



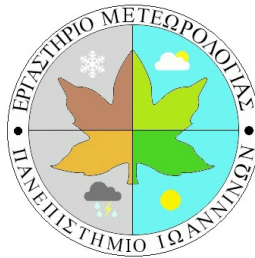
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ  
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΕΩΡΟΛΟΓΙΑΣ



Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

## Μελέτη της διάδοσης θερμότητας στο έδαφος

Θωμάς Ιωαννίδης



Επιβλέπων Καθηγητής: Νικόλαος Μπάκας

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2019

## Περίληψη

Είναι γνωστό ότι η θερμότητα μπορεί να διαδοθεί μέσω τριών μηχανισμών, μέσω αγωγής από το θερμότερο προς το ψυχρότερο σώμα, μέσω των ρευμάτων μεταφοράς κάποιου ρευστού και μέσω ακτινοβολίας. Η διάδοση θερμότητας διαμέσου του εδάφους πραγματοποιείται εν γένει με τους δύο πρώτους μηχανισμούς. Σε αυτή την εργασία θα εξεταστεί, ποια είναι η συνεισφορά κάθε ενός μηχανισμού στη διάδοση της θερμότητας στο έδαφος μέσω σύγκρισης θεωρητικών λύσεων και μετρήσεων της θερμοκρασίας του εδάφους στο μετεωρολογικό σταθμό του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Για την εξαγωγή των θεωρητικών λύσεων θα πραγματοποιηθούν διαδοχικές προσεγγίσεις σχετικά με την στρωμάτωση του εδάφους αλλά και τις φυσικές διεργασίες που λαμβάνουν χώρα σε αυτό. Η καλύτερη συμφωνία μεταξύ των θεωρητικών λύσεων και των μετρήσεων επιτεύχθηκε στην περίπτωση στην οποία η θερμότητα διαδίδεται επί το πλείστον μέσω αγωγής ενώ ο συντελεστής θερμικής διάχυσης εξαρτάται από το βάθος.

# Abstract

It is well established that heat in the soil can be transferred through two main mechanisms; conduction and convection. In this dissertation we will examine, how each of these mechanisms contributes to the heat transfer in the soil through a spatio-temporal analysis of a multiyear time series of soil temperature at Ioannina, Greece. The time series of temperature at four depths (at the ground, at 10 cm, at 30 cm and at 60 cm depths) that is available every half an hour is analyzed. The damping of the amplitude of temperature variation and its phase difference that occurs with depth for the annual and the daily frequency dominating the temperature temporal variability is calculated. It is shown that the observed decay indicated a depth dependent thermal diffusivity and a depth dependent convection coefficient. To obtain the depth dependence of these two coefficients, novel analytical solutions for the diffusion-convection equation with piecewise coefficients is presented along with a novel algorithm for the calculation of the coefficients. Utilizing this algorithm and the temperature data, a significant change of the diffusion and convection coefficients with depth is found.

# Περιεχόμενα

Εξώφυλλο . . . . .	i
Περίληψη . . . . .	ii
Abstract . . . . .	iii
Περιεχόμενα . . . . .	iv
Ευχαριστίες . . . . .	vi
Αφιέρωση . . . . .	vii
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Μικρή ιστορική αναδρομή . . . . .	1
1.2 Μηχανισμοί μεταφοράς θερμότητας . . . . .	3
1.2.1 Αγωγή θερμότητας . . . . .	3
1.2.2 Ρεύματα μεταφοράς . . . . .	4
1.2.3 Διάδοση θερμότητας μέσω ακτινοβολίας . . . . .	5
1.2.4 Λανθάνουσα θερμότητα . . . . .	8
1.3 Θερμοκρασία της επιφάνειας του εδάφους . . . . .	9
1.4 Θερμοκρασία στο εσωτερικό του εδάφους . . . . .	10
1.5 Σκοπός και διάρθρωση της εργασίας . . . . .	15
<b>2 Μετρήσεις θερμοκρασίας εδάφους</b>	<b>16</b>
2.1 Περιγραφή μετρήσεων . . . . .	16
2.2 Συμπλήρωση μετρήσεων και αποκλεισμός χρονικής περιόδου . . . . .	17
2.3 Χρονικές κυμάνσεις της θερμοκρασίας και αποκλεισμός αισθητήρα . . . . .	19
<b>3 Καινούργια θεωρία για την κύμανση της θερμοκρασίας εδάφους</b>	<b>23</b>
3.1 Διάδοση θερμότητας μέσω διάχυσης με σταθερό συντελεστή . . . . .	24
3.2 Διάδοση θερμότητας μέσω διάχυσης και ρευμάτων με σταθερούς συντελεστές . . . . .	28
3.3 Έδαφος τριών στρωμάτων με διάδοση θερμότητας μέσω διάχυσης . . . . .	31
3.4 Έδαφος τριών στρωμάτων με διάδοση θερμότητας μέσω διάχυσης και ρευμάτων μεταφοράς . . . . .	36

---

<b>4</b>	<b>Συμπεράσματα και προτάσεις</b>	<b>42</b>
4.1	Συμπεράσματα . . . . .	42
4.2	Προτάσεις για περαιτέρω μελέτη . . . . .	47
<b>A'</b>	<b>Αριθμητικός κώδικας Matlab</b>	<b>49</b>
<b>B'</b>	<b>Αναλυτικές λύσεις για την κύμανση της θερμοκρασίας του εδάφους</b>	<b>56</b>
B'.1	Μεταφορά θερμότητας μέσω διάχυσης σε ομογενές έδαφος . . . . .	56
B'.2	Μεταφορά θερμότητας μέσω διάχυσης και ρευμάτων μεταφοράς σε ομογενές έδαφος . . . . .	58
B'.3	Μεταφορά θερμότητας μέσω διάχυσης στην περίπτωση μη ομογενούς συντελεστή αγωγιμότητας . . . . .	59
B'.4	Μεταφορά θερμότητας μέσω διάχυσης και ρευμάτων στην περίπτωση μη ομογενούς εδάφους . . . . .	61
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>64</b>

# Ευχαριστίες

Η εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας έγινε στο πλαίσιο του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών (Π.Μ.Σ) “Ατμοσφαιρικές Επιστήμες και Περιβάλλον” του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων με επιβλέποντα τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Νικόλαο Μπάκα. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Μπάκα για τις πολύτιμες γνώσεις που μου προσέφερε, τον τρόπο σκέψης που μου δίδαξε και την, δια του ιδίου παραδείγματος, στάση του επιστήμονα που μου ενέπνευσε. Προπαντός όμως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Μπάκα για την υπομονή και κατανόηση που επέδειξε, στις περιπτώσεις που ο μεγάλος όγκος υποχρεώσεων μου, δυσχέραιναν την ολοκλήρωση της εργασίας μου.

Θα ήθελα επιπλέον να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον κύριο Λώλη και τον κύριο Χατζηναστασίου για τις κρίσιμες επισημάνσεις τους κατά την εκπόνηση της παρούσας εργασίας. Πάνω απ’ όλα, θα ήθελα να τους ευχαριστήσω για τις πολύτιμες γνώσεις που μου μεταλαμπάδευσαν ως πραγματικοί δάσκαλοί στα διάφορα πεδία της μετεωρολογίας της κλιματολογίας και της φυσικής της ατμόσφαιρας εν γένει.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης όλα τα μέλη του Τομέα Αστρογεωφυσικής για την άριστη συνεργασία κατά το διάστημα της μαθητείας μου στον εν λόγω Τομέα.

*Ιωαννίδης Θωμάς,*

*Ιωάννινα,*

*Ιούνιος, 2021*

*Στους γονείς μου.*

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Μικρή ιστορική αναδρομή

Η σχέση του ανθρώπου με το γήινο έδαφος έχει αλλάξει με το πέρασμα του χρόνου. Από την απώτατη αρχαιότητα έως τα πολύ πρόσφατα χρόνια, το εσωτερικό της Γης περιβάλλονταν από το φόβο του ανεξερεύνητου και του αγνώστου. Σχετικά με τις συνθήκες που επικρατούν στο εσωτερικό της Γης η λαϊκή φαντασία άλλοτε το περιέγραφε ως τόπο μεγάλου ψύχους προς ανάπαυση των ψυχών ενώ σε άλλες περιπτώσεις εξαιρετικά μεγάλης θερμοκρασίας για τη μεταθανάτια τιμωρία τους, θεωρήσεις οι οποίες σε πολλές περιπτώσεις οδηγούνταν από τις ανιμιστικές και ανθρωποκεντρικές τάσεις του ανθρώπου. Σε πολλές περιπτώσεις, τέτοιους είδους θεωρήσεις επηρέασαν και επιστημονικές θεωρίες του παρελθόντος και έτσι εντυπώθηκαν στο συλλογικό ανθρώπινο υποσυνείδητο. Μία τέτοια περίπτωση στην οποία αποτυπώνονται αντιλήψεις παλαιότερων εποχών σχετικά με το εσωτερικό του εδάφους είναι το μνημειώδες έργο του Πλάτωνα, η Πολιτεία. Συγκεκριμένα, στο σημείο όπου εξιστορείται ο γνωστός μύθος του σπηλαίου, το εσωτερικό της Γης παρουσιάζεται ως ένα μέρος στο οποίο ο άνθρωπος βρίσκεται σε μία κατάσταση ασυνειδησίας και αβουλίας. Η έξοδος από αυτή την κατάσταση προς την αφύπνιση και τη συνειδητοποίηση περιγράφεται αλληγορικά ως η έξοδος του ανθρώπου από το υπόγειο σπήλαιο.



Στη σύγχρονη εποχή της επιστήμης, το έδαφος έχει αποσυνδεθεί από τους μύθους του παρελθόντος και πλέον αποτελεί αντικείμενο μελέτης διαφόρων επιστήμων. Οι σκοποί της κάθε επιστήμης διαφέρουν, όπως και οι μέθοδοι προσέγγισης. Οι ατμοσφαιρικές επιστήμες εξετάζουν το επιφανειακό στρώμα του εδάφους δίνοντας κυρίως έμφαση στις ιδιότητές του, που αφορούν της αλληλεπίδρασή του με την ατμόσφαιρα.

Από τη σκοπιά της μετεωρολογίας και της κλιματολογίας, το έδαφος νοείται ως το κάτω όριο της ατμόσφαιρας το οποίο βρίσκεται σε άμεση αλληλεπίδραση με το ατμοσφαιρικό οριακό στρώμα με το οποίο συμβαίνουν εκτεταμένες ανταλλαγές θερμότητας. Όπως θα αναφερθεί εκτεταμένα στη συνέχεια, το έδαφος είναι το σημείο όπου υπάρχει μεγάλη εναπόθεση θερμότητας μέσω της ηλιακής ακτινοβολίας, όπως επίσης, το ίδιο, είναι επιφάνεια εκπομπής, της μεγάλου μήκους κύματος, γήινης ακτινοβολίας η οποία εκπέμπεται προς την ατμόσφαιρα και το διάστημα. Επίσης, το έδαφος δέχεται το νερό των ατμοσφαιρικών κατακρυμνισμάτων και από την μεριά του αποδίδει πίσω στην ατμόσφαιρα υδρατμούς μέσω του μηχανισμού της εξατμισοδιαπνοής. Η θερμοκρασία του εδάφους είναι ένα μέγεθος το οποίο διαδραματίζει κρίσιμο ρόλο σε όλες αυτές τις διαδικασίες. Συνεπώς η μελέτη και κατανόηση των μηχανισμών μεταφοράς θερμότητας, οι οποίοι διαμορφώνουν τελικά τη θερμοκρασία, είναι ένα επιπλέον εργαλείο στην διασαφήνιση των μηχανισμών που λαμβάνουν χώρα στη γήινη ατμόσφαιρα.

Το ενδιαφέρον για τη θερμοκρασία του εδάφους τις τελευταίες δεκαετίες έχει ενταθεί, καθώς διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση του καιρού ενώ φαίνεται ότι είναι κρίσιμος παράγοντας και στη διαμόρφωση του κλίματος. Για το λόγο αυτό, η θερμοκρασία του εδάφους είναι φυσικό μέγεθος το οποίο συνυπολογίζεται στα μοντέλα αριθμητική πρόγνωσης του καιρού και στα μοντέλα πρόγνωσης του κλίματος και συνεπώς η έρευνα και γνώση σε αυτό το πεδίο, αυξάνει την προγνωστική ικανότητα των εν λόγω προσομοιώσεων (Gao et. al., 2009).

## 1.2 Μηχανισμοί μεταφοράς θερμότητας

Όπως αναφέρθηκε, στην παρούσα εργασία θα μελετηθεί η διάδοση της θερμότητας στο έδαφος. Είναι γνωστό από την κλασσική θερμοδυναμική ότι η θερμότητα μπορεί να διαδοθεί μέσω μίας σειράς μηχανισμών, οι οποίοι είναι η διάδοση θερμότητας μέσω αγωγής από το θερμό προς το ψυχρό σώμα, η διάδοση θερμότητας μέσω ρευμάτων μεταφοράς κάποιου ρευστού και η μεταφορά θερμότητας μέσω ακτινοβολίας. Δεν αποτελεί εξορισμού μηχανισμό μεταφοράς θερμότητας, παρόλα αυτά αξίζει να σημειωθεί το φαινόμενο την έκλυσης λανθάνουσας θερμότητας από υλικά τα οποία υπόκεινται σε αλλαγή φάσης, ως μία επιπλέον φυσική διεργασία η οποία συμμετέχει στους μηχανισμούς ανταλλαγής θερμότητας.

### 1.2.1 Αγωγή θερμότητας

Από τη σκοπιά του μικρόκοσμου, η μακροσκοπική φυσική ποσότητα της θερμοκρασίας μπορεί να ιδωθεί ως η μέση κινητική ενέργεια των μορίων ενός υλικού. Στην περίπτωση επαφής δύο σωμάτων με διαφορετική θερμοκρασία τα μόρια των δύο σωμάτων στο σημείο επαφής συγκρούονται μεταβιβάζοντας κινητική ενέργεια το ένα στο άλλο. Με αυτόν τον απλό μηχανισμό, η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του θερμού σώματος ελαττώνεται ενώ αυτή του ψυχρού αυξάνει. Η διαδικασία αυτή σταματά όταν οι μέσες κινητικές ενέργειες των μορίων των δύο σωμάτων εξισωθούν και αποκατασταθεί η κατάσταση θερμικής ισορροπίας.

Η ανταλλαγή θερμότητας μεταξύ δύο σωμάτων τα οποία έρχονται σε επαφή υπολογίζεται από το νόμο Fourier (Zemansky, 1997) που λέει ότι η ροή θερμότητας  $\vec{F}$  είναι ανάλογη της θερμοβαθμίδας

$$\vec{F} = -\alpha \nabla T, \quad (1.1)$$

και η σταθερά αναλογίας  $\alpha$  είναι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας. Ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας είναι μία ποσότητα που η τιμή της υποδεικνύει αν το υπό εξέταση υλικό είναι καλός ή κακός αγωγός της θερμότητας μέσω του μηχανισμού της αγωγής.

### 1.2.2 Ρεύματα μεταφοράς

Το φαινόμενο κατά το οποίο ένας όγκος ρευστού θερμανθεί σε κάποιο σημείο του χώρου, και μετακινηθεί στη συνέχεια σε κάποιο άλλο σημείο, όπου αναμειγνύεται με ψυχρότερο όγκο ρευστού ονομάζεται ρεύμα μεταφοράς. Η κίνηση του ρευστού συνήθως προκαλείται αυθόρμητα από τη μείωση της πυκνότητάς του κατά την αρχική θέρμανση.

Κατά τη διάρκεια της κίνησης του ρεύματος μεταφοράς το ρευστό ανταλλάσσει συνεχώς θερμότητας μέσω αγωγής με το περιβάλλον του. Στην περίπτωση που το ρεύμα μεταφοράς έρχεται σε επαφή με άλλο ρευστό, η ροή θερμότητας μεταξύ των δύο ρευστών είναι μεγαλύτερη καθώς πραγματοποιείται ανάμειξη των μαζών στην επιφάνεια επαφής τους. Η μεταφορά θερμότητας μέσω του δευτέρου μηχανισμού γίνεται εντονότερη όταν η ροή γίνει τυρβώδης.

Στο επιφανειακό στρώμα του εδάφους, το οποίο θα εξεταστεί σε αυτή την εργασία, η παρουσία ύδατος οφείλεται αποκλειστικά στα ατμοσφαιρικά κατακρημνίσματα. Καθώς το νερό φτάσει στην επιφάνεια της Γης μπορεί να ακολουθήσει διάφορες οδούς. Μπορεί να διαπεράσει την επιφάνεια του εδάφους, μια διεργασία που ονομάζεται κατείσδυση, μπορεί να ρεύσει επιφανειακά και μπορεί να εξατμισθεί. Αυτές οι εναλλακτικές οδοί που μπορεί να ακολουθήσει το νερό των ατμοσφαιρικών κατακρημνισμάτων κωδικοποιούνται μέσω την εξίσωσης υδρολογικού ισοζυγίου:

$$P = I + R + E,$$

όπου  $P$  η ποσότητα των ατμοσφαιρικών κατακρημνισμάτων,  $I$  η ποσότητα του καταδυόμενου ύδατος,  $R$  το νερό της επιφανειακής απορροής και  $E$  η ποσότητα ύδατος που επιστρέφει στην ατμόσφαιρα μέσω της εξατμισοδιαπόσης. Και οι τέσσερις αυτές ποσότητες μπορούν να εκφραστούν και σε μονάδες όγκου και σε μονάδες χιλιοστών βροχής. Το ποσοστό εμφάνισης κάθε μίας από αυτές τις διαδικασίες εξαρτάται κυρίως από τις ιδιότητες του εδάφους. Το πορώδες έδαφος όπως και η ύπαρξη βλάστησης, ευνοεί την κατείσδυση, ενώ το επικλινές έδαφος ευνοεί τη επιφανειακή απορροή (Σούλιος, 1986).

Εξετάζοντας μονάχα τη διαδικασία της κατείσδυσης, το νερό υπό την επίδραση της

βαρύτητας εισέρχεται εντός του εδάφους. Το νερό περνώντας από ένα στρώμα εδάφους καταρχάς συμπληρώνει το έλλειμμα υγρασίας του στρώματος ενώ η υπόλοιπη ποσότητα θα διέλθει από το στρώμα. Η ποσότητα νερού που θα διέλθει, θα προστεθεί τελικά στο υπόγειο νερό των υδροφόρων στρωμάτων.

Η ικανότητα του εδάφους να απορροφά νερό ή να επιτρέπει τη διέλευσή του ονομάζεται δυναμικό κατείσδυσης. Αν η ποσότητα του νερού των κατακρημνισμάτων υπερβεί το δυναμικό κατείσδυσης η επιπλέον ποσότητα θα προστεθεί στην επιφανειακή απορροή. Κατά τη διάρκεια μίας βροχόπτωσης το δυναμικό κατείσδυσης ξεκινά από μία συγκεκριμένη τιμή και μειώνεται λαμβάνοντας ασυμπτωτικά μία σταθερή τιμή.

Λαμβάνοντας αυτά υπόψη, μία μικρής διάρκειας βροχόπτωση σε ξηρό έδαφος, όπως είναι οι θερινές καταιγίδες στην Ελλάδα, θα συμβάλει μόνο στη συμπλήρωση της υγρασίας των ανωτέρων στρωμάτων του εδάφους. Αντίθετα βροχοπτώσεις μεγάλης διάρκειας οι οποίες συμβαίνουν σε έδαφος κορεσμένο με υγρασία, θα προξενήσουν διέλευση του νερού προς ενδότερα στρώματα εδάφους.

Οι Gao et al. (2003) μοντελοποίησαν τη ροή θερμότητας λόγω ρεύματος μεταφοράς ως:

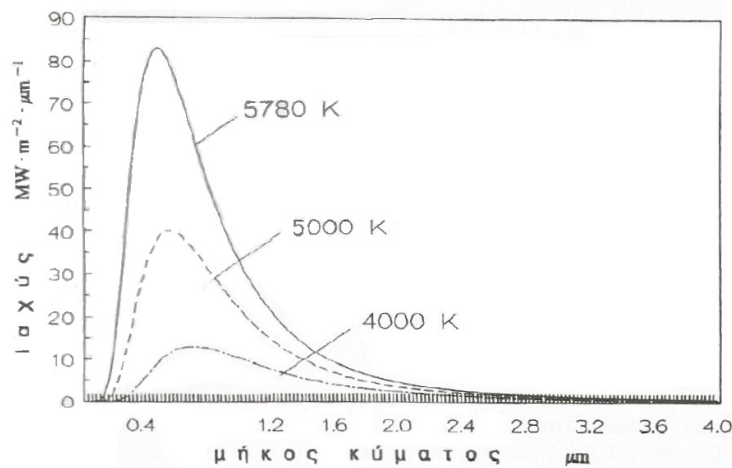
$$\vec{F} = -C_w w \theta T, \quad (1.2)$$

όπου  $C_w$  η ειδική θερμοχωρητικότητα του νερού,  $w$  η ροή του ύδατος και  $\theta$  η περιεκτικότητα κατ' όγκον του εδάφους σε νερό.

### 1.2.3 Διάδοση θερμότητας μέσω ακτινοβολίας

Κάθε σώμα, ανεξαρτήτως του υλικού του, εκλύει ενέργεια με την μορφή ακτινοβολίας. Το φάσμα εκπομπής της ακτινοβολίας εξαρτάται πλήρως από τη θερμοκρασία του σώματος όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1 και είναι ανεξάρτητο της σύστασης του σώματος. Το φάσμα εκπομπής δίνεται από το νόμο του Planck (Young, 2004):

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)},$$



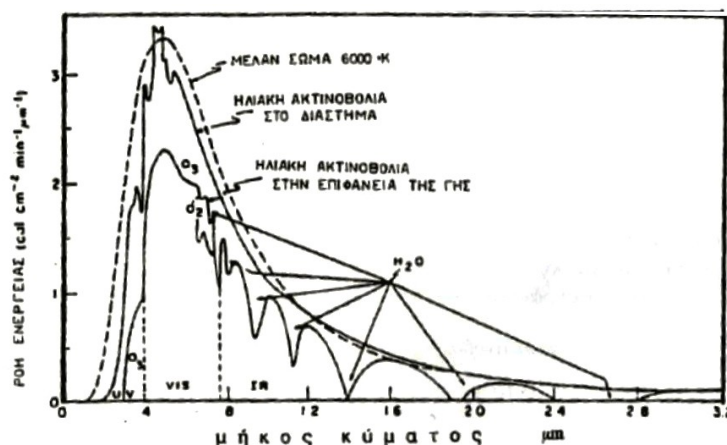
Σχήμα 1.1: Το φάσμα της ακτινοβολίας μέλανος σώματος για διάφορες θερμοκρασίες (Σαχσαμάνογλου και Μακρογιάννης, 1998).

όπου  $I(\lambda)$  η εκπεμπόμενη ισχύς ανά μονάδα επιφανείας συναρτήσει του μήκους κύματος,  $\lambda$  το μήκος κύματος της ακτινοβολίας,  $h$  η σταθερά του Planck,  $c$  η ταχύτητα του φωτός και  $k$  η σταθερά Boltzmann.

Στην επιφάνεια του εδάφους ένας κύριος παράγοντας καθορισμού της θερμοκρασίας του είναι οι ροές ακτινοβολίας οι οποίες απορροφώνται ή εκπέμπονται από το έδαφος. Το έδαφος δέχεται ακτινοβολία από τον Ήλιο ενώ το ίδιο εκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία προς το διάστημα.

Λαμβάνοντας υπόψη τους νόμους του μέλανος σώματος γίνεται αντιληπτό ότι ο Ήλιος έχει φάσμα εκπομπής το οποίο παρουσιάζει μέγιστη τιμή έντασης σε μικρότερα μήκη κύματος από ότι η Γη καθώς ο ήλιος μπορεί προσεγγιστικά να θεωρηθεί ως ένα μέλαν σώμα θερμοκρασίας  $5800K$  στην επιφάνειά του.

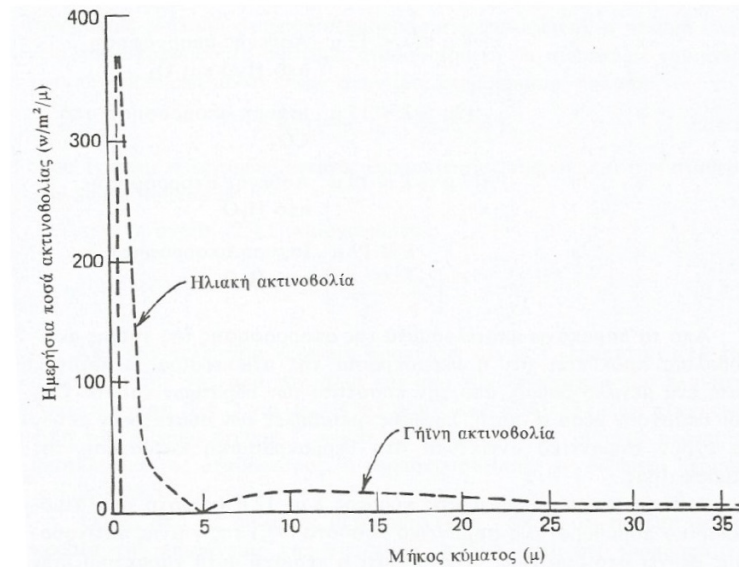
Εξαιτίας της παρεμβολής της ατμόσφαιρας η ηλιακή ακτινοβολία προσεγγίζει την επιφάνεια με μικρότερη ένταση από αυτή στην κορυφή της ατμόσφαιρας. Η μείωση αυτή οφείλεται στις διαδικασίες σκέδασης και απορρόφησης από τα διάφορα στοιχεία τα οποία απαρτίζουν την ατμόσφαιρα, τα αερολύματα και τα υδροσταγονίδια. Η σύγκριση του φάσματος της ηλιακής ακτινοβολίας στην κορυφή της ατμόσφαιρας και στην επιφάνεια της Γης παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.2.



Σχήμα 1.2: Το φάσμα της ακτινοβολίας του ηλίου όπως αυτή καταγράφεται στο ανώτερο σημείο της ατμόσφαιρας και στην επιφάνεια του εδάφους (Φλόκα, 1997).

Κατά την αλληλεπίδραση της ηλιακής ακτινοβολίας με την επιφάνεια του εδάφους, μπορεί να συμβεί ανάκλασή της, απορρόφησή της από την επιφάνεια του εδάφους και διέλευσή της εντός του εδάφους. Αναφορικά με την τελευταία διαδικασία, εισχώρηση εντός του εδάφους συμβαίνει σε πολύ περιορισμένο βάθος, οπότε μπορεί να θεωρηθεί ότι αυτή αλληλεπιδρά μόνο με την επιφάνεια. Σχετικά με την απορρόφηση και την ανάκλαση, η μεταξύ τους αναλογία δεν είναι σταθερή, αλλά εξαρτάται από την γωνία πρόσπτωσης της ακτινοβολίας και τη φύση της επιφάνειας. Σχετικά με τον πρώτο παράγοντα, η γωνία πρόσπτωσης της ηλιακής ακτινοβολίας μεταβάλλεται με την εποχή του έτους, την ώρα της ημέρας όπως επίσης εξαρτάται και από την κλίση της επιφάνειας.

Όπως αναφέρθηκε η Γη απορροφά ένα μέρος της εκπεμπόμενης ηλιακής ακτινοβολίας και ως εκ τούτου θερμαίνεται. Καθώς η επιφάνεια της Γης έχει πολύ χαμηλότερη θερμοκρασία από αυτή του Ήλιου, η μέγιστη τιμή της έντασης της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας είναι μεγάλου μήκους κύματος. Πιο συγκεκριμένα η επιφάνεια του εδάφους μπορεί να θεωρηθεί κατά μέσο πλανητικό όρο ως ένα μέλαν σώμα θερμοκρασίας  $288\text{ K}$  με το μέγιστο του φάσματος της εκπεμπόμενης ισχύος να βρίσκεται στα  $10\ \mu\text{m}$  στην περιοχή της υπέρυθρης ακτινοβολίας. Το φάσμα εκπομπής της γήινης ακτινοβολίας συγκρινόμενο με αυτό του Ήλιου παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3: Το φάσμα της ακτινοβολίας του Ηλίου και της Γης (Φλόκας, 1997).

#### 1.2.4 Λανθάνουσα θερμότητα

Είναι γνωστό ότι κατά την αλλαγή φάσης κάποιου υλικού εκλύεται ή απορροφάται θερμότητα. Η θερμότητα αυτή ονομάζεται λανθάνουσα διότι φαινομενικά βρίσκεται σε μία λανθάνουσα κατάσταση, αποθηκευμένη στους διαμοριακούς δεσμούς των μορίων του υλικού και εμφανίζεται μόνο στις αλλαγές φάσης. Η λανθάνουσα θερμότητα υπολογίζεται από τη σχέση (Young, 2004):

$$Q = M \cdot L,$$

όπου  $M$  η μάζα που υπόκειται σε αλλαγή φάσης και  $L$  η ενέργεια μετασχηματισμού, η οποία είναι διαφορετική για κάθε υλικό.

Στη γήινη ατμόσφαιρα αλλά και στο έδαφος, η έκκληση ή η απορρόφηση λανθάνουσας θερμότητας συμβαίνει σχεδόν αποκλειστικά λόγω των αλλαγών φάσης του νερού. Εντός του εδάφους μπορεί να παρατηρηθεί τήξη του πάγου ή αντίστροφα πήξη του νερού. Στην επιφάνεια του εδάφους μπορούν να παρατηρηθούν οι διαδικασίες της εξάτμισης του νερού, η τήξη του πάγου και η πήξη του νερού. Στην περίπτωση που υπάρχει βλάστηση, υπάρχει

και ο μηχανισμός της διαπνοής.

### 1.3 Θερμοκρασία της επιφάνειας του εδάφους

Το πρώτο βήμα για τον προσδιορισμό των ρών θερμότητας είναι ο σαφής ορισμός του συστήματος μελέτης και του περιβάλλοντος. Στην περίπτωση της παρούσας εργασίας το σύστημα αποτελείται από το έδαφος το οποίο έχει ως άνω συνοριακή επιφάνεια την επιφάνεια του εδάφους, ενώ ως κάτω συνοριακή επιφάνεια το σημείο απείρου βάθους. Στην περίπτωση της συνοριακής επιφάνειας απείρου βάθους, θεωρείται ότι δεν υπάρχει ροή θερμότητας και ότι η θερμοκρασία παραμένει σταθερή. Αντίθετα, στην περίπτωση της επιφάνειας του εδάφους αλλά και οποιασδήποτε άλλης επιφάνειας παράλληλης προς αυτή η ροή θερμότητας δεν είναι μηδενική.

Η θερμοκρασία της επιφάνειας του εδάφους καθορίζεται από τις ροές θερμότητας που συμβαίνουν σε αυτή. Κύριοι παράγοντες διαμόρφωσης της θερμοκρασίας είναι το ισοζύγιο ακτινοβολιών, η μεταφορά αισθητής θερμότητας μεταξύ της επιφάνειας και του υπερκείμενου αέρα, η έκλυση ή απορρόφηση λανθάνουσας θερμότητας και η θέρμανση από άλλες πηγές. Η εξίσωση που καθορίζει το θερμικό ισοζύγιο στην επιφάνεια του εδάφους είναι η (Gao et.al, 2012):

$$R_n - G_0 = H + LE,$$

όπου  $G_0$  η θερμότητα που απορροφάται από το έδαφος,  $R_n$  η μεταφερόμενη θερμότητα λόγω του ισοζυγίου ακτινοβολιών,  $LE$  η λανθάνουσα θερμότητα η οποία απορροφάται ή εκλύεται και  $H$  η μεταφερόμενη αισθητή θερμότητα μεταξύ επιφάνειας του εδάφους και υπερκείμενου αέρα.

Το ισοζύγιο ακτινοβολιών μπορεί να αναλυθεί ως εξής:

$$R_n = K_{\downarrow} - K_{\uparrow} + L_{\downarrow} - L_{\uparrow},$$

όπου  $K_{\downarrow}$  η μικρού μήκους κύματος ηλιακή ακτινοβολία,  $K_{\uparrow}$  η ανακλώμενη μικρού μήκους κύματος ακτινοβολία,  $L_{\downarrow}$  η προσπίπτουσα στο έδαφος μεγάλου μήκους κύματος ακτινο-



βολία που εκπέμπεται από την ατμόσφαιρα και  $L_{\uparrow}$  η ακτινοβολία μεγάλου μήκους κύματος που εκπέμπεται από την επιφάνεια της Γης (Kalma et.al., 2008). Στην παρούσα εργασία δε θα μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο διαμορφώνεται η θερμοκρασία στην επιφάνεια του εδάφους. Αντίθετα η κύμανση της θερμοκρασίας θα ιδωθεί ως μία συνοριακή συνθήκη του προς εξέταση προβλήματος, το οποίο είναι η διάδοση της θερμότητας από την επιφάνεια του εδάφους προς το εσωτερικό του.

## 1.4 Θερμοκρασία στο εσωτερικό του εδάφους

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, εντός του εδάφους παρατηρείται διάδοση θερμότητας μέσω αγωγής, μέσω ρευμάτων μεταφοράς, είναι πιθανή η έκλυση λανθάνουσας θερμότητας ενώ στα πρώτα χιλιοστά από την επιφάνεια εισχωρεί ένα μέρος της ηλιακής ακτινοβολίας. Από τους τέσσερις αυτούς μηχανισμούς μεταφοράς θερμότητας οι δύο τελευταίοι έχουν πολύ μικρότερη συνεισφορά από τους δύο πρώτους. Σχετικά με την ηλιακή ακτινοβολία, αυτή διεισδύει ελάχιστα στο έδαφος, συνεπώς θεωρείται ότι η μεταφερόμενη από την ακτινοβολία θερμότητα, αλληλεπιδρά μόνο με την επιφάνεια του εδάφους και δε συνεισφέρει στη διάδοση θερμότητας εντός του εδάφους. Σχετικά με τη λανθάνουσα θερμότητα εντός του εδάφους, η συνεισφορά της περιορίζεται μόνο στις περιπτώσεις που συμβαίνει αλλαγή φάσης μεταξύ νερού και πάγου. Τέτοιες αλλαγές φάσης συμβαίνουν μόνο όταν η θερμοκρασία του εδάφους ανέλθει η κατέλθει από τους  $0^{\circ} C$ . Αυτό συμβαίνει μεν κάποιες μέρες του χειμώνα στην περιοχή ενδιαφέροντος, αλλά η συνεισφορά αυτού του μηχανισμού ακόμη και για αυτές τις περιπτώσεις θεωρείται μικρή. Επομένως, με εξαίρεση περιοχές σε βόρεια γεωγραφικά πλάτη, η συνεισφορά των δύο τελευταίων μηχανισμών αγνοείται ως μικρή.

Λαμβάνοντας υπόψη τη διάδοση θερμότητας μέσω διάχυσης και μέσω ρευμάτων μεταφοράς, η ροή θερμότητας  $\vec{F}$  αλλάζει τη θερμοκρασία του εδάφους  $T(x, y, z, t)$  καθώς:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F} = 0, \quad (1.3)$$

όπου  $C$  η θερμοχωρητικότητα του εδάφους. Αντικαθιστώντας τη ροή θερμότητας από

το άθροισμα των ροών θερμότητας λόγω αγωγής και λόγω μεταφοράς (εξισώσεις (1.1) και (1.2) ) και διαιρώντας με τη θερμοχωρητικότητα, παίρνουμε την εξίσωση που διέπει τη χωροχρονική μεταβολή της θερμοκρασίας στο έδαφος και είναι η:

$$\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = \nabla[k(x, y, z, t)\nabla T(x, y, z, t)] + \frac{\partial[\lambda(x, y, z, t)T(x, y, z, t)]}{\partial z}, \quad (1.4)$$

όπου  $k = \alpha/C$  ο συντελεστής θερμικής διάχυσης και  $\lambda = C_w w \theta / C$  ο συντελεστής μεταφοράς που εν γένει είναι συναρτήσεις του χρόνου και του χώρου. Θεωρώντας ομογένεια στο οριζόντιο σε σχέση με τη μεταφορά θερμότητας (που προϋποθέτει ομοιογένεια του εδάφους τουλάχιστον τοπικά), η θερμοκρασία και η μεταφορά θερμότητας δεν εξαρτώνται από τα  $x$ ,  $y$  και επομένως η εξίσωση (1.4) απλοποιείται ως:

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}[k(z, t)\frac{\partial T(z, t)}{\partial z}] + \frac{\partial[\lambda(z, t)T(z, t)]}{\partial z}. \quad (1.5)$$

Ως αποτέλεσμα της δράσης των δύο πρώτων μηχανισμών η θερμοκρασία του εδάφους παρουσιάζει συνεχή διακύμανση. Η επιφανειακή θερμοκρασία του εδάφους παρουσιάζει διακύμανση όμοια με την κύμανση της θερμοκρασίας του υπερκείμενου αέρα. Η ελάχιστη τιμή της θερμοκρασίας παρουσιάζεται τις πρώτες πρωινές ώρες, χρονικά σχεδόν ταυτόχρονα με την ελάχιστη θερμοκρασία της ατμόσφαιρας. Το ολικό όμως μέγιστο παρουσιάζεται περίπου δύο ώρες προ της μέγιστης ατμοσφαιρικής θερμοκρασίας. Αυτό συμβαίνει διότι το έδαφος κατά τη διάρκεια της ημέρας θερμαίνεται ταχύτερα από τον υπερκείμενο αέρα ενώ κατά τη διάρκεια της νύχτας ψύχεται επίσης γρηγορότερα (Γεωργόπουλος, 2017). Η θερμοκρασία του εδάφους σε μεγαλύτερα βάθη παρουσιάζει και αυτή παρόμοιες κυμάνσεις όμως το θερμοκρασιακό εύρος είναι μικρότερο από αυτό της επιφάνειας όπως επίσης η εμφάνιση της μέγιστης και ελάχιστης τιμής παρουσιάζει χρονική υστέρηση. Δηλαδή κατά τις πρώτες πρωινές ώρες που το επιφανειακό στρώμα του εδάφους αρχίζει να θερμαίνεται, βαθύτερα στρώματα εξακολουθούν να ψύχονται, ενώ αντίθετα κατά τη διάρκεια της νύχτας όποτε και η επιφάνεια του εδάφους ψύχεται, εσωτερικότερα στρώματα θερμαίνονται. Τόσο η μείωση του πλάτους όσο και η διαφορά φάσης της κύμανσης της θερμοκρασίας του εδάφους εξαρτώνται άμεσα από το βάθος.

Ο ετήσιος κύκλος της θερμοκρασίας του εδάφους, όπως και στην περίπτωση του ατμοσφαιρικού αέρα είναι περισσότερο εμφανής σε μεγαλύτερα γεωγραφικά πλάτη. Όπως και η ημερήσια κύμανση, έτσι και η ετήσια παρουσιάζει μείωση του πλάτους κύμανσης και αύξηση της διαφοράς φάσης όσο το βάθος αυξάνεται, με τη διαφορά ότι το πλάτος της ετήσια κύμανσης της θερμοκρασίας αποσβένεται σε μεγαλύτερα βάθη. Όπως αναφέρεται στο Φλόκα (1992), το βάθος για το οποίο η θερμοκρασία δεν παρουσιάζει μεταβολή εξαιτίας του ετήσιου κύκλου ονομάζεται αμετάβλητο στρώμα. Το βάθος του αμετάβλητου στρώματος είναι διαφορετικό για κάθε τύπο εδάφους όπως επίσης μεταβάλλεται με το γεωγραφικό πλάτος. Πιο συγκεκριμένα στον Ισημερινό υπολογίζεται στα 6 m ενώ στα μέσα γεωγραφικά πλάτη στα 15 m (Φλόκας, 1997). Κάτω από αυτό το στρώμα η θερμοκρασία αυξάνεται με το βάθος. Η αύξηση της θερμοκρασίας με το βάθος ονομάζεται γεωθερμική βαθμίδα και η τιμή της είναι κατά μέσο πλανητικό όρο  $30^\circ C$  ανά χιλιόμετρο βάθους (Φυτίκας και Ανδρίτσος, 2004).

Για την εξήγηση της κύμανσης της θερμοκρασίας του εδάφους, οι van Wijk and de Vries (1963) πρότειναν να αγνοηθεί ο μηχανισμός της μεταφοράς θερμότητας μέσω ρευμάτων και ότι ο συντελεστής θερμικής διάχυσης είναι ανεξάρτητος από το βάθος και το χρόνο. Θεώρησαν επίσης ότι η θερμοκρασία της επιφάνειας του εδάφους είναι ημιτονοειδής με πλάτος  $T_0$  και συχνότητα  $\omega$ :  $T(z = 0, t) = T_0 \sin(\omega t)$ . Στην περίπτωση αυτή, η διαφορική εξίσωση που διέπει την εξέλιξη της θερμοκρασίας λύνεται αναλυτικά και η λύση της είναι η:

$$T(z, t) = T_0 e^{-z\sqrt{\frac{\omega}{2k}}} \sin\left(\omega t - z\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right). \quad (1.6)$$

Βάσει αυτής της λύσης μπορούν να εξαχθούν τα εξής συμπεράσματα. Αρχικά διαπιστώνεται ότι η θερμοκρασία μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο σε συγκεκριμένο βάθος με την ίδια περίοδο με τη μεταβολή της θερμοκρασίας στην επιφάνεια. Το πλάτος της ταλάντωσης σε κάθε βάθος είναι  $A = T_0 e^{-z\sqrt{\frac{\omega}{2k}}}$  και η φάση της ταλάντωσης  $\phi = \omega t - z\sqrt{\frac{\omega}{2k}}$ . Δηλαδή η επιφανειακή κύμανση της θερμοκρασίας συνεχίζει να υφίσταται σε κάθε βάθος αλλά με πλάτος που μειώνεται εκθετικά με το βάθος και με

διαφορά φάσης που αυξάνει γραμμικά με το βάθος.

Διαπιστώνεται λοιπόν, ότι υψίσυχνες κυμάνσεις της θερμοκρασίας εξασθενούν γρηγορότερα, αφού ο εκθετικός όρος τείνει γρήγορα στο μηδέν. Αντίθετα, οι χαμηλόσυχνες κυμάνσεις διαδίδονται εντός του εδάφους έχοντας μικρότερη μείωση πλάτους. Αντίστοιχα, κυμάνσεις με μικρή συχνότητα έχουν μικρότερη διαφορά φάσης σε μεγαλύτερα βάθη. Συμπερασματικά οι χαμηλόσυχνες κυμάνσεις της θερμοκρασίας αναμένεται να κυριαρχούν στα μεγάλα βάθη με την κύμανση της θερμοκρασίας να παρουσιάζει μικρή διαφορά φάσης σε σχέση με την κύμανση της θερμοκρασίας στην επιφάνεια, εξηγώντας έτσι χοντρικά τη φαινομενολογία της κύμανσης της θερμοκρασίας στο εσωτερικό του εδάφους.

Βάσει της μείωσης πλάτους και της διαφοράς φάσης που παρουσιάζουν οι μετρούμενες κυμάνσεις σε σχέση με την επιφανειακή κύμανση, μπορεί να υπολογιστεί ο συντελεστής θερμικής διάχυσης του εδάφους. Οι Rajeev Kodikara (2016) εξέτασαν 5 αλγορίθμους υπολογισμού του συντελεστή θερμικής διάχυσης με βάση τη λύση (3.6), τους οποίους και συνέκριναν. Οι υπολογισμοί σχετικά με το συντελεστή θερμικής διάχυσης πραγματοποιήθηκαν με χρήση δεδομένων θερμοκρασίας για μία περίοδο 2 ετών για βάθη έως 2 μέτρα από δύο διαφορετικές τοποθεσίες και αφορούσαν αποκλειστικά την ημερήσια κύμανση της θερμοκρασίας. Τα αποτελέσματα κάθε αλγορίθμου συγκρίθηκαν με τις τιμές του συντελεστή που προσδιορίστηκαν εργαστηριακά, με τη σύγκριση να δίνει ενθαρρυντικά αποτελέσματα για την ακρίβεια της μεθόδου. Επιπρόσθετα, άξιος αναφοράς είναι και ένας αλγόριθμος ο οποίος αναπτύχθηκε από τους Jackson και Taylor (1986) και υπολογίζει το συντελεστή θερμικής διάχυσης μεταξύ δύο σημείων διαφορετικού βάθους, χρησιμοποιώντας τις δύο πρώτες αρμονικές συχνότητες και την τιμή της θερμοκρασίας σε κάθε ένα από τα τέσσερα τεταρτημόρια του κύριου κύκλου.

Με βάση δύο από τους αλγορίθμους που αφορούν τη μείωση πλάτους κύμανσης και την αύξηση της διαφοράς φάσης της κύμανσης της θερμοκρασίας, οι Πνευματικός (1996), Ιωάννου (1998) και Γεωργόπουλος (2017) υπολόγισαν το συντελεστή θερμικής διάχυσης για το έδαφος του μετεωρολογικού σταθμού στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων. Ο υπολογισμός έγινε για την ετήσια κύμανση της θερμοκρασίας. Οι τιμές που υπολογίστη-

καν δείχνουν ότι το έδαφος του σταθμού είναι αργιλώδες, συμπέρασμα το οποίο είναι σε συμφωνία με την εργασία του Τζίμα (1980) για τη σύσταση του εδάφους στον εν λόγω σταθμό.

Οι Shao (1998) έλαβαν υπόψη και τη μεταφορά θερμότητας μέσω ρευμάτων μεταφοράς νερού και θεώρησαν ότι ο συντελεστής μεταφοράς, ο οποίος καθορίζει την ένταση του μηχανισμού, είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου. Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας αναπτύχθηκε ένας αλγόριθμος για τον υπολογισμό των συντελεστών θερμικής διάχυσης και μεταφοράς ο οποίος εφαρμόστηκε με τη χρήση δεδομένων της θερμοκρασίας του εδάφους 120 ωρών και σε βάθη έως 60 cm. Ενώ στην εργασία των Shao χρησιμοποιήθηκε μόνο η συχνότητα του ημερήσιου κύκλου, οι Wang et al. (2012) κατασκεύασαν έναν αλγόριθμο που λαμβάνει υπόψη τις 6 πρώτες αρμονικές. Ο αλγόριθμος αυτός έδειξε ότι προσομοίωσε καλύτερα την κύμανση της θερμοκρασίας του εδάφους, με τη διαφορά να είναι περισσότερο εμφανής σε μεγαλύτερα βάθη.

Οι Gao (2003) θεώρησαν σταθερούς συντελεστές θερμικής αγωγιμότητας και μεταφοράς και βρήκαν ομοίως αναλυτικές λύσεις για την κύμανση της θερμοκρασίας. Οι Gao (2008) αξιοποίησαν τη λύση αυτή και δεδομένα τα οποία προέρχονταν από το υψίπεδο Loess της Κίνας, καλύπτουν μία περίοδο σαραντατεσσάρων ημερών και αφορούν μετρήσεις της θερμοκρασίας του εδάφους έως το βάθος των 40 cm, με σκοπό να υπολογιστούν οι συντελεστές θερμικής αγωγιμότητας και μεταφοράς. Χρησιμοποιώντας αλγόριθμο μείωσης του πλάτους κύμανσης όμοιο με τον προαναφερθέντα των Rajeev και Kodikara (2016), υπολόγισαν τους εν λόγω συντελεστές για τον ημερήσιο θερμοκρασιακό κύκλο και βρήκαν ότι λαμβάνοντας υπόψη τη μεταφορά θερμότητας μέσω ρευμάτων, υπήρχε καλύτερη συμφωνία με τις παρατηρούμενες κυμάνσεις και ότι η μεταφορά θερμότητας μέσω ρευμάτων μεταφοράς ήταν σημαντική σε κάποιες περιπτώσεις.

## 1.5 Σκοπός και διάρθρωση της εργασίας

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη Ενότητα, στις προηγούμενες εργασίες μελετήθηκε η κύμανση της θερμοκρασίας του εδάφους θεωρώντας ότι οι συντελεστές θερμικής διάχυσης και μεταφοράς είναι ανεξάρτητοι του βάθους και στις περισσότερες περιπτώσεις και ανεξάρτητοι του χρόνου. Ο σκοπός της παρούσης εργασίας είναι η εξέταση αυτών των υποθέσεων με βάση τις μετρήσεις της θερμοκρασίας από το μετεωρολογικό σταθμό του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Επιπροσθέτως, θέλουμε να ποσοτικοποιήσουμε και στην περίπτωση του εδάφους στην περιοχή ενδιαφέροντος τη συμμετοχή των ρευμάτων μεταφοράς στη διάδοση της θερμότητας στο έδαφος. Πρώτος ο Τζίμας (1980) είχε αναφερθεί στην ύπαρξη υγρασίας στο έδαφος στην περιοχή του σταθμού και επομένως υπάρχει η πιθανότητα μεταφοράς θερμότητας και μέσω ρευμάτων, γεγονός που για την περίπτωση του εδάφους στα Ιωάννινα δεν είχε εξεταστεί από τις προηγούμενες εργασίες.

Η διάρθρωση της εργασίας έχει ως ακολούθως. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι μετρήσεις της θερμοκρασίας του εδάφους στην περιοχή του σταθμού και γίνεται μια πρώτη ποιοτική ανάλυση αυτών. Στο τρίτο κεφάλαιο, αναλύονται οι μετρήσεις και αναπτύσσονται καινούργιες αναλυτικές λύσεις για την εξήγηση της κύμανσης της θερμοκρασίας και στο τέταρτο κεφάλαιο αναπτύσσονται τα κύρια ευρήματα και τα συμπεράσματα της εργασίας. Τέλος, στα δύο Παραρτήματα, παρατίθενται ο αριθμητικός κώδικας που αναπτύχθηκε στη Matlab για την επεξεργασία των μετρήσεων και την ανάλυσή τους με βάση τις αναλυτικές λύσεις για την κύμανση της θερμοκρασίας, καθώς και οι λεπτομέρειες για τις αναλυτικές λύσεις.

## Κεφάλαιο 2

# Μετρήσεις θερμοκρασίας εδάφους

### 2.1 Περιγραφή μετρήσεων

Η μελέτη διάδοσης θερμότητας στο έδαφος βασίστηκε στις μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν με τα όργανα του μετεωρολογικού σταθμού του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Ο μετεωρολογικός σταθμός βρίσκεται εντός της πανεπιστημιούπολης σε σημείο με γεωγραφικό μήκος  $39^{\circ}37'10''\text{N}$  και γεωγραφικό πλάτος  $20^{\circ}50'50''\text{E}$ . Από τα δεδομένα του σταθμού αξιοποιήθηκαν οι μετρήσεις από τους αισθητήρες θερμοκρασίας εδάφους, οι οποίοι βρίσκονται τοποθετημένοι στην επιφάνεια του εδάφους ( $z = 0$ ) και σε βάθη 10, 20, 30 και 60 εκατοστών αντίστοιχα. Οι συγκεκριμένες μετρητικές διατάξεις πραγματοποιούν καταγραφή της θερμοκρασίας σε χρονικά διαστήματα των 30 λεπτών. Οι διαθέσιμες μετρήσεις από το μετεωρολογικό σταθμό αφορούσαν μία χρονική περίοδο από την 01/08/2008 έως 01/10/2019 όμως οι μετρήσεις οι οποίες αξιοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία καλύπτουν τη χρονική περίοδο από 01/8/2008 έως 14/6/2015. Ο λόγος είναι ότι κατά την επισκόπηση των μετρήσεων, διαπιστώθηκαν διαφόρων ειδών σφάλματα στις μετρήσεις του μετεωρολογικού σταθμού. Τα σφάλματα αυτά οφείλονται πιθανότατα σε δυσλειτουργία που παρουσίασαν οι αισθητήρες του σταθμού και αφορούν είτε τιμές της θερμοκρασίας που καλύπτουν μεγάλα χρονικά διαστήματα είτε μεμονωμένες ελλείψεις μετρήσεις.

## 2.2 Συμπλήρωση μετρήσεων και αποκλεισμός χρονικής περιόδου

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, διαπιστώθηκε ότι σε κάποιες περιπτώσεις οι αισθητήρες του σταθμού είχαν αποτύχει να καταγράψουν την τιμή της θερμοκρασίας. Οι ελλείπουσες μετρήσεις συμπληρώθηκαν μόνο σε περιπτώσεις που δεν υπήρχε εκτεταμένη απώλεια μετρήσεων και πιο συγκεκριμένα σε περιπτώσεις που οι ελλείπουσες μετρήσεις δεν ξεπέρασαν τις 15 διαδοχικές. Με δεδομένο ότι οι μετρήσεις πραγματοποιούνται ανά μισή ώρα, το μεγαλύτερο διάστημα στο οποίο εφαρμόστηκε η συμπλήρωση μετρήσεων ήταν 7 ώρες και 30 λεπτά.

Για την αντικατάσταση των ελλειπουσών καταγραφών χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της γραμμικής παρεμβολής. Σε αυτή την μέθοδο γίνεται η παραδοχή ότι η θερμοκρασία για περιορισμένο χρόνο μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο. Για τη συμπλήρωση των τιμών που δεν είχαν καταγραφεί χρησιμοποιήθηκαν οι μετρήσεις πριν και μετά το διάστημα των προβληματικών μετρήσεων ώστε για κάθε διάστημα κενών μετρήσεων να προσδιοριστεί η εξίσωση της ευθείας που προσεγγιστικά προσομοιώνει τη μεταβολή της θερμοκρασίας και είναι η:

$$T = \left[ \frac{T_0 - T_1}{t_0 - t_1} \right] \cdot t + T_0, \quad (2.1)$$

όπου  $T_0$  η γνωστή μέτρηση αμέσως πριν το κενό διάστημα μεταξύ των μετρήσεων,  $T_1$  η μέτρηση αμέσως μετά το συγκεκριμένο διάστημα,  $t$  ο χρόνος μεταξύ των γνωστών μετρήσεων και  $T$  η τιμή της θερμοκρασίας για τη συγκεκριμένη κενή μέτρηση.

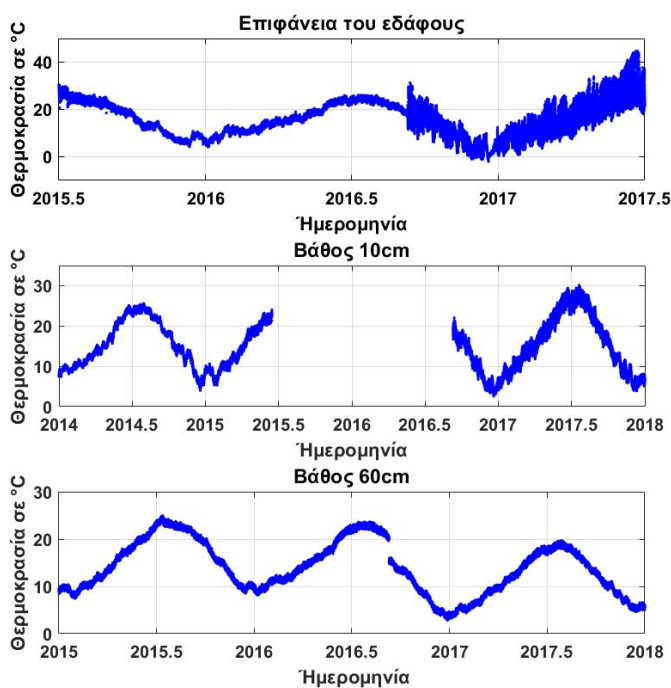
Σχετικά με την ύπαρξη των εκτεταμένων σφαλμάτων, ανακαλύφθηκαν ασυνέχειες της χρονοσειράς, βρέθηκαν μεγάλες περίοδοι κατά τις οποίες η καταγραφή των μετρήσεων είχε διακοπεί και επίσης διαπιστώθηκε ότι τα δεδομένα ενός αισθητήρα εμφανίζουν μη φυσιολογικές τιμές της θερμοκρασίας.

Αναφορικά με τις ασυνέχειες και τις εκτεταμένες χρονικές περιόδους απώλειας μετρήσεων, αυτές παρουσιάστηκαν στους περισσότερους αισθητήρες αλλά εμφανίστηκαν



σε διαφορετικές χρονικές στιγμές για τον κάθε ένα. Για τον αισθητήρα της θερμοκρασίας της επιφάνειας του εδάφους, διαπιστώθηκε ότι οι μετρήσεις της θερμοκρασίας από ένα χρονικό σημείο και μετά εμφανίζουν πολύ μεγαλύτερη διακύμανση όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1 που σχεδιάζεται η χρονοσειρά της θερμοκρασίας. Το χρονικό αυτό σημείο τοποθετείται στις 07/09/2016.

Για τον αισθητήρα θερμοκρασίας, βάθους 10 cm παρουσιάστηκε μία μεγάλη περίοδος ελλειπουσών μετρήσεων όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1. Το χρονικό σημείο εμφάνισης της ασυνέχειας τοποθετείται στις 14/06/2015. Για τον αισθητήρα βάθους 60 cm παρουσιάστηκε ασυνέχεια των μετρήσεων όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1 και η οποία τοποθετείται στις 07/09/2016.



Σχήμα 2.1: Οι χρονοσειρές της θερμοκρασίας για την επιφάνεια του εδάφους και για τα βάθη των 10 και 60 cm. Διακρίνονται τα σημεία εμφάνισης των εκτεταμένων σφαλμάτων

Λαμβάνοντας υπόψη όλες τις ανωτέρω περιπτώσεις εξετάστηκαν διάφορες λύσεις οι οποίες αναφέρονται στη βιβλιογραφία, όμως σε κάθε περίπτωση κρίθηκαν ανεφάρμο-

στες. Ως έσχατο μέτρο, αποφασίστηκε η πρόωρη λήξη της χρονοσειράς των μετρήσεων της θερμοκρασίας στο σημείο εμφάνισης του πρώτου εκτεταμένου σφάλματος το οποίο παρατηρήθηκε στις 14/06/2015.

## 2.3 Χρονικές κυμάνσεις της θερμοκρασίας και αποκλεισμός αισθητήρα

Για τη μελέτη των χρονικών κυμάνσεων της θερμοκρασίας χρησιμοποιήσαμε το μετασχηματισμό Fourier. Στο συγκεκριμένο μετασχηματισμό αξιοποιείται το γεγονός ότι οι συναρτήσεις  $\phi_\omega(t) = (1/\sqrt{2\pi})e^{i\omega t}$  αποτελούν βάση στο χώρο των συναρτήσεων, δηλαδή κάθε συνάρτηση όπως και η θερμοκρασία  $T(t)$  μπορεί να γραφεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων  $\phi_\omega(t)$ :

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.2)$$

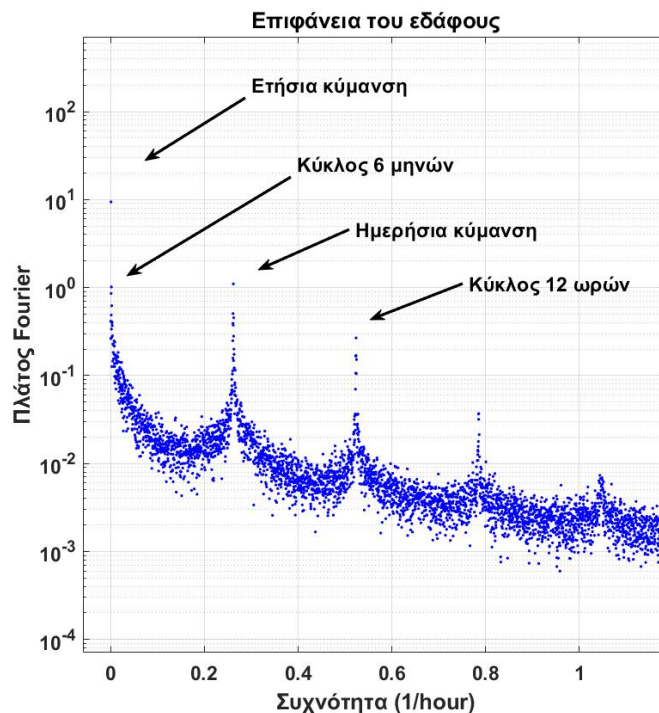
όπου  $\tilde{T}(\omega)$  είναι το πλάτος Fourier που, ερμηνεύεται ως το πλάτος μίας ημιτονοειδούς ταλάντωσης η οποία έχει συχνότητα  $\omega$ . Η εφαρμογή της συγκεκριμένης μεθόδου αποκάλυπτει τα πλάτη των ημιτονοειδών ταλαντώσεων οι οποίες προστιθέμενες σχηματίζουν την εν λόγω χρονοσειρά των δεδομένων. Στην περίπτωση των μετρήσεων, ο μετασχηματισμός δεν μπορεί να εφαρμοστεί αυτούσιος καθώς οι τιμές της θερμοκρασίας δεν αποτελούν συνεχή συνάρτηση, αλλά σειρά διακριτών τιμών. Αντί αυτού εφαρμόζεται η διακριτή εκδοχή του:

$$\tilde{T}_k = \sum_{j=1}^{n-1} T_j(x) e^{\frac{2\pi k j}{n}}, \quad (2.3)$$

όπου  $n$  ο αριθμός των μετρήσεων,  $j$  ο αριθμός της μέτρησης και  $2\pi k_j/n$  η συχνότητα  $\omega$ . Η σχέση αυτή χρησιμοποιείται στον αλγόριθμο της συνάρτησης `fft` του προγράμματος Matlab, και χρησιμοποιήθηκε στον κώδικα που κατασκευάσαμε για την επεξεργασία των δεδομένων και τους αναλυτικούς υπολογισμούς και παραθέτουμε στο Παράρτημα Α. Η

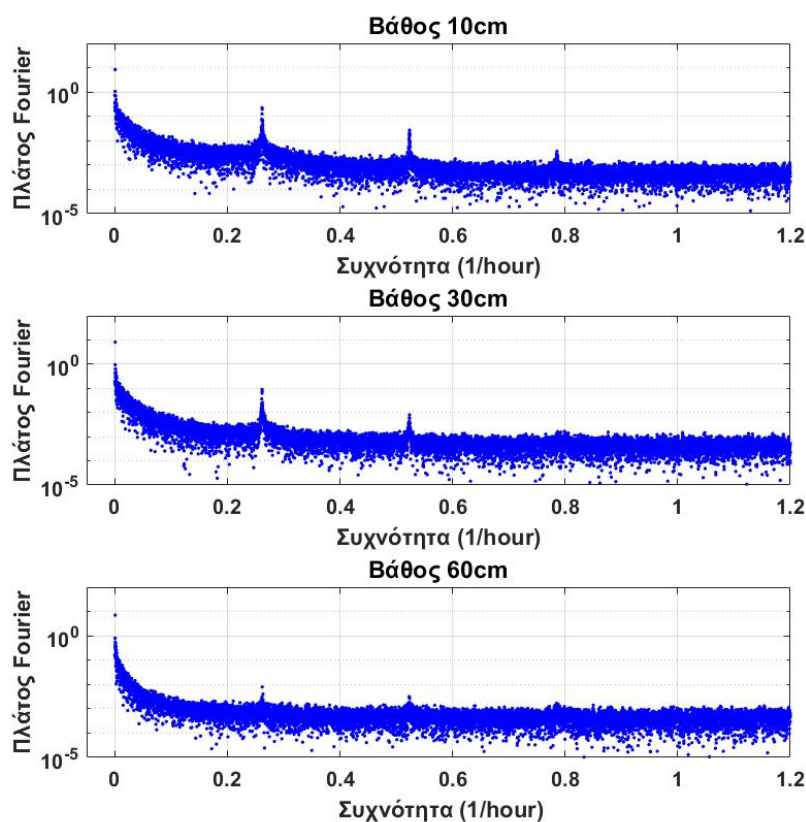
συνάρτηση  $\text{fft}$  δέχεται ως δεδομένα εισόδου τις μετρήσεις της θερμοκρασίας από κάθε αισθητήρα και βγάζει ως αποτέλεσμα τα πλάτη Fourier για κάθε συχνότητα.

Στο Σχήμα 2.2 παρουσιάζονται τα πλάτη Fourier για τη θερμοκρασία της επιφάνειας του εδάφους. Φαίνεται ότι η κύμανση της θερμοκρασίας στην επιφάνεια έχει δύο κύριες συνιστώσες, ενώ η συντριπτική πλειονότητα των υπολοίπων συχνοτήτων δε συνεισφέρει σημαντικά. Ο κύριος κύκλος αντιστοιχεί σε περίοδο 8599.2 ώρες ή 358.3 ημέρες, δηλαδή προσεγγιστικά αντιστοιχεί στον ετήσιο κύκλο. Ο δεύτερος τη τάξει κύκλος βρέθηκε ότι έχει περίοδο 23.98 ώρες ή 0.999 ημέρες, συνεπώς, ταυτίστηκε με τον ημερήσιο κύκλο. Κατά τα φαινόμενα λοιπόν οι συχνότητες που βρέθηκε ότι καθορίζουν την κύμανση της θερμοκρασίας στην επιφάνεια του εδάφους είναι αυτές που αντιστοιχούν στον ετήσιο και ημερήσιο κύκλο όπως αναμένεται.



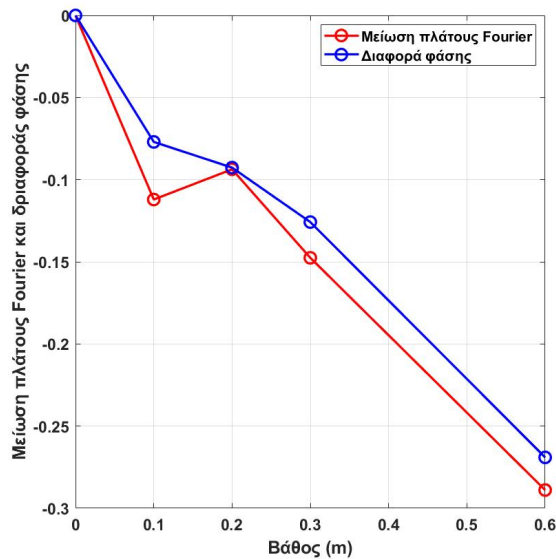
Σχήμα 2.2: Η απόλυτη τιμή για τα πλάτη Fourier  $|\tilde{T}(z, \omega)|$  συναρτήσει της συχνότητας  $\omega$  για την επιφάνεια του εδάφους. Με τα βέλη υποδεικνύονται οι περισσότερο εμφανείς κύκλοι.

Στο Σχήμα 2.3 παρουσιάζονται τα πλάτη Fourier για τη θερμοκρασία στα βάθη των 10, των 30 και των 60 εκατοστών, όπου φαίνεται ότι και σε αυτά τα βάθη ο κυρίαρχος κύκλος είναι ο ετήσιος. Σε ότι αφορά τα πλάτη Fourier, όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, αυτά μειώνονται καθώς μετακινούμαστε σε μεγαλύτερα βάθη, ενώ αντίστοιχα η διαφορά φάσης αυξάνει σε σχέση με την κύμανση της θερμοκρασίας στην επιφάνεια. Αυτό φαίνεται καθαρά για παράδειγμα συγκρίνοντας το πλάτος Fourier για τον ημερήσιο κύκλο ανάμεσα στα τρία βάθη.



Σχήμα 2.3: Η απόλυτη τιμή για τα πλάτη Fourier  $|\tilde{T}(z, \omega)|$  συναρτήσει της συχνότητας  $\omega$  για τα βάθη των 10, των 30 και των 60 εκατοστών αντίστοιχα.

Υπολογίζοντας το πλάτος των κυμάνσεων  $|\tilde{T}(z, \omega)|$  και τη διαφορά φάσης  $\delta\phi = \text{im} \left( \frac{\tilde{T}(z_i, \omega)}{\tilde{T}(z_0, \omega)} \right)$  παρατηρήθηκε μία αναντιστοιχία σε συγκεκριμένο βάθος όπως φαίνεται



Σχήμα 2.4: Το πλάτος της κύμανσης της θερμοκρασίας (κόκκινη καμπύλη) και η διαφορά φάσης της κύμανσης (μπλε καμπύλη) συναρτήσει του βάθους με χρήση των δεδομένων του μετεωρολογικού σταθμού.

στο Σχήμα 2.4 που σχεδιάζεται η διαφορά των πλατών και των φάσεων σε σχέση με το πλάτος και τη φάση της ετήσιας κύμανσης της θερμοκρασίας στην επιφάνεια.

Το πλάτος της κύμανσης για το βάθος των 20 cm παρουσιάζει αύξηση αντί για μείωση, όπως θα αναμενόταν ενώ η διαφορά φάσης της κύμανσης σε σχέση με την επιφάνεια είναι η αναμενόμενη. Οι δύο αυτές διαπιστώσεις δεν είναι συμβατές μεταξύ τους. Συνεπώς θεωρήθηκε ότι ο αισθητήρας της θερμοκρασίας των 20 cm παρείχε εσφαλμένες τιμές και τα δεδομένα του συγκεκριμένου αισθητήρα δε χρησιμοποιήθηκαν.

## Κεφάλαιο 3

# Καινούργια θεωρία για την κύμανση της θερμοκρασίας εδάφους

Όπως αναφέρθηκε στο πρώτο Κεφάλαιο, η κύμανση της θερμοκρασίας του εδάφους διέπεται από την εξίσωση (1.4) στην περίπτωση που αγνοηθεί η διάδοση μέσω ακτινοβολίας και οι αλλαγές φάσης του ύδατος μέσα στο έδαφος. Λόγω του γεγονότος ότι η σύσταση του εδάφους στην περιοχή του σταθμού είναι παρόμοια και η υγρασία δεν παρουσιάζει σημαντικές μεταβολές στο οριζόντιο, υποθέτουμε επίσης ομοιογενή διάδοση της θερμότητας στο οριζόντιο, με αποτέλεσμα η θερμοκρασία να εξαρτάται μόνο από το βάθος και το χρόνο και η εξίσωση που διέπει τη χωροχρονική μεταβολή της να είναι η (1.5).

Στις περισσότερες από τις εργασίες στη βιβλιογραφία έγινε η επιπλέον υπόθεση ότι οι συντελεστές θερμικής διάχυσης και μεταφοράς είναι ανεξάρτητοι του χρόνου και του βάθους. Αυτή η προσέγγιση είναι κάπως απλουστευτική. Πρώτ' απ' όλα το έδαφος μπορεί να αποτελείται από στρώματα με διαφορετική θερμοχωρητικότητα και διαφορετικό συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας. Έπειτα, αναμένουμε να έχουμε μεγάλη εξάρτηση από την υγρασία καθώς και η θερμοχωρητικότητα και ο συντελεστής θερμικής αγωγι-

μότητας αλλά κυρίως ο συντελεστής μεταφοράς αναμένεται να διαφέρουν μεταξύ περιόδων βροχοπτώσεων και ξηρασίας. Επομένως, η υπόθεση αυτή θα ελεγχθεί με βάση τις μετρήσεις της θερμοκρασίας του σταθμού.

### 3.1 Διάδοση θερμότητας μέσω διάχυσης με σταθερό συντελεστή

Αρχικά θεωρούμε την υπόθεση περί ανεξαρτησίας των συντελεστών από το βάθος και το χρόνο να είναι αληθής. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση (1.5) γίνεται:

$$\frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} - \frac{\lambda}{k} \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} - \frac{1}{k} \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = 0. \quad (3.1)$$

Εάν αγνοήσουμε τη μεταφορά θερμότητας μέσω ρευμάτων ( $\lambda = 0$ ) όπως οι van Wijk and de Vries (1963), τότε η εξίσωση (3.1) απλοποιείται ως εξής:

$$\frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{k} \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = 0. \quad (3.2)$$

Η διαφορική εξίσωση συνοδεύεται από συνθήκες στα σύνορα της περιοχής εφαρμογής που στην προκειμένη περίπτωση είναι η επιφάνεια του εδάφους και ένα σημείο σε μεγάλο βάθος. Σχετικά με την επιφάνεια του εδάφους έγινε η υπόθεση ότι η θερμοκρασία είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου με συγκεκριμένη συχνότητα  $\omega$ . Το πλάτος της κύμανσης για κάθε συχνότητα παίρνεται ως το πλάτος Fourier της παρατηρούμενης θερμοκρασίας της επιφάνειας του εδάφους. Αναφορικά με την δεύτερη συνοριακή συνθήκη, θεωρήθηκε ότι σε πολύ μεγάλο βάθος η κύμανση της θερμοκρασίας θα πρέπει να είναι μηδέν, καθώς η θερμοκρασία σε μεγάλα βάθη θεωρείται σταθερή όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή. Οι ανωτέρω συνθήκες κωδικοποιούνται μαθηματικά ως εξής:

$$T(z = 0, t) = T_0 \sin(\omega t), \quad (3.3)$$

$$T(z \rightarrow \infty, t) = 0. \quad (3.4)$$

Επειδή η διαφορική εξίσωση και οι συνοριακές συνθήκες είναι ομογενείς ως προς το χρόνο μπορούμε να αναπτύξουμε τη θερμοκρασία στη βάση Fourier:

$$T(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T}(z, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.5)$$

όπου  $\tilde{T}$  το πλάτος Fourier. Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό βρίσκουμε στο Παράρτημα Β ότι η λύση της εξίσωσης είναι η:

$$T(z, t) = T_0 e^{-z\sqrt{\frac{\omega}{2k}}} \sin\left(\omega t - z\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right). \quad (3.6)$$

Όπως σχολιάστηκε και στην εισαγωγή, βάσει αυτής της λύσης βλέπουμε ότι η θερμοκρασία μεταβάλλεται αρμονικά με τον χρόνο σε συγκεκριμένο βάθος με την ίδια περίοδο με τη μεταβολή της θερμοκρασίας στην επιφάνεια. Το πλάτος της κύμανσης όμως  $A = T_0 e^{-z\sqrt{\frac{\omega}{2k}}}$  μειώνεται εκθετικά με το βάθος, ενώ η διαφορά φάσης της κύμανσης σε σχέση με την κύμανση της θερμοκρασίας στην επιφάνεια αυξάνει γραμμικά με το βάθος. Παρατηρούμε επίσης ότι ο ρυθμός εκθετικής μείωσης του πλάτους και ο ρυθμός γραμμικής αύξησης της φάσης είναι ο ίδιος και εξαρτάται από το  $\omega$  και το  $k$ .

Λόγω αυτής της εξάρτησης, μπορούμε να υπολογίσουμε το συντελεστή θερμικής διάχυσης με βάση τη μείωση πλάτους ή/και την αύξηση της διαφοράς φάσης που παρουσιάζουν οι εν τω βάθει κυμάνσεις της θερμοκρασίας σε σχέση με την επιφανειακή κύμανση. Για τον προσδιορισμό του, θεωρούμε τη θερμοκρασία στην επιφάνεια και τη θερμοκρασία σε βάθος  $z$ . Από τη σχέση (3.6), μπορούμε να δούμε ότι ο λογάριθμος του λόγου των πλατών της κύμανσης της θερμοκρασίας στην επιφάνεια  $A_0$  και σε κάποιο βάθος  $A$  μειώνεται γραμμικά με το βάθος

$$\ln\left(\frac{A_0}{A}\right) = z\sqrt{\frac{\omega}{2k}}. \quad (3.7)$$

Από την κλίση της ευθείας  $\alpha$  μπορούμε να υπολογίσουμε το συντελεστή θερμικής διάχυσης ως

$$k = \frac{\omega}{2\alpha^2}. \quad (3.8)$$



Με όμοιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε το συντελεστή θερμικής διάχυσης από τη διαφορά φάσης της κύμανσης της θερμοκρασίας, καθώς η διαφορά φάσης είναι και αυτή γραμμική συνάρτηση του βάθους

$$\Delta\Phi = z\sqrt{\frac{\omega}{2k}}, \quad (3.9)$$

με την ίδια κλίση  $\alpha$ . Από τις σχέσεις (3.8), (3.9) προκύπτει επίσης ότι ο λογάριθμος του λόγου των πλατών και η διαφορά φάσης είναι ανάλογες

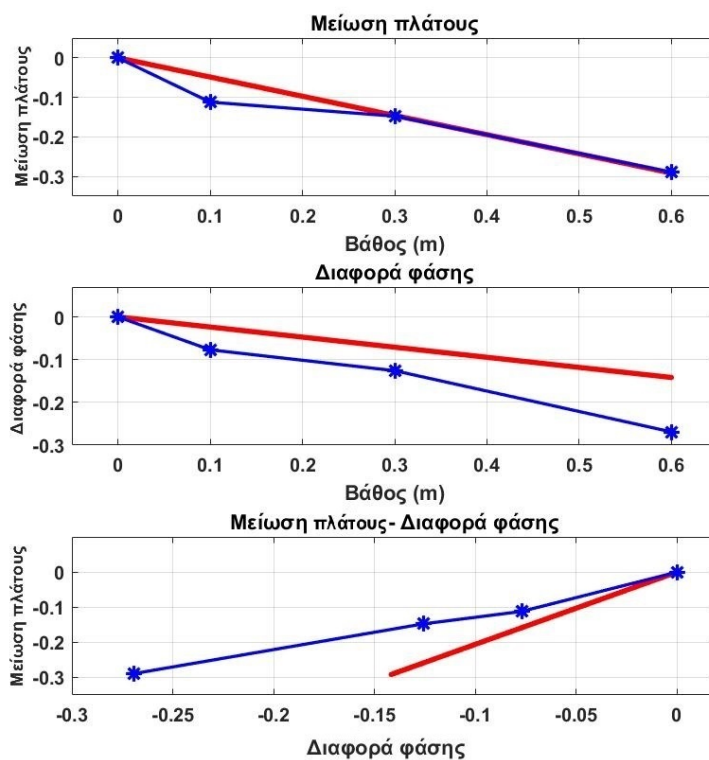
$$\ln\left(\frac{A_0}{A}\right) = \Delta\Phi.$$

Οι γραφικές παραστάσεις του λογαρίθμου του λόγου των πλατών και της διαφοράς φάσης ως συνάρτηση του βάθους με βάση τον παρατηρούμενο ετήσιο κύκλο φαίνεται στο Σχήμα 3.1. Παρατηρούμε ότι αν και οι δύο είναι φθίνουσες συναρτήσεις, η σχέση δεν είναι ακριβώς γραμμική. Ομοίως και η γραφική παράσταση του λογαρίθμου του λόγου των πλατών ως συνάρτηση της διαφοράς φάσης που φαίνεται στο ίδιο σχήμα είναι μεν αύξουσα αλλά όχι γραμμική. Στα ίδια συμπεράσματα καταλήγουμε και αν σχεδιάσουμε τις ίδιες γραφικές παραστάσεις για τον ημερήσιο κύκλο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2. Προηγούμενες εργασίες (Γεωργόπουλος, 2017) υπολόγισαν το συντελεστή θερμικής διάχυσης προσεγγίζοντας τη φθίνουσα συνάρτηση από μια γραμμική σχέση με τη βοήθεια της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων.

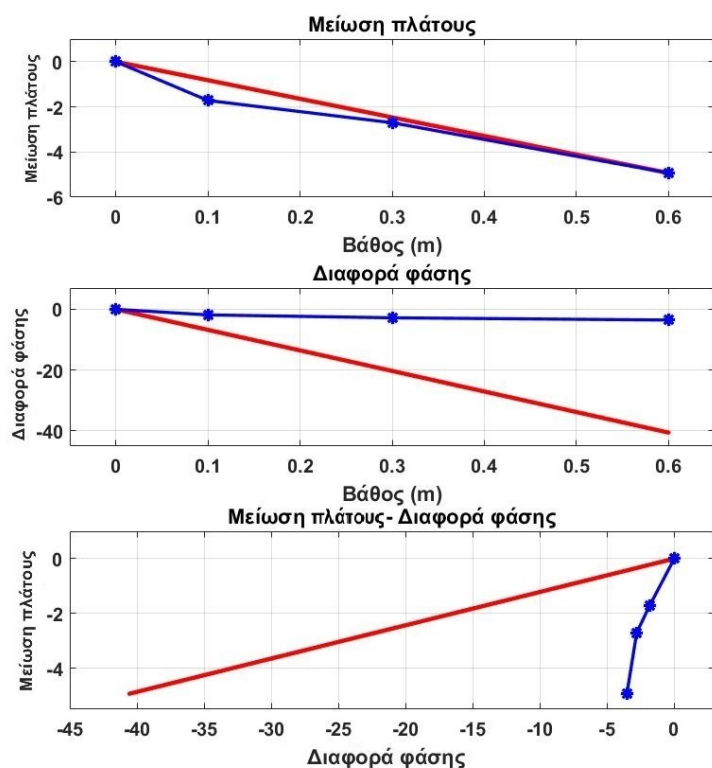
Αν και η μέθοδος αυτή έχει το πλεονέκτημα άμεσου υπολογισμού του συντελεστή, έχει τρία μειονεκτήματα. Το πρώτο είναι ότι οι τιμές που παίρνουμε υπολογίζοντας το συντελεστή από τη μείωση των πλατών και από τη μείωση της φάσης είναι διαφορετικές, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να διακρίνει κανείς ποια από τις δύο μεθόδους είναι η σωστή. Το δεύτερο είναι ότι εάν υπολογίσουμε τους συντελεστές για διαφορετικές συχνότητες βρίσκουμε αρκετά διαφορετικά αποτελέσματα. Για παράδειγμα, υπολογίζοντας το συντελεστή με βάση το λόγο των πλατών σε βάθος 60 εκατοστά και στην επιφάνεια, βρίσκουμε για τον ετήσιο και ημερήσιο κύκλο τις τιμές:

$$k_{annual} = 4.2947 \cdot 10^{-7} (m^2 s^{-1}), \quad k_{daily} = 5.3751 \cdot 10^{-7} (m^2 s^{-1}),$$

οι οποίες διαφέρουν κατά 20%. Ομοίως, αν υπολογίσουμε με τον ίδιο τρόπο το συντελεστή και για τις υπόλοιπες συχνότητες, οι τιμές φαίνονται στο Σχήμα 3.3. Οι αρκετά μεγάλες διαφορές που παρατηρούνται για πολλές συχνότητες δείχνουν ότι ο συντελεστής δεν είναι σταθερός με το χρόνο όπως είχε υποθεθεί. Το τρίτο μειονέκτημα είναι ότι οι διαφορές που παρατηρούνται μπορεί να οφείλονται είτε σε εξάρτηση του συντελεστή από το βάθος είτε/και στο γεγονός ότι έχουμε αγνοήσει τη μεταφορά θερμότητας με ρεύματα. Ο στόχος της εργασίας είναι να διερευνήσουμε την πιθανή εξάρτηση του συντελεστή θερμικής διάχυσης από το βάθος και το ρόλο των ρευμάτων μεταφοράς.



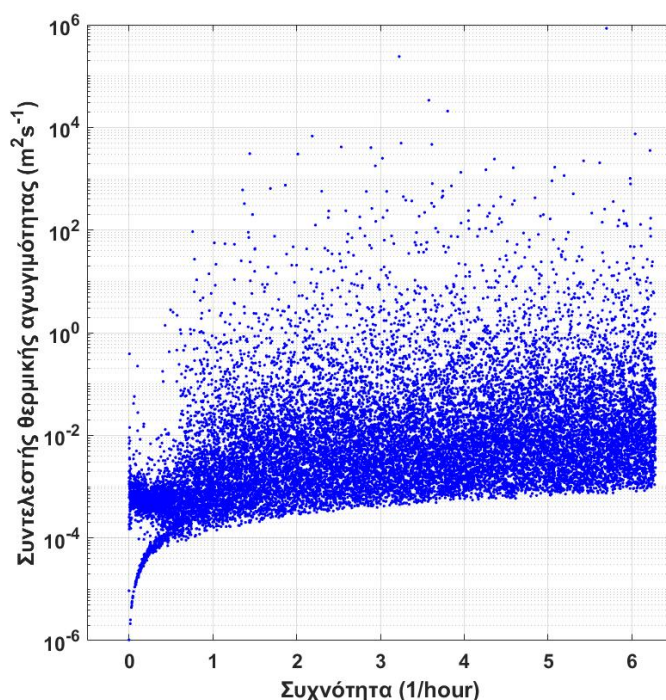
Σχήμα 3.1: Η μείωση του πλάτους της ετήσιας κύμανσης της θερμοκρασίας συναρτήσει του βάθους, η διαφορά φάσης της ημερήσιας κύμανσης της θερμοκρασίας συναρτήσει του βάθους και η μείωση του πλάτους της ετήσιας κύμανσης της θερμοκρασίας συναρτήσει της διαφοράς φάσης. Παρουσιάζονται για λόγους σύγκρισης οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις της αναλυτικής λύσης (3.6) (κόκκινες καμπύλες).



Σχήμα 3.2: Η μείωση του πλάτους της ημερήσιας κύμανσης της θερμοκρασίας συναρτήσει του βάθους, η διαφορά φάσης της ημερήσιας κύμανσης της θερμοκρασίας συναρτήσει του βάθους και η μείωση του πλάτους της ημερήσιας κύμανσης της θερμοκρασίας συναρτήσει της διαφοράς φάσης. Παρουσιάζονται για λόγους σύγκρισης οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις της αναλυτικής λύσης (3.6) (κόκκινες καμπύλες).

### 3.2 Διάδοση θερμότητας μέσω διάχυσης και ρευμάτων με σταθερούς συντελεστές

Η αποτυχία του θεωρητικού μοντέλου στο οποίο η διάδοση της θερμότητας πραγματοποιούνταν μόνο μέσω του μηχανισμού της αγωγής, υπέδειξε ότι πρέπει να αναθεωρηθούν οι βασικές υποθέσεις του. Μια πρώτη σκέψη ήταν ότι στο έδαφος υπάρχει κυκλοφορία ύδατος το οποίο μεταφέρει θερμότητα μέσω ρευμάτων. Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση η οποία περιγράφει την μεταβολή της θερμοκρασίας με το βάθος και το χρόνο είναι η (3.1), ενώ οι συνοριακές συνθήκες οι οποίες απαιτείται να ικανοποιούνται,



Σχήμα 3.3: Οι συντελεστές θερμικής διάχυσης όπως υπολογίζονται από τη μείωση του πλάτους κύμανσης συναρτήσει της συχνότητας κάθε κύκλου.

είναι οι (3.3) και (3.4).

Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (3.1) εφαρμόστηκε πάλι ο μετασχηματισμός Fourier, με αποτέλεσμα να δείχνουμε στο Παράρτημα Β, ότι η λύση στην περίπτωση αυτή είναι η:

$$T(z, t) = T_0 e^{-(z/2k)(\lambda + m_a \cos \theta)} \sin \left[ \frac{z m_a}{2k} \sin \theta + \omega t \right], \quad (3.10)$$

όπου  $m_a = (\lambda^4 + 16\omega^2 k^2)^{1/4}$  και  $\theta = (1/2) \arctan(4\omega k/\lambda^2)$ . Η (3.10) περιγράφει μία ημιτονοειδή κύμανση με πλάτος

$$A = T_0 e^{-(z/2k)(\lambda + m_a \cos \theta)}, \quad (3.11)$$

που μειώνεται εκθετικά με το βάθος. Ο εκθετικός ρυθμός μείωσης εξαρτάται όπως και στην περίπτωση της μεταφοράς θερμότητας μόνο με αγωγή από τη συχνότητα, με

τις κυμάνσεις χαμηλών συχνοτήτων να επιβιώνουν και σε μεγάλα βάθη, ενώ αντίθετα οι κυμάνσεις μεγάλων συχνοτήτων να υπόκεινται σε ταχύτερη μείωση πλάτους. Αντίστοιχα, η φάση

$$\Phi = \frac{zm_a}{2k} \sin \theta + \omega t, \quad (3.12)$$

μειώνεται γραμμικά με το βάθος με τις κυμάνσεις υψηλότερων συχνοτήτων να παρουσιάζουν μικρότερη διαφορά φάσης σε σχέση με αυτές με χαμηλότερη συχνότητα.

Παρατηρούμε ότι όπως και στην περίπτωση της διάδοσης της θερμοκρασίας μόνο μέσω αγωγής, ο λογάριθμος του λόγου των πλατών της κύμανσης της θερμοκρασίας όπως επίσης και η διαφορά φάσης εξαρτώνται γραμμικά από το βάθος. Επομένως, πάλι η μη γραμμική σχέση που παρατηρήθηκε στα Σχήματα 3.1 και 3.2 δεν μπορεί να εξηγηθεί από την ύπαρξη ρευμάτων μεταφοράς μόνο. Παρόλα αυτά, μπορούμε να ποσοτικοποιήσουμε χοντρικά τη συνεισφορά της μεταφοράς θερμότητας μέσω ρευμάτων εφαρμόζοντας μια μέθοδο που προτάθηκε από τους Gao et.al. (2008) για τον υπολογισμό των συντελεστών θερμικής διάχυσης και μεταφοράς με βάση τις μετρήσεις και τη λύση (3.10). Εάν  $A_1$  και  $A_2$  είναι τα πλάτη των κυμάνσεων της θερμοκρασίας σε δύο βάθη  $z_1$  και  $z_2$  με  $\Delta z = z_2 - z_1 > 0$  και  $\Delta\Phi$  η διαφορά φάσης της κύμανσης για αυτά τα δύο βάθη, τότε μπορεί ναδειχθεί με βάση τη λύση (3.10), ότι οι συντελεστές θερμικής διάχυσης και μεταφοράς δίνονται από τις σχέσεις:

$$k = -\frac{(\Delta z)^2 \omega \ln \frac{A_1}{A_2}}{\Delta\Phi \left[ \Delta\Phi^2 + \left( \ln \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right]}, \quad (3.13)$$

και

$$\lambda = \frac{\omega \Delta z}{\Delta\Phi} \left[ \frac{2 \left( \ln \frac{A_1}{A_2} \right)^2}{\Delta\Phi^2 + \left( \ln \frac{A_1}{A_2} \right)^2} - 1 \right]. \quad (3.14)$$

Για τον υπολογισμό των δύο αυτών σταθερών χρησιμοποιήθηκε η διαφορά φάσης και η μείωση πλάτους μεταξύ της επιφανείας του εδάφους και του βάθους των 60 εκατοστών. Οι αριθμητικές τιμές του συντελεστή θερμικής διάχυσης και του συντελεστή μεταφοράς,

τόσο για το ετήσιο, όσο και για τον ημερήσιο κύκλο είναι:

$$k_{annual} = 4.9419 \cdot 10^{-7} (m^2 s^{-1}), \quad \lambda_{annual} = 3.1662 \cdot 10^{-8} (ms^{-1}),$$

$$k_{daily} = 9.9556 \cdot 10^{-7} (m^2 s^{-1}), \quad \lambda_{daily} = 4.0001 \cdot 10^{-6} (ms^{-1}).$$

Σημειώνουμε ότι για τον ετήσιο κύκλο, η συνεισφορά των ρευμάτων στη μεταφορά θερμότητας δεν είναι μεγάλη, σε αντίθεση με την περίπτωση του ημερήσιου κύκλου. Το εύρημα αυτό που θα ενισχυθεί και με άλλα παρόμοια αποτελέσματα θα σχολιαστεί περαιτέρω στο επόμενο Κεφάλαιο.

### 3.3 Έδαφος τριών στρωμάτων με διάδοση θερμότητας μέσω διάχυσης

Κοινό χαρακτηριστικό των δύο πρώτων υποθέσεων ήταν η θεώρηση ότι οι συντελεστές διάχυσης και μεταφοράς είναι σταθεροί. Όμως, όπως επιχειρηματολογήθηκε στην αρχή του Κεφαλαίου, αναμένουμε εξάρτηση και από το χρόνο αλλά και από το βάθος. Η εξάρτηση από το χρόνο ξεφεύγει από τα όρια της συγκεκριμένης εργασίας. Εδώ λοιπόν θα εξετάσουμε το δεύτερο. Επειδή έχουμε μετρήσεις σε διακριτά σημεία, η μόνη θεώρηση που μπορούμε να κάνουμε και να ελέγξουμε μέσω των μετρήσεων είναι ότι το έδαφος του μετεωρολογικού σταθμού αποτελείται από τρία στρώματα εδάφους, τα όρια των οποίων συμπίπτουν με τα βάθη των μετρήσεων. Δηλαδή, το πρώτο στρώμα εκτείνεται από την επιφάνεια ως το βάθος των 10 εκατοστών, το δεύτερο από τα 10 εκατοστά έως τα 30 εκατοστά και το τρίτο από τα 30 εκατοστά και κάτω. Η υπόθεση είναι ότι σε κάθε στρώμα, οι συντελεστές θερμικής διάχυσης και μεταφοράς έχουν σταθερή τιμή, αλλά μπορούν να διαφέρουν από στρώμα σε στρώμα. Θεωρούμε δηλαδή ότι οι συντελεστές είναι κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις. Σε πρώτη φάση, θα αγνοήσουμε τη μεταφορά θερμότητας με ρεύματα, επομένως θα πάρουμε  $\lambda = 0$ .

Επειδή για κάθε ένα από τα τρία στρώματα ο συντελεστής θερμικής διάχυσης είναι σταθερός, η εξίσωση για τη μεταβολή της θερμοκρασίας  $T_i(z, t)$  για τα τρία στρώματα

με  $i = 1, 2, 3$ , είναι η (3.2). Σχετικά με τις συνοριακές συνθήκες, θα ισχύει προφανώς όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις η (3.3), η οποία όμως θα αφορά τη θερμοκρασία στο πάνω στρώμα, δηλαδή

$$T_1(z = 0, t) = T_0 \sin(\omega t). \quad (3.15)$$

Επίσης, η συνοριακή συνθήκη (3.4) αφορά τη θερμοκρασία στο τελευταίο στρώμα, δηλαδή

$$T_3(z \rightarrow \infty, t) = 0. \quad (3.16)$$

Υπάρχουν όμως και συνθήκες που συνδέουν τη θερμοκρασία και τη ροή θερμότητας μεταξύ των στρωμάτων. Εξαιτίας του γεγονότος ότι η θερμοκρασία του εδάφους πρέπει να είναι συνεχής συνάρτηση, απαιτείται οι λύσεις των διαφόρων στρωμάτων να συν αληθεύουν στα μεταξύ τους σύνορα. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει:

$$T_1(z = z_1, t) = T_2(z = z_1, t), \quad (3.17)$$

$$T_2(z = z_2, t) = T_3(z = z_2, t). \quad (3.18)$$

Τέλος, απαιτείται η θερμότητα που εγκαταλείπει το ένα στρώμα να προστίθεται στο επαπτόμενο του, δηλαδή η ροή θερμότητας πρέπει να είναι συνεχής:

$$-k_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial z} \right|_{z_1} = -k_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial z} \right|_{z_1}, \quad (3.19)$$

$$-k_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial z} \right|_{z_2} = -k_3 \left. \frac{\partial T_3}{\partial z} \right|_{z_2}. \quad (3.20)$$

Για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων, ακολουθήθηκε και σε αυτή την περίπτωση η μέθοδος Fourier. Στο Παράρτημα Β δείχνουμε ότι η λύση για τα τρία στρώματα είναι:

$$T_1(z, \omega) = \frac{1}{2i} \left[ \frac{(A_1 + A_2)e^{z(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k_1}}}}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} + \frac{(A_3 + A_4)e^{-z(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k_1}}}}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} \right], \quad (3.21)$$

$$T_2(z, \omega) = \frac{1}{2i} \left[ \frac{B_1 e^{z(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k_2}}}}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} + \frac{B_2 e^{-z(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k_2}}}}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} \right], \quad (3.22)$$

$$T_3(z, \omega) = \frac{1}{2i} \frac{e^{-z(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k_3}}}}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}, \quad (3.23)$$

όπου  $B_1, B_2$  σταθερές που δίνονται από τις σχέσεις (B'.24)-(B'.25) και  $A_1, A_2, A_3, A_4$  σταθερές που δίνονται από τις σχέσεις (B'.28)-(B'.31).

Σύμφωνα με αυτές τις λύσεις, η θερμοκρασία κυμαίνεται ημιτονοειδώς σε κάθε βάθος και όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις με την αύξηση του βάθους το πλάτος κύμανσης μειώνεται και εμφανίζεται διαφορά φάσης σε σχέση με την επιφανειακή κύμανση. Όπως και στα προηγούμενα θεωρητικά μοντέλα, η μείωση του πλάτους και η διαφορά φάσης των παρατηρούμενων κυμάνσεων της θερμοκρασίας μπορούν να αξιοποιηθούν για τον προσδιορισμό των συντελεστών θερμικής διάχυσης.

Αναφορικά με το τελευταίο στρώμα, δηλαδή αυτό που βρίσκεται κάτω από το βάθος των 30 εκατοστών, για τον υπολογισμό του συντελεστή θερμικής διάχυσης  $k_3$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση (3.8), με  $A_0$  και  $A$  τα πλάτη της κύμανσης της θερμοκρασίας στα βάθη των 30 και 60 εκατοστών αντίστοιχα. Βάσει αυτών, ο συντελεστής θερμικής διάχυσης για το τρίτο στρώμα υπολογίστηκε για τον ετήσιο κύκλο ως  $k_3^{annual} = 4.5682 \cdot 10^{-7} (m^2 s^{-1})$  και για τον ημερήσιο  $k_3^{daily} = 4.5682 \cdot 10^{-7} (m^2 s^{-1})$ .

Σχετικά με τα άλλα δύο στρώματα δεν ήταν δυνατό να ακολουθηθεί η ίδια τακτική, καθώς η μορφή της λύσης είναι διαφορετική. Σε αυτή την περίπτωση σχηματίστηκαν δύο συναρτήσεις, οι οποίες είναι οι:

$$F_1(k_1, k_2) = \ln \left[ \frac{A_0(k_1, k_2)}{A_1(k_1, k_2)} \right]_{theoretical} - \ln \left[ \frac{A_0}{A_1} \right]_{station}, \quad (3.24)$$

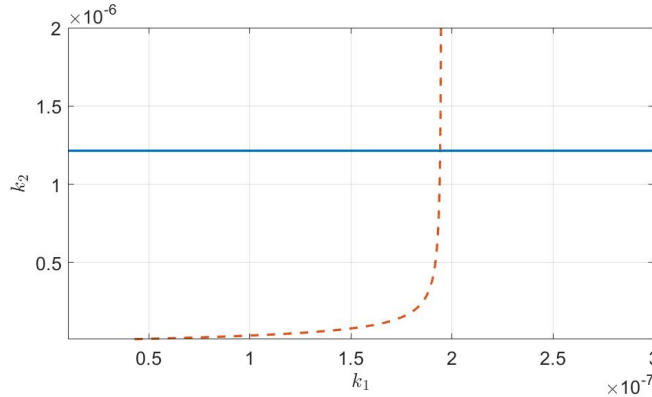
$$F_2(k_1, k_2) = \ln \left[ \frac{A_1(k_1, k_2)}{A_2(k_1, k_2)} \right]_{theoretical} - \ln \left[ \frac{A_1}{A_2} \right]_{station}. \quad (3.25)$$

Στις δύο αυτές σχέσεις αφαιρείται ο λογάριθμος του πηλίκου των πλατών της κύμανσης σε δύο διαφορετικά βάθη, όπως προκύπτει από τις μετρήσεις του μετεωρολογικού σταθμού, από την αντίστοιχη ποσότητα όπως αυτή προβλέπεται από το θεωρητικό μοντέλο. Προφανώς για τις τιμές των συντελεστών για τις οποίες οι παρατηρήσεις συμφωνούν απόλυτα με τη θεωρητική λύση θα ισχύουν  $F_1(k_1, k_2) = 0$  και  $F_2(k_1, k_2) = 0$ , που αποτελούν ένα σύστημα δύο μη γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τους άγνωστους



συντελεστές θερμικής αγωγιμότητας  $k_1$  και  $k_2$  των δύο στρωμάτων. Το σύστημα αυτό δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά και για το λόγο αυτό επιλύθηκε με γραφικό τρόπο.

Οι  $F_1(k_1, k_2)$  και  $F_2(k_1, k_2)$  είναι συναρτήσεις δύο μεταβλητών οπότε οι γραφικές τους παραστάσεις είναι επιφάνειες. Η τομή των επιφανειών αυτών με το μηδενικό επίπεδο  $F_1(k_1, k_2) = 0$  και  $F_2(k_1, k_2) = 0$  θα είναι δύο καμπύλες. Συνεπώς το ζεύγος  $(k_1, k_2)$  που επαληθεύει ταυτόχρονα και τις δύο εξισώσεις θα είναι η τομή των δυο αυτών καμπυλών. Στο Σχήμα 3.4 φαίνονται οι καμπύλες για τον ετήσιο κύκλο και η τομή τους που είναι για  $k_1^{annual} = 1.941 \cdot 10^{-7}(m^2s^{-1})$  και  $k_2^{annual} = 1.215 \cdot 10^{-6}(m^2s^{-1})$ . Ομοίως, το σημείο τομής για τον ημερήσιο κύκλο είναι για  $k_1^{daily} = 2.336 \cdot 10^{-7}(m^2s^{-1})$  και  $k_2^{daily} = 1.041 \cdot 10^{-6}(m^2s^{-1})$ . Συμπερασματικά λοιπόν βρέθηκε ότι οι συντελεστές θερμικής διάχυσης για την περίπτωση του ετήσιου κύκλου είναι:



Σχήμα 3.4: Οι καμπύλες  $F_1(k_1, k_2) = 0$  (συνεχής) και  $F_2(k_1, k_2) = 0$  (διακεκομμένη) και το σημείο τομής τους που δίνει τις τιμές των συντελεστών  $(k_1, k_2)$  για τον ετήσιο κύκλο.

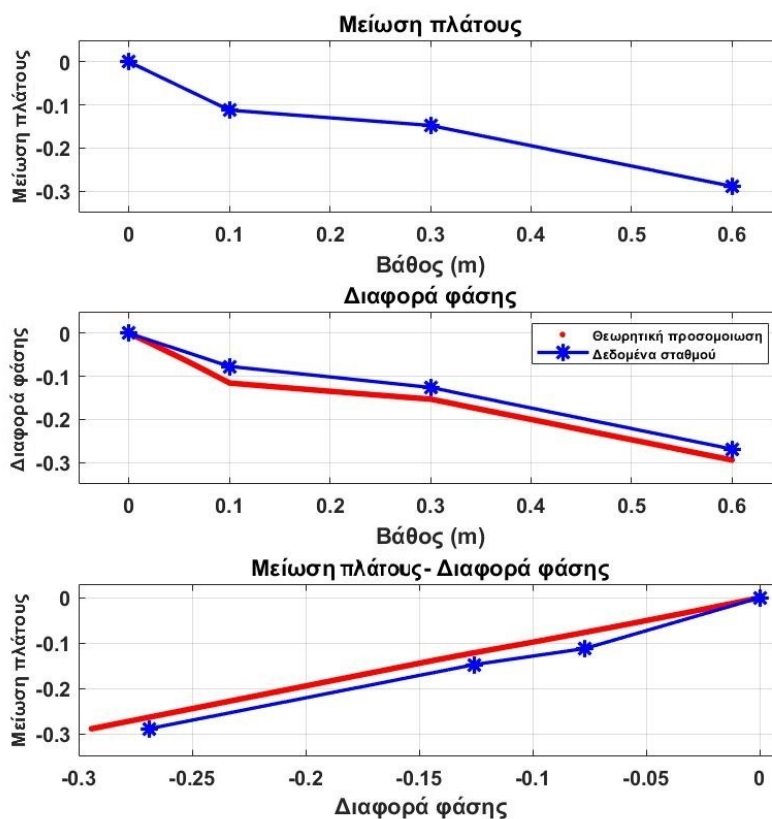
$$k_1^{annual} = 1.941 \cdot 10^{-7}(m^2s^{-1}), k_2^{annual} = 1.214 \cdot 10^{-6}(m^2s^{-1}), k_3^{annual} = 4.5682 \cdot 10^{-7}(m^2s^{-1}),$$

και για την περίπτωση του ημερήσιου:

$$k_1^{daily} = 2.442 \cdot 10^{-7}(m^2s^{-1}), k_2^{daily} = 1.154 \cdot 10^{-6}(m^2s^{-1}), k_3^{daily} = 6.5843 \cdot 10^{-7}(m^2s^{-1}).$$

Για να ελεγχθεί το κατά πόσο το συγκεκριμένο μοντέλο περιγράφει τη διάδοση της θερμότητας στο έδαφος του μετεωρολογικού σταθμού, σχηματίστηκαν οι καμπύλες

μείωσης πλάτους και διαφοράς φάσης, οι οποίες προβλέπονται από το μοντέλο και εν συνεχεία συγκρίθηκαν με αυτές των μετρήσεων του σταθμού. Για τη σχεδίαση αυτών των καμπυλών, έγινε χρήση των συντελεστών που υπολογίστηκαν παραπάνω. Πιο συγκεκριμένα έγινε αντικατάσταση των συντελεστών στις σχέσεις (3.21), (3.22), (3.23) και βάσει αυτών σχεδιάστηκε η γραφική παράσταση μείωσης πλάτους και διαφοράς φάσης μαζί με τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις των μετρήσεων του μετεωρολογικού σταθμού για τον ετήσιο και τον ημερήσιο κύκλο στα Σχήματα 3.5, 3.6 αντίστοιχα.



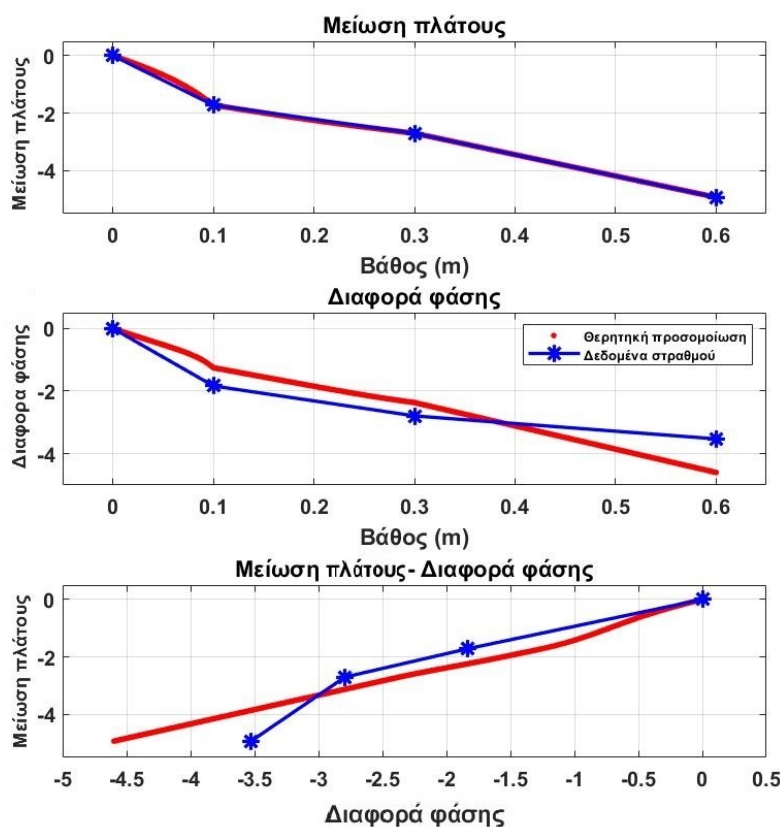
Σχήμα 3.5: Η μείωση του πλάτους της ετήσιας κύμανσης της θερμοκρασίας συναρτῆσει της διαφοράς φάσης, η διαφορά φάσης της ετήσιας κύμανσης της θερμοκρασίας συναρτῆσει του βάθους και η μείωση του πλάτους της ετήσιας κύμανσης της θερμοκρασίας συναρτῆσει της διαφοράς φάσης. Παρουσιάζονται για λόγους σύγκρισης οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις της αναλυτικής λύσης (3.21)-(3.23) (κόκκινες καμπύλες).

Κατά τη σύγκριση των γραφικών παραστάσεων διαπιστώνεται απόλυτη συμφωνία μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της μείωσης πλάτους. Το γεγονός αυτό ήταν απολύτως αναμενόμενο, αφού οι συντελεστές θερμικής διάχυσης επιλέχθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να προβλέπουν την καμπύλη μείωσης πλάτους. Αντίθετα οι γραφικές παραστάσεις της διαφοράς φάσης του θεωρητικού μοντέλου και του μετεωρολογικού σταθμού παρουσιάζουν όμοια μορφή, αλλά σε καμία περίπτωση δεν ταυτίζονται. Κατά συνέπεια, το συγκεκριμένο θεωρητικό μοντέλο κρίνεται ως πολύ επαρκέστερο από τα δύο προηγούμενα, αφού έχει μεγάλη επιτυχία στην πρόβλεψη της μείωσης πλάτους, χωρίς όμως να προσομοιάζει όλα τα χαρακτηριστικά του φυσικού φαινομένου.

### 3.4 Έδαφος τριών στρωμάτων με διάδοση θερμότητας μέσω διάχυσης και ρευμάτων μεταφοράς

Η παραδοχή ότι ο συντελεστής θερμικής διάχυσης μπορεί να μεταβάλλεται με το βάθος και η μοντελοποίησή του ως μια κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση οδήγησε στο να εξηγηθεί η μη γραμμική πτώση της κύμανσης της θερμοκρασίας. Όμως, σε αυτό αγνοήθηκε η μεταφορά θερμότητας μέσω ρευμάτων. Στην Ενότητα αυτή, η πιθανότητα αυτή λαμβάνεται υπόψη με τον ίδιο τρόπο. Δηλαδή, έγινε η υπόθεση ότι το έδαφος στο μετεωρολογικό σταθμό αποτελείται από τρία διαφορετικά εν γένει στρώματα με σταθερούς συντελεστές θερμικής διάχυσης και μεταφοράς, οι οποίοι μπορεί να διαφέρουν από στρώμα σε στρώμα.

Στην περίπτωση αυτή, η θερμοκρασία κάθε στρώματος  $T_i(z, t)$  με  $i = 1, 2, 3$ , ικανοποιεί την εξίσωση (3.1) σε κάθε στρώμα. Σε ότι αφορά τις συνοριακές συνθήκες, ισχύουν οι συνθήκες (3.15) και (3.16) στην επιφάνεια και σε μεγάλο βάθος, όπως επίσης η συνέχεια της θερμοκρασίας (3.19) και (3.20) και η συνέχεια της ροής θερμότητας η



Σχήμα 3.6: Η μείωση του πλάτους της ημερήσιας κύμανσης της θερμοκρασίας συναρτήσει της διαφοράς φάσης, η διαφορά φάσης της ημερήσιας κύμανσης της θερμοκρασίας συναρτήσει του βάθους και η μείωση του πλάτους της ημερήσιας κύμανσης της θερμοκρασίας συναρτήσει της διαφοράς φάσης. Παρουσιάζονται για λόγους σύγκρισης οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις της αναλυτικής λύσης (3.21)-(3.23) (κόκκινες καμπύλες).

οποία όμως στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι

$$-k_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial z} \right|_{z_1} - \lambda_1 T_1(z_1, t) = -k_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial z} \right|_{z_1} - \lambda_2 T_2(z_1, t), \quad (3.26)$$

$$-k_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial z} \right|_{z_2} - \lambda_2 T_2(z_2, t) = -k_3 \left. \frac{\partial T_3}{\partial z} \right|_{z_2} - \lambda_3 T_3(z_2, t). \quad (3.27)$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Fourier δείχνουμε στο Παράρτημα Β ότι οι τρεις

συναρτήσεις της θερμοκρασίας για κάθε ένα στρώμα εδάφους είναι:

$$T_1(z, t) = \frac{1}{2i} \frac{1}{\tilde{A}(\omega) + \tilde{B}(\omega)} \left( \tilde{A}(\omega) e^{zm_1^+} + \tilde{B}(\omega) e^{zm_1^-} \right), \quad (3.28)$$

$$T_2(z, t) = \frac{1}{2i} \frac{1}{\tilde{A}(\omega) + \tilde{B}(\omega)} \left( \tilde{C}(\omega) e^{zm_2^+} + \tilde{D}(\omega) e^{zm_2^-} \right), \quad (3.29)$$

$$T_3(z, t) = \frac{1}{2i} \frac{e^{zm_3^-}}{\tilde{A}(\omega) + \tilde{B}(\omega)}, \quad (3.30)$$

όπου

$$m_i^\pm = -\frac{\lambda_i}{2k_i} \pm \frac{1}{2k_i} [\lambda_i^4 + (4\omega k_i)^2]^{1/4} e^{i \arctan(4\omega k_i / \lambda_i^2) / 2},$$

και  $\tilde{A}(\omega), \tilde{B}(\omega), \tilde{C}(\omega), \tilde{D}(\omega)$  σταθερές που δίνονται από τις σχέσεις (B'.49), (B'.50), (B'.45) και (B'.46) αντίστοιχα.

Η μείωση πλάτους και η διαφορά φάσης που παρατηρείται καθώς το βάθος αυξάνεται χρησιμοποιήθηκαν όπως και στις προηγούμενες φορές για τον υπολογισμό τόσο των συντελεστών θερμικής διάχυσης  $k$  όσο και των συντελεστών μεταφοράς  $\lambda$  για τα τρία στρώματά εδάφους. Στο τρίτο στρώμα, δηλαδή αυτό που οριοθετείται από το βάθος των 30 εκατοστών και κάτω, η μορφή της συνάρτησης της θερμοκρασίας είναι όμοια με αυτή του δεύτερου θεωρητικού μοντέλου. Συνεπώς για τον υπολογισμό των δύο συντελεστών χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις (3.13) και (3.14). Έτσι λοιπόν διαπιστώθηκε ότι για το τρίτο στρώμα οι συντελεστές λαμβάνουν τις τιμές  $k_3^{annual} = 4.4493 \cdot 10^{-7} (m^2 s^{-1})$  και  $\lambda_3^{annual} = 5.5858 \cdot 10^{-9} (ms^{-1})$  για την περίπτωση του ετήσιου κύκλου ενώ για την περίπτωση του ημερήσιου  $k_3^{daily} = 3.61 \cdot 10^{-6} (m^2 s^{-1})$  και  $\lambda_3^{daily} = 2.3923 \cdot 10^{-5} (ms^{-1})$ .

Για να υπολογιστούν οι συντελεστές που αφορούν τα δύο ανώτερα στρώματα θα ακολουθηθεί μία τεχνική, η οποία ομοιάζει σε κάποιο βαθμό με αυτή που χρησιμοποιήθηκε στην προηγούμενη Ενότητα. Για τον υπολογισμό των τεσσάρων αγνώστων συντελεστών σχηματίστηκαν οι ακόλουθες τέσσερις συναρτήσεις:

$$F_1(k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2) = \ln \left[ \frac{A_0(k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2)}{A_1(k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2)} \right]_{theoretical} - \ln \left[ \frac{A_0}{A_1} \right]_{station}, \quad (3.31)$$

$$F_2(k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2) = \ln \left[ \frac{A_1(k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2)}{A_2(k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2)} \right]_{theoretical} - \ln \left[ \frac{A_1}{A_2} \right]_{station}, \quad (3.32)$$

$$F_3(k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2) = (\Phi_1 - \Phi_0)_{theoretical} - (\Phi_1 - \Phi_0)_{station}, \quad (3.33)$$

$$F_4(k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2) = (\Phi_2 - \Phi_1)_{theoretical} - (\Phi_2 - \Phi_1)_{station}. \quad (3.34)$$

Οι τέσσερις ζητούμενοι συντελεστές προκύπτουν ως λύσεις του συστήματος των τεσσάρων εξισώσεων

$$F_1(k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2) = 0, \quad F_2(k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2) = 0,$$

$$F_3(k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2) = 0, \quad F_4(k_1, k_2, \lambda_1, \lambda_2) = 0.$$

Σε αντίθεση με το προηγούμενο μοντέλο, οι συναρτήσεις είναι τεσσάρων μεταβλητών και δεν μπορούν να παρασταθούν γραφικά, οπότε δεν ήταν δυνατή η εφαρμογή της γραφικής μεθόδου. Για την εύρεση των τιμών δεν εφαρμόστηκε κάποια αναλυτική μέθοδος αλλά αντίθετα τέθηκαν δοκιμαστικά τιμές ώστε οι καμπύλες μείωσης πλάτους και διαφοράς φάσης να συμπίπτουν κατά το δυνατόν με τις παρατηρούμενες. Μετά από εφαρμογή της συγκεκριμένης μεθόδου για τις δύο ξεχωριστές συχνότητες, του ετήσιου και ημερήσιου κύκλου βρέθηκαν οι τιμές των συντελεστών θερμικής διάχυσης και μεταφοράς:

$$k_1^{annual} = 2.7 \cdot 10^{-7} (m^2 s^{-1}), \quad k_2^{annual} = 1.05 \cdot 10^{-6} (m^2 s^{-1}), \quad k_3^{annual} = 4.4493 \cdot 10^{-7} (m^2 s^{-1}),$$

$$\lambda_1^{annual} = 8.5 \cdot 10^{-8} (ms^{-1}), \quad \lambda_2^{annual} = 1.45 \cdot 10^{-8} (ms^{-1}), \quad \lambda_3^{annual} = 5.5858 \cdot 10^{-9} (ms^{-1}),$$

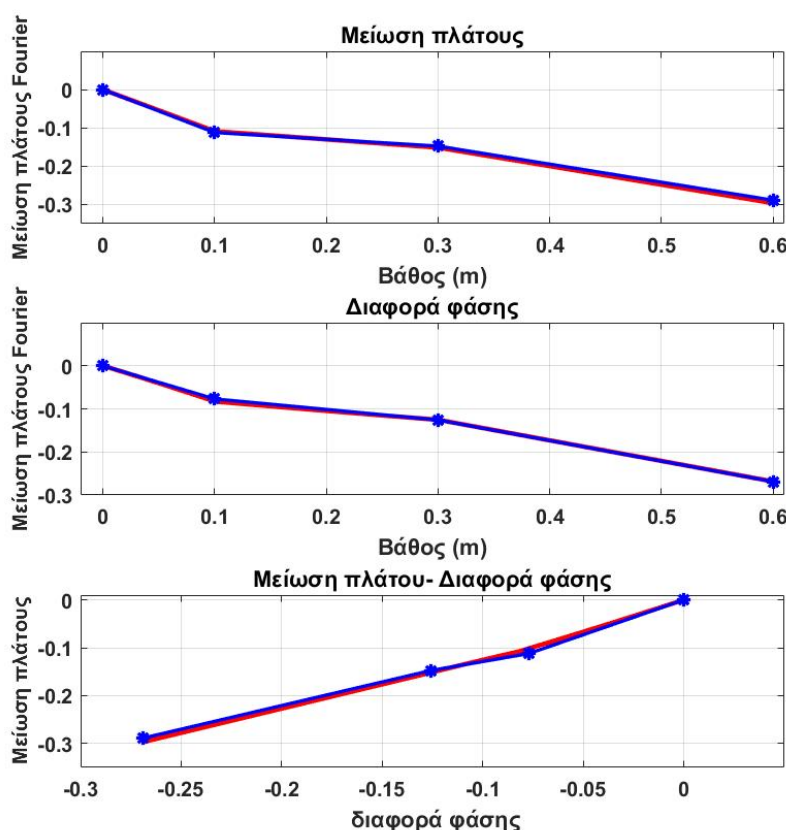
και

$$k_1^{daily} = 2.93 \cdot 10^{-7} (m^2 s^{-1}), \quad k_2^{daily} = 1.3 \cdot 10^{-6} (m^2 s^{-1}), \quad k_3^{daily} = 3.6110^{-6} (m^2 s^{-1}),$$

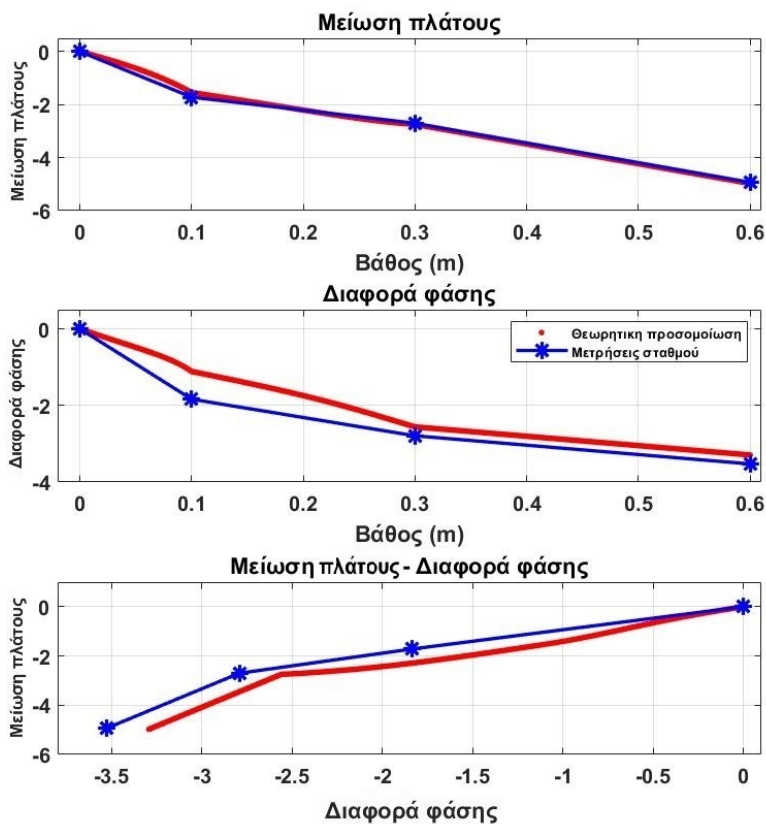
$$\lambda_1^{daily} = 1.7 \cdot 10^{-7} (ms^{-1}), \quad \lambda_2^{daily} = 1.45 \cdot 10^{-7} (ms^{-1}), \quad \lambda_3^{daily} = 2.392310^{-5} (ms^{-1}).$$

Στα Σχήματα 3.7 και 3.8 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της μείωσης του πλάτους της κύμανσης και της διαφοράς φάσης με το βάθος από τις παρατηρήσεις του σταθμού

και από το θεωρητικό μοντέλο. Στην περίπτωση του ετήσιου κύκλου, συγκρίνοντας τις καμπύλες του θεωρητικού μοντέλου και των παρατηρήσεων, διαπιστώνεται ότι σε πολύ μεγάλο βαθμό αυτές ταυτίζονται. Στην περίπτωση του ημερήσιου κύκλου η σύγκριση είναι αρκετά καλή στην περίπτωση της μείωσης πλάτους αλλά διαπιστώθηκαν αποκλίσεις στην περίπτωση της διαφοράς φάσης. Συνεπώς λοιπόν διαπιστώνεται ότι το συγκεκριμένο θεωρητικό μοντέλο επιτυγχάνει σε πολύ μεγάλο βαθμό να προσομοιάσει τις μετρήσεις του μετεωρολογικού σταθμού.



Σχήμα 3.7: Η μείωση του πλάτους της ετήσιας κύμανσης της θερμοκρασίας συναρτῆσει της διαφοράς φάσης, η διαφορά φάσης της ετήσιας κύμανσης της θερμοκρασίας συναρτῆσει του βάθους και η μείωση του πλάτους της ετήσιας κύμανσης της θερμοκρασίας συναρτῆσει της διαφοράς φάσης. Παρουσιάζονται για λόγους σύγκρισης οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις της αναλυτικής λύσης (3.28)-(3.30) (κόκκινες καμπύλες).



Σχήμα 3.8: Η μείωση του πλάτους της ημερήσιας κύμανσης της θερμοκρασίας συναρτήσει της διαφοράς φάσης, η διαφορά φάσης της ημερήσιας κύμανσης της θερμοκρασίας συναρτήσει του βάθους και η μείωση του πλάτους της ημερήσιας κύμανσης της θερμοκρασίας συναρτήσει της διαφοράς φάσης. Παρουσιάζονται για λόγους σύγκρισης οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις της αναλυτικής λύσης (3.28)-(3.30) (κόκκινες καμπύλες).



# Κεφάλαιο 4

## Συμπεράσματα και προτάσεις

### 4.1 Συμπεράσματα

Σκοπός της συγκεκριμένης εργασίας ήταν η μελέτη της διάδοσης της θερμότητας στο έδαφος μέσω της ανάπτυξης καινούριων αναλυτικών λύσεων για τη χωροχρονική μεταβολή της θερμοκρασίας και τη σύγκριση με τα δεδομένα θερμοκρασίας του μετεωρολογικού σταθμού του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Προηγούμενες εργασίες είχαν υποθέσει ότι η θερμότητα διαδίδεται μέσω αγωγής και μέσω ρευμάτων μεταφοράς και είχαν υποθέσει ότι οι συντελεστές θερμικής διάχυσης και μεταφοράς είναι ανεξάρτητοι του βάθους και του χρόνου. Οι αναλυτικές λύσεις που αναπτύχθηκαν με βάση αυτές τις υποθέσεις, είχαν καταφέρει να εξηγήσουν χοντρικά τη χωροχρονική κύμανση της θερμοκρασίας στο έδαφος. Δηλαδή είχαν καταφέρει να εξηγήσουν ότι η κύμανση της θερμοκρασίας στο έδαφος έχει τις ίδιες συχνότητες με την κύμανση της θερμοκρασίας στην επιφάνεια με πλάτος όμως που φθίνει με το βάθος και με διαφορά φάσης σε σχέση με την κύμανση της θερμοκρασίας στην επιφάνεια, η οποία επίσης αυξάνει με το βάθος.

Όμως, όπως δείξαμε και στην παρούσα εργασία η πτώση του πλάτους της κύμανσης δε γίνεται με σταθερό εκθετικό ρυθμό, και η διαφορά φάσης επίσης δεν είναι ακριβώς γραμμική συνάρτηση του βάθους. Η υπόθεση που έγινε στην παρούσα εργασία είναι ότι οι διαφορές που προκύπτουν οφείλονται στην εξάρτηση των συντελεστών διάχυσης

και μεταφοράς από το βάθος. Έτσι, υποθέτοντας ότι οι συντελεστές είναι κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις, χωρίσαμε το έδαφος σε αριθμό στρωμάτων ίδιο με τον αριθμό των βαθών που έχουμε μετρήσεις με τους συντελεστές σε κάθε στρώμα να είναι σταθεροί. Επίσης, αναπτύξαμε θεωρητικές λύσεις όπου οι εν λόγω συντελεστές είναι κατά τμήματα συνεχείς στο  $z$  αλλά χρονικά σταθεροί και αναπτύξαμε αλγόριθμους για τον υπολογισμό τους με το βάθος με βάση τις μετρήσεις θερμοκρασίας του εδάφους. Η χρονική εξάρτηση των συντελεστών ξεφεύγει από το πλαίσιο της παρούσας εργασίας και εξετάστηκε μόνο η περίπτωση της τιμής τους για τον ημερήσιο και τον ετήσιο κύκλο της θερμοκρασίας.

Ως αποτέλεσμα αυτή της διερεύνησης, το πρώτο σημαντικό αποτέλεσμα είναι ότι εξηγήθηκε η μη γραμμική πτώση για το λογάριθμο του πλάτους της κύμανσης και τη διαφορά φάσης. Το δεύτερο σημαντικό αποτέλεσμα είναι ότι τα ρεύματα μεταφοράς ύδατος συνεισφέρουν στη διαμόρφωση της θερμοκρασίας του εδάφους. Όμως, σε ότι αφορά το μέγεθος της συνεισφοράς, διαπιστώθηκαν διαφορές τόσο μεταξύ των διαφόρων στρωμάτων του εδάφους όσο και μεταξύ ημερήσιου και ετήσιου κύκλου.

Στην περίπτωση του ετήσιου κύκλου τα αποτελέσματα σε μεγάλο βαθμό επιβεβαιώνουν τις μελέτες των προηγούμενων ετών. Διαπιστώθηκε ότι ο μηχανισμός της αγωγής είναι αυτός που κυρίως διαμορφώνει τη θερμοκρασία του εδάφους, αφού ο συντελεστής θερμικής διάχυσης σε κάθε στρώμα είναι τουλάχιστον μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερος από το συντελεστή μεταφοράς. Αναφορικά με το δεύτερο μηχανισμό, διαπιστώθηκε ότι στο επίπεδο του ετήσιου κύκλου είναι σημαντικότερος στο επιφανειακό στρώμα. Το γεγονός αυτό δεν εκπλήσσει καθώς τα όμβρια ύδατα που εισέρχονται στο έδαφος από την επιφάνεια είναι λογικότερο να εγκαταστήσουν ρεύμα μεταφοράς θερμότητας σε αυτό το στρώμα όπου και ποσότητα του αναμένεται να είναι μεγαλύτερη. Δυστυχώς δεν υπήρχε πρόσβαση σε δεδομένα της υγρασίας του εδάφους ώστε να επιβεβαιωθεί αυτή η υπόθεση.

Αναφορικά με τον ημερήσιο κύκλο διαπιστώθηκε ότι τα ρεύματα μεταφοράς μεγαλύτερη συνεισφορά στην διάδοση θερμότητας στο έδαφος. Στην περίπτωση του τρίτου στρώματος δηλαδή σε αυτό μεταξύ 30 και 60 cm διαπιστώθηκε ότι ο συντελεστής μεταφοράς ήταν δύο τάξεις μεγέθους μεγαλύτερος από τους συντελεστές των δύο ανώτερων

στρωμάτων.

Το αποτέλεσμα εκ πρώτης όψεως φαντάζει παράδοξο, όμως αξίζει να σημειωθεί ότι θα πρέπει να αναγνωσθεί με επιφύλαξη. Σε αυτή την περίπτωση όπως φαίνεται στα Σχήματα 3.7, 3.8, το θεωρητικό μοντέλο παρότι μπόρεσε να προβλέψει τα γενικά χαρακτηριστικά των καμπυλών των μετρήσεων του σταθμού, εν τούτοις δεν κατάφερε να τις περιγράψει πλήρως. Κύριος λόγος αυτής της αστοχίας είναι η απουσία κάποιας μεθόδου αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων προς εύρεση των διαφόρων συντελεστών αλλά και η πολύ έντονη απόσβεση της ημερήσιας ταλάντωσης σε αυτά τα βάθη. Όπως είχε βρεθεί στο Κεφάλαιο 3.2, με την αύξηση του βάθους οι κυμάνσεις της θερμοκρασίας με μεγάλη συχνότητα υπόκεινται σε εντονότερη απόσβεση από τις κυμάνσεις μεγαλύτερης συχνότητας. Ως εκ τούτου στο βάθος του τρίτου στρώματος ο ημερήσιος κύκλος είχε εκλείψει σε μεγάλο βαθμό οπότε και η αντίστοιχη πληροφορία για τον υπολογισμό του συντελεστή θερμικής διάχυσης και συντελεστή μεταφοράς πρέπει να αντιμετωπιστεί με επιφύλαξη. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι συντελεστές αυτοί, αφού υπολογίστηκαν χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό και των συντελεστών και των δύο ανώτερων στρωμάτων. Συνεπώς το σφάλμα στον υπολογισμό των συντελεστών του τρίτου στρώματος μεταδόθηκε και στα άλλα δύο στρώματα. Ως εκ τούτου τα αποτελέσματα σχετικά με τον ημερήσιο κύκλο, ιδιαίτερα στο τρίτο στρώμα πρέπει να αναγνωστούν με επιφύλαξη.

Εάν αυτό το αποτέλεσμα είναι αληθινό και δεν οφείλεται στους λόγους που προαναφέρθηκαν, μια εξήγηση θα μπορούσε να είναι η εξής. Από δεδομένα της Εθνικής Μετεωρολογικής Υπηρεσίας, ο ετήσιος μέσος αριθμός βροχερών ημερών στα Ιωάννινα είναι 126.3 . Θεωρώντας ότι ο μηχανισμός μεταφοράς θερμότητας μέσω ρευμάτων εμφανίζεται όταν το έδαφος είναι υγρό, διαπιστώνεται ότι σε ετήσια κλίμακα ο μηχανισμός αυτός συνεισφέρει στην μεταφορά θερμότητας κατά μέσο όρο μέσα στο έτος μία φορά κάθε τρεις ημέρες. Με αυτό ως δεδομένο μπορεί να θεωρηθεί ότι ο συγκεκριμένος μηχανισμός εμφανίζεται με περιοδικότητα της τάξης μεγέθους της μίας ημέρας, οπότε κατά αυτόν τον τρόπο μπορεί να εξηγηθεί η εξαιρετικά μεγάλη συνεισφορά του στον ημερήσιο κύκλο.

Αναφορικά με την πολύ υψηλή τιμή του συντελεστή μεταφοράς στο τρίτο στρώμα εδάφους, το φαινόμενο αυτό μπορεί να ερμηνευθεί βάσει της ύπαρξης βλάστησης στο έδαφος. Η ύπαρξη βλάστησης στο έδαφος ευνοεί την κατείδυση του νερού παρά την επιφανειακή του απορροή (Σούλιος, 1986). Συνεπώς η ύπαρξη χαμηλής βλάστησης στο έδαφος του μετεωρολογικού σταθμού μπορεί να ευνοεί κατά τη διάρκεια της βροχόπτωσης τη διείσδυση του νερού στο βαθύτερο στρώμα και τελικά την εμφάνιση του μηχανισμού μεταφοράς θερμότητας μέσω ρευμάτων μεταφοράς. Η ύπαρξη βλάστησης όμως μέσω της εξατμισοδιαπνοής προξενεί και το αντίστροφο φαινόμενο, δηλαδή την αποστράγγιση των βαθύτερων στρωμάτων από νερό και την αποβολή του στην ατμόσφαιρα (Σούλιος, 1986). Ο μηχανισμός αυτός ενδεχομένως να ερμηνεύει τις μικρές τιμές του συντελεστή μεταφοράς σε μεγάλα βάθη και τις μεγαλύτερες τιμές στο επιφανειακό στρώμα σε ετήσια χρονική κλίμακα. Δυστυχώς, όπως αναφέρθηκε δεν υπάρχουν διαθέσιμα δεδομένα σχετικά με τις τιμές της υγρασίας του εδάφους οπότε οι συγκεκριμένες υποθέσεις δύσκολα μπορούν να επιβεβαιωθούν.

Αντίστοιχοι υπολογισμοί σχετικά με τις θερμικές ιδιότητες του εδάφους του μετεωρολογικού σταθμού του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων πραγματοποιήθηκαν και στο παρελθόν, συνεπώς κρίθηκε σκόπιμη η σύγκριση των παρόντων αποτελεσμάτων με τα προηγούμενα. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι συγκεκριμένες εργασίες υπολόγισαν τις συγκεκριμένες ποσότητες χρησιμοποιώντας δεδομένα διαφορετικών χρονικών περιόδων οι οποίες προέκυψαν από διαφορετικές μετρητικές συσκευές. Συνεπώς η σύγκριση δεν μπορεί να είναι απόλυτη.

Η πρώτη εργασία σχετικά με τη θερμοκρασία του εδάφους στην περιοχή του σταθμού του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων ήταν αυτή του Πνευματικού (1998). Σε αυτή έγινε μελέτη στρώματος εδάφους με άνω όριο το βάθος 2.5 εκατοστών και κάτω το βάθος των 20 εκατοστών για τον ετήσιο κύκλο. Αυτό το στρώμα εδάφους συμπίπτει περίπου με τα δύο πρώτα στρώματα εδάφους της παρούσας εργασίας. Στη μελέτη του Πνευματικού υπολογίστηκε ο συντελεστής θερμικής διάχυσης ως  $k = 0.4210^{-6}(m^2s^{-1})$ . Οι αντίστοιχοι συντελεστές όπως αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 3.4 είναι  $k_1 = 0.27 \cdot 10^{-6}(m^2s^{-1})$

και  $k_2 = 1.05 \cdot 10^{-6} (m^2 s^{-1})$ . Ο μέσος όρος των δύο συντελεστών είναι  $k_{(avg)} = 0.66 \cdot 10^{-6} (m^2 s^{-1})$ . Όπως αναφέρθηκε, η άμεση σύγκριση των δύο τιμών δεν είναι δυνατή, παρόλα αυτά αξίζει να σημειωθεί ότι η τιμή του συντελεστή θερμικής διάχυσης όπως υπολογίστηκε από τον Πνευματικό (1996) διαφέρει κατά 36% από την  $k_{(avg)}$ .

Ο Ιωάννου (1998), στη διπλωματική του εργασία υπολόγισε το συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας για ένα στρώμα από τα 2 εκατοστά βάθος έως τα 15, το οποίο και σε αυτή την περίπτωση συμπίπτει με τα δύο πρώτα στρώματα εδάφους της παρούσας εργασίας. Ο Ιωάννου (1998) υπολόγισε ότι ο συντελεστής θερμικής διάχυσης του εν λόγω στρώματος είναι  $k = 0.58 \cdot 10^{-6} (m^2 s^{-1})$ . Η συγκεκριμένος υπολογισμός θεωρείται περισσότερο αξιόπιστος από αυτόν του Πνευματικού (1996) καθώς αξιοποιήθηκαν μετρήσεις της θερμοκρασίας περισσότερων ετών. Και σε αυτή την περίπτωση η σύγκριση δεν μπορεί να είναι απόλυτη αλλά αξίζει να σημειωθεί ότι η εν λόγω τιμή διαφέρει μόλις 12% από το  $k_{(avg)}$ .

Η εργασία με την οποία η σύγκριση είναι περισσότερο χρήσιμη είναι αυτή του Γεωργόπουλου (2017). Οι δύο εργασίες αξιοποίησαν δεδομένα παρόμοιας χρονικής περιόδου και οι οποίες μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν για τα ίδια βάρη και από του ίδιους αισθητήρες. Στην περίπτωση της εργασίας του Γεωργόπουλου (2017) υπολογίστηκε ο συντελεστής θερμικής διάχυσης για στρώμα εδάφους από το βάθος των 10 εκατοστών έως αυτό των 60 εκατοστών για τον ετήσιο κύκλο ως  $k = 0.57 \cdot 10^{-6} (m^2 s^{-1})$ .

Ως μέτρο σύγκρισης μπορεί να χρησιμοποιηθούν οι συντελεστές θερμικής αγωγιμότητας των δύο κατώτερων στρωμάτων της παρούσας εργασίας. Οι τιμές των συντελεστών των δύο στρωμάτων υπολογίστηκαν στην Ενότητα 3.4 ως  $k_2 = 1.05 \cdot 10^{-6} (m^2 s^{-1})$  και  $k_3 = 0.44493 \cdot 10^{-6} (m^2 s^{-1})$ . Για να μπορέσουν να συγκριθούν με τον συντελεστή της εργασίας του Γεωργόπουλου (2017) βρέθηκε ο μέσος όρος των τιμών, για τι οποίες χρησιμοποιήθηκαν συντελεστές βάρους για κάθε τιμή, καθώς ο  $k_3$  αντιπροσωπεύει στρώμα μεγαλύτερου πάχους από ότι ο  $k_2$ . Έτσι λοιπόν υπολογίστηκε ο  $k_{(avg)} = 0.6869 \cdot 10^{-6} (m^2 s^{-1})$ . Μεταξύ των δύο τιμών υπάρχει απόκλιση 17%.

Επομένως, κατά τη σύγκριση των υπολογισμένων τιμών των συντελεστών θερμικής

αγωγιμότητας της παρούσας εργασίας με τους αντίστοιχους συντελεστές αντιστοίχων παρελθουσών εργασιών διαπιστώνεται ότι υπάρχει μεγάλη συμφωνία ως προς τα αποτελέσματα. Οι αποκλίσεις αυτές μπορούν να αποδοθούν τόσο στη διαφορά των χρονικών περιόδων μελέτης όσο και στο γεγονός ότι στην παρούσα εργασία μέρος της μεταφοράς θερμότητας αποδόθηκε στο μηχανισμό μεταφοράς ο οποίος δε λήφθηκε υπόψη σε καμία από τις προηγούμενες εργασίες.

## 4.2 Προτάσεις για περαιτέρω μελέτη

Κατά τη διερεύνηση του προβλήματος της διάδοσης της θερμότητας στο έδαφος, προέκυψαν αρκετά ερωτήματα τα οποία δεν μπόρεσαν να εξεταστούν περαιτέρω εξαιτίας των χρονικών περιορισμών. Τα ερωτήματα αυτά παρατίθενται ως προτάσεις έρευνας.

Όπως αναφέρθηκε, ένα από τα κύρια σημεία διερεύνησης της εργασίας ήταν η ύπαρξη του μηχανισμού μεταφοράς θερμότητας μέσω ρευμάτων μεταφοράς. Στην Ενότητα 3.2 θεωρήθηκε ότι αυτή η φυσική διεργασία παραμένει αμετάβλητη με το χρόνο. Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή όμως, αυτό δεν είναι ακριβές, καθώς η εμφάνιση του μηχανισμού της κατείδυσης του νερού στο έδαφος και συνεπώς η εμφάνιση του μηχανισμού μεταφοράς θερμότητας εξαρτάται από την ύπαρξη βροχοπτώσεων. Είναι επίσης προφανές ότι η ύπαρξη βροχοπτώσεων μεταβάλλει την υγρασία του εδάφους και συνεπώς τις θερμικές του ιδιότητες. Γίνεται λοιπόν εμφανές ότι η προσέγγιση περί σταθερών με το χρόνο συντελεστών μεταφοράς και θερμικής διάχυσης δεν μπορεί να είναι σωστή.

Η εξάρτηση των συντελεστών αυτών από την βροχόπτωση έγινε εμφανής κατά την ερμηνεία των αποτελεσμάτων του ημερησίου κύκλου όπου διαφάνηκε ότι η συχνότητα των βροχερών ημερών συσχετίζεται με την υψηλή συνεισφορά του μηχανισμού των ρευμάτων μεταφοράς στον ημερήσιο κύκλο. Με βάση όλες αυτές τις ενδείξεις, ένα καίριο ερώτημα είναι το κατά πόσο η ύπαρξη βροχοπτώσεων μεταβάλλει τις θερμικές ιδιότητες του εδάφους και σε ποιο βαθμό. Επίσης σχετικά με τον ημερήσιο κύκλο, είναι ενδιαφέρον να ερευνηθεί κατά πόσο η συχνότητα των βροχοπτώσεων είναι τελικά ο κύριος

παράγοντας μεγάλης ενίσχυσης του μηχανισμού των ρευμάτων μεταφοράς.

Όπως μπορεί να παρατηρηθεί στο Σχήμα 2.1 η θερμοκρασία στην επιφάνεια του εδάφους σε κάποιες περιπτώσεις πέφτει υπό το μηδέν. Λαμβάνοντας υπόψη και την προαναφερθείσα ύπαρξη ύδατος στο έδαφος, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι συμβαίνουν αλλαγές φάσης του ύδατος εντός του εδάφους, κυρίως στην περίπτωση του επιφανειακού στρώματος. Κατά την πήξη του νερού και κατά την τήξη του πάγου προκαλείται έκλυση ή απορρόφηση λανθάνουσας θερμότητας. Επιπλέον η εμφάνιση πάγου στο έδαφος σταματά την υδάτινη κυκλοφορία και μεταβάλλει τη θερμοχωρητικότητα του εδάφους (Warsta et.al.,2012). Τέτοια φαινόμενα έχουν παρατηρηθεί πειραματικά σε βάθη έως και 24 χιλιοστά (Kojima et.al.,2012). Γεννάται λοιπόν το εύλογο ερώτημα, κατά πόσο η εμφάνιση πάγου στο εσωτερικό του εδάφους συμβάλλει σε σημαντικό βαθμό στη διαμόρφωση της θερμοκρασίας του εδάφους.

# Παράρτημα Α΄

## Αριθμητικός κώδικας Matlab

```
hold off
T0=T_0A-mean(T_0A);
T1=T_1A-mean(T_1A);
T2=T_2A-mean(T_2A);
T3=T_3A-mean(T_3A);
T4=T_4A-mean(T_4A);

N=length(T_0A);
t=linspace(0,(N-1)*0.5,N);
omega=(2*pi/(t(N)-t(1)))*[0:1:N/2 -(N-1)/2:1:-1];

T0h=fft(T0);
T1h=fft(T1);
T2h=fft(T2);
T3h=fft(T3);
T4h=fft(T4);

omega=omega(1:60226)
```



```
T0h=T0h(1:60226);
```

```
T1h=T1h(1:60226);
```

```
T2h=T2h(1:60226);
```

```
T3h=T3h(1:60226);
```

```
T4h=T4h(1:60226);
```

```
amplitude0=abs(T0h);
```

```
amplitude1=abs(T1h);
```

```
amplitude2=abs(T2h);
```

```
amplitude3=abs(T3h);
```

```
amplitude4=abs(T4h);
```

```
phase0=angle(T0h);
```

```
phase1=angle(T1h);
```

```
phase2=angle(T2h);
```

```
phase3=angle(T3h);
```

```
phase4=angle(T4h);
```

```
amplitude_red1=log(abs((amplitude1)./(amplitude0)));
```

```
amplitude_red2=log(abs((amplitude2)./(amplitude0)));
```

```
amplitude_red3=log(abs((amplitude3)./(amplitude0)));
```

```
amplitude_red4=log(abs((amplitude4)./(amplitude0)));
```

```
phase_diff1=phase1-phase0;
```

```
phase_diff2=phase2-phase0;
```

```
phase_diff3=phase3-phase0;
```

```
phase_diff4=phase4-phase0;
```

```
z1=0.1;
```

```
z2=0.2;
```

```
z3=0.3;
```

```
z4=0.6;
```

```
k1=2511;
```

```
figure(1)
```

```
zc=[0 z1 z3 z4];
```

```
amp=[0 amplitude_red1(k1) amplitude_red3(k1) amplitude_red4(k1)];
```

```
phase_diff=[0 phase_diff1(k1) phase_diff3(k1) phase_diff4(k1)];
```

```
plot(zc,amp,'r-o')
```

```
grid on;
```

```
hold on;
```

```
figure(2)
```

```
plot(zc,phase_diff,'r-o')
```

```
grid on;
```

```
hold on;
```

```
K_1=2.93e-07;
```

```
K_2=1.3e-06;
```

```
K_3=3.611e-06;
```

```
L_1=1.7e-07;
```

```
L_2=1.45e-07;
```

L\_3=2.3923e-05;

Z\_1=0.1; Z\_2=0.3; omega=omega(k1)/3600;

Z1\_kL1\_p=exp(Z\_1\*((-L\_1/(2\*K\_1)))+(1/(2\*K\_1))\*(L\_1^4+(4\*omega\*K\_1)^2)^(1/4))\*exp((1i/2)\*atan(4\*omega\*K\_1/L\_1^2));

kL1\_p = (-L\_1/(2 \* K\_1)) + ((1/(2 \* K\_1)) \* (L\_1^4 + (4 \* omega \* K\_1)^2)^(1/4)) \* exp((1i/2) \* atan(4 \* omega \* K\_1 / L\_1^2));

Z1\_kL1\_n = exp(Z\_1\*((-L\_1/(2\*K\_1)) - ((1/(2\*K\_1)) \* (L\_1^4 + (4\*omega\*K\_1)^2)^(1/4)) \* exp((1i/2) \* atan(4 \* omega \* K\_1 / L\_1^2))));

kL1\_n = (-L\_1/(2 \* K\_1)) - ((1/(2 \* K\_1)) \* (L\_1^4 + (4 \* omega \* K\_1)^2)^(1/4)) \* exp((1i/2) \* atan(4 \* omega \* K\_1 / L\_1^2));

Z1\_kL2\_p = exp(Z\_1\*((-L\_2/(2\*K\_2)))+(1/(2\*K\_2))\*(L\_2^4+(4\*omega\*K\_2)^2)^(1/4))\*exp((1i/2)\*atan(4\*omega\*K\_2/L\_2^2));

kL2\_p = (-L\_2/(2 \* K\_2)) + ((1/(2 \* K\_2)) \* (L\_2^4 + (4 \* omega \* K\_2)^2)^(1/4)) \* exp((1i/2) \* atan(4 \* omega \* K\_2 / L\_2^2));

Z1\_kL2\_n = exp(Z\_1\*((-L\_2/(2\*K\_2)) - ((1/(2\*K\_2)) \* (L\_2^4 + (4\*omega\*K\_2)^2)^(1/4)) \* exp((1i/2) \* atan(4 \* omega \* K\_2 / L\_2^2))));

kL2\_n = (-L\_2/(2 \* K\_2)) - ((1/(2 \* K\_2)) \* (L\_2^4 + (4 \* omega \* K\_2)^2)^(1/4)) \* exp((1i/2) \* atan(4 \* omega \* K\_2 / L\_2^2));

$$Z2_kL2_p = \exp(Z_2 * ((-L_2/(2 * K_2)) + ((1/(2 * K_2)) * (L_2^4 + (4 * \omega * K_2)^2)^{1/4})) * \exp((1i/2) * \operatorname{atan}(4 * \omega * K_2/L_2^2)));$$

$$kL2_p = (-L_2/(2 * K_2)) + ((1/(2 * K_2)) * (L_2^4 + (4 * \omega * K_2)^2)^{1/4}) * \exp((1i/2) * \operatorname{atan}(4 * \omega * K_2/L_2^2));$$

$$Z2_kL2_n = \exp(Z_2 * ((-L_2/(2 * K_2)) - ((1/(2 * K_2)) * (L_2^4 + (4 * \omega * K_2)^2)^{1/4})) * \exp((1i/2) * \operatorname{atan}(4 * \omega * K_2/L_2^2)));$$

$$kL2_n = (-L_2/(2 * K_2)) - ((1/(2 * K_2)) * (L_2^4 + (4 * \omega * K_2)^2)^{1/4}) * \exp((1i/2) * \operatorname{atan}(4 * \omega * K_2/L_2^2));$$

$$Z2_kL3_n = \exp(Z_2 * ((-L_3/(2 * K_3)) - ((1/(2 * K_3)) * (L_3^4 + (4 * \omega * K_3)^2)^{1/4})) * \exp((1i/2) * \operatorname{atan}(4 * \omega * K_3/L_3^2)));$$

$$kL3_n = (-L_3/(2 * K_3)) - ((1/(2 * K_3)) * (L_3^4 + (4 * \omega * K_3)^2)^{1/4}) * \exp((1i/2) * \operatorname{atan}(4 * \omega * K_3/L_3^2));$$

$$C1 = (Z2_kL3_n * (K_2 * kL2_n + L_2 - K_3 * kL3_n - L_3)) / (Z2_kL2_p * K_2 * (kL2_n - kL2_p));$$

$$D1 = (Z2_kL3_n / (Z2_kL2_n * (K_2 * kL2_n + L_2))) * (K_3 * kL3_n + L_3 - ((K_2 * kL2_p + L_2) * (K_2 * kL2_n + L_2 - K_3 * kL3_n - L_3)) / (K_2 * (kL2_n - kL2_p)));$$

$$B1 = C1 * ((Z1_kL2_p / Z1_kL1_n) - (Z1_kL2_p * (K_1 * kL1_n + L_1 - K_2 * kL2_p - L_2)) / (K_1 * Z1_kL1_n * (kL1_n - kL1_p))) + D1 * ((Z1_kL2_n / Z1_kL1_n) - (Z1_kL2_n * (K_1 * kL1_n + L_1 - K_2 * kL2_n - L_2)) / (K_1 * Z1_kL1_n * (kL1_n - kL1_p)));$$

$$A1 = C1 * ((Z1_kL2_p * (K_1 * kL1_n + L_1 - K_2 * kL2_p - L_2)) / (K_1 * Z1_kL1_p * (kL1_n - kL1_p))) +$$

```
D1 * ((Z1_kL2_n * (K1 * kL1_n + L1 - K2 * kL2_n - L2)) / (K1 * Z1_kL1_p * (kL1_n - kL1_p)));
```

```
F = ((2 * pi)^0.5 / (2 * 1i)) * (1 / (A1 * B1));
```

```
C = C1 * F;
```

```
D = D1 * F;
```

```
A = A1 * F;
```

```
B = B1 * F;
```

```
z = linspace(0, 0.6, 1001);
```

```
Z = linspace(0, 0.6, 1001);
```

```
    ,inn
```

```
= min(abs(z - Z_1));
```

```
    1,inn2
```

```
= min(abs(z - Z_2));
```

```
Za = z(1 : inn);
```

```
Zb = z(inn + 1 : inn2);
```

```
Zc = z(inn2 + 1 : length(z));
```

```
T_1 = (1 / (2 * pi)^0.5) * (A * exp(Za * kL1_p) + B * exp(Za * kL1_n));
```

```
T_2 = (1 / (2 * pi)^0.5) * (C * exp(Zb * kL2_p) + D * exp(Zb * kL2_n));
```

```
T_3 = (1 / (2 * pi)^0.5) * (F * exp(Zc * kL3_n));
```

```
T = [T_1 T_2 T_3];
```

```
amplitude_reduction = log(abs(T)) - log(abs(T(1)));
```

```
figure(1)
```

```
plot(Z, amplitude_reduction, 'l')
```

```
grid on;
```

```
hold off
```

```
phase_difference = angle(T) - angle(T(1));
```

```
figure(2)
```

```
plot(Z, phase_difference, '.');
```

```
gridon;
```

```
holdoff;
```

```
figure(3)
```

```
plot(phase_difference, amplitude_reduction, '.')
```

```
holdon
```

```
plot(phase_diff, amp, '-*')
```

```
gridon
```

```
holdoff
```

## Παράρτημα Β΄

# Αναλυτικές λύσεις για την κύμανση της θερμοκρασίας του εδάφους

### Β΄.1 Μεταφορά θερμότητας μέσω διάχυσης σε ομογενές έδαφος

Στην Ενότητα 3.1, αναφέρθηκε ότι στην περίπτωση διάδοσης θερμότητας μόνο μέσω διάχυσης και με ομογενή συντελεστή διάχυσης, η συνάρτηση της θερμοκρασίας του εδάφους προκύπτει ως λύση της διαφορικής εξίσωσης (Rajeev and Kodikara, 2015):

$$\frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{k} \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = 0, \quad (\text{B'.1})$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$T(z = 0, t) = \sin(\omega_0 t), \quad T(z \rightarrow \infty, t) < \infty. \quad (\text{B'.2})$$

Για να επιλυθεί η συγκεκριμένη διαφορική εξίσωση, αναπτύξαμε τη θερμοκρασία στη βάση Fourier:

$$T(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T}(z, \omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (\text{B'.3})$$

Ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός εφαρμόστηκε τόσο στη διαφορική εξίσωση όσο και στις συνοριακές συνθήκες. Με την εφαρμογή του μετασχηματισμού, οι ανωτέρω σχέσεις μετασχηματίστηκαν ως:

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}(z, \omega)}{\partial z^2} - \frac{i\omega}{k} \tilde{T}(z, \omega) = 0, \quad (\text{B'.4})$$

$$\tilde{T}(z = 0, \omega) = \frac{1}{2i} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)], \quad (\text{B'.5})$$

$$\tilde{T}(z \rightarrow \infty, \omega) < \infty. \quad (\text{B'.6})$$

Η (B'.4) είναι γραμμική και ομογενής εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές και επομένως έχει λύσεις της μορφής  $\tilde{T}(z, \omega) = c(\omega)e^{\lambda z}$ . Μετά από αντικατάσταση της προτεινόμενης λύσης στη (B'.4) προέκυψε ότι είναι λύση αρκεί η σταθερά  $\lambda$  να είναι:

$$\lambda = \pm(1 + i)\sqrt{\omega/2k}. \quad (\text{B'.7})$$

Συνεπώς η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$\tilde{T}(z, \omega) = A(\omega)e^{z(1+i)\sqrt{\omega/2k}} + B(\omega)e^{-z(1+i)\sqrt{\omega/2k}}, \quad (\text{B'.8})$$

όπου  $A(\omega)$  και  $B(\omega)$  σταθερές. Εφαρμόζοντας τη (B'.6) στη (B'.8) προκύπτει ότι:

$$\tilde{T}(z, \omega) = B(\omega)e^{-z\sqrt{\frac{\omega}{2k}}}, \text{ για } \omega > 0, \text{ και } \tilde{T}(z, \omega) = A(\omega)e^{z\sqrt{\frac{\omega}{2k}}}, \text{ για } \omega < 0.$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (B'.5) προσδιορίζονται οι σταθερές ως:

$$A(\omega) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2i}\delta(\omega + \omega_0), \text{ για } \omega < 0, \text{ } B(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2i}\delta(\omega - \omega_0) \text{ για } \omega > 0.$$

Μετά από εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier προκύπτει ότι η θερμοκρασία ως συνάρτηση του βάθους και του χρόνου είναι:

$$T(z, t) = e^{-z\sqrt{\frac{\omega_0}{2k}}} \sin\left(\omega_0 t - z\sqrt{\frac{\omega_0}{2k}}\right).$$



## B'.2 Μεταφορά θερμότητας μέσω διάχυσης και ρευμάτων μεταφοράς σε ομογενές έδαφος

Όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 3.2, όταν η μεταφορά θερμότητας συμβαίνει μέσω αγωγής και ρευμάτων μεταφοράς, η διαφορική εξίσωση η οποία περιγράφει την μεταβολή της θερμοκρασίας με το βάθος και το χρόνο είναι η:

$$\frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} - \frac{\lambda}{k} \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} - \frac{1}{k} \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = 0. \quad (\text{B'.9})$$

Η εξίσωση αυτή επιλύθηκε λαμβάνοντας υπόψη τις συνοριακές συνθήκες (B'.2) μέσω του μετασχηματισμού Fourier (B'.3). Έτσι η εξίσωση (B'.9) μετασχηματίζεται ως:

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}(z, \omega)}{\partial z^2} + \frac{\lambda}{k} \frac{\partial \tilde{T}(z, \omega)}{\partial z} - \frac{i\omega}{k} \tilde{T}(z, \omega) = 0.$$

Η (B'.10) είναι πάλι 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές και επομένως έχει λύσεις της μορφής  $\tilde{T}(z, \omega) = c(\omega)e^{mz}$ . Μετά από αντικατάσταση στη (B'.10) προκύπτει ότι είναι λύση αρκεί το  $m$  να είναι:

$$m^\pm = -\frac{\lambda}{2k} \pm \frac{1}{2k} \sqrt{\lambda^2 + 4\omega k i} = -\frac{\lambda}{2k} \pm \frac{m_a e^{i\theta}}{2k},$$

όπου  $m_a = (\lambda^4 + 16\omega^2 k^2)^{1/4}$  και  $\theta = (1/2) \arctan(4\omega k / \lambda^2)$ . Συνεπώς η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$\tilde{T}(z, \omega) = A(\omega)e^{m^+z} + B(\omega)e^{m^-z}, \quad (\text{B'.10})$$

όπου  $A(\omega)$  και  $B(\omega)$  σταθερές. Εφαρμόζοντας τη (B'.6) στη (B'.10) προκύπτει ότι  $A(\omega) = 0$ , ενώ εφαρμόζοντας τη (B'.5) η σταθερά  $B(\omega)$  προσδιορίζεται ως:

$$B(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2i} \delta(\omega - \omega_0), \text{ για } \omega > 0, \text{ και } B(\omega) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2i} \delta(\omega + \omega_0), \text{ για } \omega < 0.$$

Τέλος με εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού προκύπτει ότι η συνάρτηση της θερμοκρασίας είναι:

$$T(z, t) = e^{-(z/2k)(\lambda + m_a \cos \theta)} \sin \left[ \frac{z m_a}{2k} \sin \theta + \omega_0 t \right].$$

### B'.3 Μεταφορά θερμότητας μέσω διάχυσης στην περίπτωση μη ομογενούς συντελεστή αγωγιμότητας

Στην περίπτωση που αγνοήσουμε μεν τη μεταφορά θερμότητας μέσω ρευμάτων, αλλά θεωρήσουμε ότι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας εξαρτάται από το βάθος, η εξίσωση που διέπει τη μεταβολή της θερμοκρασίας είναι η (B'.1), η οποία όμως πρέπει να επιλυθεί χωριστά για τα τρία στρώματα που θεωρούμε. Όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 3.3, οι λύσεις στις τρεις διαφορετικές περιοχές συνδέονται μέσω των συνοριακών συνθηκών

$$T_1(z = z_1, t) = T_2(z = z_1, t), \quad -k_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial z} \right|_{z=z_1} = -k_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial z} \right|_{z=z_1}, \quad (\text{B'.11})$$

$$T_2(z = z_2, t) = T_3(z = z_2, t), \quad -k_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial z} \right|_{z=z_2} = -k_3 \left. \frac{\partial T_3}{\partial z} \right|_{z=z_2}. \quad (\text{B'.12})$$

ενώ ταυτόχρονα ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια και σε μεγάλο βάθος

$$T_1(z = 0, t) = \sin(\omega_0 t), \quad (\text{B'.13})$$

$$T_3(z \rightarrow \infty, t) < \infty. \quad (\text{B'.14})$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Fourier, παίρνουμε την εξίσωση (B'.4) και τις μετασχηματισμένες συνθήκες:

$$\tilde{T}_1(z_1, \omega) = \tilde{T}_2(z_1, \omega), \quad -k_1 \left. \frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial z} \right|_{z=z_1} = -k_2 \left. \frac{\partial \tilde{T}_2}{\partial z} \right|_{z=z_1}, \quad (\text{B'.15})$$

$$\tilde{T}_2(z_2, \omega) = \tilde{T}_3(z_2, \omega), \quad -k_2 \left. \frac{\partial \tilde{T}_2}{\partial z} \right|_{z=z_2} = -k_3 \left. \frac{\partial \tilde{T}_3}{\partial z} \right|_{z=z_2}, \quad (\text{B'.16})$$

$$\tilde{T}_1(z = 0, \omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2i} \delta(\omega - \omega_0), \quad (\text{B'.17})$$

$$\tilde{T}_3(z \rightarrow \infty, \omega) < \infty. \quad (\text{B'.18})$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η (B'.8), η οποία για κάθε στρώμα του εδάφους γράφεται με διαφορετικές σταθερές ως:

$$\tilde{T}_1(z, \omega) = A(\omega)e^{z(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k}}} + B(\omega)e^{-z(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k}}}, \quad (\text{B'.19})$$

$$\tilde{T}_2(z, \omega) = C(\omega)e^{z(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k}}} + D(\omega)e^{-z(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k}}}, \quad (\text{B'.20})$$

$$\tilde{T}_3(z, \omega) = E(\omega)e^{z(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k}}} + F(\omega)e^{-z(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k}}}, \quad (\text{B'.21})$$

όπου  $A(\omega), B(\omega), C(\omega), D(\omega), E(\omega), F(\omega)$  σταθερές. Εφαρμόζοντας τη (B'.18) στη (B'.21) προκύπτει ότι  $E(\omega) = 0$ . Εφαρμόζοντας τις (B'.16) προκύπτει ότι:

$$C(\omega) = F(\omega)B_1(\omega), \quad (\text{B'.22})$$

$$D(\omega) = F(\omega)B_2(\omega), \quad (\text{B'.23})$$

όπου

$$B_1(\omega) = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{k_3}{k_2}} \right) e^{-z_2(1+i)(\sqrt{\frac{\omega}{2k_2}} + \sqrt{\frac{\omega}{2k_3}})}, \quad (\text{B'.24})$$

$$B_2(\omega) = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{k_3}{k_2}} \right) e^{-z_2(1+i)(\sqrt{\frac{\omega}{2k_2}} - \sqrt{\frac{\omega}{2k_3}})}. \quad (\text{B'.25})$$

Εφαρμόζοντας τις (B'.15) μεταξύ των (B'.20),(B'.19) προκύπτει ότι:

$$A(\omega) = F(\omega)(A_1 + A_2), \quad (\text{B'.26})$$

$$B(\omega) = F(\omega)(A_3 + A_4), \quad (\text{B'.27})$$

όπου

$$A_1 = B_1(\omega) \frac{1 + \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}}{2} \cdot e^{z_1(1+i)(\sqrt{\frac{\omega}{2k_2}} - \sqrt{\frac{\omega}{2k_1}})}, \quad (\text{B'.28})$$

$$A_2 = B_2(\omega) \frac{1 - \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}}{2} \cdot e^{-z_1(1+i)(\sqrt{\frac{\omega}{2k_2}} - \sqrt{\frac{\omega}{2k_1}})}, \quad (\text{B'.29})$$

$$A_3 = B_3(\omega) \frac{1 - \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}}{2} \cdot e^{z_1(1+i)(\sqrt{\frac{\omega}{2k_2}} + \sqrt{\frac{\omega}{2k_1}})}, \quad (\text{B'.30})$$

$$A_4 = B_4(\omega) \frac{1 + \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}}{2} \cdot e^{z_1(1+i)(\sqrt{\frac{\omega}{2k_2}} - \sqrt{\frac{\omega}{2k_1}})}. \quad (\text{B'.31})$$

Τέλος, εφαρμόζοντας και την (B'.17) προκύπτει ότι:

$$F(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2i} \left[ \frac{\delta(\omega - \omega_0)}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} \right]. \quad (\text{B'.32})$$

Εφαρμόζοντας πάλι τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier προκύπτει η εξής εξάρτηση της θερμοκρασίας από το βάθος και το χρόνο:

$$T_1(z, t) = \frac{1}{2i} \left[ \frac{(A_1 + A_2)e^{z(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k_1}}} + (A_3 + A_4)e^{-z(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k_1}}}}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} \right], \quad (\text{B'.33})$$

$$T_2(z, t) = \frac{1}{2i} \left[ \frac{B_1 e^{z(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k_2}}} + B_2 e^{-z(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k_2}}}}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} \right], \quad (\text{B'.34})$$

$$T_3(z, t) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{e^{-z(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k_3}}}}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}. \quad (\text{B'.35})$$

## B'.4 Μεταφορά θερμότητας μέσω διάχυσης και ρευμάτων στην περίπτωση μη ομογενούς εδάφους

Στην περίπτωση που λάβουμε υπόψη και τους δύο τρόπους μεταφοράς θερμότητας και υποθέσουμε ότι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας και τα ρεύματα μεταφοράς εξαρτώνται από το βάθος, η διαφορική εξίσωση η οποία διέπει τη μεταβολή της θερμοκρασίας του εδάφους είναι σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην Ενότητα 3.4 η (B'.9) με τη μόνη διαφορά ότι η εξίσωση αυτή θα πρέπει να εφαρμοστεί σε κάθε ένα από τα τρία στρώματα που θεωρούμε. Οι λύσεις σε κάθε στρώμα συνδέονται από τις συνοριακές συνθήκες:

$$T_1(z = z_1, t) = T_2(z = z_1, t), \quad \left[ k_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} + \lambda_1 T_1 \right]_{z=z_1} = \left[ k_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} + \lambda_2 T_2 \right]_{z=z_1}, \quad (\text{B'.36})$$

$$T_2(z = z_2, t) = T_3(z = z_2, t), \quad \left[ k_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} + \lambda_2 T_2 \right]_{z=z_2} = \left[ k_3 \frac{\partial T_3}{\partial t} + \lambda_3 T_3 \right]_{z=z_2}, \quad (\text{B'.37})$$

ενώ ικανοποιούνται και οι συνθήκες (B'.13) και (B'.14) στην επιφάνεια και σε μεγάλο βάθος. Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Fourier, η εξίσωση (3.1) και οι συνοριακές

συνθήκες στην επιφάνεια και σε μεγάλος βάθος γίνονται οι (B'.10) και οι (B'.17), (B'.18) αντίστοιχα, ενώ οι υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες γίνονται:

$$\tilde{T}_1(z = z_1, \omega) = \tilde{T}_2(z = z_1, \omega), \left[ k_1 \frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial t} + \lambda_1 \tilde{T}_1 \right]_{z=z_1} = \left[ k_2 \frac{\partial \tilde{T}_2}{\partial t} + \lambda_2 \tilde{T}_2 \right]_{z=z_1}, \quad (\text{B'.38})$$

$$\tilde{T}_2(z = z_2, \omega) = \tilde{T}_3(z = z_2, \omega), \left[ k_2 \frac{\partial \tilde{T}_2}{\partial t} + \lambda_2 \tilde{T}_2 \right]_{z=z_2} = \left[ k_3 \frac{\partial \tilde{T}_3}{\partial t} + \lambda_3 \tilde{T}_3 \right]_{z=z_2}. \quad (\text{B'.39})$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η (B'.10), όπου οι σταθερές είναι διαφορετικές για κάθε στρώμα, αλλά και ο συντελεστής  $m^\pm$  είναι διαφορετικός για κάθε στρώμα. Έτσι οι λύσεις είναι:

$$\tilde{T}_1(z, \omega) = A(\omega)e^{zm_1^+} + B(\omega)e^{zm_1^-}, \quad (\text{B'.40})$$

$$\tilde{T}_2(z, \omega) = C(\omega)e^{zm_2^+} + D(\omega)e^{zm_2^-}, \quad (\text{B'.41})$$

$$\tilde{T}_3(z, \omega) = E(\omega)e^{zm_3^+} + F(\omega)e^{zm_3^-}, \quad (\text{B'.42})$$

όπου

$$m_i^\pm = -\frac{\lambda_i}{2k_i} \pm \frac{1}{2k_i} [\lambda_i^4 + (4\omega k_i)^2]^{1/4} e^{i \arctan(4\omega k_i/\lambda_i^2)/2},$$

με  $i = 1, 2, 3$  και  $\lambda_i, k_i$  οι συντελεστές θερμικής αγωγιμότητας και μεταφοράς σε κάθε στρώμα. Εφαρμόζοντας την (B'.18) στην (B'.42) προκύπτει ότι  $E(\omega) = 0$ . Εφαρμόζοντας τις (B'.39) μεταξύ των (B'.42), (B'.41) προκύπτει ότι:

$$C(\omega) = F(\omega)\tilde{C}(\omega), \quad (\text{B'.43})$$

$$D(\omega) = F(\omega)\tilde{D}(\omega), \quad (\text{B'.44})$$

όπου

$$\tilde{C}(\omega) = \frac{e^{zm_3^-}}{e^{zm_2^+}} \cdot \frac{k_2 m_2^- + \lambda_2 - k_3 m_3^- - \lambda_3}{k_2(m_2^- - m_2^+)}, \quad (\text{B'.45})$$

$$\tilde{D}(\omega) = \frac{e^{z_2 m_3^-}}{e^{z_2 m_2^-} (k_2 m_2^- + \lambda_2)} \left[ (k_3 m_3^- + \lambda_3) - \frac{(k_2 m_2^+ + \lambda_2)(k_2 m_2^- + \lambda_2 - k_3 m_3^- - \lambda_3)}{k_2(m_2^- - m_2^+)} \right]. \quad (\text{B'.46})$$

Εφαρμόζοντας τις: (B'.38),(;) στις (B'.40),(B'.41) προκύπτει ότι:

$$A(\omega) = F(\omega)\tilde{A}, \quad (\text{B'.47})$$

$$B(\omega) = F(\omega)\tilde{B}, \quad (\text{B'.48})$$

όπου

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\omega) &= \tilde{C}(\omega) \frac{e^{z_1 m_2^+} [k_1 m_1^- + \lambda_1 - k_2 m_2^+ - \lambda_2]}{k_1 e^{z_1 m_1^+} (m_1^- - m_1^+)} + \\ &+ \tilde{D}(\omega) \frac{e^{z_1 m_2^-} [k_1 m_1^- + \lambda_1 - k_2 m_2^- - \lambda_2]}{k_1 e^{z_1 m_1^+} (m_1^- - m_1^+)}, \end{aligned} \quad (\text{B'.49})$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}(\omega) &= \tilde{C}(\omega) \left[ \frac{e^{z_1 m_2^+}}{e^{z_1 m_1^-}} - \frac{e^{z_1 m_2^+} (k_1 m_1^- + \lambda_1 - k_2 m_2^+ - \lambda_2)}{k_1 e^{z_1 m_1^-} (m_1^- - m_1^+)} \right] + \\ &+ \tilde{D}(\omega) \left[ \frac{e^{z_1 m_2^-}}{e^{z_1 m_1^-}} - \frac{e^{z_1 m_2^-} (k_1 m_1^- + \lambda_1 - k_2 m_2^- - \lambda_2)}{k_1 e^{z_1 m_1^-} (m_1^- - m_1^+)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B'.50})$$

Εφαρμόζοντας την (B'.14) προκύπτει ότι:

$$F(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2i} \frac{\delta(\omega - \omega_0)}{\tilde{A}(\omega) - \tilde{B}(\omega)}. \quad (\text{B'.51})$$

Τέλος εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier η εξής εξάρτηση της θερμοκρασίας από το βάθος και το χρόνο:

$$T_1(z, t) = \frac{1}{2i} \frac{1}{\tilde{A}(\omega) + \tilde{B}(\omega)} \left( \tilde{A}(\omega) e^{z m_1^+} + \tilde{B}(\omega) e^{z m_1^-} \right), \quad (\text{B'.52})$$

$$T_2(z, t) = \frac{1}{2i} \frac{1}{\tilde{A}(\omega) + \tilde{B}(\omega)} \left( \tilde{C}(\omega) e^{z m_2^+} + \tilde{D}(\omega) e^{z m_2^-} \right), \quad (\text{B'.53})$$

$$T_3(z, t) = \frac{1}{2i} \frac{e^{z m_3^-}}{\tilde{A}(\omega) + \tilde{B}(\omega)}. \quad (\text{B'.54})$$

# Βιβλιογραφία

- Florides, G. A. and S. A. Kalogirou, 2005: Annual ground temperature measurements at various depths. *Clima 2005*. Lausanne, Switzerland, 9-12 October.
- Gao, Z., 2005: Determination of soil heat flux in a tibetan short-grass prairie. *Boundary-Layer Meteorology*, **114**, 165-178.
- Gao, Z., D. H. Lenschow, R. Horton, M. Zhou, L. Wang, and J. Wen., 2008: Comparison of two soil temperature algorithms for a bare ground site on the Loess Plateau in China. *J. Geophys. Res.*, **113**, D18105 .
- Gao, Z., L. Wang, R. Horton, 2009: Comparison of six algorithms to determine the soil thermal diffusivity at site in the Loess Plateau of China. *Hydrol. Earth Syst. Sci. Discuss.*, **6**, 2247-2274.
- Gao, Z., R. Horton, H. P. Liu, J. Wen. L. Wang, 2009: Influence of wave phase difference between surface soil heat flux and soil surface temperature on land surface energy balance closure. *Hydrol. Earth Syst. Sci. Discuss.*, **6**, 1089–1110.
- Gao, Z., X. Fan, L. Bian, 2003: An analytical solution to one dimension thermal conduction-convection in soil. *Soil Sci.*, **168**, 99-107.
- Horton. R, P. J. Wierenga, D. R. Nielsen, 1983: Evaluation of methods for determining the apparent thermal diffusivity of soil near the surface. *Soil Sci. Soc. Am.*, **47**, 25-32.
- Kojima, Y. J. L. Heitman, G. N. Flerchinger, T. Ren, R. P. Ewing, R. Horton, 2014: Field Test and Sensitivity analysis of a sensible heat balance method to determine soil ice contents. *VZJ*, **13**.

- Kojima, Y., J. L. Heitman, G. N. Flerchinger, R. Horton, 2012: Numerical Evaluation of a Sensible Heat Balance Method to Determine Rates of Soil Freezing and Thawing. *VZJ*, **12**.
- Koo, M., Y. Song, 2008: Estimation apparent thermal diffusivity using temperature time series: A comparison of temperature data measured in KMA boreholes and NGMN wells. *Geosci. J.*, **12**, 255-264.
- Poudel, B., P. C. Poudel, S. Gurung, 2012: The modeling of soil temperature with depth. *Tribhuvan university*
- Rajeev, P., J. Kodikara, 2015: Estimation apparent thermal diffusivity of soil using field temperature time series. *Geomech*, **11**, 28-46.
- Shao, M., R. Horton, D. B. Jayens, 1998: Analytical solution for one-dimension heat conduction-convection equation. *Agron.*, **1**, 123-128.
- Taylor, S. A., R. D. Jackson. 1986: Thermal conductivity and diffusivity, *Methods of soil analysis. Part 1.*, 945-965.
- Tong, B., Z. Gao, R. Horton, L. Wang, 2017: Soil apparent thermal diffusivity estimated by conduction and by conduction convection heat transfer models. *J. Hydrometeorol*, **1**, 109-118.
- van Wijk, W. R., and D. A. de Vries, 1963: Periodic temperature variations in a homogeneous soil. In: *W.R. van Wijk, editor, Physics of plant environment*.
- Wang, L., Z. Gao, R. Horton, D. H. Lenschow, K. Meng, D. B. Jaynes, 2012: An Analytical Solution to the One-Dimensional Heat Conduction–Convection Equation in Soil. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, **76**, 1978-1986.
- Warsta, L., M. Turunen, H. Koivusalo, M. Paasonen-Kivekäs, T. Karvonen, A. Taskinen, 2012: Modeling heat transport and freezing and thawing processes in a clay, subsurface drained agricultural field. *Drainage Workshop on Agricultural Drainage, Needs and Future Priorities*. Cairo, Egypt, 23–27 September.
- Young, D. H. and Freedman A. R., 2004: University physics with modern physics, *Benjamin-Cummings Pub Co*, 1714 pp.



Zemansky, W. M. and R. H. Dittman, 1997: Heat and thermodynamics, McGraw-Hill Publishing, 497 pp.

Γεωργόπουλος Κ., 2017: Μελέτη της θερμοκρασίας του εδάφους στην περιοχή των Ιωαννίνων: Χρονική μεταβλητότητα, σχέση με άλλες μετεωρολογικές παραμέτρους, συνοπτικές καταστάσεις που ευνοούν την εμφάνιση ακραίων τιμών. Μεταπτυχιακή εργασία, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 166 pp.

Ιωάννου Ν. Γ., 1998: Οι θερμοκρασίες αέρα και εδάφους του μετεωρολογικού σταθμού του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Μεταπτυχιακή Διατριβή, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 177 pp.

Πνευματικός Ι., 1996: Μελέτη της δομής και αναπτυξης του ατμοσφαιρικού ορισκού στρώματος υπεράνω του λεκανοπεδίου των Ιωαννίνων. Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Σαχσαμάνογλου, Χ. Σ. και Τ. Ι. Μακρογιάννης, 1998: Γενική μετεωρολογία. Εκδόσεις Ζήτη, 367 pp.

Σουλιος, Χ. Σ., 1986, *University press studio*, 296 pp.

Φλόκας, Α. Α., 1997: Μαθήματα μετεωρολογίας και κλιματολογίας. Εκδόσεις Ζήτη, 464 pp.

Φυτίκας, Μ. και Ν. Ανδρίτσος, 2004: Γεωθερμία, Εκδόσεις Τζιόλα, 416 pp.