



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
**ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ**
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΟΛΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΠΜΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση για προβλήματα
συγκομιδής ενέργειας με χρήση γενετικών αλγορίθμων**

Γεώργιος Μπεκρής

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Γεωργία Φουτσιτζή

Άρτα, Φεβρουάριος 2021



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
**ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ**
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ



ΣΧΟΛΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΠΜΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση για προβλήματα
συγκομιδής ενέργειας με χρήση γενετικών αλγορίθμων**

Γεώργιος Μπεκρής

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Γεωργία Φουτσιτζή

Άρτα, Φεβρουάριος 2021

**MULTI – OBJECTIVE OPTIMIZATION FOR ENERGY
HARVESTING PROBLEMS USING GENETIC
ALGORITHMS**

Εγκρίθηκε από τριμελή εξεταστική επιτροπή

Άρτα, 26 Φεβρουαρίου 2021

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

1. Επιβλέπουσα καθηγήτρια

Γεωργία Φουτσιτζή

Καθηγήτρια

2. Μέλος επιτροπής

Γκόγκος Χρήστος,

Αναπληρωτής Καθηγητής

3. Μέλος επιτροπής

Αντωνιάδης Νικόλαος

Καθηγητής

Ο/Η Διευθυντής/τρια του ΠΜΣ

Χρυσόστομος Στύλιος,

Καθηγητής

Υπογραφή

© Μπεκρής, Γεώργιος, 2020.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Δήλωση μη λογοκλοπής

Δηλώνω υπεύθυνα και γνωρίζοντας τις κυρώσεις του Ν. 2121/1993 περί Πνευματικής Ιδιοκτησίας, ότι η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία είναι εξ ολοκλήρου αποτέλεσμα δικής μου ερευνητικής εργασίας, δεν αποτελεί προϊόν αντιγραφής ούτε προέρχεται από ανάθεση σε τρίτους. Όλες οι πηγές που χρησιμοποιήθηκαν (κάθε είδους, μορφής και προέλευσης) για τη συγγραφή της περιλαμβάνονται στη βιβλιογραφία.

Επίθετο, Όνομα

Υπογραφή

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμότερες ευχαριστίες μου προς όλους όσους με ενθάρρυναν και με υποστήριξαν σε όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας μου. Νιώθω βαθύτατα ευγνώμων προς την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου, κυρία Γεωργία Φουτσιτζή για την πολύτιμη καθοδήγηση και υποστήριξη, τη συνεχή και αναλυτική ανατροφοδότηση, την υποδειγματική συνεργασία και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε σε όλα τα στάδια της προσπάθειάς μου. Επίσης, ευχαριστώ εκ βάθους τον κύριο Χρήστο Γκόκο για τις συμβουλές και παροτρύνσεις του, καθώς και για το χρόνο που μου διέθεσε και την ανεκτίμητη βοήθειά του. Νιώθω, τέλος, την υποχρέωση να ευχαριστήσω το τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών για τη πολύ σημαντική βοήθειά τους μέσω της παραχώρησης εξοπλισμού αναγκαίου για την ολοκλήρωση της εργασίας μου.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζεται η εφαρμογή γενετικών αλγορίθμων πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης για ένα πρόβλημα της συγκομιδής ενέργειας.

Η ενεργειακή τροφοδότηση μικρών συσκευών ή και αισθητήρων που πρέπει να λειτουργούν αυτόνομα για μεγάλο χρονικό διάστημα, είναι ένα πρόβλημα που στις μέρες μας έχει απασχολήσει πολύ. Υπάρχει με λίγα λόγια η ανάγκη να αποθηκεύεται και να παρέχεται επαρκής ενέργεια σε συστήματα και η ενέργεια αυτή να καταναλώνεται με τις λιγότερες απώλειες και με το μικρότερο δυνατό κόστος. Η συγκομιδή ενέργειας (Energy Harvesting) από το περιβάλλον είναι μια διαδικασία που εκμεταλλεύεται διάφορες πηγές ενέργειας προκειμένου να καλύψει τη συγκεκριμένη ανάγκη.

Στην παρούσα εργασία, αρχικά γίνεται μια εισαγωγή στην έννοια της βελτιστοποίησης και διατυπώνονται τρόποι επίλυσης πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης με τη χρήση του συνόλου βέλτιστων σημείων Pareto για προβλήματα της συγκομιδής ενέργειας.

Η διαδικασία βελτιστοποίησης βασίζεται στη χρήση γενετικών αλγορίθμων λόγω των δυνατοτήτων τους να εξετάζουν πλήθος δυνατών λύσεων και να καταλήγουν στη βέλτιστη σε σύντομο χρονικό διάστημα. Οι δυνατότητες της προτεινόμενης μεθόδου εξετάστηκαν σε δύο προβλήματα βελτιστοποίησης στην περίπτωση του άξονα πτέρυγας ενός μη επανδρωμένου αεροσκάφους (UAV) με ενσωματωμένα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά. Στόχος ήταν να βρεθεί η βέλτιστη γεωμετρική διαμόρφωση (μήκος και πάχος) των ενσωματωμένων πιεζοηλεκτρικών κεραμικών στρωμάτων που θα δώσουν τη μέγιστη ηλεκτρική ισχύ εξόδου και ταυτόχρονα θα ελαχιστοποιούν τη μάζα των πιεζοηλεκτρικών στρωμάτων.

Συνεπώς, εξετάζεται η εφαρμογή ενός σύγχρονου γενετικού αλγορίθμου πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης (Non Dominated Sorting Genetic Algorithm - II ή NSGA-II) όπου αναλύονται και σχολιάζονται οι πηγές έμπνευσής του καθώς και οι διαδικασίες που πραγματοποιούνται για τη προγραμματιστική του κωδικοποίηση. Επίσης, γίνεται φανερό η σημασία της χρήσης ελιτισμού για τη βελτίωση της μορφής του Pareto βέλτιστου μετώπου. Τέλος, γίνεται μελέτη κάποιων σημαντικών μετρικών ποιότητας (Hypervolume, Generational Distance Metric, Spacing, Spread κ.α.) που χρησιμοποιούνται για ανάλυση και σύγκριση μετώπων των μη-κυριαρχούμενων λύσεων.

Ελέγχθηκαν διαφορετικά σενάρια με την εισαγωγή παραμέτρων στις αντικειμενικές συναρτήσεις, στους τύπους περιορισμών και στους παράγοντες βαρύτητας. Η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων καθιστά το μοντέλο ικανό να παράγει σχεδόν βέλτιστες λύσεις για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Η ανάπτυξη του αλγορίθμου πραγματοποιήθηκε στο προγραμματιστικό περιβάλλον του Matlab. Τέλος, παρατίθενται πίνακες και γραφήματα που δείχνουν τα αποτελέσματα διάφορων μετρήσεων που έγιναν με την εφαρμογή του γενετικού αλγορίθμου για το εν λόγω πρόβλημα της συγκομιδής ενέργειας.

Abstract

The present dissertation discusses the multi-objective optimization for energy harvesting problems using genetic algorithms. Energy harvesting in small appliances or/ and sensors that have to operate autonomously for a long time is an issue of great concern nowadays. In short, there is great need to store and apply sufficient energy in systems and that energy has to be consumed with the least possible loss and least possible cost. Energy harvesting from the environment is a process that can take advantage of various sources of energy in order to cover for a specific need.

First, the concept of optimization is introduced as well as possible ways of resolving multi-objective optimization using the set of optimal solutions (Pareto front) for the energy harvesting problems.

The optimization process is based on the use of genetic algorithms, due to their potential to analyze a multitude of possible solutions and reach the optimal one, in a short time. The potential of the suggested method was examined for two optimization problems in the case of wing spar of an Unmanned Aerial Vehicle (UAV) with embedded piezoelectric ceramics. The aim was to find the optimal geometrical layout (length and thickness) of embedded piezoelectric ceramic layers which can give the max pick of electric power and the minimum mass of piezoelectric.

Therefore, the application of a modern multi-objective optimization genetic algorithm is examined (Non Dominated Sorting Genetic Algorithm - II $\dot{\eta}$ NSGA-II), its sources of inspiration are analyzed and commented on, as well as the processes that take place for its programming encoding. Moreover, the importance of elitism for optimization of the Pareto front becomes apparent. Finally, some important quality indicators are studied as means of analyzing and comparing fronts of non-dominating solutions. (Hypervolume, Generational Distance Metric, Spacing, Spread, etc.)

Various scenarios are examined by introducing parameters in objective functions, in constraint types and gravity factors. Outcome assessment qualifies the model as capable of producing almost optimal solutions to the specific problem.

The algorithm development took place in the Matlab computing environment. Finally, tables and graphemes presented of outcome of various measurements regarding the application of the genetic algorithm on energy harvesting.

Περιεχόμενα

1. Πολυκριτηριακή Βελτιστοποίηση	1
1.1 Εισαγωγή.....	1
1.2 Πρόβλημα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης.....	2
1.3 Οι αρχές της πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης.....	3
1.3.1 Οι έννοιες της μερικής διάταξης και της κυριαρχίας.....	3
1.3.2 Η έννοια των Pareto βέλτιστων λύσεων	4
1.3.3 Pareto βέλτιστες λύσεις.....	5
1.3.4 Απεικόνιση των Pareto βέλτιστων λύσεων.....	6
1.3.5 Η έννοια της καλύτερα συμβιβαστικής λύσης.....	8
1.4 Κλασικές τεχνικές πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης	9
1.4.1 Η μέθοδος των βαρών (Weighted method).....	10
1.4.2 Η μέθοδος προγραμματισμού στόχων (goal programming).....	11
1.4.3 Η μέθοδος των ε-περιορισμών.....	11
1.4.4 Η μέθοδος επίτευξης στόχων (goal attainment).....	12
1.4.5 Σχολιασμός των κλασικών τεχνικών βελτιστοποίησης.....	13
2. Εξελικτικοί Αλγόριθμοι.....	15
2.1 Εισαγωγή.....	15
2.2 Κατηγορίες εξελικτικών αλγορίθμων	15
2.3 Βασικοί σκοποί εξελικτικών αλγορίθμων.....	16
2.4 Γενετικοί Αλγόριθμοι.....	16
2.4.1 Βασικά συστατικά ενός γενετικού αλγορίθμου	17
2.4.1.1 Αρχικός Πληθυσμός - Κωδικοποίηση.....	18
2.4.1.2 Υπολογισμός Συνάρτησης Καταλληλότητας	21
2.4.1.3 Επιλογή γονέων	21
2.4.1.4 Διασταύρωση.....	24
2.4.1.5 Μετάλλαξη	26
2.4.1.6 Επανατοποθέτηση.....	27
2.4.2 Περιγραφή γενετικού αλγορίθμου	28
2.5 Εναλλακτικοί Αλγόριθμοι Εξελικτικού Υπολογισμού	32
3. Πολυκριτηριακή Βελτιστοποίηση με τη χρήση Εξελικτικών Αλγορίθμων	33
3.1 Εισαγωγή.....	33

3.2	Αλγόριθμοι πρώτης γενιάς	33
3.2.1	Ο διανυσματικός γενετικός αλγόριθμος (VEGA).....	33
3.3	Αλγόριθμοι δεύτερης γενιάς με σχήματα ταξινόμησης	34
3.3.1	Ο γενετικός αλγόριθμος πολλαπλών στόχων (MOGA).....	34
3.3.2	Ο γενετικός αλγόριθμος μη κυριαρχούμενης ταξινόμησης (NSGA)	36
3.3.3	Ο γενετικός αλγόριθμος με θύλακες Pareto (NPGA)	37
3.4	Αλγόριθμοι τρίτης γενιάς	38
3.4.1	Η έννοια του εκλεκτισμού	38
3.4.2	Ο εξελικτικός αλγόριθμος Pareto ισχύος (SPEA)	39
3.4.3	Η εξελικτική στρατηγική με αρχεία Pareto (PAES).....	40
3.4.4	Ο αλγόριθμος επιλογής Pareto λύσεων με βάση φακέλους (PESA)	41
3.4.5	Ο βελτιωμένος εξελικτικός αλγόριθμος Pareto ισχύος (SPEA-II)	42
3.4.6	Ο ταχύς και εκλεκτικός γενετικός αλγόριθμος μη κυριαρχούμενης ταξινόμησης (NSGA-II)	45
3.4.6.1	Εισαγωγή	45
3.4.6.2	Μείωση Πολυπλοκότητας	46
3.4.6.3	Απόσταση πυκνότητας (Crowding Distance).....	47
3.4.6.4	Περιγραφή κύριας ρουτίνας του αλγορίθμου	48
3.4.6.5	Παράδειγμα υλοποίησης του αλγορίθμου NSGA - II	49
3.4.6.6	Παράδειγμα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης με περιορισμούς στο προγραμματιστικό περιβάλλον matlab	54
4.	Συγκομιδή ενέργειας (Energy harvesting) σε μη επανδρωμένα αεροσκάφη (UAVs).....	61
4.1	Εισαγωγή.....	61
4.2	Μη επανδρωμένα αεροσκάφη (UAVs).....	61
4.3	Σύστημα Συγκομιδής Ενέργειας - Energy Harvesting	62
4.4	Πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο	64
4.5	Πιεζοηλεκτρικά υλικά	68
4.5.1	Πιεζοηλεκτρικοί Μονοκρύσταλλοι.....	68
4.5.2	Πιεζοκεραμικά	68
4.5.3	Πιεζοηλεκτρικά Πολυμερή	69
4.5.4	Πιεζοηλεκτρικά Πολυμερή σύνθετα.....	69
4.6	Τύποι Πιεζοηλεκτρικών διεγερτών	69
4.6.1	Πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες με μορφή δοκών κάμψης.....	71

5. Μοντέλο Προσομοίωσης Πιεζοηλεκτρικής Πλάκας για Προβλήματα Συγκομιδής Ενέργειας	74
5.1 Μαθηματικό Μοντέλο Σύνθετης Πιεζοηλεκτρικής Πλάκας.....	74
5.2 Μοντέλο Πεπερασμένων Στοιχείων.....	78
5.3 Μοντέλο Δίμορφης Πιεζοηλεκτρικής Πλάκας	82
5.4 Επίλυση στο Πεδίο Συχνοτήτων	83
5.5 Σχεδιασμός του άξονα πτέρυγας ενεργειακής συγκομιδής με ενσωματωμένα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά.....	84
6. Προβλήματα βελτιστοποίησης άξονα πτέρυγας UAV με ενσωματωμένα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά.....	87
6.1 Εισαγωγή.....	87
6.2 Πρόβλημα μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης άξονα πτέρυγας UAV με ενσωματωμένα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά	88
6.3 Πρόβλημα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης με τη χρήση γενετικών αλγορίθμων.....	97
6.3.1 Μετρικές ποιότητας (quality indicators) στην πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση.....	101
7. Συμπεράσματα – Μελλοντική Έρευνα.....	121
8. Βιβλιογραφία	123

Κατάλογος Εικόνων

Εικόνα 1.1: Καμπύλη αντιστάθμισης ως προς τη λήψη αποφάσεων για το πρόβλημα αγοράς ενός σπιτιού (Amouzgar, 2012).....	1
Εικόνα 1.2: Αναπαράσταση του χώρου μεταβλητών αποφάσεων και του αντίστοιχου χώρου κριτηρίων (Denysiuk, 2014).....	3
Εικόνα 1.3: Γεωμετρική απεικόνιση των δυνατών σχέσεων κυριαρχίας ως προς ένα τυχαίο σημείο B του χώρου αποτίμησης σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης δύο κριτηρίων (Zitzler, 1999).....	4
Εικόνα 1.4: Το μέτωπο Pareto σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης δύο κριτηρίων (Zitzler, 1999).....	5
Εικόνα 1.5: Τοπικό και Ολικό Pareto βέλτιστο σύνολο λύσεων (Zitzler, 1999).....	6
Εικόνα 1.6: Τρεις Pareto βέλτιστες λύσεις (A, C, E) και δύο μη βέλτιστες λύσεις (D,B) (Kalita)	7
Εικόνα 1.7: Στόχοι της πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης (Deb K. , 2001)	8
Εικόνα 1.8: Γραφική απεικόνιση μιας τυπικής συνάρτησης χρησιμότητας σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο κριτηρίων (Varian, 1999)	9
Εικόνα 1.9: Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου βαρών σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο συναρτήσεων, για την περίπτωση κυρτού μετώπου Pareto (Deb K. , 2001).....	10
Εικόνα 1.10: Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου βαρών σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο συναρτήσεων, για την περίπτωση μη κυρτού μετώπου Pareto (Deb K. , 2001).....	10
Εικόνα 1.11: Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου προγραμματισμού στόχων, για τρεις χαρακτηριστικές περιπτώσεις ορισμού του διανύσματος-στόχου.....	11
Εικόνα 1.12: Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου ε-περιορισμών σε πρόβλημα δύο συναρτήσεων (Deb K. , 2001).....	12
Εικόνα 1.13: Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου επίτευξης στόχων σε πρόβλημα δύο κριτηρίων (Coello Coello C. , 1999)	13
Εικόνα 1.14: Χαραριστικές περιπτώσεις σύγκλισης εξελικτικών αλγορίθμων πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης. Με παχιά κόκκινη γραμμή απεικονίζεται το πραγματικό μέτωπο Pareto.....	14
Εικόνα 2.1: Σχηματική απεικόνιση εξέλιξης πληθυσμού ενός ΕΑ.....	15
Εικόνα 2.2: Τυπικό Διάγραμμα Ροής Εξελικτικού Αλγορίθμου	17
Εικόνα 2.3: Σχηματική παράσταση γονότυπου ενός ατόμου	19
Εικόνα 2.4: Κωδικοποίηση δένδρου ενός χρωμοσώματος (Alkafaween, 2015)	20
Εικόνα 2.5: Επιλογή με τροχό ρουλέτας	22
Εικόνα 2.6: Επιλογή με διαγωνισμό (Razali & Geraghty, 2011)	23
Εικόνα 2.7: Αποστάσεις μεταξύ των δεικτών (Shyalika, 2009).....	24
Εικόνα 2.8: Σχηματική λειτουργία γενετικού αλγορίθμου (Βλαχάβας, Κεφαλάς, Βασιλειάδης, Ρεφανίδης, Κοκκοράς, & Σακελλαρίου, 2011)	29
Εικόνα 2.9: Ρουλέτα με βάρη	30
Εικόνα 3.1: Σχηματική παράσταση των διαδικασιών του διανυσματικού γενετικού αλγορίθμου, με θεώρηση m στοχικών συναρτήσεων, για πληθυσμό μεγέθους p (Coello Coello C. , 1999).....	34
Εικόνα 3.2: Παράδειγμα ορισμού του μέτρου κυριαρχίας (τάξη) των μελών ενός υποθετικού πληθυσμού σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο συναρτήσεων, με βάση την τυπική μέθοδο κυριαρχούμενης ταξινόμησης (αριστερά) και την μέθοδο MOGA (δεξιά) (Kalita).....	35
Εικόνα 3.3: Λογικό διάγραμμα ροής του αλγορίθμου NSGA (Srinivas & Deb, 1993).....	37
Εικόνα 3.4: Σχηματικό παράδειγμα της διαδικασίας επιλογής μεταξύ δύο υποψήφιων λύσεων A και B, με εφαρμογή της μεθόδου NPGA σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο συναρτήσεων. Με μπλε κύκλους απεικονίζονται τα μέλη του δείγματος αναφοράς. Επειδή προκύπτει ισοπαλία (τα A και B είναι μη	

κυριαρχούμενα ως προς το συγκεκριμένο δείγμα), επιλέγεται το σημείο A, που έχει το μικρότερο αριθμό συγκεντρωμένων ατόμων στον θύλακά του (Horn & Nafpliotis, 1993).....	38
Εικόνα 3.5: Παραδείγματα ορισμού της ισχύος των μελών ενός πληθυσμού (Zitzler, 1999).....	40
Εικόνα 3.6: Παράδειγμα εφαρμογής της διαδικασίας μείωσης του μεγέθους του εξωτερικού συνόλου σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης δύο συναρτήσεων (Zitzler, 1999).....	40
Εικόνα 3.7: Απεικόνιση της στρατηγικής συνωστισμού της μεθόδου PESA, σε ένα υποθετικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο συναρτήσεων. Οι διακεκομμένες χωρίζουν το πεδίο αποτίμησης σε υπερκιβώτια (που στην προκειμένη περίπτωση είναι τετράγωνα). Με σκούρο χρώμα απεικονίζονται τα μη κατώτερα μέλη του πληθυσμού, που ανήκουν στο εξωτερικό σύνολο (Corne, Knowles, & Oates, 2000).....	42
Εικόνα 3.8: Σύγκριση των μεθόδων υπολογισμού της καταλληλότητας των μελών ενός υποθετικού πληθυσμού σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο συναρτήσεων, με τις μεθόδους SPEA (αριστερά) και SPEA II (δεξιά). Με λευκό κύκλο απεικονίζονται τα μέλη του εξωτερικού συνόλου, δηλαδή οι μη κατώτερες λύσεις. Στο δεξί σχήμα, οι τιμές εντός παρένθεσης αντιστοιχούν στην ισχύ κάθε ατόμου, ήτοι τον αριθμό των μελών του πληθυσμού επί των οποίων κυριαρχεί (Zitzler, Laumanns, & Thiele, 2001).....	43
Εικόνα 3.9: Η απεικόνιση της μεθόδου περικοπής από τον πληθυσμό αρχείου. Στα αριστερά δεικνύεται ένα σύνολο μη επικυριαρχούμενων λύσεων ενώ δεξιά φαίνονται οι λύσεις οι οποίες απομακρύνθηκαν και με ποια σειρά από τον τελεστή περικοπής (Zitzler, Laumanns, & Thiele, 2001)	45
Εικόνα 3.10: Ψευδοκώδικας μείωσης της πολυπλοκότητας {fast-non-dominated-sort(P)} (Deb, Pratap, Agarwal, & Meyarivan, 2002).....	46
Εικόνα 3.11: Παράδειγμα ορισμού της απόστασης συνωστισμού στον δισδιάστατο χώρο (Deb, Pratap, Agarwal, & Meyarivan, 2002).....	47
Εικόνα 3.12: Ψευδοκώδικας υπολογισμού απόστασης συνωστισμού {crowding-distance-assignment(I)} (Deb, Pratap, Agarwal, & Meyarivan, 2002).....	47
Εικόνα 3.13: Γραφική αναπαράσταση της διαδικασίας του αλγορίθμου NSGA-II (Deb, Pratap, Agarwal, & Meyarivan, 2002)	48
Εικόνα 3.14: Ψευδοκώδικας κύριας ρουτίνας NSGA – II (Deb, Pratap, Agarwal, & Meyarivan, 2002).....	49
Εικόνα 3.15: Μέτωπα νέου πληθυσμού R_t (Deb K. , 2001).....	50
Εικόνα 3.16: Οριακές λύσεις(3,b) για την πρώτη αντικειμενική συνάρτηση (Deb K. , 2001).....	52
Εικόνα 3.17: Κυβοειδή των λύσεων (1, d) (Deb K. , 2001)	53
Εικόνα 3.18: Μέλη νέου πληθυσμού P_{t+1} (Deb K. , 2001)	53
Εικόνα 3.19: Απεικόνιση βέλτιστων λύσεων για το πρόβλημα SRN.....	58
Εικόνα 3.20: Απεικόνιση βέλτιστων λύσεων για το πρόβλημα BNH	58
Εικόνα 3.21: Απεικόνιση βέλτιστων λύσεων για το πρόβλημα TNK.....	59
Εικόνα 3.22: Απεικόνιση βέλτιστων λύσεων για το πρόβλημα CONSTR-EX	60
Εικόνα 3.23: Απεικόνιση βέλτιστων λύσεων για το πρόβλημα OSY.....	60
Εικόνα 4.1: Αρχιτεκτονικές συγκομιδής ενέργειας με και χωρίς δυνατότητα αποθήκευσης (Sudevalayam & Kulkarni, 2010).....	62
Εικόνα 4.2: Τυπική διάταξη ενός συστήματος συγκομιδής ενέργειας (Mishra, Unnikrishnan, Nayak, & Mohanty, 2018)	63
Εικόνα 4.3: Ευθύ και αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο (Mishra, Unnikrishnan, Nayak, & Mohanty, 2018).....	64
Εικόνα 4.4: Διακοπή των φορτίων σε ουδέτερο μόριο υπό εφαρμοσμένη μηχανική καταπόνηση. (α) το μόριο χωρίς την επίδραση εξωτερικής δύναμης, (β) Το μόριο πολώνεται λόγω εφαρμογής εφελκυστικής δύναμης, γ) Το μόριο πολώνεται λόγω εφαρμογής συμπιεστικής δύναμης (Mishra, Unnikrishnan, Nayak, & Mohanty, 2018)	65
Εικόνα 4.5: Διάταξη διπολικού σε a) μονοκρυσταλλικό και b) πολυκρυσταλλικό υλικό. c, d) Πόλωση πολυκρυσταλλικού υλικού παρουσία ηλεκτρικού πεδίου για την παραγωγή πιεζοηλεκτρικής ενέργειας. (Mishra, Unnikrishnan, Nayak, & Mohanty, 2018).....	66

Εικόνα 4.6: Σύστημα κατεύθυνσης τριών συντεταγμένων αξόνων σε πιεζοηλεκτρικά υλικά	67
Εικόνα 4.7: Διαφορετικές κλάσεις από πιεζοηλεκτρικά υλικά (Mishra, Unnikrishnan, Nayak, & Mohanty, 2018).....	68
Εικόνα 4.8: Δοκός κάμψης	70
Εικόνα 4.9: Κυκλικό Διάφραγμα α) Μπροστινή όψη β) Πλάγια όψη	70
Εικόνα 4.10: Τύπου Κύμβαλου (Covaci & Gontean, 2020).....	70
Εικόνα 4.11: Τύπου αυτοκόλλητου	70
Εικόνα 4.12: Εγκάρσια παραμορφωτική συμπεριφορά των PZT κεραμικών. Από αριστερά: κατάσταση πόλωσης, ηλεκτρικό πεδίο παράλληλα ευθυγραμμισμένο στη παραμένουσα πόλωση (συστολή) και ηλεκτρικό πεδίο αντιπαράλληλα ευθυγραμμισμένο στη παραμένουσα πόλωση (διαστολή) (Zhou, 2003) ..	71
Εικόνα 4.13 Αλληλουχία στρωμάτων σε μονόμορφη δομή	72
Εικόνα 4.14: Συμπεριφορά μονόμορφης δομής που υπόκειται σε ηλεκτρικό πεδίο	72
Εικόνα 4.15: Συμπεριφορά δίμορφης δομής, που υπόκειται σε ηλεκτρικό πεδίο. Επάνω φαίνεται η παράλληλη δίμορφη δομή και κάτω η σειριακή δίμορφη δομή	73
Εικόνα 4.16: Δομή μονόμορφης δοκού κάμψης πολυστρωματικού τύπου	73
Εικόνα 5.1: Σύνθετη Πολύστρωτη Πλάκα με Πιεζοηλεκτρικές Στρώσεις	74
Εικόνα 5.2: Διαμερισμός πλάκας σε πεπερασμένα στοιχεία	78
Εικόνα 5.3: Άξονας πτέρυγας της γεννήτριας με ενσωματωμένα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά (σύνδεση σειράς) (DeMarqui, Erturk, & Inman, 2009).....	85
Εικόνα 6.1: Διάγραμμα με τα βήματα υλοποίησης των προβλημάτων βελτιστοποίησης	87
Εικόνα 6.2: Καμπύλη περιορισμού $L_{star} = 0,027225/H_{star}$ (DeMarqui, Erturk, & Inman, 2009).....	89
Εικόνα 6.3: Μεταβολή οριακών λύσεων της ηλεκτρικής ισχύος (power peak) για το πρόβλημα μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης.....	91
Εικόνα 6.4: Μεταβολή οριακών λύσεων της αντιστάσεως R για το πρόβλημα μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης.....	92
Εικόνα 6.5: Τιμές της αντίστασης R στις μέγιστες τιμές ισχύος εξόδου για μια σειρά αδιάστατου μήκους L_{star}	92
Εικόνα 6.6: Ισχύς εξόδου (μέγιστες τιμές) έναντι αδιάστατου πάχους για σειρά αδιάστατου μήκους L_{star} ..	92
Εικόνα 6.7: Ισχύς εξόδου (μέγιστες τιμές) έναντι αδιάστατου μήκους για μια σειρά αδιάστατου.....	93
Εικόνα 6.8: Τιμές της αντίστασης R στις μέγιστες.....	93
Εικόνα 6.9: Απεικόνιση των μέγιστων τιμών της ηλεκτρικής ισχύος στον χώρο	93
Εικόνα 6.10: Απεικόνιση των τιμών της αντίστασης R στον χώρο.....	93
Εικόνα 6.11: Μεταβολή της ηλεκτρικής ισχύος (power peak) για διάφορες τιμές της αντιστάσεως R, του αδιάστατου πάχους H_{star} και για σταθερό αδιάστατο μήκος $L_{star} = 0.1$	94
Εικόνα 6.12 : Μεταβολή της ηλεκτρικής ισχύος (power peak) για διάφορες τιμές της αντιστάσεως R, του αδιάστατου πάχους H_{star} και για σταθερό αδιάστατο μήκος $L_{star} = 0.15$	94
Εικόνα 6.13: Μεταβολή της ηλεκτρικής ισχύος (power peak) για διάφορες τιμές της αντιστάσεως R, του αδιάστατου πάχους H_{star} και για σταθερό αδιάστατο μήκος $L_{star} = 0.2$	95
Εικόνα 6.14: Μεταβολή της ηλεκτρικής ισχύος (power peak) για διάφορες τιμές της αντιστάσεως R, του αδιάστατου πάχους H_{star} και για σταθερό αδιάστατο μήκος $L_{star} = 0.175$	95
Εικόνα 6.15: Μεταβολή της ηλεκτρικής ισχύος (power peak) για διάφορες τιμές της αντιστάσεως R, του αδιάστατου πάχους H_{star} και για σταθερό αδιάστατο μήκος $L_{star} = 0.225$	95
Εικόνα 6.16: Μεταβολή της ηλεκτρικής ισχύος (power peak) για διάφορες τιμές της αντιστάσεως R, του αδιάστατου πάχους H_{star} και για σταθερό αδιάστατο μήκος $L_{star} = 0.25$	95

Εικόνα 6.17: Μεταβολή της ηλεκτρικής ισχύος (power peak) για διάφορες τιμές της αντιστάσεως R , του αδιάστατου πάχους H_{star} και για σταθερό αδιάστατο μήκος $L_{star} = 0.275$	96
Εικόνα 6.18: Μεταβολή της ηλεκτρικής ισχύος (power peak) για διάφορες τιμές της αντιστάσεως R , του αδιάστατου πάχους H_{star} και για σταθερό αδιάστατο μήκος $L_{star} = 0.3$	96
Εικόνα 6.19: Μεταβολή της (α) συχνότητας συντονισμού βραχυκυκλώματος και της (β) μηχανικής αναλογίας απόσβεσης με αδιάστατο μήκος και πάχος των πιεζοηλεκτρικών κεραμικών στρωμάτων (για τον βασικό τρόπο δόνησης) (DeMarqui, Erturk, & Inman, 2009).....	97
Εικόνα 6.20: Βέλτιστες λύσεις για μέγεθος πληθυσμού: 50 – αριθμό γενεών: 50.....	100
Εικόνα 6.21: Βέλτιστες λύσεις για μέγεθος πληθυσμού: 100 – αριθμό γενεών: 50.....	100
Εικόνα 6.22: Βέλτιστες λύσεις για μέγεθος πληθυσμού: 150 – αριθμό γενεών: 50.....	101
Εικόνα 6.23: Παράδειγμα υπολογισμού του ΔY σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης με δύο συναρτήσεις-στόχους, για ένα μέτωπο μη κυριαρχούμενων λύσεων με τρία σημεία.....	102
Εικόνα 6.24: Η σχετική τιμή της μετρικής του υπερόγκου εξαρτάται από το επιλεγμένο σημείο αναφοράς r ή r' . Στην κορυφή εμφανίζονται δύο μη κυριαρχούμενα σύνολα A και B , με $HV(A, r) > HV(B, r)$. Στο κάτω μέρος, $HV(B, r') > HV(A, r')$ (Audet, Bignon, Cartier, Le Digabel, & Salomon, 2018).....	103
Εικόνα 6.25: Μεταβολή του δείκτη υπερόγκου για μέγεθος πληθυσμού 100 (δεξιά).....	104
Εικόνα 6.26: Μεταβολή του δείκτη υπερόγκου για μέγεθος πληθυσμού 50 (αριστερά).....	104
Εικόνα 6.27: Σύγκριση μέσου όρου και μέγιστης τιμής του δείκτη υπερόγκου για τρία μεγέθη πληθυσμού (50-100-150).....	104
Εικόνα 6.28: Μεταβολή του δείκτη υπερόγκου για μέγεθος πληθυσμού 150.....	104
Εικόνα 6.29: Απεικόνιση της μετρικής GD στο διδιάστατο χώρο.....	105
Εικόνα 6.30: Μεταβολή του δείκτη GD για μέγεθος πληθυσμού 100.....	106
Εικόνα 6.31: Μεταβολή του δείκτη GD για μέγεθος πληθυσμού 50.....	106
Εικόνα 6.32: Σύγκριση μέσου όρου και μέγιστης τιμής του δείκτη GD για τρία μεγέθη πληθυσμού (50-100-150).....	106
Εικόνα 6.33: Μεταβολή του δείκτη GD για μέγεθος πληθυσμού 150.....	106
Εικόνα 6.34: Παράδειγμα απεικόνισης των δεικτών GD και IGD στο διδιάστατο χώρο (Garcia & Trinh, 2019).....	107
Εικόνα 6.35: Μεταβολή του δείκτη IGD για μέγεθος πληθυσμού 100.....	108
Εικόνα 6.36: Μεταβολή του δείκτη IGD για μέγεθος πληθυσμού 50.....	108
Εικόνα 6.37: Σύγκριση μέσου όρου και μέγιστης τιμής του δείκτη IGD για τρία μεγέθη πληθυσμού (50-100-150).....	108
Εικόνα 6.38: Μεταβολή του δείκτη IGD για μέγεθος πληθυσμού 150.....	108
Εικόνα 6.39: Μεταβολή του δείκτη $\Delta\rho$ για μέγεθος πληθυσμού 100.....	109
Εικόνα 6.40: Μεταβολή του δείκτη $\Delta\rho$ για μέγεθος πληθυσμού 50.....	109
Εικόνα 6.41: Μεταβολή του δείκτη $\Delta\rho$ για μέγεθος πληθυσμού 150.....	109
Εικόνα 6.42: Παράδειγμα απεικόνισης δείκτη ϵ -indicator στο διδιάστατο χώρο (Garcia & Trinh, 2019).....	110
Εικόνα 6.43: Μεταβολή του δείκτη ϵ για μέγεθος πληθυσμού 50.....	110
Εικόνα 6.44: Μεταβολή του δείκτη ϵ για μέγεθος πληθυσμού 100.....	110
Εικόνα 6.45: Μεταβολή του δείκτη ϵ για μέγεθος πληθυσμού 150.....	110
Εικόνα 6.46: Απεικόνιση της μετρικής Spacing στο διδιάστατο χώρο (Tharwat, Houssein, Ahmed, Hassanien, & Gabel, 2017).....	111
Εικόνα 6.47: Μεταβολή του δείκτη Spacing για μέγεθος πληθυσμού 100.....	112
Εικόνα 6.48: Μεταβολή του δείκτη Spacing για μέγεθος πληθυσμού 50.....	112

Εικόνα 6.49: Σύγκριση μέσου όρου και ελάχιστης τιμής του δείκτη Spacing για τρία μεγέθη πληθυσμού (50-100-150).....	112
Εικόνα 6.50: Μεταβολή του δείκτη Spacing για μέγεθος πληθυσμού 150	112
Εικόνα 6.51: Απεικόνιση της μετρικής Spread στο δισδιάστατο χώρο (Tharwat, Houssein, Ahmed, Hassaniien, & Gabel, 2017).....	113
Εικόνα 6.52: Μεταβολή του δείκτη Spread για μέγεθος πληθυσμού 50	113
Εικόνα 6.53: Μεταβολή του δείκτη Spread για μέγεθος πληθυσμού 100	113
Εικόνα 6.54: Μεταβολή του δείκτη Spread για μέγεθος πληθυσμού 150	114
Εικόνα 6.55: Σύγκριση μέσου όρου και μέγιστης τιμής του δείκτη Spread για τρία μεγέθη πληθυσμού (50-100-150)	114
Εικόνα 6.56: Box plot για τη μετρική ποιότητας Hypervolume	116
Εικόνα 6.57: Box plot για τη μετρική ποιότητας Generational Distance	116
Εικόνα 6.58: Box plot για τη μετρική ποιότητας Inverted Generational Distance	117
Εικόνα 6.59: Box plot για τη μετρική ποιότητας Spacing	117
Εικόνα 6.60: Box plot για τη μετρική ποιότητας Spread.....	118
Εικόνα 6.61: Μέσος όρος, διάμεσος και μέγιστη τιμή του δείκτη υπερόγκου για διάφορους τελεστές διασταύρωσης και μετάλλαξης.....	119
Εικόνα 6.62 - Εικόνα 6.63: Μέσος όρος, διάμεσος και ελάχιστη τιμή του GD-IGD για διάφορους τελεστές διασταύρωσης και μετάλλαξης.....	119
Εικόνα 6.64 - Εικόνα 6.65: Μέσος όρος, διάμεσος, τυπική απόκλιση και ελάχιστη τιμή του Spacing - Spread για διάφορους τελεστές διασταύρωσης και μετάλλαξης	120
Εικόνα 6.66 - Εικόνα 6.67: Ακραία βέλτιστη λύση (μέγιστη ισχύς – ελάχιστη μάζα) για διάφορους τελεστές διασταύρωσης και μετάλλαξης.....	120

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1.1: Πέντε λύσεις για το πρόβλημα επιλογής αεροπορικού ταξιδιού (Kalita)	7
Πίνακας 2.1: Δυαδική κωδικοποίηση χρωμοσωμάτων που αποτελούνται από τρεις μεταβλητές.....	18
Πίνακας 2.2: Κωδικοποίηση μετάθεσης δυο χρωμοσωμάτων (Alkafaween, 2015).....	20
Πίνακας 2.3: Κωδικοποίηση τιμών τριών χρωμοσωμάτων (Alkafaween, 2015)	20
Πίνακας 2.4: Παράδειγμα πιθανολογικής καθολικής δειγματοληψίας (Shyalika, 2009)	24
Πίνακας 2.5: Πληθυσμός ζευγαρώματος (Shyalika, 2009)	24
Πίνακας 2.6: Παράδειγμα εφαρμογής διασταύρωσης ενός και πολλαπλών σημείων	25
Πίνακας 2.7: Παράδειγμα εφαρμογής αριθμητικής διασταύρωσης.....	26
Πίνακας 2.8: Παράδειγμα εφαρμογής ομοιόμορφης διασταύρωσης	26
Πίνακας 2.9: Εφαρμογή του τελεστή μετάλλαξης (το γονίδιο που μεταλλάχθηκε δίνεται με κόκκινο χρώμα) για διάφορες κωδικοποιήσεις	27
Πίνακας 2.10: Αρχικοποίηση πληθυσμού	29
Πίνακας 2.11: Αξιολόγηση πληθυσμού.....	29
Πίνακας 2.12: Πιθανότητες επιλογές πληθυσμού	30
Πίνακας 2.13: Αποτελέσματα ρουλέτας γονικής επιλογής.....	30
Πίνακας 2.14: Αναπαραγωγή πληθυσμού	31
Πίνακας 2.15: Διασταύρωση πληθυσμού	31
Πίνακας 2.16: Μετάλλαξη πληθυσμού.....	31
Πίνακας 2.17: Νέος πληθυσμός.....	31
Πίνακας 3.1: Πληθυσμοί γονέων (parents) και απογόνων (offsprings) (Deb K. , 2001).....	50
Πίνακας 3.2: Ταξινόμηση λύσεων πρώτης αντικειμενικής συνάρτησης (Deb K. , 2001).....	51
Πίνακας 3.3: Ταξινόμηση λύσεων δεύτερης αντικειμενικής συνάρτησης (Deb K. , 2001)	52
Πίνακας 3.4: Συνάρτηση test_case.m.....	55
Πίνακας 3.5: Ορισμός εισόδων στον αλγόριθμο	56
Πίνακας 3.6: Μη κυριαρχούμενη ταξινόμηση στον αρχικό πληθυσμό	56
Πίνακας 3.7: Επιλογή γονέων – Αναπαραγωγή απογόνων	57
Πίνακας 3.8: Μη κυριαρχούμενη ταξινόμηση στον ενδιάμεσο πληθυσμό.....	57
Πίνακας 3.9: Αντικατάσταση πληθυσμού	57
Πίνακας 4.1: Πλεονεκτήματα – Μειονεκτήματα πιεζοηλεκτρικών διεγερτών.....	70
Πίνακας 5.1: Γεωμετρικές - υλικές ιδιότητες πτερυγίου αλουμινίου (DeMarqui, Erturk, & Inman, 2009)..	86
Πίνακας 5.2: Γεωμετρικές και υλικές ιδιότητες του PZT-5A (DeMarqui, Erturk, & Inman, 2009)	86
Πίνακας 6.1: Οριακές λύσεις για το πρόβλημα μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης	90
Πίνακας 6.2: Συνάρτηση multi_obj.m.....	98
Πίνακας 6.3: Συνάρτηση main_nsga2.m	99
Πίνακας 6.4: Τιμές των δεικτών για μέγεθος πληθυσμού 50 και αριθμό γενεών 50.....	114
Πίνακας 6.5: Τιμές των δεικτών για μέγεθος πληθυσμού 100 και αριθμό γενεών 50.....	114
Πίνακας 6.6: Τιμές των δεικτών για μέγεθος πληθυσμού 150 και αριθμό γενεών 50.....	115
Πίνακας 6.7: Τιμές των δεικτών για μέγεθος πληθυσμού 150 και αριθμό γενεών 100.....	115

Εισαγωγή

Το ερευνητικό ενδιαφέρον για τη μετατροπή της ενέργειας δόνησης του περιβάλλοντος σε χρησιμοποιήσιμη ηλεκτρική ενέργεια έχει αυξηθεί τα τελευταία χρόνια. Στόχος της έρευνας σχετικά με την ενεργειακή συγκομιδή είναι η παροχή ενέργειας για τα συστήματα αυτά με τη χρήση των κραδασμών που προέρχονται από το περιβάλλον τους.

Τα μη επανδρωμένα εναέρια οχήματα (UAVs) αποτελούν μοναδικά συστήματα εφαρμογής όπου η δυνατότητα μιας πρόσθετης πηγής ενέργειας είναι πολύ σημαντική. Μια πιθανή πηγή ενέργειας για τη φόρτιση των μπαταριών των UAV είναι η μηχανική ενέργεια δόνησης λόγω των ασταθών αεροδυναμικών φορτίων κατά τη διάρκεια της πτήσης. Οι πιεζοηλεκτρικές γεννήτριες μπορούν να συλλέξουν την ηλεκτρική ενέργεια από τις μηχανικές δονήσεις, με βάση το ευθύ πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο. Επομένως, σκοπός είναι να αντικατασταθεί κάποιο μέρος του αρχικού υλικού του άξονα από το πιεζοηλεκτρικό κεραμικό υλικό, ώστε να έχουμε τη μέγιστη δυνατή συλλογή ενέργειας. Δεδομένου ότι η πυκνότητα μάζας του πιεζοηλεκτρικού υλικού είναι σημαντικά μεγαλύτερη από εκείνη του αρχικού υλικού, η κρίσιμη παράμετρος στο πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι η ποσότητα μάζας που προστίθεται στον άξονα πτέρυγας.

Άρα, στην παρούσα εργασία μελετάται το πρόβλημα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης με τη χρήση του αλγορίθμου NSGA – II έτσι ώστε να βρεθεί η βέλτιστη γεωμετρική διαμόρφωση των ενσωματωμένων πιεζοηλεκτρικών κεραμικών στρωμάτων που θα δώσουν τη μέγιστη ηλεκτρική ισχύ εξόδου και την ελάχιστη μάζα των πιεζοηλεκτρικών στρωμάτων.

Η δομή της εργασίας οργανώνεται ως εξής:

Στο **1^ο Κεφάλαιο** γίνεται μια εισαγωγή στο πρόβλημα και στις αρχές της πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης και αναλύονται κάποιες κλασικές τεχνικές βελτιστοποίησης για τη δημιουργία του Pareto βέλτιστου συνόλου όπως η μέθοδος βαρών, η μέθοδος προγραμματισμού στόχων και η μέθοδος ϵ – περιορισμών.

Στο **2^ο Κεφάλαιο** γίνεται αναφορά στις κατηγορίες και στους βασικούς σκοπούς των εξελικτικών αλγορίθμων και περιγράφονται αναλυτικά τα βασικά συστατικά ενός γενετικού αλγορίθμου. Συγκεκριμένα, εξηγείται η διαδικασία επιλογής γονέων και απογόνων μέσα από τη διαδικασία της διασταύρωσης και της μετάλλαξης και αφού αρχικά πραγματοποιηθεί η κωδικοποίηση του αρχικού πληθυσμού.

Στο 3^ο Κεφάλαιο εξετάζονται διάφορες τεχνικές εξελικτικών αλγορίθμων στην περίπτωση της πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης, ενώ περιγράφεται αναλυτικά ο ταχύς και εκλεκτικός γενετικός αλγόριθμος μη κυριαρχούμενης ταξινόμησης (NSGA – II). Παρουσιάζεται ένα παράδειγμα υλοποίησης του αλγορίθμου NSGA – II και συγκεκριμένα εξηγείται βήμα-βήμα πως γίνεται η ταξινόμηση ενός πληθυσμού με τη χρήση του τελεστή επιλογής με αγώνα πυκνότητας. Επίσης, αναλύεται ένα παράδειγμα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης με περιορισμούς στο προγραμματιστικό περιβάλλον Matlab.

Το **4^ο Κεφάλαιο** δίνει έμφαση στη Συγκομιδή ενέργειας (Energy harvesting) σε μη επανδρωμένα αεροσκάφη (UAVs), στην αναλυτική περιγραφή του πιεζοηλεκτρικού φαινομένου και στην παρουσίαση διάφορων πιεζοηλεκτρικών υλικών και τύπων πιεζοηλεκτρικών διεγερτών.

Στο **5^ο Κεφάλαιο** αναλύεται αρχικά το γενικό μαθηματικό μοντέλο σύνθετης πιεζοηλεκτρικής πλάκας καθώς και το αντίστοιχο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων. Στη συνέχεια, το γενικό μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων εξειδικεύεται στην περίπτωση δίμορφης πιεζοηλεκτρικής πλάκας με παραδιακλαδωμένο κύκλωμα αντίστασης (shunt resistor circuit) για το πρόβλημα συγκομιδή ενέργειας.

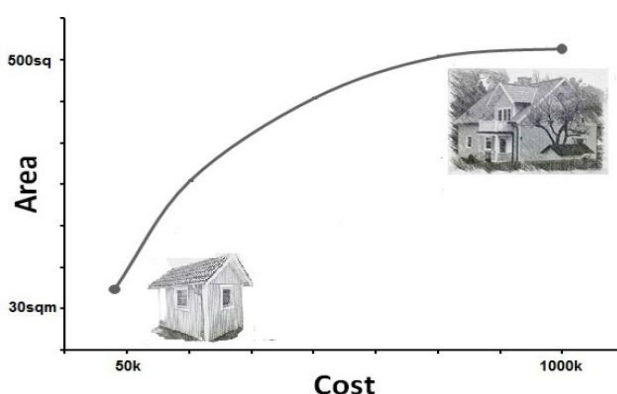
Τέλος, στο **6^ο Κεφάλαιο** παρουσιάζονται προβλήματα βελτιστοποίησης του άξονα πτέρυγας UAV με ενσωματωμένα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά. Γίνεται προσπάθεια εύρεσης της βέλτιστης γεωμετρικής διαμόρφωσης των ενσωματωμένων πιεζοηλεκτρικών κεραμικών στρωμάτων (μέγιστη ηλεκτρική ισχύς) τόσο για το πρόβλημα μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης όσο και για το πρόβλημα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης με τη χρήση του NSGA – II. Στο πρόβλημα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης εκτός από την παραμετροποίηση στην υλοποίηση του αλγορίθμου υπολογίζονται και κάποιες σημαντικές μετρικές ποιότητας (quality indicators) έτσι ώστε να ποσοτικοποιηθεί το πόσο καλύτερο ή χειρότερο είναι ένα μέτωπο μη – κυριαρχούμενων λύσεων έναντι ενός άλλου. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων και των συγκρίσεων από τη επιλογή διαφορετικών παραμέτρων συνοψίζονται σε γραφήματα και πίνακες.

1. Πολυκριτηριακή Βελτιστοποίηση

1.1 Εισαγωγή

Σε εφαρμογές του πραγματικού κόσμου, τα περισσότερα από τα προβλήματα βελτιστοποίησης περιλαμβάνουν περισσότερους από έναν στόχο που πρέπει να βελτιστοποιηθούν. Για παράδειγμα, ο στόχος στα περισσότερα προβλήματα μηχανικής είναι να μεγιστοποιηθεί η απόδοση, να ελαχιστοποιηθεί το κόστος, να μεγιστοποιηθεί η αξιοπιστία κλπ. Στην περίπτωση αυτή, μια ακραία λύση δεν θα ικανοποιούσε και όλες τις αντικειμενικές συναρτήσεις και η βέλτιστη λύση ενός στόχου δεν θα είναι απαραίτητα η καλύτερη λύση για τους άλλους στόχους. Ως εκ τούτου, διαφορετικές λύσεις θα δημιουργήσουν συμβιβασμούς μεταξύ διαφορετικών στόχων και απαιτείται ένα σύνολο λύσεων για την επίτευξη όλων των στόχων.

Προβλήματα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης εμφανίζονται σε διάφορους τομείς (παράγωγή – σχεδιασμός διαδικασιών, σχεδιασμός αεροσκαφών, πετρελαϊκές βιομηχανίες, σχεδιασμός αυτοκινήτων κ.α.) ή γενικά όπου είναι αναγκαία η λήψη καταλληλότερης απόφασης για την εξισορρόπηση όλων των παραμέτρων μεταξύ δύο ή περισσότερων αντικρουόμενων στόχων. Στο παρακάτω σχήμα η καμπύλη αντιστάθμισης αποκαλύπτει ότι λαμβάνοντας υπόψη την ακραία βέλτιστη τιμή ενός στόχου απαιτείται συμβιβασμός σε άλλους στόχους (εμβαδόν κατοικίας) (Amouzgar, 2012). Ωστόσο, υπάρχει ένας αριθμός λύσεων αντιστάθμισης μεταξύ των δύο ακραίων βέλτιστων, όπου είναι καλύτερος σε σχέση με έναν στόχο.



Εικόνα 1.1: Καμπύλη αντιστάθμισης ως προς τη λήψη αποφάσεων για το πρόβλημα αγοράς ενός σπιτιού (Amouzgar, 2012)

Η εισαγωγή επιπλέον αντικειμενικών συναρτήσεων σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης (πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση) και η απαίτηση της ταυτόχρονης βελτιστοποίησης

έκαστης, έχει σαν αποτέλεσμα τόσο την αύξηση του πλήθους των ενδεχόμενων λύσεων (η βέλτιστη λύση δεν είναι μία αλλά πολλές) όσο και τη δυσχέρεια του ακριβούς προσδιορισμού του χώρου των λύσεων. Οι λύσεις αυτές είναι βέλτιστες υπό την έννοια ότι δεν υπάρχουν άλλες λύσεις στο χώρο των λύσεων που να είναι καλύτερες από αυτές, δηλαδή δεν μπορεί να υπάρξει ένα καθολικό κριτήριο που να ορίσει μία από αυτές ως καλύτερη.

1.2 Πρόβλημα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης

Ένα πρόβλημα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης (ΠΠΚΒ) αποτελείται από ένα σύνολο αντικειμενικών συναρτήσεων προς μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση, ανάλογα με τη φύση του προβλήματος. Όπως και στην περίπτωση των προβλημάτων βελτιστοποίησης ενός κριτηρίου, έτσι και στην περίπτωση των πολλών κριτηρίων, υφίστανται διάφοροι περιορισμοί όπου κάθε εφικτή λύση πρέπει να πληροί.

Παρακάτω παρατίθενται η γενική μορφή ενός προβλήματος πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης (ΠΠΚΒ) (Deb K. , 2001):

$$\begin{aligned}
 & \text{Min/max } f_m(x), \quad m=1, 2, \dots, M \\
 & \text{Subject to } g_j(x) \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, J \\
 & \quad \quad \quad h_k(x) = 0, \quad k=1, 2, \dots, K \\
 & \quad \quad \quad \text{(lower bound) } x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)} \text{ (upper bound), } i=1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Μια λύση x εκφράζεται από ένα διάνυσμα με n μεταβλητές αποφάσεων: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

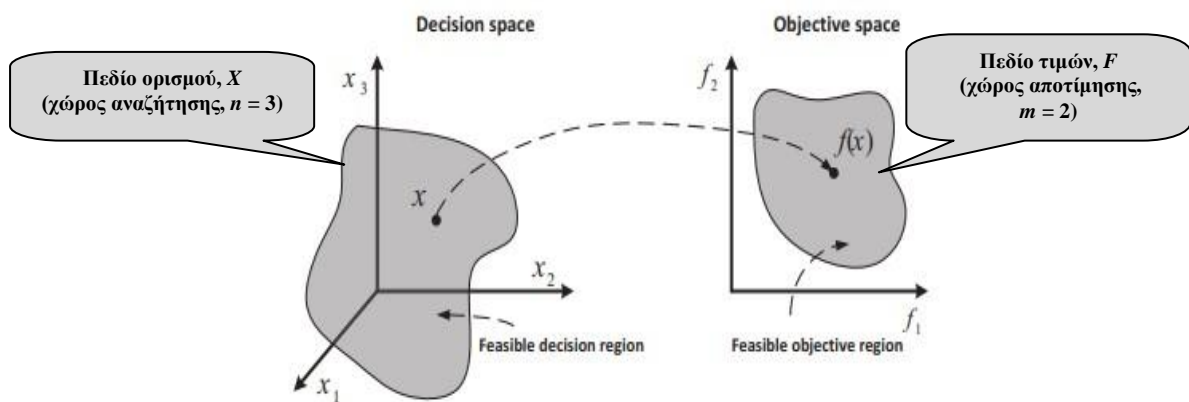
Το τελευταίο σύνολο περιορισμών καλείται όριο των μεταβλητών και περιορίζει την κάθε μεταβλητή απόφασης να πάρει τιμές μέσα στο διάστημα του κατώτατου ($x_i^{(L)}$) και ανώτατου ορίου ($x_i^{(U)}$). Τα συγκεκριμένα όρια ορίζουν τον χώρο των μεταβλητών αποφάσεων D .

Το πρόβλημα περιέχει J περιορισμούς ανισότητας και K περιορισμούς ισότητας. Οι συναρτήσεις $g_j(x)$ και $h_k(x)$ ονομάζονται συναρτήσεις ανισότητας και ισότητας αντιστοίχως. Μια λύση x η οποία δεν ικανοποιεί τους $(J+K)$ περιορισμούς καθώς επίσης και όλα τα όρια μεταβλητών που έχουν τεθεί καλείται ανέφικτη λύση ενώ όσες λύσεις υπόκεινται σε όλους τους παραπάνω περιορισμούς ταυτόχρονα ονομάζονται *εφικτές λύσεις*. Από τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό πως ολόκληρος ο χώρος των μεταβλητών

αποφάσεων D δεν περιλαμβάνει μόνο τις εφικτές αλλά και τις ανέφικτες λύσεις. Ο χώρος των εφικτών λύσεων αποκαλείται εφικτή περιοχή S .

Μια από τις μεγαλύτερες διαφορές μεταξύ των προβλημάτων ενός κριτηρίου και των πολυκριτηριακών είναι πως στα πολυκριτηριακά προβλήματα, οι αντικειμενικές συναρτήσεις δημιουργούν έναν πολυδιάστατο χώρο. Ο σύνθετος αυτός χώρος ονομάζεται *χώρος κριτηρίων*, Z . Για κάθε λύση x στον χώρο των μεταβλητών αποφάσεων υπάρχει ένα σημείο z στον χώρο κριτηρίων που ορίζεται ως: $f(x) = z = (z_1, z_2, \dots, z_m)^T$.

Στην παρακάτω εικόνα αποτυπώνεται η χαρτογράφηση των δύο χώρων που περιγράφηκαν παραπάνω.



Εικόνα 1.2: Αναπαράσταση του χώρου μεταβλητών αποφάσεων και του αντίστοιχου χώρου κριτηρίων (Denysiuk, 2014)

1.3 Οι αρχές της πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης

Στην περίπτωση πολλών στόχων που αλληλοσυγκρούονται δεν είναι εφικτή μια και μόνο βέλτιστη λύση που βελτιστοποιεί ταυτόχρονα όλους τους στόχους, αλλά ένα σύνολο βέλτιστων λύσεων με τις τιμές των στόχων να ποικίλουν.

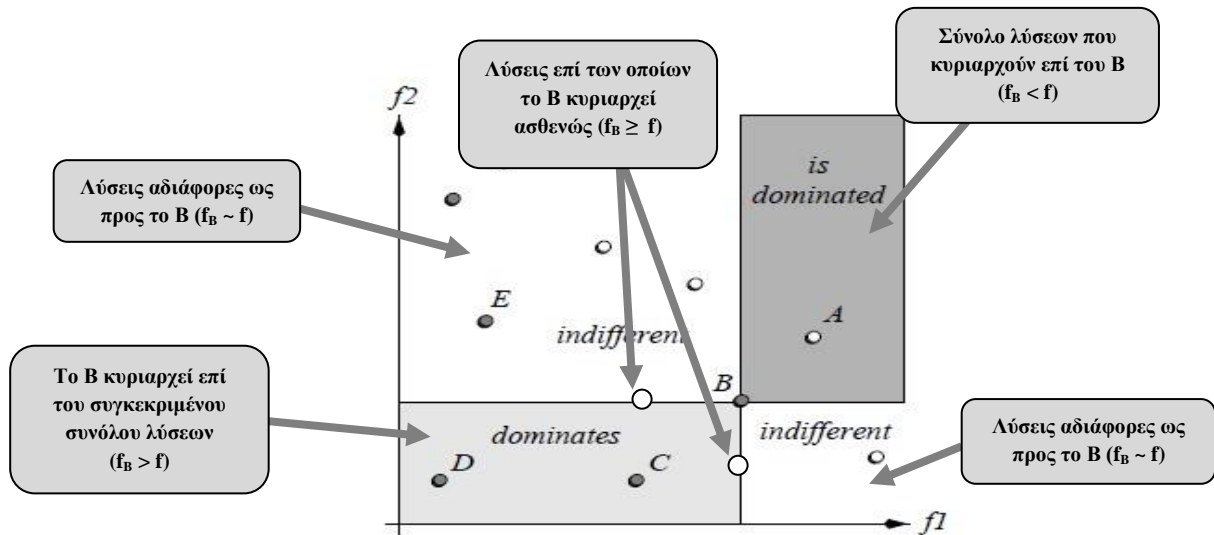
1.3.1 Οι έννοιες της μερικής διάταξης και της κυριαρχίας

Στα πολυκριτηριακά προβλήματα όπου το πεδίο τιμών είναι διανυσματικό ο Pareto (1896) εισήγαγε την έννοια της μερικής διάταξης (partial ordering) ως εξής:

$$\begin{aligned}
 f &= g, \text{ αν } f_i = g_i, \forall i \\
 f &< g, \text{ αν } f_i < g_i, \forall i \\
 f &\leq g, \text{ αν } f_i \leq g_i, \forall i \text{ και } f_i = g_i \text{ για ένα τουλάχιστον } i
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

Ας θεωρήσουμε ένα πολυκριτηριακό πρόβλημα μεγιστοποίησης με δύο εφικτές λύσεις x_1 και x_2 .

- Η 1^η λύση κυριαρχεί ισχυρώς της 2^{ης} λύσης εάν $f(x_1) > f(x_2)$,
- Η 1^η λύση κυριαρχεί ασθενώς της 2^{ης} λύσης εάν $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- Οι λύσεις θεωρούνται αδιάφορες (indifferent) μεταξύ τους εάν $f_i(x_1) \geq f_i(x_2)$ για ορισμένα κριτήρια και $f_i(x_1) < f_i(x_2)$ για τα υπόλοιπα κριτήρια ($f(x_1) \sim f(x_2)$).



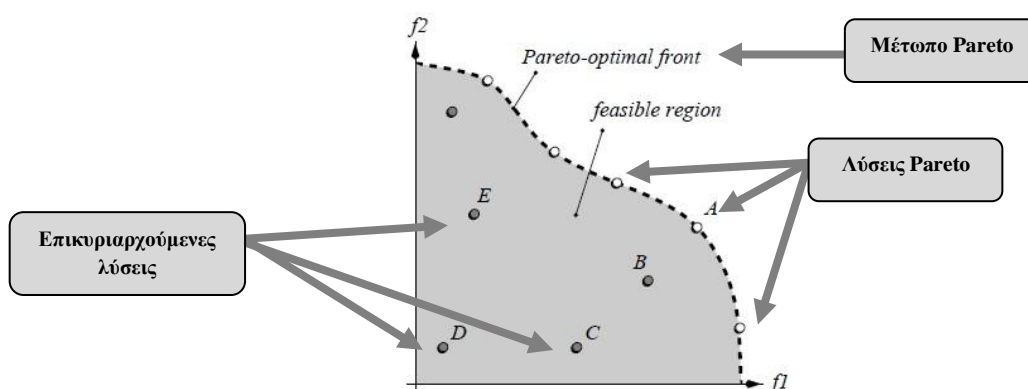
Εικόνα 1.3: Γεωμετρική απεικόνιση των δυνατών σχέσεων κυριαρχίας ως προς ένα τυχαίο σημείο B του χώρου αποτίμησης σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης δύο κριτηρίων (Zitzler, 1999)

1.3.2 Η έννοια των Pareto βέλτιστων λύσεων

Στα προβλήματα βελτιστοποίησης, η βέλτιστη λύση είναι αυτή η οποία έχει τις βέλτιστες τιμές για όλα τα κριτήρια που λαμβάνονται υπόψη, ταυτόχρονα. Επομένως, για ένα πολυκριτηριακό πρόβλημα βελτιστοποίησης ο στόχος είναι να βρεθεί η λύση x^* όπου $x^* \in S$ και η περιοχή S αποτελεί την περιοχή των εφικτών λύσεων και $f_i(x^*) \geq f_i(x)$ για όλα τα X και για όλα τα $x \in S$. Η μόνη περίπτωση να υπάρξει μονάχα μια βέλτιστη λύση σε πολυκριτηριακό πρόβλημα είναι όταν τα κριτήρια δεν είναι αντικρουόμενα. Αντίθετα, στην περίπτωση αντικρουόμενων κριτηρίων έχουμε την ύπαρξη ενός συνόλου από βέλτιστες λύσεις οι οποίες αποτελούν τις μη επικυριαρχούμενες λύσεις.

Ένα σύνολο τέτοιων λύσεων όπου δεν είναι φανερή η έννοια της βέλτιστης λύσης παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα και καλείται Pareto βέλτιστο σύνολο (Pareto optimal front) και τα αντίστοιχα αντικειμενικά διανύσματα διαμορφώνουν το Pareto βέλτιστο μέτωπο ή επιφάνεια (Pareto optimal front or surface) (Deb K. , 2001).

Μια λύση είναι Pareto βέλτιστη λύση όταν αύξηση/μείωση σε οποιοδήποτε από τα κριτήριά της συνεπάγεται ταυτόχρονη αύξηση/μείωση κάποιου ή κάποιων από τα υπόλοιπα κριτήρια (Keeney, 1983).



Εικόνα 1.4: Το μέτωπο Pareto σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης δύο κριτηρίων (Zitzler, 1999)

Επομένως, για το πρόβλημα δύο κριτηρίων που απεικονίζεται στο παραπάνω σχήμα κάθε λύση x' στο μέτωπο Pareto είναι τέτοια που δεν υπάρχει καμία άλλη εφικτή λύση έτσι ώστε $f_1(x) \geq f_1(x')$ και $f_2(x) \geq f_2(x')$. Για κάθε πολυκριτηριακό πρόβλημα, η λύση x' αποτελεί εφικτή λύση αν και μόνο αν δεν υπάρχει κανένα $x \in S$ έτσι ώστε:

- $f_i(x) \geq f_i(x')$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$
- $f_j(x) > f_j(x')$ για τουλάχιστον ένα j

Αριθμητικό παράδειγμα: Έστω ένα πρόβλημα ταυτόχρονης ελαχιστοποίησης τριών κριτηρίων, με εφικτές επιλογές $f_1 = (0, 4, 10)$, $f_2 = (3, 8, 8)$, $f_3 = (5, 6, 12)$, $f_4 = (1, 7, 11)$, $f_5 = (7, 3, 6)$. Τα σημεία f_1 , f_2 και f_5 είναι Pareto βέλτιστα, ενώ τα f_3 και f_4 είναι κυριαρχούμενα, δεδομένου ότι $f_1 < f_3$ και $f_1 < f_4$.

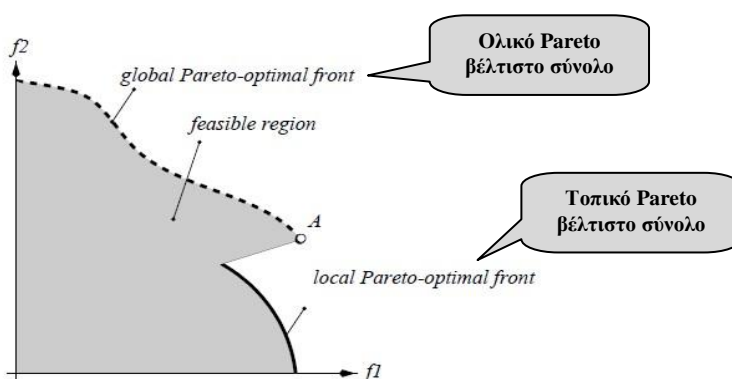
1.3.3 Pareto βέλτιστες λύσεις

Για ένα πεπερασμένο σύνολο λύσεων, μπορούμε να εφαρμόσουμε όλες τις πιθανές συγκρίσεις μεταξύ τους για την εύρεση των επικυριαρχούμενων και μη επικυριαρχούμενων λύσεων. Στο τέλος, θα υπάρχει ένα σύνολο λύσεων όπου καμία, ανά ζεύγη, δε θα επικυριαρχείται από κάποια άλλη. Το συγκεκριμένο σύνολο έχει μια πρόσθετη ιδιότητα: όλες οι λύσεις που δεν ανήκουν σε αυτό το σύνολο επικυριαρχούνται από τουλάχιστον μια λύση του συγκεκριμένου συνόλου. Με απλά λόγια, οποιαδήποτε λύση του συνόλου αυτού είναι ανώτερη από οποιαδήποτε λύση που δεν είναι μέλος του συνόλου. Το σύνολο αυτό ονομάζεται *μη επικυριαρχούμενο σύνολο*. Οι παρακάτω ορισμοί θέτουν το μη επικυριαρχούμενο σύνολο λύσεων.

Μη επικυριαρχούμενο σύνολο: Μεταξύ ενός συνόλου λύσεων P , το μη επικυριαρχούμενο σύνολο P' είναι αυτό που καμιά λύση του P' δεν επικυριαρχείται από οποιαδήποτε λύση του P . Όταν το σύνολο P είναι ολόκληρος ο χώρος έρευνας, $P = S$, τότε το δημιουργούμενο μη επικυριαρχούμενο σύνολο P' καλείται Pareto βέλτιστο σύνολο.

Ολικά Pareto βέλτιστο σύνολο: Το μη επικυριαρχούμενο σύνολο ολόκληρου του εφικτού χώρου έρευνας S αποτελεί το ολικά Pareto βέλτιστο σύνολο. Σε πολλές περιπτώσεις το ολικά Pareto βέλτιστο σύνολο αναφέρεται ως Pareto βέλτιστο σύνολο αφού οι λύσεις που περιέχει δεν επικυριαρχούνται από κανένα άλλο μέλος του εφικτού χώρου έρευνας, και αποτελούν τις βέλτιστες λύσεις για το πολυκριτηριακό πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Τοπικά Pareto βέλτιστο σύνολο: Αν για κάθε μέλος x στο σύνολο \underline{P} δεν υπάρχει λύση y (στη γειτονιά του x τέτοια ώστε $\|y-x\|_\infty \leq \varepsilon$, όπου ε είναι ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός) που να επικυριαρχεί οποιοδήποτε μέλος του συνόλου \underline{P} , τότε οι λύσεις που ανήκουν στο \underline{P} δημιουργούν ένα τοπικά Pareto βέλτιστο σύνολο. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται ένα παράδειγμα τοπικού σε αντιδιαστολή με το ολικά Pareto βέλτιστο σύνολο. Τέλος, όπως φαίνεται και από το σχήμα, ένα τοπικό Pareto βέλτιστο δεν περιέχει απαραίτητως όλες τις Pareto βέλτιστες λύσεις και κάθε καθολικό Pareto βέλτιστο σύνολο είναι συγχρόνως και τοπικό βέλτιστο σύνολο (Zitzler, 1999).



Εικόνα 1.5: Τοπικό και Ολικό Pareto βέλτιστο σύνολο λύσεων (Zitzler, 1999)

1.3.4 Απεικόνιση των Pareto βέλτιστων λύσεων

Είναι σημαντικό να ειπωθεί πως ο εφικτός χώρος κριτηρίων δεν αποτελείται μονάχα από Pareto βέλτιστες λύσεις αλλά και από λύσεις που δεν είναι βέλτιστες. Έτσι ο εφικτός χώρος κριτηρίων μπορεί να διαιρεθεί σε δύο σύνολα λύσεων, τα Pareto βέλτιστα και τα

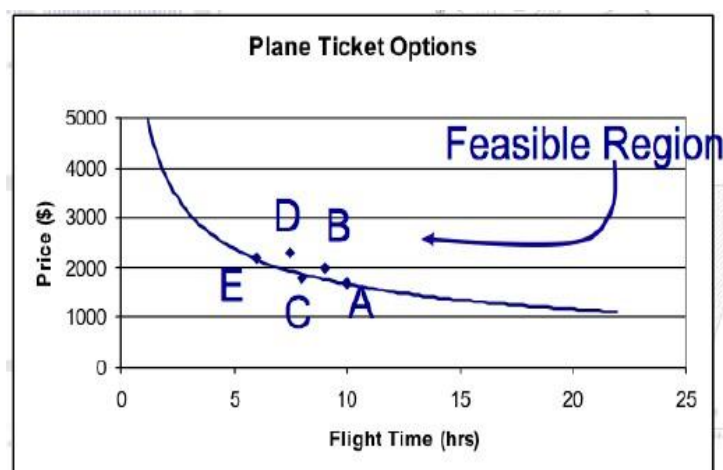
μη Pareto βέλτιστα. Παρακάτω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα που αποδεικνύει τα παραπάνω (Kalita).

Έστω ένα πρόβλημα επιλογής αεροπορικού ταξιδιού με βάση δύο κριτήρια, τον χρόνο και τη τιμή του εισιτηρίου. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει πέντε πιθανές λύσεις για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Εισιτήριο	Χρόνος ταξιδιού (ώρες)	Τιμή (δολάρια)
A	10	1700
B	9	2000
C	8	1800
D	7.5	2300
E	6	2200

Πίνακας 1.1.1: Πέντε λύσεις για το πρόβλημα επιλογής αεροπορικού ταξιδιού (Kalita)

Ας εξετάσουμε τις λύσεις B και C. Όπως δείχνουν τόσο ο πίνακας 1.1 όσο και η εικόνα 1.6, η λύση C είναι καλύτερη και στα δύο κριτήρια σε σχέση με τη λύση B, καθώς η B κοστίζει περισσότερο και ο χρόνος ταξιδιού είναι μεγαλύτερος. Είναι ξεκάθαρο πως η λύση B είναι μια μη-βέλτιστη λύση η οποία δεν παρουσιάζει κανένα ενδιαφέρον ως λύση. Με λίγα λόγια η λύση B επικυριαρχείται από τη λύση C. Αν συγκριθούν οι λύσεις A και B τότε παρατηρούμε πως στο πρώτο κριτήριο η λύση B είναι καλύτερη (μικρότερος χρόνος ταξιδιού) ενώ στο δεύτερο κριτήριο η λύση A αποτελεί καλύτερη επιλογή (φθηνότερη λύση). Τέλος, παρατηρούμε ότι η D κυριαρχείται από την E. Οι επιλογές {A, C, E} αποτελούν το μη-κυριαρχούμενο σύνολο λύσεων επειδή καμία από τις λύσεις δεν κυριαρχείται.



Εικόνα 1.6: Τρεις Pareto βέλτιστες λύσεις (A, C, E) και δύο μη βέλτιστες λύσεις (D,B) (Kalita)

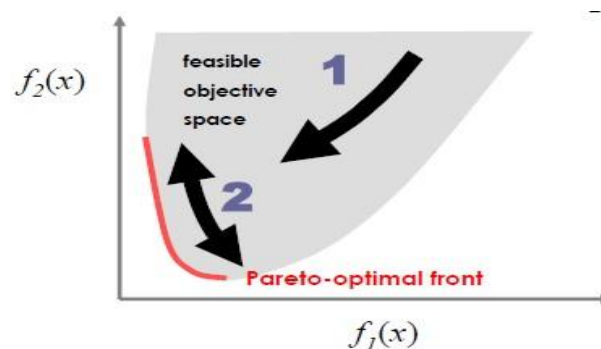
Επομένως θα πρέπει να γίνει σύγκριση των λύσεων που βρίσκονται στο μέτωπο Pareto, ως σύνολο, με οποιαδήποτε λύση για να παρθεί η απόφαση για το αν ανήκει ή όχι η εξεταζόμενη λύση στις βέλτιστες ή μη- βέλτιστες λύσεις.

Οι δυο παρακάτω συνθήκες πρέπει να ισχύουν για ένα Pareto σύνολο λύσεων (Deb K. , 2001):

- Οποιοσδήποτε δυο λύσεις του Pareto συνόλου πρέπει να είναι αμοιβαία μη επικυριαρχούμενες.
- Κάθε λύση που δεν ανήκει στο σύνολο Pareto θα πρέπει να επικυριαρχείται από τουλάχιστον μια λύση του συνόλου Pareto.

Γίνεται αντιληπτό από τα παραπάνω πως στόχοι της πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης είναι:

- Η εύρεση ενός συνόλου λύσεων όσο γίνεται πιο κοντά στο μέτωπο Pareto.
- Η εύρεση ενός συνόλου λύσεων με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ποικιλομορφία



Εικόνα 1.7: Στόχοι της πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης (Deb K. , 2001)

1.3.5 Η έννοια της καλύτερα συμβιβαστικής λύσης

Στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές, είναι αναγκαία η επιλογή μίας και μοναδικής λύσης, που θεωρείται ως ο καλύτερος συμβιβασμός (best-compromise). Οι τρόποι προσδιορισμού της καλύτερα συμβιβαστικής λύσης σε ένα πολυκριτηριακό πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι (Horn, 1997):

1. **Επιλογή πριν την αναζήτηση:** Στάθμιση των επιμέρους κριτηρίων σε μια ενιαία αριθμητική έκφραση, που αποτελεί την αντικειμενική συνάρτηση ενός προβλήματος βαθμωτής βελτιστοποίησης. Άρα, υπάρχει ταύτιση μεταξύ της βέλτιστης λύσης του βαθμωτού προβλήματος και της καλύτερης συμβιβαστικής του πολυκριτηριακού.

2. **Επιλογή μετά την αναζήτηση:** Επίλυση του πολυκριτηριακού προβλήματος για τον εντοπισμό του συνόλου των μη κατωτέρων λύσεων αφού διατυπωθεί μια διανυσματική αντικειμενική συνάρτηση, συνιστώσες της οποίας είναι τα επιμέρους κριτήρια. Η επιλογή μιας από τις λύσεις γίνεται με βάση την υποκειμενική κρίση του αναλυτή.

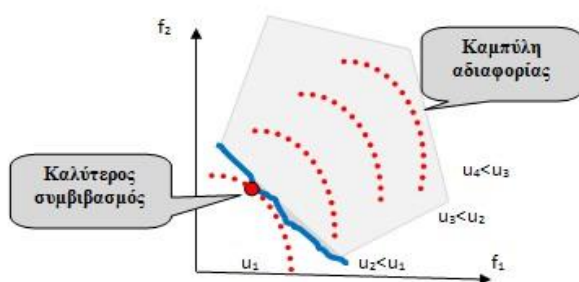
3. **Επιλογή κατά την αναζήτηση:** Η βελτιστοποίηση γίνεται κατά τρόπο διαδραστικό, δηλαδή ο αναλυτής αφού αξιολογήσει τα επίκαιρα αποτελέσματα αναπροσαρμόζει τις προτιμήσεις του ή ενσωματώνει νέα κριτήρια, καθοδηγώντας τη διαδικασία αναζήτησης προς την επιθυμητή γι' αυτόν κατεύθυνση.

1.3.6. Η έννοια της συνάρτησης χρησιμότητας

Η μαθηματική συνάρτηση που αντιστοιχεί μια συγκεκριμένη επίδοση y σε κάθε συνδυασμό κριτηρίων, ώστε να είναι δυνατή η ταξινόμηση των εναλλακτικών λύσεων καλείται συνάρτηση χρησιμότητας (utility function). Η λύση που μεγιστοποιεί την συνάρτηση χρησιμότητας του προβλήματος θεωρείται ως η καλύτερα συμβιβαστική λύση (Varian, 1999). Η συνάρτηση χρησιμότητας διατυπώνεται ως:

$$f_y = U(f_1(x), \dots, f_m(x)) \quad (1.3)$$

Η απεικόνιση της συνάρτησης χρησιμότητας στο χώρο F γίνεται με τη μορφή ισοσταθμικών καμπυλών, που ονομάζονται *καμπύλες αδιαφορίας* (indifference curves). Όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα, η καλύτερα συμβιβαστική λύση βρίσκεται στο σημείο επαφής της καμπύλης αδιαφορίας με το σύνορο Pareto.



Εικόνα 1.8: Γραφική απεικόνιση μιας τυπικής συνάρτησης χρησιμότητας σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο κριτηρίων (Varian, 1999)

1.4 Κλασικές τεχνικές πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης

Οι κλασικές τεχνικές για τη δημιουργία του Pareto βέλτιστου συνόλου συγχωνεύουν τις αντικειμενικές συναρτήσεις σε μία παραμετρική αντικειμενική συνάρτηση με εισαγωγή ενός πλήθους παραμέτρων. Οι παράμετροι αυτής της συνάρτησης καθορίζονται αρχικά

και δεν μπορούν να τροποποιηθούν κατά τη διάρκεια της διαδικασίας. Για να δημιουργηθεί το Pareto βέλτιστο σύνολο χρειάζονται διάφορες επιλύσεις με διαφορετικές παραμέτρους.

1.4.1 Η μέθοδος των βαρών (Weighted method)

Κατά τη συγκεκριμένη μέθοδο ο χρήστης διαμορφώνει μια βαθμωτή αντικειμενική συνάρτηση ως γραμμικό συνδυασμό των επιμέρους κριτηρίων, αποδίδοντας σε κάθε κριτήριο ένα συντελεστή βαρύτητας. Επομένως, το πρόβλημα βελτιστοποίησης μετασχηματίζεται ως εξής:

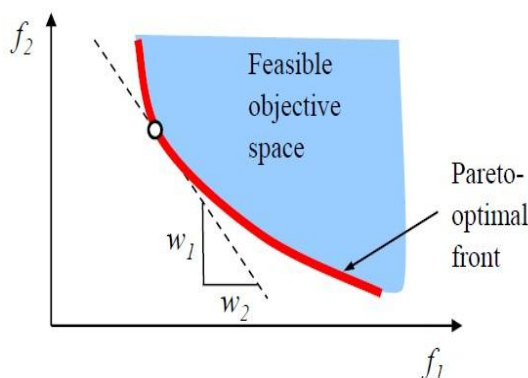
$$\min f(x) = \sum_{i=1}^m w_i f_i(x) \quad (1.4)$$

Κατά κανόνα, χρησιμοποιείται η εξής κανονικοποίηση:

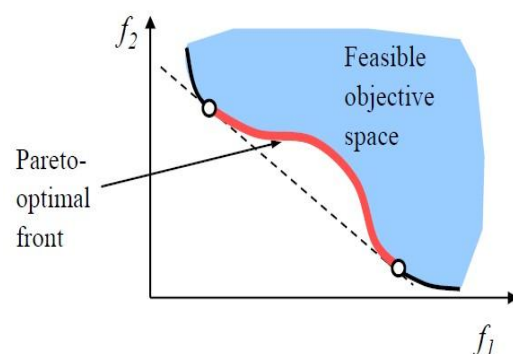
$$\sum_{i=1}^m w_i = 1 \quad (1.5)$$

Επιλύοντας το πρόβλημα των απλών προβλημάτων βελτιστοποίησης και τροποποιώντας κατάλληλα τους δείκτες των βαρών w_i προκύπτει το Pareto σύνολο λύσεων. Μεταβάλλοντας τις τιμές των βαρών w_i , προκύπτουν διαφορετικές λύσεις του μονοκριτηριακού προβλήματος, που είναι Pareto βέλτιστες. Άρα, ο εντοπισμός όλων των Pareto βέλτιστων λύσεων του πολυκριτηριακού προβλήματος προϋποθέτει θεωρητικά άπειρες επιλύσεις του μετασχηματισμένου βαθμωτού προβλήματος (Deb K. , 2001).

Μειονεκτήματα της μεθόδου είναι ο αυθαίρετος προσδιορισμός των τιμών των βαρών και η αδυναμία εντοπισμού των μη κυρτών περιοχών του συνόρου Pareto (Εικόνα 1.10).



Εικόνα 1.9: Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου βαρών σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο συναρτήσεων, για την περίπτωση κυρτού μετώπου Pareto (Deb K. , 2001)



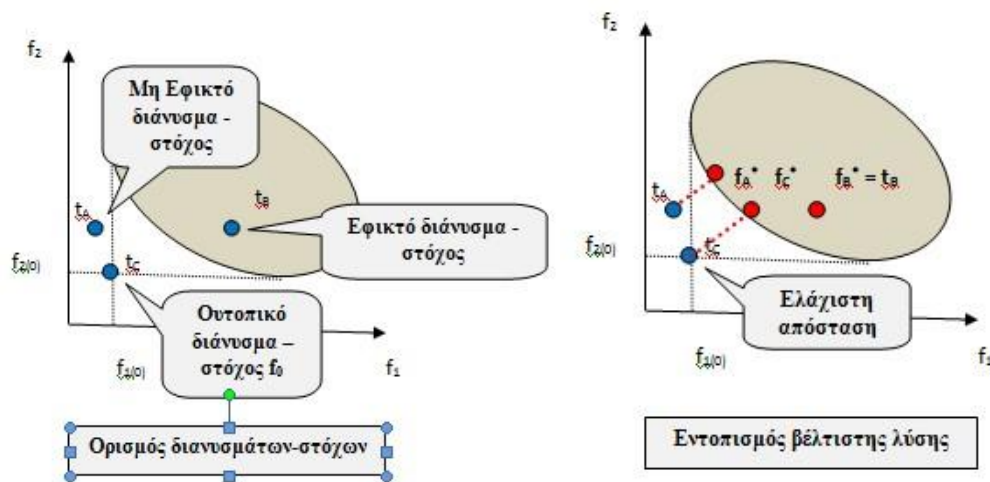
Εικόνα 1.10: Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου βαρών σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο συναρτήσεων, για την περίπτωση μη κυρτού μετώπου Pareto (Deb K. , 2001)

1.4.2 Η μέθοδος προγραμματισμού στόχων (goal programming)

Στη μέθοδο αυτή εισάγονται τιμές-στόχοι N_i για τις αντικειμενικές συναρτήσεις και προσδιορίζονται συντελεστές βαρύτητας για κάθε στόχο (w_i). Η βαθμωτή συνάρτηση που προκύπτει συνίσταται στην ελαχιστοποίηση των μεταβλητών απόκλισης από τους αντίστοιχους στόχους, που στη γενική περίπτωση διατυπώνεται ως εξής:

$$\min f(x) = \left(\sum_{i=1}^n w_i |f_i(x) - N_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.6)$$

όπου q ένας ακέραιος αριθμός (για $q = 2$ και $w_i = 1$, η αντικειμενική συνάρτηση εκφράζει την ευκλείδεια απόσταση των κριτηρίων από τις τιμές-στόχους N_i). Η μέθοδος αυτή, χρησιμοποιώντας έναν ορισμό της καλύτερα συμβιβαστικής λύσης, αποσκοπεί στην εύρεση της κοντινότερης εφικτής λύσης ως προς κάποιο επιθυμητό σημείο, με βάση ένα μέτρο απόστασης. Η ολικά βέλτιστη τιμή f_i^* κάθε επιμέρους κριτηρίου μπορεί να θεωρηθεί τιμή-στόχος κάθε κριτηρίου. Διαφορετικές Pareto βέλτιστες λύσεις του προβλήματος προκύπτουν μεταβάλλοντας τις τιμές των στόχων N_i και των βαρών w_i (Coello Coello, Lamont, & Van Veldhuizen, 2007).



Εικόνα 1.11: Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου προγραμματισμού στόχων, για τρεις χαρακτηριστικές περιπτώσεις ορισμού του διανύσματος-στόχου

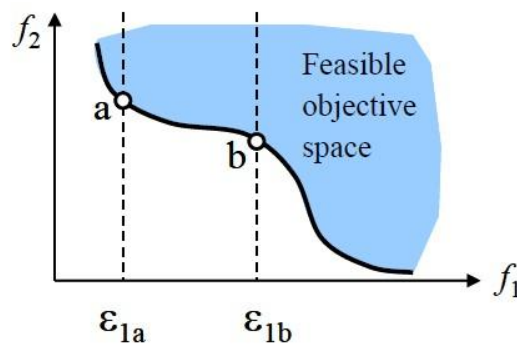
1.4.3 Η μέθοδος των ϵ -περιορισμών

Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο γίνεται αντικατάσταση του προβλήματος πολλών αντικειμενικών συναρτήσεων σε ένα απλό πρόβλημα βελτιστοποίησης, διατηρώντας ένα πρωτεύον κριτήριο $f_\mu(x)$ ως τη μοναδική αντικειμενική συνάρτηση του νέου προβλήματος και αντιμετωπίζοντας τα υπόλοιπα ως περιορισμούς που φράσσονται από

επιτρεπόμενα όρια, ε_m . Συνεπώς, διαμορφώνεται ένα βαθμωτό πρόβλημα βελτιστοποίησης, με $m - 1$ επιπλέον περιορισμούς της μορφής:

$$\begin{aligned} & \text{Min } f_\mu(x), \\ & \text{Subject to } f_m(x) \leq \varepsilon_m, m=1, 2, \dots, M \text{ και } m \neq \mu \\ & g_j(x) \geq 0, j=1, 2, \dots, J \quad (1.7) \\ & h_k(x) = 0, k=1, 2, \dots, K \\ & \text{(lower bound) } x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)} \text{(upper bound), } i=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Οι Pareto βέλτιστες λύσεις προκύπτουν διαφοροποιώντας το πρωτεύον κριτήριο και μεταβάλλοντας τις τιμές των περιορισμών. Μειονέκτημα είναι η προσθήκη περιορισμών στην περίπτωση που το αρχικό πρόβλημα είναι χωρίς περιορισμούς (Deb K. , 2001).



Εικόνα 1.12: Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου ε -περιορισμών σε πρόβλημα δύο συναρτήσεων (Deb K. , 2001)

1.4.4 Η μέθοδος επίτευξης στόχων (goal attainment)

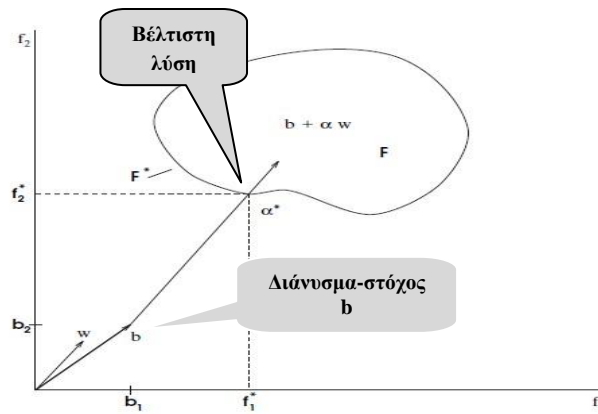
Στη μέθοδο επίτευξης στόχων, η καλύτερα συμβιβαστική λύση βρίσκεται με επίλυση ενός ισοδύναμου προβλήματος βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς, της μορφής:

$$\begin{aligned} & \min a \\ & \text{s.t. } b + aw \geq f(x) \quad (1.8) \end{aligned}$$

όπου a βαθμωτό μέγεθος, χωρίς περιορισμό στο πρόσημο, b διάνυσμα-στόχος που εκφράζει τις επιθυμητές τιμές των κριτηρίων, και $w = (w_1, \dots, w_m)^T$ διάνυσμα συντελεστών βάρους. Οι τελευταίοι αδιαστατοποιούνται ώστε:

$$\sum_{i=1}^m w_i = 1 \quad (1.9)$$

Αν για κάποια συνιστώσα i τεθεί $w_i = 0$, τότε το άνω όριο του κριτηρίου $f_i(x)$ είναι η τιμή-στόχος b_i (Coello Coello, Lamont, & Van Veldhuizen, 2007).



Εικόνα 1.13: Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου επίτευξης στόχων σε πρόβλημα δύο κριτηρίων (Coello Coello C. , 1999)

Η γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου απεικονίζεται στην Εικόνα 1.13. Αποδεικνύεται ότι το σύνολο των μη κατωτέρων λύσεων εντοπίζεται μεταβάλλοντας τις τιμές των βαρών w_i , με $w_i \geq 0$. Σε αντίθεση με τις μεθόδους βαρών και επίτευξης στόχων, που αδυνατούν να εντοπίσουν λύσεις που κείνται στις μη κυρτές περιοχές του μετώπου Pareto, η εν λόγω τεχνική είναι κατάλληλη ακόμη και για μη κυρτά προβλήματα. Επιπλέον, το διάνυσμα-στόχος b , δηλαδή οι επιθυμητές τιμές των κριτηρίων, μπορεί να κείται εκτός του πεδίου τιμών, κάτι που διευκολύνει την διαδικασία αναζήτησης στην περίπτωση που είναι δύσκολη η εύρεση τιμών-στόχων που είναι ταυτόχρονα εφικτές.

1.4.5 Σχολιασμός των κλασικών τεχνικών βελτιστοποίησης

Αυτό που καθιστά τις κλασικές μεθόδους βελτιστοποίησης ελκυστικές και δημοφιλείς είναι η αξιοπιστία τους. Σε μεγάλης κλίμακας όμως προβλήματα οι αλγόριθμοι μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης δεν εφαρμόζονται εύκολα.

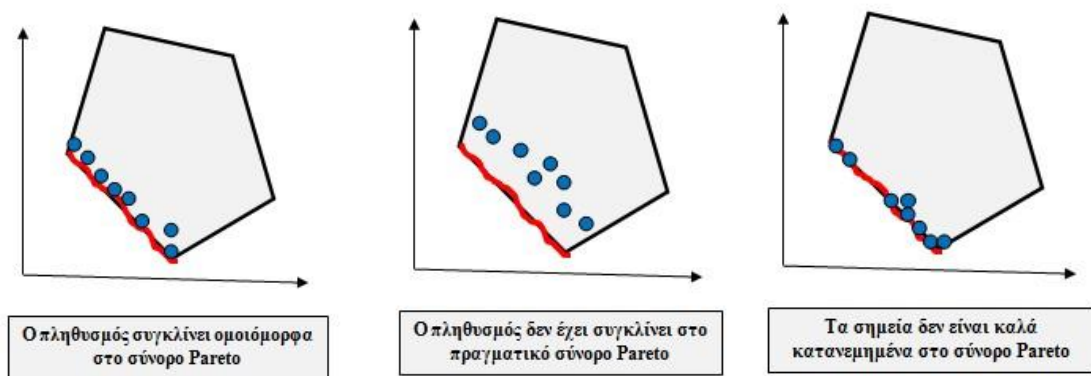
Κάποια από τα κύρια μειονεκτήματα των κλασικών προσεγγίσεων (Fonseca & Fleming, 1995) είναι ο αυθαίρετος ορισμός της συνάρτησης χρησιμότητας, η δημιουργία εξαιρετικά ανώμαλων επιφανειών απόκρισης και η αδυναμία εύρεσης άλλων επιλογών που είναι βέλτιστες κατά Pareto, εκτός και αν πραγματοποιηθεί εξονυχιστική αναζήτηση με διαδοχικές επιλύσεις εναλλακτικών διατυπώσεων του μονοκριτηριακού προβλήματος.

Η διαδικασία αναζήτησης θα πρέπει να αποσκοπεί στον εντοπισμό όχι μιας μεμονωμένης λύσης αλλά ενός συνόλου (πληθυσμού) σημείων (**εξελικτικοί αλγόριθμοι**), αντιπροσωπευτικών του συνόλου Pareto.

Κριτήρια επιτυχίας της διαδικασίας αναζήτησης, δεδομένου ότι οι Pareto βέλτιστες λύσεις είναι άπειρες, είναι:

- η σύγκλιση του τελικού πληθυσμού προς το σύνορο Pareto και
- η κατά το δυνατόν πιο ομοιόμορφη κάλυψη του συνόρου Pareto.

Η ερμηνεία των παραπάνω κριτηρίων απεικονίζεται στο παράδειγμα της Εικόνας 1.14, στο οποίο παρουσιάζονται τρεις χαρακτηριστικές εικόνες σύγκλισης πολυκριτηριακών εξελικτικών αλγορίθμων, μετά το πέρας των υπολογιστικών διαδικασιών. Στην πρώτη (αριστερά), έχει επιτευχθεί μια πολύ ικανοποιητική προσέγγιση του μετώπου Pareto, με όλα τα μέλη του πληθυσμού ομοιόμορφα καταναμημένα. Στην δεύτερη (κέντρο), οι τοπικά μη κατώτερες λύσεις του προβλήματος απέχουν σημαντικά από τις ολικά μη κατώτερες, δηλαδή το πραγματικό μέτωπο Pareto. Τέλος, στην τρίτη περίπτωση (δεξιά), οι περισσότερες λύσεις συγκεντρώνονται σε μια υποπεριοχή του μετώπου Pareto, και συνεπώς ο πληθυσμός των μη κατωτέρων λύσεων δεν μπορεί να θεωρηθεί αντιπροσωπευτικός.

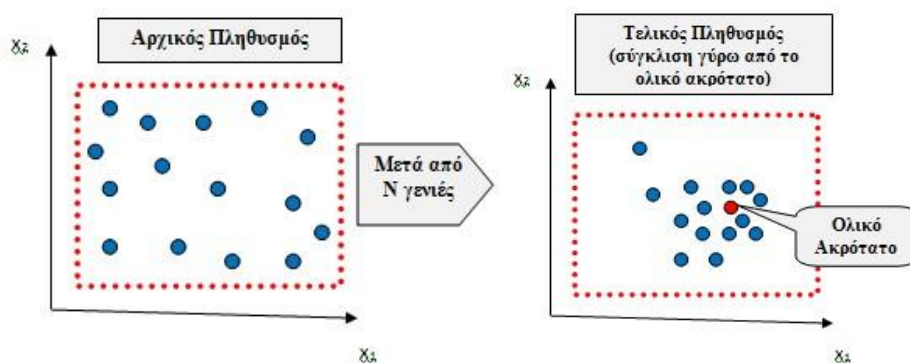


Εικόνα 1.14: Χαρακτηριστικές περιπτώσεις σύγκλισης εξελικτικών αλγορίθμων πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης. Με παχιά κόκκινη γραμμή απεικονίζεται το πραγματικό μέτωπο Pareto

2. Εξελικτικοί Αλγόριθμοι

2.1 Εισαγωγή

Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι προσομοιώνουν την εξέλιξη ενός πληθυσμού (population) εφικτών σημείων, χρησιμοποιώντας διαδικασίες εμπνευσμένες από τη φυσική επιλογή και την αναπαραγωγή. Σε κάθε άτομο (individual) αντιστοιχεί μια εφικτή λύση. Κάθε άτομο χαρακτηρίζεται από ένα μέτρο, το οποίο καλείται καταλληλότητα (fitness) και το οποίο κωδικοποιείται μέσω μιας συνάρτησης, η οποία είναι γνωστή ως συνάρτηση καταλληλότητας (fitness function). Η ποιότητα κάθε ατόμου εξαρτάται κυρίως από τις τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων του προβλήματος, τους περιορισμούς και τη θέση του ατόμου στο χώρο των λύσεων. Από την εξέλιξη που πραγματοποιείται σε γενιές (generations), προκύπτει νέα λύση που λέγεται απόγονος (offspring) και η οποία γεννάται είτε με διασταύρωση (crossover) είτε μέσω μετάλλαξης (mutation). Το κριτήριο περάτωσης μπορεί να είναι είτε η δημιουργία συγκεκριμένου πλήθους γενιών, είτε η στασιμότητα της ποιότητας του πληθυσμού ή η ύπαρξη πληθυσμού με ικανοποιητική ακρίβεια. Η διαδικασία εξασφαλίζει ασυμπτωτική σύγκλιση στο ολικό ακρότατο, βελτιώνοντας την ποιότητα του πληθυσμού σε κάθε γενιά όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.1.



Εικόνα 2.1: Σχηματική απεικόνιση εξέλιξης πληθυσμού ενός ΕΑ

2.2 Κατηγορίες εξελικτικών αλγορίθμων

- **Γενετικοί αλγόριθμοι** (genetic algorithms): Κύριο χαρακτηριστικό τους είναι η κωδικοποιημένη αναπαράσταση των μεταβλητών ελέγχου. Η κύρια διαδικασία παραγωγής νέων λύσεων είναι η **διασταύρωση** όπου σε κάθε γενιά, τα ισχυρότερα άτομα έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα επιβίωσης.

- **Εξελικτικές στρατηγικές** (evolutionary strategies): Η κύρια διαδικασία παραγωγής νέων λύσεων είναι η **μετάλλαξη** όπου σε κάθε γενιά επιβιώνουν τα ισχυρότερα άτομα από το σύνολο των γονέων και απογόνων τους.
- **Εξελικτικός Προγραμματισμός** (Evolutionary Programming): Δεν χρησιμοποιεί κωδικοποιημένες λύσεις αλλά πχ. πραγματικές μεταβλητές. Εφαρμόστηκε μόνο σε απλά προβλήματα βελτιστοποίησης και υπολείπεται σε απόδοση των γενετικών αλγορίθμων.
- **Γενετικός Προγραμματισμός** (Genetic Programming): Αποτελεί ειδική εφαρμογή των γενετικών αλγορίθμων. Σκοπός του είναι η αυτόματη εξέλιξη προγραμμάτων για την επίλυση αλγοριθμικών προγραμμάτων. Χρησιμοποιείται και σε προβλήματα όπου οι λύσεις αναπαρίστανται ως δενδροειδείς δομές όπως VLSI design.

2.3 Βασικοί σκοποί εξελικτικών αλγορίθμων

Οι βασικοί σκοποί κατά την υλοποίηση ενός εξελικτικού αλγορίθμου είναι οι εξής:

- Η απόσταση μεταξύ του μη-κυριαρχικού μετώπου που προκύπτει από την επίλυση και του βέλτιστου μετώπου Pareto πρέπει να ελαχιστοποιηθεί.
- Χρειάζεται μια καλή κατανομή των λύσεων που θα προκύψουν.
- Η διασπορά του μη-κυριαρχούμενου μετώπου Pareto πρέπει να μεγιστοποιηθεί. Για κάθε αντικειμενική συνάρτηση ένα μεγάλο εύρος τιμών πρέπει να καλύπτεται από τις μη-κυριαρχούμενες λύσεις.
- Παράλληλα με τα παραπάνω πρέπει να αποτραπεί η πρόωρη σύγκλιση του αλγορίθμου σε συγκεκριμένες περιοχές του βέλτιστου μετώπου.

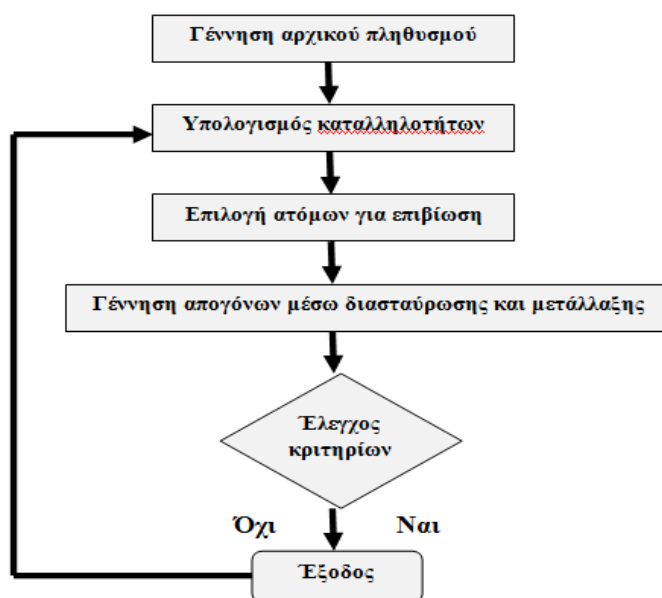
Τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά επίδοσης μιας «ολικά βέλτιστης» μεθόδου βελτιστοποίησης είναι η **αποτελεσματικότητα** (effectiveness), δηλαδή η υψηλή αξιοπιστία εντοπισμού του ολικού ακρότατου της συνάρτησης και η **αποδοτικότητα** (efficiency), δηλαδή η υψηλή ταχύτητα σύγκλισης (Duan, Sorooshian, & Gupta, 1992).

Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι αντικρουόμενα γιατί από τη μία η συστηματική αναζήτηση προσεγγίζει το ολικό βέλτιστο με ακρίβεια αλλά απαιτεί ταυτόχρονα υψηλό υπολογιστικό φόρτο, από την άλλη οι γρήγορες τεχνικές άμεσης αναζήτησης εγκλωβίζονται εύκολα σε τοπικά ακρότατα.

2.4 Γενετικοί Αλγόριθμοι

Οι Γενετικοί Αλγόριθμοι (ΓΑ) είναι στοχαστικοί προσεγγιστικοί αλγόριθμοι έρευνας και βελτιστοποίησης οι οποίοι βασίζονται σε ιδέες και μηχανισμούς της Γενετικής των

πληθυσμών όπως είναι ο μηχανισμός της φυσικής επιλογής, της γενετικής διασταύρωσης, της γενετικής μετάλλαξης, κ.α. Προτάθηκαν από τον Καθηγητή Holland (Holland, 1975) και τους φοιτητές του στο Πανεπιστήμιο του Michigan μετά από δεκαετή έρευνα σε προσομοιώσεις σε υπολογιστή βιολογικών συστημάτων. Οι ΓΑ προσομοιώνουν τις διεργασίες και τους μηχανισμούς των φυσικών γενετικών συστημάτων σύμφωνα με τις αρχές της «εξέλιξης των ειδών» του Κάρολου Δαρβίνου.



Εικόνα 2.2: Τυπικό Διάγραμμα Ροής Εξελικτικού Αλγορίθμου

2.4.1 Βασικά συστατικά ενός γενετικού αλγορίθμου

Τα βασικά συστατικά ενός γενετικού αλγορίθμου είναι τα παρακάτω:

1. **Δημιουργία Αρχικού Πληθυσμού:** Παραγωγή του αρχικού πληθυσμού με τυχαία δειγματοληψία και των επόμενων γενεών με εφαρμογή των γενετικών τελεστών (genetic operators).
2. **Αναπαράσταση λύσεων:** Κωδικοποίηση (encoding) χρωμοσώματος πριν την εκτέλεση του Γενετικού Αλγορίθμου.
3. **Συνάρτηση καταλληλότητας (fitness function):** Ορισμός μιας κατάλληλης αντικειμενικής συνάρτησης που αποδίδει ένα βαθμό καταλληλότητας σε κάθε κωδικοποιημένη λύση.
4. **Επιλογή γονέων:** Αντιστοίχιση σε κάθε μέλος του πληθυσμού μιας συγκεκριμένης πιθανότητας επιβίωσης μέσω του τελεστή επιλογής (selection) γεγονός που αποσκοπεί στη βελτίωση των γενετικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού (μεγαλύτερη πιθανότητα

επιβίωσης στην επόμενη γενιά έχουν τα πλέον ικανά άτομα). Δημιουργία μιας δεξαμενής ζευγαρώματος (mating pool).

5. **Διαδικασία αναπαραγωγής:** Επιλογή γονέων προς διασταύρωση, παραγωγή γονέων και εφαρμογή του τελεστή της μετάλλαξης (mutation) κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης του Γενετικού Αλγορίθμου.

6. **Επανατοποθέτηση:** Επανατοποθέτηση γονέων από τον αρχικό πληθυσμό στον παραγόμενο, όταν ο αριθμός των απογόνων είναι μικρότερος ή μεγαλύτερος από το μέγεθος του αρχικού πληθυσμού, ώστε να διατηρηθεί το συνολικό μέγεθος του πληθυσμού σταθερό.

Παρακάτω γίνεται περιγραφή των επιμέρους λειτουργιών ενός γενετικού αλγορίθμου.

2.4.1.1 Αρχικός Πληθυσμός - Κωδικοποίηση

Πριν δημιουργηθεί ο αρχικός πληθυσμός επιλέγεται η κωδικοποίηση των ατόμων του πληθυσμού.

1. Δυαδική κωδικοποίηση (binary encoding)

Κατά τη δυαδική κωδικοποίηση γίνεται απεικόνιση των συντεταγμένων των σημείων ως δυαδικών συμβολοσειρών (binary strings) το οποίο επιτρέπει την αναπαράσταση οποιασδήποτε έκφρασης, αριθμητικής ή όχι (π.χ. ακέραιες μεταβλητές, λογικές εκφράσεις κλπ.).

Στη δυαδική αναπαράσταση μια δυαδική ακολουθία μήκους L εκπροσωπεί καθένα από τα 2^L διαφορετικά σχήματα με τα οποία ταιριάζει (Goldberg, 1989). Το σχήμα (Schema) είναι μια ακολουθία που περιλαμβάνει 0, 1 και '*' ("οτιδήποτε"). Η συγκεκριμένη κωδικοποίηση μειονεκτεί ως προς την αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών, αφού για μεγάλο αριθμό μεταβλητών ελέγχου απαιτείται η διαμόρφωση πολύ μεγάλων συμβολοσειρών.

	Μεταβλητή X	Μεταβλητή Ψ	Μεταβλητή Z
Χρωμόσωμα X	00010000	00000100	00000001
Χρωμόσωμα Ψ	00000000	00000001	00000100

Πίνακας 2.1: Δυαδική κωδικοποίηση χρωμοσωμάτων που αποτελούνται από τρεις μεταβλητές

Το πλήθος των αγνώστων μεταβλητών και η ακρίβεια αναπαράστασης κάθε μεταβλητής καθορίζουν τον συνολικό αριθμό των δυαδικών ψηφίων που θα αναπαριστά η κάθε λύση (Coley, 1999). Για παράδειγμα, το συνολικό μήκος (L) του κάθε χρωμοσώματος που

αποτελείται από M μεταβλητές (δευτερεύουσες συμβολοσειρές μήκους 1) προκύπτει από το άθροισμα των μηκών l_j κάθε μεταβλητής όπου $j=1, \dots, M$, δηλαδή:

$$L = \sum_{j=1}^M l_j \quad (2.1)$$

Αν οι μεταβλητές λαμβάνουν πραγματικές τιμές, η δυαδική συμβολοσειρά (ή γονότυπος) μετατρέπεται πρώτα σε ακέραιο βάσης-10 (z) και στη συνέχεια ο ακέραιος μετατρέπεται σε πραγματικό αριθμό (r) σύμφωνα με την παρακάτω γραμμική απεικόνιση (Coley, 1999):

$$r = \frac{r_{max} - r_{min}}{2^l - 1} z + r_{min} \quad (2.2)$$

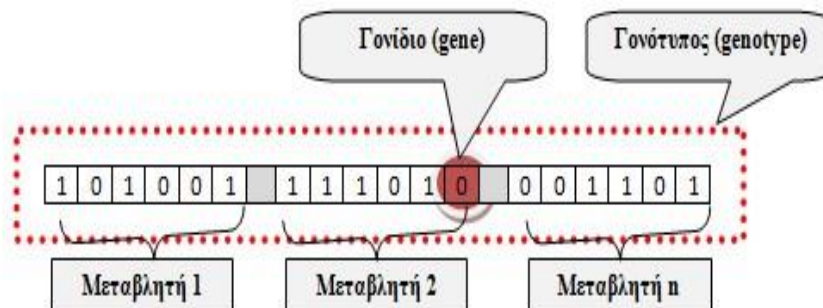
όπου r_{max}, r_{min} αντιπροσωπεύουν την ελάχιστη και μέγιστη δυνατή τιμή παραμέτρου σε πραγματικές αναπαραστάσεις, z είναι η δεκαδική αναπαράσταση και l είναι το μήκος της δυαδικής μεταβλητής.

Παράδειγμα: Στην περίπτωση μιας άγνωστης μεταβλητής που λαμβάνει πραγματικές τιμές μεταξύ των τιμών 2 και 4, η δυαδική απεικόνιση είναι 10101. Η γραμμική του απεικόνιση σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο (2.2) θα είναι:

$$r = \frac{4 - 2}{2^5 - 1} 21 + 2 = 3.3548 \quad (2.3)$$

όπου $z = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 21$ και το μήκος $l = 5$.

Στο παρακάτω παράδειγμα, υπάρχει αντιστοιχία κάθε μεταβλητής σε 64 δυνατές τιμές. Η τιμή της πρώτης μεταβλητής είναι $x_1 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 41$. Οι τιμές των συντεταγμένων $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ συνιστούν τον φαινότυπο (phenotype) του ατόμου.



Εικόνα 2.3: Σχηματική παράσταση γονότυπου ενός ατόμου

2. Κωδικοποίηση μετάθεσης (permutation encoding)

Όταν η καταλληλότητα του χρωμοσώματος εξαρτάται μόνο από τη σειρά, η κωδικοποίηση μετάθεσης είναι ιδανική. Η κωδικοποίηση μετάθεσης χρησιμοποιείται σε προβλήματα ταξινόμησης, όπως το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή (Obitko, 1998)

Χρωμόσωμα A	526381497
Χρωμόσωμα B	742893165

Πίνακας 2.2: Κωδικοποίηση μετάθεσης δυο χρωμοσωμάτων (Alkafaween, 2015)

3. Κωδικοποίηση τιμών (value encoding)

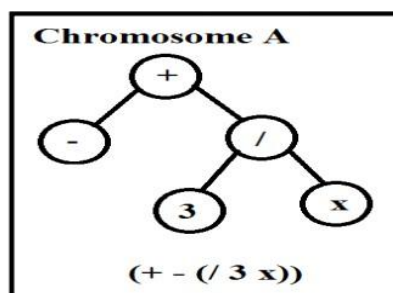
Η κωδικοποίηση τιμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα, όπου χρησιμοποιούνται ορισμένες περίπλοκες τιμές, όπως πραγματικοί αριθμοί. Η χρήση δυαδικής κωδικοποίησης για αυτόν τον τύπο προβλημάτων θα ήταν πολύ δύσκολη. Στην κωδικοποίηση τιμών, κάθε χρωμόσωμα είναι μια σειρά από ορισμένες τιμές. Οι τιμές μπορεί να είναι οτιδήποτε συνδέεται με πρόβλημα, όπως πραγματικοί αριθμοί ή χαρακτήρες σε ορισμένα περίπλοκα αντικείμενα (Obitko, 1998).

Χρωμόσωμα A	up, right, down, left
Χρωμόσωμα B	GDTRWESQOTIUYKPML
Χρωμόσωμα Γ	0.8,0.5,1.6,0.4,2.3,1.2

Πίνακας 2.3: Κωδικοποίηση τιμών τριών χρωμοσωμάτων (Alkafaween, 2015)

4. Κωδικοποίηση δένδρου (tree encoding).

Η κωδικοποίηση δέντρων χρησιμοποιείται κυρίως για εξελισσόμενα προγράμματα (evolving programs) ή εκφράσεις, γενετικό προγραμματισμό κ.α. Στην κωδικοποίηση δέντρων κάθε χρωμόσωμα είναι ένα δέντρο μερικών αντικειμένων, όπως συναρτήσεις ή εντολές σε γλώσσα προγραμματισμού (Obitko, 1998).



Εικόνα 2.4: Κωδικοποίηση δένδρου ενός χρωμοσώματος (Alkafaween, 2015)

Στη συνέχεια, αφού αποφασιστεί η κωδικοποίηση γίνεται τυχαία επιλογή του αρχικού πληθυσμού των υποψήφιων λύσεων, αλλά με ταυτόχρονη προσπάθεια για όσο το δυνατόν ομοιόμορφη κατανομή των χρωμοσωμάτων στο χώρο αναζήτησης των λύσεων, ώστε να μην υπάρχει περιορισμός της αναζήτησης αποκλειστικά σε μία μόνον περιοχή του χώρου αναζήτησης.

2.4.1.2 Υπολογισμός Συνάρτησης Καταλληλότητας

Με τη συνάρτηση καταλληλότητας (fitness function) υπολογίζεται η καταλληλότητα των χρωμοσωμάτων. Συγκεκριμένα, δέχεται στην είσοδο την τιμή ενός χρωμοσώματος που έχει αποκωδικοποιηθεί και επιστρέφει έναν αριθμό που δείχνει την τιμή καταλληλότητάς του. Επομένως, ανάλογα με την τιμή της συνάρτησης γίνεται ταξινόμηση των χρωμοσωμάτων του πληθυσμού. Σε διαφορετικά προβλήματα η συνάρτηση καταλληλότητας ορίζεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε η τιμή της να αλλάζει για διαφορετικά χρωμοσώματα και να είναι προσαρμοσμένη στο προς επίλυση πρόβλημα. Οι τιμές που παράγονται από τη συνάρτηση καταλληλότητας καθορίζουν τις πιθανότητες των ατόμων να επιβιώσουν, να πολλαπλασιαστούν ή να απορριφθούν στην επόμενη γενιά.

2.4.1.3 Επιλογή γονέων

Κατά τη διαδικασία αυτή, οι γονείς επιλέγονται από μια δεξαμενή ζευγαρώματος (mating pool) για να δημιουργήσουν τις νέες λύσεις (offsprings) για την επόμενη γενιά. Η δεξαμενή αυτή έχει μέγεθος ίσο με τον αρχικό πληθυσμό και με πιθανότητα ανάλογη της καταλληλότητάς τους αντιγράφονται σε αυτή τα μέλη του πληθυσμού. Ωστόσο, θα πρέπει να βρεθεί τρόπος να αποφευχθεί η ανάληψη του συνόλου του πληθυσμού σε λίγες γενιές, καθώς αυτό οδηγεί σε απώλεια της ποικιλομορφίας που σημαίνει ότι οι λύσεις βρίσκονται κοντά η μία στην άλλη στο χώρο. Επομένως, η διατήρηση της καλής ποικιλομορφίας στον πληθυσμό και η αποφυγή πρόωρης σύγκλισης είναι ζωτικής σημασίας για την επιτυχία ενός Γενετικού Αλγορίθμου.

1. Επιλογή ρουλέτας (roulette wheel selection)

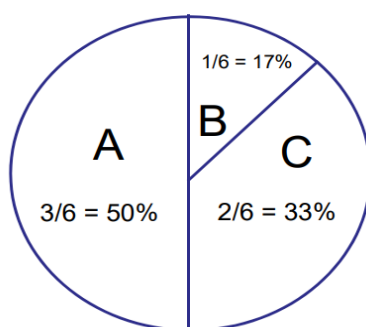
Αποτελεί την πιο συχνά χρησιμοποιούμενη μέθοδο. Η επιλογή των γονέων γίνεται με βάση την τιμή της συνάρτησης καταλληλότητας όπως έχει προκύψει από την αντικειμενική συνάρτηση. Η πιθανότητα επιλογής είναι αντιστρόφως ανάλογη της τιμής κόστους. Δηλαδή, ένα χρωμόσωμα με μικρή τιμή κόστους έχει μεγάλη πιθανότητα να επιλεγεί.

Το βασικό χαρακτηριστικό της συγκεκριμένης διαδικασίας είναι πως ο κάθε υποψήφιος επιλέγεται με πιθανότητα:

$$p_i = \frac{f_i}{\Sigma f_i} \quad (2.4)$$

όπου f_i ο βαθμός καταλληλότητας του ατόμου. Η πιθανότητα αυτή μπορεί να αποδοθεί σχηματικά με μια ρουλέτα, έναν εικονικό τροχό δηλαδή, στον οποίο το πλήθος εγκοπών είναι όσο το μέγεθος του πληθυσμού και το πλάτος κάθε εγκοπής είναι ανάλογο της πιθανότητας επιλογής κάθε ατόμου i . Με τον τρόπο αυτό, κάθε άτομο, έχει μη μηδενική πιθανότητα επιλογής, ακόμη και το πλέον αδύναμο.

Για παράδειγμα, στην παρακάτω εικόνα παρουσιάζεται ένας πληθυσμός με τρία χρωμοσώματα, όπου το πιο κατάλληλο από όλα τα υπόλοιπα στην ρουλέτα είναι το χρωμόσωμα A με ποσοστό 50%. Για την επιλογή χρωμοσώματος πραγματοποιείται τυχαία επιλογή ενός σημείου εντός του κύκλου (Davis & Mitchell, 1991).



Εικόνα 2.5: Επιλογή με τροχό ρουλέτας

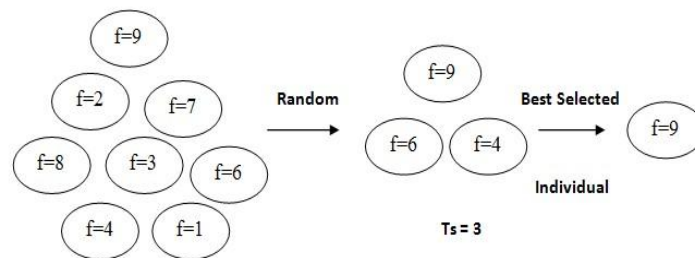
2. Επιλογή καλύτερου συζύγου (top mate selection).

Η επιλογή καλύτερου συζύγου είναι μια μέθοδος στην οποία πραγματοποιείται ταξινόμηση του πληθυσμού από τα καταλληλότερα χρωμοσώματα στα λιγότερο κατάλληλα με βάση τις τιμές καταλληλότητάς τους. Έπειτα, περίπου τα μισά (50 %) από τα λιγότερα κατάλληλα χρωμοσώματα αγνοούνται και τα υπόλοιπα χρησιμοποιούνται για την παραγωγή της επόμενης γενιάς. Πλεονέκτημα της επιλογής του καλύτερου συζύγου είναι η απλότητά της, αφού λαμβάνονται υπόψη τα καλύτερα χρωμοσώματα με βάση ένα συγκεκριμένο ποσοστό. Μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι παρατηρείται το φαινόμενο της πρόωρης σύγκλισης, δηλαδή την απώλεια γενετικής πληροφορίας αδύναμων

χρωμοσωμάτων που συνεπάγεται τον εγκλωβισμό σε τοπικό ακρότατο (Davis & Mitchell, 1991).

3. Επιλογή με διαγωνισμό (tournament selection)

Μια άλλη προσέγγιση είναι η επιλογή με διαγωνισμό του καταλληλότερου γονέα από ένα τυχαίο υποσύνολο χρωμοσωμάτων και η οποία λειτουργεί καλύτερα σε μεγαλύτερους πληθυσμούς. Επιλέγεται τυχαία από την δεξαμενή ζευγαρώματος ένα υποσύνολο χρωμοσωμάτων και το χρωμόσωμα που έχει την μέγιστη τιμή καταλληλότητας ορίζεται ως γονέας. Η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου επιλεγεί ο απαιτούμενος αριθμός γονέων. (Davis & Mitchell, 1991).



Εικόνα.2.6: Επιλογή με διαγωνισμό (Razali & Geraghty, 2011)

Στο παραπάνω παράδειγμα, το μέγεθος του τουρνουά, T_s , έχει επιλεγεί να είναι 3, το οποίο σημαίνει ότι τρία άτομα θα ανταγωνίζονται μεταξύ τους κάθε φορά. Μόνο το καλύτερο άτομο μεταξύ τους επιλέγεται για τη δεξαμενή ζευγαρώματος. Βέβαια, στην επιλογή με τουρνουά μεγαλύτερες τιμές του μεγέθους του τουρνουά, οδηγούν σε μεγαλύτερη αναμενόμενη απώλεια ποικιλομορφίας (diversity).

4. Στοχαστική καθολική δειγματοληψία (stochastic universal sampling)

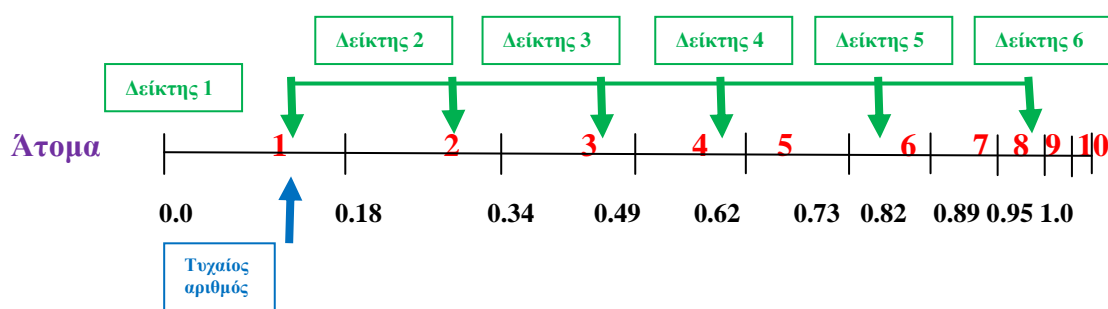
Η Στοχαστική καθολική δειγματοληψία παρέχει μηδενική πόλωση και ελάχιστη εξάπλωση. Τα χρωμοσώματα του πληθυσμού τοποθετούνται ως συνεχόμενα τμήματα πάνω σε μία ευθεία γραμμή, έτσι ώστε το τμήμα κάθε χρωμοσώματος να είναι ίσο με το μέγεθος της καταλληλότητάς του, όπως ακριβώς στην επιλογή ρουλέτας-τροχού. Εδώ οι κατανεμημένοι δείκτες τοποθετούνται σε ίσα διαστήματα κατά μήκος της γραμμής σε αριθμό ίσο με τον αριθμό των χρωμοσωμάτων που θα επιλεγούν. Έστω ότι ο αριθμός των χρωμοσωμάτων που θα επιλεγεί είναι N_{Pointer} , τότε η απόσταση μεταξύ των δεικτών είναι $1/N_{\text{Pointer}}$ και η θέση του πρώτου δείκτη δίνεται από έναν αριθμό που δημιουργείται τυχαία στο διάστημα $[0, 1/N_{\text{Pointer}}]$.

Παράδειγμα: Έστω ότι θα επιλεγούν 6 χρωμοσώματα, η απόσταση μεταξύ των δεικτών είναι $1/6=0.167$. Στην Εικόνα 2.7 παρουσιάζεται η επιλογή για το παραπάνω παράδειγμα (Shyalika, 2009).

Ο τυχαίος παραγόμενος αριθμός στο διάστημα $[0, 0.0167]$ είναι: 0.1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Τμή Καταλληλότητας	2.0	1.8	1.6	1.4	1.2	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0.0
Πιθανότητα Επιλογής	0.18	0.16	0.15	0.13	0.11	0.09	0.07	0.06	0.03	0.02	0.0

Πίνακας 2.4: Παράδειγμα πιθανολογικής καθολικής δειγματοληψίας (Shyalika, 2009)



Εικόνα.2.7: Αποστάσεις μεταξύ των δεικτών (Shyalika, 2009)

Μετά από την επιλογή ο πληθυσμός ζευγαρώματος αποτελείται από τα εξής χρωμοσώματα:

1	2	3	4	6	8
---	---	---	---	---	---

Πίνακας 2.5: Πληθυσμός ζευγαρώματος (Shyalika, 2009)

5. Εκλεκτισμός (elitism)

Η μέθοδος αυτή, αντιγράφει την τρέχουσα βέλτιστη λύση πάντα στη δεξαμενή ζευγαρώματος με αποτέλεσμα να προστατεύεται αφού δεν υπάρχει κίνδυνος να χαθεί εξαιτίας της τυχαιότητας της διαδικασίας επιλογής (Davis & Mitchell, 1991).

2.4.1.4 Διασταύρωση

Αφού επιλεγούν οι γονείς για την αναπαραγωγή νέων χρωμοσωμάτων στη συνέχεια εφαρμόζεται ο τελεστής της διασταύρωσης. Η διασταύρωση αποτελεί τον σημαντικότερο

τελεστή και στην πιο απλή μορφή του παράγει ένα ζευγάρι απογόνων από ένα ζευγάρι γονέων. Εφαρμόζεται με μια πιθανότητα διασταύρωσης p_c (crossover probability) η οποία συνήθως κυμαίνεται μεταξύ 0.6 και 0.8. Στην περίπτωση που δεν εφαρμοστεί η διασταύρωση, τότε έχουμε παραγωγή των απογόνων απλώς με επανάληψη των γονέων, δηλ. οι γονείς αντιγράφονται στην επόμενη γενεά.

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για τη διασταύρωση των χρωμοσωμάτων εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από το είδος της εφαρμοζόμενης κωδικοποίησης. Παρακάτω περιγράφονται μερικές δημοφιλείς μέθοδοι διασταύρωσης.

- **Διασταύρωση ενός (One Point Crossover) ή πολλαπλών σημείων (multi-point crossover).** Στη διασταύρωση ενός σημείου (one point crossover) που είναι ο απλούστερος τρόπος διασταύρωσης επιλέγεται τυχαία ένα σημείο στο διάστημα $[1, n-1]$, όπου n το μήκος του χρωμοσώματος. Στο σημείο αυτό κόβονται τα δύο χρωμοσώματα και γίνεται ανταλλαγή των γονιδίων μεταξύ τους, ενώ από την συνένωση παράγονται δυο νέα άτομα, οι απόγονοι. Τα νέα άτομα, όπως είναι φυσικό, φέρουν χαρακτηριστικά και των δυο γονέων τους. Στη διασταύρωση πολλαπλών σημείων (multi-point crossover) επιλέγονται τυχαία k σημεία διασταύρωσης στο διάστημα $[1, n-1]$ και τα γονίδια μεταξύ των διαδοχικών σημείων διασταύρωσης ανταλλάσσονται μεταξύ των γονέων έτσι ώστε να παραχθούν νέοι απόγονοι. (Davis & Mitchell, 1991).

	Διασταύρωση ενός σημείου	Διασταύρωση δύο σημείων
Γονέας 1	1 1 0 1 1 0 1 1	1 0 1 0 1 1 1 0
Γονέας 2	1 0 1 0 0 1 1 0	0 0 1 0 0 1 1 1
Απόγονος 1	1 1 0 1 0 1 1 0	1 0 1 0 0 1 1 0
Απόγονος 2	1 0 1 0 1 0 1 1	0 0 1 0 1 1 1 1

Πίνακας 2.6: Παράδειγμα εφαρμογής διασταύρωσης ενός και πολλαπλών σημείων

- **Διασταύρωση αριθμητική (arithmetic crossover).** Στη συγκεκριμένη μορφή διασταύρωσης λαμβάνει μέρος ένας αυθαίρετος αριθμός γονέων. Βασίζεται σε μαθηματικές πράξεις μεταξύ των χρωμοσωμάτων, που σημαίνει ότι ένας απόγονος μπορεί να προκύψει με εφαρμογή λογικών πράξεων (π.χ. AND, XOR κ.λπ.) μεταξύ των γονέων.

Αριθμητική Διασταύρωση	
Γονέας 1	1 1 0 0 1 0 1 1
Γονέας 2	1 1 0 1 1 1 1 1
Απόγονος 1 (AND)	1 1 0 0 1 0 1 1
Απόγονος 2 (XOR)	0 0 0 1 0 1 0 0

Πίνακας 2.7: Παράδειγμα εφαρμογής αριθμητικής διασταύρωσης

- **Διασταύρωση ομοιόμορφη (uniform crossover).** Σύμφωνα με την ομοιόμορφη διασταύρωση, οι δύο γονείς δημιουργούν δύο απογόνους βάσει μιας μάσκας διασταύρωσης (mask crossover) ίδιου μήκους με το μήκος των γονέων. Η μάσκα επιλέγεται με τυχαίο και ομοιόμορφο τρόπο και ανάλογα με τη τιμή του δυαδικού ψηφίου της κάθε θέσης της, καθορίζεται για κάθε απόγονο από ποιο γονέα θα προέρχεται για τη συγκεκριμένη θέση το γενετικό υλικό. Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 2.8 αν το δυαδικό ψηφίο της μάσκας είναι 1, τότε το ο πρώτος απόγονος παίρνει την τιμή του πρώτου γονέα για αυτή τη θέση, ενώ αν είναι 0 παίρνει την τιμή του δεύτερου γονέα για αυτή τη θέση. Τα δυαδικά ψηφία 0 και 1 στη μάσκα επιλέγονται τυχαία με πιθανότητα 0.5 το καθένα (ομοιόμορφη κατανομή) (Davis & Mitchell, 1991)

Ομοιόμορφη Διασταύρωση	
Γονέας 1	1 0 1 1 0 0 0 1
Γονέας 2	0 0 0 1 1 1 1 0
Μάσκα	0 0 1 1 0 0 1 1
Απόγονος 1	0 0 1 1 1 1 0 1
Απόγονος 2	1 0 0 1 0 0 1 0

Πίνακας 2.8: Παράδειγμα εφαρμογής ομοιόμορφης διασταύρωσης

2.4.1.5 Μετάλλαξη

Η μετάλλαξη είναι η τελευταία λειτουργία στον κύκλο της αναπαραγωγικής διαδικασίας και εφαρμόζεται στους απογόνους, αλλάζοντας την τιμή ενός τυχαία επιλεγμένου γονιδίου ώστε να αποτραπεί η σύγκλιση σε τοπικό μέγιστο. Λίγες φορές απόγονοι που υποβάλλονται σε αυτή την διαδικασία θα μπορέσουν να βελτιώσουν τα χαρακτηριστικά τους, συνήθως δεν καταφέρουν καν να επιβιώσουν. Το γενετικό υλικό που εισάγεται, δεν

υπήρχε στην προηγούμενη γενιά και ούτε θα ήταν δυνατόν να προκύψει μέσα από την διασταύρωση. Επομένως, η διαδικασία της μετάλλαξης συμβάλλει στη διεύρυνση της εξερεύνησης του χώρου των λύσεων. Για να μην υπάρχει λοιπόν αλλοίωση του πληθυσμού είναι σημαντικό η πιθανότητα μετάλλαξης p_m (mutation probability) να παραμένει αρκετά μικρή, της τάξης του 0.05 - 0.1 (εφαρμόζεται περίπου στο 1% του πληθυσμού).

Για παράδειγμα παράγεται ένας τυχαίος αριθμός στο διάστημα $[0,1]$ για κάθε χρωμόσωμα, ο οποίος αν είναι μικρότερος από την πιθανότητα μετάλλαξης p_m , τότε και μόνο τότε εφαρμόζεται μετάλλαξη σε αυτό το χρωμόσωμα. Στη συνέχεια, πάλι τυχαία, κάποιο γονίδιο του χρωμοσώματος μπορεί να μεταλλαχθεί, δηλ. να αλλάξει τιμή, π.χ. από 0 σε 1, αν χρησιμοποιείται η δυαδική αναπαράσταση του χρωμοσώματος. Ένας τελεστής μετάλλαξης επιτρέπει τον τυχαίο σχηματισμό χρωμοσωμάτων με αποτέλεσμα να διασφαλίζεται η ποικιλομορφία του πληθυσμού (Davis & Mitchell, 1991). Στον Πίνακα 2.9 παρουσιάζεται η εφαρμογή του τελεστή μετάλλαξης για τη δυαδική κωδικοποίηση χρωμοσωμάτων, την κωδικοποίηση μετάθεσης και την κωδικοποίηση τιμών.

	Δυαδική Κωδικοποίηση	Κωδικοποίηση Μετάθεσης	Κωδικοποίηση Τιμών
Αρχικό Χρωμόσωμα	0 1 0 0 1 0 0 1	1 5 3 6 9 0	12.1 20.1 35.4 56
Μεταλλαγμένο χρωμόσωμα	0 1 0 0 1 1 0 1	1 5 3 7 9 0	12.1 21.2 35.4 56

Πίνακας 2.9: Εφαρμογή του τελεστή μετάλλαξης (το γονίδιο που μεταλλάχθηκε δίνεται με κόκκινο χρώμα) για διάφορες κωδικοποιήσεις

2.4.1.6 Επανατοποθέτηση

Αφού ολοκληρωθεί η διαδικασία της διασταύρωσης και της μετάλλαξης και παραχθούν οι απόγονοι στη συνέχεια επανατοποθετούνται στον παλαιό πληθυσμό αντικαθιστώντας παλαιά χρωμοσώματα και διατηρώντας ταυτόχρονα το μέγεθος του πληθυσμού σταθερό. Όταν επανατοποθετηθούν τα νέα χρωμοσώματα και σχηματιστεί ο νέος πληθυσμός τότε τελειώνει μια γενιά (επανάληψη) του Γενετικού Αλγορίθμου και ο οποίος επαναλαμβάνεται ξανά έως ότου ικανοποιηθεί κάποιο από τα παρακάτω κριτήρια τερματισμού (Davis & Mitchell, 1991)::

- Αριθμός γενεών: Όταν ο αλγόριθμος υλοποιηθεί για ένα συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων που έχει δοθεί από την αρχή, τότε τερματίζεται.
- Προσέγγιση αντικειμενικού στόχου: Σε περιπτώσεις προβλημάτων με γνωστές τις βέλτιστες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης, αν έχει προσεγγιστεί η συγκεκριμένη λύση, τότε ο αλγόριθμος τερματίζεται.
- Ομοιότητα: Ο αλγόριθμος τερματίζεται όταν η μέση απόσταση μεταξύ των χρωμοσωμάτων είναι μικρότερη από κάποιο όριο που έχει οριστεί

2.4.2 Περιγραφή γενετικού αλγορίθμου

1. Στον γενετικό αλγόριθμο, από τον αρχικό πληθυσμό Π παράγεται μια νέα γενιά χρωμοσωμάτων Π_s σε κάθε επανάληψη μέσω συγκεκριμένης διαδικασίας. Αρχικός και τελικός πληθυσμός έχουν μέγεθος N .
2. Αντικατάσταση ενός ποσοστού r του αρχικού πληθυσμού σε κάθε κύκλο.
3. Μερική ανανέωση του πληθυσμού δηλαδή ένας συγκεκριμένος αριθμός χρωμοσωμάτων του υπάρχοντα πληθυσμού επιλέγεται για να συμπεριληφθεί απευθείας στην επόμενη γενιά.
4. Παραγωγή επιπλέον μελών με τη διαδικασία της διασταύρωσης.
5. Πιθανοκρατική επιλογή των μελών της υπάρχουσας γενιάς και των γονέων που θα συνεχίσουν και στην επόμενη γενιά.
6. Τυχαία επιλογή ποσοστού m του πληθυσμού αυτού που θα υποστεί τυχαίες μεταλλάξεις.

Στο Σχήμα Γ (Εικόνα 2.8) απεικονίζεται η δεξαμενή ζευγαρώματος από όπου με διαδικασία διασταύρωσης προκύπτουν οι απόγονοι (σύνολο A).

Επομένως στον γενετικό αλγόριθμο θα πρέπει να οριστούν οι παρακάτω παράμετροι (Βλαχάβας, Κεφαλάς, Βασιλειάδης, Ρεφανίδης, Κοκκοράς, & Σακελλαρίου, 2011):

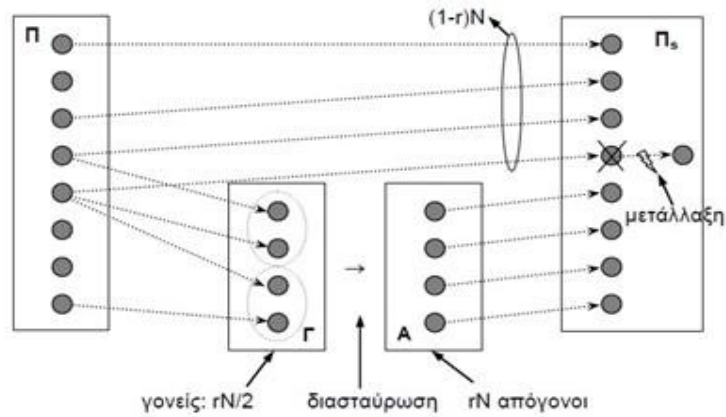
Καταλληλότητα: συνάρτηση καταλληλότητας.

Όριο καταλληλότητας: ελάχιστη τιμή καταλληλότητας που πρέπει να επιτευχθεί από ένα χρωμόσωμα, ώστε η διαδικασία να τερματίσει.

N : αριθμός χρωμοσωμάτων πληθυσμού.

r : ποσοστό πληθυσμού που αντικαθίσταται σε κάθε επανάληψη.

m : ποσοστό μετάλλαξης.



Εικόνα 2.8: Σχηματική λειτουργία γενετικού αλγορίθμου (Βλαχάβας, Κεφαλάς, Βασιλειάδης, Ρεφανίδης, Κοκκοράς, & Σακελλαρίου, 2011)

Παράδειγμα: Να προσδιοριστεί το μέγιστο της συνάρτησης $f(x) = x^2$ όπου x είναι ακέραιος στο διάστημα $[1,31]$ στην περίπτωση ενός πληθυσμού που αποτελείται από τέσσερα (4) χρωμοσώματα..

1. Κωδικοποίηση: Χρήση χρωμοσωμάτων με 5 γονίδια στο δυαδικό: $2^5=32>31$.

2. Αρχικοποίηση: Δημιουργία με τυχαίο τρόπο του αρχικού πληθυσμού:

A/A	Χρωμόσωμα
1	$A_1 = 0\ 1\ 1\ 0\ 1 = 13_{10}$
2	$A_2 = 1\ 1\ 0\ 0\ 0 = 24_{10}$
3	$A_3 = 0\ 1\ 0\ 0\ 0 = 8_{10}$
4	$A_4 = 1\ 0\ 0\ 1\ 1 = 19_{10}$

Πίνακας 2.10: Αρχικοποίηση πληθυσμού

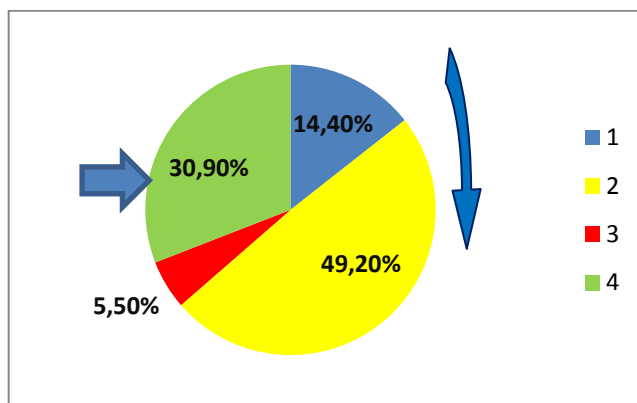
3. Αξιολόγηση:

A/A	Χρωμόσωμα	Ποιότητα
1	$A_1 = 0\ 1\ 1\ 0\ 1 = 13_{10}$	$F(A_1) = 13^2 = 169$
2	$A_2 = 1\ 1\ 0\ 0\ 0 = 24_{10}$	$F(A_2) = 24^2 = 576$
3	$A_3 = 0\ 1\ 0\ 0\ 0 = 8_{10}$	$F(A_3) = 8^2 = 64$
4	$A_4 = 1\ 0\ 0\ 1\ 1 = 19_{10}$	$F(A_4) = 19^2 = 361$
Σύνολο		1170

Πίνακας 2.11: Αξιολόγηση πληθυσμού

Η συνολική απόδοση είναι 1170 ενώ η μέση απόδοση είναι 293.

4. Επιλογή: Για τα μέλη του πληθυσμού η πιθανότητά τους να επιλεγούν είναι ίση με τη σχετική τους απόδοση στον τρέχοντα πληθυσμό (Ρουλέτα με βάρη).



Εικόνα 2.9: Ρουλέτα με βάρη

A/A	Χρωμόσωμα	Ποιότητα	Πιθανότητα
1	$A_1 = 0\ 1\ 1\ 0\ 1 = 13_{10}$	$F(A_1) = 13^2 = 169$	$P(A_1) = 0.14$
2	$A_2 = 1\ 1\ 0\ 0\ 0 = 24_{10}$	$F(A_2) = 24^2 = 576$	$P(A_2) = 0.49$
3	$A_3 = 0\ 1\ 0\ 0\ 0 = 8_{10}$	$F(A_3) = 8^2 = 64$	$P(A_3) = 0.06$
4	$A_4 = 1\ 0\ 0\ 1\ 1 = 19_{10}$	$F(A_4) = 19^2 = 361$	$P(A_4) = 0.31$
Σύνολο		1170	1

Πίνακας 2.12: Πιθανότητες επιλογής πληθυσμού

Μέλη Πληθυσμού	01101 (Τομέας 1)	11000 (Τομέας 2)	01000 (Τομέας 3)	10011 (Τομέας 4)
Ποιότητα	169	576	64	361
Προοδευτικό Άθροισμα	169	745	809	1170
Τυχαίος Αριθμός n	150	343	610	1000
Τομέας Ρουλέτας	1	2	2	4

Πίνακας 2.13: Αποτελέσματα ρουλέτας γονικής επιλογής

5. Αναπαγωγή: Μετά την εφαρμογή της ρουλέτας προκύπτει ο παρακάτω προσωρινός πληθυσμός:

A/A	Χρωμόσωμα
1	$A'_1 = 0\ 1\ 1\ 0\ 1$
2	$A'_2 = 1\ 1\ 0\ 0\ 0$
3	$A'_3 = 1\ 1\ 0\ 0\ 0$
4	$A'_4 = 1\ 0\ 0\ 1\ 1$

Πίνακας 2.14: Αναπαραγωγή πληθυσμού

6. Διασταύρωση: Με τυχαίο τρόπο επιλέγονται τα άτομα που θα διασταυρώσουν το γενετικό υλικό τους. Συγκεκριμένα, διασταυρώνονται το A'_1 με το A'_2 με σημείο διασταύρωσης το 4 και το A'_3 με το A'_4 με σημείο διασταύρωσης το 2 όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα:

Διασταύρωση			
$A'_1 = 0\ 1\ 1\ 0\ 1$	$A''_1 = 0\ 1\ 1\ 0\ 0$	$A'_3 = 1\ 1\ 0\ 0\ 0$	$A''_3 = 1\ 1\ 0\ 1\ 1$
$A'_2 = 1\ 1\ 0\ 0\ 0$	$A''_2 = 1\ 1\ 0\ 0\ 1$	$A'_4 = 1\ 0\ 0\ 1\ 1$	$A''_4 = 1\ 0\ 0\ 0\ 0$

Πίνακας 2.15: Διασταύρωση πληθυσμού

7. Μετάλλαξη: Επιλογή με τυχαίο τρόπο των γονιδίων για τα οποία η τιμή αντιστρέφεται:

Μετάλλαξη			
$A''_1 = 0\ 1\ 1\ 0\ 0$	$A'''_1 = 0\ 1\ 1\ 0\ 0$	$A''_3 = 1\ 1\ 0\ 1\ 1$	$A'''_3 = 1\ 1\ 0\ 1\ 1$
$A''_2 = 1\ 1\ 0\ 0\ 1$	$A'''_2 = 1\ 1\ 0\ 0\ 1$	$A''_4 = 1\ 0\ 0\ 0\ 0$	$A'''_4 = 1\ 0\ 0\ 1\ 0$

Πίνακας 2.16: Μετάλλαξη πληθυσμού

8. Ο νέος πληθυσμός

A/A	Χρωμόσωμα
1	$A_1 = 0\ 1\ 1\ 0\ 0 = 12_{10} \Rightarrow F_{(12)} = 144$
2	$A_2 = 1\ 1\ 0\ 0\ 1 = 25_{10} \Rightarrow F_{(25)} = 625$
3	$A_3 = 1\ 1\ 0\ 1\ 1 = 27_{10} \Rightarrow F_{(27)} = 729$
4	$A_4 = 1\ 0\ 0\ 1\ 0 = 18_{10} \Rightarrow F_{(18)} = 324$

Πίνακας 2.17: Νέος πληθυσμός

Η συνολική απόδοση του νέου πληθυσμού είναι 1822 σε σχέση με τον αρχικό πληθυσμό που ήταν 1170, ενώ η μέση απόδοση είναι 455.5 από 293 που ήταν για τον αρχικό πληθυσμό.

2.5 Εναλλακτικοί Αλγόριθμοι Εξελικτικού Υπολογισμού

Επειδή όλοι οι αλγόριθμοι εξελικτικού υπολογισμού εφαρμόζουν μία πειραματική διαδικασία αναζήτησης που λέγεται δοκιμή και σφάλμα είναι ευρετικοί (heuristic) (Yang, 2008).

Ο αλγόριθμος της στρατηγικής εξέλιξης και ο αλγόριθμος της διαφορικής εξέλιξης (βελτιωμένη απόδοση) έχουν χρησιμοποιηθεί πάρα πολύ για τη βελτιστοποίηση αντικειμενικών συναρτήσεων και παρουσιάζουν κοινά στοιχεία με αυτά των Γενετικών Αλγορίθμων. Η τεχνητή αποικία μελισσών και η βελτιστοποίηση αποικίας μυρμηγκιών ανήκουν στην κατηγορία αλγορίθμων που ονομάζεται *νοημοσύνη σμήνους* και εξομοιώνουν για την εύρεση τροφής τη συμπεριφορά σμηνών μελισσών και μυρμηγκιών, αντίστοιχα. Ο αλγόριθμος βαρυτικής αναζήτησης έχει υψηλή απόδοση και εξομοιώνει την έλξη μαζών σε βαρυτικό πεδίο. Επιπλέον υπάρχουν αλγόριθμοι βελτιστοποίησης οι οποίοι είναι εμπνευσμένοι από τη φύση όπως ο αλγόριθμος της πυγολαμπίδας, ο αλγόριθμος της νυχτερίδας, η μέθοδος αναζήτησης του κούκου και η βελτιστοποίηση βιογεωγραφίας.

3. Πολυκριτηριακή Βελτιστοποίηση με τη χρήση Εξελικτικών Αλγορίθμων

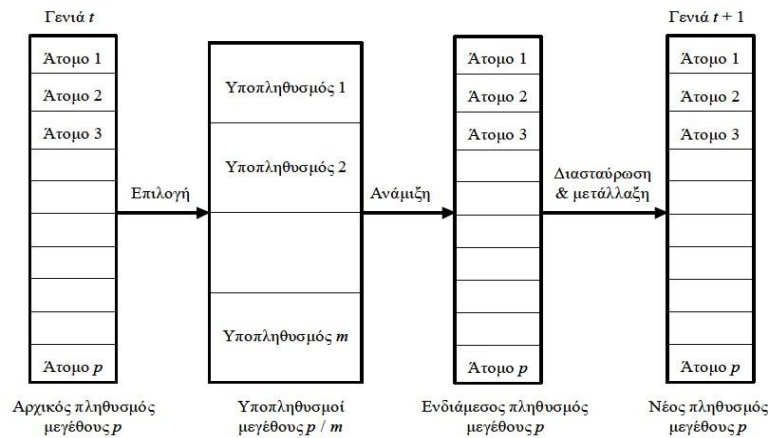
3.1 Εισαγωγή

Για την αντιμετώπιση των μειονεκτημάτων των κλασικών μεθόδων αναπτύχθηκαν εναλλακτικές τεχνικές πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης που έχουν ως μεθοδολογικό υπόβαθρο τους εξελικτικούς αλγορίθμους. Όπως είναι γνωστό, οι αλγόριθμοι αυτοί, επειδή βασίζουν την διαδικασία αναζήτησης σε τυχαία επιλεγμένες λύσεις που εξελίσσονται παράλληλα, αποσκοπούν στην αμερόληπτη διερεύνηση του εφικτού χώρου, χωρίς να θέτουν περιορισμούς σχετικά με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του. Για τον λόγο αυτόν, μπορούν να χειριστούν με την ίδια επιτυχία προβλήματα συνεχών και διακριτών μεταβλητών, κυρτών και μη κυρτών συναρτήσεων, καθώς και συναρτήσεων που χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητες ή τυχειότητα. Με κατάλληλη προσαρμογή τους είναι δυνατή η σύγκλισή τους όχι σε ένα μεμονωμένο σημείο του εφικτού χώρου αλλά σε μια περιοχή αυτού, που στην προκειμένη περίπτωση είναι το σύνολο Pareto.

3.2 Αλγόριθμοι πρώτης γενιάς

3.2.1 Ο διανυσματικός γενετικός αλγόριθμος (VEGA)

Ο διανυσματικός γενετικός αλγόριθμος (vector evaluated genetic algorithm, VEGA) αποτέλεσε την πρώτη απόπειρα ενσωμάτωσης πολλαπλών κριτηρίων σε σχήματα εξελικτικής αναζήτησης. Η μέθοδος προτάθηκε από τον Schaffer (Schaffer, 1984) χρησιμοποιείται ακόμη και σήμερα, κυρίως ως μέτρο σύγκρισης για τις νέες μεθοδολογίες που αναπτύσσονται. Σε κάθε γενιά δημιουργούνται υποπληθυσμοί, όπου η διαμόρφωση κάθε υποπληθυσμού γίνεται μέσω αναλογικής επιλογής (proportional selection) και βάσει του αντίστοιχου κριτηρίου. Συνεπώς, θεωρώντας έναν πληθυσμό p συνολικά ατόμων σε ένα πρόβλημα m κριτηρίων, δημιουργούνται m ισομεγέθεις υποπληθυσμοί, με αριθμό μελών p/m . Στη συνέχεια, το δείγμα αναμιγνύεται και προκύπτει ένας νέος πληθυσμός μεγέθους p , στον οποίο εφαρμόζονται οι τελεστές διασταύρωσης και μετάλλαξης κατά τον συνήθη τρόπο (Εικόνα 3.1). Ο Schaffer αναφέρει ότι η παραπάνω διαδικασία εξασφαλίζει την παραγωγή λύσεων που είναι τοπικά μη κατώτερες, με την έννοια ότι η μη κατωτερότητά τους περιορίζεται στον τρέχοντα πληθυσμό (Coello Coello C. , 1999).



Εικόνα 3.1: Σχηματική παράσταση των διαδικασιών του διανυσματικού γενετικού αλγορίθμου, με θεώρηση m στοιχικών συναρτήσεων, για πληθυσμό μεγέθους p (Coello Coello C. , 1999)

Τονίζεται ότι παρόλο που κατά την διάρκεια την εξελικτικής διαδικασίας είναι δυνατός ο εντοπισμός αρκετών λύσεων που είναι βέλτιστες κατά Pareto, ο αλγόριθμος καταλήγει τελικά σε μία τελική λύση, που είναι και η καλύτερα συμβιβαστική του προβλήματος. Στην πραγματικότητα, ο αλγόριθμος VEGA δεν είναι παρά μια αθροιστική μέθοδος, στην οποία οι τιμές των συντελεστών βάρους εξαρτώνται σε σχέση με τα επιμέρους κριτήρια από την κατανομή του αρχικού πληθυσμού. Αυτό σημαίνει ότι δύο μη κατώτερες λύσεις, που στην πραγματικότητα είναι μαθηματικά ισοδύναμες, αξιολογούνται ως προς διαφορετικό μέτρο επίδοσης. Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη ότι δεν δύναται να εντοπίσει μη κυρτές περιοχές του μετώπου Pareto κανένας γραμμικός συνδυασμός κριτηρίων, η μέθοδος μεροληπτεί υπέρ των κυρτών περιοχών του μετώπου.

Ένα άλλο σημαντικό μειονέκτημα της μεθόδου, το οποίο διαπίστωσε εξ αρχής και ο ίδιος ο Schaffer (1984, 1985), είναι η εξειδίκευση, λόγω της ανάπτυξης θυλάκων στις ακραίες περιοχές του μετώπου Pareto. Αυτό συμβαίνει επειδή η διαδικασία επιλογής μεταξύ των υποπληθυσμών γίνεται με βάση το εκάστοτε κριτήριο, χωρίς να δίνεται καμία σημασία στα υπόλοιπα. Με τον τρόπο αυτό, η επιβίωση των ατόμων που κυριαρχούν ως προς ένα και μόνο κριτήριο ευνοείται, ενώ αντίθετα η επιβίωση αυτών που εμφανίζουν ενδιάμεση (middling) συμπεριφορά εμποδίζεται, και που θα ήταν εύλογο να θεωρηθούν ως πλέον συμβιβαστικές του προβλήματος.

3.3 Αλγόριθμοι δεύτερης γενιάς με σχήματα ταξινόμησης

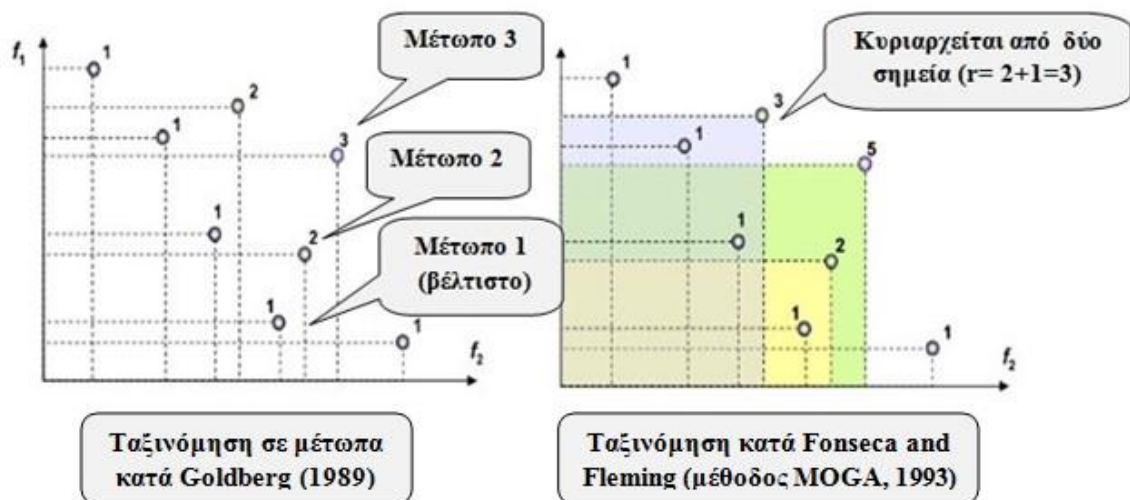
3.3.1 Ο γενετικός αλγόριθμος πολλαπλών στόχων (MOGA)

Ο λεγόμενος γενετικός αλγόριθμος πολλαπλών στόχων (multiple objective genetic algorithm, MOGA) αναπτύχθηκε από τους Fonseca and Fleming (Fonseca & Fleming,

1993), ως συνιστώσα ενός γενικευμένου διαδραστικού σχήματος ανάλυσης πολυκριτηριακών προβλημάτων. Στην μέθοδο MOGA, η τάξη κάθε ατόμου i ισούται με το πλήθος των κυρίαρχων μελών του πληθυσμού, $nd_{(i)}$, αυξημένο κατά ένα, δηλαδή:

$$r_{(i)} = 1 + nd_{(i)} \quad (3.1)$$

Στην Εικόνα 3.2 απεικονίζεται ο τρόπος ταξινόμησης των μελών ενός υποθετικού πληθυσμού, σε ένα πολυκριτηριακό πρόβλημα δύο διαστάσεων, τόσο με την μέθοδο του Goldberg (Goldberg, 1989a) όσο και με αυτή των Fonseca & Fleming. Στην πρώτη περίπτωση, η διαδικασία γίνεται κατά ομάδες, πρώτα δηλαδή εντοπίζονται τα μέλη του πρώτου μετώπου, στην συνέχεια, αφού αυτά αφαιρεθούν από τον πληθυσμό, εντοπίζονται τα μέλη του δεύτερου κοκ. Στην περίπτωση της μεθόδου MOGA, κάθε λύση εξετάζεται χωριστά, εντοπίζοντας το πλήθος των ατόμων σε σχέση με τα οποία είναι κατώτερη. Στον διδιάστατο χώρο αποτίμησης, για ένα πρόβλημα ταυτόχρονης ελαχιστοποίησης, τα μη κατώτερα σημεία είναι αυτά που βρίσκονται κάτω και αριστερά από το εν λόγω άτομο. Η διαδικασία αυτή εξασφαλίζει μεγαλύτερη ποικιλία τάξεων, π.χ. στο συγκεκριμένο παράδειγμα έξι έναντι τριών. Επισημαίνεται ότι στην μέθοδο MOGA δεν εκπροσωπούνται απαραίτητα όλες οι τάξεις σε έναν πληθυσμό. Στο παράδειγμα της Εικόνας απουσιάζει η τάξη με δείκτη 4, καθώς δεν υπάρχει σημείο που να κυριαρχείται από τρία ακριβώς μέλη του πληθυσμού.



Εικόνα 3.2: Παράδειγμα ορισμού του μέτρου κυριαρχίας (τάξη) των μελών ενός υποθετικού πληθυσμού σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο συναρτήσεων, με βάση την τυπική μέθοδο κυριαρχούμενης ταξινόμησης (αριστερά) και την μέθοδο MOGA (δεξιά) (Kalita)

Με βάση την παραπάνω εικόνα, τα μη κατώτερα μέλη του πληθυσμού και μόνο αυτά λαμβάνουν τάξη ίση με 1. Προφανώς, η μέγιστη δυνατή τιμή ταξινόμησης είναι ίση με το

μέγεθος του πληθυσμού, p , και αντιστοιχεί σε ένα άτομο που κυριαρχείται από όλα τα υπόλοιπα. Στην επιθυμητή περίπτωση, όλα τα μέλη έχουν μοναδιαία τιμή, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει λύση που να μην είναι Pareto βέλτιστη, τουλάχιστον κατά την τοπική έννοια. Επειδή η διαδικασία αυτή ενδέχεται να επιβάλει ισχυρή επιλεκτική πίεση, με συνέπεια την πρόωρη σύγκλιση του αλγορίθμου σε περιορισμένο τμήμα του μετώπου Pareto, εφαρμόζεται ένα σχήμα συσσώρευσης, με στόχο την διασπορά του πληθυσμού στο πεδίο αποτίμησης. Με τον τρόπο αυτό, εξασφαλίζεται ομοιόμορφη κατανομή του πληθυσμού στο μέτωπο Pareto.

3.3.2 Ο γενετικός αλγόριθμος μη κυριαρχούμενης ταξινόμησης (NSGA)

Ο γενετικός αλγόριθμος μη κυριαρχούμενης ταξινόμησης (non-dominated sorting genetic algorithm, NSGA), που αναπτύχθηκε από τους Srinivas and Deb (Srinivas & Deb, 1993), έχει ως κεντρική ιδέα τη σύζευξη μιας μεθόδου κατάταξης (ranking), που συμβάλλει στην επιλογή καλών λύσεων, και ενός σχήματος συσσώρευσης, που διατηρεί ευσταθείς υποπληθυσμούς πρόσφορων λύσεων.

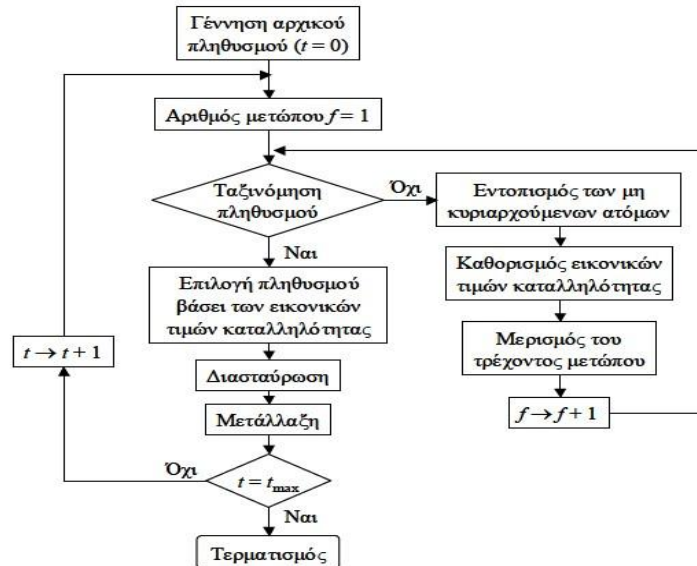
Συγκεκριμένα, σε κάθε γενιά, εντοπίζονται τα μη κυριαρχούμενα άτομα του πληθυσμού που διαμορφώνουν ένα πρώτο μέτωπο, η τάξη του οποίου αντιστοιχεί σε μια πολύ μεγάλη εικονική τιμή, ίση με το μέγεθος του πληθυσμού, p . Η εν λόγω τιμή είναι κοινή για τα μέλη του ίδιου μετώπου, ώστε να έχουν όλα παρόμοια πιθανότητα επιβίωσης.

Σύμφωνα με τους Srinivas and Deb, το πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ο αποτελεσματικός μετασχηματισμός οποιουδήποτε πολυκριτηριακού προβλήματος βελτιστοποίησης σε μονοκριτηριακό, ανεξαρτήτως του πλήθους των κριτηρίων, και χωρίς διάκριση μεταξύ του τελεστή ελαχιστοποίησης και μεγιστοποίησης. Ο αλγόριθμος εξασφαλίζει αφενός ταχεία σύγκλιση της διαδικασίας αναζήτησης προς τις περιοχές των μη κατωτέρων λύσεων, δηλαδή το σύνολο Pareto, και αφετέρου την εύρεση λύσεων που είναι ομοιόμορφα διεσπαρμένες στον χώρο αναζήτησης.

Ο Coello Coello (Coello Coello C. , 1999) θεωρεί ως μειονεκτήματα της μεθόδου NSGA ότι:

- απαιτεί μεγαλύτερο υπολογιστικό φόρτο (προφανώς επειδή η διάσταση του πεδίου X , δηλαδή ο αριθμός των μεταβλητών ελέγχου είναι συνήθως πολύ μεγαλύτερη σε σχέση με τη διάσταση του πεδίου F , δηλαδή το πλήθος των κριτηρίων),

- δίνοντας έμφαση στην διατήρηση μιας καλής διασποράς λύσεων στο πεδίο αναζήτησης X , δεν εγγυάται αντίστοιχα καλή ποιότητα της παραγόμενης προσέγγισης του μετώπου Pareto.



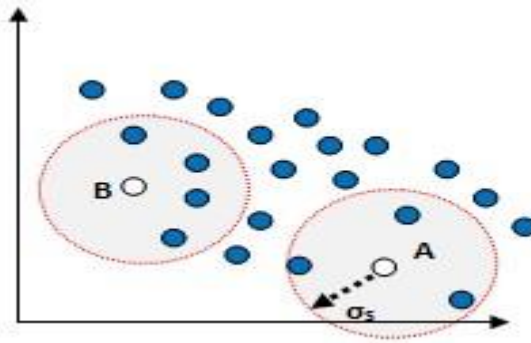
Εικόνα 3.3: Λογικό διάγραμμα ροής του αλγορίθμου NSGA (Srinivas & Deb, 1993)

3.3.3 Ο γενετικός αλγόριθμος με θύλακες Pareto (NPGA)

Ο γενετικός αλγόριθμος με θύλακες Pareto (niched Pareto genetic algorithm, NPGA) αναπτύχθηκε από τους Horn and Nafpliotis (Horn & Nafpliotis, 1993) και κεντρική του ιδέα είναι ένα σχήμα επιλογής μέσω διαγωνισμού, όπου η σύγκριση των υποψήφιων ατόμων γίνεται με βάση μια ευρετική διαδικασία ταξινόμησης. Οι Horn and Nafpliotis ανέπτυξαν ένα σχήμα επιλογής, το οποίο ονόμασαν διαγωνισμό κυριαρχίας Pareto (Pareto dominance tournament). Η διαφορά με τους αλγόριθμους που παρουσιάστηκαν έως τώρα έγκειται στο γεγονός ότι η κυριαρχία κάθε ατόμου δεν ελέγχεται εφ' όλου του πληθυσμού, αλλά με βάση ένα δείγμα τυχαία επιλεγμένων μελών του.

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία τόσες φορές όσες το μέγεθος του πληθυσμού, p , προκύπτει ένας ενδιάμεσος, βοηθητικός πληθυσμός πάνω στον οποίο εφαρμόζονται, κατά τα γνωστά, οι τελεστές διασταύρωσης και μετάλλαξης για την παραγωγή των απογόνων.

Το πλεονέκτημα του αλγορίθμου NPGA είναι η αποδοτικότητά του σε σχέση με τον υπολογιστικό φόρτο άλλων σχημάτων καθώς δεν χρησιμοποιείται το σύνολο του πληθυσμού αλλά ένα τμήμα αυτού.



Εικόνα 3.4: Σχηματικό παράδειγμα της διαδικασίας επιλογής μεταξύ δύο υποψήφιων λύσεων A και B, με εφαρμογή της μεθόδου NPGA σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο συναρτήσεων. Με μπλε κύκλους απεικονίζονται τα μέλη του δείγματος αναφοράς. Επειδή προκύπτει ισοπαλία (τα A και B είναι μη κυριαρχούμενα ως προς το συγκεκριμένο δείγμα), επιλέγεται το σημείο A, που έχει το μικρότερο αριθμό συγκεντρωμένων ατόμων στον θύλακά του (Horn & Nafpliotis, 1993)

Ωστόσο, η επίδοση της μεθόδου εξαρτάται έντονα από το μέγεθος του δείγματος. Αν αυτό είναι πολύ μικρό, και ως εκ τούτου μη αντιπροσωπευτικό των χαρακτηριστικών του πληθυσμού, ο παραπάνω εμπειρικός τρόπος καθορισμού της έννοιας της κυριαρχίας δεν μπορεί να θεωρηθεί αξιόπιστος. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα στον τελικό πληθυσμό να υπάρχει μεγάλο ποσοστό λύσεων που δεν είναι βέλτιστες Pareto. Από την άλλη πλευρά, αν το μέγεθος είναι υπερβολικά μεγάλο, όχι μόνο περιορίζεται η αποδοτικότητα του αλγορίθμου, αλλά υπάρχει και ο κίνδυνος πρόωρης σύγκλισης σε μια στενή περιοχή του μετώπου Pareto.

3.4 Αλγόριθμοι τρίτης γενιάς

3.4.1 Η έννοια του εκλεκτισμού

Ένα σοβαρό μειονέκτημα των σχημάτων δεύτερης γενιάς είναι η απώλεια ορισμένων εξαιρετικά σημαντικών λύσεων, εξαιτίας της στοχαστικής δομής των μηχανισμών επιλογής (Zitzler, Deb, & Thiele, 2000). Ο παραπάνω χαρακτηρισμός αποδίδεται σε μη κατώτερες λύσεις, οι οποίες είναι αντιπροσωπευτικές χαρακτηριστικών περιοχών του μετώπου Pareto. Οι λεγόμενοι αλγόριθμοι τρίτης γενιάς, που ξεκίνησαν να αναπτύσσονται στα τέλη της δεκαετίας του 1990, εισάγουν την έννοια του εκλεκτισμού (elitism), που υποδηλώνει τη χρήση μεθόδων ή κανόνων προστασίας των εν λόγω λύσεων, καθώς εντοπίζονται κατά την εξελικτική διαδικασία (Deb K., 1999).

Συνήθως, αν και όχι απαραίτητα, η προστασία των εξαιρετικών λύσεων εξασφαλίζεται με την αντιγραφή τους σε έναν εξωτερικό (ή δευτερεύοντα) πληθυσμό (ή αρχείο), πεπερασμένου μεγέθους, και τον ανεξάρτητο χειρισμό τους από τον υπόλοιπο πληθυσμό.

3.4.2 Ο εξελικτικός αλγόριθμος Pareto ισχύος (SPEA)

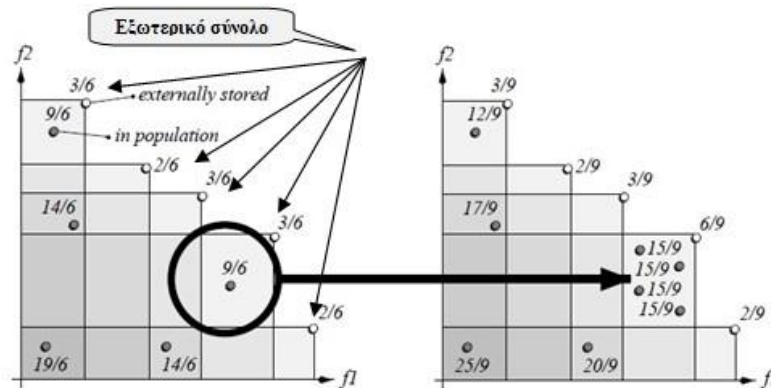
Ο εξελικτικός αλγόριθμος Pareto ισχύος (strength Pareto evolutionary algorithm, SPEA) είναι μια από τις δημοφιλέστερες μεθοδολογικές προσεγγίσεις (Zitzler & Thiele, 1998). Η κεντρική ιδέα συνίσταται στη διατήρηση ενός εξωτερικού συνόλου (external set), που περιέχει τις μη κατώτερες λύσεις του πληθυσμού και συμβολίζεται με P_0 . Το εξωτερικό σύνολο χρησιμοποιείται και για τον καθορισμό του μέτρου καταλληλότητας. Το μέγεθός του είναι καθορισμένο εξ αρχής, κάτι που σημαίνει ότι υπάρχει συγκεκριμένος αριθμός εναλλακτικών επιλογών, μετά το πέρας της υπολογιστικής διαδικασίας.

Στην Εικόνα 3.5, αριστερά, δίνεται ένα υποθετικό παράδειγμα καθορισμού της ισχύος των μελών ενός πληθυσμού εννέα ατόμων, σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο κριτηρίων. Το εξωτερικό σύνολο αποτελείται από τέσσερα σημεία, τα οποία απεικονίζονται με λευκούς κύκλους και αντιστοιχούν στις ισχυρά μη κατώτερες λύσεις του προβλήματος. Η ορθογώνια περιοχή του χώρου αποτίμησης που εκτείνεται πάνω και δεξιά από κάθε μέλος του εξωτερικού συνόλου περιλαμβάνει όλα τα σημεία του τρέχοντος πληθυσμού επί των οποίων αυτό κυριαρχεί. Οι τομές των ορθογωνίων διαμορφώνουν ένα μη συμμετρικό πλέγμα, κάθε κυψέλη του οποίου μπορεί να θεωρηθεί ως ένας θύλακας. Η απόχρωση κάθε θύλακα, η οποία καθορίζεται από τον αριθμό των κοινών τομών των ορθογωνίων, είναι ανάλογη της ισχύος των ατόμων που αυτή περιλαμβάνει. Όσο πιο σκούρο είναι το χρώμα μιας κυψέλης, τόσο πιο πολλά είναι τα μέλη του εξωτερικού συνόλου που κυριαρχούν επί του εκάστοτε ατόμου του λοιπού πληθυσμού, και συνεπώς τόσο μεγαλύτερη η τιμή της ισχύος του. Δηλαδή, άτομα που είναι πολύ απομακρυσμένα σε σχέση με το τρέχον μέτωπο Pareto λαμβάνουν μεγάλη τιμή ισχύος, οπότε σε αυτά αποδίδεται αντίστοιχα μικρή πιθανότητα επιβίωσης.

Σύμφωνα με τη μέθοδο SPEA ο τρόπος καθορισμού των τιμών ισχύος ευνοεί, με έμμεσα, την παραγωγή ομοιόμορφα κατανεμημένων πληθυσμών.

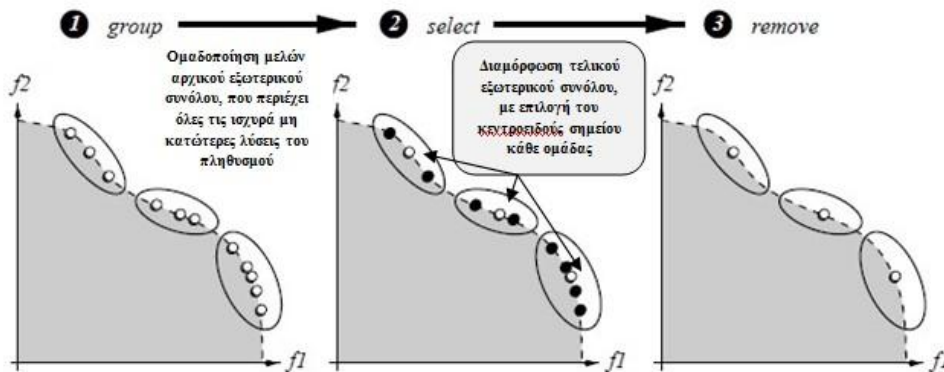
Το χαρακτηριστικό αυτό απεικονίζεται στο παράδειγμα της Εικόνας 3.5, δεξιά, όπου έχουν προστεθεί δύο επιπλέον μέλη στον κάτω δεξιά θύλακα του χώρου αποτίμησης, βάσει των οποίων έχουν αναπροσαρμοστεί οι τιμές όλου του πληθυσμού. Η προσθήκη αυτή έχει ως αποτέλεσμα την σημαντική αύξηση της κοινής ισχύος των τριών μελών του εν λόγω θύλακα (από 11/6 σε 17/8), σε σχέση με την ισχύ των υπόλοιπων μελών του πληθυσμού. Συνεπώς, είναι εξαιρετικά απίθανη η επιβίωση των μελών του ίδιου θύλακα,

αντίθετα ο αλγόριθμος αναμένεται να ευνοήσει την «μετατόπισή» τους προς άλλες περιοχές του μετώπου Pareto.



Εικόνα 3.5: Παραδείγματα ορισμού της ισχύος των μελών ενός πληθυσμού (Zitzler, 1999)

Η δεύτερη διαδικασία αποσκοπεί στη μείωση του μεγέθους του εξωτερικού συνόλου, στην περίπτωση που αυτό υπερβαίνει μια μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή, p_0 . Η τεχνική που ακολουθείται βασίζεται στη μέθοδο συστοίχισης του Morse (Morse, 1980), σύμφωνα με την οποία διαμορφώνονται p_0 ομάδες γειτονικών σημείων (θύλακες), και από κάθε θύλακα διατηρείται το κεντροειδές. Με τον τρόπο αυτό, εξασφαλίζεται ομοιόμορφη διασπορά των μη κατωτέρων σημείων που περιλαμβάνονται στο τρέχον εξωτερικό σύνολο (Εικόνα 3.6).



Εικόνα 3.6: Παράδειγμα εφαρμογής της διαδικασίας μείωσης του μεγέθους του εξωτερικού συνόλου σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης δύο συναρτήσεων (Zitzler, 1999)

3.4.3 Η εξελικτική στρατηγική με αρχεία Pareto (PAES)

Η εξελικτική στρατηγική με αρχεία Pareto (Pareto archive evolution strategy, PAES) είναι μια εκλεκτική τεχνική πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης, που αναπτύχθηκε από τους Knowles and Corne (Knowles & Corne, 2002). Η εκλεκτικότητα συνίσταται στην

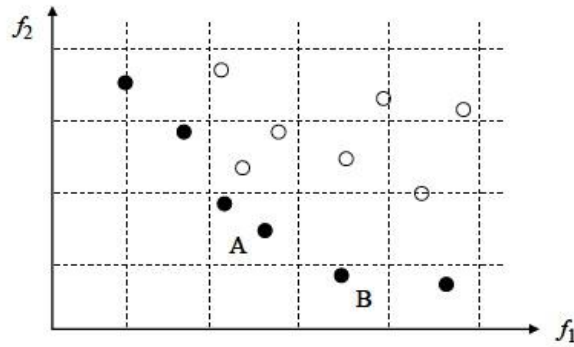
διατήρηση ενός ιστορικού αρχείου, που περιέχει όλες τις μη κατώτερες λύσεις που έχουν εντοπιστεί μέχρι την τρέχουσα γενιά.

Η διαδικασία παραγωγής λύσεων είναι εξαιρετικά απλή σύμφωνα με την οποία κάθε απόγονος παράγεται από έναν γονέα, με απλή μετάλλαξη του τελευταίου. Εφόσον ο απόγονος κυριαρχεί επί του γονέα του, επιλέγεται ως ο επόμενος γονέας. Αντίθετα, αν ο γονέας κυριαρχεί επί του απογόνου του, τότε παράγεται ένας άλλος απόγονος, με την ίδια διαδικασία. Αν τα δύο άτομα είναι ισοδύναμα κατά Pareto (δηλαδή αδιάφορα μεταξύ τους), χρησιμοποιείται ως βάση το αρχείο μη κατωτέρων λύσεων. Αν ο απόγονος κυριαρχεί έναντι μιας εκ των λύσεων αυτών, τότε καταλαμβάνει την θέση της στο αρχείο. Διαφορετικά, εφαρμόζεται μια διαδικασία σύγκρισης του γονέα και του απογόνου του, αντίστοιχης της μεθόδου διαγωνισμού της μεθόδου NPGA.

Για την διατήρηση της διασποράς του πληθυσμού, η μέθοδος PAES εφαρμόζει μια στοιχειώδη τεχνική ομοιόμορφου πλέγματος, εισάγοντας μια διαδικασία συνωστισμού (crowding), με την οποία το πεδίο αποτίμησης διαχωρίζεται σε ισομεγέθη τμήματα. Τα πλεονεκτήματα του είναι αφενός ο μειωμένος υπολογιστικός φόρτος σε σχέση με τις συνήθεις διαδικασίες συσσώρευσης, που υπολογίζουν ένα μέτρο απόστασης όλων των μελών του πληθυσμού μεταξύ τους, καθώς και ο προσαρμοστικός της χαρακτήρας, που δεν απαιτεί επιπλέον παραμέτρους (όπως η ακτίνα θύλακα), με εξαίρεση το πλήθος των διαιρέσεων του πλέγματος.

3.4.4 Ο αλγόριθμος επιλογής Pareto λύσεων με βάση φακέλους (PESA)

Ο αλγόριθμος PESA (Pareto Envelope-based Selection Algorithm) αναπτύχθηκε από τους Corne et al. (Corne, Knowles, & Oates, 2000), συνδυάζοντας στοιχεία των μεθόδων SPEA και PAES. Συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί, όπως και στη μέθοδο SPEA, έναν μικρό αρχικό πληθυσμό για την παραγωγή νέων λύσεων, και έναν μεγαλύτερο εξωτερικό (ή δευτερεύοντα) πληθυσμό για την αποθήκευση της τρέχουσας προσέγγισης του μετώπου Pareto. Επιπλέον, υλοποιεί το ίδιο σχήμα διατήρησης διασποράς με την μέθοδο PAES, που υλοποιεί ένα σχήμα πλέγματος στο πεδίο αποτίμησης. Η διαφοροποίηση του αλγορίθμου PESA σε σχέση με τις μεθόδους SPEA και PAES έγκειται στους μηχανισμούς επιλογής αλλά και αντικατάστασης των περίσσιων μελών του εξωτερικού συνόλου (που απαιτείται όταν ο αριθμός των μη κατωτέρων λύσεων υπερβαίνει τη χωρητικότητά του), οι οποίοι βασίζονται αποκλειστικά στο εν λόγω παράγοντα.



Εικόνα 3.7: Απεικόνιση της στρατηγικής συνωστισμού της μεθόδου PESA, σε ένα υποθετικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο συναρτήσεων. Οι διακεκομμένες χωρίζουν το πεδίο αποτίμησης σε υπερκιβώτια (που στην προκειμένη περίπτωση είναι τετράγωνα). Με σκούρο χρώμα απεικονίζονται τα μη κατώτερα μέλη του πληθυσμού, που ανήκουν στο εξωτερικό σύνολο (Corne, Knowles, & Oates, 2000)

Η υπολογιστική διαδικασία έχει ως εξής: Σε κάθε γενιά, τα μη κατώτερα μέλη του αρχικού συνόλου μεταφέρονται στο εξωτερικό σύνολο, ένα προς ένα. Αν με την εισαγωγή ενός νέου σημείου στο εξωτερικό σύνολο ορισμένα από τα υφιστάμενα μέλη του κυριαρχούνται από αυτό, τα τελευταία απομακρύνονται, ενώ εφόσον το μέγεθος του εξωτερικού συνόλου ξεπερνά την χωρητικότητά του, τότε ο πληθυσμός του μειώνεται. Η επιλογή των γονέων γίνεται από το εξωτερικό σύνολο, με δυαδικό διαγωνισμό. Μεταξύ των εκάστοτε δύο υποψηφίων, επιλέγεται αυτός με τον μικρότερο παράγοντα στριμώγματος (π.χ. το σημείο B έναντι του A, στο παράδειγμα της Εικόνας 3.7), ευνοώντας την εξερεύνηση περιοχών με μικρή πυκνότητα πληθυσμού. Κάθε ζεύγος γονέων παράγει έναν μοναδικό απόγονο, μέσω διασταύρωσης, ενώ ένας μεμονωμένος γονέας παράγει τον απόγονό του, μέσω μετάλλαξης. Οι συχνότητες διασταύρωσης και μετάλλαξης είναι p_c και $(1 - p_c)$, αντίστοιχα.

Σε μια μεταγενέστερη εκδοχή της μεθόδου PESA, που αναφέρεται ως PESA-II (Corne, Jerram, Knowles, & Oates, 2001), εισάγεται η έννοια της επιλογής περιοχών αντί σημείων. Αυτό σημαίνει ότι η μονάδα επιλογής δεν είναι το άτομο αλλά το υπερκιβώτιο. Συνεπώς, κάθε φορά που καλείται ο τελεστής επιλογής (για αναπαραγωγή ή αντικατάσταση σημείων), αρχικά προσδιορίζεται το κατάλληλο υπερκιβώτιο, από το οποίο επιλέγεται, στη συνέχεια, ένα από τα σημεία του για τις περαιτέρω διαδικασίες.

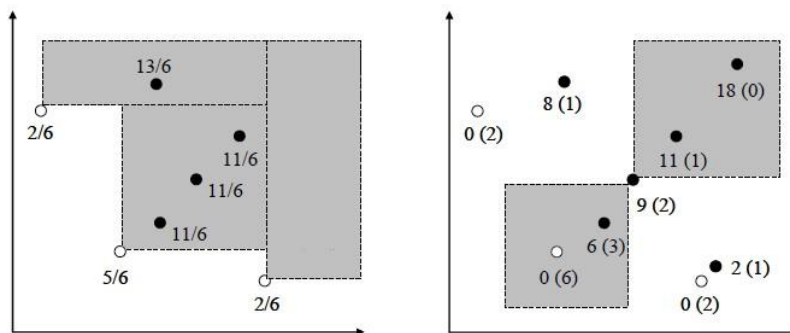
3.4.5 Ο βελτιωμένος εξελικτικός αλγόριθμος Pareto ισχύος (SPEA-II)

Οι Zitzler et al. (Zitzler, Laumanns, & Thiele, 2001) ανέπτυξαν μια βελτιωμένη εκδοχή της SPEA, με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- ένα καινοτόμο σχήμα αποτίμησης της καταλληλότητας, το οποίο λαμβάνει υπόψη του επί πόσων ατόμων κυριαρχεί και από πόσα άτομα κυριαρχείται κάθε μέλος του πληθυσμού,
- μια μέθοδο εκτίμησης της πυκνότητας του πληθυσμού, που επιτρέπει μια καλύτερη κατεύθυνση της διαδικασίας αναζήτησης,
- μια εναλλακτική μέθοδο περικοπής του εξωτερικού συνόλου, σε αντικατάσταση της μεθόδου ομαδοποίησης που χρησιμοποιεί η μέθοδος SPEA.

Μια επιπλέον διαφορά σε σχέση με την αρχική εκδοχή της μεθόδου SPEA είναι το γεγονός ότι το μέγεθος του εξωτερικού συνόλου, p_0 , διατηρείται σταθερό. Αν λοιπόν σε μια γενιά ο αριθμός των μη κυριαρχούμενων ατόμων είναι μικρότερος από p_0 , τότε το εξωτερικό σύνολο συμπληρώνεται από κυριαρχούμενα, και ως εκ τούτου μη βέλτιστα, άτομα.

Ο καθορισμός του μέτρου καταλληλότητας γίνεται ως εξής: Αρχικά, για κάθε μέλος i του πληθυσμού υπολογίζεται η ισχύς του, $s_{(i)}$, που αντιστοιχεί στον αριθμό των ατόμων επί των οποίων κυριαρχεί. Υπενθυμίζεται ότι στον αρχικό αλγόριθμο, ο υπολογισμός της ισχύος γινόταν αποκλειστικά για τα μέλη του εξωτερικού συνόλου. Ακολουθώντας, υπολογίζεται η αρχική καταλληλότητα $r_{(i)}$, ως το άθροισμα όλων των τιμών $s_{(j)}$ των ατόμων που κυριαρχούν επί του μέλους i . Η τιμή $r_{(i)} = 0$ αντιστοιχεί αποκλειστικά στα μη κυριαρχούμενα μέλη του τρέχοντος πληθυσμού, ενώ όσο αυξάνει η τιμή αυτή τόσο αυξάνει ο αριθμός των ατόμων που κυριαρχούν επί του συγκεκριμένου μέλους i .



Εικόνα 3.8: Σύγκριση των μεθόδων υπολογισμού της καταλληλότητας των μελών ενός υποθετικού πληθυσμού σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης δύο συναρτήσεων, με τις μεθόδους SPEA (αριστερά) και SPEA II (δεξιά). Με λευκό κύκλο απεικονίζονται τα μέλη του εξωτερικού συνόλου, δηλαδή οι μη κατώτερες λύσεις. Στο δεξί σχήμα, οι τιμές εντός παρένθεσης αντιστοιχούν στην ισχύ κάθε ατόμου, ήτοι τον αριθμό των μελών του πληθυσμού επί των οποίων κυριαρχεί (Zitzler, Laumanns, & Thiele, 2001)

Όπως φαίνεται στην παραπάνω εικόνα (Εικόνα 3.8), η διαδικασία αυτή εξασφαλίζει σαφώς μεγαλύτερη ποικιλία τιμών καταλληλότητας, δεδομένου ότι ο έλεγχος της

κυριαρχίας γίνεται με βάση το σύνολο του δείγματος, και όχι μόνο το εξωτερικό σύνολο, όπως συμβαίνει με τη μέθοδο SPEA.

Στην περίπτωση ύπαρξης ατόμων με ίδιες τιμές αρχικής καταλληλότητας, εισάγεται ως επιπλέον πληροφορία ένα μέτρο πυκνότητας. Η διαδικασία που εφαρμόζεται βασίζεται στη μέθοδο του k-πλησιέστερου γείτονα (k-th nearest neighbor), λαμβάνοντας ως εκτιμήτρια της πυκνότητας ενός σημείου i την απόσταση του k-οστού κοντινότερου σημείου του δείγματος, που συμβολίζεται με σ_i^k .

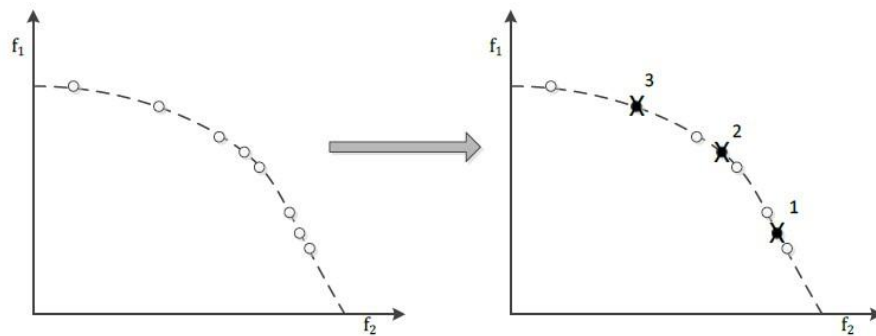
Οι ερευνητές προτείνουν ως αντιπροσωπευτική τιμή της πυκνότητας την τετραγωνική ρίζα του μεγέθους του πληθυσμού και του εξωτερικού συνόλου, αν και μπορεί να θεωρηθεί επαρκής ακόμη και η τιμή $k = 1$. Το μέτρο πυκνότητας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$d(i) = 1/(\sigma_i^k + 2) \quad (3.2)$$

Η ποσότητα δύο στον παρονομαστή προστίθεται ώστε να εξασφαλιστεί η συνθήκη $0 < d_{(i)} < 1$. Η ολική καταλληλότητα κάθε ατόμου προκύπτει προσθέτοντας στην αρχική τιμή το μέτρο πυκνότητας, δηλαδή:

$$f_{(i)} = d_{(i)} + r_{(i)} \quad (3.3)$$

Σε κάθε γενιά αντιγράφονται στο εξωτερικό σύνολο όλες οι μη κατώτερες λύσεις, δηλαδή τα άτομα εκείνα για τα οποία ισχύει $r_{(i)} = 0$, και συνεπώς $f_{(i)} < 1$. Αν το μέγεθος του εξωτερικού συνόλου είναι μικρότερο από την επιθυμητή τιμή p_0 , τότε σε αυτό αντιγράφονται τα καλύτερα μέλη από τον υπόλοιπο πληθυσμό και το προηγούμενο εξωτερικό σύνολο, ώσπου να συμπληρωθεί ο αριθμός p_0 . Αν το μέγεθος του εξωτερικού συνόλου, δηλαδή το πλήθος των μη κατωτέρων λύσεων, είναι μεγαλύτερο από p_0 , τότε εφαρμόζεται μια διαδικασία περικοπής, που είναι ελαφρά διαφορετική σε σχέση με αυτή που περιγράφηκε για την αρχική μέθοδο SPEA. Συγκεκριμένα, πρόκειται για μια αναδρομική διαδικασία, στην οποία κάθε φορά απομακρύνεται το σημείο που έχει την ελάχιστη απόσταση σ_i^k σε σχέση με όλα τα υπόλοιπα. Η διαδικασία αυτή θεωρείται ότι εξασφαλίζει τη διατήρηση των οριακών λύσεων.



Εικόνα 3.9: Η απεικόνιση της μεθόδου περικοπής από τον πληθυσμό αρχείου. Στα αριστερά δεικνύεται ένα σύνολο μη επικυριαρχούμενων λύσεων ενώ δεξιά φαίνονται οι λύσεις οι οποίες απομακρύνθηκαν και με ποια σειρά από τον τελεστή περικοπής (Zitzler, Laumanns, & Thiele, 2001)

3.4.6 Ο ταχύς και εκλεκτικός γενετικός αλγόριθμος μη κυριαρχούμενης ταξινόμησης (NSGA-II)

3.4.6.1 Εισαγωγή

Ο χαρακτηριζόμενος ως ταχύς και εκλεκτικός γενετικός αλγόριθμος μη κυριαρχούμενης ταξινόμησης (fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm, NSGA-II) αναπτύχθηκε το 2000 στο Ινστιτούτο Kanpur της Ινδίας από τους Deb et al (Deb, Agarwal, Pratap, & Meyarivan, 2000). Ο αλγόριθμος αποτελεί βελτιωμένη εκδοχή της μεθόδου NSGA, και χειρίζεται με επιτυχία τρία σημαντικά μειονεκτήματά της, και συγκεκριμένα:

- τον υπολογιστικό φόρτο που απαιτεί η διαδικασία ταξινόμησης,
- την έλλειψη εκλεκτισμού, που έχει ως συνέπεια την πιθανή απώλεια βέλτιστων λύσεων Pareto κατά την εξελικτική διαδικασία,
- την εξάρτηση της επίδοσης του αλγορίθμου από την τιμή της παραμέτρου συσσώρευσης.

Ως γνωστόν, για την ταξινόμηση του πληθυσμού με βάση τον ορισμό της κυριαρχίας Pareto, απαιτείται η εξονυχιστική σύγκριση κάθε ατόμου με όλα τα υπόλοιπα, και ως προς το σύνολο των κριτηρίων βελτιστοποίησης. Αν m είναι το πλήθος των κριτηρίων και p το μέγεθος του πληθυσμού, τότε το απαιτούμενο πλήθος υπολογισμών είναι τάξης $O(m p^3)$. Στον αλγόριθμο NSGA-II εισάγεται μια ειδική διαδικασία ταξινόμησης, η οποία χρησιμοποιεί ένα μητρώο όπου αποθηκεύονται όλες οι λύσεις επί των οποίων κυριαρχεί κάθε άτομο, επιτυγχάνοντας έτσι υπολογιστικό φόρτο τάξης $O(m p^2)$.

3.4.6.2 Μείωση Πολυπλοκότητας

Η μέθοδος με την οποία μειώνει την πολυπλοκότητα βασίζεται σε δύο μεταβλητές την n_p και S_p , όπου η πρώτη αποτυπώνει τον αριθμό των λύσεων που επικυριαρχούν της λύσης p και η δεύτερη δηλώνει το σύνολο των λύσεων που επικυριαρχούνται από τη λύση p . Αρχικά αναγνωρίζονται όλες οι λύσεις με $n_p = 0$. Οι λύσεις αυτές γίνονται μέλη του μετώπου F_1 , όπου σαν F_1 καλείται το τρέχον μέτωπο. Για κάθε λύση του F_1 επεξεργαζόμαστε το κάθε μέλος του συνόλου S_p και μειώνουμε τον αριθμό του n_q κατά μια μονάδα. Αν κατά την παραπάνω διαδικασία, ο $n_q = 0$ τότε τοποθετούμε τη λύση αυτή σε μια λίστα Q . Όταν όλα τα μέλη του συνόλου S_p έχουν επεξεργαστεί, τότε καλούμε τα μέλη του μετώπου F_1 ως μέλη του πρώτου μετώπου. Η διαδικασία συνεχίζεται όπως περιγράφηκε παραπάνω δηλώνοντας ως τρέχον μέτωπο τη λίστα Q .

Αλγόριθμος : Μείωση Πολυπλοκότητας {fast-non-dominated-sort(P)}	
Είσοδος: Λύσεις P	
Έξοδος: Μέτωπα H	
for each $p \in P$	
$S_p = \emptyset$	
$N_p = 0$	
for each $q \in P$	
If ($p < q$) then	Αν η p επικυριαρχεί της q τότε
$S_p = S_p \cup \{q\}$	Συμπεριλαμβάνεται η q στο σύνολο S_p
else If ($q < p$) then	Αν η q επικυριαρχεί της p τότε
$n_p = n_p + 1$	Ο δείκτης n_p αυξάνεται κατά 1
if $n_p = 0$ then	Αν καμιά λύση δεν επικυριαρχεί την p , τότε
$p_{rank} = 1$	
$F_1 = F_1 \cup \{p\}$	Η p αποτελεί μέλος του πρώτου μετώπου
$i=1$	
while $F_i \neq \emptyset$	
$Q = \emptyset$	
for each $p \in F_i$	Για κάθε μέλος p του F_i
for each $q \in S_p$	Τροποποιείται κάθε μέλος του S_p
$n_q = n_q - 1$	Μειώνεται η τιμή του n_q κατά 1
if $n_q = 0$ then	Αν το n_q είναι μηδέν τότε η q γίνεται μέλος του Q
$q_{rank} = i + 1$	
$Q = Q \cup \{q\}$	
$i = i + 1$	
$F_i = Q$	Το τρέχον μέτωπο σχηματίζεται από τα μέλη του Q

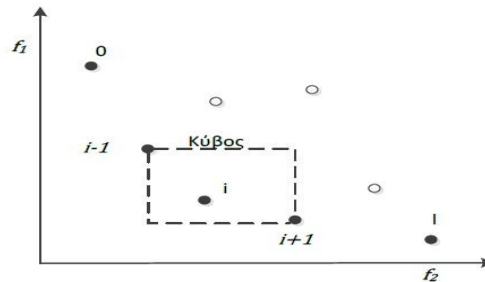
Εικόνα 3.10: Ψευδοκώδικας μείωσης της πολυπλοκότητας {fast-non-dominated-sort(P)} (Deb, Pratap, Agarwal, & Meyarivan, 2002)

3.4.6.3 Απόσταση πυκνότητας (Crowding Distance)

Για τη περιγραφή αυτής της μεθόδου, προσδιορίζουμε σε πρώτη φάση την κλίμακα με την οποία μετράται η πυκνότητα στη γειτονιά ενός ατόμου και στη συνέχεια περιγράφουμε τη διαδικασία με την οποία γίνεται η επιλογή του ατόμου που θα αποτελέσει μέλος της mating pool στη τρέχουσα γενιά.

- **Εκτίμηση της Πυκνότητας στη γειτονιά ενός ατόμου**

Η εκτίμηση του μέτρου της πυκνότητας των μελών του πληθυσμού γίνεται με βάση το μέγιστο κυβοειδές που περικλείει κάθε σημείο i , χωρίς να περικλείει κανένα άλλο γειτονικό (Εικόνα 3.11). Σε κάθε διάσταση του προβλήματος, τα μέλη κάθε μετώπου ταξινομούνται ως προς το αντίστοιχο κριτήριο j και εντοπίζονται οι γείτονες $(i + 1)$ και $(i - 1)$ κάθε σημείου i .



Εικόνα 3.11: Παράδειγμα ορισμού της απόστασης συνωστισμού στον διδιάστατο χώρο (Deb, Pratap, Agarwal, & Meyarivan, 2002)

Η εκτιμήτρια της πυκνότητας του σημείου i καλείται απόσταση συνωστισμού (crowding distance), και υπολογίζεται ως:

$$i_{distance} = \sum_{j=1}^m f_j(i+1) - f_j(i-1) \quad (3.4)$$

Η μέθοδος του υπολογισμού της απόστασης συνωστισμού αναλύεται παρακάτω

Αλγόριθμος : Υπολογισμός απόστασης συνωστισμού {crowding-distance-assignment(I)}

Είσοδος: Λύσεις $\in I$

Έξοδος: Απόσταση συνωστισμού $I_{distance}$

$l = I $ for each I , set $I[i].distance = 0$ for each objective m $I = \text{sort}(I, m)$ $I[1].distance = I[l].distance = \infty$ for $i = 2$ to $(l-1)$ $I[i].distance = I[i].distance + (I[i+1].m - I[i-1].m) / (f_m^{max} - f_m^{min})$	Αριθμός λύσεων στο I Αρχικοποίηση της απόστασης Ταξινόμηση των τιμών των στόχων έτσι ώστε οι ακρότατες τιμές να επιλέγονται πάντα Για όλα τα υπόλοιπα σημεία
---	--

Εικόνα 3.12: Ψευδοκώδικας υπολογισμού απόστασης συνωστισμού {crowding-distance-assignment(I)} (Deb, Pratap, Agarwal, & Meyarivan, 2002)

- **Τελεστής επιλογής με αγώνα πυκνότητας (Crowded Tournament Selection Operator)**

Για τη σύγκριση των λύσεων και την εντέλει επιλογή τους κατά τη διάρκεια του βήματος της επιλογής του ΓΑ, χρησιμοποιείται ο τελεστής της σύγκρισης συνωστισμού ($\geq n$). Υποθέτουμε πως η κάθε λύση έχει δύο ιδιότητες, την τάξη της μη επικυριαρχίας, i_{rank} , και την τοπική απόσταση συνωστισμού, $i_{distance}$. Κατ' αυτόν τον τρόπο ορίζουμε τον τελεστή σύγκρισης συνωστισμού ως:

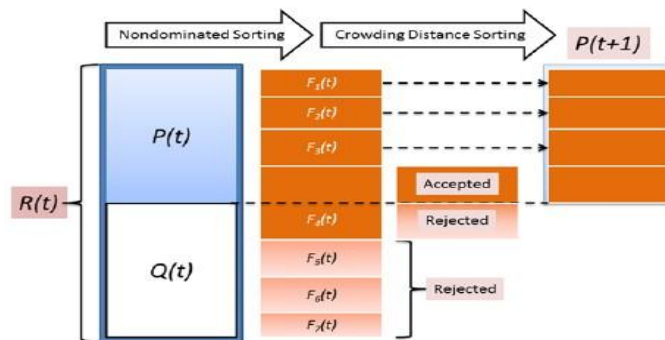
$$i \geq n j \text{ αν } \left\{ \begin{array}{l} (i_{rank} < j_{rank} \\ \text{ή} \\ (i_{rank} = j_{rank} \text{ και } i_{distance} > j_{distance}) \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

Επομένως, όταν δύο λύσεις ανήκουν σε διαφορετικές τάξεις μη επικυριαρχίας, προτιμούμε τη λύση με την μικρότερη τάξη και όταν βρίσκονται στην ίδια τάξη αλλά έχουν διαφορετικές αποστάσεις συνωστισμού, τότε προτιμούμε τη λύση με τη μεγαλύτερη απόσταση συνωστισμού.

3.4.6.4 Περιγραφή κύριας ρουτίνας του αλγορίθμου

Τα βήματα του αλγορίθμου NSGA-II έχουν ως εξής:

Αρχικά, παράγεται ένας τυχαίος πληθυσμός γονέων $P(t)$, μεγέθους p , που ταξινομείται με βάση την έννοια της μη κυριαρχίας. Κάθε μέλος του πληθυσμού λαμβάνει μια τιμή καταλληλότητας ίση με το αντίστοιχο επίπεδο μη κυριαρχίας (η μοναδιαία τιμή αντιστοιχεί στα μέλη του πρώτου μετώπου, που περιλαμβάνει το σύνολο των τοπικά βέλτιστων λύσεων Pareto). Με βάση την τιμή καταλληλότητας, εκτελούνται οι διαδικασίες επιλογής μέσω δυαδικού διαγωνισμού, διασταύρωσης και μετάλλαξης για την παραγωγή ενός ισομεγέθους πληθυσμού απογόνων, $Q(t)$.



Εικόνα 3.13: Γραφική αναπαράσταση της διαδικασίας του αλγορίθμου NSGA-II (Deb, Pratap, Agarwal, & Meyarivan, 2002)

Στην αρχή δημιουργείται ένας νέος πληθυσμός $R_t = P_t \cup Q_t$ με μέγεθος διπλάσιο ($2N$) του αρχικού. Ο πληθυσμός αυτός ταξινομείται με βάση την μη επικυριαρχία των λύσεων του. Ο νέος πληθυσμός P_{t+1} θα έχει μέγεθος N , δηλαδή κάποιες από τις λύσεις που βρίσκονται στον πληθυσμό R_t θα απορριφθούν. Οι N λύσεις του πληθυσμού R_t που θα στελεχώσουν τον νέο πληθυσμό P_{t+1} επιλέγονται από το πρώτο μέτωπο. Αν ο αριθμός των λύσεων του πρώτου μετώπου είναι λιγότερες από N , τότε προστίθενται λύσεις από το δεύτερο μέτωπο. Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται έως να συμπληρωθούν και οι N θέσεις του νέου πληθυσμού. Στην περίπτωση που κάποιο μέτωπο έχει παραπάνω λύσεις από τις αναγκαίες για τη συμπλήρωση των θέσεων του νέου πληθυσμού τότε λαμβάνει χώρα ο τελεστής της απόστασης συνωστισμού. Με αυτό τον τρόπο επιλέγονται μόνο οι πρώτες n λύσεις του συγκεκριμένου μετώπου που απαιτούνται στον πληθυσμό P_{t+1} .

Αλγόριθμος: NSGAI	
Είσοδος: Μέγεθος πληθυσμών, Συνθήκες τερματισμού, ρυθμός διασταύρωσης, ρυθμός μετάλλαξης.	
Έξοδος: Βέλτιστες λύσεις Pareto	
$R_t = P_t \cup Q_t$	συνδυασμός πληθυσμού γονέων και απογόνων
$F = \text{fast-non-dominated-sort}(R_t)$	$F = (F_1, F_2, \dots)$, όλα τα μέτωπα του R_t
$P_{t+1} = \emptyset$ and $i = 1$	
until $ P_{t+1} + F_i \leq N$	μέχρι ο πληθυσμός των γονέων να γεμίσει
crowding-distance-assignment(F_i)	Υπολογισμός της απόστασης συνωστισμού στο F_i
$P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i$	προσθήκη του i -οστού μετώπου στον γονικό πληθυσμό
$I = i+1$	
Sort($F_i, <n$)	Ταξινόμηση με φθίνουσα σειρά
$P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i[1 : (N - P_{t+1})]$	Επιλογή των πρώτων N στοιχείων του P_{t+1}
$Q_{t+1} = \text{make-new-pop}(P_{t+1})$	Χρήση επιλογής, διασταύρωσης και μετάλλαξης για τη δημιουργία του νέου πληθυσμού Q_{t+1}
$t=t+1$	

Εικόνα 3.14: Ψευδοκώδικας κύριας ρουτίνας NSGA – II (Deb, Pratap, Agarwal, & Meyarivan, 2002)

3.4.6.5 Παράδειγμα υλοποίησης του αλγορίθμου NSGA - II

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα πρέπει να ελαχιστοποιηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις (Deb K. , 2001):

$$\text{Constr} - \text{Ex: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimize } f_1(x) = x_1, \\ \text{Minimize } f_2(x) = \frac{1 + x_2}{x_1}, \\ \text{subject to } 0.1 \leq x_1 \leq 1, \\ \quad \quad \quad 0 \leq x_2 \leq 5. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Οι πληθυσμοί των γονέων (parents) και των απογόνων (offsprings) αναφέρονται στον παρακάτω πίνακα:

Parent population, P_t					Offspring population, Q_t				
Solution	x_1	x_2	f_1	f_2	Solution	x_1	x_2	f_1	f_2
1	0.31	0.89	0.31	6.10	a	0.21	0.24	0.21	5.90
2	0.43	1.92	0.43	6.79	b	0.79	2.14	0.79	3.97
3	0.22	0.56	0.22	7.09	c	0.51	2.32	0.51	6.51
4	0.59	3.63	0.59	7.85	d	0.27	0.87	0.27	6.93
5	0.66	1.41	0.66	3.65	e	0.58	1.62	0.58	4.52
6	0.83	2.51	0.83	4.23	f	0.24	1.05	0.24	8.54

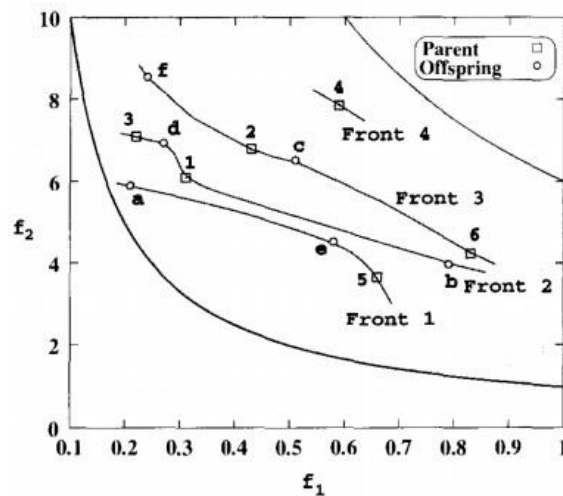
Πίνακας 3.1: Πληθυσμοί γονέων (parents) και απογόνων (offsprings) (Deb K. , 2001)

1^ο Βήμα: Αρχικά δημιουργείται νέος πληθυσμός R_t με το συνδυασμό του πληθυσμού των γονέων P_t και των απογόνων Q_t .

$$R_t = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, a, b, c, d, e, f\}$$

Ο πληθυσμός R_t ταξινομείται με βάση την μη επικυριαρχία των λύσεων του (non-dominated sorting) με αποτέλεσμα να προκύπτουν τα παρακάτω μέτωπα:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{5, a, e\}, \\ \mathcal{F}_2 &= \{1, 3, b, d\}, \\ \mathcal{F}_3 &= \{2, 6, c, f\}, \\ \mathcal{F}_4 &= \{4\}. \end{aligned}$$



Εικόνα 3.15: Μέτωπα νέου πληθυσμού R_t (Deb K. , 2001)

2^ο Βήμα: Θέτοντας $P_{t+1} = \emptyset$ και $i = 1$ παρατηρούμε ότι $|P_{t+1}| + |F_1| = 0 + 3 = 3$. Από τη στιγμή που είναι μικρότερο από το μέγεθος του πληθυσμού N ($N=6$) περιλαμβάνουμε το μέτωπο F_1 στο P_{t+1} . Συνεπώς, θέτουμε $P_{t+1} = \{5, a, e\}$. Με αυτές τις τρεις λύσεις, χρειάζονται άλλες τρεις λύσεις για να γεμίσει ο νέος πληθυσμός των γονέων. Στη συνέχεια με την ένταξη του δεύτερου μετώπου προκύπτει $|P_{t+1}| + |F_1| = 3 + 4 = 7$. Άρα επειδή είναι μεγαλύτερο από 6 σταματάμε να περιλαμβάνουμε άλλο μέτωπο στον πληθυσμό.

3^ο Βήμα: Στη συνέχεια, εξετάζουμε τις λύσεις μόνο του δεύτερου μετώπου και παρατηρούμε ότι 3 από τις 4 λύσεις πρέπει να επιλεγούν για να γεμίσουν τις 3 εναπομένουσες θέσεις στο νέο πληθυσμό. Αυτό απαιτεί να ταξινομήσουμε πρώτα αυτόν τον υποπληθυσμό (λύσεις 1, 3, b και d) χρησιμοποιώντας τον τελεστή επιλογής με αγώνα πυκνότητας.

- Καλούμε τον αριθμό των λύσεων στο F με τη μεταβλητή $l = |F|$. Για κάθε i του συνόλου αρχικά αντιστοιχίζουμε $d_i=0$.
- Για κάθε αντικειμενική συνάρτηση $m = 1,2,\dots,M$, πραγματοποιείται ταξινόμηση του συνόλου ως προς τη χειρότερη σειρά των f_m ή βρίσκουμε τον ταξινομημένο διάνυσμα δεικτών: $I^m = \text{sort}(f_m, >)$.
- Για $m = 1,2,\dots,M$, αντιστοιχίζουμε μια μεγάλη απόσταση στις οριακές λύσεις ή $d_{I^m} = \infty$, ενώ για όλες τις άλλες λύσεις $j=2$ σε $(l-1)$ αντιστοιχεί:

$$d_{I^m} = d_{I^m} + \frac{f_m^{I^m+1} - f_m^{I^m-1}}{f_m^{max} - f_m^{min}} \quad (3.7)$$

- Σημειώνεται ότι ορίζουμε $l = 4$ και $d_1 = d_3 = d_b = d_d = 0$. Επίσης, ορίζεται $f_1^{max} = 1$, $f_1^{min} = 0.1$, $f_2^{max} = 60$, $f_2^{min} = 0$.
- Για την πρώτη αντικειμενική συνάρτηση η ταξινόμηση αυτών των λύσεων εμφανίζεται στον παρακάτω Πίνακα και είναι η ακόλουθη: $I^1 = \{3, d, 1, b\}$.

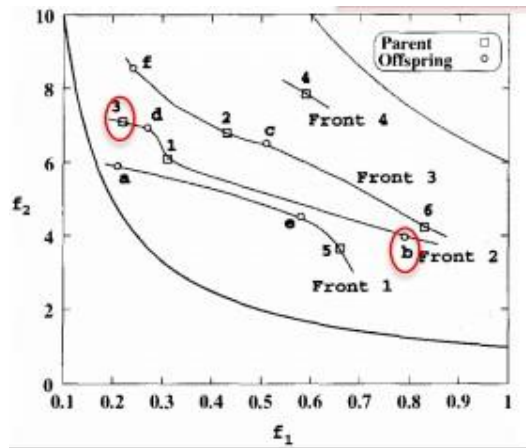
Solution	Front 2				Sorting in		Distance
	x_1	x_2	f_1	f_2	f_1	f_2	
1	0.31	0.89	0.31	6.10	third	second	0.63
3	0.22	0.56	0.22	7.09	first	fourth	∞
b	0.79	2.14	0.79	3.97	fourth	first	∞
d	0.27	0.87	0.27	6.93	second	third	0.12

Πίνακας 3.2: Ταξινόμηση λύσεων πρώτης αντικειμενικής συνάρτησης (Deb K. , 2001)

- Εφόσον οι λύσεις 3 και b είναι οριακές λύσεις για το f_1 , ορίζουμε $d_3 = d_b = \infty$. Από τις άλλες δύο λύσεις βρίσκουμε ότι :

$$d_d = 0 + \frac{f_1^1 - f_1^3}{f_1^{max} - f_1^{min}} = 0 + \frac{0.31 - 0.22}{1 - 0.1} = 0.10 \quad (3.8)$$

$$d_1 = 0 + \frac{f_1^b - f_1^d}{f_1^{max} - f_1^{min}} = 0 + \frac{0.79 - 0.27}{1 - 0.1} = 0.58 \quad (3.9)$$



Εικόνα 3.16: Οριακές λύσεις(3,b) για την πρώτη αντικειμενική συνάρτηση (Deb K. , 2001)

- Για τη δεύτερη αντικειμενική συνάρτηση γίνεται ενημέρωση των αποστάσεων και προκύπτει η παρακάτω ταξινόμηση των λύσεων: $I^2 = \{b, 1, d, 3\}$.
- Εφόσον οι λύσεις 3 και b είναι οριακές λύσεις για το f_1 , ορίζουμε $d_b = d_3 = \infty$. Από τις άλλες δύο λύσεις βρίσκουμε ότι :

$$d_1 = d_1 + \frac{f_2^d - f_2^b}{f_2^{max} - f_2^{min}} = 0.58 + \frac{6.93 - 3.97}{60 - 0} = 0.63 \quad (3.10)$$

$$d_d = d_d + \frac{f_2^3 - f_2^1}{f_2^{max} - f_2^{min}} = 0.10 + \frac{7.09 - 6.10}{60 - 0} = 0.12 \quad (3.11)$$

Solution	Front 2				Sorting in		Distance
	x_1	x_2	f_1	f_2	f_1	f_2	
1	0.31	0.89	0.31	6.10	third	second	0.63
3	0.22	0.56	0.22	7.09	first	fourth	∞
b	0.79	2.14	0.79	3.97	fourth	first	∞
d	0.27	0.87	0.27	6.93	second	third	0.12

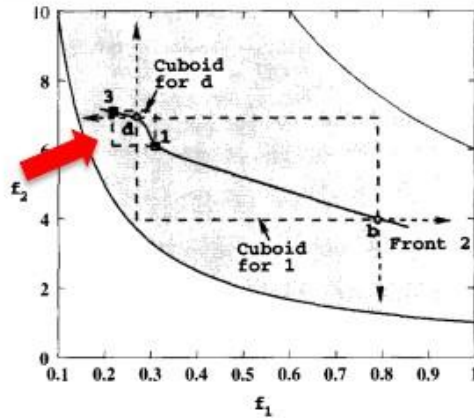
Πίνακας 3.3: Ταξινόμηση λύσεων δεύτερης αντικειμενικής συνάρτησης (Deb K. , 2001)

Άρα, οι συνολικές αποστάσεις για τις τέσσερις λύσεις είναι:

$$d_1 = 0.63, d_3 = \infty, d_b = \infty, d_d = 0.12. \quad (3.12)$$

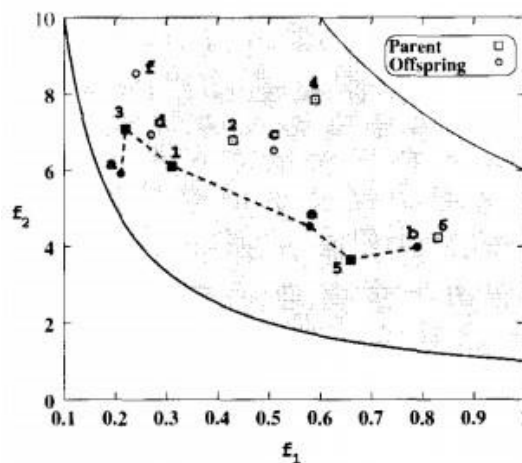
Τα κυβοειδή (στη συγκεκριμένη περίπτωση ορθογώνια) για τις παραπάνω λύσεις εμφανίζονται στην παρακάτω εικόνα. Η λύση d έχει τη μικρότερη περίμετρο σε σχέση με οποιαδήποτε λύση στο σύνολο F_2 .

Μια ταξινόμηση σύμφωνα με τη φθίνουσα σειρά αυτών των τιμών απόστασης συνωστισμού αποδίδει το ταξινομημένο σύνολο {3,b,1,d} από το οποίο επιλέγουμε τις τρεις πρώτες λύσεις.



Εικόνα 3.17: Κυβοειδή των λύσεων (1, d) (Deb K. , 2001)

4^ο Βήμα: Ο νέος πληθυσμός είναι ο $P_{t+1} = \{5, a, e, 3, b, 1\}$. Τα μέλη του συγκεκριμένου πληθυσμού εμφανίζονται στο παρακάτω σχήμα όπου συνδέονται μεταξύ τους με διακεκομμένη γραμμή.



Εικόνα 3.18: Μέλη νέου πληθυσμού P_{t+1} (Deb K. , 2001)

Ο πληθυσμός των απογόνων Q_{t+1} πρέπει να δημιουργηθεί στη συνέχεια χρησιμοποιώντας αυτόν τον γονικό πληθυσμό. Ο ακριβής πληθυσμός των απογόνων θα εξαρτηθεί από:

- Το επιλεγμένο ζευγάρι λύσεων που συμμετέχουν σε ένα τουρνουά (Crowding Tournament Selection Operator).
- Το επιλεγμένη διασταύρωση (crossover).
- Τους επιλεγμένους τελεστές μετάλλαξης (mutation operators).

3.4.6.6 Παράδειγμα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης με περιορισμούς στο προγραμματιστικό περιβάλλον matlab

- Το πρόβλημα SRN

Οι Srinivas και Deb (Srinivas & Deb, 1994) δανείστηκαν το ακόλουθο πρόβλημα από τους Chankong και Haimes (Chankong & Haimes, 1983) (SRN function for multi-objective optimization):

$$\text{SRN} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimize } f_1(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + 2 \\ \text{Minimize } f_2(x) = 9x_1 - (x_2 - 1)^2 \\ \text{subject to } g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq 225 \\ g_2(x) = x_1 - 3x_2 \leq -10 \\ -20 \leq x_1 \leq 20 \\ -20 \leq x_2 \leq 20 \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Η συνάρτηση περιλαμβάνει δύο αντικειμενικές συναρτήσεις f_1 και f_2 οι οποίες θα πρέπει να ελαχιστοποιηθούν ενώ θα πρέπει να ικανοποιούνται και οι δύο περιορισμοί g_1 και g_2 . Επίσης, έχει δύο μεταβλητές ελέγχου x_1 και x_2 , τα επιτρεπόμενα όρια των οποίων τίθενται, συμβατικά, στο διάστημα $[-20,20]$.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, χρησιμοποιείται ένα μέγεθος πληθυσμού 100, δείκτες για τελεστές διασταύρωσης (crossover) και μετάλλαξης (mutation) 20 και 100, αντίστοιχα, μέγιστος αριθμός γενεών 500, πιθανότητα μετάλλαξης $p_m=1/V=0.5$ και τρέχουμε τον ταχύ και εκλεκτικό γενετικό αλγόριθμο μη κυριαρχούμενης ταξινόμησης (NSGA-II) στο προγραμματιστικό περιβάλλον Matlab (Deb, Pratap, Agarwal, & Meyerarivan, 2002).

Για τον προσδιορισμό των τελεστών διασταύρωσης και μετάλλαξης χρησιμοποιήθηκε η παρακάτω διαδικασία (Deb & Agrawal, 1999). Η διαδικασία υπολογισμού των λύσεων για τα παιδιά c_1 και c_2 από δύο γονικές λύσεις y_1 και y_2 με τη δυαδική διασταύρωση (SBX) έχει ως εξής (αρχείο genetic_operator.m):

- Αρχικά, δημιουργείται ένας τυχαίος αριθμός μεταξύ 0 και 1.
- Εύρεση παραμέτρου β_q με βάση την κατανομή των πολυωνυμικών πιθανοτήτων:

$$\beta_q = \begin{cases} (ua)^{\frac{1}{n_c+1}}, & \text{αν } u \leq \frac{1}{\alpha} \\ \left(\frac{1}{2-ua}\right)^{\frac{1}{n_c+1}}, & \text{αλλιού} \end{cases} \quad (3.14)$$

Όπου

$$\alpha = 2 - \beta^{-(n_c+1)} \quad (3.15)$$

$$\beta = 1 + \frac{2}{y_2 - y_1} \min[(y_2 - y_l), (y_u - y_2)]. \quad (3.16)$$

Εδώ, η παράμετρος y υποτίθεται ότι ποικίλλει στο διάστημα $[y_l, y_u]$. Η παράμετρος p_c (παράμετρος με την ονομασία `etac` στον κώδικα σε `matlab`) είναι ο δείκτης κατανομής για SBX και μπορεί να λάβει οποιαδήποτε μη αρνητική τιμή. Μια μικρή τιμή του p_c επιτρέπει τη δημιουργία λύσεων για παιδιά μακριά από τους γονείς και μια μεγάλη τιμή περιορίζει μόνο σε λύσεις για παιδιά που δημιουργούνται κοντά στους γονείς.

- Οι λύσεις για τα παιδιά υπολογίζονται ως εξής:

$$c_1 = 0.5[(y_1 + y_2) - \beta_q |y_2 - y_1|], \quad (3.17)$$

$$c_2 = 0.5[(y_1 + y_2) + \beta_q |y_2 - y_1|]. \quad (3.18)$$

Μια κατανομή πολυωνμικής πιθανότητας χρησιμοποιείται για τη δημιουργία μιας λύσης c κοντά στη γονική λύση y . Η ακόλουθη διαδικασία χρησιμοποιείται για μια παράμετρο $y \in [y_l, y_u]$ (αρχείο `poly_mutation.m`):

- Δημιουργείται τυχαίος αριθμός u στο $[0,1]$.
- Γίνεται υπολογισμός της παραμέτρου δ_q ως εξής:

$$\delta_q = \begin{cases} [2u + (1 - 2u)(1 - \delta)^{n_m+1}]^{\frac{1}{n_m+1}} - 1, & \text{αν } u \leq 0.5 \\ 1 - [2(1 - u) + 2(u - 0.5)(1 - \delta)^{n_m+1}]^{\frac{1}{n_m+1}}, & \text{αλλιού} \end{cases} \quad (3.19)$$

όπου

$$\delta = \frac{\min[(y - y_l), (y_u - y)]}{y_u - y_l}. \quad (3.20)$$

Η παράμετρος p_m είναι ο δείκτης κατανομής για μετάλλαξη (παράμετρος με την ονομασία `etam` στον κώδικα σε `matlab`) και μπορεί να λάβει οποιαδήποτε μη αρνητική τιμή.

- Ο υπολογισμός του μεταλλαγμένου παιδιού γίνεται ως εξής:

$$c = y + \delta_q (y_u - y_l) \quad (3.21)$$

Αρχικά δημιουργήθηκε μια συνάρτηση με όνομα `test_case.m` με τις αντικειμενικές συναρτήσεις του προβλήματος f_1 και f_2 και τους περιορισμούς g_1 και g_2 για να καλείται στην κύρια συνάρτηση (`Main_NSGA2.m`).

```
function [fit err]= test_case(x)
f1=(x(1)-2)^2+(x(2)-1)^2+2;           % Αντικειμενική συνάρτηση f1(x)
f2=9*x(1)-(x(2)-1)^2;                 % Αντικειμενική συνάρτηση f2(x)
c(1,1)=x(1)^2+x(2)^2-225;             % Περιορισμός g1(x)
c(1,2)=x(1)-(3*x(2))+10;              % Περιορισμός g2(x)
err=(c>0).*c;
fit=[f1 f2];
```

Πίνακας 3.4: Συνάρτηση `test_case.m`

Στη συνέχεια δημιουργήθηκε η κύρια συνάρτηση (Main_NSGA2.m), όπου πρώτα ορίστηκαν οι είσοδοι του αλγορίθμου όπως παρουσιάζεται και παρακάτω:

```
M = 2; % Αριθμός αντικειμενικών συναρτήσεων
pop_size = 200; % Μέγεθος Πληθυσμού
gen_max = 500; % Μέγιστος αριθμός γενεών
fname= 'test_case';
V = 2; % Αριθμός μεταβλητών ελέγχου
xl = -20; % Κατώτατο όριο μεταβλητής
xu = 20; % Ανώτατο όριο μεταβλητής
etac = 20; % Δείκτης  $n_c$  για τελεστή διασταύρωσης (crossover)
etam = 100; % Δείκτης  $n_m$  για τελεστή μετάλλαξης (mutation)
pm = 1/V; % Πιθανότητα μετάλλαξης
```

Πίνακας 3.5: Ορισμός εισόδων στον αλγόριθμο

Για την αρχικοποίηση του πληθυσμού Pt χρησιμοποιήθηκε η εντολή rand στη matlab και δημιουργήθηκε ένας διδιάστατος πίνακας pt (200 x 2) τυχαίων τιμών για τις δύο μεταβλητές x_1 και x_2 και με μέγεθος όσο το μέγεθος του πληθυσμού (200 τυχαίες τιμές για κάθε μεταβλητή μεταξύ των οριακών τιμών των μεταβλητών [-20,20]).

Με βάση τις τιμές των δύο μεταβλητών x_1 και x_2 γίνεται υπολογισμός των αντικειμενικών συναρτήσεων f_1 και f_2 χρησιμοποιώντας την εντολή feval. Επίσης, δημιουργείται ένας διδιάστατος πίνακας err (200x2) με την παραβίαση των περιορισμών g_1 και g_2 όπου με τη κλήση μιας συνάρτησης normalization.m κανονικοποιείται σε ένα μοναδιαίο πίνακα error_norm (200x1). Συνεπώς, δημιουργείται ένας πίνακας population_init (200x5) που περιλαμβάνει τις δύο μεταβλητές αποφάσεων (x_1 και x_2), τις δύο αντικειμενικές συναρτήσεις (f_1 και f_2) και την παραβίαση των περιορισμών σε κανονικοποιημένη μορφή (err_norm). Επομένως, με κλήση της συνάρτησης NDS_CD_cons.m πραγματοποιείται μη κυριαρχούμενη ταξινόμηση του αρχικού πληθυσμού population_init. Ο πίνακας population (200x7) που δημιουργείται περιλαμβάνει επιπλέον δύο στήλες την κατάταξη (rank) και την απόσταση πυκνότητας (distance).

```
for i = 1:pop_size
[ff(i,:) err(i,:)] = feval(fname, pt(i,:)); % Υπολογισμός
αντικειμενικών συναρτήσεων
end
error_norm = normalisation(err); % Κανονικοποίηση
παραβίασης περιορισμών
population_init = [pt ff error_norm];
[population front] = NDS_CD_cons(population_init); % Μη
κυριαρχούμενη ταξινόμηση στον αρχικό πληθυσμό
```

Πίνακας 3.6: Μη κυριαρχούμενη ταξινόμηση στον αρχικό πληθυσμό

Το επόμενο στάδιο είναι να γίνεται σε κάθε γενιά επιλογή των γονέων P_t (πίνακας `parent_selected` διαστάσεων 200×7) με διαγωνισμό (κλήση συνάρτησης `tour_selection.m`) και η αναπαραγωγή των απογόνων Q_t (πίνακας `child_offspring` διαστάσεων 200×5) με τη διαδικασία της διασταύρωσης και της μετάλλαξης (κλήση συνάρτησης `genetic_operator.m`).

```
parent_selected = tour_selection (population); % επιλογή των γονέων
με διαγωνισμό
child_offspring = genetic_operator (parent_selected(:,1:V));
% αναπαραγωγή των απογόνων με τη διαδικασία της διασταύρωσης και της
μετάλλαξης
for ii = 1:pop_size
[fff(ii,:) err(ii,:)] = feval(fname, child_offspring(ii,:));
% Υπολογισμός αντικειμενικών συναρτήσεων για τους απογόνους
end
error_norm = normalisation(err); % Κανονικοποίηση παραβίασης
περιορισμών
child_offspring = [child_offspring fff error_norm];
```

Πίνακας 3.7: Επιλογή γονέων – Αναπαραγωγή απογόνων

Έπειτα από την επιλογή των γονέων P_t και την αναπαραγωγή των απογόνων Q_t δημιουργείται ένας ενδιάμεσος πληθυσμός R_t (πίνακας διαστάσεων 400×5) από την ένωση των δύο πληθυσμών (γονείς και απόγονοι). Με κλήση της συνάρτησης `NDS_CD_cons.m` πραγματοποιείται μη κυριαρχούμενη ταξινόμηση του ενδιάμεσου πληθυσμού `population_inter` (πίνακας `population_inter_sorted` διαστάσεων 400×7).

```
population_inter = [population(:,1:V+M+1) ;
child_offspring(:,1:V+M+1)];
% Ενδιάμεσος πληθυσμός από την ένωση των γονέων και των απογόνων
[population_inter_sorted front] = NDS_CD_cons(population_inter);
% Μη κυριαρχούμενη ταξινόμηση στον ενδιάμεσο πληθυσμό
```

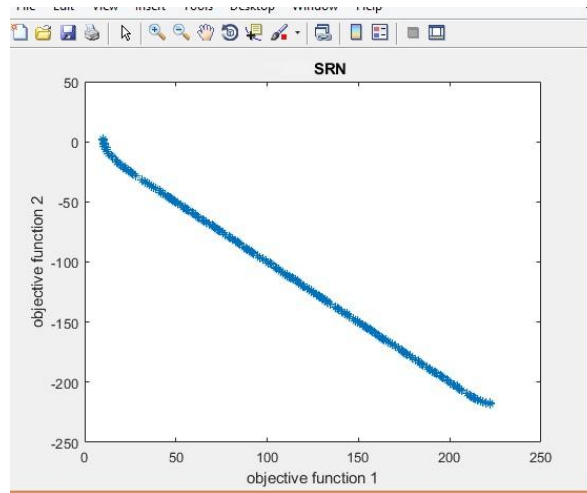
Πίνακας 3.8: Μη κυριαρχούμενη ταξινόμηση στον ενδιάμεσο πληθυσμό

Ο πληθυσμός επόμενης γενιάς (πίνακας `new_pop` διαστάσεων 200×7) σχηματίζεται με αντικατάσταση του πληθυσμού `population_inter_sorted` (κλήσης της συνάρτησης `replacement.m`). Εάν κατά την προσθήκη όλων των ατόμων οποιουδήποτε μετώπου, ο πληθυσμός υπερβαίνει το μέγεθος του πληθυσμού, τότε ο απαιτούμενος αριθμός των υπόλοιπων ατόμων και μόνο επιλέγονται από το συγκεκριμένο μέτωπο με βάση την απόσταση συνωστισμού.

```
new_pop = replacement(population_inter_sorted, front);
```

Πίνακας 3.9: Αντικατάσταση πληθυσμού

Τέλος, γίνεται απεικόνιση των βέλτιστων λύσεων για τις δύο αντικειμενικές συναρτήσεις χρησιμοποιώντας την εντολή plot όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.

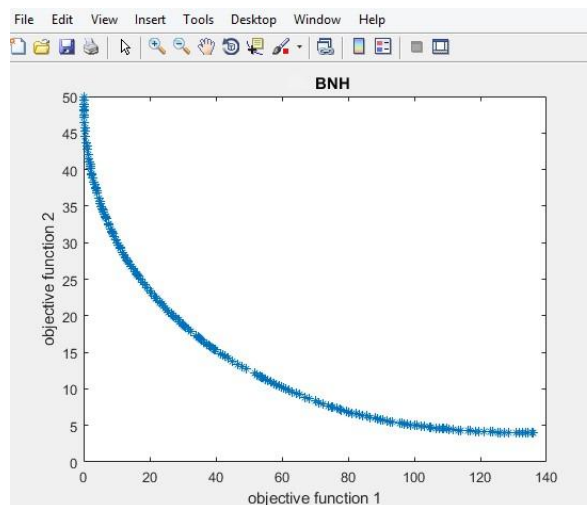


Εικόνα 3.19: Απεικόνιση βέλτιστων λύσεων για το πρόβλημα SRN

- Το πρόβλημα BNH (Binh and Korn function) (Binh & Korn, 1997)

$$\text{BNH} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimize } f_1(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 \\ \text{Minimize } f_2(x) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 \\ \text{subject to } g_1(x) = (x_1 - 5)^2 + x_2^2 \leq 25 \\ g_2(x) = (x_1 - 8)^2 + (x_2 + 3)^2 \geq 7.7 \\ 0 \leq x_1 \leq 5 \\ 0 \leq x_2 \leq 3 \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Εκτελώντας τον ταχύ και εκλεκτικό γενετικό αλγόριθμο μη κυριαρχούμενης ταξινόμησης (NSGA-II) στο προγραμματιστικό περιβάλλον Matlab προκύπτει το παρακάτω σχήμα με τις βέλτιστες λύσεις για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

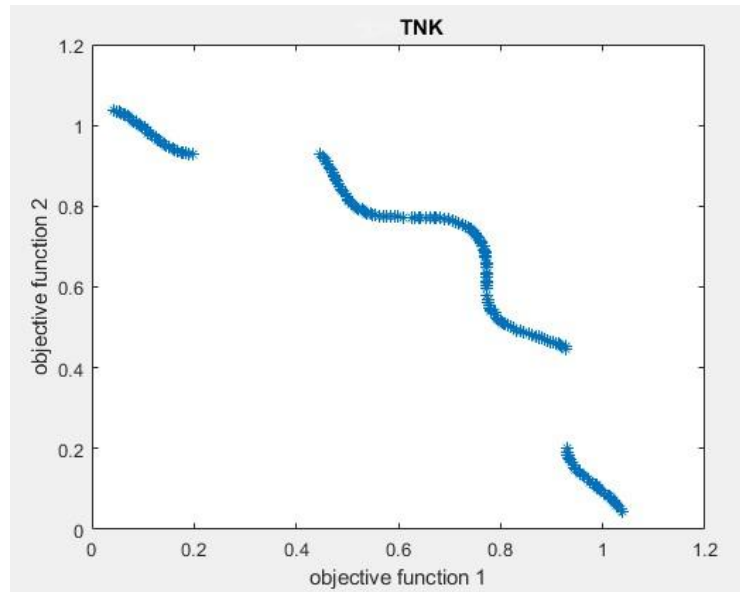


Εικόνα 3.20: Απεικόνιση βέλτιστων λύσεων για το πρόβλημα BNH

- Το πρόβλημα TNK (Tanaka test function) (ALIOUI & ACAR, 2020).

$$\text{BNH} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimize } f_1(x) = x_1 \\ \text{Minimize } f_2(x) = x_2 \\ \text{subject to } g_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 1 + 0.1\cos(16 \arctan(x_1/x_2)) \leq 0 \\ g_2(x) = (x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2 \leq 0.5 \\ 0 \leq x_1 \leq p_i \\ 0 \leq x_2 \leq p_i \end{array} \right\} \quad (3.23)$$

Οι βέλτιστες λύσεις του προβλήματος απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα.

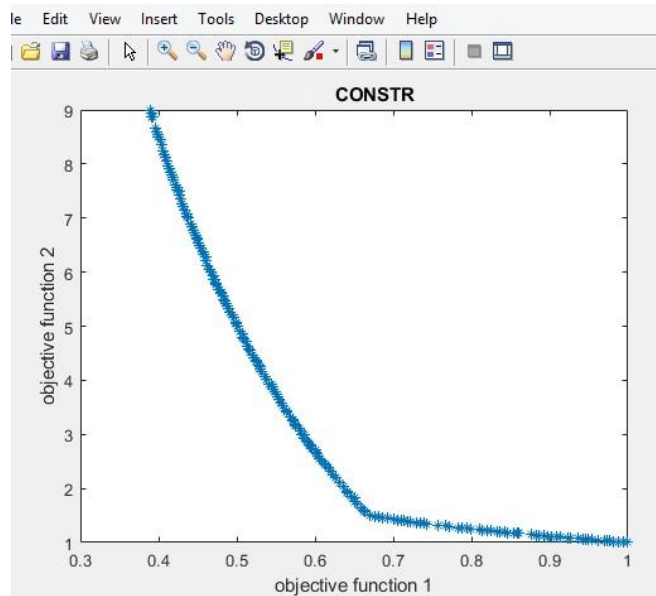


Εικόνα 3.21: Απεικόνιση βέλτιστων λύσεων για το πρόβλημα TNK

- Το πρόβλημα CONSTR-EX (ALIOUI & ACAR, 2020).

$$\text{Constr - Ex: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimize } f_1(x) = x_1, \\ \text{Minimize } f_2(x) = \frac{(1 + x_2)}{x_1} \\ \text{subject to } g_1(x) = x_2 + 9x_1 \geq 6 \\ g_2(x) = -x_2 + 9x_1 \geq 1 \\ 0.1 \leq x_1 \leq 1, \\ 0 \leq x_2 \leq 5. \end{array} \right\} \quad (3.24)$$

Οι βέλτιστες λύσεις του προβλήματος απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα.

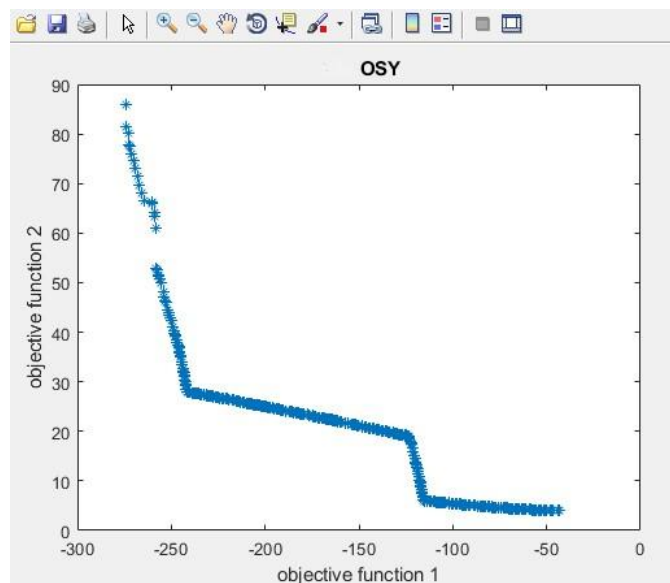


Εικόνα 3.22: Απεικόνιση βέλτιστων λύσεων για το πρόβλημα CONSTR-EX

- Το πρόβλημα OSY (Osyczka and Kundu function) (ALIOUI & ACAR, 2020).

$$\text{OSY: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimize } f_1(x) = -(25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 4)^2 + (x_5 - 1)^2) \\ \text{Minimize } f_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \\ \text{subject to } x_1 + x_2 - 2 \geq 0 \\ \quad 6 - x_1 - x_2 \geq 0 \\ \quad 2 - x_1 + x_1 \geq 0 \\ \quad 2 - x_1 + 3x_2 \geq 0 \\ \quad 4 - (x_3 - 3)^2 - x_4 \geq 0 \\ \quad (x_5 - 3)^2 + x_6 - 4 \geq 0 \\ \quad 0 \leq x_1, x_2, x_6 \leq 10 \\ \quad 1 \leq x_3, x_5 \leq 5 \\ \quad 0 \leq x_4 \leq 6 \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Οι βέλτιστες λύσεις του προβλήματος απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα.



Εικόνα 3.23: Απεικόνιση βέλτιστων λύσεων για το πρόβλημα OSY

4. Συγκομιδή ενέργειας (Energy harvesting) σε μη επανδρωμένα αεροσκάφη (UAVs)

4.1 Εισαγωγή

Το ερευνητικό ενδιαφέρον για τη μετατροπή της ενέργειας δόνησης του περιβάλλοντος σε χρησιμοποιήσιμη ηλεκτρική ενέργεια έχει αυξηθεί τα τελευταία χρόνια. Η συλλογή ενέργειας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για ασύρματους αισθητήρες που τροφοδοτούνται από μπαταρίες και συστήματα περιορισμένης πηγής ενέργειας. Στόχος της έρευνας σχετικά με την ενεργειακή συγκομιδή είναι η παροχή ενέργειας για τα συστήματα αυτά με την μετατροπή της μηχανικής ενέργειας δόνησης που προέρχεται από το περιβάλλον τους, σε χρήσιμη ηλεκτρική ενέργεια. Τα μη επανδρωμένα εναέρια οχήματα (UAVs) αποτελούν μοναδικά συστήματα εφαρμογής όπου η δυνατότητα μιας πρόσθετης πηγής ενέργειας είναι πολύ σημαντική.

Τα UAVs έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε να μεγιστοποιούν την αντοχή και το εύρος πτήσης με την περιορισμένη διαθέσιμη ενέργεια σε λειτουργία. Μια πιθανή πηγή ενέργειας για τη φόρτιση των μπαταριών των UAV είναι η μηχανική ενέργεια δόνησης λόγω των ασταθών αεροδυναμικών φορτίων κατά τη διάρκεια της πτήσης. Διαφορετικοί μηχανισμοί μεταγωγής (πιεζοηλεκτρική, ηλεκτρομαγνητική και ηλεκτροστατική) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μετατροπή των δονήσεων σε ηλεκτρική ενέργεια. Ωστόσο, η πρόσφατη βιβλιογραφία δείχνει ότι η πιεζοηλεκτρική μεταγωγή έχει λάβει τη μεγαλύτερη προσοχή για τη συγκομιδή ενέργειας που παράγεται από δονήσεις.

Οι πιεζοηλεκτρικές γεννήτριες μπορούν να συλλέξουν την ηλεκτρική ενέργεια από τις μηχανικές δονήσεις με βάση το ευθύ πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο. Αυτές οι γεννήτριες έχουν μελετηθεί εκτενώς ως μια χαμηλού κόστους και αποτελεσματική εναλλακτική λύση για χαμηλού επιπέδου συγκομιδή ενέργειας (DeMarqui, Erturk, & Inman, 2009).

4.2 Μη επανδρωμένα αεροσκάφη (UAVs)

Τα κάθε είδους ιπτάμενα οχήματα που πραγματοποιούν πτήσεις είτε αυτόνομα είτε μέσω τηλεκατεύθυνσης και δεν έχουν χειριστή στην άτρακτό τους ονομάζονται μη επανδρωμένα ιπτάμενα οχήματα UAV (Unmanned Aerial Vehicles) ή UAS (Unmanned Aerial Systems).

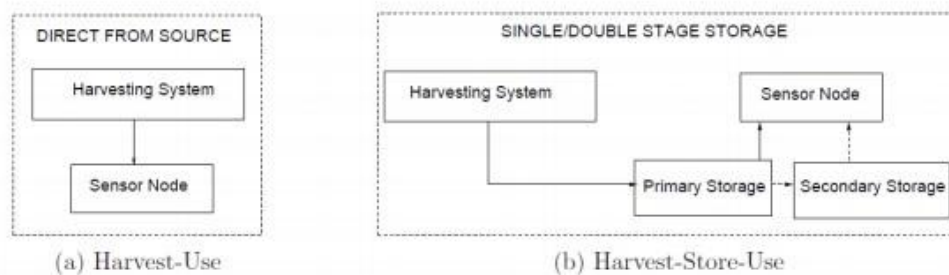
Τα μη επανδρωμένα εναέρια οχήματα (UAVs) αποτελούν κρίσιμο στοιχείο πολλών στρατιωτικών επιχειρήσεων. Κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών, η εξέλιξη των

UAVs έχει οδηγήσει σε όλο και μικρότερα αεροσκάφη. Μαζί με την ανάπτυξη των μικρότερων UAVs (mini UAVs) έχουν εμφανιστεί ζητήματα που αφορούν την αντοχή του αεροσκάφους. Η αντοχή των mini UAVs και ο μέγιστος χρόνος πτήσης τους είναι προβληματικά λόγω του περιορισμένου μεγέθους των συστημάτων καυσίμων που μπορούν να ενσωματωθούν στο αεροσκάφος. Ένα μεγάλο μέρος της συνολικής μάζας πολλών ηλεκτρικών mini UAVs, για παράδειγμα, είναι η επαναφορτιζόμενη πηγή ενέργειας της μπαταρίας. Τα mini UAVs είναι μικρά και ελαφριά, επομένως, δεν μπορούν να μεταφέρουν μεγάλα ωφέλιμα φορτία καυσίμων. Η συγκομιδή ενέργειας είναι μια ελκυστική τεχνολογία για τα mini UAVs, επειδή προσφέρει τη δυνατότητα να αυξήσουν την αντοχή τους, χωρίς να προσθέσουν σημαντική μάζα ή την ανάγκη να αυξηθεί το μέγεθος του συστήματος καυσίμου (Anton, 2008).

Σε μια προσπάθεια να βελτιωθεί η αντοχή των mini UAVs χωρίς να προστεθεί ένα σημαντικό ποσοστό μάζας, γίνεται προσπάθεια συγκομιδής ενέργειας από τις δονήσεις των αεροσκαφών χρησιμοποιώντας έξυπνα υλικά (πιεζοηλεκτρικά κεραμικά συγκομιδής ενέργειας).

4.3 Σύστημα Συγκομιδής Ενέργειας - Energy Harvesting

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στα συστήματα συγκομιδής ενέργειας (Energy Harvesting) τα οποία χρειάζονται όταν η ενέργεια δεν είναι κατάλληλη για απευθείας εφαρμογή στο φορτίο. Στόχος του συστήματος αυτού είναι η εκμετάλλευση της ενέργειας από τις διάφορες πηγές γύρω του και η μετατροπή της σε ηλεκτρική. Στη συνέχεια όταν η ενέργεια αυτή μετατραπεί σε αξιοποιήσιμη ενέργεια από την μονάδα διαχείρισης ενέργειας τότε είναι κατάλληλη για κατανάλωση από το φορτίο. Στην Εικόνα 4.1 παρουσιάζονται δυο αρχιτεκτονικές συγκομιδής ενέργειας από το περιβάλλον (Sudevalayam & Kulkarni, 2010).

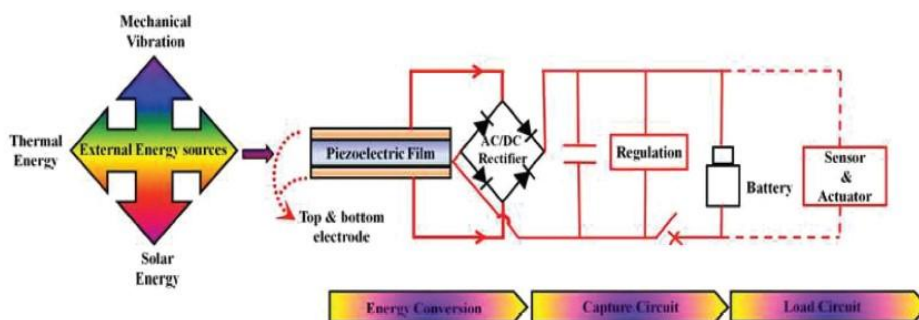


Εικόνα 4.1: Αρχιτεκτονικές συγκομιδής ενέργειας με και χωρίς δυνατότητα αποθήκευσης (Sudevalayam & Kulkarni, 2010)

Στην Εικόνα 4.1(α) παρουσιάζεται η αρχιτεκτονική Συγκομιδή-Χρήση όπου το σύστημα συγκομιδής συλλέγει ενέργεια η οποία είναι άμεσα διαθέσιμη προς χρήση από το φορτίο. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει η ισχύς εξόδου από το σύστημα συγκομιδής να είναι πάντα μεγαλύτερη από το ελάχιστο σημείο λειτουργίας του φορτίου έτσι ώστε το φορτίο να λειτουργεί συνέχεια. Τέτοια συστήματα έχουν κατασκευαστεί με τη χρήση μηχανικών πηγών ενέργειας, για παράδειγμα από την παραμόρφωση ενός πιεζοηλεκτρικού υλικού.

Στην Εικόνα 4.1(β) παρουσιάζεται η αρχιτεκτονική Συγκομιδή-Αποθήκευση-Χρήση κατά την οποία το σύστημα συλλέγει και αποθηκεύει την ενέργεια για να είναι διαθέσιμη για μελλοντική χρήση. Επομένως, καθώς σε πολλές περιπτώσεις η ενέργεια που συλλέγεται από το σύστημα είναι πολύ μεγαλύτερη από την ενέργεια που απαιτείται για χρήση είναι πολύ σημαντικό η πλεονάζουσα ενέργεια να αποθηκευτεί για μεταγενέστερη χρήση. Ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να είναι ένα σύστημα συγκομιδής ηλιακής ενέργειας.

Μια τυπική διάταξη ενός συστήματος συγκομιδής - αποθήκευσης ενέργειας περιλαμβάνει ανορθωτή για τη μετατροπή του εναλλασσόμενου ρεύματος (AC) σε συνεχές ρεύμα (DC), ρυθμιστή τάσης για τη ρύθμιση της συνεχούς ρεύματος που παρέχεται στη συσκευή αποθήκευσης και διάταξη αποθήκευσης για την αποθήκευση της ενέργειας εξόδου όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.2 (Mishra, Unnikrishnan, Nayak, & Mohanty, 2018).



Εικόνα 4.2: Τυπική διάταξη ενός συστήματος συγκομιδής ενέργειας (Mishra, Unnikrishnan, Nayak, & Mohanty, 2018)

Η πιο κοινή και κατάλληλη μέθοδος που χρησιμοποιείται για να διορθώσει την τάση εναλλασσόμενου ρεύματος στην τάση συνεχούς ρεύματος είναι οι ανορθωτές μισού κύματος ή οι ανορθωτές γεφυρών πλήρους κύματος που αποτελούνται από δύο ή τέσσερις διόδους σε ένα κύκλωμα γεφυρών. Σύγχρονοι ανορθωτές αντικαθιστούν τις διόδους με τρανζίστορ επίδρασης πεδίου μετάλλου-οξειδίου-ημιαγωγών (MOSFET) με

αποτέλεσμα να έχουν καλύτερη απόδοση διόρθωσης λόγω χαμηλότερης αντίστασης σε σύγκριση με τους ανορθωτές πλήρους και μισού κύματος.

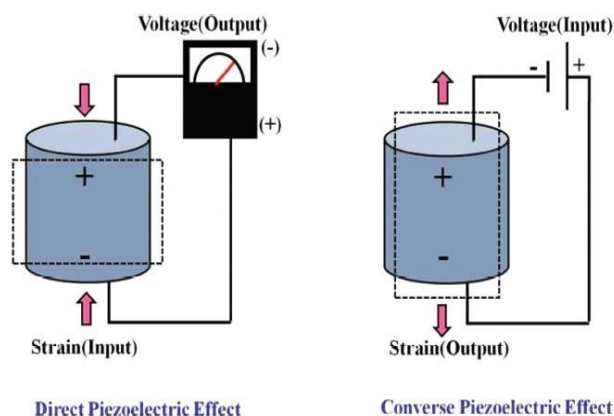
Για τη αποθήκευση της συγκομισθείσας ενέργειας, οι επαναφορτιζόμενες μπαταρίες και οι πυκνωτές θεωρούνται ως δύο ζωτικά μέσα αποθήκευσης, αν και τα δύο είναι πολύ διαφορετικά ως προς τα χαρακτηριστικά τους στην προοπτική εφαρμογής της ενεργειακής συγκομιδής.

Με βάση το παραπάνω κύκλωμα, όσο λιγότερες απώλειες έχουμε στα επιμέρους υποκυκλώματα τόσο επιτυγχάνουμε μεγαλύτερη δυνατή απόδοση στη μεταφορά της συλλεγόμενης ενέργειας.

4.4 Πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο

Η ασυνήθιστη ιδιότητα ορισμένων υλικών που είναι ικανά να μετατρέψουν τη μηχανική ενέργεια σε ηλεκτρική ενέργεια, χωρίς την εφαρμογή οποιασδήποτε εξωτερικής εισόδου και αντίστροφα (παραμόρφωση λόγω της εφαρμογής του ηλεκτρικού πεδίου) έχει χαρακτηριστεί ως «πιεζοηλεκτρική ενέργεια» και τα υλικά που κατέχουν αυτή την ιδιότητα ονομάζονται πιεζοηλεκτρικά υλικά.

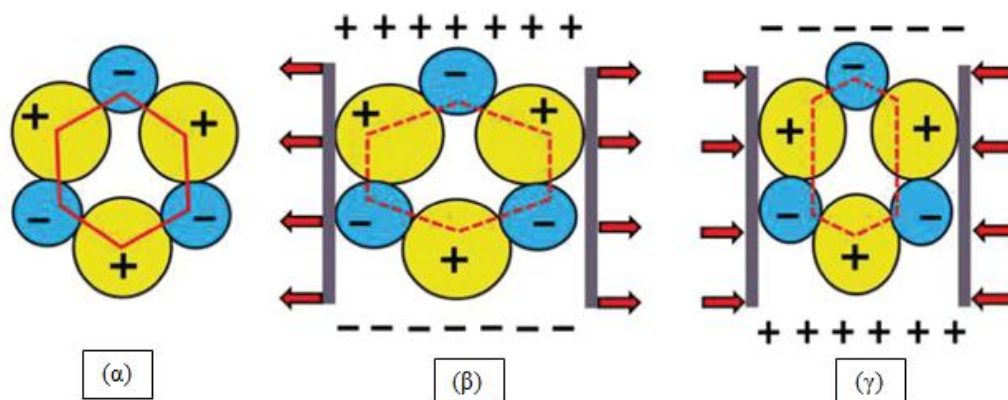
Η μετατροπή της μηχανικής ενέργειας σε ηλεκτρική ενέργεια όπου το αίτιο είναι η εφαρμογή μηχανικής τάσης στο υλικό και το αποτέλεσμα είναι η πόλωση του υλικού είναι γνωστή ως *ευθύ πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο*. Η επίδραση εξωτερικής δύναμης έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση ηλεκτρικών φορτίων στις επιφάνειες του κρυστάλλου, ο οποίος υφίσταται την μηχανική παραμόρφωση. Όταν το αίτιο είναι η ηλεκτρική πόλωση του υλικού και το αποτέλεσμα η εμφάνιση μηχανικής τάσης, τότε το φαινόμενο καλείται *αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο* (Covaci & Gontean, 2020).



Εικόνα 4.3: Ευθύ και αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο (Mishra, Unnikrishnan, Nayak, & Mohanty, 2018)

Οι περισσότερες από τις συσκευές μορφομετατροπέα (transducer) ενέργειας και αισθητήρων βασίζονται στο ευθύ πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο ενώ το αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο συνδέεται με τους διεγέρτες (actuators).

Το φαινόμενο αυτό αποδίδεται στην στοιχειώδη δομή που σχετίζεται με ορισμένα κρυσταλλικά πλέγματα. Σε αυτές τις κρυσταλλικές δομές, υπάρχει ισορροπία μεταξύ των θετικών και αρνητικών φορτίων. Αυτή η ισορροπία μέσα στην κρυσταλλική δομή διαταράσσεται προκαλώντας μια ακανόνιστη διάταξη των δίπολων όταν υποβάλλονται σε μηχανική καταπόνηση ή δονήσεις και παραγωγή ηλεκτρικού φορτίου. Η επίδραση της μηχανικής καταπόνησης στη μοριακή δομή ενός πιεζοηλεκτρικού κρυστάλλου φαίνεται σαφώς στην Εικόνα 4.4. Εδώ, η εφαρμογή της μηχανικής πίεσης (εφελκυσμός ή συμπίεση) είχε ως αποτέλεσμα τη διακοπή της ισορροπίας φορτίου ενώ παραμορφώνει την εσωτερική δομή του κρυστάλλου. Κατά συνέπεια, τόσο τα θετικά όσο και τα αρνητικά φορτία διαχωρίζονται καταστρέφοντας την ουδετερότητα του μορίου και δημιουργώντας μια πυκνότητα επιφανειακού φορτίου που πρέπει να συλλέγεται μέσω ηλεκτροδίων.

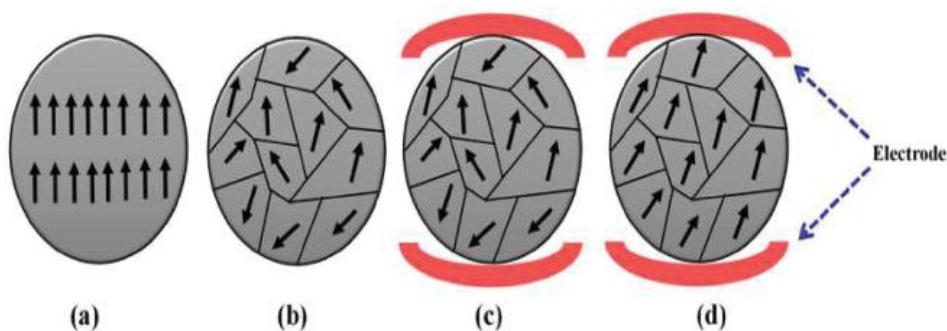


Εικόνα 4.4: Διακοπή των φορτίων σε ουδέτερο μόριο υπό εφαρμοσμένη μηχανική καταπόνηση. (α) το μόριο χωρίς την επίδραση εξωτερικής δύναμης, (β) Το μόριο πολώνεται λόγω εφαρμογής εφελκυστικής δύναμης, γ) Το μόριο πολώνεται λόγω εφαρμογής συμπιεστικής δύναμης (Mishra, Unnikrishnan, Nayak, & Mohanty, 2018)

Η συμπεριφορά και η απόδοση των πιεζοηλεκτρικών υλικών είναι στενά συνδεδεμένες με τον αριθμό των ηλεκτρικών δίπολων που υπάρχουν μέσα σε αυτά τα υλικά. Η κρυσταλλική συμμετρία διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην αξιολόγηση της πιεζοηλεκτρικής ιδιότητας από την άποψη της μονοκρυσταλλικής και πολυκρυσταλλικής διαμόρφωσης του υλικού.

Στην περίπτωση της μονοκρυσταλλικής δομής, όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.5a, οι πολικοί άξονες όλων των φορέων φόρτισης παρουσιάζουν μονόδρομο χαρακτηριστικά προσανατολισμού. Εδώ όλοι οι πολικοί άξονες παραμένουν «μονοκατευθυντικοί» σε όλο τον κρύσταλλο, ακόμα κι αν ο κρύσταλλος ήταν σπασμένος σε διάφορα κομμάτια, πράγμα που σημαίνει συμμετρία. Εναλλακτικά, μια πολυκρυσταλλική δομή, Εικόνα 4.5b ορίζεται από την παρουσία διαφορετικών πολικών αξόνων σε διαφορετικά τμήματα κατά μήκος της δομής των υλικών που προκαλεί ακανόνιστη ευθυγράμμιση των δίπολων.

Επομένως, το υλικό δεν παρουσιάζει καμία πόλωση και δεν παρουσιάζει κάποια πιεζοηλεκτρική ιδιότητα. Για την απόκτηση πιεζοηλεκτρικής ενέργειας, πρέπει να γίνει "poling" σε αυτά τα υλικά, το οποίο περιλαμβάνει την εφαρμογή ενός ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου, συνήθως σε θερμοκρασία σχεδόν στη θερμοκρασία Curie. Το poling έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη μιας πόλωσης, επιτρέποντας στα μόρια να κινούνται πιο ελεύθερα και ευθυγραμμίζοντας τα ηλεκτρικά δίπολα σε έναν μόνο προσανατολισμό που αντιστοιχεί στην κατεύθυνση του εφαρμοσμένου ηλεκτρικού πεδίου, όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.5c,d. Κατόπιν, ενώ η θερμοκρασία μειώνεται σε θερμοκρασία δωματίου και το ηλεκτρικό πεδίο αφαιρείται, τα δίπολα διατηρούν ακόμα τη στενά ευθυγραμμισμένη πόλωση με μια μόνιμα κλειδωμένη διαμόρφωση.



Εικόνα 4.5: Διάταξη διπολικού σε a) μονοκρυσταλλικό και b) πολυκρυσταλλικό υλικό. c, d) Πόλωση πολυκρυσταλλικού υλικού παρουσία ηλεκτρικού πεδίου για την παραγωγή πιεζοηλεκτρικής ενέργειας. (Mishra, Unnikrishnan, Nayak, & Mohanty, 2018)

Ωστόσο, τα πολυκρυσταλλικά υλικά προσφέρουν την ευελιξία της αλλαγής στην πόλωση, όπως και όταν απαιτείται. Επίσης, ο βαθμός πόλωσης τους μπορεί να προσαρμοστεί εύκολα με τη μεταβολή των συνθηκών poling. Τα δύο πιεζοηλεκτρικά φαινόμενα, δηλαδή το ευθύ και το αντίστροφο εξηγούνται καλά από δύο πιεζοηλεκτρικές εξισώσεις όπως φαίνεται παρακάτω:

Ευθύ Πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο:

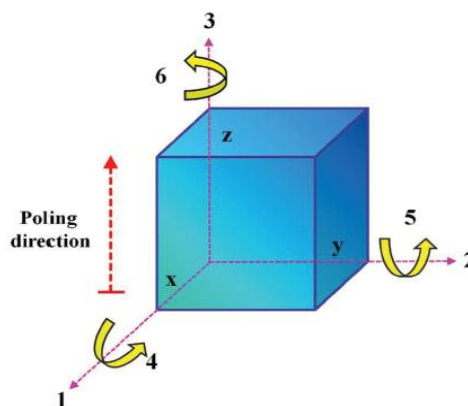
$$D_i = e_{ij}^{\sigma} E_j + d_{im}^d \sigma_m \quad (4.1)$$

Αντίστροφο Πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο:

$$\varepsilon_k = d_{jk}^c E_j + S_{km}^E \sigma_m \quad (4.2)$$

όπου D_i είναι το διάνυσμα της διηλεκτρικής μετατόπισης, ε_k το διάνυσμα των παραμορφώσεων, E_j διάνυσμα εφαρμοσμένου ηλεκτρικού πεδίου, σ_m το διάνυσμα μηχανικών τάσεων, d_{im}^d και d_{jk}^c οι πιεζοηλεκτρικοί συντελεστές, e_{ij}^{σ} οι σταθερές της διηλεκτρικής διαπερατότητας, S_{km}^E οι ελαστικές σταθερές¹.

Οι εκθέτες "d" και "c" χρησιμοποιούνται ως συμβολικές παραστάσεις για άμεσες και αντίστροφες πιεζοηλεκτρικές εξισώσεις, αντίστοιχα. Οι διαφορετικές κατευθύνσεις στο εσωτερικό του συστήματος συντεταγμένων του υλικού αντιπροσωπεύονται από τους δείκτες i, j και k, ενώ οι εκθέτες "σ" και "E" συμβολίζουν τη μέτρηση των σταθερών υπό σταθερή μηχανική καταπόνηση και σταθερό ηλεκτρικό πεδίο, αντίστοιχα. Τρεις διαφορετικοί άξονες που αντιστοιχούν στους αριθμούς 1, 2 και 3 (Εικόνα 4.6) ταυτίζονται με τους καρτεσιανούς άξονες συντεταγμένων x, y και z και χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό των τριών κατευθύνσεων (i, j και k) σε πιεζοηλεκτρικά στοιχεία. Κατεύθυνση κατά μήκος του άξονα z, δηλαδή, κατεύθυνση "3" σημαίνει την κατεύθυνση της πόλωσης (η οποία μπορεί να είναι η επίδραση του poling). Ο δείκτης "m" καθορίζει την περιστροφική κίνηση/κίνηση διάτμησης γύρω από τους τρεις άξονες (1, 2 και 3) και αντιστοιχεί στους αριθμούς 4, 5 και 6, αντίστοιχα.



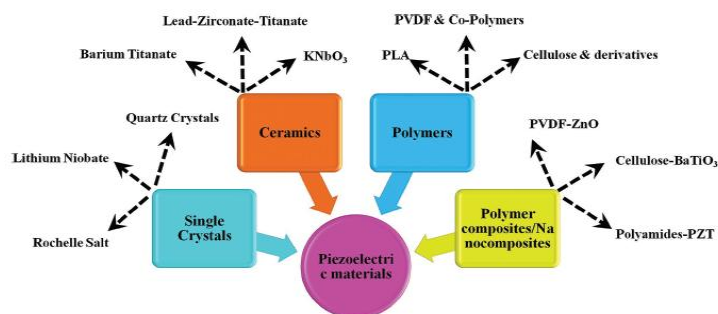
Εικόνα 4.6: Σύστημα κατεύθυνσης τριών συντεταγμένων αξόνων σε πιεζοηλεκτρικά υλικά

¹ Σημειώνουμε ότι στις σχέσεις (4.1), (4.2) και στα επόμενα, ένας επαναλαμβανόμενος δείκτης σημαίνει άθροιση ως προς τον δείκτη αυτόν, ενώ οι μη-επαναλαμβανόμενοι (ελεύθεροι δείκτες δίνουν πληροφορίες για το χαρακτήρα της εξίσωσης (βαθμωτή, διανυσματική, τανυστική κλπ)

Αυτοί οι δείκτες βοηθούν επίσης στον καθορισμό του τρόπου λειτουργίας, δηλαδή των κατευθύνσεων του ηλεκτρικού πεδίου που αντιστοιχούν σε ένα εφαρμοσμένο μηχανικό φορέα μιας πιεζοηλεκτρικής συσκευής συλλογής ενέργειας.

4.5 Πιεζοηλεκτρικά υλικά

Τα πιεζοηλεκτρικά υλικά ταξινομούνται σε τέσσερις μεγάλες κατηγορίες, τα κεραμικά, τους μονοκρυστάλλους, τα πολυμερή και τα πολυμερή σύνθετα (Εικόνα 4.7).



Εικόνα 4.7: Διαφορετικές κλάσεις από πιεζοηλεκτρικά υλικά (Mishra, Unnikrishnan, Nayak, & Mohanty, 2018)

4.5.1 Πιεζοηλεκτρικοί Μονοκρύσταλλοι

Τα υλικά αυτά έχουν εξαιρετικές πιεζοηλεκτρικές ιδιότητες και βρίσκουν κυρίως εφαρμογές σε διάφορους ενεργοποιητές και αισθητήρες. Η παρουσία τακτικά διατεταγμένων θετικών και αρνητικών ιόντων σε όλη την ενιαία κρυσταλλική δομή οδηγεί στην κατάλληλη ευθυγράμμιση των δίπολων που είναι πρώτιστα υπεύθυνη για την πιεζοηλεκτρική συμπεριφορά τους. Οι συνηθέστερα χρησιμοποιημένοι πιεζοηλεκτρικοί μονοκρύσταλλοι είναι: Νιοβικό λίθιο (LiNbO_3), στερεό διάλυμα μολύβδου-μαγνησίου-νιοβίου / μολύβδου-τιτανίου (PMN-PT), στερεό διάλυμα μολύβδου-ψευδαργύρου-νιοβίου / μολύβδου-τιτανίου (PZN-PT), κ.λπ. Αυτά τα υλικά βρήκαν εφαρμογές σε διάφορους ηλεκτρομηχανικούς τομείς όπως υδροτηλέφωνα, μετατροπείς σόναρ, επιταχυνσιόμετρα, ενεργοποιητές και ιατρικές συσκευές υπερήχων λόγω των υψηλότερων πιεζοηλεκτρικών συντελεστών τους.

4.5.2 Πιεζοκεραμικά

Τα πιεζοκεραμικά είναι πολυκρυσταλλικά υλικά που αποτελούνται από πολυάριθμους ενιαίους κρυστάλλους «κόκκους» που κατέχουν την ίδια χημική σύνθεση αλλά με διαφορετικό προσανατολισμό μεταξύ τους. Τα υλικά αυτά χαρακτηρίζονται από ανώτερες πιεζοηλεκτρικές ιδιότητες και το σύνθετο κεραμικό μολύβδου-ζirkονίου-

τιτανίου (PZT) θεωρείται ως το σημαντικό πιεζοκεραμικό που χρησιμοποιείται ευρέως για εφαρμογές συλλογής και αποθήκευσης ενέργειας, όπως για παράδειγμα στην κατασκευή διεγερτών. Άλλα παραδείγματα πιεζοκεραμικών περιλαμβάνουν το τιτανιούχο βάριο (BaTiO_3) και το νιοβικό κάλιο (KNbO_3). Ανήκουν στα περισσότερα χρησιμοποιούμενα πιεζοηλεκτρικά υλικά λόγω του χαμηλού κόστους κατασκευής και των σχεδόν αυθαίρετων πιθανών μορφών που μπορούν να πάρουν, σε σύγκριση με τα μονοκρυσταλλικά πιεζοηλεκτρικά υλικά.

Αν και οι κατασκευαστές PZT χρησιμοποιούν προστατευόμενες φόρμουλες, γενικά το PZT-5 είναι εμπλουτισμένο σε Νιόβιο (Nb), το PZT-6 σε Χρώμιο (Cr), το PZT-7 σε Λανθάνιο (La), και το PZT-4 σε Σίδηρο (Fe) (Zhou, 2003).

4.5.3 Πιεζοηλεκτρικά Πολυμερή

Αυτή η κατηγορία περιλαμβάνει υλικά με βάση τον άνθρακα με μακρές αλυσίδες πολυμερών τα οποία ξεχωρίζουν για την εξαιρετική ευελιξία τους σε σχέση με τους μονοκρυστάλλους και τα πιεζοκεραμικά. Έχουν την ικανότητα να αντέξουν πολύ υψηλότερο εφελκυσμό λόγω της ευελιξίας τους, καθιστώντας τα πιο κατάλληλα για εφαρμογές που απαιτούν ένα μεγάλο ποσό κάμψης ή στροφής. Τα πιο γνωστά πιεζοηλεκτρικά πολυμερή είναι το Φθοριούχο πολυβινυλιδένιο (PVDF), το Φθοριούχο πολυβινυλιδένιο - τριφθοριούχο αιθυλένιο (PVDF-TrFE), η κυτταρίνη και τα παράγωγά της, τα πολυαμίδια (PA), τα πολυγαλακτικά οξέα (PLA) κ.λπ. Το PVDF είναι κατάλληλο για μια ποικιλία εφαρμογών που σχετίζονται με την ενέργεια, όπως οι μετατροπείς ήχου, οι ιατρικοί μετατροπείς, οι συσκευές απεικόνισης, οι αισθητήρες κραδασμών και οι αισθητήρες πίεσης.

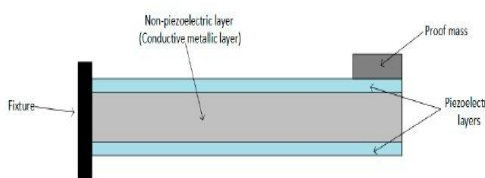
4.5.4 Πιεζοηλεκτρικά Πολυμερή σύνθετα

Για τη διαμόρφωση και την ενίσχυση των ιδιοτήτων των διαφόρων πιεζοηλεκτρικών υλικών, έχουν αναπτυχθεί σχετικά πολυμερή σύνθετα. Τα ενισχυμένα με σωματίδια PZT πολυμερή σύνθετα υλικά έχουν μελετηθεί αποτελεσματικά συνδυάζοντας τις ανώτερες πιεζοηλεκτρικές ιδιότητες της κεραμικής PZT με τη μηχανική ευελιξία των πολυμερών. Τα σύνθετα υλικά έχουν βρεθεί να παρουσιάζουν αρκετές βελτιωμένες ιδιότητες σε σύγκριση με τα προηγούμενα.

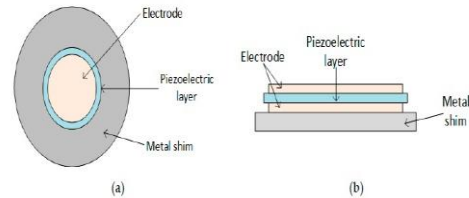
4.6 Τύποι Πιεζοηλεκτρικών διεγερτών

Οι πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες υπάρχουν σε διάφορες μορφές (Covaci & Gontean, 2020):

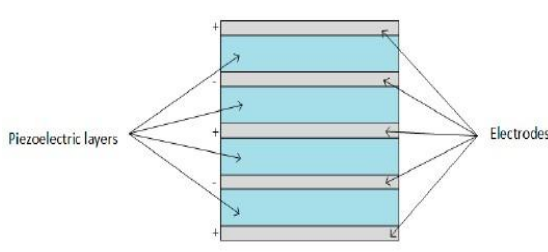
- Δοκοί κάμψης - Cantilever beam (Εικόνα 4.8)
- Κυκλικά διαφράγματα - Circular diaphragm (Εικόνα 4.9)
- Τύπου κύμβαλου - Cymbal type (Εικόνα 4.10)
- Τύπου αυτοκόλλητου - Stack type (Εικόνα 4.11)



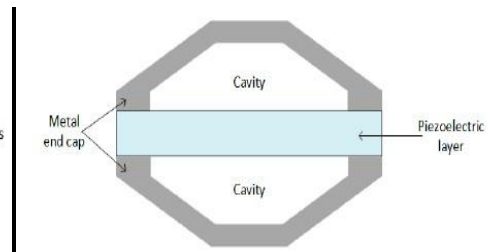
Εικόνα 4.8: Δοκός κάμψης



Εικόνα 4.9: Κυκλικό Διάφραγμα α) Μπροστινή όψη β) Πλάγια όψη



Εικόνα 4.11: Τύπου αυτοκόλλητου



Εικόνα 4.10: Τύπου Κύμβαλου

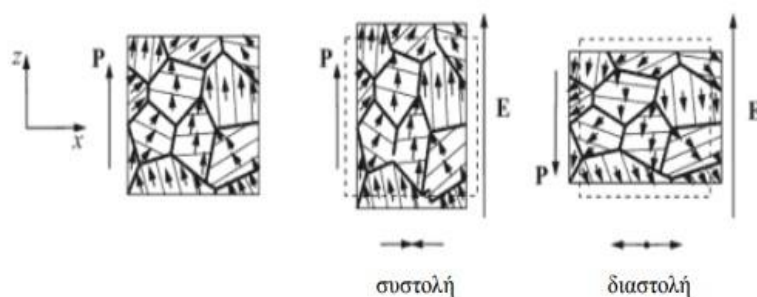
Τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των παραπάνω τύπων πιεζοηλεκτρικών διεγερτών εμφανίζονται στον πίνακα 4.1 (Covaci & Gontean, 2020):

Τύπος πιεζοηλεκτρικού διεγέρτη	Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Δοκός κάμψης	<ul style="list-style-type: none"> • Απλή κατασκευή • Χαμηλό κόστος κατασκευής • Χαμηλότερες συχνότητες συντονισμού • Υψηλή ποιότητα κατασκευής 	<ul style="list-style-type: none"> • Αδυναμία αντίστασης σε μια μεγάλη δύναμη
Κυκλικό διάφραγμα	<ul style="list-style-type: none"> • Συμβατότητα με λειτουργία πίεσης 	<ul style="list-style-type: none"> • Πιο δύσκαμπτο από μια δοκό ίδιου μεγέθους • Υψηλότερες συχνότητες συντονισμού
Τύπου κύμβαλου	<ul style="list-style-type: none"> • Υψηλή παραγωγή ενέργειας • Υψηλή αντοχή σε κρουστικές δυνάμεις 	<ul style="list-style-type: none"> • Περιορίζεται σε εφαρμογές που απαιτούν πηγές δόνησης μεγάλου μεγέθους
Τύπου αυτοκόλλητου	<ul style="list-style-type: none"> • Αντοχή σε υψηλό μηχανικό φορτίο • Κατάλληλο για τρόπο λειτουργίας πίεσης 	<ul style="list-style-type: none"> • Υψηλή δυσκαμψία

Πίνακας 4.1: Πλεονεκτήματα – Μειονεκτήματα πιεζοηλεκτρικών διεγερτών

4.6.1 Πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες με μορφή δοκών κάμψης

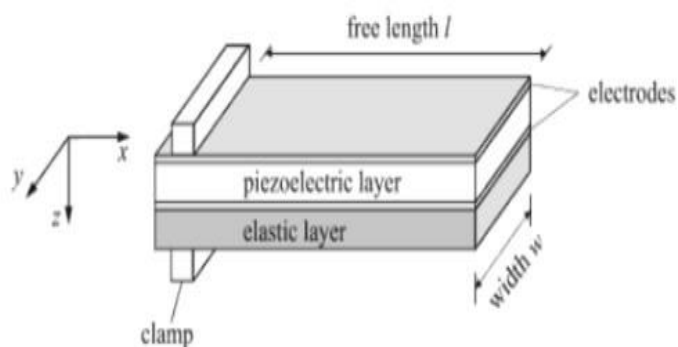
Όλα τα είδη των πιεζοηλεκτρικών διεγερτών, βασίζονται στο αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο. Εφαρμόζοντας δηλαδή ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο στο πιεζοηλεκτρικό υλικό, εμφανίζονται εκτάσεις και συμπίεσεις του υλικού οι οποίες εξαρτώνται απ' τον προσανατολισμό του πεδίου σε σχέση με τη κρυσταλλική δομή στην περίπτωση των μονοκρυσταλλικών υλικών και από τον προσανατολισμό του πεδίου σε σχέση με τη παραμένουσα πόλωση στην περίπτωση των σιδηροηλεκτρικών κεραμικών.



Εικόνα 4.12: Εγκάρσια παραμορφωτική συμπεριφορά των PZT κεραμικών. Από αριστερά: κατάσταση πόλωσης, ηλεκτρικό πεδίο παράλληλα ευθυγραμμισμένο στη παραμένουσα πόλωση (συστολή) και ηλεκτρικό πεδίο αντιπαράλληλα ευθυγραμμισμένο στη παραμένουσα πόλωση (διαστολή) (Zhou, 2003)

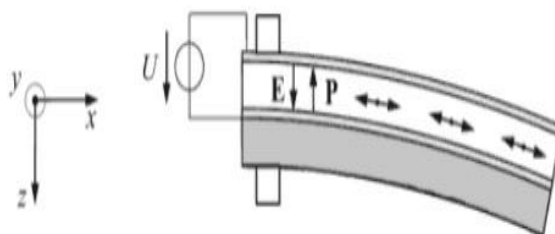
Όπως ήδη αναφέρθηκε παραπάνω, εφαρμόζοντας ένα ηλεκτρικό πεδίο στη διεύθυνση της παραμένουσας πόλωσης P του σιδηροηλεκτρικού κεραμικού, εκτός από τη χωρική ευθυγράμμιση των περιοχών πόλωσης του υλικού, αυτό έχει ως αποτέλεσμα και την αύξηση ή μείωση της συνολικής παραμόρφωσης κατά μήκος της διεύθυνσης του ηλεκτρικού πεδίου. Αυτές οι διαμήκειες εκτάσεις ή συμπίεσεις του υλικού, συνδυάζονται με εγκάρσιες συμπίεσεις ή εκτάσεις κάθετες στη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου (εγκάρσιο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο) (Zhou, 2003). Τα παραπάνω απεικονίζονται στην παρακάτω εικόνα.

Αυτό το χαρακτηριστικό των σιδηροηλεκτρικών κεραμικών από PZT, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την δημιουργία των λεγόμενων μονόμορφων δομών. Μια τέτοια δομή, αποτελείται από ένα ενεργό πιεζοκεραμικό και ένα παθητικό ελαστικό στρώμα. Αν το πιεζοκεραμικό στοιχείο αποτελείται από ένα μονό στρώμα, τότε αναφερόμαστε σε μονοστρωματικό τύπο. Αν όμως το πιεζοκεραμικό στοιχείο αποτελείται από περισσότερα ενεργά πιεζοηλεκτρικά στρώματα, τότε αναφερόμαστε σε πολυστρωματικό τύπο.



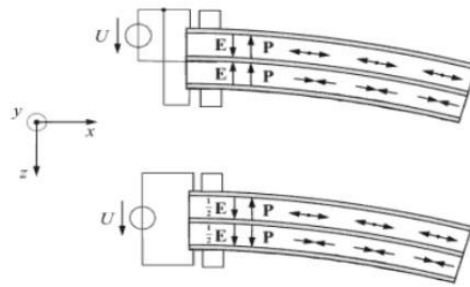
Εικόνα 4.13 Αλληλουχία στρωμάτων σε μονόμορφη δομή

Η κίνηση του πιεζοκεραμικού στοιχείου, που οφείλεται στην έκταση ή την συμπίεση του, περιορίζεται απ' το παθητικό ελαστικό στοιχείο. Αυτό έχει σαν συνέπεια την εμφάνιση μηχανικής ροπής με αποτέλεσμα την παραμόρφωση της συνολικής δομής. Η παραμόρφωση της συνολικής δομής στη διεύθυνση z , είναι πολύ μεγαλύτερη απ' τη παραμόρφωση του πιεζοηλεκτρικού στοιχείου στη διεύθυνση x . Έτσι οι μικρές μεταβολές του μήκους του πιεζοκεραμικού στοιχείου μετατρέπονται σε παραμόρφωση κάμψης. Με τον τρόπο αυτό, είναι δυνατό να δημιουργηθούν μεγάλες παραμορφώσεις στη διεύθυνση z , ακόμα και όταν ο διεγέρτης ενεργοποιείται με χαμηλά ηλεκτρικά δυναμικά (24-200V).



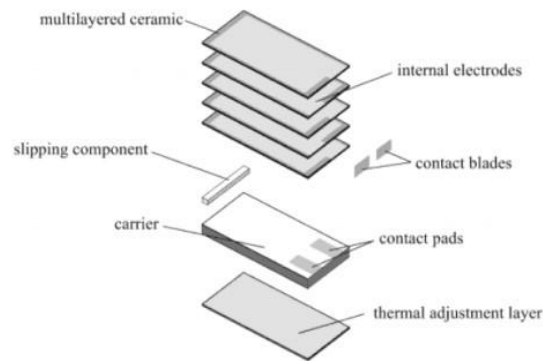
Εικόνα 4.14: Συμπεριφορά μονόμορφης δομής που υπόκειται σε ηλεκτρικό πεδίο

Θεωρούμε εδώ μια δίμορφη δομή μονοστρωματικού τύπου. Αν οι διευθύνσεις ηλεκτρικής πόλωσης και των δυο πιεζοηλεκτρικών στρωμάτων είναι οι ίδιες και τα στρώματα συνδέονται με μια παράλληλη ηλεκτρική σύνδεση, τότε το σύστημα καλείται παράλληλη δίμορφη δομή. Αν οι κατευθύνσεις ηλεκτρικής πόλωσης των δυο στρωμάτων είναι αντίθετες και τα στρώματα συνδέονται με μια σειριακή ηλεκτρική σύνδεση, τότε το σύστημα ονομάζεται σειριακή δίμορφη δομή.



Εικόνα 4.15: Συμπεριφορά δίμορφης δομής, που υπόκειται σε ηλεκτρικό πεδίο. Επάνω φαίνεται η παράλληλη δίμορφη δομή και κάτω η σειριακή δίμορφη δομή

Το πλεονέκτημα στη σειριακή ηλεκτρική σύνδεση αποτελεί το γεγονός ότι δεν απαιτείται η παρουσία εσωτερικής επαφής και επομένως εσωτερικού ηλεκτροδίου. Το μειονέκτημα όμως είναι ότι στο εσωτερικό του κάθε πιεζοηλεκτρικού στρώματος, η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου είναι σχεδόν η μισή σε σχέση με αυτή στην παράλληλη δίμορφη δομή.



Εικόνα 4.16: Δομή μονόμορφης δοκού κάμψης πολυστρωματικού τύπου

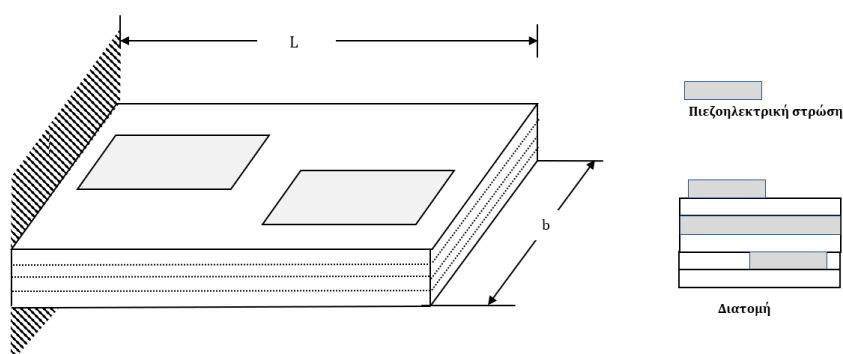
Στο παραπάνω σχήμα περιγράφεται η δομή μιας μονόμορφης δοκού κάμψης με πιεζοηλεκτρικό στρώμα πολυστρωματικού τύπου. Το πιεζοηλεκτρικό κεραμικό στοιχείο, αποτελείται από 5 ενεργά πιεζοηλεκτρικά στρώματα και το παθητικό στοιχείο αποτελείται από ένα στρώμα – φορέα και ένα θερμικά προσαρμοσμένο στρώμα. Συνήθως, τα ηλεκτρόδια συνδέονται μεταξύ τους έτσι ώστε να διασφαλίζεται η εναλλασσόμενη πολικότητα μεταξύ των γειτονικών στρωμάτων (ηλεκτρική παράλληλη σύνδεση). Συγκρίνοντας με τα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά μονοστρωματικού τύπου, το χαμηλό ηλεκτρικό δυναμικό αποτελεί πλεονέκτημα των πιεζοηλεκτρικών κεραμικών πολυστρωματικού τύπου. Οι πιεζοηλεκτρικοί διεγέρτες μονοστρωματικού τύπου, απαιτούν ηλεκτρικό δυναμικό λειτουργίας τουλάχιστον 200V ενώ στους αντίστοιχους διεγέρτες πολυστρωματικού τύπου, το δυναμικό λειτουργίας μειώνεται στα 24V (Schreiner, Binding, & Helke, 2000).

5. Μοντέλο Προσομοίωσης Πιεζοηλεκτρικής Πλάκας για Προβλήματα Συγκομιδής Ενέργειας

Στην ενότητα αυτήν αρχικά παρουσιάζουμε το γενικό μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Model FEM) που περιγράφει την ηλεκτρομηχανική δυναμική συμπεριφορά σύνθετων πολύστρωτων πλακών με επιφανειακά επικολλημένα ή/και ενσωματωμένα πιεζοηλεκτρικά επιθέματα. Η μοντελοποίηση βασίζεται στη διατμητική θεωρία πρώτης τάξης (Reissner - Mindlin), η οποία ενσωματώνει τις ηλεκτρομηχανικές επιδράσεις σύζευξης για να χαρακτηρίσει την συμπεριφορά της πλάκας και των πιεζοηλεκτρικών επιθεμάτων. Στη συνέχεια το μοντέλο εξειδικεύεται στην περίπτωση δίμορφης πιεζοηλεκτρικής πλάκας ενεργειακής συγκομιδής, κατάλληλη για το σχεδιασμό του άξονα πτέρυγας ενός μη επανδρωμένου αεροσκάφους (UAV).

5.1 Μαθηματικό Μοντέλο Σύνθετης Πιεζοηλεκτρικής Πλάκας

Θεωρούμε μια σύνθετη πολύστρωτη ελαστική πλάκα με $P \in \mathbb{N}$ εμφυτευμένα ή προσκολλημένα πιεζοηλεκτρικά επιθέματα/ στρώσεις (Εικόνα 5.1). Τόσο οι ελαστικές όσο και οι πιεζοηλεκτρικές στρώσεις υποτίθεται ότι είναι λεπτές, έτσι ώστε να ισχύει η υπόθεση επίπεδης τάσης (plane stress assumption). Η επαφή μεταξύ των στρωμάτων θεωρείται τέλεια. Για τη μοντελοποίηση ακολουθείται ο κλασικός φορμαλισμός της θεωρίας των σύνθετων πολυστρωματικών πλακών και συμπληρώνεται με όρους που περιγράφουν την ηλεκτρομηχανική σύζευξη. Θεωρούμε επιπλέον ότι το κεντρικό επίπεδο της πλάκας ταυτίζεται με το xy -επίπεδο και συμβολίζουμε με L, b και h το μήκος, το πλάτος και το πάχος ολόκληρης της πλάκας, αντίστοιχα.



Εικόνα 5.1: Σύνθετη Πολύστρωτη Πλάκα με Πιεζοηλεκτρικές Στρώσεις

Με βάση τη διατμητική θεωρία πλακών πρώτης τάξης (Reissner- Mindlin), το πεδίο μετατοπίσεων σε κάθε σημείο της πλάκας περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned}
u_1(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) \\
u_2(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) \quad \text{ή } \{u\} = [H]\{\bar{u}\} \\
u_3(x, y, z, t) &= w(x, y, t)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

με το t να συμβολίζει το χρόνο, τα u, v και w να συμβολίζουν τις επίπεδες και την εγκάρσια μετατόπιση αντίστοιχα των σημείων του μέσου επιπέδου της πλάκας και ψ_x, ψ_y τις στροφές της εγκάρσιας διατομής της πλάκας γύρω από τους άξονες x και y , αντίστοιχα.

Υποθέτοντας μικρές παραμορφώσεις, οι σχέσεις τροπής-παραμόρφωσης μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$\{\varepsilon\} = \nabla_S\{\bar{u}\} \tag{5.2}$$

όπου $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_6, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}^T$ και

$$\nabla_S = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & z \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & 0 & z \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 & z \partial/\partial y & z \partial/\partial x \\ 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι τα πιεζοηλεκτρικά στρώματα πολώνονται ηλεκτρικά κατά το πάχος της πλάκας (τη διεύθυνση του z -άξονα) και ότι το ηλεκτρικό πεδίο εφαρμόζεται παράλληλα με τη διεύθυνση πόλωσης. Επίσης, θεωρούμε ότι οι πιεζοηλεκτρικές στρώσεις επικαλύπτονται με ηλεκτρόδια στην πάνω και κάτω επιφάνειά τους με το πάχος τους να είναι κατά πολύ μικρότερο από το πάχος της κάθε πιεζοηλεκτρικής στρώσης. Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις, το ηλεκτρικό πεδίο $\{E\}$ στην p -πιεζοηλεκτρική στρώση ($p \in \{1, 2, \dots, P\}$) μπορεί να περιγραφεί από το διάνυσμα

$$\{E\}_p = \{E_x, E_y, E_z\}_p = \left[0, 0, -\frac{V_p}{h_p} \right]^T \tag{5.3}$$

όπου h_p είναι το πάχος της πιεζοηλεκτρικής στρώσης και V_p η διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού μεταξύ των ηλεκτροδίων που καλύπτουν την επιφάνεια κάθε πλευράς της p -πιεζοηλεκτρικής στρώσης.

Υποθέτοντας ότι οι εγκάρσιες τάσεις είναι αμελητέες ($\sigma_{zz} = 0$, plane stress assumption) και ότι το πιεζοηλεκτρικό υλικό είναι ορθότροπο, οι τρισδιάστατες καταστατικές εξισώσεις παίρνουν τη μορφή

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \\ \sigma_4 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (5.4a)$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ e_{31} & e_{23} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (5.4b)$$

Στις παραπάνω σχέσεις οι σταθερές δίνονται ως

$$c_{11} = \tilde{c}_{11} - \frac{\tilde{c}_{13}^2}{c_{33}}, \quad c_{12} = \tilde{c}_{12} - \frac{\tilde{c}_{13}\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{33}}, \quad c_{22} = \tilde{c}_{22} - \frac{\tilde{c}_{23}^2}{\tilde{c}_{33}},$$

$$c_{66} = c_{66}, \quad c_{44} = c_{44}, \quad c_{55} = c_{55},$$

$$e_{31} = \tilde{e}_{13} - \frac{\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{33}}\tilde{e}_{33}, \quad e_{32} = \tilde{e}_{32} - \frac{\tilde{c}_{23}}{\tilde{c}_{33}}\tilde{e}_{33}, \quad \xi_{11} = \tilde{\xi}_{11}, \quad \xi_{22} = \tilde{\xi}_{22}, \quad \xi_{33} = \tilde{\xi}_{33} + \frac{\tilde{e}_{33}^2}{\tilde{c}_{33}}$$

όπου $\{\sigma\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$ είναι το διάνυσμα των τάσεων και $\tilde{c}_{ij}, \tilde{e}_{ij}, \tilde{\xi}_{ii}$ είναι οι τρισδιάστατες συνιστώσες του ελαστικού πίνακα ακαμψίας, του πιεζοηλεκτρικού πίνακα και του πίνακα ηλεκτρικής διαπερατότητας, αντίστοιχα. **Στην περίπτωση που μια στρώση είναι καθαρά ελαστική (μη-πιεζοηλεκτρική), οι σταθερές e_{ij} και ξ_{ii} μηδενίζονται.**

Προκειμένου να παράγουμε τις εξισώσεις που περιγράφουν τη δυναμική απόκριση μιας σύνθετης πολύστρωτης πλάκας με πιεζοηλεκτρικές στρώσεις, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την γενικευμένη αρχή Hamilton:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W_E + \delta W_m) dt = 0 \quad (5.5)$$

όπου t_1 και t_2 είναι αυθαίρετες χρονικές στιγμές. Η συνολική κινητική T και δυναμική U ενέργεια και η εσωτερική ηλεκτρική ενέργεια W_E δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \int_{\Omega_k} \rho_k \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} d\Omega + \sum_{p=1}^P \int_{\Omega_p} \rho_p \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} d\Omega \quad (5.6)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \int_{\Omega_k} \{\varepsilon\}^T [c]_k \{\varepsilon\} d\Omega - \sum_{p=1}^P \left(\int_{\Omega_p} \{\varepsilon\}^T [e]_p^T \{E\}_p d\Omega - \int_{\Omega_p} \{E\}_p^T [e]_p \{\varepsilon\} d\Omega \right) \quad (5.7)$$

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{E\}^T \{D\} d\Omega = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \int_{\Omega_p} \{E\}_p^T [\xi]_p^T \{E\}_p d\Omega \quad (5.8)$$

όπου ο δείκτης k αναφέρεται στις καθαρά ελαστικές στρώσεις της σύνθετης πλάκας ενώ ο δείκτης p στις πιεζοηλεκτρικές στρώσεις. Οι παράμετροι ρ και Ω αναφέρονται στην πυκνότητα μάζας και στον όγκο κάθε στρώσης.

Το δυνατό έργο δW_m που παράγεται από τις μη-συντηρητικές μηχανικές δυνάμεις και το ηλεκτρικό φορτίο δίνεται από τη σχέση

$$\delta W_m = \{\delta u\}^T \{f_c\} + \int_S \{\delta u\}^T \{f_s\} dS + \int_{\Omega} \{\delta u\}^T \{f_v\} d\Omega - \{\delta V\}^T \{Q\} \quad (5.9)$$

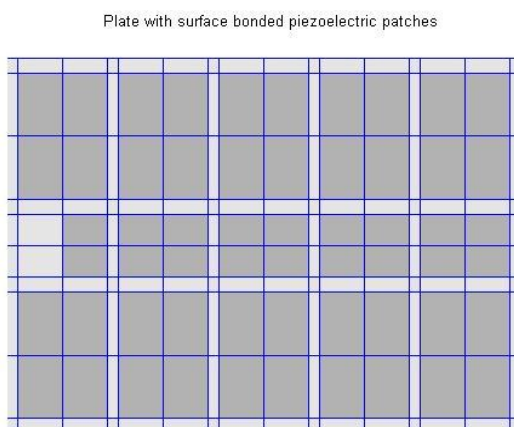
όπου S είναι η εξωτερική επιφάνεια της πλάκας, $\{f_c\}$ είναι το διάνυσμα των επικεντρωμένων δυνάμεων, $\{f_s\}$ και $\{f_v\}$ είναι τα διανύσματα των επιφανειακών δυνάμεων και των δυνάμεων όγκου αντίστοιχα και $\{Q\}$ είναι το σημειακό ηλεκτρικό φορτίο που παράγεται από τις πιεζοηλεκτρικές στρώσεις.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.6)-(5.9) στην αρχή Hamilton (5.5), προκύπτει η ολοκληρωτική διατύπωση των εξισώσεων που διέπουν τη συμπεριφορά μιας σύνθετης πιεζοηλεκτρικής πλάκας. Η σχέση αυτή χρησιμοποιείται στην επόμενη παράγραφο για την υπολογιστική μοντελοποίηση της κατασκευής με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων.

5.2 Μοντέλο Πεπερασμένων Στοιχείων

Η αναλυτική επίλυση μαθηματικών μοντέλων σύνθετων κατασκευών είναι πολύ δύσκολη, αν όχι αδύνατη. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (finite element method) είναι πολύ διαδεδομένη και χρήσιμη σε τέτοιου είδους προβλήματα. Η μέθοδος αυτή είναι μεν προσεγγιστική μέθοδος, αλλά μπορεί να δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα και έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε πολλά προβλήματα μηχανικού αλλά και στο πρόβλημα συγκομιδής ενέργειας που μελετάται σε αυτήν την εργασία. Το μειονέκτημά της είναι οι αυξημένες απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ, γεγονός που ξεπεράστηκε με δυνατότητα που μας δόθηκε για χρήση του εξοπλισμού Εργαστηρίου Γνώσης και Ευφυούς Πληροφορικής του Τμήματος Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Η θεμελιώδης αρχή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων βασίζεται στην αντικατάσταση γεωμετρικά σύνθετου πεδίου του προβλήματος με ένα σύνολο απλών υποπεδίων τα οποία ονομάζονται πεπερασμένα στοιχεία (Εικόνα 5.2).



Εικόνα 5.2: Διαμερισμός πλάκας σε πεπερασμένα στοιχεία

Τα στάδια που ακολουθούμε για τη μετάβαση στο αντίστοιχο υπολογιστικό μοντέλο είναι:

1. Αρχικά γίνεται η επιλογή του καταλληλότερου τύπου των πεπερασμένων στοιχείων για τη προσφορότερη προσομοίωση της κατασκευής.
2. Μορφώνεται το δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων για ολόκληρη την κατασκευή (Διακριτοποίηση).
3. Διατυπώνεται η αρχή Hamilton πάνω σε ένα πεπερασμένο στοιχείο

4. Παράγεται το υπολογιστικό μοντέλο για κάθε στοιχείο. Το υπολογιστικό μοντέλο αποτελείται από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ως προς τις άγνωστες παραμέτρους του στοιχείου
5. Υπολογίζονται τα μητρώα στοιβαρότητας (stiffness matrices), τα μητρώα μάζας (mass matrix) και οι ισοδύναμες δράσεις (mechanical and electrical loads) των στοιχείων
6. Παράγεται η τελική (καθολική) μορφή των συζευγμένων εξισώσεων κίνησης.

Στη συνέχεια, θεωρούμε ότι η επιφάνεια της πλάκας διακριτοποιείται με έναν αριθμό N_e επιφανειακών τετράπλευρων ισοπαραμετρικών στοιχείων Lagrange με πέντε βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο: τις μετατοπίσεις u, v κατά τη διεύθυνση των αξόνων x και y , αντίστοιχα, την εγκάρσια μετατόπιση w , τη στροφή ψ_x ως προς τον άξονα των y και τη στροφή ψ_y ως προς τον άξονα των x . Το διάνυσμα γενικευμένης μετατόπισης παρεμβάλλεται ως:

$$\{\bar{u}(x, y, t)\}_e = [N_u]\{d\}_e = \sum_{j=1}^4 \left(N_j [I]_{5 \times 5} \{d_j\}_e \right) \quad (5.10)$$

όπου I_5 είναι ο μοναδιαίος πίνακας 5×5 , $\{d_j\}_e = \{u_j, v_j, w_j, \varphi_{xj}, \varphi_{yj}\}^T$ είναι οι άγνωστες τιμές των βαθμών ελευθερίας στους κόμβους του στοιχείου και $N_j(\xi, \eta)$ είναι οι γνωστές διγραμμικές συναρτήσεις μορφής (shape functions).

Αντικαθιστώντας την σχέση (5.10) στην (5.2), προκύπτει

$$\{\varepsilon(x, y, t)\}_e = \nabla_S([H][N_u]\{d\}_e) = [B]\{d\}_e \quad (5.11)$$

Η ηλεκτρική συμπεριφορά ενός συγκεκριμένου πιεζοηλεκτρικού στρώματος προσδιορίζεται από το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου $\{E\}$ που δίνεται στην σχέση (5.3). Δεδομένου ότι δύο αγώγιμα ηλεκτρόδια τοποθετούνται και στις δύο επιφάνειες του πιεζοηλεκτρικού στρώματος, όλα τα πιεζοηλεκτρικά στοιχεία παράγουν την ίδια διαφορά δυναμικού, επομένως θεωρούμε μόνο έναν ηλεκτρικό βαθμό ελευθερίας για κάθε πιεζοηλεκτρικό στοιχείο.

Έτσι, μετά τη διακριτοποίηση της πλάκας, οι διαφορές των ηλεκτρικών δυναμικών όλων των πιεζοηλεκτρικών στρωμάτων κατά το πάχος του στοιχείου μπορούν να εκφραστούν ως:

$$\{V_p\}_e = \{V^1, V^2, \dots, V^{N_{pe}}\}_e^T \quad (5.12)$$

όπου N_{pe} είναι ο αριθμός των πιεζοηλεκτρικών στρώσεων στο στοιχείο e . Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου στο στοιχείο e μπορεί να γραφτεί ως

$$\{E\}_e = [B_V]_e \{V_p\}_e \quad (5.13)$$

όπου $[B_V]_e = \text{diag}([B_V]_{1e}, [B_V]_{2e}, \dots, [B_V]_{N_{pe}e})$ είναι ο πίνακας ηλεκτρικού πεδίου - ηλεκτρικού δυναμικού, ο οποίος έχει διαγώνια μορφή αφού η διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού ενός πιεζο-στρώματος επηρεάζει το ηλεκτρικό πεδίο μόνο του ίδιου στρώματος.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.6)-(5.13) στη γενικευμένη αρχή Hamilton (5.5) και συναρμολογώντας τις επιμέρους εξισώσεις για κάθε πεπερασμένο στοιχείο, προκύπτει το καθολικό σύστημα των εξισώσεων που διέπει την ηλεκτρομηχανική συμπεριφορά μιας σύνθετης πιεζοηλεκτρικής πλάκας:

$$[M]\{\ddot{d}\} + [C]\{\dot{d}\} + [K]\{d\} + [K_{u\phi}]\{V_p\} = \{F_m\} \quad (5.14\alpha)$$

$$-[K_{\phi u}]\{d\} + [K_{\phi\phi}]\{V_p\} = \{Q\} \quad (5.14\beta)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, $\{d\}$ είναι το $(N \times 1)$ καθολικό διάνυσμα των μηχανικών βαθμών ελευθερίας και $\{V_p\}$ είναι το $(N_p \times 1)$ καθολικό διάνυσμα των ηλεκτρικών βαθμών ελευθερίας. Επιπλέον, $[M]$ είναι ο $(N \times N)$ καθολικός πίνακας μάζας του φορέα, $[K]$ είναι ο $(N \times N)$ καθολικός πίνακας στοιβαρότητας, $[K_{u\phi}] = [K_{\phi u}]^T$ είναι ο $(N \times N_p)$ καθολικός πίνακας ηλεκτρομηχανικής σύζευξης, $[K_{\phi\phi}]$ είναι ο $(N_p \times N_p)$ διαγώνιος πίνακας ηλεκτρικής διαπερατότητας, $\{F_m\}$ είναι το $(N \times 1)$ καθολικό διάνυσμα των μηχανικών δυνάμεων, $\{Q\}$ είναι το $(N_p \times 1)$ καθολικό διάνυσμα του ηλεκτρικού φορτίου. Εδώ, N και N_p είναι ο αριθμός των μηχανικών και ηλεκτρικών βαθμών ελευθερίας αντίστοιχα. Αναλυτικές εκφράσεις για τη μορφή των παραπάνω πινάκων δίνεται στην εργασία των Foutsitzi et al (Foutsitzi, Gogos, Hadjigeorgiou, & Stavroulakis, 2013).

Στη σχέση (5.14α), έχουμε εισάγει τον $(N \times N)$ καθολικό πίνακα απόσβεσης ο οποίος υποθέτουμε ότι είναι ανάλογος με τους πίνακες μάζας και στοιβαρότητας:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (5.15)$$

όπου α και β είναι οι σταθερές αναλογίας.

Στις πρακτικές εφαρμογές, τα στρώματα ηλεκτροδίων καλύπτουν το πάνω και το κάτω μέρος του πιεζοηλεκτρικού υλικού όπου το φυσικό σύστημα έχει μόνο δύο καλώδια συνδεδεμένα με τα δύο στρώματα ηλεκτροδίων με αποτέλεσμα μία έξοδο απλής τάσης όπως φαίνεται στην Εικόνα 5.3. Ωστόσο, η μοντελοποίηση με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων θεωρεί ότι η πιεζοηλεκτρική πλάκα έχει διακριτοποιηθεί σε έναν αριθμό πεπερασμένων στοιχείων που το καθένα έχει τους δικούς του μηχανικούς (μετατοπίσεις και στροφές) και ηλεκτρικούς βαθμούς ελευθερίας (διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού). Για να λάβουμε υπόψη τη συνθήκη ίσης διαφοράς δυναμικού στα ηλεκτρόδια καθεμιάς πιεζοηλεκτρικής στρώσης (ανεξάρτητα από τον αριθμό των πεπερασμένων στοιχείων στα όποια έχει διακριτοποιηθεί), ορίζουμε το διάνυσμα των διαφορών ηλεκτρικού δυναμικού που παράγονται ή εφαρμόζονται στα ηλεκτρόδια των πιεζοηλεκτρικών στρωμάτων, έτσι ώστε

$$\{V\} = [L_p]\{V_p\} \quad (5.16)$$

Ο δυαδικός (boolean) πίνακας $[L_p]$ έχει διάσταση $N \times N_{pl}$, όπου N_{pl} είναι ο αριθμός ανεξάρτητων πιεζοηλεκτρικών στρώσεων/επιθεμάτων. Ο πίνακας $[L_p]$ αποδίδει την ίδια διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού σε όλα τα πεπερασμένα στοιχεία που διακριτοποιούν μια συγκεκριμένη πιεζοηλεκτρική στρώση.

Αντικαθιστώντας την (5.16) στο σύστημα (5.14) αφού παραγωγίσουμε ως προς το χρόνο και πολλαπλασιάσουμε τη (5.14β) με $[L_p]^T$, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{d}\} + [C]\{\dot{d}\} + [K]\{d\} + [\theta]\{V\} &= \{F_m\} \\ -[\theta]\{\dot{d}\} + [C_p]\{\dot{V}\} &= \{\dot{Q}\} \end{aligned} \quad (5.17)$$

όπου $[\theta] = [K_{u\phi}][L_p]$ και $[C_p] = [L_p]^T [K_{\phi\phi}][L_p] \dots$

Το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων (5.17) μπορεί εύκολα να προσαρμοστεί στην περίπτωση μιας δίμορφης πιεζοηλεκτρικής πλάκας για προβλήματα συγκομιδής ενέργειας, όπως αυτά που μελετούμε στην παρούσα εργασία.

5.3 Μοντέλο Δίμορφης Πιεζοηλεκτρικής Πλάκας

Στη συνέχεια θεωρούμε μια (δίμορφη) πιεζοηλεκτρική πλάκα που αποτελείται από ένα κεντρικό ελαστικό στρώμα με δύο πιεζοηλεκτρικές στρώσεις προσκολλημένες ή εμφυτευμένες στην πάνω και κάτω επιφάνειά της. Η πλάκα είναι πακτωμένη στο αριστερό άκρο και η βάση της θεωρείται ευαίσθητη σε δονήσεις του περιβάλλοντος (βλ. Εικόνα 5.3). Στην περίπτωση αυτή, ο αριθμός των πιεζοηλεκτρικών στρώσεων είναι $N_{pl} = 2$ και επομένως $\{V_p\} = \{V_1, V_2\}^T$ όπου V_1, V_2 είναι η διαφορά δυναμικού για κάθε πιεζοηλεκτρική στρώση. Επιπλέον $[\theta] = [\theta_1, \theta_2]$ και $[C_p] = \text{diag}(C_{p1}, C_{p2})$.

Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω μοντέλο σε εφαρμογές συγκομιδής ενέργειας, θεωρούμε ότι η κίνηση της πλάκας οφείλεται στην επιτάχυνση $\{\ddot{d}_b\}$ της βάσης της, ενώ δεν ασκείται άλλη εξωτερική δύναμη, οπότε

$$\{F_m\} = -[M]\{\ddot{d}_b\} \quad (5.18)$$

Με βάση τις παραπάνω υποθέσεις, το σύστημα των εξισώσεων που διέπει την ηλεκτρομηχανική συμπεριφορά της δίμορφης πιεζοηλεκτρικής πλάκας δίνεται από τις σχέσεις:

$$[M]\{\ddot{d}\} + [C]\{\dot{d}\} + [K]\{d\} + [\theta_1]V_1 + [\theta_2]V_2 = -[M]\{\ddot{d}_b\} \quad (5.19\alpha)$$

$$-[\theta_1]^T\{\dot{d}\} + C_{p1}\dot{V}_1 + \dot{Q}_1 = 0 \quad (5.19\beta)$$

$$-[\theta_2]^T\{\dot{d}\} + C_{p2}\dot{V}_2 + \dot{Q}_2 = 0 \quad (5.19\gamma)$$

είναι Q_1, Q_2 είναι τα φορτία που δημιουργούνται από τις πιεζοηλεκτρικές πλάκες. Ωστόσο, στις εφαρμογές χρειαζόμαστε μόνο μία τιμή τάσης που εξέρχεται από τον συλλέκτη ενέργειας. Μια τέτοια κατάσταση επιτυγχάνεται συνδέοντας τις δύο πιεζοηλεκτρικές στρώσεις είτε σε σειρά (για μεγιστοποίηση της τάσης) είτε παράλληλα (για μεγιστοποίηση του ρεύματος). Ειδικότερα, στην πρώτη περίπτωση, οι δύο πιεζοηλεκτρικές πλάκες είναι πολωμένες σε αντι-παράλληλες κατευθύνσεις, ενώ στη

δεύτερη περίπτωση είναι πολωμένες σε παράλληλες κατευθύνσεις. Παρατηρούμε ότι η κατάσταση της αντι-παράλληλης πόλωσης επιτυγχάνεται γράφοντας τις πιεζοηλεκτρικές σταθερές με αντίθετο πρόσημο. Στη σύνδεση σε σειρά, το συνολικό φορτίο εξόδου είναι ίσο με κάθε φορτίο εξόδου που παράγεται από κάθε πιεζοηλεκτρική στρώση, $Q = Q_1 = Q_2$, ενώ η ολική τάση εξόδου είναι το άθροισμα κάθε τάσης εξόδου, δηλαδή, $V = V_1 + V_2$. όσον αφορά το ηλεκτρικό ρεύμα που ρέει μέσω της εξωτερικής αντίστασης R έχουμε $I = \dot{Q} = V/R = (V_1 + V_2) / R$. Σε αυτό το σημείο αθροίζουμε τις Εξ. (5.19β)-(5.19γ) με την προϋπόθεση ίδιων πιεζοηλεκτρικών υλικών, δηλαδή, $C_{p1} = C_{p2}$ και $V_1 = V_2$, και οδηγούμαστε:

$$[M]\{\ddot{d}\} + [C]\{\dot{d}\} + [K]\{d\} + [\theta]V = -[M]\{\ddot{d}_b\} \quad (5.20\alpha)$$

$$-[\theta]^T\{\dot{d}\} + C_p\dot{V} + \frac{V}{R} = 0 \quad (5.20\beta)$$

όπου $C_p = \frac{C_{p1}}{2} = \frac{C_{p2}}{2}$ και $[\theta] = \frac{1}{2}([\theta_1] + [\theta_2])$.

5.4 Επίλυση στο Πεδίο Συχνότητων

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι η διέγερση της πλάκας οφείλεται στην αρμονική κίνηση της βάσης της κατά την κατακόρυφη διεύθυνση. Όποτε η μη μηδενική κατακόρυφη συνιστώσα της μετατόπισης της βάσης μπορεί να γραφεί στη μορφή: $w_b = Y_0 e^{j\omega t}$, όπου Y_0 είναι το εύρος, ω είναι η συχνότητα διέγερσης και $j = \sqrt{-1}$ είναι η φανταστική μονάδα. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε λύσεις για τη μηχανική μετατόπιση και τη διαφορά δυναμικού της μορφής: $\{d\} = \{d_0\} e^{j\omega t}$ και $V = V_0 e^{j\omega t}$, όπου $\{d_0\}$ είναι το πλάτος της μετατόπισης και είναι V_0 το πλάτος της διαφοράς δυναμικού. Οι εν λόγω λύσεις μπορούν να αντικατασταθούν στο σύστημα των ηλεκτρομηχανικών εξισώσεων (5.20) ώστε να προκύψει η ηλεκτρομηχανική απόκριση του συστήματος στο πεδίο των συχνοτήτων (Frequency Response Function (FRF)).

Η απόκριση σε συχνότητα (FRF) του συστήματος υπό διέγερση της βάσης του ορίζεται ως τον λόγο εξόδου (μετατόπιση ή διαφορά δυναμικού) προς την είσοδο (επιτάχυνση της βάσης). Μετασχηματίζοντας τις εξισώσεις (5.20) στο πεδίο συχνοτήτων και αφού εξαλείψουμε τους μηχανικούς βαθμούς ελευθερίας, προκύπτει η απόκριση συχνότητας για τη διαφορά δυναμικού:

$$\frac{V(t)}{-\omega^2 Y_0 e^{j\omega t}} = j\omega \left(\frac{1}{R} + j\omega C_p \right)^{-1} [\theta]^T \left(\begin{array}{c} -\omega^2 [M] + j\omega [C] + [K] \\ + j\omega \left(\frac{1}{R} + j\omega C_p \right)^{-1} [\theta][\theta]^T \end{array} \right)^{-1} [m^*] \quad (5.21)$$

όπου $[m^*]$ είναι ένα $(N \times 1)$ διάνυσμα μάζας το οποίο προκύπτει από τον καθολικό όρο της εφαρμοσμένης δύναμης στο δεξί μέλος της σχέσης (5.20α) μετά την αντικατάσταση της συγκεκριμένης μορφής της μετατόπισης της βάσης.

Η απόκριση συχνότητας (συνάρτηση μεταφοράς) για το ηλεκτρικό ρεύμα προκύπτει διαιρώντας τη συνάρτηση απόκρισης της διαφοράς δυναμικού με την αντίσταση R . Η απόκριση συχνότητας της ηλεκτρικής ισχύος ισούται με το γινόμενο της απόκρισης συχνότητας της διαφοράς δυναμικού επί την απόκριση συχνότητας του ηλεκτρικού ρεύματος. Σημειώνουμε ότι το εύρος της ηλεκτρικής ισχύος δίνεται από της σχέση:

$$P = \frac{|V|^2}{R}, \quad (5.22)$$

δηλαδή είναι η αιχμή της ηλεκτρικής ισχύος (peak power).

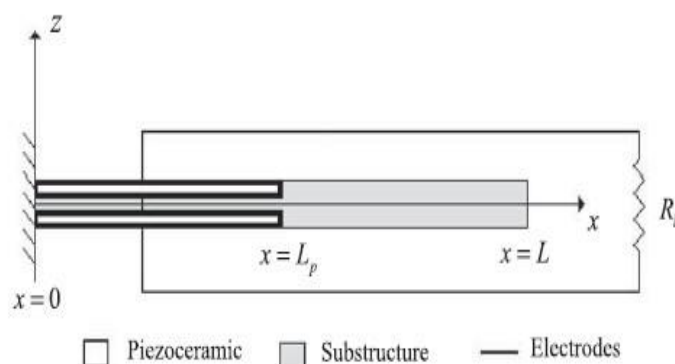
Σημειώνουμε ότι η μέγιστη ηλεκτρική ισχύς (peak power) σε ένα εύρος συχνοτήτων κοντά στην πρώτη φυσική συχνότητα του συστήματος, θα χρησιμοποιηθεί στην επόμενη ενότητα για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης.

Για την αριθμητική επίλυση και ανάλυσή της σχέσης (5.22) χρησιμοποιήθηκε κώδικας σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab.

5.5 Σχεδιασμός του άξονα πτέρυγας ενεργειακής συγκομιδής με ενσωματωμένα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά

Τα μη επανδρωμένα εναέρια οχήματα έχουν περιορισμένη πηγή ενέργειας, περιορισμένο μέγεθος και ικανότητα φορτίου. Ο άξονας αλουμινίου ενός UAV είναι τροποποιημένος για να σχεδιαστεί ένας άξονας πτέρυγας γεννητριών. Ο άξονας πτέρυγας είναι μια πρόσθετη πηγή ενέργειας που με την αποδεκτή προσθήκη μάζας, θα μπορούσε να βοηθήσει στο γενικό στόχο της μέγιστης αντοχής, της εμβέλειας πτήσης ή της ισχύος μικρών ηλεκτρονικών εξαρτημάτων του UAV. Οι διαστάσεις του αρχικού άξονα πτέρυγας είναι $300 \times 30 \times 12 \text{ mm}^3$ και ο σκοπός είναι να αντικατασταθεί κάποιο μέρος του αρχικού υλικού του άξονα (κράμα αργιλίου αεροσκαφών Al 2024-T3) από το πιεζοηλεκτρικό κεραμικό υλικό (PZT-5A). Δύο πανομοιότυπα στρώματα PZT-5A είναι

ενσωματωμένα στην κορυφή και στο κάτω μέρος του άξονα αντικαθιστώντας το αρχικό υλικό όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα (DeMarqui, Erturk, & Inman, 2009).



Εικόνα 5.3: Άξονας πτέρυγας της γεννήτριας με ενσωματωμένα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά (σύνδεση σειράς) (DeMarqui, Erturk, & Inman, 2009)

Δεδομένου ότι η πυκνότητα μάζας του PZT-5A (7800 kg/m^3) είναι σημαντικά μεγαλύτερη από εκείνη του κράματος αλουμινίου (2750 kg/m^3), η κρίσιμη παράμετρος στο πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι η ποσότητα μάζας που προστίθεται στον άξονα πτέρυγας. Ως εκ τούτου, επιβάλλεται ο ακόλουθος περιορισμός σχεδιασμού: **Η συνολική μάζα που προστίθεται από τα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά στρώματα στην τελική διαμόρφωση του πιεζοηλεκτρικού άξονα πτέρυγας ενέργειας δεν πρέπει να υπερβαίνει το 10% της μάζας του αρχικού άξονα αλουμινίου.** Ο στόχος είναι να βρεθεί η βέλτιστη γεωμετρική διαμόρφωση (μήκος και πάχος) των ενσωματωμένων πιεζοηλεκτρικών κεραμικών στρωμάτων που θα δώσουν τη μέγιστη ηλεκτρική ισχύ εξόδου και θα ικανοποιήσουν τον επιβαλλόμενο περιορισμό μάζας. Το πλάτος του πιεζοηλεκτρικού κεραμικού θεωρείται ότι είναι το ίδιο με αυτό του άξονα. Τα αντίθετα πολωμένα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά στρώματα καλύπτονται πλήρως από αγώγιμα ηλεκτρόδια και συνδυάζονται σε σειρά.

Είναι γνωστό ότι τα τυπικά πιεζοηλεκτρικά κεραμικά είναι πολύ εύθραυστα σε σύγκριση με τα υλικά κλασικής μηχανικής (όπως το κράμα αλουμινίου αεροσκαφών που εξετάζεται εδώ, το οποίο έχει απόλυτη αντοχή εφελκυσμού 483 MPa). Αν και οι τιμές συμπίεστικής δύναμης των πιεζοηλεκτρικών κεραμικών είναι αρκετά μεγάλες (η Morgan electroceramics αναφέρει ότι η συμπίεστική δύναμη του PZT-5A είναι μεγαλύτερη από 517 MPa), τόσο οι στατικές όσο και οι δυναμικές τάσεις εφελκυσμού του PZT-5A είναι μικρές σε σύγκριση με τα τυπικά υλικά μηχανικής. Οι αναφερόμενες τιμές στατικής και δυναμικής τάσης εφελκυσμού του PZT-5A είναι $75,8$ και $27,6 \text{ MPa}$, αντίστοιχα. Οι

γεωμετρικές και υλικές ιδιότητες της αρχικού άξονα (κράμα αλουμινίου αεροσκάφους Al 2024-T3) παρουσιάζονται στον πίνακα 5.1 ενώ οι ιδιότητες του PZT-5A βρίσκονται στον πίνακα 5.2.

Length of the spar (mm)	300
Width of the spar (mm)	30
Thickness of the spar (mm)	12
Young's modulus of the spar (GPa)	70.0
Mass density of the substructure (Kg/m³)	2750
Proportional constant – α (rad/s)	21.28
Proportional constant – β (s/rad)	10^{-5}

Πίνακας 5.1: Γεωμετρικές και υλικές ιδιότητες του περυγίου αλουμινίου (DeMarqui, Erturk, & Inman, 2009)

Mass density of the PZT (Kg/m³)	7800
Permittivity (nF/m)	$1800 \times \epsilon_0$
c_{11}^E, c_{22}^E (GPa)	120.3
c_{12}^E (GPa)	75.2
c_{13}^E, c_{23}^E (GPa)	75.1
c_{33}^E (GPa)	110.9
c_{66}^E (GPa)	22.7
e_{31}, e_{32} (C/m²)	-5.2
e_{33} (C/m²)	15.9

Πίνακας 5.2: Γεωμετρικές και υλικές ιδιότητες του PZT-5A (DeMarqui, Erturk, & Inman, 2009)

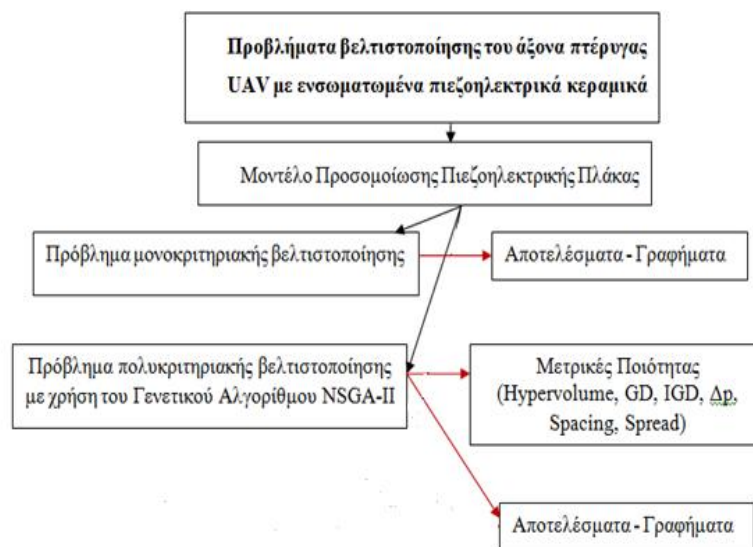
6. Προβλήματα βελτιστοποίησης άξονα πτέρυγας UAV με ενσωματωμένα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά

6.1 Εισαγωγή

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται τα πειραματικά αποτελέσματα που λήφθηκαν από την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης (μονοκριτηριακό – πολυκριτηριακό) στην περίπτωση του άξονα πτέρυγας ενός μη επανδρωμένου αεροσκάφους (UAV) με ενσωματωμένα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά.

Όλα τα πειράματα εκτελέστηκαν σε υπολογιστή του Εργαστηρίου Γνώσης και Ευφυούς Πληροφορικής του Τμήματος Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων με τα εξής χαρακτηριστικά: Intel Core i9 7960X - CPU 2,80 GHz, 16- πύρηνο, 64 GB RAM, Windows 10 PRO.

Τα προβλήματα βελτιστοποίησης του άξονα πτέρυγας UAV που μελετήθηκαν υλοποιήθηκαν σε κώδικα Matlab. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε για την υλοποίηση των προβλημάτων βελτιστοποίησης παρουσιάζεται στο παρακάτω διάγραμμα (Εικόνα 6.1).



Εικόνα 6.1: Διάγραμμα με τα βήματα υλοποίησης των προβλημάτων βελτιστοποίησης

Στόχος της παρούσας εργασίας, όπως φαίνεται και στο παραπάνω διάγραμμα, είναι να υλοποιηθούν προβλήματα βελτιστοποίησης με βάση το μοντέλο προσομοίωσης πιεζοηλεκτρικής πλάκας το οποίο αναλύθηκε λεπτομερώς στην προηγούμενη ενότητα και το οποίο υλοποιήθηκε σε κώδικα Matlab. Αρχικά, θα μελετηθεί ένα μονοκριτηριακό

πρόβλημα με εξαντλητική αναζήτηση και το οποίο προσδιορίζει τη μέγιστη ηλεκτρική ισχύ ικανοποιώντας τον περιορισμό $L_{star} * H_{star} \leq 0,027225$.

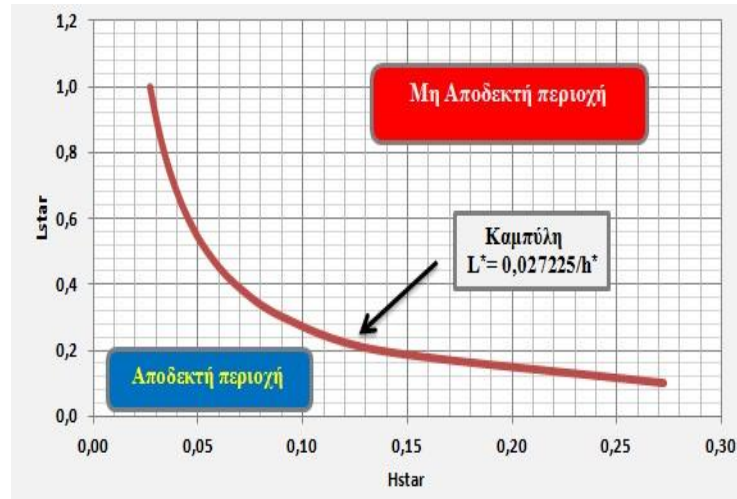
Στη συνέχεια, θα υλοποιηθεί ένα πολυκριτηριακό πρόβλημα με τη χρήση του Γενετικού Αλγορίθμου NSGA-II που υπολογίζει τη μέγιστη ηλεκτρική ισχύ ελαχιστοποιώντας ταυτόχρονα τη συνολική μάζα των πιεζοηλεκτρικών κεραμικών που προστίθενται στον άξονα. Συγκεκριμένα, θα απεικονιστεί σε γράφημα το βέλτιστο μέτωπο Pareto που προκύπτει από την υλοποίηση του αλγορίθμου για διάφορα μεγέθη πληθυσμού – αριθμό γενεών. Επίσης, στο ίδιο πρόβλημα θα υπολογιστούν κάποιες χαρακτηριστικές μετρικές ποιότητας (Hypervolume, Spacing, Spread, Generational Distance, κ.α.) και οι οποίες χρησιμοποιούνται για ανάλυση και σύγκριση των μετώπων μη-κυριαρχούμενων λύσεων.

6.2 Πρόβλημα μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης άξονα πτέρυγας UAV με ενσωματωμένα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά

Η ηλεκτρομηχανική συμπεριφορά του άξονα της γεννήτριας ερευνάται αρχικά χρησιμοποιώντας ένα σύνολο διαστάσεων για δύο πανομοιότυπα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά στρώματα (Εικόνα 5.3) ενσωματωμένα στην πάνω και κάτω επιφάνεια του άξονα. Το μήκος των πιεζοηλεκτρικών κεραμικών στρωμάτων αυξάνεται με μια σταθερή αύξηση (10% του μήκους του άξονα). Σε κάθε μήκος, η ηλεκτρομηχανική συμπεριφορά ερευνάται για διαφορετικές τιμές πάχους των στρωμάτων, που κυμαίνονται από 0,27 έως 2,7 χιλιοστά περίπου.

Η ισχύς εξόδου, η παράμετρος που πρέπει να βελτιστοποιηθεί εντός των ορίων που καθορίζονται από τον περιορισμό μάζας, λαμβάνεται για ένα ευρύ φάσμα φορτίου μέχρι να παρατηρηθεί η βέλτιστη. Είναι απλό να αποδειχθεί ότι ο περιορισμός μάζας συνεπάγεται $L_{star} * H_{star} \leq 0,027225$. Ως εκ τούτου, η υπερβολή που καθορίζει την οριακή λύση στην Εικόνα 6.2 είναι η καμπύλη $L_{star} = 0,027225/H_{star}$. Οι συνδυασμοί L_{star} , H_{star} πάνω από αυτή την καμπύλη υπερβαίνουν το δεδομένο περιορισμό μάζας (10% της αρχικής μάζας άξονα), ενώ εκείνοι κάτω από την καμπύλη πληρούν τη δεδομένη προϋπόθεση. Το πρόβλημα είναι στη συνέχεια να βρεθεί η βέλτιστη λύση για την καμπύλη περιορισμού.

Εάν δεν επιβληθεί περιορισμός μάζας στο πρόβλημα, η διαμόρφωση με μέγιστο μήκος και πάχος θα ήταν η καλύτερη από την άποψη της συλλογής ενέργειας. Ωστόσο, ο κύριος στόχος εδώ είναι να βελτιστοποιηθεί η ισχύς εξόδου και να ικανοποιηθεί ο περιορισμός $L_{star} * H_{star} \leq 0,027225$ (6.1).



Εικόνα 6.2: Καμπύλη περιορισμού $L_{star} = 0,027225/H_{star}$ (DeMarqui, Erturk, & Inman, 2009)

Με βάση το μοντέλο προσομοίωσης για το συγκεκριμένο πρόβλημα δημιουργήθηκε κώδικας σε Matlab για να προσδιοριστεί η μέγιστη ηλεκτρική ισχύς εξόδου ικανοποιώντας τους περιορισμούς για τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Η μαθηματική διατύπωση του μονοκριτηριακού προβλήματος που μελετάμε δίνεται από τις σχέσεις;

$$\begin{aligned} \max \quad & f_1(L_{star}, H_{star}, R_1) = peak_1 \\ \text{st} \quad & 0.1 \leq L_{star} \leq 1 \\ & L_{star} * H_{star} \leq 0.027225 \\ & 0.027225 \leq H_{star} \leq 0.27225 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Συγκεκριμένα, θα πρέπει το αδιάστατο μήκος να κυμαίνεται από 0.1 έως 1, το αδιάστατο πάχος από 0.027225 έως 0.27225 και ταυτόχρονα να τηρείται ο περιορισμός $L_{star} * H_{star} \leq 0.027225$. Το πρόβλημα επιλύθηκε με εξαντλητική αναζήτηση, δηλαδή στη Matlab δημιουργήθηκε κώδικας με δύο βρόχους for για τους περιορισμούς L_{star} και H_{star} και μια συνθήκη if για τον περιορισμό $L_{star} * H_{star} \leq 0.027225$. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εκτέλεση του κώδικα καθώς και τα γραφήματα με τις μεταβολές των οριακών λύσεων επεξεργάστηκαν σε υπολογιστικό φύλλο excel. Έπειτα από υπολογισμούς που πραγματοποιήθηκαν, η μέγιστη ηλεκτρική ισχύς εξόδου σε συνάρτηση του αδιάστατου μήκους L_{star} , του αδιάστατου πάχους H_{star} και της αντιστάσεως R παρουσιάζεται στον Πίνακα 6.1.

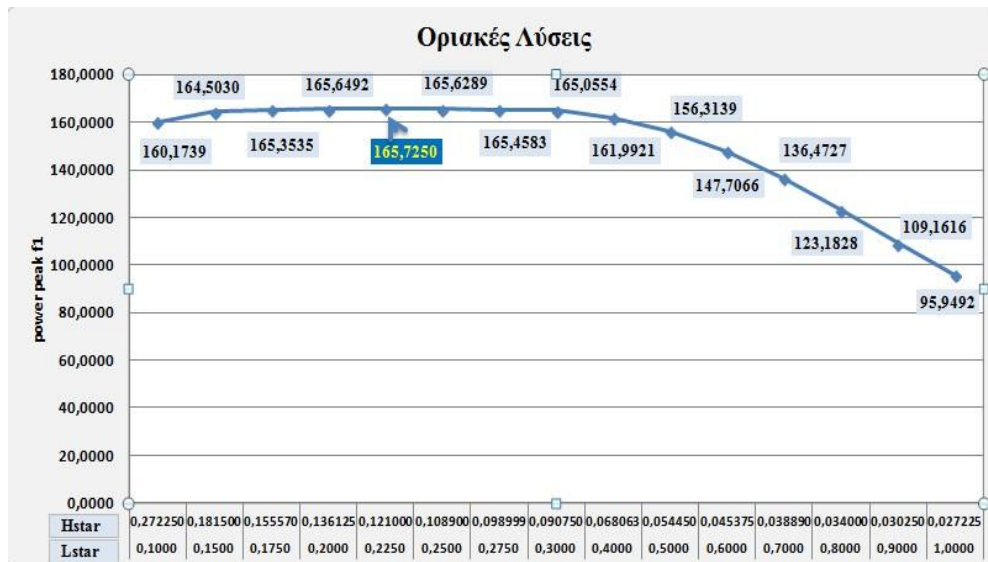
Το αδιάστατο μήκος (L_{star}) ορίζεται ως το μήκος των πιεζοκεραμικών στρωμάτων (L_p) διαιρούμενο με το συνολικό μήκος του δοκού (L), ενώ το αδιάστατο ύψος (H_{star}) είναι το ύψος ενός πιεζοηλεκτρικού κεραμικού στρώματος (h_p) διαιρούμενο με το συνολικό ύψος του δοκού ($L_{star} = L_p/L$ και $H_{star} = h_p/h$).

L_{star}	H_{star}	P (mW/g ²)	R (KΩ)
0,1000	0,272250	160,1739	680,0000
0,1500	0,181500	164,5030	340,0000
0,1750	0,155570	165,3535	255,0000
0,2000	0,136125	165,6492	200,0000
0,2250	0,121000	165,7250	162,0000
0,2500	0,108900	165,6289	133,0000
0,2750	0,098999	165,4583	100,0000
0,3000	0,090750	165,0554	94,0000
0,4000	0,068063	161,9921	56,0000
0,5000	0,054450	156,3139	37,0000
0,6000	0,045375	147,7066	26,0000
0,7000	0,038890	136,4727	18,0000
0,8000	0,034000	123,1828	15,0000
0,9000	0,030250	109,1616	12,0000
1,0000	0,027225	95,9492	10,0000

Πίνακας 6.1: Οριακές λύσεις για το πρόβλημα μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης

Στην εικόνα 6.3 αναπαριστάται η μεταβολή των οριακών λύσεων της ηλεκτρικής ισχύος (power peak). Συγκεκριμένα, όσο αυξάνεται το αδιάστατο μήκος L_{star} και μειώνεται το αδιάστατο πάχος H_{star} η τιμή εξόδου ισχύος αυξάνεται μέχρι να γίνει μέγιστη (βέλτιστη) για συγκεκριμένα γεωμετρικά χαρακτηριστικά ($L_{star} = 0.225$ και $H_{star} = 0.121$). Στη συνέχεια, η ηλεκτρική ισχύς μειώνεται φτάνοντας στην ελάχιστη τιμή της όταν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά παίρνουν τις τιμές $L_{star} = 1.0$ (ανώτατο όριο αδιάστατου μήκους) και $H_{star} = 0.027225$ (κατώτατο όριο αδιάστατου πάχους), αντίστοιχα, ικανοποιώντας ταυτόχρονα και τον περιορισμό $L_{star} * H_{star} \leq 0,027225$.

Η βέλτιστη λύση για το δεδομένο περιορισμό του σχεδιασμού επιτυγχάνεται όταν τα δύο πιεζοηλεκτρικά κεραμικά στρώματα είναι ενσωματωμένα στη βάση που καλύπτει το 22,5 % του συνολικού μήκους, το καθένα με πάχος που είναι 12,1% του συνολικού πάχους. Από τον Πίνακα 6.1, για $L = 300\text{mm}$ και $h = 12\text{mm}$, το μήκος και το πάχος κάθε ενσωματωμένου πιεζοηλεκτρικού κεραμικού στρώματος της Εικόνας 5.3 λαμβάνονται ως $L_p = 300 * 0.225 = 67.5\text{mm}$ και $h_p = 12 * 0.121 = 1.45\text{mm}$, αντίστοιχα. Η ηλεκτρική ισχύς ανά βασική επιτάχυνση για τον άξονα γεννήτριας λαμβάνεται ως 165,725 mW/g² (Πίνακας 6.1).



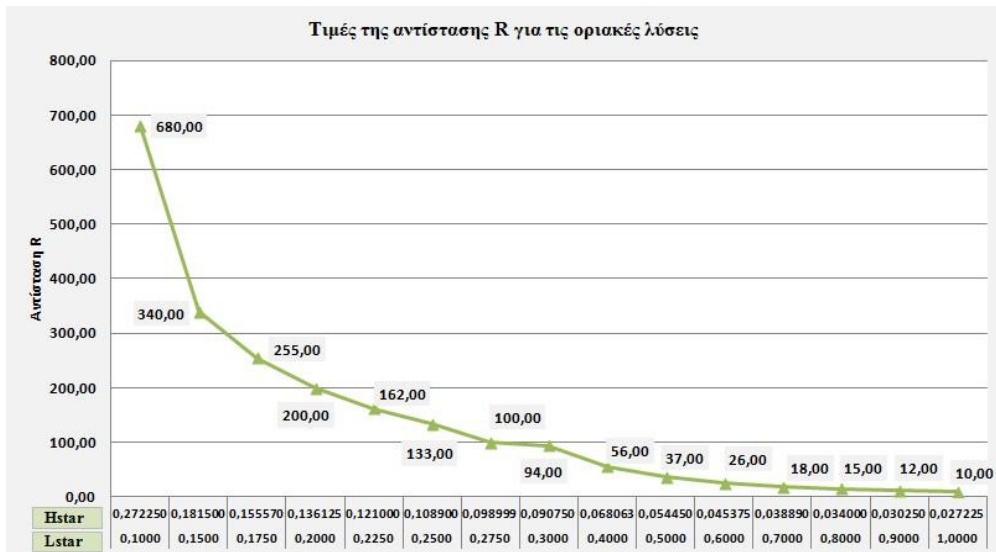
Εικόνα 6.3: Μεταβολή οριακών λύσεων της ηλεκτρικής ισχύος (power peak) για το πρόβλημα μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης

Στην Εικόνα 6.4 παρουσιάζεται η μεταβολή των οριακών λύσεων της αντιστάσεως R για το πρόβλημα μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης. Όπως δείχνει και η Εικόνα η αντίσταση R έχει τη μέγιστη τιμή της ($R = 680 \text{ K}\Omega$) για $L_{\text{star}} = 0.1$ (κατώτατο όριο αδιάστατου μήκους) και $H_{\text{star}} = 0.27225$ (ανώτατο όριο αδιάστατου πάχους). Όσο αυξάνεται το αδιάστατο μήκος L_{star} και μειώνεται το αδιάστατο πάχος H_{star} η τιμή αντιστάσεως μειώνεται και φτάνει στην ελάχιστη τιμή της ($R = 10 \text{ K}\Omega$) για $L_{\text{star}} = 1.0$ και $H_{\text{star}} = 0.027225$.

Συμπερασματικά, για λεπτά πιεζοηλεκτρικά κεραμικά με αδιάστατο πάχος μικρότερο από $0,075$ ($H_{\text{star}} \leq 0.075$) παρατηρείται η μέγιστη τιμή εξόδου ισχύος (power peak) όσο το μήκος αυξάνεται ($L_{\text{star}} > 0.5$) αλλά η τιμή αυτή είναι πολύ μικρότερη από τη βέλτιστη λύση. Αποδεικνύεται ότι, για τα λεπτά πιεζοηλεκτρικά κεραμικά με περίπου $L_{\text{star}} > 0.5$, η επίδραση της αυξημένης μάζας και κατά συνέπεια της αυξημένης μηχανικής καταπόνησης και της αυξημένης δυναμικής ευελιξίας (λόγω της μειωμένης φυσικής συχνότητας) δεν μπορεί να ξεπεράσει την αρνητική επίδραση της αυξημένης απόσβεσης, η οποία οφείλεται επίσης στην αυξημένη μάζα και η οποία μειώνει το εύρος των κραδασμών.

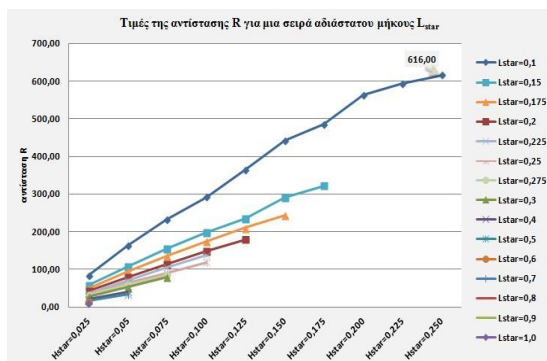
Αντίθετα, στα παχύτερα πιεζοηλεκτρικά κεραμικά ($H_{\text{star}} > 0.075$) είναι σαφές ότι η μέγιστη τιμή της ισχύος εξόδου πλησιάζει στο ελεύθερο άκρο της δοκού της γεννήτριας. Αν δεν υπήρχε ο περιορισμός $L_{\text{star}} * H_{\text{star}} \leq 0,027225$ η μέγιστη ισχύς θα ήταν για αδιάστατο μήκος $L_{\text{star}} = 1.0$ και για το μέγιστο αδιάστατο πάχος που λαμβάνεται υπόψη

εδώ. Για άλλη μια φορά, η γενική συμπεριφορά σχετίζεται με το ποσό της μάζας που προστίθεται, τη δομημένη δυναμική ευελιξία (με την έννοια της μειωμένης φυσικής συχνότητας) και τη μηχανική απόσβεση.

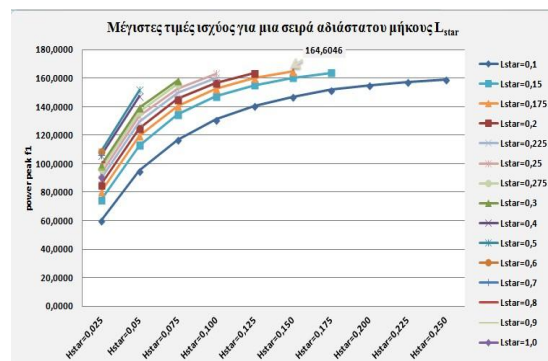


Εικόνα 6.4: Μεταβολή οριακών λύσεων της αντιστάσεως R για το πρόβλημα μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης

Επομένως, μπορεί κανείς να αναλύσει τη συμπεριφορά της ισχύος εξόδου με αυξανόμενο αδιάστατο πάχος, για σταθερές τιμές αδιάστατου μήκους στην Εικόνα 6.5 και της αντιστάσεως, στις μέγιστες τιμές ισχύος στην Εικόνα 6.6 αντίστοιχα. Αύξηση του αδιάστατου πάχους συνεπάγεται αύξηση της ισχύος εξόδου η οποία φτάνει στη μέγιστη τιμή της για κάθε σειρά αδιάστατου μήκους L_{star} στις οριακές τιμές H_{star} για τις οποίες ισχύει ο περιορισμός $L_{star} * h_{star} \leq 0,027225$. Η αντίσταση για κάθε σειρά αδιάστατου μήκους αυξάνεται με την αύξηση του αδιάστατου πάχους με μεγαλύτερη αύξηση να παρατηρείται για τη σειρά $L_{star}=0.1$.

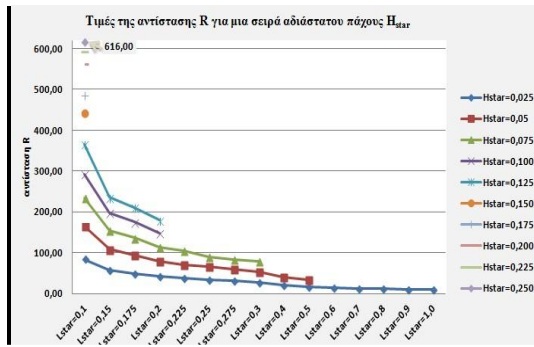


Εικόνα 6.5: Τιμές της αντίστασης R στις μέγιστες τιμές ισχύος εξόδου για μια σειρά αδιάστατου μήκους L_{star}

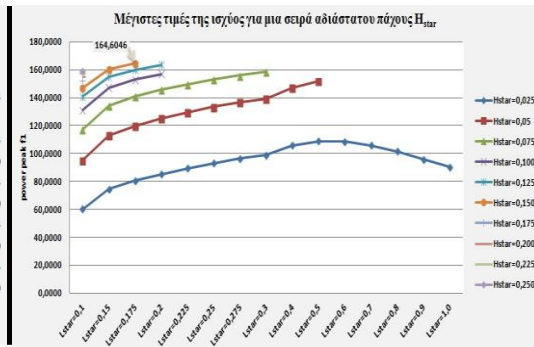


Εικόνα 6.6: Ισχύς εξόδου (μέγιστες τιμές) έναντι αδιάστατου πάχους για μια σειρά αδιάστατου μήκους L_{star}

Επίσης, η συμπεριφορά της ισχύος εξόδου με αυξανόμενο αδιάστατο μήκος για σταθερές τιμές αδιάστατου πάχους παρουσιάζεται στην Εικόνα 6.7 και της αντίστασης στις μέγιστες τιμές ισχύος στην Εικόνα 6.8, αντίστοιχα. Η ισχύς για κάθε σειρά αδιάστατου πάχους αυξάνεται, φτάνει σε μια μέγιστη τιμή και στη συνέχεια μειώνεται όσο αυξάνεται το αδιάστατο μήκος. Η αντίσταση για κάθε σειρά αδιάστατου πάχους μειώνεται όσο αυξάνεται το αδιάστατο μήκος.

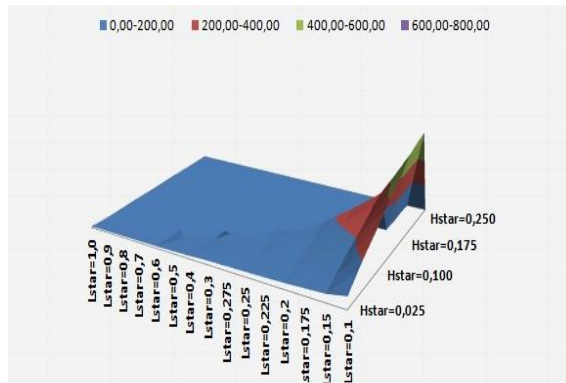


Εικόνα 6.8: Τιμές της αντίστασης R στις μέγιστες τιμές ισχύος εξόδου για μια σειρά αδιάστατου πάχους H_{star}

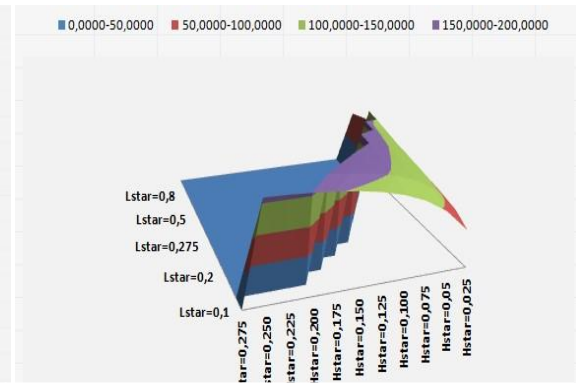


Εικόνα 6.7: Ισχύς εξόδου (μέγιστες τιμές) έναντι αδιάστατου μήκους για μια σειρά αδιάστατου πάχους H_{star}

Στις Εικόνες 6.9 και 6.10 απεικονίζονται οι μέγιστες τιμές ισχύος και οι αντίστοιχες τιμές αντίστασης στο χώρο.



Εικόνα 6.10: Απεικόνιση των τιμών της αντίστασης R στον χώρο

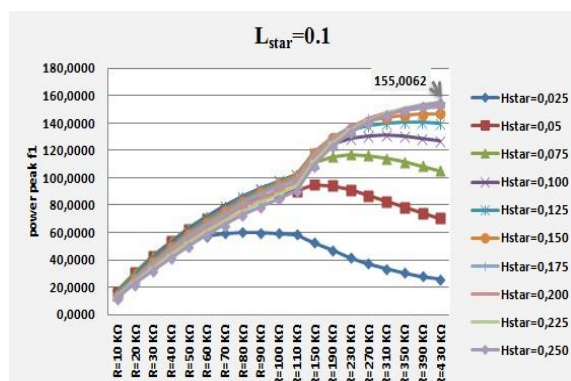


Εικόνα 6.9: Απεικόνιση των μέγιστων τιμών της ηλεκτρικής ισχύος στον χώρο

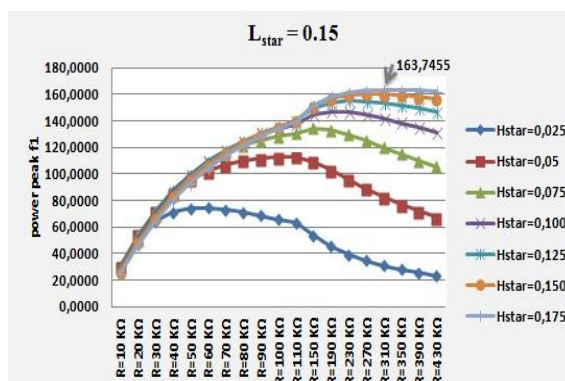
Στη συνέχεια παρουσιάζεται η μεταβολή της ηλεκτρικής ισχύος (power peak) για διάφορες τιμές της αντίστασης R, του αδιάστατου πάχους H_{star} και για σταθερό αδιάστατο μήκος $L_{star} = 0.1$ (Εικόνα 6.11), $L_{star} = 0.15$ (Εικόνα 6.12), $L_{star} = 0.175$ (Εικόνα 6.14), $L_{star} = 0.2$ (Εικόνα 6.13), $L_{star} = 0.225$ (Εικόνα 6.15), $L_{star} = 0.25$ (Εικόνα 6.16), $L_{star} = 0.275$ (Εικόνα 6.17) και $L_{star} = 0.3$ (Εικόνα 6.18).

Για αδιάστατο μήκος $L_{star} = 0.1$ η τιμή της ηλεκτρικής ισχύος αυξάνεται όσο αυξάνεται η αντίσταση R και το αδιάστατο πάχος H_{star} και φτάνει στη μεγαλύτερη τιμή της

(155,0062 mW/g²) για R = 430 KΩ και για H_{star} = 0.250 (Εικόνα 6.11). Αναφορικά με το αδιάστατο πάχος παρατηρείται ότι για H_{star} = 0.025 η ηλεκτρική ισχύς μειώνεται όταν η αντίσταση παίρνει τιμές μεγαλύτερες από 80 KΩ περίπου (R > 80 KΩ).



Εικόνα 6.11: Μεταβολή της ηλεκτρικής ισχύος (power peak) για διάφορες τιμές της αντιστάσεως R, του αδιάστατου πάχους H_{star} και για σταθερό αδιάστατο μήκος L_{star} = 0.1



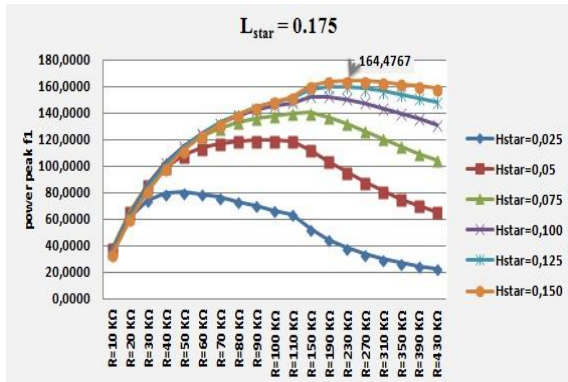
Εικόνα 6.12 : Μεταβολή της ηλεκτρικής ισχύος (power peak) για διάφορες τιμές της αντιστάσεως R, του αδιάστατου πάχους H_{star} και για σταθερό αδιάστατο μήκος L_{star} = 0.15

Αντίστοιχα, για αδιάστατο μήκος L_{star} = 0.15 η τιμή της ηλεκτρικής ισχύος αυξάνεται όσο αυξάνεται η αντίσταση R και το αδιάστατο πάχος H_{star} και φτάνει στη μεγαλύτερη τιμή της (163,7455 mW/g²) για R = 310 KΩ και για H_{star} = 0.175 (Εικόνα 6.12). Για H_{star} = 0.05 η ηλεκτρική ισχύς μειώνεται όταν η αντίσταση παίρνει τιμές μεγαλύτερες από 110 KΩ περίπου (R > 110 KΩ).

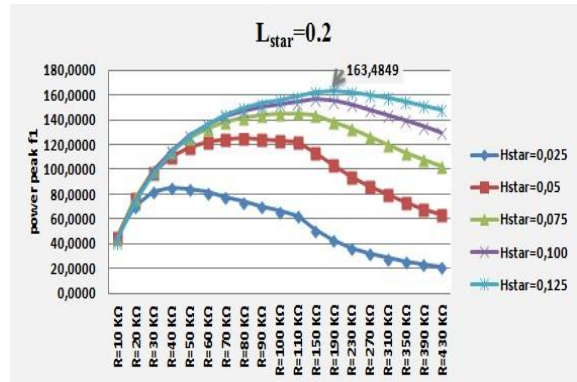
Η ηλεκτρική ισχύς για L_{star} = 0.175 αυξάνεται και φτάνει στη μεγαλύτερη τιμή της (164,4767 mW/g²) για R = 230 KΩ και για H_{star} = 0.150 (Εικόνα 6.14). Για H_{star} = 0.075 η ηλεκτρική ισχύς μειώνεται όταν η αντίσταση παίρνει τιμές μεγαλύτερες από 150 KΩ περίπου (R > 150 KΩ).

Για L_{star} = 0.2 η ισχύς φτάνει στη μεγαλύτερη τιμή της (163,4849 mW/g²) για R = 190 KΩ και για H_{star} = 0.125 (Εικόνα 6.13). Για H_{star} = 0.05 η ηλεκτρική ισχύς μειώνεται όταν η αντίσταση παίρνει τιμές μεγαλύτερες από 80 KΩ περίπου (R > 80 KΩ).

Η ηλεκτρική ισχύς για L_{star} = 0.225 φτάνει στη μεγαλύτερη τιμή της (160,0134 mW/g²) για R = 230 KΩ και για H_{star} = 0.150 (Εικόνα 6.15) Για H_{star} = 0.05 η ηλεκτρική ισχύς μειώνεται όταν η αντίσταση παίρνει τιμές μεγαλύτερες από 80 KΩ περίπου (R > 80 KΩ).



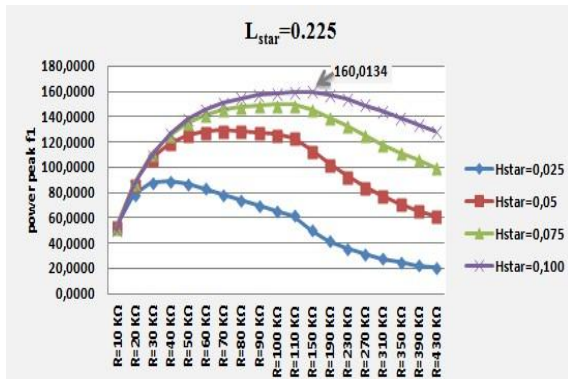
Εικόνα 6.14: Μεταβολή της ηλεκτρικής ισχύος (power peak) για διάφορες τιμές της αντιστάσεως R, του αδιάστατου πάχους H_{star} και για σταθερό αδιάστατο μήκος $L_{star} = 0.175$



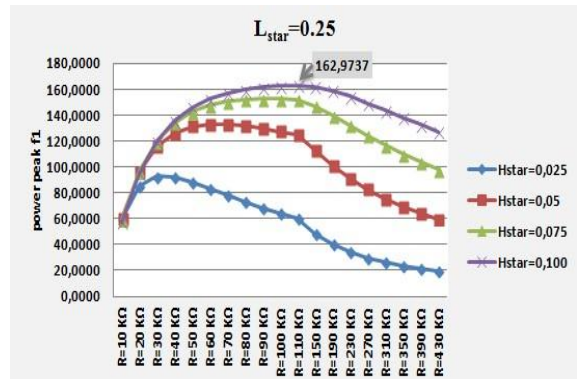
Εικόνα 6.13: Μεταβολή της ηλεκτρικής ισχύος (power peak) για διάφορες τιμές της αντιστάσεως R, του αδιάστατου πάχους H_{star} και για σταθερό αδιάστατο μήκος $L_{star} = 0.2$

Για $L_{star} = 0.25$ η ισχύς φτάνει στη μεγαλύτερη τιμή της (162,9737 mW/g²) για $R = 110$ KΩ και για $H_{star} = 0.100$ (Εικόνα 6.16). Για $H_{star} = 0.05$ η ηλεκτρική ισχύς μειώνεται όταν η αντίσταση παίρνει τιμές μεγαλύτερες από 80 KΩ περίπου ($R > 80$ KΩ).

Η ηλεκτρική ισχύς για $L_{star} = 0.275$ φτάνει στη μεγαλύτερη τιμή της (155,7464 mW/g²) για $R = 80$ KΩ και για $H_{star} = 0.075$ (Εικόνα 6.17) Για $H_{star} = 0.025$ η ηλεκτρική ισχύς μειώνεται όταν η αντίσταση παίρνει τιμές μεγαλύτερες από 30 KΩ περίπου ($R > 30$ KΩ).



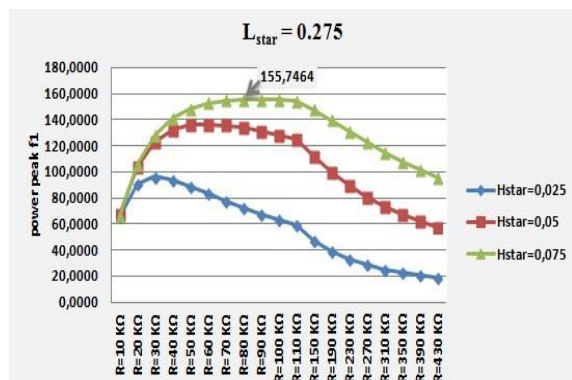
Εικόνα 6.15: Μεταβολή της ηλεκτρικής ισχύος (power peak) για διάφορες τιμές της αντιστάσεως R, του αδιάστατου πάχους H_{star} και για σταθερό αδιάστατο μήκος $L_{star} = 0.225$



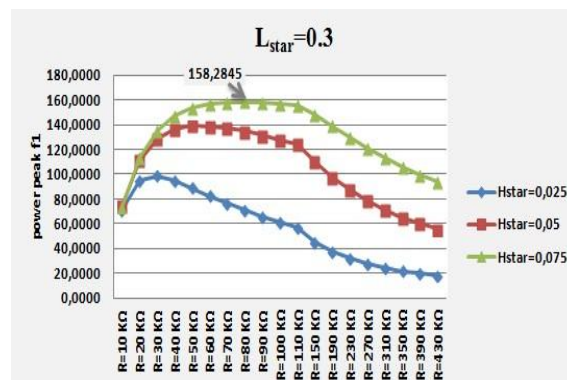
Εικόνα 6.16: Μεταβολή της ηλεκτρικής ισχύος (power peak) για διάφορες τιμές της αντιστάσεως R, του αδιάστατου πάχους H_{star} και για σταθερό αδιάστατο μήκος $L_{star} = 0.25$

Για αδιάστατο μήκος $L_{star} = 0.3$ η τιμή της ηλεκτρικής ισχύος αυξάνεται όσο αυξάνεται η αντίσταση R και το αδιάστατο πάχος H_{star} και φτάνει στη μεγαλύτερη τιμή της (158,2845 mW/g²) για $R=80$ KΩ και για $H_{star} = 0.075$ (Εικόνα 6.18). Για τιμές του $H_{star} = 0.05$ η

ηλεκτρική ισχύς μειώνεται όταν η αντίσταση παίρνει τιμές μεγαλύτερες από 50 ΚΩ περίπου ($R > 50 \text{ ΚΩ}$).



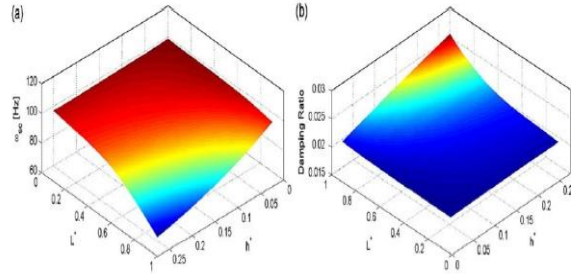
Εικόνα 6.17: Μεταβολή της ηλεκτρικής ισχύος (power peak) για διάφορες τιμές της αντιστάσεως R , του αδιάστατου πάχους H_{star} και για σταθερό αδιάστατο μήκος $L_{star} = 0.275$



Εικόνα 6.18: Μεταβολή της ηλεκτρικής ισχύος (power peak) για διάφορες τιμές της αντιστάσεως R , του αδιάστατου πάχους H_{star} και για σταθερό αδιάστατο μήκος $L_{star} = 0.3$

Συνολικά, όσο αυξάνεται το αδιάστατο μήκος η τιμή της αντιστάσεως μειώνεται για την μέγιστη τιμή ισχύος. Η μέγιστη τιμή ισχύος παρατηρείται στο οριακό αδιάστατο πάχος για το οποίο ισχύει ο περιορισμός $L_{star} * h_{star} \leq 0,027225$. Το αδιάστατο πάχος στο οποίο παρατηρείται η μέγιστη ισχύς είναι μικρότερο όσο αυξάνεται το μήκος. Συνεπώς, η ισχύς εξόδου αυξάνεται με αυξανόμενο αδιάστατο πάχος για οποιοδήποτε αδιάστατο μήκος. Θα μπορούσε κανείς να αναμένει την αντίθετη συμπεριφορά της παραγωγής ισχύος με αυξανόμενο πάχος ωστόσο, το αυξημένο πάχος των πιεζοηλεκτρικών κεραμικών στρωμάτων σημαίνει επίσης αυξημένη αδράνεια του ελαστικού σώματος. Επιπλέον, η δυναμική ευελιξία του άξονα της γεννήτριας αυξάνεται παρατηρώντας τη συμπεριφορά της φυσικής συχνότητας βραχυκυκλώματος με αδιάστατο μήκος και πάχος που σχεδιάζεται στο σχήμα 6.19α (οι άξονες μήκους και πάχους αντιστρέφονται για λόγους σαφήνειας). Καθώς η περίπτωση που αναλύεται εδώ σχετίζεται πολύ περισσότερο με τη διακύμανση της μάζας από τη διακύμανση της δυσκαμψίας, οι φυσικές συχνότητες μειώνονται με αυξανόμενες διαστάσεις των πιεζοηλεκτρικών κεραμικών στρωμάτων.

Από το σχήμα 6.19α παρατηρείται ότι χαμηλότερη φυσική συχνότητα επιτυγχάνεται για μέγιστο μήκος και πάχος, ενώ υψηλότερη φυσική συχνότητα λαμβάνεται για τις ελάχιστες διαστάσεις του πιεζοηλεκτρικού κεραμικού στρώματος (DeMarqui, Erturk, & Inman, 2009).



Εικόνα 6.19: Μεταβολή της (α) συχνότητας συντονισμού βραχυκυκλώματος και της (β) μηχανικής αναλογίας απόσβεσης με αδιάστατο μήκος και πάχος των πιεζοηλεκτρικών κεραμικών στρωμάτων (για τον βασικό τρόπο δόνησης) (DeMarqui, Erturk, & Inman, 2009)

Κατά συνέπεια, οι μεγαλύτερες έξοδοι ισχύος παρατηρούνται με την αύξηση του πάχους. Έτσι, η ευνοϊκή επίδραση της αυξημένης αδράνειας και η ευελιξία υπερνικά την αρνητική επίδραση της μειωμένης απόστασης από τη μέση επιφάνεια του πιεζοηλεκτρικού κεραμικού στρώματος στην επιφάνεια αναφοράς και την αρνητική επίδραση της αυξημένης απόσβεσης (σχήμα 6.19β). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι αυτή η συμπεριφορά ενισχύεται για μεγαλύτερες τιμές του αδιάστατου μήκους.

6.3 Πρόβλημα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης με τη χρήση γενετικών αλγορίθμων

Το πρόβλημα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης που μελετήθηκε περιλαμβάνει δύο αντικειμενικές συναρτήσεις f_1 (συνάρτηση ισχύος) και f_2 (συνάρτηση μάζας) από τις οποίες η f_1 θα πρέπει να μεγιστοποιηθεί και η f_2 να ελαχιστοποιηθεί ενώ θα πρέπει να ικανοποιείται ο περιορισμός για τη μάζα ($f_2 \leq 0.3267$). Επίσης, έχει τρεις μεταβλητές ελέγχου το μήκος L_{star} , το πάχος H_{star} και την αντίσταση R_1 , τα επιτρεπόμενα όρια των οποίων τίθενται στα διαστήματα $[0, 1.0]$, $[0, 0.5]$ και $[1000, 600000]$, αντίστοιχα. Η μαθηματική διατύπωση του πολυκριτηριακού προβλήματος δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(L_{star}, H_{star}, R_1) = (-f_1, f_2) \\
 \text{st} \quad & 0 \leq L_{star} \leq 1.0 \\
 & 0 \leq H_{star} \leq 0.5 \\
 & 1000 \leq R_1 \leq 600000 \\
 & f_2 \leq 0.3267
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Το συγκεκριμένο πρόβλημα επιλύθηκε με χρήση του γενετικού αλγορίθμου μη κυριαρχούμενης ταξινόμησης (NSGA-II) στο προγραμματιστικό περιβάλλον Matlab (Baskar, Tamilselvi, & Varshini, 2015). Πραγματοποιήθηκαν διάφορες δοκιμές για τον προσδιορισμό των βέλτιστων λύσεων καθώς και για τον υπολογισμό των δεικτών

απόδοσης. Συγκεκριμένα, πραγματοποιήθηκαν δοκιμές για μεγέθη πληθυσμού 50, 100 και 150 και για μέγιστο αριθμό γενεών 50. Για μέγεθος πληθυσμού 150 πραγματοποιήθηκαν δοκιμές και για 100 γενιές. Για την επιλογή των τελεστών διασταύρωσης (crossover), μετάλλαξης (mutation) και της πιθανότητας μετάλλαξης υλοποιήθηκαν δοκιμές και συγκρίσεις των δεικτών απόδοσης και των ακραίων βέλτιστων λύσεων για μέγεθος πληθυσμού 50 και αριθμό γενεών 50. Σύμφωνα με τις συγκρίσεις που έγιναν για τους δείκτες των τελεστών παρατηρήθηκε ότι δεν υπήρχαν μεγάλες διαφορές μεταξύ τους όπως θα διαπιστωθεί και παρακάτω. Συνεπώς, για το συγκεκριμένο πρόβλημα επιλέχθηκε δείκτης για τελεστή διασταύρωσης 0.20, δείκτης για τελεστή μετάλλαξης 0.20 και πιθανότητα μετάλλαξης $P_m=1/V$ όπου V ο αριθμός των μεταβλητών απόφασης ($V=3$ στη συγκεκριμένη περίπτωση).

Αρχικά, δημιουργήθηκε μια συνάρτηση σύμφωνα με το μαθηματικό μοντέλο με τις αντικειμενικές συναρτήσεις του προβλήματος f_1 και f_2 και τον περιορισμό για την f_2 (multi_obj.m) για να καλείται στην κύρια συνάρτηση (main_nsga2.m). Κάποια σημεία του κώδικα των δύο συναρτήσεων δίνονται παρακάτω.

```
function [fit err] = multi_obj(x)
Lstar=x(1); Hstar=x(2); R1=x(3);
lx=300e-3;
ly=30e-3;
t_ply=12e-3;
hcore=1*t_ply;
tp=Hstar*t_ply;
Lp=Lstar*lx;
--- (Δεν εμφανίζεται ο κώδικας από την 20η έως την 300η γραμμή)
Frequencies=[98:0.2:112];
W=Frequencies*2*pi;
clear i
for ifreq=1:size(W,2)
    Dm=1i*W(ifreq)/(1/R1+1i*W(ifreq)*Kff);
    FRF_volt(ifreq)=Dm*Kuf'*((-Mm*W(ifreq)^2 +Damp0*1i*W(ifreq) + Km
    + Kuf*Dm*Kuf')\Fm0);
end
Power=((FRF_volt).^2/R1;
[peak, index]=findpeaks((abs(Power)));
peak1=peak*1000;
InitialMass=lx*ly*rho_s*hcore;
MinusMass=2*Lp*ly*rho_s*tp;
Add_mass=2*Lp*ly*rho_p*tp;
f1=-peak1; % maximum peak
f2=InitialMass- MinusMass + Add_mass; % minimum mass
c=InitialMass- MinusMass + Add_mass-0.3267;
err=(c>0).*c;
fit=[f1 f2];
end
```

Πίνακας 6.2: Συνάρτηση multi_obj.m

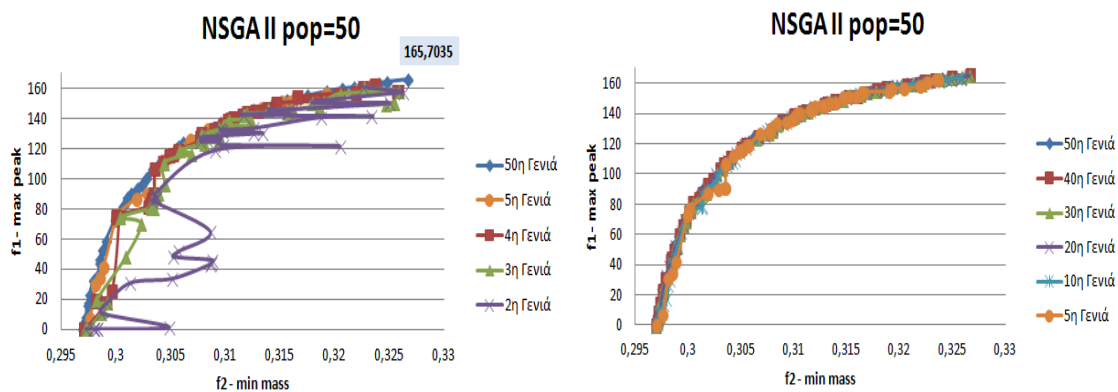
```

clear
clc
global V M xl xu etac etam pop_size pm
%% Description
1. This is the main program of NSGA II.
2. Final optimal Pareto solutions are in the variable 'new_pop', with
design variables in the columns (1:V), objectives in the columns (V+1
to V+M), constraint violation in the column (V+M+1), Rank in (V+M+2),
Distance in (V+M+3).
%% code starts
M=2; % Number of objectives
pop_size=50; % Population size
gen_max=50; % Max number of generations - stopping criteria
fname='multi_objj'; % Objective function and constraint evaluation
V=3; % Number of design variables
xl=[0 0 1000]; % Lower bound of the design variables
xu=[1.0 0.5 600000]; % Upper bound of the design variables
etac = 20; % Distribution index for crossover
etam = 20; % Distribution index for mutation / mutation constant
pm = 1/V; % Mutation Probability
%% Initial population
xl_temp=repmat(xl, pop_size,1);
xu_temp=repmat(xu, pop_size,1);
x =xl_temp+(xu_temp-xl_temp).*rand(pop_size,V));
%% Evaluate objective function
for i =1:pop_size
    [ff(i,:), err(i,:)] =feval(fname, x(i,:));
% Objective function evaluation
end
population_init=[x ff err];
[population, front]=NDS_CD_cons(population_init);
% Non domination Sorting on initial population
for gen_count=1:gen_max
    parent_selected=tour_selection(population); %Tournament
selection
%% Reproduction (Offspring Qt of 'N' pop size)
child_offspring = genetic_operator(parent_selected(:,1:V));
% SBX crossover and polynomial mutation
for ii = 1:pop_size
    [fff(ii,:), err(ii,:)] =feval(fname, child_offspring(ii,:));
% objective function evaluation for offspring
end
child_offspring =[child_offspring fff err];
%% Intermediate population (Rt= Pt U Qt of 2N size)
population_inter =[population(:,1:V+M+1) ;
child_offspring(:,1:V+M+1)];
[population_inter_sorted, front]=NDS_CD_cons(population_inter);
% Non domination Sorting on offspring
new_pop=replacement(population_inter_sorted, front);
%% plots
newpop = figure;
plot(new_pop(:,V+1),new_pop(:,V+2),'*');
xlabel('objective function f1-max peak')
ylabel('objective function f2-min mass')
grid minor;
population=new_pop;
end

```

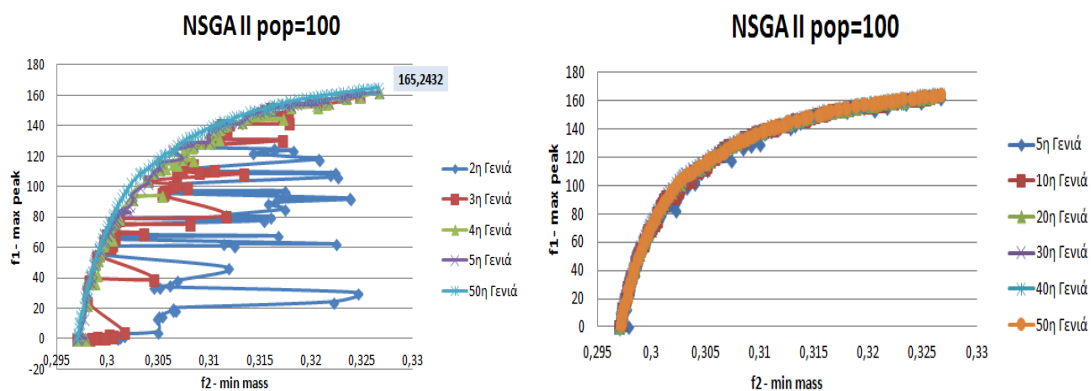
Πίνακας 6.3: Συνάρτηση main_nsga2.m

Από την υλοποίηση του αλγορίθμου προκύπτουν οι βέλτιστες λύσεις δηλαδή εκείνες οι λύσεις για τις οποίες μεγιστοποιείται η f_1 και ελαχιστοποιείται η f_2 . Όπως φαίνεται και στις παρακάτω εικόνες, για μέγεθος πληθυσμού 50 και αριθμό γενεών 50 ο πληθυσμός αρχίζει να συγκλίνει προς το τελικό μέτωπο μετά την 5^η γενιά. Παρατηρείται ότι από την 10^η γενιά έως την 50^η γενιά οι διαφοροποιήσεις στις βέλτιστες λύσεις είναι πολύ μικρές ενώ η ακραία βέλτιστη λύση που μας δίνει τη μέγιστη ισχύ για το ελάχιστο ποσοστό μάζας παραμένει σταθερή μετά την 36^η γενιά ($f_1=165,7035 - f_2=0,32667$). Οι τιμές των μεταβλητών απόφασης για την ακραία βέλτιστη λύση είναι $L_{\text{star}}=0,2252 - H_{\text{star}}=0,1208 - R_1=161,62$.



Εικόνα 6.20: Βέλτιστες λύσεις για μέγεθος πληθυσμού: 50 – αριθμό γενεών: 50

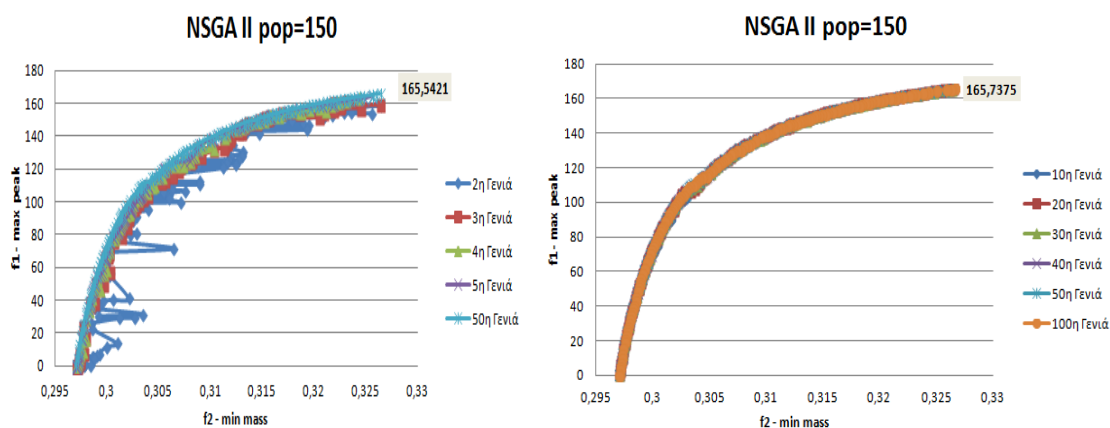
Κατά την ίδια διαδικασία υλοποιήθηκε ο αλγόριθμος για μέγεθος πληθυσμού 100 και αριθμό γενεών 50. Στην περίπτωση αυτή ο πληθυσμός συγκλίνει ακόμη πιο νωρίς στο τελικό μέτωπο (5^η γενιά) σε σχέση με το μέγεθος πληθυσμού 50. Η ακραία βέλτιστη λύση δε διαφοροποιείται μετά την 31^η γενιά ($f_1=165,2432 - f_2=0,326615$). Οι τιμές των μεταβλητών απόφασης για την ακραία βέλτιστη λύση είναι $L_{\text{star}}=0,2716 - H_{\text{star}}=0,0999 - R_1=100,75$.



Εικόνα 6.21: Βέλτιστες λύσεις για μέγεθος πληθυσμού: 100 – αριθμό γενεών: 50

Τέλος, για μέγεθος πληθυσμού 150 και αριθμό γενεών 50 ο πληθυσμός αρχίζει να συγκλίνει στο τελικό μέτωπο σχεδόν από την 3^η γενιά. Όπως παρατηρείται στην εικόνα από την 10^η γενιά και μετά δε ξεχωρίζουν τα μέτωπα που σημαίνει ότι οι διαφοροποιήσεις είναι ελάχιστες. Η ακραία βέλτιστη λύση δεν αλλάζει μετά την 25^η γενιά ($f1=165,5421 - f2=0,326401$). Οι τιμές των μεταβλητών απόφασης για την ακραία βέλτιστη λύση είναι $L_{star}=0,2121 - H_{star}=0,1271 - R_1=176,73$. Στο συγκεκριμένο πληθυσμό πραγματοποιήθηκαν επιπλέον δοκιμές για αριθμό γενεών έως 100. Η μόνη διαφοροποίηση που υπήρξε ήταν ότι από την 50^η γενιά αυξάνονταν λίγο η ακραία βέλτιστη λύση και η οποία σταθεροποιήθηκε μετά την 92^η γενιά ($f1=165,7375 - f2=0,326657$). Οι τιμές των μεταβλητών απόφασης για την ακραία βέλτιστη λύση σε αυτήν την περίπτωση είναι $L_{star}=0,2151 - H_{star}=0,1264 - R_1=169,76$.

Με βάση τις δοκιμές που έγιναν συμπεραίνουμε ότι όσο αυξάνεται το μέγεθος του πληθυσμού τόσο πιο γρήγορα συγκλίνει ο πληθυσμός στο τελικό μέτωπο. Επίσης, για μεγέθη πληθυσμού 50 και 100 αν πραγματοποιούνταν μετρήσεις έως τις 100 γενιές υπάρχει περίπτωση να αυξάνονταν λίγο η ακραία βέλτιστη λύση όπως έγινε για μέγεθος πληθυσμού 150. Στη συνέχεια έγιναν συγκρίσεις διαφόρων μετρικών ποιότητας για τα τρία μεγέθη πληθυσμού.



Εικόνα 6.22: Βέλτιστες λύσεις για μέγεθος πληθυσμού: 150 – αριθμό γενεών: 50

6.3.1 Μετρικές ποιότητας (quality indicators) στην πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση

Στη πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση πρέπει με κάποιο τρόπο να ποσοτικοποιηθεί το πόσο καλύτερο ή χειρότερο είναι ένα μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων έναντι ενός άλλου. Γι' αυτόν το λόγο, εισάγεται η έννοια των μετρικών ποιότητας. Χρησιμοποιούνται για ανάλυση και σύγκριση μετώπων μη-κυριαρχούμενων λύσεων. Μπορούν να

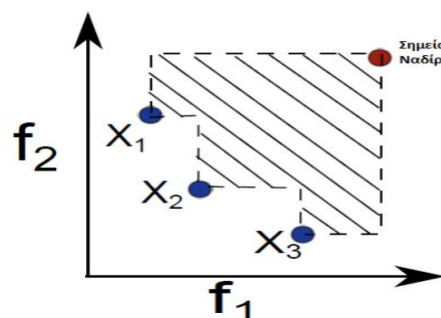
χρησιμοποιούνται, είτε απλώς συγκρίνοντας της τιμές των μετρικών διαφορών μετώπων μεταξύ τους, είτε και σε συνδυασμό με τη σύγκριση των καθαυτών μετώπων (Tian, Cheng, Zhang, & Jin, 2017). Η σύγκριση των μετρικών ποιότητας πραγματοποιήθηκε μεταξύ του προηγούμενου και του παραγόμενου μετώπου. Οι μετρικές υλοποιήθηκαν σε κώδικα Matlab ενώ τα αποτελέσματα και τα γραφήματα επεξεργάστηκαν σε υπολογιστικό φύλλο excel.

- **Δείκτης Υπερόγκου –ΔΥ (Hypervolume – HV)**

Η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη μετρική ποιότητας ενός μετώπου λύσεων είναι ο Δείκτης Υπερόγκου (ΔΥ) (Audet, Bibeon, Cartier, Le Digabel, & Salomon, 2018). Η έννοια του ΔΥ είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την έννοια της ασθενούς κυριαρχίας κι έτσι αν ένα μέτωπο κυριαρχεί ασθενώς έναντι ενός άλλου τότε η τιμή του ΔΥ του πρώτου θα είναι μεγαλύτερη από αυτήν του δευτέρου:

$$A \text{ } O_w \text{ } B \leftrightarrow HV(A) > HV(B) \quad (6.4)$$

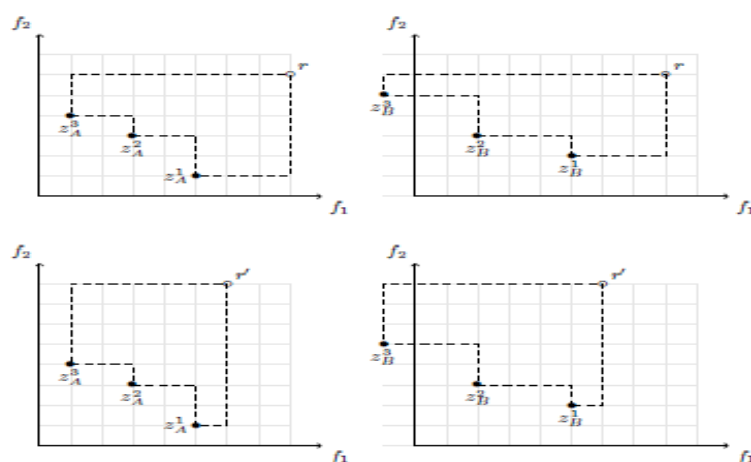
Γενικά, η διάσταση του υπερόγκου είναι ίδια με αυτή του χώρου των στόχων. Έτσι σε ένα πρόβλημα δύο στόχων ο ΔΥ υπολογίζει το εμβαδό του χώρου που ορίζεται από το σημείο αναφοράς (σημείο Ναδέρ (Nadir) το οποίο κυριαρχείται απ’ όλα τα σημεία του συνόλου) και το μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων. Το μέγεθος που υπολογίζεται από το ΔΥ και εκφράζει την ποιότητα του μετώπου μη-κυριαρχούμενων λύσεων είναι αδιάστατο. Η ποιότητα του μετώπου γίνεται άμεσα αντιληπτή παρατηρώντας το διάγραμμα που προκύπτει από το δείκτη υπερόγκου συναρτήσει του αριθμού των αξιολογήσεων.



Εικόνα 6.23: Παράδειγμα υπολογισμού του ΔΥ σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης με δύο συναρτήσεις-στόχους, για ένα μέτωπο μη κυριαρχούμενων λύσεων με τρία σημεία

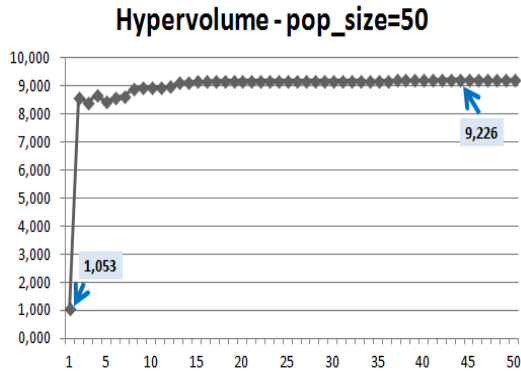
Παρόλα αυτά, έχει και μειονεκτήματα που πρέπει ο χρήστης να λαμβάνει υπόψη του προκειμένου να γίνει σωστή χρήση του. Ένα μέτωπο μη-κυριαρχούμενων λύσεων

(μπορεί να υπερτερεί, ως προς την έννοια της κυριαρχίας των ατόμων του, σε ένα άλλο, αλλά μπορεί να είναι πιο αραιό και να αποτελείται από λιγότερα σημεία. Σε μια τέτοια περίπτωση δεν είναι ξεκάθαρο ποιο από τα εμβάδα που ορίζονται από το ΔY είναι μεγαλύτερο. Στο χώρο των αντικειμενικών συναρτήσεων ο χρήστης μπορεί να επιλέξει ένα οποιοδήποτε σημείο Ναδύρ, το οποίο ικανοποιεί κάποια κριτήρια. Ανάλογα, όμως, με το σημείο Ναδύρ που επιλέγεται προκύπτουν διαφορετικά αποτελέσματα.

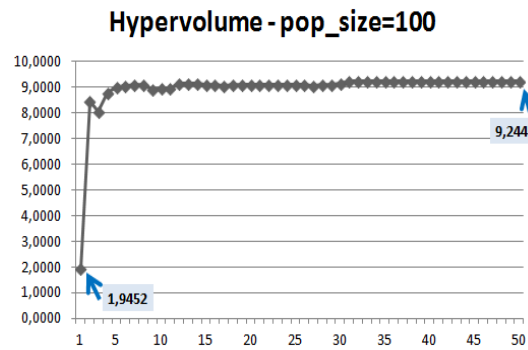


Εικόνα 6.24: Η σχετική τιμή της μετρικής του υπερόγκου εξαρτάται από το επιλεγμένο σημείο αναφοράς r ή r' . Στην κορυφή εμφανίζονται δύο μη κυριαρχούμενα σύνολα A και B , με $HV(A, r) > HV(B, r)$. Στο κάτω μέρος, $HV(B, r') > HV(A, r')$ (Audet, Bigeon, Cartier, Le Digabel, & Salomon, 2018)

Στη συνέχεια, υπολογίστηκε ο δείκτης υπερόγκου για μέγεθος πληθυσμού 50, 100, 150 και 50 γενιές. Για πληθυσμό μεγέθους 50 ο δείκτης υπερόγκου είχε πολύ χαμηλή τιμή στην 1^η γενιά (1,053), από την 2^η έως την 12^η η τιμή κυμαίνονταν από 8,5 έως 9 και από την 13^η γενιά έως την 50^η η τιμή του ήταν από 9,1 έως 9,22 με μέγιστη τιμή στην 44^η γενιά (9.226). Αντίστοιχα, για μέγεθος πληθυσμού 100, ο μέσος όρος τιμών ήταν μεγαλύτερος (8,965) σε σχέση με το πληθυσμό μεγέθους 50 (8,931), από την 30^η γενιά η τιμή του κυμαίνονταν από 9,23 έως 9,24 με μέγιστη τιμή στην 50^η γενιά (9,2445). Τέλος, για μέγεθος πληθυσμού 150 ο μέσος όρος τιμών είναι ακόμα μεγαλύτερος (9,027) όπως φαίνεται και στην Εικόνα 6.28. Η μέγιστη τιμή του δείκτη είναι 9,2412 και εμφανίζεται στην 23^η γενιά. Βέβαια στον συγκεκριμένο πληθυσμό για αριθμό γενεών 100 παρατηρήθηκε ότι ο μέσος όρος τιμών αυξήθηκε πολύ (9,1478) και η μέγιστη τιμή στην 96^η γενιά ήταν 9,2827. Αυτό σημαίνει ότι για μεγέθη πληθυσμού 50 και 100 η αύξηση των γενεών θα οδηγούσε σε επιπλέον αύξηση του δείκτη υπερόγκου.

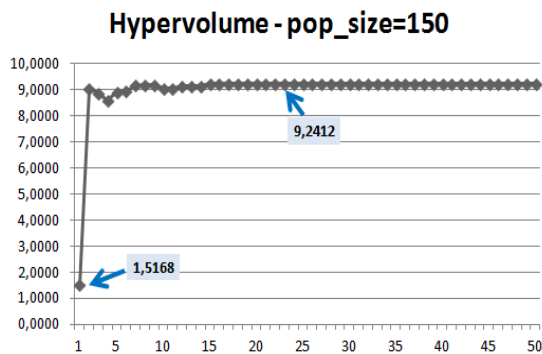


Εικόνα 6.26: Μεταβολή του δείκτη υπερόγκου για μέγεθος πληθυσμού 50 (αριστερά)

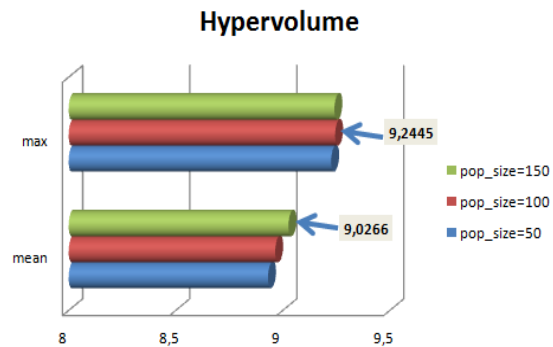


Εικόνα 6.25: Μεταβολή του δείκτη υπερόγκου για μέγεθος πληθυσμού 100 (δεξιά)

Συμπερασματικά, όσο αυξάνεται το μέγεθος του πληθυσμού και των γενεών αυξάνεται η τιμή του δείκτη υπερόγκου (εμβαδόν) και ο μέσος όρος τιμών του κάτι που συνεπάγεται ότι καλύπτουμε όλο και περισσότερο το τελικό μέτωπο Pareto.



Εικόνα 6.28: Μεταβολή του δείκτη υπερόγκου για μέγεθος πληθυσμού 150



Εικόνα 6.27: Σύγκριση μέσου όρου και μέγιστης τιμής του δείκτη υπερόγκου για τρία μεγέθη

- **Μετρική απόστασης γενεών (Generational Distance Metric - GD)**

Η μετρική της απόστασης γενεών (GD) εισήχθη για πρώτη φορά από τους Veldhuizen και Lamont, και ο στόχος αυτής της μέτρησης είναι η εύρεση ενός συνόλου μη κυριαρχούμενων λύσεων που έχουν τη χαμηλότερη απόσταση σε σχέση με το καλύτερο μέτωπο Pareto ($PF_{Optimal}$). Επομένως, ο αλγόριθμος με τα ελάχιστα αποτελέσματα GD έχει την καλύτερη σύγκλιση με το $PF_{Optimal}$ (Garcia & Trinh, 2019). Ο ορισμός της GD έχει ως εξής:

$$GD = \frac{1}{n_{pf}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n_{pf}} d_i^2} \quad (6.5)$$

όπου n_{PF} αντιπροσωπεύει τον αριθμό των μελών στο παραγόμενο μέτωπο Pareto (PF_g) και d_i είναι η ευκλείδεια απόσταση μεταξύ του i^{th} μέλους στο PF_g και του πλησιέστερου μέλους στο $PF_{Optimal}$.

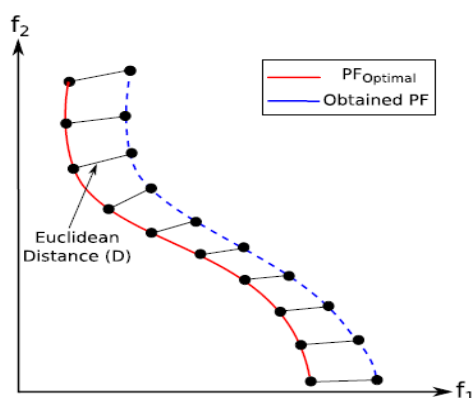
$$d_i = \min_{k \in K} (\sum_{j \in J} (PF(g)_{ij} - PF(Optimal)_{kj})^2)^{1/2} \quad (6.6)$$

όπου τα $I(i \in I)$, $K(k \in K)$ και $J(j \in J)$ αποτελούν τα σύνολα σημείων του παραγόμενου μετώπου PF_g , του καλύτερου μετώπου $PF_{Optimal}$ και των στόχων του προβλήματος, αντίστοιχα.

Στη μετρική GD, η καλύτερη τιμή που λαμβάνεται είναι ίση με το μηδέν, κι αυτό συμβαίνει όταν η PF_g καλύπτει ακριβώς το $PF_{Optimal}$.

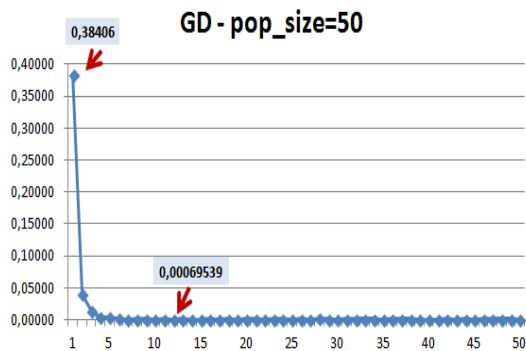
Η Εικόνα 6.29 εμφανίζει μια απεικόνιση της μετρικής GD στο δισδιάστατο χώρο.

Ο δείκτης GD υπολογίστηκε για μέγεθος πληθυσμού 50, 100, 150 και 50 γενιές. Κατά την αύξηση του πληθυσμού από 50 σε 100 η ελάχιστη τιμή του δείκτη GD μειώθηκε πολύ δηλαδή από 0,00069539 (13^η γενιά – μέγεθος πληθυσμού 50) σε 0,0002966 (44^η γενιά – μέγεθος πληθυσμού).

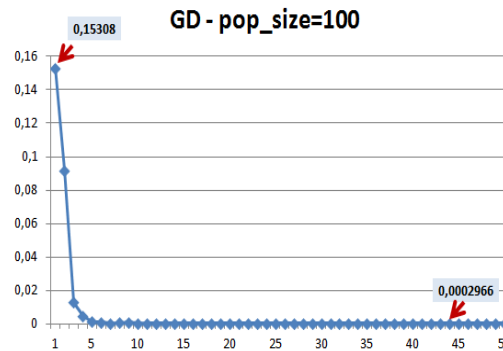


Εικόνα 6.29: Απεικόνιση της μετρικής GD στο δισδιάστατο χώρο

Επίσης, κατά την αύξηση του πληθυσμού σε μέγεθος 150 ο δείκτης μειώθηκε κι άλλο (0,00015942 - 34^η γενιά). Ο μέσος όρος των τιμών του GD μειώνεται (0,004557-μέγεθος πληθυσμού 150) όσο αυξάνεται το μέγεθος του πληθυσμού και μειώνεται ακόμη περισσότερο όσο αυξάνονται οι γενιές (0,002385 για μέγεθος πληθυσμού 150 και 100 γενιές) με την ελάχιστη τιμή να παραμένει ίδια.

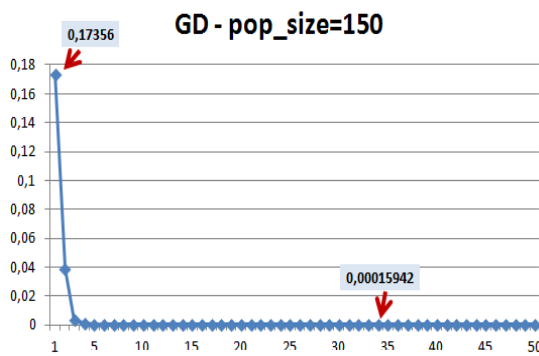


Εικόνα 6.31: Μεταβολή του δείκτη GD για μέγεθος πληθυσμού 50

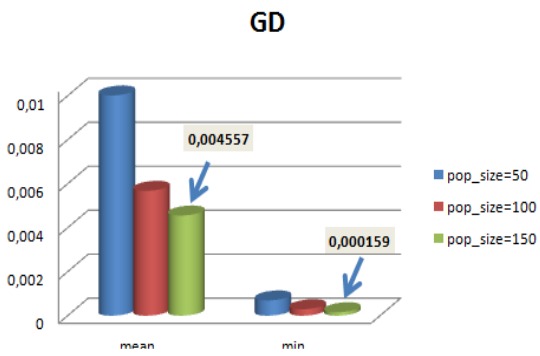


Εικόνα 6.30: Μεταβολή του δείκτη GD για μέγεθος πληθυσμού 100

Άρα, όσο αυξάνονται το μέγεθος πληθυσμού και οι γενιές τόσο μειώνεται και πλησιάζει την τιμή μηδέν ο δείκτης GD που σημαίνει ότι το παραγόμενο μέτωπο καλύπτει όλο και περισσότερο το τελικό μέτωπο.



Εικόνα 6.33: Μεταβολή του δείκτη GD για μέγεθος πληθυσμού 150



Εικόνα 6.32: Σύγκριση μέσου όρου και μέγιστης τιμής του δείκτη GD για τρία μεγέθη πληθυσμού (50-100-150)

- **Ανεστραμμένη μετρική απόστασης γενεών (Inverted Generational Distance -IGD)**

Το μέτρο IGD (Coello και Sierra, 2004) είναι μεταξύ των πιο συχνά χρησιμοποιούμενων δεικτών και αποτελεί αντιστροφή του δείκτη GD, δηλαδή μετράει την κατά προσέγγιση απόσταση από το μέτωπο Pareto στο σύνολο λύσης που ορίζεται στον αντικειμενικό χώρο (Garcia & Trinh, 2019). Μια χαμηλή τιμή IGD είναι προτιμότερη, και θα πρέπει να δείχνει ότι το σύνολο έχει καλή συνδυασμένη ποιότητα σύγκλισης, εξάπλωσης, ομοιομορφίας και προτεραιότητας. Ωστόσο, η ακρίβεια της αξιολόγησης IGD εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ποιότητα προσέγγισης του συνόλου αναφοράς στο μέτωπο Pareto. Συνήθως, προτείνεται ένα μεγάλο σύνολο αναφοράς στο μέτωπο Pareto. Όμως, το σύνολο αναφοράς που αποτελείται από όλες τις μη κατανομημένες λύσεις που

παράγονται μπορεί να προκαλέσει παραπλανητικά αποτελέσματα, αν και η πρακτική αυτή έχει υιοθετηθεί ευρέως στα διάφορα προβλήματα.

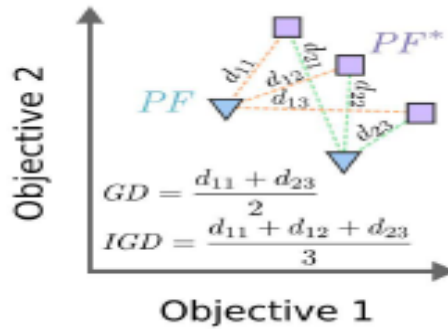
Ο ορισμός της IGD έχει ως εξής:

$$IGD = \frac{1}{n_{pk}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n_{pk}} d_k^2} \quad (6.7)$$

όπου n_{pk} αντιπροσωπεύει τον αριθμό των μελών στο καλύτερο μέτωπο Pareto ($PF_{Optimal}$) και d_k είναι η ευκλείδεια απόσταση μεταξύ του k^{th} μέλους στο $PF_{Optimal}$ και του πλησιέστερου μέλους στο PF_g .

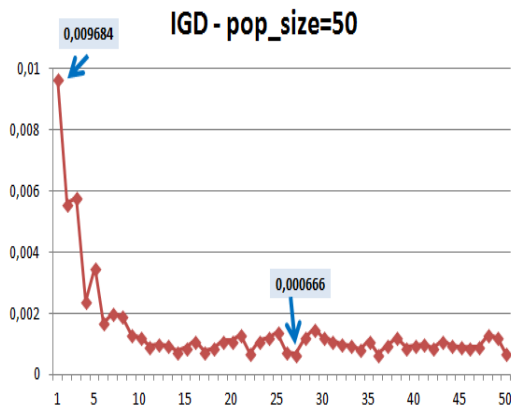
$$d_k = \min_{i \in I} (\sum_{j \in J} (PF(Optimal)_{kj} - PF(g)_{ij})^2)^{1/2} \quad (6.8)$$

Η παρακάτω εικόνα εμφανίζει ένα παράδειγμα απεικόνισης της μετρικής GD και της IGD στο δισδιάστατο χώρο.

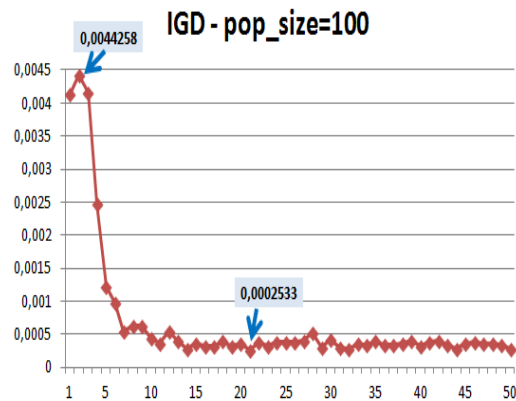


Εικόνα 6.34: Παράδειγμα απεικόνισης των δεικτών GD και IGD στο δισδιάστατο χώρο (Garcia & Trinh, 2019)

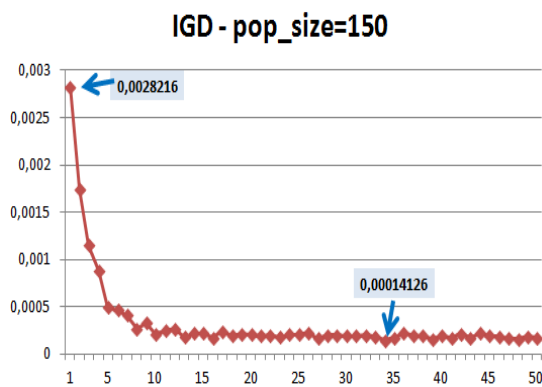
Όπως και οι υπόλοιποι δείκτες έτσι και ο δείκτης IGD υπολογίστηκε για μέγεθος πληθυσμού 50, 100, 150 και 50 γενιές. Κατά την αύξηση του πληθυσμού από 50 σε 100 η ελάχιστη τιμή του δείκτη IGD μειώθηκε πολύ δηλαδή από 0,000666 (27^η γενιά – μέγεθος πληθυσμού 50) σε 0,0002533 (21^η γενιά – μέγεθος πληθυσμού). Επίσης, κατά την αύξηση του πληθυσμού σε μέγεθος 150 ο δείκτης μειώθηκε κι άλλο (0,00014126 - 34^η γενιά). Ο μέσος όρος των τιμών του IGD μειώνεται (0,00033-μέγεθος πληθυσμού 150) όσο αυξάνεται το μέγεθος του πληθυσμού και μειώνεται ακόμη περισσότερο όσο αυξάνονται οι γενιές (0,00257 για μέγεθος πληθυσμού 150 και 100 γενιές) με την ελάχιστη τιμή να παραμένει ίδια. Άρα, όσο αυξάνονται το μέγεθος πληθυσμού και οι γενιές τόσο μειώνεται και πλησιάζει την τιμή μηδέν ο δείκτης IGD που σημαίνει ότι το σύνολο έχει καλή συνδυασμένη ποιότητα σύγκλισης, εξάπλωσης και ομοιομορφίας.



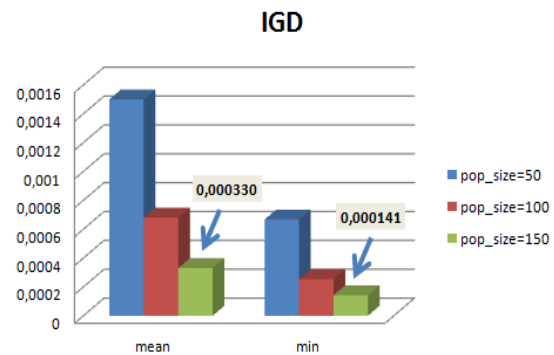
Εικόνα 6.36: Μεταβολή του δείκτη IGD για μέγεθος πληθυσμού 50



Εικόνα 6.35: Μεταβολή του δείκτη IGD για μέγεθος πληθυσμού 100



Εικόνα 6.38: Μεταβολή του δείκτη IGD για μέγεθος πληθυσμού 150



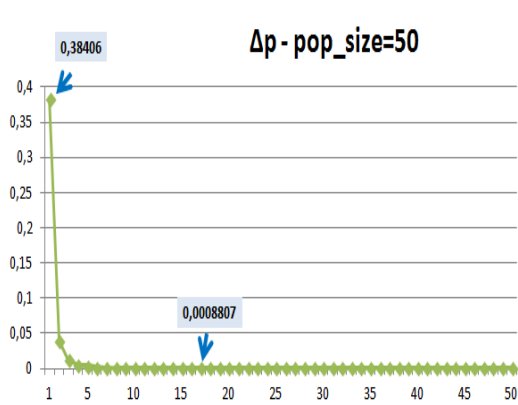
Εικόνα 6.37: Σύγκριση μέσου όρου και μέγιστης τιμής του δείκτη IGD για τρία μεγέθη πληθυσμού (50-100-150)

• Averaged Hausdorff Distance (Δ_p)

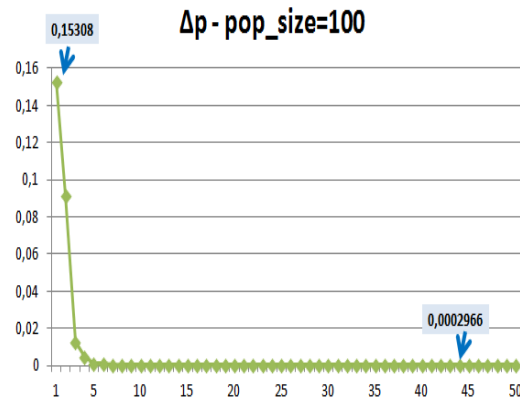
Η απόσταση Hausdorff μετράει πόσο μακριά βρίσκεται ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου από ένα άλλο (Garcia & Trinh, 2019). Δύο σύνολα είναι κοντά σύμφωνα με την απόσταση Hausdorff εάν κάθε σημείο του ενός συνόλου είναι κοντά με κάποιο σημείο του άλλου συνόλου. Πρόκειται για την μεγαλύτερη από όλες τις αποστάσεις από ένα σημείο στο ένα σύνολο προς το πιο κοντινό του από το άλλο σύνολο. Συνεπώς, αυτή η μετρική λαμβάνει το μέγιστο από τις μετρικές GD και IGD:

$$\Delta_p = \max(GD, IGD) \quad (6.9)$$

Όπως και στην περίπτωση των δύο δεικτών GD και IGD έτσι και για την απόσταση Hausdorff που λαμβάνει την μέγιστη τιμή από τους δύο δείκτες, όσο αυξάνεται το μέγεθος του πληθυσμού και των γενεών τόσο μειώνεται η ελάχιστη τιμή του δείκτη.

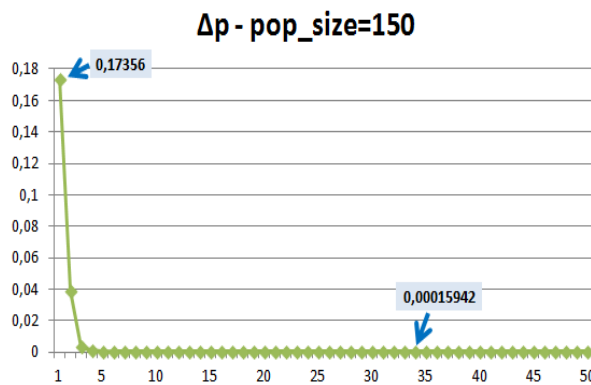


Εικόνα 6.40: Μεταβολή του δείκτη Δρ για μέγεθος πληθυσμού 50



Εικόνα 6.39: Μεταβολή του δείκτη Δρ για μέγεθος πληθυσμού 100

Επομένως, για μέγεθος πληθυσμού 150 και αριθμό γενεών 50 η ελάχιστη τιμή του δείκτη Δρ είναι 0,00015942 (34^η γενιά). Στη συνέχεια για το ίδιο μέγεθος πληθυσμού και για 100 γενιές η ελάχιστη τιμή παραμένει ίδια αλλά ο μέσος όρος τιμών του δείκτη μειώνεται κι άλλο.

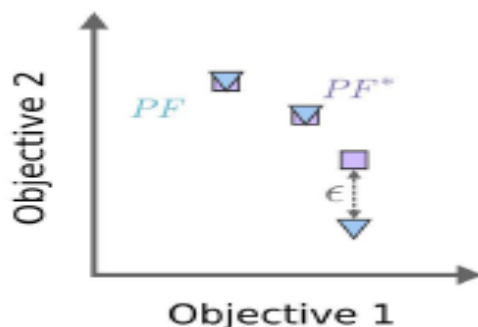


Εικόνα 6.41: Μεταβολή του δείκτη Δρ για μέγεθος πληθυσμού 150

- **ε – indicator**

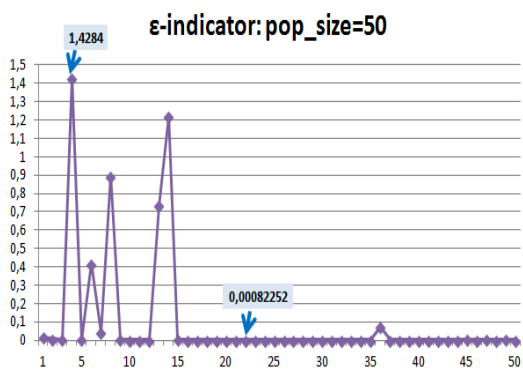
Η συγκεκριμένη μετρική είναι ένας δείκτης που μετρά τη μικρότερη αξία που πρέπει να προστεθεί σε οποιοδήποτε σημείο της PF_g , ώστε να μην κυριαρχείται σε σχέση με κάποιο σημείο της $PF_{Optimal}$. Με άλλα λόγια, είναι η μικρότερη τιμή ϵ έτσι ώστε για οποιαδήποτε λύση στο $PF_{Optimal}$ να υπάρχει τουλάχιστον μία λύση στο PF_g που δεν είναι χειρότερη από μια διαφορά του ϵ (Garcia & Trinh, 2019).

$$\epsilon = \inf\{\epsilon \in R: \text{για όλα τα } i \in I \exists k \in K : PF_{ij} + \epsilon \geq PF(Optimal)_{kj} \forall j \in J\} \quad (6.10)$$

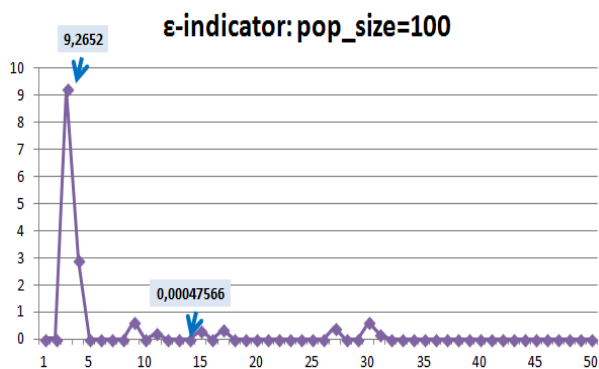


Εικόνα 6.42: Παράδειγμα απεικόνισης του δείκτη ϵ -indicator στο δισδιάστατο χώρο (Garcia & Trinh, 2019)

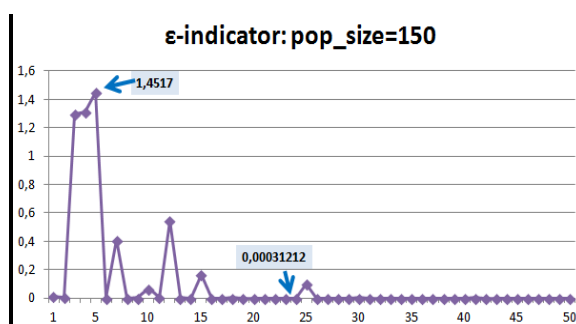
Ο δείκτης ϵ – indicator όσο αυξάνεται το μέγεθος του πληθυσμού μειώνεται με την ελάχιστη τιμή του να είναι 0,00031212 για μέγεθος πληθυσμού 150 (23^η γενιά). Επίσης, για το ίδιο μέγεθος πληθυσμού και για 100 γενιές η ελάχιστη τιμή παραμένει ίδια αλλά ο μέσος όρος τιμών του δείκτη μειώνεται κι άλλο.



Εικόνα 6.43: Μεταβολή του δείκτη ϵ για μέγεθος πληθυσμού 50



Εικόνα 6.44: Μεταβολή του δείκτη ϵ για μέγεθος πληθυσμού 100



Εικόνα 6.45: Μεταβολή του δείκτη ϵ για μέγεθος πληθυσμού 150

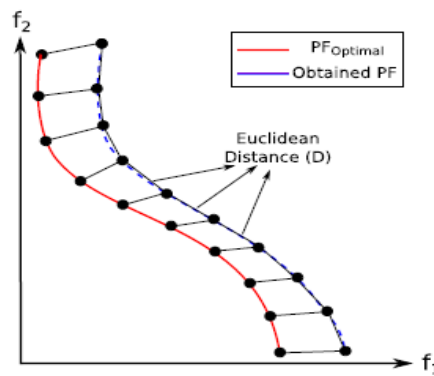
- **Spacing (SP)**

Ο SP Schott (1995) υπολόγισε τη διακύμανση της απόστασης μεταξύ των λύσεων σε ένα σύνολο χρησιμοποιώντας το πιο δημοφιλή δείκτη ομοιομορφίας, το spacing. Ο στόχος αυτής της μέτρησης είναι να δείξει την κατανομή των μη κυριαρχούμενων λύσεων που

λαμβάνονται από έναν συγκεκριμένο αλγόριθμο (Tharwat, Houssein, Ahmed, Hassanien, & Gabel, 2017). Αυτή η μέτρηση ορίζεται ως εξής:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n_{pf}-1} \sum_{i=1}^{n_{pf}} (d_i - \hat{d})^2} \quad (6.11)$$

όπου S είναι η μετρική της απόστασης, το d_i αντιπροσωπεύει την ευκλείδεια απόσταση μεταξύ του i^{th} μέλους στο PF_g και του πλησιέστερου μέλους στο P_{F_g} , όπου PF_g είναι το παραγόμενο μέτωπο Pareto (Εικόνα 6.46) και \hat{d} είναι ο μέσος όρος όλων των αποστάσεων.



Εικόνα 6.46: Απεικόνιση της μετρικής Spacing στο διδιάστατο χώρο (Tharwat, Houssein, Ahmed, Hassanien, & Gabel, 2017)

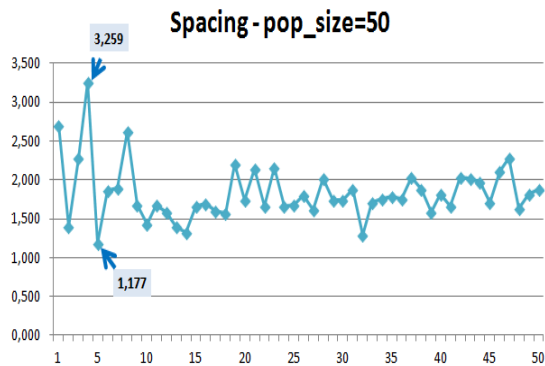
Μια μικρή τιμή του S δίνει την καλύτερη ομοιόμορφη κατανομή στο PF_g , ενώ η τιμή του S θα είναι μηδέν όταν $d_i = \hat{d}$, δηλαδή όταν όλες οι μη κυριαρχούμενες λύσεις κατανέμονται ομοιόμορφα. Η ευκλείδεια απόσταση ορίζεται ως εξής:

$$d(a, b) = d(b, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (f_{ia} - f_{ib})^2} \quad (6.12)$$

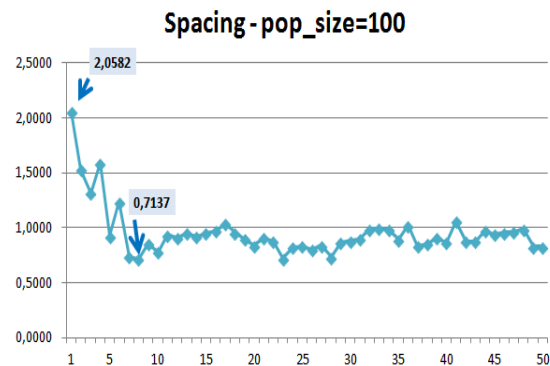
Όπου τα $a = (f_{1a}, f_{2a}, f_{3a}, \dots, f_{na})$ και $b = (f_{1b}, f_{2b}, f_{3b}, \dots, f_{nb})$ αποτελούν δύο σημεία του παραγόμενου μετώπου Pareto PF_g .

Για μέγεθος πληθυσμού 50 η ελάχιστη τιμή του spacing είναι 1,177 στην 5^η γενιά, για μέγεθος πληθυσμού 100 μειώνεται και φτάνει στην τιμή 0,7137 (8^η γενιά) και για πληθυσμό μεγέθους 150 μειώνεται κι άλλο και φτάνει στην ελάχιστη τιμή 0,48547 (7^η γενιά). Ο μικρότερος μέσος όρος εμφανίζεται για μέγεθος πληθυσμού 150 και αριθμό γενεών 50 (0,6119). Άρα, όσο αυξάνεται το μέγεθος του πληθυσμού μειώνεται ο συγκεκριμένος δείκτης. Παρατηρείται ότι ο αριθμός των γενεών δεν επηρεάζει τόσο τον μέσο όρο όσο και την ελάχιστη τιμή του δείκτη spacing. Δηλαδή για μέγεθος πληθυσμού 150 και 100 γενιές ο μέσος όρος είναι 0,6104 και η ελάχιστη τιμή του δείκτη είναι 0.4855 όσο είναι περίπου για τις 50 γενιές.

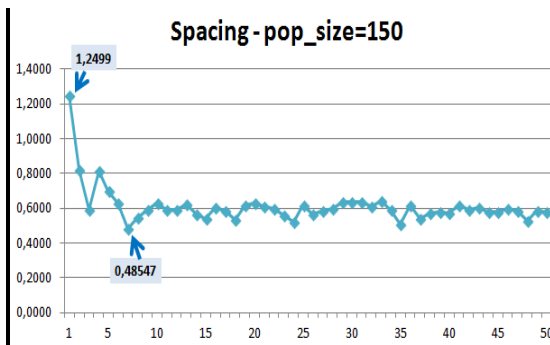
Ίσως, αν το μέγεθος του πληθυσμού αυξάνονταν πάρα πολύ ο δείκτης spacing να πλησίαζε την τιμή μηδέν ώστε όλες οι μη κυριαρχούμενες λύσεις να κατανέμονται ομοιόμορφα.



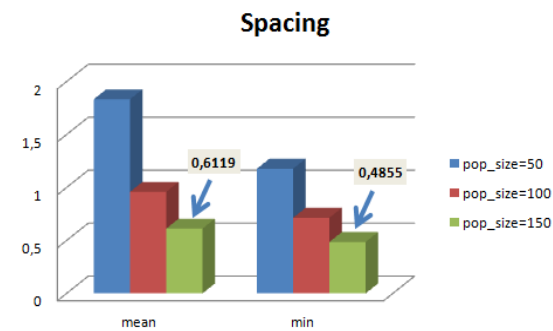
Εικόνα 6.48: Μεταβολή του δείκτη Spacing για μέγεθος πληθυσμού 50



Εικόνα 6.47: Μεταβολή του δείκτη Spacing για μέγεθος πληθυσμού 100



Εικόνα 6.50: Μεταβολή του δείκτη Spacing για μέγεθος πληθυσμού 150



Εικόνα 6.49: Σύγκριση μέσου όρου και ελάχιστης τιμής του δείκτη Spacing για τρία μεγέθη πληθυσμού (50-100-150)

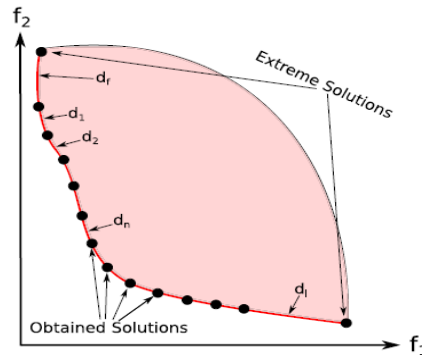
• Μετρική της εξάπλωσης (Metric of spread)

Η μετρική της εξάπλωσης προτάθηκε από τον Deb και καθορίζει την έκταση της διαφοράς που επιτυγχάνεται από τις μη κυριαρχούμενες λύσεις (Tharwat, Houssein, Ahmed, Hassanien, & Gabel, 2017) και μπορεί να αναλύσει τον τρόπο με τον οποίο η λύση που λαμβάνεται επεκτείνεται σε όλα τα βέλτιστα μέτωπα Pareto, και ορίζεται ως εξής:

$$\Delta = \frac{d_f + d_l + \sum_{i=1}^{n_{pf}} |d_i - \bar{d}|}{d_f + d_l + (n_{pf} - 1)\bar{d}} \quad (6.13)$$

όπου d_f και d_l αντιπροσωπεύουν τις ευκλείδειες αποστάσεις μεταξύ των ακραίων λύσεων στα $PF_{Optimal}$ και PF_g , αντίστοιχα, όπως φαίνεται στην παρακάτω Εικόνα, το d_i

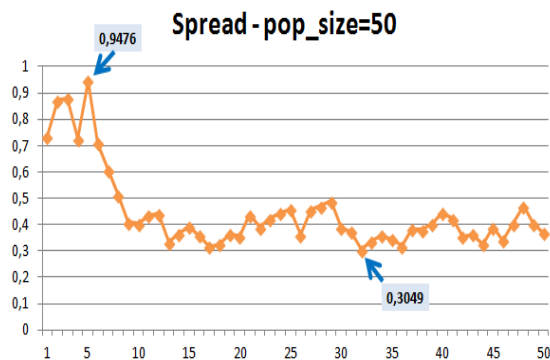
υποδεικνύει την ευκλείδεια απόσταση μεταξύ κάθε σημείου στο PF_g και του πλησιέστερου σημείου στο $PF_{Optimal}$, το n_{pf} είναι ο συνολικός αριθμός των μελών στο PF_g και το \hat{d} ο μέσος όρος όλων των αποστάσεων.



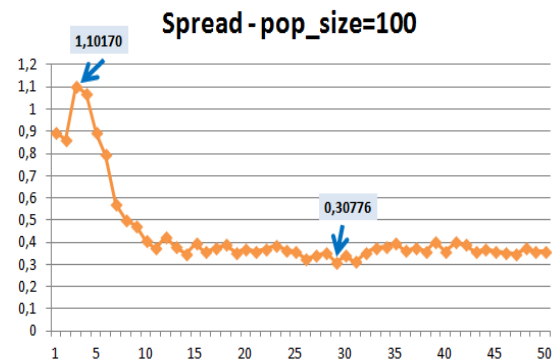
Εικόνα 6.51: Απεικόνιση της μετρικής Spread στο διδιάστατο χώρο (Tharwat, Houssein, Ahmed, Hassanien, & Gabel, 2017)

Στη μετρική της εξάπλωσης η τιμή του Δ είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν, και μια μικρή τιμή υποδεικνύει καλύτερη εξάπλωση της τελικής λύσης. Η τιμή $\Delta = 0$ είναι η καλύτερη λύση και δείχνει ότι έχουν βρεθεί οι ακραίες λύσεις $PF_{Optimal}$ και ισχύει $d_i = \hat{d}$ για όλα τα μη κυριαρχούμενα σημεία.

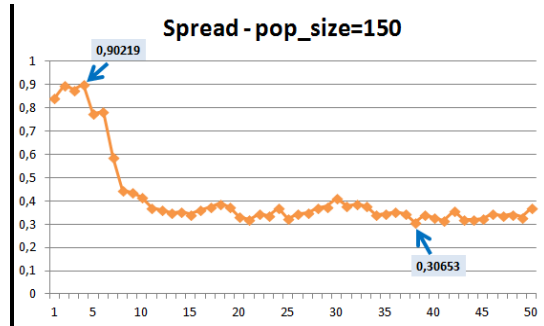
Η ελάχιστη τιμή του δείκτη spread είναι περίπου ίδια για τα τρία μεγέθη πληθυσμού (0,3049 για μέγεθος πληθυσμού 50) και υποδεικνύει καλή εξάπλωση της τελικής λύσης. Κι ο μέσος όρος τιμών δε διαφέρει πολύ, με το μικρότερο να εμφανίζεται για μέγεθος πληθυσμού 150 (0,4205). Αυξάνοντας τις γενιές σε 100 παρατηρείται μείωση και του μέσου όρου (0,3903) καθώς και της ελάχιστης τιμής (0.3037 – 75^η γενιά). Ίσως αν ο αριθμός των γενεών αυξάνονταν πάρα πολύ, ο δείκτης spread να μειώνονταν περαιτέρω πλησιάζοντας την τιμή μηδέν.



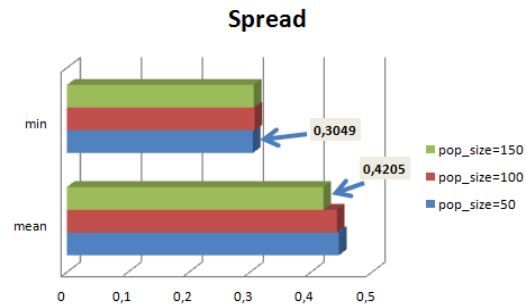
Εικόνα 6.52: Μεταβολή του δείκτη Spread για μέγεθος πληθυσμού 50



Εικόνα 6.53: Μεταβολή του δείκτη Spread για μέγεθος πληθυσμού 100



Εικόνα 6.55: Μεταβολή του δείκτη Spread για μέγεθος πληθυσμού 150



Εικόνα 6.54: Σύγκριση μέσου όρου και μέγιστης τιμής του δείκτη Spread για τρία μεγέθη πληθυσμού (50-100-150)

Παρακάτω παρατίθενται πίνακες με τις μετρήσεις που έγιναν για το μέσο όρο, τη διάμεσο, την τυπική απόκλιση την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή όλων των δεικτών και για μεγέθη πληθυσμού 50,100 και 150.

	Spacing	GD	IGD	$\Delta\rho$	ε -indicator	Spread	Hypervolume
mean	1,833	0,010019	0,001499	0,010089	0,09803	0,446157	8,931
median	1,749	0,0012	0,0011	0,0013	0,001584	0,39825	9,182
stdev	0,365	0,054281	0,001561	0,054269	0,305704	0,151025	1,1568
min	1,177	0,000695	0,000666	0,000881	0,000823	0,3049	1,053
max	3,259	0,38406	0,009684	0,38406	1,4284	0,9476	9,226

Πίνακας 6.4: Τιμές των δεικτών για μέγεθος πληθυσμού 50 και αριθμό γενεών 50

	Spacing	GD	IGD	$\Delta\rho$	ε -indicator	Spread	Hypervolume
mean	0,9592	0,005681	0,000679	0,005687	0,301187	0,442756	8,9648
median	0,9061	0,000427	0,000371	0,000428	0,001002	0,370995	9,1173
stdev	0,231708	0,024938	0,000969	0,024936	1,363591	0,192702	1,033
min	0,7137	0,000297	0,000253	0,000297	0,000476	0,30776	1,9452
max	2,0582	0,15308	0,004426	0,15308	9,2652	1,1017	9,2445

Πίνακας 6.5: Τιμές των δεικτών για μέγεθος πληθυσμού 100 και αριθμό γενεών 50

	Spacing	GD	IGD	$\Delta\rho$	ε - indicator	Spread	Hypervolume
mean	0,6119	0,004557	0,00033	0,004563	0,108011	0,420514	9,0266
median	0,593375	0,000233	0,000196	0,000233	0,000619	0,356645	9,2276
stdev	0,109503	0,024991	0,000452	0,02499	0,333246	0,165878	1,0904
min	0,4855	0,000159	0,000141	0,000159	0,000312	0,30653	1,517
max	1,2499	0,17356	0,002822	0,17356	1,4517	0,90219	9,2412

Πίνακας 6.6: Τιμές των δεικτών για μέγεθος πληθυσμού 150 και αριθμό γενεών 50

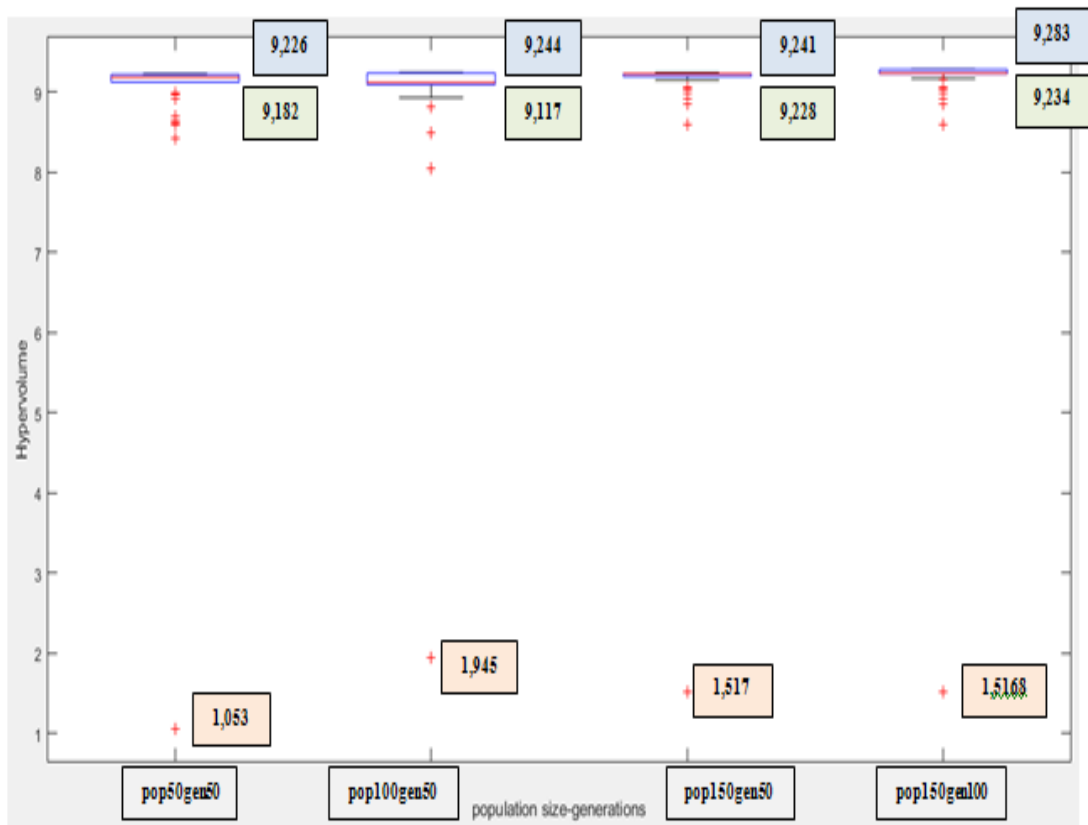
	Spacing	GD	IGD	$\Delta\rho$	ε - indicator	Spread	Hypervolume
mean	0,6104	0,002385	0,000257	0,00239	0,056234	0,390258	9,1478
median	0,599595	0,000217	0,000192	0,00022	0,000573	0,36107	9,234
stdev	0,083811	0,017717	0,000327	0,017716	0,240604	0,121929	0,7768
min	0,4855	0,000159	0,000141	0,000159	0,000312	0,30369	1,5168
max	1,2499	0,17356	0,002822	0,17356	1,4517	0,90219	9,2827

Πίνακας 6.7: Τιμές των δεικτών για μέγεθος πληθυσμού 150 και αριθμό γενεών 100

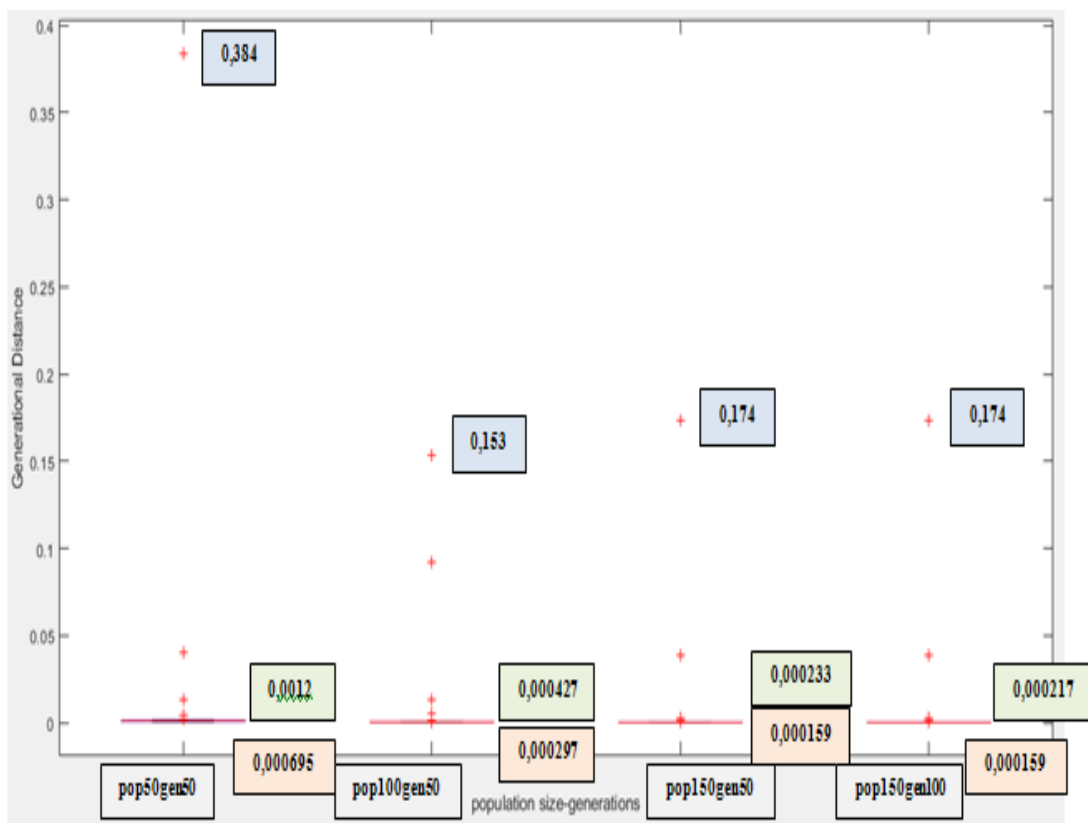
Στη συνέχεια, δημιουργήθηκαν διαγράμματα box plots με τη βοήθεια του Matlab για να απεικονιστούν οι τιμές των μετρικών ποιότητας. Συγκεκριμένα, απεικονίστηκαν οι τιμές πέντε μετρικών (Hypervolume, Generational Distance, Inverted Generational Distance, Spacing, Spread) για τα παρακάτω μεγέθη πληθυσμού και αριθμό επαναλήψεων:

- Μέγεθος πληθυσμού (pop size)=50 και γενιές (generations)=50
- Μέγεθος πληθυσμού (pop size)=100 και γενιές (generations)=50
- Μέγεθος πληθυσμού (pop size)=150 και γενιές (generations)=50
- Μέγεθος πληθυσμού (pop size)=150 και γενιές (generations)=100

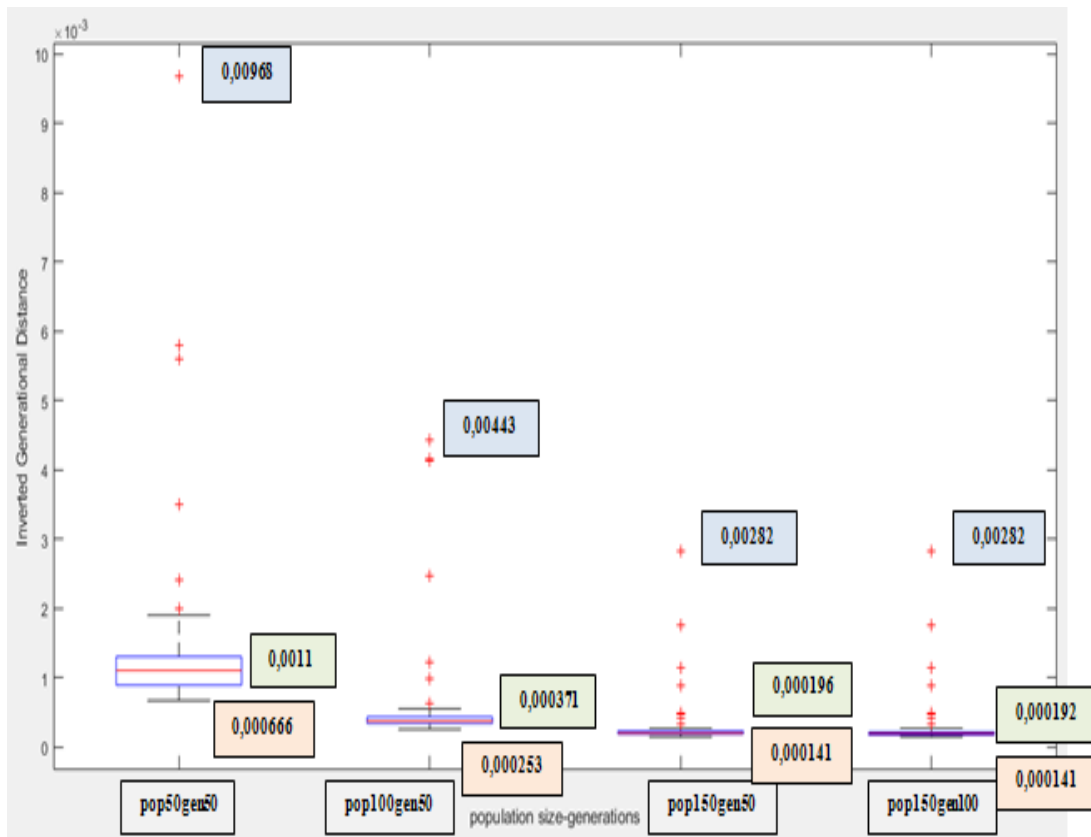
Στα box plots παρουσιάζονται σε μπλε πλαίσιο οι μέγιστες τιμές (max), σε πράσινο πλαίσιο οι διάμεσοι (median) και σε πορτοκαλί πλαίσιο οι ελάχιστες τιμές (min) των μετρικών ποιότητας για τις διάφορες περιπτώσεις.



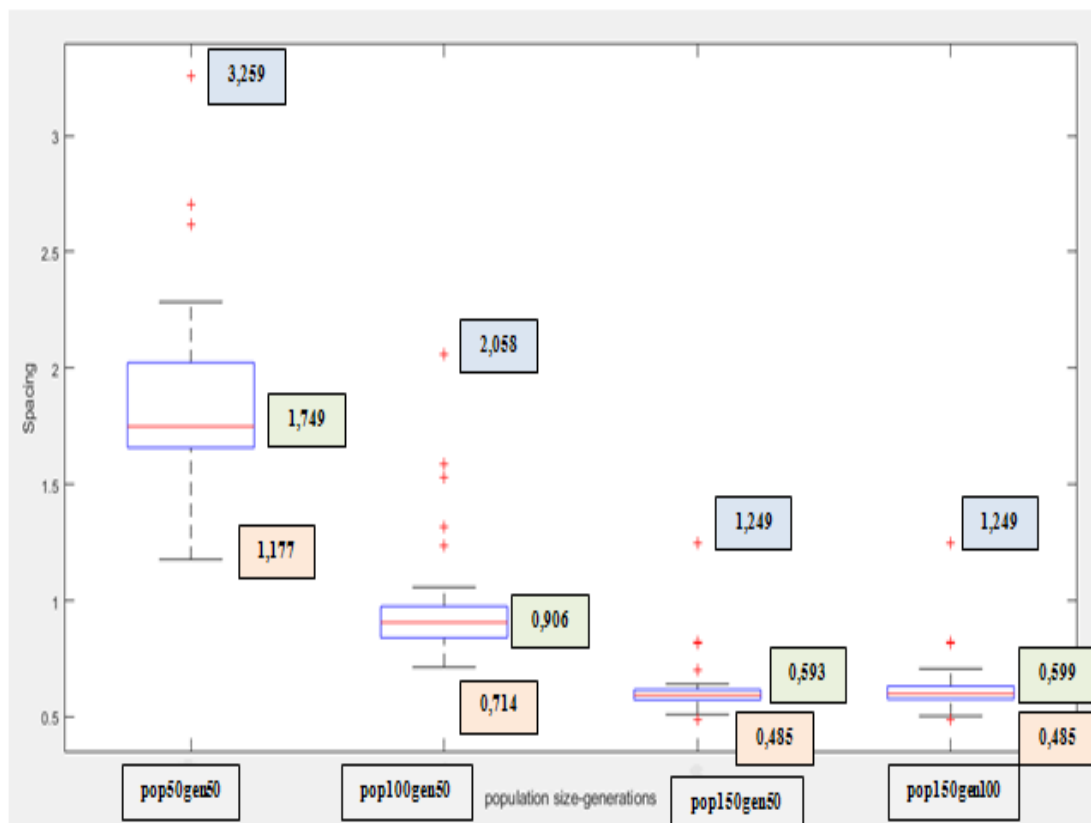
Εικόνα 6.56: Box plot για τη μετρική ποιότητας Hypervolume



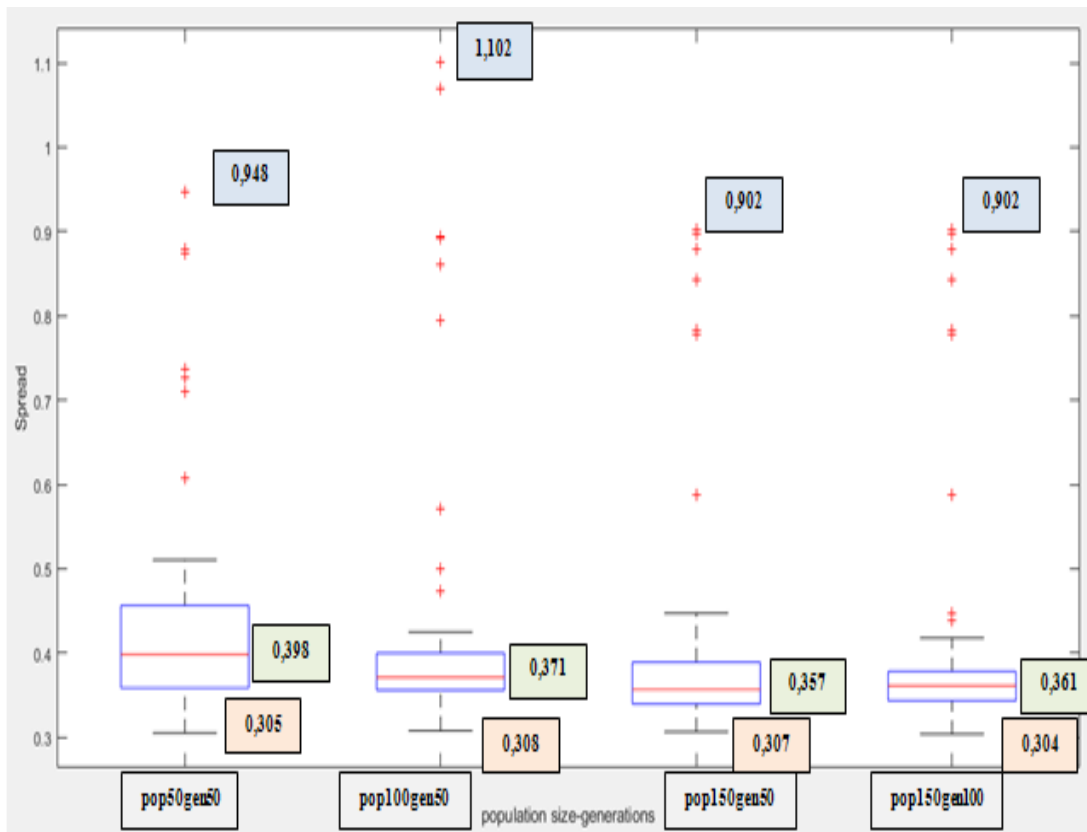
Εικόνα 6.57: Box plot για τη μετρική ποιότητας Generational Distance



Εικόνα 6.58: Box plot για τη μετρική ποιότητας Inverted Generational Distance



Εικόνα 6.59: Box plot για τη μετρική ποιότητας Spacing



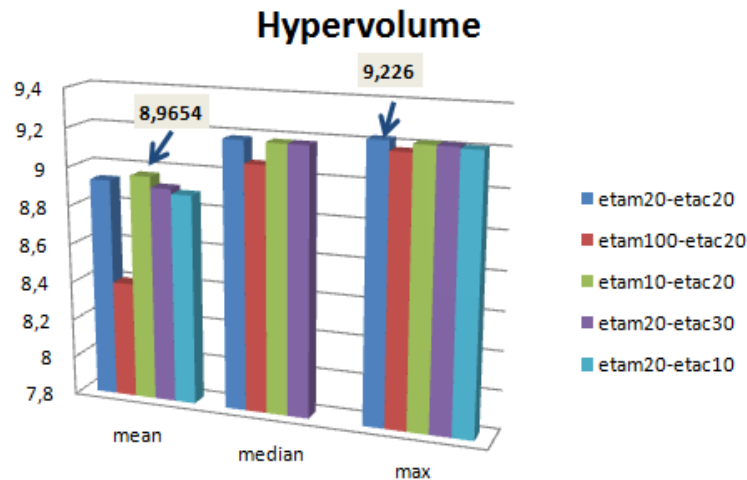
Εικόνα 6.60: Box plot για τη μετρική ποιότητας Spread

Πριν πραγματοποιηθούν οι δοκιμές για τον προσδιορισμό των βέλτιστων λύσεων και για τον υπολογισμό των μετρικών ποιότητας στα τρία μεγέθη πληθυσμού (50, 100, 150) έγιναν μετρήσεις-συγκρίσεις μεταξύ των τελεστών διασταύρωσης (crossover) και μετάλλαξης (mutation) για μέγεθος πληθυσμού 50 και αριθμό γενεών 50. Συγκεκριμένα, οι περιπτώσεις που εξετάστηκαν ήταν οι κάτωθι:

- Τελεστής διασταύρωσης $n_c=20$ - τελεστής μετάλλαξης $n_m=20$. Η συγκεκριμένη περίπτωση επιλέχθηκε για την πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο NSGA 2,
- Τελεστής διασταύρωσης $n_c=20$ - τελεστής μετάλλαξης $n_m=100$,
- Τελεστής διασταύρωσης $n_c=20$ - τελεστής μετάλλαξης $n_m=10$,
- Τελεστής διασταύρωσης $n_c=10$ - τελεστής μετάλλαξης $n_m=20$,
- Τελεστής διασταύρωσης $n_c=30$ - τελεστής μετάλλαξης $n_m=20$.

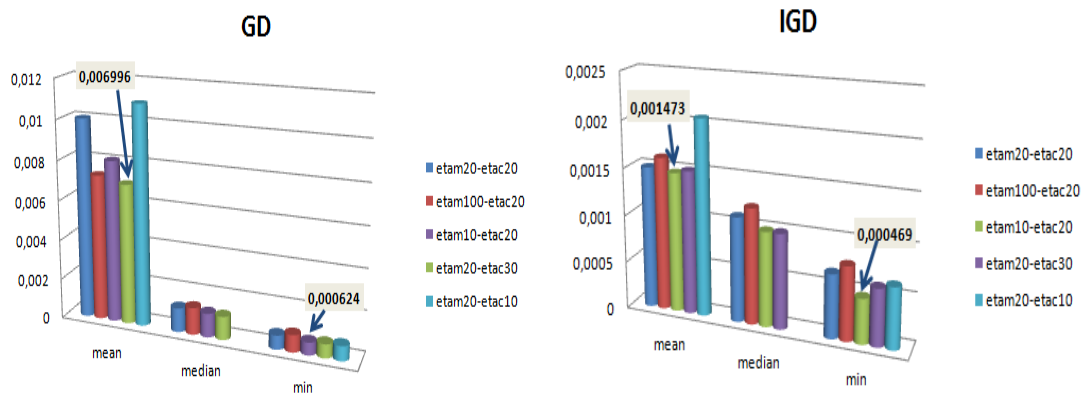
Σύμφωνα με τις μετρήσεις που έγιναν για τον δείκτη υπερόγκου (hypervolume) παρατηρείται ότι η μέγιστη τιμή του δείκτη εμφανίζεται για $n_c=20$ και $n_m=20$ (9,226). Ο μέσος όρος τιμών ήταν λίγο μεγαλύτερος για την περίπτωση $n_c=20$ και $n_m=10$ (8,9654).

Βέβαια σε όλες τις περιπτώσεις οι διαφορές στον δείκτη υπερόγκου (μέγιστη τιμή – μέσος όρος) ήταν ελάχιστες όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα.



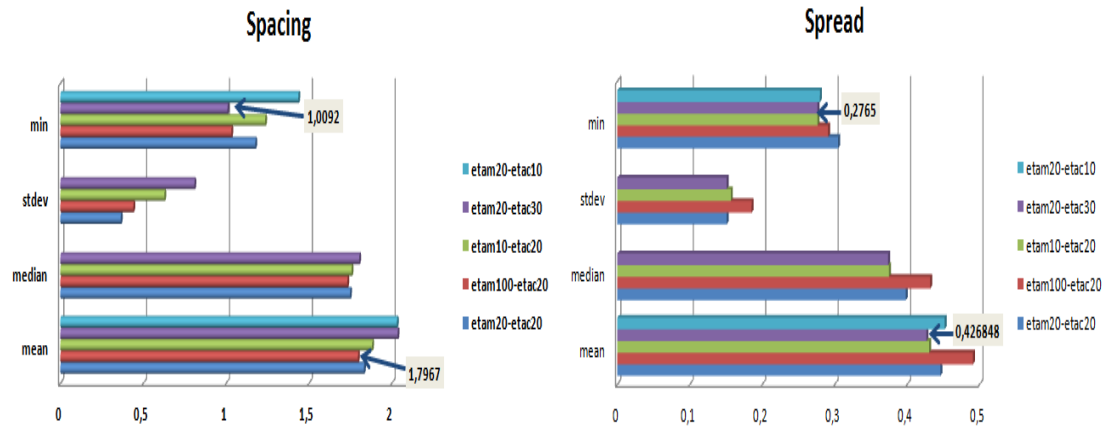
Εικόνα 6.61: Μέσος όρος, διάμεσος και μέγιστη τιμή του δείκτη υπερόγκου για διάφορους τελεστές διασταύρωσης και μετάλλαξης

Αναφορικά με το δείκτη GD η ελάχιστη τιμή του παρατηρείται για $n_c=20$ και $n_m=10$ (0,000624) ενώ ο μικρότερος μέσος όρος για $n_c=30$ και $n_m=20$ (0,006996). Αντίστοιχα, για τον δείκτη IGD η ελάχιστη τιμή (0,000469) κι ο μικρότερος μέσος όρος (0,001473) παρατηρείται για $n_c=20$ και $n_m=10$.

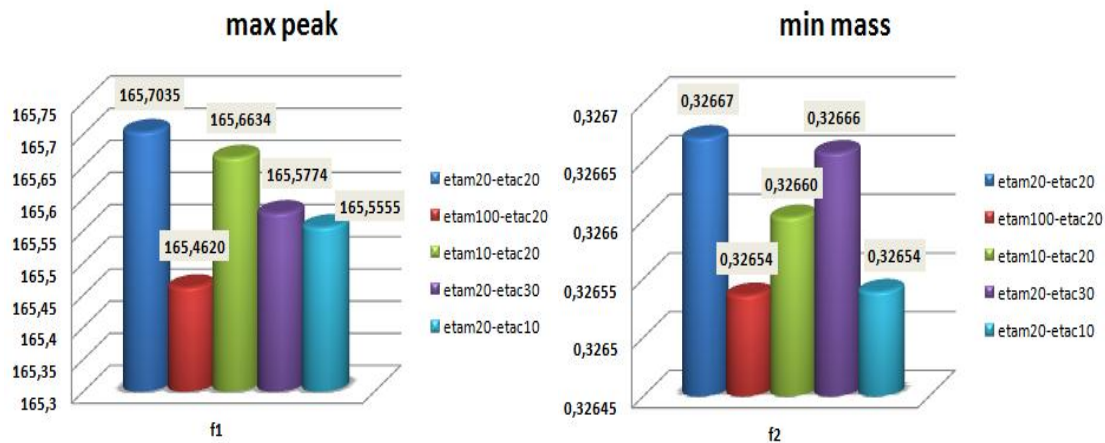


Εικόνα 6.62 - Εικόνα 6.63: Μέσος όρος, διάμεσος και ελάχιστη τιμή του GD-IGD για διάφορους τελεστές διασταύρωσης και μετάλλαξης

Για το δείκτη Spacing η ελάχιστη τιμή του παρατηρείται για $n_c=30$ και $n_m=20$ (1,0092) ενώ ο μικρότερος μέσος όρος για $n_c=20$ και $n_m=100$ (1,7967). Αντίστοιχα, για τον δείκτη Spread η ελάχιστη τιμή (0,2765) κι ο μικρότερος μέσος όρος (0,4268) παρατηρείται για $n_c=30$ και $n_m=20$.



Εικόνα 6.64 - Εικόνα 6.65: Μέσος όρος, διάμεσος, τυπική απόκλιση και ελάχιστη τιμή του Spacing - Spread για διάφορους τελεστές διασταύρωσης και μετάλλαξης



Εικόνα 6.66 - Εικόνα 6.67: Ακραία βέλτιστη λύση (μέγιστη ισχύς – ελάχιστη μάζα) για διάφορους τελεστές διασταύρωσης και μετάλλαξης

Τέλος, όσον αφορά την ακραία βέλτιστη λύση (μέγιστη ισχύς –ελάχιστη μάζα) όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα οι διαφορές είναι πολύ μικρές σε όλες τις περιπτώσεις. Συγκεκριμένα, η μέγιστη τιμή παρατηρείται για $n_c=20$ και $n_m=20$ (165,7035 – 0,32667), ενώ ακολουθούν οι τιμές για $n_c=20$ και $n_m=10$ (165,6634 – 0,32660) και για $n_c=30$ και $n_m=20$ (165,5774 – 0,32666).

7. Συμπεράσματα – Μελλοντική Έρευνα

Ανακεφαλαιώνοντας, παρατηρούμε ότι για το πρόβλημα μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης όσο αυξάνεται το αδιάστατο μήκος, η τιμή της αντιστάσεως μειώνεται για την μέγιστη τιμή ισχύος. Η μέγιστη τιμή ισχύος παρατηρείται στο οριακό αδιάστατο πάχος για το οποίο ισχύει ο περιορισμός $L_{star} * H_{star} \leq 0,027225$. Το αδιάστατο πάχος στο οποίο παρατηρείται η μέγιστη ισχύς είναι μικρότερο, όσο αυξάνεται το μήκος. Συνεπώς, η ισχύς εξόδου αυξάνεται με αυξανόμενο αδιάστατο πάχος για οποιοδήποτε αδιάστατο μήκος.

Επίσης, για το πολυκριτηριακό πρόβλημα με τη χρήση του NSGA-II συμπεραίνουμε ότι όσο αυξάνεται το μέγεθος του πληθυσμού τόσο πιο γρήγορα συγκλίνει ο πληθυσμός στο τελικό μέτωπο. Αν πραγματοποιούνταν μετρήσεις για μεγαλύτερο αριθμό γενεών ίσως παρατηρούνταν μια μικρή αύξηση στην ακραία βέλτιστη λύση (ισχύς εξόδου). Αναφορικά με τις μετρικές ποιότητας, όσο αυξάνεται το μέγεθος του πληθυσμού και των γενεών αυξάνεται η τιμή του δείκτη υπερόγκου ενώ μειώνονται και πλησιάζουν την τιμή μηδέν οι δείκτες GD, IGD, Δp και ϵ -indicator. Κάτι που σημαίνει ότι το παραγόμενο μέτωπο καλύπτει όλο και περισσότερο το τελικό μέτωπο. Ο δείκτης Spacing μειώνεται όσο αυξάνεται το μέγεθος του πληθυσμού. Παρατηρείται ότι ο αριθμός των γενεών δεν επηρεάζει τόσο τον μέσο όρο όσο και την ελάχιστη τιμή του δείκτη spacing. Τέλος, η ελάχιστη τιμή του δείκτη Spread είναι περίπου ίδια, όσο αυξάνεται το μέγεθος του πληθυσμού και αν ο αριθμός των γενεών αυξάνονταν πάρα πολύ, ο δείκτης μπορεί να μειώνονταν περαιτέρω πλησιάζοντας την τιμή μηδέν.

Λόγω της πολυπλοκότητας του μαθηματικού μοντέλου για τον υπολογισμό της μέγιστης ηλεκτρικής ισχύος, ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου ήταν πολύ μεγάλος με αποτέλεσμα να πραγματοποιηθούν μετρήσεις για μέγεθος πληθυσμού έως 150 και αριθμό γενεών έως 100. Μεγαλύτερο μέγεθος πληθυσμού και κυρίως μεγαλύτερος αριθμός γενεών ίσως μας έδινε ακόμα μεγαλύτερη ακραία βέλτιστη λύση για την ηλεκτρική ισχύ. Επίσης, ο δείκτης υπερόγκου θα αυξάνονταν κι άλλο και οι υπόλοιπες μετρικές (GD, IGD, Spread κ.α.) θα ελαχιστοποιούνταν ακόμη περισσότερο τείνοντας στην τιμή μηδέν (τελικό μέτωπο Pareto).

Επιπρόσθετα, θα μπορούσε να γίνει χρήση κι άλλων μετρικών ποιότητας (Maximum Pareto front error, R1 and R2 indicators, Integrated Preference Functional κ.α.) για τη σύγκριση μετώπων των μη-κυριαρχούμενων λύσεων.

Μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση του συγκεκριμένου προβλήματος πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης θα ήταν η σύγκριση του αλγορίθμου που χρησιμοποιήθηκε (NSGA – II) με κλασικές τεχνικές βελτιστοποίησης όπως τη μέθοδο βαρών και τη μέθοδο προγραμματισμού στόχων καθώς και η σύγκριση με άλλους εξελικτικούς αλγορίθμους όπως τον Strength Pareto Evolutionary Algorithm (SPEA – II), τον Pareto Envelope-based Selection Algorithm (PESA – II), τον Multi-Objective Evolutionary Algorithm based on Decomposition (MOEA/D) κ.α. Μέσα από πίνακες και γραφήματα θα μπορούσαν να συγκριθούν τόσο η ακραία βέλτιστη λύση όσο και οι μετρικές ποιότητας και να διαπιστωθεί σε ποια περίπτωση αλγορίθμου ο πληθυσμός συγκλίνει πιο γρήγορα και πιο κοντά στο τελικό μέτωπο Pareto.

Τέλος, μελλοντικό πεδίο έρευνας θα αποτελούσε η εφαρμογή των εξελικτικών αλγορίθμων σε προβλήματα διαφοροποιημένα σε σχέση με το συγκεκριμένο που μελετήθηκε. Για παράδειγμα, ορισμένες από τις περιπτώσεις που θα μπορούσαν να εξεταστούν στο μέλλον είναι η αντικατάσταση του συγκεκριμένου πιεζοηλεκτρικού υλικού (PZT-5A) με κάποιο άλλο υλικό (π.χ. PZT-5H, PIC155 κ.ά), η προσθήκη επιπλέον αντικειμενικής συνάρτησης (ελαχιστοποίηση του κόστους του υλικού που θα ενσωματωθεί στον άξονα πτέρυγας) ή/και η προσθήκη επιπλέον περιορισμών σχετικών με την αντοχή των υλικών (π.χ. περιορισμό στην τιμή της εφελκυστικής τάσης κλπ).

8. Βιβλιογραφία

1. ALIOUI, Y., & ACAR, R. (2020). *AN EVALUATION OF A CONSTRAINED MULTI-OBJECTIVE GENETIC ALGORITHM*. Journal of Scientific Perspectives, Volume 4, Issue 2, pp. 137-146.
2. Alkafaween, E. (2015). *Novel Methods for Enhancing the Performance of Genetic Algorithms*. Department of Information Technology, Mu'tah University, Thesis.
3. Aloui, R., Larbi, W., & Chouchane, M. (2019). *Global sensitivity analysis of piezoelectric energy harvesters*. Compos. Struct.
4. Amouzgar, K. (2012). *Multi-Objective Optimization using Genetic Algorithms*. Jönköping: Product development and materials.
5. Anton, S. R. (2008). *ENERGY HARVESTING FOR UNMANNED AERIAL VEHICLES*. Center for Intelligent Material Systems and Structures Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA 24060.
6. Audet, C., Bignon, J., Cartier, D., Le Digabel, S., & Salomon, L. (2018). *Performance indicators in multiobjective optimization*. GERAD and Département de mathématiques et génie industriel, École Polytechnique de Montréal, Canada.
7. Baskar, D. S., Tamilselvi, S., & Varshini, P. (2015, Feb 24). *MATLAB code for Constrained NSGA II*. Ανάκτηση Oct 11, 2020, από MathWorks: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/49806-matlab-code-for-constrained-nsga-ii-dr-s-baskar-s-tamilselvi-and-p-r-varshini>
8. Binh, T., & Korn, U. (1997). *MOBES: A Multiobjective Evolution Strategy for Constrained Optimization Problems*. In: *Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms, 176–182*. Czech Republic.
9. Chankong, V., & Haimes, Y. Y. (1983). *Multiobjective decision making. Theory and methodology*.
10. Coello Coello, C. (1999). *A comprehensive survey of evolutionary-based multiobjective optimization techniques, Knowledge and Information Systems: An International Journal*.
11. Coello Coello, C. A., Lamont, G. B., & Van Veldhuizen, D. A. (2007). *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems, Second Edition*. Springer Science+Business Media, LLC.
12. Coley, D. A. (1999). *An Introduction to Genetic Algorithms for Scientists and Engineers*. WORLD SCIENTIFIC.

13. Corne, D., Jerram, N. R., Knowles, J., & Oates, M. J. (2001). *PESA-II: Region-based selection in evolutionary multiobjective optimization*, in: *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO-2001)*, 283-290. San Francisco, California: Morgan Kaufmann Publishers.
14. Corne, D., Knowles, J., & Oates, M. J. (2000). *The Pareto envelope-based selection algorithm for multiobjective optimization*, in: *Proceedings of the Parallel Problem Solving from Nature VI Conference*, 839-848. Paris, France.
15. Covaci, C., & Gontean, A. (2020). *Piezoelectric Energy Harvesting Solutions: A Review*. Applied Electronics Department, Politehnica University Timisoara, Romania.
16. Davis, L. D., & Mitchell, M. (1991). *Handbook of Genetic Algorithms*, VAN NOSTRAND REINHOLD.
17. Deb, K. (1999). *Multi-objective genetic algorithms: Problem difficulties and construction of test problems* *Evolutionary Computation*.
18. Deb, K. (2001). *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*. Chichester, UK: John Wiley & Sons.
19. Deb, K., & Agrawal, S. (1999). *A Niche-Penalty Approach for Constraint Handling in Genetic Algorithms*. Kanpur Genetic Algorithms Laboratory (KanGAL), Department of Mechanical Engineering, India.
20. Deb, K., Agarwal, S., Pratap, A., & Meyarivan, T. (2000). *A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II*, Kanpur Genetic Algorithm Laboratory (KanGAL) Report, No 200001. Kanpur, India: Indian Institute of Technology.
21. Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., & Meyarivan, T. (2002). *A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II*, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2), 182-197.
22. DeMarqui, C. J., Erturk, A., & Inman, D. J. (2009). *An electromechanical Finite Element Model for piezoelectric Energy Harvester Plates*, *J. Sound. Vib.*, vol. 327, pp. 29-25.
23. Denysiuk, R. (2014). *Evolutionary Multiobjective Optimization: Review, Algorithms, and Applications*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia: Thesis.
24. Duan, Q., Sorooshian, S., & Gupta, V. (1992). *Effective and efficient global optimization for conceptual rainfall-runoff models*, *Water Resources Research*.

25. Fonseca, C. M., & Fleming, P. J. (1995). *Multiobjective optimization and multiple constraint handling with evolutionary algorithms: a unified formulation*, University of Sheffield Research Report 564. Sheffield, U.K.
26. Fonseca, C., & Fleming, P. J. (1993). *Genetic algorithms for multiobjective optimization: Formulation, discussion and generalization*, in: *Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms*. San Mateo, California.
27. Foutsitzi, G. A., Gogos, C. G., Hadjigeorgiou, E. P., & Stavroulakis, G. E. (2013). *Actuator Location and Voltages Optimization for Shape Control of Smart Beams Using Genetic Algorithms*. *Actuators*,2(4),111-128;doi:10.3390/act2040111.
28. Foutsitzi, G. A., Gogos, C. G., Stavroulakis, G. E., & Antoniadis, N. (2014). *Optimization of Piezoelectric Patches in Smart Structures using Multi-Objective Genetic Algorithms*". Scotland: Paper 222 in *Proceedings of the Twelfth International Conference on Computational Structures Technology*, B.H.V. Topping and P. Iványi, (Editors), Civil-Comp Press, Stirlingshire.
29. Garcia, S., & Trinh, C. T. (2019). *Comparison of Multi-Objective Evolutionary Algorithms to Solve the Modular Cell Design Problem for Novel Biocatalysis*. Department of Chemical and Biomolecular Engineering, The University of Tennessee: MDPI.
30. Goldberg, D. E. (1989a). *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Publishing Company.
31. Goldberg, D. E. (1989). *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc.
32. Gómez, E. (2010). *Piezoelectric Ceramics*. Rijeka, Croatia: Sciyo.
33. Holland, J. H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control and Artificial Intelligence*. University of Michigan Press, Ann.
34. Horn, J. (1997). *Multicriteria decision making*, in: *Handbook of Evolutionary Computation*, . Institute of Physics Publishing, Bristol (UK).
35. Horn, J., & Nafpliotis, N. (1993). *Multiobjective optimization using the niched Pareto genetic algorithm, IlliGAL Report 91011*. Illinois Genetic Algorithms Laboratory, University of Illinois: Urbana-Champaign.
36. Kalita, J. K. *Multi-objective Optimization*. University of Colorado, Colorado Springs, USA.
37. Keeney, R. (1983). *Decisions with Multiple Objectives-Preferences and Value Tradeoffs*. John Wiley.

38. Knowles, J. D., & Corne, D. W. (2002). *On metrics for comparing nondominated sets*, in: *Congress on Evolutionary Computation (CEC' 2002)*, Vol. 1, 711-716, IEEE Service Center. Piscataway, New Jersey.
39. Mishra, S., Unnikrishnan, L., Nayak, S., & Mohanty, S. (2018). *Advances in Piezoelectric Polymer Composites for Energy Harvesting Applications: A Systematic Review*. Macromolecular Materials and Engineering.
40. Morse, J. N. (1980). *Reducing the size of the nondominated set: pruning by clustering*, *Computers and Operations Research*, 7(1-2), 55-66.
41. Obitko, M. (1998, August). *Introduction to Genetic Algorithms*. Ανάκτηση 11 8, 2020, από <https://www.obitko.com/tutorials/genetic-algorithms/encoding.php>
42. Razali, N. M., & Geraghty, J. (2011). *Genetic Algorithm Performance with Different Selection Strategies in Solving TSP*. Dublin City University.
43. Schaffer, J. (1984). *Some experiments in machine learning using vector evaluated genetic algorithms*, *PhD thesis*. Vanderbilt University, Nashville.
44. Schreiner, H. J., Binding, R., & Helke, G. (2000). *Characterization of Piezoelectric Multilayer Actuators: Low and High Field Behaviour*. 7th International Conference on New Actuators, Bremen.
45. Shyalika, C. (2009, Jan 29). *Genetic Algorithms - Selection, An Insight to Genetic Algorithms — Part III*. Ανάκτηση Nov 10, 2020, από Medium: <https://medium.com/datadriveninvestor/genetic-algorithms-selection-5634cfc45d78>
46. Srinivas, N., & Deb, K. (1994). *Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms*, *Evolutionary Computation*, 2(3), 221-248.
47. Srinivas, N., & Deb, K. (1993). *Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms*, *Technical Report*. Department of Mechanical Engineering, Indian Institute of Technology, Kanpur, India.
48. Sudevalayam, S., & Kulkarni, P. (2010). *Energy Harvesting Sensor Nodes: Survey and Implications*. IEEE Communications Surveys & Tutorials.
49. Tan, Y. K., & Panda, S. K. (2010). *Review of Energy Harvesting Technologies for Sustainable Wireless Sensor Network*. National University of Singapore.
50. Tharwat, A., Houssein, E. H., Ahmed, M. M., Hassanien, A. E., & Gabel, T. (2017). *MOGOA algorithm for constrained and unconstrained multi-objective optimization problems*. Springer Science+Business Media, LLC.

51. Tian, Y., Cheng, R., Zhang, X., & Jin, Y. (2017). *PlatEMO: A MATLAB platform for evolutionary multi-objective optimization [educational forum]*. IEEE Computational Intelligence Magazine.
52. Varian, H. R. (1999). *Intermediate Microeconomics - A Modern Approach, Fifth edition*, . New York: W.W. Norton & Company.
53. Yang, X. (2008). *Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms*. Luniver Press.
54. Zhou, D. (2003). *Experimental Investigation of Non-linear Constitutive Behaviour of PZT*. Forschungszentrum Karlsruhe, Wissenschaftliche Berichte, FZKA 6869, Dissertation, pp. 6-12.
55. Zitzler, E. (1999). *Evolutionary algorithms for multiobjective optimization: Methods and applications*. Zurich, Switzerland: PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology.
56. Zitzler, E., & Thiele, L. (1998). *An evolutionary algorithm for multiobjective optimization: A comparative case study*, *Parallel Problem Solving from Nature, V*, 292-301.
57. Zitzler, E., Deb, K., & Thiele, L. (2000). *Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: empirical results*, *Evolutionary Computation*.
58. Zitzler, E., Laumanns, M., & Thiele, L. (2001). *SPEA 2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm*, *TIK-Report 103*. Zurich, Switzerland: Swiss Federal Institute of Technology.
59. Βλαχάβας, Ι., Κεφαλάς, Π., Βασιλειάδης, Ν., Ρεφανίδης, Ι., Κοκκοράς, Φ., & Σακελλαρίου, Η. (2011). *Τεχνητή Νοημοσύνη (3η έκδοση)*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας.

