



**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΠΡΟΗΓΜΕΝΑ ΥΛΙΚΑ»**

**ΜΙΑ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΑΡΧΗ HAMILTON ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ
ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ**

ΠΑΝΗ ΠΗΝΕΛΟΠΗ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2021

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην εξειδίκευση:

«Υπολογιστική Επιστήμη και Μοντελοποίηση Υλικών»

που απονέμει το Τμήμα Μηχανικών Επιστήμης Υλικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε τηναπό την εξεταστική επιτροπή:

1. Βασίλειος Καλπακίδης, Καθηγητής του Τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Παν/μίου Ιωαννίνων, **Επιβλέπων** .

2. Χριστίνα Λέκκα, αναπληρώτρια Καθηγήτρια του Τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Παν/μίου Ιωαννίνων.

3. Ευάγγελος Χατζηγεωργίου, αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Μηχανικών Επιστήμης Υλικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Παν/μίου Ιωαννίνων.

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

"Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή."

(Υπογραφή υποψηφίου)

ΠΑΝΗ ΠΗΝΕΛΟΠΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Μαθηματικής Μοντελοποίησης Υλικών και Επιστημονικών Υπολογισμών του Τμήματος Μηχανικών Επιστήμης των Υλικών στα πλαίσια απόκτησης Μεταπτυχιακού Διπλώματος. Θα ήθελα στο σημείο αυτό να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλλαν στην πραγματοποίηση του έργου μου.

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα Καθηγητή μου, κ. Βασίλη Καλπακίδη, τόσο για την υπόδειξη του θέματος όσο για την αμέριστη υποστήριξη, κατανόηση και συνεχή καθοδήγηση που μου έδειξε σε όλη την διάρκεια της συνεργασίας μας.

Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω την συμφοιτήτρια μου Ουρανία Παναγιωτίδου αλλά και την πολύ καλή μου φίλη Μαγδαληνή Βλάχου για την συνεχή συμπαράσταση και υποστήριξη που μου έδειξαν κατά τη διάρκεια ολοκλήρωσης των σπουδών μου.

Τέλος θα ήθελα να αφιερώσω τη διπλωματική μου εργασία στην οικογένεια μου και συγκεκριμένα να ευχαριστήσω ολόψυχα τη γιαγιά μου και την αδερφή μου για την υπομονή και συμπαράσταση τους όλα αυτά τα χρόνια.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο Hamilton στο πρώτο μισό του 19ου αιώνα πρότεινε την αρχή ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού δράσης για τον φορμαλισμό μηχανικών συστημάτων η οποία ορίζεται με βάση το διάστημα δράσης $[t_1, t_2]$ και χρησιμοποιεί δεδομένα για την κατάσταση του συστήματος και στις δύο χρονικές στιγμές. Συγκεκριμένα αναφέρει ότι η χρονική εξέλιξη ενός μηχανικού συστήματος γίνεται κατά τέτοιον τρόπο ώστε το ολοκλήρωμα της διαφοράς μεταξύ κινητικής και δυναμικής ενέργειας να είναι στάσιμο.

Η αρχή Hamilton εφαρμόζεται κατά κανόνα σε προβλήματα συνοριακών τιμών και όχι σε προβλήματα αρχικών τιμών διότι αδυνατεί να αναπαράγει τις αρχικές συνθήκες. Οι αδυναμίες αυτές αίρονται με γενίκευση της αρχής από διάφορες μεθόδους οι οποίες χρησιμοποιούν την πράξη της συνέλιξης συναρτήσεων έναντι του L^2 –εσωτερικού γινομένου.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα περιγράψει η γενίκευση της Αρχής, θεωρητικά, για τον Φορμαλισμό προβλημάτων αρχικών τιμών και στη συνέχεια θα γίνει εφαρμογή της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων σε προβλήματα αρχικών τιμών. Συγκεκριμένα θα μελετηθεί το πρόβλημα Αρχικών Τιμών που περιγράφει την κίνηση ενός αρμονικού ταλαντωτή.

Στο 1ο Κεφάλαιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας δίνονται στον αναγνώστη βασικές έννοιες της θεωρίας της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου. Στο 2ο Κεφάλαιο αναφέρεται η Αρχή Hamilton αλλά και οι αδυναμίες που παρουσιάζει στα προβλήματα αρχικών τιμών και προτείνεται μια μεταβολική αρχή η οποία με τη βοήθεια της συνέλιξης κατορθώνει την ενσωμάτωση των αρχικών συνθηκών. Στο 3ο Κεφάλαιο αναπτύσσουμε μια στρατηγική εύρεσης προσεγγιστικής λύσης χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη μεταβολική αρχή με τη χρήση της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων. Στο 4ο Κεφάλαιο παρουσιάζεται ο κώδικας που αναπτύχθηκε για τον προγραμματισμό της μεθόδου και την σύγκριση της προσεγγιστικής λύσης με την αναλυτική σε ένα απλό πρόβλημα αρχικών τιμών που αφορά την κίνηση αρμονικού ταλαντωτή. Στο 5ο κεφάλαιο γίνεται λόγος για τη γενίκευση της Αρχής στην Ελαστοδυναμική και συγκεκριμένα στο πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών της κίνησης μιας ελαστικής ίνας. Ακόμη σκιαγραφείται η εύρεση της αριθμητικής λύσης η

οποία είναι βασισμένη στη μέθοδο των Πεπερασμένων στοιχείων. Τέλος στο 6ο Κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της παρούσας εργασίας.

ABSTRACT

In the first half of the 19th century, Hamilton suggested a general method in dynamics based upon the concept of stationary action, with action represented as the integration over the time interval $[t_1, t_2]$ of the Lagrangian function of the system.

Although Hamilton's principle is the proper variational setting for dynamics, where one has data for the state of the system at both moments t_1 and t_2 are needed, it fails to produce the initial conditions of the corresponding initial value problem. This deficiency is removed by generalizing the principle with new variational settings that use the convolution instead of the L^2 inner product.

In what follows, there will be an attempt to generalize the Hamilton's principle for the proper formulation of an initial value problem. Afterwards, an application of the Finite Element Method in the problem of the motion of a harmonic oscillator is provided.

In the first Chapter of the thesis, the basic theoretical concepts of the Mechanics of Continuum Media are given. Chapter 2 refers to the Hamilton's principle and a new variational setting is suggested that uses convolution to incorporate the initial conditions. In Chapter 3 we develop a strategy for finding an approximate solution using the proposed variational principle based on the Finite Element Method. Chapter 4 presents the code developed for the programming of the method and a comparison of the two solutions, the approximate and the analytical one, in a simple initial value problem that incorporates the motion of a harmonic oscillator. In Chapter 5 we proceed to a new formulation of Hamilton's principle for a one dimensional elastic body, based on convolution. An approximate solution, which is based on the Finite Element method, is also outlined. Finally, Chapter 6 summarizes the thesis' conclusions.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	III
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	V
ABSTRACT	VII
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	IX
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ	XII
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	1
ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ	1
1.1 ΘΕΜΕΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ.....	1
1.1.1 ΧΩΡΟΙ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ	1
1.1.2 ΤΑΝΥΣΤΕΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ.....	2
1.1.3 ΠΕΔΙΑ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ	3
1.2 ΚΙΝΗΣΗ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ.....	5
1.2.1 ΤΟ ΣΥΝΕΧΕΣ ΣΩΜΑ ΚΑΙ Η ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ	5
1.2.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ	6
1.2.3 ΤΑΧΥΤΗΤΑ , ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΚΑΙ ΥΛΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ	8
1.2.4 ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ.....	10
1.2.5 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΓΚΟΥ, ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΚΑΙ ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ.....	12
1.2 ΤΑΝΥΣΤΕΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ CAUCHY-GREEN.....	13
1.3 ΝΟΜΟΙ ΙΣΟΖΥΓΙΟΥ.....	14
1.4.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ	14
1.4.2 ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΣΩΝ	16
1.4.3 Ο ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΤΑΣΗΣ ΚΑΙ ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ CAUCHY	18
1.4.4 ΤΟ ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ	21
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	23
ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ ΤΟΥ HAMILTON	23
2.1 ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ	23
2.2 ΑΡΧΗ HAMILTON.....	26
2.3 Η ΑΔΥΝΑΜΙΑ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ HAMILTON.....	28
2.4 ΣΥΝΕΛΙΞΗ	30
2.4.1 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΜΕΛΗ ΚΑΙ ΣΥΝΕΛΙΞΗ.....	31
2.4.2 ΠΡΩΤΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ $[u', u']$	32

2.4.3 ΠΡΩΤΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ $\int_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial s} \right]$	34
2.5 ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΕΛΙΞΗ	35
2.6 ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ HAMILTON ΜΕ ΝΕΑ ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΗ ΑΡΧΗ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΜΗΧΑΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ.....	36
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	41
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ	41
3.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	41
3.2. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FEM ΣΤΟ Π.Α.Τ. 1	42
3.3 ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΙΝΗΣΗΣ	43
3.4 ΤΟΠΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ	45
3.5 ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.....	48
3.6 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	52
3.7 ΚΑΘΟΛΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ	52
3.7.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ F	55
3.7.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ Q	56
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	61
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΜΕ MATLAB.....	61
4.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ.....	62
4.2 ΚΩΔΙΚΑΣ MATLAB	63
4.3 ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ	69
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	72
ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ.....	72
5.1 ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ HAMILTON ΣΤΗΝ ΕΛΑΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗ.....	72
5.2 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΑΡΧΗ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΔΡΑΣΗΣ ΣΤΟ $[t_1, t_2]$	76
5.3 ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	78
5.4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ GALERKIN ΚΑΙ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ ΣΤΟ 1 ^ο ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΤΗΣ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗΣ	81
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6	84
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	84

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1 Το υλικό σώμα και η συνάρτηση παραμόρφωσης από τον σχηματισμό αναφοράς στον σχηματισμό του παραμορφωμένου σώματος.	6
Σχήμα 2 Η απεικόνιση της κίνησης.....	11
Σχήμα 3 Επιφανειακή φόρτιση τμήματος του συνόρου του σώματος.....	17
Σχήμα 4 Ανάλυση των τάσεων.....	19
Σχήμα 5 Τετράεδρο OABC και τάσεις.....	21
Σχήμα 6 Διάγραμμα ροής κώδικα	63
Σχήμα 7 Γραφική αναπαράσταση της προσεγγιστικής λύσης και της αναλυτικής 25 στοιχεία.	66
Σχήμα 8 Γραφική αναπαράσταση της προσεγγιστικής λύσης και της αναλυτικής για 50 στοιχεία.	66
Σχήμα 9 Γραφική αναπαράσταση της προσεγγιστικής λύσης και της αναλυτικής για 100 στοιχεία.	67
Σχήμα 10 Γραφική αναπαράσταση της προσεγγιστικής λύσης και της αναλυτικής για 1000 στοιχεία	67
Σχήμα 11 Γραφική αναπαράσταση της προσεγγιστικής λύσης και της αναλυτικής για 1000 στοιχεία κοντά στο συντονισμό όπου η συχνότητα του διεγέρτη είναι $\omega = 2,1$ και η ιδιοσυχνότητα του συστήματος $\omega_0 = 2$	68
Σχήμα 12 Γραφική απεικόνιση της προσεγγιστικής λύσης κατά το φαινόμενο του συντονισμού για 1000 στοιχεία	68
Σχήμα 13 Ελεύθερη ταλάντωση του σώματος m για 25 κόμβους.	70
Σχήμα 14 Ελεύθερη ταλάντωση του σώματος m για 50 κόμβους.	70
Σχήμα 15 Ελεύθερη ταλάντωση του σώματος m για 100 κόμβους.	71
Σχήμα 16 Ελεύθερη ταλάντωση του σώματος m για 1000 κόμβους.	71
Σχήμα 17 Διακριτοποίηση του πεδίου $[0, l] \times [0, t]$	79

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούν βασικές αρχές μαθηματικής θεωρίας εννοιών που χρησιμοποιούνται στη Μηχανική Συνεχών Μέσων με στόχο την εξοικείωση του αναγνώστη με τους συμβολισμούς και το θεωρητικό υπόβαθρο της παρούσας διατριβής.

1.1 ΘΕΜΕΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

1.1.1 ΧΩΡΟΙ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

Γραμμικός διανυσματικός χώρος είναι ένα σύνολο στοιχείων που ονομάζονται διανύσματα. Ένας **διανυσματικός χώρος** επί ενός σώματος \mathbb{F} αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο V , μια απεικόνιση $V \times V \rightarrow V$ με $(u, v) \mapsto u + v$, που λέγεται πρόσθεση, και μια απεικόνιση $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$ με $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$, που λέγεται πολλαπλασιασμός ενός στοιχείου του \mathbb{F} με ένα στοιχείο του V , έτσι ώστε να ισχύουν:

- i. $u + v = v + u$ για κάθε $u, v \in V$
- ii. $(u + v) + w = u + (v + w)$ για κάθε $u, v, w \in V$
- iii. Υπάρχει ένα στοιχείο $0 \in V$ με την ιδιότητα $v + 0 = v$ για κάθε $v \in V$
- iv. Για κάθε στοιχείο $v \in V$ υπάρχει ένα στοιχείο $-v \in V$ με την ιδιότητα $v + (-v) = 0$.
- v. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$ και $u, v \in V$
- vi. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ και $v \in V$
- vii. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ και $v \in V$
- viii. $1v = v$ για κάθε $v \in V$

Τα στοιχεία $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ λέγονται **γραμμικά ανεξάρτητα** αν μια σχέση της μορφής $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ με $\lambda_i \in \mathbb{F}$ για κάθε $1 \leq i \leq n$ είναι δυνατή μόνο αν $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Αν υπάρχει τέτοιο σύνολο $\{\mathbf{v}_i\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ τότε κάθε διάνυσμα \mathbf{x} του V γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός $\mathbf{x} = \beta_i \mathbf{v}_i$, $\beta_i \in \mathbb{R}$. Η **διάσταση** του χώρου V θα είναι n και το σύνολο $\{\mathbf{v}_i\}$ αποτελεί **βάση** για τον χώρο.

Όλα τα αξιώματα και οι ορισμοί που παρουσιάστηκαν χαρακτηρίζουν πλήρως έναν (γραμμικό) διανυσματικό χώρο. Οι Χώροι Εσωτερικού Γινομένου είναι γραμμικοί διανυσματικοί χώροι εφοδιασμένοι με την πράξη του **εσωτερικού γινομένου**

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \forall \mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n) \text{ και } \mathbf{y}=(y_1, \dots, y_n) \in V \quad (1.1)$$

δηλαδή μια απεικόνιση $\cdot : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ που έχει τις ιδιότητες

- Συμμετρία : $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$
- Γραμμικότητα : $(\alpha \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ και $(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \alpha \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \beta \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} \wedge \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$
- Θετικά ορισμένη: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in V$

1.1.2 ΤΑΝΥΣΤΕΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Έστω V και W χώροι με εσωτερικό γινόμενο. Ένας **γραμμικός μετασχηματισμός** από το V στο W , $\mathbf{L} : V \rightarrow W$ συσχετίζει κάθε διάνυσμα \mathbf{u} του V σε ένα διάνυσμα $\mathbf{L}\mathbf{u}$ στον W με τέτοιο τρόπο ώστε

$$\mathbf{L}(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{L}\mathbf{u} + \beta \mathbf{L}\mathbf{v} \quad (1.2)$$

Γραμμικοί μετασχηματισμοί από ένα διανυσματικό χώρο V στον εαυτό του καλούνται και **τανυστές δεύτερης τάξης**. Παραδείγματα τέτοιων τανυστών αποτελούν ο μηδενικός τανυστής $\mathbf{0}$, ο ταυτοτικός τανυστής $\mathbf{1}$ και ο τανυστικό γινόμενο $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ για τους οποίους ισχύουν τα εξής

$$\mathbf{0}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{1}\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w} = \mathbf{u} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \text{ για κάθε } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ στον χώρο } V.$$

Έστω $\{\mathbf{e}_k\} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ μια ορθοκανονική βάση του χώρου V . Τότε κάθε διάνυσμα \mathbf{v} στον V μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός ως εξής

$$\mathbf{v} = v_k \mathbf{e}_k \quad (1.3)$$

ΤΟ δ ΤΟΥ KRONECHER

Το δ του Kronecker είναι ένας τανυστής δεύτερης τάξης και ορίζεται ως εξής

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{αν } i \neq j \\ 1, & \text{αν } i = j \end{cases} \quad (1.4)$$

1.1.3 ΠΕΔΙΑ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ

Στη Μηχανική Συνεχούς Μέσου οι ιδιότητες των υλικών περιγράφονται από συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες εξαρτώνται από μια διανυσματική μεταβλητή \mathbf{x} και ορίζονται επί του συνεχούς σώματος $B \subseteq \mathbb{R}^3$.

Πεδίο $\mathbf{f} : B \rightarrow V$, ονομάζουμε την συνάρτηση που συσχετίζει τα υλικά σημεία \mathbf{x} του B σε ένα διάνυσμα $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ του V διανυσματικού χώρου. Ανάλογα τον χώρο το $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ καλείται βαθμωτό, διανυσματικό ή τανυστικό πεδίο.

Η **κλίση** ενός βαθμωτού πεδίου (ή $\text{grad } \varphi$) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ ορίζεται ως εξής

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \varphi_{,i} \quad (1.5)$$

Στην περίπτωση ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$$

η **απόκλιση** της συνάρτησης ορίζεται ως

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \text{div } \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = f_{,i,i} \quad (1.6)$$

Κατ' αναλογία ορίζουμε την κλίση και την απόκλιση τανυστών 2^{ης} τάξεως

$$\text{grad } \mathbf{A} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} = A_{ij,k} \quad (1.7)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} = A_{ij,j} \quad (1.8)$$

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΤΟΥ GAUSS

Έστω ένα βαθμωτό, συνεχές επί του κλειστού ομαλού χωρίου $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ και συνεχώς παραγωγίσιμο πεδίο φ . Αν $\partial\Omega$ είναι η συνοριακή επιφάνεια του Ω και \mathbf{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα επί της συνοριακής επιφάνειας, τότε

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \mathbf{n} ds = \int_{\Omega} \text{grad } \varphi dv \quad (1.9)$$

ή με συμβολισμό δεικτών

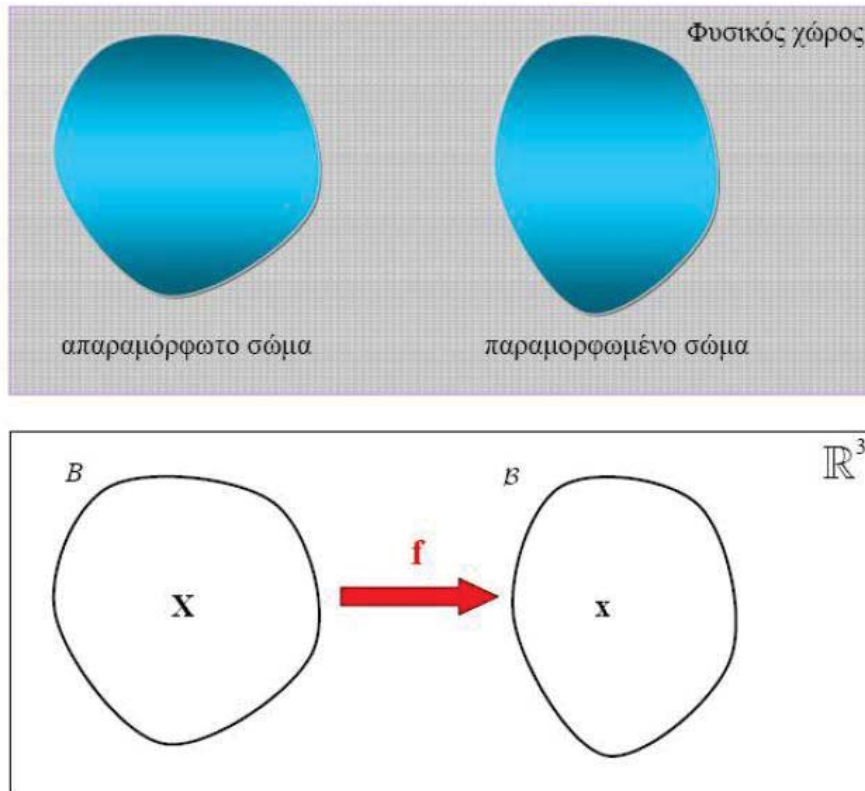
$$\int_{\partial\Omega} \varphi n_i ds = \int_{\Omega} \varphi_{,i} dv \quad (1.10)$$

1.2 ΚΙΝΗΣΗ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ

1.2.1 ΤΟ ΣΥΝΕΧΕΣ ΣΩΜΑ ΚΑΙ Η ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ

Στη Μηχανική ως **υλικό σημείο** αναφέρουμε το γεωμετρικό σημείο χωρίς διαστάσεις και με πεπερασμένη μάζα. Ανάλογα στη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου θεωρούμε το **υλικό σώμα**, το οποίο συμβολίζουμε με \mathbf{B} , ένα κλειστό σύνολο άπειρων υλικών σημείων.

Επειδή το σώμα είναι συνεχές μπορώ να ορίσω μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $\varphi : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$, η οποία συσχετίζει τα υλικά σημεία του φυσικού χώρου που μας περιβάλλει σε γεωμετρικά σημεία του \mathbb{R}^3 . Το \mathbf{B} καλείται και σχηματισμός του σώματος \mathbf{B} . Συμβολίζουμε με \mathbf{X} τα υλικά σημεία του φυσικού χώρου και με τις x αντίστοιχες θέσεις τους στον Ευκλείδειο χώρο.



Σχήμα 1 Το υλικό σώμα και η συνάρτηση παραμόρφωσης από τον σχηματισμό αναφοράς στον σχηματισμό του παραμορφωμένου σώματος.

1.2.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Στην Μηχανική υλικού σημείου η κίνηση μπορεί να περιγραφεί με μία διανυσματική συνάρτηση η οποία εξαρτάται από το χρόνο. Το συνεχές σώμα είναι ένα σύνολο άπειρων υλικών σημείων τα οποία δυνητικά κινούνται με διαφορετικό τρόπο κατά την εξέλιξη της κίνησης. Έτσι σε κάθε χρονική στιγμή θα έχουμε έναν διαφορετικό σχηματισμό B . Διαχωρίζουμε τους σχηματισμούς με βάση την χρονική στιγμή με τον συμβολισμό B_t και ως σχηματισμό αναφοράς ορίζουμε τον σχηματισμό του σώματος κατά την αρχή της κίνησης, δηλαδή για $t=0$, ως B_0 . Ακόμη ένα σημείο του σχηματισμού αναφοράς θα το συμβολίζουμε με X και αντίστοιχα το σημείο του τρέχοντα σχηματισμού x .

Κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος στο χρονικό διάστημα $[t_0, T]$ οι διαδοχικοί σχηματισμοί περιγράφουν το φαινόμενο. Σε αντίθεση με την κίνηση ενός

υλικού σημείου, όπου η κίνηση περιγράφεται με το διάνυσμα θέσης σε κάθε χρονική στιγμή, στο συνεχές σώμα η κίνηση περιγράφεται από μια απεικόνιση η οποία κάθε χρονική στιγμή δίνει έναν σχηματισμό του σώματος.

Από τον σχηματισμό αναφοράς και οποιαδήποτε τρέχοντα σχηματισμό μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση της μορφής $\mathbf{f} : B_0 \rightarrow B_t$ για κάθε $t \in [t_0, T]$

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in B_0, \quad t \in [t_0, T]$$

ή ισοδύναμα με τη χρήση συντεταγμένων η σχέση γράφεται ως

$$x_i = f_i(X_j, t), \quad X_j \in B_0, \quad t \in [t_0, T].$$

Συγκεκριμένα με x_i συμβολίζουμε τις συντεταγμένες του υλικού σημείου στον τρέχοντα σχηματισμό και καλούνται συντεταγμένες Euler. Ενώ οι X_j , που είναι οι συντεταγμένες του σχηματισμού αναφοράς, ονομάζονται και συντεταγμένες Lagrange.

Θεωρούμε τη συνάρτηση \mathbf{f} δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη, δηλαδή ότι υπάρχουν τουλάχιστον οι δεύτερες παράγωγοι της και είναι συνεχείς. Εφόσον η συνάρτηση αυτή αποτελεί αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ του σχηματισμού αναφοράς B_0 και του τρέχοντα σχηματισμού B_t θα υπάρχει και η αντίστροφη απεικόνιση \mathbf{f}^{-1} . Δηλαδή μπορώ να γράψω ότι

$$\text{για κάθε } t \in [t_0, T], \quad \mathbf{X} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in B_t.$$

Στο εξής μπορούμε να παραλείψουμε την συνάρτηση \mathbf{f} και να γράφουμε μόνο τις μεταβλητές για την απεικόνιση της κίνησης, δηλαδή

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad \text{ή} \quad x_i = x_i(X_j, t)$$

και την αντίστροφη της ως

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad \text{ή} \quad X_j = X_j(x_i, t).$$

Άμεση παρατήρηση της περιγραφής αυτής αποτελεί η εύρεση της τροχιάς του υλικού σημείου \mathbf{X} μετά από σταθεροποίηση του.

Απαραίτητο για την μελέτη της κίνησης ενός συνεχούς μέσου είναι να εισάγουμε έναν τανυστή 2^{ης} τάξης, τον τανυστή της κλίσης της παραμόρφωσης ο οποίος δίδεται από τη σχέση

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}, \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

όπου ο Ιακωβιανή ορίζουσα της κίνησης ορίζεται ως $J = \det \mathbf{F}$. Απαιτούμενη συνθήκη για την περιγραφή της κίνησης ενός υλικού είναι ότι $J > 0$. Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζουμε ότι ο όγκος του σώματος κάθε χρονική στιγμή παραμένει θετικός.

1.2.3 ΤΑΧΥΤΗΤΑ, ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΚΑΙ ΥΛΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Δεδομένου ότι η απεικόνιση της κίνησης είναι ένας διαφορομορφισμός αν επιλέξουμε ένα τυχαίο υλικό σημείο \mathbf{X}^0 αναφέραμε ότι η $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{X}^0, t)$ θα περιγράψει την τροχιά του συγκεκριμένου υλικού σημείου. Η μερική παράγωγος ως προς το χρόνο t θα εκφράζει την **ταχύτητα** του υλικού σημείου \mathbf{X}^0 .

Η **ταχύτητα** μπορεί να οριστεί για κάθε υλικό σημείο \mathbf{X} που ανήκει στον σχηματισμό αναφοράς και έτσι ορίζεται και το πεδίο των ταχυτήτων ως

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\mathbf{X}, t), \quad \forall \mathbf{X} \in \mathbf{B}_0$$

Όμοια με το σχηματισμό των δεικτών η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$V_i(X_j, t) = \frac{\partial x_i}{\partial t}(X_j, t)$$

Παράλληλα ορίζεται το πεδίο ταχυτήτων στο τρέχοντα σχηματισμό B_t , το οποίο συμβολίζουμε με $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $\forall \mathbf{x} \in B_t$. Το συγκεκριμένο πεδίο προκύπτει από την αντίστροφη απεικόνιση της κίνησης, δηλαδή

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)$$

Είναι επομένως προφανές ότι το παραπάνω πεδίο εκφράζει την ταχύτητα των υλικών σημείων κατά την περιγραφή Lagrange, ενώ το πεδίο $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ την περιγραφή Euler.

Για το σημείο \mathbf{X} καλούμε **επιτάχυνση** του \mathbf{X} τη χρονική στιγμή t

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \quad , \quad \forall \mathbf{X} \in B_0$$

Όμοια με το πεδίο των ταχυτήτων μπορούμε να γράψουμε το πεδίο της επιτάχυνσης κατά την περιγραφή Euler ως εξής

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in B_t .$$

Γενικά, η μεταβλητή \mathbf{x} (**Euler**) θεωρείται συνάρτηση του χρόνου εν αντιθέσει με την μεταβλητή \mathbf{X} (**Lagrange**) η οποία είναι χρονοανεξάρτητη. Έτσι για την παραγωγή ενός πεδίου της μορφής $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ θα πρέπει να προσέξουμε πως και οι δύο

της μεταβλητές εξαρτώνται από το χρόνο, επομένως χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας υπολογίζουμε την παράγωγο ως

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

Δεδομένου πως $\frac{\partial \mathbf{X}_j}{\partial t} = 0$ πριν παραγωγίσουμε οποιοδήποτε πεδίο θα πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί στο αν δίδεται σε περιγραφή κατά Euler ή Lagrange οπότε και ορίζουμε την έννοια της **υλικής παραγώγου** με συμβολισμό D/Dt και πιο συγκεκριμένα θα έχουμε ότι

- Αν $g = g(\mathbf{X}, t)$ τότε $\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t}$
- Αν $g = g(\mathbf{x}, t)$ τότε $\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial t}$

Συμβολίζουμε την υλική παράγωγο μιας συνάρτησης g με \dot{g} . Δηλαδή,

$$\dot{g} = \frac{Dg}{Dt} \quad .$$

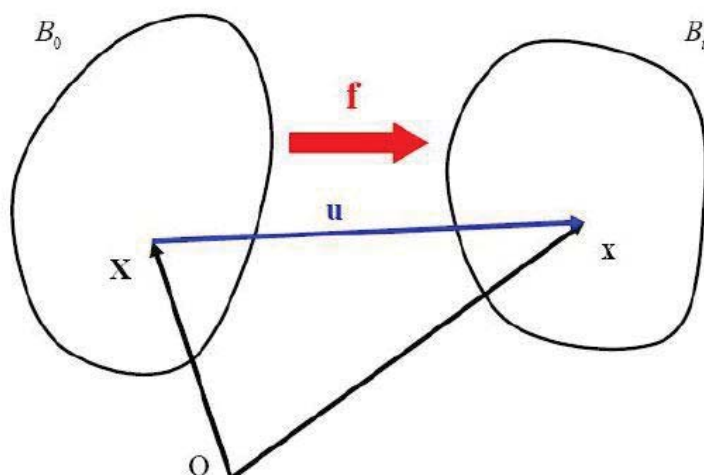
1.2.4 ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ

Ορίζουμε το διάνυσμα μετατόπισης ως την διανυσματική διαφορά μεταξύ της θέσης \mathbf{x} ενός υλικού σημείου και της θέσης του ίδιου υλικού σημείου στον σχηματισμό αναφοράς B_t , δηλαδή του \mathbf{X}

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (1.11)$$

Η σύνδεση των μεταβλητών \mathbf{x} και \mathbf{X} με την απεικόνιση της κίνησης ορίζει το πεδίο μετατοπίσεων επί του σχηματισμού B_0

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad \forall \mathbf{X} \in B_0 \quad (1.12)$$



Σχήμα 2 Η απεικόνιση της κίνησης.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να πούμε ότι η **ταχύτητα** ορίζεται και ως η υλική παράγωγος της μετατόπισης

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

και η **επιτάχυνση** ορίζεται ως η υλική παράγωγος της ταχύτητας, δηλαδή

$$\dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t),$$

ανεξαρτήτως αν αυτή δίδεται σε περιγραφή Lagrange ή Euler .

1.2.5 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΓΚΟΥ, ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΚΑΙ ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Άξιον αναφοράς είναι πως η απεικόνιση της κίνησης δημιουργεί μια απεικόνιση που συνδέει απειροστά στοιχεία όγκου στον σχηματισμό αναφοράς B_0 με στοιχεία όγκου στον τρέχοντα σχηματισμό B με τέτοιο τρόπο ώστε

$$dv = JdV, \quad (1.13)$$

όπου dv ο στοιχειώδης όγκος στο χρόνο t και dV ο στοιχειώδης όγκος κατά τον σχηματισμό αναφοράς.

Η **πυκνότητα** είναι ένα βαθμωτό πεδίο που ορίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε η μάζα του στοιχειώδους όγκου στο σχηματισμό B να είναι το γινόμενο ρdv . Τότε άμεσα έχουμε μια μορφή της **αρχής διατήρησης της μάζας** ως

$$\rho dv = \rho_0 dV \quad (1.14)$$

Η **αρχή διατήρησης της μάζας** εξασφαλίζει ότι η μάζα τυχαιού τμήματος $P_0 \subset B_0$ παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της παραμόρφωσης.

Επιπρόσθετα η κίνηση όπως την έχουμε ορίσει δημιουργεί όμοια για τον στοιχειώδη όγκο μια απεικόνιση η οποία συνδέει απειροστά στοιχεία επιφάνειας dS του B_0 σε αντίστοιχα ds του τρέχοντα σχηματισμού B_t .

Έστω $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ η συνάρτηση που ορίζεται στο ∂B_t και υποδηλώνει το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια και $\mathbf{N}(\mathbf{X}) = \mathbf{N}(\mathbf{X}, 0)$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια ∂B_0 . Τότε θα έχουμε

$$\mathbf{n} ds = J\mathbf{F}^{-t}\mathbf{N}dS, \quad \text{όπου } \mathbf{F}^{-t} = (\mathbf{F}^{-1})^t \quad (1.15)$$

1.2 ΤΑΝΥΣΤΕΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ CAUCHY-GREEN

Θεωρούμε δυο γειτονικά σημεία P και Q του σχηματισμού αναφοράς τα οποία θα έχουν διανύσματα θέσης τα \mathbf{X} και $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ αντίστοιχα. Τότε για την απόσταση τους θα ισχύει

$$dS^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad (1.16)$$

Κατά την παραμόρφωση του συνεχούς τη χρονική στιγμή t , η διανυσματική διαφορά των αντίστοιχων σημείων θα είναι

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= x_i(X_j + dX_j, t)e_i - x_i(X_j, t)e_i \\ &= \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j e_i = \mathbf{F} d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Συνεπώς για την απόσταση των δύο αυτών υλικών σημείων μπορούμε να πούμε ότι

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}'\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} .$$

Επομένως θα έχουμε τη σχέση

$$ds^2 - dS^2 = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{1}) d\mathbf{X} ,$$

όπου

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}'\mathbf{F} \quad (1.18)$$

καλείται δεξιός **τανυστής παραμόρφωσης του Cauchy-Green** .

Ορίσαμε προηγουμένως την μετατόπιση ως το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} ,$$

η κλίση της μετατόπισης είναι ένα τανυστικό πεδίο το οποίο ορίζεται ως εξής

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F}^{-1} \quad \text{ή} \quad \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = F_{ij}^{-1} - \delta_{ij} \quad (1.19)$$

Πιο συγκεκριμένα όσον αφορά την κλίση της μετατόπισης ισχύει ότι

$$\mathbf{C} - \mathbf{1} = 2\mathbf{E} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}\right)^t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad , \quad (1.20)$$

όπου \mathbf{E} είναι ο τανυστής απειροστών τροπών με

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}\right)^t \right] \quad , \quad E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad . \quad (1.21)$$

1.3 ΝΟΜΟΙ ΙΣΟΖΥΓΙΟΥ

Μέχρι στιγμής στη διατριβή αυτή έχουμε εισαγάγει τις κινηματικές ποσότητες οι οποίες είναι απαραίτητες για την μελέτη της κίνησης του συνεχούς μέσου. Στο σημείο αυτό θα αναφερθούμε στην εντατική κατάσταση του σώματος και θα εισάγουμε τις εξισώσεις που συνδέουν τις δυνάμεις με τα αποτελέσματα τους στις κινηματικές μεταβλητές.

1.4.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Έστω $\rho(\mathbf{x}, t)$ πυκνότητα μάζας μιας συγκεκριμένης περιοχής του σώματος. Κατά προφανή τρόπο από την αρχή της διατήρησης της μάζας θα έχουμε ότι

$$\frac{D}{Dt} \int_B \rho(\mathbf{x}, t) dv = 0 \quad ,$$

δηλαδή συνεχίζοντας τις πράξεις

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} \int_B \rho(\mathbf{x}, t) dv &= \int_B \frac{D}{Dt} [\rho(\mathbf{x}, t) dv] = \\
&= \int_B \frac{D\rho}{Dt} dv + \rho \frac{D(dv)}{Dt} = \int_B \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho v_{i,i} \right) dv \quad (1.22) \\
&= 0
\end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο στάδιο κάναμε χρήση της σχέσης : $\frac{D(dv)}{Dt} = J v_{i,i} dV = v_{i,i} dv$.

Τελικά

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho v_{i,i} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in B \quad (1.23)$$

ή ισοδύναμα

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in B \quad (1.24)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της υλικής παραγώγου εύκολα μπορώ να δείξω πως η εξίσωση της συνέχειας ενός συνεχούς μέσου μπορεί να πάρει και την παρακάτω απλούστερη μορφή ως εξής:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i \right) + \rho v_{i,i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0 \quad (1.25)$$

Ισοδύναμα

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad . \quad (1.26)$$

1.4.2 ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΣΩΝ

Οι δυνάμεις που ασκούνται στα συνεχή μέσα διαχωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη αφορά τις δυνάμεις που δρουν **από απόσταση** με ένα παράδειγμα αυτών να είναι το βάρος του σώματος. Τέτοιες δυνάμεις καλούνται και **μαζικές** διότι ασκούνται σε όλα τα υλικά σημεία του σώματος. Πιο συγκεκριμένα οι μαζικές δυνάμεις είναι **δυνάμεις ανά μονάδα μάζας** οι οποίες περιγράφονται από ένα διανυσματικό πεδίο που ορίζεται επί του σχηματισμού B . Δηλαδή :

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in B_0 \quad (1.27)$$

Επομένως μπορούμε να πούμε ότι η συνολική δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα μπορεί να εκφραστεί ως το ολοκλήρωμα:

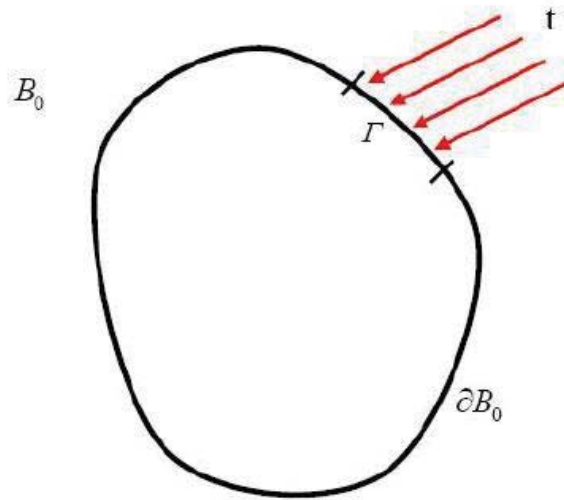
$$\int_{B_0} \rho_0 \mathbf{b} dV . \quad (1.28)$$

Η δεύτερη κατηγορία των δυνάμεων είναι οι **δυνάμεις επαφής**. Δηλαδή δυνάμεις που ασκούνται από ένα σώμα σε ένα άλλο. Τέτοιες δυνάμεις καλούνται και επιφανειακές διότι δρουν σε επιφανειακά σημεία του σώματος. Ένα παράδειγμα τέτοιων δυνάμεων είναι η δύναμη που ασκεί το έμβολο της σύριγγας στο υγρό που περιέχεται σε αυτήν. Οι επιφανειακές δυνάμεις οπότε είναι **δυνάμεις ανά μονάδα επιφάνειας** και δρουν σε ένα τμήμα Γ υποσύνολο του σχηματισμού B . Ακόμη περιγράφονται από ένα διανυσματικό πεδίο που ορίζεται στο $\Gamma \subseteq \partial B$, δηλαδή

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \partial B_0$$

Το διανυσματικό πεδίο \mathbf{t} καλείται και **διάνυσμα τάσεως**. Ακόμη μπορούμε να πούμε ότι η συνολική δύναμη λόγω επιφανειακών δυνάμεων εκφράζεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t} dS .$$



Σχήμα 3 Επιφανειακή φόρτιση τμήματος του συνόρου του σώματος

Ένα εσωτερικό σημείο του B δέχεται και αυτό την επίδραση της μια συνοριακής δύναμης εξαιτίας των δυνάμεων συνοχής στο εσωτερικό του σώματος. Η φόρτιση δηλαδή είναι αισθητή σε όλο το σώμα. Το διάνυσμα τάσης περιγράφει εκτός από την επιφανειακές δυνάμεις και την εντατική κατάσταση όλου του σώματος δια μέσου οποιαδήποτε εσωτερικής επιφάνειας.

Σε οποιαδήποτε εσωτερικό σημείο P θα ισχύει ότι

$$\mathbf{t}^{(n)} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A},$$

όπου $\Delta \mathbf{F}$ η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο ΔA , δηλαδή μια μικρή επιφάνεια που περιέχει το σημείο αυτό.

1.4.3 Ο ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΤΑΣΗΣ ΚΑΙ ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ CAUCHY

Δεδομένου πως υπάρχουν άπειρες επιφάνειες οι οποίες περιέχουν το τυχαίο εσωτερικό σημείο P υπάρχουν και άπειρα διανύσματα τάσης που αντιστοιχούν στην επιφανειακή δύναμη. Μπορούμε όμως να προσδιορίσουμε εύκολα την εντατική κατάσταση ενός σημείου γνωρίζοντας τα διανύσματα τάσης για τρία κάθετα μεταξύ τους επίπεδα. Συγκεκριμένα για τρία κάθετα μεταξύ τους επίπεδα που περιέχουν το σημείο P, τρεις τάσεις θα ασκούνται πάνω σε κάθε ένα από αυτά τα επίπεδα, στις διευθύνσεις των καθέτων x, y και z. Σχηματίζοντας ένα φανταστικό τετράεδρο γύρω από το σημείο P από την συνθήκη τοπικής ισορροπίας θα έχουμε το εξής

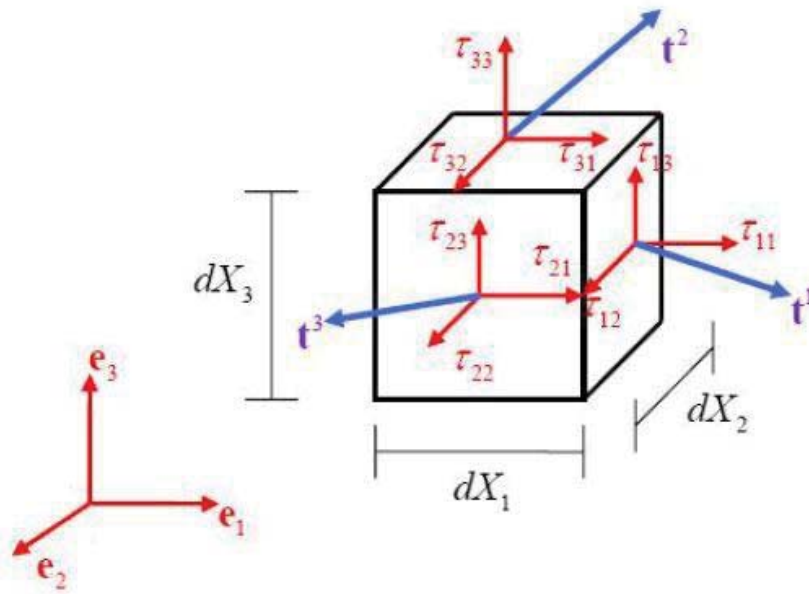
$$t^i = \tau_{i1} \mathbf{e}_1 + \tau_{i2} \mathbf{e}_2 + \tau_{i3} \mathbf{e}_3 = \tau_{ij} \mathbf{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3$$

όπου

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix},$$

καλείται **τανυστής τάσης του Cauchy**.

Ο πρώτος δείκτης αφορά την έδρα επί της οποίας ασκείται, ενώ ο δεύτερος δείχνει την διεύθυνση κατά την οποία ασκείται τάση. Οι τάσεις με τους ίδιους δείκτες αποτελούν τις **ορθές συνιστώσες του τανυστή τάσεως**, ενώ οι υπόλοιποι τις **διατμητικές συνιστώσες του τανυστή τάσεως**.



Σχήμα 4 Ανάλυση των τάσεων.

Θεωρούμε ένα απειροστό τετράεδρο OABC στο εσωτερικό ενός σώματος που βρίσκεται σε ισορροπία. Οι τρεις πλευρές του είναι τοποθετημένες στις διευθύνσεις του άξονα ενώ η τέταρτη έχει τυχαίο προσανατολισμό με ορθομοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} όπως φαίνεται στο σχήμα 1.5. Στην πλευρά αυτή ασκείται το διάνυσμα τάσης \mathbf{t}'' το οποίο αναλύεται ως εξής

$$\mathbf{t}'' = t_1'' \mathbf{e}_1 + t_2'' \mathbf{e}_2 + t_3'' \mathbf{e}_3 \quad (1.29)$$

Βάση ορισμού το διάνυσμα τάσης είναι δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας άρα θα έχουμε αντίστοιχα ότι

$$\mathbf{t}^i dS_i = (\tau_{i1} \mathbf{e}_1 + \tau_{i2} \mathbf{e}_2 + \tau_{i3} \mathbf{e}_3) dS_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.30)$$

όπου dS_i το εμβαδό των αντίστοιχων επιφανειών των τριών εδρών του τετραέδρου τοποθετημένες στον άξονα.

Για την δύναμη στην τυχαία προσανατολισμένη έδρα θα έχουμε

$$\mathbf{t}^n dS = (t_1 \mathbf{e}_1 + t_2 \mathbf{e}_2 + t_3 \mathbf{e}_3) dS, \quad (1.31)$$

όπου dS το εμβαδόν της έδρας ABC.

Ακόμη τα εμβαδά των εδρών συνδέονται με το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} ως

$$dS_i = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) dS = n_i dS \quad (1.32)$$

Λόγω της συνθήκης ισορροπίας θα έχουμε την παρακάτω σχέση

$$\mathbf{t}^n dS = \mathbf{t}^1 dS_1 + \mathbf{t}^2 dS_2 + \mathbf{t}^3 dS_3$$

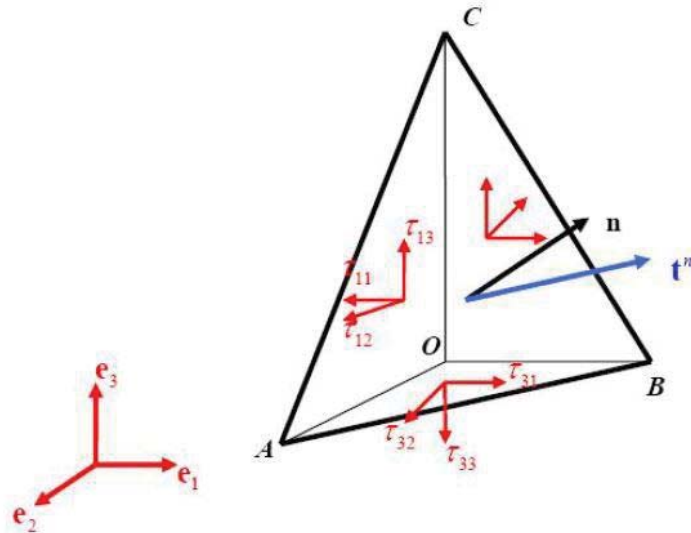
και με αντικατάσταση της παραπάνω σχέσης η διανυσματική εξίσωση θα πάρει τη μορφή

$$\mathbf{t}^n = \mathbf{t}^1 n_1 + \mathbf{t}^2 n_2 + \mathbf{t}^3 n_3$$

δηλαδή

$$t_i^n = \tau_{ji} n_j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{ή} \quad \mathbf{t}^n = \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{n}. \quad (1.33)$$

Η τελευταία σχέση αναφέρεται και ως **τύπος του Cauchy**.



Σχήμα 5 Τετράεδρο OABC και τάσεις.

1.4.4 ΤΟ ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

Με τον όρο ισοζύγιο της ορμής αναφερόμαστε σε μια γενίκευση του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα για το συνεχές σώμα. Πιο συγκεκριμένα ο ρυθμός μεταβολής της ορμής σε ένα συνεχές σώμα ισούται με τις επιβαλλόμενες επί του σώματος δυνάμεις.

Επομένως για οποιαδήποτε τμήμα P_t του σώματος στον τρέχοντα σχηματισμό έχουμε ότι

$$\frac{d}{dt} P(P_t) = F(P_t) \quad \text{ή} \quad (1.34)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{P_t} \rho \mathbf{v} dv = \int_{P_t} \rho \mathbf{b} dv + \int_{\partial P_t} \mathbf{t}^n ds, \quad (1.35)$$

όπου στο δεξιό τμήμα της εξίσωσης αναφέρονται οι μαζικές δυνάμεις που δρουν σε όλο το σώμα και οι επιφανειακές που δρουν στο σύνορο του.

Με χρησιμοποίηση του θεωρήματος μεταφοράς του Reynolds [1] μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\frac{d}{dt} \int_{P_t} \rho \mathbf{v} dv = \int_{P_t} \rho \dot{\mathbf{v}} dv . \quad (1.36)$$

Επίσης, με τη βοήθεια του θεωρήματος Gauss ο τελευταίος της (1.35) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\int_{\partial P_t} \mathbf{t}^n ds = \int_{\partial P_t} t_i^n ds = \int_{\partial P_t} \tau_{ji} n_j ds = \int_{P_t} \tau_{ji,j} dv .$$

Με αντικατάσταση των δυο τελευταίων σχέσεων στην εξίσωση (1.35) θα έχουμε

$$\int_{P_t} \rho \dot{v}_i dv = \int_{P_t} \rho b_i dv + \int_{P_t} \tau_{ji,j} dv \Rightarrow \int_{P_t} (\rho \dot{v}_i - \rho b_i - \tau_{ji,j}) dv = 0$$

Επειδή η παραπάνω σχέση ορίζεται για οποιαδήποτε τμήμα P_t του συνεχούς, η ολοκληρωτέα ποσότητα θα πρέπει να είναι παντού μηδέν στον τρέχοντα σχηματισμό.

$$\tau_{ji,j} + \rho b_i - \rho \dot{v}_i = 0 \quad \text{στο } B_t \quad \text{ή} \quad \text{div } \boldsymbol{\tau}^T + \rho \mathbf{b} - \rho \dot{\mathbf{v}} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in B_t \quad (1.37)$$

Η παραπάνω εξίσωση καλείται και εξίσωση της **κίνησης** ή **Euler στη Μηχανική Συνεχούς Μέσου**.

Στην περίπτωση όπου το σώμα ισορροπεί, δηλαδή η ταχύτητα του ισούται με το μηδέν η εξίσωση γίνεται :

$$\tau_{ji,j} + \rho b_i = 0 \quad \text{στο } B_t \quad \text{ή} \quad \text{div } \boldsymbol{\tau}^T + \rho \mathbf{b} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in B_t \quad (1.38)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ ΤΟΥ HAMILTON

2.1 ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

Ένα από τα βασικά προβλήματα του απειροστικού λογισμού είναι η ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση μιας ποσότητας, δηλαδή μιας πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής. Για μια συνάρτηση που ορίζεται στο ανοιχτό I θα λέμε ότι αν έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0 του I και η f είναι διαφορίσιμη στο I , τότε είναι γνωστό ότι

$$f'(x_0) = 0. \quad (2.1)$$

Ο λογισμός Μεταβολών ασχολείται με γενικεύσεις του παραπάνω προβλήματος και συγκεκριμένα ελαχιστοποιήσεις ή μεγιστοποιήσεις γενικότερων ποσοτήτων που ονομάζονται συναρτησοειδή ή συναρτησιακά. **Συναρτησοειδές** ονομάζουμε έναν κανόνα όπου κάθε συνάρτηση αντιστοιχίζεται σε έναν πραγματικό αριθμό. Το πεδίο ορισμού ενός συναρτησοειδούς είναι ένα σύνολο συναρτήσεων. Έτσι σχηματικά λέμε ότι $J: A \rightarrow \mathbb{R}$. Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης ενός συναρτησοειδούς J επί του συνόλου A λέγεται **μεταβολικό πρόβλημα**.

Από τα απλούστερα προβλήματα που ασχολείται ο Λογισμός μεταβολών είναι η ελαχιστοποίηση ενός ολοκληρώματος της μορφής :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx, \text{ όπου } f \text{ μια συνάρτηση των } x, y, y' \quad (2.2)$$

με τις τιμές των x_1, x_2 , $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$ να είναι γνωστές.

Συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες και ανήκουν στο $C^2[x_1, x_2]$ καλούνται **αποδεκτές**. Για να βρούμε μια αποδεκτή συνάρτηση η οποία ικανοποιεί το μεταβολικό πρόβλημα ορίζουμε την αποδεκτή **συνάρτηση δοκιμής** :

$$y^*(x, \varepsilon) = y(x) + \varepsilon \eta(x), \quad (2.3)$$

όπου ε είναι μια παράμετρος και $\eta(x)$ μια συνάρτηση στο $C^2[x_1, x_2]$ που επιπλέον ικανοποιεί τις συνθήκες $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Με αντικατάσταση της συνάρτησης δοκιμής στο ολοκλήρωμα θα έχουμε

$$I^*(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y^*, y'^*) dx. \quad (2.4)$$

Τώρα μπορούμε να παρατηρήσουμε πως το ολοκλήρωμα ελαχιστοποιείται όταν η συνάρτηση δοκιμής $y^*(x, \varepsilon) = y(x)$, δηλαδή όταν η παράμετρος ε μηδενίζεται.

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι

$$\left[\frac{dI^*(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = 0 \quad (2.5)$$

Υπολογίζοντας την παράγωγο

$$\begin{aligned}\frac{dI^*(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial y^{**}} \frac{\partial y^{**}}{\partial \varepsilon} \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y^*} \eta + \frac{\partial f}{\partial y^{**}} \eta' \right) dx\end{aligned}\quad (2.6)$$

Επομένως βάση της συνθήκης που ορίσαμε την συνάρτηση δοκιμής για να ελαχιστοποιηθεί το μεταβολικό πρόβλημα πρέπει

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' \right) dx = 0 \quad (2.7)$$

όμως

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' dx = \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \eta \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta dx \quad (2.8)$$

Ακόμη όπως ορίσαμε $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ θα έχουμε

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta dx = 0. \quad (2.9)$$

Στο σημείο αυτό με χρήση του **Θεμελιώδους λήμματος του Λογισμού Μεταβολών** [6] το οποίο αναφέρει πως

αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και αν

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)h(x) = 0$$

τότε για κάθε συνάρτηση $h(x)$ στο $C^\infty[\alpha, \beta]$ με $h(a) = h(\beta) = 0$,

$f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Επομένως μπορούμε να πούμε ότι :

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad \forall x \in [x_1, x_2] \quad (2.10)$$

Η εξίσωση αυτή λέγεται και εξίσωση **Euler-Lagrange**. Είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης γενικά μη γραμμική. Αποτελεί αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη τοπικού ελαχίστου και είναι ανάλογης της συνθήκης μηδενισμού της παραγώγου στον διαφορικό λογισμό.

2.2 ΑΡΧΗ HAMILTON

Στην Κλασική Μηχανική περιγράφουμε ένα σύστημα με ένα σύνολο ποσοτήτων ή δυναμικών μεταβλητών οι οποίες να έχουν μια ορισμένη τιμή κάθε χρονική στιγμή. Με τον τρόπο αυτό καθορίζεται η κατάσταση του σώματος τη δεδομένη χρονική στιγμή. Οι ποσότητες αυτές ως συναρτήσεις του χρόνου πληρούν ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων καθώς και κάποιες αρχικές συνθήκες. Οι εξισώσεις αυτές καλούνται εξισώσεις κίνησης του συστήματος.

Μια άλλη μέθοδος εξαγωγής των εξισώσεων κίνησης ενός συστήματος είναι η παραγωγή τους από μια μεταβολική αρχή. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην ιδέα ότι η κίνηση θα εξελίσσεται χρονικά πάνω στη διαδρομή ελάχιστης δράσης.

Η αρχή του Hamilton αναφέρει ότι η χρονική εξέλιξη ενός μηχανικού συστήματος γίνεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε το ολοκλήρωμα της διαφοράς μεταξύ κινητικής και δυναμικής ενέργειας να είναι στάσιμο.

Θεωρούμε y_1, y_2, \dots, y_n το σύνολο των **γενικευμένων συντεταγμένων** ενός δυναμικού συστήματος. Μια αποδεκτή κίνηση μπορεί να περιγραφεί από το σύνολο των συναρτήσεων $y_k(t), k = 1, \dots, n$ οι οποίες θα είναι C^2 στο διάστημα κίνησης $[t_1, t_2]$. Οι παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών ως προς το χρόνο $\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_n$ καλούνται γενικευμένες ταχύτητες του συστήματος.

Η **κινητική ενέργεια T** ορίζεται ως μια τετραγωνική μορφή ως προς τις \dot{y}_k ως

$$T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{y}_k) \dot{y}_i \dot{y}_j, \quad (2.11)$$

όπου a_{ij} γνωστές συναρτήσεις συναρτήσει των συντεταγμένων του συστήματος.

Η **δυναμική ενέργεια U** είναι μια συνάρτηση της μορφής :

$$U = U(t, y_k, \dot{y}_k) \quad (2.12)$$

Ορίζουμε την λεγόμενη Λαγκρανζιανή του συστήματος ως τη διαφορά $L = T - U$, όπου η L είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση.

Η Αρχή του Hamilton συγκεκριμένα αναφέρει ότι η κίνηση του συστήματος κατά το χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$ είναι τέτοια ώστε το συναρτησοειδές

$$J(t, y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{y}_k, \dot{\mathbf{y}}_k) dt \quad (2.13),$$

να είναι στάσιμο.

Η γεωμετρική θεώρηση της αρχής αναφέρει το σύνολο των συντεταγμένων y_k ως συντεταγμένες ενός n-διάστατου χώρου, ο οποίος καλείται **χώρος αναπαράστασεων** και οι εξισώσεις $y_k = y_k(t), k = 1, \dots, n$ μπορεί να θεωρηθούν ως οι παραμετρικές

εξισώσεις μιας καμπύλης C που ενώνει δυο δυναμικές καταστάσεις του μηχανικού συστήματος. Με τον τρόπο αυτό η αρχή Hamilton αναφέρει πως μεταξύ όλων των δυνατών διαδρομών στο χώρο των αναπαραστάσεων που συνδέουν την αρχική με την τελική κατάσταση, η πραγματική κίνηση θα λαμβάνει χώρα κατά μήκος της καμπύλης που ελαχιστοποιεί το παραπάνω συναρτησοειδές. Το ολοκλήρωμα $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ καλείται **δράση** του συστήματος.

Μια επιπλέον διατύπωση της Αρχής Hamilton αποτελεί και η συχνά απαντώμενη έκφραση

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(t, y_k, \dot{y}_k) dt = 0 \quad . \quad (2.14)$$

Επομένως από την (2.14) με χρησιμοποίηση του Λογισμού Μεταβολών οι y_k θα πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις Euler-Lagrange.

Δηλαδή

$$\frac{\partial L}{\partial y_k} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y_k^2} \right) = 0 \quad , \quad k = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

2.3 Η ΔΥΝΑΜΙΑ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ HAMILTON

Όπως διαπιστώσαμε η Αρχή Hamilton μπορεί να αναπαράγει επιτυχώς τις εξισώσεις που διέπουν ένα πρόβλημα Μηχανικής συνεχούς μέσου. Υπάρχουν ωστόσο δυο αδυναμίες στην μέθοδο αυτή. Η Αρχή προϋποθέτει πως η κατάσταση του συστήματος πρέπει να είναι γνωστή τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 , δηλαδή απαιτείται ο μηδενισμός των μεταβολών τις δυο αυτές χρονικές στιγμές. Σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών όπου η κατάσταση του μηχανικού συστήματος στην αρχή και το

τέλος της δράσης είναι γνωστή, η Αρχή Hamilton θεωρείται από τις πλέον κλασσικές μεθόδους φορμαλισμού.

Ωστόσο, σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή t_2 όχι μόνο είναι άγνωστη αλλά απαιτείται και η εύρεση της και συγκεκριμένα η συμπεριφορά του συστήματος για οποιαδήποτε χρόνο $t > t_1$. Εδώ η Αρχή επιτυγχάνει την παραγωγή των κατάλληλων εξισώσεων που διέπουν το σύστημα αλλά αδυνατεί να ενσωματώσει τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες.

Δεύτερη αδυναμία της Αρχής αποτελεί ο περιορισμός της χρησιμοποίησης της μόνο σε συντηρητικά πεδία. Για παράδειγμα σε συστήματα με αποσβέσεις ή τυχόν ανελαστική συμπεριφορά η Αρχή αδυνατεί να παράγει τις εξισώσεις αλλά και τις αρχικές συνθήκες του συστήματος. Αυτό πρακτικά συμβαίνει διότι εμφανίζονται παράγωγοι πρώτης τάξεως στις διαφορικές εξισώσεις επομένως η χρησιμοποίηση ενός συναρτησιακού δράσης βασισμένο στην Λαγκρατζιανή του συστήματος είναι αδύνατη. Στο παρελθόν έχουν γίνει αρκετές προσπάθειες αυτές οι αδυναμίες να αρθούν όπως για παράδειγμα η εισαγωγή της συνάρτησης απόσβεσης του Rayleigh ή και γενικεύσεις της Αρχής ώστε να καλύπτει και φαινόμενα αποσβέσεων.

Όσον αφορά τα προβλήματα αρχικών τιμών ο Tonli [14] ήταν ο πρώτος που παρατήρησε πως η αδυναμία της κλασσικής προσέγγισης εμφανίζεται εξαιτίας της χρήσης εσωτερικού γινομένου του L^2 . Πιο συγκεκριμένα ο διαφορικός τελεστής 2^{ης} τάξης ο οποίος γενικά παρουσιάζει μια συμμετρία στον L^2 αποτυγχάνει να την διατηρήσει με την εισαγωγή των αρχικών συνθηκών. Για παράδειγμα έστω οι συναρτήσεις f, g , οι οποίες ανήκουν στον γραμμικό χώρο των πραγματικών συναρτήσεων και είναι συνεχείς στο $[a, b]$. Τότε

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{d^2 f}{dx^2}, g \right\rangle &:= \int_a^b \frac{d^2 f(x)}{dx^2} g(x) dx \\
 &= \frac{df(x)}{dx} g(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{df(x)}{dx} \frac{dg(x)}{dx} dx \\
 &= \frac{df(x)}{dx} g(x) \Big|_a^b - f(x) \frac{dg(x)}{dx} \Big|_a^b + \int_a^b f(x) \frac{d^2 g(x)}{dx^2} dx \\
 &= \left(\frac{df(x)}{dx} g(x) - f(x) \frac{dg(x)}{dx} \right) \Big|_a^b + \left\langle f, \frac{d^2 g}{dx^2} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Όπως παρατηρούμε υπο κατάλληλες συνθήκες ο διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης μπορεί να είναι συμμετρικός.

Επομένως η ιδέα γενίκευσης της Αρχής με τέτοιο τρόπο ώστε να συνάδει με τις αρχικές συνθήκες κρίνεται απολύτως αναγκαία.

Από τους πρωτοπόρους στον τομέα αυτό εκτός από τον Tonati [15] θεωρείται και ο Gurtin [17,18], ο οποίος χρησιμοποίησε την **συνέλιξη** έτσι ώστε να μετασχηματίσει ένα μεταβολικό πρόβλημα αρχικών τιμών σε ένα νέο συνοριακών τιμών. Η ιδέα έγκειται στο γεγονός ότι οι ανεπιθύμητοι όροι που προέρχονται ύστερα από ολοκληρώσεις κατά μέλη εξαφανίζονται. Αρκετοί ερευνητές έχουν χρησιμοποιήσει την πράξη της συνέλιξης για την παραγωγή συναρτησιακών που προβλέπουν την εισαγωγή αρχικών συνθηκών και αποσβέσεων σε προβλήματα θεωρητικής μηχανικής.

Στη παρούσα διπλωματική θα παρουσιάσουμε μια γενίκευση της Αρχής του Hamilton [10] και συγκεκριμένα την δημιουργία ενός συναρτησιακού που χρησιμοποιεί την συνέλιξη και μοντελοποιεί επακριβώς ένα πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών της Μηχανικής Συνεχούς. Πρώτα όμως θα αναφερθούμε στην συνέλιξη και σε βασικές παρατηρήσεις που αφορούν την διατύπωση του «νέου» συναρτησιακού.

2.4 ΣΥΝΕΛΙΞΗ

Έστω δυο συναρτήσεις f και g συνεχείς στο $[0, +\infty)$. Η συνέλιξη των f και g είναι μια συνάρτηση στο $[0, +\infty)$ που ορίζεται ως

$$[f, g] := \int_0^t f(s)g(t-s)ds \quad (2.16)$$

Εάν οι συναρτήσεις είναι χωροχρονικές, δηλαδή $f = f(\mathbf{x}, t)$, $g = g(\mathbf{x}, t)$ $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $t > 0$

η συνέλιξη τους ορίζεται ως

$$[f, g](\mathbf{x}, t) = \int_0^t f(\mathbf{x}, s)g(\mathbf{x}, t-s)ds, \quad (2.17)$$

όπου για οποιαδήποτε $\mathbf{x} \in \Omega$ οι παραπάνω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο $[0, t]$.

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε πως η συνέλιξη έχει τις παρακάτω ιδιότητες

$$[f, g] = [g, f] \quad (2.18)$$

$$[f + g, h] = [f, h] + [g, h] \quad (2.19)$$

$$\text{Av } [f, g] = 0 \Rightarrow f = 0 \vee g = 0 \quad (2.20)$$

2.4.1 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΜΕΛΗ ΚΑΙ ΣΥΝΕΛΙΞΗ

Για τη δημιουργία μεταβολικής αρχής με συνέλιξη χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε σχέσεις της μορφής

$$[v, u'] = \int_0^t v(s)u'(t-s)ds \quad (2.21)$$

όπου

$$u'(t-s) = \frac{du}{dz}(z), \quad z = t-s$$

Με τον τρόπο αυτό θέτοντας ως $w(s) := u(t-s)$ μπορούμε να πούμε ότι

$$w'(s) = \frac{du}{dz} \frac{dz}{ds} = -u'(z) = -u'(t-s) \quad (2.22)$$

Τότε η σχέση (2.21) γίνεται

$$\begin{aligned}
[v, u'] &= \int_0^t v(s)u'(t-s)ds = -\int_0^t v(s)w'(s)ds = [-v(s)w(s)]_0^t + \int_0^t v'(s)w(s)ds \\
&= [-v(s)u(t-s)]_0^t + \int_0^t v'(s)u(t-s)ds \\
&= [-v(t)u(0) + v(0)u(t)] + \int_0^t v'(s)u(t-s)ds
\end{aligned}$$

οπότε και θα έχουμε την εξής σχέση

$$[v, u'] = [v(0)u(t) - v(t)u(0)] + [v', u] \quad (2.23)$$

Στην περίπτωση όπου οι συναρτήσεις αφορούν το χώρο και το χρόνο δηλαδή έχουμε όρους της μορφής

$$\left[v, \frac{\partial u}{\partial s} \right] = \int_0^t v(\mathbf{x}, s)u'_{t-s}(\mathbf{x}, t-s)ds \quad (2.24)$$

κατ' αναλογία εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\left[v, \frac{\partial u}{\partial s} \right] = [v(\mathbf{x}, 0)u(\mathbf{x}, t) - v(\mathbf{x}, t)u(\mathbf{x}, 0)] + \left[\frac{\partial v}{\partial s}, u \right] \quad (2.25)$$

και

$$\left[\frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial s} \right] = \left[\frac{\partial v}{\partial s}(\mathbf{x}, 0)u(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial v}{\partial s}(\mathbf{x}, t)u(\mathbf{x}, 0) \right] + \left[\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, u \right] \quad (2.26)$$

2.4.2 ΠΡΩΤΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ $[u', u']$.

Για την διατύπωση της συναρτησοειδούς που με ελαχιστοποίηση του θα παράγει τις εξισώσεις και θα περιγράψει ακριβώς ένα πρόβλημα αρχικών τιμών της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου χρειάζεται να γνωρίζουμε την πρώτη μεταβολή του $[u', u']$.

Θεωρούμε το συναρτησοειδές

$$J[u] = [u, u] \quad , \quad u \in D \quad (2.27)$$

όπου D το σύνολο

$$D = \{\varphi \in C^2[0, t] \mid \varphi(0) = u_0\} \quad (2.28)$$

Ορίζουμε ως πρώτη μεταβολή του J ως προς την συνάρτηση η

$$DJ(u; \eta) = \frac{d}{d\varepsilon} J[\tilde{u}]|_{\varepsilon=0} \quad , \quad (2.29)$$

όπου $\tilde{u} = u + \varepsilon\eta$ μια αυθαίρετη συνάρτηση δοκιμής στο D , ε μια πολύ μικρή παράμετρο και η τη συνάρτηση που ανήκει στο σύνολο

$$D^* = \{\varphi \in C^2[0, t] \mid \varphi(0) = 0\}.$$

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\frac{d}{d\varepsilon} J[\tilde{u}]|_{\varepsilon=0} = \int_0^t [u(s)\eta(t-s) + \eta(s)u(t-s)] ds = [u, \eta] + [\eta, u] = 2[u, \eta]. \quad (2.30)$$

Επιπρόσθετα αν θεωρήσουμε το συναρτησιακό

$$J^*[u] = [u', u'] \quad , \quad u \in D \quad (2.31)$$

χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.30) έχουμε

$$\frac{d}{d\varepsilon} J^*[\tilde{u}]|_{\varepsilon=0} = 2[u', \eta'] = 2(u'(0)\eta(t) - u'(t)\eta(0) + [u'', \eta]) = 2(u'(0)\eta(t) + [u'', \eta]).$$

Άρα

$$D[u', u'](u; \eta) = 2(u'(0)\eta(t) + [u'', \eta]) \quad (2.32)$$

2.4.3 ΠΡΩΤΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ $\int_{\Omega} [\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial s}]$

Έστω η συνάρτηση του χώρου και του χρόνου $u = u(\mathbf{x}, s)$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $s \in [0, t]$, τότε ορίζεται το συναρτησιακό

$$J[u] = \int_{\Omega} [\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial s}] d\mathbf{x}, \quad u \in D \quad (2.33)$$

όπου

$$D = \{\varphi \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, t] \mid \varphi(\mathbf{x}, s) = \hat{u}(\mathbf{x}, s) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_D \wedge \varphi(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})\} \quad (2.34)$$

με

$$\partial\Omega_D \subseteq \partial\Omega \quad \text{και} \quad \hat{u}, u_0 \text{ γνωστές συναρτήσεις.}$$

Επομένως για

$$\eta \in D^* = \{\varphi \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, t] \mid \varphi(\mathbf{x}, s) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_D \wedge \varphi(\mathbf{x}, 0) = 0\} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} DJ(u; \eta) &= \frac{d}{d\varepsilon} J[u + \varepsilon\eta] \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} \int_0^t (u'_s(\mathbf{x}, s) + \varepsilon\eta'_s(\mathbf{x}, s))(u'_{t-s}(\mathbf{x}, t-s) + \varepsilon\eta'_{t-s}(\mathbf{x}, t-s)) ds d\mathbf{x} \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{\Omega} \int_0^t u'_s(\mathbf{x}, s)\eta'_{t-s}(\mathbf{x}, t-s) + \eta'_s(\mathbf{x}, s)u'_{t-s}(\mathbf{x}, t-s) ds d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} [\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial \eta}{\partial s}] + [\frac{\partial \eta}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial s}] d\mathbf{x} \end{aligned}$$

ή

$$DJ(u; \eta) = 2 \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial \eta}{\partial s} \right] d\mathbf{x} \quad (2.36)$$

Με ολοκλήρωση κατά μέλη της παραπάνω σχέσης σύμφωνα με τη σχέση (2.26)

$$DJ(u; \eta) = 2 \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial s}(\mathbf{x}, 0) \eta(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial u}{\partial s}(\mathbf{x}, t) \eta(\mathbf{x}, 0) + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \eta \right] \right] d\mathbf{x} \quad (2.37)$$

όπου με εισαγωγή των προϋποθέσεων για την συνάρτηση η η σχέση γίνεται

$$DJ(u; \eta) = 2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial s}(\mathbf{x}, 0) \eta(\mathbf{x}, t) + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \eta \right] \right) d\mathbf{x} \quad (2.38)$$

2.5 ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΕΛΙΞΗ

Για την χρησιμοποίηση των τεχνικών του Λογισμού Μεταβολών για τη δημιουργία συναρτησοειδών που μοντελοποιούν προβλήματα αρχικών τιμών, χρειαζόμαστε ένα αντίστοιχο λήμμα το οποίο θα χρησιμοποιεί την συνέλιξη. Ο Gurtin [17,18] διατύπωσε το Θεμελιώδες Λήμμα του Λογισμού Μεταβολών με συνέλιξη. Συγκεκριμένα,

έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $\bar{\Omega} \times [0, +\infty)$. Αν ισχύει ότι

$$\int_{\Omega} [f, u] d\mathbf{x} = 0, \quad t < \infty$$

για κάθε $u \in C^{\infty}(\bar{\Omega} \times [0, t])$ με τις χωρικές παραγώγους να μηδενίζονται στο $\partial\Omega \times [0, t]$.

Τότε

$$f(\mathbf{x}, s) = 0, \quad \forall (\mathbf{x}, s) \in \bar{\Omega} \times [0, t]$$

2.6 ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ HAMILTON ΜΕ ΝΕΑ ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΗ ΑΡΧΗ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΜΗΧΑΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Έστω σώμα μάζας m στερεωμένο σε ελατήριο σταθεράς k στο οποίο ασκούμε αρμονική δύναμη $f = f(s)$, $s \in [0, \infty)$. Έστω ότι το σώμα αρχίζει να κινείται με αρχική μετατόπιση u_0 και αρχική ταχύτητα v_0 . Το συγκεκριμένο δυναμικό πρόβλημα είναι το απλούστερο δυναμικό πρόβλημα αρχικών τιμών για ένα συντηρητικό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας. Έστω $u(t)$ η μετατόπιση του σώματος από την θέση ισορροπίας στο χρόνο t . Η ισχυρή μορφή του προβλήματος αρχικών τιμών αφορά την διατύπωση της διαφορικής εξίσωσης και των συνθηκών που περιγράφουν την κίνηση του σώματος

Πρόβλημα Αρχικών Τιμών 1 (Π.Α.Τ 1).

Έστω $u \in C^2[0, t]$ τότε το Π.Α.Τ διατυπώνεται με τις ακόλουθες σχέσεις

$$mu''(s) + ku(s) = f(s), \quad s \in [0, t], \quad t > 0 \quad (2.39)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0. \quad (2.40)$$

Η κλασσική Αρχή του Hamilton δηλαδή η ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού δράσης

$$I[u] := \int_0^t \left[\frac{m}{2} u'(s)u'(s) - \frac{k}{2} u(s)u(s) \right] ds - \int_0^t f(s)u(s) ds, \quad (2.41)$$

χρειάζεται ένα επιπλέον στοιχείο ώστε το παραπάνω συναρτησιακό να παράγει τις εξισώσεις που διέπουν το Π.Α.Τ. 1, πιο συγκεκριμένα πρέπει να γνωρίζουμε την κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή t .

Το σύνολο των αποδεκτών συναρτήσεων θα είναι της μορφής

$$D = \{ \varphi \in C^2[0, t] \mid \varphi(0) = u_0 \wedge \varphi(t) = u_t \},$$

όπου u , η τιμή της μετατόπισης τη χρονική στιγμή t και με τις μεταβολές να πληρούν τις συνθήκες

$$D^* = \{\varphi \in C^2[0, t] \mid \varphi(0) = 0 \wedge \varphi(t) = 0\}.$$

Πέραν της αδυναμίας αυτής δεν εμφανίζεται, ούτε γίνεται χρήσης της αρχικής συνθήκης

$$u'(0) = v_0.$$

Όπως αναφέραμε οι αδυναμίες αυτές αίρονται με τη χρήση της συνέλιξης συναρτήσεων αντί του εσωτερικού γινομένου του $L^2(0, t)$, όπως διαπίστωσαν αρκετοί ερευνητές που ασχολήθηκαν με το ζήτημα.

Ο G.F. Dargush και ο J.Kim [12] διατύπωσαν την Αρχή της mixed convolved δράσης, πιο συγκεκριμένα έναν μικτό Λαγκραντζιανό φορμαλισμό που χρησιμοποιεί την συνέλιξη για ένα σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα χρησιμοποιήσουμε έναν πιο απλό και άμεσο φορμαλισμό που δημιουργεί μια νέα γενικευμένη Αρχή τύπου Hamilton [10]

Ορίζουμε ως το συναρτησιακό δράσης που περιγράφει με ελαχιστοποίηση του το Π.Α.Τ., 1 το ολοκλήρωμα :

$$I[u] = \frac{m}{2}[u', u'] + \frac{k}{2}[u, u] - [f, u] - [\tilde{f}, u] \quad (2.42)$$

όπου

$$\tilde{f}(s) = f_0 \delta(s), \quad (2.49)$$

με f_0 , μια σταθερά και δ , η συνάρτηση Dirac.

Με τον τρόπο αυτό η \tilde{f} αποτελεί μια πρόσθετη δύναμη η οποία δρα στιγμιαία κατά την αρχή της κίνησης του σώματος.

Το πεδίο ορισμού του συναρτησοειδούς θα είναι το σύνολο των δυνατών μετατοπίσεων που ικανοποιούν το

$$D = \{\varphi \in C^2[0, t] \mid \varphi(0) = u_0\},$$

με τις δυνατές μεταβολές να ικανοποιούν το

$$D^* = \{\varphi \in C^2[0, t] \mid \varphi(0) = 0\}.$$

Για να γίνει το συναρτησοειδές (2.42) στάσιμο για κάποια $u \in D$ πρέπει

$$DI(u; \eta) = \frac{d}{d\varepsilon} I(u + \varepsilon\eta) \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \forall \eta \in D^* \quad (2.50)$$

χρησιμοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα της συνάρτησης Dirac,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t - t_0) \varphi(t) dt = \begin{cases} \varphi(t_0) & , t_1 < t_0 < t_2 \\ 0, & t_0 < t_1, t_0 > t_2 \end{cases}$$

μπορούμε να υπολογίσουμε την πρώτη μεταβολή του $[\tilde{f}, u]$ ως

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} [\tilde{f}, \tilde{u}] \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^t f_0 \delta(s) (u(t-s) + \varepsilon\eta(t-s)) ds \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_0^t f_0 \delta(s) \eta(t-s) ds = f_0 \eta(t) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Στο σημείο αυτό με την χρήση των υπολογισμών που έχουμε ήδη κάνει στις σχέσεις (2.29), (2.30), (2.31), (2.32) και της τελευταίας (2.51) θα έχουμε ότι η σχέση (2.50) θα πάρει τη μορφή

$$\begin{aligned} DI(u; \eta) &= [mu'', \eta] + mu'(0)\eta(t) + k[u, \eta] - [f, \eta] - f_0\eta(t) \\ &= [mu'' + ku - f, \eta] + (mu'(0) - f_0)\eta(t) = 0, \quad \forall \eta \in D^* \end{aligned} \quad (2.52)$$

Δεδομένου ότι η εξίσωση (2.52) ισχύει για οποιαδήποτε αυθαίρετη συνάρτηση $\eta \in D^*$ θα ισχύει και σε οποιοδήποτε υποσύνολο του D^* και συγκεκριμένα το

$$\tilde{D} = \{\varphi \in C^2[0,t] \mid \varphi(0) = 0 \wedge \varphi(t) = 0\}$$

Η παραπάνω μεταβολική εξίσωση με πεδίο ορισμού το D για τις αποδεκτές μετατοπίσεις και το \tilde{D} για τις μεταβολές αποτελούν την μεταβολική διατύπωση του προβλήματος Π.Α.Τ. 1 και αυτό διότι η εξίσωση (2.52) με χρησιμοποίηση του θεμελιώδους Λήμματος του Λογισμού Μεταβολών για τη συνέλιξη συναρτήσεων θα πάρει τη μορφή :

$$[mu'' + ku - f, \eta] = 0, \quad \forall \eta \in \tilde{D} \quad (2.53)$$

ή

$$mu''(s) + ku(s) = f(s), \quad \forall s \in [0,t] \quad (2.54)$$

Έχουμε δηλαδή την παραγωγή της εξίσωσης του πεδίου του προβλήματος.

Ακόμη από την (2.52) απορρέει ότι

$$(mu'(0) - f_0)\eta(t) = 0, \quad \forall \eta \in D^* \quad (2.55)$$

σχέση που μου δείχνει άμεσα πως

$$f_0 = mu'(0) = mv_0 \quad (2.56)$$

Με την παραπάνω ανάλυση αποδεικνύεται πως η μεταβολική εξίσωση (2.52) πετυχαίνει τόσο την παραγωγή των εξισώσεων του πεδίου όσο και την ορθή παραγωγή των αρχικών συνθηκών.

Παρατηρούμε ότι η δεύτερη αρχική συνθήκη εμφανίζεται στην εξίσωση (2.52) λαμβάνοντας ανάλογο ρόλο με αυτόν της φυσικής συνοριακής συνθήκης σε ένα

πρόβλημα συνοριακών τιμών. Με την παραπάνω ανάλυση δεν χρειάζεται να εισάγουμε κάποια άλλη συνθήκη ώστε το συναρτησοειδές να μοντελοποιεί το ΠΑΤ 1.

Ακόμη η αρχική ταχύτητα θεωρείται υπεύθυνη για την παρουσία της δύναμης \tilde{f} , μια φυσική ερμηνεία της οποίας είναι πως αποτελεί μια δύναμη ώθησης που δρα στιγμιαία στο σώμα τη χρονική στιγμή $t=0$ και ορίζεται ως το ολοκλήρωμα της δύναμης αυτής στο διάστημα $[t_1, t_2]$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

3.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Η σύγχρονη μελέτη των φυσικών φαινομένων ακολουθεί δύο βασικά στάδια: την μαθηματική διατύπωση του φαινομένου και την αριθμητική ανάλυση του μαθηματικού φορμαλισμού. Σε περίπλοκα συστήματα η εύρεση της λύσης των εξισώσεων που περιγράφουν το φυσικό φαινόμενο αποτελεί αρκετά επίπονη διαδικασία για αυτό και επιλέγουμε εργαλεία της αριθμητικής ανάλυσης έτσι ώστε με προσεγγιστικές μεθόδους να έχουμε μια εναλλακτική αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων.

Οι πιο διαδεδομένες προσεγγιστικές μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων της Μηχανικής αποτελούν οι μέθοδοι των μεταβολών ,στις οποίες ανήκει η μέθοδος Rayleigh-Ritz και οι μέθοδοι των σταθμικών υπολοίπων, όπως η μέθοδος Galerkin.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element method) είναι μια υπολογιστική μέθοδος και μπορεί να θεωρηθεί ως μια ειδική διατύπωση των μεθόδων Rayleigh-Ritz και Galerkin και η οποία πλεονεκτεί σε ό,τι αφορά τη μεγαλύτερη ευκολία που αντιμετωπίζει περίπλοκες γεωμετρίες αλλά και του ευκολότερου προγραμματισμού της σε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Θεμελιώδης αρχή της μεθόδου αποτελεί η «διακριτοποίηση», δηλαδή η αντικατάσταση ενός γεωμετρικά σύνθετου προβλήματος με ένα σύνολο υποπεδίων με απλούστερη γεωμετρία που καθένα από αυτά ονομάζονται στοιχεία. Τα στοιχεία αυτά συνδέονται με έναν πεπερασμένο αριθμό κόμβων όπου το ζητούμενο είναι να βρεθούν οι μετατοπίσεις των κόμβων αυτών. Έτσι το πρόβλημα από συνεχές μετατρέπεται σε διακριτό και με χρήση τεχνικών της Γραμμικής Άλγεβρας έχουμε την επίτευξη μιας αριθμητικής προσέγγισης της λύσης του προβλήματος. Στο σημείο αυτό είναι λογικό να αναφέρουμε ότι διακριτοποίηση του σώματος με

μεγαλύτερο αριθμό στοιχείων επιφέρει μεγαλύτερη ακρίβεια στην προσέγγιση του προβλήματος.

3.2. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FEM ΣΤΟ Π.Α.Τ. 1

Στη παρούσα ενότητα της διπλωματικής εργασίας θα αναλύσουμε μια αριθμητική προσεγγιστική λύση [10] για προβλήματα αρχικών τιμών χρησιμοποιώντας την Μέθοδο των Πεπερασμένων στοιχείων. Η μέθοδος διακριτοποιεί το χρόνο σε υποδιαστήματα πράγμα ασυνήθιστο για τη χρήση της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων η οποία κατά κανόνα διακριτοποιεί τη γεωμετρία ενός σώματος και όχι το διάστημα κίνησης του.

Στην κλασσική μέθοδο των Π.Σ. τοποθετούμε την τοπική λύση στην ασθενή μορφή της διαφορικής εξίσωσης και παίρνουμε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Έτσι και εδώ η εισαγωγή της τοπικής λύσης θα γίνει στην μεταβολική διατύπωση του προβλήματος (2.52) που βασίζεται στο γενικευμένο συναρτησιακό δράσης με συνέλιξη.

Στο σημείο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε έναν εναλλακτικό ορισμό της συνέλιξης [10] ο οποίος ισχύει για οποιοδήποτε τυχαίο χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$. Πιο συγκεκριμένα η συνέλιξη δυο συναρτήσεων $f, g \in L^2(t_1, t_2)$ ορίζεται ως

$$[f, g]_{t_1}^{t_2} = \int_0^{\tau} f(t_1 + s)g(t_2 - s)ds, \tau = t_2 - t_1 \quad (3.1)$$

Ακόμη για το τυχαίο στοιχείο στο διάστημα $[t_1, t_2]$ χρησιμοποιούμε το συναρτησιακό

$$I' = \frac{m}{2}[u', u']_{t_1}^{t_2} + \frac{k}{2}[u, u]_{t_1}^{t_2} - [f, u]_{t_1}^{t_2} - [\tilde{f}^1 - \tilde{f}^2, u]_{t_1}^{t_2} \quad (3.2)$$

με $u \in C^2[t_1, t_2]$, όπου $\tilde{f}^1 = f^1 \delta(s - t_1)$, $\tilde{f}^2 = f^1 \delta(s - t_2)$ και f^1, f^2 δοθείσες σταθερές.

Ο λόγος που τροποποιούμε το παραπάνω συναρτησιακό οφείλεται στο γεγονός ότι οι ταχύτητες τις στιγμές t_1, t_2 είναι γενικά άγνωστες. Πρακτικά αργότερα θα δούμε πώς δεν είναι απαραίτητες για την εύρεση της προσεγγιστικής λύσης.

3.3 ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Η διακριτοποίηση του διαστήματος $[0, t]$ θα γίνει σε n υποδιαστήματα

$$0 = s_1 < s_2 < \dots < s_n < s_{n+1} = t$$

και με τέτοιο τρόπο ώστε ο αριθμός των στοιχείων να είναι άρτιος αριθμός, δηλαδή να υπάρχει πάντα κόμβος στο μισό του διαστήματος και όλοι οι υπόλοιποι να είναι συμμετρικοί προς αυτόν. Έτσι ο i -κόμβος είναι συμμετρικός στον $(n+1-i)$ -κόμβο.

Έστω ℓ ένα οποιοδήποτε στοιχείο διαφορετικό από το πρώτο με μήκος $s_{e+1} - s_e$. Για το δεδομένο στοιχείο δεν έχουμε κανένα δεδομένο επομένως για το μεταβολικό πρόβλημα θα χρησιμοποιήσουμε το συναρτησοειδές:

$$I^e[u] = \frac{m}{2}[u', u']_{s_e}^{s_{e+1}} + \frac{k}{2}[u, u]_{s_e}^{s_{e+1}} - [f, u]_{s_e}^{s_{e+1}} - ([\tilde{f}_1^e, u]_{s_e}^{s_{e+1}} - [\tilde{f}_2^e, u]_{s_e}^{s_{e+1}}), \quad u \in D^e \quad (3.3)$$

όπου

$$D^e = C^2[s_e, s_{e+1}]$$

και

$$\tilde{f}_1^e = f_1^e \delta(s - s_e), \quad \tilde{f}_2^e = f_2^e \delta(s - s_{e+1}) \quad \text{με } f_1^e, f_2^e \text{ να είναι άγνωστες σταθερές.}$$

Όταν το συναρτησοειδές γίνει στάσιμο, η u^e θα είναι λύση του προβλήματος

$$mu''(s) + ku(s) = f(s), \quad s \in [s_e, s_{e+1}] \quad (3.4)$$

$$u'(s_e) = f_1^e / m, \quad u'(s_{e+1}) = f_2^e / m \quad (3.5)$$

Έτσι για $2 \leq e \leq n$ θα έχουμε $n-1$ μεταβολικά προβλήματα.

Το πρώτο στοιχείο $[s_1, s_2]$, δηλαδή για $e=1$, θα ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες του Π.Α.Τ. 1 και συγκεκριμένα :

$$u(s_1) = u_0, \quad u'(s_1) = v_0.$$

Επομένως το συναρτησοειδές που συνδέεται με το αντίστοιχο πρόβλημα θα είναι το

$$I^1[u] = \frac{m}{2}[u', u']_{s_1}^{s_2} + \frac{k}{2}[u, u]_{s_1}^{s_2} - [f, u]_{s_1}^{s_2} - [\tilde{f}_1^1, u]_{s_1}^{s_2}, \quad u \in D^1 \quad (3.6)$$

με

$$\tilde{f}_1^1 = mn_1 \delta(s - s_1) \quad \text{και} \quad D^1 = \{\varphi \in [s_1, s_2] \mid \varphi(s_1) = u_1\}.$$

Εν κατακλείδι το μεταβολικό πρόβλημα (2.52) διαιρείται σε n νέα μεταβολικά προβλήματα τα οποία παράγουν σε κάθε στοιχείο τοπικές λύσεις. Για την εύρεση της προσεγγιστικής λύσης θα χρησιμοποιήσουμε συναρτήσεις παρεμβολής και συγκεκριμένα πολυώνυμα πρώτου βαθμού. Η μέθοδος των Πεπερασμένων στοιχείων θα μας δώσει προσέγγιση της λύσης η οποία θα είναι γραμμικός συνδυασμός των τοπικών λύσεων σε κάθε στοιχείο.

Με τον τρόπο αυτό για την προσεγγιστική λύση του μεταβολικού προβλήματος θα αναζητήσουμε τις λύσεις των μεταβολικών προβλημάτων

$$I^e[u] \rightarrow \text{στάσιμο στον } X^e, e = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

όπου X^e ο χώρος των πολυωνύμων πρώτης τάξης στο $[s_e, s_{e+1}]$.

3.4 ΤΟΠΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Έστω ℓ ένα τυχαίο στοιχείο στους κόμβους s_e, s_{e+1} . Η γραμμική προσέγγιση της τοπικής λύσης θα είναι της μορφής

$$u^e(s) = u_1^e N_1^e(s) + u_2^e N_2^e(s) \quad (3.8)$$

όπου

$$N_1^e(s) = \frac{s_{e+1} - s}{s_{e+1} - s_e}, \quad N_2^e(s) = \frac{s - s_e}{s_{e+1} - s_e}, \quad s \in [s_e, s_{e+1}] \quad (3.9)$$

οι επονομαζόμενες συναρτήσεις σχήματος του στοιχείου.

Εισάγοντας την λύση (3.8) στο συναρτησοειδές \mathbf{I}^e έχουμε την εξίσωση

$$\mathbf{I}^e[u^e] = \frac{m}{2}[u'^e, u'^e]_{s_e}^{s_{e+1}} + \frac{k}{2}[u^e, u^e]_{s_e}^{s_{e+1}} - [f, u^e]_{s_e}^{s_{e+1}} - ([\tilde{f}_1^e, u^e]_{s_e}^{s_{e+1}} - [\tilde{f}_2^e, u^e]_{s_e}^{s_{e+1}}) \quad (3.10)$$

Επόμενο βήμα είναι να προβούμε σε μια σειρά υπολογισμών που προκύπτουν από το παραπάνω συναρτησοειδές

$$\begin{aligned} \bullet [u'^e, u'^e]_{s_e}^{s_{e+1}} &= \int_0^{\tau_e} u'^e(s_e + s) u'^e(s_{e+1} - s) ds \\ &= u_1^{e2} \int_0^{\tau_e} N_1^{e'}(s_e + s) N_1^{e'}(s_{e+1} - s) ds + u_1^e u_2^e \int_0^{\tau_e} N_1^{e'}(s_e + s) N_2^{e'}(s_{e+1} - s) ds + \\ &u_2^e u_1^e \int_0^{\tau_e} N_2^{e'}(s_e + s) N_1^{e'}(s_{e+1} - s) ds + u_2^{e2} \int_0^{\tau_e} N_2^{e'}(s_e + s) N_2^{e'}(s_{e+1} - s) ds \\ &= u_1^{e2} [N_1^{e'}, N_1^{e'}]_{s_e}^{s_{e+1}} + 2u_1^e u_2^e [N_1^{e'}, N_2^{e'}]_{s_e}^{s_{e+1}} + u_2^{e2} [N_2^{e'}, N_2^{e'}]_{s_e}^{s_{e+1}} \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{m}{2}[u'^e, u'^e]_{s_e}^{s_{e+1}} = \frac{1}{2}(u_1^{e2} M_{11}^e + 2u_1^e u_2^e M_{12}^e + u_2^{e2} M_{22}^e) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{M}^e \mathbf{u}^e \quad (3.11)$$

όπου

$$\mathbf{M}^e = M_{ij}^e = m[N_i^{e'}, N_j^{e'}]_{s_e}^{s_{e+1}}, i=1,2, e=1,\dots,n \quad (3.12)$$

Τελικά
$$\mathbf{M}^e = \frac{m}{\tau_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

- $$\begin{aligned} [u^e, u^e]_{s_e}^{s_{e+1}} &= \int_0^{\tau_e} u^e(s_e + s)u^e(s_{e+1} - s)ds \\ &= u_1^{e2} \int_0^{\tau_e} N_1^e(s_e + s)N_1^e(s_{e+1} - s)ds + u_1^e u_2^e \int_0^{\tau_e} N_1^e(s_e + s)N_2^e(s_{e+1} - s)ds \\ &\quad u_2^e u_1^e \int_0^{\tau_e} N_2^e(s_e + s)N_1^e(s_{e+1} - s)ds + u_2^{e2} \int_0^{\tau_e} N_2^e(s_e + s)N_2^e(s_{e+1} - s)ds \\ &= u_1^{e2} [N_1^e, N_1^e]_{s_e}^{s_{e+1}} + 2u_1^e u_2^e [N_1^e, N_2^e]_{s_e}^{s_{e+1}} + u_2^{e2} [N_2^e, N_2^e]_{s_e}^{s_{e+1}} \end{aligned}$$

‘Αρα

$$\frac{k}{2} [u^e, u^e]_{s_e}^{s_{e+1}} = \frac{1}{2} (u_1^{e2} K_{11}^e + 2u_1^e u_2^e K_{12}^e + u_2^{e2} K_{22}^e) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \quad (3.14)$$

όπου

$$\mathbf{K}^e = K_{ij}^e = k[N_i^e, N_j^e]_{s_e}^{s_{e+1}}, i=1,2, e=1,\dots,n \quad (3.15)$$

Τελικά θα έχω

$$\mathbf{K}^e = \frac{m\tau_e}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

- $$\begin{aligned} [f, u^e]_{s_e}^{s_{e+1}} &= \int_0^{\tau_e} f(s_e + s)u^e(s_{e+1} - s)ds \\ &= \int_0^{\tau_e} f(s_e + s)(u_1^e N_1^e(s_{e+1} - s) + u_2^e N_2^e(s_{e+1} - s))ds \\ &= u_1^e \int_0^{\tau_e} f(s_e + s)N_1^e(s_{e+1} - s)ds + u_2^e \int_0^{\tau_e} f(s_e + s)N_2^e(s_{e+1} - s)ds \\ &= u_1^e [f, N_1^e]_{s_e}^{s_{e+1}} + u_2^e [f, N_2^e]_{s_e}^{s_{e+1}} = u_1^e F_1^e + u_2^e F_2^e \\ &= \mathbf{u}^{eT} \mathbf{F}^e \end{aligned} \quad (3.17)$$

όπου

$$\mathbf{F}^e = F_i = \int_0^{\tau_e} f(s_e + s) N_i^e(s_{e+1} - s) ds, \quad i = 1, 2, e = 1, \dots, n \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad [\tilde{f}_2^e, u^e]_{s_e}^{s_{e+1}} &= \int_0^{\tau_e} \tilde{f}_2^e(s_e + s) u^e(s_{e+1} - s) ds \\ &= \int_0^{\tau_e} f_2^e \delta(s_e + s) u^e(s_{e+1} - s) ds \\ &= f_2^e u_1^e \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad [\tilde{f}_1^e, u^e]_{s_e}^{s_{e+1}} &= \int_0^{\tau_e} \tilde{f}_1^e(s_e + s) u^e(s_{e+1} - s) ds \\ &= \int_0^{\tau_e} f_1^e \delta(s_e + s) u^e(s_{e+1} - s) ds \\ &= f_1^e u_2^e \end{aligned} \quad (3.20)$$

Εισάγοντας τους παραπάνω υπολογισμούς στην εξίσωση (3.10) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \hat{I}^e(u_i^e) &= \frac{1}{2} (M_{ij}^e u_i^e u_j^e + K_{ij}^e u_i^e u_j^e) - F_i^e u_i^e - f_2^e u_1^e - f_1^e u_2^e, \\ i &= 1, 2, e = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.21)$$

ή

$$\hat{I}^e(\mathbf{u}^e) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{Q}_{ij}^e \mathbf{u}^e - F_i^e \mathbf{u}^e \quad (3.22)$$

όπου

$$\mathbf{Q}_{ij}^e = \mathbf{M}^e + \mathbf{K}^e, \quad F_i^e = \mathbf{F}_i^e + \mathbf{f}_i^e \quad \mu\epsilon \quad \mathbf{f}_i^e = \begin{bmatrix} f_2^e \\ -f_1^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mu'(s_{e+1}) \\ -mu'(s_e) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

θα είναι το τοπικό **μητρώο στιβαρότητας** και το τοπικό **διάνυσμα φόρτισης** αντίστοιχα.

Για να γίνει το συναρτησοειδές στάσιμο για μία \mathbf{u}^e αναγκαία συνθήκη είναι

$$\frac{\partial \hat{\Gamma}^e}{\partial u_1^e} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \hat{\Gamma}^e}{\partial u_2^e} = 0, \quad e = 1, \dots, n \quad (3.24)$$

όπου και προκύπτει το σύνολο n γραμμικών συστημάτων προς επίλυση

$$\mathbf{Q}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e \quad (3.25)$$

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε πως η διακριτοποίηση σε στοιχεία ίσου μήκους δημιουργεί ℓ ίσα μεταξύ τους μητρώα στιβαρότητας. Πράγμα που σημαίνει πως όλα τα στοιχεία θα έχουν ίδιο μητρώο στιβαρότητας.

3.5 ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Από την συνδεσμολογία των παραπάνω στοιχείων μπορούμε σε αυτό το σημείο να εισάγουμε μια καθολική αρίθμηση όλων των μετατοπίσεων στους κόμβους ως

$$U_1 = u_1^1, \quad U_{n+1} = u_2^i = u_1^{i+1}, \quad U_n = u_2^n, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (3.26)$$

Τα γραμμικά συστήματα της σχέσης (3.25) παίρνουν τη μορφή

$$Q_{11}^1 U_1 + Q_{12}^1 U_2 = F_1^1 - mu'(s_2),$$

$$Q_{21}^1 U_1 + Q_{22}^1 U_2 = F_2^1 + mu'(s_1),$$

$$Q_{11}^2 U_2 + Q_{12}^3 U_3 = F_1^2 - mu'(s_3),$$

$$Q_{21}^2 U_2 + Q_{22}^2 U_3 = F_2^2 + mu'(s_2),$$

*

*

*

$$Q_{11}^n U_{n-1} + Q_{12}^n U_n = F_1^n - mu'(s_{n+1})$$

$$Q_{21}^n U_{n-1} + Q_{22}^n U_n = F_2^n + mu'(s_n)$$

Προσθέτοντας στο σημείο αυτό τις εξισώσεις που έχουν τους ίδιους τελευταίους όρους θα έχουμε τις εξής εξισώσεις

$$Q_{21}^1 U_1 + Q_{22}^1 U_2 = F_2^1 + mu'(s_1),$$

$$Q_{11}^1 U_1 + (Q_{12}^1 + Q_{21}^2) U_2 + Q_{22}^3 U_3 = F_1^1 + F_2^2,$$

*

*

*

$$Q_{11}^{n-1} U_{n-1} + (Q_{12}^{n-1} + Q_{21}^n) U_n + Q_{22}^n U_{n+1} = F_1^{n-1} + F_2^n,$$

$$Q_{11}^n U_n + Q_{12}^n U_{n+1} = F_1^n - mu'(s_{n+1}).$$

Δηλαδή προκύπτει ένα καινούργιο γραμμικό σύστημα $n+1$ γραμμικών εξισώσεων όπου αντιστρέφοντας τη σειρά των παραπάνω εξισώσεων και χρησιμοποίηση της ιδιότητας των μητρώων στιβαρότητας που προκύπτει από τη συμμετρία των στοιχείων

$$Q_{ij} = Q_{ij}^e, e = 1, \dots, n$$

Το γραμμικό σύστημα παίρνει τη μορφή

$$Q_{11}U_n + Q_{12}U_{n+1} = F_1^n - mu'(s_{n+1}) \quad (3.27)$$

$$Q_{11}U_{n-1} + (Q_{12} + Q_{21})U_n + Q_{22}U_{n+1} = F_1^{n-1} + F_2^n \quad (3.28)$$

*

*

*

$$Q_{11}U_1 + (Q_{12} + Q_{21})U_2 + Q_{22}U_3 = F_1^1 + F_2^2 \quad (3.29)$$

$$Q_{21}U_1 + Q_{22}U_2 = F_2^1 + mu'(s_1) \quad (3.30)$$

Το παραπάνω σύστημα σε μορφή πινάκων παίρνει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & Q_{11}^1 & Q_{12}^n \\ 0 & \dots & 0 & Q_{11}^2 & Q_{12}^2 + Q_{21}^1 & Q_{22}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{11}^n & Q_{12}^n + Q_{21}^{n-1} & Q_{22}^{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ Q_{21}^n & Q_{22}^n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{n-1} \\ F_n \end{bmatrix},$$

ή

$$QU = F \quad (3.31)$$

όπου

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} & Q_{1(n+1)} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} & Q_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \dots & Q_{nn} & Q_{n(n+1)} \\ Q_{(n+1)1} & Q_{(n+1)2} & \dots & Q_{(n+1)n} & Q_{(n+1)(n+1)} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & Q_{11}^1 & Q_{12}^n \\ 0 & \dots & 0 & Q_{11}^2 & Q_{12}^2 + Q_{21}^1 & Q_{22}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{11}^n & Q_{12}^n + Q_{21}^{n-1} & Q_{22}^{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ Q_{21}^n & Q_{22}^n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^n \\ F_2^n + F_1^{n-1} \\ \vdots \\ F_1^1 + F_2^2 \\ F_2^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -mu'(s_{n+1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ mu'(s_1) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

θα είναι το καθολικό μητρώο στιβαρότητας και το καθολικό διάνυσμα φόρτισης τους συστήματος αντίστοιχα.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το μητρώο στιβαρότητας δεν έχει τη συνηθισμένη μορφή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων κατά την οποία τα μη μηδενικά στοιχεία βρίσκονται κατά μήκος της δεξιάς διαγώνιου του πίνακα. Στην κλασσική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων η συμμετρία που προκύπτει στο μητρώο στιβαρότητας προέρχεται από βαθμωτό γινόμενο. Στην περίπτωση μας προκύπτει μια νέα συμμετρία η οποία είναι μια διγραμμική μορφή του Ευκλείδειου χώρου E^{n+1} ,

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_{n+1} + x_2 y_n + \dots + x_n y_2 + x_{n+1} y_1, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^{n+1}$$

η οποία είναι συμβατή με την συνέλιξη.

Ακόμη παρατηρώντας το διάνυσμα φόρτισης παρατηρούμε την ενσωμάτωση της αρχικής συνθήκης της ταχύτητας. Επίσης η αρχική αυτή συνθήκη εμφανίζεται στην εξίσωση που αφορά τον τελευταίο κόμβο ενώ η αρχική συνθήκη για την μετατόπιση

στην εξίσωση που αφορά τον πρώτο κόμβο. Η κατανομή των αρχικών συνθηκών στον πρώτο και στον τελευταίο κόμβο αντίστοιχα αποτελεί βασικό στοιχείο που διορθώνει την αδυναμία της Αρχής Hamilton να ενσωματώσει τις αρχικές συνθήκες.

3.6 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Στο σημείο αυτό θα εισάγουμε την αρχική συνθήκη $u(0) = u_0$ η οποία υποδηλώνει ότι η μετατόπιση του πρώτου κόμβου $U_1 = u(0) = u_0$. Έτσι μπορούμε να αγνοήσουμε την πρώτη εξίσωση ή την πρώτη στήλη και γραμμή του καθολικού μητρώου στιβαρότητας και την πρώτη γραμμή του διανύσματος φόρτισης.

Όπως διαπιστώσαμε η αρχική συνθήκη για την ταχύτητα του Π.Α.Τ. 1 περιλαμβάνεται στο διάνυσμα φόρτισης και συγκεκριμένα εμφανίζεται στην τελευταία γραμμή του διανύσματος φόρτισης. Το γραμμικό σύστημα μετά τον υπολογισμό του U_1 είναι επιλύσιμο $n \times n$ και εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε τις άγνωστες μετατοπίσεις U_2, \dots, U_{n+1} .

3.7 ΚΑΘΟΛΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Η ανάλυση που έχουμε κάνει μέχρι στιγμής για την εύρεση της λύσης πεπερασμένων στοιχείων που προσεγγίζει την πραγματική λύση του Π.Α.Τ. 1, ακολουθεί την τοπική εύρεση των μητρώων στιβαρότητας για κάθε στοιχείο και τελικό στάδιο της είναι η δημιουργία του καθολικού πίνακα στιβαρότητας.

Η παρούσα ανάλυση διαφέρει από την καθιερωμένη εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων όποτε θα αποδείξουμε την ορθότητα του αποτελέσματος με απευθείας εύρεση της προσεγγιστικής λύσης με καθολικό τρόπο. Η λύση των πεπερασμένων στοιχείων θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των καθολικών συναρτήσεων σχήματος οι οποίοι παράγονται από τις τοπικές ως εξής

$$N_i(s) = \begin{cases} N_2^{i-1}(s), & s \in [s_{i-1}, s_i] \\ N_1^i(s), & s \in [s_i, s_{i+1}] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}, i = 1, \dots, n+1 \quad (3.35)$$

Οι συναρτήσεις σχήματος ικανοποιούν την απαραίτητη ιδιότητα των πεπερασμένων στοιχείων

$$N_i(s_j) = \delta_{ij}$$

και είναι γραμμικά ανεξάρτητες δημιουργώντας με τον τρόπο αυτό έναν πεπερασμένο γραμμικό χώρο στο $[0, t]$ της μορφής

$$X_{n+1} := \text{span}\{N_1, \dots, N_{n+1}\} \subset W_2^1(0, t),$$

Δηλαδή υποσύνολο του χώρου Sobolev. Το μεταβολικό πρόβλημα θα αφορά την εύρεση λύσης η οποία ελαχιστοποιεί το συναρτησοειδές (2.42) στον X_{n+1} .

Έστω η προσεγγιστική λύση του Π.Α.Τ. 1

$$u^{fe} = \sum_{i=2}^{n+1} U_i N_i(s), \quad s \in [0, t] \quad (3.36)$$

όπου $U_i \in \mathbb{R}, i = 2, \dots, n+1$ άγνωστες μετατοπίσεις στους κόμβους. Στο σημείο αυτό να πούμε πως η μετατόπιση στον πρώτο κόμβο είναι γνωστή από την πρώτη αρχική συνθήκη του Π.Α.Τ. 1.

Εισάγοντας τη λύση αυτή στο συναρτησοειδές I θα έχουμε :

$$I[u^{fe}] = \hat{I}[U_i] = \frac{1}{2} M_{ij} U_i U_j + \frac{1}{2} K_{ij} U_i U_j - F_i U_i - \tilde{F}_i U_i \quad (3.37)$$

ή

$$\hat{I}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{F}^T \mathbf{U} - \tilde{\mathbf{F}}^T \mathbf{U}$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{Q} \mathbf{U} - \mathbf{F} \mathbf{U} \quad (3.38)$$

με

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M} + \mathbf{K}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}^T + \tilde{\mathbf{F}}^T \quad (3.39)$$

και

$$M_{ij} = m[N'_i, N'_j], \quad K_{ij} = k[N_i, N_j], \quad F_i = [f, N_i], \quad \tilde{F}_i = [\tilde{f}, N_i], \quad i, j = 2, \dots, n+1$$

Απαραίτητη συνθήκη ώστε το συναρτησοειδές να παραμένει στάσιμο είναι η

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial U_i} = 0, \quad i = 2, \dots, n+1 \quad (3.40)$$

από όπου προκύπτει

$$Q_{ij} U_j = F_i, \quad i = 2, \dots, n+1 \quad (3.41)$$

ή σε μορφή πινάκων

$$\mathbf{Q} \mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (3.42)$$

Επόμενο βήμα θα είναι και ο υπολογισμός των πινάκων του καθολικού μητρώου στιβαρότητας και του διανύσματος φόρτισης.

3.7.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ F

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε πως για τις καθολικές συναρτήσεις σχήματος εμφανίζεται η συμμετρία :

$$N_i(t-s) = N_m(s), \quad m = n+2-i.$$

Τότε για το διάνυσμα $\tilde{\mathbf{F}}$ θα έχω:

$$\tilde{F}_i = [\tilde{f}, N_i] = \int_0^t \tilde{f}(s) N_i(t-s) ds = \int_0^t f_0 \delta(s-s_1) N_m(s) ds = f_0 \delta_{1m}, \quad i = 2, \dots, n+1$$

από όπου προκύπτει

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ mv_0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Όμοια το διάνυσμα \mathbf{F} υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} [f, N_i] &= \int_0^t f(s) N_i(t-s) ds = \int_0^t f(s) N_m(s) ds = \int_{s_{m-1}}^{s_{m+1}} f(s) N_m(s) ds \\ &= \int_{s_{m-1}}^{s_m} f(s) N_2^{m-1}(s) ds + \int_{s_m}^{s_{m+1}} f(s) N_1^m(s) ds \\ &= \int_0^{\tau_m} f(s_{m-1} + s) N_1^{m-1}(s_m - s) ds + \int_0^{\tau_m} f(s_{m-1} + s) N_2^m(s_{m+1} - s) ds \\ &= [f, N_1^{m-1}]_{s_{m-1}}^{s_m} + [f, N_2^m]_{s_{m-1}}^{s_m} = F_1^{m-1} + F_2^m, \quad i = 2, \dots, n+1, \quad m = n, \dots, 1 \end{aligned}$$

$$\text{Δηλαδή: } F_i = F_1^{m-1} + F_2^m = F_1^{n+1-i} + F_2^{n+2-i}, \quad i = 2, \dots, n+1, \quad m = n, \dots, 1$$

που σε μορφή πινάκων

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1^{n-1} + F_2^n \\ \vdots \\ F_1^1 + F_2^2 \\ F_2^1 \end{bmatrix}$$

Επομένως το διάνυσμα F θα έχει τη μορφή

$$F = \mathbf{F} + \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} F_1^{n-1} + F_2^n \\ \vdots \\ F_1^1 + F_2^2 \\ F_2^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ mv_0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Που όπως παρατηρούμε διαφέρει μόνο στην πρώτη γραμμή με τον αντίστοιχο καθολικό πίνακα (3.33).

3.7.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ Q

Λόγω της συμμετρίας των κόμβων διαπιστώνουμε την εξής σχέση:

$$[N_i, N_j] = \int_0^t N_i(s)N_j(t-s)ds = \int_0^t N_i(s)N_m(s)ds = (N_i, N_m) \quad (3.45)$$

όπου $m = n + 2 - j, j = 2, \dots, n + 1$

και $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο συναρτήσεων L^2 .

Στο σημείο αυτό συμπεραίνουμε πως ο

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= k \begin{bmatrix} [N_2, N_2] & [N_2, N_3] & \dots & [N_2, N_{n+1}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [N_{n+1}, N_2] & [N_{n+1}, N_3] & & [N_{n+1}, N_{n+1}] \end{bmatrix} = \\
&= k \begin{bmatrix} (N_2, N_2) & (N_2, N_3) & \dots & (N_2, N_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (N_{n+1}, N_2) & (N_{n+1}, N_3) & & (N_{n+1}, N_{n+1}) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Παρατηρούμε ακόμη ότι τα γινόμενα (N_i, N_m) θα είναι μη-μηδενικά μόνο στους κόμβους που ταυτίζονται ή είναι γειτονικοί.

Για παράδειγμα στην περίπτωση όπου $i = n + 2 - j$

$$\begin{aligned}
[N_i, N_j] &= \int_0^t N_i(s) N_j(t-s) ds = \int_0^t N_i(s) N_{n+2-j}(s) ds = \int_0^t N_i(s) N_i(s) ds \\
&= \int_0^t N_i^2(s) ds = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left(\frac{s-s_{i-1}}{\tau_{i-1}} \right)^2 ds + \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{s_{i+1}-s}{\tau_i} \right)^2 ds \\
&= \frac{\tau_{i-1}}{3} + \frac{\tau_i}{3}
\end{aligned}$$

Και στους γειτονικούς κόμβους :

για $i+1 = n+2-j$

$$\begin{aligned}
[N_i, N_j] &= \int_0^t N_i(s) N_{n+2-j}(s) ds = \int_0^t N_i(s) N_{i+1}(s) ds = \int_{s_i}^{s_{i+1}} N_i(s) N_{i+1}(s) ds = \\
&= \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{s_{i+1}-s}{\tau_i} \right) \left(\frac{s-s_i}{\tau_i} \right) ds = \frac{\tau_i}{6}
\end{aligned}$$

και για $i-1 = n+2-j$

$$[N_i, N_j] = \int_0^t N_i(s) N_{n+2-j}(s) ds = \int_0^t N_i(s) N_{i-1}(s) ds = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left(\frac{s-s_{i-1}}{\tau_{i-1}} \right) \left(\frac{\tau_i-s}{\tau_{i-1}} \right) ds = \frac{\tau_{i-1}}{6}.$$

Με τον τρόπο αυτό καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση

$$[N_i, N_j] = \begin{cases} \tau_i/6, & i = n+1-j \\ \frac{(\tau_{i-1} + \tau_i)}{3}, & i = n+2-j \\ \tau_i/6, & i = n+3-j \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (3.47)$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι

$$[N'_i, N'_j] = \begin{cases} -1/\tau_i, & i = n+1-j \\ \frac{1}{\tau_{i-1}} + \frac{1}{\tau_i}, & i = n+2-j \\ 1/\tau_i, & i = n+3-j \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (3.48)$$

Οπότε

$$\mathbf{K} = \frac{k}{3} \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \frac{\tau_2}{2} & \tau_1 + \tau_2 & \frac{\tau_1}{2} \\ 0 & \dots & \frac{\tau_3}{2} & \tau_2 + \tau_3 & \frac{\tau_2}{2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau_{n-1} + \tau_n & \frac{\tau_{n-1}}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\tau_n}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

και

$$\mathbf{M} = m \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \frac{-1}{\tau_2} & \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} & \frac{-1}{\tau_1} \\ 0 & \dots & \frac{-1}{\tau_3} & \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} & \frac{-1}{\tau_2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\tau_{n-1}} + \frac{1}{\tau_n} & \frac{-1}{\tau_n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-1}{\tau_n} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Δηλαδή έχουμε τη γενική σχέση

$$K_{ij} = \begin{cases} K_{11}^{i-1}, & i = n+1-j \\ K_{21}^{i-1} + K_{12}^i, & i = n+2-j \\ K_{22}^i, & i = n+3-j \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (3.51)$$

και

$$M_{ij} = \begin{cases} M_{11}^{i-1}, & i = n+1-j \\ M_{21}^{i-1} + M_{12}^i, & i = n+2-j \\ M_{22}^i, & i = n+3-j \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (3.52)$$

Δηλαδή για τον πίνακα Q

$$Q_{ij} = \begin{cases} Q_{11}^{i-1}, & i = n+1-j \\ Q_{21}^{i-1} + Q_{12}^i, & i = n+2-j \\ Q_{22}^i, & i = n+3-j \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (3.53)$$

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & Q_{11}^2 & Q_{21}^1 + Q_{12}^2 & Q_{22}^1 \\ 0 & \dots & 0 & Q_{11}^3 & Q_{21}^2 + Q_{12}^3 & Q_{22}^2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ Q_{11}^{n-1} & Q_{21}^{n-2} + Q_{12}^{n-1} & Q_{22}^{n-2} & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ Q_{21}^{n-1} + Q_{12}^n & Q_{22}^{n-1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ Q_{22}^n & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

(3.54)

με

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & Q_{2(n-1)} & Q_{2n} & Q_{2(n+1)} \\ 0 & \dots & 0 & Q_{3(n-2)} & Q_{3(n-1)} & Q_{3n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ Q_{(n-1)2} & Q_{(n-1)3} & Q_{(n-1)4} & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ Q_{n2} & Q_{n3} & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ Q_{(n+1)2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Παρατηρούμε δηλαδή απόλυτη ταύτιση με το αντίστοιχο καθολικό μητρώο στιβαρότητας που παράγεται ξεκινώντας από την τοπική ανάλυση των στοιχείων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΜΕ MATLAB

Σε αυτό το κεφάλαιο θα υποδείξουμε έναν κώδικα γραμμένο στο προγραμματιστικό περιβάλλον Matlab, ο οποίος χρησιμοποιώντας το θεωρητικό υπόβαθρο που έχουμε αναλύσει στο προηγούμενο κεφάλαιο προσεγγίζει με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων την αριθμητική λύση του Π.Α.Τ. 1, δηλαδή την εξαναγκασμένη ταλάντωση ενός σώματος στερεωμένου σε ένα ελατήριο σταθεράς k υπό την επίδραση μιας αρμονικής δύναμης f .

Ο κώδικας δημιουργήθηκε με τέτοιο τρόπο ώστε να ορίζεται στην αρχή ο αριθμός των κόμβων που θα γίνει η προσέγγιση, ο χρόνος της κίνησης και όλοι οι παράμετροι του μηχανικού συστήματος όπως η μάζα του σώματος m , η σταθερά του ελατηρίου k και η αρμονική διέγερση. Ο κώδικας εξάγει τα αποτελέσματα της προσέγγισης και της αναλυτικής λύσης του συστήματος και στη συνέχεια γίνεται γραφική απεικόνιση της κίνησης.

Στη συνέχεια θα τρέξουμε το σύστημα για διάφορο πλήθος κόμβων και θα παρατηρήσουμε γραφικά αλλά και αριθμητικά πως όσο μεγαλώνει το πλήθος των κόμβων τόσο πλησιάζουμε την πραγματική λύση. Ακόμη θα μελετήσουμε το σύστημα λίγο πριν το φαινόμενο του συντονισμού, δηλαδή το σημείο όπου η συχνότητα του διεγέρτη ταυτίζεται με την ιδιοσυχνότητα του ελατηρίου.

4.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Σε σώμα μάζας $m=10$ μονάδων βάρους, στερεωμένο σε ελατήριο σταθεράς ελατηρίου $k=40$, εφαρμόζεται μια αρμονική δύναμη της μορφής $f=40\sin(20t)$, $t\in[0,20]$. Για τις αρχικές συνθήκες του μηχανικού συστήματος ισχύει ότι : $u(0)=0, u'(0)=10$. Το σώμα εκτελεί εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση που ξεκινά από τη θέση φυσικής ισορροπίας με αρχική ταχύτητα. Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος δίνεται από τον τύπο $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Η εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση ενός σώματος όπως έχουμε αναφέρει περιγράφεται από τις εξισώσεις :

$$mu''(s) + ku(s) = f(s), s \in [0, t] \quad (4.1)$$

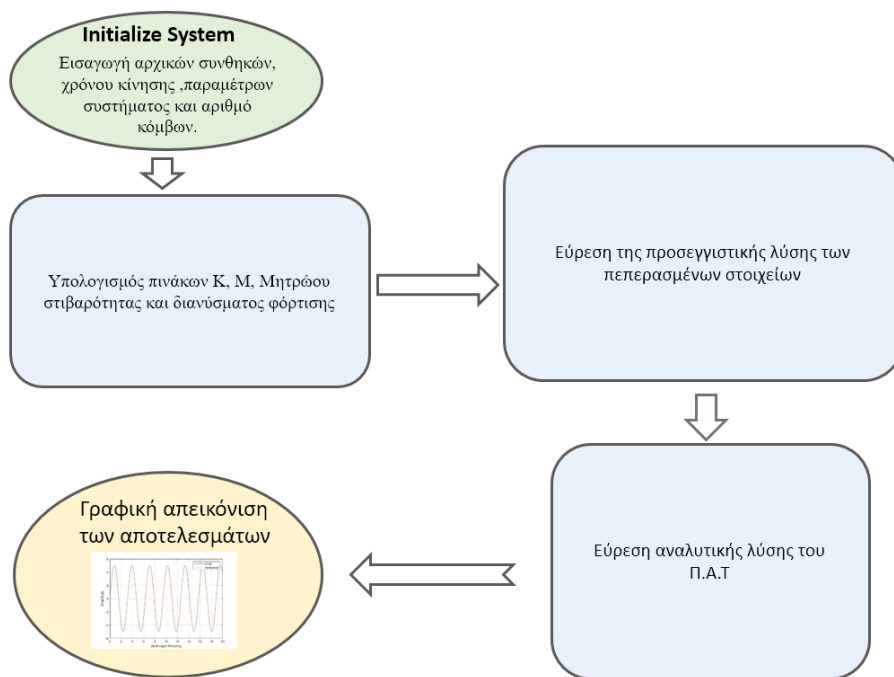
$$u(0) = u_0, u'(0) = v_0 \quad (4.2)$$

με $f(s) = p \sin(\omega s)$, μια αρμονική συνάρτηση όπου $p \in \mathbb{R}$.

Το παραπάνω πρόβλημα αρχικών τιμών όταν η συχνότητα του διεγέρτη είναι διαφορετική από την ιδιοσυχνότητα του συστήματος έχει αναλυτική λύση της μορφής

$$u(s) = u(0) \cos \omega_0 s + \left[\frac{u'(0)}{\omega_0} - \frac{p}{k} \frac{(\omega / \omega_0)}{1 - (\omega - \omega_0)^2} \right] \sin \omega_0 s + \left[\frac{p}{k} \frac{1}{1 - (\omega - \omega_0)^2} \right] \sin \omega s \quad (4.3)$$

Με εφαρμογή του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων που δημιουργήσαμε θα παρουσιάσουμε γραφικά την προσέγγιση της πραγματικής λύσης του Π.Α.Τ. για διάφορο αριθμό στοιχείων. Το διάγραμμα ροής και ο κώδικας παρουσιάζονται παρακάτω.



Σχήμα 6 Διάγραμμα ροής κώδικα

4.2 ΚΩΔΙΚΑΣ MATLAB

```

m=10; %%% μάζα
k=40; %%% σταθερά του ελατηρίου
v0=10; %%% αρχική ταχύτητα
L=20; %% Ολικός χρόνος κίνησης
n=25; %% Αριθμός κόμβων

l=L/(n-1); %% Μήκος στοιχείου
kanal=2000; %% Επιλογή τιμών για την αναλυτική λύση
p=0; %% Διέγερση
w=20; %% Συχνότητα διεγέρτη
%%

%% Υπολογισμός πίνακα Κ
K=zeros(n);
for i=1:n
    for j=1:n
        if i+j==n-1
            K(i,j)=1;
        end
        if i+j==n
            K(i,j)=4;
        end
        if i+j==n+1
            K(i,j)=1;
        end
    end
end
  
```

```

    end
end
K=(1/6)*K;

%% Υπολογισμός πίνακα M
M=zeros(n);
for i=1:n
    for j=1:n
        if i+j==n-1
            M(i,j)=1;
        end
        if i+j==n
            M(i,j)=-2;
        end
        if i+j==n+1
            M(i,j)=1;
        end
    end
end
M=(1/l)*M;

%% Διάνυσμα φόρτισης
syms x;
f(x)=sin(w*x);

B=zeros(n,1,'sym');
B(n,1)=int((1-x)*f(x),0,1);

for j=1:l:n-1

B(j)=vpa(int(((x-(n-1-j))*1)*f(x)),((n-1-j)*1),(n-j)*1) +
int((((n+1-j)*1)-x)*f(x),(n-j)*1,((n+1-j)*1));
B=double(B);
end

B=(p/l)*B;

%% Υπολογισμός F
F=zeros(n,1);
F(n,1)=m*v0;

%% Stiffness Matrix
KK=m*M+k*K;

%% FEM Solution
x=inv(KK)*(F+B);

kk=zeros(n,1);
kk(1,1)=0;
for i=2:l:n
    kk(i)=x(i-1);
end

%% FEM Plot
y=0:l:L;
plot(y,kk)
%%hold on

%% Analytical Solution

```

```

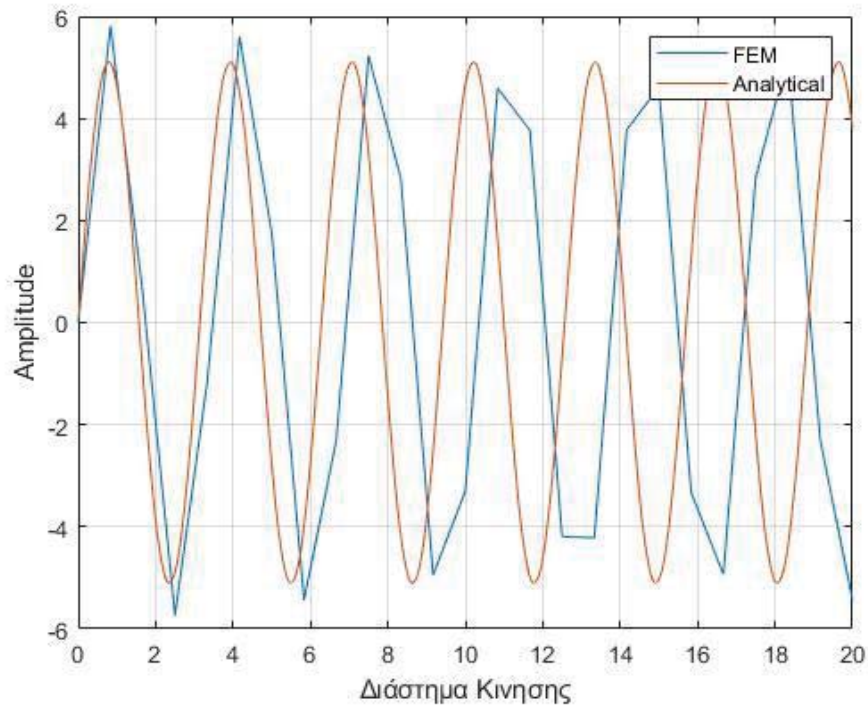
    b=L/kanal;
for i=1:kanal
    d(i)=[(v0*sqrt(m/k))-(p/k)*(w*k*sqrt(m/k))/(k-
m*w^2)]*sin(sqrt(k/m)*(b*i))+(p/k)*(k*sin(w*b*i))/(k-m*w^2);
end

%% Analytical Plot
for i=1:kanal
    z(i)=i*b;
end

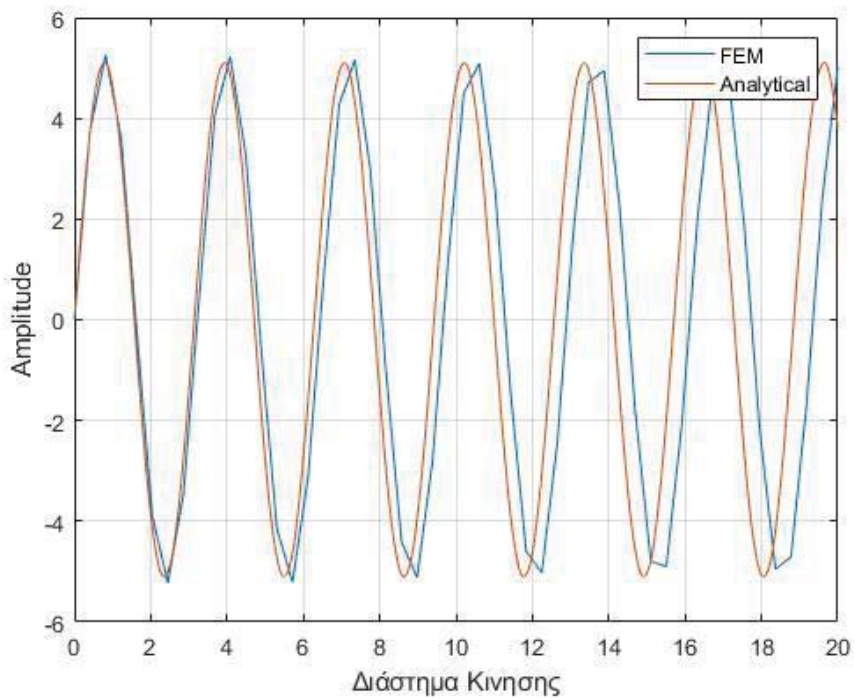
hold on
plot(z,d)
hold off
box on
grid on
xlabel ('Διάστημα Κίνησης')
ylabel ('Amplitude')
legend ('FEM','Analytical')

```

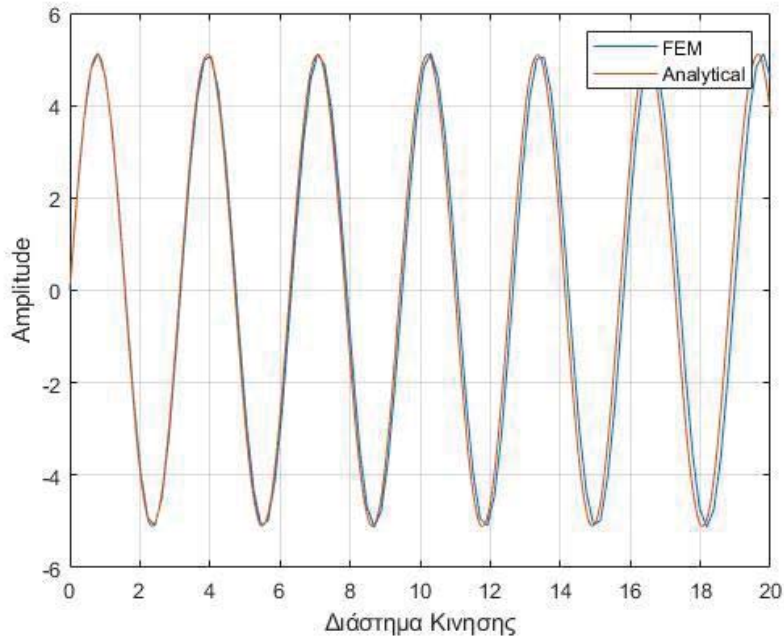
Τα αποτελέσματα της εφαρμογής του κώδικα για το Π.Α.Τ, δηλαδή για την εξαναγκασμένη ταλάντωση του σώματος m αποδεικνύουν πολύ καλή απόκριση της μεθόδου για την εύρεση της προσεγγιστικής λύσης με τη χρήση των Πεπερασμένων Στοιχείων. Συγκεκριμένα τρέξαμε τον κώδικα για διάφορο πλήθος κόμβων ώστε η ιδιοσυχνότητα του συστήματος να είναι διαφορετική από τη συχνότητα του διεγέρτη. Ακόμη έχουμε αποτελέσματα τόσο για την κατάσταση του σώματος λίγο πριν το φαινόμενο του συντονισμού, δηλαδή ίση ιδιοσυχνότητα με την συχνότητα του διεγέρτη αλλά και την λύση των πεπερασμένων στοιχείων κατά τον συντονισμό. Παρακάτω παραθέτουμε τα γραφικά αποτελέσματα της μεθόδου.



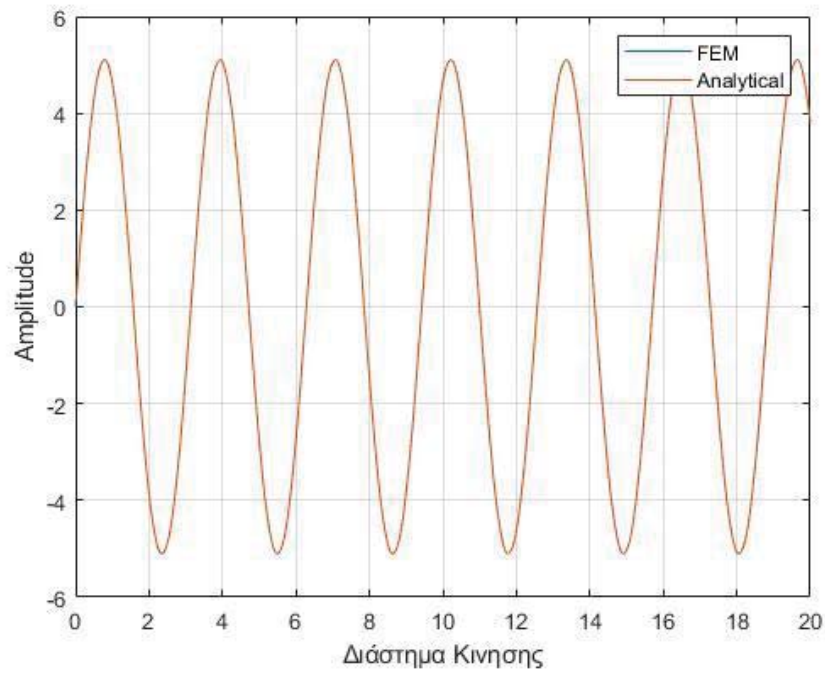
Σχήμα 7 Γραφική αναπαράσταση της προσεγγιστικής λύσης και της αναλυτικής 25 στοιχεία.



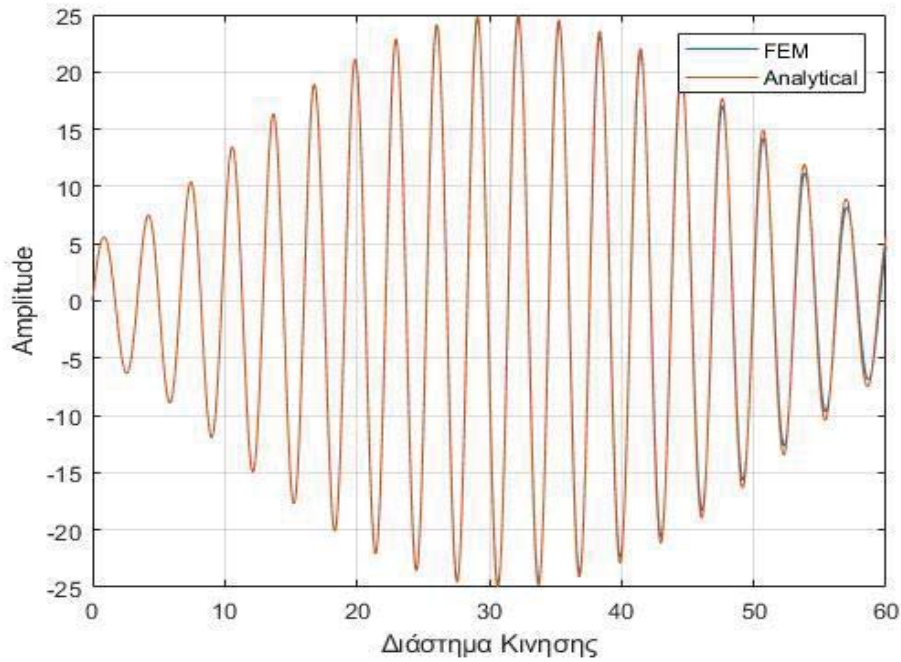
Σχήμα 8 Γραφική αναπαράσταση της προσεγγιστικής λύσης και της αναλυτικής για 50 στοιχεία.



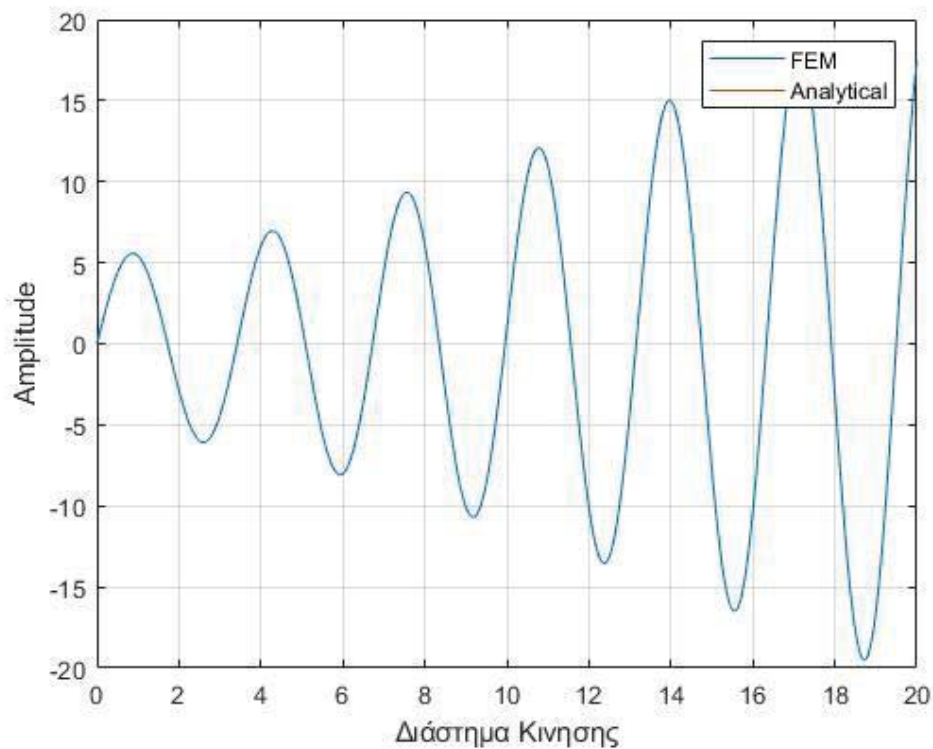
Σχήμα 9 Γραφική αναπαράσταση της προσεγγιστικής λύσης και της αναλυτικής για 100 στοιχεία



Σχήμα 10 Γραφική αναπαράσταση της προσεγγιστικής λύσης και της αναλυτικής για 1000 στοιχεία



Σχήμα 11 Γραφική αναπαράσταση της προσεγγιστικής λύσης και της αναλυτικής για 1000 στοιχεία κοντά στο συντονισμό όπου η συχνότητα του διεγέρτη είναι $\omega = 2,1$ και η ιδιοσυχνότητα του συστήματος $\omega_0 = 2$



Σχήμα 12 Γραφική απεικόνιση της προσεγγιστικής λύσης κατά το φαινόμενο του συντονισμού για 1000 στοιχεία

4.3 ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Με χρήση του ίδιου κώδικα μπορούμε να μελετήσουμε και την ελεύθερη ταλάντωση του παραπάνω σώματος, δηλαδή την κίνηση του από την αρχή της θέσης ισορροπίας με μια αρχική ταχύτητα χωρίς την επίδραση κάποια διεγερτικής δύναμης. Το πρόβλημα αρχικών τιμών της ελεύθερης ταλάντωσης περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$mu''(s) + ku(s) = 0, s \in [0, t] \quad (4.4)$$

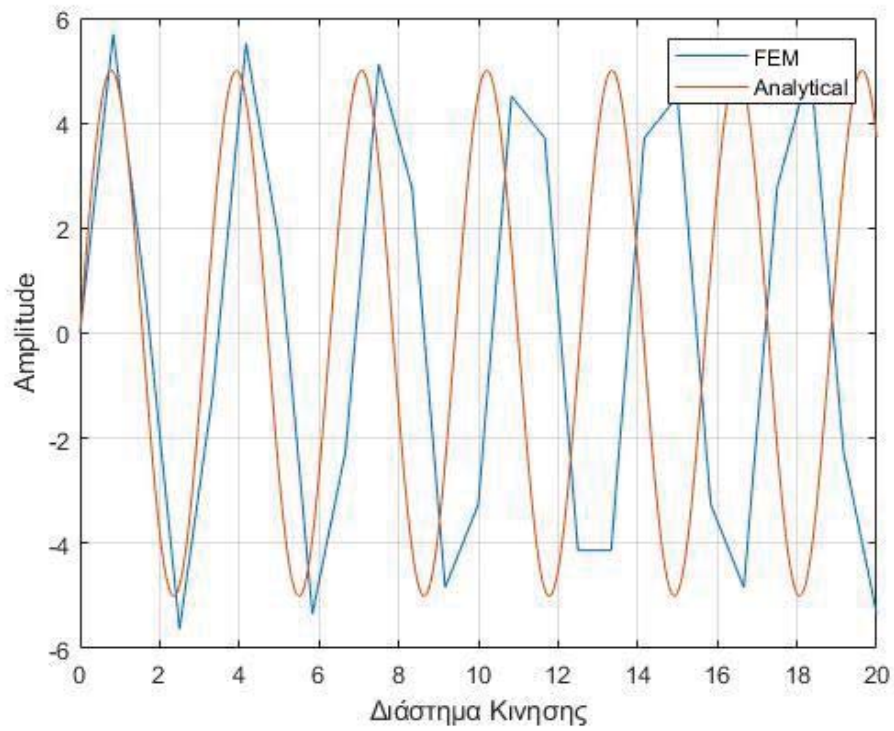
$$u(0) = u_0, u'(0) = v_0 \quad (4.5)$$

και η αναλυτική λύση είναι της μορφής

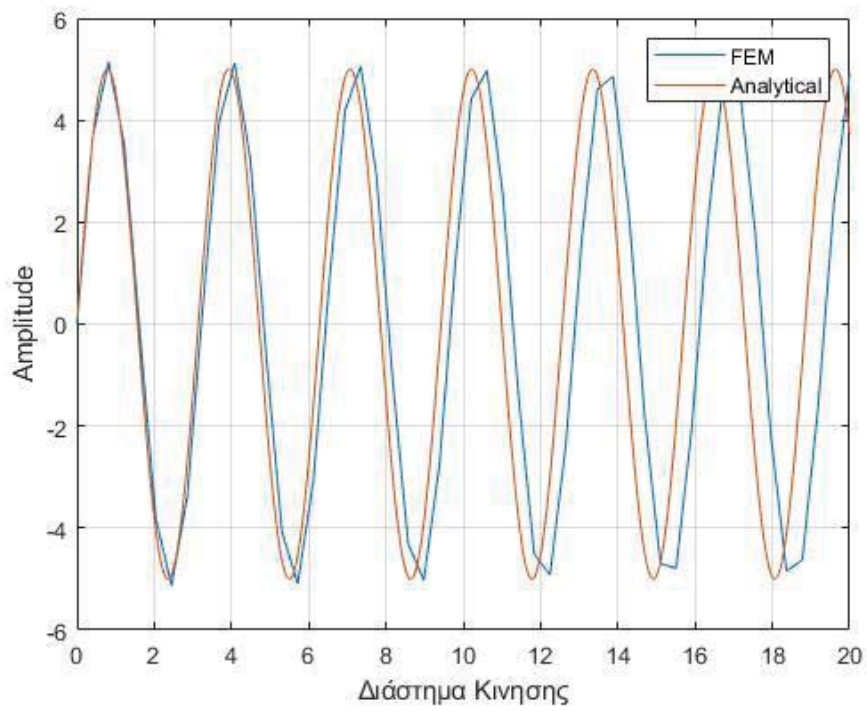
$$u(s) = u(0) \cos \omega_0 t + \frac{u'(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (4.6)$$

με ω_0 , η ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

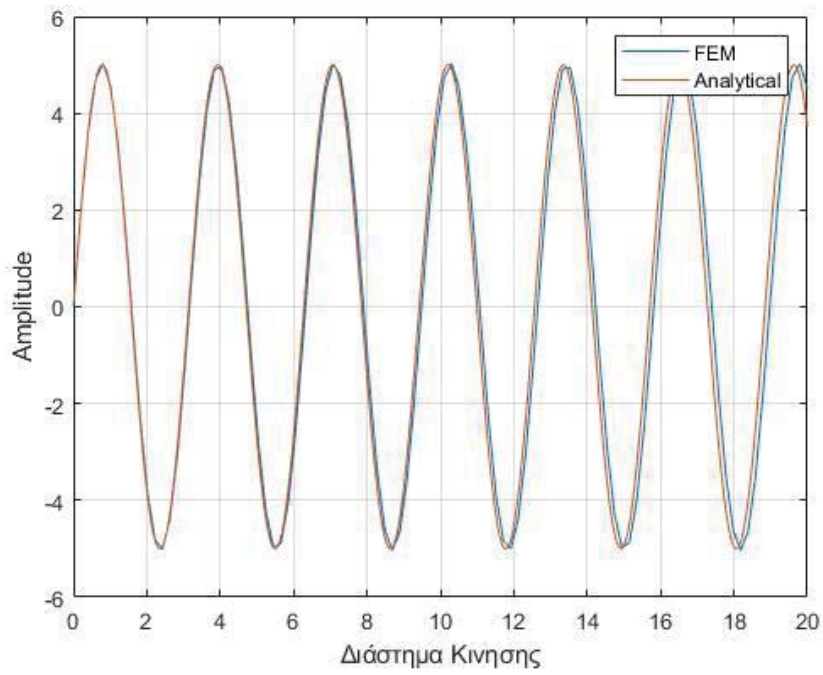
Το παραπάνω πρόβλημα αρχικών τιμών μπορεί να υπολογιστεί εύκολα με τη χρήση του κώδικα που δημιουργήσαμε αρκεί να μηδενίσουμε την αρμονική διέγερση f κατά την αρχικοποίηση των δεδομένων του συστήματος. Όμοια με την περίπτωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης τρέξαμε τον κώδικα για διάφορο πλήθος κόμβων και παρατηρήσαμε πως η λύση των πεπερασμένων στοιχείων πετυχαίνει εξαιρετική προσέγγιση της πραγματικής λύσης του προβλήματος. Παρακάτω παραθέτουμε κάποια γραφικά αποτελέσματα όσον αφορά την εφαρμογή της μεθόδου για διάφορο πλήθος κόμβων.



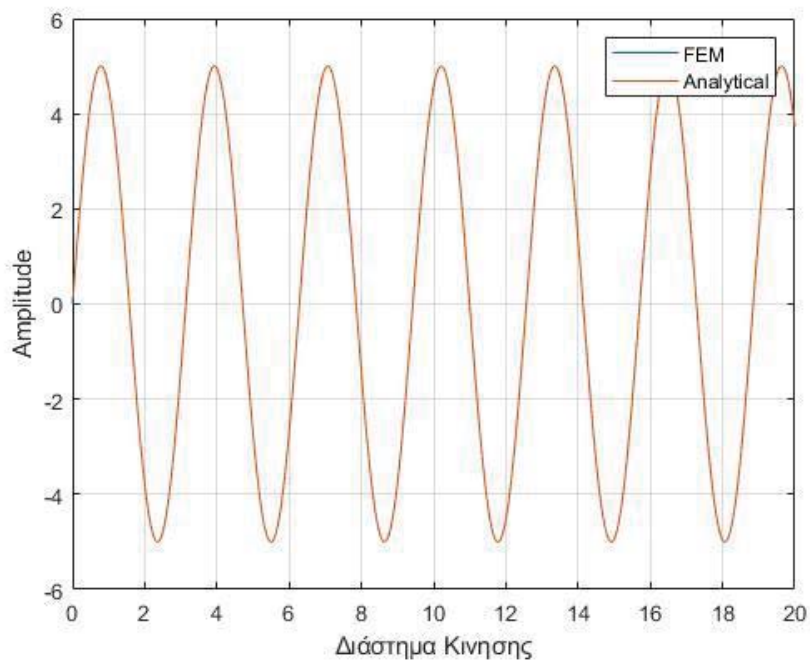
Σχήμα 13 Ελεύθερη ταλάντωση του σώματος m για 25 κόμβους.



Σχήμα 14 Ελεύθερη ταλάντωση του σώματος m για 50 κόμβους.



Σχήμα 15 Ελεύθερη ταλάντωση του σώματος m για 100 κόμβους.



Σχήμα 16 Ελεύθερη ταλάντωση του σώματος m για 1000 κόμβους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Με την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια είδαμε πως με νέα μεταβολική αρχή τύπου Hamilton με συνέλιξη, για ένα πρόβλημα αρχικών τιμών της Κλασσικής Μηχανικής, μπορούμε να εξάγουμε τις εξισώσεις πεδίου αλλά και τις αρχικές συνθήκες. Ακόμη με τεχνικές της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων μπορούμε να κατασκευάσουμε την προσεγγιστική λύση ενός προβλήματος αρχικών τιμών με χρήση της νέας μεταβολικής αρχής.

Όπως είναι αναμενόμενο το επόμενο βήμα θα είναι να ασχοληθούμε με εφαρμογή της μεθόδου που έχει αναπτυχθεί σε προβλήματα αρχικών συνοριακών τιμών που αφορούν την Μηχανική Συνεχούς Μέσου. Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μια γενικευμένη Αρχή Hamilton για προβλήματα Ελαστοδυναμικής και θα υποδείξουμε τον τρόπο κατασκευής προσεγγιστικής λύσης χρησιμοποιώντας με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, όμοια με το διακριτό μηχανικό σύστημα που μελετήσαμε.

5.1 ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ HAMILTON ΣΤΗΝ ΕΛΑΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

Ένα από τα πιο απλά προβλήματα της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου αποτελεί η κίνηση μιας ελαστικής ίνας δηλαδή ενός σώματος μιας διάστασης. Θεωρούμε μια ελαστική ίνα με το αριστερό της άκρο στερεωμένο και στο δεξί να ασκείται μια δύναμη. Οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση της θα είναι οι εξής :

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} + f = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \quad (x, s) \in [0, l] \times [0, t] \quad (5.1)$$

$$\tau = Ee, \quad e = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.2)$$

όπου $u = u(x, s)$ είναι το πεδίο μετατοπίσεων, $\tau = \tau(x, s)$ το πεδίο τάσεων, $e = e(x, s)$ το πεδίο γραμμικών τροπών, $f = f(x, s)$ μια ασκούμενη μαζική δύναμη κατά μήκος του σώματος, E η σταθερά του Young και ρ η πυκνότητα μάζας του σώματος.

Με συνδυασμό των παραπάνω εξισώσεων έχουμε

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f = 0, \quad (x, s) \in [0, l] \times [0, t] \quad (5.3)$$

Ακόμη με την εισαγωγή των κάτωθι αρχικών-συνοριακών συνθηκών έχουμε την ισχυρή διατύπωση των εξισώσεων που διέπουν το μηχανικό σύστημα

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, l] \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}(x, 0) = v_0(x), \quad x \in [0, l] \quad (5.5)$$

και

$$u(0, s) = \hat{u}(s), \quad s \in [0, t] \quad (5.6)$$

$$E \frac{\partial u}{\partial x}(l, s) = p(s), \quad s \in [0, t] \quad (5.7)$$

Η νέα μεταβολική διατύπωση του προβλήματος θα δίνεται από την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού δράσης [9]

$$J[u] = \int_0^l \left(\frac{\rho}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial s} \right] + E \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right] - [f, u] - [\hat{f}, u] \right) dx - [p, u(l, s)], \quad u \in D \quad (5.8)$$

όπου

$$D = \{ \varphi \in C^2([0, l] \times [0, t]) \mid \varphi(x, s) = \hat{u}(s) \wedge \varphi(x, 0) = u_0(x) \} \quad (5.9)$$

και

$$\hat{f}(x, s) = f_0(x)\delta(s) . \quad (5.10)$$

Ο νέος όρος $[\hat{f}, u]$ που διαφοροποιείται από τους όρους του κλασσικού συναρτησοειδούς δράσης της Αρχής Hamilton ανταποκρίνεται στην δράση του έργου των εξωτερικών δυνάμεων και δρα στιγμιαία στο σώμα τη στιγμή που ξεκινάει η κίνηση. Όμοια με το διακριτό σύστημα που αναλύσαμε παραπάνω η νέα αυτή δύναμη θα συνδέεται με την αρχική ταχύτητα $v_0(x)$.

Το σύνολο των δυνατών μεταβολών θα έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$$D^* = \{\varphi \in C^2([0, l] \times [0, t]) \mid \varphi(0, s) = 0 = \varphi(x, 0)\} \quad (5.11)$$

Αναγκαία συνθήκη ώστε το συναρτησοειδές να ελαχιστοποιείται για κάποια $u \in D$ αποτελεί η συνθήκη

$$DJ(u; \eta) = \frac{d}{d\varepsilon} J[u + \varepsilon\eta] \Big|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \forall \eta \in D^* \quad (5.12)$$

και με χρησιμοποίηση του υπάρχοντα υπολογισμού που έχουμε κάνει για την μεταβολή του πρώτου όρου και τη σχέση (2.38)

$$\begin{aligned} D\left(\int_0^l \frac{\rho}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial s}\right] dx\right)(u; \eta) &= \int_0^l \rho \left[\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial \eta}{\partial s}\right] dx \\ &= \int_0^l \left[\rho \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \eta\right] dx + \int_0^l \rho \frac{\partial u}{\partial s}(x, 0)\eta(x, t) dx \end{aligned} \quad (5.13)$$

Ακόμη,

$$D\left(\int_0^l \frac{E}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}\right] dx\right)(u; \eta) = -\int_0^l E \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \eta\right] dx + \int_0^l E \frac{\partial u}{\partial x}(l, s)\eta(l, t-s) ds . \quad (5.14)$$

Η μεταβολή των δύο επόμενων όρων υπολογίζεται με ανάλογο τρόπο όπως στην περίπτωση του διακριτού μηχανικού συστήματος,

$$\begin{aligned}
D\left(\int_0^l [f, u] + [\hat{f}, u] dx\right)(u; \eta) &= \int_0^l [f, u] + [\hat{f}, u] dx(u; \eta) \\
&= \int_0^l [f, \eta] dx + \int_0^l \hat{f}_0 \eta(x, t) dx
\end{aligned} \tag{5.15}$$

και για τον τελευταίο όρο θα ισχύει πως

$$D([p, u(l, s)])(u; \eta) = [p, \eta(l, s)] = \int_0^t p(s) \eta(t-s) ds \tag{5.16}$$

Με εισαγωγή των παραπάνω υπολογισμών στην μεταβολική εξίσωση (2.68) θα έχουμε την μεταβολή του συναρτησιακού J και

$$\begin{aligned}
DJ(u; \eta) &= \int_0^l \left[\rho \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f, \eta \right] dx + \int_0^l \left(\rho \frac{\partial u}{\partial s}(x, 0) - \hat{f}_0(x) \right) \eta(x, t) dx \\
&\quad + \int_0^t \left(E \frac{\partial u}{\partial x}(l, s) - p(s) \right) \eta(l, t-s) ds = 0, \quad \forall \eta \in D^*
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Με κατάλληλη χρήση διάφορων εκδοχών του Θεμελιώδους Λήμματος του Λογισμού Μεταβολών προκύπτει τόσο η εξίσωση του πεδίου αλλά και οι αρχικές συνοριακές συνθήκες. Δηλαδή

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f = 0, \quad \forall (x, s) \in [0, l] \times [0, t], \tag{5.18}$$

$$\rho v_0(x) = \hat{f}_0, \quad \forall x \in [0, l] \tag{5.19}$$

και

$$E \frac{\partial u}{\partial x}(l, s) = p(s), \quad \forall s \in [0, t]. \tag{5.20}$$

5.2 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΑΡΧΗ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΔΡΑΣΗΣ ΣΤΟ $[t_1, t_2]$.

Όπως είδαμε το πρόβλημα αρχικών – συνοριακών τιμών της Μηχανικής Συνεχούς Μέσου που αφορά την κίνηση ελαστικής ίνας περιγράφεται από το παραπάνω συναρτησιακό $\forall (x, s) \in [0, l] \times [0, t]$ και $u \in D$.

Στο τυχαίο διάστημα $[t_1, t_2]$, $t_1 \leq 0$, η συνέλιξη δύο συναρτήσεων $g, h \in L^2([x_1, x_2] \times [t_1, t_2])$ ορίζεται ως [10]

$$[g, h]_{t_1}^{t_2} = \int_0^{\tau} g(x, t_1 + s)h(x, t_2 - s)ds, \quad \tau = t_2 - t_1 \quad (5.25)$$

Επόμενο βήμα είναι η εύρεση συναρτήσεως $u \in C^2([0, l] \times [t_1, t_2])$ η οποία ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f = 0, \quad (x, s) \in [0, l] \times [t_1, t_2] \quad (5.26)$$

και των αρχικών- συνοριακών τιμών

$$u(x, t_1) = u_0(x), \quad x \in [0, l] \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}(x, t_1) = v_0(x), \quad x \in [0, l] \quad (5.28)$$

$$u(0, s) = \hat{u}(s), \quad s \in [t_1, t_2] \quad (5.29)$$

$$E \frac{\partial u}{\partial x}(l, s) = p(s), \quad s \in [t_1, t_2] \quad (5.30)$$

Το πρόβλημα συσχετίζεται με το συναρτησιακό (5.8) για $u \in D'$, όπου

$$D' = \{\varphi \in C^2([0, l] \times [t_1, t_2]) \mid \varphi(x, t_1) = u_0(x) \wedge \varphi(0, s) = \hat{u}(s)\}.$$

Το συναρτησιακό μετασχηματίζεται μετατοπίζοντας όλες τις συναρτήσεις δεξιά κατά t_1 με τη σχέση $h(s) = h^*(s - t_1)$.

Για παράδειγμα ο όρος

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial s} \right]_{t_1}^{t_2} dx &= \int_0^l \int_0^{t_2-t_1} \frac{\partial u^*}{\partial s}(s) \frac{\partial u^*}{\partial s}(t_2-t_1-s) ds dx \\ &= \int_0^l \int_0^\tau \frac{\partial u^*}{\partial s}(s) \frac{\partial u^*}{\partial s}(\tau-s) ds dx = \int_0^l \left[\frac{\partial u^*}{\partial s}, \frac{\partial u^*}{\partial s} \right] dx \end{aligned}$$

, όπου $\tau = t_2 - t_1$.

Ακόμη,

$$\begin{aligned} [\tilde{f}, u]_{t_1}^{t_2} &= \int_0^\tau \tilde{f}(t_1+s)u(t_2-s)ds = \int_0^\tau \tilde{f}^*(s)u^*(\tau-s)ds = [\tilde{f}^*, u^*] \\ &= \int_0^\tau \hat{f}_0 \delta(s)u^*(\tau-s)ds = \hat{f}_0 u^*(\tau) \end{aligned}$$

Όμοια το συναρτησιακό μπορεί να γραφεί (5.31)

$$J^*[u^*] = \int_0^l \left(\frac{\rho}{2} \left[\frac{\partial u^*}{\partial s}, \frac{\partial u^*}{\partial s} \right] + E \left[\frac{\partial u^*}{\partial x}, \frac{\partial u^*}{\partial x} \right] - [f^*, u^*] - [\hat{f}^*, u^*] \right) dx - [p^*, u^*(l, s)], \quad u \in D^{r*},$$

όπου

$$D^{r*} = \{ \varphi \in C^2([0, l] \times [t_1, t_2]) \mid \varphi(x, t_1) = u_0(x) \wedge \varphi(0, s) = \tilde{u}(s) \},$$

$$\tilde{f}^* = \hat{f}_0 \delta(s) \text{ και } \hat{f}_0 = m v_0.$$

Έτσι εάν το J^* γίνει στάσιμο στην $u^* \in D^{r*}$ σύμφωνα με τα παραπάνω θα ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\rho \frac{\partial^2 u^*}{\partial s^2}(x, z) - E \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}(x, z) = f^*(x, z), \quad (x, z) \in [0, l] \times [0, \tau], \tau > 0 \quad (5.32)$$

$$u^*(x, t_1) = u_0(x), \quad x \in [0, l] \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial s}(x, t_1) = v_0(x), \quad x \in [0, l] \quad (5.34)$$

$$u^*(0, z) = \hat{u}(z), \quad z \in [0, \tau] \quad (5.35)$$

$$E \frac{\partial u^*}{\partial x}(l, z) = p(z), \quad z \in [0, \tau]. \quad (5.36).$$

Βασισμένοι σε όλα τα παραπάνω μπορούμε να θεωρήσουμε το συναρτησιακό (5.37)

$$J[u] = \int_0^l \left(\frac{\rho}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial s} \right] + E \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right] - [f, u] - [\tilde{f}^1 - \tilde{f}^2, u] \right) dx - [p_1, u(l, \cdot)] + [p_2, u(0, \cdot)],$$

όπου

$$\tilde{f}^1 = f^1 \delta(s - t_1) \text{ και } \tilde{f}^2 = f^2 \delta(s - t_2).$$

Τότε η συνάρτηση $u \in D^1$ που καθιστά το συναρτησιακό στάσιμο, θα είναι η λύση του προβλήματος αρχικών συνοριακών τιμών

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(x, s) - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, s) = f(x, s), \quad (x, s) \in [x_1, x_2] \times [t_1, t_2] \quad (5.38)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}(x, t_1) = \frac{f^1}{m}, \quad \frac{\partial u}{\partial s}(x, t_2) = \frac{f^2}{m} \quad (5.39)$$

$$E \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, s) = p_1(s) \text{ και } E \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, s) = p_2(s) \quad (5.40)$$

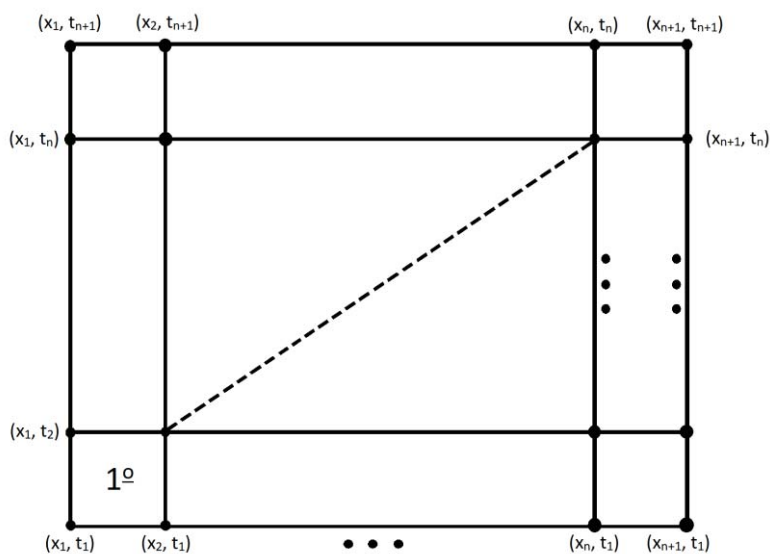
Στην πραγματικότητα το παραπάνω πρόβλημα αρχικών τιμών δεν είναι καλώς τοποθετημένο διότι οι τιμές της ταχύτητας τις χρονικές στιγμές t_1, t_2 είναι γενικά άγνωστες, όπως και οι τάσεις στα άκρα x_1, x_2 . Αργότερα όμως θα δούμε πως οι τιμές αυτές δεν είναι απαραίτητες για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος.

5.3 ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Για την εύρεση προσεγγιστικής λύσης εφαρμόζουμε μια διαμέριση του πεδίου ορισμού $[0, l] \times [0, t]$ σε $n \times n$ υπο-πεδία ώστε

$$0 = s_1 < s_2 < \dots < s_n < s_{n+1} = t$$

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = l.$$



Σχήμα 17 Διακριτοποίηση του πεδίου $[0, l] \times [0, t]$.

Έτσι στο στοιχείο $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ με χρήση των πολωνύμων Legendre για την κατασκευή των συναρτήσεων σχήματος, η τοπική λύση των πεπερασμένων στοιχείων θα είναι η

$$u^1(x, s) = u_1^1 N_1^1 + u_2^1 N_2^1 + u_3^1 N_3^1 + u_4^1 N_4^1 \quad (5.41)$$

όπου

$$N_1^1(x, s) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \frac{t_2 - s}{t_2 - t_1}, \quad N_2^1(x, s) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} \frac{t_2 - s}{t_2 - t_1}$$

$$N_3^1(x, s) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} \frac{t_1 - s}{t_1 - t_2}, \quad N_4^1(x, s) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \frac{t_1 - s}{t_1 - t_2}.$$

Επόμενο βήμα είναι η εισαγωγή της τοπικής λύσης στο συναρτησιακό και η εύρεση των τοπικών πινάκων στιβαρότητας των στοιχείων. Κατά την εισαγωγή της τοπικής προσεγγιστικής λύσης στο συναρτησιακό και ύστερα από αρκετούς υπολογισμούς από τον πρώτο όρο του συναρτησιακού εξάγουμε τον πίνακα

$$M_{ij}^1 = \int_{x_1}^{x_2} \int_0^\tau \frac{\partial N_i^1}{\partial s}(x, t_1 + s) \frac{\partial N_j^1}{\partial s}(x, t_2 - s) ds dx, \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (5.42)$$

όπου με επιπλέον υπολογισμούς προκύπτει για το τυχαίο στοιχείο e ο πίνακας

$$M_{ij}^e = \frac{h}{3\tau} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

, όπου $h = x_{e+1} - x_e$ και $\tau = t_{e+1} - t_e$.

Όπως παρατηρούμε ο πίνακας M_{ij}^e έχει τις ιδιότητες $M_{ij} = M_{ji}$ και $M_{ii} = 1$.

Όμοια από τον δεύτερο όρο του συναρτησιακού εξάγουμε τον πίνακα

$$K_{ij}^1 = \int_{x_1}^{x_2} \int_0^\tau \frac{\partial N_i^1}{\partial x}(x, t_1 + s) \frac{\partial N_j^1}{\partial x}(x, t_2 - s) ds dx, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad (5.44)$$

όπου με επιπλέον υπολογισμούς προκύπτει πως για κάθε element ο πίνακας που προκύπτει είναι της μορφής

$$K_{ij}^e = \frac{\tau}{3h} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (5.45)$$

όπου $h = x_{e+1} - x_e$ και $\tau = t_{e+1} - t_e$.

Παρατηρούμε πως και ο πίνακας K_{ij}^e παρουσιάζει συμμετρία και συγκεκριμένα έχει τις ιδιότητες $K_{ij} = K_{ji}$ και $K_{ii} = \frac{1}{2}$.

5.4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ GALERKIN ΚΑΙ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ ΣΤΟ 1^ο ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΤΗΣ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Στο 1^ο στοιχείο της παραπάνω διακριτοποίησης για το πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών της κίνησης μιας ελαστικής ίνας μπορούμε με τη μέθοδο Galerkin και τη συνέλιξη για μια αυθαίρετη συνάρτηση

$$\eta \in C^2([x_1, x_2] \times [t_1, t_2]) := \{\varphi \in C^2 \mid \varphi(x, t_1) = \varphi(x_1, s) = 0\}$$

να πούμε ότι (5.46)

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_0^{t_2-t_1} \left(\rho \frac{\partial^2 u(x, t_1 + s)}{\partial s^2} - E \frac{\partial^2 u(x, t_1 + s)}{\partial x^2} \right) \eta(x, t_2 - s) ds dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{t_2-t_1} f(x, t_1 + s) \eta(x, t_2 - s) ds dx$$

Πιο συγκεκριμένα θα έχουμε την εξίσωση (5.47)

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u^1}{\partial s}, \frac{\partial \eta}{\partial s} \right]_{t_1}^{t_2} + E \left[\frac{\partial u^1}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]_{x_1}^{x_2} &= F^1 - \rho \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial s}(x, t_2) \eta(x, t_2) dx + \rho \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial s}(x, t_1) \eta(x, t_2) dx + \\ &+ E \int_0^{t_2-t_1} \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t_1 + s) \eta(x_2, t_2 - s) ds - E \int_0^{t_2-t_1} \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t_1 + s) \eta(x_1, t_2 - s) ds \end{aligned}$$

όπου

$$F^1 = \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{t_2-t_1} f(x, t_1 + s) \eta(x, t_2 - s) ds dx.$$

Η αυθαίρετη συνάρτηση η στο τοπικό στοιχείο θα είναι της μορφής

$$\eta(x, s) = c_1 N_1^1 + c_2 N_2^1 + c_3 N_3^1 + c_4 N_4^1 \quad (5.48)$$

Στην συνέχεια εισάγω στην εξίσωση (5.47) την τοπική λύση των πεπερασμένων στοιχείων και την συνάρτηση η για την οποία επιλέγω $c_i = 1, c_j = 0$ για $i \neq j$. Τότε προκύπτει το παρακάτω γραμμικό σύστημα 4 εξισώσεων (5.48)

$$\mathbf{u}^1 (\rho \mathbf{M}_{1j} + E \mathbf{K}_{1j}) = \mathbf{F}_1^1 + \rho \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial s}(x, t_1) N_1^1(x, t_2) dx + E \int_0^{t_2-t_1} \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t_1 + s) N_1^1(x_2, t_2 - s) ds$$

$$\mathbf{u}^1(\rho\mathbf{M}_{2j} + E\mathbf{K}_{2j}) = \mathbf{F}_2^1 + \rho \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial s}(x, t_1) N_2^1(x, t_2) dx + E \int_0^{t_2-t_1} \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t_1 + s) N_2^1(x_2, t_2 - s) ds$$

$$\mathbf{u}^1(\rho\mathbf{M}_{3j} + E\mathbf{K}_{3j}) = \mathbf{F}_3^1 + \rho \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial s}(x, t_1) N_3^1(x, t_2) dx + E \int_0^{t_2-t_1} \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t_1 + s) N_3^1(x_2, t_2 - s) ds$$

$$\mathbf{u}^1(\rho\mathbf{M}_{4j} + E\mathbf{K}_{4j}) = \mathbf{F}_4^1 + \rho \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial s}(x, t_1) N_4^1(x, t_2) dx + E \int_0^{t_2-t_1} \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t_1 + s) N_4^1(x_2, t_2 - s) ds$$

Όμως εξ ορισμού των συναρτήσεων σχήματος του 1^{ου} στοιχείου θα έχουμε πως

$$N_1^1(x, t_2) = 0, N_1^1(x_2, t_2 - s) = 0, N_2^1(x, t_2) = 0, N_4^1(x_2, t_2 - s) = 0.$$

Ακόμη οι όροι

$$\rho \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial s}(x, t_1) N_3^1(x, t_2) dx \text{ και } \rho \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial s}(x, t_1) N_4^1(x, t_2) dx$$

αφορούν τις ταχύτητες στους κόμβους 3 και 4 αντίστοιχα.

Και οι όροι

$$E \int_0^{t_2-t_1} \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t_1 + s) N_2^1(x_2, t_2 - s) \text{ και } E \int_0^{t_2-t_1} \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t_1 + s) N_3^1(x_2, t_2 - s)$$

την ύπαρξη τάσεων στους κόμβους 2 και 3 αντίστοιχα.

Επομένως το γραμμικό σύστημα (5.48) παίρνει την τελική μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^1(\rho\mathbf{M}_{1j} + E\mathbf{K}_{1j}) &= \mathbf{F}_1^1 \\ \mathbf{u}^1(\rho\mathbf{M}_{2j} + E\mathbf{K}_{2j}) &= \mathbf{F}_2^1 + \mathbf{p}_2^1 \\ \mathbf{u}^1(\rho\mathbf{M}_{3j} + E\mathbf{K}_{3j}) &= \mathbf{F}_3^1 + \mathbf{v}_3^1 + \mathbf{p}_3^1 \\ \mathbf{u}^1(\rho\mathbf{M}_{4j} + E\mathbf{K}_{4j}) &= \mathbf{F}_4^1 + \mathbf{v}_4^1. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Με όμοιο τρόπο κατασκευάζουμε και για κάθε στοιχείο γραμμικά συστήματα 4 εξισώσεων που αφορούν την τοπική λύση του πεδίου μετατοπίσεων.

Επόμενος στόχος ο οποίος συνεχίζει το έργο της παρούσας διατριβής είναι η συνάθροιση όλων των εξισώσεων που αφορούν τις μετατοπίσεις για τους ίδιους κόμβους και η κατασκευή του καθολικού πίνακα στιβαρότητας. Ακόμη αντίστοιχα με τα προβλήματα αρχικών τιμών θα αναπτύξουμε προγραμματιστικές τεχνικές για την εύρεση προσεγγιστικής αριθμητικής λύσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων σε προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών της Μηχανικής Συνεχούς Μέσου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Χρησιμοποιώντας την συνέλιξη δημιουργήθηκε μια νέα μεταβολική αρχή, η οποία περιγράφει συντηρητικά δυναμικά συστήματα. Έγινε δηλαδή μια γενίκευση της αρχής του Hamilton με τέτοιο τρόπο ώστε να αίρονται οι αδυναμίες της να ενσωματώνει τις αρχικές συνθήκες ενός δυναμικού προβλήματος. Μελετήσαμε την κίνηση ενός σώματος στερεωμένου σε ένα ελατήριο σταθεράς k αλλά και μιας ελαστικής ίνας και οι μεταβολικές αρχές που αναπτύξαμε μοντελοποιούν πλέον προβλήματα αρχικών τιμών.

Στη συνέχεια αναπτύξαμε ένα προσεγγιστικό πλαίσιο εύρεσης της λύσης ενός προβλήματος αρχικών τιμών αρμονικής ταλάντωσης βασισμένο στη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων. Η χρήση της συνέλιξης άλλαξε ριζικά την μορφή των αλγεβρικών εξισώσεων που παράγονται από την διακριτοποίηση της κίνησης σε κάθε στοιχείο. Πιο συγκεκριμένα το μητρώο στιβαρότητας πλέον είναι συμμετρικό ως προς την δεξιά διαγώνιο και το διάνυσμα φόρτισης είναι αντεστραμμένο, γεγονός αξιοσημείωτο όσον αφορά την παραδοσιακή εφαρμογή των Πεπερασμένων Στοιχείων.

Η γραφική απεικόνιση της αναλυτικής λύσης και της προσεγγιστικής δίνει καλά αποτελέσματα για την ορθότητα αλλά και τη σύγκλιση, όπου για μεγάλο αριθμό στοιχείων το σφάλμα της προσέγγισης ελαττώνεται κατά πολύ.

Όπως φαίνεται η ανάλυση που έχουμε κάνει μέχρι στιγμής μπορεί να εφαρμοστεί σε γενικότερα προβλήματα αρχικών τιμών της μηχανικής. Το βασικό συμπέρασμα της παρούσας διατριβής είναι πως μπορούν δημιουργηθούν προσεγγιστικές στρατηγικές βασισμένες στην μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων για προβλήματα αρχικών τιμών, με χρήση των μεταβολικών αρχών που υποδείξαμε.

Νέα πρόκληση παραμένει η ανάπτυξη προσεγγιστικής τεχνικής βασισμένης στην μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων σε προβλήματα αρχικών – συνοριακών τιμών της Μηχανικής Συνεχούς Μέσου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Β. Καλπακίδης (2016) *Πρόχειρες σημειώσεις στη Μηχανική του Συνεχούς*.
2. J.N. Reddy (2008). *An Introduction of Continuum Mechanics with Applications*.
3. J.N. Reddy (1984) *Energy and Variational methods in Applied mechanics*
4. J.N. Reddy (2005). *An Introduction to the Finite Element Method*.
5. Hyochoong Bang and Young W. Kwon (1996) *The Finite Element Method Using MATLAB*
6. A. Bedford (1985) *Hamilton's principle in continuum mechanics*
7. David G. Logan (2003) *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*
8. Μ. Παπαδρακάκης (2001) *Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων*.
9. V. Kalpakides & A. Charalambopoulos (2021) On Hamilton's Principle for Discrete and Continuous Systems: A convolved action principle. *Reports on Mathematical Physics*. Vol 87 No. 2
10. V. Kalpakides (2020) A finite element scheme for an initial value problem. *arXiv preprint arXiv:2011.11433*
11. G. F. Dargush (2016) Mixed convolved action for classical and fractional derivative dissipative dynamical systems. *Physical Review E*, 86:066606
12. G. F. Dargush & J. Kim (2012) Mixed convolved action. *Physical Review E*, 85:066606
13. G. F. Dargush et al. (2015) Mixed convolved action variational principles in linear continuum dynamics. *Acta Mechanica* 226:4111-4137
14. E.T. Tonti (1973). On the variational formulation for the linear initial value problems. *Anal. Mat. Pura Appl.* ,95:331-359
15. E. Zeidler (1995) *Applied Functional Analysis: applications to mathematical physics*, volume 108 of Applied Mathematical Science. Springer-Verlag.

16. Nam –Ho Kim (2005) *Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*.
17. M.E. Gurtin (1964) Variational principles for linear elastodynamic. *Archives for Rational Mechanics and Analysis*,16:34-50
18. M. E. Gurtin (1964) Variational principles for linear initial-value problems. *Quarterly of Applied Mathematics*, 22:252-256
19. J. Kim (2014) Higher order temporal finite element methods through mixed formalisms. *Springer Plus*, 3:458.

