



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΚΑΙ  
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



---

ΕΛΑΧΙΣΤΟΤΙΚΟΙ ΔΙΑΧΩΡΙΣΤΕΣ:  
ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

---

Μαριάννα Πέτρου

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2021



*Αφιερώνεται στην οικογένεια μου.*



Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και στην Πληροφορική που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 26/07/2021 από την εξεταστική επιτροπή:

**Όνοματεπώνυμο      Βαθμίδα**

Χάρης Παπαδόπουλος      Αναπληρωτής Καθηγητής

Λουκάς Γεωργιάδης      Αναπληρωτής Καθηγητής

Λεωνίδας Παληρός      Καθηγητής

### **ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ**

“Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.”

**Μαριάννα Πέτρου**



---

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

---

Με την ολοκλήρωση και παρουσίαση της διπλωματικής μου εργασίας θα ήθελα να απευθύνω ευχαριστίες στον καθηγητή μου κ. Χάρη Παπαδόπουλο για τη βοήθειά του σε όλη τη διάρκεια της εκπόνησης αλλά και ολόκληρου του μεταπτυχιακού προγράμματος. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς και τους φίλους μου για όλους τους κόπους και τη στήριξη τους για τη διεκπεραίωση κι αυτού του στόχου. Τέλος, θερμές ευχαριστίες απονέμω και στην ηγουμένη Φιλοθέη του Ιερού Γυναικείου Ησυχαστηρίου της Αναστάσεως του Χριστού - Εμμανούς της οποίας οι πολύτιμες συμβουλές με ενθάρρυναν ως προς την ολοκλήρωση αυτού του κύκλου σπουδών.





---

# ΠΕΡΙΛΗΨΗ

---

Η παρούσα διατριβή έχει ως στόχο την αλγοριθμική μελέτη των ελαχιστοτικών διαχωριστών σε γραφήματα. Ένα σύνολο κορυφών ενός συνεκτικού γραφήματος καλείται ελαχιστοτικός διαχωριστής αν η αφαίρεση του συνόλου οδηγεί σε μη-συνεκτικό γράφημα και κανένα αυστηρό υποσύνολό του δεν έχει την ίδια ιδιότητα. Είναι γνωστό ότι ένα γράφημα μπορεί να έχει πλήθος ελαχιστοτικών διαχωριστών που να είναι εκθετικό ως προς το μέγεθος του γραφήματος, ενώ παράλληλα ένας ελάχιστος (ως προς το μέγεθος) διαχωριστής μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο μέσα από τη θεωρία μεγίστων ροών. Εξετάζουμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα ορισμένων προβλημάτων της αλγοριθμικής θεωρίας γραφημάτων που σχετίζονται με τους ελαχιστοτικούς διαχωριστές.

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρουμε εισαγωγικές έννοιες της θεωρίας γραφημάτων και της υπολογιστικής πολυπλοκότητας. Στη συνέχεια, στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάμε ένα γνωστό αλγόριθμο που απαριθμεί τους ελαχιστοτικούς διαχωριστές ενός γραφήματος καθώς και το πλήθος των ελαχιστοτικών διαχωριστών που περιέχει, του οποίου ο χρόνος είναι πολυωνυμικός ως προς το μέγεθος του γραφήματος. Στο τρίτο κεφάλαιο εξετάζουμε κλάσεις γραφημάτων που παρουσιάζουν πολυωνυμικό πλήθος ελαχιστοτικών διαχωριστών και επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας σε γραφήματα που χαρακτηρίζονται από απαγορευμένα επαγόμενα υπογραφήματα το πολύ τεσσάρων κορυφών.

Ακολούθως, στο τέταρτο και πέμπτο κεφάλαιο μελετάμε την πολυπλοκότητα δύο σχετικών προβλημάτων που αποσκοπούν στην εύρεση του μέγιστου και του πολυμερούς ελαχιστοτικού διαχωριστή αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, δείχνουμε γνωστές αναγωγές  $\mathcal{NP}$ -πληρότητας για την εύρεση ενός μέγιστου ελαχιστοτικού διαχωριστή σε επίπεδα διμερή γραφήματα, σε συμπληρώματα διμερών γραφημάτων και σε γραμμικά γραφήματα, ενώ για το ίδιο πρόβλημα δείχνουμε ότι επιδέχεται παραμετρική πολυπλοκότητα (FPT) ως προς το μέγεθος της λύσης. Για την εύρεση ενός πολυμερούς ελαχιστοτικού διαχωριστή, στο πέμπτο κεφάλαιο, δείχνουμε γνωστή αναγωγή για την  $\mathcal{NP}$ -δυσκολία του προβλήματος και παρουσιάζουμε γνωστό αλγόριθμο που τρέχει σε πολυωνυμικό χρόνο για γραφήματα με φραγμένο δεντροπλάτος.

Επίσης, στο έκτο κεφάλαιο εξετάζουμε την αντίστοιχη έννοια των ελαχιστοτικών διαχωριστών ως προς τις ακμές του γραφήματος και συγκεκριμένα μελετάμε την έννοια των σημαντικών διαχωριστών. Παρουσιάζουμε ακόμη, ορισμένα πεδία εφαρμογής των σημαντικών διαχωριστών σε σχέση με άλλα γνωστά προβλήματα αποκοπής. Τέλος, κλείνουμε τη διατριβή με το έβδομο κεφάλαιο παρουσιάζοντας συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα των προηγούμενων κεφαλαίων.

---

# ABSTRACT

---

The present thesis aims the algorithmic study of minimal separators in graphs. A set of vertices of a connected graph is called a minimal separator if subtracting the set results in a disconnected graph and no proper subset of it has the same property. It is known that a graph can have a number of minimal separators that is exponential, while at the same time a minimum separator can be calculated in polynomial time through maximum flow theory. We consider the computational complexity of some algorithmic graph theory problems related to minimal separators.

Firstly, we introduce basic concepts and definitions of graph theory and computational complexity. Next, in the second chapter we study a known algorithm, whose time is polynomial, that lists the minimum separators of a graph and the number of minimal separators it contains as well. In the third chapter we examine graph classes that present a polynomial number of minimal separators and focus on graphs characterized by forbidden induced subgraphs of at most four vertices.

Furthermore, in the fourth and fifth chapter, we study the complexity of two related problems aimed at finding the maximum and the multiway separator, respectively. More specifically, we show known  $\mathcal{NP}$ -complete reductions in order to find a maximum minimal separator in planar bipartite graphs, in co-bipartite graphs and in line graphs, while for the same problem we show that it is susceptible to parametric complexity FPT in terms of solution size. To find a minimal multiway separator, in the fifth chapter, we show a known  $\mathcal{NP}$ -hard reduction for the problem and present a well-known algorithm that runs in polynomial time for graphs with bounded treewidth.

Also, in the sixth chapter we examine the corresponding concept of the minimal separators with respect to the edges of the graph and in particular we study important separators. We present some areas of application of important separators in relation to other known cutting problems. We conclude the thesis with the seventh chapter presenting summary results of the previous chapters.



---

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

---

Περίληψη	i
Abstract	iii
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Θεωρία Γραφημάτων . . . . .	1
1.2 Κλάσεις γραφημάτων . . . . .	6
1.3 Θεωρία Πολυπλοκότητας . . . . .	13
1.3.1 Κλάσεις πολυπλοκότητας . . . . .	14
Παραμετροποιημένη πολυπλοκότητα . . . . .	15
1.4 Αλγοριθμικές τεχνικές . . . . .	18
1.5 Ελαχιστοτικοί διαχωριστές . . . . .	19
<b>2 Απαρίθμηση Ελαχιστοτικών Διαχωριστών</b>	<b>23</b>
2.1 Κατάλληλα ζεύγη . . . . .	25
2.2 Ελαχιστοτικά ζεύγη . . . . .	28
2.3 Αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου . . . . .	32
<b>3 Ελαχιστοτικοί διαχωριστές σε κλάσεις γραφημάτων με απαγορευμένα υπογραφήματα</b>	<b>35</b>
3.1 Tame κλάσεις γραφημάτων . . . . .	35
3.2 Ιδιότητες γραφημάτων . . . . .	38
3.3 Εκθετικό πλήθος ελαχιστοτικών διαχωριστών . . . . .	40

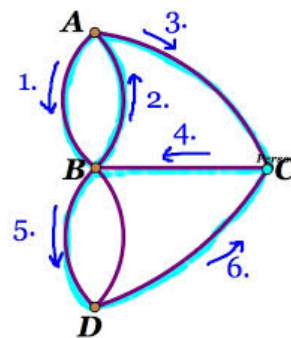
3.3.1	Θήτα γραφήματα και τα γραμμικά τους γραφήματα . . . . .	40
3.3.2	Στοιχειώδεις τοίχοι και γραμμικά γραφήματα . . . . .	41
3.4	Αποδείξεις των Θεωρημάτων 3.1 και 3.2 . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Μέγιστος Ελαχιστοτικός Διαχωριστής</b>	<b>49</b>
4.1	Πολυωνυμική επίλυση του προβλήματος σε κλάσεις γραφημάτων .	50
4.1.1	Επίπεδα διμερή γραφήματα . . . . .	50
4.1.2	Συμπληρωματικά διμερή γραφήματα . . . . .	51
4.1.3	Γραμμικά γραφήματα . . . . .	53
4.2	FPT αλγόριθμος . . . . .	56
4.3	Κάτω όριο βασισμένο στην ETH . . . . .	63
4.4	Κάτω όριο με πυρήνα . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Πολυμερείς Διαχωριστές</b>	<b>67</b>
5.1	$k$ -Way Vertex Cut . . . . .	68
5.2	Vertex $k$ -cut . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Σημαντικοί Διαχωριστές</b>	<b>79</b>
6.1	Μη-κατευθυνόμενα γραφήματα . . . . .	84
6.1.1	Edge Multiway Cut . . . . .	84
6.1.2	Multicut . . . . .	87
6.2	Κατευθυνόμενα γραφήματα . . . . .	87
6.3	Εφαρμογή στο πρόβλημα $k$ -FTRS . . . . .	90
<b>7</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>95</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>101</b>

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### 1.1 Θεωρία Γραφημάτων

Κάθε άνθρωπος στη ζωή του έρχεται αντιμέτωπος με μεγάλο αριθμό γρίφων. Άλλοι είναι πιο απλοί ενώ άλλοι είναι αρκετά πιο περίπλοκοι. Ένας γρίφος μοιάζει με παιχνίδι που βάζει τη σκέψη σε λειτουργία και μας παρακινεί σε μεγαλύτερες προκλήσεις. Ένας τέτοιος γρίφος ήταν και ο γρίφος των Επτά Γεφυρών της πόλης Κόνιγσβεργ το 1736 τον οποίο μελέτησε ο διάσημος Ελβετός φυσικομαθηματικός Leonard Euler (1707-1783). Ο γρίφος αυτός αναζητούσε την ύπαρξη διαδρομής όπου ένας περιδιαβάτης θα μπορούσε να διέλθει από όλες τις γέφυρες της πόλης, χωρίς να περάσει από την ίδια γέφυρα δυο φορές. Στις πιο κάτω εικόνες βλέπουμε την αναπαράσταση του χάρτη σε μορφή ενός γραφήματος.

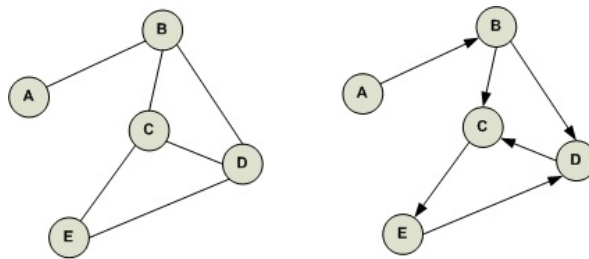


Έτσι με τον Euler να βάζει τα θεμέλια κατά τον 18ο αιώνα, η «Θεωρία Γραφημάτων» ή «Θεωρία Γράφων» αναπτύσσεται μεταπολεμικά ως κλάδος των Διακριτών Μαθηματικών βρίσκοντας εφαρμογές στη Μηχανική, στην Πληροφορική, στη Χημεία και στην Κοινωνιολογία. Η λέξη γράφημα χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά με αυτή την έννοια από τον James Joseph Sylvester το 1878. [21]

Ας ορίσουμε πρώτα την έννοια του "γραφήματος" και να δούμε τα ήδη που υπάρχουν.

**Ορισμός 1.1.** Ως ένα απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα (*Graph*) ορίζουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος  $G = (V, E)$  αποτελούμενο από ένα σύνολο κορυφών (ή κόμβων)  $V(G)$  μαζί με ένα σύνολο ακμών  $E(G) \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V \text{ και } u \neq v\}$ .

**Ορισμός 1.2.** Κατευθυνόμενα ονομάζονται τα γραφήματα με διατεταγμένα ζεύγη κορυφών  $(u, v)$  με  $u, v \in V$  που δίνουν μια συγκεκριμένη κατεύθυνση στις ακμές από μια κορυφή σε μια άλλη.



Σχήμα 1.1: Μη-κατευθυνόμενο και κατευθυνόμενο γράφημα. <sup>1</sup>

Στη βιβλιογραφία συνηθίζεται ο συμβολισμός με  $n = |V(G)|$  για το πλήθος των κορυφών και με  $m = |E(G)|$  για το πλήθος των ακμών ενός γραφήματος  $G$ . Για παράδειγμα τα γραφήματα στο Σχήμα 1.1 έχουν  $n = 5$  και  $m = 6$ . Στη συνέχεια, θα ορίσουμε μερικές ακόμα έννοιες σχετικά με τις ιδιότητες των κορυφών και παρακάτω θα δούμε κάποιες σχέσεις ανάμεσα στο γραφήματα.

**Ορισμός 1.3.** Γειτονιά μιας κορυφής  $v \in V(G)$  καλείται το σύνολο των κορυφών που συνδέονται μαζί της με ακμές και συμβολίζεται με  $N_G(v) = \{u \mid \{v, u\} \in E(G)\}$ . Ως κλειστή γειτονιά ορίζεται το σύνολο  $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ . Το πλήθος των γειτόνων κορυφών της  $v$  συμβολίζεται με  $deg_G(v) = |N_G(v)|$  και ονομάζεται βαθμός κορυφής.

**Ορισμός 1.4** (Είδη κορυφών). Ανεξάρτητες (*independent*) λέγονται οι κορυφές που δεν υπάρχει μεταξύ τους ακμή που να τις συνδέει.

Απομονωμένη (*isolated*) ονομάζεται η κορυφή που δεν συνδέεται με καμιά άλλη κορυφή ( $deg_G(v) = 0$ ).

Εκκρεμής (*pendant*) ή φύλλο λέγεται η κορυφή που συνδέεται μόνο με μία

<sup>1</sup><https://algorithmsinsight.wordpress.com/graph-theory-2/>



άλλη κορυφή ( $\deg_G(v) = 1$ ).

**Απλοϊκή** (*simplicial*) ονομάζεται η κορυφή που οι γείτονες της σχηματίζουν κλίκα, δηλαδή κάθε δύο είναι γειτονικές μεταξύ τους.

**Καθολική** (*universal*) λέγεται η κορυφή που συνδέεται με όλες τις υπόλοιπες κορυφές του γραφήματος.

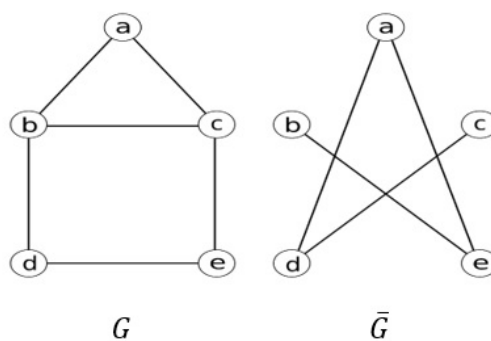
**Δίδυμες** (*true twins*) λέγονται δύο κορυφές με ίδια γειτονιά σε ένα γράφημα.

Στην περίπτωση των κατευθυνόμενων γραφημάτων μια ακμή  $e = (u, v)$  λέγεται **τόξο** με κατεύθυνση από την κορυφή  $u$  στην  $v$ . Ονομάζουμε την κορυφή  $u$  **ουρά** και την  $v$  **κεφαλή**. Για μια κορυφή  $x$  ορίζουμε ως **έσω-βαθμό**  $d_G^-(x)$  το πλήθος των τόξων που κατευθύνονται προς την  $x$  και **έξω-βαθμό**  $d_G^+(x)$  το πλήθος των τόξων που απομακρύνονται από την  $x$ . Επιπλέον μία κορυφή με  $d_G^-(x) = 0$  ονομάζεται **πηγή** (*source*), ενώ εκείνη με  $d_G^+(x) = 0$  ονομάζεται **υποδοχέας** (*sink*).

**Ορισμός 1.5.** Ως **συμπλήρωμα** ενός γραφήματος  $G = (V, E)$  ορίζουμε το γράφημα  $\bar{G}$  που έχει το ίδιο σύνολο κορυφών με το  $G$  και με ακριβώς εκείνες τις ακμές που δεν έχει το  $G$ . Συμβολίζεται με

$$\bar{G} = (V(G), \{\{u, v\} \mid u, v \in V(G) \text{ και } \{u, v\} \notin E(G)\}).$$

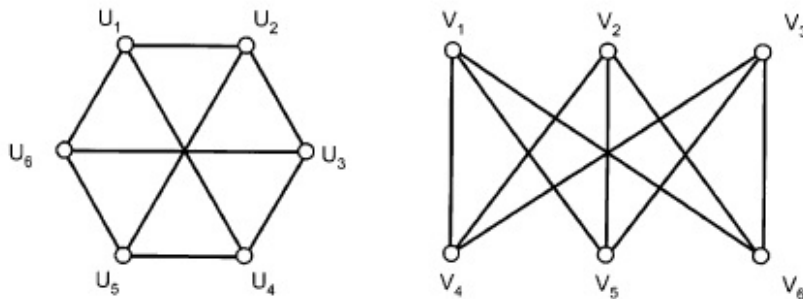
**Ορισμός 1.6.** Ένα γράφημα  $G$  ονομάζεται **συνεκτικό** αν για κάθε ζεύγος κορυφών  $u, v \in V(G)$  υπάρχει  $\{u, v\}$ -μονοπάτι στο  $G$ . Ένα μη-συνεκτικό γράφημα λέμε ότι αποτελείται από **συνεκτικές συνιστώσες**  $G_i$  για  $1 \leq i \leq n$  (βλ. Σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2: Ένα συνεκτικό γράφημα  $G$  και το συμπληρωματικό του μη-συνεκτικό γράφημα  $\bar{G}$ .

Κυρίως μέσα από τη σχεδίαση απλών γραφημάτων διαφαίνεται μια σχέση που υπάρχει σε ορισμένα γραφήματα τα οποία παρουσιάζουν όμοιες ιδιότητες. Η πρώτη σχέση που θα δούμε ανάμεσα σε γραφήματα είναι αυτή που περικλείει 'όμοια' ή καλύτερα ισόμορφα γραφήματα.

**Ορισμός 1.7.** Δύο γραφήματα  $G$  και  $H$  ονομάζονται **ισόμορφα** αν υπάρχει μία 1-1 και επί απεικόνιση  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  τέτοια ώστε  $\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H)$ . Συμβολίζουμε τον **ισομορφισμό** μεταξύ του  $G$  και του  $H$  ως  $G \simeq H$ .



Σχήμα 1.3: Δύο ισόμορφα γραφήματα  $G$  και  $K_{3,3}$  αντίστοιχα.

**Παρατήρηση 1.1.** Η σχέση  $\simeq$  είναι σχέση ισοδυναμίας.

Μία άλλη βασική σχέση μεταξύ των γραφημάτων είναι αυτή του **υπογραφήματος**. Με τη διαγραφή ορισμένων κορυφών ή ακμών προκύπτουν νέα γραφήματα τα οποία συμβολίζονται με  $H \subseteq G$ . Για την παραπάνω σχέση  $\subseteq$  ορίζουμε τη γνήσια μορφή της  $\subset$  όταν τα συγκεκριμένα γραφήματα δεν είναι ισόμορφα. Πιο συγκεκριμένα, πάμε να δούμε άλλες δύο σχέσεις που αφορούν τα υπογράφηματα.

**Ορισμός 1.8.** Ένα γράφημα  $H = (V', E')$  λέγεται **επαγόμενο υπογράφημα** ενός γραφήματος  $G$  αν  $V(H) = V' \subseteq V(G)$  και  $\forall u, v \in V'$ , υπάρχει ακμή  $\{u, v\} \in E'$  αν και μόνο εάν  $\{u, v\} \in E(G)$ . Το συμβολίζουμε και ως  $H = G[V']$  ή  $H \subseteq G$ . Εναλλακτικά, αν ένα υπογράφημα του  $G$  έχει το ίδιο σύνολο κορυφών με το  $G$  και λιγότερες ακμές τότε ονομάζεται **spanning**.

**Ορισμός 1.9.** Ένα γράφημα  $H$  λέμε ότι είναι **παραγόμενο υπογράφημα** του  $G$  αν  $V(H) = V(G)$  και  $E(H) \subseteq E(G)$ .

**Παρατήρηση 1.2.** Με διαγραφή ορισμένων κορυφών ενός γραφήματος  $G$  προκύπτει ένα επαγόμενο υπογράφημα. Ενώ με διαγραφή ορισμένων ακμών προκύπτει ένα παραγόμενο υπογράφημα.

Επιπλέον, μία άλλη σημαντική ιδιότητα που ισχύει στις κλάσεις γραφημάτων είναι η κληρονομική. Μία ιδιότητα  $P$  ενός γραφήματος  $G = (V, E)$  ονομάζεται **κληρονομική**, εάν διατηρείται σε κάθε επαγόμενο υπογράφημα του, δηλαδή εάν  $P$  ισχύει στο  $G$ , τότε  $P$  ισχύει στο  $G[A]$  για κάθε  $A \subseteq V$ . Οι κληρονομικές ιδιότητες αφθονούν στη Θεωρία Γραφημάτων. Μερικές πολύ γνωστές είναι η ιδιότητα της διμερικότητας (bipartiteness), διότι κάθε επαγόμενο υπογράφημα ενός διμερούς γραφήματος είναι διμερές γράφημα (βλ. Ορισμό 1.14). Επίσης, η επιπεδικότητα (planarity) είναι κληρονομική ιδιότητα. Προφανώς δεν είναι όλες οι ιδιότητες κληρονομικές. Για παράδειγμα, η συνεκτικότητα (connectivity) δεν είναι κληρονομική ιδιότητα.

**Ορισμός 1.10.** Ένα σύνολο γραφημάτων  $X$  ονομάζεται **κληρονομική κλάση** (hereditary class) εάν περιλαμβάνει κάθε γράφημα ισόμορφο με ένα επαγόμενο υπογράφημα οποιουδήποτε γραφήματος που ανήκει στο  $X$ . Με άλλα λόγια, μία κλάση  $X$  λέγεται κληρονομική αν και μόνο εάν  $G \in X$  υποδηλώνει ότι  $G - v \in X$  για κάθε κορυφή  $v \in G$ , όπου  $G - v$  δηλώνει το γράφημα που προκύπτει από το  $G$  με τη διαγραφή μίας κορυφής  $v$  μαζί με όλες τις ακμές που προσπίπτουν σε αυτή.

Καταληκτικά σε αυτή την ενότητα πριν περάσουμε στις διάφορες κλάσεις γραφημάτων αξίζει να σημειώσουμε ένα εναλλακτικό τρόπο αναπαράστασης ενός γραφήματος. Όπως έχουμε δει, ο πιο διαδεδομένος τρόπος σχεδίασης ενός γραφήματος είναι με την αναπαράσταση κορυφών με επιλεγμένα σημεία του επιπέδου και των ακμών με ευθείες ή τεθλασμένες γραμμές οι οποίες συνδέουν τα σημεία που αντιστοιχούν στα άκρα των ακμών. Ένας άλλος τρόπος αναπαράστασης ενός γραφήματος που διευκολύνει την αποθήκευσή του είναι με τη χρήση του **πίνακα γειτνίασης**. Πιο συγκεκριμένα, ένα γράφημα  $G$  με  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα  $n \times n$  πίνακα  $A = [a_{i,j}]$  όπου

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{αν } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{αν } \{v_i, v_j\} \notin E(G). \end{cases}$$

Ο  $A$  καλείται πίνακας γειτνίασης του γραφήματος  $G$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Σχήμα 1.4: Ο πίνακας γειτνίασης αναπαριστά το γράφημα  $G$  του Σχήματος 1.2. Στη στήλη φαίνεται η λίστα κορυφών ενώ από κάθε στοιχείο της λίστας κορυφών ξεκινάει μια λίστα γειτονιάς.

## 1.2 Κλάσεις γραφημάτων

Τα γραφήματα χωρίζονται σε διάφορες κλάσεις ανάλογα πολλές φορές με τη μορφή ή τις ιδιότητες τους, το πλήθος των κορυφών ή των ακμών τους. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε μερικές από τις βασικές κλάσεις που θα συναντήσουμε και στα επόμενα κεφάλαια.

**Ορισμός 1.11.** Μονοπάτι  $P_n$  καλείται το γράφημα με  $n \geq 2$  κορυφές και με ακμές διαδοχικών κορυφών. Ισχύει

$$P_n = (\{v_1, \dots, v_n\}, \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i \leq n\}).$$

**Ορισμός 1.12.** Άχορδο κύκλος  $C_n$  ονομάζουμε ένα κλειστό μονοπάτι χωρίς χορδές, δηλαδή το απλό μονοπάτι μαζί με την ακμή  $\{v_1, v_n\}$ . Ισχύει

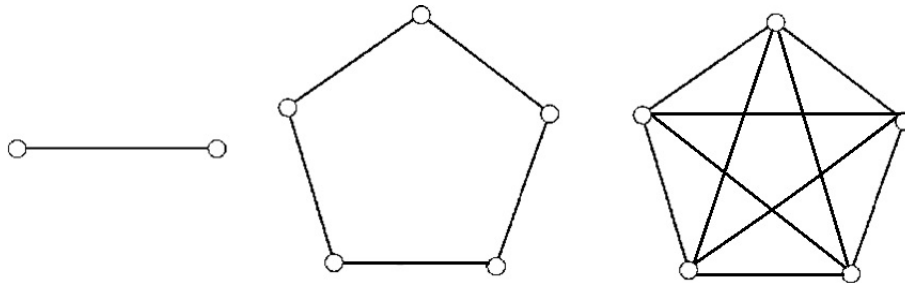
$$C_n = (\{v_1, \dots, v_n\}, \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i < n\} \cup \{v_1, v_n\}).$$

Όταν υπάρχουν κι άλλες ακμές μεταξύ των κορυφών ενός κύκλου τότε λέμε πως ο κύκλος έχει χορδές. Ονομάζουμε περιφέρεια (*girth*) το μήκος του μικρότερου κύκλου σε ένα γράφημα.

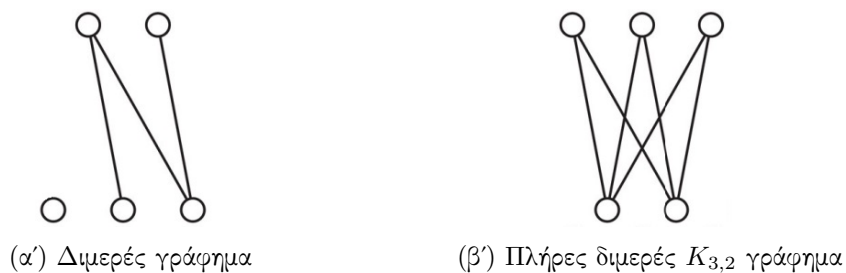
**Ορισμός 1.13.** Πλήρες γράφημα ή κλίκα  $K_n$  ονομάζουμε το γράφημα με  $n \geq 1$  κορυφές και με ακμές για κάθε ζεύγος κορυφών. Δηλαδή κάθε κορυφή συνδέεται με όλες τις υπόλοιπες και ισχύει

$$K_n = (\{v_1, \dots, v_n\}, \{\{v_i, v_j\} \mid 1 \leq i, j \leq n\}).$$

**Ορισμός 1.14.** Ένα γράφημα  $G = (V, E)$  ονομάζεται διμερές αν υπάρχει μια διαμέριση  $V = A \cup B$ , με  $A \cap B = \emptyset$ , τέτοια ώστε οι γείτονες κάθε κορυφής του συνόλου  $A$  ανήκουν στο  $B$  και το ανάποδο. Δηλαδή δεν υπάρχουν ακμές μεταξύ των κορυφών της  $A$  διαμέρισης ούτε μεταξύ των κορυφών της  $B$  διαμέρισης.

Σχήμα 1.5: Μονοπάτι  $P_2$ , Άχορδος κύκλος  $C_5$ , Κλίκα  $K_5$ .

**Ορισμός 1.15.** Όταν κάθε κορυφή από το σύνολο  $A$  έχει ακμή με κάθε κορυφή από το σύνολο  $B$  τότε το γράφημα λέγεται **πλήρες διμερές** και συμβολίζεται με  $K_{p,q}$  όπου  $p = |A|$  και  $q = |B|$ . Αν η διαμέριση γίνεται σε περισσότερες από δύο συνιστώσες τότε το γράφημα ονομάζεται **πλήρες πολυμερές**.



(α') Διμερές γράφημα

(β') Πλήρες διμερές  $K_{3,2}$  γράφημα

Σχήμα 1.6: Είδη διμερών γραφημάτων.

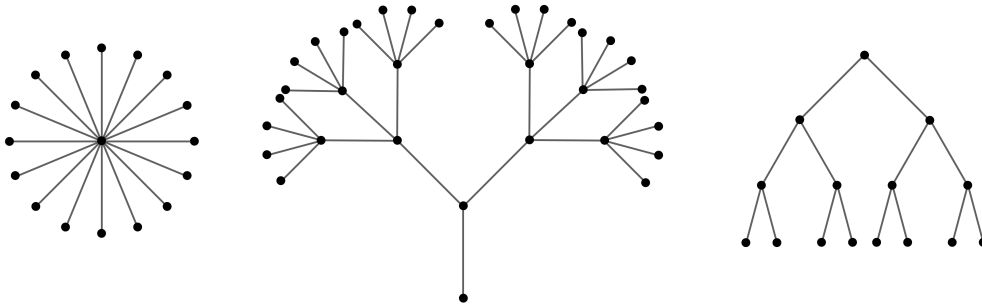
Στο Σχήμα 1.6 μπορούμε να δούμε ένα παράδειγμα από ένα διμερές γράφημα (αριστερά) και ένα πλήρες διμερές  $K_{3,2}$  (δεξιά) όπου όλες οι κορυφές του συνόλου  $A$  ενώνονται με όλες τις απέναντι κορυφές του  $B$ . Επίσης το ακόλουθο λήμμα για τα διμερή γραφήματα θεωρείται από τα πιο σημαντικά στη Θεωρία Γραφημάτων και το παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

**Λήμμα 1.1.** Ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους.

Ένα είδος διμερών γραφημάτων είναι τα δέντρα και τα δάση.

**Ορισμός 1.16.** Ένα άκυκλο και συνεκτικό γράφημα καλείται **δέντρο**. Τα δέντρα συνήθως ξεκινάνε από ένα κόμβο που ονομάζεται **ρίζα** και διακλαδώνονται προς τις υπόλοιπες κορυφές (**παιδιά**) μέσω ενός μοναδικού μονοπατιού. Οι κορυφές στις οποίες καταλήγουν και έχουν βαθμό 1 καλούνται **φύλλα**. Μία συλλογή

από δέντρα ή αλλιώς ένα μη-συνεκτικό άκυκλο γράφημα καλείται **δάσος** (βλ. Σχήμα 1.7).



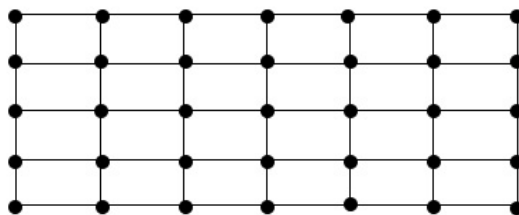
Σχήμα 1.7: Ένα δάσος που περιέχει τρία δέντρα.

Τις δύο επόμενες κλάσεις γραφημάτων θα τις συναντήσουμε στο 3ο Κεφάλαιο μιας και προκαλούν ιδιαίτερο ενδιαφέρον σχετικά με τον αριθμό των ελαχιστοτικών τους διαχωριστών με τον οποίο θα ασχοληθούμε.

**Ορισμός 1.17.** Ένα γράφημα καλείται **πλέγμα**  $R_{p,q}$  όταν έχει σύνολα κορυφών  $X = \{x_1, \dots, x_p\}$  και  $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$  και ισχύει

$$R_{p,q} = (X \cup Y, \{(x_i, y_j), (x_k, y_t) \mid |i - k| + |j - t| = 1\}).$$

Με άλλα λόγια είναι το γράφημα που αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο δισδιάστατο πλέγμα με κορυφές τις τομές των ευθύγραμμων τμημάτων του πλέγματος και ακμές τα ευθύγραμμα τμήματα μεταξύ των κορυφών.



Σχήμα 1.8: Το πλέγμα  $R_{7,5}$ .

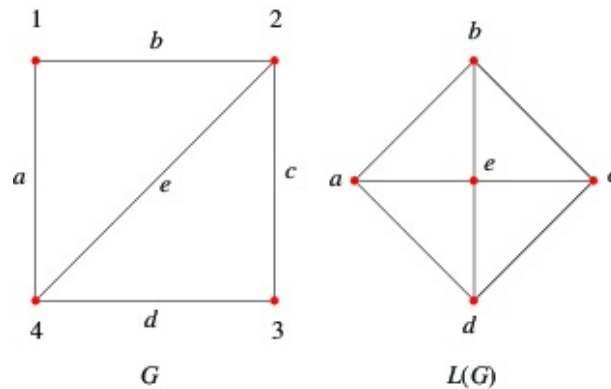
Έπειτα θα κάνουμε αναφορά στην κλάση των γραμμικών γραφημάτων. Η ονομασία προέρχεται από μια εργασία των Harary και Norman (1960) καθώς την ίδια κατασκευή χρησιμοποίησαν πριν από αυτούς οι Whitney (1932) και Krausz (1943) με διαφορετικές ονομασίες.

**Ορισμός 1.18.** Έστω  $G = (V, E)$  ένα γράφημα. Το γραμμικό γράφημα του  $G$  συμβολίζεται ως  $L(G)$  και ορίζεται ως εξής:

$$L(G) = (E(G), \{\{e, e'\} \mid e, e' \in E(G) \text{ και } e \cap e' \neq \emptyset\}).$$

Έχει δηλαδή για κορυφές τις ακμές του  $G$ . Δύο κορυφές του  $L(G)$  συνδέονται με ακμή αν και μόνο αν οι αντίστοιχες ακμές του  $G$  έχουν κοινό άκρο (βλ. Σχήμα 1.9). Θα αναφέρουμε ενδεικτικά μερικές από τις ιδιότητες τους:

- Το γραμμικό γράφημα ενός συνεκτικού γραφήματος είναι επίσης συνεκτικό.
- Για ένα γράφημα  $G$  με  $n$  κορυφές και  $m$  ακμές, ο αριθμός των κορυφών του  $L(G)$  είναι  $m$  και ο αριθμός των ακμών του είναι ίσο με  $\sum_{i=1}^n \deg_G(v_i) - m$ .



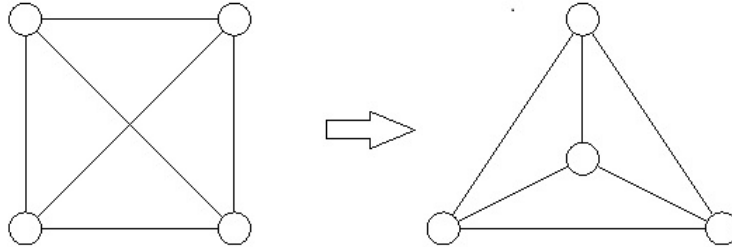
Σχήμα 1.9: Το γράφημα  $L(G)$  για το γράφημα  $G$ .<sup>2</sup>

Μια κατηγορία γραφημάτων η οποία βρίσκεται σε άμεση σχέση με θέματα της τοπολογίας και συγκεκριμένα της τοπολογίας του  $\mathbb{R}^2$  είναι τα επίπεδα γραφήματα.

**Ορισμός 1.19.** Ένα γράφημα  $H$  ονομάζεται **ενεπίπεδο** αν δεν υπάρχει σχεδίαση του  $H$  στο  $\mathbb{R}^2$  έτσι ώστε δυο οποιοσδήποτε ακμές του να έχουν κοινά σημεία μόνο τις κορυφές. Ένα γράφημα  $G$  ονομάζεται **επίπεδο (planar)** αν υπάρχει ενεπίπεδο γράφημα  $H$  τέτοιο ώστε  $G \simeq H$ . Στην τελευταία περίπτωση θα λέμε ότι το  $H$  είναι μία **επίπεδη εμβάπτιση** του  $G$ .

Με άλλα λόγια επίπεδα γραφήματα μπορούμε να πούμε ότι είναι αυτά που μπορούν να σχεδιαστούν στο επίπεδο  $\mathbb{R}^2$  χωρίς να τέμνονται οι ακμές τους. Στα Σχήματα 1.10 και 1.11 μπορούμε να δούμε μερικά παραδείγματα επίπεδων γραφημάτων μαζί με τις επίπεδες τους εμβάπτισεις.

<sup>2</sup><https://mathworld.wolfram.com/LineGraph.html>

Σχήμα 1.10: Το  $K_4$  ως επίπεδο γράφημα στο  $\mathbb{R}^2$ .

**Ορισμός 1.20.** Για ένα ενεπίπεδο γράφημα  $H$  και ένα σημείο  $x \in \mathbb{R}^2$  καλούμε *όψη του  $H$  που περιέχει το  $x$*  (επομένως και του επίπεδου γραφήματος  $G$  που αντιστοιχεί στο  $H$ ) το σύνολο όλων των σημείων του χώρου  $\mathbb{R}^2$  που μπορούν να συνδεθούν με το  $x$  μέσω μιας συνεχούς γραμμής (όχι απαραίτητα ευθείας) που δεν τέμνει τον εαυτό της (γνωστή ως καμπύλη *Jordan*) και δεν τέμνει κάποια ακμή του  $H$ . Όλες οι όψεις είναι φραγμένες από ένα σύνολο ακμών και ονομάζονται **εσωτερικές όψεις** εκτός από μια μοναδική μη-φραγμένη όψη που καλείται **εξωτερική όψη**. Το σύνολο των όψεων του  $H$  το συμβολίζουμε με  $F(H)$  και το πλήθος των όψεων συμβολίζεται με  $r = |F(H)|$ .

**Ορισμός 1.21.** Έστω ένα ενεπίπεδο γράφημα  $H$  και μια όψη  $f \in F(H)$ . Το γράφημα που περικλείεται από τις ακμές και τις κορυφές που συνορεύουν με την όψη  $f$  ονομάζεται **περιθώριο του  $H$**  και συμβολίζεται με  $H[f]$ . Οι ακμές που ανήκουν στο  $H[f]$  ονομάζονται **ομοτοπικές**.

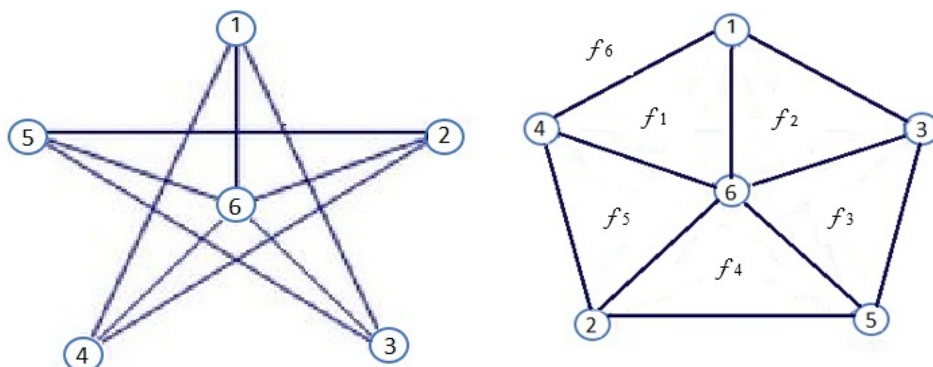
Όλοι οι προηγούμενοι ορισμοί μεταφέρονται και σε ένα επίπεδο γράφημα  $G$  με μια επίπεδη εμβάπτιση το  $H$ .

**Ορισμός 1.22.** Για ένα επίπεδο γράφημα  $G$  που έχει μια όψη  $f \in F(H)$  τέτοια ώστε  $G[f] \simeq K_3$  ονομάζουμε το περιθώριο  $G[f]$  **τριγωνικό**.

**Ορισμός 1.23.** Έστω ένα επίπεδο γράφημα  $G$  και έστω  $f$  η εξωτερική όψη του  $G$ . Αν  $V(G) = V(G|f)$  τότε καλούμε το  $G$  **εξωεπίπεδο**. Διαισθητικά ένα εξωεπίπεδο γράφημα σχεδιάζεται στο  $\mathbb{R}^2$  ως η ένωση ορισμένων πολυγώνων με κοινά σημεία το πολύ μια κορυφή και όλες οι ακμές περιέχονται εσωτερικά ή στα σύνορα των πολυγώνων.

Όλους του παραπάνω ορισμούς μπορούμε να τους δούμε στο παράδειγμα του Σχήματος 1.11. Οι όψεις του σχήματος  $G$  που έχει μορφή αστεριού είναι οι  $F(G) = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ .





Σχήμα 1.11: Ένα γράφημα με 6 κορυφές και η σχεδίαση του στο  $\mathbb{R}^2$  με τις όψεις του.

Η όψη  $f_6$  αποτελεί την εξωτερική όψη του  $G$ . Σημειώνουμε ότι για κάθε όψη  $f_i$  το περιθώριο  $G[f_i] \simeq C_3$ , δηλαδή είναι τριγωνικό. Επειδή  $V(G) \setminus V(G[f_6]) = \{6\}$  το  $G$  δεν είναι εξωεπίπεδο. Το ίδιο ισχύει και για το  $K_4$  στο Σχήμα 1.10.

**Παρατήρηση 1.3.** Δεν είναι όλα τα γραφήματα επίπεδα. Από αυτά το γράφημα  $K_5$  έχει το μικρότερο πλήθος κορυφών και το  $K_{3,3}$  έχει το μικρότερο πλήθος ακμών. Με άλλα λόγια αν αφαιρέσουμε οποιαδήποτε κορυφή ή ακμή σε ένα από τα  $K_5$  και  $K_{3,3}$  τότε το γράφημα που προκύπτει είναι επίπεδο. Επίσης κάθε επίπεδο γράφημα έχει διαφορετικές επίπεδες εμβαιπίσεις.

Από την προηγούμενη Παρατήρηση 1.3 συμπεραίνουμε ένα σπουδαίο θεώρημα που χαρακτηρίζει πλήρως την οικογένεια των επίπεδων γραφημάτων. Αποδείχθηκε από τον Πολωνό μαθηματικό Kazimierz Kuratowski στο [32] το 1930.

**Θεώρημα 1.1** (Kuratowski). Ένα γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο εάν δεν περιέχει κάποιο υπογράφημα ομοιογραφικό ως προς το  $K_5$  ή  $K_{3,3}$ .

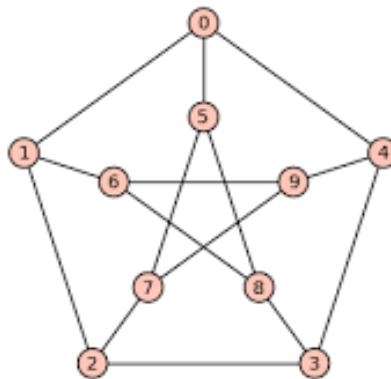
Ακολουθώντας, θα ορίσουμε μία υποκλάση των επίπεδων γραφημάτων, τα χορδικά γραφήματα. Μπορούν να ανιχνευθούν σε γραμμικό χρόνο και πολλά δύσκολα προβλήματα που δεν λύνονται εύκολα σε άλλες κλάσεις, όπως είναι ο χρωματισμός των γραφημάτων, μπορούν να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο όταν η είσοδος είναι ένα χορδικό γράφημα.

**Ορισμός 1.24.** Χορδικά λέγονται τα μη-κατευθυνόμενα γραφήματα που ικανοποιούν την τριγωνική ιδιότητα. Δηλαδή, όλοι οι κύκλοι τεσσάρων και πλέον

κορυφών έχουν μία χορδή η οποία συνδέει δύο μη-διαδοχικούς κόμβους κάθε κύκλου (βλ. γράφημα  $G$  από το Σχήμα 1.9).

Μία τελευταία κλάση γραφημάτων που θα συναντήσουμε σε αυτή την εργασία είναι τα κυβικά (cubic) γραφήματα ή τριασδιάστατα (trivalent) και ταυτόχρονα είναι και 3-κανονικά γραφήματα.

**Ορισμός 1.25.** Τα γραφήματα που έχουν ακριβώς βαθμό τρία λέγονται **κυβικά**. Τα γραφήματα που έχουν το πολύ βαθμό τρία λέγονται **υποκυβικά**.

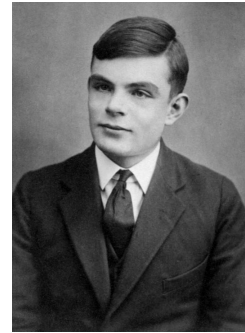


Σχήμα 1.12: Το γράφημα Petersen είναι κυβικό γράφημα. <sup>3</sup>

<sup>3</sup><https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kuratowski.gif>

### 1.3 Θεωρία Πολυπλοκότητας

Η Θεωρία Πολυπλοκότητας αποτελεί βασικό δομικό λίθο της ανάλυσης αλγορίθμων και κεντρικό γνωστικό πεδίο της επιστήμης υπολογιστών. «Πατέρας της επιστήμης των υπολογιστών» θεωρείται ο Άγγλος μαθηματικός Alan Turing, χάρη στην πολύ μεγάλη συνεισφορά του στο πεδίο της θεωρίας υπολογισμού κατά τη δεκαετία του 1930, αλλά και της τεχνητής νοημοσύνης, χάρη στο λεγόμενο τεστ Τούρινγκ, την οποία πρότεινε το 1950: έναν τρόπο για να διαπιστωθεί πειραματικά αν μία μηχανή έχει αυθεντικές γνωστικές ικανότητες και μπορεί να σκεφτεί. Το έργο του από τη δεκαετία του '30 προσέδωσε στην ως τότε άτυπη έννοια του αλγορίθμου μία επίσημη, αυστηρή μαθηματική διατύπωση μέσω της λεγόμενης Μηχανής Τούρινγκ την οποία εφηύρε το 1936.



Σχήμα 1.13: Άλαν Τούρινγκ

Ως συνδυασμό όλων των πιο πάνω, η μελέτη και η εύρεση αποδοτικών αλγορίθμων για την επίλυση διαφόρων υπολογιστικών προβλημάτων τα οποία αναπαριστώνται με κάποιο γράφημα είναι και ο στόχος της θεωρίας γραφημάτων. Χρειάζεται αρχικά να αναφέρουμε την ετυμολογία της λέξης «αλγόριθμος» που προέρχεται από το επώνυμο του Πέρση μαθηματικού Μοχάμεντ ιμπν Μουσά αλ-Χουαρίζμι (*al-Khwarizmi*) όπου τη χρησιμοποίησε στη διατριβή του κατά τον 8ο αιώνα μ.Χ. Όρισε ουσιαστικά ως αλγόριθμο μια σειρά αυστηρά καθορισμένων εντολών με αρχή και τέλος που είναι εκτελέσιμες σε πεπερασμένο χρόνο.

Είναι σημαντικό όμως ο αλγόριθμος να είναι αποδοτικός και ως προς τον χρόνο εκτέλεσης αλλά και ως προς τον χώρο μνήμης. Θα εστιάσουμε πιο πολύ στην αποδοτικότητα ως προς τον χρόνο εκτέλεσης, διότι θέλουμε οι αλγόριθμοι να εκτελούνται γρήγορα. Εδώ χρειάζεται να ορίσουμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου.

**Ορισμός 1.26.** Η υπολογιστική πολυπλοκότητα ή ο χρόνος εκτέλεσης μιας  $M$  ντετερμινιστικής μηχανής Turing είναι η συνάρτηση  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  όπου  $f(n)$  είναι το μέγιστο πλήθος βημάτων που είναι δυνατόν να πραγματοποιήσει η  $M$  όταν δέχεται για είσοδο ένα μέγεθος  $n$ .

Άρα ο χρόνος εκτέλεσης ενός αλγορίθμου εξαρτάται από τον αριθμό των επαναλήψεων του και από το μέγεθος εισόδου. Σύμφωνα με την ασυμπτωτική

ανάλυση για τον υπολογισμό της υπολογιστικής πολυπλοκότητας ο πιο γρήγορος χρόνος είναι ο πολυωνυμικός (polynomial) για κάθε μέγεθος της εισόδου της τάξης  $O(n^c)$  για κάποιο  $c$ . Στον Πίνακα 1.1 μπορούμε να δούμε διάφορες μορφές χρόνων τους οποίους χρειάζονται οι αλγόριθμοι για να εκτελεστούν. Οπότε μπορούμε να πούμε ότι ένας αλγόριθμος είναι αποδοτικός εάν έχει **πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης**.

$O(1)$	constant time
$O(\log n)$	logarithmic time
$O(n)$	linear time
$O(n \log n)$	linearithmic time
$O(n^2)$	quadratic time
$O(n^c)$	polynomial time
$O(c^n)$	exponential time
$O(n!)$	factorial time
$O(\infty)$	infinite time

Πίνακας 1.1: Τάξεις πιθανών χρόνων εκτέλεσης αλγορίθμων.

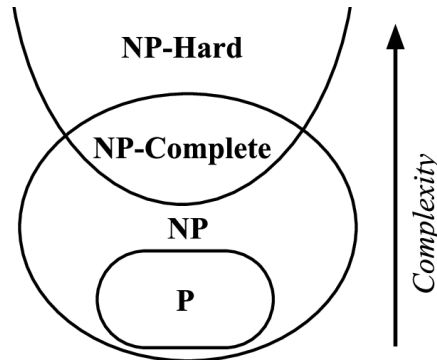
### 1.3.1 Κλάσεις πολυπλοκότητας

Προκειμένου να διαχωρίσουμε τα υπολογιστικά προβλήματα που έχουν λύση ή που λύνονται γρήγορα μέσω αλγορίθμων θα ορίσουμε παρακάτω μερικές από τις πιο γνωστές κλάσεις πολυπλοκότητας όπως φαίνονται κατανομημένες ιεραρχικά στο Σχήμα 1.14 . Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την πολυπλοκότητα και τις πολλές κλάσεις στις οποίες κατανέμονται τα προβλήματα μπορεί ο αναγνώστης να ανατρέξει στο [1].

**Ορισμός 1.27.** Ένα πρόβλημα λέμε ότι ανήκει στην κλάση  $\mathcal{P}$  (πολυωνυμική) όταν υπάρχει ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που να το επιλύει.

**Ορισμός 1.28.** Η κλάση των προβλημάτων που μπορούν να "επιβεβαιωθούν" σε πολυωνυμικό χρόνο ονομάζεται κλάση  $\mathcal{NP}$  (μη-ντετερμινιστική).

Πολλές φορές όταν δεν γνωρίζουμε πως να λύσουμε κάποιο πρόβλημα ή σε ποια κλάση ανήκει είναι δυνατό να μετατρέψουμε ένα πρόβλημα σε ένα άλλο με τη χρήση μιας πολυωνυμικής αναγωγής. Μπορούμε να πούμε ότι ένα πρόβλημα  $X$  **ανάγεται πολυωνυμικά** σε ένα άλλο πρόβλημα  $Y$  (συμβολισμός  $X \leq_p Y$ ) αν κάθε στιγμιότυπο του  $X$  μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας α) πολυωνυμικό



Σχήμα 1.14: Κλάσεις Πολυπλοκότητας [41].

πλήθος υπολογιστικών βημάτων και β) πολυωνυμικό πλήθος επαναλήψεων της τεχνικής που επιλύει το  $\Upsilon$ . Μια διαφορετική διατύπωση θα ήταν ότι "το πρόβλημα  $\Upsilon$  είναι τουλάχιστον εξίσου δύσκολο με το πρόβλημα  $X$ ". Στη Θεωρία Πολυπλοκότητας οι αναγωγές είναι πολύ χρήσιμες εξαιτίας του ακόλουθου θεωρήματος για την απόδειξη του οποίου μπορεί ο αναγνώστης να ανατρέξει στο [28].

**Θεώρημα 1.2.** Υποθέτουμε ότι  $X \leq_p \Upsilon$ . Αν το  $\Upsilon$  μπορεί να επιλυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο, τότε το  $X$  μπορεί να επιλυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.

Μια άλλη γνωστή κλάση προβλημάτων είναι τα  $\mathcal{NP}$ -δύσκολα ( $\mathcal{NP}$ -hard) προβλήματα για τα οποία υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή από ένα οποιοδήποτε  $\mathcal{NP}$  πρόβλημα. Ακόμη, ένα πρόβλημα λέμε πως ανήκει στην κλάση των  $\mathcal{NP}$ -πλήρων ( $\mathcal{NP}$ -complete) προβλημάτων εάν είναι και  $\mathcal{NP}$  και  $\mathcal{NP}$ -δύσκολο.

### Παραμετροποιημένη πολυπλοκότητα

Μέχρι στιγμής έχουμε αναφερθεί στα Προβλήματα Απόφασης, αυτά δηλαδή για τα οποία η απάντηση του αλγορίθμου θα είναι "ΝΑΙ" ή "ΟΧΙ". Ωστόσο μπορούμε να τα αναγάγουμε σε Προβλήματα Αναζήτησης προσθέτοντας απλά διάφορες παραμέτρους στην είσοδο έτσι ώστε ο χρόνος εκτέλεσης τους να μην εξαρτάται μόνο από το μέγεθος της εισόδου αλλά από μια συνάρτηση που να συνδυάζει και το μέγεθος των παραμέτρων. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε ακόμα δύο κλάσεις πολυπλοκότητας που μας δείχνουν ποια προβλήματα είναι πιο εύκολο να επιλυθούν όταν περιλαμβάνουν κι άλλες παραμέτρους στην είσοδο.

**Ορισμός 1.29.** Ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα περιγράφεται από μια τυπική γλώσσα  $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}^*$ , που εξαρτάται από το  $\Sigma$ , ένα πεπερασμένο

αλφάβητο τιμών εισόδου  $x$  και από μία ή περισσότερες παραμέτρους  $k$  με μέγεθος ουσιαστικά μικρότερο από το μέγεθος  $n = |x|$ .

**Ορισμός 1.30.** Ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα  $\mathcal{L}$  ονομάζεται **Ευεπίλυτο Σταθερής Παραμέτρου (Fixed Parameter Tractable ή FPT)** αν υπάρχει αλγόριθμος  $\mathcal{A}$ , που να αποφασίζει ορθά για ένα στιγμιότυπο  $(x, k) \in \mathcal{L}$  σε χρόνο  $f(k) \cdot |x|^{O(1)}$ , όπου  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  είναι μια υπολογίσιμη συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από την παράμετρο  $k$ . Ένας τέτοιος  $\mathcal{A}$  ονομάζεται **σταθερής-παραμέτρου αλγόριθμος (fixed-parameter algorithm)** και θα γράφουμε ότι είναι ένας **FPT-αλγόριθμος**. Η κλάση πολυπλοκότητας όλων των ευεπίλυτων σταθερής-παραμέτρου αλγορίθμων καλείται **FPT**.

Αυτό που μας ενδιαφέρει δηλαδή είναι να αποφύγουμε ένα αλγόριθμο όπου ο χρόνος εκτέλεσης του θα έχει την παράμετρο στον εκθέτη του  $n$ , γιατί τότε το πρόβλημα θα επιλύεται εκθετικά, κάτι το οποίο δεν είναι επιθυμητό. Κι αν καταφέρουμε να βρούμε μια συνάρτηση που να εξαρτάται μόνο από την παράμετρο και η συνάρτηση σχετικά με το  $n$  να είναι πολυωνυμική ή γραμμική τότε μπορούμε πολύ πιο εύκολα να λύσουμε το πρόβλημα.

Τώρα μπορούμε να περιγράψουμε τον ορισμό της παραμετροποιημένης αναγωγής που σχετίζεται άμεσα με την κλάση των FPT προβλημάτων.

**Ορισμός 1.31.** Η παραμετροποιημένη αναγωγή από ένα πρόβλημα  $P$  σε ένα πρόβλημα  $Q$  μπορεί να χαρακτηριστεί ως μία συνάρτηση  $\phi$  με τις εξής ιδιότητες:

- η  $\phi(x)$  μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο  $f(k) \cdot |x|^{O(1)}$ , όπου  $k$  είναι η παράμετρος για το  $x$ ,
- η  $\phi(x)$  είναι ένα NAI-στιγμιότυπο του  $Q$  αν και μόνο εάν το  $x$  είναι ένα NAI-στιγμιότυπο του  $P$ ,
- αν  $k$  είναι η παράμετρος για το  $x$  και  $k'$  η παράμετρος για τη  $\phi(x)$ , τότε  $k' \leq g(k)$  για κάποια συνάρτηση  $g$ .

Παράδειγμα: Η μετατροπή ενός στιγμιότυπου  $(G, k)$  του INDEPENDENT SET σε ένα στιγμιότυπο  $(\overline{G}, k)$  του προβλήματος CLIQUE είναι μία παραμετροποιημένη αναγωγή.

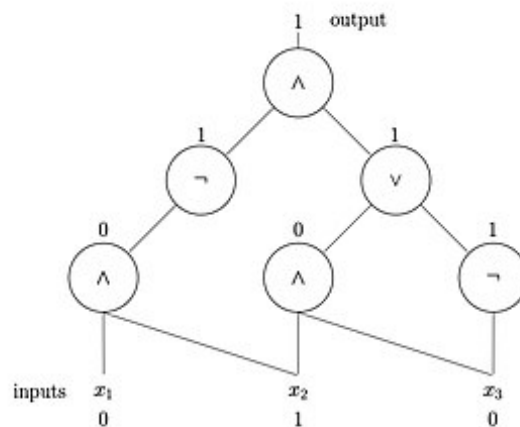
**Παρατήρηση 1.4.** Αν μπορεί να γίνει παραμετροποιημένη αναγωγή από ένα πρόβλημα  $P$  σε ένα πρόβλημα  $Q$  και το  $Q$  είναι FPT, τότε και το  $P$  είναι FPT.

Ακολούθως, θα περιγράψουμε το σύνολο υπολογιστικών κλάσεων πολυπλοκότητας **W hierarchy**. Συγκεκριμένα θα συναντήσουμε στα επόμενα κεφάλαια την κλάση των  $W[1]$ -πλήρων προβλημάτων όπως είναι για παράδειγμα το πρόβλημα INDEPENDENT SET. Πρώτα όμως πρέπει να εξηγήσουμε μερικές έννοιες για το πρόβλημα CIRCUIT SATISFIABILITY. Ένα **Boolean circuit** (κύκλωμα) είναι ένα μαθηματικό μοντέλο για συνδυαστικά ψηφιακά κυκλώματα λογικής. Αποτελείται από κόμβους μεταβλητών εισόδου, κόμβους σύζευξης ( $\wedge$ ), διάζευξης ( $\vee$ ), άρνησης ( $\neg$ ) και ένα κόμβο εξόδου (βλ. Σχήμα 1.15 ).

#### CIRCUIT SATISFIABILITY

**Είσοδος:** Ένα Boolean κύκλωμα  $C$ .

**Στόχος:** Να προσδιοριστεί εάν υπάρχει ανάθεση αληθοτιμών στις μεταβλητές του  $C$  έτσι ώστε η έξοδος να είναι αληθής.



Σχήμα 1.15: Ένα κύκλωμα Boolean βάθους 3 με δύο ψευδείς μεταβλητές και μία αληθή στην είσοδο που δίνουν αληθή έξοδο. <sup>4</sup>

#### WEIGHTED CIRCUIT SATISFIABILITY

**Είσοδος:** Ένα Boolean κύκλωμα  $C$  και ένα ακέραιο  $k$ .

**Στόχος:** Να προσδιοριστεί εάν υπάρχει ανάθεση αληθοτιμών βάρους  $k$  (αληθών μεταβλητών) έτσι ώστε η έξοδος να είναι αληθής.

<sup>4</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Boolean\\_circuit](https://en.wikipedia.org/wiki/Boolean_circuit)

Έστω  $C[t, d]$  το σύνολο όλων των κυκλωμάτων με weft το πολύ  $t$  και βάθος (depth) το πολύ  $d$ . Η κυριολεκτική χρήση που έχει το weft (υφάδι) στα υφάσματα βλέπουμε να μεταφέρεται στα Boolean κυκλώματα ως ο μέγιστος αριθμός των κόμβων σε οποιοδήποτε μονοπάτι από ένα κόμβο εισόδου μέχρι τον κόμβο εξόδου.

**Ορισμός 1.32.** Ένα πρόβλημα  $P$  ανήκει στην κλάση  $W[t]$  αν υπάρχει μία σταθερά  $d$  και μία παραμετροποιημένη αναγωγή από το  $P$  στο WEIGHTED CIRCUIT SATISFIABILITY του  $C[t, d]$ .

**Σημείωση:** Αν κάθε  $W[1]$ -πλήρες πρόβλημα είναι FPT, τότε  $FPT = W[1]$  και κάθε πρόβλημα  $W[1]$  είναι FPT.

## 1.4 Αλγοριθμικές τεχνικές

Αφού είδαμε σε ποιες κλάσεις μπορούμε να χωρίσουμε τα υπολογιστικά προβλήματα ας δούμε μερικές βασικές και θεμελιώδεις τεχνικές που μας βοηθάνε στην αλγοριθμική τους επίλυση. Τέτοιες τεχνικές εφαρμόζονται πάντα πρώτες σε περίπτωση που εμφανιστεί κάποιο εμπόδιο στην επίλυση τους πριν χρησιμοποιηθούν πιο προχωρημένες τεχνικές. Οι τεχνικές που θα παρουσιαστούν σε αυτή τη μελέτη είναι οι εξής:

**Δυναμικός Προγραμματισμός:** Θεμέλιο του δυναμικού προγραμματισμού αποτελεί η αρχή βελτιστοποίησης. Είναι μία μέθοδος που είναι εφαρμόσιμη όταν τα υποπροβλήματα που υπάρχουν δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Ένας αλγόριθμος που είναι προϊόν του δυναμικού προγραμματισμού, επιλύει μία φορά κάθε υποπρόβλημα και αποθηκεύει αυτή τη λύση σε έναν πίνακα, στον οποίο θα καταφύγει κάθε φορά που συναντά το συγκεκριμένο πρόβλημα.

**Διακλάδωση και Περιορισμός:** Αποτελεί μία γενική αλγοριθμική προσέγγιση για επίλυση συνδυαστικών προβλημάτων βελτιστοποίησης. Ένας τέτοιου τύπου αλγόριθμος εκτελεί μία συστηματική απαρίθμηση όλων των υποψηφίων λύσεων εκτελώντας μία αναζήτηση στον χώρο των λύσεων. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι οι υποψήφιες λύσεις αναπαρίστανται με ένα δέντρο, όπου η ρίζα του αντιστοιχεί σε όλες τις δυνατές λύσεις. Ο αλγόριθμος εξερευνά αυτό το δέντρο με τέτοιο τρόπο, ώστε για κάθε διακλάδωση γίνεται ένας έλεγχος σε σχέση με ένα κάτω ή/και άνω φράγμα που αφορά τη βέλτιστη λύση και αν βρεθεί ότι σε αυτή τη διακλάδωση δεν υπάρχει λύση που να μπορεί να οδηγήσει στη βέλτιστη, τότε δεν συνεχίζουμε βαθύτερα σε αυτό τον κλάδο αλλά προχωράμε σε έναν άλλο. Το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή αποτελεί ένα κλασικό παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου.

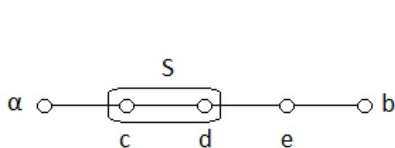


## 1.5 Ελαχιστοτικοί διαχωριστές

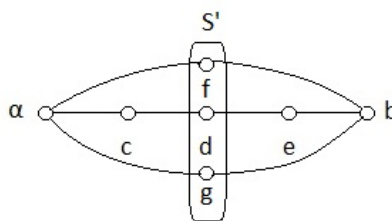
Καταληκτικά, θα παρουσιάσουμε σε αυτό το κεφάλαιο την έννοια των ελαχιστοτικών διαχωριστών που είναι αρκετά χρήσιμη στη Θεωρία Γραφημάτων. Ειδικότερα, πολλά προβλήματα που είναι  $\mathcal{NP}$ -δύσκολα σε διάφορα γραφήματα είναι γνωστό ότι γίνονται επιλύσιμα σε πολυωνυμικό χρόνο για κλάσεις γραφημάτων που έχουν πολυωνυμικά φραγμένο τον αριθμό των ελαχιστοτικών τους διαχωριστών. Σε αυτά ανήκουν τα προβλήματα TREEWIDTH, MINIMUM FILL-IN [11], MAXIMUM INDEPENDENT SET και FEEDBACK VERTEX [19] και άλλα πολλά. Αρκετές είναι οι κλάσεις γραφημάτων με αυτή την ιδιότητα, στις οποίες συμπεριλαμβάνονται τα χορδικά γραφήματα, τα μεταθετικά, τα circular-arc και τα κυκλικά γραφήματα τα οποία όμως δεν θα εξετάσουμε σε αυτή τη μελέτη. Επιπλέον, μία κλάση γραφημάτων έχει πολυωνυμικά φραγμένο αριθμό ελαχιστοτικών διαχωριστών αν και μόνο εάν έχει πολυωνυμικά φραγμένο αριθμό πιθανών μεγιστοτικών κλικών [11]. Θα δώσουμε τώρα δύο βασικούς ορισμούς όσον αφορά τους διαχωριστές κορυφών και στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε πώς συνδέονται με την επίλυση σε πολυωνυμικό χρόνο σημαντικών προβλημάτων.

**Ορισμός 1.33.** Έστω ένα γράφημα  $G = (V, E)$  και  $a, b \in V(G)$  διακριτές κορυφές. Λέμε ότι ένα  $S \subseteq V(G) \setminus \{a, b\}$  είναι ένας  **$a, b$ -διαχωριστής** του  $G$  αν δεν υπάρχει κανένα μονοπάτι μεταξύ των  $a$  και  $b$  κορυφών στο γράφημα που προκύπτει από το  $G$  όταν διαγράψουμε κάθε κορυφή του συνόλου  $S$ .

**Ορισμός 1.34.** Ένας **ελαχιστοτικός διαχωριστής** (*minimal separator*) του  $G$  είναι ένας ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής για κάποιες κορυφές  $a, b \in V(G)$ , αν δεν υπάρχει άλλος  $a, b$ -διαχωριστής που να είναι κατάλληλο υποσύνολο του  $S$ .



(α') Ένας  $a, b$ -διαχωριστής  $S$ , όχι όμως ελαχιστοτικός.



(β') Ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής  $S'$ .

Σχήμα 1.16: Στο σχήμα (α') κάθε μία από τις κορυφές  $c$  ή  $d$  ή  $e$  αποτελεί ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή. Στο σχήμα (β') ο  $S'$  είναι ελαχιστοτικός διότι είναι το μικρότερο σύνολο κορυφών που με τη διαγραφή του χάνεται κάθε μονοπάτι από την κορυφή  $a$  προς την  $b$ .

Έστω  $S$  ένα σύνολο κορυφών στο  $G$ . Μία **πλήρης συνιστώσα που σχετίζεται με το  $S$**  είναι μία συνιστώσα  $C$  του  $G-S$  με  $N_G(C) = S$ . Το ακόλουθο λήμμα δηλώνει μία ιδιότητα για το πότε ένα σύνολο κορυφών αποτελεί ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή ή όχι.

**Λήμμα 1.2** ([25]). *Δεδομένου ενός γραφήματος  $G = (V, E)$ , ένα υποσύνολο  $S \subseteq V$  είναι ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής αν και μόνο εάν υπάρχουν τουλάχιστον δύο πλήρεις συνιστώσες  $C_1$  και  $C_2$  που σχετίζονται με το  $S$ . Εξάλλου, αν το  $S$  είναι ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής, τότε είναι ένας ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής για κάθε ζεύγος  $a \in C_1$  και  $b \in C_2$ .*

*Απόδειξη.* Έστω  $S$  ένας ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής και έστω  $C_1$  και  $C_2$  οι συνεκτικές συνιστώσες που περιέχουν την  $a$  και την  $b$  αντίστοιχα. Έστω  $x \in S$ . Αφού το  $S$  είναι ένας ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής σημαίνει πως υπάρχει ένα μονοπάτι μεταξύ των  $a$  και  $b$  που περνάει μόνο από την κορυφή  $x$ . Έτσι η  $x$  έχει ένα γείτονα και στις δύο συνιστώσες  $C_1$  και  $C_2$ .

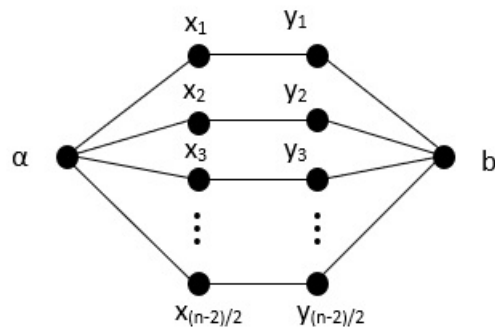
Αντίθετα, ας υποθέσουμε ότι το  $S$  είναι ένας διαχωριστής και οι  $C_1$  και  $C_2$  είναι δύο συνεκτικές συνιστώσες έτσι ώστε κάθε κορυφή του  $S$  να έχει ένα γείτονα σε κάθε συνιστώσα. Έστω  $a \in C_1$  και  $b \in C_2$ . Τότε το  $S$  είναι ένας ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής, διότι για κάποια κορυφή  $x \in S$  υπάρχει ένα μονοπάτι που συνδέει τις  $a$  και  $b$  χωρίς να περνάει από άλλη κορυφή του  $S \setminus \{x\}$ .  $\square$

**Πόρισμα 1.1** ([39]). *Έστω  $S$  ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής στο  $G$ . Τότε για κάθε  $v \in S$  το σύνολο  $S \setminus \{v\}$  είναι ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής στο γράφημα  $G - v$ .*

*Απόδειξη.* Έστω το γράφημα  $G' = G - v$  και το σύνολο  $S' = S \setminus \{v\}$ . Αφού το  $S$  είναι ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής του  $G$ , θα υπάρχουν δύο πλήρεις συνιστώσες που σχετίζονται με το  $S$ ,  $C_1$  και  $C_2$ , στο  $G - S$ . Αφού ισχύει πως  $G - S = G' - S'$  και  $S' \subseteq S$ , ακολουθεί ότι οι  $C_1$  και  $C_2$  είναι επίσης πλήρεις συνιστώσες που σχετίζονται με το  $S'$  στο  $G' - S'$ . Έτσι, δείχνουμε πως το  $S'$  είναι ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής στο  $G'$ .  $\square$

Στα κεφάλαια που θα ακολουθήσουν θα μελετήσουμε συγκεκριμένες κλάσεις γραφημάτων οι οποίες έχουν εκθετικό πλήθος ελαχιστοτικών διαχωριστών. Ας δούμε όμως πρώτα εδώ ένα απλό παράδειγμα. Θεωρούμε ένα γράφημα που αποτελείται από δύο μη-γειτονικές κορυφές  $a$  και  $b$  και ένα σύνολο από  $\frac{n-2}{2}$  (εσωτερικά) διακριτά μονοπάτια μεγέθους 3 μεταξύ τους (βλ. Σχήμα 1.17). Για να βρούμε το πλήθος των ελαχιστοτικών διαχωριστών σε αυτό το γράφημα, μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε με ένα δυαδικό μονοδιάστατο πίνακα  $A$  με  $\frac{n-2}{2}$  στοιχεία όπου

κάθε στοιχείο  $A[i]$  αντιπροσωπεύει είτε την κορυφή  $x_i$  (με 0) είτε την κορυφή  $y_i$  (με 1). Κάθε δυαδική συμβολοσειρά που προκύπτει από τον πίνακα  $A$  αντιστοιχεί σε έναν ελαχιστοτικό  $a, b$ -διαχωριστή. Επομένως, υπάρχουν  $2^{\frac{n-2}{2}}$  διαφορετικοί ελαχιστοτικοί  $a, b$ -διαχωριστές.



Σχήμα 1.17: Ένα παράδειγμα με εκθετικό σε πλήθος ελαχιστοτικούς διαχωριστές.

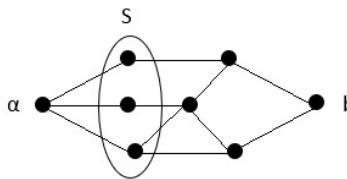


# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗ ΕΛΑΧΙΣΤΟΤΙΚΩΝ ΔΙΑΧΩΡΙΣΤΩΝ

Το πρώτο ερώτημα που θα διερευνήσουμε σε αυτή την εργασία είναι το πώς μπορούμε να απαριθμήσουμε όλους τους ελαχιστοτικούς διαχωριστές κορυφών οποιουδήποτε γραφήματος. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα με μια μέθοδο που εισήγαγαν το 1998 οι Kloks και Kratsch στο [30]. Ένας πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος που απαριθμεί όλους τους ελαχιστοτικούς διαχωριστές, τόσο εκθετικού όσο και πολυωνυμικού πλήθους (Θεώρημα 2.4) παρουσιάζεται στο τέλος του κεφαλαίου.

**Ορισμός 2.1.** Έστω  $a$  και  $b$  δύο μη-γειτονικές κορυφές. Αν  $S$  είναι ένας ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής που περιέχει μόνο γείτονες της  $a$  τότε το  $S$  λέγεται **διαχωριστής κοντά στην  $a$** .



Σχήμα 2.1: Ένας ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής  $S$  κοντά στην κορυφή  $a$ .

**Λήμμα 2.1.** Αν έχουμε  $a$  και  $b$  δύο μη-γειτονικές κορυφές τότε μπορούμε να βρούμε ακριβώς ένα ελαχιστοτικό  $a, b$ -διαχωριστή κοντά στην  $a$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $S$  ένας ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής κοντά στην  $a$ . Για κάθε κορυφή στο  $S$  υπάρχει ένα μονοπάτι προς την  $b$  το οποίο δεν χρησιμοποιεί κανένα άλλο γείτονα της  $a$ , αφού ο  $S$  είναι ελαχιστοτικός. Απεναντίας, αν  $x$  είναι ένας

## Κεφάλαιο 2

γείτονας της  $a$  έτσι ώστε να υπάρχει ένα μονοπάτι προς την  $b$  χωρίς κανένα άλλο γείτονα της  $a$ , τότε η  $x$  πρέπει να είναι ένα στοιχείο του  $S$ , αλλιώς υπάρχει μονοπάτι μεταξύ της  $x$  και της  $b$  το οποίο αποφεύγει το  $S$ . Καταλήγουμε σε άτοπο αφού η  $x$  είναι στη συνιστώσα του  $G[V \setminus S]$  που περιέχει την  $a$ .  $\square$

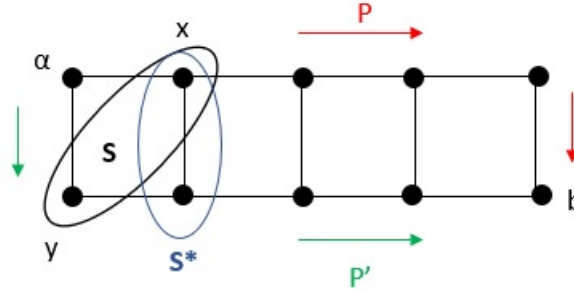
Αρχικά, αναφέρουμε πως για να βρούμε ένα ελάχιστο διαχωριστή και συνεπώς ένα ελαχιστοτικό  $a, b$ -διαχωριστή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα γνωστό αλγόριθμο μέγιστων ροών όπως είναι αυτός των Ford και Fulkerson που δημοσιεύτηκε το 1956 [20]. Πρόκειται για μία συνάρτηση (ροή)  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $G(V, E)$  την οποία θέλουμε να τη μεγιστοποιήσουμε. Η ιδέα πίσω από τον αλγόριθμο είναι η επαναλαμβανόμενη εύρεση βέλτιστης διαδρομής από μία κορυφή πηγή  $s$  προς ένα υποδοχέα  $t$  μέχρι να μην υπάρχει διαδρομή. Η βέλτιστη διαδρομή καθορίζεται από το ελάχιστο σύνολο μη-αρνητικής χωρητικότητας (βάρος) που κουβαλάει κάθε ακμή. Ο αλγόριθμος αυτός εκτελείται σε χρόνο  $O(|V||E|^2)$ . Ωστόσο το πρόβλημα max-flow/min cut έχει μελετηθεί εκτενώς και έχουν βρεθεί καλύτεροι αλγόριθμοι από τότε. Ο γρηγορότερος αλγόριθμος επί του παρόντος εκτελείται κατά προσέγγιση σε χρόνο  $O(\min(|E|^{3/2}, |V|^{2/3}|E|))$ , αγνοώντας τους λογαριθμικούς όρους κι έχει βρεθεί από τους Goldberg και Rao [22].

Θα δούμε τώρα πως μπορεί εύκολα να υπολογιστεί ένας νέος ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής. Θεωρούμε  $S = N(a)$ . Έστω  $S' \subseteq S$  το σύνολο εκείνων των κορυφών του  $S$  που έχουν τουλάχιστον ένα γείτονα στη συνιστώσα  $C_b$ . Από το Λήμμα 1.2 το  $S'$  είναι ένας ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής και αφού περιέχει μόνο γείτονες της  $a$ , είναι κοντά στην  $a$ .

**Λήμμα 2.2.** Έστω  $S$  ένας ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής και έστω  $C_a$  και  $C_b$  οι συνεκτικές συνιστώσες που περιέχουν την  $a$  και την  $b$  αντίστοιχα. Έστω  $S^* \neq S$  ένας άλλος ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής. Τότε ισχύει  $S^* \subset S \cup C_b$ .

Απόδειξη. Έστω  $S^*$  είναι ένας ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής  $S^* \subset C_a \cup C_b \cup S$ . Υποθέτουμε ότι το σύνολο  $S^*$  έχει μια κορυφή  $x \in C_a$ . Το σύνολο  $S^* \setminus \{x\}$  δεν διαχωρίζει τις  $a$  και  $b$ , έτσι υπάρχει ένα μονοπάτι  $P$  μεταξύ των  $a$  και  $b$  που περνάει μέσω της  $x$  αλλά όχι κάποιας άλλης κορυφής του  $S^*$ . Αφού το  $S$  είναι ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής κοντά στην  $a$ , το  $P$  θα περνάει μέσω μίας κορυφής  $y \in S$  που γειτονεύει με την  $a$ . Έτσι υπάρχει ένα μονοπάτι  $P' \subset P$  μεταξύ των  $a$  και  $b$  που δεν περιέχει την  $x$ . Άτοπο, αφού το  $P'$  δεν περιέχει κάποια κορυφή του  $S^*$  (βλ. Σχήμα 2.2).  $\square$

Στις επόμενες δύο ενότητες θα δείξουμε πως μπορούμε να λάβουμε ένα νέο ελαχιστοτικό  $a, b$ -διαχωριστή από ένα δεδομένο ελαχιστοτικό ζεύγος όπως θα



Σχήμα 2.2: Ένας ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής  $S^* \subset S \cup C_b$  και τα μονοπάτια  $P$  με κόκκινο και  $P'$  με πράσινο που περνάνε από τις κορυφές του  $S^*$  σύμφωνα με το Λήμμα 2.2 .

το ονομάσουμε. Ένα ελαχιστοτικό ζεύγος είναι κατά μία έννοια το μικρότερο βήμα που χρειαζόμαστε για να πάμε από τον έναν ελαχιστοτικό  $a, b$ -διαχωριστή σε έναν άλλο. Η κύρια δυσκολία είναι να αποδείξουμε ότι πράγματι επιτυγχάνουμε να βρούμε όλους τους ελαχιστοτικούς διαχωριστές χρησιμοποιώντας μόνο μικρά βήματα.

## 2.1 Κατάλληλα ζεύγη

Έστω  $G = (V, E)$  ένα γράφημα και έστω  $a$  και  $b$  δύο μη-γειτονικές κορυφές του  $G$ . Έστω  $S$  ένας ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής και έστω  $C_a$  και  $C_b$  οι συνεκτικές συνιστώσες που περιέχουν την  $a$  και την  $b$  αντίστοιχα.

**Ορισμός 2.2.** Έστω  $\Delta \subseteq C_a \setminus \{a\}$  και έστω  $C'_a$  η συνεκτική συνιστώσα του  $G[C_a \setminus \Delta]$  που περιέχει την  $a$ . Έστω  $N \subseteq S$  το σύνολο κορυφών του  $S$  που δεν γειτονεύουν με τις κορυφές της  $C'_a$ . Το ζεύγος  $(\Delta, N)$  λέγεται **κατάλληλο για το  $S$**  εάν ισχύουν τα εξής:

1.  $N \neq \emptyset$ .
2. Κάθε  $\delta \in \Delta$  έχει τουλάχιστον ένα γείτονα στη  $C'_a$ .
3. Κάθε  $\delta \in \Delta$  είτε έχει ένα γείτονα στο  $N$  είτε υπάρχει μια κορυφή  $x \in N$  και μια συνεκτική συνιστώσα  $D$  του  $G[C_a \setminus \Delta]$  έτσι ώστε και οι δύο κορυφές,  $x$  και  $\delta$ , να έχουν τουλάχιστον ένα γείτονα στη  $D$ .

**Λήμμα 2.3.** *Αν το  $S$  είναι ένας διαχωριστής κοντά στην  $a$  τότε δεν υπάρχει κανένα κατάλληλο ζεύγος.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε ένα κατάλληλο ζεύγος  $(\Delta, N)$ , συνεπώς  $\Delta \subseteq C_a \setminus \{a\}$ . Έστω  $C'_a$  η συνεκτική συνιστώσα του  $G[C_a \setminus \Delta]$  που περιέχει την  $a$ . Το σύνολο  $N$  ορίζεται ως το υποσύνολο κορυφών του  $S$  που δεν περιέχουν κάποιο γείτονα της  $C'_a$ . Τότε  $N = \emptyset$  αφού το  $S$  περιέχει μόνο γείτονες της  $a$ . Άτοπο, διότι  $N \neq \emptyset$  εξ ορισμού.  $\square$

Στη συνέχεια, θα δούμε πως μπορεί να προκύψει ένας νέος διαχωριστής από ένα κατάλληλο ζεύγος. Στο Θεώρημα 2.2 θα δείξουμε ότι κάθε ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής μπορεί να προκύψει από ένα κατάλληλο ζεύγος για κάποιο διαχωριστή κοντά στην κορυφή  $b$ . Ενώ στην επόμενη ενότητα θα δούμε πως μόνο για ένα πιο αυστηρό τύπο κατάλληλων ζευγών, που καλούνται ελαχιστοτικά ζεύγη, μπορεί να γίνει αυτό.

**Θεώρημα 2.1** ([30]). *Έστω  $(\Delta, N)$  ένα κατάλληλο ζεύγος. Τότε το  $S^* = (S \cup \Delta) \setminus N$  θα είναι ένας ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής.*

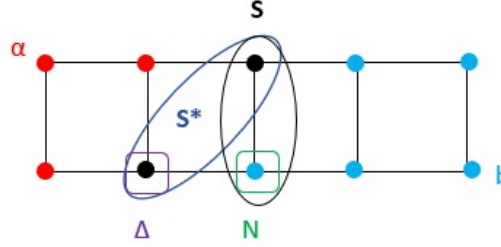
*Απόδειξη.* Έστω  $C'_a$  η συνεκτική συνιστώσα του  $G[C_a \setminus \Delta]$  που περιέχει την  $a$ . Προφανώς το  $S^*$  διαχωρίζει την  $a$  από την  $b$ , αφού οι κορυφές του  $N$  δεν έχουν γείτονες στη  $C'_a$ . Έστω  $C'_b$  η συνεκτική συνιστώσα του  $G[V \setminus S^*]$  που περιέχει την  $b$ . Παρατηρούμε ότι  $C_b \subset C'_b$  και αφού κάθε κορυφή του  $N$  έχει ένα γείτονα στη  $C_b$ , έχουμε ότι  $N \subset C'_b$ .

Κάθε κορυφή του  $S^*$  έχει τουλάχιστον ένα γείτονα στη  $C'_a$  από τον ορισμό των κατάλληλων ζευγών και κάθε κορυφή του  $S^* \setminus \Delta$  έχει τουλάχιστον ένα γείτονα στο  $C'_b$ , αφού έχει τουλάχιστον ένα γείτονα στη  $C_b$ . Μένει να δείξουμε ότι κάθε κορυφή του  $\Delta$  έχει ένα γείτονα στη  $C'_b$ . Έστω  $\delta \in \Delta$ . Από τον ορισμό, είτε η  $\delta$  έχει ένα γείτονα στο  $N$  (και συνεπώς στη  $C'_b$ ) είτε υπάρχει μια κορυφή  $x \in N$  και μια συνεκτική συνιστώσα  $D$  του  $G[C_a \setminus \Delta]$  έτσι ώστε και οι δύο κορυφές  $\delta$  και  $x$  να έχουν από ένα γείτονα στο  $D$ . Το  $D$  είναι επίσης συνεκτικό στο  $G[V \setminus S^*]$  και αφού η  $x$  έχει ένα γείτονα στο  $D$ , τότε  $D \subset C'_b$ .  $\square$

**Θεώρημα 2.2.** *Θεωρούμε  $S$  ένα διαχωριστή κοντά στην  $b$ . Έστω  $S^* \neq S$  ένας ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής. Υπάρχει ένα κατάλληλο ζεύγος  $(\Delta, N)$  τέτοιο ώστε  $S^* = (S \cup \Delta) \setminus N$ .*

*Απόδειξη.* Έστω  $C_a^*$  και  $C_b^*$  οι συνεκτικές συνιστώσες του  $G[V \setminus S^*]$  που περιέχουν τις κορυφές  $a$  και  $b$  αντίστοιχα. Παρατηρούμε, αρχικά, ότι  $S^* \subset C_a \cup C_b \cup S$ ,



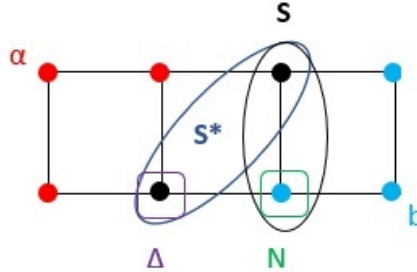


Σχήμα 2.3: Οι ελαχιστοτικοί  $a, b$ -διαχωριστές  $S$  και  $S^*$  με τα σύνολα  $N$  και  $\Delta$  αντίστοιχα που ορίζουν ένα κατάλληλο ζεύγος. Με κόκκινο απεικονίζονται οι κορυφές που ανήκουν στο σύνολο  $C'_a$  και με γαλάζιο εκείνες στο  $C'_b$ .

αφού  $S^*$  είναι ελαχιστοτικός. Αφού το  $S$  είναι κοντά στην  $b$ , από το Λήμμα 2.2,  $S^* \subset S \cup C_a$ . Έστω  $\Delta = S^* \cap C_a$  και  $N = S \setminus S^*$ . Θα δείξουμε ότι το  $(\Delta, N)$  είναι ένα κατάλληλο ζεύγος (βλ. Σχήμα 2.4).

Πρώτα βλέπουμε ότι ισχύει  $N \neq \emptyset$  αφού  $S^* \neq S$  και είναι και οι δύο ελαχιστοτικοί  $a, b$ -διαχωριστές. Έπειτα, δείχνουμε ότι το  $N$  είναι το υποσύνολο κορυφών του  $S$  που δεν έχουν κάποια γειτονική κορυφή στη  $C'_a$ , όπου  $C'_a$  είναι η συνεκτική συνιστώσα του  $G[C_a \setminus \Delta]$  που περιέχει την  $a$ . Ισχυριζόμαστε ότι  $C'_a = C_a^*$ . Αφού  $C'_a$  είναι μια συνεκτική συνιστώσα του  $G[V \setminus (\Delta \cup S)]$  και αφού  $S^* \subset \Delta \cup S$ , έχουμε ότι  $C'_a \subseteq C_a^*$ . Τώρα υποθέτουμε ότι υπάρχει μια κορυφή  $x \in N$  η οποία συνδέεται με την  $y \in C'_a$ . Αφού ο  $S^*$  είναι ελαχιστοτικός, το  $N$  είναι ακριβώς το σύνολο των κορυφών του  $S$  που δεν γειτονεύουν με το  $C'_a$  και κάθε κορυφή του  $\Delta \cup (S \setminus N)$  έχει τουλάχιστον μία γειτονική κορυφή στη  $C'_a$ .

Τέλος, για να αποδείξουμε τον τελευταίο ισχυρισμό του ορισμού παρατηρούμε πρώτα ότι  $N \subset C_b^*$  κι ότι το  $C_b^*$  περιέχει ακριβώς εκείνες τις συνεκτικές συνιστώσες  $D$  του  $G[C_a \setminus \Delta]$  για τις οποίες υπάρχει μια κορυφή  $y \in N$  που έχει ένα γείτονα στις  $D$ . Τώρα έστω  $\delta \in \Delta$ . Αφού  $S^*$  είναι ελαχιστοτικός, η  $\delta$  γειτονεύει με την  $x$  στη  $C_b^*$ . Αφού η  $\delta$  έχει γείτονες μόνο στο  $C_a \cup S$ , η  $x$  πρέπει να ανήκει στο  $N$  ή να είναι στοιχείο μιας συνιστώσας  $D$  του  $G[C_a \setminus \Delta]$ . Στη δεύτερη περίπτωση, πρέπει να υπάρχει ακόμη, μία κορυφή  $y \in N$  που να έχει ένα γείτονα σε κάποια  $D$ .  $\square$



Σχήμα 2.4: Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2 οι κόκκινες κορυφές ανήκουν στη συνιστώσα  $C_a^*$  και οι γαλάζιες στη  $C_b^*$ . Το  $(\Delta, N)$  είναι ένα κατάλληλο ζεύγος έτσι ώστε ο ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής  $S^* = (S \cup \Delta) \setminus N$ .

## 2.2 Ελαχιστοτικά ζεύγη

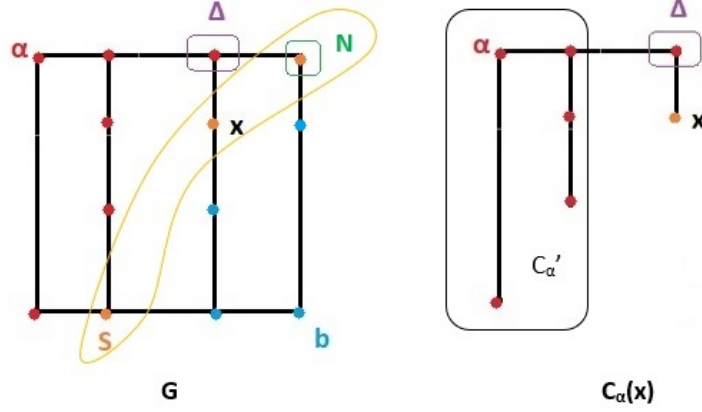
Θεωρούμε ξανά ένα γράφημα  $G = (V, E)$  και δύο μη-γειτονικές κορυφές του  $a$  και  $b$ . Θεωρούμε ένα  $S$  ελαχιστοτικό  $a, b$ -διαχωριστή και έστω  $C_a$  και  $C_b$  οι συνεκτικές συνιστώσες του  $G[V \setminus S]$  που περιέχουν την  $a$  και την  $b$  αντίστοιχα.

**Ορισμός 2.3** ([30]). Έστω  $x \in S$  μη-γειτονική με την κορυφή  $a$ . Έστω  $C_a(x)$  το υπογράφημα που επάγεται από το  $C_a \cup \{x\}$ . Έστω  $\Delta$  ο ελαχιστοτικός  $x, a$ -διαχωριστής στο  $C_a(x)$  κοντά στην  $x$  και έστω  $C'_a$  η συνεκτική συνιστώσα που περιέχει την  $a$ . Επίσης, θεωρούμε το υποσύνολο  $N$  του  $S$  που δεν περιέχει κορυφές που γειτονεύουν με κάποια κορυφή της  $C'_a$ . Το ζεύγος  $(\Delta, N)$  καλείται **ελαχιστοτικό ζεύγος για το  $S$  και την κορυφή  $x$**  (βλ. Σχήμα 2.5).

**Λήμμα 2.4.** Ένα ελαχιστοτικό ζεύγος είναι και κατάλληλο.

*Απόδειξη.* Ελέγχοντας τα κριτήρια του ορισμού των κατάλληλων ζευγών βλέπουμε αρχικά ότι όντως  $N \neq \emptyset$  αφού έχουμε  $x \in N$ . Ύστερα, μιας και το σύνολο  $\Delta$  είναι ένας ελαχιστοτικός  $x, a$ -διαχωριστής στο  $C_a(x)$ , θα έχει αναγκαστικά ένα γείτονα στη  $C'_a$ . Τέλος, αν  $\delta \in \Delta$  τότε η  $\delta$  συνδέεται με την  $x$  μια και το  $\Delta$  είναι κοντά στην  $x$ . Έτσι, κάθε κορυφή του  $\Delta$  συνδέεται με κάποια κορυφή του  $N$ .  $\square$

Έπειτα, θέλουμε να αποδείξουμε ότι μπορούμε να βρούμε κάθε ελαχιστοτικό  $a, b$ -διαχωριστή ξεκινώντας με τον ελαχιστοτικό  $a, b$ -διαχωριστή που είναι κοντά



Σχήμα 2.5: Στο γράφημα  $G$  έχουμε ένα ελαχιστοτικό  $a, b$ -διαχωριστή  $S$  (πορτοκαλί κορυφές) που χωρίζει το γράφημα σε δύο συνεκτικές συνιστώσες  $C_a$  (κόκκινες) και  $C_b$  (γαλάζιες). Βλέπουμε επίσης ένα ελαχιστοτικό ζεύγος  $(\Delta, N)$  για το  $S$  και την  $x$ . Ακόμη, στα δεξιά φαίνεται το υπογράφημα  $C_a(x)$  με τη συνεκτική συνιστώσα  $C'_a$  μιας και το  $\Delta$  είναι ελαχιστοτικός  $x, a$ -διαχωριστής.

στην  $b$  και χρησιμοποιώντας αναδρομικά ελαχιστοτικά ζεύγη. Αυτό μας το αποδεικνύει το επόμενο λήμμα.

**Λήμμα 2.5** (Λήμμα 12 στο [30]). Έστω  $(\Delta, N)$  ένα κατάλληλο ζεύγος για το  $S$ . Έστω  $x \in N$  και έστω  $(\Delta^*, N^*)$  το ελαχιστοτικό ζεύγος για το  $S$  και την  $x$ . Έστω  $S^* = (S \cup \Delta^*) \setminus N^*$ . Ορίζουμε  $\bar{\Delta} = \Delta \setminus \Delta^*$  και  $\bar{N} = (N \setminus N^*) \cup (\Delta^* \setminus \Delta)$ . Θα ισχύουν τα εξής:

1. αν  $\bar{N} = \emptyset$ , τότε  $(S \cup \Delta) \setminus N = S^*$ ,
2. αν  $\bar{N} \neq \emptyset$ , τότε το  $(\bar{\Delta}, \bar{N})$  είναι ένα κατάλληλο ζεύγος για το  $S^*$  και  $(S \cup \Delta) \setminus N = (S^* \cup \bar{\Delta}) \setminus \bar{N}$ .

*Απόδειξη.* Ας ξεκινήσουμε με κάποιες εύκολες παρατηρήσεις. Έστω  $C'_a$  και  $C_a^*$  οι συνεκτικές συνιστώσες που περιέχουν την  $a$  των υπογραφημάτων  $G[C_a \setminus \Delta]$  και  $G[C_a \setminus \Delta^*]$  αντίστοιχα. Θεωρούμε  $\Delta' = N(x) \cap \Delta$ .

- $C'_a \subseteq C_a^*$  αφού  $\Delta^* \not\subseteq C'_a$ .
- $N^* \subseteq N$  αφού  $C'_a \subseteq C_a^*$ .
- $\Delta' \subseteq \Delta^*$  αφού  $N(\Delta') \subseteq C'_a$ .
- $\Delta \setminus \Delta' \subseteq C_a^*$  αφού  $N(\Delta) \subseteq C'_a$ .

- $C'_a$  είναι ακριβώς η συνεκτική συνιστώσα που περιέχει την  $a$  του  $G[C_a^* \setminus (\Delta \setminus \Delta')]$  αφού το  $C_a^* \setminus (\Delta \setminus \Delta')$  περιέχει όλες τις κορυφές του  $C'_a$  όμως όχι κάποια κορυφή του  $\Delta$ .
- Το σύνολο των κορυφών του  $S^*$  που δεν γειτονεύουν με κάποια κορυφή της  $C'_a$  είναι ακριβώς το  $\overline{N}$ , το οποίο αποδεικνύεται εύκολα.

Υποθέτουμε ότι  $\overline{N} = \emptyset$ . Τότε  $\Delta^* \subseteq \Delta$  και  $N = N^*$  (αφού  $N^* \subseteq N$ ). Επίσης, προφανώς θα ισχύει  $\Delta^* = \Delta$ , διότι διαφορετικά το  $S^*$  και το  $(S \cup \Delta) \setminus N$  είναι δύο ελαχιστοτικοί  $a, b$ -διαχωριστές όπου ο ένας θα περιεχόταν στον άλλο, άτοπο. Έτσι προκύπτει ότι  $S^* = (S \cup \Delta) \setminus N$ .

Τώρα υποθέτουμε ότι  $\overline{N} \neq \emptyset$ . Θέλουμε να δείξουμε ότι το  $(\overline{\Delta}, \overline{N})$  είναι ένα κατάλληλο ζεύγος για το  $S^*$ . Παρατηρούμε ότι κάθε κορυφή του  $\overline{\Delta}$  έχει ένα γείτονα στη  $C'_a$ , αφού αυτό ισχύει για κάθε κορυφή του  $\Delta$ .

Έστω  $\delta \in \overline{\Delta}$  και υποθέτουμε ότι η  $\delta$  δεν έχει γείτονες στο  $\overline{N}$ . Αφού γνωρίζουμε ότι  $\delta \in C_a^*$ , δεν θα έχει γείτονες ούτε στο  $N^*$ . Έτσι δεν γειτονεύει ούτε με το  $N$ . Επιπλέον, αφού το  $(\Delta, N)$  είναι ένα κατάλληλο ζεύγος, θα υπάρχει μία κορυφή  $z \in N$  και μία συνεκτική συνιστώσα  $D$  στο  $G[C_a \setminus \Delta]$  έτσι ώστε η  $\delta$  και η  $z$  να έχουν ένα γείτονα στη  $D$ . Υποθέτουμε τώρα ότι για καμία κορυφή του  $\overline{N}$  δεν υπάρχει συνεκτική συνιστώσα του  $G[C_a^* \setminus \overline{\Delta}]$  έτσι ώστε εκείνη η κορυφή και η  $\delta$  να έχουν κάποιο γείτονα σε αυτή τη συνιστώσα.

- $N(\delta) \cap D \subseteq C_a^*$ , διαφορετικά, η  $\delta$  έχει ένα γείτονα στο  $\overline{N}$ , αφού  $\Delta^* \setminus \Delta' \subseteq \overline{N}$ .
- Το  $G[D \setminus \Delta^*]$  είναι συνεκτικό. Αφού διαφορετικά κάθε συνεκτική συνιστώσα έχει μία κορυφή με γείτονα στο  $\Delta^* \setminus \Delta$ , κι έτσι υπάρχει μια συνεκτική συνιστώσα και μια κορυφή στο  $\overline{N}$  η οποία μαζί με την  $\delta$  να έχουν και οι δύο ένα γείτονα σε αυτή τη συνιστώσα.
- Το  $D$  δεν περιέχει κορυφές του  $\Delta^*$  για τον ίδιο λόγο.

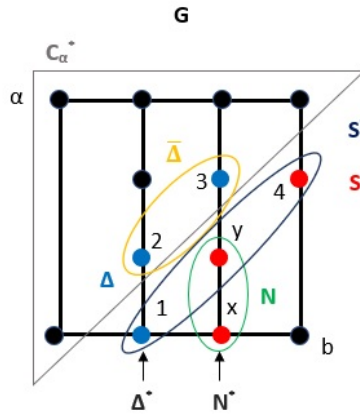
Αυτό μας δείχνει ότι  $D \subseteq C_a^*$ . Αν  $z \in N^*$  τότε η  $z$  δεν μπορεί να έχει γείτονες στη  $D$ , αφού δεν έχει ούτε στη  $C_a^*$ . Συνεπώς, η  $z$  ανήκει στο  $N \setminus N^*$ . Εδώ όμως έχουμε αντίφαση, μιας και υπάρχει τώρα μια συνεκτική συνιστώσα  $D$  στο  $G[C_a^* \setminus \overline{\Delta}]$  και μια κορυφή  $z \in \overline{N}$  έτσι ώστε η  $z$  με την  $\delta$  έχουν και οι δύο ένα γείτονα στη  $D$ .

Ο ισχυρισμός ότι  $(S \cup \Delta) \setminus N = (S^* \cup \overline{\Delta} \setminus \overline{N})$  προκύπτει αμέσως.  $\square$

Πάμε να δούμε μερικά παραδείγματα ελαχιστοτικών διαχωριστών πάνω στο γράφημα  $G$  του Σχήματος 2.5. Στην πρώτη περίπτωση του Λήμματος για  $\overline{N} = \emptyset$  μπορούμε να πάρουμε ως  $S^*$  το σύνολο  $(S \cup \Delta) \setminus N$  του Σχήματος 2.5. Στη δεύτερη περίπτωση για  $\overline{N} \neq \emptyset$  στο ίδιο γράφημα θα θεωρήσουμε ένα διαφορετικό ελαχιστοτικό  $a, b$ -διαχωριστή  $S$  που θέλουμε να είναι κοντά στην  $b$ , τις κόκκινες κορυφές  $x, y, 4$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.6. Στο γράφημα δεν φαίνονται όλα τα

σύνολα προκειμένου να μην υπερφορτωθεί το σχήμα. Το σύνολο  $\Delta = \{1, 2, 3\}$  απεικονίζεται με τις γαλάζιες κορυφές και μαζί με το  $N = \{x, y\}$  (πράσινο σύνολο) αποτελούν ένα κατάλληλο ζεύγος για το  $S$ . Το  $(\Delta^*, N^*)$  είναι ένα ελαχιστοτικό ζεύγος για το  $S$  και την  $x$ , όπου  $\Delta^* = \{1\}$  και  $N^* = \{x\}$ . Στη συνέχεια, ορίζουμε το σύνολο  $S^* = (S \cup \Delta^*) \setminus N^* = \{1, y, 4\}$  (μπλε σύνολο).

Θα δούμε τώρα τα σύνολα  $\bar{\Delta}$  και  $\bar{N}$ . Βλέπουμε ότι  $\bar{\Delta} = \Delta \setminus \Delta^* = \{2, 3\}$  και  $\bar{N} = (N \setminus N^*) \cup (\Delta^* \setminus \Delta) = \{y\}$ . Το ζεύγος  $(\bar{\Delta}, \bar{N})$  είναι ένα κατάλληλο ζεύγος για το  $S^*$ . Επιπλέον, η  $C'_a$  συνεκτική συνιστώσα του  $G[C_a \setminus \Delta]$  που περιέχει την  $a$ . Η  $C^*_a$  είναι η συνεκτική συνιστώσα του  $G[C_a \setminus \Delta^*]$  (γκρίζο σύνολο), και παρατηρούμε ότι  $C^*_a = C'_a \cup \bar{\Delta}$ . Ακόμη, βλέπουμε ότι  $N(x) \cap \Delta$  που είναι ίσο με το  $\Delta'$  αποτελείται από την κορυφή 1, άρα  $\Delta' = \Delta^*$ . Τέλος, επιβεβαιώνουμε ότι πράγματι  $(S \cup \Delta) \setminus N = (S^* \cup \bar{\Delta}) \setminus \bar{N}$  αφού και τα δύο είναι ίσα με το  $\{1, 2, 3, 4\}$ .



Σχήμα 2.6: Παράδειγμα για τη δεύτερη περίπτωση του Λήμματος 2.5 .

Έχοντας ως δεδομένο ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή κοντά στην  $b$ , το Θεώρημα 2.2 μας διασφαλίζει ότι υπάρχει ένα κατάλληλο ζεύγος  $(\Delta, N)$  για κάθε ελαχιστοτικό διαχωριστή. Εάν, σε ένα σημείο, φτάσουμε σε ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή  $S$ , το Λήμμα 2.5 μας δείχνει ότι μπορούμε να βρούμε τον ελαχιστοτικό διαχωριστή  $(S \cup \Delta) \setminus N$  επιλέγοντας διαδοχικά ελαχιστοτικά ζεύγη  $(\Delta^*, N^*)$ . Παρατηρούμε επίσης ότι η συνιστώσα του  $S^*$  που περιέχει την  $a$  είναι μικρότερη από τη συνιστώσα του  $S$  που περιέχει την  $a$ . Έτσι, μετά από ένα περιορισμένο αριθμό βημάτων καταλήγουμε στο  $(S \cup \Delta) \setminus N$ . Κατά συνέπεια έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Πόρισμα 2.1.** Έστω  $S$  ένας ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής και έστω  $S_1$  ο ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής κοντά στην  $b$ . Υπάρχει μια ακολουθία από ζεύγη

$(\Delta_1, N_1), \dots, (\Delta_t, N_t)$  έτσι ώστε

1. το  $(\Delta_1, N_1)$  να είναι ένα ελαχιστοτικό ζεύγος για το  $S_1$  και κάποιας κορυφής  $x_1 \in N_1$ ,
2. για  $i = 2, \dots, t$ , το  $(\Delta_i, N_i)$  να είναι ένα ελαχιστοτικό ζεύγος για το  $S_i = (S_{i-1} \cup \Delta_{i-1}) \setminus N_{i-1}$  και κάποιας κορυφής  $x_i \in N_i$ ,
3. για  $i = 1, \dots, t$ , το  $\Delta_i$  και η  $a$  να βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του  $G[V \setminus S_i]$ ,
4.  $S = (S_t \cup \Delta_t) \setminus N_t$ .

## 2.3 Αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε ένα αλγόριθμο στηριζόμενο σε όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα, ο οποίος δεδομένου ενός γραφήματος  $G$  και δύο μη γειτονικών κορυφών  $a$  και  $b$  μπορεί να βρει όλους τους ελαχιστοτικούς  $a, b$ -διαχωριστές ανεξάρτητα από των αριθμό τους. Θα αναλύσουμε τέλος την πολυπλοκότητα του ως προς τον χρόνο και την ορθότητά του.

**Θεώρημα 2.3** ([30]). Έστω  $S$  ο ελαχιστοτικός  $a, b$ -διαχωριστής του  $G$  που να είναι κοντά στην  $b$ . Έστω επίσης  $\mathcal{T} = \{S\}$  και  $\mathcal{Q} = \{S\}$ . Τότε καλώντας τον αλγόριθμο  $\text{SEPARATORS}(G, a, b, \mathcal{T}, \mathcal{Q})$  καθορίζεται ένα σύνολο  $\mathcal{Q}$  που περιλαμβάνει όλους τους ελαχιστοτικούς  $a, b$ -διαχωριστές.

*Απόδειξη.* Από το Πρόσλημα 2.1 το σύνολο  $\mathcal{Q}$  περιέχει όλους τους ελαχιστοτικούς  $a, b$ -διαχωριστές. Επιπλέον, από το Λήμμα 2.4 και από το Θεώρημα 2.1 όλα τα σύνολα στο  $\mathcal{Q}$  είναι ελαχιστοτικοί διαχωριστές.  $\square$

Σημείωση: Αν θεωρήσουμε τις τετριμμένες περιπτώσεις για  $\mathcal{T} = \{b\}$  και για  $\mathcal{Q} = \emptyset$  τότε ο αλγόριθμος θα μας δώσει το ίδιο αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 2.4** (Θεώρημα 15 στο [30]). Έστω  $R(a, b)$  ο αριθμός των ελαχιστοτικών  $a, b$ -διαχωριστών (για μη-γειτονικές κορυφές  $a$  και  $b$ ). Ο Αλγόριθμος 1 χρειάζεται  $O(n^3 \cdot R(a, b))$  χρόνο για να καθορίσει όλους τους ελαχιστοτικούς  $a, b$ -διαχωριστές.

*Απόδειξη.* Θεωρούμε ότι έχουμε τον πίνακα γειτνίασης του δεδομένου γραφήματος. Ο ελαχιστοτικός διαχωριστής  $S$  που είναι κοντά στην  $b$  μπορεί να βρεθεί εύκολα σε χρόνο  $O(n^2)$  όπως ακολουθεί. Αρχικοποιούμε το  $S = N(b)$ . Καθορίζουμε τη συνεκτική συνιστώσα  $C_a$  του  $G[V \setminus S]$ . Αφαιρούμε τις κορυφές του  $S$  που δεν έχουν κάποιο γείτονα στη  $C_a$ .

Πάμε να υπολογίσουμε τώρα τον χρόνο που χρειάζεται να υπολογιστεί το  $\mathcal{T}'$ . Για κάθε  $S \in \mathcal{T}$  και για κάθε κορυφή  $x \in S$  μη-γειτονική στην  $a$  μπορούμε να κάνουμε τους παρακάτω υπολογισμούς. Ο καθορισμός του  $\Delta$  διαρκεί το πολύ  $O(n^2)$  χρόνο. Ο υπολογισμός των  $C'_a$  και  $N$  μπορεί προφανώς κι αυτός να διαρκέσει  $O(n^2)$  χρόνο. Έτσι ο υπολογισμός του  $\mathcal{T}'$  (που μπορεί να περιλαμβάνει στοιχεία που βρίσκονται ήδη στο  $\mathcal{Q}$ ) διαρκεί  $O(n^3 \cdot |\mathcal{T}|)$  χρόνο.

Έπειτα, πρέπει να αφαιρέσουμε τους ελαχιστοτικούς διαχωριστές από το νέο σύνολο  $\mathcal{T}'$  που έχουν βρεθεί προηγουμένως. Μπορούμε να το κάνουμε αυτό διατηρώντας το  $\mathcal{Q}$  σε μια κατάλληλη δομή δεδομένων, επιτρέποντας μία αναβάθμιση σε χρόνο  $O(n \cdot |\mathcal{T}'| \cdot \log(R(a, b))) = O(n^3 \cdot |\mathcal{T}|)$ . Συνεπώς, ο χρόνος υπολογισμού του  $\mathcal{T}'$  που θα περιλαμβάνει μόνο νέους ελαχιστοτικούς διαχωριστές είναι  $O(n^3 \cdot |\mathcal{T}|)$ . Αφού θα ισχύει αυτό ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης του αλγόριθμου είναι  $O(n^3 \cdot R(a, b))$ .  $\square$

**Πόρισμα 2.2.** *Το σύνολο όλων ελαχιστοτικών διαχωριστών ενός γραφήματος  $G$  μπορεί να βρεθεί σε χρόνο  $O(n^5 R)$ , όπου  $n = V(G)$  και  $R$  είναι ο συνολικός αριθμός των ελαχιστοτικών διαχωριστών.*

Ένα κάπως διαφορετικό αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο.

**Θεώρημα 2.5** ([30]). *Θεωρούμε πως ένα γράφημα  $G$  έχει τουλάχιστον  $R$  ελαχιστοτικούς διαχωριστές. Υπάρχει αλγόριθμος που βρίσκει  $R$  διαφορετικούς ελαχιστοτικούς διαχωριστές σε χρόνο  $O(n^5 R)$ .*

*Απόδειξη.* Ο νέος αλγόριθμος προκύπτει από αυτόν που είδαμε προηγουμένως, ο οποίος γνωρίζουμε ότι τερματίζει όταν βρεθούν  $R$  διαφορετικοί ελαχιστοτικοί διαχωριστές. Μπορεί να χρειαστεί το πολύ  $O(n^5 R)$  χρόνο εκτέλεσης, δοκιμάζοντας διαφορετικά ζεύγη μη-γειτονικών κορυφών για τα οποία ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών ελαχιστοτικών διαχωριστών που μπορεί να προκύψουν είναι μικρότερος από  $R$ . Υποθέτουμε ότι έχει βρεθεί ένα ζευγάρι κορυφών που μας δίνει πολλούς ελαχιστοτικούς διαχωριστές. Τη συνέχεια τη συναντάμε στην ανάλυση της απόδειξης του Θεωρήματος 2.4.  $\square$

---

**Αλγόριθμος 1** Πολυωνυμικός Αλγόριθμος για την απαρίθμηση των ελαχιστοτικών διαχωριστών σε γενικά γραφήματα.

---

**procedure** SEPARATORS( $G, a, b, \mathcal{T}, \mathcal{Q}$ )

**Input:** Ένα γράφημα  $G$  και μη-γειτονικές κορυφές  $a$  και  $b$  και τα σύνολα  $\mathcal{T}$  και  $\mathcal{S}$  των ελαχιστοτικών  $a, b$ -διαχωριστών στο  $G$ .

**Output:** Ένα σύνολο  $\mathcal{Q}$  με όλους τους ελαχιστοτικούς  $a, b$ -διαχωριστές στο  $G$ .

$\mathcal{T}' := \emptyset;$

**for all**  $S \in \mathcal{T}$  **do**

Καθόρισε το σύνολο  $C_a$ ;

$\{C_a : \eta \text{ συνεκτική συνιστώσα του } G[V \setminus S] \text{ που περιέχει την } a.\}$

**for all**  $x \in S$  μη-γειτονική με την  $a$  **do**

Καθόρισε το σύνολο  $\Delta$ ;

$\{\Delta : \text{ελαχιστοτικός } x, a\text{-διαχωριστής στο } C_a(x) \text{ κοντά στην } x.\}$

Καθόρισε το σύνολο  $C'_a$ ;

$\{C'_a : \text{συνεκτική συνιστώσα του } G[C_a \setminus \Delta] \text{ χωρίς την κορυφή } a.\}$

Καθόρισε το σύνολο  $N$ ;

$\{N : \text{σύνολο των κορυφών στο } S \text{ που δεν έχουν γείτονα στη } C'_a.\}$

$S^* := (S \cup \Delta) \setminus N;$

$\mathcal{T}' := \mathcal{T}' \cup \{S^*\};$

**end for**

**end for**

$\mathcal{T}' := \mathcal{T}' \setminus \mathcal{Q};$

$\mathcal{Q} := \mathcal{Q} \cup \mathcal{T}';$

SEPARATORS( $G, a, b, \mathcal{T}', \mathcal{Q}$ )

**end procedure**

---



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## ΕΛΑΧΙΣΤΟΤΙΚΟΙ ΔΙΑΧΩΡΙΣΤΕΣ ΣΕ ΚΛΑΣΕΙΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΑΠΑΓΟΡΕΥΜΕΝΑ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

### 3.1 Tame κλάσεις γραφημάτων

Όπως είδαμε στο τέλος του εισαγωγικού κεφαλαίου, το γενικότερο πρόβλημα που μας απασχολεί είναι να διερευνήσουμε ποιες κλάσεις γραφημάτων έχουν ένα πολυωνυμικά φραγμένο αριθμό ελαχιστοτικών διαχωριστών. Οι γνωστότερες είναι αυτές των δέντρων, και των δασών, με γραμμικό αριθμό ελαχιστοτικών διαχωριστών  $(n - 2)$ , όπου  $n$  το πλήθος των κορυφών, καθώς και η κλάση των κυκλικών γραφημάτων που έχει τετραγωνικό αριθμό απαριθμώντας  $\frac{(n-3)n}{2}$  ελαχιστοτικούς διαχωριστές.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα δούμε κλάσεις που έχουν είτε πολυωνυμικό είτε εκθετικό αριθμό ελαχιστοτικών διαχωριστών, εστιάζοντας σε σύνολα απαγορευμένων επαγομένων υπογραφημάτων με το πολύ τέσσερις κορυφές. Ανάλογα με το αποτέλεσμα αυτές οι κλάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε  $\mathcal{NP}$ -δύσκολα προβλήματα για να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο.

Όλα τα γραφήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε θα είναι πεπερασμένα, απλά, μη-κατευθυνόμενα και με μία τουλάχιστον κορυφή. Η ακόλουθη ιδιότητα των κλάσεων γραφημάτων είναι και η κύρια ιδέα αυτού του κεφαλαίου.

**Ορισμός 3.1** ([39]). Θεωρούμε ότι μία κλάση γραφημάτων  $\mathcal{G}$  είναι **tame** εάν υπάρχει ένα πολώνυμο  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε για κάθε γράφημα  $G \in \mathcal{G}$ , έχουμε  $s(G) \leq p(|V(G)|)$ , όπου με  $s(G)$  θα συμβολίζουμε το πλήθος όλων των ελαχιστοτικών διαχωριστών στο  $G$ .

Δεδομένου μιας οικογένειας γραφημάτων  $\mathcal{F}$ , λέμε ότι ένα γράφημα  $G$  είναι  $\mathcal{F}$ -free εάν κανένα επαγόμενο υπογράφημα του  $G$  είναι ισόμορφο με ένα μέλος της  $\mathcal{F}$ . Δεδομένου δύο οικογενειών  $\mathcal{F}$  και  $\mathcal{F}'$  από γραφήματα, γράφουμε  $\mathcal{F} \trianglelefteq \mathcal{F}'$  εάν η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων περιέχεται στην κλάση των  $\mathcal{F}'$ -free γραφημάτων, ή, ισοδύναμα, εάν κάθε  $\mathcal{F}$ -free γράφημα είναι επίσης  $\mathcal{F}'$ -free.

Επί παραδείγματι, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι  $\{C_3, C_4, C_5, \dots\} \trianglelefteq \{C_3, C_5, C_7, \dots\}$ , που σημαίνει ότι τα δάση (άκυκλα γραφήματα) είναι υποκλάση των διμερών γραφημάτων.

**Παρατήρηση 3.1** ([39]). Έστω  $\mathcal{F}$  και  $\mathcal{F}'$  δύο οικογένειες γραφημάτων τέτοιες ώστε  $\mathcal{F} \trianglelefteq \mathcal{F}'$ . Εάν η κλάση των  $\mathcal{F}'$ -free γραφημάτων είναι tame, τότε και η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων θα είναι tame.

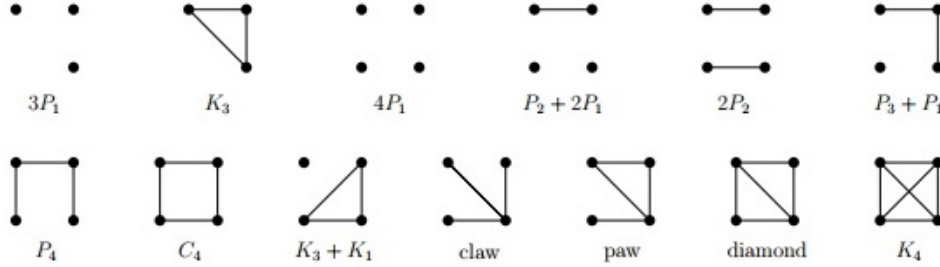
Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η σχέση  $\mathcal{F} \trianglelefteq \mathcal{F}'$  μπορεί να επιβεβαιωθεί με το ακόλουθο κριτήριο, το οποίο γίνεται ιδιαίτερα απλό για πεπερασμένες οικογένειες  $\mathcal{F}$  και  $\mathcal{F}'$ .

**Παρατήρηση 3.2** (Folklore). Για κάθε δύο οικογένειες γραφημάτων  $\mathcal{F}$  και  $\mathcal{F}'$ , ισχύει  $\mathcal{F} \trianglelefteq \mathcal{F}'$  αν και μόνο εάν κάθε γράφημα από  $\mathcal{F}'$  περιέχει ένα επαγόμενο υπογράφημα ισόμορφο με ένα μέλος του  $\mathcal{F}$ .

Ένα σημαντικό θεώρημα που θα μας απασχολήσει σε αυτό το κεφάλαιο αφορά κλάσεις γραφημάτων που ορίζονται με σύνολα απαγορευμένων επαγομένων υπογραφημάτων. Οι Milanič και Rinač περιορίζοντας την έρευνά τους σε γραφήματα με μόλις τέσσερις κορυφές το πολύ μας έδωσαν ένα θεώρημα κλειδί (Θεώρημα 3.1) σχετικά με το ποιες κλάσεις χωρίς αυτά τα μικρά γραφήματα έχουν πολυωνυμικό πλήθος ελαχιστοτικών γραφημάτων. Επιπλέον, υπάρχουν και κλάσεις με εκθετικό πλήθος ελαχιστοτικών διαχωριστών τις οποίες θα δούμε στο Θεώρημα 3.2. Τις αποδείξεις τους θα τις συναντήσουμε στο τέλος του κεφαλαίου, αφού προηγουμένως χρειάζεται να εξηγήσουμε μία μία τις περιπτώσεις. Τα σχετικά γραφήματα ονομάζονται όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1.

**Θεώρημα 3.1** ([39]). Έστω  $\mathcal{F}$  μια οικογένεια γραφημάτων με το πολύ τέσσερις κορυφές έτσι ώστε  $\mathcal{F} \neq \{4P_1, C_4\}$  και  $\mathcal{F} \neq \{4P_1, C_4, claw\}$ . Τότε η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων είναι tame αν και μόνο εάν  $\mathcal{F} \trianglelefteq \mathcal{F}'$  για μία από τις ακόλουθες οικογένειες  $\mathcal{F}'$ :

1.  $\mathcal{F}' = P_4$  ή  $\mathcal{F}' = 2P_2$ ,
2.  $\mathcal{F}' = \{H, paw\}$  για κάποιο  $H \in \{4P_1, P_2 + 2P_1, P_3 + P_1, claw\}$ ,



Σχήμα 3.1: Γραφήματα με 4 κορυφές που αναφέρονται στα κύρια θεωρήματα.

3.  $\mathcal{F}' = \{H, K_3 + P_1\}$  για κάποιο  $H \in \{4P_1, P_2 + 2P_1, P_3 + P_1, claw\}$ ,
4.  $\mathcal{F}' = \{H, K_4\}$  για κάποιο  $H \in \{4P_1, P_2 + 2P_1, P_3 + P_1\}$ ,
5.  $\mathcal{F}' = \{H, C_4\}$  για κάποιο  $H \in \{P_2 + 2P_1, P_3 + P_1\}$ ,
6.  $\mathcal{F}' = \{4P_1, C_4, diamond\}$ .

**Θεώρημα 3.2** ([39]). Έστω  $\mathcal{F}$  μια οικογένεια γραφημάτων με το πολύ τέσσερις κορυφές έτσι ώστε  $\mathcal{F} \neq \{4P_1, C_4\}$  και  $\mathcal{F} \neq \{4P_1, C_4, claw\}$ . Τότε η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων δεν είναι tame αν και μόνο εάν  $\mathcal{F}' \trianglelefteq \mathcal{F}$  για μία από τις ακόλουθες οικογένειες  $\mathcal{F}'$ :

1.  $\mathcal{F}' = \{3P_1, diamond\}$ ,
2.  $\mathcal{F}' = \{claw, K_4, C_4, diamond\}$ ,
3.  $\mathcal{F}' = \{K_3, C_4\}$ .

Δύο βασικά συστατικά για μερικές από τις αποδείξεις θα είναι τα ακόλουθα θεωρήματα. Το επόμενο θεώρημα αποδεικνύει ότι η κλάση των  $P_4$ -free γραφημάτων είναι tame.

**Θεώρημα 3.3** (Νικολόπουλος και Παληός [42]). Αν το  $G$  είναι ένα  $P_4$ -free γράφημα, τότε  $s(G) < \frac{2}{3}|V(G)|$ .

**Θεώρημα 3.4** (Ramsey [46]). Για κάθε δύο θετικούς ακέραιους  $k$  και  $\ell$ , υπάρχει τουλάχιστον ένα θετικός ακέραιος  $R(k, \ell)$  έτσι ώστε κάθε γράφημα με τουλάχιστον  $R(k, \ell)$  κορυφές να περιέχει είτε μία κλίκα μεγέθους  $k$  είτε ένα ανεξάρτητο σύνολο κορυφών μεγέθους  $\ell$ .

Θα χρειαστούμε ακόμη, την παρακάτω ιδιότητα σχετικά με την κατασκευή των raw-free γραφημάτων.

**Θεώρημα 3.5** (Olariu [43]). Ένα συνεκτικό raw-free γράφημα  $G$  είναι είτε  $K_3$ -free ή πλήρες πολυμερές.

Ολοκληρώνουμε αυτή την ενότητα με μία άμεση όμως χρήσιμη απλοποίηση του ορισμού για τον χαρακτηρισμό των tame κλάσεων γραφημάτων.

**Λήμμα 3.1.** Μία κλάση γραφημάτων  $\mathcal{G}$  είναι tame αν και μόνο εάν υπάρχει ένας μη-αρνητικός ακέραιος  $k$  έτσι ώστε  $s(G) \leq |V(G)|^k$  για κάθε  $G \in \mathcal{G}$ .

*Απόδειξη.* Η μία πλευρά της απόδειξης “ $\Leftarrow$ ” είναι τετριμμένη. Θα αποδείξουμε τον αντίστροφο ισχυρισμό “ $\Rightarrow$ ”. Θεωρούμε  $\mathcal{G}$  την tame κλάση γραφημάτων και μια πολυωνυμική συνάρτηση  $p(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$  έτσι ώστε  $s(G) \leq p(|V(G)|)$  για όλα τα γραφήματα  $G \in \mathcal{G}$ . Υποθέτουμε ότι  $a_i \geq 0$  για κάθε  $i$ , αφού διαφορετικά θα μπορούσαμε να διαγράψουμε τους όρους του  $p$  με αρνητικούς συντελεστές για να πάρουμε ένα πολυώνυμο  $q$  έτσι ώστε να ισχύει  $s(G) \leq q(|V(G)|)$  για κάθε  $G \in \mathcal{G}$ . Επιπλέον, μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουμε ίσους συντελεστές  $a_0 = \dots = a_d = a$ , για κάποια τιμή  $a$ , αφού διαφορετικά, όσο υπάρχει ένα ζεύγος  $(i, j)$  με  $0 \leq i < j \leq d$  και  $a_i < a_j$ , μπορούμε να αυξήσουμε τον  $i$ -στό συντελεστή από  $a_i$  σε  $a_j$  για να πάρουμε ένα πολυώνυμο  $q$  έτσι ώστε να ισχύει  $s(G) \leq q(|V(G)|)$  για κάθε  $G \in \mathcal{G}$ . Έτσι θα έχουμε ότι  $p(x) = a(\sum_{i=0}^d x^i)$  και συνεπώς η συνθήκη  $p(n) \leq a \cdot n^{d+1}$  θα ισχύει για όλα τα  $n \geq 2$ , μιας και τα γραφήματα με μία κορυφή δεν έχουν ελαχιστοτικούς διαχωριστές. Έστω  $\ell$  να είναι ο μικρότερος μη-αρνητικός ακέραιος έτσι ώστε  $a \leq 2^\ell$ . Τότε, για όλα τα  $n \geq 2$ , έχουμε  $a \cdot n^{d+1} \leq 2^\ell \cdot n^{d+1} \leq n^\ell \cdot n^{d+1} = n^{d+\ell+1}$ . Θεωρώντας ως  $k = d + \ell + 1$ , αποδεικνύεται ο ισχυρισμός.  $\square$

Ένα απλό αποτέλεσμα που συνεπάγεται από το Λήμμα 3.1 είναι το γεγονός ότι κάθε ένωση πολλών πεπερασμένων tame κλάσεων γραφημάτων είναι επίσης tame.

## 3.2 Ιδιότητες γραφημάτων

Θα εξετάσουμε τώρα πώς επιδρούν στον αριθμό των ελαχιστοτικών διαχωριστών συγκεκριμένες ιδιότητες μερικών γραφημάτων. Το σύνολο των ελαχιστοτικών διαχωριστών ενός μη-συνεκτικού γραφήματος μπορεί να υπολογιστεί από τα

σύνολα των ελαχιστοτικών διαχωριστών των συνιστωσών του. Παρόμοιος ισχυρισμός συναντάται σε γραφήματα των οποίων τα συμπληρώματα είναι μη-συνεκτικά (βλ. Θεώρημα 3.1 στο [44]). Οι αντιστοιχίες γίνονται όπως φαίνονται πιο κάτω.

**Θεώρημα 3.6** (Θεώρημα 8 στο [39]). *Εάν το  $G$  είναι ένα μη-συνεκτικό γράφημα με συνιστώσες  $C_1, \dots, C_k$ , τότε  $\mathcal{S}_G = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{i=1}^k \mathcal{S}_{C_i}$ . Αν  $G$  είναι η ένωση των γραφημάτων  $C_1, \dots, C_k$ , τότε  $S \in \mathcal{S}_G$  αν και μόνο εάν υπάρχει κάποιο  $i \in \{1, \dots, k\}$  και κάποιο  $S_i \in \mathcal{S}_{C_i}$  έτσι ώστε  $S = S_i \cup (V(G) \setminus V(C_i))$ .*

Χρησιμοποιώντας αυτό το θεώρημα μπορούμε να συμπεράνουμε τα ακόλουθα.

**Πόρισμα 3.1.** *Έστω  $\mathcal{G}$  μία κληρονομική κλάση γραφημάτων και έστω  $\mathcal{G}'$  η κλάση με τα συνεκτικά γραφήματα της  $\mathcal{G}$ . Τότε η  $\mathcal{G}$  είναι tame αν και μόνο εάν η  $\mathcal{G}'$  είναι tame.*

**Πόρισμα 3.2.** *Έστω  $\mathcal{G}$  μία κληρονομική κλάση γραφημάτων και έστω  $\mathcal{G}'$  η κλάση με τα συνεκτικά συμπληρώματα των γραφημάτων της  $\mathcal{G}$ . Τότε η  $\mathcal{G}$  είναι tame αν και μόνο εάν η  $\mathcal{G}'$  είναι tame.*

Έχει παρατηρηθεί ότι αν το  $G_1$  είναι ένα επαγόμενο υπογράφημα του  $G_2$ , τότε κάθε ελαχιστοτικός διαχωριστής του  $G_1$  θα περιέχεται μέσα σε ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή του  $G_2$  [38]. Από την απόδειξη προκύπτει η ακόλουθη ιδιότητα.

**Πρόταση 3.1.** *Αν  $G_1$  είναι ένα επαγόμενο υπογράφημα του  $G_2$ , τότε  $s(G_1) \leq s(G_2)$ .*

Δεδομένης της Πρότασης 3.1, ένα φυσικό ερώτημα που προκύπτει είναι πόσο μεγάλη μπορεί να είναι η διαφορά  $s(G_2) - s(G_1)$  αν τα γραφήματα  $G_1$  και  $G_2$  δεν είναι “πολύ διαφορετικά”. Για παράδειγμα, αν το  $G_1$  προκύπτει από το  $G_2$  αφαιρώντας μόνο μία κορυφή. Στις επόμενες προτάσεις θα δούμε τρεις ιδιότητες μιας κορυφής  $v$  κάποιου γραφήματος  $G$  για την οποία ισχύει ότι όταν τη διαγράψουμε παίρνουμε είτε ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή ίδιου μεγέθους με εκείνον στο  $G$  είτε έναν με μία κορυφή λιγότερη.

**Πρόταση 3.2.** *Έστω  $G$  ένα γράφημα με τουλάχιστον δύο κορυφές και έστω  $v$  μία καθολική κορυφή στο  $G$ . Τότε  $s(G) = s(G - v)$ .*

**Πρόταση 3.3.** *Έστω  $G$  ένα γράφημα με ένα ζεύγος δίδυμων κορυφών  $v, w$  με  $w \neq v$ . Τότε  $s(G) = s(G - v)$ .*

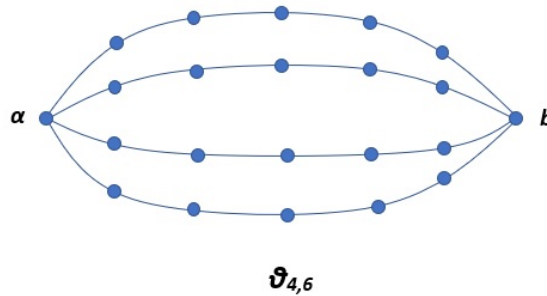
**Πρόταση 3.4.** *Έστω  $G$  ένα γράφημα με τουλάχιστον δύο κορυφές και έστω  $v$  μία απλοϊκή κορυφή στο  $G$ . Τότε  $s(G - v) \leq s(G) \leq s(G - v) + 1$ .*

### 3.3 Κλάσεις γραφημάτων με εκθετικό πλήθος ελαχιστοτικών διαχωριστών

Στην επόμενη ενότητα θα περιγράψουμε μερικές οικογένειες γραφημάτων με εκθετικά πολλούς ελαχιστοτικούς διαχωριστές.

#### 3.3.1 Θήτα γραφήματα και τα γραμμικά τους γραφήματα

Δεδομένου δύο θετικών ακεραίων  $k$  και  $\ell$ , το  $k, \ell$ -θήτα γράφημα ή αλλιώς  $\theta_{k, \ell}$  είναι το γράφημα που προκύπτει από την ένωση  $k$  εσωτερικών διακριτών μονοπατιών μήκους  $\ell$  μεταξύ των κορυφών  $a$  και  $b$ . Για κάθε θετικό ακέραιο  $\ell$ , ορίζουμε την οικογένεια γραφημάτων  $\Theta_\ell$  ως εξής:  $\Theta_\ell = \{\theta_{k, \ell} \mid k \geq 2\}$ . Σημειώνουμε ότι το  $\ell$  αναφέρεται στο μήκος κάθε  $a, b$ -μονοπατιού και όχι στον αριθμό των μονοπατιών, ο οποίος είναι απεριόριστος.



Σχήμα 3.2: Ένα γράφημα  $4,6$ -θήτα που ανήκει στην κλάση  $\Theta_6$ .

**Παρατήρηση 3.3.** Για κάθε ακέραιο  $\ell \geq 3$ , η κλάση  $\Theta_\ell$  δεν είναι tame.

*Απόδειξη.* Έστω  $k \geq 2$ ,  $\ell \geq 3$ , έστω  $G = \theta_{k, \ell}$  και έστω  $P^1, \dots, P^k$  τα μονοπάτια του  $G$  όπως ορίζονται στα θήτα γραφήματα. Έστω  $S$  να είναι οποιοδήποτε σύνολο κορυφών του  $G$  που περιέχει ακριβώς μία εσωτερική κορυφή κάθε μονοπατιού  $P^j$ . Τότε, το υπογράφημα  $G - S$  έχει δύο πλήρεις συνιστώσες που σχετίζονται με το  $S$  και από το Λήμμα 1.2 έχουμε ότι το  $S$  είναι ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής στο  $G$ . Σημειώνουμε ότι για κάθε  $j \in \{1, \dots, k\}$ , το μονοπάτι  $P^j$  έχει ακριβώς  $\ell - 1$  εσωτερικές κορυφές. Ακολουθεί ότι  $s(\theta_{k, \ell}) \geq (\ell - 1)^k$ . Έτσι, καθώς  $|V(\theta_{k, \ell})| = k(\ell - 1) + 2$ , συμπεραίνουμε ότι για κάθε σταθερό θετικό ακέραιο  $\ell \geq 3$  η κλάση  $\Theta_\ell$  δεν είναι tame.  $\square$

**Πόρισμα 3.3.** *Εάν  $\mathcal{G}$  είναι μία κλάση γραφημάτων έτσι ώστε  $\Theta_\ell \subseteq \mathcal{G}$  για κάποιο  $\ell \geq 3$ , τότε η  $\mathcal{G}$  δεν είναι tame.*

Θεωρούμε τώρα την οικογένεια των γραμμικών γραφημάτων των θήτα γραφημάτων. Πιο συγκεκριμένα, δεδομένου θετικών ακέραιων  $k$  και  $\ell$ , θεωρούμε  $L_{k,\ell}$  το γραμμικό γράφημα του  $\theta_{k,\ell}$  και έστω  $\mathcal{L}_\ell = \{L_{k,\ell} \mid k \geq 2\}$ .

**Παρατήρηση 3.4.** *Για κάθε ακέραιο  $\ell \geq 2$ , η κλάση  $\mathcal{L}_\ell$  δεν είναι tame.*

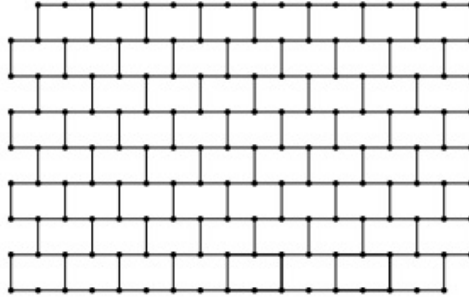
*Απόδειξη.* Έστω  $k, \ell \geq 2$  και έστω  $G = L_{k,\ell}$ . Τότε, στο  $G$  θα υπάρχουν δύο κλίκες με  $k$  στοιχεία η κάθε μία,  $K = \{a_1, \dots, a_k\}$  και  $K' = \{b_1, \dots, b_k\}$ , καθώς και  $k$  εσωτερικά διακριτά μονοπάτια  $P^1, \dots, P^k$  έτσι ώστε για κάθε  $j \in \{1, \dots, k\}$ , το μονοπάτι  $P^j$  να είναι ένα  $a_i, b_i$ -μονοπάτι με  $|V(P^j)| = \ell$ ,  $V(P^j) \cap K = \{a_j\}$  και  $V(P^j) \cap K' = \{b_j\}$ . Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε σύνολο κορυφών  $S$  του  $G$  που περιλαμβάνει ακριβώς μία κορυφή από κάθε μονοπάτι  $P^j$  έτσι ώστε  $S \notin \{K, K'\}$ . Τότε, το υπογράφημα  $G - S$  έχει δύο πλήρεις συνιστώσες που σχετίζονται με το  $S$  και από το Λήμμα 1.2 προκύπτει ότι το  $S$  είναι ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής του  $G$ . Ακολουθεί ότι  $s(L_{k,\ell}) \geq \ell^k - 2$ . Συνεπώς, αφού  $|V(L_{k,\ell})| = k(\ell + 1)$ , συμπεραίνουμε ότι για κάθε σταθερό θετικό ακέραιο  $\ell \geq 2$ , η κλάση  $\mathcal{L}_\ell$  δεν είναι tame.  $\square$

**Πόρισμα 3.4.** *Αν  $\mathcal{G}$  είναι μία κλάση γραφημάτων έτσι ώστε  $\mathcal{L}_\ell \subseteq \mathcal{G}$  για κάποιο  $\ell \geq 2$ , τότε η  $\mathcal{G}$  δεν είναι tame.*

**Πόρισμα 3.5.** *Η κλάση  $\{3P_1, \text{diamond}\}$ -free γραφημάτων δεν είναι tame.*

### 3.3.2 Στοιχειώδεις τοίχοι και γραμμικά γραφήματα

Μία άλλη κλάση γραφημάτων η οποία μπορεί να έχει εκθετικό φράγμα για τον αριθμό των ελαχιστοτικών της διαχωριστών είναι η κλάση των  $R_{p,q}$  πλεγμάτων [48]. Στηριζόμενοι σε αυτή μπορούμε να διαμορφώσουμε μια άλλη κλάση γραφημάτων, τους στοιχειώδεις τοίχους. Δεδομένου ενός ακέραιου  $h \geq 2$  ένας **στοιχειώδεις τοίχος** ως προς  $h$  είναι το γράφημα  $W_h$  που προκύπτει από ένα  $R_{2h+2, h+1}$  πλέγμα διαγράφοντας:  $\alpha$ ) όλες τις ακμές με τελικά σημεία  $(2i + 1, 2j)$  και  $(2i + 1, 2j + 1)$  για όλα τα  $i \in \{0, 1, \dots, h\}$  και  $j \in \{0, 1, \dots, \frac{h-1}{2}\}$ ,  $\beta$ ) όλες τις ακμές με τελικά σημεία  $(2i, 2j - 1)$  και  $(2i, 2j)$  για όλα τα  $i \in \{0, 1, \dots, h\}$  και  $j \in \{0, 1, \dots, \frac{h}{2}\}$ , καθώς και  $\gamma$ ) τις δύο προκύπτουσες κορυφές με βαθμό ένα. Σημειώνουμε ότι ένας στοιχειώδης τοίχος ύψους  $h$  αποτελείται από  $h$  επίπεδα όπου



Σχήμα 3.3: Ένας στοιχειώδης τοίχος ύψους 8.

το καθένα περιλαμβάνει  $h$  τούβλα, όπου ένα τούβλο είναι ένας κύκλος μήκους έξι (βλ. Σχήμα 3.3 ).

**Πρόταση 3.5.** Για κάθε ακέραιο  $h \geq 2$ , ένας στοιχειώδης τοίχος ύψους  $h$  έχει τουλάχιστον  $2^h$  ελαχιστοτικούς διαχωριστές.

Επιπρόσθετα, όπως έχουμε δει στα θήτα γραφήματα, έτσι και στους στοιχειώδεις τοίχους ισχύει πως αν πάρουμε την οικογένεια των γραμμικών τους γραφημάτων θα παρατηρήσουμε ότι έχει κι αυτή εκθετικά πολλούς ελαχιστοτικούς διαχωριστές.

**Πρόταση 3.6** ([39]). Για κάθε άρτιο ακέραιο  $h \geq 2$ , το γράφημα  $L(W_h)$  έχει τουλάχιστον  $2^{h/2}$  ελαχιστοτικούς διαχωριστές.

Αφού τα γραμμικά γραφήματα των στοιχειωδών τοίχων είναι  $\{K_4, C_4, \text{claw}, \text{diamond}\}$ -free, από την Πρόταση 3.6 έχουμε το ακόλουθο συμπέρασμα.

**Πόρισμα 3.6.** Η κλάση των  $\{\text{claw}, K_4, C_4, \text{diamond}\}$ -free γραφημάτων δεν είναι tame.

### 3.4 Αποδείξεις των Θεωρημάτων 3.1 και 3.2

Σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε σταδιακά τις αποδείξεις των κύριων Θεωρημάτων 3.1 και 3.2 . Θα ξεκινήσουμε με μία πρόταση που μας δίνει μία απαραίτητη προϋπόθεση για ένα σύνολο  $\mathcal{F}$  γραφημάτων έτσι ώστε η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων να είναι tame.



**Πρόταση 3.7.** Έστω  $\mathcal{F}$  ένα πεπερασμένο σύνολο γραφημάτων έτσι ώστε για κάθε  $H \in \mathcal{F}$  έχουμε  $H \not\subseteq P_4$ ,  $H \not\subseteq 2P_2$ . Αντιθέτως, αν όλα τα γραφήματα στο  $\mathcal{F}$  περιέχουν κύκλους ή αν όλα τους έχουν περιφέρεια μεγαλύτερη από 5, τότε η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων δεν είναι tame.

Η ακόλουθη επαρκής συνθήκη προκύπτει χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.4 του Ramsey.

**Πρόταση 3.8.** Για κάθε δύο σταθερές  $k$  και  $\ell$  θετικών ακεραίων, η κλάση των  $\{P_2 + kP_1, K_\ell + P_2\}$ -free γραφημάτων είναι tame.

*Απόδειξη.* Από τις Παρατηρήσεις 3.1 και 3.2, υποθέτουμε ότι  $k \geq 2$  και  $\ell \geq 2$ . Τότε θα έχουμε ότι  $R(\ell, k) \geq 2$ . Έστω  $G$  ένα  $\{P_2 + kP_1, K_\ell + P_2\}$ -free γράφημα. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε ελαχιστοτικό διαχωριστή  $S$  στο  $G$ , υπάρχει ένα σύνολο  $X \subseteq V(G)$  έτσι ώστε  $|X| \leq R(\ell, k) - 1$  και  $S = N_G(X)$ . Σαφώς, αυτό σημαίνει ότι το  $G$  έχει το πολύ  $\binom{|V(G)|}{R(\ell, k) - 1} = O(|V(G)|^{R(\ell, k) - 1})$  ελαχιστοτικούς διαχωριστές. Έστω  $S$  ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής του  $G$  και έστω  $C_1$  και  $C_2$  οι πλήρεις συνιστώσες που σχετίζονται με το  $S$  στο  $G - S$ . Αφού  $N_G(V(C_1)) = N_G(V(C_2)) = S$ , αρκεί να δείξουμε ότι  $|V(C_1)| \leq R(\ell, k) - 1$  ή  $|V(C_2)| \leq R(\ell, k) - 1$ . Υποθέτουμε την αντίθετη περίπτωση, δηλαδή  $|V(C_1)| \geq R(\ell, k)$  ή  $|V(C_2)| \geq R(\ell, k)$ . Από το Θεώρημα 3.4 του Ramsey, αποδεικνύεται ότι υπάρχει ένα σύνολο  $Z \subseteq V(C_1)$  έτσι ώστε το  $Z$  να είναι είτε μία κλίκα μεγέθους  $\ell$  είτε ένα ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους  $k$ . Τότε όμως το  $Z$  μαζί με ένα ζεύγος μη-γειτονικών κορυφών από τη  $C_2$  επάγει ένα γράφημα  $K_\ell + P_2$  ή ένα  $P_2 + kP_1$  αντίστοιχα. Και οι δύο περιπτώσεις μας οδηγούν σε αντίφαση.  $\square$

Η επόμενη πρόταση απλοποιεί τις περιπτώσεις με  $P_3 + P_1 \in \mathcal{F}$ .

**Πρόταση 3.9.** Έστω  $\mathcal{F}$  ένα σύνολο γραφημάτων έτσι ώστε  $P_3 + P_1 \in \mathcal{F}$  και έστω  $\mathcal{F}' = (\mathcal{F} \setminus \{P_3 + P_1\}) \cup \{3P_1\}$ . Τότε η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων είναι tame αν και μόνο εάν η κλάση των  $\mathcal{F}'$ -free γραφημάτων είναι tame.

Θεωρούμε τώρα διάφορες οικογένειες απαγορευμένων επαγομένων υπογραφημάτων με το πολύ τέσσερις κορυφές. Οι Προτάσεις 3.8 και 3.9 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποδείξουμε τις ακόλουθες δύο προτάσεις.

**Πρόταση 3.10.** Για κάθε  $H \in \{4P_1, P_2 + 2P_1, P_3 + P_1, claw\}$ , η κλάση των  $\{H, K_3 + P_1\}$ -free γραφημάτων είναι tame.

- Απόδειξη.* 1. Η κλάση των  $\{4P_1, K_3 + P_1\}$ -free γραφημάτων είναι μία υποκλάση της κλάσης των  $\{P_2 + 4P_1, K_3 + P_2\}$ -free γραφημάτων, η οποία από την Πρόταση 3.8 είναι tame.
2. Η κλάση των  $\{P_2 + 2P_1, K_3 + P_1\}$ -free γραφημάτων είναι υποκλάση της κλάσης των  $\{P_2 + 2P_1, K_3 + P_2\}$ -free γραφημάτων, η οποία από την Πρόταση 3.8 είναι tame.
3. Για την κλάση των  $\{P_3 + P_1, K_3 + P_1\}$ -free γραφημάτων αρκεί να δείξουμε ότι η κλάση των  $\{3P_1, K_3 + P_1\}$ -free γραφημάτων είναι tame, από την Πρόταση 3.9. Αυτό προκύπτει από την Πρόταση 3.8 όπως είδαμε και στο (1).
4. Για την τέταρτη περίπτωση θεωρούμε ένα  $\{\text{claw}, K_3 + P_1\}$ -free γράφημα που δεν είναι  $\{3P_1, K_3 + P_1\}$ -free. Τότε υπάρχουν τέσσερις κορυφές που δεν σχηματίζουν claw και οι τρεις από αυτές σχηματίζουν ένα  $3P_1$  γράφημα. Η τέταρτη κορυφή δεν μπορεί να συνδέεται με τις υπόλοιπες τρεις, γιατί τότε θα σχηματιζόταν ένα claw. Αν συνδέεται μόνο με μία τότε σχηματίζεται ένα  $P_2 + 2P_1$ . Αν συνδέεται μόνο με δύο κορυφές τότε σχηματίζεται ένα  $P_3 + P_1$ . Αν δεν συνδέεται με καμία τότε σχηματίζεται ένα  $4P_1$ . Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση η κλάση των  $\{\text{claw}, K_3 + P_1\}$ -free γραφημάτων είναι tame.

□

**Πρόταση 3.11.** Για κάθε  $H \in \{4P_1, P_2 + 2P_1, P_3 + P_1\}$ , η κλάση των  $\{H, K_4\}$ -free γραφημάτων είναι tame.

- Απόδειξη.* 1. Από το Θεώρημα Ramsey 3.4, η κλάση των  $\{4P_1, K_4\}$ -free γραφημάτων αποτελείται από πεπερασμένα πολλά γραφήματα, οπότε είναι tame.
2. Η κλάση των  $\{4P_1, K_4\}$ -free γραφημάτων είναι μία υποκλάση των  $\{P_2 + 4P_1, K_4 + P_2\}$ -free γραφημάτων, η οποία είναι tame από την Πρόταση 3.8.
3. Από την Πρόταση 3.9, αρκεί να δείξουμε ότι η κλάση των  $\{3P_1, K_4\}$ -free γραφημάτων είναι tame. Αυτό είναι επακόλουθο του Θεωρήματος Ramsey 3.4.

□

Το ακόλουθο αποτέλεσμα προκύπτει από μία δομική ιδιότητα των  $\{3P_1, C_4\}$ -free γραφημάτων που αποδεικνύεται από τους Choudum και Shalu [14].

**Πρόταση 3.12.** *Η κλάση των  $\{P_3 + P_1, C_4\}$ -free γραφημάτων είναι tame.*

**Πρόταση 3.13.** *Η κλάση των  $\{P_2 + 2P_1, C_4\}$ -free γραφημάτων είναι tame.*

**Πρόταση 3.14.** *Η κλάση των  $\{4P_1, C_4, diamond\}$ -free γραφημάτων είναι tame.*

**Πρόταση 3.15.** *Για κάθε  $H \in \{4P_1, P_2 + 2P_1, P_3 + P_1, claw\}$ , η κλάση των  $\{H, paw\}$ -free γραφημάτων είναι tame.*

*Απόδειξη.* Έστω  $G$  ένα  $\{H, paw\}$ -free γράφημα. Από το Πρόσχημα 3.1, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το  $G$  είναι συνεκτικό. Το Θεώρημα 3.5 μας δείχνει ότι το  $G$  είτε θα είναι ένα  $K_3$ -free γράφημα, είτε ένα πλήρες πολυμερές. Αν το  $G$  είναι  $K_3$ -free, τότε είναι επίσης  $K_4$ -free και τότε από την Πρόταση 3.11 το πλήθος των ελαχιστοτικών του διαχωριστών θα φράσσεται πολυωνυμικά. Αν το  $G$  είναι πλήρες πολυμερές, τότε είναι ένα  $P_4$ -free γράφημα και το Θεώρημα 3.3 μας δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με προηγουμένως. Άρα και στις δύο περιπτώσεις έχουμε ότι η κλάση των  $\{H, paw\}$ -free γραφημάτων είναι tame.  $\square$

Στη συνέχεια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το επόμενο λήμμα για την απόδειξη ότι η κλάση των  $2P_2$ -free γραφημάτων είναι tame.

**Λήμμα 3.2.** *Έστω  $G$  ένα  $2P_2$ -free γράφημα και έστω  $S$  ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής του  $G$ . Τότε υπάρχει μια κορυφή  $v \in V(G)$  έτσι ώστε  $S = N(v)$ .*

*Απόδειξη.* Από το Λήμμα 1.2, το γράφημα  $G - S$  έχει δύο πλήρεις συνιστώσες  $C$  και  $D$  που σχετίζονται με τον  $S$ . Αν η  $C$  και η  $D$  έχουν από τουλάχιστον δύο κορυφές, τότε η κάθε μία από αυτές περιλαμβάνει τουλάχιστον μία ακμή. Αφού οι συνιστώσες  $C$  και  $D$  δεν συνδέονται μεταξύ τους, οι ακμές αυτές σχηματίζουν ένα  $2P_2$  στο  $G$ . Μπορούμε να υποθέσουμε, από συμμετρία, ότι  $C = \{v\}$  για κάποια κορυφή  $v \in V(G)$ . Τότε ακολουθεί ότι  $N(v) \subseteq S$  και αφού κάθε κορυφή του  $S$  είναι γειτονική της  $v$ , έχουμε ως αποτέλεσμα ότι  $S = N(v)$ .  $\square$

**Πρόταση 3.16.** *Η κλάση των  $2P_2$ -free γραφημάτων είναι tame.*

*Απόδειξη.* Προκύπτει απευθείας από το Λήμμα 3.2.  $\square$

Έχοντας τώρα όλα τα απαραίτητα συστατικά που χρειαζόμαστε μπορούμε τώρα να συνθέσουμε την απόδειξη για το Θεώρημα 3.1 .

*Απόδειξη.* Έστω  $\mathcal{F}$  είναι ένα σύνολο γραφημάτων με το πολύ τέσσερεις κορυφές έτσι ώστε  $\mathcal{F} \neq \{C_4, 4P_1\}$  και  $\mathcal{F} \neq \{C_4, 4P_1, \text{claw}\}$ . Αν  $\mathcal{F}'$  είναι μία οικογένεια γραφημάτων που ικανοποιούν μία από τις συνθήκες (1)-(6), τότε η κλάση των  $\mathcal{F}'$ -free γραφημάτων είναι tame από το Θεώρημα 3.3 και τις Προτάσεις 3.10 έως και 3.16 . Έτσι, αν  $\mathcal{F} \trianglelefteq \mathcal{F}'$  για κάποια οικογένεια γραφημάτων που ικανοποιεί μία από τις συνθήκες (1)-(6), τότε η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων, ως υποκλάση της tame κλάσης των  $\mathcal{F}'$ -free γραφημάτων, είναι επίσης tame.

Υποθέτουμε τώρα ότι για όλα τα σύνολα  $\mathcal{F}'$  στις συνθήκες (1)-(6) έχουμε  $\mathcal{F} \not\trianglelefteq \mathcal{F}'$ . Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων δεν είναι tame. Αφού  $\mathcal{F} \not\trianglelefteq \{2P_2\}$  και  $\mathcal{F} \not\trianglelefteq \{P_4\}$ , συνεπάγεται ότι αν  $H \subseteq 2P_2$  ή  $H \subseteq P_4$ , τότε  $H \notin \mathcal{F}$ . Έστω  $A = \{K_3, K_4, C_4, K_3 + P_1, \text{paw}, \text{diamond}\}$ ,  $B = \{3P_1, 4P_1, P_2 + 2P_1, P_3 + P_1, \text{claw}\}$ . Αφού η  $\mathcal{F}$  δεν περιέχει κάποιο επαγόμενο υπογράφημα  $2P_2$  ή  $P_4$ , συμπεραίνουμε ότι  $\mathcal{F} \subseteq A \cup B$ . Αφού η Πρόταση 3.7 υποδηλώνει ότι η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων δεν είναι tame αν όλα τα γραφήματα στην  $\mathcal{F}$  περιέχουν κύκλους ή όλα τους είναι άκυκλα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η  $\mathcal{F}$  περιλαμβάνει δύο γραφήματα  $H_1$  και  $H_2$  έτσι ώστε το  $H_1$  να περιέχει ένα κύκλο και το  $H_2$  να είναι άκυκλο. Προφανώς,  $H_1 \in A$  και  $H_2 \in B$ .

Ισχυριζόμαστε ότι  $\mathcal{F} \cap \{K_3, K_3 + P_1, \text{paw}\} = \emptyset$ . Πράγματι, αν  $H \in \{K_3, K_3 + P_1, \text{paw}\}$  τότε  $\{H, H_2\} \subseteq \mathcal{F}$ , το οποίο δηλώνει ότι  $\mathcal{F} \trianglelefteq \mathcal{F}'$  για  $\mathcal{F}' = \{H', H''\}$  όπου  $H' \in \{4P_1, P_2 + 2P_1, P_3 + P_1, \text{claw}\}$  και  $H'' \in \{\text{paw}, K_3 + P_1\}$ , το οποίο αντιτίθεται στην παραδοχή για την  $\mathcal{F}$ . Προκύπτει ότι  $H_1 \in \mathcal{F} \cap A \subseteq \{K_4, C_4, \text{diamond}\}$ .

Υποθέτουμε ότι  $K_4 \in \mathcal{F}$ . Αν υπάρχει ένα γράφημα  $H \in \mathcal{F} \cap \{3P_1, 4P_1, P_2 + 2P_1, P_3 + P_1\}$ , τότε  $\mathcal{F} \trianglelefteq \mathcal{F}'$  όπου η  $\mathcal{F}'$  ικανοποιεί τη συνθήκη (4), άτοπο. Έτσι έχουμε ότι  $H_2 \in \mathcal{F} \cap B \subseteq \{\text{claw}\}$ , δηλαδή το  $H_2$  είναι ένα claw. Επίσης ισχύει ότι  $\mathcal{F} \setminus \{K_4, \text{claw}\} \subseteq \{C_4, \text{diamond}\}$ . Συνεπώς,  $\{\text{claw}, K_4, C_4, \text{diamond}\} \trianglelefteq \mathcal{F}$ . Από το Πρόσχημα 3.6 , η κλάση  $\{\text{claw}, K_4, C_4, \text{diamond}\}$  δεν είναι tame και έτσι από την Παρατήρηση 3.1 , ούτε η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων είναι.

Για τη συνέχεια της απόδειξης θα θεωρούμε πως  $K_4 \notin \mathcal{F}$ . Υποθέτουμε ότι  $C_4 \in \mathcal{F}$ . Αν  $\{3P_1, P_2 + 2P_1, P_3 + P_1\} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ , τότε  $\mathcal{F} \trianglelefteq \mathcal{F}'$  όπου η  $\mathcal{F}'$  ικανοποιεί τη συνθήκη (5), άτοπο. Ακολουθεί ότι  $H_2 \in \mathcal{F} \cap B \subseteq \{4P_1, \text{claw}\}$ . Υποθέτουμε αρχικά ότι  $4P_1 \in \mathcal{F} \cap B$ . Αν το diamond δεν ανήκει στην  $\mathcal{F}$ , τότε  $\mathcal{F} \neq \{4P_1, C_4\}$  ή  $\mathcal{F} \neq \{4P_1, \text{claw}, C_4\}$ , κάτι το οποίο είναι αδύνατο. Έτσι, το diamond ανήκει στην  $\mathcal{F}$ , κι άρα έχουμε  $\{4P_1, C_4, \text{diamond}\} \subseteq \mathcal{F}$ , έτσι  $\mathcal{F} \trianglelefteq \mathcal{F}'$  όπου η  $\mathcal{F}'$  ικανοποιεί τη συνθήκη (6), άτοπο. Συμπεραίνουμε ότι  $4P_1 \notin \mathcal{F}$ , που

σημαίνει ότι  $\mathcal{F} \cap B = \{\text{claw}\}$ . Συνεπώς,  $\mathcal{F} \subseteq \{\text{claw}, \text{diamond}, C_4\}$  και άρα,  $\{\text{claw}, \text{diamond}, K_4, C_4\} \trianglelefteq \mathcal{F}$ . Από το Πρόρισμα 3.6, η κλάση  $\{\text{claw}, \text{diamond}, K_4, C_4\}$  δεν είναι tame κι έτσι από την Παρατήρηση 3.1, ούτε η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων είναι.

Τέλος, θα θεωρήσουμε ότι  $C_4 \notin \mathcal{F}$ . Ακολουθεί ότι  $H_1 \in \mathcal{F} \cap A \subseteq \{\text{diamond}\}$ , ή αλλιώς  $\mathcal{F} \cap A = \{\text{diamond}\}$ . Προφανώς,  $H_2 \in \mathcal{F} \cap B \subseteq \{3P_1, 4P_1, P_2 + 2P_1, P_3 + P_1, \text{claw}\}$ , και βλέπουμε έτσι πως κάθε γράφημα στην τομή  $\mathcal{F} \cap B$  περιέχει ένα επαγόμενο  $3P_1$  γράφημα. Συνεπώς,  $\{3P_1, \text{diamond}\} \trianglelefteq \mathcal{F}$ . Από το Πρόρισμα 3.5 προκύπτει ότι η κλάση των  $\{3P_1, \text{diamond}\}$ -free γραφημάτων δεν είναι tame και από την Παρατήρηση 3.1, ούτε η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων είναι.

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.  $\square$

Παρομοίως, αποδεικνύεται και το Θεώρημα 3.2.

*Απόδειξη.* Έστω  $\mathcal{F}$  είναι ένα σύνολο γραφημάτων με το πολύ τέσσερις κορυφές έτσι ώστε  $\mathcal{F} \neq \{C_4, 4P_1\}$  και  $\mathcal{F} \neq \{C_4, 4P_1, \text{claw}\}$ . Αν  $\mathcal{F}' \trianglelefteq \mathcal{F}$ , όπου  $\mathcal{F}'$  είναι μία οικογένεια γραφημάτων που ικανοποιούν μία από τις συνθήκες (1)-(3), τότε η κλάση των  $\mathcal{F}'$ -free γραφημάτων δεν είναι tame από τα Πορίσματα 3.5 και 3.6 καθώς και από την Πρόταση 3.7, αντίστοιχα, έτσι ώστε από την Παρατήρηση 3.1 προκύπτει ότι και η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων δεν είναι tame.

Υποθέτουμε τώρα ότι για όλες τις οικογένειες  $\mathcal{F}'$  στις συνθήκες (1) ως (3) ισχύει  $\mathcal{F}' \not\trianglelefteq \mathcal{F}$ . Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων είναι tame. Αν υπάρχει ένα γράφημα  $H \in \mathcal{F}$  που ικανοποιεί  $H \subseteq 2P_2$  ή  $H \subseteq P_4$ , η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων θα περιέχεται τότε, είτε στην κλάση των  $2P_2$ -free γραφημάτων είτε στην κλάση των  $P_4$ -free γραφημάτων και θα είναι tame από την Πρόταση 3.15 ή το Θεώρημα 3.3, αντίστοιχα.

Έστω  $A = \{K_3, C_4, K_3 + P_1, K_4, \text{paw}, \text{diamond}\}$  και  $B = \{3P_1, 4P_1, P_2 + 2P_1, P_3 + P_1, \text{claw}\}$ . Αφού η  $\mathcal{F}$  δεν περιλαμβάνει κάποιο επαγόμενο υπογράφημα  $2P_2$  ή  $P_4$ , συμπεραίνουμε ότι  $\mathcal{F} \subseteq A \cup B$ . Ισχυριζόμαστε ότι  $A \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$  και  $B \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ . Αρχικά, αν  $A \cap \mathcal{F} = \emptyset$ , τότε  $\mathcal{F} \subseteq B$  και έχουμε ότι  $\{3P_1\} \trianglelefteq \mathcal{F}$ , το οποίο δηλώνει ότι  $\mathcal{F}' \trianglelefteq \mathcal{F}$ , όπου η  $\mathcal{F}'$  ικανοποιεί τη συνθήκη (1), που οδηγεί σε άτοπο. Παρόμοια, αν  $B \cap \mathcal{F} = \emptyset$ , τότε  $\mathcal{F} \subseteq A$  και θα έχουμε ότι  $\mathcal{F}' \trianglelefteq \mathcal{F}$ , όπου η  $\mathcal{F}'$  ικανοποιεί τη συνθήκη (3), άτοπο. Άρα, έχουμε  $A \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$  και  $B \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ .

Θεωρούμε πρώτα ότι  $\mathcal{F} \cap \{K_3, K_3 + P_1, \text{paw}\} \neq \emptyset$ . Αφού  $B \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ , έχουμε ότι η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων περιέχεται σε κάποιες κλάσεις που είναι tame από τις Προτάσεις 3.10 και 3.15, κι έτσι από την Παρατήρηση 3.1 συνεπάγεται ότι είναι tame.

Συνεχίζοντας, θεωρούμε λοιπόν ότι  $\mathcal{F} \cap \{K_3, K_3 + P_1, \text{paw}\} \neq \emptyset$ . Καθώς

ισχύει ότι  $A \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ , έχουμε ότι  $\{C_4, K_4, \text{diamond}\} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ . Υποθέτουμε πως  $K_4 \in \mathcal{F}$ . Αν  $(B \setminus \{\text{claw}\}) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ , τότε η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων περιέχεται σε μία από τις tame κλάσεις που είδαμε στην Πρόταση 3.11 και άρα είναι tame από την Παρατήρηση 3.1. Συνεπώς,  $B \cap \mathcal{F} = \{\text{claw}\}$ . Αφού  $\mathcal{F} \subseteq \{C_4, K_4, \text{claw}, \text{diamond}\}$  προκύπτει ότι  $\mathcal{F}' \trianglelefteq \mathcal{F}$ , όπου η  $\mathcal{F}'$  ικανοποιεί τη συνθήκη (2), άτοπο.

Ως εκ τούτου, θεωρούμε ότι  $K_4 \notin \mathcal{F}$ . Υποθέτουμε τώρα ότι  $C_4 \in \mathcal{F}$ . Αν  $\{3P_1, P_2 + 2P_1, P_3 + P_1\} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ , τότε η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων περιέχεται είτε στην κλάση των  $\{P_2 + 2P_1, C_4\}$ -free γραφημάτων είτε στην κλάση των  $\{P_3 + P_1, C_4\}$ -free γραφημάτων και από τις Προτάσεις 3.13 και 3.12 και την Παρατήρηση 3.1 είναι tame. Κατά συνέπεια,  $\mathcal{F} \cap B \subseteq \{4P_1, \text{claw}\}$ . Θεωρούμε πρώτα ότι  $4P_1 \in \mathcal{F}$ . Επειδή  $\mathcal{F} \neq \{4P_1, C_4\}$ , θα έχουμε ότι  $\mathcal{F} \neq \{4P_1, C_4, \text{claw}\}$  και άρα το diamond είναι στην  $\mathcal{F}$ . Τότε έχουμε ότι  $\mathcal{F} \trianglelefteq \{4P_1, \text{claw}, \text{diamond}\}$  και από την Πρόταση 3.14 και την Παρατήρηση 3.1 η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων είναι tame. Αν  $4P_1 \notin \mathcal{F}$ , τότε το claw θα ανήκει στην  $\mathcal{F}$  και θα έχουμε ότι  $\mathcal{F}' \trianglelefteq \mathcal{F}$ , όπου η  $\mathcal{F}'$  ικανοποιεί τη συνθήκη (2) καταλήγοντας ξανά σε αντίφαση.

Τέλος, θεωρούμε ότι  $C_4 \notin \mathcal{F}$ . Έτσι έχουμε ότι  $\mathcal{F} \cap A \subseteq \{\text{diamond}\}$ , άρα αποτελεί και την τομή τους. Προφανώς,  $\mathcal{F} \cap B \subseteq \{3P_1, 4P_1, P_2 + 2P_1, P_3 + P_1, \text{claw}\}$ , το οποίο δηλώνει πως κάθε γράφημα στην τομή  $\mathcal{F} \cap B$  περιέχει ένα επαγόμενο  $3P_1$ . Συμπερασματικά,  $\{3P_1, \text{diamond}\} \trianglelefteq \mathcal{F}$ , και άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2. □

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΤΙΚΟΣ ΔΙΑΧΩΡΙΣΤΗΣ

Έχουμε δει ότι το πλήθος των ελαχιστοτικών διαχωριστών μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Μήπως το ίδιο συμβαίνει και με την εύρεση του μέγιστου ελαχιστοτικού διαχωριστή σε κλάσεις γραφημάτων; Εν αντιθέσει, είναι γνωστό πως το πρόβλημα αυτό είναι  $\mathcal{NP}$ -δύσκολο ακόμα και στα διμερή γραφήματα. Οι Hanaka, Kobayashi και Yagita επέκτειναν την έρευνά τους [25] σε πιο ειδικές κλάσεις γραφημάτων όπως είναι τα επίπεδα διμερή γραφήματα, τα γραμμικά και τα συμπληρωματικά των διμερών γραφημάτων που θα μελετήσουμε αναλυτικότερα. Ακόμη, έχουν αποδείξει με τη χρήση αναγωγών ότι το πρόβλημα λύνεται και πολυωνυμικά. Επιπλέον, έδωσαν και έναν αλγόριθμο που αποφασίζει εάν ένα δεδομένο γράφημα έχει μέγιστο ελαχιστοτικό διαχωριστή μεγέθους τουλάχιστον  $k$  σε χρόνο  $2^{O(k)}n^{O(1)}$ .

Πιο τυπικά το πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε σε αυτό το κεφάλαιο διατυπώνεται ως εξής:

### MAXIMUM MINIMAL SEPARATOR

**Είσοδος:** Ένα γράφημα  $G$  και ένας μη-αρνητικός ακέραιος  $k$ .

**Στόχος:** Να προσδιοριστεί εάν το  $G$  έχει ελαχιστοτικό διαχωριστή μεγέθους τουλάχιστον  $k$ .

Μερικοί ορισμοί που θα χρησιμοποιηθούν και στη συνέχεια έχουν να κάνουν με τις ιδιότητες των ελαχιστοτικών διαχωριστών. Για  $S \subseteq V$ , το ζεύγος  $(S, V \setminus S)$  ονομάζεται **τομή (cut)** του  $G$ . Το σύνολο των ακμών μεταξύ του  $S$  και  $V \setminus S$  ονομάζεται **διαχωριστικό σύνολο (cutset)** του  $(S, V \setminus S)$ . Το μέγεθος μιας τομής ορίζεται ως ο αριθμός των ακμών του διαχωριστικού της συνόλου. Όταν και τα δύο υπογραφήματα  $G[S]$  και  $G[V \setminus S]$  είναι συνεκτικά, λέμε ότι η τομή  $(S, V \setminus S)$  είναι συνεκτική.

Κεφάλαιο 4.1. Πολυωνυμική επίλυση του προβλήματος σε κλάσεις γραφημάτων

## 4.1 Πολυωνυμική επίλυση του προβλήματος σε κλάσεις γραφημάτων

### 4.1.1 Επίπεδα διμερή γραφήματα

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε το Θεώρημα 4.1 μίας πολυωνυμικού χρόνου αναγωγής από το πρόβλημα εύρεσης CONNECTED MAXIMUM CUT στα επίπεδα γραφήματα, το οποίο είναι γνωστό ότι είναι  $\mathcal{NP}$ -πλήρες [23].

**Θεώρημα 4.1** ([25]). *Το MAXIMUM MINIMAL SEPARATOR είναι  $\mathcal{NP}$ -πλήρες και για υποκυβικά επίπεδα διμερή γραφήματα.*

Δεδομένου ενός γραφήματος  $G = (V, E)$ , ο σκοπός είναι να βρεθεί μια διαμέριση  $(S, V \setminus S)$  του συνόλου κορυφών  $V$  που να μεγιστοποιεί το μέγεθος των ακμών μεταξύ των  $S$  και  $V \setminus S$ . Είναι απαραίτητη όμως μία προϋπόθεση συνεκτικότητας: και τα δύο υπογραφήματα  $G[S]$  και  $G[V \setminus S]$  πρέπει να είναι συνεκτικά. Διαφορετικά αν δεν λάβουμε υπόψη την προϋπόθεση το πρόβλημα συμπίπτει με το γνωστό πρόβλημα MAXIMUM CUT.

Έστω  $G = (V, E)$  ένα επίπεδο κυβικό γράφημα. Υποδιαιρούμε κάθε ακμή  $e$  μία φορά εισάγοντας μια νέα κορυφή  $v_e$  και δημιουργούμε έτσι το νέο γράφημα  $G'$  που είναι επίπεδο υποκυβικό. Επίσης, το  $G'$  είναι διμερές για τον λόγο ότι οι νέες κορυφές που προσθέσαμε είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Η κατασκευή του  $G'$  γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο οπότε μέσω του παρακάτω λήμματος θα προκύψει το Θεώρημα 4.1 .

**Λήμμα 4.1.** *Το  $G$  έχει συνεκτική τομή μεγέθους τουλάχιστον  $k$  αν και μόνο εάν το  $G'$  έχει ελαχιστοτικό διαχωριστή μεγέθους τουλάχιστον  $k$ .*

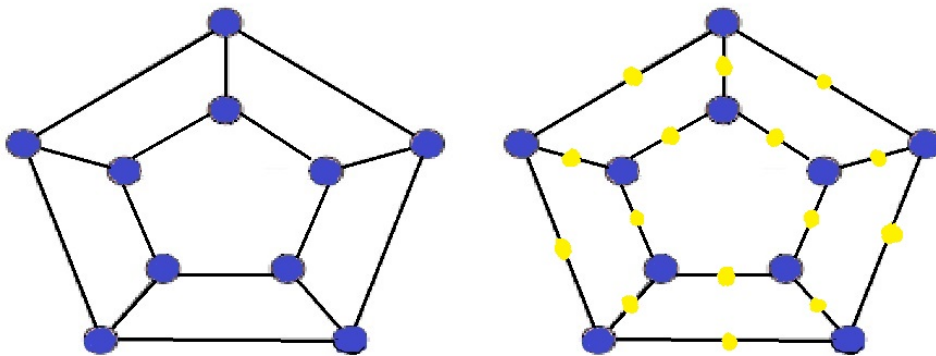
*Απόδειξη.* Για να αποδείξουμε τη μία κατεύθυνση υποθέτουμε αρχικά ότι το  $G$  έχει συνεκτική τομή  $(S, V \setminus S)$  μεγέθους τουλάχιστον  $k$ . Έστω  $F$  να είναι το διαχωριστικό σύνολο του  $(S, V \setminus S)$  και έστω  $U = \{v_e : e \in F\}$ . Αφού το σύνολο  $U$  διαχωρίζει τα  $S$  και  $V \setminus S$  στο  $G'$ , κάθε κορυφή στο  $U$  είναι γειτονική με τις κορυφές στο  $S$  και στο  $V \setminus S$ . Από αυτό προκύπτει ότι το σύνολο  $U$  είναι ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής του  $G'$  μεγέθους τουλάχιστον  $k$ .

Αντίθετα, έστω  $U$  να είναι ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής του  $G'$ . Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το  $U$  περιλαμβάνει μόνο τις νέες κορυφές  $v_e$  που προκύπτουν από την υποδιαίρεση κάθε ακμής  $e$ . Για να το ελέγξουμε αυτό, ας σκεφτούμε μια κορυφή  $v \in U$  που να είναι μία από τις κορυφές του  $G$ . Κανένας γείτονας της  $v$  δεν είναι στο  $U$  λόγω της ελαχιστοτικότητας του. Κι αφού είναι ελαχιστοτικός



#### Κεφάλαιο 4.1. Πολυωνυμική επίλυση του προβλήματος σε κλάσεις γραφημάτων

διαχωριστής του  $G'$  υπάρχουν δύο πλήρεις συνιστώσες  $C_1$  και  $C_2$  που σχετίζονται με το  $U$ . Αφού η  $v$  έχει βαθμό τρία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η  $v$  έχει ακριβώς ένα γείτονα  $v_e$  στη  $C_1$  και τουλάχιστον ένα στη  $C_2$ . Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο πλήρεις συνιστώσες που σχετίζονται με το  $U \setminus \{v\} \cup \{v_e\}$ : η μία είναι η  $C_1 \setminus \{v_e\}$  και η άλλη είναι η  $C = C_2 \cup \{v\}$ , αφού για τη δεύτερη ισχύει ότι  $N_{G'}(C) = U$  και η  $v$  είναι γειτονική με την  $v_e$ . Έτσι βλέπουμε πως το  $U$  είναι ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής που περιλαμβάνει όλες τις νέες κορυφές  $v_e$  επαναλαμβάνοντας την πιο πάνω διαδικασία. Αφού κάθε κορυφή στο  $U$  έχει βαθμό δύο, υπάρχουν μόνο δύο πλήρεις συνιστώσες  $C_1$  και  $C_2$  που σχετίζονται με το  $U$ . Τώρα, για κάθε κορυφή  $v_e \in U$  παίρνουμε μία ακμή  $e$  και τις ακμές μεταξύ των  $C_1 \cap V$  και  $C_2 \cap V$  στο  $G$ . Αφού τα σύνολα  $C_1 \cap V$  και  $C_2 \cap V$  είναι συνεκτικά το λήμμα αποδεικνύεται.  $\square$



Σχήμα 4.1: Αριστερά το γράφημα  $G$  και δεξιά το  $G'$  με τις επιπρόσθετες κορυφές.

#### 4.1.2 Συμπληρωματικά διμερή γραφήματα

Ακολούθως, θα εξετάσουμε το Θεώρημα 4.2 για τα συμπληρωματικά διμερή γραφήματα. Να υπενθυμίσουμε πως όταν έχουμε δύο ανεξάρτητα σύνολα κορυφών  $A$  και  $B$  και υπάρχουν ακμές από το  $A$  στο  $B$  τότε δημιουργούμε ένα διμερές γράφημα. Για να πάρουμε το συμπλήρωμά του αφαιρούμε τις ακμές του αρχικού γραφήματος και προσθέτουμε ακμές μεταξύ όλων των κορυφών που προηγουμένως δεν συνδέονταν. Δηλαδή τα σύνολα  $A$  και  $B$  πλέον γίνονται κλίκες και υπάρχουν και κάποιες ακμές μεταξύ τους που στο αρχικό γράφημα δεν υπήρχαν.

**Θεώρημα 4.2** ([25]). Το MAXIMUM MINIMAL SEPARATOR είναι  $\mathcal{NP}$ -πλήρες και για τα συμπληρωματικά των διμερών γραφημάτων.

#### Κεφάλαιο 4.1. Πολυωνυμική επίλυση του προβλήματος σε κλάσεις γραφημάτων

Εδώ η αναγωγή θα γίνει με τη χρήση του προβλήματος εύρεσης MINIMUM INDEPENDENT DOMINATING SET (βλέπε Ενότητα 4.3 ) στα διμερή γραφήματα το οποίο έχειδειχθεί ότι είναι  $\mathcal{NP}$ -δύσκολο [16, 33]. Σε αυτό το πρόβλημα, δεδομένου ενός διμερούς γραφήματος  $G = (A \cup B, E)$  σκοπός είναι να βρεθεί η ελάχιστη πληθικότητα των μεγιστοτικών ανεξάρτητων συνόλων του  $G$ . Οπότε για την αναγωγή δεδομένου ενός στιγμιότυπου  $G$  του MINIMUM INDEPENDENT DOMINATING SET παίρνουμε το συμπλήρωμα του  $G' = (A \cup B, (A \times B) \setminus E)$ . Για να δείξουμε βέβαια την αναγωγή χρειάζεται πρώτα να αναφέρουμε ένα ενδιάμεσο αποτέλεσμα.

**Λήμμα 4.2.** *Το πρόβλημα εύρεσης MINIMUM MAXIMAL BICLIQUE (πλήρων διμερών γραφημάτων) είναι  $\mathcal{NP}$ -δύσκολο.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι  $G'' = (A \cup B, E)$  είναι το συμπλήρωμα του  $G'$ . Υποθέτουμε ότι το  $G'$  δεν έχει κορυφή  $v \in A$  με  $N(v) = B$  και  $v \in B$  με  $N(v) = A$  αφού τέτοια κορυφή ανήκει πάντα σε κάθε μεγιστοτικό πλήρες διμερές υπογράφημα του  $G'$ . Επίσης υποθέτουμε ότι το  $G'$  δεν έχει απομονωμένες κορυφές.  $\square$

**Λήμμα 4.3.** *Έστω υποσύνολο κορυφών  $U \subseteq A \cup B$ . Τότε το  $U$  είναι ένα μεγιστοτικό πλήρες διμερές υπογράφημα του  $G'$  που περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή από το  $A$  και μία από το  $B$  αν και μόνο εάν το σύνολο των κορυφών  $(A \cup B) \setminus U$  αποτελεί ένα ελάχιστο διαχωριστή στο  $G''$ .*

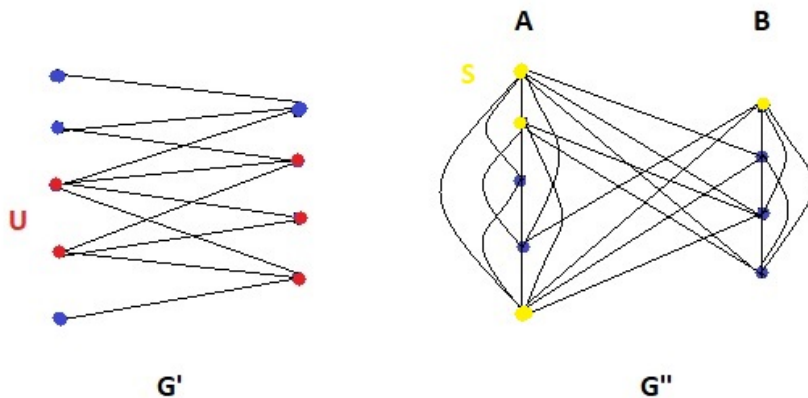
*Απόδειξη.* Επιλέγουμε αρχικά ένα μεγιστοτικό πλήρες διμερές υπογράφημα  $U$  του  $G'$  με  $A \cap U \neq \emptyset$  και  $B \cap U \neq \emptyset$ . Τότε στο συμπλήρωμα  $G''$  δεν θα υπάρχουν αυτές οι ακμές μεταξύ των  $A \cap U$  και  $B \cap U$ . Βλέπουμε ότι το  $G''$  χωρίζεται σε δύο ακριβώς συνιστώσες αφού οι κορυφές που δεν ανήκουν στο  $U$ , δηλαδή το σύνολο  $(A \cup B) \setminus U$  είναι ένας διαχωριστής που διαχωρίζει τα  $A \cap U$  και  $B \cap U$ . Ισχυριζόμαστε πως τα σύνολα αυτά είναι πλήρεις συνιστώσες που σχετίζονται με το  $(A \cup B) \setminus U$ . Για να το εξετάσουμε αυτό ας πάρουμε μία κορυφή  $v \in A \setminus U$  η οποία θα έχει γείτονες όλες τις κορυφές του  $A$  μιας και το σύνολο αυτό στο  $G''$  αποτελεί μία κλίκα. Επιπλέον, υπάρχει κορυφή  $b \in B \cap U$  γειτονική με την  $v$  αφού διαφορετικά θα μπορούσαμε να προσθέσουμε την  $v$  στο  $U$  και να δημιουργήσουμε ένα πλήρες διμερές  $U \cup \{b\}$  στο  $G'$  κάτι το οποίο αντιτίθεται στη μεγιστοτικότητα του  $U$ . Έτσι, η  $v$  έχει γείτονα και στο  $A \cap U$  και στο  $B \cap U$  και άρα τα  $A \cap U$  και  $B \cap U$  είναι πλήρεις συνιστώσες που σχετίζονται με το  $(A \cup B) \setminus U$ .

Αντίθετα, έστω  $S = (A \cup B) \setminus U$  ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής του  $G''$ . Παρατηρούμε πρώτα ότι το  $(A \cup B) \setminus S$  περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή από το  $A$  και τουλάχιστον μία από το  $B$ . Αφού το  $S$  είναι διαχωριστής αυτό σημαίνει πως δεν υπάρχουν ακμές μεταξύ των  $A \setminus S$  και  $B \setminus S$ , κι έτσι το  $(A \cup B) \setminus S$

#### Κεφάλαιο 4.1. Πολυωνυμική επίλυση του προβλήματος σε κλάσεις γραφημάτων

είναι ένα πλήρες διμερές υπογράφημα στο  $G'$ . Επιπρόσθετα, κάθε  $v \in S$  έχει γείτονα και στα δύο σύνολα  $A \setminus S$  και  $B \setminus S$  στο  $G''$ , το οποίο σημαίνει πως το σύνολο  $((A \cup B) \setminus S) \cup \{v\}$  δεν αποτελεί ένα πλήρες διμερές υπογράφημα στο  $G'$ . Συνεπώς, το σύνολο  $(A \cup B) \setminus S = U$  είναι ένα μεγιστοτικό πλήρες διμερές υπογράφημα του  $G'$ .  $\square$

Στο Σχήμα 4.2 θα δούμε ένα παράδειγμα σχετικά με την προηγούμενη απόδειξη όπου μπορούμε να διακρίνουμε το πλήρες διμερές υπογράφημα  $U$  στο  $G'$  (κόκκινες κορυφές αριστερά) και τον ελαχιστοτικό διαχωριστή  $S$  του  $G''$  (κίτρινες κορυφές δεξιά).



Σχήμα 4.2: Αριστερά το διμερές  $G'$  και δεξιά το συμπλήρωμα του  $G''$ .

#### 4.1.3 Γραμμικά γραφήματα

Έστω  $G = (V, E)$  είναι ένα συνεκτικό γράφημα και  $G' = (V_E = \{v_e : e \in E\}, F)$  είναι το γραμμικό του γράφημα.

**Λήμμα 4.4.** Το  $G$  έχει μία μη-τετριμμένη συνεκτική τομή  $(S, V \setminus S)$  μεγέθους τουλάχιστον  $k$  αν και μόνο εάν το  $G'$  έχει ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή μεγέθους τουλάχιστον  $k$ .

*Απόδειξη.* Αν η τομή  $(S, V \setminus S)$  που θα παίρναμε άφηγε και στις δύο συνεκτικές συνιστώσες  $G[S]$  και  $G[V \setminus S]$  το πολύ από δύο κορυφές τότε θα είχαμε την τετριμμένη περίπτωση. Άρα υποθέτουμε ότι το σύνολο κορυφών  $V$  διαμερίζεται σε

#### Κεφάλαιο 4.1. Πολυωνυμική επίλυση του προβλήματος σε κλάσεις γραφημάτων

δύο συνιστώσες που είναι συνεκτικές και με περισσότερες από δύο κορυφές στην κάθε μία. Έστω  $F$  το σύνολο των ακμών μεταξύ των  $S$  και  $V \setminus S$ . Ισχυριζόμαστε πως το σύνολο κορυφών  $V_F = \{v_e : e \in F\}$  που αντιστοιχεί στο  $F$  αποτελεί ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή στο  $G'$ . Για να το αποδείξουμε αυτό υποθέτουμε μια κορυφή  $v_e \in V_F$ . Έστω  $E_1$  και  $E_2$  να είναι τα σύνολα των ακμών του  $G[S]$  και  $G[V \setminus S]$  αντίστοιχα. Από τη συνεκτικότητα των  $G[S]$  και  $G[V \setminus S]$  έχουμε ότι και τα σύνολα κορυφών  $C_1 = \{v_e \in V_E : e \in E_1\}$  και  $C_2 = \{v_e \in V_E : e \in E_2\}$  είναι συνεκτικά στο  $G'$ . Επιπλέον, δεν υπάρχουν ακμές μεταξύ τους κι έτσι συμπεραίνουμε πως το  $V_F$  διαχωρίζει τα  $C_1$  και  $C_2$ . Τώρα, γνωρίζουμε πως και τα δύο σύνολα  $E_1$  και  $E_2$  είναι μη-κενά, κι αυτό μας λέει πως υπάρχει τουλάχιστον μία ακμή σε κάθε σύνολο που προσπίπτει με την  $e \in F$ . Αυτό σημαίνει πως η κορυφή  $v_e$  έχει από ένα γείτονα στα  $C_1$  και  $C_2$ . Άρα, τα  $C_1$  και  $C_2$  είναι πλήρεις συνιστώσες που σχετίζονται με το  $V_F$ .

Για την αντίθετη περίπτωση της απόδειξης, έστω ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής  $S$  του  $G'$  μεγέθους τουλάχιστον  $k$ . Θα δείξουμε πρώτα ότι το υπογράφημα  $G'[V \setminus S]$  έχει ακριβώς δύο συνιστώσες. Αρχικά, θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι κάθε γραμμικό γράφημα είναι claw-free, άρα και το  $G'$ . Μπορούμε επίσης να το αποδείξουμε καταλήγοντας εις άτοπο αν υποθέσουμε ότι το  $G'[V \setminus S]$  έχει τουλάχιστον τρεις συνιστώσες  $C_1, C_2, C_3$ . Καθώς ο  $S$  είναι ελαχιστοτικός διαχωριστής μπορούμε να πούμε ότι οι  $C_1, C_2$  είναι πλήρεις συνιστώσες που σχετίζονται με το  $S$ . Έστω μια κορυφή  $v_3 \in C_3$  που έχει ένα γείτονα  $w \in S$ . Επίσης, η  $w$  έχει ένα γείτονα  $v_1 \in C_1$  και ένα  $v_2 \in C_2$ . Έτσι οι τέσσερις κορυφές  $v_1, v_2, v_3, w$  σχηματίζουν ένα claw στο  $G'$ , άτοπο. Συνεπώς, το  $S$  χωρίζει το  $G'$  σε ακριβώς δύο συνιστώσες  $C_1$  και  $C_2$  οι οποίες είναι και οι δύο πλήρεις συνιστώσες που σχετίζονται με το  $S$ .

Έστω τώρα  $V_1$  και  $V_2$  τα σύνολα των κορυφών του  $G$  που αντιστοιχούν στις ακμές των  $E_1 = \{e \in E : v_e \in C_1\}$  και  $E_2 = \{e \in E : v_e \in C_2\}$  αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι τα σύνολα  $V_1$  και  $V_2$  είναι ξένα μεταξύ τους, αφού διαφορετικά δύο ακμές  $e_1 \in E_1$  και  $e_2 \in E_2$  θα προσέπιπταν στην ίδια κορυφή  $v \in V_1 \cap V_2$ , κάτι το οποίο δεν γίνεται γιατί οι κορυφές  $v_{e_1}, v_{e_2}$  θα ήταν γειτονικές στο  $G'$ . Επιπλέον, αν μια κορυφή  $v \in V$  δεν ανήκει στο  $V_1 \cup V_2$ , τότε κάθε κορυφή που αντιστοιχεί σε μια ακμή προσπίπτουσα στην  $v$  ανήκει στο  $S$ , κάτι το οποίο αντιτίθεται στο γεγονός ότι τα  $C_1$  και  $C_2$  είναι πλήρεις συνιστώσες που σχετίζονται με το  $S$ . Έτσι το ζεύγος  $(V_1, V_2)$  είναι μια διαμέριση του συνόλου κορυφών  $V$ .

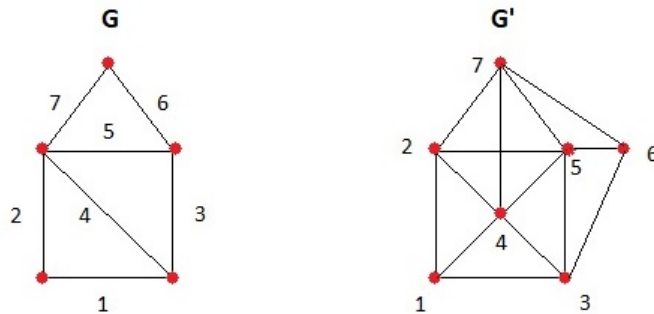
Μας μένει να εξετάσουμε τη συνεκτικότητα του  $V_1$  (και  $V_2$ ). Ας υποθέσουμε ένα αυθαίρετο ζεύγος κορυφών  $u, v \in V_1$ . Από τον ορισμό του  $V_1$ , κάθε κορυφή του έχει τουλάχιστον μία ακμή στο  $E_1$  που να προσπίπτει σε αυτή. Έστω  $e_v$  και  $e_u$  δύο ακμές στο  $E_1$  που προσπίπτουν στις  $v$  και  $u$  αντίστοιχα. Καθώς η  $C_1$  είναι μία συνεκτική συνιστώσα του  $G'$ , υπάρχει μονοπάτι μεταξύ των κορυφών

Κεφάλαιο 4.1. Πολυωνυμική επίλυση του προβλήματος σε κλάσεις γραφημάτων

που αντιστοιχούν στις  $e_v$  και  $e_u$  στο  $G'$ . Επομένως, τόσο το  $V_1$  όσο και το  $V_2$  είναι συνεκτικά και άρα το  $(V_1, V_2)$  είναι μια συνεκτική τομή του  $G$ .

Εν τέλει, αν υπάρχει μία ακμή  $e$  μεταξύ των συνόλων  $V_1$  και  $V_2$ , τότε η κορυφή  $v_e$  ανήκει στο  $S$  κι έτσι έχουμε πως το μέγεθος της τομής  $(V_1, V_2)$  είναι ακριβώς  $|S|$ .  $\square$

Πιο κάτω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα για καλύτερη κατανόηση της απόδειξης. Βλέπουμε στο Σχήμα 4.3 ένα γράφημα  $G$  με επτά ακμές και δίπλα το γραμμικό του γράφημα  $G'$  με επτά κορυφές. Έστω ότι για  $k = 3$  θέλουμε να δείξουμε πως αν βρούμε μία συνεκτική τομή  $(S, V \setminus S)$  στο  $G$  μεγέθους τουλάχιστον 3, τότε στο  $G'$  θα υπάρχει ελαχιστοτικός διαχωριστής  $S$  με  $|S| \geq 3$ . Μπορούμε να βρούμε μία συνεκτική τομή μεγέθους 3 για το  $G$  με διαχωριστικό σύνολο το  $F = \{2, 3, 4\}$ . Έτσι στο  $G$  έχουμε τα  $E_1 = \{5, 6, 7\}$  και  $E_2 = \{1\}$ . Βλέπουμε πως στο  $G'$  το σύνολο κορυφών  $\{2, 3, 4\}$  αποτελεί ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή  $V_F$  μεγέθους 3 και διαμερίζει το γράφημα σε δύο πλήρεις συνιστώσες  $C_1 = \{5, 6, 7\}$  και  $C_2 = \{1\}$  που σχετίζονται με το  $V_F$ . Εύκολα μπορεί ο αναγνώστης να εξετάσει και την αντίθετη πλευρά της απόδειξης.



Σχήμα 4.3: Ένα συνεκτικό γράφημα  $G$  και το γραμμικό του γράφημα  $G'$ .

Έστω ένα γράφημα  $G = (V, E)$ . Κατασκευάζουμε το  $G_1 = (V_1, E_1)$  προσθέτοντας σε κάθε κορυφή του αρχικού από μία νέα κορυφή ως φύλλο. Εφαρμόζουμε αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου από το πρόβλημα CONNECTED MAXIMUM CUT το οποίο γνωρίζουμε ότι είναι  $\mathcal{NP}$ -δύσκολο [23] στο δικό μας πρόβλημα MAXIMUM MINIMAL SEPARATOR.

Ισχυριζόμαστε πως το  $G$  έχει συνεκτική τομή μεγέθους τουλάχιστον  $k > 1$  αν και μόνο εάν το  $G_1$  έχει μη-τετριμμένη συνεκτική τομή μεγέθους τουλάχιστον  $k > 1$ . Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε μία συνεκτική τομή  $(S, V_1 \setminus S)$  του  $G_1$ . Παρατηρούμε ότι για κάθε  $v \in V$ , η κορυφή  $v$  και το φύλλο της δεν διαχωρίζονται στην τομή. Αυτό προκύπτει από τη συνεκτικότητα των υπογραφημάτων  $G[S]$  και

$G[V_1, S]$ . Ακόμα, το πρόβλημα παραμένει  $\mathcal{NP}$ -δύσκολο ακόμα κι αν περιοριστούμε στο να βρούμε μία βέλτιστη μη-τετριμμένη τομή. Έτσι με τη χρήση του Λήμματος 4.4 προκύπτει το Θεώρημα 4.3 .

**Θεώρημα 4.3** ([25]). Το MAXIMUM MINIMAL SEPARATOR είναι  $\mathcal{NP}$ -πλήρες και για τα γραμμικά γραφήματα.

## 4.2 FPT αλγόριθμος

Κάνοντας χρήση της τεχνικής δεντρικής διάσπασης θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια τον πιο πρόσφατο αλγόριθμο της κλάσης FPT για το πρόβλημα MAXIMUM MINIMAL SEPARATOR. Εκτελείται σε χρόνο  $2^{O(k)}n^{O(1)}$  ΓΙΑ να δώσει μία καταφατική απάντηση στο πρόβλημα και μπορεί ακόμη να υπολογίσει ένα τέτοιο ελαχιστοτικό διαχωριστή. Πριν εξηγήσουμε όμως τον αλγόριθμο χρειάζεται πρώτα να δώσουμε μερικούς ορισμούς και κάποια γνωστά αποτελέσματα.

**Ορισμός 4.1** ([3]). Ένα **tree decomposition** του  $G = (V, E)$  είναι ένα δέντρο  $T$  με σύνολο κόμβων  $I$  και κάθε κόμβος  $i \in I$  ανήκει σε κάποιο υποσύνολο  $X_i$  του  $V$ , που ονομάζεται **ομάδα (bag)** τέτοια ώστε:

1.  $\bigcup (X_i : i \in I) = V(G)$ ,
2. κάθε ακμή του  $G$  έχει και τα δύο της άκρα σε κάποιο  $X_i$  ( $i \in I$ ),
3. για κάθε  $i, j, l \in I$ , εάν το  $l$  βρίσκεται στο μονοπάτι μεταξύ των  $i$  και  $j$  στο  $T$  τότε ισχύει  $X_i \cap X_j \subseteq X_l$ .

Συμβολίζεται ως ζεύγος  $(\{X_i : i \in I\}, T = (I, F))$ . Το **πλάτος (width)** του **tree decomposition** του  $G$  είναι ίσο με το  $\max\{|X_i| - 1 : i \in I\}$ . Επίσης το **δεντροπλάτος (treewidth)** του  $G$  είναι το μικρότερο πλάτος από όλα τα **tree decompositions** του  $G$ .

Έστω ένα γράφημα  $G = (V, E)$  και  $S$  ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής του  $G$ . Έστω  $C$  μια συνιστώσα (όχι απαραίτητα πλήρης) που σχετίζεται με το  $S$ . Με  $G(C, S)$  θα εννοούμε το γράφημα που προκύπτει από το  $G[C \cup S]$  μετατρέποντας το  $S$  σε κλίκα.

**Λήμμα 4.5** (Λήμμα 5 στο [47]). Έστω  $S'$  ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής του  $G(C, S)$ . Τότε, είναι και ελαχιστοτικός διαχωριστής του  $G$ .

Ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής του  $G$  λέγεται *clique minimal separator* εάν σχηματίζει επαγόμενη κλίκα στο  $G$ .

**Λήμμα 4.6** (Ιδιότητα 3.2 στο [4]). Έστω  $S$  *clique minimal separator* του  $G$  και  $C$  είναι μια πλήρης συνιστώσα που σχετίζεται με το  $S$ . Τότε κάθε ελαχιστοτικός διαχωριστής εκτός από τον  $S$  είναι ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής του  $G[C \cup S]$  ή του  $G[V \setminus C]$ .

**Θεώρημα 4.4** (Πόρισμα 4.14 στο [24]). Δεδομένου ενός *tree decomposition* του  $G$  πλάτους  $w$ , μπορεί να βρεθεί ελαχιστοτικός διαχωριστής μέγιστης πληθικότητας του  $G$  σε χρόνο  $2^{O(w)}n^{O(1)}$  εάν υπάρχει.

Είναι γνωστό ότι οι ελαχιστοτικοί διαχωριστές συνδέονται αρκετά με τα *tree decompositions*. Εμείς ψάχνουμε ένα μεγάλο ελαχιστοτικό διαχωριστή με τουλάχιστον  $k$  κορυφές κι όχι απαραίτητα τον μεγαλύτερο. Συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος βασίζεται στη γνωστή αναδρομική κατασκευή ενός *tree decomposition* με τη χρήση ελαχιστοτικών διαχωριστών. Οπότε η βασική ιδέα για να βρούμε ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή  $S$  του  $G$  σε πολυωνυμικό χρόνο είναι να πάρουμε ένα αυθαίρετο διαχωριστή και να του αφαιρούμε κορυφές μέχρι να γίνει ελαχιστοτικός.

**Θεώρημα 4.5** (Θεώρημα 4 στο [25]). Υπάρχει αλγόριθμος που επιλύει το πρόβλημα MAXIMUM MINIMAL SEPARATOR με χρόνο εκτέλεσης  $2^{O(k)}n^{O(1)}$ .

Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας είναι πιθανό να προκύψουν τρεις περιπτώσεις οι οποίες περιγράφονται στον αλγόριθμο FINDSEP  $(G, S, k)$  όπως θα ακολουθήσει παρακάτω. Αν το μέγεθος του  $S$  είναι τουλάχιστον  $k$ , τότε τελειώσαμε. Στη δεύτερη περίπτωση, έστω  $C_1, C_2, \dots, C_t$  οι συνιστώσες του  $G[V \setminus S]$ . Καλούμε αναδρομικά τη διαδικασία στα  $G(C_i, S)$  για κάθε  $C_i$ . Ο λόγος που κάνουμε τον  $S$  κλίκα είναι για να μη βρεθούν μικρότεροι διαχωριστές. Από την αναδρομή αυτή μπορεί να βρεθεί ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής μεγέθους τουλάχιστον  $k$  ή ένα *tree decomposition* πλάτους το πολύ  $k$ . Έτσι, μπορούμε να επιλύσουμε το πρόβλημα είτε με τη χρήση του Λήμματος 4.5 είτε με το Θεώρημα 4.4. Ωστόσο, υπάρχει και η περίπτωση ο αλγόριθμος να αποτύχει να βρει ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή αφού τα  $G(C_i, S)$  μπορούν να σχηματίσουν κλίκα απ' τη στιγμή που προσθέτουμε συνεχώς ακμές ακόμα κι αν τα υπογραφήματα  $G[C_i \cup S]$  δεν είναι κλίκες στο αρχικό γράφημα. Βέβαια, αν αυτές οι κλίκες που θα σχηματιστούν είναι όλες μικρού μεγέθους, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα *tree decomposition* μικρού πλάτους. Διαφορετικά, από τις μεγάλες κλίκες που θα σχηματιστούν μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα μεγάλο ελαχιστοτικό διαχωριστή ή σε ένα *clique minimal separator* του αρχικού γραφήματος  $G$ . Και τελικώς, από το Λήμμα 4.6

μπορούμε να αποσυνθέσουμε το  $G$  σε δύο ή περισσότερα υπογράφημα από τον clique minimal separator.

Για να περιγράψουμε τον αλγόριθμο χρειαζόμαστε ένα γράφημα  $G = (V, E)$  κι ένα ακέραιο αριθμό  $k$  για την είσοδο. Χωρίς απώλεια της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το  $G$  δεν είναι πλήρες γράφημα, αφού τα πλήρη γραφήματα δεν μπορούν να έχουν ελαχιστοτικούς διαχωριστές.

---

**Αλγόριθμος 2** FPT Αλγόριθμος για το πρόβλημα υπολογισμού του Μέγιστου Ελαχιστοτικού Διαχωριστή.

---

FINDSEP ( $H = (U, F), S, k$ )

Είσοδος:  $S \subseteq U$  και  $|S| < k$ .

1. Αν το γράφημα  $H$  έχει λιγότερες από  $2k - 1$  κορυφές, δεν μπορούμε να κάνουμε τίποτα.
  2. Διαφορετικά, βρίσκουμε ένα αυθαίρετο ελαχιστοτικό διαχωριστή  $S'$  του  $H$ .
    - I Αν βρεθεί ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής  $S'$  και ισχύει  $|S'| \geq k$ , ο αλγόριθμος απαντάει καταφατικά και τερματίζει.
    - II Αν βρεθεί ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής  $S'$  και ισχύει  $|S'| < k$ , εκτελείται ο αλγόριθμος FINDSEP ( $H(C_i, S'), S', k$ ) για κάθε συνεκτική συνιστώσα  $C_i$  του  $H[U \setminus S']$ .
    - III Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει κανένας (ελαχιστοτικός) διαχωριστής στο  $H$  (π.χ. όταν το  $H$  είναι ένα πλήρες γράφημα).
      - i. Αν το σύνολο  $U$  δεν περιέχει κλίκα στο αρχικό γράφημα  $G$ , ο αλγόριθμος απαντάει καταφατικά και τερματίζει.
      - ii. Υποθέτουμε ότι το σύνολο  $U$  περιέχει κλίκα στο αρχικό γράφημα  $G$ . Έστω  $C$  είναι μία συνεκτική συνιστώσα του  $G[V \setminus S]$ . Τότε, ο αλγόριθμος στην έξοδο θα δώσει τα  $G[C \cup S]$  και  $G[V \setminus C]$ .
- 

**Λήμμα 4.7** ([9]). Έστω  $T$  να είναι ένα tree decomposition του  $G$ . Τότε για κάθε κλίκα  $K$  στο  $G$ , υπάρχει ομάδα στο  $T$  που περιέχει το  $K$ .

Πάμε να δούμε πως κατασκευάζεται ένα tree decomposition του  $H$ . Θα εξηγήσουμε τον αλγόριθμο βήμα βήμα για να τον κατανοήσουμε καλύτερα.



**Επεξήγηση αλγορίθμου**

(1) Αν το  $H$  έχει το πολύ  $2k - 1$  κορυφές, παίρνουμε ως έξοδο μια ομάδα με όλες τις κορυφές του  $H$ .

(2 II) Αλλιώς μπορούμε να βρούμε ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή  $S'$  μεγέθους το πολύ  $k - 1$ . Επαγωγικά σε κάθε γράφημα  $H(C_i, S')$  βρίσκουμε ένα tree decomposition  $T_i$  πλάτους το πολύ  $2k - 2$ . Από Λήμμα 4.7 κάθε  $T_i$  έχει μια ομάδα  $B_i$  που περιέχει όλο το  $S'$ . Εισάγουμε μια νέα ομάδα  $S''$  και κατασκευάζουμε ένα tree decomposition συνδέοντας τα  $B_i$  με την  $S''$  για κάθε  $T_i$ . Καθώς  $|S''| < k$ , η παραγόμενη decomposition έχει κι αυτή πλάτος το πολύ  $2k - 2$ . Από το Θεώρημα 4.4 μπορούμε να βρούμε τον μεγαλύτερο ελαχιστοτικό διαχωριστή του  $G$ .

(2 III) Υποθέτουμε ότι το  $H$  είναι ένα πλήρες γράφημα που λαμβάνεται από την εκτέλεση της διαδικασίας. Έστω  $K$  το σύνολο κορυφών του  $H$  για το οποίο ισχύει  $|K| \geq 2k$ . Επειδή προσθέτουμε ακμές μπορούν να σχηματιστούν κλίκες που δεν υπήρχαν στο αρχικό γράφημα.

(2 III i.) Αν το  $K$  δεν είναι κλίκα στο  $G$  μπορεί πάντα να βρεθεί ένας μεγάλος ελαχιστοτικός διαχωριστής στο  $K$ . Το Λήμμα 4.8 μας εξηγεί γιατί ο αλγόριθμος απαντά καταφατικά σε αυτό το βήμα.

**Λήμμα 4.8** ([25]). *Αν το  $G[K]$  δεν είναι κλίκα, το  $K$  περιέχει ελαχιστοτικό διαχωριστή του  $G$  μεγέθους τουλάχιστον  $k$ .*

*Απόδειξη.* Για την απόδειξη θα χρειαστεί να κατασκευάσουμε ένα δέντρο αναζήτησης με ρίζα  $G_0 = G$ . Κάθε φορά που προσθέτουμε ακμές τα ενδιάμεσα γραφήματα που δημιουργούνται θα είναι τα  $G_j = G_{j-1}(C_{j-1}, S_{j-1})$  μέχρι να καταλήξουμε σε ένα πλήρες γράφημα που θα είναι το φύλλο  $G_m = H$ . Έστω  $1 \leq j < m$  είναι ο μέγιστος δείκτης τέτοιος ώστε το  $G_j[K]$  υπογράφημα να μην είναι κλίκα. Έστω  $u$  και  $v$  οι κορυφές που δεν συνδέονται στο  $G_j[K]$ , άρα πρέπει να είναι στο  $S_j$ . Στο αμέσως επόμενο γράφημα  $G_{j+1} = G_j(C_j, S_j)$  που θα 'ναι και το τελικό, δηλαδή το  $H$ , οι  $u$  και  $v$  θα ενωθούν και άρα το  $K$  είναι κλίκα στο  $G_{j+1}$ . Συνεπώς, κάθε κορυφή του  $K \setminus S_j$  είναι γειτονική και στην  $u$  και στην  $v$ . Αν το  $S_j$  έχει περισσότερες από  $k$  κορυφές η διαδικασία τερματίζει. Αν όχι, αυτό σημαίνει ότι οι  $u$  και  $v$  έχουν τουλάχιστον  $k$  κοινούς γείτονες στο  $G_j$ . Αφού κάθε ελαχιστοτικός  $u, v$ -διαχωριστής πρέπει να περιέχει όλους τους κοινούς γείτονες τους, το  $G_j$  περιέχει ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή μεγέθους τουλάχιστον  $k$ . Από το Λήμμα 4.5, έχουμε ότι το  $G_i$  έχει ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή μεγέθους τουλάχιστον  $k$  για όλα τα  $0 \leq i \leq j$ .  $\square$

(2 III ii.) Έστω ότι το  $K$  επάγει κλίκα στο  $G$ . Αφού το  $G$  δεν είναι πλήρες

γράφημα, τότε το  $H$  είναι της μορφής  $G(C_{m-1}, S_{m-1})$ . Αφού  $S_{m-1}$  είναι ελαχιστοτικός διαχωριστής του  $G_{m-1}$  θα είναι και για το  $G$ . Άρα το  $K$  περιλαμβάνει τουλάχιστον ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή  $S := S_{m-1}$  του  $G$ . Παρατηρούμε ότι το  $S$  είναι clique minimal separator του  $G$  με μέγεθος το πολύ  $k-1$ . Επομένως, από το Λήμμα 4.6, κάθε ελαχιστοτικός διαχωριστής μεγέθους τουλάχιστον  $k$  στο  $G$  εμφανίζεται στο  $G[C \cup S]$  ή στο  $G[V \setminus C]$  αν υπάρχει, όπου  $C$  είναι μία συνιστώσα του  $G[V \setminus S]$ .

Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν καλέσει κάποιος το  $\text{FINDSEP}(G, \emptyset, k)$ . Αρχικά, η περίπτωση (2 III) δεν θα συμβεί ποτέ. Στην περίπτωση (2 I) αν ο αλγόριθμος απαντήσει καταφατικά, υπάρχει προφανώς ελαχιστοτικός διαχωριστής μεγέθους τουλάχιστον  $k$  στο  $H$ . Από το Λήμμα 4.5 ο διαχωριστής είναι επίσης και ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής του  $G$  και άρα η διαδικασία τερματίζει εδώ. Αλλιώς, πάμε στην περίπτωση (2 II) όπου καταλήγουμε ότι το  $G$  έχει ένα tree decomposition πλάτους  $2k-2$  όπου αυτό προκύπτει από το Λήμμα 4.7. Όλα αυτά μπορούμε να τα συνοψίσουμε στο πιο κάτω λήμμα.

**Λήμμα 4.9.** Έστω  $G$  ένα γράφημα όχι πλήρες. Αν καλέσουμε το  $\text{FINDSEP}(G, \emptyset, k)$ , θα μας δώσει τα εξής αποτελέσματα:

- ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή μεγέθους τουλάχιστον  $k$ ,
- ένα tree decomposition πλάτους το πολύ  $2k-2$ ,
- δύο επαγόμενα υπογραφήματα  $G'$  και  $G''$  του  $G$  με κορυφές λιγότερες από τις κορυφές του  $G$  έτσι ώστε το  $G$  να έχει ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή μεγέθους τουλάχιστον  $k$  αν και μόνο εάν τουλάχιστον ένα από τα  $G'$  και  $G''$  έχει ελαχιστοτικό διαχωριστή.

Τέλος, μένει να δείξουμε πώς υπολογίζεται ο χρόνος εκτέλεσης ολόκληρου του αλγορίθμου. Παρατηρούμε ότι η διαδικασία  $\text{FINDSEP}$  εκτελείται σε πολυωνυμικό χρόνο της μορφής  $2^{O(k)}n^{O(1)}$  για κάθε περίπτωση. Αν σε κάποια από τις περιπτώσεις του αλγορίθμου καταλήξει στο σημείο να φτιάξει ένα tree decomposition για το μικρό γράφημα που θα έχει πλάτος γραμμικής μορφής  $w = O(k)$ , σύμφωνα με τη χρήση του αλγορίθμου του Θεωρήματος 4.4 προκύπτει ο συγκεκριμένος χρόνος. Για την τρίτη περίπτωση γνωρίζουμε ότι όλοι οι clique minimal separators θα είναι το πολύ  $O(n)$  το πλήθος. Η χρήση της παρακάτω ιδιότητας μας δείχνει πως πάλι απαιτείται ο ίδιος χρόνος για την εύρεση ενός ελαχιστοτικού διαχωριστή σε ένα από τα δύο γραφήματα που θα δημιουργηθούν.

**Λήμμα 4.10** ([4]). Κάθε clique minimal separator του  $G$  είναι επίσης ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής σε κάθε ελαχιστοτική τριγωνοποίηση του  $G$ .

Η **τριγωνοποίηση** ενός γραφήματος  $G = (V, E)$  είναι η δημιουργία ενός χορδικού υπεργραφήματος, προσθέτοντας ακμές,  $H = (V, E')$  με  $E \subseteq E'$ . Μια τριγωνοποίηση είναι **ελαχιστοτική** όταν δεν υπάρχει άλλη τριγωνοποίηση  $H' = (V, E'')$  του  $G$  τέτοια ώστε  $E \subseteq E'' \subseteq E'$ . Για να κάνουμε μία τριγωνοποίηση ενός οποιουδήποτε γραφήματος αρκεί να πάρουμε όλους τους ελαχιστοτικούς διαχωριστές και να τους μετατρέψουμε σε κλίκες προσθέτοντας ακμές. Αφού κάθε χορδικό γράφημα με  $n$  κορυφές έχει  $O(n)$  ελαχιστοτικούς διαχωριστές, για αυτό το  $G$  μπορεί να έχει μόνο  $O(n)$  clique minimal separators. Επιπρόσθετα, από το Λήμμα 4.5, κάθε clique minimal separator που θα βρεθεί από την τρίτη περίπτωση του αλγορίθμου θα είναι επίσης ένας clique minimal separator του  $G$ . Αυτό απαιτεί μόνο  $O(n)$  επαναλήψεις. Επομένως, ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης περιορίζεται από το  $2^{O(k)}n^{O(1)}$  για όλες τις περιπτώσεις.

### Παράδειγμα

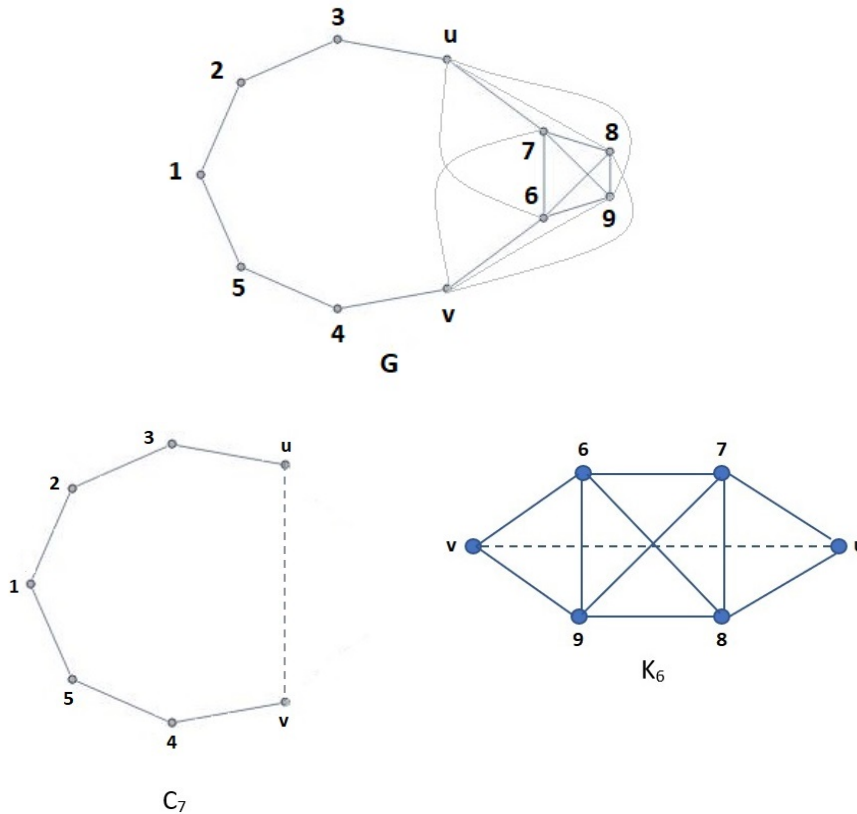
Έστω  $k = 3$  και ένα γράφημα  $G = (V, E)$  με  $|V| = 11$ . Για να ξεκινήσουμε τη δέντρική αναζήτηση υποθέτουμε  $G_0 = G$  και θεωρούμε ως ελαχιστοτικό διαχωριστή  $S_0 = \{u, v\}$ . Τα γραφήματα που προκύπτουν είναι ένας κύκλος  $C_7 = G_1(\{1, 2, 3, 4, 5\}, S_0)$  και μία κλίκα  $K_6 = G_1(K_4, S_0)$ . Ισχύει ότι  $|G_1(K_4, S_0)| \geq 2k = 6$ . Για  $j = 1$ , το  $G_1(K_4, S_0)$  γίνεται κλίκα και δεν έχει διαχωριστή. Ο αλγόριθμος τερματίζει στο βήμα (2 III i.) γιατί οι κορυφές  $u$  και  $v$  δεν συνδέονται στο  $G$ . Άρα, βρίσκει ελαχιστοτικό διαχωριστή με τουλάχιστον  $k = 3$  κορυφές. Γιατί; Από το Λήμμα 4.8, αφού  $H = G_1(K_4, S_0)$  (φύλλο-τελευταίο γράφημα) το  $\mathcal{K} = K_4 \cup S_0$  με  $|\mathcal{K}| \geq 6$ .

Υποθέτουμε ότι οποιοσδήποτε διαχωριστής  $S$  στο  $G[K_4 \cup S_0]$  έχει μέγεθος το πολύ  $k$ , διαφορετικά ο αλγόριθμος θα απαντούσε καταφατικά και θα τερματίζε. Οι υπόλοιπες κορυφές στο  $G[\mathcal{K}] \setminus S$ , ας τις πούμε  $A$ , είναι σε πλήθος τουλάχιστον  $2k - k = k$ . Οι  $u$  και  $v$  αφού στο επόμενο βήμα αποκτούν ακμή σημαίνει ότι πρέπει να ανήκαν σε κάποιο διαχωριστή  $S_0$  στο προηγούμενο βήμα. Άρα, στο γράφημα  $G_0 \setminus S_0$  υπάρχουν κάποιες  $A$  κορυφές που είναι τουλάχιστον  $k$  στο πλήθος. Αυτές πρέπει να είναι γειτονικές με κάθε μία από τις  $u$  και  $v$  διότι έγιναν κλίκα στο βήμα για  $j = 1$  όταν προσθέσαμε ακμές μέσα στον διαχωριστή  $S_0$ . Άρα, κάθε κορυφή του  $A$  είναι κοινός γείτονας των  $u$  και  $v$ .

Επειδή στο  $G$  οι  $u$  και  $v$  δεν συνδέονται, θα υπάρχει κάποιος ελαχιστοτικός διαχωριστής  $S'$  που τις διαχωρίζει. Στον  $S'$  πρέπει να υπάρχουν όλες οι κορυφές του  $A$  (και πιθανόν και κάποιες άλλες κορυφές). Διότι αν αφήσουμε έξω οποιαδήποτε κορυφή από το  $A$  τότε θα έχω μονοπάτι μεταξύ των  $u$  και  $v$ , αφού όλες οι κορυφές του  $A$  συνδέονται και με τις δύο. Κι επειδή  $|A| \geq k$ , σημαίνει ότι υπάρχει  $S'$  με  $|S'| \geq k$ . Παρατηρούμε ότι ένας διαχωριστής  $S'$  θα ήταν η ένωση της κλίκας  $K_4$  μαζί με κάποια κορυφή, π.χ. την 1 (βλ. Σχήμα 4.4).

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός πως ο συγκεκριμένος αλγόριθμος εφαρμόζεται και στο πρόβλημα MAXIMUM WEIGHT MINIMAL SEPARATOR που περιγράφεται στο [24]. Περιληπτικά, σε αυτό το πρόβλημα συναντούμε γραφήματα που κάθε τους κορυφή «κουβαλάει» κι ένα βάρος  $w$ . Μας ενδιαφέρει να βρούμε ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή με βάρος μεγαλύτερο από μια συγκεκριμένη καθορισμένη παράμετρο.

**Πόρισμα 4.1** ([25]). *Δεδομένου ενός γραφήματος  $G$  με κορυφές που έχουν το δικό τους βάρος  $w : V \rightarrow \mathbb{N}_{>0}$  και ενός ακεραίου αριθμού  $k$ , μπορεί να υπολογιστεί αν το  $G$  έχει ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή βάρους τουλάχιστον  $k$  σε χρόνο  $2^{O(k)}n^{O(1)}$ . Ακόμη, αν η απάντηση είναι καταφατική, ο αλγόριθμός μας δίνει τέτοιο ελαχιστοτικό διαχωριστή στον ίδιο χρόνο.*



Σχήμα 4.4: Το γράφημα  $G(V, E)$  με 11 κορυφές (πάνω) από το οποίο ξεκινά η δεντρική αναζήτηση και τα γραφήματα που προκύπτουν  $G_1(\{1, 2, 3, 4, 5\}, S_0)$  (αριστερά) και  $G_1(K_4, S_0)$  (δεξιά).

### 4.3 Κάτω όριο βασισμένο στην ETH

Ένα καλό ερώτημα είναι εάν αυτός ο αλγόριθμος είναι ο βέλτιστος που έχει βρεθεί μέχρι στιγμής. Για τον λόγο αυτό χρειάζεται να αναζητήσουμε ένα κάτω όριο. Μέσα από μια αλυσίδα αναγωγών μπορούμε να δούμε πως ένα τέτοιο όριο μπορεί να βρεθεί για το πρόβλημα που μας απασχολεί, αρκεί να καταρρίπτεται μία συγκεκριμένη υπόθεση, κι αυτή δεν είναι άλλη από την Υπόθεση Εκθετικού Χρόνου (Exponential Time Hypothesis ή ETH).

Στην υπολογιστική Θεωρία Πολυπλοκότητας, η Υπόθεση Εκθετικού Χρόνου είναι μία αναπόδεικτη υπόθεση για την υπολογιστική δυσκολία η οποία διατυπώθηκε από τους Impagliazzo και Paturi (1999). Η υπόθεση ισχυρίζεται ότι το 3-SAT (ή οποιοδήποτε από μερικά  $\mathcal{NP}$ -πλήρη προβλήματα, όμως όχι όλα) δεν μπορούν να επιλυθούν σε υποεκθετικό χρόνο στη χειρότερη περίπτωση. Αν αυτή η υπόθεση αυτή αληθεύει θα σήμαινε ότι  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ . Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ναδειχθεί ότι πολλά υπολογιστικά προβλήματα είναι ισοδύναμα μεταξύ τους στην πολυπλοκότητα, με την έννοια ότι αν ένα από αυτά έχει αλγόριθμο υποεκθετικού χρόνου τότε έχουν όλα.

Για κάθε ακέραιο  $k \geq 2$ , ορίζουμε ένα πραγματικό αριθμό  $s_k$  να είναι το infimum του πραγματικού αριθμού  $\delta$  για τον οποίο το πρόβλημα  $k$ -SAT με  $n$  μεταβλητές μπορεί να επιλυθεί αλγοριθμικά σε χρόνο  $O(2^{\delta n})$ . Επειδή το 2-SAT μπορεί να επιλυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο αυτό σημαίνει πως  $s_2 = 0$ . Επιπλέον, για τα υπόλοιπα ισχύει  $s_3 \leq s_4 \leq \dots$ , καθώς η δυσκολία αυξάνεται προσθέτοντας περισσότερες μεταβλητές στο πρόβλημα. Συνεπώς, η **Υπόθεση Εκθετικού Χρόνου** είναι η εικασία ότι  $s_k > 0$  για κάθε  $k > 2$ .

#### Αναγωγές:

3-CNFSAT  $\leq_p$  DOMINATING SET  $\leq_p$  INDEPENDENT DOMINATING SET  $\leq_p$  MAXIMUM MINIMAL SEPARATOR.

Ας εξηγήσουμε, όμως, καλύτερα σε τι αναφέρεται το κάθε πρόβλημα από το οποίο θα κάνουμε την αναγωγή.

**3-CNFSAT:** Μία Boolean έκφραση είναι σε συζευκτική κανονική μορφή (CNF) εάν εκφράζεται από συζεύξεις (KAI) προτάσεων, με κάθε μία από αυτές να περιλαμβάνει διαζεύξεις (Η) μίας ή περισσότερων μεταβλητών. Το πρόβλημα SATISFIABILITY αναζητά εάν μπορούν να δοθούν οι κατάλληλες τιμές TRUE ή FALSE σε κάθε μεταβλητή έτσι ώστε να αληθεύει μία Boolean έκφραση. Στο πρόβλημα 3-CNFSAT υπάρχουν ακριβώς τρεις διακριτές μεταβλητές σε κάθε πρόταση. Είναι από τα πρώτα προβλήματα που δείχτηκαν ότι ανήκουν στην κατηγορία των  $\mathcal{NP}$ -πλήρων προβλημάτων.

**Dominating Set:** Κυρίαρχο σύνολο σε ένα γράφημα  $G = (V, E)$  λέγεται το  $D \subset V$  για το οποίο κάθε κορυφή εκτός του  $D$  είναι γειτονική με τουλάχιστον μία κορυφή του  $D$ . Το πρόβλημα αναζητά κυρίαρχο σύνολο με αριθμό κορυφών το πολύ  $k$  για κάποιο  $k$ , το οποίο είναι ένα  $\mathcal{NP} \neq \mathcal{NP}$ -πλήρες πρόβλημα απόφασης.

**Independent Dominating Set:** Το πρόβλημα αυτό αναζητά το ελάχιστο σε μέγεθος κυρίαρχο σύνολο ενός γραφήματος  $G = (V, E)$  με ανεξάρτητες κορυφές. Είναι κι αυτό ένα  $\mathcal{NP}$ -πλήρες πρόβλημα.

Έχειδειχθεί στο [27] ότι αν ισχύει η Υπόθεση Εκθετικού Χρόνου δεν μπορεί να βρεθεί αλγόριθμος για το πρόβλημα 3-CNF SAT με χρόνο εκτέλεσης  $2^{o(n+m)}$ . Μας αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος χρόνου  $2^{o(n)}$  για το MAXIMUM MINIMAL SEPARATOR καθώς  $k \leq n$ .

**Λήμμα 4.11** (Θεώρημα 14.6 στο [17]). Έστω  $\phi$  μια 3-CNF έκφραση με  $n$  μεταβλητές και  $m$  προτάσεις. Τότε, υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που κατασκευάζει ένα γράφημα  $G$  με  $O(n+m)$  κορυφές και  $O(n+m)$  ακμές έτσι ώστε η  $\phi$  να αληθεύει αν και μόνο εάν το  $G$  έχει ένα κυρίαρχο σύνολο μεγέθους το πολύ  $k$ .

Όπως έχουμε αναφέρει και στην Ενότητα 4.1.2 το πρόβλημα εύρεσης μέγιστου ανεξάρτητου κυρίαρχου συνόλου είναι  $\mathcal{NP}$ -δύσκολο ακόμα και για διμερή γραφήματα. Αυτό μας βοηθά να βρούμε μία άμεση αναγωγή στο τελικό μας πρόβλημα σε σχέση και με τα πιο πάνω.

**Λήμμα 4.12** ([16]). Έστω  $G$  ένα γράφημα με  $n$  κορυφές και  $m$  ακμές. Έστω  $G'$  ένα διμερές γράφημα που προκύπτει από το  $G$  αντικαθιστώντας κάθε ακμή με μονοπάτι πέντε κορυφών. Τότε το  $G$  έχει ένα κυρίαρχο σύνολο μεγέθους το πολύ  $k$  αν και μόνο εάν το  $G'$  έχει ένα ανεξάρτητο κυρίαρχο σύνολο μεγέθους το πολύ  $m+k$ .

Μπορούμε να κατασκευάσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο ένα γράφημα  $G$  με  $O(n+m)$  κορυφές από ένα στιγμιότυπο του 3-CNF SAT με  $n$  κορυφές και  $m$  ακμές έτσι ώστε η  $\phi$  να αληθεύει αν και μόνο εάν το  $G$  έχει ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή μεγέθους τουλάχιστον  $k$  για κάποιο  $k$ . Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος χρόνου  $2^{o(n)}n^{O(1)}$  για το MAXIMUM MINIMAL SEPARATOR, εκτός κι αν αποτύχει η Υπόθεση Εκθετικού Χρόνου. Επομένως, ακολουθεί το Θεώρημα 4.6.

**Θεώρημα 4.6** (Θεώρημα 5 στο [25]). Δεν υπάρχει αλγόριθμος με χρόνο εκτέλεσης  $2^{o(k)}n^{O(1)}$  για το πρόβλημα MAXIMUM MINIMAL SEPARATOR, εκτός κι αν αποτύχει η Υπόθεση Εκθετικού Χρόνου.

## 4.4 Κάτω όριο με πυρήνα

Για ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα απόφασης  $P$  με ένα στιγμιότυπο  $I$  και παράμετρο  $k$ , η **πυρηνοποίηση** είναι μία πολυωνυμικού χρόνου διαδικασία η οποία μας δίνει ισοδύναμο ζεύγος  $(I', k')$ , έτσι ώστε το  $(I, k)$  να είναι ένα NAI-στιγμιότυπο αν και μόνο εάν είναι και το  $(I', k')$ , καθώς και να ισχύει ότι  $|I'| + k' \leq f(k)$  για κάποια υπολογιστική συνάρτηση  $f$ . Συγκεκριμένα, αν η  $f$  είναι πολυωνυμική συνάρτηση, τότε λέμε πως το πρόβλημα έχει **πολυωνυμικό πυρήνα**.

Είναι γνωστό ότι ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα είναι FTP αν και μόνο εάν μπορεί να πραγματοποιήσει πυρηνοποίηση. Άρα όλα τα FTP προβλήματα έχουν πυρήνα, αλλά όχι απαραίτητα πολυωνυμικό. Για να δείξουμε ότι δεν έχουν πολυωνυμικό πυρήνα μπορούμε να πάρουμε πολλά αντίγραφα του γραφήματος και να ψάξουμε να βρούμε λύση στο πρόβλημα όταν τα ενώσουμε μεταξύ τους και ελέγξουμε αν διατηρούν τις επιμέρους τους λύσεις. Με βάση το Θεώρημα 4.5, μας ενδιαφέρει το μέγεθος ενός πυρήνα στο πρόβλημά μας, δηλαδή να δείξουμε ότι έχει πολυωνυμικό πυρήνα. Θα δούμε παρακάτω πως κάτι τέτοιο είναι αδύνατο κάτω από κάποιες θεωρητικές υποθέσεις πολυπλοκότητας.

Αν το  $G$  έχει περισσότερες από μία συνεκτικές συνιστώσες, τότε κάθε ελαχιστοτικός διαχωριστής περιέχεται μέσα στις συνιστώσες αυτές. Σύμφωνα με το αποτέλεσμα του Bodlander κ.ά. στο [7], δεν υπάρχει πολυωνυμικός πυρήνας και έτσι προκύπτει το εξής θεώρημα.

**Θεώρημα 4.7** (Θεώρημα 6 στο [25]). Το MAXIMUM MINIMAL SEPARATOR πρόβλημα δεν έχει πολυωνυμικό πυρήνα εκτός κι αν  $\mathcal{NP} \subseteq \text{coNP}/\text{poly}$ .

Ως εκ τούτου, υπάρχει τετριμμένη OR-composition [7] από το απλό MAXIMUM MINIMAL SEPARATOR στο ίδιο πρόβλημα με όχι απαραίτητα συνεκτικά γραφήματα. Δηλαδή, σύμφωνα με τη διαδικασία αυτή σε ένα μη-συνεκτικό γράφημα με συνεκτικές συνιστώσες αντίγραφα του αρχικού γραφήματος, για το οποίο μελετούμε το συγκεκριμένο πρόβλημα, ελέγχουμε ότι δεν υπάρχει πολυωνυμικός πυρήνας στο ίδιο πρόβλημα. Έτσι αφού μπορούμε να δείξουμε ότι δεν υπάρχει πολυωνυμικός πυρήνας σε μη-συνεκτικά γραφήματα μπορούμε να το δείξουμε το ίδιο και για τα συνεκτικά συνδέοντας όλες τις συνιστώσες με μία κορυφή όπως μας εξηγεί το Λήμμα 4.13.

**Λήμμα 4.13.** Έστω  $G_1, G_2, \dots, G_t$  γραφήματα με  $G_i = (V_i, E_i)$  για κάθε  $1 \leq i \leq t$ . Έστω ότι σε όλα αυτά τα  $t$  γραφήματα προσθέτουμε μία νέα κορυφή  $r$  και τη συνδέουμε με κάθε κορυφή στο  $V_1 \cup \dots \cup V_t$ , έτσι ώστε να δημιουργήσουμε

ένα ενιαίο συνεκτικό γράφημα, το  $H(V, E)$ . Τότε, τουλάχιστον ένα από αυτά τα  $t$  γραφήματα έχει ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή μεγέθους τουλάχιστον  $k$  αν και μόνο εάν το  $H$  έχει ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή μεγέθους τουλάχιστον  $k + 1$ .

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι τουλάχιστον ένα από τα  $t$  γραφήματα, ας πούμε το  $G_1$ , έχει ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή  $S$  μεγέθους τουλάχιστον  $k$ . Τότε, υπάρχουν δύο πλήρεις συνιστώσες  $C_1$  και  $C_2$  στο  $G[V_1 \setminus S]$ . Αφού η  $r$  έχει γείτονα και στις δύο συνιστώσες και δεν υπάρχουν ακμές μεταξύ τους, οι  $C_1$  και  $C_2$  είναι πλήρεις συνιστώσες του  $H[V \setminus (S \cup r)]$ . Έτσι το γράφημα  $H$  έχει ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή μεγέθους τουλάχιστον  $k + 1$ .

Από την άλλη, έστω ότι το  $H$  έχει ένα ελαχιστοτικό διαχωριστή  $S$  μεγέθους τουλάχιστον  $k + 1$ . Αφού η  $r$  είναι μία καθολική κορυφή, πρέπει να περιέχεται στο  $S$ . Έστω  $C_1$  και  $C_2$  είναι πλήρεις συνιστώσες του  $H[V \setminus S]$ . Αφού η κορυφή  $r$  είναι διαχωριστής του  $H$ , η  $C_1$  περιλαμβάνεται στο  $V_i$  για κάποιο  $1 \leq i \leq t$ . Επιπλέον, το  $S \setminus r$  περιλαμβάνεται επίσης στο  $V_i$  καθώς κάθε κορυφή του  $S \setminus r$  έχει ένα γείτονα στη  $C_1$ . Εφαρμόζουμε τον ίδιο ισχυρισμό και για τη  $C_2$  και βλέπουμε ότι τα σύνολα  $C_1$ ,  $C_2$  και  $S$  περιλαμβάνονται όλα στο  $V_i$ . Επομένως, το σύνολο  $S \setminus r$  είναι ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής του  $G_i$  με πλήρεις συνιστώσες  $C_1$  και  $C_2$ .  $\square$

Συνεπώς καταλήγουμε στο εξής θεώρημα.

**Θεώρημα 4.8** (Θεώρημα 7 στο [25]). Το MAXIMUM MINIMAL SEPARATOR FOR CONNECTED GRAPHS πρόβλημα δεν έχει πολυωνυμικό πυρήνα εκτός κι αν  $\mathcal{NP} \subseteq \text{coNP}/\text{poly}$ .



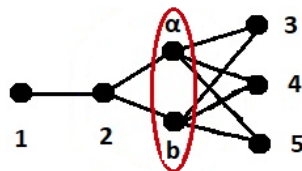
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

## ΠΟΛΥΜΕΡΕΙΣ ΔΙΑΧΩΡΙΣΤΕΣ

Προβλήματα που προκαλούν επίσης το ενδιαφέρον στον χώρο της Πολυπλοκότητας είναι κι αυτά που απαριθμούν όχι τις κορυφές ενός διαχωριστή, αλλά τις συνιστώσες στις οποίες μπορεί να διαμεριστεί ένα γράφημα. Τους διαχωριστές που θα συναντήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο θα τους ονομάσουμε πολυμερείς. Τα προβλήματα που θα εξετάσουμε είναι το  $k$ -WAY VERTEX CUT και το VERTEX  $k$ -CUT.

**Ορισμός 5.1.** Ένα σύνολο κορυφών  $S$  καλείται **πολυμερής διαχωριστής (multiway separator)** αν το  $S$  είναι ένας ελαχιστοτικός διαχωριστής και το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του  $G \setminus S$  είναι το μέγιστο δυνατό.

Ένα απλό παράδειγμα θα ήταν να θεωρήσουμε ένα μονοπάτι με τέσσερις κορυφές. Αντικαθιστούμε το ένα άκρο με τρεις κορυφές. Επιπλέον, αντικαθιστούμε την προτελευταία κορυφή του μονοπατιού που ενώνεται με τις τρεις νέες κορυφές με δύο κορυφές (έστω  $a, b$ ). Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.1 δημιουργείται ένα δενδροειδές γράφημα με τη μορφή  $1 - 2 - \{a, b\} - \{3, 4, 5\}$ . Εύκολα διακρίνουμε δύο ελαχιστοτικούς διαχωριστές, τα σύνολα  $\{2\}$  και  $\{a, b\}$ . Ωστόσο, το  $\{a, b\}$  ορίζει ένα πολυμερή διαχωριστή γιατί διαμερίζει το γράφημα σε τέσσερις συνιστώσες, ενώ το  $\{2\}$  διαμερίζει το γράφημα σε δύο συνιστώσες.



Σχήμα 5.1: Στο γράφημα του παραδείγματος βλέπουμε ότι οι κορυφές  $a, b$  ορίζουν ένα πολυμερή διαχωριστή που διαμερίζει το γράφημα σε τέσσερις συνιστώσες.

## 5.1 $k$ -Way Vertex Cut

### $k$ -WAY VERTEX CUT

**Είσοδος:** Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  με  $n$  κορυφές και οι ακέραιοι  $k \leq n$  και  $s \leq n$ .

**Στόχος:** Να προσδιοριστεί εάν το  $G$  έχει μία τομή κορυφών  $S \subseteq V$  μεγέθους το πολύ  $s$  έτσι ώστε το υπογράφημα  $G[V \setminus S]$  να αποτελείται από τουλάχιστον  $k$  συνεκτικές συνιστώσες.

Οι συνιστώσες αυτές θα λέμε ότι ανήκουν στο σύνολο  $\mathcal{C}(G)$ . Θεωρούμε ως  $c(G, S) := |\mathcal{C}(G \setminus S)| - |\mathcal{C}(G)|$  τον αριθμό των συνιστωσών που προκύπτουν από την αφαίρεση της τομής  $S$  από το  $G$ . Το κύριο ενδιαφέρον μας σε αυτή την ενότητα θα στραφεί στον αριθμό  $\kappa(G, s)$  του  $G$  που αναφέρεται στον μέγιστο αριθμό από όλους τους  $c(G, S)$  των υποσυνόλων  $S \subseteq V$  μεγέθους το πολύ  $s$ .

Ένα tree decomposition  $(X, T)$  πλάτους  $w$  μπορεί σε γραμμικό χρόνο να μετατραπεί σε ένα nice tree decomposition ίσου πλάτους [29].

**Ορισμός 5.2.** Ένα tree decomposition  $(X, T)$  του  $G$ , όπου το δέντρο  $T$  είναι ριζωμένο σε ένα  $r \in I$ , λέγεται **nice tree decomposition** έτσι ώστε να ισχύουν τα εξής:

1. κάθε κόμβος (node) του  $T$  έχει το πολύ δύο παιδιά,
2. αν ένας κόμβος  $i$  στο  $T$  έχει δύο παιδιά  $j_1$  και  $j_2$ , τότε  $X_i = X_{j_1} = X_{j_2}$  (το  $i$  είναι ένας **join node**),
3. αν ένας κόμβος  $i$  έχει ένα παιδί  $j$ , τότε είτε
  - $|X_i| = |X_j| + 1$  και  $X_j \subset X_i$  (το  $i$  είναι ένας **introduce node**),
  - $|X_i| = |X_j| - 1$  και  $X_i \subset X_j$  (το  $i$  είναι ένας **forget node**).

Με  $w$ -διαμέριση συμβολίζεται τη διαμέριση ενός γραφήματος  $G$  σε  $w$  υποσύνολα κορυφών που δεν συνδέονται μεταξύ τους. Το σύνολο όλων των  $w$ -διαμερίσεων ενός συνόλου κορυφών  $X$  συμβολίζεται με  $w^X$ .

**Θεώρημα 5.1** ([3]). Έστω ένα γράφημα  $G = (V, E)$  με *treewidth* το πολύ  $w - 1$  και έστω ένας ακέραιος  $s \leq |V|$ . Τότε, μπορεί να βρεθεί ο αριθμός  $\kappa(G, s')$  σε χρόνο  $O(ns^2w^w)$  για κάθε  $0 \leq s' \leq s$ .

Απόδειξη. Έστω  $(\{X_i : i \in I\}, T = (I, F))$  ένα tree decomposition του  $G$  πλάτους  $w$  ριζωμένο στο  $r \in I$ . Έστω  $T_i$  το σύνολο των κορυφών στο υποδέντρο του  $T$  ριζωμένο στο  $i$  και έστω  $Q_i = \bigcup_{j \in T_i} X_j$ .

Τώρα, έστω  $i$  ένας κόμβος στο  $I$ ,  $C \subseteq X_i$ ,  $s' \leq s$  και  $\mathcal{P} \in w^{X_i \setminus C}$ . Τότε ορίζουμε το  $m_i(C, \mathcal{P}, s')$  να είναι ο μέγιστος αριθμός πρόσθετων συνιστωσών στα  $G[Q_i \setminus X_i]$  που μπορούν να ληφθούν αφαιρώντας ένα σύνολο  $S \subseteq Q_i \setminus X_i$  μεγέθους το πολύ  $s$ , έτσι ώστε δύο κορυφές στο  $X_i \setminus C$ , οι οποίες ανήκουν στο ίδιο σύνολο στη διαμέριση  $\mathcal{P}$ , να είναι στην ίδια συνιστώσα όταν η ένωση  $S \cup C$  αφαιρεθεί. Με άλλα λόγια, θα προσπαθήσουμε με όλους τους δυνατούς τρόπους να διαμερίσουμε μία ομάδα του tree decomposition στο σύνολο τομής της και στις συνιστώσες που θα προκύψουν. Η ιδιότητα που θέλουμε να επιτύχουμε είναι ότι αν οι κορυφές χωρίζονται σε διαφορετικές διαμερίσεις σε μια ομάδα, τότε είτε δεν θα συνδέονται στα  $G[Q_i]$  είτε η τιμή αυτής της διαμέρισης θα είναι  $-\infty$ . Πάμε τώρα να υπολογίσουμε τις τιμές  $m_i(C, \mathcal{P}, s')$  για τους διάφορους τύπους των κόμβων.

### Leaf Nodes

Έστω  $i$  ένας κόμβος φύλλο, δηλαδή με βαθμό ένα. Αφού σε αυτή την περίπτωση έχουμε  $Q_i \setminus X_i = \emptyset$ , άρα ισχύει  $m_i(C, \mathcal{P}, s') = 0$ .

### Join Nodes

Έστω ένας join node  $i$  με παιδιά  $j_1$  και  $j_2$ . Τότε έχουμε ότι

$$m_i(C, \mathcal{P}, k) = \max_{s_1 + s_2 = s'} \{m_{j_1}(C, \mathcal{P}, s_1) + m_{j_2}(C, \mathcal{P}, s_2)\}.$$

Επειδή ισχύει  $X_i = X_{j_1} = X_{j_2}$ , χρησιμοποιούμε το ίδιο σύνολο τομής  $C$  και τη διαμέριση  $\mathcal{P}$ . Στους αριθμούς  $m_i(C, \mathcal{P}, s')$  είναι απαραίτητο να λαμβάνουμε τον μέγιστο αριθμό συνιστωσών χρησιμοποιώντας  $s'$  το πλήθος κορυφές-τομής, και οι συνιστώσες στα δύο υποδέντρα να μην αλληλοεπικαλύπτονται, έτσι ώστε μπορούμε να χωρίσουμε τις  $s'$  κορυφές στα δύο σύνολα.

### Introduce Nodes

Έστω  $i$  ένας introduce node με introduced κορυφή  $v$  και παιδί  $j$ . Αν  $v \in P \in \mathcal{P}$  τότε θεωρούμε  $\mathcal{P}-v := \mathcal{P} \setminus \{P\} \cup \{P \setminus \{v\}\}$ . Έτσι έχουμε ότι

$$m_i(C, \mathcal{P}, s') = \begin{cases} m_j(C \setminus \{v\}, \mathcal{P}, s') & \text{αν } v \in C \\ m_j(C, \mathcal{P}-v, s') & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Διαισθητικά μιλώντας, εξαιτίας του introduce node δεν χάνεται καμία πληροφορία από το υποδέντρο, χρειάζεται μόνο να διασφαλίσουμε ότι η διαμέριση  $\mathcal{P}$  και το σύνολο τομής  $C$  παραμένουν τα ίδια και στην επόμενη ομάδα-παιδί.

**Forget Nodes**

Έστω  $i$  ένας forget node με μια forgotten κορυφή  $v$  και παιδί  $j$ . Τότε ισχύει ότι

$$m_i(C, \mathcal{P}, s') = \max\{m_i^{out}(C, \mathcal{P}, s'), m_i^{in}(C, \mathcal{P}, s')\},$$

όπου με  $m_i^{out}$  συμβολίζεται ο αριθμός στην περίπτωση όπου η  $v$  δεν ανήκει στο σύνολο τομής και με  $m_i^{in}$  όταν η  $v$  ανήκει στο σύνολο τομής:

$$m_i^{out}(C, \mathcal{P}, s') = \begin{cases} m_j(C, \mathcal{P} \cup \{v\}, s') + 1 & \text{αν } N(v) \cap X_i \subseteq C \\ m_j(C, (\mathcal{P} \setminus \{P\}) \cup \{P \cup \{v\}\}, s') & \text{αν } v \text{ είναι γειτονική} \\ & \text{μόνο με κορυφές στο} \\ & P \in \mathcal{P} \\ -\infty & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

και

$$m_i^{in}(C, \mathcal{P}, s') = m_j(C \cup \{v\}, \mathcal{P}, s' - 1).$$

Εάν η  $v$  είναι στο βέλτιστο σύνολο τομής, μειώνουμε το  $s'$  κατά ένα και παίρνουμε την τιμή του  $m_j$  μαζί με το σύνολο τομής  $C \cup \{v\}$ . Εάν όμως η  $v$  δεν ανήκει στο σύνολο τομής, τότε πρέπει να την αποτρέψουμε από το να συνδέσει μερικές συνιστώσες στο  $X_i$ , διότι διαφορετικά θα ακυρώσει μια τέτοια διαμέριση. Αν όλοι οι γείτονες της  $v$  ανήκουν στο σύνολο τομής, τότε η  $v$  είναι μέρος μιας συνιστώσας που είναι τώρα πλήρως αποσυνδεδεμένη από το ψηλότερο σημείο του δέντρου και μπορούμε να μειώσουμε τον  $m_i(C, \mathcal{P}, s')$  κατά ένα. Εναλλακτικά, αν η  $v$  γειτονεύει με μια διαμέριση  $P_i$ , την προσθέτουμε στη διαμέριση αυτή, αλλιώς η τιμή της δεν υπολογίζεται και θεωρείται  $-\infty$ .

**Root Node**

Έστω  $r$  ένας κόμβος που έχει το ρόλο της ρίζας στο tree decomposition. Η βέλτιστη τιμή του αριθμού  $\kappa(G, s)$  μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\kappa(G, s) = \max_{C \subseteq X_r, |C| + s' \leq s} \max_{P \in w^{X_i \setminus C}} m_r(C, \mathcal{P}, s') + |\mathcal{P}|$$

Επιλύουμε αυτές τις επαναλήψεις εφαρμόζοντας δυναμικό προγραμματισμό. Κάθε κορυφή σε κάποια ομάδα είναι είτε σε κάποιο από τα  $w$  μη-συνεκτικά υποσύνολα είτε είναι στο σύνολο τομής. Επειδή υπάρχουν το πολύ  $w$  κορυφές σε κάθε ομάδα (άρα και το treewidth θα είναι το πολύ  $w - 1$ ), σημαίνει πως υπάρχουν το πολύ  $w^w$  διαμερίσεις μιας ομάδας στο σύνολο τομής  $C$  και στο σύνολο των διαμερίσεων  $\mathcal{P}$ . Η τομή που κάνουμε γίνεται στο πολύ  $s$  κορυφές, άρα υπάρχουν το πολύ  $sw^w$  διαφορετικές τιμές για κάθε  $m_i(\cdot, \cdot, \cdot)$ . Ο υπολογισμός κάθε  $m_i(C, \mathcal{P}, s)$  διαρκεί το πολύ  $O(\max\{w, s\})$  χρόνο και υπάρχουν το πολύ  $O(n)$  ομάδες στο nice tree decomposition. Συνεπώς, μπορούμε να υπολογίσουμε τον  $\kappa(G, s')$  για όλα τα

$s' \leq s$ , δεδομένου ενός nice tree decomposition σε χρόνο  $O(ns^2w^w)$ .  $\square$

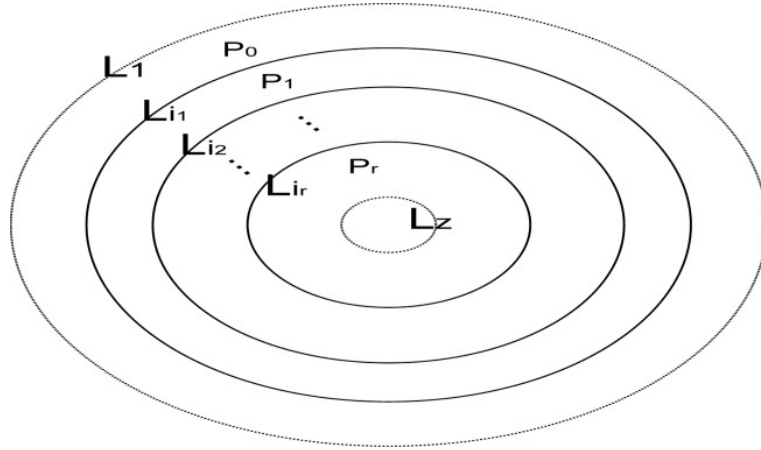
Στην προηγούμενη απόδειξη θεωρήσαμε ένα tree decomposition στο  $G$ . Ένα τέτοιο tree decomposition χρειάζεται γραμμικό χρόνο για να βρεθεί (ανάλογα με τον αριθμό των κορυφών), όμως χρειάζεται εκθετικό χρόνο ανάλογα με τον κύβο του treewidth του, σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Bodlaender [5]. Έτσι, το να βρεθεί ένα τέτοιο tree decomposition περιορίζει αρκετά τον χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου που επιλύει το πρόβλημα  $k$ -WAY VERTEX CUT στα επίπεδα γραφήματα.

Υποθέτουμε αρχικά ότι μας δίδεται ως δεδομένο εισόδου μια επίπεδη εμβάπτιση, διαφορετικά την κατασκευάζουμε σε γραμμικό χρόνο χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο των Hopcroft και Tarjan [26]. Μία επίπεδη εμβάπτιση ενός γραφήματος  $G$  ονομάζεται **εξωεπίπεδη** όταν όλες οι κορυφές του γραφήματος προσπίπτουν στην εξωτερική όψη. Για κάποιο θετικό ακέραιο  $p \geq 2$ , μία εμβάπτιση του  $G$  καλείται  **$p$ -εξωεπίπεδη** όταν η αφαίρεση όλων των κορυφών της που προσπίπτουν στην εξωτερική όψη αποδίδουν ένα  $(p - 1)$ -εξωεπίπεδο γράφημα. Υποθέτουμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι κάθε συνιστώσα στο  $G$  προσπίπτει στην εξωτερική όψη της επίπεδης εμβάπτισης. Ορίζουμε τις κορυφές που προσπίπτουν στην εξωτερική όψη ως **στρώμα**  $L_1$ . Αναδρομικά, χωρίζουμε τις υπόλοιπες κορυφές σε στρώματα  $L_{j-1}$  ( $j \geq 2$ ) κάθε φορά που αφαιρούμε ένα στρώμα  $L_j$  από το  $L_1$ . Τα στρώματα αυτά θα λέμε ότι ανήκουν στο σύνολο  $\mathcal{L} := \{L_1, \dots, L_z\}$  του  $G$ . Θα δούμε στη συνέχεια, πως δεδομένου ενός επίπεδου γραφήματος  $G$ , μπορεί να βρεθεί σε γραμμικό χρόνο ένα σύνολο  $\mathcal{L}$  μέσω ενός ελαφρώς τροποποιημένου BFS-αλγορίθμου. Για δική μας ευκολία από εδώ και πέρα θα θεωρούμε το σύνολο  $\mathcal{L}$  ως δεδομένο εισόδου.

Αρχικά, χρειάζεται να δείξουμε ότι το πρόβλημα μας ανήκει στα FPT προβλήματα δεδομένου μίας παραμέτρου  $k$ . Θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω Λήμμα.

**Λήμμα 5.1** (Bodlaender [6]). *Έστω  $G = (V, E)$  ένα  $p$ -εξωεπίπεδο γράφημα με  $n$  κορυφές. Τότε, ένα tree decomposition πλάτους το πολύ  $3p - 1$  μπορεί να βρεθεί σε γραμμικό χρόνο  $O(n)$ .*

Πρώτα, θα μελετήσουμε την κατασκευή της βέλτιστης λύσης στην περίπτωση όπου μια οικογένεια στρωμάτων είναι απαγορευμένη στο σύνολο τομής. Έστω  $\mathcal{F} := \{L_{i_1}, \dots, L_{i_r}\} \subseteq \mathcal{L}$  ένα σύνολο από απαγορευμένα στρώματα, για τα οποία κάθε κορυφή  $v \in L_{i_t}$ ,  $1 \leq t \leq r$ , δεν μπορεί να ανήκει στην τομή. Χωρίς απώλεια της γενικότητας υποθέτουμε ότι  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq z$ . Επιπροσθέτως, ορίζουμε τα  $i_0 := 1$  και  $i_{r+1} := z$ . Για  $0 \leq t \leq r$ , θεωρούμε ως  $P_t := \bigcup_{q=i_t}^{i_{t+1}} L_q$  (βλ. Σχήμα 5.2).



Σχήμα 5.2: Απαγορευμένα στρώματα σε μια επίπεδη εμβάπτιση και τα σύνολα  $P_i$  που ορίζονται στην απόδειξη του Λήμματος 5.2 [3].

**Λήμμα 5.2.** Έστω  $G = (V, E)$  ένα επίπεδο γράφημα, ένας ακέραιος  $s \geq 1$  και έστω  $\mathcal{F}$  ένα σύνολο από απαγορευμένα στρώματα όπως περιγράφεται πιο πάνω. Τότε, υπάρχουν μη-αρνητικοί ακέραιοι  $s_0, \dots, s_r$  έτσι ώστε να ισχύουν τα εξής:

- $\kappa(G, \mathcal{F}, s) = \sum_{t=0}^r \kappa(G[P_t], \mathcal{F}, s_t)$ ,
- $\sum_{t=0}^r s_t = s$ .

Ακολούθως, θα παρουσιάσουμε ένα FPT αλγόριθμο για το πρόβλημα  $k$ -WAY VERTEX CUT στα επίπεδα γραφήματα λαμβάνοντας υπόψη την παράμετρο  $s$ . Ο ψευδοκώδικας περιγράφεται στον Αλγόριθμο 3. Η κύρια δομική ιδιότητα που χρησιμοποιείται στον αλγόριθμο είναι ότι μεταξύ οποιωνδήποτε  $s + 1$  διαδοχικών στρωμάτων πρέπει να υπάρχει ένα στρώμα που δεν περιλαμβάνει κορυφές-τομής.

---

**Αλγόριθμος 3** FPT Αλγόριθμος για τον υπολογισμό του  $k$ -WAY VERTEX CUT στα επίπεδα γραφήματα.

---

**Input:** Ένα επίπεδο γράφημα  $G = (V, E)$ , τα στρώματα  $\mathcal{L}$  και ένας  $s \geq 0$ .  
 /\*Χωρίζουμε το γράφημα σε μικρά μέρη και χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 5.1 σε κάθε μέρος.\*/  
**for**  $2 \leq d \leq s + 1$  **do**  
   **for**  $0 \leq i < d$  **do**  
      $\mathcal{F} := \{L_j \in \mathcal{L} \mid j \equiv i \pmod{d}\}$ .  
     Για όλα τα  $0 \leq s' \leq s$ ,  $0 \leq q \leq |\mathcal{L}|$ ,  $q \equiv i \pmod{d}$  υπολογίζουμε τον  $\kappa(G[q, q + d], \mathcal{F}, s')$ .  
   **end for**  
**end for**  
 /\*Χρησιμοποιούμε δυναμικό προγραμματισμό για να συνδυάσουμε όλα τα μικρά μέλη.\*/  
**for**  $s + 1 \leq i \leq |\mathcal{L}|$  **do**  
   **for**  $0 \leq s' \leq s$  **do**  
      $\kappa(G[1, i], L_i, s') := \max_{0 \leq j \leq s+1} \max_{s_1+s_2=s'} \{\kappa(G[1, i-j], L_{i-j}, s_1) + \kappa(G[i-j, i], L_{i-j} \cup L_i, s_2)\}$ .  
   **end for**  
**end for**  
**if**  $|\mathcal{L}| \leq s$  **then**  
**return**  $\kappa(G, s)$  /\*Το  $G$  έχει treewidth το πολύ  $3s - 1$ , χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 5.1.\*/  
**else**  
    $\kappa(G, s) := \max_{0 \leq j \leq s+1} \max_{s_1+s_2=s'} \{\kappa(G[1, z-j], L_{i-j}, s_1) + \kappa(G[z-j, z], L_{i-j}, s_2)\}$ .  
**end if**  
**return**  $\kappa(G, s)$

---

**Θεώρημα 5.2** (Berger [3]). Έστω ένα επίπεδο γράφημα  $G(V, E)$  και ένας ακέραιος  $k$ . Τότε ο Αλγόριθμος 3 βρίσκει τον αριθμό  $\kappa(G, s)$  σε χρόνο  $O(ns^{O(s)})$ .

*Απόδειξη.* Δεδομένου ενός επίπεδου γραφήματος  $G$  και ενός ακεραίου  $s$ , έστω το  $G[i, j]$  το επαγόμενο υπογράφημα από την  $\bigcup_{i \leq t \leq j} L_t$ . Ο Αλγόριθμος 3 αποτελείται από δύο μέρη. Πρώτα, αποσυνθέτουμε το  $G$  σε μικρότερα υπογραφήματα με φραγμένο treewidth. Σε κάθε ένα από αυτά τα υπογραφήματα τρέχουμε τον

αλγόριθμο του Θεωρήματος 5.1 . Με τη χρήση του Λήμματος 5.2 , στη δεύτερη φάση εφαρμόζουμε δυναμικό προγραμματισμό για να συνδυάσουμε τις επιμέρους λύσεις στα υπογραφήματα και για να μας επιστρέψει τη συνολική βέλτιστη λύση. Η ορθότητα του αλγορίθμου προκύπτει από το ακόλουθο επαγωγικό επιχείρημα. Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τους αριθμούς  $\kappa(G[1, i], s')$  για κάποιο  $i$  και  $s'$ , τότε ένα από τα στρώματα  $L_{i+1}, \dots, L_{i+s+1}$  δεν περιέχει κάποια κορυφή-τομής. Συνεπώς, μπορούμε να επεκτείνουμε τη λύση για τα  $G[1, i]$  σε μια λύση για τα  $G[1, j]$ , όπου  $j \in [i + 1, i + k + 1]$ . Οι λύσεις αυτές μπορούν να συνδυαστούν από το Λήμμα 5.2 .

Το πρώτο μέρος του αλγορίθμου χρειάζεται  $O(ns^3s^{O(s)})$  χρόνο για να υπολογίσει τους  $\kappa(G[q, q+d+1], \mathcal{F}, s')$ . Το treewidth για κάθε γράφημα  $G[q, q+d+1]$  είναι φραγμένο από  $3(s + 2) - 1$ . Η ένωση όλων αυτών των μελών περιλαμβάνει το πολύ  $2n$  κορυφές και ένα tree decomposition του οποίου το πλάτος μπορεί να βρεθεί το πολύ σε γραμμικό χρόνο από το Λήμμα 5.1 . Επομένως, εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Θεωρήματος 5.1 , παίρνουμε τη βέλτιστη λύση σε κάθε μικρό υπογράφημα σε χρόνο  $O(ns^{O(s)})$ . Το δεύτερο μέρος συνδέει όλες τις λύσεις με δυναμικό προγραμματισμό κάτι που χρειάζεται  $O(ns^2)$  χρόνο. Ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι  $O(ns^{O(s)})$ .  $\square$

## 5.2 Vertex $k$ -cut

Μία άλλη ενδιαφέρουσα εφαρμογή όσον αφορά τις συνιστώσες ενός γραφήματος μπορεί να συναντήσει κανείς στο [15] σχετικά με τους πολυμερείς διαχωριστές σε τριμερή γραφήματα.

### VERTEX $k$ -CUT

**Είσοδος:** Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  και ένας ακέραιος αριθμός  $k \geq 2$ .

**Στόχος:** Να προσδιοριστεί εάν το  $G$  έχει μία τομή με τις λιγότερες σε πλήθος κορυφές που χωρίζει το  $G$  σε τουλάχιστον  $k$  συνιστώσες.

Όπως είδαμε προηγουμένως, σύμφωνα με τον Berger το πρόβλημα είναι  $\mathcal{NP}$ -δύσκολο όμως είναι επιλύσιμο πολυωνυμικά για γραφήματα με φραγμένο treewidth. Ο Ben Ameur και ο Didi Biha [2] απέδειξαν ότι, για  $k = 2$ , είναι πολυωνυμικού χρόνου επιλύσιμο καθώς ισοδυναμεί με υπολογισμούς  $|V|^2$  μέγιστων ροών. Επιπροσθέτως, ο Marx [35] έδειξε ότι είναι αδύνατο να βρεθεί αλγόριθμος της μορφής FTP καθώς απέδειξε την  $W[1]$ -δυσκολία του προβλήματος. Ωστόσο, δεν



είναι γνωστό αν υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος της μορφής  $O(n^k)$  που να επιλύει το πρόβλημα για δεδομένο (μικρό)  $k$ .

Έστω ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G = (V, E)$  με  $|V| = n$  και  $|E| = m$ . Ένα υποσύνολο κορυφών  $W \subseteq V$  είναι ένα **vertex  $k$ -multiclique** του  $G$ , αν υπάρχει  $k$ -διαμέριση  $\pi = \{W_1, \dots, W_k\}$  του  $W$  έτσι ώστε οποιεσδήποτε δύο κορυφές σε διαφορετικά σύνολα του  $\pi$  να είναι γειτονικές στο  $G$ , με  $W_i \neq \emptyset$  για κάθε  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Για κάθε  $W \subseteq V$ , θα χαρακτηρίζουμε ως  $\delta(W)$  το υποσύνολο των ακμών που είναι προσπίπτουσες σε ακριβώς μία κορυφή του  $W$  (π.χ. όλες οι ακμές  $(u, v)$  με  $u \in W, v \in V \setminus W$ ), και όλες οι ακμές που προσπίπτουν σε δύο κορυφές του  $W$  θα λέμε ότι ανήκουν στο  $E(W)$ . Τέλος, θα συμβολίζουμε με  $\delta(v) \subseteq E$  το υποσύνολο των ακμών που προσπίπτουν στην  $v$ .

**Υπόθεση.** Είναι σημαντικό να σημειώσουμε πως μια αναγκαία και ικανή συνθήκη του  $G$  για να έχει ένα vertex  $k$ -cut είναι να ισχύει  $a(G) \geq k$ , όπου με  $a(G)$  συμβολίζουμε την πληθικότητα του μεγαλύτερου ανεξάρτητου συνόλου του  $G$ . Υποθέτουμε ότι το  $G$  είναι συνεκτικό γράφημα. Επίσης θα χρησιμοποιήσουμε την εξής βασική ιδιότητα. Ένα vertex  $k$ -cut  $V_0$  είναι ένα σύνολο κορυφών έτσι ώστε το  $V \setminus V_0$  μπορεί να διαμεριστεί σε  $k$  μη-κενά υποσύνολα  $V_1, \dots, V_k$  τα οποία δεν συνδέονται μεταξύ τους με ακμή.

Για να αποδείξουμε την  $\mathcal{NP}$ -πληρότητα του προβλήματος για κάποιο σταθερό  $k \geq 3$  χρειάζεται να παρατηρήσουμε πρώτα ότι είναι ισοδύναμο με το VERTEX  $k$ -MULTICLIQUE πρόβλημα.

VERTEX  $k$ -MULTICLIQUE

**Είσοδος:** Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  και ένας ακέραιος  $k \geq 2$ .

**Στόχος:** Να προσδιοριστεί εάν το  $G$  έχει ένα vertex  $k$ -multiclique μέγιστης πληθικότητας.

**Πρόταση 5.1.** Ένα υποσύνολο κορυφών  $V_0$  ενός γραφήματος  $G = (V, E)$  είναι ένα vertex  $k$ -cut αν και μόνο εάν το  $V \setminus V_0$  είναι ένα vertex  $k$ -multiclique στο συμπληρωματικό γράφημα  $\bar{G}$ .

**Θεώρημα 5.3** ([15]). Για κάθε σταθερό  $k \geq 3$ , το VERTEX  $k$ -CUT πρόβλημα είναι  $\mathcal{NP}$ -δύσκολο.

*Απόδειξη.* Προκειμένου να αποδείξουμε το θεώρημα, αρκεί να αποδείξουμε ότι το πρόβλημα VERTEX  $k$ -CUT είναι  $\mathcal{NP}$ -δύσκολο πρώτα για  $k = 3$ . Η βασική ιδέα της απόδειξης είναι να κάνουμε αναγωγή από ένα στιγμιότυπο του MAXIMUM STABLE SET προβλήματος στην κλάση των τριμερών γραφημάτων, το οποίο

γνωρίζουμε ότι είναι  $\mathcal{NP}$ -δύσκολο από το Λήμμα 6 του [45], σε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος VERTEX 3-CUT. Η απόδειξη είναι χωρισμένη σε τέσσερα μέρη έτσι ώστε να δούμε βήμα βήμα την κάθε αναγωγή ξεχωριστά.

Έστω  $G = (A \cup B \cup C, E)$  ένα τριμερές γράφημα ως ένα στιγμιότυπο του MAXIMUM STABLE SET προβλήματος. Αρχικά, κατασκευάζουμε το γράφημα  $G_1 = (A_1 \cup B_1 \cup C_1, E)$  προσθέτοντας από μία απομονωμένη κορυφή  $a, b, c$  σε κάθε συνιστώσα του  $G$ , έτσι ώστε να έχουμε  $A_1 = A \cup \{a\}$ ,  $B_1 = B \cup \{b\}$ ,  $C_1 = C \cup \{c\}$ .

Βήμα 1: Το  $G$  έχει  $X$  ανεξάρτητες κορυφές αν και μόνο εάν το  $G_1$  έχει  $X+3$  ανεξάρτητες κορυφές.

“ $\Rightarrow$ ” Αν το  $G$  έχει  $X$  ανεξάρτητες κορυφές προσθέτουμε μία κορυφή που να μη συνδέεται με καμία σε κάθε σύνολο  $A, B$ , ή  $C$  κι έτσι το  $G_1$  έχει  $X+3$  ανεξάρτητες κορυφές.

“ $\Leftarrow$ ” Οι κορυφές  $a, b, c$  εμπεριέχονται σε οποιοδήποτε μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο  $\Upsilon$  του  $G_1$ . Αν δεν ήταν οι  $a, b, c$  στο  $\Upsilon$  τότε απλά το επεκτείνουμε σε ένα μεγαλύτερο ανεξάρτητο σύνολο  $\Upsilon'$  που να περιλαμβάνει οποιαδήποτε από αυτές τις κορυφές μαζί με το  $\Upsilon$ . Έτσι, καταλήγουμε σε αντίφαση ως προς τη μεγιστοτικότητα του ανεξάρτητου συνόλου. Επομένως, πάντα περιέχονται οι  $a, b, c$  στις  $X+3$  ανεξάρτητες κορυφές του  $G_1$ .

Έπειτα, κατασκευάζουμε το γράφημα  $G_2 = (A_1 \cup B_1 \cup C_1, \bar{E} = \{uv : u \in I_1, v \in J_1, I \neq J, uv \notin E\})$  για  $I, J \in \{A, B, C\}$  που θα μοιάζει σαν το συμπλήρωμα του  $G_1$ . Εδώ βλέπουμε πως για παράδειγμα η κορυφή  $a$  θα συνδέεται με όλες τις κορυφές των  $B_1$  και  $C_1$ , καθώς το ίδιο θα συμβαίνει και στις  $b$  και  $c$  αντίστοιχα.

Βήμα 2: Το  $G$  έχει ανεξάρτητο σύνολο  $S$  με  $X$  κορυφές αν και μόνο εάν το  $G_2$  έχει ένα vertex 3-multiclique. Θέλουμε δηλαδή να δείξουμε ότι οι κορυφές  $X+\{a, b, c\}$  μπορούν να διαμεριστούν σε τρία σύνολα όπου οι  $a, b, c$  ανήκουν σε διαφορετικό σύνολο και να σχηματίζουν μία 3-κλίκα, ή αλλιώς ένα κύκλο  $C_3$ .

“ $\Rightarrow$ ” Έστω ότι υπάρχει σύνολο  $S$  με  $X$  ανεξάρτητες κορυφές στο  $G$ . Κατασκευάζουμε το σύνολο  $Y_1 = S \cap A_1$  και τα  $Y_2, Y_3$  αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι και τα τρία σύνολα  $Y_1, Y_2, Y_3$  είναι μη-κενά γιατί περιέχουν τουλάχιστον μία από τις κορυφές  $a, b, c$  αντίστοιχα. Στο  $G_2$  βλέπουμε ότι τα σύνολα αυτά θα συνδέονται πλήρως μεταξύ τους αφού προηγουμένως ήταν ανεξάρτητα. Ως εκ τούτου, θα δημιουργηθεί ένα πλήρες τριμερές γράφημα κι έτσι το  $G_2$  έχει ένα vertex 3-multiclique και οι  $a, b, c$  σχηματίζουν μία 3-κλίκα.

“ $\Leftarrow$ ” Έστω ότι υπάρχει ένα vertex 3-multiclique στο  $G_2$  και σχηματίζεται από τις κορυφές του συνόλου  $W = S \cup \{a, b, c\}$ . Οι συνιστώσες του vertex 3-multiclique θα είναι το  $W_1 = \{\text{ανεξάρτητες του } A_1\} \cup \{a\}$  και αντίστοιχα τα  $W_2$

και  $W_3$ . Κάθε δύο κορυφές από διαφορετικό  $W_i$  θα είναι γειτονικές. Στο  $G$  δεν υπάρχουν εκείνες οι ακμές μεταξύ των κορυφών των  $W_i$  για  $i = \{1, 2, 3\}$  καθώς ούτε και οι κορυφές  $a, b, c$  που σχηματίζουν μία 3-κλίκα στο  $G_2$ . Ως εκ τούτου, οι υπόλοιπες κορυφές, δηλαδή αυτές του  $S$ , είναι ανεξάρτητες στο  $G$ .

Βήμα 3: Τέλος, υποστηρίζουμε ότι το  $G_2$  έχει ένα vertex 3-multiclique αν και μόνο το  $G_1$  έχει ένα vertex 3-cut.

“ $\Rightarrow$ ” Έστω ότι υπάρχει ένα vertex 3-multiclique στο  $G_2$  με τις κορυφές  $a, b, c$  να σχηματίζουν μια 3-κλίκα. Στο συμπλήρωμα οι κορυφές του  $W$ , και άρα οι κορυφές του  $V \setminus W$ , είναι διαχωριστές και διαχωρίζουν το  $G_1$  σε τουλάχιστον τρεις συνεκτικές συνιστώσες.

“ $\Leftarrow$ ” Αντιθέτως, στο  $G_1$  δεν υπάρχουν οι ακμές που συνδέουν τις  $a, b, c$  με όλες τις άλλες από τα άλλα σύνολα και τις κορυφές του  $S$  μεταξύ τους και με τις υπόλοιπες κορυφές. Έπεται ότι θα υπάρχουν ακμές μόνο μεταξύ των κορυφών  $V \setminus W$  και συνεπώς, αυτές θα είναι διαχωριστές. Θα δημιουργηθούν τουλάχιστον τρεις συνιστώσες στο  $G_1$  επειδή έχουμε διαχωριστές μέσα σε τρία ανεξάρτητα σύνολα. Άρα, στο  $G_2$  που είναι το συμπλήρωμα, οι κορυφές του  $W$  θα διαμερίζονται σε τρία σύνολα με τις  $a, b, c$  να δημιουργούν μία 3-κλίκα.

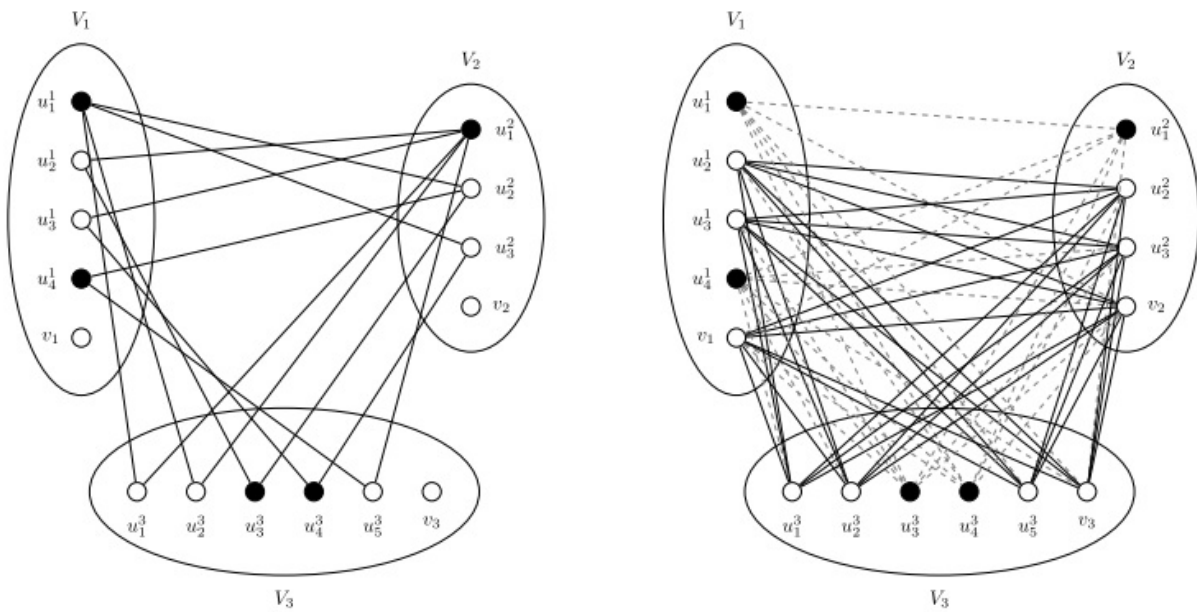
Επομένως, επειδή το πρόβλημα MAXIMUM STABLE SET σε τριμερή γραφήματα είναι  $\mathcal{NP}$ -πλήρες (Βήμα 1) τότε και το VERTEX 3-CUT είναι  $\mathcal{NP}$ -πλήρες (Βήμα 3). Στο Σχήμα 5.3, οι λευκές κορυφές παρουσιάζουν ένα maximum stable set του  $G_1$  (αριστερό γράφημα). Το ίδιο σύνολο ανταποκρίνεται σε ένα maximal 3-multiclique στο  $G_2$  (δεξί γράφημα).

Στο τελευταίο βήμα αυτής της απόδειξης θα δείξουμε ότι για μεγαλύτερα  $k$  μπορούμε απλά να προσθέσουμε μια απομονωμένη κορυφή στο αρχικό γράφημα που δεν συνδέεται με καμία άλλη κορυφή και έτσι θα αυξήσουμε τις συνεκτικές συνιστώσες κατά μία. Κατασκευάζουμε το γράφημα  $G'$  προσθέτοντας μια απομονωμένη κορυφή στο  $G$ .

Βήμα 4: Το  $G$  έχει ένα vertex  $k$ -cut μεγέθους  $r$  αν και μόνο εάν το  $G'$  έχει ένα vertex  $(k + 1)$ -cut μεγέθους  $r$ .

Από την Πρόταση 5.1, αρκεί να δείξουμε ότι το πρόβλημα VERTEX 3-MULTICLIQUE στα τριμερή γραφήματα είναι  $\mathcal{NP}$ -δύσκολο. Αφού κάθε απομονωμένη κορυφή ανήκει σε όλα τα μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα, είναι επίσης  $\mathcal{NP}$ -δύσκολο το να επιλύσουμε τριμερή στιγμιότυπα με επιπρόσθετες απομονωμένες κορυφές. Ως εκ τούτου, χωρίς απώλεια της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα σύνολα  $A, B, C$  περιλαμβάνουν από μια απομονωμένη κορυφή  $a, b$  και  $c$  αντίστοιχα. Ορίζουμε το στιγμιότυπο  $G' = (A \cup B \cup C, \bar{E})$  του προβλήματος VERTEX 3-MULTICLIQUE. Ουσιαστικά θα είναι το συμπλήρωμα του  $G$  μαζί με μία επιπλέον καθολική τώρα κορυφή. Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο  $S$

είναι ανεξάρτητο σύνολο του  $G$  που περιλαμβάνει τις  $a, b, c$  αν και μόνο εάν το  $S$  είναι ένα vertex 3-multiclique του  $G'$  που περιλαμβάνει τις  $\{a, b, c\}$ . Πράγματι, από κατασκευή, αν  $S$  κορυφές είναι διαχωριστές στο  $G$ , τότε οι  $k$  συνεκτικές συνιστώσες του  $V \setminus S$  ορίζουν μια διαμέριση στο  $G'$  όπου υπάρχουν όλες οι ακμές μεταξύ των  $k$  συνόλων vertex  $k$ -multiclique. Ισχύει κι η αντίστροφη φορά της απόδειξης. Αφού κάθε μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο του  $G$  και κάθε μέγιστο vertex 3-multiclique του  $G'$  περιέχουν τις  $a, b, c$  το ζητούμενο έχει δειχθεί.  $\square$



Σχήμα 5.3: Αναγωγή από το MAXIMUM STABLE SET στα τριμερή γραφήματα στο 3-MULTICLIQUE πρόβλημα. Αριστερά το  $G_1$ , όπου  $V_1 = A_1, V_2 = B_1, V_3 = C_1$ , με τις άσπρες ανεξάρτητες κορυφές  $v_1 = a, v_2 = b, v_3 = c$  και δεξιά το  $G_2$  με τις άσπρες να σχηματίζουν ένα vertex 3-multiclique [15].

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

## ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΙ ΔΙΑΧΩΡΙΣΤΕΣ

Στο τελευταίο κεφάλαιο είναι καλό να αναρωτηθούμε πώς αλλιώς μπορούμε να διαχωρίσουμε ένα γράφημα. Εν αντιθέσει με τα προηγούμενα κεφάλαια όπου αναφερόμασταν σε διαχωριστές κορυφών, σειρά έχουν τώρα οι διαχωριστές ακμών. Ποικίλα προβλήματα διαμέρισης γραφημάτων έχουν μελετηθεί κάνοντας χρήση αυτού του είδους τους διαχωριστές και τα πλείστα από αυτά είναι  $\mathcal{NP}$ -δύσκολα. Αφού ορίσουμε τους σημαντικούς διαχωριστές σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε διάφορα προβλήματα διαμέρισης κατευθυνόμενων γραφημάτων και μη που έχουνδειχθεί να ανήκουν στην κλάση των FPT προβλημάτων και στο τέλος, θα δούμε μία εφαρμογή των σημαντικών διαχωριστών σε ένα πρόβλημα πραγματικών δικτύων.

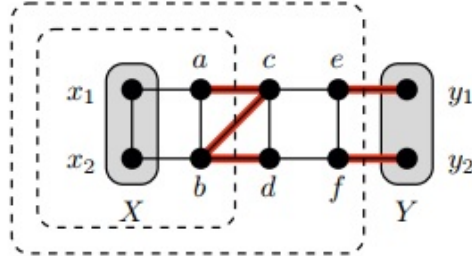
Για να ορίσουμε την έννοια του σημαντικού διαχωριστή χρειάζεται πρώτα να ορίσουμε τον διαχωριστή ακμών. Παρόμοια με τον ορισμό που δώσαμε στο Κεφάλαιο 4 για την τομή (cut) ενός γραφήματος με κορυφές, θα ορίσουμε τώρα ως τομή το σύνολο των ακμών που διαχωρίζει δύο συγκεκριμένα σύνολα κορυφών ενός γραφήματος.

**Ορισμός 6.1.** Ένα  $(X, Y)$ -cut είναι το σύνολο ακμών  $S$  που διαχωρίζει ένα σύνολο κορυφών  $X$  από ένα άλλο  $Y$ , έτσι ώστε στο υπογράφημα  $G \setminus S$  να μην υπάρχει κανένα  $X - Y$  μονοπάτι. Ένα  $(X, Y)$ -cut  $S$  είναι **ελαχιστοτικό** εάν δεν υπάρχει άλλο  $(X, Y)$ -cut  $S'$ , όπου  $S' \subset S$ .

Έστω  $S$  ένα ελαχιστοτικό  $(X, Y)$ -cut στο  $G$  και έστω  $R_S$  ή  $R$  το σύνολο των κορυφών που προσεγγίζονται από το  $X$  στο  $G \setminus S$ . Προφανώς, θα έχουμε ότι  $X \subseteq R \subseteq V(G) \setminus Y$ . Αν το  $G$  είναι ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα και  $R \subseteq V(G)$  είναι ένα σύνολο κορυφών, τότε θα συμβολίζουμε με  $\delta(R)$  το σύνολο ακμών που έχουν ακριβώς το ένα άκρο στο  $R$ .

**Πρόταση 6.1.** Αν το  $S$  είναι ένα ελαχιστοτικό  $(X, Y)$ -cut, τότε  $S = \delta(R)$ , όπου  $R$  συμβολίζει το σύνολο κορυφών που προσεγγίζονται από το σύνολο  $X$  στο  $G \setminus S$ .

## Κεφάλαιο 6



Σχήμα 6.1: Το σύνολο  $\delta(\{x_1, x_2, a, b, c, d, e, f\}) = \{(e, y_1), (f, y_2)\}$  είναι ένα ελάχιστο  $(X, Y)$ -cut (και έτσι ελαχιστοτικό). Το σύνολο  $\delta(\{x_1, x_2, a, b\}) = \{(a, c), (b, c), (b, d)\}$  είναι ένα ελαχιστοτικό  $(X, Y)$ -cut, όμως όχι ελάχιστο. Το σύνολο  $\delta(\{x_1, x_2, a, c, d\}) = \{(x_2, b), (a, b), (b, c), (b, d), (c, e), (d, f)\}$  είναι ένα  $(X, Y)$ -cut, όμως δεν είναι ελαχιστοτικό [17].

Επομένως, σε αυτό το κεφάλαιο θα χαρακτηρίζουμε συχνά ένα ελαχιστοτικό  $(X, Y)$ -cut  $S$  ως  $\delta(R)$  για κάποιο σύνολο  $R \subseteq V(G)$ . Να σημειώσουμε επίσης ότι ένα  $\delta(R)$  είναι ένα  $(X, Y)$ -cut, για κάθε τέτοιο σύνολο  $R$  με  $X \subseteq R \subseteq V(G) \setminus Y$ , όμως όχι απαραίτητα ένα ελαχιστοτικό  $(X, Y)$ -cut (βλ. Σχήμα 6.1).

Αξίζει να αναφέρουμε ένα αποτέλεσμα των Ford και Fulkerson το οποίο θα μας φανεί χρήσιμο και στη συνέχεια της μελέτης. Κατασκεύασαν ένα αλγόριθμο που επιτυγχάνει σε γραμμικό χρόνο να αποφασίσει εάν ένα γράφημα έχει ένα  $(X, Y)$ -cut μεγέθους το πολύ  $k$ .

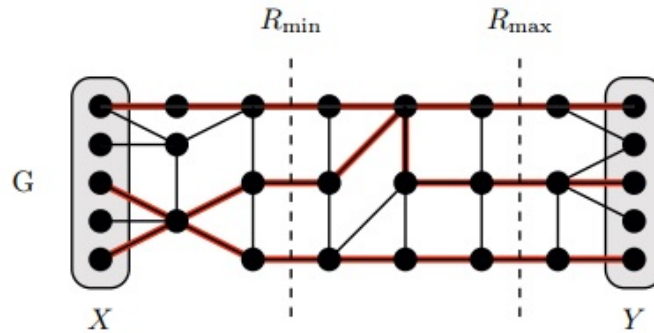
**Θεώρημα 6.1** ([17]). Δεδομένου ενός γραφήματος  $G$  με  $n$  κορυφές και  $m$  ακμές, δύο διακριτών συνόλων  $X, Y \subseteq V(G)$  και ενός ακέραιου  $k$ , υπάρχει ένας αλγόριθμος χρόνου  $O(k(n + m))$  όπου:

- είτε καταλήγει ορθά ότι δεν υπάρχει  $(X, Y)$ -cut μεγέθους το πολύ  $k$ ,
- είτε εξάγει ένα ελάχιστο  $(X, Y)$ -cut  $\delta(R)$  και μία συλλογή από  $|\delta(R)|$  διακριτά μονοπάτια (που δεν συμπίπτουν) από το σύνολο  $X$  στο  $Y$ .

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι  $X = \{x\}$ ,  $Y = \{y\}$ , και  $k$  μονοπάτια μήκους  $\ell$  συνδέουν την  $x$  με την  $y$ . Τότε επιλέγοντας μία ακμή από κάθε μονοπάτι παίρνουμε ένα ελάχιστο  $(X, Y)$ -cut, ως εκ τούτου υπάρχουν  $n^k$  διαφορετικά ελάχιστα  $(X, Y)$ -cuts. Ωστόσο, υπάρχει ένα μοναδικό ελάχιστο  $\delta(R_{min})$  που είναι κοντά στο  $X$  και ένα μοναδικό μέγιστο  $\delta(R_{max})$  που είναι κοντά στο  $Y$ , με την έννοια ότι τα σύνολα  $R_{min}$  και  $R_{max}$  είναι το ένα ελάχιστο και το άλλο μέγιστο, αντίστοιχα (βλ. Σχήμα 6.2).

Κεφάλαιο 6

**Θεώρημα 6.2** ([17]). Έστω ένα γράφημα  $G$  και δύο διακριτά σύνολα κορυφών  $X, Y$ . Υπάρχουν δύο ελάχιστοι  $X, Y$ -διαχωριστές  $\delta(R_{min})$  και  $\delta(R_{max})$  τέτοιοι ώστε αν ο  $\delta(R)$  είναι ένας ελάχιστος  $X, Y$ -διαχωριστής, να ισχύει  $R_{min} \subseteq R \subseteq R_{max}$ . Τα σύνολα  $R_{min}$  και  $R_{max}$  μπορούν να βρεθούν σε χρόνο  $O(k(n + m))$ .

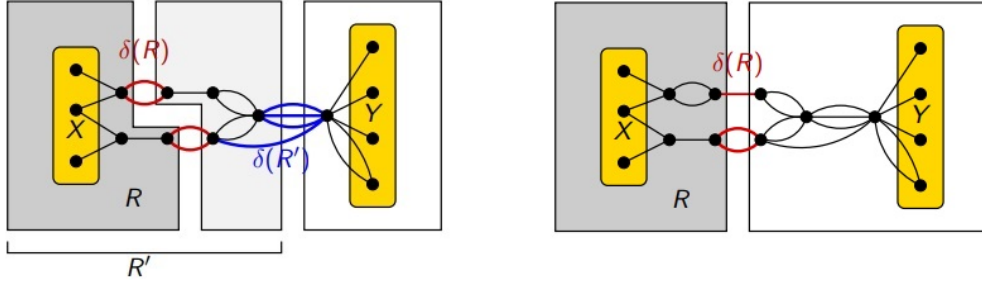


Σχήμα 6.2: Ένα γράφημα  $G$  με τρία διακριτά  $X - Y$  μονοπάτια και τα  $(X, Y)$ -cuts  $R_{min}$  και  $R_{max}$  [17].

**Ορισμός 6.2 (Σημαντικοί διαχωριστές).** Έστω  $G$  ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα και έστω  $X, Y \subseteq V(G)$  δύο διακριτά σύνολα κορυφών. Έστω  $S \subseteq E(G)$  ένα  $(X, Y)$ -cut και έστω  $R$  το σύνολο των κορυφών που προσεγγίζονται από το  $X$  στο  $G \setminus S$ . Λέμε ότι το  $S$  είναι ένας **σημαντικός διαχωριστής** ή ένα **important  $(X, Y)$ -cut** εάν είναι ελαχιστοτικός και δεν υπάρχει άλλο  $(X, Y)$ -cut  $S'$  με  $|S'| \leq |S|$  τέτοιο ώστε  $R \subset R'$ , όπου  $R'$  είναι το σύνολο των κορυφών που προσεγγίζονται από το  $X$  στο  $G \setminus S'$ .

Μια διαισθητική ερμηνεία του ορισμού των σημαντικών διαχωριστών είναι ότι θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το μέγεθος του  $(X, Y)$ -cut και ταυτόχρονα θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το σύνολο των κορυφών που παραμένουν προσιτές από το  $X$  μετά την αφαίρεση της τομής. Οι  $X, Y$ -σημαντικοί διαχωριστές είναι οι λεγόμενοι "Pareto efficient"  $X, Y$ -διαχωριστές που λαμβάνουν υπόψη δύο στόχους: την αύξηση του συνόλου κορυφών που προσεγγίζονται από το  $X$  η οποία απαιτεί αυστηρά και την αύξηση του μεγέθους της τομής.

Σημειώνουμε ότι ο ορισμός δεν είναι συμμετρικός: ένα σημαντικό  $(X, Y)$ -cut δεν είναι απαραίτητα ένα σημαντικό  $(Y, X)$ -cut. Επίσης, αξίζει να πούμε ότι μπορεί να διερευνηθεί σε πολυωνυμικό χρόνο εάν ένας διαχωριστής είναι σημαντικός. Κάτι τέτοιο συμβαίνει όταν βρεθεί ότι  $R = R_{max}$  (βλ. Σχήμα 6.3).



Σχήμα 6.3: Αριστερά ο  $\delta(R)$  δεν είναι σημαντικός διαχωριστής γιατί υπάρχει άλλος  $\delta(R')$  με ίσο πλήθος ακμών. Ενώ στη δεξιά εικόνα ισχύει ότι  $R = R_{max}$  κι έτσι ο διαχωριστής  $\delta(R)$  με τις τρεις ακμές είναι σημαντικός [36].

**Πρόταση 6.2.** Δεδομένου ενός γραφήματος  $G$  με  $n$  κορυφές και  $m$  ακμές και δύο συνόλων  $X, Y \subseteq V(G)$ , και ένα  $(X, Y)$ -cut  $\delta(R)$  μεγέθους  $k$ , μπορεί να εξεταστεί σε χρόνο  $O(k(n + m))$  αν το  $\delta(R)$  είναι ένας σημαντικός διαχωριστής.

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε ότι το  $\delta(R)$  είναι ένας σημαντικός  $X, Y$ -διαχωριστής αν και μόνο εάν είναι ο μοναδικός ελάχιστος  $R, Y$ -διαχωριστής. Επομένως, εάν υπολογίσουμε τον ελάχιστον  $R, Y$ -διαχωριστή  $\delta(R_{max})$  χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Θεωρήματος 6.2, τότε το  $\delta(R)$  είναι ένας  $X, Y$ -σημαντικός διαχωριστής εάν και μόνο  $R = R_{max}$ .  $\square$

**Λήμμα 6.1.** Αν το σύνολο  $\delta(R)$  είναι ένας  $X, Y$ -σημαντικός διαχωριστής, τότε ισχύει  $R_{max} \subseteq R$ .

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι ο αριθμός των σημαντικών διαχωριστών σε ένα γράφημα μπορεί να είναι εκθετικά μεγάλος.

**Θεώρημα 6.3** ([17]). Υπάρχουν  $4^k$   $X, Y$ -σημαντικοί διαχωριστές μεγέθους το πολύ  $k$ , για κάποιο ακέραιο  $k \geq 0$ .

*Απόδειξη.* Για να πετύχουμε το άνω όριο του θεωρήματος  $4^k$ , θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχουν το πολύ  $2^{2k-\lambda}$   $X, Y$ -σημαντικοί διαχωριστές μεγέθους το πολύ  $k$ , όπου  $\lambda$  είναι το μέγεθος του μικρότερου  $(X, Y)$ -cut. Εφαρμόζουμε επαγωγή στο  $2k - \lambda$ . Αν  $\lambda > k$ , τότε δεν υπάρχει  $(X, Y)$ -cut μεγέθους  $k$ , και επομένως ο ισχυρισμός ισχύει αν  $2k - \lambda < 0$ . Επίσης αν  $\lambda = 0$  και  $k \geq 0$ , τότε το κενό σύνολο είναι ο μοναδικός  $X, Y$ -σημαντικός διαχωριστής μεγέθους το πολύ  $k$ .

Έστω  $\delta(R)$  ένας  $X, Y$ -σημαντικός διαχωριστής και έστω  $\delta(R_{max})$  ο ελάχιστος  $X, Y$ -διαχωριστής όπως ορίζεται στο Θεώρημα 6.2. Από το Λήμμα 6.1



## Κεφάλαιο 6

έχουμε ότι  $R_{max} \subseteq R$ . Αφού υποθέσαμε  $\lambda > 0$ , υπάρχει τουλάχιστον μία ακμή  $e = (x, y)$  με το ένα άκρο στο  $R_{max}$ , ας πούμε η  $x$ . Τότε ή  $y \in R$  ή  $y \notin R$ . Αν  $y \notin R$ , τότε η  $e$  είναι μία ακμή του διαχωριστή  $\delta(R)$  και τότε  $S \setminus e$  είναι ένας  $X, Y$ -σημαντικός διαχωριστής στο  $G' = G \setminus e$  μεγέθους το πολύ  $k' := k - 1$ . Αφαιρώντας μία ακμή μπορεί να μειωθεί το μέγεθος του ελάχιστου  $X, Y$ -διαχωριστή το πολύ κατά 1, έτσι το  $\lambda'$  στο  $G'$  είναι τουλάχιστον  $\lambda - 1$ . Επομένως,  $2k' - \lambda' < 2k - \lambda$  και η επαγωγική υπόθεση μας δίνει ότι υπάρχουν το πολύ  $2^{2k' - \lambda'}$   $X, Y$ -σημαντικοί διαχωριστές μεγέθους  $k'$  στο  $G'$ , και συνεπώς υπάρχουν  $2^{2k - \lambda - 1}$  το πολύ  $X, Y$ -σημαντικοί διαχωριστές μεγέθους  $k$  στο  $G$  που περιλαμβάνουν την  $e$ , αφού  $2^{2k' - \lambda'} \leq 2^{2k - \lambda - 1}$ .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο  $X, Y$ -σημαντικός διαχωριστής δεν περιλαμβάνει την  $e$ . Αυτό μας δείχνει ότι  $R_{max} \cup \{y\} \subseteq R$ . Έστω  $X' = R_{max} \cup \{y\}$ , ακολουθεί ότι το  $\delta(R)$  είναι ένας  $X', Y$ -διαχωριστής. Δεν υπάρχει κανένας  $X', Y$ -διαχωριστής  $\delta(R')$  μεγέθους  $\lambda$ : τέτοια τομή θα ήταν ένας  $X, Y$ -διαχωριστής με  $R_{max} \subset R_{max} \cup \{y\} \subseteq R'$ , κάτι το οποίο αντιτίθεται στη μεγιστοτικότητα του  $R_{max}$ . Συνεπώς, το  $\lambda'$  που είναι το μέγεθος του ελάχιστου  $X', Y$ -διαχωριστή είναι μεγαλύτερο από το  $\lambda$ . Από την επαγωγική υπόθεση προκύπτει ότι ο αριθμός των  $X', Y$ -σημαντικών διαχωριστών μεγέθους το πολύ  $k$  είναι το πολύ  $2^{2k - \lambda'} \leq 2^{2k - \lambda - 1}$ , το οποίο είναι ένα όριο για τον αριθμό των  $X, Y$ -σημαντικών διαχωριστών μεγέθους  $k$  στο  $G$  που δεν περιλαμβάνουν την  $(x, y)$ .

Τέλος, προσθέτοντας τα όρια των δύο περιπτώσεων παίρνουμε το απαιτούμενο όριο  $2^{2k - \lambda}$ .  $\square$

Η κύρια χρήση του ορίου στο Θεώρημα 6.3 γίνεται σε αλγόριθμους που βασίζονται στη διακλάδωση. Καθώς ο αριθμός των  $X, Y$ -σημαντικών διαχωριστών φράσσεται από μία συνάρτηση του  $k$ , μας δίνεται η δυνατότητα για εφαρμογή διακλάδωσης πάνω σε ένα σημαντικό διαχωριστή που θα επιλέξουμε (όπως θα δούμε παραδείγματος χάριν στο Θεώρημα 6.5). Το παρακάτω όριο βοηθά στην εύρεση πιο αυστηρού ορίου για το μέγεθος του βάνθους του δέντρου αναζήτησης τέτοιων αλγορίθμων. Η απόδειξη του είναι ουσιαστικά η ίδια με του Θεωρήματος 6.3 κάνοντας την κατάλληλη επαγωγή.

**Λήμμα 6.2** ([17]). Έστω  $X, Y \subseteq V(G)$ . Αν θεωρήσουμε ως  $\mathcal{S}$  το σύνολο όλων των  $X, Y$ -σημαντικών διαχωριστών, τότε ισχύει το όριο  $\sum_{S \in \mathcal{S}} 4^{-|S|} \leq 1$ .

Επιπλέον, το λήμμα αυτό αποδεικνύει το όριο στο Θεώρημα 6.4: εάν το άθροισμα είναι το πολύ 1, τότε δεν μπορούν να υπάρξουν περισσότεροι από  $4^k$   $X, Y$ -σημαντικοί διαχωριστές μεγέθους το πολύ  $k$ .

**Θεώρημα 6.4** ([18]). Έστω  $X, Y \subseteq V(G)$ , έστω  $k \geq 0$  ακέραιος, και έστω  $\mathcal{S}_k$

το σύνολο όλων των  $X, Y$ -σημαντικών διαχωριστών μεγέθους το πολύ  $k$ . Τότε  $|\mathcal{S}_k| \leq 4^k$  και το  $\mathcal{S}_k$  μπορεί να κατασκευαστεί σε χρόνο  $|\mathcal{S}_k| \cdot n^{O(1)}$ .

Ως μια εφαρμογή, μπορούμε να αποδείξουμε το παρακάτω απλό, όμως όχι τετριμμένο συνδυαστικό αποτέλεσμα:

**Λήμμα 6.3** ([17]). Έστω  $X, Y \subseteq V(G)$ . Η ένωση όλων των ελαχιστοτικών  $X, Y$ -διαχωριστών μεγέθους το πολύ  $k$  περιλαμβάνει το πολύ  $k \cdot 4^k$  ακμές που προσπίπτουν στο  $Y$ .

## 6.1 Μη-κατευθυνόμενα γραφήματα

### 6.1.1 Edge Multiway Cut

Έστω  $G$  ένα γράφημα και  $T$  ένα σύνολο κορυφών. Ως **edge multiway cut** ορίζεται ένα σύνολο  $S$  ακμών έτσι ώστε κάθε συνιστώσα του  $G \setminus S$  να περιέχει το πολύ μία κορυφή του  $T$ .

#### EDGE MULTIWAY CUT

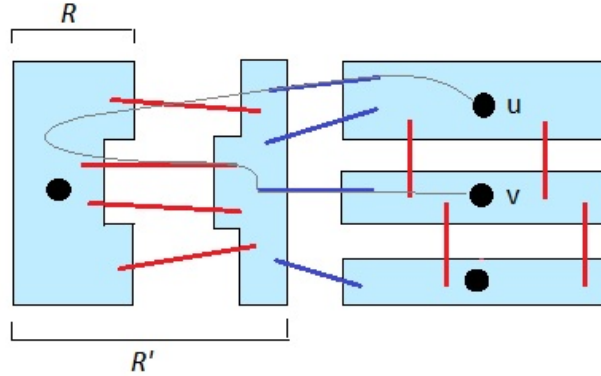
**Είσοδος:** Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G$ , ένα σύνολο κορυφών  $T$  και ένας ακέραιος  $k$ .

**Στόχος:** Να προσδιοριστεί εάν το  $G$  έχει ένα edge multiway cut  $S$  μεγέθους το πολύ  $k$ .

Θα δούμε πως το πρόβλημα EDGE MULTIWAY CUT είναι FPT παραμετροποιημένο ως προς τη μεταβλητή  $k$ . Η πιο κάτω παρατήρηση συνδέει το πρόβλημα με την έννοια των σημαντικών διαχωριστών.

**Λήμμα 6.4** (Pushing Lemma [17]). Έστω μια κορυφή  $t \in T$  που δεν διαχωρίζεται από το  $T \setminus t$  στο  $G$ . Αν το  $G$  έχει ένα edge multiway cut  $S$ , τότε έχει και ένα  $S'$  edge multiway cut με  $|S'| \leq |S|$ , που περιλαμβάνει ένα  $t, T \setminus t$ -σημαντικό διαχωριστή.

*Απόδειξη.* Η τετριμμένη περίπτωση ισχύει όταν η κορυφή  $t$  διαχωρίζεται από το σύνολο  $T \setminus t$  στο  $G$ , καθώς το κενό σύνολο είναι ένας  $t, T \setminus t$ -σημαντικός διαχωριστής. Διαφορετικά, έστω ότι έχουμε μία συνιστώσα  $R$  του  $G \setminus S$  που περιλαμβάνει την  $t$ . Καθώς το  $S$  είναι ένα edge multiway cut, το  $R$  δεν συμπίπτει με το  $T \setminus t$



Σχήμα 6.4: Αντικαθιστώντας το  $\delta(R)$  με το  $\delta(R')$  στην απόδειξη του Λήμματος 6.4 η λύση παραμένει εφικτή: αν ένα μονοπάτι που συνδέει τις  $u, v \in T \setminus t$  που περνά από το  $R$ , τότε πρέπει να χρησιμοποιήσει και μία ακμή από το  $\delta(R')$ .

και ως εκ τούτου  $S_R = \delta(R)$  είναι ένας  $t, T \setminus t$ -διαχωριστής  $S' = \delta(R')$  με  $R \subseteq R'$  και  $|S'| \leq |S_R|$  (βλ. Σχήμα 6.4). Ισχυριζόμαστε ότι  $S^* = (S \setminus S_R) \cup S'$ , το οποίο έχει μέγεθος το πολύ  $|S|$ , είναι επίσης ένα edge multiway cut, που αποδεικνύει το λήμμα. Στη λύση του προβλήματος δεν κάνει διαφορά αν αντικαταστήσουμε το  $(t, T \setminus t)$ -cut  $S_R$  με ένα σημαντικό  $(t, T \setminus t)$ -cut  $S'$ , αφού έχουμε ένα πιο βέλτιστο αποτέλεσμα στον διαχωρισμό των κορυφών στο  $T \setminus t$ .

Προφανώς, δεν θα υπάρχει μονοπάτι μεταξύ της κορυφής  $t$  και οποιασδήποτε άλλης κορυφής του  $T \setminus t$  στο  $G \setminus S^*$ , καθώς το  $S' \subseteq S^*$  είναι ένα  $(t, T \setminus t)$ -cut. Υποθέτουμε επομένως ότι υπάρχει μονοπάτι  $P$  μεταξύ δύο διακριτών κορυφών  $u, v \in T$  στο  $G \setminus S^*$ . Αν το  $P$  περνά από μία κορυφή του  $R \subseteq R'$ , τότε περνάει κι από τουλάχιστον μία ακμή του  $(t, T \setminus t)$ -cut  $S' = \delta(R')$ , το οποίο είναι υποσύνολο του  $S^*$ , άτοπο. Ως εκ τούτου, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το  $P$  δεν περνάει μέσα από το  $R$ . Τότε το  $P$  δεν περνά από κάποια ακμή του  $S_R = \delta(R)$  και άρα το γεγονός ότι το  $P$  δεν περνάει μέσα από το  $S^*$  σημαίνει ότι δεν περνά ούτε μέσα από το  $S$ , κάτι το οποίο αντιτίθεται στην υπόθεση ότι το  $S$  είναι ένα multiway cut.  $\square$

Χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα με διακλάδωση στην επιλογή ενός σημαντικού διαχωριστή και να τον συμπεριλάβουμε στη λύση:

**Θεώρημα 6.5** ([17]). Το πρόβλημα EDGE MULTIWAY CUT μπορεί να λυθεί

σε χρόνο  $O(4^k \cdot k^3 \cdot (n + m))$ .

*Απόδειξη.* Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα με ένα αναδρομικό αλγόριθμο διακλάδωσης. Εάν όλες οι κορυφές διαχωρίζονται η μία από την άλλη, τότε τελειώσαμε. Διαφορετικά, έστω  $t \in T$  μία κορυφή που δεν διαχωρίζεται από τις υπόλοιπες. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Θεωρήματος 6.4 κατασκευάζουμε το σύνολο  $\mathcal{S}_k$  αποτελούμενο από κάθε  $t, T \setminus t$ -σημαντικό διαχωριστή μεγέθους το πολύ  $k$ . Από το Λήμμα 6.4, υπάρχει μια λύση που περιλαμβάνει ένα από αυτούς τους διαχωριστές. Επομένως, εφαρμόζουμε διακλάδωση στην επιλογή ενός από τους διαχωριστές και για κάθε σημαντικό διαχωριστή  $S' \in \mathcal{S}_k$ , λύνουμε αναδρομικά το στιγμιότυπο του προβλήματος EDGE MULTIWAY CUT  $(G \setminus S', k - |S'|)$ . Εάν ένα από αυτά τα κλαδιά επιστρέψει μία λύση  $S$ , τότε είναι προφανές ότι  $S \cup S'$  είναι ένα edge multiway cut μεγέθους το πολύ  $k$  στο  $G$ .

Η ορθότητα του αλγορίθμου προκύπτει από το Λήμμα 6.4. Ισχυριζόμαστε πως το δέντρο αναζήτησης που διερευνήθηκε από τον αλγόριθμο έχει το πολύ  $4^k$  φύλλα. Το αποδεικνύουμε αυτό με επαγωγή στο  $k$  κι έτσι υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για κάθε τιμή μικρότερη του  $k$ . Αυτό σημαίνει ότι γνωρίζουμε πως η αναδρομική κλήση του  $(G \setminus S', k - |S'|)$  διερευνά ένα δέντρο αναζήτησης με το πολύ  $4^{k-|S'|}$  φύλλα. Με τη χρήση του Λήμματος 6.2 μπορούμε να φράξουμε τον αριθμό των φύλλων του δέντρου αναζήτησης με

$$\sum_{S' \in \mathcal{S}_k} 4^{k-|S'|} \leq 4^k \cdot \sum_{S' \in \mathcal{S}_k} 4^{-|S'|} \leq 4^{-k}.$$

Επομένως, ο συνολικός χρόνος που απαιτήθηκε στα φύλλα φράσσεται από  $O(4^k \cdot k \cdot (n + m))$ . Καθώς το ύψος του δέντρου αναζήτησης είναι το πολύ  $k$ , έχει  $O(k \cdot 4^k)$  κόμβους. Χρησιμοποιώντας αλγόριθμο διακλάδωσης για να υπολογίσουμε το  $\mathcal{S}_k$ , ο συνολικός χρόνος για κάθε εσωτερικό κόμβο με  $t$  παιδιά είναι  $O(t \cdot k^2 \cdot (n + m))$ . Αθροίζοντας τον αριθμό των παιδιών για κάθε εσωτερικό κόμβο παίρνουμε ακριβώς τον αριθμό των ακμών, ο οποίος φράσσεται από  $O(k \cdot 4^k)$ . Συνεπώς, ο συνολικός χρόνος που απαιτείται για την επίλυση του προβλήματος EDGE MULTIWAY CUT είναι  $O(4^k \cdot k^3 \cdot (n + m))$ .  $\square$

Οι Cygan και Pilipczuk [18] έδειξαν ότι υπάρχει περιθώριο ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου να βελτιωθεί από  $4^k \cdot n^{O(1)}$  σε  $2^k \cdot n^{O(1)}$  κάνοντας χρήση διάφορων τεχνικών.

### 6.1.2 Multicut

Μια φυσική γενίκευση του EDGE MULTIWAY CUT μπορεί να προκύψει αν, αντί της απαίτησης να διαχωρίζονται όλες οι κορυφές μεταξύ τους, απαιτήσουμε ένα συγκεκριμένο σύνολο από ζεύγη να διαχωρίζονται μεταξύ τους:

#### MULTICUT

**Είσοδος:** Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G$ , ζεύγη  $(s_1, t_1), \dots, (s_\ell, t_\ell)$  και ένας ακέραιος  $k$ .

**Στόχος:** Να προσδιοριστεί εάν το  $G$  έχει ένα σύνολο  $S$  με το πολύ  $k$  ακμές έτσι ώστε το  $G \setminus S$  να μην έχει μονοπάτι  $s_i - t_i$  για κάθε  $i$ .

Το Θεώρημα 6.5 υποδηλώνει ότι το MULTICUT ανήκει στην κλάση των FPT προβλημάτων παραμετροποιημένο ως προς τις μεταβλητές  $k$  και  $\ell$ . Μπορούμε να μαντέψουμε πως η λύση  $S$  διαμερίζει τις  $2\ell$  κορυφές  $s_i, t_i$  ( $1 \leq i \leq \ell$ ), προσδιορίζει τις κορυφές που πρέπει να είναι στην ίδια συνιστώσα του  $G \setminus S$ , και τέλος επιλύει το EDGE MULTIWAY CUT στιγμιότυπο. Ένα πιο περίπλοκο ερώτημα που μπορεί να τεθεί είναι αν το MULTICUT μπορεί να είναι FPT παραμετροποιημένο μόνο ως προς  $k$  (το μέγεθος της λύσης). Πολύ πρόσφατα οι Bousquet και Marx έχουν απαντήσει θετικά σε αυτό το ερώτημα.

**Θεώρημα 6.6** ([37]). *Το πρόβλημα MULTICUT είναι FPT παραμετροποιημένο ως προς  $k$ .*

Η απόδειξη στο [37] εισάγει μία νέα μέθοδο χρησιμοποιώντας σημαντικούς διαχωριστές: με τη μέθοδο «τυχαίας επιλογής σημαντικών διαχωριστών» μπορούμε να απλοποιήσουμε σημαντικά το στιγμιότυπο του προβλήματος.

## 6.2 Κατευθυνόμενα γραφήματα

Πολλά από τα προβλήματα της Αλγοριθμικής Θεωρία Γραφημάτων είναι σαφώς δυσκολότερα στα κατευθυνόμενα γραφήματα σε σύγκριση με τα προβλήματα στα μη-κατευθυνόμενα γραφήματα. Το φαινόμενο αυτό έχει παρατηρηθεί εξίσου σε αλγόριθμους πολυωνυμικού χρόνου, στην προσεγγιστικότητα, και στη μέθοδο επιλυσιμότητας με σταθερή παράμετρο. Θα δούμε τώρα αν οι τεχνικές των σημαντικών διαχωριστών γενικεύονται και στα κατευθυνόμενα γραφήματα.

Δεδομένου ενός κατευθυνόμενου γραφήματος  $G$  και δύο διακριτών συνόλων κορυφών  $X, Y \subseteq V(G)$ , ένα **κατευθυνόμενο  $(X, Y)$ -cut** είναι ένα υποσύνολο

ακμών  $S$  έτσι ώστε το υπογράφημα  $G \setminus S$  να μην έχει κατευθυνόμενο μονοπάτι από το  $X$  στο  $Y$  (όμως μπορεί να έχει κατευθυνόμενα μονοπάτια από το  $Y$  στο  $X$ ). Συμβολίζουμε με  $\delta_G^+(R)$  το σύνολο των ακμών που αρχίζουν από το σύνολο  $R$  και καταλήγουν στο  $V(G) \setminus R$ .

Ανάλογος ορισμός για τους σημαντικούς διαχωριστές ισχύει και για τα κατευθυνόμενα γραφήματα, καθώς επίσης και το όριο  $4^k$  του Θεωρήματος 6.4. Η τεχνική αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί συγκεκριμένα για ναδειχθεί ότι το πρόβλημα DIRECTED MULTIWAY CUT ανήκει στην κλάση FPT. Ωστόσο, το Pushing Lemma (Λήμμα 6.4) δεν ισχύει. Αυτό σημαίνει πως μία άμεση γενίκευση του Θεωρήματος 6.5 δεν είναι δυνατή στα κατευθυνόμενα γραφήματα. Παρόλα αυτά ο Chitnis και άλλοι [13] έδειξαν με τη χρήση της τεχνικής τυχαίας δειγματοληψίας [37], ότι το πρόβλημα είναι FPT.

#### DIRECTED MULTIWAY CUT

**Είσοδος:** Ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $G$ , ένα σύνολο  $T \subseteq V(G)$  και ένας ακέραιος  $k$ .

**Στόχος:** Να προσδιοριστεί εάν το  $G$  έχει ένα σύνολο  $S$  με το πολύ  $k$  ακμές έτσι ώστε το  $G \setminus S$  να μην έχει μονοπάτι  $u \rightarrow v$  για κάθε δύο διακριτά  $u, v \in T$ .

**Θεώρημα 6.7** ([13]). Το πρόβλημα DIRECTED MULTIWAY CUT ανήκει στην κλάση FPT.

Τι γίνεται όμως με το πιο γενικό DIRECTED MULTICUT; Σε αντίθεση με τη μη-κατευθυνόμενη εκδοχή, το κατευθυνόμενο πρόβλημα είναι  $W[1]$ -δύσκολο παραμετροποιημένο ως προς  $k$  [37]. Όμως το πρόβλημα μπορεί να γίνει ενδιαφέρον ακόμη και για μικρές τιμές του  $\ell$ . Στην περίπτωση όπου  $\ell = 2$  μπορεί να γίνει αναγωγή του προβλήματος στο DIRECTED MULTIWAY CUT, έτσι ώστε από το Θεώρημα 6.7 το DIRECTED MULTICUT για  $\ell = 2$  είναι FPT παραμετροποιημένο ως προς το  $k$ . Όμως, στην περίπτωση μιας σταθεράς  $\ell \geq 3$  και στην περίπτωση παραμετροποίησης από κοινού των  $\ell$  και  $k$  το πρόβλημα παραμένει ανοιχτό.

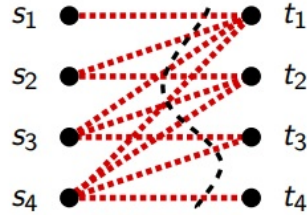
Στη συνέχεια θα δούμε μια διαφοροποίηση του DIRECTED MULTICUT:

#### SKREW MULTICUT

**Είσοδος:** Ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $G$ , ζεύγη  $(s_1, t_1), \dots, (s_\ell, t_\ell)$  και ένας ακέραιος  $k$ .

**Στόχος:** Να προσδιοριστεί εάν το  $G$  έχει ένα σύνολο  $S$  με το πολύ  $k$  ακμές έτσι ώστε το  $G \setminus S$  να μην έχει μονοπάτι  $s_i \rightarrow t_j$  για κάθε  $i \leq j$ .

Για αυτό το πρόβλημα, το Pushing Lemma μπορεί να δώσει λύση που περιλαμβάνει ένα  $s_1, \{t_1, \dots, t_\ell\}$ -σημαντικό διαχωριστή (βλ. Σχήμα 6.5). Επομένως, τεχνικές αναλογίες του Θεωρήματος 6.5 μας δίνουν το εξής αποτέλεσμα:



Σχήμα 6.5: Ένας σημαντικός διαχωριστής για το πρόβλημα SKEW MULTICUT φαίνεται με μαύρη διακεκομμένη γραμμή [36].

**Θεώρημα 6.8** (Chen [12]). Το πρόβλημα SKEW MULTICUT είναι FPT παραμετροποιημένο ως προς  $k$ .

Κατ' ακρίβεια, το SKEW MULTICUT αποτελεί σημαντικό παράγοντα στην απόδειξη για το αν το DIRECTED FEEDBACK VERTEX SET είναι FPT.

#### DIRECTED FEEDBACK VERTEX SET

**Είσοδος:** Ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  και ένας ακέραιος  $k$ .

**Στόχος:** Να προσδιοριστεί εάν το  $G$  έχει ένα σύνολο  $S$  με το πολύ  $k$  κορυφές έτσι ώστε το  $G \setminus S$  να μην έχει κατευθυνόμενους κύκλους.

Κάνοντας αναγωγή από το DIRECTED FEEDBACK VERTEX SET στο SKEW MULTICUT και σε συνδυασμό με το Θεώρημα 6.8, σύμφωνα με τον Chen [12], μπορούμε να επιτύχουμε την επιλυσιμότητα ως προς σταθερή παράμετρο του DIRECTED FEEDBACK VERTEX SET.

**Θεώρημα 6.9** ([12]). Το πρόβλημα DIRECTED FEEDBACK VERTEX SET είναι FPT παραμετροποιημένο ως προς  $k$ .

### 6.3 Εφαρμογή στο πρόβλημα $k$ -FTRS

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή που αξιοποιεί αυτού του είδους τους διαχωριστές είναι η παρακάτω. Το πρόβλημα το οποίο θα εξετάσουμε πηγάζει από τις ιδιότητες των πραγματικών δικτύων και συγκεκριμένα από την ανοχή των σφαλμάτων στις δομές δεδομένων τους. Μερικές πληροφορίες σχετικά με τα πραγματικά δίκτυα θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε καλύτερα το πρόβλημα.

Η κατασκευή δικτύου στον πραγματικό κόσμο είναι το προϊόν μιας διαδικασίας σταθερής ανάπτυξης. Αυτό το χαρακτηριστικό περιγράφεται ως συνεχής ανάπτυξη. Οι νέοι κόμβοι στα περισσότερα πραγματικά δίκτυα προτιμούν να συνδέονται με τους κόμβους που έχουν τις περισσότερες συνδέσεις. Αυτό το χαρακτηριστικό περιγράφεται ως προτιμησιακό συνημμένο. Τα δίκτυα είναι χωρισμένα σε δύο είδη. Από τη μία, η φύση μας υποδεικνύει την αλληλεξάρτηση που υπάρχει μεταξύ των ζωντανών οργανισμών όσο αφορά την επιβίωση τους μέσω της διατροφικής αλυσίδας. Από την άλλη, έχουμε τα δίκτυα που έχουν κατασκευαστεί από ανθρώπους όπως είναι το γνωστό World Wide Web και το Διαδίκτυο, ή τα δίκτυα που σχετίζονται με την ανθρώπινη επικοινωνία και συναναστροφή, όπως είναι τα Κοινωνικά ή Γλωσσικά δίκτυα. Όλοι τους έχουν τη μορφή ιστών, όχι όμως που να φτιάχνονται από μία αράχνη, διότι δεν υπάρχει μια κεντρική αρχή που να ρυθμίζει την ανάπτυξή τους, αλλά εξελίσσονται με έναν αυτο-οργανωμένο και αποκεντρωμένο τρόπο.<sup>1</sup>

Η πλειονότητα αυτών των δικτύων υπάρχει εδώ και εκατομμύρια χρόνια (βιολογικά δίκτυα). Οι τελευταίες έρευνες ωστόσο έδειξαν κάτι εξαιρετικά ενδιαφέρον. Τα πραγματικά δίκτυα έχουν παρόμοιες αρχιτεκτονικές, ανεξάρτητα από την ηλικία, τη λειτουργία και το εύρος τους, κι αυτό δείχνει πως αποφεύγεται η τυχαιότητα στον κόσμο. Η φύση δεν παίζει ζάρια καθώς επίσης ούτε οι δημιουργοί δικτύων.

Κάθε δίκτυο περιλαμβάνει τεράστιες δομές δεδομένων οι οποίες είναι συχνά επιρρεπείς σε μικρό αριθμό αποτυχιών. Για να μελετήσει κανείς τέτοια προβλήματα αποτυχιών εύκολα μπορεί να παρομοιάσει ένα δίκτυο με ένα κατευθυνόμενο γράφημα όπου ένας μικρός αριθμός ακμών (ή κορυφών) αποτυγχάνουν, ενώ χρειάζεται και μία παράμετρο  $k$  που λειτουργεί ως όριο του μέγιστου αριθμού αποτυχιών που μπορεί να προκύψουν.

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει σε αυτή την ενότητα αποφασίζει την

---

<sup>1</sup>Για περισσότερες πληροφορίες και παραδείγματα σχετικά με τα δίκτυα μπορεί ο αναγνώστης να συναντήσει στην ιστοσελίδα: <https://users.dimi.uniud.it/~massimo.franceschet/networks/nexus/examples.html>



προσέγγιση όλων των κορυφών  $v \in V(G)$  από μία καθορισμένη κορυφή πηγή  $s \in V(G)$  μετά την αποτυχία οποιωνδήποτε  $k$  ακμών (ή κορυφών) στο δεδομένο γράφημα  $G$ . Ειδικότερα, στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε ένα αραιό spanning υπογράφημα  $H$  του  $G$  που διατηρεί όλες τις σχέσεις προσβασιμότητας από την κορυφή πηγή  $s$  μετά την αποτυχία οποιωνδήποτε  $k$  ακμών (ή κορυφών) στο  $G$ . Πιο γενικά, για κάθε σύνολο  $F$  με το πολύ  $k$  ακμές (ή κορυφές) στο  $G$  και για κάθε κορυφή  $v \in V(G)$ , αναζητούμε αν υπάρχουν  $\lambda$  διακριτά μονοπάτια από την  $s$  στην  $v$  στο υπογράφημα  $G - F$  αν και μόνο εάν υπάρχουν  $\lambda$  τέτοια μονοπάτια στο  $H - F$ . Ένα τέτοιο γράφημα  $H$  χαρακτηρίζεται ως ένα  $(\lambda, k)$ -Fault Tolerant Reachability Subgraph ή  $(\lambda, k)$ -FTRS.

$(\lambda, k)$ -FTRS

**Είσοδος:** Ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $G$ , μια καθορισμένη κορυφή πηγή  $s \in V(G)$  και δύο ακέραιες μεταβλητές  $\lambda$  και  $k$ .

**Στόχος:** Να προσδιοριστεί εάν το  $G$  έχει ένα spanning υπογράφημα  $H$  που να είναι της μορφής  $(\lambda, k)$ -FTRS.

Χρησιμοποιώντας την έννοια των σημαντικών διαχωριστών θα αναφέρουμε ένα απλό και ελκυστικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό ενός  $(\lambda, k)$ -FTRS. Όπως προηγουμένως, το  $H$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί, τόσο για τον έλεγχο για το αν υπάρχουν  $\lambda$  μονοπάτια με κατεύθυνση από την  $s$  προς την  $v$  όσο και για να βρεθεί μια εναλλακτική συλλογή  $\lambda$  διακριτών μονοπατιών, αν υπάρχουν, ύστερα από την αποτυχία έως και  $k$  ακμών (ή κορυφών). Συγκεκριμένα, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 6.10** ([34]). *Υπάρχει ένα  $(\lambda, k)$ -FTRS όπου κάθε κορυφή έχει έσωβαθμό το πολύ  $(k + \lambda)4^{k+\lambda}$ . Επιπλέον, αυτό το γράφημα μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο  $O(4^{k+\lambda}(k + \lambda)^2(m + n)m)$ .*

Ας θεωρήσουμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  με  $n$  κορυφές και  $m$  ακμές. Έστω ότι με  $\mathbb{X}_k(S, T)$  ορίζουμε τη συλλογή όλων των σημαντικών  $S, T$ -διαχωριστών στο  $G$  μεγέθους το πολύ  $k$ . Η επόμενη παρατήρηση προκύπτει αμέσως από τον ορισμό των σημαντικών διαχωριστών.

**Παρατήρηση 6.1.** *Έστω  $Y$  μία οποιαδήποτε  $(S, T)$ -τομή μεγέθους το πολύ  $k$  στο  $G$ . Τότε, υπάρχει ένας σημαντικός  $S, T$ -διαχωριστής με  $X \in \mathbb{X}_k(S, T)$  έτσι ώστε  $|X| \leq |Y|$  και  $R_Y \subseteq R_X$ .*

Έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα για τη συλλογή των  $\mathbb{X}_k(S, T)$ .

**Λήμμα 6.5.** *Η πληθυκότητα του  $\mathbb{X}_k(S, T)$  φράσσεται άνωθεν από  $4^k$ . Επιπλέον, το  $\mathbb{X}_k(S, T)$  μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο  $O(|\mathbb{X}_k(S, T)|k^2(m+n))$ .*

Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε την κατασκευή ενός  $(\lambda, k)$ -FTRS λαμβάνοντας υπόψιν τις ακμές που αποτυγχάνουν, διότι οποιαδήποτε αποτυχία κορυφής μπορεί να μετατραπεί σε αποτυχία ακμής με την εξής κατασκευή. Μπορούμε απλά να χωρίσουμε κάθε κορυφή  $v$  σε μια ακμή  $(v_{in}, v_{out})$ , όπου οι εισερχόμενες και εξερχόμενες ακμές της  $v$  μπορούν αντίστοιχα να εισέλθουν από τη  $v_{in}$  και να εξέλθουν από την  $v_{out}$ .

Ας εξετάσουμε πρώτα την πρώτη περίπτωση για  $\lambda = 1$ . Έστω  $v \in V(G) \setminus \{s\}$  μια αυθαίρετη κορυφή και έστω ότι με  $\mathbb{X}(v)$  θα συμβολίζουμε τη συλλογή όλων των σημαντικών  $s, v$ -διαχωριστών στο  $G$  μεγέθους το πολύ  $k+1$ . Από το Λήμμα 6.5 υπάρχουν το πολύ  $(k+1)4^{k+1}$  ακμές στην ένωση όλων των σημαντικών διαχωριστών. Ακολουθεί ο εξής ισχυρισμός.

**Λήμμα 6.6.** *Έστω μια ακμή  $e \in \delta^-(v) \setminus (\bigcup_{X \in \mathbb{X}(v)} X)$ . Τότε,  $G - e$  είναι ένα  $k$ -FTRS του  $G$ .*

*Απόδειξη.* Έστω ότι υποθέτουμε το αντίθετο. Θεωρούμε το σύνολο  $F$  με το πολύ  $k$  ακμές και μια κορυφή  $w \in V(G)$  έτσι ώστε η  $w$  να είναι απρόσιτη από την  $s$  στο  $(G - e) - F$ , όμως υπάρχει ένα μονοπάτι από την  $s$  προς την  $w$  στο  $G - F$ . Αφού η ακμή  $e \in \delta^-(v)$ , προκύπτει ότι η  $v$  είναι απρόσιτη από την  $s$  στο  $(G - e) - F$ , αλλά υπάρχει ένα μονοπάτι από την  $s$  προς την  $v$  στο  $G - F$ . Έτσι, το  $Y = F \cup \{e\}$  είναι μία  $(s, v)$ -τομή στο  $G$ . Αφού το  $G$  και το  $G - e$  διαφέρουν μόνο στην ακμή  $e$ , αυτό μας δείχνει πως η  $e$  βρίσκεται σε κάθε μονοπάτι από την  $s$  προς την  $v$  στο  $G - F$ . Μπορούμε να συμπεράνουμε τα παρακάτω: (a) το  $Y$  είναι μια  $(s, v)$ -τομή στο  $G$  μεγέθους το πολύ  $k+1$ ; (b) η κορυφή  $u := (\text{ουρά της } e)$  ανήκει στο  $R_Y$ .

Τώρα, θεωρούμε μία  $(s, v)$ -τομή  $Y$  στο γράφημα  $G$  και τη συλλογή  $\mathbb{X}(v)$ . Επειδή η  $e \notin \bigcup_{X \in \mathbb{X}(v)} X$ , για παράδειγμα  $e \notin X$  για κάθε  $X \in \mathbb{X}(v)$  και  $e = (u, v)$ , ακολουθεί ότι η  $u \in R_X$  για κάθε  $X \in \mathbb{X}(v)$ . Παρόλα αυτά, η  $u \in R_Y$  και το  $Y$  είναι μία  $(s, v)$ -τομή πληθυκότητας  $k+1$  στο  $G$ . Αυτό αντιτίθεται στην Παρατήρηση 6.1. Συνεπώς, προκύπτει ότι το γράφημα  $G - e$  είναι ένα  $k$ -FTRS στο  $G$ .  $\square$

Ακολουθώντας, το παραπάνω λήμμα μπορεί να μετατραπεί σε επαναληπτικό αλγόριθμο που σταδιακά οριοθετεί τον έσω-βαθμό κάθε κορυφής στο γράφημα. Έστω  $a = (k+1)4^{k+1}$  ορίζει το άνω φράγμα στο  $|\delta^-(v) \cap (\bigcup_{X \in \mathbb{X}(v)} X)|$  για κάθε κορυφή  $v \in V(G) \setminus \{s\}$ .

---

**Αλγόριθμος 4** FPT Αλγόριθμος για τον υπολογισμό του  $k$ -FTRS σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  με μια κορυφή πηγή  $s$ .

---

**procedure** FTRS( $G, s, k$ )

  Διαγραφή όλων των εισερχόμενων ακμών της πηγής  $s$  στο  $G$ .

**while** υπάρχει  $v \in V(G) \setminus \{s\}$  έτσι ώστε  $|\delta^-(v)| > a$  **do**

    Υπολογισμός του  $\mathbb{X}(v)$  από το Λήμμα 6.5 .

    Επιλογή μίας ακμής  $e \in \delta^-(v) \setminus (\bigcup_{X \in \mathbb{X}(v)} X)$  και διαγραφή αυτής.

**end while**

**end procedure**

---

Η ορθότητα του πιο πάνω αλγόριθμου προκύπτει από το Λήμμα 6.6 . Επιπρόσθετα, είναι προφανές ότι αυτός ο αλγόριθμος τερματίζει μόλις ο έσω-βαθμός κάθε κορυφής οριοθετηθεί από το  $a$ . Ως εκ τούτου, εκτελείται σε χρόνο  $O(4^k k^2(m+n)m)$ . Από αυτό συνεπάγεται το εξής πόρισμα.

**Πόρισμα 6.1.** Υπάρχει ένα  $k$ -FTRS όπου κάθε κορυφή έχει έσω-βαθμό το πολύ  $(k+1)4^{k+1}$ . Επιπλέον, αυτό το γράφημα μπορεί να κατασκευαστεί σε χρόνο  $O(4^k k^2(m+n)m)$ .

Εν τέλει, το επόμενο απλό λήμμα επεκτείνει την προηγούμενη κατασκευή για κάθε τιμή του  $\lambda$ .

**Λήμμα 6.7.** Έστω  $H$  ένα  $(k + \lambda - 1)$ -FTRS του  $G$ . Τότε, το  $H$  είναι ένα  $(\lambda, k)$ -FTRS του  $G$ .

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει ο πιο πάνω ισχυρισμός. Ας θεωρήσουμε μία κορυφή  $v \in V(G) \setminus \{s\}$  και το σύνολο  $F$  που περιέχει το πολύ  $k$  ακμές έτσι ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα: υπάρχουν  $\lambda$  διακριτά μονοπάτια από την  $s$  στην  $v$  στο  $G - F$ , αλλά δεν υπάρχει τέτοια συλλογή από μονοπάτια στο  $H - F$ . Ας θεωρήσουμε επίσης και μία ελάχιστη  $(s, v)$ -τομή  $X$  στο  $H - F$  και παρατηρούμε ότι  $|X| \leq \lambda - 1$ . Συνεπάγεται ότι το  $Y = F \cup X$  είναι μία  $(s, v)$ -τομή στο  $H$  μεγέθους το πολύ  $k + \lambda - 1$ . Ωστόσο, το  $Y$  δεν είναι μια  $(s, v)$ -τομή στο  $G$ , κάτι το οποίο αντιτίθεται στο γεγονός ότι το γράφημα  $H$  είναι ένα  $(k + \lambda - 1)$ -FTRS του  $G$ . Συνεπώς, το  $H$  πρέπει να είναι ένα  $(\lambda, k)$ -FTRS του  $G$ .  $\square$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 6.10 προκύπτει από το Πόρισμα 6.1 και από το Λήμμα 6.7 .

**Σημείωση:** Ενδιαφέρον προκαλεί το ερώτημα γιατί ο συγκεκριμένος αλγόριθμος είναι ο βέλτιστος για αυτό το πρόβλημα κάνοντας χρήση σημαντικών διαχωριστών παρά να επιλέγονταν ελαχιστοτικοί διαχωριστές ακμών. Έχουμε δει και στις προηγούμενες ενότητες πως ο χρόνος  $O(4^k)$  που μπορεί να υπολογίσει όλους τους σημαντικούς διαχωριστές ενός γραφήματος μεγέθους  $k$  είναι πολύ πιο γρήγορος από τον χρόνο που χρειάζονται να υπολογιστούν οι ελαχιστοτικοί διαχωριστές ακμών. Ακόμη, είναι σημαντικό το γεγονός ότι σε αντίθεση με τους ελαχιστοτικούς διαχωριστές ο αλγόριθμος δεν θα χρειαστεί όλους τους σημαντικούς διαχωριστές που θα υπολογίσει για να λύσει το πρόβλημα.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Καταληκτικά, παρουσιάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο τα συμπεράσματα μας συγκεντρωμένα σε μορφή πινάκων. Η χρήση των διαχωριστών είναι πράγματι πολυσήμαντη στην υπολογιστική πολυπλοκότητα προβλημάτων κατευθυνόμενων και μη. Πρώτα πρώτα, δείξαμε ότι ο Αλγόριθμος 1 αποτελεί κλειδί για τον υπολογισμό σε πολυωνυμικό χρόνο των ελαχιστοτικών διαχωριστών με τη χρήση κατάλληλων ζευγών ανεξάρτητα από το πλήθος τους. Έπειτα, είδαμε άλλους τρεις FPT αλγορίθμους όπως φαίνονται και στον Πίνακα 7.1 που επιλύουν πολυωνυμικά τα πιο κάτω προβλήματα και εφαρμογές.

Αλγόριθμος 1	Απαρίθμηση ελαχιστοτικών διαχωριστών	$O(n^5 R)$
Αλγόριθμος 2	Μέγιστος Ελαχιστοτικός Διαχωριστής	$2^{O(k)} n^{O(1)}$
Αλγόριθμος 3	k-Way Vertex Cut	$O(ns^{O(s)})$
Αλγόριθμος 4	$(\lambda, k)$ -FTRS	$O(4^k k^2 (m + n)m)$

Πίνακας 7.1: Πίνακας αλγορίθμων πολυωνυμικού χρόνου.

Έπειτα, μελετώντας κλάσεις απαγορευμένων επαγομένων υπογραφημάτων με το πολύ τέσσερις κορυφές διαπιστώσαμε ότι σε πολλές από αυτές οι ελαχιστοτικοί διαχωριστές μπορούν να υπολογιστούν σε πολυωνυμικό χρόνο. Αναφέραμε επίσης ότι οι κλάσεις των Θήτα γραφημάτων και των γραμμικών τους γραφημάτων, των πλεγμάτων, αλλά και των στοιχειωδών τοίχων και των γραμμικών τους γραφημάτων ανήκουν στις κλάσεις με εκθετικό φράγμα στον αριθμό των ελαχιστοτικών τους διαχωριστών. Συμπερασματικά, θα παραθέσουμε ξανά το βασικό Θεώρημα 3.1 ελαφρώς διαφοροποιημένο όπως έχει διατυπωθεί στο [40] μαζί με δύο σημαντικά αποτελέσματα.

## Κεφάλαιο 7

**Θεώρημα 7.1** ([40]). Για κάθε οικογένεια γραφημάτων  $\mathcal{F}$  με το πολύ τέσσερεις κορυφές, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων είναι tame.
2. Η κλάση των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων δεν περιέχει καμία από τις εξής κλάσεις: την κλάση των  $\{K_3, C_4\}$ -free γραφημάτων, την κλάση των  $\{3P_1, \text{diamond}\}$ -free γραφημάτων και την κλάση των  $\{\text{claw}, K_4, C_4, \text{diamond}\}$ -free γραφημάτων.
3.  $\mathcal{F} \trianglelefteq \mathcal{F}'$  για μία τουλάχιστον από τις ακόλουθες οικογένειες  $\mathcal{F}'$ :
  - (α')  $\mathcal{F}' = \{P_4\}$ ,
  - (β')  $\mathcal{F}' = \{2P_2\}$ ,
  - (γ')  $\mathcal{F}' = \{H, \text{paw}\}$  για κάποιο  $H \in \{4P_1, P_2 + 2P_1, P_3 + P_1, \text{claw}\}$ ,
  - (δ')  $\mathcal{F}' = \{H, K_3 + P_1\}$  για κάποιο  $H \in \{4P_1, P_2 + 2P_1, P_3 + P_1, \text{claw}\}$ ,
  - (ε')  $\mathcal{F}' = \{H, K_4\}$  για κάποιο  $H \in \{4P_1, P_2 + 2P_1, P_3 + P_1\}$ ,
  - (ς')  $\mathcal{F}' = \{H, C_4\}$  για κάποιο  $H \in \{4P_1, P_2 + 2P_1, P_3 + P_1\}$ ,

Για να εκτιμήσουμε τη σημασία του Θεωρήματος 7.1, λαμβάνοντας υπόψη και τον ισομορφισμό που ισχύει μεταξύ των γραφημάτων, διακρίνουμε πως υπάρχουν 11 γραφήματα τεσσάρων κορυφών, που σημαίνει ότι υπάρχουν  $2^{11} = 2048$  διαφορετικές κλάσεις γραφημάτων που ορίζονται από ένα σύνολο απαγορευμένων επαγομένων υπογραφημάτων με ακριβώς τέσσερεις κορυφές, καθώς και πολύ περισσότερες κλάσεις γραφημάτων που ορίζονται από ένα σύνολο απαγορευμένων επαγομένων υπογραφημάτων με το πολύ τέσσερεις κορυφές. Στους Πίνακες 7.2 και 7.3 κάνουμε μία επισκόπηση των μεγιστοτικών tame και των ελαχιστοτικών non-tame κλάσεων των  $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων, όπου η  $\mathcal{F}$  περιλαμβάνει γραφήματα με το πολύ τέσσερεις κορυφές.

Κλάσεις με εκθετικό πλήθος ελαχιστοτικών διαχωριστών	
Κλάσεις $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων	Αποδεικνύεται στο
$\{3P_1, \text{diamond}\}$	Πόρισμα 3.5
$\{K_4, C_4, \text{diamond}, \text{claw}\}$	Πόρισμα 3.6
$\{K_3, C_4\}$	Πρόταση 3.7

Πίνακας 7.2: Οι non-tame κλάσεις γραφημάτων που αναφέρονται στο Θεώρημα 3.2.

Κεφάλαιο 7

Κλάσεις με πολυωνυμικό πλήθος ελαχιστοτικών διαχωριστών	
Κλάσεις $\mathcal{F}$ -free γραφημάτων	Αποδεικνύεται στο
$2P_2$	Πρόταση 3.16
$P_4$	Θεώρημα 3.3
$\{4P_1, \text{paw}\}$	Πρόταση 3.15
$\{P_2 + 2P_1, \text{paw}\}$	
$\{P_3 + P_1, \text{paw}\}$	
$\{\text{claw}, \text{paw}\}$	
$\{4P_1, K_3 + P_1\}$	Πρόταση 3.10
$\{P_2 + 2P_1, K_3 + P_1\}$	
$\{P_3 + P_1, K_3 + P_1\}$	
$\{\text{claw}, K_3 + P_1\}$	
$\{4P_1, K_4\}$	Πρόταση 3.11
$\{P_2 + 2P_1, K_4\}$	
$\{P_3 + P_1, K_4\}$	
$\{P_2 + 2P_1, C_4\}$	Πρόταση 3.13
$\{P_3 + P_1, C_4\}$	Πρόταση 3.12
$\{4P_1, C_4, \text{diamond}\}$	Πρόταση 3.14

Πίνακας 7.3: Οι tame κλάσεις γραφημάτων που αναφέρονται στο Θεώρημα 3.1 .

Στην εργασία του 2019 [39] οι Milanič και Rinač είχαν αναφέρει δύο εκθετικές οικογένειες γραφημάτων για τις οποίες το πρόβλημα αν είναι tame παρέμενε ανοιχτό. Αυτές ήταν η κλάση των  $\{4P_1, C_4\}$ -free γραφημάτων και η κλάση των  $\{4P_1, C_4, \text{claw}\}$ -free γραφημάτων. Λίγους μήνες αργότερα ξαναλύνοντας τα δύο ανοιχτά ερωτήματα απέδειξαν ότι και οι δύο κλάσεις τελικά είναι tame κάτι το οποίο προκύπτει αμέσως από την εξής πρόταση.

**Πρόταση 7.1** ([40]). *Η κλάση των  $\{kP_1, C_4\}$ -free γραφημάτων είναι tame για κάθε θετικό ακέραιο  $k$ .*

Προφανώς, το αποτέλεσμα της Πρότασης 7.1 επιλύει και τις δύο περιπτώσεις καθώς ισχύει και για την κλάση των  $\{4P_1, C_4, \text{diamond}\}$ -free γραφημάτων την οποία συναντήσαμε στο Θεώρημα 3.1 . Αξίζει να αναφέρουμε ακόμη και μία γενίκευση της Πρότασης αντικαθιστώντας το  $kP_1$  με το  $P_2 + kP_1$ .

**Θεώρημα 7.2** (Milanič [40]). *Η κλάση των  $\{P_2 + kP_1, C_4\}$ -free γραφημάτων είναι tame για κάθε θετικό ακέραιο  $k$ .*

## Κεφάλαιο 7

Απόδειξη. Έστω  $G$  ένα  $\{P_2+kP_1, C_4\}$ -free γράφημα. Θεωρούμε ένα μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο  $I$  του  $G$ . Αν  $|I| \leq 2k-1$ , τότε το  $G$  ένα  $\{2kP_1, C_4\}$ -free γράφημα και από την Πρόταση 7.1 παίρνουμε ότι το  $G$  έχει πολυωνυμικά φραγμένο αριθμό ελαχιστοτικών διαχωριστών. Τώρα θα υποθέσουμε ότι  $|I| \geq 2k$ . Έστω  $w$  μία κορυφή στο  $V(G) \setminus I$ . Αφού το  $I$  είναι ένα μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο, η  $w$  θα έχει κάποια γειτονική κορυφή στο  $I$ . Συνεπώς, αφού το  $G$  είναι  $\{P_2+kP_1, C_4\}$ -free, η  $w$  έχει το πολύ  $k-1$  μη-γειτονικές κορυφές στο  $I$  και ως εκ τούτου η  $w$  έχει τουλάχιστον  $|I| - (k-1) \geq k+1$  γείτονες στο  $I$ . Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι η  $u$  και η  $v$  είναι δύο μη-γειτονικές κορυφές στο  $V(G) \setminus I$ . Αφού κάθε μία από τις  $u$  και  $v$  έχει τουλάχιστον  $k+1$  γειτονικές κορυφές στο  $I$ , έχουν τουλάχιστον και δύο κοινούς γείτονες στο  $I$ . Όμως αυτό αντιτίθεται στο γεγονός ότι το  $G$  είναι  $C_4$ -free. Προκύπτει ότι το  $V(G) \setminus I$  είναι μία κλίκα. Αφού το  $I$  είναι ανεξάρτητο σύνολο και το  $V(G) \setminus I$  είναι κλίκα, το  $G$  είναι  $2P_2$ -free και συμπεραίνουμε από το Λήμμα 1.2 ότι το  $G$  έχει το πολύ  $|V(G)|$  ελαχιστοτικούς διαχωριστές.  $\square$

Επιπλέον, η μελέτη του προβλήματος εύρεσης του Μέγιστου Ελαχιστοτικού Διαχωριστή ήταν αναγκαίο μέρος αυτής της εργασίας. Στον Πίνακα 7.4 βλέπουμε σε ποια γραφήματα το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο και σε ποια παραμένει  $\mathcal{NP}$ -πλήρες, όπου στη δεύτερη περίπτωση αποδείξαμε τρία από αυτά στα αντίστοιχα θεωρήματα.

Το Maximum Minimal Separator είναι	
πολυωνυμικά επιλύσιμο στα	$\mathcal{NP}$ -πλήρες στα
weakly chordal [10]	διμερή [24]
circular-arc [31]	επίπεδα διμερή (Θεώρ. 4.1 )
circle [31]	συμπληρώματα διμερών (Θεώρ. 4.2 )
co-comparability of bounded dimension [8]	γραμμικά (Θεώρ. 4.3 )
tame class (Ορισμός 3.1 )	

Πίνακας 7.4: Τα γραφήματα στα οποία το MAXIMUM MINIMAL SEPARATOR λύνεται πολυωνυμικά και είναι  $\mathcal{NP}$ -πλήρες αντίστοιχα.

Τέλος, κάνοντας αναφορά και στους διαχωριστές ακμών είδαμε πως πολλά προβλήματα σε κατευθυνόμενα και μη-κατευθυνόμενα είναι FPT παραμετροποιημένα ως προς μία ή δύο μεταβλητές. Οι σημαντικοί διαχωριστές μπορούν να βρουν πολλές εφαρμογές όπως έχουμε ήδη αναφέρει στο προηγούμενο κεφάλαιο. Κλείνουμε την εργασία αυτή με ένα πίνακα όπου βλέπουμε συγκεντρωτικά τα προβλήματα που έχουν μελετηθεί μαζί με τα αντίστοιχα θεωρήματα στα οποία τα συναντήσαμε.



Κεφάλαιο 7

Στα μη-κατευθυνόμενα γραφήματα		
EDGE MULTIWAY CUT [17]	Θεώρημα 6.5	$O(4^k k^3 (n + m))$
MULTICUT [37]	Θεώρημα 6.6	$2^{O(k^3)} n^{O(1)}$
Στα κατευθυνόμενα γραφήματα		
DIRECTED MULTIWAY CUT [36]	Θεώρημα 6.7	$2^{O(k^2)} n^{O(1)}$
DIRECTED MULTICUT [37]	FPT για $\ell = 2$	ανοιχτό για $\ell = 3$
SKREW MULTICUT [12]	Θεώρημα 6.8	$O(4^k k^3 (n + m))$
DIRECTED FEEDBACK VERTEX SET [12]	Θεώρημα 6.9	$O(4^k k^3 (k + 1)!(m + n)n)$
$(\lambda, k)$ -FTRS [34]	Θεώρημα 6.10	$O(4^{k+\lambda} (k + \lambda)^2 (m + n)m)$

Πίνακας 7.5: Προβλήματα που λύνονται με τη χρήση των σημαντικών διαχωριστών σε FPT χρόνο.



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] S. Arora and B. Barak. *Computational complexity: a modern approach*. Cambridge University Press, 2009.
- [2] W. Ben-Ameur and M. Didi Biha. On the minimum cut separator problem. *Networks*, 59(1):30–36, 2012.
- [3] A. Berger, A. Grigoriev, and R. van der Zwaan. Complexity and approximability of the k-way vertex cut. *Networks*, 63(2):170–178, 2014.
- [4] A. Berry, R. Pogorelcnik, and G. Simonet. An introduction to clique minimal separator decomposition. *Algorithms*, 3(2):197–215, 2010.
- [5] H. L. Bodlaender. A linear-time algorithm for finding tree-decompositions of small treewidth. *SIAM Journal on computing*, 25(6):1305–1317, 1996.
- [6] H. L. Bodlaender. A partial k-arboretum of graphs with bounded treewidth. *Theoretical computer science*, 209(1-2):1–45, 1998.
- [7] H. L. Bodlaender, R. G. Downey, M. R. Fellows, and D. Hermelin. On problems without polynomial kernels. *Journal of Computer and System Sciences*, 75(8):423–434, 2009.
- [8] H. L. Bodlaender, T. Kloks, and D. Kratsch. Treewidth and pathwidth of permutation graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 8(4):606–616, 1995.
- [9] H. L. Bodlaender and R. H. Möhring. The pathwidth and treewidth of cographs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 6(2):181–188, 1993.

- [10] V. Bouchitté and I. Todinca. Treewidth and minimum fill-in: Grouping the minimal separators. *SIAM Journal on Computing*, 31(1):212–232, 2001.
- [11] V. Bouchitté and I. Todinca. Listing all potential maximal cliques of a graph. *Theoretical Computer Science*, 276(1-2):17–32, 2002.
- [12] J. Chen, Y. Liu, S. Lu, B. O’sullivan, and I. Razgon. A fixed-parameter algorithm for the directed feedback vertex set problem. In *Proceedings of the fortieth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 177–186, 2008.
- [13] R. Chitnis, M. T. Hajiaghayi, and D. Marx. Fixed-parameter tractability of directed multiway cut parameterized by the size of the cutset. *SIAM Journal on Computing*, 42(4):1674–1696, 2013.
- [14] S. A. Choudum and M. Shalu. The class of  $\{3K_1, C_4\}$ -free graphs. *Australas. J Comb.*, 32:111–116, 2005.
- [15] D. Cornaz, F. Furini, M. Lacroix, E. Malaguti, A. R. Mahjoub, and S. Martin. The vertex k-cut problem. *Discrete Optimization*, 31:8–28, 2019.
- [16] D. G. Corneil and Y. Perl. Clustering and domination in perfect graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 9(1):27–39, 1984.
- [17] M. Cygan, F. V. Fomin, Ł. Kowalik, D. Lokshantov, D. Marx, M. Pilipczuk, M. Pilipczuk, and S. Saurabh. *Parameterized algorithms*, volume 4. Springer, 2015.
- [18] M. Cygan, M. Pilipczuk, M. Pilipczuk, and J. O. Wojtaszczyk. On multiway cut parameterized above lower bounds. *ACM Transactions on Computation Theory (TOCT)*, 5(1):1–11, 2013.
- [19] F. V. Fomin and Y. Villanger. Finding induced subgraphs via minimal triangulations. *arXiv preprint arXiv:0909.5278*, 2009.
- [20] L. R. Ford and D. R. Fulkerson. Maximal flow through a network. *Canadian journal of Mathematics*, 8:399–404, 1956.
- [21] D. Georgiou, E. Antoniou, and A. Chatzimichailidis. Discrete mathematical structures in computer science. pages 137,161, 2015.

- [22] A. V. Goldberg and S. Rao. Beyond the flow decomposition barrier. *Journal of the ACM (JACM)*, 45(5):783–797, 1998.
- [23] D. J. Haglin and S. M. Venkatesan. Approximation and intractability results for the maximum cut problem and its variants. *IEEE Computer Architecture Letters*, 40(01):110–113, 1991.
- [24] T. Hanaka, H. L. Bodlaender, T. C. van der Zanden, and H. Ono. On the maximum weight minimal separator. *Theoretical Computer Science*, 796:294–308, 2019.
- [25] T. Hanaka, Y. Kobayashi, Y. Kobayashi, and T. Yagita. Finding a maximum minimal separator: Graph classes and fixed-parameter tractability, 2020.
- [26] J. Hopcroft and R. Tarjan. Efficient planarity testing. *Journal of the ACM (JACM)*, 21(4):549–568, 1974.
- [27] R. Impagliazzo and R. Paturi. On the complexity of k-sat. *Journal of Computer and System Sciences*, 62(2):367–375, 2001.
- [28] J. Kleinberg and E. Tardos. *Algorithm design*. Pearson Education India, 2006.
- [29] T. Kloks. *Treewidth: computations and approximations*, volume 842. Springer Science & Business Media, 1994.
- [30] T. Kloks and D. Kratsch. Listing all minimal separators of a graph. *SIAM Journal on Computing*, 27(3):605–613, 1998.
- [31] T. Kloks, D. Kratsch, and C. Wong. Minimum fill-in on circle and circular-arc graphs. In *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, pages 256–267. Springer, 1996.
- [32] C. Kuratowski. Sur le probleme des courbes gauches en topologie. *Fundamenta mathematicae*, 15(1):271–283, 1930.
- [33] C.-H. Liu, S.-H. Poon, and J.-Y. Lin. Independent dominating set problem revisited. *Theoretical Computer Science*, 562:1–22, 2015.
- [34] D. Lokshantov, P. Misra, S. Saurabh, and M. Zehavi. A brief note on single source fault tolerant reachability. *arXiv preprint arXiv:1904.08150*, 2019.

- [35] D. Marx. Parameterized graph separation problems. *Theoretical Computer Science*, 351(3):394–406, 2006. Parameterized and Exact Computation.
- [36] D. Marx. Important separators and parameterized algorithms. In *International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, pages 5–10. Springer, 2011.
- [37] D. Marx and I. Razgon. Fixed-parameter tractability of multicut parameterized by the size of the cutset. *SIAM Journal on Computing*, 43(2):355–388, 2014.
- [38] T. A. McKee. Requiring that minimal separators induce complete multipartite subgraphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 38(1):263–273, 2018.
- [39] M. Milanič and N. Pivač. Minimal separators in graph classes defined by small forbidden induced subgraphs. In *International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, pages 379–391. Springer, 2019.
- [40] M. Milanič and N. Pivač. Polynomially bounding the number of minimal separators in graphs: Reductions, sufficient conditions, and a dichotomy theorem. *The Electronic Journal of Combinatorics*, pages P1–41, 2021.
- [41] J. Monteiro. *Algorithms to improve area density utilization, routability and timing during detailed placement and legalization of VLSI circuits*. PhD thesis, 05 2019.
- [42] S. D. Nikolopoulos and L. Palios. Minimal separators in  $p_4$ -sparse graphs. *Discrete mathematics*, 306(3):381–392, 2006.
- [43] S. Olariu. Paw-free graphs. *Information Processing Letters*, 28(1):53–54, 1988.
- [44] V. Pedrotti and C. P. De Mello. Minimal separators in extended  $p_4$ -laden graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 160(18):2769–2777, 2012.
- [45] C. Phillips and T. J. Warnow. The asymmetric median tree: a new model for building consensus trees. *Discrete Applied Mathematics*, 71(1-3):311–335, 1996.
- [46] F. P. Ramsey. On a problem of formal logic. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1):264–286, 1930.

- [47] K. Skodinis. Efficient analysis of graphs with small minimal separators. In *International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, pages 155–166. Springer, 1999.
- [48] K. Suchan. Minimal separators in intersection graphs. 2003.