



Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Ζώνιος Ελευθέριος

**ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ ΣΕ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ: ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ
ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ**

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Ιωάννινα, 2020

Αφιερώνεται στην οικογένεια μου.

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα Εφαρμοσμένα μαθηματικά και Πληροφορική που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 27/10/2020 από την εξεταστική επιτροπή :

Ονοματεπώνυμο

Βαθμίδα

Χάρης Παπαδόπουλος Αναπληρωτής Καθηγητής

Λουκάς Γεωργιάδης Αναπληρωτής Καθηγητής

Λεωνίδας Παληός Καθηγητής

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.

Ζώνιος Ελευθέριος

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής διατριβής μου αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους φίλους μου που με στήριξαν, ο καθένας με τον δικό του τρόπο, μα πάνω απ'όλους, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Χάρη Παπαδόπουλο, για την ευκαιρία που μου έδωσε να συνεργαστώ μαζί του και την καθοδήγηση που μου παρείχε καθ'όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της μεταπτυχιακής μου εργασίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο κεντρικός στόχος της παρούσας διατριβής είναι η παρουσίαση και η ανάλυση σε βάθος έξι προβλημάτων που σχετίζονται με ισχυρές κλίκες σε διάφορες κλάσεις γραφημάτων. Μελετάμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα των προβλημάτων αυτών που συναντώνται στην σύγχρονη βιβλιογραφία. Πιο συγκεκριμένα, η διατριβή αποτελείται από πέντε κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρονται εισαγωγικές έννοιες της θεωρίας γραφημάτων και ορισμοί σχετικοί με την έννοια της υπολογιστικής πολυπλοκότητας. Στο δεύτερο κεφάλαιο δίνεται η διατύπωση των έξι προβλημάτων, καθώς, και οι εφαρμογές τους σε άλλους κλάδους των μαθηματικών και της κοινωνίας. Το τρίτο κεφάλαιο περιέχει την ανάλυση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας των πέντε εκ των έξι προβλημάτων σε ορισμένες κλάσεις γραφημάτων. Στο τέταρτο κεφάλαιο αναλύεται η υπολογιστική πολυπλοκότητα του τελευταίου προβλήματος στις κλάσεις γραφημάτων του τρίτου κεφαλαίου, συμπεριλαμβανομένου ενός αλγορίθμου που λύνει το πρόβλημα σε πολυωνυμικό χρόνο στην κλάση των *cographs* και την απόρριψη της εικασίας του Zaare-Nahandi μέσω αντιπαραδειγμάτων. Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα συμπεράσματα αυτής της διατριβής.

ABSTRACT

The main goal of this study is the presentation and in-depth analysis of six problems related to strong cliques in various classes of graphs. We study the computational complexity of these problems encountered in the modern literature. More specifically, the study consists of five chapters. In the first chapter we introduce introductory concepts of graph theory and definitions related to the concept of computational complexity. In the second chapter, we give the formulation of the six problems related to strong cliques, as well as their applications in other branches of mathematics and society. The third chapter contains the analysis of the computational complexity of five of the six problems in certain graph classes. In the fourth chapter, we analyze the computational complexity of the last problem in the graph classes of the third chapter, including an algorithm that solves the problem in polynomial time in the class cographs, and we reject the conjecture of Zaare-Nahandi by giving some counterexamples. Finally, in the fifth chapter, we present the conclusions of this study.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1	Εισαγωγή	1
1.1	Θεωρία γραφημάτων	1
1.2	Βασικοί ορισμοί	3
1.3	Υπολογιστική πολυπλοκότητα	14
2	Εξι (υπολογιστικά) προβλήματα σχετικά με ισχυρές κλίκες	19
2.1	Ορισμένες εφαρμογές σχετικές με ισχυρές κλίκες	25
3	Ανάλυση των πρώτων πεντε προβλημάτων	27
3.1	Πολυωνυμική πολυπλοκότητα	27
3.1.1	C_4 -free γραφήματα	28
3.1.2	Line γραφήματα και συμπληρώματα των line γραφημάτων .	30
3.1.3	Γραφήματα με μικρό μέγιστο βαθμό	33
3.1.4	Cographs	35
3.2	Μη-πολυωνυμική πολυπλοκότητα	37
3.2.1	Ασθενώς chordal γραφήματα	37
4	Υπολογιστική πολυπλοκότητα του προβλήματος ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ	43
4.1	Πολυωνυμικοί αλγόριθμοι για το πρόβλημα σε κλάσεις γραφημάτων	43
4.1.1	Line γραφήματα	45
4.1.2	Υποκυβικά και κυβικά γραφήματα	57
4.1.3	Τρίγωνο-free γραφήματα και C_4 -free γραφήματα	64

4.1.4	Cographs	66
4.2	Υπολογιστικά όρια (δυσκολία) του προβλήματος	70
4.2.1	Ασθενώς chordal γραφήματα	70
4.2.2	Συμπληρώματα των line γραφημάτων και γραφήματα με αριθμό ανεξαρτησίας k	72
4.2.3	Αντιπαραδείγματα σε μια εικασία των Zaare-Nahandi	74
5	Συμπερασματα - Επεκτασεις	79
5.1	Πίνακας υπολογιστικών πολυπλοκοτήτων των έξι προβλημάτων	79
5.2	Κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα	80

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Θεωρία γραφημάτων

Η θεωρία γραφημάτων (ή θεωρία γράφων) είναι ένα πεδίο των διακριτών μαθηματικών που ασχολείται με την μελέτη γραφημάτων, τα οποία αποτελούν μαθηματικές δομές που χρησιμοποιούνται στην αναπαράσταση των σχέσεων μεταξύ κάθε δύο στοιχείων ενός συνόλου. Ένα γράφημα σε αυτό το πλαίσιο αποτελείται από κορυφές (επίσης, γνωστές και ως κόμβοι ή σημεία) που συνδέονται με ακμές (επίσης, γνωστές και ως συνδέσεις ή γραμμές).

Ορισμός 1.1.1. Ένα γράφημα (Graph) G είναι ένα ζεύγος $G = (V, E)$, όπου V είναι το πεπερασμένο σύνολο κορυφών και E είναι ένα σύνολο που αποτελείται από διμελή σύνολα κορυφών, υποσύνολα του V , τα οποία εκφράζουν τις ακμές του γραφήματος. Το σύνολο των κορυφών συμβολίζεται ως $V(G)$ και το σύνολο των ακμών ως $E(G)$.

Η θεωρία γραφημάτων χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων που μπορούν να αναπαρασταθούν με ένα γράφημα. Ένα τέτοιο πολύ γνωστό παράδειγμα είναι το πρόβλημα των γεφυρών του Königsberg, το οποίο μοντελοποιήθηκε και εν συνεχεία επιλύθηκε από τον Leonard Euler το 1736. Έκτοτε, προβλήματα της καθημερινότητας μοντελοποιούνται σε γραφήματα ώστε να επιλυθούν στη συνέχεια, όπως για παράδειγμα η αναπαράσταση ατόμων που είναι συνδεδεμένοι στο διαδίκτυο από δεδομένους δρομολογητές (routers). Το παράδειγμα αυτό μπορεί να αναπαρασταθεί σε γράφημα θέτοντας ένα κόμβο για κάθε δρομολογητή, ένα κόμβο για κάθε άτομο και μια ακμή μεταξύ δρομολογητή και ατόμου, εάν το άτομο είναι συνδεδεμένο στο διαδίκτυο από αυτό τον δρομολογητή. Η θεωρία γραφημάτων χρησιμοποιείται στην επιστήμη των υπολογιστών (π.χ. στη δομή του συνδέσμου ενός ιστότοπου), στη γλωσσολογία (π.χ. δενδροειδής δομή του συντακτικού), στη χημεία (π.χ. η φυσική μορφή ενός μορίου, όπου οι κορυφές αντιπροσωπεύουν άτομα και οι ακμές δεσμούς),

στη βιολογία (π.χ. η μελέτη αποδημητικών πουλιών, όπου οι κορυφές αντιπροσωπεύουν τις περιοχές μετανάστευσης και οι ακμές τις διαδρομές μεταξύ των περιοχών αυτών), στις κοινωνικές επιστήμες (π.χ. η φιλία μεταξύ ανθρώπων, όπου οι κορυφές αντιπροσωπεύουν τους ανθρώπους και οι ακμές την ύπαρξη φιλίας), στα μαθηματικά (π.χ. “μεταθετική άλγεβρα” (commutative algebra)) κ.α.

Ορισμός 1.1.2. Δύο κορυφές ενός γραφήματος G ονομάζονται **γειτονικές ή γείτονες**, αν υπάρχει ακμή στο G που να τις συνδέει.

Η ακμή ενός γραφήματος συμβολίζεται ως $e = (x, y)$, όπου x και y είναι οι κόμβοι που συνδέει, και ονομάζονται **άκρα της ακμής** e . Οι ακμές μπορεί να έχουν προσανατολισμό, δηλαδή, να έχουν μια μορφή τόξου, από τον ένα κόμβο στον άλλο, ή να μην έχουν προσανατολισμό, δηλαδή, να έχουν μορφή ευθύγραμμου τμήματος ή καμπύλης. Σε μια ακμή $e = (x, y)$ που έχει προσανατολισμό (ή φορά ή κατεύθυνση) από τον κόμβο x προς τον κόμβο y , ο x καλείται αρχή της ακμής, ενώ ο y καλείται πέρας της ακμής.

Τα γραφήματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες σύμφωνα με το είδος των ακμών τους:

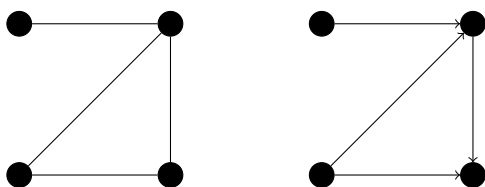
(a.) σε κατευθυνόμενα και

(b.) σε μη-κατευθυνόμενα.

Ορισμός 1.1.3. Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται **κατευθυνόμενο**, αν το σύνολο των ακμών E είναι διατεταγμένο, δηλαδή, οι ακμές του γραφήματος είναι ασύμμετρες ή, αλλιώς, έχουν προσανατολισμό.

Ορισμός 1.1.4. Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται **μη-κατευθυνόμενο**, αν το σύνολο των ακμών E δεν είναι διατεταγμένο, δηλαδή, οι ακμές είναι συμμετρικές ή, αλλιώς, δεν έχουν προσανατολισμό.

Παράδειγμα 1.1.5. Παρακάτω το γράφημα αριστερά είναι μη-κατευθυνόμενο, ενώ, το γράφημα δεξιά είναι κατευθυνόμενο.



Σχόλιο 1.1.6. Θα μας απασχολήσουν μόνο γραφήματα που είναι μη-κατευθυνόμενα σε αυτή την εργασία.

1.2 Βασικοί ορισμοί

Σε αυτή την ενότητα, θα δωθούν μερικοί βασικοί ορισμοί που θα βοηθήσουν στην κατανόηση/απόδειξη των βιβλιογραφικών αποτελεσμάτων που θα ειπωθούν στα επόμενα κεφάλαια. Θα ξεκινήσουμε αρχικά με τον ορισμό της γειτονίας, αφού στην προηγούμενη ενότητα είδαμε τότε δυο κορυφές ονομάζονται γειτονικές.

Ορισμός 1.2.1. Οι παρακάτω ορισμοί έχουν σχέση με την έννοια της γειτονίας.

- (a.) Σε ένα γράφημα G , το σύνολο των γειτόνων μιας κορυφής $v \in V(G)$ ονομάζεται **γειτονιά** του v στο γράφημα G , συμβολίζεται ως $N_G(v)$ (ή $N(v)$, εάν είναι ξεκάθαρο σε ποιο γράφημα ανήκει το v) και ορίζεται ως

$$N_G(v) = \{u \in V(G) \mid (v, u) \in E(G)\}.$$

- (b.) Το σύνολο των γειτόνων μιας κορυφής $v \in V$ μαζί με την κορυφή v ονομάζεται **κλειστή γειτονιά** του v στο γράφημα G , συμβολίζεται ως $N_G[v]$ (ή $N[v]$) και ορίζεται ως

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}.$$

- (c.) Αν για μια κορυφή $v \in V(G)$, ισχύει ότι, $N(v) = \emptyset$, τότε, η v ονομάζεται **απομονωμένη**.

- (d.) Αν $N[v] = V(G)$, τότε, λέμε ότι η v είναι **καθολική**.

- (e.) **Γειτονιά ενός συνόλου κορυφών** $X \subseteq V(G)$ είναι το σύνολο όλων των κόμβων που ανήκουν στο $V(G) \setminus X$ και έχουν τουλάχιστον ένα γείτονα στο X . Συμβολίζεται ως $N_G(X)$ (ή $N(X)$) και ορίζεται ως

$$N_G(X) = \bigcup_{v \in X} N_G(v) \setminus X.$$

Αρκετές φορές δύο γραφήματα μπορούν να έχουν κοινές ιδιότητες και, συνεπώς, υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ τους. Θα δούμε, αρχικά, τότε δύο γραφήματα ονομάζονται ισόμορφα.

Ορισμός 1.2.2. Δύο γραφήματα G και H με το ίδιο πλήθος κορυφών, ονομάζονται **ισομορφικά** ή **ισόμορφα**, αν υπάρχει μια, "1-1" και επι, συνάρτηση $f : V(G) \rightarrow V(H)$, τέτοια ώστε, να ισχύει:

$$(\forall u, v \in V(G)) : (u, v) \in E(G) \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E(H).$$

Το γεγονός ότι τα G και H είναι ισόμορφα συμβολίζεται ως $G \cong H$.

Ορισμός 1.2.3. Οι παρακάτω ορισμοί έχουν σχέση με τον βαθμό των κορυφών ενός γραφήματος G .

- (a.) **Βαθμός** μιας κορυφής $v \in V(G)$, σε ένα γράφημα G , είναι το πλήθος των ακμών στο G που έχουν ως άκρο τους, την κορυφή v . Συμβολίζεται ως $d_G(v)$ (ή $\deg_G(v)$) και ισχύει ότι

$$d_G(v) = |N_G(v)|.$$

- (b.) Ο μικρότερος (αντίστοιχα, μεγαλύτερος) από τους βαθμούς των κορυφών του γραφήματος G συμβολίζεται ως $\delta(G)$ (αντίστοιχα, $\Delta(G)$).

- (c.) Το G καλείται k -**κανονικό**, αν ισχύει ότι: $\delta(G) = \Delta(G) = k$.

- (d.) Εάν το G είναι k -κανονικό, για κάποιο k ακέραιο, τότε, το γράφημα G καλείται **κανονικό**.

- (e.) Το γράφημα G καλείται **κυβικό**, αν το G είναι 3-κανονικό, ενώ, καλείται **υποκυβικό**, αν $\Delta(G) \leq k$.

Για να καταλάβουμε καλύτερα τις σχέσεις μεταξύ δυο γραφημάτων θα ορίσουμε τις έννοιες του υπογραφήματος και επαγόμενου υπογραφήματος.

Ορισμός 1.2.4. Έστω δύο γραφήματα H και G . Λέμε ότι το γράφημα H είναι **υπογράφημα** του γραφήματος G , αν μπορούμε να πάρουμε το γράφημα H από το G αφαιρώντας κάποιες κορυφές και κάποιες ακμές του, δηλαδή, $V(H) \subseteq V(G)$ και $E(H) \subseteq E(G)$. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $H \subseteq G$.

Ορισμός 1.2.5. Έστω δύο γραφήματα H και G . Λέμε ότι το γράφημα H είναι **επαγόμενο υπογράφημα** του γραφήματος G , αν μπορούμε να πάρουμε το γράφημα H από το G αφαιρώντας κάποιες κορυφές και τις προσκείμενες σε αυτές ακμές του, δηλαδή, $V(H) \subseteq V(G)$ και

$$(\forall u, v \in V(H)) : (u, v) \in E(H) \Leftrightarrow (u, v) \in E(G).$$

Η έννοια του επαγόμενου γραφήματος είναι μια ειδική κατηγορία του υπογραφήματος, δηλαδή αν το H είναι επαγόμενο υπογράφημα του G , τότε το H είναι υπογράφημα του G . Από τους ορισμούς του επαγόμενου υπογραφήματος και των ισόμορφων γραφημάτων μπορούμε να δώσουμε τον ορισμό των K -free γραφημάτων, όπου K είναι ένα γράφημα.

Ορισμός 1.2.6. Έστω δύο γραφήματα G και H . Το G καλείται **H-free**, αν το G δεν περιέχει επαγόμενο υπογράφημα ισόμορφο με το H .

Δύο μεγάλες κατηγορίες υπογραφημάτων είναι οι κλίκες και τα ανεξάρτητα σύνολα. Τις κλίκες μπορούμε να τις φανταστούμε ως ένα σύνολο κορυφών, έτσι ώστε, όλοι οι κόμβοι να είναι γείτονες μεταξύ τους και τα ανεξάρτητα σύνολα ως ένα σύνολο κορυφών, έτσι ώστε, κάθε κορυφή να είναι απομονωμένη.

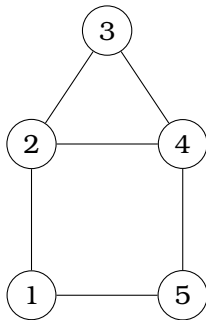
Ορισμός 1.2.7. Κλίκα (Clique) είναι ένα υποσύνολο κορυφών ενός γραφήματος, έτσι ώστε, κάθε δύο κορυφές, της κλίκας, να είναι γειτονικές.

Μια κλίκα καλείται **μεγιστοτική (maximal)** όταν δεν υπάρχει κορυφή στο γράφημα, έξω από την κλίκα, ώστε να είναι γειτονική με όλες τις κορυφές της κλίκας.

Μια κλίκα ονομάζεται **μέγιστη (maximum)** εάν δεν υπάρχει άλλη κλίκα με περισσότερες κορυφές.

Ορισμός 1.2.8. Μια κορυφή ονομάζεται **simplicial**, αν αυτή μαζί με την γειτονιά της αποτελούν κλίκα. Μια κλίκα που αποτελείται από την κλειστή γειτονία μιας τέτοιας κορυφής ονομάζεται **simplicial κλίκα**.

Παράδειγμα 1.2.9. Στο παρακάτω γράφημα, οι κλίκες είναι οι $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$, $\{1, 5\}$ και $\{2, 3, 4\}$. Από αυτές οι $\{1, 2\}$, $\{4, 5\}$, $\{1, 5\}$ και $\{2, 3, 4\}$ είναι μεγιστοτικές, ενώ η κλίκα $\{2, 3, 4\}$ είναι μέγιστη. Επίσης, η κορυφή 3 είναι simplicial και, συνεπώς, η μεγιστοτική κλίκα $\{2, 3, 4\}$ είναι simplicial.

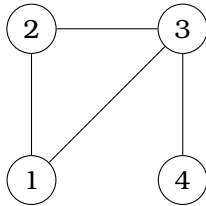


Ορισμός 1.2.10. Ανεξάρτητο σύνολο (Independent Set) είναι ένα υποσύνολο κορυφών ενός γραφήματος, έτσι ώστε, κάθε δύο κορυφές του ανεξάρτητου συνόλου να μην είναι γειτονικές μεταξύ τους.

Ένα ανεξάρτητο σύνολο καλείται **μεγιστοτικό (maximal)** όταν δεν υπάρχει κορυφή στο γράφημα, έξω από το ανεξάρτητο σύνολο, ώστε να είναι μη-γειτονική με όλες τις κορυφές του ανεξάρτητου συνόλου.

Ένα ανεξάρτητο σύνολο ονομάζεται **μέγιστο (maximum)** εάν δεν υπάρχει άλλο ανεξάρτητο σύνολο με περισσότερες κορυφές.

Παράδειγμα 1.2.11. Στο γράφημα που μας δίνεται παρακάτω, τα ανεξάρτητα σύνολα είναι τα $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$ και $\{3\}$, εκ των οποίων τα $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$ και $\{3\}$ είναι μεγιστοτικά, ενώ τα $\{1, 4\}$ και $\{2, 4\}$ είναι μέγιστα.

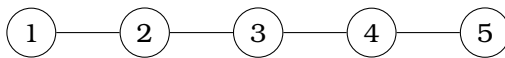


Τρεις μεγάλες κατηγορίες γραφημάτων είναι τα μονοπάτια, οι κύκλοι και τα πλήρη γραφήματα. Τα μονοπάτια μπορούμε να τα φανταστούμε σαν κορυφές οι οποίες ενώνονται διαδοχικά και τους κύκλους σαν μονοπάτια όπου η πρώτη και η τελευταία κορυφή είναι γειτονικές. Τα πλήρη γραφήματα μπορούμε να τα φανταστούμε ως μια τεράστια κλίκα αποτελούμενη από όλες τις κορυφές του γραφήματος.

Ορισμός 1.2.12. Μονοπάτι (Path) είναι ένα γράφημα, όπου, το σύνολο κορυφών του αποτελεί μια ακολουθία κόμβων $\{v_1, \dots, v_n\}$, από έναν αρχικό κόμβο v_1 σε έναν τελικό v_n , έτσι ώστε, κάθε κόμβος της ακολουθίας να συνδέεται με τον επόμενό του μέσω ακμής. Ένα μονοπάτι στο οποίο οι μόνες ακμές που υπάρχουν, είναι αυτές που συνδέουν τους διαδοχικούς κόμβους, ονομάζεται **άχορδο**. Ένα άχορδο μονοπάτι που αποτελείται από n -κόμβους, με $n \geq 2$, συμβολίζεται ως P_n και ορίζεται ως

$$P_n = \{\{v_1, \dots, v_n\} \mid (v_i, v_{i+1}) \in E(G), \forall i \in \{1, \dots, n-1\}\}.$$

Παράδειγμα 1.2.13. Ένα άχορδο μονοπάτι πέντε κορυφών, P_5 , είναι το παρακάτω.



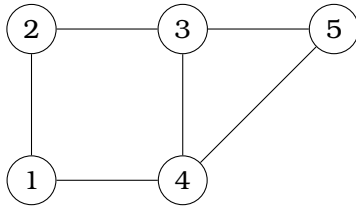
Ορισμός 1.2.14. Κύκλος (Cycle) είναι ένα μονοπάτι $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ όπου ο αρχικός και ο τελικός κόμβος ταυτίζονται. Ένας άχορδος κύκλος είναι ένα άχορδο μονοπάτι, όπου ο αρχικός και ο τελικός κόμβος ταυτίζονται. Ένας άχορδος κύκλος που αποτελείται από n -κόμβους, με $n \geq 3$, συμβολίζεται ως C_n και ορίζεται ως

$$C_n = P_{n+1} = \{\{v_1, \dots, v_{n+1}\} \mid (v_i, v_{i+1}) \in E(G), \forall i \in \{1, \dots, n\}\},$$

όπου, $v_1 = v_{n+1}$.

Σχόλιο 1.2.15. Από εδώ και στο εξής, κάθε φορά που θα αναφερόμαστε σε κύκλους ή μονοπάτια, θα εννοούμε άχορδους κύκλους ή άχορδα μονοπάτια, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 1.2.16. Ένας κύκλος τεσσάρων κορυφών, C_4 , είναι ο παρακάτω.



Ορισμός 1.2.17. Ένα γράφημα G λέγεται **πλήρες γράφημα (complete graph)** αν κάθε δύο κορυφές του συνόλου κορυφών του είναι γειτονικές, δηλαδή το $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ αποτελεί κλίκα. Ένα πλήρες γράφημα n -κόμβων, με $n \geq 1$, συμβολίζεται ως K_n .

Σχόλιο 1.2.18. Ο κύκλος C_3 καλείται τρίγωνο και είναι ισόμορφος με το πλήρες γράφημα K_3 .

Σε αυτό το σημείο είναι καλό να δοθεί ο όρισμος των συνεκτικών γραφημάτων, καθώς, όλα τα γραφήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε, στην συνέχεια, θεωρούμε ότι είναι συνεκτικά.

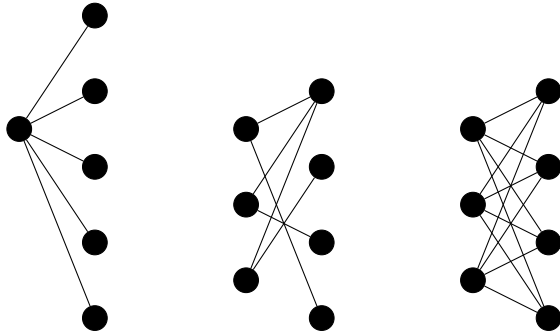
Ορισμός 1.2.19. Ένα γράφημα λέγεται **συνεκτικό** αν για κάθε δύο κορυφές του γραφήματος υπάρχει μονοπάτι που να τις συνδέει.

Άλλη μια κατηγορία γραφημάτων είναι τα γραφήματα εκείνα, όπου, το σύνολο κορυφών τους χωρίζεται σε δυο υποσύνολα, A και B , και για κάθε δύο γειτονικές κορυφές ισχύει ότι η μια κορυφή ανήκει στο A και η άλλη κορυφή στο B . Τα γραφήματα αυτά ονομάζονται διμερή και παρακάτω δίνεται ο ορισμός τους.

Ορισμός 1.2.20. Ένα γράφημα G ονομάζεται **διμερές γράφημα (bipartite graph)**, εάν το σύνολο των κορυφών του μπορεί να διαμεριστεί σε δύο σύνολα κορυφών A και B , ξένα μεταξύ τους, ($A \cap B = \emptyset$), έτσι ώστε, κάθε ακμή του G να συνδέει ένα στοιχείο του A με ένα στοιχείο του B (Δεν υπάρχει ακμή που συνδέει στοιχείο του A με στοιχείο του A ή ακμή που συνδέει στοιχείο του B με στοιχείο του B). Το ζεύγος (A, B) ονομάζεται **διαμέριση** του G .

Εάν, τώρα, σ' ένα διμερές γράφημα G , με διαμέριση (A, B) , κάθε κορυφή του A είναι γειτονική με όλες τις κορυφές του B , τότε, λέμε ότι το G είναι **πλήρες διμερές γράφημα (complete bipartite graph)**, συμβολίζεται με $K_{m,n}$, όπου m και n είναι τα μεγέθη των συνόλων A και B , αντίστοιχα.

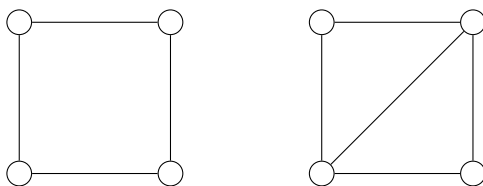
Παράδειγμα 1.2.21. Τα σχήματα παρακάτω αποτελούν διμερή γραφήματα και μάλιστα το τρίτο σχήμα (δεξιά) αποτελεί πλήρες διμερές γράφημα.



Δύο άλλες σημαντικές κατηγορίες γραφημάτων, με τις οποίες θα ασχοληθούμε πιο αναλυτικά αργότερα στην εργασία, είναι τα chordal γραφήματα και τα line γραφήματα. Οι ορισμοί τους δίνονται παρακάτω.

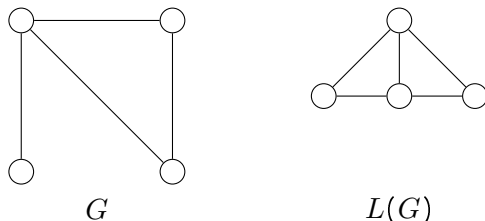
Ορισμός 1.2.22. Ένα **chordal γράφημα** είναι ένα γράφημα στο οποίο όλοι οι (άχορδοι) κύκλοι, που περιέχονται στο γράφημα, είναι μεγέθους μικρότερου ή ίσου με 3. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κύκλος τεσσάρων ή περισσότερων (≥ 4) κορυφών, που περιέχεται στο γράφημα, έχει μια **χορδή (chord)**, δηλαδή μια ακμή που δεν είναι μέρος του κύκλου, αλλά συνδέει δύο μη-διαδοχικές κορυφές του κύκλου.

Παράδειγμα 1.2.23. Το πρώτο σχήμα (αριστερά), δεν αποτελεί chordal γράφημα, καθώς περιέχει (άχορδο) κύκλο μήκους 4, ενώ το δεύτερο σχήμα (δεξιά) αποτελεί chordal γράφημα, καθώς δεν υπάρχει (άχορδος) κύκλος με μέγεθος μεγαλύτερο ή ίσο του 4.



Ορισμός 1.2.24. Το **line γράφημα** ενός γραφήματος $G = (V, E)$ συμβολίζεται ως $L(G)$, έχει ως σύνολο κορυφών το σύνολο ακμών του G , δηλαδή, $V(L(G)) = E(G)$, και δύο κορυφές στο $L(G)$ είναι γειτονικές αν και μόνο αν οι αντίστοιχες ακμές στο G έχουν κοινό άκρο, δηλαδή, $E(L(G)) = \{(x, y) \mid \forall x = (a, b), y = (b, c) \in E(G), a, b, c \in V(G) \text{ και } a \neq c\}$.

Παράδειγμα 1.2.25. Το πρώτο (αριστερά) γράφημα, είναι ένα γράφημα G , ενώ το δεύτερο γράφημα (δεξιά) αποτελεί το line γράφημα του $L(G)$.



Θεώρημα 1.2.26. (Roussopoulos [64] και Lehot [48]) Υπάρχει ένας αλγόριθμος γραμμικού χρόνου, άρα πολυωνυμικού χρόνου, που ελέγχει, αν ένα δεδομένο γράφημα G είναι (ισομορφικό προς) το line γράφημα κάποιου γραφήματος H και, αν πράγματι είναι, υπολογίζει ένα γράφημα H , τέτοιο ώστε, $G \cong L(H)$.

Σε αυτό το σημείο θα ορίσουμε κάποιες πράξεις μεταξύ γραφημάτων.

Ορισμός 1.2.27. Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Το γράφημα $\overline{G}$ ονομάζεται **συμπλήρωμα** ή **συμπληρωματικό** του γραφήματος G , εάν το σύνολο των κορυφών του, $V(\overline{G})$, ταυτίζεται με το σύνολο $V(G)$ (δηλαδή, $V(\overline{G}) = V(G)$), ενώ δύο κορυφές στο $\overline{G}$ είναι γειτονικές, εάν δεν είναι γειτονικές στο γράφημα G , δηλαδή $E(\overline{G}) = \{e = (x, y) | e \notin E(G)\}$.

Ορισμός 1.2.28. Έστω δύο γραφήματα G και H ξένα μεταξύ τους ως προς τα σύνολα κορυφών τους, δηλαδή $V(G) \cap V(H) = \emptyset$. Ως **ξένη ένωση** των γραφημάτων G και H καλούμε το γράφημα με σύνολο κορυφών τις κορυφές των G και H , σύνολο ακμών τις ακμές των G και H , συμβολίζεται ως $G + H$ και ορίζεται ως

$$G + H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H)).$$

Η συνάρτηση k -χρωματισμός και η έννοια του ταιριάσματος είναι δυο πολύ σημαντικά εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν στις αποδείξεις των επόμενων κεφαλαίων, οπότε εδώ θα ήταν καλό να δούμε τους ορισμούς τους.

Ορισμός 1.2.29. Για ένα k θετικό ακέραιο, ένας k -**χρωματισμός** ενός γραφήματος G είναι μια συνάρτηση $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, τέτοια ώστε, $c(u) \neq c(v)$ όταν $(u, v) \in E(G)$, $\forall u, v \in V(G)$.

Ορισμός 1.2.30. Ένα υποσύνολο ακμών M του συνόλου ακμών ενός γραφήματος G ($M \subseteq E(G)$), καλείται **ταιρίασμα (matching)**, εάν ανά δύο οι ακμές του M , δεν έχουν κοινό άκρο.

Ένα ταίριασμα M στο γράφημα G ονομάζεται **μεγιστοτικό (maximal matching)**, εάν δεν είναι γνήσιο υποσύνολο κάποιου άλλου ταιριάσματος του γραφήματος.

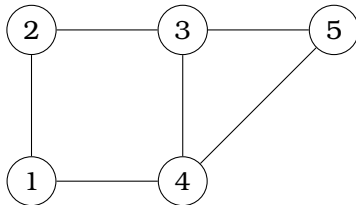
Ένα ταίριασμα M στο γράφημα G ονομάζεται **μέγιστο (maximum matching)**,

εάν περιέχει τον μεγαλύτερο δυνατό αριθμό ακμών.

Τέλειο ταίριασμα (perfect matching) είναι ένα ταίριασμα M στο γράφημα G στο οποίο κάθε κορυφή του $V(G)$ είναι άκρο σε μια ακμή του M .

Ορισμός 1.2.31. Ένα γράφημα G λέγεται **equimatchable**, αν όλα τα μέγιστα ταυριάσματα του G έχουν το ίδιο μέγεθος.

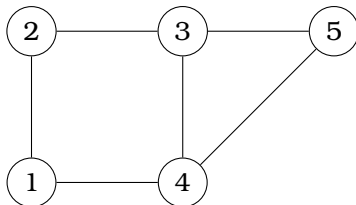
Παράδειγμα 1.2.32. Τα ταυριάσματα του παρακάτω C_4 κύκλου είναι τα $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 4\}$, $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ και $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$. Από αυτά τα $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ και $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ είναι μέγιστα και τέλεια. Επειδή και τα δύο μέγιστα ταυριάσματα έχουν ίδιο μέγεθος, δηλαδή 2, το G είναι equimatchable.



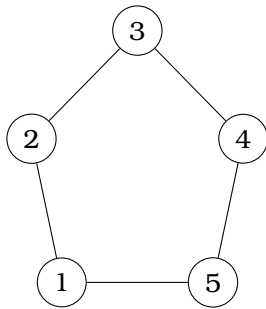
Σε αυτό το σημείο θα δώσουμε κύριους ορισμούς και προτάσεις που θα μας βοηθήσουν να καταλάβουμε τα προβλήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε στην συνέχεια. Αρχικά θα ξεκινήσουμε με τον πιο σημαντικό ορισμό, τον ορισμό της ισχυρής κλίκας.

Ορισμός 1.2.33. Ισχυρή κλίκα (Strong clique) καλείται μια κλίκα C , που τέμνει κάθε μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο I , δηλαδή, η C έχει κοινή κορυφή με κάθε μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο I , $(V(C) \cap V(I) \neq \emptyset)$. Αντίστοιχα, **ισχυρό ανεξάρτητο σύνολο (strong independent set)** καλείται ένα ανεξάρτητο σύνολο που τέμνει κάθε μεγιστοτική κλίκα.

Παράδειγμα 1.2.34. Για να καταλάβουμε καλύτερα την έννοια της ισχυρής κλίκας υποθέτουμε τον κύκλο C_4 , όπως φαίνεται στο γράφημα παρακάτω. Τα μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα του γραφήματος είναι τα $\{1, 3\}$ και $\{2, 4\}$ και οι μεγιστοτικές κλίκες του γραφήματος είναι οι $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$ και $\{2, 4\}$. Οι κλίκες αυτές είναι όλες ισχυρές, καθώς, τέμνουν και τα δύο μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα του γραφήματος.



Παράδειγμα 1.2.35. Τώρα, ένα άλλο παράδειγμα, είναι να υποθέσουμε τον κύκλο C_5 , όπως φαίνεται παρακάτω. Μπορούμε να δούμε ότι, τα μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα του είναι τα $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$ και $\{3, 5\}$. Οι μεγιστοτικές κλίκες του γραφήματος είναι οι $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$ και $\{1, 5\}$, δηλαδή, οι ακμές του γραφήματος. Καμία τους δεν είναι ισχυρή, καθώς, καμία δεν τέμνει όλα τα μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα του γραφήματος.



Από τον όρισμο της ισχυρής κλίκας (αντίστοιχα, ισχυρού ανεξάρτητου συνόλου) γίνεται αντιληπτό το παρακάτω γεγονός.

Πρόταση 1.2.36. *Μια ισχυρή κλίκα C (αντίστοιχα, ισχυρό ανεξάρτητο σύνολο I) είναι μεγιστοτική κλίκα (αντίστοιχα, μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο).*

Απόδειξη. Έστω μια κλίκα C η οποία είναι ισχυρή, αλλά δεν είναι μεγιστοτική. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κομβός που δεν ανήκει στην C και είναι γειτονικός με όλους τους κόμβους της C . Επιλέγοντας τον κόμβο αυτό, μπορεί να δημιουργηθεί ένα ανεξάρτητο σύνολο I' που δεν τέμνεται από την C . Αυτό σημαίνει ότι η C δεν είναι ισχυρή, το οποίο είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι η C είναι ισχυρή. Αντίστοιχα, αποδεικνύεται ότι ένα ισχυρό ανεξάρτητο σύνολο I είναι μεγιστοτικό. ■

Η έννοια του κυρίαρχου συνόλου είναι πολύ σημαντική στην απόδειξη του, εάν μια κλίκα είναι ισχυρή.

Ορισμός 1.2.37. Έστω μια κλίκα C σε ένα γράφημα G και έστω ένα σύνολο $S \subseteq V(G) \setminus C$.

Λέμε ότι η κλίκα C **κυριαρχεί** από το σύνολο S ή το σύνολο S **κυριαρχεί** την κλίκα C , εάν ισχύει ότι $C \subseteq N_G(S)$.

Ένα σύνολο D καλείται **κυρίαρχο σύνολο (dominating set)** αν κάθε κόμβος του $V(G) \setminus D$ έχει τουλάχιστον ένα γείτονα στο D .

Εάν το D είναι ανεξάρτητο σύνολο, τότε, το D καλείται **κυρίαρχο ανεξάρτητο σύνολο (dominating independent set)**.

Λήμμα 1.2.38. (Hujduronιέ και συνεργάτες του [44]) Μια κλίκα C σε ένα γραφικό G δεν είναι ισχυρή, αν και μόνο αν, η C κυριαρχεί από ένα ανεξάρτητο σύνολο $I \subseteq V(G) \setminus C$.

Δυο πολύ σημαντικές κατηγορίες γραφημάτων είναι τα καλά-καλυπτόμενα γραφήματα και τα localizable γραφήματα. Οι ορισμοί τους είναι οι εξής:

Ορισμός 1.2.39. Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Το γράφημα G ονομάζεται **καλά-καλυπτόμενο (well-covered)**, αν όλα τα μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα του γραφήματος είναι του ίδιου μεγέθους.

Ορισμός 1.2.40. Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$. Το γράφημα G ονομάζεται **localizable**, αν το G μπορεί να διαμεριστεί από ισχυρές κλίκες.

Ορισμός 1.2.41. Παρακάτω δίνονται οι ορισμοί κάποιων αριθμητικών ποσοτήτων.

- (a.) $\chi(G)$ = χρωματικός αριθμός, είναι ο μικρότερος ακέραιος αριθμός k , ώστε, να υπάρχει k -χρωματισμός στο γράφημα G ,
- (b.) $\chi^l(G)$ = χρωματικός δείκτης, είναι ο μικρότερος αριθμός ταιριασμάτων στο G , ώστε, η ένωση τους να είναι ίση με το $E(G)$,
- (c.) $\omega(G)$ = αριθμός κλίκας, είναι το πλήθος των κορυφών της μέγιστης κλίκας στο G ,
- (d.) $\alpha(G)$ = αριθμός ανεξαρτησίας, είναι το πλήθος των κορυφών του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου στο G ,
- (e.) $i(G)$ = αριθμός ανεξάρτητης κυριαρχίας, είναι το μέγεθος του μικρότερου κυρίαρχου ανεξάρτητου συνόλου στο G και
- (f.) $\theta(G)$ = αριθμός καλυψής από κλίκες, είναι ο ελάχιστος αριθμός κλικών που διαμερίζουν το $V(G)$.

Πρόταση 1.2.42. Είναι γνωστό από την βιβλιογραφία της θεωρίας γραφημάτων, ότι, για κάθε γράφημα G ισχύουν τα ακόλουθα για τις παραπάνω αριθμητικές ποσότητες:

- (i.) $\chi^l(G) = \chi(L(G))$,
- (ii.) $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$,
- (iii.) $\theta(G) = \chi(\overline{G})$,

(iv.) $\chi(G) \geq \omega(G)$ και

(v.) $\theta(G) \geq \alpha(G)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει η ακόλουθη ανισότητα:

$$i(G) \leq \alpha(G) \leq \theta(G).$$

Σχόλιο 1.2.43. Ένα γράφημα G είναι καλά-καλυπτόμενο, αν και μόνο, αν $i(G) = \alpha(G)$.

Σε αυτό το σημείο είναι καλό να δωθούν μερικοί ορισμοί για την καλύτερη κατανόηση των localizable γραφημάτων.

Ορισμός 1.2.44. Για ένα θετικό ακέραιο k , λέμε ότι ένα γράφημα G είναι **k -localizable**, εάν υπάρχει διαμέριση του $V(G)$ σε k ισχυρές κλίκες.

Ορισμός 1.2.45. Ένα γράφημα G λέγεται ότι είναι **ημι-τέλειο (semi-perfect)**, αν $\theta(G) = \alpha(G)$, δηλαδή, εάν υπάρχει μια συλλογή από $\alpha(G)$ -κλίκες που διαμερίζουν το σύνολο των κορυφών του. Μια τέτοια συλλογή θα αναφέρεται ως **κάλυψη α -κλικών (α -clique cover)** του G .

Σχόλιο 1.2.46. Το G είναι ημι-τέλειο, αν και μόνο αν, έχει μια κάλυψη α -κλικών, ενώ, το G είναι $\alpha(G)$ -localizable, αν και μόνο αν, έχει μια κάλυψη α -κλικών στην οποία κάθε κλίκα είναι ισχυρή.

Στο ακόλουθο θεώρημα αποτυπώνονται αρκετοί ισοδύναμοι φορμαλισμοί των localizable γραφημάτων.

Θεώρημα 1.2.47. (Hujdurović και άλλοι [44]) Για κάθε γράφημα G τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(a.) Το G είναι localizable.

(b.) Το G είναι $\alpha(G)$ -localizable (ισοδύναμα, το G έχει μια κάλυψη α -κλικών στην οποία κάθε κλίκα είναι ισχυρή).

(c.) Το G έχει μια κάλυψη α -κλικών και κάθε κλίκα σε κάθε κάλυψη α -κλικών του G είναι ισχυρή.

(d.) Το G είναι καλά-καλυπτόμενο και ημι-τέλειο.

(e.) $i(G) = \theta(G)$.

Ορισμός 1.2.48. Ένα γράφημα G είναι **τέλειο (perfect)**, αν ισχύει $\chi(H) = \omega(H)$, για κάθε επαγόμενο υπογράφημα H του G .

Δεδομένου ότι το συμπληρωματικό γράφημα $\overline{G}$ είναι τέλειο κάθε φορά που το G είναι τέλειο [52], κάθε τέλειο γράφημα G είναι, επίσης, ημι-τέλειο. Η ακόλουθη συνέπεια του Θεωρήματος 1.2.47 θα είναι χρήσιμη.

Πόρισμα 1.2.49. Ένα τέλειο γράφημα G είναι καλὰ-καθυπτόμενο, αν και μόνο αν, το G είναι *localizable*.

1.3 Υπολογιστική πολυπλοκότητα

Στο επόμενο κεφάλαιο θα γίνει αναφορά στα έξι προβλήματα στα οποία βασίζεται η εργασία, αλλά πριν γίνει αυτό είναι καλό να δούμε κάποιους ορισμούς που θα μας βοηθήσουν στην κατανόηση της έννοιας υπολογιστικής πολυπλοκότητας. Όπως έχει προαναφερθεί στην προηγούμενη ενότητα, η θεωρία γραφημάτων έχει ως στόχο την επίλυση προβλημάτων τα οποία μπορούν να αναπαρασταθούν με κάποιο γράφημα. Για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων χρειάζονται αποδοτικοί αλγόριθμοι.

Ορισμός 1.3.1. Δοθέντος ενός προβλήματος, ως **αλγόριθμος** ορίζεται μια καλὰ προσδιορισμένη διαδικασία, η οποία παρέχει τις οδηγίες σύμφωνα με τις οποίες τα δεδομένα του προβλήματος μετασχηματίζονται και συνδυάζονται για να προκύψει η λύση του προβλήματος. Οι οδηγίες οφείλουν να είναι πεπερασμένες, αυστηρά καθορισμένες και εκτελέσιμες σε πεπερασμένο χρόνο.

Ένας αλγόριθμος είναι σημαντικό να είναι αποδοτικός και ως προς τον χρόνο εκτέλεσής του, αλλά και ως προς τον χώρο μνήμης που χρειάζεται. Παρακάτω θα εστιάσουμε κατά κύριο λόγο στην αποδοτικότητα του αλγορίθμου ως προς τον χρόνο εκτέλεσής του, δηλαδή, θέλουμε οι αλγόριθμοι να εκτελούνται γρήγορα. Συνεπώς, είναι σημαντικό σε αυτό το σημείο να δώσουμε τον ορισμό της υπολογιστικής πολυπλοκότητας ενός αλγορίθμου.

Ορισμός 1.3.2. Εστω M μια ντετερμινιστική μηχανή Turing που τερματίζει σε κάθε είσοδο. Ο **χρόνος εκτέλεσης** ή η **υπολογιστική πολυπλοκότητα** της M είναι η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, όπου $f(n)$ είναι το μέγιστο πλήθος βημάτων που είναι δυνατόν να πραγματοποιήσει η M όταν το μήκος της εισόδου της είναι n .

Συνεπώς, η υπολογιστική πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου εξαρτάται από τον αριθμό επαναλήψεών του και από το μέγεθος εισόδου. Για τον υπολογισμό της υπολογιστικής πολυπλοκότητας χρησιμοποιούμε την ασυμπτωτική ανάλυση.

Ορισμός 1.3.3. Έστω f και g δύο συναρτήσεις από το σύνολο $\mathbb{N}$ στο σύνολο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $f(n) = O(g(n))$, αν υπάρχουν ακέραιοι $c > 0$ και $n_0 \geq 0$, τέτοιοι ώστε, για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

$$f(n) \leq c \cdot g(n).$$

Παράδειγμα 1.3.4. Έστω αλγόριθμος με υπολογιστική πολυπλοκότητα $f(n) = 9n^3 + 2n^2 + n + 3$. Λέμε ότι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι ασυμπτωτικά το πολύ n^3 , δηλαδή $f(n) = O(n^3)$.

Γενικά, οι χρόνοι αναζήτησης τείνουν να αυξάνονται εκθετικά σε συνάρτηση με το μέγεθος της εισόδου n . Δηλαδή αν το μέγεθος εισόδου αυξηθεί κατά ένα, ο αριθμός των βημάτων αυξάνεται πολλαπλάσια. Θα θέλαμε έναν αλγόριθμο με καλύτερη ιδιότητα κλιμάκωσης.

Έστω ένας αλγόριθμος που έχει την ακόλουθη ιδιότητα : Υπάρχουν σταθερές $c > 0$ και $d > 0$ και $k \geq 0$, έτσι ώστε, για κάθε είσοδο μεγέθους n , ο χρόνος εκτέλεσης φράσσεται από $c \cdot n^d \cdot \log^k n$ στοιχειώδη υπολογιστικά βήματα. Αν ισχύει αυτό το όριο ως προς το χρόνο εκτέλεσης για κάποια c και d , τότε, λέμε ότι ο αλγόριθμος έχει **πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης** ή ότι είναι ένας αλγόριθμος **πολυωνυμικού χρόνου**. Τέτοιου είδους αλγόριθμοι είναι πολύ πιο γρήγοροι από αυτούς όπου ο χρόνος εκτέλεσης τους αυξάνεται εκθετικά, πράγμα που τους κάνει πιο αποδοτικούς. Οπότε μπορούμε να πούμε ότι ένας αλγόριθμος είναι αποδοτικός, αν έχει πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης.

Τα προβλήματα απόφασης, με τα οποία θα ασχοληθούμε και στην συνέχεια, χωρίζονται σε κλάσεις σύμφωνα με τον χρόνο που χρειάζονται για να επιλυθούν. Μια τέτοια κλάση προβλημάτων είναι αυτά που μπορούν να επιλυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο.

Ορισμός 1.3.5. Τα προβλήματα απόφασης για τα οποία έχει βρεθεί πολυωνυμικός αλγόριθμος που να τα λύνει, ανήκουν στην κλάση προβλημάτων P .

Πολλά προβλήματα όμως δεν είναι εύκολο να λυθούν με αποδοτικό τρόπο, δηλαδή, δεν είναι εύκολο να βρεθεί πολυωνυμικός αλγόριθμος, που να τα λύνει. Παρακάτω θα αναλύσουμε μια τεχνική η οποία μας βοηθάει να χαρακτηρίσουμε υπολογιστικά δύσκολα προβλήματα. Η τεχνική αυτή είναι να συγκρίνουμε τη σχετική δυσκολία διαφορετικών προβλημάτων, δηλαδή, θα θέλαμε να διατυπώσουμε με τυπικό τρόπο προτάσεις όπως "Το πρόβλημα X είναι τουλάχιστον εξίσου δύσκολο με το πρόβλημα Y ". Αυτό θα το επιτύχουμε μέσω της έννοιας της αναγωγής.

Ορισμός 1.3.6. Λέμε ότι το πρόβλημα X **ανάγεται πολυωνυμικά** στο πρόβλημα Y , αν κάθε στιγμιότυπο του X μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας:

(α.) πολυωνυμικό πλήθος υπολογιστικών βημάτων και

(β.) πολυωνυμικό πλήθος κλήσεων της τεχνικής που λύνει το πρόβλημα Y .

Η μέθοδος αυτή ονομάζεται **πολυωνυμική αναγωγή** και συμβολίζουμε την πολυωνυμική αναγωγή του προβλήματος X στο πρόβλημα Y ως: $X \leq_P Y$.

Το γεγονός ότι το πρόβλημα X μπορεί να αναγθεί στο πρόβλημα Y σημαίνει ότι το X είναι εξίσου δύσκολο με το Y όσον αφορά την επίλυση στιγμιότυπων του σε πολυωνυμικό χρόνο. Την αναγωγή αυτή μπορούμε να την φανταστούμε ως εξής: Έστω ένα μαύρο κουτί που θα μπορούσε να λύσει στιγμιότυπα ενός προβλήματος απόφασης Y . Έστω στιγμιότυπα ενός προβλήματος απόφασης X , τα οποία επιθυμούμε να λύσουμε. Μετατρέπουμε τα στιγμιότυπα του X σε στιγμιότυπα του Y σε πολυωνυμικό χρόνο και τα παρνάμε στο μαύρο κουτί, ώστε, να τα επιλύσει. Από τις λύσεις που θα μας δώσει το κουτί για τα στιγμιότυπα του προβλήματος Y , θα μπορούμε να βρούμε τις λύσεις για τα στιγμιότυπα του προβλήματος X .

Θεώρημα 1.3.7. Εάν ισχύει ότι $X \leq_P Y$ και το πρόβλημα Y μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο, τότε, μπορούμε να πούμε ότι και το πρόβλημα X μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.

Άλλες πέντε μεγάλες κλάσεις προβλημάτων είναι οι κλάσεις των NP προβλημάτων, των NP-πλήρη (NP-Complete) προβλημάτων, των NP-δύσκολων (NP-Hard) προβλημάτων, των co-NP προβλημάτων και των co-NP-πλήρη (co-NP-Complete) προβλημάτων. Οι ορισμοί τους δίνονται παρακάτω.

Ορισμός 1.3.8. Τα προβλήματα απόφασης για τα οποία δεν έχει βρεθεί, ακόμη, πολυωνυμικός αλγόριθμος που να τα λύνει, αλλα πιθανές λύσεις των στιγμιότυπων τους, μπορούν να επαληθευτούν σε πολυωνυμικό χρόνο, ανήκουν στην κλάση των NP προβλημάτων.

Παρατήρηση 1.3.9. Είναι εύκολο κάποιος να δει ότι: $P \subseteq NP$.

Ορισμός 1.3.10. Ένα πρόβλημα Y λέμε ότι είναι NP-πλήρες, αν ισχύουν τα παρακάτω:

(i.) $Y \in NP$

(ii.) $X \leq_P Y, \forall X \in NP$.

Απο τα παραπάνω συμπερνεται ότι:

Θεώρημα 1.3.11. Έστω ένα πρόβλημα Y που είναι NP-πλήρες. Τότε, το Y μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο, αν και μόνο αν, $P = NP$.

Από ένα πρόβλημα Y που είναι NP-πλήρες, μπορούμε να δείξουμε ότι ένα άλλο πρόβλημα X είναι, επίσης, NP-πλήρες ως εξής:

- (i.) Δείχνουμε ότι το X ανήκει στην κλάση NP.
- (ii.) Επιλέγουμε το πρόβλημα Y που είναι NP-πλήρες.
- (iii.) Αποδεικνύουμε ότι: $Y \leq_P X$.

Δηλαδή:

Θεώρημα 1.3.12. Αν το πρόβλημα Y είναι NP-πλήρες και το X είναι ένα πρόβλημα της κλάσης NP με την ιδιότητα $Y \leq_P X$, τότε, το X είναι NP-πλήρες.

Ορισμός 1.3.13. Ένα πρόβλημα Y λέμε ότι είναι NP-δύσκολο, εάν ισχύουν τα παρακάτω:

- (i.) $Y \notin NP$
- (ii.) $X \leq_P Y, \forall X \in NP$

Ορισμός 1.3.14. Ένα πρόβλημα Y λέμε ότι είναι co-NP, εάν το συμπλήρωμα του προβλήματος Y , το $\overline{Y}$, είναι μέλος της κλάσης των NP προβλημάτων ή, αλλιώς, μπορούν να απορριφθούν σε πολυωνυμικό χρόνο, πιθανές λύσεις για τα στιγμιότυπα του Y .

Ορισμός 1.3.15. Ένα πρόβλημα Y λέμε ότι είναι co-NP-πλήρες, εάν το συμπλήρωμα του, $\overline{Y}$, είναι NP-πλήρες, δηλαδή, ισχύουν τα παρακάτω:

- (i.) $\overline{Y} \in NP$
- (ii.) $X \leq_P \overline{Y}, \forall X \in NP$

ΕΞΙ (ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ

Όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, μια ισχυρή κλίκα σε ένα γράφημα G είναι μια κλίκα που τέμνει κάθε μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο του G . Αντικαθιστώντας το γράφημα G με το συμπλήρωμά του, $\overline{G}$, οι ισχυρές κλίκες του G αντιστοιχούνται στα ισχυρά ανεξάρτητα σύνολα του $\overline{G}$, δηλαδή, ανεξάρτητα σύνολα που τέμνουν κάθε μέγιστη κλίκα στο $\overline{G}$. Οι έννοιες των ισχυρών κλικών και των ισχυρών ανεξάρτητων συνόλων έπαιξαν σημαντικό ρόλο στη μελέτη τέλειων γραφημάτων και των υποκλάσεων τους (βλέπε, π.χ., [6, 7, 13, 39, 55]). Επιπλέον, διάφορες άλλες κλάσεις γραφημάτων που μελετήθηκαν στη βιβλιογραφία μπορούν να προσδιοριστούν από ιδιότητες που περιλαμβάνουν την έννοια της ισχυρής κλίκας (βλέπε, π.χ., [9, 10, 24, 44, 46, 54]). Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι ισχυρές κλίκες μπορούν να θεωρηθούν ως μια γενίκευση τέλειων ταιριασμάτων: η μετατροπή οποιουδήποτε κανονικού τρίγωνο-free γραφήματος στο συμπλήρωμα του line γραφήματος του αντιστοιχεί κάθε τέλειο τείριασμα σε μια ισχυρή κλίκα (βλέπε, [8, 57] για εφαρμογές αυτής της παρατήρησης).

Στην εργασία μας, αναφέρουμε προόδους σχετικά με την υπολογιστική πολυπλοκότητα ορισμένων προβλημάτων που σχετίζονται με ισχυρές κλίκες στα γραφήματα. Δίνουμε ιδιαίτερη προσοχή στις κλάσεις των γραφημάτων, των οποίων το σύνολο κορυφών μπορεί να διαμεριστεί σε ισχυρές κλίκες. Αυτά τα γραφήματα, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ονομάζονται *localizable*, ονομασία που δόθηκε από τους Yamashita και Kameda [72] το 1999 και θα δούμε στην συνέχεια, την περαιτέρω μελέτη τους από τον Hujdurović και τους συνεργάτες του [44] το 2018. Τα *localizable* γραφήματα σχηματίζουν μια πλούσια κλάση καλά-καλυπτόμενων γραφημάτων, δηλαδή, γραφημάτων στα οποία όλα τα μέγιστα ανεξάρτητα σύνολα έχουν το ίδιο μέγεθος. Επιπλέον, τα *localizable* γραφήματα και τα καλά-καλυπτόμενα γραφήματα συμπίπτουν εντός της κλάσης των τέλειων γραφημάτων (βλέπε, π.χ., [44]). Τα καλά-καλυπτόμενα γρα-

φήματα εισήχθησαν από τον Plummer [60] το 1970 και έχουν μελετηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία (δείτε, π.χ., τις έρευνες των Plummer [61] και Hartnell [37]). Υπάρχουν λίγα αποτελέσματα πολυπλοκότητας σχετικά με προβλήματα που αφορούν ισχυρές κλίκες είναι διαθέσιμα στη βιβλιογραφία. Ο Zang [74] έδειξε ότι είναι co-NP-πλήρες να ελεγχθεί, εάν μια δεδομένη κλίκα σε ένα γράφημα είναι ισχυρή, και ο Hoàng [40] καθιέρωσε την NP-δυσκολία του ελέγχου, εάν ένα δεδομένο γράφημα περιέχει κάποια ισχυρή κλίκα. Ο Hujdurović και τους συνεργάτες του [44] έδειξαν ότι η αναγνώριση localizable γραφημάτων είναι NP-δύσκολο, ακόμη και στην κλάση των καλά-καλυπτόμενων γραφημάτων των οποίων τα συμπληρώματα είναι localizable. Αλγόριθμοι αναγνώρισης localizable γραφημάτων, πολυωνυμικού χρόνου, είναι γνωστοί για διάφορες κλάσεις γραφημάτων, όπως των τρίγωνο-free γραφημάτων, των C_4 -free γραφημάτων και των line γραφημάτων (βλέπε, Ενότητα 4.1, για μια επισκόπηση). Από τα αποτελέσματα του Hoàng [39] και των Burlet και Fonlupt [13] συνεπάγεται η ύπαρξη ενός αλγορίθμου, πολυωνύμου χρόνου, για τον προσδιορισμό, εάν σε κάθε επαγόμενο υπογράφημα ενός δεδομένου γραφήματος, G , κάθε κορυφή ανήκει σε μια ισχυρή κλίκα. Από την άλλη πλευρά, από όσα γνωρίζουμε, η πολυπλοκότητα της αναγνώρισης αρκετών κλάσεων γραφημάτων που σχετίζονται με ισχυρές κλίκες είναι γενικά ανοιχτή. Συγκεκριμένα, αυτό ισχύει για: (i) το πρόβλημα αναγνώρισης των ισχυρά τέλειων γραφημάτων [6, 7], που εισήγαγε ο Berge, όπου, στα γραφήματα αυτά, κάθε επαγόμενο υπογράφημα τους έχει ένα ισχυρό ανεξάρτητο σύνολο, (ii) το πρόβλημα προσδιορισμού, εάν κάθε ακμή ενός δεδομένου γραφήματος περιέχεται σε μια ισχυρή κλίκα ή, ισοδύναμα, το πρόβλημα αναγνώρισης γενικά διαμερίσιμων γραφημάτων (βλέπε, π.χ., [46, 54, 56]) και (iii) το πρόβλημα αναγνώρισης CIS γραφημάτων, που ορίζονται ως γραφήματα, όπου, κάθε μεγιστοτική κλίκα είναι ισχυρή, ή, ισοδύναμα, γραφήματα στα οποία κάθε μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο είναι ισχυρό (βλέπε, π.χ., [9, 11, 24, 35, 71]).

Στην εργασία μας, αναφέρουμε αρκετές προόδους σχετικά με την υπολογιστική πολυπλοκότητα έξι προβλημάτων απόφασης που σχετίζονται με ισχυρές κλίκες. Τα προβλήματα δηλώνονται επισήμως ως εξής:

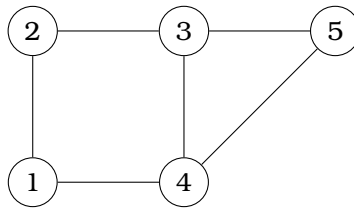
ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ. (STRONG CLIQUE)

Είσοδος: Ένα γράφημα G και μια κλίκα C στο G .

Ερώτηση: Είναι η C ισχυρή κλίκα;

Παράδειγμα 2.0.1. Έστω μας δίνεται το παρακάτω γράφημα και έστω και η κλίκα C που αποτελείται από τις κορυφές $\{1, 2\}$. Η απάντηση στο πρόβλημα ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ, για την κλίκα C , αποκτάται εξακριβώνοντας, αρχικά, ότι η C είναι μεγιστοτική, το οποίο μπορούμε να δούμε ότι ισχύει. Έπειτα, βρίσκουμε τα μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα του γραφήματος τα οποία είναι δύο, τα $\{1, 3\}$

και $\{2, 3\}$. Η κλίκα C τέμνει και τα δύο μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα, οπότε η C είναι ισχυρή. Συνεπώς, το πρόβλημα ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ πρέπει να επιστρέψει την απάντηση: ναι.

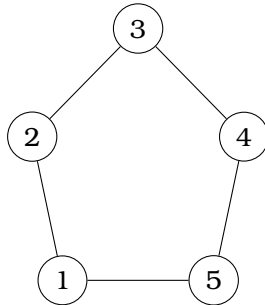


ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΚΛΙΚΑΣ. (STRONG CLIQUE EXISTENCE)

Είσοδος: Ένα γράφημα G .

Ερώτηση: Υπάρχει στο G ισχυρή κλίκα;

Παράδειγμα 2.0.2. Στο γράφημα που μας δίνεται, για το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΚΛΙΚΑΣ, βρίσκουμε αρχικά όλα τα μεγιστοτικά του ανεξάρτητα σύνολα τα οποία είναι τα $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$ και $\{3, 5\}$ και τις μεγιστοτικές του κλίκες οι οποίες είναι τα $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$ και $\{5, 1\}$. Έπειτα, ελέγχουμε, εάν κάποια από τις μεγιστοτικές κλίκες τέμνει όλα τα μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα. Στο γράφημα μας δεν υπάρχει τέτοια μεγιστοτική κλίκα, οπότε, δεν υπάρχει στο γράφημα ισχυρή κλίκα και, συνεπώς, το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΚΛΙΚΑΣ πρέπει να επιστρέψει την απάντηση: όχι.



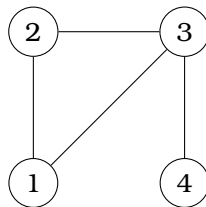
ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ. (STRONG CLIQUE VERTEX COVER)

Είσοδος: Ένα γράφημα G .

Ερώτηση: Περιέχεται κάθε κορυφή του G σε μια ισχυρή κλίκα;

Παράδειγμα 2.0.3. Με δεδομένο το γράφημα παρακάτω, για να λύσουμε το πρόβλημα ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ, προσδιορίζουμε όλα τα μεγιστοτικά του ανεξάρτητα σύνολα τα οποία είναι τα $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$ και $\{3\}$ και τις

μεγιστοτικές του κλίκες οι οποίες είναι οι $\{1, 2, 3\}$ και $\{3, 4\}$. Παρατηρούμε ότι, και οι δύο μεγιστοτικές κλίκες τέμνουν όλα τα μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα του γραφήματος, οπότε είναι ισχυρές. Ελέγχουμε, τώρα, μια-μια τις κορυφές αν είναι μέλη κάποιας ισχυρής κλίκας. Οι κορυφές 1 και 2 ανήκουν στην ισχυρή κλίκα $\{1, 2, 3\}$, η κορυφή 4 ανήκει στην ισχυρή κλίκα $\{3, 4\}$ και η κορυφή 3 ανήκει και στις δύο ισχυρές κλίκες του γραφήματος. Επομένως, κάθε κορυφή του γραφήματος μας ανήκει σε μια ισχυρή κλίκα του γραφήματος και, συνεπώς, το πρόβλημα ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ πρέπει να επιστρέψει την απάντηση: ναι.

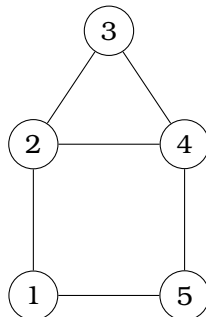


ΚΑΛΥΜΜΑ ΑΚΜΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ. (STRONG CLIQUE EDGE COVER)

Είσοδος: Ένα γράφημα G .

Ερώτηση: Περιέχεται κάθε ακμή του G σε μια ισχυρή κλίκα;

Παράδειγμα 2.0.4. Τώρα, καλούμαστε να επιλύσουμε το πρόβλημα ΚΑΛΥΜΜΑ ΑΚΜΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ, στο παρακάτω γράφημα. Τα μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα του γραφήματος είναι τα $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 5\}$ και $\{3, 5\}$ και οι μεγιστοτικές του κλίκες είναι οι $\{1, 2\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{4, 5\}$ και $\{1, 5\}$. Οι κλίκες $\{1, 2\}$ και $\{4, 5\}$ παρατηρούμε ότι δεν είναι ισχυρές, καθώς, δεν τέμνουν τα μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα $\{3, 5\}$ και $\{1, 3\}$, αντίστοιχα. Οι κλίκες $\{2, 3, 4\}$ και $\{1, 5\}$ τέμνουν όλα τα μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα του γραφήματος, οπότε είναι ισχυρές. Ελέγχουμε, τώρα, τις ακμές του γραφήματος, αν ανήκουν σε κάποια ισχυρή κλίκα, δηλαδή, εάν τα άκρα κάθε ακμής βρίσκονται σε κοινή ισχυρή κλίκα. Η ακμή $(1, 2)$, όπως και η $(4, 5)$, δεν ανήκουν σε κάποια ισχυρή κλίκα, καθώς, δεν υπάρχει ισχυρή κλίκα που να περιέχει και τις δύο κορυφές του. Συνεπώς, δεν περιέχεται κάθε ακμή του γραφήματος σε μια ισχυρή κλίκα στο γράφημα, άρα, το πρόβλημα ΚΑΛΥΜΜΑ ΑΚΜΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ πρέπει να επιστρέψει την απάντηση: όχι.

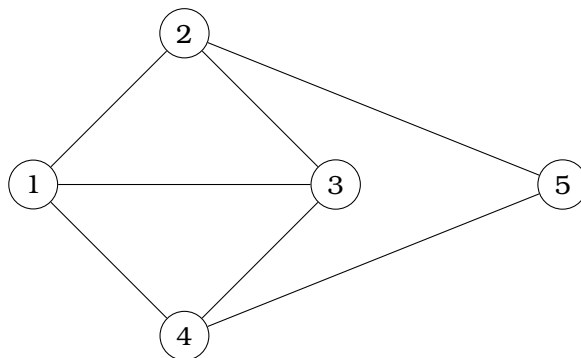


ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ. (STRONG CLIQUE PARTITION)

Είσοδος: Ένα γράφημα G και μια διαμέριση του συνόλου κορυφών του σε κλίκες.

Ερώτηση: Είναι κάθε κλίκα, στη διαμέριση, ισχυρή;

Παράδειγμα 2.0.5. Έστω μας δίνεται το γράφημα παρακάτω μαζί με μια διαμέριση του συνόλου κορυφών του σε κλίκες, $D = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$. Καλούμαστε, λοιπόν, να επιλύσουμε το πρόβλημα ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ. Αρχικά, προσδιορίζουμε όλα τα μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα του γραφήματος. Αυτά είναι τα $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$ και $\{3, 5\}$. Έπειτα, ελέγχουμε εάν οι κλίκες της διαμέρισης είναι μεγιστοτικές. Μπορούμε να δούμε ότι πράγματι είναι, αφού δεν υπάρχει άλλη κορυφή στο γράφημα που να είναι κοινός γείτονας των κορυφών τους. Σε αυτό το σημείο, παρατηρούμε ότι και η δύο κλίκες της διαμέρισης τέμνουν όλα τα μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα του γραφήματος, άρα, οι κλίκες αυτές είναι ισχυρές. Συνεπώς, το πρόβλημα ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ πρέπει να επιστρέψει την απάντηση: ναι.

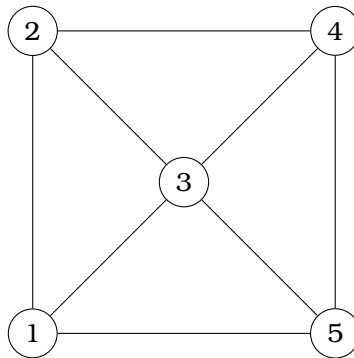


ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ. (STRONG CLIQUE PARTITION EXISTENCE ή LOCALIZABILITY)

Είσοδος: Ένα γράφημα G .

Ερώτηση: Μπορεί το σύνολο κορυφών του G να διαμεριστεί σε ισχυρές κλίκες;

Παράδειγμα 2.0.6. Με δεδομένο το γράφημα, που μας δώθηκε παρακάτω, για να λύσουμε το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ, χρειάζεται να φτιάξουμε μια διαμέριση από ισχυρές κλίκες, που να καλύπτουν όλες τις κορυφές του γραφήματος, με κάθε κορυφή να ανήκει σε μόνο μια κλίκα της διαμέρισης. Προσδιορίζουμε όλα τα μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα του γραφήματος, τα οποία είναι τα $\{3\}$, $\{1, 4\}$ και $\{2, 5\}$, και τις μεγιστοτικές του κλίκες, οι οποίες είναι οι $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$ και $\{3, 4, 5\}$. Βλέπουμε ότι οι κλίκες $\{1, 5\}$ και $\{2, 4\}$ δεν τέμνουν το μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο $\{3\}$, οπότε δεν είναι ισχυρές. Αντίθετα, οι $\{1, 2, 3\}$ και $\{3, 4, 5\}$ τέμνουν όλα τα μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα του γραφήματος και, επομένως, είναι ισχυρές. Επιλέγοντας να προσθέσουμε μια από τις δύο ισχυρές κλίκες στην διαμέριση μας, παρατηρούμε ότι πρέπει να αφήσουμε την άλλη απέξω, καθώς, και οι δύο κλίκες έχουν μια κοινή κορυφή, την 3. Έτσι, η διαμέρισή μας θα αποτελείται αναγκαστικά από μια κλίκα. Από το γεγονός αυτό, συνεπάγεται ότι δύο κορυφές του γραφήματος δεν θα καλύπτονται από την ισχυρή κλίκα της διαμερισής μας. Επομένως, δεν μπορεί το σύνολο κορυφών του γραφήματος να διαμεριστεί σε ισχυρές κλίκες και, οπότε, το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ πρέπει να επιστρέψει την απάντηση: όχι.



Συνοπτικά, τα έξι προβλήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε είναι:

ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ

Είσοδος: Ένα γράφημα G και μια κλίκα C στο G .

Ερώτηση: Είναι η C ισχυρή κλίκα;

ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΚΛΙΚΑΣ

Είσοδος: Ένα γράφημα G .

Ερώτηση: Υπάρχει στο G ισχυρή κλίκα;

ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ

Είσοδος: Ένα γράφημα G .

Ερώτηση: Περιέχεται κάθε κορυφή του G σε μια ισχυρή κλίκα;

ΚΑΛΥΜΜΑ ΑΚΜΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ

Είσοδος: Ένα γράφημα G .

Ερώτηση: Περιέχεται κάθε ακμή του G σε μια ισχυρή κλίκα;

ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ

Είσοδος: Ένα γράφημα G και μια διαμέριση του συνόλου κορυφών του σε κλίκες.

Ερώτηση: Είναι κάθε κλίκα, στη διαμέριση, ισχυρή;

ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ

Είσοδος: Ένα γράφημα G .

Ερώτηση: Μπορεί το σύνολο κορυφών του G να διαμεριστεί σε ισχυρές κλίκες;

2.1 Ορισμένες εφαρμογές σχετικές με ισχυρές κλίκες

Τα localizable γραφήματα αποτελούν μια υποκλάση των καλά-καλυπτόμενων γραφημάτων. Αυτό κάνει την επιλύσή του προβλήματος ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ σε πολυωνυμικό χρόνο ιδιαίτερα σημαντική, καθώς τα καλά-καλυπτόμενα γραφήματα έχουν εφαρμογές στην μεταθετική άλγεβρα (commutative algebra), όπου, συνήθως, αναφέρονται ως μη-αναμειγμένα (unmixed) γραφήματα [38, 58, 70]. Πιο συγκεκριμένα, το να είναι ένα γράφημα καλά-καλυπτόμενο, είναι ισοδύναμο με το γεγονός, ότι, ένα simplicial σύμπλεγμα (simplicial complex) των ανεξάρτητων συνόλων του γραφήματος να είναι αγνό (pure) και γενικεύει την αλγεβρικά ορισμένη έννοια ενός γραφήματος Cohen-Macaulay [17]. Επίσης, τα καλά-καλυπτόμενα γραφήματα έχουν εφαρμογές σε κατανομημένα συστήματα (distributed systems) [72] και σχετίζονται με το γενικευμένο παιχνίδι του Kayles [29, 30], ένα παιχνίδι δύο ατόμων, που παίζεται με ένα γράφημα. Οι δύο παίκτες, εναλλάξ, αφαιρούν μια κορυφή μαζί με όλους τους γείτονές της και ο παίκτης που θα αφαιρέσει την τελευταία κορυφή κερδίζει. Για περαιτέρω έρευνα πάνω στα καλά-καλυπτόμενα γραφήματα, αναφερόμαστε στις έρευνες των Plummer [61] και Hartnell [37].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΠΡΩΤΩΝ ΠΕΝΤΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε αναφορά στα έξι προβλήματα, που σχετίζονται με ισχυρές κλίκες, για τα οποία θα αναλύσουμε την υπολογιστική τους πολυπλοκότητα σε ορισμένες κλάσεις γραφημάτων. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τα πρώτα πέντε προβλήματα, τα ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ, ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΚΛΙΚΑΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΑΚΜΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ και ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ. Ας δούμε, αρχικά, ορισμένες κλάσεις γραφημάτων, στις οποίες, στιγμιότυπα των προβλημάτων, αυτών, επιλύονται σε πολυωνυμικό χρόνο.

3.1 Πολυωνυμική πολυπλοκότητα

Σε αυτό το σημείο, θα δώσουμε τον ορισμό ενός προβλήματος που σχετίζεται με ισχυρές κλίκες και που θα μας βοηθήσει στην εύρεση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας των προβλημάτων μας, στη συνέχεια.

ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ. (STRONG CLIQUE EXTENSION)

Είσοδος: Ένα γράφημα G και μια κλίκα C στο G .

Ερώτηση: Έχει το G μια ισχυρή κλίκα C' , τέτοια ώστε, $C \subseteq C'$.

Το πρόβλημα ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ γενικεύει, κατά κάποιο τρόπο, την πρώτη εικόνα των πέντε αυτών προβλημάτων, που αναλύουμε σε αυτό το κεφάλαιο, και αυτό φαίνεται από το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.1.1. [45] Έστω ότι $\mathcal{G}$ είναι μια κλάση γραφημάτων, έτσι ώστε, η ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ να είναι επιλύσιμη σε πολυωνυμικό χρόνο σε γραφήματα

στο $\mathcal{G}$. Τότε, κάθε ένα από τα προβλήματα ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ, ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΚΛΙΚΑΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΑΚΜΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ και ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο σε γραφήματα που ανήκουν στο $\mathcal{G}$.

Απόδειξη. Έστω G ένα γράφημα από την κλάση $\mathcal{G}$ και έστω C να είναι μια κλίκα στο G . Είναι σαφές ότι, η C είναι μια ισχυρή κλίκα στο G , αν και μόνο αν, η C είναι μια μεγιστοτική κλίκα και το G περιέχει μια ισχυρή κλίκ C' , τέτοια ώστε, $C \subseteq C'$. Επομένως, η δοκιμή, αν η C είναι ισχυρή, μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο, ελέγχοντας, εάν η C είναι μεγιστοτική και, αν, η C μπορεί να επεκταθεί σε μια ισχυρή κλίκ. Το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΚΛΙΚΑΣ είναι ισοδύναμο με τον καθορισμό, εάν η κενή κλίκ μπορεί να επεκταθεί σε κάποια ισχυρή κλίκ. Ομοίως, το πρόβλημα ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ (αντίστοιχα, το πρόβλημα ΚΑΛΥΜΜΑ ΑΚΜΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ) μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο απλά ελέγχοντας, αν κάθε κλίκ μεγέθους ένα (αντίστοιχα, δύο) μπορεί να επεκταθεί σε ισχυρή κλίκ. Τέλος, δεδομένου ότι το πρόβλημα ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο, σε γραφήματα στο $\mathcal{G}$, το πρόβλημα ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ μπορεί, επίσης, να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο σε γραφήματα στο $\mathcal{G}$, ελέγχοντας, αν κάθε μία από τις κλίκες, στη δοσμένη διαμέριση, είναι ισχυρή. ■

3.1.1 C_4 -free γραφήματα

Όπως έχουμε δει απο το πρώτο κεφάλαιο, ένα γράφημα G καλείται H -free, όπου H ένα γράφημα, αν το G δεν περιέχει επαγόμενο υπογράφημα ισόμορφο με το H . Συνεπώς, ένα γράφημα G είναι C_4 -free γράφημα, αν δεν περιέχει επαγόμενο κύκλο μεγέθους 4.

Λήμμα 3.1.2. [44] *Μια κλίκ σε ένα C_4 -free γράφημα είναι ισχυρή, αν και μόνο αν, είναι simplicial.*

Απόδειξη. Είναι εύκολο να δούμε ότι, σε κάθε γράφημα, κάθε simplicial κλίκ είναι ισχυρή. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω C είναι μια ισχυρή κλίκ σε ένα C_4 -free γράφημα. Υποθέτουμε, για αντίφαση, ότι η C δεν είναι simplicial. Στη συνέχεια, κάθε κορυφή της C έχει έναν γείτονα στο $V(G) \setminus C$, δηλαδή, το $N_G(C)$ κυριαρχεί την C . Έστω I να είναι ένα ελαχιστοτικό σύνολο κορυφών

στο $N_G(C)$, που κυριαρχεί την C . Υποστηρίζουμε ότι το I είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο στο G . Θεωρούμε ότι, υπάρχει ένα ζεύγος (x, y) γειτονικών κορυφών στο I . Επειδή το G είναι C_4 -free, οι γειτονιές των x και y στη C είναι συγκρίσιμες, δηλαδή, είτε, $N_G(x) \cap C \subseteq N_G(y) \cap C$, είτε, $N_G(y) \cap C \subseteq N_G(x) \cap C$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $N_G(x) \cap C \subseteq N_G(y) \cap C$. Τώρα, θα μπορούσαμε να αφαιρέσουμε το x από το I για να αποκτήσουμε ένα υποσύνολο του $N_G(C)$ που κυριαρχεί τη C και περιέχεται πλήρως εντός του I , το οποίο έρχεται σε αντίθεση, με το γεγονός ότι, το I είναι ελαχιστοτικό. Αυτό δείχνει ότι, το I είναι ανεξάρτητο σύνολο, όπως ισχυριστήκαμε. Η επέκταση του I , σε ένα αυθαίρετο μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο του G , αποδίδει ένα μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο ξένο από την C , αντίθετο με το γεγονός ότι, η C είναι μια ισχυρή κλίκα. Η αποκτούμενη αντίφαση ολοκληρώνει την απόδειξη ότι η C είναι simplicial. ■

Ως άμεση εφαρμογή του Λήμματος 3.1.1 και του Λήμματος 3.1.2 παρατηρούμε ότι, όλα τα παραπάνω προβλήματα είναι επιλύσιμα σε πολυωνυμικό χρόνο στην κλάση των C_4 -free γραφημάτων.

Πρόταση 3.1.3. [45] *Το πρόβλημα ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο στην κλάση των C_4 -free γραφημάτων.*

Απόδειξη. Όπως φαίνεται στο Λήμμα 3.1.2, μια κλίκα σε ένα C_4 -free γράφημα είναι ισχυρή, αν και μόνο αν, είναι simplicial, δηλαδή, αν αποτελείται από μια κορυφή και όλους τους γείτονές της. Επομένως, στην κλάση των C_4 -free γραφημάτων, το πρόβλημα ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ ανάγεται στο πρόβλημα της δοκιμής, εάν μια δεδομένη κλίκα περιέχεται σε μια simplicial κλίκα. Αφού οι simplicial κλίκες ενός γραφήματος μπορούν να καταγραφούν σε πολυωνυμικό χρόνο, έπεται, η πολυωνυμική σε χρόνο επίλυση του προβλήματος ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ στην κλάση των C_4 -free γραφημάτων. ■

Από το Λήμμα 3.1.1 και τη Πρόταση 4.1.19 καταλήγουμε στο εξής πόρισμα.

Πόρισμα 3.1.4. [45] *Κάθε ένα από τα προβλήματα ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ, ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΚΛΙΚΑΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΑΚΜΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ και ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο στην κλάση των C_4 -free γραφημάτων.*

Από το γεγονός ότι, η κλάση των chordal γραφημάτων είναι υποκλάση των C_4 -free γραφημάτων και από το Πόρισμα 3.1.4, καταλήγουμε στο παρακάτω συμπέρασμα.

Πόρισμα 3.1.5. [45] Κάθε ένα από τα προβλήματα ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ, ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΚΛΙΚΑΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΑΚΜΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ και ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο στην κλάση των *chordal* γραφημάτων.

3.1.2 Line γραφήματα και συμπληρώματα των line γραφημάτων

Οι σχέσεις μεταξύ ισχυρών κλικών και ταιριασμάτων έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί σε μια σειρά έργων που μελετούν ιδιότητες line γραφημάτων και των συμπληρωμάτων τους [8, 10, 44, 50, 57]. Μια τέτοια περίπτωση είναι ο αλγόριθμος που δόθηκε από τους Levit και Milanic [50], ο οποίος σε πολυωνυμικό χρόνο επιλύει το πρόβλημα ΚΑΛΥΜΜΑ ΑΚΜΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ για την κλάση των line γραφημάτων.

Ένα παρόμοιο αποτέλεσμα είναι, επίσης, το αποτέλεσμα του Boros και των συνεργατών του [10], που έδωσαν έναν αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου, για να ελέγξει, εάν, ένα δεδομένο line γράφημα είναι CIS, δηλαδή, αν κάθε μεγιστοτική κλικά σε ένα line γράφημα είναι ισχυρή. Δεδομένου ότι, η κλάση των CIS γραφημάτων είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα, αυτό το αποτέλεσμα δίνει, επίσης, έναν αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για το ίδιο πρόβλημα στην κλάση των συμπληρωμάτων των line γραφημάτων.

Τώρα, θα δείξουμε ότι το πρόβλημα ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο στην κλάση των line γραφημάτων και των συμπληρωμάτων τους.

Αρχικά, ας διατυπώσουμε κάποιους ορισμούς εννοιών που σχετίζονται με τα line γραφήματα ή τα συμπληρώματά τους.

Ορισμός 3.1.6. Με δεδομένο ένα γράφημα G , συμβολίζουμε με:

- $\mathcal{T}_G$ το σύνολο $\{E(T) \mid T \text{ είναι ένα τρίγωνο στο } G\}$,
- $\mathcal{S}_G$ το σύνολο όλων των αστέρων του G , δηλαδή, σύνολα ακμών της μορφής $E(v) = \{e \in E(G) \mid v \text{ είναι ένα άκρο της } e\}$, για $v \in V(G)$ και
- $\mathcal{M}_G$ το σύνολο όλων των μεγιστοτικών συνόλων της οικογενείας $\mathcal{T}_G \cup \mathcal{S}_G$.

Η ακόλουθη παρατήρηση είναι άμεση συνέπεια των παραπάνω ορισμών.

Παρατήρηση 3.1.7. Για κάθε γράφημα G χωρίς απομονωμένες κορυφές, ισχύουν τα εξής:

(1.) e είναι μια ακμή του $G \Leftrightarrow e$ είναι μια κορυφή του $L(G) \Leftrightarrow e$ είναι μια κορυφή του $\overline{L(G)}$.

(2.) . Για κάθε $F \subseteq E(G)$, έχουμε ότι:

- F είναι μια κλίκα στο $L(G) \Leftrightarrow F \subseteq E(v)$, για κάποια $v \in V(G)$, ή $F \in \mathcal{T}_G$.
- F είναι μια μεγιστοτική κλίκα στο $L(G) \Leftrightarrow F$ είναι ένα μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο στο $\overline{L(G)} \Leftrightarrow F \in \mathcal{M}_G$.
- F είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο στο $L(G) \Leftrightarrow F$ είναι μια κλίκα στο $\overline{L(G)} \Leftrightarrow F$ είναι ένα ταίριασμα στο G .
- F είναι ένα μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο στο $L(G) \Leftrightarrow F$ είναι μια μεγιστοτική κλίκα στο $\overline{L(G)} \Leftrightarrow F$ είναι ένα μεγιστοτικό ταίριασμα στο G .
- F είναι μια ισχυρή κλίκα στο $L(G) \Leftrightarrow F$ είναι ένα σύνολο στο $\mathcal{M}_G$ που τέμνει κάθε μεγιστοτικό ταίριασμα στο G .
- F είναι μια ισχυρή κλίκα στο $\overline{L(G)} \Leftrightarrow F$ είναι ένα μεγιστοτικό ταίριασμα στο G που τέμνει κάθε σύνολο στο $\mathcal{M}_G$.

Θεώρημα 3.1.8. [45] Το πρόβλημα ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο στην κλίση των line γραφημάτων.

Απόδειξη. Έστω G ένα line γράφημα και έστω C να είναι μια κλίκα στο G . Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.2.26, μπορούμε να υπολογίσουμε σε γραμμικό χρόνο ένα γράφημα H , τέτοιο ώστε: $G \cong L(H)$. Επίσης, υπολογίζουμε σε πολυωνυμικό χρόνο, το σύνολο $\mathcal{M}_H$. Δεδομένου ότι, κάθε ισχυρή κλίκα σε ένα γράφημα είναι μεγιστοτική και οι μεγιστοτικές κλίκες του G αντιστοιχούν ακριβώς στα στοιχεία του $\mathcal{M}_H$, αρκεί να δείξουμε ότι, υπάρχει ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για να ελέγξουμε, αν ένα δεδομένο $C^I \in \mathcal{M}_H$ αντιστοιχεί σε μια ισχυρή κλίκα C^I_G στο G . Στη συνέχεια, για να ελέγξουμε, αν η C περιέχεται σε μια ισχυρή κλίκα, αρκεί να ελέγξουμε αν, υπάρχει οποιοδήποτε $C^I \in \mathcal{M}_H$, ώστε: $C \subseteq C^I_G$, αντιστοιχεί σε μια ισχυρή κλίκα.

Έστω $C^I \in \mathcal{M}_H$. Τότε, το C^I είναι ένα σύνολο ακμών στο H και πρέπει να ελέγξουμε, αν το C^I τέμνει κάθε μεγιστοτικό ταίριασμα στο H .

Υποθέτουμε αρχικά ότι $C^l \in \mathcal{T}_H$. Τότε, το C^l είναι το σύνολο ακμών ενός τριγώνου T στο H . Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι, το H περιέχει ένα μεγιστοτικό ταίριασμα, ξένο με το C^l , αν και μόνο αν, $H - C^l$ περιέχει ένα ταίριασμα που “χτυπά” τουλάχιστον δύο κορυφές του T . Αυτό είναι μια τοπική ιδιότητα, που μπορεί εύκολα να ελεγχθεί σε πολυωνυμικό χρόνο, για παράδειγμα, εξετάζοντας όλα τα ζεύγη ξένων ακμών στο $H - C^l$, που συνδέουν το $V(T)$ με το υπόλοιπο γράφημα.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι $C^l \in \mathcal{S}_H$. Τότε, υπάρχει μια κορυφή $v \in V(H)$, τέτοια ώστε: $C^l = E(v)$. Το $E(v)$ τέμνει κάθε μεγιστοτικό ταίριασμα στο H , αν και μόνο αν, κάθε μεγιστοτικό ταίριασμα στο H “χτυπά” το v . Αυτό αποτυγχάνει, αν και μόνο αν, $H - v$ περιέχει ένα ταίριασμα που “χτυπά” όλες τις κορυφές στο $N_H(v)$. Υπάρχει μια τυπική αναγωγή αυτού του προβλήματος σε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΥ-ΒΑΡΟΥΣ (MAXIMUM-WEIGHT MATCHING PROBLEM) στο $H - v$: σε κάθε ακμή e του $H - v$ εκχωρούμε βάρος $w(e) = |e \cap N_H(v)|$ και επαληθεύουμε, αν, το $H - v$ έχει ένα ταίριασμα βάρους τουλάχιστον $|N_H(v)|$. Δεδομένου ότι το πρόβλημα ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΥ-ΒΑΡΟΥΣ είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο (από τον Edmonds [25]), το θεώρημα αποδείχθηκε. ■

Από το Λήμμα 3.1.1 και το Θεώρημα 3.1.8 καταλήγουμε στο εξής πόρισμα.

Πόρισμα 3.1.9. [45] *Τα προβλήματα ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ, ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΚΛΙΚΑΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΑΚΜΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ και ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι επιλύσιμα σε πολυωνυμικό χρόνο στην κλάση των line γραφημάτων.*

Τώρα, θα ασχοληθούμε με τα συμπληρώματα των line γραφημάτων.

Θεώρημα 3.1.10. [45] *Το πρόβλημα ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο στην κλάση των συμπληρωμάτων των line γραφημάτων.*

Απόδειξη. Έστω G το συμπλήρωμα ενός line γραφήματος και έστω C να είναι μια κλικά στο G . Αρχικά, υπολογίζουμε το συμπλήρωμα του G και, έπειτα, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 1.2.26, για να υπολογίσουμε, σε γραμμικό χρόνο, ένα γράφημα H , τέτοιο ώστε: $G \cong \overline{L(H)}$. Τότε, η C αντιστοιχεί σε ένα ταίριασμα C_H στο H και, από την Παρατήρηση 3.1.7, μας αρκεί να ελέγξουμε, αν το H περιέχει ένα ταίριασμα M , έτσι ώστε: $C_H \subseteq M$, και M να τέμνει κάθε σύνολο στο $\mathcal{M}_H$, όπου το $\mathcal{M}_H$ είναι το σύνολο, που περιέχει όλα τα μεγιστοτικά τρίγωνα και

μεγιστοτικά αστέρια του H . Ανάγουμε, το πρόβλημα αυτό, σε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΥ-ΒΑΡΟΥΣ στο H' , όπου H' είναι το γράφημα, που λαμβάνεται διαγράφοντας από το H όλες τις ακμές, που δεν είναι στο C_H και μοιράζονται ένα άκρο με κάποια ακμή του C_H (καθώς, καμία τέτοιου είδους ακμή δεν μπορεί να είναι μέρος ενός ταιριάσματος που περιέχεται στο C_H).

Πριν εξηγήσουμε την αναγωγή, θα δείξουμε ότι για κάθε ταίριασμα M στο H' , που τέμνει κάθε σύνολο στο $\mathcal{M}_H$, ισχύει ότι: $C_H \subseteq M$. Πράγματι, αν $e \in C_H$, τότε, υπάρχει ένα σύνολο $S \in \mathcal{M}_H$, τέτοιο ώστε: $e \in S$. Επιπλέον, η κατασκευή του H' υποδηλώνει ότι $S \cap E(H') = e$ και, επομένως, το M μπορεί μόνο να τέμνει S στο e . Αυτό συνεπάγεται ότι $e \in M$. Δεδομένου ότι το $e \in C_H$ ήταν αυθαίρετο, έχουμε ότι $C_H \subseteq M$, όπως ισχυριστήκαμε.

Η αναγωγή είναι η ακόλουθη. Υπολογίζουμε το σύνολο $\mathcal{M}_H$ και εκχωρούμε σε κάθε ακμή $e \in E(H')$ βάρος $w(e)$, το οποίο δηλώνει τον αριθμό των συνόλων στο $\mathcal{M}_H$, που περιέχουν την e . Πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι, κανένα σύνολο στο $\mathcal{M}_H$, δεν περιέχει δύο ακμές από το ίδιο ταίριασμα. Επομένως, για κάθε ταίριασμα M στο H' , ο συνολικός αριθμός των συνόλων στο $\mathcal{M}_H$, που διασταυρώνονται από κάποια ακμή του M , είναι ίσος με το συνολικό βάρος του M . Συνεπώς, το H' περιέχει ένα ταίριασμα, που περιέχει το C_H , το οποίο διασταυρώνεται με κάθε σύνολο του $\mathcal{M}_H$, αν και μόνο αν, το H' περιέχει ένα ταίριασμα, που τέμνει κάθε σύνολο του $\mathcal{M}_H$, αν και μόνο αν, το H' περιέχει ένα ταίριασμα του συνολικού βάρους τουλάχιστον (ισοδύναμα, ακριβώς) k , όπου, k είναι το μέγεθος του $\mathcal{M}_H$. Η συνάρτηση βάρους, $w(e)$, μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο και το πρόβλημα ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΥ-ΒΑΡΟΥΣ είναι, επίσης, επιλύσιμο από πολυωνυμικό χρόνο, επομένως, το θεώρημα ισχύει. ■

Από το Λήμμα 3.1.1 και το Θεώρημα 3.1.10 καταλήγουμε στο εξής πόρισμα.

Πόρισμα 3.1.11. [45] *Τα προβλήματα ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ, ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΚΛΙΚΑΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΑΚΜΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ και ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι επιλύσιμα σε πολυωνυμικό χρόνο στην κλάση των συμπληρωμάτων των line γραφημάτων.*

3.1.3 Γραφήματα με μικρό μέγιστο βαθμό

Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα των πέντε προβλημάτων, με τα οποία ασχολούμαστε σε αυτή την ενότητα, σε γραφήματα

μικρού μέγιστου βαθμού. Η προσέγγιση μας θα είναι παρόμοια με αυτή που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως, για την κλάση των C_4 -free γραφημάτων, την κλάση των line γραφημάτων και την κλάση των συμπληρωμάτων των line γραφημάτων, δείχνοντας ότι το πρόβλημα ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο σε οποιαδήποτε κλάση γραφημάτων οριοθετημένου βαθμού και, πιο γενικά, σε οποιαδήποτε κλάση γραφημάτων με οριοθετημένο αριθμό κλίκας.

Πρόταση 3.1.12. [45] *Για κάθε θετικό ακέραιο k , το πρόβλημα ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο στην κλάση γραφημάτων με αριθμό κλίκας το πολύ k .*

Απόδειξη. Έστω ένας θετικός ακέραιος k και έστω G να είναι ένα δεδομένο γράφημα με αριθμό κλίκας το πολύ k . Δεδομένου ότι το k είναι μια σταθερά, οι $O(|V(G)|^k)$ μεγιστοποιημένες κλίκες του G μπορούν να απαριθμηθούν σε πολυωνυμικό χρόνο. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι το πρόβλημα ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Πράγματι, αν συμβαίνει αυτό, τότε, ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος για τη εξέταση, αν μια δεδομένη κλίκας μπορεί να επεκταθεί σε μια ισχυρή, μπορεί να επιτευχθεί ελέγχοντας αν οποιαδήποτε από τις μεγιστοποιημένες κλίκες του G , που περιέχει τη δεδομένη κλίκας, είναι ισχυρή. Από το Λήμμα 1.2.38, μια κλίκας C στο G δεν είναι ισχυρή, αν και μόνο αν, κυριαρχείται από ένα ανεξάρτητο σύνολο $I \subseteq V(G) \setminus C$. Ωστόσο, αν αυτό συμβαίνει, τότε, κάθε ελαχιστοποιητικό σύνολο $I_0 \subseteq I$, που κυριαρχεί την C , περιέχεται στο $N_G(C)$ και περιέχει το πολύ k κορυφές. Συνεπώς, για να ελεγχθεί, αν η C είναι ισχυρή, αρκεί να απαριθμήσουμε όλα τα $O(|V(G)|^k)$ υποσύνολα του $N_G(C)$ μεγέθους το πολύ k και να ελέγξουμε, αν οποιοδήποτε από αυτά είναι ανεξάρτητο και κυριαρχεί την C . Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Από την Πρόταση 3.1.12 και το Λήμμα 3.1.1 καταλήγουμε στο ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.1.13. [45] *Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό k , κάθε ένα από τα προβλήματα ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ, ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΚΛΙΚΑΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΑΚΜΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ και ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο στην κλάση των γραφημάτων με αριθμό κλίκας το πολύ k .*

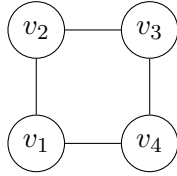
Δεδομένου ότι κάθε γράφημα με μέγιστο βαθμό το πολύ k , έχει αριθμό κλίκας το πολύ $k + 1$, από την Πρόταση 3.1.12 και το Πόρισμα 3.1.13 καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα.

Πόρισμα 3.1.14. [45] Για κάθε μη-αρνητικό ακέραιο αριθμό k , κάθε ένα από τα προβλήματα ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ, ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΚΛΙΚΑΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΑΚΜΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ και ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο στην κλάση των γραφημάτων με μέγιστο βαθμό το πολύ k .

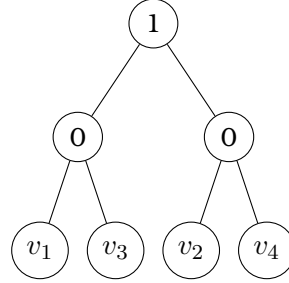
3.1.4 Cographs

Cographs (ή P_4 -free γραφήματα) είναι τα γραφήματα που μπορούν να δημιουργηθούν από απομονωμένες κορυφές με ξένη ένωση και πράξεις συμπλήρωσης. Αυτή η δημιουργία μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα δενδροδιάγραμμα, γνωστό ως **cotree**, του οποίου τα φύλλα αντιστοιχούν στις κορυφές του cograph, ενώ οι υπόλοιποι κόμβοι του cotree παίρνουν τις τιμές 0 ή 1, αν υπάρχουν πράξεις ξένης ένωσης ή πράξεις συμπλήρωσης, μεταξύ των παιδιών τους, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 3.1.15. Για να καταλάβουμε καλύτερα την έννοια των cographs, μπορούμε να δούμε τον κύκλο C_4 (1ο σχήμα) και το αντίστοιχο cotree του (2ο σχήμα). Κάθε φύλλο του cotree μπορούμε να δούμε ότι αντιστοιχεί σε μια κορυφή του C_4 . Επίσης, μπορούμε να δούμε ότι, τα παιδιά κάθε κορυφής του cotree που έχει την τιμή 1, είναι γείτονες στο C_4 , ενώ, τα παιδιά κάθε κορυφής του cotree που έχει την τιμή 0, δεν είναι γείτονες στο C_4 .



Το cograph C_4



Το cotree του cograph C_4

Στο έργο του, ο Corneil απέδειξε κάποιες ιδιότητες που ισχύουν στα cographs και, οι οποίες, φαίνονται στην ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 3.1.16. [22] Έστω G είναι ένα cograph. Τότε,

- το cotree του γραφήματος G μπορεί να κατασκευαστεί σε χρόνο $O(n + m)$.
- μια μεγιστοτική κλίκα του G μπορεί να βρεθεί σε χρόνο $O(n)$.
- κάθε μεγιστοτική κλίκα C στο γράφημα G είναι ισχυρή κλίκα στο G .

Με βάση, την Παρατήρηση , μπορεί να αποδειχθεί το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.17. Το πρόβλημα ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο στην κλάση των cographs.

Απόδειξη. Έστω G ένα cograph και έστω C μια κλίκα στο G . Από την Παρατήρηση 3.1.4, μας αρκεί να βρούμε μια μεγιστοτική κλίκα C' που να περιέχει την C . Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να επεκτείνουμε μια κλίκα σε μια μεγιστοτική κλίκα, σε πολυωνυμικό χρόνο, επομένως, μπορεί να επεκταθεί η κλίκα C σε μια μεγιστοτική κλίκα C' , τέτοια ώστε, $C \subseteq C'$, σε πολυωνυμικό χρόνο και, συνεπώς, το θεώρημα αποδείχθει. ■

Από το Θεώρημα 3.1.17 και το Λήμμα 3.1.1 καταλήγουμε στο εξής πόρισμα.

Πόρισμα 3.1.18. *Κάθε ένα από τα προβλήματα ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ, ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΚΛΙΚΑΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΑΚΜΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ και ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο στην κλάση των *cographs*.*

3.2 Μη-πολυωνυμική πολυπλοκότητα

Έχοντας δει ορισμένες κλάσεις γραφημάτων, όπου, τα πέντε προβλήματα, ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ, ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΚΛΙΚΑΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΑΚΜΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ και ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι επιλύσιμα σε πολυωνυμικό χρόνο, ήρθε η στιγμή, να δούμε μια κλάση γραφημάτων, πιο συγκεκριμένα των ασθενώς chordal γραφημάτων, στην οποία, η επιλυσή των προβλημάτων μας δεν γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.

3.2.1 Ασθενώς chordal γραφήματα

Μια σημαντική υποκλάση τέλειων γραφημάτων που γενικεύει την τάξη των chordal γραφημάτων είναι η κλάση των ασθενώς chordal γραφημάτων (weakly chordal graphs). Ένα γράφημα G είναι ασθενώς chordal, αν ούτε το G , ούτε το συμπλήρωμα του περιέχουν επαγόμενο κύκλο μήκους μεγαλύτερου ή ίσου του 5.

Ο Zang [74], για να δείξει ότι είναι co-NP-πλήρες το πρόβλημα πιστοποίησης, αν ένα δεδομένο ανεξάρτητο σύνολο σε ένα γράφημα είναι ισχυρό, χρησιμοποίησε μια αναγωγή από το πρόβλημα ικανοποιησιμότητας, 3-SAT. Η είσοδος στο πρόβλημα 3-SAT είναι ένα σύνολο λογικών μεταβλητών $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ και μια συλλογή προτάσεων $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$. Κάθε πρόταση αποτελείται από ακριβώς τρία στοιχεία, όπου, κάθε στοιχείο είναι, είτε μία από τις λογικές μεταβλητές (π.χ. x_i), είτε η άρνηση της (π.χ. $\overline{x_i}$). Ο στόχος είναι να προσδιοριστεί, αν η φόρμουλα $\Phi = \bigwedge_{i=1}^m C_i$ ικανοποιείται, δηλαδή, αν υπάρχει μια εκχώρηση αληθείας στις n -λογικές μεταβλητές, ώστε, να καθιστά όλες τις προτάσεις ταυτόχρονα αληθείς. Η αναγωγή παράγει από ένα δεδομένο στιγμιότυπο I του προβλήματος

3-SAT, ένα ασθενώς chordal γράφημα $G(I)$, έτσι ώστε, το $G(I)$ να μην είναι καλά-καλυπτόμενο, αν και μόνο αν, η Φ ικανοποιείται. Πιο συγκεκριμένα, δεδομένης μιας εισόδου (X, C) για το πρόβλημα 3-SAT, που αντιπροσωπεύει μια φόρμουλα Φ , κατασκευάζεται ένα γράφημα $G = G(X, C)$, με σύνολο κορυφών $V(G) = C \cup L$, όπου, οι κορυφές του συνόλου $C = \{c_1, \dots, c_m\}$, αντιστοιχούν στις προτάσεις της συλλογής C και αποτελούν μια κλίκα στο γράφημα G , ενώ, οι κορυφές του συνόλου $L = \{x_1, \overline{x_1}, \dots, x_n, \overline{x_n}\}$, αντιστοιχούν στις λογικές μεταβλητές του συνόλου X και τις αρνήσεις τους, έτσι ώστε, για κάθε $i \in 1, \dots, n$, οι κορυφές x_i και $\overline{x_i}$ είναι γειτονικές. Επίσης, για κάθε κορυφή $c_i \in C$ και κάθε κορυφή $\ell \in L$, υπάρχει η ακμή (c_i, ℓ) στο γράφημα G , αν και μόνο αν, η πρόταση C_i περιέχει τη μεταβλητή ℓ . Δεν υπάρχουν άλλες ακμές στο γράφημα. Στην απόδειξή του, ο Zang χρησιμοποίησε μια παρόμοια κατασκευή με αυτή που περιγράφηκε παραπάνω, αλλά στηρίχτηκε στο συμπλήρωμα του γραφήματος, αντί του ίδιου του γραφήματος. Δεδομένου ότι, η κλάση των ασθενώς chordal γραφημάτων είναι κλειστή υπό τη λήψη συμπληρωμάτων, η απόδειξη του Zang δείχνει τα επακόλουθα.

Θεώρημα 3.2.1. [45] *Το πρόβλημα ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ είναι co-NP-πλήρες στην κλάση των ασθενώς chordal γραφημάτων.*

Τώρα, θα δείξουμε ότι, μετά από κατάλληλες τροποποιήσεις της παραπάνω αναγωγής μπορεί να καθοριστεί η NP-δυσκολία των προβλημάτων ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΚΛΙΚΑΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ και ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ στην κλάση των ασθενώς chordal γραφημάτων.

Θεώρημα 3.2.2. [45] *Τα προβλήματα ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΚΛΙΚΑΣ και ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι NP-δύσκολα στην κλάση των ασθενώς chordal γραφημάτων. Το πρόβλημα ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι co-NP-πλήρες, τόσο γενικά, όσο και, για ασθενώς chordal γραφήματα.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε μια μικρή τροποποίηση της παραπάνω αναγωγής. Κατ' αρχάς, οφείλουμε να σημειώσουμε ότι το πρόβλημα 3-SAT παραμένει NP-πλήρες σε περιπτώσεις που ικανοποιούν τις ακόλουθες υποθέσεις:

- (i.) Δεν υπάρχει πρόταση που να περιέχει ένα ζευγάρι της μορφής $\{x_i, \overline{x_i}\}$. Πράγματι, αν υπάρχει πρόταση που να περιέχει και το x_i και $\overline{x_i}$, τότε, η πρόταση αυτή ικανοποιείται πάντα και μπορεί να αφαιρεθεί από το σιγμιότυπο, ώστε, να αποκτήθει ένα άλλο ισοδύναμο.
- (ii.) Κάθε μεταβλητή εμφανίζεται σε τουλάχιστον μια πρόταση. Πράγματι, αν κάποια μεταβλητή ℓ δεν εμφανίζεται σε καμία πρόταση, τότε, μπορούμε

να θέσουμε την μεταβλητή ψευδή και να αφαιρέσουμε κάθε πρόταση που περιέχει την άρνηση της για να αποκτηθεί ένα νέο ισοδύναμο στιγμιότυπο.

- (iii.) Δεν υπάρχει μεταβλητή x_i , τέτοια ώστε, κάθε πρόταση να περιέχει, είτε τη x_i , είτε τη $\overline{x_i}$. Πράγματι, στιγμιότυπα που έχουν μια μεταβλητή x_i , τέτοια ώστε, κάθε πρόταση να περιέχει, είτε τη x_i , είτε τη $\overline{x_i}$ μπορούν να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο, λύνοντας δύο στιγμιότυπα του προβλήματος 2-SAT, που αντιστοιχούν στη ανάθεση της x_i σε αληθή (αντίστοιχα, ψευδή). Τα στιγμιότυπα αποκτώνται από την αφαίρεση όλων των προτάσεων που περιέχουν τη x_i (αντίστοιχα, τη $\overline{x_i}$) και τη διαγραφή της $\overline{x_i}$ (αντίστοιχα, της x_i) από όλες τις προτάσεις που την περιέχουν. Το πρόβλημα 2-SAT ορίζεται παρόμοια με το πρόβλημα 3-SAT, εκτός από το ότι κάθε πρόταση περιέχει δύο μεταβλητές. Το πρόβλημα 2-SAT είναι επιλύσιμο σε γραμμικό χρόνο [4, 27].

Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι μας δίνεται ένα στιγμιότυπο I του 3-SAT που ικανοποιεί τις υποθέσεις (i) - (iii).

Έστω $X, C, \Phi, G, C = \{c_1, \dots, c_m\}$ και $L = \{x_1, \overline{x_1}, \dots, x_n, \overline{x_n}\}$, όπως ορίστηκαν παραπάνω.

Η υπόθεση (i) υποδηλώνει ότι καμία από τις κλίκες $\{x_i, \overline{x_i}\}$ στο G δεν περιέχεται στη γειτονιά μιας κορυφής της C . Δεδομένου ότι το $N_G(\{x_i, \overline{x_i}\})$ είναι μια κλίκα, συνεπάγεται ότι κάθε $\{x_i, \overline{x_i}\}$ είναι ισχυρή στο G .

Αναδιατυπώνοντας την παρατήρηση του Zang [74] στο πλαίσιο μας, ισχυριζόμαστε ότι η φόρμουλα Φ ικανοποιείται, αν και μόνο αν, η κλίκα C δεν είναι ισχυρή. Πράγματι, αφενός, οι μεταβλητές του L , που έχουν οριστεί ως αληθείς σε μια ικανοποιητική αποτίμηση, σχηματίζουν ένα ανεξάρτητο σύνολο, ξένο με τη C , που κυριαρχεί τη C , και ισχύει το Λήμμα 1.2.38. Από την άλλη, αν το C δεν είναι ισχυρό, τότε, κάθε μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο I , που είναι ξένο με τη C , αναγκαστικά περιέχει ακριβώς από μια μεταβλητή, από κάθε ζεύγος $\{x_i, \overline{x_i}\}$. Ορίζοντας όλες τις μεταβλητές του I ως αληθείς, βλέπουμε ότι η Φ ικανοποιείται.

Επομένως, κάθε μία από τις κλίκες της διαμέρισης $\{C, \{x_1, \overline{x_1}\}, \dots, \{x_n, \overline{x_n}\}\}$ του $V(G)$ είναι ισχυρή, αν και μόνο αν, η C είναι ισχυρή, αν και μόνο αν, δεν ικανοποιείται η Φ . Συνεπώς, δείξαμε μέχρι στιγμής ότι το πρόβλημα ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι NP-δύσκολο στην κλάση των ασθενώς chordal γραφημάτων. Τώρα, το γεγονός ότι, το πρόβλημά μας είναι co-NP (σε οποιαδήποτε κλάση γραφημάτων) προκύπτει από την παρατήρηση ότι, μια σύντομη πιστοποίηση ενός όχι στιγμιότυπου αποτελείται από ένα ζεύγος (K, I) , όπου η K είναι μία από τις κλίκες στη διαμέριση και το I είναι ένα μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο,

ξένο με την K .

Ακολουθώντας, θα αποδείξουμε ότι το πρόβλημα ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι NP-δύσκολο στην κλάση των ασθενώς chordal γραφημάτων. Παρατηρούμε ότι κάθε κορυφή $\ell \in L$ περιέχεται σε μια ισχυρή κλίκα (συγκεκριμένα το K_2 που περιέχει τη μεταβλητή ℓ και την άρνηση της). Επιπλέον, θα δείξουμε, τώρα, ότι δεν υπάρχει ισχυρή κλίκα του G που να περιέχει, και μια κορυφή από το L και μια κορυφή από τη C . Έστω K είναι μια τέτοια κλίκα, με $\ell \in L \cap K$ και $c_i \in C \cap K$. Ας συμβολίσουμε με $\bar{\ell}$ την άρνηση της μεταβλητής ℓ . Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι, το $\{\ell, \bar{\ell}\}$ αποτελεί ισχυρή κλίκα και, μάλιστα, η μεταβλητή $\bar{\ell}$ δεν ανήκει στην K . Επομένως $K \cap L = \{\ell\}$. Από την υπόθεση (iii) στο στιγμιότυπο του 3-SAT, υπάρχει μια πρόταση c_j που δεν περιέχει, ούτε την ℓ , ούτε την $\bar{\ell}$. Τότε, το $c_j \neq c_i$ και το σύνολο $I = \{\bar{\ell}, c_j\}$ είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο, ξένο με την K , που κυριαρχεί την K . Από το Λήμμα 1.2.38, η K δεν είναι ισχυρή.

Γνωρίζουμε ότι κάθε κορυφή $\ell \in L$ περιέχεται σε μια ισχυρή κλίκα και, δεδομένου ότι δεν υπάρχει κλίκα του G , που να είναι ισχυρή και να περιέχει μια κορυφή από το L και μια κορυφή από τη C , μια κορυφή στη C περιέχεται σε μια ισχυρή κλίκα, αν και μόνο αν, το C είναι ισχυρό. Επομένως, κάθε κορυφή του G περιέχεται σε μια ισχυρή κλίκα, αν και μόνο αν, η C είναι ισχυρή, το οποίο, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ισοδυναμεί με τη μη-ικανοποίηση της Φ . Συνεπώς, αποδείξαμε ότι το πρόβλημα ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι NP-δύσκολο στην κλάση των ασθενώς chordal γραφημάτων.

Απομένει να δείξουμε ότι το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΚΛΙΚΑΣ είναι NP-δύσκολο στην κλάση των ασθενώς chordal γραφημάτων. Για το σκοπό αυτό, επιλέγουμε το γράφημα G , που κατασκευάστηκε όπως παραπάνω, και το τροποποιούμε σε ένα γράφημα G^l προσθέτοντας τέσσερις νέες κορυφές $u_i, v_i, \bar{u}_i, \bar{v}_i$, για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$, και τις ακμές $(x_i, u_i), (x_i, v_i), (u_i, v_i), (u_i, \bar{u}_i), (u_i, \bar{v}_i), (v_i, \bar{u}_i), (\bar{u}_i, \bar{v}_i), (\bar{x}_i, \bar{u}_i)$ και $(\bar{x}_i, \bar{v}_i)$ (βλ. Σχήμα 3.1).

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι, το προκύπτον γράφημα G^l είναι ασθενώς chordal. Δεδομένου ότι καμία από τις καινούργιες κορυφές δεν είναι γειτονική με οποιαδήποτε κορυφή της C , το γεγονός ότι η C δεν είναι ισχυρή, αν και μόνο αν, η Φ ικανοποιείται παραμένει έγκυρο για το G^l . Επιπλέον, με τη χρήση του Λήμματος 1.2.38 μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι κάθε μεγιστοτική κλίκα του G^l , εκτός από τη C , δεν είναι ισχυρή:

- Η ιδιότητα του G να μην έχει ισχυρή κλίκα η οποία να περιέχει και μια κορυφή από L και μια κορυφή από τη C , κληρονομείται στο G^l .



- Για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$, η κλίκα $\{x_i, \overline{x_i}\}$ δεν είναι ισχυρή, επειδή κυριαρχείται από το ανεξάρτητο σύνολο $\{v_i, \overline{v_i}\}$.
- Για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$, η κλίκα $\{x_i, u_i, v_i\}$ δεν είναι ισχυρή, επειδή κυριαρχείται από το ανεξάρτητο σύνολο $\{c_j, \overline{u_i}\}$, όπου, C_j είναι μια πρόταση που περιέχει τη μεταβλητή x_i (σημειώνουμε ότι μια τέτοια πρόταση υπάρχει από την υπόθεση (ii)). Λόγω συμμετρίας και η κλίκα $\{\overline{x_i}, \overline{u_i}, \overline{v_i}\}$ δεν είναι ισχυρή.
- Για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$, η κλίκα $\{u_i, \overline{u_i}, \overline{v_i}\}$ δεν είναι ισχυρή, αφού κυριαρχείται από το ανεξάρτητο σύνολο $\{x_i, v_i\}$. Λόγω συμμετρίας και η κλίκα $\{u_i, \overline{u_i}, v_i\}$ δεν είναι ισχυρή.

41

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα των προβλημάτων ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ, ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΚΛΙΚΑΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΑΚΜΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ και ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ στις κλάσεις των C_4 -free γραφημάτων, των line γραφημάτων, των συμπληρωμάτων των line γραφημάτων, των γραφημάτων με μικρό μέγιστο βαθμό, των cograph και των ασθενώς chordal γραφημάτων.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με το τελευταίο πρόβλημα, το ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ, δίνοντας την υπολογιστική του πολυπλοκότητα σε διάφορες κλάσεις γραφημάτων, όπως την κλάση των line γραφημάτων, την κλάση των συμπληρωμάτων των line γραφημάτων, την κλάση των υποκυβικών γραφημάτων κ.α..

4.1 Πολυωνυμικοί αλγόριθμοι για το πρόβλημα σε κλάσεις γραφημάτων

Το γεγονός ότι το πρόβλημα αναγνώρισης localizable γραφημάτων είναι NP-δύσκολο μας δίνει κίνητρο να ερευνήσουμε τις κλάσεις γραφημάτων όπου η αναγνώριση αυτή μπορεί να επιτευχθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.

Αρχικά, συνοψίζουμε, εν συντομία, γνωστά αποτελέσματα από τη βιβλιογραφία, που οδηγούν αμέσως σε κλάσεις γραφημάτων, στις οποίες, η αναγνώριση

localizable γραφημάτων μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο. Για τους ορισμούς των παρακάτω κλάσεων γραφημάτων και για περαιτέρω πληροφορίες, παραπέμπουμε στα [12, 31].

Από το Πρόρισμα 1.2.49, ένα ημι-τέλειο γράφημα είναι localizable, αν και μόνο αν, το γράφημα είναι καλά-καλυπτόμενο. Επομένως, αν υπάρχει χαρακτηρισμός για τα καλά-καλυπτόμενα γραφήματα μέσα σε κάποια κλάση ημι-τέλειων γραφημάτων, ο ίδιος χαρακτηρισμός ισχύει και για τα localizable γραφήματα στην ίδια κλάση. Αυτό σημαίνει ότι η αναγνώριση localizable γραφημάτων μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο σε κλάσεις ημι-τέλειων γραφημάτων, όπου, η αναγνώριση καλά-καλυπτόμενων γραφημάτων μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο. Παραδείγματα τέτοιων κλάσεων γραφημάτων είναι τα τέλεια γραφήματα με οριοθετημένο βαθμό [16] και τα claw-free τέλεια γραφήματα [68, 69]. Τα καλά-καλυπτόμενα chordal γραφήματα χαρακτηρίστηκαν από τον Prisner και τους συνεργάτες του [62], ως εξής. Έδειξαν ότι ένα chordal γράφημα είναι καλά-καλυπτόμενο, αν και μόνο αν, κάθε κορυφή του ανήκει σε μια μοναδική simplicial κλίκα. (Θυμίζουμε, μια κλίκα είναι simplicial, αν αποτελείται από μια κορυφή και όλους τους γειτονές της.) Στην ίδια εργασία, απέδειξαν ότι η ίδια συνθήκη χαρακτηρίζει αν simplicial γραφήματα είναι καλά-καλυπτόμενα, δηλαδή, γραφήματα στα οποία κάθε κορυφή βρίσκεται σε μια simplicial κλίκα είναι καλά-καλυπτόμενα, αν και μόνο αν, κάθε κορυφή βρίσκεται σε μια μοναδική simplicial κλίκα. Δεδομένου ότι, κάθε simplicial κλίκα είναι ισχυρή, συνεπάγεται ότι, localizable simplicial γραφήματα μπορούν να αναγνωριστούν, επίσης, σε πολυωνυμικό χρόνο. Ο χαρακτηρισμός που έδωσε ο Prisner και οι συνεργάτες του για τα καλά-καλυπτόμενα chordal γραφήματα γενικεύθηκε αργότερα από τους Dean και Zito, όπου, έδειξαν στο [23], Θεώρημα 4.2] ότι ένα C_4 -free ημι-τέλειο γράφημα G είναι καλά-καλυπτόμενο, αν και μόνο αν, κάθε ελάχιστο κάλυμμα κλικών $\mathcal{C}$ του G είναι μια διαμέριση του συνόλου κορυφών του και κάθε κλίκα του $\mathcal{C}$ περιέχει μια simplicial κλίκα. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι αυτή η συνθήκη είναι ισοδύναμη με την προϋπόθεση ότι κάθε κορυφή βρίσκεται σε μια μοναδική simplicial κλίκα.

Από το Θεώρημα 1.2.47, ένα γράφημα είναι localizable, αν και μόνο αν, συμπίπτει ο αριθμός ανεξάρτητης κυριαρχίας με τον αριθμό καλυψής από κλίκες. Επομένως, η κλάση των localizable γραφημάτων μπορεί να αναγνωριστεί σε πολυωνυμικό χρόνο σε οποιαδήποτε κλάση γραφημάτων στην οποία αυτές οι δύο παράμετροι είναι πολυωνυμικά υπολογίσιμες. Παραδείγματα τέτοιων κλάσεων γραφημάτων είναι η κλάση των circular-arc γραφημάτων [18, 42] και οποιαδήποτε κλάση τέλειων γραφημάτων για τα οποία το πρόβλημα της ανεξάρτητης κυριαρχίας επιλύεται πολυωνυμικά [33], όπως για παράδειγμα τα distance-hereditary γραφήματα [19] (τα οποία είναι γραφήματα με κλίκες που έχουν

πλάτος το πολύ 3 [32]), και τα cocomparability γραφήματα [47]. Σημειώστε, επίσης, ότι η καλή-καλυψημότητα των cocomparability γραφημάτων είναι ισοδύναμη με μια γνωστή (και πολυωνυμικά επαληθεύσιμη) ιδιότητα ενός παραγόμενου μερικώς ταξινομημένου συνόλου. Για ένα γράφημα G , ας συμβολίσουμε με P_G το σύνολο όλων των μερικών ταξινομήσεων (posets) με βάση το σύνολο $V(G)$ στο οποίο δύο διακεκριμένα στοιχεία είναι μη-συγκρίσιμα, αν και μόνο αν, είναι γείτονες στο G . Ένα γράφημα G είναι cocomparability, αν και μόνο αν, $P_G \neq \emptyset$. Ένα cocomparability γράφημα G είναι καλά-καλυπτόμενο, αν και μόνο αν, κάποια μερική ταξινόμηση στο P_G είναι βαθμολογημένη (graded) (δηλαδή, όλες οι μεγιστοτικές αλυσίδες του είναι του ίδιου μεγέθους), δηλαδή, αν και μόνο αν, όλες οι μερικές ταξινομήσεις στο P_G είναι βαθμολογημένες.

Τέλος, ας σημειώσουμε ότι από την ταξινόμηση των καλά-καλυπτόμενων κυβικών γραφημάτων, από τον Campbell και τους συνεργάτες του [15], συνεπάγεται η ταξινόμηση των localizable κυβικών γραφημάτων. Η κλάση των localizable κυβικών γραφημάτων αποτελείται από μια μη-πεπερασμένη (άπειρη) οικογένεια επίπεδων κυβικών γραφημάτων μαζί με τρία μικρά γραφήματα (K_4 , $K_{3,3}$ και $\overline{C_6}$).

Συνοψίζουμε τις παραπάνω παρατηρήσεις στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.1.1. [44] *Το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ μπορεί να επιλυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο σε καθεμία από τις ακόλουθες κλάσεις γραφημάτων: κυβικά γραφήματα, ημι-τέλεια C_4 -free γραφήματα, cocomparability γραφήματα, τέλεια γραφήματα με οριοθετημένο βαθμό, claw-free τέλεια γραφήματα, simplicial γραφήματα και γραφήματα με οριοθετημένο πλάτος κλίκας.*

Τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας επιτρέπουν την επέκταση της παραπάνω λίστας, προσθέτοντας σε αυτές, τις κλάσεις των τρίγωνο-free γραφημάτων και των line γραφημάτων και αντικαθιστώντας την κλάση των ημι-τέλειων C_4 -free γραφημάτων με, την υπερκλάση της, την κλάση των C_4 -free γραφημάτων. Αρχικά, θα ασχοληθούμε με την κλάση των line γραφημάτων.

4.1.1 Line γραφήματα

Ας υποθέσουμε ένα γράφημα $H = (V_H, E_H)$ και έστω $G = L(H)$ να είναι το line γράφημα του H . Το line γράφημα του γραφήματος H είναι καλά-καλυπτόμενο, αν και μόνο αν, το γράφημα H είναι equimatchable, δηλαδή, αν

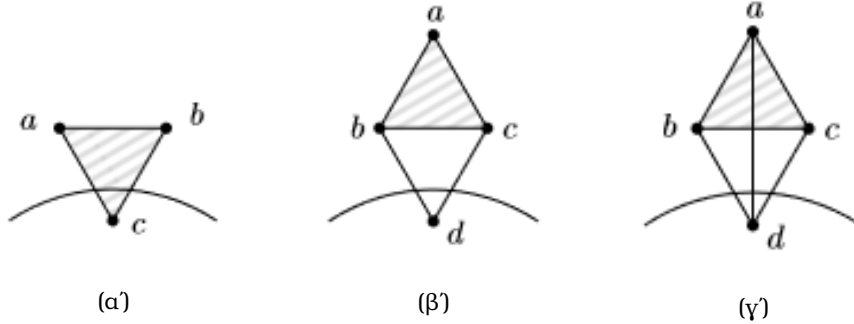
όλα τα μεγιστοτικά ταιριάσματα του G έχουν το ίδιο μέγεθος. Η ερώτηση για τον χρονικό προσδιορισμό των equimatchable γραφημάτων διατυπώθηκε από τον Grünbaum [34] το 1974, ενώ τον ίδιο χρόνο, τα equimatchable γραφήματα μελετήθηκαν από τον Lewin [51] και τον Lesk με τους συνεργάτες του [49], με τον δεύτερο να αποδεικνύει ότι τα equimatchable γραφήματα μπορούν να αναγνωριστούν σε πολυωνυμικό χρόνο. Δεδομένου ότι, κάθε localizable γράφημα είναι καλά-καλυπτόμενο, κάθε γράφημα, του οποίου το line γράφημα είναι localizable, είναι equimatchable. Επιπλέον, επειδή τα line γραφήματα των διμερών γραφημάτων είναι τέλεια (βλέπε, για παράδειγμα, [66]) και, συνεπώς, ημι-τέλεια, από το Πόρισμα 1.2.49 συνεπάγεται ότι το line γράφημα ενός διμερούς γραφήματος H είναι localizable, αν και μόνο αν, είναι καλά-καλυπτόμενο, ή ισοδύναμα, αν το H είναι equimatchable. Ο Lesk και οι συνεργάτες του [49] χαρακτήρισαν equimatchable διμερή γραφήματα ως εξής.

Θεώρημα 4.1.2. [44] Ένα συνεκτικό διμερές γράφημα H , με μια διαμέριση του συνόλου κορυφών του σε δύο ανεξάρτητα σύνολα $V(H) = U \cup W$ με $|U| \leq |W|$, είναι equimatchable, αν και μόνο αν, για κάθε $u \in U$, υπάρχει ένα μη-κενό σύνολο $X \subseteq N(u)$, έτσι ώστε: $|N(X)| \leq |X|$.

Λαμβάνοντας υπόψη ένα γράφημα H , λέμε ότι μια κορυφή $v \in V(H)$ είναι ισχυρή αν κάθε μεγιστοτικό ταίριασμα του H καλύπτει το v . Ο παραπάνω χαρακτηρισμός έχει την ακόλουθη συνέπεια.

Λήμμα 4.1.3. [44] Ένα συνεκτικό διμερές γράφημα H είναι equimatchable, αν και μόνο αν, έχει μια διαμέριση του συνόλου των κορυφών του σε δύο ανεξάρτητα σύνολα $V(H) = U \cup W$, έτσι ώστε, όλες οι κορυφές του U να είναι ισχυρές.

Απόδειξη. Αρχικά, θα δείξουμε ότι μια κορυφή $u \in V(H)$ σε ένα διμερές γράφημα H είναι ισχυρή, αν και μόνο αν, υπάρχει ένα μη-κενό σύνολο $X \subseteq N(u)$, έτσι ώστε, $|N(X)| \leq |X|$. Αυτό ισοδυναμεί με την απόδειξη ότι η κορυφή u δεν είναι ισχυρή, αν και μόνο αν, $|N(X)| > |X|$ για όλα τα μη-κενά σύνολα $X \subseteq N(u)$, το οποίο είναι, περαιτέρω, ισοδύναμο με το $|N_{H-u}(X)| \geq |X|$ για όλα τα μη-κενά σύνολα $X \subseteq N_H(u)$. Από το Θεώρημα του Hall [36], αυτό ισοδυναμεί με την ύπαρξη ενός ταιριάσματος M στο γράφημα $H - u$, έτσι ώστε, κάθε κορυφή του $N_H(u)$ να αποτελεί άκρο μιας ακμής στο M . Αυτό με τη σειρά του ισοδυναμεί με το γεγονός ότι το H περιέχει ένα μεγιστοτικό ταίριασμα που δεν καλύπτει το u , δηλαδή, ότι το u δεν είναι ισχυρό στο H , όπως ισχυριστήκαμε. Έστω H είναι ένα συνεκτικό διμερές γράφημα. Ας υποθέσουμε, αρχικά, ότι το H είναι equimatchable και καθορίζουμε μια διαμέριση του συνόλου κορυφών του σε δύο ανεξάρτητα σύνολα $V(H) = U \cup W$, με $|U| \leq |W|$. Από το Θεώρημα 4.1.2, συνεπάγεται ότι, για όλα τα $u \in U$, υπάρχει ένα μη-κενό σύνολο



Σχήμα 4.1: Οι τρεις τύποι κρεμαστών υπογραφημάτων. Τα σκιασμένα τρίγωνα αντιπροσωπεύουν ένα κρεμαστό τρίγωνο, ένα τρίγωνο που περιέχεται σε ένα κρεμαστό διαμάντι και ένα τρίγωνο που περιέχεται σε ένα κρεμαστό K_4 , αντίστοιχα.

$X \subseteq N(u)$, έτσι ώστε, $|N(X)| \leq |X|$. Με την παραπάνω ισοδυναμία, όλες οι κορυφές του U είναι ισχυρές. Αντίστροφα, τώρα, υποθέτουμε ότι το H είναι ένα συνεκτικό διμερές γράφημα με μια διαμέριση του συνόλου κορυφών του σε δύο ανεξάρτητα σύνολα $V(H) = U \cup W$, έτσι ώστε, όλες οι κορυφές του U να είναι ισχυρές. Από την παραπάνω ισοδυναμία, για όλα τα $u \in U$, υπάρχει ένα μη-κενό σύνολο $X \subseteq N(u)$, έτσι ώστε, $|N(X)| \leq |X|$. Έστω M είναι ένα μεγιστοτικό ταίριασμα του H . Από την παραδοχή του U , κάθε κορυφή του U αποτελεί άκρο μιας ακμής του M . Αυτό σημαίνει ότι $|U| = |M| \leq |W|$. Συνεπώς, από το Θεώρημα 4.1.2, το H είναι equimatchable. ■

Όπως επισημάνθηκε παραπάνω, το line γράφημα κάθε equimatchable διμερούς γραφήματος είναι localizable. Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι τα γραφήματα, των οποίων τα line γραφήματα είναι localizable, δεν διαφέρουν πολύ από τα equimatchable διμερή γραφήματα. Για να περιγράψουμε το αποτέλεσμα, χρειαζόμαστε μερικούς ορισμούς.

Ορισμός 4.1.4. [44] **Διαμάντι (Diamond)** είναι το γράφημα με κορυφές $\{a, b, c, d\}$, όπου οι κορυφές a και d είναι οι αιχμές (tips) του, και οι ακμές του είναι οι: $\{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d)\}$. Έστω T είναι ένα τρίγωνο σε ένα γράφημα H και έστω τα $\{a, b, c\}$ να είναι οι κορυφές του T . Λέμε ότι το T είναι:

- ένα **κρεμαστό τρίγωνο (pendant triangle)** του H , αν $d_H(a) = d_H(b) = 2 < d_H(c)$ (Σχήμα 4.1α'),
- περιέχεται σε ένα **κρεμαστό διαμάντι (pendant diamond)** εάν το H έχει ένα υπογράφημα με κορυφές $\{a, b, c, d\}$ προκαλώντας ένα διαμάντι με αιχ-

μέσ a και d , έτσι ώστε, $d_H(a) = 2$ και $d_H(b) = d_H(c) = 3 \leq d_H(d)$ (Σχημα 4.16) και

- περιέχεται σε ένα **κρεμαστό** K_4 (**pendant** K_4) εάν το H έχει ένα υπογράφημα με κορυφές $\{a, b, c, d\}$ προκαλώντας ένα K_4 , έτσι ώστε, $d_H(a) = d_H(b) = d_H(c) = 3 < d_H(d)$ (Σχημα 4.17).

Οποιαδήποτε διαμάντια και K_4 γραφήματα, όπως παραπάνω, θα αναφέρονται ως κρεμαστά διαμάντια και κρεμαστά K_4 (του H), αντίστοιχα. Τα κρεμαστά τρίγωνα, τα κρεμαστά διαμάντια και τα κρεμαστά K_4 του H θα αναφέρονται εν συντομία ως **κρεμαστά υπογραφήματα**. Σημειώστε ότι, αν ένα γράφημα H έχει κρεμαστό υπογράφημα, τότε, το H δεν είναι ισόμορφο με οποιοδήποτε γράφημα από το σύνολο $\{K_3, K_4, \text{διαμάντι}\}$. Επιπλέον, κάθε κρεμαστό υπογράφημα του H έχει μια μοναδική **ρίζα (root)**, δηλαδή, μια κορυφή που συνδέει το κρεμαστό υπογράφημα με το υπόλοιπο γράφημα. Συμβολίζουμε με $R_\Delta(H)$, $R_\Diamond(H)$ και $R_\Phi(H)$ τα σύνολα των ριζών όλων των κρεμαστών τριγώνων, των κρεμαστών διαμαντιών και των κρεμαστών K_4 του H , αντίστοιχα.

Ορισμός 4.1.5. [44] **Κρεμαστή μείωση (pendant reduction)** του H είναι το γράφημα που λαμβάνεται από το H , διαγράφοντας από το H , όλες τις κορυφές, που δεν αποτελούν ρίζες των κρεμαστών υπογραφημάτων του.

Ο χαρακτηρισμός των localizable line γραφημάτων δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.1.6. [44] Έστω H να είναι ένα συνεκτικό γράφημα και έστω $G = L(H)$. Τότε, το G είναι localizable, αν και μόνο αν, ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

- (1.) Το H δεν είναι ισόμορφο με οποιοδήποτε γράφημα από το σύνολο $\{K_3, K_4, \text{διαμάντι}\}$ και η κρεμαστή μείωση του, F , είναι ένα συνεκτικό διμερές γράφημα με διαμέριση του συνόλου των κορυφών του σε δύο ανεξάρτητα σύνολα U και W , έτσι ώστε:

$$(a.) R_\Diamond(H) \cup R_\Phi(H) \subseteq U,$$

$$(b.) R_\Delta(H) \subseteq W, \text{ και}$$

$$(c.) \text{κάθε κορυφή } u \in U \setminus R_\Diamond(H) \text{ είναι ισχυρή στο γράφημα } F - (N_F(u) \cap R_\Delta(H)).$$

- (2.) Το H είναι ισόμορφο, είτε με το K_3 , είτε με το K_4 .

Πριν αποδείξουμε το Θεώρημα 4.1.6, ας δούμε δύο από τις συνέπειές του.

Πόρισμα 4.1.7. [44] Έστω H είναι ένα συνεκτικό τρίγωνο-free γράφημα και έστω $G = L(H)$. Τότε, το G είναι localizable, αν και μόνο αν, το H είναι ένα equimatchable διμερές γράφημα.

Απόδειξη. Αν το H είναι τρίγωνο-free γράφημα, τότε, η κρεμαστή μείωση του, ισούται με το H και $R_{\Delta}(H) = R_{\Diamond}(H) = R_{\Phi}(H) = \emptyset$. Έτσι, η υπόθεση του πορίσματος είναι άμεσο επακόλουθο του Θεώρηματος 4.1.6 και του Λήματος 4.1.3. ■

Πόρισμα 4.1.8. [44] Υπάρχει ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα του προσδιορισμού, αν ένα δεδομένο line γράφημα είναι localizable.

Απόδειξη. Έστω G είναι ένα line γράφημα. Δεδομένου ότι ένα γράφημα H , έτσι ώστε, $G = L(H)$, μπορεί να υπολογιστεί σε γραμμικό χρόνο [48, 64], μπορούμε να υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε το H . Επιπλέον, επειδή το G είναι localizable, αν και μόνο αν, κάθε συνιστώσα του G είναι localizable, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το G (και επομένως το H) είναι συνεκτικό. Μπορούμε, επίσης, να υποθέσουμε ότι το H δεν είναι ισόμορφο με οποιοδήποτε γράφημα από το σύνολο $\{K_3, K_4, \text{διαμάντι}\}$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.1.6. Υπολογίζουμε τα κρεμαστά υπογραφήματα του H , τα σύνολα $R_{\Delta}(H)$, $R_{\Diamond}(H)$ και $R_{\Phi}(H)$ των ριζών τους, και η κρεμαστή μείωση F του H . Αν το F δεν είναι συνεκτικό και διμερές, τότε, επειδή το H δεν είναι ισόμορφο, είτε με το K_3 , είτε με το K_4 , από το Θεώρημα 4.1.6, συνεπάγεται ότι, το G δεν είναι localizable. Ως εκ τούτου, υποθέτουμε ότι το F είναι ένα συνεκτικό διμερές γράφημα, με διαμέριση του συνόλου των κορυφών του σε δύο ανεξάρτητα σύνολα U και W . Υπό αυτές τις υποθέσεις, για να επαληθεύσουμε, αν το $L(H)$ είναι localizable, αρκεί μόνο να επαληθεύσουμε, αν υπάρχει μέρος της διμέρισης του F , ας πούμε το U , ικανοποιώντας τις ακόλουθες συνθήκες:

- (a.) $R_{\Diamond}(H) \cup R_{\Phi}(H) \subseteq U$,
- (b.) $R_{\Delta}(H) \cap U = \emptyset$, και
- (c.) κάθε κορυφή $u \in U \setminus R_{\Phi}(H)$ είναι ισχυρή στο γράφημα $F - (N_F(u) \cap R_{\Delta}(H))$.

Όλοι οι παραπάνω υπολογισμοί καθώς και η επαλήθευση των συνθηκών (α.) και (β.) μπορούν να πραγματοποιηθούν σε γραμμικό χρόνο. Απομένει μόνο να επιβεβαιωθεί ότι η συνθήκη (γ.) μπορεί να ελεγχθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Παρατηρούμε ότι μια κορυφή $u \in U \setminus R_{\Phi}(H)$ δεν είναι ισχυρή στο γράφημα

$F^l = F - (N_F(u) \cap R_\Delta(H))$, αν και μόνο αν, το F^l έχει ένα ταίριασμα M , έτσι ώστε, κάθε γείτονας του u να είναι προσπίπτων με κάποια ακμή του M . Η ύπαρξη ενός τέτοιου ταίριασματος μπορεί να προσδιοριστεί από έναν υπολογισμό μέγιστου ταίριασματος στο (διμερές) υπογράφημα του F^l , που προκαλείται από τις κορυφές που απέχουν ένα ή δύο κόμβους από το u . Έτσι, η συνθήκη (γ.) μπορεί να επαληθευτεί σε πολυωνυμικό χρόνο, πραγματοποιώντας $O(|U|)$ υπολογισμούς διμερών ταίριασμάτων, το οποίο, είναι γνωστό ότι, μπορεί να επιλυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο (βλέπε, παράδειγμα, [41]). ■

Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας, αποδεικνύουμε το Θεώρημα 4.1.6. Αυτό θα γίνει μέσω μιας ακολουθίας λημμάτων. Το πρώτο μας λήμμα δίνει μια μετάφραση της ιδιότητας ότι το $G = L(H)$ είναι localizable στο γράφημα H . Θυμηθείτε ότι μια κορυφή $v \in V(H)$ λέμε ότι είναι ισχυρή, αν κάθε μεγιστοτικό ταίριασμα του H καλύπτει το v . Λέμε ότι ένα τρίγωνο T σε ένα γράφημα H είναι ισχυρό, αν κάθε μεγιστοτικό ταίριασμα του H περιέχει μια ακμή του T . Μια **αποσύνθεση (decomposition)** ενός γραφήματος H είναι ένα σύνολο $\mathcal{F}$ από υπογράφημα του H , έτσι ώστε, κάθε ακμή του H να εμφανίζεται ακριβώς σε ένα υπογράφημα που βρίσκεται στο $\mathcal{F}$ (επίσης λέμε ότι το $\mathcal{F}$ αποσυνθέτει το H).

Λήμμα 4.1.9. [44] Έστω $G = L(H)$. Τότε, το G είναι localizable, αν και μόνο αν, το H περιέχει ένα ανεξάρτητο σύνολο S από ισχυρές κορυφές και ένα σύνολο $\mathcal{T}$ από ισχυρά τρίγωνα που αποσυνθέτουν το $H - S$.

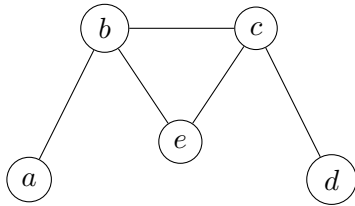
Απόδειξη. Έστω ένα γράφημα H και ας υποθέσουμε ότι το line γράφημα του, $G = L(H)$, είναι localizable. Έτσι, οι κορυφές του G μπορούν να διαμεριστούν σε $k = \alpha(G)$ ισχυρές κλίκες $C_1, \dots, C_k$. Υπενθυμίζουμε ότι κάθε ισχυρή κλίκα είναι μεγιστοτική. Κάθε μεγιστοτική κλίκα στο G αντιστοιχεί, είτε σε ένα τρίγωνο στο H , είτε σε ένα αστέρι του H , δηλαδή, σε ένα σύνολο ακμών της μορφής $E(v) = \{e \in E(H) : v \text{ είναι ένα άκρο του } e\}$, για κάποια $v \in V(H)$ (στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το $E(v)$ είναι το αστέρι με κέντρο του το v). Ας υποθέσουμε ότι οι κλίκες $C_1, \dots, C_{k'}$, αντιστοιχούν στα τρίγωνα $T_1, \dots, T_{k'}$ του H και ότι οι κλίκες $C_{k'+1}, \dots, C_k$ αντιστοιχούν στα αστέρια $S_{k'+1}, \dots, S_k$ του H , αντίστοιχα. Δεδομένου ότι, οι κλίκες $C_1, \dots, C_k$ αποτελούν διαμέριση του $V(G)$, και $G = L(H)$, συνεπάγεται ότι τα τρίγωνα $T_1, \dots, T_{k'}$ και αστέρια $S_{k'+1}, \dots, S_k$ αποτελούν μια διαμέριση του συνόλου ακμών του H . Έστω i και j είναι δύο διακριτά στοιχεία από το σύνολο $\{k' + 1, \dots, k\}$ και έστω v_i, v_j είναι τα κέντρα των αστεριών S_i και S_j , αντίστοιχα, δηλαδή, $S_i = E(v_i)$ και $S_j = E(v_j)$. Επειδή τα S_i και S_j είναι ξένα μεταξύ τους, συνεπάγεται ότι τα v_i και v_j μη-γειτονικά. Συνεπώς, τα κέντρα των αστεριών $S_{k'+1}, \dots, S_k$ αποτελούν ένα ανεξάρτητο σύνολο, ας πούμε S , του H . Επειδή, για κάθε $i = \{1, \dots, k'\}$ και $j = \{k' + 1, \dots, k\}$,

το τρίγωνο T_i είναι ξένο με το αστέρι $S_j = E(v_j)$, από τον ορισμό του $E(v_j)$ συνεπάγεται ότι το v_j δεν είναι κορυφή του T_i . Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $i = \{1, \dots, k'\}$, το τρίγωνο T_i είναι υπογράφημα του $H - S$. Δεδομένου ότι το σύνολο $\{T_1, \dots, T_{k'}, S_{k'+1}, \dots, S_k\}$ αποτελεί μια διαμέριση του συνόλου ακμών του H , κάθε ακμή του $H - S$ ανήκει σε ένα μοναδικό τρίγωνο T_i . Συνεπώς, τα τρίγωνα $T_1, \dots, T_{k'}$ είναι υπογραφήματα του $H - S$, που αποσυνθέτουν το $H - S$. Δεδομένου ότι κάθε μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο του G , τέμνει κάθε ισχυρή κλίκα $C_1, \dots, C_k$, συμπεραίνουμε ότι, κάθε μεγιστοτικό ταίριασμα στο H , τέμνει κάθε τρίγωνο T_i και κάθε αστέρι S_j για $i = 1, \dots, k'$ και $j = k' + 1, \dots, k$, δηλαδή, κάθε τρίγωνο T_i είναι ισχυρό και κάθε κορυφή στο S είναι ισχυρή.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το H περιέχει ένα ανεξάρτητο σύνολο S από ισχυρές κορυφές και ένα σύνολο $\mathcal{T}$ ισχυρών τριγώνων που αποσυνθέτουν το $H - S$. Κάθε τρίγωνο στο $\mathcal{T}$ αντιστοιχεί σε μια κλίκα στο $G = L(H)$ και κάθε αστέρι με κέντρο $s \in S$ αντιστοιχεί, επίσης, σε μια κλίκα στο G . Αυτό μας δίνει σαφώς μια διαμέριση του συνόλου κορυφών του G σε κλίκες $C_1, \dots, C_k$. Επιπλέον, δεδομένου ότι κάθε μεγιστοτικό ταίριασμα στο H καλύπτει το S και περιέχει μια ακμή από κάθε τρίγωνο στο $\mathcal{T}$, προκύπτει ότι, κάθε μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο του G , τέμνει κάθε μεγιστοτική κλίκα $C_1, \dots, C_k$, και έτσι, κάθε μία από αυτές τις κλίκες είναι ισχυρή. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, το G είναι localizable. ■

Λαμβάνοντας υπόψη ένα γράφημα H , έτσι ώστε, το $L(H)$ να είναι localizable, ένα ζεύγος $(S, \mathcal{T})$, τέτοιο ώστε, το S να είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο ισχυρών κορυφών του H και το $\mathcal{T}$ να είναι ένα σύνολο ισχυρών τριγώνων, που αποσυνθέτουν το $H - S$, θα αναφέρεται ως **line-localizability πιστοποιητής** του H .

Το επόμενο λήμμα χαρακτηρίζει ισχυρά τρίγωνα σε ένα γράφημα H . Ένας **ταύρος (bull)** είναι ένα γράφημα με κορυφές $\{a, b, c, d, e\}$ και ακμές $\{(a, b), (b, c), (c, d), (b, e), (c, e)\}$, όπως φαίνεται στο σχήμα παρακάτω.



Ένα τρίγωνο T , του H , λέμε ότι περιέχεται σε έναν ταύρο, αν υπάρχει ένα υπογράφημα του H , ισόμορφο με έναν ταύρο που περιέχει το T , ως υπογράφημα.

Λήμμα 4.1.10. [44] Για κάθε τρίγωνο T , σε ένα συνεκτικό γράφημα H τάξης τουλάχιστον 4, οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

- (1.) Το T είναι ισχυρό στο H .
- (2.) Το T δεν περιέχεται σε κανένα ταύρο.
- (3.) Το T είναι, είτε ένα κρεμαστό τρίγωνο, είτε περιέχεται σε ένα κρεμαστό διαμάντι ή σε ένα κρεμαστό K_4 .

Απόδειξη. Έστω ένα γράφημα H και έστω T είναι ένα τρίγωνο στο H . Το T δεν είναι ισχυρό, αν και μόνο αν, υπάρχει ένα ταίριασμα M στο H , που δεν περιέχει καμία ακμή του T και καλύπτει τουλάχιστον δύο κορυφές του T . Ένα ελαχιστοτικό ταίριασμα, με τέτοιες ιδιότητες, αποτελείται από δύο ακμές, με καθεμία από αυτές προσκείμενη σε μια κορυφή του T , και ως εκ τούτου σχηματίζει έναν ταύρο με το T . Επομένως, το T δεν είναι ισχυρό, αν και μόνο αν, το T περιέχεται σε έναν ταύρο.

Αν το T είναι, είτε ένα κρεμαστό τρίγωνο, είτε περιέχεται σε ένα κρεμαστό διαμάντι ή σε ένα κρεμαστό K_4 , τότε, το T δεν περιέχεται σε κανένα ταύρο. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι, το T δεν περιέχεται σε κανένα ταύρο και, έστω, το U να είναι το σύνολο των κορυφών του T , που έχουν έναν γείτονα έξω από το T . Αν $|U| \leq 1$, τότε, το T είναι ένα κρεμαστό τρίγωνο. Αν $|U| = 2$, τότε, επειδή το T δεν περιέχεται σε κανένα ταύρο, υπάρχει μια μοναδική κορυφή έξω από το T που αποτελεί γείτονα των κορυφών του U , και ως εκ τούτου το T περιέχεται σε ένα κρεμαστό διαμάντι. Ομοίως, αν $|U| = 3$, τότε, το T περιέχεται σε ένα κρεμαστό K_4 . Αυτό αποδεικνύει την ισοδυναμία των δύο τελευταίων συνθηκών. ■

Το επόμενο λήμμα δείχνει ότι, με εξαίρεση δύο μικρών περιπτώσεων, τα ισχυρά τρίγωνα στο H είναι ανά δύο ξένα ως προς τις ακμές μεταξύ τους (θα αναφέρονται ως **ακμές-ξένα**, για συντομία).

Λήμμα 4.1.11. [44] Έστω H είναι ένα συνεκτικό γράφημα, που δεν είναι ισόμορφο, ούτε με το K_4 , ούτε με το διαμάντι. Τότε, οποιαδήποτε δύο ισχυρά τρίγωνα στο H είναι ακμές-ξένα.

Απόδειξη. Έστω H είναι ένα συνεκτικό γράφημα και, έστω, ένα ζεύγος $T = \{a, b, c\}$ και $T' = \{a, b, d\}$ ισχυρών τριγώνων, στο H , που μοιράζονται μια ακμή (την (a, b)). Από το Λήμμα 4.1.10, καθενα από τα T και T' είναι, είτε ένα κρεμαστό τρίγωνο, είτε περιέχεται σε ένα κρεμαστό διαμάντι ή σε ένα κρεμαστό

K_4 . Δεδομένου ότι κάθε ένα από τα T και T' έχει το πολύ μια κορυφή βαθμού 2, κανένα από αυτά δεν μπορεί να είναι ένα κρεμαστό τρίγωνο. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι ένα από αυτά, ας πούμε το T , περιέχεται σε ένα κρεμαστό διαμάντι. Τότε, το σύνολο κορυφών αυτού του διαμαντιού είναι ακριβώς $\{a, b, c, d\}$, και η μόνη δυνατότητα που απομένει για το T' είναι να περιέχεται, επίσης, σε ένα κρεμαστό διαμάντι. Επειδή, το H είναι συνεκτικό, συμπεραίνουμε ότι, το H είναι ισόμορφο με ένα διαμάντι σε αυτήν την περίπτωση. Αν το T περιέχεται σε ένα κρεμαστό K_4 , τότε, ομοίως, το σύνολο κορυφών, αυτού του K_4 , είναι ακριβώς $\{a, b, c, d\}$ και η μόνη εναπομένουσα δυνατότητα για το T' είναι να περιέχεται, επίσης, σε ένα κρεμαστό K_4 , και, ως εκ τούτου, $H \cong K_4$, σε αυτήν την περίπτωση. ■

Έστω H είναι ένα συνεκτικό γράφημα που δεν είναι ισόμορφο με οποιοδήποτε γράφημα από το σύνολο $\{K_3, K_4, \text{διαμάντι}\}$. Θυμηθείτε ότι, η κρεμαστή μείωση του H είναι το γράφημα, που λαμβάνεται από το H , διαγράφοντας από το H , όλες τις μη-ρίζες των κρεμαστών υπογραφημάτων του. Το επόμενο λήμμα καθορίζει κάποιες απαραίτητες συνθήκες, ώστε το $L(H)$ να είναι localizable.

Λήμμα 4.1.12. [44] Έστω H είναι ένα συνεκτικό γράφημα, μη ισόμορφο με κάποιο γράφημα από το σύνολο $\{K_3, K_4, \text{διαμάντι}\}$, έτσι ώστε, το $L(H)$ να είναι localizable και έστω (S, T) να είναι ένας line-localizability πιστοποιητής του H . Τότε:

- (1.) Το T είναι το σύνολο όλων των ισχυρών τριγώνων του H .
- (2.) $R_\Delta(H) \cap S = \emptyset$.
- (3.) $R_\Diamond(H) \cup R_\Phi(H) \subseteq S$.
- (4.) Η κρεμαστή μείωση F του H είναι ένα συνεκτικό διμερές γράφημα με διαμέριση του συνόλου κορυφών του $\{S, V(F) \setminus S\}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα H , S και T να είναι όπως στην υπόθεση του λήμματος. Συμβολίζουμε με $\mathcal{T}_\Delta$ το σύνολο των κρεμαστών τριγώνων του H , με $\mathcal{T}_\Diamond$ το σύνολο των τριγώνων του H που περιέχονται σε ένα κρεμαστό διαμάντι και με $\mathcal{T}_\Phi$ το σύνολο των τριγώνων του H που περιέχονται σε ένα κρεμαστό K_4 . Από το Λήμμα 4.1.10, κάθε ισχυρό τρίγωνο του H ανήκει σε ένα (και έπειτα σε ακριβώς ένα) από τα σύνολα $\mathcal{T}_\Delta$, $\mathcal{T}_\Diamond$ και $\mathcal{T}_\Phi$. Επιπλέον, από το Λήμμα 4.1.11, οποιαδήποτε δύο τρίγωνα στο σύνολο $\mathcal{T}_\Delta \cup \mathcal{T}_\Diamond \cup \mathcal{T}_\Phi$ είναι ακμές-ξένα.

Από το Λήμμα 4.1.10, για να δείξουμε τη υπόθεση (1.), πρέπει να δείξουμε ότι $T = \mathcal{T}_\Delta \cup \mathcal{T}_\Diamond \cup \mathcal{T}_\Phi$. Δεδομένου ότι κάθε τρίγωνο στο T είναι ισχυρό, έχουμε

ότι $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\Delta \cup \mathcal{T}_\diamond \cup \mathcal{T}_\clubsuit$. Θα αποδείξουμε την αντίστροφη κατεύθυνση, δηλαδή, ότι $\mathcal{T}_\Delta \cup \mathcal{T}_\diamond \cup \mathcal{T}_\clubsuit \subseteq \mathcal{T}$, σε τρία βήματα. Στην πορεία, θα αποδείξουμε, επίσης, τις παραπάνω υποθέσεις (2.) και (3.).

Αρχικά, έστω $T = \{a, b, c\} \in \mathcal{T}_\Delta$ είναι ένα κρεμαστό τρίγωνο με ρίζα την κορυφή c . Σημειώστε ότι, καμία από τις κορυφές a και b δεν είναι ισχυρή. Επομένως, $\{a, b\} \cap S = \emptyset$ και, κατά συνέπεια, υπάρχει ένα ισχυρό τρίγωνο $T^l \in \mathcal{T}$, τέτοιο ώστε, $\{a, b\} \subseteq T^l$. Δεδομένου ότι, το T είναι το μοναδικό τρίγωνο του H , που περιέχει την ακμή (a, b) , συμπεραίνουμε ότι $T^l = T$ και ως εκ τούτου $T \in \mathcal{T}$. Αυτό σημαίνει ότι $\mathcal{T}_\Delta \subseteq \mathcal{T}$. Επιπλέον, επειδή το $T \in \mathcal{T}$, έχουμε ότι $T \cap S = \emptyset$ και, κατά συνέπεια, $c \notin S$. Αυτό αποδεικνύει την υπόθεση (2.), δηλαδή, ότι δεν υπάρχει ρίζα κρεμαστού τριγώνου στο S .

Έστω $T = \{a, b, c\} \in \mathcal{T}_\diamond$ είναι ένα τρίγωνο που περιέχεται σε ένα κρεμαστό διαμάντι με ρίζα την κορυφή d , έτσι ώστε, $d_H(a) = 2$ και $d_H(b) = d_H(c) = 3$. Δεδομένου ότι η κορυφή a δεν είναι ισχυρή, έχουμε ότι $a \notin S$. Επειδή το S είναι ανεξάρτητο σύνολο, μια κορυφή εκ των b και c , ας πούμε η b , δεν ανήκει στο S . Από αυτό συνεπάγεται ότι η ακμή (a, b) περιέχεται σε κάποιο τρίγωνο $T^l \in \mathcal{T}$. Και πάλι, επειδή το T είναι το μόνο τρίγωνο που περιέχει την ακμή (a, b) , συμπεραίνουμε ότι $T^l = T$ και ως εκ τούτου $T \in \mathcal{T}$. Αυτό σημαίνει ότι, $\mathcal{T}_\diamond \subseteq \mathcal{T}$. Από το Λήμμα 4.1.11, τα ισχυρά τρίγωνα του H είναι ανά δύο ακμές-ξένα, επομένως, το τρίγωνο $\{b, c, d\}$ δεν είναι ισχυρό. Από αυτό συνεπάγεται ότι $d \in S$, επειδή διαφορετικά η ακμή (b, d) θα ήταν μια ακμή του $H - S$ που δεν καλύπτεται από κανένα τρίγωνο του $\mathcal{T}$.

Τώρα, έστω $T = \{a, b, c\} \in \mathcal{T}_\clubsuit$ είναι ένα τρίγωνο που περιέχεται σε ένα κρεμαστό K_4 με ρίζα την κορυφή d και $d_H(a) = d_H(b) = d_H(c) = 3$. Ας υποθέσουμε, για αντίφαση, ότι $T \notin \mathcal{T}$. Επειδή το S είναι ανεξάρτητο σύνολο, περιέχει το πολύ μια κορυφή του T . Μπορούμε, λοιπόν, να υποθέσουμε ότι $\{a, b\} \cap S = \emptyset$. Έστω T^l είναι το τρίγωνο στο $\mathcal{T}$ που καλύπτει την ακμή (a, b) . Επειδή $T \notin \mathcal{T}$, συμπεραίνουμε ότι, $T^l \neq T$ και, επομένως, $T^l = \{a, b, d\}$. Δεδομένου ότι, τα ισχυρά τρίγωνα του H είναι ανά δύο ακμές-ξένα και το T είναι ένα ισχυρό τρίγωνο που μοιράζεται την ακμή (a, b) με το T^l , συνεπάγεται ότι, το T^l δεν είναι ισχυρό, σε αντίθεση με το γεγονός ότι $T^l \in \mathcal{T}$. Αυτό σημαίνει ότι, $\mathcal{T}_\clubsuit \subseteq \mathcal{T}$. Όπως παραπάνω, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα ισχυρά τρίγωνα του H είναι ανά δύο ακμές-ξένα, συνεπάγεται ότι, για να καλύψουμε την ακμή (a, d) , πρέπει $d \in S$. Οι παραπάνω δύο παράγραφοι αποδεικνύουν την υπόθεση (3.), δηλαδή, ότι η ρίζα κάθε κρεμαστού διαμαντιού ή το K_4 είναι στο S .

Τέλος, θα αποδείξουμε την υπόθεση (4.). Έστω F είναι η κρεμαστή μείωση του H . Επειδή το H είναι συνεκτικό και η διαφορά του F από το H είναι οι κορυφές των κρεμαστών υπογραφημάτων του, που δεν είναι ρίζες, συμπεραίνουμε

ότι το F είναι συνεκτικό. Δεδομένου ότι, το $\mathcal{T}$ είναι το σύνολο όλων των ισχυρών τριγώνων του H και $T \cap S = \emptyset$, για όλα τα $T \in \mathcal{T}$, προκύπτει ότι $S \subseteq V(F)$, και πιο συγκεκριμένα, το S είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο του F . Αρκεί λοιπόν, να δείξουμε ότι το σύνολο $V(F) \setminus S$ είναι ανεξάρτητο. Έχουμε ότι $V(F) = Z \cup \mathcal{R}_\Delta$, όπου το Z είναι το σύνολο κορυφών του H που δεν περιέχονται σε κάποιο ισχυρό τρίγωνο. Ας υποθέσουμε, για αντίφαση, ότι υπάρχει μια ακμή $(u, v) \in E(H)$ που συνδέει δύο κορυφές του $V(F) \setminus S$. Τότε, το (u, v) είναι μια ακμή του γραφήματος $H - S$. Αν $\{u, v\} \cap Z \neq \emptyset$, τότε, το (u, v) θα ήταν μια ακμή του $H - S$ που δεν περιέχεται σε κάποιο τρίγωνο στο $\mathcal{T}$, σε αντίθεση με την υπόθεση για το $\mathcal{T}$. Έτσι, έχουμε $\{u, v\} \subseteq \mathcal{R}_\Delta$, και, συνεπώς, τα u και v είναι γειτονικές ρίζες δύο κρεμαστών τριγώνων. Επειδή το (u, v) είναι μια ακμή του $H - S$, περιέχεται σε κάποιο τρίγωνο $T \in \mathcal{T}$, το οποίο είναι σαφώς αδύνατο, λόγω του χαρακτηρισμού για τα ισχυρά τρίγωνα, που υπόθηκε από το Λήμματος 4.1.10. Αυτή η αντίφαση αποδεικνύει την υπόθεση (4.). ■

Τώρα, τα έχουμε όλα έτοιμα για να αποδείξουμε τον προανακοινωθέντα χαρακτηρισμό, για τα localizable line γραφήματα, τον οποίο επαναλαμβάνουμε εδώ για ευκολία.

Θεώρημα 4.1.6. (Επαναδιατύπωση) Έστω H είναι ένα συνεκτικό γράφημα και έστω $G = L(H)$. Τότε, το G είναι localizable, αν και μόνο αν, ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

(1.) Το H δεν είναι ισόμορφο με οποιοδήποτε γράφημα από το σύνολο $\{K_3, K_4, \text{διαμάντι}\}$ και η κρεμαστή μείωση του, F , είναι ένα συνεκτικό διμερές γράφημα με διαμέριση του συνόλου των κορυφών του σε δύο ανεξάρτητα σύνολα U και W , έτσι ώστε:

$$(a.) R_\Diamond(H) \cup R_\Diamond(H) \subseteq U,$$

$$(b.) R_\Delta(H) \subseteq W, \text{ και}$$

$$(c.) \text{κάθε κορυφή } u \in U \setminus R_\Diamond(H) \text{ είναι ισχυρή στο γράφημα } F - (N_F(u) \cap R_\Delta(H)).$$

(2.) Το H είναι ισόμορφο, είτε με το K_3 , είτε με το K_4 .

Απόδειξη. Έστω $G = L(H)$ είναι localizable και έστω $(S, \mathcal{T})$ είναι ένας line-localizability πιστοποιητής του H . Ας υποθέσουμε ότι, το H δεν είναι ισόμορφο με κάποιο από τα K_3 ή K_4 . Δεδομένου ότι, το line γράφημα του διαμαντιού δεν είναι localizable, το H δεν είναι, επίσης, ισόμορφο με το διαμάντι. Έστω F να είναι η κρεμαστή μείωση του H . Από την κατασκευή, έχουμε $\mathcal{R}_\Delta(H) \cup \mathcal{R}_\Diamond(H) \cup$

$\mathcal{R}_\diamond(H) \subseteq V(F)$. Από το Λήμμα 4.1.12, το F είναι ένα συνεκτικό διμερές γράφημα με διαμέριση του συνόλου κορυφών του $\{S, V(F) \setminus S\}$. Από το ίδιο λήμμα συνεπάγεται ότι, $\mathcal{R}_\diamond(H) \cup \mathcal{R}_\Delta(H) \subseteq S$ και $\mathcal{R}_\Delta(H) \subseteq V(F) \setminus S$. Έτσι, θέτοντας $W^l = N_F(u) \cap \mathcal{R}_\Delta(H)$ και $F^l = F - W^l$, πρέπει να δείξουμε μόνο ότι κάθε κορυφή $u \in S \setminus \mathcal{R}_\diamond(H)$ είναι ισχυρή στο γράφημα F^l και θα καταλήξουμε στο επιθυμητό συμπέρασμα, λαμβάνοντας $U = S$ και $W = V(F) \setminus S$. Ας υποθέσουμε, για αντίφαση, ότι υπάρχει μια κορυφή $u \in S \setminus \mathcal{R}_\diamond(H)$ που δεν είναι ισχυρή στο γράφημα F^l . Τότε, υπάρχει ένα μεγιστοτικό ταίριασμα M^l του F^l , τέτοιο ώστε, η u να μην είναι προσκείμενη με κάποια ακμή του M^l . Δεδομένου ότι, $u \in S$, η κορυφή u είναι ισχυρή στο H , δηλαδή, κάθε μεγιστοτικό ταίριασμα του H καλύπτει το u . Ωστόσο, τώρα, θα δείξουμε ότι το M^l περιέχεται σε ένα μεγιστοτικό ταίριασμα του H που δεν καλύπτει το u . Επειδή $u \in S$ και $\mathcal{R}_\Delta(H) \subseteq V(F) \setminus S$, η κορυφή u δεν είναι η ρίζα κρεμαστού τριγώνου του H . Επιπλέον, επειδή $u \notin \mathcal{R}_\diamond(H)$, δεν είναι, επίσης, ρίζα κρεμοστού K_4 . Έστω $\mathcal{D}$ είναι το (ενδεχομένως κενό) σύνολο των κρεμαστών διαμαντιών στο H που έχουν ως ρίζα την u . Για κάθε κρεμαστό διαμάντι $D \in \mathcal{D}$, έστω e_D είναι η ακμή του D που σχηματίζει ένα τρίγωνο με την u . Για κάθε κορυφή $w \in W^l$, έστω $T_w = \{T_1, \dots, T_k\}$ είναι το σύνολο των κρεμαστών τριγώνων του H με ρίζα την w , έστω $T_i = \{w, a_i, b_i\}$, και έστω $M_w = \{(w, a_1)\} \cup \{(a_i, b_i) : 2 \leq i \leq k\}$. Σημειώστε ότι το M_w είναι ένα ταίριασμα στο H . Έστω

$$M = M^l \cup \{e_D : D \in \mathcal{D}\} \cup \bigcup_{w \in W^l} M_w.$$

Τότε, το M είναι ένα ταίριασμα στο H που καλύπτει όλους τους γείτονες του u . Επομένως, το M^l περιέχεται σε ένα μεγιστοτικό ταίριασμα του H που δεν καλύπτει το u , σε αντίθεση με το γεγονός ότι το u είναι ισχυρό στο H . Αυτό συμπληρώνει την απόδειξη της μιας κατεύθυνσης.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι ισχύει μια από τις προτάσεις (1.) και (2.), στην υπόθεση του θεώρηματος. Αν το H είναι ισόμορφο με ένα από τα K_3 και K_4 , τότε, το line γράφημα του H είναι localizable. Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι η συνθήκη (1.) ισχύει, δηλαδή, το H δεν είναι ισόμορφο με οποιοδήποτε γράφημα του συνόλου $\{K_3, K_4, \text{διαμάντι}\}$ και η κρεμαστή μείωσης της, F , είναι ένα συνεκτικό διμερές γράφημα με μια διαμέριση του συνόλου των κορυφών της σε δύο ανεξάρτητα σύνολα U και W , έτσι ώστε, οι συνθήκες (a)-(c) να ισχύουν. Έστω $\mathcal{T}$ είναι το σύνολο όλων των ισχυρών τριγώνων του H . Θα δείξουμε ότι το ζεύγος $(U, \mathcal{T})$ είναι ένας line-localizability πιστοποιητής του H , και, συνεπώς, το G είναι localizable, από το Λήμμα 4.1.9. Με άλλα λόγια, πρέπει να δείξουμε ότι το U είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο από ισχυρές κορυφές στο H και ότι το $\mathcal{T}$ είναι ένα σύνολο από ισχυρά τρίγωνα που αποσυνθέτουν το

$H - U$. Από το Λήμμα 4.1.10, το $\mathcal{T}$ ισούται με το σύνολο που περιέχει όλα τα κρεμαστά τρίγωνα, όλα τα τρίγωνα που περιέχονται σε κάποιο κρεμαστό διαμάντι και όλα τα τρίγωνα που περιέχονται σε κάποιο κρεμαστό K_4 . Σημειώστε ότι με το Λήμμα 4.1.11, οποιαδήποτε δύο ισχυρά τρίγωνα στο H είναι ακμές-ξένα. Συνεπώς, το γεγονός ότι το F είναι διμερές και ότι ισχύουν οι ιδιότητες (a) και (b) συνεπάγεται ότι το $\mathcal{T}$ αποσυνθέτει το $H - U$. Είναι σαφές ότι, το U είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο στο H . Απομένει, λοιπόν, να δείξουμε ότι, κάθε κορυφή $u \in U$ είναι ισχυρή στο H . Ας υποθέσουμε, για αντίφαση, ότι κάποιο $u \in U$ δεν είναι ισχυρό στο H . Τότε, υπάρχει ένα μεγιστοτικό ταίριασμα M του H που δεν καλύπτει το u . Υπάρχουν δύο περιπτώσεις. Ας υποθέσουμε, πρώτα, ότι $u \in U \setminus \mathcal{R}_\Phi(H)$. Από την ιδιότητα (c), η κορυφή u είναι ισχυρή στο γράφημα $F' = F - (N_F(u) \cap R_\Delta(H))$. Συνεπάγεται ότι, το ταίριασμα $M' = M \cap E(F')$ καλύπτει όλες τις κορυφές στο $N_F(u) \cap R_\Delta(H)$, οι οποίες είναι ακριβώς οι γείτονες του u στο F' . Η επέκταση του M' σε ένα μεγιστοτικό ταίριασμα του F' , που δεν καλύπτει το u , δείχνει ότι, το u δεν είναι ισχυρό στο F' , το οποίο είναι άτοπο. Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι $u \in \mathcal{R}_\Phi(H)$. Έστω D είναι ένα κρεμαστό K_4 του H με σύνολο κορυφών $\{a, b, c, u\}$ και με ρίζα τη u . Εφόσον, η u δεν καλύπτεται από το M , το ταίριασμα M καλύπτει το πολύ δύο από τις κορυφές από το $\{a, b, c\}$. Προσθέτοντας στο M την ακμή που συνδέει το u με μια ακάλυπτη κορυφή του $\{a, b, c\}$, οδηγούμαστε σε ένα ταίριασμα του H που περιέχει πλήρως το M , το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι το M είναι μεγιστοτικό. Αυτό συμπληρώνει την απόδειξη. ■

Από το Θεώρημα 4.1.6, επέρχεται το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 4.1.13. [45] Το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ στην κλάση των line γραφημάτων ανήκει στην κλάση P.

4.1.2 Υποκυβικά και κυβικά γραφήματα

Ο καθορισμός της πολυπλοκότητας του προβλήματος ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ στην κλάση των K_4 -free γραφημάτων, ή και γενικότερα σε οποιαδήποτε κλάση γραφημάτων με οριοθετημένο αριθμό κλίκας, είχε δηλωθεί ως ανοικτό ζήτημα στο [44]. Επίσης, δεν γνωρίζουμε τυχόν αποτελέσματα πολυπλοκότητας για αυτό το πρόβλημα σε κλάσεις γραφημάτων με οριοθετημένο

μέγιστο βαθμό. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι υπάρχει ένας αλγόριθμος, γραμμικού χρόνου, για την αναγνώριση καλά-καλυπτόμενων γραφημάτων με οριοθετημένο μέγιστο βαθμό, λόγω του Caro και των συνεργατών του [16]. Ένα αποτέλεσμα για τα καλά-καλυπτόμενα υποκυβικά γραφήματα δόθηκε από Ramey [63].

Η δομή των γραφημάτων με μέγιστο βαθμό το πολύ δύο είναι τόσο περιορισμένη, ώστε, ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι άμεσος. Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι, το πρόβλημα είναι, επίσης, επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο στην, πιο γενική, κλάση υποκυβικών γραφημάτων. Αρχίζουμε με ένα λήμμα.

Λήμμα 4.1.14. [45] Έστω ότι $G = (V, E)$ είναι ένα συνεκτικό υποκυβικό γράφημα που περιέχει μια ισχυρή κλίκα C μεγέθους 3. Αν υπάρχει ισχυρή κλίκα C' στο G , τέτοια ώστε $C \neq C'$ και $C \cap C' \neq \emptyset$, τότε, το G είναι localizable, αν και μόνο αν, $G \cong \overline{P_2} + P_3$.

Απόδειξη. Ας είναι τα G , C και C' όπως περιγράφονται στην υπόθεση.

($\Leftarrow$) Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι το G είναι localizable, αν $G \cong \overline{P_2} + P_3$.

($\Rightarrow$) Ας υποθέσουμε ότι το G είναι localizable. Έστω $\mathcal{C}$ είναι μια διαμέριση του V σε ισχυρές κλίκες και έστω $C = \{a, b, c\}$.

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $|C'| = 3$. Αν $|C \cap C'| = 1$, τότε, η κορυφή του $C \cap C'$ θα έχει βαθμό τουλάχιστον 4, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι το G είναι υποκυβικό. Ως εκ τούτου, $|C \cap C'| = 2$. Μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $C \cap C' = \{a, b\}$. Έστω d η εναπομείναντα κορυφή του C' . Αν δεν υπάρχουν άλλες κορυφές στο G , τότε, το G είναι ισόμορφο με το γράφημα διαμάντι (diamond graph ή K_4) μείον μια ακμή, το οποίο δεν είναι localizable. Εφόσον, το G είναι συνεκτικό με $\Delta(G) = 3$, προκύπτει ότι, ένα από τα c και d έχει έναν γείτονα διαφορετικό από τα a και b . Αν τα c και d είναι γειτονικά, τότε $G \cong K_4$, το οποίο αντιτίθεται με την υπόθεση ότι η C είναι ισχυρή κλίκα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι μια κορυφή x είναι ο γείτονας του c , διαφορετική από τις a και b . Αν τα x και d είναι μη-γειτονικά, τότε, μπορούμε να επεκτείνουμε το σύνολο $\{d, x\}$ σε ένα μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο I , στο G , έτσι ώστε, $I \cap C = \emptyset$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι η C είναι ισχυρή κλίκα. Συνεπώς, τα x και d είναι γειτονικά. Μία από τις κλίκες C και C' πρέπει να περιέχεται στη $\mathcal{C}$, αφού είναι οι μόνες ισχυρές κλίκες που περιέχουν τις κορυφές a και b . Είναι ξεκάθαρο τώρα ότι μία από τις κλίκες $\{c, x\}$ και $\{d, x\}$ πρέπει να ανήκει στη $\mathcal{C}$. Αν το G

έχει περισσότερες από 5 κορυφές, τότε, το G είναι συνεκτικό με $\Delta(G) = 3$ και το x έχει ένα γείτονα y διαφορετικό από τα c και d . Είναι αδιαμφισβήτητο ότι, το y και το a είναι μη-γειτονικά, αφού το a , ήδη, έχει βαθμό 3. Αλλά, τώρα, κάθε μεγιστικό ανεξάρτητο σύνολο στο G που περιέχει το σύνολο $\{a, y\}$ είναι ξένο με τις δύο κλίκες $\{c, x\}$ και $\{d, x\}$, το οποίο, είναι αντίθετο με την παραδοχή ότι, μια από αυτές είναι στη $\mathcal{C}$ και ως εκ τούτου είναι ισχυρή. Έτσι, το G έχει ακριβώς 5 κορυφές, και είναι προφανές ότι $G \cong P_2 + P_3$.

Ας υποθέσουμε ότι, τώρα, $|C'| = 2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $C \cap C' = \{a\}$ και $C' = \{a, d\}$. Υσχυριζόμαστε ότι, το d έχει βαθμό τουλάχιστον 2. Έστω το d έχει βαθμό 1. Τότε, η μόνη ισχυρή κλίκα που περιέχει d είναι C' , επομένως, πρέπει να περιέχεται στη $\mathcal{C}$. Αυτό σημαίνει ότι το $C \notin \mathcal{C}$. Επομένως, οι κορυφές b και c πρέπει να περιέχονται σε ισχυρές κλίκες διάφορες της C . Από το πρώτο μέρος της απόδειξης, προκύπτει ότι, τα b και c περιέχονται σε ισχυρές κλίκες μεγέθους 2 (διαφορετικά θα έχουμε δύο ισχυρά τρίγωνα με μη-κενή την τομή). Έστω τα σύνολα $\{b, x\}$ και $\{c, y\}$ είναι ισχυρές κλίκες που περιέχουν τα b και c , αντίστοιχα. Δεδομένου ότι, το C είναι μια ισχυρή κλίκα στο G , προκύπτει ότι τα x και y είναι γειτονικά. Ωστόσο, ένα μεγιστικό ανεξάρτητο σύνολο που περιέχει τα a και x δεν μπορεί να διασταυρωθεί $\{c, y\}$, αντίθετα με την υπόθεση ότι η $\{c, y\}$ είναι μια ισχυρή κλίκα. Η προκύπτουσα αντίφαση καθιερώνει τον ισχυρισμό μας ότι, το d έχει βαθμό τουλάχιστον 2.

Παρατηρούμε ότι, το d δεν μπορεί να είναι γείτονας με το b ή το c , αφού $C' = \{a, d\}$ είναι ισχυρή κλίκα. Έστω ότι x είναι ένας γείτονας του d διάφορος του a . Δεδομένου ότι, το $\{a, d\}$ είναι μια ισχυρή κλίκα στο G , προκύπτει ότι το x είναι γείτονας και του b και του c . Αν το d έχει τρίτο γείτονα y , τότε, το y θα έπρεπε να είναι γείτονας και με τους δύο b και c , το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι $\Delta(G) \leq 3$. Επομένως, το d δεν έχει άλλο γείτονα και, δεδομένου ότι, το G είναι συνεκτικό, ακολουθεί ότι, το G είναι και πάλι ισόμορφο με το $P_2 + P_3$. ■

Είμαστε, πλέον, έτοιμοι να διατυπώσουμε το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας.

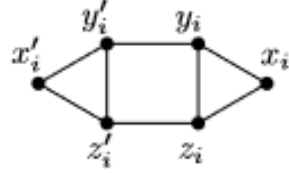
Θεώρημα 4.1.15. [45] *Το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο στην κλάση των υποκυβικών συνεκτικών γραφημάτων.*

Απόδειξη. Έστω $G = (V, E)$ είναι ένα υποκυβικό γράφημα. Δεδομένου ότι, ένα γράφημα είναι localizable, αν και μόνο αν, κάθε ένα από τα συνεκτικά του

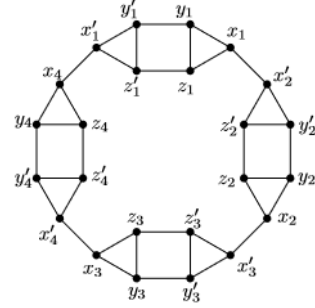
συστατικά είναι localizable, μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το G είναι συνεκτικό και μη-τετριμμένο. Επειδή ο μέγιστος βαθμός του G είναι το πολύ 3, μπορούμε να βρούμε όλες τις ισχυρές κλίκες του G σε πολυωνυμικό χρόνο (πρέπει να ελέγξουμε όλα τα υποσύνολα μεγέθους το πολύ 3 και τα υποσύνολα που επάγονται από τις γειτονιές τους). Αν υπάρχει ισχυρή κλίκα μεγέθους 4, τότε, $G \cong K_4$, επομένως είναι localizable. Διαφορετικά, όλες οι ισχυρές κλίκες στο G είναι μεγέθους 2 ή 3. Αν υπάρχει ισχυρή κλίκα μεγέθους 3 με μη-κενή τομή με άλλη ισχυρή κλίκα στο G , τότε, από το Λήμμα 4.1.14, το G είναι localizable, αν και μόνο αν, $G \cong \overline{P_2 + P_3}$.

Ως εκ τούτου, μπορούμε να υποθέσουμε, από τώρα και στο εξής, ότι κάθε ισχυρή κλίκα μεγέθους 3 είναι ξένη με κάθε άλλη ισχυρή κλίκα στο G . Επομένως, αν G είναι localizable, τότε, κάθε ισχυρή κλίκα μεγέθους 3 περιέχεται σε κάθε διαμέριση του V σε ισχυρές κλίκες. Δημιουργούμε, τώρα, ένα νέο γράφημα G' από τις κορυφές του G που δεν ανήκουν σε ισχυρές κλίκες μεγέθους 3. Δύο κορυφές του G' είναι γειτονικές, αν σχηματίζουν μια ισχυρή κλίκα μεγέθους 2 στο G . Αν υπάρχει ένα τέλειο ταίριασμα M στο G' , τότε, αυτό το ταίριασμα μαζί με όλες τις ισχυρές κλίκες μεγέθους 3 του G αποτελούν μια διαμέριση του V σε ισχυρές κλίκες. Ομοίως, αν υπάρχει μια διαμέριση του V σε ισχυρές κλίκες, τότε, είναι ξεκάθαρο ότι το σύνολο των κλικών μεγέθους 2 στη διαμέριση αυτή αποτελεί ένα τέλειο ταίριασμα στο G' . Επομένως, το G είναι localizable, αν και μόνο αν, το G' περιέχει ένα τέλειο ταίριασμα. Η επαλήθευση, του αν το G' περιέχει ένα τέλειο ταίριασμα, μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο (βλέπε για παράδειγμα [26]). ■

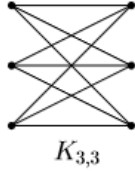
Στην περίπτωση των κυβικών (δηλαδή, των 3-κανονικών) γραφημάτων, το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 4.1.15 μπορεί να ενισχυθεί σε μια πλήρη κατηγοροποίηση. Αυτό μπορεί να προκύψει χρησιμοποιώντας την κατηγοροποίηση των καλώς-καλυπτόμενων κυβικών γραφημάτων, που οφείλεται στον Campbell και τους συνεργάτες του [15]. Ο κατάλογος αποτελείται από τρεις απειρώσιμες οικογένειες μαζί με έξι εξαιρετικά γραφήματα. Ελέγχοντας καθένα από τα γραφήματα στη λίστα, αν είναι localizable, μπορεί να προκύψει η κατηγοροποίηση των localizable κυβικών γραφημάτων που δίνονται από το Θεώρημα 4.1.16. Για έναν ακέραιο $n \geq 2$, υποδηλώνουμε με F_n το γράφημα που προκύπτει ως εξής: παίρνουμε έναν κύκλο $v_1 v_2 \dots v_n v_1$ μήκους n (αν $n = 2$, τότε, $v_1 v_2 v_1$ είναι ένας κύκλος μήκους δύο με δύο παράλληλες ακμές), αντικαταστήσουμε κάθε κορυφή v_i του κύκλου με τις κορυφές $x_i, x'_i, y_i, y'_i, z_i, z'_i$ που επάγουν το γράφημα F (βλέπε Σχήμα 4.2α). Αντικαθιστούμε κάθε ακμή (v_i, v_{i+1}) ($i = 1, \dots, n-1$) του κύκλου με μια ακμή $(x_i, x'_i + 1)$ και την ακμή (v_n, v_1) με την ακμή (x_n, x'_1) (δείτε το Σχήμα 4.2β' για παράδειγμα).



(α) Το γράφημα F .



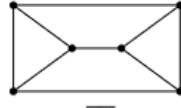
(β) Το γράφημα F_4 .



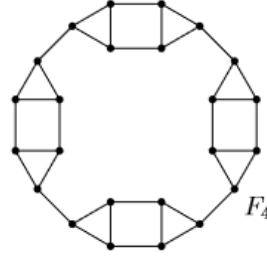
$K_{3,3}$



K_4



$\overline{C_6}$



F_4

(γ) Κυβικά localizable γραφήματα: $K_{3,3}$, K_4 , $\overline{C_6}$, και μια άπειρη οικογένεια $\{F_n | n \geq 2\}$.

Θεώρημα 4.1.16. [45] Έστω G είναι ένα συνεκτικό κυβικό γράφημα. Τότε, το G είναι localizable, αν και μόνο αν, το G είναι ισόμορφο με ένα από τα γραφήματα του συνόλου $\{K_{3,3}, K_4, \overline{C_6}\} \cup \{F_n | n \geq 2\}$ (βλέπε Σχήμα 4.1.18).

Δίνουμε εδώ μια σύντομη άμεση απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.16 και θα την ενισχύσουμε περαιτέρω προσθέτοντας την ιδιότητα ότι κάθε κορυφή του G περιέχεται σε μια ισχυρή κλίκα. Αρχικά, αναπτύσσουμε μια ιδιότητα των ισχυρών κλικών σε γενικά κανονικά γραφήματα.

Λήμμα 4.1.17. [45] Έστω $r \geq 1$ και έστω το G είναι ένα συνεκτικό r -κανονικό γράφημα. Τότε, το G έχει μια ισχυρή κλίκα μεγέθους δύο, αν και μόνο αν, $G \cong K_{r,r}$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το G είναι ένα συνεκτικό r -κανονικό γράφημα και έστω $\{u, v\}$ είναι μια ισχυρή κλίκα στο G . Δεδομένου ότι, η κλίκα $\{u, v\}$ είναι ισχυρή, είναι μια μεγιστοτική κλίκα και, ως εκ τούτου, δεν περιέχεται σε κανένα τρίγωνο. Έστω A να είναι το σύνολο των γειτόνων του u εκτός του v , και έστω B να είναι το σύνολο των γειτόνων του v εκτός του u . Από τον ορισμό, έχουμε ότι $A \cap B = \emptyset$. Υσχυριζόμαστε ότι κάθε κορυφή του A είναι γειτονική με

κάθε κορυφή του B . Υποθέτουμε, για αντίφαση, ότι κάποια κορυφή $x \in A$ δεν είναι γειτονική με κάποια κορυφή $y \in B$. Τότε, επεκτείνοντας το σύνολο $\{x, y\}$ σε ένα μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο στο G , οδηγούμαστε σε ένα μεγιστοτικό ανεξάρτητο που δεν περιέχει κανένα από τα u, v , το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι το $\{u, v\}$ είναι μια ισχυρή κλίκα. Επομένως, κάθε κορυφή του A είναι γειτονική με κάθε κορυφή του B , όπως ισχυριστήκαμε. Επειδή το G είναι r -κανονικό, $N(u) = A \cup \{v\}$ και $N(v) = B \cup \{u\}$, έχουμε ότι $|A| = |B| = r - 1$. Η συνεκτικότητα του G και το γεγονός ότι το G είναι r -κανονικό υποδηλώνει ότι $G \cong K_{r,r}$. Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι άμεση. ■

Θεώρημα 4.1.18. [45] Έστω G είναι ένα συνεκτικό κυβικό γράφημα. Τότε, οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (1.) Το G είναι localizable.
- (2.) Κάθε κορυφή του G περιέχεται σε μια ισχυρή κλίκα.
- (3.) Το G είναι ισόμορφο με ένα από τα γραφήματα στο σύνολο $\{K_{3,3}, K_4, \overline{C_6}\} \cup \{F_n | n \geq 2\}$ (βλέπε Σχήμα).

Απόδειξη. Από τον ορισμό των localizable γραφημάτων είναι γνωστό ότι κάθε κορυφή ενός localizable γραφήματος περιέχεται σε μια ισχυρή κλίκα. Συνεπώς, η πρόταση (1.) συνεπάγεται τη πρόταση (2.).

Είναι, επίσης, εύκολο να ελέγξουμε ότι κάθε ένα από τα γραφήματα στο σύνολο $\{K_{3,3}, K_4, \overline{C_6}\} \cup \{F_n | n \geq 2\}$ είναι localizable. Πράγματι, κάθε ακμή του $K_{3,3}$ είναι μια ισχυρή κλίκα, στο K_4 ολόκληρο το σύνολο των κορυφών είναι μια ισχυρή κλίκα, σε καθένα από τα υπόλοιπα γραφήματα κάθε κορυφή περιέχεται σε ένα μοναδικό τρίγωνο και όλα αυτά τα τρίγωνα είναι ισχυρά. Συνεπώς, η πρόταση (3.) συνεπάγεται τη πρόταση (1.).

Τέλος, θα δείξουμε ότι από την πρόταση (2.) συνεπάγεται η πρόταση (3.). Δεδομένου ότι το G είναι συνεκτικό κυβικό γράφημα, δεν μπορεί να περιέχει κλίκα μεγέθους 5 ή ισχυρή κλίκα μεγέθους 1. Εάν υπάρχει ισχυρή κλίκα μεγέθους 2 στο G , τότε από το Λήμμα 4.1.17, $G \cong K_{3,3}$. Αν υπάρχει ισχυρή κλίκα μεγέθους 4, στο G , τότε, $G \cong K_4$, αφού το G είναι κυβικό.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι κάθε κορυφή του G ανήκει σε μια ισχυρή κλίκα μεγέθους 3. Έστω $C_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ να είναι μια ισχυρή κλίκα στο G . Και οι τρεις κορυφές του C_1 δεν μπορούν να έχουν έναν κοινό γείτονα, αλλιώς το C_1 δεν θα είναι ισχυρή κλίκα. Ας υποθέσουμε ότι δύο κορυφές του C_1 , έστω οι x_1 και y_1 , έχουν έναν κοινό γείτονα, έστω τον w , έξω από το C_1 . Έστω $w' \neq z_1$ ο άλλος

γείτονας του w . Δεδομένου ότι, η μοναδική κλίκα μεγέθους 3 που περιέχει το w είναι η $\{x_1, y_1, w\}$, προκύπτει ότι η $\{x_1, y_1, w\}$ είναι μια ισχυρή κλίκα. Αν το w' δεν είναι γειτονικό με το z_1 , τότε, ένα μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο στο G , που περιέχει το $\{w', z_1\}$, θα ήταν ξένο με τη $\{x_1, y_1, w\}$, το οποίο είναι αντίθετο με το γεγονός ότι η $\{x_1, y_1, w\}$ είναι ισχυρή κλίκα. Αυτό σημαίνει ότι το w' είναι γείτονας του z_1 . Ωστόσο, στην περίπτωση αυτή, η κορυφή w' δεν ανήκει σε κανένα τρίγωνο στο G , το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι κάθε κορυφή του G ανήκει σε μια ισχυρή κλίκα μεγέθους 3. Αυτό δείχνει ότι, δεν υπάρχουν δύο κορυφές του C_1 που να έχουν έναν κοινό γείτονα έξω από το C_1 .

Εάν οι γείτονες των x_1, y_1, z_1 , εκτός του C_1 , σχηματίζουν ένα ανεξάρτητο σύνολο S , τότε, κάθε μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο στο G , που περιέχει το S , θα είναι ξένο με το C_1 , πράγμα που είναι άτοπο. Ας υποθέσουμε τώρα ότι y'_1 και z'_1 είναι οι απομείνων γείτονες των y_1 και z_1 και ότι y'_1 είναι γείτονας του z'_1 . Δεδομένου ότι κάθε κορυφή ανήκει σε ένα τρίγωνο, έπεται ότι τα y'_1 και z'_1 έχουν έναν κοινό γείτονα, έστω τον x'_1 . Αν x_1 είναι γείτονας του x'_1 , τότε, $G \cong \overline{C}_6$. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα x_1 και x'_1 δεν είναι γειτονικά. Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι, για κάθε ισχυρή κλίκα $C = \{u, v, w\}$ στο G , υπάρχουν κορυφές u', v', w' , έτσι ώστε, $(v, v'), (w, w') \in E$, $\{u', v', w'\}$ είναι ισχυρή κλίκα και το u δεν είναι γείτονας του u' .

Έστω x'_2 είναι ο απομείνων γείτονας του x_1 . Εφόσον, το x'_2 ανήκει σε μια ισχυρή κλίκα, προκύπτει ότι υπάρχουν κορυφές y'_2 και z'_2 , έτσι ώστε, $C_2 = \{x'_2, y'_2, z'_2\}$ να είναι ισχυρή κλίκα. Το γεγονός ότι το G είναι κυβικό, συνεπάγεται ότι, $\{y'_2, z'_2\} \cap \{x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1\} = \emptyset$. Έστω τα y_2 και z_2 είναι οι απομείνων γείτονες των y'_2 και z'_2 , αντίστοιχα. Τότε, χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα, όπως παραπάνω, αντικαθιστώντας το C με το C_2 , μπορούμε εύκολα να δούμε ότι τα y_2 και z_2 είναι γειτονικά και ότι έχουν έναν κοινό γείτονα, δηλαδή, το x_2 . Αν το x_2 είναι γειτονικό με το x'_1 , τότε, $G \cong F_2$. Αν τα x_2 και x'_1 δεν είναι γειτονικά, τότε, έστω το x'_3 να είναι ο απομείνων γείτονας του x_2 και επαναλαμβάνουμε το ίδιο επιχείρημα όπως πριν. Εφόσον το γράφημα είναι πεπερασμένο και συνεκτικό, προκύπτει ότι για κάποιο n , θα έχουμε ότι το x_n είναι γειτονικό με το x'_1 , επομένως, $G \cong F_n$. ■

Ολοκληρώνουμε την υποενότητα σημειώνοντας ότι, όπως παρατηρείται στο [43], η ισοδυναμία μεταξύ των προτάσεων (1.) και (2.), στο Θεώρημα 4.1.18, δεν μπορεί να γενικευθεί σε αυθαίρετα κανονικά γραφήματα. Ένα μικρό 8-κανονικό αντιπαράδειγμα δίνεται από το line γράφημα του K_6 . Επιπροσθέτως, στο [43] μη-localizable κανονικά γραφήματα κατασκευάζονται, έτσι ώστε, κάθε μεγιστοτική κλίκα να είναι ισχυρή.

4.1.3 Τρίγωνο-free γραφήματα και C_4 -free γραφήματα

Έστω G είναι ένα τρίγωνο-free γράφημα χωρίς απομονωμένες κορυφές. Επειδή το G είναι τρίγωνο-free και δεν έχει απομονωμένες κορυφές, το G είναι localizable, αν και μόνο αν, το G έχει μια διαμέριση του συνόλου των κορυφών του σε ισχυρές κλίκες μεγέθους δύο.

Πρόταση 4.1.19. [44] Για ένα τρίγωνο-free γράφημα G , χωρίς μεμονωμένες κορυφές, οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:

- (1.) Το G είναι localizable.
- (2.) Το G έχει ένα τέλειο ταίριασμα στο οποίο κάθε ακμή είναι μια ισχυρή κλίκα.
- (3.) Το G έχει ένα τέλειο ταίριασμα, και κάθε ακμή κάθε τέλειου ταιριάσματος στο G είναι μια ισχυρή κλίκα.

Απόδειξη. Δεδομένου ότι το G είναι ένα τρίγωνο-free γράφημα και δεν έχει απομονωμένες κορυφές, κάθε ισχυρή κλίκα στο G είναι μεγέθους δύο. Οι συνεπαγωγές (3.) $\Rightarrow$ (2.) $\Rightarrow$ (1.) ισχύουν για όλα τα γραφήματα. Η πρώτη συνεπαγωγή είναι προφανής και η δεύτερη προέρχεται από τον ορισμό των localizable γραφημάτων. Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι το G είναι localizable. Από το Θεώρημα 1.2.47, το G έχει μια κάλυψη α -κλικών και κάθε κλίκα σε κάθε κάλυψη α -κλικών στο G είναι ισχυρή. Έστω $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_{\alpha(G)}\}$ είναι μια κάλυψη α -κλικών στο G . Επειδή κάθε κλίκα C_i είναι ισχυρή, κάθε C_i έχει μέγεθος 2, δηλαδή, το $\mathcal{C}$ είναι τέλειο ταίριασμα στο G . Συνεπώς, $\alpha(G) = |\mathcal{C}| = \frac{|V(G)|}{2}$. Αντίστροφα, αν M είναι ένα τέλειο ταιριασμα στο G , τότε, το M είναι μια κάλυψη α -κλικών στο G , και, επομένως, επειδή κάθε κλίκα σε κάθε κάλυψη α -κλικών είναι ισχυρή, κάθε ακμή του M είναι μια ισχυρή κλίκα. ■

Η Πρόταση 4.1.19 και το Πόρισμα 1.2.49 οδηγούν στον χαρακτηρισμό των καλά-καλυπτόμενων γραφημάτων στην κλάση των τρίγωνο-free ημι-τέλειων γραφημάτων από τους Dean και Zito [23] (Θεώρημα 4.3). Από αλγοριθμική όψη, η Πρόταση 4.1.19 υποδηλώνει την ύπαρξη ενός αλγορίθμου πολυωνυμικού χρόνου για τον έλεγχο, αν ένα δεδομένο τρίγωνο-free γράφημα είναι localizable: Μετά την αφαίρεση των απομονωμένων κορυφών, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τον αλγόριθμο του Edmonds [25] για να ελέγξει, αν το γράφημα έχει

τέλειο ταίριασμα και, αν βρεθεί ένα τέλειο ταίριασμα, κάθε μια από τις ακμές του ελέγχεται, αν είναι μια ισχυρή κλίκα. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι, μια ακμή (u, v) σε ένα τρίγωνο-free γράφημα G είναι μια ισχυρή κλίκα, αν και μόνο αν, κάθε κορυφή του $N(u)$ είναι γείτονας κάθε κορυφής στο $N(v)$.

Σχόλιο 4.1.20. [44] Οι δύο ισοδύναμες ιδιότητες χαρακτηρισμού αναγνώρισης localizable γραφημάτων στην κλάση των τρίγωνο-free γραφημάτων, χωρίς απομονωμένες κορυφές, εμφανίστηκαν στην βιβλιογραφία σε διάφορα κείμενα. Για παράδειγμα, όπως αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τους Staples [67], Θεώρημα 1.11] το 1975 και Favaron [28] το 1982, οι δύο ιδιότητες χαρακτηρίζουν, επακριβώς, την κλάση των πολύ καλά-καλυπτόμενων γραφημάτων (very well-covered). [Ένα γράφημα καλείται πολύ καλά-καλυπτόμενο, αν δεν έχει απομονωμένες κορυφές και κάθε μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο του είναι μεγέθους $\frac{|V(G)|}{2}$]. Σαφώς, αν ένα γράφημα G έχει ένα τέλειο ταίριασμα, τέτοιο ώστε, κάθε ακμή του να είναι ισχυρή κλίκα, τότε, το $V(G)$ μπορεί να διαμεριστεί σε ισχυρές κλίκες και, έτσι, το G είναι localizable. Συνεπώς, κάθε πολύ καλά-καλυπτόμενο γράφημα είναι localizable. Η συνθήκη (2.) είχε, επίσης, μελετηθεί, στο πλαίσιο της μεταθετικής άλγεβρας, από τους Benedetti και Varbaro [5].

Ας στραφούμε τώρα στον χαρακτηρισμό C_4 -free γραφημάτων. Γνωρίζουμε ότι στα C_4 -free γραφήματα μια κλίκα είναι ισχυρή, αν και μόνο αν, είναι simplicial, από το Λήμμα 3.1.2. Ας δούμε, τώρα, πότε ένα γράφημα στην κλάση των C_4 -free είναι localizable.

Θεώρημα 4.1.21. [44] Ένα C_4 -free γράφημα G είναι localizable, αν και μόνο αν, κάθε κορυφή του G βρίσκεται σε μια μοναδική simplicial κλίκα.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 3.1.2, το G είναι localizable, αν και μόνο αν, το σύνολο κορυφών του μπορεί να διαμεριστεί σε simplicial κλίκες. Αυτή η συνθήκη ικανοποιείται, σαφώς, αν κάθε κορυφή βρίσκεται σε μια μοναδική simplicial κλίκα.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το $V(G)$ διαμερίζεται σε simplicial κλίκες $C_1, \dots, C_k$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $v \in C_i$, η κλίκα C_i είναι η μόνη simplicial κλίκα που περιέχει το v . Αυτό είναι προφανές, αν το v είναι simplicial κορυφή (στην περίπτωση αυτή, το C_i είναι η μόνη μεγιστοτική κλίκα που περιέχει v). Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι το v δεν είναι simplicial κορυφή και ότι το C^l είναι μια simplicial κλίκα που περιέχει το v , έτσι ώστε, $C^l \neq C_i$. Έστω $v' \in C^l$ είναι μια κορυφή, έτσι ώστε, $N[v'] = C^l$. Έστω μια simplicial κλίκα C_j , τέτοια ώστε, $v' \in C_j$. Έχουμε ότι $j \neq i$, γιατί διαφορετικά θα έχουμε $C_i \subseteq N[v'] = C^l$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι η C_i και η C^l είναι ξεχωριστές

μεγιστοποιητικές κλίκες. Δεδομένου ότι, το C_j είναι μια μεγιστοποιητική κλίκα, η κορυφή v έχει μια μη-γειτονική κορυφή στο C_j , ας πούμε την v'' . Όμως, τώρα, οι κορυφές v και v'' σχηματίζουν ένα ζευγάρι μη-γειτονικών κορυφών που είναι γείτονες του v' , το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι η γειτονιά του v' είναι μια κλίκα. Με αυτό δείχνουμε ότι το C_i είναι η μοναδική simplicial κλίκα που περιέχει την v και ολοκληρώνεται η απόδειξη. ■

Δεδομένου ότι, το σύνολο των simplicial κλίκων σε ένα γράφημα μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο, από το Θεώρημα 4.1.21, συνεπάγεται η ύπαρξη ενός αλγορίθμου, πολυωνύμου χρόνου, ο οποίος προσδιορίζει, αν ένα δεδομένο C_4 -free γράφημα είναι localizable.

Πόρισμα 4.1.22. [45] Το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ στην κλάση των C_4 -free γραφημάτων επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο.

Επιπλέον, δεδομένου ότι στην κλάση των ημι-τέλειων γραφημάτων, τα localizable γραφήματα συμπίπτουν με τα καλά-καλυπτόμενα, το Θεώρημα 4.1.21 γενικεύει τους προαναφερθέντες χαρακτηρισμούς των καλώς-καλυπτόμενων γραφημάτων στις τάξεις των chordal και των C_4 -free γραφημάτων, από τους Prisner και τους συνεργάτες του [62] και τους Dean και Zito [23], αντίστοιχα.

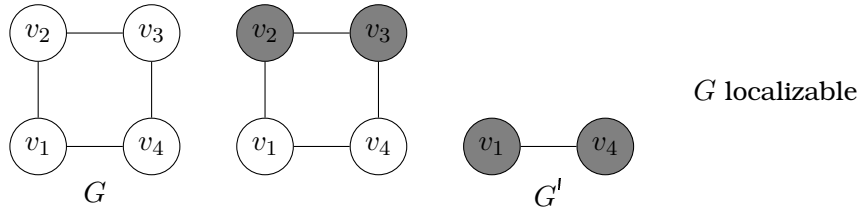
4.1.4 Cographs

Από την βιβλιογραφία, γνωρίζουμε ότι η κλάση των cographs είναι υποκλάση της κλάσης των cocomparability γραφημάτων. Για τα cocomparability γραφήματα, από το Θεώρημα 4.1.1, γνωρίζουμε ότι το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ μπορεί να επιλυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο και, μάλιστα, σε χρόνο $O(n \cdot m^2)$. Άμεσο πόρισμα αυτών είναι το εξής.

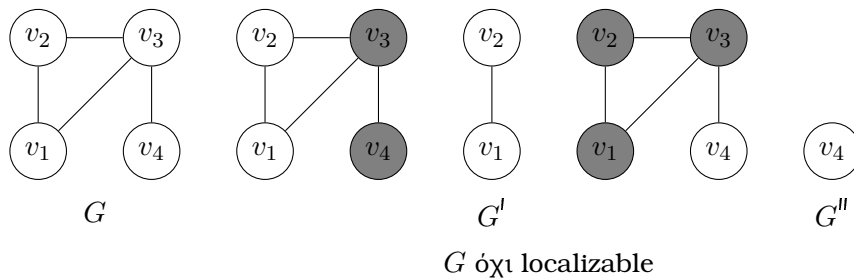
Πόρισμα 4.1.23. Το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο στην κλάση των cographs.

Παράδειγμα 4.1.24. Έχοντας ως δεδομένο το παρακάτω cograph G (1ο σχήμα), μπορούμε να δούμε ότι κάθε ακμή του γραφήματος αποτελεί μεγιστοποιητική (και, αντίστοιχα, ισχυρή) κλίκα στο γράφημα. Επιλέγουμε, τυχαία, μια τέτοια κλίκα, ας υποθέσουμε την κλίκα $C_1 = \{v_2, v_3\}$, την προσθέτουμε σε ένα, αρχικά, κενό σύνολο $\mathcal{S}(G)$ και, στη συνέχεια, την αφαιρούμε από το γράφημα. Το απομείνον

γράφημα, G' (3ο σχήμα), έχει ως μοναδική μεγιστοτική κλίκα, την μοναδική ακμή του, $C_2 = \{v_1, v_4\}$, η οποία είναι και μεγιστοτική κλίκα στο G . Προσθέτοντάς την στο σύνολο $\mathcal{S}(G)$ και αφαιρώντας την από το γράφημα G' , το G' έχει "άδειάσει" και το σύνολο $\mathcal{S}(G) = \{C_1, C_2\}$ αποτελεί πλέον διαμέριση του G σε μεγιστοτικές και, συνεπώς, σε ισχυρές κλίκες. Οπότε, το cograph G είναι localizable.



Παράδειγμα 4.1.25. Το παρακάτω cograph G (1ο σχήμα), μπορούμε να δούμε ότι, έχει ως μεγιστοτικές / ισχυρές κλίκες, το τρίγωνο $C_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ και την ακμή $C_2 = \{v_3, v_4\}$. Για να είναι το G localizable, θα πρέπει να υπάρχει μια διαμέριση του G , που να περιέχει και τις δυο μεγιστοτικές του κλίκες. Αυτό είναι άτοπο, καθώς, επιλέγοντας, τυχαία, μια από αυτές τις κλίκες, ας υποθέσουμε την κλίκα $C_2 = \{v_3, v_4\}$, αν την αφαιρούμε από το γράφημα G , η μοναδική μεγιστοτική κλίκα στο καινούργιο γράφημα G' (3ο σχήμα), είναι η μοναδική ακμή του, $C_3 = \{v_1, v_2\}$, η οποία δεν είναι μεγιστοτική κλίκα στο G . Αντίστοιχα, επιλέγοντας, τώρα, την μεγιστοτική κλίκα $C_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, και αφαιρώντας την από το γράφημα G , δημιουργείται το νέο γράφημα G'' (5ο σχήμα), με μοναδική κορυφή - κλίκα, την $C_4 = \{v_4\}$, η οποία δεν είναι μεγιστοτική κλίκα στο G . Συνεπώς, το cograph G δεν είναι localizable.



Σε αυτό το σημείο θα δώσουμε έναν αλγόριθμο που αναγνωρίζει localizable cographs σε χρόνο $O(n \cdot m)$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ: Αναγνώριση localizable cographs.

Είσοδος: Ένα συνεκτικό cograph $G = (V(G), E(G))$.

Έξοδος: Απάντηση, ναι ή όχι, στο πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ.

Βήμα 1: Ορίζουμε $G^l = G$.

Βήμα 2: Δημιουργούμε ένα νέο κενό σύνολο $\mathcal{S}(G)$.

Βήμα 3: Επιλέγουμε μια τυχαία μεγιστοτική κλίκα C από το G^l .

Βήμα 4: Αν η C δεν είναι μεγιστοτική στο G , **τότε**, το G δεν μπορεί να διαμεριστεί σε ισχυρές κλίκες, ο αλγόριθμος επιστρέφει την απάντηση όχι και τερματίζει, **αλλιώς**, συνεχίζει στο **Βήμα 5**.

Βήμα 5: Προσθέτουμε στο $\mathcal{S}(G)$ την κλίκα C .

Βήμα 6: Θεωρούμε $G^l = G^l - C$, δηλαδή, αφαιρούμε τις κορυφές της κλίκας C και όλες τις προσκείμενες σε αυτές ακμές από το G^l .

Βήμα 7: Αν $G^l = \emptyset$, **τότε**, υπάρχει διαμέριση του G σε ισχυρές κλίκες, το $\mathcal{S}(G)$, ο αλγόριθμος επιστρέφει την απάντηση ναι και τερματίζει, **αλλιώς**, επαναλαμβάνεται η διαδικασία από το **Βήμα 3**.

Για την απόδειξη της εγκυρότητας του αλγορίθμου παραθέτουμε και αποδεικνύουμε την παρακάτω πρόταση, με την οποία αποδεικνύουμε ότι η τυχαία επιλογή (μεγιστοτικών) κλικών στο **Βήμα 3** δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα του αλγορίθμου, δηλαδή, εάν υπάρχει, ή όχι, διαμέριση του γραφήματος σε ισχυρές κλίκες.

Πρόταση 4.1.26. Έστω G είναι ένα συνεκτικό cograph. Τότε, το αποτέλεσμα του αλγορίθμου αναγνώρισης localizable cographs είναι ανεξάρτητο από την τυχαία επιλογή κλικών στο **Βήμα 3** του αλγορίθμου.

Απόδειξη. Έστω G ένα συνεκτικό cograph. Τρέχοντας τον αλγόριθμο παραπάνω θα επιστραφεί, είτε η απάντηση ναι, είτε η απάντηση όχι, για το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ.

Έστω ο αλγόριθμος επέστρεψε την απάντηση: ναι. Τότε, το αποτέλεσμα του αλγορίθμου είναι το σύνολο $\mathcal{S}(G) = \{M_1, \dots, M_k\}$, με $k \leq \frac{n}{2} = \frac{|V(G)|}{2}$, που αποτελεί μια διαμέριση του γραφήματος G σε ισχυρές κλίκες.

Έστω, τώρα, ο αλγόριθμος επέστρεψε την απάντηση: όχι. Τότε, τα αποτελέσματα του αλγορίθμου είναι το σύνολο $\mathcal{S}(G) = \{M_1, \dots, M_k\}$, με $k \leq \frac{n}{2} = \frac{|V(G)|}{2}$, που αποτελείται από ισχυρές - μεγιστοτικές κλίκες του G , αλλά δεν απο-

τελεί διαμέριση του G σε ισχυρές κλίκες, και το σύνολο κορυφών $X = G^l = \{x \in V(G) | x \notin M_i, \forall i = \{1, \dots, k\}\}$, που αποτελείται από κορυφές του γραφήματος G , οι οποίες δεν ανήκουν σε κάποια ισχυρή κλίκα του $\mathcal{S}(G)$.

Ισχυριζόμαστε ότι δεν υπάρχει διαμέριση του G σε ισχυρές κλίκες. Ας υποθέσουμε, για αντίφαση, ότι, οι κλίκες $M_1^l, M_2^l, \dots, M_{k^l}^l$, αποτελούν μια διαμέριση του G σε ισχυρές κλίκες. Έστω αυτή η διαμέριση είναι η $\mathcal{S}^l(G) = \{M_1^l, \dots, M_{k^l}^l\}$, όπου, $|\mathcal{S}^l(G)| = k^l \geq k$. Επειδή, το $\mathcal{S}^l(G)$ είναι διαμέριση του G σε ισχυρές κλίκες, πρέπει όλα τα μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα του G να είναι μεγέθους k^l .

Όμως, αν $k < k^l$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο, I_1 , μεγέθους k , που να περιέχει μια ακριβώς κορυφή από κάθε κλίκα M_i του συνόλου $\mathcal{S}(G)$, για $i = \{1, \dots, k\}$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι το μέγεθος κάθε μεγιστοτικού ανεξάρτητου συνόλου του G είναι k^l .

Έστω, τώρα, $k = k^l$. Επειδή το $\mathcal{S}^l(G)$ αποτελεί διαμέριση του G σε ισχυρές κλίκες, κάθε κορυφή του X ανήκει σε τουλάχιστον ένα μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους k^l . Επιλέγουμε μια τυχαία κορυφή $x \in X$. Η x ανήκει σε ένα μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο, I_2 , μεγέθους k^l . Οι υπόλοιπες $(k^l - 1)$ -κορυφές του I_2 ανήκουν, είτε σε κάποιες από τις κλίκες M_i^l , για $j = \{1, \dots, k\}$, είτε στο σύνολο X . Αυτό, όμως, σημαίνει ότι, υπάρχει τουλάχιστον μια κλίκα του $\mathcal{S}(G)$ που δεν έχει κοινή κορυφή με το μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο I_2 . Έστω, η κλίκα αυτή είναι η M_p^l . Τότε, η M_p^l δεν είναι ισχυρή, το οποίο είναι άτοπο, καθώς, κάθε μεγιστοτική κλίκα στο G είναι ισχυρή.

Επομένως, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι, εάν δεν μπορεί να διαμεριστεί το G σε ισχυρές κλίκες, ο αλγόριθμος δεν πρόκειται να δώσει ως αποτέλεσμα μια διαμέριση του G σε ισχυρές κλίκες, ανεξάρτητα από την επιλογή των κλικών.

Συνοψίζοντας, αποδείξαμε ότι η τυχαία επιλογή κλικών στο **Βήμα 3** του αλγορίθμου, δεν πρόκειται να επηρεάσει το αποτέλεσμα του αλγορίθμου για την ύπαρξη, ή μη, διαμέρισης του G σε ισχυρές κλίκες. ■

Θεώρημα 4.1.27. Το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι επιλύσιμο σε $O(n \cdot m)$ χρόνο στην κλάση των *cographs*.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο αναγνώρισης *localizable cographs*, που περιγράφεται παραπάνω. Η ορθότητα του αλγορίθμου έπεται από τη Πρόταση 4.1.26. Για την ανάλυση του χρόνου, του αλγορίθμου, θεωρούμε ότι η είσοδος του αλγορίθμου είναι ένα συνεκτικό *cograph* G , με n κορυφές και m ακμές. Τα **Βήμα 3** και **Βήμα 4** χρειάζονται $O(n)$ χρόνο, για να υλοποι-

ηθούν, έχοντας το cotree του γραφήματος, ενώ, το **Βήμα 6** απαιτεί $O(n + m)$ χρόνο, διότι, κατασκευάζουμε νέο cotree, που αντιστοιχεί στο νέο γράφημα G^l . Όλα τα υπόλοιπα βήματα, σε μια επανάληψη του αλγορίθμου, θα χρειαστούν $O(1)$ χρόνο, αφού, χρησιμοποιούνται κλασικές δομές δεδομένων για την αναπαράσταση των συνόλων. Οι συνολικές επαναλήψεις του αλγορίθμου είναι το πολύ $\frac{n}{2}$, καθώς, σε κάθε επανάληψη διαγράφουμε τουλάχιστον μια ακμή από το γράφημα G^l . Επομένως, ο συνολικός χρόνος είναι $O(\frac{n}{2} \cdot (n + m)) = O(n \cdot m)$, αφού, το G είναι συνεκτικό και $m \geq n - 1$. ■

4.2 Υπολογιστικά όρια (δυσκολία) του προβλήματος

Έχοντας κάνει αναφορά σε κλάσεις γραφημάτων που δέχονται πολυωνυμική επίλυση, ήρθε η ώρα να αναφερθούμε και σε κλάσεις γραφημάτων που δεν έχει βρεθεί πολυωνυμικός αλγόριθμος.

4.2.1 Ασθενώς chordal γραφήματα

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα αναφερθούμε αρχικά στα ασθενώς chordal γραφήματα. Οι Chvátal και Slater [21] και οι Sankaranarayana και Stewart [65] απέδειξαν το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.2.1. [45] *Το πρόβλημα αναγνώρισης καλά-καλυπτόμενων γραφημάτων είναι co-NP-πλήρες, ακόμη και για ασθενώς chordal γραφήματα.*

Δεδομένου ότι, τα ασθενώς chordal γραφήματα είναι τέλεια, το Πόρισμα 1.2.49 υποδηλώνει ότι ένα ασθενώς chordal γράφημα είναι καλά-καλυπτόμενο, αν και μόνο αν, είναι localizable. Έτσι, το Θεώρημα 4.2.1 αποδίδει τα παρακάτω.

Θεώρημα 4.2.2. [45] *Το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι co-NP-πλήρες στην κλάση των ασθενώς chordal γραφημάτων.*

Από τα αποτελέσματα του Prisner και των συνεργατών του [62], προκύπτει ότι τα localizable γραφήματα μπορούν να αναγνωριστούν σε πολυωνυμικό χρόνο μέσα στην κλάση των chordal γραφημάτων (και, γενικότερα, στην κλάση των C_4 -free γραφημάτων [44]).

Και οι δύο αποδείξεις του Θεωρήματος 4.2.1, από τα [21, 65], βασίζονται σε μια αναγωγή από το πρόβλημα 3-SAT, όπως ακριβώς περιγράφηκε στην Υποε-νότητα 3.2.1.

(Επαναδιατύπωση) Η είσοδος στο πρόβλημα 3-SAT είναι ένα σύνολο λογικών μεταβλητών $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ και μια συλλογή προτάσεων $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$. Κάθε πρόταση αποτελείται από ακριβώς τρία στοιχεία, όπου, κάθε στοιχείο είναι, είτε μία από τις λογικές μεταβλητές (π.χ. x_i), είτε η άρνηση της (π.χ. $\overline{x_i}$). Ο στόχος είναι να προσδιοριστεί, αν η φόρμουλα $\Phi = \bigwedge_{i=1}^m C_i$ ικανοποιείται, δηλαδή, αν υπάρχει μια εκχώρηση αληθείας στις n -λογικές μεταβλητές, ώστε, να καθιστά όλες τις προτάσεις ταυτόχρονα αληθείς. Η αναγωγή παράγει από ένα δεδομένο στιγμιότυπο I του προβλήματος 3-SAT, ένα ασθενώς chordal γράφημα $G(I)$, έτσι ώστε, το $G(I)$ να μην είναι καλά-καλυπτόμενο, αν και μόνο αν, η Φ ικανοποιείται. Πιο συγκεκριμένα, δεδομένης μιας εισόδου $(X, \mathcal{C})$ για το πρόβλημα 3-SAT, που αντιπροσωπεύει μια φόρμουλα Φ , κατασκευάζεται ένα γράφημα $G = G(X, \mathcal{C})$, με σύνολο κορυφών $V(G) = C \cup L$, όπου, οι κορυφές του συνόλου $C = \{c_1, \dots, c_m\}$, αντιστοιχούν στις προτάσεις της συλλογής $\mathcal{C}$ και αποτελούν μια κλίκα στο γράφημα G , ενώ, οι κορυφές του συνόλου $L = \{x_1, \overline{x_1}, \dots, x_n, \overline{x_n}\}$, αντιστοιχούν στις λογικές μεταβλητές του συνόλου X και τις αρνήσεις τους, έτσι ώστε, για κάθε $i \in 1, \dots, n$, οι κορυφές x_i και $\overline{x_i}$ είναι γειτονικές. Επίσης, για κάθε κορυφή $c_i \in C$ και κάθε κορυφή $\ell \in L$, υπάρχει η ακμή (c_i, ℓ) στο γράφημα G , αν και μόνο αν, η πρόταση C_i περιέχει τη μεταβλητή ℓ . Δεν υπάρχουν άλλες ακμές στο γράφημα. Τότε, το Φ ικανοποιείται, αν και μόνο αν, το G δεν είναι καλά-καλυπτόμενο [21, 65].

Το Θεώρημα 3.2.2 υποδηλώνει ότι οι προφανείς επιβεβαιώσεις, για ναι-στιγμιότυπα του προβλήματος αναγνώρισης localizable γραφημάτων, πιθανότατα, δεν μπορούν να επαληθευτούν σε πολυωνυμικό χρόνο, αφήνοντας ασαφές το κύρος της ιδιότητας μέλους του προβλήματος ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ στο NP (ή στο co-NP).

4.2.2 Συμπληρώματα των line γραφημάτων και γραφήματα με αριθμό ανεξαρτησίας k

Σε αυτό το σημείο, θα ασχοληθούμε με την κλάση των συμπληρωμάτων των line γραφημάτων. Μια άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι το πρόβλημα ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο στην κλάση των συμπληρωμάτων των line γραφημάτων είναι η ακόλουθη.

Πόρισμα 4.2.3. [45] Το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ στην κλάση των συμπληρωμάτων των line γραφημάτων ανήκει στην κλάση NP.

Σε αντίθεση με το Πόρισμα 3.1.11, θα δείξουμε ότι το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι NP-πλήρες στην κλάση των συμπληρωμάτων των line γραφημάτων. Η απόδειξη βασίζεται στα ακόλουθα.

Λήμμα 4.2.4. [45] Έστω $k \geq 2$ να είναι ακέραιος αριθμός και έστω G να είναι ένα τρίγωνο-free k -κανονικό γράφημα. Τότε, το G είναι k -ακμές-χρωματίσιμο, αν και μόνο αν, το $\overline{L}(G)$ είναι localizable.

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι, αφού το G είναι k -κανονικό, ισχύει ότι: $\chi^1(G) \geq k$. Συγκεκριμένα, το G είναι k -ακμές-χρωματίσιμο, αν και μόνο αν, $\chi^1(G) = k$. Δεδομένου ότι, το G δεν έχει κορυφές βαθμού 0 ή 1, δεν υπάρχουν δύο αστέρια του G , που να είναι συγκρίσιμα ως προς την έγκλειση συνόλων, πράγμα που σημαίνει ότι οι μεγιστοτικές κλίκες του $L(G)$ είναι ακριβώς τα αστέρια του G . Δεδομένου ότι, το G είναι k -κανονικό, οι μεγιστοτικές κλίκες του $L(G)$ είναι μεγέθους k και συνεπώς το $\overline{L}(G)$ είναι ένα καλά-καλυπτόμενο γράφημα με αριθμό ανεξαρτησίας k . Από το Θεώρημα 1.2.47 προκύπτει ότι, το $\overline{L}(G)$ είναι localizable, αν και μόνο αν, $\theta(\overline{L}(G)) = k$. Η υπόθεση του λήμματος προκύπτει, τώρα, από το γεγονός ότι $\theta(\overline{L}(G)) = \chi(L(G)) = \chi^1(G)$ είναι ο χρωματικός δείκτης του G . ■

Θεώρημα 4.2.5. [45] Για κάθε ακέραιο αριθμό $k \geq 3$, το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι NP-πλήρες στην κλάση των συμπληρωμάτων των line γραφημάτων των τρίγωνο-free k -κανονικών γραφημάτων.

Απόδειξη. Το γεγονός ότι το πρόβλημα είναι NP, προκύπτει από το Πόρισμα 4.2.3. Οι Cai και Ellis έδειξαν στο [14] ότι για κάθε $k \geq 3$, είναι NP-πλήρες ο προσδιορισμός, αν ένα δεδομένο τρίγωνο-free k -κανονικό γράφημα είναι k -ακμές-χρωματίσιμο. Έτσι, αν $k \geq 3$ και το G είναι ένα δεδομένο τρίγωνο-free

k -κανονικό γράφημα, το Λήμμα 4.2.4 υποδηλώνει ότι το G είναι k -ακμές-χρωματίσιμο, αν και μόνο αν, το συμπλήρωμα του line γραφημάτος του είναι localizable. Το θεώρημα αποδείχθηκε. ■

Κλείνουμε αυτή την υποενότητα με ορισμένες παρατηρήσεις σχετικά με το Θεώρημα 4.2.5. Το γεγονός ότι ο έλεγχος ενός δεδομένου συμπληρώματος ενός line γραφήματος, αν είναι localizable, είναι NP-πλήρες, έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι η γενικότερη ιδιότητα της καλής-καλυψιμότητας μπορεί να επαληθευτεί σε πολυωνυμικό χρόνο στην κλάση των συμπληρωμάτων των line γραφημάτων. Πράγματι, για να εξακριβωθεί αν το $\overline{L}(G)$ είναι καλά-καλυπτόμενο, αρκεί να υπολογίσουμε το G (χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.2.26), να υπολογίσουμε το $\mathcal{M}_G$ (βλέπε Ορισμό 3.1.6) και να ελέγξουμε αν όλα τα σύνολα $\mathcal{M}_G$ έχουν το ίδιο μέγεθος.

Το Θεώρημα 4.2.5 έχει επίσης την ακόλουθη συνέπεια.

Θεώρημα 4.2.6. [45] Για κάθε ακέραιο αριθμό $k \geq 3$, το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι NP-πλήρες στην κλάση των γραφημάτων με αριθμό ανεξαρτησίας k .

Απόδειξη. Όπως σημειώνεται στην απόδειξη του Λήμματος 4.2.4, αν το G είναι ένα τρίγωνο-free k -κανονικό γράφημα, τότε, το $\overline{L}(G)$ έχει αριθμό ανεξαρτησίας k , ($\alpha(G) = k$). Επομένως, η NP-δυσκολία του προβλήματος προκύπτει από το Θεώρημα 4.2.5. Το γεγονός ότι ανήκει στο NP, προκύπτει από το ότι, για κάθε καθορισμένο k , το πρόβλημα ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο στην κλάση των γραφημάτων με αριθμό ανεξαρτησίας k . Πράγματι, για να ελεγχθεί, αν μια δεδομένη κλίκια C , σε ένα τέτοιο γράφημα G , είναι ισχυρή, χρειάζεται μόνο να απαριθμήσουμε όλα τα $O(|V(G)|^k)$ μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα του G και να δοκιμάσουμε, αν η C τέμνει το καθένα από αυτά. Συνεπώς, μια διαμέριση του συνόλου κορυφών του G σε k ισχυρές κλίκες μπορεί να εξακριβωθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. ■

Η εκφώνηση του Θεωρήματος 4.2.6 είναι έξυπνη με την έννοια ότι, τα localizable γραφήματα με αριθμό ανεξαρτησίας το πολύ δύο είναι αναγνωρίσιμα σε πολυωνυμικό χρόνο. Πράγματι, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.2.47 δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι ένα γράφημα με αριθμό ανεξαρτησίας δύο είναι localizable, αν και μόνο αν, το συμπλήρωμα του είναι ένα διμερές γράφημα, χωρίς απομονωμένες κορυφές. Τέλος, παρατηρούμε ότι, το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 4.2.6 έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι, για κάθε καθορισμένο k , ο έλεγχος, αν ένα δεδομένο γράφημα G με $\alpha(G) \geq k$ είναι καλά-καλυπτόμενο, μπορεί να

γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο, απλά με την απαρίθμηση όλων των $O(|V(G)|^k)$ ανεξάρτητων συνόλων και συγκρίνοντας τα μεταξύ τους, ανα δύο, ως προς το μεγεθός τους. Συγκεκριμένα, αν δεν ισχύει $P = NP$, κανείς δεν μπορεί να επιτύχει μια ταυτόχρονη ενίσχυση του Θεωρήματος 4.2.2 και του Θεωρήματος 4.2.6, η οποία θα απεδείκνυε τη δυσκολία της αναγνώρισης localizable γραφημάτων μέσα στην κλάση των ασθενώς chordal γραφημάτων με οριοθετημένο αριθμό ανεξαρτησίας. Πράγματι, η παραπάνω παρατήρηση μαζί με το Πόρισμα 1.2.49 υποδηλώνει ότι αυτό το πρόβλημα είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο.

4.2.3 Αντιπαραδείγματα σε μια εικασία των Zaare-Nahandi

Στο [73], ο Zaare-Nahandi έθεσε την ακόλουθη εικασία (θυμηθείτε ότι ένα γράφημα G λέμε ότι είναι ημι-τέλειο εάν $\theta(G) = \alpha(G)$).

Εικασία 1. [73] Έστω G είναι ένα k -μερές καλά-καλυπτόμενο γράφημα, στο οποίο όλες οι μεγιστοτικές κλίκες έχουν μέγεθος k . Τότε, το G είναι ημι-τέλειο.

Η εικασία, αυτή, μπορεί ισοδύναμα να επαναδιατυπωθεί, για τα localizable γραφήματα, ως εξής.

Εικασία 2. [44] Έστω G είναι ένα localizable co-καλά-καλυπτόμενο γράφημα, δηλαδή, το $\overline{G}$ είναι καλά-καλυπτόμενο. Τότε, το $\overline{G}$ είναι localizable.

Πρόταση 4.2.7. [44] Οι Εικασίες 1 και 2 είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη. Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι η Εικασία 1 συνεπάγει την Εικασία 2. Ας υποθέσουμε την εγκυρότητα της Εικασίας 1. Έστω το G να είναι ένα localizable co-καλά-καλυπτόμενο γράφημα. Από το Θεώρημα 1.2.47, αυτό ισοδυναμεί με την εξής υπόθεση: τα G και $\overline{G}$ είναι καλά-καλυπτόμενα και $\theta(G) = \alpha(G)$. Έστω $k = \alpha(G)$. Τότε, $\chi(\overline{G}) = k$, επομένως, το $\overline{G}$ είναι ένα k -μερές καλά-καλυπτόμενο γράφημα, στο οποίο όλες οι μεγιστοτικές κλίκες έχουν μέγεθος k . Από την Εικασία 1, το $\overline{G}$ είναι ημι-τέλειο, δηλαδή, $\theta(\overline{G}) = \alpha(\overline{G})$. Συνεπώς, επειδή το $\overline{G}$ είναι καλά-καλυπτόμενο, το $\overline{G}$ είναι localizable από το Θεώρημα 1.2.47. Έτσι, η Εικασία 2 ισχύει.

Αντίστροφα, η Εικασία 2 συνεπάγει την Εικασία 1. Ας υποθέσουμε την εγκυρότητα του Εικασία 2. Έστω το G είναι ένα k -μερές καλά-καλυπτόμενο γράφημα, στο οποίο όλες οι μεγιστοτικές κλίκες έχουν μέγεθος k . Τότε, $\chi(G) =$

$\omega(G) = k$ και όλα τα μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα του $\overline{G}$ έχουν μέγεθος k . Από αυτές τις συνθήκες συνεπάγεται ότι $\theta(\overline{G}) = \alpha(\overline{G})$ και ότι τα G και $\overline{G}$ είναι καλά-καλυπτόμενα. Από το Θεώρημα 1.2.47, αυτό ισοδυναμεί με το εξής: το $\overline{G}$ είναι ένα localizable co-καλά-καλυπτόμενο γράφημα. Από την Εικασία 2 συνεπάγεται ότι το G είναι localizable και από το Θεώρημα 1.2.47, το G είναι ημι-τέλειο. Έτσι, η Εικασία 1 ισχύει. ■

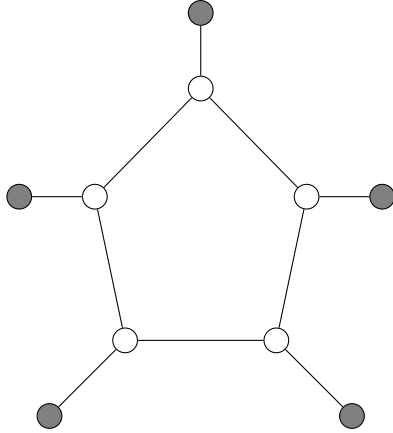
Στη συνέχεια, θα απορρίψουμε την Εικασία 1 με δύο διαφορετικούς τρόπους.

Πρώτος τρόπος: Θα δώσουμε μια μη-πεπερασμένη οικογένεια αντιπαραδειγμάτων, που δείχνουν ότι ακόμη και η ακόλουθη εικασία, η οποία είναι συνέπεια των Εικασιών 1 και 2, αποτυγχάνει.

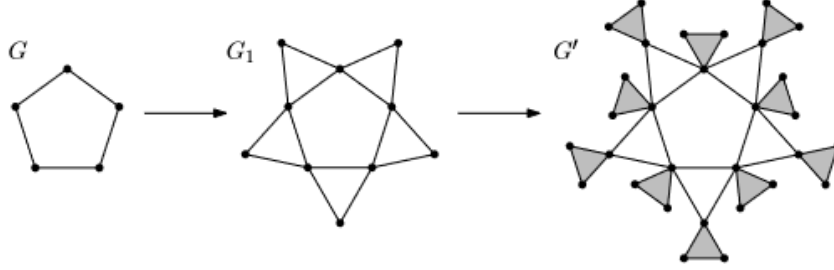
Εικασία 3. [44] Έστω G είναι ένα localizable co-καλά-καλυπτόμενο γράφημα. Τότε, το $\overline{G}$ έχει μια ισχυρή κλίκα.

Θεώρημα 4.2.8. [44] Η Εικασία 3 είναι ψευδής. Κατά συνέπεια, οι Εικασίες 1 και 2 είναι ψευδείς.

Απόδειξη. Έστω C να είναι ένας περιττός κύκλος μήκους τουλάχιστον 5, και έστω το G είναι η κορώνα (corona) του C , δηλαδή, το γράφημα που λαμβάνεται από το C προσθέτοντας σε αυτό $|V(C)|$ νέες κορυφές, κάθε μια γειτονική σε διαφορετική κορυφή του κύκλου (και δεν υπάρχουν άλλες ακμές στο G) [για παράδειγμα, το παρακάτω γράφημα].



Κάθε ένα από τα $|V(C)|$ -σύνολα $N[v]$, όπου $v \in V(G) \setminus V(C)$, είναι μια simplicial (συνεπώς, και ισχυρή) κλίκα στο G . Αυτές οι κλίκες είναι ανά δύο ξένες μεταξύ τους και η ένωση τους κάνει το $V(G)$. Επομένως, το G είναι localizable. Δεδομένου ότι κάθε μεγιστοτική κλίκα του G έχει μέγεθος 2, συμπεραίνουμε ότι



Σχήμα 4.3: Ένα παράδειγμα του μετασχηματισμού $G \rightarrow G'$. Τα σκιαγραφημένα τρίγωνα αποτελούν τις simplicial κλίκες του G' (που διαμερίζουν το $V(G')$).

το G είναι co-καλά-καλυπτόμενο. Υσχυριζόμαστε ότι το $\overline{G}$ δεν έχει ισχυρή κλίκα, κάτι που ισοδυναμεί με το να δηλώσουμε ότι το G δεν έχει ισχυρό ανεξάρτητο σύνολο. Αυτό ισχύει επειδή κάθε ισχυρό ανεξάρτητο σύνολο στο G θα πρέπει να περιέχει μια κορυφή από καθεμία από τις ακμές του C (καθώς, αυτές οι ακμές είναι όλες οι μεγιστοτικές κλίκες στο G). Ωστόσο, επειδή το C δεν είναι διμερές, δεν υπάρχει ανεξάρτητο σύνολο του G που να χτυπά όλες τις ακμές του C . ■

Δεύτερος τρόπος: Θα δείξουμε ότι όχι μόνο υπάρχουν localizable co-καλά-καλυπτόμενα γραφήματα των οποίων τα συμπληρώματα δεν είναι localizable, αλλά είναι, επίσης, δύσκολο να προσδιοριστεί αν το συμπλήρωμα ενός δεδομένου localizable co-καλά-καλυπτόμενου γραφήματος είναι localizable.

Θεώρημα 4.2.9. [44] Δοθέντος ενός localizable co-καλά-καλυπτόμενου γραφήματος G , είναι NP-δύσκολο να προσδιοριστεί, αν το G είναι localizable.

Απόδειξη. Για την απόδειξη του θεωρήματος θα κάνουμε μια αναγωγή στο πρόβλημα του 3-ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ σε τρίγωνο-free γραφήματα, το οποίο είναι NP-δύσκολο [53]. Δοθέντος ενός τρίγωνο-free γραφήματος G , θα κατασκευάσουμε από το G ένα localizable co-καλά-καλυπτόμενο γράφημα G' , έτσι ώστε, το G να είναι 3-χρωματίσιμο, αν και μόνο αν, το $\overline{G}$ είναι localizable.

Το γράφημα G' λαμβάνεται από το G μετά από δύο βήματα. Πρώτα, κάθε ακμή του G εκτείνεται σε ένα τρίγωνο με μια μοναδική νέα κορυφή. Έστω το G_1 είναι το γράφημα που προκύπτει. Έπειτα, σε κάθε κορυφή v , του G_1 , προστίθενται δύο νέες κορυφές, ας τις πούμε v' και v'' , όπου, είναι γειτονικές μεταξύ τους και είναι, επίσης, γειτονές του v . Έτσι, λαμβάνουμε το γράφημα G' . Ένα παράδειγμα της αναγωγής φαίνεται στο Σχήμα 4.3.

Δεδομένου ότι, υπάρχει ένα σύνολο από $|V(G_1)|$ -simplicial κλίκες που διαμερίζουν το $V(G')$, το γράφημα G' είναι localizable. Δεδομένου ότι το G είναι τρίγωνο-free, κάθε μεγιστοτική κλίκα του G' έχει μέγεθος 3, και συνεπώς, το G' είναι co-καλά-καλυμμένο. Για να συμπληρώσουμε την απόδειξη, θα δείξουμε ότι το G είναι 3-χρωματίσιμο, αν και μόνο αν, το συμπλήρωμα του G' είναι localizable. Ας υποθέσουμε ότι το G είναι 3-χρωματίσιμο και έστω c είναι ένας 3-χρωματισμός του G . Επεκτείνουμε το c σε έναν 3-χρωματισμό c' του G' . Οι χρωματικές κλάσεις του c' ορίζουν μια διαμέριση του $V(G')$ σε τρία ανεξάρτητα σύνολα, και ισοδύναμα, μια διαμέριση του συνόλου κορυφών του συμπληρώματος του G' σε τρεις κλίκες, ας πούμε τις C_1, C_2, C_3 . Επειδή όλες οι μεγιστοτικές κλίκες του G' έχουν μέγεθος 3, κάθε χρωματική κλάση περιέχει μια κορυφή από κάθε μεγιστοτική κλίκα του G , πράγμα που σημαίνει ότι κάθε C_i είναι μια ισχυρή κλίκα στο συμπλήρωμα του G' . Επομένως, το συμπλήρωμα του G' είναι localizable. Αντιστρόφως, επειδή $\alpha(G') = \omega(G') = 3$, αν το συμπλήρωμα του G' είναι localizable, τότε, έχει μια διαμέριση του συνόλου των κορυφών του σε 3 ισχυρές κλίκες, και επομένως, το G' είναι 3-χρωματίσιμο. Αλλά, τότε, το G είναι, επίσης, 3-χρωματίσιμο, ως επαγόμενο υπογράφημα του G' . ■

Από την απόδειξη του Θεώρηματος 4.2.9 προκύπτει ότι, αν το G είναι ένα οποιοδήποτε τρίγωνο-free γράφημα με χρωματικό αριθμό τουλάχιστον 4, τότε, το γράφημα G' , που λαμβάνεται από το G όπως στην παραπάνω απόδειξη (βλέπε Σχήμα 4.3), είναι ένα localizable co-καλά-καλυπτόμενο γράφημα με μη-localizable συμπλήρωμα. Υπάρχουν πολλές γνωστές κατασκευές τρίγωνο-free γραφημάτων με υψηλό χρωματικό αριθμό, (βλέπε, π.χ. [2, 59, 75]).

Θα θέλαμε, επίσης, να επισημάνουμε ότι στο [73] ο Zaare-Nahandi ισχυρίστηκε ότι, το πρόβλημα του προσδιορισμού, αν ένα δεδομένο ημι-τέλειο γράφημα είναι καλά-καλυπτόμενο είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο. Ωστόσο, ένας, πολυωνυμικού χρόνου, αλγόριθμος πιστοποίησης, αν ένα δεδομένο ημι-τέλειο γράφημα είναι καλά-καλυπτόμενο, θα σήμαινε ότι $P = NP$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, το πρόβλημα αναγνώρισης καλά-καλυπτόμενων ασθενώς chordal γραφημάτων είναι co-NP-πλήρες και κάθε ασθενώς chordal γράφημα είναι, τέλειο και ως εκ τούτου, ημι-τέλειο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

5.1 Πίνακας υπολογιστικών πολυπλοκοτήτων των έξι προβλημάτων

Σε αυτήν την εργασία έγινε μια λεπτομερή παρουσίαση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας έξι προβλημάτων αποφάσεων που σχετίζονται με ισχυρές κλίκες σε γραφήματα, με έμφαση στις κλάσεις των C_4 -free γραφημάτων, των line γραφημάτων και των συμπληρωμάτων τους, των chordal και των ασθενώς chordal γραφημάτων, των υποκυβικών γραφημάτων, των κυβικών γραφημάτων και των . Τα αποτελέσματά μας, που συνοψίζονται στον Πίνακα 5.1, αφήνουν ανοιχτή την κατάσταση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας του προβλήματος ΚΑΛΥΜΜΑ ΑΚΜΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ, όχι μόνο για γενικά γραφήματα (που είναι ένα γνωστό ανοιχτό πρόβλημα, βλέπε π.χ. [1, 10, 46]) αλλά και, επίσης, για την κλάση των ασθενώς chordal γραφημάτων. Ως ένα επακόλουθο της μελέτης, του Hujdurović και των συνεργατών του [45], πάνω στις ισχυρές κλίκες στην κλάση των συμπληρωμάτων των line γραφημάτων, είναι ότι το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ είναι NP-πλήρης στην κλάση των γραφημάτων με αριθμό ανεξαρτησίας k , για κάθε $k \geq 3$. Επίσης, με βάση τις ιδιότητες των localizable γραφημάτων, ο Hujdurović και οι συνεργάτες του [43], απορρίψανε μια εικασία των Zaare-Nahandi σχετικά με k -μερή καλά-καλυπτόμενα γραφήματα, όπου, όλες οι μέγιστες κλίκες τους είναι μεγέθους k .

	IK	YIK	KKaIK	KAAIK	ΔοIK	ΥΔοIK
γενικά	coNPπ [74]	NPδ [40]	NPδ [45]	;	coNPπ [45]	coNPπ [44]
C_4 -free γρα- φήματα	P [45]	P [45]	P [45]	P [45]	P [45]	P [45]
chordal γρα- φήματα	P [45]	P [45]	P [45]	P [3]	P [45]	P [44, 62]
ασθενώς chordal γρα- φήματα	coNPπ [74]	NPδ [45]	NPδ [45]	;	coNPπ [45]	coNPπ [44]
line γρα- φήματα	P [45]	P [45]	P [45]	P [50]	P [45]	P [44]
συμπληρώματα line γραφη- μάτων	P [45]	P [45]	P [45]	P [45]	P [45]	NPπ [45]
υποκυβικά γραφήματα	P [45]	P [45]	P [45]	P [45]	P [45]	P [45]
κυβικά γρα- φήματα	P [45]	P [45]	P [45]	P [45]	P [45]	P [45]
διαμάντι-free	coNPπ [20]	coNPπ [20]	coNPπ [20]	coNPπ [20]	coNPπ [20]	coNPδ [20]
cographs	P Πορ. 4.1.23	P Πορ. 4.1.23	P Πορ. 4.1.23	P Πορ. 4.1.23	P Πορ. 4.1.23	P Θε- ώρ.4.1.27

Πίνακας 5.1: Σύνοψη των αποτελεσμάτων της υπολογιστικής πολυπλοκότητας για τα έξι προβλήματα που σχετίζονται με τις ισχυρές κλίκες σε διάφορες κατηγορίες γραφημάτων. Συμβολίζουμε ως: • IK το πρόβλημα ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ, • YIK το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΚΛΙΚΑΣ, • KKaIK το πρόβλημα ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ, • KAAIK το πρόβλημα ΚΑΛΥΜΜΑ ΑΚΜΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ, • ΔοIK το πρόβλημα ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ και • ΥΔοIK το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ. Επίσης, συμβολίζουμε ως: • P την πολυωνυμική επιλυσιμότητα, • NPπ = NP-πλήρες, • coNPπ = co-NP-πλήρες και • NPδ = NP-δύσκολο. Τα αποτελέσματα για την κλάση των cographs απεδείχθησαν σε αυτήν την εργασία.

5.2 Κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα

Κλείνοντας την εργασία, ως φυσικό ερώτημα για μελλοντική έρευνα, θα ήταν ενδιαφέρον να πραγματοποιήσουμε μια πιο λεπτομερή μελέτη της πολυπλο-

κότητας των έξι προβλημάτων που σχετίζονται με ισχυρές κλίκες σε γραφήματα με οριοθετημένο αριθμό ανεξαρτησίας, $\alpha(G) = k$, όπου, $k \geq 2$. Επιπλέον, είναι ενδιαφέρον να πραγματοποιηθεί έρευνα για την εύρεση της πολυωνυμικής πολυπλοκότητας των έξι προβλημάτων σε όλα τα H -free γραφήματα, όπου, H είναι τα γραφήματα με το πολύ τέσσερις κορυφές. Παραδείγματα τέτοιων γραφημάτων είναι τα claw-free γραφήματα, τα paw-free γραφήματα, τα διαμάντι-free (diamond-free) γραφήματα και τα $4P_1$ -free γραφήματα. Σε αυτό το σημείο, να αναφέρουμε ότι τα πέντε από τα έξι προβλήματα που σχετίζονται με ισχυρές κλίκες έχουν μελετηθεί στην κλάση των διαμάντι-free γραφημάτων, από τον Chiarelli και τους συνεργάτες του [20], χαρακτηρίζοντας τα προβλήματα ΙΣΧΥΡΗ ΚΛΙΚΑ, ΥΠΑΡΞΗ ΙΣΧΥΡΗΣ ΚΛΙΚΑΣ, ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ΑΠΟ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ και ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ co-NP-πλήρη και το πρόβλημα ΥΠΑΡΞΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗΣ ΣΕ ΙΣΧΥΡΕΣ ΚΛΙΚΕΣ co-NP-δύσκολο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] ALCÓN, LILIANA AND GUTIERREZ, MARISA AND KOVÁCS, ISTVÁN AND MILANIČ, MARTIN AND RIZZI, ROMEO. Strong cliques and equistability of EPT graphs. *Discrete Applied Mathematics* 203 (2016), 13–25.
- [2] ALON, NOGA AND KOSTOCHKA, ALEXANDR AND REINIGER, BENJAMIN AND WEST, DOUGLAS B AND ZHU, XUDING. Coloring, sparseness and girth. *Israel Journal of Mathematics* 214, 1 (2016), 315–331.
- [3] ANBEEK, CARREEN AND DETEMPLE, DUANE AND MCAVANEY, KEVIN AND ROBERTSON, JACK. When are chordal graphs also partition graphs? *Australasian Journal of Combinatorics* 16 (1997), 285–294.
- [4] ASPVALL, BENGT AND PLASS, MICHAEL F AND TARJAN, ROBERT ENDRE. A linear-time algorithm for testing the truth of certain quantified boolean formulas. *Information Processing Letters* 14, 4 (1982).
- [5] BENEDETTI, BRUNO AND VARBARO, MATTEO. Unmixed graphs that are domains. *Communications in Algebra* 39, 7 (2011), 2260–2267.
- [6] BERGE, C. Stochastic graphs and strongly perfect graphs? a survey. *Southeast Asian Bull. Math* 7, 1 (1983), 16–25.
- [7] BERGE, C AND DUCHET, P. Strongly perfect graphs. In *North-Holland mathematics studies*, ολ. 88. Νορτη-Χολλανδ, 1984, σσ. 57–61.
- [8] BOROS, ENDRE AND CHIARELLI, NINA AND MILANIČ, MARTIN. Equistarable bipartite graphs. *Discrete Mathematics* 339, 7 (2016), 1960–1969.
- [9] BOROS, ENDRE AND GURVICH, VLADIMIR AND MILANIČ, MARTIN. On CIS circulants. *Discrete Mathematics* 318 (2014), 78–95.

- [10] BOROS, ENDRE AND GURVICH, VLADIMIR AND MILANIČ, MARTIN. On equistable, split, CIS, and related classes of graphs. *Discrete Applied Mathematics* 216 (2017), 47–66.
- [11] BOROS, ENDRE AND GURVICH, VLADIMIR AND ZVEROVICH, IGOR E. On split and almost CIS-graphs. *Australasian J. Combinatorics* 43 (2009), 163–180.
- [12] BRANDSTADT, ANDREAS AND SPINRAD, JEREMY P AND OTHERS. *Graph classes: a survey*, ολ. 3. Σιαιμ, 1999.
- [13] BURLET, M AND FONLUPT, J. Polynomial algorithm to recognize a Meyniel graph. Iv *Progress in Combinatorial Optimization*. Ελσειερ, 1984, ππ. 69–99.
- [14] CAI, LEIZHEN AND ELLIS, JOHN A. NP-completeness of edge-colouring some restricted graphs. *Discrete Applied Mathematics* 30, 1 (1991), 15–27.
- [15] CAMPBELL, S AND ELLINGHAM, MN AND ROYLE, GORDON. A characterization of well-covered cubic graphs. *Journal of Combinatorial Computing* 13 (1993), 193–212.
- [16] CARO, YAIR AND ELLINGHAM, MARK N AND RAMEY, JE. Local structure when all maximal independent sets have equal weight. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 11, 4 (1998), 644–654.
- [17] CASTRILLÓN, IVÁN DARIO AND CRUZ, ROBERTO AND REYES, ENRIQUE. On well-covered, vertex decomposable and Cohen-Macaulay graphs. *arXiv preprint arXiv:1505.00060* (2015).
- [18] CHANG, MAW-SHANG. Efficient algorithms for the domination problems on interval and circular-arc graphs. *SIAM Journal on computing* 27, 6 (1998), 1671–1694.
- [19] CHANG, MAW-SHANG AND HSIEH, SUN-YUAN AND CHEN, GEN-HUEY. Dynamic programming on distance-hereditary graphs. Iv *International Symposium on Algorithms and Computation* (1997), Σπρινγκερ, ππ. 344–353.
- [20] CHIARELLI, NINA AND BARONA, BERENICE MARTÍNEZ AND MILANIČ, MARTIN AND MONNOT, JÉRÔME AND MURŠIČ, PETER. Strong cliques in diamond-free graphs. *arXiv preprint arXiv:2006.13822* (2020).
- [21] CHVÁTAL, VÁCLAV AND SLATER, PETER J. A note on well-covered graphs. Iv *Annals of Discrete Mathematics*, ολ. 55. Ελσειερ, 1993, ππ. 179–181.

- [22] CORNEIL, DEREK G. AND PERL, YEHOShUA AND STEWART, LORNA K. A linear recognition algorithm for cographs. *SIAM Journal on Computing* 14, 4 (1985), 926–934.
- [23] DEAN, NATHANIEL AND ZITO, JENNIFER. Well-covered graphs and extendability. *Discrete Mathematics* 126, 1-3 (1994), 67–80.
- [24] DOBSON, EDWARD AND HUJDUROVIĆ, ADEMIR AND MILANIĆ, MARTIN AND VERRET, GABRIEL. Vertex-transitive CIS graphs. *European Journal of Combinatorics* 44 (2015), 87–98.
- [25] EDMONDS, JACK. Maximum matching and a polyhedron with 0, 1-vertices. *Journal of research of the National Bureau of Standards B* 69, 125-130 (1965), 55–56.
- [26] EDMONDS, JACK. Paths, trees, and flowers. *Canadian Journal of mathematics* 17 (1965), 449–467.
- [27] EVEN, SHIMON AND ITAI, ALON AND SHAMIR, ADI. On the complexity of time table and multi-commodity flow problems. In *16th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1975)* (1975), IEEE, ππ. 184–193.
- [28] FAVARON, ODILE. Very well covered graphs. *Discrete Mathematics* 42, 2-3 (1982), 177–187.
- [29] FINBOW, A AND HARTNELL, B. A characterization of parity graphs containing no cycle of order five or less. *Ars Combinatoria* 40 (1995), 227–234.
- [30] FINBOW, AS AND HARTNELL, BL. A game related to covering by stars. *Ars Combinatoria* 16 (1983), 189–198.
- [31] GOLUMBIC, MARTIN CHARLES. *Algorithmic graph theory and perfect graphs*. Ελσειερ, 2004.
- [32] GOLUMBIC, MARTIN CHARLES AND ROTICS, UDI. On the clique-width of some perfect graph classes. *International Journal of Foundations of Computer Science* 11, 03 (2000), 423–443.
- [33] GRÖTSCHEL, MARTIN AND LOVÁSZ, LÁSZLÓ AND SCHRIJVER, ALEXANDER. *Geometric algorithms and combinatorial optimization*, ολ. 2. Σπρινγκερ Σειρς & Βυσινες Μεδια, 2012.
- [34] GRÜNBAUM, BRANKO. Matchings in Polytopal Graphs. Τεση. ρεπ., ΩΑΣΗ-ΙΝΓΤΟΝ ΥΝΙ“ ΣΕΑΤΤΛΕ ΔΕΠΤ ΟΦ MATHEMATI“Σ, 1973.

- [35] GURVICH, VLADIMIR. On exact blockers and anti-blockers, Δ -conjecture, and related problems. *Discrete applied mathematics* 159, 5 (2011), 311–321.
- [36] HALL, PHILIP. On representatives of subsets. Iv *Classic Papers in Combinatorics*. Σπριγγερ, 2009, ππ. 58–62.
- [37] HARTNELL, BL. Well-covered graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 29 (1999), 107–116.
- [38] HERZOG, JÜRGEN AND HIBI, TAKAYUKI AND ZHENG, XINXIAN. Cohen-Macaulay chordal graphs. *arXiv preprint math/0407375* (2004).
- [39] HOÀNG, CHÍNH T. On a conjecture of Meyniel. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 42, 3 (1987), 302–312.
- [40] HOÀNG, CHÍNH T. Efficient algorithms for minimum weighted colouring of some classes of perfect graphs. *Discrete Applied Mathematics* 55, 2 (1994), 133–143.
- [41] HOPCROFT, JOHN E AND KARP, RICHARD M. An $n^{\frac{5}{2}}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs. *SIAM Journal on computing* 2, 4 (1973), 225–231.
- [42] HSU, WEN-LIAN AND TSAI, KUO-HUI. Linear time algorithms on circular-arc graphs. *Information Processing Letters* 40, 3 (1991), 123–129.
- [43] HUJDUROVIĆ, ADEMIR. Strong cliques in vertex-transitive graphs. *arXiv preprint arXiv:1808.09534* (2018).
- [44] HUJDUROVIĆ, ADEMIR AND MILANIČ, MARTIN AND RIES, BERNARD. Graphs vertex-partitionable into strong cliques. *Discrete Mathematics* 341, 5 (2018), 1392–1405.
- [45] HUJDUROVIĆ, ADEMIR AND MILANIČ, MARTIN AND RIES, BERNARD. Detecting strong cliques. *Discrete Mathematics* 342, 9 (2019), 2738–2750.
- [46] KLOKS, TON AND LEE, CHUAN-MIN AND LIU, JIPING AND MÜLLER, HAIKO. On the recognition of general partition graphs. Iv *International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science* (2003), Σπριγγερ, ππ. 273–283.
- [47] KRATSCH, DIETER AND STEWART, LORNA. Domination on cocomparability graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 6, 3 (1993), 400–417.

- [48] LEHOT, PHILIPPE GH. An optimal algorithm to detect a line graph and output its root graph. *Journal of the ACM (JACM)* 21, 4 (1974), 569–575.
- [49] LESK, M AND PLUMMER, MD AND PULLEYBLANK, WR. Equi-matchable graphs. *Graph theory and combinatorics* (1984), 239–254.
- [50] LEVIT, VADIM E AND MILANIČ, MARTIN. Equistable simplicial, very well-covered, and line graphs. *Discrete Applied Mathematics* 165 (2014), 205–212.
- [51] LEWIN, MORDECHAI. Matching-perfect and cover-perfect graphs. *Israel Journal of Mathematics* 18, 4 (1974), 345–347.
- [52] LOVÁSZ, LÁSZLÓ. Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. *Discrete Mathematics* 2, 3 (1972), 253–267.
- [53] LOZIN, VADIM V AND KAMINSKI, MARCIN. Coloring edges and vertices of graphs without short or long cycles. *Contributions to Discrete Mathematics* 2, 1 (2007).
- [54] MCAVANEY, KEVIN AND ROBERTSON, JACK AND DETEMPLE, DUANE. A characterization and hereditary properties for partition graphs. *Discrete Mathematics* 113, 1-3 (1993), 131–142.
- [55] MEYNIEL, HENRY. On the perfect graph conjecture. *Discrete Mathematics* 16, 4 (1976), 339–342.
- [56] MIKLAVIČ, ŠTEFKO AND MILANIČ, MARTIN. Equistable graphs, general partition graphs, triangle graphs, and graph products. *Discrete applied mathematics* 159, 11 (2011), 1148–1159.
- [57] MILANIČ, MARTIN AND TROTIGNON, NICOLAS. Equistarable graphs and counterexamples to three conjectures on equistable graphs. *Journal of Graph Theory* 84, 4 (2017), 536–551.
- [58] MOREY, SUSAN AND VILLARREAL, RAFAEL H. Edge ideals: algebraic and combinatorial properties. *Progress in commutative algebra, combinatorics and homology* 1 (2012), 85–126.
- [59] MYCIELSKI, JAN. Sur le coloriage des graphes. Iv *Colloq. Math* (1955), oł. 3, II. 9.
- [60] PLUMMER, MICHAEL D. Some covering concepts in graphs. *Journal of Combinatorial Theory* 8, 1 (1970), 91–98.

- [61] PLUMMER, MICHAEL D. Well-covered graphs: a survey. *Quaestiones Mathematicae* 16, 3 (1993), 253–287.
- [62] PRISNER, ERICH AND TOPP, JERZY AND VESTERGAARD, PREBEN DAHL. Well covered simplicial, chordal, and circular arc graphs. *Journal of Graph Theory* 21, 2 (1996), 113–119.
- [63] RAMEY, JONATHAN EDWARD. Well-covered graphs with maximum degree three and minimal non-well-covered graphs.
- [64] ROUSSOPOULOS, NICHOLAS D. A max $\{m, n\}$ algorithm for determining the graph H from its line graph G . *Information Processing Letters* 2, 4 (1973), 108–112.
- [65] SANKARANARAYANA, RAMESH S AND STEWART, LORNA K. Complexity results for well-covered graphs. *Networks* 22, 3 (1992), 247–262.
- [66] SCHRIJVER, ALEXANDER. *Combinatorial optimization: polyhedra and efficiency*, ολ. 24. Σπρινγκερ Σεισενς & Βυσινεσσ Μεδια, 2003.
- [67] STAPLES, JO ANN W. On some subclasses of well-covered graphs. *Journal of Graph Theory* 3, 2 (1979), 197–204.
- [68] TANKUS, DAVID AND TARSI, MICHAEL. Well-covered claw-free graphs. *journal of combinatorial theory, Series B* 66, 2 (1996), 293–302.
- [69] TANKUS, DAVID AND TARSI, MICHAEL. The structure of well-covered graphs and the complexity of their recognition problems. *journal of combinatorial theory, Series B* 69, 2 (1997), 230–233.
- [70] VILLARREAL, RAFAEL H. Cohen-macaulay graphs. *manuscripta mathematica* 66, 1 (1990), 277–293.
- [71] WU, YEZHOU AND ZANG, WENAN AND ZHANG, CUN-QUAN. A characterization of almost CIS graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 23, 2 (2009), 749–753.
- [72] YAMASHITA, MASAFUMI AND KAMEDA, TSUNEHICO. Modeling K-coterics by well-covered graphs. *Networks: An International Journal* 34, 3 (1999), 221–228.
- [73] ZAARE-NAHANDI, RASHID AND OTHERS. Pure simplicial complexes and well-covered graphs. *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 45, 2 (2015), 695–702.

- [74] ZANG, WENAN. Generalizations of Grillet's theorem on maximal stable sets and maximal cliques in graphs. *Discrete mathematics* 143, 1-3 (1995), 259–268.
- [75] ZYKOV, ALEXANDER ALEKSANDROVICH. On some properties of linear complexes. *Matematicheskii sbornik* 66, 2 (1949), 163–188.