ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Τμημα Μαθηματικων
ΤΟΜΕΑΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Βασιλεία Ψωμαδέλλη

Πτωτικος Χρωματισμος σε Γραφηματα

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2020

Αφιερώνεται στην οικογένεια μου.

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και Πληροφορική που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 26/11/2020 από την εξεταστική επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
Χάρης Παπαδόπουλος	Αναπληρωτής Καθηγητής
Λουκάς Γεωργιάδης	Αναπληρωτής Καθηγητής
Λεωνίδας Παληός	Καθηγητής

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

"Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή."

Βασιλεία Ψωμαδέλλη

Ευχαριστιες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Χάρη Παπαδόπουλο για τη συνεργασία και την πολύτιμη βοήθεια του. Ήταν παρόν σε ό,τι τον χρειάστηκα παρόλες τις ιδιάζουσες συνθήκες. Χάρη στην καθοδήγησή του, στις στοχευμένες παρατηρήσεις του και στις εποικοδομητικές συναντήσεις που είχαμε, επιτεύχθηκε η μελέτη και η έρευνα σχετικά με τον πτωτικό χρωματισμό στα γραφήματα.

Θα ήθελα ακόμη, να ευχαριστήσω τους καθηγητές του μεταπτυχιακού καθώς και προπτυχιακού προγράμματος για τη συνεργασία και τις γνώσεις που μου προσέφεραν.

Περιληψη

Στόχος της παρούσας διατριβής είναι η παρουσίαση και η μελέτη του προβλήματος του πτωτικού χρωματισμού σε γραφήματα. Πιο συγκεκριμένα, δοθέντος ενός γραφήματος, $G = (V, E)$ και μιας διαμέρισης Π του V, η διαμέριση είναι πτωτικά k - χρωματίσιμη, αν κάθε σύνολο της διαμέρισης είναι ανεξάρτητο και κάθε κορυφή $u \in V$ είναι πολύχρωμη, δηλαδή είναι γειτονική με τουλάχιστον μία κορυφή σε κάθε σύνολο της διαμέρισης Π. Στη συνέχεια, δίνονται και άλλα είδη χρωματισμών καθώς και η σχέση μεταξύ τους. Επίσης, μελετάται η πολυπλοκότητα του προβλήματος του πτωτικού χρωματισμού και δίνονται κλάσεις γραφημάτων που είτε το πρόβλημα έχει πολυωνυμικό αλγόριθμο, είτε χαρακτηρίζεται ως NP - πλήρες. Εν κατακλείδι, παραθέτονται τα συμπεράσματα της διατριβής και σχεδιάζεται ο πρώτος πολυωνυμικός αλγόριθμος για τα cographs, δηλαδή την κατηγορία γραφημάτων που δεν περιέχει μονοπάτι P_4. Επιπλέον, μελετάται και παρουσιάζεται μια ειδική περίπτωση του προβλήματος για γενικά γραφήματα, η οποία αναφέρεται στην περίπτωση του σχεδόν - πτωτικού k - χρωματισμού και σχεδιάστηκε πολυωνυμικός αλγόριθμος που επιτυγχάνει κάποια αναδιάταξη της διαμέρισης, αν υπάρχει, έτσι ώστε ο συγκεκριμένος χρωματισμός να γίνεται πτωτικός k - χρωματισμός.

Abstract

The aim of this thesis is the presentation and the study of the fall coloring problem in graphs. More specific, given a graph $G = (V, E)$ and a partition Π of V, the partition is fall k - colored, if each set of partition is independent and each vertex $u \in V$ is colorful, meaning it is adjacent to at least one vertex in each set of partition Π. Furthermore, different types of coloring are given and studied, as well as, the relationship between them. Moreover, the complexity of the problem of fall coloring is studied and graph classes are given that either the problem has a polynomial algorithm, or is characterized as NP - complete. In conclusion, the research findings of this thesis are presented and the first polynomial algorithm is constructed for cographs, the category of graphs that doesn't contain a path P_4. In addition, a polynomial algorithm is designed for the special case of fall coloring for graphs, where the graph is almost - fall k - coloring, and it decides if there is a rearrangement of the partition classes that makes the graph fall k - colored.

Περιεχομενα

Περίληψη **i**

Abstract **ii**

1 Εισαγωγή **3**

1.1 Εισαγωγικές έννοιες θεωρίας γραφημάτων 3

1.2 Βασικές πράξεις μεταξύ γραφημάτων 5

1.3 Κατηγορίες γραφημάτων 8

1.4 Θεμελιώδης έννοιες της θεωρίας πολυπλοκότητας 14

2 Πτωτικός χρωματισμός και άλλα είδη χρωματισμών **19**

2.1 Ανεξάρτητο σύνολο και Κυρίαρχο σύνολο 19

2.2 k - Χρωματισμός 21

2.3 Grundy k - χρωματισμός 22

2.4 Πολύχρωμος χρωματισμός 24

2.5 Πτωτικός χρωματισμός 25

2.5.1 Πτωτικός υποχρωματισμός 27

2.6 Συσχετίσεις μεταξύ χρωματισμών 28

2.7 Ορισμένες εφαρμογές χρωματισμών 29

3 NP-πληρότητα του πτωτικού χρωματισμού **31**

3.1 NP-πληρότητα σε επίπεδα και διμερή γραφήματα 31

3.2 NP-πληρότητα σε κανονικά γραφήματα 39

3.3 NP-πληρότητα σχετικών προβλημάτων 42

4 Πολυωνυμική πολυπλοκότητα του πτωτικού χρωματισμού 47

4.1 Αναλυτικοί τύποι πτωτικού χρωματισμού 47

4.2 Πτωτικός χρωματισμός των καρτεσιανών παραγώγων 50

4.2.1 Καρτεσιανά παράγωγα μονοπατιών και κύκλων 50

4.2.2 Ομομορφισμοί 51

4.2.3 Γενικεύσεις σε άλλα καρτεσιανά παράγωγα 52

5 Περαιτέρω αλγοριθμικά αποτελέσματα 55

5.1 Ορισμένες χρήσιμες έννοιες 55

5.2 Αλγοριθμικές συνέπειες 58

6 Συμπεράσματα - επεκτάσεις 61

6.1 Συμπεράσματα 61

6.2 Επεκτάσεις και Νέα αποτελέσματα 63

6.2.1 Πτωτικός χρωματισμός των cographs 63

6.2.2 Επίτευξη πτωτικού χρωματισμού από έναν σχεδόν - πτωτικό χρωματισμό 75

Βιβλιογραφία 93

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγη

1.1 Εισαγωγικές έννοιες θεωρίας γραφημάτων

Η θεωρία γραφημάτων είναι ένα γνωστικό πεδίο των διακριτών μαθηματικών με εφαρμογές από την πληροφορική μέχρι την κοινωνιολογία, αλλά και σε πολλές ακόμα επιστήμες. Αφορά την επίλυση κάποιου προβλήματος με τη χρήση γραφημάτων. Ένα γράφημα είναι ένας εύκολος τρόπος μοντελοποίησης των σχέσεων μεταξύ των αντικειμένων και μέσω αυτού να γίνει η προσέγγιση της λύσης.
Η θεωρία γραφημάτων θεωρείται ότι ξεκίνησε τον 18ο αιώνα, όταν ο Ελβετός μαθηματικός Leonard Euler, το 1736, μοντελοποίησε το πρόβλημα των επτά γεφυρών του Konigsberg σε ένα γράφημα G, δίνοντας έτσι λύση. Έκτοτε, πολλά προβλήματα έχουν μοντελοποιηθεί σε γραφήματα.

Ορισμός 1.1.1. *Ένα (μη κατευθυνόμενο)* ***γράφημα*** *G είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $G = (V, E)$ όπου V είναι ένα πεπερασμένο σύνολο κορυφών και E είναι ένα σύνολο από διμελή σύνολα κορυφών τα οποία εκφράζουν τις ακμές του γραφήματος. Με $V(G)$ συμβολίζουμε το* ***σύνολο κορυφών*** *και με $E(G)$ το* ***σύνολο ακμών*** *του γραφήματος. Το πλήθος των κορυφών συμβολίζεται με n, δηλαδή $\mid V(G) \mid = n$ και καλείται* ***τάξη του γραφήματος*** *και το πλήθος των ακμών με m, δηλαδή $\mid E(G) \mid = m$ και καλείται* ***μέγεθος του γραφήματος****.*

Ορισμός 1.1.2. *Δύο κορυφές $u, v \in V(G)$ καλούνται* ***γειτονικές*** *αν υπάρχει ακμή $e \in E(G)$ με άκρα τις u και v, δηλαδή $e = \{u, v\}$.*

Ορισμός 1.1.3. *Για μία κορυφή $u \in V(G)$ ορίζεται ως* ***ανοιχτή γειτονιά*** *του u, και συμβολίζεται $N(u)$, το σύνολο των κορυφών του γραφήματος G που συνδέονται με την κορυφή u, δηλαδή $N(u) = \{v \mid \{u, v\} \in E(G)\}$.*

Ορισμός 1.1.4. *Για μία κορυφή $u \in V(G)$ ορίζεται ως* ***κλειστή γειτονιά*** *του u, και συμβολίζεται $N[u]$, το σύνολο των κορυφών της ανοιχτής γειτονιάς μαζί με την κορυφή u, δηλαδή $N[u] = N(u) \cup \{u\}$.*

Ορισμός 1.1.5. *Αν για μία κορυφή $u \in V(G)$ ισχύει $N(u) = \emptyset$ τότε ονομάζεται* ***απομονωμένη***.

Ορισμός 1.1.6. *Αν για μία κορυφή $u \in V(G)$ ισχύει $N(u) = V(G)$ τότε ονομάζεται* ***καθολική***.

Ορισμός 1.1.7. *Για μία κορυφή $u \in V(G)$ ορίζεται ως* ***βαθμός*** *της u, και συμβολίζεται $deg(u)$, το πλήθος των γειτονικών κορυφών της, δηλαδή $deg(u) =\mid N(u) \mid$.*

Μία απομονωμένη κορυφή $u \in V(G)$ έχει $deg(u) = 0$ και μία καθολική κορυφή $u \in V(G)$ έχει $deg(u) = n$.

Ορισμός 1.1.8. *Αν για μία κορυφή $u \in V(G)$ ισχύει $deg(u) = 1$ τότε ονομάζεται* ***εκκρεμής κορυφή***.

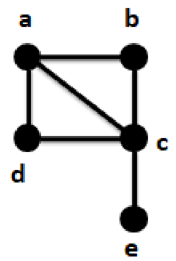
Ορισμός 1.1.9. *Σε ένα γράφημα G ο* ***ελάχιστος βαθμός*** *του γραφήματος, συμβολίζεται $\delta(G)$, και ορίζεται ως ο ελάχιστος βαθμός από τους βαθμούς των κορυφών του, δηλαδή $\delta(G) = \min\limits_{u \in V(G)} deg(u)$.*

Ορισμός 1.1.10. *Σε ένα γράφημα G ο* ***μέγιστος βαθμός*** *του γραφήματος, συμβολίζεται $\Delta(G)$, και ορίζεται ως ο μέγιστος βαθμός από τους βαθμούς των κορυφών του, δηλαδή $\Delta(G) = \max\limits_{u \in V(G)} deg(u)$.*

Λήμμα 1.1.1. *Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Τότε, ισχύει:*

$$\sum_{u \in V(G)} d(u) = 2 \mid E \mid = 2m$$

Παράδειγμα 1.1.1. *Στο παρακάτω γράφημα η κορυφή a έχει βαθμό 3, η κορυφή b έχει βαθμό 2, η κορυφή c έχει βαθμό 4, η κορυφή d έχει βαθμό 2, και η κορυφή e έχει βαθμό 1.*
Επίσης, το παρακάτω γράφημα έχει $\delta(G) = 1$ και $\Delta(G) = 4$.



1.2 Βασικές πράξεις μεταξύ γραφημάτων

Σε αυτή την ενότητα, θα δοθούν κάποιοι βασικοί ορισμοί για τα γραφήματα που προκύπτουν από πράξεις μεταξύ των γραφημάτων.

Ορισμός 1.2.1. *Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Το* ***συμπλήρωμα του γραφήματος*** *G ορίζεται ως το γράφημα με σύνολο κορυφών το V και σύνολο ακμών τις ακμές εκείνες που δεν ανήκουν στο E, δηλαδή*

$$\overline{G} = (V(G), \{\{u, v\} | u, v \in V(G) \text{ και } \{u, v\} \notin E(G)\}).$$

Ορισμός 1.2.2. *Έστω δύο γραφήματα G και H, λέγονται* ***ξένα*** *ή* ***διακεκριμένα*** *αν $V(G) \cap V(H) = \emptyset$.*

Ορισμός 1.2.3. *Έστω δύο γραφήματα G και H. Το H είναι* ***υπογράφημα*** *του G αν $V(H) \subseteq V(G)$ και $E(H) \subseteq E(G)$ και συμβολίζεται ως $H \subseteq G$.*

Ορισμός 1.2.4. *Έστω γράφημα $G = (V, E)$ και $u \in V(G)$. Η πράξη της* ***διαγραφής μιας κορυφής*** *u οδηγεί σε διαγραφή της κορυφής από το σύνολο κορυφών και τη διαγραφή όλων των ακμών που είναι προσκείμενες σε αυτή, και συβολίζεται ως*

$$G - u = (V \backslash \{u\}, E(G) \backslash \{u, v\} | \{u, v\} \in E(G)).$$

Ορισμός 1.2.5. *Έστω δύο γραφήματα G και H. Το H είναι* ***επαγόμενο υπογράφημα*** *του G αν $V(H) \subseteq V(G)$ και $\forall\, u, v \in V(H)$, $\{u, v\} \in E(H)$ αν και μόνο αν $\{u, v\} \in E(G)$.*

Παρατήρηση 1.2.1. *Κάθε επαγόμενο υπογράφημα προκύπτει από διαγραφές κάποιων κορυφών.*

Πόρισμα 1.2.1. *Το επαγόμενο υπογράφημα είναι μια υποκατηγορία του υπογραφήματος, δηλαδή αν H επαγόμενο υπογράφημα του G τότε το H είναι υπογράφημα του G. Το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα.*

Ορισμός 1.2.6. *Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$ και μία ακμή $\{u, v\} \in E(G)$. Η πράξη της* ***υποδιαίρεσης της ακμής*** *$\{u, v\}$ έχει ως αποτέλεσμα να προστεθεί μια ακόμη κορυφή w στο σύνολο κορυφών και στο σύνολο ακμών να αντικατασταθεί η ακμή $\{u, v\}$ από δύο ακμές, την $\{u, w\}$ και την $\{w, v\}$. Συμβολίζεται ως*

$$G \circ \{u, v\} = \{V(G) \cup \{w\}, E(G) \backslash \{u, v\} \cup \{\{u, w\}, \{w, v\}\}\}.$$

Θα οριστεί μια κατηγορία γραφήματος στην ενότητα αυτή, γιατί χρειάζεται για τους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 1.2.7. *Το γράφημα* $G = (V, E)$ *με* $V(G) = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ *και* $\{u_i, u_{i+1}\} \in E(G)$, *καλείται* ***μονοπάτι***. *Το γράφημα με* $n \geqslant 2$ *κορυφές που ορίζεται ως*

$$P_n = \{\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}, \{\{u_i, u_{i+1}\} \mid 1 \leqslant i < n\}\}$$

καλείται ***άχορδο μονοπάτι***.

Τα μονοπάτια είναι κορυφές που ενώνονται διαδοχικά.

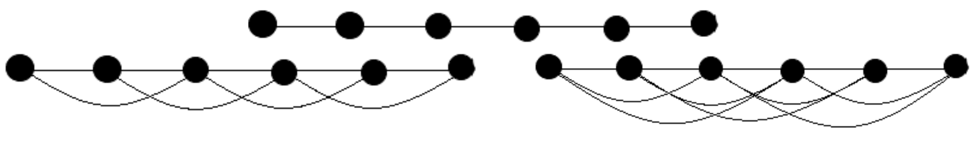
Σχήμα 1.1: Μονοπάτι 5 κορυφών και άχορδο μονοπάτι P_5.

Πόρισμα 1.2.2. *Η διαφορά μεταξύ του μονοπατιού και του άχορδου μονοπατιού είναι ότι στο μονοπάτι μπορεί να υπάρχουν και ακμές μεταξύ μη διαδοχικών κορυφών, κάτι που στο άχορδο μονοπάτι δεν ισχύει. Ουσιαστικά κάθε άχορδο μονοπάτι είναι μονοπάτι αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει.*

Ορισμός 1.2.8. *Έστω γράφημα* $G = (V, E)$ *και* $u, v \in V(G)$. *Η* ***απόσταση*** *μεταξύ των* u *και* v *συμβολίζεται ως* $dist(u, v)$ *και ορίζεται ως το μικρότερο μονοπάτι μεταξύ των* u *και* v .

Ορισμός 1.2.9. *Έστω ένα γράφημα* $G = (V, E)$, *και έστω* $s \geq 1$. *Ορίζεται ως* ***δύναμη του γραφήματος*** G *το ήδη υπάρχον γράφημα με την προσθήκη των ακμών μεταξύ δύο κορυφών που έχουν το πολύ απόσταση* s. *Συμβολίζεται ως*

$$G^s = \{V(G), E(G) \cup \{u, v\} \mid dist(u, v) \leqslant s\}.$$

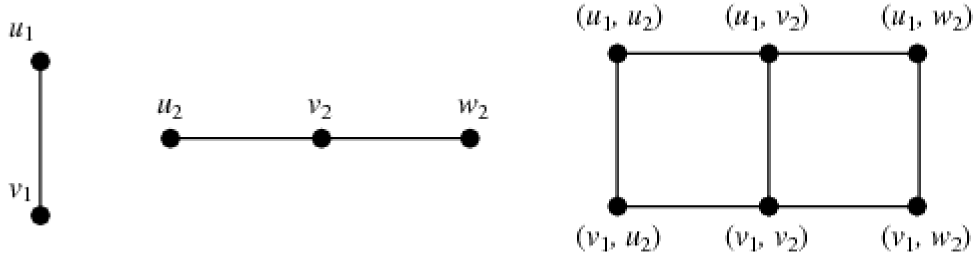


Σχήμα 1.2: Το $G = P_6$, το P_6^2 που καλείται τετράγωνο του P_6 και το P_6^3.

Σημείωση 1.2.1. *Με το* $G^{\frac{1}{s}}$ *συμβολίζεται το* G *του οποίου οι ακμές υποδιαιρούνται* $s - 1$ *φορές. Στο σχήμα 1.3 δίνεται ένα παράδειγμα.*

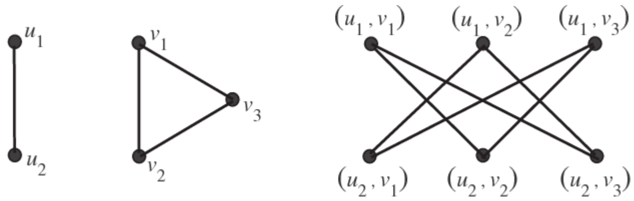
Σχήμα 1.3: Το $G = P_3$ και το $P_3^{\frac{1}{2}}$.

Ορισμός 1.2.10. *([18]) Έστω δύο διακεκριμένα γραφήματα G και H, το* ***καρτεσιανό παράγωγο****, συμβολίζεται ως $G\Box H$, και ορίζεται ως ένα νέο γράφημα όπου $V(G\Box H) = V(G)\times V(H)$ και $E(G\Box H) = \{\{\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}\} | \{u_1, u_2\} \in E(G)$ και $v_1 = v_2$ ή $u_1 = u_2$ και $\{v_1, v_2\} \in E(H)\}$.*



Σχήμα 1.4: Στα αριστερά υπάρχει το $G = P_2$, στη μέση το $H = P_3$ και δεξιά το καρτεσιανό παράγωγο $V(G\Box H)$.

Ορισμός 1.2.11. *([18]) Έστω δύο διακεκριμένα γραφήματα G και H, το* ***κατηγορηματικό (categorical) παράγωγο****, συμβολίζεται ως $G\times H$, και ορίζεται ως ένα νέο γράφημα όπου $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ και*
$E(G \times H) = \{\{\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}\} | \{u_1, u_2\} \in E(G)$ και $\{v_1, v_2\} \in E(H)\}$.



Σχήμα 1.5: Στα αριστερά υπάρχει το $G = P_2$, στη μέση το $H = C_3$ και δεξιά το κατηγοριματικό παράγωγο $V(G \times H)$.

Ορισμός 1.2.12. *Έστω δύο διακεκριμένα γραφήματα G και H. Η πράξη της* ***ασύνδετης ένωσης (disjoint union)****, συμβολίζεται ως $G \cup H$, και ενώνει (χωρίς ακμές) δύο ή περισσότερα γραφήματα σε ένα μεγαλύτερο γράφημα.*

Ορισμός 1.2.13. *Έστω δύο διακεκριμένα γραφήματα G και H. Η πράξη της **σύνδεσης (join operation)**, συμβολίζεται ως $G * H$, και έχει ως αποτέλεσμα κάθε κορυφή του γραφήματος G να ενώνεται με όλες τις κορυφές του γραφήματος H .*

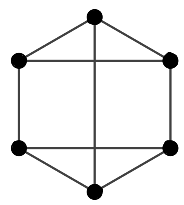
1.3 Κατηγορίες γραφημάτων

Τα γραφήματα με κοινές ιδιότητες ομαδοποιούνται σε κατηγορίες. Παρακάτω θα οριστούν όλες οι κατηγορίες γραφημάτων που θα αναφερθούν στην παρούσα εργασία, οι οποίες μαζί με το μονοπάτι που ορίστηκε στην παραπάνω ενότητα αποτελούν βασικά γραφήματα στη θεωρία γραφημάτων με σημαντικές ιδιότητες.

Ορισμός 1.3.1. *Ένα γράφημα καλείται **κανονικό** αν όλες οι κορυφές του έχουν τον ίδιο βαθμό. Αν ο κοινός βαθμός είναι k τότε λέγεται **k - κανονικό**.*

Είναι η κατηγορία γραφημάτων που όλες οι κορυφές έχουν τον ίδιο βαθμό.

Παρατήρηση 1.3.1. *Τα 3-κανονικά γραφήματα ονομάζονται **κυβικά** .*



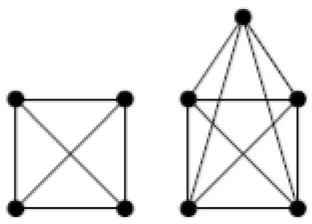
Σχήμα 1.6: Ένα 3-κανονικό γράφημα (κυβικό).

Ορισμός 1.3.2. *Ένα γράφημα καλείται **πλήρες γράφημα** ή **κλίκα** αν για κάθε ζεύγος κορυφών υπάρχει ακμή. Μία κλίκα με n κορυφές συμβολίζεται με K_n και ισχύει :*

$$K_n = \{\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \{\{u_i, u_j\} | 1 \leqslant i, j \leqslant n\}\}.$$

Είναι η κατηγορία γραφημάτων που όλες οι κορυφές ενώνονται μεταξύ τους με ακμή.

Παρατήρηση 1.3.2. *Ένα πλήρες γράφημα είναι και κανονικό .*



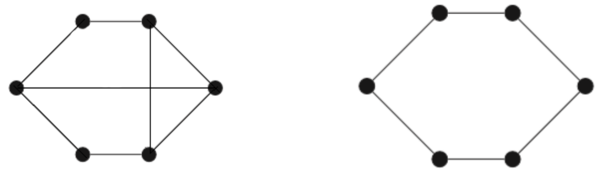
Σχήμα 1.7: Οι κλίκες K_4 και K_5.

Ορισμός 1.3.3. *Το γράφημα $G = (V, E)$ με $V(G) = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ και $\{u_i, u_{i+1}\} \cup \{u_1, u_n\} \in E(G)$, καλείται* ***κύκλος****. Το γράφημα με $n \geqslant 3$ κορυφές που ορίζεται ως*

$$C_n = \{\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}, \{\{u_i, u_{i+1}\} \mid 1 \leqslant i < n\} \cup \{u_n, u_1\}\}$$

καλείται ***άχορδος κύκλος****.*

Ο κύκλος είναι η κατηγορία γραφημάτων που είναι σαν μονοπάτι αλλά η τελευταία κορυφή ενώνεται με την πρώτη.



Σχήμα 1.8: Κύκλος 6 κορυφών και άχορδος κύκλος C_6.

Πόρισμα 1.3.1. *Η διαφορά μεταξύ του κύκλου και του άχορδου κύκλου είναι ότι στον κύκλο μπορεί να υπάρχουν και ακμές μεταξύ μη διαδοχικών κορυφών, που ονομάζονται* ***χορδές****, κάτι που στον άχορδο κύκλο δεν συμβαίνει. Ουσιαστικά κάθε άχορδος κύκλος είναι κύκλος, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει.*

Παρατήρηση 1.3.3. *Το πλήθος των ακμών ενός κύκλου C_n είναι ίσο με το πλήθος των κορυφών του, δηλαδή n .*

Παρατήρηση 1.3.4. *Το μήκος του κύκλου C_n ορίζεται ως το πλήθος των ακμών του, δηλαδή n .*

Παρατήρηση 1.3.5. *Το γράφημα C_3 λέγεται* ***τρίγωνο****. Θεωρείται και κλίκα, η K_3 .*

Ορισμός 1.3.4. *Ένα γράφημα $G = (V, E)$ καλείται* ***διμερές*** *αν το σύνολο κορυφών μπορεί να διαμεριστεί σε δύο μη κενά σύνολα που είναι ξένα μεταξύ τους, δηλαδή $V(G) = A \cup B$ και $A \cap B = \emptyset$, και για κάθε ακμή το ένα άκρο ανήκει στο A και το άλλο στο B, δηλαδή $\{u, v\} \in E(G) : u \in A, v \in B$. Τα σύνολα A και B καλούνται* ***διαμέριση*** *του G. Ένα διμερές γράφημα G συμβολίζεται ως $G = (A, B, E)$.*

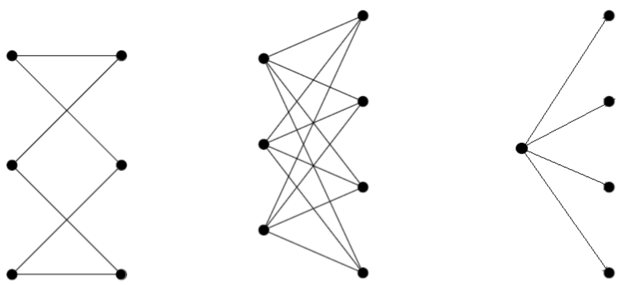
Είναι η κατηγορία γραφημάτων που το σύνολο κορυφών χωρίζεται σε δύο υποσύνολα ξένα μεταξύ τους και για δύο γειτονικές κορυφές ισχύει ότι η μία ανήκει στο ένα σύνολο και η άλλη στο άλλο.

Λήμμα 1.3.1. *Ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους.*

Ορισμός 1.3.5. *Ένα διμερές γράφημα $G = (A, B, E)$ καλείται* ***πλήρες διμερές γράφημα*** *αν για κάθε $u \in A$ και $v \in B$ υπάρχει ακμή $\{u, v\} \in E(G)$. Συμβολίζεται ως $K_{p,q}$ όπου $p = |A|$ και $q = |B|$.*

Είναι η κατηγορία γραφημάτων που είναι διμερή και πλήρη ταυτόχρονα.

Παρατήρηση 1.3.6. *Στην ειδική περίπτωση που $p = 1$, δηλαδή $K_{1,q}$, καλείται* ***αστέρας***.



Σχήμα 1.9: α)Ένα διμερές γράφημα, β)ένα πλήρες διμερές γράφημα $K_{3,4}$ και γ)ένας αστέρας $K_{1,4}$

Ορισμός 1.3.6. *Ένα γράφημα $G = (V, E)$ καλείται* ***συνεκτικό*** *αν υπάρχει μονοπάτι για κάθε ζεύγος κορυφών, δηλαδή $\forall\, u, v \in V(G)\ \exists\ (u, v)-$μονοπάτι στο G.*

Παρατήρηση 1.3.7. *Αν υπάρχει καθολική κορυφή u στο G τότε το γράφημα G είναι συνεκτικό.*

Παρατήρηση 1.3.8. *Αν $G - u$ είναι συνεκτικό με $deg(u) \geqslant 1$ τότε το G είναι συνεκτικό.*

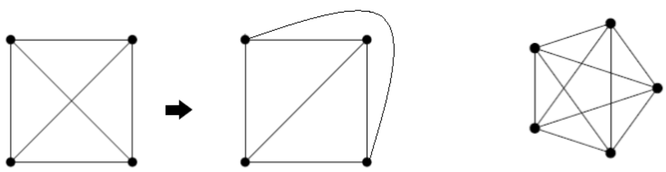
Ορισμός 1.3.7. *Μία* ***συνεκτική συνιστώσα*** *ενός γραφήματος G είναι ένα μεγιστοτικό (maximal) υπογράφημα του G που είναι συνεκτικό.*

Σημείωση 1.3.1. *Ένα υπογράφημα ενός γραφήματος G καλείται* ***μεγιστοτικό (maximal)*** *για μια συγκεκριμένη ιδιότητα, όταν έχει την ιδιότητα αυτή και κανένα υπερσύνολο του, που είναι επίσης υπογράφημα του G, δεν την έχει. Δεν πρέπει να συγχέεται με το μέγιστο (maximum).*

Τα συνεκτικά γραφήματα είναι η κατηγορία γραφημάτων που έχει ακριβώς μία συνεκτική συνιστώσα.

Σχήμα 1.10: Στα αριστερά είναι ένα συνεκτικό γράφημα και στα δεξιά ένα μη-συνεκτικό, το οποίο αποτελείται από δύο συνεκτικές συνιστώσες (τρίγωνα).

Ορισμός 1.3.8. *Ένα γράφημα καλείται* ***επίπεδο*** *αν μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά στο επίπεδο (R^2) με τέτοιο τρόπο ώστε δύο ακμές να έχουν κοινά σημεία μόνο κορυφές.*



Σχήμα 1.11: Το K_4 αποτελεί επίπεδο γράφημα, ενώ το K_5 όχι.

Είναι η κατηγορία γραφημάτων που μπορούν να αναπαρασταθούν στο επίπεδο με τέτοιο τρόπο που καμία ακμή να μην τέμνεται με άλλη.

Ορισμός 1.3.9. *Ένα γράφημα καλείται* ***εξωεπίπεδο (outerplanar)*** *αν είναι επίπεδο και όλες οι κορυφές του είναι στην εξωτερική όψη.*

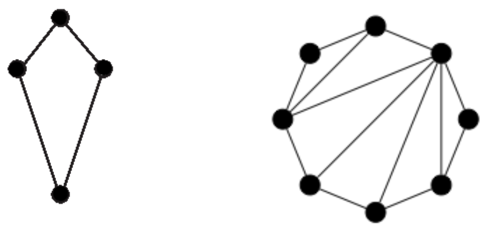
Είναι η κατηγορία γραφημάτων που είναι επίπεδα και καμία κορυφή δεν είναι τελείως περιτριγυρισμένη από ακμές.

Σημείωση 1.3.2. *Ένα γράφημα είναι εξωεπίπεδο αν με την προσθήκη μιας νέας κορυφής στο γράφημα και ενώνοντας την με ακμές με όλες τις κορυφές, το γράφημα είναι επίπεδο.*

Σημείωση 1.3.3. *Το πλήρες γράφημα K_4 είναι το μικρότερο επίπεδο γράφημα που δεν είναι εξωεπίπεδο.*

Ορισμός 1.3.10. *Ένα γράφημα καλείται **μεγιστοτικό εξωεπίπεδο** αν είναι εξωεπίπεδο και έχει όλες τις δυνατές ακμές μεταξύ των κορυφών.*

Είναι η κατηγορία γραφημάτων που είναι εξωεπίπεδα και δεν μπορούν να προστεθούν περισσότερες ακμές διατηρώντας τις κορυφές στην εξωτερική όψη.



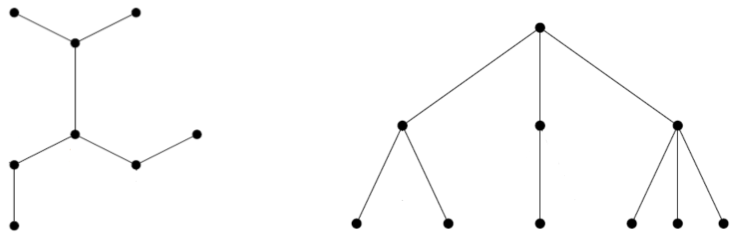
Σχήμα 1.12: Στα αριστερά είναι ένα εξωεπίπεδο γράφημα και στα δεξιά ένα μεγιστοτικό εξωεπίπεδο.

Ορισμός 1.3.11. *Ένα γράφημα καλείται **δέντρο** αν είναι συνεκτικό και άκυκλο (δεν περιέχει κύκλους) και συμβολίζεται με T.*

Ορισμός 1.3.12. *Μία κορυφή u ενός δέντρου με $deg(u) = 1$ καλείται **φύλλο**.*

Θεώρημα 1.3.1. *Ένα γράφημα G είναι δέντρο αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος κορυφών (u, v) του G υπάρχει μοναδικό (u, v) - μονοπάτι.*

Ορισμός 1.3.13. *Ένα δέντρο καλείται **ριζωμένο δέντρο** αν έχει οριστεί μία κορυφή ως ρίζα. Στις ακμές ενός ριζωμένου δέντρου μπορεί να δοθεί προσανατολισμός είτε προς είτε από τη ρίζα το οποίο καλείται **κατευθυνόμενο ριζωμένο δέντρο**. Για κάθε ακμή (u, v) το u καλείται **γονέας** της v και το v καλείται **παιδί** του u.*

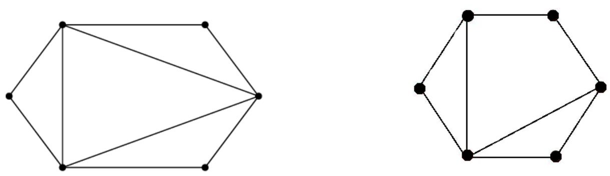


Σχήμα 1.13: α)Ένα δέντρο και β)ένα ριζωμένο δέντρο.

Ορισμός 1.3.14. *Ένα γράφημα καλείται* ***χορδικό (chordal)*** *αν για κάθε κύκλο τεσσάρων ή περισσότερων κορυφών υπάρχει χορδή .*

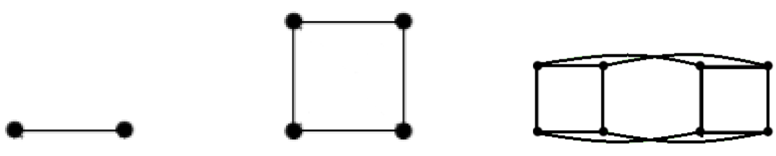
Είναι η κατηγορία γραφημάτων που δεν περιέχει κύκλο μεγαλύτερο από τρίγωνο.

Παρατήρηση 1.3.9. *Το δέντρο είναι χορδικό γράφημα.*



Σχήμα 1.14: α)Ένα χορδικό γράφημα και β)ένα μη-χορδικό γράφημα.

Ορισμός 1.3.15. *Ένα γράφημα καλείται* ***υπερκύβος*** *αν εφαρμοστεί το καρτεσιανό παράγωγο n φορές στο πλήρες γράφημα K_2, και συμβολίζεται ως* $Q_n = \square_{i=1}^{n} K_2$.



Σχήμα 1.15: α)Το $Q_1 = K_2$, β)το $Q_2 = \square_{i=1}^{2} K_2 = C_4$ και γ)το $Q_3 = \square_{i=1}^{3} K_2$.

1.4 Θεμελιώδης έννοιες της θεωρίας πολυπλοκότητας

Η θεωρία πολυπλοκότητας εξετάζει την αποδοτικότητα των αλγορίθμων. Η ύπαρξη αποδοτικών αλγορίθμων δίνει λύσεις σε προβλήματα της θεωρίας γραφημάτων. Η θεωρία πολυπλοκότητας ασχολείται κυρίως με **προβλήματα απόφασης**, δηλαδή προβλήματα που έχουν σαν έξοδο ναι ή όχι. Σε κάθε υπολογιστικό πρόβλημα μπορεί να αντιστοιχεί και ένα πρόβλημα απόφασης, έτσι ώστε αν υπάρχει αλγόριθμος για το πρόβλημα, τροποποιώντας τον επιλύεται και το πρόβλημα απόφασης. Δεν δημιουργεί πρόβλημα στην αποδοτικότητα η ενασχόληση από εδώ και πέρα με προβλήματα απόφασης αντί για υπολογιστικά.
Στην ενότητα αυτή θα οριστούν οι έννοιες του αλγόριθμου και της πολυπλοκότητας, και θα μελετηθούν τα όρια της πολυπλοκότητας μέσω της ασυμπτωτικής ανάλυσης, οι κλάσεις πολυπλοκότητας καθώς και οι αναγωγές.

Ορισμός 1.4.1. *Ο **αλγόριθμος** είναι μια πεπερασμένη σειρά ενεργειών, αυστηρά καθορισμένων και εκτελέσιμων σε πεπερασμένο χρόνο, που έχουν στόχο την επίλυση ενός προβλήματος.*

Ένας αλγόριθμος χαρακτηρίζεται ως αποδοτικός με βάση την πολυπλοκότητά του, η οποία μπορεί να είναι χρονική ή χωρική. Η παρούσα διατριβή εστιάζει στη χρονική πολυπλοκότητα, αν και θα γίνει μια μικρή αναφορά και στη χωρική.

Ορισμός 1.4.2. *Η **χρονική πολυπλοκότητα** ενός αλγορίθμου είναι μία συνάρτηση που αντιστοιχίζει ένα μέγεθος εισόδου στο πλήθος των λειτουργιών που εκτελούνται από τον αλγόριθμο για την επίλυση του προβλήματος.*

Οπότε η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου εξαρτάται από το μέγεθος εισόδου και τον αριθμό επαναλήψεων που απαιτούνται. Η ασυμπτωτική ανάλυση αποτελεί εργαλείο εκτίμησης της πολυπλοκότητας. Για την μελέτη της πολυπλοκότητας θα χρησιμοποιηθεί το ασυμπτωτικό άνω φράγμα, που εκφράζει το μεγαλύτερο χρονικό διάστημα που μπορεί να χρειαστεί για να ολοκληρωθεί ο αλγόριθμος. Παρόλο που αυτή η προσέγγιση αφορά την πολυπλοκότητα της χειρότερης περίπτωσης, αποτυπώνει αρκετά καλά την αποδοτικότητα στην πράξη, και επίσης, δεν υπάρχει εναλλακτική λύση εξίσου αποτελεσματική.

Ορισμός 1.4.3. ***(Ασυμπτωτικό άνω φράγμα - O)*** *Έστω $T, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $T(n)$ είναι $O(f(n))$, αν $\exists\ c > 0$ και $n_0 \geqslant 0$ τέτοιες ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει $T(n) \leqslant c \cdot f(n)$.*

Ισοδύναμα, έστω ότι για τις συναρτήσεις T(n), f(n) υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{f(n)}$ και έχει τιμή $\leqslant c$ για κάποια σταθερά c. Τότε το T(n) είναι τάξης O(f(n)).

Παράδειγμα 1.4.1. *Έστω ο αλγόριθμος με πολυπλοκότητα* $T(n) = 6n^4 + 5n^3 + logn$, *τότε* $T(n) = O(n^4)$.

Οι χρόνοι εκτέλεσης των αλγορίθμων ταξινομούνται σε λογαριθμικούς ($O(log(n))$), σε πολυωνυμικούς, για παράδειγμα γραμμικούς ($O(n)$), τετραγωνικούς ($O(n^2)$) κλπ, και σε εκθετικούς, για παράδειγμα $O(2^n)$.

Ορισμός 1.4.4. *Ο αλγόριθμος έχει* ***εκθετικό χρόνο εκτέλεσης*** *αν υπάρχουν σταθερές* $a > 0$, $c > 0$, $d > 0$ *και* $k \geqslant 0$ *τέτοιες ώστε για κάθε είσοδο μεγέθους* n, *ο χρόνος εκτέλεσης να φράσσεται από* $c \cdot a^{n^d log^k n}$ *στοιχειώδη υπολογιστικά βήματα.*

Παράδειγμα 1.4.2. *Έστω ο αλγόριθμος με πολυπλοκότητα* $n!$.
Αυτό φράσσεται ως εξής : $n! \leqslant n^n = 2^{nlogn}$, *δηλαδή* $c = 1, a = 2, d = 1$ *και* $k = 1$.

Οι αλγόριθμοι με εκθετική πολυπλοκότητα δεν είναι αποδοτικοί, καθώς για μεγάλα n ο χρόνος εκτέλεσης αυξάνεται εκθετικά. Σε αντίθεση με τους αλγόριθμους πολυωνυμικού χρόνου που είναι αποδοτικοί.

Ορισμός 1.4.5. *Ο αλγόριθμος έχει* ***πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης*** *αν υπάρχουν σταθερές* $c > 0$, $d > 0$ *και* $k \geqslant 0$ *τέτοιες ώστε για κάθε είσοδο μεγέθους* n, *ο χρόνος εκτέλεσης να φράσσεται από* $c \cdot n^d \cdot log^k n$ *στοιχειώδη υπολογιστικά βήματα.*

Παράδειγμα 1.4.3. *Έστω ο αλγόριθμος με πολυπλοκότητα* $n\ logn$.
Εδώ οι σταθερές είναι $c = 1, d = 1$ *και* $k = 1$.

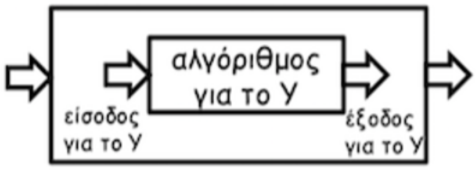
Τα προβλήματα μπορούν να ομαδοποιηθούν με βάση την πολυπλοκότητα των αλγορίθμων που τα επιλύουν. Αυτό επιτυγχάνεται με τις **κλάσεις πολυπλοκότητας**. Θα οριστούν οι κλάσεις πολυπλοκότητας P, NP, NP - πλήρης, NP - δύσκολο, EXP και co-NP.

Ορισμός 1.4.6. *Η* ***κλάση πολυπλοκότητας P*** *περιλαμβάνει όλα τα προβλήματα απόφασης που μπορούν να λυθούν από αλγόριθμους πολυωνυμικού χρόνου.*

Ουσιαστικά η κλάση P ταυτίζεται με την έννοια της αποδοτικότητας, αν και σε σπάνιες περιπτώσεις (με μεγάλους εκθέτες ή σταθερές) αυτό δεν ισχύει.

Τα προβλήματα κατηγοριοποιούνται σε αυτά που λύνονται πολυωνυμικά και σε αυτά που δεν λύνονται πολυωνυμικά. Το κυριότερο εργαλείο για να δειχθεί αν δύο προβλήματα είναι εξίσου δύσκολα, ή με άλλα λόγια αν ένα πρόβλημα ανήκει σε μια κλάση πολυπλοκότητας, είναι η αναγωγή.

Ορισμός 1.4.7. *Ως **αναγωγή** ορίζεται η διαδικασία κατά την οποία το πρόβλημα X ανάγεται πολυωνυμικά στο πρόβλημα Y αν κάθε στιγμιότυπο του X μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας πολυωνυμικό πλήθος υπολογιστικών βημάτων και πολυωνυμικό πλήθος κλήσεων της τεχνικής που λύνει το πρόβλημα Y. Συμβολίζεται ως* $X \leqslant_p Y$.



Σχήμα 1.16: Η είσοδος του X μετατρέπεται πολυωνυμικά σε είσοδο για το Y, επιλύεται το Y και δίνει μία έξοδο η οποία μετατρέπεται πολυωνυμικά σε έξοδος για το X.

Θεώρημα 1.4.1. *Αν* $X \leqslant_p Y$ *και το* Y *επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο τότε και το* X *λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.*

Θεώρημα 1.4.2. *Αν* $X \leqslant_p Y$ *και το* X *δεν επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο τότε και το* Y *δεν μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.*

Για να οριστεί η επόμενη κλάση, θα πρέπει πρώτα να δοθεί η έννοια του πιστοποιητή.

Ορισμός 1.4.8. *Ο αλγόριθμος* $C(s,t)$ *είναι ένας **πιστοποιητής** για το πρόβλημα* X*, αν για κάθε* s*, το* $s \in X$ *αν και μόνο αν υπάρχει ένα* t *τέτοιο ώστε* $C(s,t) = yes$

Ορισμός 1.4.9. *Η **κλάση πολυπλοκότητας NP** περιλαμβάνει όλα τα προβλήματα απόφασης για τα οποία υπάρχει πολυωνυμικός πιστοποιητής.*

Η κλάση NP περιέχει όλα τα προβλήματα των οποίων η λύση μπορεί να επαληθευτεί πολυωνυμικά.

Παρατήρηση 1.4.1. *Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι* $P \subseteq NP$.

Ορισμός 1.4.10. *Ένα πρόβλημα X καλείται* ***NP - πλήρες*** *αν το* $X \in NP$ *και για όλα τα* $Y \in NP$, $Y \leqslant_p X$.

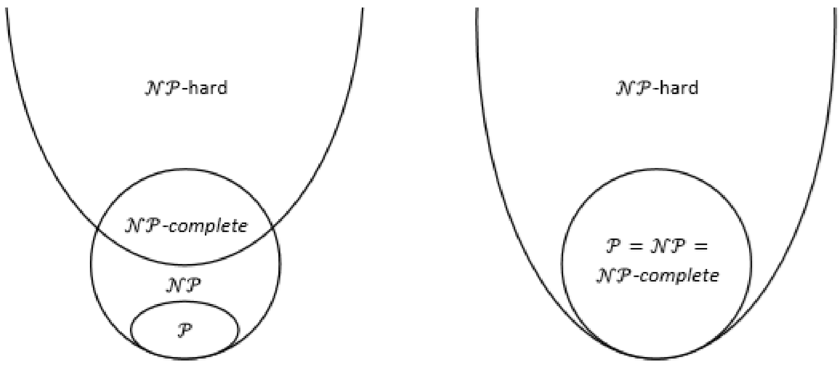
Ορισμός 1.4.11. *Η* ***κλάση πολυπλοκότητας NP-πλήρης*** *είναι υποσύνολο της κλάσης NP και περιλαμβάνει όλα τα προβλήματα που είναι NP- πλήρη.*

Θεώρημα 1.4.3. *Έστω Y ένα NP - πλήρες πρόβλημα. Τότε το Y λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο αν και μόνο αν* $P = NP$. *Ισχύει και η άρνησή του.*

Θεώρημα 1.4.4. *Αν Y ένα NP - πλήρες πρόβλημα, και* $X \in NP$ *με* $X \leqslant_p Y$ *τότε το X είναι NP - πλήρες πρόβλημα.*

Ορισμός 1.4.12. *Ένα πρόβλημα X καλείται* ***NP - δύσκολο*** *αν για όλα τα* $Y \in NP$, *ισχύει* $Y \leqslant_p X$.

Σημείωση 1.4.1. *Το μεγαλύτερο ανοιχτό πρόβλημα της επιστήμης των υπολογιστών αναφέρεται στην ερώτηση αν* $P = NP$ *ή* $P \neq NP$, *και η διαφορά τους φαίνεται στο σχήμα 1.17.*



Σχήμα 1.17: Οι κλάσεις πολυπλοκότητας στην περίπτωση που α) $P \neq NP$ και β) $P = NP$.

Ορισμός 1.4.13. *Η* ***κλάση πολυπλοκότητας EXP*** *περιλαμβάνει όλα τα προβλήματα απόφασης για τα οποία υπάρχει εκθετικός αλγόριθμος.*

Παρατήρηση 1.4.2. *Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι* $NP \subseteq EXP$. *Οπότε, γενικά ισχύει* $P \subseteq NP \subseteq EXP$.

Σχήμα 1.18: Η σχέση μεταξύ των κλάσεων πολυπλοκότητας EXP, P, NP για α) $P \neq NP$ και β) $P = NP$.

Η τελευταία κλάση που θα οριστεί και αφορά την χρονική πολυπλοκότητα είναι το συμπλήρωμα της NP.

Ορισμός 1.4.14. *Δεδομένου ενός προβλήματος απόφασης X,* ***το συμπλήρωμα*** $\overline{X}$ *είναι το ίδιο πρόβλημα με ναι και όχι απαντήσεις αλλά αντίστροφα.*

Παράδειγμα 1.4.4. *Αν* $X = \{0, 1, 6, \ldots\}$ *το* $\overline{X} = \{2, 3, 5, \ldots\}$.

Ορισμός 1.4.15. *Η* ***κλάση πολυπλοκότητας co-NP*** *περιλαμβάνει τα συμπληρώματα των προβλημάτων απόφασης της NP.*

Τέλος, θα γίνουν κάποιες αναφορές για την χωρική πολυπλοκότητα.

Ορισμός 1.4.16. *Η* ***χωρική πολυπλοκότητα*** *ενός αλγορίθμου αναφέρεται στο πόσο χώρο στη μνήμη χρειάζεται ο αλγόριθμος, για την επίλυση του προβλήματος, σε συνάρτηση με το μέγεθος εισόδου του.*

Ορισμός 1.4.17. *Η* ***κλάση πολυπλοκότητας PSPACE*** *περιλαμβάνει όλα τα προβλήματα απόφασης τα οποία λύνονται σε πολυωνυμικό χώρο.*

Παρατήρηση 1.4.3. *Ισχύει ότι* $P \subseteq PSPACE$. *Ο αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου μπορεί να καταναλώνει μόνο πολυωνυμικό χώρο.*

Θεώρημα 1.4.5. *Ισχύει ότι* $PSPACE \subseteq EXP$.

Ορισμός 1.4.18. *Η* ***κλάση πολυπλοκότητας EXPSPACE*** *περιλαμβάνει όλα τα προβλήματα απόφασης τα οποία λύνονται σε εκθετικό χώρο.*

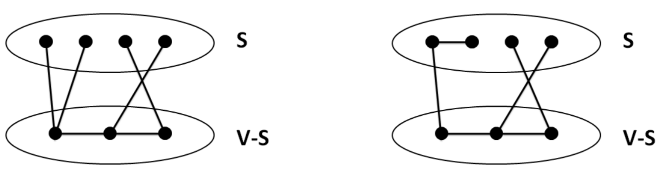
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Πτωτικός χρωματισμός και άλλα είδη χρωματισμών

Στη θεωρία γραφημάτων το πρόβλημα του χρωματισμού είναι ένα από τα πιο διάσημα προβλήματα με αρκετές πρακτικές εφαρμογές σε διάφορους τομείς, για αυτό και αποτελεί ένα ενεργό πεδίο έρευνας. Στο κεφάλαιο αυτό, πρώτα, θα δοθούν δύο θεμελιώδεις έννοιες, του ανεξάρτητου συνόλου και του κυρίαρχου συνόλου, που είναι χρήσιμες στο πρόβλημα του χρωματισμού. Έπειτα, θα δοθούν ορισμοί, ιδιότητες, παραδείγματα και εφαρμογές για διάφορους χρωματισμούς, καθώς και η σχέση μεταξύ τους. Ο βασικός χρωματισμός που ασχολείται η παρούσα εργασία είναι ο πτωτικός χρωματισμός και θα οριστεί και το αντίστοιχο πρόβλημα. Παρόλα αυτά, θα οριστεί τελευταίος καθώς χρησιμοποιεί έννοιες που σχετίζονται με τους υπόλοιπους χρωματισμούς.

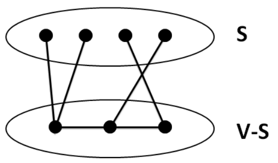
2.1 Ανεξάρτητο σύνολο και Κυρίαρχο σύνολο

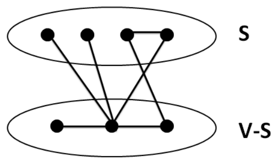
Ορισμός 2.1.1. *([18]) Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$ και έστω ένα $S \subseteq V$. Το S καλείται* ***ανεξάρτητο σύνολο*** *αν οι κορυφές που ανήκουν στο S δεν είναι ανά δύο γειτονικές.*



Σχήμα 2.1: Το S στα αριστερά είναι ανεξάρτητο σύνολο ενώ στα δεξιά όχι.

Ορισμός 2.1.2. *([18]) Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$ και έστω ένα $S \subseteq V$. Το S καλείται **κυρίαρχο σύνολο** αν για κάθε κορυφή του V ισχύει ότι είτε ανήκει στο S, είτε είναι γειτονική με μια κορυφή του S.*



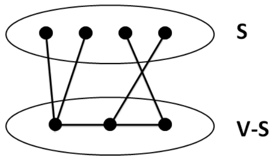


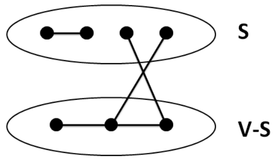
Σχήμα 2.2: Στα αριστερά το S είναι κυρίαρχο σύνολο ενώ στα δεξιά όχι.

Ορισμός 2.1.3. *([8]) Το ελάχιστο πλήθος στοιχείων ενός κυρίαρχου συνόλου σε ένα γράφημα G καλείται **αριθμός κυριαρχίας** (domination number) του G και συμβολίζεται $\gamma(G)$.*

Ορισμός 2.1.4. *([17]) Μια διαμέριση του συνόλου $V(G)$ σε διακεκριμένα κυρίαρχα σύνολα καλείται **κυρίαρχη διαμέριση** (domatic partition) και ο μεγαλύτερος αριθμός συνόλων σε οποιαδήποτε κυρίαρχη διαμέριση του γραφήματος G καλείται **κυρίαρχος αριθμός** (domatic number) και συμβολίζεται $d(G)$.*

Ορισμός 2.1.5. *([8]), ([17]) Ένα σύνολο $S \subseteq V(G)$ είναι ένα **ανεξάρτητο κυρίαρχο σύνολο** αν ταυτόχρονα είναι και ανεξάρτητο και κυρίαρχο. Το ελάχιστο πλήθος στοιχείων ενός ανεξάρτητου κυρίαρχου συνόλου σε ένα γράφημα G καλείται **αριθμός ανεξαρτησίας και κυριαρχίας** (independent domination number) του G και συμβολίζεται $i(G)$.*





Σχήμα 2.3: Στα αριστερά το S είναι ανεξάρτητο κυρίαρχο σύνολο ενώ στα δεξιά όχι.

Ορισμός 2.1.6. *([8]) Μια διαμέριση του συνόλου $V(G)$ σε ανεξάρτητα κυρίαρχα σύνολα καλείται **idomatic διαμέριση** και ο μεγαλύτερος αριθμός συνόλων σε οποιαδήποτε idomatic διαμέριση του γραφήματος G καλείται **idomatic αριθμός** και συμβολίζεται $id(G)$.*

Παρατήρηση 2.1.1. *([8]) Έστω ένα γράφημα G, το οποίο δεν έχει idomatic διαμέριση, τότε $id(G) = 0$.*

Σημείωση 2.1.1. *([8]) Τα διακεκριμένα ανεξάρτητα κυρίαρχα σύνολα ενός γραφήματος μελετήθηκαν πρώτα από τους Cockayne και Hedetniemi το 1976 και όρισαν το μέγιστο αριθμό των διακεκριμένων ανεξάρτητων κυρίαρχων συνόλων που μπορούν να βρεθούν σε ένα γράφημα G ίσο με μία* ***παράμετρο*** *$b(G)$. Επιπλέον ονόμασαν* ***indominable*** *γράφημα εκείνο που το σύνολο κορυφών του, $V(G)$, διαμερίζεται (πλήρως) σε διακεκριμένα ανεξάρτητα κυρίαρχα σύνολα. Το 1977 εισήχθηκε από τους ίδιους η έννοια του κυρίαρχου αριθμού.*

2.2 k - Χρωματισμός

Ορισμός 2.2.1. *([18]) Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Ένας* ***k - χρωματισμός*** *του G είναι μία συνάρτηση $c : V \to [k]$, με $[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$, για έναν θετικό ακέραιο k. Ο χρωματισμός είναι k - χρωματισμός για κάποιο $k \leqslant |V|$.*

Ορισμός 2.2.2. *([18]), ([8]) Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Ένας k - χρωματισμός είναι* ***κατάλληλος k - χρωματισμός*** *αν $c(u) \neq c(v)$ για κάθε ακμή $uv \in E$. Εναλλακτικά, ένας κατάλληλος k - χρωματισμός είναι μία διαμέριση $\Pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ του συνόλου κορυφών $V(G)$ σε ανεξάρτητα σύνολα V_i, τα οποία ονομάζονται* ***χρωματικές κλάσεις****.*

Ορισμός 2.2.3. *([18]) Ένα γράφημα $G = (V, E)$ καλείται* ***k - χρωματίσιμο*** *αν υπάρχει κατάλληλος k - χρωματισμός.*

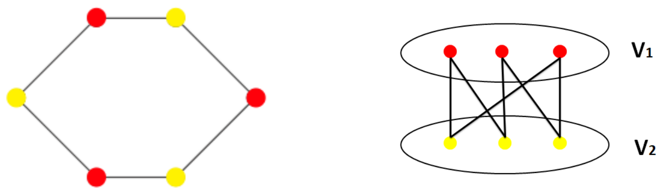
Ορισμός 2.2.4. *([18]) Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Ο ελάχιστος ακέραιος k για τον οποίο ένα γράφημα G έχει έναν k - χρωματισμό καλείται* ***χρωματικός αριθμός*** *του G και συμβολίζεται $\chi(G)$.*

Ορισμός 2.2.5. *([8]) Ένα χρωματισμός καλείται* ***πλήρης*** *αν για κάθε $1 \leqslant i < j \leqslant k$, υπάρχει μία κορυφή $u \in V_i$ και μία κορυφή $v \in V_j$ τέτοιες ώστε u και v να ναι γειτονικές.*

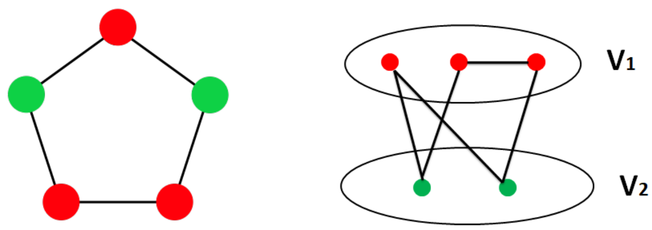
Ορισμός 2.2.6. *([8]) Η μέγιστη τάξη ενός πλήρους χρωματισμού ενός γραφήματος G καλείται* ***achromatic αριθμός*** *και συμβολίζεται $\psi(G)$.*

Παρατήρηση 2.2.1. *([8]) Κάθε χρωματισμός του G με $\chi(G)$ χρώματα πρέπει να ναι πλήρης χρωματισμός. Επίσης, ο achromatic αριθμός αποτελεί το άνω όριο του χρωματικού αριθμού ενός γραφήματος, δηλαδή για οποιοδήποτε G ισχύει $\chi(G) \leqslant \psi(G)$.*

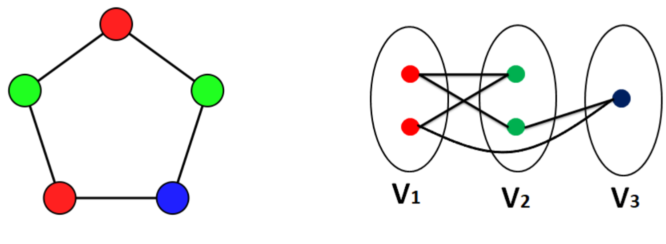
Παράδειγμα 2.2.1. *Ο κύκλος C_6 είναι 2 - χρωματίσιμος, ενώ ο C_5 δεν είναι 2 - χρωματίσιμος, γιατί χάνεται η ανεξαρτησία των συνόλων, αλλά είναι 3 - χρωματίσιμος. Μάλιστα, $\chi(C_6) = 2$ και $\chi(C_5) = 3$.*



Σχήμα 2.4: Ο κύκλος C_6 και οι χρωματικές κλάσεις του 2 - χρωματισμού του.



Σχήμα 2.5: Ο κύκλος C_5 και γιατί δεν έχει 2 - χρωματισμό.



Σχήμα 2.6: Ο κύκλος C_5 και οι χρωματικές κλάσεις του 3 - χρωματισμού του.

2.3 Grundy k - χρωματισμός

Ορισμός 2.3.1. *([8]) Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Ένας* ***Grundy k - χρωματισμός*** *του γραφήματος G είναι ένας k - χρωματισμός $\Pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$*

τέτοιος ώστε για κάθε χρωματική κλάση V_i, $1 < i \leqslant k$, κάθε κορυφή $u \in V_i$ είναι γειτονική με τουλάχιστον μία κορυφή της χρωματικής κλάσης V_j για κάθε $j < i$.

Ορισμός 2.3.2. *([8]) Ο μέγιστος ακέραιος k για τον οποίο το γράφημα G έχει Grundy k - χρωματισμό ονομάζεται **Grundy αριθμός** και συμβολίζεται $\Gamma(G)$.*

Σημείωση 2.3.1. *([8]) Ο Grundy αριθμός μελετήθηκε πρώτα από τους Christen και Selkow. Αργότερα, στην εργασία ([13]) αποδείχθηκε ότι ο Grundy αριθμός ικανοποιεί την ανισότητα $\chi(G) \leqslant \Gamma(G) \leqslant \psi(G)$. Επίσης κάθε Grundy χρωματισμός είναι ένας πλήρης χρωματισμός και ο ελάχιστος ακέραιος k για τον οποίον ένα γράφημα G έχει Grundy k - χρωματισμό είναι πάντα ίσος με το χρωματικό αριθμό $\chi(G)$ ενώ υπάρχει γράφημα G τέτοιο ώστε $\Gamma(G) < \psi(G)$.*

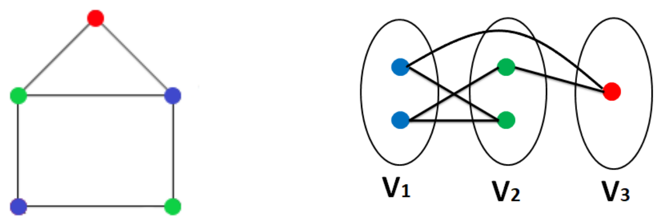
Ορισμός 2.3.3. *([8]) Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$, έστω ένας χρωματισμός $\Pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ του G και έστω $u \in V_i$ για $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Η κορυφή u καλείται **Grundy κορυφή** αν είναι γειτονική με τουλάχιστον μία κορυφή σε κάθε σύνολο V_j, $1 \leqslant j < i$.*

Ορισμός 2.3.4. *([8]) Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$ και έστω ένας χρωματισμός $\Pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ του G. Ο χρωματισμός Π καλείται **μερικώς Grundy χρωματισμός** αν κάθε χρωματική κλάση V_i περιέχει τουλάχιστον μία Grundy κορυφή, για κάθε $2 \leqslant i \leqslant k$.*

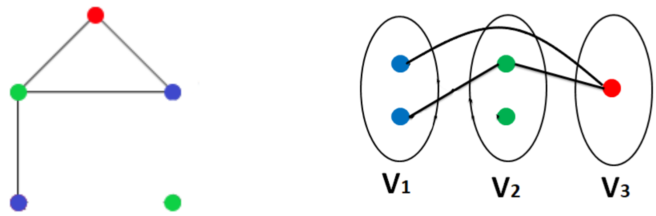
Ορισμός 2.3.5. *([8]) Η μέγιστη τάξη ενός μερικού Grundy χρωματισμού ονομάζεται **μερικώς Grundy αριθμός** και συμβολίζεται $\partial\Gamma(G)$.*

Παρατήρηση 2.3.1. *([8]) Αφού κάθε Grundy χρωματισμός ενός γραφήματος είναι και μερικώς Grundy χρωματισμός τότε $\Gamma(G) \leqslant \partial\Gamma(G)$.*

Παράδειγμα 2.3.1. *Το παρακάτω γράφημα έχει Grundy k - χρωματισμό, συνεπώς και μερικώς Grundy k - χρωματισμό.*



Παράδειγμα 2.3.2. *Το παρακάτω γράφημα δεν έχει Grundy k - χρωματισμό, αλλά έχει μερικώς Grundy k - χρωματισμό, και αυτό δείχνει ότι δεν ισχύει και η ανάποδη συνεπαγωγή ($\Leftarrow$) στην παρατήρηση 2.3.1.*



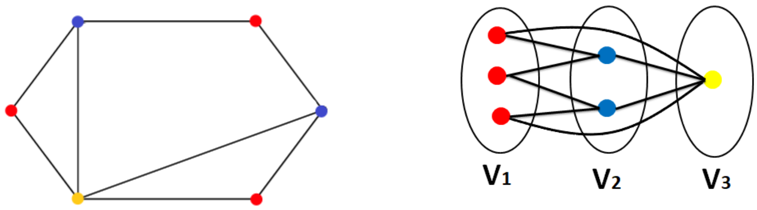
2.4 Πολύχρωμος χρωματισμός

Ορισμός 2.4.1. *([18]) Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$ και έστω μια διαμέριση $\Pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ του V. Μία κορυφή $u \in V_i$ για $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ καλείται* ***πολύχρωμη κορυφή*** *αν u είναι γειτονική με τουλάχιστον μια κορυφή σε κάθε χρωματική κλάση V_j για $i \neq j$.*

Ορισμός 2.4.2. *([17]) Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$ και έστω μια διαμέριση $\Pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ του V. Μία χρωματική κλάση V_i για $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ καλείται* ***πολύχρωμη χρωματική κλάση*** *αν περιέχει τουλάχιστον μια πολύχρωμη κορυφή.*

Ορισμός 2.4.3. *([17]) Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$ και έστω μια διαμέριση $\Pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ του V. Ο χρωματισμός Π καλείται* ***πολύχρωμος χρωματισμός*** *αν κάθε χρωματική κλάση είναι πολύχρωμη.*

Παράδειγμα 2.4.1. *Το παρακάτω γράφημα έχει πολύχρωμο 3 - χρωματισμό.*



Ορισμός 2.4.4. *([17]) Η μέγιστη τάξη ενός πολύχρωμου χρωματισμού ενός γραφήματος G καλείται* ***b - χρωματικός αριθμός*** *και συμβολίζεται $\phi(G)$.*

Παρατήρηση 2.4.1. *([8]) Προκύπτει εύκολα από τον ορισμό ότι κάθε πολύχρωμος χρωματισμός είναι πλήρης χρωματισμός. Οπότε για κάθε γράφημα G ισχύει $\chi(G) \leqslant \phi(G) \leqslant \psi(G)$. Επιπρόσθετα, η ελάχιστη τάξη ενός πολύχρωμου χρωματισμού είναι ίση με τον χρωματικό αριθμό $\chi(G)$.*

Παρατήρηση 2.4.2. *([8]) Στην εργαασία ([16]) έχει παρατηρηθεί ότι δεν υπάρχει σχέση ανισότητας μεταξύ $\phi(G)$ και $\Gamma(G)$.*

Σημείωση 2.4.1. *([8]) Ο πολύχρωμος χρωματισμός και ο b - χρωματικός αριθμός εισήχθηκαν από τους Irving και Manlove το 1997.*

2.5 Πτωτικός χρωματισμός

Ορισμός 2.5.1. *([18]) Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$ και έστω μια διαμέριση $\Pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ του V. Η διαμέριση Π είναι* ***πτωτικά k - χρωματίσιμη*** *αν κάθε V_i είναι ανεξάρτητο σύνολο και κάθε κορυφή $u \in V$ είναι πολύχρωμη.*

Σημείωση 2.5.1. *([18]) Ουσιαστικά, σε έναν πτωτικό χρωματισμό, κάθε κορυφή είναι γειτονική με κάθε χρώμα πέρα από το δικό της.*

Παρατήρηση 2.5.1. *([8]) Εναλλακτικά, ένα γράφημα έχει πτωτικό χρωματισμό αν και μόνο αν το γράφημα είναι indominable.*

Ορισμός 2.5.2. *([18]) Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Ο ελάχιστος ακέραιος k για τον οποίο ένα γράφημα G έχει έναν πτωτικό k - χρωματισμό καλείται* ***πτωτικός χρωματικός αριθμός*** *του G και συμβολίζεται $\chi_f(G)$.*

Ορισμός 2.5.3. *([18]) Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Ο μέγιστος ακέραιος k για τον οποίο ένα γράφημα G έχει έναν πτωτικό k - χρωματισμό καλείται* ***πτωτικός achromatic αριθμός*** *του G και συμβολίζεται $\psi_f(G)$.*

Παρατήρηση 2.5.2. *([18]) Από τους ορισμούς του $\chi_f(G)$ και $\psi_f(G)$ προκύπτει ότι $\chi(G) \leqslant \chi_f(G)$ και $\psi_f(G) \leqslant \delta(G) + 1$.*

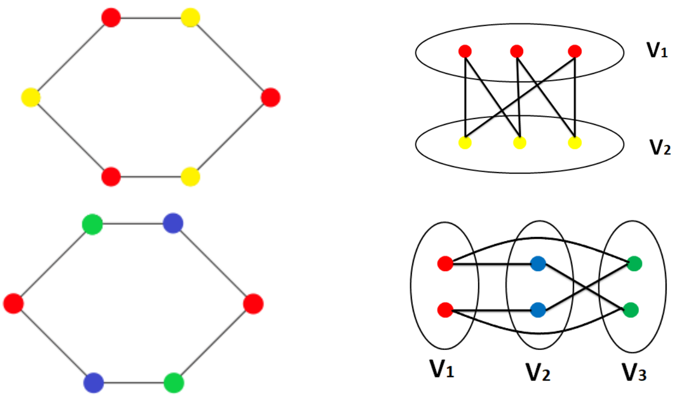
Πρόταση 2.5.1. *([8]) Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι $\psi_f(G) = id(G)$.*

Απόδειξη. Έστω $\Pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ ένας πτωτικός χρωματισμός του $G = (V, E)$, με $k = \psi_f(G)$ χρώματα και υποθέτουμε ότι $k > 0$. Αφού Π είναι ένας χρωματισμός τότε κάθε χρωματική κλάση V_i είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο. Επιπλέον, αφού κάθε κορυφή είναι πολύχρωμη λόγω του πτωτικού χρωματισμού, τότε για κάθε κορυφή $u \in V - V_i$ πρέπει να είναι γειτονική με τουλάχιστον μία κορυφή σε κάθε χρωματική κλάση V_i. Άρα, V_i κυρίαρχο σύνολο, οπότε Π είναι μια idomatic διαμέριση και $\psi_f(G) \leqslant id(G)$.
Αντίστροφα, έστω $\Pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ μία διαμέριση του $V(G)$ σε $k = id(G)$ ανεξάρτητα κυρίαρχα σύνολα. Έστω $u \in V_i$ και έστω $V_j, j \neq i$ ένα αυθαίρετο σύνολο του Π. Αφού V_j ανεξάρτητο, κυρίαρχο σύνολο του G, πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία κορυφή στο V_j που είναι γειτονική με το u. Άρα η u είναι πολύχρωμη και το Π ένας πτωτικός k χρωματισμός. Οπότε $id(G) \leqslant \psi_f(G)$. □

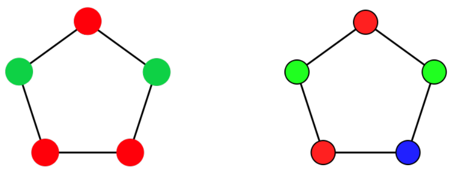
Ορισμός 2.5.4. *([18]) Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Το* ***πτωτικό σύνολο*** *του G, συμβολίζεται ως $Fall(G)$, και είναι το σύνολο των ακεραίων k για τους οποίους το G έχει έναν πτωτικό k - χρωματισμό.*

Το σύνολο Fall(G) για πεπερασμένα γραφήματα είναι πεπερασμένο. Γενικά μπορεί να είναι και κενό, $Fall(G) = \emptyset$, αν το γράφημα G δεν έχει πτωτικό k - χρωματισμό για κάποιο k. Αυτό, αλλιώς συμβολίζεται και ως $\chi_f(G) = 0$. Αξίζει, επίσης, να σημειωθεί ότι κάθε γράφημα έχει πολύχρωμο χρωματισμό, ενώ δεν υπάρχει απαραίτητα για κάθε γράφημα πτωτικός k - χρωματισμός, για οποιοδήποτε k.

Παράδειγμα 2.5.1. *Ο 6-κύκλος C_6 έχει $Fall(C_6) = \{2, 3\} = \{\chi_f(C_6), \psi_f(C_6)\}$, ενώ ο 5-κύκλος C_5 έχει $Fall(C_5) = \emptyset$ αλλά έχει $\chi(C_5) = 3$.*



Σχήμα 2.7: Ο κύκλος C_6 με τους δύο πτωτικούς χρωματισμούς του.



Σχήμα 2.8: Ο κύκλος C_5 δεν έχει πτωτικό 2-χρωματισμό, γιατί χάνεται η ανεξαρτησία των συνόλων. Επίσης, ούτε πτωτικό 3-χρωματισμό και πάνω έχει, καθώς χάνεται η πολυχρωμία. Φαίνεται όμως, ότι έχει 3 - χρωματισμό, δείχθηκε και παραπάνω.

Σημείωση 2.5.2. *Αν ένα γράφημα έχει πτωτικό k - χρωματισμό σίγουρα έχει και k - χρωματισμό. Επιπλέον, αν ένα γράφημα δεν έχει k - χρωματισμό, σίγουρα δεν έχει και πτωτικό k - χρωματισμό.*

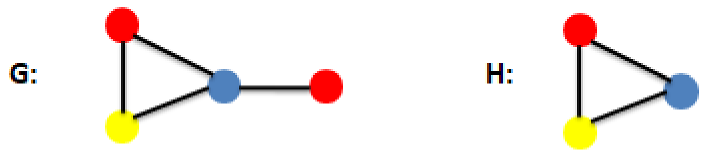
Ορισμός 2.5.5 (**Ορισμός Προβλήματος Πτωτικού Χρωματισμού** [**18**]). *Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Μπορεί το V να διαμεριστεί σε k ανεξάρτητα, κυρίαρχα σύνολα, τέτοια ώστε το $k \in Fall(G)$ ·*

2.5.1 Πτωτικός υποχρωματισμός

Ορισμός 2.5.6. *([8]) Ένας* ***πτωτικός υποχρωματισμός*** *ενός γραφήματος $G = (V, E)$ είναι ένας πτωτικός χρωματισμός ενός επαγόμενου υπογραφήματος H του G.*

Ορισμός 2.5.7. *([8]) Ο μέγιστος ακέραιος k για τον οποίο ένα γράφημα G έχει έναν πτωτικό k - υποχρωματισμό καλείται* ***πτωτικός achromatic υποαριθμός*** *του G και συμβολίζεται $\psi_{f_s}(G)$.*

Μία σημαντική διαφορά μεταξύ του πτωτικού χρωματισμού και του πτωτικού υποχρωματισμού είναι ότι παρόλο που ένα γράφημα δεν είναι απαραίτητο να έχει έναν πτωτικό χρωματισμό, κάθε γράφημα έχει έναν πτωτικό υποχρωματισμό. Άρα για κάθε γράφημα G ορίζεται $\psi_{f_s}(G)$. Επιπρόσθετα, αν ένα γράφημα G έχει πτωτικό χρωματισμό, τότε $\psi_f(G) \leqslant \psi_{f_s}(G)$. Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η διαφορά ανάμεσα στα $\psi_f(G)$ και $\psi_{f_s}(G)$ μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλη. Ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα αποτελεί το γράφημα G το οποίο περιέχει ένα πλήρες διμερές γράφημα $K_{n,n}$ εκτός του των ακμών M του τέλειου ταιριάσματος, μια κορυφή η οποία είναι γειτονική με μια τελική κορυφή. Αφού $\psi_f(G) \leqslant \delta(G) + 1$, τότε για το γράφημα $\psi_f(G) = 2$, ενώ $\psi_{f_s}(G) = n$.



Σχήμα 2.9: Το γράφημα G δεν έχει πτωτικό 3-χρωματισμό, ενώ το επαγόμενο υπογράφημα H έχει.

Ορισμός 2.5.8. *([8]) Ο μέγιστος αριθμός κορυφών σε ένα πλήρες υπογράφημα ενός γραφήματος G συμβολίζεται $\omega(G)$.*

Για οποιοδήποτε γράφημα G ισχύει $\omega(G) \leqslant \psi_{f_s}(G)$

2.6 Συσχετίσεις μεταξύ χρωματισμών

Στην ενότητα αυτή, μελετάται η σχέση των διάφορων χρωματισμών που προαναφέρθηκαν, εκτός από τον πτωτικό υποχρωματισμό, αφού αναφέρεται σε υπογραφήματα. Θεωρείται ότι κάθε γράφημα έχει πτωτικό χρωματισμό και άρα $\chi_f(G)$ και $\psi_f(G)$ είναι καλά ορισμένα.
([8]) Η παρακάτω πρόταση προκύπτει από τους ορισμούς των τύπων των χρωματισμών που ορίστηκαν παραπάνω καθώς και των παρακάτω πέντε παρατηρήσεων:
1. κάθε πτωτικός k - χρωματισμός είναι πολύχρωμος k - χρωματισμός,
2. κάθε πτωτικός k - χρωματισμός είναι Grundy k - χρωματισμός,
3. κάθε πολύχρωμος k - χρωματισμός είναι πλήρης k - χρωματισμός,
4. κάθε Grundy k - χρωματισμός είναι μερικώς Grundy k - χρωματισμός,
5. κάθε μερικώς Grundy k - χρωματισμός είναι πλήρης k - χρωματισμός

Πρόταση 2.6.1. *([8]) Αν ένα γράφημα έχει πτωτικό χρωματισμό, τότε*

$$\chi(G) \leqslant \chi_f(G) \leqslant \psi_f(G) \leqslant \{\phi(G), \Gamma(G)\} \leqslant \partial\Gamma(G) \leqslant \psi(G)$$

.

Με βάση την παραπάνω αλυσίδα ανισότητας, αξίζει να σημειωθεί, για κάθε διαδοχικό ζευγάρι παραμέτρων, αν υπάρχουν κλάσεις γραφημάτων για τις οποίες αυτές οι παράμετροι είναι διαφορετικές, ή για τις οποίες η διαφορά της τιμής μεταξύ των δύο παραμέτρων μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλη.

- Ξεκινώντας με την ανισότητα $\chi(G) \leqslant \chi_f(G)$, έχει παρατηρηθεί ότι δεν μπορεί να κατασκευαστεί G για το οποίο $\chi(G) - \chi_f(G) \geqslant 3$. Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα μπορούν να θεωρηθούν τα γραφήματα $G_1 = C_4 \square C_5$ που έχει $\chi(G_1) = 3$ και $\chi_f(G_1) = 4$ και $G_2 = C_5 \square C_5$ που έχει $\chi(G_2) = 3$ και $\chi_f(G_2) = 5$.

- Για την σχέση $\chi_f(G) \leqslant \psi_f(G)$ από την εργασία ([4]) συνεπάγεται ότι η διαφορά τους μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλη. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί το γράφημα $H = K_{n,n} - e$, το οποίο έχει $\chi_f(H) = 2$ και $\psi_f(H) = n$, με H να είναι ένα πλήρες γράφημα χωρίς μία ακμή.

- Για την σχέση $\psi_f(G) \leqslant \phi(G)$, έστω ένα μονοπάτι P_n με κορυφές $u_1, u_2, \ldots, u_n$, και σε κάθε κορυφή $u_i, 1 \leqslant i \leqslant n$,προσθέτοντας $n-2$ εκκρεμείς κορυφές, κατασκευάζεται το γράφημα H για το οποίο ισχύει ότι $\psi_f(H) = 2$ και $\phi(H) = n$.

- Η επόμενη ανισότητα είναι $\psi_f(G) \leqslant \Gamma(G)$. Για οποιοδήποτε γράφημα ισχύει ότι $\psi_f(G) \leqslant \delta(G)+1$ αφού κάθε κορυφή πρέπει να είναι πολύχρωμη. Επιπρόσθετα, για οποιοδήποτε δέντρο Τ ισχύει $\psi_f(T) = 2$. Παρόλα αυτά, για οποιοδήποτε ακέραιο k, υπάρχει ένα $T(k)$ τέτοιο ώστε $\Gamma(T(k)) = k$, το οποίο είναι γνωστό ως διωνυμικό δέντρο B_k.
  Σημείωση: Ένα **διωνυμικό δέντρο**, συμβολίζεται B_k και κατασκευάζεται ως εξής:
  1) Έστω $T(1)$: ένα δέντρο με μία μόνο κορυφή,
  2) Έστω $T(k)$: μπορεί να κατασκευαστεί από το $T(k-1)$ προσθέτοντας μια εκκρεμή κορυφή σε κάθε κορυφή του $T(k-1)$.
  Ένα διωνυμικό δέντρο B_k έχει 2^{k-1} κορυφές.

- Για την ανισότητα $\Gamma(G) \leqslant \partial\Gamma(G)$ έστω ένα μονοπάτι P_n με κορυφές $u_1, u_2, \ldots, u_n$, και σε κάθε κορυφή $u_i, 3 \leqslant i \leqslant n$,προσθέτοντας $i-2$ εκκρεμείς κορυφές, κατασκευάζεται το γράφημα Η για το οποίο ισχύει ότι $\Gamma(H) = 4$ και $\partial\Gamma(H) = n$.
  Σημείωση: Για $n = 3$ δεν ισχύει η σχέση αυτή καθώς κατασκευάζοντας το γράφημα Η καταλήγει πάλι σε μονοπάτι.

- Για τη σχέση $\phi(G) \leqslant \partial\Gamma(G)$ η διαφορά των $\phi(G)$ και $\partial\Gamma(G)$ μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλη. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι αν ένα γράφημα G έχει $\phi(G) = k+1$, τότε πρέπει να έχει τουλάχιστον $k+1$ κορυφές με βαθμό τουλάχιστον k. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η παραπάνω κατασκευή Η που έχει $\phi(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ και $\partial\Gamma(G) = n$.

- Για την τελευταία ανισότητα $\partial\Gamma(G) \leqslant \psi(G)$ η διαφορά, μεταξύ τους μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλη. Για οποιοδήποτε γράφημα G ισχύει ότι $\partial\Gamma(G) \leqslant \Delta(G)+1$. Έπεται λοιπόν ότι για ένα μονοπάτι P_n ισχύει $\partial\Gamma(P_n) \leqslant 3$. Όμως, για επαρκώς μεγάλο n ισχύει ότι $\psi(P_n) = k$ για κάποιο θετικό ακέραιο k. Ειδικότερα, αν ο k είναι περιττός, και $n = k(k-1)/2$ τότε $\psi(P_n) = k$.

2.7 Ορισμένες εφαρμογές χρωματισμών

Ο χρωματισμός γραφημάτων έχει αρκετές πρακτικές αλλά και θεωρητικές εφαρμογές. Ιστορικά, οι πρώτοι χρωματισμοί γραφημάτων αφορούσαν το χρωματισμό χαρτών με τη βοήθεια των επίπεδων γραφημάτων. Ουσιαστικά, όταν μια περιοχή συνόρευε με μια άλλη θα έπρεπε να έχουν διαφορετικό χρώμα. Το 1852 πρώτος ο Francis Guthrie, προσπαθώντας να χρωματίσει ένα χάρτη της Αγγλίας, διατύπωσε ότι τέσσερα χρώματα είναι επαρκή για να χρωματίσεις τον χάρτη και να μην συνορεύουν περιοχές με το ίδιο χρώμα. Από τότε μέχρι σήμερα ο χρωματισμός γραφημάτων έχει αρκετές εφαρμογές πέρα από τους χάρτες. Μία τέτοια εφαρμογή αποτελεί ο σχεδιασμός ενός προγράμματος ή χρονοδιαγράμματος, ακόμα και θέσεων όπως για παράδειγμα η δημιουργία προγράμματος μαθημάτων ή εξεταστικής ενός πανεπιστημίου. Άλλη εφαρμογή αποτελεί η επίλυση ενός sudoku. Επίσης, εφαρμόζεται και στην κατανομή εγγραφής, που σε έναν μεταγλωττιστή η διαδικασία αυτή αφορά την εκχώρηση μεγάλου αριθμού μεταβλητών σε μικρό αριθμό καταχωρητών.

Ο πτωτικός χρωματισμός έχει και αυτός αρκετές πρακτικές εφαρμογές. Υπάρχει μία άμεση σχέση του πτωτικού χρωματισμού και του ανεξάρτητου κυρίαρχου συνόλου. Ιστορικά, το ανεξάρτητο κυρίαρχο σύνολο, πρωτοεμφανίστηκε το 1962 σε προβλήματα σκακιέρας και το γράφημα έγινε γνωστό ως γράφημα βασίλισσας. Βασική εφαρμογή του αποτελούν τα προβλήματα των τηλεπικοινωνιών. Ένα παράδειγμα αποτελούν τα ασύρματα δίκτυα καθώς και διάφορα προβλήματα αντιστοίχισης καναλιών, όπως η εκχώρηση κώδικα ή συχνότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

NP-ΠΛΗΡΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΠΤΩΤΙΚΟΥ ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ένα σημαντικό κομμάτι της εργασίας αποτελεί η υπολογιστική πολυπλοκότητα του πτωτικού χρωματισμού. Το κεφάλαιο αυτό, έχει ως σκοπό να δείξει την σχέση του πτωτικού χρωματισμού και της NP - πληρότητας. Θα παρουσιαστούν οι κατηγορίες γραφημάτων, καθώς και υπό ποιές συνθήκες ο πτωτικός τους χρωματισμός είναι NP - πλήρης.

3.1 NP-πληρότητα σε επίπεδα και διμερή γραφήματα

Στην ενότητα αυτή, θα αποδειχθεί ότι είναι NP - πλήρης να αποφασιστεί αν ένα διμερές επίπεδο γράφημα είναι πτωτικά 3 - χρωματίσιμο, καθώς και η απόφαση αν ένα διμερές γράφημα είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο. Επιπρόσθετα, θα παρουσιαστεί και η απόδειξη ότι για δοσμένο επίπεδο γράφημα που δεν περιέχει τρίγωνο, η απόφαση για το αν περιέχει δύο διακεκριμένα ανεξάρτητα κυρίαρχα σύνολα είναι NP - πλήρης. Πρώτα, όμως, θα αποδειχθεί το παρακάτω λήμμα το οποίο θα φανεί χρήσιμο στην ενότητα αυτή.

Λήμμα 3.1.1. *([18]) Ο 3 - χρωματισμός ανάγεται πολυωνυμικά σε πτωτικό 3 - χρωματισμό.*

Απόδειξη. Έστω G ένα γράφημα που έχει 3 - χρωματισμό. Σε πολυωνυμικό χρόνο μπορεί να κατασκευαστεί ένα γράφημα G', το οποίο θα είναι πτωτικά 3 - χρωματίσιμο, τέτοιο ώστε το G να είναι 3 - χρωματίσιμο αν και μόνο αν το G' είναι πτωτικά 3 - χρωματίσιμο.
Κατασκευή του G' : Το γράφημα $G' = (V', E')$ προκύπτει από το G με την

υποδιαίρεση κάθε ακμής του και την αντικατάσταση κάθε κορυφής του V με ένα αντίγραφο του C_6. Δηλαδή

$$V' = V \cup \{x_{uv} | uv \in E\} \cup \{w_{vi} | v \in V, i \in [5]\}$$

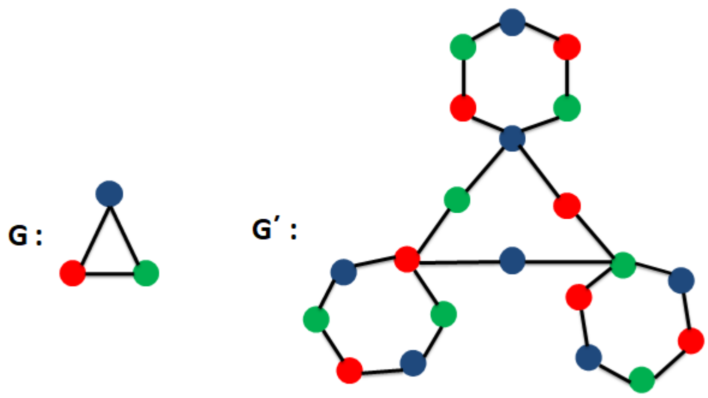
και

$$E' = \{ux_{uv}, vx_{uv} | uv \in E\} \cup \{uw_{v1}, uw_{v5}, uw_{vi}uw_{vi+1} | v \in V, i \in [4]\}.$$

Έστω $c : V \to [3]$ ένας κατάλληλος 3 - χρωματισμός του G και κατασκευάζεται ένας πτωτικός 3 - χρωματισμός $c' : V' \to [3]$ τέτοιος ώστε οι κορυφές του V να κρατάνε το χρώμα τους, έτσι ώστε $c'(v) = c(v)$ για κάθε $v \in V$. Τότε, κάθε κορυφή x_{uv} έχει βαθμό δύο, το οποίο ισχύει σε οποιοδήποτε έγκυρο πτωτικό 3 - χρωματισμό του G' και τα χρώματα από το [3] πρέπει να έχουν 1-1 και επί αντιστοίχιση στην κλειστή γειτονιά $\{u, v, x_{uv}\}$ του x_{uv}. Οπότε, $c(x_{uv}) = f$, όπου f το μοναδικό χρώμα από τα [3] που δεν είναι το $c(u)$ ούτε το $c(v)$. Τέλος, για την αυθαίρετη κορυφή $v \in V$, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρείται ότι $c(v) = 1$. Τότε, ολοκληρώνεται ο χρωματισμός c' ως ακολούθως :

$$c'(w_{v3}) = 1, c'(w_{v1}) = 2, c'(w_{v4}) = 2, c'(w_{v2}) = 3, c'(w_{v5}) = 3.$$

Έτσι επιβεβαιώνεται ο πτωτικός 3 - χρωματισμός του G'.
Αντίστροφα, έστω c' ένας πτωτικός 3 - χρωματισμός του G'. Επειδή ο βαθμός του x_{uv} είναι δύο, τότε $c'(u) \neq c'(v)$. Επομένως, ο c' περιορισμένος στο G είναι κατάλληλος 3 - χρωματισμός του G.



Σχήμα 3.1: Έστω G ένα τρίγωνο με 3 - χρωματισμό και η κατασκευή του G' που είναι πτωτικά 3 - χρωματίσιμο.

□

Συνδυάζοντας το λήμμα 3.1.1 με το γεγονός ότι η απόφαση αν ένα επίπεδο γράφημα με μέγιστο βαθμό 4 μπορεί να έχει κατάλληλο 3 - χρωματισμό είναι ένα NP - πλήρες πρόβλημα, το οποίο έχει δειχθεί στην εργασία ([11]), έχει ως αποτέλεσμα το παρακάτω πόρισμα.

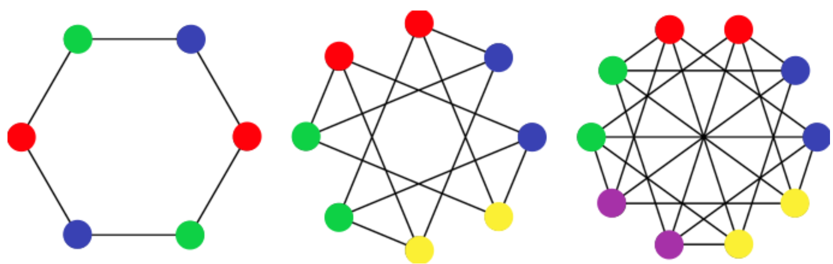
Πόρισμα 3.1.1. *([18]) Είναι NP - πλήρες πρόβλημα αν ένα διμερές επίπεδο γράφημα G μεγίστου βαθμού 6 είναι πτωτικά 3 - χρωματίσιμο.*

Απόδειξη. Η κατασκευή του παραπάνω λήμματος διατηρεί την ιδιότητα του επιπέδου (δηλαδή, αν G είναι επίπεδο τότε και το G' είναι επίπεδο) και μετά την υποδιαίρεση των ακμών του G παράγεται το G' που είναι διμερές. Τελικά, μια κορυφή v με βαθμό $\Delta \leqslant 4$ στο G έχει βαθμό $\Delta + 2 \leqslant 6$ στο G' αφού v ταυτίζεται με ένα αντίγραφο του C_6, και οι νέες κορυφές έχουν βαθμό 2. □

Θα χρειαστεί για την απόδειξη της παρακάτω πρότασης να αναφερθεί ένα θεώρημα που αφορά τα κατηγορηματικά (categorical) παράγωγα.

Θεώρημα 3.1.1. *([8]) Αν $r \geqslant 2$ και $s \geqslant 2$ δύο διακριτοί θετικοί ακέραιοι, τότε το κατηγορηματικό παράγωγο $K_r \times K_s$ έχει έναν πτωτικό r - χρωματισμό και έναν πτωτικό s - χρωματισμό. Επιπλέον, αν n είναι ένας θετικός ακέραιος διαφορετικός από τους r και s, τότε το $K_r \times K_s$ δεν έχει έναν πτωτικό n - χρωματισμό.*

Πρόταση 3.1.1. *([18]) Για κάθε $k \geqslant 3$, το γράφημα $F_k = K_2 \times K_k$ είναι διμερές και μοναδικά πτωτικά k - χρωματίσιμο.*



Σχήμα 3.2: Τα γραφήματα $F_k = K_2 \times K_k$ για $3 \leqslant k \leqslant 5$, με τους αντίστοιχους πτωτικούς k - χρωματισμούς τους. Με βάση την πρόταση είναι διμερή γραφήματα και μοναδικά πτωτικά k - χρωματίσιμα.

Απόδειξη. Όπως είναι γνωστό το γράφημα $G \times H$ είναι διμερές αν είτε το G είτε το H είναι διμερές. Οπότε, το F_k είναι διμερές αφού το K_2 είναι διμερές. Από το θεώρημα 3.1.1 αν s και k είναι διακριτοί θετικοί ακέραιοι μεγαλύτεροι από το 1, και οι δύο, τότε το $K_s \times K_k$ έχει έναν πτωτικό k - χρωματισμό. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, $s = 2$ και $k \geqslant 3$, οπότε το F_k έχει έναν πτωτικό k - χρωματισμό. Από το θεώρημα 15 της εργασίας ([20]) προκύπτει και η μοναδικότητα του πτωτικού k - χρωματισμού του F_k. □

Λήμμα 3.1.2. *([18]) Για κάθε $k \geqslant 4$, αποτελεί NP - πλήρες πρόβλημα αν ένα διμερές γράφημα G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο.*

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει αν επεκταθεί η μέθοδος του λήμματος 3.1.1. Για δοσμένο γράφημα $G = (V, E)$, μπορεί να κατασκευαστεί σε πολυωνυμικό χρόνο ένα διμερές γράφημα $G' = (V', E')$, τέτοιο ώστε το G' να είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο αν και μόνο αν το G είναι k - χρωματίσιμο. Τότε, αφού είναι NP - πλήρες πρόβλημα αν το G είναι k - χρωματίσιμο, με τη βοήθεια της αναγωγής θα δειχθεί και το ζητούμενο.

Κατασκευή του G' : Κάθε ακμή του G υποδιαιρείται μια φορά, και κάθε κορυφή του V αντικαθίσταται από ένα αντίγραφο του F_k. Για κάθε κορυφή x_{uv} που προκύπτει από την υποδιαίρεση της ακμής uv, δημιουργούνται $k - 3$ διακριτά αντίγραφα του F_k, κι αυθαίρετα διαλέγεται μια κορυφή από κάθε αντίγραφο για να είναι γειτονική με την x_{uv}. (Αν $k = 3$ η κατασκευή απλοποιείται στην κατασκευή του λήμματος 3.1.1.)

Το G' αφού αποτελείται από ένα αντίγραφο του $G^{\frac{1}{2}}$ και πολλαπλά διακριτά αντίγραφα του $F_k = K_2 \times K_k$, συνδεδεμένο με το $G^{\frac{1}{2}}$ είτε με υποδιαίρεση ακμών, είτε με υποδιαίρεση κορυφών. Αφού τα $G^{\frac{1}{2}}$ και F_k είναι διμερή και τα δύο άρα και το G' είναι διμερές.

Έστω c ο κατάλληλος k - χρωματισμός του G. Για κάθε ακμή $uv \in E$, η κορυφή x_{uv} χρωματίζεται αυθαίρετα με κάποιο χρώμα διαφορετικό από το $c(u)$ και το $c(v)$. Έτσι οι υπόλοιποι $k - 3$ γείτονες έχουν ο καθένας διαφορετικό χρώμα, οπότε η x_{uv} είναι πολύχρωμη. Κάθε αντίγραφο του F_k στο γράφημα έχει ακριβώς μία χρωματιστή κορυφή, αφού το F_k έχει μοναδικό πτωτικό k - χρωματισμό με βάση την πρόταση 3.1.1. Οπότε ο c' του G' είναι πτωτικός k - χρωματισμός.

Αντίστροφα τώρα, έστω ο c' είναι πτωτικός k - χρωματισμός του G'. Αφού κάθε x_{uv} έχει $k - 1$ γείτονες και είναι πολύχρωμη, τότε ισχύει $c(u) \neq c(v)$. Περιορίζω τον c' στο σύνολο V και παίρνω έναν κατάλληλο k - χρωματισμό του G. □

Θεώρημα 3.1.2. *([18]) Για κάθε $k \geqslant 3$, αποτελεί NP - πλήρες πρόβλημα αν ένα διμερές γράφημα G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο.*

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος προκύπτει συνδυάζοντας το λήμμα 3.1.1 και το λήμμα 3.1.2. □

Πόρισμα 3.1.2. *([18]) Για κάθε $k \geqslant 3$, είναι NP - πλήρες πρόβλημα αν ένα διμερές γράφημα G μεγίστου βαθμού $3(k-1)$ είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο.*

Απόδειξη. Θα χρειαστούν για την απόδειξη το λήμμα 3.1.1 και το λήμμα 3.1.2 καθώς και το γεγονός ότι η απόφαση αν ένα γράφημα έχει $\chi(G) \leqslant k$ αποτελεί NP - πλήρες πρόβλημα για κάθε $k \geqslant 3$, ακόμα και όταν το G έχει μέγιστο βαθμό $\Delta = 2k-2$, το οποίο έχει προκύψει από το θεώρημα 3 της εργασίας ([19]). Αφού το $F_k = K_2 \times K_k$ είναι $k-1$ - κανονικό, τότε μια κορυφή με βαθμό Δ στο G έχει βαθμό $\Delta + k - 1 = 3k-3$ στο G'. Επίσης, οι κορυφές που προκύπτουν από την υποδιαίρεση των ακμών και τα αντίγραφα του F_k έχουν βαθμό το πολύ $k < 3k-3$. Οπότε ο ισχυρισμός ισχύει. □

Μετά το πόρισμα 3.1.1, έχει ενδιαφέρον η αναζήτηση των πιο αδύναμων πρόσθετων περιορισμών στα επίπεδα γραφήματα, οι οποίοι θα επιτύχουν τον πτωτικό 3 - χρωματισμό σε πολυωνυμικό χρόνο. Παρακάτω, θα γίνει αναφορά στα χορδικά γραφήματα καθώς και στα μεγιστοτικά εξωεπίπεδα γραφήματα.

Πρόταση 3.1.2. *([18]) Έστω G ένα χορδικό γράφημα. Τότε είτε το $Fall(G) = \emptyset$ είτε $Fall(G) = \{\delta(G)+1\}$.*

Πρόταση 3.1.3. *([18]) Αν ένα γράφημα G είναι μοναδικά k - χρωματίσιμο, τότε το γράφημα G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο.*

Θεώρημα 3.1.3 (**Chartrand and Geller [3]**). *Ένα εξωεπίπεδο γράφημα G με τουλάχιστον τρείς κορυφές είναι μοναδικά 3 - χρωματίσιμο αν και μόνο αν είναι μεγιστοτικό εξωεπίπεδο.*

Οι δύο προτάσεις σε συνδυασμό με το θεώρημα έχουν ως αποτέλεσμα το παρακάτω.

Θεώρημα 3.1.4. *([18]) Έστω ένα μεγιστοτικό εξωεπίπεδο γράφημα G με τουλάχιστον τρείς κορυφές. Τότε $Fall(G) = \{3\}$.*

Απόδειξη. Αφού κάθε μεγιστοτικό εξωεπίπεδο γράφημα G είναι χορδικό, με βάση την πρόταση 3.1.2 ισχύει ότι $Fall(G) = \emptyset$ ή $Fall(G) = \{\delta(G)+1\}$. Επιπρόσθετα, είναι γνωστό ότι κάθε μεγιστοτικό εξωεπίπεδο γράφημα έχει τουλάχιστον δύο κορυφές με βαθμό δύο οπότε από το θεώρημα 3.1.3 σε συνδυασμό με την πρόταση 3.1.3 προκύπτει ότι $Fall(G) = \{\delta(G)+1\} = \{3\}$. □

Παρακάτω, θα παρουσιαστεί τι συμβαίνει στην περίπτωση που περιοριστεί ο χρωματισμός σε πτωτικό 2 - χρωματισμό. Αρχικά, όπως είναι γνωστό οποιοσδήποτε κατάλληλος 2 - χρωματισμός ενός συνεκτικού διμερούς γραφήματος είναι

πτωτικά 2 - χρωματισμός. Έτσι το πόρισμα 3.1.1 δεν ισχύει σε περίπτωση που $k = 2$ χρώματα, εκτός αν $P = NP$. Ωστόσο, θα δειχθεί ότι για επίπεδα γραφήματα, ακόμη και χωρίς να περιλαμβάνουν τρίγωνο, η διαμέριση σε δύο διακριτά ανεξάρτητα κυρίαρχα σύνολα αποτελεί NP - πλήρες πρόβλημα. Αυτό αποτελεί μια σημαντική επέκταση, καθώς έχει δειχθεί για γενικά γραφήματα στην εργασία ([15]).
Για το θεώρημα που θα ακολουθήσει θα χρειαστεί πρώτα να οριστεί το επίπεδο μονότονο 3 - SAT πρόβλημα. Για τον ορισμό αυτό θα χρειαστεί να δοθεί και η έννοια του 3 - SAT προβλήματος, ξεκινώντας από τον ορισμό του SAT προβλήματος.

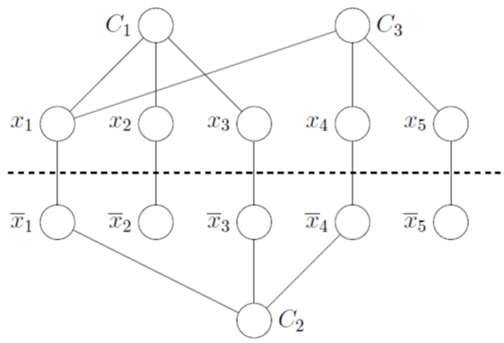
Ορισμός 3.1.1 (SAT πρόβλημα). *Το SAT πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα απόφασης που απαντάει στην ερώτηση αν για δεδομένης μιας CNF μορφής φ, υπάρχει μια ανάθεσης αληθοτιμών στους όρους, που την ικανοποιούν. Μια συζευκτική κανονική μορφή CNF είναι μια προτασιακή μορφή φ που αποτελείται από σύζευξη προτάσεων c_j, που κάθε πρόταση είναι μία διάζευξη από όρους, δηλαδή διάζευξη λογικών μεταβλητών x_i ή των αρνήσεων τους $\overline{x_i}$.*

Ορισμός 3.1.2 (3 - SAT πρόβλημα). *Ένα 3 - SAT πρόβλημα είναι ένα SAT πρόβλημα όπου κάθε πρόταση περιέχει ακριβώς 3 όρους, που ο καθένας αντιστοιχεί σε διαφορετική μεταβλητή.*

Παράδειγμα 3.1.1. *Όρος : x_i ή $\overline{x_i}$*
Πρόταση : $c_j = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$
CNF μορφής φ : $\varphi = c_1 \wedge c_2 \wedge c_3 \wedge c_4$
SAT πρόβλημα : $\varphi = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$ όπου ικανοποιείται για $x_1 = true$, $x_2 = true$, $x_3 = false$.
3 - SAT πρόβλημα : $\varphi = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$ όπου ικανοποιείται για $x_1 = true$, $x_2 = true$, $x_3 = false$, $x_4 = false$.

Ορισμός 3.1.3 (Επίπεδο μονότονο 3 - SAT πρόβλημα). *([18]) Για δοσμένη 3 - SAT φόρμουλα φ με n μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$, και m προτάσεις $c_1, c_2, \ldots, c_m$, όπου κάθε πρόταση περιλαμβάνει τρείς θετικούς ή τρείς αρνητικούς όρους ονομάζεται επίπεδο μονότονο 3 - SAT πρόβλημα. Επιπρόσθετα, το γράφημα $G(\varphi)$ έχει μια 2 - κλίκα (ουσιαστικά μια ακμή) $\{x_i, \overline{x_i}\}$ για κάθε μεταβλητή x_i, μία κορυφή για κάθε c_j και μία ακμή να ενώνει κάθε κορυφή x_i με την αντίστοιχη κορυφή της πρότασης c_j που την περιλαμβάνει.*

Ουσιαστικά, το γράφημα $G(\varphi)$ επιτυγχάνει έναν επίπεδο σχεδιασμό αν τοποθετώντας μια οριζόντια νοητή γραμμή, κάθε 2 - κλίκα την τέμνει. Επιπλέον, κάθε θετική πρόταση τοποθετείται πάνω από την γραμμή και κάθε αρνητική πρόταση κάτω από την γραμμή. Μάλιστα, το γεγονός ότι το επίπεδο μονότονο 3 - SAT πρόβλημα είναι NP - πλήρες πρόβλημα και ότι το γράφημα $G(\varphi)$ επιτυγχάνει έναν επίπεδο σχεδιασμό δείχθηκε από τους Berg και Khosravi στην εργασία ([7])

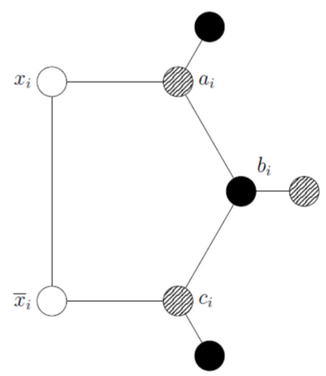


Σχήμα 3.3: Το γράφημα αποτελεί ένα επίπεδο μονότονο 3 - SAT με στιγμιότυπο $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \wedge (x_1 \vee x_4 \vee x_5)$, το οποίο όντως αποτελεί ένα επίπεδο γράφημα $G(\varphi)$, καθώς η διακεκομμένη γραμμή διαχωρίζει στο άνω μέρος τους θετικούς όρους και προτάσεις και στο κάτω τους αρνητικούς όρους και προτάσεις.

Θεώρημα 3.1.5. *([18]) Το πρόβλημα του πτωτικού 2 - χρωματισμού αποτελεί NP - πλήρες πρόβλημα σε επίπεδο γράφημα χωρίς τρίγωνο.*

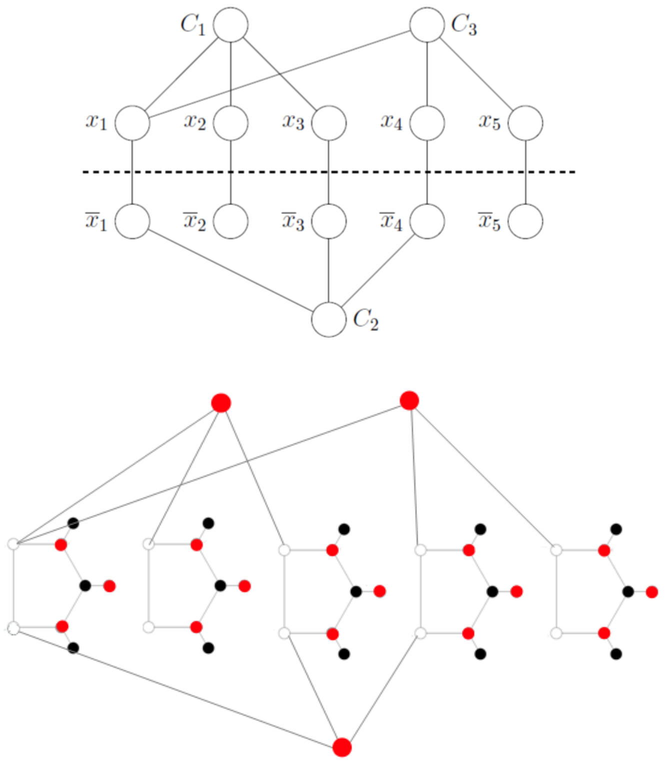
Απόδειξη. Η απόδειξη επιτυγχάνεται με αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου από το επίπεδο μονότονο 3 - SAT ενός στιγμιότυπου φ με m προτάσεις $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$, n μεταβλητές $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ και το επίπεδο γράφημα $G(\varphi)$ όπως ορίστηκε παραπάνω.
Κατασκευή του G' : Για κάθε μεταβλητή x_i αντικαθιστάται η 2 - κλίκα από το μικροεργαλείο X_i, που αποτελεί ένα 5 - κύκλο με τις κορυφές x_i, a_i, b_i, c_i και $\overline{x_i}$, ακολουθώντας τη φορά του ρολογιού, και προσθέτοντας εκρεμμείς κορυφές σε κάθε μία από τις κορυφές a_i, b_i και c_i.
Αφού, το $G(\varphi)$ είναι επίπεδο γράφημα και δεν περιέχει τρίγωνο, έτσι λόγω κατασκευής και το G' είναι επίπεδο γράφημα χωρίς τρίγωνο. Οπότε αρκεί να δειχθεί ότι το στιγμιότυπο φ ικανοποιείται αν και μόνο αν το γράφημα G' περιλαμβάνει δύο διακριτά ανεξάρτητα κυρίαρχα σύνολα (δηλαδή η φ ικανοποιείται αν και μόνο αν $2 \in Fall(G')$).
Έστω το στιγμιότυπο φ ικανοποιείται από την εκχώρηση αληθοτιμών $\tau = \{0,1\}^n$. Τα δύο διακριτά ανεξάρτητα κυρίαρχα σύνολα I_1, I_2 κατασκευάζονται ως ακολούθως. Για κάθε $i \in [n]$ αν το τ δίνει στο x_i την αληθοτιμή 1 τότε το x_i τοποθετε-

ίται στο I_1, αλλιώς αν το τ δίνει στο x_i την αληθοτιμή 0 τότε το $\overline{x_i}$ τοποθετείται στο I_1. Κάθε b_i τοποθετείται στο I_1 και κάθε a_i και c_i τοποθετούνται στο I_2. Οι εκρεμμείς κορυφές του a_i και c_i τοποθετούνται στο I_1 και οι εκρεμμείς κορυφές του b_i τοποθετείται στο I_2. Για κάθε $j \in [m]$ οι C_j τοποθετούνται στο I_2. Άρα τα σύνολα I_1 και I_2 είναι ανεξάρτητα. Επιπλέον, κάθε κορυφή X_i κυριαρχείται από μία κορυφή του I_1 και από μία του I_2. Ακόμη, κάθε κορυφή C_j κυριαρχείται από μία κορυφή του I_2 και αφού η τ αποτελεί ικανοποιητική εκχώρηση τότε η κορυφή C_j είναι γειτονική και με μια κορυφή του I_1. Συνεπάγεται ότι, τα I_1 και I_2 είναι διακριτά ανεξάρτητα κυρίαρχα σύνολα του G'.
Αντιστρόφως, έστω ότι τα I_1 και I_2 είναι δύο διακριτά ανεξάρτητα κυρίαρχα σύνολα του G'. Κάθε πρόταση C_j για $j \in [m]$ κυριαρχείται από τουλάχιστον ένα x_i (ή $\overline{x_i}$ στην περίπτωση της αρνητικής πρότασης). Για κάθε $i \in [n]$ τα a_i και c_i ανήκουν και τα δύο είτε στο I_1, είτε στο I_2 (αλλιώς η εκρεμμής κορυφή του b_i δεν θα μπορεί να κυριαρχείται και από το I_1, και από το I_2). Επομένως, το πολύ ένα από τα x_i και $\overline{x_i}$ θα ανήκουν στην ένωση $I_1 \cup I_2$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, οι κορυφές που ανήκουν στην ένωση $I_1 \cup I_2$ να είναι οι κατάλληλες κορυφές που επιτυγχάνουν την ικανοποιητική εκχώρηση τ του φ. Τέλος, αν ούτε η x_i ούτε η $\overline{x_i}$ ανήκουν στην ένωση $I_1 \cup I_2$, η τιμή αλήθειας της μεταβλητής αυτής δεν επηρεάζει την ικανοποίηση της φ οπότε ορίζεται αυθαίρετα το τ.



Σχήμα 3.4: Το μικροεργαλείο X_i που είναι ένας 5 - κύκλος με κορυφές x_i, a_i, b_i, c_i και $\overline{x_i}$. Αν τα I_1 και I_2 είναι δύο διακριτά ανεξάρτητα κυρίαρχα σύνολα, τότε τα a_i και c_i ανήκουν και τα δύο είτε στο I_1 είτε στο I_2 και ακριβώς ένα από τα x_i και $\overline{x_i}$ μπορεί να ανήκει στην ένωση $I_1 \cup I_2$.

□



Σχήμα 3.5: Το πάνω γράφημα G απεικονίζει ένα επίπεδο μονότονο 3 - SAT με στιγμιότυπο $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \wedge (x_1 \vee x_4 \vee x_5)$, και το κάτω το G' που κατασκευάστηκε με τη βοήθεια του μικροεργαλείου X_i για την απόδειξη του θεωρήματος.

3.2 NP-πληρότητα σε κανονικά γραφήματα

Στην ενότητα αυτή, το ενδιαφέρον στρέφεται στην πολυπλοκότητα του πτωτικού χρωματισμού των κανονικών γραφημάτων. Στην αρχή θα γίνει αναφορά στα 2 - κανονικά γραφήματα, έπειτα στα 3 - κανονικά γραφήματα, και τέλος θα γενικευτεί το αποτέλεσμα. Για τα συνεκτικά 2 - κανονικά γραφήματα, δηλαδή τους κύκλους, εύκολα παρατηρείται ότι $2 \in Fall(C_n)$ αν και μόνο αν $2 \mid n$. Με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος θα ολοκληρωθεί η σχέση των 2 - κανονικών γραφημάτων και του πτωτικού χρωματισμού.

Θεώρημα 3.2.1. *([8]) Ένας κύκλος C_n έχει πτωτικό 3 - χρωματισμό αν και* *μόνο αν* $n = 0 \ mod \ 3$.

Απόδειξη. Η περίπτωση του κύκλου C_{3n} να έχει πτωτικό 3 - χρωματισμό είναι τετριμμένη, αφού αρκεί οι κορυφές να χρωματιστούν με διαδοχική σειρά, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... Ως εκ τούτου, οι περιπτώσεις που πρέπει να ελεγχθούν τώρα είναι αν ισχύει για $n = 3k + 1$ ή $n = 3k + 2$. Αν ο κύκλος C_n έχει πτωτικό 3 - χρωματισμό, τότε κάθε χρωματική κλάση πρέπει να είναι ανεξάρτητο κυρίαρχο σύνολο. Αλλά, είναι γνωστό ότι $\gamma(C_n) = i(C_n) = \lceil n/3 \rceil$, και αφού $n = 3k + 1$ ή $n = 3k + 2$, τότε $3\lceil n/3 \rceil > n$. Τότε, τουλάχιστον μια χρωματική κλάση δεν μπορεί να είναι κυρίαρχο σύνολο, δηλαδή ούτε η περίπτωση του κύκλου C_{3k+1}, αλλά ούτε και του κύκλου C_{3k+2} έχουν πτωτικό 3 - χρωματισμό. □

Οπότε, με βάση τα παραπάνω και την εργασία ([20]), για τα συνεκτικά 2 - κανονικά γραφήματα, ισχύει ότι το $2 \in Fall(C_n)$ αν και μόνο αν $2 \mid n$, και το $3 \in Fall(C_n)$ αν και μόνο αν $3 \mid n$ και δεν υπάρχει άλλος ακέραιος στο $Fall(C_n)$, για οποιοδήποτε n. Ωστόσο, το πρόβλημα του πτωτικού χρωματισμού για τα 3 - κανονικά γραφήματα είναι αρκούντως δυσκολότερο.

Θεώρημα 3.2.2 (Heggernes and Telle [14]). *Αποτελεί NP - πλήρες πρόβλημα αν το τετράγωνο ενός κυβικού γραφήματος είναι 4 - χρωματίσιμο.*

Θεώρημα 3.2.3. *([20]) Ένα k - κανονικό γράφημα G είναι πτωτικά (k+1) - χρωματίσιμο αν και μόνο αν το τετράγωνο του γραφήματος, δηλαδή το* G^2 *είναι (k+1) - χρωματίσιμο.*

Συνδυάζοντας τα δύο προηγούμενα θεωρήματα, προκύπτει το παρακάτω θεώρημα.

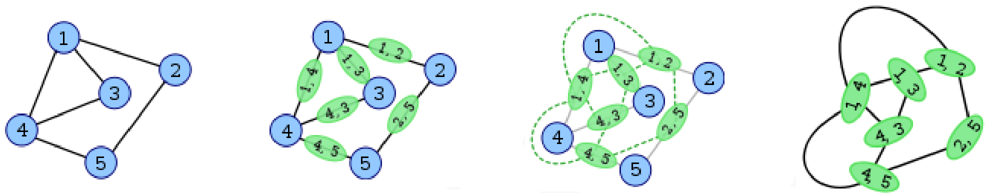
Θεώρημα 3.2.4. *([18]) Αποτελεί NP - πλήρες πρόβλημα η απόφαση αν ένα 3 - κανονικό γράφημα G είναι πτωτικά 4 - χρωματίσιμο.*

Για μεγαλύτερου βαθμού κανονικά γραφήματα, θα χρησιμοποιηθούν διαφορετικές κατασκευές για να δειχθεί ότι ο πτωτικός χρωματισμός των k - κανονικών γραφημάτων είναι NP - πλήρες πρόβλημα, καθώς ήδη τα προηγούμενα αποτελέσματα υποδεικνύουν την πιθανή ύπαρξη παρόμοιων δυσδιάκριτων προβλημάτων πτωτικού χρωματισμού για $k > 3$.

Για το παρακάτω θεώρημα, θα χρειαστεί πρώτα, να οριστεί το γραμμικό γράφημα ενός γραφήματος G.

Ορισμός 3.2.1. *Για δοσμένο γράφημα G, το* ***γραμμικό γράφημα*** *του, συμβολίζεται ως $L(G)$, και αποτελείται από κορυφές που αντιπροσωπεύουν τις ακμές του G. Δηλαδή, κάθε δύο κορυφές του $L(G)$ είναι γειτονικές αν και μόνο αν οι αντίστοιχες ακμές μοιράζονται κάποιο κοινό άκρο στο G.*

Το $L(G)$ κατασκευάζεται ως εξής : για κάθε ακμή του G, δημιουργείται μία κορυφή στο $L(G)$ τέτοια ώστε για δύο ακμές του G που έχουν κοινό άκρο να δημιουργείται μια ακμή που να ενώνει τις αντίστοιχες κορυφές του $L(G)$.



Σχήμα 3.6: Στα αριστερά υπάρχει ένα γράφημα G, στα δεξιά το αντίστοιχο γραμμικό γράφημα του $L(G)$ και ενδιάμεσα φαίνεται η διαδικασία κατασκευής.

Σημείωση 3.2.1. *Για κάθε γράφημα G μπορεί να κατασκευαστεί το γραμμικό γράφημα $L(G)$, ενώ για κάθε γραμμικό γράφημα δεν σημαίνει απαραίτητα ότι μπορεί να βρεθεί το γράφημα G.*

Θεώρημα 3.2.5. *([18]) Για κάθε $k \geqslant 3$ αποτελεί NP - πλήρες πρόβλημα η απόφαση αν ένα $(2k-2)$ - κανονικό γράφημα G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο.*

Απόδειξη. Η απόδειξη επιτυγχάνεται με την πολυωνυμική αναγωγή από τον k - χρωματισμό ακμών, με $k \geqslant 3$ και σαν γράφημα εισόδου ένα γράφημα G που είναι k - κανονικό. Έστω G' το γραμμικό γράφημα του G, δηλαδή $G' = L(G)$. Αφού το γράφημα G είναι k - κανονικό εύκολα συνεπάγεται ότι το G' είναι $(2k-2)$ - κανονικό γράφημα. Αρκεί, τώρα, να δειχθεί ότι το G έχει ένα κατάλληλο k - χρωματισμό ακμών αν και μόνο αν το G' είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο.
Έστω h είναι ένας κατάλληλος k - χρωματισμός ακμών του G. Ο χρωματισμός κορυφών του G' κατασκευάζεται ως εξής. Έστω $c'(x_{uv}) = h(uv)$, όπου $uv \in E(G)$ και x_{uv} είναι κορυφή του G' που αντιστοιχεί στην ακμή uv. Από κατασκευή, η κορυφή x_{uv} για κάθε $uv \in E(G)$ είναι γειτονική ακριβώς με τις κορυφές που αντιστοιχούν στα άκρα που γειτνιάζουν με τα u και v. Δεδομένου ότι ο h είναι ένας κατάλληλος k - χρωματισμός ακμών, ο h έχει χρωματίσει διαφορετικά αυτές τις άκρες από το $h(uv) = c'(x_{uv})$. Επιπλέον, όλες οι k ακμές που σχετίζονται με την ίδια κορυφή παίρνουν k διαφορετικά χρώματα. Έτσι οι αντίστοιχες κορυφές του G' θα είναι πολύχρωμες. Οπότε, ο c' είναι ένας πτωτικός k - χρωματισμός

του G'.
Αντίστροφα, έστω ο c' είναι ένας πτωτικός k - χρωματισμός του G'. Για τυχαία κορυφή x_{uv} του G', αφού ο c' είναι ένας πτωτικός k - χρωματισμός, ισχύει ότι κάθε γείτονας της x_{uv} έχει διαφορετικό χρώμα. Και αφού η κορυφή x_{uv} είναι γειτονική ακριβώς με τις κορυφές που αντιστοιχούν στα άκρα που γειτνιάζουν με τα u και v, προκύπτει αμέσως ένας κατάλληλος k - χρωματισμός ακμών h από τον c'. □

Παρόμοια αποτελέσματα μπορούν να παρθούν και για κανονικά γραφήματα περιττού βαθμού, με τη βοήθεια του καρτεσιανού παράγωγου.

Θεώρημα 3.2.6. *([18]) Για κάθε $k \geqslant 3$ αποτελεί NP - πλήρες πρόβλημα η απόφαση αν ένα $(2k-1)$ - κανονικό γράφημα G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα επιτευχθεί αρκεί να τροποποιηθεί το γράφημα G' της απόδειξης του θεωρήματος 3.2.5 με ένα γράφημα που θα έχει παρόμοια δομή, δηλαδή θα μπορεί να είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο ακριβώς όταν το G' θα ναι, αλλά οι κορυφές του θα έχουν κοινό βαθμό έναν παραπάνω από τις κορυφές του G'. Οπότε $G'' = G' \square K_2$. Από την εργασία ([20]) φαίνεται ότι $Fall(G'') = Fall(G')$ οπότε το G'' έχει τις ιδιότητες που χρειάζεται. □

3.3 NP-πληρότητα σχετικών προβλημάτων

Στην ενότητα αυτή, πέρα από τον πτωτικό χρωματισμό που έχει ήδη οριστεί, θα οριστούν άλλοι δύο πτωτικοί χρωματισμοί. Είναι, ουσιαστικά, τρία διακριτά προβλήματα απόφασης που όμως σχετίζονται μεταξύ τους. Επίσης, θα μελετηθεί και η πολυπλοκότητα τους.

Αρχικά, για τους ορισμούς των προβλημάτων πτωτικού χρωματισμού, πέρα από τους δύο καινούριους, θα γίνει αναφορά και σε αυτόν που έχει ήδη οριστεί, για να γίνουν σαφείς οι διαφορές τους.

k - Πτωτικός χρωματισμός (kFC)
Είσοδος : Ένα γράφημα $G = (V, E)$
Ερώτημα : Έχει το γράφημα G έναν πτωτικό k - χρωματισμό;
Αποτελεί το πρόβλημα που έχει ήδη οριστεί και απαντάει στην ερώτηση αν υπάρχει πτωτικός k - χρωματισμός.

Πτωτικός χρωματισμός (FC)
Είσοδος : Ένα γράφημα $G = (V, E)$

Ερώτημα : Έχει το γράφημα G έναν πτωτικό χρωματισμό;
Απαντάει στην ερώτηση αν υπάρχει κάποιος πτωτικός χρωματισμός, απροσδιόριστου k.

Πτωτικός k - χρωματισμός (FkC)
Είσοδος : Ένα γράφημα $G = (V, E)$, και ένας ακέραιος k
Ερώτημα : Έχει το γράφημα G έναν πτωτικό k - χρωματισμό;
Απαντάει στην ερώτηση αν υπάρχει πτωτικός k - χρωματισμός για δεδομένο k.

Πρώτα, θα δειχθεί ότι το 3FC αποτελεί NP-πλήρες πρόβλημα και έπειτα θα το γενικεύσουμε για το kFC. Για το θεώρημα που θα ακολουθήσει θα χρειαστεί πρώτα να οριστεί το NOT-ALL-EQUAL-3-SAT πρόβλημα.

Ορισμός 3.3.1. ***(NOT-ALL-EQUAL-3-SAT πρόβλημα)*** *Ορίζεται στιγμιότυπο του NOT-ALL-EQUAL-3-SAT ως ϕ, με ϕ να αποτελείται από το σύνολο $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ προτάσεων και κάθε πρόταση δημιουργείται από τρείς χαρακτήρες από το σύνολο $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ των μεταβλητών. Η ϕ ικανοποιείται αν κάθε πρόταση c_i περιέχει τουλάχιστον μία true μεταβλητή και μία false μεταβλητή.*

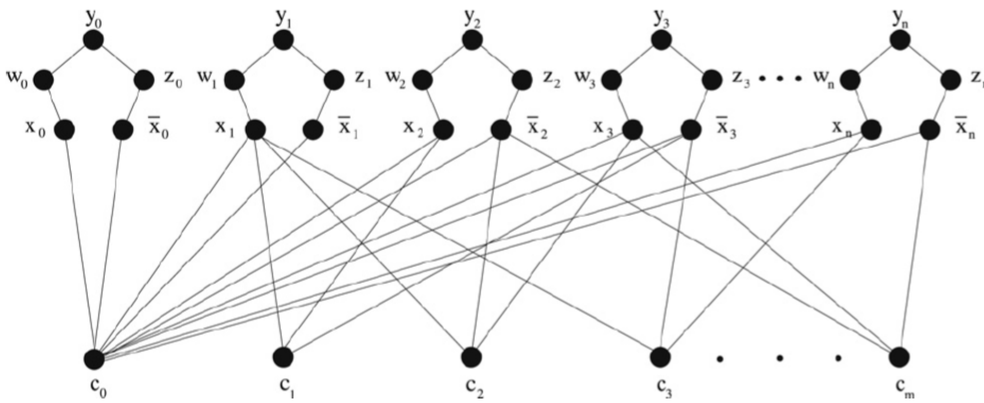
Από την εργασία ([10]) είναι γνωστό ότι το NOT-ALL-EQUAL-3-SAT πρόβλημα αποτελεί NP - πλήρες πρόβλημα, το οποίο είναι χρήσιμο για το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.3.1. *([17]) Το πρόβλημα 3FC αποτελεί NP - πλήρες πρόβλημα, ακόμη και περιορισμένο σε διμερή γραφήματα.*

Απόδειξη. Αφού ένα ανεξάρτητο και κυρίαρχο σύνολο μπορεί εύκολα να επαληθευτεί ελέγχοντας τους γείτονες κάθε κορυφής στο γράφημα G, το πρόβλημα $3FC \in NP$. Η απόδειξη επιτυγχάνεται με αναγωγή πολυωνυμικού χρόνο από το NP - πλήρες πρόβλημα NOT-ALL-EQUAL-3-SAT στο 3FC.
Κατασκευή του G : Για κάθε πρόταση κατασκευάζεται μια κορυφή c_i, και για κάθε μεταβλητή κατασκευάζονται μία κορυφή x_j και μία $\overline{x_j}$. Για κάθε ζευγάρι x_j , $\overline{x_j}$ προστίθενται τρεις κορυφές που θα είναι γειτονικές με τέτοιον τρόπο έτσι ώστε να δημιουργηθεί μονοπάτι πέντε κορυφών από το x_j στο $\overline{x_j}$. Αυτές οι κορυφές ονομάζονται w_j, y_j και z_j με σειρά από το x_j στο $\overline{x_j}$ για κάθε j. Επιπλέον, προστίθεται άλλος ένας 6 - κύκλος, με κορυφές c_0, x_0, $\overline{x_0}$, w_0, y_0 και z_0, και η κορυφή c_0 θα είναι γειτονική με κάθε άλλη κορυφή x_j , $\overline{x_j}$ για κάθε j.
Το $G(\phi)$ είναι διμερές. Αν έστω $S_1 = \{c_i : 0 \leqslant i \leqslant m\} \cup \{w_j, z_j : 0 \leqslant j \leqslant n\}$ και έστω $S_2 = \{x_j, \overline{x_j}, y_j : 0 \leqslant j \leqslant n\}$, τότε αυτή η διαμέριση του συνόλου κορυφών του $G(\phi)$ δίνει δύο ανεξάρτητα σύνολα.
Έστω ότι η ϕ ικανοποιείται από την ανάθεση αληθοτιμών $f : X \to \{T, F\}$. Έστω

T και F δύο χρώματα και N να είναι ένα τρίτο χρώμα. Πρώτα, χρωματίζονται οι κορυφές του $G(\phi)$ που ικανοποιούν την ανάθεση f. Κάθε κορυφή c_i χρωματίζεται με N. Για κάθε $j \geqslant 1$, για $f(x_j) = T$ ή $f(x_j) = F$, οι ακολουθίες $TFNTF$ ή $FTNFT$ αντίστοιχα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον χρωματισμό της ακολουθίας $x_j w_j, y_j, z_j \overline{x_j}$. Για $j = 0$ το x_0 παίρνει T ή F και χρησιμοποιείται η κατάλληλη ακολουθία για το $x_0 w_0, y_0, z_0 \overline{x_0}$. Αφού είναι μία ικανοποιητική ανάθεση, κάθε κορυφή πρότασης είναι πολύχρωμη και ο 6 - κύκλος του c_0, x_j, w_j, y_j, z_j και $\overline{x_j}$ για όλα τα $j \geqslant 0$ είναι επίσης πτωτικά 3 - χρωματίσιμος, οπότε το γράφημα $G(\phi)$ είναι πτωτικά 3 - χρωματίσιμο.

Αντίστροφα, έστω ότι το γράφημα $G(\phi)$ είναι πτωτικά 3 - χρωματίσιμο, θα δειχθεί ότι υπάρχει ικανοποιητική ανάθεση αληθοτιμών. Για τα τρία χρώματα θα χρησιμοποιηθούν τα T, F και N. Αν έστω το N είναι το χρώμα της κορυφής c_0 τότε οι κορυφές $x_j, \overline{x_j}$ χρωματίζονται είτε με το T χρώμα, είτε με F, οπότε κάθε κορυφή c_i χρωματίζεται με το N χρώμα, ως γείτονες των T ή F και μάλιστα γειτονεύει με ακριβώς ένα χρώμα T και με ένα χρώμα F. Τελικά, αν η κορυφή x_j έχει το χρώμα T, τότε η κορυφή w_j παίρνει το χρώμα F, έτσι ώστε η κορυφή x_j να είναι πολύχρωμη. Τότε, η κορυφή y_j χρωματίζεται με το N αφού η w_j είναι πολύχρωμη και η κορυφή z_j παίρνει το χρώμα T για να είναι η y_j πολύχρωμη. Τελικά, η κορυφή $\overline{x_j}$ χρωματίζεται με F για να είναι η z_j πολύχρωμη. Σε περίπτωση που η κορυφή x_j έχει το χρώμα F με όμοιο τρόπο δείχνεται ότι η $\overline{x_j}$ χρωματίζεται με T. Άρα, η ανάθεση τιμών T και F είναι μία έγκυρη ανάθεση αληθοτιμών, και το γεγονός ότι κάθε κορυφή, που αφορά τις προτάσεις, είναι πολύχρωμη υποδηλώνει ότι η ανάθεση αληθοτιμών είναι ικανοποιητική.



Σχήμα 3.7: Το γράφημα $G(\phi)$ που κατασκευάστηκε από το στιγμιότυπο ϕ του NOT-ALL-EQUAL-3-SAT για την απόδειξη του θεωρήματος.

□

Μπορεί να επιτευχθεί η επέκταση του αποτελέσματος με ένα απλό μετασχηματισμό. Οπότε ορίζεται νέο πρόβλημα απόφασης :

3 - πτωτικός χρωματισμός σε L παράγοντες (L, 3FC)
Στιγμιότυπο : Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$ με τουλάχιστον ℓ μη τετριμμένους διμερείς παράγοντες.
Ερώτηση : Είναι το γράφημα G πτωτικά 3 - χρωματίσιμο;

Θεώρημα 3.3.2. *([17]) Το πρόβλημα (L, 3FC) αποτελεί NP - πλήρες πρόβλημα, για οποιαδήποτε τιμή ℓ.*

Για την γενίκευση του προβλήματος είναι χρήσιμο το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 3.3.1. *([8]) Αν ένα πρόβλημα kFC αποτελεί NP - πλήρες πρόβλημα για κάποιο ακέραιο k, τότε και το πρόβλημα (k+1)FC αποτελεί NP - πλήρες πρόβλημα.*

Απόδειξη. Για ένα γράφημα G, έστω το γράφημα G^* που προκύπτει από το G προσθέτοντας μία νέα κορυφή που είναι γειτονική με όλες τις άλλες κορυφές. Εύκολα προκύπτει ότι το G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο αν και μόνο αν το G^* είναι πτωτικά $(k+1)$ - χρωματίσιμο. Οπότε, η συνάρτηση $G \to G^*$ είναι ένας μετασχηματισμός από το kFC στο (k+1)FC. □

Θεώρημα 3.3.3. *([8]) Το πρόβλημα kFC αποτελεί NP - πλήρες πρόβλημα για κάθε $k \geqslant 3$.*

Απόδειξη. Από το λήμμα 3.3.1 προκύπτει ότι αρκεί να δειχθεί ότι το πρόβλημα 3FC αποτελεί NP - πλήρες πρόβλημα, το οποίο αποδείχθηκε στο θεώρημα 3.3.1. □

Θεώρημα 3.3.4. *([8]) Το πρόβλημα FC και το πρόβλημα FkC είναι NP - πλήρη προβλήματα.*

Απόδειξη. Το πρόβλημα FC και το πρόβλημα FkC προκύπτει ότι είναι NP - πλήρη προβλήματα όμοια με το kFC, δηλαδή με μια αναγωγή από το NOT-ALL-EQUAL-3-SAT στο FC, και με μια αναγωγή από το NOT-ALL-EQUAL-3-SAT στο FkC. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Πολυωνυμική πολυπλοκότητα του πτωτικού χρωματισμού

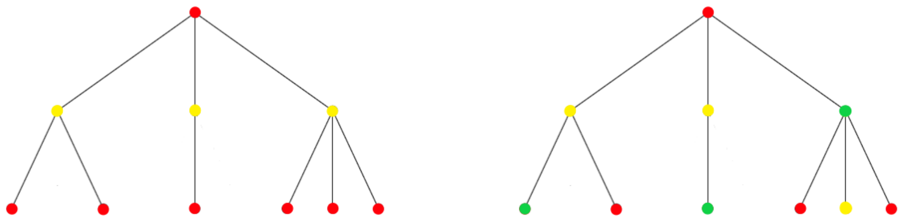
Όπως προαναφέρθηκε στο κεφάλαιο 3, η υπολογιστική πολυπλοκότητα αποτελεί σημαντικό κομμάτι της εργασίας, για αυτό και παρουσιάστηκαν κάποιες κατηγορίες γραφημάτων που αποτελούσαν NP - πλήρη προβλήματα. Επίσης, αναφέρθηκαν κάποια παραδείγματα πολυωνυμικής πολυπλοκότητας, καθώς χρειάστηκαν σε αποδείξεις. Στο κεφάλαιο αυτό, θα γίνουν αναφορές σε προβλήματα που λύνονται από πολυωνυμικούς αλγορίθμους, οπότε η λύση είναι αποδοτική. Βασικός σκοπός της θεωρίας πολυπλοκότητας είναι η εύρεση αποδοτικών αλγορίθμων για αυτό και προτιμάται η πολυωνυμική πολυπλοκότητα. Οπότε θα παρουσιαστεί η σχέση του πτωτικού χρωματισμού γραφημάτων και της κλάσης πολυπλοκότητας P.

4.1 Αναλυτικοί τύποι πτωτικού χρωματισμού

Στην ενότητα αυτή, θα δοθούν διάφορες κλάσεις γραφημάτων που είναι γνωστό ότι έχουν πτωτικό χρωματισμό. Αρχικά, θα γίνει αναφορά για τα δέντρα.

Θεώρημα 4.1.1. *Έστω ένα γράφημα που είναι δέντρο. Για οποιοδήποτε T ισχύει ότι $\psi_f(T) = 2$. Ουσιαστικά, το μόνο $k \in Fall(T)$ είναι το $k = 2$.*

Απόδειξη. Για $k = 2$, ο κάθε γονέας παίρνει το ένα χρώμα και τα παιδιά του το άλλο. Για $k = 3$, όποιος συνδυασμός χρωμάτων και να γίνει δεν επιτυγχάνεται πτωτικός χρωματισμός, καθώς τα φύλλα έχουν βαθμό $deg = 1$ οπότε δεν είναι πολύχρωμα. Για οποιοδήποτε $k > 2$ δεν υπάρχει πτωτικός χρωματισμός λόγω της ύπαρξης των φύλλων. Οπότε, $Fall(T) = \{2\}$. □



Σχήμα 4.1: Στα αριστερά, φαίνεται το δέντρο με πτωτικό 2 - χρωματισμό, και στα δεξιά λόγω των φύλλων δεν μπορεί να επιτευχθεί πτωτικός χρωματισμός για $k > 2$, αφού τα φύλλα δεν είναι πολύχρωμα.

Ακόμη και για τον πτωτικό υποχρωματισμό των δέντρων το μόνο k που ικανοποιεί, είναι το $k = 2$.

Θεώρημα 4.1.2. *([8]) Για οποιοδήποτε δέντρο T, ισχύει ότι $\psi_{f_s}(T) = 2$.*

Απόδειξη. Έστω ότι για κάποιο δέντρο T ισχύει $\psi_{f_s}(T) > 2$. Έστω ότι $\Pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ είναι ένας πτωτικός k - χρωματισμός του υπόδεντρου T' του T, όπου $k \geqslant 3$. Αφού, η κορυφή $u_{11} \in V_1$ είναι πολύχρωμη, είναι γειτονική με την κορυφή $u_{21} \in V_2$, η οποία με τη σειρά της είναι γειτονική με την κορυφή $u_{31} \in V_3$. Τώρα, η κορυφή u_{31} πρέπει να είναι γειτονική με την $u_{12} \in V_1$, όπου $u_{11} \neq u_{12}$ (αλλιώς το δέντρο T έχει κύκλο). Επαναλαμβάνεται η διαδικασία αυτή για την κορυφή u_{12}, η οποία πρέπει να είναι γειτονική με την κορυφή $u_{22} \in V_2$, όπου $u_{22} \neq u_{21}$ (αλλιώς το T έχει κύκλο). Με τη σειρά της, η κορυφή u_{22} πρέπει να γειτονεύει με την $u_{32} \in V_3$, όπου $u_{32} \neq u_{31}$ και η κορυφή u_{32} πρέπει να είναι γειτονική με την κορυφή $u_{13} \in V_1$, όπου $u_{11} \neq u_{13} \neq u_{12}$. Παρατηρείται ότι, αυτό το μονοπάτι δεν έχει τέλος, καθώς επαναλαμβάνει κύκλους από το V_1 στο V_2 στο V_3 και πάλι πίσω στο V_1, αλλιώς το Π δεν έχει πτωτικό χρωματισμό. Αλλά αφού το δέντρο T είναι πεπερασμένο, δεν μπορεί να έχει πτωτικό k - χρωματισμό για $k \geqslant 3$. □

Με βάση την εργασία ([8]) μία ακόμη κλάση γραφημάτων με πτωτικό 2 - χρωματισμό είναι τα διμερή γραφήματα χωρίς απομονωμένες κορυφές. Πιο συγκεκριμένα, κάθε 2 - χρωματισμός ενός διμερούς γραφήματος G χωρίς απομονωμένες κορυφές αποτελεί πτωτικό 2 - χρωματισμό, αφού κάθε κορυφή χρώματος 1 γειτονεύει με τουλάχιστον μια κορυφή χρώματος 2 και κάθε κορυφή χρώματος 2 γειτονεύει με τουλάχιστον μια κορυφή χρώματος 1. Σε αυτήν την περίπτωση κάθε χρωματική κλάση είναι ένα ανεξάρτητο και κυρίαρχο σύνολο.

Επιπρόσθετα, στην εργασία ([4]) έχει αποδειχθεί ότι οι παρακάτω κλάσεις έχουν πτωτικό χρωματισμό:

- Τα πλήρη γραφήματα K_n έχουν (μόνο) πτωτικό n - χρωματισμό.
- Τα συνεκτικά διμερή γραφήματα, συμπεριλαμβανομένων και όλων των $m\times n$ πλεγμάτων, και οι υπερκύβοι έχουν πτωτικό 2 - χρωματισμό.
- Τα πλήρη k - partite γραφήματα έχουν (μόνο) πτωτικό k - χρωματισμό. Σημείωση: Ένα **k - partite** γράφημα είναι ένα γράφημα που οι κορυφές του μπορούν να διαμεριστούν σε k ανεξάρτητα σύνολα. Για $k = 2$, το γράφημα είναι διμερές.
- Τα κυρίαρχα - κρίσιμα γραφήματα (domatic - critical graph), δηλαδή τα γραφήματα που έχουν $d(G) = k$, αλλά για κάθε ακμή $e \in E$ ισχύει $d(G - e) < k$, έχουν πτωτικό k - χρωματισμό.
- Τα κανονικά γραφήματα, των οποίων ο κυρίαρχος αριθμός $d(G) = k = \delta(G) + 1$, έχουν πτωτικό k - χρωματισμό.
- Η σύνδεση δύο γραφημάτων $G*H$, όπου κάθε ένα έχει πτωτικό χρωματισμό των τάξεων k και ℓ, έχει πτωτικό $(k+\ell)$ - χρωματισμό.

Ακόμη, ενδιαφέρον παρουσιάζει ο πτωτικός χρωματισμός των κατηγορηματικών παραγώγων. Στο κεφάλαιο 3, στο θεώρημα 3.1.1 φάνηκε η σχέση του πτωτικού χρωματισμού και ενός κατηγορηματικού παράγωγου $K_r \times K_s$ με $r \geqslant 2$ και $s \geqslant 2$ να είναι δύο διακριτοί θετικοί ακέραιοι. Ουσιαστικά, οι μόνοι πτωτικοί χρωματισμοί που μπορεί να έχει το $K_r \times K_s$ είναι ο πτωτικός r - χρωματισμός και ο πτωτικός s - χρωματισμός.
Το θεώρημα αυτό, δεν μπορεί να γενικευτεί για τρία ή παραπάνω πλήρη γραφήματα. Για παράδειγμα, το γράφημα $K_2\times K_3\times K_4$ έχει πτωτικό 2-, 3-, 4- χρωματισμό, αλλά έχει και πτωτικό 6 - χρωματισμό. Επιπρόσθετα, για αυθαίρετο σύνολο S θετικών ακεραίων, συνεπάγεται ότι το κατηγοτηματικό παράγωγο των πλήρων γραφημάτων K_a για κάθε ακέραιο $a \in S$, έχει πτωτικό a - χρωματισμό για κάθε ακέραιο $a \in S$. Ωστόσο, ίσως να έχει και άλλους (ανεπιθύμητους) πτωτικούς k - χρωματισμούς.
Τα κατηγορηματικά παράγωγα έχουν μάλλον μεγάλη τάξη. Για παράδειγμα για ένα γράφημα με πτωτικό k - χρωματισμό για κάθε k ακέραιο με $2 \leqslant k \leqslant m$, το κατηγορηματικό παράγωγο $G = K_2 \times K_3 \times \ldots \times K_m$ θα έχει πτωτικό k - χρωματισμό για όλες τις τιμές του k.
Για αποδείξεις και παραπάνω αναφορές σχετικά με τα κατηγορηματικά παράγωγα υπάρχουν στην εργασία ([8]).

4.2 Πτωτικός χρωματισμός των καρτεσιανών παραγώγων

Η ενότητα αυτή, θα χωριστεί σε τρία κομμάτια. Στο πρώτο θα γίνεται αναφορά στα καρτεσιανά παράγωγα μονοπατιών και κύκλων, στο δεύτερο θα αναφερθούν ορισμοί και προτάσεις που θα χρειαστούν στο τρίτο, το οποίο θα γενικεύσει των πτωτικό χρωματισμό των καρτεσιανών παραγώγων.

4.2.1 Καρτεσιανά παράγωγα μονοπατιών και κύκλων

Ο πτωτικός χρωματισμός για τα καρτεσιανά παράγωγα: $P_m \square P_n$, $C_m \square P_n$ και $C_m \square C_n$ περιορίζεται στις τάξεις του 2, 3, 4 και 5 αφού, αυτά τα γραφήματα ικανοποιούν τις σχέσεις $2 \leqslant \delta(G) \leqslant 4$ και $\Delta(G) = 4$. Όλα τα παρακάτω, έχουν αποδειχθεί στην εργασία ([8]).

Θεώρημα 4.2.1. *([8]) Για οποιουσδήποτε ακεραίους m και n, το καρτεσιανό παράγωγο $P_m \square P_n$ έχει πτωτικό 2 - χρωματισμό, αλλά δεν έχει πτωτικό k - χρωματισμό για οποιοδήποτε $k \geqslant 3$.*

Πόρισμα 4.2.1. *([8]) Για οποιουσδήποτε ακεραίους m και n, $\chi(P_m \square P_n) = \psi_f(P_m \square P_n) = 2$.*

Πρόταση 4.2.1. *([8]) Το καρτεσιανό παράγωγο $C_m \square P_n$ έχει πτωτικό 2 - χρωματισμό αν και μόνο αν το $m \geqslant 4$ είναι άρτιος.*

Πρόταση 4.2.2. *([8]) Το γράφημα $C_{3m} \square P_n$ έχει πτωτικό 3 - χρωματισμό για όλα τα $n \geqslant 1$. Ενώ τα γραφήματα $C_{3k+1} \square P_n$ και $C_{3k+2} \square P_n$ δεν έχουν πτωτικό 3 - χρωματισμό για οποιαδήποτε τιμή του $k \geqslant 1$.*

Πρόταση 4.2.3. *([8]) Το καρτεσιανό παράγωγο $C_m \square C_n$ έχει πτωτικό 2 - χρωματισμό αν και μόνο αν και το $m \geqslant 4$ και το $n \geqslant 4$ είναι άρτιοι.*

Θεώρημα 4.2.2. *([8]) Το γράφημα $C_m \square C_n$ έχει πτωτικό 3 - χρωματισμό αν και μόνο αν είτε $m = 0 \ mod \ 3$ είτε $n = 0 \ mod \ 3$.*

Πρόταση 4.2.4. *([8]) Τα καρτεσιανά παράγωγα $C_{4m} \square P_{2n}$ και $C_{4m} \square C_{2n}$ έχουν πτωτικό 4 - χρωματισμό για όλα τα $m \geqslant 1$ και $n \geqslant 2$.*

Πρόταση 4.2.5. *([8]) Το γράφημα $C_m \square C_n$ έχει πτωτικό 5 - χρωματισμό αν και μόνο αν $m = 0 \ mod \ 5$ και $n = 0 \ mod \ 5$.*

4.2.2 Ομομορφισμοί

Στην υποενότητα αυτή, γίνεται αναφορά σε ορισμούς εννοιών και προτάσεις που τις αφορούν, τα οποία θα βοηθήσουν στο να δειχθεί η σχέση του πτωτικού χρωματισμού και των καρτεσιανών παραγώγων.

Ορισμός 4.2.1. *([12]) Καλείται* ***ομομορφισμός γραφήματος*** *f από το γράφημα $G = (V, E)$ στο γράφημα $G' = (V', E')$ και συμβολίζεται $f : G \to G'$, αν η συνάρτηση $f : V(G) \to V(G')$ ικανοποιεί τη συνθήκη: $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (f(u), f(v)) \in E(G')$ για $u, v \in V(G)$.*

Ο ομομορφισμός γραφήματος αναφέρεται πρώτη φορά από τον Hedetniemi στην εργασία ([12]). Η έννοια του ομομορφισμού γραφημάτων είναι μία γενίκευση της ιδέας του κατάλληλου χρωματισμού. Ένα γράφημα G είναι k - χρωματίσιμο αν και μόνο αν υπάρχει ομομορφισμός από το G στο K_k. Επίσης, ο κυρίαρχος ομομορφισμός είναι μια γενίκευση της ιδέας της κυρίαρχης διαμέρισης.

Σημείωση 4.2.1. *([17]) Αν ένα $S \subseteq V(G')$ είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο, τότε το $f^{-1}(S) \subseteq V(G)$ είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο στο G.*

Ορισμός 4.2.2. *([17]) Μία συνάρτηση $f : G \to G'$ καλείται* ***κυρίαρχος ομομορφισμός****, αν η $f : V(G) \to V(G')$ ικανοποιεί τη συνθήκη: $(u', v') \in E(G') \Rightarrow \forall v \in f^{-1}(v')$, υπάρχει $u \in f^{-1}(u')$ τέτοιο ώστε $(u, v) \in E(G)$.*

Πρόταση 4.2.6. *([17]) Έστω f ένας κυρίαρχος ομομορφισμός, τέτοιος ώστε η f να είναι συνάρτηση $f : G \to G'$. Για $S, T \subseteq V(G')$ και $f^{-1}(S), f^{-1}(T) \subseteq V(G)$ αν το S κυριαρχεί του T, τότε το $f^{-1}(S)$ κυριαρχεί του $f^{-1}(T)$.*

Με τον ίδιο τρόπο, θα γενικευτεί και η ιδέα του πτωτικού χρωματισμού ορίζοντας ένα νέο ομομορφισμό γραφημάτων, τον τύπου - II ομομορφισμό.

Ορισμός 4.2.3. *([12]) Ένα ομομορφισμός γραφήματος f είναι ένας* ***τύπου - II ομομορφισμός*** *αν η f είναι ένας (στάνταρ) ομομορφισμός και η f είναι, επίσης, κυρίαρχος ομομορφισμός, δηλαδή η f είναι μία συνάρτηση $f : G \to G'$, όπου η $f : V(G) \to V(G')$ ικανοποιεί τις παρακάτω δύο συνθήκες:*
1. $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (f(u), f(v)) \in E(G')$ και
2. $(u', v') \in E(G') \Rightarrow \forall v \in f^{-1}(v')$, υπάρχει $u \in f^{-1}(u')$ τέτοιο ώστε $(u, v) \in E(G)$.

Υπάρχει ένα τετριμμένος τύπου - II ομομορφισμός από οποιοδήποτε G στον εαυτό του μέσω της συνάρτησης $f(v) = v$.
Κάθε τύπου - II ομομορφισμός $f : G \to G'$ αφού είναι (στάνταρ) ομομορφισμός

και κυρίαρχος ομομορφισμός, συνεπάγεται ότι για ένα ανεξάρτητο και κυρίαρχο σύνολο $S \subseteq V(G')$, το $f^{-1}(S) \subseteq V(G)$ είναι και αυτό ανεξάρτητο και κυρίαρχο σύνολο στο G. Οπότε, προκύπτει ότι, ένα γράφημα G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο αν και μόνο αν υπάρχει τύπου - ΙΙ ομομορφισμός από το G στο K_k. Η σχέση του τύπου - ΙΙ ομομορφισμού και του πτωτικού χρωματισμού είναι ίδια με τη σχέση του κανονικού ομομορφισμού και του χρωματισμού.
Ο τύπου - ΙΙ ομομορφισμός είναι κλειστός ως προς την πράξη της σύνθεσης και του καρτεσιανού γινομένου.

Πρόταση 4.2.7. *([17]) Έστω $f_1 : G \to H$ και $f_2 : H \to I$ είναι τύπου - ΙΙ ομομορφισμοί. Τότε υπάρχει τύπου - ΙΙ ομομορφισμός $f_3 : G \to I$.*

Πόρισμα 4.2.2. *([17]) Έστω $f : G \to G'$ είναι τύπου - ΙΙ ομομορφισμός. Τότε, αν το G' είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο, και το G είναι, επίσης, πτωτικά k - χρωματίσιμο.*

Θεώρημα 4.2.3. *([17]) Έστω $f_1 : G \to H$ και $f_2 : H \to I$ είναι τύπου - ΙΙ ομομορφισμοί. Τότε υπάρχει τύπου - ΙΙ ομομορφισμός $f_3 : G\Box H \to G'\Box H'$.*

Ο τύπου - ΙΙ ομομορφισμός θα βοηθήσει στην απλοποίηση και στη γενίκευση των καρτεσιανών παραγώγων των κύκλων και μονοπατιών που μελετήθηκαν.
Τέλος, το σύνολο των γραφημάτων που είναι τύπου - ΙΙ ομομορφικές εικόνες των υπερκύβων συμβολίζονται με $H(Q)$. Αφού, το σύνολο των υπερκύβων είναι κλειστό ως προς το καρτεσιανό παράγωγο, από το θεώρημα 4.2.3 συνεπάγεται ότι και το $H(Q)$ είναι κλειστό ως προς το καρτεσιανό παράγωγο. Επίσης, το σύνολο των διμερών γραφημάτων θα συμβολιστούν με B.

4.2.3 Γενικεύσεις σε άλλα καρτεσιανά παράγωγα

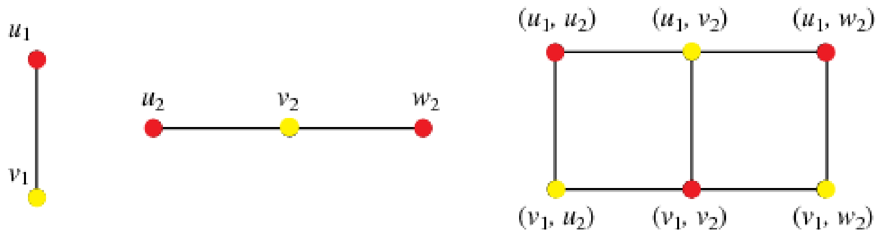
Θεώρημα 4.2.4. *([8]) Αν G και H δύο γραφήματα τα οποία έχουν και τα δύο πτωτικό k - χρωματισμό, τότε το γράφημα $G\Box H$ έχει, επίσης, πτωτικό k - χρωματισμό.*

Απόδειξη. Έστω $\{V_1, V_2, \dots V_k\}$ είναι ο πτωτικός k - χρωματισμός του G, και $\{U_1, U_2, \dots U_k\}$ ο πτωτικός k - χρωματισμός του H. Οι δείκτες θεωρούνται modulo k και για κάθε $j, 1 \leqslant j \leqslant k$, ορίζεται το υποσύνολο W_j του $V(G\Box H)$ ως :

$$W_j = \cup_{i=1}^{k}(V_{i+j-1} \times U_i).$$

Τότε ο $\{W_1, W_2, \dots W_k\}$ είναι ο πτωτικός k - χρωματισμός του $G\Box H$.

□



Σχήμα 4.2: Τα P_2 και P_3 είναι πτωτικά 2 - χρωματίσιμα και το $P_2 \square P_3$ επίσης.

Θεώρημα 4.2.5. *([17]) Για $n \leqslant m$ το γράφημα $K_n \square K_m$ έχει πτωτικό m - χρωματισμό.*

Θεώρημα 4.2.6. *([17]) Για $s \leqslant r$ αν το γράφημα G έχει πτωτικό r - χρωματισμό και το γράφημα H έχει πτωτικό s - χρωματισμό, τότε το γράφημα $G \square H$ έχει πτωτικό r - χρωματισμό.*

Απόδειξη. Αφού υπάρχουν τύπου - ΙΙ ομομορφισμοί $f_1 : G \to K_r$ και $f_2 : H \to K_s$, τότε από το θεώρημα 4.2.3 υπάρχει ένας τύπου - ΙΙ ομομορφισμός $f_3 : G \square H \to K_r \square K_s$ και αφού $K_r \square K_s$ έχει πτωτικό r - χρωματισμό, τότε το γράφημα $G \square H$ έχει πτωτικό r - χρωματισμό. □

Πόρισμα 4.2.3. *([8]) Αν ένα γράφημα G έχει πτωτικό k - χρωματισμό τότε και το γράφημα $G \square P_n$ έχει πτωτικό k - χρωματισμό, για οποιοδήποτε $n \geqslant 1$.*

Θεώρημα 4.2.7. *([17]) Για οποιοδήποτε γράφημα G, το γράφημα $K_2 \square G$ έχει πτωτικό 3 - χρωματισμό αν και μόνο αν το γράφημα G έχει πτωτικό 3 - χρωματισμό.*

Πόρισμα 4.2.4. *([17]) Για οποιοδήποτε γράφημα G και οποιοδήποτε n, το γράφημα $Q_n \square G$ έχει πτωτικό 3 - χρωματισμό αν και μόνο αν το γράφημα G έχει πτωτικό 3 - χρωματισμό.*

Πόρισμα 4.2.5. *([17]) Το γράφημα Q_n δεν είναι πτωτικά 3 - χρωματίσιμο για οποιοδήποτε n.*

Απόδειξη. Έστω από το πόρισμα 4.2.4 το $G = K_2$. Αφού το K_2 δεν έχει πτωτικό 3 - χρωματισμό τότε ούτε και το $Q_n = Q_{n-1} \square K_2$ δεν έχει πτωτικό 3 - χρωματισμό. □

Θεώρημα 4.2.8. *([17]) Για οποιοδήποτε γράφημα G, και ένα γράφημα $H \in H(Q) \cap B$, το γράφημα $H \square G$ έχει πτωτικό 3 - χρωματισμό αν και μόνο αν το γράφημα G έχει πτωτικό 3 - χρωματισμό.*

Απόδειξη. Αρχικά, αν $H\square G$ έχει πτωτικό 3 - χρωματισμό, τότε το $Q_n\square G$ έχει πτωτικό 3 - χρωματισμό, αφού $H \in H(Q)$ που υποδηλώνει ότι το γράφημα G έχει πτωτικό 3 - χρωματισμό. Επίσης, αν το γράφημα G έχει πτωτικό 3 - χρωματισμό, τότε αφού το H είναι διμερές και άρα είναι πτωτικά 2 - χρωματίσιμο, από το θεώρημα 4.2.6 προκύπτει ότι το γράφημα $H\square G$ έχει πτωτικό 3 - χρωματισμό. □

Πρόταση 4.2.8. *([17]) Το μονοπάτι με n κορυφές, P_n για όλα τα n ανήκει στο σύνολο $H(Q)$. Επίσης, ο αστέρας $K_{1,m}$ για όλα τα m ανήκει στο σύνολο $H(Q)$.*

Πόρισμα 4.2.6. *([17]) Για οποιοδήποτε γράφημα $G \in H(Q)$, το γράφημα G δεν είναι πτωτικά 3 - χρωματίσιμο.*

Απόδειξη. Αν το γράφημα G είναι πτωτικά 3 - χρωματίσιμο τότε το γράφημα Q_n είναι πτωτικά 3 - χρωματίσιμο για κάποιο n, το οποίο είναι άτοπο από το 4.2.5. □

Θεώρημα 4.2.9. *([17]) Έστω τα γραφήματα G, H, και I, με το γράφημα G να έχει πτωτικό r - χρωματισμό και να είναι διμερές, το γράφημα H να έχει πτωτικό r - χρωματισμό και το I να είναι διμερές. Τότε το γράφημα $G\square H\square I$ έχει πτωτικό k - χρωματισμό, για όλες τις τιμές του k όπου $r \leqslant k \leqslant 2r-2$ ή $k = 2r$.*

Πόρισμα 4.2.7. *([17]) Για κάθε $k \geqslant 2$, $k \neq 3$, υπάρχει κάποιο n τέτοιο ώστε το Q_n να είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο.*

Θεώρημα 4.2.10. *([17]) Οι υπερκύβοι Q_n δεν έχουν πτωτικό k - χρωματισμό για $k = 3$ για οποιαδήποτε τιμή n. Ωστόσο για κάθε $k \geqslant 2$, $k \neq 3$, υπάρχει κάποιο n τέτοιο ώστε το Q_n να είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο.*

Θεώρημα 4.2.11. *([17]) Έστω ένα γράφημα G, με μία από τις κορυφές του να έχει βαθμό 1, και έστω ένα δέντρο T. Τότε το γράφημα $G\square T$ δεν έχει πτωτικό 3 - χρωματισμό.*

Πόρισμα 4.2.8. *([17]) Έστω T_1 και T_2 δύο δέντρα. Τότε το γράφημα $T_1\square T_2$ είναι πτωτικά 2 - χρωματίσιμο αλλά δεν είναι πτωτικά 3 - χρωματίσιμο.*

Απόδειξη. Κάθε δέντρο έχει ένα φύλλο, άρα από το θεώρημα 4.2.11 το $T_1\square T_2$ δεν είναι πτωτικά 3 - χρωματίσιμο. Αφού κάθε δέντρο είναι διμερές γράφημα, από το θεώρημα 4.2.6, προκύπτει ότι το γράφημα $T_1\square T_2$ είναι πτωτικά 2 - χρωματίσιμο. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Περαιτερω αλγοριθμικα αποτελεσματα

Στο κεφάλαιο αυτό, θα δοθούν επιπρόσθετες αλγοριθμικές συνέπειες για τη δυσκολία των αποτελεσμάτων. Θα χωριστεί σε δύο ενότητες, η πρώτη θα αφορά κυρίως ορισμούς εννοιών που θα χρησιμοποιηθούν και η δεύτερη θα παρουσιάσει τις συνέπειες.

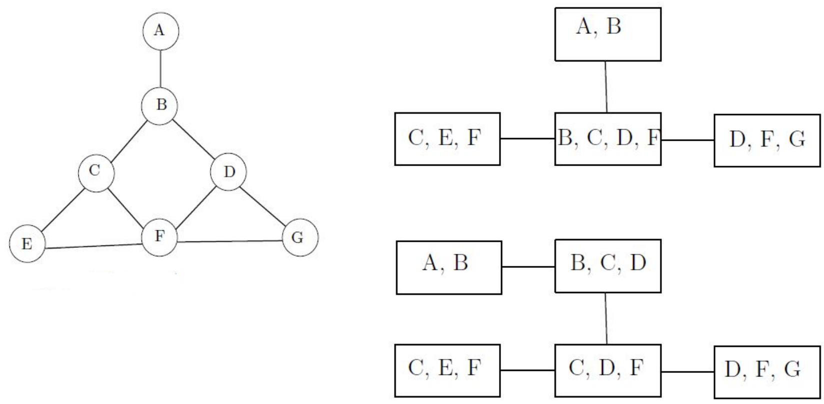
5.1 Ορισμένες χρήσιμες έννοιες

Η ενότητα αυτή, περιέχει ορολογίες που θα φανούν χρήσιμες παρακάτω για την κατανόηση των αποδείξεων των θεωρημάτων. Αρχικά θα γίνει αναφορά για την αποσύνθεση δέντρου του G.

Ορισμός 5.1.1. *([18]) Έστω ένα γράφημα G. Ορίζεται ως* ***αποσύνθεση δέντρου*** *(tree decomposition) του G, ένα ζεύγος $(T, \{X_i : i \in I\})$, όπου το $X_i \subseteq V$, $i \in I$, και το T είναι ένα δέντρο με στοιχεία του I ως κόμβους τέτοια ώστε:*
1. για κάθε ακμή $uv \in E$, υπάρχει ένα $i \in I$ τέτοιο ώστε $\{u, v\} \subseteq X_i$, και
2. για κάθε κόμβο $u \in V$, $T[\{i \in I | u \in X_i\}]$ είναι ένα δέντρο με τουλάχιστον ένα κόμβο.

Ορισμός 5.1.2. *([18]) Το* ***πλάτος*** *της αποσύνθεσης δέντρου ορίζεται ως $max_{i \in I}|X_i| - 1$. Το* ***πλάτος δέντρου*** *(treewidth) του G, συμβολίζεται ως $tw(G)$ και είναι το ελάχιστο πλάτος από όλες τις αποσυνθέσεις δέντρου του G.*

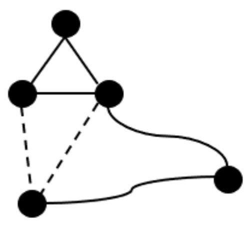
Σημείωση 5.1.1. *Σε μία αποσύνθεση δέντρου του G, ουσιαστικά σπάει το G σε σακούλες (bags) και πρέπει κάθε ακμή να ανήκει σε μία τουλάχιστον σακούλα. Δύο σακούλες που ενώνονται πρέπει να έχουν τουλάχιστον έναν κοινό κόμβο. Από όλους* *τους δυνατούς συνδυασμούς σπασίματος σε σακούλες, το ενδιαφέρον στρέφεται σε αυτόν με όσο το δυνατόν μικρότερο πλάτος.*



Σχήμα 5.1: Στα αριστερά, φαίνεται ένα γράφημα G, και στα δεξιά δύο διαφορετικές αποσυνθέσεις δέντρου του ίδιου γραφήματος. Η πάνω δεξιά έχει πλάτος αποσύνθεσης δέντρου 3 και η κάτω δεξιά πλάτος αποσύνθεσης δέντρου 2.

Θα οριστεί μία έννοια που θα σχετιστεί με το πλάτος δέντρου.

Ορισμός 5.1.3. *Το **k - δέντρο** είναι ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα που σχηματίζεται ξεκινώντας με ένα πλήρες γράφημα (k + 1) κορυφών, και στη συνέχεια προστίθενται επανειλημμένα κορυφές με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε προστιθέμενη κορυφή να έχει ακριβώς k γείτονες, έτσι ώστε να σχηματίζουν κλίκα.*



Σχήμα 5.2: Αν $k = 2$, το 2 - δέντρο έχει τρείς κορυφές και είναι ουσιαστικά το τρίγωνο. Αν προστεθεί ακόμα μία κορυφή, το γράφημα γίνεται το τρίγωνο μαζί με την νέα κορυφή και τις διακεκομμένες. Αν προστεθεί ακόμα μία κορυφή, προκύπτει το τελικό, δηλαδή και με τις καμπυλωτές γραμμές.

Τα k - δέντρα είναι ακριβώς τα μεγιστοτικά γραφήματα για δοσμένο πλάτος δέντρου, δηλαδή, το $tw(G) = k$. Επίσης, είναι ακριβώς τα χορδικά γραφήματα των οποίων οι μεγιστοτικές κλίκες είναι του ίδιου μεγέθους (k + 1).

Ορισμός 5.1.4. *Το* ***μερικώς k - δέντρο*** *είναι υπογράφημα του k - δέντρου, δηλαδή αφαιρώντας κάποιες ακμές. Οι εξωτερικοί κόμβοι λέγονται φύλλα.*

Στην αποσύνθεση δέντρου ενός μερικώς k - δέντρου, τα φύλλα μπαίνουν όλα σε μία μόνο σακούλα. Το πλάτος δέντρου, ενός μερικώς k - δέντρου είναι $tw(G) \leqslant k$, άρα υπάρχει κορυφή με βαθμό το πολύ k.

Πρόταση 5.1.1. *Για κάθε γράφημα G με πλάτος δέντρου $tw(G) \leqslant p$ συνεπάγεται ότι υπάρχει κορυφή x_i με βαθμό $d(x_i) \leqslant p$.*

Απόδειξη. Έστω ένα γράφημα G. Έστω τώρα, ότι η υπόθεση δεν ισχύει, δηλαδή για κάθε γράφημα G με $tw(G) \leqslant p$ συνεπάγεται ότι όλες οι κορυφές έχουν βαθμό τουλάχιστον (p + 1). Είναι γνωστό ότι το γράφημα είναι μερικώς k - δέντρο αν και μόνο αν $tw(G) \leqslant k$. Όμως αυτό έρχεται σε αντίθεση με το παραπάνω γιατί το γράφημα G ως μερικώς k - δέντρο από κατασκευή θα έχει κορυφή με βαθμό το πολύ k, άρα άτοπο. □

Η επόμενη έννοια που θα οριστεί είναι το παραμετρικό πρόβλημα.

Ορισμός 5.1.5. *([18]) Ορίζεται ως* ***παραμετρικό πρόβλημα*** *I ένα ζεύγος (x, k), όπου το x προέρχεται από ένα φιξαρισμένο πεπερασμένο αλφάβητο, και το k είναι ένας ακέραιος που ονομάζεται παράμετρος. Τότε, ένας* ***πυρήνας*** *για το (x, k) είναι ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που επιστρέφει ένα στιγμιότυπο (x', k') του I τέτοιο ώστε το (x, k) να είναι ένα στιγμιότυπο - ναι αν και μόνο αν το (x', k') είναι ένα στιγμιότυπο - ναι, και $|x'| \leq g(k)$, για κάποια υπολογίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

Από την εργασία ([6]) προκύπτει ότι αν $g(k)$ αποτελεί μία πολυωνυμική (εκθετική) συνάρτηση του k, τότε το παραμετρικό πρόβλημα I έχει έναν πολυωνυμικό (εκθετικό) πυρήνα.

Σημείωση 5.1.2. *Παραμετρικό πρόβλημα : έχοντας ένα γράφημα G με n στοιχεία και θέλοντας να μείνουν μόνο κάποια στοιχεία, ακολουθείται η διαδικασία : αν υπάρχει κάποιας τάξης στοιχείο πρέπει να διωχθεί και να κρατηθεί μόνο της μεγαλύτερης τάξης, και έτσι δημιουργείται το G' με n' στοιχεία, που ονομάζεται πυρήνας και έχει $O(f(k))$. Υπάρχει πυρήνας αν και μόνο αν υπάρχει η FPT : fixed parameter tractable problem. Η* ***FPT*** *είναι μία κλάση παραμετρικών* *προβλημάτων που λύνονται σε $f(k)n^{O(1)}$ χρόνο. Η διπλή συνεπαγωγή ισχύει γιατί για τον πυρήνα, η παραμετρικοποίηση θέλει $n^{O(1)}$ χρόνο και ο υπολογισμός $f(k)$ και ο χρόνος για την FPT είναι $f(k)n^{O(1)}$.*

Θα οριστεί η εκθετικού χρόνου υπόθεση (ETH).

Ορισμός 5.1.6. *([18]) Η **εκθετικού χρόνου υπόθεση (ETH)** είναι μία εικασία που δηλώνει ότι υπάρχει μία σταθερά $c > 0$, τέτοια ώστε το πρόβλημα 3 - SAT δεν μπορεί να λυθεί σε χρόνο $O(2^{cn})$, με n να είναι ο αριθμός των μεταβλητών.*

Η επόμενη έννοια που θα οριστεί είναι το ασυμπτωτικό άνω όριο τάξης μεγέθους - ο.

Ορισμός 5.1.7. *(**Ασυμπτωτικό άνω όριο τάξης μεγέθους - ο**) Έστω $T, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $T(n)$ είναι $o(f(n))$, αν για κάθε σταθερά $c > 0$, $\exists\ n_0 \geqslant 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει $T(n) < c \cdot f(n)$.*

Ειδικότερα, έστω ότι για τις συναρτήσεις T(n) και f(n) υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{f(n)}$ και έχει τιμή ίση με 0. Τότε το $T(n) = o(f(n))$.

Παράδειγμα 5.1.1. *Έστω ο αλγόριθμος με πολυπλοκότητα $T(n) = 2n^3 + 5n^2 + logn$, τότε $T(n) = O(n^4)$ αλλά, $T(n) \neq O(n^3)$.*

Τέλος, θα οριστεί η διαμέριση συνόλου.

Ορισμός 5.1.8. *Η **διαμέριση συνόλου** N ορίζεται ως η διαμέριση σε k υποσύνολα $S_1, S_2, \ldots S_k$ τέτοια ώστε $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k = N$ και $S_i \cap S_j = \emptyset$ για $i \neq j$.*

5.2 Αλγοριθμικές συνέπειες

Θεώρημα 5.2.1. *([18]) Έστω G ένα γράφημα με οριοθετημένο πλάτος δέντρου. Το πτωτικό σύνολο Fall(G) μπορεί να καθοριστεί σε πολυωνυμικό χρόνο.*

Απόδειξη. Από την πρόταση 5.1.1 είναι γνωστό ότι κάθε γράφημα με πλάτος δέντρου το πολύ p έχει μία κορυφή με βαθμό το πολύ p, έτσι προκύπτει ότι ο μεγαλύτερος ακέραιος στο σύνολο Fall(G) είναι $\psi_{fall}(G) \leqslant p+1$. Οπότε, πρέπει να ελεγχθεί αν $i \in Fall(G)$ για $i \in \{1, 2, \ldots, p+1\}$. Επιπλέον, από την εργασία ([21]) από τους Telle και Proskurowski προκύπτει ότι ο πτωτικός i - χρωματισμός του G μπορεί να ελεγχθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. □

Μία συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι ότι για κάθε $k \geqslant 1$, ο πτωτικός k - χρωματισμός δέχεται έναν εκθετικό πυρήνα. Σε συνδυασμό με το λήμμα 3.1.1 προκύπτει ότι αυτό είναι το καλύτερο δυνατό, δηλαδή, δεν υπάρχει πολυωνυμικός πυρήνας υπό λογικές πολυπλοκότητες - θεωρητικές παραδοχές.

Πρώτον, το μικροεργαλείο C_6 για κάθε κορυφή του G ταυτίζεται με το λήμμα 3.1.1 και έχει πλάτος δέντρου 2. Δεύτερον, αυτή η ταυτοποίηση αυξάνει το πλάτος δέντρου του G μόνο με μία σταθερά προσθήκης. Χρησιμοποιούνται αυτά τα δεδομένα, λόγω του Bodlaender et al που στην εργασία ([2]) απέδειξαν ότι ο 3 - χρωματισμός δεν επιδέχεται πολυωνυμικό πυρήνα παραμετροποιημένο από το πλάτος δέντρου, εκτός αν $NP \subseteq coNP/poly$. Έτσι, και με βάση το θεώρημα 15.15 από την εργασία ([6]) είναι ξεκάθαρο ότι η απόδειξη του λήμματος 3.1.1 είναι ένας παραμετρικός μετασχηματισμός συντήρησης που εγγυάται ότι $tw(G') \leqslant tw(G) + 2$.

Θεώρημα 5.2.2. *([18]) Ο πτωτικός 3 - χρωματισμός παραμετρικοποιημένος από το πλάτος δέντρου δεν δέχεται έναν πολυωνυμικό πυρήνα εκτός αν* $NP \subseteq coNP/poly$.

Μία, ακόμη, συνέπεια του λήμματος 3.1.1 είναι ότι ο πτωτικός k - χρωματισμός είναι αλγοριθμικά δύσκολος, ακόμα και αν ο αριθμός των χρωμάτων είναι μικρός και το γράφημα επίπεδο.

Πόρισμα 5.2.1. *([18]) Ο πτωτικός 3 - χρωματισμός για επίπεδα γραφήματα δεν μπορεί να λυθεί σε χρόνο* $2^{o(\sqrt{n})}$ *εκτός αν αποτυγχάνει η ETH, όπου* n *ο αριθμός των κορυφών. Ωστόσο, το πρόβλημα επιδέχεται έναν αλγόριθμο που εκτελείται σε* $2^{O(\sqrt{n})}$ *για επίπεδα γραφήματα.*

Απόδειξη. Το γράφημα G' που λαμβάνεται από την απόδειξη του λήμματος 3.1.1 έχει γραμμικό μέγεθος στο μέγεθος του γραφήματος εισόδου G. Το ισχυριζόμενο κάτω όριο, με βάση το θεώρημα 14.3 από την εργασία ([6]), ακολουθεί μία γνωστή αλυσίδα αναγωγών που προέρχεται από το 3 - SAT. Το ισχυριζόμενο άνω όριο προκύπτει από το συνδυασμό του $2^{O(tw(G))}$ αλγορίθμου που έδωσαν οι van Rooij et al στην εργασία ([22]) και το γεγονός ότι ένα n - κορυφών επίπεδο γράφημα έχει πλάτος δέντρου $O(\sqrt{n})$ που προκύπτει από το θεώρημα 3.17 της εργασίας ([9]). □

Τελικά, προκύπτει ότι ο αλφαριθμητικά εκθετικού - χρόνου αλγόριθμος απόφασης αν το $k \in Fall(G)$ απαριθμεί όλους τους δυνατούς k - χρωματισμούς του V(G) και έτσι θέλει $k^n n^{O(1)}$ χρόνο.

Θεώρημα 5.2.3. *([18]) Ο πτωτικός k - χρωματισμός μπορεί να λυθεί σε $3^n n^{O(1)}$ χρόνο και πολυωνυμικό χώρο. Σε εκθετικό χώρο, ο χρόνος μπορεί να βελτιωθεί σε $2^n n^{O(1)}$.*

Απόδειξη. Οι αλγόριθμοι αυτοί λαμβάνονται από την αναγωγή του προβλήματος στη διαμέριση συνόλου για δοσμένο σύμπαν $U = [n]$ και μια οικογένεια συνόλου $F \subseteq 2^U$, και έναν ακέραιο k. Ο στόχος είναι να αποφασιστεί αν το U έχει διαμέριση με k μέλη. Απαριθμούνται όλα τα 2^n υποσύνολα των n κορυφών του G και προστίθενται στο F αυτά που σχηματίζουν ένα ανεξάρτητο κυρίαρχο σύνολο, μια ιδιότητα που αποφασίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Από τα θεωρήματα 2 και 5 της εργασίας ([1]) και τους Björklund et al. προκύπτει ότι η διαμέριση συνόλου μπορεί να λυθεί σε $2^n n^{O(1)}$. Επιπλέον, αν μέλος του F μπορεί να αποφασιστεί σε $n^{O(1)}$ χρόνο, τότε η διαμέριση συνόλου μπορεί να λυθεί σε $3^n n^{O(1)}$ χρόνο και $n^{O(1)}$ χώρο. Από το θεώρημα 2 της εργασίας ([1]) προκύπτει το αποτέλεσμα του εκθετικού χώρου. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Συμπερασματα - Επεκτασεις

Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιαστεί περιληπτικά ότι έχει αναφερθεί στα προηγούμενα κεφάλαια, καθώς και επεκτάσεις που γίνανε με βάση όσα μελετήθηκαν.

6.1 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία, μελετήθηκε ο πτωτικός χρωματισμός γραφημάτων και η σχέση του με την θεωρία πολυπλοκότητας. Αρχικά, δόθηκαν και άλλοι χρωματισμοί, καθώς και η σχέση μεταξύ τους. Έγινε αναφορά σε παραδείγματα και εφαρμογές των χρωματισμών αυτών. Έπειτα, εξετάστηκε η NP - πληρότητα του πτωτικού χρωματισμού κυρίως σε επίπεδα διμερή γραφήματα και κανονικά γραφήματα, όπως και η NP - πληρότητα παρεμφερών χρωματισμών του πτωτικού χρωματισμού. Δόθηκαν κλάσεις γραφημάτων που ο πτωτικός χρωματισμός επιτυγχάνεται με πολυωνυμική πολυπλοκότητα, όπως τα δέντρα και τα πλήρη γραφήματα, ακόμη και πιο σύνθετων γραφημάτων, όπως τα καρτεσιανά παράγωγα. Τέλος, ακολούθησαν περεταίρω αλγοριθμικά αποτελέσματα που ανέδειξαν την δυσκολία του πτωτικού χρωματισμού.

Παρακάτω, δίνονται δύο πίνακες, οι οποίοι αναφέρουν τις κλάσεις γραφημάτων και τον πτωτικό τους χρωματισμό. Ο διαχωρισμός γίνεται με βάση την υπολογιστική τους πολυπλοκότητα, δηλαδή ο πρώτος πίνακας αφορά τις κλάσεις γραφημάτων με πολυωνυμική πολυπλοκότητα και ο δεύτερος τις κλάσεις γραφημάτων με NP - πληρότητα .

Πολυωνυμική πολυπλοκότητα		
Κλάσεις γραφημάτων	Πτωτικός χρωματισμός	Αναφορά
Κατηγορηματικό παράγωγο $K_2 \times K_k$ με $k \geqslant 3$	Πτωτικά k - χρωματίσιμο	Πρόταση 3.1.1
Κατηγορηματικό παράγωγο $K_r \times K_s$ με $r, s \geqslant 2$	Πτωτικά r, s - χρωματίσιμο	Θεώρημα 3.1.1
Μεγιστοτικό εξωεπίπεδο γράφημα με τουλάχιστον 3 κορυφές	Πτωτικά 3 - χρωματίσιμο	Θεώρημα 3.1.4
Κύκλος C_n για $n = 0mod3$	Πτωτικά 3 - χρωματίσιμο	Θεώρημα 3.2.1
Δέντρο	Πτωτικά 2 - χρωματίσιμο	Θεώρημα 4.1.1
Πλήρες γράφημα K_n	Πτωτικά n - χρωματίσιμο	εργασία [4]
Πλήρες k- partite γράφημα	Πτωτικά k - χρωματίσιμο	εργασία [4]
Συνεκτικό διμερές γράφημα, $m \times n$ πλέγμα και υπερκύβος	Πτωτικά 2 - χρωματίσιμο	εργασία [4]
Κυρίαρχο κρίσιμο γράφημα	Πτωτικά k - χρωματίσιμο	εργασία [4]
Κανονικό γράφημα με $d(G) = \delta(G) + 1 = k$	Πτωτικά k - χρωματίσιμο	εργασία [4]
Καρτεσιανό παράγωγο μονοπατιών $P_m \Box P_n$	Πτωτικά 2 - χρωματίσιμο	Θεώρημα 4.2.1
Καρτεσιανό παράγωγο κύκλου μονοπατιού $C_m \Box P_n$, με m άρτιο και $m \geqslant 4$	Πτωτικά 2 - χρωματίσιμο	Πρόταση 4.2.1
Καρτεσιανό παράγωγο κύκλου μονοπατιού $C_{3m} \Box P_n$, με $n \geqslant 1$	Πτωτικά 3 - χρωματίσιμο	Πρόταση 4.2.2
Καρτεσιανό παράγωγο κύκλων $C_m \Box C_n$, με m και n άρτια και $m, n \geqslant 4$	Πτωτικά 2 - χρωματίσιμο	Πρόταση 4.2.3
Καρτεσιανό παράγωγο κύκλων $C_m \Box C_n$, με $m, n = 0mod3$	Πτωτικά 3 - χρωματίσιμο	Θεώρημα 4.2.2
Καρτεσιανά παράγωγά $C_{4m} \Box P_{2n}$ και $C_{4m} \Box C_{2n}$, με $m \geqslant 1$ και $n \geqslant 2$	Πτωτικά 4 - χρωματίσιμο	Πρόταση 4.2.4
Καρτεσιανό παράγωγο κύκλων $C_m \Box C_n$, με $m, n = 0mod5$	Πτωτικά 5 - χρωματίσιμο	Πρόταση 4.2.5
Καρτεσιανό παράγωγο πλήρων γραφημάτων $K_n \Box K_m$ με $n \leqslant m$	Πτωτικά m - χρωματίσιμο	Θεώρημα 4.2.5
Καρτεσιανό παράγωγο δέντρων $T_1 \Box T_2$	Πτωτικά 2 - χρωματίσιμο	Πόρισμα 4.2.8

Πίνακας 6.1: Οι κλάσεις γραφημάτων με πολυωνυμική πολυπλοκότητα κατά τον πτωτικό χρωματισμό.

NP - πλήρη προβλήματα		
Κλάσεις γραφημάτων	Πτωτικός χρωματισμός	Αναφορά
Διμερές επίπεδο γράφημα με $\Delta(G) \leqslant 6$	Πτωτικά 3 - χρωματίσιμο	Πόρισμα 3.1.1
Διμερές γράφημα	Πτωτικά k - χρωματίσιμο για $k \geqslant 3$	Θεώρημα 3.1.2
Διμερές γράφημα με $\Delta(G) = 3(k+1)$ για $k \geqslant 3$	Πτωτικά k - χρωματίσιμο	Πόρισμα 3.1.2
Επίπεδο γράφημα χωρίς τρίγωνο	Πτωτικά 2 - χρωματίσιμο	Θεώρημα 3.1.5
3 - κανονικό γράφημα	Πτωτικά 4 - χρωματίσιμο	Θεώρημα 3.2.4
$(2k-2)$ - κανονικό γράφημα, για $k \geqslant 3$	Πτωτικά k - χρωματίσιμο	Θεώρημα 3.2.5
$(2k-1)$ - κανονικό γράφημα, για $k \geqslant 3$	Πτωτικά k - χρωματίσιμο	Θεώρημα 3.2.6

Πίνακας 6.2: Οι κλάσεις γραφημάτων με NP - πληρότητα κατά τον πτωτικό χρωματισμό.

6.2 Επεκτάσεις και Νέα αποτελέσματα

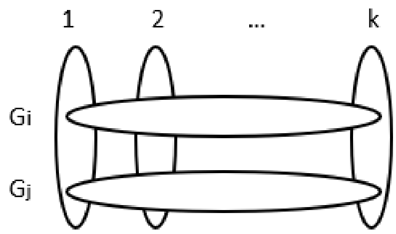
Στην ενότητα αυτή, θα αναλυθούν δύο ερωτήματα που προέκυψαν κατά τη μελέτη για τον πτωτικό χρωματισμό. Το πρώτο ερώτημα αφορά το πρόβλημα του πτωτικού χρωματισμού για τα cographs και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του προβλήματος. Το δεύτερο ερώτημα αφορά τον σχεδόν πτωτικό k -χρωματισμό όπου δίνεται ένας k - χρωματισμός στον οποίο όλες οι κορυφές εκτός από μια είναι πολύχρωμες και θα δειχθεί αν ο k - χρωματισμός μετατρέπεται σε πτωτικό k - χρωματισμό. Για το πρώτο ερώτημα δίνεται ο πρώτος πολυωνυμικός αλγόριθμος για την επίλυση του πρόβληματος σε cograph γραφήματα. Για το δεύτερο ερώτημα δίνονται ορισμένες ικανές συνθήκες που ελέγχουν για την επίτευξη ή μη του πτωτικού k - χρωματισμού καθώς και ο πολυωνυμικός αλγόριθμος που το επιλύει.

6.2.1 Πτωτικός χρωματισμός των cographs

Αρχικά, πριν γίνει αναφορά στα cographs, θα δοθούν δύο προτάσεις που αναφέρονται σε γραφήματα γενικά, και θα φανούν χρήσιμες παρακάτω.

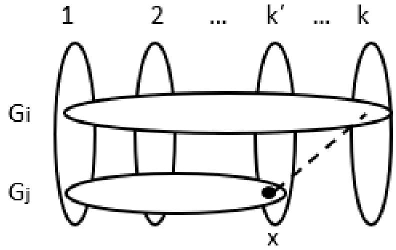
Πρόταση 6.2.1. *Έστω ένα γράφημα G. Το G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο αν* *και μόνο αν κάθε συνεκτική συνιστώσα G_i του G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμη.*

Απόδειξη. Η απόδειξη για λόγους ευκολίας και χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα γίνει για δύο συνεκτικές συνιστώσες, όμοια όμως επιτυγχάνεται και για παραπάνω. Οπότε έστω $G = G_i \cup G_j$.



Σχήμα 6.1: Ένα γράφημα $G = G_i \cup G_j$ με πτωτικά k - χρωματισμό.

Έστω το γράφημα G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο και έστω ότι η συνεκτική συνιστώσα G_i του G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμη, ενώ η συνεκτική συνιστώσα G_j του G είναι πτωτικά k' - χρωματίσιμη, με $k' < k$, όπως φαίνεται παρακάτω.



Σχήμα 6.2: Ένα γράφημα G με μια συνεκτική συνιστώσα να είναι πτωτικά k - χρωματίσιμη, και ακόμη μία που είναι πτωτικά k' - χρωματίσιμη, με $k' < k$.

Έστω η κορυφή x της συνεκτικής συνιστώσας G_j που ανήκει στην χρωματική κλάση k'. Αφού το γράφημα G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο, τότε η x είναι πολύχρωμη. Όμως, αφού η συνεκτική συνιστώσα G_j δεν περιλαμβάνει την κλάση χρωματισμού k, τότε το x δεν γειτονεύει με την κλάση χρωματισμού k, οπότε δεν είναι πολύχρωμη, άτοπο από υπόθεση.
Αντίστροφα, όλες οι συνεκτικές συνιστώσες του G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμες οπότε και το G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο. $\square$

Ουσιαστικά η πρόταση δείχνει πως ένα γράφημα είναι πτωτικά χρωματίσιμο αν και μόνο αν όλες συνεκτικές συνιστώσες του είναι πτωτικά χρωματίσιμες, και μάλιστα όλες πρέπει να έχουν τον ίδιο πτωτικό χρωματισμό.

Πρόταση 6.2.2. *Έστω ένα γράφημα G με $G = G_1 * G_2$. Το G είναι πτωτικά $(a+b)$ - χρωματίσιμο αν και μόνο αν το G_1 είναι πτωτικά a - χρωματίσιμο και το G_2 είναι πτωτικά b - χρωματίσιμο.*

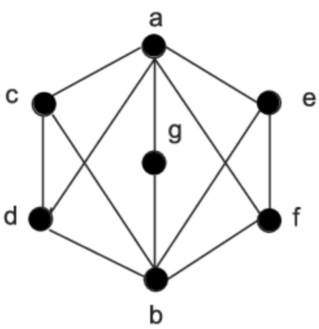
Απόδειξη. Έστω το γράφημα G είναι πτωτικά $(a+b)$ - χρωματίσιμο με $G = G_1 * G_2$. Έστω ότι το G_1 δεν είναι πτωτικά a - χρωματίσιμο, ενώ το G_2 είναι πτωτικά b - χρωματίσιμο. Αφού το G_1 δεν είναι πτωτικά a - χρωματίσιμο, τότε υπάρχει κάποιο $x \in G_1$ που δεν είναι πολύχρωμο στο G_1. Το x λόγω της πράξης της σύνδεσης με το G_2 γειτονεύει με όλα τα b χρώματα, άρα το γράφημα G δεν είναι πτωτικά $(a+b)$ - χρωματίσιμο, άτοπο. Όμοια αποδεικνύεται, αν θεωρηθεί ότι το G_1 είναι πτωτικά a - χρωματίσιμο, ενώ το G_2 δεν είναι πτωτικά b - χρωματίσιμο. Αντίστοφα, έστω ότι το G_1 είναι πτωτικά a - χρωματίσιμο και το G_2 είναι πτωτικά b - χρωματίσιμο. Από κατασκευή, κάθε $x \in G_1$ θα ενώνεται με όλα τα $y \in G_2$ και κάθε $y \in G_2$ θα ενώνεται με όλα τα $x \in G_1$. Άρα, για $G = G_1 * G_2$, το γράφημα G είναι πτωτικά $(a+b)$ - χρωματίσιμο. □

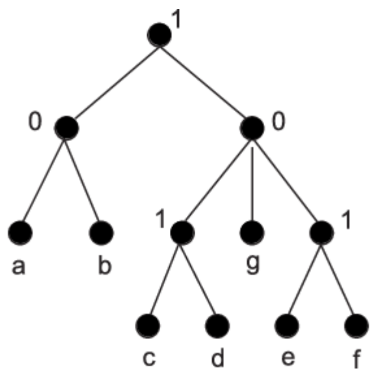
Τώρα, θα δοθεί ο ορισμός του cograph και του cotree καθώς και χρήσιμες πληροφορίες για αυτά.

Ορισμός 6.2.1. *Ένα γράφημα καλείται **cograph** αν μπορεί να κατασκευαστεί χρησιμοποιώντας τους ακόλουθους κανόνες :*
1) κάθε κορυφή μόνη της είναι cograph,
2) αν G_1, G_2 είναι cographs τότε και η ασύνδετη ένωση τους $G_1 \cup G_2$ είναι cograph,
3) αν G_1, G_2 είναι cographs τότε και η σύνδεση τους $G_1 * G_2$ είναι cograph.

Είναι γνωστό ότι ένα γράφημα είναι cograph αν και μόνο αν δεν περιέχει άχορδο μονοπάτι P_4. Ένα cograph μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα δέντρο που ονομάζεται cotree.

Ορισμός 6.2.2. *Ένα δέντρο καλείται **cotree**, και συμβολίζεται $T(G)$, αν ορίζει ένα cograph G. Τα φύλλα του δέντρου T αντιστοιχούν στις κορυφές του G και οι υπόλοιποι κόμβοι του δέντρου έχουν ως ετικέτα 0 ή 1. Κάθε ριζωμένο υπόδεντρο του T αντιστοιχεί στο επαγόμενο υπογράφημα του G και αν η ρίζα είναι το 0 αντιστοιχίζεται στην ασύνδετη ένωση των υπογραφημάτων που ορίζονται ως παιδία της ρίζας και αν η ρίζα είναι το 1 αντιστοιχίζεται στην σύνδεση των υπογραφημάτων που ορίζονται ως παιδία της ρίζας.*





Σχήμα 6.3: Ένα cograph και το αντίστοιχο cotree του.

Αφού στόχος της ενότητας αυτής είναι να δειχθεί αν και πότε ένα cograph είναι πτωτικά χρωματίσιμο, παρακάτω οι δύο σημειώσεις δίνουν κάποια στοιχεία, που όμως δεν είναι αρκετά.

Σημείωση 6.2.1. *Αν το cograph είναι πλήρες ή πλήρες διμερές τότε σίγουρα είναι πτωτικά χρωματίσιμο.*

Σημείωση 6.2.2. *Αν υπάρχει κορυφή v με $deg(v) \leq k-1$, τότε το γράφημα δεν είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο.*

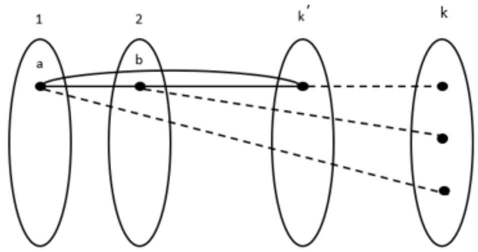
Έτσι, θα δειχθούν κάποιες προτάσεις που θα δώσουν το απαιτούμενο αποτέλεσμα. Είναι γνωστό ότι, σε ένα cograph ισχύει ότι ο χρωματικός αριθμός ισούται με τον αριθμό των κορυφών μιας μέγιστης κλίκας, δηλαδή $\chi(G) = \omega(G)$.

Πρόταση 6.2.3. *Έστω ένα cograph G που είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο. Τότε $\chi(G) = k$.*

Απόδειξη. Έστω ότι δεν ισχύει η υπόθεση, δηλαδή το G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο και $\chi(G) = k' = \omega(G)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι $k' < k$.

Έστω ότι υπάρχει μια μέγιστη κλίκα που ακουμπάει στις χρωματικές κλάσεις $1, \ldots, k'$. Υπάρχει ζεύγος στην μέγιστη κλίκα, έστω (a, b), και έστω η a ανήκει στην χρωματική κλάση 1 και η b ανήκει στην χρωματική κλάση 2, και οι κορυφές a, b δεν έχουν κοινό γείτονα στην κλάση k, γιατί αλλιώς $\omega(G) = k' + 1 > k'$, άτοπο. Δηλαδή, $\exists a, b \in w(G) : N(a) \cap F \neq \emptyset$, $N(b) \cap F \neq \emptyset$, $N(a) \cap N(b) = \emptyset$, με F το σύνολο της χρωματικής κλάσης k, όπως φαίνεται παρακάτω.

Όμως, τότε υπάρχουν οι κορυφές a, b σε διαφορετικές κλάσεις που είναι γειτονικές και, επειδή είναι πολύχρωμες, θα έχουν κάποιο διαφορετικό γείτονα στη

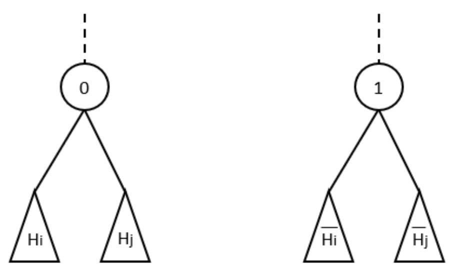


Σχήμα 6.4: Ένα γράφημα G που είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο και έχει $\chi(G) = k' = \omega(G)$.

κλάση k. Αυτές οι 4 κορυφές φτιάχνουν μονοπάτι P_4. Αφού, το G είναι cograph, δηλαδή δεν περιέχει μονοπάτι P_4, άρα, άτοπο. Οπότε $\chi(G) = k$ και το G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο. □

Παρόλο που ένα cograph έχει πτωτικό k - χρωματισμό μόνο για $k = \chi(G)$, υπάρχουν cographs που έχουν πτωτικό χρωματισμό και υπάρχουν cographs που δεν έχουν πτωτικό χρωματισμό. Επομένως, χρειάζεται να αναγνωριστεί αν ένα cograph έχει πτωτικό χρωματισμό. Θα δειχθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την αναγνώριση που θα οδηγήσει σε έναν αλγόριθμο αναγνώρισης γραμμικού χρόνου. Αυτό, επίσης, που θα βοηθήσει είναι το cograph να μην μελετηθεί ως ένα ενιαίο γράφημα, αλλά να μελετηθούν τα επαγόμενα υπογραφήματα του.

Ορισμός 6.2.3. *Έστω ένα cograph G και το αντίστοιχο cotree του $T(G)$. Έστω u ένας εσωτερικός 0-κόμβος (αντίστοιχα, 1-κόμβος) του cotree $T(G)$ με παιδιά $u_1, \ldots, u_q$. Για κάθε i, συμβολίζεται με H_i (αντίστοιχα $\bar{H}_i$) το υπογράφημα του G που επάγεται από τα φύλλα (δηλαδή, τις κορυφές) του υποδέντρου με ρίζα τον κόμβο u_i.*



Σχήμα 6.5: Στα αριστερά είναι τα παιδιά ενός 0 - κόμβου και στα δεξιά τα παιδιά ενός 1 - κόμβου.

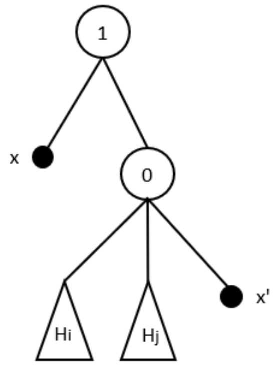
Θα γίνεται αναφορά στο γράφημα H_i (αντίστοιχα, $\bar{H}_i$) ως παιδί ενός 0-κόμβου (αντίστοιχα 1-κόμβου) του cotree $T(G)$. Τα H_i και H_j είναι ξένα και καμία ακμή δεν υπάρχει μεταξύ τους, ενώ τα $\bar{H}_i$ και $\bar{H}_j$ είναι ξένα αλλά με ακμές μεταξύ τους.

Πρόταση 6.2.4. *Έστω H_i και H_j τα παιδιά ενός επαγόμενου υπογραφήματος ενός 0 - κόμβου στο $T(G)$. Για κάθε $x \in V - (H_i \cup H_j)$, είτε ισχύει $(H_i \cup H_j) \subseteq N(x)$ είτε ισχύει $N(x) \cap H_i = \emptyset$ και $N(x) \cap H_j = \emptyset$.*

Πρόταση 6.2.5. *Έστω $\bar{H}_i$ και $\bar{H}_j$ τα παιδιά ενός επαγόμενου υπογραφήματος ενός 1 - κόμβου στο $T(G)$. Για κάθε $x \in V - (\bar{H}_i \cup \bar{H}_j)$, είτε ισχύει $(\bar{H}_i \cup \bar{H}_j) \subseteq N(x)$ είτε ισχύει $N(x) \cap \bar{H}_i = \emptyset$ και $N(x) \cap \bar{H}_j = \emptyset$.*

Ουσιαστικά το x είτε είναι γειτονικό με όλους είτε με κανέναν.

Παράδειγμα 6.2.1. *Παρακάτω φαίνεται ένα επαγόμενο υπογράφημα ενός $T(G)$ ενός cograph G. Συγκριτικά με τις δύο παραπάνω προτάσεις, υπάρχει η κορυφή x που γειτονεύει με όλους και το x' που δεν γειτονευει με κανέναν.*

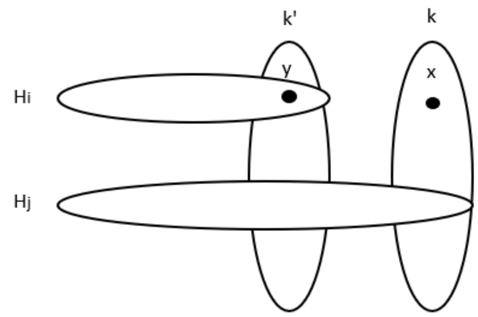


Σκοπός τώρα, είναι να δειχθεί ότι τα H_i και H_j έχουν τον ίδιο χρωματισμό.

Πρόταση 6.2.6. *Έστω H_i και H_j τα παιδιά ενός 0 - κόμβου στο cotree $T(G)$. Αν το G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο τότε τα H_i και H_j είναι πτωτικά k' - χρωματίσιμα, με $k' \leqslant k$.*

Απόδειξη. Έστω G να είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο και έστω το H_i να είναι πτωτικά k' - χρωματίσιμο και H_j είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο με $k' < k$.
Διαλέγεται μία κορυφή y του H_i που ανήκει στην k' χρωματική κλάση. Αφού το G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο, τότε η y είναι πολύχρωμη, άρα η y θα πρέπει να έχει κάποιο γείτονα x στην κλάση k. Η x δεν ανήκει στο H_j γιατί υπάρχει

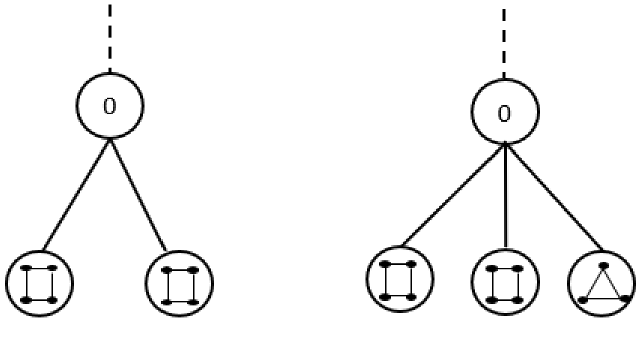
ακμή $\{x, y\}$ και H_i, H_j δεν ενώνονται. Άρα υπάρχει $x \in V - (H_i \cup H_j)$ τέτοιο ώστε η x να ανήκει στη χρωματική κλάση k και από την πρόταση 6.2.4 είτε είναι γειτονική με όλα, άτοπο γιατί θα είναι γειτονική με κάθε κορυφή της H_j που ανήκει στην κλάση k (με αυτόν τον τρόπο χάνεται η ανεξαρτησία από τον πτωτικό χρωματισμό), είτε δεν γειτονεύει με κανέναν, άρα ούτε και με το y, οπότε το y όχι πολύχρωμο, άτοπο γιατί το G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο.



Σχήμα 6.6: Τα H_i και H_j παιδιά ενός επαγόμενου υπογραφήματος ενός 0 - κόμβου, και H_i είναι πτωτικά k' - χρωματίσιμο και H_j είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο με $k' < k$.

□

Παράδειγμα 6.2.2. *Παρακάτω βλέπουμε ένα γράφημα με πτωτικό k - χρωματισμό (αυτό στα αριστερά), με τα παιδιά ενός επαγόμενου υπογραφήματος ενός 0 - κόμβου να είναι πτωτικά k' - χρωμτίσιμα και ένα που δεν έχει πτωτικό k - χρωματισμό (αυτό στα δεξιά), αφού τα παιδιά ενός επαγόμενου υπογραφήματος ενός 0 - κόμβου έχουν διαφορετικό πτωτικό χρωματισμό.*



Πρόταση 6.2.7. *Έστω $\bar{H}_i$ και $\bar{H}_j$ τα παιδιά ενός 1 - κόμβου στο cotree $T(G)$. Αν το $\bar{H}_i$ είναι πτωτικά a - χρωματίσιμο και το $\bar{H}_j$ είναι πτωτικά b - χρωματίσιμο τότε το G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο με $(a+b) \leqslant k$.*

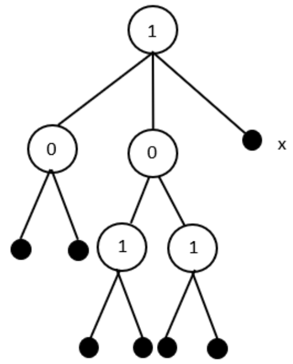
Απόδειξη. Έστω το $\bar{H}_i$ είναι πτωτικά a - χρωματίσιμο και το $\bar{H}_j$ είναι πτωτικά b - χρωματίσιμο. Διακρίνονται δύο περιπτώσεις :
1. Αν ο 1 - κόμβος είναι η ρίζα τότε το G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο με $k = (a+b)$.
2. Αν ο 1 - κόμβος είναι κάπου στο $T(G)$ τότε για $x \in V - (H_i \cup H_j)$, η x από την πρόταση 6.2.4 είτε θα ενώνεται με όλους άρα ο χρωματισμός θα είναι $k \geqslant (a+b)$, είτε δεν θα ενώνεται με κανέναν άρα το x παίρνει κάποιο από τα $(a+b)$ χρώματα. □

Το παρακάτω πόρισμα προκύπτει από την πρόταση 6.2.6.

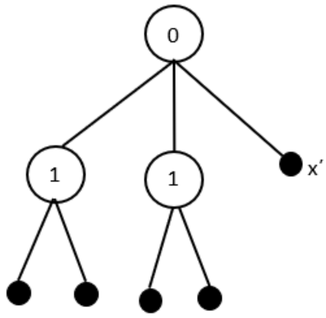
Πόρισμα 6.2.1. *Έστω ένα cograph G και το αντίστοιχο cotree του $T(G)$ και έστω H_i και H_j τα παιδιά ενός επαγόμενου υπογραφήματος ενός 0 - κόμβου στο $T(G)$. Αν το G είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο, τότε θα πρέπει για κάθε H_i και H_j να ισχύει $\omega(H_i) = \omega(H_j) \leqslant k$.*

Ουσιαστικά, αφού $\chi(G) = \omega(G)$ και αφού $\chi(H_i) = \chi(H_j) \leqslant k$ άρα $\omega(H_i) = \omega(H_j) \leqslant k$.

Παράδειγμα 6.2.3. *Παρακάτω βλέπουμε ένα τυχαίο cotree που στο δέντρο αυτό τα παιδιά κάθε 0 - κόμβου έχουν το ίδιο ω, και η x ενώνεται με όλα. Επίσης, αφού το στη ρίζα υπάρχει 1 - κόμβος ο πτωτικός χρωματισμός είναι τουλάχιστον το άθροισμα των πτωτικών χρωματισμών των επαγόμενων υπογραφημάτων του, αν είναι αυτά είναι πτωτικά χρωματίσιμα.*

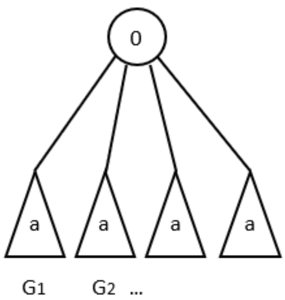


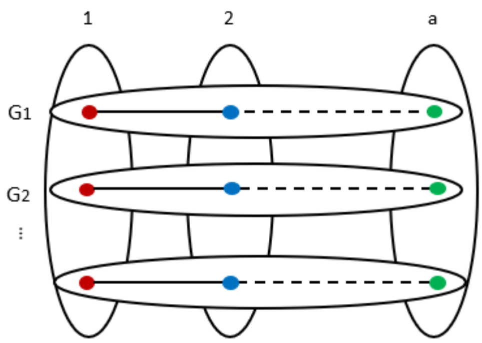
Ενώ στο επόμενο cotree τα παιδιά του 0 - κόμβου έχουν διαφορετικό ω και το x' δεν ενώνεται με κανέναν. Επίσης, ο κάθε 1 - κόμβος έχει πτωτικό 2 - χρωματισμό.



Πρόταση 6.2.8. *Έστω ένα cograph G και το αντίστοιχο cotree του $T(G)$ και έστω H_i και H_j τα παιδιά ενός επαγόμενου υπογραφήματος ενός 0 - κόμβου στο $T(G)$. Αν για κάθε 0 - κόμβο ισχύει ότι $\omega(H_i) = \omega(H_j) \leqslant k$ τότε το G είναι πτωτικά χρωματίσιμο.*

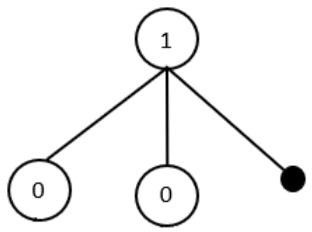
Απόδειξη. Αν η ρίζα είναι 0 - κόμβος τότε όλα τα υπογραφήματα έχουν ίδιο μέγεθος μέγιστης κλίκας (έστω $\omega(H_i) = a$) και οι κορυφές τους διαμερίζονται στις ίδιες χρωματικές κλάσεις. Επαγωγικά γνωρίζουμε ότι τα υπογραφήματα H_i είναι πτωτικά χρωματίσιμα, επομένως θα είναι και το G πτωτικά χρωματίσιμο.





Σχήμα 6.7: Το cotree ενός cograph με ρίζα 0 - κόμβο και ο πτωτικός χρωματισμός του.

Αν η ρίζα είναι 1 - κόμβος τότε χρειάζονται $\Sigma\omega(\bar{H}_i)$ χρώματα. Επιπλέον κάθε κορυφή του $\bar{H}_i$ είναι γειτονική με κάθε κορυφή του $\bar{H}_j$. Επομένως κάθε κορυφή του $\bar{H}_i$ θα είναι πολύχρωμη ως προς τα χρώματα του $\bar{H}_j$. Επαγωγικά γνωρίζουμε ότι κάθε γράφημα $\bar{H}_i$ είναι πτωτικά χρωματίσιμο (κάθε $\bar{H}_i$ είναι είτε μια κορυφή είτε ένα cograph με ρίζα ένα 0 - κόμβο). Επομένως και το συνολικό γράφημα είναι πτωτικά χρωματίσιμο.



Σχήμα 6.8: Το cotree ενός cograph με ρίζα 1 - κόμβο. Κάθε 0 - κόμβος που είναι παιδί της ρίζας έχει την μορφή όπως στο σχήμα 6.7.

□

Οπότε, από όλα τα παραπάνω, προκύπτει ο χαρακτηρισμός για τα πτωτικά χρωματίσιμα cographs.
Για έναν κόμβο u του $T(G)$ ορίζουμε το G_u : επαγόμενο υπογράφημα από τα φύλλα του υποδέντρου με ρίζα το u.

Θεώρημα 6.2.1. *Έστω G ένα cograph με $T(G)$ το αντίστοιχο cotree του. Το G είναι πτωτικά $\omega(G)$ - χρωματίσιμο αν και μόνο αν για κάθε 0-κόμβο u του $T(G)$ ισχύει $\omega(G_u) = \omega(H_i)$ για κάθε H_i παιδί του u.*

Το $\omega(G_u)$ είναι η μέγιστη κλίκα από ένα μη συνεκτικό γράφημα, δηλαδή $\omega(G_u) = max\omega(H_i)$. Άρα αρκεί, κάθε συνεκτική συνιστώσα να έχει την ίδια σε μέγεθος μέγιστη κλίκα με το G_u (τότε αναγκαστικά όλες θα είναι ίσες).

Συμπερασματικά, λοιπόν, προκύπτει το τελικό θεώρημα καθώς και η πολυπλοκότητα της επίλυσης τους προβλήματος.

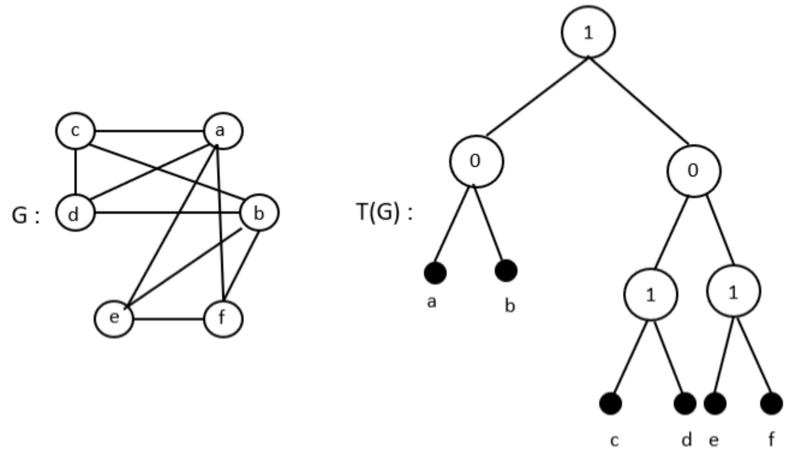
Θεώρημα 6.2.2. *Έστω G ένα cograph με $T(G)$ το αντίστοιχο cotree του. Η αναγνώριση ενός πτωτικά χρωματίσιμου cograph μπορεί να γίνει σε $O(n+m)$ χρόνο.*

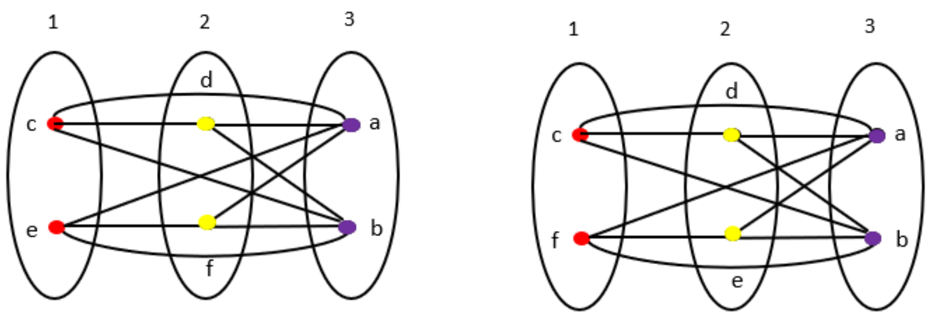
Απόδειξη. Από την εργασία ([5]) προκύπτει ότι η κατασκευή του cotree $T(G)$ ενός cograph G χρειάζεται $O(n+m)$ χρόνο. Έπειτα ακολουθείτε ο αλγόριθμος καθορισμού του $\omega(G)$ με βάση το $T(G)$. Ξεκινώντας από τα φύλλα του δέντρου και σε κάθε εσωτερικό κόμβο υπολογίζεται το άθροισμα, αν ο κόμβος είναι 1 - κόμβος, ή το μέγιστο, αν ο κόμβος είναι 0 - κόμβος, από τις πληροφορίες των παιδιών του κόμβου. Επιπρόσθετα, στην περίπτωση του 0 - κόμβου εκτός από το μέγιστο ελέγχεται και για την ίδια τιμή σε κάθε παιδί του 0 - κόμβου. □

Θα παρουσιαστούν ορισμένες ιδιότητες που μελετήθηκαν για τον πτωτικό χρωματισμό των cographs:

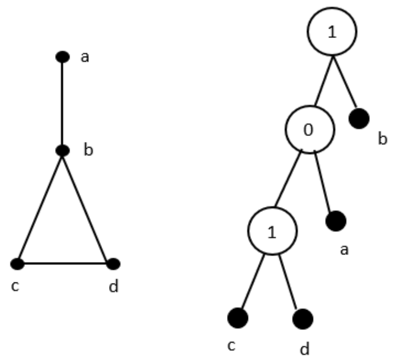
- Το παρακάτω παράδειγμα έχει ως σκοπό την ανάδειξη του γεγονότος ότι παρόλο που για κάθε cograph το cotree του είναι μοναδικό, δεν υπάρχει μοναδικότητα ως προς τον πτωτικό χρωματισμό.

  Παράδειγμα 6.2.4. *Έστω ένα cograph G με το αντίστοιχο cotree του $T(G)$. Το παρακάτω γράφημα, με βάση ότι αποδείχθηκε, είναι πτωτικά 3 - χρωματίσιμο. Όμως, ο πτωτικός 3- χρωματισμός του, δεν είναι μοναδικός, όπως φαίνεται παρακάτω.*



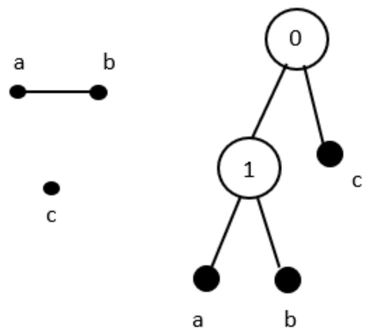


- Μία ακόμη χρήσιμη πληροφορία είναι ότι το μικρότερο συνεκτικό cograph που δεν έχει πτωτικό χρωματισμό είναι:



Δεν είναι πτωτικά 3 - χρωματίσιμο, αφού τα παιδιά του επαγόμενου υπογραφήματος του 0 - κόμβου έχουν διαφορετικό ω. Επίσης, δεν μπορεί να υπάρξει μικρότερο συνεκτικό cograph γιατί χρειάζεται τουλάχιστον ένας 0 - κόμβος με $\omega(H_i) \neq \omega(H_j)$, άρα και δύο 1 - κόμβους, έναν για να είναι συνεκτικό (ρίζα) και έναν για το $\omega(H_i) \neq \omega(H_j)$.

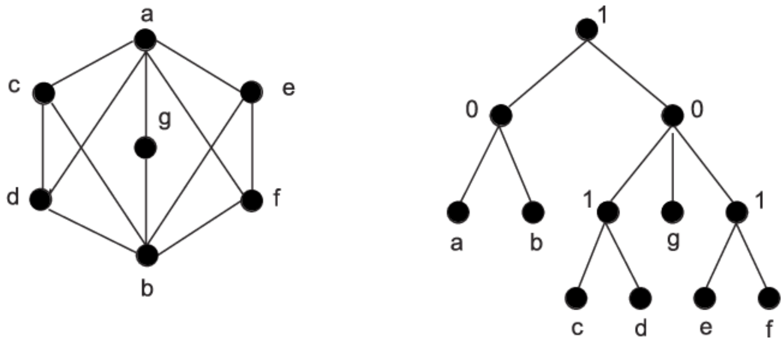
- Το μικρότερο μη συνεκτικό cograph που δεν έχει πτωτικό χρωματισμό είναι:



Δεν είναι πτωτικά 2 - χρωματίσιμο, αφού τα παιδιά του επαγόμενου υπογραφήματος του 0 - κόμβου έχουν διαφορετικό ω. Επίσης, δεν μπορεί να υπάρξει μικρότερο μη συνεκτικό cograph, γιατί χρειάζεται τουλάχιστον ένας 0 - κόμβος και δύο παιδιά με $\omega(H_i) \neq \omega(H_j)$.

- Δεν υπάρχει απαγορευμένο επαγόμενο υπογράφημα που υποδεικνύει με σιγουριά ότι το G δεν είναι πτωτικά χρωματίσιμο (ακόμα και αυτά τα υπογραφήματα που προαναφέρθηκαν μπορεί να περιέχονται σε πτωτικά χρωματίσιμα cograph).

- Τέλος, τα περισσότερα παραδείγματα των cographs που αναφέρθηκαν στην εργασία δεν είναι πτωτικά χρωματίσιμα γιατί υπάρχει κορυφή με μικρό βαθμό. Το παρακάτω cograph δεν είναι πτωτικά $\omega(G)$ χρωματίσιμο, παρόλο που δεν υπάρχει κορυφή με βαθμό $< \omega(G) - 1$.



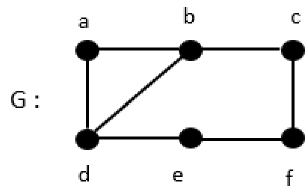
Έχει $\omega(G) = 3$. Δεν υπάρχει κορυφή με βαθμό < 2, αλλά ο αλγόριθμος επιστρέφει ότι δεν είναι πτωτικά 3 - χρωματίσιμο, λόγω ότι οι συνεκτικές συνιστώσες στον δεξί 0 - κόμβο δεν έχουν ίσα μεγέθη.

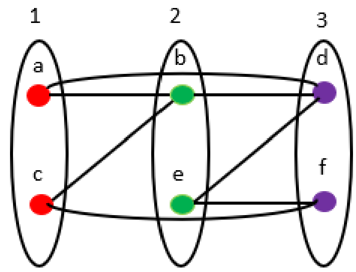
6.2.2 Επίτευξη πτωτικού χρωματισμού από έναν σχεδόν - πτωτικό χρωματισμό

Στην υποενότητα αυτή των επεκτάσεων, αυτό που θα μελετηθεί αφορά τον πτωτικό χρωματισμό για δοσμένο γράφημα. Πιο συγκεκριμένα, για ένα k - χρωματίσιμο γράφημα με μια μόνο κορυφή να μην είναι πολύχρωμη θα μελετηθεί αν μπορεί και πότε να επιτευχθεί ένας πτωτικός k - χρωματισμός του γραφήματος. Ο k - χρωματισμός που δεν ικανοποιεί τη πολυχρωμία για μια μόνο κορυφή θα ονομαστεί σχεδόν - πτωτικός k -χρωματισμός. Το ερώτημα που αποτέλεσε σκοπό της μελέτης είναι αν για τον σχεδόν - πτωτικό k - χρωματισμό υπάρχει κάποια πολυωνυμική μετατροπή που δίνει τον πτωτικό k - χρωματισμό του γραφήματος.

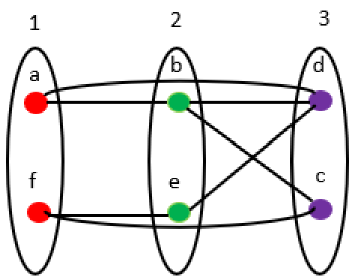
Το παρακάτω παράδειγμα θα κάνει πιο σαφές το ερώτημα.

Παράδειγμα 6.2.5. *Έστω ένα γράφημα G που είναι 3 - χρωματίσιμο. Δεν είναι πτωτικά 3 - χρωματίσιμο, διότι ο κόμβος e δεν είναι πολύχρωμος, καθώς δεν έχει γείτονα από την χρωματική κλάση 1.*

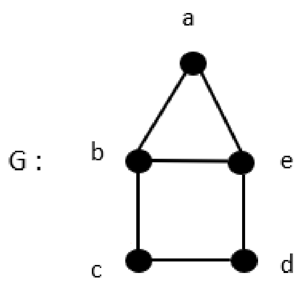


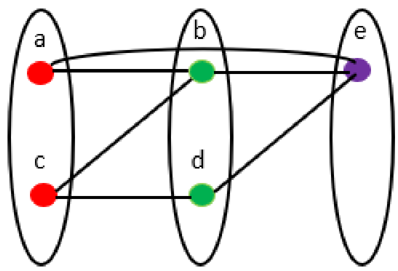


Όμως αλλάζοντας τον κόμβο c με τον f, επιτυγχάνεται ο πτωτικός 3 - χρωματισμός, καθώς όλοι οι κόμβοι γίνονται πολύχρωμοι, όπως φαίνεται παρακάτω.



Στην περίπτωση όμως, όπου το γράφημα είναι το παρακάτω, υπάρχει 3 - χρωματισμός, δεν είναι πτωτικά 3 - χρωματίσιμο καθώς ο κόμβος c δεν είναι πολύχρωμος, αφού δεν γειτονεύει με την χρωματική κλάση 3.





Σε αυτό το γράφημα δεν υπάρχει αλλαγή που να πετύχει πτωτικό χρωματισμό.

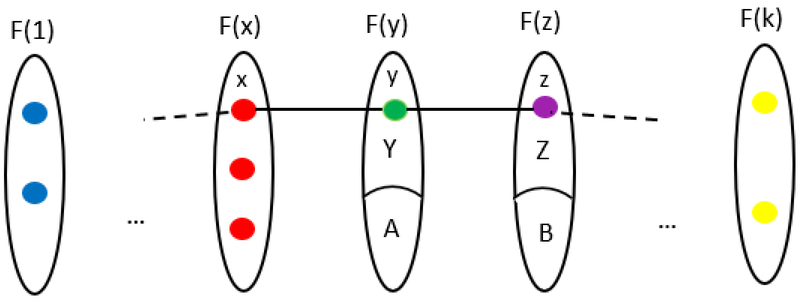
Θα οριστεί το πρόβλημα και θα μελετηθεί υπό ποιές προυποθέσες το πρόβλημα λύνεται πολυωνυμικά.

Πτωτικός k - χρωματισμός από σχεδόν πτωτικό k - χρωματισμό :

Είσοδος: Ένα γράφημα G και ένας k -χρωματισμός F του G όπου μια κορυφή δεν είναι πολύχρωμη ως προς το F.

Έξοδος: Είναι το G πτωτικά k - χρωματίσιμο;

Έστω ένα γράφημα G με k -χρωματισμό. Ο F : κατάλληλος k - χρωματισμός και $F(1), F(2), \ldots, F(k)$ οι k χρωματικές κλάσεις. Έστω $x \in F(x)$ η κορυφή που δεν είναι πολύχρωμη, και έστω ότι η x δεν είναι γειτονική με μόνο μία κλάση όπως φαίνεται παρακάτω.



- Αν $deg(x) < k$ τότε δεν υπάρχει πτωτικός χρωματισμός.

- Σίγουρα υπάρχει μια κλάση $F(y)$ στον χρωματισμό τέτοια ώστε η x να είναι γειτονική με κάποια κορυφή της $F(y)$. (Διαφορετικά, η x θα έχει βαθμό $= 0$ και δεν υπάρχει πτωτικός χρωματισμός.) Χωρίς βλάβη της γενικότητας, την ονομάζω $F(y)$ και $F(y) \neq \emptyset$.

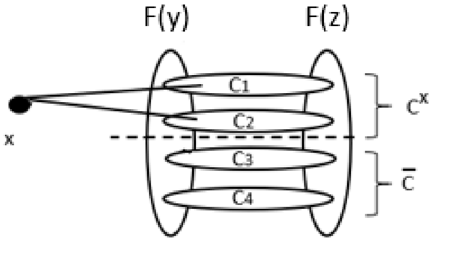
- Χωρίς βλάβη της γενικότητας, την χρωματική κλάση που δεν γειτονεύει με το x, την ονομάζω $F(z)$ και $F(z) \neq \emptyset$, αφού η $F(y)$ πολύχρωμη.

Ο αλγόριθμος θα προσπαθήσει να μετατρέψει τον χρωματισμό F σε κατάλληλο χρωματισμό F' έτσι ώστε η x να έχει τουλάχιστον ένα γείτονα από τις κορυφές της $F'(z)$. Θεωρήθηκε ότι υπάρχει μια μόνο κλάση $F(z)$ για την οποία η x δεν είναι γειτονική. Στη γενική περίπτωση, θα επαναληφθεί ο αλγόριθμος για κάθε κλάση $F(z)$ που θα μετατρέψει την x γειτονική ως προς την $F(z)$. Επίσης, στη περίπτωση που δεν μπορεί να ανταλλάξει κάποιες κορυφές από το $F(y)$ και $F(z)$, τότε θα επιλεχθεί κάποια άλλη κλάση $F(y')$. Αυτό θα γίνει για κάθε άλλη κλάση $F(y')$ που είναι γειτονική με τη x(και μόνο στη περίπτωση που απαντήσει όχι για τις κλάσεις $F(y)$ και $F(z)$).

Χρειάζεται να κατασκευαστούν τα σύνολα $Y, A \subseteq F(y)$, και $Z, B \subseteq F(z)$, έτσι ώστε να γίνει αλλαγή των $Y \leftrightarrow Z$ για να γίνει το G πτωτικά k - χρωματίσιμο.

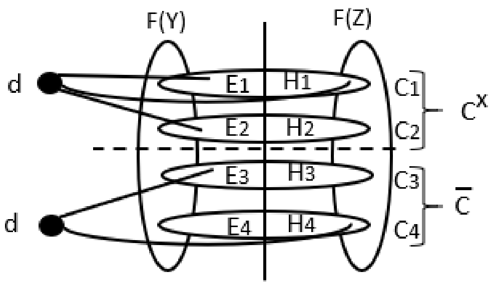
- Υπάρχει $Y \subseteq F(y)$ με $Y \neq \emptyset$ γιατί η x γειτονεύει με το $F(y)$.
  Υπάρχει $Z \subseteq F(z)$ με $Z \neq \emptyset$ γιατί το Y είναι πολύχρωμο.
  Υπάρχει $A \neq \emptyset$ με $A = F(y)/Y$ και $N(x) \cap A \neq \emptyset$, γιατί αλλιώς ο βαθμός του x θα είναι μικρός και δεν θα είναι εφικτή η αλλαγή των συνόλων.
  Υπάρχει $B \neq \emptyset$ με $B = F(z)/Z$, γιατί το σύνολο A πρέπει να είναι πολύχρωμο.
  Λόγω της ανταλλαγής θα πρέπει: $N(A) \cap Z = \emptyset$ και $N(B) \cap Y = \emptyset$, γιατί αλλιώς κατά την ανταλλαγή θα χάνεται η ανεξαρτησία των χρωματικών κλάσεων.

Αφού εξασφαλίστηκε η ύπαρξη τους, χρειάζεται να επιτευχθεί η κατασκευή τους. Αυτό θα γίνει με τη βοήθεια των συνεκτικών συνιστωσών.
1. Ορίζονται C_i συνεκτικές συνιστώσες του $(F(y) \cup F(z))$ και $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_l\}$.
2. Ορίζεται το σύνολο $C^x = \{C_i \cap N(x) \neq \emptyset | C_i \in C\}$, με $C^x = \{C_1^x, C_2^x, \ldots, C_l^x\}$ δηλαδή περιέχει όλα τα C_i που είναι γειτονικά με το x. Το σύνολο $C^x \neq \emptyset$ γιατί ο βαθμός του x είναι διάφορος του 0, $deg(x) \neq 0$, και χρειάζεται σίγουρα $|C^x| \geqslant 2$ για να μπορεί το G να είναι πτωτικά k - χρωματίσιμο.
Έτσι προκύπτει ο πρώτος κανόνας που χρειάζεται για να είναι εφικτή η αλλαγή.
Κανόνας 0 : Αν $C^x = \emptyset$ ή $|C^x| = 1$ τότε το G δεν έχει πτωτικό k - χρωματισμό.
3. Ορίζεται το σύνολο $\overline{C} = C - C^x$, δηλαδή το $\overline{C}$ περιλαμβάνει όλα εκείνα τα C_i που δεν είναι γειτονικά με το x, και άρα $\overline{C} \cap F(y) \subseteq A$. (Όλα τα μη γειτονικά του x ανήκουν σίγουρα στο A και πρέπει οι συνεκτικές συνιστώσες που είναι γειτονικές με το x να είναι τουλάχιστον 2 για να ανήκει η μια στο Υ και η άλλη στο A, αλλιώς αν υπάρχει μόνο μία στο Υ μετά την αλλαγή, το x δεν θα γειτονεύει με το $F(y)$.)



Σχήμα 6.9: Ένα παράδειγμα συνεκτικών συνιστώσων του $(F(y) \cup F(z))$, και με ποιες γειτονεύει με το x και με ποιες όχι.

Σκοπός τώρα είναι να βρεθούν ποιες $C_i^x \cap F(y)$ μπαίνουν στο Υ και έτσι το $A = F(y)/Y$ (θα έχει σίγουρα και το $\overline{C}$), και ποιες $C_i^x \cap F(z)$ μπαίνουν στο Z και έτσι το $B = F(z)/Z$. Αυτό θα το απαντήσουν οι υπόλοιποι κόμβοι, δηλαδή ότι δεν ανήκει στις συνεκτικές συνιστώσες και είναι διαφορετικό του x, δηλαδή εκείνα τα $d \in V-(F(y) \cup F(z) \cup \{x\})$. Για εκείνα τα d θα μελετηθεί πως γειτονεύουν με τις συνεκτικές συνιστώσες συγκριτικά με τα $F(y)$ και $F(z)$, οπότε θα οριστούν και νέα υποσύνολα.
4. Ορίζονται για κάθε i τα σύνολα $E_i = C_i \cap F(y)$ και $H_i = C_i \cap F(z)$.



Σχήμα 6.10: Ένα παράδειγμα που παρουσιάζονται οι συνεκτικές συνιστώσες σπασμένες σε σύνολα.

Χρειάζεται να βρεθεί ένα μη - κενό σύνολο $C' \subseteq C^x : \forall C_i^x = (E_i, H_i) \in C'$ η ανταλλαγή $E_i \leftrightarrow H_i$ να μην επηρρεάζει την πολυχρωμία των κορυφών. Να σημειωθεί ότι οποιαδήποτε ανταλλαγή των E_i , H_i διατηρεί την πολυχρωμία για τις κορυφές $F(y) \cup F(z)$ και μετατρέπει την x πολύχρωμη ως προς το $F(z)$.

Με την βοήθεια των νέων συνόλων που ορίστηκαν, θα οριστεί η πρώτη κατασκευή που έχει ως σκοπό να διαχωρίσει τις συνεκτικές συνιστώσες, σε αυτές που ότι και να γίνει δεν δημιουργούν πρόβλημα κατά την ανταλλαγή, και σε αυτές που θέλουν παραπάνω μελέτη.

Κατασκευή 1 : Αν για κάποιο d υπάρχει i τέτοιο ώστε $N(d) \cap E_i \neq \emptyset$ και $N(d) \cap H_i \neq \emptyset$ τότε το $d \in D_1$. (Ουσιαστικά στο D_1 ανήκουν εκείνα τα d που γειτονεύουν με μία συνεκτική συνιστώσα και από τις δύο πλευρές της, και έτσι αν γίνει αλλαγή μεταξύ των δύο πλευρών της, εκείνο το d θα μείνει πολύχρωμο. Επίσης, με οτιδήποτε άλλο και αν γειτονεύει, δεν υπάρχει πρόβλημα.)

Πρόταση 6.2.9. *Έστω $D_1 \subseteq V(G)$ με $D_1 = \{d \in V - (F(y) \cup F(z) \cup \{x\}) | N(d) \cap E_i \neq \emptyset \wedge N(d) \cap H_i \neq \emptyset\}$. Τότε το $G - D_1$ έχει λύση (μπορεί να γίνει αλλαγή και να παραμείνει πολύχρωμο) αν και μόνο αν το G έχει λύση.*

Απόδειξη. Έστω ότι το $G - D_1$ έχει λύση (μπορεί να γίνει η αλλαγή $E_i \leftrightarrow H_i$ και να παραμείνει πολύχρωμο). Θα δειχθεί ότι το και το G έχει λύση. Διακρίνονται περιπτώσεις :
Αν αλλάξει κάποιο C_i^x που δεν είναι γειτονικό με τα $d \in D_1$, δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα αφού το $G - D_1$ έχει λύση.
Αν αλλάξει κάποιο C_i^x που είναι γειτονικό με τα $d \in D_1$, θα παραμείνουν τα d πολύχρωμα αφού θα γειτονεύουν και από τις δύο πλευρές με το C_i^x (απλά θα έχουν αντιστραφεί τα $E_i \leftrightarrow H_i$). Τέλος, στο $\overline{C}$ δεν θα γίνει κάποια αλλαγή. Άρα το G έχει λύση.
Αντίστροφα, έστω ότι το G έχει λύση, τότε και το $G - D_1$ έχει λύση, αφού απλά αφαιρούνται εκείνα τα d που γειτονεύουν με το ίδιο C_i και από τις δύο πλευρές του. □

Σημείωση 6.2.3. *Η κατασκευή του D_1 γίνεται πολυωνυμικά σε $O(n^2)$.*

Πέρα από εκείνα τα $d \in D_1$, που ουσιαστικά δεν χρειάζεται να μελετηθούν γιατί ό,τι αλλαγή και να γίνει αυτά δεν θα επηρεάσουν το αποτέλεσμα, υπάρχουν και εκείνα τα d που γειτονεύουν με το $\overline{C}$, υπό κάποιες συνθήκες, και πάλι δεν επηρεάζουν ουσιαστικά το αποτέλεσμα. Έτσι προκύπτει η επόμενη κατασκευή.

Κατασκευή 2 : Αν για κάποιο d υπάρχουν i και j τέτοια ώστε $N(d) \cap E_i \cap \overline{C} \neq \emptyset$ και $N(d) \cap H_j \cap \overline{C} \neq \emptyset$, τότε το $d \in D_2$. (Ουσιαστικά στο D_2 ανήκουν εκείνα τα d που γειτονεύουν με οποιονδήποτε τρόπο και από τις δύο πλευρές του $\overline{C}$.)

Πρόταση 6.2.10. *Έστω $D_2 \subseteq V(G)$ με $D_2 = \{d \in V - (F(y) \cup F(z) \cup \{x\}) | N(d) \cap E_i \cap \overline{C} \neq \emptyset \wedge N(d) \cap H_j \cap \overline{C} \neq \emptyset\}$. Τότε το $G - D_2$ έχει λύση (μπορεί να γίνει αλλαγή και να παραμείνει πολύχρωμο) αν και μόνο αν το G έχει λύση.*

Απόδειξη. Έστω ότι το $G - D_2$ έχει λύση. Θα δειχθεί ότι και το G έχει λύση. Διακρίνονται περιπτώσεις :
Αν αλλάξει κάποιο C_i που δεν είναι γειτονικό του $d \in D_2$, δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα αφού το $G - D_2$ έχει λύση.
Για $d \in D_2$, και να αλλαχθεί κάποιο C_i^x που γειτονεύει, θα παραμείνει το d πολύχρωμο, αφού θα γειτονεύει και από τις δύο πλευρές το $\overline{C}$, και σε εκείνο το σύνολο δεν θα γίνουν αλλαγές, και από υπόθεση το $G - D_2$ έχει λύση. Άρα το G έχει λύση.
Αντίστροφα, έστω ότι το G έχει λύση, τότε και το $G - D_2$ έχει λύση, αφού απλά αφαιρούνται εκείνα τα d που γειτονεύουν με το $\overline{C}$ και από τις δύο πλευρές του και η αλλαγή γίνεται στο C^x, όπου το G έχει λύση. □

Σημείωση 6.2.4. *Η κατασκευή του D_2 γίνεται πολυωνυμικά σε $O(n^2)$.*

Σημείωση 6.2.5. *Στο σχήμα 6.10 το πάνω $d \in D_1$ και το κάτω $d \in D_2$.*

Τα $d \in D_1$ και τα $d \in D_2$ δεν δημιουργούν πρόβλημα ως προς την κατασκευή των Υ και Ζ, αφού για οποιοδήποτε C' οι κορυφές $D_1 \cup D_2$ παραμένουν πολύχρωμες. Οπότε η μελέτη στρέφεται στους υπόλοιπους κόμβους. Άρα, από εδώ και πέρα θα δοθεί προσοχή σε εκείνα τα $d_i \in V - (F(y) \cup F(z) \cup \{x\} \cup (D_1 \cup D_2))$.

Ορίζονται τα σύνολα $L_i \subseteq C^x \cup \overline{C}$ με

$$L_i = \{C_j | N(d_i) \cap E_j \neq \emptyset \wedge N(d_i) \cap H_j = \emptyset\}$$

και $R_i \subseteq C^x \cup \overline{C}$ με

$$R_i = \{C_j | N(d_i) \cap E_j = \emptyset \wedge N(d_i) \cap H_j \neq \emptyset\}$$

με $L_i \cap R_i = \emptyset$ (αφού δεν γίνεται να ικανοποιούνται ταυτόχρονα για κάποιο C_j, γιατί μελετώνται τα d_i που δεν πληρούν την κατασκευή 1).

Επίσης, $L_i \cap C^x \neq \emptyset$ ή $R_i \cap C^x \neq \emptyset$ (λόγω της κατασκευής 1 και της κατασκευής 2). Επιπλέον, αν $L_i \cap C^x = \emptyset$ τότε $R_i \subseteq C^x$ και $R_i \cap \overline{C} = \emptyset$ (λόγω της κατασκευής 2) και ομοίως αν $R_i \cap C^x = \emptyset$ τότε $L_i \subseteq C^x$ και $L_i \cap \overline{C} = \emptyset$.

Ουσιαστικά, συνεχίζεται η αναζήτηση εκείνου του συνόλου που δίνει λύση στο πρόβλημα. Οπότε, έστω ότι υπάρχει αυτό το σύνολο, $\tilde{C}$, με $\tilde{C} \subseteq C^x$ και $\tilde{C} \neq \emptyset$. Το G έχει λύση αν για κάθε i ισχύει :

$$\left\{ \begin{array}{c} L_i - \tilde{C} \neq \emptyset \\ \text{και} \\ R_i - \tilde{C} \neq \emptyset \end{array} \right\} \text{ή} \left\{ \begin{array}{c} L_i - \tilde{C} = \emptyset \\ \text{και} \\ R_i \cap \tilde{C} \neq \emptyset \end{array} \right\} \text{ή} \left\{ \begin{array}{c} R_i - \tilde{C} = \emptyset \\ \text{και} \\ L_i \cap \tilde{C} \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

(Το δεύτερο και το τρίτο άγκιστρο ισχύουν συνήθως με μονοσύνολα.)

Απόδειξη. Έστω ότι για κάποια i ισχύει : $\left\{ \begin{array}{c} L_i - \tilde{C} \neq \emptyset \\ \text{και} \\ R_i - \tilde{C} \neq \emptyset \end{array} \right\}$ τότε μπορεί να γίνει αλλαγή στο $\tilde{C}$ και αυτά τα d_i να γειτονεύουν με τουλάχιστον ένα στην $F(y)$ και ένα στην $F(z)$, άρα πολύχρωμα.

Έστω ότι για κάποια i ισχύει : $\left\{ \begin{array}{c} L_i - \tilde{C} = \emptyset \\ \text{και} \\ R_i \cap \tilde{C} \neq \emptyset \end{array} \right\}$ τότε μπορεί να γίνει αλλαγή στο $\tilde{C}$ και το L_i θα πάρει κάποιο στοιχείο του R_i και το R_i (μπορεί έτσι και αλλιώς να ισχύει $R_i - \tilde{C} \neq \emptyset$) σίγουρα θα πάρει κάποιο στοιχείο του L_i, άρα εκείνα τα d_i θα γειτονεύουν με τουλάχιστον ένα στην $F(y)$ και ένα στην $F(z)$, άρα πολύχρωμα.

Ομοίως για κείνα τα i που ισχύει : $\left\{ \begin{array}{c} R_i - \tilde{C} = \emptyset \\ \text{και} \\ L_i \cap \tilde{C} \neq \emptyset \end{array} \right\}$ συνεπάγεται ότι αυτά τα d_i είναι πολύχρωμα.

Αφού για κάθε d_i ισχύει ότι είναι πολύχρωμο άρα και το G έχει λύση. □

Η πρώτη περίπτωση θα μελετηθεί για τον κανόνα 1, ενώ οι άλλες δύο στους κανόνες 2 και 3. Για την πρώτη περίπτωση, θα δειχθεί ότι αν υπάρχει λύση αρκεί να περιέχει ένα στοιχείο.

Πρόταση 6.2.11. *Έστω ότι υπάρχει μία λύση $\tilde{C^*}$, με* $\left\{ \begin{array}{c} L_i - \tilde{C^*} \neq \emptyset \\ \textit{και} \\ R_i - \tilde{C^*} \neq \emptyset \end{array} \right\}$.
Αφού υπάρχει $\tilde{C^*}$ αρκεί $|\tilde{C^*}| = 1$.

Απόδειξη. Αφού υπάρχει $\tilde{C^*} \subseteq C^x$, με $\left\{ \begin{array}{c} L_i - \tilde{C^*} \neq \emptyset \\ \text{και} \\ R_i - \tilde{C^*} \neq \emptyset \end{array} \right\}$ και έστω $|\tilde{C^*}| \geqslant 2$, συνεπάγεται ότι αν αφαιρεθεί ένα C_j από το $\tilde{C^*}$, θα συνεχίσουν να ισχύουν οι σχέσεις $L_i - \tilde{C^*} \neq \emptyset$ και $R_i - \tilde{C^*} \neq \emptyset$, άρα το G έχει λύση. Μάλιστα, αν η διαδικασία αυτή γίνει επαναληπτικά, μέχρι $|\tilde{C^*}| = 1$ (δεν μπορεί να συνεχιστεί περεταίρω, γιατί $\tilde{C} \neq \emptyset$) θα δειχθεί ότι για κάθε i ισχύει $\left\{ \begin{array}{c} L_i - \tilde{C^*} \neq \emptyset \\ \text{και} \\ R_i - \tilde{C^*} \neq \emptyset \end{array} \right\}$. □

Ουσιαστικά αν ισχύει η σχέση για πολλά στοιχεία του $\tilde{C}$ θα ισχύει και για το ένα, γιατί δε θα αφήσει κανένα L_i και R_i κενό, άρα το d είναι πολύχρωμο. Άρα αρκεί να βρεθεί $\tilde{C}$ με $|\tilde{C}| = 1$, και αυτό λύνεται δοκιμάζοντας για κάθε $C_j^x \in C^x$ αν για κάθε i ισχύει $\left\{ \begin{array}{c} L_i - C_j^x \neq \emptyset \\ \text{και} \\ R_i - C_j^x \neq \emptyset \end{array} \right\}$.

Έτσι προκύπτει και ο κανόνας 1.

Κανόνας 1 : Το γράφημα G έχει λύση, αν υπάρχει $C_j^x \in C^x$, τέτοιο ώστε για κάθε i να ισχύει $\left\{ \begin{array}{c} L_i - C_j^x \neq \emptyset \\ \text{και} \\ R_i - C_j^x \neq \emptyset \end{array} \right\}$.

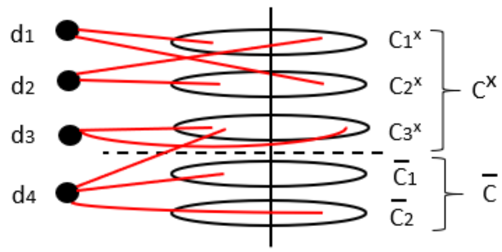
Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει $C^x_j \in C^x$ τέτοιο ώστε για κάθε i να ισχύει $\left\{ \begin{array}{c} L_i - C^x_j \neq \emptyset \\ \text{και} \\ R_i - C^x_j \neq \emptyset \end{array} \right\}$, συνεπάγεται ότι αν αντιστραφεί αυτό το C^x_j αφού ισχύει για κάθε i άρα όλα τα d_i παραμένουν πολύχρωμα οπότε το γράφημα G έχει λύση. □

Σημείωση 6.2.6. *Ο έλεγχος για το αν ένα C^x_j είναι λύση για το G γίνεται πολυωνυμικά, καθώς οι συνεκτικές συνιστώσες που γειτονεύει το x είναι πεπερασμένες.*

Σημείωση 6.2.7. *Αν βρεθεί τέτοιο C^x_j, βρέθηκε και εκείνο το C' που λύνει το πρόβλημα. Αν, όμως, δεν βρεθεί, δεν σημαίνει ότι το G δεν έχει λύση. Ουσιαστικά, αφού δεν ισχύει ο κανόνας 1 συνεπάγεται ότι είτε στα περισσότερα υπάρχουν μονοσύνολα, είτε ότι γίνεται συνδυασμός μονοσυνόλων και του συνόλου $\overline{C}$.*

Θα δοθούν δύο παραδείγματα γραφημάτων για τα οποία έχουν δοθεί οι συνεκτικές τους συνιστώσες και θα φανεί κατά πόσο δουλεύουν αυτά που παρουσιάστηκαν ως τώρα.

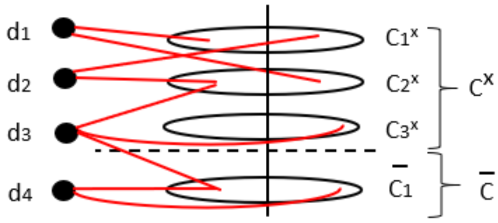
Παράδειγμα 6.2.6. *Για το παρακάτω σχήμα:*



Ο κανόνας 0 δεν ισχύει.
Από την κατασκευή 1 προκύπτει ότι $d_3 \in D_1$.
Από την κατασκευή 2 προκύπτει ότι $d_4 \in D_2$.
Οπότε τα d_3 και d_4 δεν επηρεάζουν, οπότε χρειάζεται να μελετηθούν τα υπόλοιπα, δηλαδή τα d_1 και d_2. Έτσι προκύπτουν :
$L_1 = \{C^x_1\}$ *και* $R_1 = \{C^x_2\}$,
$L_2 = \{C^x_2\}$ *και* $R_2 = \{C^x_1\}$.
Αυτό που πρέπει να απαντηθεί τώρα είναι, αν υπάρχει $\tilde{C}$ με $L_i - \tilde{C} \neq \emptyset$ και $R_i - \tilde{C} \neq \emptyset$. Μελετώνται όλα τα C^x_i, και προκύπτει ότι ο κανόνας 1 δουλεύει για $\tilde{C} = \{C^x_3\}$.

Οπότε, επιτυγχάνεται η ανταλλαγή λόγω του C^x_3.

Παράδειγμα 6.2.7. *Για το παρακάτω σχήμα:*



Ο κανόνας 0 δεν ισχύει.
Από την κατασκευή 1 προκύπτει ότι $d_4 \in D_1$.
Από την κατασκευή 2 δεν προκύπτει κάτι.
Οπότε το d_4 *δεν επηρεάζει, οπότε χρειάζεται να μελετηθούν τα υπόλοιπα, δηλαδή τα* d_1, d_2 *και* d_3. *Έτσι προκύπτουν :*
$L_1 = \{C_1^x\}$ *και* $R_1 = \{C_2^x\}$,
$L_2 = \{C_2^x\}$ *και* $R_2 = \{C_1^x\}$,
$L_3 = \{C_2^x, \overline{C_1}\}$ *και* $R_3 = \{C_3^x\}$.
Αυτό που πρέπει να απαντηθεί τώρα είναι αν υπάρχει $\tilde{C}$ *με* $L_i - \tilde{C} \neq \emptyset$ *και* $R_i - \tilde{C} \neq \emptyset$. *Μελετώνται όλα τα* C_i^x, *αλλά δεν υπάρχει* $\tilde{C}$ *που να καλύπτει την συνθήκη οπότε ο κανόνας 1 δεν δουλεύει. Όμως υπάρχει λύση για το* G, *και είναι* $C' = \{C_1^x, C_2^x\}$, *και έτσι προκύπτει ότι χρειάζονται και άλλοι κανόνες για να λυθεί το πρόβλημα.*

Σημείωση 6.2.8. *Από την κατασκευή 2 συνεπάγεται ότι, αν* $L_i \cap C^x = \emptyset$ *τότε* $R_i \cap \overline{C} = \emptyset$ *γιατί αλλιώς εκείνο το* d_i *θα άνηκε στο* D_2, *άρα* $R_i \subseteq C^x$. *Όμοια, αν* $R_i \cap C^x = \emptyset$ *τότε* $L_i \cap \overline{C} = \emptyset$ *και άρα* $L_i \subseteq C^x$.

Η σημείωση αυτή θα βοηθήσει στην επόμενη κατασκευή.

Κατασκευή 3 : Για d_i με $L_i \cap C^x = \emptyset$ και $|R_i \cap C^x| = 1$, τότε από την σημείωση 6.2.8 προκύπτει ότι $R_i = \{C_j^x\}$ και $R_i \in \Omega_1$. Ορίζεται $\Omega_1 \subseteq C^x$ με

$$\Omega_1 = \{C_j^x | L_i \cap C^x = \emptyset \text{ και } |R_i \cap C^x| = 1 \text{ με } R_i = \{C_j^x\}\}.$$

Για d_i με $R_i \cap C^x = \emptyset$ και $|L_i \cap C^x| = 1$, τότε από την σημείωση 6.2.8 προκύπτει ότι $L_i = \{C_j^x\}$ και $L_i \in \Omega_2$. Ορίζεται $\Omega_2 \subseteq C^x$ με

$$\Omega_2 = \{C_j^x | R_i \cap C^x = \emptyset \text{ και } |L_i \cap C^x| = 1 \text{ με } L_i = \{C_j^x\}\}.$$

Κανόνας 2 : Ορίζονται νέα σύνολα :

$$C^{x'} = C^x - (\Omega_1 \cup \Omega_2)$$

και
$$\overline{C}^{'} = \overline{C} \cup (\Omega_1 \cup \Omega_2).$$
(Αφού το σύνολο $\overline{C} = C - C^x$ και τα σύνολα Ω_1 και Ω_2 δεν ανήκουν στο $C^{x^{'}}$ άρα πάνε στο σύνολο $\overline{C}^{'}$.)

Ελέγχονται επαναληπτικά τα υπόλοιπα d_i για τα νέα $C^{x^{'}}$ και $\overline{C}^{'}$. Ουσιαστικά, βγαίνουν εκτός του συνόλου των δυνατών λύσεων αυτά τα στοιχεία που είναι μονοσύνολα και η άλλη πλευρά τους γειτονεύει μόνο με το $\overline{C}$.

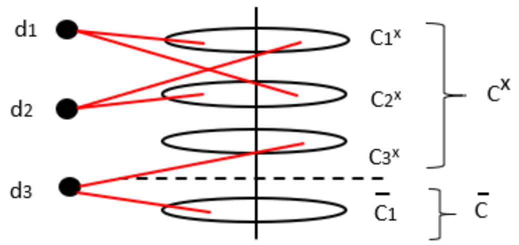
Πρόταση 6.2.12. *Το σύνολο C^x θα δώσει λύση αν και μόνο αν το $C^{x^{'}}$ δώσει λύση.*

Απόδειξη. Έστω ότι το C^x θα δώσει λύση, οπότε σίγουρα τα σύνολα Ω_1 και Ω_2 δεν ανήκουν στη λύση, γιατί σε αντίθετη περίπτωση, αν επιλεχθούν και γίνει η αλλαγή, τότε τα d θα πάψουν να είναι πολύχρωμα, άρα $C^x - (\Omega_1 \cup \Omega_2) = C^{x^{'}}$ θα δώσει λύση.

Αντίστροφα, έστω ότι το $C^{x^{'}}$ θα δώσει λύση με $C^{x^{'}} = C^x - (\Omega_1 \cup \Omega_2)$. Η ίδια λύση θα είναι και για το C^x, γιατί αλλιώς αν συμπεριληφθούν στη λύση τα Ω_1 και Ω_2, τότε με την αλλαγή τα d θα πάψουν να είναι πολύχρωμα. Άρα, το σύνολο C^x θα δώσει λύση. □

Σημείωση 6.2.9. *Ο έλεγχος για την κατασκευή των συνόλων $C^{x^{'}}$ και $\overline{C}^{'}$ γίνεται πολυωνυμικά, ($O(n^2)$).*

Παράδειγμα 6.2.8. *Για το παρακάτω σχήμα:*



Ο κανόνας 0 δεν ισχύει.
Από την κατασκευή 1 δεν προκύπτει κάτι.
Από την κατασκευή 2 δεν προκύπτει κάτι.

Οπότε για όλα τα d_i προκύπτει :

d_i	L_i	R_i
1	C_1^x	C_2^x
2	C_2^x	C_1^x
3	$\overline{C_1}$	C_3^x

Ο κανόνας 1 δεν ισχύει.
Από την κατασκευή 3 προκύπτει ότι το $L_3 \in \Omega_2$.
Από τον κανόνα 2 προκύπτει ότι $C^{x'} = \{C_1^x, C_2^x\}$ και $\overline{C}' = \{C_3^x, \overline{C_1}\}$.

Από εδώ και πέρα, η αναζήτηση θα αφορά τα νέα σύνολα, $C^{x'}$ και $\overline{C}'$. Επίσης, ως στόχο για την επίλυση του προβλήματος, θέτεται τώρα, ο έλεγχος για την ύπαρξη αποκλειστικά μονοσυνόλων του C^x στα L_i και R_i, καθώς πλέον, είναι το μόνο πρόβλημα που προκύπτει και δεν έχει καλυφθεί από τους κανόνες.

Κανόνας 3 : Για d_i με $L_i = \{C_j^{x'}\}$ και $R_i = \{C_k^{x'}\}$, τότε ενώνονται με ακμή, εκείνο το E_j με το H_k και ορίζεται νέα συνεκτική συνιστώσα $C_{j,k}^{x'} = C_{k,j}^{x'}$ που αντικαθιστά τα μονοσύνολα στα L_i και R_i. Ορίζεται

$$C^{x''} = (C^{x'} - \{C_j^{x'}, C_k^{x'}\}) \cup C_{j,k}^{x'}.$$

Το επόμενο βήμα είναι να ελεγχθούν τα υπόλοιπα d_i επαναληπτικά για το νέο $C^{x''}$. (Ο κανόνας αυτός, βοηθάει στο να γίνει ταυτόχρονη επιλογή συνιστωσών για ανταλλαγή, έτσι ώστε ή $C_j^{x'}$ και $C_k^{x'} \in C'$ ή $C_j^{x'}$ και $C_k^{x'} \notin C'$.)

Πρόταση 6.2.13. *Το σύνολο $C^{x'}$ θα δώσει λύση αν και μόνο αν το $C^{x''}$ θα δώσει λύση.*

Απόδειξη. Έστω ότι το $C^{x'}$ θα δώσει λύση, η λύση δεν γίνεται να περιλαμβάνει μόνο το $C_j^{x'}$ ή το $C_k^{x'}$ γιατί κατά την ανταλλαγή ή το L_i ή το R_i θα μείνει κενό, άρα το d_i όχι πολύχρωμο, άτοπο. Οπότε, η λύση ή δεν θα περιλαμβάνει κανένα ή και τα δύο μαζί, άρα και το $C^{x''}$ θα δώσει λύση.
Αντίστροφα, έστω ότι $C^{x''}$ θα δώσει λύση. Η ίδια λύση είναι και για το $C^{x'}$, γιατί αφαιρώντας την ακμή από το $C^{x''}$, είτε θα πάρει και τα δύο ή κανένα, άρα όλα τα d_i είναι πολύχρωμα. □

Σημείωση 6.2.10. *Ο έλεγχος για τα μονοσύνολα είναι πολυωνυμικός, $(O(n^2))$.*

Από εδώ και πέρα, αν υπάρχει το $C^{x''}$, θα χρησιμοποιηθεί αυτό ως σύνολο που γειτονεύει με το x και γυρνώντας ξανά στην κατασκευή 1, ακολουθούνται όλα τα βήματα. Αν ο κανόνας 1, δώσει λύση C', τότε τελειώνει εκεί η διαδικασία, μόνο που η λύση τώρα θα είναι $C_{j,k,l,\ldots}$. Οπότε σαν σύνολο λύσεων είναι $C' = \{C_j^x | j$ δείκτες της λύσης $\}$.

Ως αποτέσμα όλων των παραπάνω, προκύπτει το τελικό θεώρημα, το οποίο για ένα γράφημα που είναι σχεδόν πτωτικά k - χρωματίσιμο απαντάει υπό ποιες συνθήκες τελικά επιτυγχάνεται κάποια ανταλλαγή, έτσι ώστε να γίνει πτωτικά k - χρωματίσιμο.

Θεώρημα 6.2.3. *Έστω το γράφημα G είναι k - χρωματίσιμο με F : κατάλληλο k - χρωματισμό και $F(1), F(2), \dots, F(k)$ οι k χρωματικές κλάσεις. Αν ο F είναι κατάλληλος k - χρωματισμός με μόνο μια κορυφή να μην είναι πολύχρωμη, τότε για το αν ο F μπορεί να γίνει πτωτικός k - χρωματισμός, θα το απαντήσουν οι κανόνες 0, 1, 2, 3 σε πολυωνυμικό χρόνο $O(n^3)$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η κορυφή x, που είναι η μόνη μη πολύχρωμη, δεν γειτονεύει με μόνο μία χρωματική κλάση, έστω την $F(z)$. Η ύπαρξη των χρωματικών κλάσεων, καθώς και των συνόλων Υ, Ζ, Α και Β αποδείχθηκαν παραπάνω. Σκοπός των συνόλων αυτών είναι να κατασκευαστούν με τέτοιον τρόπο έτσι ώστε αλλάζοντας το Υ με το Ζ να επιτευχθεί ο πτωτικός χρωματισμός, σε αυτό βοηθάνε και τα Α, Β. Για την κατασκευή, ορίζονται συνεκτικές συνιστώσες και εφαρμόζονται επαναληπτικά τα παρακάτω.
Ελέγχεται ο κανόνας 0, αν ισχύει τότε σταματάει εδώ η διαδικασία και η απάντηση είναι ότι δεν υπάρχει κατάλληλος πτωτικός k - χρωματισμός, αλλιώς ορίζονται τα E_i, H_i και εφαρμόζονται οι κατασκευές 1, 2 και ο κανόνας 1. Αν υπάρχει C', τότε σταματάει εδώ η διαδικασία, αλλιώς ελέγχονται η κατασκευή 3, ο κανόνας 2 και ο κανόνας 3 για όλα τα σύνολα. Αν δεν ισχύουν και άρα δεν υπάρξει κάποια αλλαγή, σταματάει εδώ η διαδικασία και μάλιστα απαντάει πως δεν υπάρχει κατάλληλη ανταλλαγή για τα $F(y)$, $F(z)$ για να επιτευχθεί ο πτωτικός χρωματισμός (εδώ θα πρέπει να διαλεχτεί άλλο $F(y)$ και να πάει η διαδικασία πάλι απο την αρχή). Αν ο κανόνας 2 ή ο κανόνας 3 ή και οι δύο ισχύουν τότε υπάρχουν νέα σύνολα που με αυτά θα συνεχιστεί η διαδικασία.
Εφαρμόζονται στα νέα σύνολα οι κατασκευές 1, 2 και ο κανόνας 1 και αν ισχύει ο κανόνας 1 τότε τέλειωσε εδώ η διαδικασία, αλλιώς εφαρμόζονται ξανά, οι κανόνες 2 και 3.
Αυτή η διαδικασία εφαρμόζεται επαναληπτικά μέχρι να δοθεί μια απάντηση, είτε ότι δεν γίνεται να υπάρξει σύνολο C', είτε ότι υπάρχει.
Αν υπάρχει C', ακόμη και της μορφής $C_{j,k,l,\dots}$, γράφεται $C' = \{C_j^x | j$ δείκτες της λύσης $\}$, τότε το $Y = C' \cap F(y)$ και $A = F(y) - Y$ και το $Z = C' \cap F(z)$ και $B = F(z) - Z$. Αλλάζοντας τώρα τα Υ και Ζ, το x γίνεται πολύχρωμο, και οι υπόλοιποι κόμβοι δεν επηρεάζονται.
Αν υπάρχουν παραπάνω από μία χρωματική κλάση που δεν γειτονεύει το x, εφαρμόζεται επαναληπτικά η διαδικασία.
Όλα τα βήματα εφαρμόζονται πολυωνυμικά, σε $O(n^3)$ καθώς κάθε βήμα μπορεί να

γίνει σε $O(n^2)$ χρόνο και επειδή σε κάθε επανάληψη θα σβηστεί τουλάχιστον μια κορυφή ή θα μειώθεί μια τουλάχιστον συνιστώσα κατά ένα, συνολικά θα χρειαστεί το πολύ n επαναλήψεις.
Ο εξαντλητικός έλεγχος για όλες τις κλάσεις $F(y)$ και $F(z)$ απαντάει στο τελικό ερώτημα $\square$

Παρακάτω θα παρουσιαστεί ο αλγόριθμος που απαντάει στο ερώτημα αυτό.
Αλγόριθμος:
Είσοδος : $F(i)$ για $i = 1, \ldots, k$, C, C^x, $\overline{C}$, E_i, H_i, $D = \{d | d \in V - (F(y) \cup F(z) \cup \{x\})\}$.
Αν ο κανόνας 0 ισχύει τότε : ο F δεν είναι κατάλληλος πτωτικός k - χρωματισμός,
Αλλιώς

Αν ισχύει η κατασκευή 1 τότε υπάρχει το D_1
Αν ισχύει η κατασκευή 2 τότε υπάρχει το D_2
Για $d \in D - (D_1 \cup D_2)$

Αν ισχύει ο κανόνας 1 τότε υπάρχει C' και $Y = C' \cap F(y)$, $A = F(y) - Y$ και το $Z = C' \cap F(z)$ και $B = F(z) - Z$. Γίνεται αλλαγή του Υ με το Ζ και ο F γίνεται κατάλληλος πτωτικός k - χρωματισμός,
Αλλιώς αν,

Αν ισχύει ο κανόνας 2 τότε υπάρχει το $C^{x'}$ και αντικαθίσταται το C^x με το $C^{x'}$ και το $\overline{C}$ με το $\overline{C'}$. Αυτό συμβαίνει επαναληπτικά έως ότου δεν ισχύει ο κανόνας 2.

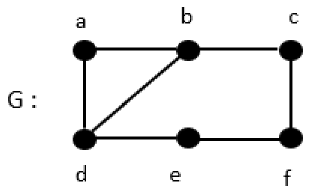
Αν $C^{x'} = \emptyset$ τότε ο F δεν είναι κατάλληλος πτωτικός k - χρωματισμός.

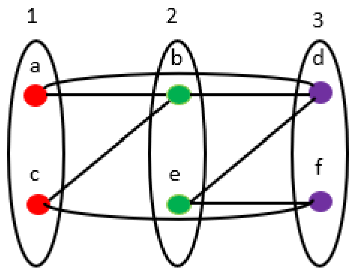
Αν ισχύει ο κανόνας 3 τότε υπάρχει το $C^{x''}$ και αντικαθιστά το $C^{x'}$, και αυτό συμβαίνει επαναληπτικά έως ότου δεν ισχύει ο κανόνας 3. Έπειτα πήγαινε ξανά στην κατασκευή 1 και επανέλαβε.

Αλλιώς αν δεν ισχύουν οι κανόνες 2 και 3 τότε ο F δεν είναι κατάλληλος πτωτικός k - χρωματισμός για αυτά τα $F(y)$ και $F(z)$,
διάλεξε άλλο $F(y)$ και ξεκίνα από την αρχή.

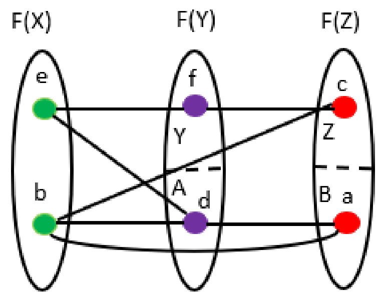
Αν δεν υπάρχει $d \in D - (D_1 \cup D_2)$, τότε επιλέγεται οποιοδήποτε C_i^x και $Y = C_i^x \cap F(y)$, $A = F(y) - Y$, $Z = C_i^x \cap F(z)$ και $B = F(z) - Z$.
Γίνεται αλλαγή του Υ με το Ζ και τότε επιτυγχάνεται ο F να είναι κατάλληλος πτωτικός k - χρωματισμός.

Θα εφαρμοστεί ο αλγόριθμος στο παράδειγμα 6.2.5, οπότε για το γράφημα G με 3 - χρωματισμό ισχύει:

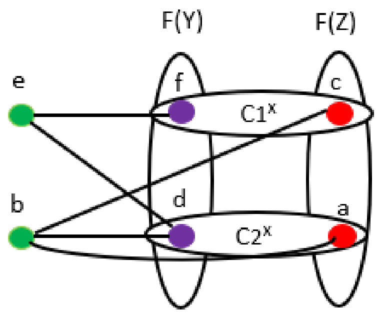




Εδώ ο μη πολύχρωμος κόμβος είναι ο e. Όπως έχει δειχθεί προηγούμενα, διακιολογείται η ύπαρξη των $F(y)$, $F(z)$, Υ, Α, Ζ, Β οπότε το σχήμα μου τώρα γίνεται:



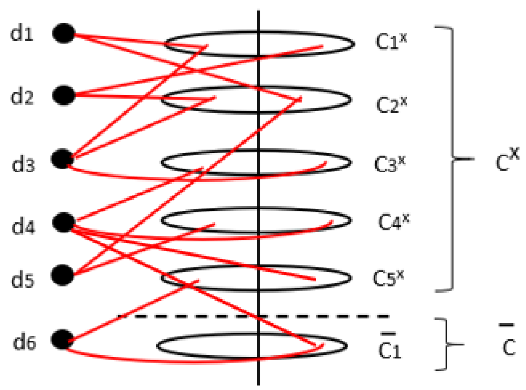
Ορίζονται οι συνεκτικές συνιστώσες $C^x = \{C_1^x, C_2^x\}$ με $C_1^x = \{f, c\}$ και $C_2^x = \{d, a\}$ και $\overline{C} = \emptyset$. Επίσης, ορίζονται $E_1 = \{f\}$, $H_1 = \{c\}$ κα $E_2 = \{d\}$, $H_2 = \{a\}$.



Κανόνας 0 : υπάρχει C^x και $|C^x| = 2$, άρα δεν ισχύει ο κανόνας 0.
Κατασκευή 1 : υπάρχει D_1, $b \in D_1$, αφού το b γειτονεύει και με τις δύο πλευρές του C_2^x.

Κατασκευή 2 : δεν υπάρχει D_2.
Δεν υπάρχει $d \in D - (D_1 \cup D_2)$, οπότε διαλέγεται οποιοδήποτε C_i^x και έστω το C_1^x, οπότε $Y = C_1^x \cap F(y) = E_1$, $A = F(y) - Y = E_2$, $Z = C_1^x \cap F(z) = H_1$ και $B = F(z) - Z = H_2$. Αλλάζοντας το Υ με το Ζ επιτυγχάνεται ο πτωτικός 3 - χρωματισμός και προκύπτει το σχήμα που είχε δοθεί στην αρχή, αφού και κει άλλαζε το c με το f.

Παράδειγμα 6.2.9. *Έστω ότι για κάποιο γράφημα G, έχει δειχθεί ότι υπάρχουν τα σύνολα Υ, Z, A και B, ορίστηκαν οι συνεκτικές συνιστώσες και θα μελετηθούν τα d_i. Το σχήμα που προέκυψε είναι το παρακάτω:*



Κανόνας 0 : υπάρχει C^x και $|C^x| = 5$, άρα δεν ισχύει ο κανόνας 0.
Κατασκευή 1 : δεν υπάρχει D_1.
Κατασκευή 2 : δεν υπάρχει D_2.
Για $d_i \in D - (D_1 \cup D_2)$ με $i = 1, \ldots, 6$ προκύπτει:

d_i	L_i	R_i
1	C_1^x	C_2^x
2	C_2^x	C_1^x
3	C_1^x, C_2^x	C_3^x
4	C_3^x	$C_4^x, C_5^x, \overline{C_1}$
5	C_4^x	C_2^x
6	C_5^x	$\overline{C_1}$

Κανόνας 1 : δεν υπάρχει C_j^x που για κάθε i να ισχύει $\left\{ \begin{array}{c} L_i - C_j^x \neq \emptyset \\ \textit{και} \\ R_i - C_j^x \neq \emptyset \end{array} \right\}$. *Άρα δεν ισχύει ο κανόνας 1.*
Κατασκευή 3 : δεν υπάρχει Ω_1, υπάρχει Ω_2 και $L_6 \in \Omega_2$.

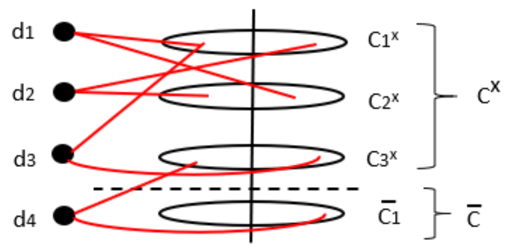
Κανόνας 2 : $C^{x'} = C^x - \{C_5^x\} = \{C_1^x, C_2^x, C_3^x, C_4^x\}$ *και* $\overline{C'} = \overline{C} \cup C_5^x = \{\overline{C_1}, C_5^x\}$.
Κανόνας 3 : Αφού, $L_1 = \{C_1^x\}$ *και* $R_1 = \{C_2^x\}$ *ενώνονται με μία ακμή, οπότε η νέα συνεκτική συνιστώσα είναι η* $C_{1,2}^x$*, το ίδιο ισχύει και για το* d_2*. Από εδώ και πέρα, είτε* C_1^x *υπάρχει, είτε* C_2^x*, είτε και τα δύο, τα θεωρώ μία συνεκτική συνιστώσα* $C_{1,2}^x$*. Αφού,* $L_3 = \{C_{1,2}^x\}$ *και* $R_3 = \{C_3^x\}$*, ενώνονται με μία ακμή, οπότε η νέα συνεκτική συνιστώσα είναι η* $C_{1,2,3}^x$*. Η* $C_{1,2,3}^x$ *αντικαθιστά τις* $C_{1,2}^x$ *και* C_3^x*. Αφού,* $L_5 = \{C_4^x\}$ *και* $R_5 = \{C_{1,2,3}^x\}$ *ενώνονται με μία ακμή, οπότε η νέα συνεκτική συνιστώσα είναι η* $C_{1,2,3,4}^x$*. Το* $C^{x''}$ *τελικά είναι* $C^{x''} = \{C_{1,2,3,4}^x\}$.
Οπότε και ο πίνακας γίνεται:

d_i	L_i	R_i
1	$C_{1,2,3,4}^x$	$C_{1,2,3,4}^x$
2	$C_{1,2,3,4}^x$	$C_{1,2,3,4}^x$
3	$C_{1,2,3,4}^x$	$C_{1,2,3,4}^x$
4	$C_{1,2,3,4}^x$	$C_{1,2,3,4}^x$, C_5^x, $\overline{C_1}$
5	$C_{1,2,3,4}^x$	$C_{1,2,3,4}^x$
6	C_5^x	$\overline{C_1}$

Οπότε, ξανά πίσω στην κατασκευή 1.
Κατασκευή 1 : υπάρχει D_1*, με* $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 \in D_1$.
Κατασκευή 2 : υπάρχει D_2*, με* $d_6 \in D_2$.
Δεν υπάρχει $d \in D - (D_1 \cup D_2)$*, οπότε διαλέγεται οποιοδήποτε* C_i^x *από το* $C^{x''}$*, άρα* $C' = \{C_1^x, C_2^x, C_3^x, C_4^x\}$*, οπότε* $Y = \{C_1^x, C_2^x, C_3^x, C_4^x\} \cap F(y) = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, $A = F(y) - Y = \{E_5, E_6\}$, $Z = \{C_1^x, C_2^x, C_3^x, C_4^x\} \cap F(z) = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ *και* $B = F(z) - Z = \{H_5, H_6\}$*. Αλλάζοντας το* Υ *με το* Z *επιτυγχάνεται ο πτωτικός χρωματισμός.*

Τέλος, θα δοθεί και ένα παράδειγμα, στο οποίο δεν μπορεί τελικά να επιτευχθεί ο πτωτικός χρωματισμός.

Παράδειγμα 6.2.10. *Έστω ότι για κάποιο γράφημα* G*, έχει δειχθεί ότι υπάρχουν τα σύνολα* Υ*,* Z*,* A *και* B*, ορίστηκαν οι συνεκτικές συνιστώσες και θα μελετηθούν τα* d_i*. Το σχήμα που προέκυψε είναι το παρακάτω:*



Κανόνας 0 : υπάρχει C^x και $|C^x| = 3$, άρα δεν ισχύει ο κανόνας 0.
Κατασκευή 1 : δεν υπάρχει D_1.
Κατασκευή 2 : δεν υπάρχει D_2.
Για $d_i \in D - (D_1 \cup D_2)$ με $i = 1, \ldots, 4$ προκύπτει:

d_i	L_i	R_i
1	C_1^x	C_2^x
2	C_2^x	C_1^x
3	C_1^x	C_3^x
4	C_3^x	$\overline{C_1}$

Κανόνας1 : δεν υπάρχει C_j^x που για κάθε i να ισχύει $\left\{ \begin{array}{c} L_i - C_j^x \neq \emptyset \\ \textit{και} \\ R_i - C_j^x \neq \emptyset \end{array} \right\}$. *Άρα δεν ισχύει ο κανόνας 1.*
Κατασκευή 3 : δεν υπάρχει Ω_1, υπάρχει Ω_2 και $L_4 \in \Omega_2$.
Κανόνας 2 : $C^{x'} = C^x - \{C_3^x\} = \{C_1^x, C_2^x\}$ και $\overline{C'} = \overline{C} \cup C_3^x = \{C_3^x, \overline{C_1}\}$.
Όμως $R_3 = \{C_3^x\} \in \overline{C'}$, και $L_3 \in \Omega_2$, άρα $C^{x'} = \{C_2^x\}$ και $\overline{C'} = \{C_1^x, C_3^x, \overline{C_1}\}$.
Όμως $L_1 = \{C_1^x\} \in \overline{C'}$, και $R_1 \in \Omega_1$, άρα $C^{x'} = \emptyset$ και $\overline{C'} = \{C_1^x, C_2^x, C_3^x, \overline{C_1}\}$.
Αφού, $C^{x'} = \emptyset$, άρα δεν υπάρχει πτωτικός χρωματισμός για αυτό το $F(y)$.

Οπότε, με βάση όσα μελετήθηκαν ως τώρα, γίνεται αντιληπτό ότι για έναν σχεδόν πτωτικό k - χρωματισμό, δηλαδή όταν μια μόνο κορυφή δεν είναι πολύχρωμη υπό τον δοσμένο k - χρωματισμό, μπορεί να επιτευχθεί ο πτωτικός χρωματισμός με τη βοήθεια των κανόνων 0 εως 3. Αν όμως, αυτοί οι κανόνες δεν δίνουν την κατάλληλη μετατροπή για όλα τα δυνατά $F(y)$, τότε δεν θα επιτευχθεί ο πτωτικός k - χρωματισμός. Αρκεί, λοιπόν, ο παραπάνω πολυωνυμικός αλγόριθμος να δίνει αποτέλεσμα για το δοσμένο γράφημα.

Βιβλιογραφια

[1] Björklund, A., Husfeldt, T., and Koivisto, M. Set partitioning via inclusion-exclusion. *SIAM J. Comput. 39*, 2 (2009), 546–563.

[2] Bodlaender, H. L., Downey, R. G., Fellows, M. R., and Hermelin, D. On problems without polynomial kernels. *J. Comput. Syst. Sci. 75*, 8 (2009), 423–434.

[3] Chartrand, G., and Geller, D. P. On uniquely colorable planar graphs. *Journal of Combinatorial Theory 6*, 3 (1969), 271 – 278.

[4] Cockayne, E. J., and Hedetniemi, S. T. Disjoint independent dominating sets in graphs. *Discret. Math. 15*, 3 (1976), 213–222.

[5] Corneil, D. G., Lerchs, H., and Burlingham, L. S. Complement reducible graphs. *Discret. Appl. Math. 3*, 3 (1981), 163–174.

[6] Cygan, M., Fomin, F. V., Kowalik, L., Lokshtanov, D., Marx, D., Pilipczuk, M., Pilipczuk, M., and Saurabh, S. *Parameterized Algorithms.* Springer, 2015.

[7] de Berg, M., and Khosravi, A. Optimal binary space partitions for segments in the plane. *Int. J. Comput. Geom. Appl. 22*, 3 (2012), 187–206.

[8] Dunbar, J., Hedetniemi, S., Hedetniemi, S., Jacobs, D., Knisely, J., Laskar, R., and Rall, D. Fall colorings of graphs. *J. of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing 33* (2000), 257–273.

[9] Fomin, F. V., and Thilikos, D. M. New upper bounds on the decomposability of planar graphs. *Journal of Graph Theory 51*, 1 (2006), 53–81.

[10] Garey, M. R., and Johnson, D. S. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* W. H. Freeman, 1979.

[11] Garey, M. R., Johnson, D. S., and Stockmeyer, L. J. Some simplified np-complete graph problems. *Theor. Comput. Sci. 1*, 3 (1976), 237–267.

[12] Harary, F., Hedetniemi, S., and Prins, G. An interpolation theorem for graphical homomorphisms. *Portugaliae mathematica 26* (1967), 453–462.

[13] Hedetniemi, S. M., Hedetniemi, S. T., and Beyer, T. A linear algorithm for the grundy (coloring) number of a tree. *Congr. Numer. 91*, 36 (1982), 351–363.

[14] Heggernes, P., and Telle, J. A. Partitioning graphs into generalized dominating sets. *Nord. J. Comput. 5*, 2 (1998), 128–142.

[15] Henning, M. A., Löwenstein, C., and Rautenbach, D. Remarks about disjoint dominating sets. *Discret. Math. 309*, 23-24 (2009), 6451–6458.

[16] Irving, R. W., and Manlove, D. The b-chromatic number of a graph. *Discret. Appl. Math. 91*, 1-3 (1999), 127–141.

[17] Laskar, R. C., and Lyle, J. Fall colouring of bipartite graphs and cartesian products of graphs. *Discret. Appl. Math. 157*, 2 (2009), 330–338.

[18] Lauri, J., and Mitillos, C. Complexity of fall coloring for restricted graph classes. In *Combinatorial Algorithms - 30th International Workshop, IWOCA 2019, Pisa, Italy, July 23-25, 2019, Proceedings* (2019), C. J. Colbourn, R. Grossi, and N. Pisanti, Eds., vol. 11638 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 352–364.

[19] Maffray, F., and Preissmann, M. On the np-completeness of the k-colorability problem for triangle-free graphs. *Discret. Math. 162*, 1-3 (1996), 313–317.

[20] Mitillos, C. Topics in graph fall-coloring. *Ph.D. thesis, Illinois Institute of technology* (2016).

[21] Telle, J. A., and Proskurowski, A. Algorithms for vertex partitioning problems on partial k-trees. *SIAM J. Discret. Math. 10* (1997), 529–550.

[22] van Rooij, J. M. M., Bodlaender, H. L., and Rossmanith, P. Dynamic programming on tree decompositions using generalised fast subset convolution. In *Algorithms - ESA 2009, 17th Annual European Symposium, Copenhagen, Denmark, September 7-9, 2009. Proceedings* (2009), A. Fiat and P. Sanders, Eds., vol. 5757 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 566–577.