



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Στέργιος Παπάζης

Η ΕΞΙΣΩΣΗ MONGE-AMPÈRE

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Ιωάννινα, 2020

Αφιερώνεται στην οικογένειά μου.

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα

Μαθηματικά (Ανάλυση - Άλγεβρα - Γεωμετρία)

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 31 Ιανουαρίου 2020 από την εξεταστική επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
Ιωάννης Γιαννούλης	Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
Χρήστος Σαρόγλου	Επίκουρος Καθηγητής
Ανδρέας Τόλιας	Επίκουρος Καθηγητής

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

“Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.”

Στέργιος Παπάζης

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η εξίσωση Monge-Ampère αποτελεί μία πλήρως μη γραμμική εκφυλισμένα ελλειπτική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, η οποία εμφανίζεται σε προβλήματα ποικίλων κλάδων των Μαθηματικών και είναι ένα σύγχρονο πεδίο έρευνας στον κλάδο των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων.

Κύριος σκοπός μας σε αυτή τη διατριβή είναι να κατανοήσουμε τη θεωρία της (την ύπαρξη, την μοναδικότητα, τις ιδιότητες, την κανονικότητα των λύσεων της), καθώς και να χρησιμοποιήσουμε κάποια από αυτά τα αποτελέσματα στη μελέτη της κανονικότητας της λύσης ενός προβλήματος Βέλτιστης Μεταφοράς (Optimal Transport). Σε αυτό το ταξίδι θα έχουμε την τύχη και τη χαρά να περάσουμε από αρκετούς κλάδους των Μαθηματικών, όπως είναι η Τοπολογία, η Κυρτή Ανάλυση και η Κυρτή Γεωμετρία, η Θεωρία Μέτρου και η Θεωρία των Ελλειπτικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων.

Τέλος, αυτή η εργασία θα ήταν πολύ πιο δύσκολο να εκπονηθεί χωρίς κάποια άτομα, τα οποία αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω.

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω ολόψυχα τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Ιωάννη Γιαννούλη, για τον χρόνο του, την επιστημονική καθοδήγηση και αρωγή κατά την εκπόνηση αυτής της διατριβής. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της επιτροπής κ. Ανδρέα Τόλια και κ. Χρήστο Σαρόγλου για το ενδιαφέρον και τις υποδείξεις τους. Είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων και στο υπόλοιπο διδακτικό προσωπικό του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και ιδιαίτερα του Τομέα Μαθηματικής Ανάλυσης για το έργο τους καθ' όλη τη διάρκεια τόσο των προπτυχιακών, όσο και των μεταπτυχιακών σπουδών μου σε αυτό.

Κλείνοντας, οφείλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου και τον αδερφό μου Αλέξανδρο-Βάιο για τη στήριξη και τη συμπαράσταση που μου παρέχουν, καθώς και τους φίλους μου· ιδιαίτερα τους Βασίλη, Δώρα και Φωτεινή.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διατριβή εκθέτουμε κάποια θεμελιώδη αποτελέσματα της θεωρίας της εξίσωσης Monge-Ampère, δηλαδή μελετάμε την ύπαρξη, μοναδικότητα, κανονικότητα (ή λειότητα) ασθενών και κλασικών λύσεων της, καθώς και κάποιες ιδιότητές αυτών. Κυριότερη πηγή μας όσον αφορά την θεωρία της εξίσωσης αποτελεί το έργο [16] του ALESSIO FIGALLI, *The Monge-Ampère equation and its applications*, EMS, 2017.

Πιο συγκεκριμένα, ξεκινάμε το πρώτο, εισαγωγικό κεφάλαιο αναφέροντας κάποια γενικά στοιχεία της εξίσωσης και κάνουμε μία ιστορική αναδρομή της μελέτης της. Στη συνέχεια, υπενθυμίζουμε κάποιες βασικές έννοιες και αποτελέσματα της Κυρτής Ανάλυσης. Τέλος, υπενθυμίζουμε κάποια στοιχεία αναφορικά με την ελλειπτικότητα μίας μερικής διαφορικής εξίσωσης και εξηγούμε πως σχετίζεται η ελλειπτικότητα της εξίσωσης Monge-Ampère με την κυρτότητα των λύσεών της.

Το δεύτερο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στις λύσεις Alexandron, οι οποίες είναι κυρτές συναρτήσεις που ικανοποιούν την εξίσωση Monge-Ampère υπό μία ασθενή έννοια. Σε αυτό αναπτύσσουμε όλα εκείνα τα εργαλεία (όπως το υποδιαφορικό συνάρτησης, το μέτρο Monge-Ampère, την Αρχή Μεγίστου του Alexandron, την Αρχή Σύγκρισης) με τη βοήθεια των οποίων στη συνέχεια μελετάμε την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων Alexandron στο πρόβλημα Dirichlet της εξίσωσης πάνω από κάποιο κυρτό, φραγμένο σύνολο.

Στο τρίτο κεφάλαιο δείχνουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα κλασικών (λείων) κυρτών λύσεων για το πρόβλημα Dirichlet της εξίσωσης πάνω από ένα ομοιόμορφα κυρτό σύνολο με αρκετά λείο σύνορο, αρκετά λεία δεξιά πλευρά και αρκετά λεία συνοριακή συνθήκη. Πριν από αυτό, όμως, υπενθυμίζουμε κάποιες βοηθητικές έννοιες και συμπεράσματα αναφορικά με χώρους Hölder, τα ομοιόμορφα κυρτά σύνολα, τη διαφορισμότητα Fréchet και την γενική θεωρία των Ελλειπτικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, που χρειάζονται στην πορεία του κεφαλαίου. Συνεχίζουμε παρουσιάζοντας την απόδειξη του αποτελέσματος χρησιμοποιώντας την μέθοδο της συνέχειας. Τέλος, αποδεικνύουμε κάποια βοηθητικά λήμματα που απαιτούνται στην προαναφερθείσα μέθοδο.

Το τέταρτο κεφάλαιο περιέχει αποτελέσματα εσωτερικής κανονικότητας των λύσεων Alexandron, τα οποία οφείλονται κατά κύριο λόγο στους Pogorelov και Caffarelli. Αρχικά αναφέρουμε τις έννοιες των τμημάτων, κανονικοποιημένων συνόλων και κανονικοποιημένων λύσεων και αποδεικνύουμε κάποιες ιδιότητές τους, κομβικές για τις μετέπειτα αποδείξεις. Συνεχίζουμε με την μελέτη της κανονικότητας στο επίπεδο, αφού αυτή είναι μία ιδιαίτερα καλή περίπτωση όπου οι λύσεις είναι γνήσια κυρτές και διαφορίσιμες. Στην επόμενη ενότητα εξη-

γούμε την αναγκαιότητα της υπόθεσης της γνήσιας κυρτότητας για την κανονικότητα των λύσεων μέσω ενός αντιπαδείγματος και αποδεικνύουμε δύο αποτελέσματα αναφορικά με την γνήσια κυρτότητα των λύσεων Alexandron. Στο υπόλοιπο κομμάτι του κεφαλαίου ασχολούμαστε με την εσωτερική κανονικότητα των γνήσια κυρτών λύσεων υπό διάφορες συνθήκες για τη συνάρτηση της δεξιάς πλευράς, όπως όταν αυτή είναι λεία ή φραγμένη μακριά από το μηδέν και το άπειρο.

Στο τελευταίο κεφάλαιο, αφού πρώτα κάνουμε μία σύντομη εισαγωγή στη Θεωρία της Βέλτιστης Μεταφοράς, χρησιμοποιούμε κάποια από τα αποτελέσματα κανονικότητας που έχουμε αναπτύξει προηγουμένως για να εξάγουμε συμπεράσματα αναφορικά με την κανονικότητα της λύση του προβλήματος Βέλτιστης Μεταφοράς με συνάρτηση κόστους το τετράγωνο της Ευκλείδειας απόστασης, ένα αποτέλεσμα που οφείλεται στον Caffarelli.

ABSTRACT

This thesis aims to present some fundamental results on the subject of the theory of the Monge-Ampère equation, that is to say, we investigate the existence, the uniqueness and the regularity of its solutions, as well as some of their properties. Our main reference concerning the theory of this equation is the work [16] of ALESSIO FIGALLI, *The Monge-Ampère equation and its applications*, EMS, 2017.

We commence the first, preparatory chapter by introducing some general features of the equation and by surveying some of the historical development of its investigation. Next, we recall some preliminary facts of Convex Analysis. Concluding, we get to remember when a partial differential equation is elliptic and we explore the connection between the ellipticity of the Monge-Ampère equation and the convexity of its solutions.

Our chief concern in the second chapter is Alexandrov solutions, that is, convex functions which satisfy the Monge-Ampère equation in a certain weak sense. At first, we develop all those tools (such as the subdifferential of a function, the Monge-Ampère measure, Alexandrov's Maximum Principle, the Comparison Principle) required in order to define them and then we study the existence and uniqueness of Alexandrov solutions to the Dirichlet problem of the equation on a convex, bounded set.

Subsequently, in the third chapter, we show the existence and uniqueness of classical (smooth) convex solutions to the Dirichlet problem of the equation on a uniformly (strongly) convex domain with a sufficiently smooth boundary, sufficiently smooth boundary data and sufficiently smooth right hand side. Therefore, we remind the reader of some basic facts about Hölder spaces, uniformly convex sets, Fréchet derivatives and some elements of the general theory of Elliptic Partial Differential Equations, before using the continuity method to deduce the aforementioned result. We end the chapter by proving some vital lemmas needed for the foregoing method.

The fourth chapter contains interior regularity results regarding Alexandrov solutions; results which are mainly due to Pogorelov and Caffarelli. Firstly, we deal with (cross-) sections, normalised sets and normalised solutions, proving some useful properties of theirs. Afterwards, we are concerned with the case of $\mathbb{R}^2$, where we prove the strict convexity and differentiability of all Alexandrov solutions that are bounded away from zero and infinity; a feature which is unique to that dimension. Furthermore, we discuss strict convexity of the solutions in a more general setting; we provide a counterexample due to Pogorelov that indicates the need for such a hypothesis if regularity is to follow and we present some cases

due to Caffarelli where Alexandrov solutions are strictly convex. Ending the chapter, we examine the interior regularity of strictly convex solutions, initially when the right hand side of the equation is sufficiently smooth and afterwards when this function is bounded away from zero and infinity.

We begin the final chapter stating the problem of Optimal Transport. The Optimal Transport problem with quadratic cost admits an optimal transportation map which is profoundly associated with an Alexandrov solution of a Monge-Ampère equation. We hint at that relation and we use it to reason about the regularity of the preceding optimal transportation map in accordance with the regularity results discussed in the fourth chapter; a result which is due to Caffarelli.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος	i
Περίληψη	ii
Abstract	iii
1 Εισαγωγή	3
1.1 Η εξίσωση Monge-Ampère	3
1.2 Ιστορική αναδρομή	5
1.3 Κυρτά σύνολα και κυρτές συναρτήσεις	6
1.4 Κυρτότητα και ελλειπτικότητα	15
2 Λύσεις Alexandrov	20
2.1 Το υποδιαφορικό κυρτής συνάρτησης και οι ιδιότητές του	20
2.2 Το μέτρο Monge-Ampère και οι ιδιότητές του	28
2.3 Αρχή μεγίστου του Alexandrov και αρχή σύγκρισης	40
2.4 Λύσεις Alexandrov	44
2.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων Alexandrov	45
2.5.1 Μοναδικότητα λύσεων	45
2.5.2 Ύπαρξη λύσεων	51
3 Κλασικές Λύσεις	61
3.1 Θεώρημα ύπαρξης κλασικών λύσεων	61
3.2 Προκαταρκτικές έννοιες	62
3.2.1 Χώροι Hölder	63
3.2.2 Γεωμετρικές ιδιότητες του πεδίου λύσης	65
3.2.3 Διαφορισμότητα Fréchet	68
3.2.4 Ελλειπτικές ΜΔΕ δεύτερης τάξης	70

3.3	Η μέθοδος της συνέχειας	73
3.4	Κατασκευή της αρχικής λύσης u_0	74
3.5	Το $\mathcal{T}$ είναι ανοικτό	76
3.6	Το $\mathcal{T}$ είναι κλειστό	78
4	Εσωτερική Κανονικότητα Λύσεων Alexandrov	91
4.1	Οι κανονικοποιημένες λύσεις και οι ιδιότητές τους	92
4.2	Διαφορισιμότητα και γνήσια κυρτότητα στο $\mathbb{R}^2$	99
4.3	Γνήσια κυρτότητα λύσεων	103
4.4	Κανονικότητα όταν $f \in C^{k,\alpha}$	112
4.5	Κανονικότητα όταν $\lambda \leq f \leq \Lambda$	119
5	Εφαρμογή σε ένα Πρόβλημα Βέλτιστης Μεταφοράς	125
5.1	Εισαγωγή στη θεωρία της Βέλτιστης Μεταφοράς	125
5.2	Κανονικότητα της λύσης του προβλήματος με κόστος $ x - y ^2$	126
	Συμβολισμοί	133
	Βιβλιογραφία	135

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Η εξίσωση Monge-Ampère

Ένα σημαντικό πρόβλημα στην Διαφορική Γεωμετρία είναι το πρόβλημα κατασκευής μίας λείας συμπαγούς υπερεπιφάνειας $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ με δεδομένη καμπυλότητα Gauß σε κάθε σημείο της. Όταν έχουμε την επιπλέον απαίτηση η υπερεπιφάνεια S να είναι κυρτή, αυτό το πρόβλημα είναι γνωστό και ως πρόβλημα *Minkowski*.

Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $\tilde{K} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία δεδομένη συνάρτηση. Αν υπάρχει υπερεπιφάνεια S που δίνει λύση στο πρόβλημά μας, αυτή εκφράζεται τοπικά ως γράφημα λείας συνάρτησης και ισχύει η ισότητα

$$K(x, u(x)) = \tilde{K}(x), \quad \forall x \in \Omega$$

όπου $u \in C^2(\Omega)$ είναι μία συνάρτηση το γράφημα της οποίας ταυτίζεται τοπικά με την υπερεπιφάνεια S και $K : S \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η καμπυλότητα Gauß της S . Καθώς η καμπυλότητα στο σημείο $(x, u(x))$ δίνεται από τον τύπο $K(x, u(x)) = \frac{\det D^2 u(x)}{(1 + \|\nabla u\|^2)^{\frac{n}{2}+1}}$, με αντικατάσταση στην παραπάνω ισότητα έχουμε τη σχέση

$$\det D^2 u(x) = \tilde{K}(x) (1 + \|\nabla u\|^2)^{\frac{n}{2}+1}, \quad \forall x \in \Omega$$

Συνεπώς, για να δώσουμε λύση στο αρχικό πρόβλημα καλούμαστε να επιλύσουμε μία μερική διαφορική εξίσωση της παραπάνω μορφής.¹ Αυτή η μερική διαφορική εξίσωση είναι μία εξίσωση *Monge-Ampère*.

Γενικότερα, μερικές διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\det D^2 u(x) = f(x, u(x), \nabla u(x)), \quad x \in \Omega$$

όπου $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι κάποιο ανοικτό σύνολο, $A \subseteq \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ κάποια γνωστή συνάρτηση και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία αρκετά λεία άγνωστη συνάρτηση, καλούνται εξισώσεις *Monge-Ampère*.

¹Για μία εκτενέστερη αναφορά στις γεωμετρικές έννοιες που εμφανίζονται παραπάνω παραπέμπουμε ενδεικτικά στα [9, Ενότητα 3.1], [35, Ενότητα 2.5] ή [21, Παράρτημα 14.6], ενώ για το πρόβλημα *Minkowski* παραπέμπουμε στο [21, Ενότητα 16.1 και Πρόσμα 17.25].

Κάθε εξίσωση αυτής της μορφής είναι μία *μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης*, η οποία μάλιστα είναι *πλήρως μη γραμμική*, αφού στο αριστερό μέλος της εμφανίζεται η ορίζουσα του Εσσιανού πίνακα της άγνωστης συνάρτησης, δηλαδή εμφανίζεται ένα άθροισμα προσημασμένων γινομένων των δευτέρων παραγώγων της άγνωστης συνάρτησης, ενώ όλες οι υπόλοιπες μερικές παράγωγοι της άγνωστης συνάρτησης που μπορεί να εμφανίζονται στο δεξί μέλος είναι το πολύ πρώτης τάξης.

Όταν ο Εσσιανός πίνακας της άγνωστης συνάρτησης είναι *θετικά ορισμένος* (ή αρνητικά ορισμένος), η εξίσωση καλείται *κλασική Monge-Ampère*, ενώ όταν είναι *αόριστος* καλείται *υπερβολική Monge-Ampère*. Αυτή η διάκριση έχει να κάνει με το γεγονός ότι η μελέτη των δύο περιπτώσεων διαφοροποιείται, αφού στην πρώτη περίπτωση η εξίσωση είναι (*εκφυλισμένα*) *ελλειπτική*, ενώ στη δεύτερη *υπερβολική*. Όπως υπονοεί και ο όρος *κλασική*, αυτή είναι η περίπτωση που ιστορικά μελετήθηκε πρώτη, καθώς και εκείνη η περίπτωση που μέχρι σήμερα έχει διερευνηθεί σε μεγαλύτερο βαθμό.

Παράδειγμα 1.1.1 Η εξίσωση $\det D^2 u(x) = 6^n \prod_{i=1}^n x_i$, όταν $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, αποτελεί μία εξίσωση *Monge-Ampère* και η $u(x) := \sum_{i=1}^n x_i^3$ είναι μία λύση της.

Παράδειγμα 1.1.2 Η εξίσωση $\det D^2 u(x) = 1$ όταν $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ είναι μία εξίσωση *Monge-Ampère*. Έχει τουλάχιστον δύο λύσεις:

1. την $u : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R} \quad \mu\epsilon \quad u(x) := |x|^2 - 1$
2. την $-u : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R} \quad \mu\epsilon \quad -u(x) := 1 - |x|^2$

Επιπλέον, οι περιορισμοί αυτών στη μπάλα $B(0, 1)$ αποτελούν λύσεις του προβλήματος:

$$\begin{cases} \det D^2 u = 1, & \text{στο } B(0, 1) \\ u = 0, & \text{στο } \partial B(0, 1) \end{cases}$$

Μία αξιοσημείωτη περίπτωση κλασικών εξισώσεων Monge-Ampère είναι εκείνες οι εξισώσεις με θετικό δεξιό μέλος και λύσεις u στον χώρο των κυρτών συναρτήσεων. Τέτοιες εξισώσεις απαντώνται σε ποικίλους τομείς των Μαθηματικών όπως σε προβλήματα Ανάλυσης, Διαφορικής, Κυρτής και Αφινικής Γεωμετρίας (πρόβλημα Minkowski για μέτρα καμπυλότητας, Θεώρημα Petty, μελέτη των αφινικών σφαιρών και των αφινικών μεγιστοτικών επιφανειών), στη Θεωρία της Βέλτιστης Μεταφοράς (Optimal Transport), τη Μετεωρολογία (ημιγεωστροφικές εξισώσεις).

Όπως γίνεται αντιληπτό και από τα προηγούμενα παραδείγματα, αυτές οι συνθήκες δεν είναι αναγκαίες ώστε να εξασφαλίσουν ύπαρξη, μοναδικότητα ή άλλες εύλογες ιδιότητες των λύσεων μίας γενικής εξίσωσης Monge-Ampère. Είναι ωστόσο ικανές να δημιουργήσουν το υπόβαθρο για να μπορέσει να αναπτυχθεί μία θεωρία ύπαρξης, μοναδικότητας και λειότητας των λύσεων των εξισώσεων Monge-Ampère που τις ικανοποιούν. Στο παρόν κείμενο μελετάμε εξισώσεις Monge-Ampère αυτής της μορφής, δηλαδή κλασικές εξισώσεις με κυρτές λύσεις, ενώ για λόγους απλότητας περιοριζόμαστε στην περίπτωση όπου $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, δηλαδή εκείνη

την περίπτωση όπου δεν υπάρχει εξάρτηση της f από τις u , Du . Ωστόσο, οι μεθοδολογίες που αναφέρουμε αποτελούν βάση και επεκτείνονται και στην περίπτωση γενικότερων f .

Όσον αφορά την κυριότερη βιβλιογραφία που χρησιμοποιούμε: για τα αποτελέσματα που αναφέρονται στην εξίσωση Monge-Ampère στηρίζομαστε στα [16], [22] και [10], για τα αποτελέσματα Κυρτής Ανάλυσης και Γεωμετρίας στα [31], [23] και [35], των Ελλειπτικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων στο [21], της Θεωρίας Μέτρου στο [29], της Συναρτησιακής Ανάλυσης στο [3] και τα αποτελέσματα Βέλτιστης Μεταφοράς στα [33], [38] και [39]. Διάφορα άλλα αποτελέσματα προήλθαν από ποικίλες πηγές, οι οποίες αναγράφονται στις τελευταίες σελίδες όπου και παρέχεται η πλήρης βιβλιογραφία.

1.2 Ιστορική αναδρομή

Η εξίσωση Monge-Ampère οφείλει το όνομά της στους Monge και Ampère, οι οποίοι μελέτησαν εξισώσεις αυτής της μορφής στις δύο και τρεις διαστάσεις κατά τα τέλη του 18ου και τις αρχές του 19ου αντίστοιχα.

Τα πρώτα αξιοσημείωτα αποτελέσματα σχετικά με την ύπαρξη και την κανονικότητα λύσεων εξισώσεων Monge-Ampère προέρχονται από τον Minkowski, ο οποίος στα τέλη του 19ου/αρχές του 20ου αιώνα, απέδειξε την ύπαρξη ασθενών λύσεων στο πρόβλημα Minkowski του $\mathbb{R}^3$ χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις με κατάλληλα κυρτά πολύεδρα.

Αργότερα, ο Alexandron χρησιμοποιώντας παρόμοιες μεθόδους κατάφερε και αυτός να αποδείξει ύπαρξη ασθενών λύσεων ανεξάρτητα από τη διάσταση και να εξάγει συμπεράσματα για την C^1 λειότητα των λύσεων της εξίσωσης στις δύο διαστάσεις. Στη συνέχεια, στηριζόμενος σε αυτά τα αποτελέσματα εισήγαγε μία έννοια ασθενούς λύσης της εξίσωσης Monge-Ampère (λύσεις Alexandron) και απέδειξε την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων στο πρόβλημα Dirichlet αυτής. Μία απόρροια αυτής της προσπάθειας ήταν και η εύρεση της Αρχής Μεγίστου (Αρχής Alexandron-Bakelman).

Στη συνέχεια δόθηκε έμφαση στην μελέτη της κανονικότητας των λύσεων Alexandron όταν υπάρχουν συνθήκες κανονικότητας για τη συνάρτηση f στο δεξιό μέλος της εξίσωσης, καθώς και για τα συνοριακά δεδομένα. Γρήγορα έγινε αντιληπτό ότι η λειότητα των λύσεων είναι στενά συνδεδεμένη με την γνήσια κυρτότητα των λύσεων.

Την δεκαετία του 1960, ο Cabali και ο Pogorelov απέδειξαν a priori φράγματα για την δεύτερη και τρίτη παράγωγο των γνήσια κυρτών λύσεων στο εσωτερικό του πεδίου λύσης. Με βάση αυτά τα αποτελέσματα, αργότερα, οι Cheng-Yau, καθώς και ο Lions απέδειξαν ανεξάρτητα τη λειότητα των κυρτών λύσεων Alexandron στο εσωτερικό του πεδίου λύσης. Όσον αφορά την λειότητα των λύσεων μέχρι το σύνορο, αυτή αποδείχθηκε με χρήση της μεθόδου της συνέχειας με βάση τις δουλειές των Ivchikina, Krylov, Caffarelli-Nirenberg-Spruck, όταν η συνάρτηση f του δεξιού μέλους και τα συνοριακά δεδομένα είναι αρκετά λεία.

Καθώς ωστόσο αυτές οι προϋποθέσεις είναι αρκετά ισχυρές για διάφορες εφαρμογές της

εξίσωσης (λόγου χάρη σε προβλήματα Βέλτιστης Μεταφοράς), στη συνέχεια μελετήθηκαν περιπτώσεις με ασθενέστερες υποθέσεις για τη f . Έτσι, την δεκαετία του 1990, ο Caffarelli κατάφερε να αποδείξει ότι οι γνήσια κυρτές λύσεις της εξίσωσης ανήκουν στην κλάση $C^{1,\alpha}$, όταν η f είναι απλώς μία θετική συνάρτηση φραγμένη μακριά από το μηδέν και το άπειρο, ενώ στην περίπτωση όπου είναι και συνεχής έδειξε ότι ανήκουν στην κλάση $W^{2,p}$ για κάθε $p > 1$.

Παρά την πρόοδο της έρευνας αρκετά σημαντικά ερωτήματα αναφορικά με την κανονικότητα των λύσεων της εξίσωσης παραμένουν ανοιχτά. Αυτό το γεγονός, σε συνδυασμό με τις ποικίλες εφαρμογές της εξίσωσης κρατάνε ζωντανό το ερευνητικό ενδιαφέρον για την μελέτη της. Για μία εκτενέστερη αναφορά στην ιστορία της έρευνας της εξίσωσης παραπέμπουμε στα [16] και [17].

1.3 Κυρτά σύνολα και κυρτές συναρτήσεις

Αρχίζουμε υπενθυμίζοντας κάποιες βασικές έννοιες της Κυρτής Ανάλυσης. Κύριες πηγές για το υλικό της ενότητας αποτελούν τα [23], [35] και [31].

Ορισμός 1.3.1 Το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται **κυρτό**, αν για κάθε $x, y \in A$ και $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.

Ορισμός 1.3.2 Ορίζουμε ως **κυρτό συνδυασμό** των σημείων $x_1, \dots, x_m$ του $\mathbb{R}^n$ το άθροισμα $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$, όταν $\lambda_i \in [0, 1]$ και $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

Ορισμός 1.3.3 Ορίζουμε ως **κυρτή θήκη (convex hull)** του $A \subseteq \mathbb{R}^n$ το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών σημείων του A και το συμβολίζουμε με $\text{conv } A$.

Ορισμός 1.3.4 Ορίζουμε ως **σχετικό εσωτερικό** του $A \subseteq \mathbb{R}^n$ το σύνολο

$$\text{relint } A := \{x \in \text{conv } A \mid \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap \text{conv } A \subseteq A\}$$

Ορισμός 1.3.5 Το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται **γνήσια κυρτό**, αν για κάθε $x \neq y \in \bar{A}$ και $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \text{relint } A$.

Ορισμός 1.3.6 Ένα φραγμένο σύνολο C καλείται **ομοιόμορφα κυρτό (uniformly convex/strongly convex)**² αν υπάρχει θετική σταθερά R έτσι ώστε για κάθε $x, y \in \bar{C}$ και $\lambda \in [0, 1]$ να ισχύει $B(\lambda x + (1 - \lambda)y, \delta) \subseteq \bar{C}$, όπου $\delta := \frac{\lambda(1-\lambda)}{2R} |x - y|^2$.

Από τους ορισμούς είναι άμεσο ότι τα ομοιόμορφα κυρτά σύνολα είναι γνήσια κυρτά, τα οποία με την σειρά τους είναι και κυρτά.

Υπάρχει πολύ καλή συνέργεια μεταξύ της κυρτότητας και της τοπολογίας του $\mathbb{R}^n$. Για παράδειγμα, σε κάθε κυρτό σύνολο το εσωτερικό του και η κλειστή θήκη του είναι κυρτά. Επιπλέον, και η κυρτή θήκη ενός ανοικτού/κλειστού/συμπαγούς συνόλου είναι ανοικτό/κλειστό/συμπαγές σύνολο [35, Ενότητα 1.1]. Επίσης, κάθε κυρτό σύνολο είναι συνεκτικό, ενώ το σύνορό του έχει μηδενικό μέτρο [28].

²Για διάφορους άλλους ισοδύναμους χαρακτηρισμούς των ομοιόμορφα κυρτών συνόλων παραπέμπουμε στο [37, Θεώρημα 1].

Ορισμός 1.3.7 Αν $C \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα κλειστό κυρτό σύνολο, θα λέμε ότι ένα υπερεπίπεδο $H \subseteq \mathbb{R}^n$ αποτελεί **επίπεδο στήριξης (supporting hyperplane)** του C εάν

- (i) το C ανήκει ακριβώς σε έναν από τους δύο κλειστούς ημιχώρους που το H χωρίζει τον $\mathbb{R}^n$
- (ii) $C \cap H \neq \emptyset$

Γενικά, η κυρτότητα εκφράζει την ιδιότητα ενός συνόλου να βρίσκεται πλήρως σε έναν από τους ημιχώρους που ορίζει κάποιο επίπεδο στήριξής του. Μάλιστα αυτή είναι μία ιδιότητα που χαρακτηρίζει κάθε συμπαγές κυρτό σύνολο [35, Θεώρημα 1.3.3].

Μέσω των επιπέδων στήριξης μπορούν να ορισθούν μοναδιαία εσωτερικά και εξωτερικά κάθετα διανύσματα σε κάθε σημείο του συνόρου ενός κλειστού κυρτού συνόλου C . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι σε κάθε σημείο του συνόρου ενός κλειστού κυρτού συνόλου υπάρχει τουλάχιστον ένα επίπεδο στήριξης [35, Θεώρημα 1.3.2], οπότε τότε ορίζουμε ένα **κάθετο διάνυσμα** στο $x \in C$ ως ένα διάνυσμα που είναι κάθετο σε κάποιο επίπεδο στήριξης του C στο x .

Ορισμός 1.3.8 Ένα σημείο $x \in C$ καλείται **εκτεθειμένο (exposed)**, αν υπάρχει επίπεδο στήριξης H του C ώστε να ισχύει $C \cap H = \{x\}$.

Ένας άλλος χαρακτηρισμός για τα κυρτά συμπαγή σύνολα δίνεται μέσω των εκτεθειμένων σημείων τους. Πιο συγκεκριμένα, κάθε τέτοιο σύνολο είναι η κλειστότητα της κυρτής θήκης των εκτεθειμένων σημείων του [35, Θεώρημα Straszewicz 1.4.7]. Αυτή η ιδιότητα εγγυάται την ύπαρξη εκτεθειμένων σημείων για αυτά τα σύνολα. Αντίθετα, τα κλειστά κυρτά μη φραγμένα σύνολα μπορεί να μην έχουν εκτεθειμένα σημεία, όπως για παράδειγμα ένα επίπεδο ή ένας ημιχώρος. Μάλιστα ένα μη κενό κλειστό σύνολο χωρίς εκτεθειμένα σημεία πρέπει να περιέχει μία ολόκληρη ευθεία [31, Πρόγραμμα 18.5.3], οπότε τότε δεν είναι φραγμένο.

Σε κάθε ανοικτό, κυρτό, φραγμένο σύνολο μπορούμε να προβάλλουμε κάθε σημείο του εσωτερικού του με σημεία στο σύνορο μέσω ευθυγράμμων τμημάτων, όπως φαίνεται στο επόμενο χρήσιμο λήμμα.

Λήμμα 1.3.9 Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό, κυρτό, φραγμένο σύνολο, $x \in \Omega$ και $y := x + \varepsilon e \in \Omega$ για κάποιο $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει μοναδικό $\mu_e > 1$:

$$(1 - \mu_e)x + \mu_e y = x + \varepsilon \mu_e e \in \partial\Omega$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\mu := \sup \{t \geq 0 : (1 - t)x + ty \in \Omega\}$.

Επειδή το Ω είναι κυρτό και $x \neq y \in \Omega$, έχουμε ότι $[0, 1] \subseteq \{t \geq 0 : (1 - t)x + ty \in \Omega\}$ και συνεπώς ισχύει $\mu \geq 1$. Επιπλέον, επειδή το Ω είναι φραγμένο, έχουμε $\mu < +\infty$, αφού σε αντίθετη περίπτωση θα υπήρχε $(t_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ με $t_m \rightarrow +\infty$, $(1 - t_m)x + t_m y \in \Omega$ και

$$t_m |y - x| = |(1 - t_m)x + t_m y - x| \leq \text{diam}(\Omega) < +\infty,$$

το οποίο είναι αδύνατο.

Ακόμα, παρατηρούμε ότι $(1 - \mu)x + \mu y \notin \Omega$, γιατί σε αντίθετη περίπτωση θα μπορούσαμε να βρούμε $\varepsilon > 0 : B((1 - \mu)x + \mu y, \varepsilon) \subseteq \Omega$ και τότε επιλέγοντας $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{|x - y|})$ θα είχαμε

$$\begin{aligned} & |(1 - (\mu + \delta))x + (\mu + \delta)y - (1 - \mu)x - \mu y| = \delta|y - x| < \varepsilon \\ \implies & (1 - (\mu + \delta))x + (\mu + \delta)y \in B((1 - \mu)x + \mu y, \varepsilon) \subseteq \Omega \\ \implies & \mu + \delta \leq \mu \end{aligned} \quad (\text{Άτοπο!})$$

Επειδή $\mu = \sup \{t \geq 0 : (1 - t)x + ty \in \Omega\} \in \mathbb{R}$, υπάρχει $(t_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ έτσι ώστε $(1 - t_m)x + t_my \in \Omega$ και $\mu - \frac{1}{m} \leq t_m \leq \mu$. Αυτό σημαίνει ότι $t_m \rightarrow \mu$ και συνεπώς $(1 - \mu)x + \mu y \in \bar{\Omega}$. Τότε έχουμε $(1 - \mu)x + \mu y \in \bar{\Omega} \setminus \Omega \subseteq \partial\Omega$ και άρα $\mu \neq 1$, αφού $y \notin \partial\Omega$. $\square$

Τώρα θα περάσουμε στις κυρτές συναρτήσεις και τις ιδιότητες τους.

Ορισμός 1.3.10 *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ μία συνάρτηση. Τότε η u καλείται **κυρτή** αν υπάρχει $\bar{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ η οποία είναι κυρτή επέκταση της u σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^n$, δηλαδή ισχύει*

$$\bar{u}|_{\Omega} = u$$

και

$$\bar{u}(tx + (1 - t)y) \leq t\bar{u}(x) + (1 - t)\bar{u}(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ και } \forall t \in (0, 1)$$

Ορισμός 1.3.11 *Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση, το **επιγράφημά** της είναι το σύνολο $\text{epi } u := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \Omega, y \in \mathbb{R}, y \geq u(x)\}$.*

Ενώ υπάρχουν και άλλοι ουσιαστικά ισοδύναμοι ορισμοί της έννοιας της κυρτής συνάρτησης (για παράδειγμα μέσω της κυρτότητας του επιγραφήματός της), ένα θετικό στοιχείο του συγκεκριμένου ορισμού είναι ότι μας επιτρέπει να άρουμε την απαίτηση το πεδίο ορισμού της συνάρτησης να είναι κυρτό. Συνεπώς, με αυτό τον τρόπο μπορούμε να έχουμε κυρτές συναρτήσεις πάνω από σύνολα τα οποία είναι απλώς ανοικτά.

Παράδειγμα 1.3.12 *Αν έχουμε ένα κυρτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση με τη “συνήθη έννοια”, τότε αυτή γίνεται πολύ εύκολα κυρτή και με την έννοια του Ορισμού 1.3.10, επεκτείνοντάς την στην συνάρτηση $\tilde{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ έτσι ώστε*

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x), & \text{όταν } x \in \Omega \\ \liminf_{\substack{z \rightarrow x \\ z \in \Omega}} u(z), & \text{όταν } x \in \partial\Omega \\ +\infty, & \text{όταν } x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \end{cases}$$

Αν έχουμε μία κυρτή συνάρτηση $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό σύνολο, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$u(tx + (1-t)y) \leq tu(x) + (1-t)u(y), \quad \forall x, y \in \Omega \text{ και } \forall t \in [0, 1]$$

του ορισμού σαν να είχαμε και την επιπλέον υπόθεση ότι το Ω είναι κυρτό. Αυτό συμβαίνει διότι η u ως κυρτή έχει κυρτή επέκταση $\tilde{u}$ σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^n$, η οποία επέκταση βέβαια λαμβάνει τιμές σε κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Ωστόσο, θεωρώντας τον περιορισμό της $\tilde{u}$ στο σύνολο $\text{conv}(\Omega)$, παρατηρούμε ότι το $\text{conv}(\Omega)$ είναι ανοικτό και κάθε σημείο του είναι κυρτός συνδυασμός δύο σημείων του Ω , οπότε οι τιμές της $\tilde{u}|_{\text{conv}(\Omega)}$ φράσσονται από τις τιμές της u στο Ω και συνεπώς είναι πραγματικοί αριθμοί.

Ορισμός 1.3.13 *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ μία συνάρτηση. Τότε η u καλείται **γνήσια κυρτή** αν υπάρχει απεικόνιση $\bar{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ η οποία είναι γνήσια κυρτή επέκταση της u σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^n$, δηλαδή ισχύει*

$$\bar{u}|_{\Omega} = u$$

και

$$\bar{u}(tx + (1-t)y) < t\bar{u}(x) + (1-t)\bar{u}(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ και } \forall t \in (0, 1)$$

Ορισμός 1.3.14 *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ μία συνάρτηση. Τότε η u καλείται **ομοιόμορφα κυρτή** (*uniformly convex/strongly convex*) αν υπάρχει θετική σταθερά m ώστε η συνάρτηση $u - \frac{m}{2}|\cdot|^2$ να είναι κυρτή.*

Από τους ορισμούς είναι άμεσο ότι κάθε ομοιόμορφα κυρτή συνάρτηση είναι και γνήσια κυρτή συνάρτηση, ενώ και κάθε γνήσια κυρτή είναι κυρτή συνάρτηση.

Παράδειγμα 1.3.15 *Θεωρούμε ένα ανοικτό, κυρτό, φραγμένο σύνολο Ω , $x \in \Omega$ και $y \leq 0$. Ακόμα θεωρούμε τη συνάρτηση $\hat{C}_x : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ με*

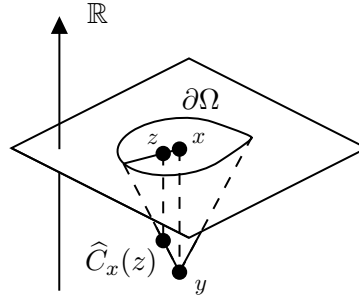
$$\hat{C}_x(z) = \begin{cases} y, & \text{όταν } z = x \\ \left(1 - \frac{1}{\mu_z}\right)y, & \text{όταν } z \in \Omega \setminus \{x\} \\ 0, & \text{όταν } z \in \partial\Omega \end{cases}$$

όπου $\mu_z > 1$ είναι εκείνος ο πραγματικός αριθμός που εξασφαλίζει το Λήμμα 1.3.9 έτσι ώστε να ισχύει $(1 - \mu_z)x + \mu_z z \in \partial\Omega$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αυτή είναι μία καλά ορισμένη συνάρτηση. Αρκεί να δείξουμε την ανισότητα του ορισμού της κυρτότητας μόνο στο εσωτερικό του $\Omega \setminus \{x\}$, καθώς αυτό είναι ένα πυκνό υποσύνολο του $\bar{\Omega}$ και η $\hat{C}_x$ είναι συνεχής.

Θεωρούμε $z_1, z_2 \in \Omega \setminus \{x\}$ και $\lambda \in (0, 1)$, οπότε υπάρχουν $\mu_1, \mu_2 > 1$ όπως παραπάνω. Αν $\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2 = x$, επειδή $y \leq 0$, έχουμε:

$$\hat{C}_x(\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) = y \leq \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1} - \frac{1 - \lambda}{\mu_2}\right)y = \lambda \hat{C}_x(z_1) + (1 - \lambda)\hat{C}_x(z_2)$$



Σχήμα 1.1: Το γράφημά της $\hat{C}_x$ είναι η κωνική επιφάνεια που δημιουργείται από την ευθεία που διέρχεται από το (x, y) και έχει ως οδηγό καμπύλη το σύνολο του Ω , όπου και μηδενίζεται.

Αν $z_0 := \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2 \neq x$, θα υπάρχει $\mu_0 := \mu_{z_0} > 1$ όπως παραπάνω. Θέτουμε $\tilde{z}_i := (1 - \mu_i)x + \mu_i z_i \in \partial\Omega$ για $i = 1, 2$ και επειδή το $\bar{\Omega}$ είναι κυρτό, για το εκάστοτε $\kappa \in (0, 1)$ έχουμε

$$z'_0 := \kappa \tilde{z}_1 + (1 - \kappa) \tilde{z}_2 \in \bar{\Omega}$$

Θέτουμε $\kappa := \frac{\lambda \mu_2}{(1 - \lambda)\mu_1 + \lambda \mu_2}$, $t := \frac{\mu_1 \mu_2}{(1 - \lambda)\mu_1 + \lambda \mu_2}$ και υπολογίζουμε

$$(1 - t)x + tz_0 = (1 - \kappa\mu_1 - (1 - \kappa)\mu_2)x + \kappa\mu_1 z_1 + (1 - \kappa)\mu_2 z_2 = z'_0,$$

οπότε ανακαλώντας τον ορισμό του μ_0 από την απόδειξη του Λήμματος 1.3.9 έχουμε

$$t \leq \mu_0 \implies 1 - \frac{1}{t} \leq 1 - \frac{1}{\mu_0} \implies (1 - \frac{1}{t})y \geq (1 - \frac{1}{\mu_0})y = \hat{C}_x(z_0),$$

$$\implies \hat{C}_x(z_0) \leq (1 - \frac{1}{t})y = \lambda \hat{C}_x(z_1) + (1 - \lambda) \hat{C}_x(z_2)$$

Ορισμός 1.3.16 Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ μία συνάρτηση. Τότε η u καλείται **κοίλη** αν η $-u$ είναι κυρτή.

Εξαιτίας αυτής της σχέσης των κυρτών και κοίλων συναρτήσεων, και για τις κοίλες συναρτήσεις μπορεί να αναπτυχθεί μια παρεμφερής θεωρία με αυτή που αναπτύσσουμε για τις κυρτές· δηλαδή για σχεδόν κάθε πρόταση, θεώρημα, ορισμό που αναφέρεται σε κυρτές συναρτήσεις μπορούμε να έχουμε μία αντίστοιχη δυϊκή που να αναφέρεται σε κοίλες συναρτήσεις, κάνοντας ωστόσο κάθε φορά τις απαραίτητες τροποποιήσεις.

Ορισμός 1.3.17 Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Τότε η u καλείται **αφινική** ή **ομοπαράλληλική (affine)** αν είναι ταυτόχρονα και κυρτή και κοίλη.³

³Αυτός ο ορισμός ουσιαστικά αποτελεί υποπερίπτωση του ορισμού των αφινικών συναρτήσεων μεταξύ διανυσματικών χώρων, δηλαδή αν V, W είναι διανυσματικοί χώροι η απεικόνιση $T : V \rightarrow W$ καλείται αφινική αν υπάρχουν $v_0 \in V, w_0 \in W$ ώστε η $T : v_0 + V \rightarrow w_0 + W$ να είναι γραμμική.

Παράδειγμα 1.3.18 Αν $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία αφινική συνάρτηση θεωρούμε $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x) := \ell(x) - \ell(0)$. Επειδή η ℓ είναι ταυτόχρονα κυρτή και κοίλη έχουμε ότι για $\lambda \in [0, 1]$ ισχύει $T(\lambda x) = T(\lambda x + (1 - \lambda)0) = \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(0) = \lambda T(x)$. Για $t \geq 1$ έχουμε $T(x) = T\left(\frac{1}{t}tx\right) = \frac{1}{t}T(tx)$. Επιπλέον έχουμε $\frac{1}{2}T(x+y) = T\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}T(x) + \frac{1}{2}T(y)$, από όπου και προκύπτει ότι $T(-x) = -T(x)$.

Από όλα τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η T είναι γραμμική και επομένως υπάρχουν μοναδικά $p \in \mathbb{R}^n$ και $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $\ell(x) = a + \langle p, x \rangle$. (Αρκεί να επιλέξουμε $a := \ell(0)$ και $p := (T(e_1), \dots, T(e_n))$.)

Οι κυρτές συναρτήσεις παρουσιάζουν ιδιαίτερα καλές αναλυτικές ιδιότητες.

Πρόταση 1.3.19 Αν το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό και η $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία κυρτή συνάρτηση τότε

- (i) η u είναι τοπικά Lipschitz συνεχής στο Ω .
- (ii) η u είναι σχεδόν παντού διαφορίσιμη στο Ω .
- (iii) η ∇u είναι σχεδόν παντού διαφορίσιμη στο Ω .

Απόδειξη.

- (i) Για $x \in \Omega$, $r > 0$ και $y \in B(x, r) \setminus \{x\} \subseteq B(x, 2r) \subseteq \Omega$, από το Λήμμα 1.3.9 υπάρχει $\mu > 1$: $z := (1 - \mu)x + \mu y \in \partial B(x, 2r)$. Ισοδύναμα είναι $y = \frac{1}{\mu}z + (1 - \frac{1}{\mu})x$, οπότε λόγω κυρτότητας έχουμε

$$u(y) \leq \frac{1}{\mu}u(z) + (1 - \frac{1}{\mu})u(x) = u(x) + \frac{1}{\mu}(u(z) - u(x))$$

Επιπλέον έχουμε $\frac{1}{\mu} = \frac{|y-x|}{|z-x|} = \frac{|y-x|}{2r}$, οπότε είναι

$$u(y) - u(x) \leq \frac{|y-x|}{2r} \sup_{B(x, 2r)} 2|u| \leq \frac{1}{r} \sup_{B(x, 2r)} |u| |y-x|$$

Αποδεικνύεται ότι το $\sup_{B(x, 2r)} |u|$ είναι πραγματικός αριθμός (δείτε απόδειξη [15, Θεώρημα 6.7, βήμα 1]), οπότε εναλλάσσοντας τους ρόλους των x, y και επαναλαμβάνοντας τα προηγούμενα βήματα έχουμε $|u(y) - u(x)| \leq \frac{1}{r} \sup_{B(x, 2r)} |u| |y-x|$. Λόγω της τυχαιότητας στην επιλογή των x, y προκύπτει το ζητούμενο.

- (ii) Έπεται από το (i) και το Θεώρημα του Rademacher [15, Θεώρημα 3.2].
- (iii) Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [15, Θεώρημα 6.9 (Θεώρημα του Alexandrov)].

□

Αν θεωρήσουμε την κυρτή επέκταση $\tilde{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ της $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, από την προηγούμενη πρόταση είναι εμφανές ότι σε όλα τα σημεία του εσωτερικού του Ω , όπου η συνάρτηση λαμβάνει πραγματικές τιμές, είναι και συνεχής. Ωστόσο στα υπόλοιπα σημεία, όπου η επέκτασή της λαμβάνει εν δυνάμει και την τιμή $+\infty$ (όπως για παράδειγμα στο σύνορο) μπορεί να είναι απλώς κάτω ημισυνεχής (δείτε Παράδειγμα 1.3.12). Ακόμα έπεται ότι μία κυρτή συνάρτηση σε ένα συμπαγές σύνολο είναι Lipschitz συνεχής.

Για την συνέχεια κάνουμε την σύμβαση ότι αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό σύνολο, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση και $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση, όταν θα γράφουμε $u = g$ στο $\partial\Omega$ θα εννοούμε ότι η u επεκτείνεται συνεχώς στο $\bar{\Omega}$ έτσι ώστε στο σύνορο $\partial\Omega$ η επέκταση να ταυτίζεται με την g . Δηλαδή τότε υπάρχει συνεχής $\bar{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\bar{u}|_{\Omega} = u$ και $\bar{u}|_{\partial\Omega} = g$.

Όταν η u ανήκει στην κλάση C^2 , η κυρτότητα της u εξαρτάται άμεσα από τη μορφή του Εσσιανού πίνακα της u και πιο συγκεκριμένα από το εάν αυτός ο πίνακας είναι θετικά ημιορισμένος, όπως φαίνεται και από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.3.20 *Αν το $C \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό και κυρτό και $u \in C^2(C)$, ισχύει ότι*

$$\eta \text{ είναι κυρτή} \iff \text{ο } D^2u \text{ είναι θετικά ημιορισμένος στο } C,$$

δηλαδή ισχύει $\xi^T D^2u(x) \xi \geq 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ και $\forall x \in C$.

Απόδειξη. Καθώς αποτελεί επέκταση της μονοδιάστατης περίπτωσης, την παραλείπουμε και παραπέμπουμε στο [35, Θεώρημα 1.5.13]. □

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το ευθύ στην προηγούμενη πρόταση, αυτή η συνεπαγωγή ισχύει και όταν το C είναι απλώς ένα ανοικτό σύνολο και όχι απαραίτητα κυρτό. Το αντίστροφο ωστόσο δεν ισχύει απαραίτητα όταν το C δεν είναι κυρτό. (Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η $u : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $u(x) := x^2 + 1$, $x > 0$ και $u(x) := x^2 - 1$, $x < 0$)

Ανάλογη πρόταση ισχύει και για τις ομοιόμορφα κυρτές συναρτήσεις με τη διαφορά ότι ο Εσσιανός πίνακας D^2u πρέπει να φράσσεται παντού από κάτω από μία θετική σταθερά.

Πόρισμα 1.3.21 *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και κυρτό σύνολο και $u \in C^2(\Omega)$. Τότε*

$$\eta \text{ είναι ομοιόμορφα κυρτή} \iff \exists c > 0 : \xi^T D^2u(x) \xi \geq c|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ και } \forall x \in \Omega$$

Όσον αφορά τις γνήσια κυρτές συναρτήσεις, η συνθήκη ότι ο Εσσιανός πίνακας μίας δύο φορές διαφορίσιμης συνάρτησης είναι θετικά ορισμένος είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία ώστε η συνάρτηση να είναι γνήσια κυρτή.

Από τις προηγούμενες προτάσεις είναι εμφανές ότι η έννοια της κυρτότητας μίας συνάρτησης συνδέεται στενά με το πρόσημο των ιδιοτιμών του Εσσιανού πίνακα της συνάρτησης.

Πιο συγκεκριμένα, οι ιδιοτιμές του Ερμιτιανού πίνακα μίας κυρτής συνάρτησης πρέπει να είναι παντού μη αρνητικές, ενώ οι ιδιοτιμές μίας ομοιόμορφα κυρτής πρέπει να είναι ομοιόμορφα φραγμένες από ένα θετικό κάτω φράγμα.

Στην περίπτωση όπου μία κυρτή συνάρτηση δεν είναι λεία, αρκετές φορές είναι χρήσιμο να την προσεγγίσουμε μέσω μίας ακολουθίας λείων κυρτών συναρτήσεων. Αυτή η προσέγγιση μπορεί να γίνει με χρήση της Θεωρίας της Συνέλιξης και των Εκλειαντών (Mollifiers) [3, Ενότητα 4.4].

Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι η **συνέλιξη (convolution)** δύο συναρτήσεων $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η

$$f * g := \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot - y)g(y) dy : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Φυσικά η συνέλιξη μπορεί να μην είναι καλά ορισμένη ως συνάρτηση εκτός και αν το ολοκλήρωμα του ορισμού υπάρχει, κάτι το οποίο συμβαίνει όταν οι f, g πληρούν κάποιες συνθήκες· επί παραδείγματι για $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ και $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ η συνέλιξη $f * g$ είναι καλά ορισμένη και μάλιστα ισχύει $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ [3, Πρόταση 4.20]. Τέλος, από τον τύπο αλλαγής μεταβλητών είναι εμφανές ότι $\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) dy$ [36, Θεώρημα 3-13].

Μία ακολουθία **εκλειαντών (mollifiers)** είναι μία ακολουθία $(\varrho_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ με $\varrho_k \geq 0$, $\text{spt } \varrho_k \subseteq \overline{B(0, \frac{1}{k})}$ και $\int_{\mathbb{R}^n} \varrho_k(x) dx = 1$. Ένα παράδειγμα τέτοιας ακολουθίας αποτελεί

$$\eta \varrho_k(z) := \frac{k^n \varrho(kz)}{\int_{\mathbb{R}^n} \varrho(x) dx}, \text{ όταν } k \in \mathbb{N} \text{ και } \varrho(z) := \begin{cases} e^{\frac{1}{|z|^2-1}}, & \text{για } |z| < 1 \\ 0, & \text{για } |z| \geq 1 \end{cases}.$$

Πρόταση 1.3.22 *Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση, υπάρχει ακολουθία κυρτών συναρτήσεων $u_k \in C^\infty(\Omega_k)$ που συγκλίνει ομοιόμορφα τοπικά στη u στο Ω , δηλαδή συγκλίνει ομοιόμορφα πάνω από κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω και όπου $\Omega_k := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\}$. Αν επιπλέον η u είναι φραγμένη, στα παραπάνω μπορούμε να θεωρήσουμε το Ω αντί για Ω_k · δηλαδή οι u_k ορίζονται σε ολόκληρο το Ω και έχουν τις ανάλογες ιδιότητες.*

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι το Ω είναι κυρτό. Επεκτείνουμε την u στην $\bar{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με την τιμή μηδέν στο $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Ακόμα, θέτουμε $\bar{u}_k := (\bar{u} \chi_{\Omega_k}) * \varrho_k$, όταν $k \in \mathbb{N}$ και $\varrho_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι μία ακολουθία εκλειαντών. Παρατηρούμε ότι $\bar{u} \chi_{\Omega_k} = u|_{\Omega_k}$ και καθώς η u είναι συνεχής, έχουμε $\bar{u} \chi_{\Omega_k} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Τότε σύμφωνα με τα προηγούμενα παρατηρούμε ότι $\bar{u}_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ και άρα $u_k := \bar{u}_k|_{\Omega_k} \in C^\infty(\Omega_k)$.

Θεωρούμε $K \subseteq \Omega$ συμπαγές. Για $x \in K$ και $\text{dist}(K, \partial\Omega) > \frac{1}{k}$ έχουμε

$$\begin{aligned} |u_k(x) - u(x)| &= \left| \int_{\Omega_k} u(z) \varrho_k(x-z) dz - \int_{\Omega_k} u(x) \varrho_k(x-z) dz \right| \\ &\leq \int_{\Omega_k} |u(z) - u(x)| \varrho_k(x-z) dz \\ &= \int_{B(x, \frac{1}{k})} |u(z) - u(x)| \varrho_k(x-z) dz \end{aligned}$$

Η u είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $K \subseteq \Omega_k$ ως κυρτή, οπότε για το εκάστοτε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $|z - x| < \delta \implies |u(z) - u(x)| < \varepsilon$ και επομένως επιλέγοντας $k > \frac{1}{\delta}$ έχουμε

$$|u_k(x) - u(x)| < \int_{B(x, \frac{1}{k})} \varepsilon \varrho_k(x-z) dz = \varepsilon$$

Συνεπώς η ακολουθία u_k συγγλίνει ομοιόμορφα στην u στο K και μένει να δείξουμε ότι κάθε μία από τις u_k είναι κυρτή.

Για $\lambda \in (0, 1)$, $x, y \in \Omega_k$ έχουμε $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \Omega_k$. Πράγματι, αφού το Ω είναι κυρτό έχουμε $B(\lambda x + (1 - \lambda)y, \frac{1}{k}) = \lambda B(x, \frac{1}{k}) + (1 - \lambda)B(y, \frac{1}{k}) \subseteq \Omega$, γεγονός το οποίο ισοδυναμεί με το ότι $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \Omega_k$. Ακόμα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} u_k(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u} \chi_{\Omega_k}(z) \varrho_k(\lambda x + (1 - \lambda)y - z) dz \\ &= \int_{B(\lambda x + (1 - \lambda)y, \frac{1}{k})} u(z) \varrho_k(\lambda x + (1 - \lambda)y - z) dz \\ &= \int_{B(0, \frac{1}{k})} u(\lambda x + (1 - \lambda)y - z) \varrho_k(z) dz \\ &\leq \int_{B(0, \frac{1}{k})} (\lambda u(x - z) + (1 - \lambda)u(y - z)) \varrho_k(z) dz \\ &= \lambda u_k(x) + (1 - \lambda)u_k(y) \end{aligned}$$

Τέλος όταν ισχύει η πρόσθετη υπόθεση ότι η u είναι φραγμένη, θεωρούμε τις συναρτήσεις $\bar{u}_k := (\bar{u} \chi_{\Omega}) * \varrho_k$ και παρατηρούμε ότι $\bar{u}_k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, αφού για κάθε συμπαγές $K \subseteq \mathbb{R}^n$ έχουμε $\|\bar{u}_k\|_{L^1(K)} \leq \|u\|_{\infty} |K \cap \Omega|$. Συνεχίζοντας την απόδειξη ανάλογα με προηγούμενως προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Για κάθε κυρτή συνάρτηση ορίζεται μία δυϊκή κυρτή συνάρτηση, ο μετασχηματισμός Legendre αυτής. Αυτή η σχέση δυϊκότητας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη μελέτη της αρχικής συνάρτησης, αφού πολλές ιδιότητές της αρχικής ελέγχονται από ιδιότητες της δυϊκής. Λόγου χάρη, αν η δυϊκή είναι γνήσια κυρτή, η αρχική είναι συνεχώς διαφορίσιμη, ενώ αν η δυϊκή είναι ομοιόμορφα κυρτή η αρχική ανήκει στο $C^{1,1}$ (δείτε [23, Κεφάλαιο E]).

Ορισμός 1.3.23 Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ μία κυρτή συνάρτηση, ορίζουμε μία νέα συνάρτηση $u^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ με

$$u^*(p) := \sup_{x \in \Omega} (\langle x, p \rangle - u(x)), \text{ όταν } p \in \mathbb{R}^n$$

η οποία καλείται **μετασχηματισμός Legendre** της u .

Παρατήρηση 1.3.24 Είναι άμεσο ότι ο μετασχηματισμός Legendre της u αποτελεί κυρτή συνάρτηση. Ακόμα, όταν το Ω είναι συμπαγές (αντί για ανοικτό) έχουμε $u^* < +\infty$.

1.4 Η σχέση μεταξύ της κυρτότητας των λύσεων και της ελλειπτικότητας της εξίσωσης

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η περίπτωση όπου η εξίσωση είναι ελλειπτική παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αφού τότε οι λύσεις είναι κυρτές και αντίστροφα. Σε αυτή την ενότητα διερευνούμε αυτή την σχέση.

Αρχικά, ας θυμηθούμε κάποιες έννοιες από τις Ελλειπτικές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις δεύτερης τάξης όπως αυτές αναπτύσσονται στο [21].

Γενικά, μία μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης έχει την μορφή

$$F(\cdot, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{στο } \Omega$$

όπου $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό σύνολο και $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \text{Sym}_n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία πραγματική συνάρτηση. Αν η $F(\cdot, z, p, A)$ είναι αφινική ως προς όλες τις μεταβλητές z, p_k, a_{ij} , όπου $i, j, k = 1, \dots, n$, $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ και $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \text{Sym}_n$, η εξίσωση καλείται **γραμμική**. Όταν είναι αφινική ως προς τις μεταβλητές a_{ij} καλείται **οιονεί γραμμική (quasilinear)**, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση καλείται **πλήρως μη γραμμική**.

Ορισμός 1.4.1 Θεωρούμε μία πραγματική συνάρτηση $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να είναι συνεχώς διαφορίσιμη ως προς τις μεταβλητές a_{ij} , όπου Ω είναι ένα ανοικτό σύνολο και $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τότε ο τελεστής F καλείται **ελλειπτικός** στο Ω αν ο πίνακας

$$\frac{dF}{dA} := \left(\frac{\partial F}{\partial a_{ij}} \right)_{i,j=1}^n$$

είναι θετικά ορισμένος στο $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}$.

Τότε και η εξίσωση $F(x, u, Du, D^2u) = 0$, $x \in \Omega$, καλείται **ελλειπτική**, όπου $u \in C^2(\Omega)$.⁴

Ειδικότερα, αν $u \in C^2(\Omega)$, ο τελεστής F θα καλείται **ελλειπτικός** ως προς την u όταν ο πίνακας $\frac{dF}{dA}(\cdot, u, Du, D^2u)$ είναι θετικά ορισμένος παντού στο Ω . Με αυτόν τον τρόπο μία εξίσωση μπορεί να είναι ελλειπτική μόνο για κάποιες από τις λύσεις της.

⁴ Η έννοια του (ομοιόμορφα) ελλειπτικού τελεστή γενικεύεται και στην περίπτωση όπου η F δεν είναι διαφορίσιμη (δείτε [8, Ορισμός 2.1]).

Ορισμός 1.4.2 Θεωρούμε τον ελλειπτικό τελεστή $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$, όπου Ω είναι ένα ανοικτό σύνολο. Αυτός καλείται **ομοιόμορφα ελλειπτικός** όταν $\exists \lambda, \Lambda > 0$:

$$\lambda |\xi|^2 \leq \xi^T \frac{dF}{dA} \xi \leq \Lambda |\xi|^2 \quad \text{στο } \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} \text{ και } \xi \in \mathbb{R}^n$$

Τότε και η εξίσωση $F(x, u, Du, D^2u) = 0$, $x \in \Omega$, καλείται **ομοιόμορφα ελλειπτική**, όπου $u \in C^2(\Omega)$.

Αντίστοιχα με προηγούμενως, η εξίσωση μπορεί να είναι **ομοιόμορφα ελλειπτική** ως προς κάποια $u \in C^2(\Omega)$, αν είναι ομοιόμορφα ελλειπτική στο $\Omega \times u(\Omega) \times Du(\Omega) \times D^2u(\Omega)$.

Αν η ανισότητα στον ορισμό της ομοιόμορφης ελλειπτικότητας ισχύει παντού πάνω από το Ω μόνο για τις τιμές $\lambda = 0$ ή $\Lambda = +\infty$, η ελλειπτική εξίσωση καλείται **εκφυλισμένα ελλειπτική**.

Πρόταση 1.4.3 Η εξίσωση $\det D^2u = f > 0$ σε κάποιο ανοικτό σύνολο Ω είναι ελλειπτική όταν η $u \in C^2(\Omega)$ είναι κυρτή. Αντίστροφα, όταν η εξίσωση είναι ελλειπτική, η u είναι γνήσια κυρτή.

Απόδειξη. Θεωρούμε $F(x, A) := \det A - f(x)$ όταν $x \in \Omega$ και $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Για τυχαίο πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, από τον τύπο του Jacobi για τον υπολογισμό της παραγώγου ορίζουσας [24, Ισότητα 0.8.2.6], γνωρίζουμε ότι $\frac{dF}{dA} = \frac{d}{dA}(\det A) = (\text{adj } A)^T$.

Καθώς έχουμε $\det D^2u = f > 0$, ο πίνακας D^2u αντιστρέφεται. Αφού όμως είναι και συμμετρικός, από την Γραμμική Άλγεβρα [24, Ενότητα 0.8.2] έχουμε

$$\frac{dF}{dA}(\cdot, D^2u) = \det D^2u (D^2u)^{-1} = f (D^2u)^{-1} \quad \text{στο } \Omega.$$

Ο Εσσιανός πίνακας της u είναι θετικά ημιορισμένος επειδή αυτή είναι κυρτή και μάλιστα είναι θετικά ορισμένος καθώς δεν μπορεί να έχει μηδενικές ιδιοτιμές λόγω της σχέσης $\det D^2u > 0$. Από την παραπάνω έκφραση για τον πίνακα $\frac{dF}{dA}$ συμπεραίνουμε ότι είναι παντού θετικά ορισμένος στο Ω και άρα η εξίσωση είναι ελλειπτική.

Αντίστροφα, γνωρίζοντας ότι η εξίσωση είναι ελλειπτική προκύπτει ότι ο πίνακας $(D^2u)^{-1}$ είναι θετικά ορισμένος. Συνεπώς και ο D^2u είναι θετικά ορισμένος. $\square$

Τώρα ας εξετάσουμε την περίπτωση της ομοιόμορφης ελλειπτικότητας. Ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση $\det D^2 = f$ είναι ομοιόμορφα ελλειπτική, οπότε $\exists \lambda, \Lambda \in (0, +\infty)$ ώστε να ισχύει

$$\lambda |\xi|^2 \leq \xi^T \frac{dF}{dA} \xi \leq \Lambda |\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega \text{ και } \xi \in \mathbb{R}^n$$

Ας είναι λ_i οι ιδιοτιμές του $D^2u(x)$, όταν $i = 1, \dots, n$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι το σύστημα συντεταγμένων έχει επιλεγεί κατάλληλα ώστε αυτός να είναι

διαγώνιος. Θέτουμε $\xi := e_i$, οπότε με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς η ανισότητα γίνεται

$$\begin{aligned} \lambda &\leq \frac{\det D^2 u(x)}{\lambda_i} \leq \Lambda, & \forall x \in \Omega \\ \implies \lambda^n &\leq \frac{(\det D^2 u(x))^n}{\det D^2 u(x)} \leq \Lambda^n, & \forall x \in \Omega \\ \implies \lambda^{\frac{n}{n-1}} &\leq \det D^2 u(x) \leq \Lambda^{\frac{n}{n-1}}, & \forall x \in \Omega \\ \implies \lambda^{\frac{n}{n-1}} &\leq f \leq \Lambda^{\frac{n}{n-1}} \end{aligned}$$

Από αυτή την αναγκαία συνθήκη γίνεται σαφές η *εν* δυνάμει *εκφυλισμένη ελλειπτικότητα* της εξίσωσης· αρκεί να επιλέξουμε μία δεξιά πλευρά που οριακά μηδενίζεται ή απειρίζεται καθώς πλησιάζει το σύνορο, όπως λόγου χάρη την δεξιά πλευρά του Παραδείγματος 1.1.1 με πεδίο λύσης το $(0, +\infty)^n$, ώστε η εξίσωση να είναι εκφυλισμένα ελλειπτική.

Καθώς στον υπολογισμό του $\frac{dF}{dA}$ εμφανίζεται ο όρος $\det A$, είναι αρκετά πιο βολικό για την μελέτη της ομοιόμορφης ελλειπτικότητας της εξίσωσης να δουλέψουμε με την ισοδύναμη μορφή $\log \det D^2 u = \log f$ και άρα με τον τελεστή $G := \log \det A - \log f$.

Πρόταση 1.4.4 Όταν το Ω είναι ένα ανοικτό σύνολο, $u \in C^2(\Omega)$ μία κυρτή συνάρτηση και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, η εξίσωση $\log \det D^2 u = \log f$ είναι ελλειπτική στο Ω . Επιπλέον, αυτή είναι ομοιόμορφα ελλειπτική αν και μόνο αν $\exists m, M > 0$:

$$m|\xi|^2 \leq \xi^T D^2 u \xi \leq M|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $G(x, A) := \log \det A - \log f(x)$ όταν $x \in \Omega$ και $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Έχουμε $\frac{dG}{dA}(\cdot, D^2 u) = (D^2 u)^{-1}$, οπότε η εξίσωση είναι ελλειπτική όταν η u είναι κυρτή. Από αυτή την ισότητα έπεται και η ισοδυναμία της πρότασης. $\square$

Επομένως παρατηρούμε ότι η ομοιόμορφη ελλειπτικότητα της παραπάνω εξίσωσης επιφέρει ομοιόμορφη κυρτότητα στη λύση. Αυτή ωστόσο δεν είναι ικανή συνθήκη, καθώς χρειάζεται και ένα άνω φράγμα στον Εσσιανό πίνακά λύσης, κάτι που επιτυγχάνεται αν λόγου χάρη το Ω είναι συμπαγές αντί για ανοικτό. Στην κατεύθυνση μίας τέτοιας ικανής συνθήκης δείχνουμε την επόμενη πρόταση, αφού πρώτα δείξουμε ένα βοηθητικό λήμμα.

Λήμμα 1.4.5 Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ένας θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας με $\sup_{\xi \in \mathbb{S}^{n-1}} (\xi^T A \xi) =: M$, τότε $\exists C > 0$:

$$\frac{1}{C} |\xi|^2 \leq \xi^T A \xi \leq C |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Το C εξαρτάται μόνο από τα $n, M, \det A$ και μάλιστα ισχύει $C = \max \left\{ M, \frac{M^{n-1}}{\det A} \right\}$.

Απόδειξη. Επειδή ο A είναι θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας έχει θετικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ και υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας P ώστε $P^T A P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ [24,

Θεώρημα 4.1.5]. Τότε έχουμε

$$0 < \det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

και

$$\begin{aligned} M &= \sup_{e \in \mathbb{S}^{n-1}} (\xi^T A \xi) \geq (Pe_i)^T A (Pe_i) = e_i^T P^T A P e_i \\ &= e_i^T \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) e_i = \lambda_i, \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Με βάση τις παραπάνω ανισότητες για $i = 1, \dots, n$ υπολογίζουμε

$$\lambda_i = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j} \geq \frac{\det A}{\prod_{i \neq j=1}^n M} = \frac{\det A}{M^{n-1}} > 0$$

Θεωρούμε $C := \max \left\{ M, \frac{M^{n-1}}{\det A} \right\} > 0$ και έχουμε $\frac{1}{C} \leq \lambda_i \leq C$, οπότε πολλαπλασιάζοντας με $|\xi_i|^2$ και προσθέτοντας τις ανισότητες, όταν $\xi := P \zeta$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |\xi_i|^2 \leq C \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{C} |\xi|^2 &\leq \xi^T \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \xi \leq C |\xi|^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{C} |\zeta|^2 &\leq \zeta^T A \zeta \leq C |\zeta|^2, \quad \text{όπου } \zeta \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

□

Πρόταση 1.4.6 *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και κυρτό σύνολο και $u \in C^2(\Omega)$ κυρτή με $\det D^2 u \geq c_0 > 0$ και $\sup_{e \in \mathbb{S}^{n-1}} \partial_{ee} u(x) \leq A \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \Omega$.*

Τότε η u είναι ομοιόμορφα κυρτή. Επιπλέον, υπάρχει σταθερά $C = C(n, c_0, A) > 0$:

$$\frac{1}{C} |\xi|^2 \leq \xi^T D^2 u(x) \xi \leq C |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ και } x \in \Omega$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \Omega$ ο πίνακας $D^2 u(x)$ είναι θετικά ημιορισμένος. Επιπλέον, εξαιτίας της συνθήκης $\det D^2 u > 0$ δεν μπορεί να έχει μηδενικές ιδιοτιμές, οπότε είναι παντού θετικά ορισμένος. Από το Λήμμα 1.4.5 $\exists C_x > 0$:

$$\frac{1}{C_x} |\xi|^2 \leq \xi^T D^2 u(x) \xi \leq C_x |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Για $e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \partial_{ee}u &= \partial_e(Du \cdot e) = \partial_e \left(\sum_{i=1}^n \partial_i u e_i \right) = \sum_{i=1}^n \partial_e(\partial_i u) e_i = \sum_{i=1}^n D(\partial_i u) \cdot e e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \partial_j \partial_i u e_j \right) e_i = \sum_{i,j=1}^n \partial_{ji} u e_j e_i = e^T D^2 u e \end{aligned}$$

οπότε τότε είναι $C_x \leq \max \left\{ A, \frac{A^{n-1}}{\det D^2 u} \right\} \leq \max \left\{ A, \frac{A^{n-1}}{c_0} \right\} =: C, \quad \forall x \in \Omega.$ □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΛΥΣΕΙΣ ALEXANDROV

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε μία ασθενέστερη μορφή λύσεων της εξίσωσης Monge-Ampère, τις λεγόμενες λύσεις *Alexandrov*, οι οποίες εισήχθησαν πρώτη φορά από τον Alexandrov στη μελέτη του προβλήματος Minkowski. Αρχικά αναπτύσσουμε εκείνα τα μαθηματικά εργαλεία που χρειάζονται για αυτή την μελέτη, όπως το υποδιαφορικό (*subdifferential*) μίας συνάρτησης, το μέτρο *Monge-Ampère* και τις ιδιότητες τους, ενώ στη συνέχεια ασχολούμαστε με την απόδειξη ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων Alexandrov για προβλήματα Dirichlet της εξίσωσης.

2.1 Το υποδιαφορικό κυρτής συνάρτησης και οι ιδιότητές του

Ας αρχίσουμε ορίζοντας την έννοια του υποδιαφορικού (*subdifferential*) μίας συνάρτησης και βλέποντας κάποιες βασικές του ιδιότητες, καθώς και κάποιες ιδιότητες των κυρτών συναρτήσεων που αποδεικνύονται με την βοήθεια αυτού.

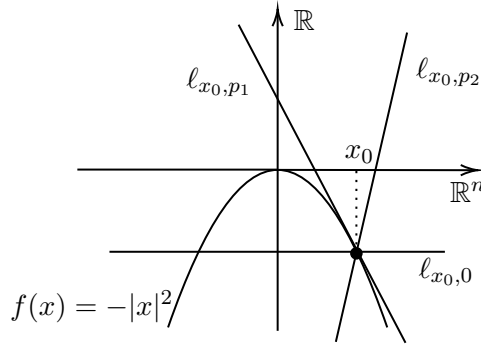
Ορισμός 2.1.1 Αν $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in A$ και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, ορίζουμε ως **υποδιαφορικό** (*subdifferential*) της f στο σημείο x το σύνολο

$$\partial f(x) := \{p \in \mathbb{R}^n \mid \exists r_p > 0 : f(z) \geq f(x) + \langle p, z - x \rangle, \quad \forall z \in B(x, r_p) \subseteq A\}$$

Ορισμός 2.1.2 Αν $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \subseteq A$ και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, ορίζουμε ως **υποδιαφορικό** (*subdifferential*) της f στο σύνολο E το σύνολο

$$\partial f(E) := \bigcup_{x \in E} \partial f(x)$$

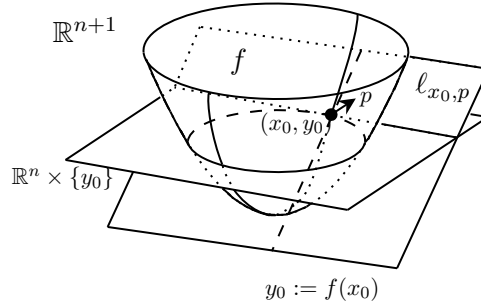
Γενικά, το υποδιαφορικό μίας συνάρτησης σε ένα σημείο ή σε ένα σύνολο μπορεί να είναι το κενό σύνολο. (Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) := -|x|^2$, όπου έχουμε $\partial f(E) = \emptyset$ για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}^n$. κάτι που αντιλαμβανόμαστε και διαισθητικά αν λάβουμε υπόψιν την Παρατήρηση 2.1.4) Παρόλα αυτά, γνωρίζουμε ότι το υποδιαφορικό κυρτών πραγματικών συναρτήσεων είναι μη κενό σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού τους [31, Θεώρημα 23.4].



Σχήμα 2.1: Δεν υπάρχει περιοχή γύρω από το σημείο x_0 , όπου η f βρίσκεται πάνω από το επίπεδο στήριξης της.

Ορισμός 2.1.3 Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή, $x \in \Omega$ και $p \in \partial u(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση $\ell_{x,p} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $\ell_{x,p}(z) := u(x) + \langle p, z - x \rangle$, $z \in \mathbb{R}^n$. Αυτή καλείται **επίπεδο στήριξης (supporting plane)** της u στο x με κλίση p .

Παρατήρηση 2.1.4 Το υποδιαφορικό της f στο x περιέχει όλες τις κατευθύνσεις $p \in \mathbb{R}^n$ για τις οποίες το επίπεδο στήριξης $\ell_{x,p}$ βρίσκεται τοπικά εξ ολοκλήρου κάτω από το γράφημα της f και εφάπτεται σε αυτό στο σημείο x_0 .



Σχήμα 2.2: Το γράφημα του επιπέδου στήριξης $\ell_{x_0,p}$ της κυρτής συνάρτησης f στο x_0 είναι ένα επίπεδο στήριξης του επιγραφήματος της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ με κλίση p .

Παράδειγμα 2.1.5 Το επίπεδο στήριξης της $\ell_{x,p}$ είναι αφινική συνάρτηση. Αν $y, z \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in [0, 1]$ έχουμε

$$\begin{aligned} \ell_{x,p}(\lambda y + (1 - \lambda)z) &= u(x) + \langle p, \lambda y + (1 - \lambda)z - x \rangle \\ &= \lambda(u(x) + \langle p, y - x \rangle) + (1 - \lambda)(u(x) + \langle p, z - x \rangle) \\ &= \lambda \ell_{x,p}(y) + (1 - \lambda) \ell_{x,p}(z), \end{aligned}$$

δηλαδή η $\ell_{x,p}$ είναι κυρτή. Ανάλογα δείχνουμε ότι και η $-\ell_{x,p}$ είναι κυρτή.

Μία χρήσιμη παρατήρηση για το υποδιαφορικό μίας κυρτής συνάρτησης $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ότι η σχέση $u \geq \ell_{x,p}$ ισχύει σε ολόκληρο το Ω , όταν $p \in \partial u(x)$. Αυτό συμβαίνει καθώς για $z \in \Omega$ μπορούμε να επιλέξουμε $\lambda > 0$: $(1 - \lambda)x + \lambda z \in B(x, r_p) \subseteq \Omega$ και να έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\leq (u - \ell_{x,p})((1 - \lambda)x + \lambda z) \leq (1 - \lambda) \overbrace{(u - \ell_{x,p})(x)}^{=0} + \lambda(u - \ell_{x,p})(z) \\ &\implies 0 \leq \lambda(u - \ell_{x,p})(z) \implies u(z) \geq \ell_{x,p}(z) \end{aligned}$$

Επιπλέον, από την προηγούμενη παρατήρηση έπεται και ότι για δύο κυρτές συναρτήσεις u, v που ταυτίζονται σε μία περιοχή κάποιου σημείου x μπορούμε να βρούμε μία κοινή περιοχή αυτού του σημείου όπου ισχύει η ανισότητα του ορισμού του υποδιαφορικού και έτσι να έχουμε $\partial u(x) = \partial v(x)$. Γενικότερα, αν δύο κυρτές συναρτήσεις ταυτίζονται σε κάποιο ανοικτό σύνολο, τα υποδιαφορικά τους είναι ίσα σε αυτό.

Παρατήρηση 2.1.6 Μέσω του υποδιαφορικού μπορεί να δοθεί ένας άλλος χαρακτηρισμός των γνήσια κυρτών συναρτήσεων. Έτσι, μία κυρτή συνάρτηση είναι γνήσια κυρτή αν και μόνο αν $\forall x \in \Omega, \forall p \in \partial u(x)$ ισχύει $u(z) > u(x) + \langle p, z - x \rangle, \quad \forall z \in \Omega \setminus \{x\}$.

Αυτό συμβαίνει διότι αν η u είναι γνήσια κυρτή δεν υπάρχουν $x \in \Omega$ και $p \in \partial u(x)$ ώστε $u(z) = u(x) + \langle p, z - x \rangle$, αφού τότε θα είχαμε $u(\lambda x + (1 - \lambda)z) = \lambda u(x) + (1 - \lambda)u(z)$. Ανάλογα δείχνουμε και την αντίστροφη κατεύθυνση.

Το υποδιαφορικό μίας κυρτής συνάρτησης γενικεύει την έννοια της διαφορίσης στις κυρτές συναρτήσεις, όπως φαίνεται και στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.1.7 (Ένα σημειακό κριτήριο διαφορισμότητας για κυρτές συναρτήσεις) Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση. Τότε η u είναι διαφορίσιμη στο $x \in \Omega$ αν και μόνο αν το $\partial u(x)$ είναι μονοσύνολο. Επιπλέον, όταν αυτή είναι διαφορίσιμη στο x ισχύει $\partial u(x) = \{\nabla u(x)\}$.

Απόδειξη.

“ $\implies$ ” Θεωρούμε $p \in \partial u(x)$, $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ και $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει $x + \varepsilon e \in \Omega$. Τότε έχουμε την σχέση $u(x + \varepsilon e) \geq u(x) + \varepsilon \langle p, e \rangle$. Επειδή, όμως, η u είναι διαφορίσιμη στο x , έχουμε $\partial_e u(x) = \langle \nabla u(x), e \rangle$ και συνεπώς είναι $u(x + \varepsilon e) = u(x) + \varepsilon \langle \nabla u(x), e \rangle + o(\varepsilon)$, όταν $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Επομένως, από τον συνδυασμό των δύο παραπάνω σχέσεων έχουμε

$$\begin{aligned} \varepsilon \langle p, e \rangle &\leq \varepsilon \langle \nabla u(x), e \rangle + o(\varepsilon), \quad \text{όταν } \varepsilon \rightarrow 0^+ \\ \implies \langle p - \nabla u(x), e \rangle &\leq \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad \text{όταν } \varepsilon \rightarrow 0^+ \\ \implies \langle p - \nabla u(x), e \rangle &\leq 0 \end{aligned}$$

Θέτοντας όπου e το $-e$ παίρνουμε ότι $\langle p - \nabla u(x), e \rangle \geq 0$ και επομένως λόγω της γενικότητας στην επιλογή του $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ έχουμε ότι $p = \nabla u(x)$.

“ $\Leftarrow$ ” Καθώς η απόδειξη της αντίστροφης συνεπαγωγής απαιτεί αρκετά αποτελέσματα από την Κυρτή Ανάλυση τα οποία δεν θα καλύψουμε στο παρόν κείμενο, για αυτή παραπέμπουμε στο [31, Θεώρημα 25.1].

□

Από αυτή τη σχέση μεταξύ του υποδιαφορικού και της παραγώγου μίας κυρτής συνάρτησης προκύπτει ένα φράγμα για την ∇u , το οποίο θα μας φανεί χρήσιμο στην συνέχεια.

Πόρισμα 2.1.8 *Αν το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό, κυρτό, φραγμένο σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία κυρτή συνάρτηση, ισχύει*

$$\sup_{p \in \partial u(K)} |p| \leq \frac{2 \|u\|_{L^\infty(U)}}{\text{dist}(K, \partial U)}$$

για $K \subset \subset U \subseteq \Omega$ και U ανοικτό. Επιπρόσθετα ισχύει

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(K)} \leq \frac{2 \|u\|_{L^\infty(U)}}{\text{dist}(K, \partial U)}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $x \in K$, $r := \frac{1}{2} \text{dist}(K, \partial U) > 0$ ($K \subset \subset U$), $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ και $\varepsilon \in (0, 1)$ αρκετά μικρό ώστε $y_e := x + \varepsilon e \in B(x, r)$. Τότε δουλεύοντας όπως στην απόδειξη της Πρότασης 1.3.19(i) δείχνουμε ότι $\exists z_e \in \partial B(x, 2r) \subseteq \bar{U}$ έτσι ώστε

$$u(y_e) - u(x) \leq \frac{2|y_e - x|}{|z_e - x|} \max_{B(x, 2r)} |u|$$

Αφού $|z_e - x| = \text{dist}(K, \partial U)$, έχουμε $u(y_e) - u(x) \leq \frac{2\varepsilon \|u\|_{L^\infty(U)}}{\text{dist}(K, \partial U)}$, ενώ για $p \in \partial u(x)$ παίρνουμε

$$|p| = \frac{1}{\varepsilon} \sup_{e \in \mathbb{S}^{n-1}} \langle p, \varepsilon e \rangle \leq \frac{1}{\varepsilon} \sup_{e \in \mathbb{S}^{n-1}} (u(x + \varepsilon e) - u(x)) \leq \frac{2 \|u\|_{L^\infty(U)}}{\text{dist}(K, \partial U)}$$

Από την Πρόταση 2.1.7 έχουμε ότι το ίδιο φράγμα ισχύει και για τη ∇u σε κάθε σημείο x όπου η u είναι διαφορίσιμη. Καθώς η u είναι σχεδόν παντού διαφορίσιμη στο K , αυτό αποτελεί άνω φράγμα και για την ποσότητα $\|\nabla u\|_{L^\infty(K)}$. □

Παρατήρηση 2.1.9 Στην απόδειξη του προηγούμενου πορίσματος δείξαμε ότι για κάθε $x, y \in K$ ισχύει η σχέση $|u(y) - u(x)| \leq \frac{2\|u\|_{L^\infty(U)}}{\text{dist}(K, \partial U)} |y - x|$, δείξαμε δηλαδή ότι στο K η u είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά $\frac{2\|u\|_{L^\infty(U)}}{\text{dist}(K, \partial U)}$.

Πρόταση 2.1.10 *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση. Αν $K \subset \subset \Omega$ είναι ένα συμπαγές σύνολο, τότε το $\partial u(K)$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Από το Πρόσμμα 2.1.8 έχουμε ότι το $\partial u(K)$ είναι φραγμένο σύνολο.

Για να δείξουμε ότι αυτό είναι και κλειστό επιλέγουμε μία ακολουθία $p_m \in \partial u(K)$ με $p_m \rightarrow p$, οπότε τότε υπάρχουν $x_m \in K$ έτσι ώστε να ισχύει $p_m \in \partial u(x_m)$. Όμως καθώς το K είναι συμπαγές, η x_m έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $x_m \rightarrow x \in K$. Παίρνοντας όρια στις ανισότητες του ορισμού του υποδιαφορικού βρίσκουμε $p \in \partial u(x) \subseteq \partial u(K)$. $\square$

Με την βοήθεια του υποδιαφορικού, είμαστε σε θέση να δείξουμε ότι η διαφορισιμότητα μία κυρτής συνάρτησης είναι μία πιο ισχυρή ιδιότητα από ότι η διαφορισιμότητα μίας τυχαίας συνάρτησης, αφού στην περίπτωση των κυρτών επάγει και συνεχής διαφορισιμότητα.

Πρόσμμα 2.1.11 *Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση η οποία είναι διαφορίσιμη παντού στο Ω , τότε $u \in C^1(\Omega)$.*

Απόδειξη. Αν $x_m \in \Omega$ είναι μία ακολουθία με $x_m \rightarrow x \in \Omega$, με βάση την Πρόταση 2.1.7 και δουλεύοντας ανάλογα με την απόδειξη της Πρότασης 2.1.10 για την ακολουθία $p_m := \nabla u(x_m)$ σε μία περιοχή $U \subset \subset \Omega$ γύρω από το x , δείχνουμε ότι η p_m έχει συγκλίνουσα υπακολουθία και μάλιστα το όριο αυτής ανήκει στο $\partial u(x)$. Τότε και πάλι με βάση την Πρόταση 2.1.7 συμπεραίνουμε ότι αυτό το όριο ταυτίζεται με το $\nabla u(x)$.

Αν υποθέσουμε ότι η ακολουθία $\nabla u(x_m)$ δεν συγκλίνει στο $\nabla u(x)$, θα υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $k_0 \in \mathbb{N}$ να υπάρχουν $k \geq k_0$ με $|\nabla u(x_k) - \nabla u(x)| \geq \varepsilon_0$. Τότε όμως επαναλαμβάνοντας την διαδικασία που ακολουθήσαμε παραπάνω για αυτή την υπακολουθία δείχνουμε ότι συγκλίνει στο $\nabla u(x)$, κάτι που είναι άτοπο. $\square$

Το υποδιαφορικό παρουσιάζει αρκετά καλή συμπεριφορά ως προς τις διάφορες συνολοθεωρητικές ιδιότητες όπως η ένωση, η σχέση υποσυνόλου και η διαφορά συνόλων.

Πρόταση 2.1.12 *Θεωρούμε $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση και E, E_k υποσύνολα του Ω , όπου $k \in I$ είναι ένα σύνολο δεικτών. Τότε ισχύει ότι:*

$$(i) \quad \partial u\left(\bigcup_{k \in I} E_k\right) = \bigcup_{k \in I} \partial u(E_k)$$

$$(ii) \quad E_1 \subseteq E_2 \implies \partial u(E_1) \subseteq \partial u(E_2)$$

$$(iii) \quad \partial u(\Omega \setminus E) = (\partial u(\Omega) \setminus \partial u(E)) \cup (\partial u(\Omega \setminus E) \cap \partial u(E))$$

Απόδειξη.

(i) Από τον ορισμό του υποδιαφορικού έχουμε:

$$\partial u\left(\bigcup_{k \in I} E_k\right) = \bigcup_{x \in \bigcup_{k \in I} E_k} \partial u(x) = \bigcup_{k \in I} \bigcup_{x \in E_k} \partial u(x) = \bigcup_{k \in I} \partial u(E_k)$$

(ii) Καθώς $E_1 \subseteq E_2$ ισχύει $E_2 = E_1 \cup E_2$, οπότε από το (i) έχουμε

$$\partial u(E_2) = \partial u(E_1 \cup E_2) = \partial u(E_1) \cup \partial u(E_2) \supseteq \partial u(E_1)$$

(iii) Έχουμε $\partial u(\Omega \setminus E) = \left(\partial u(\Omega \setminus E) \setminus \partial u(E) \right) \cup \left(\partial u(\Omega \setminus E) \cap \partial u(E) \right)$. Επιλέγουμε $p \in \partial u(\Omega) \setminus \partial u(E)$, οπότε $\exists x_0 \in \Omega : p \in \partial u(x_0)$. Επειδή $p \notin \partial u(E)$ είναι $x_0 \notin E$ και επομένως έχουμε

$$p \in \bigcup_{x \in \Omega \setminus E} \partial u(x) = \partial u(\Omega \setminus E)$$

Άρα, είναι: $\partial u(\Omega) \setminus \partial u(E) \subseteq \partial u(\Omega \setminus E) \implies \partial u(\Omega) \setminus \partial u(E) \subseteq \partial u(\Omega \setminus E) \setminus \partial u(E)$
Από το (ii) προκύπτει: $\partial u(\Omega) \setminus \partial u(E) \supseteq \partial u(\Omega \setminus E) \setminus \partial u(E)$, οπότε αποδεικνύεται η ισότητα αυτών των δύο συνόλων και κατ' επέκταση η ζητούμενη ισότητα.

□

Ας κατανοήσουμε καλύτερα τη σχέση *δϋϊκότητας* που υπάρχει μεταξύ μίας κυρτής συνάρτησης και του μετασχηματισμού Legendre αυτής, ενώ στη συνέχεια ας δούμε κάποιες ιδιότητες του υποδιαφορικού αυτού.

Παρατήρηση 2.1.13 Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} p \in \partial u(x) &\implies u(z) \geq u(x) + \langle p, z - x \rangle, \quad \forall z \in \Omega \\ &\implies \langle p, x \rangle - u(x) \geq \langle p, z \rangle - u(z), \quad \forall z \in \Omega \\ &\implies u^*(p) = \langle p, x \rangle - u(x) \end{aligned}$$

Άρα για $q \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$u^*(q) = \sup_{z \in \Omega} (\langle q, z \rangle - u(z)) \geq \langle q, x \rangle - u(x) = u^*(p) + \langle q - p, x \rangle$$

ένα γεγονός το οποίο σημαίνει ότι $x \in \partial u^*(p)$.

Θεωρούμε την πρόσθετη συνθήκη ότι το Ω είναι και κυρτό και επεκτείνουμε την u σε μία κυρτή συνάρτηση $\tilde{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ όπως στο Παράδειγμα 1.3.12. Με βάση αυτή τη θεώρηση, τα υποδιαφορικά των $\tilde{u}$ και u^* είναι αντίστροφα [31, Πρόσμμα 23.5.1] υπό την έννοια ότι

$$p \in \partial \tilde{u}(x) \iff x \in \partial u^*(p),$$

ενώ ισχύει και η σχέση $(u^*)^* = u$ [31, Θεώρημα 12.2]. Παρατηρούμε επομένως τη σχέση *δϋϊκότητας* που υπάρχει μεταξύ των δύο αυτών συναρτήσεων. Γενικότερα, αυτές οι σχέσεις ισχύουν όταν η u είναι κάτω ημισυνεχής.

Ειδικότερα, στην περίπτωση όπου οι συναρτήσεις u, u^* είναι δύο φορές διαφορίσιμες, με βάση την Πρόταση 2.1.7 και την παραπάνω ισοδυναμία έχουμε την ισότητα

$$\nabla u(\nabla u^*(p)) = p.$$

Την παραγωγίζουμε και είναι

$$D^2u(\nabla u^*(p)) D^2u^*(p) = I_n,$$

ενώ με χρήση οριζουσών προκύπτει

$$\det D^2u^* = \frac{1}{\det D^2u(\nabla u^*)}.$$

Πρόταση 2.1.14 *Αν το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό, κυρτό και φραγμένο σύνολο, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία κυρτή συνάρτηση και $u^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ο μετασχηματισμός Legendre της u , ισχύει $\partial u^*(\mathbb{R}^n) \subseteq \overline{\Omega}$.*

Απόδειξη. Επεκτείνουμε την u στην $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ όπως στο Παράδειγμα 1.3.12. Αν $x \in \partial u^*(\mathbb{R}^n)$ υπάρχει $p \in \mathbb{R}^n$ ώστε $p \in \partial u(x) \neq \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι $u(x) \neq +\infty$ και επομένως έχουμε $x \notin \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. $\square$

Με χρήση του μετασχηματισμού Legendre και εκμεταλλευόμενοι την σχεδόν παντού διαφορισμότητα των κυρτών συναρτήσεων δείχνουμε το επόμενο χρήσιμο λήμμα. Ενώ γενικά κάποιο διάνυσμα μπορεί να ανήκει σε υποδιαφορικά πολλών σημείων, το σύνολο των διανυσμάτων με αυτή την ιδιότητα έχει μηδενικό μέτρο με αποτέλεσμα σχεδόν κάθε διάνυσμα του $\partial u(\Omega)$ να ανήκει στο υποδιαφορικό το πολύ ενός σημείου.

Λήμμα 2.1.15 *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση. Τότε το σύνολο $\mathcal{Z} := \{p \in \mathbb{R}^n : p \in \partial u(x) \cap \partial u(y) \text{ για } x \neq y \in \Omega\}$ έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue.*

Απόδειξη. Αρκεί να εξετάσουμε μόνο την περίπτωση όπου το Ω είναι φραγμένο, διότι στη γενικότερη περίπτωση καλύπτουμε το Ω με τα $\Omega_k := \Omega \cap B(0, k)$, οπότε τότε το $\mathcal{Z}$ καλύπτεται από τα $\mathcal{Z}_k := \{p \in \mathbb{R}^n : p \in \partial u(x) \cap \partial u(y) \text{ για } x \neq y \in \Omega_k\}$ και κάθε ένα από αυτά έχει μηδενικό μέτρο.

Θεωρούμε το μετασχηματισμό Legendre u^* της u . Με βάση την Παρατήρηση 1.3.24 και την Πρόταση 1.3.19 συμπεράνουμε ότι η u^* είναι σχεδόν παντού διαφορίσιμη.

Ας είναι $p \in \mathcal{Z}$. Τότε υπάρχουν $x, y \in \Omega$ με $x \neq y$ και $p \in \partial u(x) \cap \partial u(y)$. Από την Παρατήρηση 2.1.13 έχουμε $x, y \in \partial u^*(p)$, οπότε το $\partial u^*(p)$ δεν είναι μονοσύνολο και επομένως η u^* δεν είναι διαφορίσιμη εκεί. Αυτό σημαίνει ότι το $\mathcal{Z}$ αποτελεί υποσύνολο του συνόλου των σημείων όπου η u^* δεν είναι διαφορίσιμη οπότε έχει μηδενικό μέτρο. $\square$

Στη συνέχεια όποτε χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathcal{Z}$ θα αναφερόμαστε αποκλειστικά στο σύνολο που ορίσαμε στο Λήμμα 2.1.15.

Λήμμα 2.1.16 *Αν η $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή συνάρτηση η οποία είναι αφινική πάνω σε μία ευθεία ℓ , το $\partial u(\mathbb{R}^n)$ περιέχεται σε ένα υπερεπίπεδο κάθετο στην ℓ .*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η ευθεία ℓ έχει την μορφή $\ell = \{x + te : t \in \mathbb{R}\}$ για κάποιο $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ και $x \in \mathbb{R}^n$. Με βάση το Παράδειγμα 1.3.18, υπάρχουν $a \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε η $u|_\ell$ να γράφεται ως $u(z) = a + \langle q, z \rangle$, $\forall z \in \ell$.

Αν θεωρήσουμε $z \in \mathbb{R}^n$ και $p \in \partial u(z)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} u(x + te) &\geq u(z) + \langle p, x + te - z \rangle, & \forall t \in \mathbb{R} \\ \iff a + \langle q, x + te \rangle &\geq u(z) + \langle p, x + te - z \rangle, & \forall t \in \mathbb{R} \\ \iff a + \langle q - p, x \rangle - u(z) + \langle p, z \rangle &\geq t\langle p - q, e \rangle, & \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Καθώς η αριστερή πλευρά είναι ανεξάρτητη του t , αυτή η ανισότητα μπορεί να ισχύει $\forall t \in \mathbb{R}$ μόνο όταν $\langle p - q, e \rangle = 0$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\partial u(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \partial u(x) \subseteq \{p \in \mathbb{R}^n : \langle p - q, e \rangle = 0\}$$

□

Κλείνοντας την ενότητα, παρουσιάζουμε την ιδιότητα της μονοτονίας του υποδιαφορικού ως προς τις συναρτήσεις και όχι ως προς σύνολα όπως στην Πρόταση 2.1.12.

Πρόταση 2.1.17 *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο, $U \subseteq \Omega$ ανοικτό και φραγμένο και $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ δύο κυρτές συναρτήσεις τέτοιες ώστε:*

$$\begin{cases} u \leq v, & \text{στο } U \\ u = v, & \text{στο } \partial U \end{cases}$$

Τότε ισχύει ότι $\partial u(U) \supseteq \partial v(U)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $p \in \partial v(U)$, οπότε $\exists x \in U : p \in \partial v(x)$ και $\ell_{x,p}$ το επίπεδο στήριξης της v στο x με κλίση p . Ακόμα θέτουμε $\alpha = \max_{z \in \bar{\Omega}} (\ell_{x,p}(z) - u(z))$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι $\alpha \in \mathbb{R}$ αφού η $\ell_{x,p} - u$ είναι συνεχής συνάρτηση στο συμπαγές $\bar{U}$, ως διαφορά δύο κυρτών (συνεχών) συναρτήσεων και άρα λαμβάνει μέγιστη τιμή σε κάποιο σημείο $z_0 \in \bar{U}$. Ακόμα, από το γεγονός ότι στο $\bar{U}$ έχουμε $u \leq v$ έπεται

$$\alpha = \max_{z \in \bar{\Omega}} (\ell_{x,p}(z) - u(z)) \geq \ell_{x,p}(x) - u(x) = v(x) - u(x) \geq 0$$

Καθώς το U είναι ανοικτό και $z_0 \in \bar{U}$, έπεται ότι είτε $z_0 \in U$, είτε $z_0 \in \partial U$. Διακρίνουμε αυτές τις δύο περιπτώσεις.

1. Στην περίπτωση όπου $z_0 \in U$ θεωρούμε την $w := u - (\ell_{x,p} - \alpha) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Αυτή είναι κυρτή ως άθροισμα μίας κυρτής και μίας αφινικής συνάρτησης. Παρατηρούμε ότι η $w|_U$ παρουσιάζει ελάχιστο στο z_0 το 0, διότι:

$$\text{i) } a = \ell_{x,p}(z_0) - u(z_0) \iff w(z_0) = 0$$

$$\text{ii) } a \geq \ell_{x,p}(z) - u(z) \iff w(z) \geq 0 = w(z_0), \quad z \in U$$

Αυτό είναι και το ολικό ελάχιστό της w στο Ω , καθώς αν υπήρχε $z_1 \in \Omega$ με $z_0 \neq z_1$ και $w(z_1) < 0 = w(z_0)$, επειδή το U είναι ανοικτό θα υπήρχε $\lambda \in (0, 1) : \lambda z_0 + (1-\lambda)z_1 \in U$ και για το οποίο θα ίσχυε:

$$w(z_0) \leq w(\lambda z_0 + (1-\lambda)z_1) \leq \lambda w(z_0) + (1-\lambda)w(z_1) < \lambda w(z_0) = 0 \quad (\text{Άτοπο!})$$

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} w(z) &\geq 0, \quad z \in \Omega \\ \implies u(z) &\geq v(x) + \langle p, z - x \rangle - a \\ &= v(x) + \langle p, z - x \rangle - v(x) - \langle p, z_0 - x \rangle + u(z_0) \\ &= \langle p, z - z_0 \rangle + u(z_0), \quad z \in \Omega \end{aligned}$$

και επομένως είναι $p \in \partial u(z_0) \subseteq U$.

2. Στην περίπτωση όπου $z_0 \in \partial U$ έχουμε $u(z_0) = v(z_0)$ και επομένως $\alpha = \langle p, z_0 - x \rangle \geq 0$. Όμως $p \in \partial v(x) \xrightarrow{z_0 \in \Omega} \ell_{x,p}(z_0) \leq v(z_0) = u(z_0) \implies \alpha = \ell_{x,p}(z_0) - u(z_0) \leq 0$, οπότε τελικά έχουμε $\alpha = 0$.

Έτσι για $z \in U$ είναι $0 = \alpha \geq \ell_{x,p}(z) - u(z) \implies u(z) \geq \ell_{x,p}(z)$. Για $z := x \in U$ παίρνουμε $v(x) \geq u(x) \geq \ell_{x,p}(x) = v(x) \implies v(x) = u(x)$, οπότε για τυχαίο $z \in U$ υπολογίζουμε $u(x) + \langle p, z - x \rangle = v(x) + \langle p, z - x \rangle = \ell_{x,p}(z) \leq u(z)$, από όπου και έπεται ότι $p \in \partial u(x) \subseteq \partial u(U)$.

□

2.2 Το μέτρο Monge-Ampère και οι ιδιότητές του

Με την βοήθεια του υποδιαφορικού μίας κυρτής συνάρτησης μπορούμε να ορίσουμε ένα μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^n$. Αυτό το μέτρο έχει καθοριστική συμβολή στη μελέτη της εξίσωσης Monge-Ampère καθώς μέσω αυτού εισάγονται οι λύσεις Alexandron. Σε αυτή την ενότητα το ορίζουμε και παρουσιάζουμε κάποιες βασικές ιδιότητές του.

Ορισμός 2.2.1 Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση. Ορίζουμε ως **μέτρο Monge-Ampère** της u το

$$\mu_u(E) := |\partial u(E)|$$

για $E \subseteq \Omega$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\partial u(E)$ να είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Παράδειγμα 2.2.2 Θεωρούμε $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο, $E \subseteq \Omega$ ένα σύνολο Borel, $u \in C^2(\Omega)$ μία κυρτή συνάρτηση και θα υπολογίσουμε το $\mu_u(E)$.

Ως απόρροια της Πρότασης 2.1.7 έχουμε ότι $\partial u(E) = \nabla u(E)$ και άρα $\mu_u(E) = |\nabla u(E)|$ (Δείχνουμε ότι το $\partial u(E)$ είναι πράγματι μετρήσιμο στην Πρόταση 2.2.5).

Θεωρούμε $A := \{x \in \Omega : \xi^T D^2 u(x) \xi > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ και δείχνουμε ότι η ∇u είναι ένα προς ένα σε αυτό το σύνολο. Θεωρούμε $x, y \in A$ με $\nabla u(x) = \nabla u(y)$, οπότε έχουμε $u(y) \geq u(x) + \langle \nabla u(x), y - x \rangle$. Παράλληλα έχουμε $u(x) \geq u(y) + \langle \nabla u(y), x - y \rangle$ και άρα συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες με την ισότητα $\nabla u(x) = \nabla u(y)$ προκύπτει η σχέση $u(y) - u(x) = \langle \nabla u(x), y - x \rangle$. Τότε υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} u(y) - u(x) - \langle \nabla u(x), y - x \rangle &= \int_0^1 (1-t) (y-x)^T D^2 u(x + t(y-x)) (y-x) dt \\ \implies 0 &= \int_0^1 (1-t) (y-x)^T D^2 u(x + t(y-x)) (y-x) dt \end{aligned}$$

Ωστόσο έχουμε ότι η $(1-\cdot)(y-x)^T D^2 u(x + \cdot(y-x))(y-x) : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και παντού μη αρνητική, καθώς η u είναι κυρτή, οπότε πρέπει να είναι παντού μηδέν στο $[0,1]$ και άρα $0 = (1-0)(y-x)^T D^2 u(x + 0(y-x))(y-x) = (y-x)^T D^2 u(x)(y-x)$. Αφού όμως $x \in A$, η παραπάνω ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο εάν $y = x$.

Καθώς το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό και $\nabla u \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, από το Θεώρημα του Sard γνωρίζουμε ότι η εικόνα της $\nabla u(S_0)$ έχει μηδενικό μέτρο, όπου $S_0 := \{x \in \Omega : \det D(\nabla u)(x) = 0\}$ [36, Θεώρημα 3-14]. Ακόμα, είναι $\nabla u(E) = \nabla u(E \cap S_0) \cup \nabla u(E \setminus S_0)$, τα $E \cap S_0$, $E \setminus S_0$ είναι Borel μετρήσιμα και $\nabla u(E \cap S_0) \subseteq \nabla u(S_0)$, οπότε και το $\nabla u(E \cap S_0)$ έχει μηδενικό μέτρο. Συνεπώς είναι

$$\mu_u(E) = |\nabla u(E \setminus S_0)| = \int_{\nabla u(E \setminus S_0)} 1 dp$$

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα σημεία του $E \setminus S_0$ οι ιδιοτιμές του πίνακα $D^2 u$ είναι γνήσια θετικές και άρα αυτός είναι θετικά ορισμένος εκεί. Ως αποτέλεσμα αυτού έχουμε ότι $E \setminus S_0 \subseteq A$ και άρα η ∇u είναι ένα προς ένα σε αυτό το σύνολο. Τότε από τον τύπο αλλαγής μεταβλητών [36, Θεώρημα 3-13] υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \mu_u(E) &= \int_{\nabla u(E \setminus S_0)} 1 dp = \int_{E \setminus S_0} |\det D(\nabla u)(z)| dz \\ &= \int_{E \setminus S_0} \det D^2 u(z) dz = \int_{E \setminus S_0} \det D^2 u(z) dz + \underbrace{\int_{S_0} \det D^2 u(z) dz}_{=0} \end{aligned}$$

Δηλαδή τελικά είναι $\mu_u(E) = \int_E \det D^2 u(z) dz$.

Γενικότερα, μπορούμε να έχουμε τον ίδιο τύπο για το μ_u υπό την ασθενέστερη συνθήκη ότι $u \in C^1(\Omega)$ και η ∇u είναι Lipschitz συνεχής. Και πάλι έχουμε $\mu_u(E) = \int_{\nabla u(E)} 1 dp$.

Προηγουμένως, στην δεξιά πλευρά αυτής της ισότητας είχαμε χρησιμοποιήσει τον τύπο αλλαγής μεταβλητών με $p = \nabla u(z)$. Υπό την παρούσα συνθήκη αυτός δεν ισχύει απαραίτητα, ωστόσο για την Lipschitz συνεχή απεικόνιση $\nabla u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ γνωρίζουμε ότι

$$\int_E J(\nabla u)(z) dz = \int_{\nabla u(E)} \#(E \cap (\nabla u)^{-1}(p)) dp$$

(δείτε [15, Θεώρημα 3.8 και Θεωρήματα 3.1, 2.5]), όπου $J(\nabla u) = |\det D^2 u|$ υπάρχει σχεδόν παντού στο Ω και είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα της ∇u (δείτε [15, Ορισμοί 3.6, 3.4 και Θεώρημα 3.6]) και $\#(A)$ είναι το αριθμητικό μέτρο του $A \subseteq \mathbb{R}^n$, δηλαδή εκείνο το μέτρο που δίνει το πλήθος των στοιχείων του A όταν αυτό είναι πεπερασμένο και $+\infty$ όταν A είναι απέραντο (δείτε [29, Παραδείγματα 2.2]). Επομένως, αφού η u είναι κυρτή, έχουμε

$$\int_E \det D^2 u(z) dz = \int_{\nabla u(E)} \# \{x \in E : \nabla u(x) = p\} dp$$

Παρατηρούμε ότι, αφού $p \in \nabla u(E)$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in E$ ώστε $\nabla u(x) = p$. Στην περίπτωση όπου υπάρχουν $x \neq y \in E$ με $\nabla u(x) = p = \nabla u(y)$ έχουμε $p \in \mathcal{Z}$. Από το Λήμμα 2.1.15 συμπεραίνουμε ότι $\#(E \cap (\nabla u)^{-1}(p)) = 1$ σχεδόν για κάθε $p \in \nabla u(E)$, οπότε έχουμε

$$\int_E \det D^2 u(z) dz = \int_{\nabla u(E)} 1 dp = |\nabla u(E)| = \mu_u(E)$$

Παράδειγμα 2.2.3 *Ας είναι Ω ένα ανοικτό, κυρτό και φραγμένο σύνολο. Θεωρούμε κυρτή συνάρτηση $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ και την επεκτείνουμε στην κυρτή κάτω ημισυνεχή συνάρτηση $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ όπως στο Παράδειγμα 1.3.12. Τότε ορίζεται ο μετασχηματισμός Legendre $u^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Αν υπάρχει $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ώστε $\mu_u = f dx$, θα υπολογίσουμε το $\mu_u(\partial u^*(F))$ όταν $F \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα Borel σύνολο.*

Επειδή το Ω είναι κυρτό έχουμε $|\partial \Omega| = 0$ και άρα λόγω της απόλυτης συνέχειας του μ_u ως προς το μέτρο Lebesgue και της Πρότασης 2.1.14 έχουμε $\mu_u(\partial u^*(F)) = \mu_u(\partial u^*(F) \cap \Omega)$. Θέτουμε $E := \partial u^*(F) \cap \Omega$, $H := \partial u(E) \subseteq \partial u(\Omega)$ και $G := H \setminus F$.

Παρατηρούμε ότι

$$\partial u^*(G) = (\partial u^*(H) \setminus \partial u^*(F)) \cup (\partial u^*(G) \cap \partial u^*(F))$$

Επειδή $G \cap F = \emptyset$ έχουμε $\partial u^*(G) \cap \partial u^*(F) \subseteq \mathcal{Z}_{u^*}$ ⁵ και άρα από το Λήμμα 2.1.15 συμπεραίνουμε ότι αυτή η τομή έχει μηδενικό μέτρο. Από την ισοδυναμία $p \in \partial u(x) \iff x \in \partial u^*(p)$ της Παρατήρησης 2.1.13 προκύπτει

$$\partial u^*(H) = \{x \in \overline{\Omega} : \partial u(x) \cap H \neq \emptyset\}$$

οπότε είναι

$$\partial u^*(H) \setminus \partial u^*(F) = \{x \in \overline{\Omega} \setminus \partial u^*(F) : \partial u(x) \cap \partial u(E) \neq \emptyset\}$$

⁵Με $\mathcal{Z}_{u^*}$ συμβολίζουμε το αντίστοιχο σύνολο $\mathcal{Z}$ του Λήμματος 2.1.15 για την συνάρτηση u^* .

Αυτό σημαίνει ότι $\partial u^*(H) \setminus \partial u^*(F) \subseteq \mathcal{Z}_{u^*}$. Επομένως αυτό το σύνολο έχει μηδενικό μέτρο και συνεπώς είναι $|\partial u^*(G)| = 0$. Καθώς από την Πρόταση 2.1.14 έχουμε $\partial u^*(G) \subseteq \bar{\Omega}$ και ξανά από την προηγούμενη ισοδυναμία είναι $G \subseteq \partial u(\partial u^*(G))$, υπολογίζουμε

$$0 = \int_{\partial u^*(G)} f \, dx = \mu_u(\partial u^*(G)) = |\partial u(\partial u^*(G))| \geq |G| \geq 0$$

Είναι εμφανές ότι το $\partial u^*(F) \cap \Omega$ είναι μ_u -μετρήσιμο (υπό την έννοια της Πρότασης 2.2.5) αφού το σύνολο $\partial u(\partial u^*(F) \cap \Omega) = G \cup F$ είναι Lebesgue μετρήσιμο ως ένωση δύο τέτοιων συνόλων. Επειδή $F \subseteq \partial u(\partial u^*(F))$ και $\partial u^*(F) \subseteq \bar{\Omega}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_u(\partial u^*(F)) &= |F| + |\partial u(\partial u^*(F)) \setminus F| \\ &= |F| + |\partial u(\partial u^*(F) \cap \Omega) \setminus F| + |\partial u(\partial u^*(F) \cap \partial \Omega) \setminus F| \\ &= |F| + |G| + 0 = |F| \end{aligned}$$

διότι $|\partial u(\partial u^*(F) \cap \partial \Omega) \setminus F| \leq \mu_u(\partial \Omega) = 0$.

Παράδειγμα 2.2.4 Αν $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία κυρτή συνάρτηση και $\ell : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία αφινική συνάρτηση, τότε έχουμε $\ell(z) = \langle q, z \rangle + a$ για κάποια $q \in \mathbb{R}^n$ και $a \in \mathbb{R}$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} p \in \partial(u + \ell)(x) &\iff u(z) + \ell(z) \geq u(x) + \ell(x) + \langle p, z - x \rangle, \quad \forall z \in \Omega \\ &\iff u(z) \geq u(x) + \langle p - q, z - x \rangle, \quad \forall z \in \Omega \\ &\iff p \in q + \partial u(x) \end{aligned}$$

και επομένως είναι $\mu_{u+\ell}(E) = |\partial(u + \ell)(E)| = |q + \partial u(E)| = |\partial u(E)| = \mu_u(E)$.

Ας συνεχίσουμε δείχνοντας ότι αυτή η συνολοσυνάρτηση που ορίσαμε ως μέτρο Monge-Ampère αποτελεί πράγματι μέτρο.

Πρόταση 2.2.5 Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση και $\mathcal{S} := \{E \subseteq \Omega \mid \text{το } \partial u(E) \text{ είναι Lebesgue μετρήσιμο}\}$. Τότε η κλάση $\mathcal{S}$ αποτελεί μία σ -άλγεβρα που περιέχει τα Borel υποσύνολα του Ω , ενώ η συνολοσυνάρτηση $\mu_u : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ είναι ένα μη αρνητικό τοπικά πεπερασμένο μέτρο Borel.

Απόδειξη. Αρχικά, αν $(E_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$, από την Πρόταση 2.1.12(i) προκύπτει ότι

$$\partial u\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \partial u(E_k),$$

οπότε το υποδιαφορικό της ένωσης των $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο και άρα αυτή ανήκει στο $\mathcal{S}$.

Πρίν συνεχίσουμε, είναι χρήσιμο να δείξουμε ότι για το εκάστοτε $K \subseteq \Omega$ συμπαγές σύνολο ισχύει $K \in \mathcal{S}$. Πράγματι, για ένα τέτοιο K η Πρόταση 2.1.10 εξασφαλίζει ότι το $\partial u(K)$ είναι συμπαγές και επομένως είναι και Lebesgue μετρήσιμο.

Για να δείξουμε ότι το $\Omega \in \mathcal{S}$, αρκεί να γράψουμε το Ω ως αριθμήσιμη ένωση συμπαγών υποσυνόλων του, αφού η κλάση $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις και επιπλέον περιέχει όλα τα συμπαγή υποσύνολα του Ω . Θεωρούμε

$$K_m := \left\{ x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{m} \text{ και } |x| \leq m \right\}, \quad \text{όταν } m \in \mathbb{N}.$$

Τότε το K_m είναι συμπαγές υποσύνολο του ανοικτού Ω ως κλειστό και φραγμένο.

Μένει να δείξουμε ότι $\Omega = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m$. Παρατηρούμε ότι από τη σχέση $K_m \subseteq \Omega$ έχουμε $\Omega \supseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m$. Αν ισχυε $\Omega \supsetneq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m$, θα έπρεπε να υπάρχει $x \in \Omega$ με $x \notin K_m, \forall m \in \mathbb{N}$. Τότε επειδή το Ω είναι ανοικτό $\exists r > 0: |x - y| \geq r \quad \forall y \in \partial\Omega$. Για $m \in \mathbb{N}$ με $m > |x|$ ισχύει $\text{dist}(x, \partial\Omega) < \frac{1}{m}$, αφού $x \notin K_m$. Όμως έχουμε

$$r \leq |x - y|, \quad \forall y \in \partial\Omega \implies r \leq \text{dist}(x, \partial\Omega)$$

και επομένως είναι

$$0 < r < \frac{1}{m}, \quad \forall m \in \mathbb{N} \text{ με } m > |x| \quad (\text{Άτοπο!})$$

Με ανάλογο τρόπο μπορεί να γραφεί και οποιοδήποτε άλλο ανοικτό υποσύνολο του Ω ως αριθμήσιμη ένωση συμπαγών συνόλων. Αυτό έχει ως συνέπεια ότι όλα τα ανοικτά υποσύνολα του Ω περιέχονται στο $\mathcal{S}$ και επομένως όταν ολοκληρωθεί η απόδειξη ότι αυτή είναι σ-άλγεβρα, θα είναι περιέχει όλα τα Borel υποσύνολα του Ω .

Για να γίνει αυτό, πρέπει να δείξουμε ότι για το εκάστοτε $E \in \mathcal{S}$ ισχύει ότι $\mathbb{R}^n \setminus E \in \mathcal{S}$. Από την Πρόταση 2.1.12(iii) έχουμε

$$\partial u(\Omega \setminus E) = (\partial u(\Omega) \setminus \partial u(E)) \cup (\partial u(\Omega \setminus E) \cap \partial u(E))$$

Καθώς $(\Omega \setminus E) \cap E = \emptyset$ και ανακαλώντας τον ορισμό του $\mathcal{Z}$ παρατηρούμε ότι

$$\partial u(\Omega \setminus E) \cap \partial u(E) \subseteq \mathcal{Z},$$

οπότε από το Λήμμα 2.1.15 το σύνολο $\partial u(\Omega \setminus E) \cap \partial u(E)$ έχει μηδενικό μέτρο και άρα είναι Lebesgue μετρήσιμο. Ακόμα, αφού $\Omega, E \in \mathcal{S}$, έχουμε ότι τα $\partial u(\Omega), \partial u(E)$ είναι Lebesgue μετρήσιμα, έπεται ότι το $\partial u(\Omega) \setminus \partial u(E)$ είναι μετρήσιμο και άρα και το $\partial u(\Omega \setminus E)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο. Συνεπώς, η κλάση $\mathcal{S}$ είναι πράγματι μία σ-άλγεβρα.

Για να δείξουμε ότι το μ_u είναι μέτρο, παρατηρούμε ότι:

$$1. \quad \partial u(\emptyset) = \emptyset \implies \mu_u(\emptyset) = |\emptyset| = 0$$

$$2. \quad \mu_u(E) = \left| \bigcup_{x \in E} \partial u(x) \right| \geq 0, \quad \forall E \in \mathcal{S}$$

3. Αν $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ είναι ξένα ανά δύο σύνολα, θεωρούμε $H_k := \partial u(E_k)$ για $k \in \mathbb{N}$ και έχουμε

$$\mu_u \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \right) = \left| \partial u \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \right) \right| = \left| \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \partial u(E_k) \right| = \left| \bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k \right|$$

Ακόμα είναι

$$\begin{aligned} H_k &= (H_k \cap (H_{k-1} \cup \dots \cup H_1)) \cup (H_k \setminus (H_{k-1} \cup \dots \cup H_1)) \\ \implies |H_k| &= |(H_k \cap (H_{k-1} \cup \dots \cup H_1)) \cup (H_k \setminus (H_{k-1} \cup \dots \cup H_1))| \\ \implies |H_k| &= |H_k \cap (H_{k-1} \cup \dots \cup H_1)| + |H_k \setminus (H_{k-1} \cup \dots \cup H_1)| \end{aligned}$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} H_k \cap (H_{k-1} \cup \dots \cup H_1) &= H_k \cap (\partial u(E_{k-1}) \cup \dots \cup \partial u(E_1)) \\ &= \partial u(E_k) \cap \partial u \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i \right) \subseteq \mathcal{Z} \end{aligned}$$

οπότε και πάλι από το Λήμμα 2.1.15 έχουμε

$$|H_k \cap (H_{k-1} \cup \dots \cup H_1)| = 0 \implies |H_k| = |H_k \setminus (H_{k-1} \cup \dots \cup H_1)|$$

Έτσι, καθώς τα σύνολα $H_k \setminus (H_{k-1} \cup \dots \cup H_1)$ είναι ξένα ανά δύο έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} |H_k| &= \sum_{k=1}^{+\infty} |H_k \setminus (H_{k-1} \cup \dots \cup H_1)| = \left| \bigcup_{k=1}^{+\infty} (H_k \setminus (H_{k-1} \cup \dots \cup H_1)) \right| \\ &= \left| \bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k \right| = \mu_u \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \right) \\ \implies \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_u(E_k) &= \mu_u \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \right) \end{aligned}$$

Άρα το μ_u είναι ένα σ-προσθετικό, μη αρνητικό μέτρο Borel. Τέλος, το μ_u είναι τοπικά πεπερασμένο γιατί για το εκάστοτε συμπαγές σύνολο $K \in \mathcal{S}$ από την Πρόταση 2.1.10 έχουμε ότι το $\partial u(K)$ είναι συμπαγές και επομένως

$$\mu_u(K) = |\partial u(K)| < +\infty$$

□

Στην συνέχεια όταν θα αναφερόμαστε σε μέτρα Borel, θα τα θεωρούμε πάνω από την σ-άλγεβρα των συνόλων Borel του χώρου.

Ως απόρροια της προηγούμενης πρότασης το μέτρο Monge-Ampère είναι ένα προσημασμένο (ή πραγματικό) **μέτρο Radon** του Ω , δηλαδή τέτοιο ώστε:

- (i) είναι τοπικά πεπερασμένο

- (ii) $\mu_u(B) = \inf \{ \mu_u(U) : B \subseteq U \text{ ανοικτό στο } \Omega \},$ για κάθε $B \subseteq \Omega$ σύνολο Borel
- (iii) $\mu_u(U) = \sup \{ \mu_u(K) : U \supseteq K \text{ συμπαγές στο } \Omega \},$ για κάθε $U \subseteq \Omega$ ανοικτό σύνολο

Αυτό συμβαίνει διότι κάθε τοπικά πεπερασμένο μέτρο Borel σε ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι μέτρο Radon [19, Θεώρημα 7.8].

Από την Θεωρία Μέτρου γνωρίζουμε ότι ο χώρος $\mathcal{M}(\Omega)$ των προσημασμένων μέτρων Radon στον μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ μπορεί να εφοδιαστεί με νόρμα έτσι ώστε να γίνει χώρος Banach [29, Πρόταση 12.32]. Μάλιστα, λόγω του Θεωρήματος Αναπαράστασης του Riesz αυτός είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον δυϊκό χώρο των συνεχών συναρτήσεων που μηδενίζονται στο άπειρο, δηλαδή τον χώρο $C_0(\Omega)$ των συναρτήσεων $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $\forall \varepsilon > 0, \exists K \subseteq \Omega$ συμπαγές : $\|f\|_{\mathbb{R}^n \setminus K} < \varepsilon$. Η απεικόνιση $T : \mathcal{M}(\Omega) \rightarrow (C_0(\Omega))^*$ με $T\mu := \int_{\Omega} (\cdot) d\mu$, όταν $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, είναι ακριβώς αυτός ο ισομετρικός ισομορφισμός [29, Θεώρημα 12.38].

Από τη Συναρτησιακή Ανάλυση γνωρίζουμε ότι ο $C_c(\Omega)$ είναι πυκνός υπόχωρος του $C_0(\Omega)$ [29, Πρόταση 12.35], οπότε ο δυϊκός του χώρος είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $(C_0(\Omega))^*$ μέσω του περιορισμού των συναρτησοειδών του $(C_0(\Omega))^*$ στο $C_c(\Omega)$. Με αυτόν τον τρόπο επάγεται μία νέα ασθενέστερη τοπολογία στον χώρο $\mathcal{M}(\Omega)$: η **ασθενής* τοπολογία**⁶ $\sigma(\mathcal{M}(\Omega), C_c(\Omega))$. Μέσω αυτής μπορούμε να εισάγουμε την έννοια σύγκλισης ακολουθιών μέτρων. Τότε, για παράδειγμα, η σύγκλιση μίας ακολουθίας $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(\Omega)$ σε κάποιο $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη $T\mu_k(\phi) \rightarrow T\mu(\phi)$, $\forall \phi \in C_c(\Omega)$. Αυτή η σύγκλιση καλείται **ασθενώς* σύγκλιση** και την συμβολίζουμε με $\mu_k \xrightarrow{*} \mu$.

Ορισμός 2.2.6 Καλούμε **μέτρο Dirac** στο σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ το μέτρο

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}, \quad \text{όταν } A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Παράδειγμα 2.2.7 Ο χώρος των γραμμικών συνδυασμών μέτρων Dirac είναι πυκνός υπόχωρος του $\mathcal{M}(\Omega)$ στην $\sigma(\mathcal{M}(\Omega), C_c(\Omega))$ τοπολογία. Για να αποδειχθεί αρκεί να δείξουμε ότι κάθε περιοχή U ενός μέτρου $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ έχει μη κενή τομή με τον υπόχωρο των γραμμικών συνδυασμών μέτρων Dirac.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχουν $f_1, \dots, f_k \in C_c(\Omega)$ και $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $U = \left\{ \nu \in \mathcal{M}(\Omega) : \left| \int_{\Omega} f_i d\nu - \int_{\Omega} f_i d\mu \right| < \varepsilon, \forall i = 1, \dots, k \right\}$ [3, Πρόταση 3.12] και θέτουμε $M := \max_{i=1, \dots, k} \mu(\text{spt } f_i) \in \mathbb{R}$.

Για την εκάστοτε φραγμένη Borel μετρήσιμη $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι υπάρχει μία απλή συνάρτηση $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\|f - s\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{4M}$ [29, Πρόταση 5.15], δηλαδή μία συνάρτηση με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων στο σύνολο τιμών της [29, Ορισμός 5.14]. Τότε υπάρχει

⁶Για μία εκτενέστερη αναφορά στην ασθενή* τοπολογία παραπέμπουμε στο [3, Ενότητα 3.1 και Ενότητα 3.4].

μοναδική μετρήσιμη πεπερασμένη διαμέριση $A_1, \dots, A_l$ του Ω και $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}$ με $a_i \neq a_j$ έτσι ώστε

$$s = \sum_{i=1}^l a_i \chi_{A_i}$$

Με αυτόν τον τρόπο για κάθε f_i βρίσκουμε μία απλή συνάρτηση s_i όπως παραπάνω. Επιλέγουμε ένα σύνολο από κάθε διαμέριση και θεωρούμε την τομή όλων αυτών των συνόλων. Αν θεωρήσουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς στην προηγούμενη επιλογή των συνόλων, κατασκευάζουμε μία πεπερασμένη διαμέριση $A_1, \dots, A_m$ του Ω . Ακόμα θεωρούμε $a_j^i \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $s_i = \sum_{j=1}^m a_j^i \chi_{A_j}$ και θέτουμε $\nu_0 := \sum_{j=1}^m \mu(A_j) \delta_{x_j}$ για κάποια $x_j \in A_j$, όταν $j = 1, \dots, m$. Τότε για $K_i := \text{spt } f_i$ είναι

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f_i d\mu - \int_{\Omega} f_i d\nu_0 \right| &= \left| \int_{K_i} f_i d\mu - \int_{K_i} f_i d\nu_0 \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^m \int_{K_i \cap A_j} f_i d\mu - \sum_{j=1}^m \mu(K_i \cap A_j) f_i(x_j) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \left| \int_{K_i \cap A_j} f_i d\mu - \int_{K_i \cap A_j} f_i(x_j) d\mu \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \|f_i - f_i(x_j)\|_{\infty} \mu(K_i \cap A_j) < \frac{\varepsilon}{2M} \mu(K_i) < \varepsilon, \end{aligned}$$

όπου $\|f_i - f_i(x_j)\|_{\infty} \leq \|f_i - s_i\|_{\infty} + \|s_i - f_i(x_j)\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2M}$.

Μέσω αυτών των προσεγγίσεων με μέτρα Dirac μπορούμε να απλοποιήσουμε αρκετά την απόδειξη ύπαρξης λύσεων Alexandron στο πρόβλημα Dirichlet (Θεωρήματα 2.5.6, 2.5.9). Για αυτό το σκοπό θα μας χρειαστεί, μεταξύ άλλων, και η επόμενη πρόταση, η οποία συσχετίζει την ομοιόμορφη τοπική σύγκλιση ακολουθιών κυρτών συναρτήσεων με την ασθενή* σύγκλιση της ακολουθίας των αντίστοιχων μέτρων Monge-Ampère.

Πρόταση 2.2.8 *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $u_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία ακολουθία κυρτών συναρτήσεων για $k \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε αυτές να συγκλίνουν ομοιόμορφα τοπικά στην κυρτή συνάρτηση $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε τα αντίστοιχα μέτρα Monge-Ampère μ_{u_k} συγκλίνουν ασθενώς* στο μ_u , δηλαδή ισχύει $\int_{\Omega} \phi d\mu_{u_k} \rightarrow \int_{\Omega} \phi d\mu_u \quad \forall \phi \in C_c(\Omega)$.*

Απόδειξη. Από την Θεωρία Μέρους γνωρίζουμε ότι μία ακολουθία μέτρων Radon μ_{u_k} συγκλίνει ασθενώς* σε ένα μέτρο μ_u αν και μόνο αν ισχύουν οι ανισότητες

$$\begin{cases} \limsup_{k \rightarrow +\infty} \mu_{u_k}(K) \leq \mu_u(K), & \forall K \subset\subset \Omega \\ \liminf_{k \rightarrow +\infty} \mu_{u_k}(U) \geq \mu_u(U), & \forall U \subset\subset \Omega \end{cases}$$

όταν το K είναι συμπαγές και το U ανοικτό [15, Θεώρημα 1.40].

Ας θεωρήσουμε $K \subset\subset \Omega$ συμπαγές και θα δείξουμε ότι

$$\partial u(K) \supseteq \bigcap_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{k=i}^{+\infty} \partial u_k(K) =: \limsup_{k \rightarrow +\infty} \partial u_k(K)$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι αν $p \in \limsup_{k \rightarrow +\infty} \partial u_k(K)$, υπάρχει ακολουθία από δείκτες $k_i \rightarrow +\infty$ έτσι ώστε $p \in \partial u_{k_i}(K)$ και άρα υπάρχει ακολουθία σημείων $x_{k_i} \in K$ ώστε να ισχύει $p \in \partial u_{k_i}(x_{k_i})$. Τότε αυτή η ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία που συγχλίνει σε κάποιο σημείο $x \in K$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα συμβολίζουμε αυτή την συγκλίνουσα υπακολουθία ως x_{k_i} .

Από την ανισότητα του ορισμού του υποδιαφορικού και καθώς η ακολουθία $u_k|_K$ συγχλίνει ομοιόμορφα στην $u|_K$, έχουμε

$$\begin{aligned} u_{k_i}(z) &\geq u_{k_i}(x_{k_i}) + \langle p, z - x_{k_i} \rangle, \quad \forall z \in \Omega \\ \implies u(z) &= \lim_{i \rightarrow +\infty} u_{k_i}(z) \\ &\geq \lim_{i \rightarrow +\infty} u_{k_i}(x_{k_i}) + \langle p, z - \lim_{i \rightarrow +\infty} x_{k_i} \rangle \\ &= u(x) + \langle p, z - x \rangle, \quad \forall z \in \Omega \\ \implies p &\in \partial u(x) \subseteq \partial u(K) \end{aligned}$$

και επομένως η σχέση υποσυνόλων αποδείχθηκε.

Επιπλέον, αφού $\text{dist}(K, \partial\Omega) > 0$, υπάρχει $U \subset\subset \Omega$ ανοικτό και φραγμένο σύνολο που περιέχει συμπαγώς το K , ενώ χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι είναι και κυρτό. Έτσι από το Πρόσχημα 2.1.8 γνωρίζουμε ότι για όλα τα $p \in \partial u_k(K)$, ισχύει το φράγμα

$$|p| \leq \frac{2 \|u_k\|_{L^\infty(U)}}{\text{dist}(K, \partial U)}$$

Καθώς όμως οι $u_k|_{\overline{U}}$ συγχλίνουν ομοιόμορφα πάνω στο συμπαγές $\overline{U}$, αυτά τα φράγματα δεν εξαρτώνται τελικά από το $k \in \mathbb{N}$, οπότε το $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \partial u_k(K)$ είναι φραγμένο και έχει πεπερασμένο μέτρο Lebesgue.

Για $i \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $\bigcup_{k=i}^{+\infty} \partial u_k(K)$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία συνόλων όπου ο κάθε όρος της έχει πεπερασμένο μέτρο Lebesgue, οπότε από την Θεωρία Μέτρου [29, Πρόταση 2.5(ii)] υπολογίζουμε το μέτρο

$$\left| \limsup_{k \rightarrow +\infty} \partial u_k(K) \right| = \left| \bigcap_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{k=i}^{+\infty} \partial u_k(K) \right| = \lim_{i \rightarrow +\infty} \left| \bigcup_{k=i}^{+\infty} \partial u_k(K) \right|$$

Τώρα, θεωρούμε το ανοικτό $U \subset\subset \Omega$ και λόγω της κανονικότητας του μέτρου Monge-Ampère, δηλαδή της ισότητας $\mu_u(U) = \sup \{ \mu_u(K) \mid K \subseteq U \text{ και } K: \text{ συμπαγές} \}$, αρκεί να

δείξουμε ότι $\mu_u(K) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \mu_{u_k}(U)$ για κάθε $K \subset\subset U$ συμπαγές σύνολο ώστε να έχουμε την δεύτερη ανισότητα.

Από το Λήμμα 2.1.15 έχουμε $\mu_u(K) = |\partial u(K)| = |\partial u(K) \setminus \mathcal{Z}|$, οπότε για να δείξουμε την ζητούμενη ανισότητα θα δείξουμε ότι

$$\partial u(K) \setminus \mathcal{Z} \subseteq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \partial u_k(U) := \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{k=i}^{+\infty} \partial u_k(U)$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι, καθώς $\mathcal{Z} = \{q \in \mathbb{R}^n : \exists x \neq y \text{ με } q \in \partial u(x) \cap \partial u(y)\}$, έχουμε

$$\begin{aligned} p \in \partial u(K) \setminus \mathcal{Z} &\implies \begin{cases} p \in \partial u(x_0), & \text{για κάποιο } x_0 \in K \subseteq U \\ p \notin \partial u(y), & \forall y \in \Omega \setminus \{x_0\} \end{cases} \\ &\implies u(z) > u(x_0) + \langle p, z - x_0 \rangle, \quad \forall z \in \Omega \setminus \{x_0\} \end{aligned}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $U \subset\subset \Omega$, γιατί σε διαφορετική περίπτωση και αφού $\text{dist}(K, \partial\Omega) > 0$ μπορούμε να βρούμε ανοικτό $V \subseteq \Omega$ έτσι ώστε $K \subset\subset V \subset\subset U$, οπότε δείχνοντας την σχέση εγκλεισμού υποσυνόλων για το V ουσιαστικά την έχουμε δείξει και για το U λόγω της μονοτονίας του $\liminf_{k \rightarrow +\infty} \partial u_k(\cdot)$. Θεωρούμε

$\delta := \inf_{z \in \partial U} (u(z) - u(x_0) - \langle p, z - x_0 \rangle)$ και καθώς το ∂U είναι συμπαγές το infimum λαμβάνεται σε κάποια τιμή του. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με την σχέση $x_0 \notin \partial U$ έχει ως συνέπεια ότι $\delta > 0$.

Θέτουμε $v_k(z) = u_k(z) - u(x_0) - \langle p, z - x_0 \rangle$ και $v(z) := u(z) - u(x_0) - \langle p, z - x_0 \rangle$, οπότε από την ομοιόμορφη σύγκλιση της $u_k|_{\overline{U}}$ στην $u|_{\overline{U}}$ συμπεραίνουμε ότι η $v_k|_{\overline{U}}$ συγχλίνει ομοιόμορφα στη $v|_{\overline{U}}$ και επομένως υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για $k \geq k_0$ να ισχύει

$$\begin{aligned} |v_k(x_0) - \underbrace{v(x_0)}_{=0}| &= |u_k(x_0) - u(x_0)| \leq \frac{\delta}{4} \quad \text{και} \quad v_k(z) \geq \frac{\delta}{2} > 0, \quad z \in \partial U \\ \implies v_k(x_0) &\leq \frac{\delta}{4} \quad \text{και} \quad v_k(z) \geq \frac{\delta}{2} > 0, \quad z \in \partial U \end{aligned}$$

Επειδή η v_k είναι συνεχής (ως κυρτή) και το $\overline{U}$ συμπαγές, αυτή παρουσιάζει ελάχιστο σε κάποιο σημείο $x_k \in \overline{U}$, το οποίο μάλιστα βρίσκεται στο εσωτερικό αφού στο σύνορο έχουμε

$$v_k(x_k) \leq v_k(x_0) \leq \frac{\delta}{4} < \frac{\delta}{2} \leq v_k(z), \quad \forall z \in \partial U$$

Ως αποτέλεσμα αυτού, για $k \geq k_0$, έχουμε

$$\begin{aligned} v_k(z) &\geq v_k(x_k), \quad \forall z \in U \\ \iff u_k(z) &\geq u_k(x_k) + \langle p, z - x_k \rangle, \quad \forall z \in U \\ \implies p &\in \partial u_k(x_k) \subseteq \partial u_k(U) \end{aligned}$$

Άρα $p \in \bigcap_{k=k_0}^{+\infty} \partial u_k(U)$ και επομένως είναι $\partial u(K) \setminus \mathcal{Z} \subseteq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \partial u_k(U)$.

Η ακολουθία $\bigcap_{k=i}^{+\infty} \partial u_k(U)$ είναι μία αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων, οπότε και πάλι από τη Θεωρία Μέτρου [29, Πρόταση 2.5(i)] γνωρίζουμε ότι

$$|\liminf_{k \rightarrow +\infty} \partial u_k(U)| = \left| \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcap_{k=i}^{+\infty} \partial u_k(U) \right| = \lim_{i \rightarrow +\infty} \left| \bigcap_{k=i}^{+\infty} \partial u_k(U) \right|$$

Συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_u(K) &= |\partial u(K) \setminus \mathcal{Z}| \leq |\liminf_{k \rightarrow +\infty} \partial u_k(U)| = \lim_{i \rightarrow +\infty} \left| \bigcap_{k=i}^{+\infty} \partial u_k(U) \right| \\ &\leq \liminf_{i \rightarrow +\infty} |\partial u_i(U)| = \liminf_{i \rightarrow +\infty} \mu_{u_i}(U) \end{aligned}$$

□

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για τη συμπεριφορά του μέτρου Monge-Ampère ως προς τις αλγεβρικές πράξεις κυρτών συναρτήσεων, δηλαδή του αθροίσματος κυρτών συναρτήσεων και του βαθμωτού γινόμενο μίας κυρτής συνάρτησης με μία θετική σταθερά. Πριν περάσουμε σε αυτή την πρόταση, θα κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις αναφορικά με τις ανισότητες μέτρων Borel.

Παρατήρηση 2.2.9 Αν μ, ν είναι μέτρα Borel στο Ω , γράφουμε $\mu \geq \nu$ αν αυτή η ανισότητα ισχύει κατά σύνολο πάνω από την κλάση όλων των μ -μετρήσιμων υποσυνόλων του Ω .

Αν υποθέσουμε ότι τα μ, ν είναι θετικά μέτρα Borel του Ω και επιλέξουμε $\phi \in C_c(\Omega)$ με $\phi \geq 0$, από τον ορισμό του ολοκληρώματος [29, Ορισμός 6.4] υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων $0 \leq s_k \leq \phi$ με τρόπο ώστε $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} s_k d\nu = \int_{\Omega} \phi d\nu$, οπότε έχουμε

$$\int_{\Omega} \phi d\mu \geq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} s_k d\mu \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} s_k d\nu = \int_{\Omega} \phi d\nu$$

Αντίστροφα, αν για τα θετικά μέτρα Radon μ, ν του Ω ισχύει η ανισότητα $\int_{\Omega} \phi d\mu \geq \int_{\Omega} \phi d\nu$ για κάθε $\phi \in C_c(\Omega)$ με $\phi \geq 0$ θα δείξουμε ότι $\mu \geq \nu$.

Θεωρούμε ανοικτό $U \subseteq \Omega$ και συμπαγές $K \subset\subset U$. Τότε ως συνέπεια του Λήμματος του Urysohn [29, Πρόταση 12.21] γνωρίζουμε ότι υπάρχει $\phi \in C_c(\Omega)$ έτσι ώστε $0 \leq \chi_K \leq \phi \leq \chi_U$ και $\text{spt } \phi \subseteq U$. Επομένως είναι

$$\nu(K) = \int_{\Omega} \chi_K d\nu \leq \int_{\Omega} \phi d\nu \leq \int_{\Omega} \phi d\mu \leq \int_{\Omega} \chi_U d\mu = \mu(U)$$

Τέλος, λόγω κανονικότητας έχουμε $\nu(U) \leq \mu(U)$, ενώ και πάλι λόγω κανονικότητας η σχέση $\mu \geq \nu$ ισχύει για όλα τα Borel υποσύνολα του Ω .

Πρόταση 2.2.10 *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ δύο κυρτές συναρτήσεις. Τότε ισχύει ότι:*

- (i) $\mu_{u+v} \geq \mu_u + \mu_v$
- (ii) $\mu_{\lambda u} = \lambda^n \mu_u, \quad \forall \lambda > 0$

Απόδειξη.

- (i) Θα εξετάσουμε πρώτα την ειδική περίπτωση όπου $u, v \in C^2(\Omega)$. Τότε οι πίνακες D^2u, D^2v είναι παντού θετικά ημιορισμένοι συμμετρικοί πίνακες στο Ω .

Από τη Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε την ανισότητα Minkowski για τις ορίζουσες θετικά ορισμένων πινάκων [24, Θεώρημα 7.8.21], δηλαδή για θετικά ορισμένους πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}}$$

Η ίδια ανισότητα ισχύει λόγω συνέχειας και για τους θετικά ημιορισμένους συμμετρικούς πίνακες D^2u, D^2v , αφού μπορούμε να τους προσεγγίσουμε μέσω ακολουθιών θετικά ορισμένων πινάκων. Πράγματι, αν $A \in \text{Sym}_n$ είναι ένας θετικά ημιορισμένος συμμετρικός πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ και $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας ορθογώνιος πίνακας έτσι ώστε $A = P^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P$, αρκεί να θεωρήσουμε την ακολουθία θετικά ορισμένων πινάκων $M_k := P^T \text{diag}(\lambda_1 + \frac{1}{k}, \dots, \lambda_n + \frac{1}{k})P$.

Επειδή ισχύει η ανισότητα $(x+y)^n \geq x^n + y^n$ όταν $x, y \geq 0$ και η συνάρτηση x^n είναι αύξουσα για $x \geq 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \det D^2(u+v) &= \left((\det(D^2u + D^2v))^{\frac{1}{n}} \right)^n \geq \left((\det D^2u)^{\frac{1}{n}} + (\det D^2v)^{\frac{1}{n}} \right)^n \\ &\geq \left((\det D^2u)^{\frac{1}{n}} \right)^n + \left((\det D^2v)^{\frac{1}{n}} \right)^n = \det D^2u + \det D^2v \end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε αυτή την ανίσωση πάνω από το Ω και με βάση το Παράδειγμα 2.2.2 προκύπτει το ζητούμενο.

Θεωρούμε τώρα τη γενική περίπτωση όπου οι u, v είναι απλώς κυρτές συναρτήσεις. Από την Πρόταση 1.3.22 προκύπτουν $\Omega_k \subseteq \Omega$ και ακολουθίες u_k, v_k κυρτών, $C^2(\Omega_k)$ συναρτήσεων, οι οποίες προσεγγίζουν ομοιόμορφα τοπικά τις u, v αντίστοιχα στο Ω .

Για $k \geq k_0$ έχουμε $u_k|_{\Omega_{k_0}}, v_k|_{\Omega_{k_0}} \in C^2(\Omega_{k_0})$, οπότε σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι $\mu_{u_k}(\cdot \cap \Omega_{k_0}) + \mu_{v_k}(\cdot \cap \Omega_{k_0}) \leq \mu_{u_k+v_k}(\cdot \cap \Omega_{k_0})$. Για τυχαίο $\phi \in C_c(\Omega)$ με $\phi \geq 0$ αυτή η ανισότητα δίνει την σχέση

$$\int_{\Omega_{k_0}} \phi d(\mu_{u_k} + \mu_{v_k}) \leq \int_{\Omega_{k_0}} \phi d\mu_{u_k+v_k}$$

Επειδή οι ακολουθίες $u_k, v_k, u_k + v_k : \Omega_{k_0} \rightarrow \mathbb{R}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα τοπικά στις $u|_{\Omega_{k_0}}, v|_{\Omega_{k_0}}, (u+v)|_{\Omega_{k_0}}$ αντίστοιχα, από την Πρόταση 2.2.8 έπεται ότι

$$\mu_{u_k}|_{\Omega_{k_0}} \xrightarrow{*} \mu_u|_{\Omega_{k_0}}, \quad \mu_{v_k}|_{\Omega_{k_0}} \xrightarrow{*} \mu_v|_{\Omega_{k_0}} \quad \text{και} \quad \mu_{(u_k+v_k)}|_{\Omega_{k_0}} \xrightarrow{*} \mu_{(u+v)}|_{\Omega_{k_0}}.$$

Συνεπώς για $k \rightarrow +\infty$ στην προηγούμενη ανισότητα έχουμε

$$\int_{\Omega_{k_0}} \phi d(\mu_u + \mu_v) \leq \int_{\Omega_{k_0}} \phi d\mu_{u+v}$$

Και πάλι σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.2.9 είναι

$$\mu_u(\cdot \cap \Omega_{k_0}) + \mu_v(\cdot \cap \Omega_{k_0}) \leq \mu_{u+v}(\cdot \cap \Omega_{k_0})$$

Για $k_0 \rightarrow +\infty$ στην τελευταία ανισότητα, αφού τα $\cdot \cap \Omega_{k_0}$ αποτελούν αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων, προκύπτει $\mu_u + \mu_v \leq \mu_{u+v}$ [29, Πρόταση 2.5].

- (ii) Καθώς $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ όταν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, δουλεύοντας ανάλογα με την πρώτη περίπτωση προκύπτει το ζητούμενο.

□

Ως άμεση απόρροια της Πρότασης 2.1.17 έχουμε το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 2.2.11 *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο, $U \subseteq \Omega$ ανοικτό και φραγμένο και $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ δύο κυρτές συναρτήσεις τέτοιες ώστε:*

$$\begin{cases} u \leq v, & \text{στο } U \\ u = v, & \text{στο } \partial U \end{cases}$$

Τότε ισχύει ότι $\mu_u(U) \geq \mu_v(U)$.

2.3 Αρχή μεγίστου του Alexandron και αρχή σύγκρισης

Συνεχίζουμε με δύο αρχές οι οποίες αποτελούν ιδιαίτερα χρήσιμα εργαλεία για τον εύρεση φραγμάτων και την εκτίμηση του μεγέθους κυρτών συναρτήσεων.

Θεώρημα 2.3.1 (Αρχή Μεγίστου του Alexandron) *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό, κυρτό, φραγμένο σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση με $u = 0$ στο $\partial\Omega$.*

Τότε υπάρχει μία σταθερά $C_n > 0$ έτσι ώστε

$$|u(x)|^n \leq C_n \operatorname{diam}(\Omega)^{n-1} \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \mu_u(\Omega), \quad \forall x \in \Omega$$

Η σταθερά C_n εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από την διάσταση n .

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα σημείο $x \in \Omega$. Καθώς το Ω είναι ανοικτό, κυρτό και φραγμένο, από το Λήμμα 1.3.9 μπορούμε να βρούμε δύο σημεία του συνόρου έτσι ώστε το εκάστοτε $z \in \Omega$ να αποτελεί κυρτό συνδυασμό αυτών (για παράδειγμα, εφαρμόζουμε το λήμμα για τα $z, z \pm \varepsilon e$,

όπου $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ και $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό). Τότε, καθώς η u είναι κυρτή και $u|_{\partial\Omega} = 0$, έχουμε την ανισότητα $u(z) \leq 0$.

Θεωρούμε την κωνική συνάρτηση $\widehat{C}_x : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ με κορυφή το $(x, u(x))$, όπως στο Παράδειγμα 1.3.15. Τότε ισχύει ότι $u \leq \widehat{C}_x$, καθώς αν υπήρχε $z \in \Omega$ με $u(z) > \widehat{C}_x(z)$, από το Λήμμα 1.3.9 θα βρίσκαμε $\tilde{z} := (1 - \mu)x + \mu z \in \partial\Omega$ με $\lambda := \frac{1}{\mu} \in (0, 1)$ και άρα τέτοιο ώστε $z = \lambda\tilde{z} + (1 - \lambda)x$. Από την κυρτότητα της u και τον ορισμό της $\widehat{C}_x$ θα είχαμε

$$(1 - \frac{1}{\mu})u(x) = \widehat{C}_x(z) < u(z) \leq \lambda \underbrace{u(\tilde{z})}_{=0} + (1 - \lambda)u(x) = (1 - \frac{1}{\mu})u(x) \quad (\text{Άτοπο!})$$

Με βάση το Πρόσμημα 2.2.11 για τις $u, \widehat{C}_x$ στο Ω συμπεραίνουμε ότι $\mu_{\widehat{C}_x}(\Omega) \leq \mu_u(\Omega)$ και επομένως $\mu_{\widehat{C}_x}(\{x\}) \leq \mu_{\widehat{C}_x}(\Omega) \leq \mu_u(\Omega)$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ένα κάτω φράγμα για το $\mu_{\widehat{C}_x}(\{x\})$ ώστε μέσω της παραπάνω ανίσωσης να προκύψει η ζητούμενη σχέση.

Αρχικά θα δείξουμε ότι $\partial\widehat{C}_x(x) \supseteq B(0, r)$ για $r := \frac{|u(x)|}{\text{diam}(\Omega)}$.

Θεωρούμε $p \in B(0, r)$. Για το εκάστοτε $z \in \Omega \setminus \{x\}$ υπάρχει σταθερά $\mu_z > 1$ όπως στο Παράδειγμα 1.3.15. Τότε είναι $\mu_z|z - x| = |(1 - \mu_z)x + \mu_z z - x| \leq \text{diam}(\Omega)$, αφού $(1 - \mu_z)x + \mu_z z \in \partial\Omega$. Επιπλέον, είναι

$$\begin{aligned} \mu_z \langle p, z - x \rangle &\leq \mu_z |p| |z - x| \leq \frac{|u(x)|}{\text{diam}(\Omega)} \text{diam}(\Omega) = -u(x), \quad \text{αφού } u(x) < 0 \\ \implies \widehat{C}_x(x) + \langle p, z - x \rangle &= u(x) + \langle p, z - x \rangle \leq (1 - \frac{1}{\mu_z})u(x) = \widehat{C}_x(z) \end{aligned}$$

Αυτή η σχέση ισχύει για κάθε $z \in \Omega$ (ακόμα και για το x όπου εκεί ισχύει τετριμμένα) με αποτέλεσμα να έχουμε $p \in \partial\widehat{C}_x(x)$. Εξαιτίας της τυχαίας επιλογής του p αποδείχθηκε ο ισχυρισμός.

Επειδή το Ω είναι σχετικά συμπαγές γνωρίζουμε ότι υπάρχει σημείο $\bar{x} \in \partial\Omega$ έτσι ώστε $|x - \bar{x}| = \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Θεωρούμε $q := \frac{|u(x)|}{|\bar{x} - x|_2}(\bar{x} - x)$ και θα δείξουμε ότι $q \in \partial\widehat{C}_x(x)$.

Αν $v := \bar{x} - x$ και $\rho := |v|$, καθώς το Ω είναι ανοικτό έχουμε $\overline{B(x, \rho)} \subseteq \overline{\Omega}$. Αφού επιπλέον είναι και κυρτό γνωρίζουμε ότι υπάρχει επίπεδο στήριξης του Ω στο σημείο $\bar{x}$ [35, Θεώρημα 1.3.2]. Συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}^n$ με $|a| = \rho$ και τέτοιο ώστε $\langle a, z - \bar{x} \rangle \leq 0$, $\forall z \in \overline{\Omega}$. Παρατηρούμε ότι για $z := x + a$ έχουμε

$$\begin{aligned} |z - x| = |a| = \rho &\implies z \in \overline{B(x, \rho)} \subseteq \overline{\Omega} \implies \langle a, z - \bar{x} \rangle \leq 0 \\ \implies \langle a, -v \rangle + \langle a, a \rangle &\leq 0 \implies \rho^2 \leq \langle a, v \rangle \implies 2(\rho^2 - \langle a, v \rangle) \leq 0 \\ \implies |a|^2 + |v|^2 - 2\langle a, v \rangle &\leq 0 \implies |a - v|^2 \leq 0 \implies a = v \end{aligned}$$

Άρα έχουμε $\langle x - \bar{x}, z - \bar{x} \rangle \geq 0$, $\forall z \in \partial\Omega$.

Για $z \in \Omega \setminus \{x\}$ έχουμε $(1 - \mu_z)x + \mu_z z \in \partial\Omega$ και άρα ισχύει

$$\begin{aligned} & \langle (1 - \mu_z)x + \mu_z z - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \geq 0 \\ \implies & \langle (1 - \mu_z)x + \mu_z z - x, \bar{x} - x \rangle \leq |\bar{x} - x|^2 \\ \implies & \frac{\langle z - x, \bar{x} - x \rangle}{|\bar{x} - x|^2} \leq \frac{1}{\mu_z} \\ \xrightarrow{|u(x)| = -u(x) \geq 0} & u(x) + \langle z - x, \frac{|u(x)|}{|\bar{x} - x|^2} (\bar{x} - x) \rangle \leq \left(1 - \frac{1}{\mu_z}\right)u(x) \\ \implies & \widehat{C}_x(x) + \langle z - x, q \rangle \leq \widehat{C}_x(z) \end{aligned}$$

Επομένως, πράγματι είναι $q \in \partial\widehat{C}_x(x)$.

Θέτουμε $B := B(0, r) \cap \{z \in \mathbb{R}^n : \langle q, z \rangle = 0\}$. Αφού $\partial\widehat{C}_x(x) \supseteq B \cup \{q\}$ και το $\partial\widehat{C}_x(x)$ είναι κυρτό, ισχύει $\partial\widehat{C}_x(x) \supseteq \text{conv}(B \cup \{q\}) =: C$. Άρα για τους όγκους τους έχουμε

$$\mu_{\widehat{C}_x}(\{x\}) = |\partial\widehat{C}_x(x)| \geq |C|$$

Θα υπολογίσουμε τον όγκο του C . Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι το σύστημα συντεταγμένων έχει επιλεχθεί έτσι ώστε $q = |q|e_n$, κάτι το οποίο μπορεί να γίνει με κατάλληλη στροφή και μάλιστα χωρίς επίδραση στον όγκο του C . Θέτουμε $B_0 := \{z' \in \mathbb{R}^{n-1} : |z'| < r\}$ και παρατηρούμε ότι $C = \left\{ \left(\left(1 - \frac{t}{|q|}\right)z', t \right) : z' \in B_0 \text{ και } t \in [0, |q|] \right\} \subseteq B_0 \times [0, |q|]$. Για $t \in [0, |q|]$ θέτουμε $C_t := \left\{ \left(1 - \frac{t}{|q|}\right)z' : z' \in B_0 \right\}$, οπότε ισχύει $z' \in C_t \iff (z', t) \in C$. Τότε από το Θεώρημα του Fubini [29, Πρόταση 9.16 και Θεώρημα 9.17] συμπεραίνουμε ότι

$$|C| = \int_C 1 d\lambda_n = \int_0^{|q|} \int_{B_0} \chi_C(z', t) d\lambda_{n-1}(z') d\lambda_1(t) = \int_0^{|q|} \lambda_{n-1}(C_t) dt$$

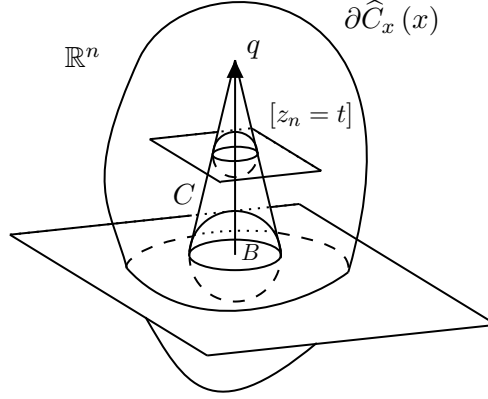
όπου $\lambda_1, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ είναι τα μέτρα Lebesgue των $\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^n$ αντίστοιχα. Ωστόσο το C_t είναι η ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^{n-1}$ με κέντρο το 0 και ακτίνα $(1 - \frac{t}{|q|})r$ όταν $t \in [0, |q|]$ και άρα

$$\lambda_{n-1}(C_t) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} r^{n-1} \left(1 - \frac{t}{|q|}\right)^{n-1} =: c_n r^{n-1} \left(1 - \frac{t}{|q|}\right)^{n-1}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} |C| &= -\frac{c_n}{n} |q| r^{n-1} \int_0^{|q|} \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{t}{|q|}\right)^n dt = \frac{c_n}{n} |q| r^{n-1} = \frac{c_n}{n} \frac{|u(x)|}{\text{dist}(x, \partial\Omega)} \frac{|u(x)|^{n-1}}{\text{diam}(\Omega)^{n-1}} \\ \implies \mu_u(\Omega) &\geq |C| =: \frac{|u(x)|^n}{C_n \text{diam}(\Omega)^{n-1} \text{dist}(x, \partial\Omega)} \end{aligned}$$

□



Σχήμα 2.3: Το C είναι ένας n -διάστατος κώνος με κορυφή το q και βάση το B .

Η δεύτερη αρχή που παρουσιάζουμε σε αυτή την ενότητα είναι μία αρχή συγκρίσεων. Αποτελεί μίας μορφής αντίστροφο του Πορίσματος 2.2.11 και μας επιτρέπει να εξάγουμε συμπεράσματα αναφορικά με την διάταξη δύο κυρτών συναρτήσεων όταν γνωρίζουμε την διάταξη των αντίστοιχων μέτρων Monge-Ampère.

Θεώρημα 2.3.2 (Αρχή Σύγκρισης) *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο, $U \subseteq \Omega$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο και $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ δύο κυρτές συναρτήσεις τέτοιες ώστε:*

$$\begin{cases} \mu_u \leq \mu_v, & \text{στο } U \\ u \geq v, & \text{στο } \partial U \end{cases}$$

Τότε ισχύει $u \geq v$ σε ολόκληρο το U .

Απόδειξη. Θέτουμε $V := [u < v] \cap U = (v - u)^{-1}(0, +\infty) \cap U$. Αν η πρόταση δεν ισχύει, το V θα είναι μη κενό.

Ας είναι $R > 1$ τέτοιο ώστε $U \subseteq B(0, \frac{R}{2})$. Θεωρούμε την $v_\varepsilon := v + \varepsilon w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με $w(z) := \frac{|z|^2 - R^2}{2}$ και $\varepsilon > 0$. Αυτή είναι κυρτή και, καθώς $w|_{\overline{U}} < 0$, στο $\overline{U}$ ισχύει η σχέση $v_\varepsilon < v$.

Για $x \in V$ είναι $u(x) < v(x)$ και συνεπώς επιλέγοντας $0 < \varepsilon < \frac{v(x) - u(x)}{-w(x)}$ έχουμε $x \in V_\varepsilon := [u < v_\varepsilon] \cap U \neq \emptyset$. Το V_ε είναι ανοικτό, καθώς οι u, v_ε είναι συνεχείς ως κυρτές, και φραγμένο. Παρατηρούμε ότι για τυχαίο $x \in \overline{V_\varepsilon}$ έχουμε $x \in \overline{U}$, αλλά $x \notin \partial U$. Πράγματι, αν ίσχυε ότι $x \in \partial U$ θα είχαμε $u(x) \geq v(x) > v_\varepsilon(x)$, ενώ $x \in \overline{V_\varepsilon} \implies u(x) \leq v_\varepsilon(x)$. Επομένως έχουμε ότι $V_\varepsilon \subseteq \overline{V_\varepsilon} \subseteq U$ και άρα $\mu_u(V_\varepsilon) \leq \mu_v(V_\varepsilon)$.

Επιπλέον, αν $z \in \partial V_\varepsilon$ υπάρχουν $z_m \in U \setminus V_\varepsilon$ ώστε $z_m \rightarrow z$. Τότε έχουμε $u(z_m) \geq v_\varepsilon(z_m)$

και επομένως $u(z) \geq v_\varepsilon(z)$. Συνεπώς είναι

$$\begin{cases} u < v_\varepsilon, & \text{στο } V_\varepsilon \\ u = v_\varepsilon, & \text{στο } \partial V_\varepsilon \end{cases}$$

οπότε από το Πόρισμα 2.2.11 συμπεραίνουμε ότι $\mu_u(V_\varepsilon) \geq \mu_{v_\varepsilon}(V_\varepsilon)$. Ακόμα, από τις ιδιότητες του μέτρου Monge-Ampère και επειδή $w \in C^2(\Omega)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_{v_\varepsilon}(V_\varepsilon) &= \mu_{v+\varepsilon w}(V_\varepsilon) \geq \mu_v(V_\varepsilon) + \varepsilon^n \mu_w(V_\varepsilon) \\ &= \mu_v(V_\varepsilon) + \varepsilon^n \int_{V_\varepsilon} \det D^2 w \, dx = \mu_v(V_\varepsilon) + \varepsilon^n |V_\varepsilon| \end{aligned}$$

Αφού το V_ε είναι ανοικτό έχουμε $|V_\varepsilon| > 0$ και άρα είναι

$$\mu_u(V_\varepsilon) \geq \mu_{v_\varepsilon}(V_\varepsilon) \geq \mu_v(V_\varepsilon) + \varepsilon^n |V_\varepsilon| \geq \mu_u(V_\varepsilon) + \varepsilon^n |V_\varepsilon| > \mu_u(V_\varepsilon)$$

Αυτό όμως είναι άτοπο και συνεπώς η αρχική μας υπόθεση ότι $V \neq \emptyset$ δεν ισχύει. Επομένως έχουμε $V = \emptyset$ ή ισοδύναμα $u \geq v$ παντού στο U . $\square$

2.4 Λύσεις Alexandrov

Σε αυτή την ενότητα ορίζουμε την έννοια της λύσης Alexandrov της εξίσωσης Monge-Ampère. Αυτές είναι κυρτές λύσεις της εξίσωσης μίας ασθενέστερης ως προς την διαφορισμότητα μορφής, οι οποίες εισήχθησαν για πρώτη φορά από τον Alexandrov στην μελέτη του προβλήματος Minkowski.

Θεωρούμε $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο, $f \in C(\Omega)$ με $f > 0$ και $u \in C^2(\Omega)$ μία κυρτή συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση $\det D^2 u = f$ στο Ω . Ολοκληρώνοντας την εξίσωση πάνω από κάποιο σύνολο Borel $E \subseteq \Omega$ από το Παράδειγμα 2.2.2 συμπεραίνουμε ότι

$$\mu_u(E) = \int_E \det D^2 u \, dx = \int_E f \, dx$$

Συνεπώς τότε έχουμε την ισότητα των μέτρων $\mu_u = \nu$ πάνω από όλα τα Borel υποσύνολα του Ω , όπου το $\nu := f \, dx$ ορίζει ένα μέτρο Borel στο Ω .

Επειδή αυτή η ισότητα μπορεί να ισχύει ακόμα και στην περίπτωση όπου $u \notin C^2(\Omega)$ αλλά είναι απλώς μία κυρτή συνάρτηση, μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε για να εισάγουμε ασθενείς λύσεις της εξίσωσης.

Ορισμός 2.4.1 Θεωρούμε $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση και ν ένα μέτρο Borel στο Ω . Η u καλείται **λύση Alexandrov της εξίσωσης Monge-Ampère $\det D^2 u = \nu$** όταν ισχύει η ισότητα των μέτρων $\mu_u = \nu$ πάνω από την κλάση των συνόλων Borel του Ω .

Αν $u \in C^2(\Omega)$ και $\det D^2u = f$, η u καλείται **κλασική** ή **ισχυρή** λύση της εξίσωσης Monge-Ampère. Από τα προηγούμενα είναι εμφανές ότι κάθε κλασική λύση της εξίσωσης $\det D^2u = f$ αποτελεί λύση Alexandron της εξίσωσης $\mu_u = f dx$.

Αντίθετα, μία λύση Alexandron της εξίσωσης δεν είναι απαραίτητα ισχυρή λύση μίας αντίστοιχης εξίσωσης. Στην περίπτωση όμως όπου η κυρτή συνάρτηση $u \in C^2(\Omega)$ ικανοποιεί την εξίσωση $\mu_u = f dx$ για κάποια συνάρτηση $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ με $f > 0$ έχουμε την ισότητα $\det D^2u dx = f dx$ και άρα η u ικανοποιεί την εξίσωση $\det D^2u = f$ σχεδόν παντού στο Ω , ενώ όταν $f \in C(\Omega)$ η u ικανοποιεί την εξίσωση $\det D^2u = f$ σε ολόκληρο το Ω .

2.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων Alexandron

Έχοντας αναπτύξει όλα τα απαραίτητα εργαλεία βρισκόμαστε πλέον σε θέση να ασχοληθούμε με την απόδειξη ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων Alexandron στο πρόβλημα *Dirichlet* της εξίσωσης Monge-Ampère, δηλαδή στο πρόβλημα

$$\begin{cases} \mu_u = \nu, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

όπου Ω είναι κάποιο ανοικτό, κυρτό, φραγμένο σύνολο, ν είναι ένα μέτρο Borel και $g \in C(\Omega)$. Αρχικά δείχνουμε την μοναδικότητα των λύσεων Alexandron όταν υπάρχουν, ενώ στη συνέχεια το μεγαλύτερο μέρος της ενότητας αναλώνεται στην απόδειξη ύπαρξης λύσεων· πρώτα για την περίπτωση $g = 0$ και στην συνέχεια για την γενικότερη περίπτωση $g \in C(\partial\Omega)$.

2.5.1 Μοναδικότητα λύσεων Alexandron

Θεώρημα 2.5.1 Θεωρούμε $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό, κυρτό, φραγμένο σύνολο, $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχή συνάρτηση και ν ένα μέτρο Borel.

Υπάρχει **το πολύ** μία κυρτή συνάρτηση $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ που λύνει το πρόβλημα *Dirichlet*

$$\begin{cases} \mu_u = \nu, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Απόδειξη. Αποτελεί άμεση απόρροια της Αρχής Σύγκρισης 2.3.2. □

Ορισμός 2.5.2 Ως **απόσταση Hausdorff** δύο συνόλων $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζεται ο αριθμός $\text{dist}_H(A, B) := \inf \{ \varepsilon \geq 0 : A \subseteq B_\varepsilon \text{ και } B \subseteq A_\varepsilon \}$, όπου για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$ θέτουμε $X_\varepsilon := \bigcup_{x \in X} \{z \in \mathbb{R}^n : |z - x| \leq \varepsilon\} = \bigcup_{x \in X} \overline{B(x, \varepsilon)}$.

Η απόσταση Hausdorff είναι μία ψευδομετρική στην κλάση όλων των συνόλων του $\mathbb{R}^n$, η οποία καθιστά μετρικό χώρο τον χώρο των μη κενών συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ [35,

Ενότητα 1.8]. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε σύγκλιση συνόλων, μία έννοια που θα μας φανεί χρήσιμη στις επόμενες προτάσεις. Η απόσταση Hausdorff δύο μη κενών κυρτών συμπαγών συνόλων A, B εξαρτάται άμεσα από τα σύνορα των δύο συνόλων διότι $\text{dist}_H(A, B) = \text{dist}_H(\partial A, \partial B)$ [35, Λήμμα 1.8.1]. Ένας άλλος ισοδύναμος χαρακτηρισμός της απόστασης Hausdorff δύο συνόλων A, B δίνεται μέσω των αποστάσεων των σημείων τους ως εξής $\text{dist}_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \text{dist}(x, B), \sup_{y \in B} \text{dist}(y, A) \right\}$ [35, Ενότητα 1.8, 1.59].

Λήμμα 2.5.3 *Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό, κυρτό, φραγμένο σύνολο και $\Omega_k \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι μία ακολουθία ανοικτών, κυρτών, φραγμένων συνόλων με $\text{dist}_H(\partial \Omega_k, \partial \Omega) \rightarrow 0$ τότε για κάθε $K \subset \subset \Omega$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N} : k \geq k_0 \implies K \subset \subset \Omega_k$. Μάλιστα, υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε τελικά να έχουμε $\text{dist}(K, \Omega_k) \geq c$.*

Απόδειξη. Αφού $\text{dist}(K, \partial \Omega) > 0$, αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x \in \Omega$ υπάρχει $r > 0$ και $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $k \geq k_0 \implies B(x, r) \subset \Omega_k$. Τότε η συμπαγεια του K μας δίνει τη γενική περίπτωση.

Θεωρούμε ένα σημείο $x \in \Omega$. Αν ισχυε ότι $x \in \Omega_k$ μόνο για πεπερασμένα σε πλήθος k , για τα υπόλοιπα k η γεωμετρική μορφή του Θεωρήματος Hahn-Banach στο $\mathbb{R}^n$ [3, Λήμμα 1.3] εξασφαλίζει ότι το x διαχωρίζεται από το Ω_k από κάποιο κλειστό υπερεπίπεδο $\Pi_k = [f_k = f_k(x)]$, δηλαδή υπάρχει μία γραμμική απεικόνιση $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_k(z) = f_k(x) + \langle a_k, z - x \rangle$ και $a_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ έτσι ώστε $f_k(z) \leq f_k(x)$, $\forall z \in \overline{\Omega}_k$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ισχύει η σχέση $f_k(z) = \langle \nu_k - x, z - x \rangle$ για κάποιο $\nu_k \in \partial \Omega \cap [f_k \geq f_k(x)]$. Πράγματι, σε διαφορετική περίπτωση από το Λήμμα 1.3.9 βρίσκουμε $\nu_k \in \partial \Omega$ έτσι ώστε $\nu_k = x + \varepsilon_k a_k$ για κάποια αρκετά μικρή θετική σταθερά ε_k , $f_k(\nu_k) = f_k(x) + \varepsilon_k \langle a_k, a_k \rangle \geq f_k(x)$ και αρκεί να θεωρήσουμε την γραμμική απεικόνιση $\tilde{f}_k : x + \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $\tilde{f}_k(z) := \frac{|\nu_k - x|}{|a_k|} (f_k(z) - f_k(x)) = \langle \nu_k - x, z - x \rangle$ ώστε να έχουμε $\Pi_k = [\tilde{f}_k = \tilde{f}_k(x)]$.

Καθώς το $\partial \Omega$ είναι συμπαγές, η ακολουθία ν_k έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $\nu_k \rightarrow \nu \in \partial \Omega$. Επειδή $\text{dist}_H(\partial \Omega_k, \partial \Omega) \rightarrow 0$, για $\varepsilon > 0$ έχουμε $\nu \in \partial \Omega \subseteq (\partial \Omega_k)_\varepsilon$ τελικά ως προς k και άρα υπάρχει μια ακολουθία σημείων $y_k \in \partial \Omega_k$ έτσι ώστε $y_k \rightarrow \nu$. Τότε έχουμε $f_k(y_k) \leq f_k(x) = 0$, οπότε παίρνοντας το όριο για $k \rightarrow +\infty$ είναι $0 \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle \nu_k - x, y_k - x \rangle = \langle \nu - x, \nu - x \rangle$. Αυτό σημαίνει ότι $\nu = x \in \Omega$, κάτι που όμως είναι άτοπο αφού $\nu \in \partial \Omega$ και το Ω είναι ανοικτό. Συνεπώς πρέπει να υπάρχει άπειρο πλήθος $k \in \mathbb{N}$ για τα οποία ισχύει $x \in \Omega_k$.

Αν για κάθε $k_0 \in \mathbb{N}$, υπήρχαν $k \geq k_0 : x \notin \Omega_k$, θα μπορούσαμε να δημιουργήσουμε μία υπακολουθία από δείκτες k με την ιδιότητα ότι $x \notin \Omega_k$. Όμως τότε δουλεύοντας για αυτήν την υπακολουθία όπως προηγουμένως θα οδηγούμασταν σε άτοπο. Επομένως πρέπει να υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $k \geq k_0 \implies x \in \Omega_k$.

Θέτουμε $d_k := \text{dist}(x, \partial \Omega_k)$ και θα δείξουμε ότι καμία υπακολουθία της δεν μπορεί να συγκλίνει στο 0. Πράγματι, αν $d_k \rightarrow 0$ και $d_k = |x - x_k|$ με $x_k \in \partial \Omega_k$, επειδή $\text{dist}_H(\partial \Omega_k, \partial \Omega) \rightarrow 0$, όπως και προηγουμένως βρίσκουμε ακολουθία $\bar{y}_k \in \partial \Omega$ έτσι ώστε να ισχύει $|\bar{y}_k - x_k| \leq \frac{1}{k}$ και συνεπώς έχουμε $|x - \bar{y}_k| \leq |x - x_k| + |x_k - \bar{y}_k| \leq \frac{2}{k}$ ή ισοδύναμα $\bar{y}_k \rightarrow x$. Αφού το $\partial \Omega$ είναι

κλειστό, έχουμε $x \in \partial\Omega$ και αυτό είναι άτοπο.

Αν $\liminf_{k \rightarrow +\infty} d_k = 0$ μπορούμε να κατασκευάσουμε υποακολουθία $d_k \rightarrow 0$. Αυτό, όμως, δεν μπορεί να ισχύει, οπότε $r := \frac{1}{2} \liminf_{k \rightarrow +\infty} d_k > 0$. Για $k \geq k_0$ είναι $B(x, r) \subseteq \Omega_k$. $\square$

Πόρισμα 2.5.4 Θεωρούμε $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό, κυρτό, φραγμένο σύνολο και ν κάποιο μέτρο Borel σε αυτό. Επιπλέον θεωρούμε $\Omega_k \subseteq \mathbb{R}^n$ μία ακολουθία ανοικτών, κυρτών, φραγμένων συνόλων με $\text{dist}_H(\partial\Omega_k, \partial\Omega) \rightarrow 0$. Για $k \in \mathbb{N}$ θεωρούμε μέτρο Borel ν_k του Ω_k και κυρτή συνάρτηση $u_k : \Omega_k \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \nu_k(\Omega_k) < +\infty \text{ και } \nu_k \xrightarrow{*} \nu \text{ όταν } k \rightarrow +\infty,^7$$

ενώ κάθε μία από τις u_k αποτελεί λύση του αντίστοιχου προβλήματος

$$\begin{cases} \mu_{u_k} = \nu_k, & \text{στο } \Omega_k \\ u_k = 0, & \text{στο } \partial\Omega_k \end{cases}$$

Τότε η ακολουθία $u_k|_{\Omega}$ συγκλίνει ομοιόμορφα τοπικά στην μοναδική λύση u του προβλήματος

$$\begin{cases} \mu_u = \nu, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Απόδειξη. Ας ξεκινήσουμε θεωρώντας τα σύνολα $K_m := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{m}\}$ όταν $m \in \mathbb{N}$. Όπως έχουμε δει και στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.5, κάθε ένα από αυτά περιέχεται συμπαγώς στο Ω , ενώ από το Λήμμα 2.5.3 γνωρίζουμε ότι θα περιέχεται συμπαγώς και στα Ω_k τελικά.

Παρατηρούμε ότι $\sup_{k \in \mathbb{N}} \mu_{u_k}(\Omega_k) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \nu_k(\Omega_k) < +\infty$, οπότε τα $\mu_{u_k}(\Omega_k)$ φράσσονται ομοιόμορφα ως προς $k \in \mathbb{N}$. Ακόμα, αφού $|\text{diam}(\Omega_k) - \text{diam}(\Omega)| \leq 2 \text{dist}_H(\Omega_k, \Omega)$, έχουμε ότι $\text{diam}(\Omega_k) \rightarrow \text{diam}(\Omega) < +\infty$, οπότε και αυτές οι ποσότητες φράσσεται ομοιόμορφα ως προς k . Τότε από την Αρχή Μεγίστου του Alexandron 2.3.1 βρίσκουμε θετική σταθερά $C > 0$ ανεξάρτητη του k έτσι ώστε

$$|u_k(x)| \leq C \text{dist}(x, \partial\Omega_k)^{\frac{1}{n}}, \quad \forall x \in \Omega_k$$

Αυτό σημαίνει ότι τελικά οι $u_k|_{K_m}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες από σταθερά $C' \text{diam}(\Omega)^{\frac{1}{n}}$, ενώ από την Παρατήρηση 2.1.9 έχουμε ότι οι $u_k|_{K_m}$ είναι Lipschitz συνεχείς με σταθερές $\frac{2 \|u_k\|_{L^\infty(\Omega_k)}}{\text{dist}(K_m, \partial\Omega_k)}$ και άρα έχουν κοινή σταθερά Lipschitz την $\frac{2C'}{c} \text{diam}(\Omega)^{\frac{1}{n}}$, όπου $c > 0$ είναι σταθερά όπως στο Λήμμα 2.5.3.

⁷Παρόλο που τα σύνολα Ω_k, Ω εν δυνάμει διαφέρουν, εξαιτίας του Λήμματος 2.5.3 ο συμπαγής φορέας κάθε συνάρτησης του $C_c(\Omega)$ βρίσκεται τελικά μέσα στα Ω_k . Αυτό καθιστά την έννοια της ασθενούς* σύγκλισης των μέτρων ν_k στο μέτρο ν καλά ορισμένη.

Επομένως, από το Θεώρημα Arzelà-Ascoli [27, Θεώρημα 10.48] συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $u_k|_{K_m}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο K_m . Στην συνέχεια θα δουλέψουμε επαγωγικά εκλεπτύνοντας τους δείκτες αυτής της υπακολουθίας ώστε να υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία αυτής σε κάθε ένα από τα K_{m+l} για $l \in \mathbb{N}$.

Αρχίζουμε με το K_1 και όπως προηγουμένως βρίσκουμε μία υπακολουθία $u_{k_i^1}$ της u_i η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στο K_1 σε μία κυρτή συνάρτηση $u^1 \in C(K_1)$. Ανάλογα στο $K_2 \supseteq K_1$ βρίσκουμε μία υπακολουθία $u_{k_i^2}$ της $u_{k_i^1}$, η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στο K_2 στην κυρτή $u^2 \in C(K_2)$ και παρατηρούμε ότι $u^2|_{K_1} = u^1$. Επαγωγικά, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $u_{k_i^{m+1}}$ της $u_{k_i^m}$ που να συγκλίνει ομοιόμορφα στο $K_{m+1} \supseteq K_m$ σε μία κυρτή συνάρτηση $u^{m+1} \in C(K_{m+1})$ και έχουμε $u^{m+1}|_{K_m} = u^m$. Γενικότερα, για $m_1 \leq m_2$ έχουμε ότι η $u_{k_i^{m_2}}$ είναι υπακολουθία της $u_{k_i^{m_1}}$ και ισχύει $u^{m_2}|_{K_{m_1}} = u^{m_1}$.

Ορίζουμε την συνάρτηση $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$u(x) := \begin{cases} \lim_{m \rightarrow +\infty} u^m(x), & \text{αν } x \in \Omega \\ \lim_{\substack{\text{όταν } z \in \Omega \\ z \rightarrow x}} u(z), & \text{αν } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Επειδή $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m = \Omega$ και σε κάθε σημείο x του Ω η ακολουθία $u^m(x)$ τελικά σταθεροποιείται, η $u|_{\Omega}$ είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον, αυτή είναι κυρτή ως όριο των κυρτών συναρτήσεων u^m .

Για σύνολο Borel $B \subseteq \Omega$ έχουμε $B = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left((B \cap K_m^\circ) \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} K_i^\circ \right)$ και συνεπώς είναι

$$\mu_u(B) = \sum_{m=1}^{+\infty} \mu_u \left((B \cap K_m^\circ) \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} K_i^\circ \right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \mu_u(B \cap K_m^\circ) - \sum_{i=1}^{m-1} \mu_u(B \cap K_i^\circ)$$

Ωστόσο γνωρίζουμε ότι η ακολουθία κυρτών συναρτήσεων $u_{k_i^m}|_{K_m^\circ}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K_m° στην κυρτή συνάρτηση $u^m|_{K_m^\circ} = u|_{K_m^\circ}$, οπότε από την Πρόταση 2.2.8 έπεται ότι η ακολουθία $\mu_{u_{k_i^m}|_{K_m^\circ}}$ συγκλίνει στο μέτρο $\mu_{u|_{K_m^\circ}}$ στην ασθενή* τοπολογία, ενώ επειδή το K_m° είναι ανοικτό έχουμε $\mu_{u_{k_i^m}|_{K_m^\circ}} = \mu_{u_{k_i^m}}(\cdot \cap K_m^\circ) = \nu_{k_i^m}(\cdot \cap K_m^\circ)$ και $\mu_{u|_{K_m^\circ}} = \mu_u(\cdot \cap K_m^\circ)$. Η ίδια ακολουθία μέτρων συγκλίνει στην ασθενή* τοπολογία και στο μέτρο $\nu(\cdot \cap K_m^\circ)$, οπότε λόγω της μοναδικότητας του ασθενώς* ορίου έχουμε την ισότητα $\mu_u(\cdot \cap K_m^\circ) = \nu(\cdot \cap K_m^\circ)$. Άρα είναι

$$\mu_u(B) = \sum_{m=1}^{+\infty} \nu(B \cap K_m^\circ) - \sum_{i=1}^{m-1} \nu(B \cap K_i^\circ) = \sum_{m=1}^{+\infty} \nu \left((B \cap K_m^\circ) \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} K_i^\circ \right) = \nu(B)$$

ή ισοδύναμα $\mu_u = \nu$ στο Ω .

Τώρα θα μελετήσουμε την συμπεριφορά της u στο σύνορο.

Παρατηρούμε ότι αν $x_i \in \Omega$ με $x_i \rightarrow x \in \partial\Omega$ υπάρχουν αρκετά μεγάλα $m_0, k_{m_0} \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $x_i \in K_{m_0} \subseteq \Omega_k$ όταν $k \geq k_{m_0}$. Ακόμα, είναι

$$u(x_i) = \lim_{m \rightarrow +\infty} u^m(x_i) = u^{m_0}(x_i) = \lim_{j \rightarrow +\infty} u_{k_j^{m_0}}(x_i)$$

αφού η $u^m(x_i)$ σταθεροποιείται για όλες τις τιμές $m \geq m_0$. Ωστόσο στο $K_{m_0} \subseteq \Omega_{k_j^{m_0}}$ γνωρίζουμε το φράγμα

$$|u_{k_j^{m_0}}(x_i)| \leq C \operatorname{dist} \left(x_i, \partial\Omega_{k_j^{m_0}} \right)^{\frac{1}{n}}$$

ενώ επειδή $\operatorname{dist} \left(x_i, \partial\Omega_{k_j^{m_0}} \right) \leq \operatorname{dist} \left(x_i, \partial\Omega \right) + \operatorname{dist}_H \left(\partial\Omega_{k_j^{m_0}}, \partial\Omega \right)$, υπολογίζουμε

$$|u(x_i)| \leq C \lim_{j \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{dist} \left(x_i, \partial\Omega \right) + \operatorname{dist}_H \left(\partial\Omega_{k_j^{m_0}}, \partial\Omega \right) \right)^{\frac{1}{n}} = C \operatorname{dist} \left(x_i, \partial\Omega \right)^{\frac{1}{n}}$$

και άρα για $i \rightarrow +\infty$ βρίσκουμε

$$|u(x)| \leq C \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^{\frac{1}{n}} = 0$$

Συνεπώς δείξαμε ότι η u είναι καλά ορισμένη στο σύνορο και αφού ικανοποιεί και την συνοριακή συνθήκη αποτελεί λύση του προβλήματος Dirichlet.

Τέλος θέλουμε να δείξουμε ότι η $u_k|_{\Omega}$ συγκλίνει ομοιόμορφα τοπικά στη u . Αν υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει, θα υπάρχει $x \in \Omega : \forall r > 0, \exists \varepsilon > 0 : \forall k_0 \in \mathbb{N}, \exists k \geq k_0 : \|u_k - u\|_{C(B(x,r))} > \varepsilon$. Για $x \in \Omega$ και $r > 0$, επιλέγουμε μία υπακολουθία της u_k για την οποία ισχύει αυτή η συνθήκη και δουλεύοντας όπως προηγουμένως βρίσκουμε υπακολουθία της υπακολουθία που συγκλίνει ομοιόμορφα τοπικά στην κυρτή συνάρτηση $\bar{u} \in C(\bar{\Omega})$. Τότε οι $u, \bar{u}$ λύνουν το ίδιο πρόβλημα Dirichlet και λόγω της μοναδικότητας της λύσης αυτού του προβλήματος (Θεώρημα 2.5.1) έχουμε $u = \bar{u}$. Ωστόσο, από τον τρόπο που έχουμε επιλέξει την υπακολουθία ισχύει $\|\bar{u} - u\|_{C(B(x,r))} \geq \varepsilon > 0$ και αυτό είναι άτοπο. $\square$

Κάποιες από τις υποθέσεις αναφορικά με την σύγκλιση των Ω_k και των u_k μπορούν να εξασθενίσουν όπως στο επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 2.5.5 Θεωρούμε $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < r \leq R$ και $\Omega_k \subseteq \mathbb{R}^n$ μία ακολουθία ανοικτών, κυρτών, φραγμένων συνόλων ώστε $B(x_0, r) \subseteq \Omega_k \subseteq B(x_0, R)$, όταν $k \in \mathbb{N}$. Επιπλέον, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θεωρούμε κάποιο μέτρο Borel ν_k του Ω_k και την κυρτή συνάρτηση $u_k : \Omega_k \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$\begin{cases} \lambda dx \leq \mu_{u_k} = \nu_k \leq \Lambda dx, & \text{στο } \Omega_k \\ u_k = 0, & \text{στο } \partial\Omega_k \end{cases}$$

για σταθερές $0 < \lambda \leq \Lambda$. Τότε υπάρχει μία γνησίως αύξουσα ακολουθία δεικτών $k_m \in \mathbb{N}$, ένα ανοικτό κυρτό φραγμένο σύνολο Ω ώστε $\operatorname{dist}_H(\partial\Omega_{k_m}, \partial\Omega) \rightarrow 0$, ένα μέτρο Borel ν του Ω ώστε $\nu_{k_m} \xrightarrow{*} \nu$ και μία κυρτή συνάρτηση $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε η ακολουθία $u_{k_m}|_{\Omega}$ να συγκλίνει ομοιόμορφα τοπικά στη u . Επιπλέον, η u αποτελεί λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \lambda dx \leq \mu_u = \nu \leq \Lambda dx, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η ακολουθία των κυρτών σχετικά συμπαγών συνόλων Ω_k είναι φραγμένη στον χώρο των συμπαγών συνόλων με την μετρική Hausdorff, διότι

$$B(x_0, r) \subseteq \Omega_k \subseteq B(x_0, R) \subseteq \bigcup_{z \in B(x_0, r)} \overline{B(z, R)} \implies \text{dist}_H(B(x_0, r), \Omega_k) \leq R$$

Τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία της σε αυτό τον χώρο και μάλιστα το όριο της υπακολουθίας της είναι ένα κυρτό συμπαγές σύνολο $C \neq \emptyset$ (δείτε το Θεώρημα Επιλογής του Blaschke [35, Θεώρημα 1.8.7]). Στη συνέχεια θα αφήνουμε την εξάρτηση από αυτή την υπακολουθία να εννοείται.

Θέτουμε $\Omega := C^\circ$ και παρατηρούμε ότι αυτό είναι ένα ανοικτό κυρτό φραγμένο σύνολο, ενώ επειδή είναι και μη κενό ισχύει $\lim_{k \rightarrow +\infty} \text{dist}_H(\partial\Omega_k, \partial\Omega) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \text{dist}_H(\overline{\Omega}_k, C) = 0$. Πράγματι, για $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k_m \in \mathbb{N}$ ώστε $\text{dist}_H(\overline{\Omega}_{k_m}, C) < \frac{1}{m}$ και άρα $B(x_0, r) \subseteq \overline{\Omega}_{k_m} \subseteq \bigcup_{z \in C} \overline{B(z, \frac{1}{m})}$.

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x \in B(x_0, r)$ υπάρχει $z_m \in C$ ώστε $|z_m - x| \leq \frac{1}{m}$ και συνεπώς, αφού το C είναι κλειστό, έχουμε $B(x_0, r) \subseteq C$. Για $x \in \Omega$ έχουμε $\{x\} \subset \subset \Omega$, οπότε από το Λήμμα 2.5.3 συμπεραίνουμε ότι $x \in \Omega_k \subseteq B(x_0, R)$ τελικά.

Παρατηρούμε ότι $\nu_k(\Omega_k) \leq \Lambda |B(x_0, R)| < +\infty$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία της ν_k στην ασθενή* τοπολογία με όριο κάποιο μέτρο Borel ν του Ω .

Εξαιτίας της απόλυτης συνέχειας αυτών των μέτρων ως προς το μέτρο Lebesgue, από το Θεώρημα Radon-Nikodym [29, Θεώρημα 10.15] γνωρίζουμε την ύπαρξη συναρτήσεων $f_k \in L^1_{loc}(\Omega_k)$ ώστε $\nu_k = f_k dx$. Θεωρούμε $K \subset \subset \Omega$, οπότε από το Λήμμα 2.5.3 τελικά έχουμε $K \subset \subset \Omega_k$. Ακόμα ισχύει $\lambda \leq f_k \leq \Lambda$ σχεδόν παντού στο K και άρα το σύνολο $F_K := \{f_k|_K, k \in \mathbb{N}\} \subseteq L^1(K)$ είναι φραγμένο. Αν δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta \in (0, \text{dist}(K, \partial\Omega))$ ώστε

$$\|f(\cdot + h) - f\|_{L^1(K)} < \varepsilon \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \text{ με } |h| < \delta \text{ και } \forall f \in F_K,$$

χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Kolmogorov-Riesz-Fréchet [3, Θεώρημα 4.26] συμπεραίνουμε ότι το F_K είναι σχετικά συμπαγές στο $L^1(K)$. Μία τέτοια συνθήκη πράγματι ισχύει διότι για κάθε $\delta \in (0, \text{dist}(K, \partial\Omega))$, $f \in F_K$ και $|h| < \delta$ είναι

$$\|f(\cdot + h) - f\|_{L^1(K)} \leq (\Lambda - \lambda)|K| \leq (\Lambda - \lambda) \sum_{i=1}^m |B(x_i, \delta)| = \delta^n (\Lambda - \lambda) m |B(0, 1)|$$

όπου $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m B(x_i, \delta) \subseteq \Omega$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Συνεπώς υπάρχει υπακολουθία $f_k \in F_K$ και

$f_K \in L^1(K)$ ώστε $f_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{L^1(K)}} f_K$ όταν $k \rightarrow +\infty$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι η f_k συγκλίνει και κατά σημείο στη f σχεδόν παντού στο K και υπάρχει $h_K \in L^1(K)$ ώστε $|f_k| \leq h_K$ (δείτε [3, Θεώρημα 4.9]).

Θεωρούμε $K_m := \{z \in \Omega : \text{dist}(z, \partial\Omega) \geq \frac{1}{m}\}$. Δουλεύοντας όπως στην απόδειξη του Πορίσματος 2.5.4 εκλεπτύνουμε τους δείκτες της ακολουθίας f_k και κατασκευάζουμε $f \in L^1(\Omega)$

ώστε $f_k|_{K_m} \xrightarrow{\|\cdot\|_{L^1(K_m)}} f|_{K_m}$ για όλα τα αρκετά μεγάλα $m \in \mathbb{N}$. Για κάθε $\phi \in C_c(\Omega)$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\text{spt } \phi \subseteq K_m$. Αφού σχεδόν παντού στο K_m έχουμε την κατά σημείο σύγκλιση $\phi f_k \rightarrow \phi f$ από το Θεώρημα Κυριαρχημένης του Lebesgue [29, Θεώρημα 6.21] προκύπτει

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_k} \phi f_k dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{K_m} \phi f_k dx = \int_{K_m} \phi f dx = \int_{\Omega} \phi f dx$$

Θέτουμε $\nu := f dx$ και παρατηρούμε ότι, αφού κάθε μία από τις f_k είναι Borel μετρήσιμη και η f θα είναι Borel μετρήσιμη [29, Πρόταση 5.10(iii)]. Συνεπώς το μέτρο ν είναι ένα μέτρο Borel του Ω . Τότε έχουμε $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_k} \phi d\nu_k = \int_{\Omega} \phi d\nu$ [29, Πρόταση 6.12], ενώ λόγω της γενικότητας στην επιλογή της $\phi \in C_c(\Omega)$ ισοδύναμα είναι $\nu_k \xrightarrow{*} \nu$.

Σε αυτό το πλαίσιο, το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το Πρόταση 2.5.4. $\square$

2.5.2 Ύπαρξη λύσεων Alexandrov

Για να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσεων θα διαχωρίσουμε δύο περιπτώσεις, μία για την ειδική περίπτωση της μηδενικής συνοριακής συνθήκης και μία για την γενικότερη περίπτωση όπου η συνοριακή συνθήκη είναι απλώς μία συνεχή συνάρτηση. Κάνουμε αυτή την διάκριση, καθώς οι υποθέσεις που απαιτούνται ως προς την κυρτότητα του πεδίου λύσης είναι ασθενέστερες στην περίπτωση της μηδενικής συνοριακής συνθήκης, αλλά και επειδή είναι απαραίτητο να αξιοποιήσουμε στοιχεία από την ειδικότερη περίπτωση στην απόδειξη της γενικότερης περίπτωσης.

Θεώρημα 2.5.6 (Ύπαρξη λύσεων με μηδενική συνοριακή συνθήκη) Θεωρούμε $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό, κυρτό, φραγμένο σύνολο και ν μέτρο Borel με $\nu(\Omega) < +\infty$.

Τότε υπάρχει μοναδική κυρτή συνάρτηση $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ που λύνει το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} \mu_u = \nu, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Απόδειξη. Όπως έχουμε ήδη δει στο Παράδειγμα 2.2.7, το θετικό μέτρο ν προσεγγίζεται από μία ακολουθία θετικών γραμμικών συνδυασμών μέτρων Dirac στην ασθενή* τοπολογία. Επομένως αποδεικνύοντας το θεώρημα για την περίπτωση όπου $\nu = \sum_{i=1}^m a_i \delta_{x_i}$ με $m \in \mathbb{N}$, $x_i \in \Omega$ και $a_i > 0$, μέσω του Πορίσματος 2.5.4 αποδεικνύεται και η γενικότερη περίπτωση.

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο του Perron. Σε αυτή, θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{S}[\nu] := \{w : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid w : \text{κυρτή}, w|_{\partial\Omega} = 0, \mu_w \geq \nu \text{ στο } \Omega\}$ και δείχνουμε ότι το κατά σημείο supremum του αποτελεί λύση του προβλήματός μας, δηλαδή δείχνουμε ότι η $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ με $u(x) := \sup_{w \in \mathcal{S}[\nu]} w(x)$ είναι η λύση που αναζητούμε.

Αρχικά θα δείξουμε ότι η u είναι καλά ορισμένη ως πραγματική συνάρτηση. Για να γίνει αυτό, θα χρειαστεί να δείξουμε ότι $\mathcal{S}[\nu] \neq \emptyset$ κατασκευάζοντας κάποιο στοιχείο του.

Θεωρούμε κωνικές συναρτήσεις $\widehat{C}_{x_i}$, όπως στο Παράδειγμα 1.3.15, που λαμβάνουν την τιμή -1 στο x_i και μηδενίζονται στο σύνορο. Αν $B \subseteq \Omega$ είναι ένα σύνολο Borel παρατηρούμε ότι όταν $x_i \in B$ ισχύει $\mu_{\widehat{C}_{x_i}}(B) \geq \mu_{\widehat{C}_{x_i}}(\{x_i\})$, $\mu_{\widehat{C}_{x_i}}(B) \geq 0$ και $\delta_{x_i}(B) = 0$ όταν $x_i \notin B$, οπότε έχουμε την σχέση $\mu_{\widehat{C}_{x_i}}(B) \geq \mu_{\widehat{C}_{x_i}}(\{x_i\})\delta_{x_i}(B)$ ανεξάρτητα με το αν το x_i βρίσκεται στο B ή όχι. Θέτουμε $\beta_i := \mu_{\widehat{C}_{x_i}}(\{x_i\})$ και $v := \sum_{i=1}^m \lambda \widehat{C}_{x_i}$, όπου $\lambda \geq \max_{i=1, \dots, m} \left(\frac{a_i}{\beta_i} \right)^{\frac{1}{n}}$. Παρατηρούμε ότι η v είναι κυρτή, $v|_{\partial\Omega} = 0$ και

$$\mu_v = \mu_{\sum_{i=1}^m \lambda \widehat{C}_{x_i}} \geq \lambda^n \sum_{i=1}^m \mu_{\widehat{C}_{x_i}} \geq \lambda^n \sum_{i=1}^m \beta_i \delta_{x_i} \geq \sum_{i=1}^m a_i \delta_{x_i} = \nu$$

Συνεπώς έχουμε $v \in \mathcal{S}[\nu]$ και άρα είναι $v \leq u$, οπότε $u > -\infty$. Επειδή όλες οι συναρτήσεις του $\mathcal{S}[\nu]$ είναι κυρτές στο εσωτερικό του Ω και στο σύνορο λαμβάνουν την τιμή 0, η u φράσσεται άνω από το 0. Επομένως η u είναι καλά ορισμένη πραγματική συνάρτηση.

Αν $v_1, v_2 \in \mathcal{S}[\nu]$ θα δείξουμε ότι $v_0 := \max\{v_1, v_2\} \in \mathcal{S}[\nu]$. Για αυτόν τον σκοπό θεωρούμε τα σύνολα $\Omega_0 := [v_1 = v_2]$, $\Omega_1 := [v_1 > v_2]$, $\Omega_2 := [v_1 < v_2]$. Επιπλέον, για το σύνολο Borel $B \subseteq \Omega$ θέτουμε $B_i := B \cap \Omega_i$, $i = 0, 1, 2$ και παρατηρούμε ότι $v_0|_{\Omega_1} = v_1|_{\Omega_1}$, $v_0|_{\Omega_2} = v_2|_{\Omega_2}$, ενώ κάθε ένα από τα Ω_1, Ω_2 είναι ανοικτό. Αφού το Ω_i είναι περιοχή κάθε σημείου του και σε αυτό οι v_0, v_i ταυτίζονται, έχουμε $\partial v_0(x) = \partial v_i(x)$ για κάθε $x \in B_i$, $i = 1, 2$. Επομένως είναι $\partial v_0(B_i) = \partial v_i(B_i)$ και άρα $\mu_{v_0}(B_i) = \mu_{v_i}(B_i)$, $i = 1, 2$. Στο Ω_0 έχουμε $v_0 = v_1 = v_2$ ενώ γενικά ισχύει $v_0 \geq v_1$, οπότε για $x \in B_0$ και $p \in \partial v_1(x)$ έχουμε

$$\begin{aligned} v_0(z) &\geq v_1(z) \geq v_1(x) + \langle p, z - x \rangle \\ &= v_0(x) + \langle p, z - x \rangle, \quad \forall z \in \Omega \\ \implies p &\in \partial v_0(x) \subseteq \partial v_0(B_0) \end{aligned}$$

και άρα ισχύει $\mu_{v_1}(B_0) \leq \mu_{v_0}(B_0)$. Τα B_i αποτελούν ξένη ένωση οπότε υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \mu_{v_0}(B) &= \mu_{v_0}(B_0 \cup B_1 \cup B_2) = \sum_{i=0}^2 \mu_{v_0}(B_i) \\ &\geq \mu_{v_1}(B_0) + \mu_{v_1}(B_1) + \mu_{v_2}(B_2) \\ &\geq \sum_{i=0}^2 \mu_{v_i}(B_i) = \mu_{\nu}(B) \end{aligned}$$

Είναι άμεσο ότι η v_0 είναι κυρτή και $v_0|_{\partial\Omega} = 0$, οπότε $v_0 \in \mathcal{S}[\nu]$.

Πλέον είμαστε σε θέση να ασχοληθούμε με την u και να αποδείξουμε ότι $u \in \mathcal{S}[\nu]$. Ας θεωρήσουμε σημείο $x_0 \in \Omega$ και ας παρατηρήσουμε ότι λόγω των ιδιοτήτων των supremum για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $w_m \in \mathcal{S}[\nu]$ έτσι ώστε $0 \leq u(x_0) - w_m(x_0) \leq \frac{1}{m}$. Μάλιστα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε $w_m \leq w_{m+1}$, αφού σε διαφορετική περίπτωση μπορούμε να θέσουμε $\bar{w}_m := \max_{1 \leq k \leq m} w_k \in \mathcal{S}[\nu]$ και να έχουμε $0 \leq u(x_0) - \bar{w}_m(x_0) \leq \frac{1}{m}$. Αυτές εξαρτώνται από την επιλογή του σημείου x_0 .

Θα δείξουμε ότι η u είναι κυρτή. Παραπάνω το x_0 είναι τυχαία επιλεγμένο, οπότε αν θεωρήσουμε ότι για τα σημεία $x'_0, x''_0 \in \Omega$ και $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει η ισότητα $x_0 = \lambda x'_0 + (1 - \lambda)x''_0$ παρατηρούμε ότι

$$w_m(x_0) \leq \lambda w_m(x'_0) + (1 - \lambda)w_m(x''_0) \leq \lambda u(x'_0) + (1 - \lambda)u(x''_0)$$

Για $m \rightarrow +\infty$ και λόγω της τυχαίας επιλογής των x'_0, x''_0 προκύπτει το ζητούμενο.

Για $z \in \bar{\Omega}$ έχουμε ότι η ακολουθία $(w_m(z))_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το 0, οπότε συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό $w(z)$. Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται κυρτή συνάρτηση $w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ως το σημειακό όριο των w_m και, μάλιστα, εξαιτίας του Θεωρήματος του Dini [32, Θεώρημα 7.13] η ακολουθία w_m συγκλίνει ομοιόμορφα τοπικά στην w στο Ω . Τότε μέσω της Πρότασης 2.2.8 έχουμε ότι $\mu_{w_m} \xrightarrow{*} \mu_w$ και άρα λόγω της σχέσης $\mu_{w_m} \geq \nu$ και της Παρατήρησης 2.2.9 έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi d\mu_{w_m} &\geq \int_{\Omega} \phi d\nu, & \forall \phi \in C_c(\Omega) \text{ με } \phi \geq 0 \\ \implies \int_{\Omega} \phi d\mu_w &\geq \int_{\Omega} \phi d\nu, & \forall \phi \in C_c(\Omega) \text{ με } \phi \geq 0 \\ \implies &\mu_w \geq \nu \end{aligned}$$

Η σχέση $w_m \leq u$ μας δίνει $w \leq u$ στο Ω , οπότε για $p \in \partial w(x_0)$ και $z \in \Omega$ έχουμε

$$\underbrace{w(z)}_{\leq u(z)} \geq \underbrace{w(x_0)}_{=u(x_0)} + \langle p, z - x_0 \rangle \implies u(z) \geq u(x_0) + \langle p, z - x_0 \rangle$$

με αποτέλεσμα να ισχύει $p \in \partial u(x_0)$. Επομένως είναι $\partial w(x_0) \subseteq \partial u(x_0)$ και άρα έχουμε

$$\nu(\{x_0\}) \leq \mu_w(\{x_0\}) \leq \mu_u(\{x_0\})$$

Καθώς το $x_0 \in \Omega$ είναι τυχαία επιλεγμένο, η σχέση $\nu(\{x\}) \leq \mu_u(\{x\})$ ισχύει $\forall x \in \Omega$.

Επειδή το ν είναι γραμμικός συνδυασμός μέτρων Dirac δίνει όγκο μόνο στα σημεία x_j , $j = 1, \dots, m$. Θα δείξουμε ότι το ίδιο συμβαίνει και για το μ_u δηλαδή ότι το μέτρο Monge-Ampère της u ενός συνόλου που δεν περιέχει κανένα από τα σημεία x_j είναι μηδέν. Τότε η ανισότητα που δείξαμε παραπάνω γίνεται $\mu_u \geq \nu$ στο Ω .

Ας υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός μας δεν ισχύει και θα κατασκευάσουμε ένα στοιχείο του $\mathcal{S}[\nu]$ γνήσια μεγαλύτερο του u . Αν, λοιπόν, ο ισχυρισμός μας δεν ισχύει, θα υπάρχει σύνολο Borel $E \subseteq \Omega$ με $E \cap \{x_1, \dots, x_m\} = \emptyset$ και $\mu_u(E) > 0$.

Ας είναι $U := \bigcup_{i=1}^m \{x_i\} \cup \partial\Omega$. Αφού $x_i \notin E$ και $E \cap \partial\Omega = \emptyset$, από το Λήμμα 2.1.15 συμπεραίνουμε ότι $\bigcup_{i=1}^m (\partial u(x_i) \cap \partial u(E)) \subseteq \mathcal{Z}$, $\partial u(E) \cap \partial u(\partial u(\Omega)) \subseteq \mathcal{Z}$ και

$$\begin{aligned}
|\partial u(E) \cap \partial u(U)| &= \left| \partial u(E) \cap \left(\bigcup_{i=1}^m \partial u(x_i) \cup \partial u(\partial \Omega) \right) \right| \\
&= \left| (\partial u(E) \cap \partial u(\partial \Omega)) \cup \left(\bigcup_{i=1}^m \partial u(x_i) \cap \partial u(E) \right) \right| \\
&\leq |\partial u(\Omega) \cap \partial u(\partial \Omega)| + |\mathcal{Z}| = 0
\end{aligned}$$

Συνεπώς έχουμε

$$0 < |\partial u(E)| = |\partial u(E) \setminus \partial u(U)| \implies \partial u(E) \setminus \partial u(U) \neq \emptyset$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $x \in E \subseteq \Omega \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$ με $p \in \partial u(x)$ και $p \notin \partial u(U)$, οπότε αν $\ell_{x,p}$ είναι το επίπεδο στήριξης της u στο x με κλίση p , έχουμε

$$\begin{aligned}
p \in \partial u(x) &\implies u(z) \geq \ell_{x,p}(z), \quad \forall z \in \bar{\Omega} \\
&\xrightarrow{p \notin \partial u(U)} u(z) > \ell_{x,p}(z), \quad \forall z \in U \\
&\implies u - \ell_{x,p} > 0, \quad \text{στο } U
\end{aligned}$$

Επιπλέον, η $u - \ell_{x,p}$ είναι συνεχής και το U συμπαγές, οπότε λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της σε κάποιο σημείο του. Λόγω της προηγούμενης γνήσιας ανισότητας μπορούμε να θεωρήσουμε το $\delta := \frac{1}{2} \min_U (u - \ell_{x,p}) > 0$ ώστε να έχουμε $u \geq \ell_{x,p} + 2\delta$ στο U .

Θέτουμε $\bar{u} := \max\{u, \ell_{x,p} + \delta\}$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο δείχνοντας ότι $\bar{u} \in \mathcal{S}[\nu]$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι αυτή είναι κυρτή και επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις $\bar{u} \geq u$ και $\bar{u} \neq u$, αφού $\bar{u}(x) = \max\{u(x), u(x) + \delta\} > u(x)$. Ακόμα, καθώς στο U ισχύει η σχέση $u \geq \ell_{x,p} + 2\delta$, εξαιτίας της συνέχειας της u συμπεραίνουμε ότι σε περιοχές αρκετά κοντά στο U ισχύει $\bar{u} = u$. Ειδικότερα, ισχύει $\bar{u}|_{\partial \Omega} = u|_{\partial \Omega} = 0$, ενώ αφού $x_i \in U$, συμπεραίνουμε ότι $\partial \bar{u}(x_i) = \partial u(x_i)$ και άρα $\mu_{\bar{u}}(\{x_i\}) = \mu_u(\{x_i\})$. Τότε για το εκάστοτε Borel υποσύνολο B του Ω υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\mu_{\bar{u}}(B) &= \mu_{\bar{u}}\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^m \{x_i\}\right)\right) + \mu_{\bar{u}}\left(B \setminus \left(\bigcup_{i=1}^m \{x_i\}\right)\right) \geq \mu_{\bar{u}}\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^m \{x_i\}\right)\right) \\
&= \mu_u\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^m \{x_i\}\right)\right) \geq \nu\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^m \{x_i\}\right)\right) = \sum_{j=1}^m a_j \delta_{x_j}\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^m \{x_i\}\right)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^m a_j \underbrace{\delta_{x_j}(B \cap \{x_i\})}_{=\delta_{ij} \delta_{x_j}(B)} = \sum_{j=1}^m a_j \delta_{x_j}(B) = \nu(B)
\end{aligned}$$

Από όλα τα παραπάνω έπεται ότι $\bar{u} \in \mathcal{S}[\nu]$ με $\bar{u} \neq u$ και $\bar{u} \geq u$, κάτι που όμως είναι άτοπο.

Μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι η u είναι λύση Alexandrov δείχνοντας ότι η ανισότητα $\mu_u(\{x_j\}) \geq \nu(\{x_j\})$ δεν μπορεί να είναι γνήσια. Αντ' αυτού ας υποθέσουμε ότι η ανισότητα είναι γνήσια για κάποιο $j = 1, \dots, m$ και θα κατασκευάσουμε και πάλι ένα στοιχείο $\tilde{u} \in \mathcal{S}[\nu]$ με $\tilde{u} \geq u$ και $\tilde{u} \neq u$. Έτσι, θεωρούμε $\beta_j := \mu_u(\{x_j\})$ και έχουμε $\beta_j > \nu(\{x_j\}) = a_j > 0$.

Παρατηρούμε ότι, αφού $\mu_u(\{x_j\}) = |\partial u(x_j)| > 0$, το $\partial u(x_j)$ περιέχει άπειρο πλήθος σημείων και τα οποία δεν περιέχεται όλα ένα υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν σημεία $z_0, z_1, \dots, z_n \in \partial u(x_j)$ τα οποία δεν ανήκουν σε υπερεπίπεδο, οπότε λόγω της κυρτότητας του $\partial u(x_j)$ έχουμε $\text{conv}\{z_0, z_1, \dots, z_n\} \subseteq \partial u(x_j)$. Συνεπώς δείξαμε ότι το $\partial u(x_j)$ περιέχει το μη κενό ανοικτό σύνολο $(\text{conv}\{z_0, z_1, \dots, z_n\})^\circ$ και άρα $(\partial u(x_j))^\circ \neq \emptyset$.

Αν $p \in (\partial u(x_j))^\circ$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε να ισχύει $p + \varepsilon e \in \partial u(x_j)$ για κάθε $e \in \mathbb{S}^{n-1}$. Θέτοντας $w_0 := u - \ell_{x_j, p}$, όπου $\ell_{x_j, p}$ είναι το επίπεδο στήριξης της u στο x_j με κλίση p , όταν $z \in \Omega$ έχουμε

$$\begin{aligned} u(z) &\geq u(x_j) + \langle p + \varepsilon e, z - x_j \rangle, & \forall e \in \mathbb{S}^{n-1} \\ \implies u(z) - u(x_j) - \langle p, z - x_j \rangle &\geq \varepsilon \langle e, z - x_j \rangle, & \forall e \in \mathbb{S}^{n-1} \\ \implies w_0(z) &\geq \varepsilon \sup_{e \in \mathbb{S}^{n-1}} \langle e, z - x_j \rangle = \varepsilon |z - x_j| \end{aligned}$$

Λόγω της συνέχειας της w_0 έχουμε την ίδια σχέση και για τα σημεία του συνόρου $\partial\Omega$. Καθώς το x_j βρίσκεται στο εσωτερικό του ανοικτού συνόλου Ω και άρα απέχει από το σύνορο κάποια θετική απόσταση, υπάρχει $\delta \in (0, 1)$ ώστε να ισχύει $w_0 > \delta$ για όλα τα $z \in \partial\Omega$. Επιπλέον, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι αρκετά μικρό ώστε να ικανοποιεί τις ανισότητες $\varepsilon |x_i - x_j| > \delta$ για $i \neq j$. Συνεπώς τότε έχουμε

$$[w_0 \leq \delta] \cap (\{x_1, \dots, x_m\} \cup \partial\Omega) = \{x_j\}$$

Θεωρούμε

$$\tilde{w}(z) := \begin{cases} w_0(z), & \text{όταν } z \in [w_0 \geq \delta] \\ (1 - \delta)w_0(z) + \delta^2, & \text{όταν } z \in [w_0 \leq \delta] \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι η $\tilde{w}$ είναι κυρτή. Ακόμα, επειδή σε μία αρκετά μικρή περιοχή του x_j ισχύει η ισότητα $\tilde{w} = (1 - \delta)w_0 + \delta^2$, εκεί και τα υποδιαφορικά τους θα είναι ίσα και άρα έχουμε

$$\mu_{\tilde{w}}(\{x_j\}) = (1 - \delta)^n \mu_{w_0}(\{x_j\}) = (1 - \delta)^n \mu_u(\{x_j\}) = (1 - \delta)^n \beta_j$$

Τότε μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ όσο μικρό χρειάζεται για να ισχύει $(1 - \delta)^n \beta_j > a_j$ και άρα να έχουμε $\mu_{\tilde{w}}(\{x_j\}) > a_j$.

Θέτουμε $\tilde{u} := \tilde{w} + \ell_{x_j, p}$ και παρατηρούμε ότι αυτή είναι κυρτή και ισχύει η ανισότητα $\mu_{\tilde{u}}(\{x_j\}) = \mu_{\tilde{w}}(\{x_j\}) > a_j$. Ακόμα, όταν $i \neq j$, σε κάποια μικρή περιοχή γύρω από το x_i ισχύει $\tilde{w} = w_0$, οπότε έχουμε $\mu_{\tilde{u}}(\{x_i\}) = \mu_{\tilde{w}}(\{x_i\}) \geq a_i$ και άρα $\mu_{\tilde{u}} \geq \nu$.

Η ισότητα $\tilde{w} = w_0$ ισχύει και σε κάποια περιοχή του Ω που περιέχει το σύνορο, οπότε έχουμε

$$\tilde{u}|_{\partial\Omega} = (\tilde{w} + \ell_{x_j, p})|_{\partial\Omega} = (w_0 + \ell_{x_j, p})|_{\partial\Omega} = (u - \ell_{x_j, p} + \ell_{x_j, p})|_{\partial\Omega} = 0$$

Από όλα τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $\tilde{u} \in \mathcal{S}[\nu]$ και $\tilde{u} \leq u$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι

$$\tilde{u}(x_j) = \tilde{w}(x_j) + \ell_{x_j, p}(x_j) = (1 - \delta)w_0(x_j) + \delta^2 = (1 - \delta)(u(x_j) - \ell_{x_j, p}(x_j)) + \delta^2 > u(x_j)$$

και επομένως η αρχική μας υπόθεση δεν ευσταθεί, δηλαδή για κάθε $i = 1, \dots, m$ έχουμε

$$\mu_u(\{x_i\}) = \nu(\{x_i\})$$

Αυτό σημαίνει ότι για το εκάστοτε σύνολο Borel $B \subseteq \Omega$ ισχύει $\mu_u(B \cap \{x_i\}) = \nu(B \cap \{x_i\})$, οπότε έχουμε

$$\mu_u(B) = \sum_{i=1}^m \mu_u(B \cap \{x_i\}) + \underbrace{\mu_u(B \setminus \{x_1, \dots, x_m\})}_{=0} = \sum_{i=1}^m \nu(B \cap \{x_i\}) = \sum_{i=1}^m a_i \delta_{x_i}(B) = \nu(B)$$

Με αυτήν την ισότητα ολοκληρώνεται η απόδειξη ότι η u αποτελεί λύση του προβλήματος. $\square$

Πριν περάσουμε στην περίπτωση της μη μηδενικής συνοριακής συνθήκης, θα χρειαστεί να αποδείξουμε κάποια επιπλέον εργαλεία που θα μας βοηθήσουν στη διαχείρισή της.

Λήμμα 2.5.7 *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό, γνήσια κυρτό, φραγμένο σύνολο και $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Τότε $\forall \varepsilon > 0$ και $x \in \partial\Omega$, υπάρχουν δύο αφινικές συναρτήσεις $\ell_{x,\varepsilon}^\pm : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε*

$$\begin{aligned} \ell_{x,\varepsilon}^- &\leq g \leq \ell_{x,\varepsilon}^+ \text{ στο } \partial\Omega \\ &\text{και} \\ g(x) - \varepsilon &\leq \ell_{x,\varepsilon}^-(x) \leq \ell_{x,\varepsilon}^+(x) \leq g(x) + \varepsilon \end{aligned}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$, $x \in \partial\Omega$ και κατάλληλη αλλαγή συντεταγμένων ώστε $x \equiv 0$ και $\Omega \subseteq [z_n < 0]$, δηλαδή κατάλληλη μεταφορά και στροφή που ταυτίζει ένα επίπεδο στήριξη του Ω στο x με το $[z_n = 0]$.

Από τη συνέχεια της g υπάρχει $\delta > 0 : |g - g(0)| < \varepsilon$ στο $\partial\Omega \cap B(0, \delta)$. Επιπλέον, επειδή το Ω είναι γνήσια κυρτό υπάρχει $\eta > 0 : \partial\Omega \setminus B(0, \delta) \subseteq [z_n \leq -\eta]$. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει, υπάρχει ακολουθία $z_m = (z_m^1, \dots, z_m^n) \in \partial\Omega \setminus B(0, \delta)$ με

$$\begin{cases} |z_m| \geq \delta > 0 \\ 0 > z_m^n > -\frac{1}{m} \end{cases} \implies \begin{cases} \lim_{m \rightarrow +\infty} |z_m| \geq \delta > 0 \\ \lim_{m \rightarrow +\infty} z_m^n = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lim_{m \rightarrow +\infty} z_m \in \partial\Omega \setminus \{0\} \\ \lim_{m \rightarrow +\infty} z_m^n = 0 \end{cases}$$

και άρα, αφού το Ω είναι ανοικτό και γνήσια κυρτό, έχουμε $\frac{0 + \lim_{m \rightarrow +\infty} z_m}{2} \in \text{relint}\Omega = \Omega$, όπου $\lim_{m \rightarrow +\infty} z_m$ είναι το όριο κάποιας συγκλίνουσας υποακολουθίας της z_m . Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{m \rightarrow +\infty} z_m^n < 0$ κάτι που όμως είναι άτοπο.

Αν θεωρήσουμε $M := \|g(\cdot) - g(x)\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ και

$$\ell_{x,\varepsilon}^\pm(z) := g(x) \pm \varepsilon \mp \frac{M}{\eta} z_n = g(0) \pm \varepsilon \mp \frac{\|g(\cdot) - g(0)\|_{L^\infty(\partial\Omega)}}{\eta} z_n$$

έχουμε

1. $z \in \partial\Omega \cap B(x, \delta) \implies z_n \leq 0 \implies \ell_{x,\varepsilon}^-(z) \leq g(x) - \varepsilon \leq g(z).$
 $z \in \partial\Omega \setminus B(x, \delta) \implies z_n \leq -\eta \implies \ell_{x,\varepsilon}^-(z) \leq g(x) - \varepsilon - M \leq g(z) + M - \varepsilon - M \leq g(z).$
 Ανάλογα δείχνουμε την σχέση $\ell_{x,\varepsilon}^+(z) \geq g(z).$
2. $\ell_{x,\varepsilon}^\pm(x) = g(x) \pm \varepsilon \mp \frac{M}{\eta} x_n \xrightarrow{x_n \leq 0} g(x) - \varepsilon \leq \ell_{x,\varepsilon}^-(x) \leq \ell_{x,\varepsilon}^+(x) \leq g(x) + \varepsilon$

□

Θα συνεχίσουμε δείχνοντας το αντίστοιχο αποτέλεσμα του Πορίσματος 2.5.4 για την περίπτωση της μη μηδενικής συνοριακής συνθήκης.

Πρόταση 2.5.8 Θεωρούμε $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό, κυρτό, φραγμένο σύνολο, $g \in C(\partial\Omega)$ και ν κάποιο μέτρο Borel στο Ω . Για $k \in \mathbb{N}$ θεωρούμε μέτρο Borel ν_k του Ω και κυρτή συνάρτηση $u_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \nu_k(\Omega) < +\infty \text{ και } \nu_k \xrightarrow{*} \nu \text{ όταν } k \rightarrow +\infty,$$

ενώ κάθε μία από της u_k αποτελεί λύση του αντίστοιχου προβλήματος

$$\begin{cases} \mu_{u_k} = \nu_k, & \text{στο } \Omega \\ u_k = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Τότε η ακολουθία u_k συγκλίνει ομοιόμορφα τοπικά στη μοναδική λύση u του προβλήματος

$$\begin{cases} \mu_u = \nu, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Απόδειξη. Καθώς η απόδειξη αυτής της πρότασης αποτελεί τροποποίηση της απόδειξης του Πορίσματος 2.5.4 όταν $\Omega_k = \Omega$, θα εστιάσουμε μόνο στα σημεία όπου οι δύο αποδείξεις διαφέρουν.

Ας είναι $w_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ οι μοναδικές λύσεις των προβλημάτων

$$\begin{cases} \mu_{w_k} = \nu_k, & \text{στο } \Omega \\ w_k = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 2.5.6. και $u_0 := \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$

Παρατηρούμε ότι στο $\partial\Omega$ ισχύει $u_k = g \leq u_0$. Επίσης, καθώς οι u_k, u_0 είναι κυρτές και ισχύει $\mu_{u_k} \geq 0 = \mu_{u_0}$ στο Ω , από την Αρχή Σύγκρισης 2.3.2 έπεται ότι $u_k \leq u_0$ στο $\bar{\Omega}$. Από την άλλη έχουμε $\mu_{u_k+u_0} = \mu_{u_k} = \nu_k = \mu_{w_k}$ στο Ω και στο $\partial\Omega$ είναι $u_k + u_0 = g + u_0 \geq 0 = w_k$, οπότε και πάλι από την Αρχή Σύγκρισης η ανίσωση $u_k + u_0 \geq w_k$ ισχύει σε ολόκληρο το $\bar{\Omega}$. Επομένως στο $\bar{\Omega}$ καταφέραμε να βρούμε τα φράγματα

$$w_k - \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq u_k \leq \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι η w_k μηδενίζεται στο $\partial\Omega$, οπότε από την Αρχή Μεγίστου του Alexandrov 2.3.1 προκύπτουν τα φράγματα

$$0 \geq w_k(z) \geq -C \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)^{\frac{1}{n}}$$

για κάθε $z \in \Omega$ όπου C είναι μία θετική σταθερά ανεξάρτητη της επιλογής του εκάστοτε z και k . Συνεπώς στο $\bar{\Omega}$ έχουμε

$$-C \operatorname{dist}(\cdot, \partial\Omega)^{\frac{1}{n}} - \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq u_k \leq \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

Οι u_k φράσσονται ομοιόμορφα στο $\bar{\Omega}$ από μία σταθερά $M > 0$, οπότε σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.1.9, στο εκάστοτε συμπαγές $K \subseteq \Omega$ αυτές είναι Lipschitz συνεχείς με κοινή σταθερά $\frac{2M}{\operatorname{dist}(K, \partial\Omega)}$. Σε αυτό είναι ισοσυνεχείς και άρα από το Θεώρημα Arzelà-Ascoli η ακολουθία τους έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο $C(K)$.

Όπως και στην απόδειξη του 2.5.4 κατασκευάζουμε $u \in C(\bar{\Omega})$ και ακολουθία συναρτήσεων $u^m \in C(K_m)$ με τρόπο ώστε $u^k|_{K_m} \rightarrow u|_{K_m}$ όταν $k \rightarrow +\infty$ και δείχνουμε ότι στο Ω ισχύει $\mu_u = \nu$. Συνεπώς, μένει να δείξουμε ότι η u ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη.

Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και $x \in \partial\Omega$, οπότε βρίσκουμε αφινικές συναρτήσεις $\ell_{x,\varepsilon}^\pm : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ όπως στο Λήμμα 2.5.7. Στο Ω γνωρίζουμε ότι $\mu_{w_k + \ell_{x,\varepsilon}^\pm} = \mu_{w_k}$, ενώ στο $\partial\Omega$ ισχύει

$$w_k + \ell_{x,\varepsilon}^- \leq g = u_k \leq w_k + \ell_{x,\varepsilon}^+$$

Επομένως από την Αρχή Σύγκρισης 2.3.2 συμπεραίνουμε ότι αυτές οι ανισώσεις ισχύουν και στο εσωτερικό του Ω . Συνδυάζοντας την με τα προηγούμενα φράγματα για τις w_k προκύπτει

$$-C \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)^{\frac{1}{n}} + \ell_{x,\varepsilon}^-(z) \leq u_k(z) \leq \ell_{x,\varepsilon}^+(z), \quad \forall z \in \Omega$$

Τα ίδια φράγματα ισχύουν και για τις u^m στα K_m , οπότε για $m \rightarrow +\infty$ είναι

$$-C \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)^{\frac{1}{n}} + \ell_{x,\varepsilon}^-(z) \leq u(z) \leq \ell_{x,\varepsilon}^+(z), \quad \forall z \in \Omega$$

Για $z \rightarrow x$ όταν $z \in \Omega$ υπολογίζουμε

$$\underbrace{-C \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^{\frac{1}{n}}}_{=0} + \ell_{x,\varepsilon}^-(x) \leq \liminf_{\substack{\text{όταν } z \in \Omega \\ z \rightarrow x}} u(z) \leq \limsup_{\substack{\text{όταν } z \in \Omega \\ z \rightarrow x}} u(z) \leq \ell_{x,\varepsilon}^+(x),$$

ενώ λόγω των φραγμάτων $g(x) - \varepsilon \leq \ell_{x,\varepsilon}^-(x) \leq \ell_{x,\varepsilon}^+(x) \leq g(x) + \varepsilon$ προκύπτει

$$g(x) - \varepsilon \leq \liminf_{\substack{\text{όταν } z \in \Omega \\ z \rightarrow x}} u(z) \leq \limsup_{\substack{\text{όταν } z \in \Omega \\ z \rightarrow x}} u(z) \leq g(x) + \varepsilon$$

Καθώς αυτή η σχέση ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, έχουμε $\lim_{\substack{\text{όταν } z \in \Omega \\ z \rightarrow x}} u(z) = g(x)$. γεγονός το οποίο σημαίνει ότι η u επεκτείνεται συνεχώς μέχρι το σύνορο και εκεί ικανοποιεί την δοθείσα συνοριακή συνθήκη.

Τέλος, με το ίδιο ακριβώς επιχείρημα όπως και στο Πρόσμημα 2.5.4 δείχνουμε ότι η u_k συγκλίνει ομοιόμορφα τοπικά στην u . $\square$

Πλέον είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσεων Alexandrov για μη μηδενική συνοριακή συνθήκη. Καθώς και αυτή η απόδειξη μοιράζεται πολλά κοινά στοιχεία με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.6, εστιάζουμε την προσοχή μας κυρίως στα σημεία όπου διαφοροποιούνται.

Θεώρημα 2.5.9 (Ύπαρξη λύσεων με συνεχή συνοριακή συνθήκη) *Θεωρούμε $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό, γνήσια κυρτό, φραγμένο σύνολο, $g \in C(\partial\Omega)$ και ν μέτρο Borel με $\nu(\Omega) < +\infty$.*

Τότε υπάρχει μοναδική κυρτή συνάρτηση $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ που λύνει το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} \mu_u = \nu, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι και σε αυτή την περίπτωση, λόγω της Πρότασης 2.5.8, αρκεί μόνο να εξετάσουμε μέτρα ν τα οποία αποτελούν γραμμικούς συνδυασμούς μέτρων Dirac με θετικούς συντελεστές, οπότε θεωρούμε ότι $\nu = \sum_{i=1}^m a_i \delta_{x_i}$ για κάποια σημεία $x_i \in \Omega$ και θετικές σταθερές a_i .

Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{S}[\nu] := \{w : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid w : \text{κυρτή}, w|_{\partial\Omega} \leq g \text{ και } \mu_w \geq \nu \text{ στο } \Omega\}$$

και δείχνουμε ότι είναι μη κενό αφού περιέχει την $\lambda \sum_{i=1}^m \hat{C}_{x_i} - \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$, όπου λ είναι μία θετική σταθερά επιλεγμένη όπως στο αντίστοιχο βήμα της απόδειξης του 2.5.6.

Με ακριβώς τα ίδια επιχειρήματα και ελάχιστες αλλαγές στα σημεία όπου εμφανίζεται η συνοριακή συνθήκη δείχνουμε ότι η $u(x) := \sup_{w \in \mathcal{S}[\nu]} w(x)$ είναι μία κυρτή λύση Alexandrov της εξίσωσης, δηλαδή δείχνουμε ότι $\mu_u = \nu$ στο Ω . Το μόνο που μένει να δείξουμε είναι ότι επεκτείνεται συνεχώς μέχρι το σύνορο και εκεί ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη.

Θεωρούμε $\varepsilon > 0$, $x \in \partial\Omega$ και βρίσκουμε αφινικές συναρτήσεις $\ell_{x,\varepsilon}^\pm$ όπως στο Λήμμα 2.5.7. Ας είναι u_0 η κυρτή λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \mu_{u_0} = \nu, & \text{στο } \Omega \\ u_0 = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η $u_0 + \ell_{x,\varepsilon}^-$ είναι κυρτή, στο Ω ισχύει $\mu_{u_0 + \ell_{x,\varepsilon}^-} = \mu_{u_0} = \nu = \mu_u$, ενώ στο σύνορο $\partial\Omega$ έχουμε $u_0 + \ell_{x,\varepsilon}^- = \ell_{x,\varepsilon}^- \leq g$. Αυτό σημαίνει ότι $u_0 + \ell_{x,\varepsilon}^- \in \mathcal{S}[\nu]$ και άρα $u \geq u_0 + \ell_{x,\varepsilon}^-$. Από την άλλη, στο σύνορο ισχύει η σχέση $u \leq g \leq \ell_{x,\varepsilon}^+$ και στο εσωτερικό η σχέση $\mu_u \geq \mu_{\ell_{x,\varepsilon}^+}$, οπότε από την Αρχή Σύγκρισης 2.3.2 συμπεραίνουμε ότι $u \leq \ell_{x,\varepsilon}^+$ παντού στο Ω .

Για $z \rightarrow x$ όταν $z \in \Omega$ από τις προηγούμενες ανισότητες έχουμε

$$\begin{aligned} g(x) - \varepsilon &\leq \ell_{x,\varepsilon}^-(x) = \lim_{z \rightarrow x} (u_0(z) + \ell_{x,\varepsilon}^-(z)) \leq \liminf_{\substack{\text{όταν } z \in \Omega \\ z \rightarrow x}} u(z) \\ &\leq \limsup_{\substack{\text{όταν } z \in \Omega \\ z \rightarrow x}} u(z) \leq \lim_{z \rightarrow x} \ell_{x,\varepsilon}^+(z) = \ell_{x,\varepsilon}^+(x) \leq g(x) + \varepsilon \end{aligned}$$

οπότε είναι $\lim_{\substack{\text{όταν } z \in \Omega \\ z \rightarrow x}} u(z) = g(x)$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΥΠΑΡΞΗ ΚΛΑΣΙΚΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

3.1 Θεώρημα ύπαρξης κλασικών λύσεων

Σε αυτό το κεφάλαιο ασχολούμαστε με κυρτές κλασικές λύσεις του προβλήματος Dirichlet της Monge-Ampère. Ας αρχίσουμε με τη διατύπωση του κύριου αποτελέσματος του κεφαλαίου.⁸

Θεώρημα 3.1.1 Θεωρούμε $k \geq 2$, $\alpha \in (0, 1)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό, φραγμένο, ομοιόμορφα κυρτό σύνολο με $C^{k+2, \alpha}$ σύνορο $\partial\Omega$ και $f \in C^{k, \alpha}(\bar{\Omega})$ με $f \geq c_0 > 0$.

Τότε για κάθε $g \in C^{k+2, \alpha}(\partial\Omega)$ υπάρχει μοναδική κυρτή λύση $u \in C^{k+2, \alpha}(\bar{\Omega})$ στο πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} \det D^2 u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Είναι εμφανές ότι αυτό το θεώρημα αποτελεί υποπερίπτωση του Θεωρήματος 2.5.9 με κάποιες ισχυρότερες συνθήκες για την δεξιά πλευρά, τα συνοριακά δεδομένα και το πεδίο λύσης. Γνωρίζουμε, δηλαδή, ήδη την ύπαρξη και την μοναδικότητα κυρτών λύσεων (Alexandron) σε αυτό το πρόβλημα και άρα αυτό το αποτέλεσμα αποτελεί ουσιαστικά μία βελτίωση ως προς την κανονικότητα. Αργότερα, θα μας φανεί χρήσιμο στην απόδειξη κανονικότητας των λύσεων Alexandron στο εσωτερικό του πεδίου λύσης (Θεώρημα 4.4.2).

Παρατηρούμε, ότι το θετικό κάτω φράγμα c_0 για την δεξιά πλευρά, αν και δεν ήταν απαραίτητο για την ύπαρξη και την μοναδικότητα κυρτών λύσεων (Alexandron), απαιτείται ώστε η εξίσωση να είναι ομοιόμορφα ελλειπτική και έτσι να αποδειχθεί η λειότητα αυτών των λύσεων. Ωστόσο, γενικά, αυτή δεν είναι μία αναγκαία συνθήκη για την λειότητα των λύσεων μίας εξίσωσης Monge-Ampère· για παράδειγμα η συνάρτηση $u(x) := \sum_{i=1}^n x_i^4$ αποτελεί μία λεία

λύση της εκφυλισμένα ελλειπτικής εξίσωσης $\det D^2 u(x) = 12^n \prod_{i=1}^n x_i^2$.

Μας αρκεί να δείξουμε την ύπαρξη λύσεων στο πρόβλημα. Αυτό μπορεί να γίνει με την μέθοδο της συνέχειας (continuity method), ανεξάρτητα της απόδειξης του Θεωρήματος 2.5.9.

⁸Υπενθυμίζουμε στην Ενότητα 3.2 τις διάφορες έννοιες που εμφανίζονται στο θεώρημα.

Αυτή είναι μία τοπολογική μέθοδος με τη βοήθεια της οποίας ανάγουμε το γενικό πρόβλημα ύπαρξης κυρτών λύσεων του προβλήματος στην απόδειξη ύπαρξης μίας λείας ομοιόμορφα κυρτής συνάρτησης $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη. Τότε η u_0 λύνει ταυτολογικά το πρόβλημα

$$\begin{cases} \det D^2 u_0 =: f_0, & \text{στο } \Omega \\ u_0 = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

και κατασκευάζουμε την γραμμική ομοτοπία $f_\sigma := (1 - \sigma)f_0 + \sigma f$ που παραμορφώνει συνεχώς την f_0 στη f . Δείχνουμε ότι κάθε ένα από τα προβλήματα με δεξιά πλευρά την f_σ έχει λύση όταν $\sigma \in [0, 1]$, οπότε αυτό έχει ως συνέπεια ότι και το αρχικό μας πρόβλημα έχει λύση. Είναι δηλαδή σαν η επιλυσιμότητα του προβλήματος να “μεταβάλλεται συνεχώς” στο διάστημα $[0, 1]$. Τόσο η ίδια η μέθοδος, όσο και οι λεπτομέρειές της θα γίνουν καλύτερα κατανοητές στη συνέχεια του κεφαλαίου.

Παρατηρούμε ότι η λύση αυτού του προβλήματος, δεν είναι μόνο κυρτή αλλά αναγκαστικά είναι και ομοιόμορφα κυρτή συνάρτηση. Πράγματι, αν $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ είναι $\partial_{ee} u = e^T D^2 u e \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\partial_{ij} u \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. Τότε, η συνάρτηση $\varphi : \bar{\Omega} \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\varphi(x, e) := e^T D^2 u(x) e$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο συμπαγές $\bar{\Omega} \times \mathbb{S}^{n-1}$, οπότε $\exists A \geq 0 : \sup_{e \in \mathbb{S}^{n-1}} \partial_{ee} u(x) \leq A, \forall x \in \Omega$. Τότε το συμπέρασμα προκύπτει από την Πρόταση 1.4.6.

Όσον αφορά την συνοριακή συνθήκη, η g επεκτείνεται στην $\tilde{g} \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$ με τρόπο ώστε το $\|\tilde{g}\|_{C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})}$ να εξαρτάται αποκλειστικά από την $\|g\|_{C^{k+2,\alpha}(\partial\Omega)}$ [21, Λήμμα 6.38 και Λήμμα 6.37]. Στην συνέχεια θα θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η g είναι ορισμένη σε ολόκληρο το $\bar{\Omega}$, δηλαδή θα την ταυτίζουμε με την $\tilde{g}$.

Τέλος, είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε περιορίζονται στην κλάση των κυρτών συναρτήσεων, δηλαδή σε άλλες κλάσεις συναρτήσεων το πρόβλημα μπορεί να μην έχει λύση, όπως για παράδειγμα συμβαίνει στην κλάση των κοίλων συναρτήσεων ή στην κλάση $C_c^2(\Omega)$, αφού και στις δύο αυτές περιπτώσεις υπάρχουν σημεία του Ω όπου έχουμε $f \geq c_0 > 0 \geq \det D^2 u$.

Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου ακολουθούν τη θεωρία όπως αυτή αναπτύσσεται στα [16] και [21].

3.2 Προκαταρκτικές έννοιες

Πριν ξεκινήσουμε με την απόδειξη ύπαρξης είναι χρήσιμο να υπενθυμίσουμε κάποιες βασικές έννοιες που εμφανίζονται στην συνέχεια του κεφαλαίου.

3.2.1 Χώροι Hölder

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\alpha \in (0, 1]$, η απεικόνιση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ καλείται **Hölder συνεχής** με εκθέτη α όταν υπάρχει $C \geq 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in \Omega$$

Αυτή η συνθήκη καλείται συνθήκη Hölder. Θέτοντας $[f]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)} := \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$, η συνθήκη Hölder είναι ισοδύναμη με τη σχέση $[f]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)} < +\infty$.

Για ανοικτό και φραγμένο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ θέτουμε

$$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) := \left\{ u \in C(\Omega) : [u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} < +\infty \right\}$$

Η $[\cdot]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$ αποτελεί ημινόρμα του χώρου $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, ενώ η

$$\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} := \|\cdot\|_{C(\bar{\Omega})} + [\cdot]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$$

είναι μία νόρμα που τον καθιστά χώρο Banach.

Γενικότερα, για ανοικτό και φραγμένο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0, 1]$ και $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) := \left\{ u \in C^k(\Omega) : D^j u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}), \quad \forall j \text{ πολυδείκτη με } |j| \leq k \right\}$$

Ένας τέτοιος χώρος καλείται **χώρος Hölder** και είναι χώρος Banach με νόρμα την

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} := \sum_{|\beta| \leq k} \|D^\beta u\|_{C(\bar{\Omega})} + \sum_{|\beta|=k} [D^\beta u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$$

όταν $u \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. Είναι άμεσο ότι $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) \subseteq C^k(\bar{\Omega})$, ενώ με κάποια επιπλέον συνθήκη για το Ω (λόγου χάρη όταν αυτό είναι κυρτό) έχουμε και $C^{k+1}(\bar{\Omega}) \subseteq C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, όπου $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Αυτοί οι χώροι είναι κλειστοί ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού των στοιχείων τους, δηλαδή αν $f, g \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ έχουμε $f \cdot g \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. Μάλιστα, υπάρχει σταθερά $C \geq 1$ που εξαρτάται μόνο από τα k και n ώστε να ισχύει $\|f \cdot g\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C \|f\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} \|g\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})}$.

Όσον αφορά την πράξη της διαίρεσης στοιχείων, αν $f, g \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ με $g \neq 0$ γενικά απαιτείται η επιπρόσθετη συνθήκη ότι $\inf_{\bar{\Omega}} |g| > 0$ ώστε να έχουμε $\frac{f}{g} \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Τέλος, αν $f = (f_1, \dots, f_m)$ για κάποιες πραγματικές συναρτήσεις f_i , η f είναι Hölder συνεχής αν και μόνο αν κάθε μία από τις f_i είναι Hölder συνεχής.

Καταχρηστικά όταν αναφερόμαστε στον χώρο $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ με εκθέτη $\alpha = 0$ θα εννοούμε τον χώρο $C^k(\bar{\Omega})$, ενώ ο χώρος $C_{loc}^{k,\alpha}(\Omega)$ θα είναι ο αντίστοιχος χώρος του $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ όπου η συνθήκη Hölder ικανοποιείται τοπικά σε περιοχές του Ω . Όταν το Ω δεν είναι φραγμένο ορίζουμε αντίστοιχα τον χώρο $C^{k,\alpha}(\Omega)$ (όταν το Ω είναι φραγμένο έχουμε $C^{k,\alpha}(\Omega) = C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$).

αφού τότε οι συναρτήσεις του χώρου μπορούν να επεκταθούν συνεχώς σε ολόκληρο το $\bar{\Omega}$). Ο χώρος $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ είναι ο χώρος των συναρτήσεων $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε σε κάθε σημείο $x \in \partial\Omega$ να υπάρχει $r > 0$ και $\tilde{f} \in C^{k,\alpha}(B(x,r) \cap \bar{\Omega})$ με $\tilde{f}|_{B(x,r) \cap \partial\Omega} = f$.

Ας δούμε ένα παράδειγμα ενός κριτηρίου που καθορίζει τότε μία κυρτή συνάρτηση ανήκει στο $C^{1,\alpha}$.

Πρόταση 3.2.1 *Ας είναι Ω ένα ανοικτό κυρτό σύνολο και $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r, R > 0$ ώστε $B(x_0, r) \subseteq \Omega \subseteq B(x_0, R)$. Επιπλέον, θεωρούμε κυρτή συνάρτηση $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι K -Lipschitz συνεχής στο Ω και για την οποία υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\forall x \in \Omega$, $\exists p \in \partial u(x)$ με*

$$u(z) \leq \ell_{x,p}(z) + M|z - x|^{1+\alpha} \quad \forall z \in B(x, \delta) \cap \Omega,$$

όπου $\ell_{x,p}$ είναι το επίπεδο στήριξης της u στο x με κλίση p και τα $K, M > 0$, $\alpha \in (0, 1]$ είναι σταθερές.

Τότε έχουμε $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ και μάλιστα υπάρχει σταθερά $C \geq 0$ που εξαρτάται αποκλειστικά από τα r, R, δ, K, M ώστε $[\nabla u]_{C^{0,\alpha}(\Omega; \mathbb{R}^n)} \leq C$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $x \in \Omega$ και αρκεί να δείξουμε ότι το $\partial u(x) \neq \emptyset$ είναι μονοσύνολο, αφού τότε από την Πρόταση 2.1.7 έχουμε ότι η u εκεί είναι διαφορίσιμη, ενώ από το Πόρισμα 2.1.11 έχουμε $u \in C^1(\Omega)$. Συνεπώς για $q \in \partial u(x)$ υπάρχει $p \in \partial u(x)$ ώστε

$$\begin{aligned} \ell_{x,q}(x + \varepsilon v) &\leq u(x + \varepsilon v) \leq \ell_{x,p}(x + \varepsilon v) + M|x + \varepsilon v - x|^{1+\alpha} \\ &\implies u(x) + \varepsilon \langle q, v \rangle \leq u(x) + \varepsilon \langle p, v \rangle + M\varepsilon^{1+\alpha} \\ &\implies \langle q - p, v \rangle \leq M\varepsilon^\alpha \end{aligned}$$

για αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$ και $v \in \mathbb{S}^{n-1}$. Για $\varepsilon \rightarrow 0$ προκύπτει $\langle q - p, v \rangle \leq 0 \quad \forall v \in \mathbb{S}^{n-1}$, απ' όπου και συμπεραίνουμε ότι $q = p$. Δηλαδή έχουμε $\partial u(x) = \{p\} = \{q\}$.

Θα δείξουμε ότι η ∇u ικανοποιεί μία συνθήκη Hölder στο Ω . Αρχικά από το Πόρισμα 2.1.8, για σταθερά $t_0 > 0$ που θα επιλέξουμε αργότερα και $z \in \Omega$ ώστε $|z - x| \geq t_0$, έχουμε

$$\begin{aligned} |\nabla u(z)| &= |\nabla(u - u(x))(z)| \leq \frac{2\|u - u(x)\|_\infty}{\text{dist}(z, \partial\Omega)} \leq \frac{2KR}{t_0} \leq \frac{2KR}{t_0^{1+\alpha}} |z - x|^\alpha \\ &\implies |\nabla u(z) - \nabla u(x)| \leq \frac{4KR}{t_0^{1+\alpha}} |z - x|^\alpha \end{aligned}$$

Συνεπώς μένει να δείξουμε την συνθήκη για $z \in \Omega$ με $|z - x| < t_0$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει $t_0 \in (0, \frac{\delta}{2})$ και $\eta > 0$ που εξαρτώνται από τα r, R ώστε για κάθε $z \in \Omega$, $e \in \mathbb{R}^n$ και $t < t_0$ υπάρχει $y \in B(z, t_0) \cap \Omega$ ώστε $|y - z| = t$ και $|\langle e, y - z \rangle| \geq \eta|e||y - z|$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $B(x_0, 3r) \subseteq \Omega$ και $r < \frac{\delta}{2}$. Θεωρούμε $\eta \in (0, \frac{r}{R})$, $t_0 := r$, $t \leq t_0$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. αν $|z - x_0| \leq 2r$, θέτουμε $y := z + t \frac{e}{|e|} \in B(x_0, 3r) \subseteq \Omega$ και υπολογίζουμε

$$|y - z| = t \leq t_0, \quad |\langle e, y - z \rangle| = t|e| = |e||y - z| \geq \eta|e||y - z|$$

2. αν $|z - x_0| > 2r$, θέτουμε $y := (1 - \lambda)z + \lambda(x_0 \pm r \frac{e}{|e|})$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $t = |y - z|$. αν $\langle e, x_0 - z \rangle \geq 0$ θέτουμε την παράσταση με το θετικό πρόσημο, ενώ στην αντίθετη περίπτωση θέτουμε αυτή με το αρνητικό. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \left| x_0 - z \pm r \frac{e}{|e|} \right| &\geq |x_0 - z| - \left| \pm r \frac{e}{|e|} \right| \geq 2r - r = r \\ \implies \lambda &= \frac{|y - z|}{\left| x_0 - z \pm r \frac{e}{|e|} \right|} \leq \frac{r}{r} = 1 \end{aligned}$$

Επειδή το Ω είναι κυρτό και $\lambda \in [0, 1]$, έχουμε $y \in \Omega$ ως κυρτός συνδυασμός των $z \in \Omega$ και $x_0 \pm r \frac{e}{|e|} \in B(x_0, 2r) \subseteq \Omega$. Επιπλέον είναι

$$|\langle e, y - z \rangle| = \lambda |\langle e, x_0 - z \rangle \pm r|e|| \geq \lambda r|e| \geq \frac{\lambda r|e|}{R} \left| x_0 - z \pm r \frac{e}{|e|} \right| = \eta |e| |y - z|$$

Θεωρούμε $v := u - \ell_{x, \nabla u(x)}$. Από τα παραπάνω έπεται ότι για κάθε $z \in B(x, t_0) \cap \Omega$ υπάρχει $y \in B(z, t_0) \cap \Omega$ ώστε να ισχύει $|y - z| = |z - x| < t_0$ και $|\langle \nabla v(z), y - z \rangle| \geq \eta |\nabla v(z)| |y - z|$. Επομένως τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \eta |\nabla v(z)| |y - z| &\leq | - \langle \nabla v(z), y - z \rangle | \\ &\leq |v(y) - v(z) - \langle \nabla v(z), y - z \rangle| + | - v(y)| + |v(z)| \\ &\leq |u(y) - u(z) - \langle \nabla u(z), y - z \rangle| + v(y) + v(z) \end{aligned}$$

αφού $\partial u(x) = \{\nabla u(x)\} \implies v \geq 0$. Καθώς $|y - x| \leq |y - z| + |z - x| < \delta$ υπολογίζουμε $v(y) = u(y) - \ell_{x, \nabla u(x)}(y) \leq M|y - x|^{1+\alpha} \leq M(|y - z| + |z - x|)^{1+\alpha} = 2^{1+\alpha} M|z - x|^{1+\alpha}$, ενώ ανάλογα έχουμε $v(z) \leq M|z - x|^{1+\alpha}$ και $|u(y) - \ell_{z, \nabla u(z)}(y)| \leq M|y - z|^{1+\alpha}$. Από όλα τα παραπάνω και επειδή $|y - z| = |z - x|$ έχουμε

$$\begin{aligned} \eta |\nabla v(z)| |z - x| &\leq (2 + 2^{1+\alpha}) M |z - x|^{1+\alpha} \\ \implies |\nabla u(z) - \nabla u(x)| = |\nabla v(z)| &\leq \frac{(2 + 2^{1+\alpha}) M}{\eta} |z - x|^\alpha \end{aligned}$$

□

Για περισσότερες πληροφορίες αναφορικά με τους χώρους Hölder και τα αποτελέσματα αυτής της υποενότητας δείτε στα [18], [14, Ενότητα 5.1], [21, Ενότητα 4.1] και [16, Ενότητα A.4.5].

3.2.2 Γεωμετρικές ιδιότητες του πεδίου λύσης

Συνεχίζουμε με κάποιες γεωμετρικές ιδιότητες τις οποίες θα απαιτήσουμε να πληροί το πεδίο λύσης του προβλήματος ώστε να υπάρχουν κλασικές λύσεις. Πιο συγκεκριμένα, σε αυτή την υποενότητα εξετάζουμε ανοικτά φραγμένα σύνολα με λείο σύνορο, καθώς και ομοιόμορφα κυρτά ανοικτά σύνολα με λείο σύνορο ($k \geq 2$).

Ορισμός 3.2.2 *Ας είναι $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1)$ και $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο σύνολο. Λέμε ότι το $\partial\Omega$ ανήκει στην κλάση $C^{k,\alpha}$ αν για κάθε σημείο $x_0 \in \partial\Omega$ υπάρχει $r > 0$, $\varphi : \mathcal{D}(B(x_0, r)) \rightarrow \mathbb{R}$ μία $C^{k,\alpha}$ συνάρτηση και $i = 1, \dots, n$ έτσι ώστε*

$$\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) : x_i > \varphi \circ \mathcal{D}(x)\}$$

και

$$\partial\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) : x_i = \varphi \circ \mathcal{D}(x)\}$$

όπου $\mathcal{D} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ με $\mathcal{D}(x) := (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ είναι η προβολή του $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^{n-1}$ που παραλείπει την συντεταγμένη i .

Τότε λέμε ότι το σύνορο του Ω μπορεί να εκφραστεί ως το γράφημα της συνάρτησης φ κοντά στο x_0 και ότι το Ω έχει λείο σύνορο.

Τώρα, θα κάνουμε κάποιες παραδοχές για όταν στην συνέχεια του κεφαλαίου θα αναφερόμαστε σε ένα ανοικτό φραγμένο σύνολο Ω το σύνορο του οποίου εκφράζεται τοπικά στο x_0 ως γράφημα της λείας συνάρτησης $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$. Αρχικά, επειδή υπάρχει ορθογώνιος μετασχηματισμός του συστήματος συντεταγμένων που απεικονίζει την συντεταγμένη x_i στη συντεταγμένη x_n και αντίστροφα την x_n στη x_i , θα θεωρούμε ότι η ισότητα $i = n$ ισχύει πάντα και θα συμβολίζουμε $x' := \mathcal{D}(x) = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Επιπλέον, θα θεωρούμε ότι $\varphi(x'_0) = 0$ και $\nabla\varphi(x'_0) = 0$, αφού σε αντίθετη περίπτωση μπορούμε να αλλάξουμε μεταβλητές μέσω της απεικόνισης $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $\Psi(x) := (x', x_n - \varphi(x'_0) - \langle \nabla\varphi(x'_0), x' - x'_0 \rangle)$ και στο νέο σύστημα συντεταγμένων να έχουμε ότι το σύνορο του $\Psi(\Omega)$ εκφράζεται ως γράφημα της $\varphi - \varphi(x'_0) - \langle \nabla\varphi(x'_0), \mathcal{D} - x'_0 \rangle$ κοντά στο $\Psi(x_0)$. Τέλος, στην περίπτωση όπου η φ είναι τουλάχιστον δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη θα θεωρούμε ότι το σύστημα συντεταγμένων του χώρου έχει επιλεγεί κατάλληλα ώστε ο πίνακας $D^2\varphi(x'_0)$ να είναι διαγώνιος.

Στο $x_0 \in \partial\Omega$ μπορεί να ορισθεί το μοναδιαίο εσωτερικό κάθετο του Ω μέσω της σχέσης

$$\begin{aligned} \nu(x_0) &:= \frac{1}{|\nabla_x(x_n - \varphi(x'))|} \nabla_x(x_n - \varphi(x')) \Big|_{x=x_0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_{x'}\varphi(x'_0)|^2}} \left(-\partial_1\varphi(x'_0), \dots, -\partial_{n-1}\varphi(x'_0), 1 \right) \end{aligned}$$

ενώ το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο στο ίδιο σημείο ορίζεται να είναι το $-\nu(x_0)$, όπου το Ω έχει λείο σύνορο. Με τις παραδοχές για το σύστημα συντεταγμένων που κάναμε στην προηγούμενη παράγραφο έχουμε $\nu(x_0) = e_n$. Αυτό σημαίνει ότι στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων το υπερεπίπεδο $[z_n = 0]$ είναι εφαπτόμενο στο Ω στο σημείο x_0 .

Συνεχίζουμε παρουσιάζοντας κάποιες ιδιότητες των ανοικτών ομοιόμορφα κυρτών συνόλων με λείο σύνορο ($k \geq 2$).

Ας παρατηρήσουμε, αρχικά, ότι αν το σύνορο του (ομοιόμορφα) κυρτού Ω εκφράζεται ως γράφημα της $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ κοντά σε ένα σημείο του x_0 , η φ είναι (ομοιόμορφα) κυρτή. Πράγματι, αν $x', y' \in V$ με $\varphi(x') = x_n$ και $\varphi(y') = y_n$ έχουμε $x, y \in \partial\Omega \cap B(x_0, r)$ για

κάποιο $r > 0$. Από τον Ορισμό της ομοιόμορφης κυρτότητας του Ω (1.3.6) γνωρίζουμε την ύπαρξη σταθεράς $R > 0$ έτσι ώστε για $\lambda \in (0, 1)$ και $\delta := \frac{1}{2R}\lambda(1-\lambda)|x-y|^2$ να ισχύει $B(\lambda x + (1-\lambda)y, \delta) \subseteq \bar{\Omega}$, ενώ επειδή το $[z_n = 0]$ είναι εφαπτόμενο υπερεπίπεδο του $\bar{\Omega}$ έχουμε $\bar{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times [0, +\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι $\lambda x + (1-\lambda)y - \delta e_n \in \bar{\Omega} \cap B(x_0, r)$, δηλαδή ισχύει

$$\varphi(\lambda x' + (1-\lambda)y') \leq \lambda x_n + (1-\lambda)y_n - \delta = \lambda\varphi(x') + (1-\lambda)\varphi(y') - \frac{1}{2R}\lambda(1-\lambda)|x-y|^2$$

Επειδή το R είναι ανεξάρτητο της επιλογής των x, y , η φ είναι ομοιόμορφα κυρτή με σταθερά $\frac{1}{R}$. Το ίδιο βέβαια συμβαίνει και για οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση το γράφημα της οποίας εκφράζει τοπικά το σύνορο του Ω , δηλαδή αυτή είναι ομοιόμορφα κυρτή και μάλιστα με την ίδια σταθερά $\frac{1}{R}$.

Αυτή η παρατήρηση μας δίνει το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.2.3 Θεωρούμε $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό, φραγμένο και ομοιόμορφα κυρτό σύνολο με $C^{k,\alpha}$ σύνορο, όπου $k \geq 2$ και $\alpha \in (0, 1)$. Τότε υπάρχουν $0 < \kappa^- \leq \kappa^+$ έτσι ώστε για κάθε συνάρτηση φ το γράφημα της οποίας εκφράζει μέρος του συνόρου κοντά στο $x_0 \in \partial\Omega$ ισχύει $\kappa^- \leq \kappa_i \leq \kappa^+$ για κάθε $i = 1, \dots, n-1$, όπου τα $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ είναι θετικοί αριθμοί έτσι ώστε $D^2\varphi(x'_0) = \text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1})$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι η φ είναι ομοιόμορφα κυρτή με μία θετική σταθερά c . Από το Πόρισμα 1.3.21 έχουμε ότι $\xi^T D^2\varphi(x'_0)\xi \geq c|\xi|^2$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^{n-1}$. Άρα αν $D^2\varphi(x'_0) = \text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1})$ έχουμε $\kappa_i \geq c$, όπου $i = 1, \dots, n-1$. Θέτουμε $\kappa^- := c > 0$ και όπως έχουμε ήδη δει αυτή είναι μία σταθερά ανεξάρτητη της επιλογής της εκάστοτε φ .

Στο εκάστοτε σημείο $x \in \partial\Omega$ υπάρχει περιοχή $B(x, r)$ και συνάρτηση $\psi : \partial(B(x, r)) \rightarrow \mathbb{R}$ που το γράφημά της εκφράζει το σύνορο εκεί. Στο $\partial\left(\overline{B(x, \frac{r}{2})}\right)$ υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε $\xi^T D^2\psi\xi \leq M$ $\forall \xi \in \mathbb{S}^{n-2}$. Επειδή για $z' \in \partial\left(\overline{B(x, \frac{r}{2})}\right)$ υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ και ορθογώνιος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ ώστε $D^2\varphi(z') = A^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})A$, έχουμε $A^T e_i \in \mathbb{S}^{n-2}$ και $\lambda_i = (A^T e_i)^T D^2\varphi(z')(A^T e_i) \leq M$. Αυτό σημαίνει σε κάθε σημείο μέσα στο $\partial\left(\overline{B(x, \frac{r}{2})}\right)$ οι ιδιοτιμές του πίνακα $D^2\psi$ φράσσονται άνω από το M .

Λόγω της συμπίεσης του συνόρου μπορούμε να επιλέξουμε πεπερασμένο αριθμών συναρτήσεων με φραγμένες άνω ιδιοτιμές, όπως η ψ παραπάνω, και έτσι ώστε κάθε μία από αυτές να έχει γράφημα που εκφράζει το σύνορο τοπικά σε μία περιοχή, ενώ κάθε σημείο του συνόρου βρίσκεται σε τουλάχιστον μία από τις περιοχές αυτές. Θέτουμε κ^+ να είναι το μέγιστο όλων των φραγμάτων των ιδιοτιμών των συναρτήσεων. Τέλος υπάρχει περιοχή του x_0 όπου η φ ταυτίζεται με μία από αυτές τις παραπάνω συναρτήσεις, οπότε το κ^+ αποτελεί άνω φράγμα και για τις ιδιοτιμές του πίνακα $D^2\varphi(x'_0)$. $\square$

Παρατήρηση 3.2.4 Γενικότερα, όταν το σύνορο ενός ανοικτού και φραγμένου συνόλου Ω ανήκει στην κλάση C^k , δουλεύοντας όπως στην απόδειξη του προηγούμενου λήμματος δείχνουμε για κάθε συνάρτηση φ το γράφημα της οποίας εκφράζει τοπικά το σύνορο υπάρχει σταθερά C ώστε $|\partial^\beta \varphi| \leq C$, όπου το β είναι ένας πολυδείκτης με $|\beta| = k$. Μάλιστα, αυτή η σταθερά είναι ανεξάρτητη της επιλογής της φ και εξαρτάται μόνο από το Ω .

3.2.3 Διαφορισιμότητα Fréchet

Στη συνέχεια αναφέρουμε κάποια αποτελέσματα από τη θεωρία της Διαφορισιμότητας Fréchet όπως αυτή αναπτύσσεται στο [11]. Με αυτή γενικεύουμε την έννοια της διαφορισιμότητας σε χώρους Banach.

Ορισμός 3.2.5 (Fréchet διαφορισιμότητα σε σημείο) *Αν X, Y είναι δύο χώροι Banach, $U \subseteq X$ ένα ανοικτό σύνολο και $F : U \rightarrow Y$ μία απεικόνιση, αυτή καλείται **Fréchet διαφορίσιμη στο σημείο** $x_0 \in U$ όταν υπάρχει φραγμένο γραμμικός τελεστής $T_{x_0} : X \rightarrow Y$ τέτοιος ώστε*

$$\lim_{h \rightarrow 0_X} \frac{\|F(x+h) - F(x) - T_{x_0}h\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

Τον τελεστή T_{x_0} τον συμβολίζουμε με $DF(x_0)$ ή $F'(x_0)$, δηλαδή $DF(x_0) := F'(x_0) := T_{x_0}$.

Ορισμός 3.2.6 (Fréchet διαφορισιμότητα σε σύνολο) *Ας είναι X, Y δύο χώροι Banach, $U \subseteq X$ ένα ανοικτό σύνολο και $F : U \rightarrow Y$ μία απεικόνιση. Αν αυτή είναι Fréchet διαφορίσιμη σε κάθε σημείο $x \in U$ καλείται **Fréchet διαφορίσιμη στο U** .*

*Τότε ορίζεται η απεικόνιση $DF : U \rightarrow L(X, Y)$ με $DF(x) := T_x$, όπου T_x είναι ο τελεστής που καθιστά την F διαφορίσιμη στο εκάστοτε σημείο $x \in U$. Αυτή καλείται **Fréchet παράγωγος της F στο U** .*

Όταν η DF υπάρχει και είναι συνεχής η F καλείται **Fréchet συνεχώς διαφορίσιμη**.

Πρόταση 3.2.7 (Κανόνας της αλυσίδας) *Ας είναι $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ δύο Fréchet διαφορίσιμες απεικονίσεις, όπου X, Y, Z είναι χώροι Banach. Τότε και η $g \circ f : X \rightarrow Z$ είναι Fréchet διαφορίσιμη και ισχύει $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x)$, $x \in X$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [30, Θεώρημα 2.47]. □

Παράδειγμα 3.2.8 *Ο χώρος $\mathbb{R}^{n \times n}$ είναι χώρος Hilbert με την νόρμα πίνακα $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^{n \times n}}$ που επάγει το γινόμενο του Frobenius: $\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^T B)$.*

Ας είναι $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας και $f(A) := \det A$. Τα αθροίσματα και τα γινόμενα του $\mathbb{R}$ είναι Fréchet διαφορίσιμα, οπότε η f είναι Fréchet διαφορίσιμη ως σύνθεση τέτοιων συναρτήσεων.

Από τον Ορισμό της διαφορισιμότητας (3.2.5) για $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $H \neq 0_{\mathbb{R}^{n \times n}}$ έχουμε

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(A + \varepsilon H) - f(A) - Df(A)(\varepsilon H)}{\varepsilon \|H\|_{\mathbb{R}^{n \times n}}} = 0 \implies Df(A)H = \frac{d}{d\varepsilon} \det(A + \varepsilon H)$$

Όμως γνωρίζουμε ότι $\frac{d}{d\varepsilon} \det(A + \varepsilon H) = \text{tr} \left(\text{adj}(A + \varepsilon H) \frac{d}{d\varepsilon} (A + \varepsilon H) \right) \Big|_{\varepsilon=0}$ (δείτε [24, Υποενότητα 0.8.10]). Αφού ο A αντιστρέφεται υπάρχει αρκετά μικρή περιοχή του 0 ώστε και ο $A + \varepsilon H$ να αντιστρέφεται εκεί (αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$\|A^{-1}(A + \varepsilon H) - I_n\|_{\mathbb{R}^n \times n} = \varepsilon \|A^{-1}H\|_{\mathbb{R}^n \times n}$, οπότε επιλέγοντας $0 < \varepsilon < \frac{1}{\|A^{-1}H\|_{\mathbb{R}^n \times n}}$ ο ι-σχυρισμός μας είναι απόρροια του [24, Πορίσματος 5.6.16]) και άρα η προηγούμενη σχέση γίνεται $\frac{d}{d\varepsilon} \det(A + \varepsilon H) = \det A \operatorname{tr}(A^{-1}H)$. Αυτό σημαίνει ότι

$$Df(A)H = \det A \operatorname{tr}(A^{-1}H)$$

Επιπλέον, μπορούν να ορισθούν μερικές *Fréchet* παράγωγοι κατά τον συνήθη τρόπο. Δηλαδή, αν οι X, Y, Z είναι χώροι Banach και $U \times V \subseteq X \times Y$ είναι ένα ανοικτό σύνολο, η $f : U \times V \rightarrow Z$ έχει **μερική Fréchet παράγωγο** ως προς X στο σημείο $(x_0, y_0) \in U \times V$ την $\partial_X f(x_0, y_0) \in L(X, Z)$, αν η $f(\cdot, y_0) : U \rightarrow Z$ είναι *Fréchet* διαφορίσιμη στο x_0 και $\partial_X f(x_0, y_0) := Df(\cdot, y_0)(x_0)$. Αντίστοιχα ορίζονται και οι υπόλοιπες μερικές παράγωγοι της f .

Ανάλογα έχουμε και ένα Θεώρημα Πεπλεγμένης Απεικόνισης για αυτή την περίπτωση.

Θεώρημα 3.2.9 (Θεώρημα Πεπλεγμένης Απεικόνισης σε χώρους Banach) *Ας είναι X, Y, Z χώροι Banach, $U \times V$ μία περιοχή του $(x_0, y_0) \in X \times Y$, η $f : U \times V \rightarrow Z$ είναι μία συνεχώς *Fréchet* διαφορίσιμη απεικόνιση με $f(x_0, y_0) = 0$ και η $\partial_X f(x_0, y_0) : X \rightarrow Z$ είναι γραμμικός ισομορφισμός μεταξύ των χώρων X, Z .*

*Τότε υπάρχει περιοχή $V_0 \subseteq V$ του y_0 έτσι ώστε $\forall y \in V_0, \exists x_y \in U$ με $f(x_y, y) = 0$. Επιπλέον η απεικόνιση $\tilde{x} : V_0 \rightarrow X$ με $\tilde{x}(y) := x_y$, όταν $y \in V_0$, είναι συνεχώς *Fréchet* διαφορίσιμη.*

Απόδειξη. Με άμεση εφαρμογή των [11, Θεώρημα 15.1 και Πρόταση 15.1]. $\square$

Παράδειγμα 3.2.10 *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό φραγμένο σύνολο, $X := C^{k+2, \alpha}(\overline{\Omega})$, $Y := C^{k, \alpha}(\overline{\Omega})$ και ο τελεστής $F := \det D^2(\cdot) : X \rightarrow Y$, όπου $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $\alpha \in (0, 1)$.*

*Τα αθροίσματα και τα γινόμενα στοιχείων του Y είναι *Fréchet* διαφορίσιμα στον Y , αφού ισχύει $D\sigma(f, g)(h_1, h_2) = h_1 + h_2$ και $D\pi(f, g)(h_1, h_2) := fh_2 + gh_1$ όταν $\sigma : Y \times Y \rightarrow Y$ είναι η $\sigma(f, g) := f + g$ και $\pi : Y \times Y \rightarrow Y$ είναι η $\pi(f, g) := f \cdot g$, όπου $h_1, h_2 \in Y$. Ακόμα, για $i, j = 1, \dots, n$, ο τελεστής $\partial_{ij} : X \rightarrow Y$ είναι *Fréchet* διαφορίσιμος με $D\partial_{ij}(f)h = \partial_{ij}h$, οπότε από τον κανόνα της αλυσίδας συμπεραίνουμε ότι και η F είναι *Fréchet* διαφορίσιμη.*

*Για $u, h \in X$ με $\det D^2u \neq 0$ και $h \neq 0_X$ έχουμε $DF(u)h \in Y$, οπότε για $x \in \Omega$ ο ορισμός της *Fréchet* διαφορισιμότητας μας δίνει την σχέση*

$$(DF(u)h)(x) = \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\det D^2(u + \varepsilon h) - \det D^2u}{\varepsilon} \right)(x) = \frac{d}{d\varepsilon} \det \left(D^2u(x) + \varepsilon D^2h(x) \right) \Big|_{\varepsilon=0}$$

Στο Παράδειγμα 3.2.8 έχουμε κάνει ήδη αυτό τον υπολογισμό, οπότε ανάλογα είναι

$$(DF(u)h)(x) = \det D^2u(x) \operatorname{tr} \left((D^2u(x))^{-1} D^2h(x) \right)$$

ή ισοδύναμα

$$DF(u) = \det D^2u \operatorname{tr} \left((D^2u)^{-1} D^2(\cdot) \right), \quad \text{όταν } \det D^2u \neq 0$$

Από τα παραπάνω, για $G(u) := \log \det D^2 u$ όταν $u \in X$ και $\det D^2 u \geq c > 0$ έχουμε

$$DG(u) = \operatorname{tr} \left((D^2 u)^{-1} D^2(\cdot) \right) = \sum_{i,j=1}^n u^{ij} \partial_{ij}$$

όπου $(D^2 u)^{-1} = (u^{ij})_{i,j=1}^n$ και $u^{ij} \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Αν επιλέξουμε την u όπως στην Πρόταση 1.4.4, τότε ο τελεστής $\mathcal{L} := DG(u) = \sum_{i,j=1}^n u^{ij} \partial_{ij}$ είναι ένας γραμμικός ομοιόμορφα ελλειπτικός τελεστής ο οποίος είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στην απόδειξη ύπαρξης κλασικών λύσεων.

3.2.4 Ελλειπτικές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις δεύτερης τάξης

Είναι χρήσιμο να θυμηθούμε κάποιες ιδιότητες των Ελλειπτικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων Δεύτερης Τάξης.

Αρχίζουμε με κάποια αποτελέσματα για την γραμμική περίπτωση.

Πρόταση 3.2.11 *Ας είναι $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha \in (0,1)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό, κυρτό και φραγμένο σύνολο με $C^{k+2,\alpha}$ σύνορο, $a_{ij}, f \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, $g \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$ και η εξίσωση του προβλήματος*

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{ij} u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

είναι ομοιόμορφα ελλειπτική. Τότε αυτό το πρόβλημα έχει ακριβώς μία λύση $u \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Απόδειξη. Το [21, Θεώρημα 6.14] εγγυάται ότι υπό τις παρούσες συνθήκες το πρόβλημά μας έχει μοναδική λύση $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, ενώ το [21, Θεώρημα 6.19] εξασφαλίζει την λειότητα, δηλαδή $u \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$. $\square$

Πρόταση 3.2.12 (Αρχή Μεγίστου Ελλειπτικών ΜΔΕ) *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο σύνολο, $a_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ κάποιες Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις για $i, j = 1, \dots, n$ και τέτοιες ώστε να ισχύει ότι $0 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$, $\forall x \in \Omega$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.*

Αν $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ και ικανοποιεί τη σχέση $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{ij} u > 0$ στο Ω , τότε αυτή λαμβάνει την μέγιστη τιμή της πάνω από το $\bar{\Omega}$ σε κάποιο σημείο του συνόρου $\partial\Omega$: δηλαδή ισχύει

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

Απόδειξη. Η u λαμβάνει μέγιστο στο $\bar{\Omega}$ ως συνεχής σε συμπαγές.

Αν το μέγιστο λαμβάνεται σε κάποιο εσωτερικό σημείο $x_0 \in \Omega$ και υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο Εσσιανός πίνακας είναι διαγώνιος εκεί έχουμε $\partial_{ii}u(x_0) \leq 0$ για όλα τα $i = 1, \dots, n$. Ταυτόχρονα έχουμε $a_{ii}(x_0) \geq 0$, οπότε είναι $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0)\partial_{ij}u(x_0) \leq 0$. Αυτό, όμως, δεν μπορεί να ισχύει και άρα το μέγιστο λαμβάνεται στο σύνορο του $\bar{\Omega}$. $\square$

Συνεχίζουμε με το Θεώρημα Evans-Krylov. Αυτό είναι ένα κλασικό αποτέλεσμα που επιτρέπει να “αναβαθμίσουμε” την λειότητα των λύσεων κοίλων ομοιόμορφα (εν δυνάμει) μη-γραμμικών ελλειπτικών εξισώσεων όταν ικανοποιούνται κάποιες υποθέσεις για την λύση, την λειότητα του συνόρου και των διαφόρων συναρτήσεων που εμφανίζονται στο πρόβλημα.

Θεώρημα 3.2.13 (Evans-Krylov) *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο σύνολο με $C^{k+2,\alpha}$ σύνορο και $B(x_0, r) \subseteq \Omega \subseteq B(x_0, R)$, όπου $0 < r \leq R$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $k \geq 0$, $\alpha \in (0, 1)$. Ακόμα, θεωρούμε την C^∞ συνάρτηση $F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, $g \in C^{k+2,\alpha}(\partial\Omega)$ και η $u \in C^{1,1}(\bar{\Omega})$ είναι μία λύση του προβλήματος*

$$\begin{cases} F(D^2u) = f, & \text{σχεδόν παντού στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Τέλος απαιτούμε ο τελεστής F να είναι

- (i) ομοιόμορφα ελλειπτικός ως προς την u με σταθερές $0 < \lambda \leq \Lambda$ σχεδόν παντού στο Ω , δηλαδή ισχύει

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F}{\partial a_{ij}}(D^2u)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2$$

σχεδόν παντού στο Ω και για όλα τα $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

- (ii) κοίλος ως προς την u , υπό την έννοια ότι ισχύει

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2} F(D^2u(x) + \varepsilon A) \Big|_{\varepsilon=0} \leq 0$$

σχεδόν για κάθε $x \in \Omega$ και για όλους τους συμμετρικούς πίνακες A .

Τότε έχουμε $u \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$ και η νόρμα $\|u\|_{C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})}$ φράσσεται από κάποια σταθερά η οποία εξαρτάται αποκλειστικά από τα λ , Λ , $\|u\|_{C^{1,1}(\bar{\Omega})}$, $\|F\|_{C^{k+2,\alpha}(\text{Sym}_n)}$, $\|f\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})}$, $\|g\|_{C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})}$, r , R και το $\partial\Omega$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το [16, Θεώρημα A.41]. $\square$

Θεώρημα 3.2.14 (Εσωτερική μορφή Evans-Krylov) *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο, $F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ μία C^∞ συνάρτηση, $f \in C_{loc}^{k,\alpha}(\Omega)$ και η $u \in C^{1,1}(\Omega)$ είναι λύση της εξίσωσης*

$$F(D^2u) = f, \quad \text{σχεδόν παντού στο } \Omega$$

Ακόμα, υποθέτουμε ότι η F ικανοποιεί τις συνθήκες (i) και (ii) του Θεωρήματος Evans-Krylov στο ανοικτό $U \subset \subset \Omega$ και υπάρχουν $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ και $0 < r \leq R$ με $B(\bar{x}, r) \subseteq U \subseteq B(\bar{x}, R)$.

Τότε για $V \subset \subset U$ ανοικτό έχουμε $u \in C^{k+2,\alpha}(\bar{V})$. Επιπλέον, η νόρμα $\|u\|_{C^{k+2,\alpha}(\bar{V})}$ φράσσεται από σταθερά $C > 0$ η οποία εξαρτάται αποκλειστικά από τα $n, \lambda, \Lambda, r, R, \text{dist}(V, \partial U), \|u\|_{C^{1,1}(\bar{U})}, \|F\|_{C^{k+2}(\text{Sym}_n)}, \|f\|_{C^{k,\alpha}(\bar{U})}$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το [16, Θεώρημα A.42]. $\square$

Λήμμα 3.2.15 *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $u \in C^{1,1}(\Omega)$ μία κυρτή συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τη σχέση $\det D^2u = f$ σχεδόν παντού στο Ω , για κάποια $f \geq c_0 > 0$. Τότε για οποιοδήποτε ανοικτό $U \subseteq \Omega$ η $F := \det(\cdot)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις (i), (ii) του Θεωρήματος Evans-Krylov με θετικές σταθερές λ, Λ οι οποίες εξαρτώνται μόνο από τα $n, c_0, \|u\|_{C^{1,1}(\bar{U})}$.*

Απόδειξη. Ας είναι $F(A) := \log \det A$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Υπολογίζουμε όπως στην Πρόταση 1.4.3 την ισότητα $\frac{dF}{dA}(A) = (A^{-1})^T$. Αν δείξουμε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $\xi^T D^2u \xi \leq a$ σχεδόν παντού στο Ω και για κάθε $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$, με την απόδειξη της Πρότασης 1.4.6 βρίσκουμε τις ζητούμενες σταθερές λ, Λ οι οποίες εξαρτώνται μόνο από τα a, c_0 .

Επειδή η κλίση ∇u είναι Lipschitz συνεχής, στα σημεία του U όπου ο Εσσιανός πίνακας της u υπάρχει όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της u φράσσονται ομοιόμορφα από ένα φράγμα $C > 0$ που εξαρτάται μόνο από την $\|u\|_{C^{1,1}(\bar{U})}$ και το n . Αν υποθέσουμε ότι σε ένα τέτοιο σημείο x ο $D^2u(x)$ είναι διαγώνιος έχουμε

$$\xi^T D^2u(x) \xi = \sum_{i=1}^n \partial_{ii}u(x) \xi_i^2 \leq C, \quad \forall \xi \in \mathbb{S}^{n-1}$$

και άρα αρκεί να επιλέξουμε $a := C$.

Για αντιστρέψιμο πίνακα $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ υπολογίζουμε

$$\left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} F(M + \varepsilon A) \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \text{tr}((M + \varepsilon A)^{-1} A) \right|_{\varepsilon=0} = \text{tr} \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} (M + \varepsilon A)^{-1} \right|_{\varepsilon=0} A \right)$$

ενώ από το Λήμμα 3.2.16 έχουμε

$$\left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} F(M + \varepsilon A) \right|_{\varepsilon=0} = \text{tr}(-M^{-1} A M^{-1} A)$$

Αν θεωρήσουμε ότι $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \text{Sym}_n$ και $x \in U$ ώστε να υπάρχει το $D^2u(x)$, θεωρώντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι αυτός είναι διαγώνιος εκεί έχουμε

$$\left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} F(D^2u(x) + \varepsilon A) \right|_{\varepsilon=0} = - \sum_{i,j=1}^n u^{ii} a_{ij} u^{jj} a_{ji} = - \sum_{i,j=1}^n u^{ii} u^{jj} a_{ij}^2 \leq 0$$

όπου $(D^2u(x))^{-1} = (u^{ij})_{i,j=1}^n$. $\square$

Λήμμα 3.2.16 *Ας είναι A, B δύο $n \times n$ -πίνακες έτσι ώστε ο A να αντιστρέφεται. Τότε*

$$\frac{d}{d\varepsilon}(A + \varepsilon B)^{-1} \Big|_{\varepsilon=0} = -A^{-1}BA^{-1}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\|(A + \varepsilon B)A^{-1} - I_n\| = \varepsilon \|BA^{-1}\|$, οπότε από το [24, Πρόσμμα 5.6.16] ο πίνακας $(A + \varepsilon B)A^{-1}$ αντιστρέφεται στην περιοχή του 0 με $|\varepsilon| < \frac{1}{\|BA^{-1}\|}$. Τότε όμως και ο πίνακας $A + \varepsilon B$ αντιστρέφεται σε εκείνη την περιοχή, οπότε παραγωγίζοντας την ισότητα $(A + \varepsilon B)^{-1}(A + \varepsilon B) = I_n$ ως προς ε στο σημείο $\varepsilon = 0$ και πολλαπλασιάζοντας με A^{-1} από δεξιά προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

3.3 Η μέθοδος της συνέχειας

Σε αυτήν την ενότητα θεωρούμε δεδομένες τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1.1. Για να φανεί καλύτερα η κύρια ιδέα της μεθόδου θα αποφύγουμε να αποδείξουμε εδώ κάποια βοηθητικά λήμματα τα οποία αποδεικνύουμε σε ύστερες ενότητες.

Θεωρούμε $u_0 \in C^{4,\alpha}(\bar{\Omega})$ μία ομοιόμορφα κυρτή συνάρτηση που ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη (Λήμμα 3.4.4) και θέτουμε

$$f_0 := \det D^2 u_0 \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$$

Αφού η u_0 είναι ομοιόμορφα κυρτή υπάρχει $\tilde{c} > 0$: $f_0 = \det D^2 u_0 \geq \tilde{c} > 0$ στο Ω . Αν θεωρήσουμε $f_\sigma := (1 - \sigma)f_0 + \sigma f$ όταν $\sigma \in \mathbb{R}$ έχουμε $f_\sigma \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ και

$$f_\sigma \geq (1 - \sigma)\tilde{c} + \sigma c_0 \geq \min\{\tilde{c}, c_0\} > 0, \quad \forall \sigma \in [0, 1]$$

Αυτό είναι ένα ομοιόμορφο κάτω φράγμα για τις f_σ στο $[0, 1]$. Στην συνέχεια, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα θεωρούμε ότι $c_0 = \min\{\tilde{c}, c_0\}$, οπότε θα έχουμε $f_\sigma \geq c_0 > 0$, $\forall \sigma \in [0, 1]$.

Ακόμα, θεωρούμε τα σύνολα $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}, \mathcal{T}$ και την απεικόνιση F ορισμένα ως εξής:

$$\mathcal{C}_0 := g + \{u \in C^{4,\alpha}(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$\mathcal{C} := \{u \in \mathcal{C}_0 : \eta \text{ είναι κυρτή}\}$$

$$F : \mathcal{C} \times [0, 1] \rightarrow C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \text{ με } F(u, \sigma) := \det D^2 u - f_\sigma$$

$$\mathcal{T} := \{\sigma \in [0, 1] \mid \exists u_\sigma \in \mathcal{C} : F(u_\sigma, \sigma) = 0\}$$

Το ζεύγος (u_0, f_0) επιλέχθηκε με τρόπο ώστε να λύνει το πρόβλημα

$$\begin{cases} \det D^2 u_0 = f_0, & \text{στο } \Omega \\ u_0 = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

οπότε έχουμε $u_0 \in \mathcal{C}$ και $F(u_0, 0) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $0 \in \mathcal{T} \neq \emptyset$.

Δείχνοντας ότι το $\mathcal{T}$ είναι ταυτόχρονα ανοικτό (Λήμμα 3.5.1) και κλειστό (Λήμμα 3.6.6) υποσύνολο του συνεκτικού $[0, 1]$ και αφού $\mathcal{T} \neq \emptyset$ συμπεραίνουμε ότι πρέπει να ισχύει $\mathcal{T} = [0, 1]$. Τότε όμως ισχύει ότι $1 \in \mathcal{T}$ και άρα υπάρχει $u \in \mathcal{C}$:

$$F(u, 1) = 0 \implies \det D^2 u = f_1 = f$$

Παράλληλα, είναι

$$u \in \mathcal{C} \implies u \in C^{4,\alpha}(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = g \text{ και η } u \text{ είναι κυρτή}$$

Συνεπώς η u αποτελεί λύση του προβλήματός μας, ενώ το Λήμμα 3.2.15 και το Θεώρημα Evans-Krylov 3.2.13 εξασφαλίζουν την απαραίτητη λειότητα, δηλαδή $u \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

3.4 Κατασκευή της αρχικής λύσης u_0

Ξεκινώντας την μέθοδο της συνέχειας απαιτείται η εύρεση μία ομοιόμορφα κυρτής συνάρτησης $u_0 \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$ που ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη. Σε αυτή την ενότητα κατασκευάζουμε μία τέτοια συνάρτηση εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες της εσωτερικής απόστασης από το σύνορο. Η κατασκευή γίνεται σε δύο βήματα: πρώτα κατασκευάζουμε μία συνάρτηση που πληροί όλες τις απαιτήσεις αλλά που μηδενίζεται στο σύνορο και στην συνέχεια με την βοήθεια αυτής κατασκευάζουμε την ζητούμενη u_0 .

Ορίζουμε ως εσωτερική απόσταση από το σύνορο την συνάρτηση $d: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ με $d(x) := \text{dist}(x, \partial\Omega)$ όταν $x \in \bar{\Omega}$. Είναι εμφανές ότι αυτή είναι μία καλά ορισμένη συνάρτηση, η οποία μηδενίζεται στο σύνορο. Επίσης, είναι γνωστό ότι αυτή είναι κοίλη στο $\bar{\Omega}$ όταν αυτό είναι κυρτό [12, Θεώρημα 5.4(i)].

Λήμμα 3.4.1 Θεωρούμε $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο σύνολο με $C^{k,\alpha}$ σύνορο $\partial\Omega$ όπου $k \geq 2$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$: $d \in C^{k,\alpha}(d^{-1}[0, \varepsilon])$.

Επιπλέον, ας είναι $x_0 \in \bar{\Omega}$ με $d(x_0) < \varepsilon$, $y_0 \in \partial\Omega$ τέτοιο ώστε $d(x_0) = |x_0 - y_0|$ και η φ είναι μία συνάρτηση που το γράφημά της εκφράζει το σύνορο του Ω κοντά στο y_0 (υπενθυμίζουμε ότι $\nabla\varphi(y'_0) = 0$ και $D^2\varphi(y'_0) = \text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1})$). Τότε ισχύει ότι

$$(i) \quad Dd(x_0) = \nu(y_0) = \text{εσωτερικό μοναδιαίο κάθετο του } \Omega \text{ στο σημείο } y_0 = e_n$$

$$(ii) \quad D^2d(x_0) = \text{diag}\left(\frac{-\kappa_1}{1 - d(x_0)\kappa_1}, \dots, \frac{-\kappa_{n-1}}{1 - d(x_0)\kappa_{n-1}}, 0\right)$$

Απόδειξη. Προκύπτει ως συνδυασμός των [21, Λημμάτων 14.16 και 14.17]. $\square$

Λήμμα 3.4.2 Υπό τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1.1 υπάρχει ομοιόμορφα κυρτή συνάρτηση $u \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$ με $u|_{\partial\Omega} = 0$, όπου $k \geq 0$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 3.4.1 υπάρχει $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{4})$ έτσι ώστε, αν $U := d^{-1}[0, \varepsilon_0)$, να έχουμε $d \in C^{k+2, \alpha}(U)$, ενώ από το Λήμμα 3.2.3 υπάρχουν σταθερές θετικές σταθερές κ^-, κ^+ .

Θεωρούμε την κυρτή συνάρτηση $v_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ με $v_0 := -d + d^2$. Τότε στο U υπολογίζουμε $D^2 v_0 = (2d - 1)D^2 d + 2(Dd)^T Dd$. Για το σημείο $x_0 \in U$ υπάρχει $y_0 \in \partial\Omega$ με $d(x_0) = |x_0 - y_0|$ και μία συνάρτηση φ που εκφράζει το σύνορο κοντά στο y_0 . Μικραίνοντας το ε_0 αν χρειάζεται ώστε $\varepsilon_0 < \frac{1}{\kappa^+}$ παρατηρούμε ότι

$$(2d(x_0) - 1)\xi^T D^2 d(x_0) \xi = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(1 - 2d(x_0))\kappa_i}{1 - d(x_0)\kappa_i} \xi_i^2 \geq \frac{1}{2}\kappa^- \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2$$

και

$$2\xi^T (Dd(x_0))^T Dd(x_0) \xi = 2\xi^T e_n^T e_n \xi = 2\xi_n^2$$

όπου $\xi \in \mathbb{R}^n$. Επομένως υπάρχει σταθερά $c > 0$ έτσι ώστε παντού στο U να ισχύει

$$\xi^T D^2 v_0 \xi \geq c|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Με χρήση κατάλληλης διάσπασης της μονάδας κατασκευάζουμε $\psi : \bar{\Omega} \rightarrow [0, 1]$ με $\psi \in C_c^\infty(\bar{\Omega})$, $\text{spt } \psi \subseteq V$ και $\psi^{-1}(1) \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus U$, όπου $V \subset \subset \Omega$ είναι ένα ανοικτό σύνολο με $\mathbb{R}^n \setminus U \subset \subset V$ (δείτε [36, Θεώρημα 3-11] και [26, Πρόταση 1.8.3]). Όπως στην Πρόταση 1.3.22 βρίσκουμε ακολουθία κυρτών συναρτήσεων $v_m \in C^\infty(\Omega)$ που συγκλίνουν ομοιόμορφα τοπικά στην v_0 στο Ω . Θεωρούμε την κυρτή συνάρτηση $\tilde{v}_m := v_m + \frac{1}{2m}|\cdot|^2 \in C^\infty(\Omega)$ και $u := (1 - \psi)v_0 + \psi\tilde{v}_m$.

Είναι εμφανές ότι $u \in C^{k+2, \alpha}(\bar{\Omega})$ και $u|_{\partial\Omega} = v_0|_{\partial\Omega} = 0$. Θα δείξουμε ότι αυτή είναι και ομοιόμορφα κυρτή.

Το Ω χωρίζεται σε τρεις περιοχές: εκεί όπου $\psi = 0$, εκεί όπου $\psi = 1$ και εκεί όπου $0 < \psi < 1$. Η ισότητα $\psi = 0$ ισχύει σε κάποια περιοχή του $U \setminus V$, οπότε εκεί έχουμε $u = v_0$ και $\xi^T D^2 u \xi \geq c|\xi|^2$ για όλα τα $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Η ισότητα $\psi = 1$ ισχύει σε μία περιοχή του $\mathbb{R}^n \setminus U$ όπου και έχουμε $u = \tilde{v}_m$. Άρα είναι $\xi^T D^2 u \xi = \xi^T D^2 \tilde{v}_m \xi \geq \frac{1}{m}|\xi|^2$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, καθώς η v_m είναι κυρτή.

Η τελευταία περιοχή περιέχεται στο $V \cap U$ και εκεί η $\tilde{v}_m$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην v_0 ως ακολουθία C^2 συναρτήσεων. Υπολογίζουμε

$$D^2 u = D^2 v_0 + (\tilde{v}_m - v_0)D^2 \psi + \psi D^2 (\tilde{v}_m - v_0) + (D\psi)^T D(\tilde{v}_m - v_0) + (D(\tilde{v}_m - v_0))^T D\psi$$

και παρατηρούμε ότι $D^2 u \rightarrow D^2 v_0$ ομοιόμορφα σε αυτή την περιοχή για $m \rightarrow +\infty$, αφού το ψ είναι ανεξάρτητο του m . Συνεπώς, εκεί το θετικό ομοιόμορφο κάτω φράγμα της τετραγωνικής μορφής του $D^2 v_0$ μας δίνει ένα θετικό ομοιόμορφο κάτω φράγμα για την τετραγωνική μορφή του $D^2 u$ όταν το $m \in \mathbb{N}$ είναι αρκετά μεγάλο.

Με αυτόν τον τρόπο καταφέραμε να βρούμε ένα θετικό ομοιόμορφο κάτω φράγμα για την τετραγωνική μορφή του $D^2 u$ παντού στο Ω , οπότε από το Πρόταση 1.3.21 συμπεραίνουμε ότι η u είναι ομοιόμορφα κυρτή. $\square$

Παρατήρηση 3.4.3

- (i) Στο προηγούμενο λήμμα μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους της u μέσω της ισότητας $u := -d + d^2$ κοντά στο σύνορο

$$Du = (2d - 1) Dd \quad \text{και} \quad D^2u = 2(Dd)^T Dd + (2d - 1) D^2d$$

- (ii) Από την παραπάνω κατασκευή παρατηρούμε ότι η u ουσιαστικά εξαρτάται από τα d, U, V, ψ . Όλα αυτά όμως εξαρτώνται ουσιαστικά μόνο από το Ω και την γεωμετρία του. Συνεπώς μπορούμε να έχουμε μία εκτίμηση της νόρμα της u στον $C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$ που εξαρτάται μόνο από το Ω .

Λήμμα 3.4.4 Υπό τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1.1 υπάρχει ομοιόμορφα κυρτή συνάρτηση $u_0 \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$ με $u_0|_{\partial\Omega} = g$, όπου $k \geq 0$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 3.4.2 βρίσκουμε ομοιόμορφα κυρτή συνάρτηση $u \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$ που μηδενίζεται στο σύνορο. Θεωρούμε $u_0 := g + Mu$ για κάποιο $M > 0$, το οποίο μένει να επιλέξουμε κατάλληλα.

Επειδή $g \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$ και το $\bar{\Omega}$ είναι συμπαγές, μπορούμε να βρούμε φράγμα $C > 0$ έτσι ώστε να ισχύει $|\partial_{ij}g| \leq C \quad \forall i, j = 1, \dots, n$. Για $\xi \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\xi^T D^2 u_0 \xi = \xi^T D^2 g \xi + M \xi^T D^2 u \xi \geq -C|\xi|^2 + Mm|\xi|^2 = (Mm - C)|\xi|^2$$

όπου $m > 0$ είναι η σταθερά που καθιστά την u ομοιόμορφα κυρτή. Αν επιλέξουμε αρκετά μεγάλο $M > 0$ ώστε $Mm - C > 0$, η $u_0 \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$ είναι ομοιόμορφα κυρτή συνάρτηση η οποία μάλιστα ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη. $\square$

Παρατήρηση 3.4.5 Επεκτείνοντας την Παρατήρηση 3.4.3(ii), έχουμε ότι η νόρμα της u_0 στο $C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$ φράσσεται άνω από σταθερά που εξαρτάται αποκλειστικά από το Ω και την $\|g\|_{C^{k+2}(\partial\Omega)}$.

3.5 Το $\mathcal{T}$ είναι ανοικτό

Σε αυτή την ενότητα δείχνουμε ότι το $\mathcal{T}$ είναι ανοικτό. Η απόδειξη γίνεται θεωρώντας μία λύση του προβλήματος με δεξιά πλευρά f_{σ_0} και βρίσκοντας λύσεις για τα προβλήματα με δεξιές πλευρές f_σ όπου το σ είναι αρκετά κοντά στο σ_0 χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Πεπλεγμένης Απεικόνισης σε χώρους Banach.

Παρακάτω θεωρούμε δεδομένες τις έννοιες που ορίσαμε στην Ενότητα 3.3.

Λήμμα 3.5.1 Υπό τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1.1 το σύνολο $\mathcal{T}$ είναι ανοικτό.

Απόδειξη. Αρχίζουμε θεωρώντας $\sigma_0 \in \mathcal{T}$ και θα δείξουμε ότι υπάρχει ολόκληρη περιοχή γύρω από αυτό το σημείο που περιέχεται στο $\mathcal{T}$.

Θεωρούμε τους χώρους Banach⁹ $X := \mathcal{C}_0 \subseteq C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$, $Y := \mathbb{R}$, $Z := C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Ορίζουμε $G : X \times Y \rightarrow Z$ με $G(u, \sigma) := \det D^2 u - (1 - \sigma)f_0 - \sigma f$. Η G είναι καλά ορισμένη ως απεικόνιση και, αφού $\sigma_0 \in \mathcal{T}$, $\exists u_{\sigma_0} \in \mathcal{C} \subseteq X : F(u_{\sigma_0}, \sigma_0) = 0$. Συνεπώς έχουμε

$$G(u_{\sigma_0}, \sigma_0) = \det D^2 u_{\sigma_0} - (1 - \sigma_0)f_0 - \sigma_0 f = F(u_{\sigma_0}, \sigma_0) = 0$$

Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ με $\varphi(u) := \|\det D^2 u - \det D^2 u_{\sigma_0}\|_{C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})}$. Αυτή είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών. Ακόμα, θεωρούμε το ανοικτό σύνολο $U := \varphi^{-1}(0, \frac{c_0}{2}) \subseteq X$, οπότε για $u \in U$ έχουμε

$$\begin{aligned} \varphi(u) \leq \frac{c_0}{2} &\implies |\det D^2 u(x) - \det D^2 u_{\sigma_0}(x)| \leq \frac{c_0}{2}, & \forall x \in \Omega \\ &\implies 0 < \frac{c_0}{2} \leq \det D^2 u_{\sigma_0}(x) - \frac{c_0}{2} \leq \det D^2 u(x), & \forall x \in \Omega \\ &\implies \text{ο πίνακας } D^2 u \text{ αντιστρέφεται στο } \Omega \end{aligned}$$

Μάλιστα, αφού έχουμε την σχέση $(D^2 u)^{-1} = \frac{1}{\det D^2 u} \text{adj } D^2 u$ και $\det D^2 u \geq \frac{c_0}{2} > 0$, αν $(u^{ij})_{i,j=1}^n := (D^2 u)^{-1}$ έχουμε $u^{ij} \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ για όλα τα $u \in U$.

Θα δείξουμε ότι η G είναι συνεχώς Fréchet διαφορίσιμη στην ανοικτή περιοχή $U \times V$ του (u_{σ_0}, σ_0) , όπου $V := \mathbb{R}$. Δείχνουμε όπως στο Παράδειγμα 3.2.10 ότι η $\det D^2(\cdot) : U \rightarrow Z$ είναι Fréchet διαφορίσιμη με συνεχή παράγωγο

$$D_X \det D^2(u) = \det D^2 u \operatorname{tr}((D^2 u)^{-1} D^2(\cdot))$$

Για $(u, s) \in U \times V$ και $(v, t) \in X \times Y$ έχουμε

$$\begin{aligned} DG(u, s)(v, t) &= D \det D^2(u) v - D((1 - s)f_0 + sf)(s)t \\ &= \det D^2 u \operatorname{tr}((D^2 u)^{-1} D^2 v) + t(f_0 - f) \\ &= \det D^2 u \sum_{i,j=1}^n u^{ij} \partial_{ij} v + t(f_0 - f) \end{aligned}$$

Επομένως, η απεικόνιση $DG : U \times V \rightarrow L(X \times Y, Z)$ είναι και συνεχής.

Επιλέγοντας οποιαδήποτε $h \in Z$ παρατηρούμε ότι υπάρχει μοναδικό $v \in X$ ώστε να ισχύει $\partial_X G(u_{\sigma_0}, \sigma_0)v = h$. Τέτοια συνάρτηση υπάρχει αν το πρόβλημα

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^n u_{\sigma_0}^{ij} \partial_{ij} v = \frac{h}{f_{\sigma_0}}, & \text{στο } \Omega \\ v = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση $v \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$. Από την Πρόταση 1.4.6, την Πρόταση 1.4.4 και το Παράδειγμα 3.2.10 γνωρίζουμε ότι η εξίσωση αυτού του προβλήματος είναι ομοιόμορφα ελλειπτική, ενώ

⁹Θεωρούμε τον X ως γραμμικό χώρο με $0_X := g$.

έχουμε $u_{\sigma_0}^{ij}, \frac{h}{f_{\sigma_0}} \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ και άρα η ύπαρξη και η μοναδικότητα λύσης είναι απόρροια της Πρότασης 3.2.11.

Αυτό σημαίνει ότι η $\partial_X G(u_0, \sigma_0) : X \rightarrow Z$ είναι μία γραμμική, συνεχής, 1-1 και επί απεικόνιση, οπότε ως Πρόρισμα του Θεωρήματος Ανοιχτής Απεικόνισης γνωρίζουμε ότι αυτή είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός μεταξύ των χώρων X, Z [3, Πρόρισμα 2.7]. Από όλα τα παραπάνω και το Θεώρημα Πεπλεγμένης Απεικόνισης 3.2.9 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει περιοχή $V_0 \subseteq V$ του σ_0 όπου ορίζεται συνεχώς Fréchet διαφορίσιμη απεικόνιση $\tilde{u} : V_0 \rightarrow U \cap \mathcal{C}_0$ με $\tilde{u}(\sigma) := u_\sigma$ και τέτοια ώστε $G(\tilde{u}(\sigma), \sigma) = 0, \forall \sigma \in V_0$.

Λόγω της Fréchet διαφορισιμότητας της $\tilde{u}$ στο σ_0 , για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|\sigma - \sigma_0| < \delta \implies \|u_\sigma - u_{\sigma_0}\|_X \leq \left(\|D_Y \tilde{u}(\sigma_0)\|_{L(Y,X)} + \varepsilon \right) |\sigma - \sigma_0| =: C|\sigma - \sigma_0|$$

Επιπλέον, όπως έχουμε ήδη δει, η u_{σ_0} είναι ομοιόμορφα κυρτή με σταθερά $m > 0$ ως κυρτή λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \det D^2 u_{\sigma_0} = f_{\sigma_0}, & \text{στο } \Omega \\ u_{\sigma_0} = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Θεωρούμε ότι στο σημείο $x \in \Omega$ ο πίνακας $D^2(u_\sigma - u_{\sigma_0})(x)$ είναι διαγώνιος και έχουμε

$$\begin{aligned} \xi^T D^2(u_\sigma - u_{\sigma_0})(x) \xi &\geq \sum_{i=1}^n \partial_{ii}(u_\sigma - u_{\sigma_0})(x) \xi_i^2 \geq - \sum_{i=1}^n \|u_\sigma - u_{\sigma_0}\|_X \xi_i^2 \geq -C|\sigma - \sigma_0| |\xi|^2 \\ \implies \xi^T D^2 u_\sigma(x) \xi &\geq \xi^T D^2 u_{\sigma_0}(x) \xi - C|\sigma - \sigma_0| |\xi|^2 \geq (m - C|\sigma - \sigma_0|) |\xi|^2 \end{aligned}$$

για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Μικραίνοντας το $\delta > 0$, αν χρειάζεται, ώστε $\delta < \frac{m}{C}$ βρίσκουμε την ανοιχτή περιοχή $(\sigma_0 - \delta, \sigma_0 + \delta) \cap V_0 \cap [0, 1]$ του σ_0 όπου για κάθε σ εκεί έχουμε ότι η u_σ είναι κυρτή λύση του προβλήματος με δεξιά πλευρά την f_σ και άρα έχουμε $\sigma \in \mathcal{T}$. Όμως το σ_0 είναι τυχαία επιλεγμένο, οπότε το $\mathcal{T}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $[0, 1]$. $\square$

3.6 Το $\mathcal{T}$ είναι κλειστό

Σε αυτή την ενότητα δείχνουμε ότι το $\mathcal{T}$ είναι κλειστό. Αυτό αποδεικνύεται δείχνοντας ότι όλες συγκλίνουσες ακολουθίες σημείων του $\mathcal{T}$ συγκλίνουν σε κάποιο σημείο του. Επειδή, όμως, κάθε σημείο του $\mathcal{T}$ αντιστοιχεί σε μία λύση ενός προβλήματος Dirichlet, η απόδειξη της σύγκλισης ανάγεται στην απόδειξη ομοιόμορφης σύγκλισης μίας ακολουθίας λύσεων. Για αυτή την απόδειξη απαιτείται η απόδειξη ύπαρξης κάποιων *a priori* φραγμάτων που πληροί κάθε λύση, οι παράγωγοί της πρώτης και δεύτερης τάξης.

Στην συνέχεια θα συμβολίζουμε με κάτω δείκτες τις μερικές παραγώγους. ($u_i := \partial u$)

Καθώς στην συνέχεια θα δουλέψουμε με την ισοδύναμη μορφή $\log \det D^2 u = \log f$ της εξίσωσης, είναι χρήσιμο να βρούμε ένα φράγμα για το $\|\log f\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}$.

Λήμμα 3.6.1 *Ας είναι $f \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ με $f \geq c > 0$, τότε $\|\log f\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C$ για κάποια σταθερά που εξαρτάται μόνο από τα n, c και $\|f\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}$.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\|\log f\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|\log f\|_{\infty} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i \log f\|_{\infty} + \sum_{i,j=1}^n \|\partial_{ij} \log f\|_{\infty} + [\partial_{ij} \log f]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$$

Υπολογίζουμε

1. $\log c \leq \log f \leq f - 1 \leq \|f\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} - 1 \implies \|\log f\|_{\infty} \leq \max \left\{ \log c, \|f\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} - 1 \right\}$
2. $\|\partial_i \log f\|_{\infty} = \left\| \frac{\partial_i f}{f} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{c} \|f\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}$
3. $\partial_{ij} \log f = \frac{f \partial_{ij} f - \partial_i f \partial_j f}{f^2}$, ενώ $f, \partial_i f, \partial_j f, \partial_{ij} f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$. Άρα $\partial_{ij} \log f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ και έχουμε

$$\|\partial_{ij} \log f\|_{\infty} + [\partial_{ij} \log f]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq \|\partial_{ij} \log f\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq \frac{2C}{c^2} \|f\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}^2,$$

όπου C είναι μια σταθερά ώστε να ισχύει $\|uv\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C \|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} \|v\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$ για όλες τις $u, v \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Συνδυάζοντας όλα τα προηγούμενα βρίσκουμε το φράγμα. □

Λήμμα 3.6.2 *Ας είναι Ω ένα ομοιόμορφα κυρτό, ανοικτό σύνολο με C^4 σύνορο, $f \in C^2(\bar{\Omega})$ με $f \geq c_0 > 0$, $g \in C^4(\partial\Omega)$ και $u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C^4(\Omega)$ μία κυρτή λύση του προβλήματος*

$$\begin{cases} \det D^2 u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Τότε υπάρχει σταθερά $C \geq 0$ που εξαρτάται αποκλειστικά από το Ω , το n , το $\|g\|_{C^4(\partial\Omega)}$ και το $\|\log f\|_{C^2(\bar{\Omega})}$ ώστε να ισχύει $\|u\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq C$.

Απόδειξη. Επειδή $\|u\|_{C^2(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C(\bar{\Omega})} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{C(\bar{\Omega})} + \sum_{i,j=1}^n \|\partial_{ij} u\|_{C(\bar{\Omega})}$, αρκεί να βρούμε φράγματα για κάθε μία από τις νόρμες στο δεξί μέλος της ισότητας. Αυτό κάνουμε στα επόμενα τρία λήμματα. □

Παρακάτω όταν αναφερόμαστε σε σταθερές, θα θεωρούμε ότι αυτές είναι ανεξάρτητες της εκάστοτε λύσης και του εκάστοτε σημείου $x \in \Omega$, εκτός και αν αναφέρουμε ρητά ότι υπάρχει εξάρτηση.

Λήμμα 3.6.3 Με τις υποθέσεις του Λήμματος 3.6.2, η $\|u\|_{C(\bar{\Omega})}$ φράσσεται από σταθερά ανεξάρτητη της u .

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση u_0 που δίνεται από το Λήμμα 3.4.2, $f_0 := \det D^2 u_0$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $f_0 \geq c_0$. Από το Λήμμα 3.4.4 μπορούμε να επεκτείνουμε την g σε μία κυρτή συνάρτηση $g_0 \in C^2(\bar{\Omega})$ και μάλιστα έτσι ώστε η νόρμα αυτής στον $C^2(\bar{\Omega})$ να εξαρτάται μόνο από την $\|g\|_{C^2(\partial\Omega)}$, το Ω και την γεωμετρία του (Παρατήρηση 3.4.5).

Θεωρούμε την κυρτή συνάρτηση $v := g_0 + M u_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ για $M > 0$ και από την Πρόταση 2.2.10 στο Ω έχουμε

$$\mu_v \geq \mu_{g_0} + M^n \mu_{u_0} \geq M^n \det D^2 u_0 \, dx \geq M^n c_0 \, dx$$

Επιλέγοντας $M > \left(\frac{1}{c_0} \|f\|_{C^2(\bar{\Omega})} \right)^{\frac{1}{n}}$ στο Ω έχουμε

$$\mu_v \geq f \, dx = \mu_u \geq 0 = \mu_{v_0}$$

όπου $v_0 := \|g\|_{C^2(\partial\Omega)} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, ενώ στο σύνορο έχουμε

$$v|_{\partial\Omega} = g = u|_{\partial\Omega} \leq v_0|_{\partial\Omega}$$

Τότε η Αρχή Σύγκρισης 2.3.2 επεκτείνει την ισχύ της ανισότητας $v \leq u \leq v_0$ σε ολόκληρο το $\bar{\Omega}$. Επομένως η $\|u\|_{C(\bar{\Omega})}$ φράσσεται από σταθερά που εξαρτάται από τις v και v_0 · φράσσεται δηλαδή από σταθερά που εξαρτάται από τα Ω , $\|g\|_{C^4(\partial\Omega)}$ λόγω της g_0 , τα c_0 , $\|f\|_{C^2(\bar{\Omega})}$ λόγω του M , την γεωμετρία του Ω λόγω της u_0 και της $\|g\|_{C^4(\partial\Omega)}$ λόγω της v_0 . $\square$

Λήμμα 3.6.4 Με τις υποθέσεις του Λήμματος 3.6.2, η $\|u\|_{C^1(\bar{\Omega})}$ φράσσεται από σταθερά ανεξάρτητη της u .

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι η $|\nabla u|$ δεν λαμβάνει την μέγιστη τιμή της πάνω από το Ω στο εσωτερικό του. Πράγματι, αν η $|\nabla u|$ λαμβάνει μέγιστο σε κάποιο σημείο $x_0 \in \Omega$, τότε και η $|\nabla u|^2$ λαμβάνει μέγιστο σε αυτό, οπότε στο x_0 έχουμε

$$D(|\nabla u|^2) = 0_{\mathbb{R}^{1 \times n}} \implies 2 \nabla u D^2 u = 0_{\mathbb{R}^{1 \times n}} \xrightarrow{\cdot (\nabla u)^T(x_0)} \nabla u D^2 u (\nabla u)^T = 0$$

Ακόμα, παρατηρούμε ότι $\nabla u(x_0) \neq 0$ γιατί διαφορετικά θα είχαμε $\nabla u = 0$ παντού στο Ω . Όμως, η u είναι ομοιόμορφα κυρτή ως λύση του προβλήματος, οπότε συμπεραίνουμε ότι

$$\nabla u(x_0) D^2 u(x_0) (\nabla u(x_0))^T > 0$$

Αυτό είναι άτοπο, οπότε ισχύει $\max_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla u| = \max_{x \in \partial\Omega} |\nabla u|$. Αυτό σημαίνει ότι αρκεί να φράζουμε την $|\nabla u|$ στο σύνορο.

Θεωρούμε σημείο $x \in \partial\Omega$ και το ταυτίζουμε με το 0. Επιπλέον, θεωρούμε συνάρτηση $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ το γράφημα της οποίας εκφράζει το σύνορο του $\partial\Omega$ κοντά στο 0 με $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$

ανοικτό, $\varphi(0) = 0$ και $D\varphi(0) = 0$, ενώ το e_n ταυτίζεται με το εσωτερικό μοναδιαίο κάθετο $\nu(0)$, όπως στην Υποενότητα 3.2.2.

Από την συνοριακή συνθήκη έχουμε τη σχέση $u(x', \varphi(x')) = g(x', \varphi(x'))$ στο U απ' όπου μέσω παραγωγίσης προκύπτει

$$\begin{aligned}\nabla_{x'} u(0, \varphi(0)) &= -u_n(0, \varphi(0)) \nabla_{x'} \varphi(0) + \nabla_{x'} g(x', \varphi(x'))|_{x'=0} \\ &\implies \nabla_{x'} u(0) = \nabla_{x'} g(x', \varphi(x'))|_{x'=0} \\ &\implies |\nabla_{x'} u(0)| \leq \|g\|_{C^4(\partial\Omega)}\end{aligned}$$

Μένει να δείξουμε ότι υπάρχει a priori φράγμα και για το $u_n(0)$. Ανακαλούμε την σχέση $v := g_0 + Mu_0 \leq u$ από το Λήμμα 3.6.4 και παρατηρούμε ότι, αφού $v(0) = g(0) = u(0)$, έχουμε $v(te_n) \leq u(te_n) \implies v_n(0) \leq u_n(0)$, όπου $t > 0$ και αρκετά μικρό. Συνεπώς έχουμε ένα a priori κάτω φράγμα για την $u_n(0)$, όπως έχουμε δει και στο Λήμμα 3.6.3.

Αφού η u είναι κυρτή και η $\phi(t) := u(te_n)$ είναι κυρτή για αρκετά μικρές τιμές του $t \geq 0$ ώστε να ισχύει $te_n \in \bar{\Omega}$. Τότε η $\frac{d\phi}{dt}$ είναι αύξουσα και $\frac{d\phi}{dt}(t) = u_n(te_n)$. Για $t > 0$ ώστε $te_n \in \Omega$ από το Πρόσχημα 2.1.8 έχουμε

$$u_n(0) \leq u_n(te_n) \leq |\nabla u(te_n)| \leq \frac{2\|u\|_{L^\infty(\Omega)}}{\text{dist}(te_n, \partial\Omega)}$$

Επειδή το e_n είναι το εσωτερικό κάθετο του Ω στο 0, η $\text{dist}(te_n, \partial\Omega)$ είναι η εσωτερική απόσταση του σημείου te_n από το σύνορο, οπότε επιλέγοντας $t = \frac{\varepsilon}{2}$, όπου το $\varepsilon > 0$ είναι μία σταθερά που εξαρτάται μόνο από το Ω και δίνεται στο Λήμμα 3.4.1, έχουμε

$$u_n(0) \leq \frac{4\|u\|_{L^\infty(\Omega)}}{\varepsilon}$$

Από το Λήμμα 3.6.3 έπεται ότι αυτό το φράγμα δεν εξαρτάται από την u , παρά μόνο από τις ποσότητες που έχουμε ήδη αναφέρει.

Άρα είναι $|\nabla u(0)| \leq M$ για κάποια σταθερά $M > 0$. Καθώς το $x \equiv 0$ είναι τυχαία επιλεγμένο, μπορούμε να έχουμε το ίδιο φράγμα και για κάθε άλλο σημείο $x \in \partial\Omega$. $\square$

Λήμμα 3.6.5 Με τις υποθέσεις του Λήμματος 3.6.2, η $\|u\|_{C^2(\bar{\Omega})}$ φράσσεται από σταθερά ανεξάρτητη της u .

Απόδειξη. Αρχεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα a priori άνω φράγμα για το $\sup_{e \in \mathbb{S}^{n-1}} \partial_{ee} u$. Τότε εξαιτίας της Πρότασης 1.4.6 βρίσκουμε τα ζητούμενα φράγματα για τα u_{ij} , τα οποία μάλιστα εξαρτώνται μόνο από τα n, c_0 και $\sup_{e \in \mathbb{S}^{n-1}} \partial_{ee} u$, όπου $i, j = 1, \dots, n$.

Παραγωγίζουμε την εξίσωση $\log \det D^2 u = \log f$ στην κατεύθυνση e και μέσω του κανόνα της αλυσίδας προκύπτει

$$\partial_e(\log f) = \partial_e(\log \det D^2 u) = \frac{1}{\det D^2 u} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(D^2 u) \partial_e(\partial_{ij} u) = \text{tr}((D^2 u)^{-1} D^2(\partial_e u))$$

Αν για την εκάστοτε συνάρτηση w συμβολίσουμε με w^{ij} τα στοιχεία του $(D^2w)^{-1}$, με w_{ij} τα στοιχεία του D^2w και με w_e την παράγωγό της στην κατεύθυνση e , έχουμε

$$\partial_e(\log f) = \sum_{i,j=1}^n u^{ij} \partial_{ij} u_e$$

Άρα, η u_e ικανοποιεί μία ομοιόμορφα ελλειπτική εξίσωση. Στη συνέχεια θα εκμεταλλευτούμε τις ιδιότητες του ομοιόμορφα ελλειπτικού τελεστή $\mathcal{L} := \sum_{i,j=1}^n u^{ij} \partial_{ij}$ για να βρούμε το φράγμα που ψάχνουμε.

Παραγωγίζουμε την εξίσωση $\delta_{sj} = \sum_{t=1}^n u_{st} u^{tj}$ στην κατεύθυνση e

$$0 = \sum_{t=1}^n u_{ste} u^{tj} + u_{st} u_e^{tj} \implies \sum_{t=1}^n u_{st} u_e^{tj} = - \sum_{t=1}^n u_{ste} u^{tj}$$

Πολλαπλασιάζουμε με u^{is} και αθροίζουμε για $s = 1, \dots, n$, οπότε έχουμε

$$- \sum_{s,t=1}^n u^{is} u_{ste} u^{tj} = \sum_{s,t=1}^n u^{is} u_{st} u_e^{tj} = \sum_{t=1}^n \delta_{it} u_e^{tj} = u_e^{ij}$$

Παραγωγίζουμε την εξίσωση $\partial_e(\log f) = \partial_e(\log \det D^2u)$ στην κατεύθυνση e ακόμα μία φορά και αντικαθιστούμε τα u_e^{ij} από την παραπάνω ισότητα, οπότε προκύπτει η σχέση

$$\begin{aligned} \partial_{ee}(\log f) &= \sum_{i,j=1}^n u^{ij} u_{ijee} + u_e^{ij} u_{ije} \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^n u^{ij} u_{ijee} - u^{il} u_{lke} u^{kj} u_{ije} \\ &= \mathcal{L}u_{ee} - \sum_{i,j,k,l=1}^n u^{il} u_{lke} u^{kj} u_{ije} \end{aligned}$$

Άρα, έχουμε ακόμα μία σχέση που περιλαμβάνει τον τελεστή $\mathcal{L}$, μόνο που αυτή την φορά εμφανίζεται και ένα υπόλοιπο.

Ας μελετήσουμε αυτό το υπόλοιπο. Δουλεύουμε σε ένα σημείο $x \in \Omega$, ενώ χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι ο D^2u είναι διαγώνιος εκεί. Τότε έχουμε $u^{ij} = 0$ όταν $i \neq j$ και υπολογίζουμε

$$- \sum_{i,j,k,l=1}^n u^{il} u_{lke} u^{kj} u_{ije} = - \sum_{i,j=1}^n u^{ii} u_{ije} u^{jj} u_{ije} = - \sum_{i,j=1}^n u^{ii} u^{jj} (u_{ije})^2 \leq 0,$$

αφού η u είναι κυρτή. Η παραπάνω ισότητα επάγει την ανισότητα

$$\mathcal{L}u_{ee} \geq (\log f)_{ee} = -e^T D^2(\log f) e \geq -\|\log f\|_{C^2(\bar{\Omega})} \quad \text{στο } \Omega$$

Καθώς ισχύει $\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^n u^{ij}u_{ij} = \text{tr}(\mathbf{I}_n) = n$, θεωρώντας την σταθερά $K > \frac{1}{n} \|\log f\|_{C^2(\bar{\Omega})}$ έχουμε $\mathcal{L}(u_{ee} + Ku) > 0$ στο Ω . Από την Αρχή Μεγίστου των Ελλειπτικών Γραμμικών ΜΔΕ 3.2.12 συμπεραίνουμε ότι

$$\max_{\bar{\Omega}} (u_{ee} + Ku) = \max_{\partial\Omega} (u_{ee} + Ku) \leq \max_{\partial\Omega} u_{ee} + K\|g\|_{C^4(\partial\Omega)}$$

Αυτό σημαίνει ότι αρκεί να μελετήσουμε την u_{ee} μόνο πάνω από το σύνορο, αφού είναι

$$\max_{\bar{\Omega}} u_{ee} \leq \max_{\bar{\Omega}} (u_{ee} + Ku) + K\| -u \|_{C(\bar{\Omega})} \leq \max_{\partial\Omega} u_{ee} + K(\|u\|_{C(\bar{\Omega})} + \|g\|_{C^4(\partial\Omega)})$$

και η ποσότητα $\|u\|_{C(\bar{\Omega})}$ φράσσεται από το Λήμμα 3.6.3.

Θεωρούμε ένα σημείο $x_0 \in \partial\Omega$ και κάνουμε την ταύτιση $x_0 \equiv 0$. Επιπλέον, θεωρούμε ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ και συνάρτηση $\varphi \in C^4(U)$ το γράφημα της οποίας εκφράζει το σύνορο του Ω κοντά στο 0 και ώστε να ισχύουν οι σχέσεις $\varphi(0) = 0$, $\nabla_{x'}\varphi(0) = 0$ και $D_{x'}^2\varphi(0) = \text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1})$, όπως στην Υποενότητα 3.2.2. Τότε η φ δίνεται από την σχέση $\varphi(x') = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\kappa_i}{2} x_i^2 + O(|x'|^3)$ όταν $x' \in U$ και είναι αρκετά κοντά στο 0.

Παραγωγίζουμε δύο φορές την συνοριακή συνθήκη $u(x', \varphi(x')) = g(x', \varphi(x'))$ στο $0 \in U$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} & D_{x'}^2 \left(g(x', \varphi(x')) \right) \Big|_{x'=0} \\ &= D_{x'}^2 u + (\nabla_{x'} u_n)^T \nabla_{x'} \varphi + (\nabla_{x'} \varphi)^T \nabla_{x'} u_n + u_{nn} (\nabla_{x'} \varphi)^T \nabla_{x'} \varphi + u_n D_{x'}^2 \varphi \Big|_{x'=0} \\ &= D_{x'}^2 u(0) + u_n(0) \text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}) \\ \implies & D_{x'}^2 u(0) = D_{x'}^2 \left(g(x', \varphi(x')) \right) \Big|_{x'=0} - u_n(0) \text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}) \end{aligned}$$

Από αυτή την ισότητα μπορούμε να εκτιμήσουμε τις u_{ij} συναρτήσεις των $\|g\|_{C^2(\partial\Omega)}$, $\|u\|_{C^1(\bar{\Omega})}$ και κ_i όταν $i, j = 1, \dots, n-1$. Τότε με βάση τα Λήμματα 3.2.3 και 3.6.4 συμπεραίνουμε ότι αυτή η εκτίμηση είναι ανεξάρτητη του εκάστοτε σημείου $x_0 \in \partial\Omega$ και της u .

Συνεχίζουμε με την περίπτωση όπου ένα ακριβώς από τα i, j ισούται με n και εκτιμούμε το u_{ij} . Θεωρούμε $m \in \{1, \dots, n-1\}$ και εκφράζουμε το εκάστοτε σημείο (x_m, x_n) του επιπέδου που δημιουργείται από τα e_m, e_n σε πολικές συντεταγμένες (ρ_m, θ_m) . Η σχέση που δίνει αυτή την αλλαγή μεταβλητών είναι

$$\begin{aligned} x_m &= \rho_m \cos \theta_m \\ x_n &= \rho_m \sin \theta_m \end{aligned}$$

απ' όπου με τον κανόνα της αλυσίδας υπολογίζουμε $\partial_{\theta_m}(\log f) = x_m \partial_n(\log f) - x_n \partial_m(\log f)$.

Καθώς, όμως, ισχύει η σχέση $\partial_e(\log f) = \sum_{i,j=1}^n u^{ij} u_{ije}$ για $e \in \mathbb{S}^{n-1}$, έχουμε

$$\partial_{\theta_m}(\log f) = \sum_{i,j=1}^n u^{ij} \underbrace{(x_m u_{ijn} - x_n u_{ijm})}_{=u_{ij\theta_m}} = \sum_{i,j=1}^n u^{ij} \partial_{ij} u_{\theta_m} = \mathcal{L}u_{\theta_m}$$

Παραγωγίζοντας την συνοριακή συνθήκη $u(x', \varphi(x')) = g(x', \varphi(x'))$ στην κατεύθυνση e_m προκύπτει η σχέση $u_m + u_n \varphi_m = g_m$, όπου $g_m := \partial_m(g(x', \varphi(x')))$. Αφού για $x' \in U$ αρκετά κοντά στο 0 έχουμε $\varphi_m = \kappa_m x_m + O(|x'|^2)$ και $|u_n| \leq \|u\|_{C^1(\bar{\Omega})}$, είναι

$$u_m = g_m - u_n \varphi_m = g_m - \kappa_m x_m u_n + O(|x'|^2)$$

όπου το υπόλοιπο του αναπτύγματος φράσσεται ανεξάρτητα της φ συναρτήσεως των Ω , $|x'|^2$ (Παρατήρηση 3.2.4). Θέτουμε $v_m := u_m + \kappa_m u_{\theta_m} = u_m + \kappa_m x_m u_n - \kappa_m x_n u_m$ και υπολογίζουμε

$$\mathcal{L}v_m = \mathcal{L}u_m + \kappa_m \mathcal{L}u_{\theta_m} = (\log f)_m + \kappa_m (x_m (\log f)_n - x_n (\log f)_m)$$

Επειδή, όμως, έχουμε $0 < \kappa^- \leq \kappa_m \leq \kappa^+$, είναι

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}v_m| &\leq |(\log f)_m| + \kappa_m |x_m (\log f)_n - x_n (\log f)_m| \\ &\leq \|\log f\|_{C^2(\bar{\Omega})} + 2\kappa^+ \text{diam}(\Omega) \|\log f\|_{C^2(\bar{\Omega})} \\ &= (1 + 2\kappa^+ \text{diam}(\bar{\Omega})) \|\log f\|_{C^2(\bar{\Omega})} =: \tilde{C} \end{aligned}$$

όπου η σταθερά $\tilde{C}$ εξαρτάται αποκλειστικά από την $\|\log f\|_{C^2(\bar{\Omega})}$ και το Ω .

Πριν μπορέσουμε να αξιοποιήσουμε αυτό το φράγμα, θα χρειαστεί να δείξουμε την ύπαρξη μίας σταθεράς $\tilde{c} > 0$ η οποία εξαρτάται μόνο από το $\partial\Omega$ ώστε να ισχύει

$$|x|^2 \leq \tilde{c} x_n, \quad \forall (x', x_n) \in \partial\Omega$$

1. Για $\delta < 1$ και $0 \leq x_n \leq \delta$ έχουμε $x_n \geq x_n^2$. Επιπλέον, για $(x', x_n) \in \partial\Omega$ υπάρχει $\xi \in U$ ώστε να ισχύει

$$\varphi(x') = \varphi(0) + \nabla \varphi(0)x' + \frac{1}{2}(x')^T D^2 \varphi(\xi) x' \implies x_n = \frac{1}{2}(x')^T D^2 \varphi(\xi) x'$$

Από την απόδειξη του Λήμματος 3.2.3 γνωρίζουμε ότι η φ είναι ομοιόμορφα κυρτή με σταθερά κ^- , οπότε από την παραπάνω ισότητα έχουμε $x_n \geq \frac{\kappa^-}{2}|x'|^2$. Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω φράγματα όταν $x_n \leq \delta$ και $(x', x_n) \in \partial\Omega$ προκύπτει $x_n \geq \frac{\kappa^-}{\kappa^- + 2}|x|^2$.

2. Για $x_n \geq \delta$ και $(x', x_n) \in \partial\Omega$, επειδή το $\partial\Omega$ είναι συμπαγές υπάρχει σταθερά $c' > 0$ έτσι ώστε να ισχύει $|x|^2 \leq c'$, ενώ αφού $\frac{x_n}{\delta} \geq 1$ έχουμε $|x|^2 \leq \frac{c'}{\delta} x_n$.

Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις συμπεραίνουμε ότι πράγματι υπάρχει το ζητούμενο $\tilde{c} > 0$.

Στο $\partial\Omega$ ισχύει η ανισότητα

$$|u_m + \kappa_m x_m u_n - g_m| \leq \|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} + 2\kappa^+ \text{diam}(\bar{\Omega}) \|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} + \|g\|_{C^4(\partial\Omega)},$$

οπότε η σχέση $u_m + \kappa_m x_m u_n - g_m = O(|x'|^2)$, που γνωρίζουμε ότι ισχύει κοντά στο 0, ισχύει σε ολόκληρο το $\partial\Omega$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει σταθερά $M \geq 0$, η οποία εξαρτάται μόνο από

τα φ , κ^+ , $\text{diam}(\bar{\Omega})$, $\|g\|_{C^4(\partial\Omega)}$ και $\|u\|_{C^1(\bar{\Omega})}$, ώστε να ισχύει $|u_m + \kappa_m x_m u_n - g_m| \leq M|x|^2$ στο $\partial\Omega$. Τότε στο $\partial\Omega$ υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} |v_m - g_m| &= |(u_m + \kappa_m x_m u_n - g_m) - \kappa_m x_n u_m| \\ &\leq M|x|^2 + \kappa^+ x_n \|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} \\ &\leq C(|x|^2 + x_n) \end{aligned}$$

όπου $C \geq \max \{M, \kappa^+ \|u\|_{C^1(\bar{\Omega})}\} > 0$ είναι μία θετική σταθερά ανεξάρτητη της u (Λήμμα 3.6.4). Για $A > 0$ και αφού στο $\partial\Omega$ ισχύει $\tilde{c}x_n - |x|^2 \geq 0$ έχουμε

$$|v_m - g_m| \leq C(|x|^2 + x_n) + A(\tilde{c}x_n - |x|^2) = (C + A\tilde{c})x_n - (A - C)|x|^2$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο $D^2u(x)$ είναι διαγώνιος στο εκάστοτε σημείο $x \in \Omega$, οπότε τότε ισχύει $\mathcal{L}v = \sum_{i=1}^n u^{ii}v_{ii}$ εκεί. (Παρακάτω, όλοι οι υπολογισμοί μας γίνονται σημειακά σε κάποιο $x \in \Omega$). Παρατηρούμε ότι $\mathcal{L}(|\cdot|^2) = 2 \sum_{i=1}^n u^{ii}$, ενώ από την ανισότητα του αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου [24, σχέση B5, σελίδα 559] έχουμε

$$\mathcal{L}(|\cdot|^2) \geq 2n \left(\prod_{i=1}^n u^{ii} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{2n}{\left(\prod_{i=1}^n u_{ii} \right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{2n}{(\det D^2u)^{\frac{1}{n}}} = \frac{2n}{f^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{2n}{\|f\|_{C^2(\bar{\Omega})}^{\frac{1}{n}}}$$

Συνεπώς για $a_0, b_0 \geq 0$ έχουμε $\mathcal{L}(b_0|\cdot|^2 - a_0x_n) \geq \frac{2nb_0}{\|f\|_{C^2(\bar{\Omega})}^{\frac{1}{n}}}$, ενώ λόγω της γενικότητας στην επιλογή του x αυτή η ανισότητα ισχύει παντού στο Ω .

Ανάλογα υπολογίζουμε

$$\mathcal{L}(\pm g_m) = \sum_{i=1}^n u^{ii}(\pm g_{iim}) \geq \sum_{i=1}^n u^{ii}(-\|g\|_{C^4(\partial\Omega)}) \geq -\frac{n\|g\|_{C^4(\partial\Omega)}}{\|f\|_{C^2(\bar{\Omega})}^{\frac{1}{n}}}$$

οπότε αυτό το φράγμα ισχύει παντού στο Ω .

Τέλος, θεωρούμε τις $\psi_m^\pm := (A - C)|x|^2 - (C + A\tilde{c})x_n \pm (v_m - g_m)$. Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς στο σύνορο $\partial\Omega$ έχουμε $\psi_m^\pm \leq 0$, ενώ στο εσωτερικό του Ω είναι

$$\mathcal{L}\psi_m^\pm \geq \frac{2n(A - C)}{\|f\|_{C^2(\bar{\Omega})}^{\frac{1}{n}}} - |\mathcal{L}v_m| \mp \mathcal{L}g_m \geq \frac{2n(A - C)}{\|f\|_{C^2(\bar{\Omega})}^{\frac{1}{n}}} - \tilde{C} - \frac{n\|g\|_{C^4(\partial\Omega)}}{\|f\|_{C^2(\bar{\Omega})}^{\frac{1}{n}}}$$

Είναι εμφανές ότι μπορούμε να επιλέξουμε αρκετά μεγάλο $A > 0$ ώστε η δεξιά πλευρά της ανίσωσης να είναι θετική. Μάλιστα, τότε το A θα εξαρτάται μόνο από τις ποσότητες που

εμφανίζονται στην δεξιά πλευρά. Από την Αρχή Μεγίστου Ελλειπτικών ΜΔΕ 3.2.12 έπεται ότι οι $\psi_m^\pm$ λαμβάνουν τις μέγιστες τιμές τους στο σύνορο, δηλαδή $\max_{\bar{\Omega}} \psi_m^\pm = \max_{\partial\Omega} \psi_m^\pm \leq 0$.

Από την σχέση $u_m + \kappa_m x_m u_n - g_m = O(|x|^2)$ έπεται ότι $\psi_m^\pm(0) = \pm(u_m(0) - g_m(0)) = 0$, οπότε, αφού το e_n είναι το εσωτερικό μοναδιαίο κάθετο στο 0, υπολογίζουμε

$$\partial_n \psi_m^\pm(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\psi_m^\pm(te_n) - \psi_m^\pm(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\psi_m^\pm(te_n)}{t} \leq 0.$$

Καθώς, όμως, ισχύει

$$\begin{aligned} \partial_n \psi_m^\pm &= 2(A - C)x_n - (C + A\tilde{c}) \pm (v_{mn} - g_{mn}) \\ &= 2(A - C)x_n - (C + A\tilde{c}) \pm (u_{mn} + \kappa_m x_m u_{nn} - \kappa_m u_m - \kappa_m x_n u_{mn} - g_{mn}) \end{aligned}$$

και άρα έχουμε $0 \geq \partial_n \psi_m^\pm(0) = -(C + A\tilde{c}) \pm (u_{mn}(0) - \kappa_m g_m(0) - g_{mn}(0))$. Από αυτή την ανισότητα προκύπτει

$$|u_{mn}(0)| \leq C + A\tilde{c} + \kappa^+ \|g\|_{C^4(\partial\Omega)} + \|g\|_{C^4(\partial\Omega)}$$

Αφού έχουμε κάνει την ταύτιση $x_0 \equiv 0$ και η σταθερά του δεξιού μέλος είναι ανεξάρτητη τόσο της u , όσο και του σημείου x_0 , αυτό είναι το ζητούμενο φράγμα για την u_{mn} .

Επομένως για να ολοκληρωθεί η απόδειξη μένει να βρούμε ένα φράγμα για την u_{nn} . Αναπτύσσουμε την ορίζουσα της εξίσωσης ως προς την τελευταία στήλη στο $x_0 \equiv 0$, οπότε αν M_{in} είναι ο πίνακας $D^2 u(0)$ χωρίς την i -γραμμή και την n -στήλη έχουμε

$$f(0) = \det D^2 u(0) = \det D_{x'}^2 u(0) u_{nn}(0) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n} u_{in}(0) \det M_{in}$$

ή ισοδύναμα

$$f(0) = \det D_{x'}^2 u(0) u_{nn}(0) + r$$

Η πραγματική σταθερά r είναι ανεξάρτητη του $u_{nn}(0)$, αλλά εξαρτάται από όλα τα υπόλοιπα u_{ij} . Ωστόσο έχουμε ήδη βρει φράγματα σε αυτές τις περιπτώσεις, οπότε μπορούμε να βρούμε σταθερά $M > 0$ ώστε $r > -M$. Τότε είναι

$$0 < u_{nn}(0) = \frac{f(0) - r}{\det D_{x'}^2 u(0)} \leq \frac{\|f\|_{C^2(\bar{\Omega})} - M}{\det D_{x'}^2 u(0)}$$

όπου έχουμε θεωρήσει ότι ο πίνακας $D^2 u(0)$ είναι διαγώνιος. Αν δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $m > 0$, ανεξάρτητη του x_0 και της u , ώστε ο πίνακας $D_{x'}^2 u(0) - mI_n$ να είναι θετικά ορισμένος έχουμε το ζητούμενο φράγμα

$$0 < u_{nn}(0) \leq \frac{\|f\|_{C^2(\bar{\Omega})} - M}{m}$$

Θεωρούμε $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ και στρέφουμε το σύστημα συντεταγμένων του $\mathbb{R}^n$ ώστε το e να απεικονίζεται στο e_1 , οπότε τότε η u_{11} μετά την στροφή αντιστοιχεί στην αρχική u_{ee} . Η

συνάρτηση $\varphi \in C^4(U)$ που θεωρήσαμε παραπάνω ώστε το γράφημά της να εκφράζει το σύνορο του Ω κοντά στο 0 αναπτύσσεται ως

$$\varphi(x') = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} \kappa_{ij} x_i x_j + \sum_{i,j,k=1}^{n-1} \sigma_{ijk} x_i x_j x_k + O(|x'|^4)$$

για $x' \in U$ αρκετά κοντά στο 0 (εδώ δεν θεωρούμε ότι ο πίνακας $D^2\varphi(0)$ είναι διαγώνιος). Μάλιστα, αυτές οι σταθερές φράσσονται από ποσότητες ανεξάρτητες της φ , εξαρτώνται δηλαδή μόνο από το Ω (Παρατήρηση 3.2.4). Ανάλογα, υπάρχει σταθερά ανεξάρτητη της φ , που εξαρτάται δηλαδή μόνο από το Ω , ώστε πολλαπλασιασμένη με το $|x'|^4$ να φράσσει το υπόλοιπο του αναπτύγματος της φ . Τέλος, με την ίδια απόδειξη όπως στο Λήμμα 3.2.3 έχουμε $0 < \kappa^- \leq \kappa_{11} \leq \kappa^+$.

Στο $\partial\Omega$ έχουμε την σχέση $x_n = \varphi(x')$, απ' όπου με αντικατάσταση προκύπτει

$$x_1^2 = \frac{2}{\kappa_{11}} \left(x_n - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i,j) \neq (1,1)}}^{n-1} \kappa_{ij} x_i x_j \right) + O(|x'|^3)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $g(0) = 0$ και $\nabla g(0) = 0$, γιατί διαφορετικά θεωρούμε την αλλαγή συντεταγμένων $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $T(z) := z - g(0) - \nabla g(0)z$. Τότε, όταν $x' \in U$ και είναι αρκετά κοντά στο 0, από την συνοριακή συνθήκη $u = g$ προκύπτει

$$u(x', \varphi(x')) = g(x', \varphi(x')) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} S_{ij} x_i x_j + \sum_{i,j,k=1}^{n-1} T_{ijk} x_i x_j x_k + O(|x'|^4)$$

για κάποιες σταθερές που φράσσονται από την $\|g\|_{C^4(\partial\Omega)}$. Ανάλογα, και υπόλοιπο του αναπτύγματος φράσσεται συναρτήσει των $\|g\|_{C^4(\partial\Omega)}, |x'|^4$.

Θέτουμε $\mu := \frac{S_{11}}{\kappa_{11}}$ και $\hat{u} := u - \mu x_n$, οπότε με την αντικατάσταση $x_n = \varphi(x')$ έχουμε

$$\hat{u}(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} (S_{ij} - \mu \kappa_{ij}) x_i x_j + \sum_{i,j,k=1}^{n-1} (T_{ijk} - \mu \sigma_{ijk}) x_i x_j x_k + O(|x'|^4) \quad \text{στο } \partial\Omega.$$

Αφού $S_{ij} = S_{ji}$ και $\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$, είναι

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{S_{ij} - \mu \kappa_{ij}}{2} x_i x_j &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i,j) \neq (1,1)}}^{n-1} \frac{S_{ij} - \mu \kappa_{ij}}{2} x_i x_j = \sum_{i=2}^{n-1} (S_{i1} - \mu \kappa_{i1}) x_i x_1 + \sum_{i,j=2}^{n-1} \frac{S_{ij} - \mu \kappa_{ij}}{2} x_i x_j \\ &\leq \sum_{i=2}^{n-1} (S_{i1} - \mu \kappa_{i1}) x_i x_1 + \max_{2 \leq i,j \leq n-1} \frac{|S_{ij} - \mu \kappa_{ij}|}{4} \sum_{i,j=2}^{n-1} x_i^2 + x_j^2 \end{aligned}$$

Άρα, για $A_m := S_{m1} - \mu\kappa_{m1}$ όταν $m = 2, \dots, n-1$ είναι

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{S_{ij} - \mu\kappa_{ij}}{2} x_i x_j = \sum_{m=2}^{n-1} A_m x_m x_1 + O\left(\sum_{m=2}^{n-1} x_m^2\right)$$

Καθώς για όλους τους πραγματικούς a, b ισχύει $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, παρατηρούμε ότι για $i, j, k \neq 1$ έχουμε

$$|x_i x_j x_k| \leq \frac{1}{2}(|x_i|^2 + |x_j|^2 + |x_k|^2),$$

ενώ για $j \neq 1$ έχουμε

$$|x_1 x_i x_j| \leq \frac{1}{2}(x_i^2 + (x_1 x_j)^2) \leq \frac{1}{2}x_i^2 + \frac{1}{4}|x'|^4$$

και ανάλογα για $i \neq 1$ έχουμε $|x_1 x_i x_j| \leq \frac{1}{2}x_j^2 + \frac{1}{4}|x'|^4$, όπου $i, j, k = 1, \dots, n-1$. Θέτουμε $A_n := \frac{2}{\kappa_{11}}(T_{111} - \mu\sigma_{111})$. Αντικαθιστώντας το x_1^2 όπως παραπάνω και με βάση τις ανισότητες για τα $x_1 x_i x_j$ υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} (T_{111} - \mu\sigma_{111})x_1^3 &= (T_{111} - \mu\sigma_{111}) \frac{2}{\kappa_{11}} \left(x_1 x_n - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i,j) \neq (1,1)}}^{n-1} \kappa_{ij} x_1 x_i x_j \right) + O(|x'|^4) \\ &= A_n x_1 x_n + O\left(\sum_{m=2}^{n-1} x_m^2 + |x'|^4\right) \end{aligned}$$

Επιπλέον, είναι

$$\sum_{\substack{i,j,k=1 \\ (i,j,k) \neq (1,1,1)}}^{n-1} (T_{ijk} - \mu\sigma_{ijk}) x_i x_j x_k \leq \max_{(i,j,k) \neq (1,1,1)} |T_{ijk} - \mu\sigma_{ijk}| \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ (i,j,k) \neq (1,1,1)}}^{n-1} |x_i x_j x_k|$$

οπότε από τις προηγούμενες ανισότητες για τα $x_i x_j x_k$ συμπεραίνουμε ότι η δεξιά πλευρά φράσσεται συναρτήσει των $\sum_{m=2}^{n-1} x_m^2, |x'|^4$.

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες ανισότητες έχουμε ότι στο $\partial\Omega$ ισχύει

$$\hat{u}(x', \varphi(x')) = \sum_{m=2}^n A_m x_1 x_m + O\left(\sum_{m=2}^{n-1} x_m^2 + |x'|^4\right)$$

Αν ανακαλέσουμε ότι στο σύνορο υπάρχει σταθερά $\tilde{c}$ ώστε $\tilde{c}x_n \geq |x|^2 \geq |x'|^2$, εκεί έχουμε $|x'|^4 \leq \tilde{c}^2 x_n^2$ και επομένως είναι

$$\hat{u}(x', \varphi(x')) = \sum_{m=2}^n A_m x_1 x_m + O\left(\sum_{m=2}^n x_m^2\right)$$

όπου όλες οι σταθερές είναι ανεξάρτητες της u και του σημείου x_0 .

Θεωρούμε την κυρτή συνάρτηση $h(x) = -\varepsilon x_n + \delta|x|^2 + \frac{1}{2B} \sum_{m=2}^n (A_m x_1 + B x_m)^2$ για κάποιες θετικές σταθερές ε, δ, B .

Επειδή στο $B(0, \rho) \subseteq U$ υπάρχει $\xi \in B(0, \rho)$ ώστε να ισχύει $x_n = \varphi(x') = \frac{1}{2}(x')^T D^2 \varphi(\xi) x'$ και από την Παρατήρηση 3.2.4 υπάρχει σταθερά K_0 που εξαρτάται μόνο από το Ω ώστε $\partial_{ij} \varphi \leq K_0$ για όλα τα $i, j = 1, \dots, n-1$, έχουμε $x_n \leq K_0 |x'|^2 \leq K_0 |x|^2$ όταν $(x', x_n) \in \partial\Omega$ και $x' \in B(0, \rho)$. Βέβαια, μία παρόμοια σχέση ισχύει και στο υπόλοιπο σύνορο, αφού εκεί έχουμε $|x|^2 \geq |x'|^2 \geq r^2$, οπότε είναι $x_n \leq \max_{\partial\Omega} x_n \leq \frac{1}{r^2} \max_{\partial\Omega} x_n |x|^2$. Άρα υπάρχει $K > 0$ ώστε να ισχύει $x_n \leq K|x|^2$ σε όλο το $\partial\Omega$ και επομένως επιλέγοντας $\varepsilon := \frac{\delta}{K}$ και $\delta > 0$ έχουμε $\varepsilon x_n \leq \delta|x|^2$ εκεί. Τότε στο σύνορο ισχύει

$$h(x) \geq \frac{1}{2B} \sum_{m=2}^n (A_m x_1 + B x_m)^2 \geq \sum_{m=2}^n A_m x_1 x_m + \frac{B}{2} \sum_{m=2}^n x_m^2$$

και άρα επιλέγοντας αρκετά μεγάλο $B > 0$ έχουμε $\widehat{u}|_{\partial\Omega} \leq h|_{\partial\Omega}$.

Παρατηρούμε ότι ο Εσσιανός πίνακας της h είναι σταθερός, οπότε και η $\det D^2 h$ είναι σταθερή στο Ω . Ακόμα, παρατηρούμε ότι στις ευθείες που ορίζει το $w = (-B, A_2, \dots, A_n)$ έχουμε $h|_{x+\lambda w=z}(z) = -\varepsilon z_n + \delta|z|^2$, οπότε υπολογίζουμε $\partial_{ww} h = 2\delta|w|^2$.

Αν σε ένα σημείο $x \in \Omega$ η λ^- είναι η μικρότερη ιδιοτιμή του $D^2 h(x)$, η λ^+ είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή και $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι όλες οι ιδιοτιμές του, έχουμε

$$2\delta|w|^2 = \partial_{ww} h(x) = w^T D^2 h(x) w \geq \lambda^- |w|^2 \implies 2\delta \geq \lambda^-$$

οπότε είναι $\det D^2 h(x) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \leq \lambda^- (\lambda^+)^{n-1} \leq 2\delta (\kappa^+)^{n-1}$. Αυτό το φράγμα είναι ανεξάρτητο του εκάστοτε σημείου x , οπότε επιλέγοντας αρκετά μικρό $\delta > 0$ έχουμε

$$\det D^2 h \leq 2\delta (\kappa^+)^{n-1} \leq c_0 \leq f = \det D^2 u = \det D^2 \widehat{u}$$

παντού μέσα στο Ω . Από την Αρχή Σύγκρισης 2.3.2 συμπεραίνουμε ότι η ανισότητα $h \geq \widehat{u}$ ισχύει σε όλο το $\overline{\Omega}$.

Από αυτή την ανισότητα, επειδή $\widehat{u}(0) = u(0) = g(0) = 0 = h(0)$ και το e_n είναι το μοναδιαίο εσωτερικό κάθετο στο 0, υπολογίζουμε

$$\partial_n \widehat{u}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\widehat{u}(tx_n)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h(tx_n)}{t} = \partial_n h(0),$$

ενώ αφού $\partial_n h(0) = -\varepsilon + 2\delta 0 + \frac{1}{2B} (A_n 0 + B 0) 2B = -\varepsilon$ έχουμε $\partial_n \widehat{u}(0) \leq -\varepsilon$.

Παραγωγίζοντας δύο φορές την συνοριακή συνθήκη $u(x', \varphi(x')) = g(x', \varphi(x'))$ στην κατεύθυνση e_1 υπολογίζουμε

$$u_{11} + u_{1n} \varphi_1 + u_n \varphi_{11} + u_{n1} \varphi_1 + u_{nn} \varphi_1^2 = g_{11} + g_{1n} \varphi_1 + g_n \varphi_{11} + g_{n1} \varphi_1 + g_{nn} \varphi_1^2,$$

οπότε στο σημείο 0, αφού $\nabla\varphi(0) = 0$ και $\nabla g(0) = 0$, έχουμε

$$u_{11}(0) + u_n(0)\kappa_{11} = g_{11}(0) = S_{11}$$

Καθώς, όμως, $u_n(0) = \widehat{u}_n(0) + \mu$, έχουμε

$$u_{11}(0) = S_{11} - \mu\kappa_{11} - \widehat{u}_n(0)\kappa_{11} = -\widehat{u}_n(0)\kappa_{11} \geq \varepsilon\kappa^-$$

Επειδή ως e μπορούμε να επιλέξουμε κάθε ένα από τα $e_1, \dots, e_{n-1}$ έχουμε $u_{ii} \geq \varepsilon\kappa^-$ για κάθε $i = 1, \dots, n-1$ και επομένως ο πίνακας $D_x^2 u(0) - \varepsilon\kappa^- I_n$ είναι θετικός. $\square$

Είμαστε πλέον σε θέση να δείξουμε ότι το $\mathcal{T}$ είναι κλειστό επιλέγοντας μία συγκλίνουσα ακολουθία σημείων του και δείχνοντας ότι και το όριο της βρίσκεται μέσα σε αυτό.

Λήμμα 3.6.6 Υπό τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1.1 το σύνολο $\mathcal{T}$ είναι κλειστό.

Απόδειξη. Θεωρούμε μία ακολουθία σημείων $(\sigma_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο $\sigma \in [0, 1]$. Τότε υπάρχουν κυρτές συναρτήσεις $u_{\sigma_m} \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ οι οποίες λύνουν τα προβλήματα

$$\begin{cases} \det D^2 u_{\sigma_m} = f_{\sigma_m}, & \text{στο } \Omega \\ u_{\sigma_m} = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Όπως έχουμε ήδη δει στην μέθοδο της συνέχειας (Ενότητα 3.3), υπάρχει σταθερά $c_0 > 0$ ώστε $f_{\sigma_m} \geq c_0$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Αν ανακαλέσουμε ότι τα f_{σ_m} αποτελούν κυρτό συνδυασμό των f και f_0 , έχουμε $f_{\sigma_m} \xrightarrow{\|\cdot\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})}} f_\sigma$ και $\|f_{\sigma_m}\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq \|f\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} + \|f_0\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Από τα Λήμματα 3.6.1 και 3.6.2 προκύπτει σταθερά $C > 0$ ανεξάρτητη του $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\|u_{\sigma_m}\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leq C$. Αυτό σημαίνει ότι τόσο η ακολουθία u_{σ_m} , όσο και κάθε μία από τις ακολουθίες $\partial_i u_{\sigma_m}$ είναι ισοσυνεχείς (ως Lipschitz με κοινή σταθερά C) και ομοιομορφα φραγμένες, όταν $i = 1, \dots, n$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Arzelà-Ascoli για κάθε μία από αυτές εκλεπτύνουμε την ακολουθία δεικτών σ_m ώστε η u_{σ_m} να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στον χώρο $C^1(\overline{\Omega})$ (δείτε επίσης [27, Θεώρημα 1.23]).

Ας είναι $u \in C^1(\overline{\Omega})$ αυτό το όριο. Έχουμε $u|_{\partial\Omega} = g$. Επιπλέον όλες οι συναρτήσεις $u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u$ είναι C -Lipschitz συνεχείς, οπότε έχουμε $u \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$, ενώ, αφού η u είναι κυρτή, από το Παράδειγμα 2.2.2 γνωρίζουμε ότι ισχύει $\mu_u = \det D^2 u \, dx$. Ακόμα, από την Πρόταση 2.2.8 έχουμε $\mu_{u_{\sigma_m}} \xrightarrow{*} \mu_u$, ενώ επειδή

$$f_{\sigma_m} \, dx = (1 - \sigma_m) f_0 \, dx + \sigma_m f \, dx \xrightarrow{*} (1 - \sigma) f_0 \, dx + \sigma f \, dx = f_\sigma \, dx$$

έχουμε $\mu_u = f_\sigma \, dx$ ή ισοδύναμα $\det D^2 u = f_\sigma$ σχεδόν παντού στο Ω .

Από το Λήμμα 3.2.15 και το Θεώρημα Evans-Krylov 3.2.13 συμπεραίνουμε ότι $u \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$, οπότε η ισότητα $\det D^2 u = f_\sigma$ ισχύει παντού στο Ω , αφού οι $\det D^2 u, f_\sigma$ είναι συνεχείς. Από όλα τα παραπάνω έχουμε $\sigma \in \mathcal{T}$. $\square$

ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑ ΛΥΣΕΩΝ ALEXANDRON ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΛΥΣΗΣ

Καθώς γνωρίζουμε ότι οι λύσεις Alexandron υπάρχουν υπό αρκετά πιο ασθενείς συνθήκες απ' ότι οι κλασικές λύσεις, παρουσιάζει ενδιαφέρον η μελέτη της κανονικότητας αυτών, γιατί αν είναι αρκετά λείες (λόγου χάρη αν είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες) λύνουν την εξίσωση και με την κλασική έννοια. Ειδικότερα, σε αυτό το κεφάλαιο ασχολούμαστε με λύσεις Alexandron εξισώσεων της μορφής $\det D^2u = f$, δηλαδή εξισώσεων με δεξιά πλευρά το μέτρο Borel $\nu = f dx$ όπου $f \in L^1_{loc}$. Ισοδύναμα από το Θεώρημα Radon-Nikodym, το μέτρο μ_u πρέπει να είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue [29, Θεώρημα 10.15]. Αυτή η συνθήκη ικανοποιείται όταν για παράδειγμα υπάρχει σταθερά $\Lambda > 0$ ώστε $\mu_u \leq \Lambda dx$. Επιπλέον, συνήθως υποθέτουμε την ύπαρξη κάποιου θετικού κάτω φράγματος λ για την f ώστε να αποφύγουμε την περίπτωση όπου η εξίσωση είναι εκφυλισμένα ελλειπτική, δηλαδή απαιτούμε $\lambda \leq f \leq \Lambda$. Όταν η εξίσωση είναι εκφυλισμένα ελλειπτική, οι υποθέσεις της κανονικότητας της f και της συνοριακής συνθήκης δεν είναι (γενικά) αρκετά ισχυρές ώστε να εξασφαλίσουν κανονικότητα: η λύση μπορεί να μην είναι καν διαφορίσιμη ενώ η f , η συνοριακή συνθήκη και το σύνορο είναι λεία (δείτε [40, Παράδειγμα 3]).

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε εδώ αναφέρονται κυρίως στην κανονικότητα των λύσεων στο εσωτερικό του πεδίου λύσης, ώστε να παρακάμψουμε δυσκολίες που προκύπτουν από την πιθανή έλλειψη λειότητας στο συνόρου. Άλλωστε, έχουμε εξετάσει ήδη εν μέρει την περίπτωση του λείου συνόρου στο Θεώρημα 3.1.1. Βέβαια, αυτός ο περιορισμός συνήθως προσδίδει ένα τοπικό χαρακτήρα στα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε.

Στην περίπτωση του $\mathbb{R}^2$ η υπόθεση $0 < \lambda \leq f \leq \Lambda$ αρκεί ώστε οι λύσεις να είναι γνήσια κυρτές και συνεχώς διαφορίσιμες. Ωστόσο στους χώρους μεγαλύτερης διάστασης το πρόβλημα της κανονικότητας των λύσεων είναι πιο σύνθετο. Και εκεί όμως σχετίζεται άμεσα με την γνήσια κυρτότητά των λύσεων. Αυτή είναι μία σημαντική συνθήκη, η οποία, αν και (γενικά) δεν είναι αναγκαία, κάποιες φορές είναι απαραίτητη (Παρατήρηση 4.3.3).

Οι κύριες πηγές μας για αυτό το κεφάλαιο συνίστανται στα [16] και [22].

4.1 Οι κανονικοποιημένες λύσεις και οι ιδιότητές τους

Ξεκινάμε αυτό το κεφάλαιο με κάποιες βοηθητικές έννοιες και συμπεράσματα που απαιτούνται για την μετέπειτα μελέτη της κανονικότητας. Πιο συγκεκριμένα σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τις έννοιες των *τμημάτων* κυρτών συναρτήσεων, των *κανονικοποιημένων συνόλων* και των *κανονικοποιημένων λύσεων*, αλλά και κάποιες ιδιότητες αυτών. Η *κανονικοποίηση* των λύσεων της εξίσωσης είναι ένας μετασχηματισμός της εξίσωσης που μας επιτρέπει να παρακάμψουμε δυσκολίες που ενέχει το εκάστοτε πεδίο λύσης δουλεύοντας σε ένα πιο φυσικό πλαίσιο για την λύση.

Ορισμός 4.1.1 Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό σύνολο, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση, $x \in \Omega$, $p \in \partial u(x)$ και $t > 0$, ορίζουμε ως **τμήμα (section)** με κέντρο το x , κλίση p και ύψος t το σύνολο

$$S(x, p, t) := \{z \in \Omega : u(z) < \ell_{x,p,t}(z)\} = [u < \ell_{x,p} + t],$$

όπου $\ell_{x,p,t} := \ell_{x,p} + t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $\ell_{x,p,t}(z) := u(x) + \langle p, z - x \rangle + t$.

Ορισμός 4.1.2 Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό κυρτό σύνολο, $x \in \Omega$ και $\tau > 0$, ορίζουμε τη *διαστολή* του Ω κατά τ ως προς το x από την ισότητα

$$x + \tau\Omega := \left\{ y \in \mathbb{R}^n : x + \frac{y - x}{\tau} \in \Omega \right\}$$

Ορισμός 4.1.3 Αν έχουμε ένα τμήμα $S(x, p, t)$ και $\tau > 0$, ορίζουμε τη *διαστολή* του $S(x, p, t)$ κατά τ ως προς το κέντρο του x από την ισότητα

$$\tau S(x, p, t) := \left\{ y \in \mathbb{R}^n : x + \frac{y - x}{\tau} \in S(x, p, t) \right\}$$

Το τμήμα $S(x, p, t)$ είναι η προβολή στον $\mathbb{R}^n$ της τομής του γραφήματος της u με το υπερεπίπεδο $\ell_{x,p}$ ανυψωμένο κατά $t > 0$. Παρατηρούμε ότι το τμήμα που ορίζεται για το κάποιο $t > 0$, σημείο x και διεύθυνση p είναι ανοικτό και κυρτό σύνολο. Όταν $S(x, p, t) \subset\subset \Omega$ είναι και φραγμένο. Αυτή είναι μία χρήσιμη ιδιότητα που δεν ισχύει όμως πάντα.

Στην περίπτωση των γνήσια κυρτών συναρτήσεων έχουμε $S(x, p, t) \subset\subset \Omega$ για αρκετά μικρά $t > 0$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε $w := u - \ell_{x,p}$ έχουμε $w \geq 0$, ενώ αυτή λαμβάνει ολικό ελάχιστο $w(x) = 0$ μόνο στο σημείο x . Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subset\subset \Omega$ και θέτουμε $m := \min_{\partial B(x, \varepsilon)} w > 0$. Για το εκάστοτε σημείο $z \in \Omega \setminus \overline{B(x, \varepsilon)}$ βρίσκουμε $z_0 \in \partial B(x, \varepsilon)$ και $\lambda \in (0, 1)$ ώστε $z_0 = (1 - \lambda)x + \lambda z$, οπότε είναι

$$m \leq w(z_0) < (1 - \lambda)w(x) + \lambda w(z) \implies m < \frac{m}{\lambda} \leq \frac{w(z_0)}{\lambda} < w(z)$$

Άρα για κάθε $t \in (0, m)$ έχουμε $S(x_0, p, t) = [w < t] \subseteq \overline{B(x, \varepsilon)} \subset\subset \Omega$.

Ορισμός 4.1.4 Ένα ανοικτό κυρτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται **κανονικοποιημένο** αν ισχύει $B(0, 1) \subseteq \Omega \subseteq B(0, n) = nB(0, 1)$.

Υπάρχει ένας φυσικός τρόπος όπου κάθε ανοικτό, κυρτό, φραγμένο σύνολο μπορεί να κανονικοποιηθεί. Αυτό γίνεται μέσω της αλλαγής μεταβλητών που προκύπτει ως απόρροια του Λήμματος του John 4.1.6.

Ορισμός 4.1.5 Το σύνολο $\mathcal{E}$ καλείται **ελλειψοειδές** αν υπάρχει απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $T(z) := Az + x$ ώστε $\mathcal{E} = T(B(0, 1))$, όπου ο $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας και $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε το συμβολίζουμε με $\mathcal{E}_{A,x}$, δηλαδή

$$\mathcal{E}_{A,x} := \{z \in \mathbb{R}^n : |A^{-1}(z - x)| < 1\}$$

Το σημείο x καλείται **κέντρο** του $\mathcal{E}_{A,x}$, ενώ από τον τύπο αλλαγής μεταβλητών έχουμε

$$|\mathcal{E}_{A,x}| = |\det A| |B(0, 1)|$$

Τέλος, για $r > 0$ ορίζουμε τη **διαστολή** του ελλειψοειδούς κατά r ως προς το κέντρο του μέσω της σχέσης $r\mathcal{E}_{A,x} := \mathcal{E}_{rA,x}$.

Λήμμα 4.1.6 (John) Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό, κυρτό, φραγμένο σύνολο υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $\mathcal{E}$ που περιέχεται στο Ω και έχει τον μέγιστο δυνατό όγκο. Επιπλέον, αυτό το ελλειψοειδές ικανοποιεί τη σχέση $\mathcal{E} \subseteq \Omega \subseteq n\mathcal{E}$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [16, Λήμμα A.13]. □

Πόρισμα 4.1.7 Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό, κυρτό, φραγμένο σύνολο και $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

- (i) Αν υπάρχουν σταθερές $r, K > 0$ ώστε $B(x_0, r) \subseteq \Omega$ και $|\Omega| \leq K$, τότε υπάρχει $R > 0$ που εξαρτάται αποκλειστικά από τα n, r, K ώστε $\Omega \subseteq B(x_0, R)$.
- (ii) Αν υπάρχουν σταθερές $R, k > 0$ ώστε $\Omega \subseteq B(x_0, R)$ και $|\Omega| \geq k$, τότε υπάρχει $x_1 \in \Omega$ και $r > 0$ που εξαρτάται αποκλειστικά από τα n, R, k ώστε $B(x_1, r) \subseteq \Omega$.

Απόδειξη. Επειδή μπορούμε να θεωρήσουμε την μεταφορά του συστήματος συντεταγμένων κατά $-x_0$, αρκεί να αποδείξουμε το πόρισμα μόνο στην περίπτωση $x_0 = 0$.

- (i) Για $x \in \Omega$ θεωρούμε $B := \{z \in B(0, r) : \langle z, x \rangle = 0\}$ και $C := \text{conv}(\{x\} \cup B)$. Όπως έχουμε δει και στην απόδειξη της Αρχής Μεγίστου του Alexandron 2.3.1, ένα τέτοιο σύνολο είναι n -διάστατος κώνος με βάση το B και κορυφή το x , ο οποίος μάλιστα έχει όγκο $|C| = c_n |x| r^{n-1}$ για μία σταθερά $c_n > 0$ που εξαρτάται μόνο από το n . Επειδή έχουμε $C \subseteq \Omega$ ισχύει $|C| \leq |\Omega| \leq K$, οπότε συνδυάζοντας τις προηγούμενες ανισότητες υπολογίζουμε $|x| \leq \frac{|C|}{c_n r^{n-1}} \leq \frac{K}{c_n r^{n-1}} =: R$.

- (ii) Από το Λήμμα του John 4.1.6 υπάρχει ελλειψοειδές $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{A,x_1}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι έχει την μορφή $\mathcal{E} = \left\{ z = (z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \left(\frac{z^i - x_1^i}{a_i} \right)^2 < 1 \right\}$ για κάποια $a_i \geq 0$ και $x_1 = (x_1^1, \dots, x_1^n)$. αρκεί να στρέψουμε το σύστημα συντεταγμένων κατάλληλα. Αφού $\mathcal{E} \subseteq \Omega \subseteq B(0, R)$, έχουμε $a_i \leq R$. Επιπλέον, καθώς ο όγκος του δίνεται από τον τύπο $|\mathcal{E}| = |B(0, 1)| \prod_{i=1}^n a_i$, έχουμε

$$k \leq |\Omega| \leq |n\mathcal{E}| \leq n^n |B(0, 1)| R^{n-1} a_i \implies a_i \geq \frac{k}{|B(0, 1)| R^{n-1}} =: r, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Αυτό σημαίνει ότι $B(x_1, r) \subseteq \mathcal{E} \subseteq \Omega$.

□

Εφόσον στο ελλειψοειδές $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{A,x}$ που εξασφαλίζει το λήμμα αντιστοιχεί μία αφινική απεικόνιση $T(z) := Az + x$, για να κανονικοποιήσουμε το Ω αρκεί να θεωρήσουμε την αλλαγή συντεταγμένων T^{-1} οπότε και έχουμε $B(0, 1) \subseteq T^{-1}(\Omega) \subseteq nB(0, 1)$.

Ειδικότερα, για το εκάστοτε τμήμα $S := S(x, p, t)$ με $S \subset\subset \Omega$ έχουμε ότι το S είναι φραγμένο, υπάρχει αφινική απεικόνιση $T(z) := Az + x_0$ όπως προηγουμένως ώστε να ισχύει $B(0, 1) \subseteq T^{-1}(S) \subseteq nB(0, 1)$. Αφού στο νέο σύστημα συντεταγμένων το S είναι κανονικοποιημένο, ονομάζουμε την απεικόνιση $L := T^{-1} : x_0 + \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ **αφινική απεικόνιση που κανονικοποιεί το S** . Τότε έχουμε $L(z) := A^{-1}(z - x_0)$, $\det L := \det A^{-1} \neq 0$, $\|L\| := \sup_{|z-x_0| \leq 1} |A^{-1}z|$.

Μέσω αυτής της αφινικής απεικόνισης δύναται να μετασχηματίσουμε μία εξίσωση Monge-Ampère σε ένα πρόβλημα Dirichlet με μηδενική συνοριακή συνθήκη.

Πρόταση 4.1.8 *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση με $\mu_u = f dx$ όταν $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Για το εκάστοτε τμήμα $S := S(x, p, t) \subset\subset \Omega$ θεωρούμε την αφινική απεικόνιση L που το κανονικοποιεί και $S^* := L(S)$.*

Τότε η κυρτή συνάρτηση

$$v(z) := |\det L|^{\frac{2}{n}} (u - \ell_{x,p,t}) (L^{-1}z)$$

αποτελεί λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \mu_v = f \circ L^{-1} dx, & \text{στο } S^* \\ v = 0, & \text{στο } \partial S^* \end{cases}$$

Απόδειξη. Η ισότητα $v = 0$ στο σύνορο είναι άμεση από τους ορισμούς. Επειδή η $-\ell_{x,p,t} \circ L^{-1}$ είναι αφινική, από το Παράδειγμα 2.2.4 και την Πρόταση 2.2.10(ii) έχουμε $\mu_v = \det^2 L \mu_{(u \circ L^{-1})}$.

Θεωρούμε $p \in \partial(u \circ L^{-1})(z_0)$ όταν $z_0 \in S^*$ και έχουμε

$$\begin{aligned} u \circ L^{-1}(z) &\geq u \circ L^{-1}(z_0) + \langle p, z - z_0 \rangle, & \forall z \in S^* \\ \iff u(\tilde{z}) &\geq u(L^{-1}(z_0)) + \langle p, L(\tilde{z}) - L(L^{-1}(z_0)) \rangle \\ &= u(L^{-1}(z_0)) + \langle p, A^{-1}(\tilde{z} - L^{-1}(z_0)) \rangle \\ &= u(L^{-1}(z_0)) + \langle (A^{-1})^T p, \tilde{z} - L^{-1}(z_0) \rangle, & \forall \tilde{z} \in S \end{aligned}$$

Αυτό ισοδύναμα σημαίνει ότι $(A^{-1})^T p \in \partial u(L^{-1}(z_0))$, δηλαδή για κάθε σύνολο Borel $E \subseteq S^*$ έχουμε $\partial(u \circ L^{-1})(E) = A^T \partial u(L^{-1}(E))$. Για τους όγκους τους έχουμε

$$\mu_{(u \circ L^{-1})}(E) = |A^T \partial u(L^{-1}(E))| = |\det A^T| |\partial u(L^{-1}(E))|$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω του τύπου αλλαγής μεταβλητών ολοκληρωμάτων. Ξανά από τον ίδιο τύπο υπολογίζουμε

$$\mu_u(L^{-1}(E)) = \int_{L^{-1}(E)} f \, dx = |\det L^{-1}| \int_E f \circ L^{-1} \, dx$$

Συνδυάζοντας όλα τα προηγούμενα βρίσκουμε

$$\mu_v = |\det L|^2 |\det A^T| |\det L^{-1}| f \circ L^{-1} \, dx$$

ενώ αφού $\det A^T = \det L^{-1} = \frac{1}{\det L}$ προκύπτει η ζητούμενη ισότητα. □

Μία λύση v όπως στην προηγούμενη πρόταση καλείται **κανονικοποιημένη λύση** της εξίσωσης Monge-Ampère που αντιστοιχεί στην u πάνω από το $S(x, p, t)$. Είναι εμφανές ότι αν αντί για την u μελετήσουμε την κανονικοποιημένη v , τα συμπεράσματά μας ως προς την κανονικότητα της v θα ισχύουν και για την u στο εσωτερικό του πεδίου λύσης. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι αν $0 < \lambda \leq f \leq \Lambda$, αυτά τα φράγματα παραμένουν αναλλοίωτα μετά από έναν μετασχηματισμό της παραπάνω μορφής, δηλαδή έχουμε $0 < \lambda \leq f \circ L^{-1} \leq \Lambda$. Αυτή είναι μία χρήσιμη ιδιότητα της εξίσωσης που καλείται **αφινική αναλλοίωτος** της Monge-Ampère.

Για $x \in \Omega$, $p \in \partial u(x)$ και $S(x, p, t) \subset \subset \Omega$, παρατηρούμε ότι η κανονικοποιημένη λύση v παρουσιάζει ελάχιστο στο $L(x)$, διότι $u \geq \ell_{x,p} \implies v \geq -t |\det L|^{\frac{2}{n}} = v(L(x))$.

Συνεχίζουμε με κάποιες εκτιμήσεις για το μέγεθος των κανονικοποιημένων λύσεων.

Πρόταση 4.1.9 *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό, κυρτό σύνολο ώστε να υπάρχουν $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r, R > 0$ με $B(x_0, r) \subseteq \Omega \subseteq B(x_0, R)$ και $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση που ικανοποιεί τις σχέσεις*

$$\begin{cases} \lambda \, dx \leq \mu_v \leq \Lambda \, dx, & \text{στο } \Omega \\ v = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

για κάποιες σταθερές $0 < \lambda \leq \Lambda$.

Τότε υπάρχουν θετικές σταθερές $c_0 = c_0(n, \lambda, r)$, $C_0 = C_0(n, \Lambda, R)$, $C = C(n, \Lambda, R)$ ώστε

$$(i) \quad 0 < c_0 \leq \min_{\Omega} v = \max_{\Omega} |v| \leq C_0$$

$$(ii) \quad |v(z)| \leq C \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)^{\frac{1}{n}}, \quad \forall z \in \Omega$$

Απόδειξη. Η εκτίμηση (ii) αποτελεί άμεση απόρροια της Αρχής Μεγίστου του Alexandrov 2.3.1. Πράγματι, επειδή $v|_{\partial\Omega} = 0$, $\operatorname{diam}(\Omega) \leq 2R$ και $\mu_v(\Omega) \leq \Lambda|B(x_0, R)|$, υπάρχει $C > 0$ που εξαρτάται αποκλειστικά από τα n, Λ, R ώστε $|v(z)| \leq C \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)^{\frac{1}{n}}, \quad \forall z \in \Omega$.

Λόγω της κυρτότητας της v και της μηδενικής συνοριακής συνθήκης, στο $\bar{\Omega}$ έχουμε $v \leq 0$ και επομένως ισχύει $\min_{\Omega} v = \max_{\Omega} |v| = \max_{\bar{\Omega}} |v| < +\infty$. Αφού $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \leq \operatorname{diam}(\Omega) \leq 2R$, αρκεί να θεωρήσουμε $C_0 := 2^{\frac{1}{n}} C R^{\frac{1}{n}} > 0$.

Για τον υπολογισμό του κάτω φράγματος θα χρησιμοποιήσουμε την Αρχή Σύγκρισης 2.3.2. Θεωρούμε την κυρτή συνάρτηση $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με $w(z) := \lambda^{\frac{1}{n}} \frac{|z-x_0|^2 - r^2}{2}$. Στο $\partial B(x_0, r) \subseteq \Omega$ έχουμε $w = 0 \geq v$, ενώ στο $B(x_0, r)$ ισχύει $\mu_w = \det D^2 w(x) dx = \lambda dx \leq \mu_v$. Αυτό σημαίνει ότι η σχέση $0 \geq w \geq v$ ισχύει σε ολόκληρο το $B(x_0, r)$. Επομένως έχουμε

$$\min_{\Omega} v \leq \min_{B(x_0, r)} v \leq \min_{B(x_0, r)} w \leq w(x_0) = -\frac{1}{2} \lambda^{\frac{1}{n}} r^2 < 0$$

και άρα αρκεί να θεωρήσουμε $c_0 := \frac{1}{2} \lambda^{\frac{1}{n}} r^2 > 0$. □

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση μπορούμε να βρούμε θετικά άνω και κάτω φράγματα για τον όγκο ενός τμήματος.

Πόρισμα 4.1.10 *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση ώστε να ισχύουν οι ανισότητες $\lambda dx \leq \mu_u \leq \Lambda dx$ στο Ω για κάποιες σταθερές $0 < \lambda \leq \Lambda$. Αν $S := S(x_0, p, t) \subset \subset \Omega$ είναι το τμήμα για $x_0 \in \Omega$, $p \in \partial u(x_0)$, $t > 0$, υπάρχουν σταθερές $0 < c_1 \leq C_1$ που εξαρτώνται αποκλειστικά από τα n, λ, Λ ώστε*

$$c_1 t^{\frac{n}{2}} \leq |S| \leq C_1 t^{\frac{n}{2}}$$

Απόδειξη. Αφού το μέτρο μ_u είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue του Ω , από το Θεώρημα Radon-Nikodym (δείτε [29, Θεώρημα 10.15]) υπάρχει $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ώστε $\mu_u = f dx$.

Ας είναι $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ η αφινική απεικόνιση που κανονικοποιεί το S . Τότε, όπως έχουμε δει στην Πρόταση 4.1.8, υπάρχει κανονικοποιημένη λύση $v : L(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ που αντιστοιχεί στην u . Από την Πρόταση 4.1.9 γνωρίζουμε ότι υπάρχουν σταθερές $c_0, C_0 > 0$ που εξαρτώνται μόνο από τα n, λ, Λ ώστε να ισχύει $-C_0 \leq \min_{L(S)} v \leq -c_0$. Αντικαθιστούμε την v με τον τύπο της και έχουμε

$$-C_0 \leq |\det L|^{\frac{2}{n}} \min_{L(S)} (u - \ell_{x_0, p} - t) \circ L^{-1} \leq -c_0$$

Ωστόσο $p \in \partial u(x_0) \implies \min_{L(S)} (u - \ell_{x_0,p} - t) \circ L^{-1} = (u - \ell_{x_0,p} - t) \circ L^{-1}(x_0) = -t$, οπότε

$$-C_0 \leq -|\det L|^{\frac{2}{n}} t \leq -c_0 \implies c_0^{\frac{n}{2}} \leq |\det L| t^{\frac{n}{2}} \leq C_0^{\frac{n}{2}}$$

Επειδή, όμως, $|S| = \frac{1}{|\det L|} |L(S)|$ και $B(0,1) \subseteq L(S) \subseteq B(0,n)$ έχουμε

$$\frac{|B(0,1)|}{|\det L|} \leq |S| \leq \frac{|B(0,n)|}{|\det L|} \implies |B(0,1)| C_0^{-\frac{n}{2}} t^{\frac{n}{2}} \leq |S| \leq |B(0,n)| C_0^{-\frac{n}{2}} t^{\frac{n}{2}}$$

□

Επιπλέον, προκύπτει μία εκτίμηση για την απόσταση των συνόρων τμημάτων με κοινό κέντρο και κλίση.

Πόρισμα 4.1.11 *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό, κυρτό σύνολο ώστε να υπάρχουν $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r, R > 0$ με $B(x_0, r) \subseteq \Omega \subseteq B(x_0, R)$ και $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση που ικανοποιεί τις σχέσεις*

$$\begin{cases} \lambda dx \leq \mu_v \leq \Lambda dx, & \text{στο } \Omega \\ v = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

για κάποιες σταθερές $0 < \lambda \leq \Lambda$. Αν $x_1 \in \Omega$ είναι ένα σημείο όπου η v λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της $-h := v(x_1) < 0$, θέτουμε $S_t := S(x_1, 0, th)$ για $t \in (0, 1]$.

Για κάθε $s \in (0, 1)$ και $0 < t_1 \leq t_2 \leq 1$ με $t_2 - t_1 \geq s$, υπάρχει σταθερά $c_s > 0$ που εξαρτάται αποκλειστικά από τα $n, \lambda, \Lambda, r, R, s$ ώστε

$$\text{dist}(S_{t_1}, \partial S_{t_2}) \geq c_s$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την κυρτή συνάρτηση $\hat{v} := v + (1 - t_2)h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{cases} \lambda dx \leq \mu_{\hat{v}} = \mu_v \leq \Lambda dx, & \text{στο } S_{t_2} \\ \hat{v} = 0, & \text{στο } \partial S_{t_2} \end{cases}$$

Τότε από την Πρόταση 4.1.9 έχουμε σταθερά $C > 0$ που εξαρτάται μόνο από τα n, Λ, R ώστε $|\hat{v}(z)| \leq C \text{dist}(z, \partial S_{t_2})^{\frac{1}{n}}$, $\forall z \in S_{t_2}$. Για $z \in S_{t_1}$ έχουμε

$$v(z) < -h + t_1 h \implies \hat{v}(z) < (t_1 - t_2)h \leq -sh$$

οπότε, επειδή $S_{t_1} \subseteq S_{t_2}$, είναι $(sh)^n \leq C^n \text{dist}(S_{t_1}, \partial S_{t_2})$. Και πάλι από την Πρόταση 4.1.9 έχουμε $h \geq c_0$, όπου αυτή η σταθερά εξαρτάται μόνο από τα n, λ, r . □

Πόρισμα 4.1.12 *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό, κυρτό σύνολο ώστε να υπάρχουν $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r, R > 0$ με $B(x_0, r) \subseteq \Omega \subseteq B(x_0, R)$ και $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση που ικανοποιεί τις σχέσεις*

$$\begin{cases} \lambda dx \leq \mu_v \leq \Lambda dx, & \text{στο } \Omega \\ v = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

για κάποιες σταθερές $0 < \lambda \leq \Lambda$.

Αν $x_1 \in \Omega$ είναι ένα σημείο όπου η v λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της, υπάρχει σταθερά $c > 0$ που εξαρτάται αποκλειστικά από τα $n, \lambda, \Lambda, r, R$ ώστε

$$\text{dist}(x_1, \partial\Omega) \geq c$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $s := \frac{1}{2}$, $t_1 \in (0, \frac{1}{2}]$, $t_2 := 1$ και έχουμε $t_2 - t_1 \geq \frac{1}{2} = s$. Τότε από το Πόρισμα 4.1.11 γνωρίζουμε ότι υπάρχει σταθερά $c_{\frac{1}{2}} > 0$ ώστε $\text{dist}(S_{t_1}, \partial S_1) \geq c_{\frac{1}{2}}$. Ωστόσο επειδή $v < v(x_1) + h = v(x_1) - v(x_1) = 0$ έχουμε $S_1 = [v < 0] = \Omega$. Συνεπώς τότε ισχύει

$$\text{dist}(x_1, \partial\Omega) \geq \text{dist}(S_{t_1}, \partial S_1) \geq c_{\frac{1}{2}}$$

αφού $x_1 \in S_{t_1}$. □

Τέλος, αν το ύψος ενός τμήματος είναι φραγμένο μακριά από το μηδέν, μπορούμε έχουμε μία εκτίμηση για το εσωτερικό του και την νόρμα της αφινικής απεικόνισης που το κανονικοποιεί.

Πόρισμα 4.1.13 *Ας $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό φραγμένο σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση ώστε $\lambda dx \leq \mu_u \leq \Lambda dx$ για κάποιες σταθερές $\lambda, \Lambda > 0$. Επιπλέον, θεωρούμε $x_0 \in \Omega$, $p \in \partial u(x_0)$, $t \geq s > 0$, $S := S(x_0, p, t) \subset \subset \Omega$ και L την αφινική απεικόνιση που κανονικοποιεί το S . Τότε υπάρχουν σταθερές $K, \rho > 0$ που εξαρτώνται αποκλειστικά από τα $s, n, \lambda, \Lambda, \text{diam}(\Omega)$ ώστε να ισχύει $B(x_0, \rho) \subseteq S$ και $\|L\| \leq K$, $\|L^{-1}\| \leq K$.*

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 4.1.10 γνωρίζουμε ότι υπάρχει σταθερά $c_1 > 0$ ώστε $|S| \geq c_1 t^{\frac{n}{2}}$ και παρατηρούμε ότι $S \subseteq B(x_0, \text{diam}(\Omega))$. Επειδή το S είναι και φραγμένο, από το Πόρισμα 4.1.7(ii) συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $r > 0$ και $x_1 \in S$ ώστε $B(x_1, r) \subseteq S$. Μάλιστα, αν ανακαλέσουμε την απόδειξη αυτού του πορίσματος, παρατηρούμε ότι το x_1 είναι το κέντρο του ελλειψοειδούς $L^{-1}(B(0, 1))$.

Εξαιτίας των σχέσεων $B(0, 1) \subseteq L(S) \subseteq B(0, n)$ και $B(x_1, r) \subseteq S \subseteq B(x_1, \text{diam}(\Omega))$ έχουμε $L^{-1}(B(0, 1)) \subseteq B(x_1, \text{diam}(\Omega))$ και $L(B(x_1, r)) \subseteq B(0, n)$. Τότε υπολογίζουμε

$$z' \in B(x_1, r) \implies \left| L \left(\frac{z' - x_1}{r} \right) \right| \leq n \implies \|L\| = \sup_{|z - x_1| \leq 1} |L(z)| \leq \frac{n}{r}$$

ενώ ανάλογα έχουμε $\|L^{-1}\| \leq \text{diam}(\Omega)$.

Ας είναι v η κανονικοποιημένη λύση που αντιστοιχεί στην u στο S , όπως έχουμε δει στην Πρόταση 4.1.8. Αυτή παρουσιάζει ελάχιστο πάνω από το $S^* := L(S)$ στο σημείο $L(x_0)$, οπότε από το Πόρισμα 4.1.12 προκύπτει σταθερά $c > 0$ που εξαρτάται από τα n, λ, Λ ώστε $\text{dist}(L(x_0), \partial S^*) \geq c$. Ακόμα, παρατηρούμε ότι

$$\text{dist}(L(x_0), \partial S^*) = \inf_{z \in \partial S} |L(x_0) - L(z)| \leq \|L\| \inf_{z \in \partial S} |x_0 - z| \leq \|L\| \text{dist}(x_0, \partial S)$$

οπότε έχουμε $\text{dist}(x_0, \partial S) \geq \frac{cr}{n}$. Συνεπώς το $\rho := \frac{cr}{n} > 0$ είναι η ζητούμενη ακτίνα. □

4.2 Διαφορισιμότητα και γνήσια κυρτότητα λύσεων Alexandron στο $\mathbb{R}^2$

Η περίπτωση της κανονικότητας των λύσεων Alexandron της εξίσωσης Monge-Ampère στον $\mathbb{R}^2$ παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αφού σε αυτό το χώρο ισχύουν ισχυρότερα αποτελέσματα σε σχέση με τους χώρους μεγαλύτερης διάστασης· για παράδειγμα οι λύσεις εξισώσεων με δεξιά πλευρά φραγμένη μακριά από το μηδέν και το άπειρο είναι γνήσια κυρτές και συνεχώς διαφορίσιμες στον $\mathbb{R}^2$, ενώ γενικότερα κάτι τέτοιο δεν ισχύει απαραίτητα. Ιστορικά, αυτά τα αποτελέσματα ήταν από τα πρώτα που αποδείχθηκαν αναφορικά με την κανονικότητα των Alexandron λύσεων της εξίσωσης, ενώ λειτούργησαν και ως πρότυπο για την εξαγωγή παρόμοιων συμπερασμάτων στις μεγαλύτερες διαστάσεις από μετέπειτα ερευνητές. Η απόδειξη τους οφείλεται στον Alexandron.

Για τις λύσεις Alexandron της εξίσωσης Monge-Ampère στον $\mathbb{R}^2$ ισχύει μία αρχή διχοτομίας· είτε αυτές ανήκουν στην κλάση C^1 , είτε αν παρουσιάζουν κάποια ιδιομορφία (δηλαδή ένα σημείο στο οποίο η συνάρτηση δεν είναι διαφορίσιμη) αυτή επεκτείνεται κατά μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος που διατρέχει το πεδίο λύσης. Μάλιστα κατά μήκος αυτού του τμήματος η λύση είναι αφινική, δηλαδή εκεί η λύση δεν είναι γνήσια κυρτή. Διαφαίνεται, λοιπόν, μία σχέση μεταξύ της γνήσιας κυρτότητας και της διαφορισιμότητας της λύσης.

Θεώρημα 4.2.1 (Alexandron) *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση τέτοια ώστε $\mu_u = f dx$ για $f \in L_{loc}^\infty(\Omega)$. Τότε ισχύει μόνο ένα από τα παρακάτω ενδεχόμενα:*

- (i) είτε $u \in C^1(\Omega)$
- (ii) είτε υπάρχουν $p_0 \neq p_1 \in \mathbb{R}^2$ και ευθύγραμμο τμήμα $\Sigma \subseteq \Omega$ με $\partial\Sigma \subseteq \partial\Omega$ πάνω στο οποίο η u είναι αφινική ώστε $\partial u(z) \supseteq [p_0, p_1]$, $\forall z \in \Sigma$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $u \notin C^1(\Omega)$ και θα δείξουμε ότι υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα $\Sigma \subseteq \Omega$ με τις ζητούμενες ιδιότητες.

Αρχικά παρατηρούμε ότι λόγω του Πορίσματος 2.1.11 η Du δεν μπορεί να υπάρχει παντού στο Ω χωρίς να είναι και συνεχής. Συνεπώς θα πρέπει να υπάρχει σημείο $x_0 \in \Omega$ στο οποίο η u δεν είναι διαφορίσιμη. Επιπλέον, από την Πρόταση 2.1.7 συμπεραίνουμε ότι το $\partial u(x_0)$ δεν είναι μονοσύνολο, οπότε υπάρχουν $p_1, p_2 \in \partial u(x_0)$ με $p_1 \neq p_2$ και $[p_1, p_2] \subseteq \partial u(x_0)$.

Θεωρώντας $v(z) := u(z+x_0) - u(x_0) - \langle p_0, z \rangle$, όπου $p_0 := \frac{p_1+p_2}{2}$, έχουμε $v(z) \geq \langle p-p_0, z \rangle$ $\forall p \in [p_1, p_2]$ και $\forall z \in \Omega$. Θεωρώντας επιπλέον την στροφή $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ γύρω από το p_0 που ταυτίζει το $\frac{1}{|p_2-p_0|}(p_2-p_0)$ με το e_1 (και άρα το $\frac{1}{|p_1-p_0|}(p_1-p_0)$ με το $-e_1$) και θέτοντας $\tilde{v}(z) := v(A^T z)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{v}(z) &\geq \langle p-p_0, A^T z \rangle = \langle A(p-p_0), z \rangle \\ &= (-\lambda|p_1-p_0| + (1-\lambda)|p_2-p_0|) \langle e_1, z \rangle \\ &= (1-2\lambda) \frac{|p_2-p_1|}{2} \langle e_1, z \rangle \quad \forall z \in \Omega \end{aligned}$$

όπου $p = \lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2$ με $\lambda \in [0, 1]$. Επιλέγουμε τα p_1, p_2 αρκετά κοντά ώστε $\alpha := \frac{|p_2 - p_1|}{2} \in (0, 1)$. Αποδεικνύοντας το θεώρημα για την $\tilde{u}$ και αντιστρέφοντας τις αλλαγές μεταβλητών προκύπτει το ζητούμενο. Στην συνέχεια θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι οι $u, \tilde{u}$, ταυτίζονται και υποθέτουμε ότι $x_0 = 0$, $p_1 = -ae_1$, $p_2 = ae_1$ για κάποιο $a \in (0, 1)$.

Τότε έχουμε $\pm ae_1 \in \partial u(0)$, οπότε προκύπτει ότι $u(z) \geq \langle \pm ae_1, z \rangle \quad \forall z \in \Omega$ ή ισοδύναμα $u(z) \geq a|z_1| \quad \forall z = (z_1, z_2) \in \Omega$. Θέτουμε $\Sigma := \Omega \cap \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : z_1 = 0\}$ και θα δείξουμε ότι $u|_{\Sigma} = 0$. Ακόμα, ας είναι

$$\begin{aligned} \tau^+ &:= \sup\{\tau \geq 0 : u(0, \tau) = 0 \text{ και } \tau e_2 \in \Omega\} \\ &\text{και} \\ \tau^- &:= \inf\{\tau \leq 0 : u(0, \tau) = 0 \text{ και } \tau e_2 \in \Omega\} \end{aligned}$$

οπότε παρατηρούμε ότι $\tau^- \leq 0 \leq \tau^+$ και $[\tau^- e_2, \tau^+ e_2] \subseteq \Sigma$.

Αν ισχυε ότι $\{\tau^- e_2, \tau^+ e_2\} \not\subseteq \partial \Omega$ τουλάχιστον ένα από τα δύο στοιχεία του συνόλου δεν θα άνηκε στο σύνορο, δηλαδή κάποιο από αυτά θα άνηκε στο εσωτερικό. Έστω $\tau^+ e_2 \in \Omega$. Τώρα θεωρούμε μία περιοχή $U \subset \subset \Omega$ του $[0, \tau^+ e_2]$, οπότε από την Παρατήρηση 2.1.9 έπεται ότι υπάρχει σταθερά $L \geq 1$ ώστε η $u|_U$ να είναι L -Lipschitz συνεχής. Επιπλέον, θεωρούμε $\delta > 0$, $h := u(0, \tau^+ + \delta) > 0$ και $R := [-h, h] \times [\tau^+ - \delta, \tau^+ + (1 + L)\delta]$. Μάλιστα, αφού το U είναι ανοικτό, περιέχει το $[0, \tau^+ e_2]$ και η u είναι συνεχής, μπορούμε να επιλέξουμε το δ όσο μικρό χρειάζεται έτσι ώστε να ισχύει $R \subseteq U$ και $\delta < \tau^+$. Τέλος θέτουμε

$$R_{top} := (\{\pm h\} \times [\tau^+ - \delta, \tau^+ + (1 + L)\delta]) \cup ([-h, h] \times \{\tau^+ + (1 + L)\delta\}) \subseteq \partial R$$

Καθώς στο Ω ισχύει $u(z) \geq a|z_1|$, στο $\{\pm h\} \times [\tau^+ - \delta, \tau^+ + (1 + L)\delta]$ έχουμε $u(z) \geq ah$, ενώ επειδή η $u|_U$ είναι L -Lipschitz υπολογίζουμε

$$u(s, \tau^+) \leq \underbrace{u(0, \tau^+)}_{=0} + L|s - 0| \leq L|s|, \quad (s, \tau^+) \in U$$

Άρα αν περιοριστούμε στο R αυτή η ανισότητα γίνεται $u(s, \tau^+) \leq h$, $\forall s \in [-\frac{h}{L}, \frac{h}{L}]$. Επειδή η u είναι κυρτή, υπολογίζουμε

$$u(z + t(z - x)) \geq u(z) + t(u(z) - u(x)), \quad \forall t \geq 0 \text{ και } x, z \in R \text{ με } z + t(z - x) \in R$$

Θέτοντας $z := (0, \tau^+ + \delta)$, $t := L$ και $x := (s, \tau^+) \in [-\frac{h}{L}, \frac{h}{L}] \times \{\tau^+\}$ έχουμε $z + t(z - x) = (-Ls, \tau^+ + \delta(1 + L)) \in R$, οπότε είναι

$$u(-Ls, \tau^+ + \delta(1 + L)) \geq \underbrace{u(0, \tau^+ + \delta)}_{=h} + L \left(\underbrace{u(0, \tau^+ + \delta)}_{=h} - \underbrace{u(s, \tau^+)}_{\leq h} \right) \geq h \geq ah$$

Αυτό σημαίνει ότι στο $[-h, h] \times \{\tau^+ + (1 + L)\delta\}$ έχουμε $u \geq ah$ και άρα αυτή η ανισότητα ισχύει σε ολόκληρο το R_{top} .

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε ένα κάτω φράγμα για το $\mu_u(R)$. Αν επιλέξουμε $b = (b_1, b_2)$ με $|b_1| \leq \frac{a}{4}$ και $0 < b_2 < \frac{ah}{4(1+L)\delta}$, ορίζουμε την αφινική συνάρτηση

$$\ell_b(z_1, z_2) := b_1 z_1 + b_2(z_2 - \tau^+)$$

Από τα φράγματα που έχουμε επιλέξει για τα b_1, b_2 , την συνθήκη $L \geq 1$ και τις ανισότητες που ισχύουν για τα s, t όταν $(s, t) \in R_{top}$, υπολογίζουμε

$$\ell_b|_{R_{top}} \leq \frac{a}{4}h + \frac{ah}{4(1+L)\delta}(\tau^+ + (1+L)\delta - \tau^+) = \frac{a}{2}h < ah \leq u|_{R_{top}}$$

Από τα ίδια φράγματα για $(z_1, z_2) \in \partial R \setminus R_{top}$ υπολογίζουμε

$$\ell_b(z_1, z_2) \leq \frac{a}{4}|z_1| + \underbrace{b_2(\tau^+ - \delta - \tau^+)}_{<0} < a|z_1| \leq u(z)$$

οπότε έχουμε $\ell_b|_{\partial R} < u|_{\partial R}$. Καθώς το ∂R είναι συμπαγές και η $u - \ell_b$ συνεχής, το $\varepsilon := \frac{1}{2} \inf_{\partial R} (u - \ell_b)$ λαμβάνεται σε κάποιο σημείο του ∂R . Συνεπώς έχουμε $\varepsilon > 0$.

Θέτουμε $V := [u < \ell_b + \varepsilon]$. Επειδή έχουμε $(u - \ell_b)(0, \tau^+) = 0$ και η $u - \ell_b$ είναι κυρτή, παντού εκτός του R λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες ή ίσες από το 2ε . Αυτό σημαίνει ότι το μη κενό ανοικτό σύνολο V περιέχεται στο R και μάλιστα συμπαγώς. Από την Πρόταση 2.1.17 για τις συναρτήσεις $u, \ell_b + \varepsilon$ στο V συμπεραίνουμε ότι

$$\partial u(R) \supseteq \partial u(V) \supseteq \partial \ell_b(V) = \{b\}$$

Λόγω της γενικότητας στην επιλογή του b βρίσκουμε $\partial u(R) \supseteq \left[-\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right] \times \left[0, \frac{ah}{4(1+L)\delta}\right]$,

δηλαδή είναι $\mu_u(R) \geq \frac{a^2 h}{8(1+L)\delta}$.

Το R είναι ορθογώνιο οπότε υπολογίζουμε $|R| = 2h(2+L)\delta$, ενώ αφού η u αποτελεί λύση της $\mu_u = f dx$ με $f \in L_{loc}^\infty(\Omega)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_u(R) &= \int_R f dx \leq |R| \|f\|_{L^\infty(U)} \leq 2(2+L)h\delta \|f\|_{L^\infty(U)} \\ &\implies \frac{a^2 h}{8(1+L)\delta} \leq 2(2+L)h\delta \|f\|_{L^\infty(U)} \\ &\iff \frac{a^2}{16(1+L)(2+L)\|f\|_{L^\infty(U)}} \leq \delta^2 \end{aligned}$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι το αριστερό μέλος της ανισότητας είναι κάποιος σταθερός θετικός πραγματικός αριθμός, ενώ το δεξί μέλος μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό προσεγγίζοντας το 0. Συνεπώς η υπόθεση ότι το $\tau^+ e_2$ βρίσκεται στο εσωτερικό του Ω δεν ευσταθεί. Ανάλογα δείχνουμε ότι $\tau^- e_2 \in \partial\Omega$ όποτε έχουμε ότι $\partial\Sigma = \{\tau^\pm e_2\} \subseteq \partial\Omega$.

Από αυτό και την κυρτότητα της u κατά μήκος του Σ προκύπτει ότι $u|_{\Sigma} = 0$. Συνεπώς εκεί η u είναι αφινική, ενώ από την ανισότητα $u(z) \geq a|z_1| \quad \forall z = (z_1, z_2) \in \Omega$ είναι άμεσο ότι $\partial u(w) \supseteq [-ae_1, ae_1], \quad \forall w \in \Sigma$. $\square$

Έχοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορούμε να χαρακτηρίσουμε ως προς τη λειότητα τις λύσεις Alexandron του προβλήματος Dirichlet της εξίσωσης στο επίπεδο με μηδενική συνοριακή συνθήκη ή με μία αφινική συνοριακή συνθήκη γενικότερα.

Πόρισμα 4.2.2 *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό, κυρτό, φραγμένο σύνολο, $f \in L_{loc}^{\infty}(\Omega)$ με $f > 0$ και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση που λύνει το πρόβλημα Dirichlet*

$$\begin{cases} \mu_u = f \, dx, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Τότε $u \in C^1(\Omega)$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $u \notin C^1(\Omega)$. Από το Θεώρημα 4.2.1 έπεται ότι υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα $\Sigma \subseteq \Omega$ πάνω από το οποίο η u δεν είναι διαφορίσιμη. Καθώς τα άκρα του βρίσκονται στο σύνορο του Ω έχουμε ότι $u|_{\partial\Sigma} = u|_{\partial\Omega} = 0$, οπότε είναι $u|_{\Sigma} = 0$. Επειδή η u είναι μία κυρτή συνάρτηση που μηδενίζεται στο σύνορο αλλά και σε κάποια σημεία στο εσωτερικό του Ω συμπεραίνουμε ότι μηδενίζεται παντού στο $\bar{\Omega}$. Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι $\mu_u \neq 0$. $\square$

Συνεχίζουμε αποδεικνύοντας ότι, όταν η f είναι φραγμένη μακριά από το 0, κάθε λύση Alexandron της εξίσωσης στο επίπεδο είναι γνήσια κυρτή.

Θεώρημα 4.2.3 (Alexandron) *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση ώστε $\mu_u = f \, dx$ για κάποια $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ με $\frac{1}{f} \in L_{loc}^{\infty}(\Omega)$.*

Τότε η u είναι γνήσια κυρτή.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το συμπέρασμα του θεωρήματος δεν ισχύει. Τότε η u δεν είναι γνήσια κυρτή, δηλαδή σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.1.6 υπάρχουν σημεία $x_0 \neq y_0 \in \Omega$ και $p_0 \in \partial u(x_0)$ ώστε $u(y_0) = u(x_0) + \langle p_0, y_0 - x_0 \rangle$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι για $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει $u(\lambda x_0 + (1 - \lambda)y_0) = \lambda u(x_0) + (1 - \lambda)u(y_0)$ ή ισοδύναμα $u(z) = a + \langle p_0, z - x_0 \rangle$ για όλα τα $z \in \Sigma := [x_0, y_0]$, όπου $a = u(x_0)$.

Ας θεωρήσουμε $U \subset \subset \Omega$ μία ανοικτή κυρτή περιοχή με $\Sigma \cap U \neq \emptyset$ και $u^* : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ τον μετασχηματισμό Legendre της $u|_{\bar{U}}$, δηλαδή της κυρτής συνάρτησης που ταυτίζεται με την u στο $\bar{U}$ και έχει την τιμή $+\infty$ παντού αλλού. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $x_0, y_0 \in U$. Αφού η u είναι αφινική στο Σ και $p_0 \in \partial u(x_0)$ έχουμε $p_0 \in \partial u(y_0)$, οπότε είναι $p_0 \in \partial u(z) \quad \forall z \in \Sigma$. Τότε, όπως έχουμε δει στην Παρατήρηση 2.1.13, είναι $\Sigma \cap U \subseteq \partial u^*(p_0)$ και άρα το σύνολο $\partial u^*(p_0)$ δεν είναι μονοσύνολο, δηλαδή από την Πρόταση 2.1.7 έπεται ότι η u^* δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο p_0 .

Παρατηρούμε ότι για κάθε Borel σύνολο $F \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι

$$\mu_{u^*}(F) = \int_{\partial u^*(F)} 1 \, dx = \int_{\partial u^*(F)} \frac{1}{f(x)} f(x) \, dx \leq \left\| \frac{1}{f} \right\|_{L^\infty(\bar{U})} \mu_u(\partial u^*(F))$$

ενώ σύμφωνα με τους υπολογισμούς του Παραδείγματος 2.2.3 έχουμε $\mu_{u^*}(F) \leq \left\| \frac{1}{f} \right\|_{L^\infty(\bar{U})} |F|$.

Αυτό σημαίνει ότι το μέτρο μ_{u^*} είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue του $\mathbb{R}^2$. Συνεπώς από το Θεώρημα Radon-Nikodym (δείτε [29, Θεώρημα 10.15]) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδική $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ ώστε $\mu_{u^*} = g \, dx$. Είναι εμφανές ότι $g \geq 0$, ενώ σε κάθε συμπαγές $K \subseteq \mathbb{R}^2$ έχουμε $\lambda |A_\lambda| \leq \mu_{u^*}(A_\lambda) \leq \left\| \frac{1}{f} \right\|_{L^\infty(\bar{U})} |A_\lambda| \implies |A_\lambda| = 0$ όταν $A_\lambda := \{x \in K : g(x) \geq \lambda\}$ και $\lambda > \left\| \frac{1}{f} \right\|_{L^\infty(\bar{U})}$. Αυτό σημαίνει ότι $\|g\|_{L^\infty(K)} \leq \left\| \frac{1}{f} \right\|_{L^\infty(\bar{U})}$, οπότε έχουμε $g \in L^\infty_{loc}(\bar{U})$.

Αφού η u^* δεν είναι διαφορίσιμη στο p_0 και λύνει την εξίσωση $\mu_{u^*} = g \, dx$ στο $\mathbb{R}^2$ από το Θεώρημα 4.2.1 ότι υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το p_0 και πάνω στο οποίο η u^* είναι αφινική. Αυτό έχει άκρα στο σύνορο του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή είναι μία ολόκληρη ευθεία ℓ . Ωστόσο, στο Λήμμα 2.1.16 έχουμε αποδείξει ότι τότε το $\partial u^*(\mathbb{R}^2)$ περιέχεται σε υπερεπίπεδο (δηλαδή ευθεία στην περίπτωση του $\mathbb{R}^2$) κάθετο στην ℓ . Συνεπώς έχουμε $|\partial u^*(\mathbb{R}^2)| = 0$.

Επιλέγοντας $x \in U$ και $p \in \partial u(x)$ έχουμε $x \in \partial u^*(p)$, οπότε είναι $U \subseteq \partial u^*(\mathbb{R}^2)$. Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι τότε $|U| \leq |\partial u^*(\mathbb{R}^2)| = 0$ και το U είναι μη κενό και ανοικτό. Επομένως δεν μπορούν να υπάρχουν σημεία όπου η u δεν είναι γνήσια κυρτή. $\square$

Συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 4.2.1, 4.2.3 εξασφαλίζεται λειότητα στο εσωτερικό του πεδίου λύσης με αρκετά ασθενείς υποθέσεις για την δεξιά πλευρά: για παράδειγμα αρκεί η f να είναι τοπικά ολοκληρώσιμη και να υπάρχουν σταθερές $m, M > 0$ ώστε $m < f < M$. Το αποτέλεσμα διατυπώνεται στο επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 4.2.4 *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση ώστε $\mu_u = f \, dx$ για $f \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ με $\frac{1}{f} \in L^\infty_{loc}(\Omega)$. Τότε $u \in C^1(\Omega)$.*

4.3 Γνήσια κυρτές λύσεις Alexandrov

Για τις διαστάσεις $n > 2$, η υπόθεση ότι μία λύση Alexandrov είναι γνήσια κυρτή, αν και δεν είναι πάντα αναγκαία, είναι κομβική ώστε να εξασφαλιστεί η κανονικότητα της, όπως άλλωστε διαφαίνεται και από τα θεωρήματα αυτού του κεφαλαίου. Όταν αυτή η ιδιότητα απουσιάζει, η λύση μπορεί να μην είναι καν διαφορίσιμη ακόμα και αν η συνάρτηση της δεξιάς πλευράς είναι λεία, φραγμένη μακριά από το μηδέν και το άπειρο και το σύνορο είναι λείο [10, Παρατήρηση 2.19]. Για να γίνει καλύτερα κατανοητό το γεγονός αυτό, θα κατασκευάσουμε μία τέτοια λύση: ένα παράδειγμα που οφείλεται στον Pogorelov. Εξαιτίας του Θεωρήματος 4.2.3 αυτή η κατασκευή είναι δυνατή μόνο για χώρους διάστασης $n > 2$.

Θεωρούμε $(x', x_n) \in \mathbb{R}^n$ και u μία λεία συνάρτηση που ικανοποιεί μία σχέση ομογένειας ως προς τις πρώτες $n - 1$ μεταβλητές όπως παρακάτω

$$u(x', x_n) = \lambda^{-\gamma} u(\lambda x', x_n), \quad \forall \lambda > 0$$

όταν το x ανήκει σε κάποιο ανοικτό σύνολο και $\gamma \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $u_\lambda(x', x_n) := \lambda^{-\gamma} u(\lambda x', x_n)$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \nabla u_\lambda(x) &= (\lambda^{1-\gamma} u_1, \dots, \lambda^{1-\gamma} u_{n-1}, \lambda^{-\gamma} u_n)(\lambda x', x_n) \\ &= \lambda^{-\gamma} (\lambda \nabla_{x'} u, u_n)(\lambda x', x_n) \\ &\quad \text{και} \\ D^2 u_\lambda(x) &= \lambda^{-\gamma} \begin{pmatrix} \lambda^2 u_{11} & \cdots & \lambda^2 u_{1(n-1)} & \lambda u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda^2 u_{(n-1)1} & \cdots & \lambda^2 u_{(n-1)(n-1)} & \lambda u_{(n-1)n} \\ \lambda u_{n1} & \cdots & \lambda u_{n(n-1)} & u_{nn} \end{pmatrix} (\lambda x', x_n) \end{aligned}$$

Αναπτύσσουμε την ορίζουσα ως προς την τελευταία γραμμή και εξάγουμε τους κοινούς παράγοντες λ , λ^2 όπου αυτοί εμφανίζονται, οπότε προκύπτει η ισότητα

$$\begin{aligned} \det D^2 u_\lambda(x) &= \lambda^{-\gamma n} \left(\lambda^{2(n-1)} \det(D^2 u)_{nn} u_{nn} - (\lambda^2)^{n-2} \lambda \det(D^2 u)_{n(n-1)} \lambda u_{n(n-1)} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (-1)^{n+1} (\lambda^2)^{n-2} \lambda \det(D^2 u)_{n1} \lambda u_{n1} \right) \Big|_{(\lambda x', x_n)} \\ &= \lambda^{-\gamma n} \lambda^{2(n-1)} \left(\det(D^2 u)_{nn} u_{nn} - \det(D^2 u)_{n(n-1)} u_{n(n-1)} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (-1)^{n+1} \det(D^2 u)_{n1} u_{n1} \right) \Big|_{(\lambda x', x_n)} \\ &= \lambda^{2(n-1)-\gamma n} \det D^2 u(\lambda x', x_n) \end{aligned}$$

όπου με $(D^2 u)_{ij}$ συμβολίζουμε τον $(n-1) \times (n-1)$ -πίνακα που προκύπτει όταν από τον πίνακα $D^2 u$ αφαιρέσουμε την i -γραμμή και την j -στήλη. Επιλέγοντας $\gamma := 2 - \frac{2}{n}$ έχουμε

$$\det D^2 u(x) = \det D^2 u_\lambda(x) = \det D^2 u(\lambda x', x_n), \quad \forall \lambda > 0$$

Παρατηρούμε ότι, όταν $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία λεία συνάρτηση, οι συναρτήσεις της μορφής

$$u(x', x_n) := |x'|^{2-\frac{2}{n}} h(x_n)$$

είναι ομογενείς υπό την έννοια που αναφέραμε προηγουμένως. Επιπλέον, αν $A : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ είναι κάποια στροφή παρατηρούμε ότι

$$u(Ax', x_n) = \langle Ax', Ax' \rangle^{1-\frac{1}{n}} h(x_n) = \langle x', x' \rangle^{1-\frac{1}{n}} h(x_n) = u(x)$$

οπότε η u παραμένει αναλλοίωτη ως προς τις στροφές στην μεταβλητή x' . Επομένως υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} D^2 u(x) &= D^2 (u(Ax', x_n)) = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D^2 u(Ax', x_n) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\implies \det D^2 u(x) = \det D^2(Ax', x_n) \end{aligned}$$

Από τις προηγούμενες ισότητες έπεται ότι

$$\det D^2 u(x) = \det D^2 u\left(\frac{x'}{|x'|}, x_n\right) = \det D^2 u(e_1, x_n), \quad \text{όταν } x' \neq 0$$

Η u είναι παντού συνεχώς διαφορίσιμη με

$$Du(x) = \left(\left(2 - \frac{2}{n}\right) |x'|^{-\frac{2}{n}} h(x_n) x', |x'|^{2-\frac{2}{n}} h'(x_n) \right)$$

ενώ για $i, j = 1, \dots, n-1$ και $x' \neq 0$ είναι

$$1. \quad \partial_{ij} u(x) = \begin{cases} -\frac{2}{n} \left(2 - \frac{2}{n}\right) |x'|^{-\frac{2}{n}-2} h(x_n) x_i x_j & , i \neq j \\ -\frac{2}{n} \left(2 - \frac{2}{n}\right) |x'|^{-\frac{2}{n}-2} h(x_n) x_i^2 + \left(2 - \frac{2}{n}\right) |x'|^{-\frac{2}{n}} h(x_n) & , i = j \end{cases}$$

$$2. \quad \partial_{in} u(x) = \partial_i \left(|x'|^{2-\frac{2}{n}} h'(x_n) \right) = \left(2 - \frac{2}{n}\right) |x'|^{-\frac{2}{n}} h'(x_n) x_i$$

$$3. \quad \partial_{ni} u(x) = \partial_n \left(\left(2 - \frac{2}{n}\right) |x'|^{-\frac{2}{n}} h(x_n) x_i \right) = \left(2 - \frac{2}{n}\right) |x'|^{-\frac{2}{n}} h'(x_n) x_i$$

$$4. \quad \partial_{nn} u(x) = |x'|^{2-\frac{2}{n}} h''(x_n)$$

Συνεπώς στο (e_1, x_n) έχουμε

$$1. \quad \partial_{ij} u(e_1, x_n) = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(2 - \frac{2}{n}\right) h(x_n) & , i = j = 1 \\ \left(2 - \frac{2}{n}\right) h(x_n) & , i = j \neq 1 \end{cases}$$

$$2. \quad \partial_{in} u(e_1, x_n) = \partial_{ni} u(e_1, x_n) = \begin{cases} \left(2 - \frac{2}{n}\right) h'(x_n) & , i = 1 \\ 0 & , i \neq 1 \end{cases}$$

$$3. \quad \partial_{nn} u(e_1, x_n) = h''(x_n)$$

και άρα είναι

$$\det D^2u(x) = \det D^2u(e_1, x_n) = \begin{vmatrix} (\gamma-1)\gamma h(x_n) & 0 & \dots & 0 & \gamma h'(x_n) \\ 0 & \gamma h(x_n) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \gamma h(x_n) & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma h(x_n) & 0 \\ \gamma h'(x_n) & 0 & \dots & 0 & h''(x_n) \end{vmatrix}$$

$$= \left((\gamma-1)\gamma^{n-1}h^{n-1}h'' + (-1)^{1+n}\gamma h'\gamma^{n-2}h^{n-2}(-1)^{(n-1)+1}\gamma h' \right) (x_n)$$

$$= \gamma^{n-1}h^{n-2} \left((\gamma-1)hh'' - \gamma(h')^2 \right) (x_n)$$

όπου για τον υπολογισμό της ορίζουσας αρχικά την αναπτύσσουμε ως προς την πρώτη γραμμή και στη συνέχεια αναπτύσσουμε τους υποπινάκες της ως προς την τελευταία γραμμή τους.

Το πρόβλημα αρχικών τιμών της συνήθους διαφορικής εξίσωσης

$$\begin{cases} \gamma^{n-1}h^{n-2} \left((\gamma-1)hh'' - \gamma(h')^2 \right) = 1 \\ h(0) = 1 \\ h'(0) = 0 \end{cases}$$

έχει λύση σε ένα ανοικτό διάστημα I που περιβάλλει το 0 (δείτε Θεώρημα Ύπαρξης Picard-Lindelöf [27, Θεωρήματα 4.1]). Μάλιστα, λόγω συνέχειας μπορούμε, χωρίς βλάβης της γενικότητας, να θεωρήσουμε ότι είναι παντού θετική εκεί.

Θεωρούμε $\rho > 0$ ώστε $B(0, \rho) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times I$, οπότε για $(x', x_n) \in B(0, \rho)$ με $x' \neq 0$ έχουμε

$$\det D^2u(x) = \det D^2u(e_1, x_n) = 1$$

Θα δείξουμε ότι η u είναι κυρτή. Επειδή για $x \in B(0, \rho)$ με $x' \neq 0$ και A κάποια στροφή του $\mathbb{R}^{n-1}$ έχουμε $D^2u(x) = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D^2u(Ax', x_n) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, αν δείξουμε ότι ο πίνακας $D^2u(e_1, x_n)$ είναι θετικά ορισμένος τότε και ο πίνακας $D^2u(x)$ θα είναι θετικά ορισμένος. Εξαιτίας του κριτηρίου του Sylvester [24, Θεώρημα 7.2.5(b)] και αφού όλες οι ορίζουσες των άνω αριστερών υποπινάκων τάξης $1, \dots, n$ είναι θετικές συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας $D^2u(e_1, x_n)$ είναι πράγματι θετικά ορισμένος. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x, y \in B(0, \rho)$ ώστε $[x, y] \cap [z' = 0] = \emptyset$ έχουμε

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y), \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Λόγω των διαστάσεων των συνόλων $[x, y]$, $[z' = 0]$ από τη Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι υπάρχουν άλλα δύο ενδεχόμενα: είτε αυτά θα έχουν μοναδικό κοινό σημείο, είτε $[x, y] \subseteq [z' = 0]$. Στην πρώτη περίπτωση αφού $n > 2$ ορίζεται επίπεδο από τα $[x, y]$, $[z' = 0]$ και άρα υπάρχει κάποιο κάθετο διάνυσμα e σε αυτό. Θεωρώντας αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$ ώστε $[x_\varepsilon, y_\varepsilon] \subseteq B(0, \rho)$, όπου $x_\varepsilon := x + \varepsilon e$, $y_\varepsilon := y + \varepsilon e$, έχουμε $[x_\varepsilon, y_\varepsilon] \cap [z' = 0] = \emptyset$. Συνεπώς είναι

$$u(\lambda x_\varepsilon + (1 - \lambda)y_\varepsilon) \leq \lambda u(x_\varepsilon) + (1 - \lambda)u(y_\varepsilon), \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

και άρα για $\varepsilon \rightarrow 0$ λόγω συνέχειας ισχύει η ζητούμενη ανισότητα. Τέλος, αν $x, y \in [z' = 0]$ η ανισότητα ισχύει ως ισότητα, αφού και οι δύο πλευρές της μηδενίζονται. Με αυτό ολοκληρώνεται η απόδειξη ότι η u είναι κυρτή και παράλληλα αποδεικνύεται ότι η u δεν είναι γνήσια κυρτή.

Από τους παραπάνω υπολογισμούς έπεται ότι $u \in C^1(B(0, \rho)) \cap C^2(B(0, \rho) \setminus [z' = 0])$. Αν $E \subseteq B(0, \rho)$ είναι ένα σύνολο Borel, καθώς $\partial u([z' = 0]) = \nabla u([z' = 0]) = \{0\}$, έχουμε $\mu_u(E) = \mu_u(E \setminus [z' = 0])$. Επομένως, όπως και στο Παράδειγμα 2.2.2, ισχύει η ισότητα

$$\mu_u(E) = \int_{E \setminus [z' = 0]} \det D^2 u \, dx = \int_{E \setminus [z' = 0]} 1 \, dx = \int_E 1 \, dx$$

Συνεπώς η u είναι μία κυρτή λύση Alexandron της εξίσωσης $\mu_u = 1 \, dx$ στο $B(0, \rho)$, χωρίς να είναι γνήσια κυρτή και χωρίς να ανήκει στην κλάση $C^2(B(0, \rho))$, αφού στο $[z' = 0]$ δεν έχει δεύτερες παραγώγους, ενώ η δεξιά πλευρά της εξίσωσης είναι αναλυτική και το πεδίο λύσης έχει λείο σύνορο. Μάλιστα, αφού $|\cdot|^{2-\frac{2}{n}} \in C^{1,\alpha}$, η λύση ανήκει στην κλάση $C^{1,\alpha}(B(0, \rho))$ αλλά μόνο για $\alpha \in [0, 1 - \frac{2}{n}]$.

Όπως και στο Θεώρημα 4.2.1, η u δεν είναι γνήσια κυρτή πάνω σε ένα ευθύγραμμο τμήμα που διατρέχει το πεδίο λύσης της εξίσωσης. Αυτό οφείλεται σε ένα αποτέλεσμα του Caffarelli όπου επεκτείνει το Θεώρημα 4.2.1 στον $\mathbb{R}^n$ και αναφέρει ότι μία λύση Alexandron είτε είναι γνήσια κυρτή, είτε ταυτίζεται με κάποια αφινική πάνω σε κάποιο σύνολο που “διατρέχει πέρα ως πέρα” το Ω ή, ορθότερα, έχει τα εκτεθειμένα σημεία του πάνω στο σύνορο του πεδίου λύσης.

Θεώρημα 4.3.1 (Caffarelli) *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση ώστε στο Ω να ισχύει $\lambda \, dx \leq \mu_u \leq \Lambda \, dx$ για κάποιες σταθερές $0 < \lambda \leq \Lambda$. Τότε για $x_0 \in \Omega$ και $p \in \partial u(x_0)$ ισχύει μόνο ένα από τα παρακάτω ενδεχόμενα:*

- (i) $[u = \ell_{x_0, p}] = \{x_0\}$
- (ii) το $[u = \ell_{x_0, p}]$ δεν έχει εκτεθειμένα σημεία στο εσωτερικό του Ω

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $S := [u = \ell_{x_0, p}]$ και παρατηρούμε ότι $x_0 \in S$. Το S είναι ένα κλειστό κυρτό σύνολο, διότι η u είναι συνεχής ως κυρτή και $p \in \partial u(x_0)$.

Στην περίπτωση όπου $S = \{x_0\}$ είναι εμφανές ότι το $x_0 \in \Omega$ είναι εκτεθειμένο σημείο του S , οπότε δεν ισχύει το ενδεχόμενο (ii). Επιπλέον, αυτό σημαίνει ότι αν το S δεν έχει

εκτεθειμένα σημεία δεν ισχύει το ενδεχόμενο (i), ισχύει δηλαδή μόνο το ενδεχόμενο (ii). Συνεπώς η μόνη περίπτωση που μένει να εξετάσουμε είναι αυτή όπου το S έχει εκτεθειμένα σημεία και $S \neq \{x_0\}$.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα τέτοιο εκτεθειμένο σημείο $\bar{x} \in \Omega$. Αφού $\{x_0\} \subsetneq S$, το S περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $0 \in S$ και $\bar{x} \neq 0$. Αν H είναι ένα επίπεδο στήριξης που καθιστά το $\bar{x}$ εκτεθειμένο σημείο, θεωρούμε στροφή του συστήματος συντεταγμένων ώστε $H = [z = ae_1] =: \Pi_a$, όπου $a > 0$. Τότε έχουμε $\bar{x} = ae_1$, $S \subseteq [\langle z, e_1 \rangle \leq a]$, ενώ αν $\Pi_+ := [\langle z, e_1 \rangle \geq 0]$ είναι $0, \bar{x} \in S_0 := S \cap \Pi_+ \subseteq \Omega$. Τέλος, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\ell_{x_0, p} = 0$, αφού διαφορετικά αρκεί να αντικαταστήσουμε την u με $\tilde{u} = u - \ell_{x_0, p}$.

Παρατηρούμε ότι αρκεί να δείξουμε το αποτέλεσμα όταν το S_0 περιέχεται συμπαγώς στο Ω και η γενική περίπτωση είναι άμεση συνέπεια της ειδικής αυτής περίπτωσης. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι το συμπέρασμα ισχύει στην ειδική περίπτωση, αλλά όχι στη γενική, θα υπάρχει εκτεθειμένο σημείο $\bar{x}$ μέσα στο Ω όπως παραπάνω. Επιλέγουμε $r \in (0, \frac{a}{2})$ ώστε $B(\bar{x}, 2r) \subseteq \Omega$ και θέτουμε $\tilde{u} := u|_{B(\bar{x}, r)}$, $\tilde{S}_0 := [\tilde{u} = 0] = S_0 \cap B(\bar{x}, r)$. Τότε έχουμε $\tilde{S}_0 \setminus \{\bar{x}\} \subseteq [\langle z, e_1 \rangle < a]$ και $\bar{x} = ae_1 \in \tilde{S}_0$, οπότε αυτό είναι και εκτεθειμένο σημείο του $\tilde{S}_0$. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί $B(\bar{x}, r) \subset \subset \Omega$.

Για $m \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τις κυρτές συναρτήσεις $u_m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με $u_m(z) := u(z) - \frac{1}{m} \langle z, e_1 \rangle$ και τα ανοικτά κυρτά σύνολα $S_m := [u_m < 0]$. Παρατηρούμε ότι για $z_m \in S_m$ ώστε $z_m \rightarrow z_0$ έχουμε $z_0 \in S_0$, ενώ για κάθε $z \in S_0$ υπάρχουν $z_m \in \bar{S}_m$ ώστε $|z_m - z| \leq \frac{1}{m}$, αφού $S_0 \subseteq \bar{S}_m$. Τότε γνωρίζουμε ότι $\text{dist}_H(\bar{S}_m, S_0) \rightarrow 0$ (δείτε [35, Θεώρημα 1.8.8]). Από αυτό συμπεραίνουμε ότι τελικά τα $\bar{S}_m$ περιέχονται συμπαγώς στο Ω .

Σε κάθε ένα από τα S_m αντιστοιχεί μία αφινική απεικόνιση L_m που το κανονικοποιεί, οπότε μπορούμε να δημιουργήσουμε την αντίστοιχη κανονικοποιημένη λύση v_m όπως στην Πρόταση 4.1.8. Ας είναι $x_m^* := L_m \bar{x}$ και $S_m^* := L_m(S_m)$. Τότε υπολογίζουμε

$$\frac{v_m(x_m^*)}{\min_{S_m^*} v_m} = \frac{|\det L_m|^{\frac{2}{n}} u_m(\bar{x})}{|\det L_m|^{\frac{2}{n}} \min_{S_m} u_m} = \frac{-\frac{a}{m}}{\min_{S_m} (u - \frac{1}{m} \langle \cdot, e_1 \rangle)} = \frac{a}{\max_{S_m} (\langle \cdot, e_1 \rangle - mu)}$$

Εξαιτίας της κυρτότητας της u έχουμε $u \geq \ell_{x_0, p} = 0$, οπότε στο S_m ισχύει

$$\langle \cdot, e_1 \rangle - mu \leq \langle \cdot, e_1 \rangle \implies \frac{1}{\max_{S_m} (\langle \cdot, e_1 \rangle - mu)} \geq \frac{1}{\max_{S_m} \langle \cdot, e_1 \rangle}$$

Ας είναι $\tilde{z}_m \in \partial S_m$ ώστε $\max_{S_m} \langle \cdot, e_1 \rangle = \langle \tilde{z}_m, e_1 \rangle =: a_m$ και ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι υπάρχει $\tilde{z}_0$ ώστε $\tilde{z}_m \rightarrow \tilde{z}_0$. Τότε $\tilde{z}_0 \in S_0$ και έχουμε

$$a = \langle \bar{x}, e_1 \rangle \leq a_m \implies a \leq \langle \tilde{z}_0, e_1 \rangle \implies \langle \tilde{z}_0, e_1 \rangle = a$$

Επειδή το $\bar{x}$ είναι εκτεθειμένο σημείο συμπεραίνουμε ότι $\tilde{z}_0 = \bar{x}$. Συνεπώς είναι

$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{v_m(x_m^*)}{\min_{S_m^*} v_m} \geq 1$. Από την Πρόταση 4.1.9 γνωρίζουμε ότι υπάρχει $c_0 > 0$ που εξαρ-

τάται μόνο από τα n , λ , Λ (δηλαδή ανεξάρτητη του m) ώστε $c_0 \leq |\min_{S_m^*} v_m|$. Τότε έχουμε

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |v_m(x_m^*)| \geq c_0 > 0$$

Ακόμα, παρατηρούμε ότι το επίπεδο $\Pi_m := [\langle z, e_1 \rangle = a_m]$ αποτελεί επίπεδο στήριξης του S_m στο σημείο $\tilde{z}_m \in \partial S_m$. Αφού η L_m είναι αφινική, αφήνει αναλλοίωτους του λόγους αποστάσεων παράλληλων επιπέδων και άρα, αν $\Pi_0 := [\langle z, e_1 \rangle = 0]$, έχουμε

$$\frac{\text{dist}(L_m(\Pi_a), L_m(\Pi_m))}{\text{dist}(L_m(\Pi_0), L_m(\Pi_m))} = \frac{\text{dist}(\Pi_a, \Pi_m)}{\text{dist}(\Pi_0, \Pi_m)} = \frac{|a - a_m|}{|a_m|} \rightarrow \frac{0}{a}$$

Θεωρούμε την ημιευθεία με αρχή το $L_m 0$, που διέρχεται από το x_m^* και τέμνει το ∂S_m^* σε κάποιο σημείο y_m^* (Λήμμα 1.3.9). Τότε έχουμε

$$\text{dist}(x_m^*, \partial S_m^*) \leq |x_m^* - y_m^*| \leq \text{dist}(L_m(\Pi_a), L_m(\Pi_m))$$

διότι $x_m^* \in L_m(\Pi_a)$, ενώ καθώς $S_m^* \subseteq B(0, n)$ είναι

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \text{dist}(x_m^*, \partial S_m^*) \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\text{dist}(L_m(\Pi_a), L_m(\Pi_m))}{\text{dist}(L_m(\Pi_0), L_m(\Pi_m))} \underbrace{\text{dist}(L_m(\Pi_0), L_m(\Pi_m))}_{\leq 2n} \leq 0$$

Από την Πρόταση 4.1.9(ii) γνωρίζουμε την ύπαρξη σταθεράς C ανεξάρτητης του m ώστε

$$|v_m(x_m^*)| \leq C \text{dist}(x_m^*, \partial S_m^*)^{\frac{1}{n}}$$

οπότε έχουμε $0 < c_0 \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} |v_m(x_m^*)| = 0$ και αυτό είναι άτοπο. □

Ανακαλώντας την Παρατήρηση 2.1.6, η συνθήκη (i) του προηγούμενου θεωρήματος αντιπροσωπεύει μία έννοια τοπικής γνήσιας κυρτότητας για την u στο σημείο x_0 . Όταν, βέβαια, αυτή η ιδιότητα ισχύει σε ολόκληρο το Ω , η λύση είναι γνήσια κυρτή.

Ως απόρροια του προηγούμενου θεωρήματος προκύπτει ένα κριτήριο για την γνήσια κυρτότητα λύσεων Alexandron. Σε αυτό, η γνήσια κυρτότητα μίας συνάρτησης ανάγεται στην συμπεριφορά της στο σύνορο.

Πόρισμα 4.3.2 (Caffarelli) *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό, κυρτό, φραγμένο σύνολο και η $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία κυρτή συνάρτηση που ικανοποιεί τις σχέσεις*

$$\begin{cases} \lambda dx \leq \mu_u \leq \Lambda dx, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

για κάποιες σταθερές $0 < \lambda \leq \Lambda$ και $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Αν ισχύει τουλάχιστον μία από τις παρακάτω υποθέσεις

(i) η g είναι περιορισμός κάποιας αφινικής συνάρτησης $\tilde{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

(ii) η $g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ με $\alpha \in (1 - \frac{2}{n}, 1]$ και $\partial\Omega \in C^{1,\alpha}$

η u είναι γνήσια κυρτή.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το συμπέρασμα του πορίσματος δεν ισχύει, οπότε θα υπάρχει αφινική συνάρτηση $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $[u = \ell] \neq \emptyset$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $\ell = 0$, οπότε είναι $u \geq 0$ στο Ω .

Από το Θεώρημα 4.3.1 και την Παρατήρηση 2.1.6 συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $[u = \ell]$ περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία και δεν έχει εκτεθειμένα σημεία στο εσωτερικό του Ω . Επειδή όμως αυτό είναι ένα κυρτό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ (γενικά) έχει εκτεθειμένα σημεία και μάλιστα ταυτίζεται με την κλειστότητα της κυρτής θήκης των εκτεθειμένων σημείων του (δείτε [35, Θεώρημα Straszewicz 1.4.7]). Αυτό σημαίνει ότι όλα τα εκτεθειμένα σημεία του βρίσκονται στο $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, δηλαδή βρίσκονται πάνω στο $\partial\Omega$. Επιπλέον, εξαιτίας αυτού του χαρακτηρισμού δεν μπορεί να έχει μόνο ένα εκτεθειμένο σημείο, διότι σε αυτή την περίπτωση θα ήταν μονοσύνολο.

Ας είναι $x^\pm \in \partial\Omega$ δύο εκτεθειμένα σημεία του $[u = \ell] = [u = 0]$ και $S := [x^-, x^+]$. Θεωρούμε την αλλαγή συστήματος συντεταγμένων ώστε $x^\pm = \pm ae_1$ για κάποιο $a > 0$.

Αν η g είναι αφινική, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να θεωρήσουμε ότι $g = 0$, διότι σε κάθε άλλη περίπτωση μπορούμε να θέσουμε $\tilde{u} := u - g$ και να συνεχίσουμε την απόδειξη με αυτή την συνάρτηση στη θέση της u . Αφού $0 \in S$ έχουμε $u(0) = 0$, ενώ, επειδή στο $\partial\Omega$ έχουμε $u = 0$ και η u είναι κυρτή, ισχύει $u = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι $\mu_u \geq \lambda dx$ για μία σταθερά $\lambda > 0$.

Για την συνέχεια υποθέτουμε ότι $\partial\Omega \in C^{1,\alpha}$ και $g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ με $\alpha \in (1 - \frac{2}{n}, 1]$. Επιπλέον, θεωρούμε $\Omega_\rho := \{(x_1, x') \in \Omega : |x'| < \rho\}$ για $\rho \in (0, 1)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $a > 1$ και $r_0 := \sqrt{a^2 - a}$. Επιλέγουμε περιοχή $U \subseteq B(x^+, r_0)$ του x^+ ώστε $g \in C^{1,\alpha}(\bar{U})$, περιοχή $V \subseteq B(x^-, r_0)$ του x^- ώστε $g \in C^{1,\alpha}(\bar{V})$ και τέτοιες ώστε $U \cap V = \emptyset$. Τότε μπορούμε να βρούμε $\rho > 0$ αρκετά μικρό ώστε $\partial\Omega \cap \partial\Omega_\rho \subseteq U \cup V$. Θεωρούμε ότι στο U το $\partial\Omega$ εκφράζεται ως γράφημα της $\varphi \in C^{1,\alpha}(U_0)$, όπου $U_0 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ είναι περιοχή του 0 , ώστε $\varphi(0) = a$ και $\nabla\varphi(0) = 0$. Τότε για $x \in \partial\Omega \cap U$ υπάρχει $x' \in U_0$ ώστε $x = (\varphi(x'), x')$ και συνεπώς έχουμε

$$|x_1 - a| = |\varphi(x') - \varphi(0) - \nabla\varphi(0)x'| \leq \|\varphi\|_{C^{1,\alpha}(U_0)} |x'|^{1+\alpha}$$

Άρα υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε για $x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_\rho \cap U$ να έχουμε $|x_1 - a| \leq M\rho^{1+\alpha}$.

Επειδή στο $\partial\Omega$ έχουμε $g = u \geq 0$, η $g(\varphi, \cdot)$ παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $0 \in U_0$ οπότε είναι $D(g(\varphi, \cdot))|_{x'=0} = 0 \implies \partial_1 g(x^+) \partial_k \varphi(0) + \partial_k g(x^+) = 0 \implies \partial_k g(x^+) = 0$, όταν

$k = 2, \dots, n$. Ακόμα, για $z \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_\rho \cap U$ υπάρχει $\xi \in [x^+, z]$ ώστε

$$\begin{aligned} g(z) &= g(x^+) + \langle \nabla g(\xi), z - x^+ \rangle \\ &= \partial_1 g(\xi) (z_1 - a) + \sum_{k=2}^n (\partial_k g(\xi) - \partial_k g(x^+)) z_k \\ &\leq \|g\|_{C^{1,\alpha}(U)} M \rho^{1+\alpha} + (n-1) \|g\|_{C^{1,\alpha}(U)} |\xi - x^+|^\alpha \rho \end{aligned}$$

Καθώς έχουμε $\alpha \in (0, 1)$ και $\rho < 1$, είναι

$$\begin{aligned} |\xi - x^+|^\alpha &\leq |z - x^+|^\alpha \leq (|z_1 - a| + |z'|)^\alpha \\ &\leq |z_1 - a|^\alpha + |z'|^\alpha \leq M^\alpha \rho^a \rho^{a^2} + \rho^\alpha \leq \tilde{M} \rho^\alpha \end{aligned}$$

για κάποια θετική σταθερά $\tilde{M}$ ανεξάρτητη του ρ . Συνδυάζοντας τις προηγούμενες ανισότητες βρίσκουμε σταθερά $\tilde{C} > 0$ ώστε $g \leq \tilde{C} \rho^{1+\alpha}$ στο $\partial\Omega \cap \partial\Omega_\rho \cap U$. Δουλεύοντας αντίστοιχα για το σημείο x^- και το σύνολο V δείχνουμε ότι η ανισότητα $u = g \leq \tilde{C} \rho^{1+\alpha}$ ισχύει σε ολόκληρο το $\partial\Omega \cap \partial\Omega_\rho$ (για μία πιθανόν μεγαλύτερη σταθερά $\tilde{C} > 0$). Καθώς κάθε σημείο του $\partial\Omega_\rho$ είναι κυρτός συνδυασμός σημείων του $\partial\Omega \cap \partial\Omega_\rho$, η ανισότητα $u \leq \tilde{C} \rho^{1+\alpha}$ ισχύει σε ολόκληρο το $\partial\Omega_\rho$.

Θεωρούμε $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με $v(x_1, x') := \lambda^{\frac{1}{n}} \left(h^{n-1} \rho^{(1-\alpha)(n-1)} x_1^2 + \frac{\rho^{\alpha-1}}{h} |x'|^2 \right) - \rho^{1+\alpha}$, όταν $h \in \left(0, \frac{\lambda^{\frac{1}{n}}}{1 + \tilde{C}} \right)$. Στο $z \in \partial\Omega_\rho \setminus \partial\Omega$ έχουμε $|z'| = \rho$, οπότε εκεί είναι

$$v(z) \geq \frac{\lambda^{\frac{1}{n}} \rho^{\alpha-1}}{h} |z'|^2 - \rho^{1+\alpha} = \left(\frac{\lambda^{\frac{1}{n}}}{h} - 1 \right) \rho^{1+\alpha} \geq \tilde{C} \rho^{1+\alpha} \geq u(z)$$

Για $z \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_\rho \cap B(x^+, r_0)$ έχουμε

$$|z - x^+|^2 \leq r_0^2 \implies a^2 - a \geq |z|^2 + a^2 - 2\langle z, e_1 \rangle \geq a^2 - 2\langle z, e_1 \rangle \implies z_1 \geq \frac{a}{2}$$

οπότε ανάλογα δείχνουμε ότι $z \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_\rho \implies |z_1| \geq \frac{a}{2}$. Συνεπώς εκεί είναι

$$v(z) \geq \frac{\lambda^{\frac{1}{n}} h^{n-1} a^2}{4} \rho^{(1-\alpha)(n-1)} - \rho^{1+\alpha}$$

Καθώς $\alpha > 1 - \frac{2}{n} \implies (1-\alpha)(n-1) < 1+\alpha$, μπορούμε να επιλέξουμε $\rho \in (0, 1)$ ώστε $\rho^{1+\alpha-(1-\alpha)(n-1)} \leq \frac{\lambda^{\frac{1}{n}} h^{n-1} a^2}{4(1+\tilde{C})}$ και να έχουμε $(1+\tilde{C})\rho^{1+\alpha} \leq \frac{\lambda^{\frac{1}{n}} h^{n-1} a^2}{4} \rho^{(1-\alpha)(n-1)}$. Επομένως στο $\partial\Omega \cap \partial\Omega_\rho$ είναι

$$v(z) \geq \tilde{C} \rho^{1+\alpha} \geq u(z)$$

Υπολογίζουμε $\det D^2 v(z) = \lambda h^{n-1} \rho^{(1-\alpha)(n-1)} \left(\frac{\rho^{\alpha-1}}{h} \right)^{n-1} = \lambda$, οπότε, αφού η v είναι κυρτή και το Ω_ρ ανοικτό και φραγμένο και

$$\begin{cases} \mu_v \leq \mu_u, & \text{στο } \Omega_\rho \\ v \geq u, & \text{στο } \partial\Omega_\rho \end{cases}$$

από την Αρχή Σύγκρισης 2.3.2 συμπεραίνουμε ότι η ανισότητα $v \geq u$ ισχύει σε ολόκληρο το Ω_ρ . Όμως $0 \in \Omega_\rho \implies -\rho^{1+\alpha} = v(0) \geq u(0) = 0$ και αυτό είναι άτοπο. □

Λαμβάνοντας υπόψιν το αντιπαράδειγμα του Pogorelon που κατασκευάσαμε προηγουμένως παρατηρούμε ότι το κάτω φράγμα $1 - \frac{2}{n}$ του Πορίσματος 4.3.2 είναι βέλτιστο.

Παρατήρηση 4.3.3 Η υπόθεση της γνήσιας κυρτότητας μίας λύσης Alexandron είναι μία ουσιαστική και αρκετές φορές αναγκαία συνθήκη ώστε να εξασφαλιστεί κανονικότητα των λύσεων Alexandron. Αν υποθέσουμε, λόγου χάρη, ότι για την κυρτή συνάρτηση $u \in C^2(\Omega)$ υπάρχουν κάποιες σταθερές $0 < \lambda \leq \Lambda$ ώστε $\lambda dx \leq \mu_u \leq \Lambda dx$, από το Πρόσλημα 4.3.2 συμπεραίνουμε ότι η $u|_{B(x,r)}$ είναι γνήσια κυρτή για το εκάστοτε σημείο $x \in \Omega$ και $r > 0$ με $B(x, r) \subseteq \Omega$. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.1.6 αυτό σημαίνει ότι

$$u(z) > u(x) + \langle \nabla u(x), z - x \rangle, \quad \forall z \in B(x, r) \setminus \{x\}$$

Μάλιστα, δεν μπορεί να υπάρχει $z_0 \in \Omega$ ώστε $u(z_0) = u(x) + \langle \nabla u(x), z_0 - x \rangle$, αφού αν αυτό συνέβαινε θα είχαμε $u(\lambda x + (1-\lambda)z_0) = u(x) + \langle \nabla u(x), \lambda x + (1-\lambda)z_0 - x \rangle$ για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ και άρα για κάποιο αρκετά μικρό $\lambda > 0$ θα ίσχυε $\lambda x + (1-\lambda)z_0 \in B(x, r)$.

Συνεπώς και πάλι από την Παρατήρηση 2.1.6 συμπεραίνουμε ότι η u είναι γνήσια κυρτή σε ολόκληρο το Ω .

4.4 Εσωτερική κανονικότητα λύσεων Alexandron για λεία δεξιά πλευρά ($f \in C^{k,\alpha}$)

Η κανονικότητα γνήσια κυρτών λύσεων Alexandron στο εσωτερικό του πεδίου λύσης δίνεται συναρτήσει της λειότητας της συνάρτησης της δεξιάς πλευράς. Πιο συγκεκριμένα, αν αυτή ανήκει στην κλάση $C^{k,\alpha}$ η λύση ανήκει στην κλάση $C_{loc}^{k+2,\alpha}$, όταν $k \geq 0$.

Από το Θεώρημα 3.1.1 γνωρίζουμε ότι η λειότητα των λύσεων Alexandron ενός προβλήματος Dirichlet εξαρτάται άμεσα από την λειότητα της συνάρτησης της δεξιάς πλευράς, του συνόρου και της συνάρτησης της συνοριακής συνθήκης. Εχμεταλλευόμενοι αυτό το γεγονός και με βάση κάποιες εκτιμήσεις του Pogorelon για τον Εσσιανό πίνακα των λύσεων αποδεικνύεται η εσωτερική κανονικότητα γνήσια κυρτών λύσεων. Μάλιστα, αυτή εξαρτάται αποκλειστικά από την κανονικότητα της συνάρτησης της δεξιάς πλευράς.

Ξεκινάμε, λοιπόν, με μία a priori εκτίμηση των δευτέρων μερικών παραγώγων κάποιας κυρτής λύσης στο εσωτερικό του πεδίου λύσης, ένα αποτέλεσμα που οφείλεται στον Pogorelov.

Πρόταση 4.4.1 (Pogorelov) *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό, κυρτό, φραγμένο σύνολο, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ και $0 < r \leq R$ ώστε να ισχύει $B(\bar{x}, r) \subseteq \Omega \subseteq B(\bar{x}, R)$. Επιπλέον θεωρούμε $u \in C^4(\Omega)$ μία κυρτή λύση του προβλήματος*

$$\begin{cases} \det D^2 u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

όπου $f \in C^2(\bar{\Omega})$ με $f \geq c_0 > 0$.

Τότε υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε να ισχύει

$$\text{dist}(x, \partial\Omega)^{3n+2} \|D^2 u(x)\| \leq C, \quad \forall x \in \Omega$$

Η C εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από τα $n, r, R, \|f\|_{C^2(\bar{\Omega})}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε κάποιο $h > 0$. Στην συνέχεια της απόδειξης, όταν κάποια σταθερά δεν εξαρτάται από το u και το σημείο x , θα την συμβολίζουμε απλώς με C .

Ορίζουμε τα σύνολα $\Omega_h := \{z \in \Omega : \text{dist}(z, \partial\Omega) \geq h\}$, $U_h := \{z \in \Omega : u(z) \leq -h\}$. Παρατηρούμε ότι αυτά είναι κυρτά (αφού οι $u, -\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)$ είναι κυρτές), κλειστά και φραγμένα υποσύνολα του Ω , ενώ επιπλέον έχουμε $\Omega_h, U_h \subset \subset \Omega$.

Αρχικά κατασκευάζουμε a priori φράγματα για τις $u, \nabla u$ στο U_h που εξαρτώνται μόνο από τα $n, r, R, \|f\|_{C^2(\bar{\Omega})}$.

Από την Αρχή Μεγίστου του Alexandron 2.3.1 έπεται ότι υπάρχει σταθερά $C_n > 0$ η οποία εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από το n έτσι ώστε να ισχύει

$$|u(x)| \leq C_n \text{diam}(\Omega) \left(\int_{\Omega} f \, dx \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \forall x \in \Omega$$

Άρα υπάρχει σταθερά $C := 4C_n R^2 \|f\|_{C^2(\bar{\Omega})}$ ανεξάρτητη του u ώστε $|u(x)| \leq C, \forall x \in \Omega$. Καθώς για $x \in U_h$ έχουμε $h \leq |u(x)| \leq C \text{dist}(x, \partial\Omega)^{\frac{1}{n}}$ (όπου $C := 4C_n R^2 \|f\|_{C^2(\bar{\Omega})}$), έπεται ότι $h^n \leq C \text{dist}(U_h, \partial\Omega)$. Από το Πόρισμα 2.1.8 βρίσκουμε

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(U_h)} \leq \frac{2 \|u\|_{L^\infty(\Omega)}}{\text{dist}(U_h, \partial\Omega)} \leq \frac{C}{h^n}$$

Τώρα θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά C έτσι ώστε

$$\max_{x \in U_h} \{(u(x) + h)^2 \|D^2 u(x)\|\} \leq \frac{C}{h^{3n}}$$

Αρχικά θεωρούμε την $v := u + h$, οπότε στο U_h βρίσκουμε $v \leq 0$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι εξαιτίας της Πρότασης 1.4.6 η v είναι ομοιόμορφα κυρτή στο U_h . Ακόμα, για $a, b > 0$ θεωρούμε την βοηθητική συνάρτηση $w : U_h \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ με $w(x, \xi) := (-v(x))^a v_{\xi\xi}(x) e^{\frac{b}{2} |\nabla v(x)|^2}$, όταν $x \in U_h$ και $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$, οπότε έχουμε $w \geq 0$.

Καθώς το $U_h \times \mathbb{S}^{n-1}$ είναι συμπαγές, η συνεχής συνάρτηση w παρουσιάζει μέγιστο σε ένα σημείο του $(x_0, \xi_0) \in U_h \times \mathbb{S}^{n-1}$. Τότε έχουμε $x_0 \in U_h^\circ$, αφού εκεί ισχύει $v < 0$ και άρα λόγω της ομοιόμορφης κυρτότητας της v βρίσκουμε $0 < w \leq w(x_0, \xi_0)$.

Στρέφουμε το σύστημα συντεταγμένων των x ώστε ο πίνακας $D^2v(x_0)$ να είναι διαγώνιος και το σύστημα συντεταγμένων των ξ ώστε $\xi_0 \equiv e_1$, ενώ για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό θα συμβολίζουμε την $w(\cdot, e_1) : U_h \rightarrow \mathbb{R}$ απλώς με w .

Χρησιμοποιούμε τον λογάριθμο για να μετατρέψουμε τα γινόμενα σε αθροίσματα και υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους

$$(\log w)_i = a \frac{v_i}{v} + \frac{v_{11i}}{v_{11}} + b \sum_{k=1}^n v_k v_{ki}$$

και

$$(\log w)_{ij} = a \frac{v_{ij}}{v} - a \frac{v_i v_j}{v^2} + \frac{v_{11ij}}{v_{11}} - \frac{v_{11i} v_{11j}}{v_{11}^2} + b \sum_{k=1}^n v_k v_{kij} + b \sum_{k=1}^n v_{ki} v_{kj}$$

Επειδή και η $\log w$ παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 και αφού το x_0 βρίσκεται στο εσωτερικό του U_h έπεται ότι $D(\log w)(x_0) = 0$ και ο πίνακας $D^2(\log w)(x_0)$ είναι αρνητικά ημιορισμένος. Συνεπώς από τους προηγούμενους υπολογισμούς στο x_0 έχουμε $0 = a \frac{v_i}{v} + \frac{v_{11i}}{v_{11}} + b v_i v_{ii}$ και

$$\sum_{i,j=1}^n v^{ij} (\log w)_{ij} = \sum_{i=1}^n e_i^T D^2(\log w) (D^2v)^{-1} e_i = \sum_{i=1}^n e_i^T D^2(\log w) ((D^2v)^{-1} e_i) \leq 0,$$

αφού ο πίνακας $D^2(\log w)$ είναι αρνητικά ημιορισμένος. Άρα στο σημείο x_0 έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\geq \sum_{i,j=1}^n v^{ij} (\log w)_{ij} = \sum_{i=1}^n v^{ii} (\log w)_{ii} \\ &= a \frac{n}{v} + \sum_{i=1}^n \left(-a \frac{v^{ii} v_i^2}{v^2} + \frac{v^{ii} (v_{11})_{ii}}{v_{11}} - \frac{v^{ii} v_{11i}^2}{v_{11}^2} + \sum_{m=1}^n b v_m v^{ii} (v_m)_{ii} + b v^{ii} v_{mi}^2 \right) \\ &\geq 0 + \sum_{i,m=1}^n b v_m v^{ii} (v_m)_{ii} + \sum_{i=1}^n -a \frac{v^{ii} v_i^2}{v^2} + \frac{v^{ii} (v_{11})_{ii}}{v_{11}} - \frac{v^{ii} v_{11i}^2}{v_{11}^2} + b v^{ii} v_{ii}^2 \end{aligned}$$

Όπως στο Λήμμα 3.6.5, παραγωγίζοντας την εξίσωση $\det D^2v = \det D^2u = f$ στην κατεύθυνση e_m υπολογίζουμε

$$\sum_{i,j=1}^n v^{ij} (v_m)_{ij} = (\log f)_m \implies \sum_{i=1}^n v^{ii} (v_m)_{ii} \Big|_{x=x_0} = (\log f)_m \Big|_{x=x_0},$$

ενώ παραγωγίζοντας την δύο φορές στην κατεύθυνση e_1 υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k,l=1}^n v^{ij}(v_{11})_{ij} - v^{il}v^{kj}(v_1)_{ij}(v_1)_{lk} &= (\log f)_{11} \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n v^{ii}(v_{11})_{ii} \Big|_{x=x_0} &= (\log f)_{11} + \sum_{i,j=1}^n v^{ii}v^{jj}(v_1)_{ij}^2 \Big|_{x=x_0} \\ &\geq (\log f)_{11} - \frac{v_{111}^2}{v_{11}^2} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{v^{ii}v_{11i}^2}{v_{11}} \Big|_{x=x_0} \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε στην προηγούμενη ανισότητα, οπότε στο x_0 έχουμε

$$0 \geq \frac{(\log f)_{11}}{v_{11}} - \frac{v_{111}^2}{v_{11}^3} + \sum_{m=1}^n bv_m(\log f)_m + \sum_{i=1}^n -a \frac{v^{ii}v_i^2}{v^2} + \frac{v^{ii}v_{11i}^2}{v_{11}^2} + bv_{ii}$$

Αφού στο x_0 είναι $\frac{v_i}{v} = -\frac{1}{a} \left(\frac{v_{11i}}{v_{11}} + bv_iv_{ii} \right)$ έχουμε $a \frac{v^{ii}v_i^2}{v^2} = \frac{1}{a} v^{ii} \left(\frac{v_{11i}}{v_{11}} + bv_iv_{ii} \right)^2$. Καθώς ισχύει η σχέση $\frac{1}{2} \left(\frac{v_{11i}}{v_{11}} + bv_iv_{ii} \right)^2 \leq \left(\frac{v_{11i}}{v_{11}} \right)^2 + b^2(v_iv_{ii})^2$, επιλέγοντας $a := 2$ έχουμε

$$\sum_{i=1}^n -2 \frac{v^{ii}v_i^2}{v^2} \geq -2 \frac{v^{11}v_1^2}{v^2} - \sum_{i=2}^n v^{ii} \left(\left(\frac{v_{11i}}{v_{11}} \right)^2 + b^2(v_iv_{ii})^2 \right)$$

Άρα είναι

$$0 \geq \frac{(\log f)_{11}}{v_{11}} - 2 \frac{v_1^2}{v^2 v_{11}} + \sum_{m=1}^n bv_m(\log f)_m - b^2 \sum_{i=2}^n v_i^2 v_{ii} + b \sum_{i=1}^n v_{ii}$$

Επιλέγοντας $b := \|\nabla v\|_{L^\infty(U_h)}^{-2} = \|\nabla u\|_{L^\infty(U_h)}^{-2}$ έχουμε $bv_i^2 \leq b\|\nabla v\|_{L^\infty(U_h)}^2 = 1$, οπότε είναι

$$\begin{aligned} b \sum_{i=1}^n v_{ii} - b^2 \sum_{i=2}^n v_i^2 v_{ii} &= bv_{11} + b \sum_{i=2}^n v_{ii} - b \sum_{i=2}^n \underbrace{(bv_i^2)}_{\leq 1} v_{ii} \\ &\geq bv_{11} + b \sum_{i=2}^n v_{ii} - b \sum_{i=2}^n v_{ii} = bv_{11} \end{aligned}$$

Συνεπώς στο x_0 βρίσκουμε

$$\begin{aligned} 0 &\geq -\frac{\|\log f\|_{C^2(\bar{\Omega})}}{v_{11}} - 2 \frac{v_1^2}{v^2 v_{11}} + b \sum_{k=1}^n v_k(\log f)_k + bv_{11} \\ &\geq -\frac{C}{v_{11}} - 2 \frac{|\nabla v|^2}{v^2 v_{11}} + b \sum_{k=1}^n v_k(\log f)_k + bv_{11} \end{aligned}$$

για κάποια σταθερά $C > 0$, ενώ μέσω της σχέσης $bv_k(\log f)_k \geq -b|\nabla v| \|\log f\|_{C^2(\bar{\Omega})}$ είναι

$$0 \geq -\frac{C}{v_{11}} - 2\frac{|\nabla v|^2}{v^2 v_{11}} - Cb|\nabla v| + bv_{11}$$

Πολλαπλασιάζουμε την ανισότητα με τον θετικό αριθμό $(v^4 v_{11} e^{b|\nabla v|^2})(x_0)$ και έχουμε

$$0 \geq -Cv^4 e^{b|\nabla v|^2} - 2|\nabla v|^2 v^2 e^{b|\nabla v|^2} - Cb|\nabla v| v^4 v_{11} e^{b|\nabla v|^2} + bv^4 v_{11}^2 e^{b|\nabla v|^2}$$

Επειδή $w = v^2 v_{11} e^{\frac{b}{2}|\nabla v|^2}$ και $0 \leq b|\nabla v|^2 \leq 1 \implies 1 \leq e^{b|\nabla v|^2} \leq e$, έχουμε:

1. $-Cv^4 e^{b|\nabla v|^2} \geq -C|v|^4 e \geq -C$, για μία θετική σταθερά C ανεξάρτητη της u , αφού έχουμε ήδη βρει ένα a priori φράγμα για την $|u|$ στο U_h
2. $-2|\nabla v|^2 v^2 e^{b|\nabla v|^2} \geq -2\frac{1}{b}|v|^2 e \geq -\frac{2C}{b}$, όπου πάλι η σταθερά C είναι ανεξάρτητη της u
3. $-Cb|\nabla v| v^4 v_{11} e^{b|\nabla v|^2} = -bC|\nabla v| v^2 e^{\frac{b}{2}|\nabla v|^2} w \geq -bC\frac{1}{\sqrt{b}}C^2 e^{\frac{1}{2}} w = -2M\sqrt{b}w$,
όπου πάλι η σταθερά M είναι ανεξάρτητη του u
4. $bv^4 v_{11}^2 e^{b|\nabla v|^2} = bw^2$

Με βάση αυτές τις ανισότητες προκύπτει η σχέση $0 \geq -C - \frac{2C}{b} - 2M\sqrt{b}w + bw^2$ και επομένως στο x_0 έχουμε

$$\begin{aligned} (\sqrt{b}w - M)^2 &= bw^2 - 2M\sqrt{b}w + M^2 \leq C\left(1 + \frac{2}{b}\right) \leq C\left(1 + \frac{2}{b} + \frac{1}{b^2}\right) = C\left(1 + \frac{1}{b}\right)^2 \\ &\implies \sqrt{b}w \leq M + C + \frac{C}{b} \\ &\implies w \leq C\left(\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{b^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

Όταν $h \in (0, 1]$ και καθώς $\frac{1}{\sqrt{b}} = \|\nabla u\|_{L^\infty(U_h)} \leq \frac{C}{h^n}$, η προηγούμενη ανισότητα γίνεται

$$w(x_0) \leq C\left(\frac{1}{h^n} + \frac{1}{h^{3n}}\right) \leq \frac{C}{h^{3n}}$$

Αυτό σημαίνει ότι στο U_h έχουμε $(u+h)^2 u_{\xi\xi} = v^2 v_{\xi\xi} \leq w \leq \frac{C}{h^{3n}}$, $\forall \xi \in \mathbb{S}^{n-1}$. Επειδή είναι $D^2 u(x) = P^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P$ για κάποιο ορθογώνιο πίνακα $P \in \mathbb{R}^n$ και σταθερές $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, έχουμε $\|D^2 u(x)\| \leq \|P^T\| \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \|P\| \leq C \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|$, όπου $\|P\| = \sqrt{\text{tr}(P^T P)} = \sqrt{n}$. Άρα τότε στο $x \in U_h$ είναι $(u(x) + h)^2 \|D^2 u(x)\| \leq \frac{C}{h^{3n}}$.

Τώρα θα βρούμε μία σχέση που συνδέει τα U_h, Ω_h .

Ας είναι $v_0 : B(\bar{x}, r) \rightarrow \mathbb{R}$ με $v_0(x) := c_0^{\frac{1}{n}} \left(\frac{|x - \bar{x}|^2 - r^2}{2} \right)$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{cases} \det D^2 v_0 = c_0 \leq f = \det D^2 u, & \text{στο } B(\bar{x}, r) \\ v_0 = 0 \geq u, & \text{στο } \partial B(\bar{x}, r) \end{cases}$$

Από την Αρχή Σύγκρισης 2.3.2 συμπεραίνουμε ότι η ανισότητα $v_0 \geq u$ ισχύει σε ολόκληρο το $B(\bar{x}, r)$. Αυτό έχει ως συνέπεια να ισχύει $u(\bar{x}) \leq v_0(\bar{x}) = -\frac{r^2}{2} c_0^{\frac{1}{n}} =: -c_1$.

Θεωρούμε την κωνική συνάρτηση $\widehat{C}_{\bar{x}}$, όπως στο Παράδειγμα 1.3.15, με $\widehat{C}_{\bar{x}}(\bar{x}) = -c_1$ και $\widehat{C}_{\bar{x}}|_{\partial\Omega} = 0$. Γνωρίζουμε από την απόδειξη της Αρχής Μεγίστου του Alexandron 2.3.1 ότι ισχύει $u \leq \widehat{C}_{\bar{x}}$ παντού στο Ω . Θέτουμε $A_h := [\widehat{C}_{\bar{x}} \leq -h]$, οπότε τότε ισχύει $A_h \subseteq U_h$.

Θα δείξουμε ότι $A_h \supseteq \Omega_{\frac{Rh}{c_1}}$, οπότε τότε θα έχουμε $\Omega_{\frac{Rh}{c_1}} \subseteq U_h$. Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, $z \in \Omega_{\frac{Rh}{c_1}}$ και θα εξετάσουμε ξεχωριστά τις δύο περιπτώσεις όπου $z = \bar{x}$ και $z \neq \bar{x}$:

1. Για $z = \bar{x}$ έχουμε $R \geq \text{dist}(\bar{x}, \partial\Omega) \geq \frac{Rh}{c_1}$, απ' όπου προκύπτει $c_1 \geq h$ και άρα είναι $\widehat{C}_{\bar{x}}(\bar{x}) = -c_1 \leq -h$ ή ισοδύναμα $z = \bar{x} \in A_h$.
2. Για $z \neq \bar{x}$, από το Λήμμα 1.3.9 υπάρχει $\mu > 1$ ώστε να ισχύει $(1 - \mu)\bar{x} + \mu z \in \partial\Omega$. Άρα, τότε έχουμε

$$(\mu - 1)|\bar{x} - z| = |(1 - \mu)\bar{x} + \mu z - z| \geq \text{dist}(z, \partial\Omega) \geq \frac{Rh}{c_1}$$

και

$$R \geq |(1 - \mu)\bar{x} + \mu z - \bar{x}| = \mu|\bar{x} - z|$$

Συνεπώς είναι

$$(\mu - 1)|\bar{x} - z| \geq \mu \frac{h}{c_1} |\bar{x} - z| \implies \widehat{C}_{\bar{x}}(z) = -\frac{\mu - 1}{\mu} c_1 \leq -h \implies z \in A_h$$

Στο $\Omega_{\frac{2Rh}{c_1}} \subseteq U_{2h} \subseteq U_h$ έχουμε τις σχέσεις $|u + h| \geq h$ και $(u + h)^2 \|D^2 u\| \leq \frac{C}{h^{3n}}$, οπότε εκεί βρίσκουμε $\|D^2 u\| \leq \frac{C}{h^{3n+2}}$, όταν $h \in (0, \frac{1}{2}]$.

Για το εκάστοτε $x \in \Omega$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. αν $x \in \Omega_{\frac{R}{c_1}}$, καθώς $\text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \text{diam}(\Omega) \leq 2R \implies \frac{(2R)^{3n+2}}{\text{dist}(x, \partial\Omega)^{3n+2}} \geq 1$, έχουμε

$$\|D^2 u(x)\| \leq \frac{C}{(\frac{1}{2})^{3n+2}} \leq 2^{3n+2} \frac{C(2R)^{3n+2}}{\text{dist}(x, \partial\Omega)^{3n+2}}$$

$$\begin{aligned}
2. \text{ αν } x \notin \Omega_{\frac{R}{c_1}} \text{ είναι } \text{dist}(x, \partial\Omega) < \frac{R}{c_1} &\implies \frac{c_1 \text{dist}(x, \partial\Omega)}{2R} < \frac{1}{2}, \text{ οπότε επιλέγοντας} \\
h := \frac{c_1 \text{dist}(x, \partial\Omega)}{2R} \text{ έχουμε } \frac{2Rh}{c_1} = \text{dist}(x, \partial\Omega) &\implies x \in \Omega_{\frac{2Rh}{c_1}} \text{ και άρα} \\
\|D^2u(x)\| \leq \frac{C}{h^{3n+2}} = \frac{C}{\left(\frac{c_1 \text{dist}(x, \partial\Omega)}{2R}\right)^{3n+2}} &= \frac{C(2R)^{3n+2}}{c_1^{3n+2} \text{dist}(x, \partial\Omega)^{3n+2}}
\end{aligned}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει σταθερά $C > 0$ ανεξάρτητη των u και x και τέτοια ώστε

$$\text{dist}(x, \partial\Omega)^{3n+2} \|D^2u(x)\| \leq C$$

□

Θεώρημα 4.4.2 Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία γνήσια κυρτή λύση Alexandrou της εξίσωσης $\mu_u = f dx$ στο Ω , όπου $f \in C^2(\Omega)$ με $f \geq c_0 > 0$.

Τότε έχουμε $u \in C_{loc}^{3,\alpha}(\Omega)$ για κάθε $\alpha \in (0, 1)$.

Αν επιπλέον έχουμε $f \in C^{k,\beta}(\Omega)$ για $k \geq 2$ και $\beta \in (0, 1)$, τότε $u \in C_{loc}^{k+2,\beta}(\Omega)$.

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε $x_0 \in \Omega$, $p \in \partial u(x_0)$ και $t > 0$. Τότε το τμήμα $S := S(x_0, p, t)$ είναι ανοικτό και κυρτό, όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει. Επιπλέον, για αρκετά μικρό $t > 0$ έχουμε $S(x_0, p, t) \subset\subset \Omega$, αφού η u είναι γνήσια κυρτή.

Είναι γνωστό ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε το S μέσω μίας οικογένειας S_ε ομοιόμορφα κυρτών συνόλων με C^∞ σύνορο ώστε $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{dist}_H(\partial S_\varepsilon, \partial S) = 0$ (δείτε [35, Ενότητα 3.4] και [34]). Χρησιμοποιώντας μία ακολουθία εκλειαντών βρίσκουμε $f_\varepsilon \in C^\infty(\bar{S})$ ώστε $\|f_\varepsilon - f\|_{C^2(\bar{S})} \rightarrow 0$. Από το Θεώρημα 3.1.1 γνωρίζουμε την ύπαρξη μοναδικής κυρτής λύσης $v_\varepsilon \in C^4(\bar{S}_\varepsilon)$ για κάθε ένα από τα προβλήματα

$$\begin{cases} \det D^2v_\varepsilon = f_\varepsilon, & \text{στο } S_\varepsilon \\ v_\varepsilon = 0, & \text{στο } \partial S_\varepsilon \end{cases}$$

Αφού $\mu_{v_\varepsilon} = \chi_{S_\varepsilon} f_\varepsilon dx \leq |S| \|f\|_{L^\infty(\bar{S})} < +\infty$ και $\mu_{v_\varepsilon} = \chi_{S_\varepsilon} f_\varepsilon dx \xrightarrow{*} \chi_S f dx$, από το Πόρισμα 2.5.4 συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία v_ε συγκλίνει ομοιόμορφα τοπικά στην μοναδική κυρτή λύση $v : S \rightarrow \mathbb{R}$ του προβλήματος

$$\begin{cases} \mu_v = \chi_S f dx, & \text{στο } S \\ v = 0, & \text{στο } \partial S \end{cases}$$

όταν $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Όμως και η $u - \ell_{x_0,p} - t$ λύνει αυτό το πρόβλημα, οπότε στο S έχουμε την ισότητα $u = v + \ell_{x_0,p} + t$.

Για $U \subset\subset S$ μία περιοχή του x_0 έχουμε $U \subset\subset S_\varepsilon$ για όλες τις τιμές του $\varepsilon \in (0, 1)$ αρκετά κοντά στο 0, όπως έχουμε δει στο Λήμμα 2.5.3. Λόγω της Πρότασης 4.4.1 βρίσκουμε ομοιόμορφο άνω φράγμα για την ποσότητα $\text{dist}(x, \partial U)^{3n+2} \|D^2v_\varepsilon(x)\| \leq C$ στο U , όπου C είναι

μία σταθερά που εξαρτάται μόνο από το n , $\|f\|_{C^2(S)}$ και τη γεωμετρία του U , δηλαδή αυτό το φράγμα είναι ανεξάρτητο του ε . Επιπλέον, εκεί η v_ε συγκλίνει ομοιόμορφα στην v , οπότε μέσω αυτής βρίσκουμε το ομοιόμορφο φράγμα $\|v_\varepsilon\|_{C(\bar{U})} \leq 2\|v\|_{C(\bar{U})}$ για $\varepsilon > 0$ κοντά στο 0.

Θεωρούμε $V \subset\subset U$. Επειδή γνωρίζουμε το φράγμα $\|\nabla v_\varepsilon\|_{C(\bar{V})} \leq \frac{2\|v_\varepsilon\|_{C(U)}}{\text{dist}(\bar{V}, \partial U)} \leq \frac{4\|v\|_{C(\bar{U})}}{\text{dist}(\bar{V}, \partial U)}$ έχουμε ομοιόμορφα φράγματα και για τις πρώτες παραγώγους των v_ε . Συνεπώς από όλα τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι οι $\|v_\varepsilon\|_{C^2(\bar{V})}$ φράσσονται ομοιόμορφα και ανεξάρτητα του ε , οπότε δείχνουμε όπως στο Λήμμα 3.6.6 ότι υπάρχει υπακολουθία της v_ε που συγκλίνει στην v στον $C^1(\bar{V})$. Μάλιστα, εξαιτίας του φράγματος των δευτέρων παραγώγων και της σύγκλισης έχουμε $v \in C^{1,1}(\bar{V})$.

Για $0 < \alpha < 1$ είναι $f \in C_{loc}^{1,\alpha}(\Omega)$, οπότε από την εσωτερική μορφή του Θεωρήματος Evans-Krylov 3.2.14 στο $V \subset\subset U$ έχουμε $v \in C^{3,\alpha}(\bar{V})$ και άρα $u = v + \ell_{x_0,p} + t \in C^{3,\alpha}(\bar{V})$. Επειδή το x_0 είναι τυχαία επιλεγμένο, έχουμε $u \in C_{loc}^{3,\alpha}(\Omega)$.

Ανάλογα αποδεικνύεται και η περίπτωση $f \in C^{k,\beta}(\Omega)$. □

Το προηγούμενο θεώρημα, όπως και το Θεώρημα 3.1.1, δεν καλύπτουν τις περιπτώσεις όπου $f \in C^{k,\alpha}$ με $k = 0, 1$. Καθώς η εξίσωση Monge-Ampère είναι ομοιόμορφα ελλειπτική, κάποιος θα ανέμενε ότι οι λύσεις της έχουν παρόμοια συμπεριφορά με τις λύσεις άλλων ελλειπτικών εξισώσεων, όπως της εξίσωσης του Laplace, δηλαδή θα έπρεπε να έχουμε $u \in C_{loc}^{2,\alpha}$ και $u \in C_{loc}^{3,\alpha}$ αντίστοιχα στο εσωτερικό του πεδίου λύσης. Αυτό το αποτέλεσμα πράγματι ισχύει, όπως αποδείχθηκε από τον Caffarelli στο [4].

Θεώρημα 4.4.3 (Caffarelli) *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία γνήσια κυρτή λύση Alexandrov της εξίσωσης $\mu_u = f dx$ στο Ω , όταν $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, $\alpha \in (0, 1)$ και $0 < \lambda, \Lambda$ σταθερές ώστε $0 < \lambda \leq f \leq \Lambda$.*

Τότε $u \in C_{loc}^{2,\alpha}(\Omega)$. Μάλιστα, αν $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, έχουμε $u \in C_{loc}^{k+2,\alpha}(\Omega)$, όπου $k \geq 0$.

Επιπλέον, με παρόμοια επιχειρήματα κατάφερε να εξάγει συμπεράσματα ακόμα και για την περίπτωση όπου η f είναι συνεχής [4]. Ωστόσο, η λύση τότε παύει να είναι διαφορίσιμη με την κλασική έννοια, αλλά ανήκει στον χώρο Sobolev $W_{loc}^{2,p}$ με $p \in (1, +\infty)$.

Θεώρημα 4.4.4 (Caffarelli) *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία γνήσια κυρτή λύση Alexandrov της εξίσωσης $\mu_u = f dx$ στο Ω , όταν $f \in C(\Omega)$.*

Τότε $u \in W_{loc}^{2,p}(\Omega)$ για κάθε $p \in (1, +\infty)$.

4.5 Εσωτερική κανονικότητα λύσεων Alexandron για φραγμένη δεξιά πλευρά ($\lambda \leq f \leq \Lambda$)

Έως τώρα έχουμε εξετάσει την εσωτερική κανονικότητα των λύσεων Alexandron εξισώσεων Monge-Ampère όπου η συνάρτηση της δεξιάς πλευράς είναι λεία. Ωστόσο για τις

ανάγκες των διαφόρων εφαρμογών της εξίσωσης (όπως για παράδειγμα σε προβλήματα Βέλτιστης Μεταφοράς) είναι απαραίτητο να μελετηθεί η κανονικότητα λύσεων Alexandron υπό ασθενέστερες υποθέσεις, όπως για παράδειγμα όταν γνωρίζουμε μόνο ότι η δεξιά πλευρά είναι φραγμένη μακριά από το μηδέν και το άπειρο. Ο Caffarelli απέδειξε ότι αυτή η συνθήκη αρκεί ώστε να υπάρξει διαφορισμότητα στο εσωτερικό του πεδίου λύσης. Μάλιστα, τότε υπάρχει κάποια σταθερά $\alpha \in (0, 1]$ ώστε η παράγωγοι πρώτης τάξης των λύσεων να είναι Hölder συνεχείς [6]. Σκοπός μας σε αυτή την ενότητα είναι να παρουσιάσουμε αυτό το αποτέλεσμα.

Αρχίζουμε με κάποια βοηθητικά λήμματα.

Λήμμα 4.5.1 *Θεωρούμε ανοικτό κυρτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$, $0 < r \leq R$ ώστε $B(x_0, r) \subseteq \Omega \subseteq B(x_0, R)$ και κυρτή συνάρτηση $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις σχέσεις*

$$\begin{cases} \lambda dx \leq \mu_u \leq \Lambda dx, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

για κάποιες σταθερές $0 < \lambda \leq \Lambda$. Αν $x_1 \in \Omega$ είναι ένα σημείο όπου η u λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της $-h := u(x_1)$, υπάρχει $\delta \in (1, 2)$ που εξαρτάται αποκλειστικά από τα $n, \lambda, \Lambda, r, R$ ώστε να ισχύει $\max_{x_1 + \frac{1}{2}\bar{\Omega}} u \leq -\frac{\delta h}{2}$.

Απόδειξη. Έστω ότι το λήμμα δεν ισχύει. Τότε, επειδή το δ εξαρτάται από τα $n, \lambda, \Lambda, r, R$, αλλά όχι το Ω και το u , για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει ανοικτό κυρτό σύνολο Ω_k και κυρτή συνάρτηση $u_k : \Omega_k \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $B(x_0, r) \subseteq \Omega_k \subseteq B(x_0, R)$,

$$\begin{cases} \lambda dx \leq \mu_{u_k} \leq \Lambda dx, & \text{στο } \Omega_k \\ u_k = 0, & \text{στο } \partial\Omega_k \end{cases}$$

και $-(1 + \frac{1}{k})\frac{h_k}{2} \leq \max_{x_1^k + \frac{1}{2}\bar{\Omega}_k} u_k =: u_k(x_k)$, όπου $x_1^k \in \Omega_k$ είναι τα σημεία στα οποία κάθε μία από τις u_k λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της $u_k(x_1^k) =: -h_k$ πάνω από το Ω_k , ενώ $x_k \in x_1^k + \frac{1}{2}\bar{\Omega}_k$.

Από το Πρόσχημα 2.5.5 γνωρίζουμε ότι υπάρχει ανοικτό, κυρτό, φραγμένο σύνολο Ω_0 που είναι το όριο της ακολουθίας Ω_k στην μετρική Hausdorff, καθώς και κυρτή συνάρτηση $u_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $u_k \rightarrow u_0$ τοπικά ομοιόμορφα στο Ω_0 και

$$\begin{cases} \lambda dx \leq \mu_{u_0} \leq \Lambda dx, & \text{στο } \Omega_0 \\ u_0 = 0, & \text{στο } \partial\Omega_0 \end{cases}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι υπάρχουν $x_1^0, x_0 \in \bar{\Omega}_0$ ώστε $x_1^k \rightarrow x_1^0$ και $x_k \rightarrow x_0$.

Παρατηρούμε ότι για $z \in x_1^k + \frac{1}{2}\bar{\Omega}_k$ υπάρχει $\bar{z} \in \bar{\Omega}_k$ ώστε $z = \frac{x_1^k + \bar{z}}{2}$ και επομένως είναι $u_k(z) \leq \frac{1}{2}u_k(x_1^k) + \frac{1}{2}u_k(\bar{z}) \leq -\frac{h_k}{2} + 0$, αφού ξέρουμε ότι $u_k \leq 0$ στο $\bar{\Omega}_k$. Αυτό σημαίνει ότι $x_1^k + \frac{1}{2}\bar{\Omega}_k \subseteq [u_k \leq u_k(x_1^k) + \frac{1}{2}h_k] =: S_k$, οπότε από το Πρόσχημα 4.1.11 εφαρμοσμένο για την

u_k , $s := \frac{1}{2}$, $t_1 := \frac{1}{2}$ και $t_2 := 1$ έπεται ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ ανεξάρτητη του k ώστε $c \leq \text{dist}(S_k, \partial\Omega_k)$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} c &\leq \text{dist}(x_k, \partial\Omega_k) \leq |x_k - x_0| + \text{dist}(x_0, \partial\Omega_0) + \text{dist}_H(\partial\Omega_0, \partial\Omega_k) \\ &\implies c \leq \text{dist}(x_0, \partial\Omega_0) \implies x_0 \in \Omega_0 \end{aligned}$$

και ανάλογα είναι $x_1^0 \in \Omega_0$.

Επιπλέον, έχουμε $-(1 + \frac{1}{k})\frac{h_k}{2} \leq u_k\left(\frac{x_1^k + x_k}{2}\right) \leq -\frac{1}{2}h_k$. Από την Πρόταση 4.1.9(i) έπεται ότι τα h_k είναι ομοιόμορφα φραγμένα ανεξάρτητα της επιλογής του k , οπότε υπάρχει $h_0 \geq 0$ ώστε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) $h_k \rightarrow h_0$. Συνεπώς είναι $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(x_k) = -\frac{1}{2}h_0$. Επειδή $x_0 \in \Omega_0$, τελικά έχουμε $x_k \in \Omega_0$ και άρα $u_k(x_k) \rightarrow u_0(x_0)$ [25, Πρόταση 9.6]. Επομένως ισχύει $u_0(x_0) = -\frac{1}{2}h_0$. Ανάλογα βρίσκουμε $-h_k = u_k(x_1^k) \rightarrow u_0(x_1^0) \implies u_0(x_1^0) = -h_0$.

Καθώς $x_k \in x_1^k + \frac{1}{2}\bar{\Omega}_k$, έχουμε $2x_k - x_1^k \in \bar{\Omega}_k$ και άρα $2x_0 - x_1^0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} (2x_k - x_1^k) \in \bar{\Omega}$. Αυτό σημαίνει ότι $u_0(2x_0 - x_1^0) \leq 0$. Από το Πρόσχημα 4.3.2 γνωρίζουμε ότι η u_0 είναι γνήσια κυρτή και επομένως έχουμε

$$u_0(x_0) < \frac{1}{2}u_0(x_1^0) + \frac{1}{2}u_0(2x_0 - x_1^0) \implies u_0(2x_0 - x_1^0) > 2u_0(x_0) - u_0(x_1^0) = 0$$

Αυτό είναι άτοπο, οπότε η αρχική μας υπόθεση δεν ισχύει.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $x_1 \in x_1 + \frac{1}{2}\bar{\Omega}$ και η u είναι γνήσια κυρτή, οπότε έχουμε $u(x_1) < \frac{\delta}{2}u(x_1) \implies 2 > \delta$. $\square$

Λήμμα 4.5.2 Θεωρούμε ανοικτό κυρτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$, $0 < r \leq R$ ώστε $B(x_0, r) \subseteq \Omega \subseteq B(x_0, R)$ και κυρτή συνάρτηση $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{cases} \lambda dx \leq \mu_u \leq \Lambda dx, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

για κάποιες σταθερές $0 < \lambda \leq \Lambda$. Αν $\rho \in (0, 1)$, $x_1 \in \Omega$ είναι ένα σημείο όπου η u λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της $-h := u(x_1)$ και $S_\rho := S(x_1, 0, (1 - \rho)h)$, υπάρχει $\tau > 0$ που εξαρτάται αποκλειστικά από τα $n, \lambda, \Lambda, r, R, \rho$ ώστε να ισχύει

$$S(x, p, t) \subset \subset \Omega, \quad \forall x \in S_\rho, p \in \partial u(x), 0 < t \leq \tau$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το αποτέλεσμα δεν ισχύει. Τότε, επειδή το τ είναι ανεξάρτητο της επιλογής των u και Ω , αλλά εξαρτάται από τα $n, \lambda, \Lambda, r, R, \rho$, υπάρχουν ανοικτά κυρτά σύνολα Ω_k με $B(x_0, r) \subseteq \Omega_k \subseteq B(x_0, R)$, κυρτές συναρτήσεις $u_k : \Omega_k \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\begin{cases} \lambda dx \leq \mu_{u_k} \leq \Lambda dx, & \text{στο } \Omega_k \\ u_k = 0, & \text{στο } \partial\Omega_k \end{cases}$$

σημεία $x_1^k \in \Omega_k$, $h_k := -u_k(x_1^k) > 0$, $x_k \in S_\rho^k := [u_k < -\rho h_k]$, $p_k \in \partial u_k(x_k)$ και $t_k \in (0, \frac{1}{k})$ ώστε το $S_k := [u_k < u_k(x_k) + \langle p_k, \cdot - x_k \rangle + t_k]$ να μην περιέχεται συμπαγώς στο Ω_k , όταν

$k \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $z_k \in \bar{S}_k \cap \partial\Omega_k$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχουν x_0, z_0 ώστε $x_k \rightarrow x_0$ και $z_k \rightarrow z_0$, διότι αυτές οι ακολουθίες βρίσκονται στο $B(x_0, R)$.

Από το Πρόρισμα 2.5.5 γνωρίζουμε ότι υπάρχει ανοικτό, κυρτό, φραγμένο σύνολο Ω_0 που είναι το όριο της ακολουθίας Ω_k στην μετρική Hausdorff, καθώς και κυρτή συνάρτηση $u_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $u_k \rightarrow u_0$ τοπικά ομοιόμορφα στο Ω_0 και

$$\begin{cases} \lambda dx \leq \mu_{u_0} \leq \Lambda dx, & \text{στο } \Omega_0 \\ u_0 = 0, & \text{στο } \partial\Omega_0 \end{cases}$$

Αφού $\text{dist}_H(\partial\Omega_k, \partial\Omega_0) \rightarrow 0$, $z_k \in \partial\Omega_k$ και $x_k \in \Omega_k$ έχουμε $z_0 \in \partial\Omega_0$ και $x_0 \in \bar{\Omega}_0$.

Σύμφωνα με το Πρόρισμα 2.1.8 έχουμε $|p_k| \leq \frac{2\|u_k\|_{L^\infty(\Omega_k)}}{\text{dist}(x_k, \partial\Omega_k)} \leq \frac{2C_0}{\text{dist}(x_k, \partial\Omega_k)}$, όπου η σταθερά C_0 δίνεται από την Πρόταση 4.1.9(i) και είναι ανεξάρτητη του $k \in \mathbb{N}$. Από το Πρόρισμα 4.1.11 εφαρμοσμένο για την u_k , $s := \rho$, $t_1 := 1 - \rho$ και $t_2 := 1$ γνωρίζουμε την ύπαρξη σταθεράς $c > 0$ ανεξάρτητης του k ώστε $c \leq \text{dist}(S_\rho^k, \partial\Omega_k)$. Τότε έχουμε $c \leq \text{dist}(x_k, \partial\Omega_k)$, διότι $x_k \in S_\rho^k$. Συνεπώς είναι $|p_k| \leq \frac{2C_0}{c}$ και άρα μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι υπάρχει p_0 ώστε $p_k \rightarrow p_0$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι για $k \rightarrow +\infty$ είναι

$$\begin{aligned} c \leq \text{dist}(x_k, \partial\Omega_k) &\leq |x_k - x_0| + \text{dist}(x_0, \partial\Omega) + \text{dist}_H(\partial\Omega_k, \partial\Omega) \\ &\implies c \leq \text{dist}(x_0, \partial\Omega) \implies x_0 \in \Omega \end{aligned}$$

Επειδή $x_0 \in \Omega_0$, τελικά έχουμε $x_k \in \Omega_0$ και άρα $u_k(x_k) \rightarrow u_0(x_0)$ [25, Πρόταση 9.6]. Συνεπώς τότε έχουμε

$$0 = u_k(z_k) \leq u_k(x_k) + \langle p_k, z_k - x_k \rangle + t_k \implies u_0(z_0) = 0 \leq u_0(x_0) + \langle p_0, z_0 - x_0 \rangle$$

ενώ για $z \in \Omega_0$ τελικά έχουμε $z \in \Omega_k$ και άρα υπολογίζουμε

$$u_k(z) \geq u_k(x_k) + \langle p_k, z - x_k \rangle \implies u_0(z) \geq u_0(x_0) + \langle p_0, z - x_0 \rangle$$

Οριακά αυτή η ανισότητα ισχύει και για το $z_0 \in \partial\Omega_0$, οπότε έχουμε

$$u_0(z_0) = u_0(x_0) + \langle p_0, z_0 - x_0 \rangle$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι $x_0 \in \Omega_0$, $z_0 \in \partial\Omega_0$ και από το Πρόρισμα 4.3.2 γνωρίζουμε ότι η u_0 είναι γνήσια κυρτή. $\square$

Θεώρημα 4.5.3 (Caffarelli) Θεωρούμε ανοικτό κυρτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$, $0 < r \leq R$ ώστε $B(x_0, r) \subseteq \Omega \subseteq B(x_0, R)$ και κυρτή συνάρτηση $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{cases} \lambda dx \leq \mu_u \leq \Lambda dx, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

για κάποιες σταθερές $0 < \lambda \leq \Lambda$. Αν $x_1 \in \Omega$ είναι ένα σημείο όπου η u λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της $-h := \min_{\Omega} u = u(x_1)$ και $S_{\frac{1}{2}} := S(x_1, 0, \frac{h}{2})$, υπάρχουν σταθερές $C > 0$ και $\alpha \in (0, 1]$ που εξαρτώνται αποκλειστικά από τα $n, \lambda, \Lambda, r, R$ ώστε να ισχύει $u \in C^{1,\alpha}(S_{\frac{1}{2}})$ και μάλιστα $\|u\|_{C^{1,\alpha}(S_{\frac{1}{2}})} \leq C$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $x \in S_{\frac{1}{2}}$ και $p \in \partial u(x)$. Εξαιτίας του Λήμματος 4.5.2 υπάρχει σταθερά $\tau > 0$ που εξαρτάται μόνο από τα $n, \lambda, \Lambda, r, R$ ώστε $S := S(x, p, t) \subset \subset \Omega$, $\forall t \in (0, \tau]$.

Αν L είναι η αφινική απεικόνιση που κανονικοποιεί το S , θεωρούμε την κανονικοποιημένη λύση v που αντιστοιχεί στην u πάνω από το S , όπως στην Πρόταση 4.1.8. Τότε η v παρουσιάζει ελάχιστο πάνω από το $L(S)$ στο σημείο Lx και επομένως από το Λήμμα 4.5.1 γνωρίζουμε την ύπαρξη σταθεράς $\delta \in (1, 2)$ που εξαρτάται μόνο από τα n, λ, Λ ώστε

$$\max_{Lx + \frac{1}{2}L(\bar{S})} v \leq \frac{\delta}{2} v(Lx)$$

Αφού $Lx + \frac{1}{2}L(\bar{S}) = L(\frac{1}{2}\bar{S})$ και στο ∂S είναι $u - \ell_{x,p} = t$, έχουμε

$$v \circ L \left(\frac{x+z}{2} \right) \leq \frac{\delta}{2} v \circ L(x) \implies u_0 \left(\frac{x+z}{2} \right) \leq \frac{2-\delta}{2} t = \frac{2-\delta}{2} u_0(z), \quad \forall z \in \partial S$$

όπου $u_0 := u - \ell_{x,p}$. Επειδή $S(x, p, \tau) = \bigcup_{0 < t < \tau} S(x, p, t)$, είναι

$$u_0 \left(\frac{x+z}{2} \right) \leq \frac{2-\delta}{2} u_0(z), \quad \forall z \in S(x, p, \tau)$$

Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.1.13 υπάρχει σταθερά $\rho \in (0, 1)$ που εξαρτάται μόνο από τα $\tau, n, \lambda, \Lambda, R$ ώστε $B(x, \rho) \subseteq S(x, p, \tau)$. Για $x + 2^{-k}y \in B(x, \rho)$ όταν $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ έχουμε

$$u_0 \left(x + \frac{2^{-k}y}{2} \right) \leq \frac{2-\delta}{2} u_0(x + 2^{-k}y)$$

Επαγωγικά αυτή η σχέση γίνεται

$$u_0 \left(x + 2^{-k}y \right) \leq \left(\frac{2-\delta}{2} \right)^k u_0(x + y) < 2^{-k(1+\alpha)} \tau$$

όταν $y \in B(0, \rho)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $\alpha := -\frac{\log(2-\delta)}{\log 2} > 0$.

Καθώς $\frac{|y|}{\rho} < 1$, για κάθε $y \in B(0, \rho)$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $2^{-(m+1)} \leq \frac{|y|}{\rho} \leq 2^{-m} \implies \frac{1}{2}\rho \leq 2^m|y| \leq \rho$, οπότε τότε έχουμε

$$u_0(x + y) = u_0 \left(x + 2^{-m}(2^m y) \right) \leq 2^{-m(1+\alpha)} \tau \leq \left(\frac{2|y|}{\rho} \right)^{1+\alpha} \tau = \frac{2^{1+\alpha} \tau}{\rho^{1+\alpha}} |y|^{1+\alpha}$$

Συνεπώς είναι

$$u(z) \leq \ell_{x,p}(z) + \frac{2^{1+\alpha}\tau}{\rho^{1+\alpha}}|z-x|^{1+\alpha}, \quad \forall z \in B(x, \rho) \cap S_{\frac{1}{2}}$$

Χωρίς βλάβη της της γενικότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha \leq 1$, διότι αν $\alpha = \tilde{\alpha} + k$ για $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ και $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $|z-x|^{1+\alpha} \leq |z-x|^{1+\tilde{\alpha}}$, αφού $\rho < 1$. Χρησιμοποιώντας αυτή την ανισότητα όπως στην απόδειξη της Πρότασης 3.2.1, δείχνουμε ότι η u είναι διαφορίσιμη στο $S_{\frac{1}{2}}$.

Από το Πόρισμα 4.1.11 γνωρίζουμε την ύπαρξη σταθεράς $c > 0$ που εξαρτάται από τα $n, \lambda, \Lambda, r, R$ ώστε $\text{dist}(S_{\frac{1}{2}}, \partial\Omega)$. Αφού επιπλέον γνωρίζουμε ότι $S_{\frac{1}{2}} \subseteq \Omega \subseteq B(x_0, R)$, έχουμε $S_{\frac{1}{2}} \subset \subset \Omega$ και άρα από το Πόρισμα 2.1.8 συμπεραίνουμε ότι στο $S_{\frac{1}{2}}$ ισχύει

$$|\nabla u| \leq \frac{2\|u\|_{L^\infty(\Omega)}}{\text{dist}(S_{\frac{1}{2}}, \partial\Omega)} \leq \frac{2h}{c} \leq \frac{2C_0}{c}$$

όπου $C_0 > 0$ είναι μία σταθερά όπως στην Πρόταση 4.1.9. Εξαιτίας αυτού του φράγματος η $u|_{S_{\frac{1}{2}}}$ είναι K -Lipschitz συνεχής για κάποια σταθερά $K > 0$ που εξαρτάται μόνο από τα $n, \lambda, \Lambda, r, R$.

Τέλος, το αποτέλεσμα προκύπτει με χρήση της Πρότασης 3.2.1. $\square$

Ως επακόλουθο του προηγούμενου θεωρήματος έχουμε την εσωτερική $C^{1,\alpha}$ λειότητα των γνήσια κυρτών λύσεων Alexandron, όταν η συνάρτηση της δεξιάς πλευράς είναι φραγμένη.

Θεώρημα 4.5.4 (Caffarelli) *Ας είναι $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μία γνήσια κυρτή συνάρτηση ώστε να ικανοποιείται η σχέση $\lambda dx \leq \mu_u \leq \Lambda dx$ για κάποιες σταθερές $0 < \lambda \leq \Lambda$.*

Τότε υπάρχει $\alpha \in (0, 1]$ ώστε $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\Omega)$. Μάλιστα, το α εξαρτάται αποκλειστικά από τα n, λ και Λ .

Απόδειξη. Θεωρούμε σημείο $x_0 \in \Omega$, $p \in \partial u(x_0)$, $t > 0$ και $S := S(x_0, p, t)$. Καθώς η u είναι γνήσια κυρτή γνωρίζουμε ότι το τμήμα S περιέχεται συμπαγώς στο Ω όταν το t είναι αρκετά μικρό. Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.8, ορίζεται η κανονικοποιημένη λύση $v : L(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, όπου L είναι η αφινική απεικόνιση που κανονικοποιεί το S .

Όπως έχουμε ήδη δει, η v λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της πάνω από το $L(\Omega)$ στο σημείο $L(x_0)$. Επιπλέον, εξαιτίας της αφινικής αναλλοιώτου της Monge-Ampère, το μ_v διατηρεί τα ίδια φράγματα με το μ_u , ενώ στο $\partial(L(S))$ η v μηδενίζεται. Τότε το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 4.5.3. Μάλιστα, επειδή το $L(\Omega)$ είναι κανονικοποιημένο, η σταθερά α εξαρτάται αποκλειστικά από τα n, λ και Λ . $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΟΣΤΟΥΣ ΤΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗ

5.1 Εισαγωγή στη θεωρία της Βέλτιστης Μεταφοράς

Ένας ακόμα κλάδος των Μαθηματικών στον οποίο εμφανίζεται η εξίσωση Monge-Ampère είναι η Θεωρία της Βέλτιστης Μεταφοράς (Optimal Transport). Οι εφαρμογές του προβλήματος της Βέλτιστης Μεταφοράς είναι ποικίλες στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Για παράδειγμα εμφανίζεται σε αλγόριθμους επεξεργασίας εικόνων, στα Μαθηματικά Οικονομικά, στη Μηχανική των Ρευστών και γενικότερα στις Εξελικτικές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις που εμφανίζονται στη δυναμική πληθυσμών στη Βιολογία και στις Κοινωνικές Επιστήμες [33].

Ένα πρόβλημα Βέλτιστης Μεταφοράς, στην πιο απλή του μορφή και όπως τέθηκε από τον Gaspard Monge για πρώτη φορά στην Ακαδημία Επιστημών της Γαλλίας το 1781, έγκειται στο να προσδιοριστεί μία μετρήσιμη απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ώστε, αν $f, g \geq 0$ είναι δύο δεδομένες συναρτήσεις πυκνότητας μάζας με $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)dy = 1$, να μετατοπίζεται η μάζα της f στη g μέσω της T , δηλαδή

$$\int_B g(y)dy = \int_{T^{-1}(B)} f(x)dx, \text{ για κάθε σύνολο Borel } B \subseteq \mathbb{R}^n,$$

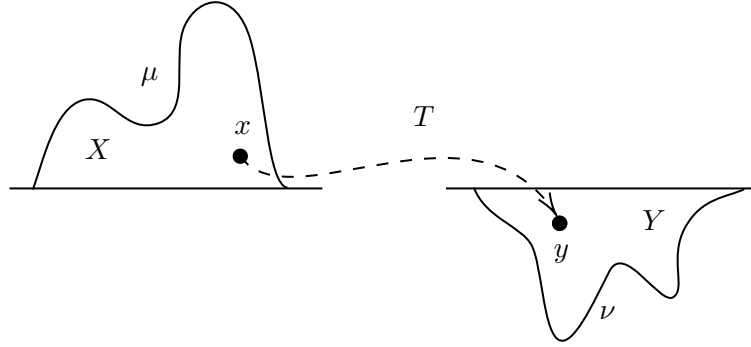
και ταυτόχρονα να ελαχιστοποιείται η ποσότητα

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T(x) - x|dx$$

πάνω από το σύνολο όλων των απεικονίσεων που πληρούν την πρώτη συνθήκη. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι έχουμε μία μάζα σωματιδίων ενός υλικού (λόγου χάρη άμμος) η κατανομή της οποίας εκφράζεται μέσω της f σε μία θέση $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και επιθυμούμε να την μεταφέρουμε σε μία θέση $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ώστε η κατανομή της μάζας στη νέα θέση να εκφράζεται μέσω της g . Ωστόσο,

επειδή η μεταφορά μίας μονάδας μάζας από το σημείο x στο σημείο y έχει κάποιο κόστος $c|x - y|$, ενδιαφερόμαστε να προσδιορίσουμε μια απεικόνιση μεταφοράς T που ελαχιστοποιεί τη μέση απόσταση που πρέπει να διανύσει το εκάστοτε σωματίδιο ώστε με αυτόν τον τρόπο να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος της μεταφοράς. Υπό αυτή την έννοια η απεικόνιση T είναι βέλτιστη· εξού και το όνομα της θεωρίας.

Γενικότερα, θεωρούμε τα μέτρα μ, ν των χώρων X, Y . Μία μετρήσιμη απεικόνιση $T : X \rightarrow Y$ καλείται **απεικόνιση μεταφοράς** του μ στο ν όταν ικανοποιεί την σχέση $T\#\mu = \nu$ πάνω από τα ν -μετρήσιμα υποσύνολα του Y , όπου $T\#\mu := \mu(T^{-1}(\cdot))$ είναι το μέτρο εικόνα του μ ως προς T . Αν $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ είναι κάποια συνάρτηση κόστους, η απεικόνιση μεταφοράς $T : X \rightarrow Y$ καλείται **απεικόνιση βέλτιστης μεταφοράς** του μ στο ν όταν ελαχιστοποιεί την ποσότητα $\int_X c(x, S(x)) d\mu(x)$ πάνω από το σύνολο όλων των απεικονίσεων μεταφοράς $S : X \rightarrow Y$ του μ στο ν .



Σχήμα 5.1: Η απεικόνιση μεταφοράς T μετακινεί την μάζα του X στο Y , όπου η κατανομή της μάζας στο X μοντελοποιείται από το μ , ενώ η αντίστοιχη κατανομή στο Y μοντελοποιείται από το ν .

5.2 Κανονικότητα της λύσης του προβλήματος Βέλτιστης Μεταφοράς με κόστος το τετράγωνο της Ευκλείδειας απόστασης

Αν στο πρόβλημα Βέλτιστης Μεταφοράς επιλέξουμε ως συνάρτηση κόστους την Ευκλείδεια απόσταση στο τετράγωνο, δηλαδή $c(x, y) := |x - y|^2$, σύμφωνα με ένα αποτέλεσμα του Brenier [2] αυτό το πρόβλημα έχει λύση και μάλιστα αυτή η απεικόνιση βέλτιστης μεταφοράς δίνεται σχεδόν παντού ως κλίση μίας κυρτής συνάρτησης.

Θεώρημα 5.2.1 (Brenier) *Αν τα μ, ν είναι δύο μέτρα πιθανότητας του $\mathbb{R}^n$ με $\mu = f dx$ ώστε $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} |y|^2 d\nu(y) < +\infty$, υπάρχει μ -σχεδόν παντού μοναδική απεικόνιση βέλτιστης μεταφοράς T στο πρόβλημα της βέλτιστης μεταφοράς του μ στο ν με συνάρτηση κόστους το τετράγωνο της Ευκλείδειας απόστασης: $c(x, y) := |x - y|^2$. Μάλιστα, υπάρχει*

μοναδική κυρτή συνάρτηση $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ η οποία είναι κάτω ημισυνεχής, μ -σχεδόν παντού διαφορίσιμη και ισχύει η ισότητα $T = \nabla u$ μ -σχεδόν παντού, ενώ επιπλέον έχουμε $\text{spt } \nu = \overline{T(\text{spt } \mu)}$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [38, Θεωρήματα 2.12 και 2.32]. $\square$

Στο πλαίσιο της μελέτης της εξίσωσης Monge-Ampère αυτό το πρόβλημα παρουσιάζει ενδιαφέρον διότι η λύση του ικανοποιεί μία εξίσωση Monge-Ampère. Ας δούμε αυτή την σχέση. Για λόγους απλότητας θεωρούμε ότι η $T = \nabla u$ είναι διαφορομορφισμός, ενώ υποθέτουμε και ότι $\nu = g dx$. Μέσω του τύπου αλλαγής μεταβλητών ολοκληρωμάτων ([29, Θεώρημα 7.6], [32, Θεώρημα 10.9], [29, Πρόγραμμα 6.12]) έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d(T\#\mu) &= \int_{T^{-1}(\mathbb{R}^n)} \varphi \circ T d\mu = \int_{T^{-1}(\mathbb{R}^n)} \varphi \circ T f dx \\ &\text{και} \\ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\nu &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi g dy = \int_{T^{-1}(\mathbb{R}^n)} \varphi \circ T g \circ T |\det \nabla T| dx \end{aligned}$$

όταν $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$, οπότε η ισότητα $T\#\mu = \nu$ μας δίνει τη σχέση

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi d(T\#\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\nu \implies \int_{T^{-1}(\mathbb{R}^n)} \varphi \circ T f dx = \int_{T^{-1}(\mathbb{R}^n)} \varphi \circ T g \circ T |\det \nabla T| dx$$

Αυτό σημαίνει ότι $f = g \circ T |\det \nabla T|$ σχεδόν παντού στο $T^{-1}(\mathbb{R}^n)$ (δείτε [29, Πρόταση 6.20](ii)). Καθώς η u είναι κυρτή έχουμε $|\det \nabla T| = \det D^2 u$, ενώ αν η g είναι θετική έχουμε $\det D^2 u = \frac{f}{g \circ \nabla u}$ σχεδόν παντού στο $T^{-1}(\mathbb{R}^n)$. Ολοκληρώνουμε την ισότητα και από το Παράδειγμα 2.2.2 προκύπτει $\mu_u = \frac{f dx}{g \circ \nabla u}$. Επομένως η u αποτελεί λύση Alexandron αυτής της εξίσωσης. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι

$$\det D^2 u = \frac{f}{g \circ \nabla u} \implies \nabla u([g > 0]) = [f > 0]$$

και αυτή αποτελεί μίας μορφής “συνοριακή συνθήκη” για την εξίσωση.

Ακόμα και υπό ασθενέστερες υποθέσεις για την T , αυτό το πρόβλημα σχετίζεται με μία εξίσωση Monge-Ampère. Για να δείξουμε αυτή την σχέση θα χρειαστούμε πρώτα ένα υπολογιστικό λήμμα.

Λήμμα 5.2.2 Θεωρούμε δύο ανοικτά σύνολα $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$, μ, ν δύο μέτρα πιθανότητας του $\mathbb{R}^n$ και $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ώστε $\mu = f dx$, $\nu = g dy$. Αν $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία κυρτή κάτω ημισυνεχής συνάρτηση ώστε η απεικόνιση ∇u να αποτελεί απεικόνιση μεταφοράς του μ στο ν , για κάθε σύνολο Borel $B \subseteq X$ είναι $\mu(B) = \nu(\partial u(B))$.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού η u είναι σχεδόν παντού διαφορίσιμη ως κυρτή, η απεικόνιση ∇u υπάρχει και είναι καλά ορισμένη στο πλαίσιο της Θεωρίας Μέτρου. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό Legendre $u^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ της u , οπότε από την Παρατήρηση 2.1.13 γνωρίζουμε ότι $p \in \partial u(x) \iff x \in \partial u^*(p)$.

Για το εκάστοτε σύνολο Borel $B \subseteq X$ γνωρίζουμε ότι το $\partial u(B)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο, οπότε, καθώς το μέτρο ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, το $\partial u(B)$ είναι και ν -μετρήσιμο. Συνεπώς έχουμε

$$\nu(\partial u(B)) = \nu(\partial u(B) \cap (\nabla u^*)^{-1}(B)) + \nu(\partial u(B) \setminus (\nabla u^*)^{-1}(B))$$

Για $p \in (\nabla u^*)^{-1}(B)$ υπάρχει $x \in B$ ώστε $p = \nabla u(x) \in \partial u(B)$, οπότε

$$\partial u(B) \cap (\nabla u^*)^{-1}(B) = (\nabla u^*)^{-1}(B)$$

Για $p \in \partial u(B) \setminus (\nabla u^*)^{-1}(B)$ υπάρχει $x \in B$ ώστε $x \in \partial u^*(p)$. Τότε το x αποκλείεται να είναι το μοναδικό στοιχείο του συνόλου $\partial u^*(p) \cap B$, εξαιτίας της Πρότασης 2.1.7 και $p \notin (\nabla u^*)^{-1}(B)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $x \neq y \in B$ ώστε $p \in \partial u(x) \cap \partial u(y)$ και άρα το $\partial u(B) \setminus (\nabla u^*)^{-1}(B) \subseteq \mathcal{Z}$ έχει μηδενικό μέτρο ως απόρροια του Λήμματος 2.1.15. Ξανά λόγω της απόλυτης συνέχειας συμπεραίνουμε ότι

$$\nu(\partial u(B)) = \nu((\nabla u^*)^{-1}(B))$$

Αντικαθιστούμε την ισότητα $\nabla u \# \mu = \nu$ και έχουμε

$$\nu(\partial u(B)) = \mu((\nabla u)^{-1}((\nabla u^*)^{-1}(B)))$$

Τέλος έχουμε

$$x \in (\nabla u)^{-1}((\nabla u^*)^{-1}(B)) \iff \nabla u(x) \in (\nabla u^*)^{-1}(B) \iff x = \nabla u^*(\nabla u(x)) \in B$$

□

Αν θεωρήσουμε και πάλι την κυρτή συνάρτηση u που δίνεται από το Θεώρημα 5.2.1 και τα μέτρα πιθανότητας μ, ν να είναι απόλυτα συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue με $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ώστε $0 < \lambda \leq f, g \leq \Lambda$, $\mu = f dx$, $\nu = g dy$, έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_u(B) &= \int_{\partial u(B)} 1 dy = \int_{\partial u(B)} \frac{1}{g} g dy \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \nu(\partial u(B)) = \frac{1}{\lambda} \mu(B) \leq \frac{\Lambda}{\lambda} |B| \end{aligned}$$

ενώ ανάλογα προκύπτει $\mu_u(B) \geq \frac{\lambda}{\Lambda} |B|$. Τότε από το Θεώρημα Radon-Nikodym [29, Θεώρημα 10.15] γνωρίζουμε την ύπαρξη συνάρτησης $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ώστε $\mu_u = h dx$ και $\frac{\lambda}{\Lambda} \leq h \leq \frac{\Lambda}{\lambda}$. Δείξαμε, λοιπόν, ότι και σε αυτή την περίπτωση η u είναι λύση Alexandron μίας εξίσωσης Monge-Ampère, οπότε μπορούμε να εξαγάγουμε συμπεράσματα για την κανονικότητα της T με

την βοήθεια της Θεωρίας Κανονικότητας των λύσεων Alexandron. Βέβαια, στο παραπάνω επιχείρημα υποθέτουμε ότι οι f, g είναι φραγμένες μακριά από το μηδέν και το άπειρο πάνω από ολόκληρο το $\mathbb{R}^n$, κάτι που στην γενική περίπτωση δεν ισχύει.

Ο Caffarelli εκμεταλλευόμενος αυτή την σχέση και την κανονικότητα των λύσεων Alexandron (Θεώρημα 4.5.4) απέδειξε ένα αποτέλεσμα κανονικότητας για την λύση του προβλήματος Βέλτιστης Μεταφοράς που δίνεται από το Θεώρημα του Brenier [7].

Θεώρημα 5.2.3 (Caffarelli) *Ας είναι $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ δύο ανοικτά, φραγμένα σύνολα, μ, ν δύο μέτρα πιθανότητας του $\mathbb{R}^n$ ώστε $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} |y|^2 d\nu(y) < +\infty$ και $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ώστε $f|_{\mathbb{R}^n \setminus X} = 0, g|_{\mathbb{R}^n \setminus Y} = 0, \lambda \leq f|_X, g|_Y \leq \Lambda$ για κάποιες σταθερές $\lambda, \Lambda > 0, \mu = f dx, \nu = g dy$. Αν το Y είναι κυρτό και $T = \nabla u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι η λύση του προβλήματος βέλτιστης μεταφοράς με συνάρτηση κόστους το τετράγωνο της Ευκλείδειας απόστασης που δίνεται από το Θεώρημα 5.2.1, η $T|_X : X \rightarrow Y$ αποτελεί απεικόνιση βέλτιστης μεταφοράς του μ στο ν και υπάρχει $\alpha \in (0, 1]$ ώστε $T|_X \in C_{loc}^{0,\alpha}(X; \mathbb{R}^n)$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι λόγω των φραγμάτων λ, Λ στα X, Y έχουμε $\text{spt } \mu = \text{spt } f = \overline{X}$ και $\text{spt } \nu = \text{supp } g = \overline{Y}$. Αυτό σημαίνει ότι $\overline{T(\overline{X})} = \overline{Y}$, οπότε αφού η u είναι σχεδόν παντού διαφορίσιμη σχεδόν για κάθε $x \in \overline{X}$ έχουμε $\nabla u(x) \in \overline{Y}$. Επειδή $|\partial Y| = 0$, είναι εμφανές ότι η $T|_X : X \rightarrow Y$ αποτελεί απεικόνιση βέλτιστης μεταφοράς του μ στο ν .

Θεωρούμε ότι το $\Delta_u \subseteq X$ είναι το σύνολο των σημείων όπου η u είναι διαφορίσιμη. Γνωρίζουμε ότι το υποδιαφορικό της κυρτής συνάρτησης u σε ένα σημείο x όπου $u(x) \neq +\infty$ δύναται να χαρακτηριστεί με την βοήθεια της παραγώγου της μέσω της σχέσης

$$\partial u(x) = \text{conv} \left\{ p \in \mathbb{R}^n : \exists z_k \in \Delta_u \text{ με } z_k \rightarrow x \text{ και } p = \lim_{k \rightarrow +\infty} \nabla u(z_k) \right\}$$

(δείτε [23, Κεφάλαιο D, Θεώρημα 6.3.1]). Συνεπώς τότε έχουμε

$$\partial u(X) \subseteq \text{conv } \overline{\nabla u(\Delta_u)} \subseteq \text{conv } \overline{Y} = \overline{Y}$$

αφού το Y είναι κυρτό. Επιπλέον έχουμε $|\partial Y| = 0$, ενώ από το Λήμμα 5.2.2 είναι $|\partial X| = 0$ και άρα τότε δουλεύοντας όπως παραπάνω μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 5.2.2 και τα φράγματα των f, g που ισχύουν σχεδόν παντού στα $\overline{X}, \overline{Y}$ ώστε να υπολογίσουμε τα φράγματα $\frac{1}{M} dx \leq \mu_u \leq M dx$ για το μέτρο Monge-Ampère πάνω από το $\overline{X}$, όπου $M := \frac{\Lambda}{\lambda} \geq 1$. Μένει να δείξουμε είναι γνήσια λύση μίας εξίσωσης Monge-Ampère σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^n$ και το αποτέλεσμα θα επέλθει από το Θεώρημα 4.5.4.

Επεκτείνουμε την u σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^n$ μέσω της συνάρτησης $\hat{u}(z) := \sup_{x \in X, p \in \partial u(x)} \ell_{x,p}(z)$ όταν $z \in \mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε ότι αυτή είναι κυρτή. Επιπλέον, για $z, x \in X$ και $p \in \partial u(x)$ έχουμε $u(z) \geq u(x) + \langle p, z - x \rangle$, οπότε στο X ισχύει $u \geq \hat{u}$, ενώ $u(z) = u(z) + \langle p, z - z \rangle \leq \hat{u}(z)$. Συνεπώς μέσα στο X οι $u, \hat{u}$ πράγματι ταυτίζονται. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $E \subseteq X$ έχουμε $\partial \hat{u}(E) = \partial u(E)$ και άρα στο X έχουμε τα ίδια φράγμα και για το $\mu_{\hat{u}}$.

Γνωρίζουμε ότι η u είναι σχεδόν παντού διαφορίσιμη στο X , οπότε εκεί δεν μπορεί να λαμβάνει την τιμή $+\infty$ παρά μόνο ίσως στο ∂X . Ωστόσο και στο σύνορο η u είναι πεπερασμένη, διότι σε διαφορετική περίπτωση θα μπορούσαμε να βρούμε ακολουθία σημείων

του εσωτερικού $z_m \rightarrow z_0 \in \partial X$ και $u(z_m) \geq m$. Για $p_m \in \partial u(z_m)$ και $z \in X$ είναι $|p_m||z_m - z| \geq \langle p_m, z_m - z \rangle \geq m - u(z)$, οπότε αφού $\text{dist}(z, \partial X) > 0$ θα έπρεπε να ισχύει $|p_m| \rightarrow +\infty$, ενώ παράλληλα αυτά ανήκουν στο φραγμένο $\bar{Y}$. Συνεπώς η u είναι πεπερασμένη σε ολόκληρο το $\bar{X}$.

Θεωρούμε $R > 0$ ώστε $\bar{Y} \subseteq B(0, R)$, οπότε για $x \in X$, $p \in \partial u(x)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$ είναι $|\ell_{x,p}(z_1) - \ell_{x,p}(z_2)| = |\langle p, z_1 - z_2 \rangle| \leq |R||z_1 - z_2|$. Επιπλέον, αφού για $x \in X$, $p \in \partial u(X)$ όταν $z, w \in \mathbb{R}^n$ είναι $\hat{u}(z) \geq \ell_{x,p}(z) \geq \ell_{x,p}(w) - R|z - w|$, ισχύει $R|z - w| \geq \hat{u}(w) - \hat{u}(z)$, ενώ εναλλάσσοντας τους ρόλους των z, w συμπεραίνουμε ότι η $\hat{u}$ είναι Lipschitz συνεχής. Τότε για $z \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\hat{u}(z) := \sup_{x \in X} \sup_{p \in \partial \hat{u}(x)} (\hat{u}(x) + \langle p, z - x \rangle) = \max_{x \in \bar{X}, p \in \partial \hat{u}(x)} (\hat{u}(x) + \langle p, z - x \rangle) < +\infty$$

Αν $\Delta_{\hat{u}} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο των σημείων όπου η $\hat{u}$ είναι διαφορίσιμη και $z_0 \in \Delta_{\hat{u}}$, υπάρχουν $x_0 \in \bar{X}$ και $p_0 \in \partial \hat{u}(x_0)$ ώστε $\hat{u}(z_0) = \hat{u}(x_0) + \langle p_0, z_0 - x_0 \rangle$. Ακόμα, για κάθε $z \in X$ είναι

$$\hat{u}(z_0) + \langle p_0, z - z_0 \rangle = \hat{u}(x_0) + \langle p_0, z - x_0 \rangle \leq \hat{u}(z)$$

οπότε από την Πρόταση 2.1.7 έχουμε $\nabla \hat{u}(z_0) = p_0 \in \bar{Y}$. Αυτό σημαίνει ότι $\nabla \hat{u}(\Delta_{\hat{u}}) \subseteq \bar{Y}$ και άρα χρησιμοποιώντας και πάλι τον χαρακτηρισμό του υποδιαφορικού σε σχέση με την παράγωγο του έχουμε $\partial \hat{u}(\mathbb{R}^n) \subseteq \text{conv } \nabla \hat{u}(\Delta_{\hat{u}}) \subseteq \text{conv } \bar{Y} = \bar{Y}$.

Συνεχίζουμε εξετάζοντας το $\partial \hat{u}(\mathbb{R}^n \setminus X)$. Παρατηρούμε ότι

$$\partial \hat{u}(\mathbb{R}^n \setminus X) = \underbrace{(\partial \hat{u}(\mathbb{R}^n) \setminus \partial \hat{u}(X))}_{\bar{Y} \setminus \nabla u(\Delta_u)} \cup \underbrace{(\partial \hat{u}(\mathbb{R}^n \setminus X) \cap \partial \hat{u}(X))}_{\subseteq \mathcal{Z}}$$

και άρα αυτό είναι σύνολο μηδενικού μέτρου, διότι εξαιτίας της ισότητας $\overline{T(\bar{X})} = \bar{Y}$ για σχεδόν κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $\nabla u(x) = y$, $|\partial X| = |\partial Y| = 0$. Συνδυάζοντας όλα τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι στο $\mathbb{R}^n$ ισχύουν τα φράγματα $\frac{1}{M} \chi_{\bar{X}} dx \leq \mu_{\hat{u}} \leq M \chi_{\bar{X}} dx$ και άρα υπάρχει μοναδική συνάρτηση $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ώστε $\mu_{\hat{u}} = h dx$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι η $\hat{u}$ είναι γνήσια κυρτή στο X , ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα κανονικότητας των λύσεων Alexandron που γνωρίζουμε. Ας υποθέσουμε ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Επομένως υπάρχει $x_0 \in X$ και $p_0 \in \partial \hat{u}(x_0)$ ώστε το $S := [\hat{u} = \ell]$ να περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, όπου $\ell := \hat{u}(x_0) + \langle p_0, \cdot - x_0 \rangle$.

Από το Θεώρημα 4.3.1 γνωρίζουμε ότι το S δεν έχει εκτεθειμένα σημεία στο X . Ας εξετάσουμε την περίπτωση όπου δεν έχει εκτεθειμένα σημεία και πουθενά αλλού στο $\mathbb{R}^n$. Όταν ένα μη κενό κλειστό σύνολο δεν έχει εκτεθειμένα σημεία πρέπει να περιέχει κάποια ευθεία [31, Πρόταση 18.5.3]. Επομένως, η $\hat{u}$ ταυτίζεται με μία αφινική συνάρτηση σε αυτή την ευθεία. Όμως, στο Λήμμα 2.1.16 έχουμε αποδείξει ότι τότε το $\partial \hat{u}(\mathbb{R}^n)$ περιέχεται σε ένα υπερπίεδο και αυτό είναι άτοπο, διότι $|\partial \hat{u}(\mathbb{R}^n)| = |\bar{Y}|$, ενώ το Y είναι ανοικτό. Ως επακόλουθο αυτών των συλλογισμών γνωρίζουμε ότι το S έχει εκτεθειμένα σημεία, τα οποία είτε βρίσκονται στο $\mathbb{R}^n \setminus \bar{X}$, είτε στο ∂X .

1. Αν το S έχει κάποιο εκτεθειμένο σημείο $\bar{x}$ στο $\mathbb{R}^n \setminus \bar{X}$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\ell = 0$, $S_0 := S \cap [\langle z, e_1 \rangle > 0] \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{X}$, $X \subseteq [\langle z, e_1 \rangle < 0]$, $S \subseteq [\langle z, e_1 \rangle \leq a]$ και $\bar{x} = ae_1$ για $a > 0$, με ανάλογο τρόπο όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1. Θέτουμε $S_m := [\hat{u} \leq \frac{1}{m}\langle z, e_1 \rangle]$ και παρατηρούμε ότι $\text{dist}_H(S_m, S_0) \rightarrow 0$. Άρα τελικά έχουμε $S_m \subseteq [\langle z, e_1 \rangle > 0] \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{X}$ και επομένως είναι $\mu_{\hat{u}}(S_m) = 0$, αφού η h μηδενίζεται εκτός του $\bar{X}$.

Από την άλλη, αν $\hat{u}_m(z) := \hat{u}(z) - \frac{1}{m}\langle z, e_1 \rangle$, στο S_m έχουμε $\hat{u}_m < 0$. Τότε με βάση την Αρχή Μεγίστου του Alexandron 2.3.1 σε κάποιο σημείο $z \in S_m$ έχουμε $0 < |\hat{u}_m(z)|^n \leq C\mu_{\hat{u}_m}(S_m)$, όπου $C > 0$ είναι κάποια σταθερά. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, καθώς $\mu_{\hat{u}_m}(S_m) = \mu_{\hat{u}}(S_m)$.

2. Αν υπάρχει κάποιο εκτεθειμένο σημείο $\bar{x} \equiv 0$ πάνω στο σύνορο ∂X , και πάλι όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1 έχουμε $\ell = 0$, $S \subset \subset \mathbb{R}^n$ $S \subseteq [\langle z, e_1 \rangle \leq 0]$ και το $[\langle z, e_1 \rangle = 0]$ είναι ένα επίπεδο στήριξης του S στο 0. Επιλέγουμε $R_0 > 0$ ώστε $X \subseteq B(0, R_0)$, $x_0 \in S \cap X$ και $\delta > 0$ ώστε $B(x_0, \delta) \subseteq X$.

Θέτουμε $\hat{u}_\varepsilon(z) := \hat{u}(z) - \varepsilon(\langle z, e_1 \rangle + 2R_0)$ και $S_\varepsilon := [\hat{u}_\varepsilon < 0] \subseteq [\langle z, e_1 \rangle \geq -2R_0]$, ενώ χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $S \subseteq B(0, R_0)$. Για $\varepsilon \rightarrow 0$ έχουμε $\text{dist}_H(S_\varepsilon, S) \rightarrow 0$, οπότε τελικά είναι $S_\varepsilon \subseteq B(0, R_1)$ όπου $R_1 := \frac{3}{2}R_0$.

Από το Λήμμα του John 4.1.6 γνωρίζουμε την ύπαρξη αφινικής απεικόνισης L_ε που το κανονικοποιεί. Θεωρούμε $S_\varepsilon^* := L_\varepsilon(S_\varepsilon)$ και ας είναι $\hat{v}_\varepsilon$ η κανονικοποιημένη λύση που αντιστοιχεί στη $\hat{u}_\varepsilon$ εκεί. Τότε $S_\varepsilon^* \supseteq B(0, 1) \implies L_\varepsilon^{-1}(B(0, 1)) \subseteq S_\varepsilon \subseteq B(0, R_1)$. Αυτό σημαίνει ότι $\|L_\varepsilon^{-1}\| \leq R_1$, οπότε έχουμε $|L_\varepsilon z_1 - L_\varepsilon z_2| \geq \frac{1}{R_1}|z_1 - z_2|$ για $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$. Τότε είναι $B(L_\varepsilon x_0, \frac{\delta}{R_1}) \subseteq L_\varepsilon(B(x_0, \delta)) \subseteq L_\varepsilon(X) =: X_\varepsilon^*$.

Καθώς $\hat{u}(x_0) = 0$, έχουμε $L_\varepsilon x_0 \in B(L_\varepsilon x_0, \frac{\delta}{R_1}) \cap S_\varepsilon^*$, οπότε μπορούμε να επιλέξουμε αρκετά μικρό $\delta > 0$ ώστε $B(L_\varepsilon x_0, \frac{2\delta}{R_1}) \subseteq S_\varepsilon^*$. Αν $S_{\varepsilon, \delta}^* := \left\{ z \in S_\varepsilon^* : \text{dist}(z, \partial S_\varepsilon^*) \geq \frac{\delta}{R_1} \right\}$ έχουμε $B(L_\varepsilon x_0, \frac{\delta}{R_1}) \subseteq S_{\varepsilon, \delta}^*$. Εξαιτίας της αφινικής αναλλοιώτου της εξίσωσης και $B(L_\varepsilon x_0, \frac{\delta}{R_1}) \subseteq X_\varepsilon^*$ υπολογίζουμε

$$\mu_{\hat{v}_\varepsilon}(S_{\varepsilon, \delta}^*) \geq \mu_{\hat{v}_\varepsilon}\left(B(L_\varepsilon x_0, \frac{\delta}{R_1})\right) \geq \lambda |B(L_\varepsilon x_0, \frac{\delta}{R_1})| = \lambda c_n \left(\frac{\delta}{R_1}\right)^n$$

όπου $c_n > 0$ είναι μία σταθερά. Αν $\tilde{R} := \sup_{p \in \partial \hat{v}_\varepsilon(S_{\varepsilon, \delta}^*)} |p|$ έχουμε $\partial \hat{v}_\varepsilon(S_{\varepsilon, \delta}^*) \subseteq B(0, \tilde{R})$ και

άρα είναι $\lambda c_n \left(\frac{\delta}{R_1}\right)^n \leq c_n \tilde{R}^n \implies \sup_{p \in \partial \hat{v}_\varepsilon(S_{\varepsilon, \delta}^*)} |p| \geq \tilde{c} \frac{\delta}{R_1}$, όπου $\tilde{c} > 0$ είναι μία σταθερά

ανεξάρτητη του ε . Τότε από το Πρόσχημα 2.1.8 προκύπτει

$$|\min_{S_\varepsilon^*} \hat{v}_\varepsilon| = \max_{S_\varepsilon^*} |\hat{v}_\varepsilon| \geq \tilde{c} \frac{\delta}{R_1} \text{dist}(S_{\varepsilon, \delta}^*, \partial S_\varepsilon^*) \geq \tilde{c} \left(\frac{\delta}{R_1}\right)^2$$

Στην Πρόταση 4.1.9 έχουμε δείξει ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ ανεξάρτητη του ε ώστε $|\hat{v}_\varepsilon(L_\varepsilon(0))| \leq C \text{dist}(L_\varepsilon(0), \partial S_\varepsilon^*)^{\frac{1}{n}}$. Δουλεύοντας όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος

4.3.1 δείχνουμε ότι $\text{dist}(L_\varepsilon 0, \partial S_\varepsilon^*) \rightarrow 0$ και $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\widehat{v}_\varepsilon(L_\varepsilon(0))}{\min_{S_\varepsilon^*} \widehat{v}_\varepsilon} \geq 1$ και αυτό είναι άτοπο,

γιατί τότε θα πρέπει να ισχύει ταυτόχρονα $0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{v}_\varepsilon(L_\varepsilon(0)) \leq -\tilde{c} \left(\frac{\delta}{R_1} \right)^2 < 0$.

Άρα το S πρέπει να είναι μονοσύνολο, δηλαδή η $\widehat{u}$ είναι γνήσια κυρτή στο X . Τότε από το Θεώρημα 4.5.4 έπεται ότι $\widehat{u}|_X = u|_X \in C_{loc}^{1,\alpha}(X)$ ή ισοδύναμα $T|_X = \nabla u \in C_{loc}^{0,\alpha}(X; \mathbb{R}^n)$. $\square$

Είναι εμφανές ότι αφού η u αποτελεί μία γνήσια κυρτή λύση Alexandron η θεωρία της κανονικότητας αυτών των λύσεων (Θεωρήματα 4.5.4, 4.4.3, 4.4.4) μας δίνει αποτελέσματα κανονικότητας συναρτήσεως της λειότητας των κατανομών των μέτρων.

Πόρισμα 5.2.4 Υπό τις υποθέσεις του Θεωρήματος 5.2.3 και αν επιπλέον ισχύει ότι $f \in C_{loc}^{k,\alpha}(X)$ και $g \in C_{loc}^{k,\alpha}(Y)$ για κάποιο $\alpha \in (0, 1)$ και $k \in \mathbb{N}$, έχουμε $T \in C_{loc}^{k+1,\alpha}(X; \mathbb{R}^n)$.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

- (i) $\|x\| := |x| := \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n$
- (ii) $\langle x, y \rangle := x^T y := \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$
- (iii) $e_i :=$ μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο στον άξονα x_i
- (iv) $(m_{ij})_{i,j=1}^n$ ο $n \times n$ -πίνακας με τα στοιχεία $m_{ij} \in \mathbb{R}$
- (v) $\mathbb{R}^{n \times n} :=$ σύνολο $n \times n$ -πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{R}$
- (vi) $I_n :=$ ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας
- (vii) $M^{-1} := (m^{ij})_{i,j=1}^n$ ο αντίστροφος του πίνακα $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$
- (viii) $M^T :=$ ο ανάστροφος του πίνακα M
- (ix) $\text{Sym}_n := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A = A^T\}$
- (x) $\det M :=$ η ορίζουσα του πίνακα M
- (xi) $\text{tr } M :=$ το ίχνος του πίνακα M
- (xii) $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) :=$ ο διαγώνιος πίνακας με τα στοιχεία $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ στη διαγώνιο
- (xiii) $M_{ij} :=$ ο $(n-1) \times (n-1)$ -πίνακας που απομένει αν από τον πίνακα M αφαιρέσουμε την i -γραμμή και την j -στήλη
- (xiv) $\text{adj}(M) := ((-1)^{i+j} M_{ji})_{i,j=1}^n$, ο προσαρμοσμένος πίνακας του M
- (xv) $x^T M y := \sum_{i,j=1}^n x_i m_{ij} y_j, \quad x, y \in \mathbb{R}^n \text{ και } M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$
- (xvi) $U \subset \subset V : \iff$ υπάρχει W ανοικτό με $\bar{U} \subseteq W \subseteq V$ και το $\bar{U}$ είναι συμπαγές (τότε θα λέμε ότι το U **περιέχεται συμπαγώς** στο V)
- (xvii) $B(x, r) := \{z \in \mathbb{R}^n : \|x - z\| < r\}, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ και } r > 0$
- (xviii) $\mathbb{S}^n := \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \|z\| = 1\}$

$$(xix) \quad [x, y] := \{tx + (1 - t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0, 1]\}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$(xx) \quad [f \leq a] := f^{-1}((-\infty, a]), \text{ όπου } f \text{ είναι κάποια πραγματική συνάρτηση και } a \in \mathbb{R}. \\ \text{Αντίστοιχους συμβολισμούς θα χρησιμοποιούμε και για τις άλλες σχέσεις διάταξης } (<, >, \geq, =, \text{ κτλ})$$

$$(xxi) \quad \text{dist}(x, A) := \inf_{z \in A} \|x - z\|, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ και } A \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$(xxii) \quad \text{diam}(A) := \sup_{x, y \in A} \text{dist}(x, y), \quad A \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$(xxiii) \quad \partial_i u := u_i := \frac{\partial u}{\partial x_i} = i\text{-οστή μερική παράγωγος της πραγματικής συνάρτησης } u$$

$$(xxiv) \quad \partial_{ij} u := u_{ij} := \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right),$$

$$(xxv) \quad \text{Το } j \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n \text{ καλείται } \mathbf{n}\text{-πολυδείκτης. Η τάξη του είναι το } |j| := \sum_{i=1}^n j_i.$$

$$(xxvi) \quad D^j u := \frac{\partial^{|j|} u}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \dots \partial x_n^{j_n}}, \text{ όπου } j = (j_1, \dots, j_n) \text{ είναι κάποιος } n\text{-πολυδείκτης}$$

$$(xxvii) \quad Df := \text{παράγωγος της } f$$

$$(xxviii) \quad \partial_e f := \text{κατευθυνόμενη παράγωγος στην κατεύθυνση του } e \in \mathbb{R}^n$$

$$(xxix) \quad f|_A := \text{περιορισμός της } f \text{ στο } A$$

$$(xxx) \quad \text{spt } f := \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}, \text{ όπου } f \text{ είναι μία πραγματική συνάρτηση}$$

$$(xxxi) \quad |A| := \int_A 1 \, dx, \quad A \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$(xxxii) \quad f \, dx := \text{το μέτρο αόριστο ολοκλήρωμα της } f, \text{ δηλαδή το μέτρο } f \, dx(A) := \int_A f \, dx$$

$$(xxxiii) \quad \text{esssup}_\Omega f := \inf \{b \in \mathbb{R} : |f^{-1}(b, +\infty)| = 0\}$$

$$(xxxiv) \quad \chi_A := \text{χαρακτηριστική συνάρτηση του } A \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$(xxxv) \quad \text{spt } \mu := \{x \in \mathbb{R}^n : \mu(B(x, \varepsilon)) > 0, \quad \forall \varepsilon > 0\}, \text{ όπου } \mu \text{ είναι κάποιο μέτρο του } \mathbb{R}^n$$

$$(xxxvi) \quad \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] BOGACHEV, V. I. *Measure Theory*, vol. 2. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [2] BRENIER, Y. Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 44, 4 (1991), 375–417.
- [3] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer, New York, NY, 2011.
- [4] CAFFARELLI, L. A. Interior $W^{2,p}$ estimates for solutions of the Monge-Ampère equation. *Annals of Mathematics* 131, 1 (1990), 135–150.
- [5] CAFFARELLI, L. A. A localization property of viscosity solutions to the Monge-Ampère equation and their strict convexity. *Annals of Mathematics* 131, 1 (1990), 129–134.
- [6] CAFFARELLI, L. A. Some regularity properties of solutions of Monge-Ampère equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 44, 8–9 (1991), 965–969.
- [7] CAFFARELLI, L. A. The regularity of mappings with a convex potential. *Journal of the American Mathematical Society* 5, 1 (1992), 99–104.
- [8] CAFFARELLI, L. A. KAI CABRÈ, X. *Fully Nonlinear Elliptic Equations*. Colloquium Publications. American Mathematical Society, 1995.
- [9] CSIKÓS, B. *Differential Geometry*. Series of Lecture Notes and Workbooks for Teaching Undergraduate Mathematics. Typotex Publishing House, 2014.
- [10] DE PHILIPPIS, G. KAI FIGALLI, A. The Monge-Ampère equation and its link to optimal transportation. *Bulletin Of The American Mathematical Society* 51, 4 (2014), 527–580.
- [11] DEIMLING, K. *Nonlinear Functional Analysis*. Springer-Verlag, 1985.
- [12] DELFOUR, M. KAI ZOLÉSIO, J. Shape analysis via oriented distance functions. *Journal of Functional Analysis* 123, 1 (1994), 129–201.
- [13] DOOB, J. *Measure Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1994.
- [14] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*, 1st ed. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 1998.

- [15] EVANS, L. C. KAI GARIEPY, R. F. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, revised ed. Textbooks in Mathematics. CRC Press, 2015.
- [16] FIGALLI, A. *The Monge-Ampère Equation and Its Applications*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society, 2017.
- [17] FIGALLI, A. *On the Monge-Ampère equation*. σημειώσεις από ομιλία στο σεμινάριο Bourbaki, διαδικτυακή αυτοέκδοση του συγγραφέα, Ιούνιος 2018.
- [18] FIORENZA, R. *Hölder and locally Hölder Continuous Functions, and Open Sets of Class C^k , $C^{k,\lambda}$* . Birkhäuser Basel, 2016.
- [19] FOLLAND, G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2 ed. Pure and Applied Mathematics: A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley-Interscience, 1999.
- [20] GHOMI, M. The problem of optimal smoothing for convex functions. *Proceedings of the American Mathematical Society* 130, 8 (2002), 2255–2259.
- [21] GILBARG, D. KAI TRUDINGER, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd ed. Classics in mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.
- [22] GUTIÉRREZ, C. E. *The Monge-Ampère equation*, 2nd ed. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. Birkhäuser Boston, 2016.
- [23] HIRIART-URRUTY, J. B. KAI LEMARÉCHAL, C. *Fundamentals of Convex Analysis*. Grundlehren Text Editions. Springer, 2004.
- [24] HORN, R. A. KAI JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis*, 2nd ed. Cambridge University Press, 2013.
- [25] ΚΑΡΑΚΩΣΤΑΣ, Γ. Α. *Πραγματική Ανάλυση*. Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο Ιωαννίνων, 2014.
- [26] ΚΟΥΤΡΟΥΦΙΩΤΗΣ, Δ. *Διαφορική Γεωμετρία*. Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο Ιωαννίνων, 1994.
- [27] KNAPP, A. W. *Basic Real Analysis, with an appendix “Elementary Complex Analysis”*, digital 2nd ed. διαδικτυακή αυτοέκδοση του συγγραφέα, 2016.
- [28] LANG, R. A note on the measurability of convex sets. *Archiv der Mathematik* 47, 1 (Jul 1986), 90–92.
- [29] ΝΕΓΡΕΠΟΝΤΗΣ, Σ. ΚΑΙ ΚΟΥΜΟΥΛΛΗΣ, Γ. *Θεωρία Μέτρου*. Εκδόσεις Συμμετρία, 2005.
- [30] PENOT, J. P. *Calculus Without Derivatives*. Graduate Studies in Mathematics. Springer, 2013.

- [31] ROCKAFELLAR, R. T. *Convex Analysis*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics. Princeton University Press, 1970.
- [32] RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1976.
- [33] SANTAMBROGIO, F. *Optimal Transport for Applied Mathematicians, Calculus of Variations, PDEs, and Modeling*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Birkhäuser, 2015.
- [34] SCHNEIDER, R. Smooth approximation of convex bodies. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 33, 3 (Sep 1984), 436–440.
- [35] SCHNEIDER, R. *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, 2nd ed. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Cambridge University Press, 2014.
- [36] SPIVAK, M. *Calculus on Manifolds, A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*. Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [37] VIAL, J. P. Strong convexity of sets and functions. *Journal of Mathematical Economics* 9, 1 (1982), 187 – 205.
- [38] VILLANI, C. *Topics in Optimal Transportation*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2003.
- [39] VILLANI, C. *Optimal Transport: Old and New*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 2009.
- [40] WANG, X. Some counterexamples to the regularity of Monge-Ampère equations. *Proceedings of the American Mathematical Society* 123, 3 (Mar 1995), 841–845.