

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Χ. ΚΟΥΜΑΚΗΣ

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΚΟΣΜΟΥ ΩΣ ΔΙΑΛΕΚΤΙΚΗ ΚΑΤΑ ΠΛΑΤΩΝΑ

Η μαθηματική δομή του αισθητού κόσμου εντάσσεται στο πλαίσιο της διαλεκτικής κατά Πλάτωνα, αφού αυτή συντελείται κατά τρόπο διαλεκτικό με τη γνωστή μέθοδο της σύνδεσης, της διαίρεσης και των αναλογιών. Ο Πλάτων χρησιμοποίησε σύμβολα και προέβη σε μαθηματικές διεργασίες για τη δημιουργία του κόσμου. Η μαθηματικοποίηση όμως αυτή δεν είναι φανερή και ευδιάκριτη αλλά σκοτεινή, ασαφής και αινιγματώδης. Εναπόκειται συνεπώς στους μελετητές του Πλάτωνα να την ανακαλύψουν, πράγμα που δημιουργεί αμφιβολία και αμφισβήτηση, αφού πρόκειται για εικασίες και υποθέσεις, όπου ο λόγος δύσκολα μπορεί να είναι ασφαλής και βέβαιος. Ωστόσο, η έστω κατά προσέγγιση ανεύρεση των μαθηματικών παραμέτρων είναι απαραίτητος όρος για την κατανόηση της διαλεκτικής του. Κατά συνέπεια η τυχόν λύση των προβλημάτων εκ μέρους είτε των πάλαι ποτέ ακροατών είτε των αναγνωστών του – αν και όποτε αυτή επιτευχθεί – δημιουργεί τις αναγκαίες προϋποθέσεις για τη σύλληψη της διαλεκτικής, η οποία με κανένα τρόπο δεν είναι δεδομένη, αλλά σπάνιο, κοπιώδες και εν τέλει πολύτιμο εύρημα των θαυμαστών της φιλοσοφίας του. Ο Πλάτων απλώς έθετε προβλήματα, αλλά δεν τα έλυne ούτε έκανε αυστηρές μαθηματικές αποδείξεις όπως π.χ. ο Ευκλείδης. Χρησιμοποιούσε ωστόσο τα μαθηματικά πορίσματα σιωπηρά (ex silentio). Αυτό σημαίνει ότι γνώριζε τα συμπεράσματα των αποδείξεων, χωρίς όμως να τις παραθέτει. Όταν ο μαθηματικός Πάππος ο Αλεξανδρεύς μέμφεται συλλήβδην τους φιλο-

Ο Γεώργιος Χ. Κουμάκης είναι τέως Επίκουρος Καθηγητής του Τμήματος Φιλοσοφίας του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

© 2019. Επιστημονική Επετηρίδα *Δωδώνη*/Μέρος Τρίτο, 39 (2018-2019), σσ. 125-144.
Scientific Annuary *Dodone*/Part Three, 39 (2018-2019), pp. 125-144.

σόφους ότι «αποφαίνονται» μόνον, διατυπώνουν τη γνώμη τους, χωρίς αποδείξεις, συμπεριλαμβάνει προφανώς και τον Πλάτωνα (Σπανδάγος 2004b: Ε ιδ', σ.32 και Fr. Hultsch). Η τακτική του αυτή έχει ωδήσει βαδυστόχαστους και αξιολογότετους φιλολόγους να δεχθούν την άγραφη διδασκαλία, υποδέτοντας ότι ο φιλόσοφος μόνον είπε τη φιλοσοφία του, αλλά δεν την έγραψε.

Η τάση αυτή κινείται εν μέρει στην ορδή κατεύθυνση, επειδή οι οπαδοί της δίκαια αντιλήφθηκαν ότι η φιλοσοφία του Πλάτωνα δεν είναι γραμμένη όπως τα άλλα μαθήματα. Η διαπίστωση αυτή δεν βασίζεται σε τυχόν δυσχέρειες που είχαν να κατανοήσουν δύσκολα σημεία των κειμένων του Πλάτωνα, όπως για παράδειγμα την τετμημένη γραμμή της *Πολιτείας* (ΣΤ 509 d κ. εξ.), αλλά σε αναφορές του ίδιου του Πλάτωνα και ιδιαίτερα στον *Φαίδρο* και στην *Ζ' Επιστολή* καθώς και σε γραπτά αρχαίων σχολιαστών (Gaiser 1962). Το περίεργο όμως είναι ότι εκεί η φιλοσοφία παρουσιάζεται ότι δεν είναι ούτε ρητή ούτε γραπτή (*Ζ'* επ. 341d: γραφέντα ή λεχθέντα, γραπτά και ρητά, Πβ. Koumakis G. 2004), ενώ υπάρχουν χωρία που έχουν παρερμηνευθεί. Για παράδειγμα, στην τετμημένη γραμμή σύμφωνα με την κρατούσα ερμηνεία τα δύο μεσαία τμήματά της είναι ίσα, πράγμα που ακυρώνει και γελοιοποιεί τη σκέψη του Πλάτωνα. Ορισμένοι δικαιολογούν το απόπημα αυτό, με το να επιρρίπτουν στον Πλάτωνα την κατηγορία της απροσεξίας για το σημαντικό αυτό λάθος, ενώ άλλοι ισχυρίζονται ότι ο Πλάτων είχε πλήρη συνείδηση των ενεργειών του (I. Balashov 1994: 283. Ορδότερη μου φαίνεται η άποψη του I. Θεοδωρακόπουλου (1971: 54), σύμφωνα με την οποία ο αναγνώστης έχει την εντύπωση ότι κατενόησε τα λόγια του Πλάτωνα, ενώ έχει πλήρη άγνοια: “Είναι ο Πλάτων ίσως ο δυσκολότερος συγγραφέας και πνευματικός δημιουργός του κόσμου, γιατί κανενός άλλου δημιουργού ο λόγος δεν αποπλανεύει τόσο τον αναγνώστη του, ώστε να νομίζει ότι τον καταλαβαίνει την ώρα ακριβώς που δεν έχει καταλάβει ακόμα τίποτε”. Πάντως, από τη μαθηματική συναρμογή και εν συνεχεία τη λύση του κόσμου προκύπτει η διαλεκτική, η οποία δεν είναι άλλη από την κατ' είδη διαίρεση και σύνθεση. Άλλωστε και τα τρίγωνα με τα οποία δομείται ο κόσμος, διέπονται από την κατ' είδος διαίρεση.

Η γέννηση του κόσμου συντελέσθηκε κατά τον Πλάτωνα από τον δημιουργό κατά τρόπο μαθηματικό, αφού χρησιμοποιήθηκαν αναλογίες κατά τη συναρμογή του (*Τιμ.*, 32c, 36d 6, 56c, *Πολιτ.*, ΣΤ 500c 4). Έτσι προήλθε η τάξη και η κοσμιότητα από την αταξία, το χάος και την ακοσμία (*Τιμ.*, 30a, *Πολιτικ.*, 273b 6). Αυτά είναι αντανάκλαση της ψυχής, η οποία πρέπει να επιδιώκει και να ασκεί μεν τη δικαιοσύνη και τη σωφροσύνη, για να είναι ευδαίμων, να αποφεύγει δε την ακολασία και την αδικία. Ο Πλάτων παραδέτει τη

γνώμη των σοφών ότι το σύμπαν, αυτό δηλαδή που ονομάζουμε ουρανό, γη, θεούς και ανθρώπους, συνέχει η επικοινωνία, η φιλία, η κοσμιότητα, η σωφροσύνη και δικαιοσύνη, και γι' αυτόν τον λόγο ονομάσθηκε κόσμος, και όχι ακοσμία ή ακολασία (Γοργ., 507c – 508a, Πρωτ. 322c). Λόγω των αναλογιών, που χρησιμοποίησε ο Πλάτων στη δομή του κόσμου, κατηγορήθηκε από τον μαθητή του Αριστοτέλη ότι καταμαθηματικοποίησε, κατεμαθηματικεύσατο το παν, όπως αναφέρει ο Ιωάννης ο Φιλόπονος (1897: 481, 34. Πβ. Δ.Μούκανος 1979: 66-72). Από τον *Τίμαιο* του Πλάτωνα επηρεάστηκαν εντονότατα όχι μόνο οι αρχαίοι όπως οι Στωικοί (Ε. Καραμπατζάκη 2014), αλλά και οι μετέπειτα αστρονόμοι, οι οποίοι εντυπωσιάστηκαν από τη μαθηματικοποίηση του παντός, όπως ο Kepler (1981, Π. Παπασπύρου 2014), ο Γαλιλαίος και ο νομπελίστας φυσικός W. Heisenberg (2008, 21, 286), ο οποίος απέδωσε μεγάλη σημασία στα τρίγωνα, με τα οποία ο Πλάτων οικοδομεί τον κόσμο. Τα ίδια είναι συμμετρικά (D. Lloyd 2006). Παραθέτουμε τα λόγια του Γαλιλαίου (1623: 17) κατά τη μετάφραση της Χρ.Φίλη (2002). « Το βιβλίο είναι γραμμένο σε μαθηματική γλώσσα και τα σύμβολα είναι τρίγωνα, κύκλοι και άλλα γεωμετρικά σχήματα, χωρίς τη βοήθεια των οποίων δεν μπορούμε ούτε μια λέξη να κατανοήσουμε, χωρίς αυτά μάταια περιπλανιέται κανείς σ' έναν σκοτεινό λαβύρινθο».

Το ερώτημα που προβάλλει στη συνέχεια είναι να μάθουμε ή μάλλον να ειπώσουμε για ποιον λόγο ο Πλάτων μαθηματικοποίησε τη δομή και σύσταση του κόσμου και γιατί κατέφυγε συγκεκριμένα στα τρίγωνα και όχι σε οποιοδήποτε άλλο γεωμετρικό σχήμα ή άλλου τύπου μαθηματικές απεικονίσεις. Βέβαιη απάντηση στο τεθέν ερώτημα δεν είναι δυνατόν να έχουμε, διότι δεν σώζονται γραπτές μαρτυρίες. Μπορούμε όμως να κάνουμε υποθέσεις και εικασίες, χρησιμοποιώντας την έμμεση απόδειξη, δηλαδή την κατ' αναλογίαν. Ο Πορφύριος στο βιβλίο του περί του *Πυθαγόρου βίου* (1982: 49 σ. 59) αναφέρει τη μαρτυρία, κατά την οποία εξηγείται γιατί οι Πυθαγόρειοι παριστούσαν τα όντα με τους αριθμούς. Λέγει λοιπόν ότι αυτοί, επειδή δεν μπορούσαν να παραδώσουν με τον λόγο τα πρώτα είδη και τις πρώτες αρχές, λόγω του ότι ήταν δύσκολες στη σύλληψη και στην εκφορά, κατέφυγαν στους αριθμούς χάριν μιας ευκολοκατανόητης διδασκαλίας, μιμούμενοι τους γεωμέτρους και τους γραμματιστές. Οι γεωμέτρους μη δυνάμενοι κατά τη διδασκαλία να παραστήσουν τα σωματοειδή με τον λόγο προσέφυγαν στα διαγράμματα των σχημάτων λέγοντας ότι το τρίγωνο που διέγραφαν κάθε φορά δεν ήταν τούτο, συγκεκριμένα αυτό το τρίγωνο που υποπίπτει στην όψη μας, αλλά τοιούτο, δηλαδή τέτοιας λογής. Με αυτά οι γεωμέτρους ήδελαν να παραδώσουν στους άλλους την έννοια του τριγώ-

νου. Επειδή ο Πλάτων είχε υποστεί έντονη την επίδραση των Πυθαγορείων, είναι φυσικό και εύλογο να υποθέσει κανείς ότι τον ίδιο δρόμο ακολούθησε στο σημείο αυτό. Ήθελε δηλαδή να διδάξει στους μεταγενέστερους τον τρόπο σύστασης του κόσμου. Επειδή όμως αυτό ήταν εξαιρετικά δύσκολο, αν μη αδύνατο, να γίνει με λόγια, γι' αυτό χρησιμοποίησε γεωμετρικά σχήματα και μαθηματικές αναλογίες. Η άποψη αυτή ενισχύεται από το γεγονός ότι τα τέσσερα πρώτα και κάλλιστα σώματα δεν ονομάζονται από τον ίδιο στοιχεία, αλλά γιγνώμενα και απολλύμενα, δηλαδή απομιμήσεις των αληθινών όντων, ώστε για κανένα απ' όσα έχουν γένεση δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί πιστός και βέβαιος λόγος (Τιμ., 28a, 48e – 49a). Για όλα τα σώματα που έχουν γένεση δεν πρέπει να χρησιμοποιείται η δεικτική αντωνυμία *τούτο* αλλά το *τοιούτο*, δηλαδή τέτοιας λογής, επειδή δεν έχουν σταθερή και μόνιμη υπόσταση αλλά μεταπίπτουν συνεχώς, αφού το ένα μεταβάλλεται στο άλλο. Στην ίδια κατηγορία υπάγεται και το τρίγωνο και όλα τα σχήματα (Τιμ., 49c), που λέγονται μαθηματικά.

Το ερώτημα που προκύπτει περαιτέρω είναι γιατί ο Πλάτων προτίμησε τα τρίγωνα και όχι κάποιο άλλο γεωμετρικό σχήμα. Ο ίδιος δίνει έμμεσα απάντηση λέγοντας ότι από τα τρίγωνα, και συγκεκριμένα από τα ορθογώνια, γεννώνται όλα τα σχήματα και κατ' ακολουθίαν τα πέντε σώματα. Ο Ιάμβλιχος σημειώνει ότι από το τρίγωνο και το τετράγωνο γεννώνται κατά Πλάτωνα τα πέντε σχήματα και τα αντίστοιχα σώματα (Ιάμβλιχος 1922: 87). Τα ορθογώνια τρίγωνα χρησιμεύουν δηλαδή ως αρχές και αιτίες γένεσης όλων των ορατών όντων. Ο Πλάτων ομολογεί ωστόσο ότι υπάρχουν κι άλλες ανώτερες αρχές, χωρίς να τις κατονομάζει, τις οποίες γνωρίζει μόνον ο θεός και ο φίλος του θεού, δηλαδή ο φιλόσοφος (Τιμ., 53 c – d). Αυτές βρίσκονται προφανώς στο βασίλειο των ιδεών με προεξάρχουσα την ιδέα του αγαθού, αφού λέγεται ρητά ότι ο ορατός και απτός κόσμος είναι εικών του νοητού (Τιμ. 92c 7, π.β. Γ. Κουμάκης, 2013). Τα τρίγωνα είναι στοιχεία των σχημάτων (Τιμ., 54d 6), τα οποία με τη σειρά τους είναι στοιχεία των σωμάτων (Τιμ., 56b 5), ενώ τα σώματα δεν είναι στοιχεία του παντός (Τιμ., 48 b – c). Το τρίγωνο είναι το έσχατο, δηλαδή το ελάχιστο γεωμετρικό σχήμα, στο οποίο ο μαθηματικός θα σταματήσει τη διαίρεση των σχημάτων (Ηθ. Νικ., Ζ 8 1142a 28 – 29). Είναι συνεπώς άτιμητο και αδιαίρετο ως προς το είδος. Ο Νικόμαχος ο Γερασηνός (1866: Β α) δίνοντας τον ορισμό του στοιχείου λέγει ότι στοιχείο είναι εκείνο, από το οποίο ως ελάχιστον συνίσταται κάτι, και εις το οποίο ως ελάχιστο αναλύεται. Λέγει επίσης (Β ζ) ότι το τρίγωνο είναι αρχικώτατον και στοιχειωδέστατον σχήμα, διότι, εάν από των γωνιών αχθούν ευθείες προς το μέσον του σχήματος, αυτό ανα-

λύεται σε τόσα τρίγωνα όσες τυχαίνει να είναι οι πλευρές. Αν το ίδιο πράγμα γίνει στο τρίγωνο, αυτό δεν θα μεταπέσει σε άλλο σχήμα αλλά στον εαυτό του. Ο Αριστοτέλης δίνοντας τον ορισμό του στοιχείου λέγει ότι στοιχείο είναι το πρώτο ενυπάρχον, που είναι αδιαίρετο σε άλλο είδος (Μ.τ.φ. Β 3, 999a 1 – 5, Δ 3, 1014a 26 – 30). Ο Πλάτων (Τιμ. 82a 1 – 2, Παρμ. 130c 1 – 2) ως προς τη σχέση του στοιχείου και του ανθρώπινου σώματος ακολουθεί την άποψη του Εμπειροκλή, ο οποίος δέχεται ότι το πυρ, ο αέρας, το νερό και η γη είναι τα στοιχεία, από τα οποία σύγκεται το ανθρώπινο σώμα, κατ' αντίθεση προς τον Αναξαγόρα, ο οποίος πιστεύει το ακριβώς αντίθετο, ότι δηλαδή το πυρ, ο αέρας και τα άλλα σώματα είναι μείγματα του ανθρώπινου σώματος, τα μέρη του οποίου, είναι στοιχεία αυτών, επειδή είναι ομοιομερή (H. Diels – W. Kranz, Κύρκος I 2005: Β 72 a σ. 582, II 2007: Β 43a, σ. 43).

Τέσσερα είναι τα κάλλιστα ορθογώνια, με τα οποία δομείται ο κόσμος κατά Πλάτωνα. Το πρώτο, που αποκαλείται από τον ίδιο κάλλιστο, είναι το ήμισυ ισοπλευρού τριγώνου, δηλαδή εκείνο που έχει γωνίες 30, 60 και 90 μοιρών ή εκείνο, του οποίου η μεν υποτείνουσα είναι ως προς το μήκος διπλάσια από τη μικρότερη κάθετη πλευρά, η δε μεγαλύτερη κάθετη πλευρά είναι προς τη μικρότερη τριπλή κατά δύναμη (Τιμ., 54b 4-5). Τα υπόλοιπα τρία οίκοθεν εννοείται ότι είναι κάλλιστα, αφού χρησιμεύουν στη σύσταση των πέντε καλλίστων σωμάτων. Το δεύτερο κάλλιστο τρίγωνο είναι το ορθογώνιο ισοσκελές (Τιμ. 54a, 55bc), δηλαδή το ημιτετράγωνο. Το τρίτο είναι εκείνο, το οποίο μνημονεύει ο Πλάτων στην Πολιτεία (546b κ.ε.), για να δείξει τη θεία και την ανθρώπινη γέννηση, δηλαδή του ανθρώπου και του κόσμου. Η σχέση των πλευρών αυτού είναι 3, 4, 5, οι δε γωνίες 36, 54 και 90 μοιρών, το οποίο αποκαλείται ζωογονικό ή κοσμικό ή Πυθαγορικό τρίγωνο (Proclus 1901: 43). Πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι η ανεύρεση των δύο καλλίστων τριγώνων, με τα οποία ως στοιχεία συντίθεται το δωδεκάεδρο, είναι προϊόν δικών μου συλλογισμών και ατομικής μου ευδύνης σε συνεργασία με μαθηματικούς, οι οποίοι έκαμαν με δικές μου οδηγίες τις αποδείξεις, πράγμα που παρουσιάζεται τώρα για πρώτη φορά. Η επικρατέστερη αντίληψη για το τρίτο είδος του τριγώνου, που συγκροτεί το δωδεκάεδρο, το οποίο συμβολίζει τον κόσμο, είναι ότι αυτό είναι το χρυσό τρίγωνο, δηλαδή το ισοσκελές με γωνία κορυφής 36 και βάσεων 72°, 72°, δηλαδή του διπλάσιου (Th. Heath 1921: 296 – 7, 1931: 176 – 7, 1956: 98 – 99). Η αντίληψη όμως αυτή, όπως θα δείξουμε στα επόμενα δεν ευσταθεί. Το τέταρτο κάλλιστο τρίγωνο, με το οποίο δομείται ο κόσμος, είναι το ήμισυ του χρυσού τριγώνου με γωνίες 18, 72, 90.

Με το πρώτο κάλλιστο τρίγωνο, δηλαδή το ημιτετράγωνο ισοπλευρού τριγώ-

νου, αν τοποθετηθεί ανά δύο χιαστί, σχηματίζονται τα τρία κανονικά κυρτά πολύεδρα, δηλαδή το τετράεδρο ή πυραμίδα, το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο, από τα οποία γεννώνται το πυρ, ο αέρας και το νερό αντίστοιχα, αφού είναι τα στοιχεία τους (Τιμ., 55a – c, 56b 5). Από το δεύτερο κάλλιστο τρίγωνο, δηλαδή το ορθογώνιο ισοσκελές, σχηματίζεται το εξάεδρο ή ο κύβος, από το οποίο γεννάται η γη (Τιμ., 55b 4 – 5). Ο Πλούταρχος παραδίδει ότι κατά τον Πυθαγόρα από τα 5 σχήματα, τα οποία λέγονται και μαθηματικά, γεννώνται τα 5 σώματα και επομένως η ιδέα αυτή είναι Πυθαγορικής προέλευσης (887 b-c, Ευσέβιος Εκκλησιαστ. Προπαρασκευή 15. 37. 6. 1) Οι βάσεις των τριών πρώτων σωμάτων είναι το ισόπλευρο τρίγωνο, το οποίο συνίσταται από έξι ίσα και όμοια ημιτρίγωνα ισοπλεύρου τριγώνου, ενώ οι βάσεις της γης, από τέσσερα ίσα και όμοια ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα. Επομένως η πυραμίδα σύγκειται από 24 (= 4' 6), το οκτάεδρο από 48 (= 8' 6) και το εικοσάεδρο από 120 (= 20' 6) ημιτρίγωνα ισοπλεύρου τριγώνου, ενώ το εξάεδρο ή ο κύβος από 24 (= 6' 4) ημιτετράγωνα, δηλαδή ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα. Το δωδεκάεδρο, που απεικονίζει τον ορατό κόσμο, ο οποίος με τη σειρά του είναι εικόνα του νοητού (Τιμ. 92c 7), δεν αναφέρεται ρητά καθόλου από τον ίδιο τον Πλάτωνα, παρά μόνον από μεταγενέστερους και συγκεκριμένα από τον Τίμαιο τον Λοκρό (98d) και τους σχολιαστές του Πλάτωνα, όπως π.χ. από τον Αλκίνοο (Η XIII, 168 – 169, 31) ή Αλμπίνο (75) και τον Πλούταρχο (1003c), οι οποίοι ισχυρίζονται ότι το δωδεκάεδρο σύγκειται από 360 πρώτα τρίγωνα. Ο ίδιος ο Πλάτων το υπαινίσσεται στον Τίμαιο (55c 4 – 6) κάνοντας λόγο για μια πέμπτη σύσταση.

Η κατασκευή και ερμηνεία του δωδεκαέδρου παρουσιάζει δυσεπίλυτα προβλήματα και αρκετές δυσχέρειες στην κατανόηση. Μέχρι σήμερα δεν υπάρχει ομοφωνία ή μάλλον επικρατεί πλήρης άγνοια για το ποια είναι τα στοιχεία, δηλαδή τα τρίγωνα από τα οποία αυτό συγκροτείται. Λένε για παράδειγμα ότι η αναφορά του δωδεκαέδρου είναι εντελώς περιττή και άχρηστη, αφού υπάρχουν τα τέσσερα κάλλιστα σώματα και ότι η προσφυγή στα τρίγωνα για τη σύνθεσή του είναι “αδύνατη ή δυσχερέστατη” (Κάλφας 1997: 441 σημ. 337). Τα στοιχεία δε του δωδεκαέδρου, δηλαδή τα ορθογώνια τρίγωνα, από το οποίο αυτό αποτελείται, είναι άγνωστα μέχρι σήμερα. Με την παρούσα εισήγηση θα ήθελα να ανακοινώσω ότι τα στοιχεία του δωδεκαέδρου είναι συνδυασμός δύο ειδών τριγώνων, παρόλο που και τα δύο είναι ημιτρίγωνα ισοσκελών τριγώνων: ενός με σχέση πλευρών 3, 4, 5 ως προς το μήκος, που έχει γωνίες 36, 54, 90, και ενός άλλου με γωνίες 18, 72 και 90 μοιρών. Στην μεν πρώτη περίπτωση πρόκειται για το ημιτρίγωνο ενός εκ των πέντε ισοσκελών τριγώνων του κανονι-

κού πενταγώνου με επίκεντρη γωνία 72° και παρά τη βάση 54° και 54° , στη δε δεύτερη έχουμε το ημιτρίγωνο του χρυσού τριγώνου με γωνίες 36° , 72° και 72° . Επομένως πρόκειται για το ημιτρίγωνο με γωνίες 18° , 72° και 90° . Οι πλευρές του χρυσού αυτού τριγώνου έχουν τη σχέση του άκρου και μέσου λόγου, δηλαδή της χρυσής τομής όπως απέδειξε μάλλον ο Θεαίτητος (Fr. Lassere 1964, 76) στο πεντάγωνο, διότι ένα τέτοιο τρίγωνο έχει πλευρές τη διαγώνιο και την πλευρά του πενταγώνου. Αντίθετα, ο Πρόκλος (1873:419, Th. Heath 1956:99) υποστηρίζει ότι είναι Πυθαγορικής προέλευσης. Το τρίγωνο αυτό σχηματίζεται με κορυφή την επίκεντρη γωνία του πενταγώνου και βάση την πλευρά του (Ευκλείδης, Δ ια β, M. Livio, 2005, 118 – 20).

Το ερώτημα που προβάλλει τώρα είναι να μάθουμε πώς δημιουργούνται τα τρίγωνα αυτά και πόσα είναι. Αν ενώσουμε το κέντρο του πενταγώνου, το οποίο αποτελεί τη βάση του δωδεκαέδρου, με τις πέντε γωνίες του, τότε σχηματίζονται πέντε ισοσκελή τρίγωνα με γωνίες κορυφής 72° , δηλαδή μία ορθή παρά ένα πέμπτο και βάσεων τα $3/5$ της ορθής, δηλαδή 54° και 54° . Η γωνία των 72° προκύπτει, αν διαιρέσουμε τις 360° , δηλαδή τις τέσσερις ορθές, δια του πέντε, διότι τόσα είναι τα τρίγωνα, που καλύπτουν ολόκληρη την επιφάνεια του πενταγώνου. Κάθε γωνία του πενταγώνου είναι 108° δηλαδή μια ορθή και ένα πέμπτο σύμφωνα με τον μαθηματικό τύπο $180^\circ(n - 2)$, όπου n είναι ο αριθμός των πλευρών του πενταγώνου, και στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι πέντε. Αυτό έχει αποδειχθεί κατ' άλλο τρόπον από τον Ευκλείδη (XIII, ιη β, λήμμα). Έτσι έχουμε $(180^\circ \cdot 3) : 5 = 540 : 5 = 108$, πράγμα που αναφέρει και ο Πλούταρχος (1003 D). Επειδή όμως οι πλευρές του προαναφερθέντος τριγώνου είναι ταυτόχρονα και διχοτόμοι των γωνιών, διότι είναι και διάμεσοι των απέναντι πλευρών του πενταγώνου, προκύπτει ότι οι παρά την βάση γωνίες του τριγώνου αυτού είναι 54° . Αφού το κάθε πεντάγωνο σύγκεται από πέντε τέτοια ισοσκελή τρίγωνα, έπεται ότι το δωδεκάεδρο περιέχει $60 (= 5 \cdot 12)$, για να καλυφθεί όλη η επιφάνειά του, όπως αποδεικνύεται από τον Ευκλείδη στο ανωτέρω λήμμα. Αυτά είναι το ημιτρίγωνο του ισοσκελούς αυτού τριγώνου με σχέση πλευρών 3, 4, 5 και γωνίες 36° , 54° και 90° . Συνεπώς το διπλάσιο του ισοσκελούς αυτού τριγώνου, που εμπεριέχεται στο τετράγωνο, το οποίο σχηματίζεται από μια πλευρά και την κάθετο σ' αυτή, είναι ίσο με το τριακονταπλάσιο τη επιφάνειας του δωδεκαέδρου κατά τον Ύψικλή (Eu. Σπανδάγος 2002, 43 – 44).

Το ισοσκελές αυτό τρίγωνο του πενταγώνου υποδιαιρείται σε δύο ημιτρίγωνα με σχέση πλευρών 3, 4, 5. Άρα το δωδεκάεδρο θα περιείχε $2 \cdot 5 \cdot 12 = 120$ τρίγωνα, που θα ήταν τα στοιχεία του. Αυτό όμως δεν ανταποκρίνεται προς την αλήθεια, διότι το ισοσκελές αυτό τρίγωνο διαιρείται κατά τους αρχαίους σχο-

λιαστές Πλούταρχο και Αλκίνοο σε έξι πρώτα, δηλαδή ορθογώνια τρίγωνα, ενώ με τη διαίρεση αυτή το ισοσκελές θα αποτελούνταν μόνο από δύο πρώτα, δηλαδή ορθογώνια τρίγωνα. Η διαίρεση αυτή των σχολιαστών προκύπτει κατ' αναλογία από το γεγονός ότι τα στοιχεία του ισοπλεύρου τριγώνου δεν είναι δύο αλλά έξι (Τιμ., 54c 2. Πβ. Γ. Κουμάκης 2014). Με βάση τον αριθμό αυτόν αναφέρει ο Πλάτων ότι η πυραμίδα αποτελείται από 24, το οκτάεδρο από 48 και το εικοσάεδρο από 120 κάλλιστα τρίγωνα (Τιμ., 55 a – b). Το ίδιο συμβαίνει και με το ορθογώνιο ισοσκελές. Το τετράγωνο της βάσης του κύβου δεν σύγκριται από δύο αλλά από τέσσερα τρίγωνα, διότι τέσσερα είναι τα στοιχεία του. Γι' αυτό ο κύβος κατά δήλωση του Πλάτωνα απαρτίζεται από 24 και όχι 12 ορθογώνια τρίγωνα, επειδή μόνον με τον αριθμόν αυτόν μπορούν να χαρακτηριστούν στοιχεία του τετραγώνου και κατ' ακολουθίαν του κύβου όπως και του ισοπλεύρου τριγώνου (Τίμαιος Λοκρός 35. 98 c – d) και κατά συνέπειαν των τριών άλλων σωμάτων αντίστοιχα. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και με το δωδεκάεδρο. Τούτο σημαίνει ότι το ημιτρίγωνο και το ημιτετράγωνο είναι στοιχεία. Συνεπώς, το καθένα από τα πέντε ισοσκελή τρίγωνα με γωνίες 72° , 54° και 54° δεν είναι δυνατόν να διαιρείται μόνο σε δύο ημιτρίγωνα με γωνίες 36° , 54° και 90° , τα οποία θα αποτελούσαν τα στοιχεία του δωδεκάεδρου, διότι τότε αυτό θα αποτελούνταν συνολικά από 120 τέτοια τρίγωνα, πράγμα που αντιβαίνει στις μαρτυρίες τόσο του Πλουτάρχου όσο και του Αλμπίνου ή Αλκίνοου, οι οποίοι επιβεβαιώνουν – όπως είδαμε – ότι το δωδεκάεδρο συντίθεται από 360 τρίγωνα, τα οποία αποτελούν και τα στοιχεία του δωδεκάεδρου.

Για να ισχυριστούμε λοιπόν ότι το δωδεκάεδρο σύγκριται από 120 και όχι από 360 στοιχειώδη τρίγωνα, πρέπει πρώτα να αποδείξουμε ότι οι μαρτυρίες των σχολιαστών αυτών του Τιμαίου του Πλάτωνος είναι λανθασμένες. Μέχρις ότου δηλαδή φέρουμε πειστικά επιχειρήματα για την αναίρεση των θέσεών τους, πρέπει να είμαστε επιφυλακτικοί στο πρόβλημα αυτό. Εκτός όμως από το εμπόδιο του αριθμού των στοιχείων του δωδεκάεδρου, τα οποία κατά τις ανωτέρω μαρτυρίες και εκτιμήσεις πρέπει να είναι 360 και όχι 120, υφίσταται και ένα άλλο επίσης σοβαρό και σπουδαίο κώλυμα να ασπαστούμε την ερμηνεία αυτή. Είναι η δήλωση του Πλουτάρχου ότι στο ημιτρίγωνο αυτό του δωδεκάεδρου με σχέση πλευρών 3, 4, 5, η όρθια πλευρά του τριγώνου είναι 3, η βάση 4 και σε κάθε περίπτωση η υποτείνουσα είναι 5. Εάν χωρίσουμε το ανωτέρω ισοσκελές τρίγωνο του πενταγώνου μόνον σε δύο ημιτρίγωνα, ώστε ολόκληρο το δωδεκάεδρο να αποτελείται μόνο από 120 στοιχεία, τότε η όρθια πλευρά κατ' ανάγκην είναι 4 και η βάση τρία. Πρόκειται συνεπώς για μια διάπαξη, η οποία είναι αντίθετη από αυτήν, που παραδίδει ο Πλούταρχος, ο οποίος θέλει η βάση

να είναι η μεγαλύτερη κάθετη πλευρά, δηλαδή 4 και όρθια πλευρά τρία (Πλούταρχος 373F – 374A). Άρα, η ενδεχόμενη αυτή ερμηνεία αποδεικνύεται ανεδαφική και λανθασμένη. Το σπουδαιότερο ωστόσο επιχείρημα είναι τα κείμενα του ίδιου του Πλάτωνα, ο οποίος θέλει τη διαίρεση του ισοπλεύρου τριγώνου σε έξι σκαληνά και πιο συγκεκριμένα, ημιτρίγωνα ισοπλεύρου τριγώνου. Ο μαθηματικός Th. Heath υποστηρίζει ορθά κατά την αντίληψή μου ότι η σύνδεση του ισοπλεύρου τριγώνου από 6 και όχι από 2 είναι Πυθαγορικής προέλευσης. Επικαλείται συγκεκριμένα τον Πρόκλο, ο οποίος λέγει ότι υπάρχει ένα θεώρημα των Πυθαγορείων, σύμφωνα με το οποίο, αν ληφθούν έξι ισόπλευρα τρίγωνα ή τέσσερα τετράγωνα ή τρία εξάγωνα, συμπληρώνεται όλος ο τόπος γύρω από ένα σημείο, που είναι τέσσερις ορθές, δηλαδή 360 μοίρες, διότι η γωνία του μεν ισοπλεύρου τριγώνου είναι 60, του τετραγώνου 90 και του εξαγώνου 120. Κατά συνέπεια σε όλες τις περιπτώσεις συμπληρώνονται οι τέσσερις ορθές γωνίες (Πρόκλος, 1873:304-305). Το θεώρημα αυτό μνημονεύεται και από τον Αριστοτέλη (Περί ουρανού Γ 7, 306 b 3 – 8) και τον Πάππο τον Αλεξανδρέα στην αρχή του Ε βιβλίου (Fr.Hultsch, 1878, Eu. Σπανδάγος 2004:14).

Εδώ όμως δημιουργείται ένα πρόβλημα, το οποίο θα πρέπει να αντιμετωπιστεί. Συγκεκριμένα, με βάση το σκεπτικό αυτό της συμπλήρωσης του τόπου, δηλαδή των 360 μοιρών, θα έπρεπε κατ' αναλογία και με το ισοσκελές τρίγωνο με γωνίες 72, 54, 54, να μπορούσε επίσης να συμπληρωθούν οι 360 μοίρες. Σύμφωνα όμως με το παραπάνω θεώρημα δεν υπάρχει άλλο σχήμα εκτός από τα τρία αυτά, καθένα από τα οποία επαναλαμβανόμενο να συμπληρώνει όλον τον τόπο. Είναι ωστόσο δυνατόν κάθε μία από τις γωνίες του επαναλαμβανόμενης είτε μόνη της είτε με υποπολλαπλάσιό της να συμπληρώσει όλον τον τόπο των 360 μοιρών. Έτσι η γωνία 72 μοιρών της κορυφής, αν επαναληφθεί 5 φορές, συμπληρώνει το ζητούμενο, αφού $72 \times 5 = 360$. Το ίδιο συμβαίνει, αν επαναληφθεί η παρά τη βάση γωνία των 54 μοιρών έξι φορές και τα $2/3$ ή τα $6/9$ αυτής, δηλαδή γωνία 36 μοιρών. Έχουμε δηλαδή $54 \times 6 + 36 = 324 + 36 = 360$. Η εξάδα όμως, η οποία αποτελεί τη βάση της αρμονίας, συμβολίζει τη ψυχή (Ιάμβλιχος 1922:43, 45, 47). Στον Φαίδωνα (94b) επίσης η ψυχή ορίζεται ως αρμονία. Κατά τον Ιάμβλιχο 91922:14, 14-19) η ψυχή χωρίζεται σε τρία διαστήματα, καθένα από τα οποία έχει δύο πέρατα. Από αυτό εξάγεται το συμπέρασμα ότι η ψυχή συνίσταται από τον αριθμό 6. Βλέπουμε εδώ ότι ο τρόπος σχηματισμού της εξάδας της ψυχής συμπίπτει απόλυτα με τον τρόπο σύνδεσης του ισοπλεύρου τριγώνου $3 \times 2 = 6$ (Τίμ. 54 d). Από τη στιγμή λοιπόν που είναι δεδομένο ότι το ισόπλευρο τρίγωνο διαιρείται σε έξι πρώτα τρίγωνα, πρέπει το ίδιο να συμβαίνει και με το ισοσκελές. Οφείλομε συνεπώς να αναζητήσουμε άλ-

λον τρόπο διαίρεσης, με τον οποίο ενδεχομένως θα δημιουργηθούν και άλλα τρίγωνα ως στοιχεία του δωδεκαέδρου. Με βάση έναν απλό συλλογισμό πρέπει να αναμένουμε ότι το δωδεκαέδρο πρέπει να αποτελείται από δύο και όχι από ένα είδος στοιχείων, επειδή τα τέσσερα σχήματα, που αντιστοιχούν στα κάλλιστα σώματα, αποτελούνται από δύο διαφορετικά είδη τριγώνων, και συγκεκριμένα αφενός μεν από το ημιτρίγωνο ισοπλευρού τριγώνου, αφετέρου δε το ημιτετράγωνο. Στο δωδεκαέδρο βέβαια, όπως θα δούμε, δεν χρησιμοποιείται κανένα από αυτά τα τρίγωνα, αλλά δύο διαφορετικά είδη ημιτριγώνων. Το ένα εξ αυτών είναι το ημιτρίγωνο ισοσκελούς τριγώνου με γωνίες 72° , 54° και 54° , το δε άλλο είναι το ημιτρίγωνο του χρυσού τριγώνου με γωνίες 36° , 72° και 72° , στο οποίο οι παρά τη βάση γωνίες είναι διπλάσιες από εκείνη της κορυφής. Οι δύο πλευρές του τριγώνου αυτού βρίσκονται σε λόγο της χρυσής τομής.

Το ερώτημα είναι τώρα πώς δημιουργούνται τα έξι αυτά τρίγωνα, που είναι στοιχεία του δωδεκαέδρου. Αν σε ένα από τα πέντε ισοσκελή τρίγωνα του πενταγώνου με γωνίες 72° , 54° , 54° φέρουμε τα τρία ύψη, τότε σχηματίζονται έξι τρίγωνα με τις ιδιότητες που είπαμε παραπάνω, δηλαδή τέσσερα ημιτρίγωνα του ισοσκελούς αυτού τριγώνου, τα οποία έχουν γωνίες 36° , 54° , 90° ανά δύο ίσα και όμοια, αλλά άνισα προς τα άλλα δύο και μάλιστα με λόγο 3,618. Σχηματίζονται επίσης δύο ίσα και όμοια ημιτρίγωνα του χρυσού τριγώνου με γωνίες 18° , 72° , 90° . Το τρίγωνο αυτό ως προς το μικρότερο άλλο ημιτρίγωνο έχει λόγο 2,23 και ως προς το μεγαλύτερο 0,618 δηλαδή του άκρου και μέσου λόγου, με άλλα λόγια της χρυσής τομής. Τα ύψη όμως του ισοσκελούς τριγώνου, που σχηματίζεται ακτινωτά με πλευρές από το κέντρο προς τις γωνίες του πενταγώνου, συμπίπτουν με τις διαγώνιες του ίδιου. Τα στοιχεία λοιπόν, από τα οποία συντίθεται το δωδεκαέδρο είναι 360 ορθογώνια ημιτρίγωνα, τα οποία λέγονται και πρώτα ή αρχοειδή, επειδή από τα δύο ορθογώνια τρίγωνα, το σκαληνό και το ισοσκελές, σχηματίζονται όλα τα τρίγωνα και επομένως και τα επίπεδα σχήματα κατά Πλάτωνα (Τιμ. 53 c8 – d3: τὰ δὲ τρίγωνα πάντα ἐκ δυοῖν ἄρχεται τριγώνοι, μίαν μὲν ὀρθὴν ἔχοντος ἑκατέρου γωνίαν, τὰς δὲ ὀξείας). Οι αποδείξεις παρατίθενται από μαθηματικούς στα σχεδιαγράμματα.

Το μαθηματικό αυτό συμπέρασμα συμπίπτει απόλυτα – όπως είδαμε – με τη μαρτυρία του Πλουτάρχου – ο οποίος λέγει (1003D) ότι το δωδεκαέδρο είναι συναρμοσμένο από δώδεκα πεντάγωνα ισογώνια και ισόπλευρα, έκαστον των οποίων συνίσταται από τριάντα πρώτα σκαληνά τρίγωνα. Αναγκαίο επακόλουθο της διαπίστωσης αυτής του Πλουτάρχου είναι ότι το δωδεκαέδρο σύγκειται από 360 τρίγωνα, αφού αυτό αποτελείται από δώδεκα πεντάγωνα $360 = 30 \cdot 12$. Με βάση τον σιωπηρό αυτόν συλλογισμό ο Πλούταρχος προβαί-

νει εν συνεχεία στη δήλωση ότι η σύνδεση του κόσμου από 360 τρίγωνα είναι απομίμηση του ζωδιακού κύκλου και ταυτόχρονα του έτους, διότι και στις δύο περιπτώσεις έχουμε τον αριθμό 12, ο οποίος υποδιαιρείται σε 30 μέρη (1003D). Πράγματι ο ζωδιακός κύκλος διαιρείται σε 12 ζώδια, δηλαδή μέρη, και το κάθε ζώδιο έχει 30 μοίρες. Κατά τον αυτόν τρόπον το έτος έχει 12 μήνες και κάθε μήνας έχει 30 μέρες. Κατά τον Διογένη το Λαέρτιο (I, 27) ο Θαλής βρήκε τις εποχές και τους μήνες του έτους, το οποίο διαίρεσε σε 365 ημέρες. Ο Πλούταρχος ονομάζει τα 24 τρίγωνα της πυραμίδας επίσης πρώτα (32, 427a). Απ' αυτό θα μπορούσε να συμπεράνει κανείς ότι όλα τα ορθογώνια τρίγωνα είναι πρώτα. Η ιδέα αυτή της απομίμησης της μαθηματικής δομής του κόσμου (με τα 360 τρίγωνα του δωδεκαέδρου) του ζωδιακού κύκλου τονίζεται επίσης από τον Αλμπίνο στην *Επιτομή* του (77) ή κατ' άλλην παραλλαγή από τον Αλκίνοο στον *Διδασκαλικόν* του (XIII, 169). Εύστοχα έχει παρατηρηθεί από τους σχολιαστές ότι ο παραλληλισμός και η συσχέτιση του δωδεκαέδρου προς τον ζωδιακό κύκλο και τον ενιαυτόν είναι απλώς αριθμητικός (H. Cherniss 1976, 55). Αυτό που δηλώνει εδώ ο Πλούταρχος είναι ότι τα 360 τρίγωνα, από τα οποία συντίθεται το δωδεκάεδρο, είναι πρώτα και σκαληνά. Ο όρος "πρώτα" σημαίνει ορθογώνια, διότι μόνον αυτά μπορούν να είναι στοιχεία, δηλαδή αρχές των άλλων τριγώνων και γενικότερα σχημάτων, όπως είδαμε και προηγουμένως (*Τιμ.*, 53 c8 – d2). Για να το αντιδιαστείλει από το άλλο σκαληνό, δηλαδή το ημιτρίγωνο ισοπλεύρου τριγώνου, λέγει ότι το στοιχείο του δωδεκαέδρου δεν είναι εκείνο το σκαληνό, από το οποίο ο Πλάτων συνιστά την πυραμίδα, το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο (428A).

Επιφανείς ερμηνευτές και σχολιαστές του Πλάτωνα διερωτώνται και εκφράζουν την απορία τους για το ότι ούτε ο Αλμπίνος ούτε ο Πλούταρχος μας λένε τί είδους τρίγωνο είναι αυτό, που συγκροτεί το δωδεκάεδρο. Ο Αλμπίνος δεν κάνει καμιά απολύτως διασάφηση και δεν δίνει κανένα ευκρινέστερο προσδιορισμό. Απεναντίας, ο Πλούταρχος παρέχει τρία στοιχεία της ταυτότητάς του: 1) ότι αυτά είναι πρώτα, δηλαδή ορθογώνια, 2) σκαληνά και 3) δεν είναι τα σκαληνά εκείνα, με τα οποία ο Πλάτων συνδέει την πυραμίδα, το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο. Δεν προσδιορίζει όμως επακριβώς ποιο ή ποια είναι τα τρίγωνα αυτά, αν είναι δηλαδή ένα ή δύο και ποιες είναι οι διαστάσεις τους. Επειδή ο Πλούταρχος δεν ήταν σαφής για άγνωστο λόγο, τα λόγια του παρεξηγήθηκαν και παρερμηνεύτηκαν. Γι' αυτό δέχτηκε ποικίλες επιδέσεις άλλοτε με ήπιο και άλλοτε με σφοδρό τόνο. Το γενικό συμπέρασμα των επικριτών είναι ότι η αποψή του είναι λανθασμένη και ότι δεν κατανόησε τα λόγια του Πλάτωνα. Το περίεργο και άδικο στην όλη υπόθεση είναι ότι ορισμένοι απ' αυτούς νόμισαν ότι

ο Πλούταρχος με τις φράσεις του “πρώτα τρίγωνα”, “ημιτρίγωνα” και “σκαληνά” τρίγωνα εννοούσε μάλλον το ημιτρίγωνο ισοπλεύρου τριγώνου, που χρησιμοποίησε ο Πλάτων στην κατασκευή των τριών σχημάτων, που αντιστοιχούν στη φωτιά, τον αέρα και το νερό, παρόλο που ο ίδιος ο Πλούταρχος – όπως είδαμε – αντιδιαστέλλει ρητά τα τρίγωνα του δωδεκαέδρου από το ημιτρίγωνο του ισοπλεύρου τριγώνου. Ορισμένοι ερμηνευτές ωστόσο έκαμαν αυτό το απόπημα όπως ο Stallbaum (1861). Οι αξιολογότεροι επικριτές του Πλουτάρχου είναι ο R. Archer – Hind (1888, 197), ο Th. Martin (1976, 246 – 247), ο H. Cherniss (1976: 54, σημ. α) και ο Th. Heath (1931: 177 – 8, 1921: 236 – 7, 1956, 98 – 9). Ο εξάαιρετος αυτός μαθηματικός υποστηρίζει στα ίδια σημεία των έργων του ότι το τρίγωνο του δωδεκαέδρου είναι το χρυσό τρίγωνο, δηλαδή εκείνο, στο οποίο οι παρά τη βάση γωνίες είναι διπλάσιες από εκείνη της κορυφής. Το τρίγωνο αυτό έχει τη γωνία κορυφής 36° και παρά τη βάση 72° , 72° . Έχει δηλαδή κορυφή τη γωνία και πλευρές τη διαγώνιο και πλευρά του πενταγώνου, το οποίο εγγράφεται σε κύκλο (Ευκλείδης, IV. 19). Λέγεται πεντάλφα (star-pentagon), επειδή πέντε τέτοια τρίγωνα σχηματίζονται στο πεντάγωνο. Για τους Πυθαγόρειους το τρίγωνο αυτό συμβόλιζε την “Υγεία”, οι δε πλευρές του έχουν το λόγο της χρυσής τομής, αφού σχηματίζεται από την πλευρά και τη διαγώνιο του πενταγώνου. Αυτό αποδεικνύεται μεν από τον Ευκλείδη (II ια, VI λφ), φαίνεται να είναι ωστόσο Πυθαγορικής προελεύσεως κατά τη μαρτυρία του Πρόκλου (1873: 419, Th. Heath 1956:99). Η λύση αυτή του Heath, παρόλο που δηλώνει οξύνοια και εμβάδυνση, δεν μπορεί να ανταποκρίνεται στο πνεύμα του Πλάτωνα για πολλούς λόγους. Ένας απ’ αυτούς είναι ότι τα πεντάλφα, εκτός του ότι αλληλοεπικαλύπτονται, δεν περιλαμβάνουν όλη την επιφάνεια του πενταγώνου και κατά συνέπεια του δωδεκαέδρου. Αυτή όμως πρέπει να καλυφθεί, για να μπορούν να μετρηθούν η ίδια, οι όγκοι, και το βάρος των σωμάτων, ώστε να δημιουργηθούν κριτήρια για τις αναλογίες και συμμετρίες μεταξύ τους (Τιμ. 32 c2, 54 c4). Επιπλέον δεν συμπληρώνονται 360 τρίγωνα που προσδιορίζουν οι σχολιαστές ούτε εμφανίζεται το τρίγωνο με σχέση πλευρών 3, 4, 5 με το οποίο ο Πλάτων λέγει στην *Πολιτεία* του (H, 548b) ότι αυτό χρησιμοποιήθηκε για τη θεία και την ανθρωπινή γέννηση. Το θείον γεννητόν της *Πολιτείας* είναι ο κόσμος. Με το τρίγωνο αυτό, όπως αναφέρει ο Πλούταρχος, παρίσταναν οι Αιγύπτιοι τον κόσμο, το χρησιμοποίησε δε και ο Πλάτων κατά τη σύνταξη του γαμήλιου διαγράμματος (373F). Έτσι το αντιλαμβάνεται και ο Πρόκλος (1901, 14-19, 30, 31), δηλαδή το “θείον γεννητόν” είναι ο κόσμος. Κρίνω ότι η ορθότερη λύση ή η μόνη ορθή είναι εκείνη του Ευκλείδη (XIII, 18, λήμμα), ο οποίος παρατάσσει πέντε ισοσκελή τρίγωνα, τα

οποία καλύπτουν όλη την επιφάνεια του πενταγώνου.

Ο μαθηματικός G. Cantor παρατήρησε ότι η διαίρεση ή διάλυση του πενταγώνου σε τρίγωνα επιτυγχάνεται, αν φέρουμε από κάθε κορυφή τη μεσοκάθετο στην απέναντι πλευρά και όλες τις διαγώνιες. Οι γωνίες των τριγώνων που σχηματίζονται είναι 36° , 72° , 72° και 36° , 54° , 90° και βρίσκονται ακτινωτά από το κέντρο (Cantor 1892. II: 177, R. Herz – Fischler, 1988: 83). Η διαίρεση αυτή συνεπάγεται ότι σχηματίζονται και τρίγωνα με γωνίες 18° , 72° και 90° , που είναι το ήμισυ του χρυσού τριγώνου και τρίγωνα με γωνίες 72° , 54° , 54° , που είναι τα πέντε ισοσκελή με γωνία κορυφής το κέντρο του πενταγώνου. Με τη διαίρεση αυτή του Cantor, την οποία ακολουθεί και ο Th. Heath (1956: 98), το κάθε ισοσκελές τρίγωνο με γωνίες 72° , 54° , 54° διαιρείται σε έξι ορθογώνια τρίγωνα, τα οποία είναι ημιτρίγωνα, το μεν ένα του χρυσού τριγώνου, το δε άλλο του ανωτέρω ισοσκελούς. Το ήμισυ του τριγώνου αυτού είναι το Πυθαγορικό με σχέση πλευρών 3, 4, 5, αφού η μεγαλύτερη κάθετη πλευρά είναι μέση ανάλογος της μικρότερης κάθετης πλευράς και της υποτεινούςας. Πρόκειται για εκείνο που δεν είναι αλλά πλησιάζει το ορθογώνιο χρυσό τρίγωνο. Αυτό σημαίνει ότι το τετράγωνό της μεγαλύτερης κάθετης πλευράς ισούται με την υποτεινούσα και τη μικρότερη κάθετη πλευρά. Αν δηλαδή a = υποτεινούσα, b = μεγαλύτερη κάθετη πλευρά και γ = μικρότερη κάθετη πλευρά, τότε έχουμε $b^2 = a\gamma$ (Σπανδάγος 2004α:21-25). Στο τρίγωνο δηλαδή με πλευρές 3, 4, 5, $4^2 = 3 \times 5 \text{ @ } 16 = 15$. Αυτά είναι κατά προσέγγιση ίσα, πράγμα που σημαίνει ότι οι πλευρές του τριγώνου αυτού έχουν περίπου το λόγο της χρυσής τομής. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι – όπως παραδίδεται από τους σχολιαστές – ο Πλάτων βρήκε τη μέση ανάλογο (L. Westerink 1990: 5.17 – 18, γ. 8): Μαθηματικά δὲ εὗρεν τὴν μέσσην καλουμένην ἀνάλογον).

Το πέμπτο σώμα, ο αιδέρας, αναφέρεται συστηματικά για πρώτη φορά στην *Επινομιδα* (981 b – c, 984 b c). Ο πιο πιστός μαθητής του Πλάτωνα Ξενοκράτης μαρτυρεί ότι το πέμπτο σχήμα αποδίδεται στο πέμπτο σώμα, που είναι ο αιδέρας (H. Diels 1895: 1165, : “διαϊρωῶν ... ἃ δὴ πέντε σχήματα καὶ σώματα ὠνόμαζεν, εἰς αἰδέρα καὶ πῦρ καὶ ὕδωρ καὶ γῆν καὶ ἀέρα ὥστε ὁ αἰδήρ πέμπτον ἄλλο τι σῶμα ... παρὰ τὰ τέτταρα στοιχεῖα”). Το ερώτημα που προβάλλει στη συνέχεια είναι γιατί ο Πλάτων δεν παρουσίασε στον *Τίμαιο* όλα τα σώματα, δηλαδή κα τα πέντε, αλλά πραγματεύτηκε το πέμπτο στο τελευταίο συστηματικό του έργο, που είναι η *Επινομίς*. Πρέπει βέβαια εδώ να σημειωθεί ότι – όπως απέδειξε ο Ευκλείδης- (XIII, 18) υπάρχουν μόνο αυτά τα πέντε ισογώνια και ισόπλευρα σχήματα, δηλαδή κανονικά πολύεδρα. Σε άλλη μου εργασία προσπάθησα να δείξω ότι η *Επινομίς* είναι ο *Φιλόσοφος*, τον οποίο είχε υπο-

σχεθεί ήδη στον *Σοφιστή* (217a 3, 254b 3 – 5) και τον *Πολιτικό* (257 a – 6) ότι θα έγραφε (Γ. Κουμάκης 2013, 2014a). Το ότι ο Πλάτων χρησιμοποιεί έντονα τη χρυσή τομή στο δωδεκάεδρο εκτός από το χρυσό τρίγωνο, στο οποίο αυτή είναι εμφανής, παρατηρούμε ότι και στα εμβαδά των τριγώνων έχουμε τον χρυσό λόγο. Για παράδειγμα το εμβαδόν των ημιτριγώνων του χρυσού τριγώνου (3,592) προς το μεγαλύτερο ορθογώνιο τρίγωνο (5,812) έχουν το λόγο της χρυσής τομής, δηλαδή 0,618. Ο ορατός αυτός κόσμος ως εικόνα του νοητού είναι ένας και “μονογενής, μέγιστος, άριστος κάλλιστος και τελειώτατος” (*Τιμ.*, 92c 5 – 9). Ο ορατός και απτός κόσμος είναι μεν εικόνα του νοητού, αλλά και το δωδεκάεδρο είναι εικόνα του ορατού (*Τίμαιος* Λοκρός 98 d – e). Με την άποψη αυτή παρουσιάζεται στενή σχέση και συγγένεια προς την τετμημένη γραμμική της *Πολιτείας*, όπου τα είδωλα είναι εικόνα της εικόνας (ΣΤ 509 d κ. εξ. πβ. G. Koumakis 2010 – 11).

Ας δούμε τώρα πώς από τις μαθηματικές αυτές διεργασίες προκύπτει η διαλεκτική, οι κύριες μορφές της οποίας είναι αφενός μεν η υπόθεση αφετέρου δε η σύνδεση και η διαίρεση. Η υπόθεση είναι εμφανής στον *Τίμαιο*, αφού ο λόγος ή ο μύθος είναι εικώς, δηλαδή πιθανός (29 d 2, 48 d 2, 53 d 5 – 6). Όταν ο Πλάτων αρχίζει τη συναρμολόγηση του κόσμου με τα κάλλιστα τρίγωνα χρησιμοποιεί εκφράσεις, που παραπέμπουν σε υποθέσεις όπως *υποτιθέμεθα* (53d 5), *προαιρετόν, τιθέμεθα* κ.π.λ. (54 a). Η δεύτερη κύρια μορφή της διαλεκτικής είναι η σύνδεση και η διαίρεση, η οποία κυριαρχεί έντονα στους ύστερους διαλόγους και κυρίως στον *Σοφιστή* και τον *Πολιτικό*. Ο Πλάτων συνδέει με στοιχειώδη τρίγωνα τις βάσεις των πέντε κάλλιστων σχημάτων που είναι στοιχεία και εικόνες των σωμάτων, τα οποία με τον ίδιο τρόπο μπορούν να διαιρεθούν. Η διαίρεση αυτή πρέπει να είναι *κατ’ εἶδη* και όχι *κατά μέρος*. Ας παρατηρήσουμε στη συνέχεια πώς γίνεται η *κατ’ εἶδη* αυτή διαίρεση. Τα τρίγωνα χωρίζονται σε ορθογώνια και μη ορθογώνια. Τα τρίγωνα, με τα οποία δομείται ο κόσμος, είναι ορθογώνια τα οποία μπορεί να είναι είτε ημιτετράγωνα, δηλαδή ορθογώνια ισοσκελή, είτε ημιτρίγωνα. Τα τελευταία υποδιαιρούνται πάλι σ’ εκείνο 1) του ισοπλευρού τριγώνου και 2) ισοσκελούς. Το ισοσκελές υποδιαιρείται πάλι είτε σ’ εκείνο με γωνίες 72°, 54°, 54°, είτε σ’ εκείνο με γωνίες 36°, 72°, 72°. Η γωνία δηλαδή της κορυφής του δεύτερου είναι ημίσεια από εκείνη του πρώτου. Από τα δύο αυτά ισοσκελή λαμβάνομε κάθε φορά το ήμισυ. Στη μεν πρώτη περίπτωση έχουμε το Πυθαγορικό (Iamblichus 1922: 50) τρίγωνο με γωνίες 36°, 54°, 90°, στο οποίο οι τρεις πλευρές έχουν περίπου το λόγο της χρυσής τομής. Στη δε δεύτερη προκύπτει το ήμισυ του χρυσού τριγώνου με γωνίες 18°, 72°, 90°. Με το σκαληνό ημιτρίγωνο κατασκευάζονται τα τέσσερα

σχήματα και με το ημιτετράγωνο ο κύβος. Ας σημειωθεί εδώ ότι το ημιτρίγωνο, επειδή περιέχει το ήμισυ, ενέχει την έννοια της συμμετρίας (*Πολιτ.*, Z 530a 1).

Επειδή όμως ο Πλάτων μιλάει πρωτίστως για τη σύνδεση των σωμάτων, οφείλουν και οι ερμηνευτές να ακολουθήσουν πιστά τον ίδιο δρόμο. Ο τρόπος σύνδεσης των βάσεων του δωδεκαέδρου παρέχεται από τους μαθηματικούς, που είχαν την ευγενή καλοσύνη να βοηθήσουν στο έργο με αγαστή συνεργασία. Τους οφείλω θερμές ευχαριστίες. Δεν πρέπει δηλαδή να αρχίσουμε από τη διαίρεση, όπως έχει επιχειρηθεί μέχρι σήμερα από τους σχολιαστές, αλλά από τη σύνδεση ακολουθώντας τις υποδείξεις του Πλάτωνα. Με ποιο τρόπο μεταβαίνουμε από το Πυθαγορικό τρίγωνο με σχέση πλευρών 3, 4, 5, στο οποίο η βάση είναι η μεγαλύτερη κάθετη πλευρά 4 και ύψος η μικρότερη, 3, (ώστε να συμπληρώνονται τα τρία στοιχειώδη τρίγωνα), στο μεγαλύτερο όμοιό του, τεκμηριώνεται από τους μαθηματικούς. Αυτό που εννοώ είναι πώς από το τρίγωνο ΓΗΖ μεταβαίνουμε στο ΑΓΖ στο σχήμα 4. Πώς τώρα μεταβαίνουμε από το προαναφερθέν τρίγωνο ΑΓΖ του σχήματος 4 στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΒ με γωνίες 72° , 54° , 54° του σχήματος 3 μας εξηγεί ο Πρόκλος (1901: II, 43, 15 – 19, πβ. A. J. Festugière 1970: II, 150). Λέγει συγκεκριμένα ότι αυτό επιτυγχάνεται αν προεκτείνουμε τη μικρότερη κάθετη πλευρά (ΓΖ) σε ίσο μήκος, δηλαδή αν τη διπλασιάσουμε και ενώσουμε το άκρον της με την κορυφή του τριγώνου, δηλαδή του σημείο Β της ΖΒ με το Α. Αν τώρα ενώσουμε πέντε τέτοια ισοσκελή τρίγωνα με κέντρο τη γωνία 72° , τότε σχηματίζεται το πεντάγωνο, αφού καλύπτεται όλη η επιφάνεια του. Τη λύση αυτή έδωσε ο Ευκλείδης (XIII, 18, λήμμα).

Πρέπει τέλος να σημειωθεί ότι στην *Πολιτεία* (ΣΤ 509 c – 511 d) με τα μαθηματικά, που αντιστοιχούν στη διάνοια, μπορεί επίσης να γίνει διαλεκτική, η οποία ανήκει στο ανώτατο μέρος τετμημένης γραμμής, που αναφέρεται στην επιστήμη και τον νοη, αφού αυτά είναι ιδέες (510d7) και νοητά μετά αρχής (511d2. Πβ. Fr. Cornford 1965: 63). Οι ιδέες που ζητούμε δεν είναι δυνατόν να ιδωθούν κατ' άλλον τρόπο παρά μόνον με την διάνοια (511 a). Με τη διαλεκτική όμως κατά Πλάτωνα, είτε με τη μορφή της υπόδεσης είτε της σύνδεσης και της διαίρεσης, κατακτούμε τη γνώση (*Φαίδ.* 99 c- d, 101 d-e. Πβ. Koumakis 2000). Είναι λοιπόν επιτακτική ανάγκη να βρούμε επακριβώς τον αριθμό και την ταυτότητα των καλλίστων τριγώνων, τα οποία αποτελούν τις αρχές και τα αίτια σύνδεσης των 5 σχημάτων, γεννητόρων των 5 καλλίστων σωμάτων. Από τα τρίγωνα συντελείται η του όλου γένεση λέγει ο Ιάμβλιχος (1922:87). Μόνον αν γνωρίσουμε τις αρχές και τα αίτια, δημιουργούμε τις

αναγκαίες προϋποθέσεις της γνώσης κατά τον Αριστοτέλη (*Φυσ. Α* 1, 184 a 10-14, *Β* 3, 194 b 16-17, *Μ.τ.φ.* Α3,993 a 23-26). Αλλά και ο Πλάτων τονίζει στον *Φιληβο* (17 a 23) ότι η διαφορά της εριστικής από τη διαλεκτική έγκειται στο ότι η μεν εριστική μεταβαίνει από το ένα ευθύς στο άπειρο, ενώ η διαλεκτική επιδιώκει το μεταξύ και το μέσον. Προσπαθεί δηλαδή να καθορίσει ποια και πόσα είναι. Η διαλεκτική ακολουθεί το μέσον των 2 άκρων (*Πολιτικ.* 262b 6, 265 a 4). Στο πνεύμα αυτό λέγει ότι η άριστη πολιτεία βρίσκεται στο μέσον των πολιτευμάτων μεσεύει δηλαδή (*Νόμοι*, ΣΤ', 756 e 9-10). Πρέπει να επισημανθεί ακόμα η σχέση του 5 του πενταγώνου και του κόσμου διότι ο αριθμός 5 είναι το κέντρο, δηλαδή το ήμισυ του 10, το οποίο συμβολίζει τον κόσμο, τον ουρανό, το παν (Γάμβλιχος 1992: 30-32, 83).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ευκλείδης. (1953 – 1975). *Στοιχεία*, εκδ. Ε. Σταμάτης, 4 τόμοι, Ο.Ε.Σ.Β., Αθήνα.
- Θεοδωρακόπουλος, Ι. (1971). *Πλάτωνος Φαίδρος*, Εισαγωγή, αρχαίο κείμενο με σχόλια, Αθήνα.
- Κάλφας, Β. (1997). *Πλάτων, Τίμαιος*, Εισαγωγή, Μετάφραση, Σχόλια, Πόλις, Αθήνα.
- Καραμπατζάκη, Ε. (2014). Επιδράσεις του πλατωνικού *Τιμαίου* στη στωική φιλοσοφία, *Φιλοσοφείν* 10, σσ. 167 – 180.
- Κουμάκης, Γ. (2013). *Περί του νοητού και ορατού κόσμου κατά Πλάτωνα*, *Φιλοσοφία και κοσμολογία Ι*, Αιγής, Πειραιεύς.
- (2014^α). Ο φιλόσοφος-Κυβερνήτης στην *Επινομιδα* του Πλάτωνα, *Ελλην. Φιλοσ. Επιθ.*, 31, 3-25.
- (2014^β). Προλεγόμενα για μια νέα ερμηνεία γένεσης του κόσμου κατά Πλάτωνα (*Τιμ.* 54a 5-7), *Φιλοσοφία και κοσμολογία ΙΙ*, Αιγής, Πειραιεύς, σσ. 60 – 91.
- Μούκανος, Δ. (1979). *Ο τρόπος του είναι των μαθηματικών αντικειμένων κατά τον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη*. Αθήνα.
- Παπασπύρου, Π. (2014). Ο Πλατωνικός διάλογος *Τίμαιος* και η γέννηση του κοσμογραφικού μυστηρίου του J. Kepler, *Φιλοσοφία και κοσμολογία*, Αιγής, Πειραιεύς, σσ. 100 – 108).
- Σπανδάγος, Ευ. (2001). *Η αριθμητική εισαγωγή του Νικομάχου του Γερασηνού*, Αίθρα, Αθήνα.
- (2002). *Στοιχείων βιβλίον ιδ' του Ύψικλέους και στοιχείων ιε' Ανωνύμου*, Αίθρα, Αθήνα.
- (2004^α). *Η χρυσή τομή στην αρχαία Ελλάδα*, Αίθρα, Αθήνα.
- (2004^β). *Η μαθηματική συναγωγή του Πάππου του Αλεξανδρέως*, Αίθρα, Αθήνα.
- Φίλη, Χρ. (2002). Η γεωμετρική θεώρηση της ύλης στον *Τίμαιο*, *Φιλοσοφία*, σσ. 71 – 80, *ιδιαιτ.* 71.
- Albinos (1945). *Epitomé*, ed. P. Louis, Les Belles Lettres, Paris.
- Alcinoos (1990). *Enseignement des doctrines de Platon*, ed. Whittaker & P. Louis, Les Belles Lettres.
- Archer – Hind (1888, 1988). *The Timaeus of Plato*, Ayer Company, Salem.
- Balashov, Υ. (1994). *Should Platos' Line Be Divided in the Mean and Ex-*

- treme Ratio? *Ancient Philosophy*, 14 σσ. 283 -295.
- Cantor, G. (1892). *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, vol. II.
- Cherniss, H. (1976). *Plutarch's moralia in seventeen volumes*, XIII, Cambridge University Press.
- Cornford, F. (1956), *Mathematics and Dialectic in the Republic VI-VII*, R.Allen, *Studies in Plato's Metaphysics*, London, Routledge & Kegan, , pp. 61 - 95)
- Diels, H. (1895). *Simplicii*, In *Aristotelis physicorum commentaria. Commentaria in Aristotelem Graeca X*, Academiae litterarum regiae borussicae, Berolini.
- Diels, H., Kranz, W. (2005, 2007). *Οι προσωκρατικοί. Οι μαρτυρίες και τα αποσπάσματα. Απόδοση στα νέα ελληνικά Β. Κύρκος, τόμοι Α και Β, εκδόσεις Παπαδόπουλου, Αθήνα.*
- Euclidis (1973). *Elementa* ed. I. L. Heiberg & E. Stamatis. Teubner, Leipzig.
- Festugière, A. J. (1970). *Proclus, Commentaire sur la République. Tome II*, Vrin, Paris.
- Gaiser, K. (1962). *Platons ungeschriebene Lehre*, Klett Verlag.
- Galilei, G. *Opera Omnia Il Saggiatore*, vol. IV, cp. 17). *Η μετάφραση του παραδέματος ελήφθη από την Χρ. Φίλη, Η γεωμετρική δεώρηση της ύλης στον Τίμαιο, Φιλοσοφία, Επετηρίς του Κέντρου ερεύνης της ελληνικής φιλοσοφίας, 2002, Αθήνα, σ. 71.*
- (1623). *Opera Omnia vol. IV, σ. 17 Il Saggiatore.*
- Heath, Th. (1921). *A History of Greek Mathematics*, vol. I, At the Clarendon Press, Oxford.
- (1931). *Manual of Greek Mathematics*, At the Clarendon Press, Oxford.
- (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, vol. II, Dover Publications, New York.
- Heisenberg, W. (2008). *Der Teil und das Ganze. Gespräche im Umkreis der Atomphysik*, Piper.
- Herz - Fischler, (1988). *A Mathematical History of the Golden Number*. Dover Publications. N. York.
- Hultsch, Fr. (1878). *Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt*, vol. II
- Iamblichus (1922), *Theologoumena arithmeticae*, ed. V. de Falco, Lipsiae, Teubner.
- Kepler, J. (1982). *Mysterium Cosmographicum* , trans. by A. M. Duncan, Abaris Books, New York.
- Koumakis, G. (2000). *Plato on Dialectic and Democracy, Δωδώνη, τόμ. ΚΘ,*

Μέρος τρίτο, 23-59.

— (2004). Plato's so-called "unwritten doctrines" Conceptions of Philosophy Ancient and Modern. ed. by K. Boudouris, Athens, pp. 192 – 215.

— (2010 – 11). In Search of the Dialectic on the Divided Line (Plato, *Republic* 509d), *Πλάτων*, 57.

Lassere, Fr. (1964), *The Birth of Mathematics in the Age of Plato*, London.

Livio M. (2005). Ο χρυσός λόγος, Η ιστορία του Φ, του εκπληκτικότερου αριθμού, μετάφρ. Μ. Σταυροπούλου, εκδόσεις Ενάλιος, Αθήνα.

Lloyd, D. (2006). Symmetry and Asymmetry in the Construction of "Elements" in the *Timaeus*, *The Classical Quarterly*, 56,459-474.

Martin, Th. (1841, 1976). *Études sur le Timée de Platon*, Arno Press.

Nicomachus Geraseni Pythagorei(1866). *Introductionis arithmeticae, libri II*. ed. R. Hoche, Teubner.

Philoponus, I. (1897). In *Aristotelis de anima libros commentaria. Commentaria in Aristotelum Graeca*, vol. XV, ed. M. Hayduck, Reimer, Berolini.

Porphyre (1982). *Vie de Pythagore, Lettre à Marcella*, ed. É des Places, Les Belles Lettres, Paris.

Procli diadochi (1901). In *Platonis Rem Publicam commentaria*, ed. G. Kroll.

— (1904). In *Platonis Timaeus Commentaria*, ed. E. Diehl II, Lipsiae, Teubner.

— (1873, 1965). In *primum Euclidis elementorum commentaria*, Lipsiae, Teubner.

Stallbaum, G. (1863). *Platonis Timaeus et Critias. Platonis opera omnia*, vol. VIII, Gothae.

Timaeus Locrus (1972). *De natura mundi et animae*, ed. W. Marg, Leiden, E.J. Brill.

Westerink, L. G., Trouillard, J. (1990). *Prolégomènes à la philosophie de Platon*, Les Belles Lettres.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εισήγηση καταβάλλεται η προσπάθεια να αναδειχθεί η μαθηματική δομή του φυσικού κόσμου από τα πέντε στερεά σώματα, δηλαδή τη φωτιά, τον αέρα, το νερό τη γη και τον αιθέρα, τα οποία αντιστοιχούν στα πέντε κάλλιστα σχήματα, δηλαδή την πυραμίδα, το οκτάεδρο, το εικοσάεδρο, το εξάεδρο ή τον κύβο και το δωδεκάεδρο. Διερευνάται από ποια και πόσα πρώτα κάλλιστα τρίγωνα, δηλαδή ορθογώνια, συνίσταται κάθε ένα από τα παραπάνω σχήματα ή σώματα και πόσα είδη καλλίστων τριγώνων υπάρχουν κατά Πλάτωνα και γιατί χρησιμοποιείται το τρίγωνο ως στοιχείο του κόσμου. Μεγαλύτερο ενδιαφέρον αλλά και δυσκολίες παρουσιάζει το δωδεκάεδρο, το οποίο αντιστοιχεί στο πέμπτο σώμα, δηλαδή στον αιθέρα. Τίθεται τέλος το ερώτημα ποιο είναι το «πρώτο» κάλλιστο τρίγωνο, που χρησιμεύει ως στοιχείο του δωδεκαέδρου, δηλαδή του αιθέρα, και γιατί αυτός αναφέρεται για πρώτη φορά στον τελευταίο διάλογο του Πλάτωνα, που είναι η *Επινομίς*. Η δομή του κόσμου είναι μαθηματική, επειδή αυτός συντίθεται κατά τρόπο διαλεκτικό από τέσσερα κάλλιστα τρίγωνα ανά δύο κατά διάμετρον, δηλαδή αντιθετικά. Η παντελής διάλυση του κόσμου μπορεί να γίνει μόνον από τον δημιουργό πάλι κατά τον ίδιο τρόπο. Έτσι έχουμε τη σύνθεση και τη διαίρεση, που μαζί με την υπόθεση είναι συστατικό στοιχείο της διαλεκτικής. Η υπόθεση υπάρχει επίσης, επειδή η μαθηματική δομή του κόσμου δεν αναπτύσσεται ρητά και κατηγορηματικά, αλλά υποθετικά. Υποδέτεται δηλαδή ορισμένες αρχές, που αφορούν τα ορθογώνια τρίγωνα, για τις οποίες όμως δεν είναι βέβαιος.

ABSTRACT

In this paper we attempt to highlight the mathematical structure of the natural world from the five solid bodies, i.e. fire, air, water, earth and aether, which correspond to the five fairest shapes, the pyramid, the octahedron, the icosahedron, the hexahedron or cube and the dodecahedron. We investigate which and how many fairest triangles, i.e. right-angled triangles, each of the above shapes or bodies is comprised of, how many types of fairest triangle there are according to Plato, and why the triangle is used as an element of the cosmos. The greatest interest but also the greatest difficulties are presented by the dodecahedron, which corresponds to the fifth body, the aether. Finally, the question is posed, which is the “first” fairest triangle, used as an element of the dodecahedron, i.e. aether, and why aether is mentioned for the first time in Plato’s last dialogue, the *Epinomis*. The structure of the cosmos is mathematical, because the cosmos is constituted in a dialectical manner of four fairest triangles in pairs *by diameter*, i.e. antithetically. The total dissolution of the cosmos can only be achieved by the creator in the same way. Thus we have synthesis and diaeresis, which together with hypothesis are basic components of the dialectic. Hypothesis is also present, because the mathematical structure of the cosmos does not arise expressly and categorically, but hypothetically. Plato, in other words, hypothesises certain principles regarding right-angled triangles, but he is not certain about them.