



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Καρασαββαΐδης Νέστωρ

ΜΙΚΤΟΙ ΟΓΚΟΙ ΚΑΙ Η ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ALEXANDROV-FENCHEL

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2020

Αφιερώνεται στον...

Τζίρα Νέστωρ, τον παππού μου, από τον οποίο κληρονόμησα αμέριστη αγάπη κι άναψε μια σπίθα μέσα μου για τα μαθηματικά πριν καλά καλά μάθω το αλφάβητο. Η ζωή δεν τον άφησε να σπουδάσει ποτέ, όμως στη σημαντικότερη περίοδο της ζωής μου αυτός στάθηκε δίπλα μου φίλος, δάσκαλος, παιδαγωγός, γονιός.

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα Μαθηματικά (Ανάλυση - Άλγεβρα - Γεωμετρία) που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 11/1/2021 (ενδεκάτη Ιανουαρίου) από την εξεταστική επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο Βαθμίδα

Χρήστος Σαρόγλου Επίκουρος Καθηγητής

Πουρναράς Ιωάννης Αναπληρωτής καθηγητής

Γιαννούλης Ιωάννης Αναπληρωτής καθηγητής

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.

Καρασαββαΐδης Νέστωρ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής και πρωτίστως ανάμεσα τους τον επιβλέποντα καθηγητή μου, Σαρόγλου Χρήστο, για τις γνώσεις που με περίσσεια υπομονή μου μετέφερε και με καθοδήγησε να αποκτήσω.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Αντωνία Καππέ και τον Αθανάσιο Γκρέπη για όλες τις φορές που με απέτρεψαν από λάθη και με βοήθησαν να εστιάσω σε όσα πραγματικά έχουν αξία.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Έστω $K_1, K_2, \dots, K_n$ κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ (δηλαδή συμπαγή, κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, με μη-κενό εσωτερικό). Ένα παλιό θεώρημα των Minkowski/Steiner αναφέρει ότι για $t_1, \dots, t_n > 0$, η ποσότητα $V(t_1 K_1 + t_2 K_2 + \dots + t_n K_n)$ είναι ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού n ως προς τις μεταβλητές $t_i, i = 1, \dots, n$. Ο συντελεστής του μονωνύμου $t_1 \dots t_n$ καλείται μικτός όγκος των $K_1, K_2, \dots, K_n$ και συμβολίζεται με $V(K_1, K_2, \dots, K_n)$.

Η γεωμετρική ερμηνεία του μικτού όγκου έχει εξέχουσα σημασία στον τομέα της Κυρτής Γεωμετρίας, καθώς κωδικοποιεί πολλές πληροφορίες που αφορούν στη μελέτη των κυρτών σωμάτων. Για παράδειγμα, αν $K \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα κυρτό σώμα και B^n η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^n$, τότε οι ποσότητες $V(K, K, \dots, K)$, $V(K, \dots, K, B^n)$, $V(K, B^n, \dots, B^n)$ είναι πολλαπλάσια (με σταθερές που εξαρτώνται μόνο από τη διάσταση) του όγκου, της επιφάνειας και του μέσου πλάτους του K , αντίστοιχα.

Μια από τις ισχυρότερες ανισότητες στην οποία εμφανίζονται μικτοί όγκοι είναι η ανισότητα Aleksandrov-Fenchel:

$$V(K_1, \dots, K_n)^2 \geq V(K_1, K_1, \dots, K_n)V(K_2, K_2, \dots, K_n).$$

Ας σημειωθεί πως η ανισότητα Brunn-Minkowski, η κλασσική ισοπεριμετρική ανισότητα, η ανισότητα Urysohn καθώς και η πρώτη ανισότητα Minkowski, μεταξύ άλλων, αποτελούν άμεσα πορίσματα της ανισότητας Aleksandrov-Fenchel.

Πρωταρχικοί στόχοι της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι η κατανόηση σε βάθος της έννοιας των μικτών όγκων, των ιδιοτήτων και των εφαρμογών τους, καθώς και των απαιτούμενων εργαλείων για την απόδειξη της ανισότητας Aleksandrov-Fenchel. Μεταξύ των σκοπών αυτής της διατριβής είναι να συζητηθούν ορισμένα πρόσφατα αποτελέσματα που σχετίζονται με την εν λόγω ανισότητα.

Για παράδειγμα, ο χαρακτηρισμός της ισότητας στην ανισότητα Aleksandrov-Fenchel αποτελεί ανοιχτό πρόβλημα ήδη από την εποχή του Minkowski. Πολύ πρόσφατα (Φεβρουάριος του 2019), οι Yair Shenfeld και Ramon van Handel σε κοινή τους δημοσίευση με τίτλο “Extremals in Minkowski’s quadratic inequality” έδωσαν πλήρη απάντηση στο πρόβλημα, για την ειδική περίπτωση $K_3 = \dots = K_n = K$.

ABSTRACT

Let $K_1, K_2, \dots, K_n$ be convex bodies in $\mathbb{R}^n$ (that is, compact subsets of $\mathbb{R}^n$, with non empty interior). A theorem due to Minkowski/Steiner states that for $t_1, \dots, t_n > 0$, the quantity $V(t_1 K_1 + t_2 K_2 + \dots + t_n K_n)$ is a homogeneous polynomial of degree n with respect to the variables t_i , $i = 1, \dots, n$. The coefficient of the monomial $t_1 \dots t_n$ is called mixed volume of $K_1, K_2, \dots, K_n$ and is defined by $V(K_1, K_2, \dots, K_n)$. Mixed volumes and their geometric interpretation are of great importance in the field of Convex Geometry, since it encodes information concerning convex bodies. For example, if $K \subset \mathbb{R}^n$ is a convex body and B_2^n is the Euclidean unit ball of $\mathbb{R}^n$, then the quantities $V(K, K, \dots, K)$, $V(K, \dots, K, B_2^n)$, $V(K, B_2^n, \dots, B_2^n)$ are multiples (with constants dependent only on the dimension) of volume, surface, and average width of K , respectively. One of the more well known inequalities in which mixed volumes appear is known as the Aleksandrov-Fenchel inequality:

$$V(K_1, \dots, K_n)^2 \geq V(K_1, K_1, \dots, K_n) V(K_2, K_2, \dots, K_n).$$

Let us also note that the Brunn-Minkowski inequality, the classical isoperimetric inequality, Urysohn's inequality, as well as Minkowski's first inequality, among others, are immediate consequences of the Aleksandrov-Fenchel inequality. Primary goals of this master's thesis are the in-depth comprehension of mixed volumes, their properties and applications, as well as understanding the necessary background to the Aleksandrov-Fenchel inequality. As a secondary theme, some recent results regarding the above inequality shall be presented. For example, the characterization of the equality cases in Aleksandrov-Fenchel inequality is an open question since Minkowski's era. It was only very recently (February of 2019) that Yair Shenfeld and Ramon van Handel in their joint publication titled "Extremals in Minkowski's quadratic inequality" gave an answer to the problem, for the special case where $K_3 = \dots = K_n = K$.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ισοπεριμετρική ανισότητα είναι μια γεωμετρική ανισότητα που εμπλέκει τη περίμετρο και τον όγκο ενός συνόλου. Στο $\mathbb{R}^n$, δίνει κάτω φράγμα της επιφάνειας ή περιμέτρου ενός συνόλου $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $\text{per}(S)$, συναρτήσει του όγκου $\text{Vol}(S)$

$$\text{per}(S) \geq n \text{Vol}(S)^{\frac{n-1}{n}} \text{Vol}(B)^{\frac{1}{n}},$$

όπου $B \subseteq \mathbb{R}^n$ μοναδιαία μπάλα. Αποδεικνύεται πως αν S είναι μπάλα του $\mathbb{R}^n$, τότε ισχύει η ισότητα στη παραπάνω σχέση.

Στο επίπεδο, το ισοπεριμετρικό πρόβλημα αναζητά κλειστή καμπύλη που για δεδομένο μήκος, θα μεγιστοποιεί το εμβαδό της επιφάνειας που καλύπτει στο εσωτερικό της. Η λύση στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα του επιπέδου ήταν ήδη γνωστή στους μαθηματικούς της αρχαίας Ελλάδας πως είναι ο κύκλος, όμως η πρώτη σύγχρονη, μαθηματικά αυστηρή απόδειξη χρονολογείται στα τέλη του δέκατου-έννατου αιώνα. Η πιο γνωστή φυσική εφαρμογή της ισοπεριμετρικής ανισότητας ίσως είναι στο χώρο, $\mathbb{R}^3$, όπου επιβάλλει το σχήμα μιας σταγόνας νερού να είναι σφαίρα, καθώς οι δυνάμεις επιφανειακής τάσης τείνουν να ελαχιστοποιήσουν την επιφάνεια μιας σταγόνας που περιέχει κάποιο συγκεκριμένο, σταθερό όγκο υγρού.

Το άθροισμα Minkowski δύο υποσυνόλων A, B ενός γραμμικού χώρου E ορίζεται να είναι το σύνολο $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$. Μέσω του αθροίσματος Minkowski ορίζουμε την επιφάνεια ή περίμετρο ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ως το όριο

$$\text{per}(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu(A + \epsilon B) - \mu(A)}{\epsilon},$$

όπου μ είναι το σύννηθες μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$.

Οι Hermann Brunn και Hermann Minkowski απέδειξαν στα τέλη του δέκατου-έννατου αιώνα την παρακάτω ανισότητα, που στη διεθνή βιβλιογραφία φέρει πλέον το όνομά τους και είναι γνωστή ως Brunn-Minkowski-Inequality (BMI), για κυρτά σώματα. Δηλαδή κυρτά και συμπαγή σύνολα.

$$\mu(A + B)^{\frac{1}{n}} \geq \mu(A)^{\frac{1}{n}} + \mu(B)^{\frac{1}{n}}, \quad \forall A, B \subseteq \mathbb{R}^n, \text{ μη κενά, } n \geq 1.$$

Αποδεικνύεται πως η ισοπεριμετρική ανισότητα είναι άμεσο πόρισμα της BMI.

Για κυρτά σώματα $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζουμε τη ποσότητα

$$V_1(K, L) := \frac{1}{n} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\text{Vol}(K + \epsilon L) - V(K)}{\epsilon}.$$

Τότε η πρώτη ανισότητα Minkowski δίνει

$$V_1(K, L) \geq V(K)^{\frac{n-1}{n}} V(L)^{\frac{1}{n}},$$

όπου η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν K, L είναι ομοιόθετα. Σημειώνουμε πως η ποσότητα V_1 είναι μια ειδική περίπτωση μικτών όγκων, που θα μελετήσουμε αναλυτικά στη παρούσα διατριβή. Ακόμη, αν στη παραπάνω ανισότητα επιλέξουμε ως $L = B$, τη μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^n$, αποκτούμε την ανισότητα

$$\left(\frac{V(K)}{V(B)} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{\text{per}(K)}{\text{per}(B)} \right)^{\frac{1}{n}}$$

που είναι ισοδύναμη της ισοπεριμετρικής ανισότητας του $\mathbb{R}^n$ για κυρτά σώματα $K \subseteq \mathbb{R}^n$ και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν K είναι μπάλα του $\mathbb{R}^n$. Σημειώνουμε ακόμη πως αν K, L είναι τέτοια ώστε να ισχύει η ισότητα στην BMI τότε για τα ίδια K, L θα ισχύει η ισότητα και στην πρώτη ανισότητα Minkowski.

Οι μικτοί όγκοι βρίσκονται στη καρδιά της κυρτής γεωμετρίας καθώς κωδικοποιούν μια πληθώρα πληροφοριών για τα κυρτά σώματα. Αν $K_1, \dots, K_n$ είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε ο μικτός τους όγκος, $V(K_1, \dots, K_n)$, ορίζεται ως

$$V(K_1, \dots, K_n) := \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \text{Vol}(K_{i_1} + \dots + K_{i_k}).$$

Αναφέρουμε πως αν K είναι τυχόν κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^3$ και B η μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^3$, μεταξύ άλλων, αποδεικνύονται και

- $\text{Vol}(K) = V(K, K, K)$
- $\text{per}(K) = nV(K, K, B)$
- $W(K) = \frac{2V(K, K, B)}{\text{Vol}(B)},$

όπου W το μέσο πλάτος.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό πως πολλές γεωμετρικές ισότητες που είναι γραμμένες χωρίς αναφορά σε μικτούς όγκους, μπορούν να επαναδιατυπωθούν μέσω μικτών όγκων. Μια από τις ισχυρότερες ανισότητες που εμπλέκει την έννοια των μικτών όγκων είναι η ανισότητα Alexandrov-Fencel, η οποία λέει πως για $K_1, \dots, K_n$ κυρτά σώματα του $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$V(K_1, \dots, K_n)^2 \geq V(K_1, K_1, K_3, \dots, K_n) V(K_2, K_2, K_3, \dots, K_n).$$

Για διάσταση $n = 3$ οι ανισότητες Alexandrov-Fencel και η τετραγωνική ανισότητα Minkowski τριών κυρτών σωμάτων $K, L, M \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$V(K, L, M)^2 \geq V(K, K, M) V(L, L, M),$$

ταυτίζονται.

Ο Minkowski δεν κάνει καμία αναφορά στο εργό του για μεγαλύτερες διαστάσεις και δεν έχει δώσει πλήρη χαρακτηρισμό των περιπτώσεων ισότητας σε αυτήν. Θεωρούμε την εξής γενίκευση της τετραγωνικής ανισότητας Minkowski στο $\mathbb{R}^n$:

$$V(K, L, M, \dots, M)^2 \geq V(K, K, M, \dots, M)V(L, L, M, \dots, M),$$

για K, L, M κυρτά σώματα του $\mathbb{R}^n$. Οι Ramon Van Handel και Yair Shenfeld σε κοινή τους δημοσίευση, δίνουν πλήρη χαρακτηρισμό των περιπτώσεων ισότητας στην γενικευμένη τετραγωνική ανισότητα Minkowski.

Στη παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή αρχικά παρουσιάζουμε την απαραίτητη προεργασία για τον ορισμό των μικτών όγκων και των βασικότερων ιδιοτήτων τους. Έπειτα, δίνουμε μια απόδειξη της ανισότητας Alexandrov-Fenchel που οφείλεται στον Alexandrov [1]. Τέλος θα παρουσιάσουμε λεπτομερώς την απόδειξη των Ramon Van Handel και Shenfeld, για την ειδική περίπτωση όπου το κυρτό σώμα M έχει μή-κενό εσωτερικό.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη	i
Abstract	ii
Εισαγωγή	v
1 Βασικές έννοιες	1
1.1 Τοπικά παράλληλα σύνολα	1
1.2 Τύπος του Steiner και μέτρα στήριξης	6
2 Μικτοί όγκοι και μικτά επιφανειακά μέτρα	23
2.1 Ισχυρώς ισομορφικά πολύτοπα και ιδιότητες	23
2.2 Μικτοί Όγκοι και Μικτά επιφανειακά μέτρα	24
2.3 Επεκτάσεις Μικτών Όγκων	36
2.4 Μικτές διακρίνουσες	38
2.5 Η ανισότητα Alexandrov-Fenchel	39
3 Ακρότατα στην τετραγωνική ανισότητα Minkowski	45
3.1 Εισαγωγή στο πρόβλημα	45
3.2 Διάγραμμα	47
3.2.1 Μέθοδος Hilbert	47
3.2.2 Μικτοί όγκοι	51
3.2.3 Δύο ασθενή θεωρήματα	51
3.3 Προαπαιτούμενα και συμβολισμοί	53
3.4 Μικτοί όγκοι ως τετραγωνικές μορφές	58
3.5 Πολύτοπα και χβαντικοί γράφοι	63
3.6 Ποσοτικές μορφές των δύο θεωρημάτων	69
3.6.1 Απόδειξη του Θεωρήματος 3.30 για πολύτοπα	70

3.6.2 Απόδειξη του Θεωρήματος 3.30 για τυχόντα κυρτά σώματα	79
3.6.3 Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2	79
A' Αυτοσυζυγείς τελεστές και τετραγωνικές μορφές	81
B' Φασματικό Θεώρημα και Projection Valued Measures	85
Γ' Κβαντικοί γράφοι(Quantum Graphs)	93

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 Τοπικά παράλληλα σύνολα

Αρχικά, πρέπει να ορίσουμε τις έννοιες του μέτρου στήριξης, επιφανειακού μέτρου, μέτρου καμπυλότητας, καθώς και ορισμένες άλλες έννοιες που συχνά εμφανίζονται στη μελέτη της Κυρτής Γεωμετρίας.

Ορισμός 1.1. Στο κλάδο της γεωμετρίας ως άθροισμα Minkowski δύο κυρτών συνόλων A, B , εννοούμε το εξής:

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

Ορισμός 1.2. Έστω K κυρτό σώμα στο $\mathbb{R}^n$, δηλαδή κυρτό, συμπαγές και με μη-κενό εσωτερικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, και έστω $\rho \geq 0$, ορίζουμε ως 'εξωτερικό παράλληλο σώμα του K ' το σύνολο

$$K_\rho := K + \rho B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : d(K, x) \leq \rho\}$$

.

Ορισμός 1.3. Ορίζουμε συνάρτηση στήριξης ενός μη κενού, κυρτού, κλειστού συνόλου $K \subset \mathbb{R}^n$ και συμβολίζουμε με $h_K(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$h_K(x) = \sup\{\langle x, y \rangle : y \in K\}.$$

Ορισμός 1.4. Ορίζουμε επίπεδο στήριξης ενός κυρτού σώματος K , το σύνολο

$$H(K, x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = h_K(x)\}.$$

Ορισμός 1.5. Ορίζουμε σύνολο στήριξης ενός κυρτού σώματος K , το σύνολο

$$F(K, u) := H(K, u) \cap K.$$

Αποδεικνύεται πως μπορούμε να εκφράσουμε τον όγκο του K_ρ μέσω του τύπου του Steiner (θα αποδειχθεί παρακάτω), ως πολυώνυμο βαθμού το πολύ n , ως προς την παράμετρο ρ . Οι συντελεστές του πολυωνύμου εμφανίζονται συχνά στη βιβλιογραφία με δύο διαφορετικές κανονικοποιήσεις,

$$V_n(K + \rho B^n) = \sum_{i=0}^n \rho^i \binom{n}{i} W_i(K)$$

$$= \sum_{j=0}^n \rho^{n-j} \kappa_{n-j} V_j(K).$$

Το πολυώνυμο που εμφανίζεται στα δεξιά, είναι γνωστό ως πολυώνυμο Steiner. Όσον αφορά τα $W_0, \dots, W_n$, πρόκειται για συναρτησοειδή, για τα οποία έχει επικρατήσει στη βιβλιογραφία ο γερμανικός όρος Quermassintegral, και θα δώσουμε ορισμό παρακάτω.

Οι δείκτες που εμφανίζονται στο V_n και V_j δηλώνουν τη διάσταση του μέτρου Hausdorff ως προς την οποία υπολογίζουμε τον όγκο του συνόλου στις παρενθέσεις. Οι συντελεστές που εμφανίζονται στον τύπο του Steiner αποδεικνύεται πως είναι σημαντικές ποσότητες, που φέρουν κρίσιμες πληροφορίες σχετικά με το κυρτό σώμα K . Ο παραπάνω τύπος δεν είναι παρά μια ειδική περίπτωση ενός παρόμοιου αναπτύγματος που ισχύει για τυχόντες γραμμικούς συνδιασμούς Minkowski $\lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_m K_m$, που θα μας οδηγήσει στην έννοια του μικτού όγκου και θα συζητηθεί εκτενώς στα ακόλουθα.

Το άθροισμα Minkowski $K + \rho B^n$ είναι το σύνολο όλων των σημείων του $\mathbb{R}^n$ που απέχουν από το K το πολύ ρ . Αυτή η οπτική οδηγεί με φυσικό τρόπο στη πιο γενική έννοια του τοπικού παράλληλου συνόλου. Δοθέντος $\beta \subset K$, θεωρούμε το σύνολο όλων των $x \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία $0 < d(K, x) \leq \rho$ και για τα οποία το πλησιέστερο σημείο $p(K, x)$ (μετρική προβολή του x στο K) ανήκει στο β . Εναλλακτικά, μπορούμε να επιλέξουμε ένα σύνολο $\beta \subset S^{n-1}$ μοναδιαίων διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$, κι έπειτα να θεωρήσουμε το σύνολο των $x \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία $0 < d(K, x) \leq \rho$ και ταυτόχρονα το μοναδιαίο διάνυσμα $u(K, x)$ με φορά από το $p(K, x)$ προς το x , να ανήκει στο β .

Περιορίζοντας το σύνολο β στην κλάση των Borel υποσυνόλων, βρίσκουμε πως σε κάθε περίπτωση το μέτρο Lebesgue του τοπικού παράλληλου συνόλου, όπως περιγράφηκε παραπάνω είναι πάλι πολυώνυμο ως προς την παράμετρο ρ . Οι συντελεστές εξαρτώνται από την επιλογή του συνόλου K και από την παράμετρο ρ . Αν σταθεροποιήσουμε ένα κυρτό σώμα K και θεωρήσουμε τους συντελεστές του παραπάνω πολυωνύμου ως συναρτήσεις μόνο της παραμέτρου ρ , αυτοί είναι μέτρα. Αυτά είναι το μέτρο καμπυλότητας και το επιφανειακό μέτρο. Οι βασικές ιδιότητες των μέτρων θα προκύψουν από τη μελέτη των αντίστοιχων τοπικών παράλληλων συνόλων, των οποίων θα κατασκευάσουμε μια κοινή γενίκευση, που θα οδηγήσει στα μέτρα στήριξης.

Συμβολίζουμε το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ με Σ .

Συμβολίζουμε με $\mathcal{K}^n$ το σύνολο των κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$.

Συμβολίζουμε με bdK ή ∂K , το σύνολο των συνοριακών σημείων του συνόλου K .

Ορισμός 1.6. Αν $K \in \mathcal{K}^n$, ένα ζευγάρι $(x, u) \in \Sigma$ καλείται στοιχείο στήριξης του K αν $x \in bdK$ και το u είναι ένα εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα του K στο σημείο x .

Για κάθε σημείο $y \in \mathbb{R}^n \setminus K$, το ζευγάρι $(p(K, y), u(K, y))$ είναι ένα στοιχείο στήριξης του K . Θα συμβολίζουμε με $NorK$ το σύνολο όλων των στοιχείων στήριξης του K . Η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου X θα συμβολίζεται με $\mathcal{B}(X)$. Στο εξής, ως ‘μετρήσιμο’ θα εννοούμε Borel μετρήσιμο.

Ας είναι $K \in \mathcal{K}^n$ και $\rho > 0$. Τότε η απεικόνιση

$$f_\rho : K_\rho \setminus K \longrightarrow \Sigma$$

$$x \mapsto (p(K, x), u(K, x))$$

είναι συνεχής, και άρα μετρήσιμη. Μπορούμε λοιπόν, να θεωρήσουμε το μέτρο εικόνας $\mu_\rho(K, \cdot)$ της f_ρ του μέτρου Lebesgue. Το $\mu_\rho(K, \cdot)$ είναι πεπερασμένο μέτρο στην $\mathcal{B}(\Sigma)$, και για ένα Borel σύνολο $\eta \in \mathcal{B}(X)$, η τιμή $\mu_\rho(K, \eta)$ είναι το μέτρο Lebesgue του τοπικού παράλληλου συνόλου

$$M_\rho(K, \eta) := f_\rho^{-1}(\eta) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < d(K, x) \leq \rho \text{ και } (p(K, x), u(K, x)) \in \eta\}.$$

Θα μελετήσουμε τώρα κάποιες βασικές ιδιότητες του μέτρου

$$\mu_\rho : \mathcal{K}^n \times \mathcal{B}(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R},$$

όπου με το συμβολισμό $\xrightarrow{w}$ αναφερόμαστε στην ασθενή σύγκλιση Borel μέτρων.

Θεώρημα 1.7. Έστω $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία $\epsilon \nu \mathcal{K}^n$ με $K_j \rightarrow K$ για $j \rightarrow \infty$. Τότε $\mu_\rho(K_j, \cdot) \xrightarrow{w} \mu_\rho(K, \cdot)$ για $j \rightarrow \infty$.

Απόδειξη. Ας είναι $\eta \subset \Sigma = \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ ανοιχτό, και $x \in M_\rho(K, \eta)$ ένα σημείο με $d(K, x) < \rho$. Από συνέχεια της απόστασης σημείου-συνόλου και συνέχεια της μετρικής προβολής, έχουμε πως $K_j \rightarrow K \Rightarrow d(K_j, x) \rightarrow d(K, x)$ και

$$(p(K_j, x), u(K_j, x)) \rightarrow (p(K, x), u(K, x)) \text{ για } j \rightarrow \infty.$$

Ως εκ τούτου, για σχεδόν όλα τα j έχουμε $d(K_j, x) < \rho$ και $(p(K_j, x), u(K_j, x)) \in \eta$, άρα $x \in M_\rho(K_j, \eta)$. Αυτό δείχνει πως

$$M_\rho(K, \eta) \setminus bdK_\rho \subset \liminf_{j \rightarrow \infty} M_\rho(K_j, \eta),$$

και άρα,

$$\begin{aligned} \mu_\rho(K, \eta) &= \mathcal{H}^n(M_\rho(K, \eta) \setminus bdK_\rho) \leq \mathcal{H}^n(\liminf_{j \rightarrow \infty} M_\rho(K_j, \eta)) \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{H}^n(M_\rho(K_j, \eta)) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \mu_\rho(K_j, \eta) \end{aligned}$$

Αυτό ισχύει για όλα τα ανοιχτά σύνολα $\eta \subset \Sigma$. Ακόμη έχουμε πως :

$$\mu_\rho(K, \Sigma) = \mathcal{H}^n(K_\rho \setminus K) = \mathcal{H}^n(K_\rho) - \mathcal{H}^n(K).$$

Η συνέχεια του όγκου (ως συναρτησοειδές πάνω από την κλάση $\mathcal{K}^n$, σε συνδυασμό με τη συνέχεια του αθροίσματος Minkowski δείχνει πως

$$\mu_\rho(K_j, \Sigma) \rightarrow \mu_\rho(K, \Sigma), \quad j \rightarrow \infty.$$

Ο ισχυρισμός έπεται άμεσα. □

Για την απόδειξη του θεωρήματος 1.12, θα χρειαστούμε τις έννοιες του συστήματος Dynkin και p -συστήματος. Το σύστημα Dynkin είναι μία συλλογή υποσυνόλων κάποιου καθολικού συνόλου Ω που ικανοποιούν ένα σύνολο αξιωμάτων ασθενέστερο αυτών της σ-άλγεβρας.

Ορισμός 1.8. Έστω $\Omega \neq \emptyset$, και D μια συλλογή υποσυνόλων του Ω . Τότε το D είναι σύστημα Dynkin αν:

1. $\Omega \in D$.
2. Για $A, B \in D$ και $A \subseteq B$, ισχύει $B \setminus A \in D$.
3. Αν $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ακολουθία συνόλων της D με $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, τότε $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in D$.

Δίνεται και ένας ακόμη ορισμός του Dynkin συστήματος, που αποδεικνύεται πως είναι ισοδύναμος του προηγούμενου.

Ορισμός 1.9. Μια συλλογή συνόλων D καλείται σύστημα Dynkin αν:

1. $\Omega \in D$
2. Αν $A \in D$, τότε και $A^c \in D$
3. Αν $A_1, A_2, \dots$ ακολουθία υποσυνόλων της D με $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$, τότε $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in D$.

Ακολουθεί ο ορισμός του π-συστήματος και το θεώρημα π-λ του Dynkin.

Ορισμός 1.10. Έστω $\Omega \neq \emptyset$, και P μια συλλογή υποσυνόλων του Ω . Τότε το P είναι π-σύστημα του Ω αν:

1. P είναι μη κενή
2. $A \cap B \in P$, για $A, B \in P$.

Θεώρημα 1.11. Αν P είναι ένα π-σύστημα και D είναι ένα Dynkin σύστημα και $P \subseteq D$, τότε $\sigma\{P\} \subseteq D$. Με άλλα λόγια, η σ-άλγεβρα που παράγεται από το P , περιέχεται στην D .

Παρατηρούμε πως από τον ορισμό του π-συστήματος, ένα π-σύστημα θα περιέχει τα ανοιχτά υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου Ω .

Θεώρημα 1.12. Για κάθε $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$, η συνάρτηση $\mu_\rho(\cdot, \eta) : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη. Στην απόδειξη του θεωρήματος 1.7 δείξαμε πως

$$K_j \rightarrow K \Rightarrow \liminf_{j \rightarrow \infty} \mu_\rho(K_j, \eta) \geq \mu_\rho(K, \eta)$$

για ανοιχτό η , ως εκ τούτου, για τέτοια σύνολα η η συνάρτηση $\mu_\rho(\cdot, \eta)$ είναι κάτω ημισυνεχής κι άρα μετρήσιμη.

Έστω D η οικογένεια όλων των συνόλων $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ για τα οποία $\mu_\rho(\cdot, \eta)$ είναι μετρήσιμη. Θα δείξουμε πως D είναι σύστημα Dynkin.

Για $\eta_1, \eta_2 \in D$ με $\eta_2 \subset \eta_1$ έχουμε $M_\rho(K, \eta_2) \subset M_\rho(K, \eta_1)$ και $M_\rho(K, \eta_1 \setminus \eta_2) = M_\rho(K, \eta_1) \setminus M_\rho(K, \eta_2)$, ως εκ τούτου $\mu_\rho(K, \eta_1 \setminus \eta_2) = \mu_\rho(K, \eta_1) - \mu_\rho(K, \eta_2)$ για $K \in \mathcal{K}^n$, συνεπώς $\eta_1 \setminus \eta_2 \in D$.

Έστω ακολουθία $(\eta_j)_{j \in \mathbb{N}} \in D$ ανά δύο ξένα. Τότε $\mu_\rho(K, \cup_{j=1}^{\infty} \eta_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_\rho(K, \eta_j)$ για $K \in \mathcal{K}^n$ καθώς $\mu_\rho(K, \cdot)$ είναι μέτρο. Συνεπώς $\cup_{j=1}^{\infty} \eta_j \in D$.

Επίσης, αφού K κυρτό σώμα, τότε $\mu_\rho(K, \Sigma)$ είναι μετρήσιμη $\Rightarrow \Sigma \in D$. Άρα είναι σύστημα Dynkin που περιέχει τα ανοιχτά. Αφού τα ανοιχτά είναι π-σύστημα που περιέχεται σε ένα σύστημα Dynkin, θα περιέχεται και η σ-άλγεβρα αυτών στο σύστημα Dynkin.

Τέλος, αρκεί να σημειώσουμε πως αφού D περιέχει την τοπολογία (σ-άλγεβρα των ανοιχτών), θα περιέχει και τα Borel του Σ . $\square$

Θεώρημα 1.13. Για κάθε $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$, η συνάρτηση $\mu_\rho(\cdot, \eta)$ είναι αθροιστική, δηλαδή

$$\mu_\rho((K_1 \cup K_2), \eta) + \mu_\rho((K_1 \cap K_2), \eta) = \mu_\rho(K_1, \eta) + \mu_\rho(K_2, \eta),$$

όποτε $K_1, K_2, K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}^n$.

Απόδειξη. Ας είναι K_1, K_2 κυρτά σώματα με $K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}^n$. Συμβολίζουμε με $I_\rho(K, \eta, \cdot)$ την χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $M_\rho(K, \eta)$. Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ δοσμένα και υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας πως

$$y := p(K_1 \cup K_2, x) \in K_1. \quad (1.1)$$

Τότε προφανώς $p(K_1 \cup K_2, x) = p(K_1, x)$

Έστω $z := p(K_2, x)$.

Αφού $K_1 \cup K_2$ είναι κυρτό, $\exists a \in [z, y]$ (ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα z, y) με $a \in K_1 \cap K_2$.

$$y = p(K_1 \cup K_2, x) \Rightarrow |y - x| \leq |z - x| \xrightarrow{a \in [z, y]} |a - x| \leq |z - x|$$

Το γνήσιο της ανισότητας είναι αδύνατο, καθώς $a \in K_1 \cap K_2 \Rightarrow a \in K_2$

και $z = p(K_2, x) \Rightarrow |z - x| \leq |a - x|$. Ως εκ τούτου, έχουμε πως $a = z$, και άρα $z \in K_1 \cap K_2$, από το οποίο βλέπουμε πως

$$p(K_1 \cap K_2, x) = p(K_2, x) = z. \quad (1.2)$$

Από τα παραπάνω συμπαίρνουμε πως:

$$d(K_1 \cup K_2, x) \stackrel{1.1}{=} d(K_1, x)$$

$$d(K_1 \cap K_2, x) \stackrel{1.2}{=} d(K_2, x)$$

$$u(K_1 \cup K_2, x) \stackrel{1.1}{=} u(K_1, x)$$

$$u(K_1 \cap K_2, x) \stackrel{1.2}{=} u(K_2, x)$$

από τα οποία παίρνουμε πως:

$$I_\rho(K_1 \cup K_2, \eta, x) = I_\rho(K_1, \eta, x)$$

$$I_\rho(K_1 \cap K_2, \eta, x) = I_\rho(K_2, \eta, x)$$

Καθώς το x ήταν αυθαίρετα επιλεγμένο, προσθέτουμε κατά μέλη τα παραπάνω και έχουμε:

$$I_\rho(K_1 \cup K_2, \eta, \cdot) + I_\rho(K_1 \cap K_2, \eta, \cdot) = I_\rho(K_1, \eta, \cdot) + I_\rho(K_2, \eta, \cdot)$$

Ολοκληρώνουμε ως προς $\mathcal{H}^n$ τα δύο μέλη κι έχουμε

$$\mu_\rho(K_1 \cup K_2, \eta) + \mu_\rho(K_1 \cap K_2, \eta) = \mu_\rho(K_1, \eta) + \mu_\rho(K_2, \eta).$$

$\square$

1.2 Τύπος του Steiner και μέτρα στήριξης

Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε πως το μέτρο $\mu_\rho(K, \eta)$ του τοπικού παράλληλου συνόλου $M_\rho(K, \eta)$ μπορεί να εκφραστεί ως πολυώνυμο της παραμέτρου ρ (τοπικός τύπος του Steiner). Θα ξεκινήσουμε με την πιο απλή περίπτωση, τα πολύτοπα και έπειτα θα δούμε πως περνάμε σε τυχόν κυρτό σώμα.

Ας είναι $P \in \mathcal{K}^n$ πολύτοπο. Για $x \in \mathbb{R}^n \setminus P$, το πλησιέστερο σημείο $p(P, x)$ θα ανήκει στο σχετικό εσωτερικό μιας μοναδικής πλευράς F του P . Για μια πλευρά F του P , μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο Lebesgue του συνόλου

$$M_\rho(P, \eta) \cap p(P, \cdot)^{-1}(\text{relint}F),$$

όπου $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ και $\rho > 0$ με χρήση του θεωρήματος του Fubini. Αρκεί να παρατηρήσουμε πως το σύνολο

$$(P_\rho \setminus P \cap p(P, \cdot)^{-1}(\text{relint}F))$$

είναι, με εξαίρεση ένα σύνολο μέτρου 0, ίσο με το ευθύ άθροισμα

$$F \oplus (N(P, F) \cap \rho B^n),$$

όπου $N(P, F)$ είναι ο ορθογώνιος κώνος του P στην F και B^n η μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^n$. Σημειώνουμε πως το σύνολο μέτρου 0 ως προς το οποίο αυτά διαφέρουν, είναι το $F \setminus \text{relint}F \times \{0\} \subset F \times \rho B^n$.

$$M_\rho(P, \eta) \cap p(P, \cdot)^{-1}(\text{relint}F) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < d(P, x) \leq \rho, p(P, x) \in \text{relint}F\}$$

Έστω $\dim F = m$, μετά από αναδιάταξη των αξόνων και παράλληλη μεταφορά, μπορούμε να φέρουμε τα πράγματα έτσι ώστε $F \subset \mathbb{R}^n$. Πλέον το σύνολο γράφεται ως:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} : 0 < d(P, (x, y)) \leq \rho, p(P, (x, y)) \in \text{relint}F\}.$$

Παρατηρούμε πως $p(P, (x, y)) = (x, 0)$ και ταυτίζουμε $(x, 0) \cong x \in \text{relint}F$, καθώς επίσης και $d(P, (x, y)) = d((x, 0), (x, y)) = |y| \Rightarrow 0 < |y| \leq \rho$, με $y \in N(P, F)$. Το σύνολο γράφεται πλέον ως:

$$\text{relint}F \times [(\rho B^{n-m} \setminus \{0\}) \cap N(P, F)]$$

που είναι,

$$\text{relint}F \times [(\rho B^n \setminus \{0\}) \cap N(P, F)]$$

δηλαδή τελικά,

$$\text{relint}F \oplus [(\rho B^{n-m} \setminus \{0\}) \cap N(P, F)].$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} M_\rho(P, \eta) \cap p(P, \cdot)^{-1}(\text{relint}F) &= \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} : 0 < d(P, (x, y)) \leq \rho, (p(P, (x, y)), u(P, (x, y))) \in \eta\} \\ &\quad \cap \text{capp}(P, \cdot)^{-1}(\text{relint}F) = \\ \{(x, y) : 0 < d(P, (x, y)) \leq \rho, (x, y) \in \eta\} \cap p(P, \cdot)^{-1}(\text{relint}F) &= \end{aligned}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} : (x, 0, 0, \frac{y}{|y|}) \in \eta\}$$

$$\cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} : 0 < d(P, (x, y)) \leq \rho\} \cap p(P, \cdot)^{-1}(\text{relint} F),$$

όπου το $(x, 0) \in \mathbb{R}^n$ και $(0, \frac{y}{|y|}) \in S^{n-1}$. Παρατηρούμε επίσης πως το δεύτερο σύνολο είναι το

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} : 0 < d(P, (x, y)) \leq \rho\} = P_\rho \setminus P.$$

Τελικά,

$$\begin{aligned} M_\rho(P, \eta) \cap p(P, \cdot)^{-1}(\text{relint} F) = \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} : (x, 0, 0, \frac{y}{|y|}) \in \eta\} \cap (P_\rho \setminus P) \cap p(P, \cdot)^{-1}(\text{relint} F), \end{aligned}$$

όπου το παραπάνω είναι ίσο, με εξαίρεση ενός συνόλου μέτρου 0, με το

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} : (x, 0, 0, \frac{y}{|y|}) \in \eta\} \cap (F \times (N(P, F) \cap \rho B^n)) =$$

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \setminus \{0\} : x \in F, y \in N(P, F) \cap \rho B^n, (x, 0, 0, \frac{y}{|y|}) \in \eta\}.$$

Ορίζουμε $E_x := \{y \in \mathbb{R}^{n-m} \setminus \{0\} : y \in N(P, F) \cap \rho B^n, (x, 0, 0, \frac{y}{|y|}) \in \eta\}$. Τότε ο όγκος του E είναι

$$V(E) = \int_{\mathbb{R}^m} V(E_x) dx,$$

όμως $E_x = \emptyset$, αν $x \notin F$, άρα

$$V(E) = \int_F V(E_x) dx,$$

όπου $V(E_x) = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} 1_{E_x}(y) dy$.

Τέλος, χρησιμοποιούμε τον τύπο αλλαγής μεταβλητής σε πολικές συντεταγμένες

$$\text{Αν } f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}_+, \text{ τότε } \int_{\mathbb{R}^k} f = \int_0^\infty r^{k-1} \int_{S^{k-1}} f(ru) du dr.$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} V(E) &= \int_F V(E_x) dx \\ &= \int_F \int_{\mathbb{R}^{n-m}} 1_{E_x} dy dx \\ &= \int_F \int_0^\infty r^{n-m-1} \int_{S^{n-m-1}} 1_{E_x}(ru) du dr dx \\ &= \int_F \int_{S^{n-m-1}} \int_0^\infty r^{n-m-1} 1_{E_x}(ru) dr du dx \end{aligned}$$

Όμως, $1_{E_x}(ru) \stackrel{|u|=1}{=} 0$, αν $|r| > \rho \Rightarrow \int_0^\infty r^{n-m-1} 1_{E_x}(ru) dr = \int_0^\rho r^{n-m-1} 1_{E_x}(ru) dr$. Άρα

$$V(E) = \int_F \int_{S^{n-m-1}} \int_0^\rho r^{n-m-1} 1_{\{(u \in N(P, F) : (x, 0, 0, u)) \in \eta\}}(ru) dr du dx.$$

Παρατηρούμε πως στην τελευταία έκφραση, το αποτέλεσμα της χαρακτηριστικής συνάρτησης δεν εξαρτάται από το r στο όρισμά της, άρα μπορούμε να γράψουμε

$$1_{\{(u \in N(P,F): (x,0,0,u)) \in \eta\}}(ru) = 1_{\{(u \in N(P,F): (x,0,0,u)) \in \eta\}}(u).$$

Συνεπώς έχουμε :

$$\begin{aligned} V(E) &= \frac{\rho^{n-m}}{n-m} \int_F \int_{S^{n-m-1}} 1_{N(P,F)}(u) 1_\eta(x, 0, 0, u) du dx \\ &= \frac{\rho^{n-m}}{n-m} \int_F \int_{S^{n-m-1} \cap N(P,F)} 1_\eta(x, 0, 0, u) du dx \\ &= \frac{\rho^{n-m}}{n-m} \int_F \int_{S^{n-1} \cap N(P,F)} 1_\eta(x, 0, 0, u) du dx \end{aligned}$$

Γράφουμε $F \subset \mathbb{R}^m \times \{0_{\mathbb{R}^{n-m}}\}$ και έχουμε :

$$V(E) = \frac{\rho^{n-m}}{n-m} \int_F \int_{S^{n-1} \cap N(P,F)} 1_\eta(x, 0, 0, u) d\mathcal{H}^{n-m}(u) d\mathcal{H}^m(x).$$

Η ξένη ένωση

$$\mathbb{R}^n \setminus P = \bigcup_{m=0}^{n-1} \cup_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \{x \in \mathbb{R}^n \setminus P : p(P, x) \in \text{relint} F\},$$

δίνει

$$\mu_\rho(P, \eta) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\rho^{n-m}}{n-m} \sum_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \int_F \int_{S^{n-1} \cap N(P,F)} 1_\eta(x, u) d\mathcal{H}^{n-m}(u) d\mathcal{H}^m(x). \quad (1.3)$$

Ορίζουμε

$$\binom{n-1}{m} \Theta_m(P, \eta) := \sum_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \int_F \int_{S^{n-1} \cap N(P,F)} 1_\eta(x, u) d\mathcal{H}^{n-m}(u) d\mathcal{H}^m(x), \quad (1.4)$$

για $m = 0, 1, \dots, n-1$, επομένως

$$\mu_\rho(P, \eta) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \rho^{n-m} \binom{n}{m} \Theta_m(P, \eta).$$

Θα δούμε πως αυτή η αναπαράσταση μπορεί να επεκταθεί σε τυχόντα κυρτά σώματα.

Θεώρημα 1.14. Για κάθε κυρτό σώμα $K \in \mathcal{K}^n$ υπάρχουν πεπερασμένα θετικά μέτρα $\Theta_0(K, \cdot), \dots, \Theta_{n-1}(K, \cdot)$ στο $\mathcal{B}(\Sigma)$, τέτοια ώστε για κάθε $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ και $\rho > 0$, το μέτρο $\mu_\rho(K, \eta)$ του τοπικού παράλληλου συνόλου $M_\rho(K, \eta)$ να δίνεται από τη σχέση

$$\mu_\rho(K, \eta) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \rho^{n-m} \Theta_m(K, \eta)$$

Η απεικόνιση $K \mapsto \Theta_m(K, \cdot)$ είναι ασθενώς συνεχής και αθροιστική, δηλαδή

$$K_j \rightarrow K \Rightarrow \Theta_m(K_j, \cdot) \xrightarrow{\omega} \Theta_m(K, \cdot)$$

και

$$K_1, K_2, K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}^n \Rightarrow \Theta_m(K_1 \cup K_2, \cdot) + \Theta_m(K_1 \cap K_2, \cdot) = \Theta_m(K_1, \cdot) + \Theta_m(K_2, \cdot).$$

Για κάθε $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ η συνάρτηση $\Theta_m(\cdot, \eta)$ (από το $\mathcal{K}^n$ στο $\mathbb{R}$) είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη. Έστω $P \in \mathcal{K}^n$ πολύτοπο και $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$, $\rho > 0$ δοσμένα. Γράφουμε διαδοχικά την σχέση

$$\mu_\rho(P, \eta) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \rho^{n-m} \binom{n}{m} \Theta_m(P, \eta)$$

για $\rho = 1, 2, \dots, n$ και αποκτούμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \mu_1(P, \eta) &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} \Theta_m(P, \eta) \\ \mu_2(P, \eta) &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} 2^{n-m} \Theta_m(P, \eta) \\ &\vdots \\ \mu_n(P, \eta) &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} n^{n-m} \Theta_m(P, \eta) \end{aligned}$$

με αγνώστους τα $\Theta_0, \dots, \Theta_{n-1}$. Γράφουμε το σύστημα σε μορφή πινάκων και έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n-1} \\ 2^n \binom{n}{0} & 2^{n-1} \binom{n}{1} & \cdots & 2^m \binom{n}{n-m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^n \binom{n}{0} & n^{n-1} \binom{n}{1} & \cdots & n^m \binom{n}{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_0 \\ \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_n \end{pmatrix}.$$

Η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων είναι μια μη μηδενική ορίζουσα Vandermonde (καθώς όλα τα στοιχεία του πίνακα είναι διαφορετικά). Συνεπώς ο πίνακας έχει αντίστροφο, και το γραμμικό μας σύστημα έχει μοναδική λύση ως προς τους αγνώστους $\Theta_0, \dots, \Theta_{n-1}$. Αποκτούμε λοιπόν εκφράσεις της μορφής

$$\Theta_m(P, \eta) = \sum_{k=1}^n a_{mk} \mu_k(P, \eta) \quad , \text{για κάποιες σταθερές } a_{mk}.$$

Με τις ίδιες σταθερές, ορίζουμε

$$\Theta_m(K, \cdot) := \sum_{k=1}^n a_{mk} \mu_k(K, \cdot) \quad \text{για τυχόν } K \in \mathcal{K}^n. \quad (1.5)$$

Έτσι, το $\Theta_m(K, \cdot)$ είναι πεπερασμένο μέτρο στο $\mathcal{B}(\Sigma)$.

Έστω $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ με $\lim_j K_j = K$, τότε

$$\begin{aligned} \lim_j \Theta_m(K_j, \cdot) &= \lim_j \sum_{k=1}^n a_{mk} \mu_k(K_j, \cdot) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{mk} \lim_j \mu_k(K_j, \cdot) \\ &\stackrel{1.7}{=} \sum_{k=1}^n a_{mk} \mu_k(K, \cdot) = \Theta_m(K, \cdot). \end{aligned}$$

Καταλαβαίνουμε λοιπόν πως $K_j \rightarrow K \Rightarrow \Theta_m(K_j, \cdot) \rightarrow \Theta_m(K, \cdot)$.

Εφαρμόζοντας το παραπάνω επιχείρημα για ακολουθία πολυτόπων που συγκλίνει στο K , βλέπουμε πως το $\Theta_m(K, \cdot)$ είναι ένα θετικό μέτρο, και έτσι πετύχαμε την επέκταση του τύπου του Steiner σε τυχόντα κυρτά σώματα. Σχετικά με την αθροιστικότητα και την μετρησιμότητα, το συμπέρασμα έπεται άμεσα από την σχέση (1.5) και τα θεωρήματα 1.12 και 1.13. $\square$

Η σχέση

$$\mu_\rho(K, \eta) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \rho^{n-m} \Theta_m(K, \eta) \quad (1.6)$$

καλείται τοπικός τύπος του Steiner. Το μέτρο $\Theta_m(K, \cdot)$ καλείται μέτρο στήριξης ή γενικευμένο μέτρο καμπυλότητας τάξης m του κυρτού σώματος K . Έχουμε ορίσει το μέτρο $\Theta_m(K, \cdot)$ σε ολόκληρο το χώρο $\Sigma \subset \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$. Παρόλα αυτά, είναι προφανές πως αυτό συγκεντρώνεται στο σύνολο των στοιχείων στήριξης $NorK$ του K , καθώς $x \in M_\rho(K, \eta) \Rightarrow (p(K, x), u(K, x)) \in \eta \cap NorK$, άρα

$$\mu_\rho(K, \eta) = \mu_\rho(K, \eta \cap NorK) \text{ για } \eta \in \mathcal{B}(\Sigma) \text{ και } m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Αυτό δικαιολογεί την ονομασία "μέτρο στήριξης".

Παίρνουμε $\eta = \Sigma$ στον τοπικό τύπο του Steiner και προσθέτουμε τον όγκο του K και στις δύο πλευρές, για να αποκτήσουμε τον κλασικό τύπο του Steiner:

$$\begin{aligned} \mu_\rho(K, \Sigma) + V_n(K) &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \rho^{n-m} \binom{n}{m} \Theta_m(K, \Sigma) + V_n(K) \Rightarrow \\ V_n(K_\rho \setminus K) + V_n(K) &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \rho^{n-m} \binom{n}{m} \Theta_m(K, \Sigma) + V_n(K) \Rightarrow \\ V_n(K + \rho B^n) &= \sum_{i=0}^n \rho^i \binom{n}{i} W_i(K) = \sum_{j=0}^n \rho^{n-j} \kappa_{n-j} V_j(K). \end{aligned}$$

όπου

$$k_{n-m} V_m(K) = \binom{n}{m} W_{n-m}(K) = \binom{n}{m} \frac{1}{n} \Theta_m(K, \Sigma)$$

για $m = 0, 1, \dots, n-1$ είναι τα ολικά μέτρα στήριξης δοσμένα με δύο διαφορετικές κανονικοποιήσεις. Είναι, $V_n(K) = W_0(K)$ ο όγκος του K . Οι συναρτήσεις $W_0, W_1, \dots, W_n$ καλούνται Quermassintegrals (που θα μπορούσε να παριστάνει μέτρο τομής ή μέτρο προβολής), ενώ οι συναρτήσεις $V_0, V_1, \dots, V_n$ καλούνται εσωτερικοί όγκοι. Θα δούμε αργότερα πως τα $V_m(K)$ δεν εξαρτώνται από τη διάσταση του περιβάλλοντος χώρου και για ένα m -διάστατο κυρτό σώμα, η ποσότητα $V_m(K)$ είναι ο m -διάστατος όγκος του.

Από τα μέτρα στήριξης $\Theta_m(K, \cdot)$ που ορίζονται στα σύνολα στοιχείων στήριξης, εξάγουμε δύο οικογένειες περιθώριων μέτρων, τα οποία ορίζονται είτε σε σύνολα συνοριακών σημείων, είτε σε σύνολα κάθετων διανυσμάτων ενός κυρτού σώματος. Για $m = 0, 1, \dots, n-1$ ορίζουμε :

$$\begin{aligned} C_m(K, \beta) &:= \Theta_m(K, \beta \times S^{n-1}), \quad \beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \\ S_m(K, \omega) &:= \Theta_m(K, \mathbb{R}^n \times \omega), \quad \omega \in \mathcal{B}(S^{n-1}) \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται πως αυτά τα μέτρα μπορούν να αντικαταστήσουν τα μέτρα στήριξης του K , αν αυτό είναι λείο ή αυστηρά κυρτό αντίστοιχα.

Λήμμα 1.15. Έστω $K \in \mathcal{K}^n$, $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, και $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ μη αρνητική, μετρήσιμη συνάρτηση.

Αν το K είναι λείο, τότε:

$$\int_{\Sigma} f(x, u) d\Theta_m(K, (x, u)) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, u_K(x)) dC_m(K, x),$$

όπου $u_K(x)$ είναι το μοναδικό εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα του K στο σημείο x .

Αν το K είναι αυστηρά κυρτό, τότε:

$$\int_{\Sigma} f(x, u) d\Theta_m(K, (x, u)) = \int_{S^{n-1}} f(x_K(u), u) dS_m(K, u),$$

όπου $x_K(u)$ είναι το μοναδικό συνοριακό σημείο του K για το οποίο το διάνυσμα u είναι εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε πως το συμπέρασμα ισχύει για χαρακτηριστικές συναρτήσεις συνόλων $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$. Το συμπέρασμα, τότε, επεκτείνεται άμεσα και σε μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$.

Έστω λοιπόν $f(x, u) = 1_{\eta}(x, u)$, με $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$.

Τότε αρκεί να δείξουμε ότι, αν K λείο, ισχύει

$$\int_{\Sigma} 1_{\eta}(x, u) d\Theta_m(K, (x, u)) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\eta}(x, u_K(x)) dC_m(K, x)$$

και, αν K αυστηρά κυρτό, ισχύει

$$\int_{\Sigma} 1_{\eta}(x, u) d\Theta_m(K, (x, u)) = \int_{S^{n-1}} 1_{\eta}(x_K(u), u) dS_m(K, u).$$

Έχουμε,

$$\int_{\Sigma} 1_{\eta}(x, u) d\Theta_m(K, (x, u)) = \Theta_m(K, \eta) = \Theta_m(K, \eta \cap \text{Nor} K) \quad (1.7)$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n} 1_\eta(x, u_K(x)) dC_m(K, x) = C_m(K, \eta) = \Theta_m(K, \beta \times S^{n-1}),$$

όπου β είναι η προβολή του $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ στο $\mathbb{R}^n$. Όμως $\Theta_m(K, \beta \times S^{n-1}) = \Theta_m(K, (\beta \times S^{n-1}) \cap \text{Nor}K)$. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $(\beta \times S^{n-1}) \cap \text{Nor}K = \eta \cap \text{Nor}K$.

Έστω, λοιπόν, τυχόν στοιχείο $(x, u) \in \eta \cap \text{Nor}K$, τότε $x \in \text{bd}K$. Όμως K είναι λείο, και $(x, u) \in \eta$, άρα το u είναι το μοναδικό εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα του K στο συνοριακό σημείο x . Άρα $(x, u) = (x, u_K(x)) \in (\beta \times S^{n-1}) \cap \text{Nor}K \Rightarrow \eta \cap \text{Nor}K \subset (\beta \times S^{n-1}) \cap \text{Nor}K$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό:

Έστω $(x, u) \in (\beta \times S^{n-1}) \cap \text{Nor}K \Rightarrow x \in \text{bd}K$ και $\|u\| = 1$ και u είναι το μοναδικό (αφού το K είναι λείο) εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα του K στο σημείο x . Συνεπώς, $u = u_K(x)$. Άρα $(\beta \times S^{n-1}) \cap \text{Nor}K \ni (x, u) = (x, u_K(x))$ με $(x, u_K(x)) \in \eta \cap \text{Nor}K$, εξ' ορισμού, όταν $x \in \beta$. Άρα $(\beta \times S^{n-1}) \cap \text{Nor}K \subset \eta \cap \text{Nor}K$, και συνεπώς $(\beta \times S^{n-1}) \cap \text{Nor}K = \eta \cap \text{Nor}K$. Αντίστοιχα αποδεικνύεται και η άλλη περίπτωση. $\square$

Τα μέτρα $C_0(K, \cdot), \dots, C_{n-1}(K, \cdot)$ καλούνται μέτρα καμπυλότητας του K , ενώ τα $S_0(K, \cdot), \dots, S_{n-1}(K, \cdot)$ καλούνται επιφανειακά μέτρα. Θα δούμε παρακάτω πως ειδικά το επιφανειακό μέτρο τάξης $n-1$, έχει εξέχουσα σημασία. Παρατηρούμε πως τα μέτρα καμπυλότητας, είναι Borel μέτρα στο $\mathbb{R}^n$, ενώ τα επιφανειακά ορίζονται στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} . Εξειδικεύουμε λοιπόν τον ορισμό του $\mu_\rho(K, \eta) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \rho^{n-m} \Theta_m(K, \eta)$, για το σύνολο

$$A_\rho(K, \beta) := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < d(K, x) \leq \rho, p(K, x) \in \beta\}, \rho \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \rho > 0$$

και τότε έχουμε

$$\mathcal{H}^n(A_\rho(K, \beta)) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \rho^{n-m} \binom{n}{m} C_m(K, \beta) \quad (1.8)$$

Αντίστοιχα, για το σύνολο

$$B_\rho(K, \omega) := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < d(K, x) \leq \rho, u(K, x) \in \omega\}, \omega \in \mathcal{B}(S^{n-1}), \rho > 0,$$

έχουμε

$$\mathcal{H}^n(B_\rho(K, \omega)) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \rho^{n-m} \binom{n}{m} S_m(K, \omega). \quad (1.9)$$

Είναι προφανές πως οι ιδιότητες που αποδείξαμε παραπάνω για τα μέτρα στήριξης, συνεχίζουν να ισχύουν για τις παραπάνω δύο οικογένειες μέτρων, καθώς αυτές αποτελούν απλώς προβολές των πρώτων. Πιο συγκεκριμένα,

- Οι απεικονίσεις $K \mapsto C_m(K, \cdot)$ και $K \mapsto S_m(K, \cdot)$ είναι ασθενώς συνεχείς και αθροιστικές.
- Η συνάρτηση $C_m(\cdot, \beta)$ είναι μετρήσιμη $\forall \beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

- Η συνάρτηση $S_m(\cdot, \omega)$ είναι μετρήσιμη $\forall \omega \in \mathcal{B}(S^{n-1})$

Οι ακόλουθες ιδιότητες προκύπτουν εύκολα από τις (1.8), (1.9). Αν g είναι ισομετρία και $g_0 \in \text{SO}(n)$ είναι η περιστροφή που περιέχεται στην g και $\lambda > 0$, τότε

$$C_m(gK, g\beta) = C_m(K, \beta), \quad (1.10)$$

$$S_m(gL, g_0\omega) = S_m(K, \omega). \quad (1.11)$$

$$C_m(\lambda K, \lambda\beta) = \lambda^m C_m(K, \beta), \quad (1.12)$$

$$S_m(\lambda K, \omega) = \lambda^m S_m(K, \omega). \quad (1.13)$$

Για την (1.10), είναι:

$$A_\rho(gK, g\beta) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < d(gK, x) \leq \rho, p(gK, x) \in g\beta\}$$

Θέτουμε $g(y) = x \Rightarrow y = g^{-1}(x)$. Τότε $d(gK, x) = d(K, g^{-1}(x))$ διότι η g διατηρεί αποστάσεις και επίσης $p(gK, x) = g(p(K, g^{-1}(x)))$. Άρα έχουμε

$$A_\rho(gK, g\beta) = \{g(y) : y \in \mathbb{R}^n, 0 < d(K, y) \leq \rho, g(p(K, y)) \in g\beta\}.$$

Όμως η g είναι αντιστρέψιμη, άρα $p(K, y) \in \beta$. Βλέπουμε λοιπόν πως

$$A_\rho(gK, g\beta) = A_\rho(K, \beta)$$

και αφού η g διατηρεί τους όγκους, έχουμε την (1.10).

Για την (1.12), αν $\lambda > 0$, τότε

$$A_\rho(\lambda K, \lambda\beta) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < d(\lambda K, x) \leq \rho, p(\lambda K, x) \in \lambda\beta\}.$$

Θέτουμε $x = \lambda y$, τότε

$$d(\lambda K, x) = d(\lambda K, \lambda y) = \lambda d(K, y)$$

και

$$p(\lambda K, x) = p(\lambda K, \lambda y) = \lambda p(K, y).$$

Άρα,

$$\begin{aligned} A_\rho(\lambda K, \lambda\beta) &= \{\lambda y : y \in \mathbb{R}^n, 0 < \lambda d(K, y) \leq \rho, \lambda p(K, y) \in \lambda\beta\} \\ &= \{\lambda y : y \in \mathbb{R}^n, 0 < d(K, y) \leq \frac{\rho}{\lambda}, p(K, y) \in \beta\} \\ &= \lambda A_{\frac{\rho}{\lambda}}(K, \beta). \end{aligned}$$

Άρα,

$$\mathcal{H}^n(A_\rho(\lambda K, \lambda\beta)) = \mathcal{H}^n(\lambda A_{\frac{\rho}{\lambda}}(K, \beta)) = \lambda^n \mathcal{H}^n(A_{\frac{\rho}{\lambda}}(K, \beta)). \quad (1.14)$$

Από τις (1.8), (1.14) έχουμε:

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \rho^{n-m} \binom{n}{m} C_m(\lambda K, \lambda\beta) = \lambda^n \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\rho^{n-m}}{\lambda} \binom{n}{m} C_m(K, \beta).$$

Πρόκειται για ισότητα πολυωνύμων ως προς την παράμετρο ρ , άρα θα πρέπει να έχουν ίσους συντελεστές. Προκύπτει άμεσα λοιπόν πως $C_m(\lambda K, \lambda\beta) = \lambda^m C_m(K, \beta)$. Παρόμοια αποδεικνύονται οι (1.11), (1.13). Θα σχολιάσουμε μόνο πως αν στο σύνολο ω εφαρμόζαμε κάτι παραπάνω από το g_0 (περιστροφή) κομμάτι της g , τότε πιθανώς να είχαμε $g(\omega) \notin S^{n-1}$.

Το μέτρο $C_m(K, \cdot)$ είναι συγκεντρωμένο στο σύνορο του K , καθώς $A_\rho(K, \beta) = \emptyset$ αν $\beta \cap \text{bd}K = \emptyset$. Ακόμη, καθορίζεται τοπικά, με την ακόλουθη έννοια. Αν $\beta \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό και $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^n$ τέτοια ώστε $K_1 \cap \beta = K_2 \cap \beta$, τότε

$$C_m(K_1, \beta') = C_m(K_2, \beta'), \quad \forall \text{ Borel υποσύνολο } \beta' \subset \beta.$$

Αυτό είναι άμεση συνέπεια της (1.8), αν παρατηρήσουμε πως υπό τις παραπάνω προϋποθέσεις έχουμε $p(K_1, x) = p(K_2, x) \Rightarrow A_\rho(K_1, \beta') = A_\rho(K_2, \beta')$, για κάθε $\beta' \subset \beta$.

Επίσης, το μέτρο $S_m(K, \cdot)$ καθορίζεται τοπικά, με την εξής έννοια. Αν $\omega \in \mathcal{B}(S^{n-1})$ (όχι απαραίτητα ανοιχτό) και αν $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^n$ είναι τέτοια ώστε $\tau(K_1, \omega) = \tau(K_2, \omega)$, τότε $S_m(K_1, \omega) = S_m(K_2, \omega)$. Για την ακρίβεια, το τοπικό παράλληλο σύνολο $B_\rho(K_i, \omega)$ εξαρτάται μόνο από την αντίστροφη σφαιρική εικόνα $\tau(K_i, \omega)$.

Ορίζουμε τις ακόλουθες κανονικοποιήσεις για τα μέτρα στήριξης, επιφάνειας, καμπυλότητας ως εξής:

Κατασκευάζουμε $\Lambda_m(K, \cdot), \Phi_m(K, \cdot), \Psi_m(K, \cdot)$ με

$$nk_{n-m}\Lambda_m(K, \cdot) = \binom{n}{m}\Theta_m(K, \cdot, \cdot) \quad (1.15)$$

$$nk_{n-m}\Phi_m(K, \cdot) = \binom{n}{m}C_m(K, \cdot), \quad (1.16)$$

$$nk_{n-m}\Psi_m(K, \cdot) = \binom{n}{m}S_m(K, \cdot), \quad (1.17)$$

$$(1.18)$$

για $m = 0, 1, \dots, n-1$, όπου $k_n = \mathcal{H}^n(B^n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$, είναι ο n -διάστατος όγκος της μοναδιαίας μπάλας του $\mathbb{R}^n$.

Συμβολίζουμε ακόμη με $\Phi_n(K, \beta) := \mathcal{H}^n(K \cap \beta)$, για $\beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Ένα πλεονέκτημα αυτής της κανονικοποίησης είναι ότι όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω (κι αναφέραμε νωρίτερα), αυτή δεν εξαρτάται από τη διάσταση του περιβάλλοντος χώρου.

Θεωρούμε τις ακόλουθες ειδικές εριπτώσεις όπου τα μέτρα καμπυλότητας και επιφάνειας παίρνουν μια άμεση και διαισθητική ερμηνεία. Αρχικά, ας είναι $P \in \mathcal{K}^n$ πολύτοπο. Από τις (1.4), (1.15), παίρνουμε

$$\Lambda(P, \eta) = \frac{1}{\omega_{n-m}} \sum_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \int_F \int_{N(P, F) \cap S^{n-1}} 1_\eta(x, u) d\mathcal{H}^{n-m-1}(u) d\mathcal{H}^m(x), \quad (1.19)$$

για $\eta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ και $m = 0, 1, \dots, n-1$.

Ορισμός 1.16. Έστω $P \in \mathcal{K}^n$ πολύτοπο, και $F \in \mathcal{F}_k(P)$ μια k -πλευρά του P . Τότε ο αριθμός

$$\gamma(F, P) := \frac{\mathcal{H}^{n-k-1}(N(P, F) \cap S^{n-1})}{\omega_{n-k}}, \quad (1.20)$$

με την σύμβαση πως $\gamma(F, P) = 1$, αν $k = n$ καλείται εξωτερική γωνία του P στην πλευρά του, F .

Κάνοντας χρήση του παραπάνω ορισμού, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\Phi_m(P, \beta) &= \frac{\binom{n}{m} C_m(P, \beta)}{nk_{n-m}} = \frac{\binom{n-1}{m} C_m(P, \beta)}{\omega_{n-m}} \\ &= \frac{\sum_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \int_F \int_{N(P, F) \cap S^{n-1}} 1_{\beta \times S^{n-1}}(x, u) d\mathcal{H}^{n-m-1}(u) d\mathcal{H}^m(x)}{\omega_{n-m}},\end{aligned}\quad (1.21)$$

όμως $u \in N(P, F) \cap S^{n-1} \subset S^{n-1} \Rightarrow 1_{\beta \times S^{n-1}}(x, u) = 1_\beta(x)$, άρα

$$\begin{aligned}\Phi_m(P, \beta) &= \frac{1}{\omega_{n-m}} \sum_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \int_F 1_\beta(x) d\mathcal{H}^m(x) \int_{N(P, F) \cap S^{n-1}} d\mathcal{H}^{n-m-1}(u) \\ &= \frac{1}{\omega_{n-m}} \sum_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \mathcal{H}^m(F \cap \beta) \frac{\int_{N(P, F) \cap S^{n-1}} d\mathcal{H}^{n-m-1}(u)}{\frac{1}{\omega_{n-m}}} \\ &= \sum_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \mathcal{H}^m(F \cap \beta) \gamma(F, P),\end{aligned}$$

για $\beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $m = 0, 1, \dots, n-1$, πιο συγκεκριμένα

$$V_m(P) = \sum_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \gamma(F, P) \mathcal{H}^m(F) \quad (1.22)$$

Παρόμοια αποδεικνύεται πως

$$\Psi_m(P, \omega) = \frac{\sum_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \mathcal{H}^{n-1-m}(N(P, F) \cap \omega) \mathcal{H}^m(F)}{\omega_{n-m}}, \quad (1.23)$$

για $\omega \in \mathcal{B}(S^{n-1})$ και $m = 0, 1, \dots, n-1$.

Θα δούμε τώρα κάποιες χρήσιμες σχέσεις που προκύπτουν, αν υποθέσουμε κατάλληλες συνθήκες λειότητας για το κυρτό σώμα που μελετάμε.

Ορισμός 1.17. Ένα κυρτό σώμα $K \in \mathcal{K}^n$ λέμε πως είναι κλάσης C^k , για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, αν το σύνορό του, ως υπερεπιφάνεια, είναι κανονικό (regular) πολύπτυγμα στον $\mathbb{R}^n$, όπως ορίζεται στην διαφορική γεωμετρία.

Ο επόμενος ορισμός έχει λίγο πιο ισχυρές υποθέσεις και συχνά θα εμφανίζεται στα παρακάτω.

Ορισμός 1.18. Ένα κυρτό σώμα K καλείται κλάσης C_+^k ($k \geq 2$) αν h_K είναι C^k και $D^2 h_K(u) > 0$, $\forall u \in S^{n-1}$.

Έστω $(K_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}^n$ ακολουθία που συγκλίνει προς κάποιο κυρτό σώμα K . Παίρνουμε ανοιχτό σύνολο $\beta \subset \mathbb{R}^n$ και υποθέτουμε πως $u \in \sigma(K, \beta) \cap \text{reg} K$. Υπενθυμίζουμε

πως αν $K \in \mathcal{K}^n$ και $u \in S^{n-1}$, τότε το διάνυσμα u καλείται (regular) κανονικό κάθετο διάνυσμα του K αν $\dim F(K, u) = 0$ και συμβολίζουμε με $\text{regn}K$ το σύνολο όλων των κανονικών κάθετων διανυσμάτων του K . Τότε υπάρχει μοναδικό σημείο $x \in F(K, u)$, και ανήκει στο β . Ένα σημείο $x \in K$ θα καλείται r -ιδιάζον (singular) σημείο του K αν $\dim N(K, x) \geq n - r$.

Ακολουθεί ένα θεώρημα που επιβεβαιώνει τη διαισθητική ερμηνεία των μέτρων C_m, S_m , στις ακραίες περιπτώσεις όπου $m = 0$ και $m = n - 1$ αντίστοιχα, όπου και θα δείξουμε ότι αυτά πράγματι αποτελούν μέτρα Hausdorff κατάλληλων συνόλων. Θα χρειαστούμε πρώτα το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 1.19. Έστω $K \in \mathcal{K}^n$ και $\beta \subset \mathbb{R}^n$ Borel σύνολο. Τότε το σύνολο $\sigma(K, \beta)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο στην S^{n-1} .

Απόδειξη. Ας είναι M η οικογένεια όλων των υποσυνόλων $\beta \subset \mathbb{R}^n$ για τα οποία το σύνολο $\sigma(K, \beta)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Αρχικά, έστω β κλειστό. Και ας είναι $(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \sigma(K, \beta)$, ακολουθία με $u_j \rightarrow u$, καθώς $j \rightarrow \infty$. Για $j \in \mathbb{N}$, μπορούμε να επιλέξουμε $x_j \in K \cap \beta$ έτσι ώστε $u_j \in N(K, x_j)$. Αφού $K \cap \beta$ είναι συμπαγές, καθώς K συμπαγές και $K \cap \beta$ κλειστό, θα υπάρχει υπακολουθία της $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ που συγκλίνει προς κάποιο σημείο $x \in K \cap \beta$, και αφού $u_j \rightarrow u$, έπεται πως $u \in N(K, x)$, και ως εκ τούτου, $u \in \sigma(K, \beta)$. Άρα $\sigma(K, \beta)$ είναι κλειστό, και ως εκ τούτου, $\beta \in M$.

Έστω $\beta \in M$ και $\beta^c := \mathbb{R}^n \setminus \beta$. Υποθέτουμε πως $u \in \sigma(K, \beta) \cap \sigma(K, \beta^c)$. Τότε το $F(K, u)$ θα περιέχει ένα σημείο του β και ένα σημείο του β^c , άρα το u είναι ιδιάζον (singular) κάθετο διάνυσμα του K . Γνωρίζουμε όμως πως κάθε σύνολο ιδιάζοντων μοναδιαίων κάθετων διανυσμάτων ενός κυρτού σώματος $K \in \mathcal{K}^n$ έχει $n-1$ -διάστατο Hausdorff μέτρο 0 [14]Θ.2.2.11. Άρα $\mathcal{H}^{n-1}(\sigma(K, \beta) \cap \sigma(K, \beta^c)) = 0$.

Ως εκ τούτου, το σύνολο $\sigma(K, \beta^c)$ διαφέρει από το σύνολο $S^{n-1} \setminus \sigma(K, \beta)$, το οποίο είναι Lebesgue μετρήσιμο, μόνο κατά ένα σύνολο μέτρου 0. Άρα το $\sigma(K, \beta^c)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο, και άρα $\beta^c \in M$.

Τέλος, είναι προφανές πως $\sigma(K, \cup_i \beta_i) = \cup_i \sigma(K, \beta_i)$ για οποιαδήποτε οικογένεια συνόλων β_i . Έχουμε δείξει λοιπόν πως η οικογένεια M είναι σ -άλγεβρα που περιέχει τα κλειστά σύνολα του $\mathbb{R}^n$, άρα θα περιέχει και όλα τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, αυτό που ξεκινήσαμε να αποδείξουμε. $\square$

Θεώρημα 1.20. Έστω $K \in \mathcal{K}^n$, $\beta \in \mathcal{B}(\Sigma)$, $\omega \in \mathcal{B}(S^{n-1})$. Τότε

$$C_0(K, \beta) = \mathcal{H}^{n-1}(\sigma(K, \beta)) \quad (1.24)$$

$$S_0(K, \omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\omega). \quad (1.25)$$

Αν το K είναι n -διάστατο, τότε

$$C_{n-1}(K, \beta) = \mathcal{H}^{n-1}(\beta \cap bdK) \quad (1.26)$$

$$S_{n-1}(K, \omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\tau(K, \omega)). \quad (1.27)$$

Απόδειξη. Αρχικά, σημειώνουμε πως οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για πολύτοπα, όπως εύκολα αποδεικνύεται με χρήση των σχέσεων (1.21), (1.23). Ενδεικτικά θα αποδείξουμε την (1.24).

Έστω P πολύτοπο του $\mathbb{R}^n$. Τότε στην αριστερή μεριά της (1.24) έχουμε

$$\begin{aligned} C_0(P, \beta) &= \Theta_0(P, \beta \times S^{n-1}) \\ &= \sum_{F \in \mathcal{F}_0(P)} \int_F \int_{N(P, F) \cap S^{n-1}} 1_{\beta \times S^{n-1}}(x, u) d\mathcal{H}^{n-1}(u) d\mathcal{H}^0(x) \\ &= \sum_{F \in \mathcal{F}_0(P)} \omega_{n-1} \gamma(F, P) \mathcal{H}^0(F \cap \beta) \\ &= \omega_{n-1} \Phi(P, \beta). \end{aligned}$$

Από την άλλη, έχουμε πως $\sigma(K, \beta) = \cup_{x \in K \cap \beta} N(P, x) \cap S^{n-1}$ για $K \in \mathcal{K}^n$. Άρα

$$\sigma(P, \beta) = \cup_{m=0}^{n-1} \cup_{F \in \mathcal{F}_m(P)} N(P, F \cap \beta) \cap S^{n-1-m}. \quad (1.28)$$

Ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{n-1}(\sigma(P, \beta)) &= \sum_{F \in \mathcal{F}_0(P)} \omega_{n-1} \gamma(F, P) \mathcal{H}^0(F \cap \beta) \\ &= \omega_{n-1} \Phi(P, \beta). \end{aligned}$$

Παρόμοια βγαίνουν και οι υπόλοιπες σχέσεις.

Για $K \in \mathcal{K}^n$ και $\beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, ορίζουμε $\kappa(K, \beta) := \mathcal{H}^{n-1}(\sigma(K, \beta))$. Από το λήμμα 1.19 έχουμε πως $\sigma(K, \beta)$ είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο της S^{n-1} . Στην απόδειξη του λήμματος είδαμε πως αν $\beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset$ τότε $\mathcal{H}^{n-1}(\sigma(K, \beta_1) \cap \sigma(K, \beta_2)) = 0$. Αφού ο περιορισμός του $\mathcal{H}^{n-1}$ στα Lebesgue μετρήσιμα σύνολα της S^{n-1} είναι σ -αθροιστικό, έπεται πως το $\kappa(K, \cdot)$ είναι μέτρο υπεράνω της $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Για $j \in \mathbb{N}$, επιλέγουμε $x_j \in F(K_j, u)$. Κάθε σημείο συσσώρευσης y της ακολουθίας $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ανήκει στο K και βρίσκεται εντός του $H(K, u)$, ως εκ τούτου $y = x$.

Αποδεικνύουμε τον παραπάνω ισχυρισμό ως εξής: Έστω $K_j \rightarrow K$, β ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $u \in \sigma(K, \beta) \cap \text{regn}K$. Για $j \in \mathbb{N}$ θεωρώ $x_j \in F(K_j, u)$. Τότε $x_j \in K_j \cap H(K_j, u) \Rightarrow x_j \in K_j \rightarrow K \Rightarrow$ Αν y είναι σημείο συσσώρευσης μιας υπακολουθίας $(x_{j'})$, τότε $x_{j'} \rightarrow y \in K$.

$K_{j'} \rightarrow K \Leftrightarrow d(K_{j'}, K) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \max\{\sup_{x \in K_{j'}} \inf_{y \in K} d(x, y), \sup_{y \in K} \inf_{x \in K_{j'}} d(x, y)\} \rightarrow 0 \Rightarrow d(x_{j'}, y)$ είναι άνω φραγμένο από μια ποσότητα που τείνει στο 0. Άρα $d(x_{j'}, y) \rightarrow 0$.

Άρα έχουμε $x_j \rightarrow x$ για $j \rightarrow \infty$ και επομένως $x_j \in \beta$ και $u \in \sigma(K_j, \beta)$ για σχεδόν όλα τα j . Αυτό δείχνει πως $\sigma(K, \beta) \cap \text{regn}K \subset \liminf_{j \rightarrow \infty} \sigma(K_j, \beta) = \cup_{j \geq 1} \cap_{\lambda \geq j} \sigma(K_\lambda, \beta)$ και έχοντας υπόψιν πως το σύνολο των ιδιζόντων μοναδιαίων κάθετων διανυσμάτων ενός κυρτού σώματος $K \in \mathcal{K}^n$ έχει $n - 1$ -διάστατο Hausdorff μέτρο 0 συμπαιρνουμε πως

$$\begin{aligned} \kappa(K, \beta) &= \mathcal{H}^{n-1}(\sigma(K, \beta) \cap \text{regn}K) \\ &\leq \mathcal{H}^{n-1}(\liminf_{j \rightarrow \infty} \sigma(K_j, \beta)) \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{H}^{n-1}(\sigma(K_j, \beta)) \end{aligned}$$

$$= \liminf_{j \rightarrow \infty} \kappa(K_j, \beta).$$

Αφού τα παραπάνω ισχύουν για κάθε ανοιχτό σύνολο $\beta \subset \mathbb{R}^n$ και

$$\kappa(K_j, \mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^{n-1}(S^{n-1}) = \kappa(K, \mathbb{R}^n),$$

αποδείξαμε την ασθενή σύγκλιση $\kappa(K_j, \cdot) \rightarrow \kappa(K, \cdot)$, όταν $K_j \rightarrow K$.

Τώρα αποκτούμε εύκολα την ισότητα $\kappa(K, \cdot) = C_0(K, \cdot)$, αν προσεγγίσουμε το K από ακολουθία πολυτόπων. Αυτό αποδεικνύει την σχέση (1.24).

Η σχέση (1.25) ισχύει καθώς αληθεύει για πολύτοπα, και αν $K_j \rightarrow K$, τότε $S_0(K_j, \cdot) \xrightarrow{w} S_0(K, \cdot)$.

Για την απόδειξη της (1.26) θέτουμε $\eta(K, \beta) := \mathcal{H}^{n-1}(\beta \cap bdK)$ για $K \in \mathcal{K}^n$ και $\beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Τότε $\eta(K, \cdot)$ είναι μέτρο, και όπως παραπάνω, αρκεί να αποδείξουμε πως $K_j \rightarrow K$ συνεπάγεται ότι $\eta(K_j, \cdot) \xrightarrow{w} \eta(K, \cdot)$.

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας πως $0 \in intK$ (αυτό επιτυγχάνεται με παράλληλη μεταφορά αν είναι αναγκαίο). Ορίζουμε $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ με τύπο $\phi(x) := \frac{x}{|x|}$. Για ένα συμπαγές και αστερόμορφο σύνολο K η ακτινική του συνάρτηση ορίζεται ως

$$\rho(K, x) := \max\{\lambda \geq 0 : \lambda x \in K\}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Για $y \in S^{n-1}$, το σημείο $\rho(K, y)y$ είναι στο σύνορο του K . Συμβολίζουμε με $n(K, y)$ ένα οποιοδήποτε εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα του K στο σημείο αυτό. Τότε το $n(K, y)$ είναι μοναδικό για $\mathcal{H}^{n-1}$ -σχεδόν όλα τα $y \in S^{n-1}$. Πλέον μπορούμε να παραστήσουμε το $\eta(K, \beta)$ ως το ολοκλήρωμα

$$\eta(K, \beta) = \int_{\phi(\beta \cap bdK)} \frac{\rho(K, y)^{n-1}}{\langle y, n(K, y) \rangle} d\mathcal{H}^{n-1} \quad (1.29)$$

Αυτό αποδεικνύεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος 3.2.3 στο [5].

Αν η ακολουθία κυρτών σωμάτων $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει προς το K , μπορούμε να υποθέσουμε πως $0 \in intK_j$ για όλα, τελικά, τα j . Έχουμε $\rho(K_j, \cdot) \rightarrow \rho(K, \cdot)$, $n(K_j, \cdot) \rightarrow n(K, \cdot)$ σχεδόν παντού στην S^{n-1} , και οι συναρτήσεις $\langle \cdot, n(K_j, \cdot) \rangle$ είναι κάτω φραγμένες από μια θετική ποσότητα. Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Fattou και το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης, είναι εύκολο να δει κανείς πως $\eta(K_j, \cdot) \xrightarrow{w} \eta(K, \cdot)$, $j \rightarrow \infty$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της (1.26).

Για την απόδειξη της (1.27) θέτουμε $F(K, \omega) := \mathcal{H}^{n-1}(\tau(K, \omega))$ για $K \in \mathcal{K}_n^{n-1}$ και $\omega \in \mathcal{B}(S^{n-1})$. Όπως και πριν, υποθέτουμε πως χωρίς βλάβη της γενικότητας πως $0 \in intK$. Το λήμμα 2.2.14 από [14] μας δίνει πως $\phi(\tau(K, \omega))$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο της S^{n-1} . Αν $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$, τότε $\mathcal{H}^{n-1}(\tau(K, \omega_1) \cap \tau(K, \omega_2)) = 0$. Αυτό αποδεικνύει την αθροιστικότητα. Συμπαιρνούμε λοιπόν πως $F(K, \cdot)$ είναι μέτρο υπεράνω της $\mathcal{B}(S^{n-1})$ και μέσω της (1.29) παίρνουμε

$$F(K, \omega) = \int_{\phi(\tau(K, \omega))} \frac{\rho(K, y)^{n-1}}{\langle y, n(K, y) \rangle} d\mathcal{H}^{n-1}(y). \quad (1.30)$$

Όπως και παραπάνω, αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε πως $K_j \rightarrow K$ συνεπάγεται $F(K_j, \cdot) \xrightarrow{w} F(K, \cdot)$. Με αυτό το τρόπο επεκτείνουμε την (1.27) από πολύτοπα

σε τυχόντα κυρτά σώματα με το γνωστό πλέον επιχείρημα προσέγγισης αυθαίρετου κυρτού σώματος K με ακολουθία πολύτοπων. $\square$

Ακολουθεί ένα λήμμα που συσχετίζει μεταξύ τους τις δύο παραπάνω οικογένειες μέτρων.

Λήμμα 1.21. Έστω $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\omega \subset S^{n-1}$ και $\beta \subset \mathbb{R}^n$ κλειστά. Τότε

$$C_m(K, \tau(K, \omega) \cap \text{reg}K) \leq S_m(K, \omega) \leq C_m(K, \tau(K, \omega)) \quad (1.31)$$

$$S_m(K, \sigma(K, \beta) \cap \text{reg}K) \leq C_m(K, \beta) \leq S_m(K, \sigma(K, \beta)) \quad (1.32)$$

Απόδειξη. Έστω $(x, u) \in \text{Nor}K$ στοιχείο στήριξης του K για το οποίο $x \in \tau(K, \omega) \cap \text{reg}K$, τότε $u \in N(K, x)$. Αφού $x \in \tau(K, \omega)$, θα υπάρχει κάθετο διάνυσμα του K που ανήκει στο ω , και αυτό θα είναι το u , καθώς $x \in \text{reg}K$. Άρα $u \in \omega$. Αυτό σημαίνει πως

$$[(\tau(K, \omega) \cap \text{reg}K) \times S^{n-1}] \cap \text{Nor}K \subset (\mathbb{R}^n \times \omega) \cap \text{Nor}K.$$

Τα σύνολα που εμφανίζονται παραπάνω είναι Borel, καθώς τα $\tau(K, \omega)$ και $\text{Nor}K$ είναι κλειστά και το $\text{bd}K \setminus \text{reg}K$ είναι σύνολο F_σ . Συμπεραίνουμε πως

$$\Theta_m(K, [(\tau(K, \omega) \cap \text{reg}K) \times S^{n-1}] \cap \text{Nor}K) \leq \Theta_m(K, (\mathbb{R}^n \times \omega) \cap \text{Nor}K).$$

Μέσω της (1.7) αποκτούμε

$$\begin{aligned} C_m(K, \tau(K, \omega)) &= \Theta_m(K, [(\tau(K, \omega) \cap \text{reg}K) \times S^{n-1}] \cap \text{Nor}K) \\ &\leq \Theta_m(K, (\mathbb{R}^n \times \omega) \cap \text{Nor}K) \\ &= S_m(K, \omega). \end{aligned}$$

Έστω $(x, u) \in \text{Nor}K$ στοιχείο στήριξης του K για το οποίο $u \in \omega$, τότε $x \in \tau(K, \omega)$. Άρα

$$(\mathbb{R}^n \times \omega) \cap \text{Nor}K \subset [\tau(K, \omega) \times S^{n-1}] \cap \text{Nor}K$$

και ως εκ τούτου

$$\begin{aligned} S_m(K, \omega) &= \Theta_m(K, (\mathbb{R}^n \times \omega) \cap \text{Nor}K) \\ &\leq \Theta_m(K, [\tau(K, \omega) \times S^{n-1}] \cap \text{Nor}K) \\ &= C_m(K, \tau(K, \omega)). \end{aligned}$$

Έστω $(x, u) \in \text{Nor}K$ στοιχείο στήριξης του K , για το οποίο $u \in \sigma(K, \beta) \cap \text{reg}K$. Αφού $u \in \sigma(K, \beta)$, θα υπάρχει συνοριακό σημείο που ανήκει στο β , και αυτό θα είναι το x , καθώς $u \in \text{reg}K \Rightarrow \exists$ μοναδικό $x \in \text{bd}K$ για το οποίο $u \in N(K, x)$. Άρα $x \in \beta$, και

$$[\mathbb{R}^n \times ((\sigma(K, \beta) \cap \text{reg}K))] \cap \text{Nor}K \subset (\beta \times S^{n-1}) \cap \text{Nor}K$$

και ως εκ τούτου

$$\begin{aligned} S_m(K, \sigma(K, \beta)) &= \Theta_m(K, [\mathbb{R}^n \times (\sigma(K, \beta) \cap \text{reg}K)] \cap \text{Nor}K) \\ &\leq \Theta_m(K, (\beta \times S^{n-1}) \cap \text{Nor}K) \\ &= C_m(K, \beta) \end{aligned}$$

Έστω $(x, u) \in \text{Nor}K$ με $x \in \beta$, τότε $u \in \sigma(K, \beta)$, Άρα

$$(\beta \times S^{n-1}) \cap \text{Nor}K \subset (\mathbb{R}^n \times \sigma(K, \beta)) \cap \text{Nor}K$$

και ως εκ τούτου

$$\begin{aligned} C_m(K, \beta) &= \Theta_m(K, (\beta \times S^{n-1}) \cap \text{Nor}K) \\ &\leq \Theta_m(K, [\mathbb{R}^n \times \sigma(K, \beta)] \cap \text{Nor}K) \\ &= S_m(K, \sigma(K, \beta)). \end{aligned}$$

□

Πριν κλείσουμε αυτή την ενότητα, θα αναφέρουμε ένα θεώρημα σχετικά με τη συμπεριφορά των μέτρων στήριξης ως προς προβολή σε γραμμικούς υπόχωρους του $\mathbb{R}^n$ [14], το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε ένα θεώρημα σχετικά με τον φορέα του επιφανειακού μέτρου.

Αν $E \subset \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικός υπόχωρος, συμβολίζουμε με $x|E$ την εικόνα του $x \in \mathbb{R}^n$ μέσω της ορθογώνιας προβολής στον E , και ακολουθούμε τον ίδιο συμβολισμό για υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Για σύνολα $\eta \subset \Sigma$ ορίζουμε

$$\eta|E := \{(x|E, u) : (x, u) \in \eta, u \in E\}.$$

Θεώρημα 1.22. Έστω $K \in \mathcal{K}^n$ κυρτό σώμα, $\eta \subset \text{Nor}K$ σύνολο Borel και $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Τότε

$$\int_{G(n,k)} \Theta'_j(K|E, \eta|E) dv_k(E) = \frac{\omega_k}{\omega_n} \Theta_j(K, \eta) \quad (1.33)$$

για $j \in \{0, \dots, k-1\}$, όπου Θ'_j είναι το μέτρο στήριξης ως προς τον υπόχωρο E . Ειδικές περιπτώσεις της (1.33) είναι οι σχέσεις

$$\int_{G(n,k)} S'_j(K|E, \omega \cap E) dv_k(E) = \frac{\omega_k}{\omega_n} S_j(K, \omega) \quad (1.34)$$

για $\omega \in \mathcal{B}(S^{n-1})$ και

$$\int_{G(n,k)} C'_j(K|E, \beta|E) dv_k(E) = \frac{\omega_k}{\omega_n} C_j(K, \beta) \quad (1.35)$$

για Borel σύνολα $\beta \subset \text{bd}K$.

Για $u \in S^{n-1}$ και $0 < t < 1$ ορίζουμε

$$D(u, t) := \{v \in S^{n-1} : \langle u, v \rangle > t\}$$

αυτό καλείται spherical cap με κέντρο u και σφαιρική ακτίνα $\arccos t$.

Λήμμα 1.23. Έστω $K \in \mathcal{K}_n^n$, $n \geq 2$, $u \in S^{n-1}$, $t \in (0, 1)$ και $x \in F(K, u)$ και υποθέτουμε πως

$$S_{n-1}(K, D(u, t)) = 0.$$

Τότε υπάρχουν κάθετα διανύσματα $u_1, u_2 \in N(K, x) \cap S^{n-1}$ τέτοια ώστε

$$u \in \text{relintpos}\{u_1, u_2\}$$

και $\langle u, u_i \rangle \leq c(n, t)$ για $i = 1, 2$, όπου $c(n, t) < 1$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από τη διάσταση n και την t και $\text{pos}A = \{\text{το σύνολο των θετικών συνδιασμών πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του } A\}$, τέλος, συμβολίζουμε με $\text{relint}A$ το σχετικό εσωτερικό σύνολο του A , ακόμη και για περιπτώσεις όπου το ίδιο το A δεν αποτελεί ανοιχτό σύνολο του περιβάλλοντα χώρου που μελετάμε.

Ορισμός 1.24. Ένα διάνυσμα u θα καλείται r -ακραίο κάθετο διάνυσμα του K , και το $H(K, u)$ r -ακραίο επίπεδο στήριξης του K , αν $\dim T(K, u) \leq r + 1$ ($r = 0, \dots, n - 1$).

Επομένως, u είναι r -ακραίο κάθετο διάνυσμα του K αν και μόνο αν δεν υπάρχουν $r + 2$ γραμμικώς ανεξάρτητα κάθετα διανύσματα $u_1, \dots, u_{r+2}$ στο ίδιο συνοριακό σημείο του K τέτοια ώστε $u = u_1 + \dots + u_{r+2}$. Για τα 0 -ακραία, θα λέμε απλώς ακραία.

Ορισμός 1.25. Έστω $K \in \mathcal{K}^n$. Θα λέμε πως το σημείο $x \in K$ είναι r -ιδιάζον σημείο του K αν $\dim N(K, x) \geq n - r$.

Αν $\dim N(K, x) = n - 2$ για κάποιο x , το x θα καλείται απλώς ιδιάζον.

Ακολουθεί [βλ. 14, σ. 2.2.5] ένα συμπέρασμα σχετικά με το μέτρο των συνόλων των r -ιδιάζοντων σημείων ενός κυρτού σώματος $K \in \mathcal{K}^n$.

Θεώρημα 1.26. Έστω $K \in \mathcal{K}_n^n$ και $r \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$. Το σύνολο των r -ιδιάζοντων σημείων του K μπορεί να καλυφθεί με αριθμήσιμο πλήθος συμπαγών συνόλων πεπερασμένου r -διάστατου μέτρου Hausdorff

Με άλλα λόγια, το σύνολο των r -ιδιάζοντων σημείων ενός κυρτού σώματος πλήρους διάστασης έχει $(r + i)$ -διάστατο μέτρο Hausdorff μηδέν για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα 1.27. Έστω $K \in \mathcal{K}_n^n$ και $m \in \{0, \dots, n - 1\}$. Ο φορέας του m -οστού επιφανειακού μέτρου $S_m(K, \cdot)$ είναι η κλειστή θήκη του συνόλου των $(n - 1 - m)$ -ακραίων μοναδιαίων διανυσμάτων του K .

Απόδειξη. Έστω $E \in G(n, m + 1)$ ένας $(m + 1)$ -διάστατος γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Μια ειδική περίπτωση της (1.34) γράφεται στη μορφή

$$S_m(K, \omega) = b_{nm} \int_{SO(n)} S'_m(K | \rho E, \omega \cap \rho E) d\nu(\rho) \quad (1.36)$$

για $\omega \in \mathcal{B}(S^{n-1})$ με θετική σταθερά b_{nm} , όπου το S'_m είναι υπολογισμένο στον ρE . Έστω $\omega \subset S^{n-1}$ ανοιχτό σύνολο τέτοιο ώστε $S_m(K, \omega) = 0$. Τότε η (1.36) δείχνει πως

$$S'_m(K | \rho E, \omega \cap \rho E) = 0$$

για v -σχεδόν όλες τις στροφές $\rho \in SO(n)$.

Έστω $u \in \omega$ και $\rho \in SO(n)$ τέτοια ώστε $u \in \rho E$. Μπορούμε να επιλέξουμε ακολουθία $(\rho_j)_{j \in \mathbb{N}}$ στροφών που συγκλίνουν στην ρ τέτοιες ώστε $S'_m(K|\rho_j E, \omega \cap \rho_j E) = 0, \forall j \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $u_j = \rho_j \rho u$ για $j \in \mathbb{N}$ και τότε $u_j \rightarrow u$ καθώς $j \rightarrow \infty$ και $u_j \in \rho_j E$. Αφού ω ανοιχτό, θα υπάρχει μια ακολουθία γεωδαισιακών μπαλών στην S^{n-1} τέτοια ώστε $D(u_j, t) \subset \omega$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$ για κάποιο σταθερό $0 < t < 1$. Επιλέγουμε στοιχεία $x_j \in F(K, u_j)$ για $j \in \mathbb{N}$ και τότε $x_j|\rho_j E \in F(K|\rho_j E, u_j)$.

Εφαρμόζοντας το λήμμα 1.23 για την ακολουθία συνόλων $K|\rho_j E$, βλέπουμε πως υπάρχουν ακολουθίες διανυσμάτων $v_j, w_j \in N(K|\rho_j E, x_j|\rho_j E) \cap (S^{n-1} \cap \rho_j E) = N(K, x_j) \cap S^{n-1} \cap \rho_j E$ έτσι ώστε

$$u_j \in \text{relintpost}\{v_j, w_j\} \quad (1.37)$$

και

$$\langle u_j, v_j \rangle \leq c(m+1, t), \quad \langle u_j, w_j \rangle \leq c(m+1, t). \quad (1.38)$$

Επιλέγουμε υπακολουθίες x_j, v_j, w_j τέτοιες ώστε $x_j \rightarrow x, v_j \rightarrow v, w_j \rightarrow w$ καθώς $j \rightarrow \infty$ για κάποιο σημείο $x \in bdK$ και κάποια διανύσματα $v, w \in S^{n-1}$. Καθώς $u_j \in N(K, x_j)$, έχουμε πως $h(K, u_j) = \langle x_j, u_j \rangle$ και ως εκ τούτου $h(K, u) = \langle x, u \rangle$, επομένως $u \in N(K, x)$. Παρομοίως, βλέπουμε πως $v, w \in N(K, x)$ και αφού $v_j, w_j \in \rho_j E$, τότε $v, w \in \rho E$. Τότε όμως η (1.37) συνεπάγεται πως $u \in \text{pos}\{v, w\}$ και από την (1.38) παίρνουμε πως $\langle u, v \rangle \leq c(m+1, t), \langle u, w \rangle \leq c(m+1, t) < 1$ και άρα $u \in \text{relintpos}\{v, w\}$. Έτσι, έχουμε αποδείξει το εξής :

Κάθε $(m+1)$ -διάστατος γραμμικός υπόχωρος ρE που περιέχει το δοθέν διάνυσμα $u \in \omega$ περιέχει ένα διδιάστατο υποκώνο του $N(K, x)$, όπου $x \in F(K, u)$, που περιέχει το u στο σχετικό εσωτερικό του. Με άλλα λόγια, κάθε $(m+1)$ -διάστατος γραμμικός υπόχωρος που περιέχει το u τέμνει τον ορθογώνιο κώνο $N(K, F(K, u))$ σε κώνο διάστασης τουλάχιστον 2 που περιέχει το u στο σχετικό εσωτερικό του. Αυτό είναι εφικτό μόνο αν η πλευρά $T(K, u)$ του $N(K, F(K, u))$ που περιέχει το u στο σχετικό εσωτερικό της έχει διάσταση τουλάχιστον $n+1-m$. Εξ'ορισμού αυτό σημαίνει πως το u δεν είναι $(n-1-m)$ -ακράιο κάθετο διάνυσμα του K . Συμβολίζουμε το σύνολο των k -ακράιων κάθετο διανυσμάτων του K με $\text{extn}_k K$, έχουμε αποδείξει πως οποιοδήποτε ανοιχτό $\omega \subset S^{n-1} \setminus \text{supp}S_m(K, \cdot)$ ικανοποιεί $\omega \subset S^{n-1} \setminus \text{extn}_{n-1-m} K$, ως εκ τούτου

$$\text{cl extn}_{n-1-m} K \subset \text{supp}S_m(K, \cdot).$$

Αντίστροφα, έστω ω ανοιχτό υποσύνολο του $S^{n-1} \setminus \text{extn}_{n-1-m} K$. Τότε κάθε διάνυσμα $u \in \omega$ ικανοποιεί $\dim T(K, u) \geq n+1-m$. Αν $m = n-1$, συμπεραίνουμε από την (1.27) και το θεώρημα 1.26 πως

$$S_{n-1}(K, \omega) = \mathcal{H}^{n-2}(\tau(K, \omega)) = 0$$

μιας και το $\tau(K, \omega)$ περιέχει μόνο ιδιάζοντα σημεία του K αφού $\dim T(K, u) \geq 2, \forall u \in \omega$. Από αυτό και την σχέση (1.36), έχουμε πως $S_m(K, \omega) = 0$ για $m = 1, \dots, n-2$. $\square$

ΜΙΚΤΟΙ ΟΓΚΟΙ ΚΑΙ ΜΙΚΤΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΜΕΤΡΑ

Ακολουθώντας τα βήματα του Schneider[14], θα ορίσουμε τους μικτούς όγκους κάνοντας χρήση της έννοιας των ισχυρά ισομορφικών πολυτόπων.

2.1 Ισχυρώς ισομορφικά πολύτοπα και ιδιότητες

Ορισμός 2.1. Δύο πολύτοπα P_1, P_2 καλούνται ισχυρώς ισομορφικά αν

$$\dim F(P_1, u) = \dim F(P_2, u)$$

για κάθε $u \in S^{n-1}$. Η παραπάνω σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας, και η αντίστοιχη κλάση ισοδυναμίας στην οποία ανήκει ένα πολύτοπο P καλείται α -τύπος του P .

Ακολουθούν κάποια απλά αποτελέσματα που αφορούν ισχυρώς ισομορφικά πολύτοπα. Για τις αποδείξεις παραπέμπουμε στο [14, ΚΕΦ2.4]

Λήμμα 2.2. Αν P_1, P_2 είναι ισχυρώς ισομορφικά πολύτοπα, τότε για κάθε $u \in S^{n-1}$ τα σύνολα $F(P_1, u), F(P_2, u)$ είναι ισχυρώς ισομορφικά πολύτοπα.

Λήμμα 2.3. Τα πολύτοπα $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_n^n$ είναι ισχυρώς ισομορφικά αν και μόνο αν

$$\{N(P_1, x) : x \in \text{ext}P_1\} = \{N(P_2, x) : x \in \text{ext}P_2\}.$$

Πόρισμα 2.4. Για $P_1, P_2 \in \mathcal{P}^n$, όλα τα πολύτοπα $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$, όπου $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ είναι ισχυρώς ισομορφικά. Αν P_1, P_2 είναι ισχυρώς ισομορφικά, τότε όλα τα πολύτοπα $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$, όπου $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ και $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ είναι ισχυρώς ισομορφικά.

Ορισμός 2.5. Ένα n -διάστατο πολύτοπο P καλείται απλό(simple) αν κάθε κορυφή του περιέχεται σε ακριβώς n έδρες.

Θεώρημα 2.6. Έστω $K_1, \dots, K_m \in \mathcal{K}^n$ κυρτά σώματα. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν απλά, ισχυρώς ισομορφικά πολύτοπα $P_1, \dots, P_m$ με $\delta(P_i, K_i) < \epsilon$, για $i = 1, \dots, m$, όπου $\delta : \mathcal{K}^n \times \mathcal{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι η απόσταση Hausdorff.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$, τότε υπάρχουν πολύτοπα $Q_1, \dots, Q_m \in \mathcal{P}^n$ τέτοια ώστε

$$\delta(P_i, K_i) < \frac{\epsilon}{2},$$

για $i = 1, \dots, m$. Θεωρούμε το πολύτοπο $P := Q_1 + \dots + Q_m$ και έστω $u_1, \dots, u_k$ τα κάθετα διανύσματα του P . Κατασκευάζουμε το πολύτοπο $P' := \cap_{i=1}^k H_{u_i, h(P, u_i) + a_i}^-$, όπου υπενθυμίζουμε

- $H_{u, a}^- := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq a\}$
- $h(K, u)$ είναι η συνάρτηση στήριξης του K στη διεύθυνση $u \in S^{n-1}$
- $H_{u_i, a}^- := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle \leq h(P, u_i) + a_i\}$

και θέτουμε $P_i := Q_i + aP'$, με $a > 0$ αρκετά μικρό ώστε $\delta(P_i, Q_i) < \frac{\epsilon}{2}$ και ως εκ τούτου $\delta(K_i, P_i) < \epsilon$ για $i = 1, \dots, m$.

Έστω x κορυφή κάποιου P_i . Τότε το x γράφεται ως $x = q + ap$, για κάποια κατάλληλη επιλογή $q \in \text{ext}Q_i$ και $p \in \text{ext}P'$. Τότε $N(P_i, x) = N(Q_i, q) \cap N(P', p)$ [βλ. 14, σελ.82]. Από το τρόπο κατασκευής του P' , ο ορθογώνιος κώνος (normal cone) $N(P', p)$ περιέχεται σε κάποιο ορθογώνιο κώνο του Q_i , υποχρεωτικά στον $N(Q_i, q)$, διότι $N(P', p) \cap N(Q_i, q)$ είναι n -διάστατος. Επομένως $N(P_i, x) = N(P', p)$.

Καθώς το x ήταν αυθαίρετη κορυφή του P_i , συμπεραίνουμε από το λήμμα 2.3 πως το P_i είναι ισχυρώς ισομορφικό προς το P' , άρα το P_i είναι επίσης απλό. $\square$

2.2 Μικτοί Όγκοι και Μικτά επιφανειακά μέτρα

Όπως και πριν, θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο V_n για τον όγκο ενός n -διάστατου κυρτού σώματος, και υπενθυμίζουμε πως $V_i(K)$ για ένα i -διάστατο κυρτό σώμα K είναι ο i -διάστατος όγκος του.

Λήμμα 2.7. Έστω $P \in \mathcal{P}_n^n$ πολύτοπο και $F_1, \dots, F_N$ οι έδρες του και u_i το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα του P στην F_i . Τότε

$$\sum_{n=1}^N V_{n-1}(F_i)u_i = 0 \quad (2.1)$$

και

$$V_n(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N h(P, u_i) V_{n-1}(F_i). \quad (2.2)$$

Απόδειξη. Έστω $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Για την ορθογώνια προβολή $P|z^\perp$ έχουμε

$$V_{n-1}(P|z^\perp) = \frac{1}{n} \sum_{\langle z, u_i \rangle \geq 0} \langle z, u_i \rangle V_{n-1}(F_i) = - \sum_{\langle z, u_i \rangle < 0} \langle z, u_i \rangle V_{n-1}(F_i).$$

Ως εκ τούτου, $\sum_{i=1}^N \langle z, u_i \rangle V_{n-1}(F_i) = 0$. Αφού ισχύει για κάθε z , έπεται το ζητούμενο. Χρησιμοποιώντας την (2.1), εύκολα βλέπουμε πως το δεξί μέλος της (2.2) είναι αμετάβλητο

κάτω από παράλληλες μεταφορές. Έστω $a \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N h(P + a, u_i) V_{n-1}(F_i + a) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N [h(P, u_i) + \langle a, u_i \rangle] V_{n-1}(F_i) \\ &\stackrel{(2.1)}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N h(P, u_i) V_{n-1}(F_i) + 0. \end{aligned}$$

Αφού και το αριστερό μέλος της (2.2) είναι αμετάβλητο από παράλληλες μεταφορές, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας πως $0 \in \text{int}P$. Τότε το P είναι η ένωση των πυραμίδων $P_i := \text{conv}(F_i \cup \{0\})$, για $i = 1, \dots, N$, των οποίων τα εσωτερικά είναι ανα δύο ξένα. Συνεπώς

$$\begin{aligned} V_n(P) &= \sum_{i=1}^N V_n(P_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{n} V_{n-1}(F_i) h(P, u_i) \end{aligned}$$

□

Θα δούμε παρακάτω πως η σχέση (2.2) ισχύει για τυχόν κυρτό σώμα $K \in \mathcal{K}^n$ με την μορφή

$$V_n(K) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} h(K, u) dS_{n-1}(K, u) \quad (2.3)$$

Πιο συγκεκριμένα, οι δύο τύποι είναι ισοδύναμοι για πολύτοπα, και η γενική περίπτωση (2.3) προκύπτει από την (2.2) με επιχειρήματα προσέγγισης τυχόντος κυρτού σώματος από ακολουθία πολυτόπων.

Στα ακόλουθα υποθέτουμε πως $\mathcal{A}$ είναι κάποιος α -τύπος n -διάστατων πολύτοπων. Για $P \in \mathcal{A}$ θέτουμε

- $F_i := F(P, u_i)$
- $F_{ij} := F_i \cap F_j$
- $h_i := h(P, u_i)$

Οι αριθμοί $h_1, \dots, h_N$ καθορίζουν το P με μοναδικό τρόπο και καλούνται αριθμοί στήριξης (support numbers). Ακόμη, ορίζουμε

$$J := \{(i, j) : i, j \in \{1, \dots, N\}, \dim F_{ij} = n - 2\} \quad (2.4)$$

και παρατηρούμε πως το J εξαρτάται μόνο από τον α -τύπο $\mathcal{A}$. Για $(i, j) \in J$, ορίζουμε θ_{ij} να είναι η γωνία μεταξύ των u_i, u_j και έστω $v_{ij} \perp u_i$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα του $(n - 1)$ -διάστατου πολυτόπου F_i στην $(n - 2)$ -διάστατη πελυρά του, F_{ij} . Ορίζουμε

$$h_{ij} := h(F_i, v_{ij}).$$

Εύκολα βλέπουμε πως

$$u_j = u_i \cos \theta_{ij} + v_{ij} \sin \theta_{ij}.$$

Παίρνουμε εσωτερικό γινόμενο του u_j με τυχόν διάνυσμα του F_{ij} και έχουμε

$$\begin{aligned} \langle u_j, x \rangle &= \langle u_i, x \rangle \cos \theta_{ij} + \langle v_{ij}, x \rangle \sin \theta_{ij} \Rightarrow \\ \langle v_{ij}, x \rangle \sin \theta_{ij} &= \langle u_j, x \rangle - \langle u_i, x \rangle \cos \theta_{ij}. \end{aligned}$$

Παίρνουμε supremum κι άμεσα αποκτούμε

$$h_{ij} = h_j \frac{1}{\sin \theta_{ij}} - h_i \frac{\cos \theta_{ij}}{\sin \theta_{ij}} \quad (2.5)$$

Λήμμα 2.8. Ο όγκος του $P \in \mathcal{A}$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$V_n(P) = \sum a_{j_1, \dots, j_n} h_{j_1, \dots, j_n}, \quad (2.6)$$

όπου το άθροισμα ορίζεται πάνω από $j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, N\}$ και οι συντελεστές $a_{j_1, \dots, j_n}$ είναι συμμετρικοί ως προς τους δείκτες και εξαρτώνται μόνο από τον α -τύπο $\mathcal{A}$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο n . Για $n = 1$, το συμπέρασμα είναι τετριμμένο καθώς πρόκειται απλώς για το μήκος διαστήματος $P \subset \mathbb{R}$. Υποθέτουμε πως $n > 1$, και πως το συμπέρασμα έχει αποδειχτεί για διάσταση $n - 1$.

Έστω $i \in \{1, \dots, N\}$. Από επαγωγική υπόθεση, θα υπάρχει γραφή

$$V_{n-1}(F_i) = \sum_{(i, k_r) \in J} a_{k_1, \dots, k_{n-1}}^{(i)} h_{ik_1} \dots h_{ik_{n-1}}, \quad (2.7)$$

όπου οι συντελεστές $a_{k_1, \dots, k_{n-1}}^{(i)}$ εξαρτώνται μόνο από τον α -τύπο της F_i , και άρα, μέσω του λήμματος 2.2, μόνο από τον α -τύπο $\mathcal{A}$ του P . Από την (2.5),

$$h_{ik_r} = h_j \frac{1}{\sin \theta_{ik_r}} - h_i \frac{\cos \theta_{ik_r}}{\sin \theta_{ik_r}}. \quad (2.8)$$

Εισάγουμε την (2.8) στην (2.7):

$$\begin{aligned} V_{n-1}(F_i) &= \sum_{(i, k_r) \in J} a_{k_1, \dots, k_{n-1}}^{(i)} \left(h_{k_1} \frac{1}{\sin \theta_{ik_1}} - h_i \frac{\cos \theta_{ik_1}}{\sin \theta_{ik_1}} \right) \dots \\ &\quad \left(h_{k_1} \frac{1}{\sin \theta_{ik_{n-1}}} - h_i \frac{\cos \theta_{ik_{n-1}}}{\sin \theta_{ik_{n-1}}} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Και αυτήν, στην (2.2):

$$\begin{aligned} V_n(P) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N h_i \sum_{(i, k_r) \in J} a_{k_1, \dots, k_{n-1}}^{(i)} \left(h_{k_1} \frac{1}{\sin \theta_{ik_1}} - h_i \frac{\cos \theta_{ik_1}}{\sin \theta_{ik_1}} \right) \dots \\ &\quad \left(h_{k_1} \frac{1}{\sin \theta_{ik_{n-1}}} - h_i \frac{\cos \theta_{ik_{n-1}}}{\sin \theta_{ik_{n-1}}} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Αποκτούμε λοιπόν μια έκφραση της μορφής

$$V_n(P) = \sum a_{j_1, \dots, j_n} h_{j_1} \dots h_{j_n}.$$

Εισάγοντας επιπλέον μηδενικούς συντελεστές, όπου είναι απαραίτητο μπορούμε να υποθέσουμε πως το άθροισμα επεκτείνεται, τυπικά, σε άθροισμα πάνω από όλα τα $j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, N\}$. Είναι προφανές πως μπορούμε να υποθέσουμε συμμετρία των συντελεστών $j_1, \dots, j_n$ ως προς τους δείκτες τους, και καθώς οι αριθμοί $a_{k_1, \dots, k_{n-1}}^{(i)}$ και οι γωνίες θ_{ij} εξαρτώνται μόνο από τον α -τύπο $\mathcal{A}$, το ίδιο ισχύει και για τους συντελεστές $a_{j_1, \dots, j_n}$. $\square$

Δοθέντων ισχυρώς ισομορφικών πολυτόπων $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}$, ορίζουμε $F_i^{(r)}, F_{ij}^{(r)}, h_i^{(r)}, h_{ij}^{(r)}$, για το P_r όπως πριν. Πιο συγκεκριμένα:

- $F_i^{(r)} := F(P_r, u_i)$
- $F_{ij}^{(r)} := F_i^{(r)} \cap F_j^{(r)}$
- $h_i^{(r)} := h(P_r, u_i)$
- $h_{ij}^{(r)} := h(F_i^{(r)}, v_{ij}),$

όπου $v_{ij} \perp u_i$ το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο του $F_i^{(r)}$ στην πρόσωπή του, $F_{ij}^{(r)}$.

Εισάγουμε τον μικτό όγκο των $P_1, \dots, P_n$ ως

$$V(P_1, \dots, P_n) = \sum a_{j_1, \dots, j_n} h_{j_1}^{(1)} \dots h_{j_n}^{(n)}, \quad (2.11)$$

όπου οι συντελεστές $a_{j_1, \dots, j_n}$ είναι εκείνοι της (2.6). Έτσι, $V(P_1, \dots, P_n)$ είναι συμμετρικός ως προς τα ορίσματά του, και

$$V(P, \dots, P) = V_n(P). \quad (2.12)$$

Θεωρούμε τα πολύτοπα $P_1, \dots, P_m \in \mathcal{A}$ και αριθμούς $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ με $\sum \lambda_i > 0$. Τότε $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_m P_m \in \mathcal{A}$, λόγω του λήμματος 2.2 και

$$h(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_m P_m, u_i) = \lambda_1 h_i^{(1)} + \dots + \lambda_m h_i^{(m)}.$$

Από τις (2.6) και (2.11) παίρνουμε

$$V_n(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_m P_m) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n} V(P_{i_1}, \dots, P_{i_n}). \quad (2.13)$$

Λήμμα 2.9. Για $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}$,

$$V(P_1, \dots, P_n) = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \sum_{i_1 < \dots < i_k} V_n(P_{i_1} + \dots + P_{i_k}) \quad (2.14)$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $f(P_1, \dots, P_n)$ το δεξί μέλος της (2.14). Για $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, είναι άμεση συνέπεια της (2.13) πως η συνάρτηση $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto f(\lambda_1 P_1, \dots, \lambda_n P_n)$ είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού n . Έχουμε:

$$\begin{aligned} (-1)^{n+k} n! f(\{0\}, P_2, \dots, P_n) &= \sum_{2 \leq i \leq n} V_n(P_i) \\ &\quad - \left[\sum_{2 \leq j \leq n} V_n(\{0\} + P_j) + \sum_{2 \leq i < j \leq n} V_n(P_i + P_j) \right] \\ &\quad + \left[\sum_{2 \leq j < k \leq n} V_n(\{0\} + P_j + P_k) + \sum_{2 \leq i < j < k \leq n} V_n(P_i + P_j + P_k) \right] - \dots = 0. \end{aligned}$$

Για την παραπάνω ισότητα, αρκεί κανείς να παρατηρήσει ότι μετά από αλλαγή της βουβής μεταβλητής στα άκρα των αθροισμάτων, κάποια αθροίσματα ταυτίζονται κι έχουν αντίθετα πρόσημα.

Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν πως το πολυώνυμο $f(0P_1, \lambda_2 P_2, \dots, \lambda_n P_n)$ είναι ταυτοτικά μηδέν για κάθε επιλογή $\lambda_2, \dots, \lambda_n$. Συνεπώς, στο πολυώνυμο $f(\lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2, \dots, \lambda_n P_n)$, όλα τα μονώνυμα $\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n}$ με $1 \notin \{i_1, \dots, i_n\}$ έχουν μηδενικούς συντελεστές. Καθώς το ίδιο συμβαίνει για κάθε έναν από τους αριθμούς $2, \dots, n$, συμπεραίνουμε πως μόνο το μονώνυμο $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ έχει μη μηδενικό συντελεστή, και από την (2.13), βλέπουμε πως αυτός θα είναι ο $V(P_1, \dots, P_n)$. $\square$

Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο πως χάριν στην (2.14) είναι εμφανές πως ο μικτός όγκος $V(P_1, \dots, P_n)$ είναι αμετάβλητος από παράλληλες μεταφορές οποιουδήποτε ορίσμάτος του, καθώς το δεξί μέλος της (2.14) δεν εξαρτάται από παράλληλες μεταφορές.

Η σχέση (2.2) μπορεί να επεκταθεί σε μικτούς όγκους ισχυρώς ισομορφικών πολυτόπων. Θεωρούμε $P'_1, \dots, P'_{n-1}$ ισχυρώς ισομορφικά $(n-1)$ -διάστατα πολύτοπα. Αυτά βρίσκονται μέσα σε $n-1$ -διάστατους αφινικούς υπόχωρους οι οποίοι θα είναι όλοι παράλληλοι προς κάποιον H . Ορίζουμε τότε μικτό όγκο $v(P'_1, \dots, P'_{n-1})$, ως προς τον χώρο H αυθαίρετων παράλληλων μεταφορών των πολυτόπων $P'_1, \dots, P'_{n-1}$ έτσι ώστε αυτά να βρίσκονται μέσα στον H . Καθώς οι μικτοί όγκοι είναι σταθεροί κάτω από παράλληλες μεταφορές των ορίσμάτων τους, ο παραπάνω μικτός όγκος που μόλις κατασκευάσαμε, είναι καλά ορισμένος.

Παρομοίως, μπορούμε να ορίσουμε το $(n-2)$ -διάστατο μικτό όγκο $v^{(n-2)}$ για ισχυρώς ισομορφικά $(n-2)$ -διάστατα πολύτοπα.

Λήμμα 2.10. Για $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}$,

$$V(P_1, \dots, P_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N h_i^{(1)} v(F_i^{(2)}, \dots, F_i^{(n)}). \quad (2.15)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο n . Για $n=1$ έχουμε $P_1 \subset \mathbb{R}$ μονοδιάστατο πολύτοπο, δηλαδή κλειστό διάστημα, έστω το $[a, b]$. Τότε $V(P_1) = \frac{1}{1} \sum_{i=1}^N h_i^{(1)}$, όπου $N=2$ και $u_1=1, u_2=-1$. Άρα,

$$\begin{aligned} V(P_1) &= h_1^{(1)} + h_2^{(1)} \\ &= \sup\{x, x \in [a, b]\} + \sup\{x(-1), x \in [a, b]\} \end{aligned}$$

$$= b - a.$$

Υποθέτουμε πως $n > 1$ και ο ισχυρισμός αληθεύει για διάσταση $n - 1$. Συμβολίζουμε το δεξί μέλος της (2.15) με $W(P_1, \dots, P_n)$. Τότε,

$$\begin{aligned} V_n(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n) &\stackrel{(2.2)}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N h(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n, u_i) V_{n-1}(F_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (\lambda_1 h_i^{(1)} + \dots + \lambda_n h_i^{(n)}) V_{n-1}(\lambda_1 F_i^{(1)} + \dots + \lambda_n F_i^{(n)}), \end{aligned}$$

όπου $F_i = (\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n) \cap H(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n, u_i)$.

$$\stackrel{(2.13)}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (\lambda_1 h_i^{(1)} + \dots + \lambda_n h_i^{(n)}) \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}=1}^n \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{n-1}} v(F_i^{(i_1)}, \dots, F_i^{(i_{n-1})}).$$

Μετονομάζουμε τους δείκτες $i_1, \dots, i_{n-1}$ σε $i_2, \dots, i_n$. Θεωρούμε δείκτη $i_1 \in \{1, \dots, n\}$ για τους άνω δείκτες του πρώτου αθροίσματος. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} V_n(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n h_i^{(i_1)} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n} v(F_i^{(i_2)}, \dots, F_i^{(i_n)}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}=1}^n h_i^{(i_1)} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{n-1}} W(P_{i_1}, \dots, P_{i_n}), \end{aligned}$$

για αυθαίρετη επιλογή $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

Ως εκ τούτου, αρκεί να αποδείξουμε πως το $W(P_1, \dots, P_n)$ είναι συμμετρικό ως προς τα ορίσματά του. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\begin{aligned} W(P_1, \dots, P_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N h_i^{(1)} v(F_i^{(2)}, \dots, F_i^{(n)}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N h_i^{(1)} \frac{1}{n-1} \sum_{(i,j) \in J} h_{ij}^{(2)} v^{(n-2)}(F_{ij}^{(3)}, \dots, F_{ij}^{(n)}) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{(r,s) \in J \\ r < s}} (h_r^{(1)} h_{rs}^{(2)} + h_s^{(1)} h_{sr}^{(2)}) v^{(n-2)}(F_{rs}^{(3)}, \dots, F_{rs}^{(n)}), \end{aligned}$$

όπου για $n = 2$ οι εκφράσεις $v^{(n-2)}(\cdot)$ αντικαθίστανται με 1. Από την (2.5) έχουμε

$$h_r^{(1)} h_{rs}^{(2)} + h_s^{(1)} h_{sr}^{(2)} = h_r^{(1)} \left[\frac{h_s^{(2)}}{\sin \theta_{rs}} - h_r^{(2)} \frac{\cos \theta_{rs}}{\sin \theta_{rs}} \right] + h_s^{(1)} \left[\frac{h_r^{(2)}}{\sin \theta_{rs}} - h_s^{(2)} \frac{\cos \theta_{rs}}{\sin \theta_{rs}} \right].$$

Καθώς η παραπάνω έκφραση είναι συμμετρική ως προς τους άνω δείκτες (1) και (2), συμπεραίνουμε πως

$$W(P_1, P_2, \dots, P_n) = W(P_2, P_1, \dots, P_n).$$

Επιπλέον, $W(P_1, \dots, P_n)$ είναι συμμετρικό ως προς τα τελευταία $n-1$ ορίσματά του, αφού

$$W(P_1, \dots, P_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N h_i^{(1)} v(F_i^{(2)}, \dots, F_i^{(n)}).$$

Η συμμετρία προκύπτει από τη συμμετρία του $(n-1)$ -διάστατου μικτού όγκου.

Άρα $W(P_1, P_2, \dots, P_n)$ είναι συμμετρικό ως προς όλα τα ορίσματά του. $\square$

Υπενθυμίζουμε πως το επιφανειακό μέτρο $S_{n-1}(K, \cdot)$ για $K \in \mathcal{K}^n$ είναι το Borel μέτρο στη μοναδιαία σφαίρα για το οποίο

$$S_{n-1}(K, \omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\tau(K, \omega)).$$

Πιο συγκεκριμένα, αν P πολύτοπο και $u_1, \dots, u_N$ είναι τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα των εδρών του P , τότε

$$S_{n-1}(P, \omega) = \sum_{u_i \in \omega} V_{n-1}(F(P, u_i)). \quad (2.16)$$

Για ισχυρώς ισομορφικά πολύτοπα $P_1, \dots, P_{n-1} \in \mathcal{A}$ ορίζουμε το μικτό επιφανειακό τους μέτρο:

$$S(P_1, \dots, P_{n-1}, \omega) := \sum_{u_i \in \omega} v(F_i^{(1)}, \dots, F_i^{(n-1)}), \quad \omega \in \mathcal{B}(S^{n-1}). \quad (2.17)$$

Πόρισμα 2.11. Το $S(P_1, \dots, P_{n-1}, \cdot)$, όπως ορίστηκε παραπάνω, είναι ένα πεπερασμένο Borel μέτρο στην S^{n-1} .

Απόδειξη. Καθώς $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}$, έστω $u_1, \dots, u_N$ το σύνολο των μοναδιαίων κάθετων διανυσμάτων. Τότε $\{u_i \in \omega\} \subset \{u_i : i = 1, \dots, N\}$. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} S(P_1, \dots, P_{n-1}, \omega) &= \sum_{u_i \in \omega} v(F_i^{(1)}, \dots, F_i^{(n-1)}) \\ &\stackrel{(2.14)}{\leq} \sum_{i=1}^N \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-1+k} \sum_{i_1 < \dots < i_k} V_{n-1}(P_{i_1} + \dots + P_{i_k}) \\ &< \infty, \text{ καθώς όλα είναι πεπερασμένα.} \end{aligned}$$

$\square$

Για $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \geq 0$ έχουμε:

$$S_{n-1}(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_m P_m, \cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}=1}^m \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{n-1}} S(P_{i_1}, \dots, P_{i_{n-1}}), \quad (2.18)$$

σε πλήρη αντιστοιχία με την (2.13) και ως εφαρμογή της σε διάσταση $n-1$. Από το Λήμμα 2.9 και την (2.17) παίρνουμε τον ακόλουθο τύπο που εκφράζει το μικτό επιφανειακό μέτρο ως γραμμικό συνδυασμό επιφανειακών μέτρων αθροισμάτων Minkowski.

Λήμμα 2.12. Για $P_1, \dots, P_{n-1} \in \mathcal{A}$ έχουμε:

$$S(P_1, \dots, P_{n-1}, \cdot) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-1+k} \sum_{i_1 < \dots < i_k} S_{n-1}(P_{i_1}, \dots, P_{i_k}, \cdot) \quad (2.19)$$

Σημειώνουμε εδώ πως η σχέση (2.15), η οποία ισχύει για $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}$ γράφεται και ως

$$V(P_1, \dots, P_n) = \int_{S^{n-1}} h(P_1, u) dS(P_2, \dots, P_n, u). \quad (2.20)$$

Αρκεί να παρατηρήσει κανείς πως αν u δεν είναι κάθετο διάνυσμα κάποιας έδρας, τότε η ποσότητα $S(P_2, \dots, P_n, \{u\})$, όπως έχει οριστεί θα κάνει μηδέν.

Πλέον έχουμε όλα τα απαραίτητα συστατικά για να ορίσουμε το μικτό όγκο τυχόντος κυρτού σώματος.

Θεώρημα 2.13. Υπάρχει μια μη αρνητική, συμμετρική συνάρτηση $V : (\mathcal{K}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$, ο μικτός όγκος, τέτοια ώστε, για $m \in \mathbb{N}$, να ισχύει

$$V_n(\lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_m K_m) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^m \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_m} V(K_{i_1}, \dots, K_{i_m}) \quad (2.21)$$

για όλα τα κυρτά σώματα $K_1, \dots, K_m \in \mathcal{K}^n$ και όλους τους αριθμούς $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$.

Ακόμη, υπάρχει μια συμμετρική απεικόνιση S από το $(\mathcal{K}^n)^{n-1}$ στο χώρο των πεπερασμένων Borel μέτρων επί της S^{n-1} , το μικτό επιφανειακό μέτρο, τέτοιο ώστε, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, να ισχύει

$$S_{n-1}(\lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_m K_m, \cdot) = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}=1}^m \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{n-1}} S(K_{i_1}, \dots, K_{i_{n-1}}, \cdot), \quad (2.22)$$

για όλα τα κυρτά σώματα $K_1, \dots, K_m \in \mathcal{K}^n$ και όλους τους αριθμούς $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$. Τέλος, ισχύει η ισότητα

$$V(K_1, \dots, K_n) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} h(K_1, u) dS(K_2, \dots, K_n, u), \quad (2.23)$$

για όλα τα κυρτά σώματα $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}^n$.

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$V(K_1, \dots, K_n) := \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \sum_{i_1 < \dots < i_k} V_n(K_{i_1} + \dots + K_{i_k}) \quad (2.24)$$

για τυχόντα $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}^n$. Παρατηρούμε πως αυτός ο ορισμός είναι ακριβώς η επέκταση του (2.14), από πολύτοπα σε τυχόντα κυρτά.

Από συνέχεια του αθροίσματος Minkowski και του συναρτησοειδούς του όγκου, συμπεραίνουμε πως η $V : (\mathcal{K}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Θεωρούμε μια n -άδα κυρτών σωμάτων, $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}^n$. Από το Θεώρημα 2.6, μπορούμε να βρούμε ακολουθίες πολυτόπων

$(P_{1i})_{i \in \mathbb{N}}, \dots, (P_{ni})_{i \in \mathbb{N}}$, τέτοιες ώστε $P_{ri} \rightarrow K_r$, καθώς $i \rightarrow \infty$ ($r = 1, \dots, n$) και τέτοιες ώστε για κάθε i τα πολύτοπα $P_{1i}, \dots, P_{ni}$ να είναι ισχυρώς ισομορφικά μεταξύ τους. Από την (2.13) και την συνέχεια του όγκου και του μικτού όγκου συμπεραίνουμε πως η (2.13) ισχύει. (Αρκεί κανείς να θεωρήσει τις αντίστοιχες ακολουθίες πολυτόπων όπως περιγράψαμε παραπάνω και να προσεγγίσει τα τυχόντα κυρτά σώματα με αυτές.)

Παρόμοια, ορίζουμε

$$S(K_1, \dots, K_{n-1}, \cdot) := \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+k} \sum_{i_1 < \dots, i_k} S_{n-1}(K_{i_1} + \dots + K_{i_k}, \cdot), \quad (2.25)$$

για τυχόντα $K_1, \dots, K_{n-1} \in \mathcal{K}^n$. Παρατηρούμε πως και αυτός ο ορισμός είναι απλώς επέκταση του λήμματος 2.12. Οπότε, το $S(K_1, \dots, K_{n-1}, \cdot)$ είναι μέτρο με πρόσημο υπεράνω της $\mathcal{B}(S^{n-1})$. Από την ασθενή συνέχεια του επιφανειακού μέτρου (surface area measure) έχουμε πως η απεικόνιση S όπως ορίστηκε παραπάνω είναι ασθενώς συνεχής, δηλαδή για $K_{1i} \rightarrow K_1, \dots, K_{n-1,i} \rightarrow K_{n-1}$ καθώς $i \rightarrow \infty$, έχουμε

$$S(K_{1i}, \dots, K_{n-1,i}, \cdot) \xrightarrow{w} S(K_1, \dots, K_{n-1}, \cdot).$$

Εφαρμόζοντας το σύννηδες πλέον επιχείρημα προσέγγισης τυχόντος κυρτού σώματος από ισχυρώς ισομορφικά πολύτοπα, η (2.18) δίνει την (2.22).

Η σχέση (2.23) προκύπτει από την (2.20) προσεγγίζοντας τα $K_1, \dots, K_n$ με ισχυρώς ισομορφικά πολύτοπα και χρησιμοποιώντας την συνέχεια του μικτού όγκου, την ασθενή συνέχεια του μικτού επιφανειακού μέτρου και τη συνέχεια των συναρτήσεων στήριξης (support function).

Μένει να δείξουμε πως οι V και S είναι μη αρνητικές. Αρχικά παρατηρούμε πως η V εύκολα αποδεικνύεται πως είναι μη αρνητική για ισχυρώς ισομορφικά πολύτοπα χρησιμοποιώντας την (2.15). Τότε μπορούμε να υποθέσουμε πως $0 \in \text{int} P_1$ και ως εκ τούτου μπορούμε να υποθέσουμε πως $h_i^{(1)} \geq 0$. Τότε, από τον ορισμό (2.17) του μικτού επιφανειακού μέτρου παίρνουμε πως και αυτό είναι μη αρνητικό για ισχυρώς ισομορφικά πολύτοπα.

Προσεγγίζοντας τυχόντα κυρτά σώματα με ακολουθίες ισχυρώς ισομορφικών πολυτόπων αποκτούμε την μη αρνητικότητα για την γενική περίπτωση. $\square$

Μπορούμε πλέον να δείξουμε πως η ισότητα (2.17) και το Λήμμα 2.10 ισχύουν για τυχόντα πολύτοπα, κι όχι αναγκαστικά για ισχυρώς ισομορφικά.

Θεωρούμε $P = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_{n-1} P_{n-1}$ με $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \geq 0$. Τότε η (2.16) δίνει

$$\begin{aligned} S_{n-1}(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_{n-1} P_{n-1}, \omega) &= \sum_{u_i \in \omega} V_{n-1}(F(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_{n-1} P_{n-1}, u_i)) \\ &= \sum_{u_i \in \omega} V_{n-1}(\lambda_1 F_i^{(1)} + \dots + \lambda_{n-1} F_i^{(n-1)}). \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε την (2.13) (για διάσταση $n-1$) στο δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας και την (2.18) στο αριστερό παίρνουμε

$$\sum_{i_1, \dots, i_{n-1}=1}^{n-1} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{n-1}} S(P_{i_1}, \dots, P_{i_{n-1}}, \omega) = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}=1}^{n-1} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{n-1}} \sum_{u \in \omega} v(F(P_1, u), \dots, F(P_{n-1}, u)).$$

Πρόκειται για μια ισότητα πολυωνύμων, συγκρίνουμε τους συντελεστές των $\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{n-1}}$ και βλέπουμε πως

$$S(P_1, \dots, P_{n-1}, \omega) = \sum_{u \in \omega} v(F(P_1, u), \dots, F(P_{n-1}, u)) \quad (2.26)$$

για $\omega \in \mathcal{B}(S^{n-1})$. Αθροίζουμε τυπικά μόνο πάνω από όλα τα $u \in \omega$. Στη πραγματικότητα το άθροισμα περιέχει μόνο το πεπερασμένο πλήθος κάθετων διανυσμάτων του $P_1 + \cdots + P_{n-1}$ που περιέχονται στο ω . Λαμβάνοντας υπόψιν την (2.26), η (2.23) γίνεται

$$V(P_1, \dots, P_n) = \frac{1}{n} \sum_{u \in S^{n-1}} h(P_1, u) v(F(P_2, u), \dots, F(P_n, u)), \quad (2.27)$$

όπου αθροίζουμε μόνο για τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα των εδρών του $P_2 + \cdots + P_n$.

Θα δούμε τώρα κάποιες βασικές ιδιότητες του μικτού όγκου και των μικτών επιφανειακών μέτρων.

Αρχικά, είναι προφανές από τις σχέσεις (2.24) και (2.25) πως ο μικτός όγκος και το μικτό επιφανειακό μέτρο παραμένουν αμετάβλητα κάτω από αυθαίρετες παράλληλες μεταφορές οποιουδήποτε ορίσμά τους. Ακόμη, είναι εμφανές πως

$$\begin{aligned} V(K, \dots, K) &= V_n(K) \\ V(\alpha K_1, \dots, \alpha K_n) &= V(K_1, \dots, K_n) \end{aligned}$$

για κάθε αφινική απεικόνιση $\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ που διατηρεί τον όγκο, καθώς και

$$\begin{aligned} S(K, \dots, K, \cdot) &= S_{n-1}(K, \cdot), \\ S(\rho K_1, \dots, \rho K_{n-1}, \rho \omega) &= S(K_1, \dots, K_{n-1}, \omega) \end{aligned}$$

για κάθε στροφή $\rho \in SO(n)$.

Έστω $\phi \in GL(n)$ και $K_1, \dots, K_{n-1}, L \in \mathcal{K}^n$. Τότε έχουμε

$$V(\phi L, \phi K_1, \dots, \phi K_{n-1}) = |\det \phi| V(L, K_1, \dots, K_{n-1})$$

και μέσω της (2.23),

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} h(\phi L, u) dS(\phi L, \phi K_1, \dots, \phi K_{n-1}, u) &= \\ |\det \phi| \int_{S^{n-1}} h(L, v) dS(L, K_1, \dots, K_{n-1}, v). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Περνάμε τώρα στην ιδιότητα μονοτονίας του μικτού όγκου. Έστω $K, L \in \mathcal{K}^n$ κυρτά σώματα, τέτοια ώστε $K \subset L$ και έστω $K_2, \dots, K_n$ τυχόντα κυρτά σώματα. Τότε, από την (2.23) έχουμε πως

$$\begin{aligned} V(K, K_2, \dots, K_n) - V(L, K_2, \dots, K_n) &= V(K - L, K_2, \dots, K_n) \\ &= \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} [h(K, u) - h(L, u)] dS(K_2, \dots, K_n, u) \leq 0, \end{aligned}$$

με ισότητα, αν και μόνο αν $h(K, u) = h(L, u)$, για κάθε $u \in \text{supp}S(K_2, \dots, K_n, \cdot)$. Επομένως,

$$K \subset L \Rightarrow V(K, K_2, \dots, K_n) \leq V(L, K_2, \dots, K_n). \quad (2.29)$$

Λόγω συμμετρίας, συμπεραίνουμε πως ο μικτός όρος είναι μονότονος ως προς κάθε όρισμά του.

Είναι σπάνιο, ή μάλλον πολύ δύσκολο να υπολογίσουμε αναλυτικά το μικτό όγκο ακόμα και απλών κυρτών σωμάτων. Παρόλα αυτά είναι εύκολο να αποφανθούμε για το πότε ο μικτός όγκος είναι θετικός.

Θεώρημα 2.14. Για $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}^n$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1. $V(K_1, \dots, K_n) > 0$
2. Υπάρχουν ευθύγραμμα τμήματα $S_i \subset K_i$ ($i = 1, \dots, n$) με γραμμικώς ανεξάρτητες διευθύνσεις.
3. $\dim(K_{i_1} + \dots + K_{i_k}) \geq k$ για κάθε επιλογή δεικτών $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ και για όλα τα $k \in \{1, \dots, n\}$.

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει η 1. Θα αποδείξουμε την 2. με επαγωγή.

Η περίπτωση όπου $n = 1$ είναι τετριμμένη καθώς αν K_1 είναι κυρτό σώμα του $\mathbb{R}$ με $V(K_1) > 0$ τότε αναγκαστικά K_1 είναι διάστημα, η μόνη άλλη επιλογή ήταν $K_1 = \{x_0\}$, κάποιο μονοσύνολο, που όμως δεν έχει θετικό όγκο.

Υποθέτουμε πως $n > 1$ και πως το συμπέρασμα ισχύει για μικρότερες διαστάσεις. Αφού ένα κυρτό σώμα μπορεί να προσεγγιστεί από ακολουθία πολυτόπων που περιέχονται σε αυτό, και αφού ο μικτός όγκος είναι συνεχής, τότε θα υπάρχουν πολύτοπα $P_i \subset K_i$ ($i = 1, \dots, n$) έτσι ώστε $V(P_1, \dots, P_n) > 0$. Από την (2.27) έχουμε

$$0 < V(P_1, \dots, P_n) = \frac{1}{n} \sum h(P_1, u_i) v(F(P_2, u_i), \dots, F(P_n, u_i)),$$

όπου αθροίζουμε πάνω από πεπερασμένα σε πλήθος μοναδιαία διανύσματα u_i . Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας πως $0 \in \text{relint}P_1$, τότε $h(P_1, u_i) > 0 \forall u_i$ και άρα όλοι οι όροι είναι μη αρνητικοί, ως εκ τούτου θα υπάρχει κάποιος δείκτης j για τον οποίο $h(P_1, u_j) > 0$, $v(F(P_2, u_j), \dots, F(P_n, u_j)) > 0$. Από την επαγωγική υπόθεση, αυτό συνεπάγεται την ύπαρξη ευθύγραμμων τμημάτων $S_i \subset F(P_i, u_j)$, ($i = 2, \dots, n$) με γραμμικώς ανεξάρτητες κατευθύνσεις. Ακόμη, καθώς $h(P_1, u_j) > 0$, θα υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα $S_1 \subset P_1$ που δεν είναι κάθετο προς το u_j . Συνεπώς $S_i \subset K_i$ για $i = 1, \dots, n$ και οι κατευθύνσεις των $S_1, \dots, S_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Υποθέτουμε τώρα πως ισχύει η 2. και ας είναι $S_i \subset K_i$ ευθύγραμμα τμήματα με γραμμικώς ανεξάρτητες κατευθύνσεις. Η μονοτονία του μικτού όγκου συνεπάγεται

$$V(K_1, \dots, K_n) \geq V(P_1, \dots, P_n).$$

Από την (2.24) παίρνουμε

$$n!V(S_1, \dots, S_n) = V_n(S_1 + \dots + S_n) > 0.$$

Παρατηρούμε πως επιβιώνει μόνο ο τελευταίος όρος του αθροίσματος $\sum_{k=1}^n$ διότι τα S_i είναι μονοδιάστατα και επομένως ο n -διάστατος όγκος του αθροίσματος Minkowski λιγότερων από ακριβώς n σε πλήθος αυτών είναι 0. Επομένως ισχύει η 1.

Είναι τετριμμένο πως η 2. συνεπάγεται την 3. καθώς $\dim(K_{i_1} + \dots + K_{i_k}) \geq \dim(S_{i_1} + \dots + S_{i_k}) \geq k$. Αντίστροφα, αν ισχύει η 3., μπορούμε να υποθέσουμε πως $0 \in \text{relint} K_i$ για $i = 1, \dots, n$ και έπειτα η ισχύς της 2. προκύπτει ως άμεση συνέπεια του επόμενου λήμματος. $\square$

Λήμμα 2.15. Έστω $L_1, \dots, L_n$ γραμμικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$. Αν $\dim(L_{i_1} + \dots + L_{i_k}) \geq k$ για κάθε επιλογή δεικτών $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ και για όλα τα $k \in \{1, \dots, n\}$ τότε υπάρχουν ευθείες $G_i \subset L_i$ ($i = 1, \dots, n$) τέτοιες ώστε $\dim(G_1 + \dots + G_n) = n$.

Απόδειξη. Για κάθε m -άδα $(i_1, \dots, i_m)$ από $\{2, \dots, n\}$ έχουμε είτε,

1. $L_1 \subset L_{i_1} + \dots + L_{i_m}$,
είτε
2. $\dim(L_1 \cap (L_{i_1} + \dots + L_{i_m})) < \dim L_1$

Καθώς ο L_1 δεν μπορεί να καλυφθεί με πεπερασμένο πλήθος υπόχωρων μικρότερης διάστασης, μπορούμε να επιλέξουμε μια ευθεία $G_1 \subset L_1$ έτσι ώστε στην περίπτωση 2. να ισχύει πάντα

$$G_1 \not\subset L_{i_1} + \dots + L_{i_m}.$$

Έστω $(i_2, \dots, i_k)$ μια $(k-1)$ -άδα από $\{2, \dots, n\}$. Τότε είτε θα ισχύει πως $L_1 \subset L_{i_2} + \dots + L_{i_k}$ και ως εκ τούτου

$$\dim(G_1 + L_{i_2} + \dots + L_{i_k}) = \dim(L_{i_1} + \dots + L_{i_k}) \geq k$$

είτε $L_1 \not\subset L_{i_2} + \dots + L_{i_k}$, οπότε

$$\dim(G_1 + L_{i_2} + \dots + L_{i_k}) = 1 + \dim(L_{i_1} + \dots + L_{i_k}) \geq 1 + (k-1) \geq k.$$

επαναλαμβάνοντας την διαδικασία για L_2 κ.ο.κ. παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Μια ακόμη σημαντική ιδιότητα των μικτών όγκων είναι η γραμμικότητα ως προς κάθε όρισμα. Αυτό προκύπτει από την (2.23). Για $K, L, K_2, \dots, K_n \in \mathcal{K}^n$ και $\lambda, \mu \geq 0$ έχουμε

$$V(\lambda K + \mu L, K_2, \dots, K_n) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} h(\lambda K + \mu L, u) dS(K_2, \dots, K_n, u)$$

$$= \frac{1}{n} \left[\int_{S^{n-1}} h(\lambda K, u) dS(K_2, \dots, K_n, u) + \int_{S^{n-1}} h(\mu L, u) dS(K_2, \dots, K_n, u) \right].$$

Λόγω συμμετρίας, έχουμε πως $V(\lambda K + \mu L, K_2, \dots, K_n) = V(K_2, \lambda K + \mu L, \dots, K_n)$, άρα η γραμμικότητα Minkowski ισχύει ως προς κάθε όρισμα.

Το ίδιο ισχύει και για τα μικτά επιφανειακά μέτρα, δηλαδή

$$S(\lambda K + \mu L, K_2, \dots, K_{n-1}, \cdot) = \lambda S(K, K_2, \dots, K_{n-1}) + \mu S(L, K_2, \dots, K_{n-1}). \quad (2.30)$$

Για πολύτοπα, αποκτούμε τη παραπάνω σχέση άμεσα μέσω της (2.26), την γραμμικότητα του μικτού όγκου διάστασης $n-1$ και το γεγονός $F(\lambda P + \mu P', u) = \lambda F(P, u) + \mu F(P', u)$. Η γενική περίπτωση προκύπτει με προσέγγιση των κυρτών σωμάτων από πολύτοπα που συγκλίνουν προς αυτά.

Τέλος, σημειώνουμε πως το μικτό επιφανειακό μέτρο, αν θεωρήσουμε πως ορίζει μια κατανομή μάζας στην S^{n-1} έχει πάντα το κέντρο βάρους (centroid) στην αρχή των αξόνων:

$$\int_{S^{n-1}} u dS(K_1, \dots, K_{n-1}, u) = 0. \quad (2.31)$$

Αυτό φαίνεται άμεσα από την (2.23) και την ιδιότητα των μικτών όγκων να μη μεταβάλλονται κάτω από παράλληλες μεταφορές. Είναι

$$\begin{aligned} 0 &= V(K_1, \dots, K_n + t) - V(K_1, \dots, K_n) \\ &= V(K_n + t, K_1, \dots, K_{n-1}) - V(K_n, K_1, \dots, K_{n-1}) \\ &= \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} [h(K_n + t, u) - h(K_n, u)] dS(K_1, \dots, K_{n-1}, u) \\ &= \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \langle t, u \rangle dS(K_1, \dots, K_{n-1}, u), \quad \forall t \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Η (2.31) έπεται άμεσα από την τελευταία σχέση.

2.3 Επεκτάσεις Μικτών Όγκων

Είδαμε πως ο μικτός όγκος είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε n -άδες κυρτών σωμάτων η οποία είναι Minkowski γραμμική σε κάθε μεταβλητή. Σε αυτή τη παράγραφο θα αναφέρουμε κάποιες επεκτάσεις των μικτών όγκων που γενικεύουν, ή τουλάχιστον διατηρούν, την γραμμική ιδιότητα του μικτού όγκου.

Το πρώτο συμπέρασμα είναι αρνητικού χαρακτήρα. Πιο συγκεκριμένα, οποιαδήποτε επέκταση σε μη κυρτά σώματα του μικτού όγκου οδηγεί σε απώλεια των βασικών ιδιοτήτων του.

Θεώρημα 2.16. Έστω $K' \subset \mathbb{C}^n$ μια κλάση κυρτών σωμάτων που περιέχει την K^n και είναι κλειστή ως προς το άθροισμα Minkowski. Αν υπάρχει συνάρτηση $V : (K')^n \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι Minkowski αθροιστική ως προς κάθε μεταβλητή και για την οποία $V(K, \dots, K) = V_n(K)$, για $K \in K'$, τότε $K' = K^n$.

Μπορούμε ακόμη, να θεωρήσουμε το μικτό όγκο ως Minkowski πλειοαθροιστική συνάρτηση όχι πάνω σε κυρτά σώματα, αλλά σε συναρτήσεις στήριξης. Στα ακόλουθα, θα ταυτίζουμε τα κυρτά σώματα με τις συναρτήσεις στήριξής τους, περιοσμένες στην S^{n-1} , και ως εκ τούτου θα γράφουμε

$$V(K_1, \dots, K_n) = V(\bar{h}_{K_1}, \dots, \bar{h}_{K_n}), \quad (2.32)$$

για $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}^n$.

Ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $C(S^{n-1})$ των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων στην σφαίρα περιέχει ως υπόχωρο το διανυσματικό χώρο $D(S^{n-1})$ που παράγεται από περιορισμούς σσηαυτήσεων στήριξης. Αν $h \in D(S^{n-1})$ γράφεται ως $g = \bar{h}_K - \bar{h}_L = \bar{h}_{K'} - \bar{h}_{L'}$ με $K, L, K', L' \in \mathcal{K}^n$, τότε $K + L' = K' + L$. Λαμβάνοντας υπόψιν την αθροιστικότητα του μικτού όγκου συμπεραίνουμε πως

$$V(g, K_2, \dots, K_n) := V(K, K_2, \dots, K_n) - V(L, K_2, \dots, K_n)$$

δεν εξαρτάται από την επιλογή αναπαράστασης. Είναι φανερό πως με το τρόπο που ορίστηκε το $V(\cdot, K_2, \dots, K_n)$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές στο $D(S^{n-1})$. Παρόμοιες επεκτάσεις μπορούν να επιτευχθούν ως προς κάθε όρισμα του μικτού όγκου. Συγκεκριμένα, αν $g_i \in D(S^{n-1})$ με $g_i = h_i^0 - h_i^1$, όπου h_i^0, h_i^1 είναι περιορισμοί συναρτήσεων στήριξης ($i = 1, \dots, n$) ορίζουμε το μικτό όγκο των $g_1, \dots, g_n$ ως

$$V(g_1, \dots, g_n) = \sum_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{0,1\}} (-1)^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n} V(h_1^{\epsilon_1}, \dots, h_n^{\epsilon_n}).$$

Η V είναι συμμετρική και n -γραμμική στο $D(S^{n-1})$ και ικανοποιεί την (2.32). Παρόμοια, το μικτό επιφανειακό μέτρο έχει μια $(n-1)$ -γραμμική επέκταση στο $D(S^{n-1})$ που δίνεται από τη σχέση

$$S(g_1, \dots, g_{n-1}, \cdot) = \sum_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{0,1\}} (-1)^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n} S(h_1^{\epsilon_1}, \dots, h_{n-1}^{\epsilon_{n-1}}, \cdot).$$

Η σχέση (2.23) επεκτείνεται σε

$$V(g_1, \dots, g_n) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} g_1(u) dS(g_2, \dots, g_n, u)$$

για $g_1, \dots, g_{n-1} \in D(S^{n-1})$

Δοθέντων κυρτών σωμάτων $K_2, \dots, K_n \in \mathcal{K}^n$, μπορούμε άμεσα να αποκτήσουμε μια επέκταση του συναρτησοειδούς $V(\cdot, K_2, \dots, K_n)$ στο χώρο $C(S^{n-1})$ ως προς την L^∞ νόρμα ορίζοντας

$$V(f, K_2, \dots, K_n) := \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} f(u) dS(K_2, \dots, K_n, u) \quad (2.33)$$

για $f \in C(S^{n-1})$. Έτσι το $V(\cdot, K_2, \dots, K_n)$ είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές στο $C(S^{n-1})$, με νόρμα $V(B^n, K_2, \dots, K_n)$. Το μικτό επιφανειακό μέτρο $S(K_2, \dots, K_n, \cdot)$ τότε αποδεικνύεται πως είναι το μοναδικό μέτρο που αναπαριστά το γραμμικό συναρτησοειδές σύμφωνα με το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz.

Δεν είναι δυνατή περεταίρω επέκταση του μικτού όγκου σε πλειογραμμικό γραμμικό συναρτησοειδές υπεράνω του $C(S^{n-1})$. Το ακόλουθο χρησιμοποιεί ένα απλό αντιπαράδειγμα [βλ. 14, σελ.292] για $n = 2$ και αποκλείει κάθε τέτοια επέκταση.

Θεώρημα 2.17. *Δεν υπάρχει διγραμμική συνάρτηση $V : C(S^1)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή και ικανοποιεί $V(\bar{h}_K, \bar{h}_L) = V(K, L)$ για $K, L \in \mathcal{K}^n$.*

Έστω δοθέν α -τύπος $\mathcal{A}$ ισχυρώς ισομορφικών, απλών, n -διάστατων πολυτόπων και έστω $u_1, \dots, u_N$ τα μοναδιαία κάθετα των εδρών του $\mathcal{A}$. Η N -άδα $\bar{P} = (h_1, \dots, h_N)$, όπου $h_i := h(P, u_i)$ καλείται διάνυσμα στήριξης του $P \in \mathcal{A}$. Επεκτείνουμε το μικτό όγκο V n -άδας πολυτόπων (2.11) σε διανύσματα στήριξης και έπειτα επεκτείνουμε σε αυθαίρετες N -άδες διανυσμάτων

$$X_r = (x_1^{(r)}, \dots, x_N^{(r)}) \in \mathbb{R}^N, \quad r = 1, \dots, n,$$

θέτοντας

$$V(X_1, \dots, X_n) := \sum a_{j_1 \dots j_n} x_{j_1}^{(1)} \dots x_{j_n}^{(n)}. \quad (2.34)$$

Τότε ο μικτός όγκος V είναι N -γραμμική συνάρτηση στο $\mathbb{R}^N$, και για $X = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ ορίζουμε

$$x_{ij} = \begin{cases} x_j \frac{1}{\cos(\theta_{ij})} - x_i \frac{\cos(\theta_{ij})}{\sin(\theta_{ij})} & , \text{ αν } (i, j) \in J \\ 0 & , \text{ αν } (i, j) \notin J \end{cases}$$

και

$$\Lambda_i X = (x_{i1}, \dots, x_{iN}). \quad (2.35)$$

Τότε η $\Lambda_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ είναι γραμμική απεικόνιση. Έπειτα θέτουμε

$$v(\Lambda_i X_1, \dots, \Lambda_i X_{n-1}) := \sum a_{k_1 \dots k_{n-1}} x_{ik_1}^{(1)} \dots x_{ik_{n-1}}^{(n-1)}. \quad (2.36)$$

Το λήμμα 2.10 επεκτείνεται και δίνει

$$V(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N x_i^{(1)} v(\Lambda_i X_2, \dots, \Lambda_i X_n) \quad (2.37)$$

2.4 Μικτές διακρίνουσες

Η μικτή διακρίνουσα διάστασης n είναι μια συμμετρική συνάρτηση D , n πλήθους συμμετρικών $n \times n$ πινάκων $A_r = (a_{ij}^r)_{i,j=1}^n$, $r = 1, \dots, n$, που ορίζεται ως

$$D(A_1, \dots, A_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \begin{vmatrix} \alpha_{11}^{\sigma(1)} & \dots & \alpha_{1n}^{\sigma(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1}^{\sigma(1)} & \dots & \alpha_{nn}^{\sigma(n)} \end{vmatrix}, \quad (2.38)$$

όπου S_n είναι η ομάδα μεταθέσεων του συνόλου $\{1, \dots, n\}$. Για $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\det(\lambda_1 A_1, \dots, \lambda_m A_m) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n} D(A_{i_1}, \dots, A_{i_n}), \quad (2.39)$$

που επίσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ορίσει την μικτή διακρίνουσα με μοναδικό τρόπο, όπου:

$$D(A_1, \dots, A_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_n} \det(\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n).$$

Αν q είναι μια τετραγωνική μορφή στο $\mathbb{R}^n$, τότε αυτή μπορεί να γραφεί ως $q(x) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \xi_i \xi_j$ για $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$ (ως προς κάποια ορθοκανονική βάση $(e_1, \dots, e_n)$ του $\mathbb{R}^n$), με συμμετρικό πραγματικό πίνακα $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$. Είναι γνωστό πως η ορίζουσα αυτού του πίνακα δεν εξαρτάται από την επιλογή βάσης και καλείται διακρίνουσα της q . Αυτό δικαιολογεί την ονομασία 'μικτή διακρίνουσα'. Αν $q_1, \dots, q_n$ είναι τετραγωνικές μορφές στο $\mathbb{R}^n$ κι οι αντίστοιχοι συμμετρικοί πίνακες είναι $A_1, \dots, A_n$, τότε η ποσότητα $D(A_1, \dots, A_n)$ καλείται μικτή διακρίνουσα των $q_1, \dots, q_n$. Θα δούμε παρακάτω πως υπάρχει σημαντική συσχέτιση της μικτής διακρίνουσας με τους μικτούς όγκους, καθώς αυτές οι δύο συναρτήσεις, με εισαγωγή κατάλληλου φορμαλισμού, ικανοποιούν παρόμοιες ανισότητες.

Ακολουθεί ένα λήμμα με μερικές βασικές ιδιότητες των μικτών διακρινουσών, οι αποδείξεις για κάποιες από τις ιδιότητες είναι άμεσες από τον ορισμό, για τις υπόλοιπες παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [16, Λήμμα 2.6]

Λήμμα 2.18. Έστω $M, M_1, \dots, M_{n-1}$ συμμετρικοί $(n-1)$ -διάστατοι πίνακες. Τότε

1. $D(M, \dots, M) = \det(M)$.
2. $D(M', M, \dots, M) = \frac{1}{n-1} \text{Tr}[\text{cof}(M)M']$.
3. $D(M_1, \dots, M_{n-1})$ είναι συμμετρική και πλειογραμμική.
4. $D(M, M_2, \dots, M_{n-1}) \geq D(M', M_2, \dots, M_{n-1})$ αν $M \geq M'$, $M_2, \dots, M_{n-1} \geq 0$.

Σημειώνουμε πως η δεύτερη ιδιότητα δεν βρίσκεται στο [16], αλλά προκύπτει άμεσα αν παρατηρήσει κανείς πως $\frac{d}{dt} \det(M + tM')|_{t=0} = (n-1)D(M', M, \dots, M)$.

2.5 Η ανισότητα Alexandrov-Fenchel

Θεώρημα 2.19. Για $K_1, \dots, K_n$ κυρτά σώματα του $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$V(K_1, \dots, K_n)^2 \geq V(K_1, K_1, K_3, \dots, K_n) V(K_2, K_2, K_3, \dots, K_n). \quad (2.40)$$

Είναι εμφανές πως αν K_1, K_2 είναι ομοιόθετα, δηλαδή αν $K_1 = \alpha K_2 + v$, όπου $\alpha \geq 0$, $v \in \mathbb{R}^n$ τότε ισχύει η ισότητα στην (2.40). Υπάρχουν παραδείγματα που φανερώνουν πως αυτή δεν είναι η μοναδική περίπτωση ισότητας. Ο πλήρης χαρακτηρισμός των περιπτώσεων ισότητας είναι ανοιχτό πρόβλημα. Η ακόλουθη απόδειξη οφείλεται στον Alexandrov [1]. Θα ταυτίζουμε ένα πολύτοπο με το διάνυσμα στήριξης του σαν ορίσματα μικτών όγκων. Ακόμη, καλούμε το $Z = (\zeta_1, \dots, \zeta_N) \in \mathbb{R}^N$ διάνυσμα στήριξης ενός σημείου $z \in \mathbb{R}^n$ αν $\zeta_i = h(\{z\}, u_i)$ για $i = 1, \dots, N$, επομένως αν

$$Z = (\langle z, u_1 \rangle, \dots, \langle z, u_N \rangle).$$

Η ανισότητα Alexandrov-Fenchel προκύπτει ως εφαρμογή του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 2.20. *Αν $P, P_3, \dots, P_n$ είναι ισχυρώς ισομορφικά, απλά πολύτοπα α -τύπου $\mathcal{A}$ και αν $Z \in \mathbb{R}^N$, τότε*

$$V(Z, P, P_3, \dots, P_n)^2 \geq V(Z, Z, P_3, \dots, P_n)V(P, P, P_3, \dots, P_n).$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $Z = \lambda \bar{P} + A$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και A είναι το διάνυσμα στήριξης κάποιου σημείου.

Απόδειξη. Εισάγουμε την συμμετρική διγραμμική μορφή Φ στον $\mathbb{R}^N$, όπου $\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ με τύπο

$$\Phi(X, Y) := V(X, Y, P_3, \dots, P_n),$$

για $n \geq 2$. Αν $n = 2$ τότε παραλείπουμε τους όρους $P_3, \dots, P_n$. Για την απόδειξη του θεωρήματος 2.20 αρκεί να αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση (1). *Αν $\Phi(Z, P) = 0$, τότε $\Phi(Z, Z) \leq 0$ και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν Z είναι διάνυσμα στήριξης κάποιου σημείου.*

Πράγματι, αν υποθέσουμε πως η (1) είναι αληθής, τότε δοθέντος $Z \in \mathbb{R}^N$, ορίζουμε $\lambda := \frac{\Phi(Z, P)}{\Phi(P, P)}$ και $Z' = Z - \lambda \bar{P}$. Τότε $\Phi(Z', P) = 0$ και ως εκ τούτου $\Phi(Z', Z') \leq 0$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν Z' είναι διάνυσμα στήριξης για κάποιο σημείο. Τέλος από

$$\Phi(Z', Z') = \Phi(Z, Z) \frac{\Phi(Z, P)^2}{\Phi(P, P)},$$

έπεται ο ισχυρισμός του θεωρήματος.

Για να αποδείξουμε την Πρόταση (1) θεωρούμε αρχικά την ειδική περίπτωση του θεωρήματος, όπου $P_3 = \dots = P_n$.

Πρόταση (2). *Ισχύει η ανισότητα*

$$V(Z, P, \dots, P)^2 \geq V(Z, Z, P, \dots, P)V_n(P) \quad (2.41)$$

Αν $n = 2$, ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $Z = \lambda \bar{P} + A$, όπου A είναι διάνυσμα στήριξης σημείου.

Για την απόδειξη της παραπάνω, σημειώνουμε πως για αρκετά μικρό $\epsilon > 0$ το $\bar{P} + \epsilon Z$ είναι διάνυσμα στήριξης ενός πολυτόπου $Q \in \mathcal{A}$. Από τη γενικευμένη ανισότητα Minkowski έχουμε πως

$$\begin{aligned} 0 &\leq V(Q, P, \dots, P)^2 - V(Q, Q, P, \dots, P)V_n(P) \\ &= V(\bar{P} + \epsilon Z)^2 - V(\bar{P} + \epsilon Z, \bar{P} + \epsilon Z, P, \dots, P)V_n(P) \\ &= \epsilon^2[V(Z, P, \dots, P) - V(Z, Z, P, \dots, P)V_n(P)]. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (2.41). Αν $n = 2$, τότε από τη πρώτη ανισότητα Minkowski, η ισότητα στην (2.41) ισχύει αν και μόνο αν Q, P είναι ομοιόθετα. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της Πρότασης (2).

Αποδεικνύουμε την Πρόταση (1) με επαγωγή ως προς τη διάσταση n . Για $n = 2$ ο ισχυρισμός ισχύει, λόγω της Πρότασης (2). Υποθέτουμε πως $n \geq 3$ και πως ο ισχυρισμός της Πρότασης (1) ισχύει για μικρότερες διαστάσεις.

Για κάθε $i \in \{1, \dots, N\}$ ορίζουμε μια συμμετρική διγραμμική μορφή ϕ_i στο $\mathbb{R}^N$ ως

$$\phi_i(X, Y) := v(\Lambda_i X, \Lambda_i Y, F_i^{(4)}, \dots, F_i^{(n)}), \quad X, Y \in \mathbb{R}^n,$$

όπου παραλείπουμε του όρους $\Lambda_i Y, F_i^{(4)}, \dots, F_i^{(n)}$ αν $n = 3$.

Πρόταση (3). Το διάνυσμα $Z \in \mathbb{R}^N$ είναι ιδιοδιάνυσμα της διγραμμικής μορφής Φ με ιδιοτιμή 0 αν και μόνο αν Z είναι διάνυσμα στήριξης σημείου.

Για την απόδειξη, αρχικά παρατηρούμε πως

$$\Phi(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N x_i \phi_i(Y, P_3)$$

από (2.37). Έφοσον η $\phi_i(\cdot, P_3)$ είναι γραμμική, θα είναι της μορφής $\phi_i(Y, P_3) = \sum_{j=1}^N b_{ij} y_j$, άρα

$$\Phi(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^N b_{ij} x_i y_j \quad (2.42)$$

και καθώς η Φ είναι συμμετρική, έχουμε $b_{ij} = b_{ji}$. Αν $Z = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \neq 0$ είναι ιδιοδιάνυσμα της Φ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0, αυτό σημαίνει πως

$$\sum_{j=1}^N b_{ij} \zeta_j = 0, \quad \text{για } i = 1, \dots, N,$$

ή ισοδύναμα πως

$$\phi_i(Z, P_3) = 0, \quad \text{για } i = 1, \dots, N. \quad (2.43)$$

Αν το $Z = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ διάνυσμα στήριξης του σημείου z , τότε

$$\phi_i(Z, P_3) = v(\{z\}, F_i^{(3)}, \dots, F_i^{(n)}) = 0,$$

καθώς $\dim(\{z\}) = 0$. Αντίστροφα, έστω πως ισχύει η (2.43), από την επαγωγική υπόθεση, αυτό σημαίνει πως $\phi_i(Z, Z) \leq 0$ καθώς

$$\phi_i(Z, P_3) = 0 \Leftrightarrow v(\{z\}, P_3, F_i^{(3)}, \dots, F_i^{(n)}) = 0$$

είναι μικτός όγκος διάστασης $n-1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε πως $h(P_3, u_i) > 0$ (με παράλληλη μεταφορά έτσι ώστε $0 \in \text{int} P$). Τότε

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(2.43)}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \zeta_i \phi_i(Z, P_3) \\ &= \Phi(Z, Z) \\ &= V(Z, Z, P_3, \dots, P_n) \\ &= V(P_3, Z, Z, P_4, \dots, P_n) \\ &\stackrel{2.18}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N h(P_3, u_i) \phi_i(Z, Z) \leq 0. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, $\phi_i(Z, Z) = 0$, $\forall i = 1, \dots, N$. Από επαγωγική υπόθεση, αυτό συνεπάγεται πως $\Lambda_i Z$ είναι διάνυσμα στήριξης, ως προς τον α -τύπο του F_i , ενός σημείου z_i . Άρα $\Lambda_i Z = (\langle z_i, v_{i1} \rangle, \dots, \langle z_i, v_{iN} \rangle)$, όπου $v_{ij} := 0$ για $(i, j) \notin J$. Επιλέγουμε $\epsilon \neq 0$ τέτοιο ώστε το $\bar{P}_3 + \epsilon Z$ να είναι διάνυσμα στήριξης κάποιου πολυτόπου $Q \in \mathcal{A}$. Τότε η ισότητα

$$\Lambda_i(\bar{P}_3 + \epsilon Z) = \Lambda_i \bar{P}_3 + \epsilon \Lambda_i Z$$

δίνει

$$h(F(Q, u_i), v_{ij}) = h(F_i^{(3)}, v_{ij}) + \epsilon \langle z_i, v_{ij} \rangle = h(F_i^{(3)} + \epsilon z_i, v_{ij})$$

και επομένως $F(Q, u_i) = F_i^{(3)} + t_i$ για κάποιο διάνυσμα $t_i = \epsilon z_i + a_i u_i$ για κάποιο $a_i \in \mathbb{R}$. Συμπεραίνουμε πως για $(i, j) \in J$ η $(n-2)$ -διάστατη πρόσοψη $G := F(Q, u_i) \cap F(Q, u_j)$ ικανοποιεί $G = F_{ij}^{(3)} + t_i$ και $G = F_{ij}^{(3)} + t_j$. Ως εκ τούτου, $t_i = t_j$. Εφόσον οποιεσδήποτε δύο έδρες του P_3 μπορούν να ενωθούν με αλυσίδα εδρών τέτοια ώστε οποιοδήποτε ζεύγος διαδοχικών εδρών στην αλυσίδα να έχουν $(n-2)$ -διάστατη τομή, συμπαιρνουμε πως $t_i = t_j$ για όλα τα ζεύγη (i, j) . Επομένως το Q είναι παράλληλη μεταφορά του P_3 και ως εκ τούτου, το Z είναι διάνυσμα στήριξης κάποιου σημείου. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της Πρότασης (3).

Εισάγουμε μια συμμετρική διγραμμική μορφή $\Psi : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$\Psi(X, Y) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \frac{\phi_i(P, P_3)}{h(P, u_i)} x_i y_i, \text{ για } X, Y \in \mathbb{R}^N.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας πως $h(P, u_i) > 0$, $\forall i = 1, \dots, N$ (παράλληλη μεταφορά). Εφόσον $\phi_i(P, P_3) > 0$, η μορφή Ψ είναι θετικά οριστική. Θεωρούμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots$ της Φ ως προς την Ψ και χρησιμοποιούμε το γεγονός πως

$$\lambda_1 = \max\{\Phi(X, X) : \Psi(X, X) = 1\} \quad (2.44)$$

$$\lambda_2 = \max\{\Phi(X, X) : \Psi(X, X) = 1, \text{ και } \Psi(X, Y) = 0, \text{ για όλα τα } Y \text{ στον } \lambda_1 - \text{ιδιόχωρο}\}. \quad (2.45)$$

Σε αντιστοιχία με την (2.42) γράφουμε $\Psi(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^N c_{ij} x_i y_j$, όπου

$$c_{ij} = \begin{cases} \frac{\phi_i(P, P_3)}{h(P, u_i)} & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}.$$

Τότε $Z = (\zeta_1, \dots, \zeta_N) \in \mathbb{R}^N$ είναι ιδιοδιάνυσμα της Φ ως προς την Ψ με ιδιοτιμή λ αν και μόνο αν $\sum_{j=1}^N (b_{ij} - \lambda c_{ij}) \zeta_j = 0$, για $i = 1, \dots, N$ ή ισοδύναμα αν $\phi_i(Z, P_3) = \lambda \frac{\phi_i(P, P_3)}{h(P, u_i)} \zeta_i$, για $i = 1, \dots, N$. Ειδικότερα, $\lambda = 1$ είναι ιδιοτιμή με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $Z = \bar{P}$.

Πρόταση (4). Η μόνη θετική ιδιοτιμή της Φ ως προς την Ψ είναι το 1 και είναι απλή.

Για την απόδειξη, αρχικά υποθέτουμε πως $P = P_3 = \dots = P_n$ και έστω πως η Πρόταση (4) δεν ισχύει σε αυτή τη περίπτωση. Αν υπάρχει θετική ιδιοτιμή $\mu \neq 1$, τότε υπάρχει $Z \in \mathbb{R}^N$ με $\Psi(Z, P) = 0$ και $\Phi(Z, Z) = \mu \Psi(Z, Z) > 0$.

Αν το 1 δεν είναι απλή ιδιοτιμή, τότε ο αντίστοιχος ιδιόχωρος έχει διάσταση τουλάχιστον 2 και ως εκ τούτου περιέχει κάποιο διάνυσμα Z με $\Psi(Z, P) = 0$ και $\Phi(Z, Z) = \Psi(Z, Z) > 0$. Επομένως, σε κάθε περίπτωση συμπεραίνουμε μέσω της σχέσης

$$\Psi(Z, P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \frac{\phi_i(P, P)}{h(P, u_i)} \zeta_i h(P, u_i) = V(Z, P, P, \dots, P)$$

πως $V(Z, P, \dots, P) = 0$. Εφόσον $V(Z, Z, P, \dots, P) = \Phi(Z, Z) > 0$, αυτό από την Πρόταση (3) οδηγεί σε αντίφαση.

Έστω τυχόντα $P_3, \dots, P_n \in \mathcal{A}$. Για $\theta \in [0, 1]$ ορίζουμε $P_r(\theta) := (1 - \theta)P + \theta P_r$, $r = 3, \dots, n$. Οι συντελεστές των αντίστοιχων μορφών Φ, Ψ εξαρτώνται κατά συνεχή τρόπο από το θ , ως εκ τούτου το ίδιο θα ισχύει και για τις αντίστοιχες ιδιοτιμές. Από Πρόταση (3), ο αριθμός 0 είναι πάντα ιδιοτιμή με πολλαπλότητα n . Από αυτό συμπεραίνουμε πως το άθροισμα των πολλαπλοτήτων των θετικών ιδιοτιμών είναι ανεξάρτητο του θ . Αφού αυτό είναι 1 για την περίπτωση $\theta = 0$, θα είναι 1 και για την περίπτωση $\theta = 1$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της Πρότασης (4).

Η Πρόταση (4) συνεπάγεται πως ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1 συμπίπτει με το $\text{lin}\{\bar{P}\}$ και πως η δεύτερη ιδιοτιμή δεν είναι θετική και ως εκ τούτου, $\Phi(Z, Z) \leq 0$ για κάθε Z τέτοιο ώστε $\Psi(Z, P) = 0 \Leftrightarrow \Phi(Z, P) = 0$. Επομένως η συνθήκη $\Phi(Z, P) = 0$ συνεπάγεται πως $\Phi(Z, Z) \leq 0$. Έστω πως έχουμε ισότητα για κάποιο $Z \neq 0$. Εφόσον στη σχέση (2.45) επιτυγχάνουμε μέγιστη τιμή για Z , το Z είναι ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή 0. Από Πρόταση (3), το Z θα είναι διάνυσμα στήριξης σημείου. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος 2.20. $\square$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΤΗΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ MINKOWSKI

3.1 Εισαγωγή στο πρόβλημα

Η συστηματική μελέτη της γεωμετρίας των κυρτών σωμάτων ουσιαστικά έχει τις ρίζες της στο έργο των Brunn και Steiner περί το 1880. Παρόλα αυτά η παρακαταθήκη του Minkowski είναι κατά γενική ομολογία αυτή που έθεσε τα θεμέλια για το σύγχρονο κλάδο της κυρτής γεωμετρίας. Ο Minkowski είναι αυτός που εισήγαγε για πρώτη φορά τις έννοιες του μικτού όγκου και τις σχετικές με αυτόν ανισότητες που έμελαν να παίζουν κυρίαρχο ρόλο στη σύγχρονη θεωρία. Στόχος αυτής της εργασίας είναι να δώσουμε απάντηση σε ένα βασικό ερώτημα που έθεσε ο ίδιος ο Minkowski περισσότερο από ένα αιώνα πριν που έως πρόσφατα ήταν ανοιχτό πρόβλημα.

Ο Minkowski έχοντας θεμελιώσει την έννοια του μικτού όγκου, απέδειξε πως πολλές γεωμετρικές ιδιότητες κυρτών σωμάτων μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει μικτών όγκων. Ο Minkowski απέδειξε [βλ. 12, σελ.479] την ακόλουθη θεμελιώδη ανισότητα μεταξύ τριών κυρτών σωμάτων K, L, M του $\mathbb{R}^3$:

$$V(K, L, M)^2 \geq V(K, K, M)V(L, L, M). \quad (3.1)$$

Η (3.1) αποτελεί ειδική περίπτωση της ανισότητας Alexandrov-Fenchel. Θα αναφερόμαστε στην (3.1) ως (3—διάστατη περίπτωση) της τετραγωνικής ανισότητας Minkowski. Αυτή η ανισότητα έχει μεγάλο εύρος εφαρμογών, καθώς ειδικές περιπτώσεις αυτής αποδεικνύεται πως αποτελούν, μεταξύ άλλων, η κλασική ισοπεριμετρική ανισότητα, η ανισότητα Brunn-Minkowski και η ανισότητα Urysohn. Το βασικό ενδιαφέρον μας εδώ είναι να απαντήσουμε για ποιες επιλογές κυρτών σωμάτων K, L, M ισχύει η ισότητα στην (3.1).

Το ερώτημα αυτό, ισοδύναμα, αλλά διατυπωμένο σε διαφορετικά πλαίσια θέτει για πρώτη φορά σε paper του, ο Minkowski το 1903. Στο εξής, θα ασχοληθούμε με τη γενική περίπτωση n —διάστατων κυρτών σωμάτων. Αν $K_1, \dots, K_m$ είναι κυρτά σώματα του $\mathbb{R}^n$, τότε έχουμε

$$V_n(\lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_m K_m) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^m \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_m} V(K_{i_1}, \dots, K_{i_m}). \quad (3.2)$$

Επαναλαμβάνοντας την απόδειξη της (3.1) σε μεγαλύτερη διάσταση προκύπτει το ακόλουθο [βλ. 3, σελ.99].

Θεώρημα 3.1. *Τετραγωνική ανισότητα Minkowski*

$$V(K, L, M, \dots, M)^2 \geq V(K, K, M, \dots, M)V(L, L, M, \dots, M) \quad (3.3)$$

για όλα τα κυρτά σώματα K, L, M στο $\mathbb{R}^n$.

Ένας από τους στόχους αυτής της μεταπτυχιακής διατριβής είναι ο χαρακτηρισμός των περιπτώσεων ισότητας στην (3.3) στην περίπτωση όπου $M \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό σώμα πλήρους διάστασης, ή αλλιώς, με μη κενό εσωτερικό. Σημειώνουμε εδώ πως οι Yair Shenfeld και Ramon Van Handel στη κοινή τους δημοσίευση [15] δίνουν πλήρη χαρακτηρισμό των περιπτώσεων ισότητας στην (3.3) και για την περίπτωση όπου M έχει κενό εσωτερικό, αλλά αυτό ξεφεύγει από τους στόχους μας.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα επιβεβαιώνει μια εικασία του Schneider [13]. [βλ. 14, ΚΕΦ.7.6]

Θεώρημα 3.2. *Ακρότατα: (περίπτωση πλήρους διάστασης) Έστω $M \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό σώμα με μη κενό εσωτερικό και $K, L \subset \mathbb{R}^n$ τυχόντα κυρτά σώματα, τέτοια ώστε*

$$V(L, L, M, \dots, M) > 0$$

. Τότε έχουμε

$$V(K, L, M, \dots, M)^2 = V(K, K, M, \dots, M)V(L, L, M, \dots, M)$$

αν και μόνο αν υπάρχουν $\alpha \geq 0$ και $v \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε τα K και $\alpha L + v$ να έχουν τα ίδια επίπεδα στήριξης σε όλες τις 1-ακραίες κάθετες διευθύνσεις του M .

Αν το M είναι χαμηλότερης διάστασης, το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει, και προκύπτουν περισσότερα ακρότατα. Χάριν πληρότητας παραθέτουμε χωρίς απόδειξη το αντίστοιχο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.3. *Ακρότατα: (περίπτωση χαμηλότερης διάστασης) Έστω $M \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό σώμα με κενό εσωτερικό, τέτοιο ώστε $M - M \subset w^\perp$ για κάποιο $w \in S^{n-1}$. Έστω $K, L \subset \mathbb{R}^n$ τυχόντα κυρτά σώματα με $V(L, L, M, \dots, M) > 0$ Τότε έχουμε*

$$V(K, L, M, \dots, M)^2 = V(K, K, M, \dots, M)V(L, L, M, \dots, M)$$

αν και μόνο αν $\tilde{L} := \frac{V(K, L, M, \dots, M)}{V(L, L, M, \dots, M)}L$ είναι τέτοιο ώστε τα $K + F(\tilde{L}, w)$ και $\tilde{L} + F(K, w)$ να έχουν τα ίδια επίπεδα στήριξης σε όλες τις 1-ακραίες κάθετες διευθύνσεις του M .

Η μόνη περίπτωση που μένει να λάβουμε υπόψιν είναι όταν $V(L, L, M, \dots, M) = 0$, για την οποία ο μόνος τρόπος να ισχύσει η (3.3) ως ισότητα είναι να έχουμε

$$V(K, L, M, \dots, M) = 0.$$

Θεώρημα 3.4. *Ακρότατα: (τετριμμένη περίπτωση) Έστω $K, L, M \subset \mathbb{R}^n$ κυρτά σώματα τέτοια ώστε $V(L, L, M, \dots, M) = 0$. Τότε έχουμε*

$$V(K, L, M, \dots, M)^2 = V(K, K, M, \dots, M)V(L, L, M, \dots, M)$$

αν και μόνο αν ισχύει ένα από τα ακόλουθα: $\dim K = 0$, $\dim L = 0$, $\dim(K + L) < 2$, $\dim M < n - 2$, $\dim(K + M) < n - 1$, $\dim(L + M) < n - 1$, $\dim(K + L + M) < n$.

Παρατηρούμε επίσης πως, $V(L, L, M, \dots, M) = 0$ αν και μόνο αν $\dim L < 2$, $\dim M < n - 2$ ή $\dim(L + M) < n$. Το μόνο εργαλείο που χρησιμοποιείται κατά την απόδειξη της τετριμμένης περίπτωσης είναι το θεώρημα 2.14.

3.2 Διάγραμμα

3.2.1 Μέθοδος Hilbert

Στα ακόλουθα, ταυτίζουμε ένα κυρτό σώμα K με τη συνάρτηση στήριξής του

$$h_K(u) := \sup_{y \in K} \langle y, u \rangle.$$

Από γεωμετρικής σκοπιάς, αν $u \in S^{n-1}$ και $0 \in \text{int}K$, τότε $h_K(u)$ είναι η απόσταση του επιπέδου στήριξης του K στη κατεύθυνση u από την αρχή των αξόνων. Καθώς κάθε κυρτό σώμα είναι η τομή των επιπέδων στήριξής του, η συνάρτηση $h_K : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ καθορίζει μοναδικά το K . Υπενθυμίζουμε πως οι συναρτήσεις στήριξης έχουν την ιδιότητα $h_{\lambda K + \mu L} = \lambda h_K + \mu h_L$, με άλλα λόγια, απεικονίζουν γραμμικούς συνδιασμούς κυρτών σωμάτων σε γραμμικούς συνδιασμούς συναρτήσεων. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να δούμε την απεικόνιση

$$(h_K, h_L) \mapsto V(K, L, M, \dots, M)$$

ως μια συμμετρική τετραγωνική μορφή των συναρτήσεων στήριξης. Από τη γραμμικότητα των μιγτών όγκων, αυτή η τετραγωνική μορφή μπορεί να επεκταθεί με μοναδικό τρόπο στο γραμμικό διανυσματικό χώρο διαφορών συναρτήσεων στήριξης. Η περίπτωση 3.3 της ανισότητας Minkowski λέει πως αυτή η τετραγωνική μορφή ικανοποιεί μια αντίστροφη ανισότητα Cauchy-Schwarz. Αναζητούμε, επομένως, τις τετραγωνικές μορφές που ικανοποιούν αντίστροφη Cauchy-Schwarz. Ένας χρήσιμος χαρακτηρισμός αυτών προκύπτει αν θεωρήσουμε κλειστές συμμετρικές τετραγωνικές μορφές πάνω σε χώρο Hilbert [4], δηλαδή μορφές $\mathcal{E}(f, g) = \langle f, Ag \rangle$ που σχετίζονται με κάποιο αυτοσυζυγή τελεστή $\mathcal{A}$. Αυτό το υπόβαθρο μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε αποτελέσματα φασματικής θεωρίας. Πιο συγκεκριμένα, η $\mathcal{E}$ ικανοποιεί αντίστροφη Cauchy-Schwarz αν και μόνο αν ο $\mathcal{A}$ έχει μονοδιάστατο θετικό ιδιόχωρο. Θα αποδείξουμε παρακάτω το ακόλουθο λήμμα για αυτοσυζυγείς τελεστές σε χώρο Hilbert.

Λήμμα 3.5. Έστω $\mathcal{A}$ αυτοσυζυγής τελεστής σε χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ με $0 < \sup \text{spec} \mathcal{A} < \infty$ και έστω $\mathcal{E}(f, g)$ η συσχετισμένη κλειστή τετραγωνική μορφή. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. $\mathcal{E}(f, g)^2 \geq \mathcal{E}(f, f)\mathcal{E}(g, g)$ για όλα τα $f, g \in \text{Dom} \mathcal{E}$ τέτοια ώστε $\mathcal{E}(g, g) > 0$.

2. $\text{rank}_{1(0, \infty)}(\mathcal{A}) = 1$

Ακόμη, αν κάποια (άρα και οι δύο) από τις παραπάνω συνθήκες αληθεύει, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα, δοθέντων $f, g \in \text{Dom} \mathcal{E}$ τέτοιων ώστε $\mathcal{E}(g, g) > 0$.

3. $\mathcal{E}(f, g)^2 = \mathcal{E}(f, f)\mathcal{E}(g, g)$.

4. $f - ag \in \ker \mathcal{A} \subset \text{Dom} \mathcal{A}$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει η συνθήκη 2.

$$\text{rank}_{1(0, \infty)}(\mathcal{A}) = 1 \Leftrightarrow \dim \text{Im}(1_{(0, \infty)}(\mathcal{A})) = 1 \Leftrightarrow \dim(1_{(0, \infty)}(\mathcal{A})(\mathcal{H})) = 1. \text{ Είναι}$$

$$1_{(0, \infty)}(\mathcal{A}) = \int_{\sigma(\mathcal{A})} 1_{(0, \infty)}(\lambda) d\mu^{\mathcal{A}}(\lambda)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \infty)} 1 d\mu^{\mathcal{A}}(\lambda) \\
&= \mu^{\mathcal{A}}(\sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \infty)) \\
&\stackrel{(B'.16)}{=} V_{\sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \infty)}
\end{aligned}$$

Επομένως $\text{rank} 1_{(0, \infty)}(\mathcal{A}) = 1 \Rightarrow \exists v \in \text{Dom} \mathcal{A} : \mathcal{A}v = \lambda v, \lambda > 0$ και $\mathcal{E}(h, h) \leq 0$ για κάθε $h \in \text{Dom} \mathcal{E}$ με $h \perp v$. Αυτό συμβαίνει διότι $V_{\sigma(\mathcal{A})} = \mathcal{H} \Rightarrow V_{\sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \infty)} \oplus V_{\sigma(\mathcal{A}) \cap (-\infty, 0]} = \mathcal{H} \Rightarrow V_{\sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \infty)} \perp V_{\sigma(\mathcal{A}) \cap (-\infty, 0]}$. Εφόσον $v \in V_{\sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \infty)}$ με $\dim V_{\sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \infty)} = 1$, τότε $h \perp v \Rightarrow h \in V_{\sigma(\mathcal{A}) \cap (-\infty, 0]} \Rightarrow \mathcal{E}(h, h) = \langle h, \mathcal{A}h \rangle \leq 0, \forall h \in \text{Dom} \mathcal{E}$, με $h \perp v$. Έστω $f, g \in \text{Dom} \mathcal{E}$ τέτοια ώστε $\mathcal{E}(g, g) > 0$. Τότε $\langle g, v \rangle \neq 0$ λόγω της (3.11) Καθώς $\mathcal{E}(g, g) > 0 \Rightarrow \langle g, \mathcal{A}g \rangle > 0 \Rightarrow g \not\perp v$.

Ορίζουμε $z = f - \alpha g$, όπου $\alpha = \frac{\langle f, v \rangle}{\langle g, v \rangle}$. Τότε $z \perp v$. Επομένως

$$0 \geq \mathcal{E}(z, z) = \langle f - \alpha g, \mathcal{A}(f - \alpha g) \rangle = \dots = \mathcal{E}(f, f) - 2\alpha \mathcal{E}(f, g) + \alpha^2 \mathcal{E}(g, g)$$

Η τελευταία παράσταση είναι πολυώνυμο δεύτερου βαθμού ως προς α με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $\mathcal{E}(g, g) > 0$. Παραγωγίζουμε ως προς α και βρίσκουμε το σημείο όπου μηδενίζεται η παράγωγος, αυτό θα είναι το ολικό ελάχιστο. Επομένως έχουμε

$$0 \geq \mathcal{E}(z, z) = \mathcal{E}(f, f) - 2\alpha \mathcal{E}(f, g) + \alpha^2 \mathcal{E}(g, g) \geq \mathcal{E}(f, f) - \frac{\mathcal{E}(f, g)^2}{\mathcal{E}(g, g)}$$

Κι άρα $\mathcal{E}(f, g)^2 \geq \mathcal{E}(f, f)\mathcal{E}(g, g)$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση ($1 \Rightarrow 2$) :

Έστω πως δεν ισχύει η συνθήκη 2. Εφόσον $0 < \sup \text{spec} \mathcal{A} < \infty$, από φασματικό θεώρημα έχουμε $\mathcal{H}_+ := 1_{(0, \infty)}(\mathcal{A})\mathcal{H} = \text{Range}(1_{(0, \infty)}(\mathcal{A}))$ ικανοποιεί $\mathcal{H}_+ \subset \text{Dom} \mathcal{A}$, $\mathcal{A}\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_+$. $\dim \mathcal{H}_+ \geq 2$ και $\mathcal{E}(g, g) > 0$ για $g \in \mathcal{H}_+ \setminus \{0\}$.

Αρχικά, $0 < \sup \text{spec} \mathcal{A} < \infty \Rightarrow \int_{\sigma(\mathcal{A})} 1_{(0, \infty)}(\lambda) d\mu^{\mathcal{A}}(\lambda) = \int_{\sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \infty)} 1 d\mu^{\mathcal{A}}(\lambda) \neq 0$, διότι $\sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \infty) \neq \emptyset$. Επομένως $\text{rank} 1_{(0, \infty)}(\mathcal{A}) \neq 0$. Σε συνδιασμό με την υπόθεση πως δεν ισχύει η 2, υποχρεωτικά θα ισχύει $\dim \mathcal{H}_+ \geq 2$.

Έπειτα,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_+ := 1_{(0, \infty)}(\mathcal{A})\mathcal{H} &= \text{Range}(1_{(0, \infty)}(\mathcal{A})) \\
&= \text{Range} \left(\int_{\sigma(\mathcal{A})} 1_{(0, \infty)}(\lambda) d\mu^{\mathcal{A}}(\lambda) \right) \\
&= \text{Range} \left(\int_{\sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \infty)} 1 d\mu^{\mathcal{A}}(\lambda) \right) \\
&= \text{Range}(\mu^{\mathcal{A}}(\sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \infty))) \\
&= V_{\sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \infty)}.
\end{aligned}$$

Όμως $0 < \sup \text{spec} \mathcal{A} < \infty$ κι έστω $\lambda_0 = \sup \text{spec} \mathcal{A}$, τότε $\sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \infty) \subset \sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \lambda_0] \subset (0, \lambda_0]$, που είναι φραγμένο. Επομένως από πρόταση B'.18 έχουμε $V_{\sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \infty)} = \mathcal{H}_+ \subset \text{Dom} \mathcal{A}$.

Τέλος, εφόσον $\sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \infty)$ είναι φραγμένο, από πρόταση B'.18 ο $\mathcal{A}|_{V_{\sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \infty)}}$ είναι φραγμένος τελεστής, και από B'.10, ως φραγμένος τελεστής στον υπόχωρο $V_{\sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \infty)}$ που είναι αναλλοίωτος ως προς τον $\mathcal{A}$, έχουμε πως $\mathcal{A}\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}_+$.

Με άλλα λόγια, ο $\mathcal{A}$ είναι ένας θετικά οριστικός τελεστής στο θετικό ιδιόχωρό του, που έχει διάσταση τουλάχιστον 2. Θεωρούμε τυχόν $g \in \mathcal{H}_+ \setminus \{0\}$ και ένα $f \in \mathcal{H}_+$ τέτοιο ώστε $f \perp \mathcal{A}g$. Η ύπαρξη τέτοιων στοιχείων εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι $\dim \mathcal{H}_+ \geq 2 \Rightarrow \exists f, g \in \mathcal{H}_+$ με $f \perp g$ και $\mathcal{H}_+$ αναλλοίωτος ως προς τον $\mathcal{A}$ σημαίνει πως $\mathcal{A}f \in \mathcal{H}_+$.

Παρατηρούμε πως $0 \neq f \in \mathcal{H}_+ \Rightarrow f \in \text{Range}(\int_{\sigma(\mathcal{A})} 1_{(0, \infty)}(\lambda) d\mu^{\mathcal{A}}(\lambda)) \Rightarrow \exists h \in H : f = 1_{(0, \infty)}(\mathcal{A})(h)$. Άρα $f = \int_{\sigma(\mathcal{A})} 1_{(0, \infty)}(\lambda) d\mu^{\mathcal{A}}(\lambda)(h)$. Αφού όμως $\mu^{\mathcal{A}}$ είναι pnm, αυτό σημαίνει πως $\int_{\sigma(\mathcal{A})} 1_{(0, \infty)}(\lambda) d\mu^{\mathcal{A}}(\lambda)$ είναι κάποιος προβολικός τελεστής E με $E^2 = E$ και $E = E^*$. Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f, f) &= \langle \mathcal{A}f, f \rangle \\ &= \left\langle \int_{\sigma(\mathcal{A})} \lambda d\mu^{\mathcal{A}}(\lambda) \int_{\sigma(\mathcal{A})} 1_{(0, \infty)}(\lambda) d\mu^{\mathcal{A}}(\lambda)(h), \int_{\sigma(\mathcal{A})} 1_{(0, \infty)}(\lambda) d\mu^{\mathcal{A}}(\lambda)(h) \right\rangle \\ &= \left\langle \int_{\sigma(\mathcal{A})} \lambda 1_{(0, \infty)}(\lambda) d\mu^{\mathcal{A}}(\lambda)(h), \int_{\sigma(\mathcal{A})} 1_{(0, \infty)}(\lambda) d\mu^{\mathcal{A}}(\lambda)(h) \right\rangle \\ &= \left\langle \int_{\sigma(\mathcal{A})} \lambda 1_{(0, \infty)}(\lambda) d\mu^{\mathcal{A}}(\lambda)(h), h \right\rangle \\ &= \left\langle \int_{\sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \infty)} \lambda d\mu^{\mathcal{A}}(\lambda)(h), h \right\rangle \\ &= \int_{\sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \infty)} \lambda d\mu_h^{\mathcal{A}}(\lambda). \end{aligned}$$

Θα είναι $\mathcal{E}(f, f) > 0$, διότι αν

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f, f) = 0 &\Leftrightarrow \int_{\sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \infty)} \lambda d\mu_h^{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \\ &\stackrel{\lambda \geq 0}{\Leftrightarrow} \mu_h^{\mathcal{A}} = 0, \end{aligned}$$

όμως

$$0 \neq f = \int_{\sigma(\mathcal{A})} 1_{(0, \infty)}(\lambda) d\mu^{\mathcal{A}}(\lambda)(h),$$

και επομένως

$$\begin{aligned} 0 &\neq \langle f, f \rangle \\ &= \left\langle \int_{\sigma(\mathcal{A})} 1_{(0, \infty)}(\lambda) d\mu^{\mathcal{A}}(\lambda)(h), \int_{\sigma(\mathcal{A})} 1_{(0, \infty)}(\lambda) d\mu^{\mathcal{A}}(\lambda)(h) \right\rangle \\ &= \left\langle \int_{\sigma(\mathcal{A})} 1_{(0, \infty)}(\lambda) d\mu^{\mathcal{A}}(\lambda)(h), h \right\rangle \\ &= \int_{\sigma(\mathcal{A}) \cap (0, \infty)} d\mu_h^{\mathcal{A}}(\lambda) = 0, \end{aligned}$$

που είναι άτοπο. Τελικά έχουμε

$$\mathcal{E}(f, f) > 0, \mathcal{E}(g, g) > 0, \text{ αφού } f, g \in \mathcal{H}_+$$

και

$$\mathcal{E}(f, g) = \langle f, \mathcal{A}g \rangle = \langle g, \mathcal{A}f \rangle = 0.$$

Καταλήξαμε σε άτοπο, καθώς αυτό παραβιάζει τη συνθήκη 1 που ήταν η αρχική μας υπόθεση. Το άτοπο προέκυψε επειδή υποθέσαμε πως ισχύει η 1 και δεν ισχύει η 2. Επομένως έχουμε $(1 \Rightarrow 2)$

Για την απόδειξη $(3 \Rightarrow 4)$:

Έστω πως ισχύει η συνθήκη 3. Τότε κάθε ανισότητα στην απόδειξη $(2 \Rightarrow 1)$ γίνεται ισότητα. Ειδικότερα, $\mathcal{E}(z, z) = 0$. Από φασματικό θεώρημα έχουμε $z \in \mathcal{H}_- := 1_{(-\infty, 0]}(\mathcal{A})\mathcal{H}$ και $\mathcal{A}$ μη θετικός στον $\mathcal{H}_-$. Από Λήμμα A.9 έχουμε $z \in \text{Dom } \mathcal{A}$ και $\mathcal{A}z = 0$. Ακριβώς ότι λέει η συνθήκη 4.

Για την απόδειξη $(4 \Rightarrow 3)$:

Έστω πως ισχύει η συνθήκη 4. Εφόσον $z = f - \alpha g \in \ker \mathcal{A}$, έχουμε $0 = \mathcal{E}(g, g) = \mathcal{E}(f, g) - \alpha \mathcal{E}(g, g)$, επομένως $\alpha = \frac{\mathcal{E}(f, g)}{\mathcal{E}(g, g)}$. Όμως τότε

$$0 = \mathcal{E}(z, z) = \mathcal{E}(f, f) - \frac{\mathcal{E}(f, g)^2}{\mathcal{E}(g, g)},$$

καθώς $z \in \ker \mathcal{A}$. □

Αρχικά, δεν είναι εμφανές πως οι μικτοί όγκοι ταιριάζουν στο παραπάνω υπόβαθρο. Ο Hilbert συνειδητοποίησε πως για C_+^2 ομαλά σώματα, ένας κλασικός τρόπος αναπαράστασης των μικτών όγκων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να γράψουμε

$$V(K, L, M, \dots, M) = \langle h_K, \mathcal{A}h_L \rangle_{L^2(\omega)},$$

όπου το ω είναι το επιφανειακό μέτρο στην S^{n-1} και $\mathcal{A}$ κάποιος ελλειπτικός διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης. Θεωρία περί ομαλότητας ελλειπτικών διαφορικών τελεστών δίνει πως ο $\mathcal{A}$ είναι ουσιαστικά αυτοσυζυγής και έχει συμπαγή επιλύουσα (resolvent). Ο Hilbert [8] εκμεταλλεύτηκε αυτή την ομαλότητα για να αποκτήσει τη δεύτερη συνθήκη του 3.5. Αυτό αποδεικνύει την ανισότητα Minkowski για λεία σώματα M , και η γενική περίπτωση προκύπτει προσεγγιστικά με ακολουθίες.

Σε ένα βήμα κλειδί στην απόδειξή του, ο Hilbert αποδεικνύει πως ο πυρήνας

$$\ker \mathcal{A} = \{x \mapsto \langle v, x \rangle : v \in \mathbb{R}^n\}$$

αποτελείται ακριβώς από γραμμικές συναρτήσεις, περιορισμένες στην S^{n-1} . Επομένως, για λεία σώματα M , το 3.5 υποδεικνύει πως η ισότητα στην Minkowski ισχύει αν και μόνο αν $h_K - ah_L = \langle v, \cdot \rangle$ για κάποια a, v , με άλλα λόγια, αν και μόνο αν τα K, L είναι ομοιόθετα $K = aL + v$.

Τα παραπάνω δείχνουν πως η υπόθεση λειότητας που εισήγαγε ο Hilbert κατά την απόδειξη της ανισότητας Minkowski, εξουδετερώνει κάθε πιθανότητας ύπαρξης μη τετριμμένων ακροτάτων σε αυτή. Η κύρια δυσκολία που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε είναι να δώσουμε νόημα στις παραπάνω έννοιες για τυχόντα σώματα M .

3.2.2 Μικτοί όγκοι

Η απόδειξη πως οι μικτοί όγκοι επιδέχονται αυτοσυζυγείς αναπαραστάσεις για μη λεία σώματα M αποτελεί ένα σύνθετο πρόβλημα. Για παράδειγμα, αποδεικνύεται πως αν M πολύτοπο, η τετραγωνική μορφή $(h_K, h_L) \mapsto V(K, L, M, \dots, M)$ δεν είναι closable A'5 στον $L^2(\omega)$ και επομένως δεν επιδέχεται καμία αυτοσυζυγή αναπαράσταση σε αυτό το χώρο. Για αυτό το λόγο, αυτοσυζυγείς αναπαραστάσεις εμφανίζονται στη βιβλιογραφία σε ειδικές περιπτώσεις μόνο, όπως για λεία σώματα από τον Hilbert [8] και για κάποιες οικογένειες πολύτοπων με κοινά κάθετα διανύσματα πλευρών από τον Alexandron [1]. Ένα πρώτο βήμα στη μελέτη των ακροτάτων της ανισότητας Minkowski είναι να δείξουμε πως οι μικτοί όγκοι πράγματι επιδέχονται αυτοσυζυγή αναπαράσταση για κάθε σώμα M , αρκεί να επιλέξουμε καταλλήλως το χώρο Hilbert στον οποίο θα εργαστούμε. Στα εξής θα συμβολίζουμε με $S_{K_1, \dots, K_{n-1}}$ το μικτό επιφανειακό μέτρο των κυρτών σωμάτων $K_1, \dots, K_{n-1}$ στην S^{n-1} , για ελάφρυνση του συμβολισμού.

Θεώρημα 3.6. Για κάθε κυρτό σώμα M υπάρχει αυτοσυζυγής τελεστής $\mathcal{A}$ στον χώρο $L^2(S_{B, M, \dots, M})$ τέτοιος ώστε η σχετισμένη κλειστή τετραγωνική μορφή $\mathcal{E}(f, g)$ ικανοποιεί $h_K, h_L \in \text{Dom} \mathcal{E}$ και $V(K, L, M, \dots, M) = \mathcal{E}(h_K, h_L)$ για όλα τα κυρτά σώματα K, L .

Ο παραπάνω τελεστής $\mathcal{A}$ αποτελεί τη θεμέλιο λίθο για να επεκτείνουμε τη μέθοδο του Hilbert σε τυχόντα κυρτά σώματα M .

Το θεώρημα 3.6 μαζί με το λήμμα 3.5 οδηγούν τη μελέτη των ακροτάτων της ανισότητας Minkowski σε μελέτη για το χαρακτηρισμό του πυρήνα $\ker \mathcal{A}$. Η ιδιότητα των μικτών όγκων να παραμένουν αναλλοίωτοι από παράλληλες μεταφορές δηλώνει πως ο πυρήνας $\ker \mathcal{A}$ πάντα περιέχει τις γραμμικές συναρτήσεις, άρα ομοιόθετα σώματα K, L κατά τετριμμένο τρόπο δίνουν την ισότητα. Σε αυτό παρατηρούμε πως υπάρχουν δύο μηχανισμοί για την εμφάνιση μη τετριμμένων ακροτάτων:

1. Ενδέχεται ο $\ker \mathcal{A}$ να είναι γνήσιο υπερσύνολο του συνόλου των γραμμικών συναρτήσεων. Τα επιπλέον (μη γραμμικά στοιχεία του) οδηγούν σε νέα ακρότατα.
2. Ακόμη κι αν ο $\ker \mathcal{A}$ περιέχει μόνο γραμμικές συναρτήσεις, μπορούν να προκύψουν επιπλέον ακρότατα καθώς το μέτρο $S_{B, M, \dots, M}$ δεν έχει αναγκαστικά φορέα σε όλη την S^{n-1} .

Επομένως, το λήμμα 3.5 εξασφαλίζει πως $h_K - ah_L = \langle v, \cdot \rangle S_{B, M, \dots, M}$ —σχεδόν παντού.

Αποκτούμε μια νέα οπτική γωνία για τα θεωρήματα 3.2 και 3.3. Το θεώρημα 3.2 δείχνει πως όταν το M έχει μη κενό εσωτερικό, ο $\ker \mathcal{A}$ αποτελείται μόνο από γραμμικές συναρτήσεις, δηλαδή εμφανίζεται μόνο ο δεύτερος μηχανισμός για σώματα πλήρους διάστασης. Εν αντιθέσει, και οι δύο μηχανισμοί εμφανίζονται όταν το σώμα M έχει κενό εσωτερικό, γεγονός που ερμηνεύει την ύπαρξη περισσότερων ακροτάτων στο θεώρημα 3.3.

3.2.3 Δύο ασθενή θεωρήματα

Αφετηρία για τη μελέτη ακροτάτων μιας ανισότητας είναι να εξετάσουμε προσεκτικά την απόδειξη της ανισότητας και να προσπαθήσουμε να τα εντοπίσουμε από εκεί. Στην ανισότητα Minkowski συναντάμε ένα θεμελιώδες εμπόδιο σε αυτή τη προσπάθεια. Λαμβάνοντας

υπόψιν το λήμμα 3.5 και θεώρημα 3.6 είναι εμφανές πως για τη μελέτη των ακροτάτων το σχετικό μέτρο είναι το $S_{B,M,\dots,M}$. Παρόλα αυτά, ένα άλλο μέτρο εμφανίζεται με φυσικό τρόπο, το $S_{M,\dots,M}$, στις διάφορες αποδείξεις της ανισότητας Minkowski [16][12][1]. Καθώς

$$\text{supp}S_{M,\dots,M} = \{u \in S^{n-1} : u \text{ είναι } 0\text{-ακραίο κάθετο διάνυσμα του } M,$$

ο φορέας του $S_{M,\dots,M}$ είναι, εν γένει, πολύ μικρότερο από εκείνο του $S_{B,M,\dots,M}$ και δεν επαρκεί για το χαρακτηρισμό των ακροτάτων. Θα αποδείξουμε πως αρκεί να βρεθούν τα ακρότατα της ανισότητας Minkowski στις 0-ακραίες κατευθύνσεις του M , διότι τότε η επέκτασή τους στις 1-ακραίες κατευθύνσεις προσδιορίζεται με μοναδικό τρόπο. Αυτή η ιδιότητα γεφυρώνει το χάσμα μεταξύ των πληροφοριών που αντλούμε από τις αποδείξεις της ανισότητας Minkowski και τα ακρότάτά της.

Αρχικά, θα χρησιμοποιήσουμε (χωρίς απόδειξη, διότι ξεφεύγει από τους στόχους της παρούσας εργασίας) ένα αποτέλεσμα των Kolesnikov και Milman[9][10] που μας δίνει ένα ασθενή έλεγχο των ακροτάτων.

Θεώρημα 3.7. Έστω K, L, M κυρτά σώματα τέτοια ώστε M έχει μη κενό εσωτερικό και $V(L, L, M, \dots, M) > 0$. Αν ισχύει η ισότητα στην 3.3 τότε υπάρχουν $a \geq 0$ και $v \in \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε $h_K(x) - ah_L(x) = \langle v, x \rangle$, $\forall x \in \text{supp}S_{M,\dots,M}$

Μία ποσοτική έκφραση του παραπάνω θεωρήματος που θα χρησιμοποιήσουμε για το πλήρη χαρακτηρισμό των ακροτάτων που αναζητούμε είναι το θεώρημα 3.29 [βλ. 15]. Το ακόλουθο παράδειγμα μας βοηθάει να αντιληφθούμε πως το θεώρημα 3.7 δίνει πράγματι πολύ ασθενείς πληροφορίες.

Παράδειγμα 3.8. Έστω M πολύτοπο, τότε οι 0-ακραίες κατευθύνσεις είναι ακριβώς τα κάθετα διανύσματα των πλευρών του. Επομένως αν $K \subset L = M$ είναι περίπτωση ισότητας, τότε το θεώρημα 3.7 συνεπάγεται μόνο ότι το K εφάπτεται σε κάθε πλευρά του M . Αν και αυτό είναι μια σημαντική πληροφορία από γεωμετρική σκοπιά, δεν επαρκεί για το χαρακτηρισμό των ακροτάτων. Αρκεί να θεωρήσουμε το ακόλουθο αντιπαράδειγμα, όπου K είναι η μοναδιαία μπάλα και $L = M$ ο μοναδιαίος κύβος. Τότε K εφάπτεται σε κάθε πλευρά του M , αλλά αυτό δεν αποτελεί περίπτωση ισότητας στην Minkowski

Έπειτα, θα βελτιώσουμε το συμπέρασμα του θεωρήματος 3.7 προκειμένου να χαρακτηρίσουμε τα ακρότατα. Η ακόλουθη ιδιότητα είναι ένα από τα βασικά αποτελέσματα που μελετάμε στην παρούσα εργασία.

Θεώρημα 3.9. Έστω K, L, M κυρτά σώματα του $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε M έχει μη κενό εσωτερικό και $V(L, L, M, \dots, M) > 0$. Αν ισχύει η ισότητα στην (3.3) και $h_K(x) = h_L(x)$ για όλα τα $x \in \text{supp}S_{M,\dots,M}$, τότε αναγκαστικά θα ισχύει $h_K(x) = h_L(x)$ για όλα τα $x \in \text{supp}S_{B,M,\dots,M}$.

Τα θεωρήματα 3.7 και 3.9 αποδεικνύονται σε ποσοτικές(quantitative) μορφές καθώς δεν έχουμε μια επαρκή περιγραφή του τελεστή $\mathcal{A}$ για αυθαίρετα κυρτά σώματα. Πιο συγκεκριμένα, για το θεώρημα 3.9 που θα μελετήσουμε διεξοδικά στη παρούσα διατριβή, θα αποδείξουμε μια ποσοτική μορφή του για πολύτοπα, όπου σε αυτή τη περίπτωση ο τελεστής $\mathcal{A}$ είναι κβαντικός γράφος(quantum graph) και η απόδεικτική διαδικασία είναι ουσιαστικά

μια εκτίμηση (stability estimate) της λύσης του προβλήματος Dirichlet για τον $\mathcal{A}$ με συνοριακά δεδομένα στο $\text{supp}S_{M,\dots,M}$. Ένα σημαντικό μέρος της απόδειξης αυτής είναι να προσδιορίσουμε την κατάλληλη ποσοτική έκφραση που δεν εκφυλλίζεται όταν εφαρμόσουμε την απαραίτητη οριακή διαδικασία για την προσέγγιση τυχόν κυρτού σώματος M .

3.3 Προαπαιτούμενα και συμβολισμοί

Στην παρούσα ενότητα θα κάνουμε μια σύντομη υπενθύμιση των βασικότερων αποτελεσμάτων που θα χρειαστούμε σχετικά με μικτούς όγκους κι επιφανειακά μέτρα. Ακόμη, θα αναφέρουμε, επί το πλείστον χωρίς απόδειξη, μια σειρά από αποτελέσματα και ορισμούς συναρτησιακής ανάλυσης. Ειδικότερα θα χρειαστούμε έννοιες όπως την Friedrichs επέκταση ενός τελεστή, κλειστές τετραγωνικές μορφές σε χώρους Hilbert, το φασματικό θεώρημα για φραγμένους γραμμικούς τελεστές, καθώς και την ολοκλήρωση ως προς projection valued measures.

Κάνουμε την ακόλουθη σύμβαση περί συμβολισμού. Συχνά εμφανίζονται μικτοί όγκοι $V(K, L, C_1, \dots, C_{n-2})$ των κυρτών σωμάτων $K, L, C_1, \dots, C_{n-2}$. Καθώς τα $C_1, \dots, C_{n-2}$ θεωρούνται συχνά σταθερά και μεταβάλλονται μόνο τα K, L εισάγουμε το συμβολισμό

$$\mathcal{C} := (C_1, \dots, C_{n-2}), \quad \mathcal{M} := (M, \dots, M)$$

και γράφουμε

$$V(K, L, \mathcal{C}) := V(K, L, C_1, \dots, C_{n-2}), \quad S_{B, \mathcal{M}} := S_{B, M, \dots, M}$$

Λήμμα 3.10. Έστω $K, K', K_1, \dots, K_n$ κυρτά σώματα του $\mathbb{R}^n$.

1. $V(K, K, \dots, K) = V_n(K)$.
2. $V(K_1, \dots, K_n)$ είναι συμμετρικός και πλειογραμμικός ως προς κάθε όρισμα.
3. $V(K_1, \dots, K_n) \geq 0$.
4. $V(K, K_2, \dots, K_n) \geq V(K', K_2, \dots, K_n)$, αν $K' \subset K$.
5. $V(K_1, \dots, K_n)$ είναι αναλλοίωτος από παράλληλες μεταφορές.

Υπάρχει στενή σχέση μεταξύ των μικτών όγκων και των μικτών επιφανειακών μέτρων. Το επιφανειακό μέτρο ενός κυρτού σώματος K στο $\mathbb{R}^n$ είναι το μέτρο στην S^{n-1} που ορίζεται ως

$$S(K, A) := \mathcal{H}^{n-1}(\{x \in \partial K : x \in F(K, u) \text{ για κάποιο } u \in A\}),$$

όπου $\mathcal{H}^k$ είναι το k -διάστατο μέτρο Hausdorff και $A \subset S^{n-1}$. Με άλλα λόγια, το $S(K, A)$ είναι το επιφανειακό μέτρο εκείνου του μέρους του συνόρου του K που τα εξωτερικά κάθετα διανύσματα ανήκουν στο A . Ακριβώς όπως κι ο όγκος, το $S(K, \cdot)$ είναι πολυώνυμο ως προς K [βλ. 14, σελ.279]:

$$S(\lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_m K_m) = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}=1}^m \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{n-1}} S(K_{i_1}, \dots, K_{i_{n-1}}, A),$$

για $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$. Όπως είδαμε, τα $S(K_1, \dots, K_{n-1})$ καλούνται μικτά επιφανειακά μέτρα και έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες.

Λήμμα 3.11. Έστω $K, K_1, \dots, K_{n-1}$ κυρτά σώματα του $\mathbb{R}^n$. Τότε

1. $S_{K, \dots, K} = S(K, \cdot)$.
2. $S_{K_1, \dots, K_{n-1}}$ είναι συμμετρικό και πλειογραμμικό ως προς κάθε όρισμα.
3. $S_{K_1, \dots, K_{n-1}} \geq 0$.
4. $S_{K_1, \dots, K_{n-1}}$ είναι αναλλοίωτο από παράλληλες μεταφορές.
5. $\int \langle v, x \rangle S_{K_1, \dots, K_{n-1}}(dx) = 0, \forall v \in \mathbb{R}^n$.

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων 1-4 έχουν ήδη γίνει. Για την απόδειξη του 5, αρκεί να υπενθυμίσουμε τη κεντρική σχέση μεταξύ μικτών όγκων και μικτών επιφανειακών μέτρων,

$$V(K_1, \dots, K_n) = \frac{1}{n} \int h_{K_1} dS_{K_2, \dots, K_n}. \quad (3.4)$$

Τότε, από λήμμα 3.10(5) εύκολα βλέπουμε πως

$$\begin{aligned} V(K_1, \dots, K_n) &= V(K_1 + t, K_2, \dots, K_n), \forall t \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \\ V(K_1, \dots, K_n) - V(K_1 + t, K_2, \dots, K_n) &= 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{n} \int h(K_1, x) - h(K_1 + t, x) S_{K_2, \dots, K_n}(dx) &= 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{n} \int -\langle t, x \rangle S_{K_2, \dots, K_n}(dx) &= 0, \forall t \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Θεώρημα 3.12. Έστω $K_1^{(s)}, \dots, K_n^{(s)}$ ακολουθίες κυρτών σωμάτων τέτοιες ώστε $K_i^{(s)} \rightarrow K_i$ καθώς $s \rightarrow \infty$ με την έννοια της Hausdorff σύγκλισης. Τότε

$$V(K_1^{(s)}, \dots, K_n^{(s)}) \xrightarrow{w} V(K_1, \dots, K_n)$$

και

$$S_{K_1^{(s)}, \dots, K_{n-1}^{(s)}} \xrightarrow{w} S_{K_1, \dots, K_{n-1}}$$

καθώς $s \rightarrow \infty$, όπου με $\xrightarrow{w}$ εννοούμε ασθενή σύγκλιση.

Θεώρημα 3.13. Έστω M κυρτό σώμα του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Τότε

$$\text{supp} S_{M, \dots, M} = \text{cl}\{u \in S^{n-1} : u \text{ είναι } 0\text{-ακραία κατεύθυνση του } M\},$$

$$\text{supp} S_{B, M, \dots, M} = \text{cl}\{u \in S^{n-1} : u \text{ είναι } 1\text{-ακραία κατεύθυνση του } M\}.$$

Τέλος, υπενθυμίζουμε πως καθώς οι μικτοί όγκοι και τα μικτά επιφανειακά μέτρα είναι γραμμικά συναρτησοειδή των υποκειμένων σωμάτων (και ως εκ τούτου, των συναρτήσεων

στήριξής τους) επεκτείνονται οι ορισμοί τους μέσω της γραμμικότητας σε συναρτήσεις που είναι διαφορές δύο συναρτήσεων στήριξης [βλ. 14, ΚΕΦ.5.2]. Θα γράφουμε λοιπόν :

$$V(f, K_2, \dots, K_n) := V(K, K_2, \dots, K_n) - V(K', K_2, \dots, K_n),$$

$$S_{f, K_2, \dots, K_{n-1}} := S_{K, K_2, \dots, K_{n-1}} - S_{K', K_2, \dots, K_{n-1}},$$

για συναρτήσεις της μορφής $f = h_K - h_{K'}$. Μάλιστα, κάθε συνάρτηση $f \in C^2(S^{n-1})$ μπορεί να γραφεί ως διαφορά δύο συναρτήσεων στήριξης και άρα οι μικτοί όγκοι και τα μικτά επιφανειακά μέτρα είναι καλώς ορισμένα όταν τα ορίσματά τους είναι αυθαίρετες C^2 συναρτήσεις στη σφαίρα.

Για αρχούντως λεία κυρτά σώματα, οι μικτοί όγκοι και τα μικτά επιφανειακά μέτρα μπορούν να εκφραστούν με μια πιο άμεση γραφή, βλ.[16, ΚΕΦ.2], [14, ΚΕΦ.2].

Για να ορίσουμε την κατάλληλη ομαλότητα, παρατηρούμε πως λόγω του ορισμού της, μπορούμε να δούμε την συνάρτηση στήριξης h_K είτε ως συνάρτηση στην S^{n-1} είτε ως 1-ομογεννή συνάρτηση στο $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε πως η h_K είναι C^2 . Τότε ∇h_K είναι 0-ομογεννής, επομένως η παράγωγος του ∇h_K στην ακτινική κατεύθυνση μηδενίζεται. Η εσσιανή της h_K στον $\mathbb{R}^n$ είναι μια γραμμική απεικόνιση από τον εφαπτόμενο χώρο της σφαίρας, στον εαυτό του. Συμβολίζουμε αυτή την απεικόνιση $D^2 h_K$. Για κάθε C^2 συνάρτηση $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, ο περιορισμός της εσσιανής $D^2 f$ ορίζεται αναλόγως, εφαρμόζοντας τα παραπάνω επιχειρήματα στην 1-ομογεννή επέκταση της f .

Μπορούμε να εκφράσουμε τα παραπάνω ως εξής:

$$D^2 f = \nabla_{S^{n-1}}^2 h_K + fI$$

συναρτήσει της συναλλοίωτης εσσιανής στην σφαίρα. Στα ακόλουθα, όπου $M > 0$ ($M \geq 0$) εννοούμε πως ο πίνακας M είναι θετικά ήμι-ορισμένος. Από [βλ. 16, σ. 2.1] έχουμε το ακόλουθο βασικό αποτέλεσμα.

Λήμμα 3.14. Έστω $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 συνάρτηση. Τότε $f = h_K$ για κάποιο κυρτό σώμα K αν και μόνο αν $D^2 f \geq 0$. Πιο συγκεκριμένα, κάθε C^2 συνάρτηση ικανοποιεί $f = h_K - h_L$ για κάποια κυρτά σώματα K, L , καθώς $D^2(f + h_{\lambda B}) = D^2 f + \lambda I \geq 0$ για αρκετά μεγάλο λ .

Απόδειξη. Έστω $f = h_K$ για κάποιο κυρτό σώμα K . Τότε ως συνάρτηση στήριξης κυρτού σώματος είναι κυρτή, άρα $D^2 f \geq 0$. Η 1-ομογεννής επέκταση της f είναι κυρτή, άρα γράφεται ως supremum αφινικών συναρτήσεων $f(x) = \sup_{y \in A} \{\langle y, x \rangle - f^*(y)\}$. Η 1-ομογένεια της f συνεπάγεται πως $f^* = 0$, και A φραγμένο, καθώς f είναι πεπερασμένη. Επομένως $f(x) = \sup_{y \in A} \langle y, x \rangle = h_{\overline{\text{conv}}(A)}(x)$. $\square$

Πόρισμα 3.15. Έστω $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 συνάρτηση και L κυρτό σώμα τέτοιο ώστε $D^2 h_L > 0$. Τότε υπάρχουν κυρτά σώμα K και $\alpha > 0$ τέτοια ώστε $f = \alpha(h_K - h_L)$. Ειδικότερα κάθε C^2 συνάρτηση στη σφαίρα είναι διαφορά δύο συναρτήσεων στήριξης.

Απόδειξη. Καθώς S^{n-1} είναι συμπαγής και οι f, h_L είναι C^2 συναρτήσεις, έχουμε $D^2 f \geq -\alpha I$ και $D^2 h_L \geq \beta I$ για κάποιους αριθμούς $\alpha, \beta > 0$. Επομένως η $g := f + (\frac{\alpha}{\beta})h_L$ ικανοποιεί $D^2 g \geq 0$. Άρα η f γράφεται ως $f = (\frac{\alpha}{\beta})(h_K - h_L)$ για κάποιο κυρτό σώμα

K , λόγω του λήμματος 3.14 ($D^2g \geq 0 \Rightarrow g$ είναι συνάρτηση στήριξης κάποιου κυρτού σώματος K). $\square$

Λήμμα 3.16. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ κυρτή συνάρτηση και εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $x \in \text{intdom} f$. Αν η f έχει μερικές παραγώγους (πρώτης τάξης) στο x , τότε η f είναι διαφορίσιμη στο x .

Απόδειξη. Η f έχει μερικές παραγώγους στο x επομένως μπορούμε να ορίσουμε την κλίση της f στο x ως

$$\nabla f(x) := \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) e_i,$$

όπου $e_i, i = 1, \dots, n$ κάποια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ και αρκεί να δείξουμε πως $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{|h|} = 0$, όπου

$$g(h) := f(x+h) - f(x) - \langle \nabla f(x), h \rangle, \quad h \in \mathbb{R}^n$$

. Η g είναι κυρτή και πεπερασμένη σε μια περιοχή του U του 0. Θεωρούμε στοιχεία $x_1, x_2 \in U$, τότε

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2), \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Για $h = \sum_{i=1}^n \eta_i e_i$ έχουμε

$$g(h) = g\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n\eta_i e_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(n\eta_i e_i).$$

Χρησιμοποιούμε τις ανισότητες $\langle h, v \rangle \leq |h||v| \leq |h| \sum_{i=1}^n |v_i|$, για $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ και αποκτούμε

$$g(h) \leq \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{g(n\eta_i e_i)}{n\eta_i} \leq |h| \sum_{i=1}^n \frac{|g(n\eta_i e_i)|}{|n\eta_i|},$$

όπου παραλείπουμε εκείνους τους όρους του αθροίσματος $j \in \{1, \dots, n\}$ για τους οποίους $\eta_j = 0$. Αντίστοιχα, αν αντικαταστήσουμε το h με $-h$, αποκτούμε

$$g(-h) \leq |h| \sum_{i=1}^n \frac{|g(n\eta_i e_i)|}{|n\eta_i|}.$$

g κυρτή εντός της $U \Rightarrow g(h) + g(-h) \geq g(0)$, $h \in U$. Επιλέγουμε $h \neq 0$ με $h \in U$ και έχουμε:

$$-\sum_{i=1}^n \frac{|g(-n\eta_i e_i)|}{|n\eta_i|} \leq \frac{-g(-h)}{|h|} \leq \frac{g(h)}{|h|} \leq \sum_{i=1}^n \frac{|g(n\eta_i e_i)|}{|n\eta_i|}.$$

Καθώς οι μερικές παράγωγοι της g στο 0 υπάρχουν και είναι 0, τα ακριανά μέλη τις παραπάνω σχέσης τείνουν στο 0 καθώς $h \rightarrow 0$. Άρα $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{|h|} = 0$. $\square$

Λήμμα 3.17. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ κυρτή και $x \in \text{intdom} f$. Τότε η παράγωγος κατά κατεύθυνση $f'(x; \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι υπογραμμική συνάρτηση.

Απόδειξη. Έστω $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Για $\lambda, \tau > 0$ γράφουμε $\frac{f(x+\tau\lambda u)-f(x)}{\tau} = \lambda \frac{f(x+\tau\lambda u)-f(x)}{\tau\lambda}$ και τότε το όριο για $\tau \downarrow 0$ είναι $f'(x; \lambda u) = \lambda f'(x; u)$. Έστω $u, v \in \mathbb{R}^n$, τότε από κυρτότητα της f έχουμε

$$\begin{aligned} f(x + \tau(u + v)) &= f\left(\frac{1}{2}(x + 2\tau u) + \frac{1}{2}(x + 2\tau v)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f(x + 2\tau u) + \frac{1}{2}f(x + 2\tau v) \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου,

$$\frac{f(x + \tau\lambda u) - f(x)}{\tau} \leq \frac{f(x + 2\tau u) - f(x)}{2\tau} + \frac{f(x + 2\tau v)}{2\tau}.$$

Για $\tau > 0$, παίρνουμε το όριο $\tau \downarrow 0$ στη παραπάνω σχέση και βλέπουμε πως

$$f'(x; u + v) \leq f'(x; u) + f'(x; v).$$

□

Ακόμη, αναφέρουμε χωρίς απόδειξη το ακόλουθο θεώρημα [βλ. 14, σ. 1.7.1].

Θεώρημα 3.18. *Αν $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι υπογραμμική συνάρτηση, τότε υπάρχει μοναδικό $K \in \mathcal{K}^n$ με συνάρτηση στήριξης την f .*

Θεώρημα 3.19. *Για $K \in \mathcal{K}^n$ και $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $h'_K(u; x) = h(F(K, u), x)$, ή αλλιώς, $\nabla_x h_K(u) = h(F(K, u), x)$.*

Απόδειξη. Από λήμμα 3.17 η $h'_K(u, \cdot)$ είναι υπογραμμική και άρα, από θεώρημα 3.18, θα είναι συνάρτηση στήριξης κάποιου κυρτού σώματος K' με $K' \subset K$, διότι $h'_K(u, \cdot) \leq h_K$.

Ο παραπάνω ισχυρισμός προκύπτει άμεσα, αρκεί να παρατηρήσουμε πως για κάθε υπογραμμική συνάρτηση f

$$\frac{f(x + \tau u) - f(x)}{\tau} \leq f(u).$$

Έπειτα, εφαρμόζουμε το παραπάνω για $f = h_K$, θεωρούμε $\tau > 0$ και παίρνουμε όριο και στα δύο μέλη για $\tau \downarrow 0$, για να αποκτήσουμε

$$h'_K(u, \cdot) \leq h_K.$$

Έστω $y \in K'$, τότε $\langle y, u \rangle \leq h(K, u)$. Ακόμη, $\langle y, -u \rangle \leq h'_K(u; -u) = -h(K, u) \Rightarrow \langle y, u \rangle = h(K, u) \Rightarrow y \in F(K, u)$. Επομένως $K' \subset F(K, u)$. Έστω $y \in F(K, u)$. Τότε $\langle y, u \rangle = h(K, u)$ και $\langle y, v \rangle \leq h(K, v)$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$. Επιλέγουμε $v = u + \lambda x$, ($\lambda > 0, x \in \mathbb{R}^n$) και έχουμε $\langle y, x \rangle \leq \frac{h(K, u + \lambda x) - h(K, u)}{\lambda}$. Παίρνουμε όριο για $\lambda \downarrow 0$ στην τελευταία σχέση και έχουμε $\langle y, x \rangle \leq h'_K(u; x) \Rightarrow F(K, u) \subset K'$. □

Τα παραπάνω στοιχειοθετούν την απαραίτητη προεργασία για την απόδειξη του ακόλουθου πορίσματος, που θα μας επιτρέψει να εφαρμόσουμε την αλλαγή μεταβλητής στους υπολογισμούς επιφανειακών μέτρων που αναφέραμε νωρίτερα.

Πόρισμα 3.20. Έστω $K \in \mathcal{K}^n$, $u \in \mathbb{R}^n$. Η h_K είναι διαφορίσιμη στο u αν και μόνο αν το $F(K, u)$ περιέχει μόνο ένα σημείο x , και τότε $x = \nabla h_K(u)$.

Απόδειξη. Από λήμμα 3.16, η διαφορισμότητα της h_K στο u ισοδυναμεί με μερική διαφορισμότητα στο u , ως εκ τούτου $h'_K(u; e_i) = -h'_K(u; -e_i)$ για τα διανύσματα $e_1, \dots, e_n$ κάποιας ορθοκανονικής βάσης του $\mathbb{R}^n$. Από Θεώρημα 3.19, το παραπάνω ισοδυναμεί με το γεγονός ότι $F(K, u)$ περιέχεται στη τομή n το πλήθος, κάθετων μεταξύ τους υπερεπιπέδων, ως εκ τούτου $F(K, u)$ είναι κάποιο μονοσύνολο $\{x\}$.

Αντίστροφα, έστω $F(K, u) = \{x\}$, τότε $h(F(K, u), v) = \langle x, v \rangle$.

Αλλά $h(F(K, u), v) \stackrel{3.19}{=} h'_K(u; v) = \nabla_v h_K(u)$ για $v \in \mathbb{R}^n$. Ειδικότερα,

$$\langle x, e_i \rangle = h(F(K, u), e_i) = h'_K(u; e_i) = \nabla_{e_i} h_K(u) = \partial_i h_K(u),$$

για $i = 1, \dots, n$. Επομένως $x = \nabla h_K(u)$. □

Από το πόρισμα 3.20 παίρνουμε πως αν K είναι κυρτό σώμα κλάσης C_+^2 , και $n_K : \partial K \rightarrow S^{n-1}$ είναι η συνάρτηση που απεικονίζει κάθε συνοριακό σημείο του K στο μοναδικό εξωτερικό κάθετο διάνυσμα που του αντιστοιχεί, τότε

$$n_K^{-1} = \nabla h_K. \quad (3.5)$$

Με χρήση της παραπάνω σχέσης, αποδεικνύεται πως $S(K, d\omega) = \det(D^2 h_K) d\omega$, όπου ω είναι το επιφανειακό μέτρο στην S^{n-1} .

Για να επεκτείνουμε το παραπάνω αποτέλεσμα σε μικτά επιφανειακά μέτρα παρατηρούμε πως υπάρχουν συντελεστές $D(M_{i_1}, \dots, M_{i_{n-1}})$, έτσι ώστε

$$\det(\lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_m M_m) = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}=1}^m \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{n-1}} D(M_{i_1}, \dots, M_{i_{n-1}}),$$

για $(n-1)$ -διάστατους πίνακες M_i και $\lambda_i \geq 0$, καθώς $M \mapsto \det M$ είναι ομογενές πολυώνυμο. Αν οι πίνακες $M_{i_1}, \dots, M_{i_{n-1}}$ είναι συμμετρικοί (όπως συμβαίνει για τις εσσιανές κυρτών C_+^2 σωμάτων) τότε οι συντελεστές $D(M_{i_1}, \dots, M_{i_{n-1}})$ είναι η μικτές διαχρίνουσες.

Ο ορισμός των μικτών επιφανειακών μέτρων, λαμβάνοντας υπόψιν την παραπάνω αλλαγή μεταβλητής δίνει, πλέον, τα ακόλουθα.

Λήμμα 3.21. Έστω $K_1, \dots, K_n$ κυρτά σώματα του $\mathbb{R}^n$ κλάσης C_+^2 . Τότε

$$S_{K_2, \dots, K_n} = D(D^2 h_{K_2}, \dots, D^2 h_{K_n}) d\omega,$$

$$V(K_1, \dots, K_n) = \frac{1}{n} \int h_{K_1} D(D^2 h_{K_2}, \dots, h_{K_n}) d\omega.$$

3.4 Μικτοί όγκοι ως τετραγωνικές μορφές

Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να αποδείξουμε πως ο μικτός όγκος τυχόντων κυρτών σωμάτων μπορεί να γραφεί ως κλειστή τετραγωνική μορφή που σχετίζεται με αυτοσυζυγή τελεστή. Ο ισχυρισμός αυτός εμφανίζεται αναφορικά με την τετραγωνική ανισότητα

Minkowski (Θεώρημα 3.6) και αποτελεί ειδική περίπτωση του ακόλουθου, γενικότερου θεωρήματος.

Θεώρημα 3.22. Έστω $\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_{n-2})$ κυρτά σώματα του $\mathbb{R}^n$ με $S_{B,\mathcal{C}} \neq 0$. Τότε υπάρχει αυτοσυζυγής τελεστής $\mathcal{A}$ στο $L^2(S_{B,\mathcal{C}})$ με $C^2(S^{n-1}) \subset \text{Dom } \mathcal{A}$ τέτοιος ώστε:

1. $\text{spec } \mathcal{A} \subset (-\infty, 0] \cup \{\frac{1}{n}\}$.
2. $\text{rank}_{(0,\infty)}(\mathcal{A}) = 1$ και $\mathcal{A}1 = \frac{1}{n}1$.
3. $\mathcal{A}l = 0$ για κάθε γραμμική $l : x \mapsto \langle v, x \rangle$ στην S^{n-1} , ($v \in \mathbb{R}^n$). Επιπρόσθετα, η κλειστή τετραγωνική μορφή $\mathcal{E}$ που σχετίζεται με τον $\mathcal{A}$ ικανοποιεί:
4. $h_K \in \text{Dom } \mathcal{E}$ για κάθε κυρτό σώμα K του $\mathbb{R}^n$.
5. $\mathcal{E}(h_K, h_L) = V(K, L, \mathcal{C})$ για όλα τα κυρτά σώματα K, L του $\mathbb{R}^n$.

Ακολουθούν κάποια υποστηρικτικά αποτελέσματα που χρειαζόμαστε για την απόδειξη του θεωρήματος 3.22.

Λήμμα 3.23. Για κάθε C^2 συνάρτηση f στην S^{n-1} , ισχύει $S_{f,\mathcal{C}} \ll S_{B,\mathcal{C}}$ και $\|\frac{dS_{f,\mathcal{C}}}{dS_{B,\mathcal{C}}}\|_\infty \leq \|D^2 f\|_\infty$, όπου $\|D^2 f\|_\infty := \sup_{x \in S^{n-1}} \|D^2 f(x)\|$ και με $\ll$ συμβολίζουμε την απόλυτη συνέχεια μέτρων.

Απόδειξη. Έστω $C_i^{(s)}$ ακολουθίες κυρτών C_+^2 σωμάτων τέτοιων ώστε $C_i^{(s)} \rightarrow C_i$ καθώς $s \rightarrow \infty$ για $i = 1, \dots, n-2$. Για $\mathcal{C}^{(s)} = (C_1^{(s)}, \dots, C_{n-2}^{(s)})$ έχουμε, μέσω των λημμάτων 3.14 και 3.21

$$S_{f,\mathcal{C}^{(s)}}(d\omega) = D(D^2 f, D^2 h_{C_1^{(s)}}, \dots, D^2 h_{C_{n-2}^{(s)}})d\omega,$$

για C^2 συνάρτηση f στην S^{n-1} . Ειδικότερα, καθώς $D^2 h_B = I$, ισχύει

$$\frac{dS_{f,\mathcal{C}^{(s)}}}{dS_{B,\mathcal{C}^{(s)}}} = \frac{D(D^2 f, D^2 h_{C_1^{(s)}}, \dots, D^2 h_{C_{n-2}^{(s)}})}{D(I, D^2 h_{C_1^{(s)}}, \dots, D^2 h_{C_{n-2}^{(s)}})}$$

Παρατηρούμε πως, από λήμμα 3.15, ο παρονομαστής είναι αυστηρά θετικός, καθώς $I > 0$ και $C_i^{(s)}$ είναι C_+^2 για κάθε $i = 1, \dots, n-2$, άρα $D^2 h_{C_i^{(s)}} > 0$. Επομένως η παραπάνω έκφραση είναι καλώς ορισμένη. Εφόσον $\lambda_{\min}(D^2 f)I \leq D^2 f \leq \lambda_{\max}(D^2 f)I$, το λήμμα 3.15 συνεπάγεται πως

$$\left| \frac{dS_{f,\mathcal{C}^{(s)}}}{dS_{B,\mathcal{C}^{(s)}}} \right|$$

κατά σημείο. Επομένως από θεώρημα 3.12 έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \int g dS_{f,\mathcal{C}} \right| &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left| \int g dS_{f,\mathcal{C}^{(s)}} \right| \\ &\leq \limsup_{s \rightarrow \infty} \int |g| \|D^2 f\| dS_{B,\mathcal{C}^{(s)}} \\ &\leq \|D^2 f\|_\infty \int |g| dS_{B,\mathcal{C}}, \end{aligned}$$

για κάθε συνεχή συνάρτηση g στην S^{n-1} .

Έχουμε λοιπόν ως τώρα δείξει πως

$$|\int g dS_{f,C}| \leq \|D^2 f\|_\infty \int |g| dS_{B,C}. \quad (3.6)$$

Ειδικότερα, η

$$g \mapsto \int g dS_{f,C}$$

είναι μια φραγμένη γραμμική απεικόνιση από τον χώρο $C^0(S^{n-1}) \subset L^1(S_{B,C})$ στο $\mathbb{R}$, και επομένως από θεώρημα Hahn-Banach επεκτείνεται μοναδικά σε γραμμικό συναρτησοειδές του $L^1(S_{B,C})$. Εφόσον $L^1(S_{B,C})^* = L^\infty(S_{B,C})$, θα υπάρχει κάποιο $\rho \in L^\infty(S_{B,C})$ τέτοιο ώστε $\int g dS_{f,C} = \int g \rho dS_{f,C}$. Αυτό αποδεικνύει την απόλυτη συνέχεια του $S_{f,C} \ll S_{B,C}$. Το φράγμα της ρ προκύπτει παίρνοντας supremum στην (3.6) πάνω από όλα τα g με $\int |g| dS_{B,C} \leq 1$. $\square$

Λήμμα 3.24. Έστω $f, g \in C^2(S^{n-1})$ με $f = g$, $S_{B,C}$ -σχεδόν παντού. Τότε $S_{f,C} = S_{g,C}$.

Απόδειξη. Έστω $h \in C^2(S^{n-1})$. Τότε

$$\begin{aligned} \int h dS_{f,C} - \int h dS_{g,C} &= nV(h, f, C) - nV(h, g, C) \\ &= nV(h, f - g, C) \\ &= nV(f - g, h, C) \\ &= \int (f - g) dS_{h,C} = 0, \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση του 3.10, της συμμετρίας των μικτών όγκων και του λήμματος 3.23. Αφού το παραπάνω ισχύει για τυχόν $h \in C^2(S^{n-1})$, έχουμε το συμπέρασμα. $\square$

Η ιδέα για το θεώρημα 3.6 είναι η εξής. Χάρη στο λήμμα 3.23 μπορούμε να ορίσουμε

$$\mathcal{A}f := \frac{1}{n} \frac{dS_{f,C}}{dS_{B,C}}, \quad f \in C^2(S^{n-1}) \quad (3.7)$$

και το λήμμα 3.24 εξασφαλίζει πως ο $\mathcal{A}$ είναι καλώς ορισμένος γραμμικός τελεστής στον $C^2(S^{n-1}) \subset L^2(S_{B,C})$, (όπου ταυτίζουμε τις συναρτήσεις του C^2 που ταυτίζονται $S_{B,C}$ -σχεδόν παντού).

Θα επεκτείνουμε τον $\mathcal{A}$ σε αυτοσυζυγή τελεστή μέσω της επέκτασης Friedrichs [Βλ. Παράρτημα Α]. Για αυτό το σκοπό, πρέπει να δείξουμε πως ο $\mathcal{A}$ είναι ημιφραγμένος.

Λήμμα 3.25. Για κάθε $f \in C^2(S^{n-1})$ ισχύει $n \int f \mathcal{A}f dS_{B,C} = \int f dS_{f,C} \leq \int f^2 dS_{B,C}$. Με άλλα λόγια,

$$\langle f \mathcal{A}f \rangle_{L^2(S_{B,C})} \leq \frac{1}{n} \|f\|_{L^2(S_{B,C})}^2.$$

Απόδειξη. Έστω $C_i^{(s)}$ ακολουθίες κυρτών σωμάτων κλάσης C_+^2 τέτοιων ώστε $C_i^{(s)} \rightarrow C_i$ καθώς $s \rightarrow \infty$. Τότε, από 3.12,

$$\int f dS_{f,C^{(s)}} \rightarrow \int f dS_{f,C}, \quad \int f^2 dS_{B,C^{(s)}} \rightarrow \int f^2 dS_{B,C}$$

Επομένως, μπορούμε στα ακόλουθα να υποθέσουμε πως $C_1, \dots, C_{n-2}$ είναι C_+^2 κυρτά σώματα, για ελάφρυνση του συμβολισμού.

Για C_+^2 σώματα γράφουμε, όπως στην απόδειξη του 3.23

$$\mathcal{A}f = \frac{1}{n} \frac{dS_{f,C}}{dS_{B,C}} = \frac{1}{n} \frac{D(D^2 f, D^2 h_{C_1}, \dots, D^2 h_{C_{n-2}})}{D(I, D^2 h_{C_1}, \dots, D^2 h_{C_{n-2}})}.$$

Καθώς $D^2 f = \nabla_{S^{n-1}}^2 f + fI$, σε συνδιασμό με το λήμμα 3.15, βλέπουμε πως ο $\mathcal{A}$ είναι ένας ομοιόμορφα ελλειπτικός διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης.

Επιπρόσθετα, από θεώρημα 3.4 και τη συμμετρία των μικτών όγκων έχουμε

$$\langle f, \mathcal{A}g \rangle_{L^2(S_{B,C})} = \frac{1}{n} \int f \frac{dS_{g,C}}{dS_{B,C}} dS_{B,C} = V(f, g, C)$$

είναι μια συμμετρική τετραγωνική μορφή. Είναι κλασικό αποτέλεσμα θεωρίας ελλειπτικών διαφορικών τελεστών [βλ. 6, σ. 8.12] πως υπό αυτές τις προϋποθέσεις ο $\mathcal{A}$ έχει αυτοσυζυγή επέκταση για την οποία $\lambda := \sup \text{spec} \mathcal{A}$ είναι η μοναδική ιδιοτιμή που αντιστοιχεί σε θετική ιδιοσυνάρτηση. Εφόσον $\mathcal{A}1 = \frac{1}{n}1$, έχουμε πως $\lambda = \frac{1}{n}$ και επομένως $\int f dS_{f,C} = n \langle f, \mathcal{A}f \rangle_{L^2(S_{B,C})} \leq \|f\|_{L^2(S_{B,C})}^2$, όπου

$$\int f dS_{f,C} = n \int f \frac{1}{n} \frac{dS_{f,C}}{dS_{B,C}} dS_{B,C} = \int f dS_{f,C}$$

και

$$\|f\|_{L^2(S_{B,C})}^2 = \langle f, f \rangle_{L^2(S_{B,C})} = \int f^2 dS_{B,C}.$$

□

Είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το θεώρημα 3.22.

Απόδειξη. (Για το θεώρημα 3.22)

Για $f, g \in C^2(S^{n-1})$, ορίζουμε $\mathcal{A}f$ όπως στην σχέση (3.7) και ας είναι $\mathcal{E}(f, g) := \langle f, \mathcal{A}g \rangle_{L^2(S_{B,C})} = V(f, g, C)$. Από συμμετρία μικτών όγκων και το λήμμα 3.25, η $\mathcal{E}$ είναι πυκνά ορισμένη $\frac{1}{n}$ -ημιφραγμένη συμμετρική τετραγωνική μορφή στον $L^2(S_{B,C})$. Από λήμμα A.8 έπεται πως η $\mathcal{E}$ είναι closable και η κλειστότητά της ορίζει μια αυτοσυζυγή επέκταση του $\mathcal{A}$. Τα παραπάνω στοιχειοθετούν την κατασκευή των $\mathcal{A}$ και $\mathcal{E}$ όπως αυτά περιγράφονται στην διατύπωση του θεωρήματος 3.22. Για τις αποδείξεις των ιδιοτήτων έχουμε τα εξής:

Απόδειξη για ιδιότητες 4 και 5:

Εκ κατασκευής, $\mathcal{E}(h_K, h_L) = V(K, L, \mathcal{C})$ όταν K, L είναι C_+^2 σώματα. Έστω K τυχόν-κυρτό σώμα και $K^{(s)}$ ακολουθία κυρτών σωμάτων κλάσης C_+^2 με $K^{(s)} \rightarrow K$. Τότε

$$\begin{aligned} \|h_{K^{(s)}} - h_K\|_{L^2(S_{B,\mathcal{C}})}^2 &= \int (h_{K^{(s)}} - h_K)^2 dS_{B,\mathcal{C}} \\ &\leq \|h_{K^{(s)}} - h_K\|_\infty^2 \int 1 dS_{B,\mathcal{C}} \\ &= \|h_{K^{(s)}} - h_K\|_\infty^2 \int h_B dS_{B,\mathcal{C}}, \text{ καθώς } h_B(x) = 1, \forall x \in S^{n-1} \\ &\stackrel{3.4}{=} nV(B, B, \mathcal{C}) \|h_{K^{(s)}} - h_K\|_\infty^2 \rightarrow 0, \text{ καθώς } s \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ακόμη, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(h_{K^{(s)}} - h_{K^{(t)}}, h_{K^{(s)}} - h_{K^{(t)}}) &= \\ &\langle h_{K^{(s)}} - h_{K^{(t)}}, \mathcal{A}(h_{K^{(s)}} - h_{K^{(t)}}) \rangle_{L^2(S_{B,\mathcal{C}})} = \\ &\langle h_{K^{(s)}}, \mathcal{A}h_{K^{(s)}} \rangle_{L^2(S_{B,\mathcal{C}})} - \langle h_{K^{(s)}}, \mathcal{A}h_{K^{(t)}} \rangle_{L^2(S_{B,\mathcal{C}})} \\ &- \langle h_{K^{(t)}}, \mathcal{A}h_{K^{(s)}} \rangle_{L^2(S_{B,\mathcal{C}})} + \langle h_{K^{(t)}}, \mathcal{A}h_{K^{(t)}} \rangle_{L^2(S_{B,\mathcal{C}})} = \\ &\frac{1}{n} \left(\int h_{K^{(s)}} \frac{dS_{K^{(s)},\mathcal{C}}}{dS_{B,\mathcal{C}}} dS_{B,\mathcal{C}} - \int h_{K^{(s)}} \frac{dS_{K^{(t)},\mathcal{C}}}{dS_{B,\mathcal{C}}} dS_{B,\mathcal{C}} \right. \\ &\left. - \int h_{K^{(t)}} \frac{dS_{K^{(s)},\mathcal{C}}}{dS_{B,\mathcal{C}}} dS_{B,\mathcal{C}} + \int h_{K^{(t)}} \frac{dS_{K^{(t)},\mathcal{C}}}{dS_{B,\mathcal{C}}} dS_{B,\mathcal{C}} \right) \stackrel{3.4}{=} \\ &V(K^{(s)}, K^{(s)}, \mathcal{C}) - V(K^{(s)}, K^{(t)}, \mathcal{C}) - V(K^{(t)}, K^{(s)}, \mathcal{C}) + V(K^{(t)}, K^{(t)}, \mathcal{C}) = \\ &V(K^{(s)}, K^{(s)}, \mathcal{C}) - 2V(K^{(s)}, K^{(t)}, \mathcal{C}) + V(K^{(t)}, K^{(t)}, \mathcal{C}) \rightarrow 0, \quad (3.8) \end{aligned}$$

καθώς $s, t \rightarrow \infty$. από θεώρημα 3.12. Επομένως η h_K είναι στην πληρότητα του $C^2(S^{n-1})$ ως προς την νόρμα $[2\|f\|_{L^2(S_{B,\mathcal{C}})}^2 - \mathcal{E}(f, f)]^{\frac{1}{2}}$.

Η παραπάνω νόρμα είναι εξέχουσας σημασίας, καθώς είναι η κατάλληλη νόρμα ως προς την οποία η πλήρωση του $C^k(\Omega)$ είναι ο χώρος των k -φορές ασθενώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f \in W^{k,2}(\Omega)$.

Ειδικότερα, δεν λέμε πως ο $W^{k,p}(\Omega)$ είναι η πλήρωση του $C^\infty(\Omega)$ για οποιοδήποτε Ω , καθώς, εν γένει, ο $C^\infty(\Omega)$ δεν περιέχεται στον $W^{k,p}(\Omega)$. Ο δόκιμος τρόπος να οριστεί η παραπάνω πλήρωση είναι ο εξής:

Θεωρούμε τη νόρμα

$$\|f\|_{k,p} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.9)$$

και γράφουμε

$$\tilde{C}^k(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega) : \|f\|_{k,p} < \infty\}.$$

Τότε ο $W^{k,p}(\Omega)$ είναι η πλήρωση του $\tilde{C}^k(\Omega)$ ως προς αυτή τη νόρμα.

Επομένως η $h_K \in \text{Dom} \mathcal{E}$ εκ κατασκευής, και $\mathcal{E}(h_K, h_K) = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{E}(h_{K^{(s)}}, h_{K^{(s)}}) = \lim_{s \rightarrow \infty} V(K^{(s)}, K^{(s)}, \mathcal{C}) = V(K, K, \mathcal{C})$. Παρομοίως προκύπτουν τα συμπεράσματα για $\mathcal{E}(h_K, h_L)$.

Απόδειξη για ιδιότητες 1 και 2:

Εφόσον $h_B = 1$, έπεται από (3.7) πως $\mathcal{A}1 = \frac{1}{n}1$, κι άρα $1 \in 1_{(0,\infty)}(\mathcal{A})$. Υποθέτουμε πως $\text{rank}1_{(0,\infty)}(\mathcal{A}) > 1$ και έστω $f \in 1_{(0,\infty)}(\mathcal{A})L^2(S_{B,C})$ τέτοιο ώστε $\langle f, 1 \rangle_{L^2(S_{B,C})} = 0 \Leftrightarrow \int f dS_{B,C} = 0$. Θεωρούμε ακολουθία $f_s \in C^2(S^{n-1})$ με $\|f_s - f\|_{L^2(S_{B,C})} \rightarrow 0$ και $\mathcal{E}(f_s, f_s) \rightarrow 0$ καθώς $s \rightarrow \infty$, η ύπαρξη της οποίας εξασφαλίζεται εκ κατασκευής, καθώς $f \in \text{Dom}\mathcal{E}$. Από λήμμα 3.14, για κάθε s και για αρκετά μεγάλο $t \geq 0$ που εξαρτάται από το s , υπάρχει C_+^2 κυρτό σώμα K_t τέτοιο ώστε $h_{K_t^{(s)}} = t + f_s$. Επομένως,

$$\langle t + f_s, \mathcal{A}1 \rangle_{L^2(S_{B,C})}^2 = \left(\frac{1}{n} \int h_{K_t^{(s)}} dS_{B,C} \right)^2 = V(K_t^{(s)}, B, C)^2,$$

όπου από ανισότητα Alexandrov-Fenchel έχουμε

$$V(K_t^{(s)}, B, C)^2 \geq V(K_t^{(s)}, K_t^{(s)}, C)V(B, B, C).$$

Καθώς $K_t^{(s)}, B$ είναι C_+^2 , γράφουμε ισοδύναμα

$$\langle t + f_s, \mathcal{A}1 \rangle_{L^2(S_{B,C})}^2 = \langle t + f_s, \mathcal{A}(t + f_s) \rangle_{L^2(S_{B,C})} \langle 1, \mathcal{A}1 \rangle_{L^2(S_{B,C})}.$$

Αναπτύσσουμε τα τετράγωνα και χρησιμοποιούμε τη σχέση $\mathcal{A}1 = \frac{1}{n}1$ και έπειτα από πράξεις καταλήγουμε πως

$$\langle f_s, 1 \rangle_{L^2(S_{B,C})}^2 \geq n^2 \mathcal{E}(f_s, f_s) V(B, B, C).$$

Άρα

$$\mathcal{E}(f_s, f_s) \leq \frac{\langle f_s, 1 \rangle_{L^2(S_{B,C})}^2}{n^2 V(B, B, C)},$$

όπου $V(B, B, C) > 0$, καθώς $S_{B,C} \neq \emptyset$. Παίρνοντας όριο για $s \rightarrow \infty$ και στα δύο μέλη έχουμε

$$\mathcal{E}(f, f) \leq \frac{\langle f, 1 \rangle_{L^2(S_{B,C})}^2}{n^2 V(B, B, C)} = 0.$$

Άτοπο, διότι υποθέσαμε $f \in 1_{(0,\infty)}(\mathcal{A})L^2(S_{B,C})$. Δείξαμε πως $\text{rank}1_{(0,\infty)}(\mathcal{A}) = 1$ κι έτσι ολοκληρώσαμε την απόδειξη της ιδιότητας 2. Η 1 έπεται άμεσα με επιχειρήματα θεωρίας ελλειπτικών διαφορικών τελεστών δεύτερης τάξης, [βλ. 6, σ. 8.12].

Απόδειξη για την ιδιότητα 3:

Έστω $l : x \mapsto \langle v, x \rangle$ γραμμική συνάρτηση. Τότε $l = h_{K_v} - h_K$, κι επομένως

$$\langle f, \mathcal{A}l \rangle_{L^2(S_{B,C})} = V(f, K + v, C) - V(f, K, C) = 0$$

για κάθε $f \in C^2(S^{n-1})$ καθώς οι μικτοί όγκοι είναι αναλλοίωτοι από παράλληλες μεταφορές. Άρα $\mathcal{A}l = 0$. $\square$

3.5 Πολύτοπα και κβαντικοί γράφοι

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να δώσουμε μια ρητή περιγραφή των αντικειμένων που εμφανίζονται στο θεώρημα 3.22 στη περίπτωση που τα $C_1, \dots, C_{n-2}$ είναι πολύτοπα. Σε

αυτή τη περίπτωση ο τελεστής $\mathcal{A}$ είναι ένας "χβαντικός γράφος" [βλ. παράρτημα Γ]. Πιο συγκεκριμένα δρα ως μονοδιάστατος τελεστής Laplace στις ακμές κάποιου μετρικού γράφου, εφοδιασμένος με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στις κορυφές του γράφου. Ειδικότερα, θα αναπτύξουμε λεπτομερώς την περίπτωση $C_1, \dots, C_{n-2} = M$ (Minkowski) που μας απασχολεί καθόλη τη διάρκεια της παρούσας εργασίας.

Στα ακόλουθα θεωρούμε παντού M δοθέν πολύτοπο του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{F}$ το σύνολο των πλευρών (facets) του M . Θα λέμε πως οι $F, F' \in \mathcal{F}$ συνορεύουν, και θα γράφουμε $F \sim F'$ αν $\dim(F \cap F') = n - 2$.

Αντιστοιχούμε στο M ένα μετρικό γράφο $G = (V, E)$ εγγεγραμμένο στην S^{n-1} . Οι κορυφές του γράφου είναι τα κάθετα των πλευρών $V = \{n_F : F \in \mathcal{F}\} \subset S^{n-1}$. Σε κάθε ζεύγος γειτονικών πλευρών $F \sim F'$, ενώνουμε τις αντίστοιχες κορυφές με μια ακμή (τόξο) $e_{F,F'} \subset S^{n-1}$ που είναι το (μικρότερο) γεωδαισιακό τμήμα της S^{n-1} με άκρα τα n_F και $n_{F'}$. Τότε οι μη προσανατολισμένες ακμές του G είναι $E = \{e_{F,F'} : F \sim F'\}$. Το μήκος της ακμής $e_{F,F'}$ θα συμβολίζεται $l_{F,F'} := \mathcal{H}^1(e_{F,F'})$.

Θα παραμετροποιήσουμε κάθε ακμή ως προς το μήκος τόξου. Για να το πετύχουμε αυτό, ορίζουμε πρώτα μια αυθαίρετη ολική διάταξη $\leq$ στο σύνολο των πλευρών $\mathcal{F}$. Όταν $F \leq F'$, η ακμή θα παραμετροποιείται με $\theta \in [0, l_{F,F'}]$, όπου $\theta = 0$ αντιστοιχεί στο n_F και $\theta = l_{F,F'}$ αντιστοιχεί στο $n_{F'}$. Έστω $f : e_{F,F'} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση. Θα γράφουμε $f' = \frac{df}{d\theta}$. Συμβολίζουμε με H^k το σύνθη χώρο Sobolev συναρτήσεων σε μια ακμή με k ασθενείς παραγώγους στο L^2 .

Μια συνάρτηση ορισμένη σε όλες τις ακμές του G θα συμβολίζεται ως $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ και η (ασθενής) παράγωγός της f' θα ορίζεται όπως παραπάνω. Θα γράφουμε $f \in C^0(G)$ αν $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής τόσο στις ακμές, όσο και σε κάθε κορυφή.

Τέλος, θα συμβολίζουμε $n_{F \rightarrow F'}$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα του γεωδαισιακού τμήματος $e_{F,F'}$ στο σημείο n_F με κατεύθυνση $n_{F'}$. Η παράγωγος κατά κατεύθυνση μια συνάρτησης $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ στο σημείο n_F στη κατεύθυνση $n_{F \rightarrow F'}$ θα συμβολίζεται $\nabla_{n_{F \rightarrow F'}} f(n_F)$. Συναρτήσει της παραμετροποίησης που ορίσαμε παραπάνω, θα γράφουμε

$$\nabla_{n_{F \rightarrow F'}} f(n_F) = f'|_{e_{F,F'}} 1_{F' \geq F} - f'|_{e_{F,F'}} (l_{F,F'}) 1_{F' \leq F}.$$

Θεώρημα 3.26. Έστω M πολύτοπο του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό, και ορίζουμε τον αντίστοιχο μετρικό γράφο G όπως παραπάνω. Τότε για κάθε $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν

$$\begin{aligned} \int f dS_{M,\mathcal{M}} &= \sum_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{H}^{n-1}(F) f(n_F), \\ \int f dS_{B,\mathcal{M}} &= \frac{1}{n-1} \sum_{e_{F,F'} \in E} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') \int_{e_{F,F'}} f d\mathcal{H}^1. \end{aligned}$$

Επιπλέον, ο αυτοσυζυγής τελεστής $\mathcal{A}$ και η κλειστή τετραγωνική μορφή $\mathcal{E}$ στον $L^2(S_{B,\mathcal{M}})$ που εμφανίζονται στο θεώρημα 3.22 σε αυτή τη περίπτωση γράφονται ως εξής:

$$\mathcal{A}f = \frac{1}{n} \{f'' + f\}$$

όπου

$$\text{Dom } \mathcal{A} = \{f \in C^0(G) : f|_{e_{F,F'}} \in H^2, \forall F \in \mathcal{F}\},$$

και

$$\mathcal{E}(f, g) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{e_{F, F'} \in E} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') \int_{e_{F, F'}} \{fg - f'g'\} d\mathcal{H}^1$$

όπου $\text{Dom}\mathcal{E} = \{f \in C^0(G) : F|_{e_{F, F'}} \in H^1, \forall e_{F, F'} \in E\}$.

Πρώτο βήμα για την απόδειξη του θεωρήματος 3.26 είναι η ακόλουθη αναπαράσταση του $S_{K, \mathcal{M}}$ για λεία κυρτά σώματα K .

Πρόταση 3.27. Έστω K κυρτό σώμα κλάσης C_+^2 . Τότε

$$\int f dS_{K, \mathcal{M}} = \frac{1}{n-1} \sum_{e_{F, F'} \in E} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') \int_{e_{F, F'}} (h_K'' + h_K) f d\mathcal{H}^1.$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε $\mathcal{F}_i$ την συλλογή i -διάστατων πλευρών του M και ορίζουμε $N_F := \{u \in S^{n-1} : F(M, u) = F\}$. Τότε η οικογένεια $\{N_F : F \in \cup_i \mathcal{F}_i\}$ αποτελεί διαμέριση της S^{n-1} . Επίσης, αν $F, F' \in \mathcal{F}$ είναι γειτονικές πλευρές, δηλ. $F \sim F'$, τότε $F \cap F' \in \mathcal{F}_{n-2}$ και $N_{F \cap F'} = e_{F, F'}$.

Θα υπολογίσουμε αρχικά το επιφανειακό μέτρο $S(M + \epsilon K, \cdot)$, κι έπειτα θα εξάγουμε το μικτό επιφανειακό μέτρο $S_{K, \mathcal{M}}$ από τον ορισμό. Για τον υπολογισμό του επιφανειακού μέτρου, διαμερίζουμε το σύνολο του συνόλου $M + \epsilon K$ σε ξένα ανά δύο σύνολα $F(M + \epsilon K, N_F) := \cup_{u \in N_F} F(M + \epsilon K, u)$ που αντιστοιχούν σε συνοριακά σημεία με κάθετα διανύσματα στο N_F και θα κάνουμε μια αλλαγή μεταβλητής σε κάθε τέτοιο σύνολο.

Βήμα 1. Σταθεροποιούμε μια πλευρά $F \in \mathcal{F}_i$. Θα παραμετροποιήσουμε το $F(M + \epsilon K, N_F)$. Εφόσον K είναι C_+^2 η απεικόνιση $n_K : \partial K \rightarrow S^{n-1}$ είναι C^1 -διαφορομορφισμός και έχει αντίστροφο $n_K^{-1} = \nabla h_K$. Επομένως, από λήμμα 3.19,

$$F(M + \epsilon K, u) = F(M, u) + \epsilon F(K, u) = F + \epsilon \nabla h_K(u), \forall u \in N_F.$$

Παρατηρούμε πως το σύνολο $F(M + \epsilon K, N_F)$ είναι η εικόνα της απεικόνισης $i : F \times N_F \rightarrow F(M + \epsilon K, N_F)$ με τύπο $i(x, u) := x + \epsilon \nabla h_K(u)$.

Βήμα 2. Θα αποδείξουμε πως ο i είναι C^1 -διαφορομορφισμός. Έστω $L_F := \text{span}(F - F)$ ο εφαπτόμενος χώρος της F . Παρατηρούμε πως $N_F \subset S^{n-1} \cap L_F^\perp$. Υποθέτουμε, για απλούστευση των υπολογισμών, πως $0 \in F$, ούτως ώστε $F \subset L_F$ (εφόσον σταθεροποιήσαμε μια πλευρά αναφοράς, μπορούμε πάντα να υποθέσουμε πως το 0 ανήκει στην πλευρά μετά από παράλληλη μεταφορά). Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$i(x, u) = (x + \epsilon P_{L_F} \nabla h_K(u), \epsilon P_{L_F^\perp} \nabla h_K(u)) \in L_F \oplus L_F^\perp,$$

όπου συμβολίζουμε P_L την ορθή προβολή στο L .

Είναι:

$$\begin{aligned} h_{P_{L_F^\perp} K}(u) &= \sup\{\langle x, u \rangle : x \in P_{L_F^\perp} K\} \\ &= \sup\{\langle u, P_{L_F^\perp} x \rangle : x \in K\} \\ &= \sup\{\langle P_{L_F^\perp} u, x \rangle : x \in K\} \end{aligned}$$

$$= h_K(P_{L_F^\perp} u),$$

καθώς οι προβολές είναι συμμετρικοί πίνακες. Παραγωγίζουμε, κι έχουμε $\nabla h_K(P_{L_F^\perp} u) = \nabla h_K(u)P_{L_F^\perp} = P_{L_F^\perp} \nabla h_K(u)$, για $u \in S^{n-1} \cap L_F^\perp$.

Καθώς το $P_{L_F^\perp} K$ είναι C_+^2 σώμα του $L_F^\perp$, η απεικόνιση $n_{P_{L_F^\perp} K} : \partial P_{L_F^\perp} K \rightarrow S^{n-1} \cap L_F^\perp$ είναι C^1 -διαφορομορφισμός και έχει αντίστροφο

$$n_{P_{L_F^\perp} K}^{-1} = \nabla h_{P_{L_F^\perp} K} = P_{L_F^\perp} \nabla h_K.$$

Επομένως ο i είναι διαφορομορφισμός και καθώς είναι C^1 , ο αντίστροφός του,

$$i^{-1}(z, v) = (z - \epsilon P_{L_F} \nabla h_K(n_{P_{L_F^\perp} K}(\epsilon^{-1}v)), n_{P_{L_F^\perp} K}(\epsilon^{-1}v))0,$$

όπου $(z, v) \in F(M + \epsilon K, N_F) \subset L_F \oplus L_F^\perp$

είναι επίσης C^1 . Άρα ο i είναι C^1 -διαφορομορφισμός. Το διαφορικό του, di , έχει block-τριγωνική μορφή ως προς $L_F \oplus L_F^\perp$ και είναι $\det(di) = \det(\epsilon D^2 h_{P_{L_F^\perp} K})$, όπου η $D^2 h_{P_{L_F^\perp} K}$ είναι υπολογισμένη στον $L_F^\perp$.

Βήμα 3. Καθώς η οικογένεια $\{N_F\}$ αποτελεί διαμέριση της S^{n-1} , γράφουμε

$$\begin{aligned} S(M + \epsilon K, A) &\stackrel{\circ}{=} \mathcal{H}^{n-1}(\{x \in \partial(M + \epsilon K) : x \in F(M + \epsilon K, u) \text{ για κάποιο } u \in A\}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \mathcal{H}^{n-1}(\{x \in F(M + \epsilon K, u), \text{ για κάποιο } u \in A \cap N_F\}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_{F(M + \epsilon K, A \cap N_F)} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_{i(F \times (N_F \cap A))} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon^{n-1-i} \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \mathcal{H}^i(F) \int_{N_F} 1_A \det(D^2 h_{P_{L_F^\perp} K}) d\mathcal{H}^{n-1} \end{aligned}$$

Από τον ορισμό των μικτών επιφανειακών μέτρων, έχουμε

$$\begin{aligned} (n-1)S_{K,M}(A) &= \frac{d}{d\epsilon} S(M + \epsilon K, A)|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\epsilon} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \epsilon^{n-1-i} \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \mathcal{H}^i(F) \int_{N_F} 1_A \det(D^2 h_{P_{L_F^\perp} K}) d\mathcal{H}^1 \right) |_{\epsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\epsilon} \left(\sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} S_{K_{i_1}, \dots, K_{i_{n-1}}}(A) \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{n-1}} \right) |_{\epsilon=0} \\ &= \sum_{F \in \mathcal{F}_{n-2}} \mathcal{H}^{n-2}(F) \int_{N_F} 1_A \det(D^2 h_{P_{L_F^\perp} K}) d\mathcal{H}^1, \end{aligned}$$

καθώς επιβιώνει μόνο ο πρωτοβάθμιος ως προς ϵ όρος, $i = n - 2$ και τα λ_i στο άθροισμα είναι είτε 1 είτε ϵ .

Όμως για κάθε $(n - 2)$ -πλευρά F του M , το σύνολο N_F είναι μια ακμή του κβαντικού γράφου. Επομένως, η $D^2 h_{P_{L_F^\perp} K}$ είναι βαθμωτή ποσότητα, καθώς ο $S^{n-1} \cap L_F^\perp$ είναι μονοδιάστατος, και κάνει $h_K'' + h_K$ κατά μήκος κάθε ακμής. $\square$

Το ακόλουθο λήμμα έχει ως άμεση συνέπεια πως αν $f \in C^2(S^{n-1})$, τότε $f \in \text{Dom} \mathcal{A}$, όπου $\mathcal{A}$ είναι αυτός του θεωρήματος 3.26.

Λήμμα 3.28. Για κάθε $F \in \mathcal{F}$ ισχύει $\sum_{F': F' \sim F} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') n_{F \rightarrow F'} = 0$.

Απόδειξη. Βλέπουμε το F ως ένα $(n - 1)$ -διάστατο σώμα στο $\text{aff} F$. Οι πλευρές του F είναι ακριβώς τα σύνολα $F \cap F'$ για $F' \sim F$, και τα αντίστοιχα μοναδιαία κάθετα είναι $n_{F \rightarrow F'}$. Επομένως το ζητούμενο έπεται άμεσα από το 3.11 $\square$

Περνάμε τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος 3.26.

Απόδειξη. Οι γραφή των $S_{M, \mathcal{M}}, S_{B, \mathcal{M}}$ έπονται άμεσα από τον ορισμό των μικτών επιφανειακών μέτρων και την πρόταση 3.27.

$$\int f dS_{M, \mathcal{M}} = \sum_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{H}^{n-1}(F) f(n_F),$$

καθώς ο φορέας $\text{supp} S_{M, \mathcal{M}}$ είναι οι 0-ακραίες κατευθύνσεις του M .

$$\int f dS_{B, \mathcal{M}} \stackrel{3.27}{=} \frac{1}{n-1} \sum_{e_{F, F'} \in E} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') \int_{e_{F, F'}} (h_B'' + h_B) f d\mathcal{H}^1,$$

όμως $h_B = 1$ παντού στη μοναδιαία σφαίρα, άρα

$$\int f dS_{B, \mathcal{M}} = \frac{1}{n-1} \sum_{e_{F, F'} \in E} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') \int_{e_{F, F'}} f d\mathcal{H}^1.$$

Έστω $f \in C^2(S^{n-1})$. Από λήμμα 3.28, έχουμε $f \in \text{Dom} \mathcal{A}$, καθώς

$$f \in C^2(S^{n-1}) \Rightarrow (f \in C^0(G), G \subset S^{n-1}), \text{ και } (f|_{e_{F, F'}} \in H^2 \forall e_{F, F'} \in E).$$

Επίσης ,

$$\begin{aligned} \sum_{F': F' \sim F} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') \nabla_{n_{F \rightarrow F'}} f(n_F) &= \sum_{F': F' \sim F} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') \langle \nabla f(n_F), n_{F \rightarrow F'} \rangle \\ &= \langle \nabla f(n_F), \sum_{F': F' \sim F} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') n_{F \rightarrow F'} \rangle \\ &\stackrel{3.28}{=} \langle \nabla f(n_F), 0 \rangle = 0, \forall F \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Άρα $f \in C^2(S^{n-1}) \Rightarrow f \in \text{Dom}\mathcal{A}$.

Ακόμη, από πρόταση 3.27 έχουμε

$$\mathcal{A}f = \frac{1}{n} \frac{dS_{f,\mathcal{M}}}{dS_{B,\mathcal{M}}}.$$

Επομένως, ο περιορισμός του $\mathcal{A}$ στο $C^2(S^{n-1}) \subset \text{Dom}\mathcal{A}$ ταυτίζεται με το τελεστή που ορίστηκε στη σχέση (3.7).

Θα δείξουμε πως ο $\mathcal{A}$ είναι αυτοσυζυγής χρησιμοποιώντας τη πρώτη συνθήκη του θεωρήματος Γ'.5.

Οι κορυφές του γραφήματος, αναφορικά με το θεώρημα Γ'.5, για έμας είναι τα μοναδιαία κάθετα της κάθε έδρας του πολυτόπου, ως σημεία σφαίρας. Ο τελεστής μας είναι ο $f \mapsto \frac{1}{n}(f'' + f)$. Η τάξη της κορυφής είναι το πλήθος των γειτονικών εδρών. Οι συνοριακές συνθήκες της f , τοπικά, γύρω από μία κορυφή n_F που αντιστοιχεί στην έδρα F για έμας είναι $\sum_{F': F' \sim F} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') \nabla_{n_F \rightarrow F'} f(n_F) = 0$. Στη γραφή που ακολουθεί το θεώρημα Γ'.5, αυτό γράφεται ως

$$F'(v) = \begin{pmatrix} \nabla_{n_F \rightarrow F_1} f(n_F) \\ \vdots \\ \nabla_{n_F \rightarrow F_{d_{n_F}}} f(n_F) \end{pmatrix}$$

και εφόσον $f \in C^0(G)$, είναι

$$F(v) = \begin{pmatrix} f(n_F) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Οι πίνακες που ορίζουμε για να ικανοποιήσουμε τις απαιτήσεις της πρώτης συνθήκης στο Γ'.5 είναι:

$$B_v := \text{diag}(\mathcal{H}^{n-2}(F \cap F_i)), \quad i = 1, \dots, d_{n_F}$$

και A_v οποιοσδήποτε διαγώνιος πίνακας με $\text{tr}(A_v) = 0$. Τότε, καθώς $\mathcal{H}^{n-2}(F \cap F_i) \neq 0$, $\forall i = 1, \dots, d_{n_F}$ είναι εύκολο να δούμε πως ισχύουν όλες οι απαραίτητες προϋποθέσεις.

Μένει να δείξουμε πως η $\mathcal{E}$ στο θεώρημα 3.26 είναι σχετισμένη κλειστή τετραγωνική μορφή και πως ο $\mathcal{A}$ ταυτίζεται με την Friedrichs επέκτασή του, όταν περιοριστεί στο $C^2(S^{n-1})$.

Θεωρούμε $f, g \in \text{Dom}\mathcal{A}$. Τότε, εξ ορισμού έχουμε

$$\langle g, \mathcal{A}f \rangle_{L^2(S_{B,\mathcal{M}})} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{e_{F,F'} \in E} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') \int_{e_{F,F'}} (f'' + f)g d\mathcal{H}^1.$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες δίνει

$$\begin{aligned} \int_{e_{F,F'}} (f'' + f)g d\mathcal{H}^1 = \\ \int_{e_{F,F'}} \{fg - f'g'\} d\mathcal{H}^1 - \nabla_{n_F \rightarrow F'} f(n_F)g(n_F) - \nabla_{n_{F'} \rightarrow F} f(n'_F)g(n'_F). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Οι συνοριακές συνθήκες για τις κορυφές που επιβάλλει το πεδίο ορισμού $Dom\mathcal{A}$ εξασφαλίζουν πως οι συνοριακοί όροι από την ολοκλήρωση κατά παράγοντες διαγράφονται όταν αθροίσουμε πάνω από όλες τις ακμές στην έκφραση του $\langle g, \mathcal{A}f \rangle_{L^2(S_{B,\mathcal{M}})}$. Δηλαδή η (3.10) δίνει

$$\langle g, \mathcal{A}f \rangle_{L^2(S_{B,\mathcal{M}})} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{e_{F,F'} \in E} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') \int_{e_{F,F'}} \{fg - f'g'\} d\mathcal{H}^1.$$

Επομένως $\mathcal{E}(f, g) = \langle g, \mathcal{A}f \rangle_{L^2(S_{B,\mathcal{M}})}$ για κάθε $f, g \in Dom\mathcal{A}$. Τέλος, ισχυριζόμαστε πως ο $\mathcal{A}$ είναι η Friedrichs επέκταση του περιορισμού του στον $C^2(S^{n-1})$, καθώς κάθε $f \in Dom\mathcal{E}$ είναι όριο ως προς τη νόρμα $[2\|f\|_{L^2(S_{B,\mathcal{M}})}^2 - \mathcal{E}(f, f)]^{\frac{1}{2}}$ συναρτήσεων $f_n \in C^0(G)$ που είναι C^∞ κατά μήκος κάθε ακμής και σταθερές σε μια περιοχή κάθε κορυφής.

Το παραπάνω είναι φανερό αν κάνουμε μερικούς υπολογισμούς στην (3.9). Είναι

$$\begin{aligned} \|f\|_{1,2} &= \left(\|f\|_{L^2(S_{B,\mathcal{M}})}^2 + \|f'\|_{L^2(S_{B,\mathcal{M}})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\langle f, f \rangle_{L^2(S_{B,\mathcal{M}})} + \langle f', f' \rangle_{L^2(S_{B,\mathcal{M}})} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int f^2 dS_{B,\mathcal{M}} + \int (f')^2 dS_{B,\mathcal{M}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(2 \int f^2 dS_{B,\mathcal{M}} - \int f^2 - (f')^2 dS_{B,\mathcal{M}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(2\|f\|_{L^2(S_{B,\mathcal{M}})}^2 - \mathcal{E}(f, f) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Έπειτα, με ένα κλασικό επιχείρημα επέκτασης, όπως στο [11, Α.2.26], αποδεικνύεται πως κάθε τέτοια συνάρτηση μπορεί να επεκταθεί σε C^∞ συνάρτηση σε ολόκληρη τη σφαίρα S^{n-1} . Ακολουθεί μια περιγραφή της διαδικασίας αυτής για διευκόλυνση του αναγνώστη.

Σε μια μικρή περιοχή γύρω από κάθε κορυφή τη θεωρούμε σταθερή. Έχουμε πεπερασμένο πλήθος κορυφών, που η καθεμία αντιστοιχεί σε κάποια έδρα του πολυτόπου, άρα οι κορυφές του γράφου G δεν έχουν σημείο συσσώρευσης. Το θεώρημα απαιτεί να είναι H^1 κατά μήκος κάθε ακμής, αλλά ο $\tilde{C}^\infty$ είναι πυκνός στον H^1 , άρα κατά μήκος κάθε ακμής προσεγγίζεται από C^∞ ακολουθία συναρτήσεων. Σε μια "ανοιχτή" λωρίδα πάχους $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό (ώστε να μην τεμνονται οι λωρίδες ακμών έξω από τις περιοχές των κορυφών που θεωρήσαμε παραπάνω) γύρω από κάθε ακμή επεκτείνουμε με ομαλές συναρτήσεις αποκοπής τη συνάρτησή μας, και "ρίχνουμε" την τιμή της στο 0. Έπειτα για οποια σημεία της σφαίρας δεν έχουμε ορίσει ακόμη τιμή, δίνουμε παντού τιμή 0 και το αποτέλεσμα είναι συνάρτηση $f \in C^\infty(S^{n-1})$. Άρα η $\mathcal{E}$ είναι η κλειστότητα του περιορισμού της στην $C^2(S^{n-1})$, κι η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

3.6 Ποσοτικές μορφές των δύο θεωρημάτων

Ακολουθεί μια ποσοτική μορφή του θεωρήματος 3.7, που δίνει κάποιες ασθενείς αλλά χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με τα ακρότατα της σχέσης (3.3).

Θεώρημα 3.29. Έστω M κυρτό σώμα του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \text{int}M$. Τότε υπάρχει σταθερά $C_M > 0$ που εξαρτάται μόνο από το M και τη διάσταση n , τέτοια ώστε

$$V(K, L, M) \geq V(K, K, M)V(L, L, M) + C_M V(L, L, M) \inf_{v \in \mathbb{R}^n, \alpha \geq 0} \int (h_K - \alpha h_L - \langle v, \cdot \rangle)^2 \frac{dS_{M, M}}{h_M}$$

για όλα τα κυρτά σώματα K, L του $\mathbb{R}^n$.

Να υπενθυμίσουμε πως ο φορέας του μέτρου $S_{M, M}$ είναι πολύ μικρότερος από τον φορέα του $S_{B, M}$, γεγονός που οδηγεί σε καταστάσεις σαν αυτή του παραδείγματος 3.8. Το θεώρημα της προηγούμενης ενότητας συνεπάγεται πως αν ισχύει η ισότητα στην (3.3) και το M έχει μη κενό εσωτερικό και $V(L, L, M) > 0$ τότε, μέχρι ομοιοθεσίας, τα K, L έχουν τα ίδια επίπεδα στήριξης στις 0-ακραίες κάθετες κατευθύνσεις του M . Αυτό όμως δεν επαρκεί για το χαρακτηρισμό των ακροτάτων στην ανισότητα Minkowski, όπως είναι ήδη φανερό από το παράδειγμα 3.8. Παρόλα αυτά, θα δείξουμε πως αυτές οι πληροφορίες μπορούν να αξιοποιηθούν για την εύρεση όλων των περιπτώσεων ισότητας. Το θεώρημα 3.9 περιγράφει αυτή την ιδέα, και βρίσκεται στη καρδιά της απόδειξης του θεωρήματος 3.2.

Το θεώρημα 3.9 είναι άμεση συνέπεια του ακόλουθου ποσοτικού αποτελέσματος.

Θεώρημα 3.30. Έστω M κυρτό σώμα του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Υπάρχουν $C_M > 0$ και μέτρο μ_M , εξαρτώμενα μόνο από το M , τέτοια ώστε $\text{supp} \mu_M \subset \text{supp} S_{M, M}$ και

$$V(K, L, M)^2 \geq V(K, K, M)V(L, L, M) + C_M V(L, L, M) \{ \|h_K - h_L\|_{L^2(S_{B, M})}^2 - \|h_K - h_L\|_{L^2(\mu_M)}^2 \} \quad (3.11)$$

για όλα τα κυρτά σώματα K, L του $\mathbb{R}^n$.

3.6.1 Απόδειξη του Θεωρήματος 3.30 για πολύτοπα

Υποθέτουμε πως το M είναι πολύτοπο με μη κενό εσωτερικό και πως ισχύει η ισότητα στην 3.3, έτσι, $f = h_K - \alpha h_L \in \ker \mathcal{A}$ για κάποιο $\alpha \geq 0$. Υποθέτουμε επίσης πως έχουμε σταθεροποιήσει τις τιμές της f στις 0-ακραίες κάθετες κατευθύνσεις του M , που σε αυτή τη περίπτωση θα είναι οι κορυφές του μετρικού γράφου που σχετίζεται με το M .

Τότε, έπεται από το Θεώρημα 3.26 πως η f είναι λύση για το πρόβλημα Dirichlet $f'' + f = 0$ κατά μήκος κάθε ακμής του μετρικού γράφου με συνοριακές συνθήκες στις κορυφές. Θα αποδείξουμε πως αυτό το μονοδιάστατο πρόβλημα Dirichlet έχει μοναδική λύση αν τα μήκη όλων των ακμών είναι μικρότερα του π , πράγμα που ισχύει καθώς το πολύτοπο M έχει μη κενό εσωτερικό. Έτσι, οι τιμές της f καθορίζονται με μοναδικό τρόπο στις 1-ακραίες κάθετες κατευθύνσεις του M , όταν έχουμε σταθεροποιήσει τις τιμές στις 0-ακραίες κάθετες διευθύνσεις.

Στα ακόλουθα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό της ενότητας 3.5 και θεωρούμε M πολύτοπο του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό.

Λήμμα 3.31. Έστω M πολύτοπο του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό, και $F \sim F'$ γειτονικές πλευρές. Τότε για κάθε συνάρτηση $f \in H^1(e_{F, F'})$ και $0 < \epsilon < 1$ ισχύει

$$l_{F, F'}^2 \int_{e_{F, F'}} (f')^2 d\mathcal{H}^1 \leq (1 - \epsilon)^2 \pi^2 \int_{e_{F, F'}} f^2 d\mathcal{H}^1 - \frac{2}{\epsilon} l_{F, F'} \{ f(n_F)^2 - f(n_{F'})^2 \}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας πως $F \leq F'$ και υπενθυμίζουμε πως παραμετροποιούμε τις συναρτήσεις $f : e_{F,F'} \rightarrow \mathbb{R}$ ως $f(\theta)$ με $\theta \in [0, l_{F,F'}]$, όπου $\theta = 0$ αντιστοιχεί στη κορυφή n_F και $\theta = l_{F,F'}$ στην $n_{F'}$. Ορίζουμε συνάρτηση

$$y(\theta) := \cos \left(\frac{(1-\epsilon)\pi}{l_{F,F'}} \left(\theta - \frac{l_{F,F'}}{2} \right) \right).$$

Τότε $y(\theta) > 0$, $\theta \in [0, l_{F,F'}]$. Θέτουμε $g := \frac{f}{y}$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^{l_{F,F'}} (f')^2 d\theta &= \int_0^{l_{F,F'}} [(gy)']^2 d\theta \\ &= \int_0^{l_{F,F'}} (g')^2 y^2 + g(y')^2 + 2g'yy' d\theta \\ &= \int_0^{l_{F,F'}} \{(g')^2 y^2 + g^2(y')^2 + (g^2)'yy'\} d\theta, \end{aligned}$$

όπου $\int_0^{l_{F,F'}} (g^2)'yy' d\theta = g^2 yy'|_0^{l_{F,F'}} - \int_0^{l_{F,F'}} g^2 [(y')^2 + yy''] d\theta$. Επόμενως, είναι

$$\int_0^{l_{F,F'}} (f')^2 d\theta = \int_0^{l_{F,F'}} \{(g')^2 y^2 - g^2 yy''\} d\theta + g^2 yy'|_0^{l_{F,F'}}.$$

Όμως $yy'' = -\frac{(1-\epsilon)^2 \pi^2}{l_{F,F'}^2} y^2$ και $\frac{y'}{y}(0) = -\frac{y'}{y}(l_{F,F'}) = \frac{(1-\epsilon)\pi}{l_{F,F'}} \tan \left(\frac{(1-\epsilon)\pi}{2} \right)$.

Θα δείξουμε πως

$$\frac{(1-\epsilon)\pi}{l_{F,F'}} \tan \left(\frac{(1-\epsilon)\pi}{2} \right) \leq \frac{2}{l_{F,F'}\epsilon}. \quad (3.12)$$

Θεωρούμε συνάρτηση $w(x) = \frac{x(1-x)\pi}{l_{F,F'}} \tan \left(\frac{(1-x)\pi}{2} \right)$, $x \in (0, 1)$. Η w είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1)$, επομένως $w(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} w(x)$, $\forall x \in (0, 1)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} w(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x) \frac{x\pi}{2} \frac{\sin \left(\frac{(1-x)\pi}{2} \right)}{\cos \left(\frac{(1-x)\pi}{2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x) \frac{x\pi}{2} \frac{\sin \left(\frac{(1-x)\pi}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{(1-x)\pi}{2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x) \frac{x\pi}{2} \frac{\sin \left(\frac{(1-x)\pi}{2} \right)}{-\sin \left(\frac{(1-x)\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x) \sin \left(\frac{(1-x)\pi}{2} \right) \frac{\frac{x\pi}{2}}{-\sin \left(\frac{-x\pi}{2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x) \sin \left(\frac{(1-x)\pi}{2} \right) \frac{\frac{x\pi}{2}}{\sin \left(\frac{x\pi}{2} \right)} = 1, \end{aligned}$$

καθώς $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x\pi}{2}}{\sin \left(\frac{x\pi}{2} \right)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\sin \theta} = 1 = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$. Άρα $w(x) \leq 1$, $\forall x \in (0, 1)$. Άρα ισχύει η (3.12).

Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned}
\int_0^{l_{F,F'}} (f')^2 d\theta &= \int_0^{l_{F,F'}} \{(g')^2 y^2 - g^2 y y''\} d\theta + g^2 y y'|_0^{l_{F,F'}} \\
&= \int_0^{l_{F,F'}} (g')^2 y^2 + f^2 \left(\frac{(1-\epsilon)^2 \pi^2}{l_{F,F'}^2} \right) d\theta + f^2 \frac{y'}{y} \Big|_0^{l_{F,F'}} \\
&\geq \frac{(1-\epsilon)^2 \pi^2}{l_{F,F'}^2} \int_0^{l_{F,F'}} f^2 d\theta + f^2 \frac{y'}{y} \Big|_0^{l_{F,F'}},
\end{aligned}$$

όπου

$$f^2 \frac{y'}{y} \Big|_0^{l_{F,F'}} = [f(l_{F,F'})^2 + f(0)^2] \left(-\frac{(1-\epsilon)\pi}{l_{F,F'}} \tan \left(\frac{(1-\epsilon)\pi}{2} \right) \right)$$

και

$$-\frac{(1-\epsilon)\pi}{l_{F,F'}} \tan \left(\frac{(1-\epsilon)\pi}{2} \right) \stackrel{3.12}{\geq} \frac{-2}{l_{F,F'}\epsilon}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_0^{l_{F,F'}} (f')^2 d\theta &\geq \frac{(1-\epsilon)^2 \pi^2}{l_{F,F'}^2} \int_0^{l_{F,F'}} f^2 d\theta - \frac{2}{\epsilon l_{F,F'}} (f(l_{F,F'})^2 + f(0)^2) \Rightarrow \\
l_{F,F'}^2 \int_0^{l_{F,F'}} (f')^2 d\theta &\geq (1-\epsilon)^2 \pi^2 \int_0^{l_{F,F'}} f^2 d\theta - \frac{2}{\epsilon} l_{F,F'} \{f(n_F)^2 + f(n_{F'})^2\}.
\end{aligned}$$

□

Μπορούμε να δούμε το Λήμμα 3.31 ως μια ποσοτική διατύπωση της μοναδικότητας λύσης για το πρόβλημα Dirichlet κατά μήκος μιας ακμής. Αν f_1, f_2 ικανοποιούν $f_i'' + f_i = 0$ στην $e_{F,F'}$ και παίρνουν ίδιες τιμές στις κορυφές $n_F, n_{F'}$ τότε $\int_{e_{F,F'}} f_i'' + f_i d\mathcal{H}^1 = 0 \Rightarrow \int_{e_{F,F'}} f'' + f d\mathcal{H}^1 \Rightarrow \int_{e_{F,F'}} f(f'' + f) d\mathcal{H}^1$. Επομένως

$$\begin{aligned}
0 = \int_{e_{F,F'}} f f'' d\mathcal{H}^1 + \int_{e_{F,F'}} f^2 d\mathcal{H}^1 &= f f'|_0^{l_{F,F'}} - \int_{e_{F,F'}} (f')^2 d\mathcal{H}^1 + \int_{e_{F,F'}} f^2 d\mathcal{H}^1 \\
&= 0 - \int_{e_{F,F'}} (f')^2 d\mathcal{H}^1 + \int_{e_{F,F'}} f^2 d\mathcal{H}^1,
\end{aligned}$$

καθώς $f(n_F) = f(n_{F'}) = 0$. Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}
0 &= -l_{F,F'}^2 \int_{e_{F,F'}} f(f'' + f) d\mathcal{H}^1 \\
&= l_{F,F'}^2 \int_{e_{F,F'}} (f')^2 - f^2 d\mathcal{H}^1 \\
&= l_{F,F'}^2 \int_{e_{F,F'}} (f')^2 d\mathcal{H}^1 - l_{F,F'}^2 \int_{e_{F,F'}} f^2 d\mathcal{H}^1 \\
&\stackrel{3.31}{\geq} (1-\epsilon)^2 \pi^2 \int_{e_{F,F'}} f^2 d\mathcal{H}^1 - l_{F,F'}^2 \int_{e_{F,F'}} f^2 d\mathcal{H}^1 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$0 \geq [(1-\epsilon)^2\pi^2 - l_{F,F'}^2] \int_{e_{F,F'}} f^2 d\mathcal{H}^1, \quad \forall 0 < \epsilon < 1.$$

Παίρνουμε όριο καθώς $\epsilon \rightarrow 0$:

$$0 \geq (\pi^2 - l_{F,F'}^2) \int_{e_{F,F'}} f^2 d\mathcal{H}^1$$

Άρα $f = f_1 - f_2 \equiv 0$ στην $e_{F,F'}$ αν $l_{F,F'} < \pi$. Δηλαδή έχουμε μοναδικότητα λύσης στο πρόβλημα $f'' + f = 0$ στην $e_{F,F'}$ με συνοριακές συνθήκες Dirichlet.

Αν M είναι πολύτοπο με μη κενό εσωτερικό τότε τα μήκη $l_{F,F'}$ πρέπει να είναι φραγμένα μακριά από το π . Το ακόλουθο λήμμα αποδεικνύει αυτό τον ισχυρισμό.

Λήμμα 3.32. Έστω M πολύτοπο του $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $rB \subseteq M \subseteq RB$ για $0 < r < R$. Τότε

$$\tan\left(\frac{l_{F,F'}}{2}\right) \leq \frac{R}{r}, \quad \forall e_{F,F'} \in E.$$

Ειδικότερα, κάνουμε την εκτίμηση

$$l_{F,F'}^2 \leq \pi^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2 + r^2}\right), \quad \forall e_{F,F'} \in E.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε για κάθε πλευρά $F \in \mathcal{F}$ το υπερεπίπεδο στήριξης $H_F := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle n_F, x \rangle = h_M(n_F)\}$. Έστω $F \sim F'$ γειτονικές πλευρές.

1. **Ισχυρισμός:** $h_M(n_F) \geq r$ και $h_M(n_{F'}) \geq r$. Πράγματι, εφόσον $rB \subseteq M$, έχουμε $h_M(n_F) \geq h_{rB}(n_F) = r$ και αντιστοίχως για $n_{F'}$.
2. **Ισχυρισμός:** $H_F \cap H_{F'} \cap RB \neq \emptyset$. Αυτό έπεται άμεσα από το γεγονός πως $F \cap F' \subset H_F \cap H_{F'}$ και $\emptyset \neq F \cap F' \subset M \subseteq RB$.

Παρατηρούμε πως για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ μπορούμε να γράψουμε

$$\|x\|^2 = \langle x, n_F \rangle^2 + \frac{\langle x, n_{F'} \rangle - \cos(l_{F,F'}) \langle x, n_F \rangle^2}{\sin(l_{F,F'})^2} + \|P_{\{n_F, n_{F'}\}^\perp} x\|^2,$$

όπου $\langle n_F, n_{F'} \rangle = \cos(l_{F,F'})$ και προβάλαμε το x σε δύο κάθετες συνιστώσες, τις $P_{\{n_F, n_{F'}\}^\perp} x$ και $P_{\{n_F, n_{F'}\}} x$ και εφαρμόσαμε πυθαγόρειο θεώρημα. Επομένως, από ισχυρισμό 2 έχουμε

$$R^2 \geq \inf_{x \in H_F \cap H_{F'}} \|x\|^2 = h_M(n_F)^2 + \frac{(h_M(n_{F'}) - \cos(l_{F,F'}) h_M(n_F))^2}{\sin(l_{F,F'})^2}.$$

Από ισχυρισμό 1 παίρνουμε

$$R^2 \geq r^2 \left(\frac{1 - \cos(l_{F,F'})^2}{\sin(l_{F,F'})^2} \right), \quad \text{για } \frac{\pi}{2} \leq l_{F,F'} < \pi.$$

Άρα για $\frac{\pi}{2} \leq l_{F,F'} < \pi$ έχουμε

$$\frac{R}{r} \geq \tan\left(\frac{l_{F,F'}}{2}\right).$$

Εφόσον $\frac{R}{r} \geq 1$, παίρνουμε αυτόματα πως $\tan\left(\frac{l_{F,F'}}{2}\right) \leq \frac{R}{r}$ για $0 \leq l_{F,F'} < \frac{\pi}{2}$ καθώς η εφαπτομένη είναι γν. αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.

Όσον αφορά το δεύτερο σκέλος του λήμματος, αρκεί να παρατηρήσουμε πως $4 \arctan(x)^2 \leq \frac{\pi^2 x^2}{1+x^2}$. Αντικαθιστούμε το x με $\tan\left(\frac{l_{F,F'}}{2}\right) = \frac{1-\cos(l_{F,F'})}{\sin(l_{F,F'})} \leq \frac{R}{r}$ και έχουμε

$$\begin{aligned} 4 \arctan\left(\tan\left(\frac{l_{F,F'}}{2}\right)\right)^2 &\leq \frac{\pi^2 \tan\left(\frac{l_{F,F'}}{2}\right)^2}{1 + \tan\left(\frac{l_{F,F'}}{2}\right)^2} \Rightarrow \\ l_{F,F'}^2 &\leq \frac{\pi^2 \frac{R^2}{r^2}}{1 + \frac{R^2}{r^2}} \Rightarrow \\ l_{F,F'}^2 &\leq \pi^2 \frac{R^2}{r^2 + R^2} = \pi^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2 + r^2}\right). \end{aligned}$$

□

Από Λήμμα 3.31 και Λήμμα 3.32 έχουμε

Πόρισμα 3.33. Έστω M πολύτοπο του $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $rB \subseteq M \subseteq RB$. Τότε για οποιοσδήποτε γειτονικές πλευρές $F \sim F'$ του M και για κάθε συνάρτηση $f \in H^1(e_{F,F'})$ ισχύει

$$\int_{e_{F,F'}} \{(f')^2 - f^2\} d\mathcal{H}^1 \geq \frac{r^2}{2R^2} \int_{e_{F,F'}} f^2 d\mathcal{H}^1 - \frac{4R^2}{r^2} l_{F,F'} \{f(n_F)^2 - f(n_{F'})^2\}.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.32 στο αριστερό μέλος του Λήμματος 3.31 κι έχουμε:

$$\begin{aligned} \pi^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2 + r^2}\right) \int_{e_{F,F'}} (f')^2 d\mathcal{H}^1 &\geq \\ (1 - \epsilon)^2 \pi^2 \int_{e_{F,F'}} f^2 d\mathcal{H}^1 - \frac{2}{\epsilon} l_{F,F'} \{f(n_F)^2 + f(n_{F'})^2\} &\Rightarrow \\ \int_{e_{F,F'}} (f')^2 d\mathcal{H}^1 &\geq \\ \frac{(1 - \epsilon)^2}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2 + r^2}\right)} \int_{e_{F,F'}} f^2 d\mathcal{H}^1 - \frac{2}{\epsilon \pi^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2 + r^2}\right)} l_{F,F'} \{f(n_F)^2 + f(n_{F'})^2\} &\Rightarrow \\ \int_{e_{F,F'}} (f')^2 d\mathcal{H}^1 &\geq \\ \frac{(1 - \epsilon)^2 (R^2 + r^2)}{R^2} \int_{e_{F,F'}} f^2 d\mathcal{H}^1 - \frac{2(R^2 + r^2)}{\epsilon \pi^2 R^2} l_{F,F'} \{f(n_F)^2 + f(n_{F'})^2\} &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\int_{e_{F,F'}} (f')^2 - f^2 d\mathcal{H}^1 \geq \left[\frac{(1-\epsilon)^2(R^2+r^2)}{R^2} - 1 \right] \int_{e_{F,F'}} f^2 d\mathcal{H}^1 - \frac{2}{\epsilon\pi^2} \left(\frac{R^2+r^2}{R^2} \right) l_{F,F'} \{f(n_F)^2 + f(n_{F'})^2\},$$

για κάθε $e_{F,F'} \in E$ και για κάθε $f \in \mathcal{H}^1(e_{F,F'})$, $0 < \epsilon < 1$. Επιλέγουμε $\epsilon = \frac{r^2}{4(R^2+r^2)}$ και έχουμε

$$\frac{R^2+r^2}{R^2}(1-\epsilon)^2 - 1 \geq \frac{R^2+r^2}{R^2}(1-2\epsilon) - 1 = \dots = \frac{r^2}{2R^2},$$

ενώ

$$\frac{R^2+r^2}{R^2} \frac{2}{\epsilon\pi^2} = \frac{9}{\pi^2} \frac{(R^2+r^2)^2}{R^2 r^2} \leq \frac{32}{\pi^2} \frac{R^2}{r^2}.$$

Εκτιμούμε $\frac{32}{\pi^2} \leq 4$ για απλούστευση του συμβολισμού. $\square$

Είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε μια μορφή του θεωρήματος 3.30 για πολύτοπα.

Θεώρημα 3.34. Έστω M πολύτοπο του $\mathbb{R}^n$ με $rB \subseteq M \subseteq RB$. Ορίζουμε μέτρο μ_M στις κορυφές του σχετικού μετρικού γράφου ως

$$\mu_M(\{n_F\}) := \frac{1}{n-1} \sum_{F': F' \sim F} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') l_{F,F'}$$

για όλες τις πλευρές F του M . Τότε ισχύει

$$V(K, L, M)^2 \geq V(K, K, M)V(L, L, M) + V(L, L, M) \left(\frac{r^2}{2nR^2} \int (h_K - h_L)^2 dS_{B,M} - \frac{4R^2}{nr^2} \int (h_K - h_L)^2 d\mu_M \right) \quad (3.13)$$

για όλα τα κυρτά σώματα K, L του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{E}$ η τετραγωνική μορφή του θεωρήματος 3.26 και $f \in \text{Dom}\mathcal{E}$. Πολλαπλασιάζουμε την ανισότητα του πορίσματος 3.33 με $\mathcal{H}^{n-2}(F \cap F')$ και αθροίζουμε πάνω από όλες τις ακμές του γράφου, τότε

$$0 \geq \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') \left(\sum_{e_{F,F'} \in E} \int_{e_{F,F'}} f^2 - (f')^2 d\mathcal{H}^1 + \sum_{e_{F,F'} \in E} \frac{r^2}{2R^2} \int_{e_{F,F'}} f^2 d\mathcal{H}^1 - \frac{4R^2}{r^2} \sum_{e_{F,F'} \in E} l_{F,F'} \{f(n_F)^2 + f(n_{F'})^2\} \right). \quad (3.14)$$

Πολλαπλασιάζουμε με $\frac{1}{n(n-1)}$ και αποκτούμε την έκφραση

$$0 \geq \mathcal{E}(f, f) + \frac{r^2}{2nR^2} \frac{1}{n-1} \sum_{e_{F,F'} \in E} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') \int_{e_{F,F'}} f^2 d\mathcal{H}^1 - \frac{4R^2}{nr^2} \frac{1}{n-1} \sum_{e_{F,F'} \in E} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') l_{F,F'} \{f(n_F)^2 + f(n_{F'})^2\}. \quad (3.15)$$

Από πρόταση 3.27 για $K = B$ έχουμε

$$0 \geq \mathcal{E}(f, f) + \frac{r^2}{2nR^2} \int f^2 dS_{B, \mathcal{M}} - \frac{4R^2}{nr^2} \frac{1}{n-1} \sum_{e_{F, F'} \in E} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') l_{F, F'} \{f(n_F)^2 + f(n_{F'})^2\}. \quad (3.16)$$

Σχετικά με τον τελευταίο όρο, παρατηρούμε πως μπορούμε να αθροίσουμε ως προς κορυφές αντί για ακμές του γράφου, δηλαδή,

$$\sum_{e_{F, F'} \in E} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') l_{F, F'} \{f(n_F)^2 + f(n_{F'})^2\} = \sum_{F \in \mathcal{F}} \sum_{F': F' \sim F} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') l_{F, F'} f(n_F)^2.$$

Επομένως γράφουμε την (3.16) ως

$$0 \geq \mathcal{E}(f, f) + \frac{r^2}{2nR^2} \int f^2 dS_{B, \mathcal{M}} - \frac{4R^2}{\sum F \in \mathcal{F}} \frac{1}{n-1} \sum_{F': F' \sim F} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') l_{F, F'} f(n_F)^2, \quad (3.17)$$

τέλος, από τον ορισμό του διακριτού μέτρου μ_M έχουμε

$$0 \geq \mathcal{E}(f, f) + \frac{r^2}{2nR^2} \int f^2 dS_{B, \mathcal{M}} - \frac{4R^2}{nr^2} \int f^2 d\mu_M$$

Θεωρούμε $f = h_K - h_L$, τότε

$$0 \geq V(K, K, \mathcal{M}) - 2V(K, L, \mathcal{M}) + V(L, L, \mathcal{M}) + \frac{r^2}{2nR^2} \int (h_K - h_L)^2 dS_{B, \mathcal{M}} - \frac{4R^2}{nr^2} \int (h_K - h_L)^2 d\mu_M. \quad (3.18)$$

Αρκεί να παρατηρήσουμε πως

$$V(K, K, \mathcal{M}) - 2V(K, L, \mathcal{M}) + V(L, L, \mathcal{M}) \geq V(K, K, \mathcal{M}) - \frac{V(K, L, \mathcal{M})^2}{V(L, L, \mathcal{M})},$$

για $V(L, L, \mathcal{M}) > 0$ και να αντικαταστήσουμε στην (3.18), ενώ αν $V(L, L, \mathcal{M}) = 0$, δεν έχουμε κάτι να αποδείξουμε, το συμπέρασμα είναι τετριμμένο. $\square$

Για την απόδειξη της γενικής περίπτωσης του Θεωρήματος 3.30 για τυχόν κυρτό σώμα M θα προσεγγίσουμε με ακολουθία πολυτόπων και θα πάρουμε όρια στην Πρόταση 3.34. Το ζήτημα είναι να καταλάβουμε την συμπεριφορά του μέτρου μ_M . Να σημειώσουμε πως ακόμα και εντός της κλάσης των πολυτόπων, το μέτρο μ_M δεν είναι συνεχές ως προς την Hausdorff σύγκλιση, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα [15].

Παράδειγμα 3.35. Θεωρούμε κύβο M_ϵ με αποκομμένη τη μία ακμή του, σε πλάτος ϵ . Τότε το M_ϵ έχει μια παραπάνω πλευρά, που την ονομάζουμε F , από το M_0 για κάθε $\epsilon > 0$. Άμεσα βλέπουμε πως $\inf_{\epsilon > 0} \mu_{M_\epsilon}(\{n_F\}) > 0$ ενώ $\mu_{M_0}(\{n_F\}) = 0$. Επομένως $M_\epsilon \rightarrow M_0$, με την έννοια της Hausdorff σύγκλισης, ενώ $\mu_{M_\epsilon} \not\rightarrow \mu_{M_0}$ για $\epsilon \rightarrow 0$.

Για ένα πολύτοπο M , το θεώρημα 3.26 δείχνει πως η μάζα μιας κορυφής ως προς το μέτρο μ_M είναι ακριβώς το $S_{B,\mathcal{M}}$ -μέτρο των ακμών που καταλήγουν σε αυτή.

Υπενθυμίζουμε πως σύμφωνα με το 3.26,

$$\int f dS_{B,\mathcal{M}} = \frac{1}{n-1} \sum_{e_{F,F'}} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') \int_{e_{F,F'}} f d\mathcal{H}^1, \quad \forall f : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Επιλέγουμε $F \in \mathcal{F}$, τότε αφού M πολύτοπο, η F θα έχει πεπερασμένο πλήθος γειτονικών πλευρών $F_i \sim F$, όπου $i = 1, \dots, k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\begin{aligned} S_{B,\mathcal{M}} \left(\bigcup_{i=1}^k e_{F,F_i} \right) &= \sum_{i:F_i \sim F} \int 1_{e_{F,F_i}} dS_{B,\mathcal{M}} \\ &\stackrel{3.26}{=} \sum_{i:F_i \sim F} \frac{1}{n-1} \sum_{j:e_{F,F_j} \in E} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F_j) \int_{e_{F,F_j}} 1_{e_{F,F_i}} d\mathcal{H}^1. \end{aligned}$$

Όμως $\int_{e_{F,F_j}} 1_{e_{F,F_i}} d\mathcal{H}^1 = \delta_{ij} l_{F,F_i}$, άρα έχουμε

$$S_{B,\mathcal{M}} \left(\bigcup_{i=1}^k e_{F,F_i} \right) = \frac{1}{n-1} \sum_{i:F_i \sim F} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F_i) l_{F,F_i} = \mu_M(\{n_F\}).$$

Παρατηρούμε ακόμη πως

$$\mu_M(S^{n-1}) = 2S_{B,\mathcal{M}}(S^{n-1}) = 2nV(B, B, \mathcal{M}),$$

διότι

$$\begin{aligned} \mu_M(S^{n-1}) &= \mu_M(\bigcup_{F \in \mathcal{F}} \{n_F\}) \\ &= \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu_M(\{n_F\}) \\ &= \sum_{F \in \mathcal{F}} \frac{1}{n-1} \sum_{F': F' \sim F} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') l_{F,F'} \\ &= 2 \frac{1}{n-1} \sum_{e_{F,F'} \in E} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') l_{F,F'} \\ &= 2 \frac{1}{n-1} \sum_{e_{F,F'} \in E} \mathcal{H}^{n-2}(F \cap F') \int_{e_{F,F'}} 1_{S^{n-1}} d\mathcal{H}^1 \\ &\stackrel{3.26}{=} 2 \int 1_{S^{n-1}} dS_{B,\mathcal{M}} \\ &= 2S_{B,\mathcal{M}}(S^{n-1}). \end{aligned}$$

Επομένως η μάζα του μ_M φράσσεται ομοιόμορφα για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία πολυτόπων κι άρα μπορούμε να εξάγουμε μια ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία για αυτό. Μπορεί μεν, το οριακό μέτρο να μην ορίζεται μοναδικά από το οριακό σώμα, μπορούμε παρόλα αυτά να εξασφαλίσουμε πως ικανοποιεί τις επιθυμητές για το σκοπό μας ιδιότητες, επιλέγοντας κατάλληλα την πολυτοπική προσέγγιση.

Λήμμα 3.36. Έστω M τυχόν κυρτό σώμα του $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \text{int}M$. Τότε υπάρχει ακολουθία πολυτόπων M_k του $\mathbb{R}^n$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $M_k \rightarrow M$ με την έννοια της Hausdorff σύγκλισης.
2. Υπάρχουν $r, R > 0$ τέτοια ώστε $rB \subseteq M_k \subseteq RB$ για κάθε k .
3. $\text{supp}S_{M_k, \mathcal{M}_k} \subseteq \text{supp}S_{M, \mathcal{M}}$ για κάθε k .
4. Το μ_{M_k} συγκλίνει ασθενώς προς κάποιο οριακό μέτρο μ_M με $\text{supp}\mu_M \subseteq \text{supp}S_{M, \mathcal{M}}$.

Απόδειξη. Ένα ομαλό συνοριακό σημείο του M , είναι ένα σημείο στο ∂M που έχει μοναδικό εξωτερικό κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα, ειδικότερα, το κάθετο διάνυσμα σε ένα ομαλό συνοριακό σημείο είναι 0-ακραίο.

Επιλέγουμε αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο των ομαλών συνοριακών σημείων του M . Έστω $\{n_i\}_{i \geq 1}$ οι αντίστοιχες κάθετες διευθύνσεις. Αφού είναι πυκνό, σίγουρα θα περιέχει όλες τις κάθετες διευθύνσεις που αντιστοιχούν σε πλευρές του M . Τότε

$$\{n_i\} \subseteq \text{supp}S_{M, \mathcal{M}} \stackrel{3.13}{=} \text{cl}\{u \in S^{n-1} : u \text{ είναι 0-ακραία κατεύθυνση του } M\}.$$

Επιπρόσθετα, εφόσον κάθε κυρτό σώμα με μη κενό εσωτερικό είναι η τομή όλων των ημίχωρων στήριξης στις ομαλές διευθύνσεις του, [14, σ. 2.2.6] έχουμε

$$M = \bigcap_{i \geq 1} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, n_i \rangle \leq h_M(n_i)\}.$$

Ορίζουμε

$$M'_k := \bigcap_{1 \leq i \leq k} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, n_i \rangle \leq h_M(n_i)\}.$$

Τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. M'_k είναι πολύτοπο για αρκετά μεγάλο k .
2. $M'_k \rightarrow M$ με την έννοια της Hausdorff σύγκλισης.
3. $rB \subseteq M \subseteq M'_k$ για κάθε k με $r > 0$, καθώς $0 \in \text{int}M$.
4. $M'_k \subseteq RB$ για τελικά όλα τα k με $R = \text{diam}M$ λόγω της ιδιότητας 2.
5. $\text{supp}S_{M'_k, \mathcal{M}'_k} \subseteq \{n_i\}_{1 \leq i \leq k} \subseteq \text{supp}S_{M, \mathcal{M}}$ για τελικά όλα τα k λόγω του θεωρήματος 3.13.

Εφόσον $M'_k \subseteq RB$, μπορούμε να εκτιμήσουμε

$$\mu_{M'_k}(S^{n-1}) = 2nV(B, B, \mathcal{M}'_k) \leq 2nR^{n-2}V(B).$$

Η ιδιότητα 4 μας εξασφαλίζει πως η μάζα του $\mu_{M'_k}$ είναι ομοιομόρφως φραγμένη για αρκετά μεγάλα k , άρα μπορούμε να εξάγουμε μια υπακολουθία $\{M_k\}$ της $\{M'_k\}$ έτσι ώστε το μ_{M_k} να συγκλίνει ασθενώς προς ένα οριακό μέτρο που να ικανοποιεί τις ιδιότητες 1-3 στην εκφώνηση του λήμματος 3.36. Το παραπάνω προκύπτει κάνοντας χρήση του Θεωρήματος του Prokhorov για ασθενή συμπίεση μέτρων.

Μένει να δείξουμε πως $\text{supp}\mu_{M_k} \subseteq \text{supp}S_{M, \mathcal{M}}$, πράγμα που έπεται άμεσα από το γεγονός πως $\text{supp}\mu_{M_k} = \text{supp}S_{M_k, \mathcal{M}_k} \subseteq \text{supp}S_{M, \mathcal{M}}$ για κάθε k . $\square$

Θα ολοκληρώσουμε τώρα την απόδειξη του θεωρήματος 3.30.

3.6.2 Απόδειξη του Θεωρήματος 3.30 για τυχόντα κυρτά σώματα

Απόδειξη. Εφόσον οι μικτοί όγκοι και τα μικτά επιφανειακά μέτρα είναι αναλλοίωτα από παράλληλες μεταφορές, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας πως $0 \in \text{int}M$. Ορίζουμε μια ακολουθία πολυτόπων $\{M_k\}$ και το μέτρο μ_M όπως στο λήμμα 3.36. Δηλαδή η $\{M_k\}$ είναι τέτοια ώστε να συγκλίνει προς το κυρτό σώμα M με την έννοια της Hausdorff σύγκλισης, και ταυτόχρονα είναι η υπακολουθία που αναφέρεται στο λήμμα 3.36 τέτοια ώστε $\mu_{M_k} \xrightarrow{w} \mu_M$.

Εφαρμόζουμε την πρόταση 3.34 για M_k και παίρνουμε όριο καθώς $k \rightarrow \infty$. Τότε αποκτούμε τη σχέση

$$V(K, L, \mathcal{M})^2 \geq V(K, K, \mathcal{M})V(L, L, \mathcal{M}) + V(L, L, \mathcal{M}) + \left(\frac{r^2}{2nR^2} \int (h_K - h_L)^2 dS_{B, \mathcal{M}} - \frac{4R^2}{nr^2} \int (h_K - h_L)^2 d\mu_M \right). \quad (3.19)$$

□

Στην παραπάνω σχέση, μπορούμε να κάνουμε rescaling, δηλαδή μια κανονικοποίηση, του μέτρου μ_M έτσι ώστε να εμφανίζεται μία μόνο σταθερά C_M στο δεξί μέλος της ανισότητας, και να αποκτήσουμε την έκφραση (3.11)

$$V(K, L, \mathcal{M})^2 \geq V(K, K, \mathcal{M})V(L, L, \mathcal{M}) + C_M V(L, L, \mathcal{M}) \{ \|h_K - h_L\|_{L^2(S_{B, \mathcal{M}})}^2 - \|h_K - h_L\|_{L^2(\mu_M)}^2 \}. \quad (3.20)$$

3.6.3 Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2

Τέλος, περνάμε στην απόδειξη του θεωρήματος 3.2.

Απόδειξη. Έστω K, L, M κυρτά σώματα του $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε M έχει μη κενό εσωτερικό και $V(L, L, \mathcal{M}) > 0$.

Υποθέτουμε πως υπάρχουν $\alpha \geq$ και $v \in \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε τα K και $\alpha L + v$ να έχουν τα ίδια υπερεπίπεδα στήριξης σε όλες τις 1-ακραίες κάθετες κατευθύνσεις του M . Τότε

$$h_K - \alpha h_L = \langle v, \cdot \rangle, \quad S_{B, \mathcal{M}} - \text{σχεδόν παντού}$$

από το Θεώρημα 3.13.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{A}$ και $\mathcal{E}$ το τελεστή και τη τετραγωνική μορφή του θεωρήματος 3.22 και έχουμε $h_K - \alpha h_L \in \ker \mathcal{A}$ και $\mathcal{E}(h_L, h_L) = V(L, L, \mathcal{M}) > 0$. Η ισότητα στην (3.3) προκύπτει από το λήμμα 3.5. (Έχουμε πετύχει την συνθήκη 4 που ισοδυναμεί με την 3, αρκεί να γράψουμε την συνθήκη 3 σε μορφή μικτών όγκων αντί τετραγωνικών μορφών κι έχουμε ακριβώς το ζητούμενο.)

Αντίστροφα, έστω πως ισχύει η ισότητα στην σχέση (3.3). Εφόσον οι μικτοί όγκοι και τα μικτά επιφανειακά μέτρα είναι αναλλοίωτα από παράλληλες μεταφορές, υποθέτουμε χωρίς

βλάβη της γενικότητας πως $0 \in \text{int}M$. Τότε το θεώρημα 3.29 συνεπάγεται πως υπάρχουν $\alpha \geq 0$ και $v \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

$$\delta := h_K - \alpha h_L - \langle v, \cdot \rangle = 0, \quad S_{M,\mathcal{M}} - \text{σχεδόν παντού}.$$

Τότε, ορίζουμε το μέτρο μ_M όπως στο θεώρημα 3.30 και εφόσον το δ είναι σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, θα κάνει 0 παντού στο $\text{supp}\mu_M \subseteq \text{supp}S_{M,\mathcal{M}}$. Έπειτα εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.30 με $L \mapsto \alpha L + v$. Παρατηρούμε πως η ανισότητα Minkowski είναι αναλλοίωτη από ομοιοθεσίες του L . Επομένως παίρνουμε

$$0 \geq V(\alpha L + v, \alpha L + v, \mathcal{M}) \left(\|h_K - \alpha h_L - \langle v, \cdot \rangle\|_{L^2(S_{B,\mathcal{M}})} \right).$$

Όμως $V(\alpha L + v, \alpha L + v, \mathcal{M}) > 0$, επομένως,

$$h_K - \alpha h_L - \langle v, \cdot \rangle = 0, \quad S_{B,\mathcal{M}} - \text{σχεδόν παντού}.$$

Ξανά, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, το δ είναι υποχρεωτικά 0 σε ολόκληρο, τελικά, το φορέα $\text{supp}S_{B,\mathcal{M}}$. Έπεται από το Θεώρημα 3.13 πως τα K και $\alpha L + v$ έχουν τα ίδια υπεπερεπίπεδα στήριξης σε όλες τις 1-ακραίες κάθετες κατευθύνσεις του M . $\square$

ΑΥΤΟΣΥΖΥΓΕΙΣ ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Όλοι οι ορισμοί και τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται σε αυτό το παράρτημα βρίσκονται στο [4].

Είναι συχνά προτιμότερο να μελετήσουμε τη τετραγωνική μορφή που σχετίζεται με ένα ελλειπτικό διαφορικό τελεστή δεύτερης τάξης T , παρά τον ίδιο τον τελεστή. Ο λόγος είναι πως πολλοί τέτοιοι τελεστές με διαφορετικά πεδία ορισμού έχουν τετραγωνικές μορφές με το ίδιο πεδίο ορισμού.

Θα λέμε πως ένας συμμετρικός τελεστής T με πεδίο ορισμού $\mathcal{D}$ είναι μη αρνητικός αν

$$\langle Tf, f \rangle \geq 0, \quad \forall f \in \mathcal{D}.$$

Αν ο T είναι αυτοσυζυγής υπάρχουν αρκετοί ισοδύναμοι τρόποι να ορίσουμε την παραπάνω έννοια.

Θεώρημα Α'.1. *Αν T είναι ένας μη αρνητικός, αυτοσυζυγής τελεστής και $0 < \lambda < 1$, τότε $f \in \text{Dom}(T)$ αν και μόνο αν $f \in \text{Dom}(T^\lambda)$ και $T^\lambda f \in \text{Dom}(T^{1-\lambda})$. Για τέτοια f ισχύει*

$$Tf = T^{1-\lambda}(T^\lambda f).$$

Έστω T ένας μη αρνητικός, αυτοσυζυγής τελεστής. Ορίζουμε $Q'(f, g)$ για $f, g \in \text{Dom}(T^{\frac{1}{2}})$ να είναι

$$Q'(f, g) := \langle T^{\frac{1}{2}}f, T^{\frac{1}{2}}g \rangle.$$

Λήμμα Α'.2. *Έστω T μη αρνητικός, αυτοσυζυγής τελεστής στο $\mathcal{H}$. Τότε μια $f \in \mathcal{H}$, θα ανήκει στο $\text{Dom}(T)$ αν και μόνο αν $f \in \text{Dom}(T^{\frac{1}{2}})$ και υπάρχει $k \in \mathcal{H}$ τέτοιο ώστε*

$$Q'(f, g) = \langle k, g \rangle \tag{Α'.1}$$

για όλα τα $g \in \text{Dom}(T^{\frac{1}{2}})$. Σε αυτή τη περίπτωση έχουμε $Tf = k$.

Απόδειξη. Η εξίσωση (Α'.1) είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη πως $T^{\frac{1}{2}}f \in \text{Dom}\{(T^{\frac{1}{2}})^*\}$ και $(T^{\frac{1}{2}})^*T^{\frac{1}{2}}f = k$. Καθώς $(T^{\frac{1}{2}})^* = T^{\frac{1}{2}}$ το λήμμα είναι ισοδυναμεί με τη περίπτωση $\lambda = \frac{1}{2}$ του θεωρήματος Α'.1 □

Ο επόμενος στόχος μας είναι να χαρακτηρίσουμε τις τετραγωνικές μορφές που προκύπτουν από μη αρνητικούς αυτοσυζυγείς τελεστές με την παραπάνω διαδικασία. Ορίζουμε

Κεφάλαιο Α'

μια μη αρνητική διγραμμική μορφή Q' σε ένα πυκνό υπόχωρο $\mathcal{D}$ ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ να είναι μια απεικόνιση $Q' : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

1. $Q'(f, g)$ είναι γραμμική ως προς f, g .
2. $Q'(f, f) \geq 0, \forall f \in \mathcal{D}$.

Τώρα ορίζουμε τη τετραγωνική μορφή $Q : \mathcal{H} \longrightarrow [0, \infty]$ που σχετίζεται με την Q' να είναι

$$Q(f) := \begin{cases} Q'(f, f) & , f \in \mathcal{D} \\ \infty & , \text{αλλού} \end{cases}$$

Το ακόλουθο θεώρημα χρησιμοποιεί την έννοια της κάτω ημισυνέχειας. Μια συνάρτηση $f : M \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ σε ένα μετρικό χώρο M καλείται κάτω ημισυνεχής αν για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $x_n \rightarrow x$ στον M ισχύει

$$f(x) \leq \liminf f(x_n).$$

Είναι γνωστό πως το κατά σημείο όριο μιας αύξουσας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων είναι κάτω ημισυνεχής συνάρτηση.

Θεώρημα Α'.3. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Q είναι η μορφή που σχετίζεται με ένα μη αρνητικό αυτοσυζυγή τελεστή T .
2. Q είναι μια κάτω ημισυνεχής συνάρτηση στον $\mathcal{H}$.
3. Το πεδίο ορισμού $\mathcal{D}$ της Q είναι πλήρες ως προς τη νόρμα $||| \cdot |||$, όπου

$$|||f||| := (Q(f) + \|f\|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Α'.2})$$

Η παραπάνω είναι η επαγόμενη νόρμα από το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle_1 := \langle f, g \rangle + \langle Tf, g \rangle$$

Ορισμός Α'.4. Καλούμε κλειστές τις μορφές που ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες.

Ορισμός Α'.5. Μία μορφή Q_2 καλείται επέκταση της Q_1 αν έχει μεγαλύτερο πεδίο ορισμού και συμφωνεί με την Q_1 στο κοινό τους πεδίο ορισμού. Μία μορφή Q καλείται closable αν έχει κλειστή επέκταση, και καλούμε την μικρότερη κλειστή επέκτασή της κλειστότητα της Q την οποία συμβολίζουμε $\bar{Q}$.

Παρατηρούμε πως το πεδίο ορισμού της $\bar{Q}$ είναι η πλήρωση του πεδίου ορισμού της Q ως προς τη νόρμα Α'.2. Αυτή η πλήρωση ορίζεται για όλες τις τετραγωνικές μορφές Q αλλά δεν είναι πάντα εμβαπτίσιμη ως υπόχωρος του $\mathcal{H}$.

Η χρήση τετραγωνικών μορφών μας επιτρέπει να αποδείξουμε πως κάθε μη αρνητικός, συμμετρικός τελεστής T έχει τουλάχιστον μία μη αρνητική αυτοσυζυγή επέκταση. Ένας συμμετρικός τελεστής T είναι πάντα closable, δηλαδή, η κλειστότητα του γραφήματος του T είναι το γράφημα κάποιου τελεστή.

Κεφάλαιο Α'

Ορισμός Α'.6. Ένας συμμετρικός τελεστής T καλείται ουσιαστικά αυτοσυζυγής αν η κλειστότητα του T είναι αυτοσυζυγής τελεστής. Ισοδύναμα, ο T είναι ουσιαστικά αυτοσυζυγής αν έχει μοναδική αυτοσυζυγή επέκταση.

Αν ο T δεν είναι essentially αυτοσυζυγής, τότε αυτή η επέκταση καλείται Friedrichs επέκταση και είναι μία από τις άπειρες δυνατές αυτοσυζυγείς επεκτάσεις του T .

Θεώρημα Α'.7. Έστω Q' μορφή που ορίζεται στο πεδίο ορισμού $\mathcal{D}$ ενός μη αρνητικού, συμμετρικού τελεστή T από τη σχέση

$$Q'(f, g) := \langle Tf, g \rangle.$$

Τότε η Q είναι closable και η κλειστότητά της σχετίζεται με μια αυτοσυζυγή επέκταση του T .

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{H}_1$ η πλήρωση του πεδίου ορισμού $\mathcal{D}$ του T ως προς τη νόρμα $||| \cdot |||$ ορίστηκε στη σχέση (Α'.2). Αφού $||f|| \leq |||f|||$, $\forall f \in \mathcal{D}$ θα υπάρχει συστολή $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}$ τέτοια ώστε $Af = f$, $\forall f \in \mathcal{D}$. Αν $f \in \mathcal{H}_1$ και $Af = 0$, τότε θα υπάρχει ακολουθία $f_n \in \mathcal{D}$ τέτοια ώστε $|||f_n - f||| \rightarrow 0$ και $||f_n|| \rightarrow 0$. Ως εκ τούτου

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle_1 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_m, f_n \rangle_1 \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \langle f_m, f_n \rangle + \langle Tf_m, f_n \rangle \} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \{ \langle f_m, 0 \rangle \} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως η A έχει μηδενικό πυρήνα και ο $\mathcal{H}_1$ είναι εμβυπτισμένος ως γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{H}$. Έπεται, μέσω του θεωρήματος Α'.3 πως η Q είναι closable.

Έστω K ο μη αρνητικός αυτοσυζυγής τελεστής που σχετίζεται με την κλειστότητα της Q , μένει να δείξουμε πως ο K είναι επέκταση του T . Αν $f, g \in \mathcal{D} \subset \text{Dom}(K^{\frac{1}{2}})$, τότε

$$\langle K^{\frac{1}{2}}f, K^{\frac{1}{2}}g \rangle = \overline{Q'}(f, g) = \langle Tf, g \rangle.$$

Το ίδιο ισχύει για κάθε $f \in \mathcal{D}$ και $g \in \mathcal{H}_1$. Συμπεραίνουμε μέσω του λήμματος Α'.2 πως $\mathcal{D} \subset \text{Dom}(K)$ και $Tf = Kf$, $\forall f \in \mathcal{D}$. $\square$

Συνοψίζοντας λοιπόν, αν $\mathcal{H}$ ένας (πραγματικός) χώρος Hilbert και $E(f, g)$ μια διγραμμική απεικόνιση ορισμένη σε πυκνό υπόχωρο $\text{Dom}E \subset \mathcal{H}$ του $\mathcal{H}$. Η E καλείται μη αρνητική μορφή αν $E(f, g) = E(g, f)$ και $E(f, f) \geq 0$. Μια μη αρνητική μορφή είναι κλειστή αν το πεδίο ορισμού της $\text{Dom}E$ είναι πλήρες ως προς τη νόρμα $[E(f, f) + ||f||^2]^{\frac{1}{2}}$.

Οι κλειστές τετραγωνικές μορφές είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με μη αρνητικούς αυτοσυζυγείς τελεστές του $\mathcal{H}$. Για κάθε μη αρνητικό αυτοσυζυγή τελεστή T η μορφή $E(f, g) := \langle T^{\frac{1}{2}}f, T^{\frac{1}{2}}g \rangle$ με $\text{Dom}E = \text{Dom}T^{\frac{1}{2}}$ είναι κλειστή, ενώ για κάθε κλειστή μη αρνητική μορφή E υπάρχει μη αρνητικός αυτοσυζυγής τελεστής T που ικανοποιεί την παραπάνω γραφή (χάριν στο Α'.3, [βλ. 4, σ. 4.4.2]).

Κεφάλαιο Α'

Λήμμα Α'.8. Έστω T πυκνά ορισμένος τελεστής στο $\mathcal{H}$ τέτοιος ώστε η διγραμμική απεικόνιση $E(f, g) = \langle f, Tg \rangle$ είναι συμμετρική και μη αρνητική στο πεδίο ορισμού του T . Τότε η E είναι closable και η κλειστότητά της ορίζει μια αυτοσυζυγή επέκταση του T .

Παρατηρούμε ακόμη πως αν $f \in \text{dom} E$ και $E(f, f) = 0$ τότε αποκτούμε επιπλέον ομαλότητα για την f , δηλαδή $f \in \text{Dom} T$.

Λήμμα Α'.9. Έστω $E(f, g)$ μια κλειστή μη αρνητική μορφή και T ο σχετικός αυτοσυζυγής τελεστής. Τότε $f \in \text{Dom} E$, $E(f, f) = 0$ αν και μόνο αν $f \in \text{Dom} T$, $Tf = 0$.

Απόδειξη. Από θεώρημα [Α'.1](#) έχουμε

$$\text{Dom} T = \{f \in \text{Dom} T^{\frac{1}{2}} : T^{\frac{1}{2}} f \in \text{Dom} T^{\frac{1}{2}}\}$$

Όμως $E(f, f) = \langle T^{\frac{1}{2}} f, T^{\frac{1}{2}} f \rangle = \|T^{\frac{1}{2}} f\|^2 = \langle f, Tf \rangle$, για $f \in \text{Dom} T$. □

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β'

ΦΑΣΜΑΤΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΑΙ PROJECTION VALUED MEASURES

Όλοι οι ορισμοί και τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται σε αυτό το παράρτημα βρίσκονται στο [7].

Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{H}$ έναν διαχωρίσιμο (μιγαδικό) χώρο Hilbert. Ένας γραμμικός τελεστής T θα καλείται φραγμένος αν η νόρμα του τελεστή T ,

$$\|T\| := \sup_{\psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}} \frac{\|T\psi\|}{\|\psi\|} \quad (\text{B'.1})$$

είναι πεπερασμένη. Ο χώρος των φραγμένων τελεστών στο $\mathcal{H}$ είναι χώρος Banach ως προς την νόρμα αυτή, και ισχύει

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad (\text{B'.2})$$

για όλους τους φραγμένους τελεστές A, B .

Ορισμός B'.1. Ο χώρος Banach των φραγμένων τελεστών στον $\mathcal{H}$, ως προς τη νόρμα (B'.1), συμβολίζεται $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Για κάθε $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ υπάρχει μοναδικός συζυγής τελεστής $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, τέτοιος ώστε

$$\langle f, Tg \rangle = \langle T^*f, g \rangle$$

για κάθε $f, g \in \mathcal{H}$. Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ θα καλείται αυτοσυζυγής αν $T^* = T$. Λέμε πως ο $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι μη αρνητικός αν

$$\langle f, Tf \rangle \geq 0 \quad (\text{B'.3})$$

για κάθε $f \in \mathcal{H}$.

Πρόταση B'.2. Για $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ισχύουν

$$\|T^*\| = \|T\|$$

και

$$\|T^*T\| = \|T\|^2.$$

Πρόταση B'.3. Για $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ισχύει

$$[\text{Range}(T)]^\perp = \ker(T^*).$$

Κεφάλαιο Β'

Ορισμός Β'.4. Για $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, το επιλύον σύνολο του T είναι το σύνολο όλων των $\lambda \in \mathbb{C}$ για τα οποία ο τελεστής $(T - \lambda I)$ έχει φραγμένο αντίστροφο. Το φάσμα του T , συμβολίζεται με $\sigma(T)$ και είναι το συμπλήρωμα στο $\mathbb{C}$ του επιλύοντος συνόλου. Για λ στο επιλύον σύνολο του T , ο τελεστής $(T - \lambda I)^{-1}$ καλείται επιλύον (resolvent) του T στο λ .

Αν $(T - \lambda I)$ έχει φραγμένο αντίστροφο, τότε υπάρχει ένας φραγμένος τελεστής B τέτοιος ώστε

$$(T - \lambda I)B = B(T - \lambda I) = I.$$

Αν ο T είναι φραγμένος και ο $T - \lambda I$ είναι ένα προς ένα και επί απεικόνιση του $\mathcal{H}$ στον εαυτό του, τότε έπεται από το Θεώρημα κλειστού γραφήματος, πως η αντίστροφη απεικόνιση επίσης είναι φραγμένη. Επομένως, μπορούμε να περιγράψουμε το επιλύον σύνολο του T ως το σύνολο των $\lambda \in \mathbb{C}$ για τα οποία ο $T - \lambda I$ είναι ένα προς ένα και επί.

Πρόταση Β'.5. Για $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ισχύουν τα ακόλουθα.

1. Το φάσμα $\sigma(T)$ του T είναι ένα κλειστό, φραγμένο, μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.
2. Αν $|\lambda| > \|T\|$, τότε το λ ανήκει στο επιλύον σύνολο του T .

Λήμμα Β'.6. Έστω $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ με $\|X\| < 1$. Τότε ο τελεστής $I - X$ είναι αντιστρέψιμος, και ο αντίστροφος του δίνεται από την ακόλουθη, συγκίνουσα εν $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, σειρά:

$$(I - X)^{-1} = I + X + X^2 + X^3 + \dots \quad (\text{B'.4})$$

Αν $Tf = \lambda f$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$ και μη μηδενικό $f \in \mathcal{H}$, τότε ο $(T - \lambda I)$ έχει μη μηδενικό πυρήνα και άρα το λ είναι στο φάσμα του T . Επομένως, κάθε ιδιοτιμή του T περιέχεται στο φάσμα του T . Στην απειροδιάστατη περίπτωση όμως είναι γνωστό πως δεν ισχύει το αντίστροφο: Ένα σημείο του φάσματος δεν είναι κατ' ανάγκη ιδιοτιμή του T . Παρόλα αυτά, για ένα φραγμένο αυτοσυζυγή τελεστή T , το φάσμα του T μπορεί να περιγραφεί με τρόπο που δεν διαφέρει κατά πολύ από όσα έχουμε συνηθίσει για πεπερασμένη διάσταση.

Πρόταση Β'.7. Για αυτοσυζυγή $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ισχύουν τα ακόλουθα.

1. Το φάσμα του T περιέχεται στη πραγματική ευθεία.
2. Ένας αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ ανήκει στο φάσμα του T αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία f_n μη μηδενικών στοιχείων του $\mathcal{H}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|Tf_n - \lambda f_n\|}{\|f_n\|} = 0. \quad (\text{B'.5})$$

Η δεύτερη συνθήκη της πρότασης λέει πως $\lambda \in \mathbb{R}$ ανήκει στο φάσμα αν και μόνο αν το λ "σχεδόν" είναι ιδιοτιμή, εννοώντας πως υπάρχει $f \neq 0$ για το οποίο Af ισούται με λf συν κάποιο σφάλμα το οποίο είναι "μικρό" σε σύγκριση με το f .

Ορισμός Β'.8. Έστω $\mathcal{H}_j$ ακολουθία διαχωρίσιμων χώρων Hilbert. Τότε ο χώρος Hilbert ευθύ άθροισμα συμβολίζεται με $\mathcal{H} := \oplus_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_j$ και είναι ο χώρος των ακολουθιών $f = (f_1, f_2, \dots)$ με $f_i \in \mathcal{H}_i$ και $\|f\| := \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_j^2 < \infty$.

Κεφάλαιο Β'

Το πεπερασμένο ευθύ άθροισμα των $\mathcal{H}_j$ είναι το σύνολο των $f = (f_1, f_2, \dots)$ για τα οποία $f_j \neq 0$ για πεπερασμένο πλήθος δεικτών j . Ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο στο χώρο ευθύ άθροισμα ως

$$\langle f, g \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} \langle f_j, g_j \rangle, \quad \forall f, g \in \mathcal{H}.$$

Αποδεικνύεται πως αυτό είναι καλά ορισμένο, και πως ο $\mathcal{H}$ είναι πλήρης ως προς τη νόρμα που επάγεται από το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός Β'.9. Για κάθε κλειστό υπόχωρο $V \subset \mathcal{H}$, υπάρχει μοναδικός φραγμένος τελεστής P τέτοιος ώστε $P = I$ στο V και $P = 0$ στο $V^\perp$. Ο P καλείται ορθογώνια προβολή στον V και ικανοποιεί $P^2 = P$ και $P^* = P$.

Αντίστροφα, αν P είναι οποιοσδήποτε φραγμένος γραμμικός τελεστής στο $\mathcal{H}$ τέτοιος ώστε $P^2 = P$ και $P^* = P$, τότε ο P είναι ορθογώνια προβολή σε κλειστό υπόχωρο V του $\mathcal{H}$, όπου $V = \text{range}(P)$.

Δοθέντος φραγμένου αυτοσυζυγή τελεστή T , θα θέλαμε να συσχετίσουμε σε κάθε Borel σύνολο $E \subset \sigma(T)$ ένα κλειστό υπόχωρο V_E του $\mathcal{H}$, όπου διαισθητικά σκεφτόμαστε πως ο V_E είναι η κλειστή θήκη των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων του T που οι ιδιοτιμές τους ανήκουν στο E . Αναμένουμε η συλλογή αυτών των υπόχωρων να έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

1. $V_{\sigma(T)} = \mathcal{H}$ και $V_\emptyset = \{0\}$.
2. Αν E, F είναι ξένα, τότε $V_E \perp V_F$.
3. Για οποιαδήποτε E, F ισχύει $V_{E \cap F} = V_E \cap V_F$.
4. Αν $E_1, E_2, \dots$ είναι ξένα και $E = \cup_j E_j$, τότε

$$V_E = \oplus_j V_{E_j}.$$

5. Για οποιοδήποτε E , ο V_E είναι αναλλοίωτος κάτω από τον T .
6. Αν $E \subset [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$ και $f \in V_E$, τότε

$$\|(T - \lambda_0 I)f\| \leq \epsilon \|f\|.$$

Ορισμός Β'.10. Έστω T αυτοσυζυγής τελεστής στο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ και V ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{H}$. Καλούμε τον V αναλλοίωτο κάτω από τον T αν $(z - T)^{-1}V \subset V$, $\forall z \notin \mathbb{R}$.

Αποδεικνύεται πως αν ο T είναι φραγμένος, η παραπάνω συνθήκη ισοδυναμεί με $TV \subset V$.

Λήμμα Β'.11. Αν V είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος για τον αυτοσυζυγή τελεστή T , τότε το ορθογώνιο συμπλήρωμά του, $V^\perp$ είναι επίσης αμετάβλητο. Επιπλέον, $f(T)V \subset V$ για κάθε $f \in C_0(\mathbb{R})$.

Κεφάλαιο Β'

Είναι συχνά βολικό να περιγράφουμε τους κλειστούς υπόχωρους ενός χώρου Hilbert συναρτήσας των αντίστοιχων τελεστών προβολής σε αυτούς. Δοθέντος κλειστού υπόχωρου V του $\mathcal{H}$ υπάρχει μοναδικός φραγμένος τελεστής P που ισούται με τον ταυτοτικό στο V και κάνει 0 στο ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^\perp$ του V . Ο ακόλουθος ορισμός εκφράζει τις 4 πρώτες ιδιότητες των φασματικών υπόχωρων, εκείνες που δεν εξαρτώνται από τον τελεστή T , συναρτήσας των αντίστοιχων ορθογώνιων προβολών. Ο όρος Projection-Valued measure προκύπτει επειδή αυτές οι ιδιότητες είναι παρόμοιες με εκείνες ενός μέτρου.

Ορισμός Β'.12. Έστω σύνολο X και Ω μια σ -άλγεβρα του X . Μια απεικόνιση $\mu : \Omega \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ καλείται projection-valued measure αν ισχύουν τα ακόλουθα.

1. Για κάθε $E \in \Omega$, $\mu(E)$ είναι μια ορθογώνια προβολή.
2. $\mu(\emptyset) = 0$ και $\mu(X) = I$.
3. Αν $E_1, E_2, \dots \in \Omega$ είναι ξένα, τότε για κάθε $v \in \mathcal{H}$ ισχύει

$$\mu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j)v = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)v,$$

όπου η σύγκλιση της σειράς είναι ως προς norm topology on $\mathcal{H}$.

4. Για κάθε $E_1, E_2 \in \Omega$, ισχύει $\mu(E_1 \cap E_2) = \mu(E_1)\mu(E_2)$.

Οι ιδιότητες 2 και 4 μας λένε πως αν E_1, E_2 είναι ξένα, τότε $\mu(E_1)\mu(E_2) = 0$, άρα $\text{range}(E_1)$ είναι κάθετη στην $\text{range}(E_2)$. Διαπιστώνουμε λοιπόν πως $\mu(E_1)\mu(E_2)$ δεν είναι παρά η προβολή στη τομή των range των $\mu(E_1)$ και $\mu(E_2)$. Επομένως, αν ορίσουμε για κάθε $E \in \Omega$, ένα κλειστό υπόχωρο $V_E := \text{Range}(\mu(E))$, τότε η συλλογή των V_E ικανοποιεί τις πρώτες 4 ιδιότητες που αναμένουμε να έχουν οι φασματικοί υπόχωροι.

Ακολούθως, θα αντιστοιχίσουμε ένα projection-valued measure (pvm) μ^T σε κάθε φραγμένο αυτοσυζυγή τελεστή T . Τότε το $\mu^A(E)$ θα είναι η προβολή στο φασματικό υπόχωρο που αντιστοιχεί στο E . Θα εισάγουμε την έννοια της ολοκλήρωσης ως προς projection-valued measure που θα έχει ως αποτέλεσμα τελεστές (operator-valued integration). Πιο συγκεκριμένα, για το pvm μ^T που σχετίζεται με τον T , αυτό το operation-valued ολοκλήρωμα θα είναι η functional calculus του T .

Για κάθε pvm μ και $f \in \mathcal{H}$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σύννηθες (θετικό) πραγματικό μέτρο μ_f ορίζοντας

$$\mu_f(E) = \langle f, \mu(E)f \rangle \quad (\text{B'.6})$$

για κάθε $E \in \Omega$. Η παραπάνω σχέση αποτελεί συνδετικό κρίκο μεταξύ της ολοκλήρωσης ως προς ένα σύννηθες μέτρο και της ολοκλήρωσης ως προς ένα pvm.

Πρόταση Β'.13. Έστω Ω μια σ -άλγεβρα του συνόλου X και $\mu : \Omega \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ένα pvm. Τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f \mapsto \int_{\Omega} f d\mu$, από το χώρο των φραγμένων, μετρήσιμων, μιγαδικών συναρτήσεων του Ω στον $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ τέτοια ώστε

$$\langle g, \left(\int_X f d\mu \right) g \rangle = \int_X f d\mu_g \quad (\text{B'.7})$$

για κάθε f και για κάθε $g \in \mathcal{H}$, όπου μ_g δίνεται από την (B'.6). Το παραπάνω ολοκλήρωμα ικανοποιεί επιπλέον τις ακόλουθες ιδιότητες.

Κεφάλαιο Β'

1. Για κάθε $E \in \Omega$, ισχύει

$$\int_X 1_E d\mu = \mu(E).$$

2. Για κάθε f , ισχύει

$$\left\| \int_X f d\mu \right\| \leq \sup_{\lambda \in X} |f(\lambda)|. \quad (\text{B'.8})$$

3. Η ολοκλήρωση είναι πολλαπλασιαστική: Για κάθε f, g , ισχύει

$$\int_X fg d\mu = \left(\int_X f d\mu \right) \left(\int_X g d\mu \right). \quad (\text{B'.9})$$

4. Για κάθε f , ισχύει $\int_X \bar{f} d\mu = \left(\int_X f d\mu \right)^*$. Ειδικότερα, αν η f είναι πραγματική συνάρτηση, τότε ο $\int_X f d\mu$ είναι αυτοσυζυγής τελεστής.

Θεώρημα Β'.14. Αν $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι αυτοσυζυγής, τότε υπάρχει μοναδικό *projection-valued measure* μ^T στην Borel σ -άλγεβρα του $\sigma(T)$ με τιμές προβολές στον $\mathcal{H}$, τέτοιο ώστε

$$\int_{\sigma(T)} \lambda d\mu^T(\lambda) = T. \quad (\text{B'.10})$$

Εφόσον το φάσμα $\sigma(T)$ του T είναι φραγμένο, η συνάρτηση $f(\lambda) := \lambda$ είναι φραγμένη στο $\sigma(T)$

Θεώρημα Β'.15. Αν $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι αυτοσυζυγής και $f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μια φραγμένη μετρήσιμη συναρτηση, ορίζουμε το τελεστή $f(T)$ ως

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) d\mu^T(\lambda),$$

όπου μ^T είναι το *projection-valued measure* του θεωρήματος [B'.14](#).

Μπορούμε να επεκτείνουμε το μ^T από το $\sigma(T)$ σε όλο το $\mathbb{R}$ αναθέτοντας μέτρο 0 στο $\mathbb{R} \setminus \sigma(T)$.

Εφόσον η ολοκλήρωση ως προς το μέτρο μ^T είναι πολλαπλασιαστική, έπεται από την σχέση [\(B'.10\)](#) πως αν $f(\lambda) = \lambda^m$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, τότε $f(T)$ είναι η m -οστή δύναμη του T .

Ορισμός Β'.16. Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και μ^T το αντίστοιχο pvm, επεκταμένο σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$, όπου $\mu^T(\mathbb{R} \setminus \sigma(T)) = 0$. Τότε για κάθε Borel σύνολο $E \subset \mathbb{R}$ ορίζουμε το φασματικό υπόχωρο V_E του $\mathcal{H}$ ως

$$V_E = \text{Range}(\mu^T(E)).$$

Ο ορισμός των pvm συνεπάγεται πως οι φασματικοί υπόχωροι που μόλις ορίσαμε ικανοποιούν τις πρώτες 4 ιδιότητες που αναφέραμε στη σελίδα [\[87\]](#). Η σχέση [\(B'.10\)](#) θα μας δώσει τις ιδιότητες 5 και 6 που αναμέναμε να ισχύουν για τους φασματικούς υπόχωρους.

Πρόταση Β'.17. Αν $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ αυτοσυζυγής τελεστής, οι φασματικοί υπόχωροι που αντιστοιχούν στον T έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες.

Κεφάλαιο Β'

1. Κάθε φασματικός υπόχωρος V_E είναι αναλλοίωτος κάτω από τον T .

2. Αν $E \subset [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$ τότε για κάθε $f \in V_E$, ισχύει

$$\|(T - \lambda_0 I)f\| \leq \epsilon \|f\|.$$

3. Το φάσμα του $T|_{V_E}$ περιέχεται στην κλειστότητα του E .

4. Αν λ_0 ανήκει στο φάσμα του T , τότε για κάθε περιοχή U του λ_0 ισχύει $V_U \neq \{0\}$, ή ισοδύναμα, $\mu(U) \neq 0$.

Αναφορικά, δίνουμε την απόδειξη της πρώτης ιδιότητας και παραπέμπουμε στο [7, Θ.7.15] για περισσότερα.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πως για οποιεσδήποτε φραγμένες μετρήσιμες συναρτήσεις f, g στο $\sigma(T)$ οι τελεστές $f(T), g(T)$ μετατίθενται καθώς, λόγω της πολλαπλασιαστικότητας του ολοκληρώματος ως προς το μ^T , το γινόμενο με οποιαδήποτε σειρά είναι

$$\begin{aligned} f(T)g(T) &= \int_{\sigma(T)} f(\lambda) d\mu^T(\lambda) \int_{\sigma(T)} g(\lambda) d\mu^T(\lambda) \\ &= \int_{\sigma(T)} f(\lambda)g(\lambda) d\mu^T(\lambda) \\ &= \int_{\sigma(T)} g(\lambda)f(\lambda) d\mu^T(\lambda) \\ &= \int_{\sigma(T)} g(\lambda) d\mu^T(\lambda) \int_{\sigma(T)} f(\lambda) d\mu^T(\lambda) \\ &= g(T)f(T) \end{aligned}$$

Ειδικότερα, ο T , που είναι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(\lambda) = \lambda$ μετατίθεται με τον $\mu^T(E)$ που είναι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης 1_E . Επομένως, αν $\mu^T(E)\phi$ είναι ένα διάνυσμα στην εικόνα(range) $\mu^T(E)$, έχουμε

$$T\mu^T(E)\phi = \mu^T(E)\phi,$$

που επίσης είναι στην εικόνα του $\mu^T(E)$, γεγονός που αποδεικνύει την αμεταβλητότητα του φασματικού υπόχωρου. $\square$

Με παρόμοιο τρόπο, αλλά με επιπλέον τεχνικές λεπτομέρειες που ξεφεύγουν από τους σκοπούς της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής ορίζονται οι παραπάνω έννοιες για μη φραγμένους τελεστές. Παραπέμπουμε στο [7, ΚΕΦ.10]

Ένα σημείο που θα μας απασχολήσει όμως είναι η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση Β'.18. Έστω T αυτοσυζυγής (μη φραγμένος) τελεστής στο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Τότε οι φασματικοί υπόχωροι V_E που αντιστοιχούν στον T έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες.

1. Αν E είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε $V_E \subset \text{Dom}(T)$, V_E είναι αναλλοίωτος κάτω από τον T και ο περιορισμός του T στον V_E είναι φραγμένος.

Κεφάλαιο Β'

2. Αν E περιέχεται στο $(\lambda_0 + \epsilon, \lambda_0 - \epsilon)$, τότε για κάθε $f \in V_E$ ισχύει

$$\|(T - \lambda_0 I)f\| \leq \epsilon \|f\|.$$

Παρατηρούμε πως για μη φραγμένους τελεστές T αποκτούμε λιγότερες πληροφορίες σε σύγκριση με την πρόταση B'.17. Παρόλα αυτά, η πρόταση B'.18 επαρκεί για τους σκοπούς μας.

Τα παραπάνω ολοκληρώνουν τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε από σκοπιά κυρτής και συναρτησιακής ανάλυσης στην προσπάθειά μας να αποδείξουμε πως οι μικτοί όγκοι αυθαίρετων κυρτών σωμάτων επιδέχονται αναπαράσταση ως τετραγωνικές μορφές, υπό κατάλληλες προϋποθέσεις.

ΚΒΑΝΤΙΚΟΙ ΓΡΑΦΟΙ (QUANTUM GRAPHS)

Όλοι οι ορισμοί και τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται σε αυτό το παράρτημα βρίσκονται στο [2].

Ορισμός Γ'.1. Συμβολίζουμε με $\tilde{H}^k(G)$ το χώρο $\tilde{H}^k(g) := \oplus_{e \in E} H^k(e)$ που αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις f στο G που σε κατά μήκος κάθε ακμής e ανήκουν στο χώρο Sobolev $H^k(e)$ και είναι τέτοιες ώστε $\|f\|_{\tilde{H}^k}^2 := \sum_{e \in E} \|f\|_{H^k(e)}^2 < \infty$. Να σημειώσουμε πως η τελευταία συνθήκη χρειάζεται μόνο για άπειρους γράφους.

Ορισμός Γ'.2. Καλούμε τάξη μιας κορυφής v σε ένα γράφο G τον αριθμό $d_v := d_v^i + d_v^o$, όπου συμβολίζουμε με d_v^i το πλήθος των εισερχόμενων στη κορυφή bond και με d_v^o το πλήθος των εξερχόμενων από τη κορυφή bond.

Ορισμός Γ'.3. Ένας γράφος G καλείται μετρικός γράφος αν:

1. Κάθε προσανατολισμένη ακμή (bond) b έχει θετικό μήκος $L_b \in (0, \infty)$.
2. Τα μήκη των bonds που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους θεωρούνται ίσα: $L_b = L_{\bar{b}}$, κι άρα το μήκος L_e μιας ακμής e είναι καλά ορισμένο.
3. Αντιστοιχούμε μια συντεταγμένη $x_b \in [0, L_b]$ που αυξάνεται κατά τη φορά του bond σε κάθε bond.
4. Ισχύει η σχέση $x_{\bar{b}} = L_b - x_b$ μεταξύ των συντεταγμένων bonds που είναι αντίστροφα μεταξύ τους.

Ορισμός Γ'.4. Καλούμε κβαντικό γράφο, έναν μετρικό γράφο εφοδιασμένο με διαφορικό τελεστή $\mathcal{H}$ (Hamiltonian), συνοδευόμενο από 'κατάλληλες' συνθήκες στις κορυφές. Δηλαδή ένας κβαντικός γράφος είναι μία τριάδα αποτελούμενη από $\{ \text{μετρικό γράφο } G, \text{Hamiltonian τελεστή } \mathcal{H}, \text{συνθήκες για τις κορυφές} \}$.

Θεώρημα Γ'.5. Έστω G μετρικός γράφος με πεπερασμένο πλήθος ακμών. Θεωρούμε το τελεστή $\mathcal{H}$ που δρα ως $-\frac{d^2}{dx_e^2}$ σε κάθε ακμή e , με πεδίο ορισμού τις συναρτήσεις που ανήκουν στο $\tilde{H}^2(G)$ που ικανοποιούν κάποιες τοπικές συνθήκες γύρω από κάθε κορυφή που εμπλέκουν τις τιμές των συναρτήσεων στις κορυφές και των παραγώγων τους. Ο τελεστής είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν οι συνθήκες στις κορυφές μπορούν να γραφούν με κάποια (και άρα με όλες) από τις παρακάτω 3 μορφές:

Κεφάλαιο Γ'

1. Για κάθε κορυφή v τάξης d_v υπάρχουν $d_v \times d_v$ πίνακες A_v και B_v τέτοιοι ώστε :
 O $d_v \times 2d_v$ πίνακας $(A_v B_v)$ έχει μέγιστη βαθμίδα (δηλ. $\text{rank}(A_v B_v) = d_v$),
 O πίνακας $A_v B_v^*$ είναι αυτοσυζυγής και
 $A_v F(v) + B_v F'(v) = 0$
2. Για κάθε κορυφή τάξης d_v υπάρχει unitary πίνακας $d_v \times d_v$ U_v τέτοιος ώστε οι συνοριακές τιμές της f να ικανοποιούν

$$i(U_v - I)F(v) + (U_v + I)F'(v) = 0,$$

όπου I είναι ο $d_v \times d_v$ ταυτοτικός πίνακας.

3. Για κάθε κορυφή v τάξης d_v υπάρχουν orthogonal projectors $P_{D,v}, P_{N,v}, P_{R,v}$ όπου $P_{R,v} := I - P_{D,v} - P_{N,v}$ (ένας ή δύο από αυτούς μπορεί να είναι 0) που δρουν στον C^{d_v} και ένας αντιστρέψιμος αυτοσυζυγής τελεστής Λ_v που δρα στον υπόχωρο $P_{R,v}C^{d_v}$ τέτοιοι ώστε οι συνοριακές τιμές της f ικανοποιούν

$$\begin{cases} P_{D,v}F(v) = 0, \\ P_{N,v}F'(v) = 0 \\ P_{R,v}F'(v) = \Lambda_v P_{R,v}F(v) \end{cases}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] A. D. Aleksandrov. *Aleksandrov A.D. , selected works*. Classics of Soviet mathematics. 1996. ISBN: 978-2-88124-984-6.
- [2] G. Berkolaiko and P. Kuckment. *Introduction to Quantum Graphs*. 2013.
- [3] T. Bonnesen et al. *Theory of convex bodies*. 1987. ISBN: 978-0-914351-02-3.
- [4] E. B. Davies. *Spectral theory and differential operators*. 1995. ISBN: 9780511623721.
- [5] H. Federer. *Geometric measure theory*. 1996. ISBN: 978-3-642-62010-2 978-3-540-04505-2.
- [6] D. Gilbarg and Trudinger N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. 2015. ISBN: 978-3-642-61798-0.
- [7] Brian C. Hall. *Quantum theory for mathematicians*. Graduate texts in mathematics. Springer, 2013. ISBN: 978-1-4614-7115-8.
- [8] D. Hilbert. *Grundzüge einer allgemeinen theorie der linearen intergralleichungen*. 1912.
- [9] A. V. Kolesnikov and E. Milman. «Poincaré and Brunn–Minkowski inequalities on the boundary of weighted Riemannian manifolds». In: *arXiv:1711.08825 [math]* (Nov. 23, 2017).
- [10] A. V. Kolesnikov and E. Milman. «Local L^p -Brunn-Minkowski inequalities for $p < 1$ ». In: *arXiv:1711.01089 [math]* (Feb. 20, 2018).
- [11] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. 2nd ed. Graduate texts in mathematics. 2013. ISBN: 978-1-4419-9981-8 978-1-4419-9982-5.
- [12] H. Minkowski. «Volumen und Oberfläche». In: *Mathematische Annalen* 57.4 (Dec. 1, 1903), pp. 447–495. DOI: [10.1007/BF01445180](https://doi.org/10.1007/BF01445180).
- [13] R. Schneider. «ON THE ALEKSANDROV-FENCHEL INEQUALITY». In: *Annals of the New York Academy of Sciences* 440.1 (May 1985), pp. 132–141. DOI: [10.1111/j.1749-6632.1985.tb14547.x](https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1985.tb14547.x).
- [14] R. Schneider. *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*. 2014. ISBN: 978-1-139-00385-8 978-1-107-60101-7.
- [15] Y. Shenfeld and Ramon van Handel. «Extremals in Minkowski’s Quadratic Inequality». In: *arXiv:1902.10029 [math]* (Feb. 26, 2019).

- [16] Y. Shenfeld and Ramon van Handel. «Mixed volumes and the Bochner method». In: *arXiv:1811.08710 [math]* (Mar. 5, 2019). URL: <http://arxiv.org/abs/1811.08710>.