλα μαθήματα, ή από την καθημερινή μου ζωή. **Αγγελική:** Δεν καταλαβαίνω γιατί είναι χρήσιμο αυτό. Εγώ πιστεύω ότι μπορείς να βρεις ό,τι χρειάζεσαι για το διάβασμά σου στην ίδια ενότητα, ή το πολύ-πολύ, στο ίδιο κεφάλαιο των μαθηματικών. Με ποια από τις δύο μαθήτριες συμφωνείς; Διάβασε προσεκτικά τις παρακάτω επιλογές και βάλε σε κύκλο το αντίστοιχο γράμμα: **Α.** Συμφωνώ απολύτως με τη Φωτεινή **Β.** Αν και συμφωνώ περισσότερο με τη Φωτεινή, νομίζω ότι και η Αγγελική έχει κάποιο δίκιο **Γ.** Αν και συμφωνώ περισσότερο με την Αγγελική, νομίζω ότι και η Φωτεινή έχει κάποιο δίκιο **Δ.** Συμφωνώ απολύτως με την Αγγελική

Q.F.2.26	Ο Δημήτρης και ο Μιχάλης διαφωνούν όπως φαίνεται παρακάτω: **Δημήτρης:** Είμαι της τελευταίας στιγμής. Διαβάζω πάντα πολλές ώρες πριν το διαγώνισμα των μαθηματικών. Μια χαρά προλαβαίνω και τα θυμάμαι και καλύτερα. **Μιχάλης:** Συνήθως, δε χρειάζεται να διαβάσω πολύ πριν το διαγώνισμα των μαθηματικών - καμιά φορά μπορεί και καθόλου, γιατί δε σταματώ να μελετώ ανάμεσα στα διαγωνίσματα. Με ποιον από τους δύο μαθητές συμφωνείς; Διάβασε προσεκτικά τις παρακάτω επιλογές και βάλε σε κύκλο το αντίστοιχο γράμμα: **Α.** Συμφωνώ απολύτως με τον Δημήτρη **Β.** Αν και συμφωνώ περισσότερο με τον Δημήτρη νομίζω ότι και ο Μιχάλης έχει κάποιο δίκιο **Γ.** Αν και συμφωνώ περισσότερο με τον Μιχάλη νομίζω ότι και ο Δημήτρης έχει κάποιο δίκιο **Δ.** Συμφωνώ απολύτως με τον Μιχάλη
Q.F.2.27	Η καθηγήτρια των μαθηματικών ζητάει από τους μαθητές να εξηγήσουν πώς βοηθούσαν έναν συμμαθητή τους με τη σύγκριση κλασμάτων. Δύο μαθητές διαφωνούν. **Γιάννης:** Το πρώτο που θα του έλεγα είναι να διαβάσει τους κανόνες της σύγκρισης για τα ομώνυμα και τα ετερώνυμα κλάσματα και να μάθει να τους εφαρμόζει. Αν θυμάται τους κανόνες, τότε μπορεί να συγκρίνει όποια κλάσματα του ζητήσουν. **Χαράλαμπος:** Εγώ, πάλι, το πρώτο που θα του έλεγα είναι να προσπαθήσει να καταλάβει τι είναι κλάσμα, τι νόημα έχει. Πιστεύω ότι αν το έχει καταλάβει καλά αυτό, στη συνέχεια θα βρει πολλούς τρόπους να συγκρίνει κλάσματα. Με ποιον από τους δύο μαθητές συμφωνείς; Διάβασε προσεκτικά τις παρακάτω επιλογές και βάλε σε κύκλο το αντίστοιχο γράμμα: **Α.** Συμφωνώ απολύτως με τον Γιάννη **Β.** Αν και συμφωνώ περισσότερο με τον Γιάννη νομίζω ότι και ο Χαράλαμπος έχει κάποιο δίκιο **Γ.** Αν και συμφωνώ περισσότερο με τον Χαράλαμπο νομίζω ότι και ο Γιάννης έχει κάποιο δίκιο **Δ.** Συμφωνώ απολύτως με τον Χαράλαμπο