



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΝΗΠΙΑΓΩΓΩΝ**

**«ΝΟΕΡΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΛΟΓΟΣ:
Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΜΙΑΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ»**

ΝΙΚΟΛΑΟΣ Κ. ΣΥΜΕΩΝΙΔΗΣ

«ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ»

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2021

ΝΙΚΟΛΑΟΣ Κ. ΣΥΜΕΩΝΙΔΗΣ

**«ΝΟΕΡΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΛΟΓΟΣ:
Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΜΙΑΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ»**

«ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ»

που υποβλήθηκε στο Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών
της Σχολής Επιστημών Αγωγής
του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή

1. Καλδρυμίδου Μαρία, Καθηγήτρια, Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών-Σχολή Επιστημών Αγωγής-Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, επιβλέπουσα
2. Τάτσης Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης-Σχολή Επιστημών Αγωγής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
3. Σακονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης-Σχολή Επιστημών Αγωγής, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή

1. Καλδρυμίδου Μαρία, Καθηγήτρια, Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών-Σχολή Επιστημών Αγωγής-Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, επιβλέπουσα
2. Τάτσης Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης-Σχολή Επιστημών Αγωγής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
3. Σακονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης-Σχολή Επιστημών Αγωγής, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
4. Παγγέ Πολυξένη, Καθηγήτρια του Π.Τ.Ν. του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
5. Σταθοπούλου-Βασιλονικολού Χαρίκλεια, Καθηγήτρια του Παιδαγωγικού Τμήματος Ειδικής Αγωγής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας
6. Βαμβακούση Ξανθή, Αναπλ. Καθηγήτρια του Π.Τ.Ν. του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
7. Λεμονίδης Χαράλαμπος, Καθηγητής του Π.Τ.Δ.Ε. του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας

Copyright© Συμεωνίδης Νικόλαος, 2021

All rights reserved (CC-BY-NC). Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

«Η συλλογή και η επεξεργασία των δεδομένων προσωπικού χαρακτήρα που υποβάλλονται πραγματοποιείται σύμφωνα με τα οριζόμενα στις διατάξεις του Ν.4624/19 και του Κανονισμού (ΕΕ)2016/2019. Το Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων συλλέγει και επεξεργάζεται τα δεδομένα προσωπικού χαρακτήρα αποκλειστικά στο πλαίσιο της υλοποίησης του σκοπού της παρούσας διαδικασίας. Για το χρονικό διάστημα που τα προσωπικά δεδομένα θα παραμείνουν στη διάθεση του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων το υποκείμενο έχει τη δυνατότητα να ασκήσει τα δικαιώματά του σύμφωνα με τους όρους του Γενικού Κανονισμού Προστασίας Δεδομένων Προσωπικού Χαρακτήρα 2016/679 (Ε.Ε.) και τα οριζόμενα στα άρθρα 34 και 35 Ν. 4624/2019. Υπεύθυνη Προσωπικών Δεδομένων του Ιδρύματος είναι η κα. Σταυρούλα Σταθαρά (email: dro@uoi.gr). Η έγκριση διπλωματικής εργασίας από το Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών της Σχολής Επιστημών Αγωγής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων Αγωγής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα».

(ν. 5343/32, άρθρο 202 §2)

*Σε αυτούς που μου έδωσαν τη δυνατότητα να σπουδάσω
και σε εκείνη που πιστεύει σε μένα και με υποστηρίζει*

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, στο Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών της Σχολής επιστημών της Αγωγής. Θα ήθελα να καταθέσω τις ευχαριστίες μου σε εκείνα τα τόσο σημαντικά άτομα για εμένα, που μου συμπαραστάθηκαν στην επίπονη και διαρκή προσπάθεια να ολοκληρώσω και να παρουσιάσω αυτό το πόνημα. Στους γονείς μου που παρείχαν τις καλύτερες δυνατές συνθήκες εργασίας και στη σύζυγό μου που πίστεψε σε μένα και τις δυνατότητές μου και στάθηκε αρωγός μου στην προσπάθεια αυτή. Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά και προσωπικά τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τους δασκάλους μου και καθοδηγητές μου, για την υπομονή, την επιμονή και τη σπουδαία γνώση που απλόχερα μου παρείχαν για να προσπαθήσω να ανεβώ ακόμα ένα σκαλί της μάθησης.

- Την Καθηγήτρια κ. Καλδρυμίδου Μαρία, η οποία ως επιβλέπουσα αφιέρωσε πολύτιμο χρόνο για με καθοδηγήσει, να με υποστηρίξει, να με διορθώσει επιστημονικά και με τις συμβουλές τις να με βοηθήσει με υπομονή και να με προετοιμάσει κατάλληλα για την παρουσίαση της διατριβής.
- Τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Τάτση Κωνσταντίνο, για την πολύτιμη συνεργασία του και τις άμεσες και σαφείς επισημάνσεις του, τόσο στη συγκρότηση του θεωρητικού μέρους όσο και του ερευνητικού.
- Τον Καθηγητή κ. Σακονίδη Χαράλαμπο, για την αγαστή συνεργασία, ο οποίος συνετέλεσε στη βελτίωση της εργασίας δίνοντας συμβουλές σε ζητήματα διδακτικής.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους συναδέλφους μου εκπαιδευτικούς του σχολείου στο οποίο διδάσκω, που με υποστήριξαν και πολλές φορές προσφέρθηκαν να με βοηθήσουν.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ αξίζουν οι φίλοι μου οι οποίοι κατανόησαν το άγχος και την αγωνία μου στην προσπάθεια αυτή και με τη συμπεριφορά και το ήθος τους συνέδραμαν στο έργο μου με το δικό τους τρόπο.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....	ix
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ.....	xiv
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ	xv
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	xx
ABSTRACT	xxii
ΠΡΟΛΟΓΟΣ	1
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	3
1 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ : ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ.....	6
1.1 Μαθηματικός γραμματισμός ή Αριθμητισμός.....	7
1.2 Οι εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις στην Αγγλία.....	8
1.2.1 Η εθνική στρατηγική για τον αριθμητισμό.....	9
1.2.2 Η αποτελεσματικότητα της εθνικής στρατηγικής για τον αριθμητισμό	10
1.3 Οι εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις στην Αυστραλία	13
1.3.1 Το Εθνικό Πρόγραμμα Αξιολόγησης Γλωσσικού και Μαθηματικού Γραμματισμού.....	14
1.3.2 Η αποτελεσματικότητα του Προγράμματος για τον αριθμητισμό...	16
1.4 Οι εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις στην Αμερική	19
1.4.1 Οι Κοινές Βασικές Προδιαγραφές για τον αριθμητισμό.....	22
1.4.2 Η αποτελεσματικότητα των Κοινών Βασικών Προδιαγραφών ...	24
1.5 Νοεροί Υπολογισμοί	26
1.5.1 Ευελιξία και προσαρμοστικότητα.....	27
1.5.2 Νοεροί Υπολογισμοί και προγράμματα αριθμητισμού στην Αγγλία, Αυστραλία και Αμερική.....	30
1.5.3 Διδασκαλία Νοερών Υπολογισμών	31
1.5.3.1 Εναλλακτικά Μοντέλα Διδασκαλίας.....	33

1.5.4	Τι περιλαμβάνει το μάθημα των νοερών υπολογισμών.....	36
1.5.5	Είδη νοερών στρατηγικών	37
1.5.6	Συχνότητα χρήσης νοερών στρατηγικών στις τάξεις.....	49
1.5.7	Λεκτικά προβλήματα.....	51
1.6	Διάλογος.....	53
1.7	Το φαινόμενο «Toraze» (The “Toraze effect”)	54
1.8	Γλωσσικά εργαλεία και επικοινωνιακές τακτικές.....	55
1.9	Λεξιλόγιο	60
1.10	Συμπεράσματα	61
2	ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ: ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΜΕΡΟΣ.....	63
2.1	Προβληματική της έρευνας	64
2.2	Οι στόχοι της έρευνας.....	65
2.3	Μεθοδολογία της Έρευνας.....	65
2.3.1	Ανάλυση περιεχομένου της πιλοτικής διδακτικής παρέμβασης ..	67
2.3.2	Ανάλυση περιεχομένου της τελικής διδακτικής παρέμβασης	69
2.3.3	Περιορισμοί της έρευνας.....	71
2.3.4	Ερευνητικά ερωτήματα	71
2.3.5	Σχολεία, τάξεις, ηλικίες, τόπος και χρόνος.....	72
2.3.6	Δομή διδακτικών παρεμβάσεων.....	73
2.3.6.1	Περιεχόμενο τελικής διδακτικής παρέμβασης	76
2.3.6.2	Στάδια Διδακτικών Παρεμβάσεων	77
2.3.6.3	Περιεχόμενο της αξιολόγησης.....	78
2.3.6.4	Αξιολόγηση των διδακτικών παρεμβάσεων.....	88
2.3.7	Στρατηγικές- λύσεις και η κωδικοποίησή τους.....	90
3	ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ: ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΣΕ	
	ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ	94
3.1	Πρώτο ερευνητικό ερώτημα: Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της εξέλιξης της χρήσης νοερών υπολογισμών κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης;.....	95

3.1.1	Συνοπτική παρουσίαση της εξέλιξης της χρήσης των νοερών υπολογισμών κατά την διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης	95
3.1.2	Αναλυτική παρουσίαση των χαρακτηριστικών της χρήσης νοερών υπολογισμών κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης	104
3.1.2.1	Νοέμβριος 2016 (Α' φάση τελικής διδακτικής παρέμβασης)	104
3.1.2.2	Συγκεντρωτικά αποτελέσματα φύλλων εργασίας Α' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης	119
3.1.2.3	Φεβρουάριος 2017 (Β' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης) ..	121
3.1.2.4	Συγκεντρωτικά αποτελέσματα φύλλου εργασίας Β' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης	128
3.1.2.5	Ιούνιος 2017 (Τελική δοκιμή)	130
3.1.2.6	Συγκεντρωτικά αποτελέσματα φύλλου εργασίας Τελικής Δοκιμής	135
3.1.3	Σύνδεση αποτελεσμάτων Πρώτου ερευνητικού ερωτήματος	138
3.2	Δεύτερο ερευνητικό ερώτημα: Κατά πόσο συμβάλουν οι νοεροί υπολογισμοί στην ορθότητα των πράξεων;	139
3.2.1	Συνοπτική παρουσίαση του βαθμού επιτυχίας εκτέλεσης των πράξεων με νοερούς υπολογισμούς κατά την έκβαση της διδακτικής παρέμβασης	139
3.2.2	Αναλυτική παρουσίαση του βαθμού επιτυχίας εκτέλεσης των πράξεων με νοερούς υπολογισμούς κατά την έκβαση της διδακτικής παρέμβασης	141
3.2.2.1	Νοέμβριος 2016 (Α' φάση τελικής διδακτικής παρέμβασης)	141
3.2.2.2	Συγκεντρωτικά αποτελέσματα αξιολόγησης πράξεων	141
3.2.2.3	Φεβρουάριος 2017 (Β' φάση τελικής διδακτικής παρέμβασης) ..	142
3.2.2.4	Ιούνιος 2017 (Τελική Δοκιμή)	142
3.2.2.5	Συγκεντρωτικά αποτελέσματα αξιολόγησης πράξεων	143
3.2.3	Σύνδεση αποτελεσμάτων δεύτερου ερευνητικού ερωτήματος ...	144
3.3	Τρίτο ερευνητικό ερώτημα: Σε ποιες περιπτώσεις των μαθηματικών πράξεων οι μαθητές επιλέγουν τη χρήση νοερών υπολογισμών;	145
3.3.1	Προϋποθέσεις χρήσης νοερών υπολογισμών για την εκτέλεση πράξεων	145
3.3.1.1	Νοέμβριος 2016 (Α' φάση τελικής διδακτικής παρέμβασης)	145

3.3.1.2	Φεβρουάριος 2017 (Β' φάση τελικής διδακτικής παρέμβασης) ..	147
3.3.1.3	Σύνδεση αποτελεσμάτων τρίτου ερευνητικού ερωτήματος	147
4	ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ	149
5	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	161
6	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	171
6.1	Φύλλο εργασίας πρώτης φάσης πιλοτικής διδακτικής παρέμβασης.	171
6.2	Φύλλα εργασίας δεύτερης φάσης πιλοτικής διδακτικής παρέμβασης	172
6.3	Φύλλο εργασίας πρώτη φάσης της τελικής διδακτικής παρέμβασης	175
6.4	Φύλλα εργασίας δεύτερης φάσης της τελικής διδακτικής παρέμβασης...	178
6.5	Φύλλο εργασίας της τελικής δοκιμής	179
6.6	Δραστηριότητες και ασκήσεις που υλοποιήθηκαν από τα σχολικά εγχειρίδια	180
6.7	Γενικός Οδηγός Επίλυσης Προβλημάτων	184
6.7.1	Τεχνικές υπολογισμού του άγνωστου «x» σε εξισώσεις με τέσσερις πράξεις	187

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Γράφημα 1: Είδη και ποσοστά χρήσης υπολογισμών επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν για την εκτέλεση των απαιτούμενων πράξεων στο πρώτο φύλλο εργασίας της αξιολόγησης της Α' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης	96
Γράφημα 2: Είδη και ποσοστά χρήσης υπολογισμών επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν για την εκτέλεση των πράξεων στο δεύτερο φύλλο εργασίας της αξιολόγησης της Α' φάσης τελικής παρέμβασης	97
Γράφημα 3: Είδη και ποσοστά χρήσης υπολογισμών επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν για την εκτέλεση των πράξεων στο τρίτο φύλλο εργασίας της αξιολόγησης της Α' φάσης τελικής παρέμβασης	98
Γράφημα 4: Είδη και ποσοστά χρήσης υπολογισμών επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν για την εκτέλεση των πράξεων στο φύλλο εργασίας της αξιολόγησης της Β' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης	98
Γράφημα 5: Είδη και ποσοστά χρήσης υπολογισμών επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν για την εκτέλεση των πράξεων στο φύλλο εργασίας της τελικής δοκιμής	99

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

Πίνακας 1: Η φοίτηση στην Αγγλία	11
Πίνακας 2: Ποσοστό μαθητών που κατάφεραν την επίτευξη των βασικών προδιαγραφών (KS1 2016-2020)	12
Πίνακας 3: Ποσοστό μαθητών που κατάφεραν την επίτευξη των βασικών και υψηλών προδιαγραφών (KS2 2016-2020)	12
Πίνακας 4: Επιδόσεις των μαθητών της Α/θμιας εκπαίδευσης στον αριθμητισμό για τα έτη 2016 έως 2019, πίνακας που προέκυψε από επεξεργασία δεδομένων των εκθέσεων αξιολόγησης για τα έτη 2016 έως και 2019 ξεχωριστά και είναι αναρτημένες στο διαδίκτυο (National Assessment of Educational Progress, n.d.)	18
Πίνακας 5: Μέσος όρος επίδοσης των μαθητών για τα έτη 2016 έως και 2019 στον αριθμητισμό, πίνακας που προέκυψε από επεξεργασία δεδομένων των εκθέσεων αξιολόγησης για τα έτη 2016 έως και 2019 ξεχωριστά και είναι αναρτημένες στο διαδίκτυο, (National Assessment of Educational Progress, n.d.)	19
Πίνακας 6: Σημεία Εστίασης του Προγράμματος Σπουδών, Θεματική Περιοχή και παραδείγματα, πίνακας που προέκυψε από επεξεργασία δεδομένων του Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics και είναι αναρτημένο στο διαδίκτυο (National Council of Teachers of Mathematics, 2006).....	21
Πίνακας 7: Τομείς στις Κοινές Βασικές Προδιαγραφές ανά τάξη, πίνακας που προέκυψε από επεξεργασία δεδομένων του common core state standards το οποίο είναι αναρτημένο στο διαδίκτυο (Corestandards, 2009)	23
Πίνακας 8: Η φοίτηση στο σχολείο στην Αμερική, πίνακας που προέκυψε από επεξεργασία δεδομένων της δομής του εκπαιδευτικού συστήματος στην Αμερική, η οποία είναι αναρτημένη στο διαδίκτυο (National Center for Education Statistics, 2020)	25
Πίνακας 9: Είδη νοερών υπολογισμών και παραδείγματα για την πρόσθεση και την αφαίρεση.....	47
Πίνακας 10: Είδη νοερών υπολογισμών και παραδείγματα για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση	49

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Πίνακας 11: Πλήθος μαθητών ανά τάξη και φύλο.....	72
Πίνακας 12: Στοιχεία υλοποίησης των διδακτικών παρεμβάσεων	73
Πίνακας 13: Συνοπτική παρουσίαση των νοερών στρατηγικών, των πράξεων που χρησιμοποιήθηκαν και στις δύο φάσεις της τελικής διδακτικής παρέμβασης...	77
Πίνακας 14: Ιδιότυπο μαθηματικό λεξιλόγιο	77
Πίνακας 15: Λεκτικά προβλήματα και νοερές στρατηγικές	80
Πίνακας 16: Αναμενόμενες νοερές στρατηγικές, λεκτικά προβλήματα, είδη αριθμών και πράξεις.....	83
Πίνακας 17: Λεκτικά προβλήματα και αναμενόμενες νοερές στρατηγικές.....	85
Πίνακας 18: Τελική δοκιμή, αναμενόμενες νοερές στρατηγικές, λεκτικά προβλήματα, είδη αριθμών και πράξεις	87
Πίνακας 19: Διδακτικές παρεμβάσεις και αξιολογήσεις.....	89
Πίνακας 20: Είδη αντωνυμιών και φράσεις δασκάλου	90
Πίνακας 21: Είδη νοερών στρατηγικών για την πρόσθεση και την αφαίρεση, επεξήγηση και παραδείγματα	92
Πίνακας 22: Είδη νοερών στρατηγικών για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, επεξήγηση και παραδείγματα	93

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

Πίνακας 23: Η εξέλιξη της χρήσης του κάθετου αλγόριθμου και των νοερών υπολογισμών επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν για την εκτέλεση των απαιτούμενων πράξεων για την επίλυση του λεκτικού προβλήματος σε κάθε φύλλο εργασίας	96
Πίνακας 24: Αναμενόμενες και υλοποιήσιμες νοερές στρατηγικές που προκάλεσαν τα είδη και μεγέθη των αριθμών	103
Πίνακας 25: Πλήθος και ποσοστά νοερών υπολογισμών και κάθετων αλγόριθμων επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στο φύλλο εργασίας (στρογγυλοποίηση στο 2ο δεκαδικό ψηφίο)	107
Πίνακας 26: Πλήθος και ποσοστά των στρατηγικών υπολογισμού επί του συνόλου των υπολογισμών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας (στρογγυλοποίηση στο 2 ^ο δεκαδικό ψηφίο)	108

Πίνακας 27: Υπολογισμοί των μαθητών με νοερές στρατηγικές σε μηχανογραφημένη και σαρωμένη μορφή.....	108
Πίνακας 28: Πλήθος και ποσοστά νοερών υπολογισμών και κάθετων αλγόριθμων επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στο φύλλο εργασίας (στρογγυλοποίηση στο 2ο δεκαδικό ψηφίο)	111
Πίνακας 29: Πλήθος και ποσοστά των στρατηγικών υπολογισμού επί του συνόλου των υπολογισμών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας για την εκτέλεση των απαιτούμενων πράξεων του λεκτικού προβλήματος (στρογγυλοποίηση στο 2 ^ο δεκαδικό ψηφίο)	112
Πίνακας 30: Υπολογισμοί των μαθητών με νοερές στρατηγικές σε μηχανογραφημένη και σαρωμένη μορφή.....	113
Πίνακας 31: Πλήθος και ποσοστά νοερών υπολογισμών και κάθετων αλγόριθμων επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στο φύλλο εργασίας (στρογγυλοποίηση στο 2ο δεκαδικό ψηφίο)	117
Πίνακας 32: Πλήθος και ποσοστά των στρατηγικών υπολογισμού επί του συνόλου των υπολογισμών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας (στρογγυλοποίηση στο 2 ^ο δεκαδικό ψηφίο)	118
Πίνακας 33: Υπολογισμοί των μαθητών με νοερές στρατηγικές σε μηχανογραφημένη και σαρωμένη μορφή.....	119
Πίνακας 34: Πλήθος και ποσοστά νοερών υπολογισμών και κάθετων αλγόριθμων επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στα φύλλα εργασίας (στρογγυλοποίηση στο 2ο δεκαδικό ψηφίο)	119
Πίνακας 35: Πλήθος και ποσοστά των στρατηγικών υπολογισμού επί του συνόλου των υπολογισμών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στα φύλλα εργασίας (στρογγυλοποίηση στο 2 ^ο δεκαδικό ψηφίο)	120
Πίνακας 36: Αναμενόμενες και υλοποιήσιμες νοερές στρατηγικές σε ενδεικτικές πράξεις στην αξιολόγηση της Α' φάσης της τελικής διδακτικής παρέμβασης	121
Πίνακας 37: Πλήθος και ποσοστά νοερών υπολογισμών και κάθετων αλγόριθμων επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στο φύλλο εργασίας για την αφαίρεση 4025-1275 στο πρώτο λεκτικό πρόβλημα (στρογγυλοποίηση στο 2ο δεκαδικό ψηφίο).....	126
Πίνακας 38: Η υλοποίηση της αφαίρεσης 4025-1275 με τη νοερή στρατηγική του διαχωρισμού (1010) σε μηχανογραφημένη και σαρωμένη μορφή.....	126

Πίνακας 39: Πλήθος και ποσοστά νοερών υπολογισμών και κάθετων αλγόριθμων επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στο φύλλο εργασίας για την αφαίρεση 4500-2262 στο δεύτερο λεκτικό πρόβλημα (στρογγυλοποίηση στο 2ο δεκαδικό ψηφίο).....	126
Πίνακας 40: Πλήθος και ποσοστά των στρατηγικών υπολογισμού επί του συνόλου των υπολογισμών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας για την αφαίρεση 4500-2262 (στρογγυλοποίηση στο 2° δεκαδικό ψηφίο).	127
Πίνακας 41: Η υλοποίηση της αφαίρεσης 4500-2262 με τις νοερές στρατηγικές του διαχωρισμού (1010) και της συσσώρευσης (N10) σε μηχανογραφημένη και σαρωμένη μορφή.....	127
Πίνακας 42: Η υλοποίηση των διαιρέσεων 1440:48 και 42240:880 με την Ολιστική στρατηγική ή της Αντιστάθμισης σε μηχανογραφημένη και σαρωμένη μορφή	128
Πίνακας 43: Πλήθος και ποσοστά νοερών υπολογισμών και κάθετων αλγόριθμων επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στο φύλλο εργασίας (στρογγυλοποίηση στο 2ο δεκαδικό ψηφίο)	129
Πίνακας 44: Πλήθος και ποσοστά των στρατηγικών υπολογισμού επί του συνόλου των υπολογισμών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας (στρογγυλοποίηση στο 2° δεκαδικό ψηφίο)	129
Πίνακας 45: Αναμενόμενες και υλοποιήσιμες νοερές στρατηγικές στην αξιολόγηση της Β' φάσης της τελικής διδακτικής παρέμβασης	130
Πίνακας 46: Η υλοποίηση της πρόσθεσης 29+18 με τις νοερές στρατηγικές A10, N10C και u-1010 σε μηχανογραφημένη και σαρωμένη μορφή.....	131
Πίνακας 47: Η υλοποίηση του πολλαπλασιασμού 1,19X4 με τις νοερές στρατηγικές ΣΔΑ και Αντιστάθμισης σε μηχανογραφημένη και σαρωμένη μορφή.....	132
Πίνακας 48: Υπολογισμοί των μαθητών με νοερές στρατηγικές για τη διαίρεση 7,80:2σε μηχανογραφημένη και σαρωμένη μορφή.....	132
Πίνακας 49: Πλήθος και ποσοστά νοερών υπολογισμών και κάθετων αλγόριθμων επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στο φύλλο εργασίας για την πρόσθεση 25+26+27+30 και τη διαίρεση 108:4 (στρογγυλοποίηση στο 2ο δεκαδικό ψηφίο)	133
Πίνακας 50: Πλήθος και ποσοστά των στρατηγικών υπολογισμού επί του συνόλου των υπολογισμών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας για την	

πρόσθεση $25+26+27+30$ και τη διαίρεση $108:4$ (στρογγυλοποίηση στο 2 ^ο δεκαδικό ψηφίο)	133
Πίνακας 51: Υπολογισμοί των μαθητών με νοερές στρατηγικές για τους υπολογισμούς σε μηχανογραφημένη και σαρωμένη μορφή	134
Πίνακας 52: Πλήθος και ποσοστά των στρατηγικών υπολογισμού επί του συνόλου των υπολογισμών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας για τις τρεις πράξεις (στρογγυλοποίηση στο 2 ^ο δεκαδικό ψηφίο.)	134
Πίνακας 53: Ο υπολογισμός των τριών πράξεων των μαθητών 800×3 , $800:4$, $2400+200$ με τις νοερές στρατηγικές σε μηχανογραφημένη και σαρωμένη μορφή	135
Πίνακας 54: Πλήθος και ποσοστά νοερών υπολογισμών και κάθετων αλγόριθμων επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν σε ολόκληρο το φύλλο εργασίας (στρογγυλοποίηση στο 2 ^ο δεκαδικό ψηφίο)	135
Πίνακας 55: Πλήθος και ποσοστά των στρατηγικών υπολογισμού επί του συνόλου των υπολογισμών που έκαναν οι μαθητές στην τελική δοκιμή (στρογγυλοποίηση στο 2 ^ο δεκαδικό ψηφίο)	136
Πίνακας 56: Αναμενόμενες και υλοποιήσιμες νοερές στρατηγικές σε ενδεικτικές πράξεις στην Τελική δοκιμή.....	138
Πίνακας 57: Πλήθος και ποσοστά επιτυχίας πράξεων που εκτελέστηκαν με νοερές στρατηγικές στις 3 αξιολογήσεις και συνολικά (στρογγυλοποίηση στο 2 ^ο δεκαδικό ψηφίο)	139
Πίνακας 58: Πλήθος και ποσοστά επιτυχίας πράξεων που εκτελέστηκαν με νοερές στρατηγικές σε κάθε λεκτικό πρόβλημα του φύλλου εργασίας και συνολικά.	140
Πίνακας 59: Πλήθος και ποσοστά επιτυχίας πράξεων που εκτελέστηκαν με νοερές στρατηγικές σε κάθε λεκτικό πρόβλημα του φύλλου εργασίας της τελικής δοκιμής και συνολικά.	140
Πίνακας 60: Συγκεντρωτικά δεδομένα αξιολόγησης για τις πράξεις και τις νοερές στρατηγικές που υλοποιήθηκαν	144

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας 61: Πίνακας Δεδομένων και Ζητούμενων	185
--	-----

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διδακτορική διατριβή πραγματεύεται: α) τη συμβολή των νοερών υπολογισμών στις αριθμητικές πράξεις που εκτελούν οι μαθητές στις τάξεις Δ', Ε' και Στ' της Α/θμιας εκπ/σης, β) την αναζήτηση των παραγόντων που επηρεάζουν τη χρήση των νοερών υπολογισμών στις πράξεις που εκτελούνται από τους μαθητές, και γ) τον εντοπισμό των προϋποθέσεων που επιλέγουν οι μαθητές, ώστε να εκτελέσουν τις πράξεις με νοερούς υπολογισμούς.

Η έρευνα βασίζεται στη μελέτη του ισχύοντος θεωρητικού πλαισίου των αγγλόφωνων χωρών (Αγγλία, Αυστραλία και Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής), στις οποίες σχεδιάστηκαν και εφαρμόστηκαν νέα προγράμματα αριθμητισμού στις εκπαιδευτικές τους μεταρρυθμίσεις. Οι μεταρρυθμίσεις αυτές στόχευαν στην ενσωμάτωση της διδασκαλίας των νοερών υπολογισμών και στη βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών του Δημοτικού σχολείου στα μαθηματικά. Σύμφωνα με τις αξιολογήσεις από τα αρμόδια όργανα (NNS, NAPLAN, NAEP) κατά την τελευταία πενταετία διαπιστώνεται η βελτίωση στην επίδοση των μαθητών Δημοτικού στα μαθηματικά. Δεδομένου ότι στην Ελλάδα δεν έχει συσταθεί αντίστοιχο όργανο αξιολόγησης αριθμητισμού, η παρούσα διατριβή επιχειρεί μια απόπειρα να διερευνηθεί η συμβολή των νοερών υπολογισμών στις μαθηματικές πράξεις. Μέχρι πρότινος στη βιβλιογραφία δεν απαντάται εκτενής έρευνα για τους παράγοντες που επηρεάζουν τη χρήση των νοερών υπολογισμών κατά τη διενέργεια των μαθηματικών πράξεων από τους μαθητές. Έτσι, στο παρόν πόνημα τέθηκε ως σκοπός η διερεύνηση και η καταγραφή των λόγων για τους οποίους επέλεξαν οι ίδιοι οι μαθητές να εκτελέσουν τις πράξεις τους με νοερές στρατηγικές. Επιπρόσθετα, στην παρούσα έρευνα διερευνήθηκαν παράγοντες (γλωσσικές στρατηγικές και τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων), που πιθανόν να επηρέασαν τη χρήση γενικά των νοερών στρατηγικών από τους μαθητές στην εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων. Έτσι, διαμορφώθηκαν τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

1. Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της εξέλιξης της χρήσης των νοερών υπολογισμών κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης;
2. Οι νοεροί υπολογισμοί συμβάλλουν στην ορθότητα των αριθμητικών πράξεων;
3. Σε ποιες περιπτώσεις των αριθμητικών πράξεων οι μαθητές επιλέγουν τη χρήση των νοερών υπολογισμών;

Για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων σχεδιάστηκε διδακτική παρέμβαση με ημι-πειραματική προσέγγιση που εκτελέστηκε σε δύο φάσεις, στην πιλοτική και στην τελική της μορφή. Επιπλέον σχεδιάστηκε και η τελική δοκιμή, η οποία υλοποιήθηκε τρεις μήνες αφότου ολοκληρώθηκε η παρέμβαση, ώστε να ελεγχθεί η αποτελεσματικότητά της. Στις διδακτικές παρεμβάσεις υλοποιήθηκε η διδασκαλία για τις στρατηγικές των νοερών υπολογισμών, καθώς και η ανάπτυξη ιδιότυπου λεξιλογίου. Χρησιμοποιήθηκαν λέξεις και φράσεις οι οποίες αντιστοιχίστηκαν σε μαθηματικούς όρους. Η αξιολόγηση της διδακτικής παρέμβασης και της τελικής δοκιμής έγινε με φύλλα εργασίας. Η συλλογή των δεδομένων και η εξαγωγή των αποτελεσμάτων έγιναν με μαγνητοφώνηση, απομαγνητοφώνηση και με την τεχνική της ανάλυσης του περιεχομένου των διαλόγων που αναπτύχθηκαν κατά την αξιολόγηση της παρέμβασης και της τελικής δοκιμής. Επιπλέον, στην τελική δοκιμή πραγματοποιήθηκε και ημιδομημένη συνέντευξη χωριστά με τον κάθε μαθητή.

Το σύνολο των παρεμβάσεων συμπεριλαμβανομένων και των πιλοτικών, πραγματοποιήθηκαν με μαθητές της Δ', Ε' και ΣΤ' τάξης του Δημοτικού. Συνολικά έλαβαν μέρος 80 μαθητές.

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν για το πρώτο ερευνητικό ερώτημα είναι πως οι παράγοντες που πιθανόν να επηρεάζουν τη χρήση των νοερών υπολογισμών είναι τα γλωσσικά εργαλεία των αντωνυμιών, το μέγεθος και το είδος των αριθμών, η συστηματική διδασκαλία των νοερών υπολογισμών, η διαρκής εξάσκηση στους νοερούς υπολογισμούς, τα λεκτικά προβλήματα. Για το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα συμπεραίνεται ότι οι νοεροί υπολογισμοί συμβάλλουν στην ορθότητα των πράξεων, δεδομένο το οποίο προκύπτει από την επιτυχία των πράξεων που εκτελέστηκαν με νοερούς υπολογισμούς στην παρούσα έρευνα, καθώς και από αναφορές από τα όργανα αξιολόγησης άλλων χωρών που επισημαίνουν τη βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών έπειτα από τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών. Για το τρίτο ερευνητικό ερώτημα προκύπτει πως οι μαθητές αναγνωρίζουν προϋποθέσεις για την εκτέλεση των πράξεων με νοερούς υπολογισμούς σχετικά με τους όρους των πράξεων. Επίσης, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να βελτιώσουν τη διδασκαλία τους, εφόσον είναι σε θέση να γνωρίζουν τους λόγους για τους οποίους οι μαθητές επιλέγουν να εκτελέσουν τις πράξεις με νοερούς υπολογισμούς.

Λέξεις κλειδιά: Νοεροί υπολογισμοί, πράξεις, διδακτική παρέμβαση, γλωσσικές στρατηγικές, λεκτικά προβλήματα.

ABSTRACT

This doctoral dissertation deals with a) the contribution of mental calculations to the arithmetic operations performed by students in grades 4th, 5th and 6th grade of Primary Education, b) the search of factors that influence the use of mental calculations in the operations performed by the students, and c) the identification of the conditions chosen by the students in order to perform the operations with mental calculations.

The research is based on the study of the current theoretical framework of English-speaking countries (England, Australia, and the United States of America), in which new numeracy programs were designed and applied in their educational reforms. These reforms were aimed at integrating the teaching of mental calculations and improving the performance of Primary school students in mathematics. According to the evaluations by the competent authorities (NNS, NAPLAN, NAEP) during the last five years an improvement in the performance of Primary school students in mathematics is noted. Given that no corresponding numeracy evaluation authority is established in Greece, the present dissertation makes an attempt to investigate the contribution of mental calculations to mathematical operations. Until recently, there has been no extensive research in the literature concerning the factors that influence the use of mental calculations in the performance of mathematical operations by students. Thus, in the present work, the aim was to investigate and record the reasons why the students themselves chose to perform their operations with mental strategies. In addition, in the present study factors (linguistic strategies and problem characteristics) that may have generally influenced students' use of mental strategies in performing arithmetic operations were investigated. Thus, the following research questions were formulated:

1. What are the characteristics of the evolution of the use of mental calculations during the teaching intervention?
2. Do mental calculations contribute to the correctness of arithmetic operations?
3. In which cases of arithmetic operations do students choose to use mental calculations?

To answer the research questions, a teaching intervention with a semi-experimental approach was designed and it was performed in two phases, in a pilot form and in its final form. In addition, the final test was designed, which was implemented three months after the intervention was completed, in order to test its

effectiveness. In the teaching interventions, the teaching of strategies of mental calculations took place, as well as the development of a peculiar vocabulary. The used words and phrases were matched to mathematical terms. The evaluation of the teaching intervention and the final test was done with worksheets. The data collection and the extraction of the results were done by recording, transcribing and by using the technique of content analysis of the dialogues developed during the evaluation of the intervention and the final test. In addition, in the final test, a semi-structured interview was conducted separately with each student.

All interventions, including the pilot ones, were carried out with students of 4th, 5th and 6th grade of Primary school. A total of 80 students took part.

The conclusions that emerge for the first research question are that the factors that may influence the use of mental calculations are the linguistic tools of pronouns, the size and type of numbers, the systematic teaching of mental calculations, the constant practice of mental calculations, verbal problems. For the second research question it is concluded that mental calculations contribute to the correctness of the operations, a fact which results from the success of the operations performed with mental calculations in the present research, as well as from reports from the evaluation authorities of other countries that indicate the improvement of students' performance after teaching mental calculations. For the third research question it appears that the students recognize conditions for the execution of operations with mental calculations regarding the terms of the operations. Teachers can also improve their teaching if they are able to know the reasons why students choose to perform the operations with mental calculations.

Keywords: Mental calculations, mathematical operations, teaching intervention, linguistic strategies, verbal problems.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι άνθρωποι στο φυσικό και κοινωνικό τους περιβάλλον, αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με τη βοήθεια συμβόλων και χαρακτήρων. Το μέσο το οποίο παρέχει αυτή τη δυνατότητα είναι η γλώσσα (Blumer, 1969). Η σχολική τάξη αποτελεί μια μικρή κοινωνία στην οποία λαμβάνουν μέρος μαθητές και δάσκαλος. Ο διάλογος που αναπτύσσεται μεταξύ τους και συμβάλλει στην αλληλεπίδρασή τους.

Καθώς η διδακτική διαδικασία των νοερών υπολογισμών εκκινείται και υποστηρίζεται με το διάλογο (Λεμονίδης, 2013), η ανάπτυξη επικοινωνιακών τακτικών (μαθηματικές γενικεύσεις, κριτική γλωσσική επίγνωση, ανάλυση λαθών για εντοπισμό της προέλευσης θεμελιωδών μαθηματικών παρανοήσεων, υποστήριξη ομαδικής εργασίας για συλλογική μάθηση και καθολική συμμετοχή) και γλωσσικών εργαλείων (χρήση αντωνυμιών, μονογλωσσικά και ετερογλωσσικά εργαλεία, χρονικά επιρρήματα, άρθρα, ρήματα, και χρόνους) αναμένεται να επιδρούν το ίδιο θετικά σε αυτή τη διαδικασία.

Εξίσου σημαντικοί με τις αντωνυμίες είναι οι νοεροί υπολογισμοί. Αποτελούν τη διαδικασία εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων χωρίς τη βοήθεια εξωτερικών μέσων. Διενεργούνται κυρίως στο νου, αν και αυτό δεν αποκλείει την καταγραφή άτυπων σημειώσεων, βοηθητικά για τον μαθηματικό συλλογισμό (Harries & Spooner, 2000). Η καλλιέργεια στρατηγικών νοερών υπολογισμών συμβάλλει στην αποτελεσματικότερη κατανόηση των εννοιών που σχετίζονται με τη δεκαδική βάση του αριθμητικού συστήματος, στη δόμηση των αυτοσχέδιων στρατηγικών βασισμένη στην κατανόηση, ώστε οι μαθητές να κάνουν λιγότερα λάθη με αυτές και στην προαγωγή της μαθηματικής σκέψης (Organization for Economic Cooperation and Development, 1999).

Σημαντικός ήταν και ο ρόλος του μαθηματικού διαλόγου (Λεμονίδης, 2013) και της διαλογικής μορφής διδασκαλίας (Δερβίσης, 1998). Ο δάσκαλος, με τη βοήθεια αμφίδρομων ερωταποκρίσεων, μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές στην ανάπτυξη του μαθηματικού λεξιλογίου και εν τέλει στη δόμηση των τεχνικών που είναι απαραίτητες στο μάθημα των μαθηματικών.

Στην παρούσα εργασία που κατατίθεται, επιδιώκεται η ενεργοποίηση των στρατηγικών νοερών υπολογισμών με τη βοήθεια των αντωνυμιών (ως έμμεση ένδειξη αναφοράς για τη χρήση των νοερών υπολογισμών) και άλλων παραγόντων,

καθώς και η ανάδειξη της συμβολής των νοερών υπολογισμών στις αριθμητικές πράξεις. Σε ένα τέτοιο εγχείρημα, πλατφόρμα ερευνητικής προσέγγισης μπορεί να αποτελέσει ο διάλογος στη διδακτική διαδικασία. Ο στόχος υλοποιήθηκε με μαθητές της Ε' και Στ' τάξης Δημοτικού και τα αποτελέσματα καταγράφηκαν και παρουσιάζονται εκτενώς στα παρακάτω κεφάλαια.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η διδακτορική διατριβή περιλαμβάνει τέσσερα κεφάλαια και το παράρτημα:

- *Κεφάλαιο Πρώτο: Θεωρητικό μέρος*

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται ο αριθμητισμός ή μαθηματικός γραμματισμός και η εννοιολογική του προσέγγιση. Παρατίθεται μια προσέγγιση των εκπαιδευτικών μεταρρυθμίσεων που έγιναν σε τρεις μεγάλες χώρες, στην Αγγλία, την Αυστραλία και την Αμερική, ως μια ιστορική αναδρομή, η οποία καταλήγει στα προγράμματα αριθμητισμού που εφαρμόστηκαν σε καθεμιά από αυτές, τους λόγους, τα κυριότερα χαρακτηριστικά τους, τους στόχους τους, τη διάρθρωσή τους και τέλος την αξιολόγηση αυτών των προγραμμάτων, με βάση την επίδοση των μαθητών, συγκριτικά την τελευταία πενταετία.

Στο ίδιο κεφάλαιο, γίνεται αναφορά στους νοερούς υπολογισμούς, στην ευελιξία, στη συχνότητα χρήσης τους, στον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζονται στα προγράμματα αριθμητισμού στην Αγγλία, την Αυστραλία και την Αμερική, στα μοντέλα διδασκαλίας τους και στα είδη δραστηριοτήτων που προτείνονται για αυτούς.

Επιπλέον γίνεται αναφορά στο λεξιλόγιο, στο διάλογο, στη σημασία του, το ρόλο του και τη σπουδαιότητά του. Αναλύονται και κωδικοποιούνται γλωσσικά εργαλεία και επικοινωνιακές τακτικές που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο δάσκαλος στην τάξη. Τέλος, καταγράφονται τα συμπεράσματα, συνοψίζοντας τις γενικές παραδοχές του θεωρητικού πλαισίου, συγκρίνοντάς τα με τα αποτελέσματα της έρευνας και της διατύπωσης τριών σημείων, της σύνδεσης των αντωνυμιών και άλλων παραγόντων με τους νοερούς υπολογισμούς, τη συμβολή τους στις πράξεις και τις προϋποθέσεις χρήσης τους.

- *Κεφάλαιο Δεύτερο: Εμπειρικό μέρος*

Ακολουθεί εκτενής αναφορά για την προβληματική της έρευνας. Διατυπώνεται η υπόθεσή της, πως υπάρχουν παράγοντες που επηρεάζουν τη χρήση των νοερών υπολογισμών, πως οι νοεροί υπολογισμοί συμβάλλουν στην ορθή εκτέλεση των πράξεων και πως οι μαθητές αναγνωρίζουν χαρακτηριστικά στις πράξεις που τους επιτρέπουν να τις εκτελέσουν με στρατηγικές νοερών υπολογισμών. Ως αποτελέσματα των παραπάνω υποθέσεων αναμένεται τα γλωσσικά εργαλεία των αντωνυμιών, (οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν από το δάσκαλο για να κάνει έμμεση

αναφορά στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών στις απαιτούμενες πράξεις) και τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων να προκαλέσουν τη χρήση νοερών υπολογισμών, οι πράξεις των μαθητών που θα υλοποιηθούν με νοερούς υπολογισμούς να είναι σωστές και οι μαθητές να αναφέρουν τις προϋποθέσεις των πράξεων που εντόπισαν και που τους έκαναν να τις εκτελέσουν με στρατηγικές νοερών υπολογισμών. Αναφέρονται τα κενά τα οποία καλείται να καλύψει η παρούσα έρευνα συγκριτικά με τις θεωρητικές παραδοχές, περιγράφεται η στοχοθεσία της έρευνας και η μεθοδολογία. Παρουσιάζονται τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν, τα χαρακτηριστικά του δείγματος που συμμετείχε στην έρευνα και των σχολείων που φοίτησε, οι διδακτικές ενότητες που αξιοποιήθηκαν από το αναλυτικό πρόγραμμα, η χρονική στιγμή και η διάρκεια που έλαβαν χώρα οι διδακτικές παρεμβάσεις. Ακολουθεί η δομή των διδακτικών παρεμβάσεων (περιεχόμενο και στάδια των διδακτικών παρεμβάσεων, η αξιολόγηση και το περιεχόμενό της) και η καταγραφή και κωδικοποίηση των αναμενόμενων στρατηγικών και λύσεων των μαθητών κατά την εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων στα φύλλα εργασίας. Με την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης γίνεται εφαρμογή της τελικής δοκιμής (Post-Test).

- *Κεφάλαιο Τρίτο: Τα αποτελέσματα της έρευνας σε σχέση με τις ερευνητικές υποθέσεις*

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται παράθεση και σύνδεση των ευρημάτων της έρευνας σε σχέση με τις ερευνητικές υποθέσεις.

1. Για το πρώτο ερευνητικό ερώτημα ακολουθεί πρώτα συνοπτική και έπειτα αναλυτική παρουσίαση της εξέλιξης της χρήσης των νοερών υπολογισμών κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης.
2. Για το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα τοποθετείται συνοπτική και αναλυτική παρουσίαση του βαθμού επιτυχίας στην εκτέλεση των πράξεων με νοερούς υπολογισμούς κατά την έκβαση της διδακτικής παρέμβασης.
3. Τέλος, για το τρίτο ερευνητικό ερώτημα αναζητούνται και καταγράφονται οι προϋποθέσεις της χρήσης των νοερών υπολογισμών για την εκτέλεση πράξεων.

- *Κεφάλαιο Τέταρτο: Συμπεράσματα και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα και διδασκαλία*

Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγει η έρευνα σε σχέση με τις υποθέσεις που είχε θέσει και με βάση το θεωρητικό πλαίσιο. Κατατίθενται προτάσεις για περαιτέρω έρευνα σε θέματα που προέκυψαν από τα νέα δεδομένα και τα οποία δεν καλύπτονται από την παρούσα ερευνητική εργασία.

- *Παράρτημα*

Στο παράρτημα βρίσκονται όλα τα φύλλα εργασίας της διδακτικής παρέμβασης και της τελικής δοκιμής που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα, καθώς επίσης και οι ασκήσεις που υλοποιήθηκαν από τα σχολικά εγχειρίδια.

1 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ : ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1.1 Μαθηματικός γραμματισμός ή Αριθμητισμός

Ο μαθηματικός γραμματισμός επικεντρώνεται στη βασική εκπαίδευση και αφορά τις δεξιότητες για τα μαθηματικά (ανάγνωση, γραφή αριθμών, υπολογισμοί) στην προσχολική και πρώτη σχολική εκπαίδευση και ονομάζεται αριθμητισμός (numeracy). Στην διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετοί ορισμοί του αριθμητισμού, που αποδίδουν με διάφορους τρόπους τους στόχους, το περιεχόμενο, τις μεθόδους διδασκαλίας και τους τρόπους αξιολόγησης για τα μαθηματικά. Σύμφωνα με τον Ubiratan D' Ambrosio (2003, σσ. 235-238),

Μαθηματικός αλφαριθμητισμός ή αριθμητισμός, είναι η ικανότητα να εξάγεις συμπεράσματα από δεδομένα, να συμπεραίνεις, να διατυπώνεις υποθέσεις και να εξάγεις συμπεράσματα. Είναι ένα πρώτο βήμα προς μια πνευματική κατάσταση η οποία είναι εντελώς απούσα από το σχολικό σύστημα. Δυστυχώς, ακόμα και όταν η επίλυση προβλημάτων, η μοντελοποίηση και ο σχεδιασμός εμφανίζονται δειλά σε κάποιες σχολικές τάξεις, η έμφαση δίνεται στην επεξεργασία αριθμών και πράξεων. Ο αριθμητισμός είναι πιο κοντά στον κοινό τρόπο που τα Μαθηματικά ήταν παρόντα στην κλασσική Ελλάδα και στους πολιτισμούς των ιθαγενών. Η μεγάλη έννοια δεν ήταν στη μέτρηση και στον υπολογισμό αλλά στην μαντική και στη φιλοσοφία. Ο αριθμητισμός, αυτή η βαθιά σκέψη περί του ανθρώπου και της κοινωνίας, δεν πρέπει να περιορίζεται στις ελίτ, όπως στο παρελθόν.

Ο Οργανισμός Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης, Ο.Ο.Σ.Α. ή OECD στην αγγλική γλώσσα, ανέπτυξε το πρόγραμμα PISA (Programme for International Student Assessment) για τη διεθνή αξιολόγηση των μαθητών στα γνωστικά αντικείμενα της γλώσσας, των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών. Σύμφωνα λοιπόν με τον Ο.Ο.Σ.Α. (Organization for Economic Cooperation and Development, 1999) ο αριθμητισμός είναι η ικανότητα που έχει κάθε άνθρωπος να καταλαβαίνει τα μαθηματικά στο στον σύγχρονο κόσμο, να βγάζει τα σωστά μαθηματικά συμπεράσματα και να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά, με τέτοιο τρόπο ώστε να αντικατοπτρίζονται στις σημερινές ανάγκες, του ενεργού πολίτη.

Τα διεθνή προγράμματα ILSS (International Life Skills Survey) και ALL (Adults Literacy and Lifeskills Survey) που πραγματεύονται τον αλφαριθμητισμό, τον αριθμητισμό και τις δεξιότητες των ατόμων και υποστηρίζονται από τον Ο.Ο.Σ.Α., αναγνωρίζουν τον αριθμητισμό (Coben et al., 2003) ως τη σύνδεση της μαθηματικής γνώσης με τις απαιτήσεις της σύγχρονης κοινωνίας.

Σε γενικές γραμμές, ο αριθμητισμός μπορεί να θεωρηθεί ως μια στρατηγική, που στοχεύει να διαδεχθεί επάξια τις μεταρρυθμίσεις για τα μαθηματικά οι οποίες ξεκίνησαν από τη δεκαετία του '60. Μέλημα της στρατηγικής αυτής είναι να καταστήσει τη μαθηματική γνώση ως μια δεξιότητα, έτσι ώστε με την καλλιέργειά της, ο πολίτης να μπορεί να τη χρησιμοποιεί στις καθημερινές του δραστηριότητες στο σύγχρονο περιβάλλον των πολλών απαιτήσεων που ζει. Το περιεχόμενο σαφώς προέρχεται από το γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών.

Τα πιο διαδεδομένα προγράμματα για τον αριθμητισμό είναι: τα «Ανοιχτά προβλήματα» στην ιαπωνική ανοιχτή προσέγγιση, η «χρήση θεμελιωδών ιδεών» στο γερμανικό πρόγραμμα «mathe 2000», η «γνωστικά καθοδηγούμενη διδασκαλία», η «ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση» στην Ολλανδία, η εθνική στρατηγική για τον αριθμητισμό (National Numeracy Strategy-NNS), το NAPLAN στην Αυστραλία για τον αλφαριθμητισμό, τον αριθμητισμό και την αξιολόγησή τους, τα «Standards 2000» στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής με το «NAEP» για την αξιολόγησή τους (Λεμονίδης, 2013). Τα περισσότερα από αυτά αναπτύσσονται γύρω από έξι άξονες. Τους αριθμούς και την κατανόησή τους, τα λεκτικά προβλήματα και την επίλυσή τους, τις καθημερινές συναλλαγές με χρήματα, τις μονάδες μέτρησης, τη συλλογή και επεξεργασία δεδομένων με αναπαράσταση σε γραφήματα και ανάλυση σε πίνακες και διαγράμματα.

Κάθε χώρα εφαρμόζει τις δικές της εκπαιδευτικές πολιτικές, ακολουθεί τις δικές της προδιαγραφές στη μαθηματική εκπαίδευση και ορίζει τις βασικές μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες που θα πρέπει να είναι εξοπλισμένος ο πολίτης της. Η αξιολόγησή τους και κατά πόσο επαρκούν για τις ανάγκες του σύγχρονου πολίτη, αποτελεί θέμα συζήτησης στην επιστημονική κοινότητα.

1.2 Οι εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις στην Αγγλία

Η κυβέρνηση της Αγγλίας προχώρησε σε αρκετές μεταρρυθμιστικές αλλαγές. Στόχος της ήταν η εξέλιξη και η αναβάθμιση των εκπαιδευτικών προτύπων της χώρας. Η χαμηλή επίδοση που πέτυχαν οι Άγγλοι μαθητές στα μαθηματικά, αποτυπώνεται στη διεθνή μελέτη των Harris, Keys και Fernandes (1997). Τα αρνητικά αποτελέσματα αποδόθηκαν στη μαθησιακή διαδικασία και στους εκπαιδευτικούς. Για τα επόμενα δέκα χρόνια οι αλλαγές στην εκπαίδευση ήταν συνεχείς. Το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, η αξιολόγηση, ο σχεδιασμός της και ο τρόπος εφαρμογής της ήταν βασικά

στοιχεία της εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης της Αγγλίας. Η αλλαγή στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών ξεκίνησε το 2002. Ενσωματώθηκαν οδηγίες και στρατηγικές για το γλωσσικό και μαθηματικό γραμματισμό.

Η εθνική στρατηγική για τον αριθμητισμό (National Numeracy Strategy), εφαρμόστηκε στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση το 1999. Στόχος ήταν να ενισχύσει τις μαθητικές επιδόσεις (Callaghan, 1987). Ξεκίνησε από το 1996 δοκιμαστικά ως «εθνικό πρόγραμμα για τον αριθμητισμό» (national numeracy project) και η επίσημη εφαρμογή της θα γινόταν πέντε χρόνια αργότερα. Αλλά η ανάγκη για άμεσα αποτελέσματα επέσπευσε τη διαδικασία και υλοποιήθηκε νωρίτερα. Αποτέλεσε μία από τις μεγαλύτερες μεταρρυθμίσεις στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Σχετιζόταν ταυτόχρονα με το αναλυτικό πρόγραμμα, την αξιολόγηση, τους γνωστικούς και μαθησιακούς στόχους (Earl, et al., 2003).

1.2.1 Η εθνική στρατηγική για τον αριθμητισμό

Η εθνική στρατηγική για τον αριθμητισμό (National Numeracy Strategy- NNS), συνάδει με το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών για τα μαθηματικά, υποστηρίζει συγκεκριμένες διδακτικές δομές και μεθόδους και σκοπός της είναι να βελτιώσει: α) τις επιδόσεις των μαθητών στα μαθηματικά, ενισχύοντας τη διδασκαλία του αριθμητισμού με τη διαρκή παρακολούθηση της προόδου των μαθητών, με επιστάμενο προγραμματισμό, με ανανεωμένους στόχους και αξιολόγηση, β) τις παιδαγωγικές διαδικασίες που ακολουθούν οι εκπαιδευτικοί, με την ορθολογική διαχείριση της τάξης, με τη θέσπιση υψηλών προσδοκιών από τους εαυτούς τους και από τους μαθητές, με την ανανέωση του τρόπου διδασκαλίας (Brown, Askew, Baker, Denvir, & Millet, 1998). Βασικά στοιχεία της είναι (Department for Education and Employment, 1998):

- Οι νοεροί υπολογισμοί, η δημιουργία ικανού ρεπερτορίου νοερών στρατηγικών ώστε οι μαθητές να μπορούν να επιλέγουν την κατάλληλη από αυτές, η αριθμογραμμή, η ανάκληση αριθμητικών γεγονότων και τα χρονικά και μετρικά συστήματα μέτρησης.
- Η καθημερινή διδασκαλία των Νοερών υπολογισμών, ξεκινώντας τα πρώτα 15 λεπτά με αλληλεπιδραστική προφορική εξάσκηση στους νοερούς υπολογισμούς, έπειτα άμεση διδασκαλία με ολόκληρη την τάξη και στο τέλος 10 λεπτά εμπέδωση και επανάληψη.

- Αναλυτικό πρόγραμμα με διακριτό και συγκεκριμένο πλαίσιο στόχων ρυθμισμένο κατάλληλα ώστε να ανταποκρίνεται στο επίπεδο των μαθητών.
- Πρόγραμμα επιμόρφωσης διάρκειας 6 ημερών με όλα τα σύγχρονα πολυμεσικά εργαλεία. Οι τρεις πρώτες μέρες ορίζονται για την επιμόρφωση των στελεχών και υπόλοιπες 3 μέρες για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών. Ο χώρος υλοποίησης ορίζεται εκτός σχολείου και ο χρόνος εκτός σχολικού ωραρίου.

Το περιεχόμενο της εθνικής στρατηγικής για τον αριθμητισμό προέρχεται από την καθημερινότητα, όπως οι συναλλαγές με χρήματα, οι αποστάσεις που διανύουν οι άνθρωποι, τα χρονικά διαστήματα, η διαχείριση και η απεικόνιση δεδομένων. Με αυτό το υλικό προσπαθεί να κάνει το μάθημα των μαθηματικών πιο προσιτό, πιο κατανοητό και να βοηθήσει στην επίδοση των μαθητών. Δεν σχεδιάστηκε για να αντικαταστήσει το καθημερινό μάθημα των μαθηματικών, αλλά για να παράσχει υποστηρικτικό έργο με οδηγίες για άμεση και κατευθυνόμενη διδασκαλία νοερών υπολογισμών με αντίστοιχες δραστηριότητες και ομαδική εργασία (Department for Education and Employment, 1998).

1.2.2 Η αποτελεσματικότητα της εθνικής στρατηγικής για τον αριθμητισμό

Η πρώτη συγκριτική έρευνα για την αποτελεσματικότητα του προγράμματος της εθνικής στρατηγικής για τον αριθμητισμό έγινε από τον Francis Kwaku Duah το 2009. Σύγκρινε τις επιδόσεις στα μαθηματικά δύο διαφορετικών ομάδων τελειόφοιτων μαθητών του Δημοτικού σχολείου. Η πρώτη είχε αποφοιτήσει το έτος 1987. Δεν είχε δεχθεί την εθνική στρατηγική για τον αριθμητισμό (NNS). Τα αποτελέσματα συνέλεξε τότε, η Μονάδα αξιολόγησης της Απόδοσης (Assessment of Performance Unit-APU).

Με προσωπική συνέντευξη και με τη χρήση του ίδιου φύλλου αξιολόγησης καλούσε το 2009 τους απόφοιτους μαθητές που είχαν δεχτεί την NNS από την πρώτη τάξη, να εκτελέσουν τις απαιτούμενες πράξεις για να βρουν το αποτέλεσμα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές της δεύτερης ομάδας είχαν καλύτερη επίδοση. Το συνολικό ποσοστό επιτυχίας των μαθητών της NNS έφτασε στο 72%, ενώ της ομάδας των μαθητών της APU μόλις στο 58%.

Σήμερα, η φοίτηση στο Δημοτικό σχολείο στην Αγγλία ξεκινάει όταν ο μαθητής έχει συμπληρώσει το πέμπτο έτος της ηλικίας του. Το Βασικό Επίπεδο 1 (Key

Stage 1- KS1) περιλαμβάνει τις δύο πρώτες τάξεις του Δημοτικού και το Βασικό Επίπεδο 2 (Key Stage 2- KS2) τις υπόλοιπες τέσσερις (Πίνακας 1).

Ηλικία στις 31 Αυγούστου	Έτος φοίτησης	Επίπεδο σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα	Σχολική Βαθμίδα
3	Παιδικό-Προνήπια	Αρχικό Επίπεδο	Παιδικός Σταθμός
4	Υποδοχής-Νηπιακό		Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση
5	Έτος 1		
6	Έτος 2		
		Βασικό Επίπεδο 1 National tests and teacher assessments in English, maths, and science	
7	Έτος 3		
8	Έτος 4	Βασικό Επίπεδο 2 National tests and teacher assessments in English and maths, and teacher assessments in science	
9	Έτος 5		
10	Έτος 6		
11	Έτος 7	Βασικό Επίπεδο 3	Μέση Εκπαίδευση
12	Έτος 8		
13	Έτος 9		
14	Έτος 10	Βασικό Επίπεδο 4 GCSE(εθνικές εξετάσεις)	
15	Έτος 11		
16	Έτος 12	Έκτο Επίπεδο	Έκτη μορφή Επιπέδου Ανώτερη Εκπαίδευση/Κολλέγιο
17	Έτος 13		

Πίνακας 1: Η φοίτηση στην Αγγλία

Στο τέλος του Βασικού Επιπέδου 2 (ολοκλήρωση πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης- KS2), οι μαθητές λαμβάνουν μέρος στις εθνικές εξετάσεις του προγράμματος σπουδών στα μαθηματικά. Για την καταγραφή των αποτελεσμάτων, χρησιμοποιείται κλιμακωτή βαθμολογία για να μπορούν να υλοποιηθούν συγκρίσεις απόδοσης με την πάροδο του χρόνου.

Η χαμηλότερη βαθμολογία είναι οι 80 μονάδες και η ανώτερη οι 120. Οι μαθητές που σκοράρουν τουλάχιστον βαθμολογία 100, έχουν καταφέρει την επίτευξη των βασικών προδιαγραφών για τον αριθμητισμό. Όσοι καταφέρνουν βαθμολογία 120 φτάνουν στο επίπεδο υψηλών προδιαγραφών για τον αριθμητισμό. Μαθητής που έχει βαθμολογηθεί με βαθμολογία 99 ή λιγότερο, δεν έχει ανταποκριθεί στην επίτευξη των βασικών προδιαγραφών για τον αριθμητισμό. Οι μαθητές που δεν επιτυγχάνουν τουλάχιστον τη χαμηλότερη βαθμολογία στο τεστ, δεν έχουν δείξει επαρκή

κατανόηση του προγράμματος σπουδών του Βασικού Επιπέδου 2 για τον αριθμητισμό, στο μάθημα.

Τα δεδομένα που λήφθηκαν από την αξιολόγηση του εθνικού αναλυτικού προγράμματος της Αγγλίας για την τελευταία τετραετία 2016 έως και 2019 (UK Government, n.d.), έδειξαν πως μεγάλο ποσοστό των μαθητών των τάξεων του Δημοτικού σχολείου (πρώτο και δεύτερο Βασικό Επίπεδο- Key Stage 1 και 2), κατάφεραν να φτάσουν στην επίτευξη των βασικών προδιαγραφών για τον αριθμητισμό. Συγκεκριμένα, για τις δύο πρώτες τάξεις του Δημοτικού (KS1), το ποσοστό επίτευξης είχε αυξητική τάση ανάμεσα στα έτη, με το μέσο όρο να βρίσκεται στο 75% (Πίνακας 2). Για τις υπόλοιπες τέσσερις τάξεις του Δημοτικού, το ποσοστό των μαθητών που κατάφεραν να φτάσουν στην επίτευξη των βασικών προδιαγραφών για τον αριθμητισμό, ήταν και πάλι αυξητικό και ο μέσος όρος σταθεροποιήθηκε στο 75% (Πίνακας 3). Από αυτούς τους μαθητές μάλιστα, το 23% (μέσος όρος), ξεπέρασε την απαιτούμενη βαθμολογία των βασικών προδιαγραφών (100) και άγγιξε το υψηλότερο επίπεδο των ανώτερων προδιαγραφών (120).

Μαθηματικά	2016	2017	2018	2019	M.O.
KS1- Standards Level	73%	75%	76%	76%	75%

Πίνακας 2: Ποσοστό μαθητών που κατάφεραν την επίτευξη των βασικών προδιαγραφών (KS1 2016-2020)

Μαθηματικά	2016	2017	2018	2019	M.O.
KS2- Standards Level	70%	75%	76%	79%	75%
Higher Level	17%	23%	24%	27%	23%

Πίνακας 3: Ποσοστό μαθητών που κατάφεραν την επίτευξη των βασικών και υψηλών προδιαγραφών (KS2 2016-2020)

1.3 Οι εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις στην Αυστραλία

Την προηγούμενη δεκαετία η Αυστραλία γνώρισε σημαντική οικονομική ύφεση. Η ανεργία στους νέους ήταν σε υψηλά επίπεδα και η δυσανεμία του λαού για την εκπαίδευση ήταν έκδηλη. Σοβαρά κοινωνικά προβλήματα που σχετίζονταν με την ανεργία, προβλήματα στους βιομηχανικούς και εμπορικούς τομείς σε συνδυασμό με την πτώση του εξαγωγικού εμπορίου, επιδείνωσαν τα οικονομικά δεινά της Αυστραλίας. Το 1987, η κυβέρνηση εξέδωσε ένα έγγραφο με τίτλο «Δεξιότητες για την Αυστραλία» (Skills for Australia), το οποίο καθόριζε τη στρατηγική της κυβέρνησης για την αντιμετώπιση των οικονομικών προβλημάτων. Το έγγραφο ήταν μια πρόκληση για το εκπαιδευτικό σύστημα ώστε να διαδραματίσει ενεργό ρόλο στην αντιμετώπιση αυτών των μεγάλων προβλημάτων (Ebbeck, 2006). Σκόπευε στην:

- αύξηση του συνολικού ποσοστού συμμετοχής στην εκπαίδευση και την κατάρτιση.
- βελτίωση της ποιότητας και της ευελιξίας των συστημάτων εκπαίδευσης.
- βελτίωση της κατανομής και ισορροπία μεταξύ της εκπαίδευσης και κατάρτισης, για την καλύτερη κάλυψη των μακροπρόθεσμων αναγκών της οικονομίας και της αγοράς εργασίας.
- αύξηση της παραγωγικότητας μέσω της εκπαίδευσης και της κατάρτισης και αξιολόγηση των εκπαιδευτικών αποτελεσμάτων.

Το δόγμα της ανάπτυξης της οικονομίας σε συνάρτηση με την εκπαίδευση παραμένει ως και σήμερα πολύ σημαντικό. Το μέλλον της Αυστραλίας εξαρτάται από τις γνώσεις, την κατανόηση, τις δεξιότητες και τις αξίες που πρέπει να έχει κάθε πολίτης, για μια παραγωγική και ικανοποιητική ζωή σε μια μορφωμένη, δίκαιη και ανοιχτή κοινωνία. Η παροχή υψηλής ποιότητας εκπαίδευσης από το κράτος, αποτελεί προϋπόθεση για την επίτευξη αυτού του οράματος (National Assessment Program, n.d.).

Το 1999, οι υπουργοί Παιδείας εξέδωσαν τη Διακήρυξη της Αδελαΐδας (Adelaide Declaration), και έθεσαν ενιαίους εθνικούς στόχους για τη σχολική εκπαίδευση στον 21ο αιώνα. Σε αυτή τη δήλωση, οι υπουργοί συμφώνησαν να υποβάλουν εκθέσεις σχετικά με την πρόοδο προς την επίτευξη των εθνικών στόχων, συγκρίσιμων μεταξύ πολιτειών και επικράτειας. Προκειμένου να μετρηθεί η απόδοση των μαθητών σε σχέση με τους εθνικούς στόχους, οι υπουργοί συμφώνησαν σε ένα πρόγραμμα, που ονομάζεται Εθνικό Πρόγραμμα Αξιολόγησης (National Assessment

Program- NAP), για τη συλλογή, ανάλυση και σύγκριση των δεδομένων σχετικά με την επίδοση των μαθητών στον αλφαριθμητισμό, τον αριθμητισμό, τις φυσικές επιστήμες, τις Τ.Π.Ε. τις κοινωνικές και πολιτικές επιστήμες (National Assessment Program, n.d.).

Η Διακήρυξη της Αδελαΐδας αντικαταστάθηκε από τη Διακήρυξη της Μελβούρνης το 2008. Είχε ευρύτερο πλαίσιο στόχων ώστε η αυστραλιανή εκπαίδευση να προάγει την ισότητα και την αριστεία. Όλοι οι νέοι Αυστραλοί έχουν τη δυνατότητα να γίνουν επιτυχημένοι μαθητές με αυτοπεποίθηση, δημιουργικά άτομα, ενεργοί και ενημερωμένοι πολίτες. Η Διακήρυξη της Μελβούρνης αναφέρει ότι (National Assessment Program, n.d.), η αξιολόγηση της προόδου των μαθητών θα πρέπει είναι αυστηρή και περιεκτική. Πρέπει να αντικατοπτρίζει το πρόγραμμα σπουδών και να βασίζεται στον συνδυασμό της επαγγελματικής κρίσης των εκπαιδευτικών και των εξετάσεων, τόσο ενδοσχολικά όσο και σε ευρύτερο επίπεδο. Η εκμάθηση αγγλικών και μαθηματικών είναι πολύ σημαντική για όλα τα χρόνια της σχολικής εκπαίδευσης, δίνοντας έμφαση στις δεξιότητες γραμματισμού και αριθμητισμού που αξιολογούνται από το NAPLAN.

1.3.1 Το Εθνικό Πρόγραμμα Αξιολόγησης Γλωσσικού και Μαθηματικού Γραμματισμού

Το «Εθνικό Πρόγραμμα Αξιολόγησης Γλωσσικού και Μαθηματικού Γραμματισμού (NAPLAN)» συνιστά αξιολόγηση διάρκειας ενός σχολικού έτους και αφορά όλους τους μαθητές που βρίσκονται στο έτος φοίτησης 3, 5, 7 και 9. Αποτιμά τα είδη των δεξιοτήτων στα δύο γνωστικά αντικείμενα, που είναι απαραίτητα για κάθε μαθητή ώστε να προχωρήσει μέσα από το σχολείο στη ζωή (National Assessment Program, n.d.).

Οι ερωτήσεις που περιλαμβάνονται στο NAPLAN για τον αριθμητισμό, χρησιμοποιούνται ως μέτρο του βαθμού επίτευξης των στόχων από τους μαθητές στα μαθηματικά και συγκεκριμένα σε πέντε βασικές αλληλένδετες θεματικές ενότητες του αναλυτικού προγράμματος για το συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο, οι οποίες ορίζουν και τις εθνικές βασικές προδιαγραφές για τον αριθμητισμό (Australian Curriculum Assessment and Reporting Authority, n.d.):

1. Αριθμοί
2. Χώρος

3. Άλγεβρα, πράξεις, μοτίβα
4. Μέτρα, πιθανότητες, διαχειριζόμενα στοιχεία
5. Μαθηματική δραστηριότητα (κατανόηση, εφαρμογή και αιτιολόγηση)

Τα τεστ περιέχουν δύο είδη ασκήσεων: α) πολλαπλής επιλογής και β) ανοικτού τύπου- δομημένης απάντησης. Οι μαθητές που βρίσκονται στο έτος 7 και 9 (year 7, year 9) εξετάζονται επιπλέον σε δυο τεστ αριθμητισμού: ένα στο οποίο δεν επιτρέπεται η χρήση της αριθμομηχανής και ένα στο οποίο επιτρέπεται.

Η κλίμακα αξιολόγησης NAPLAN χωρίζεται σε δέκα επίπεδα και καταγράφει τα αποτελέσματα των μαθητών στις εξετάσεις. Το χαμηλότερο επίπεδο είναι το 1 και το υψηλότερο το 10. Οι βασικές προδιαγραφές περιλαμβάνονται σε κάθε επίπεδο φοίτησης στο σχολείο και ως εκ τούτου αντιπροσωπεύεται ένα ευρύ φάσμα από τα τυπικά προσόντα που καλούνται οι μαθητές να αποδείξουν ότι κατέχουν (National Assessment Program, n.d.).

Η κλίμακα παρέχει σημαντικές πληροφορίες σχετικά με την απόδοση, τις δεξιότητες και τις επιδόσεις των μαθητών από το 3^ο έτος φοίτησης μέχρι το 9^ο. Είναι κατασκευασμένη έτσι ώστε το αποτέλεσμα να αντανακλά το συνολικό επίπεδο επίτευξης των μαθηματικών στόχων στο τέλος της χρονιάς και να αποτελεί το ρυθμιστικό παράγοντα για την βελτίωση του μαθητή την επόμενη διετία, μέχρι δηλαδή την αξιολόγηση του στο μεθεπόμενο έτος φοίτησης. Το γεγονός αυτό δίνει τη δυνατότητα της διαρκούς παρατήρησης και εντοπισμού των στοιχείων εκείνων στα οποία πρέπει να γίνει τομή στο αναλυτικό πρόγραμμα για τα μαθηματικά για να επέλθει το επιθυμητό αποτέλεσμα τόσο από πλευράς κράτους όσο και από πλευράς μαθητή (National Assessment Program, n.d.).

Οι μαθητές που είναι κάτω από το όριο που θέτουν τα πρότυπα και δεν έχουν επιτύχει τα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα του έτους φοίτησης τους, βρίσκονται σε κίνδυνο να μην μπορέσουν να προχωρήσουν ικανοποιητικά στο σχολείο χωρίς στοχευμένη παρέμβαση. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι μαθητές που συμμετέχουν στο πρόγραμμα αξιολόγησης μπορούν να ζητήσουν επιπλέον βοήθεια ώστε να μπορέσουν να αξιοποιήσουν τις δυνατότητές τους.

Ο αριθμός και το ποσοστό των ερωτήσεων που πρέπει να απαντήσει σωστά ένας μαθητής για να επιτύχει στα πρότυπα των βασικών προδιαγραφών ποικίλλει ανάλογα με την θεματική ενότητα και το έτος φοίτησης που βρίσκεται. Από αντίστοιχους παράγοντες εξαρτάται και η απόδοση του στα τεστ, σε εκείνα τα οποία θα επιτύχει ελάχιστη επίδοση ή μέγιστη. Η βαθμολογία του μαθητή καθορίζεται από

το μέσο όρο στα τεστ και όχι από τα ακρότατα.

1.3.2 Η αποτελεσματικότητα του Προγράμματος για τον αριθμητισμό

Στην Αυστραλία η τάξη εισδοχής στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση είναι η νηπιακή ή τάξη υποδοχής. Σε αυτήν, φοιτούν οι μαθητές που έχουν ολοκληρώσει το πέμπτο ημερολογιακό έτος της ηλικίας τους. Το πρώτο έτος φοίτησης αποτελεί και την πρώτη από τις έξι τάξεις του Δημοτικού σχολείου. Οι μαθητές εισέρχονται στην ηλικία των έξι ετών και το ολοκληρώνουν στην ηλικία των δώδεκα. Έπειτα συνεχίζουν στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στο έβδομο έτος φοίτησης και ηλικία δεκατριών ετών. Ολοκληρώνουν την εκπαίδευσή τους στη βαθμίδα αυτή, στην ηλικία των δεκαοκτώ ετών.

Οι βασικές προδιαγραφές για τον αριθμητισμό περιγράφουν ένα σύνολο από δεξιότητες, αντιλήψεις και ικανότητες που απαιτούνται από τους μαθητές να επιδείξουν στο συγκεκριμένο έτος της φοίτησης τους. Τα πρότυπα αυτά, αυξάνουν το επίπεδο δυσκολίας καθώς οι μαθητές μεταβαίνουν από το 3^ο έτος φοίτησης στο 9^ο. Για όσους δεν επιτυγχάνουν, σε οποιοδήποτε έτος, υπάρχει παρέμβαση και υποστήριξη για να τους βοηθήσουν να τα καταφέρουν και να προχωρήσουν ικανοποιητικά στη σχολική διαδικασία.

Αντλώντας περιεχόμενο από τις εθνικές εκθέσεις αξιολόγησης του προγράμματος για τα έτη 2016 έως και 2019 (National Assessment Program, 2016), καταγράφονται παρακάτω οι επιδόσεις των μαθητών (Πίνακας 4):

- Για το 3^ο έτος φοίτησης το ποσοστό συμμετοχής των μαθητών ορίστηκε στο 93,49%. Το 1,81% απαλλάχτηκε και η επίδοση του 4,49% (επίπεδο 1 και κάτω) ήταν κάτω από το βασικό όριο των προδιαγραφών. Στο όριο της επίδοσης των εθνικών προδιαγραφών βρέθηκε το 10,83% (επίπεδο 2). Ανώτερη επίδοση σημείωσε το 82,86% (επίπεδο 3= 21,56%, επίπεδο 4= 26,85%, επίπεδο 5= 20,67% και επίπεδο 6 και πάνω 13,79%). Οι μαθητές που σημείωσαν ανώτερη βαθμολογία μαζί με εκείνους που άγγιξαν το όριο των βασικών προδιαγραφών αποτέλεσαν το 92,85%.
- Η συμμετοχή για το 5^ο έτος φοίτησης ήταν 94,03%. Απαλλάχτηκε το 1,72% και δεν τα κατάφερε το 4,74% (επίπεδο 3 και κάτω). Την οριακή επίδοση για το συγκεκριμένο έτος φοίτησης πέτυχε το 12,78% (επίπεδο 4). Υψηλότερη επίδοση σημείωσε το 80,75% (επίπεδο 5= 26,33%, επίπεδο 6= 28,70%, επίπεδο 7=

17,33% και επίπεδο 8 και πάνω 8,38%). Οι μαθητές των δυο τελευταίων επιδόσεων (ορίου και ανώτερου), αποτέλεσαν το 93,56%.

Έτη Φοίτησης	Ποσοστό Συμμετοχής (%)	Επίδοση κάτω από το όριο των βασικών προδιαγραφών %		Στο όριο των βασικών προδιαγραφών %	Επίδοση πάνω από το όριο των βασικών προδιαγραφών %								Επίδοση στο όριο ή πάνω από το όριο των βασικών προδιαγραφών %	Μ.Ο. (%) Επίδοσης πάνω από το όριο των βασικών προδιαγραφών				
		Επίπεδο 1 (έτος φοίτησης 3)	Επίπεδο 3 και κάτω (έτος φοίτησης 5)		Επίπεδο 2 (έτος φοίτησης 3)	Επίπεδο 4 (έτος φοίτησης 5)	Επίπεδο 5 (έτος φοίτησης 7)	Επίπεδο 6 (έτος φοίτησης 9)	Επίπεδο 3	Επίπεδο 4	Επίπεδο 5	Επίπεδο 6 και πάνω			Επίπεδο 7	Επίπεδο 8 και πάνω	Επίπεδο 9 και πάνω	Επίπεδο 10 και πάνω
		Απαλλάσσονται		Επίπεδο 1 (έτος φοίτησης 3)	Επίπεδο 2 (έτος φοίτησης 3)	Επίπεδο 3	Επίπεδο 4	Επίπεδο 5	Επίπεδο 6 και πάνω	Επίπεδο 7	Επίπεδο 8 και πάνω	Επίπεδο 9 και πάνω	Επίπεδο 10 και πάνω					
3ο	93,49	1,81	4,49	10,83		21,56	26,85	20,67	13,79					93,69	82,86			
5ο	94,03	1,72	4,74	12,78				26,33	28,70	17,33	8,38			93,56	80,75			

Πίνακας 4: Επιδόσεις των μαθητών της Α/θμιας εκπαίδευσης στον αριθμητισμό για τα έτη 2016 έως 2019, πίνακας που προέκυψε από επεξεργασία δεδομένων των εκθέσεων αξιολόγησης για τα έτη 2016 έως και 2019 ξεχωριστά και είναι αναρτημένες στο διαδίκτυο (National Assessment of Educational Progress, n.d.)

Οι εκθέσεις αξιολόγησης (National Assessment of Educational Progress, n.d.), έδειξαν ότι οι περισσότεροι μαθητές κατάφεραν να επιτύχουν αλλά και να ξεπεράσουν κατά πολύ τη βασική επίδοση που απαιτούσαν οι εθνικές προδιαγραφές για τον αριθμητισμό, διατηρώντας σε υψηλά επίπεδα αυτό το ποσοστό. Για την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, το 93,69% του 3^{ου} έτους φοίτησης και το 93,56% του 5^{ου} έτους φοίτησης αποτελεί το ποσοστό των μαθητών των οποίων η επίδοση άγγιξε το όριο, αλλά και εκείνων το ξεπέρασε (Πίνακας 5).

	Έτος Φοίτησης	Μ.Ο. Ποσοστό που βρίσκεται στο όριο και πάνω των βασικών προδιαγραφών για τον αριθμητισμό %	Μέσος Όρος
Πρωτοβάθμια (έτη 3 και 5)	3ο	93,69	93,63
	5ο	93,56	

Πίνακας 5: Μέσος όρος επίδοσης των μαθητών για τα έτη 2016 έως και 2019 στον αριθμητισμό, πίνακας που προέκυψε από επεξεργασία δεδομένων των εκθέσεων αξιολόγησης για τα έτη 2016 έως και 2019 ξεχωριστά και είναι αναρτημένες στο διαδίκτυο, (National Assessment of Educational Progress, n.d.)

1.4 Οι εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις στην Αμερική

- **Standards 2000**

Στα μέσα της δεκαετίας του 1980, σχεδόν όλες οι αξιολογήσεις έδειξαν ανεπαρκή απόδοση και χαμηλές βαθμολογίες των μαθητών στα μαθηματικά στις εξετάσεις ACT (American College Testing) και SAT (Scholastic Assessment Test). Το 1989 το εθνικό συμβούλιο των διδασκόντων για τα μαθηματικά (National Council of Teachers of Mathematics- NCTM) είχε εντοπίσει μία ασυμβατότητα μεταξύ των μαθηματικών που διδάσκονταν οι μαθητές στο σχολείο και στις απαιτήσεις της μοντέρνας εποχής. Έτσι, όλο και περισσότερο προβληματική γινόταν η πρόσβαση από τους μαθητές στα σύγχρονα μαθηματικά, που θα βελτίωναν και θα έκαναν πιο εύκολη την καθημερινή ζωή (συναλλαγές, εκτιμήσεις, πράξεις). Για το λόγο αυτό το NCTM συνέταξε και δημοσίευσε προτεινόμενες προδιαγραφές του αναλυτικού προγράμματος και της αξιολόγησης του μαθήματος των μαθηματικών για το Δημοτικό σχολείο (National Assessment of Educational Progress, n.d.).

Το περιεχόμενο των προδιαγραφών αποτελούταν από θεματικές ενότητες και συνοδευόταν από ένα πλαίσιο που έδινε πληροφορίες σχετικά με το τρόπο υλοποίησής του στις αίθουσες διδασκαλίας και ενσωμάτωσής του στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών.

Μέχρι πρότινος το αναλυτικό πρόγραμμα επικεντρωνόταν στις αριθμητικές διαδικασίες, μία προτεραιότητα που αγνοούσε άλλους σημαντικούς τομείς των μαθηματικών που πραγματεύονταν οι προτεινόμενες προδιαγραφές όπως, κατανόηση αλγεβρικών αναπαραστάσεων, σχεδιασμός σχημάτων και σύνδεσή τους με εκείνα που συναντούμε στην καθημερινή ζωή, συλλογή και οργάνωση πληροφοριών για τη λήψη αποφάσεων.

Η συμβουλευτική επιτροπή του NCTM πρότεινε ότι εκπαιδευτικοί χρειάζονται βοήθεια ώστε να προσδιοριστεί το μαθηματικό τους έργο τους μέσα στη σχολική τάξη. Αναγνωρίζοντας την ανάγκη για κατάλληλη καθοδήγηση για τη διδασκαλία του περιεχομένου των προδιαγραφών, το NCTM το 1991, συνέταξε τις προδιαγραφές διδασκαλίας (Teaching Standards) και το 1995 τις προδιαγραφές για την αξιολόγησή του (Assessment Standards). Το πρόγραμμα για τις προδιαγραφές αφομοιώθηκε από πολλές πολιτείες της Αμερικής. Μία καταμέτρηση που έγινε από το Συμβούλιο των Σχολικών Υπαλλήλων το 1997, 46 από τις 50 πολιτείες, είχαν δημιουργήσει τις δικές του προδιαγραφές οι οποίες όμως ήταν σε πλήρη συμφωνία με εκείνες του NCTM (National Assessment of Educational Progress, n.d.).

Το έτος 2000, το NCTM δημιούργησε νέες ομάδες επιστημόνων, μαθηματικούς, εκπαιδευτικούς και ερευνητές, για τη συγγραφή νέων αρχών και προδιαγραφών για τα μαθηματικά, τα Standards 2000, τα οποία θα βασίζονταν στα προηγούμενα, αλλά θα αντικατόπτριζαν επίσης τις ανάγκες μιας διαφορετικής εποχής και τις γνώσεις που αποκτήθηκαν τα τελευταία 10 χρόνια. Οι νέες προδιαγραφές για τα μαθηματικά, διαμορφώθηκαν γύρω από έξι αρχές: Ισότητα, Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, Διδασκαλία, Μάθηση, Αξιολόγηση και Τεχνολογία και δέκα σκέλη, τα οποία περιλάμβαναν:

- πέντε θεματικές ενότητες (Αριθμοί και Πράξεις, Άλγεβρα, Γεωμετρία, Μέτρα, Ανάλυση Δεδομένων και Πιθανότητες) και
- πέντε διαδικασίες (επίλυση προβλημάτων, αιτιολόγηση και απόδειξη, επικοινωνία, συνδέσεις και αναπαράσταση).

• Curriculum Focal Points

Το 2006 το NCTM δημοσίευσε ένα ανανεωμένο έγγραφο με τίτλο «Σημεία Εστίασης του Προγράμματος Σπουδών» (Curriculum Focal Points) και παρουσίαζε τα πιο σημαντικά μαθηματικά θέματα στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση

(National Council of Teachers of Mathematics, 2006). Η αμερικανική διδασκαλία μαθηματικών δεχόταν κριτική επειδή συμπεριλάμβανε πάρα πολλά θέματα κάθε χρόνο. Με αυτή τη δημοσίευση το NCTM προσπάθησε να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να εντοπίσουν στοχευμένα το πιο σημαντικό περιεχόμενο.

Τα «Σημεία Εστίασης του Προγράμματος Σπουδών» λειτούργησαν υποστηρικτικά στην εφαρμογή των Standards. Υπογράμμιζαν έντονα τη σημασία των βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων στις μικρές και μεσαίες τάξεις. Προσδιόριζαν τρεις σημαντικές θεματικές περιοχές στα μαθηματικά για κάθε σχολική βαθμίδα, στο Προ-Νηπιακό Τμήμα, στο Δημοτικό στο τέταρτο έτος φοίτησης (9-10 ετών) και στο γυμνάσιο στο όγδοο έτος φοίτησης (13-14 ετών), (Πίνακας 6).

Σημεία Εστίασης	Θεματική Περιοχή	Παράδειγμα
Σημεία Εστίασης στο Προ-Νηπιακό Τμήμα μαθητές (ηλικίας 4 ή 5 ετών)		
Ανάπτυξη και κατανόηση των ακέραιων αριθμών	Αριθμοί και Πράξεις	Πόσα μπλε μολύβια υπάρχουν στο τραπέζι;
Αναγνώριση σχημάτων και περιγραφή των ιδιοτήτων τους	Γεωμετρία	Μπορείς να αναγνωρίσεις κάτι που είναι στρογγυλό;
Αναγνώριση χαρακτηριστικών μέτρησης και σύγκριση αντικειμένων με αυτά τα χαρακτηριστικά	Μέτρα	Ποιο είναι μακρύτερο;
Σημεία Εστίασης για τους μαθητές της 4^{ης} τάξης του Δημοτικού (ηλικίες: 9 ή 10 ετών)		
Ανάπτυξη γρήγορης ανάκλησης γνωστών αριθμητικών γεγονότων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης και πολλαπλασιασμό ακεραίων αριθμών με ευχέρεια.	Αριθμοί και πράξεις, άλγεβρα	Ένα αμφιθέατρο έχει 26 σειρές από 89 θέσεις. Πόσες θέσεις υπάρχουν;
Κατανόηση των δεκαδικών αριθμών και την σχέση μεταξύ κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών.	Αριθμοί και πράξεις	Σχεδιάζεται μία εικόνα μήκους 0,2. Τι κλάσμα είναι αυτό;
Κατανόηση του εμβαδού και προσδιορισμός του εμβαδού των δισδιάστατων σχημάτων.	Μέτρα	Πως μπορούμε να βρούμε το εμβαδό ενός σχήματος μορφής «L»;

Πίνακας 6: Σημεία Εστίασης του Προγράμματος Σπουδών, Θεματική Περιοχή και παραδείγματα, πίνακας που προέκυψε από επεξεργασία δεδομένων του Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics και είναι αναρτημένο στο διαδίκτυο (National Council of Teachers of Mathematics, 2006)

1.4.1 Οι Κοινές Βασικές Προδιαγραφές για τον αριθμητισμό

Τα αποτελέσματα από το Διεθνές Πρόγραμμα Αξιολόγησης των Μαθητών (PISA) του 2012, το οποίο διεξήχθη για πρώτη φορά το 2000 και διοργανώνεται κάθε τρία χρόνια, έδειξε ότι οι ΗΠΑ εξακολουθούν να έχουν χαμηλές επιδόσεις συγκριτικά με τα άλλα έθνη στα μαθηματικά (Organisation for Economic Cooperation and Development, 2014). Η αδυναμία εντοπιζόταν περισσότερο στην επίλυση προβλημάτων. Τα κορίτσια επίσης αντιμετώπιζαν δυσκολία στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες.

Το 2009, η Εθνική Οργάνωση των Κυβερνητών της Αμερικής, προσέλαβε μια ομάδα εκπαιδευτικών για να γράψουν τις Κοινές Βασικές Προδιαγραφές (Common Core State Standard) για τα αριθμητισμό και τον αλφαριθμητισμό. Η ιδέα ήταν να δημιουργηθεί ένα συνεκτικό και σαφές πρόγραμμα σπουδών, χρησιμοποιώντας τις βέλτιστες πρακτικές για τα σχολεία που θα το ακολουθήσουν (Corestandards, 2009). Το υπεύθυνο τμήμα για την εκπαίδευση σε κάθε πολιτεία, είχε το δικαίωμα να επιλέξει αν θα υιοθετήσει τις προδιαγραφές εν όλω ή εν μέρει (Mathnasium the Math Learning Center, 2018).

Οι Κοινές Βασικές Προδιαγραφές έδιναν μεγάλη έμφαση στη μαθηματική αιτιολόγηση και στην επίλυση προβλημάτων. Αποσκοπούσαν στη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών, ώστε να είναι σε θέση να επιτύχουν για το κολλέγιο ή και τη σταδιοδρομία τους (Corestandards, 2009). Οι Κοινές Βασικές Προδιαγραφές ορίζουν οκτώ αρχές μαθηματικής πρακτικής (National Council of Teachers of Mathematics, 2006):

1. Κατανόηση των προβλημάτων και επίλυσή τους.
2. Ποιοτική και ποσοτική αιτιολόγηση.
3. Σύναψη λογικών επιχειρημάτων και κριτική στάση σε διαφορετική συλλογιστική.
4. Δημιουργία μαθηματικών προτύπων και υποδειγμάτων.
5. Κοινοποίηση των κατάλληλων στρατηγικών και εργαλείων.
6. Ακρίβεια στις απαντήσεις.
7. Αναζήτηση και χρησιμοποίηση της κατάλληλης μαθηματικής δομής.
8. Πολλαπλή αιτιολόγηση και διατύπωση του κανόνα και πολλαπλή αιτιολόγηση.

Αυτές οι πρακτικές πρέπει να διδάσκονται σε κάθε τάξη, από το νηπιαγωγείο έως το Λύκειο. Το μαθηματικό περιεχόμενο στις Προδιαγραφές είναι οργανωμένο σε τομείς (Corestandards, 2009). Σε κάθε τάξη υπάρχουν προδιαγραφές για κάθε τομέα (Πίνακας 7).

Τομέας	Νηπιαγωγείο	Τάξη 1 ^η	Τάξη 2 ^η	Τάξη 3 ^η	Τάξη 4 ^η	Τάξη 5 ^η	Τάξη 6 ^η	Τάξη 7 ^η	Τάξη 8 ^η
Αρίθμηση και Σειροθέτηση	X								
Πράξεις και Άλγεβρα	X	X	X	X	X	X			
Αριθμοί και Πράξεις με βάση τη δεκάδα	X	X	X	X	X	X			
Μέτρα και Δεδομένα	X	X	X	X	X	X			
Γεωμετρία	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Αριθμοί και Πράξεις Κλάσματα				X	X	X			
Λόγοι και Ανάλογα Ποσά							X	X	
Το Σύστημα Αρίθμησης							X	X	X
Αριθμητικές Παραστάσεις και Εξισώσεις							X	X	X
Στατιστική και Πιθανότητες							X	X	X
Συναρτήσεις									X

Πίνακας 7: Τομείς στις Κοινές Βασικές Προδιαγραφές ανά τάξη, πίνακας που προέκυψε από επεξεργασία δεδομένων του common core state standards το οποίο είναι αναρτημένο στο διαδίκτυο (Corestandards, 2009)

Το NCTM υποστηρίζει τις Κοινές Βασικές Προδιαγραφές και αναφέρει, πως η ευρεία υιοθέτησή τους παρουσιάζει μια άνευ προηγουμένου ευκαιρία για συστημική βελτίωση στην εκπαίδευση για τα μαθηματικά στις Ηνωμένες Πολιτείες. Προσφέρουν τη βάση για την ανάπτυξη αυστηρότερων, εστιασμένων και συνεκτικών μαθηματικών προγραμμάτων διδασκαλίας και αξιολογήσεων, που προωθούν την εννοιολογική κατανόηση και συλλογιστική, καθώς και την ανάπτυξη δεξιοτήτων. Προετοιμάζει τους μαθητές για το κολέγιο και περαιτέρω για τη σταδιοδρομία τους, για να διεκδικήσουν μια θέση στην κοινωνία. Τέλος, για να έχουν μακροπρόθεσμα και θετικά αποτελέσματα οι Κοινές Βασικές Προδιαγραφές πρέπει να είναι δυναμικές. Πρέπει να ενημερώνονται περιοδικά ώστε να αντανακλούν τόσο την αναδυόμενη έρευνα σχετικά με τη μάθηση όσο και τις εμπειρίες των εκπαιδευτικών. Το NCTM έχει δεσμευτεί για την ανάπτυξη και την εφαρμογή μιας διαφανούς, διαδικασίας, με ρεαλιστικά χρονοδιαγράμματα, για τη διαρκή βελτίωση των «Κοινών Βασικών Προδιαγραφών» βραχυπρόθεσμα, μεσοπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα (National Council of Teachers of Mathematics, 2013).

1.4.2 Η αποτελεσματικότητα των Κοινών Βασικών Προδιαγραφών

Η φοίτηση στο σχολείο στην Αμερική σήμερα, διαμορφώνεται ως εξής: στην ηλικία των τριών με πέντε ετών οι μαθητές εγγράφονται στο Βρεφικό ή προ- Νηπιακό τμήμα. Η Δημοτική εκπαίδευση ξεκινάει στο πέμπτο με έκτο έτος, με την φοίτησή τους στο Νηπιαγωγείο και ολοκληρώνεται στην πέμπτη τάξη. Η φοίτηση στο Γυμνάσιο ξεκινάει στην έκτη τάξη μέχρι και την όγδοη. Η φοίτηση στο Λύκειο ξεκινάει από την ένατη τάξη μέχρι και τη δωδέκατη (National Center for Education Statistics, 2020) (Πίνακας 8).

Βαθμίδα Εκπαίδευσης	Τάξεις	Ηλικία
Προ-Νηπιακό Τμήμα		3-5
Υποχρεωτική Εκπαίδευση		
Δημοτικό	Νηπιαγωγείο	5-6
	1 ^η Τάξη	6-7
	2 ^η Τάξη	7-8
	3 ^η Τάξη	8-9

Γυμνάσιο	Junior high school	4 ^η Τάξη	9-10
		5 ^η Τάξη	10-11
		6 ^η Τάξη	11-12
		7 ^η Τάξη	12-13
		8 ^η Τάξη	13-14
Λύκειο	Senior high school	9 ^η Τάξη	14-15
		10 ^η Τάξη	15-16
		11 ^η Τάξη	16-17
		12 ^η Τάξη/ Τελειόφοιτοι	17-18

Πίνακας 8: Η φοίτηση στο σχολείο στην Αμερική, πίνακας που προέκυψε από επεξεργασία δεδομένων της δομής του εκπαιδευτικού συστήματος στην Αμερική, η οποία είναι αναρτημένη στο διαδίκτυο (National Center for Education Statistics, 2020)

Στην Αμερική η αξιολόγηση της εκπαιδευτικής προόδου γίνεται από το εθνικό όργανο National Assessment of Educational Progress- NAEP (Εθνική Αξιολόγηση της Εκπαιδευτικής Προόδου). Μετρά τι γνωρίζουν και μπορούν να κάνουν οι μαθητές των ΗΠΑ, σε διάφορα μαθήματα, σε ολόκληρο το έθνος, τις πολιτείες και σε ορισμένες αστικές περιοχές (National Assessment of Educational Progress, n.d.). Γνωστό και ως «The Nation's Report Card», το NAEP παρείχε σημαντικές πληροφορίες σχετικά με την απόδοση των μαθητών από το 1969. Είναι ένα έργο που εφαρμόζεται με εντολή του Κογκρέσου, το οποίο διαχειρίζεται το «Εθνικό Κέντρο Στατιστικών μελετών για την Εκπαίδευση» (National Center for Education Statistics- NCES) στο Υπουργείο Παιδείας των ΗΠΑ (Department of Education) και στο Ινστιτούτο Επιστημών της Εκπαίδευσης (Institute of Education Sciences- IES).

Η αξιολόγηση εφαρμόζεται σε ολόκληρη τη χώρα κάθε δύο χρόνια. Συμμετέχει ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα μαθητών, με παρόμοια χαρακτηριστικά (φύλο, φυλή και εθνικότητα, τοποθεσία σχολείου), οι οποίοι φοιτούν στην τέταρτη, όγδοη και δωδέκατη τάξη. Αξιολογείται η επάρκεια των μαθητών στις προδιαγραφές για τα μαθηματικά, την ανάγνωση και τη γραφή, τις φυσικές επιστήμες, τα καλλιτεχνικά, την αγωγή του πολίτη, τη γεωγραφία, τα οικονομικά, την ιστορία, τον τεχνολογικό και μηχανολογικό

γραμματισμό (National Center for Education Statistics, 2018). Η αξιολόγηση στα μαθηματικά περιλαμβάνει:

1. αριθμούς, ιδιότητες και πράξεις,
2. μονάδες μέτρησης,
3. γεωμετρία,
4. ανάλυση δεδομένων, στατιστική, πιθανότητες και
5. άλγεβρα.

Την τελευταία πενταετία, διενεργήθηκαν τρεις αξιολογήσεις, τα έτη 2015, 2017 και 2019. Η κλίμακα της αξιολόγησης ξεκινάει από τους μηδέν πόντους και τερματίζει στους πεντακόσιους. Το NAEP κατατάσσει σε τρία επίπεδα τις επιδόσεις. Αυτές που είναι στο βασικό επίπεδο (Basic) με σκορ 214 πόντους έως 248, αυτές που είναι σε επίπεδο επάρκειας (Proficient) με σκορ 29 πόντους έως 281 και αυτές που είναι στο προχωρημένο επίπεδο με σκορ 282 πόντους έως 500.

Για τα μαθηματικά στο Δημοτικό, συμμετείχαν οι μαθητές της Δ' τάξης και δεν υπήρχε μεγάλη απόκλιση στον μέσο όρο της βαθμολογίας. Το 2015 και το 2017 ήταν 240 πόντοι και το 2019 ήταν 241 πόντοι, (National Assessment of Educational Progress, n.d.). Σκορ αρκετά υψηλό και σταθερό, συγκριτικά με εκείνα από το έτος 2000 και πίσω, δηλαδή πριν την συγγραφή των Αρχών και Προδιαγραφών για τα μαθηματικά, (Standards 2000) και των Κοινών Βασικών Προτύπων (CCSS 2006).

1.5 Νοεροί Υπολογισμοί

Στη βιβλιογραφία στους νοερούς υπολογισμούς αποδίδεται ο όρος «mental computation» ή «mental calculation» (Maclellan, 2001), καθώς και «mental arithmetic» (νοερή αριθμητική). Στην Αμερική είναι πιο συνηθισμένος ο όρος «mental maths» (νοερά μαθηματικά), (Seeley, 2005). Στην Ελλάδα ο ορισμός που μπορεί να αποδοθεί είναι (Λεμονίδης, 2013, σ.25):

Νοερός υπολογισμός είναι εκείνος που πραγματοποιείται νοερά με τη χρήση στρατηγικών. Δίνει ένα ακριβές αποτέλεσμα. Υλοποιείται συνήθως χωρίς τη χρήση άλλων μέσων, όπως μολύβι και χαρτί. Υπάρχει όμως η δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν για σύντομες σημειώσεις, για να βοηθήσουν τη βραχύχρονη μνήμη.

Οι νοεροί υπολογισμοί είναι αρκετά σημαντικοί και η διδασκαλία τους κρίνεται αναγκαία διότι (Reys, 1984):

- Αποτελούν προϋπόθεση για την εξέλιξη των γραπτών αλγόριθμων.

- Βοηθούν στην αντίληψη και την εμπέδωση των γνωρισμάτων των αριθμών και των ιδιοτήτων τους.
- Δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές να καλλιεργήσουν την ευρηματικότητά τους και να ανακαλύψουν τους δικούς τους τρόπους υπολογισμού και επίλυσης αριθμητικών δραστηριοτήτων.
- Βοηθούν τους μαθητές να αναπτύξουν δεξιότητες στην επίλυση των προβλημάτων.
- Προωθούν τον κατ' εκτίμηση υπολογισμό.

Επίσης (Thompson, 1997):

- Δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να εκτελέσουν τους υπολογισμούς νοερά και όχι απαραίτητα γραπτώς.
- Οι νοερές διεργασίες αποτελούν δεξιότητες που βοηθούν στην επίλυση προβλήματος.
- Αποτελούν βοηθητικό στοιχείο ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν σε μεγαλύτερο βαθμό τους γραπτούς αλγόριθμους.

Επιπλέον των παραπάνω, σημαντικοί είναι και οι εξής λόγοι (Λεμονίδης, 2020):

- Μπορούν να τους χρησιμοποιήσουν οι μαθητές και να τους εφαρμόσουν όχι μόνο μέσα στην τάξη στο μάθημα των μαθηματικών αλλά και στην καθημερινή τους ζωή.
- Συμβάλλουν ώστε να κατανοηθούν καλύτερα μαθηματικές έννοιες, όπως οι αριθμοί, η ανάπτυξη των γραπτών μεθόδων υπολογισμού, του κατ' εκτίμηση υπολογισμού καθώς και η επίλυση προβλημάτων.
- Βοηθούν στην ανάπτυξη και στην εξάσκηση γνωστικών ικανοτήτων, όπως η χρησιμοποίηση και η αναπαράσταση αφηρημένων εννοιών στη βραχύχρονη μνήμη, η ευελιξία και η προσαρμοστικότητα της σκέψης, η καλλιέργεια της μεταγνώσης στους μαθητές καθώς διατυπώνουν και επιδεικνύουν τους νοερούς υπολογισμούς τους.

1.5.1 Ευελιξία και προσαρμοστικότητα

Οι όροι ευελιξία και προσαρμοστικότητα στη σύγχρονη βιβλιογραφία θεωρούνται ότι έχουν παρόμοια σημασία και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ταυτόχρονα. Η ευελιξία/προσαρμοστικότητα, είναι η ανάπτυξη από τους μαθητές ενός ικανού ρεπερτορίου

νοερών στρατηγικών, η ικανότητα να τις χρησιμοποιούν και να τις εναλλάσσουν επιτυχημένα, καθώς και να επιλέγουν την κατάλληλη για την εκτέλεση των πράξεων (Verschaffel, Luwel, Torbeyns, & Van Dooren, 2009).

Ένας από τους παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν την εμφάνιση της ευελιξίας/προσαρμοστικότητας είναι τα χαρακτηριστικά των πράξεων (Verschaffel, Luwel, Torbeyns, & Van Dooren, 2009). Αν ένας μαθητής γνωρίζει πολλές στρατηγικές υπολογισμού δε συνεπάγεται ότι έχει αναπτύξει ευελιξία/προσαρμοστικότητα. Θα πρέπει να επιλέξει και την κατάλληλη. Να λάβει υπόψη του τους αριθμούς της πράξης, ώστε να χρησιμοποιήσει εκείνη που ταιριάζει περισσότερο (Blöte, Van der Burg, & Klein, 2001). Δεύτερος παράγοντας είναι το κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο που προέρχεται ο μαθητής. Οι εκάστοτε κοινωνικοί και πολιτισμικοί παράγοντες επηρεάζουν και καθορίζουν το είδος των στρατηγικών υπολογισμού που χρησιμοποιούν οι μαθητές (Nunes & Bryant, 2007). Το υψηλό οικογενειακό, μορφωτικό και βιοτικό επίπεδο είναι πιθανόν να βοηθήσει στην ανάπτυξη ευελιξίας/προσαρμοστικότητας στις στρατηγικές για τον υπολογισμό των πράξεων (Λεμονίδης & Λυγούρας, 2008). Τρίτος παράγοντας είναι η συντομία και η αποτελεσματικότητα που μπορεί να υλοποιήσει ο μαθητής μια στρατηγική έναντι άλλης σε μια πράξη. Σημαντικό είναι πρώτα να έχει αναπτύξει ένα ικανό εύρος στρατηγικών έτσι ώστε να μπορεί να έχει άμεσα πολλές εναλλακτικές επιλογές, να έχει εξασκηθεί με τις στρατηγικές στην υλοποίηση πράξεων, να εκτελεί με ακρίβεια τα βήματά του και να γνωρίζει πως η επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής θα τον οδηγήσει ταχύτερα στην ορθή εκτέλεση της πράξης (Blöte, Klein, & Beishuizen, 2000).

Εκτός από την κατηγορία των παραπάνω παραγόντων, αναζητήθηκαν και εκείνοι που επηρεάζουν την χρήση των νοερών στρατηγικών στην ευελιξία/προσαρμοστικότητα (Blöte, Klein, & Beishuizen, 2000). Μπορεί οι μαθητές να έχουν αναπτύξει ένα ικανό ρεπερτόριο νοερών στρατηγικών αλλά αυτό δεν επαρκεί για να τις χρησιμοποιήσουν ευέλικτα και κατάλληλα. Οι μαθητές θα πρέπει να ξέρουν:

- σε τι υπερτερεί η μία στρατηγική από την άλλη (Borkowski, 1985),
- την αξία της, πόσο χρήσιμη είναι και γιατί (Kurtz & Weinert, 1989),
- την προσπάθεια που θα πρέπει να καταβάλουν για να την εκτελέσουν σε σχέση με το χρόνο και τη δυσκολία που έχει (Pintrich & De Groot, 1990).

- Επίσης το πλαίσιο μέσα στο οποίο δραστηριοποιούνται οι μαθητές, επηρεάζει τη χρήση των στρατηγικών. Θα τις χρησιμοποιούσαν περισσότερο στο σχολείο που κάνουν διαρκώς εξάσκηση παρά στο σπίτι (Resnick, Bill , & Lesgold, 1992).

Η ευελιξία/ προσαρμοστικότητα συναντάται στη βιβλιογραφία και ως «ευελιξία στη χρήση στρατηγικών- strategic flexibility (Siegler & Lemaire, 1997)», «ευέλικτη και προσαρμοστική χρήση των στρατηγικών- flexible and adaptive use of strategies (Heinze, Star, & Verschaffel, Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education, 2009)», «στρατηγική σκέψη- strategic thinking (Craig, 2010)» αλλά και ως «προσαρμοστική ειδικευση- adaptive expertise» (Threlfall, 2009). Το αντίθετο της «προσαρμοστικής ειδικευσης» είναι η «ειδίκευση ρουτίνας». Ο Holyoak, (1991) αναφέρει πως ο μαθητής ο οποίος έχει «προσαρμοστική ειδίκευση» μπορεί να δημιουργήσει νέες στρατηγικές από τις υπάρχουσες και να βρει νέες λύσεις ανάλογα με τις εκάστοτε απαιτήσεις της πράξης, ενώ ο μαθητής με «ειδίκευση ρουτίνας» στην εκτέλεση πράξεων δεν θα μπορέσει να χρησιμοποιήσει άλλες στρατηγικές εκτός από αυτές που ήδη γνωρίζει, οπότε οι δυνατότητες του είναι περιορισμένες.

Η διδασκαλία της ευελιξίας/ προσαρμοστικότητας θα πρέπει να ξεκινήσει από νωρίς στο Δημοτικό σχολείο ώστε ο μαθητής να αποκτήσει ένα ρεπερτόριο στρατηγικών, να εξασκηθεί στη χρήση τους και να αναπτύξει την απαραίτητη γνώση σχετικά με αυτές (Verschaffel, Luwel, Torbeyns, & Van Dooren, 2011).

Έρευνες έχουν δείξει πως μαθητές χαμηλής επίδοσης είναι πιθανόν να μην μπορέσουν να ακολουθήσουν τη διδασκαλία της ευελιξίας/ προσαρμοστικότητας (Baxter, Woodward, & Olson, 2001), ενώ υπάρχουν μελέτες (Cichon & Ellis, 2003) που ισχυρίζονται το αντίθετο, πως αυτοί οι μαθητές θα καταφέρουν να ενισχυθούν περισσότερο γιατί θα τους δοθεί η δυνατότητα να γνωρίσουν στρατηγικές εκτός του κλασικού αλγόριθμου της παραδοσιακής διδασκαλίας. Τέλος, σε πρόσφατες έρευνες (Verschaffel, Luwel, Torbeyns, & Van Dooren, 2009) θεωρείται πως θα πρέπει να γίνει περαιτέρω διερεύνηση ώστε να προσδιοριστεί αν τελικά μπορούν να υποστηριχθούν οι μαθητές όλων των επιδόσεων από τη διδασκαλία της ευελιξίας/ προσαρμοστικότητας.

Για να μπορέσει ο δάσκαλος να καταφέρει οι μαθητές να αναπτύξουν ευελιξία/ προσαρμοστικότητα στις στρατηγικές μέσα από τη διδασκαλία του θα πρέπει να δώσει ιδιαίτερη βαρύτητα στις ιδιότητες των πράξεων, στις ιδιότητες του αριθμητικού συστήματος, στους υπολογισμούς με τη στρατηγική της αρίθμησης, στην εκμάθηση

των αριθμητικών γεγονότων και την αυτοματοποίησή τους (για παράδειγμα προπαίδεια), στη θεσιακή αξία των ψηφίων και στο ανάπτυγμα των αριθμών, στις αντίστροφες πράξεις, στη λειτουργία του ψηφίου του μηδενός (για παράδειγμα στον πολλαπλασιασμό), στην απλοποίηση των πράξεων (Anghileri, 1999; Beishuizen, 2001; Thompson 1997; Threlfall, 2002) και στην καλλιέργεια θετικού κλίματος απέναντι στα μαθηματικά και τους νοερούς υπολογισμούς σε περίπτωση που οι μαθητές δεν τα καταφέρουν σε κάποιο υπολογισμό να μην απογοητευθούν και να το αντιμετωπίσουν με αισιοδοξία.

1.5.2 Νοεροί Υπολογισμοί και προγράμματα αριθμητισμού στην Αγγλία, Αυστραλία και Αμερική

Το πρόγραμμα για την εθνική στρατηγική για τον αριθμητισμό προώθησε τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών. Τόνισε ιδιαίτερα τη σημασία τους και τις δεξιότητες και ικανότητες που μπορούν να αναπτύξουν οι μαθητές με τη χρήση τους. Οι εκπαιδευτικοί ανταποκρίθηκαν σε αυτή τη νέα πρόκληση και τις ενσωμάτωσαν στη διδασκαλία τους (Qualifications and Curriculum Authority, 1999).

Στην Αγγλία, υπήρξε ιδιαίτερη μέριμνα για τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών. Η Υπηρεσία Προσόντων και Προγραμμάτων Σπουδών (Qualifications and Curriculum Authority- QCA), παρείχε συνοδευτικό υλικό με τίτλο «Διδάσκοντας στρατηγικές νοερών υπολογισμών: Οδηγίες για τους δασκάλους στα βασικά στάδια 1 και 2» (Teaching Mental Calculation Strategies: Guidance for Teachers at Key Stages 1 and 2). Στο περιεχόμενο περιγράφονταν οι προσεγγίσεις στη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών στα βασικά στάδια 1 και 2 καθώς και νοερές στρατηγικές και νοερούς υπολογισμούς που θα μπορούσαν να εφαρμόσουν οι μαθητές στις τάξεις του Δημοτικού σχολείου.

Στην Αυστραλία, με την ανανέωση του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών, ενσωματώθηκαν για κάθε έτος φοίτησης περιγράφονται και επισημαίνονται νοερές στρατηγικές, μέθοδοι και προσεγγίσεις για την υλοποίηση των αριθμητικών υπολογισμών και πράξεων. Το συγκεκριμένο υλικό βασίζεται στους βασικούς άξονες που ορίζει το Αναλυτικό Πρόγραμμα για τα μαθηματικά και συγκεκριμένα για την πρωτοβάθμια εκπαίδευση στους αριθμούς και την άλγεβρα, στα μέτρα και τη γεωμετρία, στη στατιστική και τις πιθανότητες (Australian Curriculum Assessment and Reporting Authority, n.d.).

Στην Αμερική, το NCTM, υποστηρίζει τη χρήση των νοερών υπολογισμών. Σε έγγραφο που κυκλοφόρησε, η πρόεδρος του συμβουλίου (Seeley, 2005), προτρέπει τους μαθητές να εκτελούν όσο το δυνατόν περισσότερες μαθηματικές διεργασίες στο νου τους, υποστηρίζει τη νοερή αναπαράσταση μαθηματικών εννοιών, την εκτέλεση πράξεων με νοερούς υπολογισμούς. Μάλιστα, εφόσον οι μαθητές έχουν αναπτύξει τα νοερά μαθηματικά, μπορούν πιο εύκολα να διαχειριστούν και να λύσουν προβλήματα, εκτιμώντας το αποτέλεσμα, να εφαρμόσουν πολλαπλές προσεγγίσεις για την επίλυσή του, να αποφασίσουν αν η λύση που επέλεξαν θα οδηγήσει σε λογικό αποτέλεσμα σύμφωνα με τα δεδομένα, να αναπτύξουν αιτιολόγηση για την λύση που επέλεξαν.

Τόσο στις Αρχές και Προδιαγραφές για τα μαθηματικά (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) όσο και στα Σημεία Εστίασης του Προγράμματος Σπουδών γίνεται αναφορά στους νοερούς υπολογισμούς από το Νηπιαγωγείο έως και το Γυμνάσιο. Για την πρωτοβάθμια εκπαίδευση εντοπίζονται κυρίως στις θεματικές ενότητες Αριθμοί και Πράξεις, Άλγεβρα και Μέτρα. (National Council of Teachers of Mathematics, 2006)

Επίσης αναφορά στους νοερούς υπολογισμούς γίνεται και στις Κοινές Βασικές Προδιαγραφές. Επισημαίνονται περισσότερο για την πρωτοβάθμια εκπαίδευση στους τομείς Αριθμοί και Πράξεις με βάση τη δεκάδα, Πράξεις και Άλγεβρα, Αριθμοί και Πράξεις Κλάσματα, Αριθμητικές Παραστάσεις και για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στις Εξισώσεις και τη Γεωμετρία (National Council of Teachers of Mathematics, 2006)

1.5.3 Διδασκαλία Νοερών Υπολογισμών

Στην Αγγλία ακολουθείται το μοντέλο της «άμεσης διδασκαλίας» όπου συμμετέχει ενεργά όλη η τάξη, ή οι ομάδες των μαθητών ή και καθένας ξεχωριστά. Χρησιμοποιείται ο μαθηματικός διάλογος για την επεξήγηση και παρουσίαση των νοερών στρατηγικών υπολογισμού τους στην τάξη (QCA, 1999). Στις υπόλοιπες αγγλοσαξονικές χώρες η Αυστραλία ακολουθεί και αυτή το αγγλικό πρόγραμμα και μοντέλο (National Assessment of Educational Progress, n.d.). Οι Η.Π.Α. με το πρόγραμμα ‘Standards 2000’ ακολουθούν το Ολλανδικό μοντέλο των «ρεαλιστικών» μαθηματικών (Λεμονίδης, 2020). Διαφοροποιείται με τη διδασκαλία της επίλυσης προβλήματος για την ανάπτυξη του μαθηματικού διαλόγου, των νοερών υπολογισμών και της αιτιολόγησης των απαντήσεων και μεθόδων των μαθητών. Πολλές Ασιατικές χώρες εφάρμοσαν και αυτές μεταβολές στα αναλυτικά τους προγράμματα για τον

αριθμητισμό (Fuji et al., 1998). Διαφοροποιούνται ανωτέρω ως εξής: στη Σιγκαπούρη, χρησιμοποιείται ένας συνδυασμός διδακτικών μοντέλων (μετωπικής, εξατομικευμένης και μικρής ομάδας εργασίας), με ανάλογες δραστηριότητες. Στην Ιαπωνία και την Ταϊβάν ο περισσότερος διδακτικός χρόνος παρέχεται για διάλογο και σύγκριση στρατηγικών επίλυσης και υπολογισμών των μαθητών. Επιλέγονται μαθηματικά προβλήματα από την καθημερινή πραγματικότητα και όχι τυποποιημένα και υποθετικά (Κίνα). Το εκάστοτε μοντέλο διδασκαλίας εφαρμόζεται κατ' επιλογή του διδάσκοντα.

Το επιθυμητό μοντέλο διδασκαλίας για την προαγωγή του αριθμητισμού και των νοερών υπολογισμών είναι η άμεση διδασκαλία (DfEE, 1998). Καλλιεργεί την ανάπτυξη του διαλόγου όπου οι μαθητές έχουν ενεργό ρόλο, καταθέτοντας τις απόψεις τους, προτείνοντας θέματα για συζήτηση, παρουσιάζοντας τις μεθόδους τους, επεξηγώντας και αναλύοντας τις λύσεις τους. Ο Gray (1997) σε έρευνά του διαπίστωσε πως μαθητές με καλή επίδοση μπορούν να χρησιμοποιούν νοερές στρατηγικές που διδάχθηκαν, ώστε να παράγουν νέες. Επομένως οι μαθητές θα πρέπει να έχουν πρόσβαση στη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών, για να δημιουργηθεί η παραγωγική διαδικασία. Οι Cooper, Heirdsfield and Irons (1996), προτείνουν να μειωθεί ο χρόνος για τη διδασκαλία του κάθετου αλγόριθμου και να εξοικονομηθεί χρόνος για την άμεση διδασκαλία νοερών στρατηγικών. Οι Klein, Beishuizen and Treffers (1998), σε έρευνα τους αναφέρουν πως οι μαθητές με την άμεση διδασκαλία θα καταφέρουν να μάθουν να χρησιμοποιούν στρατηγικές νοερών υπολογισμών για την επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης.

Η άμεση διδασκαλία περιλαμβάνει τα εξής στοιχεία (Department for Education and Employment, 1998):

- Την ενημέρωση των μαθητών σχετικά με το περιεχόμενο του εκάστοτε μαθήματος και τους στόχους.
- Τη μεγιστοποίηση των ευκαιριών αλληλεπίδρασης με τους μαθητές, ώστε να λαμβάνεται η απαραίτητα ανατροφοδότηση για την ανάπτυξη μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων.
- Την ανάπτυξη εναλλακτικών τρόπων επίλυσης προβλημάτων.
- Την καθοδήγηση για τα βήματα που θα πρέπει να ακολουθήσουν οι μαθητές ώστε να βρουν ένα αποτέλεσμα.
- Την επίδειξη παραδειγμάτων για την κατανόηση μαθηματικών διαδικασιών.

- Την επεξήγηση της επίλυσης ενός προβλήματος ή μιας δραστηριότητας και του τρόπου σκέψης και εργασίας.
- Τις ερωτήσεις για συζήτηση και ανάπτυξη διαλόγου για την προώθηση της μάθησης.
- Την εμπέδωση της προσφερόμενης γνώσης μέσω δραστηριοτήτων, στις οποίες μπορούν να εργαστούν οι μαθητές ομαδικά ή εταιρικά.
- Την αξιολόγηση των απαντήσεών τους και την ανάπτυξη ανατροφοδότησης.
- Την ανακεφαλαίωση, η οποία υλοποιείται τόσο κατά τη διάρκεια του μαθήματος όσο και με την ολοκλήρωσή του. Ο δάσκαλος με τον τρόπο αυτό προσπαθεί να κάνει το μάθημα πιο κατανοητό για τους μαθητές.

Επίσης σημαντικός παράγοντας είναι και ο τρόπος με τον οποίο κάθονται οι μαθητές. Προτείνεται να σχηματίζουν ομάδες, ώστε να προωθείται ο διάλογος, η αλληλεπίδραση μεταξύ τους και με το δάσκαλο, η ομαδική και εταιρική μορφή εργασίας (Qualifications and Curriculum Authority, 1999).

Εξετάζοντας τη δυναμική της ομάδας και του διαλόγου όπου φαίνεται να αποτελούν σημαντικά στοιχεία της άμεσης διδασκαλίας, εναλλακτικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες μορφές διδασκαλίας, όπως η Ομαδική μορφή διδασκαλίας, η Διαλογική μορφή διδασκαλίας και η Ερωτηματικά εξελισσόμενη.

1.5.3.1 Εναλλακτικά Μοντέλα Διδασκαλίας

• Ομαδική μορφή διδασκαλίας

Ειδικότερα, η ομαδική μορφή διδασκαλίας ή ομαδική σχολικής εργασίας είναι η διδακτική, παιδαγωγικά και οργανωτικά, σημαντική μορφή διδασκαλίας, κατά την οποία ο εκπαιδευτικός αναθέτει στους μαθητές της κάθε ομάδας της τάξης ίδιες για όλους ή διαφορετικές για κάθε ομάδα σχολικές εργασίες μάθησης, πάνω στις οποίες συνεργάζονται οι μαθητές, ανακοινώνουν στην ολομέλεια της τάξης τα αποτελέσματά τους, στα οποία ασκούν κριτική, διατυπώνουν το τελικό αποτέλεσμα και δίνουν λύση στο θέμα ή το πρόβλημα (Svajcer, 1981). Στο περιθώριο της συγκεκριμένης μορφής μπορούν να λειτουργήσουν ταυτόχρονα κι άλλες (συνεργασία ανά δύο, εταιρική κ.ά.). Η ομαδική μορφή διδασκαλίας έχει τρεις κύριες φάσεις:

Πρώτη φάση: α) της παρουσίασης του λεκτικού προβλήματος και β) του σχεδιασμού της εργασίας.

Δεύτερη φάση: α) των προσπαθειών λύσης του λεκτικού προβλήματος από τα μέλη της ομάδας και β) της συγκεντρώσεις των αποτελεσμάτων τους.

Τρίτη φάση: α) της σύνοψης των αποτελεσμάτων όλων των ομάδων, β) της άσκησης κριτικής πάνω σε αυτά, γ) της διατύπωσης ενός γενικού τελικού συμπεράσματος που θα αποτελεί και την λύση του λεκτικού προβλήματος ή την απάντηση στο αρχικό ερώτημα.

Στα χαρακτηριστικά οφέλη της ομαδικής μορφής διδασκαλίας κατά την επίλυση του λεκτικού προβλήματος, συγκαταλέγεται η προώθηση της ανταλλαγής των απόψεων με χαρακτηριστικό τρόπο ανάμεσα στους μαθητές (Clement, 1991), η ανάπτυξη δεσμών εμπιστοσύνης μεταξύ των μελών της ομάδας (Vaughan, 2002), η βοήθεια στη βελτίωση των στρατηγικών αιτιολόγησης (Gillies & Haynes, 2011), η συμβολή στην αντιμετώπιση του άγχους και των αρνητικών συναισθημάτων (Von Glasersfeld, 1991).

Συμβάλλει θετικά στην υλοποίηση του έργου της ομαδικής σχολικής εργασίας το είδος του μαθηματικού προβλήματος. Στα «ανοικτού τύπου» προβλήματα ο μαθητής με την επεξεργασία του συγκεκριμένου μπορεί να το κατανοήσει καλύτερα και να φτάσει στην επίλυσή του, λαμβάνοντας μόνο και εφόσον το επιθυμεί απλές οδηγίες από το δάσκαλο (Strong, Silver, & Perini, 2001). Έτσι εργάζεται στη δική του ζώνη επικείμενης ανάπτυξης και προχωρεί στο επόμενο επίπεδο μάθησης (Vygotsky, 1986).

• **Διαλογική μορφή διδασκαλίας**

Η βασικότερη διαδικασία αυτής της μορφής είναι ο διάλογος. Και για τη συγκεκριμένη έρευνα, ο μαθηματικός διάλογος. Ως γενικότερος ορισμός της διαλογικής μορφής διδασκαλίας, χαρακτηρίζεται εκείνη που μπορεί με τη χρήση του διαλόγου να υλοποιήσει το διδακτικό της σκοπό (Geisser, 1955).

Ο διδακτικός διάλογος χωρίζεται στους εξής τύπους:

- Στον εξαρτώμενο, που άμεσα σχετίζεται και υποστηρίζεται από τον εκπαιδευτικό. Προκαθορίζεται από τη διδακτέα ύλη, βασίζεται σε συστηματική δομή, ακολουθεί μια συγκεκριμένη σειρά και εξελίσσεται γραμμικά.
- Στον ελεύθερο, όπου ο εκπαιδευτικός δεν είναι ο καθοδηγητής, αλλά ένα μέλος του διαλόγου. Οι μαθητές απολαμβάνουν την ελευθερία να δημιουργήσουν τα αποτελέσματά τους και να τα διαθέσουν προς συλλογική κρίση. Επίσης τα κίνητρα σκέψης προέρχονται από τους ίδιους, εσωτερικά, σε αντίθεση με τον εξαρτώμενο, όπου πηγάζουν από τον εκπαιδευτικό.

Βασική προϋπόθεση ώστε να επιτύχει ο διδακτικός διάλογος είναι οι ερωτήσεις των μαθητών προς τον εκπαιδευτικό αλλά και προς τους συμμαθητές τους (Δερβίσης, 1998). Στο σημείο αυτό γίνεται φανερό η συμβολή της ερωτηματικά εξελισσόμενης μορφής που ενισχύει την υλοποίηση της διαλογικής.

- **Ερωτηματικά εξελισσόμενη μορφή διδασκαλίας**

Κατά τη διδακτική αυτή μορφή, ο δάσκαλος υποβάλλει σαφείς ερωτήσεις με τέτοιον τρόπο, ώστε να αναμένονται οι ανάλογες απαντήσεις. Η σειρά των ερωταποκρίσεων είναι προγραμματισμένη για να δημιουργούν προβληματισμούς στους μαθητές και να προκαλούν τις αντιδράσεις τους ως την πραγμάτωση του σκοπού της διδασκαλίας (Stöcker, 1975).

Η ερώτηση ως διδακτικό μέσο διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη διδακτική διαδικασία. Η τεχνική της παρουσιάζει δυο όψεις: την εξωτερική και την εσωτερική (Stöcker, 1975). Η πρώτη αποτελεί την μορφή της ερώτησης, τη λογική και γλωσσική ορθότητα και την κατάλληλη δομή της, ώστε να είναι ανάλογη με την αντιληπτική ικανότητα των παιδιών, για να γίνεται αμέσως κατανοητή. Σχετικά με την εσωτερική όψη της ερωτήσεως, είναι ανάγκη να αναφέρεται άμεσα, στο περιεχόμενο της διδασκαλίας. Πετυχημένες ερωτήσεις (Stöcker, 1975) είναι εκείνες όπου:

- Είναι σαφείς και κατανοητές.
- Δεν περιέχουν γενικότητες και αοριστολογίες.
- Οι ερωτηματικές αντωνυμίες τοποθετούνται στην αρχή.
- Δεν αποβλέπουν σε μονολεκτικές απαντήσεις γιατί τότε προκαλούν συνήθως την παύση του διαλόγου.

- Αναφέρονται σε όλους τους μαθητές.
- Προκαλούν το ερευνητικό ενδιαφέρον των μαθητών.
- Αφήνουν περιθώρια σε ελεύθερες απαντήσεις.
- Στοχεύουν στην επανάληψη, στη μάθηση και στη νέα γνώση.
- Αναζητούν την αίτια.

Οι διδακτικές ερωτήσεις, με κριτήριο την απαίτηση, χωρίζονται σε δυο κατηγορίες (Stöcker, 1975):

1. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι ερωτήσεις που ζητούν από τους μαθητές η απάντησή τους να είναι αποτέλεσμα μιας αυτενεργού, βαθύτερης ερευνητικής σκέψης για την ανακάλυψη μιας καινούργιας γνώσης.

2. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι ερωτήσεις που προϋποθέτουν ότι η απάντηση των μαθητών να προέρχεται από την πείρα και τις γνώσεις τους και θα είναι εύκολη και κατανοητή.

Στη σύγχρονη βιβλιογραφία ορίζονται οκτώ βασικές προϋποθέσεις για αποτελεσματικές ερωτήσεις (CBS, 2011):

1. Να προκαλούν την σκέψη στο μαθητή.
2. Να συνδέονται με τους μαθησιακούς στόχους.
3. Οι ερωτήσεις να είναι ανοικτού τύπου.
4. Να χρησιμοποιούνται ερωτήσεις που πραγματικά πρέπει και μπορούν να απαντηθούν.
5. Να χρησιμοποιούνται ρήματα που να προκαλούν γνωστικές διαδικασίες ενεργοποίησης της σκέψης (παρατηρώ, εκτιμώ, αποφασίζω, περιλαμβάνω, σημειώνω, αναγνωρίζω, διαφέρω, θυμάμαι, βλέπω, συσχετίζω, προβλέπω, σκέφτομαι, ερμηνεύω, περιγράφω).
6. Οι ανοικτού τύπου ερωτήσεις θα πρέπει να προάγουν το διάλογο και να δίνουν τη δυνατότητα να συμμετέχουν και άλλα μέλη.
7. Να είναι ουδέτερες για να μην αποτρέπουν μαθητές να απαντήσουν, οι οποίοι είτε τους φοβίζει η πολυπλοκότητά τους, είτε χάνουν το ενδιαφέρον τους επειδή είναι πολύ απλές. Εκφράσεις του προσώπου του δασκάλου, χειρονομίες και ο τόνος της φωνής στέλνουν μηνύματα που μπορούν να αποθαρρύνουν ή και να ενθαρρύνουν τους μαθητές.
8. Να δίδεται επαρκής χρόνος για να απαντήσουν όλοι οι μαθητές.

1.5.4 Τι περιλαμβάνει το μάθημα των νοερών υπολογισμών

Η διδασκαλία των νοερών υπολογισμών δύναται να διαρκέσει είκοσι λεπτά και μπορεί να ενσωματωθεί στο καθημερινό μάθημα των μαθηματικών. Ο σχεδιασμός της περιλαμβάνει τρία στάδια (Qualifications and Curriculum Authority, 1999):

1. Διδασκαλία νοερών υπολογισμών.
2. Ανάθεση μεμονωμένων πράξεων για άσκηση και εμπέδωση.
3. Ανακοίνωση από τους μαθητές των νοερών στρατηγικών που χρησιμοποίησαν στις προηγούμενες πράξεις.

Ενδεικτικά μερικές από τις δραστηριότητες και εργασίες που προσφέρονται για την ανάπτυξη, καλλιέργεια και προώθηση των νοερών υπολογισμών σχετίζονται με τις

τέσσερις πράξεις και τις ιδιότητες τους, με μετρήσεις διαφορετικών μεγεθών, με γρήγορη ανάκληση των αριθμητικών γεγονότων, με μοτίβα και με τη διαχείριση δεδομένων. Μερικές ενδεικτικές γενικές οδηγίες κατά τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών για το δάσκαλο είναι:

- Να χρησιμοποιεί ερωτήσεις ανοικτού και κλειστού τύπου.
- Να αναπτύσσει διάλογο και να διασφαλίζει τη συμμετοχή όλων των μαθητών
- Να απευθύνει κατάλληλες ερωτήσεις σε κάθε μαθητή, ώστε να διασφαλίσει τη συμμετοχή του στη διαδικασία.
- Να προσπαθεί να κάνει μια άτυπη αξιολόγηση των μαθητών βάσει των απαντήσεών τους.
- Να είναι υποστηρικτικός με τους μαθητές
- Να προσπαθεί να διατηρεί ένα σταθερό ρυθμό στη διδασκαλία και να κρατά το ενδιαφέρον των μαθητών αμείωτο.
- Να χρησιμοποιεί πολλαπλά μέσα (πίνακας, διάγραμμα, αριθμομηχανή), ώστε να γίνεται πλήρως κατανοητός.
- Να είναι υποστηρικτικός και ευέλικτος με τους μαθητές που αντιμετωπίζουν μαθησιακές δυσκολίες.
- Να μην αφήνει να αναπτύσσονται παρερμηνείες και να αξιοποιεί τα λάθη των μαθητών ως ευκαιρίες μάθησης.
- Να αναδεικνύει τις νέες στρατηγικές που ανέπτυξαν οι μαθητές και να τους επιβραβεύει.
- Να προάγει το διάλογο και τη συνεργασία των μαθητών στις ομάδες.

1.5.5 Είδη νοερών στρατηγικών

Σύμφωνα με τον Sugarman (1997) η στρατηγική είναι η λήψη απόφασης για την υλοποίηση ενός αριθμητικού γεγονότος με έναν συγκεκριμένο τρόπο (Askew & Wiliam, 1995). Δίνει μεγάλη προσοχή στους αριθμούς που εμπλέκονται στον υπολογισμό. Οι Askew και Wiliam (1995), ερμηνεύουν τον όρο στρατηγική ως μία νοερή μέθοδο που προσεγγίζονται τα προβλήματα και οι υπολογισμοί. Ο Thompson (1997), αναφέρει πως νοερές στρατηγικές είναι γνωστά αριθμητικά γεγονότα που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να βρουν έναν άγνωστο υπολογισμό.

Πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με τη διερεύνηση και την καταγραφή των ειδών νοερών στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές. Οι Beishuizen και

Anghileri (1998), στη συγκριτική τους μελέτη για τις στρατηγικές των νοερών υπολογισμών μεταξύ του Βρετανικού και του Ολλανδικού αναλυτικού προγράμματος για τα μαθηματικά, αναζήτησαν την εξέλιξη για τους νοερούς υπολογισμούς των δύο χωρών και τα είδη των νοερών στρατηγικών. Ανάμεσα σε αυτά, διέκριναν τη στρατηγική της συσσώρευσης N10 και του διαχωρισμού N1010. Στην πρώτη γίνεται αλματώδης αρίθμηση με δεκάδες προς τα πάνω, $25+13=25+10=35$, $35+3=38$ και στη δεύτερη οι αριθμοί αναλύονται ανάλογα με τη θεσιακή τους αξία και έπειτα προστίθενται ή αφαιρούνται μεταξύ τους, $45+32=40+30=70$ και $5+2=7$, $70+7=77$.

Στην έρευνα του Thompson (1990) συμμετείχαν 103 μαθητές της Αγγλίας, δεύτερου και τρίτου έτους φοίτησης. Οι μαθητές με προσωπική συνέντευξη κλήθηκαν να λύσουν προφορικά τις πράξεις που τους έθεταν. Ο ερευνητής παραθέτει τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στην πράξη της πρόσθεσης. Αναφέρεται στην ανάκληση γνωστών αριθμητικών γεγονότων, στις στρατηγικές ανάλυσης αριθμών σε δεκάδες και μονάδες, όπως τη N1010 των Beishuizen και Anghileri. Επισημαίνει τις στρατηγικές της αντιστάθμισης, της στρογγυλοποίησης προς την επόμενη δεκάδα και προσθαφαίρεση του υπόλοιπου από το αποτέλεσμα ανάλογα με την περίπτωση, $46+37=50+37=87-4=83$.

Οι Klein, Beishuizen, και Treffers (1998), εφάρμοσαν στην Ολλανδία για δύο χρόνια, δύο μικρής κλίμακας πειραματικά προγράμματα σπουδών, διδάσκοντας νοερούς υπολογισμούς για την πράξη της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Κατά τη διάρκεια της εξέλιξης των προγραμμάτων, χρησιμοποιήθηκαν λεκτικά προβλήματα ρεαλιστικού περιεχομένου, όπου 275 μαθητές κλήθηκαν να τα λύσουν. Οι ερευνητές σημείωσαν τις στρατηγικές των μαθητών. Μερικές από αυτές ήταν η στρατηγική 1010 όπου οι προσθετέοι αναλύονται στις μονάδες και δεκάδες, $18+15$ όπως $10+10$, $5+8$, $20+13$, η στρατηγική N10 όπου αναλύεται ο δεύτερος προσθετέος σε δεκάδες και μονάδες και προστίθεται σταδιακά με τον πρώτο, $18+15$, $18+10$, $28+5$, η A10 όπου αναλύεται ο δεύτερος προσθετέος με τέτοιο τρόπο, ώστε να μέρη του να χρησιμοποιηθούν για τη μετάβαση του πρώτου προσθετέου στην επόμενη δεκάδα, $18+15$, $18+2=20$, $20+13=33$, η N10C όπου ο δεύτερος αριθμός στρογγυλοποιείται στην ανώτερη ή κατώτερη δεκάδα και το ποσό της στρογγυλοποίησης αφαιρείται από το αποτέλεσμα, $15+18=15+20=35$, $35-2=33$, η 10s, όπου αναλύονται οι προσθετέοι σε δεκάδες και μονάδες. Οι δεκάδες προστίθενται μαζί και με το αποτέλεσμά τους προστίθενται ξεχωριστά οι μονάδες του καθενός, $18+15$, $10+10=20$, $20+8=28$, $28+5=33$.

Η Αρχή Προσόντων και Προγραμμάτων Σπουδών στην Αγγλία (QCA, 1999) για την υποστήριξη της εθνικής στρατηγικής για τον αριθμητισμό, εξέδωσε εγχειρίδιο με τίτλο «Teaching Mental Calculation Strategies: Guidance for Teachers at Key Stages 1 and 2». Περιγράφει τις προσεγγίσεις στη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών και αποτυπώνει είδη νοερών στρατηγικών όπως: τη χρήση των πολλαπλάσιων του 10 ($25+17=25+10+7=35+7=42$) και τη χρήση διπλών αθροισμάτων ($48+45=45+45+3=93$).

Ο Threlfal (2002) αναφέρει αρκετά είδη στρατηγικών νοερών υπολογισμών άλλων μελετών, τα οποία χρησιμοποίησε το δείγμα του (53 μαθητές) στους υπολογισμούς των λεκτικών προβλημάτων της δικής του έρευνας. Συγκεκριμένα για την πράξη της πρόσθεσης, κάνει αναφορά στις νοερές στρατηγικές της ανάκλησης, της αντιστάθμισης του Thompson (1999), στις N10, N1010, A10, N10C, 10S των Klein, Beishuizen και Treffers, στη χρήση των «διπλών» και των πολλαπλασίων του 10 που περιγράφονται στα εγχειρίδια της αρχής προσόντων και προγραμμάτων σπουδών (QCA).

Η ερευνήτρια Heuvel- Panhuizen (2001) παραθέτει έναν οδηγό με τα κύρια χαρακτηριστικά του Ολλανδικού αναλυτικού προγράμματος σπουδών για τα μαθηματικά, σχετικά με τον τρόπο διδασκαλίας και τις νοερές στρατηγικές (σελ. 61). Συγκεκριμένα, αναφέρεται στην αρίθμηση προς τα επάνω (πρόσθεση) ή κάτω (αφαίρεση) με βήματα- άλματα, διατηρώντας τον πρώτο όρο σταθερό, $57-29=57-20=37$, $37-7=30$, $30-2=18$, στην ανάλυση των όρων σε μονάδες και δεκάδες, $27-19=20-10=10$, $7-7=0$... $10-2=8$ και τη στρατηγική της αντιστάθμισης, που διενεργείται με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των πράξεων και των προσθαφαιρέσεων, $67-59=67-60=27$, $27+1=28$.

Ο Carpenter και οι συνεργάτες του (Carpenter, et al., 1998) του εκπόνησαν τριετή έρευνα με τη συμμετοχή 82 μαθητών οι οποίοι φοιτούσαν μέχρι και το τρίτο έτος φοίτησης. Η συλλογή των δεδομένων έγινε με ατομική συνέντευξη και φύλλο εργασίας. Για την επίλυση των προβλημάτων συνήθως απαιτούνταν η εκτέλεση προσθέσεων ή αφαιρέσεων. Καταγράφηκαν νοερές στρατηγικές της αντιστάθμισης όπου οι μαθητές απλοποίησαν τους αριθμούς για να γίνει πιο εύκολος υπολογισμός και της ανάλυσης των προσθετών σε μονάδες και δεκάδες και το μεταξύ τους συνδυασμό, δημιουργώντας επιμέρους αθροίσματα.

Στην έρευνα των Heirdsfield, Cooper και Irons (1999), συμμετείχαν 95 μαθητές που φοιτούσαν από το τέταρτο έτος φοίτησης μέχρι και το έκτο. Τα δεδομένα

συλλέχθηκαν με τη βοήθεια της ατομικής συνέντευξης. Οι μαθητές έπρεπε να λύσουν τρία αριθμητικά προβλήματα πολλαπλασιασμού και τρία διαίρεσης δύο. Όλα τα προβλήματα παρουσιάζονταν στους μαθητές με τη μορφή εικόνων και προφορικά. Δεν υπήρχαν ασκήσεις με αλγόριθμους. Τα είδη των νοερών στρατηγικών που καταγράφηκαν ήταν της μοντελοποίησης $4 \times 9 = 9 + 9 + 9 + 9$, της διάσπασης 5×19 : $5 \times 9 = 45 = 40 + 5$, $5 \times 10 = 50$, $50 + 40 = 90$, της αντιστάθμισης 5×19 : $5 \times 20 = 100$, $100 - 5 = 95$ και της καταμέτρησης $3 \times 3 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Ο Fuson και οι συνεργάτες (Fuson, et al., 1997) στην έρευνά τους αναζητήσαν τις νοερές στρατηγικές των μαθητών στις πράξεις των λεκτικών προβλημάτων που έθεσαν. Καταγράφηκαν τρεις κατηγορίες στρατηγικών νοερών υπολογισμών. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν αυτές όπου οι μαθητές αναλύουν μόνο τον ένα αριθμό και τον άλλο τον κρατάνε σταθερό, $45 + 40 = 40 + 40 = 80$, $80 + 5 = 85$. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι στρατηγικές όπου οι μαθητές αναλύουν και επεξεργάζονται και τους δύο αριθμούς της πράξης, $73 + 19$, $72 + 1$, $18 + 1$, $72 + 18 = 90$, $90 + 2 = 92$. Στην τρίτη κατηγορία ανήκουν οι στρατηγικές όπου οι μαθητές απλοποιούν τους αριθμούς της πράξης, για να εκτελέσουν πιο εύκολα τον υπολογισμό, $79 - 18 = 80 - 18 = 12 + 1 = 13$.

Στη μελέτη των Carpenter, Hiebert, και Moser (1983) καταγράφηκαν οι στρατηγικές υπολογισμού των μαθητών της Α' τάξης Δημοτικού στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων, πρόσθεσης και αφαίρεσης. Ελέγχθηκαν ατομικά 43 μαθητές. Ο τρόπος επίλυσης ήταν κυρίως η μοντελοποίηση (στρατηγικές με υλικά ή αισθητοποίησης των αριθμών). Λίγα παιδιά εφάρμοσαν στρατηγικές αρίθμησης, ανάκλησης ή διαχωρισμού.

Στην έρευνά των Oliver, Murray και Human (1991), συμμετείχαν μαθητές από σαράντα Δημοτικά σχολεία. Επικεντρώθηκαν στις μικρότερες τάξεις. Διήρκεσε περισσότερο από ένα χρόνο. Καταγράφηκαν οι απαντήσεις των μαθητών σε λεκτικά προβλήματα και όχι σε μεμονωμένες πράξεις. Οι μαθητές πρώτα ζωγράφισαν τη λύση και έπειτα χρησιμοποίησαν αριθμούς. Για παράδειγμα, η «Yolande» (τάξη 1), στο πρόβλημα «θέλετε να μοιράσετε 24 μπαλόνια σε 6 παιδιά. Πόσα θα πάρει το καθένα;», ζωγράφισε τα έξι παιδιά που είχαν από τέσσερα μπαλόνια και έπειτα έγραψε τον αριθμό 4 στο καθένα.

Ο Csikos στη μελέτη του (2016) παρουσιάζει τις νοερές στρατηγικές που χρησιμοποίησαν σε προσθέσεις και αφαιρέσεις τριψήφιων αριθμών οι 78 μαθητές της Δ' τάξης (40 αγόρια και 38 κορίτσια) από δύο διαφορετικά σχολεία της Ουγγαρίας. Για το σκοπό αυτό κάθε μαθητής εξετάστηκε ξεχωριστά από συνεργάτες του ερευνητή.

Του δόθηκε ένα φύλλο εργασίας με 8 πράξεις, 6 προσθέσεις και 2 αφαιρέσεις. Για κάθε πράξη είχε στη διάθεσή του να απαντήσει προφορικά 60 δευτερόλεπτα. Μέσα σε αυτό το χρονικό πλαίσιο, οι συνεργάτες κατέγραψαν κάθε λάθος απάντηση που δόθηκε από τους μαθητές στο φύλλο απαντήσεων. Όταν άκουσαν τη σωστή απάντηση, σταμάτησαν το χρονόμετρο, σημείωσαν τον χρόνο που απαιτήθηκε για τη σωστή λύση και προχώρησαν στην επόμενη πράξη. Έχοντας ολοκληρώσει τις οκτώ εργασίες, ζητήθηκε από τους μαθητές να εξηγήσουν πώς είχαν εκτελέσει κάθε πράξη. Οι συνομιλίες καταγράφηκαν. Οι μαθητές μπορούσαν να δουν ξανά τα φύλλα εργασιών τους βοηθητικά για να αναλύσουν τη στρατηγική τους. Τα αποτελέσματα αναλύθηκαν και οι στρατηγικές ταξινομήθηκαν ως εξής: στρατηγική του διαχωρισμού, της συσσώρευσης, της αντιστάθμισης, της εξισορρόπησης και ο κάθετος αλγόριθμος. Ο ερευνητής χρησιμοποίησε τα δεδομένα των στρατηγικών περεταίρω για να εξαγάγει συμπεράσματα σχετικά με τις στρατηγικές και το χρόνο στον οποίο χρειάστηκαν οι μαθητές να τις υπολογίσουν, με τις διαφορές στη χρήση των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές των διαφορετικών σχολείων.

Ερευνητές (Heinze, Arend, Gruessing, & Lipowsky, 2018) αναζήτησαν κατά πόσο η άμεση ή έμμεση διδασκαλία των νοερών υπολογισμών θα αύξανε την προσαρμοστική χρήση τους από τους μαθητές. Κατά πόσο δηλαδή θα μπορούσαν να επιλέξουν την κατάλληλη για την εκτέλεση της επιζητούμενης πράξης. Στη μελέτη τους, συμμετείχαν 73 μαθητές της Γ' τάξης του Δημοτικού σχολείου στη Γερμανία, οι οποίοι διδάχτηκαν σε 16 μαθήματα νοερές στρατηγικές για την εκτέλεση πολυψήφιων προσθέσεων και αφαιρέσεων. Οι στρατηγικές που επιλέχθηκαν στη διδακτική παρέμβαση ήταν η στρατηγική του άλματος, του διαχωρισμού, της αντιστάθμισης, της εξισορρόπησης και της αντίθετης πράξης (μόνο για την αφαίρεση, όπου εκτελείται σαν αντίθετη πρόσθεση, $701-698=3$ $698+3=701$). Ο λόγος ήταν ότι οι συγκεκριμένες στρατηγικές προσφέρονταν σύμφωνα με τους ερευνητές για την ανάπτυξη της προσαρμοστικότητας. Οι μαθητές χωρίστηκαν τυχαία σε δύο ομάδες, όπου καθεμία δέχτηκε ξεχωριστή διδακτική παρέμβαση, άμεση και έμμεση. Τα αποτελέσματα συλλέχτηκαν με φύλλα εργασίας τα οποία δόθηκαν στους μαθητές 2 εβδομάδες πριν τις παρεμβάσεις, ακριβώς μετά το τέλος των παρεμβάσεων, 3 και 8 μήνες μετά την ολοκλήρωσή της. Οι μαθητές κλήθηκαν να εκτελέσουν προσθέσεις και αφαιρέσεις τριψήφιων αριθμών. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές που δέχτηκαν την άμεση διδασκαλία εφάρμοσαν πιο συχνά αυτές τις στρατηγικές, ενώ οι μαθητές που δέχτηκαν την έμμεση διδασκαλία χρησιμοποίησαν στρατηγικές που δημιούργησαν οι ίδιοι

οικοδομώντας στη γνώση των ήδη υπάρχουσών. Ως εκ τούτου, για την προσαρμοστική χρήση αυτών των στρατηγικών, η έμμεση διδασκαλία αποδείχθηκε πιο αποτελεσματική. Ωστόσο, αυτό το φαινόμενο δεν ισχύει για στρατηγικές που είναι πολύ περίπλοκες για να δημιουργηθούν από τους μαθητές.

Η Hickendorff (2018) στην έρευνά της αναζήτησε τους παράγοντες που επηρεάζουν τη συχνότητα χρήσης των ευέλικτων νοερών στρατηγικών από τους μαθητές για την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων και των τεσσάρων πράξεων με πολυψήφιους αριθμούς. Επικεντρώθηκε περισσότερο σε παράγοντες που αφορούν τους μαθητές και το συγκεκριμένο. Επίσης αναζήτησε αν οι στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν επηρέασαν την απόδοση των μαθητών. Το δείγμα της ήταν 648 μαθητές της Στ' τάξης από 23 διαφορετικά Ολλανδικά Δημοτικά σχολεία. Οι νοερές στρατηγικές που επισημάνθηκαν από την ερευνήτρια για την πράξη της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ήταν της συσσώρευσης, του διαχωρισμού, της αντιστάθμισης. Για την πράξη του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης ήταν η στρατηγική της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης ή αφαίρεσης, της διάσπασης και της αντιστάθμισης. Τα αποτελέσματα συλλέχθηκαν από φύλλα εργασίας που δόθηκαν στους μαθητές. Περιλάμβαναν 12 προβλήματα, 3 για καθεμιά πράξη. Κάθε μαθητής το έλυνε μόνος του, χωρίς χρονικό περιορισμό. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως τα αγόρια και οι μαθητές με υψηλές επιδόσεις στα μαθηματικά είχαν την τάση να χρησιμοποιούν ευέλικτες στρατηγικές. Επίσης η ρητή οδηγία στο φύλλο εργασίας για υπολογισμό με έξυπνο τρόπο (χρήση ευέλικτης στρατηγικής), αύξησε τη συχνότητα αυτών των στρατηγικών στα προβλήματα πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, αλλά όχι στα προβλήματα αφαίρεσης και διαίρεσης. Τέλος, η χρήση ευέλικτων στρατηγικών δεν επηρέασε την απόδοση των μαθητών στα μαθηματικά που χρησιμοποίησαν άλλους τρόπους υπολογισμού.

Σε έρευνά τους οι Rathgeb- Schnierer και Green (2019) αναζήτησαν ευέλικτες νοερές στρατηγικές στην εκτέλεση διψήφιων προσθέσεων και αφαιρέσεων των μαθητών της Β' και Γ' τάξης του Δημοτικού στη Γερμανία. Τα βασικά κριτήρια για την επιλογή αυτών των στρατηγικών αφορούσαν το διαχωρισμό των αριθμών σε δεκάδες και μονάδες, τη στρογγυλοποίησή τους και την αντιστάθμιση τους. Αυτές οι στρατηγικές ήταν: του άλματος, του διαχωρισμού, η μεικτή διαχωρισμού και άλματος, της αντιστάθμισης και της εξισορρόπησης. Επίσης οι ερευνητές προσπάθησαν να εντοπίσουν προϋποθέσεις που θα προωθούσαν τις ευέλικτες στρατηγικές στην εκτέλεση των πράξεων. Η προσέγγιση που εφάρμοσαν ονομαζόταν

«Zahlenblickschulung». Χρησιμοποίησαν λεκτικά προβλήματα όπου τα χαρακτηριστικά των αριθμών και του συγκείμενου, θα ωθούσαν τους μαθητές να τα λύσουν με ευέλικτες στρατηγικές. Οι ερευνητές συνέλεξαν τα δεδομένα με ατομικές συνεντεύξεις με τους μαθητές. Μοίρασαν καρτέλες με προβλήματα, οι μαθητές τα διάβασαν, έπειτα τα ταξινόμησαν σε εύκολα και δύσκολα και στη συνέχεια τα έλυσαν αιτιολογώντας τις στρατηγικές επίλυσης που ακολούθησαν. Στα εύκολα χρησιμοποίησαν ευέλικτες νοερές στρατηγικές.

Οι Nemeth και οι συνεργάτες της (Nemeth, Werker, Arend, & Lipowsky, 2021), σε έρευνά τους προσπάθησαν να μελετήσουν κατά πόσο οι μαθητές υιοθέτησαν τις νοερές στρατηγικές με την αλληλεπιδραστική προσέγγιση. Συγκέντρωσαν ένα δείγμα 236 γερμανών μαθητών της Γ' τάξης του Δημοτικού σχολείου, από 4 διαφορετικά σχολεία. Τους χώρισαν σε 4 τμήματα με τυχαίο τρόπο σε αλληλεπιδραστικό και περιορισμένο περιβάλλον μάθησης. Έγινε διδακτική παρέμβαση που διήρκεσε για 14 μαθήματα και οι μαθητές διδάχτηκαν τις στρατηγικές του διαχωρισμού, της συσσώρευσης, της αντιστάθμισης, της εξισορρόπησης και τον κάθετο αλγόριθμο. Επισημάνθηκαν αυτές οι τέσσερις νοερές στρατηγικές από τους ερευνητές διότι θεώρησαν πως οι συγκεκριμένες μπορούσαν να υιοθετηθούν περισσότερο σε σχέση με άλλες. Οι μαθητές στο αλληλεπιδραστικό περιβάλλον συζητούσαν, αντάλλαζαν απόψεις σχετικά με τις στρατηγικές που χρησιμοποιούσαν στις πράξεις και επιχειρηματολογούσαν για τις επιλογές τους. Στο περιορισμένο περιβάλλον μάθησης, οι μαθητές διδάσκονταν τις στρατηγικές αλλά δεν ακολουθούσε περαιτέρω ανάλυση. Οι ερευνητές έλεγξαν το βαθμό υιοθέτησης των στρατηγικών από τους μαθητές με φύλλο εργασίας με αφαιρέσεις, το οποίο έδωσαν στους μαθητές πριν από τη διδακτική παρέμβαση, αμέσως μετά το τέλος της, μια βδομάδα μετά το τέλος της, πέντε βδομάδες μετά το τέλος της. Τα ευρήματα της έρευνας έδειξαν ότι η αλληλεπιδραστική μάθηση προωθεί περισσότερο τη χρήση των νοερών στρατηγικών παρά τον κάθετο αλγόριθμο και ο βαθμός υιοθέτησής τους από τους μαθητές είναι υψηλός.

Σύμφωνα με τις παραπάνω έρευνες και σε μια προσπάθεια ευρύτερης ομαδοποίησης (Λεμονίδης, 2020), παρατίθενται στον Πίνακα 9 και 10 συγκεντρωμένα τα πιο αντιπροσωπευτικά είδη νοερών υπολογισμών που μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές και για τις τέσσερις πράξεις.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ		
ΚΩΔΙΚΟΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ	ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
ΚΑ	Σχηματισμός και εκτέλεση νοερά του κάθετου αλγόριθμου	• $15+16+17+20$
ΑΝΑΚΛ.	Άμεση ανάκληση γνωστών αριθμητικών γεγονότων	• $40+20=60, 60-20=40$
Κ.Δ.	στρατηγική «Κοντά στα διπλά». • Μετατρέπεται ο ένας προσθετέος έτσι ώστε να πάρει τη μορφή διπλού αθροίσματος με τον άλλο προσθετέο • Υπολογισμός αφαίρεσης με τη βοήθεια διπλού αθροίσματος	• $15+16=15+(15+1)=30+1=31$ • $14-7, (7+7)-7=7$
ΣΤΡ.Υ.Α.	Στρατηγικές με υλικά ή αισθητοποίησης των αριθμών με τα δάχτυλα και αρίθμηση	• $2+3=5$
ΣΤΡ.1010	στρατηγική διαχωρισμού, οι αριθμοί διαχωρίζονται συνήθως στα πολλαπλάσια του 10 και στις μονάδες, ο υπολογισμός ξεκινάει από: • αριστερά στα δεξιά (Δεκάδες-Μονάδες), ΣΤΡ.1010 • δεξιά προς τα αριστερά (Μονάδες- Δεκάδες), ΣΤΡ.υ-1010	• $53+56=50+50=100, 3+6=9, 100+9=109$ • $28+39=9+8=17, 20+30=50, 50+17=67$
ΣΤΡ. Ν10	στρατηγικής της συσσώρευσης • Ν10, ανάλυση σε Δεκάδες και Μονάδες του δεύτερου όρου (από τα αριστερά προς τα δεξιά προστίθενται ή αφαιρούνται οι δεκάδες και μετά οι μονάδες του 2^{ου} όρου) • υ-Ν10, ανάλυση σε Μονάδες και Δεκάδες του δεύτερου όρου (Ν10) (από τα αριστερά προς τα	• $20+17=20+10=30, 30+7=37$ • $40-17=40-10=30, 30-7=23$ • $35+24= 35+4=39, 39+20=59$ • $35-24=35-4=31, 31-20=11$

	δεξιά προστίθενται ή αφαιρούνται οι μονάδες και μετά οι δεκάδες του 2 ^{ου} όρου)	
ΣΤΡ.5	στρατηγική της χρήσης του αριθμού 5. Οι μαθητές αναλύουν τον προσθετέο με βάση το 5	$27=25+2$
ΣΤΡ. N10C	στρατηγική Αντιστάθμισης, ο ένας όρος αυξάνεται ή μειώνεται ώστε να φτάσει στην πλησιέστερη δεκάδα και στο τέλος αφαιρείται αυτός ο αριθμός από το αποτέλεσμα	$39+28=40+28=68-1=67$
ΣΤΡ.ΕΞ.	στρατηγική της εξισορρόπησης ή ισοσκέλισης, και οι δύο όροι αυξομειώνονται ανάλογα ώστε να μην αλλάξει το αποτέλεσμα και να υπάρχει ισορροπία	• $45+26=50+21=71$ • $45-24=50-29=21$
ΣΤΡ. A10	στρατηγική «Πέρασμα από το 10» Ο πρώτος όρος παραμένει σταθερός, προστίθενται ή αφαιρούνται μέρη από το δεύτερο ώστε ο πρώτος να φτάσει στην πλησιέστερη δεκάδα	$39+18=39+1=40+17=57$
ΣΤΡ. 10S	μεικτή στρατηγική διαχωρισμού και συσσώρευσης, διαχωρισμού και των 2 αριθμών σε μονάδες και δεκάδες, πρόσθεση πρώτα των δεκάδων, στο αποτέλεσμα πρόσθεση των μονάδων του ενός, στο αποτέλεσμα πρόσθεση και των μονάδων του άλλου	$35+36=30+5+30+6=30+30=60,$ $60+5=65, 65+6=71$
ΑΡΙΘΜΗΣΗ Μ-Δ	στρατηγική όπου οι μαθητές αριθμούν από τον πρώτο όρο προς τα επάνω (τόσο όσο υποδεικνύει ο άλλος όρος. • Αρίθμηση με μονάδες • Αρίθμηση με δεκάδες (Εφαρμογή συνήθως στην Α' και Β' τάξη)	• $24+15=24+1+1\dots=39$ • $35+25=35+10=45, 45+10=55,$ $55+5=60$

ΑΡΙΘΜΗΣΗ ΑΠΟ	στρατηγική όπου ξεκινάει η αρίθμηση από: - τον πρώτο αριθμό και συνεχίζεται με την αρίθμηση του δεύτερου. Το αποτέλεσμα είναι το τελευταίο βήμα της αρίθμησης. - τον μεγαλύτερο αριθμό και συνεχίζεται με την αρίθμηση του επόμενου. Το αποτέλεσμα είναι το τελευταίο βήμα της αρίθμησης. (Εφαρμογή συνήθως στην Α' και Β' τάξη)	$2+7= 1,2\dots3,4,5,6,7,8,9$ $2+4, 4+2=1,2,3,4,\dots5,6$
ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΑΡΙΘΜΗΣΗ	στρατηγική που χρησιμοποιείται στην αφαίρεση και ξεκινάει - με αντίστροφη αρίθμηση από το μεγαλύτερο αριθμό τόσα βήματα όσα δηλώνει ο μικρότερος. Το αποτέλεσμα είναι ο αριθμός του τελευταίου βήματος. - με αντίστροφη αρίθμηση από το μεγαλύτερο, μέχρι να συναντηθεί ο μικρότερος όρος. Το αποτέλεσμα είναι το πλήθος των βημάτων. (Εφαρμογή συνήθως στην Α' και Β' τάξη)	$8-5= 8\dots7,6,5,4,3$ $8-2= 8\dots7,6,5,4,3,2$ 6 βήματα, άρα αποτέλεσμα 6

ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ	στρατηγική όπου - κατασκευάζεται ο μειωτέος με αντικείμενα και διαχωρίζονται από αυτόν τόσα αντικείμενα όσο είναι το πλήθος του αφαιρετέου για να βρεθεί το αποτέλεσμα. - κατασκευάζεται ο μειωτέος με αντικείμενα και διαχωρίζονται από αυτόν τόσα αντικείμενα μέχρι να προκύψει ο αφαιρετέος. Το πλήθος των αντικειμένων που αφαιρέθηκαν είναι το αποτέλεσμα. (Εφαρμογή συνήθως στην Α' και Β' τάξη)	$5-3=2$ □ □ □ □ □ = □ □ $5-3=2$ □ □ □ □ □ //
-------------	---	--

Πίνακας 9: Είδη νοερών υπολογισμών και παραδείγματα για την πρόσθεση και την αφαίρεση

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΗ		
ΚΩΔΙΚΟΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ	ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
ΚΑ	Σχηματισμός και εκτέλεση νοερά του κάθετου αλγόριθμου	$56:4, 15 \times 4$
ΑΝΑΚΛ.	Άμεση ανάκληση γνωστών αριθμητικών γεγονότων: - Αντίστροφου πολλαπλασιασμού. Σχηματισμός γινόμενου με τον διαιρέτη επί ενός αριθμού ώστε να προκύψει ο διαιρετέος - Γινομένων και προσθαφαιρέσεων για την εύρεση πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων	$56:8, 7 \times 8=56$, άρα $56:8=7$ $11 \times 3, 10 \times 3=30, 30+3=33$ $63:7, 10 \times 7=70, 70-7=63$, άρα $63:7=9$ $56:7, 7+7=14, 14+14=28, 28+28=56$, άρα 8 φορές το 7 - Ανάκληση πίνακα προπαίδειας

	• Προσθαφαιρέσεων • Προπαίδειας	
ΑΡΙΘΜΗΣΗ	στρατηγική όπου οι μαθητές αριθμούν • με επαναλαμβανόμενες προσθέσεις ή αφαιρέσεις για τον υπολογισμό ενός πολλαπλασιασμού ή διαίρεσης • με διπλασιασμό ή υποδιπλασιασμό	• $7 \times 3 = 3+3+3+3+3+3+3=21$ • $16:4$, $16-4=12$, $12-4=8$, $8:4=4$, $4-4=0$, άρα $16:4=4$ • 8×15, $2 \times 15=30$, $30+30=60$, $60+60=120$ • $360:8$, $180:4$, $90:2=45$
ΣΔΑ-ΑΔ ή ΔΑ	στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού με βάση τη θεσιακή αξία από τα αριστερά προς τα δεξιά ή από τα δεξιά προς τα αριστερά. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τη γνώση τους από το δεκαδικό σύστημα για να διασπάσουν τον έναν όρο του πολ/σμού ή της διαίρεσης	• (ΑΔ) 11×18, $10 \times 18=180$, $1 \times 18=18$, $180+18=198$ • (ΔΑ) 11×18, $1 \times 18=18$, $10 \times 18=180$, $18+180=198$ • (ΑΔ) $52:4$, $40:4=10$, $12:4=3$, $10+3=13$ • (ΔΑ) $52:4$, $12:4=3$, $40:4=10$, $3+10=13$
ΣΔΑ2-ΑΔ	στρατηγική της διάσπασης και των δύο αριθμών με βάση τη θεσιακή αξία. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τη γνώση τους από το δεκαδικό σύστημα για να διασπάσουν και τους δύο όρους, εκτελούν κάθε πολλαπλασιασμό και προσθέτουν τα μερικά γινόμενα	• $36 \times 120 = (30+6) \times (100+20) = 3000+600+600+120=4320$

ΣΔΑ ΜΗ-Δ	στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού σε αριθμούς μη δεκάδων, διάσπαση του ενός όρου σε γνωστό γινόμενο	216:8= 216: (4X2)= 216:4=54:2=27																
ΕΠ	Ελληνικός Πολλαπλασιασμός Ανήκει στην ίδια φιλοσοφία του ΣΔΑ2 με διάσπαση του πολλαπλασιαστή και πολλαπλασιαστέου σε αριθμούς με βάση τη θεσιακή αξία, εκτέλεση πολλαπλασιασμών και πρόσθεση μερικών γινομένων	<table><tr><td>25x11</td><td>10</td><td>1</td></tr><tr><td>20</td><td>20x10=200</td><td>20x1=20</td></tr><tr><td>5</td><td>5x10=50</td><td>5x1=5</td></tr><tr><td rowspan="2">Ελληνικός Πολλαπλασιασμός</td><td>250</td><td>15</td></tr><tr><td colspan="2">250+15=265</td></tr></table>			25x11	10	1	20	20x10=200	20x1=20	5	5x10=50	5x1=5	Ελληνικός Πολλαπλασιασμός	250	15	250+15=265	
25x11	10	1																
20	20x10=200	20x1=20																
5	5x10=50	5x1=5																
Ελληνικός Πολλαπλασιασμός	250	15																
	250+15=265																	
ΣΤΡ.ΑΝΤ	στρατηγική της Αντιστάθμισης Ρύθμιση του 1 ή και των 2 όρων με διπλασιασμό ή διχοτόμηση ή με άλλα γνωστά γινόμενα ή πηλίκα ώστε να γίνει πιο εύκολος ο υπολογισμός.	394X3= 400X3= 1200-18= 1194 200:8= 100:4= 50:2= 25																
Δ10	Πολλαπλασιασμός και Διαίρεση με δυνάμεις του 10 Οι μαθητές εφαρμόζουν την τεχνική με τα μηδενικά, τοποθετώντας τα στο αποτέλεσμα	36(00:3= 36:3= 12(00 12(00X5= 5X12= 60(00																

Πίνακας 10: Είδη νοερών υπολογισμών και παραδείγματα για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση

1.5.6 Συχνότητα χρήσης νοερών στρατηγικών στις τάξεις

Για την εκτέλεση των πράξεων της πρόσθεσης και αφαίρεσης με αριθμούς μέχρι το 20, οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται κατατάσσονται σε τρία επίπεδα (Carpenter, Moser, 1982· Fuson, 1992). Στις στρατηγικές με υλικά ή αισθητοποίησης των αριθμών, στις στρατηγικές αρίθμησης και στις στρατηγικές ανάκλησης γνωστών αριθμητικών

γεγονότων ή κατασκευαστικές στρατηγικές.

Η συχνότητα χρήσης φαίνεται πως είναι σχετική, διότι είναι δυναμική καθώς μεταβάλλεται ανάλογα την ηλικία και τις εμπειρίες που αποκτούν οι μαθητές στο μάθημα των μαθηματικών (Carpenter & Moser, 1982). Οι μαθητές των μικρότερων τάξεων του Δημοτικού (Α και Β τάξη) χρησιμοποιούν με μεγαλύτερη συχνότητα τις στρατηγικές με υλικά ή αισθητοποίησης των αριθμών. Γίνεται χρήση των δακτύλων ή αντικειμένων για να σχηματίσουν την πράξη. Η στρατηγική της αριθμησης φαίνεται να εφαρμόζεται περισσότερο από μαθητές της Α' τάξης, λιγότερο της Β' και βαθμιαία η χρήση της να αποσβένεται πριν τη Γ' τάξη, όπου η στρατηγική της ανάκλησης κάνει εμφανή την παρουσία της στις πράξεις και αυξάνεται μέχρι το τέλος του Δημοτικού σχολείου. Η στρατηγική που έχει ευρεία χρήση στις επόμενες τάξεις του Δημοτικού είναι η στρατηγική του διαχωρισμού (1010). Έπεται η στρατηγική της Συνσώρευσης για την Γ' και Δ' τάξη, ενώ στην Ε' και Στ' τάξη ο κάθετος αλγόριθμος βρίσκεται γενικά σε υψηλή θέση (Λεμονίδης, 2020).

Σχετικά με τους νοερούς υπολογισμούς για την πράξη του πολλαπλασιασμού, έρευνες δίνουν πολλαπλά δεδομένα. Ο Siegler (1988), αναφέρει ότι οι μαθητές της Β' και Γ' τάξης έχουν σε πρώτη προτίμηση τη στρατηγική της ανάκλησης και έπειτα την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Οι Cooney et al (1988), στην έρευνά τους, αναφέρουν ότι το ίδιο συμβαίνει για τη Γ' και Δ' τάξη. Οι μαθητές καθώς μεγαλώνουν κατακτούν νέα γνώση σχετικά με τις στρατηγικές και τον υπολογισμό του πολλαπλασιασμού, οπότε σχηματίζουν διαρκώς και νέες υπολογιστικές επιλογές (LeFevre & Morris, 1999).

Η πράξη της διαίρεσης διδάσκεται διαισθητικά στις μικρές τάξεις του Δημοτικού σχολείου (μοιρασιά). Στη Δ' Τάξη διδάσκεται ο κάθετος αλγόριθμος. Για τη συγκεκριμένη πράξη, τρεις είναι οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται περισσότερο σε όλες τις τάξεις του Δημοτικού σχολείου (Robinson, et al., 2006). Η ανάκληση γνωστών αριθμητικών παραγόντων, η λύση της διαίρεσης με την αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού ($40:4= 4 \times 10$) και η λύση της διαίρεσης με την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ($20:5=5+5+5+5$).

1.5.7 Λεκτικά προβλήματα

Στις περισσότερες έρευνες που διεξήχθησαν για την αναζήτηση και καταγραφή των ειδών νοερών στρατηγικών των μαθητών στους υπολογισμούς των τεσσάρων πράξεων, οι δραστηριότητες που χρησιμοποιήθηκαν ήταν λεκτικά προβλήματα. Είναι διαπιστωμένο πως όταν οι μαθητές έχουν να διαχειριστούν δραστηριότητες με συγκεκριμένο χρησιμοποιούν περισσότερο τις νοερές στρατηγικές, παρά όταν έχουν απλές αριθμητικές ασκήσεις (Heirdsfield & Cooper, 2004a; Murphy, 2004). Επίσης, ιδιαίτερο ρόλο στη μάθηση των νοερών υπολογισμών διαδραματίζει το πλαίσιο μέσα στο οποίο παρουσιάζονται τα λεκτικά προβλήματα, δηλαδή το συγκεκριμένο. Καθορίζει τα κίνητρα των μαθητών ώστε να ασχοληθούν με το πρόβλημα. Προτείνεται να συνδέεται με το σχολείο και την καθημερινή ζωή (Lave & Wegner, 1991).

Ο δάσκαλος όταν πρόκειται να συγγράψει λεκτικό πρόβλημα θα πρέπει να δώσει ιδιαίτερη προσοχή στην σύνταξη και στο περιεχόμενο του συγκεκριμένου. Οι μαθητές ξεκινούν τη διαδικασία επίλυσης με την ανάγνωσή του. Το συγκεκριμένο δύναται να τους βοηθήσει ώστε να καταφέρουν να αναπτύξουν λειτουργίες που θα τους οδηγήσουν στη επίλυση του προβλήματος (Singer & Voica, 2013):

- της αποκωδικοποίησής του, όπου αποσαφηνίζονται τα δεδομένα και τα ζητούμενα καθώς και επισημαίνονται οι περιορισμοί που θέτει το πρόβλημα,
- της αναπαράστασής του, όπου οι μαθητές προσπαθούν να αποτυπώσουν το πρόβλημα στο μυαλό τους και να την αναπαραστήσουν νοερά,
- της επεξεργασίας του, όπου οι μαθητές αναζητούν ένα προϋπάρχον γνωστό μαθηματικό μοντέλο επίλυσης που να ταιριάζει στα δεδομένα του προβλήματος και τις απαιτούμενες νοερές διεργασίες του και να ανταποκρίνεται στην μαθηματική τους ικανότητα,
- της εφαρμογής αναγνωρισμένων μαθηματικών τεχνικών ώστε να οδηγηθούν σε μία πρώτη εκτίμηση του αποτελέσματος.

Σύμφωνα με τον Acosta-Tello (2010), το περιεχόμενο του συγκεκριμένου και το λεξιλόγιο το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στο λεκτικό πρόβλημα, θα πρέπει να είναι κατανοητό και να βοηθάει τους μαθητές να το λύσουν. Παρ' όλο που διδάσκονται την απαραίτητη μαθηματική γνώση, δυσκολεύονται στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων. Ένας πιθανός αιτιώδης παράγοντας σε αυτή τη δυσκολία μπορεί να είναι ο δύσκολος βαθμός αναγνωσιμότητας και κατανόησης του συγκεκριμένου. Για το λόγο αυτό, θα

πρέπει να είναι γραμμένο με λεξιλόγιο προσιτό, σαφές και κατανοητό από τους μαθητές (Acosta-Tello, 2010).

Σε έρευνα που διεξήχθη στην Αμερική (Hegarty, Mayer, & Monk, 1995), απεδείχθη πως μαθητές που έδωσαν λανθασμένη λύση σε ένα λεκτικό πρόβλημα, στηρίχθηκαν μεμονωμένα και επιλεκτικά σε αριθμούς και λέξεις κλειδιά. Ενώ οι μαθητές που πέτυχαν, βασίστηκαν συνολικά στο περιεχόμενο του συγκεκριμένου του ίδιου προβλήματος, κατασκεύασαν νοερά ένα μοντέλο της κατάστασης που περιγραφόταν στο πρόβλημα, στηρίζοντας τη λύση τους πάνω σε αυτό. Το είδος του λεξιλογίου, ο απλός τρόπος με τον οποίο ήταν γραμμένο το κείμενο, φάνηκε να συμβάλει στην κατανόηση του περιεχομένου και στην εύρεση της λύσης.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να αξιοποιήσει τα λεκτικά προβλήματα συγκριτικά με άλλα είδη ασκήσεων και να ωθήσει έμμεσα τους μαθητές να ενεργοποιήσουν διάφορες διαδικασίες για να τις λύσουν. Η ενεργοποίηση μπορεί να υλοποιηθεί με τη βοήθεια κατάλληλων ερωτήσεων (CBS, 2011).

Σε πρώτη φάση (αρχικό στάδιο), μπορεί να τους βοηθήσει να ενεργοποιήσουν τη σκέψη τους, να κατανοήσουν το λεκτικό πρόβλημα και το περιεχόμενό του, να δημιουργήσουν γνωστικές συνδέσεις, να ανακαλέσουν προηγούμενη γνώση, θέτοντας ερωτήσεις σχετικά με ποιες πληροφορίες πρόκειται να χρησιμοποιήσουν για να λύσουν το πρόβλημα, ποια άλλα προβλήματα παρόμοια με αυτό έχουν λύσει, τι κοινό έχουν αυτά και τι ξεχωριστό έχει καθένα.

Έπειτα (ενδιάμεσο στάδιο), μπορεί να τους βοηθήσει να διαμορφώσουν σαφή αιτιολόγηση των επιλογών τους, να επικοινωνήσουν τη σκέψη τους με άλλα άτομα, αλλά και να μπορούν να κάνουν υποθέσεις. Οι ερωτήσεις που μπορεί να τους θέσει δύνανται να σχετίζονται με τη λύση του λεκτικού προβλήματος, με τη λογική ευστάθεια της απάντησής τους, με το λόγο της επιλογής της, με τη γραπτή αναπαράσταση της νοερής τους σκέψης, με την εφαρμογή της στην καθημερινότητα.

Τέλος (τελικό στάδιο), μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αποσαφηνίσουν τις στρατηγικές που ακολούθησαν, να είναι σε θέση να συγκρίνουν άλλες λύσεις και να μπορούν γενικεύουν τη λύση τους. Οι ερωτήσεις που θα θέσει θα πρέπει να αποσκοπούν στον τρόπο που οδηγήθηκαν οι μαθητές στη λύση, στα βήματα που ακολούθησαν, σε εναλλακτικό τρόπο επίλυσης, και αν μπορούν να γενικεύσουν τη λύση τους.

1.6 Διάλογος

Οι άνθρωποι θα πρέπει να εκφράζονται και να μοιράζονται τη γνώση λεκτικά ακόμα και σε περιπτώσεις όπου οι λέξεις φαίνεται να μην αποτελούν το καλύτερο μέσο, όπως οι μαθηματικές διαδικασίες, που δεν είναι και τόσο γλωσσικές. Οι μαθητές θα πρέπει να αναπτύξουν νέους τρόπους χρήσης της γλώσσας, των λέξεων και του διαλόγου ώστε να γίνουν ενεργά μέλη ευρύτερων κοινοτήτων και συνάμα της τάξης. Με το διάλογο είναι δυνατή η ανάπτυξη γλωσσικών εργαλείων, ακόμα και επικοινωνιακών τακτικών από το δάσκαλο (Mercer, 2000).

Τα παιδιά έχουν περισσότερες πιθανότητες να μάθουν καλύτερα όταν επικοινωνούν και συνεργάζονται. Όταν μέσω του διαλόγου μοιράζονται τις στρατηγικές τους με τους φίλους τους (Bruner, 1990). Τότε η σκέψη αυτή μέσω της γλώσσας είναι πιο σαφής και μπορούν να λύσουν τα προβλήματα στα μαθηματικά με μεγαλύτερη επιτυχία (Azmitia & Montgomery, 1993).

Με την έννοια του διαλόγου, νοείται η ανταλλαγή ιδεών, η κοινή αξιολόγηση πληροφοριών, η διατύπωση υποθέσεων, η κοινή λήψη αποφάσεων (Mercer, 2000).

Ο διάλογος αποτελεί έναν από τους βασικούς παράγοντες που βοηθάει στη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών. Μέσω του διαλόγου οι μαθητές επικοινωνούν, παρουσιάζουν τις στρατηγικές τους και τις συζητούν τόσο μεταξύ τους, όσο και με το δάσκαλο (Lave & Wegner, 1991). Όταν λοιπόν χρησιμοποιούν τη γλώσσα για το σκοπό αυτό, του διαλόγου μεταξύ τους για τις στρατηγικές, φαίνεται να διευκολύνεται η επίλυση των δραστηριοτήτων και της κατανόησής τους (Mercer, 2000).

Ο Murphy (2004), θεωρεί πως η ανάπτυξη, η χρήση και η εξέλιξη των νοερών στρατηγικών μπορεί να διαμορφωθεί μέσα από τη συζήτηση στην τάξη, μέσα από την επικοινωνία και το διάλογο.

Σημαντικές είναι και οι μεταγνωστικές διαδικασίες οι οποίες διενεργούνται με το διάλογο, αναλύοντας τις στρατηγικές τους και παρουσιάζοντάς τις στους συμμαθητές τους. Αντιλαμβάνονται το βαθμό κατανόησης των δεδομένων του λεκτικού προβλήματος, το σχεδιασμό, την εφαρμογή και τη λειτουργικότητα της στρατηγικής που επέλεξαν (Λεμονίδης, 2020).

1.7 Το φαινόμενο «Topaze» (The “Topaze effect”)

Το όνομα στο φαινόμενο «Topaze» το έδωσε ο Brousseau από το διάσημο θεατρικό έργο του Marcel Pagnol «Topaze». Στην πρώτη σκηνή του έργου, ένας ηθοποιός υποδύεται το δάσκαλο του οποίου το όνομα ήταν «Topaze». Αυτός υπαγορεύει στο δωδεκάχρονο μαθητή του την ορθογραφία στη γαλλική γλώσσα και προσπαθεί να τον κάνει να γράψει σωστά στον πληθυντικό αριθμό τη φράση «des moutons étaient en sûreté dans un parc» (τα πρόβατα ήταν ασφαλή σε ένα πάρκο), τοποθετώντας το γράμμα “s” στη λέξη «moutons». Πλησιάζοντας το μαθητή κοντά στον ώμο του, επαναλαμβάνει διαρκώς τη φράση «des moutons» τονίζοντας την κατάληξη και δίνοντας έναν προφανή υπαινιγμό του πληθυντικού αριθμού (Brousseau, 1984).

Κατά το φαινόμενο «Topaze» ο δάσκαλος επιδιώκει οι μαθητές του να βρουν μία συγκεκριμένη απάντηση. Όταν αυτοί δυσκολεύονται τους καθοδηγεί προς το επιθυμητό αποτέλεσμα, δίχως όμως να το αποκαλύπτει, χρησιμοποιώντας διάφορες ερωτήσεις και υιοθετώντας βοηθητικές συμπεριφορές ή στάσεις. Μάλιστα, για να βοηθήσει περισσότερο τους μαθητές να δώσουν την αναμενόμενη απάντηση, ο δάσκαλος προωθεί έμμεσα την απάντηση, την προτείνει, την παραφράζει. Μία επίσης εκδήλωση του φαινομένου «Topaze» είναι η διατύπωση ενδείξεων στη διδακτική διαδικασία με άμεσο ή έμμεσο τρόπο από το δάσκαλο για να καθοδηγήσει τους μαθητές και να τους κάνει γνωστή τη διδακτική του επιδίωξη (Brousseau, 2002).

Με τη χρήση του φαινομένου «Topaze» δεν απαιτείται από τους μαθητές ιδιαίτερη προσπάθεια για την εύρεση της απάντησης. Αυτό μπορεί να συμβαίνει διότι ο δάσκαλος αντικαθιστά όλη αυτή τη διαδικασία της εύρεσης της απάντησης με μια αλληλεπίδραση, μία αντίδραση των μαθητών σε μια υπόδειξη, υπαινιγμό ή νύξη του δασκάλου. Όταν δηλαδή οι μαθητές καθοδηγούμενοι από το δάσκαλο αναγνωρίσουν την υπόδειξή του, δίνουν την αναμενόμενη απάντηση (Novotná & Hošpesová, 2007).

Η συχνή χρήση όμως του φαινομένου «Topaze» μπορεί να μειώσει την αποτελεσματικότητα των μαθητών στην επίλυση αριθμητικών προβλημάτων, διότι οι μαθητές δεν συνεργάζονται στις ομάδες τους, δεν προσπαθούν να βρουν τις δικές τους κατάλληλες στρατηγικές επίλυσης, δεν ανταλλάζουν απόψεις, δεν αιτιολογούν και επιχειρηματολογούν για την επιλογή της λύσης τους, αλλά περιμένουν την καθοδήγηση από το δάσκαλο. Παρ’ όλο που δείχνουν ενεργοί στη διδακτική διαδικασία, μετατρέπονται σε παθητικοί δέκτες. Επίσης, με την καθοδηγούμενη λύση από το δάσκαλο, οι μαθητές λίγες φορές κάνουν λάθος με αποτέλεσμα να μην

αντιλαμβάνονται την έννοια του, την αναγνώριση και την διόρθωσή του (Novotná & Hošpesoná, 2007).

1.8 Γλωσσικά εργαλεία και επικοινωνιακές τακτικές

Θεωρητικές παραδοχές ερευνών που αφορούν στη γλώσσα και την επικοινωνία αναφέρονται σε γλωσσικά εργαλεία και σε επικοινωνιακές τακτικές.

Εξετάζοντας τα γλωσσικά εργαλεία οι Wagner & Eisenmann (2008), αναφέρονται σε μονογλωσσικά ή ετερογλωσσικά, δηλαδή σε συγκεκριμένες λέξεις (για παράδειγμα «μόνο (just)»), που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την έναρξη ή την παύση κατευθυνόμενου διαλόγου και να προκαλέσουν την εξωστρέφεια των μαθητών με μια σειρά από γλωσσικές αλληλεπιδράσεις.

Ο Rowland (1999) στην έρευνα του, ως γλωσσικό εργαλείο προβάλλει την ανάπτυξη μαθηματικού λεξιλογίου και τη διάκρισή του, μεταξύ μαθητή και δασκάλου. Το «εμείς» του δασκάλου αναφέρεται σε κανόνες και πιθανόν σε αδιαπραγμάτευτες διαδικασίες, π.χ. «εμείς θα λύσουμε την άσκηση ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα», ενώ το «εμείς» των μαθητών, μπορεί να αμφισβητηθεί, π.χ. «εμείς για να λύσουμε την άσκηση πρώτα κάναμε πρόσθεση...».

Ο Morgan (1998) αναφέρεται στις «κανονικότητες» (nominalizations), δηλαδή στην μετατροπή ρημάτων σε ουσιαστικά ή επίθετα (διακρίνω-διακρίνουςα). Χρησιμοποιούνται στο μαθηματικό διάλογο σαν να έχουν ενεργό ρόλο π.χ., «η διακρίνουςα μας δείχνει ότι...».

Οι Solomon & O'Neill (1988) στη μελέτη τους αναζητούν πληροφορίες και επεξεργάζονται δεδομένα για τους χρόνους των ρημάτων, τα χρονικά επιρρήματα, τις χρονικές φράσεις και τα άρθρα. Επισημαίνουν πως στα περισσότερα μαθηματικά κείμενα τα παραπάνω χαρακτηριστικά χρησιμοποιούνται στο παρόν και προσδίδουν μια μονιμότητα στο περιεχόμενο, σε αντίθεση με τα λογοτεχνικά κείμενα που συνήθως έχουν αφηγηματικούς χρόνους, με αποτέλεσμα τα γεγονότα να αναφέρονται στο παρελθόν και κάτι ξεπερασμένο.

Οι αντωνυμίες στο μαθηματικό λόγο ως γλωσσικό εργαλείο, χρησιμεύουν για να κωδικοποιήσουν διαδραστικές λειτουργίες της γλώσσας και ιδιαίτερα της συζήτησης (Rowland, 1999). Ο τρόπος λειτουργίας των αντωνυμιών αξιολογείται από την γλωσσολογία, την κοινωνιολογία και τη μαθηματική επιστήμη και βασίζεται στη διάδραση μεταξύ εκπαιδευτικών και εκπαιδευομένων στη μαθησιακή διαδικασία.

Η χρήση των αντωνυμιών συμβάλλει επικουρικά στη διαχείριση της κοινωνικής θέσης του εκπαιδευτικού, του κύρους του και της διδακτικής επιρροής του έτσι ώστε να μπορεί να καθοδηγεί τους μαθητές σε μαθηματικές γενικεύσεις μέσα από τη διδακτική διαδικασία (Rowland, 1999). Αναφορά θα πρέπει να γίνει και στο γεγονός ότι μαθητές αντιστοιχίζουν τις αντωνυμίες με κοινές ιδέες τους, γενικές μαθηματικές αναφορές, όρους, αλλά τόσο οι ίδιοι όσο και οι δάσκαλοι αντιλαμβάνονται σε τι ακριβώς αναφέρονται (Rowland, 1992). Το μαθηματικό λεξιλόγιο του σχολείου είναι δυσνόητο, τόσο που οι μαθητές πολλές φορές δεν κατανοούν το μάθημα. Πρέπει να γεφυρωθεί αυτό το χάσμα μεταξύ λεξιλογίου των μαθηματικών του σχολείου και λεξιλογίου μαθηματικών της καθημερινότητας. Οπότε, μπορεί να εμπλουτιστεί με πιο απλές λέξεις, να γίνει διαπραγματεύσιμο και παραμετροποιήσιμο (Solomon & O' Neill, 1998). Σαφώς και οι αντωνυμίες προσφέρονται για την υλοποίηση αυτού του σκοπού.

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφική έρευνα οι επικοινωνιακές τακτικές που καταγράφονται είναι:

- Οι τακτικές του επιτονισμού και της αγνόησης. Ο δάσκαλος με τις τακτικές αυτές και χρησιμοποιώντας λεκτικές εκφράσεις μπορεί να δώσει έμφαση, κίνητρο και επιβράβευση ώστε οι μαθητές να ακολουθήσουν ένα συγκεκριμένο παραγωγικό τρόπο υπολογισμού («μπράβο συνεχίστε με αυτό τον τρόπο και θα το λύσετε, αυτή η είναι η σωστή σκέψη, ο τρόπος που σκέφτηκε ο συμμαθητής σας είναι ο πιο αποδοτικός», κ.ά.) ή να τον αποδυναμώσει και να τους αποθαρρύνει («καλή η άποψή σου αλλά ας προχωρήσουμε, κάποια άλλη γνώμη, δεν αποτελεί και την καλύτερη μέθοδο» κ.ά.) (Wagner & Eisenmann, 2008).
- Η κριτική γλωσσική επίγνωση στα μαθηματικά (Wagner, 2003). Μπορεί να επέλθει με τη διαδικασία της ηχογράφησης και αναπαραγωγής του διαλόγου μεταξύ δασκάλου με μαθητή αλλά και μεταξύ μαθητών, για να εντοπιστούν λέξεις, φράσεις ακόμα κι ολόκληρες στρατηγικές σχετικές με το τρέχον μαθηματικό ζήτημα. Έπειτα, με την γλωσσική κριτική που θα ασκηθεί στην τάξη, θα αναζητηθούν τα κομμάτια που συνθέτουν τη λύση, θα αιτιολογηθεί η επιλογή ή η απόρριψή τους, θα γίνουν οι κατάλληλες διορθώσεις και θα οικοδομηθεί η γνώση.
- Η χρήση της ευγένειας κατά το διάλογο (Bills, 2000). Μικραίνει η κοινωνική απόσταση μεταξύ των μαθητών οι οποίοι είναι περισσότερο εσωστρεφείς και

δεν αποτελούν εκκινήτες συζητήσεων. Τους δίνεται η δυνατότητα με διακριτικό τρόπο να συμμετέχουν στο διάλογο και να μην νιώσουν ανασφάλεια. Με την ευγένεια επίσης αποφεύγονται οι συγκρούσεις και οι διαξιφισμοί. Το λάθος φιλτράρεται και γίνεται πιο ανώδυνο με μια ευγενική χειρονομία από το δάσκαλο στο μαθητή. Για παράδειγμα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν εκφράσεις με ευγενική ρητορική όπως: «σε/ σας παρακαλώ θα ήταν πολύ ευγενικό εκ μέρους σου/ σας να εξηγούσες τον τρόπο που σκέφτηκες/ σκεφτήκατε, για να τον καταλάβω/ καταλάβουμε και εγώ/ εμείς, διότι φαίνεται πάρα πολύ χρήσιμος, ευχαριστώ, παρακαλώ, συγγνώμη αν κάνω κάποιο λάθος» κ.ά.

- Το ύφος και η μορφή των ερωτήσεων του διαλόγου (Mason, 2000). Πολλές φορές οι μαθητές μη μπορώντας να κατανοήσουν τα θεωρήματα, τους νόμους και γενικότερα τις μαθηματικές έννοιες, εγκαταλείπουν την προσπάθεια στο μάθημα αυτό. Οι ερωτήσεις και γενικότερα το ύφος του μαθηματικού διαλόγου θα πρέπει να είναι προσιτό στους μαθητές, κατανοητό, σαφές και η γλωσσική αλληλεπίδραση να προκαλεί τη συμμετοχή, καθώς και την οικοδόμηση εννοιών και γνώσεων. Για παράδειγμα, κατά τη διδασκαλία της ενότητας για το μέσο όρο, στην αρχή οι μαθητές μπορούν να τον προσεγγίσουν πιο εύκολα αν αναρωτηθούν για την προσωπική τους μέση επίδοση και να μην ασχοληθούν κατευθείαν με στατιστικούς όρους.
- Το είδος του διαλόγου, δηλωτικός, διπλωματικός ή αόριστος (Rowland, 1995). Ο ομιλητής μέσω του μαθηματικού διαλόγου αναπτύσσει τη δεξιότητα της ευελιξίας. Έχει τη δυνατότητα να εμμένει ξεκάθαρα και δηλωτικά στην άποψη του, για παράδειγμα για το αποτέλεσμα ή τη μέθοδο που θα πρέπει να ακολουθήσει η ομάδα του σε ένα λεκτικό πρόβλημα («έτσι πρέπει να γίνει, εμείς έχουμε σωστή τη λύση») αλλά επίσης μπορεί έμμεσα να υπαναχωρήσει και με διπλωματικό τρόπο να ασπαστεί την άποψη ενός συμμαθητή του («ο δικός σου ο τρόπος θα μπορούσε να παρουσιαστεί καλύτερα και να κερδίσουμε τις εντυπώσεις»).
- Η επιχειρηματολογία και η αιτιολόγηση (Love & Pimm, 1996). Υπάρχουν μαθητές οι οποίοι έχουν την ευχέρεια στον μαθηματικό προφορικό λόγο να εκφράζονται με τρόπο τέτοιο ώστε να γίνονται κατανοητοί και αντιληπτές οι μέθοδοι τους. Στον γραπτό λόγο όμως υστερούν. Για παράδειγμα, δεν μπορούν

να αποτυπώσουν συγκροτημένα την αιτιολόγησή τους γραπτά όταν αποτελεί ζητούμενο σε μια άσκηση ή πρόβλημα, με αποτέλεσμα να αμφισβητείται η λύση τους. Έχει ιδιαίτερη σημασία λοιπόν η πετυχημένη φόρμουλα του μαθηματικού διαλόγου να μπορέσει να εφαρμοστεί και στον γραπτό λόγο για την επιχειρηματολογία και την αιτιολόγηση.

- Η πολλαπλή αιτιολόγηση και η συλλογιστική διαδικασία (Maclellan, 2001). Ο δάσκαλος με τη διδασκαλία του αναπτύσσει ένα δίκτυο μαθηματικής γνώσης και το εξαπλώνει και με τη βοήθεια του μαθηματικού διαλόγου. Κάνει διαρκείς αναφορές στην προηγούμενη γνώση και τη γεφυρώνει με την νέα. Κάθε ενότητα αποτελεί ένα κόμβο και συνδέεται γνωστικά με την προηγούμενη. Έτσι, οι μαθητές μπορούν να θυμηθούν το περιεχόμενο των προηγούμενων εννοιών πιο εύκολα, κάνοντας αναφορές προφορικά μέσω του διαλόγου. Από την ανατροφοδότησή τους λαμβάνουν τις απαραίτητες πληροφορίες που τους χρειάζονται για την αιτιολόγηση της απάντησής τους. Με τη βοήθεια της σπειροειδούς διάταξης της ύλης στο Δημοτικό σχολείο όπου επαναλαμβάνεται σε τακτά χρονικά διαστήματα (π.χ. τα προβλήματα στην Ε' Δημοτικού, σχεδόν κάθε τέσσερις με πέντε ενότητες), γίνεται πιο εύκολη αυτή η διαδικασία. Για παράδειγμα, κατά την επίλυση ενός προβλήματος σε ομάδες, οι μαθητές με τη βοήθεια του διαλόγου με τους συμμαθητές τους και με το δάσκαλο, έχουν τη δυνατότητα να ανατρέξουν σε προηγούμενη σχετική γνώση, να την ανακαλέσουν ή να την εμπλουτίσουν χρησιμοποιώντας και ανταλλάσσοντας νέα δεδομένα και νοερές στρατηγικές που γνώρισαν, για την αιτιολόγηση της απάντησής τους.
- Σε αυτή την κατεύθυνση βρίσκεται και η επικοινωνιακή τακτική της ομαδικής ή εταιρικής συνεργασίας (Δερβίσης, 1998) για συλλογική μάθηση και καθολική συμμετοχή (Mercer, 2000). Οι μαθητές εργαζόμενοι στις ομάδες τους για την επίλυση ενός λεκτικού προβλήματος, εκφράζονται χρησιμοποιώντας το διάλογο, ανταλλάσσοντας απόψεις, συνδιαμορφώνουν και συναποφασίζουν για την τακτική επίλυσης που θα ακολουθήσουν καθώς και την επιχειρηματολογία της επιλογής τους.
- Η διαλογική ερμηνεία του συγκείμενου μεταξύ δασκάλου και μαθητή (Proulx, 2013). Είναι μια παραγωγική διαδικασία όπου εκείνη τη στιγμή δημιουργείται και ερμηνεύεται από τους μαθητές η κατάλληλη νοερή στρατηγική επίλυσης

και όχι η επιλογή της μέσα από ένα στενά διδακτέο ρεπερτόριο. Γίνεται προσπάθεια για δημιουργία νέων στρατηγικών είτε από μηδενική βάση είτε από προϋπάρχουσες. Για παράδειγμα στον πολλαπλασιασμό, η γνωστή στρατηγική της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης ή αφαίρεσης ($6 \times 3: 3+3=6, 6+3=9, 9+3=12, 12+3=15, 15+3=18$), να αποτελέσει τη βάση για τη σύλληψη μιας νέας στρατηγικής από τους μαθητές.

Οι παραπάνω επικοινωνιακές τακτικές ομαδοποιούνται βάσει των κοινών τους χαρακτηριστικών ως εξής:

1. Η επεξεργασία λέξεων και εκφράσεων.

Οι επικοινωνιακές τακτικές του επιτονισμού, της κριτικής γλωσσικής επίγνωσης, της ευγένειας και της ανάλυσης του μαθηματικού διαλόγου, βασίζονται στη χρήση και στην επεξεργασία συγκεκριμένων λέξεων και εκφράσεων.

2. Η λογική αιτιολόγηση.

Η πολλαπλή αιτιολόγηση και η συλλογιστική διαδικασία, η επιχειρηματολογία και η αιτιολόγηση, βασίζονται στην αναζήτηση και στη χρήση λογικών επιχειρημάτων τα οποία χρησιμοποιούν οι μαθητές για να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους.

3. Η ενεργή συμμετοχή των μαθητών.

Το ύφος και η μορφή των ερωτήσεων του διαλόγου, η ομαδική ή εταιρική συνεργασία προϋποθέτουν την ενεργή συμμετοχή των μαθητών στη διδακτική διαδικασία.

4. Η διάθεση του ομιλητή.

Το είδος του διαλόγου, (δηλωτικός, διπλωματικός ή αόριστος), καθορίζεται από τη διάθεση για επικοινωνία που έχει ο ομιλητής για ένα θέμα απέναντι στους ακροατές του. Αυτό είναι και το κύριο γνώρισμα της συγκεκριμένης επικοινωνιακής τακτικής, κάτι που την κάνει να ξεχωρίζει και να αυτονομείται από τις υπόλοιπες.

5. Η τήρηση της διαδικασίας.

Για την υλοποίηση των στόχων της επικοινωνιακής τακτικής της διαλογικής ερμηνείας συγκεκριμένου μεταξύ δασκάλου- μαθητή, απαιτείται να τηρηθεί η διαλογική διαδικασία ώστε να μην υπάρξουν αποκλίσεις και οι μαθητές αντί να οδηγηθούν να δημιουργήσουν τις δικές τους στρατηγικές, να χρησιμοποιήσουν αυτούσιες τις ήδη υπάρχουσες.

1.9 Λεξιλόγιο

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολία στην κατανόηση του λεξιλογίου των μαθηματικών. Τους φαίνεται δύσκολο και θα πρέπει να απλοποιηθεί για να γίνει πιο κατανοητό (Solomon & O' Neill, 1998). Προτείνεται να ενσωματωθούν γνωστές λέξεις από το καθημερινό τους λεξιλόγιο, και να γίνει πιο προσιτό. Η απλοποίησή του όμως θα πρέπει να γίνει με προσοχή για να μην υπάρξει απώλεια ή αλλοίωση σε νόημα, περιεχόμενο ή σκοπό των μαθηματικών (Burton, 1996).

Περιλαμβάνοντας λέξεις από την καθημερινότητά τους, το λεξιλόγιο εξατομικεύεται σύμφωνα με τις ανάγκες τους και τις προσδοκίες τους και ταυτόχρονα τοποθετείται στο ισχύον κοινωνικό και μαθητικό πλαίσιο (Burton, 1996).

Ο δάσκαλος θα πρέπει να ενθαρρύνει τους μαθητές να χρησιμοποιούν τη γλώσσα πέρα από τα στενά όρια των κανόνων και των ορισμών των μαθηματικών (Marks & Mousley, 1990). Για παράδειγμα, για την παρουσίαση της εκτέλεσης μιας αριθμητικής πράξης οι μαθητές μπορούν εναλλακτικά να χρησιμοποιήσουν περιφράσεις αντί των τυπικών μαθηματικών εκφράσεων και η πράξη να γίνει πιο κατανοητή και εύκολη από τους συμμαθητές τους (Nunes & Bryant, 2007).

Ο Mercer (2000) επισημαίνει πως με απλούστερο λεξιλόγιο γίνονται κατανοητές μαθηματικές έννοιες που ήταν δύσκολες μέχρι πρότινος. Μπορούν να αξιοποιηθούν διάφορα είδη λέξεων και γλωσσικών εργαλείων.

Στην παρούσα έρευνα, στα πλαίσια της συζήτησης μεταξύ δασκάλου και μαθητών, δημιουργήθηκε ένα ιδιότυπο μαθηματικό λεξιλόγιο. Περιλάμβανε επιρρήματα, ρήματα, αντωνυμίες, και φράσεις που χρησιμοποιήθηκαν για να λειτουργήσουν ως εύκολες αναφορές σε μαθηματικούς όρους όπως: στις τέλειες και ατελείς διαιρέσεις, στους νοερούς υπολογισμούς, στο είδος της αριθμητικής πράξης, στις ιδιότητες των πράξεων, στις αντίστροφες πράξεις, στα πολλαπλάσια. Στο συγκεκριμένο λεξιλόγιο το ενδιαφέρον επικεντρώθηκε περισσότερο στη χρήση του γλωσσικού εργαλείου των αντωνυμιών για την αναφορά τους στους νοερούς υπολογισμούς (Rowland, 1992).

Στις διδακτικές παρεμβάσεις της έρευνας οι αντωνυμίες δεν χρησιμοποιήθηκαν πάντα μόνες τους. Ενίοτε βρίσκονταν σε συνδυασμό με διάφορες φράσεις του τύπου «εύκολοι τρόποι, τους δικούς σας εύκολους τρόπους», «σύντομοι υπολογισμοί, μερικούς από τους σύντομους υπολογισμούς», «γρήγορες πράξεις, εκείνες τις γρήγορες πράξεις». Αυτό συνέβη περισσότερο για λόγους νοηματικής απόδοσης, για να γίνει πιο

κατανοητό το νόημα της φράσης του δασκάλου. Διευκρινίζεται πως στις αξιολογήσεις που έγιναν για τα αποτελέσματα τις έρευνας, δόθηκε βαρύτητα στις αντωνυμίες, για το πώς λειτούργησαν και αν υλοποίησαν το σκοπό τους και δε μελετήθηκαν συνδυαστικά με τις παραπάνω φράσεις.

1.10 Συμπεράσματα

Έπειτα από την ανάλυση και επεξεργασία του θεωρητικού πλαισίου, εξάγονται κάποια συμπεράσματα σχετικά με τις αντίστοιχες θεωρητικές παραδοχές. Σύμφωνα με τα παραπάνω:

- Γίνεται εμφανής η αναγκαιότητα της αλλαγής των αναλυτικών προγραμμάτων για τον αριθμητισμό, με την ενσωμάτωση των νοερών υπολογισμών, της διδασκαλίας τους και με σύγχρονες αριθμητικές δραστηριότητες.
- Φαίνεται πως οι έρευνες που έχουν γίνει για την αναζήτηση παραγόντων που επηρεάζουν τη χρήση των νοερών στρατηγικών από τους μαθητές, εστιάζουν περισσότερο στην ευελιξία/ προσαρμοστικότητα των στρατηγικών (χρήση της ευέλικτης στρατηγικής). Δεν αναζητούν στοιχεία και χαρακτηριστικά τα οποία μπορεί να επηρεάσουν τη χρήση των νοερών υπολογισμών στο σύνολό τους. Επίσης δεν εστιάζουν στο λόγο που πιθανόν να επηρεάζουν τους μαθητές να εκτελέσουν την πράξη με νοερή στρατηγική και όχι άλλο υπολογισμό.
- Από τις εθνικές αξιολογήσεις κρατών φαίνεται βάσει της επίδοσης των μαθητών, πως οι νοεροί υπολογισμοί συμβάλλουν στην ορθότητα των πράξεων.
- Ο διάλογος συμβάλει στην ανάπτυξη γλωσσικών εργαλείων, επικοινωνιακών τακτικών και στη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών.
- Τα γλωσσικά εργαλεία των αντωνυμιών αντιστοιχίζονται με μαθηματικές έννοιες όπως οι νοεροί υπολογισμοί.

Από τα παραπάνω γίνεται κατανοητό όσον αφορά τη σπουδαιότητα της παρούσας έρευνας, πως από τις αξιολογήσεις των προγραμμάτων σπουδών άλλων χωρών, η χρήση των νοερών υπολογισμών συμβάλει θετικά στην ορθή εκτέλεση των πράξεων από τους μαθητές και κατ' επέκταση στην επίδοσή τους στο γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών. Η σημαντικότητα λοιπόν της έρευνας έγκειται στο γεγονός πως αν διερευνηθούν οι παράγοντες που επηρεάζουν τη χρήση των νοερών υπολογισμών, τότε και οι αρμόδιοι φορείς, όπως το Υπουργείο Παιδείας, τα Ανώτατα Εκπαιδευτικά Ιδρύματα και άλλοι φορείς, θα είναι σε θέση να διεξάγουν στοχευμένες

επιμορφώσεις στους εκπαιδευτικούς, ώστε να καταστούν αποτελεσματικότεροι στην διδακτική διαδικασία, ενώ ταυτόχρονα θα δημιουργηθεί πρόσφορο έδαφος επαναδιαπραγμάτευσης και αναδιαμόρφωσης των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών για τα μαθηματικά στο Δημοτικό σχολείο.

2 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ: ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

2.1 Προβληματική της έρευνας

Όπως προκύπτει μέχρι στιγμής από τη μελέτη της υπάρχουσας βιβλιογραφίας, φαίνεται πως η έρευνα που έχει γίνει για τους παράγοντες που επηρεάζουν τη χρήση των νοερών στρατηγικών στις πράξεις από τους μαθητές, επικεντρώνεται στην ευελιξία/ προσαρμοστικότητα των στρατηγικών. Δηλαδή, λαμβάνοντας ως προϋπόθεση ότι οι μαθητές έχουν σχηματίσει ήδη ένα ικανό ρεπερτόριο νοερών στρατηγικών για την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων, αναζητούνται οι παράγοντες που επηρεάζουν τη χρήση τους με τέτοιο τρόπο ώστε να επιλεχθεί η ευέλικτη στρατηγική στις πράξεις τους.

Στην παρούσα έρευνα διερευνήθηκαν παράγοντες που πιθανόν να επηρέασαν τη χρήση γενικά των νοερών στρατηγικών από τους μαθητές στην εκτέλεση των πράξεων. Αυτοί ήταν οι γλωσσικές στρατηγικές (αντωνυμίες που χρησιμοποιήθηκαν από το δάσκαλο ως έμμεση ένδειξη αναφοράς στη χρήση στρατηγικών νοερών υπολογισμών και ως εργαλείο αναγνώρισης της ένδειξης από τους μαθητές για την εκτέλεση των απαιτούμενων πράξεων με νοερούς υπολογισμούς- αποτέλεσε έκφραση του «Toraze effect» που συνέβη και παρατηρήθηκε) και τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων (είδη και μεγέθη αριθμών). Δεν εξετάστηκε η ύπαρξη ρεπερτορίου νοερών στρατηγικών καθώς για τον ερευνητή δεν αποτέλεσε απαραίτητη προϋπόθεση για την εκτέλεση των πράξεων.

Επίσης, δεν φαίνεται να υπάρχει στη βιβλιογραφία κάποια εκτενής αναζήτηση των προϋποθέσεων που είναι απαραίτητες για τους μαθητές για την εκτέλεση των πράξεων με νοερούς υπολογισμούς. Οπότε διερευνήθηκαν και καταγράφηκαν οι λόγοι για τους οποίους επέλεξαν οι ίδιοι οι μαθητές να εκτελέσουν τις πράξεις τους με νοερές στρατηγικές και όχι με άλλα είδη υπολογισμού, για παράδειγμα με κάθετο αλγόριθμο.

Χώρες όπως η Αγγλία, η Αυστραλία και η Αμερική σχεδίασαν και εφάρμοσαν νέα προγράμματα αριθμητισμού στις εκπαιδευτικές τους μεταρρυθμίσεις ενσωματώνοντας τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών στοχεύοντας στη βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών τους στα μαθηματικά. Οι αξιολογήσεις τους από τα αρμόδια όργανα (NNS, NAPLAN, NAEP) την τελευταία πενταετία διαπιστώνουν τη βελτίωση στην επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά. Στην Ελλάδα δεν έχει συσταθεί αντίστοιχο όργανο αξιολόγησης αριθμητισμού. Στην παρούσα έρευνα επιχειρείται μια προσπάθεια να διερευνηθεί η συμβολή των νοερών υπολογισμών στις πράξεις, στα όρια της έρευνας της διδακτορικής διατριβής.

2.2 Οι στόχοι της έρευνας

Λαμβάνοντας υπόψη όσα αναφέρθηκαν στην ενότητα σχετικά με την προβληματική της έρευνας, σχεδιάστηκε μια διδακτική παρέμβαση με σκοπό να διερευνήσει χαρακτηριστικά που επηρεάζουν τη χρήση των νοερών υπολογισμών, κατά πόσο οι πράξεις που εκτελέστηκαν με νοερούς υπολογισμούς έγιναν με επιτυχία και περιπτώσεις πράξεων που κάνουν τους μαθητές να θέλουν να τις εκτελέσουν με νοερούς υπολογισμούς. Με βάση τα παραπάνω διαμορφώθηκαν οι εξής ερευνητικοί στόχοι:

- να αναζητηθούν χαρακτηριστικά που επηρεάζουν την εξέλιξη της χρήσης των νοερών υπολογισμών.
- να διερευνηθεί η συμβολή των νοερών υπολογισμών στην ορθότητα των πράξεων.
- να εντοπιστούν περιπτώσεις των μαθηματικών πράξεων οι οποίες εκτελούνται με νοερούς υπολογισμούς.

2.3 Μεθοδολογία της Έρευνας

Για τη διερεύνηση των ζητημάτων της παρούσας έρευνας ακολουθήθηκε η ημι-πειραματική προσέγγιση (Campbell & Cook, 1979). Στις εκπαιδευτικές διαδικασίες είναι δυνατόν να επιλέγεται αυτός ο πειραματικός σχεδιασμός διότι είναι δύσκολο να γίνει τυχαία η κατανομή των ατόμων σε μία ομάδα (Καχριμάνης, Κόμης, & Αβούρης, 2008), όπως η τυχαία κατανομή των μαθητών ενός σχολείου σε τμήματα, για την οποία συντρέχουν συγκεκριμένες συνθήκες. Σε τέτοιου είδους ερευνητικές προσεγγίσεις εκτός από την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή υφίσταται η πιθανότητα να υπάρχουν και άλλες μεταβλητές οι οποίες δεν εξετάζονται από τον ερευνητή (αδιαχώριστες μεταβλητές), διότι δεν αποτελούν βασικό σημείο εστίασης στο πείραμα, μολονότι μπορούν δυνητικά να επηρεάσουν τα αποτελέσματα (παρεμβαίνουσες μεταβλητές). Στην περίπτωση αυτής της πιθανότητας ο ερευνητής επισημαίνει τις συγκεκριμένες μεταβλητές και προσπαθεί να τις κρατήσει σταθερές (ηλεγμένες) ώστε να τις εμποδίσει να λειτουργήσουν ως παρεμβαίνουσες (Campbell & Cook, 1979).

Στην ημι-πειραματική προσέγγιση όπου εξετάζεται η σχέση μεταξύ της ανεξάρτητης με την εξαρτημένη μεταβλητή, ο ερευνητής μπορεί να μεταβάλλει τη μεν για να δει αν εντοπίζονται αλλαγές στη δε (Bryman, 2016). Στη συγκεκριμένη έρευνα συμμετείχε μία ομάδα υποκειμένων η οποία δέχτηκε διδακτική παρέμβαση. Ελέγχθηκε

αν και κατά πόσο επηρέασε η διδακτική παρέμβαση τη χρήση των νοερών υπολογισμών στην εκτέλεση των πράξεων από τους μαθητές. Επίσης ελέγχθηκε αν διδακτική παρέμβαση επηρέασε την ορθότητα στην εκτέλεση των πράξεων. Ο έλεγχος έγινε αρχικά, κατά τη διάρκεια και στο τέλος της διαδικασίας.

Ειδικότερα, η έρευνα υλοποιήθηκε σε μαθητές της Στ' τάξης του Δημοτικού σχολείου. Έγινε διδακτική παρέμβαση με ημι-πειραματική προσέγγιση και εφαρμόστηκε το αγγλικό πρότυπο διδασκαλίας νοερών υπολογισμών (QCA, 1999). Οι αξιολογήσεις της διδακτικής παρέμβασης έγιναν με φύλλα εργασίας στην αρχή της (όπου έγινε μια αρχική καταγραφή των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στις επιζητούμενες πράξεις, καθώς δεν είχαν προλάβει να δεχτούν επαρκώς τη διδακτική παρέμβαση), κατά τη διάρκειά της και στο τέλος της. Στα φύλλα εργασίας κλήθηκαν οι μαθητές να λύσουν λεκτικά προβλήματα σχηματίζοντας και εκτελώντας τις επιζητούμενες πράξεις με πολυψήφιους αριθμούς. Σημειώθηκαν οι στρατηγικές υπολογισμού που χρησιμοποίησαν στα προβλήματα και αναζητήθηκε αν η διδακτική παρέμβαση επηρέασε τη χρήση των νοερών υπολογισμών στις πράξεις καθώς αν επηρέασε και την ορθότητα της εκτέλεσής τους.

Με την ολοκλήρωση της έρευνας εφαρμόστηκε η τελική δοκιμή (Post-Test) με φύλλο εργασίας με λεκτικά προβλήματα, όπου αξιολογήθηκε η αποτελεσματικότητα των διδακτικών παρεμβάσεων, καταγράφηκαν τα είδη των νοερών στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές και η επιτυχία τους. Οι επιζητούμενες πληροφορίες συλλέχθηκαν μέσω ατομικών ημιδομημένων συνεντεύξεων με όλους τους μαθητές.

Η αξιολόγηση της διδακτικής παρέμβασης και οι ημιδομημένες συνεντεύξεις μαγνητοφωνήθηκαν με σκοπό τη συλλογή των δεδομένων και στη συνέχεια έγινε η απομαγνητοφώνησή τους. Στα φύλλα εργασίας χρησιμοποιήθηκε η τεχνική της ανάλυσης περιεχομένου. Συγκεκριμένα, αποτελεί τεχνική κι όχι μέθοδο (Βάμβουκας, 2010), κατά την οποία το υλικό που αναλύθηκε δεν αποτελεί προϊόν του ερευνητή, καθώς δεν παράχθηκε αυθόρμητα από τον ίδιο, δεν ήταν εξαρχής διαθέσιμο, αλλά η παραγωγή του προκλήθηκε από τον ερευνητή. Σύμφωνα με τον Berelson (1948), η ανάλυση περιεχομένου αποτελεί μία τεχνική που περιγράφει και ερμηνεύει με αντικειμενικό τρόπο τον προφορικό ή γραπτό λόγο.

Στην ανάλυση περιεχομένου, ο ερευνητής θέτει τα κύρια ερωτήματα γύρω από το θέμα που εξετάζει. Σύμφωνα με αυτά διαμορφώνονται οι κατηγορίες της ταξινόμησης του περιεχομένου. Αυτές είναι προκαθορισμένες πριν από την

επεξεργασία του. Στη συνέχεια το περιεχόμενο εξετάζεται, καταγράφεται και τα δεδομένα του κωδικοποιούνται και εντάσσονται σε κατηγορίες (Berelson, 1952).

Για την καταγραφή των δεδομένων ορίζεται η μονάδα καταγραφής. Δηλαδή το τμήμα από το περιεχόμενο που θα στηριχθεί ο ερευνητής για την ταξινόμηση του περιεχομένου στις κατηγορίες. Αυτή ανάλογα μπορεί να είναι η λέξη, η πρόταση, η παράγραφος, φράσεις, το θέμα, το πρόσωπο ή το συνολικό κείμενο (Κυριαζή, 2002). Οι κατηγορίες που έχουν σχηματιστεί εξαρχής δεν μεταβάλλονται και σχετίζονται με τον σκοπό και το θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας (Berelson, 1948).

Κατά την επεξεργασία του περιεχομένου ο ερευνητής επιλέγει αν θα ασχοληθεί με το έκδηλο περιεχόμενο (manifest content), δηλαδή το νόημα που εξάγεται άμεσα από διάφορα (λεκτικά) σημεία αναφοράς στο κείμενο ή το λανθάνον περιεχόμενο (latent content) το οποίο προκύπτει από το ευρύτερο νόημα του κειμένου (Berelson, 1952). Συνήθως επιλέγεται το έκδηλο περιεχόμενο για μεγαλύτερη αντικειμενικότητα (Κυριαζή, 2002)

Η ένταξη του περιεχομένου σε κατηγορίες γίνεται με τη βοήθεια συστήματος κωδικοποίησης. Ανάλογα με το σύστημα που θα χρησιμοποιηθεί καθορίζεται και η ακρίβεια των μετρήσεων. Ένα είδος μέτρησης είναι η καταγραφή ή η απουσία μίας κατηγορίας. Άλλο είδος μέτρησης είναι η συχνότητα εμφάνισης μίας κατηγορίας. Η τελευταία προσφέρει πιο αναλυτικά δεδομένα (Κυριαζή, 2002).

2.3.1 Ανάλυση περιεχομένου της πιλοτικής διδακτικής παρέμβασης

Στην παρούσα έρευνα έγινε διδακτική παρέμβαση η οποία είχε πιλοτική και τελική μορφή. Η πιλοτική διδακτική παρέμβαση έγινε σε δύο φάσεις. Η αξιολόγηση της πρώτης φάσης της πιλοτικής διδακτικής παρέμβασης έγινε με ένα φύλλο εργασίας και η αξιολόγηση της δεύτερης φάσης της πιλοτικής διδακτικής παρέμβασης έγινε τρεις φορές, σε τρεις διαφορετικές χρονικές στιγμές με ισάριθμα φύλλα εργασίας. Το καθένα περιείχε από ένα λεκτικό πρόβλημα που καλούνταν οι μαθητές να το λύσουν. Με την ολοκλήρωσή του αναπτύχθηκε διάλογος μεταξύ δασκάλου και μαθητών, οι οποίοι παρουσίασαν τις στρατηγικές υπολογισμού τους στις απαιτούμενες πράξεις του λεκτικού προβλήματος του φύλλου εργασίας. Ο διάλογος ηχογραφήθηκε, απομαγνητοφωνήθηκε και έγινε ανάλυση περιεχομένου.

Στο φύλλο εργασίας στην αξιολόγηση της πρώτης φάσης πιλοτικής διδακτικής παρέμβασης βασικό ερώτημα ήταν αν συμβάλλουν οι αντωνυμίες στην εκτέλεση της

απαιτούμενης πράξης με τη χρήση νοερών υπολογισμών. Και στα τρία φύλλα εργασίας της δεύτερης φάσης της πιλοτικής διδακτικής παρέμβασης, βασικό ερώτημα ήταν αν το γλωσσικό εργαλείο των αντωνυμιών επηρέασε τους μαθητές, ώστε να χρησιμοποιήσουν νοερούς υπολογισμούς στις απαιτούμενες πράξεις. Επιπλέον στο δεύτερο και τρίτο φύλλο εργασίας υπήρχε ένα επιπλέον ερώτημα, αν εντόπισαν οι μαθητές χαρακτηριστικά στοιχεία στις πράξεις για την εκτέλεσή τους με νοερούς υπολογισμούς.

Για την ανάλυση περιεχομένου του διαλόγου για το φύλλο εργασίας στην αξιολόγηση της πρώτης φάσης πιλοτικής διδακτικής παρέμβασης δημιουργήθηκαν τρεις κατηγορίες για την ταξινόμηση του περιεχομένου. Στην πρώτη κατηγορία καταγράφηκαν πόσες πράξεις υλοποιήθηκαν με κάθετο αλγόριθμο, στη δεύτερη πόσες με νοερό υπολογισμό και στην τρίτη το είδος της στρατηγικής του νοερού υπολογισμού για την πράξη που περιέγραφαν οι μαθητές. Μονάδα καταγραφής ήταν η λέξη «κάθετα, κάθετος τρόπος» για την πρώτη κατηγορία. Για τη δεύτερη «έξυπνοι, δικοί σας, ανάλυση, σπάσαμε, χωρίσαμε, δικού μας, εύκολους, εκείνες, εκείνους». Η τρίτη κατηγορία ήταν καθορισμένη με τα είδη των στρατηγικών νοερών υπολογισμών για τις τέσσερις πράξεις (παρουσιάζονται στο θεωρητικό μέρος στα είδη νοερών υπολογισμών). Ως μονάδα καταγραφής ήταν η παράγραφος. Αναλύθηκε το περιεχόμενο των τμημάτων του διαλόγου για να ελεγχθεί σε ποιο είδος νοερής στρατηγικής εμπίπτει εκείνο που παρουσίαζαν οι μαθητές στην πράξη τους. Για όλες τις κατηγορίες επιλέχθηκε η επεξεργασία του έκδηλου περιεχομένου και το είδος μέτρησης ήταν η συχνότητα που επαναλαμβάνεται μια κατηγορία ή και τα σχετικά της γλωσσικά σύμβολα.

Ανάλυση περιεχομένου έγινε και για τους τρεις διαλόγους των φύλλων εργασίας των αξιολογήσεων της δεύτερης φάσης της πιλοτικής διδακτικής παρέμβασης. Για την ανάλυση περιεχομένου κάθε διαλόγου χρησιμοποιήθηκαν οι τρεις κατηγορίες που αναφέρθηκαν προηγουμένως χωρίς αλλαγές (αξιολόγηση πρώτης φάσης της πιλοτικής διδακτικής παρέμβασης). Όσον αφορά την αναζήτηση χαρακτηριστικών στοιχείων στις πράξεις για την εκτέλεσή τους με νοερούς υπολογισμούς στο δεύτερο και τρίτο φύλλο εργασίας, δεν μπόρεσε να γίνει ανάλυση περιεχομένου, γιατί δεν δόθηκαν απαντήσεις από τους μαθητές, ώστε να σχηματιστούν διάλογοι που να μπορεί να αναλυθεί κατάλληλα το περιεχόμενό τους.

2.3.2 Ανάλυση περιεχομένου της τελικής διδακτικής παρέμβασης

Η τελική διδακτική παρέμβαση διεξήχθη και αυτή σε δύο φάσεις, όπως και η πιλοτική. Στην πρώτη φάση η αξιολόγηση υλοποιήθηκε τρεις φορές σε διαφορετικές χρονικές στιγμές και στη δεύτερη φάση η αξιολόγηση υλοποιήθηκε μία φορά. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκαν φύλλα εργασίας που περιλάμβαναν λεκτικά προβλήματα. Μόλις ολοκληρωνόταν κάθε φύλλο εργασίας από τους μαθητές αναπτυσσόταν μαθηματικός διάλογος για την ανάλυση των στρατηγικών υπολογισμού που υλοποίησαν στις πράξεις. Ο διάλογος ηχογραφήθηκε, απομαγνητοφωνήθηκε και έγινε ανάλυση περιεχομένου.

Τα βασικά ερωτήματα στις αξιολογήσεις της τελικής διδακτικής παρέμβασης για τα οποία αναπτύχθηκε διάλογος και έγινε ανάλυση περιεχομένου ήταν αν τα γλωσσικά εργαλεία επηρέασαν τη χρήση των νοερών υπολογισμών στις απαιτούμενες πράξεις των λεκτικών προβλημάτων και αν οι μαθητές εντόπισαν οι μαθητές χαρακτηριστικά στοιχεία που να τους έκαναν να θέλουν να τις εκτελέσουν με νοερούς υπολογισμούς. Στις τέσσερις αξιολογήσεις της τελικής διδακτικής παρέμβασης (πρώτη και δεύτερη φάση) αναπτύχθηκαν ισάριθμοι διάλογοι σχετικά με το πρώτο βασικό ερώτημα που έθεσε ο ερευνητής. Το περιεχόμενό τους αναλύθηκε. Για την ταξινόμηση του περιεχομένου κάθε διαλόγου χρησιμοποιήθηκαν τρεις κατηγορίες. Στην πρώτη σημειώθηκε ο αριθμός των πράξεων που υλοποιήθηκαν με κάθετο αλγόριθμο, στη δεύτερη ο αριθμός των πράξεων που υλοποιήθηκαν με νοερό υπολογισμό και στην τρίτη το είδος των νοερών στρατηγικών των πράξεων που ανέλυσαν οι μαθητές. Μονάδα καταγραφής για την πρώτη κατηγορία ήταν οι λέξεις «κάθετα, κάθετος» και στη δεύτερη «μερικούς, εκείνους, δικούς σας, εύκολους, ανάλυση, έξυπνους, σπάσιμο, χωρίζω, βολεύει». Η τρίτη κατηγορία είχε τα είδη των νοερών στρατηγικών. Μονάδα καταγραφής για αυτή την κατηγορία ήταν η παράγραφος. Τμήμα του περιεχομένου των διαλόγων αναλύθηκε και ελέγχθηκε, ώστε να αντιστοιχιστούν στις κατάλληλες νοερές στρατηγικές οι υπολογισμοί που περιέγραψαν οι μαθητές. Για όλες τις κατηγορίες έγινε επεξεργασία του έκδηλου περιεχομένου και ως είδος μέτρησης επιλέχθηκε η συχνότητα που εμφανίζεται μία κατηγορία ή τα λεκτικά της σύμβολα σε μία κατηγορία (λέξεις, φράσεις κ.ο.κ.).

Για την ανάλυση περιεχομένου των διαλόγων που αναπτύχθηκαν για το δεύτερο βασικό ερώτημα και στις τέσσερις αξιολογήσεις της τελικής διδακτικής παρέμβασης (πρώτη και δεύτερη φάση) σχηματίστηκε από μία κατηγορία για την

ταξινόμηση του περιεχομένου, στην οποία καταγράφηκαν τα χαρακτηριστικά στοιχεία που αναγνώρισαν οι μαθητές στις πράξεις για να τις εκτελέσουν με νοερούς υπολογισμούς. Μονάδα καταγραφής ήταν η λέξη. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκαν όσες περισσότερες λέξεις ήταν δυνατό, ώστε ο ερευνητής να μπορέσει να ταξινομήσει όλο το σχετικό περιεχόμενο. Οι λέξεις ήταν «χωρίζω, αναλύω, αλλάζω, πολλαπλάσια, αθροίσματα, πολλαπλασιάζω, διαιρώ, χρήση, πέντε, δέκα, μηδέν, ταιριάζει, κουμπώνει, τελειώνει, αρχίζει, κόβω, μοιράζω, σπάω, γινόμενο, πηλίκο, επιμέρους, τμήμα, εύκολους, γρήγορους, κριτήρια, διαιρετότητα, ιδιότητες, μεγάλους, μικρούς, δύσκολους». Αναλύθηκε το περιεχόμενο του διαλόγου και κωδικοποιήθηκε σύμφωνα με τις παραπάνω λέξεις. Γύρω από κάθε λέξη συγκεντρώθηκε οποιαδήποτε σχετική αναφορά των μαθητών με αυτή. Έπειτα το περιεχόμενο τέθηκε υπό επεξεργασία για να αποδοθεί με τη μορφή προτάσεων για τις περιπτώσεις των μαθηματικών πράξεων που επιλέγουν οι μαθητές να τις εκτελέσουν με νοερούς υπολογισμούς. Ο ερευνητής ασχολήθηκε με το έκδηλο περιεχόμενο και το είδος μέτρησης ήταν η απουσία/παρουσία των λεκτικών συμβόλων στη μονάδα καταγραφής.

Για τη συμβολή των νοερών υπολογισμών στην ορθότητα των πράξεων ελέγχθηκαν για την ορθότητά τους στα φύλλα εργασίας οι υπολογισμοί που εκτελέστηκαν με νοερές στρατηγικές και τα αποτελέσματά τους. Επίσης ελέγχθηκε στα φύλλα εργασίας αν συνέπεσαν οι υλοποιήσιμες στρατηγικές των μαθητών με τις αναμενόμενες νοερές στρατηγικές που καταγράφηκαν, ώστε να διαπιστωθεί αν τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων τους επηρέασαν και τις χρησιμοποίησαν στις πράξεις τους.

Η διδακτική παρέμβαση υλοποιήθηκε στις παρακάτω μορφές ως εξής:

- Πρώτη φάση της πιλοτικής διδακτικής παρέμβασης, το σχολικό έτος 2013-2014, στην Δ' τάξη του Δημοτικού.
- Δεύτερη φάση της πιλοτικής διδακτικής παρέμβασης, το σχολικό έτος 2015-2016 στην Ε' τάξη του Δημοτικού.
- Πρώτη και δεύτερη φάση της τελικής μορφής της διδακτικής παρέμβασης, το σχολικό έτος 2016-2017, στη Στ' τάξη του Δημοτικού.
- Τελική δοκιμή, το σχολικό έτος 2016-2017, στη Στ' τάξη του Δημοτικού.

2.3.3 Περιορισμοί της έρευνας

Όσον αφορά τις γλωσσικές στρατηγικές τέθηκαν κάποιοι περιορισμοί στην έρευνα, οι εξής: Τα γλωσσικά εργαλεία των λέξεων που εκκινούν ή σταματούν τον διάλογο ή εκείνες που συνιστούν ένα μαθηματικό λεξιλόγιο διακριτό ανάμεσα σε μαθητή και δάσκαλο, δεν μπορούσαν να σταθούν αρωγοί στην παρούσα έρευνα. Το ίδιο και οι μετατροπές των ρημάτων σε ουσιαστικά ή η απόδοση χρονικής μονιμότητας σε μαθηματικά κείμενα πλούσια σε ρήματα παροντικών χρόνων, που δεν εξυπηρετούν το βασικό μέλημα, να ενεργοποιηθούν δηλαδή οι νοεροί υπολογισμοί από τους μαθητές χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες λέξεις. Επιλέχθηκε έτσι το γλωσσικό εργαλείο των αντωνυμιών, εφόσον σύμφωνα με τη βιβλιογραφική έρευνα οι μαθητές μπορούν να αντιστοιχίζουν τις αντωνυμίες σε γενικές μαθηματικές αναφορές και όρους (νοεροί υπολογισμοί), τόσο όμως οι ίδιοι όσο και οι δάσκαλοι αντιλαμβάνονται σε τι ακριβώς αναφέρονται (Rowland, 1992).

Επιπλέον, τέθηκαν περιορισμοί σχετικά με τους παράγοντες αλλά και τις προϋποθέσεις που επηρεάζουν τη χρήση, την επιλογή και την εκτέλεση των πράξεων με νοερούς υπολογισμούς. Έτσι οι απαντήσεις προέρχονται από εξέταση μόνο συγκεκριμένων πτυχών που αναφέρονται στην έρευνα (αριθμοί, αντωνυμίες) και δεν έγινε μελέτη αν και κατά πόσο σχετίζονται και με άλλες παραμέτρους, όπως είναι οι κοινωνικές, πολιτισμικές, οικονομικές καταβολές ή η γνωστική επάρκεια των μαθητών.

2.3.4 Ερευνητικά ερωτήματα

Η διατύπωση των ερευνητικών ερωτημάτων καθώς και ο σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης που ακολούθησε βασίστηκε κυρίως στη μελέτη των θεωρητικών παραδοχών για τη γλώσσα και την επικοινωνία, της εθνικής στρατηγικής για τον αριθμητισμό (National Numeracy Strategy) στην Αγγλία, της εθνικής αξιολόγησης της εκπαιδευτικής προόδου στα μαθηματικά (National Assessment of Educational Progress) στις Η.Π.Α. και του εθνικού προγράμματος αξιολόγησης του γλωσσικού γραμματισμού και αριθμητισμού της Αυστραλίας (NAPLAN), όπως παρουσιάστηκαν στο θεωρητικό μέρος που προηγήθηκε. Η διδακτική παρέμβαση σχεδιάστηκε με στόχο να απαντηθούν τα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

1. Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της εξέλιξης της χρήσης νοερών υπολογισμών κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης;

2. Συμβάλουν οι νοεροί υπολογισμοί στην ορθότητα των πράξεων;
3. Σε ποιες περιπτώσεις των μαθηματικών πράξεων οι μαθητές επιλέγουν τη χρήση νοερών υπολογισμών;

2.3.5 Σχολεία, τάξεις, ηλικίες, τόπος και χρόνος

Το σύνολο των διδακτικών παρεμβάσεων συμπεριλαμβανομένων και των πιλοτικών, πραγματοποιήθηκαν με μαθητές της Δ', Ε' και ΣΤ' τάξης του Δημοτικού. Η επιλογή τους σε σύγκριση με εκείνους των μικρότερων τάξεων έγινε διότι είχαν διδαχθεί τους κάθετους αλγόριθμους και των τεσσάρων πράξεων και με την υπόθεση ότι θα είχαν ασκηθεί περισσότερο στις πράξεις, βάσει των γνωστικών στόχων και της διδακτέας ύλης της Δ', Ε' και Στ' τάξης.

Η έρευνα έλαβε χώρα στις περιφερειακές ενότητες των νομών Εύβοιας και Καβάλας. Οι εναλλαγές των περιοχών έγιναν εξαιτίας υπηρεσιακών μεταβολών και μετακινήσεων του ερευνητή ο οποίος ήταν και ο δάσκαλος των τμημάτων.

Το δείγμα των μαθητών συνθέτετε μία ποικιλία κοινωνικών, πολιτισμικών, οικονομικών και γνωστικών χαρακτηριστικών. Οι μαθητές προέρχονταν από οικογένειες διαφορετικών στρωμάτων και καταβολών. Τα επαγγέλματα των γονέων τους ήταν κυρίως ελεύθεροι επαγγελματίες, εργάτες, εκπαιδευτικοί, στρατιωτικοί, δημόσιοι και ιδιωτικοί υπάλληλοι.

Από την Δ' τάξη συμμετείχαν 7 αγόρια και 9 κορίτσια, από την Ε' τάξη 8 αγόρια και 9 κορίτσια και από την Στ' τάξη 24 αγόρια και 23 κορίτσια. Συνολικά έλαβαν μέρος 39 αγόρια και 41 κορίτσια, αθροιστικά 80 μαθητές (Πίνακας 11).

Τάξεις	Αγόρια	Κορίτσια	Σύνολο
Δ'	7	9	16
Ε'	8	9	17
Στ'	24	23	47
Σύνολο	39	41	80

Πίνακας 11: Πλήθος μαθητών ανά τάξη και φύλο

Στη συνέχεια και στον Πίνακα 12, αναφέρεται η τάξη στην οποία έγινε κάθε διδακτική παρέμβαση, το σχολείο, η χρονική περίοδος, οι διδακτικές ενότητες που χρησιμοποιήθηκαν ως αφορμή για τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών, καθώς και ο συνολικός αριθμός των μαθητών που συμμετείχαν κάθε φορά.

Διδακτική Παρέμβαση	Τάξη	Δημοτικό σχολείο	Χρονική περίοδος	Ενότητες ύλης	Αριθμός μαθητών
1 ^η φάση πιλοτικής	Δ'	12/θέσιο (Π.Ε. Εύβοιας)	2013- 2014	- Πολλαπλασιάζω με διάφορους τρόπους - Επιλύω προβλήματα	16
2 ^η φάση πιλοτικής	Ε'	12/θέσιο (Π.Ε. Καβάλας)	2015- 2016	- Στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων- Πολλαπλασιασμός ή διαίρεση - Διαχείριση πληροφορίας - Σύνθετα προβλήματα- Συνδυάζοντας πληροφορίες	17
1 ^η φάση τελικής	Στ'	6/θέσιο (Π.Ε. Καβάλας)	2016-2017	Μιλώ με τη γλώσσα των αριθμών- Λύνω σύνθετα προβλήματα τεσσάρων πράξεων	16
2 ^η φάση τελικής				- Μαθαίνω να ισορροπώ ενότητα - Μαθηματικά σε κίνηση ενότητα - Ο άγνωστος πολλαπλασιάζεται! - Αντανακλάσεις	
Τελική Δοκιμή				Όλες οι ενότητες της διδακτικής παρέμβασης για την Στ' τάξη	15

Πίνακας 12: Στοιχεία υλοποίησης των διδακτικών παρεμβάσεων

2.3.6 Δομή διδακτικών παρεμβάσεων

Η διδακτική παρέμβαση ξεκίνησε με πιλοτική μορφή και είχε δύο φάσεις. Στόχος της πρώτης φάσης ήταν να ερευνηθεί κατά πόσο η χρήση αντωνυμιών ως έμμεση ένδειξη αναφοράς στη χρήση στρατηγικών νοερών υπολογισμών κατά την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού ήταν αποτελεσματική. Μοιράστηκε φύλλο εργασίας στους μαθητές με λεκτικό πρόβλημα που λυνόταν με πολλαπλασιασμό. Η διατύπωση ενδείξεων από την πλευρά του δασκάλου για την καθοδήγηση των μαθητών και τη γνωστοποίηση της διδακτικής του πρόθεσης αποτελεί μία έκφανση του φαινομένου «Toraze» (Brousseau, 2002). Έτσι λοιπόν, για να αναφερθεί έμμεσα στους νοερούς υπολογισμούς τόνιζε τις αντωνυμίες στο λόγο του οι οποίες ήταν σημάδι αναγνώρισης χρήσης νοερών υπολογισμών από τους μαθητές.

Τα αποτελέσματα ήταν ενθαρρυντικά. Η πράξη υλοποιήθηκε σε μεγάλο ποσοστό με νοερούς υπολογισμούς. Από τους 16 συνολικά υπολογισμούς οι 12 έγιναν νοερές στρατηγικές και 4 με κάθετο αλγόριθμο, όλοι τους με επιτυχία. Το γλωσσικό

εργαλείο των αντωνυμιών που χρησιμοποίησε ο δάσκαλος φάνηκε να ενεργοποίησε τους νοερούς υπολογισμούς και ο στόχος επετεύχθη.

Με τα θετικά αποτελέσματα της πρώτης φάσης πιλοτικής διδακτικής παρέμβασης δημιουργήθηκε η επιθυμία να υλοποιηθεί η δεύτερη φάση της με νέα στοιχεία. Οι στόχοι ήταν να εγείρει στρατηγικές νοερών υπολογισμών μέσω των γλωσσικών εργαλείων των αντωνυμιών και να αναδειχθεί η συμβολή των νοερών υπολογισμών στις πράξεις. Αυτή τη φορά έγιναν τρεις αξιολογήσεις και η διδακτική παρέμβαση κράτησε τέσσερις μήνες. Και τα τρία φύλλα εργασίας περιείχαν λεκτικά προβλήματα τεσσάρων πράξεων παρόμοιου περιεχομένου. Στο πρώτο λεκτικό πρόβλημα ο δάσκαλος προσπάθησε να ενεργοποιήσει τους νοερούς υπολογισμούς χρησιμοποιώντας τις αντωνυμίες ως έμμεση ένδειξη αναφοράς στις στρατηγικές νοερών υπολογισμών (όπως και στην αξιολόγηση της πρώτης φάσης της διδακτικής παρέμβασης). Στο δεύτερο ακολούθησε την ίδια τακτική αλλά εξέφρασε και την επιλογή της χρήσης και του κάθετου αλγόριθμου ώστε να αποκλειστεί ότι επηρεάζει και κατευθύνει τους μαθητές προς στους νοερούς υπολογισμούς. Στο τρίτο λεκτικό πρόβλημα δεν έκανε καμία νύξη για νοερές στρατηγικές ή για χρήση κάθετου αλγόριθμου.

Ο ερευνητής παράλληλα στις δύο τελευταίες αξιολογήσεις ήθελε να ελέγξει και να παρατηρήσει αν οι μαθητές μπορούσαν να εντοπίσουν χαρακτηριστικά στοιχεία στις πράξεις, ώστε να τις εκτελέσουν με νοερούς υπολογισμούς.

Στο πρώτο φύλλο εργασίας από τους 43 υπολογισμούς που υλοποιήθηκαν οι 39 έγιναν με νοερούς υπολογισμούς και πλήρη επιτυχία και οι 4 με κάθετο αλγόριθμο και πλήρη αποτυχία. Τα αποτελέσματα στα υπόλοιπα φύλλα εργασίας δεν ήταν ιδιαίτερα ενθαρρυντικά. Στο δεύτερο φύλλο εργασίας έγιναν 29 υπολογισμοί, 17 με κάθετο αλγόριθμο (4 μόνο σωστοί) και 12 με νοερούς υπολογισμούς (όλοι σωστοί). Στο τρίτο φύλλο εργασίας από τους 47 υπολογισμούς που πραγματοποιήθηκαν, με κάθετο αλγόριθμο έγιναν 39 (22 σωστοί) και με νοερούς υπολογισμούς μόνο 8 (όλοι σωστοί). Έτσι, εκείνοι που χρησιμοποίησαν νοερούς υπολογισμούς στο πρώτο πρόβλημα, στα άλλα δυο, εφάρμοσαν κάθετο αλγόριθμο παρ' όλο που τα προβλήματα είχαν μεγάλη ομοιότητα.

Τα γλωσσικά εργαλεία των αντωνυμιών στο πρώτο φύλλο εργασίας, ως έμμεση ένδειξη αναφοράς από το δάσκαλο στη χρήση των νοερών υπολογισμών φάνηκε πως πιθανόν να ενεργοποίησαν τους μαθητές να τους χρησιμοποιήσουν. Ο αριθμός των νοερών υπολογισμών που υλοποιήθηκαν ήταν πολύ μεγαλύτερος από εκείνο των

κάθετων αλγόριθμων (39 έναντι 4).

Η συμβολή των νοερών υπολογισμών στις πράξεις έγινε εμφανής. Συνολικά στη δεύτερη φάση της πιλοτικής διδακτικής παρέμβασης όσοι μαθητές υλοποίησαν τις πράξεις τους με νοερούς υπολογισμούς τις εκτέλεσαν με πλήρη επιτυχία (σωστές 59 στις 59).

Στο δεύτερο φύλλο εργασίας και κυρίως στο τρίτο φάνηκε η δυσκολία των μαθητών να μπορέσουν να εντοπίσουν στις πράξεις εκείνα τα χαρακτηριστικά που θα τους έκαναν να τις εκτελέσουν με νοερούς υπολογισμούς και τις εκτέλεσαν με κάθετο αλγόριθμο. Έτσι, δημιουργήθηκε η ανάγκη να γίνουν μερικές μεταβολές. Ξεκινώντας από τα προβλήματα, οι αριθμοί έπρεπε να αντικατασταθούν με νέα είδη και μεγέθη και να ελεγχθεί αν θα ωθούσαν τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών στις πράξεις τους.

Συνεπώς, η χρήση των αντωνυμιών ως έμμεσες ενδείξεις αναφοράς για την εφαρμογή των νοερών υπολογισμών αποτέλεσε ικανό εργαλείο αναγνώρισης από τους μαθητές και είχε θετικά αποτελέσματα στη χρήση των στρατηγικών νοερών υπολογισμών στο πρώτο φύλλο εργασίας αλλά όχι τόσο στο δεύτερο και στο τρίτο, οπότε η διερεύνησή τους έπρεπε να συνεχιστεί. Τα αποτελέσματα για τη συμβολή των νοερών υπολογισμών στις πράξεις, ήταν θετικά, οπότε η περαιτέρω αναζήτηση θα έδινε ακόμη περισσότερα και πιο έγκυρα αποτελέσματα. Ενώ για τα νέα χαρακτηριστικά των προβλημάτων (είδη και μεγέθη αριθμών) έπρεπε να διερευνηθεί αν επηρέαζαν τη χρήση των νοερών υπολογισμών. Όλα αυτά δημιούργησαν την ανάγκη για τη νέα τελική διδακτική παρέμβαση και διαμόρφωσαν τα τρία ερευνητικά ερωτήματα. Με βάση την αξιολόγηση της πιλοτικής διδακτικής παρέμβασης και τα αποτελέσματα που συλλέχτηκαν, η δομή της τελικής διδακτικής παρέμβασης διαμορφώθηκε ως εξής:

1. Περιεχόμενο διδακτικών παρεμβάσεων.
2. Στάδια διδακτικών παρεμβάσεων
3. Περιεχόμενο αξιολόγησης και
4. Αξιολόγηση διδακτικών παρεμβάσεων

2.3.6.1 Περιεχόμενο τελικής διδακτικής παρέμβασης

Αξιοποιώντας όλα τα δεδομένα από τις πιλοτικές διδακτικές παρεμβάσεις, το περιεχόμενο της τελικής διδακτικής παρέμβασης διαμορφώθηκε περιλαμβάνοντας:

1. Τα είδη των νοερών στρατηγικών που διδάχθηκαν οι μαθητές σε κάθε φάση της τελικής διδακτικής παρέμβασης (Πίνακας 13).
2. Τις πράξεις που χρησιμοποιήθηκαν για τον σκοπό αυτό, με κριτήριο το πλήθος των ψηφίων (Πίνακας 13).
3. Το ιδιότυπο μαθηματικό λεξιλόγιο που είχε αναπτύξει ο δάσκαλος με τους μαθητές (Πίνακας 14).

Επιπλέον, στο περιεχόμενο των διδακτικών παρεμβάσεων εντάχθηκε και ένας γενικός οδηγός επίλυσης προβλημάτων και τεχνικές υπολογισμού του άγνωστου παράγοντα «x». Δεν αποτέλεσαν, βέβαια, πρωτεύοντα στόχο, ωστόσο, αναπτύχθηκαν από τον δάσκαλο κατά τη διδασκαλία νοερών στρατηγικών στις διδακτικές παρεμβάσεις και βασίστηκαν στη χρήση του ιδιότυπου λεξιλογίου (Solomon & O' Neill, 1998).

Τελική Διδακτική Παρέμβαση	Νοερές Στρατηγικές	Πράξεις
1η Φάση	Ολιστικές στρατηγικές αντιστάθμισης N10C / Εξισορρόπησης	Πρόσθεση με μονοψήφιους και διψήφιους, Αφαίρεση με διψήφιους / Πρόσθεση με διψήφιους, Αφαίρεση με διψήφιους
	Διαχωρισμού 1010/ u1010	Πρόσθεση με διψήφιους / Αφαίρεση με διψήφιους
	Συσσώρευση N10 / uN10	Πρόσθεση με διψήφιους / Αφαίρεση με διψήφιους
	Κοντά στα διπλά	Πρόσθεση με μονοψήφιους, Αφαίρεση με μονοψήφιους
	Χρήση των διπλών	Αφαίρεση με διψήφιο μειωτέο και μονοψήφιο αφαιρετέο
	Χρήση του αριθμού 5	Πρόσθεση με μονοψήφιους
	Πέρασμα από το 10 (A10)	Πρόσθεση με διψήφιους
	Αντιστάθμιση- Ρύθμιση του ενός από τους δύο αριθμούς / Ρύθμιση και των δύο αριθμών	Πολλαπλασιασμός με διψήφιους επί μονοψήφιους/ Πολλαπλασιασμός με διψήφιους επί τριψήφιους
	Πολλαπλασιασμός/ Διαίρεση με δυνάμεις του 10	Πολλαπλασιασμός με μονοψήφιους/ διψήφιους και τριψήφιους
	Άμεση ανάκληση γνωστών αριθμητικών γεγονότων	Πολλαπλασιασμός με μονοψήφιους Διαίρεση με διψήφιο διαιρετέο και μονοψήφιο διαιρέτη
	Διάσπαση του ενός από τους δύο αριθμούς/ και των δύο αριθμών	Διαίρεση με διψήφιους / Πολλαπλασιασμός με διψήφιους
	Επαναλαμβανόμενων πολλαπλασιασμών ως προσθέσεις/ Διαίρεσεων ως αφαιρέσεις	Πολλαπλασιασμός με μονοψήφιους / Διαίρεση με διψήφιο διαιρετέο και μονοψήφιο διαιρέτη

2η Φάση	Επαναλαμβανόμενων Διαιρέσεων ως αφαιρέσεις	Διαίρεση με μονοψήφιους και διψήφιους
	Άμεση ανάκληση γνωστών αριθμητικών γεγονότων	Πολλαπλασιασμός με μονοψήφιους και τριψήφιους
	Διάσπαση του ενός από τους δύο αριθμούς/ και των δύο αριθμών	Πολλαπλασιασμός με διψήφιους και τριψήφιους/ Πολλαπλασιασμός με διψήφιους

Πίνακας 13: Συνοπτική παρουσίαση των νοερών στρατηγικών, των πράξεων που χρησιμοποιήθηκαν και στις δύο φάσεις της τελικής διδακτικής παρέμβασης

Κατά τη διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων και ιδίως της τελικής παρέμβασης, εγκαθιδρύθηκε ένα ιδιότυπο μαθηματικό λεξιλόγιο, το οποίο περιλάμβανε λέξεις και φράσεις που χρησιμοποιήθηκαν ως νύξεις για μαθηματικούς όρους (Πίνακας 14). Για το λεξιλόγιο και τη σημασία του γίνεται αναφορά στο θεωρητικό πλαίσιο (ενότητα 1.9).

Φράσεις και λέξεις λεξιλογίου	Μαθηματικοί όροι
Ανεβαίνω, βάζω	Πρόσθεση
Κατεβαίνω, βγάζω, κρύβω	Αφαίρεση
Βάζω δύο φορές	Διπλασιάζω
Μοιράζω, κόβω	Διαιρώ
Αλλάζω τη σειρά των αριθμών	Αντιμεταθετική Ιδιότητα
Μοιράζω ακριβώς, εξίσου	Τέλεια διαίρεση
Υπολογίζω με το νου	Νοεροί υπολογισμοί
Υπολογισμοί στην αρχή του μαθήματος	Νοεροί υπολογισμοί
Σύντομοι υπολογισμοί	Νοεροί υπολογισμοί
Εύκολοι τρόποι	Νοεροί υπολογισμοί
Γρήγορες πράξεις	Νοεροί υπολογισμοί
Μερικούς από εκείνους τους δικούς σας τρόπους	Νοεροί υπολογισμοί
Εκτιμώ, περίπου	Νοεροί υπολογισμοί
Περισσότερο	Διαφορά
Προπαίδια ενός αριθμού	Πολλαπλάσια
Υπόλοιπο	Ατελής διαίρεση
Μαζί	Σύνολο
Αρα, επομένως	Αποτέλεσμα
Μπροστά, Πίσω	Πρόσθεση, Αφαίρεση και αντίστροφα ή Πολλαπλασιασμός, Διαίρεση και αντίστροφα

Πίνακας 14: Ιδιότυπο μαθηματικό λεξιλόγιο

2.3.6.2 Στάδια Διδακτικών Παρεμβάσεων

Οι διδακτικές παρεμβάσεις εντάχθηκαν στα πλαίσια της διδακτικής διαδικασίας και πραγματοποιήθηκαν πριν την έναρξη του καθημερινού μαθήματος των μαθηματικών. Διήρκησαν είκοσι λεπτά, περιλαμβάνοντας τρία στάδια:

1. Δεκάλεπτη διδασκαλία στρατηγικών νοερών υπολογισμών. Ο δάσκαλος δίδασκε «δασκαλοκεντρικά» μία νοερή στρατηγική υπολογισμού τη φορά. Μέσα σε αυτή τη χρονική διάρκεια ο δάσκαλος απευθυνόμενος στους μαθητές ανέπτυξε κατευθυνόμενο μαθηματικό διάλογο (Λεμονίδης, 2013). Έτσι, έγινε προσπάθεια

να εγκαθιδρυθεί ένα ιδιότυπο λεξιλόγιο (Mercer, 2000), που να περιλαμβάνει το γλωσσικό εργαλείο των αντωνυμιών (Rowland, 1999) και άλλων όρων. Οι αντωνυμίες χρησιμοποιήθηκαν ως σημάδι αναγνώρισης από τους μαθητές, για να τους παραπέμψουν να χρησιμοποιήσουν τους νοερούς υπολογισμούς, στην εκτέλεση των πράξεών τους.

2. Πεντάλεπτη ανάθεση εκτέλεσης μεμονωμένων πράξεων ή επίλυσης λεκτικών προβλημάτων αριθμητικά λεκτικά προβλήματα με συγκεκριμένο στις ομάδες των μαθητών. Η οργάνωση της τάξης σε ομάδες ήταν ήδη σχεδιασμένη από την αρχή της σχολικής χρονιάς και παρέμεινε η ίδια για όλα τα μαθήματα.
3. Πεντάλεπτη χρονική περίοδος ώστε οι μαθητές να ανακοινώσουν τις νοερές στρατηγικές που χρησιμοποίησαν για την εκτέλεση των πράξεων που τους ανατέθηκαν.

Με την ανακοίνωση, λοιπόν, των νοερών στρατηγικών από τους μαθητές, η διδακτική παρέμβαση ολοκληρωνόταν.

2.3.6.3 Περιεχόμενο της αξιολόγησης

Τα αποτελέσματα της διδακτικής παρέμβασης συγκεντρώθηκαν μέσω των φύλλων εργασίας τα οποία σχεδιάστηκαν με σκοπό να δώσουν πληροφορίες για την έκβαση, την εξέλιξη και το σχεδιασμό της διδακτικής παρέμβασης. Ακολούθως παρουσιάζονται τα λεκτικά προβλήματα των φύλλων εργασίας, ανάλογα με τη φάση της διδακτικής παρέμβασης που έγιναν. Στο τέλος κάθε προβλήματος υπάρχουν κωδικοποιημένα τα είδη των στρατηγικών που αναμενόταν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές (το περιεχόμενο αντλήθηκε από τους Πίνακες 9 και 10).

Η αξιολόγηση της Α' φάσης της τελικής διδακτικής παρέμβασης έγινε τρεις φορές. Χρησιμοποιήθηκαν τρία διαφορετικά φύλλα εργασίας, που το καθένα περιείχε από ένα λεκτικό πρόβλημα, Α1, Α2, Α3. Τα Α1 και Α2 λύνονταν με πράξεις πρόσθεσης, αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού, ενώ για τη λύση του Α3 απαιτούνταν και οι τέσσερις πράξεις. Το περιεχόμενο ήταν κλιμακωτά πιο σύνθετο, καθώς ο δάσκαλος αναζητούσε νέα συστατικά και δεδομένα, που μπορεί να επηρέαζαν τον τρόπο εκτέλεσης των πράξεων από τους μαθητές. Τα λεκτικά προβλήματα της πρώτης φάσης ήταν τα ακόλουθα:

- Α1. Ο κύριος Αμαξόπουλος σκοπεύει να αγοράσει ένα αυτοκίνητο αξίας 31600€. ο έμπορος του προσφέρει τις εξής επιλογές: να πληρώσει με μετρητά όλο το ποσό ή να δώσει προκαταβολή 10000€ και 72 δόσεις των 320€. Πόσο θα πληρώσει

περισσότερο αν αποφασίσει να το αγοράσει με δόσεις; (νοερές στρατηγικές: ΣΔΑ, 1010)

A2.Ο κύριος Αμαξόπουλος σκοπεύει να αγοράσει ένα αυτοκίνητο αξίας 63200€. ο έμπορος του προσφέρει τις εξής επιλογές: να πληρώσει με μετρητά όλο το ποσό ή να δώσει προκαταβολή 20000€ και 72 δόσεις των 620€. Πόσο θα πληρώσει περισσότερο αν αποφασίσει να το αγοράσει με δόσεις; (νοερές στρατηγικές: ΣΔΑ, 1010)

A3.Ο κύριος Αμαξόπουλος σκοπεύει να αγοράσει ένα αυτοκίνητο αξίας 63200€. Ο έμπορος του προσφέρει τις εξής επιλογές: α) να πληρώσει με μετρητά όλο το ποσό β) να δώσει προκαταβολή 20000€ και 72 δόσεις των 620€, γ) να δώσει προκαταβολή 30000€ και το υπόλοιπο σε 16 ισόποσες δόσεις. Να βρείτε: 1) ποια περίπτωση αγοράς συμφέρει περισσότερο, 2) σε ποια περίπτωση δόσεων θα χρεωθεί περισσότερο και πόσο; (νοερές στρατηγικές: ΣΔΑ, 1010)

Στη Β' φάση της τελικής διδακτικής παρέμβασης σχεδιάστηκε και χρησιμοποιήθηκε ένα φύλλο εργασίας το οποίο περιλάμβανε τέσσερα λεκτικά προβλήματα, B1, B2, B3 και B4. Οι μαθητές έπρεπε να σχηματίσουν τις εξίσώσεις, όπου ο άγνωστος στο B1 ήταν προσθετός, στο B2 αφαιρετός, στο B3 παράγοντας πολλαπλασιασμού και στο B4 διαιρετός. Στο B1 και B2 η πράξη για τη λύση της εξίσωσης ήταν αφαίρεση και για τα B3 και B4, διαίρεση. Ακολουθούν τα προβλήματα:

B1.Ο Βαγγέλης έχει συγκεντρώσει 1275€ και θέλει να αγοράσει ένα αυτοκίνητο που κοστίζει 4025€. Πόσα χρήματα χρειάζεται να βάλει ακόμα; Να γράψετε την εξίσωση και να βρείτε τη λύση της. (νοερές στρατηγικές: 1010, N10)

B2.Σε ένα κρουαζιερόπλοιο επιβαίνουν 4500 άτομα. Αν έχουν μείνει 2262, πόσοι κατέβηκαν στην πρώτη στάση; Να γράψετε την εξίσωση και να βρείτε τη λύση της. (νοερή στρατηγική: 1010)

B3.Αν ξέρετε ότι ένα τρένο κινείται με 880 χμ. ανά ώρα. Πόσες ώρες έχει ταξιδέψει αν διένυσε 42.240 χμ. Να γράψετε την εξίσωση και να βρείτε τη λύση της. νοερές στρατηγικές: ΣΔΑ, ANT)

B4.Σε πόσες σελίδες θα πρέπει να μοιράσει ο κύριος Ιάσωνας 1440 γραμματόσημα για να τοποθετήσει 48 γραμματόσημα σε κάθε σελίδα; Να γράψετε την εξίσωση και να βρείτε τη λύση της. (νοερές στρατηγικές: ΣΔΑ, ANT)

Στον πίνακα 15, παρουσιάζονται συνοπτικά οι αριθμοί των προβλημάτων και οι κωδικοί των νοερών στρατηγικών που αναμενόταν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές.

Τελική Διδακτική Παρέμβαση	Αριθμός Λεκτικών Προβλημάτων	Κωδικοί Νοερών Στρατηγικών που αναμένεται να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές
Πρώτη φάση	A1	ΣΔΑ, 1010
	A2	ΣΔΑ, 1010, N10
	A3	ΣΔΑ, 1010
Δεύτερη φάση	B1	1010
	B2	1010, N10
	B3	ANT.
	B4	

Πίνακας 15: Λεκτικά προβλήματα και νοερές στρατηγικές

Τα συγκεκριμένα λεκτικά προβλήματα επιλέχθηκαν με βάση τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

1. Τα λεκτικά προβλήματα ήταν παραλλαγές από εκείνες των διδακτικών ενοτήτων του σχολικού εγχειριδίου που χρησιμοποιήθηκαν (πίνακας 16). Συνέκλιναν ως προς τους διδακτικούς, μαθησιακούς και γνωστικούς στόχους του Διαθεματικού Ενιαίου Πλαισίου Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και του Αναλυτικού Πλαισίου Προγραμμάτων Σπουδών (Α.Π.Π.Σ.).
2. Το περιεχόμενο προερχόταν από την καθημερινή και σχολική ζωή των μαθητών.
3. Έδιναν τη δυνατότητα στους μαθητές να οργανώσουν τη σκέψη τους, να σχεδιάσουν τα βήματά τους, να αντιληφθούν και να εκτελέσουν τις απαιτούμενες πράξεις.
4. Το μέγεθος των αριθμών πιθανόν να βοηθούσε στην ανάπτυξη νοερών στρατηγικών για την εκτέλεση των πράξεων. Συγκεκριμένα, στα λεκτικά προβλήματα χρησιμοποιήθηκαν: α) τετραψήφιοι και πενταψήφιοι αριθμοί, ώστε στις προσθέσεις και αφαιρέσεις που θα σχηματίζονταν, οι μαθητές, να διευκολύνονταν στην ανάλυση των αριθμών, να τους διαχωρίζαν σε μικρότερους, πιο εύκολους και να εφαρμόζαν τη στρατηγική του διαχωρισμού (1010) και της συσσώρευσης (N10). β) Τριψήφιοι και διψήφιοι αριθμοί, για να διασπαστούν πιο εύκολα οι παράγοντες στους πολλαπλασιασμούς και να εφαρμόζονταν η στρατηγική της διάσπασης του αριθμού (ΣΔΑ). γ) Πενταψήφιοι

και τετραψήφιοι αριθμοί, για τη ρύθμισή τους στις διαιρέσεις, την αντικατάστασή τους με μικρότερους και την εφαρμογή της στρατηγικής της Αντιστάθμισης (ΣΤΡ.ΑΝΤ).

5. Τα είδη των αριθμών στις πράξεις μπορούσαν να ωθήσουν τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών (Πίνακας 18). Συγκεκριμένα:

- Τη στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού σε μονάδες και δεκάδες (ΣΔΑ). Εφαρμογή στις πράξεις των προβλημάτων A1, A2, A3, στον πολλαπλασιασμό διψήφιου επί τριψήφιο παράγοντα (72×320 , 72×620) και στη διαίρεση πενταψήφιου διαιρετέου με διψήφιο διαιρέτη ($33200:16$). Και στις δύο περιπτώσεις θα μπορούσαν να διασπάσουν τον ένα ή και τους δύο όρους σε μικρότερους και να δημιουργήσουν πιο εύκολα γινόμενα ή πηλικά. Και στις δύο πράξεις υπήρχε αριθμός που ήταν πολλαπλάσιο του 5 και του 10, που διευκόλυνε τη διαδικασία. Όλοι οι αριθμοί ήταν ακέραιοι.

- Τη στρατηγική του διαχωρισμού (1010). Εφαρμογή στις πράξεις των προβλημάτων A1, A2, A3 και B1, B2. Στις A1, A2, A3, στην πρόσθεση ακέραιων πενταψήφιων ($23040+10000$, $44640+20000$). Στην A3, στην αφαίρεση πενταψήφιου ακέραιου μειωτέου με τετραψήφιο ακέραιο αφαιρετέο ($63200-3000$), στην αφαίρεση πενταψήφιων ακέραιων ($64640-63200$) και στην πρόσθεση πενταψήφιου ακέραιου με τετραψήφιο ακέραιο, ($63200+1440$). Στη B1 και B2, στην αφαίρεση τετραψήφιων ακέραιων, ($4025-1275$, $4500-2262$). Οι μαθητές στις παραπάνω πράξεις, θα μπορούσαν να διαχωρίσουν τους αριθμούς στα πολλαπλάσια του 10 και στις μονάδες τους, για μεγαλύτερη ευκολία. Η διαδικασία ενδεικνυόταν καθώς: α) οι περισσότεροι αριθμοί περιείχαν πολλά μηδενικά, β) εκτός των αριθμών της πρόσθεσης $63200+1440$, οι υπόλοιποι είχαν μεταξύ τους ίσο πλήθος ψηφίων, γ) οι πιο πολλοί αριθμοί ήταν πολλαπλάσια του 5 και του 10 εκτός των 4025 και 1275 που ήταν πολλαπλάσια μόνο του 5.

- Τη στρατηγική της συσσώρευσης (N10), η οποία θα μπορούσε να υλοποιηθεί στις πράξεις των προβλημάτων A2 και B2. Στην A2, στην πρόσθεση πενταψήφιου με τετραψήφιο, ($63200+1440$) και στο B2 στην αφαίρεση τετραψήφιων ($4500-2262$). Οι μαθητές θα μπορούσαν να κρατήσουν σταθερό τον ένα όρο και να αναλύσουν το δεύτερο σε μονάδες και δεκάδες. Στη συνέχεια να αφαιρέσουν τις μονάδες από τον πρώτο και έπειτα τις δεκάδες. Οι

αριθμοί των πράξεων ήταν ακέραιοι και πολλαπλάσια του 10 (εκτός του 2262). Εξυπηρετούσαν τη διαδικασία, καθώς μπορούσαν εύκολα να αναλυθούν σε δεκαδικό ανάπτυγμα και σε αριθμούς πολλαπλάσια του 10. Και στις δύο πράξεις οι μαθητές θα μπορούσαν να αναλύσουν τον δεύτερο όρο ώστε να ταιριάζει με τον πρώτο στα μηδενικά. Να εκτελέσουν εύκολα την πρώτη μεγάλη πράξη και να συνεχίσουν με τις επιμέρους μικρότερες.

- Ολιστικές στρατηγικές ή στρατηγικές της αντιστάθμισης. Θα μπορούσε να αναπτυχθεί στις πράξεις των προβλημάτων B3 και B4. Στη B3, στη διαίρεση πενταψήφιου ακέραιου διαιρετέου με τριψήφιο ακέραιο διαιρέτη (42240:880) και στη B4, στη διαίρεση τετραψήφιου ακέραιου διαιρετέου με διψήφιο ακέραιο διαιρέτη (1440:48). Οι μαθητές και στις δύο περιπτώσεις θα μπορούσαν να ρυθμίσουν και τους δύο όρους της διαίρεσης διχοτομώντας τους, ώστε να προκαλέσουν πηλίκα πιο εύκολα και γνωστά για αυτούς. Οι αριθμοί προσφέρονταν για Αντιστάθμιση. Στη διαίρεση 42240:880 οι αριθμοί ήταν πολλαπλάσια του 2, 5 και 10. Στη διαίρεση 1440:48, το 1440 ήταν πολλαπλάσιο του 2, 5 και 10 και το 48 του 2. Οπότε μπορούσαν να απλοποιηθούν αρκετά και να γίνουν τα πηλίκα πιο εύκολα.

Κωδικοί Νοερών Στρατηγικών	Λεκτικά προβλήματα	Είδη πράξεων και μεγέθη αριθμών	Είδη αριθμών
ΣΔΑ	A1, A2, A3	Πολλαπλασιασμός με διψήφιο επί τριψήφιο παράγοντα (72X320, 72X620)	Ακέραιοι, 320, 620, 33200, πολλαπλάσια του 10
	A3	Διαίρεση πενταψήφιου διαιρετέου με διψήφιο διαιρέτη (33200:16)	
1010	A1, A2, A3,	Πρόσθεση πενταψήφιων (23040+10000, 44640+20000)	Ακέραιοι, με πολλά μηδενικά, 23040, 10000, 44640, 20000, 63200, 3000, 64640, 63200, 1440, 4500, πολλαπλάσια του 5, και του 10, 4025, 1275, πολλαπλάσια του 5, 23040+10000, 44640+20000, 64640-63200, 4025- 1275, 4500-2262 με ίσο αριθμό ψηφίων στις πράξεις
	A3	Αφαίρεση πενταψήφιου μειωτέου με τετραψήφιο αφαιρετέο, Αφαίρεση πενταψήφιων, Πρόσθεση πενταψήφιου με τετραψήφιου (63200-3000, 64640-63200, 63200+1440)	
	B1, B2	Αφαίρεση τετραψήφιων (4025-1275, 4500-2262)	
N10	A2	Πρόσθεση πενταψήφιου με τετραψήφιο (63200+1440)	Ακέραιοι, με εύκολη ανάλυση σε αριθμούς πολλαπλάσια του 10, 63200, 1440, 4500 πολλαπλάσια του 10,
	B2	Αφαίρεση τετραψήφιων (4500-2262)	
ANT.	B3	Διαίρεση πενταψήφιου διαιρετέου με τριψήφιο διαιρέτη (42240:880)	Ακέραιοι, πολλαπλάσια του 2, 42240, 880, 1440 πολλαπλάσια του 5, και του 10
	B4	Διαίρεση τετραψήφιου διαιρετέου με διψήφιο διαιρέτη (1440:48)	

Πίνακας 16: Αναμενόμενες νοερές στρατηγικές, λεκτικά προβλήματα, είδη αριθμών και πράξεις

Στην τελική δοκιμή (T) χρησιμοποιήθηκε ένα φύλλο εργασίας με πέντε λεκτικά προβλήματα (T1, T2, T3, T4, T5). Το T1 λυνόταν με πρόσθεση, το T2 με πολλαπλασιασμό, το T3 με διαίρεση, το T4 με πρόσθεση και διαίρεση και το T5 με πολλαπλασιασμό, διαίρεση και πρόσθεση. Οι μαθητές στα τρία πρώτα προβλήματα δεν επιτρεπόταν να χρησιμοποιήσουν μολύβι και χαρτί, αλλά να εργαστούν μόνο νοερά, ενώ στα υπόλοιπα 4 και 5 είχαν το δικαίωμα να κρατήσουν σημειώσεις. Τους δόθηκε όσος χρόνος απαίτησαν και μόλις ήταν έτοιμοι, αποκάλυψαν στον δάσκαλο το αποτέλεσμα και τον τρόπο που σκέφτηκαν, υπολόγισαν και εργάστηκαν σε κάθε πρόβλημα. Ελέγχθηκε η αποτελεσματικότητα των διδακτικών παρεμβάσεων που προηγήθηκαν σχετικά με τους νοερούς υπολογισμούς και το γλωσσικό εργαλείο των αντωνυμιών.

Τα λεκτικά προβλήματα ήταν τα εξής:

- T1. Το λεωφορείο περνάει από τη στάση στο Μυρτόφυτο 7.30 το πρωί. Η διαδρομή μέχρι το σχολείο διαρκεί 29 λεπτά. Χθες όμως ο οδηγός λόγω βλάβης καθυστέρησε και έφτασε στο σχολείο στις 8.17. Σε πόσα λεπτά έκανε τη διαδρομή; (νοερές στρατηγικές: 1010, A10)
- T2. Ο Βαγγέλης πήγε με τη μητέρα του στη λαϊκή αγορά για ψώνια. Σε έναν υπολογισμό διαφώνησε μαζί της. Συγκεκριμένα, ήθελαν να αγοράσουν φράουλες και κόστιζαν 1,19€ η συσκευασία. Η μητέρα του ήθελε 4 συσκευασίες και έβγαλε 2 χαρτονομίσματα των 5€ να πληρώσει, ενώ ο Βαγγέλης επέμενε ότι 1 επαρκούσε. Ποιος είχε δίκιο και γιατί; (νοερές στρατηγικές: ΣΔΑ, ANT.)
- T3. Στο σούπερ μάρκετ η φέτα κοστίζει 7,80€ το κιλό. Αν για τη σπιτική πίτσα χρειάζεται το $\frac{1}{4}$, ένα νόμισμα των 2€ μας καλύπτει για να πληρώσουμε; (Νοερή στρατηγική: ΣΔΑ)
- T4. Αν η θερμοκρασία τις τελευταίες 7 ημέρες ήταν: 24, 26, 25, 27, 28, 26, 30 μπορείς να υπολογίσεις τον μέσο όρο; (νοερές στρατηγικές: 1010, ΣΔΑ)
- T5. Ένα αεροπλάνο κινείται με 800 χμ/ώρα. Η απόσταση από τη Θεσσαλονίκη μέχρι τη Στοκχόλμη είναι 3 ώρες και 15 λεπτά. Πόσα χιλιόμετρα θα διανύσει το αεροπλάνο; (νοερή στρατηγική: Δ10, επαν. Προσθ)

Στον πίνακα 17, παρατίθενται οι αριθμοί των προβλημάτων και οι κωδικοί των νοερών στρατηγικών που αναμενόταν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές σε πράξεις.

Αριθμός λεκτικών προβλημάτων	Κωδικοί Νοερών Στρατηγικών που αναμένεται να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές
T1	1010, A10
T2	ΣΔΑ, ANT.
T3	ΣΔΑ
T4	ΣΔΑ, 1010
T5	ΣΤΡ. ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ, Δ10

Πίνακας 17: Λεκτικά προβλήματα και αναμενόμενες νοερές στρατηγικές

Επιπλέον, αυτές οι αριθμητικές δραστηριότητες, επιλέχθηκαν, λαμβάνοντας υπόψη τα χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων των φύλλων αξιολόγησης της τελικής διδακτικής παρέμβασης. Σημειωθήκαν διαφορές ως προς το μέγεθος και το είδος των αριθμών. Οι διαφορές των λεκτικών προβλημάτων της τελικής δοκιμής με αυτά της Α' και Β' φάσης τελικής αξιολόγησης ήταν ως προς το μέγεθος και το είδος των αριθμών:

Υποστηρίζοντας ότι το μέγεθος των αριθμών ίσως να βοηθά στην ανάπτυξη νοερών στρατηγικών στις πράξεις, χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω αριθμοί στο φύλλο εργασίας:

1. Διψήφιοι ακέραιοι, ώστε σε επικείμενες προσθέσεις οι μαθητές να τους διαχώριζαν πιο εύκολα σε νέα, πιο απλά αθροίσματα και να εφαρμόζαν τη στρατηγική του διαχωρισμού (1010) και της συσσώρευσης (A10).
2. Τριψήφιοι και μονοψήφιοι:
 - ώστε σε αναμενόμενες διαιρέσεις, να τους ανέλυαν σε πιο εύκολα πηλίκα και να εφαρμόζαν τη στρατηγική της διάσπασης του αριθμού και τη στρατηγική με τις Δυνάμεις του 10.
 - σε αναμενόμενους πολλαπλασιασμούς των προβλημάτων για να διαχειρίζονταν με πιο εύκολο τρόπο τους παράγοντες και να εφαρμόζαν τη στρατηγική της αρίθμησης και τη στρατηγική με τις Δυνάμεις του 10.
3. Τριψήφιοι δεκαδικοί αριθμοί και μονοψήφιοι ακέραιοι, σε πιθανούς πολλαπλασιασμούς, για να διασπαστούν με μεγαλύτερη ευκολία οι παράγοντες και να εφαρμόζαν τη στρατηγική της διάσπασης του αριθμού ή της Αντιστάθμισης με ρύθμιση και αντικατάσταση των παραγόντων για πιο απλά γινόμενα.

Είναι πιθανό διάφορα είδη αριθμών να προωθούν νοερές στρατηγικές για την εκτέλεση των πράξεων. Τα λεκτικά προβλήματα στην τελική δοκιμή περιείχαν επιπλέον είδη αριθμών (συμμιγείς, κλασματικές μονάδες, δεκαδικοί), από εκείνα των φύλλων εργασίας της διδακτικής παρέμβασης. Σύμφωνα, λοιπόν, με την προηγούμενη άποψη (για την προώθηση των νοερών στρατηγικών από είδη αριθμών),

παρουσιάζονται οι στρατηγικές που αναμενόταν ότι θα χρησιμοποιούσαν οι μαθητές στην τελική δοκιμή (Πίνακας 18). Συγκεκριμένα:

- Η στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού σε μονάδες και δεκάδες (ΣΔΑ). Μπορούσε να εφαρμοστεί στις πράξεις των προβλημάτων: T2, στον πολλαπλασιασμό τριψήφιου δεκαδικού παράγοντα με δύο δεκαδικά ψηφία επί μονοψήφιου ακέραιου παράγοντα ($1,19 \times 4$), T3, στη διαίρεση δεκαδικού διαιρετέου με δύο δεκαδικά ψηφία με μονοψήφιο ακέραιο διαιρέτη ($7,80 : 4$) και T4 στη διαίρεση τριψήφιου διαιρετέου με μονοψήφιο ακέραιο διαιρέτη ($108 : 4$). Οι ακέραιοι ήταν πολλαπλάσια του 2 και μπορούσαν να διασπαστούν εύκολα σε μικρότερους αριθμούς. Και στις τρεις περιπτώσεις οι μαθητές μπορούσαν να διασπάσουν τον ένα ή και τους δύο όρους σε μικρότερους και να δημιουργήσουν πιο εύκολα γινόμενα ή πηλίκα. Επίσης προσφερόταν και η δυνατότητα της διάσπασης με βάση τη θεσιακή αξία. Ίσως το 0 στα εκατοστά να διευκόλυνε περισσότερο τη διαδικασία στη διαίρεση $7,80 : 4$.

- Η στρατηγική του διαχωρισμού (1010). Μπορούσε να εφαρμοστεί στις πράξεις με διψήφιους ακέραιους, στα προβλήματα T1 ($29+18$) και T4 ($25+26+27+30$). Οι αριθμοί μπορούσαν να διαχωριστούν από τους μαθητές στις παραπάνω προσθέσεις στα πολλαπλάσια του 10 και στις μονάδες τους, ώστε να γινόταν πιο εύκολη η πράξη.

- Η στρατηγική της συσσώρευσης (A10), μπορούσε να υλοποιηθεί στο πρόβλημα T1, στην πρόσθεση διψήφιων ακέραιων ($29+18$). Οι αριθμοί ευνοούσαν την ανάπτυξή της γιατί ήταν πολύ κοντά στην επόμενη δεκάδα. Οι μαθητές μπορούσαν να κρατήσουν σταθερό τον πρώτο όρο και να προσθέσουν μέρη από τον δεύτερο, ώστε να φτάσει ο πρώτος στην πλησιέστερη δεκάδα.

- Η στρατηγική της Αντιστάθμισης ή Ολιστικής στρατηγική. Έβρισκε πιθανή εφαρμογή στο πρόβλημα T2, στον πολλαπλασιασμό τριψήφιου δεκαδικού παράγοντα με δύο δεκαδικά ψηφία επί μονοψήφιου ακέραιου παράγοντα ($1,19 \times 4$). Το δεκαδικό μέρος του πρώτου όρου βρισκόταν πολύ κοντά στο επόμενο δέκατο και οι μαθητές θα μπορούσαν να τον ρυθμίσουν με άλλο γνωστό δεκαδικό αριθμό, για την απλοποίηση της πράξης. Στην συνέχεια θα μπορούσαν να προχωρήσουν στην ανάλυσή του και να εκτελέσουν τις πράξεις.

- Τη στρατηγική της αρίθμησης με επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Μπορούσε να υλοποιηθεί στο πρόβλημα T5, στον πολλαπλασιασμό τριψήφιου επί μονοψήφιου παράγοντα (800×3). Οι αριθμοί ήταν ακέραιοι και ο παράγοντας 800 ήταν πολλαπλάσιο του 10. Οι μαθητές μπορούσαν να εκτελέσουν εύκολα την

επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Τα μηδενικά στο τέλος θα έκαναν την πράξη πιο εύκολη.

- Η στρατηγική με τις Δυνάμεις του 10. Μπορούσε να εφαρμοστεί στο πρόβλημα T5, στον πολλαπλασιασμό τριψήφιου ακέραιου επί μονοψήφιου ακέραιου παράγοντα (800X3) και στη διαίρεση τριψήφιου ακέραιου διαιρετέου με μονοψήφιο ακέραιο διαιρέτη (800:4). Οι μαθητές θα μπορούσαν να κάνουν χρήση αυτής της στρατηγικής, διότι τα μηδενικά και στις δύο περιπτώσεις δεν υπολογίζονται κατά τη διάρκεια της πράξης και απλά τα τοποθετούν οι μαθητές στο τέλος στο αποτέλεσμα.

Κωδικοί Νοερών Στρατηγικών	Λεκτικά προβλήματα	Είδη πράξεων και μεγέθη αριθμών	Είδη αριθμών
ΣΔΑ-ΑΔ	T2	Πολλαπλασιασμός δεκαδικού παράγοντα με δύο δεκαδικά ψηφία επί μονοψήφιου παράγοντα (1,19X4)	Δεκαδικοί αριθμοί με 2 δεκαδικά ψηφία • με εύκολη διάσπαση βάσει της θεσιακής αξίας • με τελευταίο δεκαδικό ψηφίο το 0. Ακέραιοι • μονοψήφιοι • τριψήφιοι • πολλαπλάσια του 2 με εύκολη διάσπαση σε μικρότερους αριθμούς.
	T3	Διαίρεση δεκαδικού διαιρετέου με δύο δεκαδικά ψηφία με μονοψήφιο διαιρέτη (7,80:4)	
	T4	Διαίρεση τριψήφιου διαιρετέου με μονοψήφιο διαιρέτη (108:4)	
1010	T1	Πρόσθεση με διψήφιους (29+18)	Ακέραιοι διψήφιοι • με εύκολο διαχωρισμό στα πολλαπλάσια του 10 και στις μονάδες τους.
	T4	Πρόσθεση με διψήφιους (25+26+27+30)	
A10	T1	Πρόσθεση με διψήφιους (29+18)	Ακέραιοι διψήφιοι • που είναι πολύ κοντά στην επόμενη δεκάδα.
ANT.	T2	Πολλαπλασιασμός δεκαδικού παράγοντα με δύο δεκαδικά ψηφία επί μονοψήφιου παράγοντα (1,19X4)	Δεκαδικοί αριθμοί με 2 δεκαδικά ψηφία • το δεκαδικό μέρος να βρίσκεται πολύ κοντά στο επόμενο δέκατο για ρύθμιση.
ΣΤΡ. ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ	T5	Πολλαπλασιασμός τριψήφιου παράγοντα επί μονοψήφιου παράγοντα (800X3)	Ακέραιοι τριψήφιοι • πολλαπλάσια του 10
Δ10	T5	Διαίρεση τριψήφιου διαιρετέου με μονοψήφιο διαιρέτη, Πολλαπλασιασμός τριψήφιου παράγοντα επί μονοψήφιου παράγοντα (800:4, 800X3)	Ακέραιοι τριψήφιοι • πολλαπλάσια του 10

Πίνακας 18: Τελική δοκιμή, αναμενόμενες νοερές στρατηγικές, λεκτικά προβλήματα, είδη αριθμών και πράξεις

2.3.6.4 Αξιολόγηση των διδακτικών παρεμβάσεων

Με το πέρας των διδακτικών παρεμβάσεων ακολουθούσε η αξιολόγησή τους. Η διάρκεια της αξιολόγησης ήταν μία διδακτική ώρα (45 λεπτά), εκτός της τελικής αξιολόγησης (post test), όπου δεν υπήρχε χρονικός περιορισμός. Χρησιμοποιήθηκαν φύλλα εργασίας που μοιράστηκαν στους μαθητές και περιλάμβαναν αριθμητικά λεκτικά προβλήματα (Acosta-Tello, 2010), τα οποία καλούνταν να λύσουν ομαδικά. Η διαδικασία με την οποία γινόταν η αξιολόγηση ήταν η εξής:

1. Διανομή του φύλλου εργασίας και ανάπτυξη μαθηματικού διαλόγου, για την επεξήγησή του (5 λεπτά). Χρήση του γλωσσικού εργαλείου των αντωνυμιών από το δάσκαλο ως ένδειξη αναφοράς στους νοερούς υπολογισμούς, με σκοπό να αναγνωρίσουν την ένδειξη οι μαθητές και να εφαρμόσουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών στις απαιτούμενες πράξεις. Η καθοδήγηση των μαθητών από το δάσκαλο μέσω της διατύπωσης έμμεσων ενδείξεων για την γνωστοποίηση και υλοποίηση των διδακτικών του επιδιώξεων αποτελεί μία εκδοχή του «Toraze effect» (Brousseau, 2002). Το γλωσσικό εργαλείο των αντωνυμιών αποτελούσε βασικό συστατικό του διαλόγου που αναπτύχθηκε.
2. Επίλυσή τους σε ομάδες (20 λεπτά).
3. Παρουσίαση και επεξήγηση των στρατηγικών από τους μαθητές. Αιτιολόγηση των κριτηρίων επιλογής τους (15 λεπτά).
4. Αναζήτηση των περιπτώσεων των μαθηματικών πράξεων όπου οι μαθητές επέλεξαν τη χρήση των νοερών υπολογισμών (5 λεπτά). Ο δάσκαλος προσπάθησε μέσω του διαλόγου να εκμαιεύσει από τους μαθητές αν αναγνώρισαν προϋποθέσεις σύμφωνα με τις οποίες επέλεξαν να εκτελέσουν τις πράξεις με νοερούς υπολογισμούς. Επίσης, αναζητήθηκε μέσα από το διάλογο αν συνέβαλαν οι νοεροί υπολογισμοί στην ορθή εκτέλεση των πράξεων.

Αναλυτικά στοιχεία για τη διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων, το πλήθος των αξιολογήσεων και το χρονικό προσδιορισμό τους παρατίθενται στον πίνακα 19.

Διδακτική Παρέμβαση και Τελική Αξιολόγηση	Διάρκεια	Πλήθος αξιολογήσεων και Ημερολογιακός προσδιορισμός
1 ^η Φάση Πιλοτικής	2 εβδομάδες	1. 14 Οκτωβρίου 2013
2 ^η φάση Πιλοτικής	4 μήνες (από Φεβρουάριο έως και Μάιο του σχολικού έτους 2015-2016)	1. 24 Φεβρουαρίου 2016 2. 18 Μαΐου 2016 3. 28 Μαΐου 2016
1 ^η φάση Τελικής	1 μήνα (το Νοέμβριο του σχολικού έτους 2016-2017)	1. 11 Νοεμβρίου 2016 2. 21 Νοεμβρίου 2016 3. 23 Νοεμβρίου 2016
2 ^η φάση Τελικής	1 μήνα (το Φεβρουάριο του σχολικού έτους 2016-2017)	1. 24 Φεβρουαρίου 2017
Τελική Δοκιμή	3 ημέρες (του Ιουνίου του σχολικού έτους 2016-2017)	1. 09 & 12 Ιουνίου 2017

Πίνακας 19: Διδακτικές παρεμβάσεις και αξιολογήσεις

Ο δάσκαλος, εφαρμόζοντας το πρώτο βήμα της διαδικασίας της αξιολόγησης, τόσο για την Α' όσο και για τη Β' φάση της τελικής διδακτικής παρέμβασης, μοίρασε τα φύλλα εργασίας στους μαθητές και ανέπτυξε μαθηματικό διάλογο μαζί τους, για να τους βοηθήσει στην κατανόηση του συγκείμενου. Κατά τη διδακτική παρέμβαση αναπτύχθηκε ένα ιδιότυπο λεξιλόγιο το οποίο περιλάμβανε αντωνυμίες που χρησιμοποιήθηκαν ως νύξεις για τους νοερούς υπολογισμούς. Η γνωστοποίηση της διδακτικής πρόθεσης του δασκάλου ήταν σαφής. Ήθελε οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν νοερούς υπολογισμούς στην εκτέλεση των πράξεων. Για να τους οδηγήσει προς αυτή την κατεύθυνση χρησιμοποίησε τις αντωνυμίες ως έμμεση ένδειξη αναφοράς στη χρήση στρατηγικών νοερών υπολογισμών. Τις τόνιζε διαρκώς στο λόγο του. Παρατηρήθηκε έντονα το φαινόμενο «Toraze» (Brousseau, 2002), παρ' όλα αυτά είχε θετικά αποτελέσματα στη χρήση τους.

Συνολικά, στα τέσσερα φύλλα εργασίας χρησιμοποίησε την αόριστη αντωνυμία «μερικούς», τη δεικτική αντωνυμία «εκείνους», τις κτητικές αντωνυμίες «δικούς σας, δικές σας» και την προσωπική αντωνυμία «τους». Στον πίνακα 20 παρουσιάζονται τα είδη των αντωνυμιών που χρησιμοποιήθηκαν ανά φύλλο εργασίας, καθώς και αποσπάσματα από τις αντίστοιχες φράσεις του δασκάλου.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ	ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ	ΑΝΤΩΝΥΜΙΕΣ	ΦΡΑΣΕΙΣ
Α' ΦΑΣΗΣ ΤΕΛΙΚΗΣ	1 ^ο	• αόριστη «μερικούς», • δεικτική «εκείνους», • κτητικές «δικούς σας», «δικές σας» • προσωπική «τους»	«μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μερικούς από εκείνους τους δικούς σας τρόπους, τις δικές σας πράξεις που νομίζετε ότι θα σας διευκολύνουν περισσότερο, μάλιστα στο τέλος μπορείτε να τους παρουσιάσετε».
	2 ^ο	• αόριστη «μερικούς», • δεικτική «εκείνους», • κτητική «δικούς σας» • προσωπική «τους»	«μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μερικούς από εκείνους τους τρόπους που ίσως να σας βοηθήσουν, μερικούς από εκείνους τους δικούς σας υπολογισμούς και να τους αναδείξετε».
	3 ^ο	• αόριστη «μερικούς», • δεικτική «εκείνους», • κτητική «δικές σας», • προσωπική «τους»	«μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μερικούς από εκείνους τους υπολογισμούς που δείχνουμε στην αρχή του μαθήματος, τις δικές σας πράξεις. Όταν τελειώστε, μπορείτε να τους παρουσιάσετε».
Β' ΦΑΣΗΣ ΤΕΛΙΚΗΣ	1 ^ο	• κτητική «δικούς σας» • δεικτική «εκείνες», • αόριστη «μερικούς»	«Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και μερικούς τους δικούς σας υπολογισμούς, εκείνες τις πράξεις που κάναμε στην αρχή πριν το μάθημα».

Πίνακας 20: Είδη αντωνυμιών και φράσεις δασκάλου

2.3.7 Στρατηγικές- λύσεις και η κωδικοποίησή τους

Σύμφωνα με τη θεωρητική παρουσίαση που έγινε, στον Πίνακα 21 παρουσιάζονται οι στρατηγικές για την πρόσθεση και την αφαίρεση που αναμενόταν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές για την εκτέλεση των πράξεων που τους ανατέθηκαν.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ		
ΚΩΔΙΚΟΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ	ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
ΚΑ	Σχηματισμός και εκτέλεση νοερά του κάθετου αλγόριθμου	25+26+27+30

ΣΤΡ.1010	Στρατηγική διαχωρισμού (1010), οι αριθμοί διαχωρίζονται συνήθως στα πολλαπλάσια του 10 και στις μονάδες, ο υπολογισμός ξεκινάει από αριστερά στα δεξιά (Δεκάδες-Μονάδες)	$51+57=50+50=100$, $1+7=8$, $100+8=108$
ΣΤΡ.u-1010	Στρατηγική διαχωρισμού όπου οι αριθμοί διαχωρίζονται συνήθως στα πολλαπλάσια του 10 και στις μονάδες, ο υπολογισμός ξεκινάει από δεξιά προς τα αριστερά (Μονάδες- Δεκάδες)	$18+29=9+8=17$, $20+10=30$, $30+17=47$
ΣΤΡ. N10	Στρατηγικής της συσσώρευσης με Δεκάδες-Μονάδες (N10) όπου υπολογίζουν με βάση τον πρώτο όρο (από τα αριστερά προς τα δεξιά προστίθενται ή αφαιρούνται οι δεκάδες και μετά οι μονάδες του 2 ^{ου} όρου)	$30+17=30+10=40$, $40+7=47$ $30-17=30-10=20$, $20-7=13$
ΣΤΡ. N10C	Στρατηγική Αντιστάθμισης, ο ένας όρος αυξάνεται ή μειώνεται ώστε να φτάσει στην πλησιέστερη δεκάδα και στο τέλος αφαιρείται αυτός ο αριθμός από το αποτέλεσμα	$29+18=30+18=48-1=47$
ΣΤΡ. A10	Στρατηγική «Πέρασμα από το 10» Ο πρώτος όρος παραμένει σταθερός, προστίθενται ή αφαιρούνται μέρη από το δεύτερο ώστε ο πρώτος να φτάσει στην πλησιέστερη δεκάδα	$29+18=29+1=30+17=47$
ΣΤΡ. 10S	Μεικτή στρατηγική διαχωρισμού και συσσώρευσης, διαχωρισμού και των 2 αριθμών σε μονάδες και δεκάδες, πρόσθεση πρώτα των δεκάδων, στο αποτέλεσμα πρόσθεση των μονάδων του ενός, στο αποτέλεσμα πρόσθεση και των μονάδων του άλλου	$25+26=20+5+20+6=20+20=40$, $40+5=45$, $45+6=51$
ΣΤΡ.5	Στρατηγική της χρήσης του αριθμού 5. Οι μαθητές αναλύουν τον προσθετέο με βάση το 5	$17=15+2$
ΑΝΑΚΛ.	Άμεση ανάκληση γνωστών πράξεων	$30+20=50$, $70-20=50$

Κ.Δ.	Στρατηγική «Κοντά στα διπλά». Μετατρέπεται ο ένας προσθετέος έτσι ώστε να πάρει τη μορφή διπλού αθροίσματος με τον άλλο προσθετέο	$25+26=25+(25+1)=50+1=51$

Πίνακας 21: Είδη νοερών στρατηγικών για την πρόσθεση και την αφαίρεση, επεξήγηση και παραδείγματα

Στον Πίνακα 22 καταγράφονται στρατηγικές που θα μπορούσαν να εφαρμοστούν για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση από τους μαθητές για την εκτέλεση των πράξεων που τους ανατέθηκαν:

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΗ															
ΚΛΕΙΔΙΑ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ	ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ													
ΚΑ	Σχηματισμός και εκτέλεση νοερά του κάθετου αλγόριθμου	108:4													
ΣΔΑ-ΑΔ	Στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού με βάση τη θεσιακή αξία από τα αριστερά προς τα δεξιά. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τη γνώση τους από το δεκαδικό σύστημα για να διασπάσουν τον έναν όρο του πολ/σμού ή της διαίρεσης	1,19X4=(1+0,19)X4=4+0,76=4,76 7,80:2=(7+0,80):2=3,5+0,40=3,90													
ΣΔΑ2-ΑΔ	Στρατηγική της διάσπασης και των δύο αριθμών με βάση τη θεσιακή αξία. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τη γνώση τους από το δεκαδικό σύστημα για να διασπάσουν και τους δύο όρους, εκτελούν κάθε πολλαπλασιασμό και προσθέτουν τα μερικά γινόμενα	72X620=(70+2)X(600+20)													
ΕΠ	Ελληνικός Πολλαπλασιασμός Ανήκει στην ίδια φιλοσοφία του ΣΔΑ2 με διάσπαση του πολλαπλασιαστή και πολλαπλασιαστέου σε αριθμούς με βάση τη θεσιακή αξία, εκτέλεση πολλαπλασιασμών και πρόσθεση μερικών γινομένων	<table><tr><td>15x11</td><td>10</td><td>1</td></tr><tr><td>10</td><td>10x10=100</td><td>10x1=10</td></tr><tr><td>5</td><td>5x10=50</td><td>5x1=5</td></tr><tr><td></td><td>150</td><td>15</td></tr></table>		15x11	10	1	10	10x10=100	10x1=10	5	5x10=50	5x1=5		150	15
15x11	10	1													
10	10x10=100	10x1=10													
5	5x10=50	5x1=5													
	150	15													

		Ελληνικός Πολλαπλα σιασμός	$150+15=165$
ΣΔΑ ΜΗ-Δ	Στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού σε αριθμούς μη δεκάδων, διάσπαση του ενός όρου σε γνωστό γινόμενο	$108:4=108: (2 \times 2)= 108:2=54:2=27$	
ΣΤΡ.ΑΝΤ	Στρατηγική της Αντιστάθμισης Ρύθμιση του 1 ή και των 2 όρων με διπλασιασμό ή διχοτόμηση ή με άλλα γνωστά γινόμενα ή πηλίκα ώστε να γίνει πιο εύκολος ο υπολογισμός.	$1,19 \times 4=1,20 \times 4=4,80-0,04=4,76$ $1200:16= 600:8=300:4=150:2$	
ΑΝΑΚΛ.	Άμεση ανάκληση γνωστών πράξεων	$3 \times 25=75, 100:50=2,$	
ΣΤΡ. ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ	Επαναλαμβανόμενες προσθέσεις	$800 \times 3=800+800=1600+800=2400$	
Δ10	Πολλαπλασιασμός και Διαίρεση με δυνάμεις του 10 Οι μαθητές εφαρμόζουν την τεχνική με τα μηδενικά	$8(00 \times 3=2400, 8(00:4=200$	

Πίνακας 22: Είδη νοερών στρατηγικών για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, επεξήγηση και παραδείγματα

3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ: ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας σε σχέση με τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν εξ' αρχής.

3.1 Πρώτο ερευνητικό ερώτημα: Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της εξέλιξης της χρήσης νοερών υπολογισμών κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης;

Για τη διερεύνηση του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος καταγράφηκαν οι τρόποι υπολογισμού που εφαρμόστηκαν για την εκτέλεση του συνόλου των πράξεων όλων των φύλλων εργασίας κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης. Στη συνέχεια, κατηγοριοποιήθηκαν οι νοεροί υπολογισμοί που χρησιμοποιήθηκαν στα διάφορα φύλλα εργασίας (με βάση την κατηγοριοποίηση που παρουσιάστηκε στη Μεθοδολογία) και έγινε προσπάθεια σύνδεσής τους τόσο με χαρακτηριστικά των μαθηματικών προβλημάτων, όσο και με χαρακτηριστικά των διδακτικών παρεμβάσεων, ιδίως σε σχέση με γλωσσικές στρατηγικές που εφαρμόστηκαν.

3.1.1 Συνοπτική παρουσίαση της εξέλιξης της χρήσης των νοερών υπολογισμών κατά την διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης

-Σύγκριση

Η τελική διδακτική παρέμβαση έγινε σε δύο φάσεις. Το Νοέμβριο του 2016 (Α' φάση) και το Φεβρουάριο του 2017 (Β' φάση). Για την αξιολόγησή τους χρησιμοποιήθηκαν φύλλα εργασίας, τρία για την Α' φάση και ένα για τη Β'.

Με την ολοκλήρωση της αξιολόγησης της Α' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης τα αποτελέσματα για τη χρήση των νοερών υπολογισμών ήταν θετικά. Το ποσοστό χρήσης των νοερών υπολογισμών επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν σε κάθε φύλλο εργασίας φαίνεται πως παρουσίασε αύξηση. Ξεκίνησε στο πρώτο φύλλο εργασίας με 16,66%, έπειτα παρουσίασε μια μικρή αύξηση στο δεύτερο φύλλο εργασίας στο 27,27% και τέλος, στο τρίτο φύλλο εργασίας το ποσοστό έφτασε στο 82,14%. Αντίθετα το αντίστοιχο ποσοστό χρήσης του κάθετου αλγόριθμου ήταν πτωτικό. Ξεκίνησε με 83,33% στο πρώτο, μειώθηκε στο 72,73% στο δεύτερο και έπεσε στο τρίτο με 17,86% (Πίνακας 23).

Παρόμοια αποτελέσματα συγκριτικά με το τρίτο φύλλο εργασίας καταγράφηκαν και στην αξιολόγηση της Β' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης. Το

ποσοστό χρήσης των νοερών υπολογισμών επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στο φύλλο εργασίας έφτασε ακόμα πιο ψηλά, στο 92,86% και του κάθετου αλγόριθμου υποχώρησε κι άλλο στο 7,14% (Πίνακας 23).

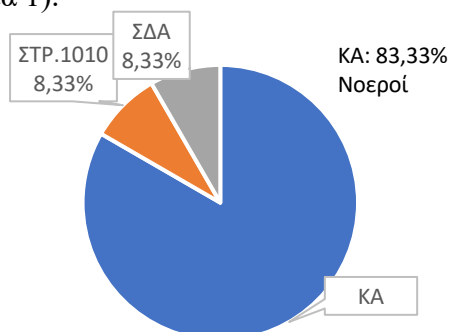
Στο φύλλο εργασίας της τελικής δοκιμής για την αξιολόγηση της διδακτικής παρέμβασης, το ποσοστό χρήσης των νοερών υπολογισμών επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στο φύλλο εργασίας διαμορφώθηκε ακόμα πιο ψηλά στο 95,19% από το 92,86% του φύλλου εργασίας της προηγούμενης αξιολόγησης. Αντίθετα, το αντίστοιχο ποσοστό για τον κάθετο αλγόριθμο έπεσε ακόμα περισσότερο στο 4,81% από το 7,14% (Πίνακας 23).

	Νοέμβριος 2016			Φεβρουάριος 2017	Ιούνιος 2017
Μέθοδος υπολογισμών	Φύλλο εργασίας 1	Φύλλο εργασίας 2	Φύλλο εργασίας 3	Φύλλο εργασίας 4	Φύλλο εργασίας Τελικής Δοκιμής
Κάθετος Αλγόριθμος	83,33%	72,73%	17,86%	7,14%	4,81%
Νοεροί υπολογισμοί	16,66%	27,27%	82,14%	92,86%	95,19%

Πίνακας 23: Η εξέλιξη της χρήσης του κάθετου αλγόριθμου και των νοερών υπολογισμών επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν για την εκτέλεση των απαιτούμενων πράξεων για την επίλυση του λεκτικού προβλήματος σε κάθε φύλλο εργασίας

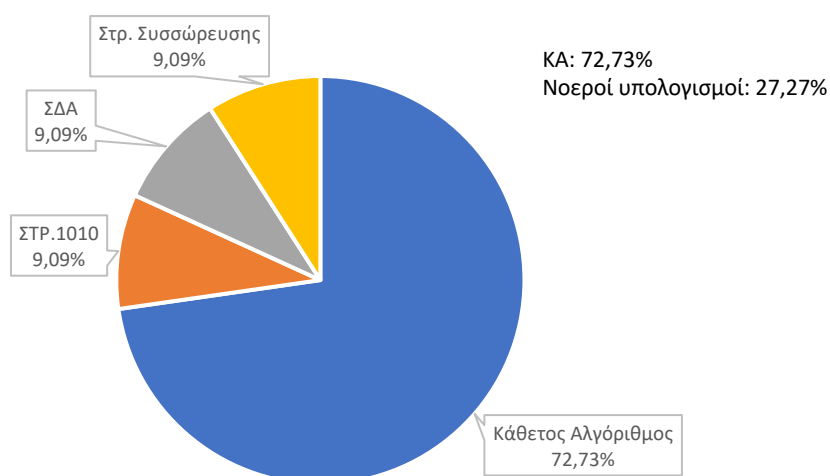
-Ανάλυση

Τα αποτελέσματα που συλλέχθηκαν από το πρώτο φύλλο εργασίας έδειξαν ότι από το σύνολο των υπολογισμών που έγιναν οι περισσότεροι υλοποιήθηκαν με κάθετο αλγόριθμο (83,33%) και ένα μικρό ποσοστό με νοερούς υπολογισμούς (16,66%). Συγκεκριμένα το 8,33% του συνόλου των υπολογισμών έγινε με τη στρατηγική της διάσπασης και το 8,33% με τη στρατηγική του διαχωρισμού. Τα ποσοστά αναφέρονται στο σύνολο των υπολογισμών του φύλλου εργασίας και συνθέτουν συγχρόνως το 16,66%, το ποσοστό επί του συνόλου των υπολογισμών που εκτελέστηκαν με νοερούς υπολογισμούς (Γράφημα 1).



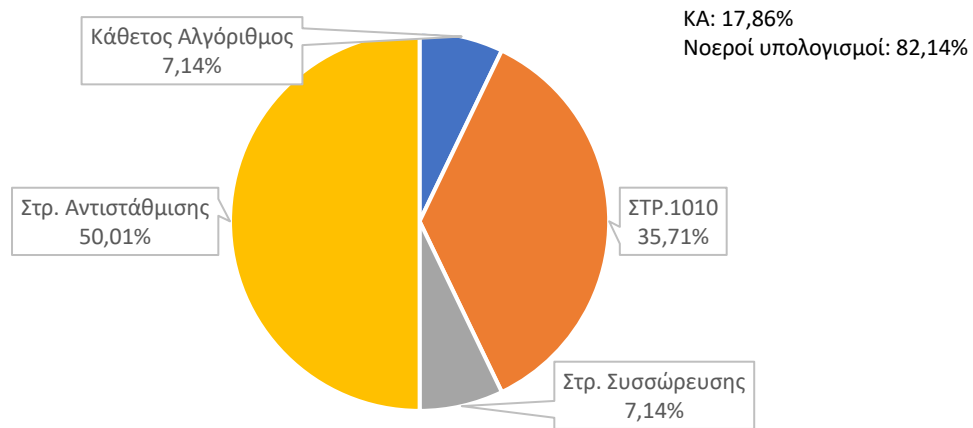
Γράφημα 1: Είδη και ποσοστά χρήσης υπολογισμών επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν για την εκτέλεση των απαιτούμενων πράξεων στο πρώτο φύλλο εργασίας της αξιολόγησης της Α' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης

Στο δεύτερο φύλλο εργασίας τα αποτελέσματα έδειξαν ότι από το σύνολο των υπολογισμών που έγιναν για την εκτέλεση των πράξεων, το μεγαλύτερο ποσοστό 72,73% υλοποιήθηκε με κάθετο αλγόριθμο και το υπόλοιπο 27,27% με νοερούς υπολογισμούς. Οι νοερές στρατηγικές του διαχωρισμού, της διάσπασης του αριθμού και της συσσώρευσης εκτελέστηκαν σε ποσοστό 9,09% η καθεμιά. Διευκρινίζεται πως τα παραπάνω ποσοστά των νοερών στρατηγικών αναφέρονται στο σύνολο των υπολογισμών του δεύτερου φύλλου εργασίας και συνθέτουν το 27,27% το ποσοστό επί του συνόλου των υπολογισμών που εκτελέστηκαν με νοερούς υπολογισμούς (Γράφημα 2).



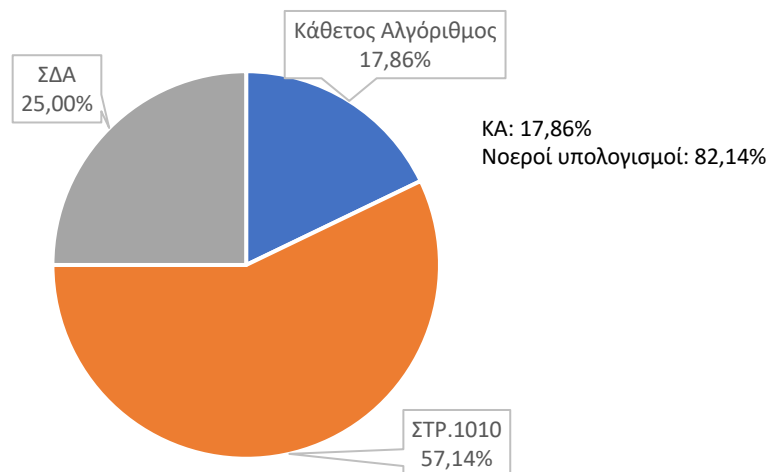
Γράφημα 2: Είδη και ποσοστά χρήσης υπολογισμών επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν για την εκτέλεση των πράξεων στο δεύτερο φύλλο εργασίας της αξιολόγησης της Α' φάσης τελικής παρέμβασης

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του τρίτου φύλλου εργασίας, από το σύνολο των υπολογισμών που έγιναν, το 17,86% εκτελέστηκε με τον κάθετο αλγόριθμο, ενώ για πρώτη φορά οι περισσότεροι έγιναν με νοερούς υπολογισμούς σε ποσοστό 82,14%. Ειδικότερα το 57,14% υλοποιήθηκε με τη στρατηγική του διαχωρισμού και το 25% με τη στρατηγική της διάσπασης. Τα δύο ποσοστά αναφέρονται στο σύνολο των υπολογισμών του τρίτου φύλλου εργασίας και συνθέτουν το 82,14% το ποσοστό επί του συνόλου των υπολογισμών που εκτελέστηκαν με νοερούς υπολογισμούς (Γράφημα 3).



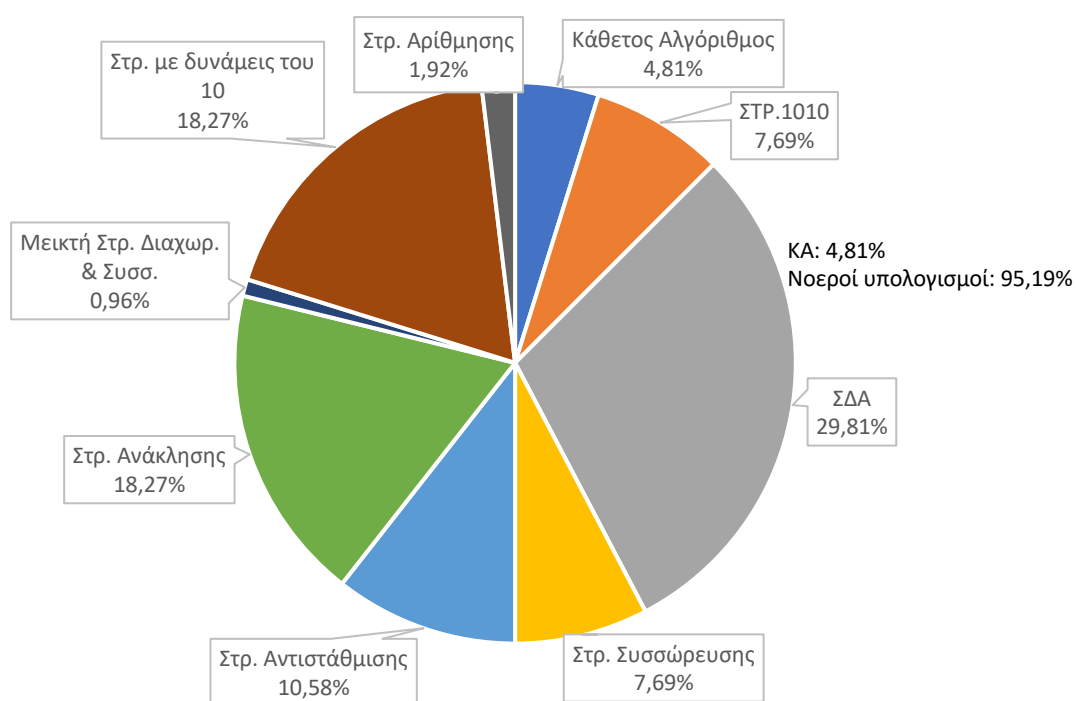
Γράφημα 3: Είδη και ποσοστά χρήσης υπολογισμών επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν για την εκτέλεση των πράξεων στο τρίτο φύλλο εργασίας της αξιολόγησης της Α' φάσης τελικής παρέμβασης

Τα αποτελέσματα της αξιολόγησης της Β' φάσης της τελικής διδακτικής παρέμβασης του Φεβρουαρίου του 2017 που προήλθαν από το φύλλο εργασίας έδειξαν ότι από το σύνολο των υπολογισμών που εκτελέστηκαν, μόνο το 7,14% υλοποιήθηκε με κάθετο αλγόριθμο και το 92,86% έγινε με νοερούς υπολογισμούς. Συγκεκριμένα το 50% έγινε με τη νοερή στρατηγική της αντιστάθμισης, το 35,71% με τη στρατηγική του διαχωρισμού και το 7,14% με τη στρατηγική της συσσώρευσης. Αυτά τα τρία ποσοστά αναφέρονται στο σύνολο των υπολογισμών του φύλλου εργασίας και συνθέτουν το 92,86% το ποσοστό επί του συνόλου των υπολογισμών που εκτελέστηκαν με νοερούς υπολογισμούς (Γράφημα 4).



Γράφημα 4: Είδη και ποσοστά χρήσης υπολογισμών επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν για την εκτέλεση των πράξεων στο φύλλο εργασίας της αξιολόγησης της Β' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης

Τον Ιούνιο (2017), τα αποτελέσματα από το φύλλο εργασίας της τελικής δοκιμής έδειξαν ότι από το σύνολο των υπολογισμών που υλοποιήθηκαν, ένα μικρό ποσοστό έγινε με κάθετο αλγόριθμο 4,81% και το 95,19% με νοερούς υπολογισμούς. Αναλυτικά, το 29,81% του συνόλου των υπολογισμών εκτελέστηκε με τη νοερή στρατηγική της διάσπασης, το 18,27% με τις στρατηγικές της ανάκλησης και των δυνάμεων του 10, το 7,69% με τις στρατηγικές του διαχωρισμού και της συσσώρευσης, το 1,92% με τη στρατηγική της αρίθμησης και το 0,92% με τη μεικτή στρατηγική του διαχωρισμού και της συσσώρευσης. Αυτά τα ποσοστά των νοερών στρατηγικών αναφέρονται στο σύνολο των υπολογισμών του φύλλου εργασίας της τελικής δοκιμής και ταυτόχρονα συνθέτουν το 95,19%, δηλαδή το ποσοστό επί του συνόλου των υπολογισμών που εκτελέστηκαν με νοερούς υπολογισμούς (Γράφημα 5).



Γράφημα 5: Είδη και ποσοστά χρήσης υπολογισμών επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν για την εκτέλεση των πράξεων στο φύλλο εργασίας της τελικής δοκιμής

-Σχολιασμός

Στην αξιολόγηση της Α' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης, στο πρώτο φύλλο εργασίας καταγράφηκε το πιο χαμηλό ποσοστό χρήσης νοερών υπολογισμών (16,66%). Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο γεγονός ότι η διδακτική παρέμβαση ήταν ακόμα στο αρχικό της στάδιο και οι μαθητές δεν είχαν προλάβει να διδαχθούν συστηματικά και επαρκώς τους νοερούς υπολογισμούς. Οπότε σε αυτή την πρώτη καταγραφή των στρατηγικών φαίνεται το είδος του υπολογισμού που χρησιμοποιούσαν

οι μαθητές για την εκτέλεση των πράξεων πριν δεχτούν ολοκληρωμένη τη διδακτική παρέμβαση. Χρησιμοποίησαν περισσότερο εκείνο τον υπολογισμό που ήξεραν καλύτερα και είχαν εξασκηθεί περισσότερο στο σχολείο μέχρι πρότινος, τον κάθετο αλγόριθμο.

Στο δεύτερο φύλλο εργασίας, η μικρή αύξηση του ποσοστού χρήσης στο 27,27% ενδεχομένως να οφείλεται στο ότι οι μαθητές βρίσκονταν χρονικά στη μέση της διδακτικής παρέμβασης και είχαν ξεκινήσει να γνωρίζουν και να αναπτύσσουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών, τις οποίες με τη βοήθεια των αντωνυμιών, (ως έμμεση ένδειξη αναφοράς από το δάσκαλο στη χρήση στρατηγικών νοερών υπολογισμών) ενεργοποίησαν στις πράξεις τους. Στο τρίτο φύλλο εργασίας, η διδακτική παρέμβαση είχε ολοκληρωθεί και οι μαθητές είχαν διδαχθεί το σύνολο του περιεχομένου της Α' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης για τους νοερούς υπολογισμούς. Είχαν εξασκηθεί σε μεγάλο βαθμό μαζί τους και βρίσκονταν σε θέση να τους χρησιμοποιήσουν περισσότερο σε αυτό το φύλλο εργασίας με την παρώθηση των αντωνυμιών που χρησιμοποίησε ο δάσκαλος (ως έμμεση ένδειξη αναφοράς στις στρατηγικές νοερών υπολογισμών). Πιθανόν για το λόγο αυτό το ποσοστό χρήσης να έφτασε στο 82,14%.

Στην αξιολόγηση της Β' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης το ποσοστό χρήσης νοερών υπολογισμών στο φύλλο εργασίας ανήλθε στο 92,86%. Στο σημείο αυτό είχε ολοκληρωθεί η διδασκαλία όλου του περιεχομένου της διδακτικής παρέμβασης για τους νοερούς υπολογισμούς. Η εμφάνιση του υψηλού ποσοστού χρήσης των νοερών υπολογισμών πιθανόν να οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές γνώριζαν πλέον ένα μεγάλο εύρος νοερών στρατηγικών και ταυτόχρονα η έμμεση ένδειξη αναφοράς για τη χρήση τους μέσω των αντωνυμιών να λειτούργησε ακόμα περισσότερο.

Στα λεκτικά προβλήματα των φύλλων εργασίας των αξιολογήσεων, χρησιμοποιήθηκαν διάφορα είδη και μεγέθη αριθμών (τα οποία παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο της Μεθοδολογίας) που αναμενόταν να κινητοποιήσουν τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών στην εκτέλεση των απαιτούμενων πράξεων. Στον πίνακα 24 περιλαμβάνονται συγκεντρωτικά τα είδη και τα μεγέθη των αριθμών, οι πράξεις, οι αναμενόμενες στρατηγικές νοερών υπολογισμών που θα προκαλούσαν για την εκτέλεση των πράξεων, και οι νοερές στρατηγικές που υλοποίησαν τελικά οι μαθητές.

Οι αναμενόμενες στρατηγικές νοερών υπολογισμών επιβεβαιώθηκαν όλες στο σύνολό τους καθώς οι μαθητές εκτέλεσαν τις πράξεις των λεκτικών προβλημάτων των φύλλων εργασίας των αξιολογήσεων με τους αναμενόμενους νοερούς υπολογισμούς.

Στο φύλλο εργασίας της τελικής δοκιμής το ποσοστό χρήσης νοερών υπολογισμών στην εκτέλεση του συνόλου των υπολογισμών του φύλλου εργασίας έφτασε στο 95,19%. Δεν έγινε από το δάσκαλο καμία έμμεση αναφορά στους νοερούς υπολογισμούς με αντωνυμίες. Στο συγκεκριμένο φύλλο εργασίας τα λεκτικά προβλήματα περιείχαν επιπλέον μεγέθη και είδη και αριθμών (συμμιγείς, κλασματικές μονάδες, δεκαδικοί) από εκείνα των υπόλοιπων φύλλων εργασίας οπότε πιθανόν να ώθησαν τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν νοερούς υπολογισμούς στις πράξεις και μάλιστα ένα μεγάλο εύρος ειδών νοερών στρατηγικών.

Πράξεις και μεγέθη αριθμών	Είδη αριθμών	Κωδικοί Αναμενόμενων Νοερών Στρατηγικών	Κωδικοί Υλοποιημένων Στρατηγικών
Πολλαπλασιασμός με διψήφιο επί τριψήφιο παράγοντα (72X320, 72X620)	Ακέραιοι, 320, 620, 33200, πολλαπλάσια του 10	ΣΔΑ	ΣΔΑ
Διαίρεση πενταψήφιου διαιρετέου με διψήφιο διαιρέτη (33200:16)			
Πολλαπλασιασμός δεκαδικού παράγοντα με δύο δεκαδικά ψηφία επί μονοψήφιου παράγοντα (1,19X4)	- Δεκαδικοί αριθμοί με 2 δεκαδικά ψηφία με εύκολη διάσπαση βάσει της θεσιακής αξίας - με τελευταίο δεκαδικό ψηφίο το 0.	ΣΔΑ	ΣΔΑ
Διαίρεση δεκαδικού διαιρετέου με δύο δεκαδικά ψηφία με μονοψήφιο διαιρέτη (7,80:4)			
Διαίρεση τριψήφιου διαιρετέου με μονοψήφιο διαιρέτη (108:4)			
Πρόσθεση πενταψήφιων (23040+10000, 44640+20000)	Ακέραιοι, με πολλά μηδενικά, 23040, 10000, 44640, 20000, 63200, 3000, 64640, 63200, 1440, 4500, πολλαπλάσια του 5, και του 10, 4025, 1275, πολλαπλάσια του 5, 23040+10000, 44640+20000, 64640-63200, 4025-1275, 4500-2262	1010	1010
Αφαίρεση πενταψήφιου μειωτέου με τετραψήφιο αφαιρετέο, Αφαίρεση πενταψήφιων, Πρόσθεση πενταψήφιου με τετραψήφιου (63200-3000, 64640-63200, 63200+1440)			
Αφαίρεση τετραψήφιων (4025-1275, 4500-2262) Πρόσθεση με διψήφιους (29+18) Πρόσθεση με διψήφιους (25+26+27+30)			
Πρόσθεση πενταψήφιου με τετραψήφιο (63200+1440)	Ακέραιοι, με εύκολη ανάλυση σε αριθμούς πολλαπλάσια του 10, 63200, 1440, 4500 πολλαπλάσια του 10,	N10	N10
Αφαίρεση τετραψήφιων (4500-2262)			
Διαίρεση πενταψήφιου διαιρετέου με τριψήφιο διαιρέτη (42240:880)	Ακέραιοι, πολλαπλάσια του 2, 42240, 880, 1440 πολλαπλάσια του 5, και του 10	ANT.	ANT.
Διαίρεση τετραψήφιου διαιρετέου με διψήφιο διαιρέτη (1440:48)			
Πολλαπλασιασμός δεκαδικού παράγοντα με δύο δεκαδικά ψηφία επί μονοψήφιου παράγοντα (1,19X4)	Δεκαδικοί αριθμοί με 2 δεκαδικά ψηφία το δεκαδικό μέρος να βρίσκεται πολύ κοντά στο επόμενο δέκατο για ρύθμιση.	A10	A10
Πρόσθεση με διψήφιους (29+18)	Ακέραιοι διψήφιοι που είναι πολύ κοντά στην επόμενη δεκάδα.		
Πολλαπλασιασμός τριψήφιου παράγοντα επί μονοψήφιου παράγοντα (800X3)	Ακέραιοι τριψήφιοι πολλαπλάσια του 10	ΣΤΡ. ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ	ΣΤΡ. ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

3.1.2 Αναλυτική παρουσίαση των χαρακτηριστικών της χρήσης νοερών υπολογισμών κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης

3.1.2.1 Νοέμβριος 2016 (Α' φάση τελικής διδακτικής παρέμβασης)

Στις τρεις αξιολογήσεις που έγιναν, ο δάσκαλος μοίρασε τα φύλλα εργασίας, ανέπτυξε μαθηματικό διάλογο για να τα επεξηγήσει. Προσπάθησε να ωθήσει έμμεσα τους μαθητές να εφαρμόσουν τους νοερούς υπολογισμούς για την εκτέλεση των απαιτούμενων πράξεων. Τόνιζε διαρκώς αντωνυμίες ως νύξεις στους νοερούς υπολογισμούς ώστε οι μαθητές να το αντιληφθούν και να τους χρησιμοποιήσουν στις πράξεις. Στο παρακάτω απόσπασμα ακολουθούν οι φράσεις του δασκάλου στις οποίες εμπεριέχονται με έντονο χρώμα οι αντωνυμίες που χρησιμοποίησε για κάθε φύλλο εργασίας. Η φράση Δ1 είναι από το πρώτο φύλλο εργασίας, η Δ2 από το δεύτερο και η Δ3 από το τρίτο. Ο δάσκαλος χρησιμοποίησε τις ίδιες αντωνυμίες σε κάθε φράση.

*Δ1: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε **μερικούς** από **εκείνους** τους **δικούς σας** τρόπους, τις **δικές σας** πράξεις που νομίζετε ότι θα σας διευκολύνουν περισσότερο, μάλιστα στο τέλος μπορείτε να **τους** παρουσιάσετε.*

*Δ2: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε **μερικούς** από **εκείνους** τους τρόπους που ίσως να σας βοηθήσουν, **μερικούς** από **εκείνους** τους **δικούς σας** υπολογισμούς και να **τους** αναδείξετε.*

*Δ3: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε **μερικούς** από **εκείνους** τους υπολογισμούς που δείχνουμε στην αρχή του μαθήματος, τις **δικές σας** πράξεις. Όταν τελειώστε, μπορείτε να **τους** παρουσιάσετε.*

3.1.2.1.1 Πρώτη Αξιολόγηση

-Αποσπάσματα διαλόγου με τις στρατηγικές υπολογισμού των μαθητών

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα της Μεθοδολογίας, η αξιολόγηση των διδακτικών παρεμβάσεων περιλάμβανε το στάδιο της παρουσίασης και επεξήγησης των στρατηγικών υπολογισμού από τους μαθητές. Σε αυτό το στάδιο αναζητήθηκαν και καταγράφηκαν τα είδη των υπολογισμών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στην εκτέλεση των πράξεων. Απομαγνητοφωνήθηκε ο σχετικός διάλογος. Παρατίθενται αποσπάσματα που δίνουν τη δυνατότητα να γίνει κατανοητός ο τρόπος υπολογισμού των μαθητών για κάθε πράξη.

Οι μαθητές κάθονταν σε ομάδες και καθένας είχε το ρόλο του, συντονιστής, γραμματέας και εμψυχωτής (Δερβίσης, 1998). Στην έναρξη του διαλόγου για την

παρουσίαση και επεξήγηση των στρατηγικών τους, το λόγο τον έπαιρνε ο συντονιστής κάθε ομάδας. Η πρώτη ομάδα που ολοκλήρωσε τις ασκήσεις του φύλλου εργασίας της αξιολόγησης ήταν η Δ. Ζήτησε το λόγο ο συντονιστής και ξεκίνησε την παρουσίαση των υπολογισμών. Ακολούθησε η Β, η Α και τέλος η Γ.

(Ζήτησε το λόγο η ομάδα Δ που τέλειωσε πρώτη και ξεκίνησε να μιλάει ο συντονιστής)

(Δ=Δάσκαλος, Μ1= συντονιστής, Μ= Μαθητές της τάξης)

Ομάδα Δ:

Μ1: Θα κάνουμε πολλαπλασιασμό, 72Χ320

Δ: Πώς το υπολογίσατε, με εκείνους τους εύκολους τρόπους ή κάθετα;

Μ1: Κάθετα

Μ1: Μετά προσθέσαμε κάθετα και την προκαταβολή (+10000) για να βρούμε το σύνολο της αξίας και βρήκαμε 33040. Μετά κάναμε μια αφαίρεση για να δούμε πόσο είναι το επιπλέον ποσό.

Δ: Τι ποσά αφαιρέσατε;

Μ1: 33040-31600 και βρήκαμε 1440, τη διαφορά, κάθετα.

Δ: Επαλήθευση κάνατε;

Μ1: Όχι.

Δ: Άρα λοιπόν υπολογίσατε τα αποτελέσματά σας μέχρι αυτό το σημείο με κάθετες πράξεις.

Δ: (Ο Δάσκαλος απευθύνεται σε όλη την τάξη) :Οι πράξεις τους έγιναν με εκείνους τους εύκολους και γρήγορους τρόπους ή κάθετα;

Μ: Κάθετα

Ομάδα Β : (Δ=Δάσκαλος, Μ1= συντονιστής, Μ= Μαθητές της τάξης)

Μ1: Εμείς κάναμε ακριβώς ό,τι και η ομάδα Δ. Κάναμε και την επαλήθευση 31600+1440.

Υπολογίσαμε κάθετα.

Δ: Μάλιστα, ωραία, αν δεν υπάρχουν απορίες, ενστάσεις, διαφορετικές γνώμες προχωρούμε στην παρακάτω ομάδα;

(Ζητάει το λόγο η ομάδα Α και ξεκινάει να μιλάει ο συντονιστής)

Ομάδα Α : (Δ=Δάσκαλος, Μ1= συντονιστής, Μ= Μαθητές της τάξης)

Μ1: Και εμείς κύριε τα ίδια κάναμε και την επαλήθευση αλλά με τη μόνη διαφορά ότι υπολογίσαμε με ανάλυση τις δόσεις και την προκαταβολή 23040+10000

Δ: Όλα κάθετα λοιπόν εκτός από ανάλυση τη συνολική αξία.

Δ: Κάποια παρατήρηση από τις υπόλοιπες ομάδες;

Μ: Όχι

Δ: Εντάξει και η ομάδα Γ;

(Ζητάει το λόγο η ομάδα Γ και ξεκινάει να μιλάει ο συντονιστής)

Ομάδα Γ : (Δ=Δάσκαλος, Μ1= συντονιστής, Μ= Μαθητές της τάξης)

M1: Προσπαθήσαμε. Ξεκινήσαμε να βρούμε τις δόσεις, 72×320 με ανάλυση, κάναμε το $320, 300+20$, το κάναμε επί 72, μετά το 20 επί 72. Μετά δεν προλάβουμε να συνεχίσουμε.

Δ: Εντάξει, ωραία.

Στα παραπάνω αποσπάσματα, οι μαθητές παρουσίασαν τους υπολογισμούς με τη σειρά των πράξεων που εκτέλεσαν για να φτάσουν στο αποτέλεσμα του προβλήματος.

Η ομάδα Δ ξεκίνησε με τον πολλαπλασιασμό 72×320 . Ο δάσκαλος ρώτησε αν τον υπολόγισαν με «εκείνους τους εύκολους τρόπους» υπονοώντας τους νοερούς υπολογισμούς ή κάθετα. Οι μαθητές κατάλαβαν τι εννοούσε και απάντησαν κάθετα. Έπειτα προχώρησαν στην πρόσθεση $23040+1000$ και στην αφαίρεση $33040-31600$ δηλώνοντας ότι τις εκτέλεσαν με τον κάθετο αλγόριθμο. Έγινε ξεκάθαρος ο τρόπος με τον οποίο υπολόγισαν οι μαθητές. Ο δάσκαλος κλείνοντας το διάλογο με την πρώτη ομάδα απευθύνθηκε σε όλη την τάξη και ρώτησε αν οι πράξεις τους έγιναν με «εκείνους τους εύκολους και γρήγορους τρόπους» ή κάθετα. Οι μαθητές αποκρίθηκαν κάθετα. Τόσο στην αρχή όσο και στο τέλος του διαλόγου ο δάσκαλος έκανε την ίδια ερώτηση. Ο λόγος ήταν ότι ήθελε να αποκλείσει το γεγονός πως οι μαθητές δεν χρησιμοποίησαν τους νοερούς υπολογισμούς διότι δεν αντιλήφθηκαν την έμμεση αντιστοίχισή τους με τις αντωνυμίες. Τη φράση δηλαδή που είχε χρησιμοποιήσει κατά τη διανομή και επεξήγηση του φύλλου εργασίας για την έμμεση προώθηση των νοερών υπολογισμών στην εκτέλεση των πράξεων.

Η επόμενη ομάδα που πήρε το λόγο ήταν η Β. Δήλωσαν πως υπολόγισαν ακριβώς όπως και οι προηγούμενοι συμμαθητές τους, επιπλέον εκτέλεσαν και την επαλήθευση $31600+1440$. Χρησιμοποίησαν κάθετο αλγόριθμο. Ο δάσκαλος έδωσε το λόγο στην επόμενη ομάδα την Α.

Οι μαθητές της ομάδας Α ανέφεραν ότι και αυτοί έκαναν τους υπολογισμούς τους στις πράξεις με κάθετο αλγόριθμο, εκτός από την πρόσθεση $24030+10000$, όπου υπολόγισαν με ανάλυση. Εννοούσαν με τη στρατηγική του διαχωρισμού (1010). Ο λόγος δόθηκε έπειτα στην τελευταία ομάδα τη Γ.

Οι μαθητές της ομάδας Γ ανέφεραν ότι τον πολλαπλασιασμό 320×72 τον εκτέλεσαν με τη βοήθεια της ανάλυσης, δηλαδή με τη νοερή στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού. Δεν πρόλαβαν να σχηματίσουν και να εκτελέσουν τις υπόλοιπες απαιτούμενες πράξεις.

Τα αποσπάσματα του διαλόγου έδωσαν μία σαφή εικόνα σχετικά με τα είδη των υπολογισμών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές αλλά και τον συνολικό αριθμό των

υπολογισμών που υλοποιήθηκαν. Συνεπώς, υπολόγισαν με τον κάθετο αλγόριθμο, τη στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού και τη στρατηγική του διαχωρισμού 1010. Συνολικά στο πρώτο φύλλο εργασίας συμμετείχαν 16 μαθητές. Κάθε μαθητής για να λύσει το λεκτικό πρόβλημα του φύλλου εργασίας έπρεπε να εκτελέσει 4 πράξεις. Συνολικά 64 απαιτούμενες πράξεις, αριθμός που προκύπτει από το γινόμενο των 16 μαθητών επί των 4 πράξεων.

-Πράξεις, υπολογισμοί και παραδείγματα με νοερές στρατηγικές στο 1ο φύλλο εργασίας- Αρχική καταγραφή των στρατηγικών

Στο πρώτο φύλλο εργασίας γίνεται μία πρώτη καταγραφή των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές, πριν δεχτούν επαρκώς τη διδακτική παρέμβαση. Έτσι, από την ανάλυση του περιεχομένου του παραπάνω διαλόγου με τους μαθητές των ομάδων προέκυψε ότι συνολικά εκτελέστηκαν 48 από τις απαιτούμενες πράξεις. Έγιναν 48 υπολογισμοί, από τους οποίους 8 με νοερούς υπολογισμούς και 40 με κάθετο αλγόριθμο. Στον πίνακα 25 παρουσιάζεται το πλήθος των νοερών υπολογισμών και του κάθετου αλγόριθμου και το αντίστοιχο ποσοστό τους επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στο φύλλο εργασίας.

1 ^ο φύλλο εργασίας	Πλήθος	Ποσοστό
Νοεροί Υπολογισμοί	8	16,66%
Κάθετος Αλγόριθμος	40	83,33%
Σύνολο	48	100%

Πίνακας 25: Πλήθος και ποσοστά νοερών υπολογισμών και κάθετων αλγόριθμων επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στο φύλλο εργασίας (στρογγυλοποίηση στο 2ο δεκαδικό ψηφίο)

Αναλυτικά, οι 4 απαιτούμενες πράξεις που έπρεπε να εκτελέσουν οι μαθητές ώστε να λύσουν το λεκτικό πρόβλημα ήταν:

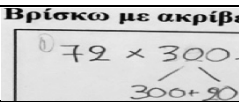
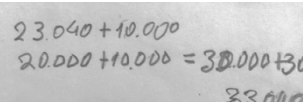
- Ο πολλαπλασιασμός 72×320 , ο οποίος έγινε 4 φορές με τη στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού ανάλογα με τη θεσιακή αξία και 12 φορές με κάθετο αλγόριθμο.
- Η πρόσθεση $23040 + 10000$. Εκτελέστηκε 8 φορές με κάθετο αλγόριθμο και 4 φορές με τη στρατηγική του διαχωρισμού 1010.
- Η αφαίρεση $33040 - 31600$. Έγινε 12 φορές με κάθετο αλγόριθμο.
- Η πρόσθεση $31600 + 1440$. Υλοποιήθηκε 8 φορές με κάθετο αλγόριθμο.

Ο κάθετος αλγόριθμος χρησιμοποιήθηκε περισσότερο από όλα τα είδη υπολογισμού, 40 φορές. Από 4 φορές χρησιμοποιήθηκαν η στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού ανάλογα με τη θεσιακή αξία και η στρατηγική του διαχωρισμού 1010. Στον Πίνακα 26 περιγράφονται τα είδη υπολογισμού, το πλήθος και τα ποσοστά τους επί του συνόλου των υπολογισμών που υλοποίησαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας.

Στρατηγικές Υπολογισμού	Πλήθος	Ποσοστό
ΚΑ	40	83,33%
ΣΔΑ	4	8,33%
ΣΤΡ.1010	4	8,33%
Σύνολο	48	100%

Πίνακας 26: Πλήθος και ποσοστά των στρατηγικών υπολογισμού επί του συνόλου των υπολογισμών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας (στρογγυλοποίηση στο 2^ο δεκαδικό ψηφίο)

Στον Πίνακα 27 παρατίθενται παραδείγματα από τους υπολογισμούς των μαθητών με τις νοερές στρατηγικές της διάσπασης του ενός αριθμού ανάλογα με τη θεσιακή αξία και του διαχωρισμού 1010.

Νοερές Στρατηγικές	Υπολογισμοί
ΣΔΑ	$72 \times 320 = 72 \times (300 + 20)$ 
ΣΤΡ.1010	$23040 + 10000 = 33040,$ $20000 + 10000 = 30000,$ $30000 + 3040 = 33040$ 

Πίνακας 27: Υπολογισμοί των μαθητών με νοερές στρατηγικές σε μηχανογραφημένη και σαρωμένη μορφή

3.1.2.1.2 Δεύτερη Αξιολόγηση

-Αποσπάσματα διαλόγου με τις στρατηγικές υπολογισμού των μαθητών

Από την παρουσίαση των στρατηγικών υπολογισμού από τους μαθητές κατά τη δεύτερη αξιολόγηση της Α' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης, αντλήθηκε περιεχόμενο ώστε να εντοπιστούν τα είδη που χρησιμοποίησαν. Για το σκοπό αυτό απομαγνητοφωνήθηκε ο σχετικός διάλογος και τα αποσπάσματα στα οποία φαίνονται τα είδη των υπολογισμών στις πράξεις τους παρατίθενται παρακάτω. Η οργάνωση της τάξης ήταν σε ομάδες. Πρώτα ο συντονιστής της ομάδας Α, έπειτα της Β, της Γ και τέλος της Δ έλαβε το λόγο και παρουσίασε τους υπολογισμούς τους.

Ομάδα Α : (Δ=Δάσκαλος, Μ1= συντονιστής, Μ= Μαθητές της τάξης)

Μ1: κάναμε 72×620 για να βρούμε πόσες δόσεις θα πληρώσει.

Δ: Πόσο βρήκατε;

M1: 44640

Δ: Πώς το υπολογίσατε;

M1: Κάθετα.

M1: Μετά κάναμε $44640+20000$ για να βρούμε πόσα πλήρωσε όλα μαζί με την προκαταβολή.

Δ: Πόσο βρήκατε;

M1: 66640, κάθετα.

Δ: Και μετά τι κάνατε;

M1: $66640-63200$ για να βρούμε τη διαφορά, πόσο περισσότερο πλήρωσε με τις δόσεις. Βρήκαμε 3440 κάθετα και αυτό.

Δ: Ωραία, πώς σας φάνηκε η λύση τους;

M: (ανάταση χειριών από την ομάδα Γ), ένσταση, κύριε έχουμε διαφορετική άποψη, $44640+20000=64640$.

Δ: Άρα, η ομάδα Α έκανε ένα λάθος στην κάθετη πρόσθεση.

Ομάδα Β : (*Δ=Δάσκαλος, M1= συντονιστής, M= Μαθητές της τάξης*)

M1: 72×620 για να βρούμε το ποσό των δόσεων όπου χωρίσαμε το 72 σε $70+2$ και το πολλαπλασιάσαμε με 620.

Δ: Πόσο βρήκατε;

M1: 43524, μετά προσθέσαμε και την προκαταβολή 20000 και σύνολο έδωσε 63524. Για να βρούμε τη διαφορά αφαιρέσαμε κάθετα το $63524-63200$ και βρήκαμε 324.

Δ: Επαλήθευση κάνατε;

M1: Ναι κάθετα $63200+324= 63524$

M: (ανάταση χειρός και λήψη λόγου), κύριε έκαναν λάθος στην πράξη 72×620 , μας κάνει 44640 και μετά όλες οι πράξεις τους είναι λάθος.

Ομάδα Γ : (*Δ=Δάσκαλος, M1= συντονιστής, M= Μαθητές της τάξης*)

M1: Κύριε εμείς κάναμε 620×72 κάθετα και μας βγήκε 44640.

Δ: Πώς κάνατε την πράξη;

M: Κάθετα.

M: Μετά με ανάλυση $44640+20000=64640$ για να βρούμε το ποσό μαζί με την προκαταβολή.

M: Μετά για να βρούμε τη διαφορά $64640-63200$.

Δ: Πόσο βρήκατε;

M: 1440, το κάναμε κάθετα.

Δ: Επαλήθευση;

M: $63200+1440=64640$, χωρίσαμε το 1440 σε 1400 και σε 40 και τα προσθέσαμε στο 63200 ένα-ένα.

Δ: Ωραία, πάμε στην επόμενη ομάδα.

Ομάδα Δ : (Δ =Δάσκαλος, $M1$ = συντονιστής, M = Μαθητές της τάξης)

$M1$: Κάναμε $72X620$ για να βρούμε τις δόσεις κάθετα και βρήκαμε 44640.

Και έπειτα προσθέσαμε κάθετα το 20000 και βρήκαμε 64640, την προκαταβολή και τις δόσεις μαζί.

Μετά για να βρούμε τη διαφορά από το ένα ποσό (δόσεις) με το άλλο (μετρητά) κάναμε αφαίρεση $64640-63200=1440$ και επαλήθευση $1440+63000=64640$. Όλα κάθετα

Δ : Ωραία.

Στα παραπάνω αποσπάσματα, οι μαθητές των ομάδων Β, Γ και Δ ακολούθησαν την ίδια σειρά των πράξεων για να βρουν το αποτέλεσμα εκτός της Α που διαφοροποιήθηκε ελαφρώς.

Η ομάδα Α ανέφερε ότι υπολόγισε πρώτα τον πολλαπλασιασμό $72X620$ με κάθετο αλγόριθμο. Συνέχισε πάλι με κάθετο αλγόριθμο στην πρόσθεση $44640+20000$ και στην αφαίρεση $66640-63200$. Στο διάλογο που συνεχίστηκε μεταξύ δασκάλου και μαθητών, οι τελευταίοι επεσήμαναν πως το αποτέλεσμα της πρόσθεσης δεν ήταν σωστό και πως η πράξη εκτελέστηκε λάθος. Συνεπώς επειδή ο μειωτέος της αφαίρεσης ήταν λάθος, η πράξη σχηματίστηκε λάθος και δεν μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τη λύση του προβλήματος.

Η ομάδα Β υπολόγισε αρχικά τον πολλαπλασιασμό $72X620$ με τη στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού. Έπειτα με κάθετο αλγόριθμο πρόσθεσαν $43524+20000$, αφαίρεσαν $63524-63200$ και έκαναν την επαλήθευση $63200+324$. Οι συμμαθητές τους από τις άλλες ομάδες ζήτησαν το λόγο και επεσήμαιναν ότι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ήταν λάθος και επειδή χρησιμοποιήθηκε αλυσιδωτά και στις επόμενες δύο πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης σχηματίστηκαν και αυτές λάθος. Οπότε τις δύο τελευταίες δεν μπορούσαν να τις αξιοποιήσουν για τη λύση του προβλήματος.

Η ομάδα Γ ξεκίνησε την παρουσίασή της αναφέροντας πως εκτέλεσε την πράξη $620X72$ με κάθετο αλγόριθμο. Στη συνέχεια υλοποίησε την πρόσθεση $44640+20000$ με τη νοερή στρατηγική της ανάλυσης. Οι μαθητές αναφέρονταν στη στρατηγική του διαχωρισμού 1010. Μετά εκτέλεσαν με κάθετο αλγόριθμο την αφαίρεση $64640-63200$. Τέλος έκαναν την πρόσθεση $63200+1440$, χωρίζοντας το 1440 σε δύο μέρη, στο 1400 και στο 40, όπου τα πρόσθεσαν στο 63200 ένα-ένα. Περιέγραψαν δηλαδή τη στρατηγική της συσσώρευσης N10.

Η ομάδα Δ ακολούθησε την ίδια σειρά με την εκτέλεση των πράξεων με την προηγούμενη ομάδα. Σε όλες τις πράξεις χρησιμοποίησε κάθετο αλγόριθμο. Εκτέλεσε τον πολλαπλασιασμό 72×670 , την πρόσθεση $44640 + 20000$, την αφαίρεση $64640 - 63200$ και την πράξη της επαλήθευσης $1440 + 63200$.

Μέσα από την απομαγνητοφώνηση και την παράθεση των αποσπασμάτων του διαλόγου γίνονται σαφή τα είδη των υπολογισμών των μαθητών, το πλήθος καθώς και μερικά πρώτα στοιχεία για η ορθότητά τους καθώς οι μαθητές φαίνεται να λαμβάνουν ανατροφοδότηση για την ορθότητα των υπολογισμών τους μέσω της ετεροδιόρθωσης από τους συμμαθητές τους (ομάδες Α και Β).

Τα είδη των υπολογισμών όπως φαίνονται από τα αποσπάσματα του διαλόγου που χρησιμοποίησαν στο φύλλο εργασίας οι μαθητές όλων των ομάδων ήταν ο κάθετος αλγόριθμος, η στρατηγική της διάσπασης του αριθμού, η στρατηγική του διαχωρισμού 1010 και η στρατηγική της συσσώρευσης N10. Συγκεντρωτικά, στο δεύτερο φύλλο εργασίας έλαβαν μέρος οι 16 μαθητές του τμήματος. Προϋπόθεση για την επίλυση του λεκτικού προβλήματος ήταν να εκτελέσουν 4 πράξεις. Ο αναμενόμενος αριθμός των πράξεων ήταν 64, (16 μαθητές επί 4 πράξεις).

-Πράξεις, υπολογισμοί και παραδείγματα με νοερές στρατηγικές στο 2^ο φύλλο εργασίας

Αθροίζοντας τους υπολογισμούς που αναφέρθηκαν στα αποσπάσματα εκτελέστηκαν 44. Από αυτούς, 32 έγιναν με κάθετο αλγόριθμο και 12 με νοερές στρατηγικές. Οι υπολογισμοί που συμπεριλήφθηκαν στα αποτελέσματα προέρχονται μόνο από τις απαιτούμενες πράξεις για την επίλυση του λεκτικού προβλήματος του φύλλου εργασίας.

Στον πίνακα 28 παρουσιάζεται το πλήθος των νοερών υπολογισμών και του κάθετου αλγόριθμου και το αντίστοιχο ποσοστό τους επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στο φύλλο εργασίας.

Β' Φύλλο εργασίας	Πλήθος	Ποσοστό
Νοεροί Υπολογισμοί	12	27,27%
Κάθετος Αλγόριθμος	32	72,73%
Σύνολο	44	100,00%

Πίνακας 28: Πλήθος και ποσοστά νοερών υπολογισμών και κάθετων αλγόριθμων επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στο φύλλο εργασίας (στρογγυλοποίηση στο 2ο δεκαδικό ψηφίο)

Οι απαιτούμενες πράξεις που έπρεπε να εκτελεστούν για την επίλυση του προβλήματος ήταν:

- Ο πολλαπλασιασμός 72×620 . Εκτελέστηκε 12 φορές με κάθετο αλγόριθμο και 4 φορές με τη στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού ανάλογα με τη θεσιακή αξία.
- Η πρόσθεση $44640 + 20000$. Εκτελέστηκε 8 φορές με κάθετο αλγόριθμο και 4 φορές με τη στρατηγική του διαχωρισμού 1010.
- Η αφαίρεση $64640 - 63200$. Έγινε 8 φορές με κάθετο αλγόριθμο.
- Τέλος η πρόσθεση $63200 + 1440$. Υπολογίστηκε 4 φορές με κάθετο αλγόριθμο και 4 φορές με τη στρατηγική της συσσώρευσης (N10).

Περισσότερο χρησιμοποιήθηκε ο κάθετος αλγόριθμος 32 φορές και ακολουθούν από 4 φορές οι στρατηγικές της διάσπασης του ενός αριθμού, της στρατηγικής του διαχωρισμού 1010 και της συσσώρευσης N10. Στον πίνακα 29 παρουσιάζονται τα είδη υπολογισμού, το πλήθος και τα ποσοστά τους επί του συνόλου των υπολογισμών που υλοποίησαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας για την εκτέλεση των απαιτούμενων πράξεων του λεκτικού προβλήματος.

Στρατηγικές Υπολογισμού	Πλήθος	Ποσοστό
ΚΑ	32	72,73%
ΣΔΑ	4	9,09%
ΣΤΡ.1010	4	9,09%
N10	4	9,09%
Σύνολο	44	100,00%

Πίνακας 29: Πλήθος και ποσοστά των στρατηγικών υπολογισμού επί του συνόλου των υπολογισμών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας για την εκτέλεση των απαιτούμενων πράξεων του λεκτικού προβλήματος (στρογγυλοποίηση στο 2^ο δεκαδικό ψηφίο)

Μερικά παραδείγματα από τους νοερούς υπολογισμούς των μαθητών με τις νοερές στρατηγικές της διάσπασης του ενός αριθμού ανάλογα με τη θεσιακή αξία, του διαχωρισμού 1010 και της συσσώρευσης N10 παρουσιάζονται στον Πίνακα 30.

Νοερές Στρατηγικές	Υπολογισμοί
ΣΔΑ	$72 \times 620 = 72 \times (600 + 20)$ $72 \times 600 + 72 \times 20$
ΣΤΡ.1010	$44640 + 20000 =$ $44000 + 20000 = 64000,$ $64000 + 640 = 64640$ $8) 44.640 + 20.000 = 64.640$ $44.000 + 640$

N10	$63200+1440=$ $63200+1400=64600,$ $64600+40=64640$	$63.200 + 1440 = 64.600 + 40 = 64.640$ $1400 + 40$
-----	--	---

Πίνακας 30: Υπολογισμοί των μαθητών με νοερές στρατηγικές σε μηχανογραφημένη και σαρωμένη μορφή

3.1.2.1.3 Τρίτη αξιολόγηση

-Αποσπάσματα διαλόγου με τις στρατηγικές υπολογισμού των μαθητών

Στην τρίτη αξιολόγηση της Α' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης, οι μαθητές στο μαθηματικό διάλογο που αναπτύχθηκε με το δάσκαλο ανέλυσαν και παρουσίασαν τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν για την εκτέλεση των απαιτούμενων πράξεων του λεκτικού προβλήματος του φύλλου εργασίας. Το περιεχόμενο του διαλόγου παρατίθεται απομαγνητοφωνημένο ώστε να δώσει σαφείς πληροφορίες σχετικά με το πλήθος και το είδος των υπολογισμών των μαθητών. Οι μαθητές κάθονταν σε ομάδες. Ο συντονιστής κάθε ομάδας ζήτησε το λόγο και ξεκίνησε να περιγράφει τους υπολογισμούς τους. Η σειρά ήταν πρώτα η ομάδα Α, έπειτα η Β, η Γ και τέλος η Δ.

Ομάδα Α : (M1= συντονιστής, M= Μαθητές της τάξης)

M1: Για το β), κάναμε 620×72 για να βρούμε πόσα χρήματα ήταν οι δόσεις.

Δ: Πώς το υπολογίσατε κάθετα, ή με εκείνους τους έξυπνους εύκολους τρόπους;

M1: Με εκείνους τους έξυπνους εύκολους τρόπους, σπάσαμε το 620 σε 600 και 20. Έπειτα 600×72 (6×72 και δυο μηδενικά στο αποτέλεσμα) και 20×72 (2×72 και δυο μηδενικά στο αποτέλεσμα) και βρήκαμε $43200 + 1440 = 44640$. Μετά προσθέσαμε $44640 + 20000$ για να βρούμε προκαταβολή και δόσεις μαζί.

Δ: Πώς το υπολογίσατε;

M1: Με ανάλυση το 44640 σε 44000 και 640. Οπότε $20000 + 44000 = 64000$, $64000 + 640 = 64640$.

M1: Για το γ) αφαιρέσαμε από τις 63200 την προκαταβολή, $63200 - 30000 = 33200$ για να βρούμε το υπόλοιπο με ανάλυση στο μυαλό. Μετά $33200 : 16$ για να βρούμε πόσο είναι η δόση. Το σπάσαμε $32000 + 1200$

Δ: Ωραία, μετά;

M1: $32000 : 16 = 2000$, είπαμε $32 : 16 = 2$ και βάλαμε τρία 0, $32 : 16 = 2000$. Για το $1200 : 16$, σπάσαμε τους αριθμούς διά 2, σε πιο μικρούς, διαιρώντας και τους δυο δια 2 και φτάσαμε στο $150 : 2 = 75$. Βγαίνει τελικά $32000 : 16 = 2000 + 75 = 2075$

M1: Κάναμε $64640 - 63200 = 1440$ με ανάλυση.

Δ: Επαλήθευση κάνατε;

M: Ναι, $63200 + 1440$ με ανάλυση και 2075×16 κάθετα για να δούμε αν ήταν σωστές οι δόσεις.

Ομάδα Β : ($M1$ = συντονιστής, M = Μαθητές της τάξης)

$M1$: Για το β), ξεκινήσαμε με 72×620

Δ : Πώς το κάνατε;

$M1$: Σπάσαμε το 72 σε $70 + 2$ και πολλαπλασιάσαμε με το 620

$M1$: Μετά κάναμε με ανάλυση $44640 + 20000 = 64640$ και $63200 - 30000 = 33200$ για να βρούμε πόσο θα είναι οι δόσεις. Μετά κάναμε $33200 : 16$ το κάναμε κάθετα επειδή δεν είχαμε πολύ χρόνο και βρήκαμε 2075.

$M1$: $64640 - 63200 = 1440$ με ανάλυση όπου βρήκαμε τη διαφορά του β) και γ). Συμφέρει η γ).

$M1$: Και επαλήθευση κάναμε με ανάλυση το αντίθετο από πριν, $63200 + 1440$ και κάθετα 2075×16 για να ελέγξουμε τις δόσεις.

Ομάδα Γ : ($M1$ = συντονιστής, M = Μαθητές της τάξης)

$M1$: Για το β), 72×620 για να βρούμε το ποσό των δόσεων. Το 72 το σπάσαμε σε $70 + 2$ και το 620 σε $600 + 20$. Έτσι έχουμε $70 \times 600 = 42000$ (42 και 3 μηδενικά), $70 \times 20 = 1400$ (14 και 2 μηδενικά), $2 \times 600 = 1200$ (12 και 2 μηδενικά) και $20 \times 2 = 40$, όλο μαζί κάνει 44640. Βάζοντας και την προκαταβολή 20000, 64640 με ανάλυση.

$M1$: Για το γ), κάναμε $63200 - 30000 = 33200$ με ανάλυση. Μετά διαιρέσαμε το $33200 : 16$ όπως η ομάδα Α, σπάσαμε το 33200 σε 32000 και 1200 και κάναμε $32000 : 16 + 1200 : 16$. Απλά το $1200 : 16$ το κάναμε αλλιώς.

Δ : Δηλαδή;

$M1$: Είπαμε ότι το 16 είναι 4×4 , οπότε κάναμε $1200 : 4 = 300$, $300 : 4 = 75$. Άρα όλα μαζί $33200 : 16 = 2075$ η κάθε δόση.

Δ : Επαλήθευση;

$M1$: Κάναμε την πρόσθεση $63200 + 1440$ με ανάλυση και 2075×16 σπάσαμε το 2075 σε 2000 και 75 και το 16 σε 10 και 6. Και μετά τα πολλαπλασιάσαμε.

Ομάδα Δ : ($M1$ = συντονιστής, M = Μαθητές της τάξης)

$M1$: Για το β), κάναμε 620×72 . Το σπάσαμε και εμείς και το κάναμε όπως η ομάδα Α με εκείνους τους εύκολους τρόπους και βρήκαμε 44640. Μετά προσθέσαμε και την προκαταβολή 20000 και όλο μαζί 64640. Το κάναμε με ανάλυση. Για το β), από το 63200 αφαιρέσαμε την προκαταβολή, και βρήκαμε 33200 με ανάλυση. Το $33200 : 16$ κάθετα για να βρούμε τη δόση. Βγήκε 2075. Συμφέρει η γ) περίπτωση γιατί πληρώνει λιγότερα. Φαίνεται στην πράξη $64640 - 63200$ που κάναμε με ανάλυση.

Δ : Επαλήθευση;

$M1$: Κάναμε $63200 + 1440$ πάλι με ανάλυση και κάθετα 2075×16

Οι πράξη με την οποία ξεκίνησε η ομάδα Α ήταν ο πολλαπλασιασμός 620 επί 72 . Ο δάσκαλος ρώτησε αν τον εκτέλεσαν κάθετα ή με «εκείνους τους έξυπνους, εύκολους» τρόπους» τη φράση δηλαδή που χρησιμοποίησε κατά τη διανομή και επεξήγηση του φύλλου εργασίας, ώστε έμμεσα να προωθήσει τη χρήση των νοερών

υπολογισμών. Οι μαθητές απάντησαν με «εκείνους τους έξυπνους, εύκολους τρόπους» διακρίνοντας την αντιστοιχία των αντωνυμιών με τους νοερούς υπολογισμούς και δίνοντας πιθανόν μια πληροφορία, ότι η χρήση των αντωνυμιών ως έμμεση ένδειξη αναφοράς στη χρήση στρατηγικών νοερών υπολογισμών ήταν αποτελεσματική και τους ώθησε να εκτελέσουν τις πράξεις με νοερούς υπολογισμούς. Συγκεκριμένα, ανέφεραν ότι «έσπασαν» το 620 σε $600+20$ και εκτέλεσαν τους επιμέρους υπολογισμούς με το 72. Δηλαδή εφάρμοσαν τη νοερή στρατηγική της διάσπασης του αριθμού. Συνέχισαν με την πρόσθεση $44640+20000$ με «ανάλυση», δηλαδή με τη νοερή στρατηγική του διαχωρισμού 1010. Την αφαίρεση $63200-30000$ την έκαναν πάλι με «ανάλυση στο μυαλό» (νοερή στρατηγική του διαχωρισμού 1010). Τη διαίρεση $33200:16$ την υλοποίησαν με τη στρατηγική της διάσπασης του αριθμού, την αφαίρεση $64640-63200$ και την πρόσθεση $63200+1440$ με «ανάλυση» (νοερή στρατηγική του διαχωρισμού 1010) και τον πολλαπλασιασμό 2075×16 με κάθετο αλγόριθμο.

Η ομάδα Β εκτέλεσε και αυτή πρώτα τον πολλαπλασιασμό 72×620 με τη στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού. Έκανε την πρόσθεση $44640+20000$ και την αφαίρεση και $63200-30000$ με «ανάλυση» (νοερή στρατηγική του διαχωρισμού 1010), τη διαίρεση $33200:16$ με κάθετο αλγόριθμο για επίσπευση χρόνου όπως χαρακτηριστικά ανέφερε, την αφαίρεση $64640-63200$ και την πρόσθεση $63200+1440$ με «ανάλυση» (νοερή στρατηγική του διαχωρισμού 1010) και με κάθετο αλγόριθμο τον πολλαπλασιασμό 2075×16 .

Η ομάδα Γ για να εκτελέσει τον πολλαπλασιασμό 72×620 «έσπασε» το 72 σε $70+2$ και το 620 σε $600+20$, εφάρμοσε δηλαδή τη στρατηγική της διάσπασης και των δύο αριθμών. Υπολόγισε την πρόσθεση $44640+20000$ και την αφαίρεση $63200-30000$ με «ανάλυση» (νοερή στρατηγική του διαχωρισμού 1010). Τη διαίρεση $33200:16$ την εκτέλεσαν με τη στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού, την πρόσθεση $63200+1440$ με «ανάλυση» (νοερή στρατηγική του διαχωρισμού 1010) και τον πολλαπλασιασμό 2075×16 με τη στρατηγική της διάσπασης και των δύο αριθμών, αφού όπως ανέφεραν «σπάσαμε το 2075 σε 2000 και 75 και το 16 σε 10 και 6 και μετά τα πολλαπλασιάσαμε».

Η ομάδα Δ εκτέλεσε τον πολλαπλασιασμό 620×72 όπως η ομάδα Α, «με εκείνους τους εύκολους τρόπους». Δηλαδή εφάρμοσαν τη νοερή στρατηγική της διάσπασης του αριθμού. Άλλο ένα σημείο, όπως εμφανίστηκε και στην ομάδα Α, που δίνει πληροφορία πως πιθανόν οι αντωνυμίες να ώθησαν έμμεσα τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν νοερούς υπολογισμούς στις πράξεις τους. Στη συνέχεια εκτέλεσε την

πρόσθεση $44640+20000$ και την αφαίρεση $63200-30000$ με ανάλυση (νοερή στρατηγική του διαχωρισμού 1010). Τη διαίρεση $33200:16$ την υπολόγισαν με κάθετο αλγόριθμο. Την αφαίρεση $64640-63200$ και την πρόσθεση $63200+1440$ με ανάλυση (νοερή στρατηγική του διαχωρισμού 1010). Τον πολλαπλασιασμό 2017×16 με κάθετο αλγόριθμο.

Στα αποσπάσματα του διαλόγου με τις ομάδες Α, Β και Γ φάνηκε πως είναι δυνατόν σε μία πράξη να υλοποιηθούν περισσότεροι του ενός υπολογισμού, καθώς οι ενδιάμεσες πράξεις δύνανται να υλοποιηθούν και αυτές με άλλες νοερές στρατηγικές. Τη διαίρεση $3200:16$ η ομάδα Α και Γ την υλοποίησε έχοντας βασική νοερή στρατηγική υπολογισμού τη διάσπαση του ενός αριθμού. Την ενδιάμεση διαίρεση $1200:16$ που προέκυψε η ομάδα Α την εκτέλεσε με τη στρατηγική της αντιστάθμισης, όπου υποδιπλασίασαν ταυτόχρονα και τους δύο όρους μέχρι να πάρουν την πιο απλή μορφή τους ($150:2$) και η ομάδα Γ με τη στρατηγική της διάσπασης του αριθμού σε αριθμούς μη δεκάδων, $1200:16 = 120:(4 \times 4)$. Σύμφωνα με την ευρύτερη ομαδοποίηση των ειδών των νοερών στρατηγικών που έγινε στην έρευνα, συμπεριλαμβάνεται στα αποτελέσματα το είδος της βασικής στρατηγικής υπολογισμού και γίνεται αναφορά, όπως στην παρούσα περίπτωση, αν υπάρχουν άλλες στρατηγικές στις ενδιάμεσες πράξεις.

Τα είδη των υπολογισμών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στις πράξεις τους όπως αυτές διαμορφώθηκαν από τα αποσπάσματα του διαλόγου, ήταν ο κάθετος αλγόριθμος, η στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού, η στρατηγική της διάσπασης και των δύο αριθμών και η στρατηγική του διαχωρισμού 1010. Στο τρίτο φύλλο εργασίας συμμετείχαν 16 μαθητές. Για να λύσουν το λεκτικό πρόβλημα έπρεπε να εκτελέσουν 7 πράξεις. Συνολικά 112 πράξεις (16 μαθητές επί 7 πράξεις).

-Πράξεις, υπολογισμοί και παραδείγματα με νοερές στρατηγικές στο 3^ο φύλλο εργασίας

Γίνεται αντιληπτό από τον παραπάνω διάλογο πως οι πράξεις που εκτελέστηκαν ήταν 112. Έγιναν επίσης 112 υπολογισμοί, 92 με νοερούς υπολογισμούς 92 και 22 με κάθετο αλγόριθμο. Στον πίνακα 31 απεικονίζεται το πλήθος των νοερών υπολογισμών και του κάθετου αλγόριθμου και το αντίστοιχο ποσοστό τους επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στις απαιτούμενες πράξεις στο φύλλο εργασίας.

Γ' Φύλλο εργασίας	Πλήθος	Ποσοστό
Νοεροί Υπολογισμοί	92	82,14%
Κάθετος Αλγόριθμος	20	17,86%
Σύνολο	112	100,00%

Πίνακας 31: Πλήθος και ποσοστά νοερών υπολογισμών και κάθετων αλγόριθμων επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στο φύλλο εργασίας (στρογγυλοποίηση στο 2ο δεκαδικό ψηφίο)

Οι απαιτούμενες πράξεις που έπρεπε να εκτελεστούν για την επίλυση του λεκτικού προβλήματος και οι στρατηγικές υπολογισμού ήταν οι εξής:

- Ο πολλαπλασιασμός 72×620 έγινε 12 φορές με τη στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού ανάλογα με τη θεσιακή αξία και 4 φορές με τη στρατηγική της διάσπασης και των δύο αριθμών ανάλογα με τη θεσιακή τους αξία.
- Η πρόσθεση $44640 + 20000$ έγινε και τις 16 φορές με τη στρατηγική του διαχωρισμού 1010.
- Η αφαίρεση $63200 - 30000$ εκτελέστηκε και τις 16 φορές με τη στρατηγική του διαχωρισμού 1010.
- Η διαίρεση $33200 : 16$, εκτελέστηκε 8 φορές με τη βοήθεια του κάθετου αλγόριθμου και 8 φορές με τη στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού ανάλογα με τη θεσιακή αξία.
- Η αφαίρεση $64640 - 63200$ έγινε και τις 16 φορές με τη στρατηγική του διαχωρισμού 1010.
- Η πρόσθεση $63200 + 1440$, υλοποιήθηκε 16 φορές με στρατηγική του διαχωρισμού 1010.
- Τέλος ο πολλαπλασιασμός 2075×16 υλοποιήθηκε 12 φορές με τον κάθετο αλγόριθμο και 4 φορές με τη στρατηγική της διάσπασης και των δύο αριθμών ανάλογα με τη θεσιακή τους αξία.

Η στρατηγική του διαχωρισμού 1010 χρησιμοποιήθηκε περισσότερο από όλες τις στρατηγικές υπολογισμού 64 φορές, ακολουθούν η στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού και ο κάθετος αλγόριθμος με 20 φορές εκάστη και τέλος η στρατηγική της διάσπασης και των δύο αριθμών με 8 φορές. Στον πίνακα 32 παρουσιάζονται τα είδη υπολογισμού, το πλήθος και τα ποσοστά τους επί του συνόλου των υπολογισμών που υλοποίησαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας για την εκτέλεση των απαιτούμενων πράξεων του λεκτικού προβλήματος.

Στρατηγικές	Πλήθος	Ποσοστό
ΣΤΡ.1010	64	57,14%
ΣΔΑ	20	17,86%
ΚΑ	20	17,86%
ΣΔΑ2	8	7,14%
Σύνολο	112	100,00%

Πίνακας 32: Πλήθος και ποσοστά των στρατηγικών υπολογισμού επί του συνόλου των υπολογισμών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας (στρογγυλοποίηση στο 2^ο δεκαδικό ψηφίο)

Παραδείγματα υπολογισμών με νοερές στρατηγικές των μαθητών στο τρίτο φύλλο εργασίας περιγράφονται στον Πίνακα 33.

Νοερές Στρατηγικές	Υπολογισμοί
ΣΔΑ	$72 \times 620 = 72 \times (600 + 20)$ $\begin{array}{r} 620 \times 72 = 43.200 + 12.400 = 55.600 \end{array}$ $620 \times 72 = 620 \times (70 + 2)$ $\begin{array}{r} 620 \times 72 = 43.400 + 1240 \end{array}$ $33200 : 16 = (32000 + 1200) : 16$ $\begin{array}{r} 33.200 : 16 \\ 32.000 : 16 = 2.000 \\ 1.200 : 16 = 75 \\ 2.000 + 75 = 2.075 \end{array}$
ΣΔΑ2	$72 \times 620 = (70 + 2) \times (600 + 20)$ Βρίσκω με ακρίβεια: $\begin{array}{r} 72 \times 620 = 70 \times 600 + 70 \times 20 + 2 \times 600 + 2 \times 20 = 42.000 + 1.400 + 1.200 + 40 = 44.640 \end{array}$ $2075 \times 16 = (2000 + 70 + 5) \times (10 + 6)$ $\begin{array}{r} 2075 \times 16 = 2000 \times 10 + 2000 \times 6 + 70 \times 10 + 70 \times 6 + 5 \times 10 + 5 \times 6 = 20.000 + 12.000 + 700 + 420 + 50 + 30 = 33.200 \end{array}$

ΣΤΡ.1010	• $44640+20000=44000+20000=64000$, $64000+640=64640$ $\begin{array}{r} 44.640 + 20.000 \\ \hline 64.640 \end{array}$ • $63200-30000=63000-30000=33000$, $33000+200=33200$ $\begin{array}{r} 63.200 - 30.000 \\ \hline 33.200 \end{array}$ • $64640-63200=64000-63000=1000$, $1000+440=1440$, $1000+440=1440$ $\begin{array}{r} 64640 - 63200 \\ \hline 1440 \end{array}$ $\begin{array}{r} 63200 + 1440 \\ \hline 64640 \end{array}$ • $63200+1440=63200+1440=63000+1000=64000$, $200+440=640$, $64000+640=64640$
----------	--

Πίνακας 33: Υπολογισμοί των μαθητών με νοερές στρατηγικές σε μηχανογραφημένη και σαρωμένη μορφή

3.1.2.2 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα φύλλων εργασίας Α' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης

-Αντωνυμίες, υπολογισμοί και νοερές στρατηγικές

Και στα τρία φύλλα εργασίας αναμένονταν να εκτελεστούν συνολικά 240 πράξεις. Υπολογίστηκαν όμως 204. Από αυτούς τους υπολογισμούς οι 112 έγιναν με νοερές στρατηγικές και 92 με κάθετο αλγόριθμο. Ενδεχομένως λοιπόν οι αντωνυμίες που χρησιμοποιήθηκαν από το δάσκαλο ως ενδείξεις έμμεσης αναφοράς προς τους νοερούς υπολογισμούς να επηρέασαν τη χρήση των νοερών υπολογισμών, καθώς οι περισσότεροι υπολογισμοί, υλοποιήθηκαν με νοερές στρατηγικές.

Στον πίνακα 34 αναγράφεται το πλήθος των νοερών υπολογισμών και του κάθετου αλγόριθμου και το αντίστοιχο ποσοστό τους επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν και στα τρία φύλλα εργασίας για την εκτέλεση των απαιτούμενων πράξεων των λεκτικών προβλημάτων.

Στρατηγικές	Πλήθος	Ποσοστό
Νοεροί Υπολογισμοί	112	54,90%
Κάθετος Αλγόριθμος	92	45,10%
Σύνολο	204	100,00%

Πίνακας 34: Πλήθος και ποσοστά νοερών υπολογισμών και κάθετων αλγόριθμων επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στα φύλλα εργασίας (στρογγυλοποίηση στο 2ο δεκαδικό ψηφίο)

Και στα τρία φύλλα εργασίας μαζί περισσότερο χρησιμοποιήθηκε ο κάθετος αλγόριθμος 92 φορές και ακολουθούν με 72 φορές η στρατηγική του διαχωρισμού 1010, 28 φορές η στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού ανάλογα με τη θεσιακή του αξία, 8 φορές η στρατηγική της διάσπασης και των δύο αριθμών ανάλογα με τη θεσιακή τους αξία και 4 φορές η στρατηγική της συσσώρευσης N10. Στον πίνακα 35 παρουσιάζονται τα είδη υπολογισμού, το πλήθος και τα ποσοστά τους επί του συνόλου των υπολογισμών που υλοποίησαν οι μαθητές για τις απαιτούμενες πράξεις των λεκτικών προβλημάτων στα φύλλα εργασίας.

Στρατηγικές	Πλήθος	Ποσοστό %
ΚΑ	92	45,10%
ΣΤΡ.1010	72	35,29%
ΣΔΑ	28	13,73%
ΣΔΑ2	8	3,92%
N10	4	1,96%
Σύνολο	204	100,00%

Πίνακας 35: Πλήθος και ποσοστά των στρατηγικών υπολογισμού επί του συνόλου των υπολογισμών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στα φύλλα εργασίας (στρογγυλοποίηση στο 2^ο δεκαδικό ψηφίο)

-Χαρακτηριστικά προβλημάτων, αναμενόμενες και υλοποιήσιμες νοερές στρατηγικές

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο της Μεθοδολογίας, τα είδη και τα μεγέθη των αριθμών (χαρακτηριστικά των προβλημάτων) πιθανόν να προκαλούσαν τη χρήση ορισμένων στρατηγικών υπολογισμού για την εκτέλεση των απαιτούμενων πράξεων. Οι αναμενόμενες νοερές στρατηγικές καταγράφηκαν. Με την ολοκλήρωση της αξιολόγησης, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι όλες εφαρμόστηκαν.

Στον πίνακα 36 περιλαμβάνονται τα ονόματα των λεκτικών προβλημάτων και οι αναμενόμενες και υλοποιήσιμες νοερές στρατηγικές. Τα ονόματα ήταν Α1 για το πρώτο φύλλο εργασίας, Α2 για το δεύτερο και Α3 για το τρίτο. Οι νοερές στρατηγικές που υλοποιήθηκαν στο καθένα ήταν:

- η στρατηγική της διάσπασης του αριθμού (ΣΔΑ) υλοποιήθηκε στο Α1 στον πολλαπλασιασμό 72X320, στο Α2 στον πολλαπλασιασμό 72X620 και στο Α3 στον πολλαπλασιασμό 72X620 και στη διαίρεση 33200:16.
- Η στρατηγική του διαχωρισμού (ΣΤΡ1010) έγινε στο Α1 στην πρόσθεση 3040+10000, στο Α2 στην πρόσθεση 44640+20000 και στο Α3 στις πράξεις 44640+20000, 63200-30000, 64640-63200, 63200+1440.

- Η στρατηγική της συσσώρευσης (N10) υλοποιήθηκε στο A2 στην πρόσθεση 63200+1440.

Υλοποιήθηκε επιπλέον η μη αναμενόμενη νοερή στρατηγική της διάσπασης και των δύο αριθμών (ΣΔΑ2), στο λεκτικό πρόβλημα A3, στην εκτέλεση των πράξεων 72X620, 2075X16.

Αριθμός λεκτικών προβλημάτων	Κωδικοί Νοερών Στρατηγικών που αναμένονταν να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές	Κωδικοί Νοερών Στρατηγικών που υλοποιήθηκαν από τους μαθητές
A1	ΣΔΑ 72X320	ΣΔΑ
	ΣΤΡ1010 3040+10000	ΣΤΡ1010
A2	ΣΔΑ 72X620	ΣΔΑ
	ΣΤΡ1010 44640+20000	ΣΤΡ.1010
	N10 63200+1440	N10
A3	ΣΔΑ 72X620, 3200:16	ΣΔΑ
	ΣΤΡ1010 44640+20000, 63200-30000, 64640-63200, 63200+1440	ΣΤΡ.1010
	-	ΣΔΑ2 72X620, 2075X16

Πίνακας 36: Αναμενόμενες και υλοποιήσιμες νοερές στρατηγικές σε ενδεικτικές πράξεις στην αξιολόγηση της Α' φάσης της τελικής διδακτικής παρέμβασης

3.1.2.3 Φεβρουάριος 2017 (Β' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης)

Στην αξιολόγηση της Β' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης, ο δάσκαλος έδωσε στους μαθητές από ένα φύλλο εργασίας το οποίο περιλάμβανε τέσσερα λεκτικά προβλήματα, ένα για κάθε πράξη. Κατά τη διανομή, σχολίασε το λεκτικό περιεχόμενο των προβλημάτων και έδωσε μερικές εξηγήσεις όπου χρειάστηκε. Χρησιμοποίησε τα γλωσσικά εργαλεία των αντωνυμιών ως έμμεσες ενδείξεις αναφοράς στους νοερούς υπολογισμούς, για να καθοδηγήσει τους μαθητές να τους εφαρμόσουν στις απαιτούμενες πράξεις (έκφραση του φαινομένου «Toraze» που παρατηρήθηκε). Από το απόσπασμα του διαλόγου με τους μαθητές παρατίθεται η φράση με τις αντωνυμίες που χρησιμοποίησε, οι οποίες ξεχωρίζουν με έντονα γράμματα:

*Α: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και **μερικούς** τους **δικούς σας** υπολογισμούς, **εκείνες** τις πράξεις που κάναμε στην αρχή πριν το μάθημα.*

3.1.2.3.1 Αξιολόγηση

-Αποσπάσματα διαλόγου με τις στρατηγικές υπολογισμού των μαθητών

Οι μαθητές στην αξιολόγηση της Β' φάση τελικής διδακτικής παρέμβασης μέσω του διαλόγου παρουσίασαν τις στρατηγικές υπολογισμού που χρησιμοποίησαν για την εκτέλεση των απαιτούμενων πράξεων των τεσσάρων λεκτικών προβλημάτων. Ο διάλογος απομαγνητοφωνήθηκε ώστε να προσδιοριστούν τα είδη και το πλήθος τους. Τα σχετικά αποσπάσματα που λειτούργησαν επικουρικά στην αναγνώριση των στρατηγικών υπολογισμού παρατίθενται παρακάτω.

Οι μαθητές κάθονταν σε ομάδες. Κάθε μαθητής είχε το ρόλο του (συντονιστής, γραμματέας και εμψυχωτές). Ο συντονιστής κάθε ομάδας με τη σειρά (Α, Β, Γ και Δ) πήρε το λόγο και παρουσίασε τις στρατηγικές υπολογισμού που χρησιμοποίησαν στα προβλήματα.

Ομάδα Α: (Μ1= συντονιστής, Μ= Μαθητές της τάξης, Δ: Δάσκαλος)

Μ1: Στο πρώτο πρόβλημα η λύση θα είναι $4020-1275=2750$, με ανάλυση.

Μ1: Στο δεύτερο πρόβλημα...

Δ: Πώς το υπολογίσατε αυτό;

Μ1: Αφαιρέσαμε $4500-2625$, χωρίσαμε το 4500 σε $4000+500$, χωρίσαμε το 2625 σε $2000+250+12$. Αφαιρέσαμε από το 4000 το 2000 , μένουν 2000 . Από το 500 το 250 μένουν 250 , και από το 250 το 12 που κάνει 238 . Όλο μαζί $2000+238=2238$

Δ: Στο επόμενο πρόβλημα, τι κάνατε;

Μ1: διαίρεση, $42240:880$, κάναμε δια 2 και το διαιρέτη και το διαιρετέο, $4224:2=2112$, $88:2=44$, $2112:2=1056$. Συνεχίζουμε, $1056:2=528$, $22:2=11$. Τέλος, σπάσαμε το 528 σε $440+88$ για να έχουμε εύκολες διαιρέσεις, $440:11$, $88:11=8$, όλο μαζί $40+8=48$

Μ1: Στο τέταρτο Θα κάνουμε διαίρεση $1440:48$. Και σε αυτή την εξίσωση διαιρέσαμε και σπάσαμε δια 2 διαιρετέο και διαιρέτη για να γίνει πιο εύκολη η διαίρεση, $1440:2=720$, $48:2=24$, $720:2=360$, $24:2=12$, $360:2=180$, $12:2=6$, άρα $180:6=30$, $x=30$.

Ομάδα Β : (Μ1= συντονιστής, Μ= Μαθητές της τάξης, Δ: Δάσκαλος)

Δ: Πάμε στο πρώτο πρόβλημα.

Μ1: Αφαίρεση $4025-1275$.

Δ1: Πώς το κάνατε;

Μ1: Σπάσαμε το 4025 σε $4000+25$ και το 1275 σε $1000+200+50+25$. Τα 25 φεύγουν ($25-25=0$), έχουμε $4000-1000=3000$, $3000-200=2800$, $2800-50=2750$. Άρα $x=2750$.

Δ: Πάμε στο επόμενο πρόβλημα.

Μ1: Για να το βρούμε θα πρέπει να κάνουμε αφαίρεση $4500-2262$.

Δ: Πώς το υπολογίσατε;

Μ1: Σπάσαμε το 4500 σε $4000+500$ και το 2262 σε $2000+260+2$.

M1: Αφαιρέσαμε $4000-2000=2000$, $500-260=240$, $240-2=238$. Όλο μαζί $2000+238=2238$.

M1: Στο πρόβλημα 3 κάναμε διαίρεση για να βρούμε το αποτέλεσμα $42240:880$.

Δ: Με ποιον τρόπο το υπολογίσατε;

M1: Το σπάσαμε διά δύο, όπως η ομάδα Α.

*528 : 11 = x, σπάσαμε το 528 σε $440+88$ σε για να βολεύει με το 11, $440:11=40$ και $88:11=8$,
όλο μαζί $x=48$.*

*M1: Στο τελευταίο πρόβλημα κάναμε διαίρεση $1440:48$, σπάσαμε δια 2 διαδοχικά διαιρετέο
και διαιρέτη όπως η προηγούμενη ομάδα για να γίνει πιο εύκολη η διαίρεση, $1440^{:2}:48^{:2}}$.*

Ομάδα Γ : (*M1= συντονιστής, M= Μαθητές της τάξης, Δ: Δάσκαλος*)

*M1: Στο πρώτο πρόβλημα κάναμε αφαίρεση $4025-1275$. Σπάσαμε το 4025 σε $4000+25$ και
το 1275 σε $1200+75$. Μετά $4000-1200=2800$, έπειτα $75-25=50$ και $2800-50=2750$.*

*M1: Στο δεύτερο πρόβλημα κάναμε αφαίρεση $4500-2262$. Σπάσαμε το 2262 σε $2000+200 +$
 62 . Μετά κάναμε $4500-2000=2500$, $2500-200=2300$, $2300-62=2238$.*

M1: Στο επόμενο πρόβλημα κάναμε διαίρεση $42240:880$.

Δ: Πώς την κάνατε;

M1: Όπως η ομάδα Β.

$42240 : 880 = x$

$4224^{:2}:88^{:2}} = x$

$2112^{:2}:44^{:2}} = x$

$1056^{:2}:22^{:2}} = x$

528 : 11 = x, σπάσαμε το 528 σε $440+88$ για να βολεύει με το 11,

$440:11=40$ και $88:11=8$,

όλο μαζί $x=48$.

M1: Στο τελευταίο πρόβλημα κάναμε διαίρεση $1440:48$.

Δ: Πώς το υπολογίσατε;

M1: Όπως οι προηγούμενες ομάδες, το σπάσαμε δια 2.

$1440^{:2}:48^{:2}}$

$720^{:2}:24^{:2}}$

$360:12$, άρα $x=30$

Ομάδα Δ : (*M1= συντονιστής, M= Μαθητές της τάξης, Δ: Δάσκαλος*)

M1: Εμείς κάναμε στο πρώτο πρόβλημα $4025-1275=2750$, κάθετα

M1: Στο δεύτερο πρόβλημα κάναμε αφαίρεση, $4500-2262=2238$. Κάθετα πάλι.

*M1: Τα άλλα δυο προβλήματα τα λύσαμε όπως οι προηγούμενες ομάδες με διαίρεση και
σπάσιμο δια 2. Το τρίτο πρόβλημα με διαίρεση $42240:880$.*

$42240 : 880$

$4224^{:2}:88^{:2}}$

$2112^{:2}:44^{:2}}$

$1056^{:2}:22^{:2}}$

528: 11, σπάσαμε το 528 σε 440+88 για να βολεύει η διαίρεση με το 11,

440: 11=40 και 88:11= 8,

όλο μαζί 48.

Δ: Και στο τελευταίο;

Μ1:Κάναμε διαίρεση 1440:48.

$1440:2:48:2$

$720:2:24:2$

$360:12,$

$360:12,$ άρα $x=30$

Μ: Όχι, τα καταλάβαμε.

Από τα αποσπάσματα του διαλόγου, γίνονται αντιληπτά τα είδη και το πλήθος των στρατηγικών υπολογισμού των μαθητών στο φύλλο εργασίας. Συγκεκριμένα οι ομάδες Α, Β, και Γ για λύσουν το πρώτο πρόβλημα υπολόγισαν την αφαίρεση 4020-1275 με «ανάλυση» (στρατηγική του διαχωρισμού 1010), εκτός της ομάδας Δ που υπολόγισε με κάθετο αλγόριθμο. Χώρισαν δηλαδή το 4025 σε 4000+25 και το 1275 σε 1000+200+50+25, σε πολλαπλάσια του 10 και τις μονάδες και εκτέλεσαν τις ενδιάμεσες πράξεις ($25-25=0$), $4000-1000=3000$, $3000-200=2800$, $2800-50=2750$.

Στο δεύτερο πρόβλημα οι ομάδες Α και Β υπολόγισαν την αφαίρεση 4500-2625 με τη στρατηγική του διαχωρισμού 1010, όπου χώρισαν το 4500 και το 2625 σε πολλαπλάσια του 10 και τις μονάδες και εκτέλεσαν τις ενδιάμεσες πράξεις $4500-2262=4000-2000$, $500-250-12=238$, $2000+238=2238$. Η ομάδα Γ υπολόγισε την αφαίρεση με τη στρατηγική της συσσώρευσης N10. Κράτησαν σταθερό τον πρώτο όρο και χώρισαν το δεύτερο σε μονάδες και δεκάδες. Έπειτα αφαίρεσαν διαδοχικά από τον πρώτο τις δεκάδες και τις μονάδες, $4500-2262$, $2262=2000+200+62$, $4500-2000=2500$, $2500-200=2300$, $2300-62=2238$. Η ομάδα Δ υπολόγισε με κάθετο αλγόριθμο.

Στο τρίτο πρόβλημα όλες οι ομάδες υπολόγισαν την απαιτούμενη πράξη της διαίρεσης 42240:880 με την Ολιστική στρατηγική ή της Αντιστάθμισης. Υποδιπλασίασαν διαιρετέο και διαιρέτη μέχρι το πηλίκο να αποκτήσει μια εύκολη και διαχειρίσιμη μορφή για τους μαθητές, $42240:880$, $4224:2=2112$, $88:2=44$, $2112:2=1056$, $44:2=22$, $1056:2=528$, $22:2=11$. Φτάνοντας σε αυτό το σημείο οι μαθητές έσπασαν το 528 σε άθροισμα 440+88 για να εκτελεστεί πιο εύκολα η διαίρεση με το 11. Επομένως, $528:11$, $528=440+88$, $440:11=40$, $88:11=8$, $40+8=48$. Δηλαδή εντός της αντιστάθμισης εφάρμοσαν τη στρατηγική της διάσπασης σε αριθμούς μη δεκάδων. Ο συγκεκριμένη στρατηγική υπολογισμού δεν ήταν η βασική για την

εκτέλεση της πράξης, ήταν δευτερεύουσα, αφού για να υλοποιηθεί προϋπόθεση ήταν να βρίσκεται σε εξέλιξη η στρατηγικής της Αντιστάθμισης. Οπότε, σύμφωνα με την ευρύτερη ομαδοποίηση των ειδών των νοερών στρατηγικών που έγινε στην έρευνα δεν περιλαμβάνεται στο αποτέλεσμα αλλά γίνεται μόνο αναφορά σε αυτή.

Στο τέταρτο πρόβλημα όλες οι ομάδες υπολόγισαν τη διαίρεση $1440:48$ με την Ολιστική στρατηγική ή της Αντιστάθμισης. Και σε αυτή τη διαίρεση οι μαθητές υποδιπλασίασαν τους όρους της διαίρεσης μέχρι να γίνουν μικρότεροι και πιο εύκολοι, $1440:48$, $1440:2=720$, $48:2=24$, $720:2=360$, $24:2=12$, $360:2=180$, $12:2=6$, άρα $180:6=30$.

Τα είδη των στρατηγικών υπολογισμού των μαθητών και στα τέσσερα λεκτικά προβλήματα του φύλλου εργασίας ήταν: η στρατηγική του διαχωρισμού 1010, η στρατηγική της συσσώρευσης N10, ο κάθετος αλγόριθμος και η Ολιστική στρατηγική ή της Αντιστάθμισης. Συνολικά στην αξιολόγηση της Β' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης, συμμετείχαν 14 μαθητές. Το φύλλο εργασίας περιλάμβανε τέσσερα λεκτικά προβλήματα. Για την επίλυσή τους έπρεπε να εκτελεστεί σε κάθε πρόβλημα από μία πράξη, δηλαδή να υπολογιστούν 14 πράξεις για κάθε πρόβλημα, σύνολο 56 πράξεις.

-Πράξεις, υπολογισμοί και παραδείγματα με νοερές στρατηγικές στο 1^ο λεκτικό πρόβλημα

Στην πρώτη πρόβλημα, έπρεπε να εκτελεστεί η αφαίρεση $4025-1275$. Με τη βοήθεια του περιεχομένου των αποσπασμάτων βρέθηκε ότι έγιναν 14 υπολογισμοί, οι 12 με νοερές στρατηγικές και 2 με κάθετο αλγόριθμο. Η πράξη της αφαίρεσης έγινε περισσότερο με τη στρατηγική του διαχωρισμού 1010 συνολικά 12 φορές και 2 φορές με τον κάθετο αλγόριθμο. Στον πίνακα 37 εμφανίζεται το πλήθος των νοερών υπολογισμών και του κάθετου αλγόριθμου και το αντίστοιχο ποσοστό τους επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στο φύλλο εργασίας για την απαιτούμενη πράξη.

1 ^ο Λεκτικό πρόβλημα	Πλήθος	Ποσοστό
Νοεροί Υπολογισμοί ΣΤΡ.1010	12	85,71%
Κάθετος Αλγόριθμος	2	14,29%
Σύνολο	14	100,00%

Πίνακας 37: Πλήθος και ποσοστά νοερών υπολογισμών και κάθετων αλγόριθμων επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στο φύλλο εργασίας για την αφαίρεση 4025-1275 στο πρώτο λεκτικό πρόβλημα (στρογγυλοποίηση στο 2ο δεκαδικό ψηφίο)

Παραδείγματα από τους νοερούς υπολογισμούς με τη στρατηγική του διαχωρισμού 1010 βρίσκονται στον Πίνακα 38.

Νοερές Στρατηγικές	Υπολογισμοί
ΣΤΡ.1010	$4025-1275, 4025=$ $4000+25,$ $1275=1000+200+50+25,$ $4000-1000=3000, 3000-$ $200=2800, 2800-50=2750,$ $(25-25=0)$

Πίνακας 38: Η υλοποίηση της αφαίρεσης 4025-1275 με τη νοερή στρατηγική του διαχωρισμού (1010) σε μηχανογραφημένη και σαρωμένη μορφή

-Πράξεις, υπολογισμοί και παραδείγματα με νοερές στρατηγικές στο 2^ο λεκτικό πρόβλημα

Στο δεύτερο πρόβλημα, η πράξη που έπρεπε να εκτελέσουν οι μαθητές ήταν η αφαίρεση 4500-2262. Όλες οι ομάδες ανέφεραν πως εκτέλεσαν τη συγκεκριμένη πράξη (14 πράξεις). Έγιναν 14 υπολογισμοί, 12 με νοερούς υπολογισμούς και 2 με κάθετο αλγόριθμο. Στον πίνακα 39 φαίνεται το πλήθος των νοερών υπολογισμών και του κάθετου αλγόριθμου και το αντίστοιχο ποσοστό τους επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στο φύλλο εργασίας για την αφαίρεση 4500-2262.

2 ^ο Λεκτικό πρόβλημα	Πλήθος	Ποσοστό
Νοεροί Υπολογισμοί	12	85,71%
Κάθετος Αλγόριθμος	2	14,29%
ΣΥΝΟΛΟ	14	100,00%

Πίνακας 39: Πλήθος και ποσοστά νοερών υπολογισμών και κάθετων αλγόριθμων επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στο φύλλο εργασίας για την αφαίρεση 4500-2262 στο δεύτερο λεκτικό πρόβλημα (στρογγυλοποίηση στο 2ο δεκαδικό ψηφίο)

Η στρατηγική υπολογισμού που χρησιμοποιήθηκε περισσότερο στην αφαίρεση 4500-2262 ήταν του διαχωρισμού 1010 συνολικά 8 φορές, ακολουθεί η στρατηγική της συσσώρευσης N10 4 φορές και τελευταία ο κάθετος αλγόριθμος 2 φορές. Τα είδη υπολογισμού, το πλήθος και τα ποσοστά τους επί του συνόλου των υπολογισμών που υλοποίησαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας για την εκτέλεση των απαιτούμενων πράξεων του λεκτικού προβλήματος βρίσκονται στον πίνακα 40.

Στρατηγικές Υπολογισμού	Πλήθος	Ποσοστό
ΣΤΡ.1010	8	57,14%
N10	4	28,57%
ΚΑ	2	14,29%
Σύνολο	14	100,00%

Πίνακας 40: Πλήθος και ποσοστά των στρατηγικών υπολογισμού επί του συνόλου των υπολογισμών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας για την αφαίρεση 4500-2262 (στρογγυλοποίηση στο 2^ο δεκαδικό ψηφίο).

Παραδείγματα με την εκτέλεση των πράξεων από τους μαθητές με τις στρατηγικές νοερού υπολογισμού του διαχωρισμού 1010 και της συσσώρευσης N10 υπάρχουν στον Πίνακα 41.

Νοερές Στρατηγικές	Υπολογισμοί
ΣΤΡ.1010	4500-2262=4000-2000, 500-250-12=238, 2000+238=2238 2) $4.500 - x = 2.262 = 2000 + 238 = 2.238$ <i>(Handwritten diagram showing the decomposition of 4500 into 4000 and 500, and 2262 into 2000 and 262, with arrows indicating the subtraction process.)</i>
N10	4500-2262, 2262=2000+200+62. 4500-2000=2500, 2500-200=2300, 2300-62=2238 2) $2262 + x = 4500$ <i>(Handwritten diagram showing the decomposition of 4500 into 2000 and 2500, and 2262 into 2000 and 262, with arrows indicating the addition process.)</i> $4500 - 2000 = 2500$ $2500 - 200 = 2300$ $2300 - 62 = 2238$

Πίνακας 41: Η υλοποίηση της αφαίρεσης 4500-2262 με τις νοερές στρατηγικές του διαχωρισμού 1010 και της συσσώρευσης N10 σε μηχανογραφημένη και σαρωμένη μορφή

-Πράξεις, υπολογισμοί και παραδείγματα με νοερές στρατηγικές στο 3^ο και 4^ο λεκτικό πρόβλημα

Στο τρίτο λεκτικό πρόβλημα η πράξη που έπρεπε να εκτελεστεί για την επίλυσή του ήταν η διαίρεση 1440:48 και για στο τέταρτο λεκτικό πρόβλημα η διαίρεση 42240:880. Όπως φάνηκε από τα αποσπάσματα όλοι οι μαθητές εκτέλεσαν και τις δύο πράξεις, σύνολο 28. Η μοναδική στρατηγική υπολογισμού που χρησιμοποιήθηκε ήταν η Ολιστική στρατηγική ή της Αντιστάθμισης.

Παραδείγματα με την εκτέλεση των διαιρέσεων από τους μαθητές με την Ολιστική στρατηγική ή της Αντιστάθμισης παρατίθενται στον Πίνακα 42.

Νοερές Στρατηγικές	Υπολογισμοί
Ολιστική στρατηγική ή της Αντιστάθμισης	$1440:48, 1440:2=720, 48:2=24,$ $720:2=360, 24:2=12$ $360:2=180, 12:2=6, \text{ άρα } 180:6=30,$ $3) 1440 : x = 48$ $x = 1440 : 48$ $720 : 24 =$ $360 : 12 =$ $180 : 6 = 30$ $42240:880, 4224:2=2112, 88:2=44,$ $2112:2=1056, 44:2=22, 1056:2=528, 22:2=11, \text{ άρα } 528:11,$ $528=440+88, \text{ επομένως } 440:11=40, 88:11=8, 40+8=48$ $4) 880 \cdot x = 42.240$ $42.240 : 880 =$ $2112 : 44 =$ $1056 : 22 =$ $528 : 11 = 40 + 8 = 48$ $440 + 88$

Πίνακας 42: Η υλοποίηση των διαιρέσεων $1440:48$ και $42240:880$ με την Ολιστική στρατηγική ή της Αντιστάθμισης σε μηχανογραφημένη και σαρωμένη μορφή

3.1.2.4 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα φύλλου εργασίας Β' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης

-Αντωνυμίες, υπολογισμοί και νοερές στρατηγικές

Για την επίλυση των λεκτικών προβλημάτων του φύλλου εργασίας εκτελέστηκαν συνολικά 56 πράξεις. Αριθμός που προκύπτει από το γινόμενο των 4 πράξεων επί των 14 μαθητών. Από αυτές, οι 52 έγιναν με τη βοήθεια νοερών στρατηγικών και 4 με κάθετο αλγόριθμο. Τα αποτελέσματα του φύλλου εργασίας δείχνουν πως ενδεχομένως οι αντωνυμίες που χρησιμοποιήθηκαν ως έμμεση ένδειξη αναφοράς προς τους νοερούς υπολογισμούς να επηρέασαν τη χρήση τους, γεγονός που γίνεται εμφανές αφού σχεδόν όλοι οι υπολογισμοί υλοποιήθηκαν με νοερές στρατηγικές.

Στον πίνακα 43 καταγράφεται το πλήθος των νοερών υπολογισμών και του κάθετου αλγόριθμου, το αντίστοιχο ποσοστό τους επί του συνόλου των υπολογισμών

που έγιναν στο φύλλο εργασίας για την εκτέλεση των απαιτούμενων πράξεων στα λεκτικά προβλήματα.

Στρατηγικές	Πλήθος	Ποσοστό
Νοεροί Υπολογισμοί	52	92,86%
Κάθετος Αλγόριθμος	4	7,14%
Σύνολο	56	100,00%

Πίνακας 43: Πλήθος και ποσοστά νοερών υπολογισμών και κάθετων αλγόριθμων επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στο φύλλο εργασίας (στρογγυλοποίηση στο 2ο δεκαδικό ψηφίο)

Η στρατηγική υπολογισμού που χρησιμοποιήθηκε περισσότερο στο φύλλο εργασίας ήταν η Ολιστική στρατηγική ή Αντιστάθμισης 28 φορές και έπεται η στρατηγική του διαχωρισμού 1010 με 20 φορές, η στρατηγική της συσσώρευσης N10 και ο κάθετος αλγόριθμος από 4 φορές. Στον πίνακα 44 υπάρχουν οι στρατηγικές υπολογισμού το πλήθος και το ποσοστό τους επί του συνόλου των υπολογισμών που υλοποίησαν οι μαθητές για τις απαιτούμενες πράξεις των λεκτικών προβλημάτων στο φύλλο εργασίας.

Στρατηγικές	Πλήθος	Ποσοστό
ΣΤΡ_ΑΝΤ	28	45,10%
ΣΤΡ.1010	20	35,71%
N10	4	7,14%
ΚΑ	4	7,14%
ΣΥΝΟΛΟ	56	100,00%

Πίνακας 44: Πλήθος και ποσοστά των στρατηγικών υπολογισμού επί του συνόλου των υπολογισμών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας (στρογγυλοποίηση στο 2^ο δεκαδικό ψηφίο)

-Χαρακτηριστικά προβλημάτων, αναμενόμενες και υλοποιήσιμες νοερές στρατηγικές υπολογισμού

Στην αξιολόγηση της Β' φάση τελικής διδακτικής παρέμβασης ελέγχθηκε και η υπόθεση πως τα μεγέθη και τα είδη των αριθμών (χαρακτηριστικά προβλημάτων) στις απαιτούμενες πράξεις των λεκτικών προβλημάτων πιθανόν να προκαλούσαν τη χρήση μερικών νοερών στρατηγικών. Τα αποτελέσματα επιβεβαίωσαν την υπόθεση και όλες οι αναμενόμενες νοερές στρατηγικές υλοποιήθηκαν. Επίσης δεν σημειώθηκαν από αυτές επιπλέον στρατηγικές νοερού υπολογισμού.

Στον πίνακα 45 περιγράφονται κωδικοποιημένα τα ονόματα των λεκτικών προβλημάτων καθώς και οι αναμενόμενες και υλοποιήσιμες νοερές στρατηγικές. Τα ονόματα των λεκτικών προβλημάτων ήταν B1 για το πρώτο, B2 για το δεύτερο, B3 για το τρίτο και B4 για το τέταρτο. Αναλυτικά:

- Η στρατηγική του διαχωρισμού (ΣΤΡ1010) υλοποιήθηκε στα Β1 και Β2, στις αφαιρέσεις 4025-1275 και 4500-2262.
- Η στρατηγική της συσσώρευσης (Ν10) έγινε στη Β2 στην αφαίρεση 4500-2262.
- Η στρατηγική της Αντιστάθμισης (ΣΤΡ.ΑΝΤ) εφαρμόστηκε από τους μαθητές στα λεκτικά προβλήματα Β3 και Β4, στις διαιρέσεις 42240:880 και 1440:48.

Αριθμός λεκτικών προβλημάτων	Κωδικοί Νοερών Στρατηγικών που αναμένονταν να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές	Κωδικοί Νοερών Στρατηγικών που υλοποιήθηκαν από τους μαθητές
B1	ΣΤΡ1010 4025-1275	ΣΤΡ1010
B2	ΣΤΡ1010 4500-2262	ΣΤΡ.1010
B2	Ν10 4500-2262	Ν10
B3	ΣΤΡ. ΑΝΤ 42240:880	ΣΤΡ. ΑΝΤ
B4	ΣΤΡ. ΑΝΤ 1440:48	ΣΤΡ. ΑΝΤ

Πίνακας 45: Αναμενόμενες και υλοποιημένες νοερές στρατηγικές στην αξιολόγηση της Β' φάσης της τελικής διδακτικής παρέμβασης

3.1.2.5 Ιούνιος 2017 (Τελική δοκιμή)

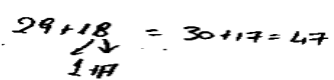
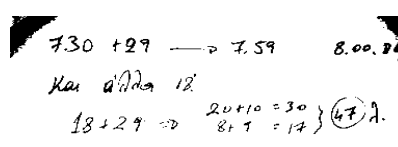
3.1.2.5.1 Αξιολόγηση

Η τελική δοκιμή έγινε τρεις μήνες μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης. Υλοποιήθηκε με φύλλο εργασίας που έδωσε ο δάσκαλος στους μαθητές. Έπρεπε να λύσουν 5 λεκτικά προβλήματα, σχηματίζοντας και εκτελώντας τις απαιτούμενες πράξεις. Σε ατομική συνέντευξη με το δάσκαλο οι μαθητές παρουσίασαν τις στρατηγικές υπολογισμού που χρησιμοποίησαν για την εκτέλεση των απαιτούμενων πράξεων στα πέντε λεκτικά προβλήματα. Ελέγχθηκε μόνο το χαρακτηριστικό των προβλημάτων, (είδη και μεγέθη αριθμών) για να διαπιστωθεί αν επηρέασε τη χρήση των νοερών υπολογισμών, των οποίων η διδασκαλία είχε σταματήσει δεν είχε γίνει καμία έμμεση προτροπή για τη χρήση τους με αντωνυμίες.

-Πράξεις, υπολογισμοί και παραδείγματα στο 1^ο λεκτικό πρόβλημα

Αναλυτικά, στο πρώτο πρόβλημα οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν την πρόσθεση $29+18$. Έγιναν 14 υπολογισμοί όλοι με νοερές στρατηγικές. Η πράξη της πρόσθεσης

υλοποιήθηκε περισσότερο με τη στρατηγική της συσσώρευσης A10, η οποία έγινε 8 φορές (57,14%) και με τις στρατηγικές της Αντιστάθμισης N10C και του διαχωρισμού 1010 από 3 φορές εκάστη (21,42%). Το πλήθος και τα ποσοστά αναφέρονται στο πλήθος των υπολογισμών που έγιναν για την πρόσθεση 29+18 στο φύλλο εργασίας. Παραδείγματα από τους νοερούς υπολογισμούς με τις παραπάνω στρατηγικές βρίσκονται στον Πίνακα 46.

Νοερές Στρατηγικές	Υπολογισμοί
Στρ. συσσώρευσης (A10)	$29+18=29+1=30+17=47$ 
Στρ. Αντιστάθμισης (ΣΤΡ. N10C)	$29+18=30+18=48-1=47$ 
Στρ. διαχωρισμού (ΣΤΡ.u-1010, 1010)	$18+29=9+8=17, 20+10=30, 30+17=47$ 

Πίνακας 46: Η υλοποίηση της πρόσθεσης 29+18 με τις νοερές στρατηγικές A10, N10C και u-1010 σε μηχανογραφημένη και σαρωμένη μορφή

-Πράξεις, υπολογισμοί και παραδείγματα στο 2^ο λεκτικό πρόβλημα

Στο δεύτερο πρόβλημα, η απαιτούμενη πράξη που έπρεπε να εκτελεστεί ήταν ο πολλαπλασιασμός 1,19X4. Έγιναν 14 υπολογισμοί μόνο με τη χρήση νοερών στρατηγικών. Συγκεκριμένα, ο πολλαπλασιασμός υλοποιήθηκε πιο πολύ με τη στρατηγική της Αντιστάθμισης ή Ολιστική στρατηγική συνολικά 8 φορές (57,14%) και 6 φορές (42,85%) με τη στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού με βάση τη θεσιακή αξία από τα αριστερά προς τα δεξιά. Το πλήθος και τα ποσοστά αναφέρονται στο σύνολο των υπολογισμών που υλοποίησαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας της τελικής δοκιμής για την εκτέλεση της συγκεκριμένης απαιτούμενης πράξης του δεύτερου λεκτικού προβλήματος. Παραδείγματα από τους νοερούς υπολογισμούς με τις παραπάνω στρατηγικές βρίσκονται στον Πίνακα 47.

4 ^ο Λεκτικό πρόβλημα	Πλήθος	Ποσοστό
Νοεροί Υπολογισμοί	21	80,76%%
Κάθετος Αλγόριθμος	5	19,23%
Σύνολο	26	100,00%

Πίνακας 49: Πλήθος και ποσοστά νοερών υπολογισμών και κάθετων αλγορίθμων επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στο φύλλο εργασίας για την πρόσθεση $25+26+27+30$ και τη διαίρεση $108:4$ (στρογγυλοποίηση στο 2ο δεκαδικό ψηφίο)

Η πρόσθεση υλοποιήθηκε περισσότερο με τη στρατηγική της ανάκλησης συνολικά 6 φορές, από 3 φορές με τη στρατηγική του διαχωρισμού 1010 και του κάθετου αλγορίθμου και 1 φορά με τη μεικτή του διαχωρισμού και συσσώρευσης ΣΤΡ.10S. Η διαίρεση έγινε 11 φορές με τη στρατηγική της διάσπασης του αριθμού (ΣΔΑ, ΜΗ-Δ) και 2 φορές με τον κάθετο αλγόριθμο. Τα είδη των στρατηγικών υπολογισμού, τα ποσοστά τους επί του συνόλου των υπολογισμών που υλοποίησαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας για την εκτέλεση αυτών των δύο απαιτούμενων πράξεων του λεκτικού προβλήματος βρίσκονται στον πίνακα 50.

Στρατηγικές	Πλήθος	Ποσοστό
ΣΤΡ.1010	3	11,53%
ΣΔΑ	11	42,30%
ΚΑ	5	19,23%
ΑΝΑΚΛ.	6	23,07%
ΣΤΡ.10S	1	3,84%
Σύνολο	26	100,00%

Πίνακας 50: Πλήθος και ποσοστά των στρατηγικών υπολογισμού επί του συνόλου των υπολογισμών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας για την πρόσθεση $25+26+27+30$ και τη διαίρεση $108:4$ (στρογγυλοποίηση στο 2^ο δεκαδικό ψηφίο)

Παραδείγματα από την εκτέλεση και των δύο πράξεων από τους μαθητές με τις στρατηγικές νοερού υπολογισμού που αναφέρθηκαν παρουσιάζονται στον Πίνακα 51.

Νοερές Στρατηγικές	Υπολογισμοί
Στρ. ΑΝΑΚΛ. (ΚΑ, ΑΝΑΚΛ.)	$30+20=50$, $70-20=50$ $25+26=25+(25+1)=50+1=51$
μεικτή του διαχωρισμού και συσσώρευσης ΣΤΡ.10S	$25+26=20+5+20+6=20+20=40$, $40+5=45$, $45+6=51$ $51+57 = 50+50 = 100$ $100 + 1 = 101$ $101 + 7 = 108$

Στρ. διαχωρισμού (ΣΤΡ. 1010)	$51+57=50+50=100, 1+7=8, 100+8=108$ $51+27 = 50+20 = 70$ $1+7 = 8$ $70+30 = 70+30 = 100$ $100+8 = 108$
Στρ. διάσπασης του αριθμού (ΣΔΑ)	$108:4=(100+8):4=100:4=25, 8:4=2,$ $25+2=27$ $108 = 100 + 8$ $100:4 = 25$ $8:4 = 2$

Πίνακας 51: Υπολογισμοί των μαθητών με νοερές στρατηγικές για τους υπολογισμούς σε μηχανογραφημένη και σαρωμένη μορφή

-Πράξεις, υπολογισμοί και παραδείγματα στο 5^ο λεκτικό πρόβλημα

Στο πέμπτο λεκτικό πρόβλημα οι απαιτούμενες πράξεις που έπρεπε να εκτελέσουν οι μαθητές για να το λύσουν ήταν ο πολλαπλασιασμός 800×3 , η διαίρεση $800:4$ και η πρόσθεση $2400+200$. Και οι 3 πράξεις έγιναν με νοερές στρατηγικές. Υλοποιήθηκαν 37 υπολογισμοί στο σύνολό τους. Η στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε περισσότερο στον πολλαπλασιασμό 800×3 ήταν με τις Δυνάμεις του 10 (10 φορές), ακολουθεί η στρατηγική της αρίθμησης (επαν.προσθ.) (2 φορές) και η στρατηγική της ανάκλησης (1 φορά).

Οι μαθητές επέλεξαν να υπολογίσουν τη διαίρεση $800:4$ συχνότερα με τη στρατηγική με τις Δυνάμεις του 10 (9 φορές), 2 φορές με την στρατηγική της ανάκλησης και 1 φορά με την στρατηγική της διάσπασης του αριθμού ΣΔΑ ΜΗ-Δ. Η πρόσθεση $2400+200$ υλοποιήθηκε τις πιο πολλές φορές με τη στρατηγική της ανάκληση, 10 φορές και 2 φορές με τη στρατηγική του διαχωρισμού 1010. Τα είδη, το πλήθος και τα ποσοστά επί του συνόλου των υπολογισμών των μαθητών για το πέμπτο λεκτικό προβλήματα βρίσκονται στον πίνακα 52.

Στρατηγικές	Πλήθος	Ποσοστό
Στρ. διαχωρισμού (ΣΤΡ. 1010)	2	5,4%
Στρ. ανάκλησης (ΑΝΑΚΛ.)	13	35,13%
Στρ. με δυνάμεις του 10	19	51,35%
Στρ. αρίθμησης (επαν.προσθ.)	2	5,4%
Στρ. διάσπασης του αριθμού (ΣΔΑ ΜΗ-Δ)	1	2,7%
Σύνολο	37	100%

Πίνακας 52: Πλήθος και ποσοστά των στρατηγικών υπολογισμού επί του συνόλου των υπολογισμών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στο φύλλο εργασίας για τις τρεις πράξεις (στρογγυλοποίηση στο 2^ο δεκαδικό ψηφίο.)

Παραδείγματα από την εκτέλεση των πράξεων με τις νοερές στρατηγικές που αναφέρθηκαν παρουσιάζονται στον Πίνακα 53.

Νοερές Στρατηγικές	Υπολογισμοί
Στρ. διαχωρισμού (ΣΤΡ.υ-1010)	$2400+200=400+200=600$, $2000+600=2600$ $2000+400$ $800 \times 3 = 2400$ $800 : 4 = 200$ $400 + 200 = 600$ $+ 2600$
Στρ. με δυνάμεις του 10	3×800 , συγκράτηση των μηδενικών, $3 \times 8 = 24$ και απόθεση των μηδενικών 2400 $800 : 4$, συγκράτηση των μηδενικών, $8 : 4 = 2$ και απόθεση των μηδενικών, 200 $3 \cdot 800 = 2400$ $800 : 4 = 200$
Στρ. αρίθμησης (επαν.προσθ.)	$800 \times 3 = 800 + 800 = 1600 + 800 = 2400$ $800 \times 30 = 800 \times 800 = 1600 + 800 = 2400$
Στρ. διάσπασης του αριθμού (ΣΔΑ ΜΗ-Δ)	$800 : 4 = 800 : (2 \times 2) = 800 : 2 = 400$, $400 : 2 = 200$ $800 : 4 =$ $800 : 2 = 400$ $400 : 2 = 200$

Πίνακας 53: Ο υπολογισμός των τριών πράξεων των μαθητών 800×3 , $800 : 4$, $2400 + 200$ με τις νοερές στρατηγικές σε μηχανογραφημένη και σαρωμένη μορφή

3.1.2.6 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα φύλλου εργασίας Τελικής Δοκιμής

-Υπολογισμοί και νοερές στρατηγικές

Για την επίλυση των πέντε λεκτικών προβλημάτων του φύλλου εργασίας της τελικής δοκιμής έγιναν συνολικά 104 πράξεις. Οι 99 υλοποιήθηκαν με νοερούς υπολογισμούς και οι υπόλοιπες 5 με κάθετο αλγόριθμο. Στον πίνακα 54 περιλαμβάνεται το πλήθος των νοερών υπολογισμών και του κάθετου αλγόριθμου καθώς και το ποσοστό τους επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν στο φύλλο εργασίας για την εκτέλεση των όλων των απαιτούμενων πράξεων και στα πέντε λεκτικά προβλήματα.

Στρατηγικές	Πλήθος	Ποσοστό
Νοεροί Υπολογισμοί	99	95,19%
Κάθετος Αλγόριθμος	5	4,81%
Σύνολο	104	100,00%

Πίνακας 54: Πλήθος και ποσοστά νοερών υπολογισμών και κάθετων αλγόριθμων επί του συνόλου των υπολογισμών που έγιναν σε ολόκληρο το φύλλο εργασίας (στρογγυλοποίηση στο 2ο δεκαδικό ψηφίο)

Στο φύλλο εργασίας η στρατηγική που επέλεξαν να αξιοποιήσουν οι μαθητές περισσότερο από όλες για την υλοποίηση των υπολογισμών ήταν της διάσπασης του αριθμού ΣΔΑ. Χρησιμοποιήθηκε 31 φορές. Ακολουθούν οι στρατηγικές της

ανάκλησης και με τις Δυνάμεις του 10 από 19 φορές καθεμιά, η στρατηγική της αντιστάθμισης με 11 φορές χρήσης, η στρατηγική του διαχωρισμού 1010 και της συσσώρευσης από 8 φορές, ο κάθετος αλγόριθμος με 5 φορές, με 2 φορές η στρατηγική της αρίθμησης και με 1 φορά με τη μεικτή στρατηγική διαχωρισμού και συσσώρευσης.

Στον πίνακα 55 είναι καταγεγραμμένες οι στρατηγικές υπολογισμού το πλήθος και το ποσοστό τους επί του συνόλου των υπολογισμών που υλοποίησαν οι μαθητές για τις απαιτούμενες πράξεις των όλων των λεκτικών προβλημάτων του φύλλου εργασίας της τελικής δοκιμής.

Στρατηγικές	Πλήθος	Ποσοστό %
ΣΔΑ Στρ. διάσπασης του αριθμού (ΣΔΑ ΑΔ, ΜΗ-Δ)	31	29,81%
Στρ. ανάκλησης (ΚΔ, ΑΝΑΚΛ.)	19	18,27%
Στρ. με δυνάμεις του 10	19	18,27%
Στρ. Αντιστάθμισης (ΣΤΡ. Ν10C, ΑΝΤΙΣΤΑΘΜ., ΜΗ-Δ)	11	10,58%
ΣΤΡ.1010 Στρ. διαχωρισμού (ΣΤΡ.υ-1010, 1010)	8	7,69%
Στρ. συσσώρευσης (Α10), Ν10	8	7,69%
Κάθετος Αλγόριθμος	5	4,81%
Στρ. αρίθμησης (επαν.προσθ.)	2	1,92%
Μεικτή Στρ. Διαχωρ. & Συσσ.(ΣΤΡ.10S)	1	0,96%
Σύνολο	104	100%

Πίνακας 55: Πλήθος και ποσοστά των στρατηγικών υπολογισμού επί του συνόλου των υπολογισμών που έκαναν οι μαθητές στην τελική δοκιμή (στρογγυλοποίηση στο 2ο δεκαδικό ψηφίο)

-Χαρακτηριστικά προβλημάτων, αναμενόμενες και υλοποιήσιμες νοερές στρατηγικές υπολογισμού

Τα είδη και τα μεγέθη των αριθμών των λεκτικών προβλημάτων του φύλλου εργασίας αναμένονταν να επηρεάσουν τη χρήση των νοερών υπολογισμών και οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών στις πράξεις. Αυτές οι αναμενόμενες στρατηγικές καταγράφηκαν και η υπόθεση ελέγχθηκε στο φύλλο εργασίας της τελικής δοκιμής και επιβεβαιώθηκε μιας και τα αποτελέσματα έδειξαν ότι όλες οι υλοποιήσιμες νοερές στρατηγικές συνέπεσαν με τις αναμενόμενες. Επίσης σε κάποιες πράξεις σημειώθηκαν και επιπλέον νοερές στρατηγικές από αυτές.

Στον πίνακα 56 παρουσιάζονται σε κωδικοποιημένη μορφή όλα τα λεκτικά προβλήματα (Τ1, Τ2, Τ3, Τ4, Τ5) και όλες οι νοερές στρατηγικές, αναμενόμενες και υλοποιήσιμες. Ειδικότερα:

- Η στρατηγική του διαχωρισμού (ΣΤΡ1010), υλοποιήθηκε στα προβλήματα T1 και T4, στις προσθέσεις 29+18 και 25+26+27+30.
- Η στρατηγική της συσσώρευσης (Α10), έγινε στο T1, στην πρόσθεση 29+18.
- Η στρατηγική της διάσπασης του αριθμού (ΣΔΑ) υλοποιήθηκε στο T2, στον πολλαπλασιασμό 1,19X4, στο T3 στη διαίρεση 7,80:4 και στο T4 στη διαίρεση 108:4.
- Η στρατηγική της Αντιστάθμισης (ΣΤΡ.ΑΝΤ), έγινε στο T2 στον πολλαπλασιασμό 1,19X4.
- Η στρατηγική της αρίθμησης (ΣΤΡ. ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ) έγινε στο T5 στον πολλαπλασιασμό 800X3.
- Η στρατηγική της χρήσης των Δυνάμεων του 10 (Δ10), πραγματοποιήθηκε στο T5 στις πράξεις 800X3 και 800:4.

Τα είδη τους, τα λεκτικά προβλήματα και οι πράξεις στις οποίες έγιναν οι επιπλέον μη αναμενόμενες νοερές στρατηγικές, είναι:

- Η στρατηγική της ανάκλησης (ΣΤΡ. ΑΝΑΚΛ.) στο T4 στην πρόσθεση 25+26+27+30, στο T5 στον πολλαπλασιασμό 800X3, στη διαίρεση 800:4 και στην πρόσθεση 2400+200.
- Η μεικτή στρατηγική του διαχωρισμού και συσσώρευσης (ΣΤΡ.10S) στο T4 στην πρόσθεση 25+26+27+30.
- Η στρατηγική της Αντιστάθμισης (ΣΤΡ. N10C), υποκατηγορία της (N10), στο T1 στην πράξη 29+18.
- Η στρατηγική της χρήσης των Δυνάμεων του 10 (Δ10) στο T5 στον πολλαπλασιασμό 800X3.
- Η στρατηγική της διάσπασης του αριθμού (ΣΔΑ) στο T5 στη διαίρεση 800:4.
- Η στρατηγική του διαχωρισμού (u-1010), υποκατηγορία της (1010), στο T5 στην πρόσθεση 2400+200.

Αριθμός λεκτικών προβλημάτων	Κωδικοί Νοερών Στρατηγικών που αναμένονταν να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές	Κωδικοί Νοερών Στρατηγικών που υλοποιήθηκαν από τους μαθητές
T1	• ΣΤΡ1010 • Α10 29+18	• Α10 • ΣΤΡ. N10C • ΣΤΡ.u-1010,1010
T2	• ΣΔΑ • ΣΤΡ.ΑΝΤ 1,19X4	• ΣΔΑ • ΣΤΡ.ΑΝΤ

T3	• ΣΔΑ 7,80:4	• ΣΔΑ ΜΗ-Δ
T4	• ΣΔΑ 108:4	• ΣΔΑ
T4	• ΣΤΡ1010 25+26+27+30	• Ανάκληση • ΣΤΡ.10S • ΣΤΡ.1010
T5	• ΣΤΡ. ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ 800X3	• Ανάκληση • ΣΤΡ. ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ
T5	• Δ10 800X3, 800:4	• ΑΝΑΚΛ • Δ10 • ΣΔΑ
T5	-	• u-1010, • ΑΝΑΚΛ 2400+200

Πίνακας 56: Αναμενόμενες και υλοποιήσιμες νοερές στρατηγικές σε ενδεικτικές πράξεις στην Τελική δοκιμή

3.1.3 Σύνδεση αποτελεσμάτων Πρώτου ερευνητικού ερωτήματος

Από τις τρεις αξιολογήσεις που πραγματοποιήθηκαν στην πρώτη φάση της τελικής διδακτικής παρέμβασης, προέκυψε ότι οι αντωνυμίες που χρησιμοποιήθηκαν ως έμμεση ένδειξη αναφοράς στους νοερούς υπολογισμούς, επηρέασαν τη χρήση των νοερών υπολογισμών, καθώς υλοποιήθηκαν 240 πράξεις, αρκετές από αυτές (112) με νοερούς υπολογισμούς. Παρ' όλα αυτά η στρατηγική με τη μεγαλύτερη συχνότητα χρήσης ήταν ο κάθετος αλγόριθμος και ακολούθησε, η στρατηγική του διαχωρισμού 1010, η στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού ΣΔΑ, η στρατηγική της διάσπασης και των δύο αριθμών ΣΔΑ2 και τέλος η στρατηγική της συσσώρευσης Ν10.

Το ίδιο αποτέλεσμα προέκυψε και κατά την αξιολόγηση της δεύτερης φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης. Υλοποιήθηκαν 56 πράξεις εκ των οποίων σχεδόν όλες με νοερούς υπολογισμούς (52). Η ολιστική στρατηγική της αντιστάθμισης είχε τη μεγαλύτερη συχνότητα χρήσης, και ακολούθησε η στρατηγική του διαχωρισμού, της συσσώρευσης, και τελευταίος ο κάθετος αλγόριθμος.

Επίσης προέκυψε ότι τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων (το μέγεθος και το είδος των αριθμών) επηρέασαν τη χρήση των νοερών υπολογισμών, καθώς οι μαθητές υλοποίησαν τις απαιτούμενες πράξεις με τις αναμενόμενες νοερές στρατηγικές που θα προκαλούσαν αυτοί οι αριθμοί. Αυτό συνέβη και στην αξιολόγηση της τελικής διδακτικής παρέμβασης (Α' και Β' φάση) αλλά και στην τελική δοκιμή. Μάλιστα στην αξιολόγηση της Β' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης σημειώθηκε στο τρίτο πρόβλημα και μία επιπλέον, η στρατηγική της διάσπασης και των δύο αριθμών ΣΔΑ2. Στην τελική δοκιμή σημειώθηκαν έξι επιπλέον στρατηγικές νοερών υπολογισμών. Στο

τέταρτο πρόβλημα της ανάκλησης, της συσσώρευσης 10S, στο πέμπτο πρόβλημα της ανάκλησης, των δυνάμεων του 10, της διάσπασης ΣΔΑ, του διαχωρισμού (u-1010).

3.2 Δεύτερο ερευνητικό ερώτημα: Κατά πόσο συμβάλουν οι νοεροί υπολογισμοί στην ορθότητα των πράξεων;

Για τη διερεύνηση του δεύτερου ερευνητικού ερωτήματος αναζητήθηκε κατά πόσο εκτελέστηκαν με επιτυχία οι πράξεις που υλοποιήθηκαν με νοερούς υπολογισμούς, σε όλα τα φύλλα εργασίας της διδακτικής παρέμβασης καθώς και της τελικής δοκιμής.

3.2.1 Συνοπτική παρουσίαση του βαθμού επιτυχίας εκτέλεσης των πράξεων με νοερούς υπολογισμούς κατά την έκβαση της διδακτικής παρέμβασης

Τα αποτελέσματα του Νοεμβρίου, για το πρώτο φύλλο εργασίας, (αρχική καταγραφή) έδειξαν ότι οι νοεροί υπολογισμοί χρησιμοποιήθηκαν λιγότερο επιτυχώς, καθώς στην αρχή της διδακτικής παρέμβασης, οι μαθητές δεν είχαν εξασκηθεί ιδιαίτερα σε πράξεις με στρατηγικές νοερών υπολογισμών και οι μαθητές συνέχιζαν να εκτελούν τις πράξεις με τον τρόπο υπολογισμού που γνώριζαν και είχαν εξασκηθεί περισσότερο στο σχολείο μέχρι τότε, τον κάθετο αλγόριθμο. Όμως η επιτυχία των πράξεων που εκτελέστηκαν με νοερές στρατηγικές σημείωσε αυξητική τάση με την πάροδο του χρόνου και την εξέλιξη της διδακτικής παρέμβασης. Συγκεκριμένα, στο πρώτο φύλλο εργασίας οι μισές έγιναν σωστά (4 από τις 8 το 50%). Στο δεύτερο φύλλο εργασίας σωστά έγιναν περισσότερες από τις μισές (8 από τις 12, το 66,67%) και τέλος, στο τρίτο φύλλο εργασίας όλες ήταν σωστές (92 στις 92, το 100%). Συνολικά και στα τρία φύλλα εργασίας μαζί έγιναν με επιτυχία οι 104 από τις 122 πράξεις που εκτελέστηκαν με νοερούς υπολογισμούς.(92,86%). Στον πίνακα 57 το ποσοστό επιτυχίας αναφέρεται στο πλήθος των πράξεων που έγιναν με νοερούς υπολογισμούς σε κάθε φύλλο εργασίας και συνολικά.

Φύλλα εργασίας	Πέτυχαν (%)	Πλήθος
A	4 (50%)	8
B	8 (66,67%)	12
Γ	92 (100%)	92
Συνολικά	104 (92,86%)	112

Πίνακας 57: Πλήθος και ποσοστά επιτυχίας πράξεων που εκτελέστηκαν με νοερές στρατηγικές στις 3 αξιολογήσεις και συνολικά (στρογγυλοποίηση στο 2ο δεκαδικό ψηφίο)

Από τα αποτελέσματα του Φεβρουαρίου φάνηκε πως οι 52 πράξεις που εκτελέστηκαν με νοερούς υπολογισμούς στο φύλλο εργασίας και στα τέσσερα λεκτικά προβλήματα έγιναν όλες με επιτυχία (52 από τις 52, το 100%). Στον πίνακα 58 παρουσιάζονται σε κάθε λεκτικό πρόβλημα το πλήθος και το ποσοστό επιτυχίας των πράξεων που έγιναν με νοερούς και συνολικά. Οι νοερές στρατηγικές (Ολιστικής στρατηγικής ή Αντιστάθμισης, στρατηγική του διαχωρισμού 1010, στρατηγική της συσσώρευσης), αποτέλεσαν τους δημοφιλέστερους τρόπους υπολογισμού.

Λεκτικά προβλήματα	Πέτυχαν (%)
1 ^ο	12 (100%)
2 ^ο	12 (100%)
3 ^ο	14 (100%)
4 ^ο	14 (100%)
ΣΥΝΟΛΟ	52 (100%)

Πίνακας 58: Πλήθος και ποσοστά επιτυχίας πράξεων που εκτελέστηκαν με νοερές στρατηγικές σε κάθε λεκτικό πρόβλημα του φύλλου εργασίας και συνολικά.

Τέλος από τα δεδομένα αξιολόγησης του Ιουνίου στην τελική δοκιμή, προκύπτει ότι οι σχεδόν όλες οι πράξεις που υλοποιήθηκαν με νοερές στρατηγικές εκτελέστηκαν επιτυχώς, εκτός από μία στο δεύτερο λεκτικό πρόβλημα. Ο συνολικός αριθμός των πράξεων που εκτελέστηκαν με νοερές στρατηγικές σε όλα τα λεκτικά προβλήματα ήταν 99. Από αυτές οι 98 έγιναν με επιτυχία (98,98%). Στον πίνακα 59 το ποσοστό επιτυχίας αναφέρεται στο πλήθος των πράξεων που έγιναν με νοερούς υπολογισμούς σε κάθε λεκτικό πρόβλημα και συνολικά.

Λεκτικά προβλήματα	Πέτυχαν (%)	Πλήθος
1 ^ο	14 (100%)	14
2 ^ο	13 (92,85%)	14
3 ^ο	13 (100%)	13
4 ^ο	21 (100%)	21
5 ^ο	37 (100%)	37
ΣΥΝΟΛΟ	98 (98,98%)	99

Πίνακας 59: Πλήθος και ποσοστά επιτυχίας πράξεων που εκτελέστηκαν με νοερές στρατηγικές σε κάθε λεκτικό πρόβλημα του φύλλου εργασίας της τελικής δοκιμής και συνολικά.

3.2.2 Αναλυτική παρουσίαση του βαθμού επιτυχίας εκτέλεσης των πράξεων με νοερούς υπολογισμούς κατά την έκβαση της διδακτικής παρέμβασης

3.2.2.1 Νοέμβριος 2016 (Α' φάση τελικής διδακτικής παρέμβασης)

- **Πρώτη Αξιολόγηση**

Στο πρώτο φύλλο εργασίας από τις 48 πράξεις που εκτελέστηκαν συνολικά οι 8 έγιναν με νοερές στρατηγικές. Από αυτές οι 4 (50%) ήταν σωστές. Αναλυτικά, τα δεδομένα αξιολόγησης για τους υπολογισμούς που έγιναν με νοερές στρατηγικές έχουν ως εξής: 4 έγιναν με τη στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού σε μονάδες και δεκάδες χωρίς επιτυχία και 4 υπολογισμοί υλοποιήθηκαν επιτυχώς με τη στρατηγική του διαχωρισμού 1010.

- **Δεύτερη Αξιολόγηση**

Στο δεύτερο φύλλο εργασίας οι πράξεις που έγιναν ήταν συνολικά 44. Με νοερές στρατηγικές εκτελέστηκαν 12. Οι 8 (66,67%) από αυτές ήταν σωστές και οι 4 (33,33%) λάθος. Συγκεκριμένα, για τους υπολογισμούς που έγιναν με νοερές στρατηγικές, τα δεδομένα αξιολόγησης έχουν ως εξής: με τη στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού σε μονάδες και δεκάδες εκτελέστηκαν 4 πράξεις, όπου όλες απέτυχαν. Με τη στρατηγική της συσσώρευσης N10 έγιναν σωστά και οι 4 πράξεις. Τέλος οι υπόλοιπες 4, εκτελέστηκαν και αυτές σωστά με τη στρατηγική του διαχωρισμού 1010.

- **Τρίτη Αξιολόγηση**

Στο τρίτο φύλλο εργασίας από τις 112 πράξεις που εκτελέστηκαν συνολικά, οι 92 έγιναν με νοερές στρατηγικές, όλες σωστά. Αναλυτικά, 60 εκτελέστηκαν με τη στρατηγική του διαχωρισμού 1010, 24 υλοποιήθηκαν με τη στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού ανάλογα με τη θεσιακή αξία των ψηφίων του και 8 με τη στρατηγική της διάσπασης και των δύο αριθμών ανάλογα με τη θεσιακή αξία των ψηφίων.

3.2.2.2 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα αξιολόγησης πράξεων

Και στα τρία φύλλα εργασίας έγιναν 204 πράξεις. Οι 112 υλοποιήθηκαν με νοερές στρατηγικές. Από αυτές σωστές ήταν οι 104 (92,86%) και λάθος 8 (7,14%).

Από τις πράξεις που έγιναν με νοερούς υπολογισμούς, οι 28 εκτελέστηκαν με τη στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού. Σωστές ήταν οι 20 (71,43%) και 8

(28,57%) λάθος. Εξαιρούμενων των πράξεων που έγιναν με την προηγούμενη στρατηγική, όλες οι υπόλοιπες έγιναν σωστά. Συγκεκριμένα με τη στρατηγική του διαχωρισμού 1010 έγιναν 72, με τη στρατηγική της διάσπασης και των δύο αριθμών εκτελέστηκαν 8 και 4 πραγματοποιήθηκαν με τη βοήθεια της στρατηγικής της συσσώρευσης N10.

3.2.2.3 Φεβρουάριος 2017 (Β' φάση τελικής διδακτικής παρέμβασης)

- **Αξιολόγηση**

Το φύλλο εργασίας περιλάμβανε τέσσερα λεκτικά προβλήματα. Στο πρώτο, εκτελέστηκαν 12 πράξεις με τη νοερή στρατηγική του διαχωρισμού 1010 όλες σωστά. Στη δεύτερο λεκτικό πρόβλημα υλοποιήθηκαν 12 πράξεις με νοερές στρατηγικές, επίσης όλες σωστές. Από τους 12 νοερούς υπολογισμούς που υλοποιήθηκαν, 8 έγιναν με τη στρατηγική του διαχωρισμού των αριθμών 1010 και 4 με τη στρατηγική της συσσώρευσης N10. Στο τρίτο και στο τέταρτο λεκτικό πρόβλημα εκτελέστηκαν από 14 πράξεις, σύνολο 28. Όλες έγιναν σωστά και υλοποιήθηκαν με τη νοερή Ολιστική στρατηγική ή της Αντιστάθμισης.

- **Συγκεντρωτικά αποτελέσματα αξιολόγησης πράξεων**

Στο φύλλο εργασίας συνολικά εκτελέστηκαν 56 πράξεις. Οι 52 έγιναν με νοερές στρατηγικές. Όλες έγιναν σωστά. Από τις πράξεις που εκτελέστηκαν με νοερές στρατηγικές 28 υλοποιήθηκαν με τη στρατηγική της Αντιστάθμισης, 20 με τη στρατηγική του διαχωρισμού 1010 και 4 με τη στρατηγική της συσσώρευσης

3.2.2.4 Ιούνιος 2017 (Τελική Δοκιμή)

Στο φύλλο εργασίας της τελικής δοκιμής, υπήρχαν 5 λεκτικά προβλήματα. Κάθε μαθητής έπρεπε να εκτελέσει από 1 πράξη για τα τρία πρώτα ($29+18$, $1,19 \times 4$, $7,80:4$), 2 πράξεις για το τέταρτο ($25+26+27+39$, $108:4$) και 3 για το πέμπτο (800×3 , $800:4$, $2400+200$). Συνολικά 8. Επομένως, οι αναμενόμενες πράξεις έφταναν τις 120, αριθμός που προκύπτει από το γινόμενο των 15 μαθητών επί των 8 πράξεων. Από τις 120 πράξεις, υλοποιήθηκαν 104 και από αυτές οι 99 έγιναν με νοερές στρατηγικές.

- **Αξιολόγηση**

Στο πρώτο λεκτικό πρόβλημα εκτελέστηκαν 14 πράξεις με νοερές στρατηγικές, όλες σωστά. Αναλυτικά, έγιναν 8 πράξεις με τη νοερή στρατηγική της συσσώρευσης A10, 3 με του διαχωρισμού 1010 και 3 με της Αντιστάθμισης N10C.

Στο δεύτερο λεκτικό πρόβλημα έγιναν 14 πράξεις με νοερές στρατηγικές. Από αυτές σωστές ήταν οι 13 (92,85%) και μόνο 1 (7,15%) λάθος. Με τη νοερή στρατηγική της διάσπασης του ενός αριθμού με βάση τη θεσιακή αξία έγιναν 6 πράξεις, οι 5 σωστά (83,33%) και 1 (16,66%) λάθος. Οι υπόλοιπες 8 υλοποιήθηκαν σωστά με την Ολιστική στρατηγική ή της Αντιστάθμισης.

Στο τρίτο λεκτικό πρόβλημα υλοποιήθηκαν 13 πράξεις. Έγιναν με τη βοήθεια της στρατηγικής της διάσπασης του ενός αριθμού σε αριθμούς μη δεκάδων. Ήταν όλες σωστές.

Στο τέταρτο λεκτικό πρόβλημα εκτελέστηκαν συνολικά 26 πράξεις. Με νοερές στρατηγικές έγιναν 21 και ήταν όλες σωστές. Από αυτές οι 11 υλοποιήθηκαν με τη στρατηγική της διάσπασης του αριθμού ΣΔΑ ΜΗ-Δ, 6 με την Ανάκληση ΚΔ, ΑΝΑΚΛ., 3 με του διαχωρισμού 1010 και 1 τη μεικτή του διαχωρισμού και συσσώρευσης ΣΤΡ.10S.

Στο πέμπτο λεκτικό πρόβλημα ο συνολικός αριθμός των πράξεων που έγιναν, ήταν 37. Όλες τους εκτελέστηκαν με νοερές στρατηγικές και με επιτυχία. Ειδικότερα, 19 πράξεις έγιναν με τη στρατηγική των δυνάμεων του 10, με τη στρατηγική της ανάκλησης 13, με τη στρατηγική του διαχωρισμού ΣΤΡ.υ-1010 έγιναν 2 πράξεις, με τη στρατηγική της αρίθμησης 2 και 1 με τη στρατηγική της διάσπασης του αριθμού ΣΔΑ ΜΗ-Δ.

3.2.2.5 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα αξιολόγησης πράξεων

Στην τελική δοκιμή αναμένονταν να εκτελεστούν 120 πράξεις. Υλοποιήθηκαν όμως 104. Οι 99 έγιναν με νοερές στρατηγικές. Σωστές ήταν οι 98 (το 98,98%). Μόνο 1 πράξη (το 1,02%) που εκτελέστηκε με νοερή στρατηγική ήταν λάθος. Φαίνεται, λοιπόν, πως οι πράξεις που εκτελέστηκαν με νοερούς υπολογισμούς είχαν πολύ μεγάλη επιτυχία.

Αναλυτικά, όπως αποτυπώνεται και στον πίνακα 60, οι 99 πράξεις υλοποιήθηκαν με τις παρακάτω νοερές στρατηγικές:

- με τη στρατηγική της διάσπασης του αριθμού, εκτελέστηκαν 31, όπου 30 (96,77%) ήταν σωστές και 1 (3,23%) λάθος.
- Με τη στρατηγική με τις δυνάμεις του 10 και με της ανάκλησης γνωστών αριθμητικών γεγονότων, υλοποιήθηκαν από 19 με επιτυχία.
- Με τη στρατηγική της Αντιστάθμισης έγιναν 11, όλες τους σωστές.
- Με τη στρατηγική του διαχωρισμού 1010 και της συσσώρευσης A10 υλοποιήθηκαν από 8 με επιτυχία.
- Με τη στρατηγική της αρίθμησης με επαναλαμβανόμενες προσθέσεις έγιναν σωστά 2 πράξεις και
- 1 πράξη έγινε με τη μεικτή στρατηγική συσσώρευσης και διαχωρισμού 10S με επιτυχία.

Το ποσοστό επιτυχίας στον παρακάτω πίνακα αναφέρεται στο πλήθος των πράξεων που έγιναν με τη εκάστη νοερή στρατηγική στο φύλλο εργασίας της τελικής δοκιμής.

Πλήθος πράξεων	Νοερές στρατηγικές	Πέτυχαν (%)
31	ΣΔΑ Στρ. διάσπασης του αριθμού	30 (96,77%)
19	Στρ. ανάκλησης (ΚΔ, ΑΝΑΚΛ.)	19 (100%)
19	Στρ. με δυνάμεις του 10	19 (100%)
11	Στρ. Αντιστάθμισης (ΣΤΡ. Ν10C, ΑΝΤΙΣΤΑΘΜ. ΜΗ-Δ)	11 (100%)
8	Στρ. συσσώρευσης (Α10)	8 (100%)
8	Στρ. διαχωρισμού (ΣΤΡ.υ-1010, 1010)	8 (100%)
2	Στρ. αρίθμησης (επαν.προσθ.)	2 (100%)
1	Μεικτή Στρ. διαχωρισμού & συσσώρευσης (ΣΤΡ.10S)	1 (100%)

Πίνακας 60: Συγκεντρωτικά δεδομένα αξιολόγησης για τις πράξεις και τις νοερές στρατηγικές που υλοποιήθηκαν

3.2.3 Σύνδεση αποτελεσμάτων δεύτερου ερευνητικού ερωτήματος

Από τα αποτελέσματα όλων των αξιολογήσεων φαίνεται πως τελικά οι νοεροί υπολογισμοί συνέβαλαν στην ορθότητα των πράξεων αφού οι περισσότερες έγιναν με επιτυχία στα φύλλα εργασίας. Στην αξιολόγηση της Α' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης πέτυχαν 104 από τις 112 πράξεις, στην αξιολόγηση της Β' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης πέτυχαν και οι 52, ενώ στην τελική δοκιμή πέτυχαν οι 98 από τις 99.

3.3 Τρίτο ερευνητικό ερώτημα: Σε ποιες περιπτώσεις των μαθηματικών πράξεων οι μαθητές επιλέγουν τη χρήση νοερών υπολογισμών;

Για τη διερεύνηση του τρίτου ερευνητικού ερωτήματος εξετάστηκε το πλήθος και το είδος των στρατηγικών υπολογισμού που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στις απαιτούμενες πράξεις των λεκτικών προβλημάτων κάθε φύλλου εργασίας. Η αναζήτηση των προϋποθέσεων της χρήσης των νοερών υπολογισμών έγινε μέσω διαλόγου μεταξύ δασκάλου και μαθητών.

3.3.1 Προϋποθέσεις χρήσης νοερών υπολογισμών για την εκτέλεση πράξεων

3.3.1.1 Νοέμβριος 2016 (Α' φάση τελικής διδακτικής παρέμβασης)

Αρκετές πράξεις υλοποιήθηκαν με νοερούς υπολογισμούς στα τρία φύλλα εργασίας (112 από τις 204). Στο πρώτο φύλλο εργασίας, το οποίο έγινε στις αρχές διεξαγωγής της διδακτικής παρέμβασης, η συμμετοχή των μαθητών στο διάλογο για τον εντοπισμό των προϋποθέσεων χρήσης των νοερών υπολογισμών στις πράξεις ήταν πολύ μικρή. Μόλις δύο μαθητές έλαβαν το λόγο, απαντώντας μονολεκτικά και καταφατικά στην περίπτωση της πιθανότητας χρήσης, δίχως να δίνουν λεπτομέρειες και επαρκείς πληροφορίες για τις προϋποθέσεις. Παρατίθεται το σχετικό απόσπασμα διαλόγου μεταξύ δασκάλου και μαθητών:

Δ: Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτούς τους δικούς σας τρόπους και σε άλλες πράξεις;

M1: Ναι.

Δ: Ωραία, κάποιος άλλος μαθητής που θέλει να προσθέσει κάτι παραπάνω, σχετικά με το αν μπορούμε να κάνουμε και άλλες πράξεις με αυτούς τους τρόπους;

M2: Ναι κύριε.

Κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, στο δεύτερο φύλλο εργασίας, οι μαθητές σχολίασαν ότι θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τους νοερούς υπολογισμούς σε διάφορες πράξεις (προσθέσεις, αφαιρέσεις), πέρα από αυτές του φύλλου εργασίας. Έθεσαν όμως την προϋπόθεση, οι αριθμοί που θα συμμετείχαν στις πράξεις να τελειώναν σε 0 ή 5, ώστε να μπορούσαν να τους αναλύσουν εύκολα και στη συνέχεια να πρόσθεταν τις δεκάδες και τις μονάδες που θα προκύπταν. Παρατίθεται το

απόσπασμα διαλόγου μαθητών και δασκάλου από όπου προέρχεται το προηγούμενο περιεχόμενο με τα ανάλογα σχόλια:

M: $63200+1440=64640$, χωρίσαμε το 1440 σε 1400 και σε 40 και τα προσθέσαμε στο 63200 ένα-ένα.

Δ: Άρα δεν το κάνατε κάθετα, αλλά με τι;

M1: Με εκείνους τους εύκολους τρόπους

Δ: Αν το δουλέψετε λίγο ακόμα θα μπορούσατε να το χρησιμοποιήσετε και άλλες φορές;

M: Ναι

Δ: Σε οποιαδήποτε πρόσθεση ή αφαίρεση ή να μας ταιριάζει, να κουμπώνει σωστά; Πρέπει να συμβαίνει κάτι;

M: Σε πρόσθεση, αφαίρεση αλλά να τελειώνει σε 0 ή 5.

M: Γιατί μας βολεύει να γίνεται πιο εύκολα το κόψιμο το σπάσιμο και μετά να τα βάζουμε μαζί.

Στο τρίτο φύλλο εργασίας οι απαντήσεις ήταν παρόμοιες. Οι μαθητές σχολίασαν πως για να υπάρξει χρήση των νοερών υπολογισμών, θα έπρεπε οι αριθμοί των πράξεων να τελείωναν σε 0 ή 5, να είχαν εύκολα κριτήρια αξιολόγησης, να διαιρούνταν ή να πολλαπλασιάζονταν εύκολα, να αναλύονταν σε εύκολα γινόμενα, πηλικά και αθροίσματα. Στην περίπτωση που δεν συνέτρεχαν οι παραπάνω συνθήκες, οι μαθητές πρότειναν να τις δημιουργήσουν. Δηλαδή, όταν οι αριθμοί στις πράξεις δεν τελείωναν σε 0 ή 5, θα προσπαθούσαν να τους ρυθμίσουν, ώστε ένα πάρουν την απαραίτητη μορφή και να γινόταν πιο εύκολα η πράξη με νοερούς υπολογισμούς. Ακολουθεί απόσπασμα διαλόγου μαθητών και δασκάλου με τα παραπάνω σχόλια:

M: Είπαμε ότι το 16 είναι 4×4 , οπότε κάναμε $1200:4=400$, $400:4=75$. Άρα όλα μαζί $33200:16=2075$ η κάθε δόση.

Δ: Βλέπω ότι αυτοί οι τρόποι, τι λέτε εσείς, τους χρησιμοποιούμε, όπου να 'ναι, όπου θέλουμε; Πού τους χρησιμοποιούμε και γιατί; Γιατί δεν πάω να κάνω τη διαίρεση κάθετα;

M: Όταν τελειώνει ο αριθμός σε 0 ή 5.

Δ: Εδώ τελείωναν οι αριθμοί μου σε 0 ή 5 μόνο;

M: Να μπορούν οι αριθμοί να κουμπώνουν, να βολεύουν, να διαιρούνται ή να πολλαπλασιάζονται εύκολα και να βγαίνουν εύκολα γινόμενα, πηλικά, αθροίσματα.

Δ: Άρα λοιπόν τι μπορούμε να πούμε σαν συμπέρασμα; Μπορούμε να κάνουμε αυτούς τους εύκολους, γρήγορους τρόπους υπολογισμούς όποτε θέλουμε ή θα πρέπει να αναγνωρίζουμε κάποια γνωρίσματα, κάποια χαρακτηριστικά;

Μ: Οι νοεροί υπολογισμοί γίνονται με αριθμούς που γίνονται εύκολα αθροίσματα και γινόμενα, πηλίκα, να τελειώνουν σε 0 ή 5 ή να τους κάνουμε εμείς να τελειώνουν σε 0 ή 5, να έχουν εύκολα κριτήρια διαιρετότητας.

3.3.1.2 Φεβρουάριος 2017 (Β' φάση τελικής διδακτικής παρέμβασης)

Οι περισσότερες πράξεις που έγιναν για την επίλυση των λεκτικών προβλημάτων του φύλλου εργασίας, εκτελέστηκαν με νοερούς υπολογισμούς (52 από τις 56). Ο δάσκαλος στο μαθηματικό διάλογο που ανέπτυξε με τους μαθητές, έλαβε ως απάντηση ότι οι νοεροί υπολογισμοί μπορούσαν να υλοποιηθούν σε αριθμητικές πράξεις, εφόσον είχαν χαρακτηριστικά που να υποστήριζαν την χρήση τους. Να είχαν εύκολους και όχι μεγάλους και δύσκολους αριθμούς. Ακολουθεί το σχετικό απόσπασμα από το διάλογο:

Δ: Τι μπορείτε να καταλάβετε για τις «εύκολες πράξεις»; Τις είδαμε μέχρι τώρα σε διάφορα μαθήματα, στις ιδιότητες των πράξεων, στα κλάσματα, τις αναλογίες, στις δυνάμεις και στις εξισώσεις. Μπορούμε άραγε να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις δικές σας πράξεις τους δικούς σας τρόπους υπολογισμού και στα παρακάτω μαθήματα που θα κάνουμε; Τι λέτε; Μπορούμε να τους χρησιμοποιούμε παντού;

Μ (μαθήτρια ζητάει το λόγο να μιλήσει): δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτούς τους τρόπους όταν έχουμε πολύ μεγάλους και δύσκολους αριθμούς.

Δ: Άρα υπάρχουν όρια πού μπορούμε και πού όχι; Ή γενικά και συνέχεια μπορούμε;

Μ (μαθητής ζητάει το λόγο να μιλήσει): τους χρησιμοποιούμε οπότε βολεύουν και οπότε ταιριάζουν οι αριθμοί, όχι συνέχεια.

3.3.1.3 Σύνδεση αποτελεσμάτων τρίτου ερευνητικού ερωτήματος

Για την αξιολόγηση της διδακτικής παρέμβασης έγιναν συνολικά 260 πράξεις. Οι 164 εκτελέστηκαν με νοερούς υπολογισμούς. Η χρήση τους ήταν ευρεία και έγινε βάσει προϋποθέσεων, τις οποίες όρισαν οι μαθητές. Τις διατύπωσαν στο μαθηματικό διάλογο με το δάσκαλό τους, έπειτα από την παρουσίαση και ανάλυση των νοερών στρατηγικών που χρησιμοποίησαν σε κάθε πράξη, σε όλα τα φύλλα εργασίας. Συνοψίζοντας, οι μαθητές επέλεξαν να εκτελέσουν τις αριθμητικές πράξεις με νοερούς υπολογισμούς διότι οι όροι ικανοποιούσαν τα παρακάτω κριτήρια:

- τελειώναν σε 0 ή 5 (στρατηγική της χρήσης του αριθμού 5, Πολλαπλασιασμός και Διαίρεσεις με δυνάμεις του 10),
- είχαν εύκολα κριτήρια διαιρετότητας (στρατηγική της διάσπασης),

- πολλαπλασιάζονταν ή υποδιπλασιάζονταν εύκολα (στρατηγική της Αντιστάθμισης),
- διαχωρίζονταν εύκολα σε επιμέρους αθροίσματα (στρατηγική του διαχωρισμού) ή διασπώνταν εύκολα σε επιμέρους γινόμενα και πηλίκα (στρατηγική της διάσπασης),
- είχαν εύκολους και όχι μεγάλους και δύσκολους αριθμούς, (διευκολύνει την υλοποίηση όλων των νοερών στρατηγικών),
- αναλύονταν εύκολα σε μικρότερους αριθμούς και διευκόλυναν την εκτέλεση των ενδιάμεσων πράξεων που προκύπταν, (στρατηγική διαχωρισμού, στρατηγικής της συσσώρευσης, στρατηγική Αντιστάθμισης).

4 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα, όσα δηλαδή προέκυψαν από τα αποτελέσματα, μεμονωμένα και συνδυαστικά σε σχέση με τη βιβλιογραφία. Έπειτα γίνεται αναφορά στους παράγοντες που ενδεχομένως να τα προκάλεσαν και επιχειρείται μία πρώτη προσέγγιση για την ερμηνεία τους από τον ερευνητή. Από τη μελέτη της πρόσφατης βιβλιογραφίας προκύπτει πως υπάρχουν μερικές σχετικές έρευνες με παρόμοιο πειραματικό σχεδιασμό με την παρούσα, οι οποίες όμως επικεντρώνονται στις ευέλικτες νοερές στρατηγικές. Παρ' όλα αυτά γίνεται προσπάθεια να συνδυαστούν μερικά από τα συμπεράσματά τους έχοντας ως κοινή βάση τους νοερούς υπολογισμούς.

Συμπεράσματα

Τα συμπεράσματα της παρούσης έρευνας στο πλαίσιο διδακτορικής διατριβής, έτσι όπως προκύπτουν από την εφαρμογή της θεωρία των νοερών υπολογισμών, είναι τα εξής **για το πρώτο ερευνητικό ερώτημα:**

Γενικά οι μαθητές, οι οποίοι δεν είχαν δεχτεί κάποια διδακτική παρέμβαση σχετικά με τους νοερούς υπολογισμούς φάνηκε να τείνουν να χρησιμοποιούν περισσότερο τον κάθετο αλγόριθμο στην εκτέλεση των πράξεών τους.

Μία ερμηνεία είναι ότι οι μαθητές δεν είχαν εξασκηθεί ιδιαίτερα σε πράξεις με στρατηγικές νοερών υπολογισμών σε προηγούμενες τάξεις και είχαν δεχθεί περισσότερο τη διδασκαλία του κάθετου αλγόριθμου για την εκτέλεσή τους. Επίσης τα εγχειρίδια των μαθητών είναι περισσότερο προσανατολισμένα προς τον κάθετο αλγόριθμο παρά στους νοερούς υπολογισμούς. Οι δάσκαλοι πιθανόν να διδάσκουν περισσότερο τον κάθετο αλγόριθμο και να μην αφήνουν να εξελιχθεί η ανάπτυξη των νοερών στρατηγικών των μαθητών. Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών για τα μαθηματικά στο Δημοτικό σχολείο μπορεί να γίνεται αναφορά στους νοερούς υπολογισμούς, αλλά δεν εξειδικεύεται ούτε μεθοδεύεται η διδασκαλία τους. Παρατίθεται σε στήλες με τη μορφή της διδακτικής ύλης χωρίς κάποιο βοηθητικό κείμενο για τον εκπαιδευτικό, που καλείται να τη διδάξει δίχως να γίνεται πλήρως κατανοητή (Λεμονίδης, 2020). Επομένως η κατάλληλη υποστήριξη για τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών στο σχολείο παρουσιάζει κενό.

Η διδασκαλία των νοερών υπολογισμών στο ελληνικό Δημοτικό σχολείο παρουσιάζει μεν κενό, επειδή οι εκπαιδευτικοί δίνουν ιδιαίτερη βαρύτητα στην εκμάθηση της τεχνικής του κάθετου αλγόριθμου. Όταν όμως γίνεται η διδακτική παρέμβαση, τα αποτελέσματα είναι θετικά σε πολύ μεγάλο ποσοστό, σε όλες τις

ηλικίες των μαθητών και σε όλες τις φάσεις της έρευνας. Αξιοσημείωτο είναι ότι από τη στιγμή που έγιναν οι διδακτικές παρεμβάσεις φάνηκε πως οι μαθητές άρχισαν να προτιμούν τους νοερούς υπολογισμούς σε σχέση με τον κάθετο αλγόριθμο. Αρκετές πράξεις λοιπόν εκτελέστηκαν με νοερές στρατηγικές και μάλιστα αυτές ξεπέρασαν σε πλήθος τον κάθετο αλγόριθμο. Στην αξιολόγηση της πρώτης φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης το πλήθος των νοερών υπολογισμών ήταν 112 (54,90%) έναντι 92 των κάθετων αλγόριθμων και στην αξιολόγηση της δεύτερης φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης το πλήθος των νοερών υπολογισμών ήταν 52 (92,86%) έναντι 4 (7,14%) των κάθετων αλγόριθμων.

Η χρήση αντωνυμιών στο πλαίσιο της διδακτικής κατάστασης ως ένδειξη για τη χρήση νοερών υπολογισμών αποτέλεσε κατάλληλο εργαλείο αναγνώρισης από τους μαθητές. Έτσι, αν και η διδακτική πρόθεση του διδάσκοντα γινόταν σαφής (παρατηρείται έντονο φαινόμενο «Toraze»), εντούτοις είχε θετικά αποτελέσματα στη χρήση από τους μαθητές των νοερών υπολογισμών. Οι αντωνυμίες χρησιμοποιήθηκαν ως σημείο αναφοράς στους νοερούς υπολογισμούς, κάτι που συνάδει με την αντιστοίχιση γλωσσικών εργαλείων σε μαθηματικούς όρους και αναφορές (Rowland, 1992). Η Hickendorff σε έρευνα της το 2018 αναζήτησε τους παράγοντες που επηρεάζουν τη χρήση των ευέλικτων νοερών στρατηγικών από τους μαθητές για την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων και των τεσσάρων πράξεων με πολυψήφιους αριθμούς. Έστρεψε όμως περισσότερο το ενδιαφέρον της σε παράγοντες που αφορούν τους μαθητές και το συγκεκριμένο. Συμπεραίνει λοιπόν ότι τα αγόρια με υψηλές επιδόσεις στα μαθηματικά χρησιμοποιούν περισσότερο ευέλικτες νοερές στρατηγικές. Επίσης συμπεραίνει ότι η χρήση των ευέλικτων νοερών στρατηγικών αυξάνεται στις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αρκεί να περιλαμβάνεται στο συγκεκριμένο του προβλήματος η παρότρυνση για εφαρμογή έξυπνου τρόπου επίλυσης.

Οι μαθητές φαίνεται να κατανοούν τα οφέλη που μπορούν να αποκομίσουν από τους νοερούς υπολογισμούς, οπότε και αλλάζουν την προσέγγισή τους για την εκτέλεση των μαθηματικών πράξεων. Οι μαθητές από τα μισά της πρώτης φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης και έπειτα είχαν διδαχθεί συστηματικά και μεθοδικά τους νοερούς υπολογισμούς και ίσως να έφτασαν στο σημείο να καταφέρουν να διακρίνουν τα πλεονεκτήματά τους σε σχέση με τον κάθετο αλγόριθμο, επομένως ξεκίνησαν να τους χρησιμοποιούν περισσότερο (Λεμονίδης, 2020). Επίσης από το χρονικό σημείο αυτό και έπειτα είχαν ξεκινήσει να μαθαίνουν και να αναπτύσσουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών. Οπότε η συστηματική διδασκαλία, η ανάπτυξη και

η εξάσκηση στους νοερούς υπολογισμούς, πιθανόν να προώθησε περαιτέρω τη χρήση των νοερών στρατηγικών.

Η συστηματική διδασκαλία με την εφαρμογή του αγγλικού μοντέλου για τους νοερούς υπολογισμούς (QCA, 1999) και η προσαρμογή του στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης, αποδεικνύεται ότι μπορεί να εφαρμοστεί με επιτυχία. Οι Heinze, Arend, Gruessing, και Lipowsky (2018) στην έρευνά τους έβγαλαν το πόρισμα πως οι μαθητές που δέχονται διδακτική παρέμβαση με άμεση διδασκαλία νοερών υπολογισμών για την εκτέλεση πολυψήφιων προσθέσεων και αφαιρέσεων, εφαρμόζουν πιο συχνά ευέλικτες νοερές στρατηγικές στρατηγικές. Τα ευρήματα της έρευνας των Nemeth, Werker, Arend, και Lipowsky το 2021 έδειξαν ότι η αλληλεπιδραστική μάθηση προωθεί περισσότερο τη χρήση των νοερών στρατηγικών παρά τον κάθετο αλγόριθμο και ο βαθμός υιοθέτησής τους από τους μαθητές είναι υψηλός. Με την άμεση διδασκαλία υπάρχει αλληλεπιδραστική μάθηση, αφού συμμετέχουν όλοι οι μαθητές, παρουσιάζουν τις λύσεις τους, επιχειρηματολογούν για την επιλογές τους ανταλλάσσουν απόψεις και με τους συμμαθητές τους και μοιράζονται τις στρατηγικές τους (DfEE, 1998). Η άμεση διδασκαλία επιλέχτηκε για τη διδακτική παρέμβαση στην παρούσα μελέτη και ήταν αυτή που συνέβαλε ώστε οι μαθητές να γνωρίσουν τους νοερούς υπολογισμούς και να τους εφαρμόσουν. Η τελική δοκιμή της έρευνας έδειξε πως οι μαθητές που δέχτηκαν τη διδακτική παρέμβαση, τείνουν να χρησιμοποιούν περισσότερο τους νοερούς υπολογισμούς από τον κάθετο, ανεξαρτήτως ευέλικτων και μη, σε όλα τα είδη των πράξεων.

Η επιλογή και χρήση των νοερών υπολογισμών φαίνεται πως επηρεάζεται και από τα λεκτικά προβλήματα. Άλλωστε, είναι αποδεδειγμένο πως οι μαθητές χρησιμοποιούν περισσότερο τις νοερές στρατηγικές σε αυτά παρά σε απλές αριθμητικές πράξεις (Heirdsfield & Cooper, 2004a; Murphy, 2004). Το συγκεκριμένο και το λεξιλόγιό τους είναι πιο κατανοητό και γίνονται εύκολα αντιληπτές οι πράξεις που απαιτούνται (Acosta-Tello, 2010).

Άλλα στοιχεία των λεκτικών προβλημάτων που φαίνεται πως επιδρούν στην επιλογή και χρήση των νοερών υπολογισμών είναι το μέγεθος και το είδος των αριθμών. Οι Rathgeb-Schnierer και Green το 2019 προσπάθησαν να εντοπίσουν τις προϋποθέσεις για την προώθηση των ευέλικτων νοερών στρατηγικών στην εκτέλεση των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Κατέληξαν ότι τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων βοηθούν τους μαθητές να ταξινομήσουν τα προβλήματα σε εύκολα και δύσκολα. Επίσης για τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, τα

χαρακτηριστικά των προβλημάτων αποτελούν μια σημαντική βοήθεια για αυτούς στην ανάπτυξη εργαλείων για τη λύση των προβλημάτων. Στην παρούσα έρευνα τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων, (τα είδη και τα μεγέθη των αριθμών στα λεκτικά προβλήματα), φαίνεται να ώθησαν τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν διάφορα είδη νοερών στρατηγικών, (όχι μόνο των ευέλκτων), στην εκτέλεση των πράξεων. Επίσης οι μαθητές απομακρύνονται από την εκτέλεση των πράξεων με νοερούς υπολογισμούς, όταν τα μεγέθη των αριθμών είναι μεγάλα. Οι πράξεις δηλαδή εκτελούνται με νοερούς υπολογισμούς από τους μαθητές, όταν οι αριθμοί είναι μέχρι 4ψήφιοι και οριακά ορθές όταν είναι 5ψήφιοι. Αυτό το συμπέρασμα εξάγεται από τη συγκεκριμένη έρευνα καθώς ελέγχθηκε αν το μέγεθος και το είδος των αριθμών που χρησιμοποιήθηκαν στις απαιτούμενες πράξεις των λεκτικών προβλημάτων προκάλεσαν τη χρήση νοερών στρατηγικών. Η διερεύνηση έγινε και για τις τέσσερις πράξεις. Οι στρατηγικές που αναμένονταν να προκαλέσουν τα συγκεκριμένα μεγέθη και είδη των αριθμών καταγράφηκαν και διαπιστώθηκε από τα φύλλα εργασίας της τελικής διδακτικής παρέμβασης (Α' και Β' φάση) και της τελικής δοκιμής πως όλες οι πράξεις υλοποιήθηκαν με τις αναμενόμενες στρατηγικές.

Συγκεκριμένα, διαπιστώθηκε πως πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις με διψήφιους και τριψήφιους ακέραιους αριθμούς, πολλαπλάσια του 10, προκαλούν την εκτέλεσή τους με τη στρατηγική της διάσπασης του αριθμού (π.χ. 72×320 , $33200:16$). Η ίδια στρατηγική προκαλείται σε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις δεκαδικών αριθμών με δύο δεκαδικά ψηφία επί/διά μονοψήφιου ακέραιου παράγοντα/διαιρέτη, όταν υπάρχουν οι παρακάτω συνθήκες, μεμονωμένα ή συνδυαστικά: το τελευταίο ψηφίο του δεκαδικού αριθμού είναι μηδέν, ο ακέραιος όρος είναι πολλαπλάσιο του δύο και όταν οι όροι μπορούν να διασπαστούν εύκολα σε μικρότερους αριθμούς (π.χ. $7,80:4$, $1,19 \times 4$). Η στρατηγική του διαχωρισμού 1010 προκαλείται στην αφαίρεση ακέραιου πενταψήφιου μειωτέου με ακέραιο πενταψήφιο ή και τετραψήφιο αφαιρετέο, στην αφαίρεση τετραψήφιων ακέραιων, στην πρόσθεση πενταψήφιου με τετραψήφιο ακέραιου, όταν έχουν μηδενικά, είναι πολλαπλάσια του 10 και του 5, ή του 5 (π.χ. $63200-3000$, $64640-63200$, $4025-1275$, $4500-2262$, $63200+1440$). Η ίδια στρατηγική προκαλείται στην πρόσθεση ακέραιων διψήφιων με εύκολο διαχωρισμό στα πολλαπλάσια του 10 και στις μονάδες τους (π.χ. $29+18$, $25+26+27+30$). Η στρατηγική της συσώρευσης N10 προκαλείται στην πρόσθεση ακεραίων πενταψήφιου με τετραψήφιο και στην αφαίρεση ακεραίων τετραψήφιων, όταν μπορούν να αναλυθούν εύκολα σε αριθμούς πολλαπλάσια του 10 (π.χ. $63200+1440$, $4500-2262$). Η στρατηγική

της αντιστάθμισης προκαλείται στη διαίρεση ακέραιου πενταψήφιου διαιρετέου με ακέραιο τριψήφιο διαιρέτη, στη διαίρεση ακέραιου τετραψήφιου διαιρετέου με ακέραιο διψήφιο διαιρέτη όταν οι αριθμοί είναι πολλαπλάσια του 2, ή του 5 ή του 10 ή συνδυαστικά (π.χ. 42240:880, 1440:48). Η ίδια στρατηγική προκαλείται στον πολλαπλασιασμό δεκαδικού παράγοντα με δύο δεκαδικά ψηφία επί μονοψήφιου παράγοντα, όταν το δεκαδικό μέρος βρίσκεται πολύ κοντά στο επόμενο εκατοστό και μπορεί να ρυθμιστεί προς τα πάνω (π.χ. 1,19X4). Η στρατηγική της συσσώρευσης A10 προκαλείται στην πρόσθεση ακέραιων διψήφιων, όταν βρίσκονται πολύ κοντά στην επόμενη δεκάδα (π.χ. 29+18). Η στρατηγική της αρίθμησης και η στρατηγική με τις δυνάμεις του 10 ($\Delta 10$), προκαλείται στον πολλαπλασιασμό ακέραιου τριψήφιου παράγοντα επί ακέραιου μονοψήφιου παράγοντα και στη διαίρεση ακέραιου τριψήφιου διαιρετέου με ακέραιο μονοψήφιο διαιρέτη, όταν οι αριθμοί είναι πολλαπλάσια του 10 (π.χ. 800X3, 800:4). Στις έρευνες που έχουν γίνει, τα χαρακτηριστικά των αριθμών εξετάζονται αν επηρεάζουν την ανάπτυξη ευέλικτων νοερών στρατηγικών και όχι την ευρύτερη χρήση των νοερών υπολογισμών (Verschaffel, Luwel, Torbeyns, & Van Dooren, 2009). Επομένως, συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των λεκτικών προβλημάτων (δηλαδή το μέγεθος και είδος των αριθμών) επηρεάζουν τη χρήση των νοερών υπολογισμών.

Τα συμπεράσματα για το **δεύτερο ερευνητικό ερώτημα**, δηλαδή κατά πόσο συμβάλλουν οι νοεροί υπολογισμοί στην ορθότητα των πράξεων, είναι τα εξής:

Η διδακτική παρέμβαση από τη μεριά του δασκάλου χρησιμοποίησε ως γλωσσικό εργαλείο λέξεις και αριθμούς. Συγκεκριμένα, α) κάποιες αντωνυμίες ως νύξεις στους νοερούς υπολογισμούς («Toraze effect») και β) τα είδη και μεγέθη των αριθμών. Το αποτέλεσμα ήταν ότι οι μαθητές οδηγήθηκαν έμμεσα στους νοερούς υπολογισμούς και σημειώθηκε επιτυχία στην εκτέλεση των μαθηματικών πράξεων και στην απόδοσή τους. Όταν οι μαθητές διαπιστώσουν ότι εξασφαλίζεται η ορθότητα των πράξεων, εφόσον χρησιμοποιούν τους νοερούς υπολογισμούς, τότε νιώθουν μεγαλύτερη ασφάλεια και αυτοπεποίθηση κατά την εκτέλεσή τους. Στην έρευνά της η Hickendorff (2018) αναζήτησε αν οι ευέλικτες στρατηγικές επηρέασαν την απόδοση των μαθητών. Αποδείχτηκε ότι η χρήση των ευέλικτων στρατηγικών επηρεάζει θετικά την απόδοση των μαθητών που τις χρησιμοποιούν. Το ίδιο θετικά φάνηκε στην παρούσα έρευνα ότι συμβάλλουν οι νοεροί υπολογισμοί στην ορθότητα εκτέλεσης των πράξεων και κατ' επέκταση και στην απόδοση των μαθητών. Οι περισσότερες πράξεις εκτελέστηκαν με επιτυχία με τις νοερές στρατηγικές τις οποίες διδάχτηκαν

δασκαλοκεντρικά οι μαθητές με τη διδακτική παρέμβαση. Οι επιδόσεις αυτών των μαθητών στα μαθηματικά σημείωσαν άνοδο.

Στη διδακτική παρέμβαση που έγινε φάνηκε πως οι μαθητές σημείωσαν μεγάλη επιτυχία στις πράξεις που εκτέλεσαν με νοερούς υπολογισμούς. Στην αξιολόγηση της Α' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης σωστές έγιναν οι 104 από τις 112 πράξεις, στην αξιολόγηση της Β' φάσης τελικής διδακτικής παρέμβασης σωστές έγιναν και οι 52, ενώ στην τελική δοκιμή σωστές έγιναν οι 98 από τις 99. Το θεωρητικό πλαίσιο αναφέρει σημαντικές μεταρρυθμίσεις για τον αριθμητισμό που έκαναν χώρες όπως η Αγγλία, η Αυστραλία, η Αμερική στις οποίες προωθήθηκαν οι νοεροί υπολογισμοί και η διδασκαλία τους (Qualifications and Curriculum Authority, 1999) και σύμφωνα με τα όργανα αξιολόγησής τους βελτιώθηκαν οι επιδόσεις των μαθητών τους (National Assessment Program, 2016· National Center for Education Statistics, 2018· National Center for Education Statistics, 2020). Καθώς αντίστοιχη μελέτη και τέτοιο όργανο αξιολόγησης δεν υπάρχει στην Ελλάδα, με την παρούσα έρευνα έγινε μια πρώτη προσπάθεια να εξαχθούν κάποια αντίστοιχα συμπεράσματα.

Οι μαθητές για την εκτέλεση των προσθέσεων και αφαιρέσεων τείνουν να χρησιμοποιούν περισσότερο τη νοερή στρατηγική του διαχωρισμού 1010, η οποία προσιδιάζει με τον κάθετο αλγόριθμο (αναλύονται οι αριθμοί της πράξης σε μονάδες και δεκάδες και στη συνέχεια προστίθενται ή αφαιρούνται ξεχωριστά). Αυτό προκύπτει από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας. Οι μαθητές επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν περισσότερο τη συγκεκριμένη στρατηγική για να εκτελέσουν τις προσθέσεις και αφαιρέσεις των λεκτικών προβλημάτων των φύλλων εργασίας. Από τις 80 προσθέσεις που έγιναν συνολικά με νοερούς υπολογισμούς σε όλα τα φύλλα εργασίας, πάνω από τις μισές εκτελέστηκαν με τη στρατηγική του διαχωρισμού (48) και συνολικά από τις 56 αφαιρέσεις που έγιναν με νοερούς υπολογισμούς σχεδόν όλες εκτελέστηκαν με τη στρατηγική του διαχωρισμού (52). Ένας λόγος πιθανόν που την επέλεξαν είναι διότι βρίσκεται πιο κοντά στον κάθετο αλγόριθμο, στο συνήθη τρόπο υπολογισμού που γνώριζαν και στην νοερή αναπαράστασή του. Επιπρόσθετα, η βιβλιογραφία συγκλίνει με την άποψη αυτή θεωρώντας ότι η στρατηγική με ευρεία χρήση στο Δημοτικό σχολείο για τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης είναι του διαχωρισμού (Λεμονίδης, 2020).

Στις διαιρέσεις και τους πολλαπλασιασμούς οι μαθητές φαίνεται πως χρησιμοποιούν στρατηγικές με πιο περίπλοκες νοητικές διεργασίες και να ξεφεύγουν από τον παγιωμένο κάθετο αλγόριθμο. Αυτό προκύπτει από τα αποτελέσματα της

έρευνας που έδειξαν ότι οι μαθητές από τους 55 πολλαπλασιασμούς που έγιναν με νοερούς υπολογισμούς στα φύλλα εργασίας οι περισσότεροι υλοποιήθηκαν με τη στρατηγική της διάσπασης του αριθμού (34 από τους 55), ενώ μερικοί εκτελέστηκαν με την ολιστική στρατηγική της αντιστάθμισης (8 από τους 55). Και οι δύο είναι νοερές στρατηγικές που απομακρύνονται από τη συνηθισμένη πράξη του κάθετου αλγόριθμου. Επιπλέον η αντιστάθμιση είναι πιο προχωρημένη στρατηγική, καθώς απαιτεί πιο σύνθετες νοητικές διαδικασίες. Στις διαιρέσεις οι μαθητές φαίνεται να στρέφονται ακόμα περισσότερο στην εκτέλεσή τους με προωθημένες νοερές στρατηγικές, όπως τις ολιστικές. Αυτό προκύπτει από την παρούσα εργασία, καθώς από τις 72 συνολικά διαιρέσεις που έγιναν με νοερούς υπολογισμούς στα φύλλα εργασίας, οι μαθητές, τις μισές περίπου τις εκτέλεσαν με τη στρατηγική της διάσπασης (33 από τις 72) και σχεδόν τον ίδιο αριθμό διαιρέσεων εκτέλεσαν και με την ολιστική στρατηγική της αντιστάθμισης (28 από τις 72). Στον πολλαπλασιασμό και ακόμα περισσότερο στη διαίρεση, οι μαθητές φαίνεται να χρησιμοποιούν πιο σύνθετες νοερές στρατηγικές και ο λόγος πιθανόν να είναι ότι η διδακτική παρέμβαση κατάφερε να αλλάξει τη φιλοσοφία τους σχετικά με την εκτέλεση των πράξεων με κάθετο αλγόριθμο και να τους οδήγησε να αναζητήσουν νέους εναλλακτικούς τρόπους υπολογισμού (νοερούς υπολογισμούς), οι οποίοι θεωρήθηκαν από τα ίδια τα παιδιά ως αποτελεσματικότεροι για την επιτυχημένη εκτέλεση των πράξεων αυτών. Επίσης, η μετάβαση από τον κάθετο αλγόριθμο στους νοερούς υπολογισμούς ίσως να έγινε πιο εύκολα στη διαίρεση, διότι οι μαθητές διδάσκονται τον κάθετο αλγόριθμο από την Δ' τάξη και όχι νωρίτερα, οπότε πιθανόν να υπήρχε περιθώριο να ήταν πιο δεκτικοί στη μάθηση και εκτέλεση εναλλακτικών τρόπων υπολογισμού. Αντίθετα, στις πράξεις της πρόσθεσης και αφαίρεσης, ο κάθετος αλγόριθμος διδάσκεται νωρίτερα, στην Α' και Β' τάξη. Έτσι, οι μαθητές εξασκούνται διαρκώς και είναι πιο δύσκολο όταν φτάσουν στην Ε' τάξη να αλλάξουν συνήθεια και να τις εκτελέσουν με νοερούς υπολογισμούς.

Σε έρευνες που έχουν γίνει έδειξαν ότι στην Ε' και Στ' τάξη στην πρόσθεση και στην αφαίρεση δημοφιλέστερη στρατηγική υπολογισμού είναι ο κάθετος αλγόριθμος (Λεμονίδης, 2020). Για τη διαίρεση, οι έρευνες έδειξαν ότι περισσότερο χρησιμοποιείται η ανάκληση γνωστών αριθμητικών παραγόντων, η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού και η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (Robinson, et al., 2006). Επίσης σε προηγούμενες έρευνες που πραγματοποιήθηκαν το 2010 από το «Δίκτυο των Εκπαιδευτικών των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής», ακόμα και μετά από διδακτική παρέμβαση νοερών υπολογισμών στις μεγάλες τάξεις Ε' και Στ', σε 308

μαθητές, ο κάθετος αλγόριθμος παρέμεινε η δημοφιλέστερη στρατηγική στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Το γεγονός αυτό αντιστράφηκε στην παρούσα εργασία, όπου οι μαθητές μετά τις διδακτικές παρεμβάσεις κατέστησαν τις νοερές στρατηγικές τον δημοφιλέστερο τρόπο υπολογισμού, (πρόσθεση και αφαίρεση με διαχωρισμό, πολλαπλασιασμό με διάσπαση και διαίρεση με διάσπαση και συσσώρευση) και μάλιστα με μεγάλη επιτυχία. Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο γεγονός ότι ακολουθήθηκε συγκεκριμένη δομή για την υλοποίηση της διδακτικής παρέμβασης με το επιθυμητό μοντέλο διδασκαλίας νοερών υπολογισμών και όλα τα οφέλη του (DfEE, 1998). Αντιθέτως, στην έρευνα από το «Δίκτυο των Εκπαιδευτικών των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής» δόθηκε ελευθερία στους εκπαιδευτικούς να διδάξουν τους νοερούς υπολογισμούς με τον δικό τους τρόπο, πιθανόν και παραδοσιακά και χωρίς να δημιουργήσουν το κατάλληλο διδακτικό κλίμα που θα βοηθούσε τους μαθητές να κατανοήσουν τη συμβολή και την αποτελεσματικότητα των νοερών υπολογισμών στις πράξεις.

Τα συμπεράσματα για **το τρίτο ερευνητικό ερώτημα**, που αναφέρεται στις προϋποθέσεις που εντοπίζουν οι μαθητές για να εκτελέσουν τις πράξεις, είναι τα εξής:

Οι μαθητές δεν εφαρμόζουν γενικευμένα τους νοερούς υπολογισμούς ακόμα και αν υπάρχουν οι παράγοντες που επηρεάζουν τη χρήση. Θα πρέπει να συντρέχουν και οι προϋποθέσεις που ορίζουν οι ίδιοι ώστε να επιλέξουν να εκτελέσουν τις πράξεις με νοερές στρατηγικές και όχι με κάθετο αλγόριθμο. Σε αυτό το συμπέρασμα καταλήγει ο ερευνητής ο οποίος στην εργασία του προσπάθησε να διαπιστώσει αν οι μαθητές διέκριναν χαρακτηριστικά στις πράξεις των λεκτικών προβλημάτων που τους παρακίνησαν να τις εκτελέσουν με νοερούς υπολογισμούς. Τα χαρακτηριστικά τα οποία διέκριναν οι μαθητές αφορούσαν τους όρους των πράξεων όπου: έπρεπε να τελειώνουν σε 0 ή 5 (στρατηγική της χρήσης του αριθμού 5, πολλαπλασιασμός και διαιρέσεις με δυνάμεις του 10), να έχουν εύκολα κριτήρια διαιρετότητας (στρατηγική της διάσπασης), να πολλαπλασιάζονται και να υποδιπλασιάζονται εύκολα (στρατηγική της αντιστάθμισης), να μπορούν να αναλύονται εύκολα σε επιμέρους αθροίσματα (στρατηγική του διαχωρισμού), γινόμενα ή πηλίκια (στρατηγική της διάσπασης), ώστε να διευκολύνεται και η εκτέλεση των ενδιάμεσων πράξεων που θα προκύψουν (στρατηγική της συσσώρευσης, στρατηγική αντιστάθμισης), οι αριθμοί να μην είναι μεγάλοι και δύσκολοι για να μπορούν να τους διαχειριστούν εύκολα οι μαθητές (διευκολύνει την υλοποίηση όλων των νοερών στρατηγικών). Φαίνεται πως καθεμιά από αυτές τις προϋποθέσεις απευθύνεται σε ένα είδος νοερής στρατηγικής ή σε είδη

νοερών στρατηγικών. Στη βιβλιογραφία δεν φαίνεται να υπάρχουν αναφορές για τις προϋποθέσεις εκτέλεσης των πράξεων με νοερές στρατηγικές από τους μαθητές. Σίγουρα θα μπορούσε να βοηθήσει στη διδασκαλία τους και να γίνει κατανοητό τι θεωρούν οι ίδιοι οι μαθητές λειτουργικό από την πλευρά τους για τους νοερούς υπολογισμούς. Τι είναι αυτό που θέλουν να ισχύει στις πράξεις, ώστε να τους εφαρμόσουν.

Επίσης διαπιστώνεται πως όταν οι μαθητές ακολουθούν ακόμα και έμμεσα τις προτροπές του δασκάλου τότε δεν μένουν σε παγιωμένες μεθόδους υπολογισμού, δηλαδή τον κάθετο αλγόριθμο. Στη διδακτική παρέμβαση, ο δάσκαλος προέτρεψε αρκετές φορές τους μαθητές έστω και έμμεσα να ακολουθήσουν εναλλακτικές μεθόδους υπολογισμού. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως όσες φορές ακολούθησαν τις προτροπές του, ξέφυγαν από τον κάθετο αλγόριθμο, εφάρμοσαν νέες στρατηγικές υπολογισμού οι οποίες είτε προέρχονταν από νέα γνώση είτε αποτελούσε σύνθεση ιδεών με τους συμμαθητές τους.

Δεν ήταν απαραίτητο οι μαθητές να έχουν αναπτύξει ευελιξία/προσαρμοστικότητα για να εκτελέσουν τις πράξεις με νοερούς υπολογισμούς. Μάλιστα αυτό προκύπτει από την έρευνα, όπου στην έναρξή της, στην Α' φάση της τελικής διδακτικής παρέμβασης, πριν ακόμα γίνει συστηματική η διδασκαλία νοερών υπολογισμών, οι μαθητές εκτέλεσαν την απαιτούμενη πράξη του λεκτικού προβλήματος με νοερούς υπολογισμούς. Μπορεί το πλήθος τους να ήταν μικρό και οι μαθητές να μην είχαν αναπτύξει ικανό ρεπερτόριο νοερών υπολογισμών. Αυτό όμως δεν εμπόδισε την ανάπτυξη και την εφαρμογή τους. Στη βιβλιογραφία αναφέρεται πως αν οι μαθητές δεν έχουν αναπτύξει πλούσιο ρεπερτόριο νοερών στρατηγικών, θα χρησιμοποιήσουν μόνο έναν τρόπο υπολογισμού στις περισσότερες πράξεις, αυτόν με τον οποίο είναι εξοικειωμένοι περισσότερο (κάθετο αλγόριθμο), γεγονός που θα επηρεάσει και την επίδοσή τους (Λεμονίδης & Λυγούρας, 2008). Επίσης, τα είδη των αριθμών, αποτελούν χαρακτηριστικά της πράξης που επηρεάζουν την ευελιξία (Blöte, Van der Burg, & Klein, 2001), ενώ στην παρούσα έρευνα εξετάστηκαν αν αποτελούν χαρακτηριστικά που επηρεάζουν τη χρήση νοερών υπολογισμών.

Πρόταση λοιπόν αποτελεί η επισταμένη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών με τη βοήθεια του διαλόγου, ώστε οι μαθητές να κερδίσουν τα πολλαπλά οφέλη (DfEE, 1998). Όπως αναφέρθηκε, η συστηματική διδασκαλία και ενασχόληση με τους νοερούς υπολογισμούς ενισχύει τη χρήση τους. Το πλαίσιο της διδασκαλίας τους στα αναλυτικά προγράμματα δεν είναι ιδιαίτερα υποστηρικτικό και ίσως αυτός να είναι και ένας από

τους λόγους που πιθανόν οι εκπαιδευτικοί να αφιερώνουν περισσότερο χρόνο στον κάθετο αλγόριθμο. Τα τελευταία χρόνια γίνεται προσπάθεια για την αντιστροφή του κλίματος με κατά τόπους επιμορφώσεις εκπαιδευτικών, με συγγραφή νέων εγχειριδίων μαθηματικών για μερικές τάξεις μόνο, αλλά αυτό δεν είναι αρκετό. Χρειάζεται συνολική και όχι τμηματική υποστήριξη που να επιλαμβάνεται του θέματος.

Επίσης πρόταση γίνεται και για διευρυμένη αναζήτηση και άλλων γλωσσικών χαρακτηριστικών, που μπορούν να συμβάλλουν στη χρήση των νοερών υπολογισμών. Στην παρούσα έρευνα επιλέχθηκαν οι αντωνυμίες εφόσον έδιναν τη δυνατότητα να τις αντιστοιχίσουν οι μαθητές με μαθηματικές έννοιες (Rowland, 1992), κάτι το οποίο επιβεβαιώθηκε. Στη διδακτική παρέμβαση στο ιδιότυπο μαθηματικό λεξιλόγιο συμπεριλήφθηκαν και άλλες λέξεις όπως επίθετα, επιρρήματα, ουσιαστικά, σύνδεσμοι, ρήματα, για να χρησιμοποιηθούν ως νύξεις σε μαθηματικές έννοιες. Πιθανόν μερικές από αυτές, αν ερευνηθεί επισταμένα, να διαδραματίσουν παρόμοιο ενισχυτικό ρόλο με τις αντωνυμίες στους νοερούς υπολογισμούς.

Εκτός των γλωσσικών χαρακτηριστικών μπορούν να ερευνηθούν και παράγοντες οι οποίοι δημιουργούν ανάσχεση στην ανάπτυξη των νοερών υπολογισμών. Αν ένας εκπαιδευτικός γνώριζε τι είναι αυτό που απομακρύνει τους μαθητές από τους νοερούς υπολογισμούς, θα το απέφευγε, δεν θα το χρησιμοποιούσε και θα προετοίμαζε τη διδασκαλία του κατάλληλα. Πιθανόν να είναι το πολύπλοκο λεξιλόγιο των προβλημάτων, οι δαιδαλώδεις ασκήσεις με πολλά βήματα, οι δύσκολοι αριθμοί ακόμα και η αρνητική στάση των μαθητών απέναντι στο πιθανό λάθος που μπορεί να κάνουν κατά την εκτέλεση μιας πράξης με νοερούς υπολογισμούς. Επίσης θα μπορούσαν να διερευνηθούν τα χαρακτηριστικά που τους ωθούν να εκτελέσουν τις πράξεις με νοερούς υπολογισμούς. Στη συγκεκριμένη έρευνα οι μαθητές κατάφεραν και εντόπισαν αρκετά. Στη βιβλιογραφία δεν φαίνεται να υπάρχουν σχετικές αναφορές. Ωστόσο θα ήταν μάλλον χρήσιμο να γνωρίζει ο εκπαιδευτικός τι ωθεί τους μαθητές να εκτελέσουν τις πράξεις με νοερούς υπολογισμούς. Έτσι θα μπορέσει να σχηματίσει ολοκληρωμένη άποψη σχετικά με τι να αποφεύγει και τι να προσεγγίζει για να το χρησιμοποιήσει στη διδασκαλία τους.

Η διδακτική παρέμβαση έγινε με συγκεκριμένο τρόπο για τη διδασκαλία και την προώθηση των νοερών υπολογισμών (DfEE, 1998). Δεν είναι γνωστό αν θα αποφέρει το ίδιο αποτέλεσμα σε περίπτωση που τροποποιηθεί ή αλλάξει ή αν ενσωματωθούν και άλλα στοιχεία. Επομένως η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο γίνεται η διδακτική παρέμβαση αποτελεί και πρόταση της παρούσης ερευνητικής

εργασίας. Αν δηλαδή ένας δάσκαλος εφαρμόσει ελεύθερα τη δική του διδακτική παρέμβαση με τον δικό του τρόπο, θα έχει τα ίδια αποτελέσματα.

Μία ακόμα πρόταση αποτελεί η αναζήτηση παραγόντων που συνδέονται με τη γνωστική ετοιμότητα και επάρκεια των μαθητών σε σχέση με τους νοερούς υπολογισμούς, οι οποίοι μπορούν να εντοπιστούν με σταθμισμένα εργαλεία και να συνδυαστούν με την πολιτισμική, κοινωνική, οικονομική ή γεωγραφική προέλευση του μαθητικού πληθυσμού.

Τέλος, προτείνεται η διερεύνηση της διδασκαλίας των νοερών υπολογισμών με μαθητές από πολλαπλά γλωσσικά περιβάλλοντα. Λόγω των διαφορετικών γλωσσών, είναι δύσκολο για μαθητές μεταναστευτικής βιογραφίας να κατανοήσουν το μαθηματικό λεξιλόγιο και να μπορέσουν να ανταπεξέλθουν μαθησιακά. Οπότε προτείνεται αφενός η απλοποίηση του μαθηματικού λεξιλογίου και αφετέρου η αναζήτηση γλωσσικών εργαλείων που θα συνδέσουν τους μαθητές αυτούς με τους νοερούς υπολογισμούς, τη διδασκαλία και την εκμάθησή τους.

5 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Acosta-Tello, E. (2010). Making Mathematics Word Problems Reliable Measures of Student Mathematics Abilities. *Journal of Mathematics Education*, 3(1), 15-26.
- Anghileri, J. (1999). Issues in teaching multiplication and division. *Issues in teaching numeracy in primary schools*, 184-194.
- Anghileri, J. (1999). Issues in teaching numeracy in primary schools. In *Issues in teaching multiplication and division* (pp. 184-194).
- Askew, M., & Wiliam, D. . (1995). *Recent research in mathematics education 5-16*. London, England: HM Stationery Office.
- Australian Curriculum Assessment and Reporting Authority. (n.d.). *australiancurriculum*. Retrieved 04 2020, from [www.australiancurriculum.edu.au: https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/?year=11754&strand=Number+and+Algebra&strand=Measurement+and+Geometry&strand=Statistics+and+Probability&capability=ignore&capability=Literacy&capability=Numeracy&capability=Information+and](https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/?year=11754&strand=Number+and+Algebra&strand=Measurement+and+Geometry&strand=Statistics+and+Probability&capability=ignore&capability=Literacy&capability=Numeracy&capability=Information+and)
- Azmitia, M., & Montgomery, R. (1993). Friendship, transactive dialogues, and the development of scientific reasoning. *Social Development*, 2(3), 202-221.
- Babbie, E. (2011). *Εισαγωγή στην κοινωνική έρευνα*. Αθήνα: Κριτική Α.Ε.
- Baek, J. (1998). Children's Invented Algorithms for Multidigit Multiplication Problems. (L. Morrow, & J. Margaret, Eds.) *The Teaching and Learning of Algorithms in Social Mathematics*, 151-60.
- Βάμβουκας, Μ. (2010). *Εισαγωγή στην Ψυχοπαιδαγωγική έρευνα και Μεθοδολογία*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.
- Baxter, J., Woodward, J., & Olson, D. (2001). Effects of reform-based mathematics instruction on low achievers in five third-grade classrooms. *The Elementary School Journal*, 101(5), 529-547.
- Beishuizen, M. (2001). Different approaches to mastering mental calculation strategies. *Principles and practices in arithmetic teaching*, 119-130.

- Beishuizen, M., & Anghileri, J. (1998). Which mental strategies in the early number curriculum? A comparison of British ideas and Dutch views. *British Educational Research Journal*, 24(5), 519-538.
- Berelson, B. (1948). *The analysis of communication content*. Skrivemaskinstua.
- Berelson, B. (1952). *Content analysis in communication research*.
- Bills, L. (2000). 'Politeness in teacher-student dialogue: a socio-linguistic analysis'. *For the learning of Mathematics*, 2(20), 40-47.
- Blöte, A., Klein, A., & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and instruction*, 10(3), 221-247.
- Blöte, A., Van der Burg, E., & Klein, A. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology*, 3(93), 627.
- Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism: Perspective and method*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall. . Englewood Cliffs: NJ: Prentice-Hall.
- Borkowski, J. (1985). Signs of intelligence: Strategy generalization and metacognition. *The growth of reflection in children*(7), 105-144.
- Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. In H.-G. Steiner (Ed.). 54, pp. 110-119. Bielefeld, Germany: Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990* (xx ed.). (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Trans.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Brown, M., Askew, M., Baker, D., Denvir, H., & Millet, A. (1998). Is the national numeracy strategy research-based? *British Journal of Educational Studies*, 46(4), 362-385.
- Bruner, J. S. (1990). *Acts o Meaning*. Harvard University Press.
- Bryman, A. (2016). *Social research methods*. Oxford university press.
- Burrill, G. (1997). The NCTM Standards: Eight Years Later. *School Science and Mathematics*, 97(6), 335-339.
- Burton, L. (1996). Mathematics, and its learning, as narrative—A literacy for the twenty-first century. In D. Baker, J. Clay, & C. Fox (Eds.), *Challenging Ways of Knowing in English, Maths and Science*. Sussex: Falmer.
- Callaghan, J. (1987). *Time and chance*. London: Collins.

- Campbell, D., & Cook, T. (1979). *Quasi-experimentation*. Chicago IL: Rand McNally.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E., & Empson, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education*, 3-20.
- Carpenter, T., & Moser, J. (1982). The Development of Addition and Subtraction Problem-Solving Skills. Στο T. Carpenter, J. Moser, T. Romberg, & T. Romberg (Επιμ.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective* (σσ. 9-24). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- CBS. (2011). Asking effective questions . *Capacity Building Series*.
- Champan, A. (2002). *Language Practices in School Mathematics: a Social Semiotic Perspective*. Perth, WA: Edwin Mellen Press.
- Cichon, D., & Ellis, J. (2003). The effects of MATH Connections on student achievement, confidence, and perception. In S. Senk, & D. Thompson (Eds.), *Standards-based school mathematics curricula: What are they? What do students learn?* (pp. 345-374). N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Clement, J. (1991). Constructivism in the classroom [Review of the book *Transforming children's mathematic education: International perspectives*]. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 422-428.
- Coben, D., Colwell, D., Macrae, S., Boaler, J., Brown, M., & Rhodes, V. (2003). *Adult numeracy: Review of research and related literature*. London: National Research and Development Centre for adult literacy and numeracy.
- Cooper, T. J., Heirdsfield, A., & Irons, C. (1996). Children's mental strategies for addition and subtraction word problems. *Children's number learning*, 147-162.
- Corestandards. (2009). *common core state standards*. Retrieved 07 2020, from [www.corestandards.org: http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf](http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf)
- Craig, A. (2010). Comparing research into mental calculation strategies in mathematics education and psychology. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 73-74.
- Csíkós, C. (2016). Strategiex and performance in elementary students' three-digit mental addition. *Educational Studies in Mathematics*, 91(1), 123-139.

- D'Ambrosio. (2003). The role of mathematics in building a democratic society. *Quantitative Literacy. Why Numeracy Matters for Schools and Colleges*, (pp. 235-238).
- De Lange, J. (2006). *Mathematical literacy for living from OECD-PISA perspective*. Department for Education and Employment. (1998). *The Framework for Teaching Mathematics: Reception to Year 6*. London: DfEE.
- Δερβίσης, Σ. (1998). *Μεθοδολογία της διδακτικής και ειδική μεθοδολογία της Διδασκαλίας-Μάθησης* (Τόμ. 5). Θεσσαλονίκη.
- Duah, F. K. (2009). *An Investigation into the Mental Calculation Strategies Used By 12-Years-Old with National Numeracy Strategy Exposure*. Southampton: University of Southampton.
- Earl, L., Watson, N., Levin, B., Leithwood, K., Fullan, M., & Torrance, N. . (2003). *Watching and learning 3, final report of the external evaluation of England's National Literacy and Numeracy Strategies*. Toronto: Ontario: Ontario Institute for Studies in Education of the University of Toronto.
- Ebbeck, M. (2006, Jul 07). National reform in education in Australia — some implications for early childhood education. *Early Child Development and Care*, 77(1), 37-45.
- Fuji, T., Shimizu, Y., Kumagai, K., & Sugiyama, Y. (1998). A cross-cultural study of classroom practices based on a common topic. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics*, 17, 185-194.
- Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray H. G., Human, P. G. , Olivier, A. I., & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematic Education*, 130-162.
- Geisser, G. (1955). *Das Problem des Unterrichtsmethode*. Weinheim.
- Gerofsky, S. (1999b). The Word Problem as Genre in Mathematics Education, Unpublished Ph.D. thesis. Burnaby, B.C., Simon Fraser University.
- Gillies, R., & Haynes, M. (2011). Increasing explanatory behaviour, problem-solving, and reasoning within classes using cooperative group work. *Instructional Science*, 39, 349-346.
- Gray, E. (1997). Compressing the counting process: developing a flexible interpretation of symbols. *Teaching and learning early number*, 63-72.

- Harris, S., Keys, W., & Fernandes, C. (1997). Third International Mathematics and Science Study: second national report part 1. *National Foundation for Educational Research*.
- Hegarty, M., Mayer, R., & Monk, C. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of educational psychology*, 87(1), 18-32.
- Heinze, A., Star, J., & Verschaffel, L. (2009). *Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education*.
- Heinze, A., Arend, J., Gruessing, M., & Lipowsky, F. (2018). Instructional approaches to foster third graders' adaptive use of strategies: an experimental study on the effects of two learning environments on multi-digit addition and subtraction. *Instructional Science*, 46(6), 869-891.
- Heirdsfield, A., & Cooper, T. (2004a). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: Case studies of flexible and inflexible computers. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 443-463.
- Heirdsfield, A., Cooper, T., Mulligan, J., & Irons, C. (1999). Children's mental multiplication and division strategies. *Proceedings of 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Maths Education* (pp. 3-89). Psychology of Mathematics Education.
- Hickendorff, M. (2018). Dutch sixth graders' use of shortcut strategies in solving multidigit arithmetic problems. *European Journal of Psychology of Education*, 33(4), 577-594.
- Holyoak, K. (1991). Symbolic connectionism: Toward third-generation theories of expertise. In K. Ericsson, & J. Smith (Eds.), *Toward a general theory of expertise: Prospects and limits* (pp. 301-335). Cambridge: Cambridge University Press.
- Καχριμάνης, Γ., Κόμης, Β., & Αβούρης, Ν. (2008). Μεθοδολογίες ανάλυσης της συνεργασίας. Στο Β. Κόμης, Ν. Αβούρης, & Χ. Καραγιαννίδης (Επιμ.), *Συστήματα και μοντέλα συνεργασίας για εργασία, μάθηση, κοινότητες πρακτικής και δημιουργία γνώσης* (σσ. 179-212). Αθήνα: Κλειδάριθμος.
- Klein, A. S., Beishuizen, M., & Treffers, A. (1998). The empty number line in Dutch second grades: Realistic versus gradual program design. *Journal for Research in Mathematics Education*, 443-464.

- Kurtz, B., & Weinert, F. (1989). Metamemory, memory performance, and causal attributions in gifted and average children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 48(1), 45-61.
- Κυριαζή, Ν. (2002). *Η κοινωνιολογική έρευνα. Κριτική επισκόπηση των μεθόδων και των τεχνικών*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
- Lave, J., & Wegner, E. (1991). *Situated Learning - Legitimate Peripheral Participation*. USA: Cambridge University Press.
- Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής. Νοεροί υπολογισμοί*. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.
- Λεμονίδης, Χ. (2020). *Νοεροί υπολογισμοί και εκτιμήσεις. Από την έρευνα στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.
- Λεμονίδης, Χ., & Λυγούρας, Γ. (2008). Η επίδοση και η ευελιξία των μαθητών της τρίτης Δημοτικού στους νοερούς υπολογισμούς. Ευκλείδης Γ'.
- LeFevre, J., & Morris, J. (1999). More on the relation between division and multiplication in simple arithmetic: Evidence for mediation of division solutions via multiplication. *Memory & cognition*, 5(27), 803-812.
- Love, E., & Pimm, D. (1996). “‘This is so’: a text on texts”. In Bishop, A. et al. (eds), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 371-409). Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.
- Maclellan, E. (2001). Mental Calculation: its place in the development of numeracy. *Westminster Studies in Education*, 24(2), 145-154.
- Marks, G., & Mousley, J. (1990). Mathematics education and genre: Dare we make the process writing mistake again? *Language and Education*, 4(2), 117-135.
- Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 97-111.
- Mathnasium the Math Learning Center. (2018, 09 21). Retrieved 08 2020, from mathnasium.com: <https://www.mathnasium.com/littleton/news/why-did-they-change-the-way-they-teach-math>
- Mercer, N. (2000). *The Guided Construction of Knowledge*. Multilanguage Matters Ltd.
- Morgan, C. (1998). *Writing Mathematically: the Discourse of Investigation*. London: Falmer Press.
- Murphy, C. (2004). How do children come to use a taught mental calculation strategy? *Educational Studies of Mathematics*, 56, 3-18.

- National Assessment of Educational Progress. (n.d.). *NAEP*. Retrieved 07 2020, from nces.ed.gov: <https://nces.ed.gov/nationsreportcard/>
- National Assessment of Educational Progress. (n.d.). *NAEP*. Retrieved 07 2020, from nces.ed.gov: <https://nces.ed.gov/nationsreportcard/about/>
- National Assessment of Educational Progress. (n.d.). *The Nation's Report Card*. Retrieved 07 2020, from nationsreportcard.gov: <https://www.nationsreportcard.gov/mathematics/nation/scores/?grade=4>
- National Assessment Program. (2016). *Results and reports*. Retrieved 07 2020, from nap.edu.au: <https://www.nap.edu.au/results-and-reports/national-reports>
- National Assessment Program. (n.d.). *NAP*. Retrieved 07 2020, from nap.edu.au: <https://www.nap.edu.au/about/why-nap>
- National Center for Education Statistics. (2018). Ανάκτηση 05 2020, από https://nces.ed.gov/nationsreportcard/subject/about/pdf/NAEP_Overview_Brochure_2018.pdf
- National Center for Education Statistics. (2020, 08). *nces.ed.gov*. Retrieved from NCES: https://nces.ed.gov/programs/digest/d02/images/figures/1f_A_1.gif
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Standards_and_Positions*. Retrieved 05 2020, from nctm.org: https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/PSSM_ExecutiveSummary.pdf
- National Council of Teachers of Mathematics. (2006). *Curriculum Focal Points*. Retrieved 05 2020, from facstaff.cbu.edu: http://facstaff.cbu.edu/~wschrein/media/NCTM_document.pdf
- National Council of Teachers of Mathematics. (2006, 04). *FAU*. Retrieved 06 2020, from www.fau.edu: [http://math.fau.edu/yiu/PSRM2015/yiu/New%20Folder%20\(4\)/Downloaded%20Papers/FocalPoints2006.pdf](http://math.fau.edu/yiu/PSRM2015/yiu/New%20Folder%20(4)/Downloaded%20Papers/FocalPoints2006.pdf)
- National Council of Teachers of Mathematics. (2013). *Supporting the Common Core State Standards for Mathematics*. Retrieved from nctm.org: https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Position_Statements/Common%20Core%20State%20Standards.pdf
- Nemeth, L., Werker, K., Arend, J., & Lipowsky, F. (2021). Fostering the acquisition of subtraction strategies with interleaved practice: An intervention study with German third graders. *Learning and Instruction, 71*.

- Novotná, J., & Hošpesová, A. (2007). What is the price of Topaze. *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 4, pp. 25-32. Seoul: PME.
- Nunes, T., & Bryant, T. (2007). *Τα παιδιά κάνουν μαθηματικά*. Gutenberg.
- Oliver, A., Murray, H., & Human, P. (1991). Children's solution strategies for division problems. Στο J. F.-M. (Ed.) (Επιμ.), *Proceeding of the Sixteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. 2, σσ. 152-159. Durham, New Hampshire: PME.
- Organisation for Economic Cooperation and Development. (2014). *PISA 2012 Results in Focus*. Retrieved 03 2020, from oecd.org:
<https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-overview.pdf>
- Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων. (2006). *Βιβλίο του δασκάλου για την Ε' Δημοτικού*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.
- Organization for Economic Cooperation and Development. (1999). *Measuring Student Knowledge and Skills. A New Framework for Assessment*. (OECD, Ed.) Paris: OECD.
- Pintrich, P., & De Groot, E. (1990). Motivational and self-regulated learning components of classroom academic performance. *Journal of educational psychology*, 82(1), 33.
- Proulx, J. (2013). Mental mathematics, emergence of strategies, and the enactivist theory of cognition. *Educational Studies in Mathematics*.
- Qualifications and Curriculum Authority. (1999). *Teaching Mental Calculation Strategies: guidance for teachers at key stages 1 and 2*. London: QCA.
- Rathgeb-Schnierer, E., & Green, M. (2019). Developing flexibility in mental calculation. *Educação & Realidade*, 44, 1-17.
- Resnick, L., Bill, V., & Lesgold, S. (1992). Developing thinking abilities in arithmetic class. *Neo-Piagetian theories of cognitive development: Implications and applications for education*, 210-230.
- Reys, R. (1984). Mental computation and estimation: Past, present, and future. *The Elementary School Journal*, 5(84), 547-557.
- Robinson, K., Arbuthnott, K., Rose, D., McCarron, M., Globa, C., & Phonexay, S. (2006). Stability and change in children's division strategies. *Journal of Experimental Child Psychology*, 3(93), 224-238.

- Robson, C. (2007). *Η έρευνα του πραγματικού κόσμου. Ένα μέσον για κοινωνικούς επιστήμονες και επαγγελματίες ερευνητές*. (B. Νταλάκου, & K. Βασιλικού, Μεταφρ.) Αθήνα: Gutenberg.
- Rowland, T. (1992). Pointing with pronouns. *For The Learning of Mathematics*, 12(2).
- Rowland, T. (1995). Hedges in mathematics talk: Linguistic pointers to uncertainty. 29(4), 327-353.
- Rowland, T. (1999). Pronouns in mathematical talk: Power, vagueness, and generalisation. 19(2), 19-26.
- Seeley, C. L. (2005). Do the math in your head. *NCTM News Bulletin*.
- Siegler, R. S., & Lemaire, P. (1997). Older and younger adults' strategy choices in multiplication: testing predictions of ASCM using the choice/no choice method. *Journal of Experimental Psychology: General*(126), 71-92.
- Singer, F., & Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 9-26.
- Solomon, Y., & O' Neill, J. (1998). 'Mathematics and narrative'. *Language and Education*, 3(12), 210-221.
- Stöcker, K. (1975). *Neuzeitliche Unterrichtsgestaltung* (Τόμ. 16). München.
- Strong, R. W., Silver, H. F., & Perini, M. J. (2001). Making students as important as standards. *Educational Leadership*, 59(3), 2001.
- Svajcer, V. (1981). Sinn und Stellenwert der Kleinarbeit. *Gruppenunterricht: Idee, Wirklichkeit, Perspektive*, 21, 17-28.
- Τζεκάκη, Μ. (1998). *Μαθηματικές δραστηριότητες για την προσχολική ηλικία*. Αθήνα: Gutenberg - Γιώργος & Κώστας Δαρδανός.
- Thompson, I. (1997). Mental and written algorithms: Can the gap be bridged. *Teaching and learning early number*, 97-109.
- Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. . *Educational studies in Mathematics*,, 50(1), 29-47.
- Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM*, 41(5), 541-555.
- U.S. Department of Education. (2019). *National center for educational statistics*. Retrieved 07 2020, from nces.ed.gov:

- https://nces.ed.gov/nationsreportcard/subject/about/pdf/NAEP_Overview_Brochure_2018.pdf
- UK Government. (n.d.). *Key Stage*. Retrieved 07 2020, from www.gov.uk:
<https://www.gov.uk/government/collections/statistics-key-stage-1>
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Realistic mathematics education in the Netherlands. *Principles and practices in arithmetic teaching: Innovative approaches for the primary classroom*, 49-63.
- Vaughan, W. (2002). Effects of Cooperative Learning on Achievement and Attitude Among Students of Color. *The Journal of Educational Research*, 95(6), 359-364.
- Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 3(24), 335-359.
- Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2011). Strategy flexibility in children with low achievement in mathematics. *Educational and Child Psychology*, 24(2), 16-27.
- Von Glasersfeld, E. (1991). *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers.
- Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and Language* (A. Kozulin, Trans & Ed.). Cambridge: MA: MIT Press.
- Wagner, D. (2003). *Students and Teachers Listening to Themselves: Language Awareness in the Mathematics Classroom*. International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Wagner, D., & Eisenmann, B. H. (2008). “Just don’t”: The suppression and invitation of dialogue in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 2(67), 143-157.
- Χαλικιάς, Μ., & Λάλου, Π. (2015). Τα είδη έρευνας. Στο Μ. Χαλικιάς, Π. Λάλου, & Α. Μανωλέσου, *Μεθοδολογία έρευνας και εισαγωγή στη Στατιστική Ανάλυση Δεδομένων με το IBM SPSS STATISTICS* (σσ. 1-38). Αθήνα: Κάλλιπος.
- Yackel, E. (2001). *Explanation, Justification and Argumentation in Mathematics Classrooms*.

6 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

6.1 Φύλλο εργασίας πρώτης φάσης πιλοτικής διδακτικής παρέμβασης

Μαθηματικά Ενότητα 2η

Μάθημα 10: «Επιλύω προβλήματα»

Ονοματεπώνυμο.....

Ημερομηνία:.....

Δραστηριότητα

«Να υπολογίσετε το συνολικό αριθμό των μαθητών ενός Δημοτικού σχολείου αν γνωρίζετε ότι λειτουργούν 13 τμήματα των 25 μαθητών».

Εκτιμώ:

--

Βρίσκω με ακρίβεια:

--

Επαληθεύω:

--

6.2 Φύλλα εργασίας δεύτερης φάσης πιλοτικής διδακτικής παρέμβασης

Φύλλο εργασίας 1

Μαθηματικά: 29η Ενότητα “Σύνθετα προβλήματα- Επαλήθευση ”

Ονοματεπώνυμο:.....

Ημερομηνία:.....

Δραστηριότητα

Η απόσταση από τη στάση του λεωφορείου μέχρι το σχολείο είναι 9χμ. 90μ. Στα 6/9 της απόστασης συναντάμε το πάρκο της κυκλοφοριακής αγωγής. Πόση είναι η απόσταση από το πάρκο της κυκλοφοριακής αγωγής μέχρι το σχολείο;

Εκτιμώ:

--

Βρίσκω με ακρίβεια:

--

Επαληθεύω:

--

Φύλλο εργασίας 2

Μαθηματικά “ Σύνθετα προβλήματα- Επαλήθευση ” Έκδοση 3^η

Ονοματεπώνυμο:.....

Ημερομηνία:.....

Δραστηριότητα

Η διάρκεια του ταξιδιού με διαστημόπλοιο από τον Άρη στην Αφροδίτη είναι 10 ημέρες και η απόσταση 250.500χμ. Κάθε ημέρα το διαστημόπλοιο διανύει ίσα χιλιόμετρα. Αν βρίσκεται στην 7^η ημέρα ταξιδιού, πόσα χιλιόμετρα έχει να διανύσει ακόμα;

Εκτιμώ:

--

Βρίσκω με ακρίβεια:

--

Επαληθεύω:

--

Φύλλο εργασίας 3

Μαθηματικά “Σύνθετα προβλήματα- Επαλήθευση ” Έκδοση 3^η

Ονοματεπώνυμο:.....

Ημερομηνία:.....

Δραστηριότητα

Η διάρκεια του ταξιδιού με διαστημόπλοιο από τον Άρη στην Αφροδίτη είναι 10 ημέρες και η απόσταση 250.500χμ. Κάθε ημέρα το διαστημόπλοιο διανύει ίσα χιλιόμετρα. Αν βρίσκεται στην 7^η ημέρα ταξιδιού, πόσα χιλιόμετρα έχει να διανύσει ακόμα;

Εκτιμώ:

--

Βρίσκω με ακρίβεια:

--

Επαληθεύω:

--

6.3 Φύλλο εργασίας πρώτη φάση της τελικής διδακτικής παρέμβασης

Φύλλο εργασίας 1

Μαθηματικά: 9η Ενότητα “Μιλώ τη γλώσσα των αριθμών- Λύνω σύνθετα προβλήματα των 4 πράξεων” (ιδιότητες και τεχνικές των 4 πράξεων)

Ονοματεπώνυμο.....

Ημερομηνία:.....

Δραστηριότητα

Ο κύριος Αμαξόπουλος σκοπεύει να αγοράσει ένα αυτοκίνητο αξίας 31600€. ο έμπορος του προσφέρει τις εξής επιλογές: να πληρώσει με μετρητά όλο το ποσό ή να δώσει προκαταβολή 10000€ και 72 δόσεις των 320€. Πόσο θα πληρώσει περισσότερο αν αποφασίσει να το αγοράσει με δόσεις;

Εκτιμώ:

Βρίσκω με ακρίβεια:

Επαληθεύω

Φύλλο εργασίας 2

Μαθηματικά: 9η Ενότητα “Μιλώ τη γλώσσα των αριθμών- Λύνω σύνθετα προβλήματα των 4 πράξεων” (ιδιότητες και τεχνικές των 4 πράξεων)

Ονοματεπώνυμο:.....

Ημερομηνία:.....

Δραστηριότητα

Ο κύριος Αμαξόπουλος σκοπεύει να αγοράσει ένα αυτοκίνητο αξίας 63200€. Ο έμπορος του προσφέρει τις εξής επιλογές: να πληρώσει με μετρητά όλο το ποσό ή να δώσει προκαταβολή 20000€ και 72 δόσεις των 620€. Πόσο θα πληρώσει περισσότερο αν αποφασίσει να το αγοράσει με δόσεις;

Εκτιμώ:

--

Βρίσκω με ακρίβεια:

--

Επαληθεύω:

--

Φύλλο εργασίας 3

Μαθηματικά: 9η Ενότητα “Μιλώ τη γλώσσα των αριθμών- Λύνω σύνθετα προβλήματα των 4 πράξεων” (ιδιότητες και τεχνικές των 4 πράξεων)

Ονοματεπώνυμο:.....

Ημερομηνία:.....

Δραστηριότητα

Ο κύριος Αμαξόπουλος σκοπεύει να αγοράσει ένα αυτοκίνητο αξίας 63200€. Ο έμπορος του προσφέρει τις εξής επιλογές: α) να πληρώσει με μετρητά όλο το ποσό β) να δώσει προκαταβολή 20000€ και 72 δόσεις των 620€, γ) να δώσει προκαταβολή 30000€ και το υπόλοιπο σε 16 ισόποσες δόσεις. Να βρείτε: 1) ποια περίπτωση αγοράς συμφέρει περισσότερο, 2) σε ποια περίπτωση δόσεων θα χρεωθεί περισσότερο και πόσο;

Εκτιμώ:

--

Βρίσκω με ακρίβεια:

--

Επαληθεύω

--

6.4 Φύλλα εργασίας δεύτερης φάση της τελικής διδακτικής παρέμβασης

Φύλλο εργασίας

Μαθηματικά: Ενότητες 26-29 “Εξισώσεις τεσσάρων πράξεων”

Ονοματεπώνυμο:.....

Ημερομηνία:.....

Δραστηριότητες

1. Ο Βαγγέλης έχει συγκεντρώσει 1275€ και θέλει να αγοράσει ένα αυτοκίνητο που κοστίζει 4025€. Πόσα χρήματα χρειάζεται να βάλει ακόμα; Να γράψετε την εξίσωση και να βρείτε τη λύση της.
2. Σε ένα κρουαζιερόπλοιο επιβαίνουν 4500 άτομα. Αν έχουν μείνει 2262, πόσοι κατέβηκαν στην πρώτη στάση; Να γράψετε την εξίσωση και να βρείτε τη λύση της.
3. Αν ξέρετε ότι ένα τρένο κινείται με 880 χμ. ανά ώρα. Πόσες ώρες έχει ταξιδέψει αν διένυσε 42.240 χμ. Να γράψετε την εξίσωση και να βρείτε τη λύση της. $\left[\begin{smallmatrix} L \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$
4. Σε πόσες σελίδες θα πρέπει να μοιράσει ο κύριος Ιάσωνας 1440 γραμματόσημα για να τοποθετήσει 48 γραμματόσημα σε κάθε σελίδα; Να γράψετε την εξίσωση και να βρείτε τη λύση της.

Εκτιμώ:

--

Βρίσκω με ακρίβεια:

--

Επαληθεύω:

--

6.5 Φύλλο εργασίας της τελικής δοκιμής

Φύλλο εργασίας

Ονοματεπώνυμο:.....

Ημερομηνία:.....

Δραστηριότητες

1. Το λεωφορείο περνάει από τη στάση στο Μυρτόφυτο 7.30 το πρωί. Η διαδρομή μέχρι το σχολείο διαρκεί 29 λεπτά. Χθες όμως ο οδηγός λόγω βλάβης καθυστέρησε και έφτασε στο σχολείο 8.17. Πόσα λεπτά έκανε τη διαδρομή;
2. Ο Βαγγέλης πήγε με τη μητέρα του στη λαϊκή αγορά για ψώνια. Σε έναν υπολογισμό διαφώνησε μαζί της. Συγκεκριμένα, ήθελαν να αγοράσουν φράουλες και κόστιζαν 1,19€ η συσκευασία. Η μητέρα του ήθελε 4 συσκευασίες και έβγαλε 2 χαρτονομίσματα των 5€ να πληρώσει, ενώ ο Βαγγέλης επέμενε ότι 1 επαρκούσε. Ποιος είχε δίκιο και γιατί;
3. Στο σούπερ μάρκετ η φέτα κοστίζει 7,80€ το κιλό. Αν για την σπιτική πίτσα χρειάζεται το $\frac{1}{4}$, ένα νόμισμα των 2€ μας καλύπτει για να πληρώσουμε ;
4. Αν η θερμοκρασία τις τελευταίες 7 ημέρες ήταν: 24,26,25,27,28,26,30 μπορείς να υπολογίσεις τον μέσο όρο;
5. Ένα αεροπλάνο κινείται με 800 χμ/ώρα. Η απόσταση από τη Θεσσαλονίκη μέχρι τη Στοκχόλμη είναι 3ώρες και 15 λεπτά. Πόσα χιλιόμετρα θα διανύσει το αεροπλάνο;

Εκτιμώ:

--

Βρίσκω με ακρίβεια:

--

Επαληθεύω:

--

6.6 Δραστηριότητες και ασκήσεις που υλοποιήθηκαν από τα σχολικά εγχειρίδια

Πρώτη πιλοτική εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης

- Μεμονωμένες ασκήσεις με πράξεις
 - 1) Να γίνουν οι πράξεις: $38 \times 22 =$, $278 \times 5 =$, 154×42 , $424 \times 7 =$, $75 \times 12 =$, 11×35 , 59×14 , 29×45
- Λεκτικά προβλήματα
 - 1) 15 παιδιά της Δ' Τάξης παρήγγειλαν πλήρες πρωινό που κόστιζε 12€. Πόσα χρήματα πλήρωσαν συνολικά;
 - 2) Ο κύριος Άγγελος πούλησε 123 καρτέλες με αυγά. Πόσα αυγά πούλησε συνολικά αν σε κάθε καρτέλα υπήρχαν 28 αυγά;
 - 3) Αν ένα λεωφορείο χωράει 48 όρθιους επιβάτες και 35 καθήμενους, πόσους επιβάτες μπορούν να μεταφέρουν 16 τέτοια λεωφορεία;
 - 4) Ο Πέτρος αγόρασε 3 κόκκινα, 4 πράσινα και 6 μπλε στυλό, με 70 λεπτά το καθένα. Πόσα χρήματα πλήρωσε για όλα;
 - 5) Η καρδιά ενός ενήλικα χτυπά περίπου 60 φορές το λεπτό. Η καρδιά ενός βρέφους χτυπά περίπου 120 φορές το λεπτό. Πόσες φορές χτυπά η καρδιά του ενήλικα και πόσες του βρέφους σε μια ώρα;

Δεύτερη πιλοτική εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης

- Μεμονωμένες ασκήσεις με πράξεις
 - 1) $24:4=$, $124:4=$, $240:60=$, $124=4 \square \times$,
- Λεκτικά προβλήματα
 - 1) Κάθε χυμός κοστίζει 2,5€. Πόσο κοστίζουν 14 ίδιοι χυμοί;
 - 2) Τα 3 λίτρα γάλα κοστίζουν 5,70€. Πόσο κοστίζει το 1 λίτρο γάλα;
 - 3) Σε ένα δρόμο από τη μια πλευρά τα σπίτια έχουν μόνο τους ζυγούς αριθμούς από το 118 ως και το 166 και από την άλλη πλευρά έχουν μονούς αριθμούς.
 1. Πόσα σπίτια υπάρχουν συνολικά από τις 2 πλευρές του δρόμου, αν σε κάθε σπίτι με ζυγό αριθμό αντιστοιχεί ένα σπίτι με μονό αριθμό;
 2. Ποια θα μπορούσε να είναι η αρίθμηση στα σπίτια του δρόμου με τους μονούς αριθμούς;

- 4) Τα παιδιά στην τάξη του Λεωνίδα παίζουν το παιχνίδι «Διπλάσιο». Ο πρώτος λέει ένα μονοψήφιο αριθμό. Ο δεύτερος διπλασιάζει τον αριθμό του πρώτου. Ο τρίτος διπλασιάζει τον αριθμό του δεύτερου κτλ.
1. Αν όλα τα παιδιά ήταν 12, ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορεί να έφτασαν;
 2. Αν ξεκινούσαν από τριψήφιο αριθμό, ποιος μπορεί να είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορεί να έφτασαν;
- 5) Σε 100 γραμμ. δημητριακών υπάρχουν 440 θερμίδες. Πόση είναι η θερμιδική αξία 25 γραμμ. δημητριακών (μια μικρή μερίδα;). Πόση είναι η θερμιδική αξία όλης της συσκευασίας;
- 6) Στο ποδηλατοδρόμιο ο Λουκάς, ο Λευτέρης και ο Γρηγόρης κάνουν προπόνηση. Ξεκινούν μαζί. Ο Λουκάς κάνει το γύρο της πίστας σε 60", ο Λευτέρης σε 40 και ο Γρηγόρης σε 45". Σε πόση ώρα θα συναντηθούν και οι 3 στην εκκίνηση;
- 7) Πόσα ίδια εισιτήρια μπορώ να αγοράσω σε κάθε περίπτωση με 150€; α) 12,50€ πίσω θέση, β) 22,50€ μεσαία θέση, γ) 40€ μπροστινή θέση. Τι ρέστα θα πάρω;
- 8) Ποια είναι η ηλικία τους σε έτη και εβδομάδες, αν 1 έτος= 52 εβδομάδες.
1. Είμαι 25 ετών
 2. Είμαι 3530 εβδομάδων, σε πόσες εβδομάδες θα είμαι 70 ακριβώς ετών;
- 9) Η Ειρήνη έφτιαξε ένα παζλ 1560 κομματιών με την αδελφή της σε 5 ώρες. Μόνη της έφτιαξε ένα άλλο παζλ 720 κομματιών σε 3 ώρες. Πιο γρήγορα φτιάχνει το παζλ η Ειρήνη μόνη της ή με την αδελφή της;
- 10) Ο Λουκάς είναι 11 χρονών. Ο πατέρας του είναι 3 χρόνια μεγαλύτερος από τη μητέρα του. Πόσο χρονών είναι ο πατέρας και η μητέρα του Λουκά αν το άθροισμα των ηλικιών και των τριών είναι 86 χρόνια;

Πρώτη φάση της τελικής διδακτικής παρέμβασης

- Λεκτικά προβλήματα

Στην πρώτη φάση της τελικής διδακτικής παρέμβασης χρησιμοποιήθηκαν λεκτικά προβλήματα:

- 1) Το υπερωκεάνιο "Τιτανικός" βυθίστηκε το 1912. Οι επιβάτες του ήταν 1316 άτομα και το πλήρωμά του 885. Είχε 20 σωσίβιες λέμβους, η καθεμιά από τις οποίες χωρούσε 58 άτομα. Στο ναυάγιο χαθήκαν 1490 άτομα. Αν γεμίζαν όλες οι σωσίβιες λέμβοι, ποσό περισσότεροι διασωθέντες θα υπήρχαν;

- 2) Πόσα ρέστα θα πάρω από 25 €, αν πληρώσω 3 εισιτήρια στον κινηματογράφο, το καθένα από τα οποία κοστίζει 7,20 €;
- 3) Ο Φίλιππος θέλει να αγοράσει τρία αυτοκίνητα μινιατούρες, το καθένα από τα οποία κοστίζει 3,6 €. Έχει ήδη συγκεντρώσει 8 €. Σε πόσες ημέρες θα συγκεντρώσει όλο το ποσό, αν μπορεί να αποταμιεύει 0,2 € την ημέρα;
- 4) Ο κύριος Κατσαρίδης πρόκειται να αγοράσει ένα αυτοκίνητο αξίας 5.800 €. Ο έμπορος του προσφέρει τις εξής επιλογές: να πληρώσει το συνολικό ποσό σε μετρητά ή να δώσει 1.000 € προκαταβολή και 24 δόσεις των 230 €. Ποσό θα πληρώσει περισσότερο αν αποφασίσει να το αγοράσει με δόσεις;

Δεύτερη φάση της τελικής διδακτικής παρέμβασης

- Λεκτικά προβλήματα

Στη δεύτερη φάση της τελικής διδακτικής παρέμβασης και στην αξιολόγησή της χρησιμοποιήθηκαν λεκτικά προβλήματα:

- 1) Η Δέσποινα πήγε στο σχολείο με μερικά ψιλά στην τσέπη της. Στον δρόμο βρήκε 23 λεπτά. Όταν έφτασε στο σχολείο και μέτρησε τα λεφτά της είδε ότι είχε 1,13 €. Ποσά χρήματα είχε άραγε όταν έφυγε από το σπίτι;
- 2) Η Μαρία αγόρασε στις διακοπές της ένα καλοκαιρινό μπλουζάκι που κόστιζε 12,50 € και ζήτησε από το κατάστημα να προσθέσουν επάνω μια σιδερότυπη στάμπα με το όνομά της. Στο τέλος πλήρωσε 18,40 €. Ποσό στοιχίζει η στάμπα;
- 3) Σε μια ζυγαριά με δυο δίσκους τοποθετούμε στον έναν βάρος 115 γραμμαρίων και στον άλλο 45 γραμμάρια. Πόσο βάρος πρέπει να τοποθετήσουμε ακόμη, ώστε να ισορροπήσει η ζυγαριά; Με τη βοήθεια μιας μεταβλητής, γράψε την εξίσωση που περιγράφει την κατάσταση αυτή και υπολόγισε τον άγνωστο.
- 4) Ο Λευτέρης είχε 16 κάρτες ποδοσφαιριστών, όταν άρχισε να παίζει με τον Γιώργο και κέρδισε μερικές από αυτόν. Τώρα έχει 27 κάρτες. Πόσες κάρτες κέρδισε από τον Γιώργο; Να εκφράσεις με εξίσωση το πρόβλημα και να το λύσεις.
- 5) Οι 53 αθλητές του σχολείου ανεβήκαν στο λεωφορείο που θα τους μετέφερε στο στάδιο. Τα αγόρια κατεβήκαν στην κεντρική είσοδο. Το λεωφορείο στη συνέχεια μετέφερε τις 18 αθλήτριες σε άλλη είσοδο στην άλλη πλευρά του σταδίου. Πόσα ήταν τα αγόρια;

- 6) Η Δήμητρα πριν φύγει για το μάθημα της Μουσικής, πηρέ από το πορτοφόλι της βιαστικά μερικά κέρματα και πήγε στο βιβλιοπωλείο. Αγόρασε ένα τετράδιο πενταγράμμου που έκανε 2,90 € και ένα ντοσιέ για τα φύλλα των ασκήσεων που έκανε 3,50 €. Όταν γύρισε είδε ότι είχε στην τσέπη της 2,30 €. Προσπάθησε να σχηματίσεις την εξίσωση και να υπολογίσεις πόσα χρήματα είχε πάρει από το πορτοφόλι.
- 7) Ο Αριστοτέλης ξεκίνησε για το σχολείο με 1,20 € στην τσέπη του. Όταν έφτασε στο σχολείο, διαπίστωσε ότι η τσέπη του ήταν τρύπια και του είχαν μείνει μόνο 85 λεπτά. Πόσα χρήματα του έπεσαν στο δρόμο; Να εκφράσεις με μια εξίσωση το πρόβλημα του Αριστοτέλη και μετά να το λύσεις.
- 8) Η Μαργαρίτα πολλές φορές για να βοηθήσει τη θεία της και να βγάλει χαρτζιλίκι, προσέχει το μικρό ανιψάκι της. Πληρώνεται με 3 € την ώρα. Χρειάζεται να μαζέψει 165 €. Πόσες ώρες πρέπει να κρατήσει το παιδί;
- 9) Ο Δημοσθένης ξέρει πως, όταν γράφει τις εργασίες του στον υπολογιστή, η σελίδα χωράει περίπου 250 λέξεις. Πρέπει να γράψει μια εργασία 1.500 λέξεων. Πόσες σελίδες θα είναι; Λύστε το πρόβλημα με εξίσωση.
- 10) Η Διευθύντρια του σχολείου έδωσε στις μαθήτριες της Στ' τάξης ένα ρολό κορδέλα για τις ανάγκες του χορευτικού που θα παρουσίαζαν. Εκείνες τη χώρισαν σε 18 ίσα κομμάτια. Κάθε κομμάτι ήταν 81 εκατοστά. Πόσα μέτρα ήταν η κορδέλα που τους έδωσε η Διευθύντρια;
- 11) Ο Θωμάς θέλει να ταξινομήσει τις κάρτες του με τους ποδοσφαιριστές σε κουτιά που χωράνε 45 κάρτες το καθένα. Έχει συνολικά 540 κάρτες. Πόσα κουτιά θα χρειαστεί;
- 12) Να εκφράσεις με εξίσωση το πρόβλημα που ακολουθεί και να το λύσεις: Η Άννα έχει συγκεντρώσει 37,5 € από το χαρτζιλίκι της. Πόσα ακόμη χρειάζεται για να αγοράσει μια μικρή φωτογραφική μηχανή που κοστίζει 68 €;
- 13) Από τα CD που είχε ο Παύλος, έστειλε 3 στον εξάδελφό του στο εξωτερικό και δάνεισε 4 στον φίλο του τον Χρήστο και 2 στην Ειρήνη. Έμεινε έτσι με 28 CD. Να κάνεις την εξίσωση και να υπολογίσεις πόσα είχε αρχικά.
- 14) Ανοίξαμε τη σακούλα με τα χρωματιστά καραμελάκια και αρχίσαμε να τρώμε η αδελφή μου και εγώ. Εκείνη έφαγε 12, εγώ έφαγα τα διπλάσια από την αδελφή μου και περίσσεψαν άλλα 40. Πόσα είχε αρχικά η σακούλα;

- 15) Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι 340 μέτρα το δευτερόλεπτο. Πόσος χρόνος θα περάσει από τη στιγμή που βλέπω την αστραπή μέχρι να ακούσω τη βροντή αν ο κεραυνός έπεσε 3.740 μέτρα μακριά από εμένα; (Να λυθεί με εξίσωση.)
- 16) Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα (ραδιοκύματα) με τα οποία γίνεται η ασύρματη επικοινωνία ταξιδεύουν με ταχύτητα 300.000 χιλιόμετρα το δευτερόλεπτο. Αν βρισκόμαστε στο διαστημικό κέντρο της NASA και ένας αστροναύτης είναι πάνω στο Φεγγάρι, πόσα δευτερόλεπτα θα περάσουν από τη στιγμή που θα του πούμε «καλημέρα» μέχρι να ακούσουμε την απάντησή του αν η απόσταση της σελήνης από τη γη είναι 450.000 χιλιόμετρα; (Να λυθεί με εξίσωση).
- 17) Ο Γιάννης, ο Νίκος και η Χριστίνα ανέλαβαν στο μάθημα των τεχνικών να βάλουν κορνίζα στο ωραιότερο έργο της τάξης τους. Αν το έργο ήταν κανονικό εξάγωνο και χρειάστηκαν συνολικά 2,52 μέτρα κορνίζας, να βρείτε πόσο ήταν το μήκος κάθε πλευράς του έργου.
- 18) Σε ποιες σελίδες πρέπει να μοιράσει η Φιλώ 720 γραμματόσημα για να τοποθετήσει 24 γραμματόσημα σε κάθε σελίδα;
- 19) Ποιο είναι το ποσό που, αν μοιραστεί σε 12 μέρη, κάθε μέρος θα είναι 1.200 €;

6.7 Γενικός Οδηγός Επίλυσης Προβλημάτων

• Λεκτικό πρόβλημα

Ένα διαστημόπλοιο μεταφέρει 6 άνδρες. Τα τρόφιμά τους επαρκούν για 36 ημέρες. Οι 4 κατέβηκαν στη Σελήνη και οι υπόλοιποι συνέχισαν για τον Κρόνο. Εκεί επιβιβάστηκαν άλλοι 4. Πόσοι επέστρεψαν στη Γη μαζί;

Σημείωση: επιλέχθηκαν μικροί αριθμοί ώστε το επίπεδο δυσκολίας να παραμείνει χαμηλό και οι μαθητές να είναι συγκεντρωμένοι στη διαδικασία και να μην ανησυχούν για την εκτέλεση των πράξεων και τη διαχείριση μεγάλων των αριθμών. Το λεκτικό περιεχόμενο του προβλήματος αντλήθηκε από το μάθημα της γλώσσας που έκανε σχετική αναφορά στο διάστημα και στους πλανήτες και είχε κεντρίσει το ενδιαφέρον των μαθητών. Γενικά η θεματολογία των προβλημάτων προερχόταν από τα ενδιαφέροντά τους, από τη φαντασία τους, τη σχολική ζωή, την καθημερινότητα, το παιχνίδι. Αν υπάρχει η δυνατότητα μπορεί το περιεχόμενο να δραματοποιηθεί κιόλας.

Βήματα

1. Διαβάζω πολύ καλά την εκφώνηση (3 φορές τουλάχιστον) ώστε να την εμπεδώσω και να την αναπαράγω με δικά μου λόγια. Χωρίζω αν χρειαστεί το πρόβλημα σε επιμέρους κομμάτια.

Ανάγνωση του προβλήματος από τους μαθητές τουλάχιστον 3 φορές και αναπαραγωγή από αυτούς με δικά τους λόγια. Σκοπός είναι η εμπέδωση, η κατανόηση σε βάθος, γίνει «δικό» τους, δηλαδή οι μαθητές να προβληματιστούν σαν να ψάχνουν να βρουν μια λύση σε ένα δικό τους πρόβλημα! Σε περίπτωση που έχει πολλά ερωτήματα τότε γίνεται να καταταμηθεί σε μικρότερα αλληλοσχετιζόμενα υποπροβλήματα.

2. Υπογραμμίζω τα Δεδομένα και τα Ζητούμενα και ξεχωρίζω μόνο όσες πληροφορίες μου χρειάζονται. Μπορώ να χρησιμοποιήσω και διαφορετικά χρώματα. Φτιάχνω τον «Δον Ζουάν» (πίνακας Δεδομένων και Ζητούμενων).

Υπογράμμιση μόνο των χρήσιμων πληροφοριών με διαφορετικό χρωματισμό, τα Δεδομένα με μπλε χρώμα και τα Ζητούμενα με κόκκινο, ώστε να ξεχωρίσουν πιο εύκολα. Με τη διαδικασία αυτή γίνεται και πιο εύκολος ο έλεγχος του περιεχομένου. Με την κατασκευή του πίνακα Δεδομένων και Ζητούμενων μπορούν να αναπτυχθούν μαθηματικές δεξιότητες, όπως της ομαδοποίησης, της ταξινόμησης. Γίνεται η αναζήτηση της σχέσης, της κοινής ιδιότητας ή συνθήκης ανάμεσα στα εξεταζόμενα στοιχεία (Τζεκάκη, 1998).

Δ(εδομένα)	Ζ(ητούμενα)
Μεταφ. 6 άνδρες Κατεβ. 4 Ανεβ. 4	Πόσοι επέστρεψαν Μαζί;

Πίνακας 61: Πίνακας Δεδομένων και Ζητούμενων

3. Εντοπίζω τις λέξεις κλειδιά που «ξεκλειδώνουν» τη στρατηγική¹ που θα ακολουθήσω.

Οι μαθητές γνωρίζουν από το λεξικό που έχουν φτιάξει καθ' όλη τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, λέξεις κλειδιά που καθρεπτίζουν πράξεις και ξεκλειδώνουν τα βήματα που θα πρέπει να κάνουν. Έτσι, κυκλώνονται με πράσινο

¹ τα βήματα και το συλλογισμό

χρώμα οι λέξεις: κατέβηκαν= βγάζω, επιβιβάστηκαν= βάζω, μαζί= σύνολο, βάζω.
Σταδιακή διαμόρφωση του συλλογισμού τους.

4. *Καταγράφω τη στρατηγική μου.*

Γραπτή αποτύπωση της σκέψης και των βημάτων που θα ακολουθήσουν οι μαθητές με τη βοήθεια των λέξεων κλειδιών. Με τον τρόπο αυτό ενισχύεται η συγκέντρωσή τους στο επιζητούμενο λεκτικό πρόβλημα και συγκρατείται ο καταγισμός των ιδεών τους.

A) «Θα βγάλω από τους έξι άνδρες τους τέσσερις που κατέβηκαν»

B) «Μετά θα βάλω τους άλλους τέσσερις»

Γ) «Και στο τέλος θα τους υπολογίσω όλους μαζί»

5. *Εφαρμόζω τη στρατηγική*

Αντικατάσταση των αριθμολέξεων με ψηφία χωρίς την εκτέλεση των πράξεων.

A) «6 άνδρες βγάζω 4»

B) «2 άνδρες βάζω 4»

Γ) «Όλοι μαζί»

6. *Γράφω τη λύση.*

Αντικατάσταση των λέξεων με αριθμούς και σύμβολα και εκτέλεση των πράξεων. Στο σημείο αυτό οι μαθητές αναπτύσσουν την εκτίμηση, τις νοερές και γραπτές μεθόδους υπολογισμού.

A) $6-4=2$

B) $2+4=6$

Γ) 6

7. *Γράφω με λόγια την απάντηση.*

Καταγραφή της απάντησης με τη χρήση έναν συμπερασματικού συνδέσμου: «Άρα, οι άνδρες που επέστρεψαν στη Γη όλοι μαζί ήταν 6». Σαφής διατύπωση της απάντησης και σαφές συμπέρασμα στο δικό τους πρόβλημα. Με τον τρόπο αυτό δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να αναπτύξουν και το μαθηματικό τους λεξιλόγιο.

8. *Κάνω επαλήθευση και λογικό έλεγχο.*

Εκτέλεση των επαληθεύσεων των πράξεων:

A) $2+4=6$

B) $6-4=2$

Εφαρμογή λογικού ελέγχου, δηλαδή κατά πόσο το αποτέλεσμα ανταποκρίνεται στο μέγεθος των αριθμών των δεδομένων. Δεν θα ήταν λογική απάντηση αν ένας μαθητής έβρισκε αποτέλεσμα 450, τη στιγμή που τα ποσά είναι μονοψήφιοι αριθμοί και απέχουν αρκετά από το νούμερο που βρήκε. Με την επαλήθευση γίνεται ένας έλεγχος της ορθότητας της επιλογής και εφαρμογής της στρατηγικής. Υπάρχει άμεση ανατροφοδότηση σε περίπτωση λάθους, όπου οι μαθητές μπορούν να επιστρέψουν γρήγορα στο βήμα 4 της καταγραφής ή 5 της εφαρμογής και να εντοπίσουν το λάθος τους.

6.7.1 Τεχνικές υπολογισμού του άγνωστου «x» σε εξισώσεις με τέσσερις πράξεις

- Πρόσθεση- «Μπροστά- Πίσω»

Εικόνα 1: «Μπροστά-Πίσω» στην Πρόσθεση

Με τον όρο «Μπροστά» θεωρείται η ανάγνωση της εξίσωσης από τα αριστερά προς τα δεξιά. Οπότε η κίνηση προς τα «Μπροστά» έχει αφετηρία το x , συναντάει στο διάβα την πράξη της πρόσθεσης με το 12 και τερματίζει στο αποτέλεσμα 18. Με τη βοήθεια του διαλόγου αναζητούνται τα ζευγάρια των αντίθετων λέξεων μέσα από το λεξιλόγιο των μαθητών που έχουν δημιουργήσει από τη διδακτική παρέμβαση αλλά και που ήδη γνωρίζουν από το μάθημα της γλώσσας. Προτιμώνται τα αντίθετα που φωτογραφίζουν τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης: μπροστά πίσω, βάζω βγάζω, προσθέτω αφαιρώ

Με αυτό τον τρόπο γίνεται προσπάθεια ώστε οι μαθητές να συνδυάσουν τις κινήσεις «Μπρος- Πίσω» με τις πράξεις. Δηλαδή, αν με την μπροστινή κίνηση γίνεται πρόσθεση τότε με την αντίθετη κίνηση «Πίσω» θα γίνεται αφαίρεση.

Η κίνηση «Πίσω», έχει αφετηρία το 18. Συναντάει στο διάβα της τον αριθμό 12 και εκτελείται η αφαίρεση $18-12$ (ως η αντίθετη πράξη της κίνησης «Μπρος», της πρόσθεσης). Έτσι, το x ισούται με τον αριθμό 6.

β) $12+x=18$,

Σε περίπτωση όπου ο άγνωστος x είναι ο δεύτερος προσθετέος, για παράδειγμα $12+x=18$, δεν υπάρχει κώλυμα γιατί ισχύει η Αντιμεταθετική ιδιότητα. Αλλάζει η σειρά των προσθετέων και η εξίσωση γίνεται $x+12=18$. Στη συνέχεια εκτελείται η τεχνική «Μπρος- Πίσω» για την επίλυση της εξίσωσης και την εύρεση του άγνωστου παράγοντα x .

- Αφαίρεση- «Κρυφό»

α) $12-x=8$

Στην περίπτωση που η εξίσωση περιέχει πράξη αφαίρεσης και ο άγνωστος παράγοντας x είναι ο αφαιρετέος, για τον υπολογισμό του εφαρμόζεται η τεχνική «Κρυφό». Κύριο μέλημα είναι ο υπολογισμός του x . Παραμένει το 12 φανερό και αναζητείται ο αριθμός που μπορεί να παίξει «κρυφό». Η προσοχή στρέφεται στο αμέσως επόμενο διαθέσιμο ψηφίο, το οποίο είναι το 8. Μπορεί να κρυφτεί ο αριθμός 8 από το 12 και να υπολογιστεί ο άγνωστος παράγοντας x . Βοηθητικά, διατυπώνεται η φράση: «12 κρύβω 8 και βρίσκω το x ».

Η έννοια του «κρύβω» περιέχει την αφαίρεση. Όπως για παράδειγμα με τα ευρώ. Όταν κάποιος έχει 20€ σε 4 χαρτονομίσματα των 5€ και του κρύψουν το ένα από αυτά. Είναι σαν να του το πήραν, σαν να του το έβγαλαν από την τσέπη. Αφαιρέθηκε δηλαδή από το σύνολο και τώρα έχει 15€.

Τον αριθμό ο μαθητής τον κρύβει με το μολύβι, το δάχτυλο ή το χέρι του αν βρίσκεται στον πίνακα, τον αφαιρεί από τον μειωτέο και βρίσκει τον άγνωστο x , $12-8=4$. Άρα ο άγνωστος x ισούται με 4.

β) $x-12=8$

Αν ο άγνωστος x είναι ο μειωτέος, $x-12=8$, τότε για να υπολογιστεί εφαρμόζεται η τεχνική «Μπρος- Πίσω». Η διαφορά αυτή τη φορά είναι πως η κίνηση «Μπρος» ξεκινάει με αφαίρεση και η επιστροφή προς τα «Πίσω» για να βρεθεί ο άγνωστος « x », γίνεται με αντίθετη πράξη, την πρόσθεση, $8+12=20$.

- Πολλαπλασιασμός- «Μπρος- Πίσω»

α) $x \cdot 7=56$

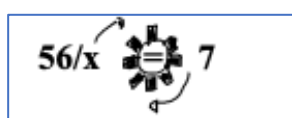
Σε εξίσωση πολλαπλασιασμού όπου το x αποτελεί τον πρώτο παράγοντα, εφαρμόζεται η τεχνική «Μπρος- Πίσω». Η κίνηση προς τα «Μπρος» έχει αφετηρία τον πολλαπλασιασμό του άγνωστου x με το 7 με τον και καταλήγει στο γινόμενο 56. Η

κίνηση «Πίσω», έχει αφετηρία το 56. Συναντάει στο διάβα της τον αριθμό 7 και εκτελείται η διαίρεση $56:7$ (ως η αντίθετη πράξη της κίνησης «Μπρος», του πολλαπλασιασμού). Έτσι, το x ισούται με τον αριθμό 8.

β) $7 \cdot x = 56$

Αν ο x είναι ο δεύτερος παράγοντας του γινομένου, $7 \cdot x = 56$, εφαρμόζεται η αντιμεταθετική ιδιότητα και μετατρέπεται η εξίσωση στη μορφή $x \cdot 7 = 56$. Από το σημείο και έπειτα χρησιμοποιείται η τεχνική του «Μπρος- Πίσω» για την επίλυση της εξίσωσης και εύρεσης του άγνωστου παράγοντα x .

- Διαίρεση- Γρανάζι



Εικόνα 2: «Το γρανάζι» στη διαίρεση

α) Σε εξίσωση όπου ο άγνωστος x είναι διαιρέτης, εφαρμόζεται η τεχνική «Γρανάζι». Το όνομα δόθηκε από μαθητή που του θύμιζε το παιχνίδι του «Το γρανάζι», όπου το γυρνούσε και άλλαζαν οι ισχύουσες καταστάσεις. Έτσι και εδώ, το σύμβολο του ίσον (=) είναι ένα γρανάζι που περιστρέφεται δεξιόστροφα (συνήθως) ή αριστερόστροφα και αλλάζει θέση το πηλίκο με το διαιρέτη, $56:x=7$, $56:7=x$, άρα το x ισούται με 8.

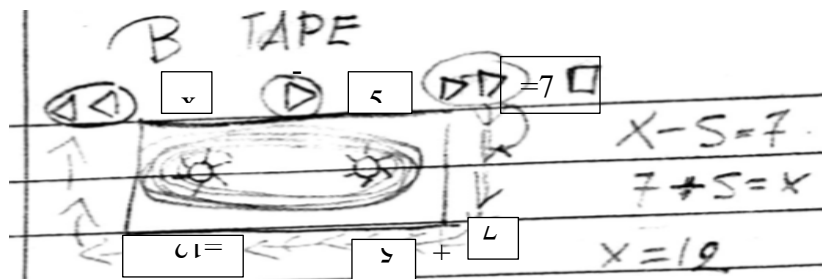
β) $x:7=49$

Όταν στην εξίσωση με διαίρεση ο άγνωστος x είναι ο διαιρετέος, $x:7=49$, τότε χρησιμοποιείται η τεχνική «Μπρος- Πίσω». Η κίνηση προς τα «Μπρος» έχει αφετηρία τη διαίρεση του άγνωστου x με το 7 και καταλήγει στο πηλίκο 49. Η κίνηση «Πίσω», έχει αφετηρία το 49. Συναντάει στο διάβα της τον αριθμό 7 και εκτελείται ο πολλαπλασιασμός $49 \cdot 7$ (ως η αντίθετη πράξη της κίνησης «Μπρος», της διαίρεσης). Έτσι, το x ισούται με τον αριθμό 343.

- Κασέτα

Ένας άλλος τρόπος που βοηθάει σχηματικά στην κατανόηση της τεχνικής «Μπρος- Πίσω» είναι η κίνηση της ταινίας μιας κασέτας. Παράδειγμα που ειπώθηκε από μαθητή (αγόρι). Στην εξίσωση με αφαίρεση $x-5=7$, πατώντας το κουμπί της έναρξης (play), η κίνηση της ταινίας προς τα «Μπρος» ξεκινάει με τον άγνωστο x να μειώνεται κατά 5 (αφαίρεση) και να καταλήγει στο 7 (διαφορά). Η κίνηση της ταινίας δεν σταματά εκεί αλλά συνεχίζει. Αυτή τη φορά έχει ως αφετηρία το 7 και επειδή κάνει

αντίθετη κίνηση, προς τα πίσω, θα εκτελέσει πρόσθεση με τον αριθμό που συναντάει, το 5, για να δώσει αποτέλεσμα 12. Άρα ο άγνωστος x ισούται με 12.



Εικόνα 3: Σχηματική απεικόνιση της «Κασέτας»